الوحدة الثالثة: تصميم الدوائر المنطقية Logic Circuit Design

محتويات الوحدة

تمهيد

مرحباً بك عزيزي الدارس في الوحدة الثالثة من مقرر "أساسيات التصميم المنطقي". تتناول هذه الوحدة تصميم الدوائر المنطقية (Logic Circuit Design). حيث يتم شرح خطوات التصميم بالتفصيل ابتداءاً من تحديد مواصفات الدائرة، ثم كتابة التعبيرات المنطقية في واحدة من أربع صور مختلفة، فتبسيط تلك التعبيرات إما باستخدام نظريات الجبر البولياني أو باستخدام مخططات كارنو، و اخيراً بناء الدائرة المنطقية التي تم تصميمها، إما باستخدام البوابات الأساسية NOT و AND و OR أو باستخدام نوع واحد من البوابات NAND أو NOR. و نختم الوحدة بعدد من الأمثلة التي نطبق فيها عملية التصميم التي درسناها. و تصميم الدوائر المنطقية تعتبر المهارة الأساسية التي يجب أن يتعلمها دارس هذا المقرر.

أهداف الوحدة

عزيزي الدارس، بعد دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على:

- تحديد مواصفات الدائرة المنطقية.
- كتابة التعبيرات المنطقية بالصور المختلفة و اختيار الصورة المناسبة.
- تبسيط التعبيرات المنطقية و اختيار أسلوب التبسيط المناسب.
- بناء الدائرة المنطقية باستخدام البوابات الأساسية الثلاث أو باستخدام نوع واحد من البوابات.

1- تحديد مواصفات الدائرة المنطقية

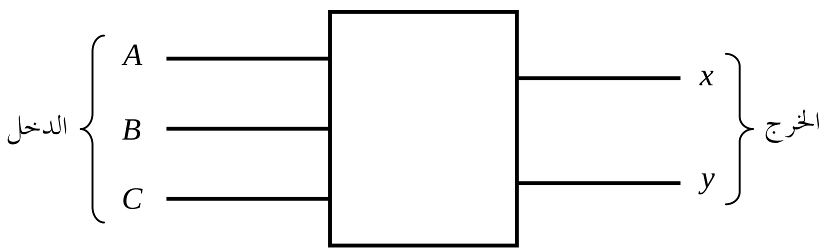
الخطوة الأولى في تصميم أي دائرة منطقية هي تحديد مواصفات تلك الدائرة بدقة. و يتم ذلك بإعطاء:

1- مخطط منطقي (Logic Diagram)
2- جدول صواب (Truth Table)

المخطط المنطقي يوضح متغيرات الدخل و متغيرات الخرج للدائرة، و جدول الصواب يوضح العلاقة التفصيلية ما بين الدخل و الخرج، أي قيم متغيرات الخرج لكل احتمال من احتمالات الدخل، و هذا يتحدد بالطبع من الوظيفة المطلوب أن تؤديها الدائرة. و يتم استخراج هذه المعلومات من نص المسألة.

مثال:

صمم الدائرة المنطقية الموضح المخطط المنطقي و جدول الصواب لها أدناه.



المخطط المنطقي
(Logic Diagram)

A	B	C	x	y
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

جدول الصواب
(Truth Table)

المخطط المنطقي هنا يوضح أن الدائرة المطلوب تصميمها لها ثلاثة متغيرات دخل هي A و B و C، و متغيرا خرج هما x و y. و جدول الصواب يحدد قيم متغيري الخرج x و y المطلوبة لكل احتمال من احتمالات الدخل.

2- كتابة التعبيرات المنطقية

في هذه الخطوة يتم كتابة تعبير منطقي لكل متغير من متغيرات الخرج، بحيث يعطي التعبير نفس قيم الخرج المطلوبة و الموضحة في جدول الصواب. و يتم كتابة هذه التعبيرات المنطقية من جدول الصواب.

توجد أربعة صور مختلفة للتعبير المنطقي هي:

1. صورة مجموع الحدود الصغرى (Sum of minterms)
2. صوره مضروب الحدود الكبرى (Product of Maxterms)
3. صورة AND-OR-Invert
4. صورة OR-AND-Invert

1-2 صورة مجموع الحدود الصغرى (Sum of minterms)

الحد الأصغر (minterm) هو عبارة عن حد تظهر فيه جميع متغيرات الدخل مربوطة مع بعضها البعض بعمليات AND، و قد يظهر متغير معين في الحد الأصغر معكوساً أو بدون عكس. يوجد عدد من الحدود الصغرى يساوي عدد احتمالات الدخل، أي عدد أسطر جدول الصواب، بحيث يكون هناك حد أصغر مقابل كل سطر من أسطر جدول الصواب. لإيجاد الحد الأصغر المقابل لسطر معين من أسطر جدول الصواب ننظر إلى قيم متغيرات الدخل في ذلك السطر، فإذا كانت قيمة المتغير هي 0 يظهر ذلك المتغير في الحد الأصغر معكوساً، أما إذا كانت قيمة المتغير هي 1 يظهر ذلك المتغير في الحد الأصغر بدون عكس. كما هو موضح في الجدول التالي، الذي يوضح جميع الحدود الصغرى لثلاثة متغيرات دخل A و B و C.

A	B	C	Minterm
0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$
0	0	1	$\overline{A}\,\overline{B}C$
0	1	0	$\overline{A}B\overline{C}$
0	1	1	$\overline{A}BC$
1	0	0	$A\overline{B}\,\overline{C}$
1	0	1	$A\overline{B}C$
1	1	0	$AB\overline{C}$
1	1	1	ABC

لاحظ أن أي حد أصغر يساوي 1 فقط لاحتمال الدخل المقابل له في جدول الصواب، و يساوي 0 خلاف ذلك، أي يساوي 0 لجميع احتمالات الدخل الأخرى في جدول الصواب.

لكتابة التعبير المنطقي لمتغير معين من متغيرات الخرج في صورة مجموع الحدود الصغرى ننظر إلى قيم ذلك المتغير في جدول الصواب و نبحث عن الــ 1's، ثم نقوم بأخذ الحدود الصغرى المقابلة لهذه الــ 1's و نقوم بجمعها، أي نربط بينها بعمليات OR.

مثال:

اكتب التعبيرين المنطقيين لمتغيري الخرج x و y في جدول الصواب التالي في صورة مجموع الحدود الصغرى.

A	B	C	x	y
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

الحل:

$$x = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$$
$$y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$$

و يمكن بسهولة التحقق من أن التعبير المنطقي المكتوب في صورة مجموع الحدود الصغرى يعطي فعلاً قيم الخرج المطلوبة الموضحة في جدول الصواب عند تعويض احتمالات الدخل فيه. فحيث أننا قد قمنا باختيار الحدود الصغرى المقابلة للـــ 1's فقط في جدول الصواب و ربطناها بعمليات OR، و حيث أن الحد الأصغر يساوي 1 فقط لاحتمال الدخل المقابل له في جدول الصواب و يساوي 0 خلاف ذلك، فإنه عند تعويض أي احتمال من احتمالات الدخل المقابلة للـــ 1's في التعبير المنطقي فإن الحد الأصغر المقابل لذلك الاحتمال سيساوي 1، و بالتالي فإن التعبير بأكمله سيساوي 1 أيضاً. أي أن كل حد من الحدود الصغرى المضمنة في التعبير المنطقي يضمن لنا ظهور الـــ 1 المقابل له في جدول الصواب. أما عند تعويض أحد احتمالات الدخل المقابلة للـــ 0's في التعبير المنطقي فإن أياً من الحدود الصغرى المضمنة في التعبير المنطقي لن يكون مساوياً 1 بل ستكون جميعاً مساوية للـــ 0 و بالتالي فإن التعبير المنطقي بأكمله سيساوي 0.

لتسهيل كتابة التعبيرات المنطقية في صورة مجموع الحدود الصغرى يتم ترقيم أسطر جدول الصواب (ابتداءاً بالقيمة 0)، و استخدام الرمز m_k للحد الأصغر المقابل للسطر k من جدول الصواب. كما هو موضح بالجدول التالي

#	A	B	C	Minterm	
0	0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	m_0
1	0	0	1	$\overline{A}\,\overline{B}C$	m_1
2	0	1	0	$\overline{A}B\overline{C}$	m_2
3	0	1	1	$\overline{A}BC$	m_3
4	1	0	0	$A\overline{B}\,\overline{C}$	m_4
5	1	0	1	$A\overline{B}C$	m_5
6	1	1	0	$AB\overline{C}$	m_6
7	1	1	1	ABC	m_7

و عليه يمكن كتابة التعبيرين المنطقيين لمتغيري الخرج x و y في المثال السابق بصورة مختصرة، باستخدام رموز الحدود الصغرى، كالتالي

$$x = m_0 + m_1 + m_3 + m_7$$
$$y = m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5$$

كما يمكن تسهيل كتابة التعبير أكثر من ذلك باستخدام رمز المجموع $\sum$ ، و ذلك كالتالي

$$x = \sum m\,(0,1,3,7)$$
$$y = \sum m\,(0,1,2,4,5)$$

أي أن التعبير المنطقي في صورة مجموع الحدود الصغرى يمكن أن يكتب كاملاً، أو مختصراً باستخدام رموز الحدود الصغرى، أو مختصراً باستخدام رمز المجموع $\sum$ و أرقام الحدود الصغرى (أي أرقام أسطر جدول الصواب الحاوية على القيمة 1 للمتغير الذي يتم كتابة التعبير له). و بناء عليه فإنه في المثال السابق

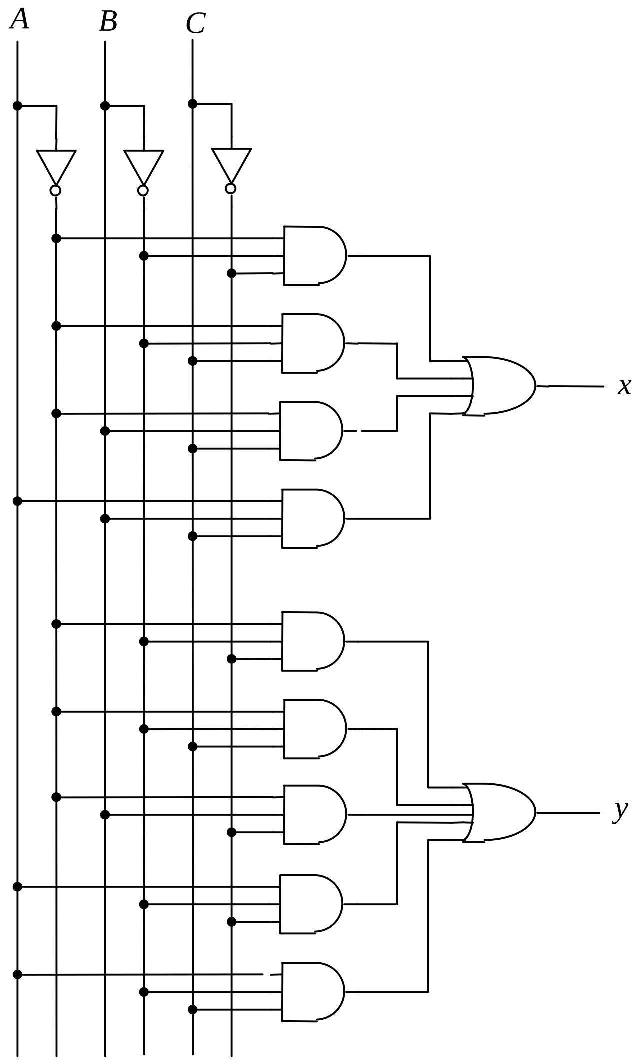
$$\begin{aligned} x &= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC \\ &= m_0 + m_1 + m_3 + m_7 \\ &= \sum m\,(0,1,3,7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C \\ &= m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5 \\ &= \sum m\,(0,1,2,4,5) \end{aligned}$$

لاحظ هنا أهمية مراعاة استخدام الحرف m الصغير (small letter) للرمز للحدود الصغرى (minterms)، حتى لا يحدث خلط بينها و بين الحدود الكبرى (Maxterms)، حيث أننا سنستخدم الحرف M الكبير (capital letter) للرمز للحدود الكبرى.

2-2 الدائرة المنطقية للتعبير في صورة مجموع الحدود الصغرى

إذا قمنا برسم الدائرة المنطقية للتعبيرين أعلاه المكتوبين في صورة مجموع الحدود الصغرى نحصل على



لاحظ أن الدائرة تتكون من مجموعة من بوابات AND، مهمة كل منها توليد أحد الحدود الصغرى، تليها مجموعة من بوابات OR مهمة كل منها جمع الحدود الصغرى لتوليد أحد متغيرات الخرج. و يطلق على هذا الشكل من الدوائر تسمية AND-OR Structure.

صورة مضروب الحدود الكبرى (Product of Maxterms)

الحد الأكبر (Maxterm) هو عبارة عن حد تظهر فيه جميع متغيرات الدخل مربوطة مع بعضها البعض بعمليات OR، و قد يظهر متغير معين في الحد الأكبر معكوساً أو بدون عكس. يوجد عدد من الحدود الكبرى يساوي عدد احتمالات الدخل، أي عدد أسطر جدول الصواب، بحيث يكون هناك حد أكبر مقابل كل سطر من أسطر جدول الصواب.
لإيجاد الحد الأكبر المقابل لسطر معين من أسطر جدول الصواب ننظر إلى قيم متغيرات الدخل في ذلك السطر، فإذا كانت قيمة المتغير هي 0 يظهر ذلك المتغير في الحد الأكبر بدون عكس، أما إذا كانت قيمة المتغير هي 1 يظهر ذلك المتغير في الحد الأكبر معكوساً. كما هو موضح في الجدول التالي، الذي يوضح جميع الحدود الكبرى لثلاثة متغيرات دخل A و B و C.

A	B	C	Maxterm
0	0	0	$A+B+C$
0	0	1	$A+B+\overline{C}$
0	1	0	$A+\overline{B}+C$
0	1	1	$A+\overline{B}+\overline{C}$
1	0	0	$\overline{A}+B+C$
1	0	1	$\overline{A}+B+\overline{C}$
1	1	0	$\overline{A}+\overline{B}+C$
1	1	1	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

لاحظ أن أي حد أكبر يساوي 0 فقط لاحتمال الدخل المقابل له في جدول الصواب، و يساوي 1 خلاف ذلك، أي يساوي 1 لجميع احتمالات الدخل الأخرى في جدول الصواب.

لكتابة التعبير المنطقي لمتغير معين من متغيرات الخرج في صورة مضروب الحدود الكبرى ننظر إلى قيم ذلك المتغير في جدول الصواب و نبحث عن الـــ 0's، ثم نقوم بأخذ الحدود الكبرى المقابلة لهذه الـــ 0's و نقوم بضربها، أي نربط بينها بعمليات AND.

مثال:

اكتب التعبيرين المنطقيين لمتغيري الخرج x و y في جدول الصواب التالي في صورة مضروب الحدود الكبرى.

A	B	C	x	y
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

الحل:

$$x = (A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)$$
$$y = (A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

و يمكن بسهولة التحقق من أن التعبير المنطقي المكتوب في صورة مضروب الحدود الكبرى يعطي فعلاً قيم الخرج المطلوبة الموضحة في جدول الصواب عند تعويض احتمالات الدخل فيه. فحيث أننا قد قمنا باختيار الحدود الكبرى المقابلة للـــ 0's فقط في جدول الصواب و ربطناها بعمليات AND، و حيث أن الحد الأكبر يساوي 0 فقط لاحتمال الدخل المقابل له في جدول الصواب و يساوي 1 خلاف ذلك، فإنه عند تعويض أي احتمال من احتمالات الدخل المقابلة للـــ 0's في التعبير المنطقي فإن الحد الأكبر المقابل لذلك الاحتمال سيساوي 0، و بالتالي فإن التعبير بأكمله سيساوي 0 أيضاً. أي أن كل حد من الحدود الكبرى المضمنة في التعبير المنطقي يضمن لنا ظهور الـــ 0 المقابل له في جدول الصواب. أما عند تعويض أحد احتمالات الدخل المقابلة للـــ 1's في التعبير المنطقي فإن أياً من الحدود الكبرى المضمنة في التعبير المنطقي لن يكون مساوياً 0 بل ستكون جميعاً مساوية للـــ 1 و بالتالي فإن التعبير المنطقي بأكمله سيساوي 1.

