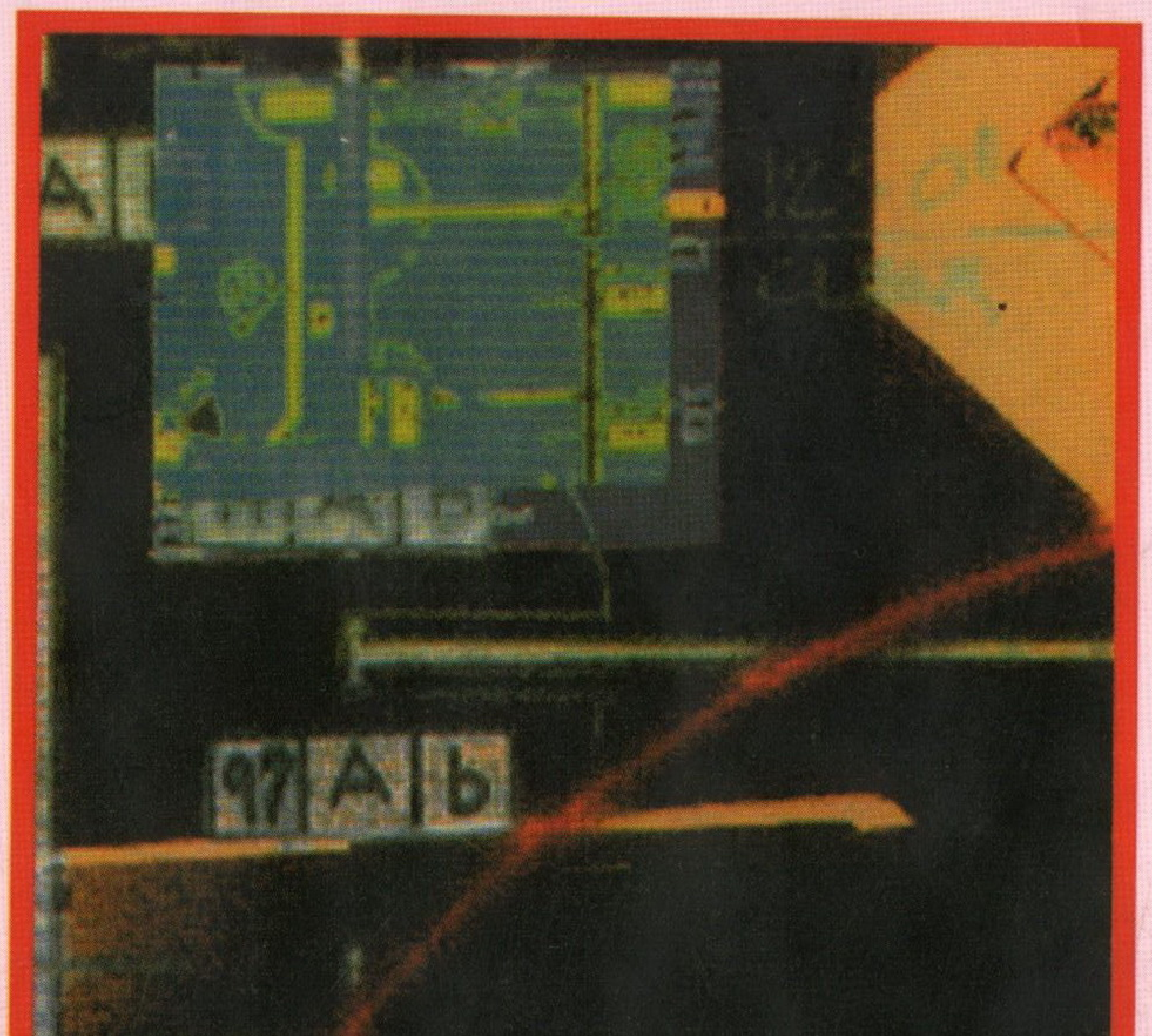
الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الإشتراكية العظمى
اللجنة الشعبية العامة
مصلحة الوسائل والمستلزمات التعليمية

التقنيات الرقمية



للسنة الرابعة
بثانوية العلوم الهندسية
لشعبة الكهرباء والإلكترونات

تأليف
د. حسين ميلاد المغبوب

أعد الكتاب بالمركز الوطني لتخطيط التعليم والتدريب

الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الإشتراكية العظمى
اللجنة الشعبية العامة
مصلحة الوسائل والمستلزمات التعليمية

التقنيات الرقمية

للسنة الرابعة
بثانوية العلوم الهندسية
لشعبة الكهرباء والإلكترونات

تأليف
د. حسين ميلاد المغبوب

المراجعة العلمية
د. محمد العربي الأسطى

المراجعة اللغوية
أ. محمد العربي الشريف

1371 - 1372 و.ر
2003 - 2004 افرنجي

الفهرس

الباب الأول: الأنظمة العددية

الباب الثاني: الجبر البوليني

الباب الثالث: تبسيط الدوال البولينية بإستعمال خرائط كارنوف

الباب الرابع: الدارات لمنطقية التوافقية

الباب الخامس: المنطق التتابعي

الباب السادس: السجلات والعدادات

مُقدِّمَة

نقدم إلى أبنائنا الطلبة كتاب (التقنيات الرقمية) للسنة الرابعة بثانوية العلوم الهندسية شعبة الكهرباء والإلكترونات راجين أن نكون قد وفقنا من حيث تقديم المادة العلمية وطريقة عرضها ووضوح أسلوبها وتزويد الكتاب بالكثير من الأمثلة. ونحن ندرك أن موضوع هذا الكتاب مهم خاصة للراغبين في تعلم التقنية الحديثة في مجال الحاسوب والمعدات الإلكترونية الرقمية.

وكلنا أمل أن تنال الدراسة العملية ما تستحقه من عناية واهتمام. فدراسة المادة يجب أن تقوم على التحليل والتصميم والتجريب والاستنتاج .

ونحن إذ نقدم هذا الكتاب نرجو أن نكون قد أدينا واجبا من أجل تحقيق أهدافنا السامية.

وفقنا الله لما فيه خير الوطن والأمة.

المؤلف

الباب الأول

الأنظمة العددية

Number Systems

1

الباب الأول

الأنظمة العددية
Number Systems

1-2 مقدمة

يتم تمثيل الأعداد بواسطة رموز تأخذ أشكالا مختلفة. ولكتابة عدد معين نستعمل مجموعة من الرموز منظمة بطريقة تسمح بالتعبير عن العدد. مثلا يمثل العدد العشري 1582 كمية تساوي آلف وخمسمائة واثنين وثمانين. مما يدل على وجود قاعدة حسابية تشكل معامل الأرقام على الشكل التالي:

$$1582 = 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

من هنا نرى أنه قد جرى اعتماد العدد 10 كقاعدة حسابية (أساس) في العدد بقوة تعادل مرتبة الأرقام ضمن العدد وحسب ترتيبها ولهذا يسمى النظام العشري.

هكذا فالنظام الحسابي عبارة عن سلسلة من الأرقام وعدد من القواعد التي تسمح بكتابة عدد طبيعي بواسطة هذه الأرقام.

وبافتراض أن N عدد حقيقي، يمكننا أن نعبر عنه في نظام حسابي قاعدته الحسابية b ونؤكد وجود سلسلة رقمية واحدة من الشمال إلى اليمين هي: $a_{n-1}\ a_{n-2} \ldots a_1\ a_0$ بشكل يكون فيها العدد N معادلا لـ:

$$N = a_{n-1}\, b^{n-1} + a_{n-2}\, b^{n-2} + \ldots + a_1\, b^1 + a_0\, b^0$$

حيث $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_1, a_0$ هي عبارة عن رموز لتمثيل الأرقام أو الأرقام بحد ذاتها (مثلا: 1 ، 2 ، 3 ، ...) و b هي القاعدة الحسابية للنظام العددي المستعمل لتمثيل العدد. أما العدد N فيرمز له بواسطة سلسلة الأرقام : $a_1\ a_0\ \ldots\ a_{n-1}\ a_{n-2}$ على الشكل التالي:

$$N = a_{n-1}\ a_{n-2}\ \ldots\ a_1\ a_0$$

وعموما يتم تمثيل العدد الذي به فاصلة بسلسلة من الأرقام، مثلا:

$$N = a_4\ a_3\ a_2\ a_1\ a_0\ .\ a_{-1}\ a_{-2}\ a_{-3}$$

في نظام عددي قاعدته b، بحيث إن

$$N=a_4\times b^4+a_3\times b^3+a_2\times b^2+a_1\times b^1+a_0b^0+a_{-1}\times b^{-1}+a_{-2}\times b^{-2}+a_{-3}\times b^{-3}$$

القاعدة b يمكن أن تأخذ قيما مختلفة: 2 ، 4 ، 8 ، 10 ، 16. النظام الأكثر استعمالا هو النظام العشري حيث تكون فيه القاعدة b تساوي 10 ويستخدم الأرقام العربية: 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9 في تمثيل الأعداد.

أما إذا كانت القاعدة b=2 فإننا نحصل على النظام الثنائي الذي يستخدم الأرقام 0 ، 1 فقط لتمثيل الأعداد، مثلا العدد N = 10110111 الذي يمكننا إيجاد مكافئه العشري من السلسلة العددية:

$$\begin{aligned} N &= 1\times 2^7 + 0\times2^6+1\times2^5+1\times2^4+ 0 \times2^3 +1\times2^2 +1\times2^1+1\times2^0 \\ &= 128 + 0 + 32 + 16 + 0 + 4 + 2 + 1 \\ &= 183 \end{aligned}$$

وفي الحالة التي يكون فيها $b = 8$ نحصل على النظام الثماني الذي يستخدم الأرقام: 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7 لتمثيل الأعداد. ويمكننا إيجاد المكافئ العشري للعدد الثماني 532 مثلا، من السلسلة العددية التالية:

$$N = 532 = 5 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 2 \times 8^0 = 346$$

لاحظ أن الأرقام بهذا النظام لا تشمل 8 و 9.

أما إذا كانت القاعدة $b=16$، فإننا نحصل على النظام السداسي عشر. وحيث إن قاعدة هذا النظام أكبر من 10 ، فيستعير الأرقام العشرة الأولى من النظام العشري ويستخدم الحروف الأبجدية A, B, C, D,E, F بدلاً من الأرقام 15، 14، 13، 12، 11، 10 على الترتيب، لاستكمال رموز النظام الستة عشر؛ أي أن $A=10$ و $B=11$ وهكذا فمثلا:

$$N = (B65F)_{16} = 11 \times 16^3 + 6 \times 16^2 + 5 \times 16^1 + 15 \times 16^0$$
$$= (46687)_{10}$$

لاحظ عملية إظهار قاعدة النظام العددي على هيئة رقم دليلي سفلي لتمييز النظام الذي يكتب به العدد.

يستعمل النظام الحسابي الثنائي لبناء الأنظمة الإلكترونية الرقمية وذلك لسهولة إنشاء دارات تسمح بإخراج عدد محدد من القيم الكهربائية. ولو افترضنا أن الإشارة الكهربائية تأخذ في مداها فقط قيمة عالية وقيمة منخفضة، معنى ذلك أنه باستطاعتنا تمثيل الأعداد بواسطة مجموعة من هذه القيم، بحيث تمثل القيمة العالية الرمز 1 وتمثل القيمة المنخفضة الرمز 0.

مثـــال 1:

إذا كان العدد $N = 1100.01$ في النظام التنائـي، فإن هذا العدد يعادل في النظام العشري:

$$N = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}$$
$$= 8 + 4 + 0 + 0 + 0 + 0.25$$
$$= 12.25$$

أي أن العـدد 1100.01 فـي النظام الثنائـي يقابلـه العـدد 12.25 فـي النظام العشري. في هذا المثال نجد أن الأوزان: 2^{-2} ، 1^{-1} ، 2^0 ، 2^1 ، 2^2 ، 2^3 هي القيم التـي تضـرب بالأرقام الثنائية المكونة للعدد وحسب ترتيبها للحصول على ما يقابل العدد الثنائي بالنظام العشري.

مثـــال 2:

أوجد القيمة التي تقابل العدد الثنائي 11010.11 بالنظام العشري.

الحـــل:

يتم إيجاد القيمة العشرية المكافئة وذلك بالتعبير عن العدد الثنائي بالسلسلة الاسية التالية:

$$(11010.11)_2 = 1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+0\times2^0+1\times 2^{-1}+1\times2^{-2}$$
$$= 16 + 8 + 0 + 2 + 0 + 0.5 + 0.25$$
$$= 26.75$$

إذن فإن $(11010.11)_2 = (26.75)_{10}$

نرى من المثال السابق أن الخانات المساوية للصفر لا تضيف لحاصل الجمع شيئا ولذلك تتم عملية تحويل العدد الثنائي إلي مكافئه في النظام العشري بجمع الأوزان المقابلة للثنائيات المساوية للواحد، فمثلا:

$$(110101.011)_2 = 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0 + 2^{-2} + 2^{-3}$$
$$= 32+16+4+1+0.25+0.125$$
$$= (53.375)_{10}$$

يضم الجدول 1-1 الأعداد الستة عشر الأولى في كل من النظام العشري و الثنائي و الثماني و السداسي عشر.

جدول 1-1 أعداد ذات أسس مختلفة

نظام عشري أساس 10	نظام ثنائي أساس 2	نظام ثماني أساس 8	نظام سداسي عشر أساس16
00	0000	00	0
01	0001	01	1
02	0010	02	2
03	0011	03	3
04	0100	04	4
05	0101	05	5
06	0110	06	6
07	0111	07	7
08	1000	10	8
09	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

1-2 العمليات الحسابية بالنظام الثنائي

يتم إجراء العمليات الحسابية بأعداد في النظام الثنائي ذي الأساس 2 وفق نفس القواعد المتبعة في ذلك مع الأعداد العشرية. وفيما يلي أمثلة لعمليات حسابية في النظام الثنائي.

أ- الجمع الثنائي:

القواعد الأساسية لجمع رقمين ثنائيين تتمثل في عمليات الجمع التالية:

1	0	1	0
+1	+1	+0	+ 0
10	1	1	0

لاحظ أن 10 هي نتيجة جمع واحد مع واحد وتعني صفرا وباليد واحد. أي أن الجمع (**Sum**) صفر والمحمول (**Carry**) 1
(S=0 و C=1)

64 32 16 8 4 2 1

مثـــال 3:

أوجد نـاتج عمليات جمع الأعداد الثنائية التالية مبينا المكافئ في النظام العشري.

الحـــل:

أ)

المضاف إليه	100		4
المضاف	+ 10	≡	+ 2
	110		6

ب)

المحمول	1		1
المضاف إليه	11100		28
المضاف	+ 10011	≡	+ 19
	101111		47

ج)

المحمول	111111		
المضاف إليه	101011		43
المضاف	+ 010111	≡	+ 23
	1000010		66

2- الطرح الثنائي

القواعد الأساسية لطرح رقمين ثنائيين تتمثل في عمليات الطرح التالية:

0	1	1	10
- 0	- 1	- 0	- 1
0	0	1	1

العملية الأخيرة تعني صفرا ناقص واحد ، وبما أن الصفر لا يكفي فيتم استعارة واحد فتصبح النتيجة هي 1 مع استعارة (Borrow) واحد من الرقم المجاور.

مثال 4:

أوجد ناتج عمليات طرح الأعداد الثنائية التالية مبينا المكافئ في النظام العشري.

المطروح منه	11		3
المطروح	- 01	≡	- 1
	10		2

الاستعارة	011		
المطروح منه	1001		9
المطروح	- 0110	≡	- 6
	0011		3

الاستعارة	01		
المطروح منه	1101		13
المطروح	- 11	≡	- 3
	1010		10

نلاحظ من هذه الأمثلة أن عملية الاستعارة تتم عندما يكون المطروح منه 0 ويكون المطروح 1.

٦ - الضرب الثنائي

عمليات ضرب الأعداد الثنائية تتم بطريقة مشابهة للنظام العشري.

حيث:

$$\begin{array}{r} 0 \\ \times\ 0 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \times\ 0 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ \times\ 1 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \times\ 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

مثال 5:

أوجد ناتج عمليات ضرب الأعداد الثنائية التالية مبينا المكافئ في النظام العشري.

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times\ 11 \\ \hline 10 \\ 10 \\ \hline 110 \end{array} \quad \equiv \quad \begin{array}{r} 2 \\ \times\ 3 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1011 \\ \times\ 1001 \\ \hline 1011 \\ 0000 \\ 0000 \\ 1011 \\ \hline 1100011 \end{array} \quad \equiv \quad \begin{array}{r} 11 \\ \times\ 9 \\ \hline 99 \end{array}$$

د- القسمة الثنائية

وتتم بنفس الطريقة التي تجرى بها القسمة بالنظام العشري وحسب ما تبينه الأمثلة التالية:

مثــال 6:

أوجد نـاتج عمليات قسمة الأعداد الثنائية التالية مبينا المكافئ في النظام العشري.

```
        10
    ┌──────
 11 │ 110
      11
    ──────
      000
```

```
        2
    ┌──────
  3 │ 6
      6
    ──────
      0
```

```
        10.1
     ┌──────
 110 │ 1111
       110
     ──────
         110
         110
     ──────
          00
```

```
        2.5
    ┌──────
  6 │ 15
      12
    ──────
      30
      30
    ──────
      00
```

3-1 الطرح باستخدام المتممات Subtraction using complements

تستخدم المتممات في الحواسيب الرقمية لتبسيط عملية الطرح وكذلك في عمليات المعالجة المنطقية. هناك نوعان من المتممات لكل نظام عددي. يطلق على هذين النوعين اسم المتمم إلى 1 (1's Complement) والمتمم إلى 2 (2's Complement) في حالة الأعداد الثنائية ، والمتمم إلى 10 (10's Complement) والمتمم إلى 9 (9's Complement) في حالة الأعداد العشرية.

نبين فيما بعد أن عمليات الطرح يمكن أن تتم عن طريق جمع المطروح منه مع متمم المطروح وتعديل حاصل الجمع للحصول على الناتج النهائي الصحيح.

نبدأ أولا باستخدام النظام العشري ثم نعمم النتائج على النظام الثنائي، ونستخدم لذلك مجموعة من الأمثلة لشرح الطريقة.

1- طرح الأعداد العشرية باستخدام المتمم إلى 10

مثال 7:

أوجد ناتج عملية الطرح التالية في النظام العشري باستخدام المتمم إلى 10:

$$\begin{array}{r} 9 \\ \underline{-\,4} \end{array}$$

الحل:

أ) باستخدام معرفتنا للنظام العشري نحصل على الناتج 5 مباشرة.

ب) باستخدام المتمم العاشر، تتلخص العملية في إيجاد المتمم إلى 10 للمطروح أولا، ثم جمع الناتج إلى المطروح منه ثانيا وتعديل حاصل الجمع للحصول على الناتج النهائي الصحيح.

المتمم إلى 10 للمطروح 4 هي القيمة التي لو أضيفت للمطروح 4 لكان الناتج 10.

أي أن:

العدد $\qquad 4$

المتمم إلى 10 للعدد 4 + $\qquad$ ؟ +

$\qquad 10$

إذن فالمتمم إلى 10 للعدد 4 هو 6

بإجراء عملية الجمع:

المطروح منه $\qquad 9 \qquad\qquad 9$

المتمم إلى 10 للمطروح $\qquad +10-4 \quad \equiv \quad +6$

$\qquad 15$

الناتج

محمول نهائي، يهمل

لاحظ أن عملية التعديل اللازمة تتمثل في إهمال الخانة ذات المرتبة العليا(محمول نهائي) في ناتج عملية الجمع السابقة ويكافئ ذلك طرح 10 من الناتج للتعويض عن الـ 10 المضافة للمطروح نتيجة لاستخدام المتمم إلى 10 ، ونكون قد حصلنا على الناتج النهائي الصحيح وهو 5.

مثـــال8:

أوجـد نــاتج عملـية الطـرح التالـية فـي الـنظام العشـري باستخدام المتمم إلى 10.

$$\begin{array}{r} 39 \\ \underline{-21} \end{array}$$

الحــل:

أ) بإجراء عملية الطرح مباشرة نجد أن الناتج = 18.

ب) باستخدام المتمم إلى 10 ، نتبع طريقة المثال السابق:

المـتمم إلــى 10 للمطـروح 21 هـو العـدد الـذي لـو أضـيف للمطروح 21 لكان الناتج 100.

المحمول	1
المطروح	21
المتمم إلى 10 للمطروح	<u>79</u>
	100

من هذه العملية ، وبرؤية أخرى ، يمكن القول بأن المتمم إلى 10 للمطـروح 21 هـو العـدد الـذي إذا جمعـت خانـته الأقـل مرتـبة مـع خانــة المطـروح الأقل مرتـبة (1) لكـان حاصـل الجمـع 10. وإذا جمعـت خانـته الأعلـى مرتـبة مـع المحمـول الـناتج مـن عملـية الجمـع الـسابقة مـع خانــة المطروح الأعلى مرتبة (2) ، لكان الناتج 10. بذلك يكون المتمم إلى 10 للعدد 21 هو 79.

الآن، نجمـع المطـروح مـنه إلـى المـتمم إلــى 10 للمطـروح علـى النحو التالي:

$$\begin{array}{r} 39 \\ \underline{+\ 100 - 21} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 39 \\ \underline{+\ 79} \\ \boxed{1}\boxed{18} \end{array}$$

الناتج ← 18 ، محمول نهائي يهمل ← 1

ينتج عن عملية الجمع السابقة محمول نهائي يهمل، ويكافئ ذلك طرح 100 من الناتج لتعويض الـ 100 المضافة للمطروح نتيجة استخدام المتمم إلى 10، ونكون قد حصلنا على الناتج النهائي الصحيح وهو 18.

المتمم إلى 10:

عموماً، المتمم إلى 10 لعدد عشري صحيح ما، هو العدد العشري الذي لو أضفيت خانة فيه عند مرتبة ما مع خانة العدد المقابلة عند نفس المرتبة مع المحمول الناتج من عملية الجمع السابقة، لكان حاصل الجمع 10. والأمثلة التالية تبين الطريقة.

مثـال9:

مستخدما المتمم إلى 10، اطرح 3250 من 72532 .

الحـل:

$$\begin{array}{r} 72532 \\ \underline{-\ 03250} \end{array}$$

بنفس طريقة الحل المتبعة في المثالين السابقين نجد أولا المتمم إلى 10 للمطروح 03250:

المحمول	111
المطروح	03250
المتمم إلى 10 للمطروح	96750
	100000

لاحظ أهمية إدخال 0 في المرتبة العليا بالمطروح، لكي يتساوى عدد الخانات بالمطروح منه والمطروح وذلك قبل إيجاد المتمم إلى 10 للمطروح.

والآن نجري عملية الجمع:

$$\begin{array}{r} 72532 \\ +\ 96750 \\ \hline \boxed{1}69282 \end{array}$$

محمول نهائي يهمل

بإهمال المحمول النهائي الرقم (1) الناتج من عملية الجمع السابقة نحصل على الناتج الصحيح = 69282

مثـــال10:

مستخدما المتمم إلى 10 ، أوجد ناتج عملية الطرح التالية:

$$\begin{array}{r} 3250 \\ -\ \ 72532 \\ \hline \end{array}$$

لاحظ أن المطروح في هذه المسألة أكبر من المطروح منه، أي أن الناتج يجب أن يكون سالبا.

الحــــل:

نقوم بإيجـاد المـتمم إلـى 10 للمطـروح 72532 ، وبإتبـاع طـريقة الأمثلة السابقة، نجد أنه يساوي 27468، ثم نجري عملية الجمع التالية:

$$\begin{array}{r} 03250 \\ +\ 27468 \\ \hline 30718 \end{array}$$

لا يوجد محمول نهائي

لاحظ عدم وجـود محمـول نهائـي فـي النتيجة المستخرجة من جمع المطروح منه مع المتمم إلى 10 للمطروح، الأمر الذي يدل على أن الناتج سالب وفي صيغة المتمم. في هذه الحالـة يوجد الناتج النهائي بأخذ المتمم إلى 10 للنتيجة المستخرجة ووضـع علامة سالب أمامه.

إذن فالجواب = (المتمم إلى 10 للعدد 30718) –

= 69282 –

قاعــدة: متمم المتمم يعيد العدد إلى قيمته الأصلية

2- طرح الأعداد الثنائية باستخدام المتمم إلى 2.

بإتبـاع طـريقة مشابهة لما سبق تتم عملية طرح الأعداد الثنائية عن طـريق جمـع المطـروح منه مـع المتمم إلـى 2 للمطـروح، وتعديل حاصـل الجمـع للحصـول علـى النـاتج النهائـي الصــحيح، وذلـك بـدلا مـن الطـرح بطريقة مباشرة.

المتمم إلى 2:

المتمم إلـى 2 لعدد ثنائـي صـحيح هو العدد الثنائي الذي إذا جمعت خانـة فيه عند مرتـبة مـا مـع خانـة العدد المقابلـة عند نفس المرتـبة، ومـع

المحمول الناتج من عملية الجمع السابقة، لكان الناتج أثنين (10). والأمثلة التالية تبين الطريقة.

مثـــال11:

أوجد نـاتج عملية الطرح التالية في النظام العددي الثنائي باستخدام المتمم إلى 2.

$$\begin{array}{r} 39 \\ -\ 21 \\ \hline \end{array}$$

الحــــل:

$$\begin{array}{r} 39 \\ -\ 21 \\ \hline \end{array} \equiv \begin{array}{r} 100111 \\ -\ 10101 \\ \hline \end{array}$$

أ) بطـريقة مباشـرة يمكننا إيجاد أن النـاتج = 10010 فـي النظام الثنائي و18 في النظام العشري.

ب) باستخدام المتمم إلى 2 نبدأ أولا بإيجاد المتمم إلى 2 للمطروح وذلك بعد مساواة عدد خانات المطروح بعدد خانات المطروح منـه، بإدخال أصفار فـي المراتب العليا بالمطـروح وحسب اللازم. ذلك ما لا يؤثـر علـى قيمته، تماما كما فعلنا في النظام العشري بالمثال9.

وبإتباع مـا ذكـر أعـلاه، يـتم إيجـاد المـتمم إلــى 2 للعـدد 010101 أولا كما يلي:

المطروح	010101
المتمم إلى 2 للمطروح	+ ؟؟؟؟؟
	1000000

من ذلك نجد أن المتمم إلى 2 للمطروح = 101011

مرة أخرى، نلاحظ أن حاصل جمع خانة بالمتمم إلى 2 و خانة العدد المقابلة عند مرتبة ما مع المحمول الناتج من عملية الجمع السابقة يساوي 10 (أثنين) ، إلا إذا كانت خانة العدد تساوي صفرا و المحمول يساوي صفرا، تكون الخانة المقابلة بالمتمم إلى 2 صفرا أيضا.

مما سبق، يمكن أن نعبر عن عملية إيجاد المتمم إلى 2 للعدد الثنائي 010101 بعملية الطرح التالية:

1000000	
- 010101	العدد
101011	المتمم إلى 2 للعدد

نقوم ثانياً بجمع المطروح منه مع المتمم إلى 2 للمطروح وتعديل حاصل الجمع للحصول على الناتج النهائي.

إذن

100111	100111
+(1000000) – (010101)	+ 101011
	$\boxed{1}$010010 ← محمول نهائي يهمل

لاحظ أن إهمالنا للرقم 1 الواقع في المرتبة العليا (المحمول النهائي الناتج من عملية الجمع الأخيرة) يكافئ طرح 1000000 للتعويض عن 1000000 المضاف للمطروح نتيجة استخدام المتمم إلى 2، نكون بذلك قد حصلنا على الناتج النهائي الصحيح وهو 010010 الذي يكافئ العدد العشري 18.

مثـــال 12:

أوجـد المـتمم إلـى 2 للأعـداد الثنائـية التالـية: 1011 ، 11100 ، 010101.

الحـــل:

من نـتائج المثال السـابق، يمكن إيجاد المتمم إلى 2 للأعداد الثنائية بإجراء عملية الطرح حسب التالي:

10000	100000	1000000
- 1011	- 11100	- 010101
0101	00100	101011

قاعدة من نتائج المثال السابق نستنتج انه يمكن إيجاد المتمم إلى 2 لعدد ثنائي مباشرة بمعالجة ثنائيات العدد نفسها وذلك بترك الأصفار الموجودة في المواقع الأقل مرتبة (من جهة اليمين) التي لا يتخللها 1 وكذلك أول 1 نثبتها من دون تغيير، ثم القيام عندئذ فقط بتغيير باقي ثنائيات العدد بحيث يتم تغيير الآحاد إلى أصفار والأصفار إلى آحاد

مثـــال13:

أوجـد المـتمم إلـى 2 لكـل مـن العدديـن: 010101 ، و 11100 .

الحـــل: باتباع القاعدة السابقة نجد الآتي:

العدد	010101	110100
المتمم إلى 2	101011	001100

مثـال14:

أوجد ناتج عمليات الطرح التالية باستخدام المتمم إلى 2:

أ)
$$\begin{array}{r} 45 \\ -\ \underline{36} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 101101 \\ -\ \underline{100100} \end{array}$$

ب)
$$\begin{array}{r} 36 \\ -\ \underline{45} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100100 \\ -\ \underline{101101} \end{array}$$

ج)
$$\begin{array}{r} 13 \\ -\ \underline{6} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1101 \\ -\ \underline{110} \end{array}$$

الحـل:

أ)
$$\begin{array}{r} 101101 \\ \underline{-100100} \end{array} \equiv \begin{array}{r} 101101 \\ \underline{+\,011100} \\ \boxed{1}001001 \end{array}$$

محمول نهائي يهمل

الجواب = 001001 = 1001

ب)
$$\begin{array}{r} 100100 \\ \underline{-101101} \end{array} \equiv \begin{array}{r} 100100 \\ \underline{+\,010011} \\ 110111 \end{array}$$

لا يوجد محمول نهائي

عدم وجود محمول نهائي يدل على أن الناتج سالب وفي صيغة المتمم إلى 2

إذن الجواب = (المتمم إلى 2 للعدد 110111) -

= 001001 - = 1001 -

(ج)

$$\begin{array}{r} 1101 \\ -\ 110 \\ \hline \end{array} \equiv \begin{array}{r} 1101 \\ +\ 1010 \\ \hline \boxed{1}0111 \end{array}$$

محمول نهائي يهمل

الجواب = 111 وهو يكافئ العدد 7

3- طرح الأعداد العشرية باستخدام المتمم إلى 9

نعود مرة أخرى إلى الأعداد العشرية لنرى كيف يمكننا إتمام عملية الطرح في نظام الأعداد العشرية عن طريق الجمع باستخدام المتمم إلى 9.

وعلى نفس المنوال السابق تتم عملية الطرح عن طريق جمع المطروح منه مع المتمم إلى 9 للمطروح وتعديل حاصل الجمع للحصول على الناتج النهائي الصحيح.

المتمم إلى 9:

المتمم إلى 9 لعدد عشري صحيح هو العدد العشري الذي لو أضيفت خانة فيه عند مرتبة ما إلى خانة العدد المقابلة عند نفس المرتبة لكان حاصل الجمع 9.

نعود مرة أخرى للمثال الذي نجري فيه عملية الطرح التالية:

$$\begin{array}{r} 9 \\ -\ 4 \\ \hline \end{array}$$

والذي يتطلب إيجاد المتمم إلى 9 للعدد المطروح 4.

مما سبق نستنتج أن المتمم إلى 9 للعدد 4 يساوي 5

والآن، بجمع المطروح منه إلى المتمم إلى 9 للمطروح

$$\begin{array}{r} 9 \\ +9-4 \\ \hline \end{array} \equiv \begin{array}{r} 9 \\ +5 \\ \hline 14 \end{array}$$

للحصول على الناتج النهائي الصحيح لعملية الطرح يعدل حاصل الجمع السابق بطرح الـ 9 أو (1 - 10)، للتعويض عن 9 التي أضيفت للمطروح نتيجة لاستعمال المتمم إلى 9 ، ويتم ذلك بإسقاط الواحد (1) الواقع بالمرتبة العليا في ناتج الجمع السابق (و هذا يكافئ طرح 10) وإضافته إلى الرقم الواقع بالخانة الدنيا (و هذا يكافئ إضافة 1) حسب ما يلي:

ناتج عملية الجمع السابقة 14 محمول

1 نهائي

الناتج النهائي لعملية الطرح 5

مثال 15:

أوجد ناتج عملية الطرح التالية باستخدام المتمم إلى 9:

$$\begin{array}{r} 39 \\ -21 \\ \hline \end{array}$$

الحل:

نجد أولا المتمم إلى 9 للمطروح من عملية الطرح التالية:

$$\begin{array}{r} 99 \\ -21 \\ \hline 78 \end{array}$$

ثم نجمع ناتج هذه العملية للمطروح منه ونعدل الناتج حسب ما يلي:

المطروح منه: 39

المتمم إلى 9 للمطروح: 78 +

117 محمول نهائي

1

الناتج النهائي لعملية الطرح : 18

مثـــال16:

أوجد ناتج عملية الطرح التالية باستخدام المتمم إلى 9 .

$$\begin{array}{r} 21 \\ -\ 39 \\ \hline \end{array}$$

الحـــل:

باتباع طريقة حل المثال السابق يمكننا مباشرة القول بأن المتمم إلى 9 للمطروح 39 يساوي 60.

وبجمع المتمم إلى 9 للمطروح إلى المطروح منه، نجد:

$$\begin{array}{r} 21 \\ +\ 60 \\ \hline 81 \end{array}$$

عدم وجود محمول نهائي، يدل على أن الناتج سالب وفي صيغة المتمم إلى 9. يوجد الناتج النهائي في هذه الحالة بأخذ المتمم إلى 9 للنتيجة المستخرجة ووضع علامة سالب أمامه.

إذاً الجواب النهائي الصحيح = (المتمم إلى 9 للعدد 81) -

= 18 -

ب. طرح الأعداد الثنائية باستخدام المتمم إلى 1.

يقابل المتمم إلى 9 في النظام العشري المتمم إلى 1 في النظام الثنائي. باتباع طريقة مشابهة لاستخدام المتمم إلى 9 في طرح الأعداد العشرية، يمكننا استخدام المتمم إلى 1 في عملية طرح الأعداد الثنائية.

وعلى نفس المنوال تتم عملية الطرح عن طريق جمع المطروح منه مع المتمم إلى 1 للمطروح وتعديل الناتج للحصول على الناتج النهائي الصحيح.

المتمم إلى 1:

المتمم إلى 1 لعدد ثنائي هو العدد الثنائي الذي إذا أضيفت خانة فيه إلى الخانة المقابلة بالعدد عند نفس المرتبة لكان حاصل الجمع 1.

<u>والأمثلة التالية تبين الطريقة</u>

مثـــال17:

أوجد ناتج عملية الطرح التالية باستخدام المتمم إلى 1 :

39	100111
- 21	- 10101

الحـــل:

نجد أولا المتمم إلى 1 للمطروح كما يلي:

المطروح	010101
المتمم إلى 1 للمطروح	+ ؟؟؟؟
	111111

بذلك يكون المتمم إلى 1 للمطروح = 101010

يلي ذلك جمع (المطروح منه) إلى (المتمم إلى 1 للمطروح) وتعديل الناتج على النحو التالي:

$$
\begin{array}{r}
100111 \\
+\ 101010 \\
\hline
\boxed{1}010001 \\
1 \\
\hline
010010
\end{array}
$$

محمول نهائي

الناتج

أي أن الناتج النهائي 10010، وذلك يكافئ العدد 18 في النظام العشري.

لاحظ أننا أدخلنا 0 عند موضع المرتبة الأعلى بالمطروح لتتساوى عدد خانات المطروح منه مع خانات المطروح قبل إيجاد المتمم إلى 1.

مثال18 :

أوجد ناتج عملية الطرح التالية باستخدام المتمم إلى 1.

$$
\begin{array}{r}
21 \\
-\ \underline{39}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
10101 \\
-\ \underline{100111}
\end{array}
$$

الحل:

نجد أولا المتمم إلى 1 للمطروح:

$$
\begin{array}{r}
111111 \\
-\ 100111 \\
\hline
011000
\end{array}
$$

والآن نجمع المتمم الأول الناتج من الخطوة السابقة إلى المطروح منه.

$$\begin{array}{r} 10101 \\ +\ 011000 \\ \hline 101101 \end{array}$$

عدم وجود محمول نهائي في ناتج عملية الجمع السابقة يدل على أن الناتج سالب وفي صيغة المتمم إلى 1.

إذن الجواب = (المتمم إلى 1 للناتج 101101) -

= 010010 - = 10010 -

من الأمثلة السابقة يمكننا استنتاج القواعد التالية:

1) يمكن الحصول على المتمم إلى 1 لعدد ثنائي مباشرة بمعالجة ثنائيات العدد وذلك بتغيير الأصفار إلى آحاد وتغيير الآحاد إلى أصفار.

2) يمكن إيجاد المتمم إلى 2 لعدد ثنائي وذلك بإضافة 1 إلى متممه إلى 1.

1-4 تحويل الأعداد فيما بين الأنظمة العددية:

كنا قد تعلمنا في بداية هذا الفصل كيفية تحويل أعداد في النظام الثنائي أو في النظام الثماني أو في النظام السداسي عشر إلى النظام العشري.

فمثلا:

$$(1010011.011)_2 = 2^6 + 2^4 + 2^1 + 2^0 + 2^{-2} + 2^{-3} = (83.375)_{10}$$

, كذلك:

$$(151.4)_8 = 1\times 8^2 + 5\times 8^1 + 1\times 8^0 + 4\times 8^{-1}$$
$$= (105.5)_{10}$$

$$(A12)_{16} = 10 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + 2 \times 16^0$$
$$= (2578)_{10}$$

وبالعكس، يمكن تحويل الأعداد العشرية إلى أعداد في الأنظمة المختلفة الأخرى بتجزئة كل منها إلى جزء ين: جزء صحيح وجزء كسر، ومن ثم تحويل كل جزء بطريقة مختلفة.

أ- تحويل الأعداد العشرية إلى ثنائية:

تجرى عملية تحويل العدد العشري الصحيح إلى عدد ثنائي عن طريق قسمة العدد العشري على قاعدة (أساس) النظام الثنائي(2) في خطوات متتالية وتسجيل باقي القسمة في كل خطوة، حتى نحصل على ناتج قسمة نهائي يساوي صفرا. تكون بواقي عمليات القسمة معاملات للعدد الثنائي المطلوب. كما هو موضح في المثال التالي:

مثال19:

حول العدد العشري 12 إلى عدد في النظام الثنائي.

الحل:

نقوم بقسمة مطولة للعدد 12 على 2 وتسجيل الباقي، كما يلي (من الشمال إلى اليمين):

		خارج القسمة الصحيح		الباقي	المعامل
12/2	=	6	+	0	a_0
6/2	=	3	+	0	a_1

3/2	=	1	+	1/2	a_2
1/2	=	0	+	1/2	a_3

الجواب $= (12)_{10} = (1100)_2$

وبإيجاز يمكننا إجراء العمليات السابقة على النحو التالي (من الشمال إلى اليمين):

الصحيح	الباقي
12	
6	0
3	0
1	1
0	1

الجواب $= (1100)_2$

لاحظ أن الباقي الأول يمثل الخانة الأقل رتبة في العدد المحول و أن الباقي الأخير يمثل الخانة الأعلى رتبة في العد المحول.

كما يتم تحويل الكسر العشري إلى مكافئه في النظام الثنائي بطريقة مشابهة لطريقة تحويل الأعداد العشرية الصحيحة، مع استبدال عملية القسمة على 2 بعملية الضرب في 2. و استبدال باقي القسمة بالعدد الصحيح الناتج عن عملية الضرب. المثال التالي يبين هذه الطريقة.

مثـــال20:

حول الكسر العشري 0.6875 إلى مكافئه الثنائي.

الحـــل:

أولا يضـرب العـدد 0.6875 فـي 2 للحصـول علـى عـدد صحيح جديد وكسر جديد. يضـرب الكسر الجديد في 2 للحصول على عدد صحيح جديد وكسر جديد. تعـاد عملية الضرب السابقة ويسـجل نـاتج عملية الضـرب بجـزء يـه الصـحيح والكسر وحـتى يصبح الكسر 0. عـندئذ نكـون مـن الأعـداد الصـحيحة الـناتجة من عمليات الضـرب السـابقة مكافئ الكسـر العشري في النظام الثنـائي (من الشمال إلى اليمين).

	العدد الصحيح		الكسر	المعامل
$0.6875 \times 2 =$	1	+	0.3750	$a_{-1}=1$
$0.3750 \times 2 =$	0	+	0.75	$a_{-2}=0$
$0.7500 \times 2 =$	1	+	0.5	$a_{-3}=1$
$0.5 \times 2 =$	1	+	0	$a_{-4}=1$

الجواب $(0.6875)_{10} = (0.1011)_2$

لاحظ أنه إذا لم تنته عملية الضرب بقيمة الصفر مهما أعدنا عملية الضـرب، يصـبح لـزاما علينـا تحديـد عـدد الثنائـيات المطلوبـة للكسـر والوقوف عند ذلك الحد.

لاحظ أيضـا أن العدد الصـحيح الأول النـاتج من عمليات الضـرب السـابقة يمـثل الخـانة a_{-1} (الأولى على يمين الفاصلة) ويمثل العدد الصـحيح الثاني ، الخـانة a_{-2} (الثانية على يمين الفاصلة) وهكذا.

مثـــال21:

حول الكسر العشري 0.513 إلى ثنائي.

الحـــل:

	العدد الصحيح		الكسر	المعامل
$0.513 \times 2 =$	1	+	0.026	$a_{-1} = 1$
$0.026 \times 2 =$	0	+	0.052	$a_{-2} = 0$
$0.052 \times 2 =$	0	+	0.104	$a_{-3} = 0$
$0.104 \times 2 =$	0	+	0.208	$a_{-4} = 0$
$0.208 \times 2 =$	0	+	0.416	$a_{-5} = 0$
$0.416 \times 2 =$	0	+	0.832	$a_{-6} = 0$
$0.832 \times 2 =$	1	+	0.664	$a_{-7} = 1$

وإذا ما قررنا الاكتفاء بسبعة أرقام للتعبير عن هذا الكسر في النظام الثنائي يكون الجواب:

$$(0.513)_{10} \equiv (0.1000001)_2$$

مثـــال22:

أوجد مكافئ العدد العشري 12.6875 في النظام الثنائي.

الحـــل:

وجدنا من أمثلة سابقة أن:

$(12\ )_{10} = (1100)_2$ وأن $(0.6875)_{10} = (0.1011)_2$

بضم هاتين الإجابتين معا نجد أن:

$$(12.6875)_{10} = (1100.1011)_2$$

: تحويل الأعداد العشرية الى ثمانية وسداسي عشرية.

بنفس الكيفية يتم تحويل الأعداد العشرية الصحيحة إلى أعداد في النظام الثماني أو السداسي عشر، غير أن القسمة تكون على الأساس 8 أو 16، كما يلي:

مثال23:

حول العدد العشري الصحيح 153 إلى عدد ثماني (في النظام الثماني).

الحل:

نقسم العدد العشري الصحيح 153 على أساس النظام الثماني (8) في خطوات متتالية ونسجل باقي القسمة في كل خطوة حتى نحصل على ناتج قسمة نهائي يساوي صفراً. ونكون من بواقي عمليات القسمة معاملات للعدد المطلوب كما يلي:

الصحيح	الباقي
153	
19	1
2	3
0	2

الجواب = $(231)_8$

كما يتم تحويل الكسر العشري إلى كسر في النظام الثماني أو السداسي عشر، عن طريق الضرب المتكرر حتى يصبح الكسر 0، غير أن الضرب يتم في الأساس 8 في حالة التحويل للثماني، أو في الأساس16 في حالة التحويل للسداسي عشر.

مثـــال24:

حول العدد $(0.513)_{10}$ إلى كسر في النظام الثماني.

الحـــل:

$$0.513 \times 8 = 4.104 \qquad a_{-1} = 4$$
$$0.104 \times 8 = 0.832 \qquad a_{-2} = 0$$
$$0.832 \times 8 = 6.656 \qquad a_{-3} = 6$$
$$0.656 \times 8 = 5.248 \qquad a_{-4} = 5$$
$$0.248 \times 8 = 1.984 \qquad a_{-5} = 1$$
$$0.984 \times 8 = 7.872 \qquad a_{-6} = 7$$

وهكذا ..

من الجزء الصحيح لحواصل الضرب نحصل على الإجابة مقربة إلى ستة أرقام:

أي أن : $(0.513)_{10} = (0.406517..)_8$

1.5 التحويل فيما بين النظام الثنائي والنظامين الثماني والسداسي عشر:

تستخدم الحواسيب والمنظومات الإلكترونية الرقمية التمثيل الثنائي. أما النظامان الثماني والسداسي عشر فيستخدمان في التعبير عن الكميات الثنائية بطريقة غير مباشرة. وحيث أن $16 = 2^4$ و $8 = 2^3$ ، لذلك فإن كل رقم ثماني يكافئ 3 أرقام ثنائية، وأن كل رقم في النظام السداسي عشر يكافئ أربعة أرقام ثنائية. وبذلك يصبح من السهل تحويل الأعداد الثنائية إلى أعداد ثمانية ويتم ذلك بتجزئة العدد الثنائي إلى مجموعات يتكون كل منها من ثلاثة أرقام ثنائية . تبدأ عملية التجزئة من علامة الفاصلة الثنائية وبالتقدم يمينا وشمالا، بعدها نعوض عن كل مجموعة بالرقم الذي تقابله في النظام الثماني باستخدام الجدول 1-1 والمثال التالي يبين الطريقة:

$$(010\ 110\ 001\ 101\ 011\ .\ 111\ 100\ 000\ 110)_2 = (26153.7406)_8$$
$$2\quad 6\quad 1\quad 5\quad 3\ .\ 7\quad 4\quad 0\quad 6$$

لاحظ أنه يمكننا إضافة أصفار يمين العدد أو يسار العدد ليصبح عدد الأرقام الثنائية على يمين علامة الفاصلة وعلى شمالها قابلا للتجزئة إلى مجموعات يتكون كل منها من ثلاثة أرقام.

كما تتم عملية تحويل الأعداد الثنائية إلى أعداد في النظام السداسي عشر بطريقة مشابهة، إلا أن العدد الثنائي تتم تجزئته إلى مجموعات يتكون كل منها من أربع ثنائيات. ومن الجدول السابق يتم التعويض عن كل مجموعة بما يقابلها في النظام السداسي عشر. فمثلا يتم تحويل العدد الثنائي السابق كما يلي:

$$(0010\ 1100\ 0110\ 1011.\ 1111\ 0000\ \ 0110)_2 = (2C6B.F06)_{16}$$
$$2\quad C\quad 6\quad B\ .\ F\quad 0\quad 6$$

التحويل من الثماني أو السداسي عشر إلى الثنائي يتم بطريقة معاكسة للسابق، حيث يتم التعويض عن كل رقم ثماني بمكافئه في النظام الثنائي حسب ما يحدده الجدول 1-1. وبالمثل يستبدل كل رقم في النظام السداسي عشر بمكافئه في النظام الثنائي وحسب ما يحدده الجدول السابق، فمثلا:

$$(673.12)_8 = (110\ 111\ 011\ .\ 001\ 010)_2$$
$$= (110111011.001010)_2$$

$$(3A6.C)_{16} = (0011\ 1010\ 0110\ .\ 1100)_2$$
$$= (001110100110.1100)_2$$

ملخص

1- يمكن التعبير عن عدد حقيقي N في نظام عددي قاعدته الحسابية b.
وتوجد سلسلة رقمية واحدة هي: $a_{n-1}\ a_{n-2}\ \ldots\ldots\ a_2\ a_1 a_0$ بشكل يكون فيها العدد N معادلا لـ:

$$= a_{n-1}\, b^{n-1} + a_{n-2}\, b^{n-2} + \ \ldots + a_1\, b^1 + a_0\, b^0$$

حيث $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ هي رموز لتمثيل الأرقام أو الأرقام بحد ذاتها. ويرمز للعدد N في هذا لنظام على النحو:

$$N = (a_{n-1}\, a_{n-2}\ \ldots\ a_2\, a_1\, a_0)_b$$

2- إذا كانت b=2 يسمى النظام العددي النظام الثنائي، ويستخدم الأرقام: 0 ، 1.
إذا كانت b=8 يسمى النظام العددي النظام الثماني، ويستخدم الأرقام: 0،1،2،3،4،5،6،7.
إذا كانت b=16 يسمى النظام العددي النظام السداسي عشر، ويستخدم الأرقام والحروف: 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، A, B, C, D, E, F.

3- يتم إجراء العمليات الحسابية في مختلف الأنظمة الحسابية وفق نفس القواعد المتبعة في ذلك مع الأعداد العشرية.

4- يمكن أن يتم الطرح عن طريق الجمع باستخدام المتممات.

5- يمكن الحصول على المتمم إلى 1 لعدد ثنائي وذلك بتغيير الأصفار إلى أحاد، وتغيير الآحاد إلى أصفار.

6- يمكن إيجاد المتمم إلى 2 لعدد ثنائي وذلك بإضافة 1 إلى متمم العدد إلى 1.

7- يمكن تحويل الأعداد العشرية إلى أعداد في النظام الثنائي أو في النظام الثماني أو في النظام السداسي عشر والعكس.

تدريبــــات

1- مـا هـي الأرقـام العشـرية المكافئة لكـل مـن الأعـداد الثنائـية التالـية:
10، 110، 111، 1011، 1100، 1110؟

2- حلل المعادلة التالية لإيجاد قيمة س: $(11001001)_2 = (\text{س})_{10}$

3- حول الأعداد العشرية: 56، 76، 47، 120 إلى النظام الثنائي.

4- مـــا هـــي الأعـــداد الســـتة التـــي تلـــي العـــدد : F52A فـــي الـــنظام السداسي عشر؟

5- حـول كـلا مـن الأعـداد السداسـية عشـر التالـية إلـى أعـداد ثنائـية:
F329,CD42, ABC,FF.

6- حــــول الأعــــداد الثنائــــية التالــــية إلــــى أعــــداد عشــــرية
10.100001، 101110.0101، 1101101.11.

7- حول العدد العشري 225.225 إلى:
أ) عدد ثنائي ب) عدد ثماني ج) عدد سداسي عشر.

8- أوجد المتمم إلى 2 للأعداد التالية: 1010101، 0111000، 0000.

9- مستخدما المتمم إلى 10 والمتمم إلى 9، اجر عمليات الطرح التالية:

أ) $\begin{array}{r} 925 \\ \underline{-\ 321} \end{array}$ ب) $\begin{array}{r} 1000 \\ \underline{-\ \ 20} \end{array}$ ج) $\begin{array}{r} 32 \\ \underline{-\ 517} \end{array}$

10- مستخدما المتمم إلى 2 والمتمم إلى 1 اجر عمليات الطرح التالية:

أ) $\begin{array}{r} 1101 \\ \underline{-\ 11010} \end{array}$ ب) $\begin{array}{r} 110000 \\ \underline{-\ \ 100} \end{array}$ ج) $\begin{array}{r} 10000 \\ \underline{-\ 11010} \end{array}$

الباب الثاني

الجبر البوليني
Boolean Algebra

الباب الثاني

2

الجبر البولينى
Boolean Algebra

2-1 مقدمة

الجبر البولينى شأنه شأن بقية فروع الجبر، يتكون من مجموعة من الرموز ومجموعة من القواعد لمعاملة الرموز. وفيه تمثل الرموز متغيرات منطقية ثنائية وتعرف عمليات هذا الجبر بالعمليات المنطقية. سمي الجبر البوليني نسبة إلى العلامة الذي ربط الجبر والمنطق سنة 1854. والهدف الأصلي من جبر الحالتين هذا حل المسائل المنطقية التي تتعامل مع المتغيرات التي تأخذ قيمتين منفصلتين ومع العمليات التي تتسم بمعنى منطقي. ويطلق على قيم المتغيرات المنطقية أسماء مختلفة مثل: المنطق صواب والمنطق خطأ، ونعم و لا، و عال ومنخفض. لم يكن هناك تطبيق عملي للجبر البوليني حتى عام 1938 عندما استعمله كلود شانون في تحليل دارات الغلق والفتح للهاتف. لقد جعل الرموز تمثل المرحلات (Relays) المفتوحة والمغلقة. قد جاء شانون بتطبيق جديد للجبر البولينى. وبسبب عمل شانون هذا أدرك المهندسون أنه يمكن تطبيق الجبر البولينى في تحليل وتصميم الدارات المنطقية أو الرقمية، التي تؤدي وظائف منطقية وتعامل متغيرات منطقية ثنائية. بذلك أصبح ممكنا كتابة دوال منطقية تعبر عن الدارات الرقمية، وهذه هي خطوة أساسية في تصميم وتحليل وتبسيط دارات منطقية رقمية أكثر تعقيداً.

ويرمز للمتغيرات المنطقية (الثنائية) في دوال الجبر البولينى بحروف هجائية مثل x و A وإلى القيم الثنائية الممكنة لهذه المتغيرات بالأرقام 0 و 1. هناك ثلاث عمليات منطقية أساسية هي AND التي تعني(و) و OR التي تعني (أو) و NOT التي تعني (لا) كما يلي:

1. **AND**: وتمثل هذه العملية بنقطة فمثلا يمكن التعبير عن الجملة الكلامية: x و y تساوي z بالدالة $z = x . y$ وتكتب أيضا بالشكل $z = xy$ وتفسر هذه العملية المنطقية على أن $z = 1$ فقط إذا كان $x = 1$ و $y = 1$.

2. **OR**: وتمثل هذه العملية بعلامة + فمثلا يعبر عن الجملة المنطقية x أو y تساوي z بالدالة $z = x + y$ وتفسر على أن $z = 1$ فقط إذا كان $x = 1$ ، أو $y = 1$ ، أو إذا كان كل من x و y يساوي 1.

3. **NOT**: تمثل هذه العملية بعلامة - أو ′ ، فمثلا يعبر عن الجملة المنطقية x لا يساوي z بالدالة $Z = \bar{x}$ ، وتكتب أيضا بالشكل $Z = x'$. بمعنى أنه إذا كان $x = 1$ فإن $z = 0$ وإذا كان $x = 0$ فإن $z = 1$.

جدول 2-1 جداول صدق العمليات المنطقية

AND

x	y	x.y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR

x	y	x+y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NOT

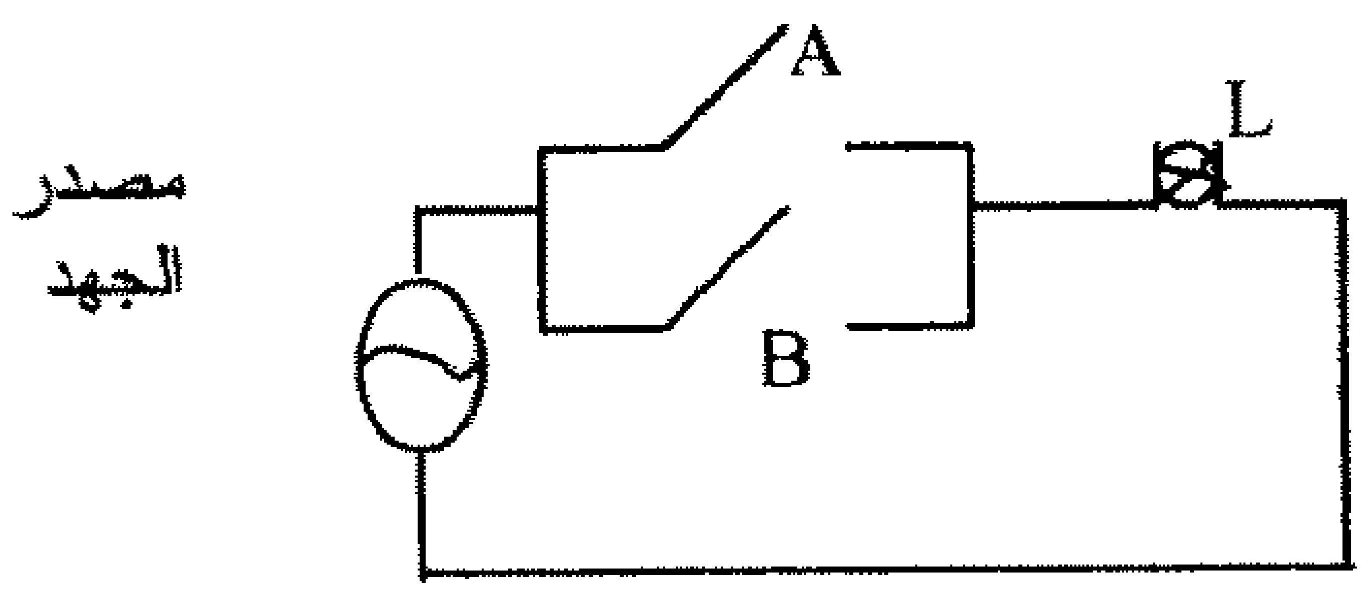
x	$\bar{x}$
0	1
1	0

يجب أن نتذكر أن المتغير المنطقي هو على الدوام إما 0 أو 1، كما يجب أن نميز بين العملية المنطقية والعملية الحسابية، فمثلا في المنطق الثنائي $1 = 1 + 1$، وتقرأ واحد OR واحد يساوي واحد. أما في الحساب الثنائي، فإن $10 = 1 + 1$ وتقرأ واحد زائد واحد يساوي 2.

تستخدم جداول الصدق مثل تلك الموضحة في جدول2-1 لتعريف العمليات المنطقية. **جدول الصدق**، جدول يضم كل الاحتمالات الممكنة لقيم المتغيرات، ويبين العلاقة بين هذه القيم وبين ناتج العملية (أو العمليات) المنطقية. يضم الجدول2-1 جداول صدق العمليات AND و OR و NOT وتقدم هذه الجداول تعريفا جليا لهذه العمليات.

مثـال 1:

يمكننـا التعبير عن الـدارة الكهربائـية المبينـة بالشـكل 2-1 بتطبيـق المنطق الثنائي و استخدام المتغيرات الثنائية.



شكل 2-1: دارة تشغيل مصباح كهربائي

المتغيران A و B يمـثلان المفتاحين بالدارة. فإذا كان المتغير A أو B يسـاوي المـنطق 0 عـندما يكـون المفـتاح المقـابل للمتغير مفـتوحا، ويسـاوي المـنطق 1 عـندما يكـون المفتاح مقفـلا. كذلـك إذا كـان المتغير L الـذي يرمـز للمصـباح يسـاوي المـنطق 1 عندما يضـيء المصـباح ويسـاوي المـنطق 0 عندما ينطفئ. وحيث أن المصباح يضـيء (L= 1) إذا مر به تيار كهربائـي، في حـالة قفل أحد المفتاحين A أو B ، يمكننا التعبير عن ذلك بـالمعادلة المنطقية البولينية التالية:

$$L = A + B$$

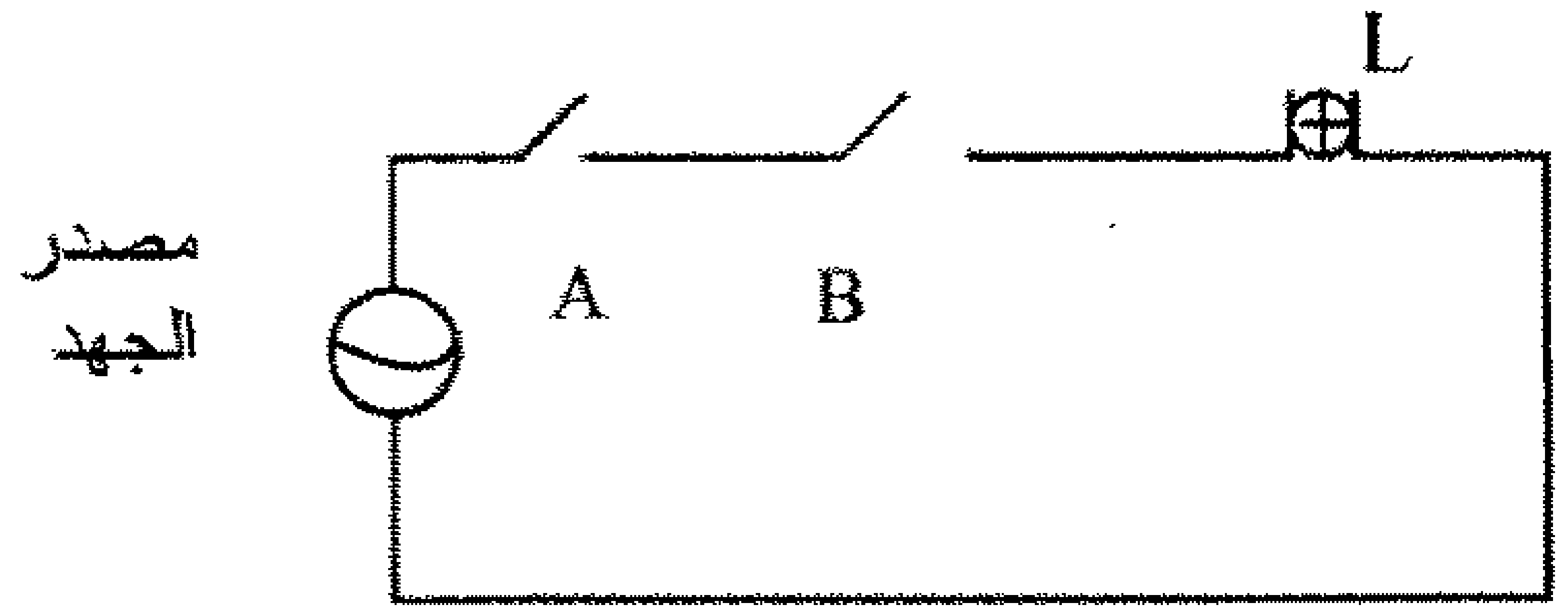
وتقرأ L يساوي A أو B (A OR B) .

بالمـثل يمكنـنا التعبير عـن كيفـية عمـل الـدارة بالشـكل 2-2 بالدالـة المنطقية البولينية:

$$L = A . B$$

وتقرأ L يساوي A و B (A AND B).

لاحظ أن L = 1 فقط عندما يكون كل من A = 1 و B = 1 (حسب تعريف عملية AND المنطقية). ذلك ما يتمشى مع وضع المصباح في هذه الدارة، الذي يضيء عندما يكون كل من المفتاح A والمفتاح B مقفلين.



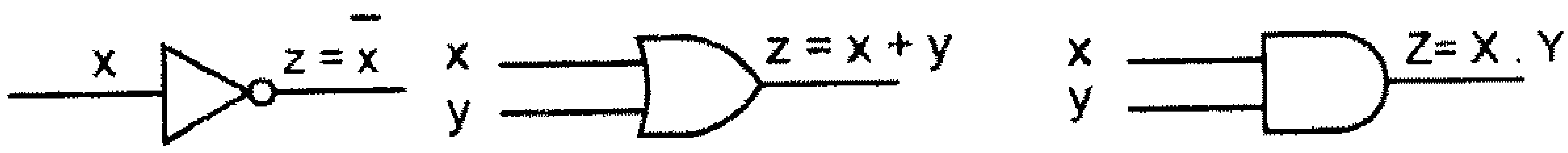
شكل 2-2 دارة لتشغيل مصباح كهربائي

2-2 البوابات المنطقية Logic gates

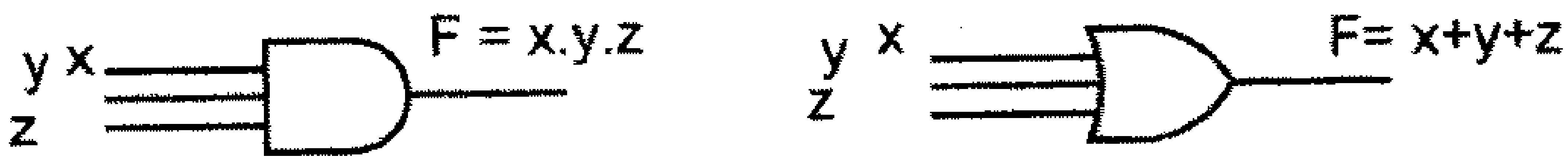
البوابات هي عبارة عن دارات إلكترونية رقمية، يمكن تحليلها بالجبر البوليني وتسمى بوابات منطقية. البوابات العاملة بالجهد مثلا تستجيب لجهد يسلط عند الدخل بجهد عند الخرج وتنحصر مستويات هذه الجهود في مستويين مختلفين، مرتفع "High" ومنخفض "Low" ومن الممكن استخدام متغيرات ثنائية تأخذ قيما ثنائية تساوي المنطق 1 والمنطق 0 لتمثيل هذه الجهود.

تسلك البوابات المنطقية سلوك مفتاح التشغيل حيث يسمح العنصر الفعال بها ، الترانزستور مثلا، بتمرير تيار كهربائي أو منعه.

الدارات التي تنفذ العمليات المنطقية AND و OR و NOT والتي يرمز لها بالأشكال المبينة في الشكل2-3 هي مجموعة بوابات أساسية لبناء الدارات المنطقية. وتنتج هذه البوابات إشارات خرج قيمتها المنطق 1 أو المنطق 0 إذا ما تم استيفاء شروط منطقية معينة عند الدخل.



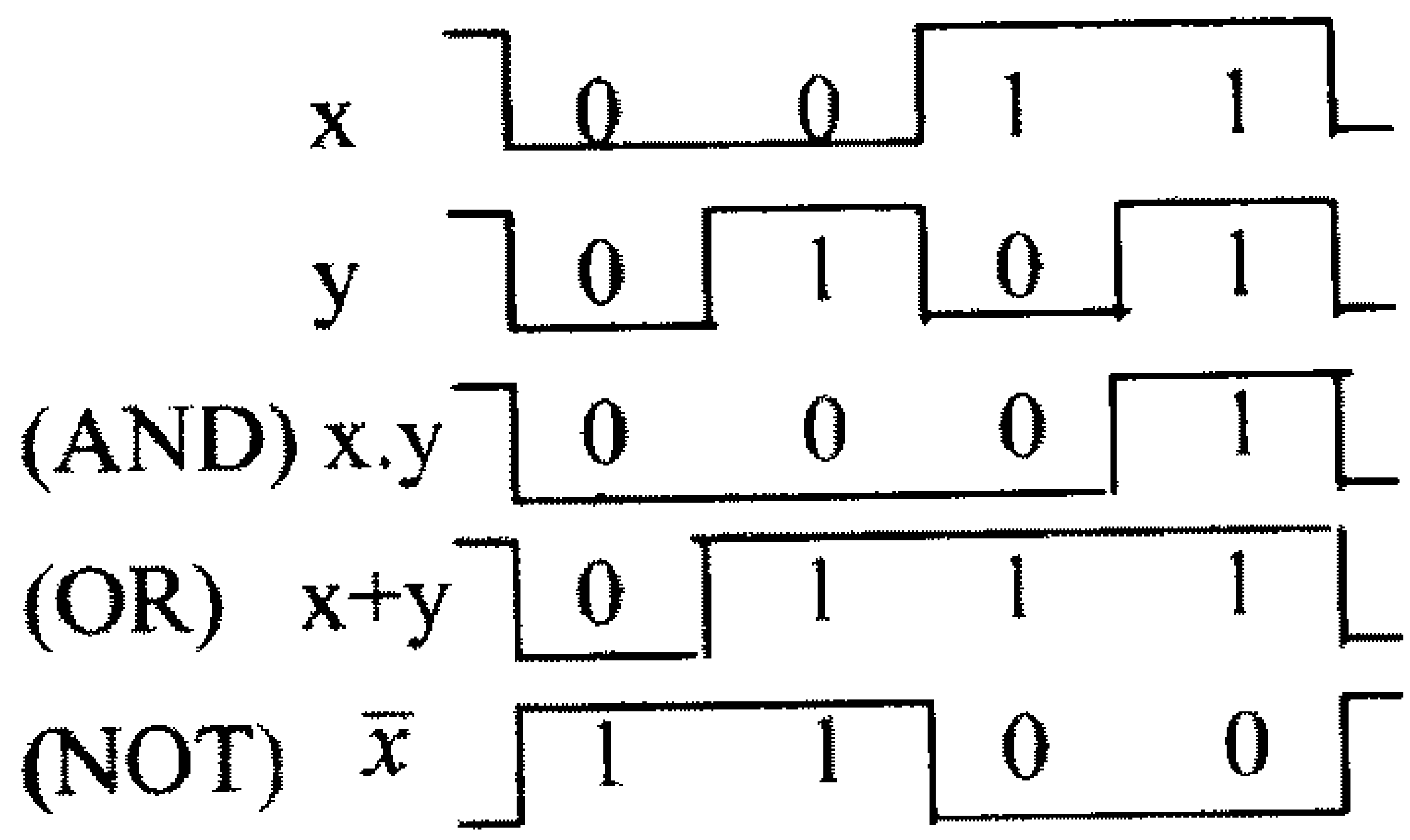
(أ) بوابة AND (ب) بوابة OR (ج) بوابة NOT أو النفي



(ء) بوابة OR بثلاثة مداخل (ه) بوابةAND بثلاثة مداخل

شكل2-3 رموز بوابات منطقية

تستخدم **المخططات التوقيتية** (Timing Diagrams) لتبيان تغير خرج الدارة المنطقية مقابل تغير الإشارات المطبقة عند مداخلها. فالشكل2-4، مثلا يبين خرج البوابات المبينة بالشكل2-3 عندما تطبق الإشارات x و y المبينة بالرسم على مداخلها. ومن مقارنة الإشارة x عند دخل بوابة NOT وخرجها $\bar{x}$ يتضح سبب تسمية هذه البوابة ببوابة النفي.



الشكل2-4 إشارات دخل وخرج البوابات (ا)، (ب)، (ج) في الشكل2-3

2-3 الدالة البولينية

الدالة البولينية هي تعبير جبري يصاغ بمجموعة من المتغيرات الثنائية (x , y مثلا)، والثوابت (0 ، 1) والعمليات المنطقية وأقواس وعلامة يساوي، فمثلا $F(x,y,z)=\bar{x}z+x\bar{z}+\bar{x}\bar{y}$ دالة يمكن تحديد قيمتها بالتعويض عن قيم المتغيرات الثنائية x , y, z في الدالة وبتطبيق العمليات المنطقية. فإذا كانت x = 0, y = 0, z = 1 فإن F = 1 ذلك لأن:

$$
\begin{aligned}
F(0,0,1) &= \bar{0}.1+0.\bar{1}+\bar{0}.\bar{0}\\
&= 1.1+0.0+1.1\\
&= 1+0+1\\
&= 1
\end{aligned}
$$

وبنفس الطريقة يمكن حساب قيمة F لكل القيم المحتملة للمتغيرات (x,y,z) وكما هو مبين بالعمود الأيمن من الجدول2-2. ويسمى الجدول2-2 الذي يضم قيم الدالة البولينية مقابل كل القيم الممكنة للمتغيرات الثنائية، بجدول الصدق. وتجدر الملاحظة بأن جدول الصدق في هذه الحالة يضم ثمانية احتمالات لثلاثة متغيرات وأن قيمة الدالة F إما أن تساوي 0 أو 1 . لاحظ أن كل جدول صدق يعرف دالة بولينية واحدة فقط، بالرغم من أن هذه الدالة يمكن أن تأخذ صورا مختلفة.

