المصفوفات

تسمّى مجموعة الأعداد المرتّبة على شكل مستطيل والموضوعة بين قوسين والتي تخضع لقواعد معيّنة لعمليّات سنبيّتها [إن شاء الله] فيما بعد: **مصفوفة** مثل:

$$(A)\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} ؛ (B)\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} ؛ (C)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 5 & 7 \\ -7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

المصفوفة (A) يمكن اعتبارها كمصفوفة المعاملات لجملة المعادلتين المتجانسة:

$\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ -x-2y+3z=0 \end{cases}$ ، ومن الممكن إعطاء تفسير مشابه للمصفوفة (C) بأنّ صفوفها ممثّلة لإحداثيّات النقاط (1,-1,3)، (-3,5,7)، (-7,1,-5) في الفراغ.

تسمّى الأعداد a_{ij} الواردة في المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & & & & & \\ . & & . & & & \\ . & & & . & & \\ . & & & & . & \\ a_{m1} & & & & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

عناصر المصفوفة، حيث يمثّل الدليل الأوّل رقم الصفّ، والثاني رقم العمود. توصف كلّ مصفوفة ذات m صفًّا وn عمودًا بأنّها من الدرجة $n\times m$، يُستعمل أحيانًا للدلالة على مصفوفة القوسان: ( ) أو زوجا القطع المستقيمة: ‖ ‖.

المصفوفة المربّعة:

تكون المصفوفة مربّعة إذا كان $m=n$، وتسمّى عندئذٍ المصفوفة المربّعة من الدرجة n؛

في المصفوفة المربّعة تسمّى العناصر: a_{11}، a_{22}، a_{33}، a_{44}، …، a_{nn} عناصر قطريّة، ويُسمّى حاصل جمع العناصر القطريّة لمصفوفة مربّعة: أثر المصفوفة.

المصفوفة الصفريّة:

المصفوفة الصفريّة هي المصفوفة التي كلّ عناصرها أصفار؛ عندما تكون المصفوفة صفرًا ولا يكون هناك التباس في درجتها فإنّها تُكتب $A=0$ بدلاً من الجدول $n\times m$.

مجموع مصفوفتين:

إذا كان: $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ فإنّ: $A\pm B=\begin{bmatrix}1\pm1 & 2\pm5\\ 2\pm3 & -1\pm-2\end{bmatrix}$؛ من الملاحظ أنّه كي تكون المصفوفتان A وB متوافقتين للجمع يجب أن تكونا من نفس الدرجة.

إذا كانت المصفوفات A، B، C متوافقة بالنسبة للجمع فإن:

- $A+B=B+A$ (قانون التبديل).
- $A+(B+C)=(A+B)+C$ (قانون جمع الحدود الجبريّة).
- $k(A+B)=kA+kB=(A+B)k$، حيث: k عدد حقيقيّ.
- توجد مصفوفة D بحيث: $A+D=B$.

الضرب:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdot \\ b_{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + \dots + a_{1m}b_{m1} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{m} a_{1k}b_{k1}$$

تجب ملاحظة أنّ هذه العمليّة هي (صفّ × عمود): يضرب كلّ عنصر من الصفّ بالعنصر المقابل له من العمود وتجمع حواصل الضرب.

يُقال أنّ حاصل الضرب $B \times A$ معرّف، أو أنّ A موافقة لــ B بالنسبة للضرب إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة A مساويًا لعدد صفوف B؛ وإذا كانت A موافقة لــ B بالنسبة للضرب فإنّه ليس من الضروريّ أن تكون B موافقة لــ A بالنسبة للضرب.

إذا كانت المصفوفات A، B، C متوافقة بالنسبة للجمع والضرب فإن:

- $A(B+C)=AB+AC$ (قانون التوزيع الأوّل).
- $(A+B)C=AC+BC$ (قانون التوزيع الثاني).
- $A(B\ C)=(A\ B)C$ [قانون التنسيق (قانون ترتيب الحدود)].
- $AB \neq BA$ بصفة عامّة.
- $AB=0$ لا يستلزم بالضرورة أن تكون: $A=0$ أو $B=0$.
- $AB=AC$ لا يستلزم أنّ: $B=C$.

بعض أنماط المصفوفات:

مصفوفة الوحدة:

إذا كانت A مصفوفة مربّعة وكان $a_{ij}=0$ لقيم $i>j$ فإنّها تسمّى مصفوفة مثلّثيّة عليا، وإذا كان $a_{ij}=0$ لقيم $i<j$ فإنّها تسمّى مصفوفة مثلّثيّة دنيا؛ أمّا المصفوفة التي تكون مثلّثيّة عليا ودنيا تسمّى مصفوفة قطريّة. وكثيرًا ما تكتب هذه المصفوفة على الشكل: $A=diag(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn})$.

إذا كان: $a_{11}= a_{22}= a_{33}= \ldots = a_{nn}=k$ فإنّ هذه المصفوفة تسمّى مصفوفة عدديّة، وإذا كان $k=1$ فإنّ هذه المصفوفة تدعى **مصفوفة الوحدة** (المصفوفة المحايدة) ويُرمز لها بالرمز 1_n.

مثلاً:

$$1_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ، 1_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ، 1_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

معكوس مصفوفة:

إذا كانت A وB مصفوفتين مربّعتين بحيث $AB=BA=1$ فإنّ B تدعى معكوس A وتُكتب: $B=A^{-1}$.

منقول مصفوفة:

تسمّى المصفوفة ذات الدرجة $m\times n$ الناتجة عن المبادلة بين الصفوف والأعمدة للمصفوفة A ذات الدرجة $n\times m$: منقول المصفوفة A ويُرمز لها بالرمز: A^T.

مثال ذلك أنّ منقول المصفوفة: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 5 & 1\end{bmatrix}$ هو المصفوفة: $A^T=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\\ 2 & 1\end{bmatrix}$.

إذا كان: A^T و B^T منقولي المصفوفتين: A و B على الترتيب، وكان k مقدارًا عدديًّا فإنّ:

- $\left(A^T\right)^T=A$.
- $(k\cdot A)^T=k\cdot A^T$.
- $(A+B)^T=A^T+B^T$.
- $(A\cdot B)^T=A^T\cdot B^T$.

المصفوفة المتماثلة:

يُقال عن مصفوفة A أنّها متماثلة إذا حقّقت العلاقة: $A=A^T$. وتسمّى أيضًا المصفوفة الهيرميتيّة.

مرافقة مصفوفة:

إذا كانت عناصر مصفوفة A عبارة عن أعداد مركّبة، فإنّ المصفوفة التي عناصرها مرافقات عناصر المصفوفة A هي المصفوفة المرافقة للمصفوفة A ويُرمز لها بالرمز $\overline{A}$.

محدّد مصفوفة مربّعة:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=(a_{11}\times a_{22})-(a_{12}\times a_{21})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

المصفوفة المساعدة:

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربّعة من الدرجة n وكان a_{ij} المعامل المرافق للعنصر a_{ij}

فإنّنا نسمّي المصفوفة:

$$adjoint\ A = adjA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{13} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ المصفوفة المساعدة.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow adj(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \Leftrightarrow adj(B) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

المحتويات