لتسهيل كتابة التعبيرات المنطقية في صورة مضروب الحدود الكبرى يتم ترقيم أسطر جدول الصواب (ابتداءاً بالقيمة 0)، و استخدام الرمز M_k للحد الأكبر المقابل للسطر k من جدول الصواب. كما هو موضح بالجدول التالي

#	A	B	C	Maxterm	
0	0	0	0	$A+B+C$	M_0
1	0	0	1	$A+B+\overline{C}$	M_1
2	0	1	0	$A+\overline{B}+C$	M_2
3	0	1	1	$A+\overline{B}+\overline{C}$	M_3
4	1	0	0	$\overline{A}+B+C$	M_4
5	1	0	1	$\overline{A}+B+\overline{C}$	M_5
6	1	1	0	$\overline{A}+\overline{B}+C$	M_6
7	1	1	1	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	M_7

و عليه يمكن كتابة التعبيرين المنطقيين لمتغيري الخرج x و y في المثال السابق بصورة مختصرة، باستخدام رموز الحدود الكبرى، كالتالي

$$x = M_2 \cdot M_4 \cdot M_5 \cdot M_6$$
$$y = M_3 \cdot M_6 \cdot M_7$$

كما يمكن تسهيل كتابة التعبير أكثر من ذلك باستخدام رمز المضروب $\prod$، و ذلك كالتالي

$$x = \prod M(2,4,5,6)$$
$$y = \prod M(3,6,7)$$

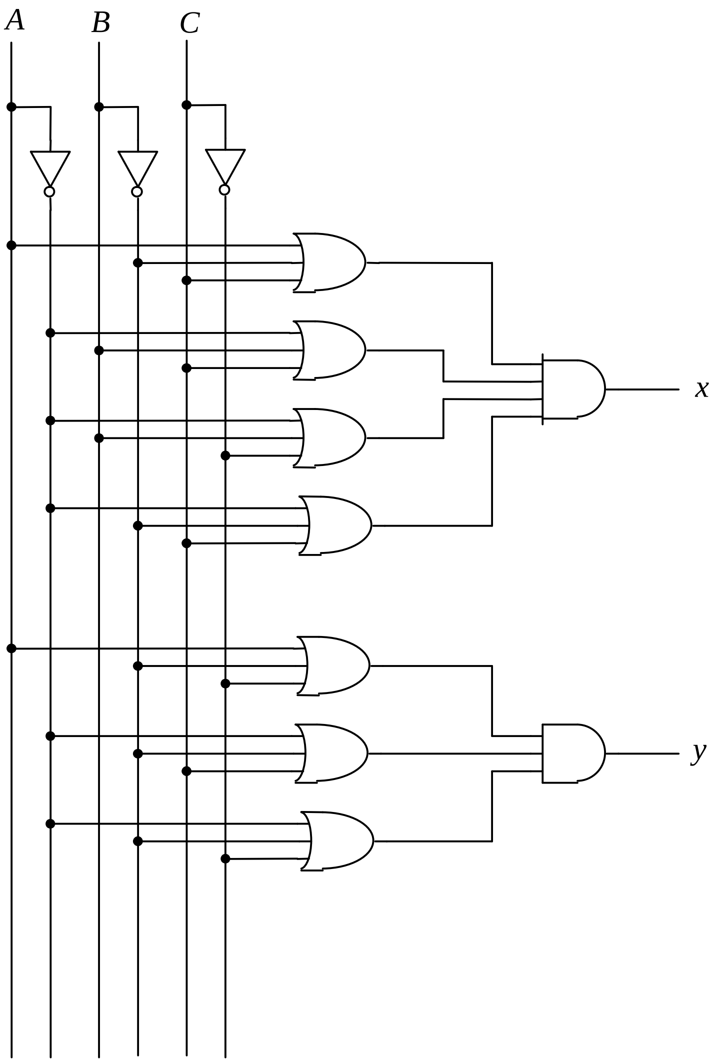
أي أن التعبير المنطقي في صورة مضروب الحدود الكبرى يمكن أن يكتب كاملاً، أو مختصراً باستخدام رموز الحدود الكبرى، أو مختصراً باستخدام رمز المضروب $\prod$ و أرقام الحدود الكبرى (أي أرقام أسطر جدول الصواب الحاوية على القيمة 0 للمتغير الذي يتم كتابة التعبير له). و بناء عليه فإنه في المثال السابق

$$\begin{aligned} x &= (A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C) \\ &= M_2 \cdot M_4 \cdot M_5 \cdot M \\ &= \prod M(2,4,5,6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= (A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}) \\ &= M_3 \cdot M_6 \cdot M_7 \\ &= \prod M(3,6,7) \end{aligned}$$

الدائرة المنطقية للتعبير في صورة مضروب الحدود الكبرى

إذا قمنا برسم الدائرة المنطقية للتعبيرين أعلاه المكتوبين في صورة مضروب الحدود الكبرى نحصل على



لاحظ أن الدائرة تتكون من مجموعة من بوابات OR، مهمة كل منها توليد أحد الحدود الكبرى، تليها مجموعة من بوابات AND مهمة كل منها ضرب الحدود الكبرى لتوليد أحد متغيرات الخرج. و يطلق على هذا الشكل من الدوائر تسمية OR-AND Structure.

3-2 صورة AND-OR-Invert

هذه الصورة تشبه إلى حد كبير صورة مجموع الحدود الصغرى (Sum of minterms) إلا أن التعبير المنطقي بأكمله يكون معكوساً. فلكتابة التعبير المنطقي في هذه الصورة لمتغير معين من متغيرات الخرج ننظر إلى قيم ذلك المتغير في جدول الصواب و نبحث عن الـــ 0's، ثم نقوم بأخذ الحدود الصغرى المقابلة لهذه الـــ 0's و نقوم بجمعها، أي نربط بينها بعمليات OR، و أخيراً نقوم بعكس التعبير المنطقي الناتج بأكمله. أي أننا نقوم بكتابة التعبير المنطقي في صورة مجموع الحدود الصغرى لمعكوس متغير الخرج، ثم نقوم بعكس التعبير المنطقي الناتج بأكمله.

مثال:

اكتب التعبيرين المنطقيين لمتغيري الخرج x و y في جدول الصواب التالي في صورة AND-OR-Invert.

A	B	C	x	y
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

الحل:

$$\overline{x} = \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

$$x = \overline{\overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}}$$

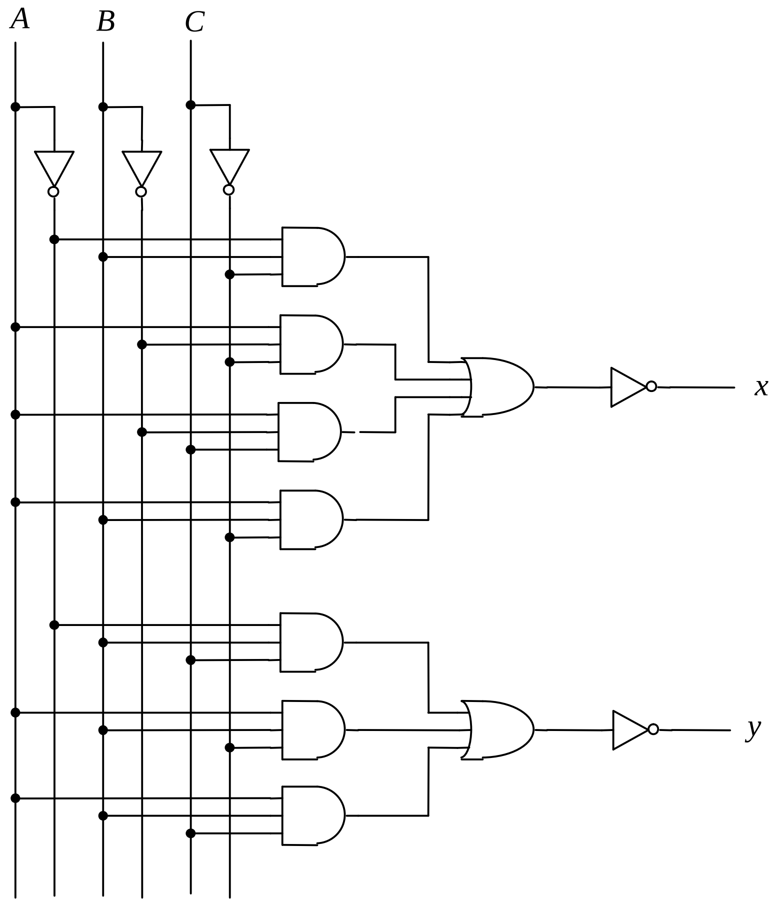
$$\overline{y} = \overline{A}BC + AB\overline{C} + ABC$$

$$y = \overline{\overline{A}BC + AB\overline{C} + ABC}$$

لاحظ أنه إذا قمنا بتطبيق نظرية دي مورغان (DeMorgan's Theorem) على التعبيرات المنطقية المكتوبة في صورة AND-OR-Invert فإننا نحصل على نفس التعبيرات المنطقية التي قمنا بكتابتها من قبل في صورة مضروب الحدود الكبرى (Product of Maxterms).

الدائرة المنطقية للتعبير في صورة AND-OR-Invert

إذا قمنا برسم الدائرة المنطقية للتعبيرين أعلاه المكتوبين في صورة AND-OR-Invert نحصل على



لاحظ أن الدائرة تتكون من مجموعة من بوابات AND، مهمة كل منها توليد أحد الحدود الصغرى، تليها مجموعة من بوابات OR مهمة كل منها جمع الحدود الصغرى لتوليد معكوس أحد متغيرات الخرج، ثم مجموعة من العواكس المنطقية مهمة كل منها عكس خرج إحدى بوابات OR لتوليد أحد متغيرات الخرج. و يطلق على هذا الشكل من الدوائر تسمية AND-OR-Invert Structure.

4-2 صورة OR-AND-Invert

هذه الصورة تشبه إلى حد كبير صورة مضروب الحدود الكبرى (Product of Maxterms) إلا أن التعبير المنطقي بأكمله يكون معكوساً. فلكتابة التعبير المنطقي في هذه الصورة لمتغير معين من متغيرات الخرج ننظر إلى قيم ذلك المتغير في جدول الصواب و نبحث عن الـــ 1's، ثم نقوم بأخذ الحدود الكبرى المقابلة لهذه الـــ 1's و نقوم بضربها، أي نربط بينها بعمليات AND، و أخيراً نقوم بعكس التعبير المنطقي الناتج بأكمله. أي أننا نقوم بكتابة التعبير المنطقي في صورة مضروب الحدود الكبرى لمعكوس متغير الخرج، ثم نقوم بعكس التعبير المنطقي الناتج بأكمله.

<u>مثال:</u>

اكتب التعبيرين المنطقيين لمتغيري الخرج x و y في جدول الصواب التالي في صورة OR-AND-Invert.

A	B	C	x	y
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

<u>الحل:</u>

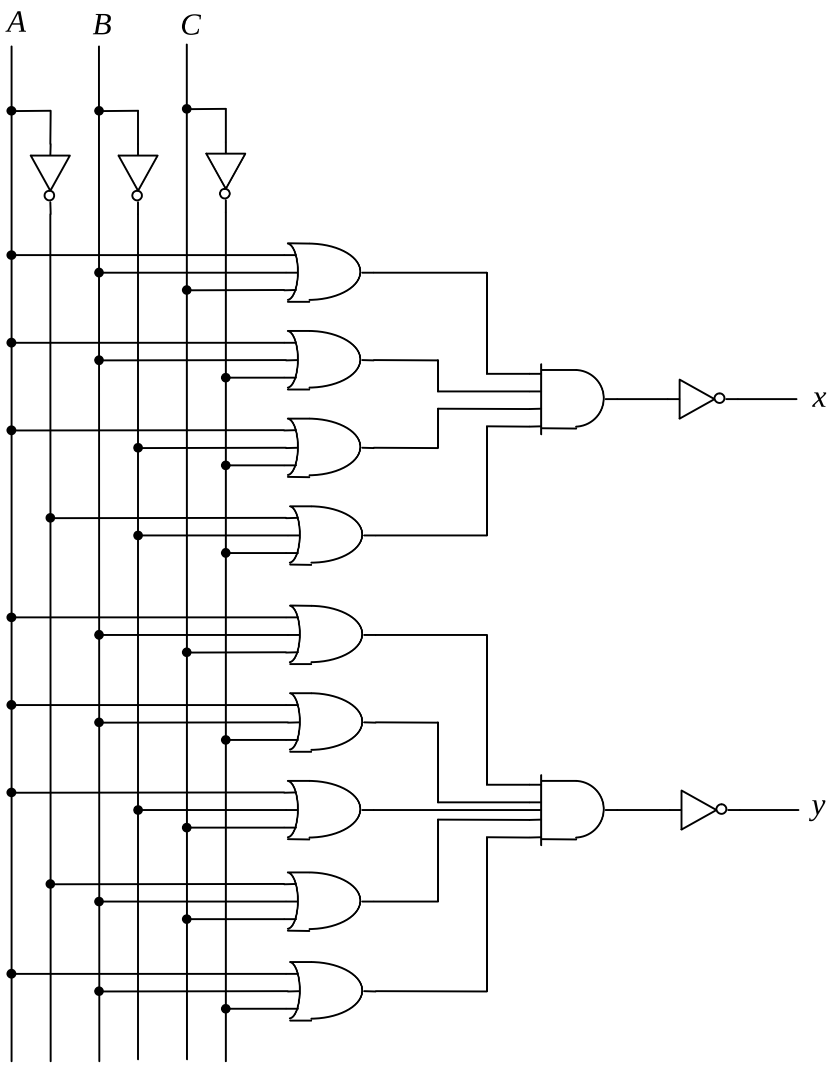
$$\overline{x} = (A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$
$$x = \overline{(A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})}$$

$$\overline{y} = (A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})$$
$$y = \overline{(A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})}$$

لاحظ أنه إذا قمنا بتطبيق نظرية دي مورغان (DeMorgan's Theorem) على التعبيرات المنطقية المكتوبة في صورة OR-AND-Invert فإننا نحصل على نفس التعبيرات المنطقية التي قمنا بكتابتها من قبل في صورة مجموع الحدود الصغرى (Sum of minterms).

الدائرة المنطقية للتعبير في صورة OR-AND-Invert

إذا قمنا برسم الدائرة المنطقية للتعبيرين أعلاه المكتوبين في صورة OR-AND-Invert نحصل على



لاحظ أن الدائرة تتكون من مجموعة من بوابات OR، مهمة كل منها توليد أحد الحدود الكبرى، تليها مجموعة من بوابات AND مهمة كل منها جمع الحدود الكبرى لتوليد معكوس أحد متغيرات الخرج، ثم مجموعة من العواكس المنطقية مهمة كل منها عكس خرج إحدى بوابات AND لتوليد أحد متغيرات الخرج. و يطلق على هذا الشكل من الدوائر تسمية OR-AND-Invert Structure.

اختيار الصورة المناسبة للتعبيرات المنطقية

نختار الصورة المناسبة للتعبيرات المنطقية من الصور الأربعة التي درسناها بناء على شكل الدائرة المطلوب. فإذا كنا نريد دائرة في شكل AND-OR Structure نختار صورة مجموع الحدود الصغرى (Sum of minterms)، أما إذا أردنا دائرة في شكل OR-AND Structure فإننا نختار صورة مضروب الحدود الكبرى (Product of Maxterms). و نفس الشيء ينطبق على صورتي AND-OR-Invert و OR-AND-Invert.

تدريب 1:

من جدول الصواب التالي اكتب التعبيرين المنطقيين لمتغيري الخرج x و y في صورة:

1- مجموع الحدود الصغرى
2- مضروب الحدود الكبرى
3- AND-OR-Invert
4- OR-AND-Invert

A	B	x	y
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	0

تدريب 2:

من جدول الصواب التالي اكتب التعبيرات المنطقية لمتغيرات الخرج x و y و z في صورة:

1- مجموع الحدود الصغرى
2- مضروب الحدود الكبرى
3- AND-OR-Invert
4- OR-AND-Invert

A	B	C	x	y	z
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0

3- تبسيط التعبيرات المنطقية

الهدف من عملية تبسيط التعبيرات المنطقية هو وضع تلك التعبيرات في أبسط صورة ممكنة، و ذلك لتبسيط الدائرة المنطقية، أي تقليل عدد البوابات المنطقية المستخدمة في بنائها، و بالتالي تقليل تكلفتها. و يتم تبسيط التعبيرات المنطقية بإحدى طريقتين:

1. باستخدام نظريات الجبر البولياني (Boolean Algebra Theorems)
2. باستخدام مخططات كارنو (Karnaugh Maps)

3-1 التبسيط باستخدام نظريات الجبر البولياني

يتم التبسيط هنا بالبحث عن التشابهات ما بين الحدود. و الحدين المتشابهين هما حدان يتشابهان في كل شيء عدا متغير واحد يظهر في أحدهما معكوساً و في الآخر بدون عكس. و يتم جمع كل حدين متشابهين في حد واحد هو عبارة عن العامل المشترك ما بين الحدين، أما المتغير المختلف فيتم اختصاره. و في حالة وجود حد معين يتشابه مع أكثر من حد آخر فإنه يمكن تكرار ذلك الحد حسب الحاجة. و يمكن استخدام هذا الأسلوب في التبسيط للتعبيرات المنطقية في أي صورة من الصور الأربعة التي درسناها.

مثال: صورة مجموع الحدود الصغرى

استخدم نظريات الجبر البولياني في تبسيط التعبيرين المنطقيين التاليين المكتوبين في صورة مجموع الحدود الصغرى

$$x = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$$
$$y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$$

الحل:

$$x = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$$

$$x = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$$
$$x = \overline{A}\,\overline{B} + BC$$

$$y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$$

$$y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$$
$$y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$$
$$y = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C} + A\overline{B}$$

$$y = \overline{B} + \overline{A}\,\overline{C}$$

و يمكنك عزيزي الدارس الرجوع إلى الوحدة الثانية (أساسيات الجبر البولياني) لتجد المثال السابق محلولاً بتفصيل أكبر.

مثال: صورة مضروب الحدود الكبرى

استخدم نظريات الجبر البولياني في تبسيط التعبيرين المنطقيين التاليين المكتوبين في صورة مضروب الحدود الكبرى

$$x = (A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)$$
$$y = (A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

الحل:

$$x = (A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

$$x = (A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)$$
$$x = (\overline{B}+C)(\overline{A}+B)$$

$$y = (A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

$$y = (A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

$$y = (\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B})$$

لاحظ أنه في التعبير المنطقي المختصر للمتغير y يمكن التبسيط أكثر من ذلك بإخراج $\overline{B}$ كعامل مشترك كالتالي

$$y = (\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B})$$

$$y = \overline{B}+\overline{C}\,\overline{A}$$

و لكن يجب عدم القيام بذلك لأنه يؤدي إلى تغيير صورة التعبير المنطقي، حيث أن التعبير قبل القيام بهذه الخطوة كان في صورة مضروب الحدود الكبرى و أصبح بعدها في صورة مجموع الحدود الصغرى.