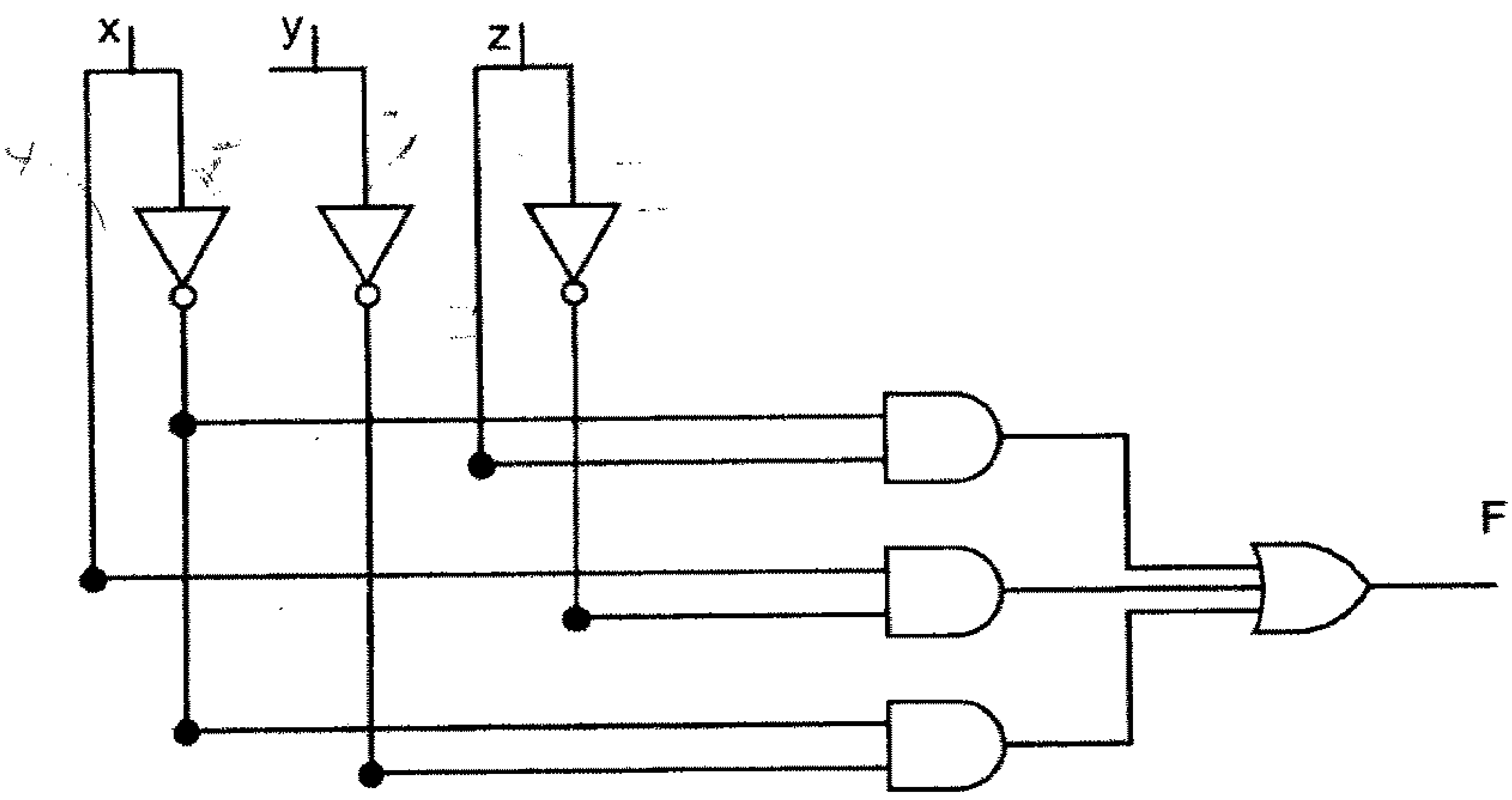
نفي F(x, y,z) دالة تأخذ القيمة 1 إذا كان $F(x,y,z)=0$ وتأخذ القيمة 0 إذا كان $F(x,y,z)=1$ ، ويمكن أن يوجد نفي الدالة F من خلال نفي كل عناصر العمود F بجدول الصدق للدالة.

تنفذ الدالة البولينية في دارة رقمية باستخدام البوابات المنطقية. ويبين الشكل2-5 مخطط الدارة المنطقية الذي ينفذ الدالة البولينية F(x,y,z). في المخطط نجد ثلاث بوابات AND لتكوين حدود الضرب $\bar{x}z$ و $x\bar{z}$ و $\bar{x}\bar{y}$ ، وأربع بوابات نفي للحصول على الإشارات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ و $\bar{z}$ ، وبوابة OR لجمع حدود الضرب في F .

جدول 2-2: جدول صدق الدالة

$$F = \bar{x}\,z + x\,\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}$$

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0



شكل 2-5 مخطط الدارة المنطقية المنفذ للدالة البولينية:

$$F(x, y, z) = \bar{x}\,z + x\,\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}$$

تستخدم قواعد الجبر البولينى لمعالجة الدالة البولينية للحصول على عبارة أبسط للدالة نفسها بشكل يقلل من عدد البوابات اللازمة. ولمعرفة كيفية عمل ذلك يستلزم أولا دراسة قواعد ونظريات الجبر البولينى الأساسية.

2-4 القواعد الأساسية في الجبر البولينى.

يضم الجدول2-3 القواعد الأساسية في الجبر البولينى وللتسهيل فقد حذفنا رمز العملية المنطقية AND (.) في تدوين هذه القواعد كلما وجدنا أن ذلك لا يحدث لبسا. القواعد التسع الأولى في الجدول تحدد العلاقة بين متغير واحد x ونفيه $\bar{x}$ والثابت الثنائي 1 و 0 . القواعد الخمس الموالية (من 10 حتى 14) تشبه قواعد الجبر العادي. أما القواعد الثلاث الأخيرة (من 15 وحتى 17) فلا تطبق في الجبر العادي ولكنها مفيدة جدا في معالجة العبارات البولينية.

لقد رتبت القواعد في الجدول2-3 في عمودين لتوضيح خاصية المثنى في الجبر البولينى. ويوجد المثنى لعبارة جبرية ما، بتبديل عمليتي الـ AND والـ OR وكذلك استبدال الآحاد (1`s) بأصفار (0`s) والأصفار بآحاد. ويمكننا الحصول على دالة ما، بأحد أعمدة الجدول من الدالة المقابلة لها في العمود الآخر وذلك بأخذ مثنى العبارتين الجبريتين المتواجدتين على جانبي علامة التساوي.

يمكننا التحقق من صحة القواعد التسع الأولى التي تستعمل متغيرا واحدا، وذلك بالتعويض عن x بقيمتيها المحتملتين: 0 و 1. فمثلا لإثبات أن $x + 0 = x$ نعوض عن x بـ 0 لنحصل على $0 + 0 = 0$ ثم نعوض عن x بـ 1 لنحصل على $1 + 0 = 1$ وكل من هاتين المعادلتين صحيح حسب تعريف العملية المنطقية OR . وبما أنه يمكن التعويض بأية عبارة جبرية عن المتغير x في أي من الدوال

البولينية المبينة بالجدول2-3. إذاً بتطبيق القاعدة 3 وبالتعويض عن x بالعبارة :

$$x = AB + C$$

نجد أن:

$$AB + C + 1 = 1$$

جدول 2-3 قواعد الجبر البوليني الأساسية

1. $x + 0 = x$	**2.** $x \cdot 1 = x$	
3. $x + 1 = 1$	**4.** $x \cdot 0 = 0$	
5. $x + x = x$	**6.** $x \cdot x = x$	
7. $x + \bar{x} = 1$	**8.** $x \cdot \bar{x} = 0$	
9. $\bar{\bar{x}} = x$		
10. $x + y = y + x$	**11.** $x \cdot y = y \cdot x$.	(التبديل)
12. $x + (y + z) = (x + y) + z$	**13.** $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	(التجميع)
14. $x.(y+z) = x.y + x.z$	**15.** $x+y.z = (x+y).(x+z)$	(التوزيع)
16. $\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$	**17.** $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$	

القاعدة 9 تنص على أن نفي المتغير مرتين تعيد المتغير لقيمته الأصلية. فإذا كان $x = 0$ ، فإن $\bar{x}=1$ و $\bar{\bar{x}}=0$.

قوانين التبديل (Commutative) تنص على أن الترتيب الذي تكتب به المتغيرات لا يؤثر في النتيجة عند استخدام عمليتي الـ AND و الـ OR . قوانين التجميع (Associative) تنص على أن نتائج عملية تكون فيما بين ثلاثة متغيرات لا تعتمد على ترتيبها، وبذلك يمكن الاستغناء عن الأقواس كلية.

$$x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$$
$$x.(y.z) = (x.y).z = x.y.z$$

هذان القانونـان وقانون التوزيع (Distributive) الأول (القاعدة رقم 14) تشبه تماما القواعد المعروفة لدينا في الجبر العادي، وبذلك يجب الا تمثل أيـة صـعوبات. أما قـانون التوزيع الثانـي (القـاعدة رقـم 15) فـهو منى قانون التوزيع العادي ويفيد في معالجة الدوال البولينية.

$$x + y.z = (x + y) (x + z)$$

هذه المعادلـة يمكن أن تستخدم مجموعـات أخـرى من المتغيرات. ادرس مثلا العبارة : (A + B) (A + C D). بجعل x=A, y=B و z = CD وبتطبيق قانون التوزيع الثاني نحصل على:

$$(A + B) (A + CD) = A + BCD$$

القاعدتـان الأخيرتان فـي الجـدول2-3 تسمى **بنظرية ديمورغـان** (DeMorgan) وتكتب أيضا على النحو التالي:

$$\overline{x + y} = \overline{x} . \overline{y}$$
$$\overline{x.y} = \overline{x} + \overline{y}$$

هذه نظرية مهمة جدا وتستعمل للحصول على نفي عبارة جبرية. ويمكن التحقق من صحة هذه النظرية عن طريق استخدام جدول الصدق. الجـدول2-4 يضـم جدولـي صـدق لإثـبات الجـزء الأول مـن نظـرية ديمورغـان. فـي الجزء (أ) من هذا الجدول نقوم بحساب $\overline{x + y}$ لكل قيم x و y المحتملة، ويتم ذلك بحساب x + y أولا ثم نفي الناتج ثانيا. في الجـــزء (ب) مــــن الجــــدول نقـــوم بحســـاب $\overline{x}$ و $\overline{y}$ أولا ثم إيجاد ناتج عملية الـ AND بينهما ثانيا. من النتائج التي

نحصل عليها نجد أن $\overline{x+y}=\overline{x}.\overline{y}$ لاحتمالات قيم x و y الأربع، وذلك ما يثبت تطابق طرفي هذه المعادلة.

جدول2-4: جدول صدق لإثبات نظرية ديمورغان لمتغيرين

(أ)

x	y	x+ y	$\overline{x+y}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

(ب)

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x}.\overline{y}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

لاحظ أن الترتيب الذي تنفذ به العمليات المنطقية عند تقدير (حساب) قيمة عبارة جبرية هو: إيجاد نفي المتغيرات المنفردة التي تظهر عليها إشارة عملية النفي، يلي ذلك تنفيذ عملية AND ثم عملية OR ، تماما كما نفعل بعمليات الضرب و الجمع في الجبر العادي. المتمم الذي يظهر فوق عبارة جبرية، مثلا $\overline{x+y}$ يكافئ NOT(x+y) أو نفي(x+y) وتقدر قيمته بالتعويض عن قيم x و y وإيجاد ناتج العملية المنطقية OR أولا ثم نفي الناتج ثانيا. ومن المعتاد حذف الأقواس عند نفي عبارة جبرية، وذلك برسم علامة النفي فوق العبارة بأكملها: $\overline{(x+y)}=\overline{x+y}$.

يمكن تعميم (مد) نظرية ديمورغان لثلاثة متغيرات أو أكثر. وتكتب نظرية ديمورغان في صورتها العامة على النحو:

$$\overline{x_1+x_2+\ldots+x_n}=\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdots\overline{x_n}$$

$$\overline{x_1\cdot x_2\cdots x_n}=\overline{x_1}+\overline{x_2}+\ldots+\overline{x_n}$$

حيث تتغير العملية المنطقية من OR إلى AND أو من AND إلى OR إضافة إلى تحويل رمز علامة النفي من على العبارة بكاملها ووضعها فوق كل متغير على حدة. مثلا:

$$\overline{x \,.\, y \,.\, z} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$$

$$\overline{x + y + z} = \bar{x} \,.\, \bar{y} \,.\, \bar{z}$$

مثال2: أوجد نفي كل من الدالتين التاليتين:

$$f_1 = \bar{x}\, y\, \bar{z} + \bar{x}\, \bar{y}\, z$$

$$f_2 = x(\bar{y}\,\bar{z} + y\,z)$$

الحل:

بتطبيق نظرية ديمورغان كلما لزم الأمر، يمكننا الحصول على النفي المطلوب على النحو التالي:

$$\overline{f_1} = \overline{\bar{x}\,y\,\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}\,z} = \overline{\bar{x}\,y\,\bar{z}} \,.\, \overline{\bar{x}\,\bar{y}\,z}$$

$$= (x + \bar{y} + z)(x + y + \bar{z})$$

$$\overline{f_2} = \overline{x(\bar{y}\,\bar{z} + y\,z)} = \bar{x} + \overline{(\bar{y}\,\bar{z} + y\,z)}$$

$$= \bar{x} + \overline{(\bar{y}\,\bar{z})}.\overline{(y\,z)} = \bar{x} + (y + z)(\bar{y} + \bar{z})$$

2-5 المعالجة الجبرية

المعالجة الجبرية وسيلة مفيدة لتبسيط الدوال المنطقية. والهدف من ذلك إيجاد دالة منطقية مكافئة تحقق خصائص معينة، كأن يكون عدد

حدودها أقل ما يمكن، وأن يكون عدد الحروف بكل حد من حدودها أقل ما يمكن أيضا. وينعكس ذلك في توفير عدد البوابات اللازمة لتنفيذ الدالة المنطقية، وفي عدد الوصلات اللازمة بمدخلاتها.

فمثلا تنفذ الدالة البولينية:

$$F = \overline{x}\,y\,z + \overline{x}\,y\,\overline{z} + x\,z$$

ببوابات منطقية مباشرة ومن دون معالجة جبرية كما في الشكل2-6(أ). وبتطبيق بعض القواعد المدرجة بالجدول 2-3، يمكننا تبسيط هذه الدالة على النحو التالي:

$$F = \overline{x}\,y\,z + \overline{x}\,y\,\overline{z} + x\,z$$

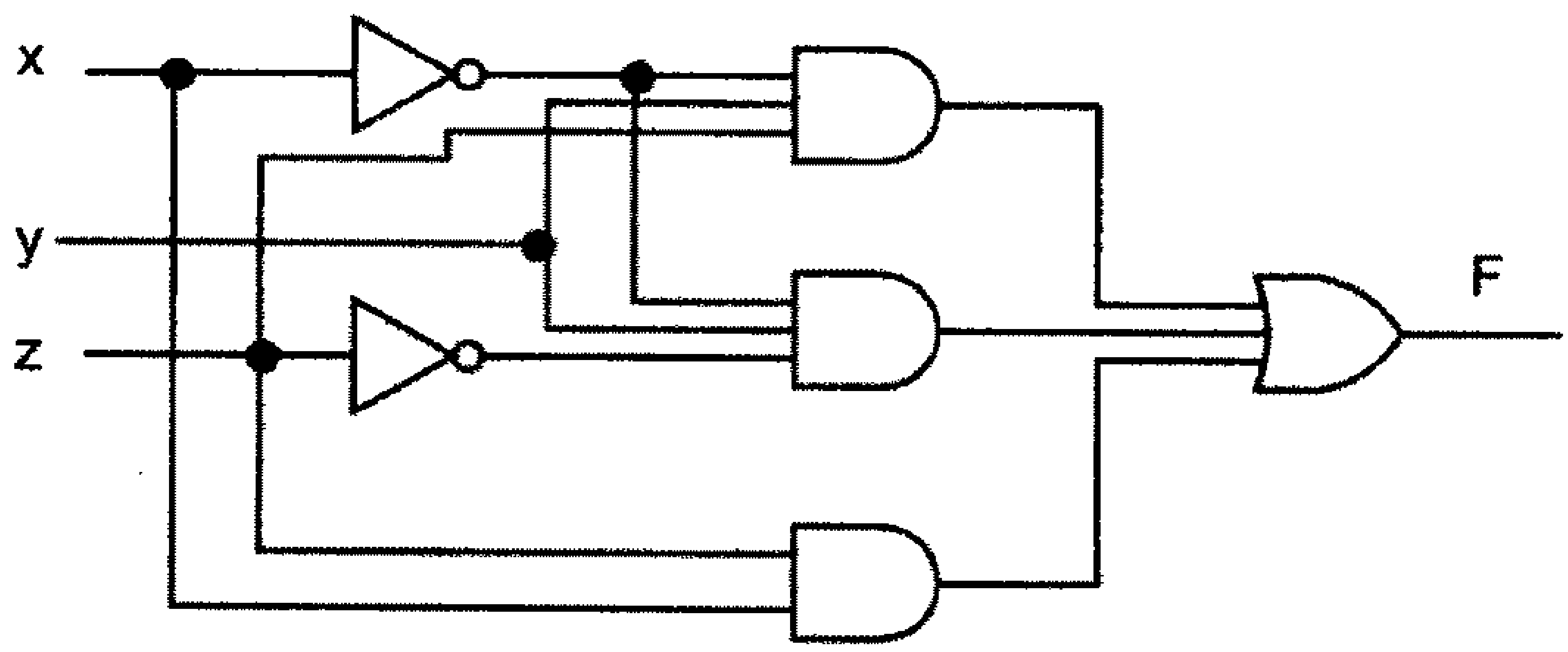
$$= \overline{x}\,y\,(z + \overline{z}) + x\,z \qquad \text{القاعدة 14}$$

$$= \overline{x}\,y\,.1 + x\,z \qquad \text{القاعدة 7}$$

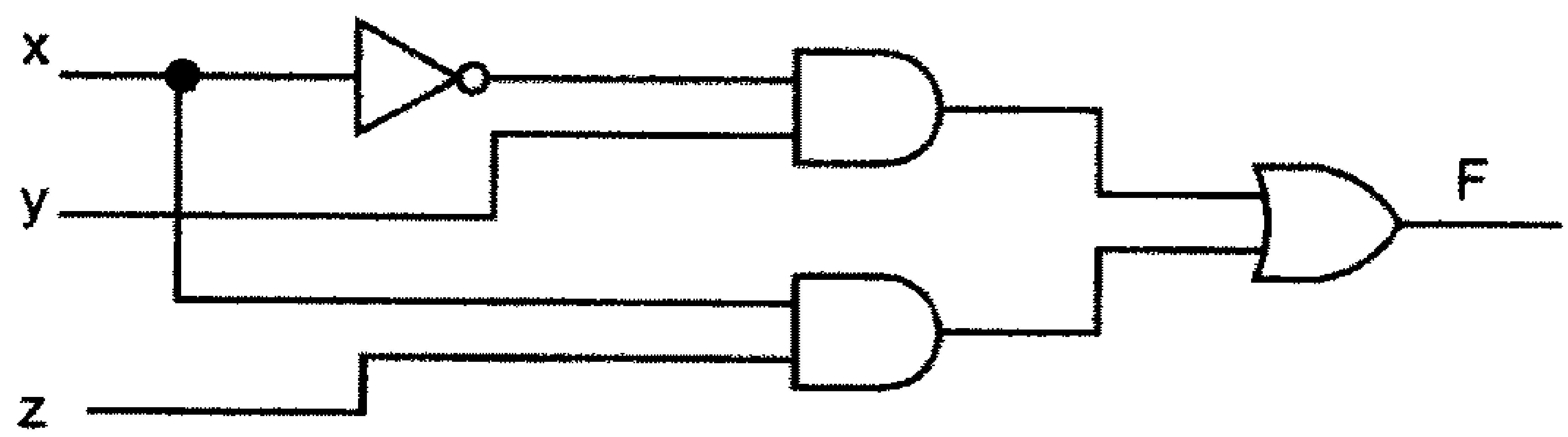
$$= \overline{x}\,y + x\,z \qquad \text{القاعدة 2}$$

بالمعالجة الجبرية اختصرت حدود الدالة إلى حدين ويمكننا تنفيذ الدالة المختصرة ببوابات منطقية كما في الشكل2-6(ب). ويتضح من الشكل2-6 أن الدارة في الشكل2-6(ب) أبسط من الدارة في الشكل2-6 (أ) التي تنفذ الدالة قبل التبسيط، رغم أن كليهما تنفيذ لنفس الدالة.

ويمكن استخدام جدول الصدق لإثبات أن العبارتين (الأصلية والمبسطة) متكافئتان، كما بالجدول2-5. فالدالة F وكما هو معبر عنها بالدالة الأصل تساوي 1 عندما يساوي أحد حدودها على الأقل القيمة 1، أي عندما يكون xyz=011 أو xyz=010 أو xz=11 سواء كانت y=0 أو y=1 (وهذا يكافئ xyz=101 أو xyz=111).



(أ) تنفيذ الدالة $F = \overline{x}yz + \overline{x}y\overline{z} + xz$



(ب) تنفيذ الدالة $F = \overline{x}y + xz$

الشكل2-6 تنفيذ دالة منطقية بصورتين متكافئتين

وينتج عن هذه الاحتمالات الأربع، الآحاد المبينة بالجدول2-5. وبالمثل فإن الدالة F في صورتها المبسطة تساوي 1 عندما يكون xy=01 سواء كانت z=0 أو z=1 (وهذا يكافئ الاحتمالين xyz=010 ، أو xyz=011) كذلك عندما يكون xz=11 (وهذا يكافئ xyz=101 أو xyz=111) وينتج عن هذه الاحتمالات نفس الأربع آحاد المبينة بالجدول2-5. هذا يثبت أن للدالتين نفس جدول الصدق وأن الدالتين متكافئتان. إذن، الدارتان بالشكل2-6 أيضا متكافئتان، إلا أننا نفضل دائما الدارة التي بها عدد أقل من البوابات وذلك للتوفير في التكلفة.

جدول 2-5: جدول صدق الدالة F

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

عند تنفيذ عبارة جبرية بولينية ببوابات منطقية، نحتاج لتنفيذ كل حد من حدودها بوابة عدد مداخلها يساوي عدد المتغيرات المكونة للحد. وإذا ما أطلقنا كلمة الحرف عن المتغير سواء كان منفيا أو في صورة عادية، يمكننا القول بأن الشكل2-6(أ) ينفذ الدالة الأصل قبل تبسيطها وهي تتكون من ثلاثة حدود وثمانية حروف، بينما ينفذ الشكل2-6(ب) الدالة بعد تبسيطها وهي تتكون من حدين وأربعة حروف. وهذا يبين أنه باختصار عدد الحدود أو عدد الحروف أو كليهما معا نحصل أحيانا على دارة أبسط.

مثال3. بسط الدالة الآتية:

$$f(x,y,z) = \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} + x\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}yz + xyz + x\bar{y}z$$

الحل:

ينتج عن ضم حدي الضرب الأول والثاني الحد $\bar{x}\,\bar{z}$:

$$\bar{x}y\bar{z}+\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}=\bar{x}\,\bar{z}\,(y+\bar{y})=\bar{x}\,\bar{z}$$

بالمثل، بضم الحدين الثاني والثالث نحصل على $\bar{y}\,\bar{z}$، وبضم الرابع والخامس نحصل على yz، وبضم الخامس والسادس نحصل على xz .
بجمع هذه الحدود نحصل على العبارة المختصرة التالية:

$$f(x,y,z)=\bar{x}\,\bar{z}+\bar{y}\,\bar{z}+yz+xz$$

بضم حدود الدالة بطريقة أخرى يمكن أن نحصل على عبارة مختصرة في صورة أخرى. في الواقع إذا ضممنا الحدين (الأول والثاني) بالدالة f ، و(الثالث والسادس) ، و(الرابع والخامس)، نحصل على العبارة المختصرة التالية:

$$f(x,y,z)=\bar{x}\,\bar{z}+x\bar{y}+yz$$

بنفس الطريقة، يمكن ضم الحدين (الأول والرابع) ، (الثاني والثالث) و(الخامس والسادس)، لنحصل على عبارة مختصرة ثالثة للدالة f بالشكل التالي:

$$f(x,y,z)=\bar{x}y+\bar{y}\,\bar{z}+xz$$

بالرغم من أن الصور الثلاث للدالة متكافئة إلا أن الدالتين الأخيرتين هما أبسط الصور، مما يدل على أنه ليس من الضروري أن تكون الصورة المبسطة لدالة بولينية فريدة من نوعها.

مثال4. بسط الدالة البولينية التالية:

$$x = ab + ab + ac + bb + bc$$

الحل:

$$x = ab + ab + ac + b + bc \qquad (bb = b)$$

$$x = ab + ac + b + bc \qquad (ab + ab = ab)$$
$$x = ab + ac + b(1 + c)$$
$$x = ab + ac + b \qquad (1 + c = 1)$$
$$x = b(a + 1) + ac$$
$$x = b + ac \qquad (a + 1 = 1)$$

6-2 الصور القياسية للدوال البولينية

يمكن كتابة الدالة البولينية في صور مختلفة عندما يعبر عنها جبريا. لكن البعض منها يعتبر فقط في صورة قياسية. وتفيد الصور القياسية في تسهيل إجراءات تبسيط الدوال البولينية، كما ينتج عنها دارات منطقية ذات خصائص مفيدة أحيانا.

تتضمن الصور القياسية حدودا يرمز لها بحواصل الضرب وحواصل الجمع. يتكون حاصل الضرب من عملية AND المنطقية فيما بين عدد من المتغيرات ($x.\bar{y}.z$ مثلا). كما يتكون حاصل الجمع من عملية OR المنطقية فيما بين عدد من المتغيرات ($x + y + \bar{z}$ مثلا). ويجب أن يفهم أن كلمة الضرب وكلمة الجمع لا تعني عمليات حسابية في الجبر البوليني بل تدل بدلا من ذلك على عمليات منطقية تكافئ العمليات المنطقية AND و OR على التوالي.

1-6-2 صورة جمع حواصل الضرب القياسية.

لقد بينا كيف يعرف جدول الصدق دالة بولينية. ويمكننا أن نستنبط عبارة جبرية تعبر عن الدالة المعرفة بجدول صدق وذلك بإيجاد حاصل الجمع المنطقي لكل حدود حواصل الضرب القياسية التي تدل على احتمالات قيم المتغيرات التي تقابل القيمة 1 في عمود الدالة بجدول الصدق . ويسمى حاصل الضرب الذي تظهر فيه كل المتغيرات مرة واحدة فقط في صورتها الاعتيادية أو المنفية بحاصل ضرب قياسي

(Minterm) خاصيته المميزة هي أنه يدل على احتمال واحد فقط لقيم المتغيرات في جدول الصدق وينتج عن التعويض فيه بقيم هذا الاحتمال القيمة 1 بينما يساوي 0 عند التعويض فيه بباقي احتمالات قيم المتغيرات. عدد حواصل الضرب القياسية لمتغيرين، x و y أربعة وهي: $\bar{x}\,\bar{y}, \bar{x}\,y, x\,\bar{y}, x\,y$. حاصل الضرب القياسي $\bar{x}\,\bar{y}$ مثلا يدل على الاحتمال xy=00 وينتج عن التعويض فيه بقيم هذا الاحتمال (x=0,y=0) القيمة 1 بينما يساوي 0 لباقي الاحتمالات. بالمثل فإن حاصل الضرب القياسي $\bar{x}y$ يدل على الاحتمال xy=01 ويساوي 1 فقط عندما تكون x=0 و y=1 ويساوي 0 لباقي الاحتمالات، وهكذا.

يدرج الجدول2-7 حواصل الضرب القياسية الثمانية لثلاثة متغيرات: x,y,z. كما يدرج أيضا الأعداد (الاحتمالات) الثنائية من 000 حتى 111 تحت المتغيرات. يمكن الحصول على أي من حواصل الضرب القياسية المدرجة بالجدول بتكوين حاصل ضرب تظهر فيه كل المتغيرات وبحيث يظهر المتغير في صورة منفية إذا قابل الثنائية 0 في العدد الثنائي (الاحتمال) المقابل له أو في صورة اعتيادية إذا قابل الثنائية 1. كما يظهر بالجدول رموز تدل عن حواصل الضرب القياسية ، فمثلا يرمز m_0 لحاصل الضرب القياسي: $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$ الذي يدل على الاحتمال xyz=000 وينتج عن التعويض فيه بقيم هذا الاحتمال القيمة 1 بينما ينتج عن التعويض فيه بقيم باقي الاحتمالات القيمة 0. وبالمثل يرمز m_5 لحاصل الضرب القياسي $x\,\bar{y}\,z$ الذي يدل على الاحتمال xyz=101 ، وهكذا.

مثــال5. عبر جبريا في صورة جمع حواصل الضرب القياسية عن الدالة F المعرفة بجدول الصدق 2-6.

الحــل:

في جدول الصـدق 2-6 نجـد أن الدالـة F تسـاوي 1 مقـابل احـتمالات قيم المتغيرات التالية: $xyz = 000, 011, 101, 110$. هذه الاحتمالات

جدول 2-6: جدول صدق الدالة F

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

تقـابل حـدود حواصـل الضـرب القياسـية التـي يرمـز لـها فـي الجـدول2-7 بالرموز: m_0, m_3, m_5, m_6 علـى التوالـي. وحيـث إنـه يمكننـا التعبير عن الدالـة المعـرفة بجـدول صـدق وذلـك بإيجـاد حاصـل الجمـع المنطقـي لكـل حـدود حواصـل الضـرب القياسـية التـي تـدل علـى احـتمالات قيم المتغيرات التي تقابل القيمة 1 في عمود الدالة F بجدول الصـدق. إذا يعبر عن Fعلى النحو التالي:

$$F(x,y,z) = m_0 + m_3 + m_5 + m_6$$

$$= \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z}$$

(يسـتطيع الطالـب إثبـات أن لـهذه الدالـة نفـس جـدول الصـدق المـدرج فـي الجدول2-6).

جدول2-7 حواصل الجمع وحواصل الضرب القياسية لثلاثة حدود

x	y	z	حاصل الضرب القياسي	الرمز	حاصل الجمع القياسي	الرمز
0	0	0	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	m_0	$x+y+z$	M_0
0	0	1	$\bar{x}\bar{y}z$	m_1	$x+y+\bar{z}$	M_1
0	1	0	$\bar{x}y\bar{z}$	m_2	$x+\bar{y}+z$	M_2
0	1	1	$\bar{x}yz$	m_3	$x+\bar{y}+\bar{z}$	M_3
1	0	0	$x\bar{y}\bar{z}$	m_4	$\bar{x}+y+z$	M_4
1	0	1	$x\bar{y}z$	m_5	$\bar{x}+y+\bar{z}$	M_5
1	1	0	$xy\bar{z}$	m_6	$\bar{x}+\bar{y}+z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$	M_7

2-6-2 صورة ضرب حواصل الجمع القياسية

بالمثل يسمى حاصل جمع تظهر فيه كل المتغيرات مرة واحدة فقط في صورة منفية أو اعتيادية بحاصل جمع قياسي (Maxterm). ويبين الجدول2-7 حواصل الجمع القياسية الثمانية لثلاثة متغيرات. ويوجد حاصل الجمع القياسي من الجمع المنطقي للمتغيرات الثلاثة بحيث يظهر المتغير في صورة منفية إذا قابل الثنائية 1 في العدد (الاحتمال) المقابل، وفي صورة اعتيادية إذا قابل الثنائية 0. يرمز M_0 مثلا لحاصل الجمع القياسي x+y+z وبالمثل يرمز M_1 لحاصل الجمع القياسي $x+y+\bar{z}$، وهكذا. لاحظ أن حاصل الضرب القياسي وحاصل الجمع القياسي ذات الأرقام المتشابهة يكون الواحد منهما نفيا للآخر. أي أنه مثلا:

$$\overline{m_3} = \overline{\bar{x}yz} = x + \bar{y} + \bar{z} = M_3$$

يمكن التعبير جبريا عن الدالة F المعرفة في جدول الصدق 2-8 في صورة جمع حواصل الضرب القياسية وكما بينا في المثال السابق على النحو التالي:

جدول 2-8 دوال بولينية

x	y	z	F	$\overline{F}$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

$$F = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z + xyz = m_0 + m_2 + m_5 + m_7$$

ويوجز عادة هذا التعبير بإدراج الأرقام العشرية السفلية المرافقة لرموز حواصل الضرب كما يلي:

$$F(x,y,z) = \sum(0,2,5,7)$$

الرمز $\sum$ يقرأ جمع ويدل على صورة جمع حواصل الضرب القياسية والأرقام التي تليه هي أرقام حواصل الضرب القياسية التي تكون منها الدالة والحروف التي بين الأقواس التي تلي F تكون مجموعة المتغيرات

التي تعتمد عليها الدالة والترتيب الذي يجب أن تظهر فيه عند تحويل أرقام حواصل الضرب القياسية إلى حواصل ضرب قياسية.

مثال6. أوجد العبارة الجبرية للدالة F المكافئة للصيغة التالية:

$$F(A,B,C) = \sum(2,5,6)$$

الحل:

$$F(A,B,C) = m_2 + m_5 + m_6$$
$$= \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

والآن نتأمل في نفي الدالة البولينية المعرفة بالجدول2-8 حيث يتم الحصول على القيم الثنائية في عمود الدالة $\overline{F}$ بتغيير الآحاد إلى أصفار، والأصفار إلى آحاد في عمود الدالة F بجدول الصدق. وبإيجاد العبارة الجبرية للدالة البولينية $\overline{F}$ في صورة جمع حواصل الضرب القياسية نحصل على:

$$\overline{F} = \overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,y\,z + x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,y\,\overline{z} = m_1 + m_3 + m_4 + m_6$$

وبإيجاز فإن:

$$\overline{F}(x,y,z) = \sum(1,3,4,6)$$
$$= m_1 + m_3 + m_4 + m_6$$

نلاحظ أن أرقام حواصل الضرب القياسية بـ $\overline{F}$ هي تلك المفقودة من قائمة أرقام حواصل الضرب القياسية بـ F. والآن نقوم بنفي $\overline{F}$ لنحصل على F على النحو التالي:

$$F(x,y,z) = \overline{m_1 + m_3 + m_4 + m_6} = \overline{m_1}\,.\overline{m_3}\,.\overline{m_4}\,.\overline{m_6}$$
$$= M_1\,.\,M_3\,.\,M_4\,.\,M_6$$
$$= (x+y+\overline{z})(x+\overline{y}+\overline{z})(\overline{x}+y+z)(\overline{x}+\overline{y}+z)$$

وهي صورة ضرب حواصل الجمع القياسية المطلوبة للدالة F وتوجز على النحو التالي:

$$F(x, y, z) = \Pi(1,3,4,6)$$

حيث يدل الرمز Π على ضرب حواصل الجمع القياسية المدرجة أرقامها فيما بين الأقواس ويقرأ (ضرب).

مثـــال7: عبر جبريا عن الدالة:

$$E(x,y,z) = \bar{y} + \bar{x}\,\bar{z}$$

في صورتي جمع حواصل الضرب القياسية وضرب حواصل الجمع القياسية.

الحـل:

الدالـة E ليسـت فـي صـورة قياسـية، ذلـك لأن حدودهـا لا تشـمل كـل متغيرات الدالـة x,y,z. ويمكن استخدام جدول صدق هذه الدالـة لـتحديد حواصل الضرب وحواصل الجمع القياسية التي تنتمي لها.

جدول 2-9: جدول صدق الدالة E

x	y	z	E
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

الجدول 2-9 يدرج كل قيم الدالة $E(x,y,z)$ مقابل كل احتمالات قيم متغيرات الدالة الثنائية x,y,z ويكون بذلك جدول صدق هذه الدالة. من هذا الجدول يمكننا التعبير عن الدالة $E(x,y,z)$ في صيغة جمع حواصل الضرب القياسية على النحو التالي:

$$\begin{aligned} E(x,y,z) &= \sum (0,1,2,4,5) \\ &= m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5 \\ &= \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\,\bar{z} + x\bar{y}z \end{aligned}$$

ومن ملاحظتنا السابقة بأن أرقام حواصل الجمع القياسية التي تعبر عن الدالة E هي الأرقام غير المدرجة في قائمة أرقام حواصل الضرب القياسية التي تعبر عن الدالة نفسها ، يمكننا مباشرة استنتاج الدالة $E(x,y,z)$ القياسية في صورة ضرب حواصل الجمع القياسية مباشرة على النحو التالي:

$$\begin{aligned} E(xyz) &= \Pi(3, 6, 7) \\ &= M_3 \,.\, M_6 \,.\, M_7 \\ &= (x+\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+z)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}) \end{aligned}$$

كما يمكن استرجاع الصورة القياسية لدالة بولينية عن طريق المعالجة الجبرية للدالة من دون الحاجة لجدول الصدق على النحو الذي نبينه الأمثلة التالية:

مثال8: أوجد صيغة جمع حواصل الضرب القياسية للدالة F عن طريق المعالجة الجبرية:

$$F(x,y,z) = \bar{x}y + \bar{z} + xyz$$

73

الحــل:

نلاحظ أن الحد xyz في الدالة F حد قياسي . أما الحدود $\bar{z}$ و $\bar{x}y$ فهي ليست قياسية ويمكن أن نسترجع الحروف المفقودة منها علي النحو التالي:

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z) &= \bar{x}y + \bar{z} + xyz \\
&= \bar{x}y.1 + \bar{z}.1.1 + xyz \\
&= \bar{x}y(z+\bar{z}) + \bar{z}(x+\bar{x})(y+\bar{y}) + xyz \\
&= \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + xy\bar{z} + x\overline{yz} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} + xyz \\
&= \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + xy\bar{z} + x\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} + xyz
\end{aligned}
$$

مثـــال9: أوجد صيغة ضرب حواصل الجمع القياسية للدالـة G عن طريق المعالجة الجبرية:

$$G(x,y,z) = \bar{x}(\bar{y}+z)$$

الحــل:

هذه الدالـة في صورة ضرب حواصل جمع ليست قياسية. ويمكننا استرجاع الصورة القياسية على النحو التالي:

$$
\begin{aligned}
G(x,y,z) &= \bar{x}(\bar{y}+z) \\
&= (\bar{x}+0+0)(\bar{y}+z+0) \\
&= (\bar{x}+y\bar{y}+z\bar{z})(\bar{y}+z+x\bar{x})
\end{aligned}
$$

لاحظ أن جمع الحدود : $z\bar{z}$ و $y\bar{y}$ و $x\bar{x}$ لا يؤثر على الدالـة الأصلية لأنها تساوي القيمة 0.

بتطبيق قانون التوزيع الثاني:

$$
\begin{aligned}
G(x,y,z) = {} & [(\bar{x}+y+z)(\bar{x}+y+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+z)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})] \\
& [(x+\bar{y}+z)(\bar{x}+\bar{y}+z)] \\
= {} & (\bar{x}+y+z)(\bar{x}+y+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+z)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})(x+\bar{y}+z)
\end{aligned}
$$

ملخص

يستخدم الجبر البوليني لصياغة دوال بولينية تعبر عن دارات منطقية رقمية كخطوة أساسية لتصميم وتحليل وتبسيط الدارات المنطقية.

يستخدم الجبر البوليني متغيرات ثنائية تأخذ القيم 0 و 1 وثلاث عمليات منطقية أساسية: AND، OR، NOT ويحقق القواعد المدرجة في الجدول 2-3.

البوابات المنطقية، دارات إلكترونية تنفذ العمليات المنطقية.

تستخدم المخططات التوقيتية لتبيان استجابة الدارات المنطقية مقابل تغير قيم الإشارات المنطقية عند دخلها.

يستخدم جدول الصدق للتعبير عن الدالة البولينية بطريقة فريدة تمثيل لها.

تنفذ الدالة البولينية في دارة تتكون من بوابات منطقية.

تستخدم المعالجة الجبرية قواعد الجبر البوليني لتبسيط الدوال المنطقية للحصول على دوال مكافئة بأقل عدد من الحدود و/أو بأقل عدد من الحروف بكل حد ، ومن ثم الحصول على دارات أقل تكلفة.

يوجد مثنى العبارة الجبرية البولينية بتبديل عمليتي الـ OR و الـ AND وكذلك باستبدال الآحاد بأصفار، والأصفار بالآحاد.

يمكن صياغة الدالة البولينية في صورة جمع حواصل الضرب القياسية أو صورة ضرب حواصل الجمع القياسية. ولنه من معرفتنا لأحد الصور يمكننا معرفة الصورة الأخرى مباشرة.

تدريبـــات

1. بين باستخدام جداول الصدق صحة العلاقات البولينية التالية:

(أ) نظرية ديمورغان لثلاثة متغيرات:

$$\overline{(xyz)} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$$

(ب) قانون التوزيع الثاني:

$$x + yz = (x + y)(x + z)$$

(ج)

$$\bar{x}y + \bar{y}z + x\bar{z} = x\bar{y} + y\bar{z} + \bar{x}z$$

2. أثبت صحة العلاقات التالية باستخدام المعالجة الجبرية.

(أ) $\bar{x}\,\bar{y} + xy + \bar{x}y = \bar{x} + y$

(ب) $\bar{x}y + x\bar{y} + xy + \bar{x}\,\bar{y} = 1$

(ج) $\bar{x} + xy + x\bar{z} + x\bar{y}\,\bar{z} = \bar{x} + y + \bar{z}$

(د) $x\bar{y} + \bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}\,\bar{z} = x\bar{y} + \bar{x}\,\bar{z}$

3. بسط الدوال البولينية الآتية لأقل عدد من الحروف:

(أ) $xyz + \bar{x}y + xy\bar{z}$

(ب) $\bar{x}yz + xz$

(ج) $(\overline{x + y})(\bar{x} + \bar{y})$

(د) $(x + \bar{y} + x\bar{y})(xy + \bar{x}z + yz)$

4. اختصر العبارات الجبرية التالية إلى عدد الحروف المطلوبة:

(أ) إلى 3 حروف $\bar{a}\,\bar{c} + abc + a\bar{c}$

(ب) إلى 3 حروف $(\overline{\bar{c}\,\bar{d} + a}) + a + cd + \cancel{ab}$

(ج) إلى حرف واحد $\bar{a}b(\bar{d} + \bar{c}d) + b(a + \bar{a}cd)$

(د) إلى 4 حروف $(a+c)(\bar{a}+\bar{c})(a+b+\bar{c}d)$

5. باستخدام نظرية ديمورغان عبر عن الدالة:

$$F(x,y,z)=xy+\bar{x}\,\bar{y}+\bar{y}z$$

(أ) فقط بعمليات OR و النفي.

(ب) فقط بعمليات AND و النفي.

6. أوجد نفي كل من العبارات التالية:

(أ) $x\bar{y}+\bar{x}y$

(ب) $(a\bar{b}+c)\bar{d}+e$

(ج) $ab(\bar{c}d+c\bar{d})+\bar{a}\,\bar{b}(\bar{c}+d)(c+\bar{d})$

(د) $(a+\bar{b}+c)(\bar{a}+\bar{c})(a+b)$

7. أوجد جدول الصدق لكل من الدوال التالية ثم عبر عن كل منها في صيغة جمع حواصل الضرب القياسية وضرب حواصل الجمع القياسية.

(أ) $(xy+z)(y+xz)$

(ب) $(\bar{a}+b)(\bar{b}+c)$

(ج) $\bar{y}z+wx\bar{y}+wx\bar{z}+\bar{w}\,\bar{x}z$

8. الجدول التالي يبين جدول صدق الدالتين F و E:

x	y	z	E	F
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

(أ) اكتب قائمة بحواصل الضرب القياسية وحواصل الجمع القياسية لكل دالة.

(ب) اكتب حواصل الضرب القياسية لكل من $\bar{E}$ و $\bar{F}$.

(ج) عبر عن E و F بجمع حواصل الضرب القياسية في صيغة جبرية.

(د) بسط كل دالة إلى عبارة بأقل عدد من الحروف

9. ارسم المخطط المنطقي للعبارات التالية:

(أ) $y\bar{z} + xy + xzw$

(ب) $(a+b)(c+d)(\bar{a}+b+d)$

(ج) $(ab+\bar{a}\bar{b})(c\bar{d}+\bar{c}d)$

10. حول كل من العبارتين الآتيتين إلى جمع حواصل الضرب وضرب حواصل الجمع:

(أ) $(ab+c)(b+cd)$

(ب) $\bar{x}+x(x+\bar{y})(y+z)$

11. حول ما يلي إلى الصورة القياسية الأخرى:

(أ) $F(x,y,z) = \sum (1, 3, 7)$

(ب) $F(x, y, z) = \Pi (0, 3, 6, 7)$

12. بوابة الغالبية (Majority Gate) عبارة عن دارة رقمية خرجها يساوي 1 إذا كانت غالبية مدخلاتها آحاد وإلا فالخرج يساوي 0. مستخدما جدول الصدق أوجد الدالة البولينية المنفذة لبوابة أغلبية ذات ثلاثة مدخلات ثم بسط هذه الدالة.

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$F = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$

$f = yz + xz + xy$

الباب الثالث

تبسيط الدوال البولينية باستعمال خرائط كارنوف

Boolean Functions Simplification Using Karnaugh Maps

الباب الثالث

3 تبسيط الدوال البولينية باستعمال خرائط كارنوف

3-1 مقدمة:

الهدف من تبسيط دالة بولينية ما، هو إيجاد دالة منطقية مكافئة للدالة الأصل يكون عدد حدودها أقل ما يمكن وعدد الحروف بكل حد من حدودها أقل ما يمكن أيضا. وينتج عن ذلك توفير في عدد البوابات اللازمة لتنفيذ الدالة البولينية وكذلك توفير في عدد الوصلات اللازمة بمداخل تلك البوابات لإتمام عملية التنفيذ. وبذلك نحصل على دارة منطقية أقل تكلفة من الدارة التي كنا نحتاجها لتنفيذ الدالة الأصل قبل إجراء عمليات التبسيط عليها.

لقد رأينا في الفصل السابق أنه من الصعب تطبيق نظريات الجبر البوليني لتبسيط دالة بولينية عن طريق المعالجة الجبرية. ويرجع السبب في ذلك لافتقار تلك الطريقة إلى منهجية واضحة تدل على الخطوات الواجب إتباعها لإتمام عملية التبسيط.

نستخدم في هذا الفصل **خريطة كارنوف** لتبسيط الدوال البولينية التي تستخدم ثلاثة متغيرات على الأكثر. وتعتبر خريطة كارنوف صيغة معدلة لجدول الصدق تتكون من عدد من الخلايا، تمثل كل منها حدا من حدود **حواصل الضرب** (أو من حدود **حواصل الجمع**) **القياسية**، وتقابل أحد الاحتمالات الممكنة لقيم المتغيرات الثنائية المستخدمة بالدالة. تستهل عملية تبسيط دالة بولينية بصياغتها أولا في صورة **جمع حواصل الضرب القياسية**، ومن ثم استخدام مخطط كارنوف للحصول على أبسط عبارة جبرية في صورة **جمع حواصل ضرب** تكافئ الدالة الأصل. كما يمكن

أيضا تبسيط صورة ضرب حواصل الجمع القياسية للحصول على أبسط عبارة جبرية في صورة ضرب حواصل جمع.

2-3 خرائط كارنوف ذات المتغيرين وذات المتغيرات الثلاثة.

يبين الشكل 3-1 خريطة كارنوف ذات المتغيرين:: x و y. وهي تتألف من أربع خلايا، يمثل كل منها أحد حواصل الضرب القياسية الأربعة التي يمكن تكوينها من متغيرين. أدخلت بخلايا الشكل 3-1(أ) رموز حواصل الضرب القياسية الأربعة وأدرجت بخلايا الشكل 3-1(ب) حواصل الضرب القياسية المقابلة المتكونة من متغيرين. لاحظ العلاقة بين المتغيرين x و y وكل خلية من خلايا الخريطة التي أدرج في أعلاها وعلى شمالها قيم المتغيرين x و y . لاحظ أيضا أن المتغير x يظهر منفيا في حدود حواصل الضرب القياسية التي تقابل الصف x=0 ويظهر غير منفي في الحدود التي تقابل الصف x=1. بالمثل يظهر y منفيا في العمود y=0 وغير منفي في العمود y=1.

m_0	m_1
m_2	m_3

(أ)

x \ y	0	1
	$\bar{x}\,\bar{y}$	$\bar{x}\,y$
1	$x\,\bar{y}$	xy

(ب)

شكل 3-1 خريطة كارنوف ذات متغيرين

يعبر عن الدالة البولينية ذات المتغيرين (x,y) بخريطة كارنوف وذلك بإدخال قيم الدالة المقابلة لكل الاحتمالات الممكنة لقيم المتغيرين

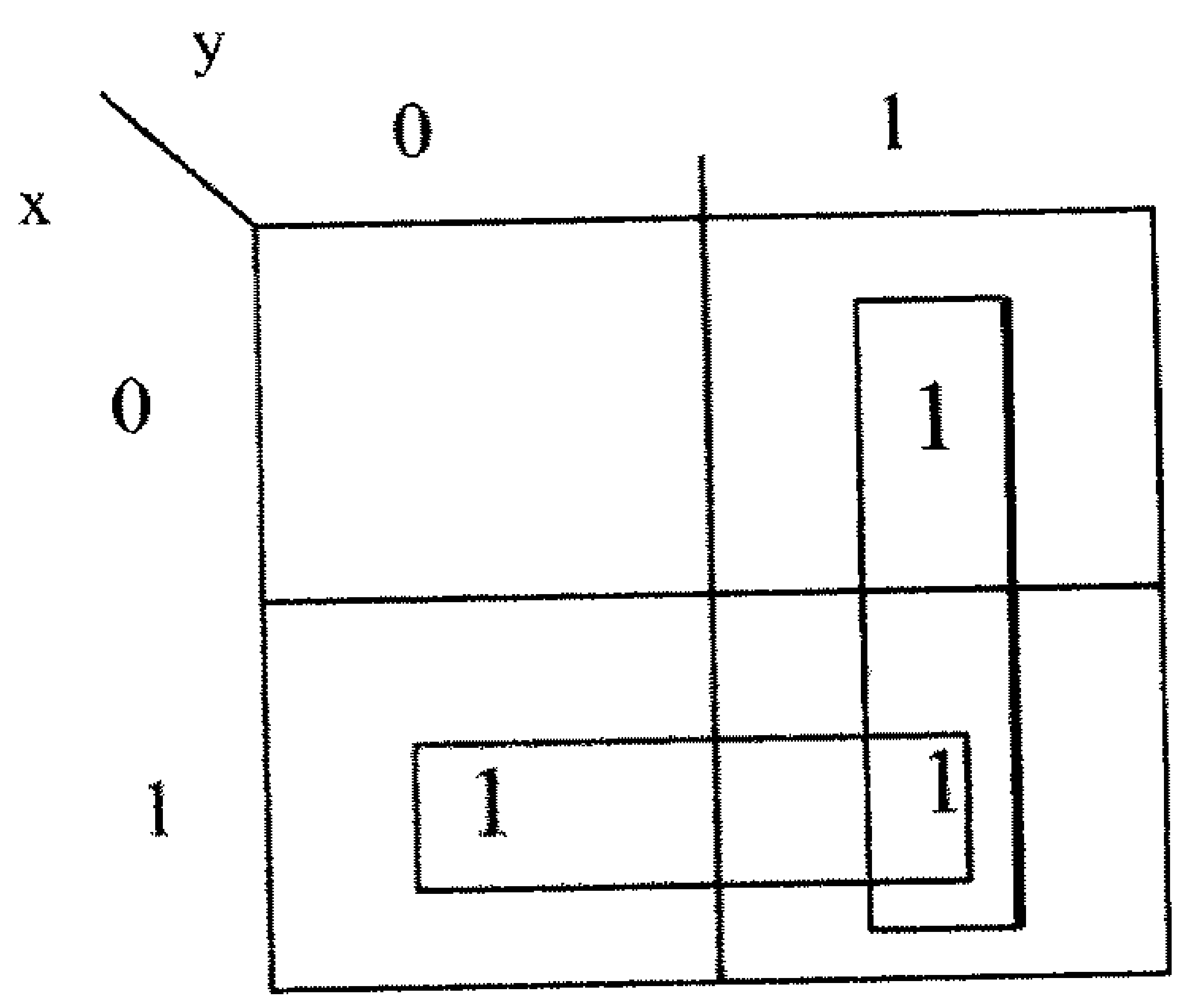
الثنائيين في جدول الصدق داخل الخلايا المقابلة لها بالخريطة. فمثلا، يعبر عن الدالة :

$$F(x,y) = \sum(1,2,3)$$

جدول 3-1: جدول صدق الدالة F

x	y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

التي لها جدول الصدق المبين بالجدول 3-1، بخريطة كارنوف المبينة بالشكل 3-2 حيث علمت الخلايا 1 و 2 و 3 المقابلة لاحتمالات قيم المتغيرين التي ينتج عن التعويض بها في الدالة القيمة 1 بآحاد وذلك



الشكل 3-2 خريطة كارنوف للدالة: $F(x,y) = \sum(1,2,3)$

لتمييز حواصل الضرب القياسية التي تنتمي لهذه الدالة، بينما تركت الخلايا المقابلة للاحتمالات التي ينتج عن التعويض بها في الدالة القيمة 0

خالية. بالمقابل يمكن التعبير عن دالة بولينية تمثلها خريطة كارنوف وذلك بجمع حواصل الضرب القياسية التي تمثلها والتي علمت بآحاد لتمييزها. تذكر أنه يمكننا إيجاد حاصل الضرب القياسي المقابل لأحد خلايا الخريطة بطريقة مماثلة لاستخدام جدول الصدق. فالمتغير x يظهر في حاصل الضرب القياسي في صورة غير منفية إذا كانت قيمته 1 في احتمال قيم المتغيرات المقابل للخلية المماثلة له بينما يظهر في صورة منفية إذا كانت قيمته 0. إذاً، من الخريطة المبينة بالشكل 3-2 يمكننا أن نعبر عن الدالة F كما يلي:

$$F(x,y) = m_1 + m_2 + m_3$$
$$= \bar{x}\,y + x\,\bar{y} + x\,y$$

بالتمعن في حدود هذه الدالة وفي الخريطة بالشكل 3-2، ومن أجل تبسيط هذه العبارة الجبرية، يتبين لنا إمكانية ضم الحدين: $m_1 = \bar{x}\,y \quad m_3 = x\,y$ لنحصل على الحد y كما يلي:

$$m_1 + m_3 = \bar{x}\,y + x\,y = y(\bar{x} + x) = y.1 = y$$

لاحظ اختفاء المتغير x الذي يظهر منفيا في الخلية 1 وغير منفي في الخلية 2. بالمثل يمكننا ضم الحدين m_2 و m_3 ، لنحصل على حد به حرف واحد يختفي فيه المتغير y كما يلي.

$$m_2 + m_3 = x\,\bar{y} + xy = x(\bar{y} + y) = x$$

ويبين الشكل 3-2 طريقة لتبيان عملية ضم الحدود الممكن ضمها في حد واحد بطريقة بيانية وذلك برسم مستطيلات كالمبينة تحيط بها. وباستنفاذ إمكانية ضم حدود أخرى في حد واحد تكون العبارة الجبرية المبسطة للدالة من حاصل جمع الحدين السابقين:

$$F(x,y) = x + y$$

لقد استخدمنا في عملية التبسيط السابقة الحد m_3 مرتين للحصول على الصيغة المبسطة في صورة جمع حواصل ضرب يتكون كل حد فيها من حرف واحد. وهذا ما لا يتعارض مع قواعد الجبر البوليني من ناحية وما يمكننا من الحصول على حدود بأقل عدد من الحروف من ناحية أخرى.

يبين الشكل 3-3 خريطة كارنوف الخاصة بالدوال ذات المتغيرات الثلاثة وتشمل ثمانية خلايا تمثل كل الاحتمالات الممكنة لقيم ثلاثة متغيرات ثنائية. تظهر أعمدة هذه الخريطة أمام أربعة احتمالات ممكنة لقيم المتغيرين (y,z) كما يظهر صفا الخريطة أمام قيمتي المتغير الثنائي x الممكنة. ويبين الشكل 3-3(أ) الأرقام العشرية المكافئة لقيم المتغيرات (x,y,z) الثنائية بكل خلية وهي تظهر أسفل الحرف m المميز لحاصل الضرب القياسي الذي يعبر عن الخلية وعادة ما تستخدم هذه الأرقام في الإشارة لخلايا الخريطة عموما. ويبين الشكل 3-3 (ب) العلاقة بين المتغيرات (x,y,z) وخلايا الخريطة، حيث تعبر مثلا الخلية 6 عن حاصل الضرب القياسي $x\,y\,\bar{z}$.

x \ yz	00	01	11	10
0	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$
1	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$	xyz	$xy\bar{z}$

(ب)

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

(أ)

شكل 3-3 خريطة كارنوف ذات المتغيرات الثلاثة

للتعبير عن الدوال البولينية ذات المتغيرات الثلاثة بخريطة كارنوف، نتبع طريقة مشابهة للتي اتبعناها في تمثيل الدوال البولينية ذات المتغيرين. فمثلا، يبين الشكل 3-4 خريطة الدالة:

$$F(x,y,z)=\sum(2,6,7)$$

x \ yz	00	01	11	10
0				1
1			1	1

شكل3-4 خريطة الدالة $F(x,y,z)=\sum(2,6,7)$

ولقد أدخلت القيمة 1 في خلاياها: 2، 6 و7 لتمييز حدود حواصل الضرب القياسية (m_2 وm_6 و m_7) التي تنتمي للدالة F. أما باقي الخلايا فترمز إلى أن قيمة الدالة تساوي 0 عند التعويض بقيم المتغيرات الثنائية (x,y,z) المقابلة لتلك الخلايا، ولقد تركت خالية.

للقيم الثنائية المستخدمة في الإشارة لأعمدة الخريطة بالشكل 3-3 ترتيب ذو أهمية خاصة. فنتيجة لهذا الترتيب تقابل الخلايا التي تشترك في أحد الجوانب احتمالات لقيم المتغيرات الثنائية (x,y,z) تختلف في متغير واحد. وعموما يطلق على خليتين تختلفان في متغير واحد التسمية: خليتان متجاورتان. وتلعب خاصية التجاور هذه دورا أساسيا في عملية التبسيط، ذلك لأنه يمكن ضم خليتين متجاورتين بواسطة القاعدة: $A\bar{a}+Aa=A$ حيث يرمز A إلى حاصل ضرب مجموعة من الحروف، ويرمز a لمتغير واحد فقط. فمثلا، m_5 وm_7 يقعان في خليتين متجاورتين. يظهر المتغير y منفيا في m_5 وغير

منفي في m_7 بينما يتشابهان في المتغيرين الآخرين. وينتج عن الجمع المنطقي للحدين المتجاورين، m_5 و m_7 ، حاصل ضرب به حرفان، يختفي فيه المتغير الذي تختلف قيمته فيما بين الحدين m_5 و m_7.

$$m_5 + m_7 = x\,\bar{y}\,z + x\,y\,z = x\,z\,(y + \bar{y}) = x\,z.1 = x\,z$$

وبالإشارة إلى خريطة الدالة F المبينة بالشكل 3-4 نجد أنه يمكن ضم الحدين m_2 و m_6 اللذين يقعان في الخليتين المتجاورتين 2 و 6 وينتج عن الجمع المنطقي لهما حد واحد به حرفان، يختفي فيه المتغير x وذلك على النحو التالي:

$$m_2 + m_6 = \bar{x}\,y\,\bar{z} + x\,y\,\bar{z} = y\,\bar{z}\,(\bar{x} + x) = y\,\bar{z}.1 = y\,\bar{z}$$

بالمثل نلاحظ من الخريطة نفسها أنه يمكن ضم الحدين m_6 و m_7 اللذين يقعان في خليتين متجاورتين أيضا وينتج عن جمعهما جمعا منطقيا حد واحد به حرفان يختفي فيه المتغير z وذلك على النحو التالي:

$$m_6 + m_7 = x\,y\,z + x\,y\,\bar{z} = x\,y\,(z + \bar{z}) = x\,y.1 = x\,y$$

مثـــال 1: بسط الدالة البولينية $F(x,y,z) = \sum(2,3,4,5)$

الحــل:

الدالة ذات ثلاثة متغيرات، ولها خريطة كارنوف المبينة بالشكل 3-5

x \ yz	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1		

شكل 3-5 خريطة كارنوف الدالة

$$F(x,y,z) = \sum(2,3,4,5)$$

من المخطط، نلاحظ أنه من أجل تقليص حدود هذه الدالة يمكننا ضم حواصل الضرب القياسية التي تنتمي لهذه الدالة والمعلمة بآحاد في الخريطة في مجموعتين تشتمل كل مجموعة منها على حدين متجاورين وذلك حسب ما تبينه المستطيلات بالشكل 3-5. وينتج عن ضم الحدين المتجاورين في المستطيل العلوي الحد: $\bar{x}\,y$ (يختفي فيه الحرف z). كما ينتج عن عملية الضم الأخرى الحد: $x\,\bar{y}$. وبجمع هذين الحدين جمعا منطقيا، نحصل على العبارة المبسطة في صورة جمع حواصل ضرب على النحو التالي:

$$F(x,y,z) = \bar{x}\,y + x\,\bar{y}$$

تتجاور بعض خلايا مخطط كارنوف رغم عدم اشتراكها في أحد الجوانب ظاهريا. فالخليتان رقم 0 ورقم 2 المماثلة لحدود الضرب القياسية m_0 و m_2 متجاورتان، وكذلك الخليتان رقم 4 و 6 متجاورتان. ويمكن التحقق من ذلك جبريا وذلك بإمكانية جمعهما منطقيا في حد واحد كما يلي:

$$\begin{aligned} m_0 + m_2 &= \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} \\ &= \bar{x}\,\bar{z}(\bar{y} + y) = \bar{x}\,\bar{z} \\ m_4 + m_6 &= x\bar{y}\bar{z} + x\,y\,\bar{z} \\ &= x\bar{z}(\bar{y} + y) = x\bar{z} \end{aligned}$$

لذلك ينبغي علينا تعديل تعريف التجاور ليشمل هذه الحالات. ويتم ذلك باعتبار أن الخريطة بالشكل 3-3 ترسم فوق سطح تتلامس حافتاه اليمنى واليسرى لتكون هذا التجاور أيضا.

كما يمكن إيجاد أربع خلايا متجاورة في الخريطة المبينة بالشكل 3-3. وتمثل عملية ضم هذه الخلايا بعملية الجمع المنطقي لحدود الضرب

القياسية المماثلة لتلك الخلايا، لينتج عن عملية الضم حد به حرف واحد.
مثلا: الخلايا : 0، 2، 4، 6 متجاورة وينتج عن ضمها الحد التالي:

$$\begin{aligned} m_0 + m_2 + m_4 + m_6 &= \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} \\ &= \bar{x}\bar{z}(\bar{y}+y) + x\bar{z}(\bar{y}+y) \\ &= \bar{x}\bar{z} + x\bar{z} \\ &= \bar{z}(\bar{x}+x) \\ &= \bar{z} \end{aligned}$$

لاحظ أن المتغير الذي لا يختفي نتيجة عملية ضم أربعة حدود متجاورة هو فقط المتغير الذي لا تختلف قيمته فيما بين الحدود المضمومة.

في خريطة كارنوف ذات المتغيرات الثلاثة ، يمكن فقط ضم عدد 2، أو 4، أو 8 خلايا متجاورة في حد واحد. وكلما أمكننا ضم عدد أكبر من الخلايا نتج عن ذلك حد به عدد أقل من الحروف.

- خلية واحدة تمثل حاصل ضرب قياسي بثلاثة حروف.
- ينتج عن ضم خليتين متجاورتين حاصل ضرب به حرفان.
- ينتج عن ضم أربع خلايا متجاورة حاصل ضرب به حرف واحد.
- ثمانية مربعات متجاورة تشمل المخطط بكامله وينتج عن ضمها دالة تساوي دائما المنطق 1.

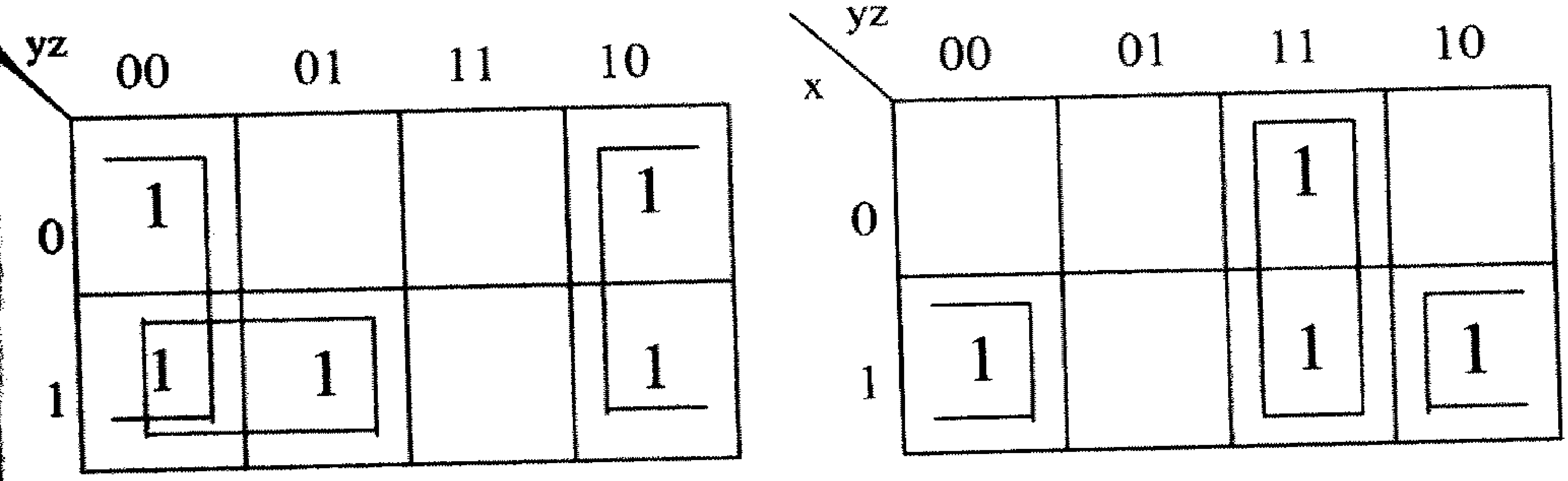
مثـــال2: بسط الدالتين:

$$F_1(x,y,z) = \sum(3,4,6,7)$$
$$F_2(x,y,z) = \sum(0,2,4,5,6)$$

الحـــل:

الشكل3-6 يبين خريطتي الدالتين F_1 و F_2. من خريطة الدالة F_1 نجد أنه يمكننا ضم الخليتين 3 و 7 المتجاورتين لنحصل على الحد yz . كما

يمكننا ضم الخليتين 4 و 6 باعتبارهما متجاورتين حسب تعريفنا الجديد للتجاور. ويظهران بالشكل وقد ضما بأنصاف مستطيلات ، لينتج



(ب) خريطة F_2 (أ) خريطة F_1

شكل 3-6 خريطتا كارنوف للدالتين F_1 و F_2

عن ضمهما الحد $x\bar{z}$. وبذلك نحصل على العبارة المبسطة التالية للدالة F_1.

$$F_1(x,y,z) = yz + x\bar{z}$$

بالمثل نجد من خريطة الدالة F_2 في الشكل 3-6 أنه يمكننا ضم الخلايا الأربع المتجاورة: 0، 2، 4، 6 الموجودة في العمود الأول والأخير لنحصل على حد بحرف واحد هو: $\bar{z}$. الخلية الوحيدة الباقية والتي لم يتم ضمها لأي من الخلايا الأخرى هي الخلية التي تمثل حاصل الضرب القياسي m_5 ، الذي يفضل ضمه مع حد آخر حتى ولو كان قد استخدم مرة أو أكثر من قبل وذلك للحصول على حد به عدد أقل من الحروف. من خريطة الدالة F_2 نجد أن الخلية 5 وقد ضمت إلي الخلية المجاورة لها رقم 4 لينتج عن ضمهما الحد: $x\ \bar{y}$. وبذلك نحصل على العبارة المبسطة التالية:

$$F_3(x,y,z) = \bar{z} + x\bar{y}$$

مثــال3: أوجد العبارة الجبرية المبسطة للدالة :

$$F(x,y,z) = \sum (1,3,4,5,6)$$

الحــل:

x \ yz	00	01	11	10
0		1	1	
1	1	1		1

شكل 3-7 خريطة كارنوف للدالة $F(x,y,z) = \sum (1,3,4,5,6)$

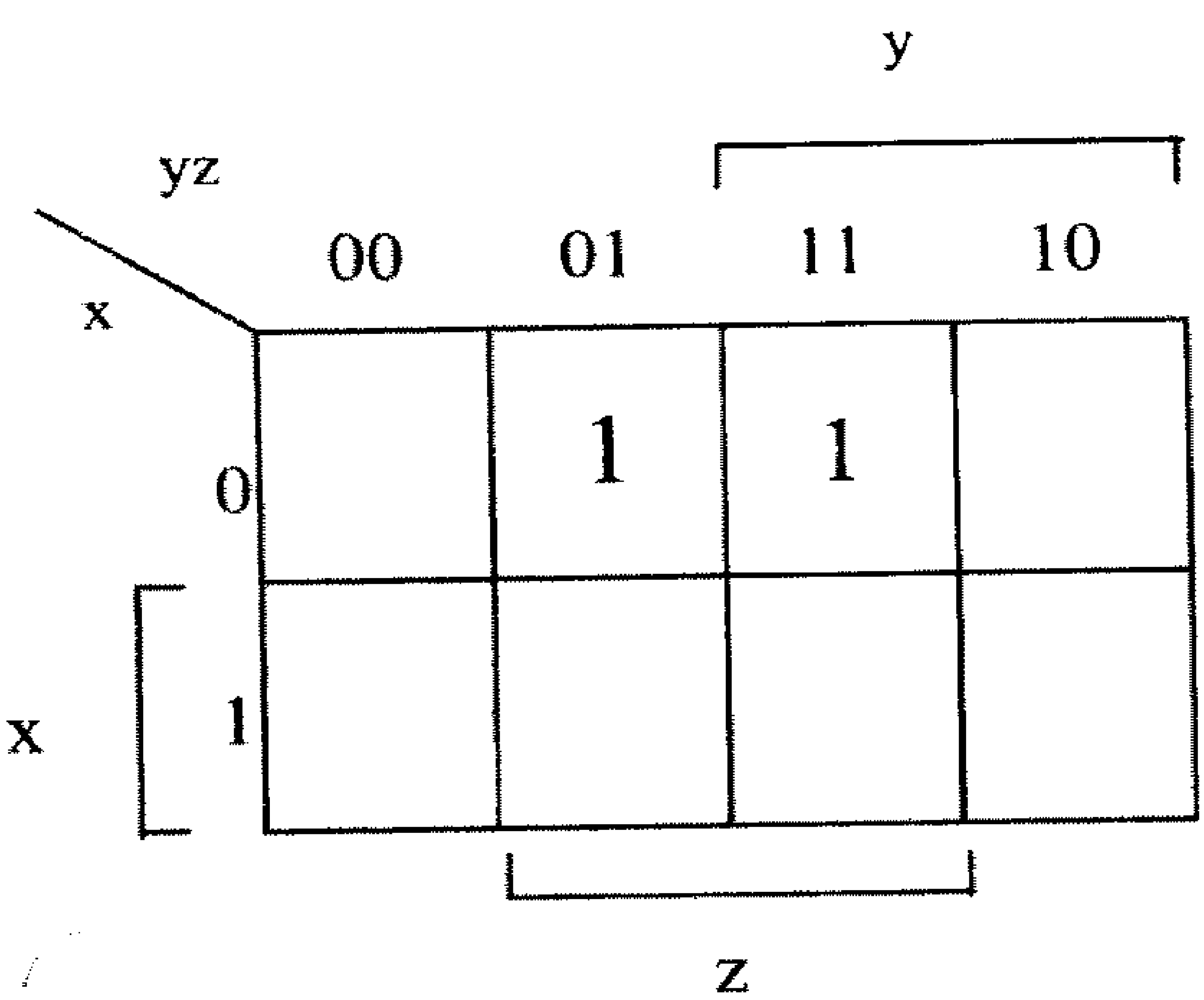
من خريطة كارنوف للدالة $F(x,y,z)$ المبينة بالشكل 3-7 وباستخدام خاصية التجاور، نجد أنه لا يمكن ضم الحد المماثل للخلية 3 إلا مع الحد الماثل للخلية 1، لذلك تضم هاتان الخليتان لينتج عن ذلك الحد $\bar{x}\,z$. كما أن الحد المماثل للخلية 6 لا يمكن ضمه إلا مع الحد المماثل للخلية 4، لذلك تضم هاتان الخليتان لينتج عن ذلك الحد $x\,\bar{z}$. يبقى الحد المماثل للخلية رقم 5 الذي يفضل ضمه مع حد آخر للحصول على حد به عدد أقل من الحروف. من الخريطة نرى أنه يمكن ضم الخلية 5 إما مع الخلية 1 (لينتج الحد $\bar{y}\,z$) أو مع الخلية 4 (لينتج الحد $x\,\bar{y}$). ينتج عن هذين الاختيارين حلان متكافئان، يمكننا اختيار أحدهما حلا لهذه المسألة.