مثال: صورة AND-OR-Invert

استخدم نظريات الجبر البولياني في تبسيط التعبيرين المنطقيين التاليين المكتوبين في صورة AND-OR-Invert

$$x = \overline{\overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}}$$

$$y = \overline{\overline{A}BC + AB\overline{C} + ABC}$$

الحل:

$$x = \overline{\overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}}$$

$$x = \overline{\overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}}$$

$$x = \overline{B\overline{C} + A\overline{B}}$$

$$y=\overline{\bar{A}BC+AB\bar{C}+ABC}$$

$$y=\overline{\bar{A}BC+AB\bar{C}+ABC}$$
$$y=\overline{BC+AB}$$

لاحظ أنه هنا أيضاً يمكننا تبسيط التعبير المختصر للمتغير y أكثر من ذلك بإخراج المتغير B كعامل مشترك، كما يمكننا تطبيق نظرية دي مورغان (DeMorgan's Theorem) على التعبير المختصر لكل من المتغيرين x و y. و لكن يجب تجنب القيام بأي من ذلك لأنه يؤدي إلى تغيير صورة التعبير المنطقي.

مثال: صورة OR-AND-Invert

استخدم نظريات الجبر البولياني في تبسيط التعبيرين المنطقيين التاليين المكتوبين في صورة OR-AND-Invert

$$x=\overline{(A+B+C)\cdot(A+B+\bar{C})\cdot(A+\bar{B}+\bar{C})\cdot(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})}$$
$$y=\overline{(A+B+C)\cdot(A+B+\bar{C})\cdot(A+\bar{B}+C)\cdot(\bar{A}+B+C)\cdot(\bar{A}+B+\bar{C})}$$

الحل:

$$x=\overline{(A+B+C)\cdot(A+B+\bar{C})\cdot(A+\bar{B}+\bar{C})\cdot(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})}$$

$$x=\overline{(A+B+C)\cdot(A+B+\bar{C})\cdot(A+\bar{B}+\bar{C})\cdot(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})}$$
$$x=\overline{(A+B)(\bar{B}+\bar{C})}$$

$$y=\overline{(A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})}$$

$$y=\overline{(A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})}$$

$$y=\overline{(A+B)(A+C)(\overline{A}+B)}$$

$$y=\overline{B(A+C)}$$

نؤكد هنا مرة أخرى على ضرورة تجنب تطبيق نظرية دي مورغان (DeMorgan’s Theorem) على التعبيرين المختصرين للمتغيرين x و y لأن ذلك يؤدي إلى تغيير صورة التعبير المنطقي.

لاحظ أن هذا الأسلوب في تبسيط التعبيرات المنطقية، و القائم على إيجاد التشابهات ما بين الحدود، يصبح أكثر صعوبة بزيادة عدد الحدود أو زيادة عدد المتغيرات في التعبير المنطقي، حيث يصبح من الصعب اكتشاف جميع التشابهات ما بين الحدود. لذلك تم تطوير أسلوب التبسيط هذا بحيث يصلح لمثل هذه الحالات الصعبة، و تم تسمية الأسلوب المطور بطريقة الجدولة (Tabular Method)، مثل طريقة كوين-مكلسكي (Quine-McCluskey Method). و في طريقة الجدولة هذه يتم البحث عن التشابهات ما بين الحدود و جمع الحدود المتشابهة بطريقة منظمة و بخطوات محددة، يمكن بسهولة كتابتها في شكل خوارزمية (Algorithm) و برمجتها في الحاسوب. و لن نقوم بتغطية طرق الجدولة في هذا المقرر.

تدريب 3:

استخدم نظريات الجبر البولياني في تبسيط التعبيرات المنطقية التي قمت بكتابتها في **تدريب** 1.

تدريب 4:

استخدم نظريات الجبر البولياني في تبسيط التعبيرات المنطقية التي قمت بكتابتها في **تدريب** 2.

3-2 التبسيط باستخدام مخططات كارنو (Karnaugh Maps)

مخطط كارنو (Karnaugh Map)، أو K-Map اختصاراً، هو عبارة عن طريقة أخرى للتعبير عن المعلومات الموجودة في جدول الصواب (Truth Table)، و الهدف من استخدام المخطط هو تسهيل عملية اكتشاف التشابهات ما بين الحدود و جمع الحدود المتشابهة.

مخطط كارنو لمتغيرين:

سنقوم بتحويل جدول الصواب التالي، و الذي يحتوي على متغيري دخل هما A و B، إلى مخطط كارنو في متغيرين.

#	A	B	x
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

جدول الصواب

x:

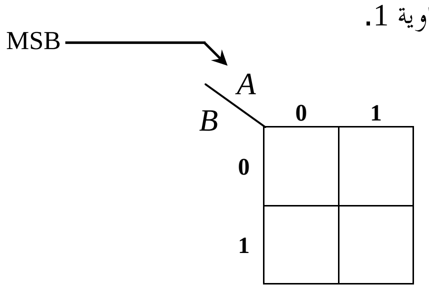
$B \backslash A$	**0**	**1**
0	1 (0)	0 (2)
1	0 (1)	1 (3)

مخطط كارنو

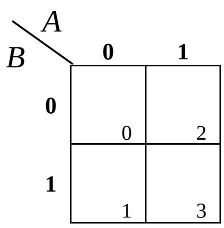
يتكون مخطط كارنو من عدد من الخلايا (Cells) مرتبة في شكل صفوف و أعمدة، و عدد هذه الخلايا يساوي عدد أسطر جدول الصواب، حيث أن كل خلية منها تقابل سطراً من أسطر جدول الصواب. فمخطط كارنو لمتغيرين، مثلاً، يتكون من 4 خلايا مرتبة في شكل صفين و عمودين.

بما أن مخطط كارنو ما هو إلا طريقة أخرى للتعبير عن المعلومات الموجودة في جدول الصواب، لذلك يجب أن تظهر فيه كل تلك المعلومات، و المتمثلة في متغيرات الدخل و قيمها، و متغير الخرج و قيمه، إضافة إلى أرقام الأسطر التي نستخدمها في ترقيم الحدود الصغرى (minterms) أو الحدود الكبرى (Maxterms).

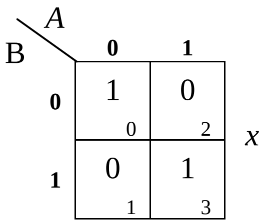
نبدأ بمتغيرات الدخل فنضع قيمها على الصفوف و الأعمدة مبتدئين بالمتغير الواقع في الخانة العليا (MSB)، أي المتغير A ، فنضع القيم المحتملة له على الأعمدة. و المتغير A كما نعلم يمكن أن يأخذ واحدة من قيمتين، إما 0 و إما 1، فنضع القيمة 0 على العمود الأول (من اليسار) و القيمة 1 على العمود الثاني. أي أن كل خلية من خلايا العمود الأول تكون قيمة المتغير A فيها مساوية 0، و كل خلية من خلايا العمود الثاني تكون قيمة المتغير A فيها مساوية 1. أما المتغير الثاني B فنضع القيم المحتملة له على الصفوف، حيث نضع القيمة 0 على الصف الأول (من أعلى) و القيمة 1 على الصف الثاني. أي أن كل خلية من خلايا الصف الأول تكون قيمة المتغير B فيها مساوية 0، و كل خلية من خلايا الصف الثاني تكون قيمة المتغير B فيها مساوية 1.



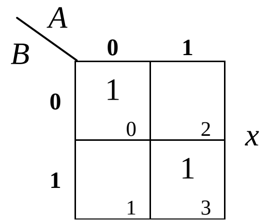
بعد ذلك نقوم بترقيم الخلايا، حيث نقوم بكتابة رقم الخلية بخط صغير في الزاوية السفلية اليمنى من الخلية. و نستخدم الخط الصغير في ترقيم الخلايا حتى لا يحدث خلط بين رقم الخلية و محتوياتها، حيث تُكتب محتويات الخلايا بالخط العادي. نبدأ ترقيم الخلايا بالعمود الأول من أعلى إلى أسفل، حيث تأخذ الخلية الواقعة في الصف الأول و العمود الأول الرقم 0، و تأخذ الخلية الواقعة أسفلها الرقم 1. ثم نواصل الترقيم في العمود الثاني من أعلى إلى أسفل أيضاً، حيث تأخذ الخلية الواقعة في الصف الأول و العمود الثاني الرقم 2، و تأخذ الخلية الواقعة أسفلها الرقم 3. لاحظ أن كل خلية تقابل السطر الذي يحمل رقمها في جدول الصواب، فالخلية رقم 0 تقابل السطر رقم 0 لأن $A = 0$ و $B = 0$ في كليهما، و الخلية رقم 1 تقابل السطر رقم 1 لأن $A = 0$ و $B = 1$ في كليهما، ... و هكذا. لاحظ أيضاً أن الأسلوب المتبع في ترقيم الخلايا يعتمد على طريقة وضع متغيرات الدخل على الصفوف و الأعمدة، حيث يجب أن نبدأ دائماً بالمتغير الواقع في الخانة العليا (MSB) و نضعه على الأعمدة.



و أخيراً نقوم بوضع متغير الخرج x و قيمه، حيث يوضع اسم المتغير على يمين المخطط، و توضع قيمه في داخل الخلايا.



سنبدأ باستخدام مخططات كارنو في تبسيط التعبيرات المنطقية المكتوبة في صورة مجموع الحدود الصغرى، و في مثل هذه الحالات عادة ما تظهر الـــ 1's فقط في مخطط كارنو و تترك الخلايا الحاوية على 0's فارغة، لأننا عند كتابة التعبير المنطقي نأخذ الحدود الصغرى المقابلة للـــ 1's فقط في جدول الصواب.



و كنوع من التسهيل سنقوم بكتابة التعبيرات المنطقية في صورة تتضمن كل المعلومات الموجودة في جدول الصواب، بحيث يمكن رسم مخطط كارنو من التعبير المنطقي مباشرة دون الحاجة للرجوع إلى جدول الصواب. و يتم ذلك كالتالي

$$x = f(A,B) = \sum m\,(0,3)$$

و الجزء $x = f(A,B)$ يعني أن متغير الخرج x هو عبارة عن دالة (function) في متغيري الدخل A و B، و توضع متغيرات الدخل ما بين قوسي الدالة بنفس ترتيب ظهورها في جدول الصواب، بحيث يكون المتغير الأول (من اليسار) هو المتغير الواقع في الخانة العليا (MSB). أما الجزء $\sum m\,(0,3)$ فيدل على أن الخانات الحاوية على القيمة 1 في مخطط كارنو هي الخانات 0 و 3.

مخطط كارنو لثلاثة متغيرات:

سنقوم بتحويل جدول الصواب التالي إلى مخطط كارنو في ثلاثة متغيرات.

#	A	B	C	x	y
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1
2	0	1	0	0	1
3	0	1	1	1	0
4	1	0	0	0	1
5	1	0	1	0	1
6	1	1	0	0	0
7	1	1	1	1	0

التعبيرات المنطقية في صورة مجموع الحدود الصغرى

$$x = f(A,B,C) = \sum m\,(0,1,3,7)$$
$$y = f(A,B,C) = \sum m\,(0,1,2,4,5)$$

مخطط كارنو لثلاثة متغيرات يتكون من 8 خلايا مرتبة في شكل صفين و أربعة أعمدة

نضع متغيرات الدخل على الصفوف و الأعمدة مبتدئين بالمتغير الواقع في الخانة العليا (MSB)، حيث نضع المتغيرين A و B معاً على الأعمدة، و نضع المتغير C على الصفوف. لاحظ أنه توجد أربعة احتمالات لقيم المتغيرين A و B معاً، يوضع كل احتمال منها على أحد الأعمدة، مع مراعاة عكس ترتيب العمودين الأخيرين (و سنقوم بتوضيح سبب ذلك لاحقاً). و يوجد احتمالان فقط لقيم المتغير C يوضعان على الصفوف

C \ AB	**00**	**01**	**11**	**10**
0				
1				

الخطوة التالية هي ترقيم الخلايا من أعلى إلى أسفل و من اليسار إلى اليمين، مع مراعاة عكس ترتيب العمودين الأخيرين

$C \backslash AB$	**00**	**01**	**11**	**10**
0	$_{0}$	$_{2}$	$_{6}$	$_{4}$
1	$_{1}$	$_{3}$	$_{7}$	$_{5}$

الخطوة الأخيرة هي وضع اسم متغير الخرج على يمين المخطط و وضع الـــ 1's في الخلايا المناسبة

$C \backslash AB$	**00**	**01**	**11**	**10**	
0	1 $_{0}$	$_{2}$	$_{6}$	$_{4}$	x
1	1 $_{1}$	1 $_{3}$	1 $_{7}$	$_{5}$	

$C \backslash AB$	**00**	**01**	**11**	**10**	
0	1 $_{0}$	1 $_{2}$	$_{6}$	1 $_{4}$	y
1	1 $_{1}$	$_{3}$	$_{7}$	1 $_{5}$	

لاحظ أنه في حالة وجود أكثر من متغير خرج واحد فإننا نحتاج لمخطط كارنو منفصل لكل متغير من متغيرات الخرج.

مخطط كارنو لأربعة متغيرات:

سنقوم بتحويل جدول الصواب التالي إلى مخطط كارنو في أربعة متغيرات.

#	A	B	C	D	x
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

التعبيرات المنطقية في صورة مجموع الحدود الصغرى

$$x = f(A,B,C,D) = \sum m\,(2,3,8,10,12)$$

مخطط كارنو لأربعة متغيرات يتكون من 16 خلية مرتبة في شكل أربعة صفوف و أربعة أعمدة

نضع متغيرات الدخل على الصفوف و الأعمدة مبتدئين بالمتغير الواقع في الخانة العليا (MSB)، حيث نضع المتغيرين A و B معاً على الأعمدة، و نضع المتغيرين C و D معاً على الصفوف. و نراعي عكس ترتيب العمودين الأخيرين و الصفين الأخيرين

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

بعد ذلك نقوم بترقيم الخلايا من أعلى إلى أسفل و من اليسار إلى اليمين، مع مراعاة عكس ترتيب العمودين الأخيرين و الصفين الأخيرين

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

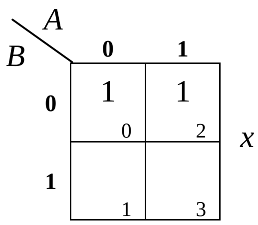
أخيراً نقوم بوضع اسم متغير الخرج على يمين المخطط و وضع الــ 1's في الخلايا المناسبة

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	1 12	1 8
01	1	5	13	9
11	1 3	7	15	11
10	1 2	6	14	1 10

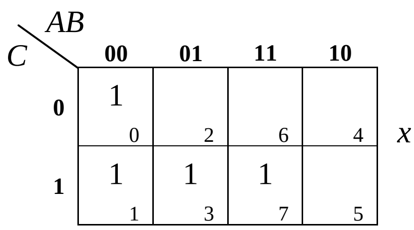
x

استخدام مخططات كارنو في تبسيط التعبيرات المنطقية

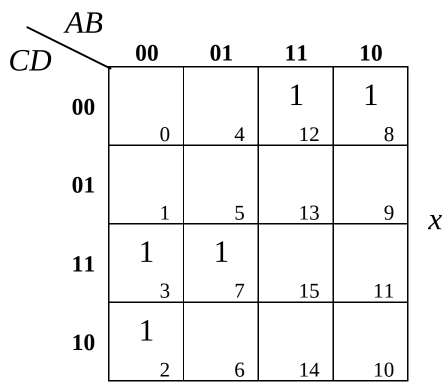
في مخطط كارنو يتحول التشابه ما بين الحدود إلى تجاور ما بين الخلايا، فالحدود الواقعة في خلايا متجاورة على المخطط هي حدود متشابهة يمكن جمعها بغرض الإختصار. مثلاً



في مخطط كارنو لمتغيرين الموضح أعلاه الحدين الواقعين في الخليتين المتجاورتين 0 و 2 هما حدين متشابهين يمكن جمعهما بغرض الإختصار.



في مخطط كارنو لثلاثة متغيرات الموضح أعلاه الحدين الواقعين في الخليتين المتجاورتين 0 و 1 هما حدين متشابهين، و الحدين الواقعين في الخليتين المتجاورتين 3 و 7 هما حدين متشابهين أيضاً، كما أن الحدين الواقعين في الخليتين المتجاورتين 1 و 3 هما حدين متشابهين أيضاً. و كما نعلم فإن أي حدين متشابهين يمكن جمعهما بغرض الإختصار.



في مخطط كارنو لأربعة متغيرات الموضح أعلاه الحدين 8 و 12 متشابهين، و الحد 3 يتشابه مع كل من الحد 2 و الحد 7.

لاحظ أن سبب قيامنا بعكس ترتيب العمودين الأخيرين في مخطط كارنو لثلاثة متغيرات، و عكس ترتيب العمودين الأخيرين و الصفين الأخيرين في مخطط كارنو لأربعة متغيرات هو سعينا لجعل الحدود الواقعة في خلايا متجاورة حدوداً متشابهة. تذكر أن الحدين المتشابهين هما حدان يتشابهان في كل شيء عدا متغير واحد يظهر في أحدهما معكوساً و في الآخر بدون عكس.

هنالك تجاورات غير ظاهرة بصورة مباشرة، حيث أنه في حالة وجود أربعة صفوف أو أربعة أعمدة فإن كل خلية في العمود الأول تجاور الخلية المناظرة لها في الموقع في العمود الأخير، و كذلك فإن كل خلية في الصف الأول تجاور الخلية المناظرة لها في الموقع في الصف الأخير. مثلاً

$C \backslash AB$	**00**	**01**	**11**	**10**	
0	1 $_{0}$	$_{2}$	$_{6}$	1 $_{4}$	x
1	1 $_{1}$	1 $_{3}$	$_{7}$	$_{5}$	

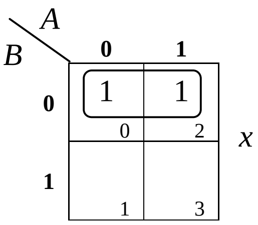
في مخطط كارنو لثلاثة متغيرات الموضح أعلاه الحد 1 يشبه الحد 3، و الحد 0 يشبه كل من الحد 1 و الحد 4.

$CD \backslash AB$	**00**	**01**	**11**	**10**	
00	$_{0}$	$_{4}$	1 $_{12}$	1 $_{8}$	
01	$_{1}$	$_{5}$	$_{13}$	$_{9}$	x
11	1 $_{3}$	$_{7}$	$_{15}$	$_{11}$	
10	1 $_{2}$	$_{6}$	$_{14}$	1 $_{10}$	

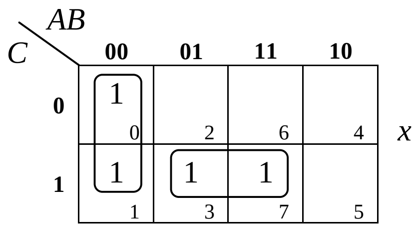
في مخطط كارنو لأربعة متغيرات الموضح أعلاه الحد 8 يشبه الحد 12، و الحد 2 يشبه الحد 3، و الحد 10 يشبه كل من الحد 8 و الحد 2.

تكوين المجموعات في مخططات كارنو

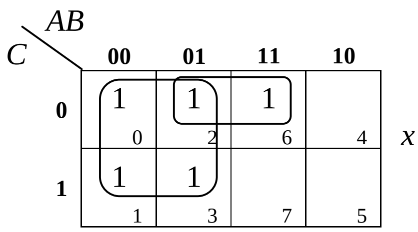
لتبسيط التعبير المنطقي باستخدام مخططات كارنو نقوم بتكوين مجموعات من الحدود المتشابهة، و هذه المجموعات قد تكون ثنائية أو رباعية أو ثمانية. المجموعة الثنائية تتكون من حدين متشابهين و تختصر متغير واحد، و المجموعة الرباعية تتكون من أربعة حدود متشابهة و تختصر متغيرين، أما المجموعة الثمانية فتتكون من ثمانية حدود متشابهة و تختصر ثلاثة متغيرات. أي أنه كلما كانت المجموعة أكبر كان الإختصار أكثر. فعلينا أن نحاول إدخال أي حد في مجموعة، و كلما كانت تلك المجموعة أكبر كان ذلك أفضل. مثلاً



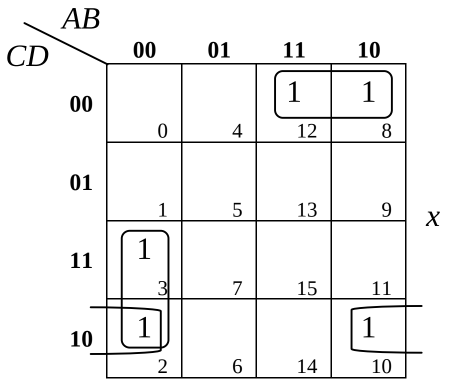
في مخطط كارنو لمتغيرين الموضح أعلاه قمنا بتكوين مجموعة ثنائية من الحدين 0 و 2.



في مخطط كارنو لثلاثة متغيرات الموضح أعلاه قمنا بتكوين مجموعتين ثنائيتين. مجموعة ثنائية من الحدين 0 و 1، و مجموعة ثنائية أخرى من الحدين 3 و 7. لاحظ أنه على الرغم من أن الحدين 1 و 3 يتشابهان إلا أننا لا نحتاج لتكوين مجموعة ثنائية منهما لأن كلاً منهما قد دخل في مجموعة أخرى.



في مخطط كارنو لثلاثة متغيرات الموضح أعلاه قمنا بتكوين مجموعة رباعية و مجموعة ثنائية. لاحظ أن الحد 2 قد دخل في تكوين كل من المجموعة الثنائية و المجموعة الرباعية، و هذا يناظر تكرار الحد الذي يتشابه مع أكثر من حد آخر.



في مخطط كارنو لأربعة متغيرات الموضح أعلاه قمنا بتكوين ثلاثة مجموعات ثنائية. لاحظ المجموعة المكونة من الحدين 2 و 10. لاحظ أيضاً أنه كان في إمكاننا جمع الحد 10 في مجموعة ثنائية مع الحد 8 بدلاً عن الحد 2.

كتابة التعبير المنطقي المختصر من مخطط كارنو

بعد تكوين المجموعات بالطريقة المثلى يتم كتابة التعبير المنطقي المختصر مباشرة من مخطط كارنو، و ذلك بكتابة حد مختصر لكل مجموعة. لكتابة الحد المختصر لمجموعة معينة ننظر لقيم المتغيرات داخل المجموعة، فأي متغير تتغير قيمته داخل المجموعة من 0 إلى 1 أو من 1 إلى 0 يتم اختصاره، أما المتغير الذي تكون قيمته ثابتة داخل المجموعة فنأخذه معكوساً إذا كانت قيمته ثابتة في 0، و بدون عكس إذا كانت قيمته ثابتة في 1، ثم نقوم بربط هذه المتغيرات مع بعضها البعض بعمليات AND. وبعد كتابة الحد المختصر المقابل لكل مجموعة نقوم بربط هذه الحدود مع بعضها البعض بعمليات OR (أي نجمعها).

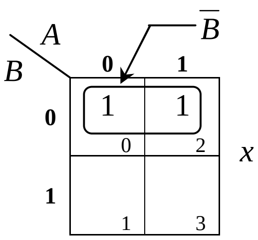
مثال:

استخدم مخططات كارنو في تبسيط التعبير المنطقي

$$x = f(A,B) = \sum m\,(0,2)$$

الحل:

نقوم برسم مخطط كارنو و تكوين المجموعات



لدينا مجموعة واحدة لذلك يوجد حد واحد فقط. لكتابة الحد ننظر لقيم المتغيرات داخل المجموعة فنجد أن المتغير A قد تغيرت قيمته من 1 إلى 0 داخل المجموعة فيختصر، أما المتغير B فقيمته ثابتة في 0 داخل المجموعة لذلك نأخذه معكوساً. و بالتالي فإن التعبير المختصر هو

$$x = \overline{B}$$

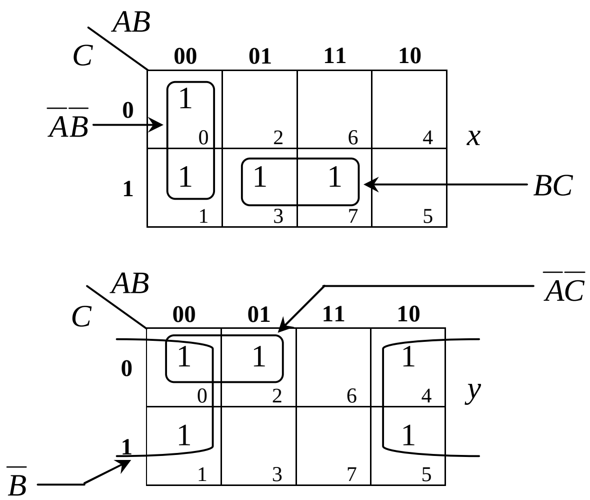
مثال:

استخدم مخططات كارنو في تبسيط التعبيرين المنطقيين

$$x = f(A,B,C) = \sum m\,(0,1,3,7)$$
$$y = f(A,B,C) = \sum m\,(0,1,2,4,5)$$

الحل:

نقوم برسم مخطط كارنو لكل متغير من متغيري الخرج ثم نقوم بتكوين المجموعات



في مخطط كارنو للمتغير x لدينا مجموعتين ثنائيتين. المجموعة الرأسية فيها كلا المتغيرين A و B ثابتين في 0 داخل المجموعة لذلك نأخذهما معكوسين، أما المتغير C فقد تغيرت قيمته داخل المجموعة فيختصر، و عليه يكون الحد المختصر المقابل لهذه المجموعة هو $\overline{A}\overline{B}$. أما بالنسبة للمجموعة الأفقية فقد تغيرت قيمة المتغير A داخلها لذلك يتم إختصاره، أما المتغيرين B و C فكلاهما ثابت في 1 داخل المجموعة لذلك نأخذهما بدون عكس، و عليه يكون الحد المختصر المقابل لهذه المجموعة هو BC. أخيراً نقوم بربط الحدود المختصرة المقابلة للمجموعات بعمليات OR فنحصل على

$$x = \overline{A}\overline{B} + BC$$

أما بالنسبة لمخطط كارنو للمتغير y فلدينا مجموعة رباعية و مجموعة ثنائية. في المجموعة الرباعية كلا المتغيرين A و C تغيرت قيمتهما داخل المجموعة لذلك يتم إختصارهما، أما المتغير B فقيمته ثابتة داخل المجموعة في 0 لذلك نأخذه معكوساً، أي أن الحد المختصر المقابل لهذه المجموعة هو $\overline{B}$. أما في المجموعة الثنائية فالمتغير B تغيرت قيمته داخل المجموعة فيتم إختصاره، أما المتغيرين A و C فكلاهما ثابت داخل المجموعة في 0 لذلك نأخذهما معكوسين، أي أن الحد المختصر المقابل لهذه المجموعة هو $\overline{A}\,\overline{C}$. أخيراً نقوم بربط الحدود المختصرة المقابلة للمجموعات بعمليات OR فنحصل على

$$y = \overline{B} + \overline{A}\,\overline{C}$$

مثال:

استخدم مخططات كارنو في تبسيط التعبير المنطقي

$$x = f(A,B,C,D) = \sum m\ (1,2,3,5,7,8,10,12)$$

الحل:

CD \ AB	00	01	11	10
00	 0	 4	1 12	1 8
01	1 1	1 5	 13	 9
11	1 3	1 7	 15	 11
10	1 2	 6	 14	1 10

x

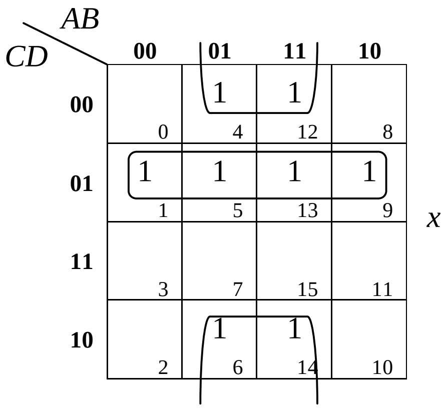
$$x = \overline{A}D + A\overline{C}\,\overline{D} + \overline{B}C\overline{D}$$

مثال:

استخدم مخططات كارنو في تبسيط التعبير المنطقي

$$x = f(A,B,C,D) = \sum m\,(1,4,5,6,9,12,13,14)$$

الحل:



$$x = \overline{C}D + B\overline{D}$$

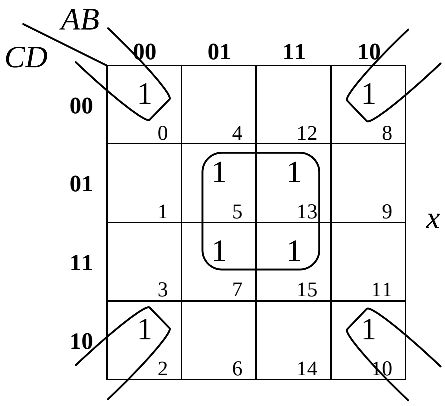
مثال:

استخدم مخططات كارنو في تبسيط التعبير المنطقي

$$x = f(A,B,C,D) = \sum m\,(0,2,5,7,8,10,13,15)$$

الحل:

لاحظ أن الزوايا الأربع للمخطط
تشكل مجموعة رباعية



$$x = \overline{B}\overline{D} + BD$$

<u>مثال:</u>

استخدم مخططات كارنو في تبسيط التعبير المنطقي

$$x = f(A,B,C,D) = \sum m\,(0,1,2,3,4,5,6,7)$$

<u>الحل:</u>

CD \ AB	**00**	**01**	**11**	**10**
00	1 0	1 4	12	8
01	1 1	1 5	13	9
11	1 3	1 7	15	11
10	1 2	1 6	14	10

x

$$x = \overline{A}$$

<u>مثال:</u>

استخدم مخططات كارنو في تبسيط التعبير المنطقي

$$x = f(A,B,C,D) = \sum m\,(0,2,4,6,8,10,12,14)$$

<u>الحل:</u>

CD \ AB	**00**	**01**	**11**	**10**
00	1 0	1 4	1 12	1 8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	1 2	1 6	1 14	1 10

x

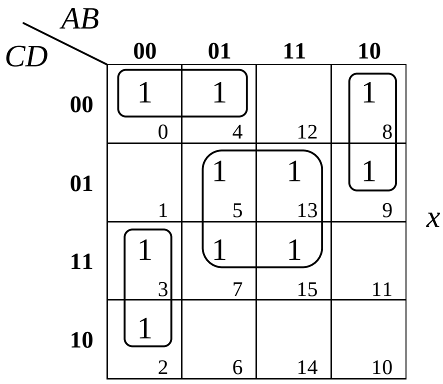
$$x = \overline{D}$$

مثال:

استخدم مخططات كارنو في تبسيط التعبير المنطقي

$$x = f(A,B,C,D) = \sum m\,(0,2,3,4,5,7,8,9,13,15)$$

الحل:



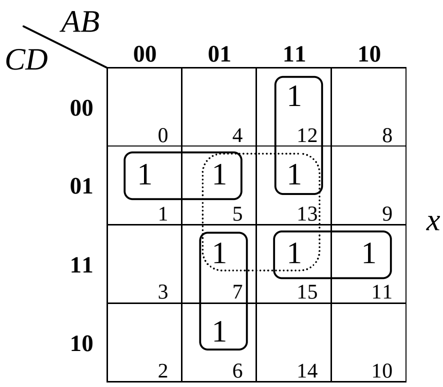
$$x = BD + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$$

مثال:

استخدم مخططات كارنو في تبسيط التعبير المنطقي

$$x = f(A,B,C,D) = \sum m\,(1,5,6,7,11,12,13,15)$$

الحل:



$$x = AB\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C}D + \overline{A}BC + ACD$$

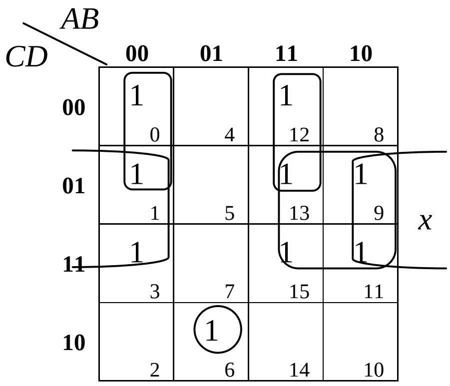
لاحظ أنه من السهل في المثال السابق الوقوع في خطأ تكوين المجموعة الرباعية، الموضحة بالخط المتقطع، و التي لا داعي لها نظراً إلى أن جميع الحدود المكونة لها قد دخلت في تكوين المجموعات الثنائية. لتجنب الوقوع في مثل هذا الخطأ يجب ألا نبدأ بتكوين المجموعات الكبيرة، بل نبدأ دائماً بتكوين المجموعات الصغيرة ثم ننتقل للمجموعات الأكبر. أي نبدأ بتكوين المجموعات الأحادية، فأي حد لا يمكن جمعه مع أي حد آخر نكون منه مجموعة أحادية. ثم ننتقل لتكوين المجموعات الثنائية، فأي حد لا يمكن ضمه إلا لمجموعة ثنائية نستخدمه في تكوين مجموعة ثنائية. و بنفس الأسلوب ننتقل لتكوين المجموعات الرباعية ثم تكوين المجموعات الثمانية.

مثال:

استخدم مخططات كارنو في تبسيط التعبير المنطقي

$$x = f(A,B,C,D) = \sum m\,(0,1,3,6,9,11,12,13,15)$$

الحل:



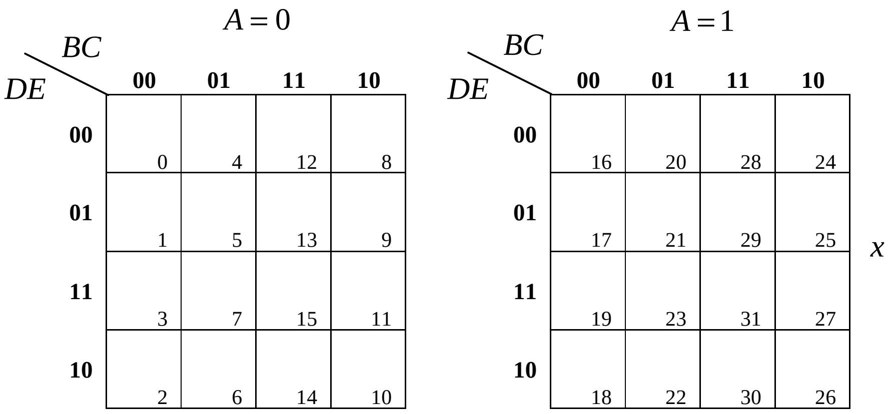
$$x = \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + AD + \overline{B}D$$

مخططات كارنو لخمسة و ستة متغيرات

نظراً لكبر عدد الخلايا في مخطط كارنو لخمسة و ستة متغيرات، و لتسهيل التعامل معه، يتم تقسيم المخطط إلى عدد من مخططات كارنو لأربعة متغيرات.