الحلان المتكافئان هما:

$$F(x,y,z) = \bar{x}\,z + x\,\bar{z} + \bar{y}\,z$$
$$= \bar{x}\,z + x\,\bar{z} + x\,\bar{y}$$

في كل من هذين الاختيارين ثلاثة حدود، وبكل حد حرفان.

إذا لم تكن الدالة المراد تبسيطها في صورة جمع حواصل الضرب القياسية نستخدم جدول الصدق أو خريطة كارنوف لتحديد حواصل الضرب القياسية التي تنتمي للدالة أولا ثم نجري عملية التبسيط ثانيا. لقد عرفنا في الفصل السابق كيفية إيجاد الصورة القياسية للدالة البولينية عن طريق جدول الصدق. ولتسهيل هذه المهمة عن طريق استخدام خريطة كارنوف يكتب اسم المتغير برمزه الحرفي محاذيا للخلايا الأربع التي يظهر فيها المتغير غير منفي، كما في الشكل 3-8. وبحيث يظهر المتغير منفيا بالخلايا التي لم يكتب بمحاذاتها الرمز الحرفي. فمثلا تحدد خلايا خريطة كارنوف (حواصل الضرب القياسية) التي تنتمي للحد $\bar{x}z$ وتعلم بآحاد كما في الشكل 3-8 وذلك من خلال إيجاد تقاطع $\bar{x}$ (خلايا الصف الأول) و z (خلايا العمودين الوسطين) في الخلايا 1 و 3 المماثلة لحواصل الضرب القياسية m_1 و m_3.



شكل 3-8 مخطط كارنوف برموز حرفية بمحاذاة حوافه.

وللتثبت من صحة هذه النتيجة يمكننا استخدام المعالجة الجبرية لإيجاد الصيغة القياسية للحد $\bar{x}z$ التي تثبت انتماء حواصل الضرب القياسية m_1 و m_3 للحد $\bar{x}z$ وذلك على النحو التالي:

$$\bar{x}z = \bar{x}z(y+\bar{y})$$
$$= \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$$
$$= m_3 + m_1$$

ومن دون شك يفضل استخدام خريطة كارنوف لإيجاد الصورة القياسية لدالة بولينية باعتبارها وسيلة أسهل من المعالجة الجبرية ومن استخدام جدول الصدق لذلك.

مثال4:

بسط الدالة البولينية: $F(x,y,z) = \bar{x}z + \bar{x}y + x\bar{y}z + yz$

الحل:

نلاحظ أن الدالة ليست في صورة قياسية مما يضطرنا لإيجاد الصورة القياسية لهذه الدالة أولا وذلك بتحديد حواصل الضرب القياسية التي تنتمي لكل حد من حدودها ومن ثم تحدد خلايا خريطة كارنوف ذات المتغيرات الثلاثة التي تنتمي إليها تم تعليمها بآحاد ، والقيام بعملية التبسيط ثانيا.

لقد سبق أن حددنا في المثال السابق الخلايا التي تنتمي إلى الحد الأول $(\bar{x}\ z)$ وهي الخلايا رقم 1 و 3. وبالمثل يمكننا إيجاد أن الخلايا التي تنتمي للحد الثاني $(\bar{x}\,y)$ هي رقم 2 و 3 . وأن الخلايا التي تنتمي للحد الثالث $(x\bar{y}z)$ هي الخلية رقم 5 . وأن الخلايا التي تنتمي للحد الرابع (yz) هي رقم 3 و 7. من ثم نعبر عن الدالة F في صورتها القياسية على النحو التالي:

$$F(x,y,z) = \sum(1,2,3,5,7)$$

برسم خريطة كارنوف ذات المتغيرات الثلاثة (x,y,z) وبإدخال آحاد في الخلايا التي تنتمي لهذه الدالة، تنتج الخريطة المبينة بالشكل 3-9.

x \ yz	00	01	11	10
0		1	1	1
1		1	1	

شكل 3-9 خريطة كارنوف للدالة F(x,y,z)

تبسط هذه الدالة بملاحظة أن الخلية 2 لا يمكن ضمها إلا إلى الخلية المجاورة لها رقم 3 وينتج عن ذلك الحد $\bar{x}\,y$ وأن الخلية 7 لا يمكن ضمها في مجموعة أربعة خلايا متجاورة إلا بالطريقة المبينة وينتج عن ذلك الحد z. إذا بجمع هذين الحدين تكون الدالة المبسطة المكافئة للدالة الأصل في صورة جمع حواصل ضرب على النحو التالي:

$$F(x,y,z) = z + \bar{x}\,y$$

مما تقدم نلاحظ أنه للحصول على عبارة مبسطة يجب احتواء كل الخلايا المعلمة بآحاد في أقل عدد من مجموعات زوجية لخلايا متجاورة، كل مجموعة تضم أكبر عدد ممكن من الخلايا. ويمكن تلخيص **القواعد التي قد تساعد في الحصول على عبارة جبرية مبسطة** للدالة F ذات المتغيرات الثلاثة فيما يلي:

1. أبدأ بالخلايا المعلمة بآحاد والتي لا يمكن ضم أي منها مع أية خلايا أخرى معلمة بآحاد، ثم انتقل إلى الخلايا الأخرى المعلمة بآحاد ولكل منها خلية مجاورة واحدة فقط معلمة بآحاد، وكون منها

مجموعات الخليتين بشرط ألا تكون جزءا من أربع خلايا معلمة بآحاد ومتجاورة.

2. ضم الخلايا المعلمة بآحاد التي تكون مجموعة أربع خلايا متجاورة، بشرط ألا تكون جزءا من ثماني خلايا معلمة بآحاد ومتجاورة.

3-3 تبسيط صورة ضرب حواصل الجمع:

عند تبسيط دالة بولينية في صورة جمع حواصل الضرب تمثل الخلايا المعلمة بآحاد بخريطة كارنوف حواصل الضرب القياسية بالدالة. إذا وبعبارة أخرى فإن الخلايا الخالية بالخريطة تمثل نفي الدالة. وإذا ما علمنا الخلايا الخالية بأصفار وضممناها في أقل عدد من المجموعات إلى خلايا متجاورة حسب الطريقة السابقة، فإننا نكون قد حصلنا على عبارة مبسطة للدالة $\bar{F}$ في **صورة جمع حواصل ضرب**. وبنفي هذه النتيجة نحصل على عبارة مبسطة للدالة F في **صورة ضرب حواصل جمع**.

مثـــال5:

بسط الدالة البولينية التالية في صورة:

(أ) جمع حواصل ضرب. (ب) ضرب حواصل جمع.

$$F = (A,B,C) = \Sigma\,(4,6,7)$$

الحـل:

يبين الشكل 3-10(أ)خريطة كارنوف الدالة F. الخلايا المعلمة بآحاد بالخريطة تمثل حدود حواصل ضرب قياسية بالدالة. أما الخلايا المعلمة بأصفار (خالية) فهي تمثل حدود حواصل ضرب قياسية تنتمي للدالة $\bar{F}$.

بضم الخلايا المعلمة بآحاد (كما بالشكل 3-10(أ)) نحصل على عبارة مبسطة للدالة F في صورة جمع حواصل الضرب التالية:

$$F = A\overline{C} + AB$$

$\Rightarrow F = A(\bar{C} + B)$

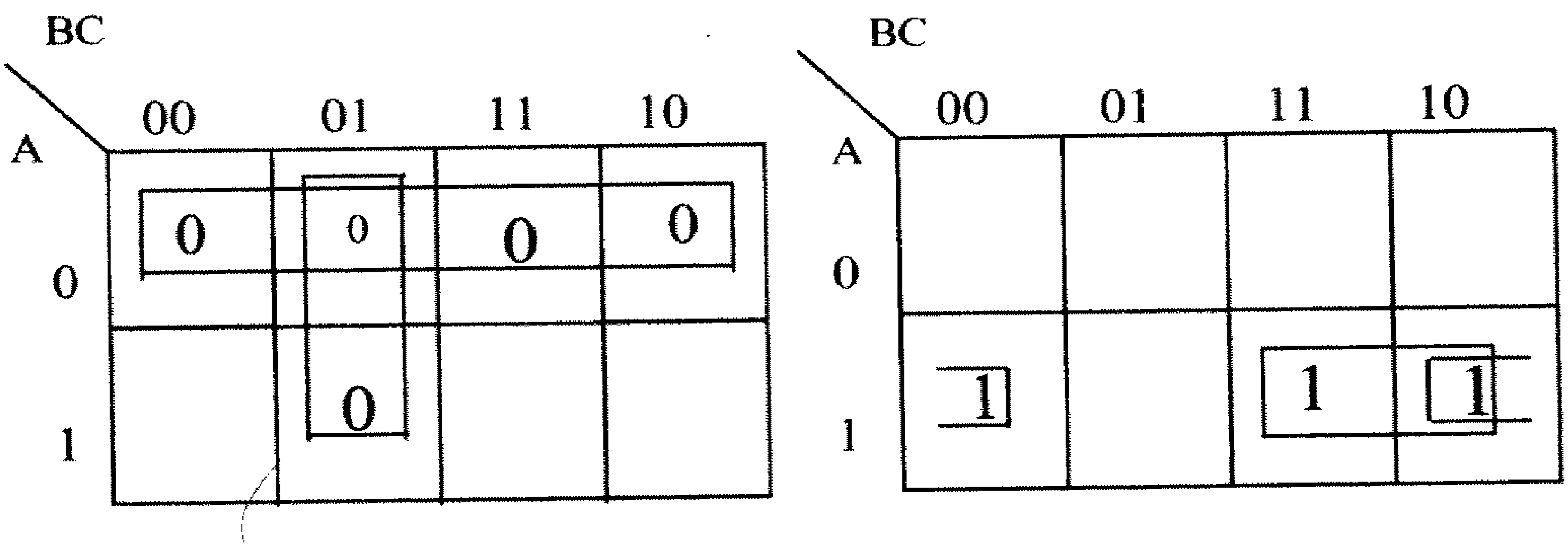
$\bar{F} = \bar{A} + C\bar{B}$

وبضم الخلايا المعلمة بأصفار (كما بالشكل 3-10(ب)) نحصل على عبارة مبسطة للدالة $\overline{F}$ في صورة جمع حواصل ضرب التالية:

$$\overline{F} = \overline{A} + \overline{B}\ C$$

بنفي الدالة $\overline{F}$ الناتجة نحصل على عبارة مبسطة للدالة F في صورة ضرب حواصل جمع المطلوبة حسب ما يلي:

$$F = \overline{\overline{F}} = \overline{\overline{A} + \overline{B}\,C}$$
$$= A\,(B + \overline{C})$$



(ب) ضرب حواصل الجمع القياسية

(أ) جمع حواصل الضرب القياسية

شكل 3-10 خريطة كارنوف للدالة F

إذا كانت الدالة المراد تبسيطها في صورة ضرب حواصل جمع غير قياسية، يمكننا الحصول على خريطة كارنوف الخاصة بها وذلك عن طريق نفي الدالة أولا للحصول على صورة جمع حواصل ضرب يسهل التعامل معها. ثم نستخدم الناتج لإيجاد خلايا الخريطة المعلمة بأصفار والتي تنتمي للدالة الأصل. وأخيرا نعلم باقي الخلايا بآحاد للحصول على خريطة كارنوف الدالة حسب المطلوب وكما يبين ذلك المثال التالي:

مثال6:

أوجد خريطة كارنوف للدالة:

$$F = (\bar{x} + \bar{y} + z)(y + z)$$

الحل:

نجد أولا نفي الدالة F للحصول على دالة في صورة جمع حواصل ضرب يمكن تحديد حواصل الضرب القياسية التي تنتمي لها بواسطة خريطة كارنوف.

$$\begin{aligned}\overline{F} &= \overline{(\bar{x} + \bar{y} + z)(y + z)} \\ &= (\overline{\bar{x} + \bar{y} + z}) + (\overline{y + z}) \\ &= xy\bar{z} + \bar{y}\bar{z}\end{aligned}$$

حدود حواصل الضرب القياسية التي تنتمي للدالة $\overline{F}$ هي المقابلة للخلايا 0، 4، 6 وهي بذلك لا تنتمي للدالة F. لذلك السبب نحصل على خريطة كارنوف الدالة F بتعليم الخلايا 0 و 4 و 6 بأصفار وتعليم باقي الخلايا باحاد ، وكما هو مبين بالشكل3-11 (وهو المطلوب).

x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	1	1	0

شكل3-11 خريطة كانوف دالة المثال6

3-4 بوابات NAND و NOR

استعرضنا فيما سبق كيف يمكن التعبير عن دالة بولينية في صورة جمع حواصل الضرب القياسية، والتي يكفي لتنفيذها العمليات المنطقية: AND ، OR ، NOT.

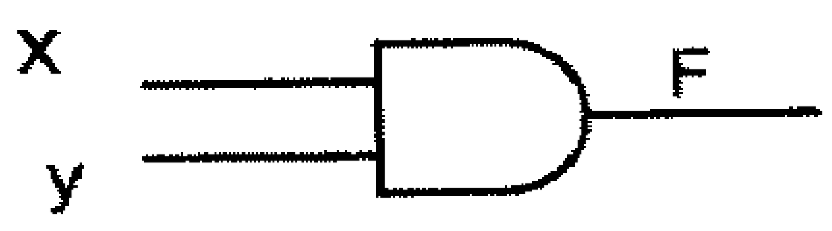
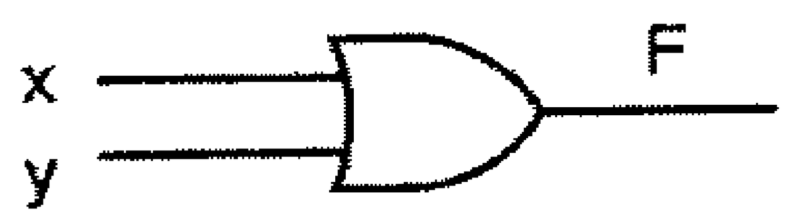
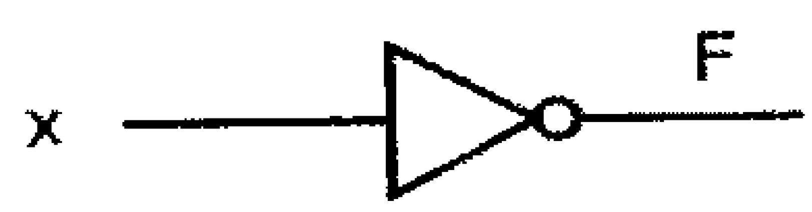
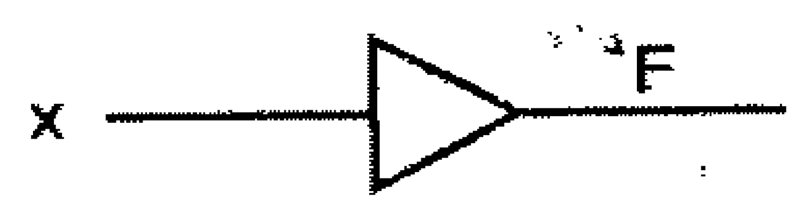
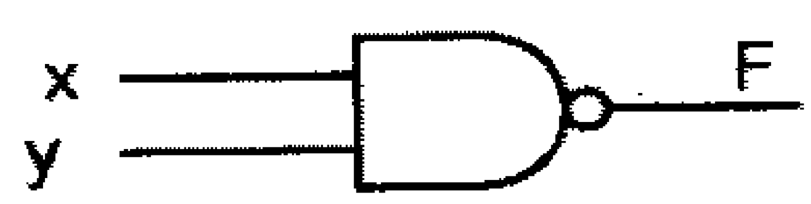
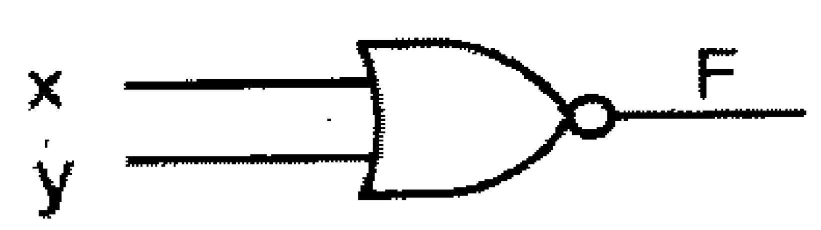
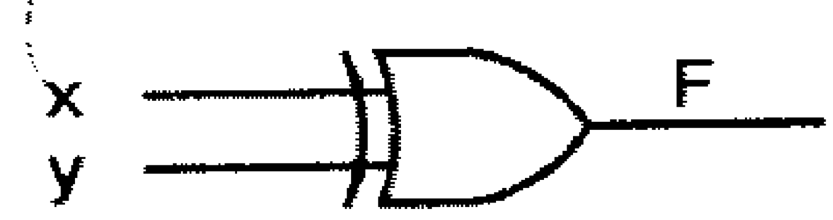
تعريف: يطلق على مجموعة عمليات منطقية التسمية: "مجموعة عامة" (Universal) إذا ما أمكن التعبير عن كل الدوال البولينية بعمليات من هذه المجموعة فقط.

إذا يبدو واضحا أن مجموعة العمليات المنطقية: AND ، OR، و NOT هي مجموعة عامة. وباستخدام نظرية ديمورغان يمكننا إثبات أن العمليتين المنطقيتين : OR و NOT تكون مجموعة عامة. فبما أن $x.y=\overline{\overline{x}+\overline{y}}$ فإن العمليتين OR و NOT يمكن أن تحل محل العملية AND في أي دالة بولينية ومن تم فإن مجموعة العمليات المنطقية OR و NOT مجموعة عامة. بطريقة مشابهة يمكننا إثبات أن مجموعة العمليتين المنطقيتين AND و NOT هي أيضا مجموعة عامة.

يبين الشكل3-12 رموز وجداول صدق ثماني بوابات منطقية.
وتعتبر هذه الرموز أكثر الرموز استخداما في الكتب التعليمية والتي منها هذا الكتاب أيضا.

لقد تعرفنا عن وظيفة البوابات المنطقية AND، OR، و NOT.
أما البوابة الوسيطة (Buffer) المبينة بالشكل3-12 فلا تؤدي أية وظيفة منطقية، بل تستخدم فقط لتضخيم الإشارة الكهربائية.
تنفذ **البوابة NAND** العملية AND-NOT ويتكون رمزها من رمز بوابة AND متبوعا بدائرة صغيرة للدلالة على عملية النفي. من جدول الصدق المرافق لرمز هذه البوابة بالشكل3-12 نجد أن خرج هذه البوابة يساوي المنطق 0 فقط عندما تكون مدخلات هذه البوابة جميعا عند المنطق 1، ويساوي خرجها المنطق 1 فيما عدا ذلك.
وتنفذ **البوابة NOR** العملية OR-NOT ويتكون رمزها من رمز بوابة OR متبوعا بدائرة صغيرة للدلالة على عملية النفي كما بالشكل3-12. ومن جدول الصدق المرافق لرمز هذه البوابة يتبين لنا أن خرج هذه البوابة لا يساوي المنطق 1 إلا في حالة أن تكون كافة مدخلات البوابة عند المنطق 0، بينما يساوي المنطق 0 فيما عدا ذلك.

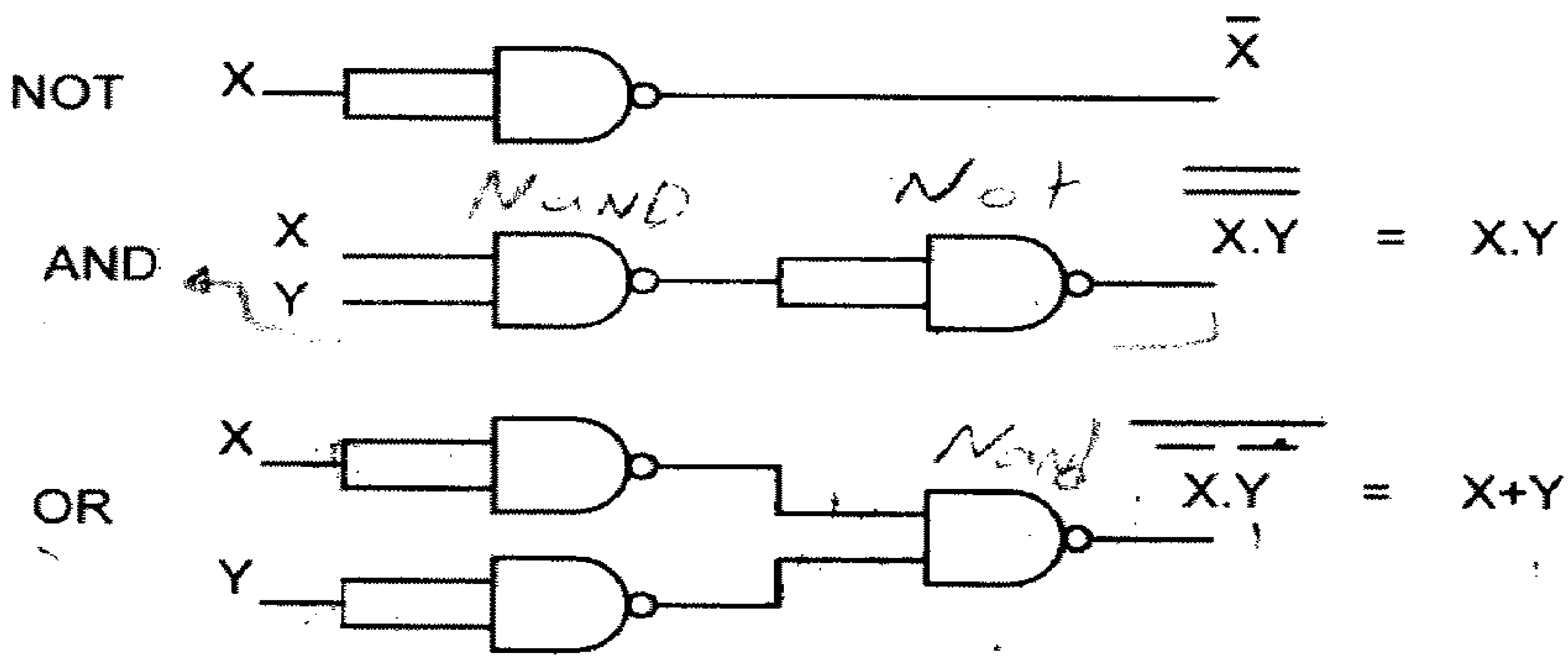
لكي ننفذ دالة منطقية يكفي أن نجد المعدات اللازمة لتنفيذ مجموعة عمليات منطقية عامة. وحيث إن البوابة NAND تنفذ العملية المنطقية NAND والبوابة NOR تنفذ العملية المنطقية NOR وحيث إن كلتيهما "بوابة عامة" فيمكن استخدام إحداهما فقط لتنفيذ الدوال البولينية.

العملية المنطقية	الرمز	الدالة البولينية	جدول الصدق
AND		$F = x \cdot y$	x y F 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1
OR		$F = x + y$	x y F 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1
Inverter		$F = \overline{x}$	x F 0 1 1 0
Buffer		$F = x$	x F 0 0 1 1
NAND		$F = \overline{x.y}$	x y F 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0
NOR		$F = \overline{x + y}$	x y F 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0
Exclusive- OR XOR		$F = x\overline{y} + \overline{x}y$ $= x \oplus y$	x y F 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0

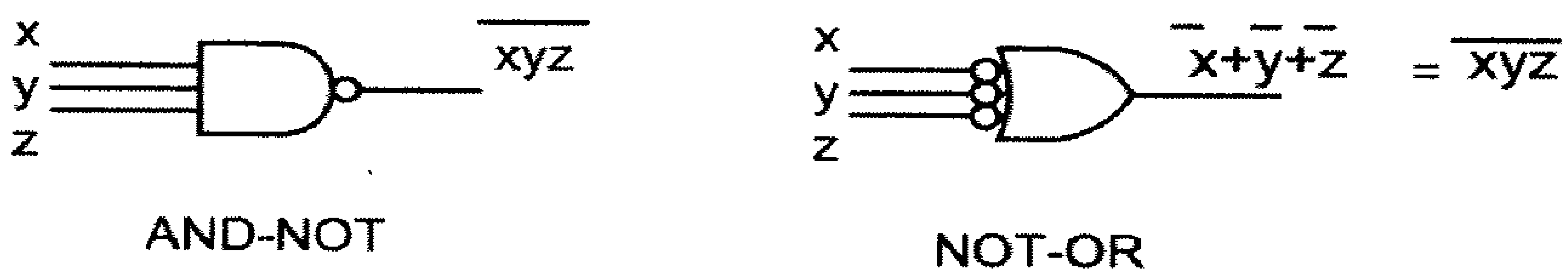
شكل3-12 البوابات المنطقية

3 ـ 5 تنفيذ الدوال البولينية ببوابات NAND فقط

يبين الشكل 3-13 أن بوابة NAND ذات المدخل الواحد لها سلوك بوابة NOT . كما يبين أنه يمكن الحصول على عملية AND من خلال استخدام بوابتي NAND ينتج عن الأولى عملية NAND وتنفي الثانية خرج الأولى للحصول على عملية AND. ويبين الشكل أيضا أن عملية OR تنفذ من خلال استخدام بوابة NAND ترافقها بوابتا نفي عند كل من مدخليها. وبالشكل تجد التحليل الجبري الذي يدعم صحة تنفيذ كل عملية من العمليات. إذا تعتبر بوابة NAND بوابة عامة ويمكننا استخدامها فقط لتنفيذ الدوال البولينية.



الشكل 3-13 تنفيذ العمليات المنطقية ببوابات NAND



الشكل 3-14 رمزان متكافئان لبوابة NAND

أولا: التنفيذ في مستويين

لكي تنفذ دالة بولينية باستعمال بوابات NAND في مستويين يتم أولا تبسيط الدالة في صورة جمع حواصل ضرب، ثم تنفيذ العبارة الناتجة في مخطط AND-OR. باستعمال طرق معالجة بسيطة يمكننا عندئذ تحول المخطط AND – OR إلى مخطط ينفذ الدالة في مستويين ويستعمل بوابة NAND فقط.

لتسهيل عملية التحويل إلى المنطق NAND، من المفيد تعريف رمز بديل لها. يبين الشكل 3-14 رمزين متكافئين لبوابة NAND. الرمز AND-NOT ، وكما عرف سابقا، يتكون من رمز بوابة AND متبوعا بدائرة صغيرة. كما يمكن التعبير عن بوابة NAND برمز بوابة OR مسبوقا بدائرة عند كل من مداخلها يطلق عليه مصطلح NOT-OR. ينشأ هذا التكافؤ من نظرية ديمورغان والعرف السائد بأن الدوائر ترمز إلى عملية النفي (NOT) أو Invert أي القلب.

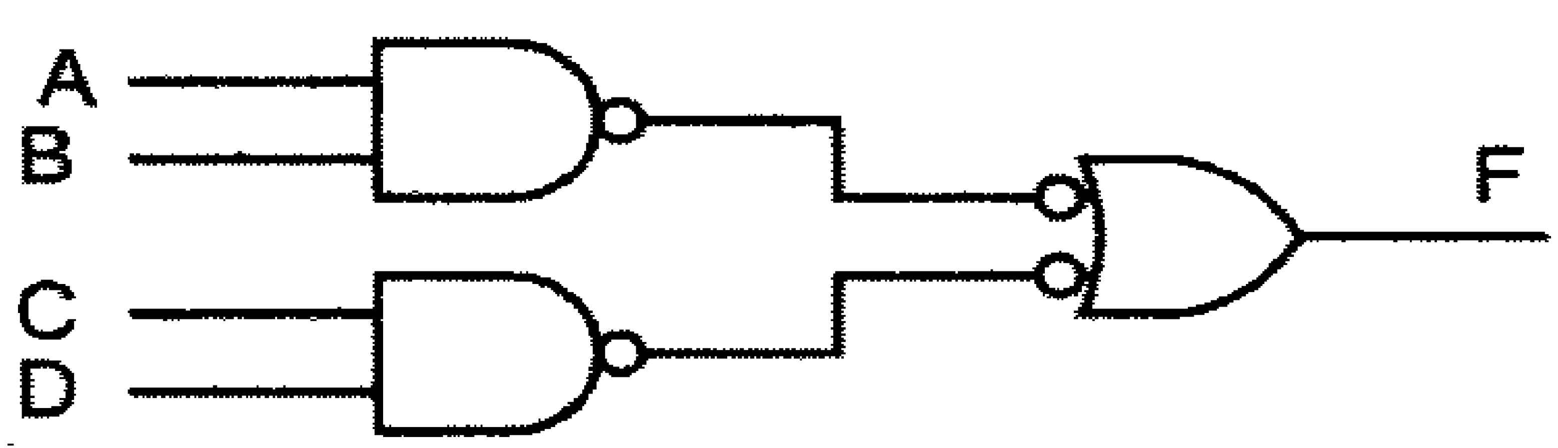
ولتوضيح كيف تنفذ عبارة بولينية في صورة جمع حواصل ضرب ببوابات NAND فقط دعنا ندرس المخططات الثلاثة المبينة بالشكل 3-15. المخططات الثلاثة متكافئة وتنفذ الدالة:

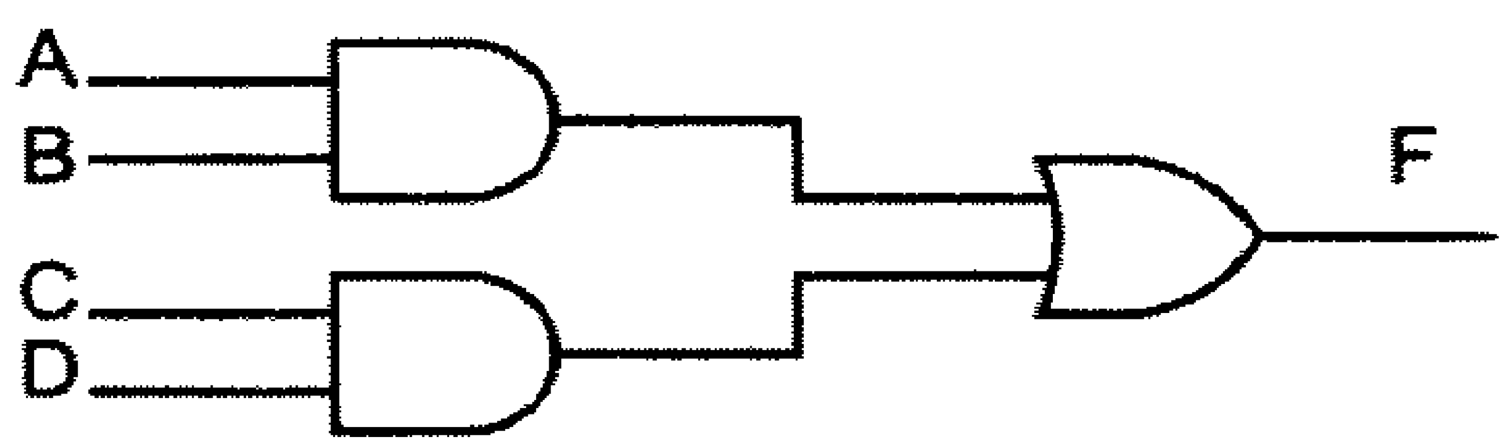
$$F = A\,B + C\,D$$

نفذت الدالة في (أ) ببوابات AND و OR . وفي (ب) تم إحلال بوابتي NAND محل بوابتي AND وإحلال البوابة NAND (بدلالة الرمز البياني NOT-OR) محل بوابة OR. تذكر أن الدائرة ترمز للنفي (NOT) وأن دائرتين على نفس المسار تمثلان نفي مزدوج يمكن إزالته (أي إزالة الدائرتين معا). لاحظ أن إزالة الدوائر الموجودة في بوابات الدارة في (ب) تؤدي إلى الحصول على الدارة في (أ) مما يدل على تكافؤهما وعلى أن المخططين ينفذان الدارة نفسها.

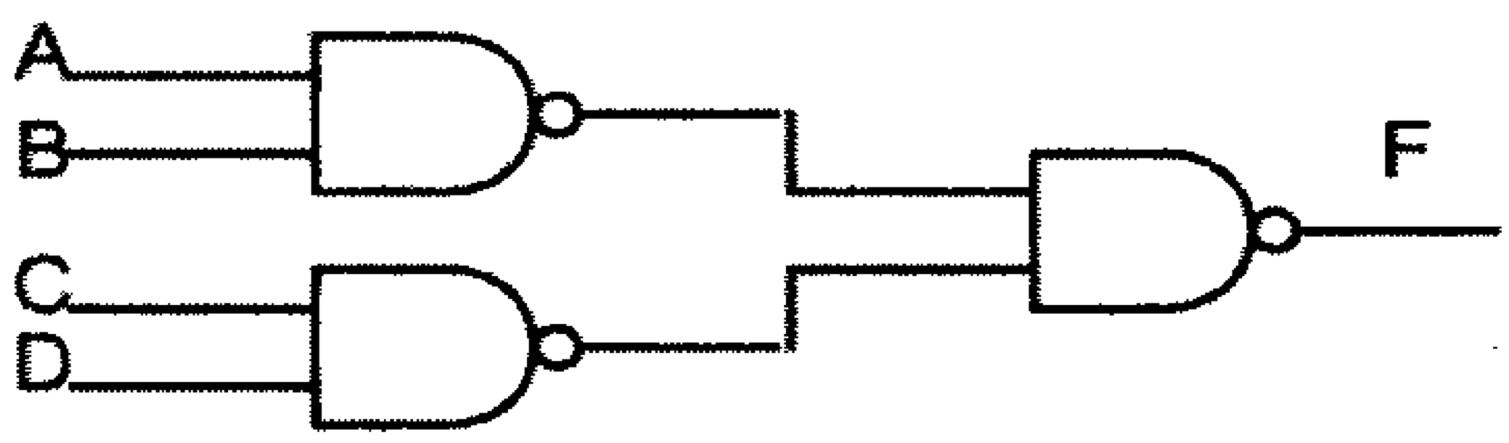
في االشكل 3-15(ج) أعيد رسم البوابة NAND جهة إخراج المخطط في (ب) باستخدام الرمز AND-NOT . ويمكن التحقق من صحة التنفيذ ببوابات NAND المبين في الشكل 3-15(ج) جبريا حيث يمكننا التعبير عن الدالة التي تنفذها الدارة بهذا الشكل في صورة جمع حواصل ضرب بتطبيق نظرية ديمورغان على النحو التالي:

$$F = \overline{\overline{AB}\,.\,\overline{CD}}$$
$$= \overline{\overline{AB}} + \overline{\overline{CD}}$$
$$= AB + CD$$





(ب) (أ)



(ج)

الشكل 3-15 دارات متكافئة للدالة F = AB + CD

مثـــال7:

نفذ الدالة البولينية التالية ببوابات NAND في مستويين.

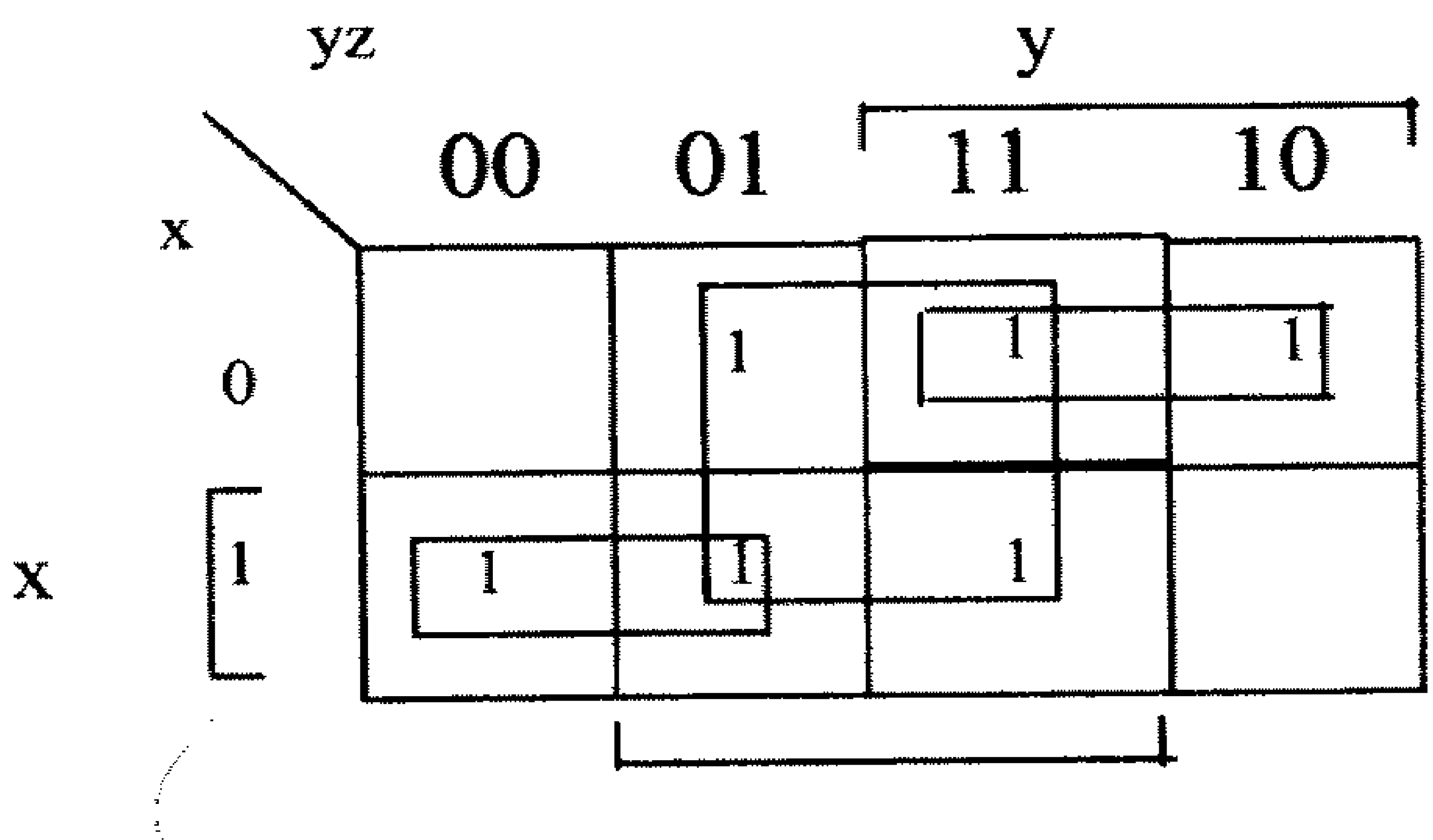
$$F(x,y,z) = \sum (1,2,3,4,5,7)$$

الحــل:

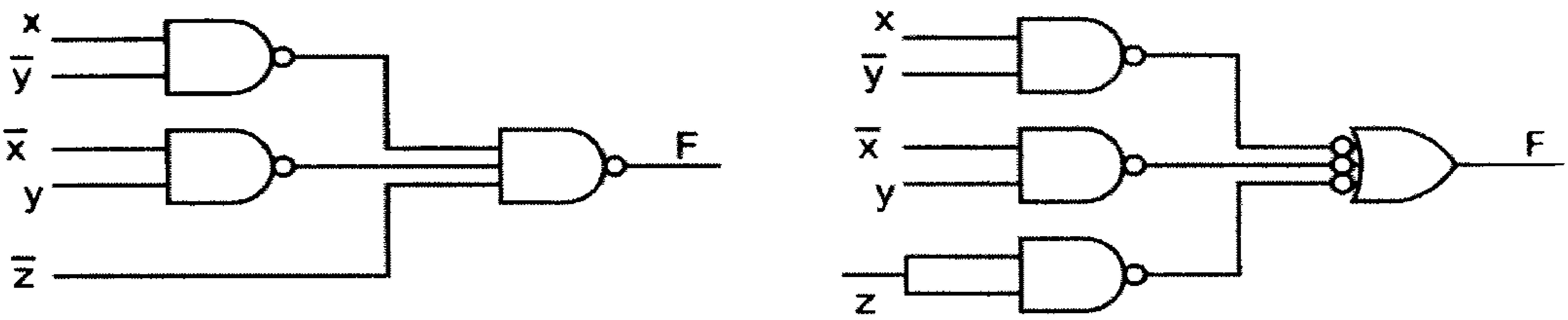
الخطـوة الأولـى نحـاول تبسيط الدالـة فـي صـورة جمـع حواصـل ضـرب. نستخدم لذلك مخطط كارنوف المبين بالشكل 3-16(أ) ، ومنه نحصل على الدالة المبسطة:

$$F(x,y,z)=\bar{x}\,y+x\,\bar{y}+z$$

الشـكل 3-16(ب) يبيـن تنفـيذ هـذه الدالـة بمسـتويين مـن بوابـات NAND. لاحظ بأن الدخل z قد مر من خلال بوابة NAND ذات دخل واحد (بوابـة نفي) لإلغاء مفعول النفي الناتج عن إدخال دائرة في المستوى الثانـي وعلـى نفس المسار ، وأن الرمز NOT-OR قد استخدم للتعبير عن بوابـة NAND جهـة الخـرج. ويبين الشكل 3-16(ج) طـريقة بديلـة لرسم هذه الـدارة. فـي هـذا الرسـم نجد أن كل بوابات NAND قد رسمت بدلالة رمـز واحـد. كمـا أن بوابـة NOT ذات الدخـل z قد أزيلت وعـوض عنها بنفي المتغير z ليظهر في الرسم $\bar{z}$.



(أ)



(ب) (ج)

الشكل3-16 مخطط كارنوف الدالة $F = \sum (1, 2, 3, 4, 5, 7)$
والتنفيذ بمستويين من بوابات NAND

من طريقة حل المثال السابق، يمكن تلخيص خطوات تنفيذ دالة بمستويين من بوابات NAND فيما يلي:

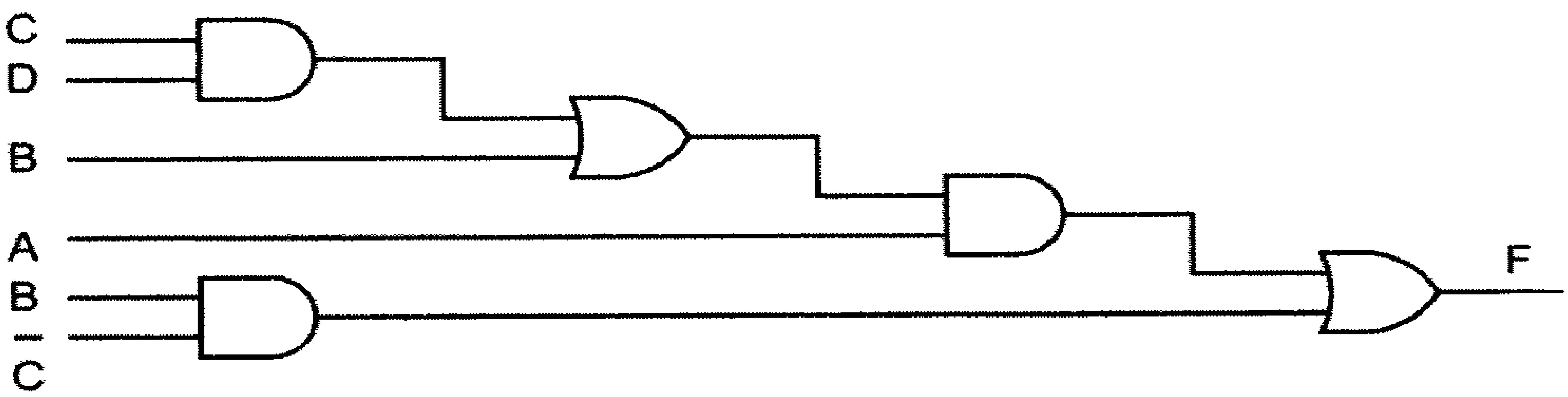
1. بسط الدالة وعبر عنها في صورة جمع حواصل ضرب.
2. ارسم بوابة NAND لكل حاصل ضرب بالعبارة المبسطة به حرفان على الأقل، بحيث تكون الحروف بالحد إشارات دخل البوابة NAND المقابلة. يكون مجموع هذه البوابات بعض بوابات المستوى الأول بالدارة.
3. ارسم بوابة NAND واحدة مستخدما الرمز البياني -AND NOT أو NOT-OR في المستوى الثاني مع جعل الإشارات عند مداخلها تأتي من مخارج البوابات بالمستوى الأول.
4. الحد الذي يتكون من حرف واحد يحتاج إلى بوابة نفي في المستوى الأول. أو يمكن نفيه ثم تسليطه مباشرة على البوابة NAND في المستوى الثاني.

ثانيا: دارات NAND عديدة المستويات

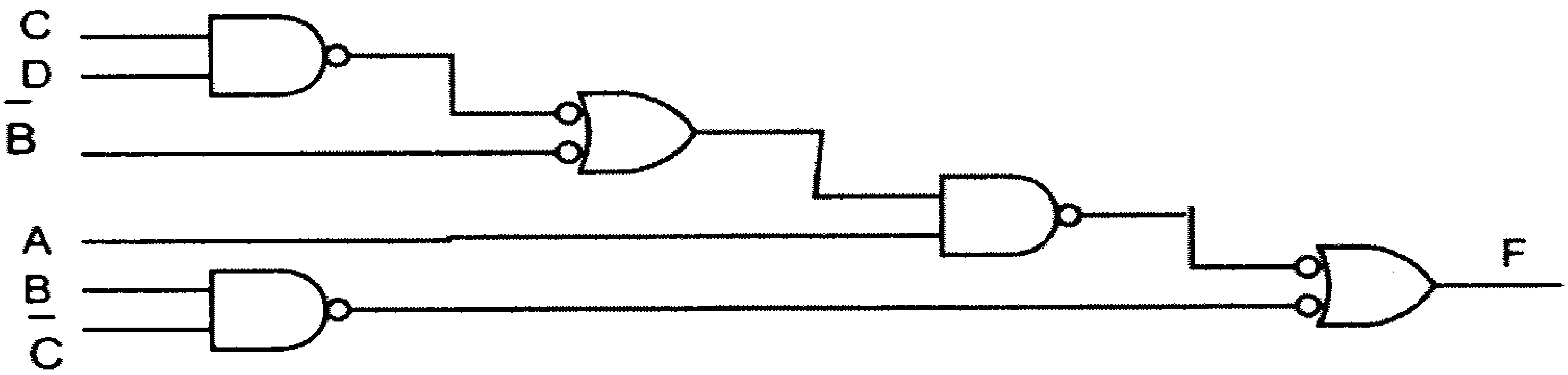
ينتج عن تصميم النظم الرقمية أحيانا دارات ذات ثلاثة مستويات أو أكثر. الطريقة العامة لبناء الدارات المنطقية عديدة المستويات هي التعبير عن الدالة البولينية بدلالة العمليات المنطقية AND و OR و NOT ثم تنفيذها مباشرة في دارة تستخدم بوابات AND ، OR، و NOT. ويمكن إذا كان لزاما تحويل مخطط الدارة إلى مخطط يستخدم فيه بوابات NAND فقط. فرغم أنه من الممكن مثلا معالجة الدالة البولينية $F = A(C.D + B) + B.\overline{C}$ لتصبح في صورة جمع حواصل ضرب، اخترنا أن ننفذها في دارة عديدة المستويات. في الشكل 3-17 (أ) نجد الدارة التي تنفذ هذه الدالة ببوابات AND-OR. للدارة أربعة مستويات من البوابات. المستوى الأول به بوابتا AND وبالمستوى الثاني بوابة OR متبوعة ببوابة AND في المستوى الثالث وبوابة OR في المستوى الرابع.

ويبدو أنه من الممكن تحويل المخطط الذي تتوالى فيه تباعا مستويات من بوابات AND و OR إلى دارة NAND باستخدام الرمز المكافئ NOT-OR كما هو مبين في الشكل 3-17(ب). تتمثل طريقة التحويل في إحلال الرمز AND-NOT محل كل بوابة AND وإحلال الرمز NOT-OR محل كل بوابة OR. تؤدي دارة NAND الناتجة نفس الوظيفة المنطقية التي يؤديها مخطط AND-OR الأصلي إذا ما تواجدت كل دائرتين أدخلت بالرسم (نتيجة الإحلال) على نفس الخط حتى يبطل مفعولهما. لذلك يجب إدخال بوابة NOT باستخدام البوابة المكافئة NAND ذات الدخل الواحد على امتداد كل دائرة لم يبطل مفعولها بدائرة أخرى (حتى يتم إبطال مفعولها) أو أن يتم نفي الدخل المرافق لها إذا كان ذلك ممكنا. فالدائرة المدخلة نتيجة الإحلال والمرافقة للدخل B في الشكل 3-17(ب) مثلا، تسبب في نفيه،

لذلك تم إبطال مفعولها وذلك بنفي الدخل المرافق لها أي بتغيير حرف الدخل B إلى $\overline{B}$.



(أ) التنفيذ ببوابات AND-OR



(ب) التنفيذ ببوابات NAND

شكل 3-17 تنفيذ الدالة $F = A(CD + B) + B\overline{C}$

تتلخص الطريقة العامة لتحويل مخططات AND-OR عديدة المستويات في الخطوات التالية:

1. إحلال بوابة NAND باستخدام الرمز AND-NOT محل كل بوابة AND في المخطط.
2. إحلال بوابة NAND باستخدام الرمز NOT-OR محل كل بوابة OR في المخطط.
3. التحقق من كل الدوائر بالمخطط المدخلة نتيجة الإحلال، ومع كل دائرة لم يبطل مفعولها بدائرة أخرى على امتداد نفس الخط ، أدخل بوابة NOT على شكل بوابة NAND ذات الدخل الواحد، أو قم بنفي الدخل المرافق لها إن أمكن.

مثـــال8:

نفذ الدالة البولينية عديدة المستويات:

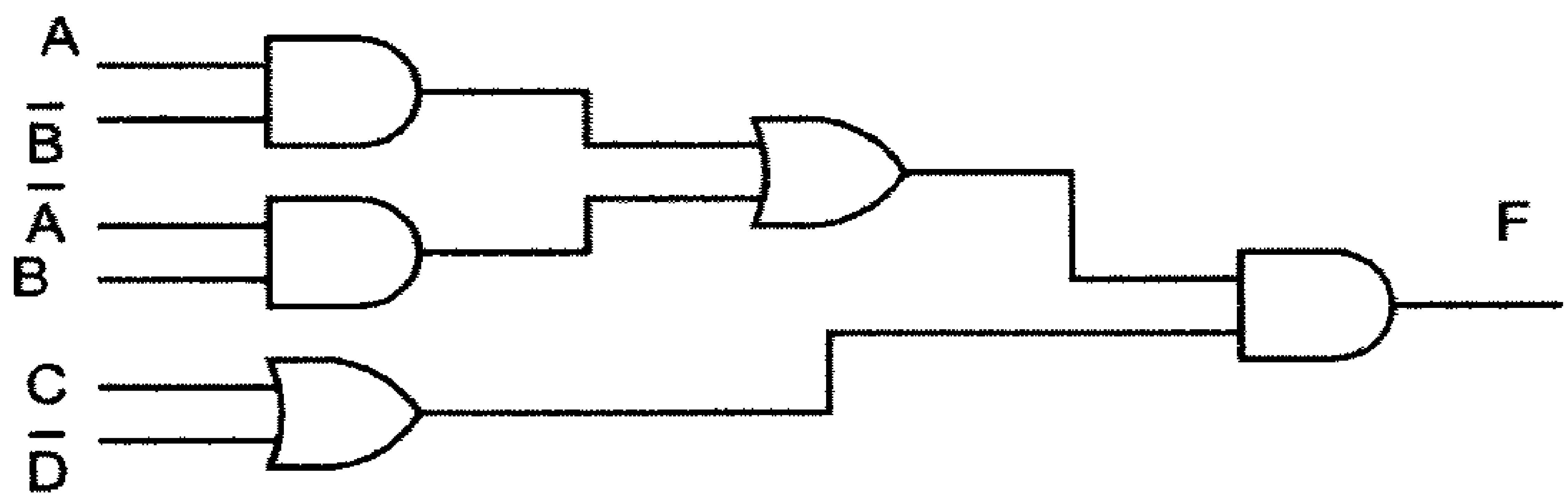
$$F = (A.\overline{B} + \overline{A}B)(C + \overline{D})$$

باستخدام بوابة NAND فقط.

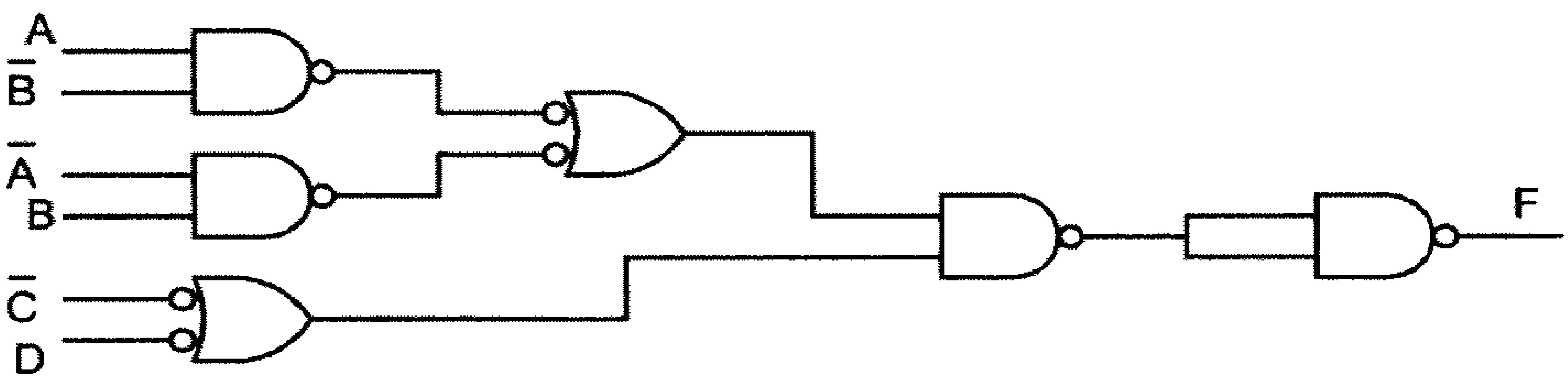
الحـــل:

يبين الشكل 3-18(أ) مخطط AND-OR ذا المستويات الثلاث الذي ينفذ هذه الدالة. وتتم عملية التحويل إلى مخطط NAND باستخدام الرمز NOT-OR كما في الجزء(ب) من الشكل 3-18. الدائرتان المرافقتان للدخلين C و $\overline{D}$ تسببان في نفي هذين الحرفين إلى $\overline{C}$ و D . كما أن الدائرة ببوابة NAND بجهة الإخراج تنفي الإشارة F، ولإبطال مفعولها ندخل بوابة NOT (بوابة NAND

ذات الدخل الواحد) لنفي الإشارة مرة أخرى من أجل الحصول على القيمة الأصلية F.



(أ) التنفيذ ببوابات AND-OR



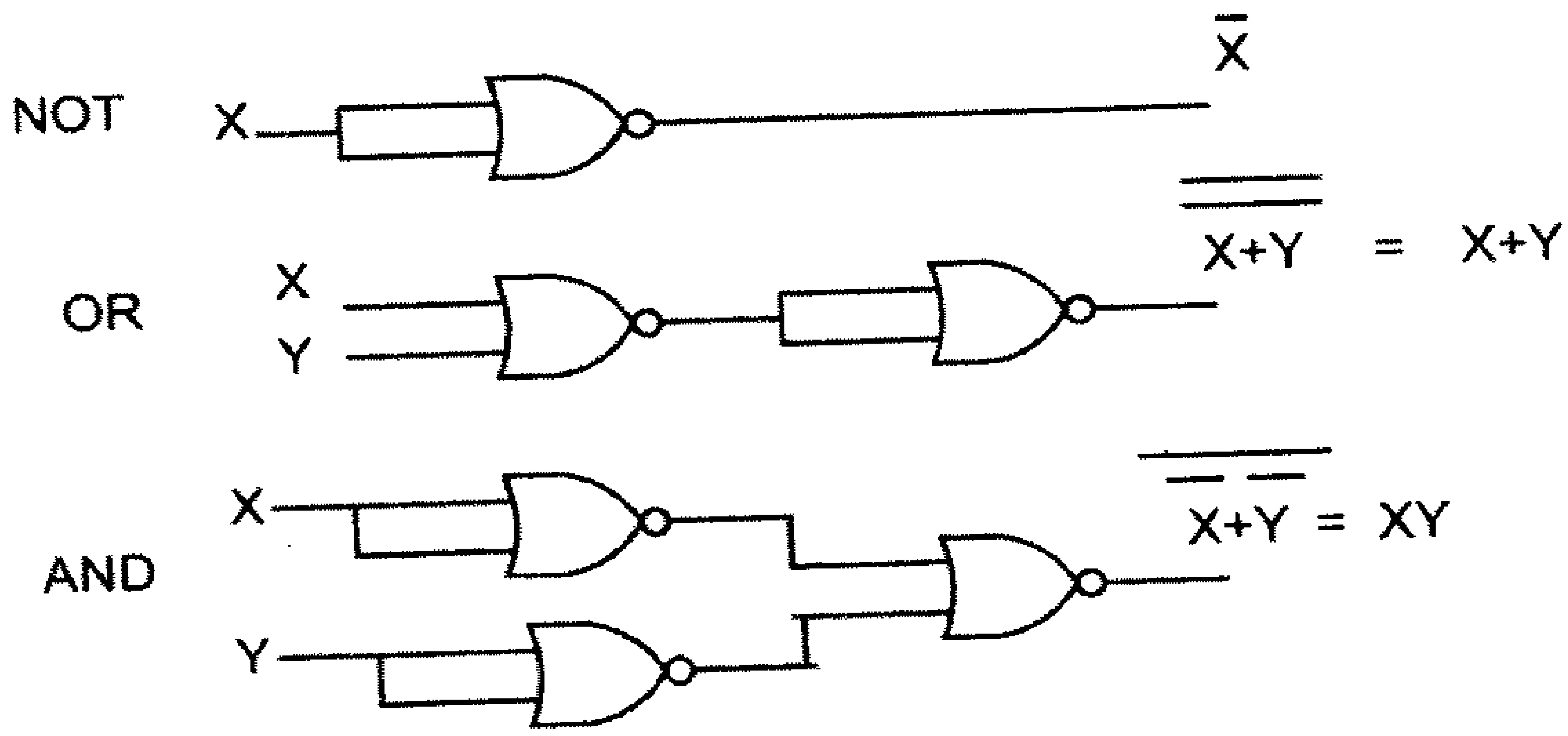
(ب) التنفيذ ببوابات NAND

الشكل 3-18

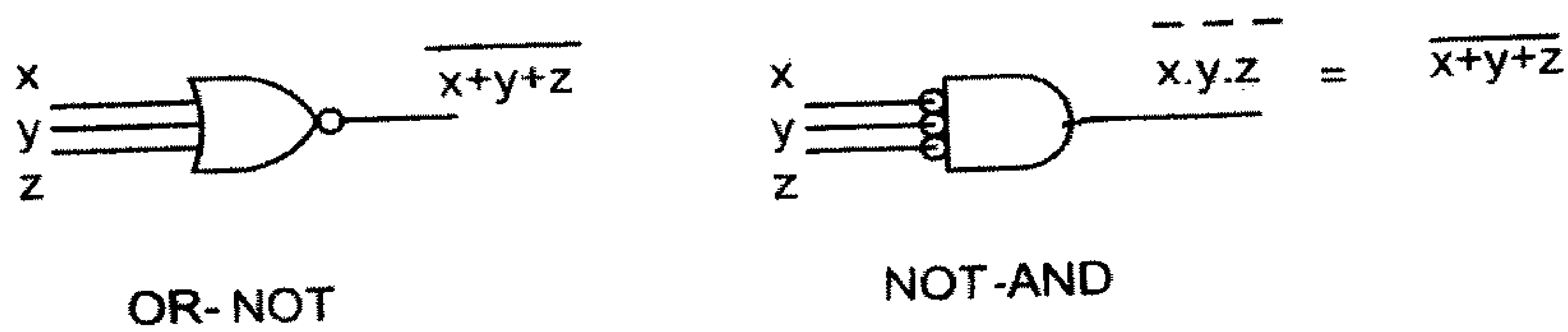
3-6 تنفيذ الدوال البولينية ببوابة NOR.

يبين الشكل 3-19 أن بوابة NOR ذات الدخل الواحد تسلك سلوك بوابة NOT. كما يبين كيف يمكن تنفيذ عملية OR من خلال استخدام بوابتي NOR ينتج عن الأولى عملية NOR وتنفي الثانية إخراج الأولى

للحصول على عملية OR. ويبين الشكل 3-19 أيضا كيف تنفذ عملية AND من خلال استخدام بوابة NOR ترافقها بوابات نفي عند مدخليها. وبالشكل تجد التحليل الجبري الذي يدعم صحة تنفيذ كل عملية من العمليات. لذا تعتبر بوابة NAND بوابة عامة يمكننا استخدامها فقط لتنفيذ الدوال البولينية.



الشكل 3-19 تنفيذ العمليات المنطقية ببوابات NOR



الشكل3-20 الرموز لبوابة NOR

أولا: في مستويين

يتطلب تنفيذ دالة بولينية باستعمال بوابات NOR في مستويين تبسيط الدالة في صورة ضرب حواصل جمع، ثم تنفيذ العبارة الناتجة في مخطط OR-AND يشتمل على مستوى أول من بوابات OR لتكوين حدود الجمع، متبوعا بمستوى ثان من بوابة AND لتنفيذ عملية الضرب. باستعمال طرق معالجة بسيطة للمخطط يمكننا عندئذ تحويل المخطط OR-AND إلى مخطط ينفذ الدالة في مستويين ويستعمل بوابة NOR فقط.

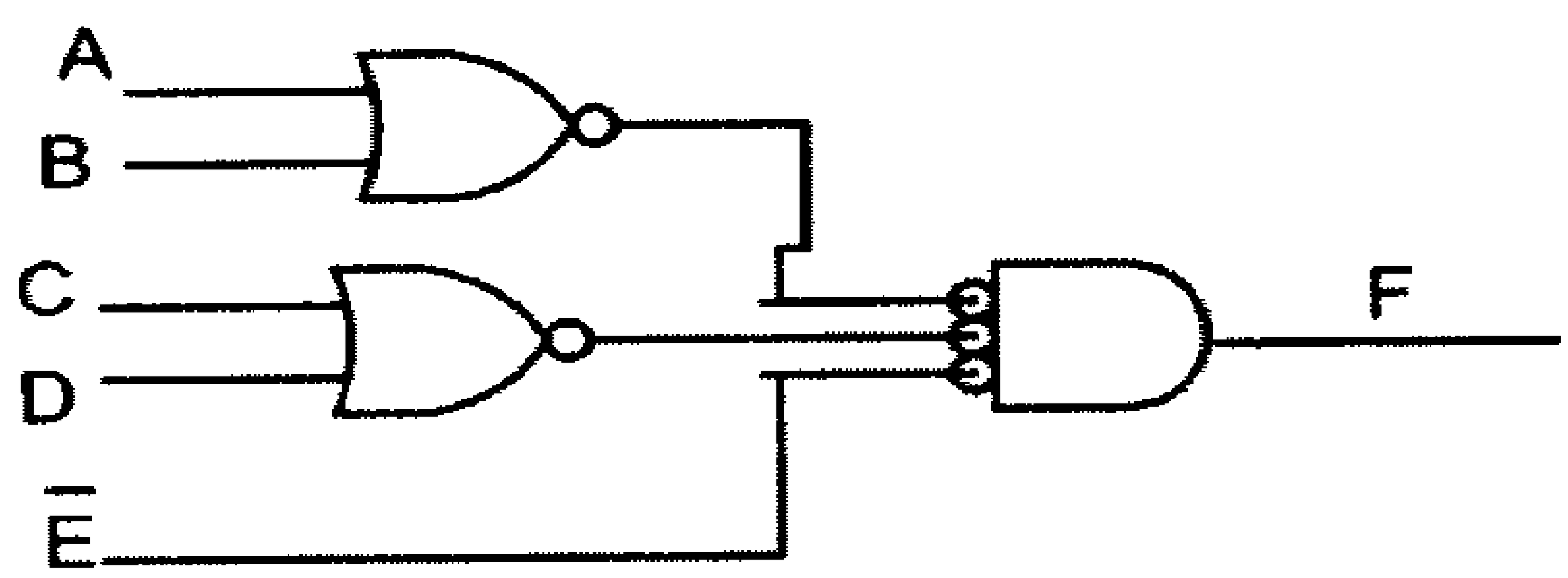
لتسهيل عملية التحويل إلى المنطق NOR، يبين الشكل 3-20 رمزين متكافئين لبوابة NOR. الرمز OR-NOT ، يتكون من رمز بوابة OR متبوعا بدائرة. أما الرمز المكافئ فيتكون من بوابة AND مسبوقا بدائرة عند كل دخل ويطلق عليه مصطلح NOT-AND. ينشأ هذا التكافؤ من نظرية ديمورغان والعرف السائد بأن الدائرة ترمز إلى عملية النفي (NOT).

مثـــال9:

نفذ الدالة البولينية: $F = (A+B)\ (C+D)E$ ، وهي في صورة ضرب حواصل جمع، باستعمال بوابة NOR فقط.

الحــل:

يبين الشكل 3-21 تنفيذ الدالة F في صورة ضرب حواصل جمع باستعمال بوابات NOR فقط.



شكل3-21 تنفيذ الدالة $F = (A+B)\ (C+D)\ E$ ببوابة NOR

لاحظ أنه بإلغاء زوج الدوائر المتتالية الواقع على نفس الخط يمكننا استرجاع مخطط OR-AND المنفذ للدالة، وأن عملية نفي المتغير E قد أجريت لإلغاء عملية النفي الناتجة من الدائرة الثالثة المدخلة عند الدخل الثالث للبوابة بالمستوى الثاني.

ثانياً: دارة NOR عديدة المستويات

تتم عملية تحويل مخطط AND-OR عديد المستويات إلى مخطط NOR بكيفية مشابهة لعملية تحويل مخطط AND-OR عديد المستويات إلى مخطط NAND. إلا أنه في حالة التحويل إلى NOR يجب إحلال بوابة NOR باستخدام الرمز OR-NOT محل كل بوابة OR. كما يجب إحلال بوابة NOR باستخدام الرمز NOT-AND محل كل بوابة AND. أخيرا، يتم التحقق من كل الدوائر المدخلة بالمخطط نتيجة عمليات الإحلال ، ومع كل دائرة لم يبطل مفعولها بدائرة أخرى على امتداد نفس الخط ، يجب إدخال بوابة NOT باستخدام البوابة المكافئة NOR ذات الدخل الواحد، أو نفي الدخل المرافق لها.

مثـــال10:

نفذ الدالة البولينية:

$$F = (A\overline{B} + \overline{A}B)(C + \overline{D})$$

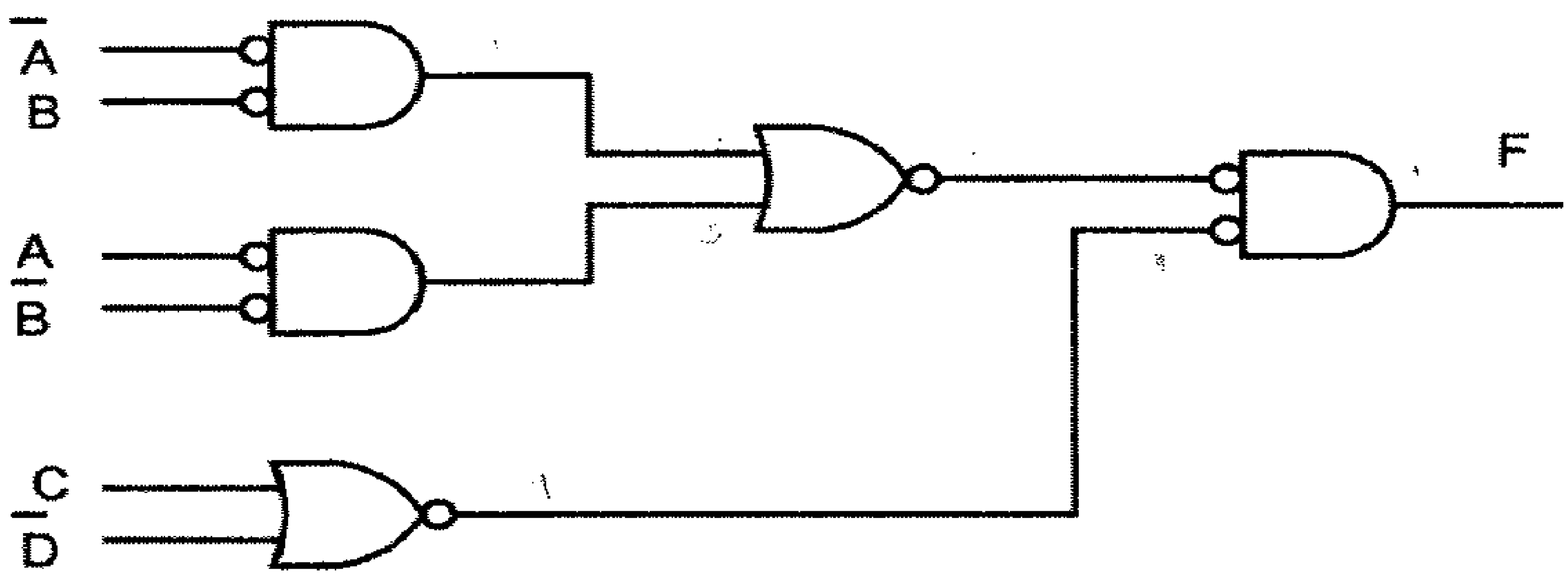
في دارة عديدة المستويات باستخدام بوابة NOR فقط.

لـ AND نفس المدخل Nor

Or " خرج Nor

الحـل:

سبق تنفيذ هذه الدالـة في مخطـط عديد المستويات كمـا هو مبين بالشكل 3-18(أ). ويمكن تحويل هذا المخطط إلى مكافئه المبين بالشكل 3-22 الذي يستخدم البوابة NOR فقط باتباع طريقة الإحلال السابق ذكرها. ويلاحظ أنه يمكن استرجاع المخطط AND-OR الأصلي من مخطط NOR هذا وذلك بإلغاء كل أزواج الدوائر المتتالية على نفس الخط، وإلغاء الدوائر المرافقة لحروف الدخل بعد نفيها، مما يؤكد تكافؤ المخططين.



شكل 3-22 تنفيذ الدالة F ببوابات NOR

3-7 بوابة أو المقتصرة XOR gate

بوابة أو المقتصرة عملية منطقية يرمز لها بالرمز ⊕ وتؤدي الوظيفة التالية:

$$x \oplus y = x\,\overline{y} + \overline{x}\,y$$

وناتج هذه العملية يساوي 1 فقط عندما يساوي أحد المتغيرين x أو y القيمة 1 (ولكن ليس الاثنان معا) أو بعبارة أخرى تكون النتيجة 1 في حالة اختلاف قيمة المتغيرين وتكون 0 في حالة تساويهما.

ويسمى نفي العملية XOR بالعملية **XNOR** ويعبر عن ذلك كما يلي:

$$\overline{x \oplus y} = x\,y + \bar{x}\,\bar{y}$$

وناتج العملية XNOR يساوي 1 فقط إذا ما تساوت قيمتا المتغيران x و y . أي فقط عندما يأخذ المتغيران معا القيمة 1 أو القيمة 0، لذلك تعرف هذه العملية أيضا بعملية **التكافؤ (Equivalence)**. بالشكل 3-11 يوجد جدولا صدق هاتين العمليتين ورمز كل منهما.