خمسة متغيرات:

يتكون المخطط من 32 خلية يتم تقسيمها إلى مخططي كارنو لأربعة متغيرات، يتكون كل مخطط منهما من 16 خلية. المخطط الأول يمثل النصف الأعلى من جدول الصواب (الحدود من 0 إلى 15)، و المخطط الثاني يمثل النصف الأسفل من جدول الصواب (الحدود من 16 إلى 31)



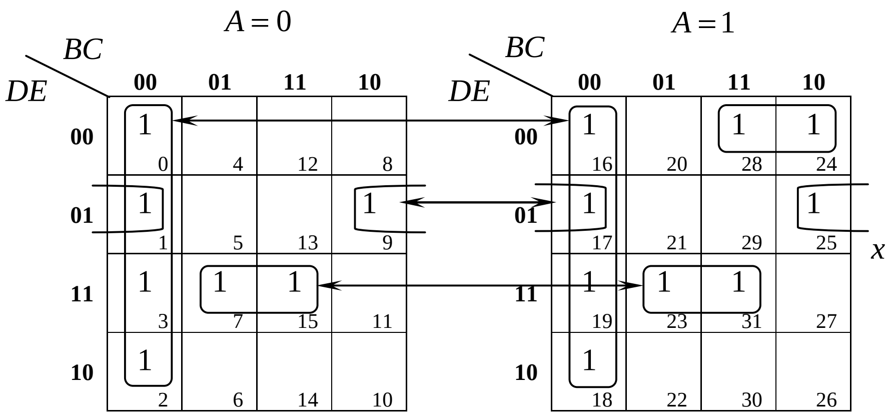
إضافة للتجاورات ما بين الخلايا المألوفة لدينا في مخطط كارنو لأربعة متغيرات تظهر تجاورات جديدة في مخطط كارنو لخمسة متغيرات، حيث أن كل خلية في المخطط الأول ($A=0$) تجاور الخلية المماثلة لها في الموقع في المخطط الثاني ($A=1$)، مثلاً الخلية 0 تجاور الخلية 16، و الخلية 5 تجاور الخلية 21، و الخلية 10 تجاور الخلية 26. و يمكن تصور هذه التجاورات الجديدة بوضع المخططين فوق بعضهما البعض، فكل خلية في المخطط الأول تجاور التي تعلوها في المخطط الثاني.

مثال:

استخدم مخططات كارنو في تبسيط التعبير المنطقي

$$x=f(A,B,C,D)=\sum m\,(0,1,2,3,7,9,15,16,17,18,19,23,24,25,28,31)$$

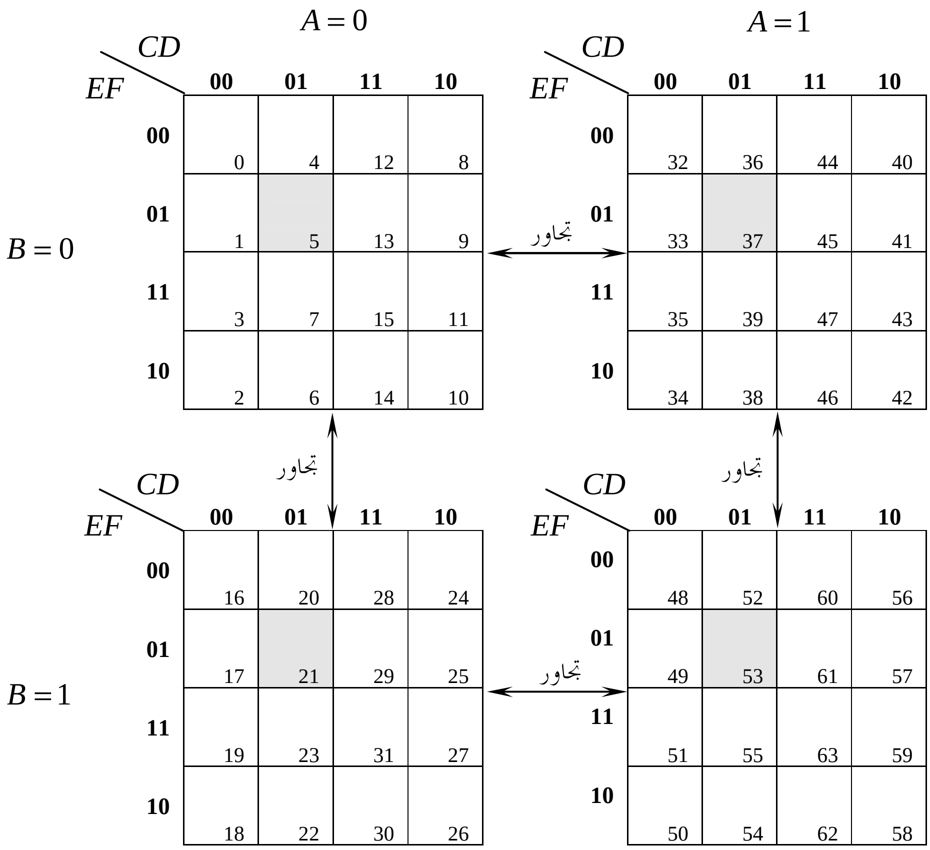
الحل:



$$x=\overline{B}\,\overline{C}+CDE+\overline{C}\,\overline{D}E+AB\overline{D}\,\overline{E}$$

ستة متغيرات:

يتكون المخطط من 64 خلية يتم تقسيمها إلى أربعة مخططات كارنو لأربعة متغيرات، يمثل كل مخطط من الأربعة أحد أرباع جدول الصواب



لاحظ أن كل خلية تجاور الخلية المماثلة لها في الموقع في المخطط المجاور أفقياً و رأسياً. مثلاً الخلية 5 تجاور كلاً من الخلية 21 و الخلية 37، و الخلية 21 تجاور كلاً من الخلية 5 و الخلية 53، و الخلية 37 تجاور الخلية 5 و الخلية 53، و الخلايا الأربع تكون مع بعضها البعض مجموعة رباعية. و من الواضح صعوبة تكوين المجموعات في مخطط كارنو لستة متغيرات.

سبعة متغيرات فما فوق

عادة لا يتم استخدام مخططات كارنو في حالة سبعة متغيرات فما فوق، و إنما يتم في مثل هذه الحالات استخدام إحدىطرق الجدولة (Tabular Methods) التي أشرنا إليها من قبل، و الاستعانة بالحاسوب. و من الناحية العملية عادة ما يتم تجنب تصميم دوائر منطقية بعدد كبير من متغيرات الدخل، حيث يتم تقسيم مثل هذه الدوائر إلى عدد من الوحدات الصغيرة، كل وحدة منها بعدد محدود من متغيرات الدخل، ثم يتم بعد ذلك ربط هذه الوحدات الصغيرة معاً لأداء وظيفة الدائرة الكبيرة.

مخططات كارنو للتعبيرات المنطقية في صورة مضروب الحدود الكبرى

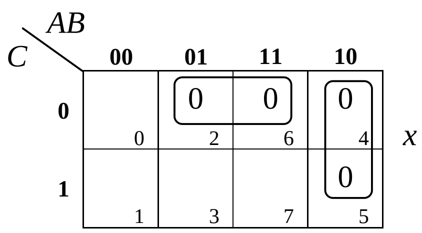
هنا يتم وضع 0's في الخلايا المقابلة للحدود الكبرى و تُترك بقية الخلايا فارغة، ثم يتم تكوين مجموعات من الـــ 0's بنفس الأسلوب المتبع من قبل في تكوين مجموعات من الـــ 1's، و أخيراً يتم كتابة التعبير المختصر في صورة مضروب الحدود الكبرى. فلكتابة الحد المختصر المقابل لمجموعة معينة ننظر إلى قيم المتغيرات داخل المجموعة، فأي متغير تتغير قيمته داخل المجموعة يتم إختصاره، أما المتغير الثابت داخل المجموعة فيؤخذ معكوساً إذا كان ثابتاً في 1، و يؤخذ بدون عكس إذا كان ثابتاً في 0، ثم يتم ربط المتغيرات معاً في الحد بعمليات OR. بعد كتابة الحد المختصر المقابل لكل مجموعة يتم ربط تلك الحدود معاً بعمليات AND.

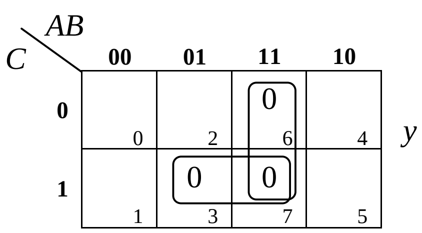
مثال:

استخدم مخططات كارنو في تبسيط التعبيرين المنطقيين

$$x = f(A,B,C) = \prod M(2,4,5,6)$$
$$y = f(A,B,C) = \prod M(3,6,7)$$

الحل:





$$x = (\overline{B} + C)(\overline{A} + B)$$
$$y = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{B} + \overline{C})$$

مثال:

استخدم مخططات كارنو في تبسيط التعبير المنطقي

$$x = f(A,B,C,D) = \prod M(0,1,4,5,11,15)$$

الحل:

x

CD \ AB	00	01	11	10
00	0 (0)	0 (4)	(12)	(8)
01	0 (1)	0 (5)	(13)	(9)
11	(3)	(7)	0 (15)	0 (11)
10	(2)	(6)	(14)	(10)

$$x = (A + C)(\overline{A} + \overline{C} + \overline{D})$$

مثال:

استخدم مخططات كارنو في تبسيط التعبير المنطقي

$$x = f(A,B,C,D) = \prod M(0,1,3,6,9,11,12,13,15)$$

الحل:

x

CD \ AB	00	01	11	10
00	0 (0)	(4)	0 (12)	(8)
01	0 (1)	(5)	0 (13)	0 (9)
11	0 (3)	(7)	0 (15)	0 (11)
10	(2)	0 (6)	(14)	(10)

$$x = (A + \overline{B} + \overline{C} + D)(A + B + C)(\overline{A} + \overline{B} + C)(\overline{A} + \overline{D})(B + \overline{D})$$

مخططات كارنو للتعبيرات المنطقية في صورتي AND-OR-Invert و OR-AND-Invert

بالنسبة لهاتين الصورتين يتم رسم مخطط كارنو و كتابة التعبير المختصر لمعكوس متغير الخرج. حيث أن التعبير المنطقي لمعكوس متغير الخرج في صورة AND-OR-Invert هو عبارة عن تعبير في صورة مجموع الحدود الصغرى، و التعبير المنطقي لمعكوس متغير الخرج في صورة OR-AND-Invert هو عبارة عن تعبير في صورة مضروب الحدود الكبرى. و بعد كتابة التعبير المختصر يتم عكسه بالكامل.

مثال:

من جدول الصواب التالي استخدم مخططات كارنو لكتابة التعبير المختصر لكل من متغيري الخرج x و y في صورة:

(أ) AND-OR-Invert

(ب) OR-AND-Invert

#	A	B	C	x	y
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1
2	0	1	0	0	1
3	0	1	1	1	0
4	1	0	0	0	1
5	1	0	1	0	1
6	1	1	0	0	0
7	1	1	1	1	0

الحل:

(أ) صورة AND-OR-Invert

$$\overline{x} = f(A,B,C) = \sum m\,(2,4,5,6)$$
$$\overline{y} = f(A,B,C) = \sum m\,(3,6,7)$$

$\overline{x}$

$C \backslash AB$	00	01	11	10
0	 0	1 2	1 6	1 4
1	 1	 3	 7	1 5

$\overline{y}$

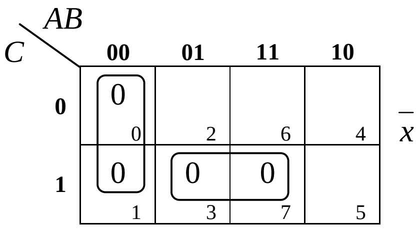
$C \backslash AB$	00	01	11	10
0	 0	 2	1 6	 4
1	 1	1 3	1 7	 5

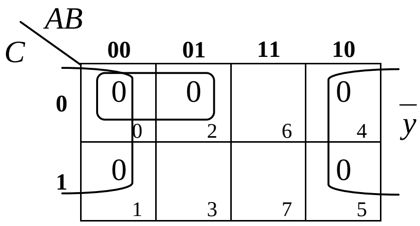
$$\bar{x} = B\bar{C} + A\bar{B}$$
$$x = \overline{B\bar{C} + A\bar{B}}$$

$$\bar{y} = AB + BC$$
$$y = \overline{AB + BC}$$

(ب) صورة OR-AND-Invert

$$\bar{x} = f(A,B,C) = \prod M(0,1,3,7)$$
$$\bar{y} = f(A,B,C) = \prod M(0,1,2,4,5)$$





$$\bar{x} = (A+B)(\bar{B}+\bar{C})$$
$$x = \overline{(A+B)(\bar{B}+\bar{C})}$$

$$\bar{y} = B(A+C)$$
$$y = \overline{B(A+C)}$$

الدوال غير المحددة بالكامل (Incompletely Specified Functions)

في بعض الدوائر المنطقية تكون قيم الخرج المقابلة لبعض احتمالات الدخل غير محددة، أي غير معلوم ما إذا كانت مساوية 1 أو 0، و تسمى بـــ **القيم غير المحددة (Don't Cares)**، ويرمز لها في جدول الصواب و في مخططات كارنو بالرمز **×**. و السبب في عدم تحديد قيم الخرج تلك يرجع لأحد سببين:

1. أن قيمها لا تؤثر في وظيفة الدائرة المنطقية، أي أن الدائرة تؤدي الوظيفة المطلوبة منها سواء كانت أي من تلك القيم مساوية 1 أو مساوية 0.
2. أن احتمالات الدخل المقابلة لها في جدول الصواب غير واردة، أي لا يمكن ظهور أي من هذه الاحتمالات في دخل الدائرة المنطقية.

و في ما يلي نوضح طريقة ظهور القيم غير المحددة في جداول الصواب، و في مخططات كارنو، و في التعبيرات المنطقية المكتوبة في صورة مجموع الحدود الصغرى و في صورة مضروب الحدود الكبرى

#	A	B	C	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	×
6	1	1	0	0
7	1	1	1	×

$$y = f(A,B,C) = \sum m\,(1,2,4) + \sum d\,(5,7)$$
$$y = f(A,B,C) = \prod M(0,3,6) \cdot \prod d\,(5,7)$$

$C \backslash AB$	**00**	**01**	**11**	**10**	
0	$_{0}$	$1\ _{2}$	$_{6}$	$1\ _{4}$	y
1	$1\ _{1}$	$_{3}$	$\times\ _{7}$	$\times\ _{5}$	

$C \backslash AB$	**00**	**01**	**11**	**10**	
0	$0\ _{0}$	$_{2}$	$0\ _{6}$	$_{4}$	y
1	$_{1}$	$0\ _{3}$	$\times\ _{7}$	$\times\ _{5}$	

عند تبسيط التعبيرات المنطقية باستخدام مخططات كارنو يتم إدخال القيم غير المحددة (×'s) في المجموعات بهدف تكوين مجموعات أكبر، و أي قيمة غير محددة لا تخدم هذا الغرض يتم تجاهلها. مع ملاحظة تجنب الوقوع في خطأ تكوين مجموعات مكونة بالكامل من القيم غير المحددة (×'s).

مثال:

من جدول الصواب التالي قم بكتابة التعبير المنطقي لمتغير الخرج y في صورة:

(أ) مجموع الحدود الصغرى

(ب) مضروب الحدود الكبرى

ثم قم بتبسيط كل من التعبيرين الناتجين باستخدام مخططات كارنو.

#	B_3	B_2	B_1	B_0	y
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	×
11	1	0	1	1	×
12	1	1	0	0	×
13	1	1	0	1	×
14	1	1	1	0	×
15	1	1	1	1	×

الحل:

(أ) صورة مجموع الحدود الصغرى

$$y = f(B_3, B_2, B_1, B_0) = \sum m\ (1,2,5,6,9) + \sum d\ (10,11,12,13,14,15)$$

$B_1B_0 \backslash B_3B_2$	**00**	**01**	**11**	**10**
00	 0	 4	× 12	 8
01	1 1	1 5	× 13	1 9
11	 3	 7	× 15	× 11
10	1 2	1 6	× 14	× 10

y

$$y = \overline{B_1}B_0 + B_1\overline{B_0}$$

(ب) صورة مضروب الحدود الكبرى

$$y = f(B_3, B_2, B_1, B_0) = \prod M(0,3,4,7,8) \cdot \prod d\ (10,11,12,13,14,15)$$

$B_1B_0 \backslash B_3B_2$	**00**	**01**	**11**	**10**
00	0 0	0 4	× 12	0 8
01	 1	 5	× 13	 9
11	0 3	0 7	× 15	× 11
10	 2	 6	× 14	× 10

y

$$y = (B_1 + B_0)(\overline{B_1} + \overline{B_0})$$

تدريب 5:

استخدم مخططات كارنو في تبسيط التعبيرات المنطقية التي قمت بكتابتها في **تدريب** 1.

تدريب 6:

استخدم مخططات كارنو في تبسيط التعبيرات المنطقية التي قمت بكتابتها في **تدريب** 2.

تدريب 7:

استخدم مخططات كارنو في تبسيط كل من التعبيرات المنطقية التالية:

$$x = f(A_3, A_2, A_1, A_0) = \sum m\,(0,1,2,3,4,5,8,10,12)$$
$$y = f(L_3, L_2, L_1, L_0) = \sum m\,(1,3,4,5,6,7,8,9,11,13,14,15)$$
$$z = f(D, C, B, A) = \sum m\,(0,1,7,8,9,10,15)$$

تدريب 8:

استخدم مخططات كارنو في تبسيط كل من التعبيرات المنطقية التالية:

$$x = f(A_3, A_2, A_1, A_0) = \prod M\,(6,7,9,11,13,14,15)$$
$$y = f(L_3, L_2, L_1, L_0) = \prod M\,(0,2,10,12)$$
$$z = f(D, C, B, A) = \prod M\,(2,3,4,5,6,11,12,13,14)$$

تدريب 9:

استخدم مخططات كارنو في تبسيط التعبير المنطقي

$$y = f(B_4, B_3, B_2, B_1, B_0) = \prod M\,(3,4,5,7,12,13,18,19,20,21,22,23,26,28,29,30)$$

تدريب 10:

استخدم مخططات كارنو في تبسيط كل من التعبيرين المنطقيين التاليين:

$$x = f(A_3, A_2, A_1, A_0) = \sum m\,(0,7,13,15) + \sum d\,(2,6,8,9,10,11,14)$$
$$y = f(B_3, B_2, B_1, B_0) = \prod M\,(1,3,4,5,12) \cdot \prod d\,(2,6,8,9,10,11,14)$$

4- بناء الدوائر المنطقية

بعد تبسيط التعبيرات المنطقية تأتي الخطوة الأخيرة في عملية تصميم الدوائر المنطقية ألا و هي بناء الدائرة المنطقية. و البناء هنا إما أن يتم باستخدام البوابات الأساسية الثلاث (AND و OR و NOT)، و إما أن يتم باستخدام نوع واحد فقط من البوابات (إما NAND أو NOR).

4-1 البناء باستخدام البوابات الأساسية الثلاث

كما ذكرنا من قبل فإن شكل الدائرة المنطقية يعتمد على الصورة التي كُتبت بها التعبيرات المنطقية. فالتعبيرات المكتوبة في صورة مجموع الحدود الصغرى ينتج عنها دائرة في شكل AND-OR Structure، أما التعبيرات المكتوبة في صورة مضروب الحدود الكبرى فينتج عنها دائرة في شكل OR-AND Structure.

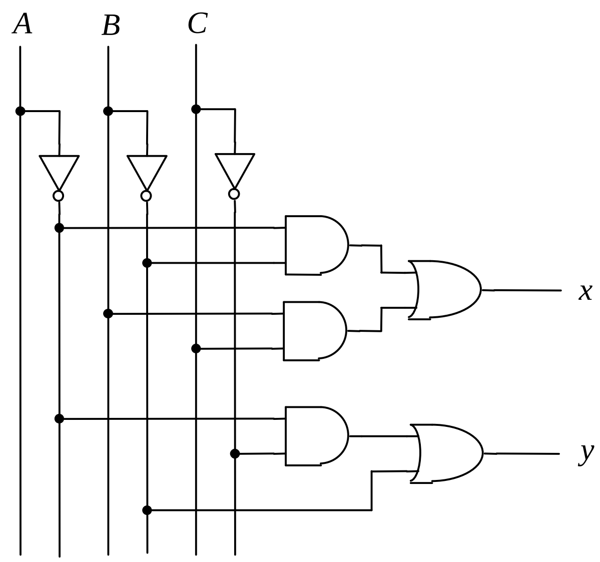
مثال:

استخدم البوابات الأساسية الثلاث (AND و OR و NOT) في بناء الدائرة المنطقية الممثلة بالتعبيرين المختصرين التاليين المكتوبين في صورة مجموع الحدود الصغرى

$$x = \overline{A}\overline{B} + BC$$

$$y = \overline{B} + \overline{A}\overline{C}$$

الحل:

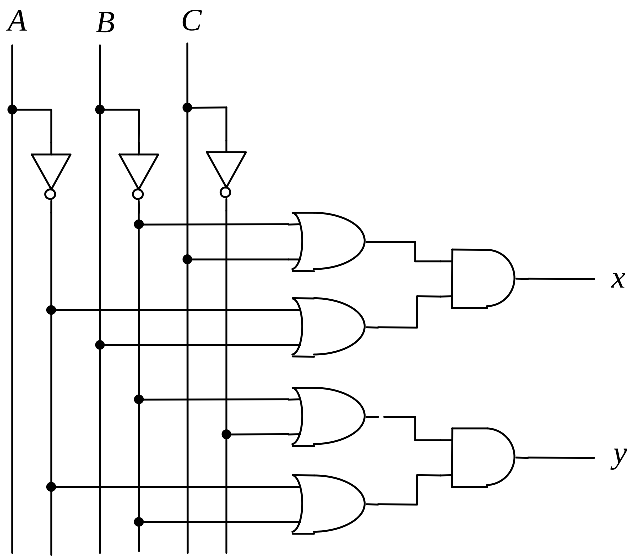


مثال:

استخدم البوابات الأساسية الثلاث (AND و OR و NOT) في بناء الدائرة المنطقية الممثلة بالتعبيرين المختصرين التاليين المكتوبين في صورة مضروب الحدود الكبرى

$$x = (\overline{B} + C)(\overline{A} + B)$$
$$y = (\overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B})$$

الحل:



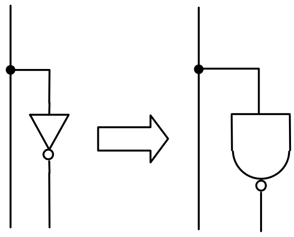
2-4 البناء باستخدام نوع واحد فقط من البوابات

عندما يتم تصنيع الدائرة المنطقية في شكل دائرة متكاملة (Integrated Circuit) أو IC فإنه عادة ما يتم بناء الدائرة المنطقية بالكامل باستخدام نوع واحد فقط من البوابات. و البوابات المستخدمة هنا إما أن تكون بوابات NAND أو بوابات NOR.

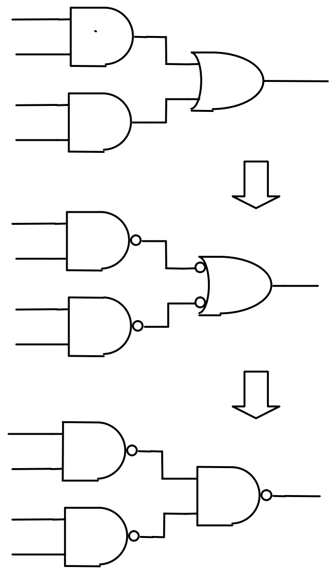
البناء باستخدام بوابات NAND

يجب أن تكون التعبيرات المنطقية مكتوبة في صورة مجموع الحدود الصغرى للحصول على AND-OR Structure، ثم يتم بعد ذلك تحويل الـــ AND-OR Structure إلى دائرة مبنية بالكامل من بوابات NAND كالتالي:

- يتم استبدال كل عاكس منطقي ببوابة NAND ذات طرف دخل واحد

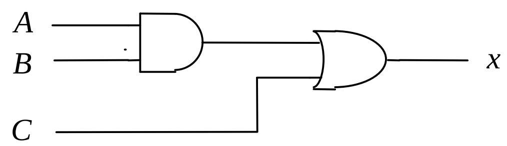


- يتم تحويل بوابات AND مع بوابات OR إلى بوابات NAND كالتالي

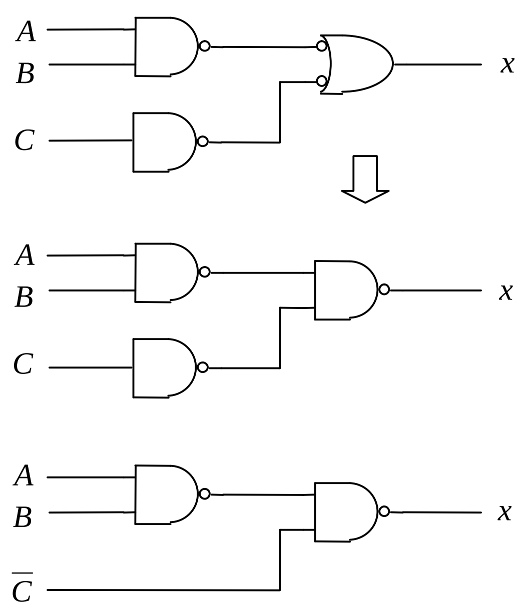


حيث نقوم بإجراء عملية عكس منطقي مرتين متتاليتين، مرة في خرج بوابة AND و مرة أخرى في دخل بوابة OR، و العكس المنطقي مرتين متتاليتين، كما نعلم، لا يغير من قيمة المتغير لأن $\overline{\overline{A}} = A$. ثم نستبدل بوابة OR التي تم عكس جميع أطراف الدخل لها ببوابة NAND، لأن عملية OR مسبوقة بعكس الدخل تكافئ عملية NAND، أي أن $\overline{A}+\overline{B} = \overline{A \cdot B}$. أي أنه لتحويل الـ AND-OR Structure إلى دائرة مبنية بالكامل من بوابات NAND فإننا نقوم باستبدال جميع العواكس المنطقية ببوابات NAND، و استبدال جميع بوابات AND ببوابات NAND، و استبدال جميع بوابات OR ببوابات NAND، أي نقوم ببساطة باستبدال أي بوابة بالـ AND-OR Structure ببوابة NAND لها نفس عدد أطراف الدخل.

و هناك مشكلة صغيرة قد تواجهنا عند تحويل الـ AND-OR Structure إلى دائرة مبنية بالكامل من بوابات NAND، و تتضح هذه المشكلة في الدائرة التالية:



نلاحظ هنا أن المتغير C يدخل مباشرة إلى بوابة OR دون أن يكون خارجاً من بوابة AND. و لتحويل الدائرة إلى دائرة مبنية بالكامل من بوابات NAND نحتاج، كما نعلم، لإجراء عملية عكس منطقي في كل طرف من أطراف الدخل لبوابة OR حتى نقوم بتحويلها إلى بوابة NAND، و نقوم بإلغاء تأثير هذا العكس المنطقي بإجراء عكس منطقي آخر في خرج بوابة AND. المشكلة هنا هي عدم وجود بوابة AND لإجراء عملية عكس منطقي في خرجها لمعادلة العكس المنطقي الذي تم في دخل بوابة OR. يتم حل هذه المشكلة كالتالي:



قمنا هنا بإضافة بوابة NAND ذات طرف دخل واحد لتقوم بإجراء عملية عكس منطقي تعادل عملية العكس المنطقي التي تمت في دخل بوابة OR. و يمكن الاستغناء عن بوابة NAND ذات طرف الدخل الواحد هذه إذا توفر معكوس المتغير الذي يدخل مباشرة إلى بوابة OR، حيث نقوم بإدخال هذا المعكوس ماشرة إلى بوابة NAND التي حلت محل بوابة OR.

مثال:

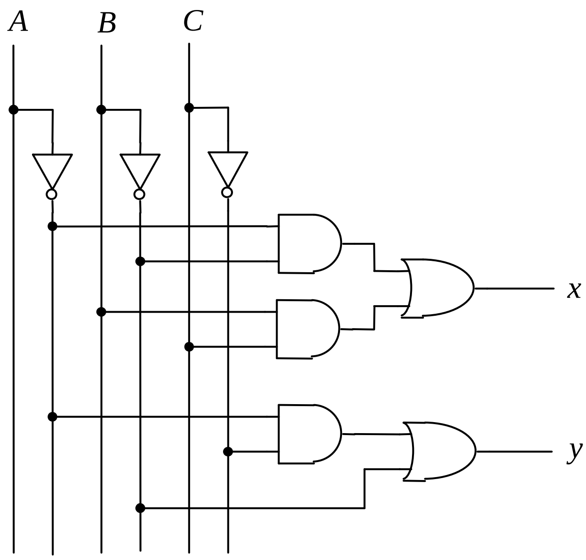
قم ببناء الدائرة المنطقية الممثلة بالتعبيرين المنطقيين المختصرين التاليين باستخدام بوابات NAND فقط

$$x = \overline{A}\,\overline{B} + BC$$

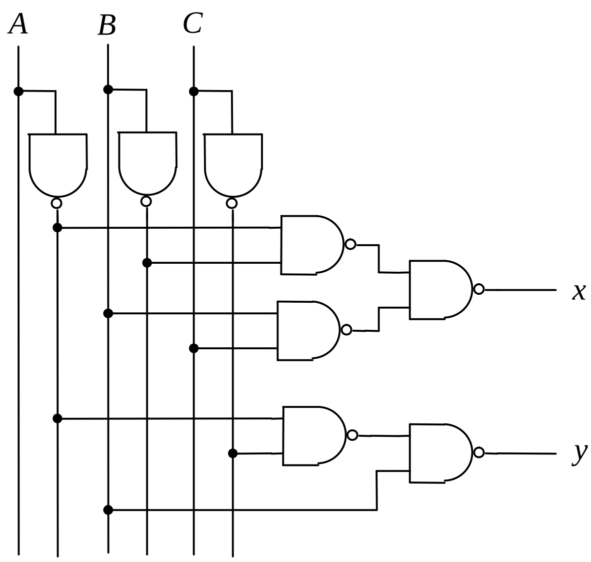
$$y = \overline{B} + \overline{A}\,\overline{C}$$

الحل:

نقوم أولاً ببناء الدائرة باستخدام البوابات الأساسية الثلاث (AND و OR و NOT)



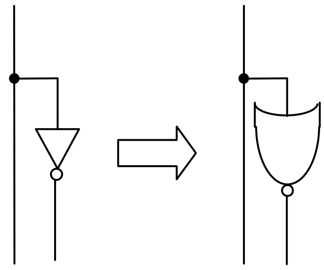
ثم نقوم باستبدال جميع البوابات بالدائرة ببوابات NAND بنفس عدد أطراف الدخل، مع مراعاة عكس المتغير الذي يدخل مباشرة إلى بوابة OR



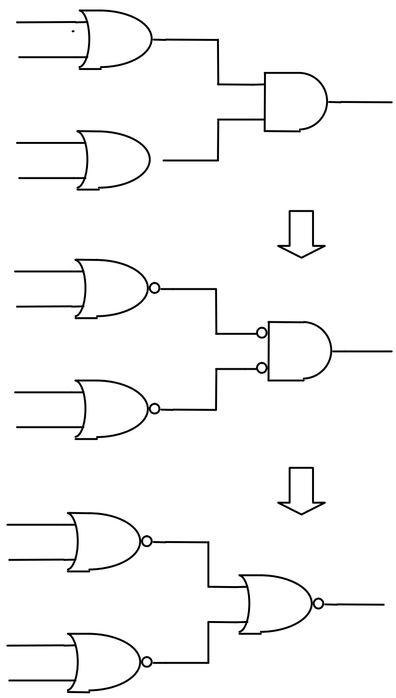
البناء باستخدام بوابات NOR

يجب أن تكون التعبيرات المنطقية مكتوبة في صورة مضروب الحدود الكبرى للحصول على OR-AND Structure، ثم يتم بعد ذلك تحويل الـــ OR-AND Structure إلى دائرة مبنية بالكامل من بوابات NOR كالتالي:

- يتم استبدال كل عاكس منطقي ببوابة NOR ذات طرف دخل واحد



- يتم تحويل بوابات OR مع بوابات AND إلى بوابات NOR كالتالي



حيث نقوم بإجراء عملية عكس منطقي مرتين متتاليتين، مرة في خرج بوابة OR و مرة أخرى في دخل بوابة AND، ثم نستبدل بوابة AND التي تم عكس جميع أطراف الدخل لها ببوابة NOR، لأن عملية AND مسبوقة بعكس الدخل تكافيء عملية NOR، أي أن $\overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{A+B}$. أي أنه لتحويل الـــ OR-AND Structure إلى دائرة مبنية بالكامل من بوابات NOR فإننا نقوم ببساطة باستبدال أي بوابة ببوابة NOR لها نفس عدد أطراف الدخل. وفي حالة دخول متغير مباشرة إلى بوابة AND نقوم بإدخال معكوس ذلك المتغير إلى بوابة NOR التي حلت محل بوابة AND.