يمكن استخدام المعالجة الجبرية أو جدول الصدق لإثبات أن إحدى العمليتين XOR و XNOR هي نفي للأخرى.

$$\overline{x \oplus y} = \overline{x\,\bar{y} + \bar{x}\,y} = (\bar{x} + y)(x + \bar{y}) = x\,y + \bar{x}\,\bar{y}$$

كما يمكن إثبات المسلمات (Identities) التالية:

$$x \oplus 0 = x \qquad x \oplus 1 = \bar{x}$$

$$x \oplus x = 0 \qquad x \oplus \bar{x} = 1$$

$$x \oplus \bar{y} = \overline{x \oplus y} \qquad \bar{x} \oplus y = \overline{x \oplus y}$$

تحقق عملية XOR قانوني التبديل و التجميع، حسب ما يلي:

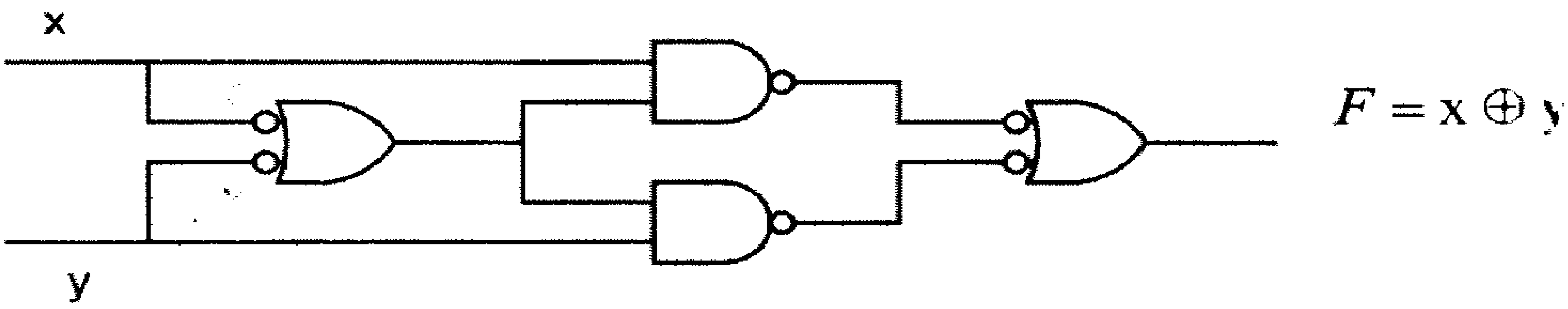
$$A \oplus B = B \oplus A$$

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) = A \oplus B \oplus C$$

ويدل هذا على أنه يمكن تبديل دخلي **بوابة XOR** من دون أن يتأثر ناتج عمل البوابة. كما أنه يمكن حساب عملية XOR لثلاثة متغيرات في أي ترتيب مما يدل على إمكانية استخدام بوابة XOR ذات ثلاثة مداخل. في الواقع يصعب صناعة بوابة XOR عديدة المداخل ،

وحتى بوابة XOR ذات الدخلين تبنى باستعمال البوابات المألوفة. الشكل 3-23 يبين تنفيذا لبوابة XOR باستعمال أربع بوابات NAND . ويؤدي المخطط المبين بالشكل العملية المنطقية التالية:

$$x(\bar{x}+\bar{y})+y(\bar{x}+\bar{y})=x\bar{y}+\bar{x}y$$



شكل 3-23 تنفيذ عملية XOR ببوابات NAND

3-8 الدالة المفردة

بالتعويض عن رمز العملية XOR في $x \oplus y \oplus z$ نحصل على الدالة المكافئة في صورة جمع حواصل الضرب التالية:

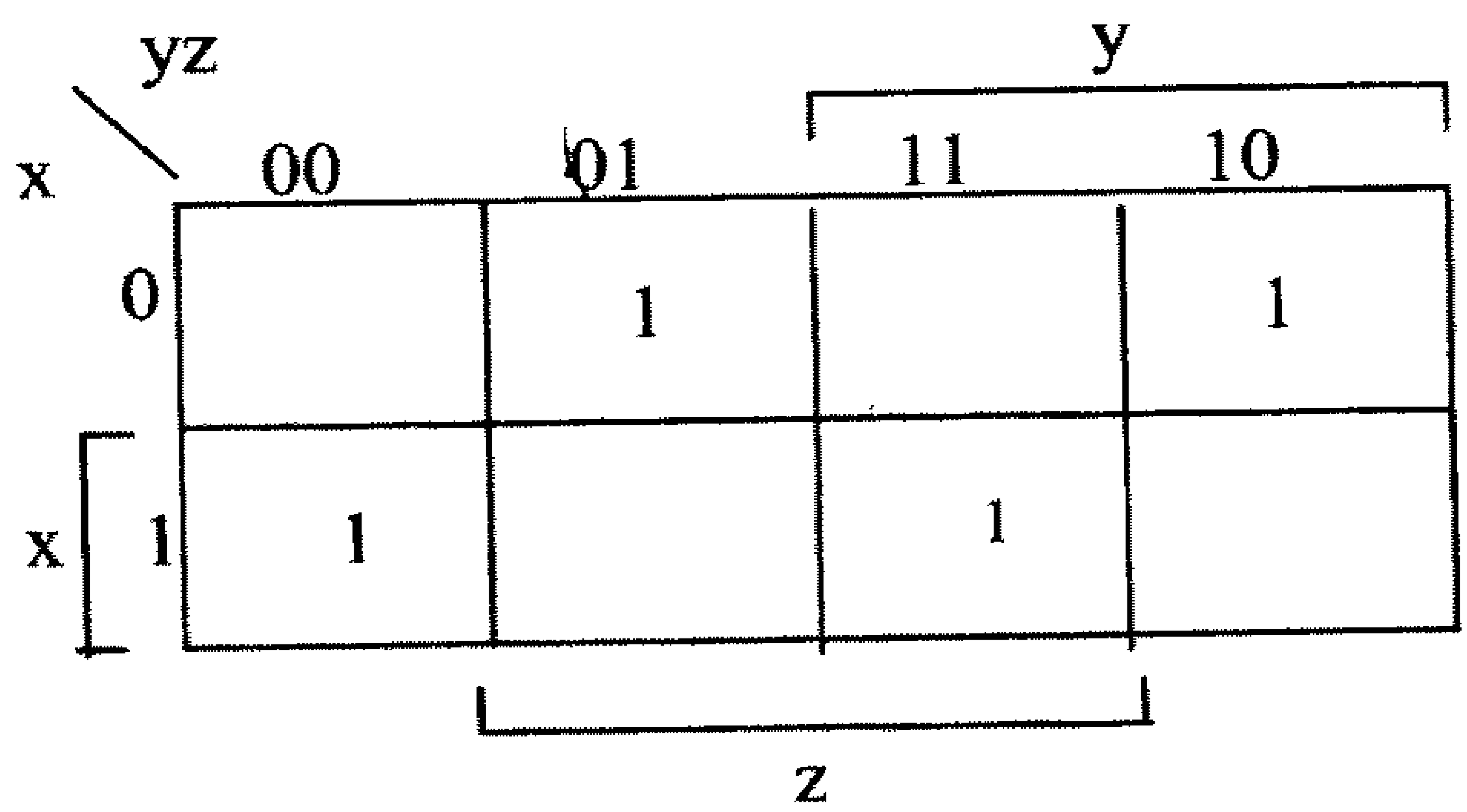
$$x \oplus y \oplus z = (x\bar{y}+\bar{x}y)\bar{z}+(xy+\bar{x}\bar{y})z$$
$$= x\bar{y}\bar{z}+\bar{x}y\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z+xyz$$

تبين حدود هذه العبارة البولينية أن دالة XOR ذات المتغيرات الثلاثة تساوي 1 فقط عندما يساوي أحد المتغيرات القيمة 1. أو عندما تساوي المتغيرات الثلاثة القيمة 1 معا. ولقد سبق أن عرفنا أن دالة XOR لمتغيرين تساوي 1 فقط عندما يساوي أحد المتغيرين القيمة 1. وعموما فإن دالة XOR لأي عدد من المتغيرات تساوي 1 عندما يساوي عدد مفرد من المتغيرات القيمة 1. لهذا السبب يطلق على **دالة XOR** عديدة المتغيرات لقب الدالة المفردة.

يبين الشكل 3-24 خريطة كارنوف لدالة XOR ذات المتغيرات الثلاثة. وتبين الخريطة حواصل الضرب القياسية التي تتضمنها هذه الدالة

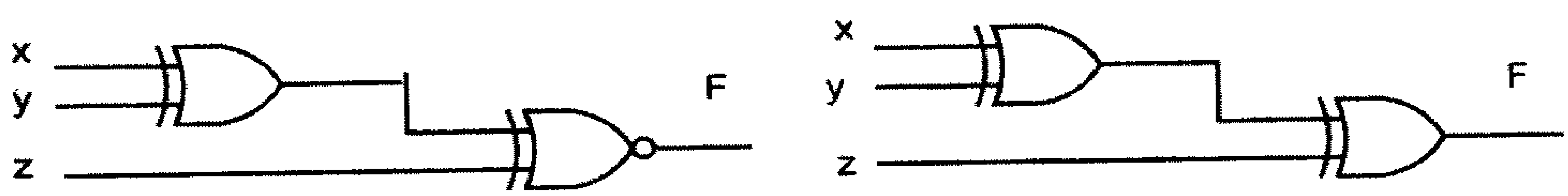
وهي التي تقابل الأعداد الثنائية: 100، 010، 001، 111 والتي بها عدد مفرد من الآحاد.

والجدير بالملاحظة أن حواصل الضرب القياسية التي لا تنتمي للدالة ولم تعلم المربعات المقابلة لها بخريطة كارنوف بآحاد تنتمي إلى نفي الدالة المفردة المكافئ للدالة الزوجية وهي دالة تساوي 1 عندما يساوي عدد زوجي من المتغيرات القيمة 1.



شكل3-24 خريطة كارنوف الدالة $x \oplus y \oplus z$

تنفذ الدالة المفردة ذات المتغيرات الثلاثة كما في الشكل 3-25(أ) باستخدام بوابات XOR ذات الدخلين. كما يمكن الحصول على تنفيذ لنفي الدالة المفردة (لتنفيذ الدالة الزوجية) وذلك



(ب) الدالة الزوجية

$F = \overline{x \oplus y \oplus z}$

(أ) الدالة المفردة

$F = x \oplus y \oplus z$

شكل 3-25 تنفيذ الدالة الفردية والدالة الزوجية ببوابة XOR وبوابة XNOR

بإدخال بوابة NOT عند خرج الدارة المفردة بالشكل 3-25(أ) أو باستبدال بوابة XOR جهة الخرج ببوابة XNOR وكما هو مبين بالشكل 3-25(ب).

ملخص

1. الهدف من تبسيط الدوال البولينية هو توفير عدد البوابات والوصلا اللازمة لتنفيذ الدالة.
2. خريطة كارنوف وسيلة سهلة لتبسيط الدوال البولينية التي تستخ أربعة متغيرات على الأكثر.
3. خريطة كارنوف تتكون من عدد من الخلايا كل خلية تمثل حدا م حدود حواصل الضرب أو حواصل الجمع القياسية.
4. تسمى خليتا خريطة كارنوف التي تقابل مجموعتين ثنائيتين تختلف ف خانة واحدة بخليتين متجاورتين.
5. في خريطة كارنوف ذات المتغيرات الثلاثة يمكن فقط ضم ع 2 أو 4 أو 8 خلايا متجاورة في حد واحد.
6. ينتج عن ضم خلايا في خريطة كارنوف في حد واحد، حد تختفي ف المتغيرات التي تكون منفية في بعض من هذه الخلايا وغير منفية ف بعضها الآخر.
7. يقل عدد حروف الحد الناتج عن ضم مجموعة من خلايا خريط كارنوف كلما زاد عدد الخلايا المضمومة.
8. يتم الحصول على دوال مبسطة في صورة جمع حواصل ضر وذلك بضم خلايا مخطط كارنوف المعلمة بآحاد المميزة لحواص الضرب القياسية التي تنتمي للدالة في أقل عدد من مجموعا خلايا متجاورة.
9. يتم الحصول على تعبير مبسط لدالة منطقية في صورة ضرب حواص جمع وذلك بضم الخلايا الخالية بمخطط كارنوف المميزة لحواص

الجمع القياسية التي تنتمي للدالة في أقل عدد من مجموعات خلايا متجاورة.

10. يطلق على مجموعة العمليات المنطقية التي يمكن التعبير عن كل الدوال البولينية بعمليات منها اللقب **"مجموعة عامة"**.

11. البوابتان NAND و NOR بوابتان عامتان ويمكن استخدام أحداهما فقط لتنفيذ الدوال البولينية.

12. تنفذ العبارات الجبرية البولينية في مخططات AND-OR ذات المستويين أو عديدة المستويات. ويمكن معالجة هذه المخططات للحصول على مخططات مكافئة تستخدم بوابات NAND فقط أو NOR فقط.

13. بوابة XOR ذات الدخلين x و y تنفذ العملية المنطقية $y \oplus x$ وتنتج المنطق 1 عند خرجها إذا ما اختلفت قيمة x وقيمة y.

14. البوابة XNOR تنفذ العملية المنطقية XNOR (نفي العملية المنطقية XOR). وتنتج المنطق 1 إذا ما تساوت قيمتا x و y.

تدريبات

1. بسط الدوال البولينية الآتية باستخدام خريطة كارنوف:

$F_1(A,B,C) = \sum(2,3,6,7)$

$F_2(x,y,z) = \sum(0,2,3,4,6)$

$F_3(A,B,C) = \sum(0,1,2,4,5)$

$F_4(A,B,C) = \sum(0,2,3,5,7)$

$F_5(x,y,z) = \sum(1,3,5,7)$

$F_6(A,B,C) = \sum(3,5,6,7)$

2. بسط العبارات الجبرية البولينية الآتية بواسطة خريطة كارنوف:

i) $AB + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$

ii) $x\bar{y} + \bar{y}z + xz$

3. مستخدما مخطط كارنوف، عبر عن كل من العبارات الجبرية التالية في صيغتيها القياسيتين:

i) $A\bar{B} + BC + AB\bar{C}$

ii) $xyz + \bar{x}z + xy\bar{z}$

4. بسط العبارات الجبرية الآتية في صورة (1) جمع حواصل ضرب و (2) ضرب حواصل جمع:

i) $x\bar{z} + \bar{y}z + xyz$

ii) $(\bar{A}+B)(A+\bar{C})(\bar{B}+C)$

5. بسط العبارات الجبرية البولينية الآتية ونفذ كلا منها ببوابات NAND.

i) $AB + A\overline{C} + \overline{A}BC$

ii) $BC + AB\overline{C} + A\overline{B}C$

6. نفذ الدالة البولينية الآتية ببوابات NAND ذات الدخلين:

$(AB + \overline{A}\,\overline{B})(C\overline{D} + \overline{C}D)$

7. ارسم المخطط المنطقي NAND للعبارتين الآتيتين مستخدما دارة NAND عديدة المستويات:

i) $W(X + Y + Z) + XYZ$

ii) $(A\overline{B} + C\overline{D})E + BC(A + B)$

8. أعد حل المسألتين 5 و 7 مستخدما بوابات NOR.

9. نفذ الدالة البولينية الآتية مستخدما بوابتي XOR و AND.

$$F = A\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}D$$

الباب الرابع

الدارات المنطقية التوافقية

Combinational Logic Circuits

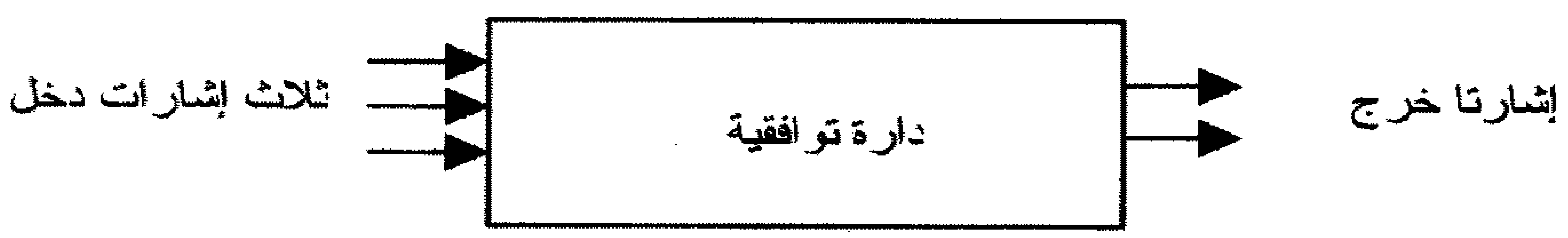
الباب الرابع

4 الدارات المنطقية التوافقية
Combinational Logic Circuits

4-1 مقدمة

تكون الدارات المنطقية بالأنظمة الرقمية إما توافقية أو تتابعية (تسلسلية). تتكون الدارة التوافقية من بوابات منطقية وتحدد إشارات خرجها عند لحظة ما مباشرة من قيم إشارات دخلها عند تلك اللحظة. وتؤدي الدارة التوافقية وظيفة يمكن تحديدها منطقيا بعدد من العبارات الجبرية البولينية. أما الدارة التتابعية فتستخدم عناصر خزن (عناصر ذاكرة) تسمى نطاطات (Flip-Flops) بالإضافة إلى البوابات المنطقية. تحدد قيم إشارات خرج هذه الدارات عند لحظة ما بدلالة قيم إشارات دخلها وحالة (State) عناصر الخزن بها. بالمقابل تعتمد حالة عناصر الخزن على قيم الدخل السابقة. عليه، لا يعتمد خرج الدارة التتابعية عند لحظة ما على قيم الدخل عند تلك اللحظة فحسب، بل على كل قيم الدخل السابقة.

تتألف الدارة التوافقية من عدد من المتغيرات الداخلة وعدد من البوابات المنطقية ومن المتغيرات الخارجة. تعالج البوابات البيانات الداخلة وتنتج بيانات رقمية مطلوبة عند جهة الخرج. يبين الشكل 4-1 المخطط الصندوقي لدارة توافقية لها ثلاث إشارات دخل تأتي من مصادر خارجية وإشارتا خرج تتصل بطرفيات خارجية.



شكل 4-1 مخطط صندوقي لدارة توافقية

يمكن وصف دارة توافقية بجدول صدق يبين قيم إشارات الخرج المنطقية مقابل كل الاحتمالات الممكنة لإشارات الدخل. كما يمكن وصف دارة توافقية بعدد من العبارات الجبرية البولينية واحدة لكل متغير من متغيرات الخرج.

2-4 تحليل الدارات التوافقية

الهدف من تحليل الدارة التوافقية هو استنتاج الوظيفة التي تؤديها الدارة والتعبير عن ذلك بعدد من الدوال البولينية أو بجدول صدق. وإذا ما أرفق بالمخطط المنطقي للدارة المطلوب تحليلها اسم أو عبارة تدل على وظيفتها فيكون الهدف من عملية التحليل هو التحقق من تلك الوظيفة.

يجب التأكد أولا من أن الدارة المراد تحليلها هي دارة توافقية وليست تتابعية. تتكون الدارة التوافقية من بوابات منطقية من دون مسارات للتغذية الخلفية أو عناصر خزن. يوجد مسار التغذية الخلفية إذا ربط خرج بوابة بالدارة بدخل بوابة أخرى تكون جزءا من دخل البوابة الأولى. وينتج عن وجود مسار للتغذية الخلفية أو عناصر خزن بالدارة، دارة تتابعية يتم تحليلها حسب النهج المتبع في تحليل الدارات التتابعية.

وعندما يتأكد لنا أن المخطط المنطقي هو دارة توافقية، نقوم عندئذ بإيجاد الدوال البولينية لكل إشارات الخرج أو جدول صدق يحدد العلاقة بين إشارات الدخل والخرج. أما إذا كانت وظيفة الدارة محل بحث ، فيكون من الضروري أيضا تفسير عمل الدارة من الدوال البولينية المشتقة أو من جدول الصدق.

4-2-1 اشتقاق الدوال البولينية.

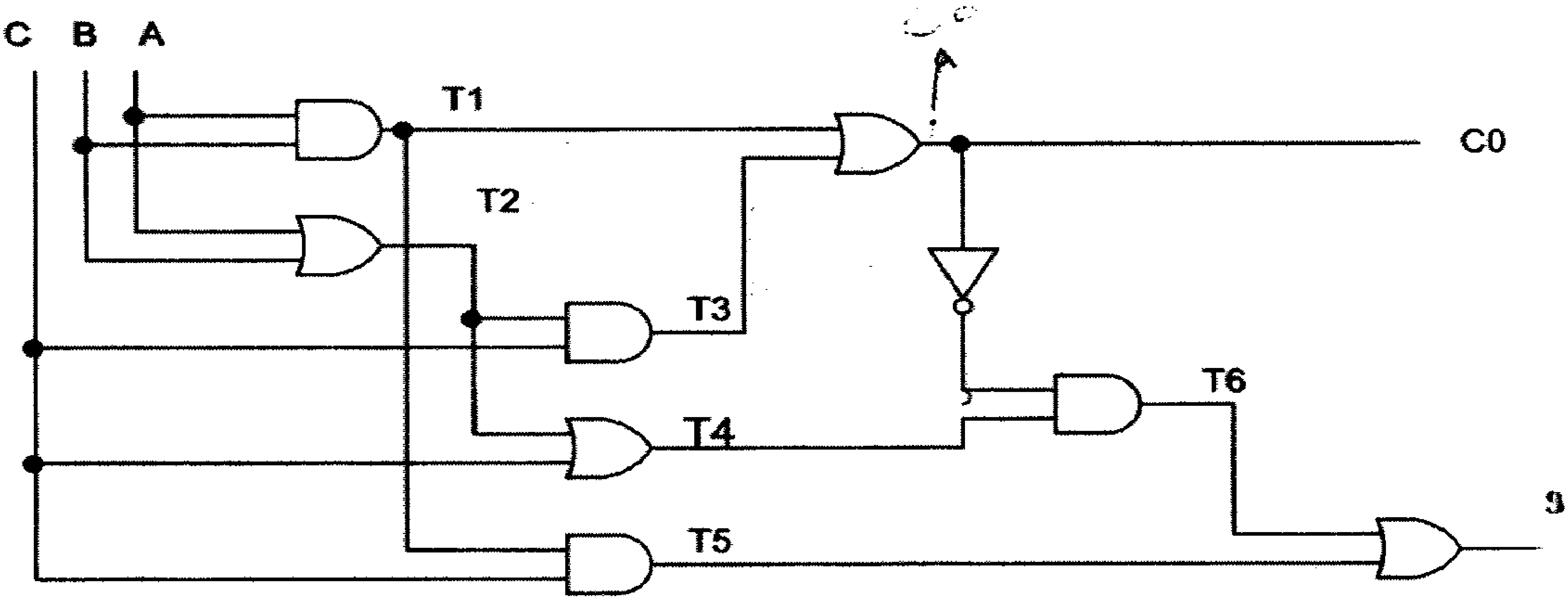
اتبع الخطوات الآتية للحصول على الدوال البولينية للمتغيرات عند جهة خرج الدارة التوافقية:

1. علم خرج كل بوابة بالمخطط يعتمد على متغيرات دخل برموز اختيارية وبين ذلك على المخطط.
2. علم خرج كل بوابة يعتمد على متغير دخل إضافة إلى رموز الخطوة 1، وأوجد الدالة البولينية لكل منها.
3. كرر الخطوة 2 حتى تحصل على دوال خرج الدارة بدلالة متغيرات الدخل.

مثـــال 1:

حلل الدارة التوافقية المبينة بالشكل 4-2 باتباع الخطوات السابقة.

الحـــل:



شكل 4-2 دارة توافقية

نلاحظ أولا أن للدارة ثلاث إشارات دخل: C, B, A وخرجين S و C_0 وأننا قد علمنا خرج البوابات كما بالرسم. T1 و T2 تعتمد على إشارات الدخل الخارجية فقط:

$$T_1 = A\,B$$
$$T_2 = A + B$$

يمكننا الآن إيجاد دوال الرموز التي تعتمد على الرموز T1 و T2:

$$T_3 = T_2\,C = (A + B)\,C$$
$$T_4 = T_2 + C = A + B + C$$
$$T_5 = T_1\,C = A\,B\,C$$

عند هذا الحد، يمكننا إيجاد الدالة البولينية لخرج الدارة C_0 على النحو التالي:

$$\begin{aligned} C_0 &= T_1 + T_3 \\ &= A\,B + (A + B)\,C \\ &= A\,B + A\,C + B\,C \end{aligned}$$

من هذه الدالة يمكننا ملاحظة أن الخرج C_0 يساوي 1 في الحالات التي يكون فيها إما (A=1 و B=1) أو (A=1 و C=1) أو (B=1 و C=1).
وبعبارة أخرى فإن الخرج C_0 يساوي 1 إذا ساوى اثنين من المتغيرات الثنائية: A، B، و C القيمة 1.

لإيجاد دالة الخرج S يلزم أولا إيجاد الدالة T6:

$$\begin{aligned} T_6 &= T_4 \,.\, \overline{C_0} \\ &= (A + B + C)\,\overline{\left[A\,B + C\,(A + B)\right]} \end{aligned}$$

يمكننا الآن إيجاد دالة الخرج S على النحو التالي:

$$
\begin{aligned}
S &= T_6 + T_5 \\
&= (A+B+C)\left[\overline{AB+(A+B)C}\right] + ABC \\
&= (A+B+C)(\overline{A}+\overline{B})(\overline{A}+\overline{C})(\overline{B}+\overline{C})+ABC \\
&= A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+ABC \\
&= A\oplus B\oplus C
\end{aligned}
$$

من هذه الدالة يمكننا ملاحظة أن الخرج S يساوي 1 عندما يساوي عدد فردي من المتغيرات الثنائية: A، B، و C القيمة 1.

4-2-2 اشتقاق جدول الصدق

تحلل الدارة البولينية عن طريق إيجاد جدول صدق الدارة التوافقية دون الحاجة لإيجاد الدوال البولينية للخرج. ويتم ذلك باتباع الخطوات التالية:

1. حدد عدد إشارات دخل الدارة وكون جدولا بكل الاحتمالات الممكنة لقيم هذه الإشارات الثنائية.
2. علم خرج بعض البوابات برموز اختيارية وحسب الحاجة.
3. أوجد جدول صدق خرج البوابات التي تعتمد على متغيرات دخل فقط.
4. تقدم بإيجاد جدول صدق خرج البوابات التي تعتمد على قيم حددت في خطوات سابقة حتى يتم تحديد كل القيم بأعمدة خرج الدارة بجدول الصدق.

مثـــال 2:

حلل دارة المثال السابق والمبينة في الشكل4-2، مستخدما جدول الصدق، وبين وظيفة هذه الدارة.

الحــل:

للدارة ثلاث إشارات دخل: A, B, C وإشارتا خرج: C_0, S.
يبين الجدول4-1 الذي يضم ثمانية احتمالات لمتغيرات الدخل، وجداول صدق كل الدوال المعلمة بالشكل4-2 وكذلك خرج الدارة مقابل كل احتمالات الدخل. لاحظ أن القيم بعمود الخرج C_0 قد حددت بمعرفة جدولي صدق الرمز T_1 و والرمز T_3 $(C_0=T_1+T_3)$ وأن قيم العمود T_3 قد حددت بمعرفة جدول صدق الرمز T_2 والدخل C $(T_3=T_2.C)$ كما أن القيم بعمود الخرج S بجدول الصدق قد حددت بمعرفة جدول صدق الرمز T_5 وجدول صدق الرمز T_6 $(S=T_5+T_6)$ وأن . $T_6 = T_4 . \overline{C_0}$

وبالتمعن في العلاقة بين قيم أعمدة الخرج C_0 و S و قيم الدخل نجد أن هذه الدارة تقوم بجمع ثنائيات الدخل الثلاثة A,B,C جمعا حسابيا والتعبير عن حاصل الجمع بالمتغيرين: S و C_0 , فمثلا عندما يكون ABC=101 يكون $C_0S=10$ ويعني هذا أن حاصل جمع A و B و C في هذه الحالة يساوي اثنين. وعموما فأن الخرج C_0S = 00 أو 01 أو 10 أو 11 عندما يكون عدد الآحاد عند الدخل ABC إما صفرا أو واحدا أو اثنين أو ثلاثة على التوالي.

جدول4-1 جدول صدق الدار المبينة بالشكل 4-2

A B C	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	C_0	S
0 0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	0	0	1	0	1	0	1
0 1 0	0	1	0	1	0	1	0	1
0 1 1	0	1	1	1	0	0	1	0
1 0 0	0	1	0	1	0	1	0	1
1 0 1	0	1	1	1	0	0	1	0
1 1 0	1	1	0	1	0	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1	1	0	1	1

4-3 تصميم الدارات التوافقية

تعرفنا في الفصول السابقة على الوسائل اللازمة لتصميم الدارات المنطقية التوافقية. تشتمل هذه الوسائل على الجبر البوولي، جداول الصدق، وتبسيط الدوال البولينية. تبدأ عملية التصميم بوصف للدارة المراد تصميمها وتنتهي بمخطط للدارة المنطقية. يمكن تلخيص خطوات تصميم الدارات المنطقية فيما يلي:

1. حدد من مواصفات الدارة عدد إشارات الدخل وعدد إشارات الخرج وأرمز لكل منه بحرف.
2. اشتق جدول صدق يحدد العلاقة بين دخل وخرج الدارة وحسب المواصفات المطلوبة.
3. استخدم جدول الصدق لإيجاد دالة بولينية مبسطة لكل خرج بدلالة متغيرات الدخل.
4. أرسم مخطط الدارة المنطقي.

مثــال 3:

صـمم دارة منطقية توافقية لها دخل يتكون من ثلاث متغيرات ثنائية، x,y,z وخرج واحد f. تخرج الدارة المنطق 1 عندما تكون القيمة الثنائية للدخل أقل من المقدار العشري ثلاثة، وتخرج المنطق 0 فيما عدا ذلك.

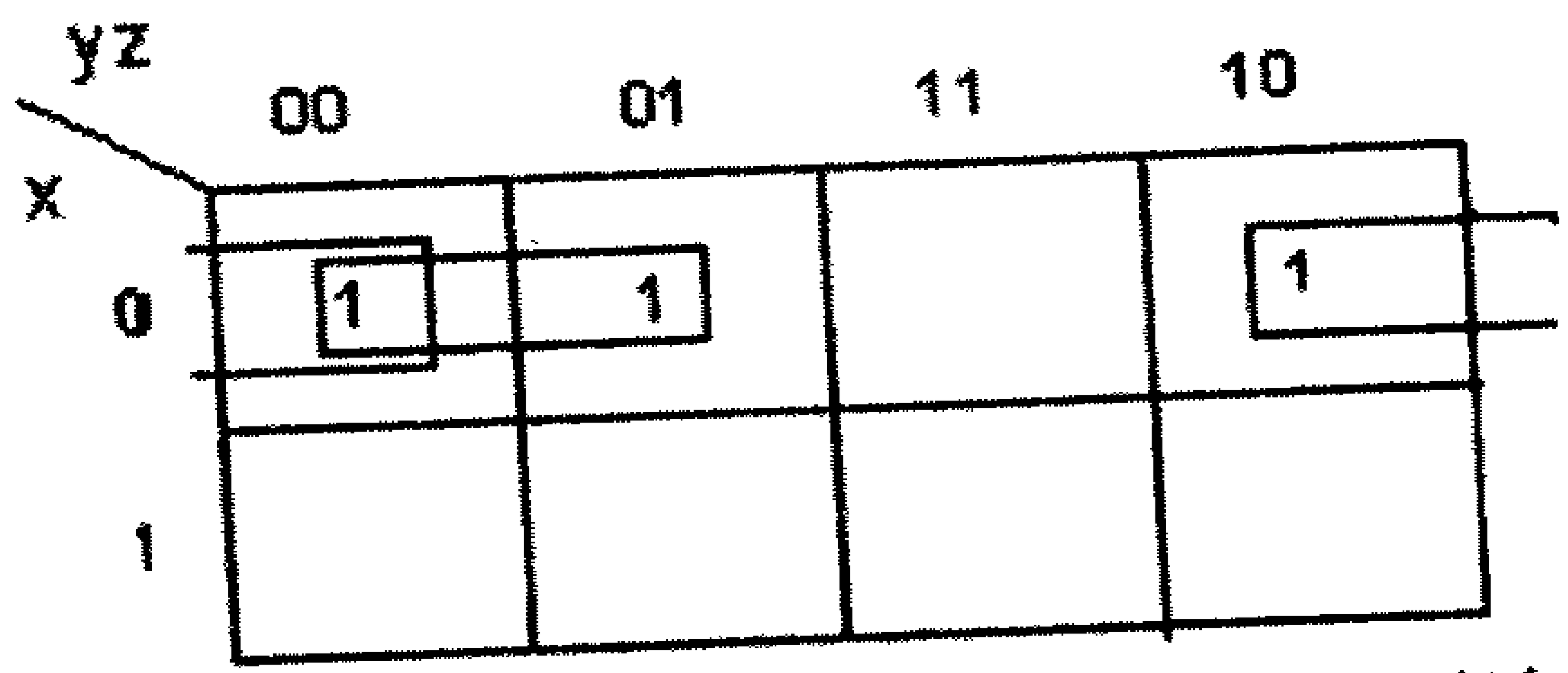
الحــل:

من مواصفات هذه الدارة يمكن استنباط جدول الصدق المبين بالجدول4-2. كما يمكن اشتقاق دالة بولينية مبسطة تعبر عن خرج هذه الدارة f باستخدام مخطط كارنوف المبين بالشكل4-3 في صورة جمع حواصل الضرب المبسطة، والدالة هي:

$$f(x,y) = \overline{\mathrm{x}}\,\overline{\mathrm{y}} + \overline{\mathrm{x}}\,\overline{z}$$

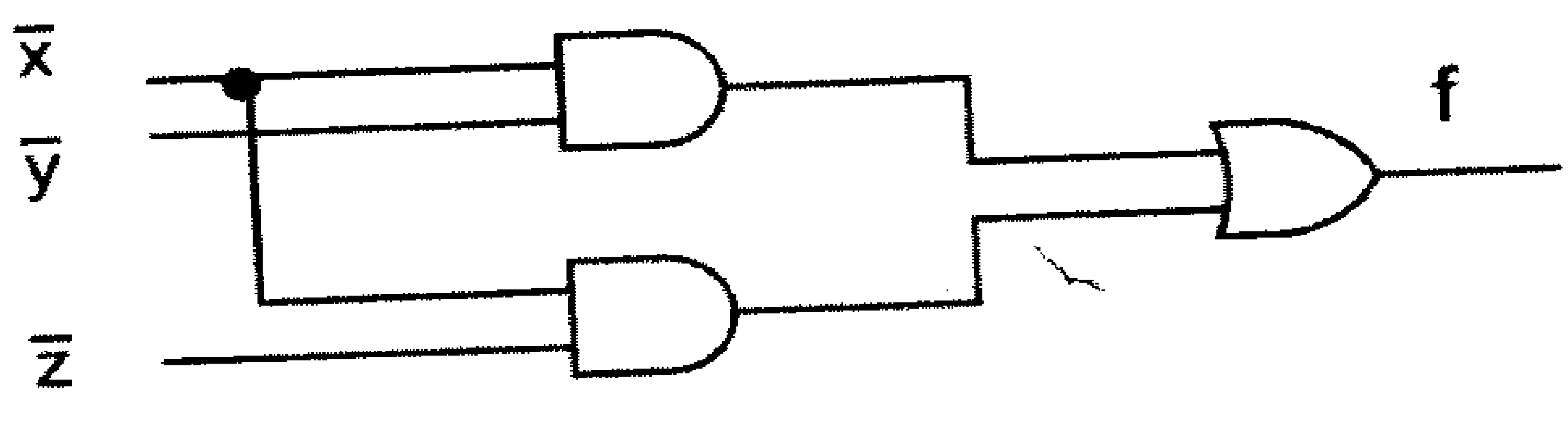
جدول4-2 جدول صدق دارة المثال3

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0



شكل4-3 مخطط كارنوف دارة المثال3

تنفذ هذه الدالة في مخطط للدارة كالمبين بالشكل4-4 وتنفذ إلكترونيا باستخدام بوابتي AND وبوابة OR.



شكل-4-4 مخطط الدارة المنطقية للمثال3

دارات الجمع الحسابي دارات توافقية تقوم بجمع أعداد ثنائية أو أعداد عشرية مرمزة بشفرات ثنائية. أبسط العمليات الحسابية هي عملية جمع خانتين ثنائيين (two binary digits). تسمى الدارة التوافقية التي تقوم بهذه العملية بدارة الجامع النصفي (Half Adder)

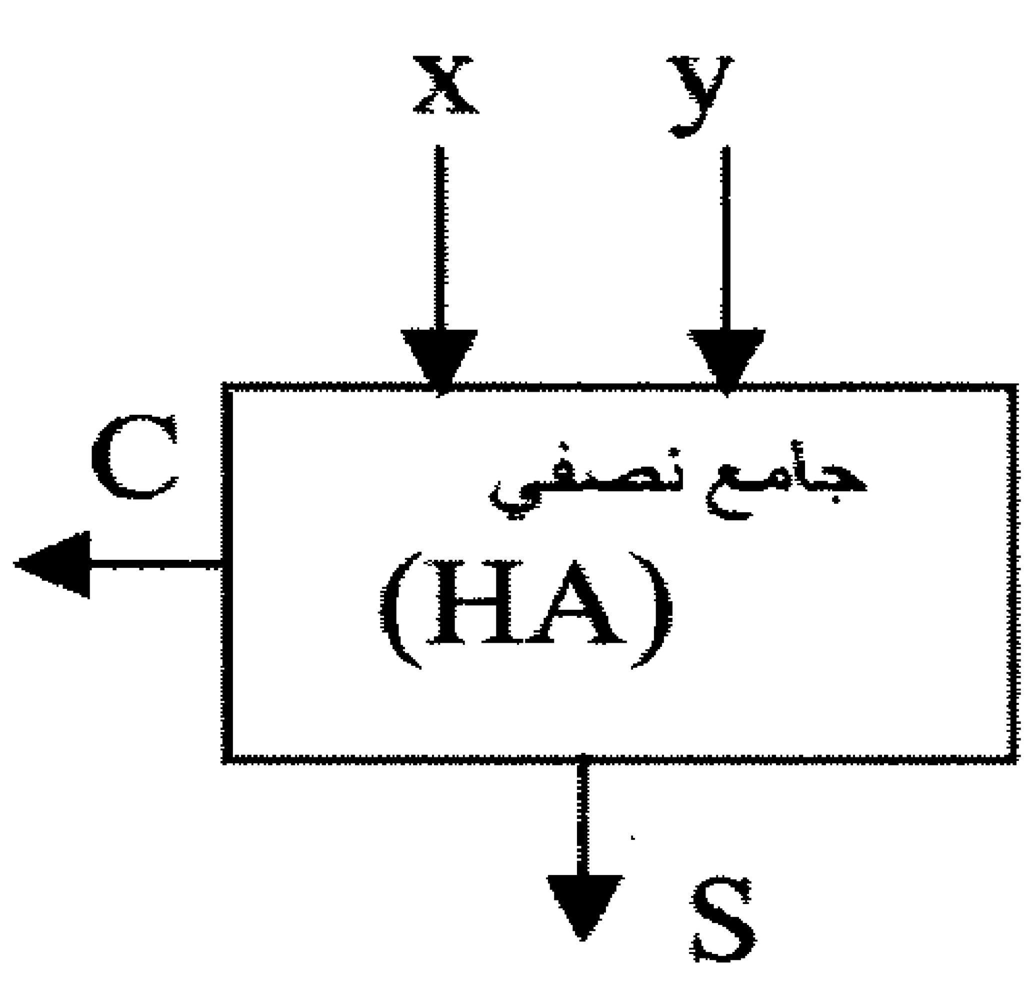
1- تصميم دارة الجامع النصفي Half Adder.

من الوصف السابق لدارة الجامع النصفي نستنتج أن للدارة دخلين اخترنا لتسميتهما الحرفين x و y. وحيث إن حاصل جمع خانتين ثنائيين، وكما سبق دراسته، يساوي إما 0 أو 1 أو 10 (اثنين)، نستنتج أن لدارة الجامع النصفي خرجين اخترنا لتسميتهما الحرفين S (ويرمز لحاصل الجمع) و C (ويرمز للمحمول الناتج من عملية الجمع) كما بالشكل 4-5.

الجدول 4-3 يحدد العلاقة بين دخل وخرج دارة الجامع النصفي. ومن الملاحظ أن المجموع S يساوي 1 عندما يكون x و y مختلفين وأن المحمول C يساوي 1 فقط عندما يكون كل من الرقمين x و y يساوي 1 . كما أن الخرج S يمثل الثنائية ذات المرتبة الدنيا وأن الخرج C يمثل الثنائية ذات المرتبة العليا في حاصل الجمع (CS) .

جدول 3-4
جدول صدق دارة الجامع النصفي

x	y	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0



شكل 4-5 مخطط صندوقي لجامع نصفي

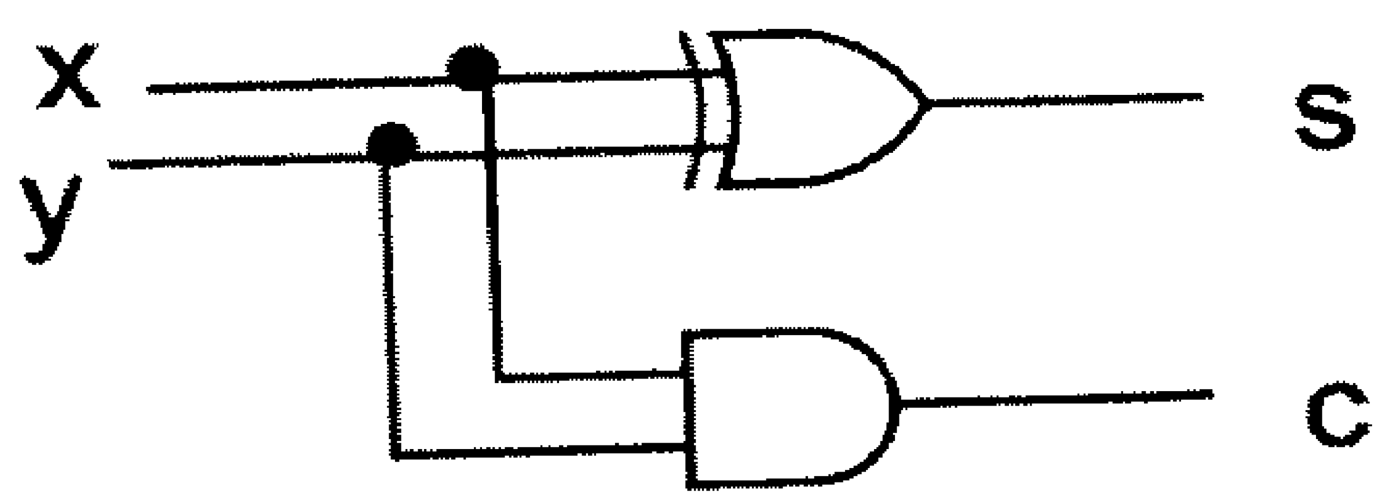
من جدول الصدق نستنتج دالة الخرج S البولينية ودالة الخرج C البولينية في أبسط صورة لهما:

$$S = \bar{x}\,y + x\,\bar{y} = x \oplus y$$

$$C = x\,.\,y$$

من هذه الدوال يمكننا رسم مخطط دارة الجامع النصفي المنطقية كما بالشكل 4-6.

تؤدي الدارة المنطقية بالشكل4-6 التي ننفذها عمليا باستخدام البوابتين: AND و XOR ، ما نفعله دهنيا عندما نجمع خانتين اثنتين. ويمكننا التحقق من صحة عمل هذه الدارة وذلك بتسليط (تطبيق) الجهد الكهربائي المسموح به، عند كل من الدخل x والدخل y، عال (يمثل المنطق 1) و منخفض (يمثل المنطق 0) وتسجيل الجهد عند خرج الدارة (C,S) لكل احتمالات الدخل. ويمكننا الإقرار بصحة عمل الدارة إذا ما تمكنا من تحقيق جدول الصدق4-3 عمليا.



شكل 4-6 المخطط المنطقي لدارة الجامع النصفي

2- تصميم دارة الجامع الكامل Full Adder

ينفذ الجامع النصفي أبسط العمليات الحسابية تعقيدا. ولكن لإتمام عملية جمع كاملة نحتاج لدارة جامع كامل (full adder) تقدر

على التعامل مع دخل المحمول أيضا، وذلك نظرا لأن عملية جمع عددين مثلا:

$$A+B = 1011 + 1110$$

تتم على النحو:

C	1110	محمول
A	1011	مضاف إليه
B	+ 1110	مضاف
	11001	

يمثل C المحمول الناتج من عملية جمع سابقة يجب جمعه للخانتين في عملية الجمع اللاحقة. لهذا، تكون الحاجة لدارة رقمية تقدر على جمع ثلاث خانات عند الدخل

دارة الجامع الكامل دارة منطقية توافقية تجمع ثلاث خانات ثنائية. للدارة ثلاثة مداخل، نرمز لها بالحروف A,B,C. وحيث إن حاصل جمع ثلاث خانات ثنائية تتراوح قيمته بين 0 و 3 في النظام العشري وبين 00 و 11 في النظام الثنائي، نستنتج أنه يجب أن يكون لدارة الجامع الكامل إشارتا خرج نرمز لهما بالحرفين S و C_0 كما بالشكل4-7. يمثل المتغير S الخانة ذات المرتبة الدنيا في حاصل الجمع (C_0S) وتمثل إشارة المحمول الخارج C_0 خانة ذات المرتبة العليا.

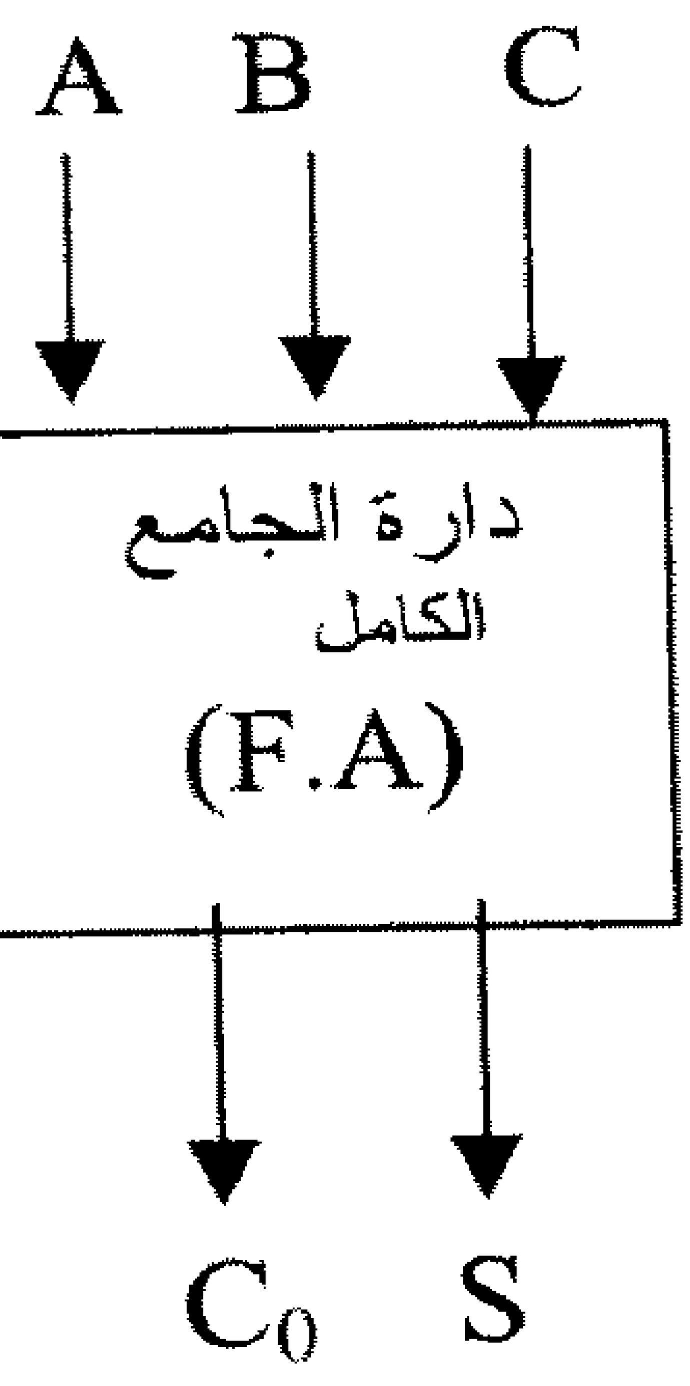
الجدول 4-4 هو جدول صدق الجامع الكامل الذي يحدد علاقة الخرج (C_0,S) بالدخل (A,B,C) وفيه نجد أن الخرج S يساوي 1 عندما يساوي عددا فرديا من إشارات الدخل القيمة 1. كذلك تساوي إشارة الخرج C_0 القيمة 1 عندما تساوي إشارتان أو أكثر من إشارات الدخل القيمة 1.

باستخدام خرائط كارنوف، المبينة بالشكل 4-8 نحصل على الدوال المبسطة لكل من إشارتي الخرج S و C_0 اللتين صغناهما في صورة ملائمة للتنفيذ وذلك على النحو التالي:

جدول4-4

جدول صدق دارة الجامع الكامل

A B C	C_0 S
0 0 0	0 0
0 0 1	0 1
0 1 0	0 1
0 1 1	1 0
1 0 0	~~1 0~~ 0 1
1 0 1	1 0
1 1 0	1 0
1 1 1	1 1



شكل4-7 مخطط صندوقي

الجامع الكامل

A \ BC	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

(ا) إشارة المحمول الخارج C_0

A \ BC	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

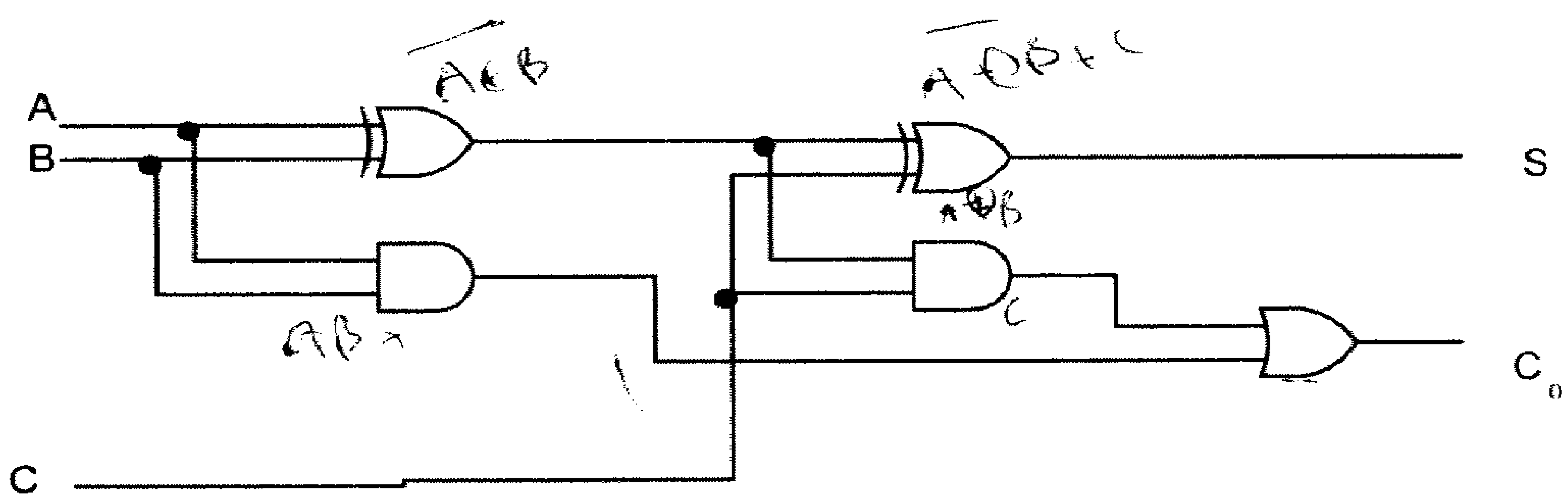
(ب) إشارة حاصل الجمع S

شكل4-8 خرائط كارنوف دارة الجامع الكامل.

$$
\begin{aligned}
S &= \overline{B}(A\overline{C}+\overline{A}C)+B(\overline{A}\,\overline{C}+AC)\\
&= \overline{B}(A\oplus C)+B(\overline{A\oplus C})\\
&= A\oplus B\oplus C\\
C_0 &= AB + C(A\overline{B}+\overline{A}B)\\
&= AB + C(A \oplus B)
\end{aligned}
$$

من هذه الدوال يمكننا رسم مخطط دارة الجامع الكامل المنطقية كما هو مبين بالشكل 4-9.

تؤدي الدارة المنطقية المبينة بالشكل 4-9 التي ننفذها عمليا باستخدام البوابات المنطقية: AND ، OR، و XOR ، ما نفعله دهنيا عندما نجمع ثلاث خانات. ويمكننا، كما في حالة الجامع النصفي، التحقق من صحة عمل هذه الدارة عمليا وذلك بتسليط الجهد الكهربائي المسموح به، عند كل من الدخل A والدخل B والدخل C وتسجيل الجهد عند خرج الدارة S, C_0 لكل احتمالات الدخل والإقرار بصحة عمل الدارة إذا ما تحقق جدول الصدق 4-4 عمليا.



شكل 4-9 دارة الجامع الكامل

$(A \oplus B \cdot C) \cdot AB$

3- الجامعات الثنائية Binary Adders

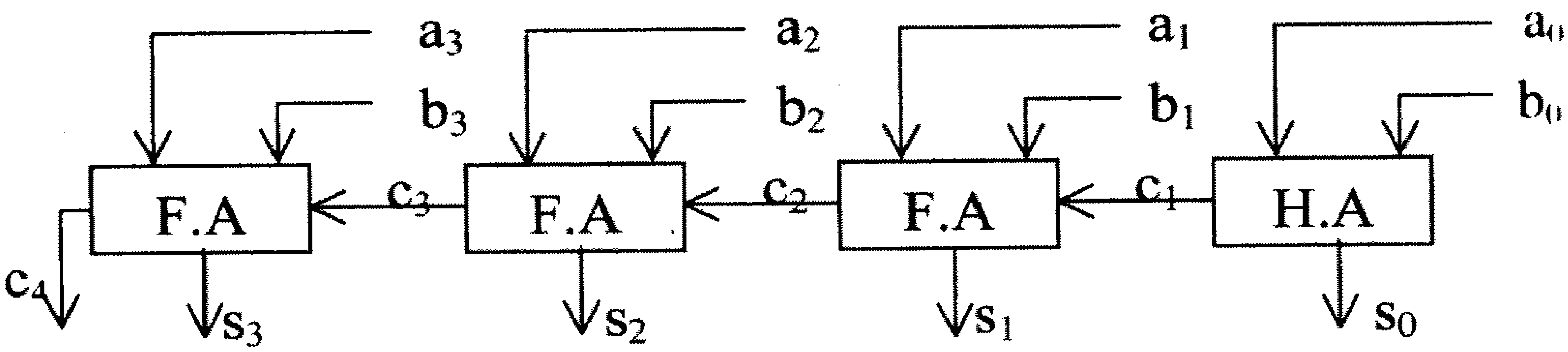
يبين الشكل 4-10 جامعا ثنائيا. وهو عبارة عن دارة منطقية تستطيع إضافة عددين ثنائيين اثنين. الصندوق الذي على اليمين (المسمى H.A) يمثل جامعا نصفيا. دخلاه هما a_0 و b_0 وخرجاه هما s_0 (مجموع Sum) و c_1 (محمول Carry). أما باقي الصناديق الأخرى فتمثل جامعات كاملة (F.A) لكل منها ثلاثة مداخل (a_n و b_n و c_n) وخرجان (s_n و c_{n+1}). تجمع هذه الدارة عددين ثنائيين. وبعبارة أخرى فهي تحقق عملية الجمع التالية:

$$\begin{array}{r} a_3a_2a_1a_0 \\ +\ \ b_3b_2b_1b_0 \\ \hline c_0s_3s_2\,s_1s_0 \end{array}$$

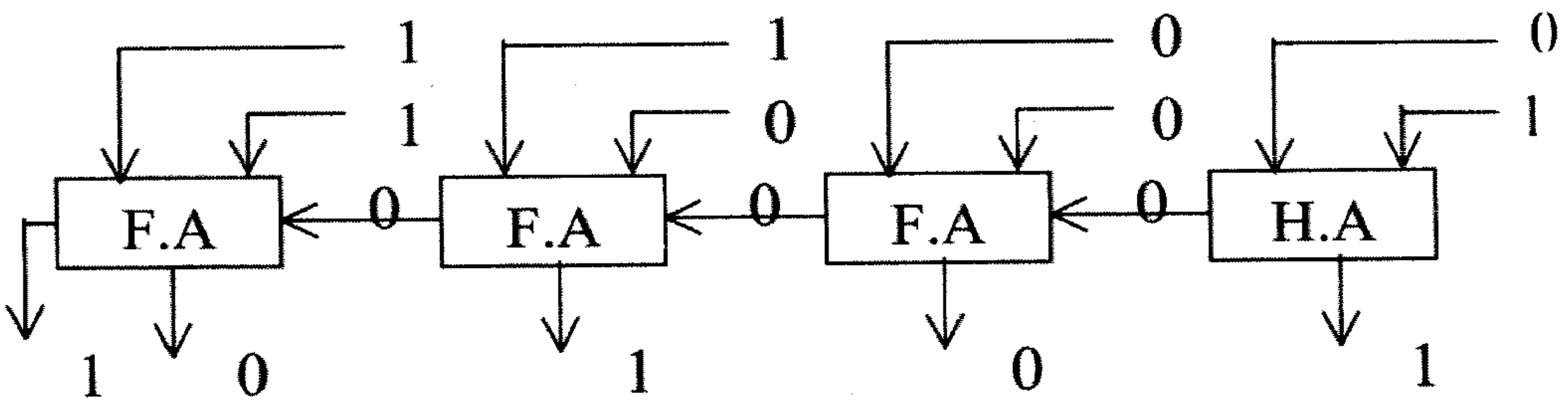
نفرض أن $A=(a_3a_2a_1a_0)=1100$ وأن $B=(b_3b_2b_1b_0)=1001$. يبين الشكل 4-11 الجامع الثنائي بنفس المدخلات 1100 و 1001. ينتج الجامع النصفي مجموعا قيمته 1 ومحمولا قيمته 0 وينتج الجامع الكامل الأول مجموعا قدره 0 ومحمولا قدره 0 وينتج الجامع الكامل الثاني مجموعا قيمته 1 ومحمولا قيمته 0 وينتج الجامع الكامل الثالث مجموعا قيمته 0 ومحمولا قيمته 1.

يكون الناتج النهائي 10101 وهو نفس الجواب الذي نحصل عليه بالورقة والقلم.

تستطيع أن تبني جامعات ثنائية بأي طول وذلك باستخدام عدد آخر من الجامعات الكاملة. على سبيل المثال، لإضافة أعداد ذات 16 خانة نحتاج إلى جامع نصفي واحد و 15 جامعا كاملا.



شكل4-10 جامع ثنائي



شكل4-11 إضافة 12 إلى 9 للحصول على 21

مثـــال4.

افترض أنك تعمل لمصلحة شركة تمتلك ثلاثة مواقف (محطات) مخصصة لوقوف سيارات العاملين بها. بينت الشركة لكل موظف الموقف الذي يمكنه استخدامه لإيقاف سيارته. إلا أن عدم التزام بعض العاملين بالشركة سبب في الكثير من المشاكل الأمر الذي ألزم إدارة الشركة اتخاذ قرار بشأن نصب بوابة عند مدخل كل موقف وإصدار بطاقة لكل موظف. لدخول الموقف يتطلب من كل عامل بالشركة إدخال بطاقته في فتحة خاصة بالبوابة. إذا خولت البطاقة حاملها بالدخول فتحت البوابة، وإلا بقيت البوابة مقفلة.

خصصت الشركة المواقف على النحو التالي:

الوظيفة	رقم الموقف المسموح باستخدامه
رئيس أو عضو لجنة الإدارة	1 2 3
مدير إدارة	1 2
مهندس	1 3
أمين سر	2 3
ميكانيكي	1 2
كهربائي	1 3
محاسب	2

صمم ثلاث دارات منطقية لاستخدام واحدة منها عند كل بوابة. للدارة إشارات دخل تصدر عن جهاز استشعار (sensor) البطاقات المثبت عند جهة الدخل. تخرج الدارة، حسب البيانات الصادرة عن الجهاز ، إشارة تفتح البوابة المقابلة أو تبقيها مقفلة وذلك حسب التخصيص السابق للمواقف.

الحــــل.

نستخدم فيما يلي رموزا تتكون من مجموعة من الأصفار والواحدات للتعبير عن دخل الدارة (خرج جهاز استشعار البطاقات) الذي يرمز إما إلى حالة عدم وجود بطاقة بالفتحة المخصصة لذلك أو إلى وظيفة صاحب البطاقة الموجودة بفتحة جهاز الاستشعار. نفترض أن خرج دارة التحكم المطلوب تصميمها يساوي المنطق 1 عندما تخول البطاقة صاحبها بدخول الموقف (تفتح البوابة) ويساوي المنطق 0 إذا لم تخوله (تبقى البوابة مقفلة).

المهمة الأولى لنا في هذه المسألة هو تخصيص شفرة (رمز) تتكون من ثلاث خانات (ABC) لتميز كلا من الوظائف السبعة المختلفة بالإضافة إلى حالة "عدم وجود بطاقة في الفتحة". هذا الترميز ، الذي يتطلب ثلاث ثنائيات ($8 = 2^3$) لترميز ثمانية حالات، يمكن أن يتم تخصيصه اختياريا كما بالجدول 4-5.

بعد الانتهاء من عملية الترميز ، تكون مهمتنا التالية هي تحديد خرج كل دارة تحكم لكل من هذه الرموز حسب التخصيص السابق للمواقف في جدول صدق نستخدمه لاشتقاق عبارات جبرية بولينية مبسطة تعبر عن كل خرج (G_1 - خرج دارة التحكم في بوابة الموقف الأول، G_2 خرج دارة التحكم في بوابة الموقف الثاني ، G_3 - خرج دارة التحكم في بوابة الموقف الثالث) وذلك كما هو مبين بالجدول4-5 .

جدول4-5 ترميز الوظائف وتحديد إشارات خرج دارات التحكم في بوابات المواقف الثلاث

خرج دارات التحكم $G_1G_2G_3$	شفرة (رمز) الوظيفة (دخل دارات التحكم) ABC	الوظيفة
0 0 0	0 0 0	عدم وجود بطاقة
1 1 1	0 0 1	مدير أو عضو لجنة إدارة
1 1 0	0 1 0	مدير إدارة
1 0 1	0 1 1	مهندس
0 1 1	1 0 0	أمين سر
1 1 0	1 0 1	ميكانيكي
1 0 1	1 1 0	كهربائي
0 1 0	1 1 1	محاسب

فمثلا عندما لا تكون هناك بطاقة بفتحة جهاز الاستشعاريكون دخل دارات التحكم 000 وفي تلك الحالة يجب أن يكون خرج كل دارة المنطق 0 لتبقى

البوابات مقفلة (كما بالسطر الأول من الجدول 4-5). أما عندما تكون بطاقة المدير أو عضو لجنة الإدارة بالفتحة عند أحد بوابات المواقف يكون دخل دارات التحكم 001. هذه البطاقة تخول صاحبها بدخول كل المواقف ولذلك يجب أن يكون خرج كل دارة تحكم لهذا الدخل المنطق 1 كما بالسطر الثاني، وهكذا.

باستخدام مخططات كارنوف المبينة بالشكل 4-12 يمكننا إيجاد العبارات الجبرية المبسطة التي تعبر عن خرج كل دارة تحكم في صورة ضرب حواصل جمع على النحو التالي:

$$G_1 = (B + C)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

$$G_2 = (A + B + C)(A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)$$

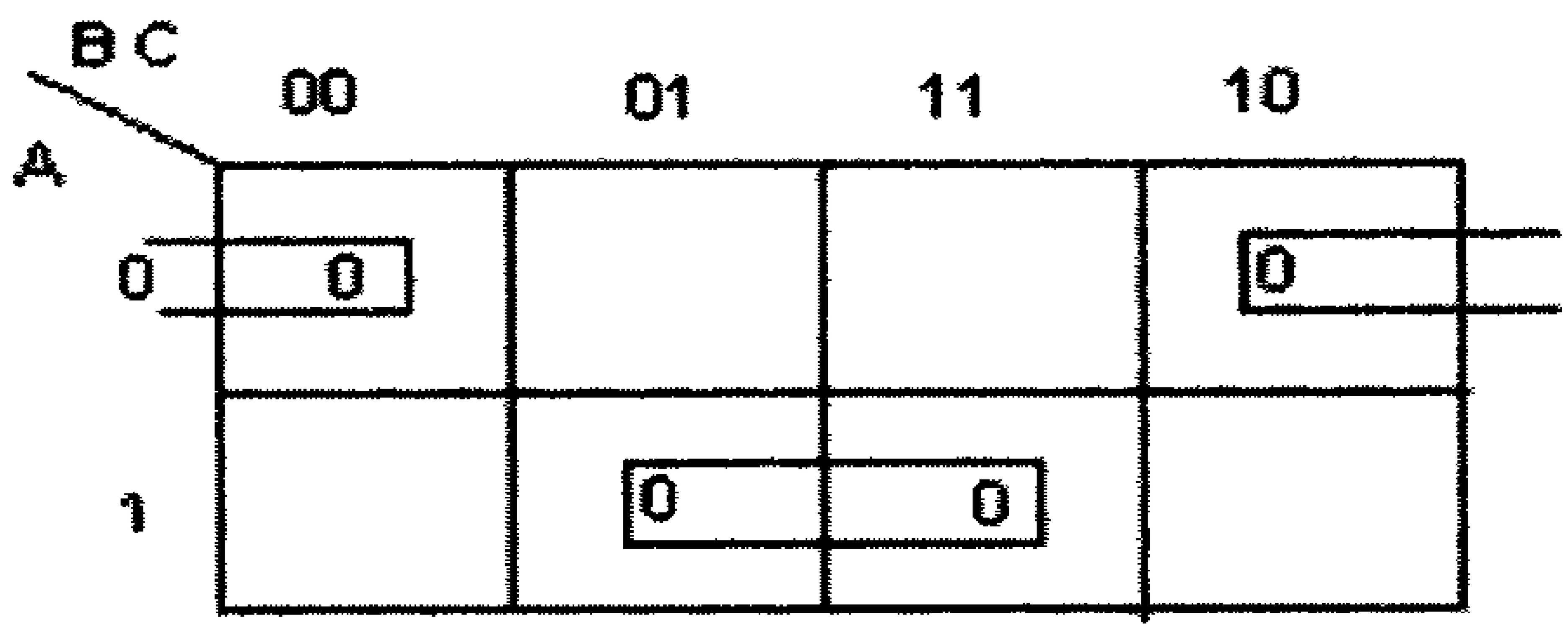
$$G_3 = (A + C)(\overline{A} + \overline{C})$$

A \ BC	00	01	11	10
0	$\boxed{0}$			
1	$\boxed{0}$		0	

مخطط G_1

A \ BC	00	01	11	10
0	0		0	
1				0

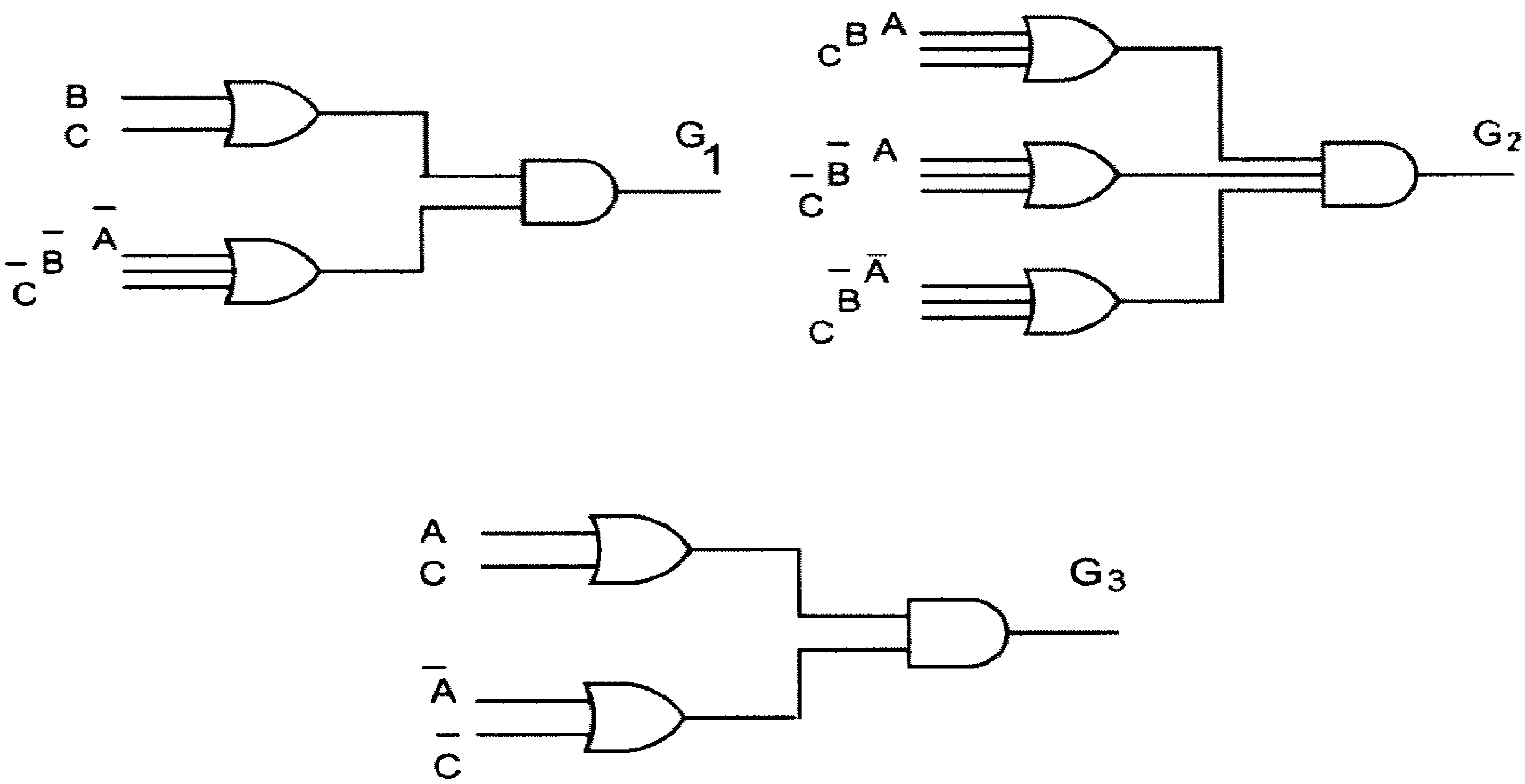
مخطط G_2



مخطط G3

الشكل4-12 خرائط كارنوف دارات التحكم في بوابات المواقف الثلاث

من هذه الدوال يمكننا الحصول على المخطط المنطقي لكل دارة تحكم وكما هو مبين بالشكل4-13.



شكل4-13 الدارات المنطقية للتحكم في بوابات المواقف الثلاث

ملخص

1. الدارة المنطقية التوافقية دارة تعالج البيانات الداخلة من جهة الدخ وتنتج البيانات المطلوبة عند جهة الخرج. تحدد قيم إشارات خرج عند لحظة ما بمعرفة قيم إشارات دخلها عند تلك اللحظة.
2. تهدف عملية تحليل الدارة التوافقية إلى استنتاج الوظيفة التي تؤدي الدارة.
3. يمكن التعبير عن وظيفة دارة توافقية بعدد من الدوال البولينية بجدول صدق، تحدد علاقة خرج الدارة بدخلها.
4. تصمم الدارات التوافقية لتنفيذ مواصفات محددة يمكن التعبير عنها ف جدول صدق.
5. دارة الجامع النصفي دارة توافقية تجمع حسابيا رقمين ثنائيين (طول كل منهما ثنائية واحدة). ينتج عن هذه الدارة حاصل جمع يتكون من ثنائيتين، يرمز للثنائية ذات المرتبة الدنيا بحاصل الجمع وللثنائية ذات المرتبة العليا بالمحمول.
6. دارة الجامع الكامل دارة توافقية تجمع ثلاثة خانات ثنائية وتنتج حاصل جمع يتكون من ثنائيتين: S التي تعبر عن حاصل الجمع و C_0 الت تعبر عن المحمول.
7. الجامع الثنائي دارة توافقية تجمع أعدادا ثنائية يمكن أن تبنى بأطوال مختلفة باستخدام جامعات كاملة.

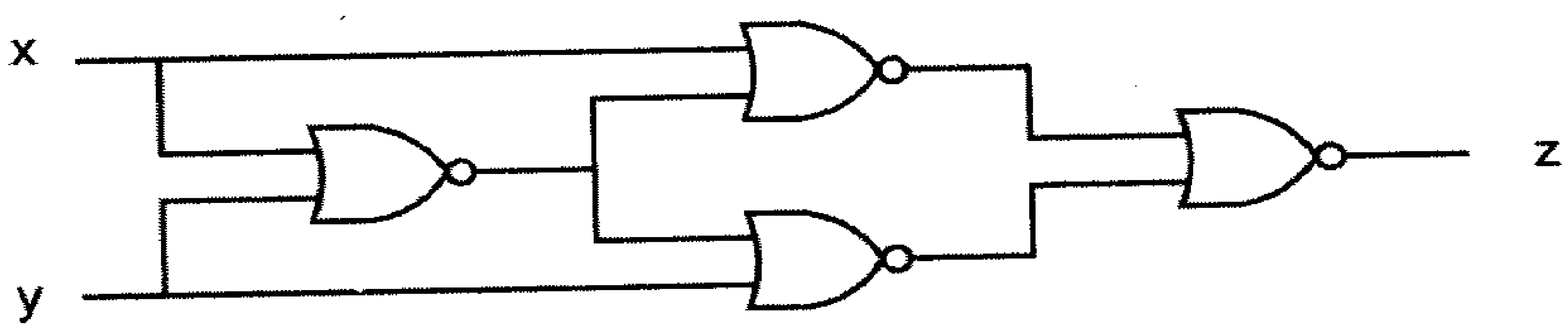
تدريبــــات

1. أرسم الدارة المنطقية التي تنفذ الدالة البولينبة التالية:

$$F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}\,\overline{C}D + AB\overline{C}D + ABC\overline{D}$$

2. صمم دارة منطقية تنفذ الدالة البولينية F التي لها جدول صدق به الخرج 1 مقابل احتمالات الدخل التالية: (ABCD=0011) و (ABCD=0110) و (ABCD=1001) و (ABCD=1110)، مستخدما بوابات NOR فقط.

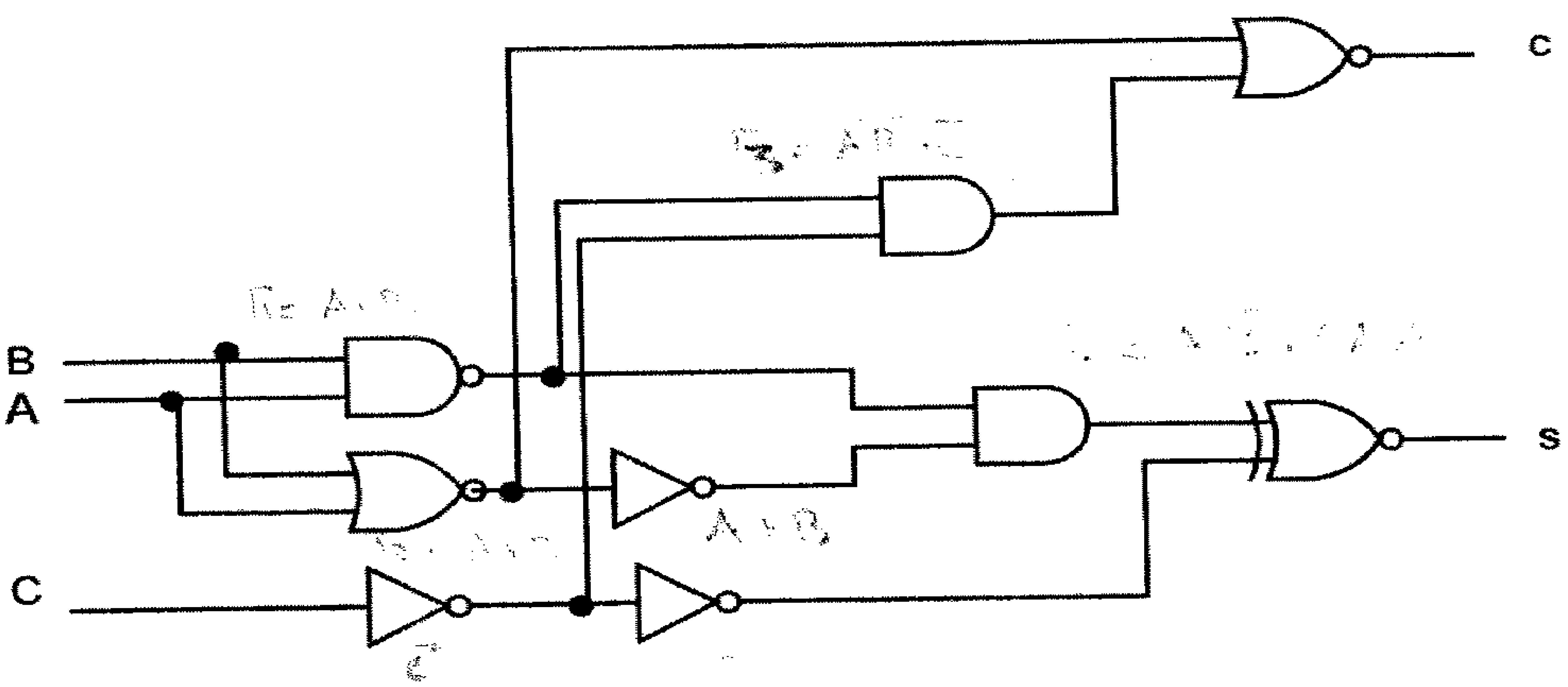
3. أثبت أن الدارة الآتية تؤدي وظيفة بوابة XOR.



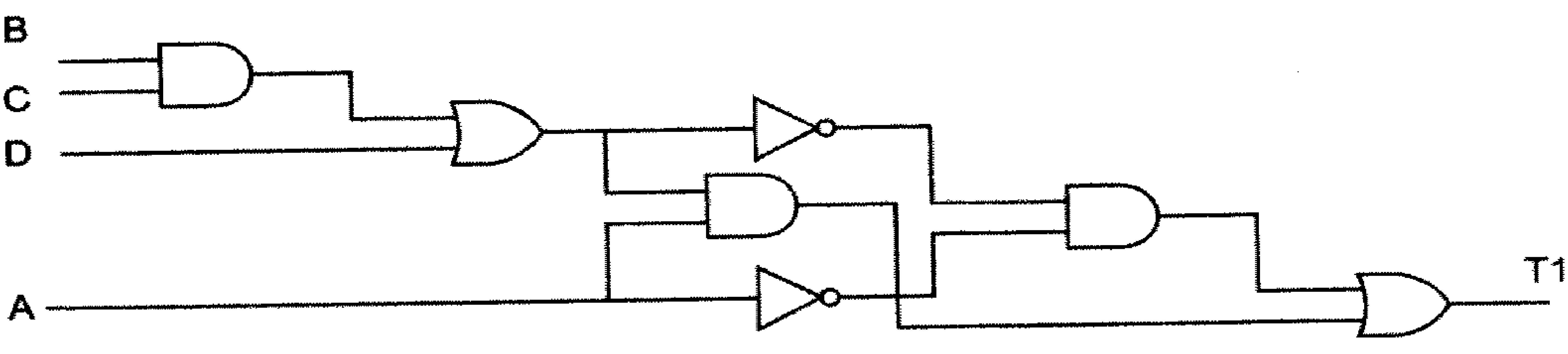
4. صمم دارة توافقية تنتج حاصل جمع عددين ثنائيين $X = x_1x_0$ و $Y = y_1y_0$. لا تستخدم أنصاف الجامعات. أوجد أولا جدول صدق الدارة.

5. صمم دارة توافقية لمقارنة قيمة عددين ثنائيين: A و B، إذا كان طول كل منهما خانتين.

6. حلل الدارة الآتية واثبت أنها تؤدي وظيفة دارة الجامع الكامل.



7. حلل الدارة المبينة بهذه المسألة وعبر عن T1 بدالة منطقية.



8. صمم دارة منطقية توافقية تنتج مربع الأعداد التي تتكون من ثلاث ثنائيات .

9. إذا كان كل من X و Y عددا ثنائيا طوله ثنائيتان. صمم الدارة التوافقية التي تقارن هذين العدديين وتخرج العدد الأكبر فقط.
أعد حل هذه المسألة إذا كان طول العدد ثلاث ثنائيات.

الباب الخامس

المنطق التتابعي
Sequential Logic

الباب الخامس

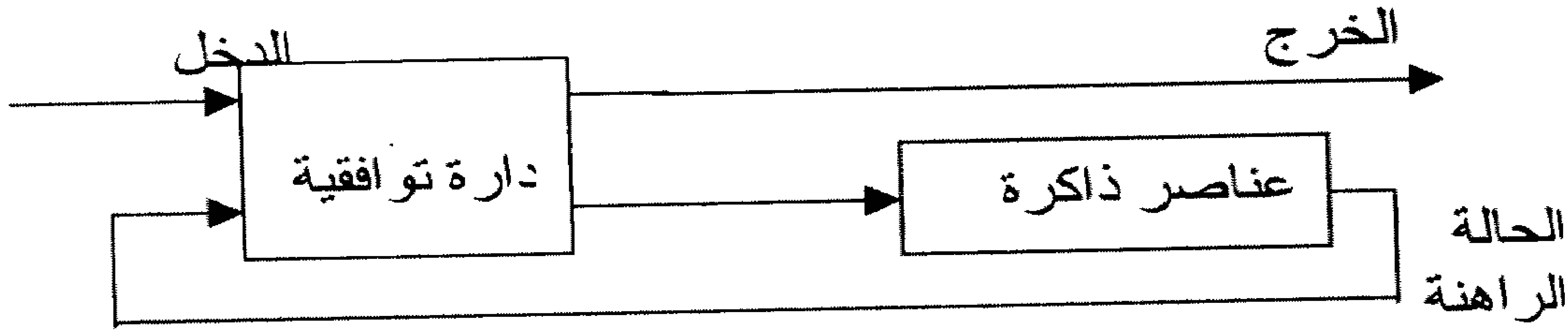
5

المنطق التتابعي
Sequential Logic

5-1 مقدمة

الدارات الرقمية التي سبق لنا دراستها دارات توافقية تعتمد فيها إشارات الخرج عند لحظة ما كلية على قيم إشارات الدخل عند تلك اللحظة. ورغم أن كل نظام رقمي يمكن أن يحتوي على دارة توافقية، إلا أن أغلب النظم الرقمية تحتوي من الناحية التطبيقية أيضا على عناصر خزن تسمى ذاكرة تشترط أن توصف تلك النظم باستخدام مفاهيم المنطق التتابعي.

يبين الشكل 5-1 مخططا صندوقيا لدارة تتابعية تتكون من دارة توافقية تتصل بها عناصر ذاكرة بطريقة تتيح مسار تغذية خلفية وتستقبل الدارة التتابعية بيانات عن طريق مداخلها الخارجية التي تشترك مع قيم البيانات الثنائية عند خرج عناصر الذاكرة (الحالة الراهنة لعناصر الذاكرة) التي تمثل البيانات الثنائية المخزنة بها، في تحديد القيم الثنائية عند خرج الدارة التتابعية وكذلك الشروط التي يتم بها تغيير حالة عناصر الذاكرة.



شكل 5-1 مخطط صندوقي لدارة تتابعية

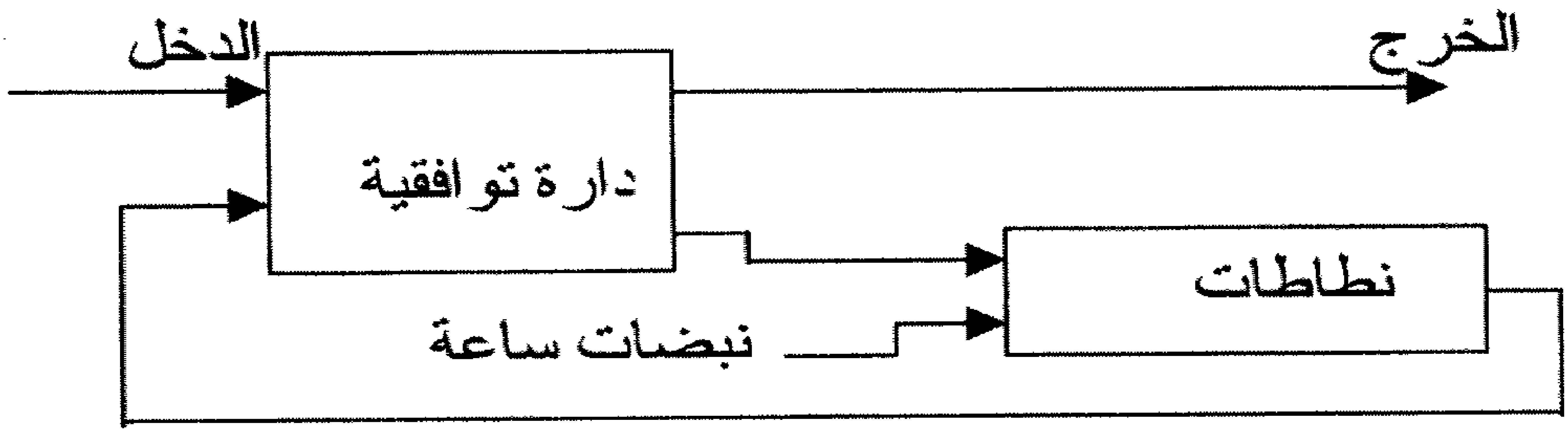
من هذا المخطط يتبين لنا أن القيم الثنائية الناتجة عند خرج الدارة التتابعية لا تعتمد فقط على قيم إشارات الدخل الخارجية فحسب بل وعلى الحالة الراهنة لعناصر الذاكرة أيضا. وحيث إن الحالة التالية لعناصر الذاكرة تعتمد على قيم الدخل وعلى حالة عناصر الذاكرة الراهنة، لذلك فإن ما يحدد سلوك الدارة التتابعية هو متوالية توقيتية لكل من إشارات الدخل والخرج وحالة عناصر الذاكرة بالدارة.

يوجد نوعان أساسيان من الدارات التتابعية يميزهما اختلاف التزامن فيما بين الإشارات. فالدارة التتابعية المتزامنة (Synchronous sequential circuit) منظومة يمكن تحديد سلوكها من خلال معرفة إشاراتها عند لحظات توقيتية متقطعة. أما سلوك الدارة التتابعية غير المتزامنة (Assynchronous sequential circuit) فيحدد سلوكها الترتيب الذي تتغير به إشارات الدخل، أخذا في الاعتبار أن حالة الدارة يمكن أن تتغير عند أية لحظة توقيتية، وليس من الضروري عند لحظات متقطعة فقط.

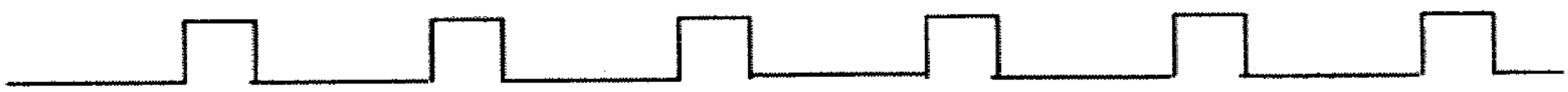
الدارات التتابعية المتزامنة هي الأكثر استخداما في التطبيقات العملية. تستخدم هذه الدارات إشارات تؤثر على عناصر الذاكرة عند لحظات متقطعة فقط. ويتحقق التزامن في هذه الدارات باستخدام أداة توقيت (موقت) تسمى مولد نبضات الساعة (Clock Pulse Generator) تصدر عنه نبضات دورية (إشارة توقيت) تنتشر خلال المنظومة الرقمية المتزامنة لتمكن عناصر الذاكرة من تغيير حالتها فقط عند وصول كل نبضة لها.

تدعى عناصر الذاكرة المستخدمة في الدارات التتابعية المتزامنة بالنطاطات (Flip-Flops). وهي أدوات خزن ثنائي (binary) باستطاعة الواحدة منها خزن وحدة البيانات الرقمية (ثنائية bit). تستخدم الدارات التتابعية العدد الكافي من النطاطات لخزن العدد اللازم من الثنائيات. يبين الشكل 5-2(أ) مخططا صندوقيا لدارة تتابعية متزامنة تصدر إشارة الخرج فيها إما عن الجزء التوافقي بالدارة أو عن النطاطات. كما يتألف دخل النطاطات من خرج الجزء التوافقي ومن سلسلة نبضات تحدث عند فترات توقيتية ثابتة، كما يبينه المخطط التوقيتي في الشكل 5-2(ب). في هذه الدارة، يمكن

لحالة النطاطات أن تتغير فقط أثناء تغير مستوى (نشاط) إشارة نبضة الساعة. أما في فترات عدم نشاط إشارة نبضة الساعة، فينقطع مسار التغذية الخلفية نظرا لعدم إمكانية تغير قيمة خرج (حالة) النطاطات حتى ولو تغيرت قيمة خرج الدارة التوافقية (دخل النطاطات). لذلك، لا يتم انتقال النطاط من حالة إلى أخرى إلا عند لحظات محددة مسبقا، تمليها نبضات الساعة.



(أ) مخطط صندوقي لدارة تتابعية



(ب) مخطط توقيتي لنبضات الساعة

شكل 5-2 دارة تتابعية موقتة ومتزامنة

Synchronous clocked sequential circuit

النطاط دارة تتابعية يبقى في إحدى حالتين مستقرتين لحين قدحه إلى الحالة الأخرى بنبضة ساعة. القفل هو أحد أبسط النطاطات وهو أساس بناء النطاطات المستخدمة في تصميم الدارات التتابعية المتزامنة.

5-2 القفل S-R (The S-R latch)

القفل دارة تتابعية يمكن أن يكون في إحدى حالتين (أو وضعين) مستقرتين: تهيئة (SET) أو تصفير (RESET). عندما يكون القفل في حالة تهيئة يكون خرجه عند المنطق 1 (عاليا) وعندما يكون القفل في حالة تصفير يكون خرجه عند المنطق 0 (منخفضا). يبين

الشكل 5-3(أ) الرمز المنطقي لقفل S-R (S-R Latch) المنفذ باستخدام بوابة النفي NOR الشكل 5-3(ب). للقفل دخلان سميا S (SET) و R (RESET) وخرجان سميا Q و $\overline{Q}$ أحدهما نفي الآخر دائما. توصف حالة القفل بدلالة الخرج Q، فإذا كان Q=1، يقال عندئذ بأن القفل في حالة تهيئة (SET)، وإذا كان Q=0 يقال بأن القفل

(أ) الرمز
(ب) دارة القفل المنطقية

شكل 5-3 القفل S-R NOR

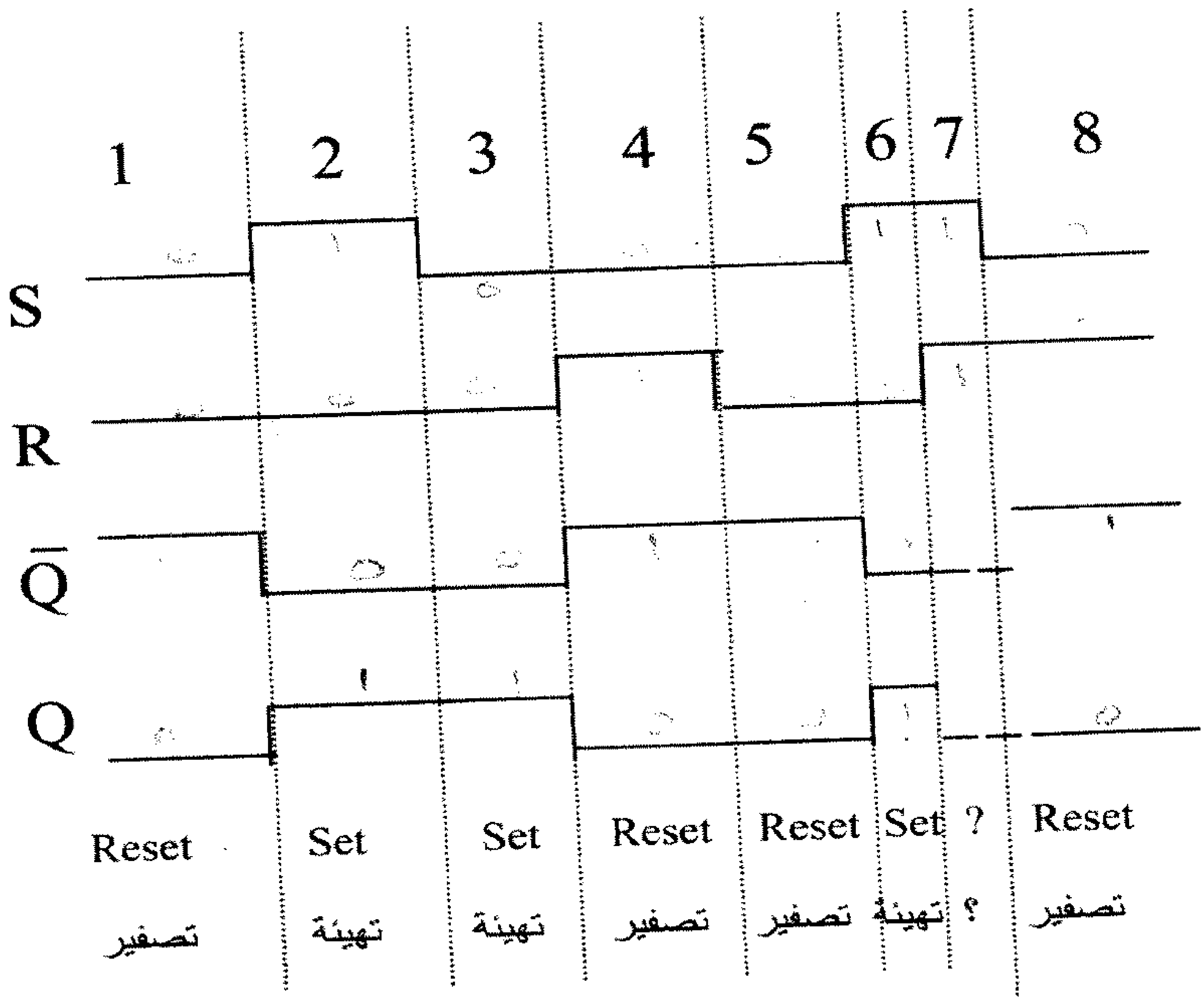
في حالة تصفير أو إعادة تهيئة (RESET).

لتهيئة النطاط S-R في الحالة 1، اجعل الدخل S عاليا (فعالا) بتسليط المنطق 1 عليه. لاحظ أنه لا يسمح إلا لأحد الدخلين بأن يكون عاليا (فعالا) عند لحظة ما. إذا، يجب أن يكون R منخفضا (غير فعال) عند المنطق 0، في هذه الحالة. بالمثل، لتصفير القفل S-R، اجعل الدخل R عاليا وذلك بتسليط المنطق 1 عليه في وقت يكون فيه الدخل S واطئا، عند المنطق 0. يبين الشكل 5-4 المخطط التوقيتي للقفل S-R. المخطط التوقيتي يبين سلوك دارة تتابعية بطريقة بيانية توضح تتابع تغير الإشارة عند خرج الدارة مقابل تتابع تغير الإشارات عند دخلها. لقد تم تتبع حالة القفل، في المخطط التوقيتي المبين بالشكل 5-4 لبضع احتمالات اختيارية وممكنة لإشارتي دخله S و R. فكلما تغيرت حالة الدخل S أو الدخل R تم تحديد الحالة التي يتغير (ينتقل) لها الخرج. لقد تم تمييز الفترات التوقيتية التي تبقى فيها الإشارات S و R ثابتة في

الشكل 5-4 بالأرقام من 1 إلى 8 لغرض الإشارة لها في التحليل التالي.

1. كل من S و R غير فعال (0)، والحالة الابتدائية لخرج القفل (Q) في وضع التصفير "Reset". لذلك، يبقى القفل في حالة التصفير. هذه هي حالة "اللاتغيير".
2. S فعال، يقود القفل لوضع "التهيئة في الحالة-1" (Set).
3. الآن، S غير فعال (في الوقت الذي يبقى فيه R غير فعال). يبقى القفل في حالة التهيئة (Set) وهذه هي حالة "اللاتغيير" أيضا.
4. الآن R فعال، يقود القفل لحالة التصفير "Reset" وبذلك يكون خرج القفل عند الصفر (Q=0).
5. الآن، R غير فعال (بينما يبقى S غير فعال). يبقى القفل في وضع التصفير "Reset" لأن هذه حالة "اللاتغيير".
6. يعود S ليصبح فعالا مجددا وينتقل القفل لوضع "التهيئة في الحالة 1".
7. يكون كل من S و R فعالا ويسبب هذا في أن ينتقل خرج القفل لحالة المنطق 0. يقود هذا فعليا القفل لوضع "التهيئة" و "التصفير" في نفس الوقت. وحيث أن هذا لا يبدو ممكنا، تكون حالة القفل عندئذ غير معروفة. ويرمز لهذا الوضع بالحالة غير المحددة (undefined) أو الممنوعة (illegal).
8. الآن، S غير فعال في الوقت الذي لا يزال فيه R فعالا، ومن ثم ينقاد القفل لحالة التصفير.

من المخطط التوقيتي المبين في الشكل 5-4 يتضح أن الخرج $\overline{Q}$ هو نفي الخرج Q، كما يعتبر كل من S و R دخلين للسيطرة يقودان القفل إلى "التهيئة في الحالة 1" (Q=1) أو إلى "التصفير" (Q=0). تتضح أيضا خاصية الذاكرة عند هذه الدارة التتابعية في الفترتين 3 و 5 بالمخطط التوقيتي. ففي الفترة 2 تمت تهيئة القفل



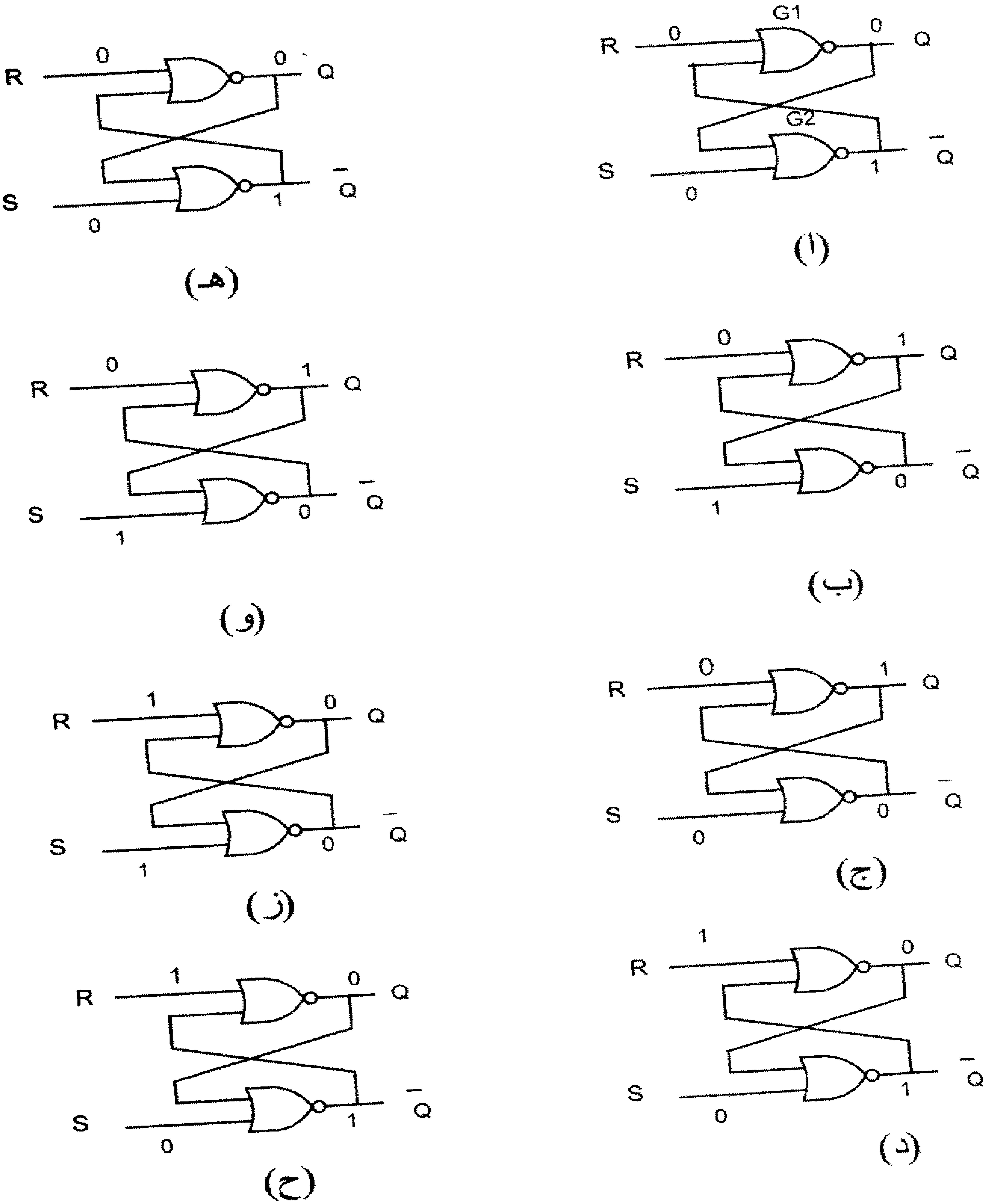
شكل 5-4 مخطط توقيتي لقفل S-R NOR

بتفعيل الدخل S. لكن عندما أعيد الدخل S لحالته غير الفعالة في الفترة 3، أقفلت الدارة وبقي القفل مهيأ في حالته السابقة ومن دون تغيير. لقد أمسك بالخرج عند وضع التهيئة في الحالة 1 رغم إزاحة الحافز المسبب في ذلك وتم خزن المنطق 1 عند خرج القفل بتفعيل الدخل S لحظيا. بالمثل تم تفعيل الدخل R في الفترة 4 لنقل القفل لحالة التصفير وبقي القفل في الفترة 5 عند الحالة السابقة رغم رجوع الدخل R للحالة غير الفعالة. لقد تم خزن المنطق 0 عند خرج القفل وذلك بتفعيل الدخل R لحظيا. ولفهم كيفية إنجاز القفل لهذه الوظيفة، لابد لنا من تحليل دارته المنطقية على النحو التالي:

يبين الشكل 5-3(ب) الدارة المنطقية للقفل S-R. تتكون الدارة من بوابتين من بوابات NOR ويرمز لها أحيانا بالقفل NOR. توظف الدارة مسار التغذية الخلفية الممتد من جهة الخرج إلى جهة الدخل لأداء وظيفتها، وهو ما يميز الدارات التتابعية عن غيرها من الدارات. لتحليل

دارة القفل NOR افترض حالة (وضع) ابتدائية ولتكن نفس حالة القفل المحددة في الفترة التوقيتية 1 بالمخطط التوقيتي المبين بالشكل5-4 تم تتبع حالة القفل خلال كل فترة من الفترات الموالية للتحقق من صحتها.

الدارات المبينة في الشكل5-5(أ) حتى 5-5(ح) تبين تتابع المستويات المنطقية بكل من الفترات الثمانية بالمخطط التوقيتي المبين بالشكل5-4. تذكر أنه إذا كان أي من دخلي بوابة NOR عند المنطق 1 يكون خرج البوابة عند المنطق 0 ، وإذا كان دخلا بوابة NOR عند المنطق 0 يكون خرج بوابة NOR عند المنطق 1. يبين الشكل5-5(أ) دارة القفل S-R المنطقية خلال الفترة 1 (الحالة الابتدائية). وحيث إن القفل في حالة التصفير (Q=0) وأن كلا من R و S غير فعالة (inactive) (R=0,S=0)، يكون خرج البوابة G_2 ($\overline{Q}$) عند المنطق 1، ويصل عن طريق التعدية الخلفية إلى دخل البوابة G_1 لينتج عن ذلك المنطق 0 عند الخرج (Q)، محافظا على القفل عند حالة التصفير (Reset). يتغير الدخل S في الفترة 2 ليصبح عند المنطق 1 مسببا في انتقال خرج البوابة G_2 إلى المنطق 0، وبالتالي في انتقال خرج البوابة G1 إلى المنطق 1 . لقد أصبح القفل الآن في وضع التهيئة كما هو مبين في الشكل5-5(ب). خلال الفترة 3، يرجع الدخل S إلى المنطق 0 ، ولكن لا يتغير خرج البوابة G2 نظرا لثبوت دخلها الثاني عند المنطق 1 بواسطة Q. يبقى القفل متهيئا كما في الشكل5 -5(ج). يتغير الدخل R خلال الفترة 4 إلى المنطق 1. ويسبب هذا في انتقال خرج البوابة G1 إلى المنطق 0 وفي انتقال خرج البوابة G2 إلى المنطق 1. لقد أصبح القفل الآن في وضع التصفير (Reset) كما هو مبين في الشكل5-5(د). يعود الدخل R خلال الفترة 5 إلى المنطق 0، ولكن لا يتغير خرج البوابة G1 بسبب بقاء دخلها الآخر عاليا بواسطة الخرج $\overline{Q}$.



شكل 5-5 تتبع حالات القفل S-R NOR المختلفة

ينتقل الدخل S خلال الفترة 6 مرة أخرى إلى المنطق 1 مسببا في انتقال خرج البوابة G2 إلى المنطق 0 وفي انتقال خرج البوابة G1 إلى المنطق 1، ومن ثم تهيئة القفل كما هو مبين بالشكل5-5(و). خلال الفترة 7 وبينما يكون S فعالا عند المنطق-1، ينتقل الدخل R إلى المنطق 1 مسببا في انتقال خرج البوابة G1 إلى المنطق 0. ولكن يبقى خرج البوابة G2 في حالة المنطق 0 لأن S عالية عند المنطق 1. يكون خرجا القفل عند المنطق 0 كما هو مبين في الشكل5-5(ز)، وهذا وضع باطل لأنه سبق أن ذكرنا أن خرجي القفل يجب أن يكون الواحد منهما نفيا للآخر. ينتقل الدخل S خلال الفترة 8 إلى المنطق 0، بينما يبقى R فعالا عند المنطق 1. يسبب هذا في انتقال خرج البوابة G2 إلى المنطق 1 وفي انتقال خرج البوابةG1 إلى المنطق 0 كما هو مبين في الشكل 5-5 (ح)، ومن تم تصفير القفل.

يمكن تصميم قفل S-R بمدخلات فعالة عندما تكون في مستوى منخفض (Active low inputs) . يعمل ذلك القفل بطريقة مشابهة لعمل القفل المبين بالشكل5-3، ما عدى تسليط المنطق 0 على الدخل S أو على الدخل R فإنه يهيئ القفل أو يصفره على التوالي. يبين الشكل 5-6 الرمز المنطقي ودارة القفل S-R ذا الدخل الفعال في الحالة المنخفضة (Active low input S-R latch). ويرمز لهذا القفل بقفل S-R NAND بسبب استخدام بوابات NAND في تصميمه.

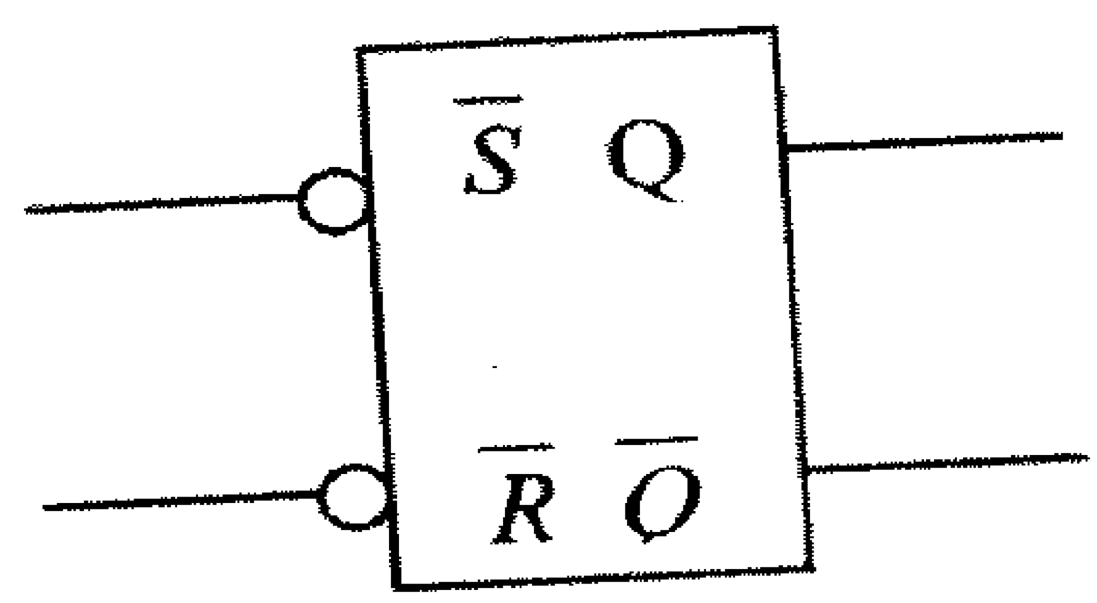
يبين الشكل5-7 المخطط التوقيتي لقفل S-R NAND. لقد تم تحليل دارة القفل لعدد من قيم الدخل الاختيارية ($\overline{S}$و$\overline{R}$)، ورسمها في خمس فترات كالمبينة بالشكل5-7 بحيث يبقى الدخل ثابتا في كل فترة من هذه الفترات:

1. نفترض أن القفل في حالة تهيئة (Q=1) خلال الفترة 1 وأن الدخلين $\overline{S}$و$\overline{R}$ غير فعالين، عند المنطق 1. هذه هي الحالة الابتدائية للقفل.

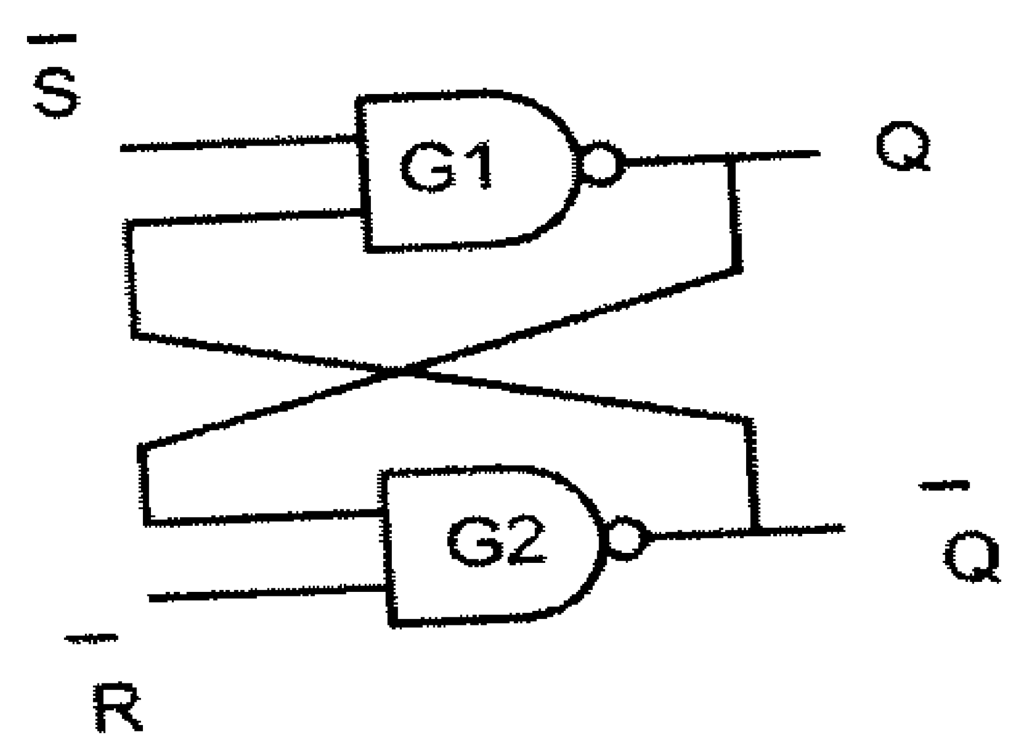
2. الآن يصبح الدخل $\overline{R}$ فعالا (0) بينما يبقى $\overline{S}$ غير فعال (1). ينتقل القفل عندئذ إلى حالة التصفير (Q=0).
3. يعود $\overline{R}$ إلى الحالة غير الفعالة (1) ولكن يبقى القفل في حالة التصفير (Q=0)، لأن $\overline{S}$ غير فعال (1) أيضا. تدعى هذه الحالة التي لا تحدث تغيرا في الخرج وتبقي الدارة مقفلة في حالتها الأخيرة بالحالة غير الفعالة ذلك لأن الخرج لا يتغير.
4. الآن يصبح $\overline{S}$ فعالا (0)، ويبقى $\overline{R}$ غير فعال (1). ينتقل القفل بسبب ذلك إلى وضع التهيئة (SET) ويصبح الخرج Q عند المنطق 1.
5. يعود $\overline{S}$ إلى الحالة غير الفعالة (1) ويبقى القفل (مقفلا) عند Q=1 لأن $\overline{R}$ غير فعال أيضا (1). هذه أيضا الحالة غير الفعالة تسمى أيضا بحالة اللاتغيير.

لفهم كيفية عمل القفل S-R NAND، دعنا نحلل الدارة المنطقية المبينة في الشكل 5-6(ب) لكل فترة من فترات المخطط التوقيتي المبين بالشكل 5-7.

تبين الدارات بالشكل 5-8 تتابع مستوى الإشارات المنطقية لكل فترة من الفترات الخمس للمخطط التوقيتي. تذكر أنه إذا كان أحد مدخلي البوابة NAND عند المنطق 0 يكون خرجها عند المنطق 1 ، وإذا كان دخلا

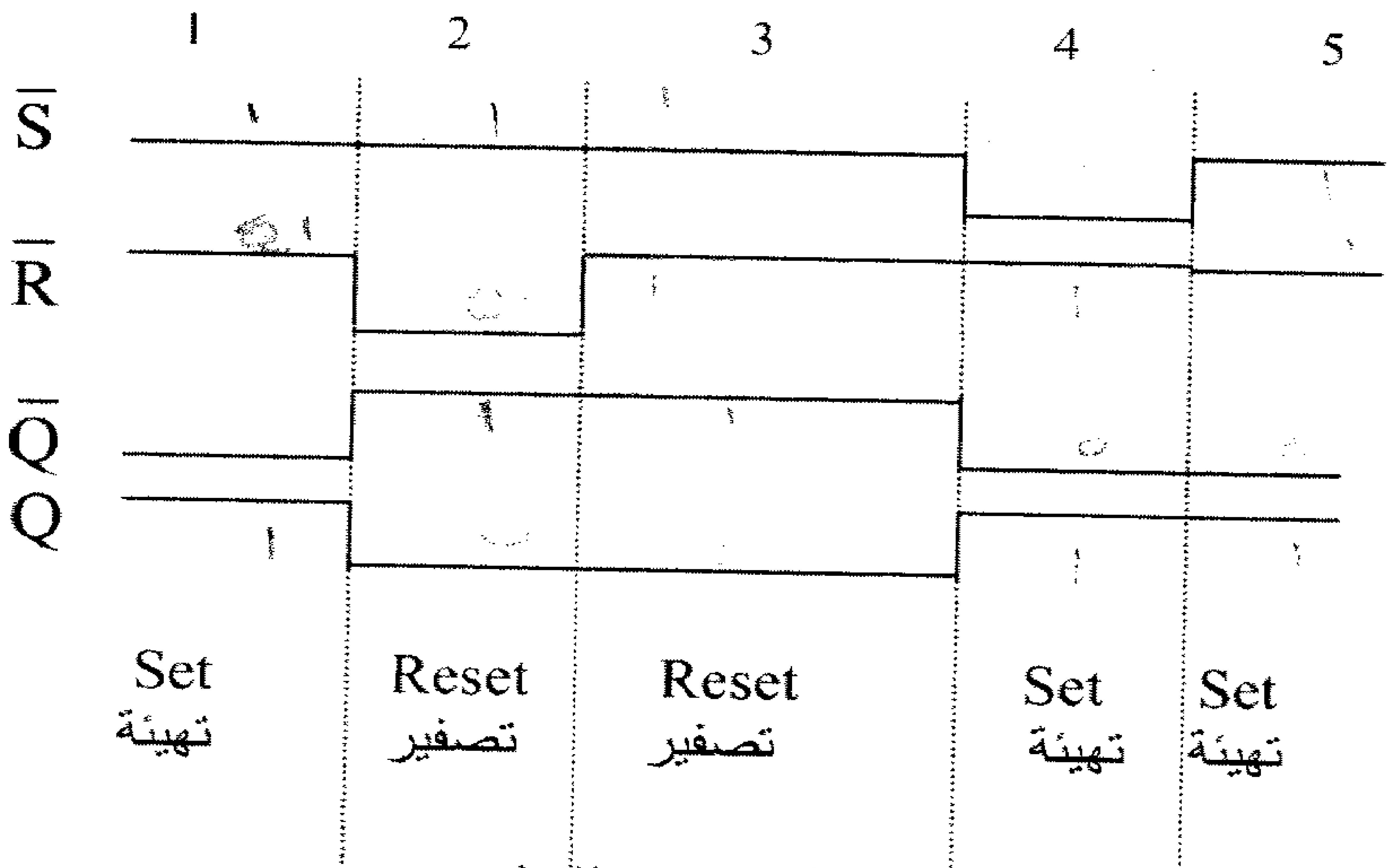


(أ) الرمز



(ب) الدارة

شكل 5-6 القفل S-R NAND

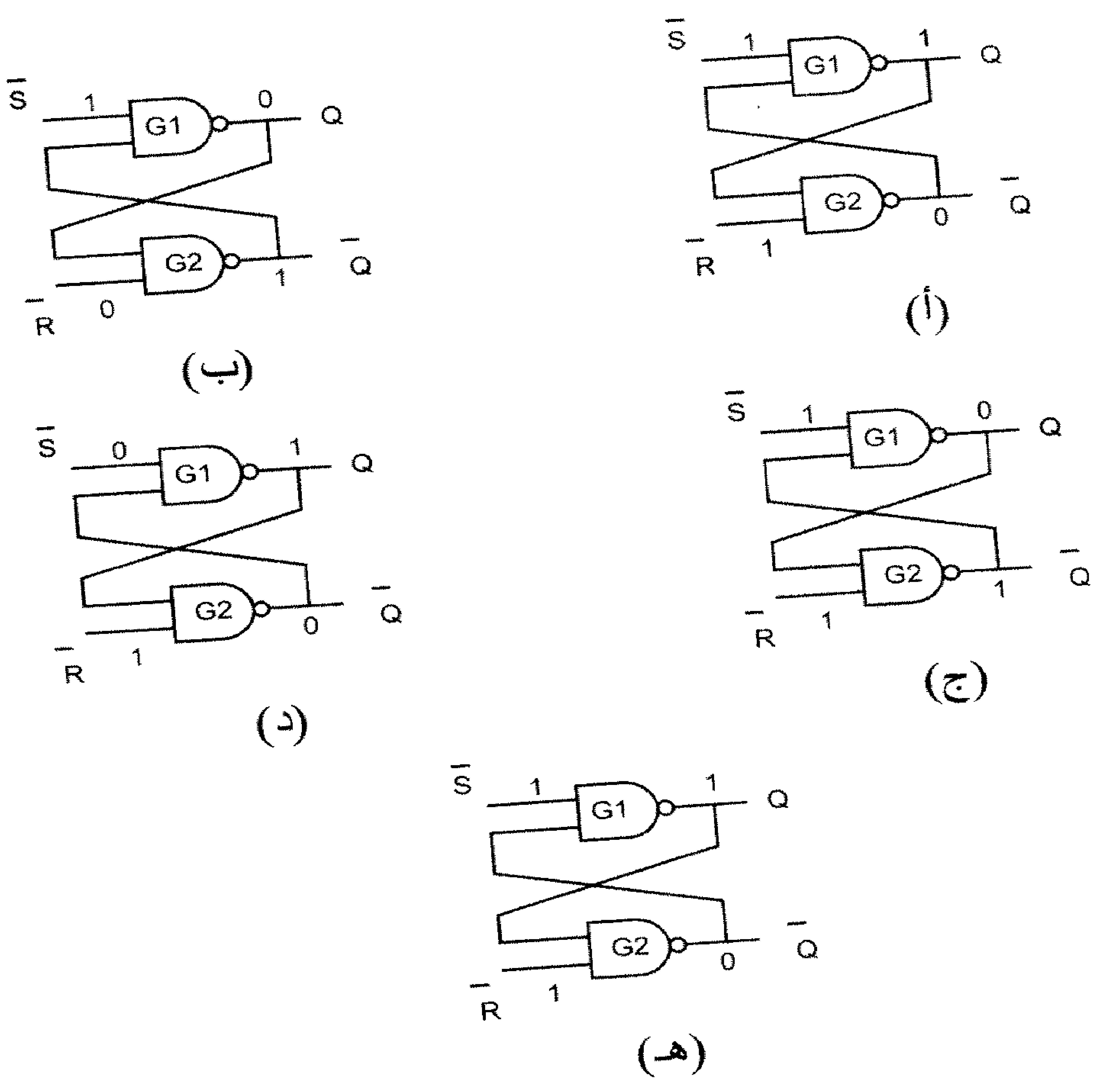


شكل 5-7 مخطط توقيتي للقفل S-R NAND

بوابة NAND عند المنطق 1، يكون خرجاها عند المنطق 0.

يبين الشكل 5-8(أ) دارة القفل S-R NAND خلال الفترة 1 (الحالة الابتدائية). ولأن القفل مهيأ (Q=1) والدخلين $\overline{S}$ و $\overline{R}$ غير فعالين ($\overline{S}=1$ و$\overline{R}=1$) يصبح خرج البوابة G_2 ($\overline{Q}$) عند المنطق 0 ويصل من خلال مسار التغذية الخلفية إلى دخل البوابة G_1 التي تنتج بسبب ذلك المنطق 1 عند خرجها (Q) محافظة على وضع القفل عند حالة التهيئة. يتغير الدخل $\overline{R}$ إلى المنطق 0 خلال الفترة 2، مسببا في تغير خرج البوابة G_2 إلى المنطق 1 مباشرة ومن ثم في تغير خرج البوابة G_1 إلى المنطق 0. لقد أصبح القفل الآن في حالة تصفير (إعادة تهيئة Rest)، وكما هو مبين في الشكل 5-8(ب). يعود الدخل $\overline{R}$ خلال الفترة 3 إلى المنطق 1، ولكن لا يتغير خرج البوابة G_2 بسبب بقاء إدخالها الآخر ممسوكا به عند المنطق 0 بواسطة Q ليبقى القفل في حالة تصفير كما هو مبين في الشكل 5-8(ج). في الفترة 4 يتغير الدخل $\overline{S}$ إلى المنطق 0 مسببا

في تغير خرج البوابة G_1 إلى المنطق 1 وخرج البوابة G_2 إلى المنطق **0** ليصبح القفل مهيأ كما هو مبين في الشكل 5-8(د). خلال الفترة 5 **يعود** الدخل $\overline{S}$ إلى المنطق 1، بينما يبقى خرج البوابة G_1 **عند نفس الحالة** بسبب بقاء دخلها الآخر ممسوكا به في وضع منخفض بواسطة $\overline{Q}$ وبذلك يبقى القفل في حالة التهيئة كما هو مبين في الشكل 5-8(هـ)

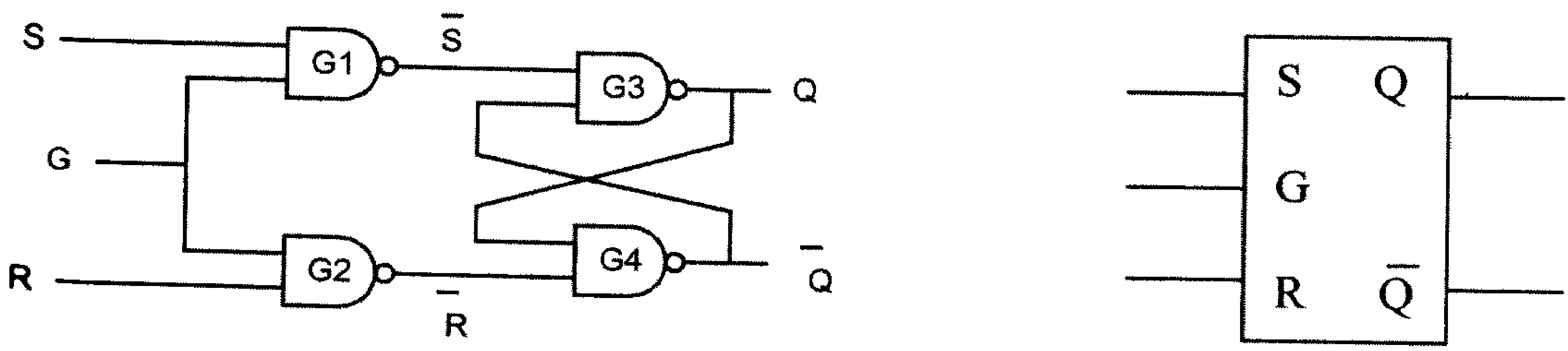


شكل 5-8 تتابع حالات القفل NAND المختلفة

مما سبق، يتضح دور الدخلين S و R في حالة تهيئة (Set) وتصفير أو إعادة تهيئة (Reset) القفلان S-R اللذان تمت دراستهما وكيف أن تفعيل أحدهما يسبب في تغيير حالة القفل مباشرة .

3-5 القفل الموقت

لكي يصبح عمل القفل متزامنا تستخدم دارة مولد نبضات الساعة التي تخرج إشارة توقيت على شكل سلسلة من النبضات الدورية بتردد معين لتمنع النطاط من تغيير حالته لحين الوقت المناسب. يبين الشكل 5-9 رمز ودارة القفلS-R الموقت. يؤدي الدخلان S و R وظيفتي تهيئة وتصفير (إعادة تهيئة) النطاط على التوالي. إلا أنه نتيجة لاستخدام إشارة التوقيت، فإن القفل لا يغير حالته حتى يصل المنطق 1 دخل الساعة التابع له. في الواقع، تصد إشارة التوقيت(G=0) أو تمرر (G=1) الدخلين S و R بواسطة بوابتي NAND: G_1 و G_2، كما هو مبين في الشكل 5-9(ب). فإذا كان G=0، يكون خرجا البوابتين G1 و G2 عند المنطق 1 بصرف النظر عن حالة S و R. إلا أن تواجد المنطق 1 عند دخل كل من البوابتين G_3 و G_4 المكونة للقفل



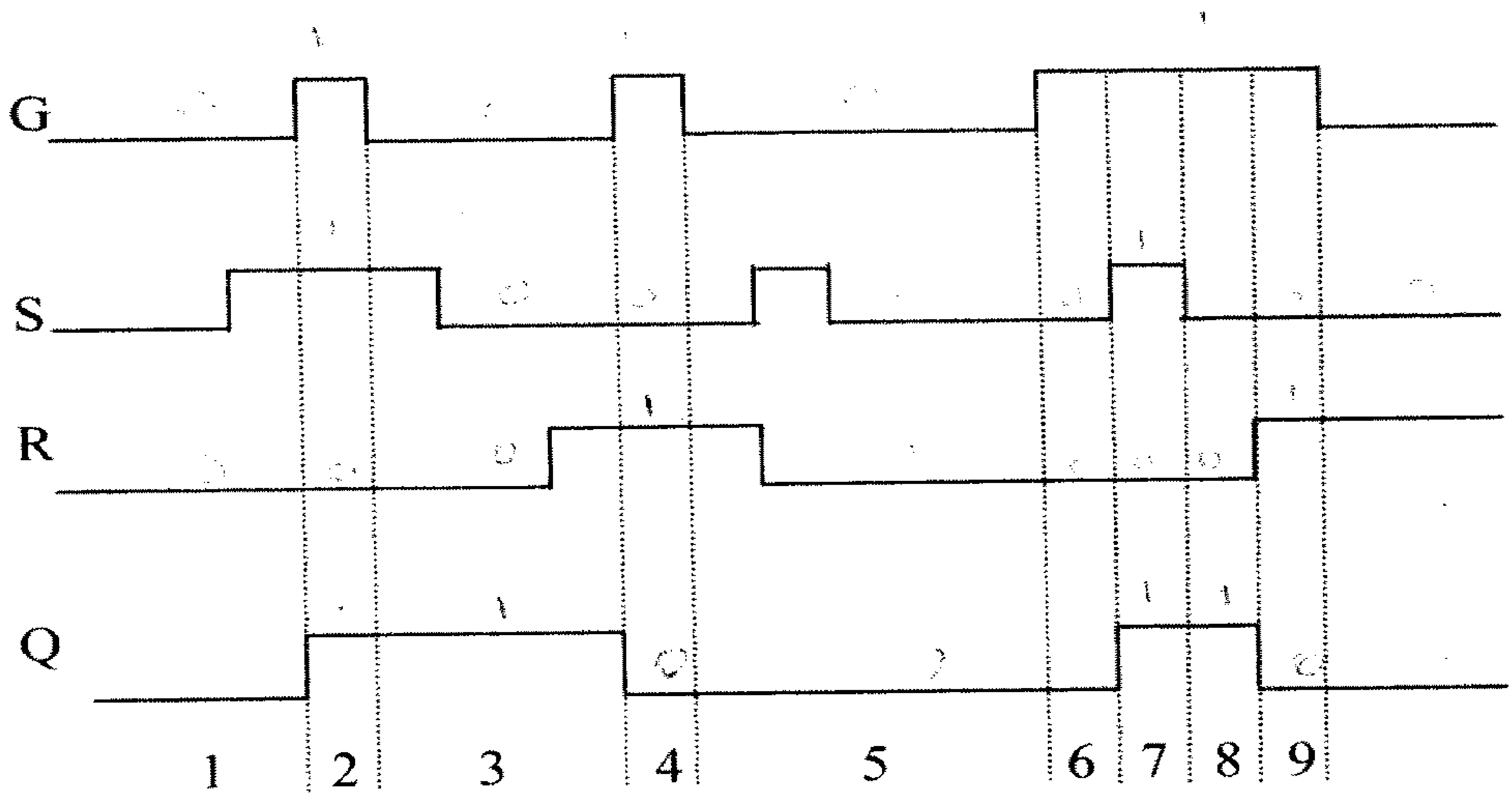
(ب) الدارة المنطقية (أ) الرمز المنطقي

شكل 5-9 قفل S-R NAND موقت

S-R NAND ، وكما سبق لنا دراسته، لا يغير في حالة القفل (حالة غير فعالة). أما إذا كان G=1، فيكون خرج البوابة G_1 مساويا لـ $\overline{S}$ وخرج البوابة G_2 مساويا لـ $\overline{R}$ عندئذ، تتغير حالة القفل S-R NAND حسب ما

يمليه مستوى المنطق المسلط عل كل من الدخل S والدخل R. من ثم يسلك الدخل G سلوك خط التمكين، الذي يسمح للدخلين S و R بالتحكم في حالة النطاط أو أن يفقدهما التأثير على القفل كلية. يبين الشكل 10-5 المخطط التوقيتي لقفل S-R الموقت (المزود بإشارة توقيت) وبه تسعة فترات زمنية حددت للتحليل الآتي.

1. في الفترة 1 القفل في حالة تصفير ابتدائية (Q=0) ولا يؤثر تغير S الظاهر في هذه الفترة لأن G=0.
2. في الفترة 2 تنشط إشارة التوقيت وتمكن S من تهيئة القفل.
3. في الفترة 3، G=0 وبسبب ذلك يفقد كل من S و R السيطرة على القفل ويبقى القفل في حالة التهيئة السابقة.
4. في الفترة 4 تنشط إشارة التوقيت (G=1) وتمكن R النشطة من تصفير القفل.



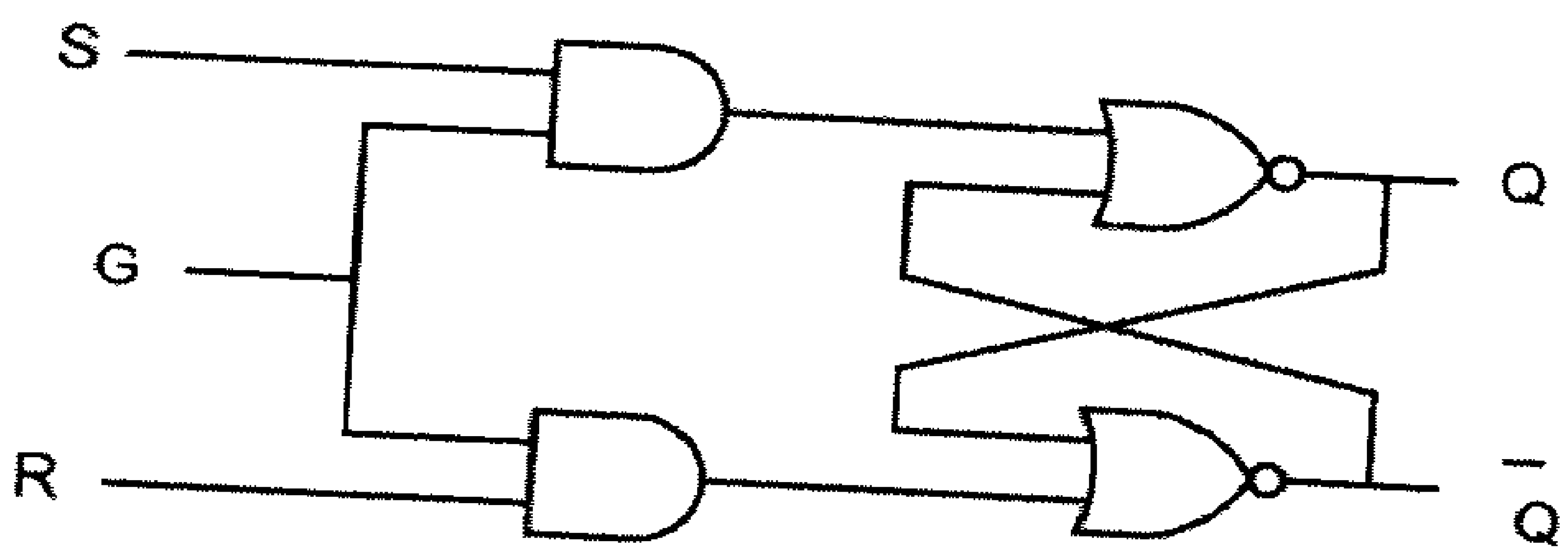
شكل 10-5 المخطط التوقيتي للقفل S-R الموقت

5. في الفترة 5، G=0. وبسبب ذلك يفقد كل من S و R السيطرة على القفل ويبقى القفل في حالة التصفير (Reset) .

6. في الفترة 6 يرتفع G للمنطق 1 في وقت يكون فيه كل من S و R في حالة غير فعالة. من ثم يبقى القفل في حالة تصفير.
7. في الفترة 7، G=1 مما يمكن S من تهيئة القفل.
8. في الفترة 8 يكون كل من S و R في حالة غير فعالة، ويبقى القفل في حالة تهيئة رغم أن G=1.
9. في الفترة 9، G=1 و R فعالة مما يسبب في تصفير القفل.

يعمل كل من الدخل S والدخل R في القفل الموقت كمدخل سيطرة لتحديد ما إذا كان القفل سيهيأ في الحالة 1 أو سيصفر في الحالة 0 على التوالي، فقط عندما يكون دخل إشارة التوقيت عند المنطق 1.

القفل S-R NOR المبين بالشكل 5-3 (ب) يحول إلى قفل S-R NOR موقت وكما هو مبين بالشكل 5-11. تسمح بوابتا AND بتمرير حالة كل من S و R المنطقية إلى القفل NOR إذا كانت G=1 أو منع تمرير حالتهما إذا كانت G=0.. يعمل هذا القفل بطريقة مماثلة لطريقة عمل القفل المبين بالشكل 5-9(ب).



شكل 5-11 الدارة المنطقية لقفل S-R (NOR) الموقت

5-4 النطاطات ذات القدح بالحافة (Edge Triggered Flip-Flops)

في دراستنا السابقة للأقفال الموقتة (Clocked) اقتصر دور إشارة التوقيت على تمكين أو منع S و R من السيطرة على دخل القفل. فمثلا، إذا كان S عاليا و R منخفضا عند دخل القفل S-R المبين بالشكل 5-11 فإن القفل يجب أن ينتظر حتى تصبح إشارة التوقيت عالية

قبل أن يمكن جعل Q في وضع 1. بصورة مشابهة إذا كانت S منخفضة و R عالية فإن القفل يجب أن ينتظر G ليصبح عاليا قبل التمكن من جعل Q في وضع 0. هذا مثال للتوقيت الموجب الذي يجعل القفل ينتظر حتى تكون إشارة التوقيت عالية قبل أن يتمكن الخرج من التغير.

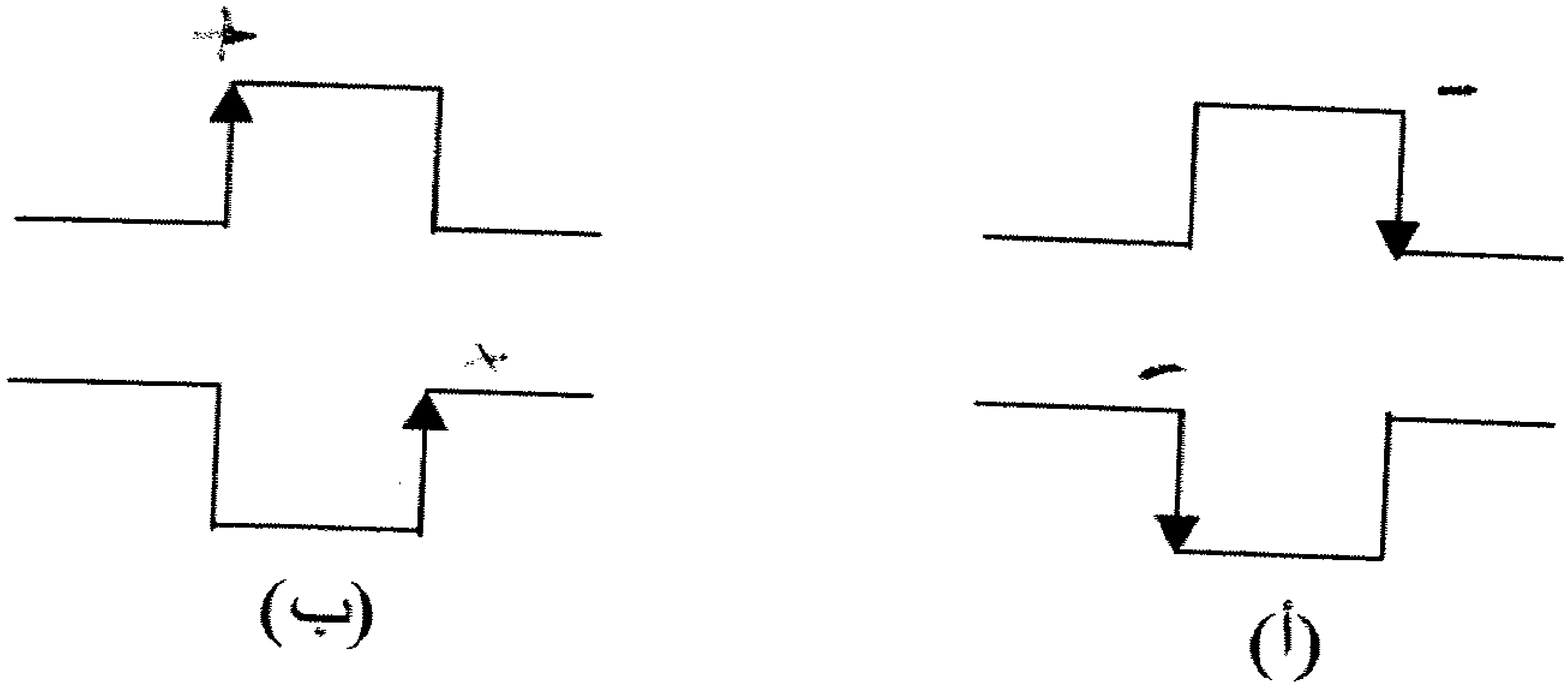
يدعى التوقيت الموجب والسالب غالبا بتوقيت المستوى لأن النطاط يستجيب لمستوى إشارة توقيت (عال أو منخفض).

الآن نقوم بدراسة الأنواع الأكثر استخداما وهي نطاطات ذات القدح بالحافة. هذه النطاطات تستجيب لقيم إشارة الدخل فقط لحظة تغير مستوى إشارة التوقيت عند دخل الساعة. والفكرة الأساسية هي أن يتغير الخرج فقط عند الحافة الصاعدة (الموجبة) لإشارة التوقيت أو عند الحافة الهابطة (السالبة) فقط.

في هذا النوع من النطاطات يمكن أن يتغير الخرج فقط عند لحظة واحدة خلال دورة كاملة لإشارة التوقيت. بالمقابل، فإن التوقيت بالمستوى يمكن أن يسمح للخرج بأن يتغير أكثر من مرة خلال نصف دورة كاملة لإشارة التوقيت. للنطاط ذي القدح بالحافة دخل لإشارة التوقيت يسمى دخل الساعة (Clock input) C أو CP الذي يؤدي وظيفة تشبه تماما وظيفة دخل الساعة في القفل ولكن يتطلب لتغيير حالة النطاط تغيرا في مستوى الإشارة عند دخل الساعة وذلك حسب الشروط التي يمليها دخلا التحكم.

يبين الشكل 5-12 نبضات كالتي تصدر عن مصدر إشارة التوقيت "الساعة" مزودة بأسهم تبرز الحواف الصاعدة (الموجبة) والحواف الهابطة (السالبة) التي يمكن للنطاطات أن تغير حالتها عندها. يسمى النطاط الذي يمكن أن يغير حالته عند حواف نبضات الساعة السالبة بالنطاط ذي القدح بالحافة السالبة (Negative Edge Triggered Flip-Flop)، بينما يسمى النطاط الذي يمكن أن يغير حالته عند الحواف الموجبة بالنطاط ذي القدح بالحافة الموجبة (Positive Edge Triggered Flip-Flop). وبصفة عامة فإن الدارات المنطقية لهذه النطاطات تشبه دارات الأقفال الموقتة فيما عدا

الزيادة المتمثلة في دارة الكشف عن التغير في مستوى الإشارة عند دخل الساعة.

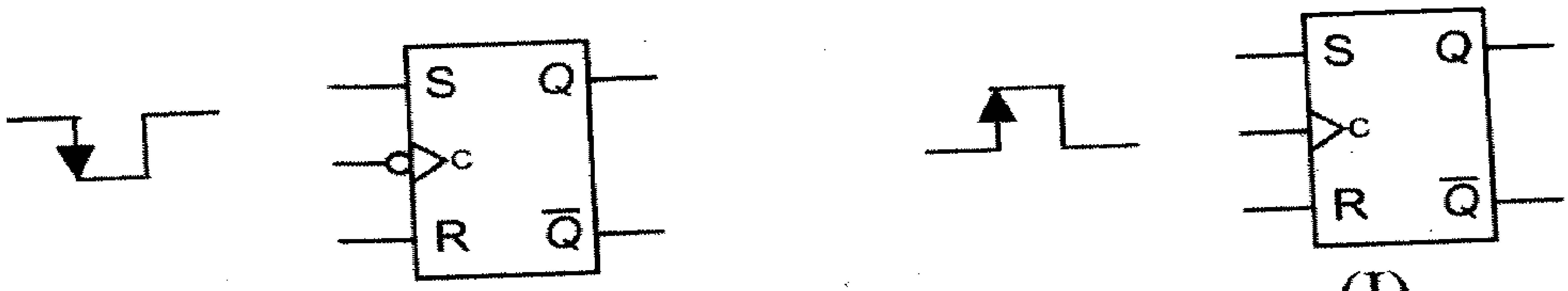


شكل 5-12 نبضات ساعة تقدح نطاطا عند:
(أ) حافة سالبة (ب) حافة موجبة

النطاطات هي العناصر المنطقية الأساسية المكونة للدارات التتابعية المتزامنة ونستعرض فيما يأتي أربعة أنواع من النطاطات هي: نطاطات S-R، T، D و J-K ، وذلك من خلال دراسة كيفية عملها والتعرف عن خصائصها.

5-4-1 النطاط S-R (The S-R Flip-Flop)

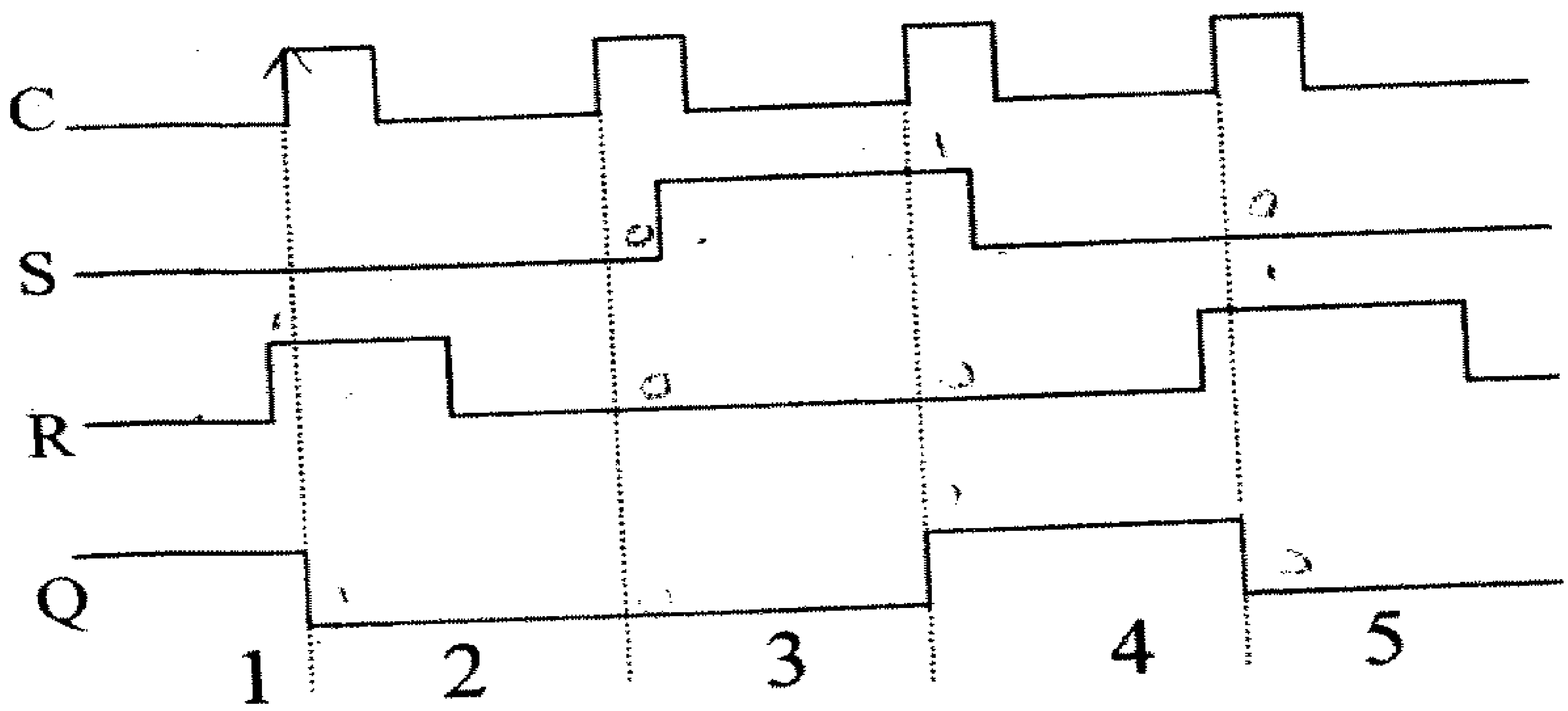
يبين الشكل5-13 الرمز البياني لكل من النطاط S-R ذي القدح بالحافة الموجبة، والنطاط S-R ذي القدح بالحافة السالبة.
يعمل النطاط بكيفية مشابهة لعمل القفل S-R وبحيث يستخدم دخلي السيطرة S و R لتهيئة النطاط (Q=1) أو لتصفيره (Q=0) لحظة تغير مستوى إشارة الساعة وذلك حسب ما يمليه الجهد المسلط عليهما.
يزود دخل الساعة C للنطاط بمثلث صغير يرمز إلى القدح بالحافة. كما تدل الفقاعة الصغيرة عند دخل الساعة إن وجدت على نطاط ذي قدح بالحافة السالبة، بينما يدل عدم وجودها على نطاط ذي قدح بالحافة الموجبة.



(ب) (أ)

شكل 5-13 الرمز البياني لنطاط S-R
(أ) ذي القدح بالحافة الموجبة (ب) ذي القدح بالحافة السالبة

يبين الشكل 5-14 المخطط التوقيتي (Timing diagram) للنطاط S-R ذي القدح بالحافة الموجبة. يغذى دخل الساعة بسلسلة متواصلة من النبضات الدورية تسبب كل حافة موجبة بها في تغير حالة النطاط وذلك حسب ما تمليه حالة دخلي النطاط S و R لحظة حدوث انتقال موجب في إشارة نبضة الساعة. يبقى النطاط في الفترة 3 في وضع

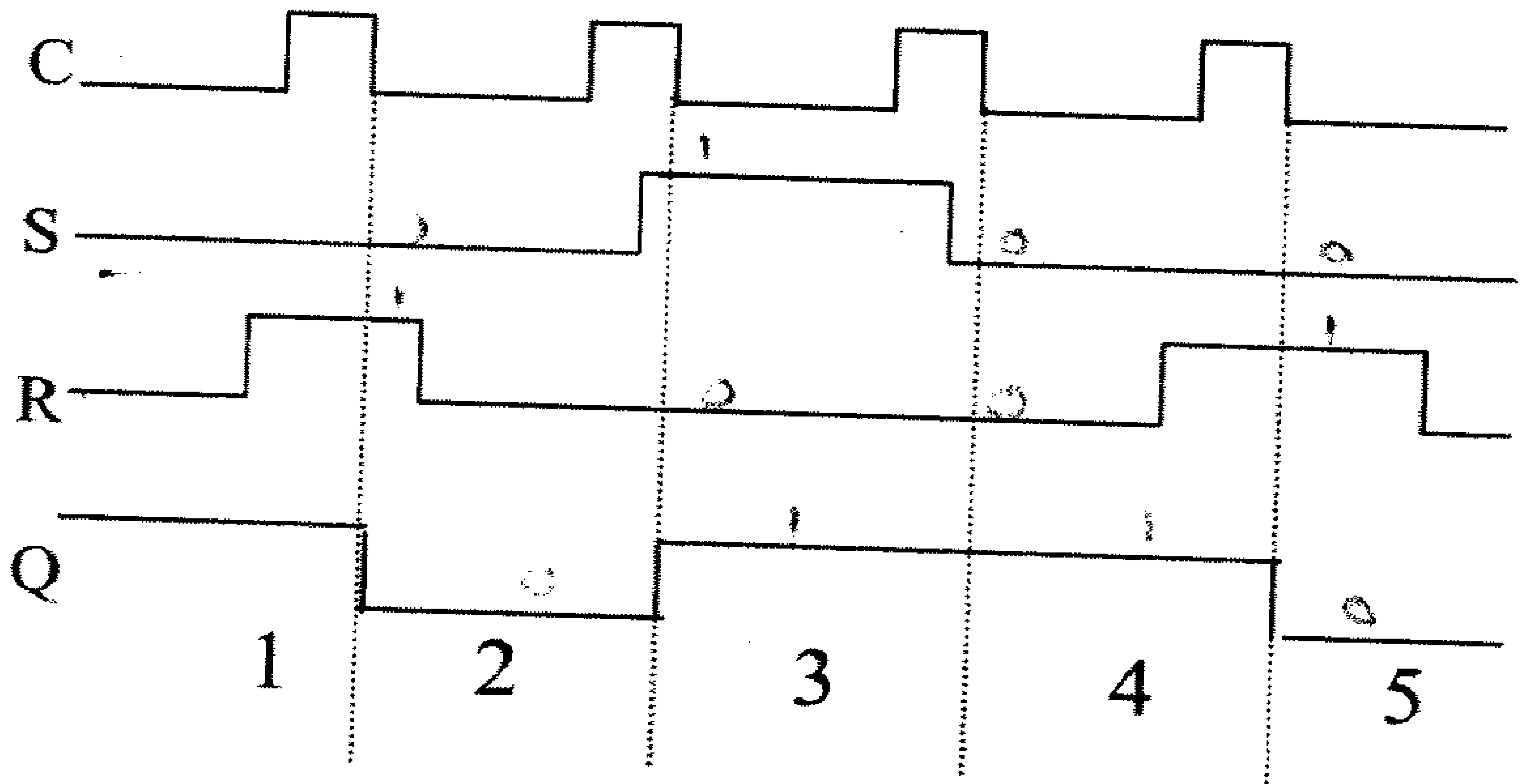


شكل 5-14 مخطط توقيتي للنطاط S-R ذي القدح بالحافة الموجبة

التصفير وذلك لأن S تغيرت من 0 إلى 1 بعد حدوث الانتقال الموجب في نبضة الساعة الثانية. أما خلال الفترة 4 فقد تهيأ النطاط بسبب وجود

الدخل S عند المنطق 1 لحظة حدوث الحافة الموجبة لنبضة الساعة الثالثة.

لتوضيح الاختلافات الناتجة عن استخدام نطاط ذي القدح بالحافة السالبة، تم تحليل المخطط التوقيتي المبين بالشكل 5-14 لنطاط S-R ذي القدح بالحافة السالبة وعرضت النتائج بالمخطط المبين بالشكل 5-15.



شكل 5-15 مخطط توقيتي للنطاط S-R ذي القدح بالحافة السالبة

يتضح من هذا الشكل أن إشارة الخرج Q الناتجة في الشكل 5-15 تختلف بدرجة كبيرة عن إشارة الخرج Q المبينة بالشكل 5-14 رغم استخدام نفس الساعة ونفس إشارات الدخل S و R.

تستخدم جداول تغير الحالة (state transition tables) لوصف كيفية عمل النطاطات. وتحدد هذه الجداول الحالة التالية (next state)، وهي الحالة التي ينتقل إليها خرج النطاط لحظة حدوث تغير في الساعة يقدحه، وذلك بمعرفة الحالة الراهنة (present state) ووضع الإشارات عند دخله في تلك اللحظة.

يبين الجدول 5-1 جدول تغير الحالة المختصر للنطاط S-R (Summarized State Transition Table). يعبر في هذا الجدول بالرمز Q(n) عن الحالة الثنائية للنطاط في وقت معين ويشار له بالحالة

الراهنة (Present State) وبالرمز Q(n+1) لحالة النطاط S-R التالية (Next State)، حيث يمثل الحرف Q خرج النطاط ويدل n+1 على أن هذا الخرج هو خرج النطاط بعد قدحه بنبضة الساعة. يعتبر

جدول 5-1: جدول تغير الحالة المختصر للنطاط S-R

S	R	Q(n+1)
0	0	Q(n)
0	1	0
1	0	1
1	1	X

جدول 5-2: جدول تغير الحالة التام للنطاط S-R

S	R	Q(n)	Q(n+1)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	X
1	1	1	X

جدول تغير الحالة التام أكثر ملاءمة لوصف كيفية عمل النطاط. يصف جدول تغير الحالة التام حالة النطاط التالية Q(n+1) بدلالة S و R و حالته الراهنة Q(n) (حالة النطاط قبل قدحه بنبضة الساعة).

يبين الجدول 5-2 جدول تغير الحالة التام للنطاط S-R وهو يشبه جدول الصدق للدارات التوافقية، يتضمن هذا الجدول كل الاحتمالات الممكنة لقيم S و R و Q(n) وفيه تحدد قيمة Q(n+1) لكل من هذه الاحتمالات حسب جدول تغير الحالة المختصر (جدول 5-1). فمثلا عندما يكون S=0 و R=0 لا تتغير الحالة عندما تقدح نبضة الساعة النطاط. بعبارة أخرى، فإن حالة النطاط التالية Q(n+1) تساوي حالة النطاط الراهنة Q(n) وعندما يكون S=0 و R=1 تكون الحالة التالية للنطاط هي المنطق 0 (RESET) بغض النظر عن حالته الراهنة. بالمثل عندما يكون S=1 و R=0 تكون الحالة التالية للنطاط هي المنطق 1 (SET) بغض النظر عن الحالة الراهنة. أما الوضع الذي يكون فيه S=1 و R=1، فهو وضع غير مسموح به ولا يسانده النطاط S-R ولذلك لا يهمنا معرفة حالة النطاط التالية في هذا الوضع حيث إنه يجب ألا يسمح بأن يكون الدخل S والدخل R معا عند المنطق 1 في نفس اللحظة.

لاحظ أن جدول تغير الحالة لا يتضمن متغير دخل الساعة وإن ذلك المتغير يعتبر موجودا ضمنا من خلال واقع التغير من الحالة الراهنة إلى الحالة التالية الذي لا يحدث إلا عند حافة تقدح النطاط.

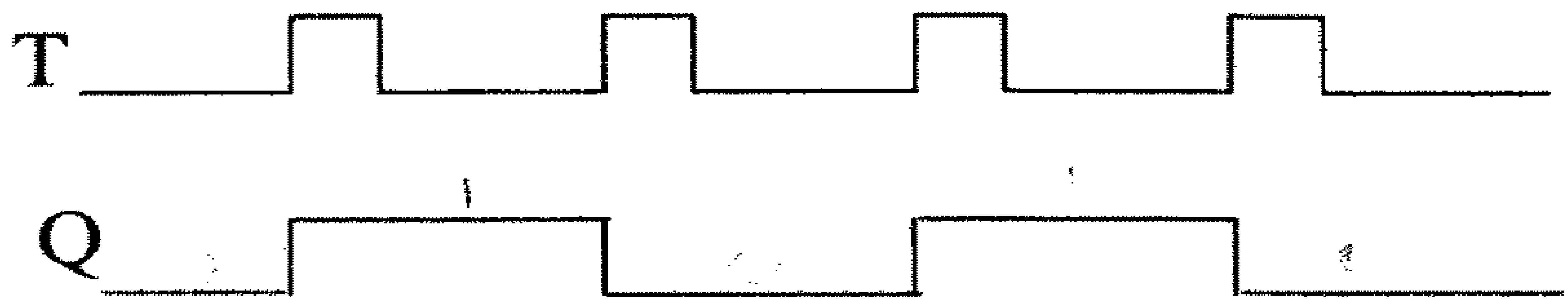
5-4-2 النطاط T (The T Flip-Flop)

ليس للنطاط T مداخل سيطرة كتلك التي في نطاط S-R والدخل الوحيد لهذا النطاط هو دخل الساعة الذي يرمز له عادة بالحرف T كما بالشكل 5-16 . كلما قدحت نبضة الساعة هذا النطاط تبدلت حالته الراهنة عند حافة نبضة الساعة (إشارة التوقيت) إلى حالة تالية تساوي نفي الحالة الراهنة.

يبين الشكل 5-17 المخطط التوقيتي لنطاط T ذي القدح بالحافة الموجبة. مقارنة تردد إشارة نبضة الساعة بتردد إشارة خرج النطاط نجد أن تردد إشارة خرج النطاط T تساوي نصف تردد إشارة التوقيت الداخلة عند T. وعموما يمكن توصيل عدد من نطاطات T على التوالي للحصول على نسب مختلفة من تردد إشارة نبضة الساعة.

شكل 5-16 رمز النطاط T

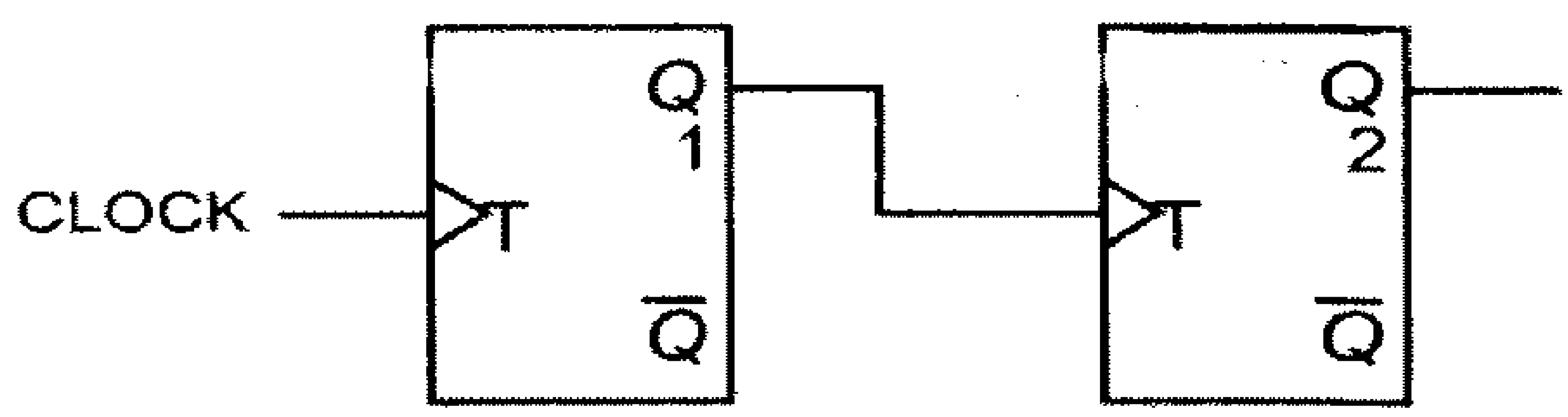
(أ) ذو القدح بالحافة الموجبة (ب) ذو القدح بالحافة السالبة



شكل 5-17 المخطط التوقيتي لنطاط T ذي القدح بالحافة الموجبة

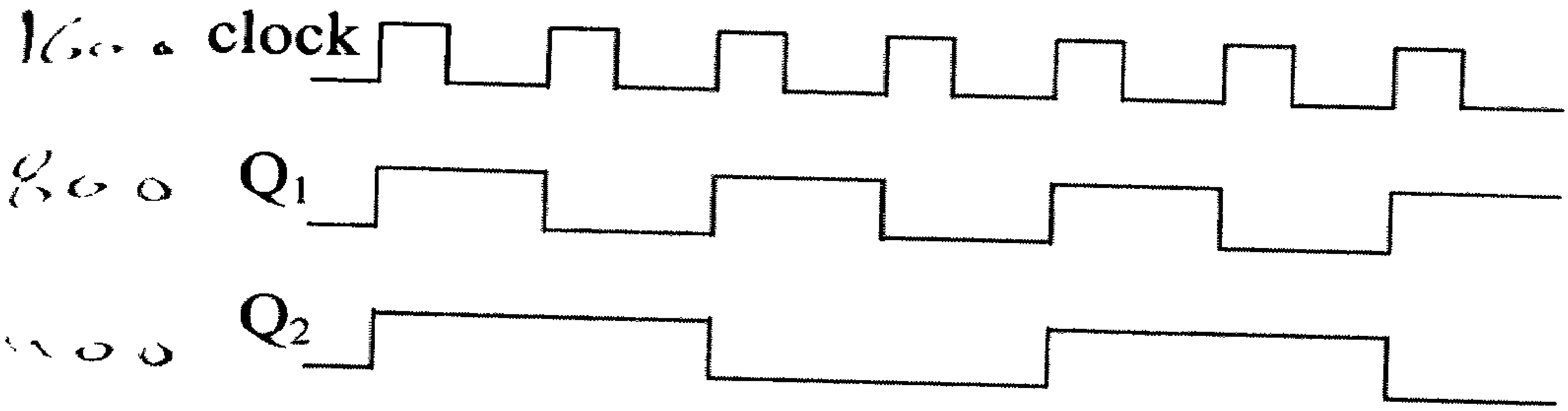
مثـــال 1:

ارسم المخطط التوقيتي للدارة المبينة بالشكل 5-18 مبينا الخرج Q_1 والخرج Q_2 خلال سبع نبضات ساعة، ثم أوجد تردد كل من الإشارة Q_1 والإشارة Q_2 إذا كان تردد إشارة نبضة الساعة 1600 Hz.



شكل 5-18 قسمة التردد باستعمال نطاطات T

مقسم التردد



شكل 5-19 المخطط التوقيتي للشكل 5-18

الحـــل:

يبين الشكل 5-19 المخطط التوقيتي للشكل 5-18 وذلك بافتراض أن حالة النطاطات الابتدائية كانت عند المنطق 0. ويتضح من الشكل أن تردد الإشارة Q_1 تساوي نصف تردد إشارة التوقيت (الساعة) أي 800 Hz، كذلك فإن تردد الإشارة Q_2 تساوي نصف تردد الإشارة Q_1 أي 400Hz .

يبين الجدول 5-3 الكيفية التي تتغير بها حالة النطاط T وفيه نجد أن الحالة التالية للنطاط T تعتمد فقط على حالته الراهنة وتساوي نفيها. لاحظ أن للنطاط T دخلا للساعة فقط وأنه لا توجد به مداخل للسيطرة. نظرا لعدم وجود مداخل سيطرة لهذا النطاط فإن الجدول يتضمن فقط إشارة دخل وحيدة هي إشارة الحالة الراهنة للنطاط Q(n).

جدول 5-3 جدول تغير حالة النطاط T

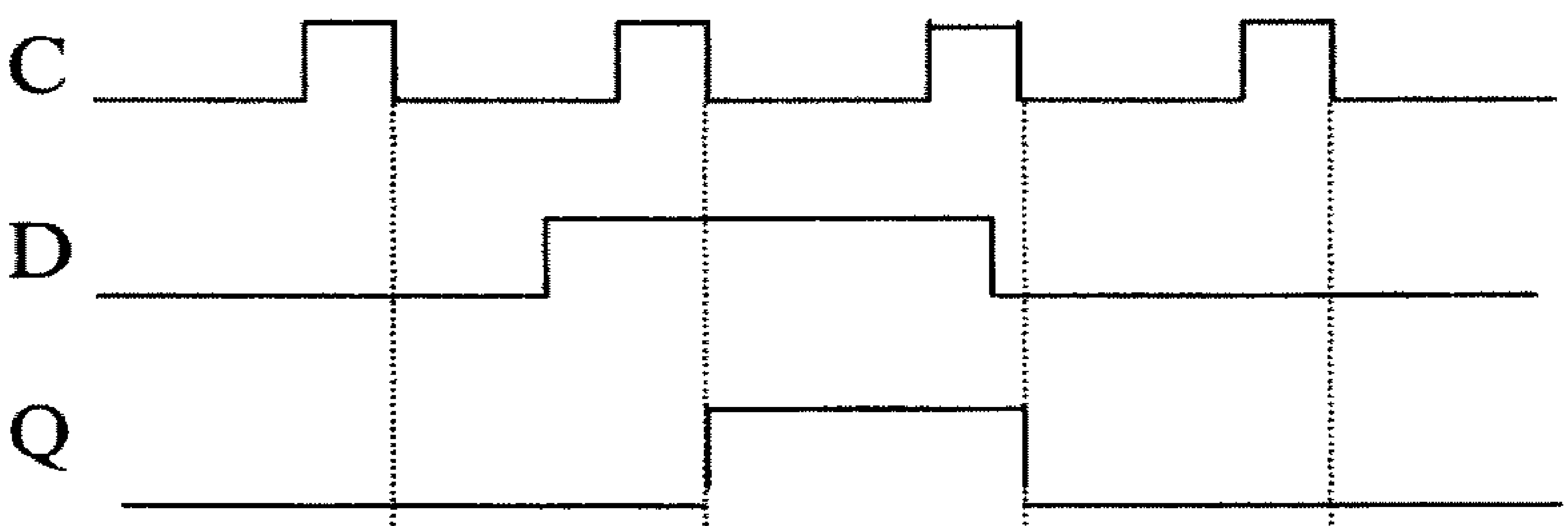
Q(n)	Q(n+1)
0	1
1	0

5-4-3 النطاط D (The D Flip-Flop)

للنطاط D دخل سيطرة واحد هو D بالإضافة إلى دخل الساعة ذي القدح بالحافة الموجبة أو ذي القدح بالحافة السالبة وكما هو مبين بالشكل5-20. يحدد مستوى المنطق عند الدخل D الحالة التالية للنطاط. فمثلا، إذا كان D عند المنطق 1 قبل حدوث تغير في مستوى إشارة نبضة الساعة يقدح النطاط، تكون الحالة التالية للنطاط المنطق 1، وإذا كان D عند المنطق 0 قبل أن يحدث التغير في نبضة الساعة ، تكون الحالة التالية للنطاط المنطق 0.

شكل 5-20 رمز النطاط D

(أ) ذو القدح بالحافة الموجبة. (ب) ذو القدح بالحافة السالبة.



شكل 5-21 المخطط التوقيتي لنطاط D ذي القدح بالحافة السالبة

الشكل 5-21 يبين المخطط التوقيتي للنطاط D ذي القدح بالحافة السالبة ويمكن للطالب رسم المخطط التوقيتي للنطاط D ذي القدح بالحافة الموجبة ومقارنة النتائج.

يمكن التعبير عن كيفية عمل هذا النطاط بجدول تغير الحالة المختصر المبين بالجدول 5-4 والذي يظهر أن الحالة التالية للنطاط D تعتمد فقط على قيمة الدخل D وليس على حالة النطاط الراهنة.

جدول5-4 جدول تغير الحالة المختصر للنطاط D

D	Q(n+1)
0	0
1	1

كما يمكن التعبير عن ذلك بجدول الحالة التام المبين بالجدول5-5 والذي يبرز حقيقة أن الحالة التالية للنطاط D تتبع قيمة الدخل D. فبغض النظر عن حالة النطاط الراهنة، إذا كان الدخل D عند المنطق 0 تكون حالة النطاط التالية المنطق 0، وإذا كان الدخل D عند المنطق 1 تكون حالته التالية المنطق 1.

جدول 5-5: جدول تغير الحالة التام للنطاط D

D	Q(n)	Q(n+1)
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

عند استخدام النطاط D في تصميم الدارات التتابعية يكون من المفيد النظر إلى جدول تغير الحالة من وجهة نظر مختلفة. جدول الحالة

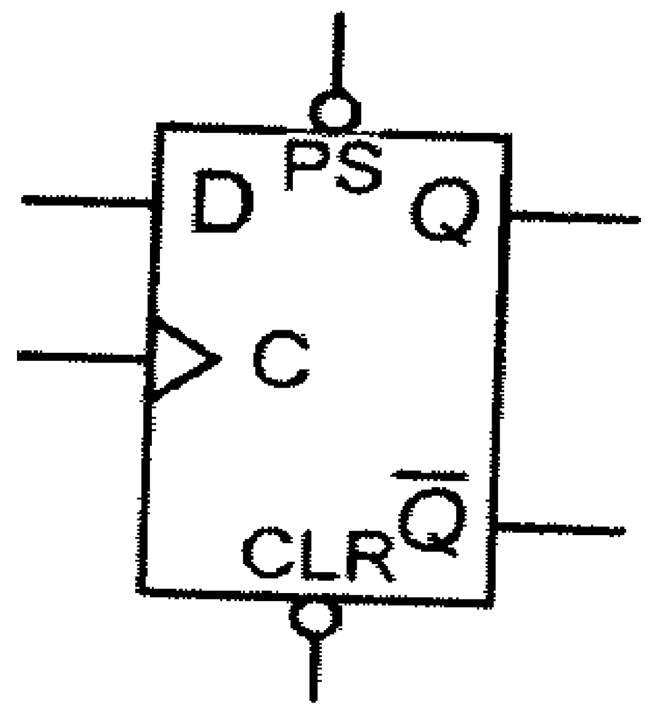
المبين بالجدول 5-5 يحدد الحالة التالية للنطاط D بدلالة حالة النطاط الراهنة وقيمة مستوى المنطق عند الدخل D. ويمكن أيضا استخدام الجدول 5-5 لمعرفة ما يجب أن يكون عليه D لينتقل النطاط من حالة إلى أخرى. هذا ما يبينه الجدول 5-6 الذي يدرج في العمودين الأولين ، تحت Q(n) و Q(n+1)، كل الاحتمالات الممكنة للتغيرات التي يمكن أن يمر بها نطاط عند الانتقال من حالة راهنة إلى حالة تالية ويدرج في العمود الثالث ما يجب أن يكون عليه الدخل D لإتمام ذلك الانتقال. فلكي ينتقل خرج النطاط مثلا من 0 إلى 1، يجب أن يكون D عند المنطق 1. وبالمثل لكي ينتقل النطاط من 1 إلى 0، يجب أن يكون D عند المنطق 0. ولينتقل النطاط من 0 إلى 0 (لا تغيير) يجب إن يكون D عند المنطق 0 ومن 1 إلى 1 (لا تغيير) يجب أن يكون D عند المنطق 1.

جدول 5-6: جدول تغير الحالة المعدل للنطاط D

Q(n)	Q(n+1)	D
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

بالإضافة إلى إشارة دخل السيطرة D المتزامن (Synchronous) مع نبضات إشارة التوقيت (الساعة) عند الدخل C يوجد بالنطاط D (وبالنطاطات عموما) إشارات دخل مباشرة (Direct Input) غير متزامنة مع إشارة نبضة الساعة (Asynchronous) تؤثر على خرج النطاط مباشرة ومن دون مراعاة لتغير مستوى إشارة نبضة الساعة ولا إلي قيمة دخل السيطرة D المتزامن. الشكل 5-22 يبين رمز النطاط D ذو القدح بالحافة

الموجبة يحتوي على دخلين مباشرين هما: دخل التهيئة المسبقة (PS) ودخل التصفير المسبق (CLR). تشير الفقاعات المصاحبة لهما إن



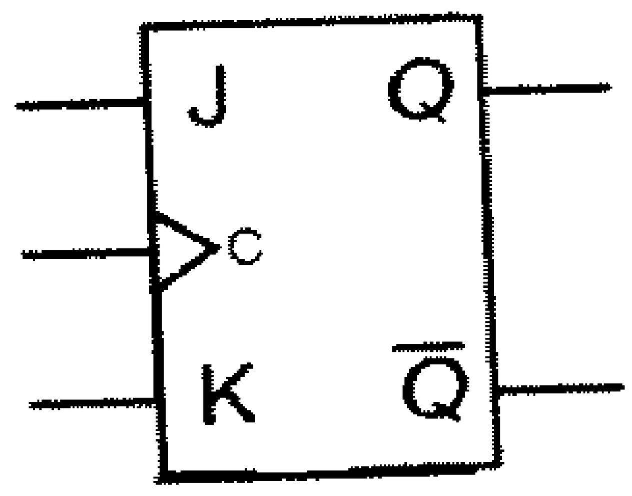
شكل 5-22 نطاط D ذو القدح بالحافة الموجبة مزود بإشارات دخل مباشر

وجدت، بأن الحالة المنخفضة هي الفعالة. بعبارة أخرى فإنه في حالة أن يكون هذان الدخلان عاليين فهما غير فعالين. أما لتهيئة النطاط في الحالة 1 مسبقا فيجب أن يصبح دخل التهيئة المسبقة منخفضا (0) بصورة مؤقتة ومن ثم يعود عاليا (1). وبصورة مشابهة لتصفير النطاط مسبقا يجب أن يصبح دخل التصفير واطئا بصورة مؤقتة ومن ثم يعود عاليا مرة أخرى. لاحظ أنه لا يصح في هذه الحالة أن يكون كلا الدخلين المباشرين منخفضين في نفس الوقت وأن أحدهما فقط يمكن أن يكون منخفضا بصورة مؤقتة. كما أنه يجب التأكد أيضا من أن يكون هذان الدخلان غير فعالين بوصلهما للمنطق 1 في حالة عدم استخدامهما. والجدير بالملاحظة أنه في حالة عدم وجود فقاعتين مرافقتين للدخلين المباشرين تكون الحالة الفعالة لهما هي العالية وتكون الحالة المنخفضة هي غير الفعالة.

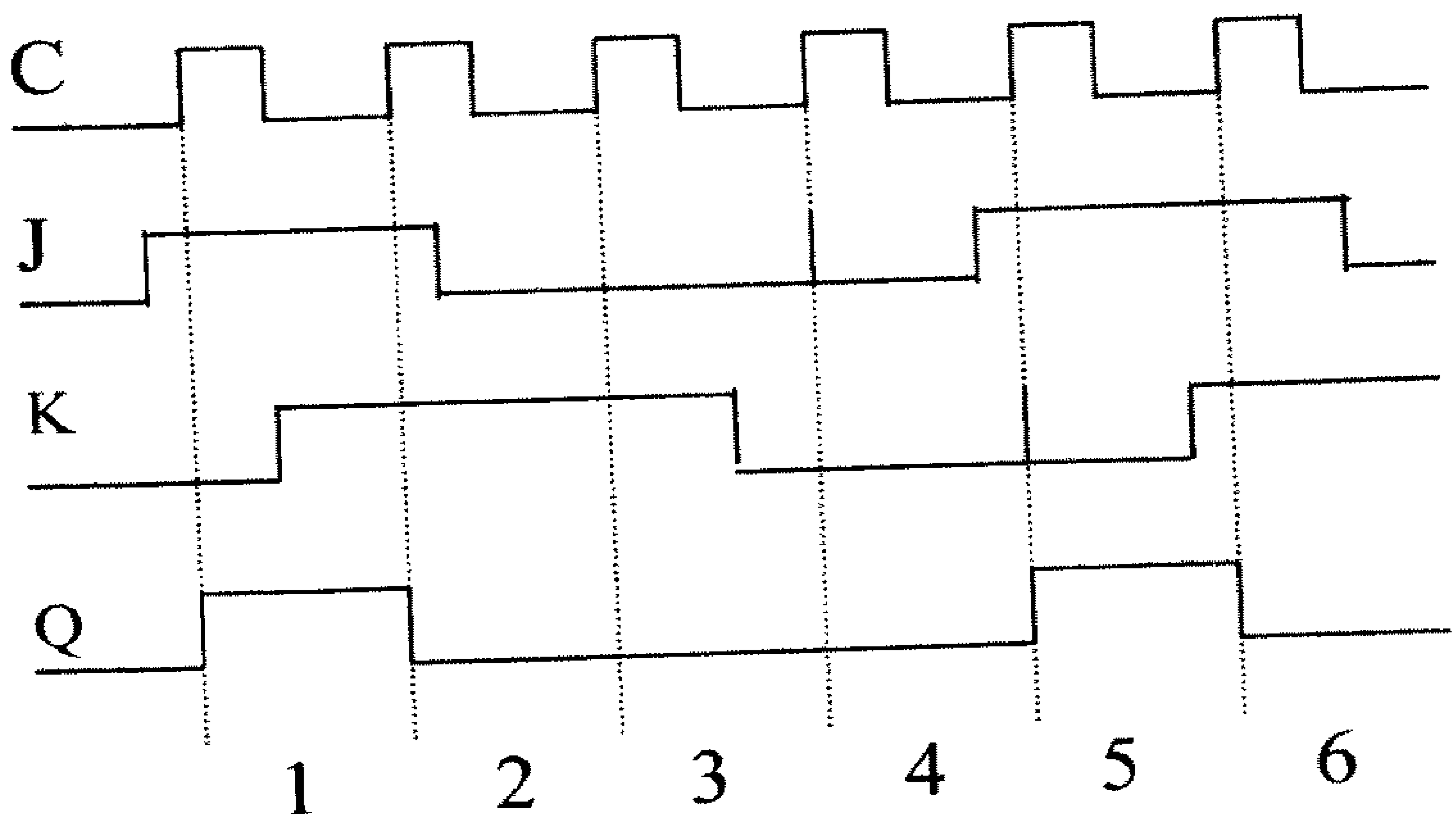
النطاط J-K (The J-K Flip-Flop)

النطاط J-K يشبه في طريقة عمله النطاط S-R ، فالدخل J يهيئ النطاط والدخل K يصفره. ولا يوجد سوى اختلاف واحد يميز النطاط S-R عن النطاط J-K. ففي النطاط S-R، إذا كان S=1 و R=1 تكون الحالة التالية له غير معرفة وتعتبر قيم الدخل هذه غير ممكنة أو ممنوعة. أما في

النطاط J-K، فعندما يكون J=1 و K=1 يغير النطاط حالته بحيث تصبح الحالة التالية للنطاط نفي حالته الراهنة. يبين الشكل 5-23 رمز النطاط J-K ذي القدح بالحافة الموجبة. ويبين الشكل 5-24 المخطط التوقيتي لنطاط J-K ذي القدح بالحافة الموجبة. في هذا المخطط نجد أنه عندما تمر نبضة إشارة الساعة بالحافة الموجبة الأولى بينما يكون J=1 و K=0 يصبح خرج النطاط Q (حالة النطاط التالية) مهيأ عند المنطق 1 خلال الفترة الأولى. وعند الحافة الموجبة



شكل 5-23 رمز النطاط J-K



شكل 5-24 المخطط التوقيتي لنطاط J-K ذي القدح بالحافة الموجبة

الثانية لنبضة إشارة الساعة يكون J=1 و K=1 بينما تكون الحالة الراهنة للنطاط المنطق 1، بذلك تصبح الحالة التالية للنطاط المنطق 0 خلال الفترة الثانية. بنفس هذه الطريقة يمكننا تتبع حالة النطاط خلال

الفترات الباقية حيث نجد أن النطاط يكون في حالة تصفير خلال الفترة الثالثة، ويبقى في حالة تصفير من دون تغير في الحالة خلال الفترة الرابعة وفي حالة تهيأ خلال الفترة الخامسة وفي حالة تصفير خلال الفترة السادسة.

للنطاط J-K جدول مختصر لتغير الحالة وكما هو مبين بالجدول 5-7. تعتمد الحالة التالية $Q(n+1)$ للنطاط J-K على كل من J و K وعلى الحالة الراهنة $Q(n)$. ويمكن التعبير عن ذلك بجدول تغير الحالة التام المبين بالجدول 5-8.

جدول 5-7: جدول تغير الحالة المختصر للنطاط J-K

J	K	Q(n+1)
0	0	Q(n)
0	1	0
1	0	1
1	1	$\overline{Q}(n)$

جدول 5-8: جدول تغير الحالة التام للنطاط J-K

J	K	Q(n)	Q(n+1)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

سبق أن ذكرنا بأنه من الملائم إعادة ترتيب جدول تغيير الحالة بحيث يصبح من الممكن تحديد ما يجب أن يكون عليه دخل النطاط لكي يتحقق انتقال ما عند خرجه. فمن الجدول 5-8 نلاحظ أنه لينتقل خرج النطاط J-K من الحالة الراهنة $Q(n)=0$ إلى الحالة التالية $Q(n+1)=0$ يجب أن يكون الدخل $J=0$ بينما يمكن أن يكون الدخل K إما 0 أو 1. ولكي ينتقل النطاط من الحالة الراهنة 0 إلى الحالة التالية 1 يجب أن يكون الدخل $J=1$ ولكن يمكن أن يكون الدخل K إما 0 أو 1. ولكي ينتقل من الحالة الراهنة 1 إلى الحالة التالية 0 يجب أن يكون $K=1$ ويمكن أن يكون J إما 0 أو 1. أخيرا لكي يبقى النطاط في الحالة الراهنة 1 يجب أن يكون $K=0$ بينما يمكن أن يكون J إما 0 أو 1.

من هذا التحليل يمكن تكوين جدول تغيير الحالة المعدل للنطاط J-K كما هو مبين بالجدول 5-9 . لاحظ أننا قد استخدمنا الرمز x للدلالة على إمكانية أن يكون الدخل المقابل إما 0 أو 1 وهو ما يمثل حالة "لا تهتم" Don't Care .

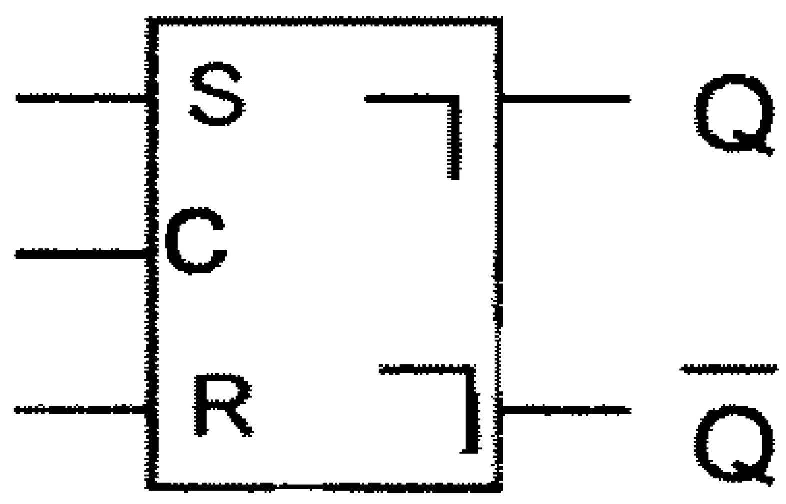
جدول 5-9: جدول تغيير الحالة المعدل للنطاط J-K

Q(n)	Q(n+1)	J	K
0	0	0	X
0	1	1	X
1	0	X	1
1	1	X	0

5-5 نطاطات تابع- متبوع. Master-Slave Flip-Flops

تتغير حالة النطاطات التي سبق لنا دراستها عند حافة نبضة الساعة الموجبة أو السالبة وعرفت بالنطاطات ذات القدح بالحافة. لم تكن هناك عندئذ حاجة لأكثر من حافة نبضة ساعة لقدح النطاط ويوجد العديد من التطبيقات التي تحتاج لنطاطات تغير حالتها عند حدوث نبضة ساعة بأكملها، أي نبضة تشتمل على حافة موجبة وأخرى سالبة. تعرف النطاطات التي تحتاج لنبضة ساعة كاملة لتغيير حالتها بنطاطات تابع- متبوع (Master-Slave Flip-Flops) أو نطاطات ذات القدح بالنبضة (Pulse -Triggered Flip-Flops)

إن أكثر أنواع نطاطات تابع-متبوع انتشارا هو نطاط J-K رغم إمكانية تصميم نطاطات تابع-متبوع من نوع D، S-R، و T أيضا. وحيث إن تصميم نطاط تابع-متبوع نوع S-R هو أبسطها للشرح والفهم، نستخدمه مثالا لباقي النطاطات. يبين الشكل 5-25 الرمز البياني لنطاط S-R تابع-متبوع. لا يوجد بالرمز مثلث صغير عند دخل الساعة لأن النطاط S-R تابع-متبوع لا يقدح بالحافة. بدلا من ذلك يوجد بالرمز علامة الخرج المؤجل (postponed output) (⅂) عند كل من خرجيه للدلالة على أن النطاط لا يتغير حتى تظهر نبضة ساعة بكاملها (أي بحافتيها) عند دخل الساعة.

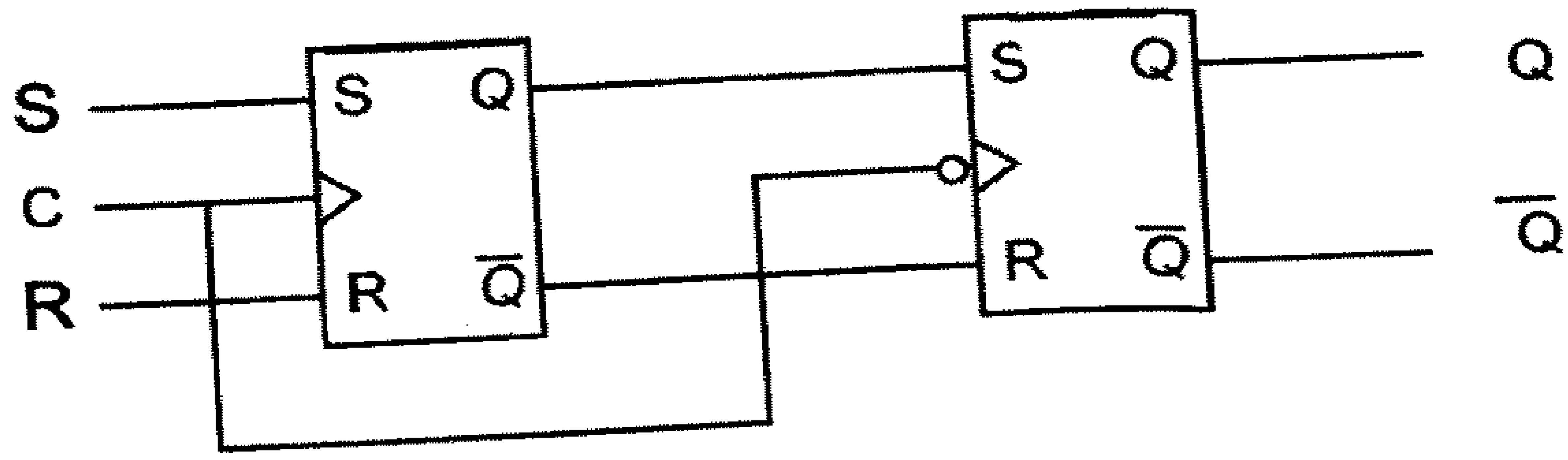


شكل 5-25 رمز النطاط S-R تابع-متبوع

يتكون نطاط S-R تابع-متبوع من نطاطين من نوع S-R ذي قدح بالحافة متصلين على التوالي كما هو مبين بالشكل 5-26. تسلط مداخل النطاط تابع-متبوع S-R : S و R و C على المداخل S و R و

C بالنطاط ذي القدح بالحافة الموجبة المسمى متبوعا (master)، أما المخارج Q و $\overline{Q}$ بالنطاط S-R تابع-متبوع، فتؤخذ من مخارج النطاط ذي القدح بالحافة السالبة المسمى تابعا.

لتهيئة النطاط يسلط على الدخل S المنطق 1 وعلى الدخل R المنطق 0 وتسلط نبضة على دخل الساعة C كما يبينه الشكل 5-26. وحيث إن دخلي الساعة بكل من النطاط تابع و النطاط متبوع متصلان



شكل 5-26 دارة مكافئة لنطاط S-R تابع-متبوع

ببعضهما ، تصل النبضة للنطاطين معا. ولكن نظرا لكون النطاط متبوع يقدح بالحافة الموجبة، فيتهيأ (SET) عند المنطق 1 عندما تصله حافة النبضة الموجبة ومن ثم يمسك بمستويي المنطق (1 و 0) المسلطين على الدخل S وعلى الدخل R عند خرجيه Q و $\overline{Q}$ على التوالي. وحيث إن خرجي النطاط المتبوع Q و $\overline{Q}$ متصلة بدخلي النطاط التابع S و R، ينتقل بذلك المنطق المسلط على دخلي النطاط متبوعا لحظة ارتفاع الحافة الموجبة بنبضة الساعة ليصل إلى دخل النطاط تابعا. وعند حدوث الحافة السالبة للنبضة يتهيأ النطاط التابع ذو القدح بالحافة السالبة لتصبح بذلك حالة خرجاه (وهما نفس خرجي النطاط تابع-متبوع) عند نفس حالة خرجي النطاط متبوع. مما سبق نجد أن النطاط متبوع يستجيب للحافة الموجبة (الصاعدة) فقط بنبضة الساعة بينما يستجيب النطاط تابع للحافة السالبة (النازلة أو الهابطة) فقط.

بالمثل يتم تصفير النطاط، بتسليط المنطق 0 على الدخل S والمنطق 1 على الدخل R.

يغير النطاط متبوع حالته عند الحافة الموجبة لنبضة الساعة وبذلك يصبح خرجاه Q و $\overline{Q}$ عند المنطق 0 و 1 على التوالي. وحيث إن دخلي النطاط تابع S و R عند نفس المستوى المنطقي لخرجي النطاط متبوع Q و $\overline{Q}$ على التوالي، يتم تصفير النطاط تابع عند الحافة السالبة لنبضة الساعة.

عندما يكون دخلا النطاط S-R تابع-متبوع عند المنطق 0 لا تتغير حالة النطاط متبوع عند الحافة الموجبة للنبضة. وحيث إن خرج المتبوع هو نفسه دخل التابع فلا تتغير حالة النطاط تابع عند الحافة السالبة لنبضة الساعة أيضا. بالتالي إذا كان خرج النطاط S-R تابعا (وهو نفس خرج النطاط S-R تابع-متبوع) في حالة تصفير عند حدوث حافة النبضة السالبة يصفر مجددا وإذا كانت متهيئا يتهيأ مجددا.

وحيث إن خرج النطاط تابع-متبوع يتغير فقط بعد ظهور نبضة بأكملها عند دخلها للساعة، فإن مخططها التوقيتي يشبه تماما مخطط النطاط ذي القدح بالحافة السالبة ولذلك يمكن تبادلهما في الكثير من التطبيقات.

رغم توفر أنواع مختلفة من النطاطات إلا أن النطاطات المتوفرة تجاريا هي فقط من النوع D والنوع J-K. يمكن استخدام أحدهما لتنفيذ وظيفة النطاط S-R أو وظيفة النطاط T، كما يمكن أن يؤدي أحدهما وظيفة الآخر.

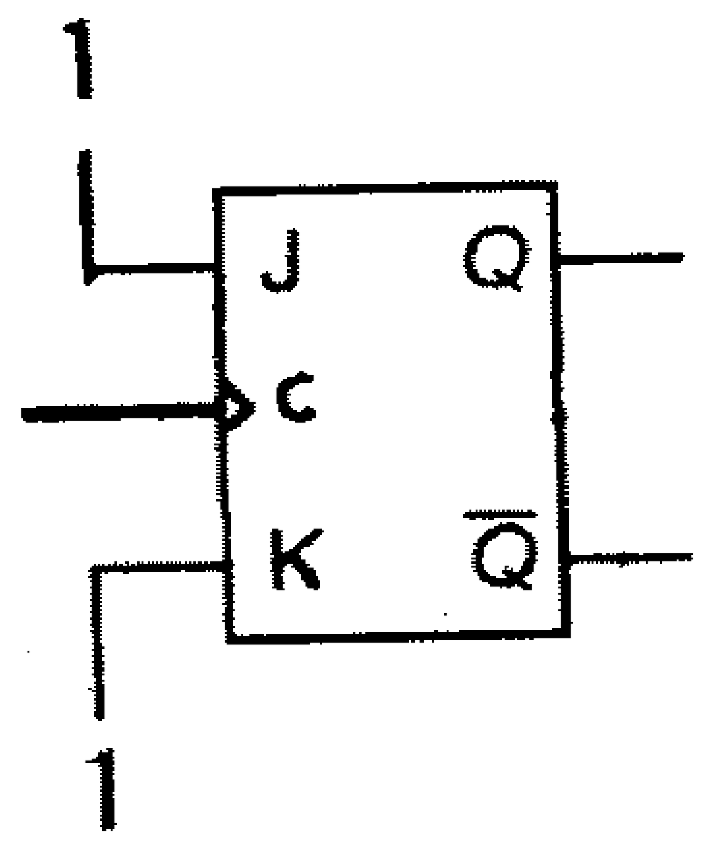
مثـــال 1:

أدخل التعديلات اللازمة على نطاط J-K لكي يؤدي وظيفة النطاط T.

الحـــل:

تذكر أن حالة النطاط J-K التالية هي نفي حالته الراهنة عندما يثبت دخلاه عند المنطق 1. لذلك، لكي نجعل النطاط J-K

يؤدي وظيفة النطاط T يوصل دخلاه J و K عند المنطق 1، كما هو مبين بالشكل التالي:

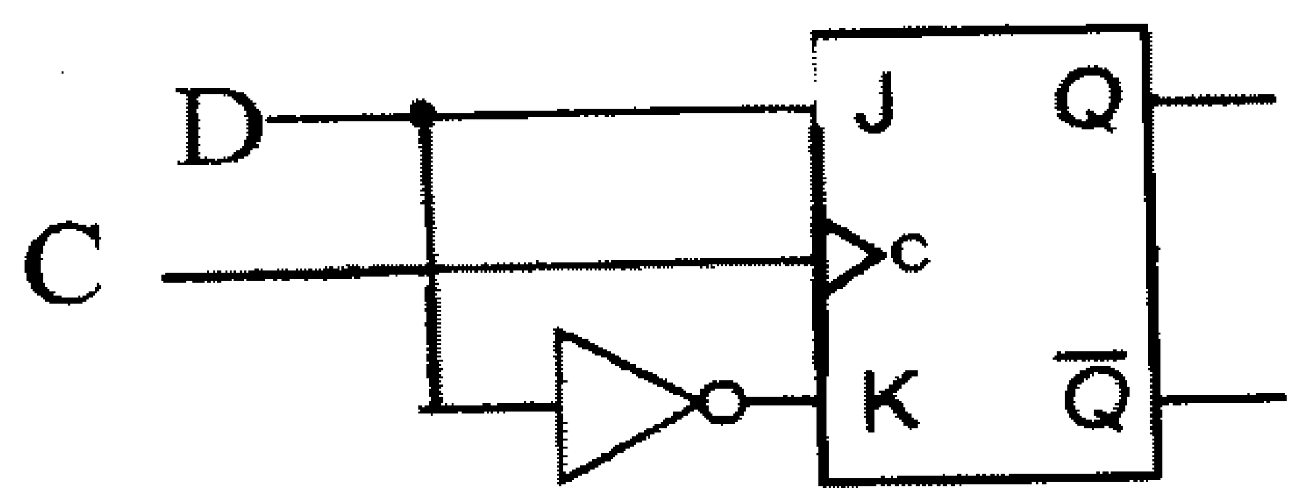


مثـــال2:

أدخل التعديلات اللازمة على نطاط J-K لكي يؤدي وظيفة النطاط D.

الحـــل:

الدارة التي تجعل النطاط J-K يؤدي وظيفة النطاط D مبينة بالشكل التالي. لقد تم وصل دخل النطاط D مباشرة للدخل J وعن طريق عاكس للدخل K. فإذا كان الدخل D عند المنطق 1 يكون J=1 و K=0 فيتهيأ النطاط عند حدوث حافة توقيت موجبة ويصبح خرجه Q عند المنطق 1 (مساويا لحالة الدخل D). أما عندما يكون الدخل D=0 فيكون J=0 ويكون K=1 فيصفر النطاط ويصبح خرجه Q عند المنطق 0 (مساويا لحالة الدخل D) تماما كما يفعل النطاط D.



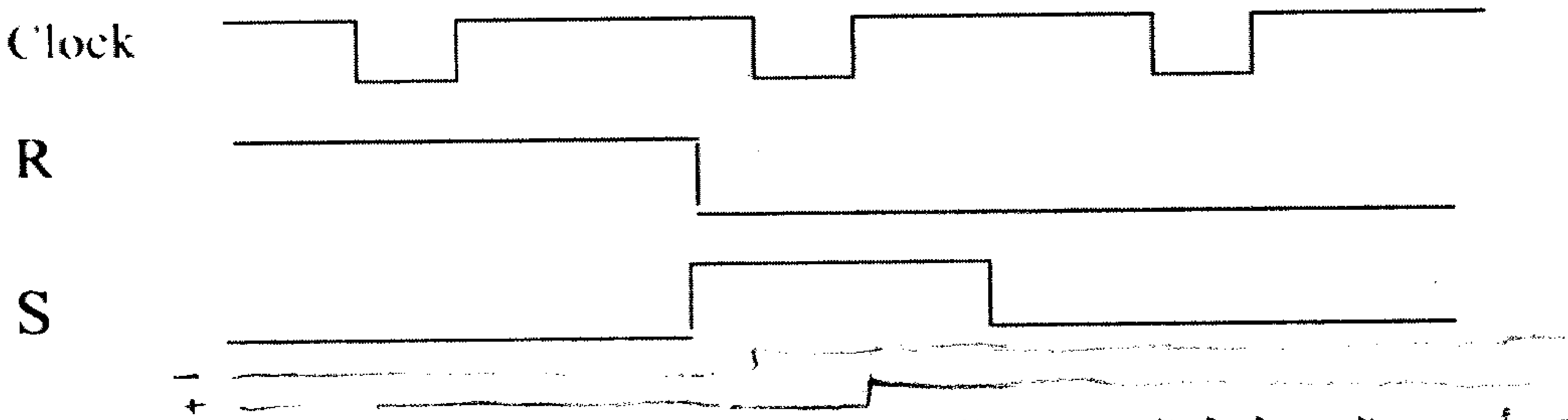
ملخص

1. الدارات المنطقية التتابعية دارات يعتمد خرجها على القيم الثنائية المطبقة على الدخل وكذلك على كافة قيم الخرج الثنائية السابقة.
2. القفل دارة منطقية تتابعية تكون إما في حالة تهيئة عند المنطق 1 أو في حالة تصفير.
3. المخطط التوقيتي يبين عن طريق الرسم عمل دارة منطقية تتابعية وذلك بتحديد العلاقة بين قيم الدخل و الخرج.
4. القفل الموقت مزود بإشارة توقيت (ساعة) تحدد متى يمكن أن يغير القفل حالته.
5. النطاط هو عبارة عن قفل موقت يمكن أن يغير حالته فقط عندما يحدث تغير في مستوى إشارة نبضة ساعة مطبقة عند دخل الساعة.
6. النطاط ذو القدح بالحافة الموجبة يغير حالته عند حواف نبضات الساعة الموجبة (انتقال من المنطق 0 إلى المنطق 1).
7. النطاط ذو القدح بالحافة السالبة يغير حالته عند الحواف السالبة لنبضات الساعة (انتقال من المنطق 1 إلى المنطق 0).
8. جدول تغير الحالة يصف طريقة عمل النطاط وذلك بتحديد حالته التالية بمعرفة الحالة الراهنة ومستويات الإشارات المنطقية عند دخله.
9. الحالة التالية للنطاط T تساوي نفي حالته الراهنة.
10. الحالة التالية للنطاط D تساوي القيمة المنطقية لدخله D عند اللحظة التي تسبق قدحه بنبضة الساعة.

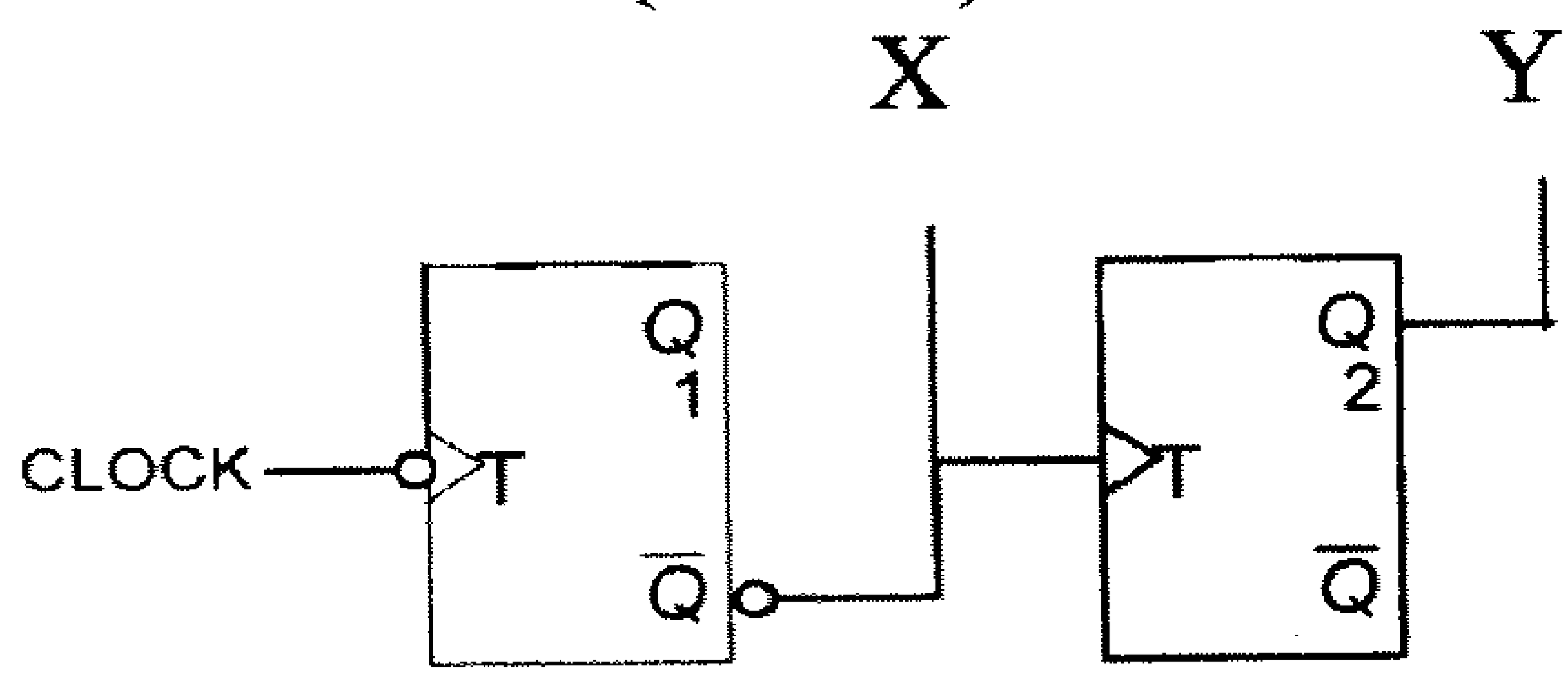
11. يمكن أن يكون بالنطاطات إشارات دخل (سيطرة) متزامنة تس... تغيير حالة النطاط فقط عندما يحدث تغيرا (انتقالا) في مستو... إشارة نبضة الساعة ، وإشارات دخل مباشر غير متزامنة تس... تغيير حالة النطاط دون الحاجة لحدوث تغير في مستوى إشار... نبضة الساعة.
12. تستخدم إشارات الدخل المباشر غير المتزامنة عموما لتهيئة... تصفير النطاط مباشرة وتسمى : دخل التهيئة المسبقة (PS) ودخ... التصفير المسبق (CLR) على التوالي.
13. تشبه طريقة عمل النطاط J-K الكيفية التي يعمل بها النطاط R... فيما عدا أنه لا توجد له احتمالات دخل غير ممكنة (أو ممنوعة... ويعمل الدخل J على تهيئة النطاط بينما يعمل الدخل K ع... تصفيره.
14. يمكن لنطاط تابع-متبوع تغيير حالته حسب ما تمليه قيم إشارات... الدخل للسيطرة فقط بعد ظهور نبضة كاملة عند دخل إشار... الساعة.
15. يمكن إدخال بعض التعديلات على دخل نطاط ما ليؤدي وظي... نطاط آخر.

تدريبــــات

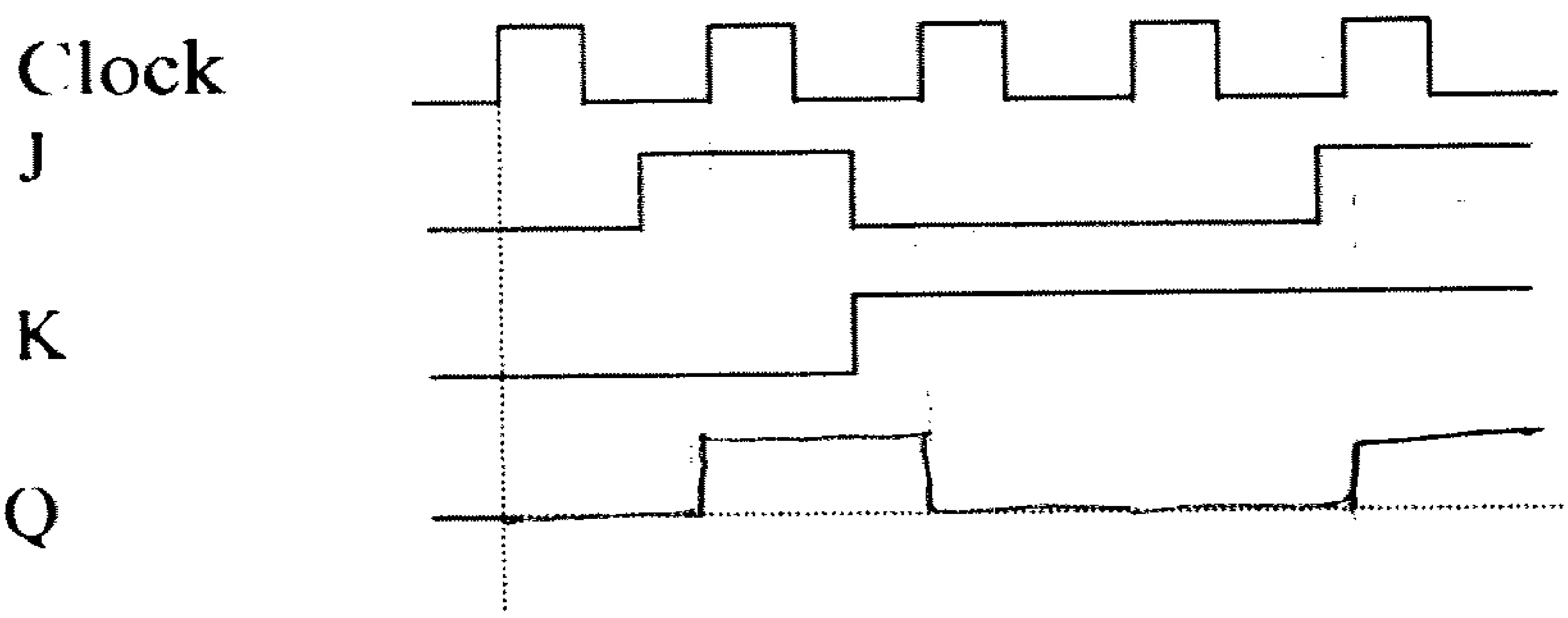
1. أكمل المخطط التوقيتي المبين بالشكل للنطاط S-R ذي القدح بالحافة السالبة. أعد الحل مستخدما نطاط S-R ذا القدح بالحافة الموجبة.



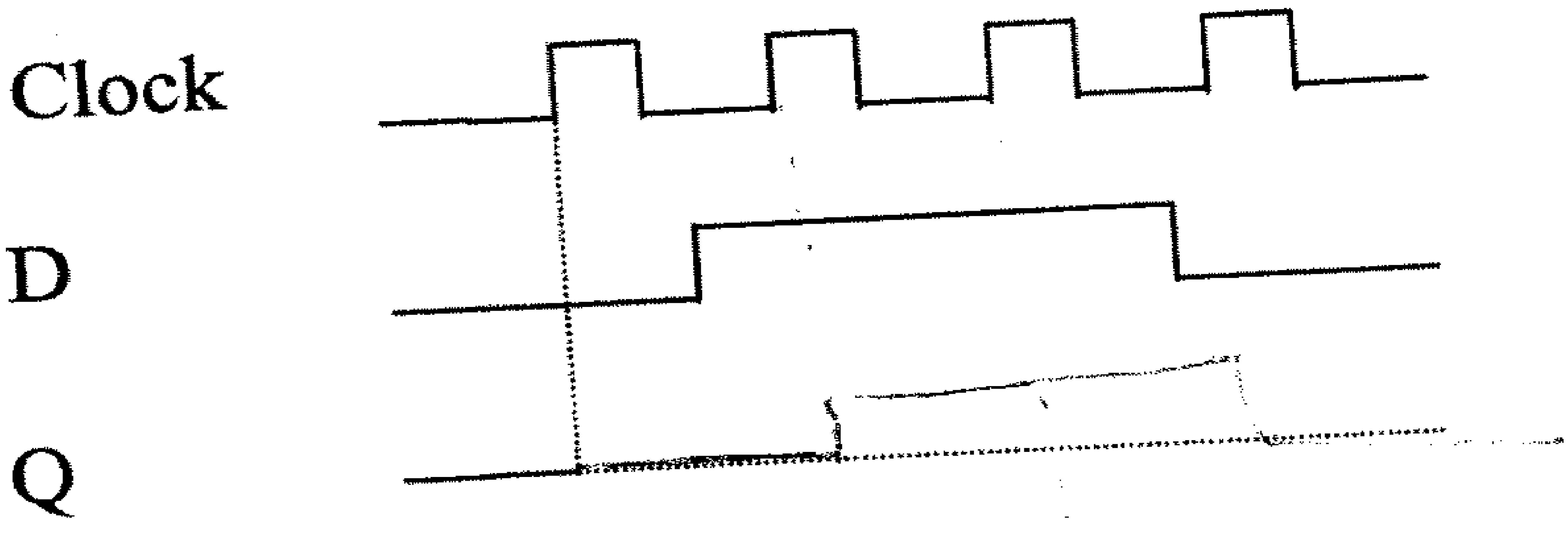
2. أرسم المخطط التوقيتي للدارة المبينة بالشكل مبينا الإخراجين X و Y مقابل إشارة الساعة (Clock)



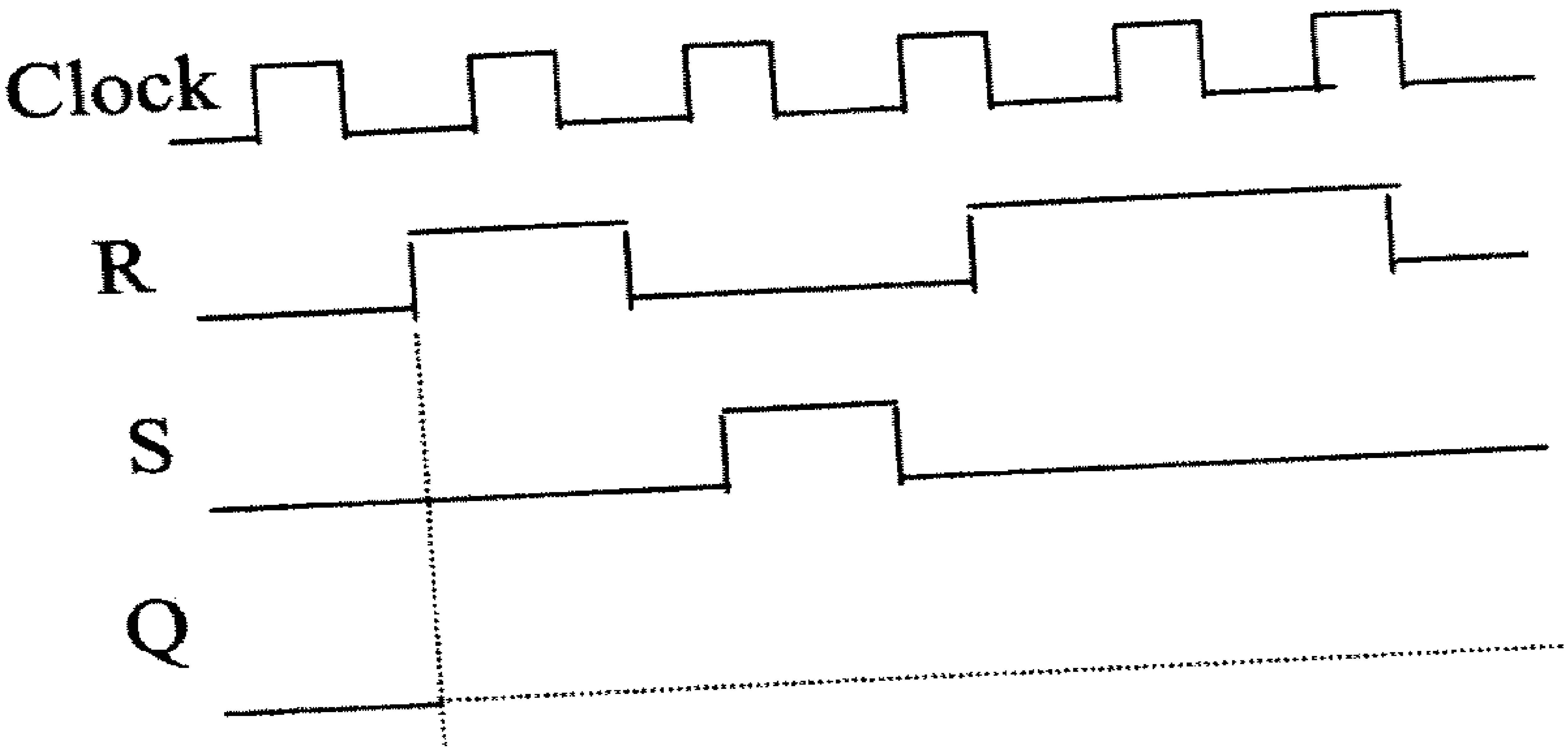
3. أكمل المخطط التوقيتي المبين بالشكل لنطاط J-K ذي القدح بالحافة الموجبة. أعد الحل لنطاط J-K ذي القدح بالحافة السالبة.



4. أكمـل المخطـط التوقيتـي المبين بالشـكل للنطـاط D ذي القدح بالحافة الموجبة. أعد الحل للنطاط D ذي القدح بالحافة السالبة.



5: أكمل المخطط التوقيتي المبين بالشكل للنطاط S-R تابع-متبوع.



6. بين كيف يمكن استخدام نطاط J-K ليؤدي وظيفة النطاط S-R.

7. أدخل التعديلات اللازمة على النطاط S-R ليؤدي وظيفة النطاط D.

8. يعمل النطاط X-Y حسب جدول تغير الحالة المختصر الآتي:

جدول تغير الحالة المختصر للنطاط X-Y

X	Y	Q(n+1)
0	0	1
0	1	Q(n)
1	0	$\overline{Q}(n)$
1	1	0

استنتج جدول تغير الحالة التام لهذا النطاط.

9. بين كيف يمكن تحوير نطاط X-Y المذكور في التدريب 8، ليعمل كنطاط D.

أعد الحل ليعمل مثل النطاط J-K.

الباب السادس

السجلات و العدادات

Registers And Counters

الباب السادس

6

السجلات و العدادات
Registers And Counters

1-6 مقدمة

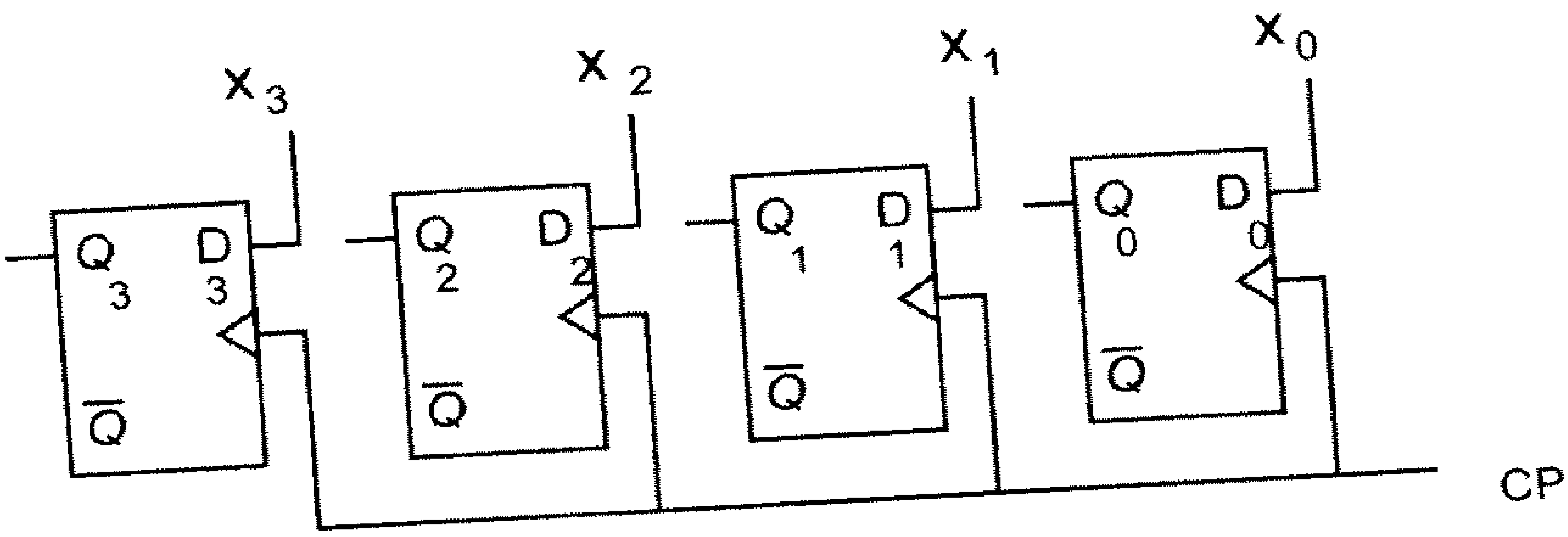
يتكون السجل من مجموعة من النطاطات تعمل معا كوحدة واحدة. ويستخدم أبسط السجلات لخزن البيانات والمعلومات في صيغة رقمية. فمثلا يتألف سجل الثماني ثنائيات (خانات) في معالج دقيق من ثماني نطاطات ويمكنه الإمساك بتعليمات أو بيانات رقمية طولها 8 ثنائيات. وتقوم الأنواع الأخرى من السجلات بتغيير الكلمات المخزنة بها وذلك بإزاحة خاناتها إلى اليمين أو اليسار أو بإنجاز عمليات أخرى سوف يتم التطرق لها في هذا الفصل.

العداد هو نوع خاص من السجلات مصمم لحساب عدد نبضات التوقيت الواصلة عند دخله. يشرح هذا الفصل بعض **السجلات والعدادات** الأساسية المستخدمة في الأنظمة الرقمية وفي الحاسبات الدقيقة.

2-6 سجل المصد Buffer Register

وهو أبسط أنواع السجلات. كل ما يفعله هو خزن كلمة رقمية. ويبين الشكل 6-1 سجل مصد مكون من نطاطات D ذات القدح بالحافة الموجبة لنبضة الساعة التي تصل لدخل الساعة بالنطاطات المكونة للسجل عند نفس اللحظة. لذلك، فإنه عند وصول أول حافة موجبة لنبضة الساعة يتغير خرج كل نطاط حسب القيمة الظاهرة عند دخله ومن ثم تصبح الكلمة المخزنة به هي:

$$.Q=(Q_3Q_2Q_1Q_0) = X=(X_3X_2X_1X_0)$$

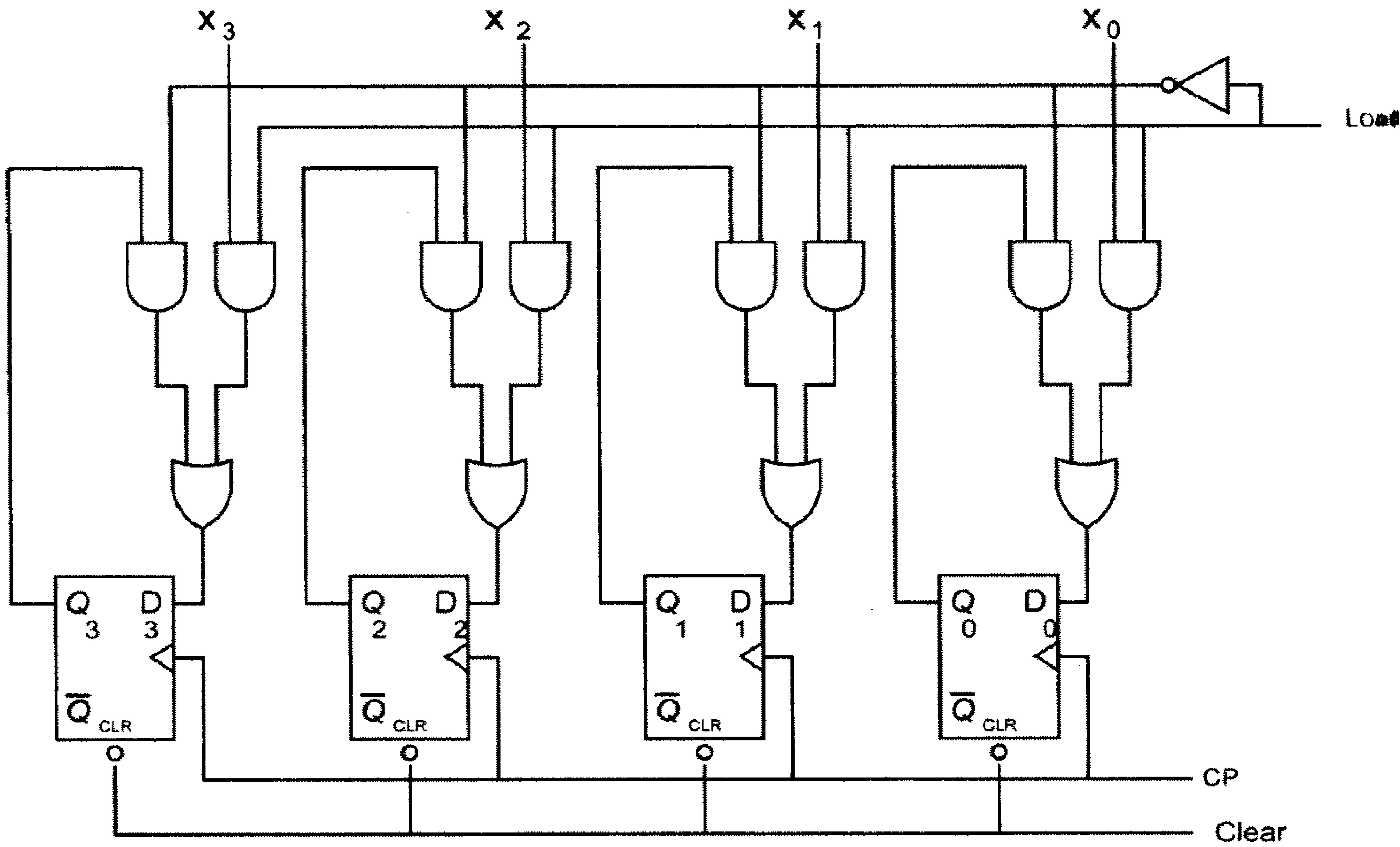


شكل6-1 دارة سجل مصد

6-3 سجل مصد منضبط Controlled Buffer Register

تسمى عملية تخزين بيانات جديدة في السجل بعملية تحميل السجل. ويتضح من الشكل6-1 بأن عملية تحميل هذا السجل بالبيانات الظاهرة عند دخله تحدث كلما ظهرت نبضة ساعة عند دخل الساعة بالنطاطات المكونة للسجل. وبذلك فإنه إذا ما أردنا المحافظة على محتوى السجل بدون تغيير، فيجب البحث عن طريقة يمكن من خلالها استخدام خطوط سيطرة (control lines) لتحديد الفترات الزمنية التي يسمح فيها بتحميل السجل بالبيانات الظاهرة عند دخله أو بإعادة تهيئته (مسحه أو تصفيره) عند الحاجة.

يبين الشكل6-2 سجل الأربع ثنائيات المنضبط. يتكون السجل من نطاطات D ويستخدم الدخل Load (حمل) للسيطرة على عملية التحميل (التخزين) و الدخل Clear (امسح أو صفر) للسيطرة على عملية التصفير.



شكل 6-2 دارة سجل مصد منضبط

دخل السيطرة Clear متصل بدخل التصفير المباشر بكل نطاط (CLR) في السجل. عندما يصبح مستوى هذا الدخل منخفضا (Clear=0) يصفر كل نطاط ومن ثم يصفر السجل بكامله بكيفية غير متزامنة مع نبضة الساعة. لهذا السبب عندما يكون Clear=0 تصبح الكلمة المخزونة Q = 0000 . يفيد الدخل Clear في تصفير السجل قبل تشغيله تحت سيطرة نبضة الساعة. هذا الدخل يجب أن يثبت عند المنطق 1 خلال فترة تشغيل السجل تحت سيطرة نبضة الساعة.

دخل السيطرة Load يمر خلال مجموعة من البوابات إلى دخل كل نطاط بالسجل. وبالرغم من أن نبضات الساعة تتواجد باستمرار عند كل نطاط إلا أن عملية التحميل تتم تحت سيطرة الدخل Load. فعندما يكون دخل السيطرة Load=0، لا تستطيع البيانات X الوصول لدخل

النطاطات وفي نفس الوقت يتمكن خرج كل نطاط من أن يعود عكسيا إلى دخل البيانات العائدة له. وعند وصول كل حافة من حواف إشارة نبضة الساعة الموجبة يتم تدوير أو إعادة حفظ البيانات بالسجل. بعبارة أخرى لا تتغير البيانات في هذا السجل عندما تكون إشارة Load=0 لأن دخل كل نطاط D مساو لحالته الراهنة Q. إن وصلة التغذية العكسية في كل نطاط تصبح ضرورية عند استخدام نطاط D نظرا لعدم امتلاك النطاط D لحالة "اللاتغيير".

عندما تكون إشارة Load فعالة (Load=1) تحدد إشارات الدخل X_0 وحتى X_3 عندئذ البيانات الثنائية التي تحمل في السجل عند حدوث حافة موجبة بنبضة الساعة ومن ثم تصبح الكلمة المخزنة Q =X.

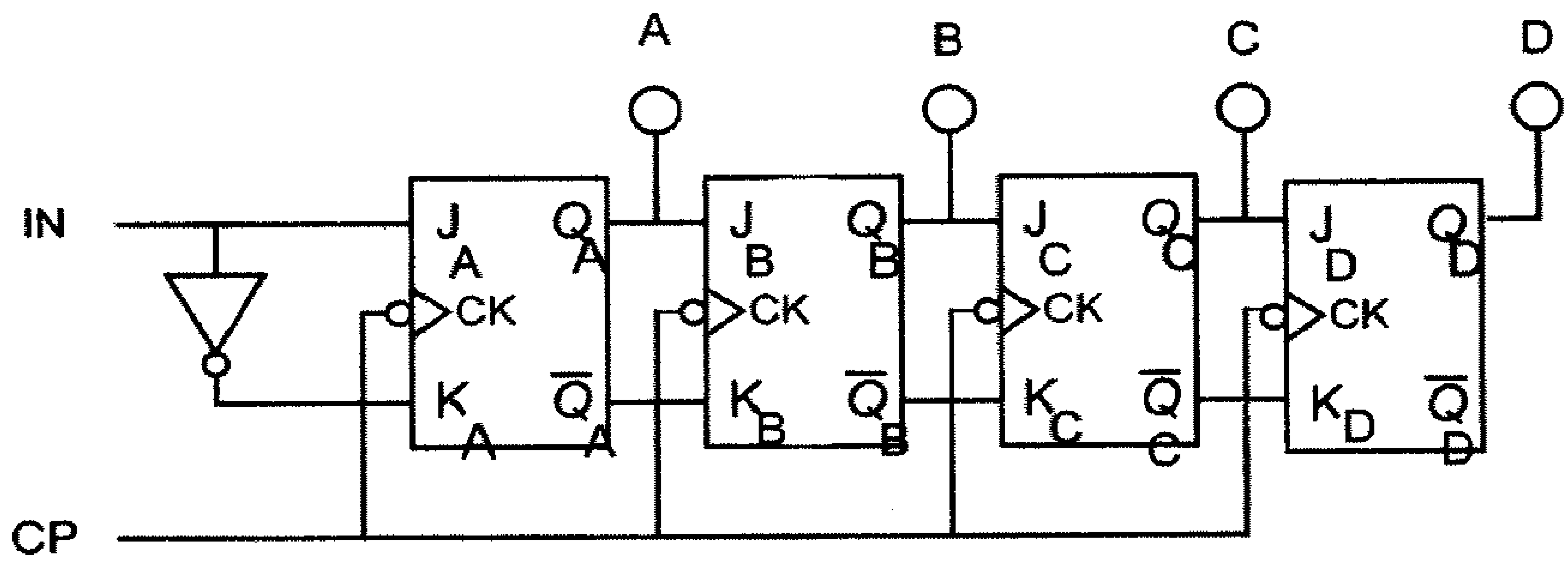
إذا ما عادت إشارة Load إلى مستوى منخفض (Load=0) تخزن الكلمة الموجودة بالسجل بصورة مؤكدة، وهذا يعني أن إشارة الدخل X يمكن تغييرها بدون التأثير على الكلمة المخزنة. لقد أصبح من الممكن التحكم في عمليات تحميل السجل وعدم تحميله باستخدام دخل السيطرة Load شريطة أن يكون دخل السيطرة Clear غير فعال (Clear=0) كما ذكرنا سابقا.

6-4 سجلات الإزاحة Shift Registers

يحرك سجل الإزاحة البيانات المخزنة يسارا أو يمينا. وتستخدم المعالجات الدقيقة عمليات الإزاحة هذه لتنفيذ بعض العمليات الحسابية والمنطقية.

يتكون سجل الإزاحة إلى اليمين المبين بالشكل 6-3 من أربعة نطاطات من النوع J-K تابع-متبوع ربطت بحيث $J \neq K$. في هذه الحالة يسلك النطاط J-K سلوك النطاط D بحيث يتبع خرجه Q دخله J عند حدوث حافة نبضة الساعة السالبة. يتبع الخرج Q_A الدخل IN ويتبع الخرج Q_B الدخل المساوي Q_A ويتبع الخرج Q_C الدخل المساوي Q_B

ويتبع الخرج Q_D الدخل المساوي Q_C. وهكذا، عندما تأتي حافة توقيت سالبة تتحرك البيانات المخزنة موقعا واحدا إلى اليمين في كل من النطاطات الأربعة المكونة للسجل كما تدخل البيانات للسجل على نحو متسلسل عن طريق المدخل IN، وتزاح يمينا خلال السجل. فمثلا عندما يثبت IN=1 وتكون البيانات المخزونة بالسجل ابتدائيا ABCD=0000 تكون إشارات دخل النطاطات $J_B=J_C=J_D=0$ و $K_B=K_C=K_D=1$ ، و $J_A=1,K_A=0$. عند وصول حافة التوقيت السالبة الأولى يصبح $Q_A=1$ فقط وتبقى باقي النطاطات عند الحالة $Q_B=0$ ، $Q_C=0$ ، $Q_D=0$ بدون تغيير وتكون الكلمة المخزنة عندئذ ABCD=1000. لقد أصبح الآن $J_B=1, K_B=0$ بينما تبقى $J_C=J_D=0$، $K_C=K_D=0$ و $J_A=1, K_A=0$. عندما تصل حافة التوقيت السالبة الثانية يتغير خرج كل نطاط تبعا لشروط دخله فتصبح محتويات السجل ABCD=1100 . وهكذا .. ينتج عن حافة التوقيت السالبة الثالثة ABCD=1110 وعن حافة التوقيت السالبة الرابعة ABCD=1111.



شكل 6-3 سجل الإزاحة إلى اليمين ذو الأربعة نطاطات

بعد ذلك لا تتغير محتويات السجل طالما بقيت IN=1. وبافتراض أن IN تتغير الآن إلى 0 ينتج عن نبضات توقيت متعاقبة محتويات السجل التالية:

ABCD=0111

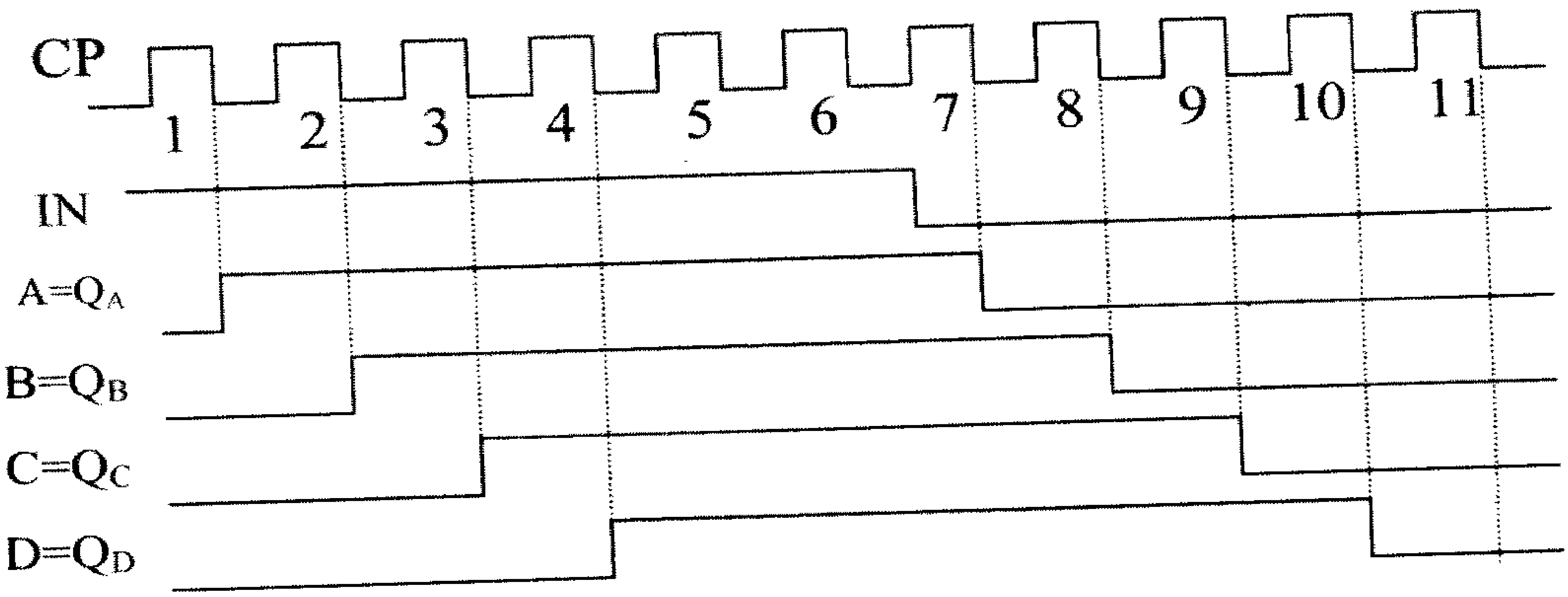
ABCD=0011

ABCD=0001

ABCD=0000

وطالما بقيت بعد ذلك IN=0 لا يكون لنبضات الساعة (المؤقت) أي تأثير آخر. الشكل 6-4 يبين مخطط التوقيت لعمليات الإزاحة إلى اليمين المشروحة أعلاه. كما يبين الجدول 6-1 طريقة أخري للتعبير عن عمليات الإزاحة التي تتم بهذا السجل.

الجدير بالذكر أنه بعكس اتجاه سجل الإزاحة المبين بالشكل 6-3 يتم الحصول على سجل إزاحة إلى اليسار تزاح فيه البيانات المخزنة موقعا واحدا إلى اليسار عند وصول حافة التوقيت السالبة وتدخل البيانات هذا السجل من ناحية اليمين على نحو متسلسل وتزاح يسارا خلال السجل.



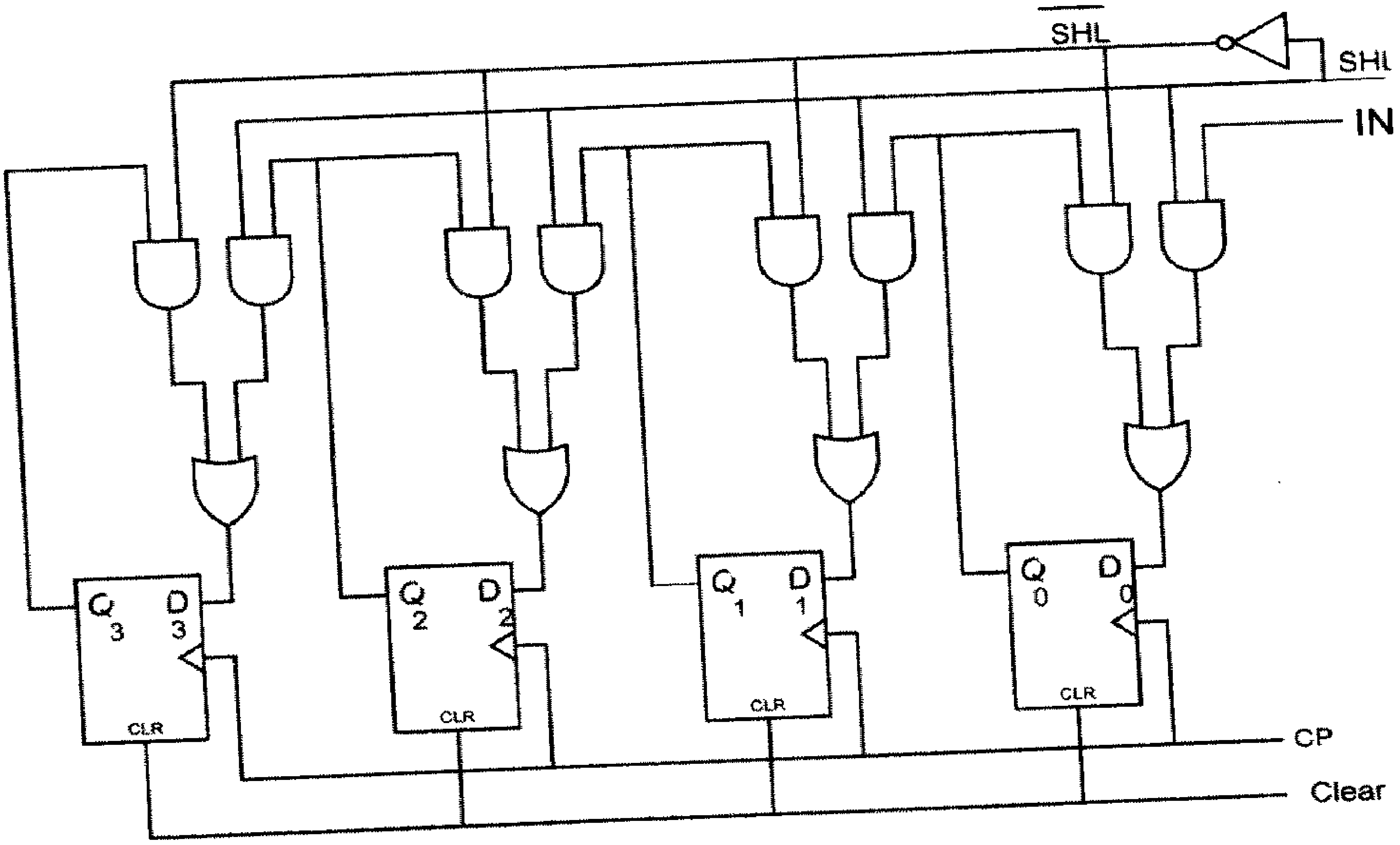
شكل 6-4 المخطط التوقيتي لسجل الإزاحة إلى اليمين

جدول 6-1 عمليات الإزاحة بسجل الإزاحة إلى اليمين

CP	IN	QA	QB	QC	QD
1	1	1	0	0	0
2	1	1	1	0	0
3	1	1	1	1	0
4	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1
7	0	0	1	1	1
8	0	0	0	1	1
9	0	0	0	0	1
10	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0

6-4-1 سجلات الإزاحة المنضبطة Controlled Shift Registers

تحتوي سجلات الإزاحة المنضبطة على مداخل سيطرة تحدد ما يفعله السجل عند نبضة التوقيت التالية. فمثلا يستخدم السجل المبين بالشكل6-5 دخل السيطرة SHL في السيطرة على عمليات الإزاحة إلى اليسار ويستخدم دخل السيطرة CLR في عملية تصفير (مسح) السجل . الدخل CLR متصل بدخل التصفير المباشر للنطاطات المكونة للسجل. هذا الدخل يصفر كل النطاطات عندما يكون فعالا (في هذه الحالة CLR=1) من ثم يمسح السجل بأكمله من دون أن يكون متزامنا مع نبضة الساعة (إشارة التوقيت). لهذا السبب يجب أن يكون هذا الدخل غير فعال (CLR=0) عند تفعيل أحد خطوط السيطرة الأخرى المتزامنة



شكل 6-5 دارة سجل إزاحة منضبط

مع إشارة التوقيت CP. أما عندما تكون الإشارة CLR=0 وتكون الإشارة SHL منخفضة (غير فعالة) تكون الإشارة $\overline{SHL}$ عالية، مما يمكن وصول خرج كل نطاط إلى دخل البيانات التابع له عن طريق خط التغذية المرتد عكسيا وفي هذه الحالة يتم الاحتفاظ بالبيانات في كل نطاط بدون أن تتغير أثناء وصول نبضات التوقيت. بهذه الطريقة يتم الحفاظ على البيانات بالسجل بصورة دائمة مهما تغيرت إشارة نبضة الساعة عند دخل الساعة بالنطاط. أما عندما تكون SHL عالية (فعالة) تزيح كل حافة موجبة لنبضة الساعة البيانات المخزنة موقعا واحدا إلى اليسار.

لاحظ أن البيانات الخارجية تدخل السجل في شكل متوالية ثنائية واحدة كل نبضة توقيت عن طريق النطاط الواقع في الجهة اليمنى وتصله

عن طريق الخط IN. هذا يعني بأننا نحتاج إلى أربع نبضات توقيت لخزن كلمة بطول 4 ثنائيات. فمثلا إذا كان المطلوب تخزين الكلمة 1010 في هذا السجل وكان خط السيطرة SHL فعالا (SHL=1) وخط السيطرة CLR غير فعال (CLR=0)، نجعل IN=1 لنبضة التوقيت الأولى و IN=0 لنبضة التوقيت الثانية و IN=1 لنبضة التوقيت الثالثة و IN=0 لنبضة التوقيت الرابعة. فإذا كان السجل خاليا قبل نبضة التوقيت الأولى تبدو محتويات السجل المتعاقبة كما يلي:

Q_3	Q_2	Q_1	Q_0	IN	CP
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	2
0	1	0	1	1	3
1	0	1	0	0	4

بهذه الطريقة تدخل البيانات بصورة متوالية في النهاية اليمنى للسجل وتزاح إلى اليسار حتى يتم تخزين كل الخانات الأربع . بعد دخول الخانة الأخيرة ترجع الإشارة SHL منخفضة للحفاظ على محتويات السجل من دون تغيير. ويمكن التعبير عن كيفية عمل هذا السجل بجدول الوظيفة التالي:

جدول6-2 وظيفة سجل الإزاحة المبين بالشكل6-4

SHL	CLR	العملية
0	0	لا تغيير في حالة السجل
x	1	تصفير (مسح) السجل
1	0	إزاحة البيانات المخزنة موقعا واحدا إلى اليسار

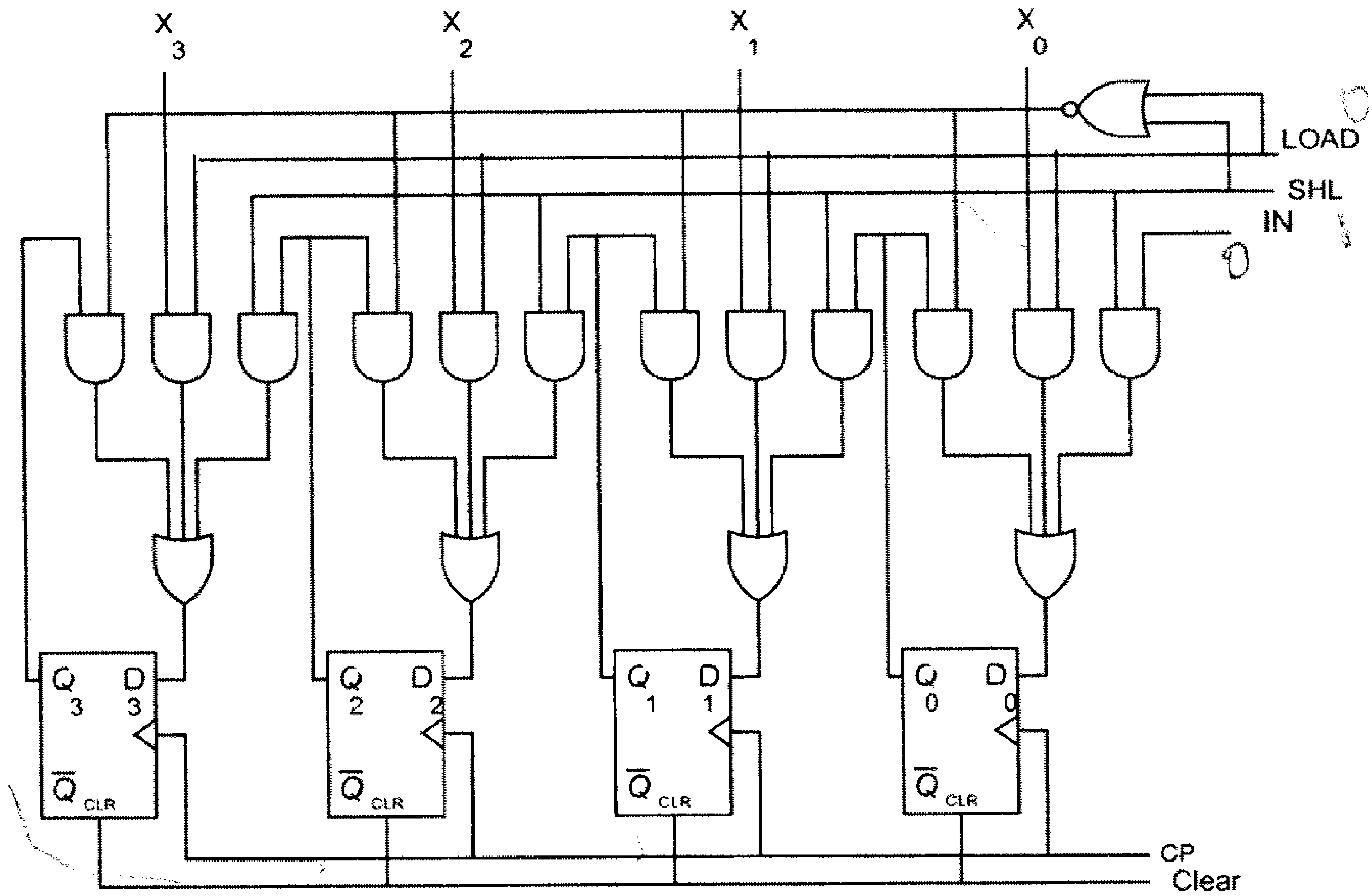
لاحظ أن تفعيل إشارة السيطرة CLR تمسح السجل وتجعل محتواه 0000 مباشرة دون مراعاة لإشارة SHL أو إلى نبضة الساعة CP، لذلك يجب عدم تفعيل خط السيطرة على عملية الإزاحة SHL حتى تعود CLR إلى مستوى منخفض (غير فعال). وعموما فإنه لا يسمح بتفعيل إشارتي السيطرة CLR و SHL معا وفي آن واحد.

2.4.6 سجل الإزاحة ذو التحميل على التوازي

Shift Register with Parallel Load

يعتبر السجل المبين بالشكل6-6 تطويرا لدارة سجل الإزاحة السابق إذ يتمكن من تحميل البيانات التي تظهر على خطوط الدخل $(X_3X_2X_1X_0)$ مباشرة إلى النطاطات بالإضافة إلى إمكانية إزاحة البيانات شمالا. هذا النوع من دخول البيانات يدعى بالتحميل على التوازي حيث يكفي لإتمام عملية التخزين نبضة توقيت (ساعة) واحدة.

فإذا كانتا LOAD و SHL منخفضتين فإن خرج بوابة NOR يكون عاليا وترجع مخرجات النطاطات إلى مداخل البيانات التابعة لها. هذا يجبر إعادة حفظ البيانات في السجل عند وصول حافات التوقيت الموجبة وبعبارة أخرى يكون السجل غير فعال عندما يكون LOAD و SHL منخفضتين، وتخزن المحتويات بصورة دائمة. أما عندما يكون LAOD منخفضا و SHL عاليا، تعمل الدارة كسجل إزاحة إلى اليسار. ومن جهة أخرى عندما يكون LOAD عاليا و SHL منخفضا تعمل الدارة كسجل مصد تحمل فيه البيانات الظاهرة على خطوط الدخل المتصلة مباشرة بدخل البيانات بالنطاطات. والجدير بالذكر أنه يحضر تفعيل كل من العمليتين: حمل LOAD و SHL في نفس الوقت لأنه من غير الممكن إنجاز كلتا العمليتين بحافة توقيت واحدة. ويمكن تلخيص عمل دارة هذا السجل في جدول الوظيفة الآتي:



شكل6-6 دارة سجل الإزاحة ذي التحميل المتوازي

جدول6-3 وظيفة السجل المبين بالشكل 6-6

CLR	SHL	LOAD	العملية
0	0	0	لا تغيير في حالة السجل
1	x	x	تصفير غير تزامني للسجل
0	1	0	إزاحة محتوى السجل موقعا واحدا إلى اليسار
0	0	1	تحميل السجل على التوازي بالبيانات التي عند دخله

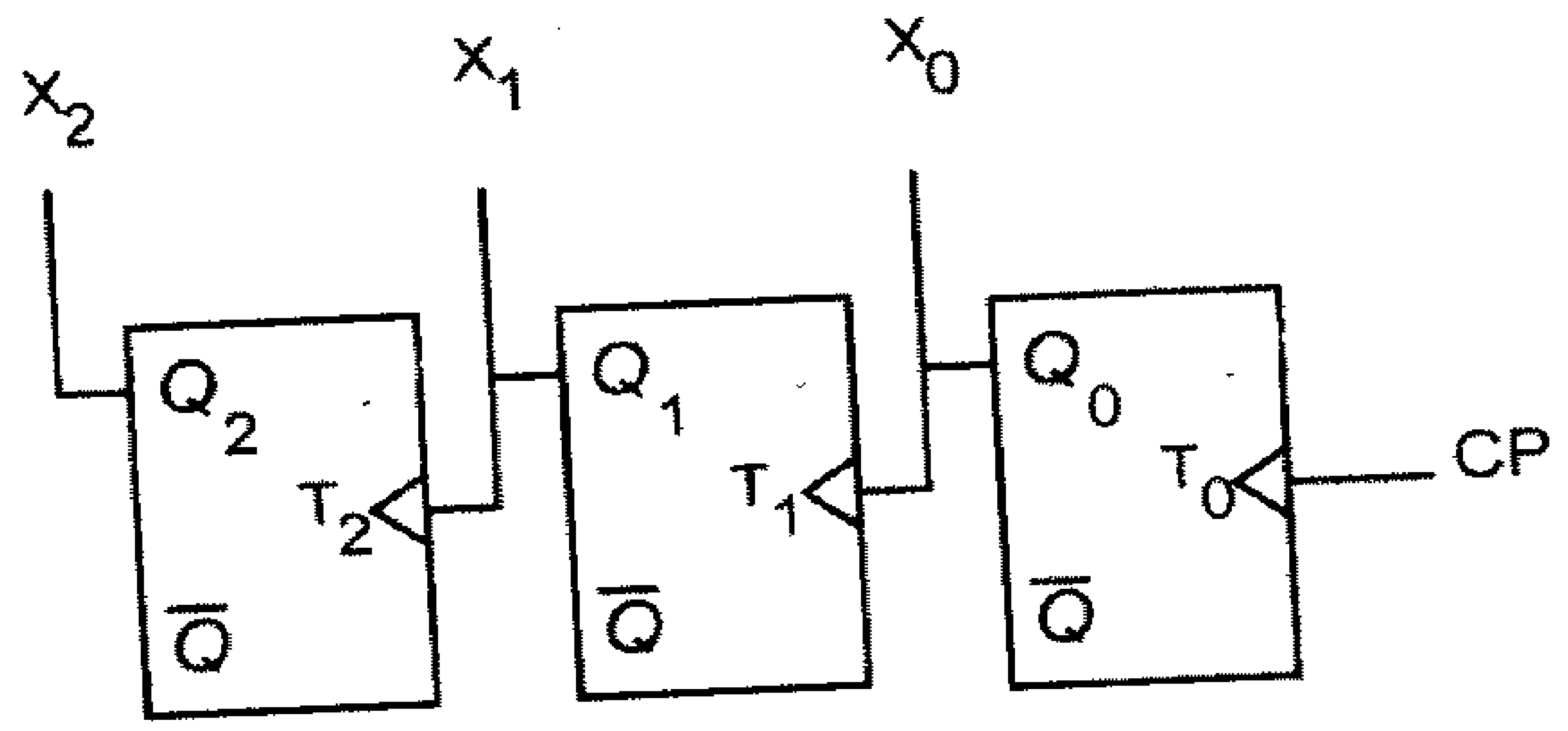
5-6 العدادات Counters

العداد هو عبارة عن سجل قادر على احتساب عدد نبضات الساعة التي تصل دخل التوقيت التابع له وللعداد الكثير من خطوط الخرج التي يمكن أن تكون في أحد العديد من الحالات. فمثلا لعداد الثلاث ثنائيات ثلاثة مخارج يمكن أن تكون في أحد ثمانية حالات على الأكثر. وبالمثل فإن لعداد الأربع ثنائيات أربع إشارات خرج يمكن أن تكون في أحد 16 حالة على الأكثر، وهكذا...

يوجد بالعداد أحيانا دخل أو أكثر للسيطرة يستخدم في تحديد اتجاه العد أو لتهيئة العداد عند عد ما أو لمسح (تصفير) العداد أو غير ذلك.
وتوجد العدادات على هيئة دارات تتابعية متزامنة أو دارات تتابعية غير متزامنة.

6-5-1 العدادات غير المتزامنة Asynchronous Counters

يبين الشكل6-7 عدادا مكونا من ثلاثة نطاطات T. للعداد إشارات خرج ثلاث موسومة بالأحرف X_0 ، X_1 ، X_2 وإشارة دخل نبضة الساعة (التوقيت) CP التي تدور العداد خلال حالاته المختلفة.



شكل6-7 دارة عداد غير متزامن

تتصل إشارة التوقيت (الساعة) مباشرة بدخل الساعة بالنطاط T_0 الذي يغير حالته كلما حدث تغير موجب في إشارة نبضة الساعة.

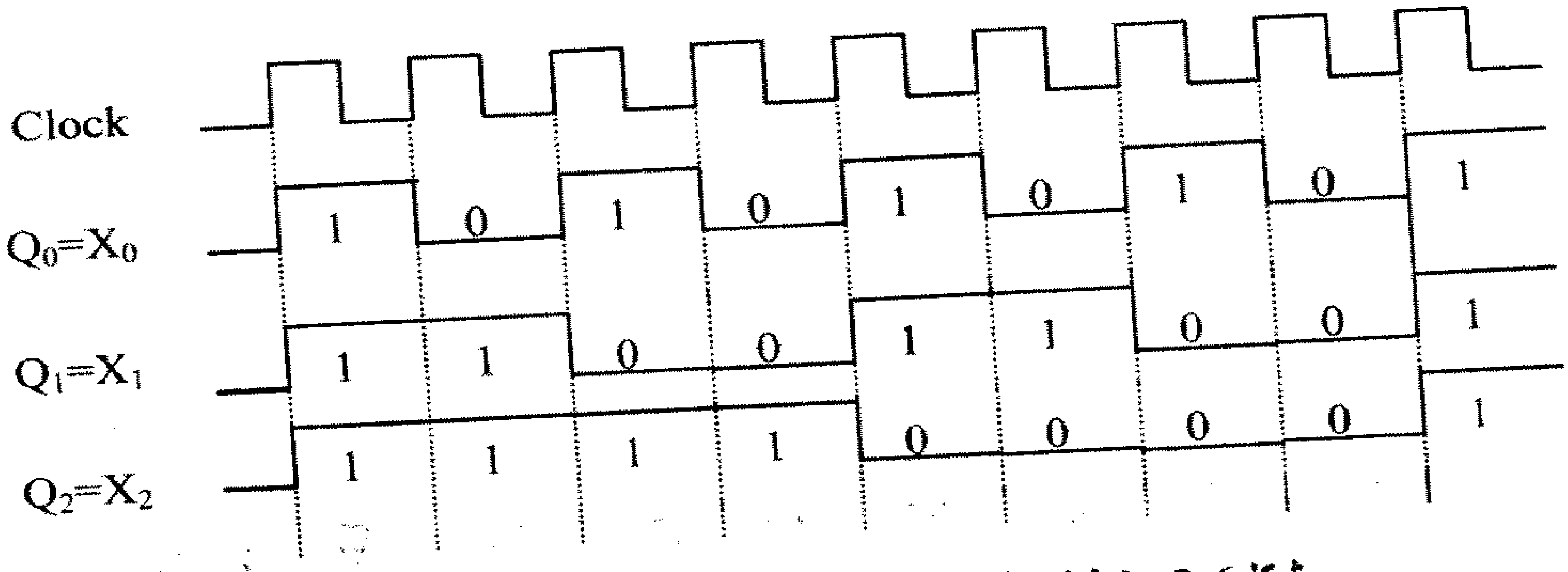
يتصل خرج النطاط T_0 (Q_0) بدخل النطاط T_1 ويؤدي وظيفة إشارة الساعة للنطاط T_1. لذلك، يغير النطاط T_1 حالته كلما حدث تغير موجب في إشارة خرج النطاط T_0. بالمثل تعتبر إشارة خرج النطاط T_1 (Q_1) بمثابة إشارة الساعة للنطاط T_2 لذلك يبدل هذا النطاط حالته كلما حدث تغير موجب في الإشارة (Q_1).

يتبين من التحليل السابق أن النطاطات المكونة لهذا العداد لا تغير حالتها عند نفس اللحظة عندما تتغير الكلمة المخزنة به، ومن هنا يأتي التعبير: غير متزامن (asynchronous) لتعريف الأحداث التي لا تتم في لحظة واحدة. كما يطلق على العداد غير المتزامن التسمية: عداد التموج (Ripple Counter) نظرا لتغير حالته بطريقة تتغير فيها حالات النطاطات المكونة له الواحد تلو الآخر على التوالي في شكل تموج ينتقل خلال النطاطات قبل أن يصل العداد إلى حالة عد مستقرة.

يبين الشكل6-8 المخطط التوقيتي لعداد التموج ذي الثلاثة ثنائيات (3-bit ripple counter) المبين بالشكل6-7. نجد بالمخطط التوقيتي عرض لإشارات خرج العداد (التي هي خرج النطاطات المكونة له) بدلالة دخل الساعة للعداد. يكون العداد عند البداية في حالة تكون فيها إشارات خرجه عند $X_2X_1X_0 = 000$ (State 0) ويمر تبعا بالحالات (من الشمال إلى اليمين):

000 , 111, 110 , 101, 100, 011, 010, 001, 000, 111, . . .

وهكذا كلما حدث تغير موجب في إشارة نبضة الساعة تتبدل حالة إشارة الخرج X_0. بالمثل لكل تغير موجب في الإشارة X_0 تتبدل حالة إشارة الخرج X_1 ولكل تغير موجب في الإشارة X_1 تتبدل حالة إشارة الخرج X_2. بعبارة أخرى، يجب أن يبدل Q_0 حالته قبل Q_1 والذي بدوره يجب أن يبدل حالته قبل Q_2.



شكل6-8 مخطط توقيتي لعداد التموج التنازلي ذي الثلاثة ثنائيات

نجد مما سبق أن العداد يمر نتيجة لتغير نبضة الساعة بالحالات التالية (من اليسار إلى اليمين):

000, 111,110,101, 100, 011,010,001,000, 111, ...

وبالتعويض عن الرمز الثنائي لكل من هذه الحالات بمكافئه العشري، نجد أن العداد يمر بالحالات العشرية التالية:

0, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 7, ...

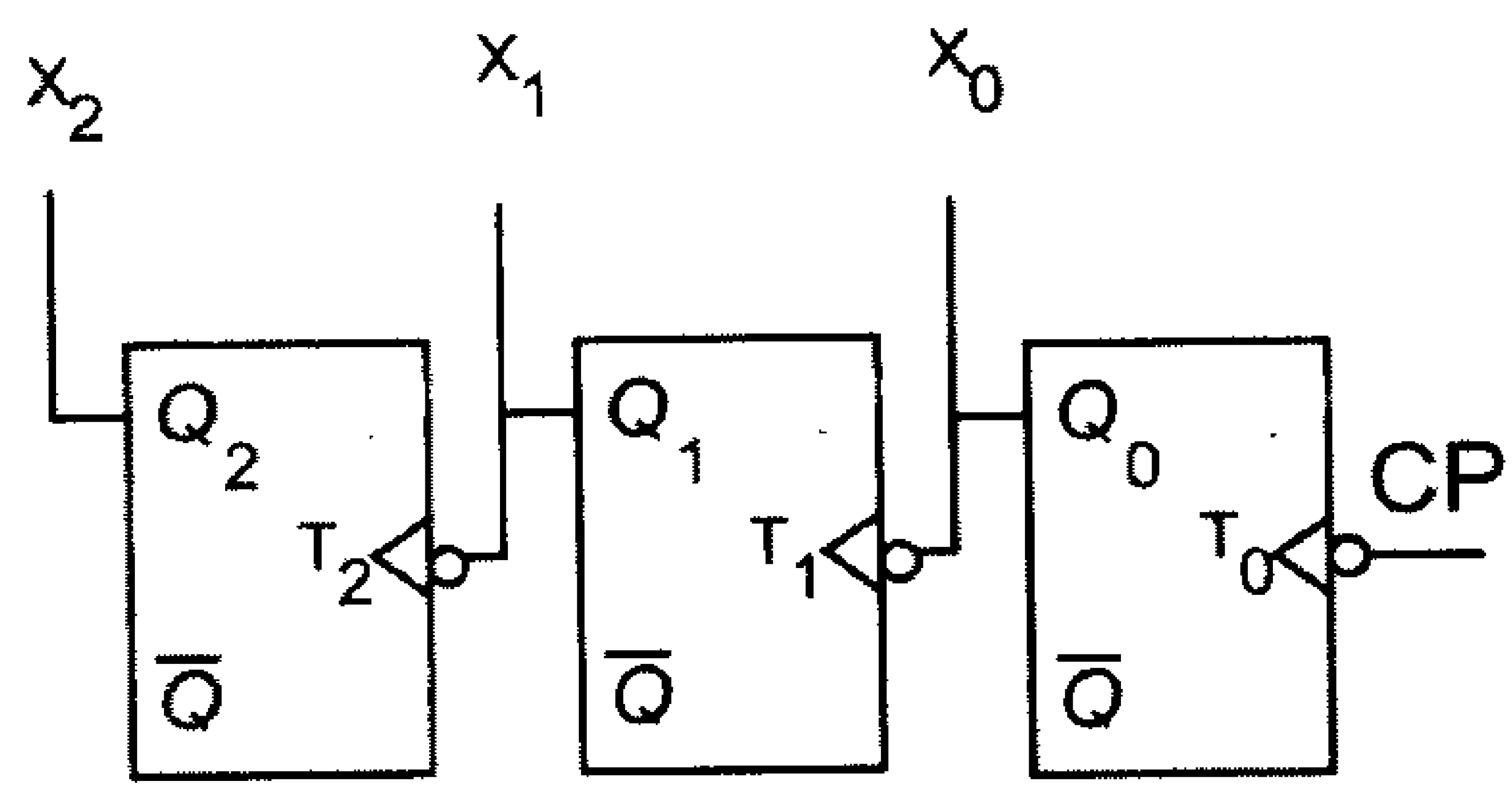
لذلك يسمى هذا العداد بالعداد التنازلي. يعد من 7 إلى 0 ويعيد العد كلما بقي دخل الساعة نشطا. كما أنه بإضافة نطاط آخر لدارة العداد المبينة بالشكل6-7 نحصل على عداد تنازلي ذي أربعة ثنائيات تتتابع حالاته العشرية على النحو التالي:

0, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 15, ...

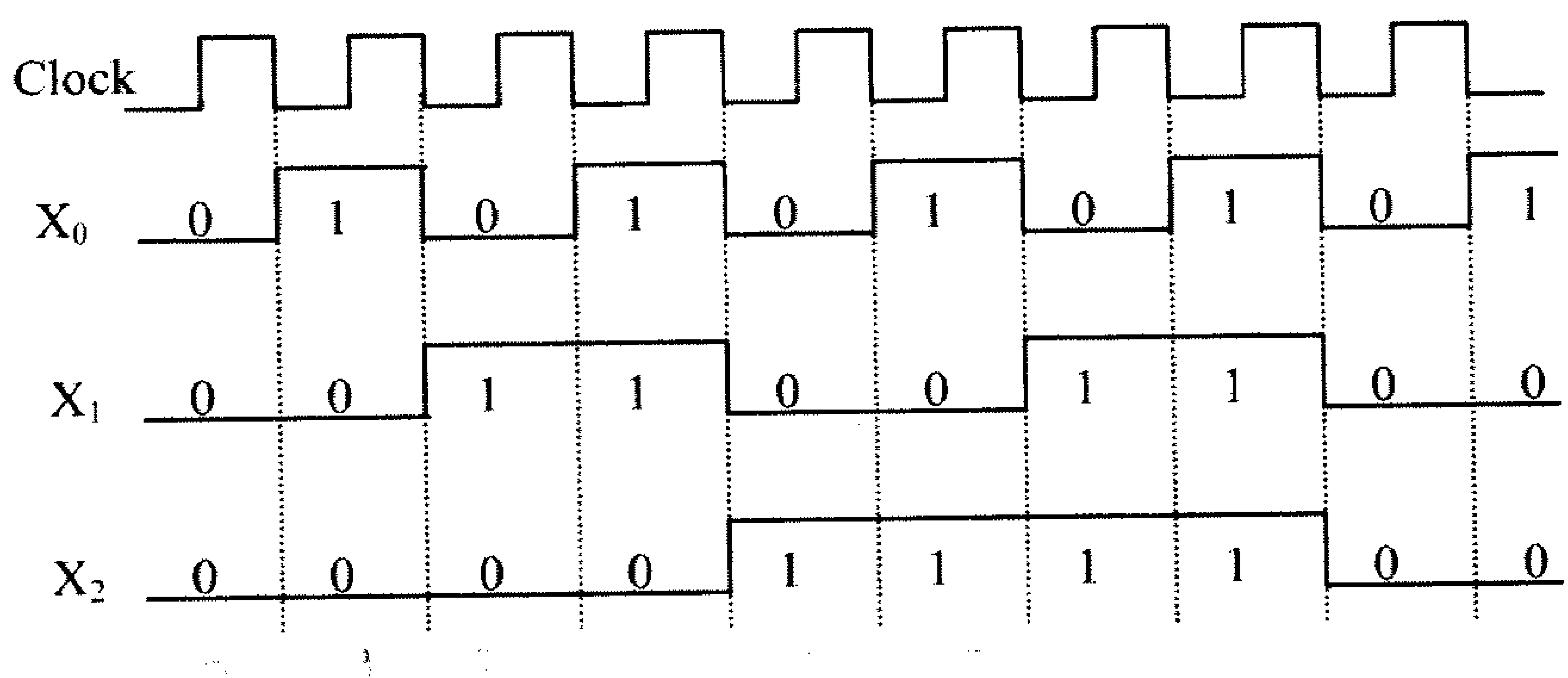
يستغرق عداد الثلاث ثنائيات المبين في الشكل6-7 **وقتا أطول** لتغيير حالته عندما تتغير الكلمة المخزنة به من 100 إلى 011 أو من 000 إلى 111. حيث يجب أن تتبدل حالة كل نطاط بالعداد قبل أن يصل العداد إلى حالته الجديدة ومن ثم إلى مخزون جديد. لذلك لو استغرق كل نطاط 10ms لتبديل حالته فإن أطول وقت يستغرقه هذا السجل لتغيير حالته هو: $3 \times 10\ ms = 30\ ms$.

يمكننا الحصول على عداد تموج تصاعدي ذي ثلاثة ثنائيات بتعديل بسيط لدارة العداد التنازلي السابقة من خلال استبدال نطاطات T ذات القدح بالحافة الموجبة بأخرى ذات قدح بالحافة السالبة كما بالشكل6-9 ، ويمكن التحقق من صحة عمل هذا العداد بتحليل الدارة والحصول على مخطط التوقيت المبين بالشكل6-10. من المخطط يتبين أن إشارات الخرج $X_2X_1X_0$ بالعداد تمر تبعا وعلى التوالي خلال الحالات التالية (من الشمال إلى اليمين):

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, 1, ...



شكل6-9 دارة عداد تموج تصاعدي ذي الثنائيات الثلاثة

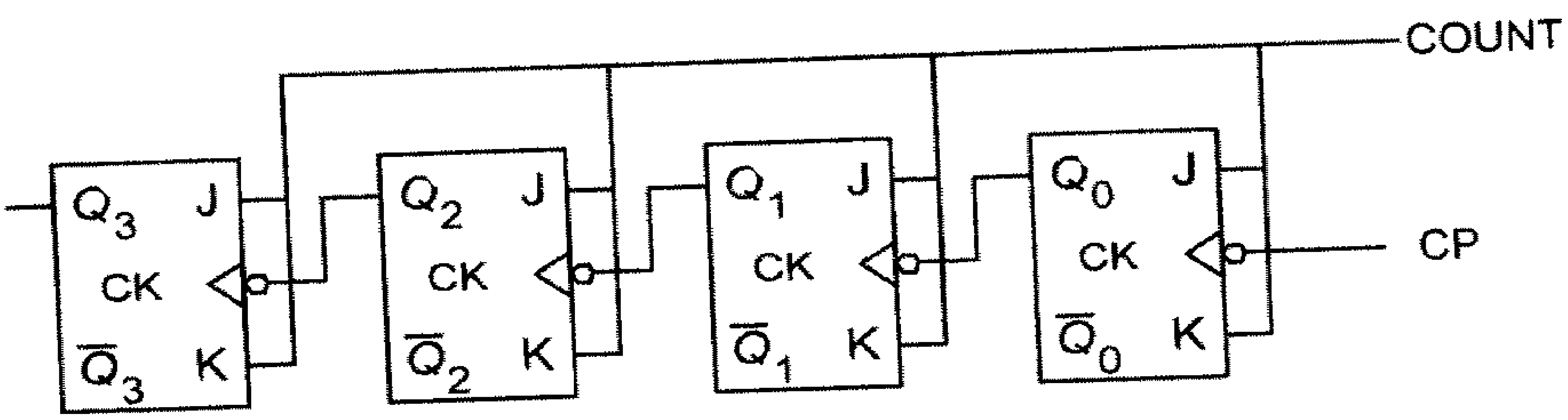


الشكل6-10 المخطط التوقيتي لعداد التموج التصاعدي

6-5-2 العداد التصاعدي المنضبط Controlled Up Counter

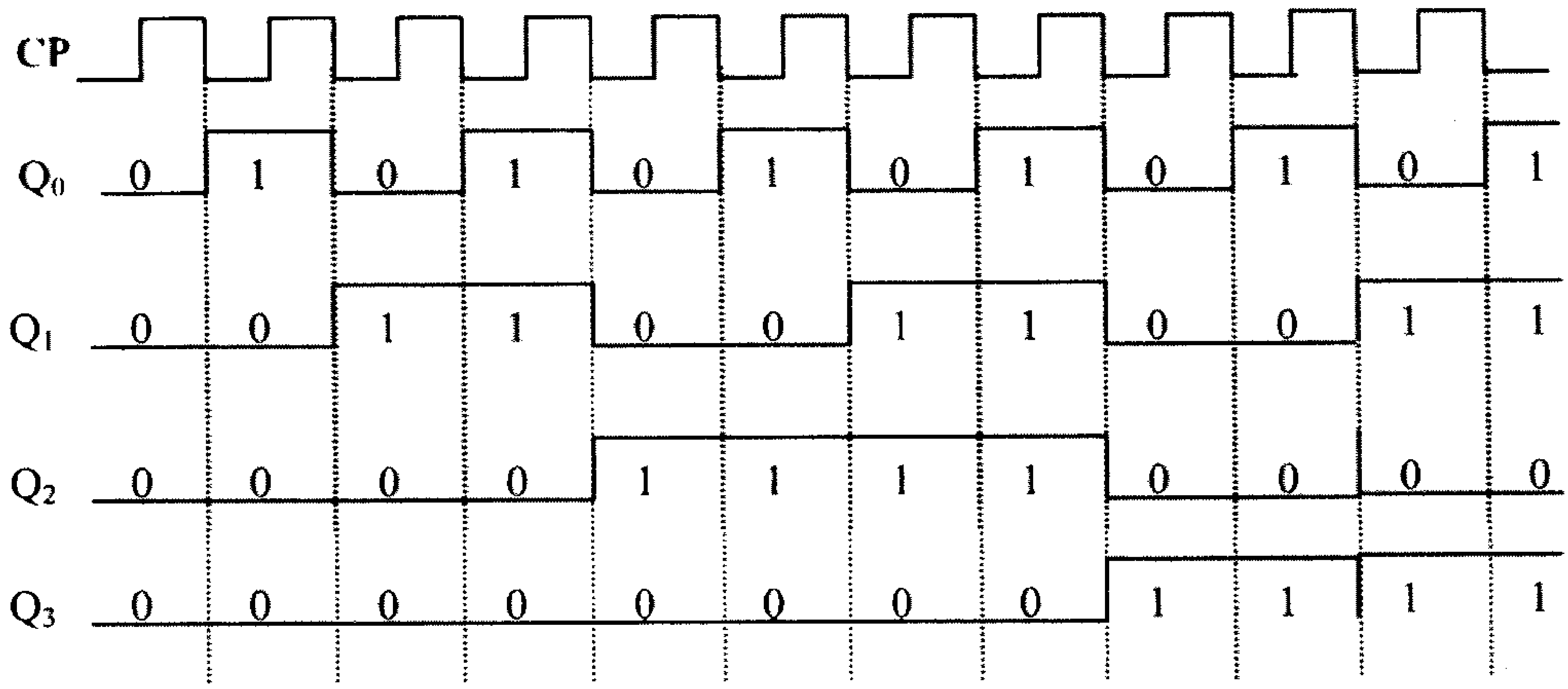
يقوم العداد المنضبط بعملية العد فقط عندما يؤمر بذلك. وتستخدم لذلك إشارة سيطرة تمكنه من العد فقط عند تفعيل تلك الإشارة. فمثلا يبين الشكل6-11 عدادا مكونا من أربعة نطاطات JK. للعداد أربع إشارات خرج موسومة بالأحرف X_0 ، X_1 ، X_3 ، X_4 وإشارة دخل نبضة الساعة (التوقيت) التي تدور العداد خلال حالاته المختلفة. حيث أن الإشارة عد (Count) قد ربطت بكل مداخل النطاطات J و K المكونة للعداد فإنها تسيطر على عمل العداد مرغمة إياه إما لعمل لا شئ (التوقف عن العد) أو الاستمرار في العد. فعندما تكون Count=0 لا تغير النطاطات من النوع JK المكونة لهذا العداد في حالتها بالرغم من حدوث تغيير سالب في إشارة نبضة الساعة (إشارة التوقيت) التي تقوده، وبذلك تبقى الكلمة المخزنة بالسجل من دون تغيير حتى يتم تفعيل دخل السيطرة Count (Count=1) . في تلك الحالة تكون المداخل J و K في النطاطات عالية ويغير كل نطاط حالته عندما يحدث تغير سالب في إشارة التوقيت التابعة له.

يبدل النطاط Q_0 حالته مرة لكل حافة توقيت سالبة وكما هو مبين في مخطط التوقيت المبين بالشكل6-12. بينما تبدل بقية النطاطات حالاتها عددا أقل من المرات لأنها تستلم الحوافر السالبة من



شكل6-11 دارة عداد تصاعدي منضبط

ملاحظة



الشكل6-12 جزء من المخطط التوقيتي لعداد التموج التصاعدي

النطاطات التي تسبقها. فعلى سبيل المثال عندما تعود Q_0 من 1 إلى 0 يستلم النطاط Q_1 حافة سالبة ويبدل خرجه. بنفس الطريقة عندما يتغير Q_1 من 1 رجوعا إلى 0 يحصل النطاط Q_2 على حافة سالبة ويبدل حالته. وعندما يذهب Q_2 من 1 إلى 0 يبدل النطاط Q_3 حالته. بعبارة أخرى، كلما أعيد تهيئة نطاط إلى 0 فإن النطاط الأعلى مرتبة التالي يبدل حالته. أنظر الشكل6-12.

إذا كانت الحالة الابتدائية للعداد هي $Q= Q_3Q_2Q_1Q_0= 0000$ وكما هو الحال بالنسبة لمخطط التوقيت المبين بالشكل6.12. عند وصول الحافة السالبة بنبضة التوقيت الأولى للنطاط ذي المرتبة الدنيا (الأول من اليمين) يصبح $Q_0=1$ وبذلك تكون الكلمة المخزنة بهذا العداد (وهي متاحة عند خرجه أيضا) هي $Q= 0001$.

وعندما تصل نبضة التوقيت الثانية يعاد تهيئة النطاط Q_0 وتعود Q_0 إلى الحالة 0 ($Q_0=0$) مما يرغم النطاط Q_1 على التهيئة في الحالة 1 ($Q_1=1$) ومن تم تكون الكلمة المخزنة بهذا العداد هي $Q=0010$.

عندما تصل نبضة التوقيت الثالثة يتهيأ النطاط Q_0 وتصبح الكلمة المخزنة $Q=0011$.

هكذا يتم تتبع باقي المخطط التوقيتي للعداد ومنه نستنتج أن متوالية العد التي يمر بها هذا العداد (من الشمال إلى اليمين) هي:

$$0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, \ldots\ldots\ldots\ldots 1111$$

ما أن يصل العداد للحالة $Q=1111$ حتى يستلم نبضة التوقيت الموالية التي تعيد تهيئة Q_0 في الحالة 0. يسبب هذا التغير في إعادة تهيئة النطاط Q_1 إلى الحالة 0. وبالمثل يسبب رجوع خرج النطاط Q_1 إلى 0 في إعادة تهيئة النطاط Q_2 إلى الحالة 0. وهكذا يتم إعادة تهيئة كافة النطاطات المكونة للعداد على التوالي للوصول إلى المخزون الجديد $Q=0000$ ولكن ليس قبل أن يمر زمن قدره أربعة أضعاف الزمن اللازم لتغيير نطاط واحد لحالته. هكذا يرجع العداد إلى نفس الحالة الابتدائية ليعيد المرور بمتوالية العد السابقة وذلك ما بقيت إشارة نبضة الساعة نشطة.

3-5-6 العداد العشري الثنائي.

Binary Coded Decimal Counter (BCD Counter)

يمر العداد العشري بمتوالية العد (من الشمال إلى اليمين):

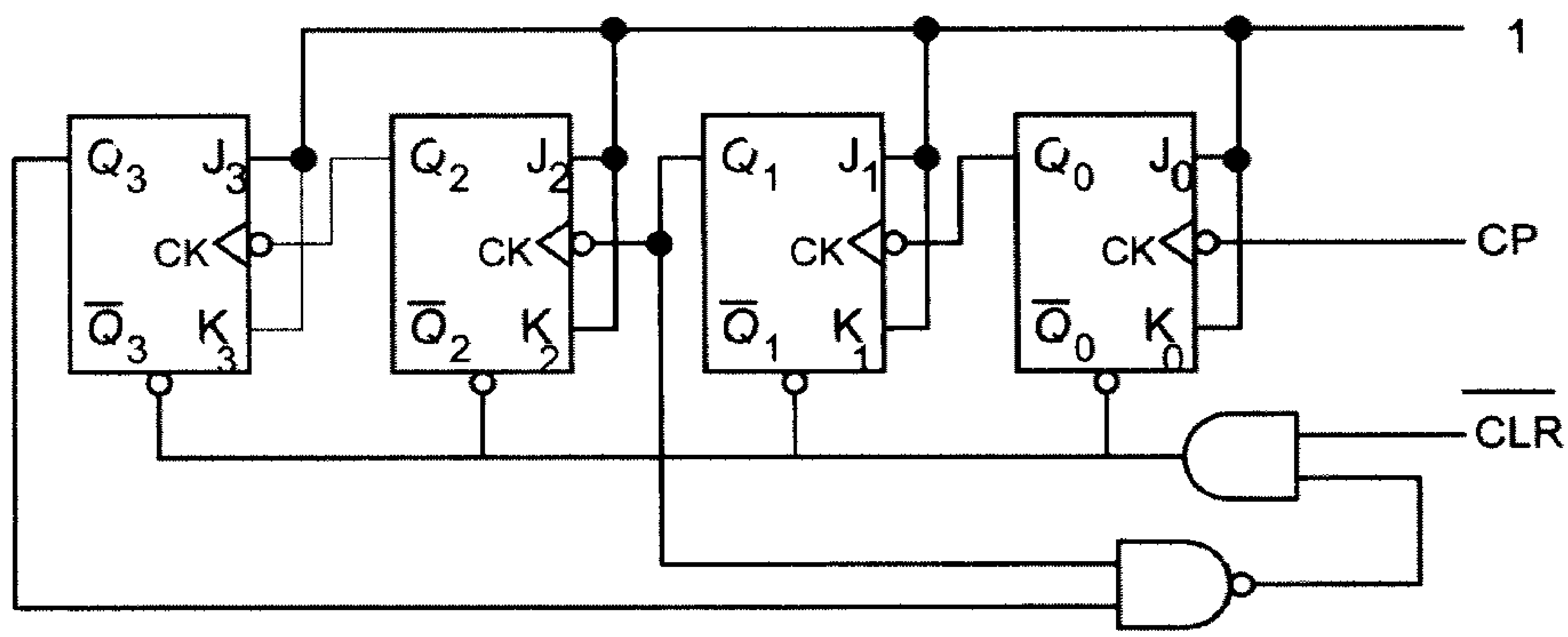
$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

وتستخدم الرموز الثنائية (من الشمال إلى اليمين):

$$0000, 0001, 0010, 0011, 0100, \ldots\ldots 1001$$

للتعبير عن عناصر هذه المتوالية على التوالي. يتتبع العداد هذه المتوالية من 0 وحتى 9 ثم يعود إلى 0 ليعاود العد مرة أخرى مرورا بنفس الحالات ما دامت نبضة الساعة نشطة وتصل إلى مدخل الساعة بالعداد.

يمكن الاستفادة من عداد التموج الثنائي ذي الأربع خانات المبين بالشكل6-11 في تكوين عداد عشري بعد إجراء بعض الوصلات الخارجية المبينة بالشكل6-13، حيث تم توصيل إشارات الخرج Q_1 و Q_3 بدخل بوابة NAND ووصل خرج هذه البوابة إلى دخل



شكل6-13 دارة عداد عشري ثنائي

التصفير (المسح) المباشر بالنطاطات المكونة لهذا العداد. عندما يكون كل من Q_1 و Q_3 عند المنطق 1 (ويكون $\overline{CLR}$ غير فعال)، يصبح خرج البوابة NAND عند المنطق 0 ويعاد تهيئة النطاطات عند الحالة 0 فورا ليبدأ العداد العد من 0000. تزداد الكلمة المخزنة بالعداد بواحد لكل نبضة ساعة حتى يصل إلى العدد 1001. تغير نبضة العد الموالية الكلمة المخزنة بالعداد إلى 1010 وتكون بذلك $Q_1=1$ و $Q_3=1$. هذا الخرج اللحظي للعداد لا يبقى طويلا بسبب نشاط دخل التصفير (المسح) المباشر

بالنطاطات الأربعة ومن ثم ذهاب خرج العداد إلى 0000 فورا. لذلك فإن نبضة العد التي تصل العداد وهو في حالة العدد 1001 تذهب به إلى حالة العدد 0000 ليعاود المرور بحالات العد العشري ومن ثم نحصل على عداد عشري ثنائي. تذكر أن تشغيل هذا العداد يتم عندما تكون الإشارة $\overline{CLR}$ غير فعالة.

4-5-6 العداد التنازلي Down Counter

يبين الشكل6-14 عدادا تنازليا يعد من 1111 إلى 0000. يبدل كل نطاط حالته عندما تذهب إشارة نبضة الساعة(الموقت) التابعة له من 1 إلى 0. فمثلا يبدل النطاط Q_1 حالته عندما تنتقل $\overline{Q_0}$ من 1 إلى 0 وهذا مكافئ لذهاب Q_0 من 0 إلى 1. بالمثل يبدل النطاط Q_2 حالته عندما يذهب Q_1 من 0 إلى 1 ويبدل النطاط Q_3 حالته عندما يذهب Q_2 من 0 إلى 1.

في دارة هذا العداد نجد إشارة PRE وقد ربطت بدخل التهيئة المباشر لكل نطاط. تستخدم هذه الإشارة في السيطرة على عملية الإعداد المسبق لسجل العداد بتحميله بالكلمة 1111 وذلك بتسليط المنطق 0 لحظيا على الدخل PRE لكي تصبح الكلمة المخزنة بالعداد هي:

$Q=(Q_3Q_2Q_1Q_0)=1111$ (المكافئ للعدد العشري 15)

عندما تعود الإشارة PRE عالية يعمل العداد تحت سيطرة نبضة الساعة. ويبدل النطاط Q_0 حالته مرة لكل نبضة توقيت.
تعطي نبضة التوقيت الأولى تبديلا في Q_0 من 1 إلى 0 ولا يحدث أي شيء آخر. وتكون عندئذ حالة العداد عند:

$Q=1110$ (المكافئ لعدد العشري 14)

تعطي نبضة التوقيت الثانية تبديلا في Q_0 من 0 إلى 1 مسببة في تبديل حالة النطاط Q_1 من 1 إلى 0. عندئذ تكون حالة العداد:

$Q=1101$. (المكافئ لعدد العشري 13)

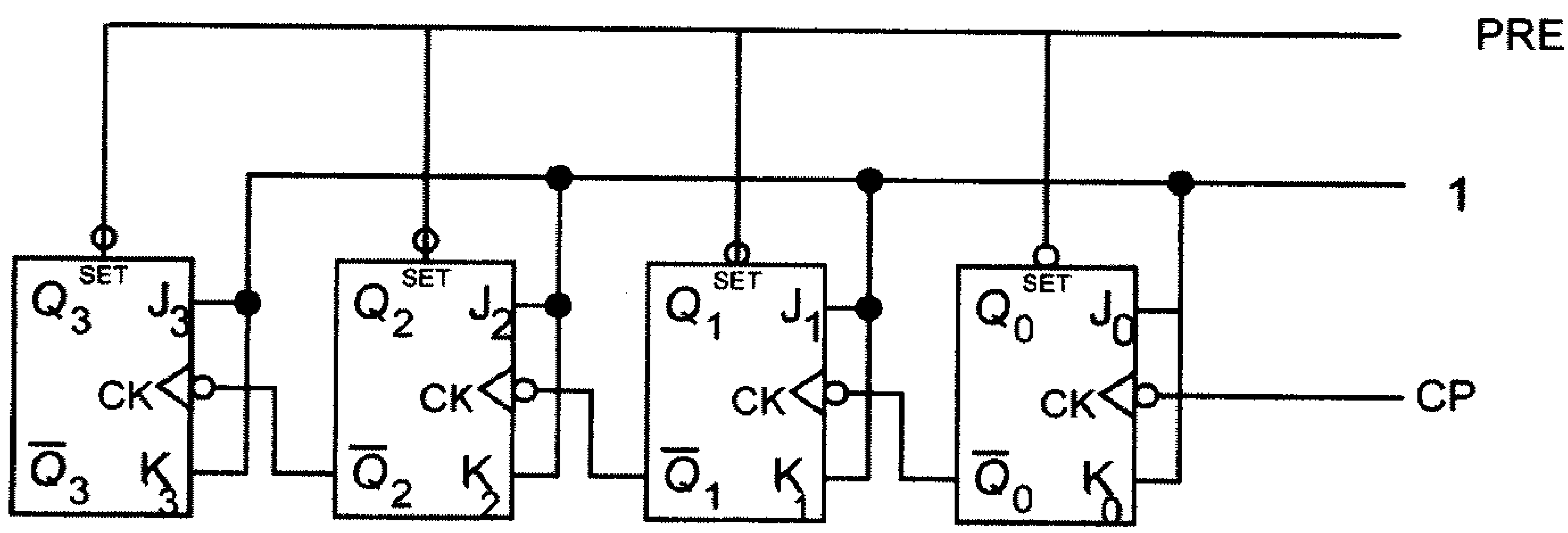
تسبب نبضة التوقيت الثالثة في تبديل حالة النطاط Q_0 فقط من 1 إلى 0 وتكون عند ذلك حالة العداد:

$Q=1100$. (المكافئ لعدد العشري 12)

عند نبضة التوقيت الرابعة تتغير حالة Q_0 من 0 إلى 1 وتتغير حالة Q_1 من 0 إلى 1 وأيضا تتغير حالة Q_2 من 1 إلى 0 لتكون عندئذ حالة العداد عند:

$Q=1011$ (المكافئ لعدد العشري 11)

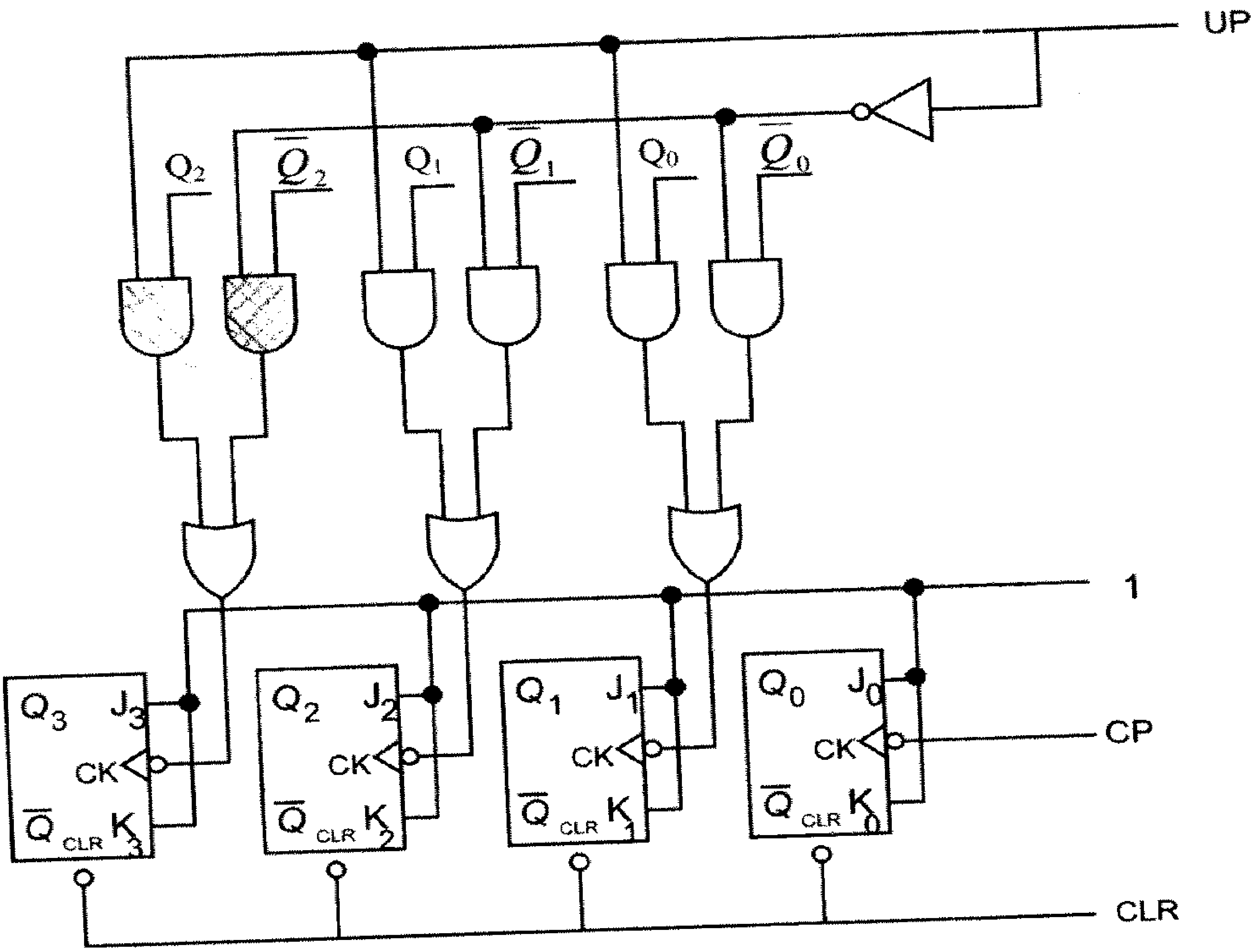
هكذا نستنتج مما سبق أن الدارة المبينة بالشكل6-14 دارة عداد تنازلي يعد من 15 إلى 0. وبعد أن يصل العداد للحالة 0 ($Q=0000$) تتبدل حالة جميع النطاطات المكونة للعداد من 0 إلى 1 عند نبضة التوقيت التالية لتعود حالة العداد إلى $Q=1111$ وهي الحالة الابتدائية. ومن ثم يعيد العداد دورة العد السابقة مرة أخرى.



شكل 6-14 دارة عداد تنازلي

6-5-5 العداد التصاعدي - التنازلي.Up-Down Counter

يتبين لنا من دراسة دارة العداد التصاعدي المنضبط ودارة العداد التنازلي السابقتين أنه يمكننا السيطرة على اتجاه العد إذا أمكننا التحكم في ربط إما الخرج Q_0 في النطاط Q_0 إلى دخل الساعة في النطاط Q_1 وهكذا بالنسبة للنطاطين Q_1 و Q_2 والنطاطين Q_2 و Q_3 للحصول على عداد تصاعدي أو ربط الخرج $\overline{Q}_0$ في النطاط Q_0 إلى دخل الساعة في النطاط Q_1 وهكذا بالنسبة للنطاطين Q_1 و Q_2 والنطاطين Q_2 و Q_3 للحصول على عداد تنازلي.



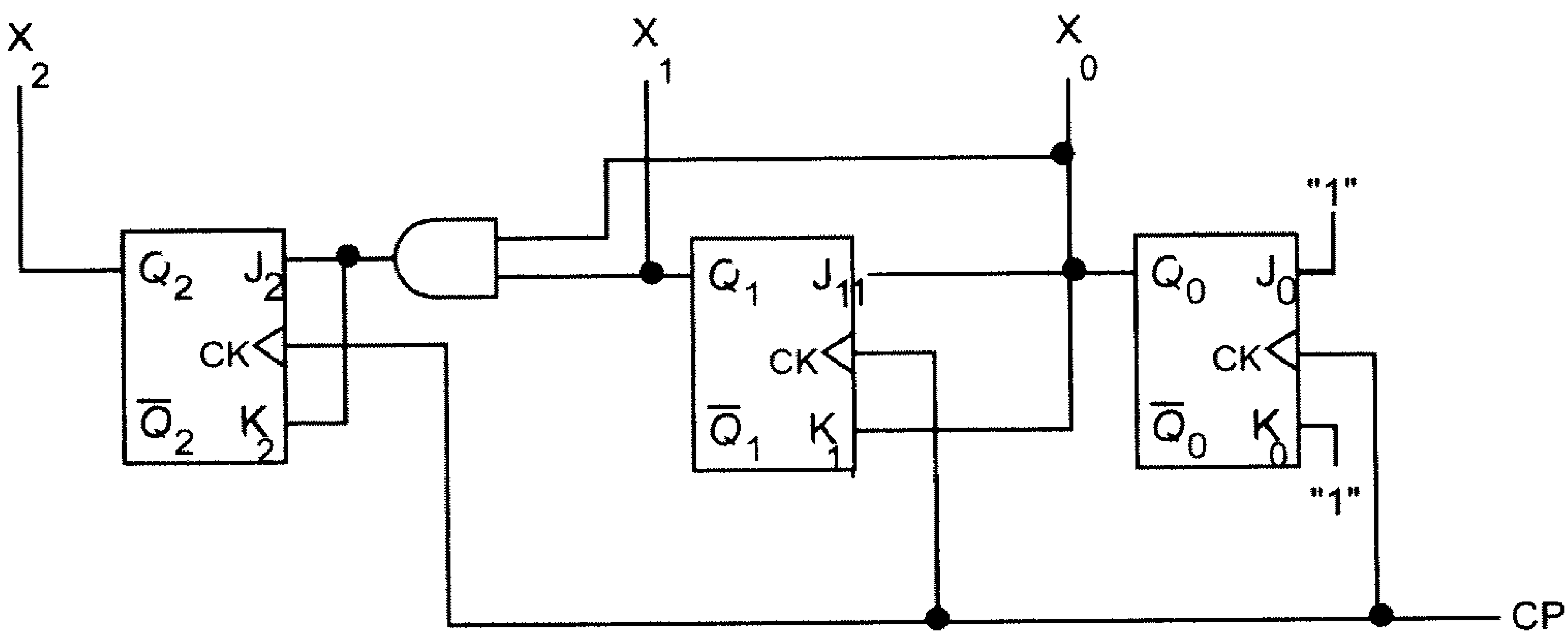
شكل 6-15 دارة عداد تصاعدي-تنازلي

ويمكن التحكم عن طريق الدارة المنطقية المبينة بالشكل6-15 في عملية الربط المذكورة أعلاه بحيث إذا كانت إشارة السيطرة UP=0 ينتج عن هذا عداد تنازلي . من جهة أخرى إذا كانت إشارة السيطرة UP=1 ينتج عداد تصاعدي.

6-6 العدادات المتزامنة (Synchronous Counters)

تستغرق العدادات غير المتزامنة (التموجية) مدة أطول في تغيير حالتها كلما زاد عدد النطاطات المكون لها. لهذا السبب تعتبر العدادات غير المتزامنة بطيئة جدا لبعض التطبيقات. للتغلب على الزيادة في زمن التأخير تستخدم العدادات المتزامنة.

يبين الشكل 6-16 دارة عداد تصاعدي متزامن ذي نطاطات تقدح بالحافة الموجبة. تسوق نبضات الساعة (الموقت) كافة النطاطات بصورة متوازية. لهذا السبب تغير النطاطات (في حالة توفر شروط الدخل المناسبة) حالتها في نفس الوقت، وتظهر الكلمة الثنائية الصحيحة (أي يصل العداد لحالته الجديدة) بعد زمن تأخير قدره الزمن اللازم لتبديل نطاط واحد لحالته وليس لثلاثة نطاطات.



شكل6-16 دارة عداد تصادي متزامن

يؤدي عداد الثنائيات الثلاثة هذا نفس وظيفة العداد غير المتزامن المبين بالشكل 6-11 عندما يكون Count=1 ولهما نفس مخطط التوقيت إلا أنهما يختلفان في الكيفية التي يحقق بها كل منهما ذلك. وينحصر الفرق بينهما في سرعة الاستجابة لنبضات مولد الساعة.

تختلف طريقة تحليل دارة العداد المتزامن للحصول على مخطط التوقيتي عن مثيلتها في حالة العداد غير المتزامن وذلك بسبب تغير حالة النطاطات المكونة للعداد المتزامن معا كنتيجة لنفس حافة التوقيت السالبة او الموجبة. لهذا السبب يجب أن تحدد حالات النطاطات المكونة للعداد قبل وبعد حدوث تغير في مستوى إشارة نبضة الساعة.

لتسهيل عملية تحليل العداد يقسم المخطط التوقيتي في الشكل6 -17 إلى عشر فترات. ولتحديد حالة العداد (الكلمة المخزنة بالعداد) خلال كل فترة من هذه الفترات، يحدد أولا المنطق الذي يتواجد عنده كل من إشارات دخل النطاطات المكونة للعداد قبل أن تقدح بنبضة الساعة وبمعرفة جدول تغير حالة النطاط المكون للعداد يتم تحديد الحالة التالية التي ينتقل لها كل نطاط بالعداد عند قدحه بحافة نبضة الساعة. يبقى العداد عند هذه الحالة حتى يقدح مرة ثانية بحافة نبضة الساعة الموالية. بإتباع هذه الخطوات يمكننا استنتاج المخطط التوقيتي لهذا للعداد المبين بالشكل 6-16 على النحو التالي:

1) خلال الفترة الأولى 1 وقبل أن تقدح النطاطات بنبضة الساعة الموجبة نفترض أن الحالة الأولية للنطاطات هي: $Q(n)=(Q_2(n)Q_1(n)Q_0(n)) =000$ (من ثم تكون إشارات خرج العداد هي $X=X_2X_1X_0=000$). من الشكل6-16 نشتق الدوال البولينية لإشارات دخل النطاطات وهي: $J_1= K_1= Q_0(n)$ و$J_2=K_2=Q_0(n).Q_1(n)$ كما أن $J_0=K_0=1$ بصورة مستديمة.

بالتعويض عن قيم $Q_0(n)$ و $Q_1(n)$, و $Q_2(n)$ خلال هذه الفترة نجد أن $J_1=K_1=Q_0(n)=0$ وأن $J_2=K_2=Q_0(n).Q_1(n)=0$ وأن $J_0=K_0=1$.
في هذا الوضع ومن جدول تغير حالة النطاط J-K نجد أن النطاط Q_0 متهيئ لتبديل حالته بينما يتهيأ النطاطان Q_1 و Q_2 لحالة "اللاتغيير". نتيجة لهذا وعند حدوث حافة التوقيت الموجبة تتغير حالة كل من النطاطات الثلاثة معا في نفس اللحظة وبحيث تنتقل حالة النطاط Q_0 من المنطق 0 إلى المنطق 1 بينما يبقى النطاط Q_1 و Q_2 عند المنطق 0. بعبارة أخرى ينتقل العداد إلى الحالة $Q(n+1)= 001$. تبقى النطاطات على هذا الحال خلال الفترة 2 قبل أن تقدح بحافة إشارة نبضة الساعة مرة ثانية.

2) خلال الفترة 2 وقبل حدوث حافة التوقيت الموجبة تكون $Q_0(n)=1$ و $Q_1(n)=0$ و $Q_2(n)=0$. لذلك فإن:

$J_0=K_0=1$ و $J_1=K_1=Q_0(n)=1$ و $J_2=K_2=Q_0(n).Q_1(n)=0$.

ولهذا يتهيأ النطاطان Q_0 و Q_1 لتبديل حالتهما بينما يتهيأ النطاط Q_2 لحالة "اللاتغيير". إذن عندما تستلم النطاطات حافة التوقيت الموجبة ينتقل النطاط Q_0 من الحالة 1 إلى 0 وينتقل النطاط Q_1 من الحالة 0 إلى الحالة 1 ويبقى النطاط Q_2 عند الحالة 0. أي ينتقل العداد إلى الحالة $Q(n+1) = 010$.

3) بالمثل خلال الفترة 3 وقبل حدوث حافة التوقيت الموجبة تكون $Q(n)= 010$ لذلك فإن:

$J_0=K_0=1$ و $J_1=K_1=0$ و $J_2=K_2=Q_0(n).Q_1(n)=0$.

وعند حافة التوقيت الموجبة ينتقل العداد للحالة: $Q(n+1)=011$.

4) خلال الفترة 4 وقبل حدوث حافة التوقيت الموجبة تكون $Q(n)=011$ ولذلك تكون:

$J_0=K_0=1$ و $J_1=K_1=Q_0(n)=1$ و $J_2=K_2=Q_0(n).Q_1(n)=1$.

وعند حافة التوقيت الموجبة ينتقل العداد للحالة: $Q(n+1)=100$.

5) خلال الفترة 5 وقبل حدوث حافة التوقيت الموجبة تكون $Q(n)=100$ لذلك تكون:

$J_0=K_0=1$ و $J_1=K_1=Q_0(n)=0$ و $J_2=K_2=Q_0(n).Q_1(n)=0$.

وعند حافة التوقيت الموجبة ينتقل العداد للحالة: $Q(n+1)= 101$.

6) خلال الفترة 6 وقبل حدوث حافة التوقيت الموجبة تكون $Q(n)=101$ لذلك تكون:

$J_0=K_0=1$ و $J_1=K_1=Q_0(n)=1$ و $J_2=K_2=Q_0(n).Q_1(n)=0$.

وعند حافة التوقيت الموجبة ينتقل العداد للحالة: $Q(n+1)=110$.

7) خلال الفترة 7 وقبل حدوث حافة التوقيت الموجبة تكون $Q(n)=110$ وتكون:

$J_0=K_0=1$ و $J_1=K_1=Q_0(n)=0$ و $J_2=K_2=Q_0(n).Q_1(n)=0$.

وعند حافة التوقيت الموجبة ينتقل العداد للحالة: $Q(n+1)=111$.

8) خلال الفترة 8 وقبل حدوث حافة التوقيت الموجبة تكون $Q(n)=111$ لذلك تكون:

$J_0=K_0=1$ و $J_1=K_1=Q_0(n)=1$ و $J_2=K_2=Q_0(n).Q_1(n)=1$.

وعند حافة التوقيت الموجبة ينتقل العداد للحالة: $Q(n+1)=000$.

9) خلال الفترة 9 وقبل حدوث حافة التوقيت الموجبة تكون $Q(n)=000$ وهو الوضع الذي كان عليه العداد ابتدائيا (خلال الفترة 1). عندها يكون العداد قد أتم المرور بالحالات:

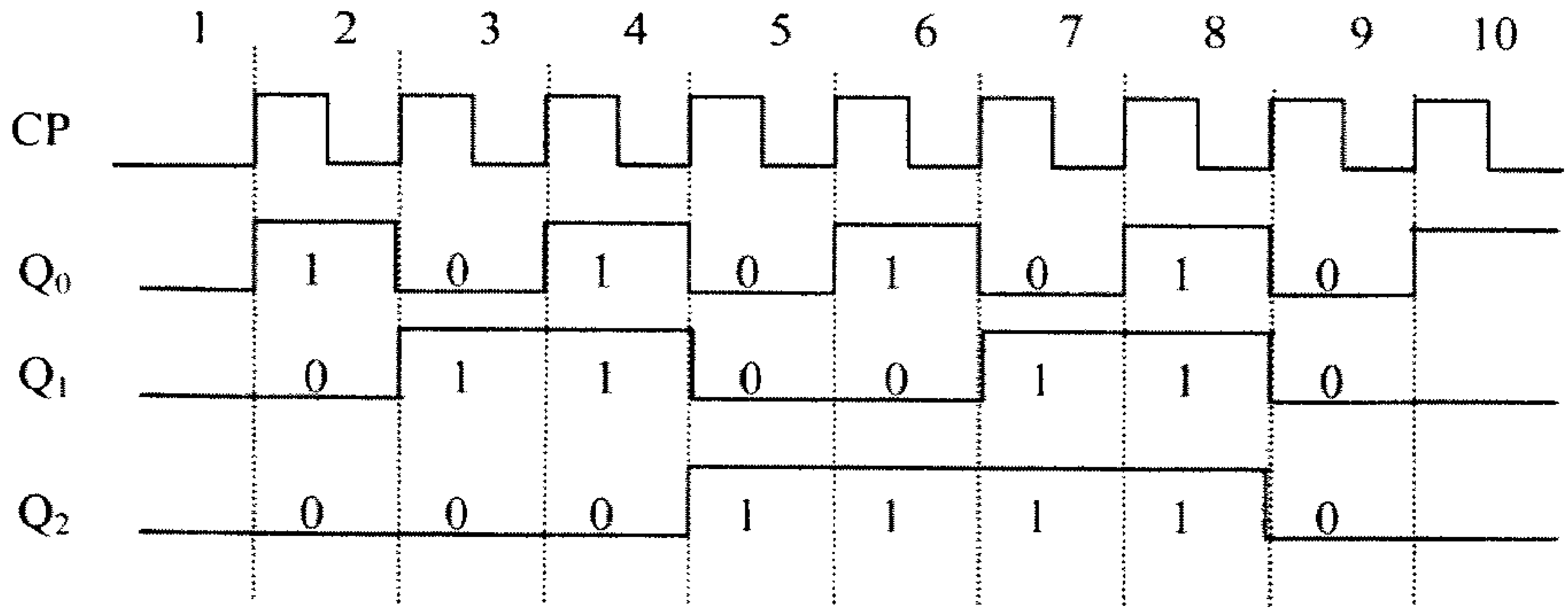
$$Q= 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111,$$

وعاد للحالة الأولية $Q=000$. يعيد العداد عندئذ المرور بالحالات نفسها وبالكيفية السابقة في حالة استمرار حدوث حواف التوقيت الموجبة.

باستخدام المكافئ العشري نستنتج أن هذا العداد هو عداد تصاعدي يمر بحالات العد العشرية:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

ويعيد العد كلما بقيت إشارة نبضة الساعة في حالة نشطة.



الشكل 6-17 المخطط التوقيتي لدارة العداد المتزامن المبين بالشكل6-16

يمكن تحليل دارة العداد المبينة في الشكل6-16 بطريقة أخرى يستخدم فيها جدول الحالة (State table) المبين في الجدول 6-4 . يتكون هذا الجدول من ثلاثة مقاطع يرمز للأول (من الشمال) بالحالة الراهنة (Present State)، وللثاني (بالوسط) بدخل النطاطات (Flip-Flop Inputs)، وللثالث (من اليمين) بالحالة التالية (Next State). يظهر مقطع الحالة كل احتمالات الحالة الراهنة للعداد (للنطاطات المكونة للعداد) قبل حدوث نبضة الساعة بينما يظهر مقطع الحالة التالية بالجدول حالة العداد (النطاطات المكونة للعداد) بعد حدوث نبضة الساعة. تستخدم الحالات الراهنة للنطاطات إضافة إلى **إشارات** الدخل الخارجية للعداد (إن وجدت) بالتعويض في **دوال** إشارات **الدخل** للنطاطات التي يمكن أن تشتق من مخطط الدارة لتحديد مستوى **المنطق** الذي توجد عنده إشارات دخل النطاطات (المقطع الثاني). وبمعرفة الحالة الراهنة لكل نطاط (المقطع الأول) ومستوى المنطق المقابل عند دخله يتم تحديد الحالة التالية التي ينتقل لها كل من النطاطات المكونة للعداد

(المقطع الثاني) وذلك بالاستعانة بجداول تغير حالة النطاطات، ومن ثم تحديد حالة العداد التالية (المقطع الثالث) التي ينتقل لها عند حدوث نبضة الساعة.

تساهم الدوال البوولينية لإشارات دخل النطاطات التي تشتق من مخطط دارة العداد المنطقية في تيسير عملية ملء القاطع الثاني بجدول الحالة للعداد بمعرفة الحالات الراهنة. فمن الرسم المنطقي للعداد المبين بالشكل6-16 نحصل على الدوال البولينية التالية لإشارات دخل النطاطات:

$$J_0=K_0=1$$
$$J_1=K_1= Q_0(n)$$
$$J_2=K_2=Q_1(n).Q_0(n)$$

بافتراض أن الحالة الحالية للعداد هي:

$$Q(n)= Q_2(n)Q_1(n)Q_0(n)=000$$

وكما هو الحال في السطر الأول لجدول الحالة، وبالتعويض في الدوال السابقة نجد أن:

$$J_0=1,\ K_0=1$$
$$J_1=0,\ K_1=0$$
$$J_2=0,\ K_2=0$$

تدخل هذه القيم تحت إشارات دخل النطاطات بالسطر الأول من القاطع الثاني بجدول حالة العداد. وهكذا تعاد هذه الخطوة لباقي احتمالات الحالة الراهنة.

باستخدام جدول تغير حالة النطاط J-K وبمعرفة القيم المنطقية لإشارات دخل كل نطاط يتم تحديد حالات النطاطات التالية ومن ثم ملء القاطع الثالث بجدول حالة العداد. نجد في هذا المثال أنه عندما تكون الحالة الراهنة للعداد هي $Q(n)=000$ كما في السطر الأول بجدول حالة

العداد وحسب إشارات دخل النطاطات المقابلة فأنه عند حدوث الحافة الموجبة لنبضة الساعة ينتقل النطاط Q_0 إلى الحالة 1 بينما يبقى النطاط Q_1 والنطاط Q_2 في الحالة 0 ومن ثم ينتقل العداد إلى الحالة التالية: $Q(n+1)= 001$. تدخل هده الحالة بالسطر الأول بجدول حالة العداد في القاطع الثالث. هكذا يتم ملء باقي القاطع الثالث بجدول الحالة للعداد وكما هو مبين بالجدول4-6.

جدول 6-4 جدول حالة دارة العداد

الحالات الراهنة Q(n)			دخل النطاطات						الحالات التالية Q(n+1)		
Q_2	Q_1	Q_0	J2	K2	J1	K1	J0	K0	Q_2	Q_1	Q_0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0

من هذا الجدول يمكننا استنتاج متوالية العد لهذا العداد. فالحالة Q=001 هي الحالة التالية للحالة الراهنة: Q=000. والحالة Q=010 هي الحالة التالية للحالة الراهنة Q=001 والحالة Q=011 هي الحالة التالية للحالة الراهنة Q=010 .. وهكذا الحالة Q=111 هي الحالة التالية للحالة Q=110. وأخيرا فإن الحالة Q=000 هي الحالة التالية للحالة الراهنة Q=111.

مما سبق نستنتج أن متوالية العد لهذا العداد هي نفس متوالية العد التي استنتجت بطريقة الحل السابقة.

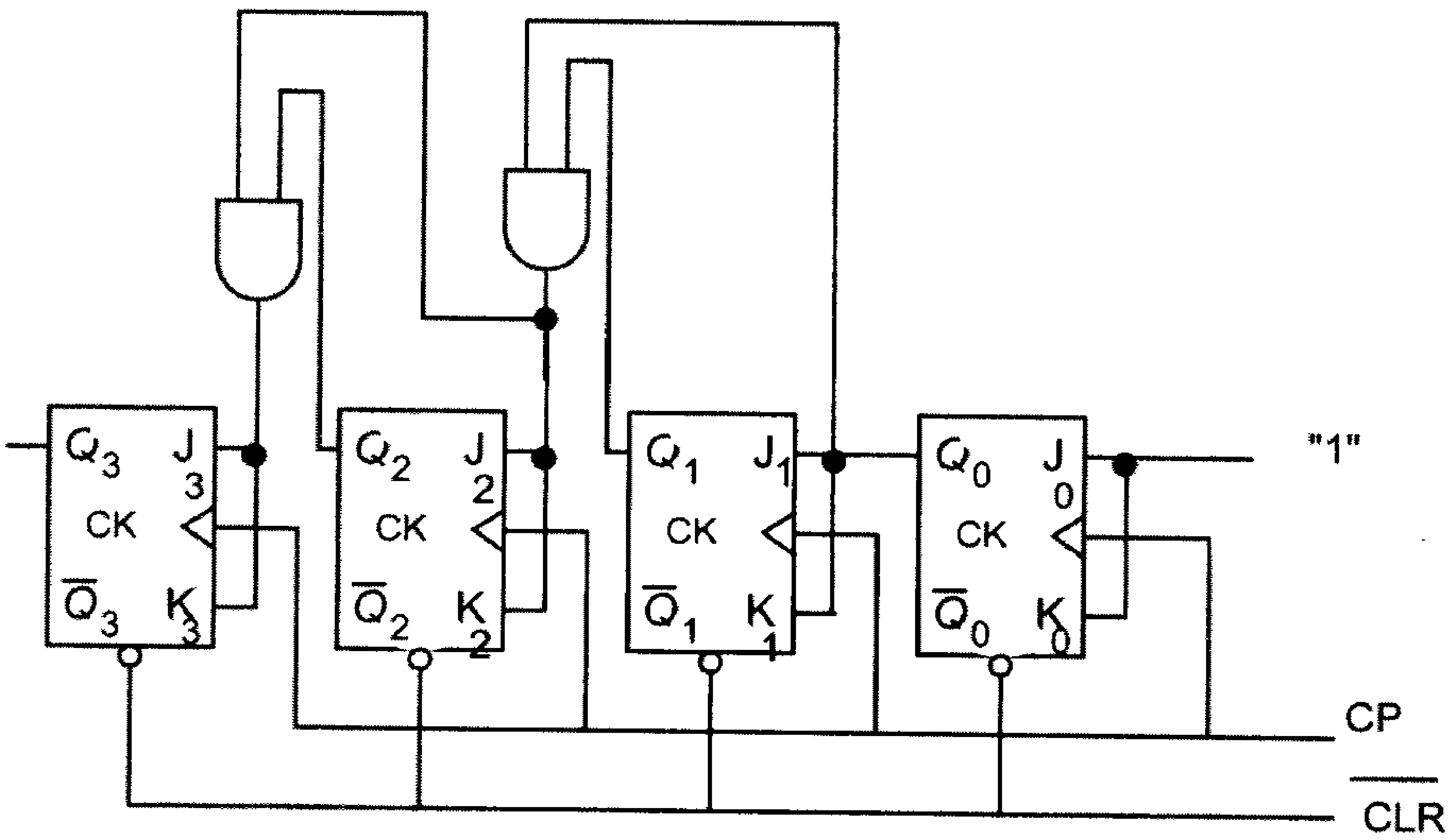
مثـال 1:

الدارة المنطقية المبينة بالشكل 6-18 دارة عداد تصاعدي متزامن ذي الثنائيات الأربعة. حلل الدارة واستنتج متتالية العد التي يمر بها هذا العداد.

4 Bit

الحـل:

يمكن إتباع أحد الطريقتين السابقتين لتحليل دارة هذا العداد إلا أننا نتبع هنا طريقة تختلف قليلا لحل هذا المثال. فمن الشكل 6-18 نلاحظ أن النطاط Q_0 يبدل حالته لكل حافة توقيت موجبة، ذلك لأن دخليه J_0 و K_0 مثبتان عند المنطق 1 بينما تستجيب النطاطات الأخرى لحافة نبضة الساعة الموجبة فقط تحت شروط معينة. من الشكل 6-18 نجد أن النطاط Q_1 يبدل حالته عند حافة التوقيت الموجبة فقط عندما يكون $Q_0(n)=1$ وأن النطاط Q_2 يبدل حالته عندما تكون كل من $Q_0(n)=1$ و $Q_1(n)=1$ كما يبدل النطاط Q_3 حالته عندما تكون كل من $Q_0(n)=1$ و $Q_1(n)=1$ و $Q_2(n)=1$. بعبارة أخرى يبدل أي من هذه النطاطات حالته عند حافة التوقيت الموجبة التالية إذا كانت جميع الخانات الأدنى منه مرتبة عند الحالة الراهنة 1.



شكل6-18 دارة المثال 1

من عمليات التحليل السابقة يمكن أن نشتق تتابع حالات هذا العداد المتزامن. والجدير بالذكر أولا أن الدخل $\overline{CLR}$ هو دخل مباشر غير متزامن مع إشارة نبضة الساعة CP يصفر (يمسح) العداد إلى Q=0000 عندما يطبق عليه المنطق 0. أما عندما يذهب الدخل $\overline{CLR}$ عاليا (عند المنطق 1) يكون العداد جاهزا للعمل تحت سيطرة إشارة نبضة الساعة. تهيئ حافة التوقيت الموجبة الأولى Q_0 للحصول على Q=0001. وبما أن Q_0 في هذه الكلمة تساوي 1 يستعد النطاط Q_1 لتغيير حالته عند حافة التوقيت الموجبة التالية. تبدل حافة التوقيت الموجبة الثانية حالة النطاط Q_0 و أيضا Q_1 معا لتصبح حالة العداد Q=0010. وهكذا تقدم حافة التوقيت الموجبة الثالثة العد بمقدار 1 ليصبح Q=0011. فبما أن $Q_0=1$ و $Q_1=1$، فإن النطاطات Q_0 و Q_1 و Q_2 تكون متهيئة لتبديل حالاتها معا عند حافة التوقيت الموجبة الرابعة لتصبح الكلمة المخزنة بالعداد (حالة العداد) هي Q=0100.

هكذا تتعاقب باقي الكلمات الثنائية Q وتأخذ القيم: 0101، 0110، 0111، . . إلى 1111 (مكافئ للعدد 1العشري 15). عندما يكون العداد عند الحالة Q=1111 تعيد حافة التوقيت الموجبة التالية العداد للحالة Q=0000 لكي يعيد الدورة مرة ثانية. مما سبق يمكن القول بأن هذا العداد هو عداد ثنائي تصاعدي يمر تكرارا بمتتالية العد التالية (من الشمال إلى اليمين):

0000, 0001, 0010, 0011, 0100,0101, 0110, ..., 1111

6-6-1 تصميم العدادات المتزامنة

يطلق على العداد الذي يمر بالمتوالية العددية الثنائية (من الشمال إلى اليمين):

up

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111

0 1 2 3 4 5 6 7

اسم العداد التنائي ذي الثنائيات الثلاث. تعتمد حالته التالية اعتمادا كليا على حالته الراهنة ويحدث انتقال الحالة (تغيير الحالة) في كل مرة تحدث فيها نبضة من نبضات إشارة الساعة. لهذه الخاصية نجد أن العداد تحدده تماما مجموعة متوالية العد، أي متوالية الحالات الثنائية التي يمر بها العداد.

يعبر جدول تغير الحالة المبين بالجدول6-5 عن هذا العداد ويبين الحالات التالية للعداد مقابل كل احتمالات الحالة الراهنة. فالحالة 001 هي الحالة التالية للحالة الراهنة 000 والحالة 010 هي الحالة التالية للحالة الراهنة 001 . . . . وهكذا تكون الحالة 000 هي الحالة التالية للحالة الراهنة 111.

جدول 6-5 جدول تغير حالة العداد

الحالات الراهنة Q(n)			الحالة التالية Q(n+1)		
Q_2	Q_1	Q_0	Q_2	Q_1	Q_0
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

6-6-2 طريقة التصميم

تبدأ عملية تصميم دارة العداد التتابعي المتزامن بوصف لمتوالية العد وتنتهي بمخطط منطقي للعداد المطلوب أو بمجموعة من الدوال البولينية يمكن الحصول منها على المخطط المنطقي للعداد.

تعتمد عملية تصميم العداد أساسا على فكرة إيجاد دارة توافقية تعمل مع النطاطات المكونة للعداد على تحقيق التسلسل المطلوب لمتتالية العد. وبعبارة أخرى فإن هذه الدارة تقوم على تهيئة دخل النطاطات وذلك بتوليد المنطق المناسب لكي تنتقل النطاطات من حالاتها الراهنة إلى حالاتها التالية والتي تحقق توالي حالات العد المطلوب (أنظر الشكل 5-2).

يمكن تلخيص الخطوات الأساسية لعملية التصميم في النقاط التالية:

1) استنتج من متوالية العد للعداد المطلوب تصميمه جدول حالة العداد يتضمن احتمالات الحالات الراهنة من جهة والحالات التالية من الجهة

الأخرى وحسب ما تشترط متوالية العد، مستخدما في ذلك المكافئ الثنائي للتعبير عن كل من هذه الحالات كما بالجدول6-5.

2) حدد نوع النطاط المراد استخدامه في التصميم ثم استخدم عدد 2 نطاطا إذا كان للعداد 4 حالات عد على الأكثر. استخدم 3 نطاطات إذا كان للعداد 8 حالات عد على الأكثر . . وهكذا استخدم n نطاط إذا كان للعداد 2^n حالات عد على الأكثر (حيث n دائما عدد صحيح موجب). مع مراعاة استخدام أقل عدد ممكن من النطاطات.

3) كون جدول حث العداد (Excitation Table) كالمبين باجدول6-4 ذو الثلاثة مقاطع بحيث يشمل القاطع الأول من الشمال على الاحتمالات الممكنة للحالة الراهنة للنطاط و القاطع الثالث من على اليمين على الحالات التالية حسب ما تشترطه متوالية العد تم أكتب الحروف التي تميز دخل النطاطات المستخدمة في تصميم العداد (J و K في حالة استخدام النطاط J-K مثلا) على رأس القاطع الأوسط المخصص لعدد من النطاطات يساوي عدد النطاطات المستخدمة في التصميم.

4) من جدول تغير الحالة المعدل للنطاط المستخدم في عملية التصميم ملء القاطع الأوسط بالجدول وذلك بكتابة شروط الدخل اللازمة لكل نطاط وبما يحقق انتقال العداد من الحالة الراهنة إلى الحالة التالية.

5) اشتق الدوال البولينية المبسطة للدارة التوافقية المطلوبة لكي تعمل مع النطاطات لتحقيق متتالية العد المطلوب، من جدول صدق يحدد العلاقة بين دخل وخرج الدارة التوافقية. للدارة التوافقية المطلوبة إشارات دخل تتكون من القيم المنطقية للحالات الراهنة المدرجة بجدول حث العداد تحت أعمدة الحالة الراهنة بالإضافة لإشارات الدخل الخارجية

للعداد (إن وجدت) وإشارات خرج تتكون من القيم المنطقية المدرجة بالجدول تحت أعمدة مداخل النطاطات.

6) مستخدما الدوال المشتقة بالخطوة السابقة، أرسم دارة العداد المنطقية المطلوبة.

مثـــال 2:

صمم عداد الثلاث ثنائيات الذي يمر بمتوالية العد الثنائي (من الشمال إلى اليمين):

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111

مستخدما نطاطات من النوع JK.

الحــل:

لاحظ أولا أن متوالية العد هذه هي نفس متوالية العد الناتجة من تحليل العداد المتزامن في الشكل 6-16.

من وصف متوالية العد وبإتباع خطوات التصميم نستنتج ما يلي:

1) الخطـوة الأولـى: نكـون جـدول تغـير حالـة هـذا العـداد المبيـن بالجدول 6-6.

2) الخطوة الثانية: حيث أن حالات العد للعداد هي ثمان ($2^3=8$) فإن أقل ما يلزم لتصميمه 3 نطاطات.

3) الخطوة الثالثة: نكون جدول حث العداد (جدول 6-8) ونستخدم جدول تغير الحالة المعدل للنطاط JK المبين في الجدول6-7 لملء القاطع الأوسط به. فمثلا في الصف الأول من الجدول6-8 لدينا انتقال للنطاط Q_0 من 0 في الحالة الراهنة إلى 1 في الحالة التالية. بالرجوع إلى جدول حث

النطاط JK (السطر الأول) نجد أن انتقال في الحالة من 0 في الحالة الراهنة إلى 1 في الحالة التالية يتطلب أن يكون

جدول 6-6 جدول تغير حالة العداد

الحالات الراهنة Q(n)			الحالة التالية Q(n+1)		
Q_2	Q_1	Q_0	Q_2	Q_1	Q_0
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

الدخل J يساوي 1 ويمكن أن يكون الدخل K إما 0 أو 1 ونعبر عن ذلك بالرمز X للدلالة على الدخل غير المهم. إذن نقوم بوضع 1 و X في الصف الأول تحت العمودين المعنونين J_{Q0} و K_{Q0}، على الترتيب في جدول حث العداد. كما نجد في الصف الأول من الجدول6-8 أيضا انتقال للنطاط Q_1 من 0 في الحالة الراهنة إلى 0 في الحالة التالية. من جدول حث النطاط JK (السطر الأول) نجد أن انتقال في الحالة من هذا النوع يتطلب أن يكون المدخل J_{Q1} يساوي 0 و الدخل K_{Q1} يساوي X (0 أو 1)، إذن نقوم بوضع 0 و X في الصف الأول تحت العمودين المعنونين J_{Q1} و K_{Q1}، على الترتيب. تستمر هذه العملية لكل صف في الجدول وكل قلاب حتى يتم تعبئة القاطع الأوسط بالجدول6-8.

4)الخطوة الرابعة: نشتق الآن الدوال البولينية المبسطة للدارة التوافقية اللازمة بالاستعانة بالجدول6-8 . للدارة التوافقية المطلوبة إشارات دخل تتكون من الحالات الراهنة: $Q_0(n)$ و $Q_1(n)$ و $Q_2(n)$ المدرجة بجدول حث العداد تحت أعمدة الحالة الراهنة وإشارات خرج تتكون من القيم المنطقية المدرجة بالجدول تحت أعمدة J_{Q0} و K_{Q0} و J_{Q1} و K_{Q1} و J_{Q2} و K_{Q2}.

جدول 6-7: جدول تغير الحالة المعدل للنطاط J-K

Q(n)	Q(n+1)	J	K
0	0	0	X
0	1	1	X
1	0	X	1
1	1	X	0

جدول 6-8 جدول حث دارة عداد المثال2

الحالات الراهنة Q(n)			دخل النطاطات						الحالات التالية Q(n+1)		
Q_2	Q_1	Q_0	J_{Q2}	K_{Q2}	J_{Q1}	K_{Q1}	J_{Q0}	K_{Q0}	Q_2	Q_1	Q_0
0	0	0	0	x	0	x	1	x	0	0	1
0	0	1	0	x	1	x	x	1	0	1	0
0	1	0	0	x	x	0	1	x	0	1	1
0	1	1	1	x	x	1	x	1	1	0	0
1	0	0	x	0	0	x	1	x	1	0	1
1	0	1	x	0	1	x	x	1	1	1	0
1	1	0	x	0	x	0	1	x	1	1	1
1	1	1	x	1	x	1	x	1	0	0	0

$Q_2(n)$ \ $Q_1(n)Q_0(n)$	00	01	11	10
0	1	X	X	1
1	1	X	X	1

خريطة J_{Q0}: $J_{Q0}=1$

$Q_2(n)$ \ $Q_1(n)Q_0(n)$	00	01	11	10
0	X	1	1	X
1	X	1	1	X

خريطة K_{Q0} : $K_{Q0}=1$

$Q_2(n)$ \ $Q_1(n)Q_0(n)$	00	01	11	10
0	0	1	X	X
1	0	1	X	X

خريطة J_{Q1}: $J_{Q1}=Q_0(n)$

$Q_2(n)$ \ $Q_1(n)Q_0(n)$	00	01	11	10
0	X	X	1	0
1	X	X	1	0

خريطة K_{Q1}: $K_{Q1}=Q_0(n)$

$Q_2(n)$ \ $Q_1(n)Q_0(n)$	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	X	X	X	X

خريطة J_{Q2}: $J_{Q2}=Q_1(n).Q_0(n)$

$Q_2(n)$ \ $Q_1(n)Q_0(n)$	00	01	11	10
0	X	X	X	X
1	0	0	1	0

خريطة K_{Q2}: $K_{Q2}=Q_1(n).Q_0(n)$

شكل6-19 خرائط كارنوف لتبسيط دوال دخل النطاطات بالمثال2

باستخدام خرائط كارنوف المبينة بالشكل 6-19 يتم إيجاد الدوال المبسطة التالية:

$$J_{Q0} = K_{Q0} = 1$$
$$J_{Q1} = K_{Q1} = Q_0(n)$$
$$J_{Q2} = K_{Q2} = Q_1(n) \, . \, Q_0(n)$$

5)الخطوة الخامسة: نستخدم هذه الدوال البولينية لرسم مخطط الدارة المنطقية للعداد. وتجدر الإشارة إلى أننا نحصل على نفس مخطط دارة العداد المنطقية المبينة بالشكل6-16 التي كنا قد تدارسناها في بداية هذا الجزء من الفصل وهي الدارة التي كان لها نفس متوالية العد التي أشترطها هذا المثال.

لاحظ أن علامة X المبينة في جدول حث العداد (جدول6-8). وكذلك في خرائط كارنوف تدل على أن المجموعات الثنائية $(Q_2(n)Q_1(n)Q_0(n))$ المقابلة لها غير مؤثرة سواء اعتبرنا قيمة المتغير المقابل 0 أو 1. هذا ما يمثل حالة "لا يهم" (Don’t Care) . وعند اختيار مربعات متجاورة لتبسيط الدالة في الخريطة يمكن افتراض أن الحروف X إما 0 أو 1، أيهما يعطي تعبيرا أبسط.

مثـــال 3:

صـــمم دارة عـــداد تزامنـــي يحقـــق جـــدول الحالـــة الآتـــي مستخدما نطاط D. للعداد إشارة دخل خارجية w تسيطر على عملية

العد. بحيث يقف العداد عن العد عندما تكون w=0 بينما يستمر في العد عندما تكون w=1.

جدول6-9 جدول حالة عداد المثال3

الحالة الراهنة Q(n)		دخل خارجي	الحالة التالية Q(n+1)	
Q_1	Q_0	w	Q_1	Q_0
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

الحــل:

لا تختلف عملية تصميم هذا العداد عن عملية تصميم العداد السابق (أو أي عداد متزامن آخر) سوى أننا نستخدم هنا إشارة دخل خارجية ونوع آخر من النطاطات.

نكون جدول حث لدارة العداد آخذين في الحسبان أن للعداد أربع ($4=2^2$)حالات عد وإننا نحتاج نطاطين من النوع D لتصميمه. نعامل إشارة الدخل الخارجية معاملة الحالة الراهنة للنطاطات، باعتبارها إشارة دخل للدارة التوافقية المراد تصميمها تعمل مع النطاطات لتحقيق متوالية العد المطلوبة.

باستخدام جدول تغير حالة النطاط D المعدل نكون جدول الحث (الجدول 6-10) لدارة العداد المنطقية المطلوب تصميمها. تذكر أن خرج النطاط D (الحالة التالية) يتبع دخله D.

جدول 6-10 جدول حث عداد المثال 3

الحالة الراهنة Q(n)		دخل خارجي	دخل النطاطات		الحالة التالية Q(n+1)	
Q_1	Q_0	W	D_1	D_0	Q_1	Q_0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

نجد في الصف الأول من هذا الجدول مثلا أن النطاط Q_0 ينتقل من الحالة الراهنة 0 إلى الحالة التالية 0. يتطلب هذا أن يكون الدخل D_0 يساوي 0. عندئذ نقوم بوضع 0 في الصف الأول تحت العمود المعنون D_0 في جدول حث العداد. كما نجد في الصف الثاني أن Q_0 تنتقل من الحالة 0 إلى الحالة 1 ويتطلب ذلك إدخال 1 في الصف الثاني من العمود المعنون D_0 بجدول حث العداد. وهكذا تستمر عملية ملء القاطع الأوسط من جدول حث العداد المبين أعلاه كما بالجدول 6-10.

(أ) خريطة D_0

$Q_1(n)$ \ $Q_0(n)\,w$	00	01	11	10
0		1		1
1		1		1

(ب) خريطة D_1

$Q_1(n)$ \ $Q_0(n)\,w$	00	01	11	10
0			1	
1	1	1		1

$$x \oplus Q_0 = D_0 = \overline{Q}_0(n).w + Q_0(n).\overline{w}$$

$$D_1 = Q_1(n).\overline{Q}_0(n) + Q_0(n)(w \oplus Q_1(n))$$

شكل 6-20 خرائط كارنوف لتبسيط دوال دخل النطاطات بالمثال3

يتم الآن إيجاد الدوال البولينية المبسطة للدارة التوافقية اللازمة لتعمل مع النطاط Q_1 و النطاط Q_2 لتحقيق انتقال الحالة المطلوب. يحتوي الجدول 6-10 على جدول صدق الدارة المطلوبة. للدارة التوافقية المطلوبة إشارات دخل تتكون من الحالة الراهنة $Q_0(n)$ و الحالة الراهنة $Q_1(n)$ للنطاطين Q_0 و Q_1 بالإضافة إلى إشارة الدخل الخارجية w ولها إشارات خرج تتكون من إشاراتي الدخل D_0 و D_1 للنطاطين المكونين لدارة العداد المطلوب.

باستخدام خرائط كارنوف نستخرج الدوال البولينية المبسطة الخاصة بالدارة التوافقية على النحو المبين بالشكل 6-20. يمكن من هذه الدوال الحصول على مخطط للدارة المنطقية للعداد ويترك ذلك تدريبا للطالب.

ملخص

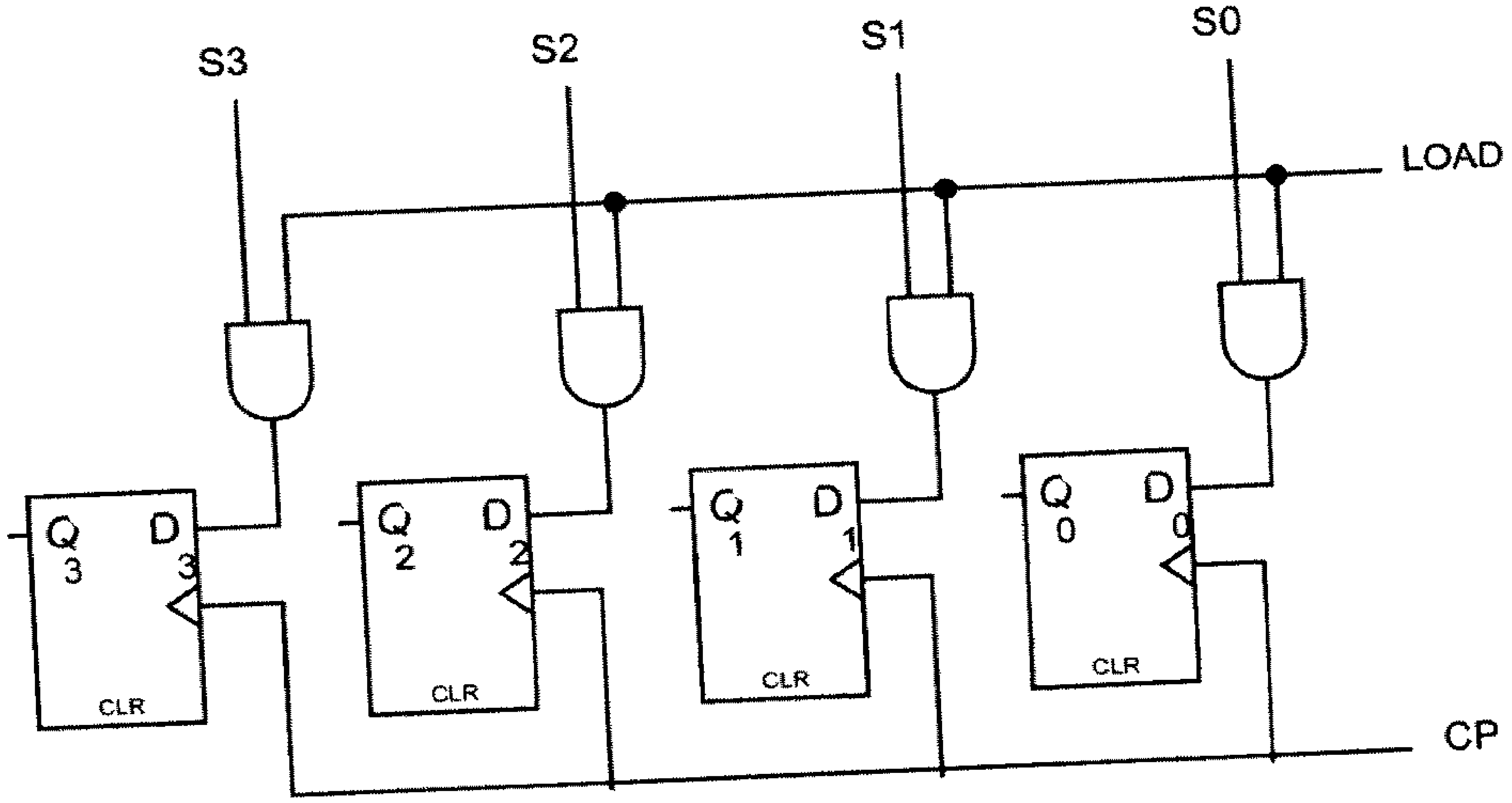
1. تستخدم السجلات لخزن البيانات والمعلومات في صيغة رقمية ومن السجلات ما يقوم ببعض عمليات المعالجة للبيانات مثل الإزاحة وغيرها.
2. السجل المنضبط هو سجل به خطوط سيطرة تمكن من تحديد الفترات الزمنية التي يسمح بتغيير البيانات المخزنة به حسب وظيفة خط السيطرة.
3. لا يسمح بتفعيل أكثر من إشارة واحدة للسيطرة على سجل في آن واحد.
4. يبين جدول الوظيفة للسجل وظيفة كل خط من خطوط السيطرة بالسجل.
5. العداد هو سجل قادر على حساب عدد نبضات الساعة التي تصله. ومن العدادات المتزامن ومنها غير المتزامن.
6. تستغرق العدادات غير المتزامنة مدة أطول في تغيير حالتها كلما زاد عدد النطاطات المكون لها وتعتبر بطيئة.
7. لا يتجاوز زمن التأخير في العدادات المتزامنة مدة أطول من زمن تأخير انتقالي في نطاط واحد.

تدريبات

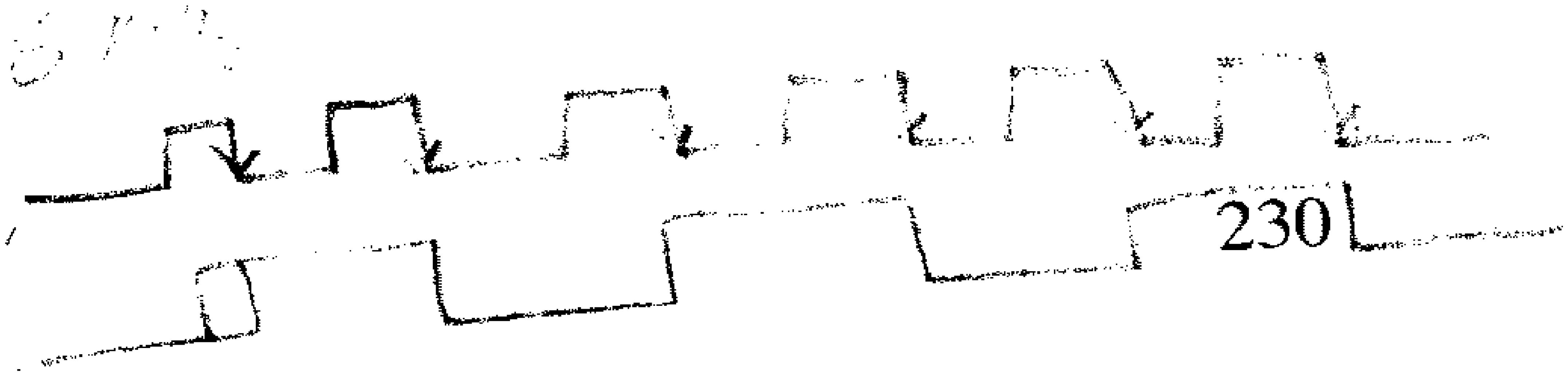
1) في الشكل الآتي $S = 1001$

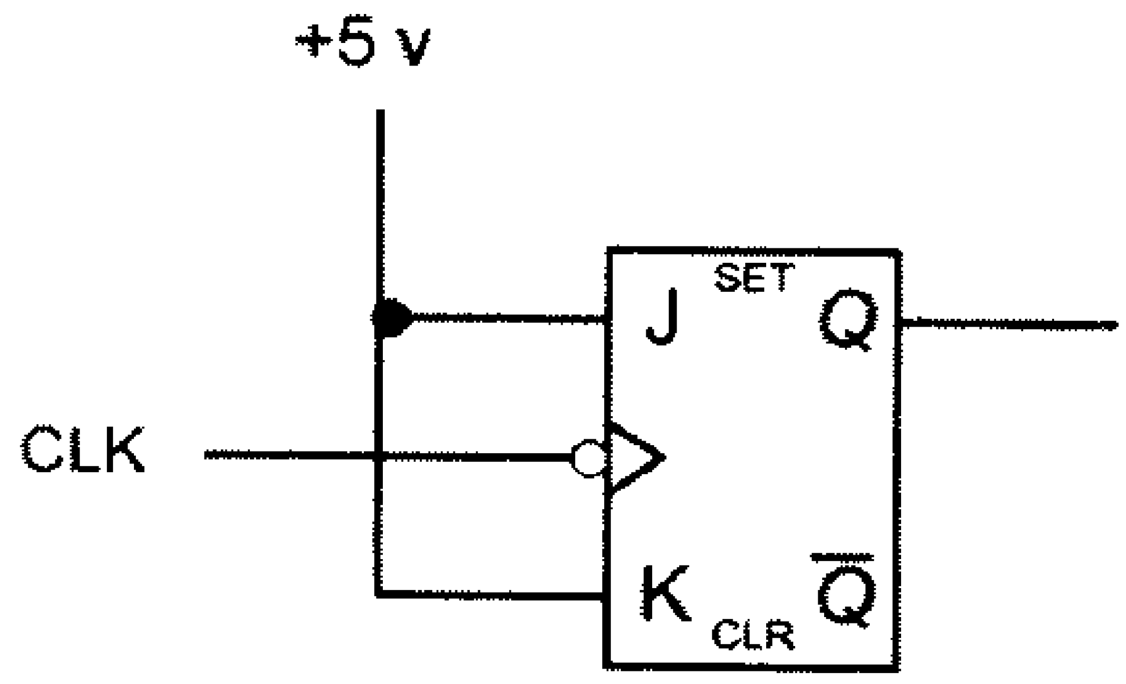
(I) إذا كانت إشارة LOAD منخفضة. فكم تساوي Q بعد حافة إشارة التوقيت الموجبة؟

(II) إذا كانت LOAD عالية. فكم تساوي Q بعد حافة إشارة التوقيت الموجبة؟

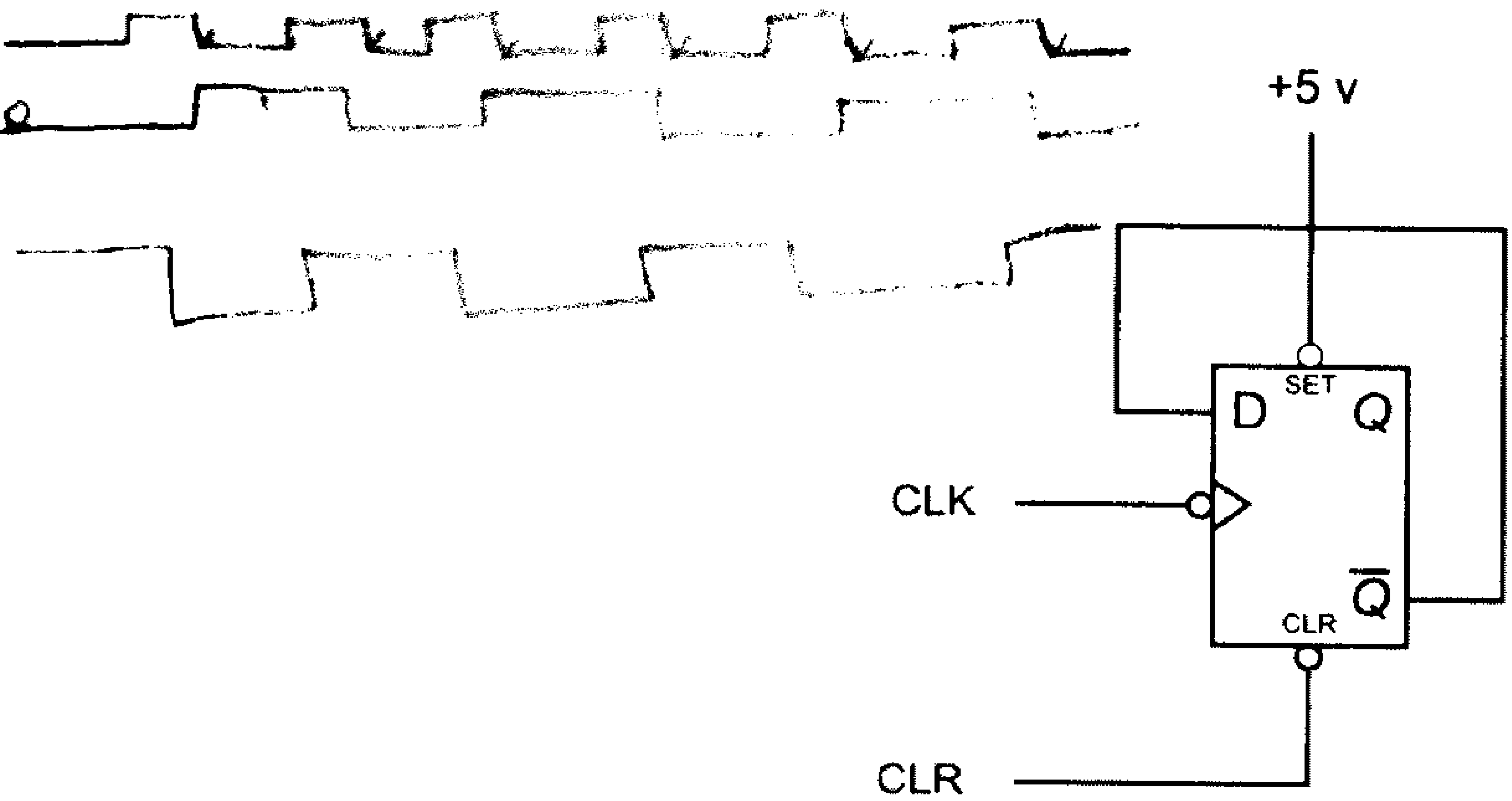


2) لإشارة التوقيت تردد 6 MHz في الشكل التالي. ما هو تردد إشارة الخرج؟ تدعى هذه الدارة أحيانا دارة القسمة على 2. اشرح سبب ذلك.





3) في الشكل التالي تؤخذ إشارة CLR منخفضة بصورة مؤقتة ثم عالية.



أرسم مخطط التوقيت. إذا كان لإشارة التوقيت تردد 1MHz. ما هو التردد للخرج Q ؟ هل هذه الدارة هي دارة قسمة على 2 ؟ لا

4) يتكون عداد تموجي من 16 نطاط. كل منها ذو زمن تأخير انتقالي مقداره 25 ns. إذا كان العد

Q=0111 1111 1111 1111

كم بعد حافة التوقيت الفعالة التالية قبل أن تكون Q تساوي

Q=1000 0000 0000 0000

5) كم عدد النطاطات التي ستغير حالتها في عداد تموج ثنائي ذي عشر ثنائيات للوصول للعد الذي يلي العد التالي:

(أ) 10011 00111 (ب) 00111 11111

6) إذا كانت X= 0100 1011 و D_{in}=0 و $SHL/\overline{LOAD}=1$ في الشكل 6-6 ما هي الكلمة المخزنة Q بعد حافتي توقيت موجبتين ؟

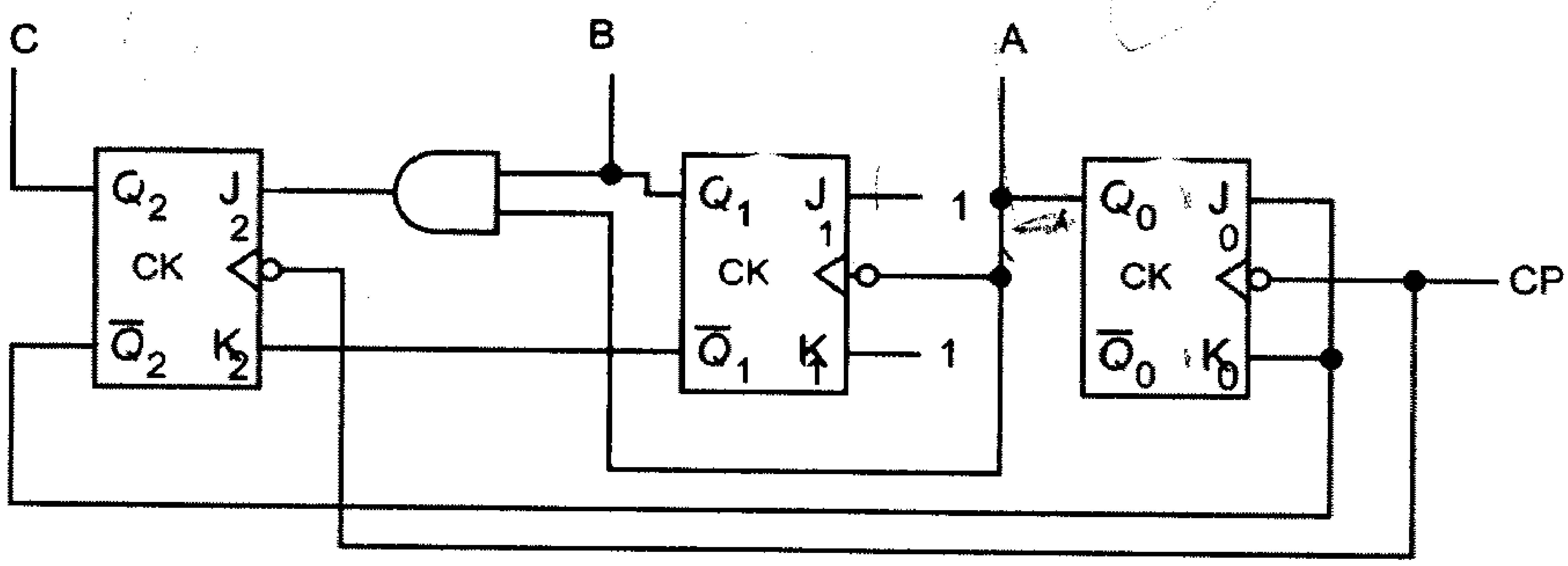
7) مستخدما نطاطات J-K مرة ونطاطات D مرة أخرى، صمم عدادا ثنائيا متزامنا يمر بمتوالية العد :

(I) 0 ، 1 ، 2 ، 3

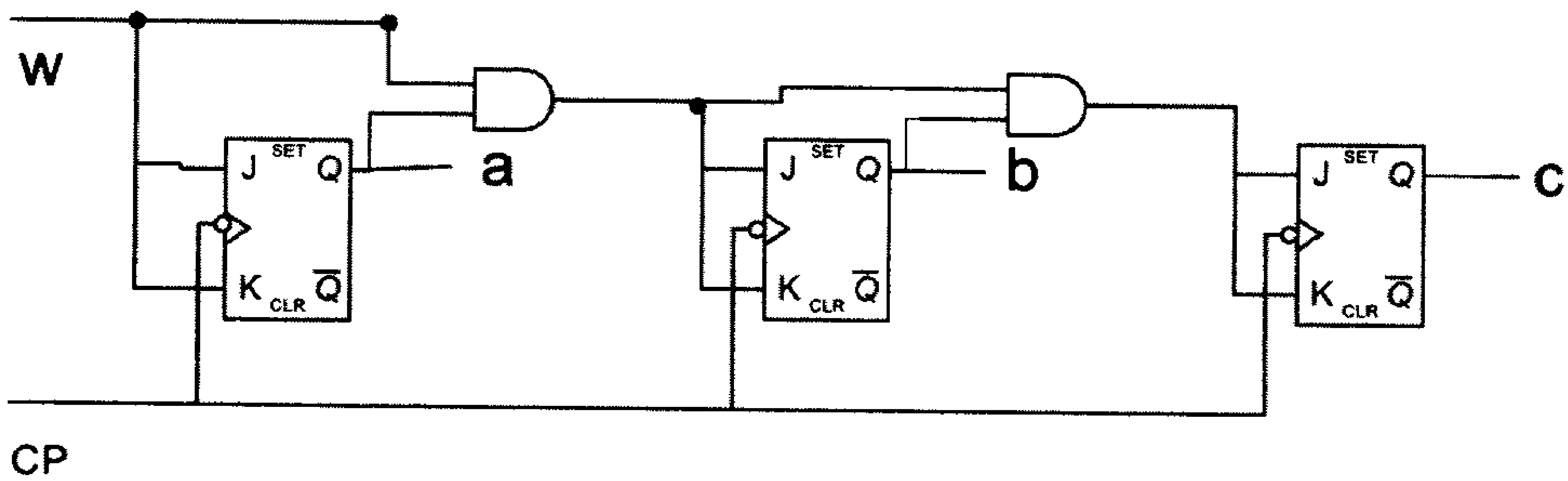
(II) 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7
إذا كان w= 0

أو 7 ، 6 ، 5 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1 ، 0
إذا كان w= 1

8) أوجد متتالية عد العداد المبين بالشكل الآتي:



9) أوجد متوالية عد العداد المبين بالشكل الآتي إذا كانت w إشارة خارجية وكانت a هي الخانة ذات الأهمية الدنيا.



المراجع

1- التصـميم الرقمـي، موريـس مـانو، تعريـب د. فتحـي حمـد بـن شـتوان ود. نبيل عثمان. مكتبة طرابلس العلمية العالمية.

2- الدوائـر الإلكترونـية، الأنظمـة المـتكاملة الرقمـية والتماثلـية. تألـيف د.صـادق باقـر حسـين، د. الحسـيني طـه الشـربيني. الجامعـة التكنولوجـية/ العراق

3- Computer Engineering: Hardware Design, Moris Mano, Prentice Hall, 1988.

4- Digital Computer Electronics, Albert Paul Malvino, second edition ترجمة : محمود شكر مجيد، معن محمد شاكر خليل، بدر محمد علي الوتار. وزارة التعليم العالي/ العراق

5- Digital Concepts And Applications, Ismail / Rooney

6- Switching And Finite Automata Theory, Kohavi, Second Eddition, ,1978

7- Digital System Design and Microprocessor, Jhon P. Hayes McGraw Hill 1985

8- Circuits , Devices and Systems, Ralph J. Smith, Fourth Eddition, Wiely