مثال:

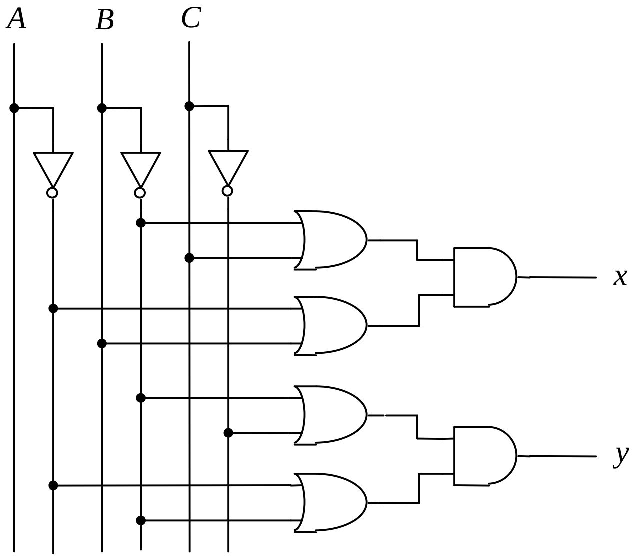
قم ببناء الدائرة المنطقية الممثلة بالتعبيرين المنطقيين المختصرين التاليين باستخدام بوابات NOR فقط

$$x = (\overline{B}+C)(\overline{A}+B)$$

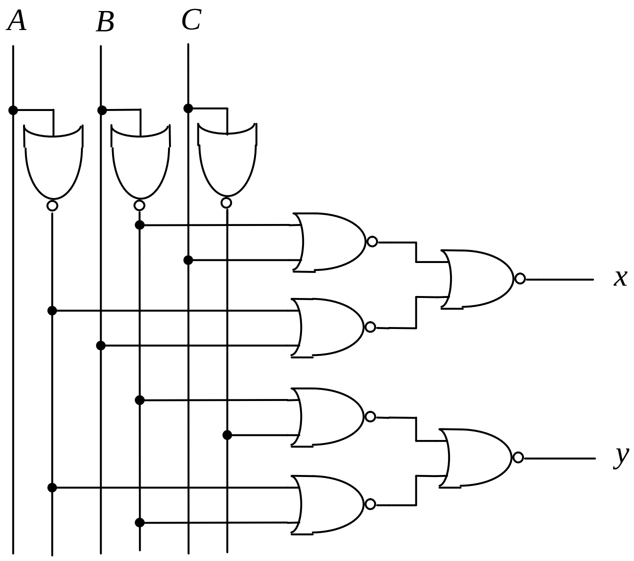
$$y = (\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B})$$

الحل:

نقوم أولاً ببناء الدائرة باستخدام البوابات الأساسية الثلاث (AND و OR و NOT)



ثم نقوم باستبدال جميع البوابات بالدائرة ببوابات NOR



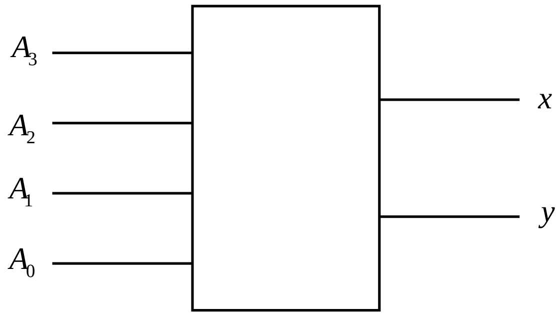
تدريب 11:

صمم الدائرة المنطقية الموضح المخطط المنطقي و جدول الصواب لها أدناه، ثم قم ببناء الدائرة باستخدام:

(أ) بوابات NAND فقط

(ب) بوابات NOR فقط

#	A_3	A_2	A_1	A_0	x	y
0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1
2	0	0	1	0	×	×
3	0	0	1	1	0	1
4	0	1	0	0	0	1
5	0	1	0	1	0	0
6	0	1	1	0	×	×
7	0	1	1	1	1	0
8	1	0	0	0	×	×
9	1	0	0	1	×	×
10	1	0	1	0	×	×
11	1	0	1	1	×	×
12	1	1	0	0	0	1
13	1	1	0	1	1	0
14	1	1	1	0	×	×
15	1	1	1	1	1	0



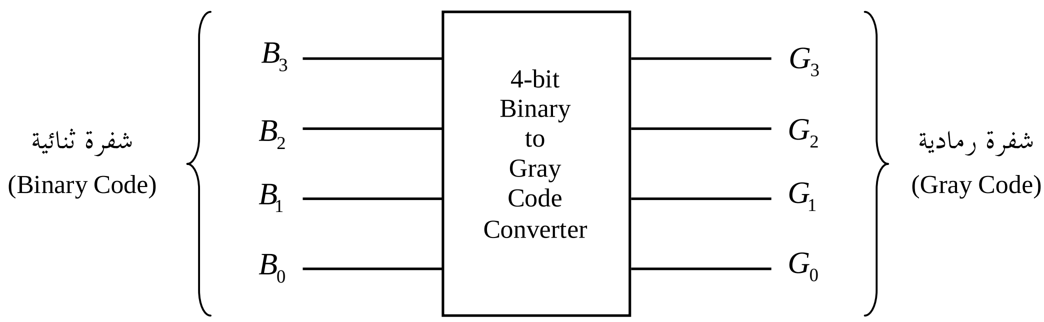
5- أمثلة على تصميم الدوائر المنطقية

سنقوم في هذا الجزء بالتدرب على عملية تصميم الدوائر المنطقية و ذلك بتصميم دوائر منطقية تؤدي وظائف مفيدة.

مثال (1): 4-bit Binary-to-Gray Code Converter

صمم دائرة منطقية تقوم بتحويل شفرة ثنائية مكونة من 4 خانات إلى الشفرة الرمادية، ثم قم ببناء الدائرة باستخدام بوابات NAND فقط.

الحل:



المخطط المنطقي

#	B_3	B_2	B_1	B_0	G_3	G_2	G_1	G_0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1
2	0	0	1	0	0	0	1	1
3	0	0	1	1	0	0	1	0
4	0	1	0	0	0	1	1	0
5	0	1	0	1	0	1	1	1
6	0	1	1	0	0	1	0	1
7	0	1	1	1	0	1	0	0
8	1	0	0	0	1	1	0	0
9	1	0	0	1	1	1	0	1
10	1	0	1	0	1	1	1	1
11	1	0	1	1	1	1	1	0
12	1	1	0	0	1	0	1	0
13	1	1	0	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1	0	0	1
15	1	1	1	1	1	0	0	0

جدول الصواب

التعبيرات المنطقية:

يجب أن تكون التعبيرات المنطقية في صورة مجموع الحدود الصغرى لأن المطلوب بناء الدائرة باستخدام بوابات NAND فقط

$$G_0 = f(B_3, B_2, B_1, B_0) = \sum m\,(1,2,5,6,9,10,13,14)$$
$$G_1 = f(B_3, B_2, B_1, B_0) = \sum m\,(2,3,4,5,10,11,12,13)$$
$$G_2 = f(B_3, B_2, B_1, B_0) = \sum m\,(4,5,6,7,8,9,10,11)$$
$$G_3 = f(B_3, B_2, B_1, B_0) = \sum m\,(8,9,10,11,12,13,14,15)$$

مخططات كارنو:

G_1

B_1B_0 \ B_3B_2	00	01	11	10
00	0	1 4	1 12	8
01	1	1 5	1 13	9
11	1 3	7	15	1 11
10	1 2	6	14	1 10

G_0

B_1B_0 \ B_3B_2	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1 1	1 5	1 13	1 9
11	3	7	15	11
10	1 2	1 6	1 14	1 10

G_3

B_1B_0 \ B_3B_2	00	01	11	10
00	0	4	1 12	1 8
01	1	5	1 13	1 9
11	3	7	1 15	1 11
10	2	6	1 14	1 10

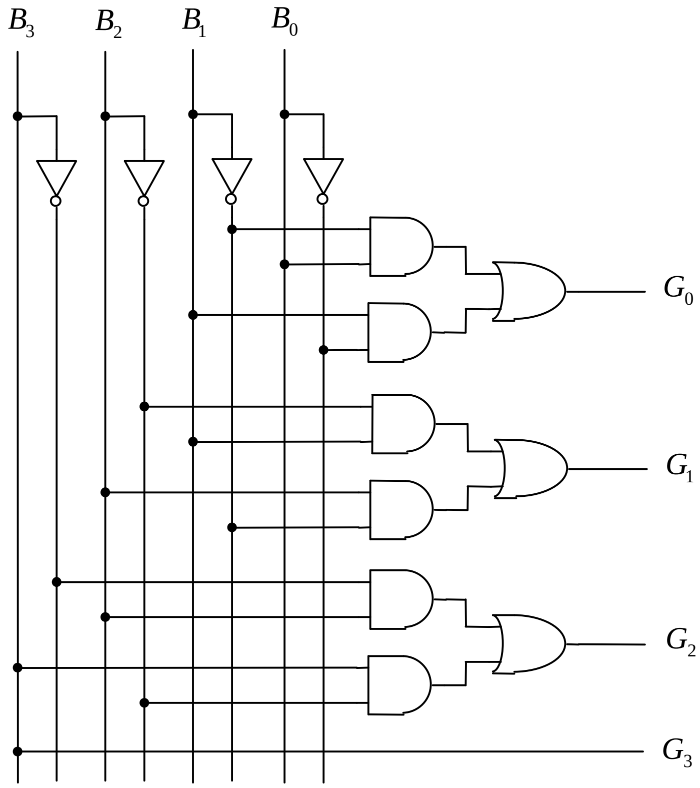
G_2

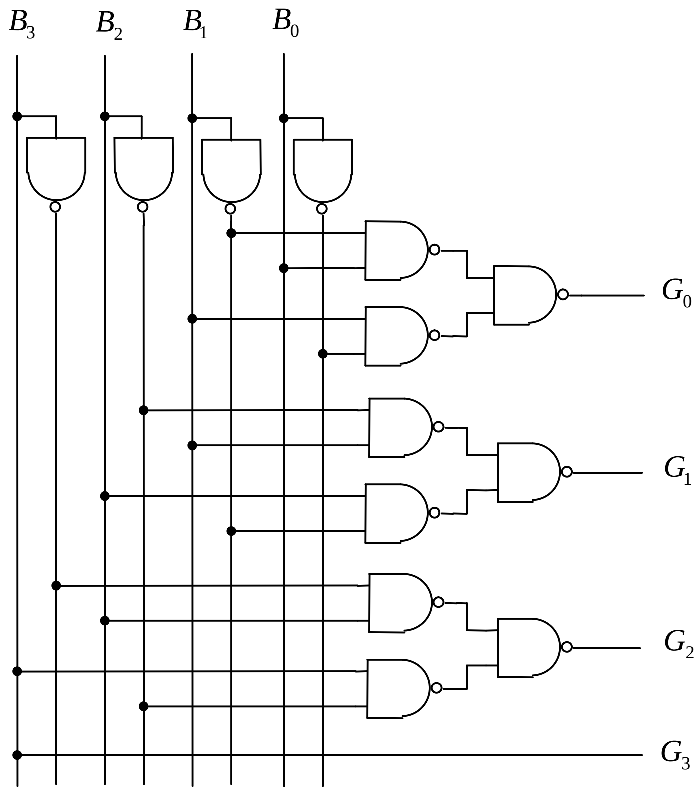
B_1B_0 \ B_3B_2	00	01	11	10
00	0	1 4	12	1 8
01	1	1 5	13	1 9
11	3	1 7	15	1 11
10	2	1 6	14	1 10

التعبيرات المنطقية المختصرة:

$$G_0 = \overline{B_1}B_0 + B_1\overline{B_0}$$
$$G_1 = \overline{B_2}B_1 + B_2\overline{B_1}$$
$$G_2 = \overline{B_3}B_2 + B_3\overline{B_2}$$
$$G_3 = B_3$$

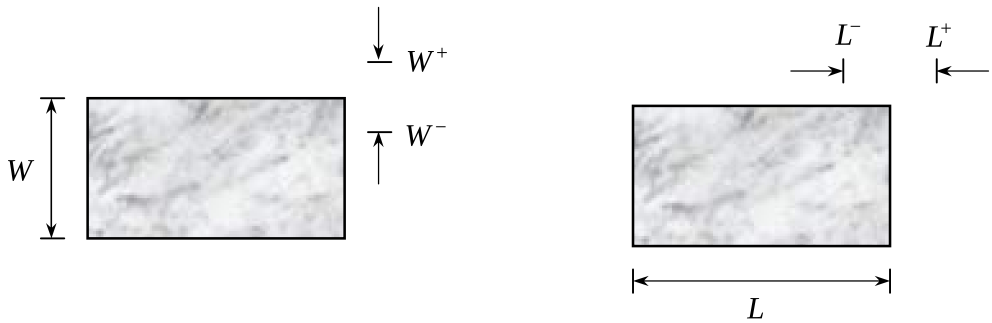
الدائرة المنطقية:





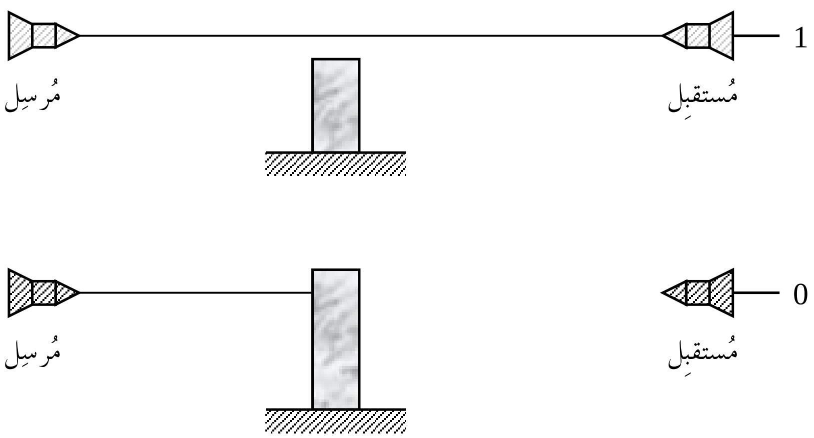
مثال (2): دائرة فحص الأبعاد (Dimensions Checker)

في عملية صناعية معينة يتم تقطيع المادة الخام إلى قطع مستطيلة الشكل طولها L و عرضها W. و حيث أنه من غير الممكن عملياً أن يتم قياس أبعاد القطعة بدقة كاملة فإنه من المقبول أن يكون هناك خطأ في القياس في حدود معينة. فيكون الطول L مقبولاً إذا لم يقل عن الحد الأدنى L^- و لم يتجاوز الحد الأقصى L^+، و يكون العرض W مقبولاً إذا لم يقل عن الحد الأدنى W^- و لم يتجاوز الحد الأقصى W^+، كما هو موضح بالشكل التالي



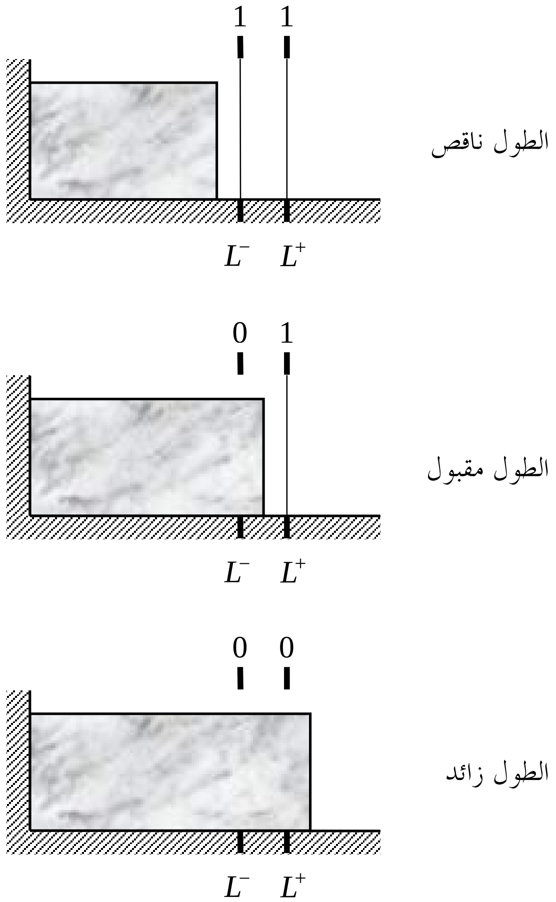
إذا كان الخطأ في القياس بالنقصان، إي إذا كان الطول L أقل من الحد الأدنى L^-، أو إذا كان العرض W أقل من الحد الأدنى W^-، فإن مثل هذا الخطأ غير قابل للإصلاح و تعتبرالقطعة تالفة. أما إذا كان الخطأ في القياس بالزيادة، أي إذا تجاوز الطول L الحد الأقصى L^+، أو إذا تجاوز العرض W الحد الأقصى W^+، فإن مثل هذا الخطأ يمكن إصلاحه بإعادة عملية القطع و إزالة الجزء الزائد.

يمكن التأكد من أن أبعاد القطعة ضمن الحدود المطلوبة باستخدام مجسات (Sensors). و أبسط نوع من المجسات يمكن أن يستخدم هنا هو مجس ليزر (Laser Sensor) يتكون من جزئين، جزء مُرسِل يقوم بتوليد شعاع من الليزر، و جزء آخر مُستقبِل يقوم باستقبال الشعاع و توليد إشارة كهربائية تدل على سقوط شعاع الليزر عليه. و عند قيام أي جسم باعتراض طريق شعاع الليزر فإنه يقوم بحجبه عن المُستقبِل و تغيب بالتالي الإشارة الكهربائية التي يقوم بتوليدها المُستقبِل و الدالة على سقوط شعاع الليزر عليه، كما هو موضح بالشكل التالي



و قد اعتبرنا أن وجود الإشارة الكهربائية التي يولدها المُستقبِل يمثل القيمة المنطقية 1، و غياب تلك الإشارة يمثل القيمة المنطقية **0**. أي أن المجس يعطي القيمة المنطقية 1 عندما لا يكون شعاع الليزر محجوباً، و يعطي القيمة المنطقية 0 عندما يكون الشعاع محجوباً.

و لمعرفة ما إذا كان الطول L ضمن الحدود المطلوبة نحتاج لاستخدام مجسين، مجس يوضع عند الطول الأدنى L^-، و مجس آخر يوضع عند الطول الأقصى L^+. و بملاحظة الإشارات التي يصدرها المجسين يمكن الحصول على المعلومة المطلوبة، كما هو موضح بالشكل التالي

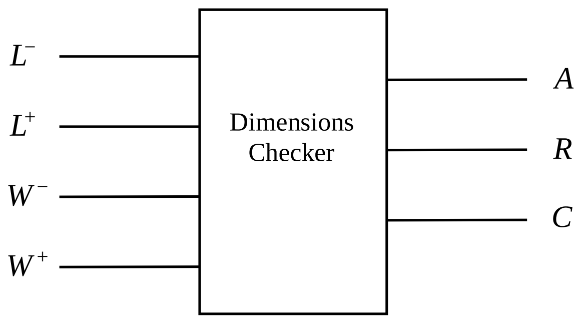


و بنفس الطريقة نحتاج لاستخدام مجسين للعرض W، يوضع أحدهما عند العرض الأدنى W^- و الآخر عند العرض الأقصى W^+.

المطلوب الآن هو تصميم دائرة فحص الأبعاد (Dimensions Checker)، و هي دائرة منطقية تستقبل الإشارات من المجسات الأربعة (L^- ،L^+ ،W^- ،W^+) و تقوم بتوليد خرج يوضح ما إذا كانت القطعة التي يتم فحصها مقبولة (**A**ccepted) أو مرفوضة (**R**ejected) أو قابلة للإصلاح بإعادة القطع (re**C**ut). أي أن للدائرة ثلاثة أطراف خرج هي A و R و C، فإذا كانت القطعة مقبولة فإن طرف الخرج A يكون مساوياً 1 في حين يكون الطرفان R و C مساويين 0، و إذا كانت القطعة مرفوضة فإن طرف الخرج R يكون مساوياً 1 في حين يكون الطرفان A و C مساويين 0، و إذا كانت القطعة قابلة للإصلاح بإعادة القطع فإن طرف الخرج C يكون مساوياً 1 في حين يكون الطرفين A و R مساويين 0.

الحل:

المخطط المنطقي و جدول الصواب:



#	W^+	W^-	L^+	L^-	A	R	C
0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	×	×	×
2	0	0	1	0	0	0	1
3	0	0	1	1	0	1	0
4	0	1	0	0	×	×	×
5	0	1	0	1	×	×	×
6	0	1	1	0	×	×	×
7	0	1	1	1	×	×	×
8	1	0	0	0	0	0	1
9	1	0	0	1	×	×	×
10	1	0	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0	1	0
12	1	1	0	0	0	1	0
13	1	1	0	1	×	×	×
14	1	1	1	0	0	1	0
15	1	1	1	1	0	1	0

التعبيرات المنطقية:

نختار صورة التعبيرات المنطقية حسب شكل الدائرة المطلوب، و بما أنه لم يتم تحديد شكل معين للدائرة هنا فلنا مطلق الحرية في اختيار صورة التعبيرات المنطقية، فنختار صورة مجموع الحدود الصغرى

$$A = \sum m\,(10) + \sum d\,(1,4,5,6,7,9,13)$$
$$R = \sum m\,(3,11,12,14,15) + \sum d\,(1,4,5,6,7,9,13)$$
$$C = \sum m\,(0,2,8) + \sum d\,(1,4,5,6,7,9,13)$$

مخططات كارنو:

A

L^+L^- \ W^+W^-	**00**	**01**	**11**	**10**
00	(0)	× (4)	(12)	(8)
01	× (1)	× (5)	× (13)	× (9)
11	(3)	× (7)	(15)	(11)
10	(2)	× (6)	(14)	1 (10)

R

L^+L^- \ W^+W^-	**00**	**01**	**11**	**10**
00	(0)	× (4)	1 (12)	(8)
01	× (1)	× (5)	× (13)	× (9)
11	1 (3)	× (7)	1 (15)	1 (11)
10	(2)	× (6)	1 (14)	(10)

C

W^+ \ W^+W^-	**00**	**01**	**11**	**10**
00	1 (0)	× (4)	(12)	1 (8)
01	× (1)	× (5)	× (13)	× (9)
11	(3)	× (7)	(15)	(11)
10	1 (2)	× (6)	(14)	(10)

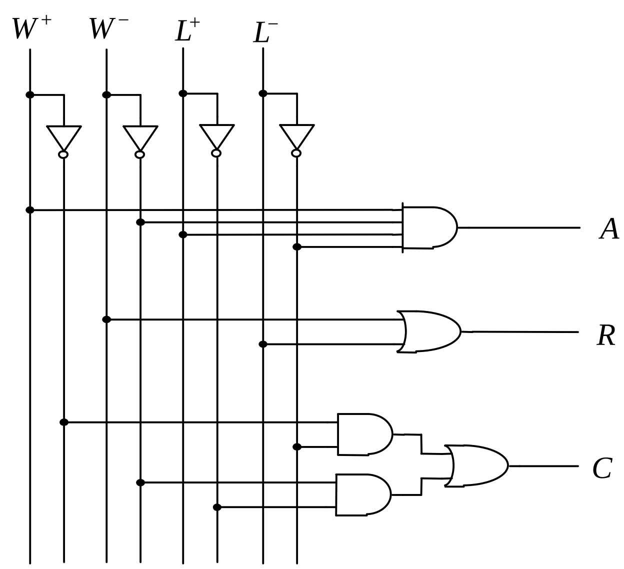
التعبيرات المنطقية المختصرة:

$$A = W^{+}\overline{W^{-}}L^{+}\overline{L^{-}}$$
$$R = W^{-} + L^{-}$$
$$C = \overline{L^{-}}\,\overline{W^{+}} + \overline{W^{-}}\,\overline{L^{+}}$$

لاحظ من التعبيرات المختصرة أن:

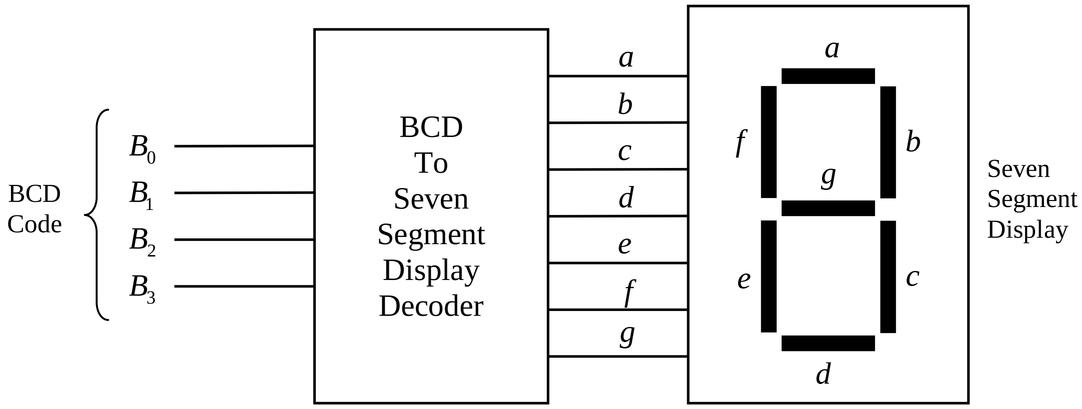
- قبول القطعة يتم في حالة واحدة فقط و هي أن يكون كلا مجسي الحد الأدنى غير معطيين لإشارة و كلا مجسي الحد الأقصى معطيين لإشارة، مما يعني أن الطول L و العرض W كليهما قد تجاوز الحد الأدنى و كليهما لم يتجاوز الحد الأقصى، أي أن كليهما ضمن الحدود المطلوبة.
- رفض القطعة يتم في إحدى حالتين و هما إما أن يكون مجس الحد الأدنى للعرض معطياً إشارة مما يعني أن العرض أقل من الحد الأدنى، أو أن يكون مجس الحد الأدنى للطول معطياً إشارة مما يعنى أن الطول أقل من الحد الأدنى.
- إعادة القطع تتم في إحدى حالتين أولاهما هي أن يكون مجس الحد الأدنى للطول غير معطياً لإشارة و مجس الحد الأعلى للعرض غير معطياً لإشارة أيضاً، مما يعني أن الطول قد تجاوز الحد الأدنى فهو إما مقبول أو زائد، و العرض قد تجاوز الحد الأعلى فهو زائد، و الحالة الثانية هي أن يكون مجس الحد الأدنى للعرض غير معطياً لإشارة و مجس الحد الأعلى للطول غير معطياً لإشارة أيضاً، مما يعني أن العرض قد تجاوز الحد الأدنى فهو إما مقبول أو زائد، و الطول قد تجاوز الحد الأعلى فهو زائد.

الدائرة المنطقية:



مثال (3): BCD to Seven Segment Display Decoder

صمم دائرة BCD to Seven Segment Display Decoder الموضح المخطط المنطقي لها أدناه



دخل الدائرة عبارة عن رقم من الأرقام 0-9 ممثل في صورة شفرة BCD، و خرجها عبارة عن الإشارات التي تتحكم في إضاءة القطع (Segments) السبعة لعرض الرقم المدخل على الـــ Seven Segment Display. أي قطعة من القطع السبعة عبارة عن ديود باعث للضوء (LED) يضيء عند وضع القيمة 1 في طرف الدخل الخاص به و لا يضيء عند وضع القيمة 0 في ذلك الطرف. فمثلاً لعرض الرقم 3 يجب أن نضع 1 في القطع a b c d و g و نضع 0 في القطع e و f، و لعرض الرقم 0 نضع 1 في جميع القطع عدا القطعة g، و لعرض الرقم 8 نضع 1 في جميع القطع السبعة، ... و هكذا.

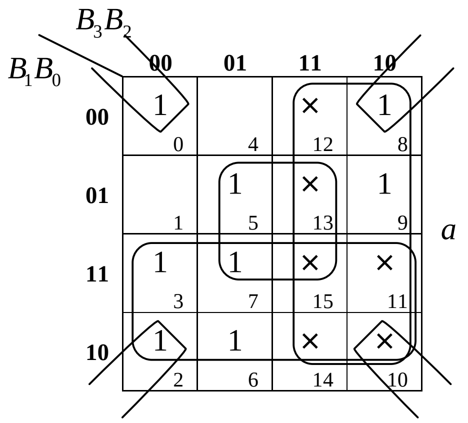
#	B_3	B_2	B_1	B_0	a	b	c	d	e	f	g
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
3	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
4	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
5	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
7	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
8	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
9	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
10	1	0	1	0	×	×	×	×	×	×	×
11	1	0	1	1	×	×	×	×	×	×	×
12	1	1	0	0	×	×	×	×	×	×	×
13	1	1	0	1	×	×	×	×	×	×	×
14	1	1	1	0	×	×	×	×	×	×	×
15	1	1	1	1	×	×	×	×	×	×	×

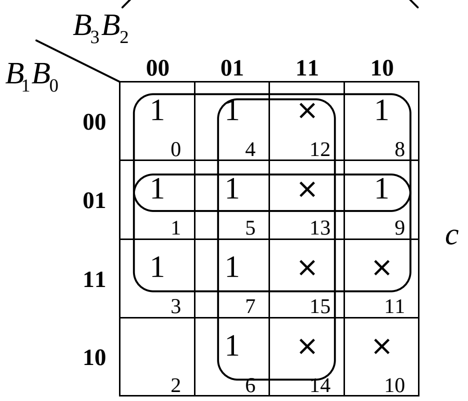
التعبيرات المنطقية:

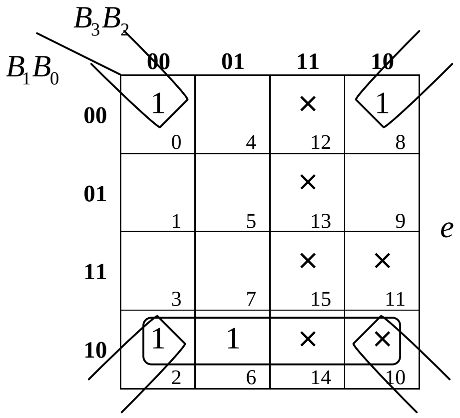
$$a = \sum m\,(0,2,3,5,6,7,8,9) + \sum d\,(10,11,12,13,14,15)$$
$$b = \sum m\,(0,1,2,3,4,7,8,9) + \sum d\,(10,11,12,13,14,15)$$
$$c = \sum m\,(0,1,3,4,5,6,7,8,9) + \sum d\,(10,11,12,13,14,15)$$
$$d = \sum m\,(0,2,3,5,6,8,9) + \sum d\,(10,11,12,13,14,15)$$
$$e = \sum m\,(0,2,6,8) + \sum d\,(10,11,12,13,14,15)$$
$$f = \sum m\,(0,4,5,6,8,9) + \sum d\,(10,11,12,13,14,15)$$
$$g = \sum m\,(2,3,4,5,6,8,9) + \sum d\,(10,11,12,13,14,15)$$

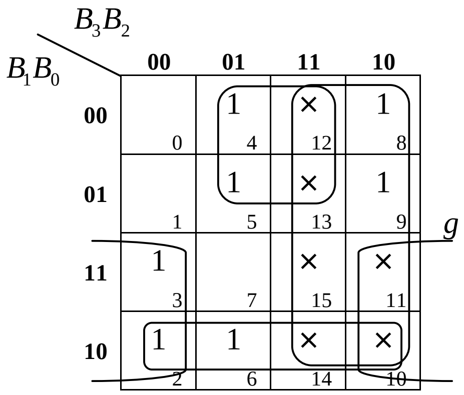
التعبيرات المنطقية المختصرة:

سنقوم هنا باختصار التعبيرات المنطقية لمتغيرات الخرج a c e و g، و نترك بقية المتغيرات للدارس كتدريب









$$a = B_3 + B_1 + B_2B_0 + \overline{B_2}\,\overline{B_0}$$
$$c = \overline{B_1} + B_0 + B_2$$
$$e = \overline{B_2}\,\overline{B_0} + B_1\overline{B_0}$$
$$g = B_3 + B_2\overline{B_1} + B_1\overline{B_0} + \overline{B_2}B_1$$

الدائرة المنطقية:

نترك رسم الدائرة المنطقية للدارس كتدريب، بعد كتابة التعبيرات المختصرة لبقية متغيرات الخرج.

الخلاصة

تعلمنا في هذه الوحدة الخطوات المتبعة في تصميم أي دائرة منطقية، ابتداءاً من تحديد المواصفات، فكتابة التعبيرات المنطقية، فتبسيط تلك التعبيرات، ثم بناء الدائرة. كما قمنا في نهاية الوحدة بتصميم بعض الدوائر المنطقية التي تقوم بأداء وظائف مفيدة. و تصميم الدوائر المنطقية هي المهارة الأساسية التي يتوقع من دارس هذا المقرر تعلمها.

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

عملياً ليس من الضروري أن نستخدم المهارات التي تعلمناها في هذه الوحدة لتصميم أي دائرة منطقية نحتاج إليها في نظام رقمي (Digital System) معين، حيث أن هناك عدداً كبيراً من الدوائر المنطقية الجاهزة التي تؤدي وظائف مفيدة، و التي يمكن شراؤها و استخدامها مباشرة في بناء الأنظمة الرقمية. و سنتعرف في الوحدة التالية على عدد من تلك الدوائر الجاهزة و ندرس خصائص كل منها و استخداماتها، كما سنتعرف على طرق بديلة لتصميم الدوائر المنطقية باستخدام تلك الدوائر الجاهزة.

إجابات التدريبات

تدريب 1:

1- $$x = \overline{A}\,\overline{B} + A\overline{B} + AB$$
$$y = \overline{A}B + A\overline{B}$$

2- $$x = A + \overline{B}$$
$$y = (A+B)(\overline{A}+\overline{B})$$

3- $$x = \overline{\overline{A}B}$$
$$y = \overline{\overline{A}\,\overline{B} + AB}$$

4- $$x = \overline{(A+B)(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})}$$
$$y = \overline{(A+\overline{B})(\overline{A}+B)}$$

تدريب 2:

1-

$$x = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$$

$$y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + ABC$$

$$z = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + AB\bar{C}$$

2-

$$x = (A+\bar{B}+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}+C)(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})$$

$$y = (A+B+\bar{C})(\bar{A}+B+\bar{C})$$

$$z = (A+B+\bar{C})(\bar{A}+B+C)(\bar{A}+B+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})$$

3-

$$x = \overline{\bar{A}BC + AB\bar{C} + ABC}$$

$$y = \overline{\bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C}$$

$$z = \overline{\bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + ABC}$$

4-

$$x = \overline{(A+B+C)(A+B+\bar{C})(A+\bar{B}+C)(\bar{A}+B+C)(\bar{A}+B+\bar{C})}$$

$$y = \overline{(A+B+C)(A+\bar{B}+C)(A+\bar{B}+\bar{C})(\bar{A}+B+C)(\bar{A}+\bar{B}+C)(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})}$$

$$z = \overline{(A+B+C)(A+\bar{B}+C)(A+\bar{B}+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}+C)}$$

تدريب 3، 5:

1-

$$x = \bar{B} + A$$

$$y = \bar{A}B + A\bar{B}$$

2-

$$x = A + \bar{B}$$

$$y = (A+B)(\bar{A}+\bar{B})$$

3-

$$x = \overline{\bar{A}B}$$

$$y = \overline{\bar{A}\bar{B} + AB}$$

4-

$$x = \overline{B\bar{A}}$$

$$y = \overline{(A+\bar{B})(\bar{A}+B)}$$

تدريب 4، 6:

1-

$$x = \overline{B} + \overline{A}\,\overline{C}$$
$$y = \overline{C} + B$$
$$z = B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}B$$

2-

$$x = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{B} + \overline{C})$$
$$y = B + \overline{C}$$
$$z = (\overline{A} + B)(\overline{A} + \overline{C})(B + \overline{C})$$

3-

$$x = \overline{AB + BC}$$
$$y = \overline{\overline{B}C}$$
$$z = \overline{A\overline{B} + AC + \overline{B}C}$$

4-

$$x = \overline{B(A + C)}$$
$$y = \overline{C\overline{B}}$$
$$z = \overline{(\overline{B} + C)(A + C)(A + \overline{B})}$$

تدريب 7:

$$x = \overline{A_1}\,\overline{A_0} + \overline{A_3}\,\overline{A_2} + \overline{A_3}\,\overline{A_1} + \overline{A_2}\,\overline{A_0}$$
$$y = L_0 + \overline{L_3}L_2 + L_2L_1 + L_3\overline{L_2}L_1$$
$$z = \overline{C}\,\overline{B} + CBA + D\overline{C}\,\overline{A}$$

تدريب 8:

$$x = (\overline{A_3} + \overline{A_0})(\overline{A_2} + \overline{A_1})$$
$$y = (\overline{L_3} + \overline{L_2} + L_1 + L_0)(L_3 + L_2 + L_0)(L_2 + \overline{L_1} + L_0)$$
$$z = (\overline{C} + B)(\overline{C} + \overline{A})(D + C + \overline{B})(C + \overline{B} + \overline{A})$$

تدريب 9:

$$y = (\overline{B_2} + B_1)(B_3 + \overline{B_1} + \overline{B_0})(\overline{B_4} + \overline{B_1} + B_0)$$

تدريب 10:

$$x = A_3A_0 + A_2A_1 + \overline{A_2}\,\overline{A_0}$$
$$y = (\overline{B_2} + B_0)(B_2 + \overline{B_0})(B_3 + B_1 + \overline{B_0})$$

تدريب 11: