من إصدارات
المركز العلمي للترجمة

الوحدة الثانية
الاهتزازات والأمواج الميكانيكية
Oscillations and Mechanical Waves

الجزء الخامس عشر
الحركة الاهتزازية
Oscillatory Motion

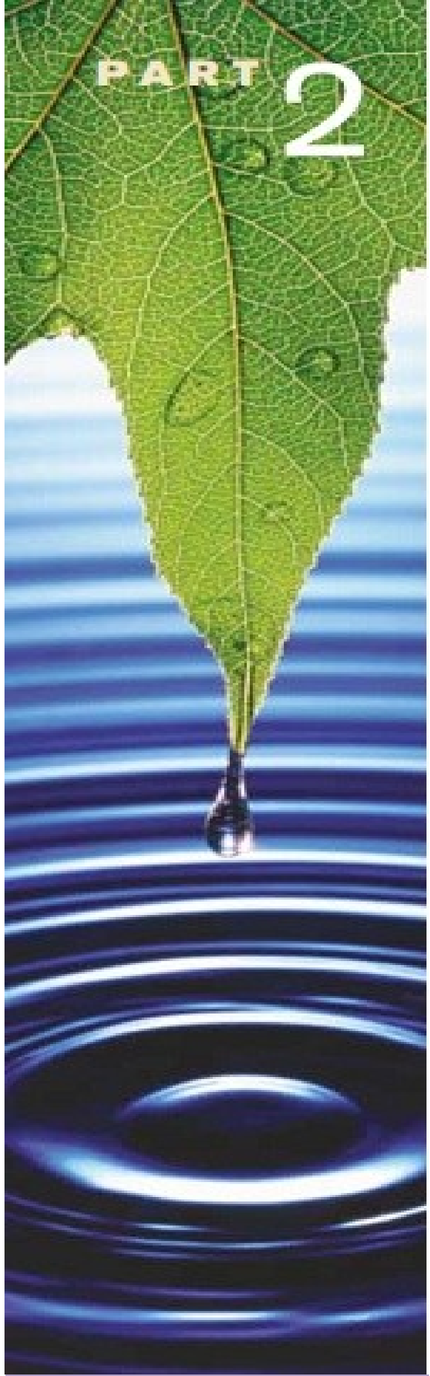
ترجمة
الدكتور حازم فلاح سكيك

www.trgma.com

توثيـــــق

م	البند	البيان
1	المصدر	**Physics for Scientists and Engineers** **By** **Raymond A. Serway & John W. Jewett** **6th Edition**
2	الموضوع	الوحدة الثانية: الاهتزازات والأمواج الميكانيكية الجزء الخامس عشر: الحركة الاهتزازية
3	المترجم	د./ حازم فلاح سكيك
4	المراجعة العلمية	
5	المراجعة اللغوية	
6	التصنيف	فيزياء
7	الفئة	كتاب
11	التاريخ	2008-12-25

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com



الاهتزازات والامواج الميكانيكية

Oscillations and Mechanical Waves

سنبدأ في هذه الوحدة بدراسة نوع خاص من الحركة يسمى الحركة الدورية periodic motion. هذه حركة تكرارية للجسم يعود فيها الجسم إلى موضع محدد في كل مرة بعد فترة محددة من الزمن. ومن الأجسام التي تتحرك حركة دورية بهذه الطريقة هو البندول والكتلة المعلقة في زنبرك. إن حركة الذهاب والإياب لهذه الأجسام تسمى حركة اهتزازية oscillations. وسوف نركز في هذا الجزء على الحركة التوافقية البسيطة simple harmonic motion وهذه الحركة هي حالة خاصة من الحركة الدورية. كما سوف نجد ان كل الحركات الدورية يمكن أن ندرسها من خلال الحركة التوافقية البسيطة حيث تعتبر الحركة التوافقية البسيطة نموذجا بسيطاً لدراسة الحركات الدورية.

الحركة التوافقية البسيطة تشكل الأساس النظري لفهم ودراسة الأمواج الميكانيكية mechanical waves. الأمواج الصوتية وأمواج الزلازل والأمواج المنتشرة في حبل مشدود وأمواج الماء. كل هذه الأنواع من الأمواج تحدث بسبب الحركة الاهتزازية. فمثلا الأمواج الصوتية تنتقل عبر الهواء تنتج من اهتزاز جزيئات الهواء للأمام والخلف في حركة اهتزازية تسبب الأمواج الصوتية، وكذلك الحال لاهتزاز جزيئات الماء للأعلى والأسفل تسبب الأمواج التي نراها عندما يسقط حجر في بركة ماء راكدة. وبصورة عامة فان الأمواج تنتقل عبر وسط مادي

جزئياته تتحرك حركة اهتزازية دورية. ولهذا فان حركة جزئيات الوسط تؤثر بنفس الطريقة التي تجعل الجسم المعلق في زنبرك يتحرك حركة اهتزازية.

لشرح الكثير من الظواهر الطبيعية، نحتاج إلى فهم نظرية الاهتزازات والأمواج. فمثلا لو نظرنا إلى ناطحات السحاب والى الجسور قد نعتقد إنها ساكنة ولكن هي في الحقيقة تتحرك حركة اهتزازية، ولهذا فان المصممين المعماريين والمهندسين يأخذوا هذه الحركة في الحسبان عند التصميم. ولفهم كيف يعمل الراديو والتلفزيون فانه يجب أن نعلم كيف تعمل الأمواج الكهرومغناطيسية وما هو أساسها وكيف تنشأ وكيف تنتشر في الفراغ. وأخيرا فان الكثير مما عرفه العلماء عن التركيب الذري كان أساسه المعلومات التي حصلوا عليها في صورة أمواج. ولهذا فان دراسة فيزياء الاهتزازات والأمواج ضرورية لفهم الكثير من الظواهر الفيزيائية بما في ذلك نظريات الفيزياء الذرية.

قطرات من الماء تسقط من ورقة شجر في حوض ماء. الاضطراب الناتج عن سقوط قطرات الماء يسبب حركة اهتزازية لسطح الماء. هذه الاهتزازات مرتبطة مع الأمواج المبتعدة من نقطة سقوط الماء. وهذا ما سوف ندرسه في الوحدة الثانية لنكتشف الفيزياء المرتبطة بالاهتزازات والأمواج.

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

الوحدة الثانية: الاهتزازات والأمواج الميكانيكية

الجزء الخامس عشر: الحركة الاهتزازية

Motion of an Object Attached to a Spring	حركة جسم معلقة في زنبرك
Mathematical Representation of Simple Harmonic Motion	التمثيل الرياضي للحركة التوافقية البسيطة
Energy of the Simple Harmonic Oscillator	الطاقة للجسم المتحرك حركة توافقية بسيطة
Comparing Simple Harmonic Motion with Uniform Circular Motion	مقارنة بين الحركة التوافقية البسيطة والحركة الدائرية المنتظمة
The Pendulum	البندول
Damped Oscillations	الحركة المخمدة
Forced Oscillations	الحركة القسرية

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

مقدمة

الحركة الدورية هي حركة يعود فيها الجسم إلى موقع محدد بعد فترة زمنية ثابتة. فمثلا حركة الأرض حول الشمس هي حركة دورية حيث إن الأرض تعود إلى موقع محدد كل فترة محددة من الزمن. كما ان القمر يعود إلى نفس موقعه بالنسبة للأرض كل فترة محددة من الزمن.

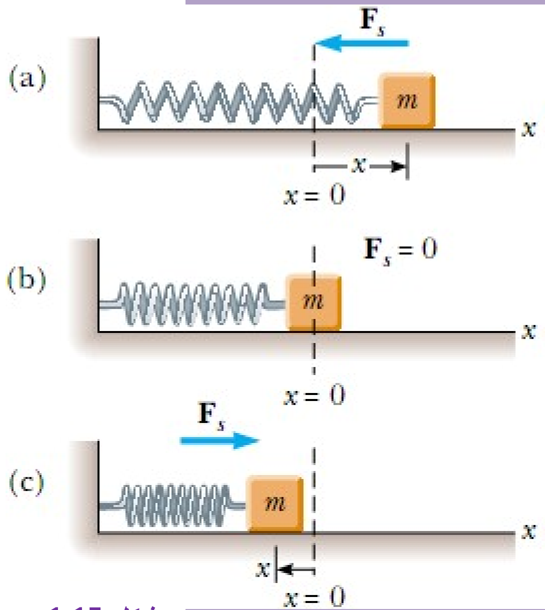
إضافة إلى ذلك هناك الكثير من الأمثلة لأنظمة تتحرك حركة دورية، فحركة الجزئيات في المواد الصلبة تتذبذب حول موضع اتزانها في حركة دورية مستمرة، كذلك الامواج الكهرومغناطيسية مثل أمواج الضوء وأمواج الرادار وأمواج الراديو تنتشر في الفراغ من خلال تذبذب مجالها الكهرومغناطيسي، كذلك التيار الكهربي المتردد والجهد الكهربي والشحنة الكهربية تتغير بصفة دورية مع الزمن.

هناك حالة خاصة من الحركة الدورية تحدث للأنظمة المكيانيكية تكون فيها القوة الميكانيكية تتناسب طرديا مع موضع الجسم بالنسبة لنقطة اتزان ما. اذا كانت هذه القوة دائما في اتجاه نقطة الإتزان فإنه في هذه الحالة تعرف باسم الحركة التوافقية البسيطة simple harmonic motion وهذا ما سوف نركز الدراسة عليه في هذا الجزء.

1.15 حركة جسم معلق في زنبرك Motion of an object attached to a spring

كنموذج للحركة التوافقية البسيطة نفرض جسم كتلته m متصل مع زنبرك يتحرك على سطح أفقي عديم الاحتكاك كما في الشكل 1.15. عندما يكون الزنبرك في حالة الاستقرار أي إن استطالة الزنبرك تساوي صفر، فان الزنبرك يكون في حالة اتزان x=0. نعلم إن الزنبرك يتذبذب لليمين ولليسار إذا تعرض إلى أي اضطراب يؤدي إلى استطالته أو انضغاطه.

من الشكل 1.15 نستطيع أن نفهم انه إذا أزيح الجسم لليمين أو لليسار نتيجة لقوة خارجية فان قوة معينة تتولد في الزنبرك تسمى القوة الاسترجاعة restoring force اتجاهها عكس اتجاه القوة الخارجية. ويمكن حساب القوة الاسترجاعية التي تتولد في الزنبرك من خلال قانون هوك Hooke's law.



شكل 1.15

شكل 1.15 يوضح جسم معلق في زنبرك يتحرك على سطح عديم الاحتكاك. (a) عندما يتحرك الجسم إزاحة لليمين عن نقطة الاتزان (x<0)، فان القوة المتولدة في الزنبرك تكون لليسار. (b) عندما يكون الجسم في حالة اتزان عند (x=0)، فان القوة المتولدة في الزنبرك تكون صفر. (c) عندما تكون إزاحة الجسم لليسار بحيث (x<0)، فان القوة المتولدة في الزنبرك تكون في اتجاه اليمين.

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

$$F_s = -kx \qquad (15.1)$$

سميت القوة المتولدة في الزنبرك بالقوة الاسترجاعية restoring force لان هذه القوة تكون دائما في اتجاه نقطة الاتزان وفي عكس اتجاه ازاحة الجسم. ولهذا إذا أزيح الجسم إلى اليمين من النقطة x=0 أي في الاتجاه الموجب كما في الشكل 1.15 (a) فان اتجاه القوة الاسترجاعية إلى اليسار. وعند إزاحة الجسم إلى اليسار من النقطة x=0، أي في الاتجاه السالب كما في الشكل 1.15 (c) فان القوة الاسترجاعية سوف تكون إلى اليمين.

بتطبيق قانون نيوتن الثاني $\Sigma F_x = ma_x$ على حركة الجسم مع المعادلة 1.15 فان محصلة القوة في الاتجاه x تكون على النحو التالي:

$$-kx = ma_x$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x \qquad (15.2)$$

ولهذا فان العجلة تتناسب طرديا مع موقع الجسم وفي الاتجاه المعاكس للإزاحة من نقطة الاتزان وكل جسم يتصرف على هذا النحو فإن حركته تسمى بالحركة التوافقية البسيطة simple harmonic motion. وعليه فان أي جسم يتحرك حركة توافقية بسيطة تكون عجلة هذا الجسم تتناسب تناسباً طرديا مع إزاحته وفي الاتجاه المعاكس لموضع الاتزان.

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

إذا أزيح الجسم في الشكل 1.15 إلى الموضع A ومن ثم ترك، فان العجلة الابتدائية له هي $-kA/m$. وعندما يمر الجسم خلال نقطة الاتزان $x=0$ فان العجلة تكون مساوية للصفر، عند هذه اللحظة فان سرعة الجسم تكون اكبر ما يمكن لان العجلة تغير اتجاهها (إشارتها). يستمر الجسم في الحركة الى اليسار من نقطة الاتزان بعجلة موجبة لتصل إلى الموضع $x=-A$، وعندها تكون العجلة موجبة وتساوي $+kA/m$ وتكون السرعة مساوية للصفر.

يكمل الجسم دورة كاملة من حركته عندما يعود إلى نقطة البدء، ثم يمر مرة اخرى النقطة $x=0$ باكبر سرعة ممكنة. وبهذا نرى ان الجسم يتذبذب بين نقطتين هما $x=\pm A$ في حالة عدم وجود احتكاك، ولان القوة المبذولة بواسطة الزنبرك هي قوة محافظة، فإن الحركة سوف تستمر إلى مالانهاية. وسوف ندرس حالة الحركة في وجود احتكاك في الجزء 6.15.

الحالة التي ناقشناها في الجزء السابق تنطبق على الجسم المعلق في زنبرك حيث ان الجسم سوف يسبب استطالة للزنبرك بحيث تزاح نقطة الاتزان مسافة معينة وتصبح نقطة الاتزان نقطة جديدة عند $x=0$. ولتوضيح ذلك نفرض ان x_s تمثل الاستطالة الكلية للزنبرك من نقطة الاتزان عندما لا يكون هناك أي جسم معلقاً به. وعليه فان $x_s=-(mg/k)+x$ حيث إن $-(mg/k)$ تمثل استطالة الزنبرك نتيجة لوزن الجسم المعلق به و x هي الاستطالة الحادثة للزنبرك نتيجة للحركة التوافقية البسيطة. مقدار القوة المحصلة على الجسم هي

$$F_s-F_g=-k(-(mg/k)+x)-mg=-kx.$$

القوة المحصلة على الجسم هي نفسها القوة المؤثرة على الجسم المتصل بالزنبرك في الوضع الافقي كما في الشكل 1.15.

سؤال للتفكير 1.15

سحب جسم متصل بنهاية زنبرك إلى الموضع x=A ومن ثم ترك. في دورة كاملة من حركته ما هي المسافة التي يقطعها الجسم. (a) A/2, (b) A, (c) 2A, (d) 4A.

2.15 التمثيل الرياضي للحركة التوافقية البسيطة Mathematical representation of simple harmonic oscillator

سنقوم الآن باشتقاق معادلة رياضية تصف الحركة التوافقية البسيطة التي تحدثنا عنها مسبقاً. المعادلة 1.15 تحدد القوة المؤثرة على الجسم المتصل بالزنبرك والذي يتذبذب على محور x. وحيث إن العجلة هي معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن فان العجلة a تعطى على النحو التالي:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

وبالتالي يمكن ان نعبر عن المعادلة 2.15 على النحو التالي:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad (15.3)$$

لنعبر عن النسبة $\frac{k}{m}$ بـــ ω^2 (اخترنا الرمز ω^2 بدلا عن ω وذلك حتى نجعل الحل الذي سوف نصل له أكثر سهولة)، وعليه،

$$w^2 = \frac{k}{m} \qquad (15.4)$$

وبالتالي فان المعادلة 3.15 يمكن أن نكتبها على النحو التالي:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2x \qquad (15.5)$$

المعادلة (5.15) هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية وتحتاج الى حل رياضي هذا الحل سيكون دالة x(t) تحقق المعادلة وتمثل تغير موقع الجسم بالنسبة للزمن. سوف نبحث عن معادلة x(t) بحيث تكون نتيجة المشتقة الثانية لها هي نفسها المعادلة الأصلية سالبة الإشارة ومضروبة في ω^2. وهذا متحقق في الدوال الجيبية مثل دالة الجيب sin أو

جيب التمام cos، وبالتالي من الممكن ان تكون أي منهما حلا للمعادلة (5.15). سوف نختار الدالة التالية كحل للمعادلة التفاضلية.

$$x(t) = A\cos(\omega t+\varphi) \qquad (15.6)$$

حيث إن A، وω، وφ عبارة عن ثوابت. ولكي نتأكد من إن المعادلة (6.15) تحقق المعادلة (5.15) نتبع هذا الاشتقاق

$$\frac{dx}{dt} = A\frac{d}{dt}\cos(wt+j) = -wA\sin(wt+j) \qquad (15.7)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -wA\frac{d}{dt}\sin(wt+j) = -w^2A\cos(wt+j) \qquad (15.8)$$

نجد أن المعادلة (8.15) تؤول إلى المعادلة (5.15) وهذا يعني أن الدالة (6.15) هي حل للمعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة.

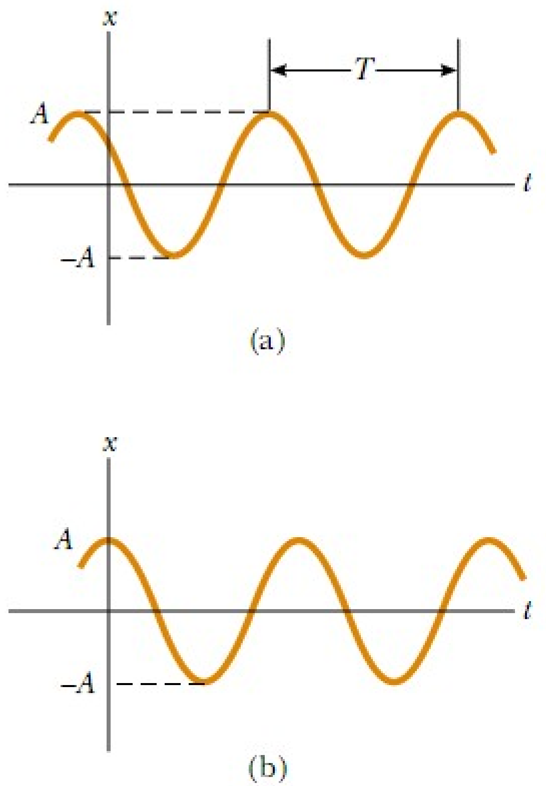
الثوابت A و ω و φ تمثل ثوابت الحركة. ولكي نعرف المعنى الفيزيائي لها، من المناسب من تمثيل الحركة بيانياً حيث نرسم x كدالة في الزمن، كما في الشكل a2.15. أولا، لاحظ إن A تعرف بسعة الحركة amplitude وهي أقصى إزاحة للجسم سواء في الاتجاه الموجب او السالب. أما الثابت ω يعرف باسم التردد الزاوي angular

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

frequency وله وحدة rad/s. وهي تحدد مقدار سرعة التذبذب – فكلما زاد مقدار التذبذب لكل وحدة زمن كلما زادت قيمة ω. من المعادلة 4.15 نجد إن التردد الزاوي يعطى بالعلاقة التالية:

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (15.9)$$

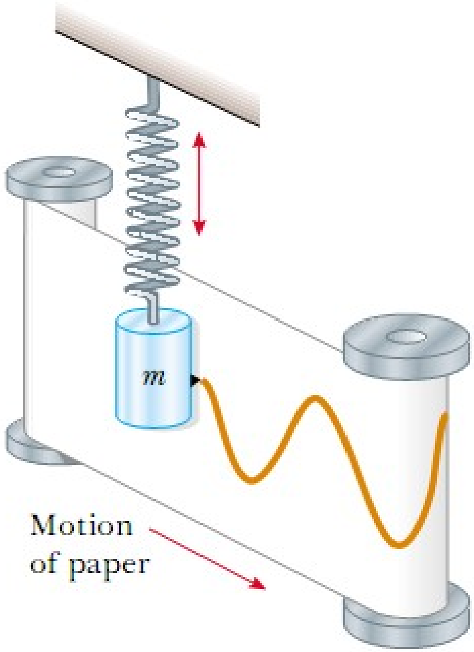
الثابت الذي يحدد بالزاوية φ يسمى ثابت الطور phase constant أو زاوية الطور الابتدائية initial phase angle وهذا الثابت مع السعة A يحددان موقع وسرعته عند الزمن t=0. إذا كان الجسم عند أقصى إزاحة له x=A وعند t=0، فان ثابت الطور φ=0 والتمثيل البياني للحركة موضح في الشكل b2.15. والكمية (ωt+φ) تعرف باسم طور الحركة phase of motion. لاحظ ان الدارة x(t) تتغير دوريا وقيمتها تتكرر كل فترة زمنية ωt+2π.



الشكل 2.15 (a) يوضح منحنى للازاحة x مع الزمن t لجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة. سعة الحركة هي A، والزمن الدوري T، وثابت الطور j. (b) يوضح منحنى للازاحة x مع الزمن t لحالة خاصة عندما تكون x=A و j=0.

شكل 2.15

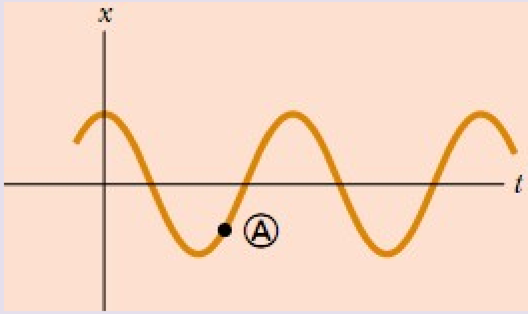
المعالات 1.15 و 5.15 و6.15 تشكل التمثيل الرياضي للحركة التوافقية البسيطة. فالقوة المؤثرة على الجسم يمكن أن نمثلها بالمعادلة 1.15، وموضع الجسم الذي يتحرك حركة توافقية بسيطة يوصف بالمعادلة 6.15، واذا قمنا بتحليل حركة الجسم ووجدنا انه من الممكن أن نصفها بالمعادلة التفاضلية 5.15 فان الحركة تكون حركة توافقية بسيطة. وإذا كان موقع الجسم يوصف بالمعادلة 6.15 فان الجسم أيضا يخضع لحركة توافقية بسيطة.



الشكل 15.3 يوضح تجربة عملية تعرض الحركة التوافقية البسيطة. جسم كتلته m متصل بزنبرك يتذبذب رأسيا ومثبت على الجسم قلم. عندما يتذبذب الجسم، بمحاذاة ورقة تتحرك عموديا على اتجاه التذبذب فان القلم سوف يرسم منحنى جيبي كما في المعادلة 15.6.

سؤال للتفكير 2.15

لنفترض التمثيل البياني لحركة توافقية بسيطة الموضح في الشكل 4.15 كما تصفها المعادلة 6.15. عندما يكون الجسم عند النقطة A على المنحنى، فان (a) الموضع والسرعة تكون موجبة (b) الموضع والسرعة كلاهما سالباً، (c) الموضع موجب والسرعة سالبة، (d) الموضع سالب والسرعة صفر، (e) الموضع موجب والسرعة سالبة، (f) الموضع سالب والسرعة موجبة؟

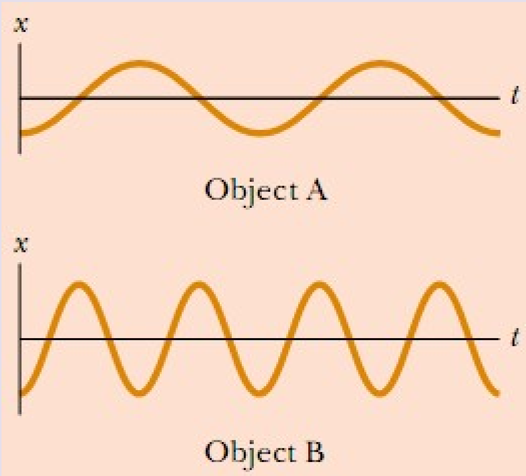


الشكل 4.15 يمثل منحنى لجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة. عند زمن معين فان الجسم يكون عن الموضع A على المنحنى.

سؤال للتفكير 3.15

الشكل 5.15 يوضح منحنيين يمثلان جسم يتحرك حركة توافقية بسيطة. الوصف الصحيح لهاتين الحركتين هي إن الجسم B يكون (a) له تردد زاوي وسعة اكبر من الجسم A، (b) تردد زاوي اكبر ولكن سعة اصغر من الجسم A، (c) تردد زاوي اصغر وسعة اكبر من الجسم A، (d) تردد زاوي وسعة اكبر من الجسم A.

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com



الشكل 5.15 منحنيين بيانيين x-t لجسمين يتحركان حركة توافقية بسيطة، لهما تردد زاوي وسعة مختلفة.

لنقوم الآن بمزيد من التوضيح بالاستعانة بالتمثيل الرياضي للحركة التوافقية البسيطة. فالزمن الدوري T للحركة هو الفترة الزمنية اللازمة للجسم ليتحرك دورة كاملة (الشكل a2.15). قيمة الإزاحة x والسرعة v للجسم عند الزمن t تساوي x و v عند زمن t+T. يمكننا أن نربط الزمن الدوري مع التردد الزاوي من خلال الاستفادة من أن الطور يزداد بمقدار 2π كل فترة زمنية T:

$$[\omega (t + T) + \varphi] - (\omega t + \varphi) = 2\pi$$

وبتبسيط المعادلة نجد إن

$$\omega T = 2\pi,$$

$$T = \sqrt{\frac{2p}{w}} \qquad (15.10)$$

مقلوب الزمن الدوري يعرف بالتردد frequency للحركة. حيث إن الزمن الدوري هو الفترة الزمنية لاهتزازة كاملة فان التردد يمثل عدد الاهتزازات التي يقوم بها الجسم في فترة الزمن.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{w}{2p} \qquad (15.11)$$

وحدة التردد f هي دورة لكل ثانية وتعرف باسم الهرتز hertz ويرمز لها بالرمز Hz. وبالنسبة للمعادلة 11.15 فان

$$w = 2p\ f = \frac{2p}{T} \qquad (15.12)$$

من الممكن ان نستخدم المعادلات 9.15 و 10.15 و 11.15 للتعبير عن الزمن الدوري والتردد لحركة جسم متصل بالزنبرك وذلك من خلال الخصائص الذاتية للجسم والزنبرك وهي الكتلة m وثابت الزنبرك k.

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

$$T = \frac{2p}{w} = 2p\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (15.3)$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (15.4)$$

وبهذا يكون كلا من الزمن الدوري والتردد يعتمدان على كتلة الجسم وعلى ثابت الزنبرك، وليس على عوامل الحركة، والتي هي السعة A والطور φ. وكما نتوقع، فان التردد يكون اكبر في حالة الزنبرك القاسي أي ذو ثابت زنبرك k كبير ويقل التردد بزيادة كتلة الجسم.

من الممكن أن نجد سرعة الجسم وعجلته عندما يتحرك حركة توافقية بسيطة وذلك من خلال المعادلتين 7.15 و 8.15:

$$v = \frac{dx}{dt} = -wA\sin(wt + j) \qquad (15.15)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -w^2A\cos(wt + j) \qquad (15.16)$$

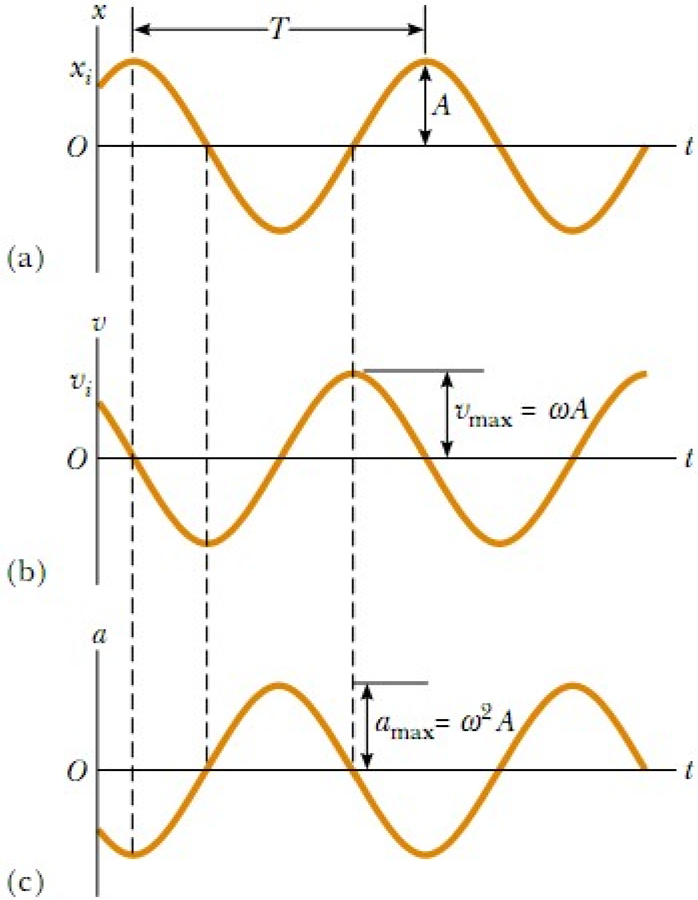
د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

من المعادلة 5.15 نجد انه بسبب دالتي الجيب وجيب التمام تتذبذبان بين القيمتين ±1، فإن القيم العظمى للسرعة سوف تكون $\pm\omega A$. وبالمثل من المعادلة 6.15 تعطينا ان القيم العظمى للعجلة a تكون $\pm\omega^2 A$. وعليه فان القيم العظمى للسرعة والعجلة تكون

$$v_{\max} = wA = \sqrt{\frac{k}{m}}A \qquad (15.17)$$

$$a_{\max} = w^2 A = \frac{k}{m}A \qquad (15.18)$$

الشكل a6.15 يبين مخطط للعلاقة بين الموضع والزمن عند قيمة اختيارية للطور. منحنى علاقة السرعة مع الزمن وعلاقة العجلة مع الزمن موضحة في الشكل b6.15 والشكل c6.15. حيث نجد ان طور السرعة يختلف عن طور الموضع بمقدار 90^{o} أي $\pi/2$. فعندما تكون x في اقصى قيمة أو اعلى قيمة، فان السرعة تكون صفر. وبالمثل عندما x تساوي صفر فان السرعة تكون اقصى ما يمكن. اضافة الى ذلك، نلاحظ ان طور العجلة يختلف عن طور الموضع بمقدار 180^{o} او π. على سبيل المثال، عندما تكون x أقصى قيمة، فان العجلة أقصى ما يمكن ولكن في الاتجاه المعاكس.



الشكل 6.15 يوضح تمثيل بياني للحركة التوافيقة البسيطة. (a) علاقة الموضع بالزمن. (b) علاقة السرعة مع الزمن. (c) علاقة العجلة مع الزمن. لاحظ عند أي زمن تكون السرعة 90^o مختلفة في الطور مع الموضع والعجلة تكون مختلفة في الطور مع الموضع بمقدار 180^o.

سؤال للتفكير 4.15

افترض التمثيل البياني في الشكل 4.15 للحركة التوافقية البسيطة، كما وصفتها المعادلة 6.15. عندما يكون الجسم عند النقطة A كما هو موضح في الشكل فان (a) كلا من السرعة والعجلة موجبتان، (b) كلا من السرعة والعجلة سالبتان، (c) السرعة موجبة والعجلة تساوي صفر، (d) السرعة سالبة والعجلة صفر، (e) السرعة موجبة والعجلة سالبة، (f) السرعة سالبة والعجلة موجبة.

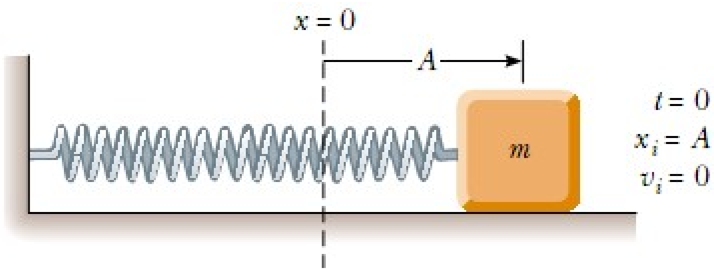
سؤال للتفكير 5.15

جسم كتلته m معلق في زنبرك يتذبذب. الزمن الدوري للتذبذب مقاس ومسجل على انه T. فاذا تم استبدال الجسم m بجسم اخر كتلته 2m. عندما يتذبذب الجسم 2m فان الزمن الدوري للحركة يكون (a) 2T، (b) $\sqrt{2}T$، (c) T (d) $T/\sqrt{2}$، (e) T/2.

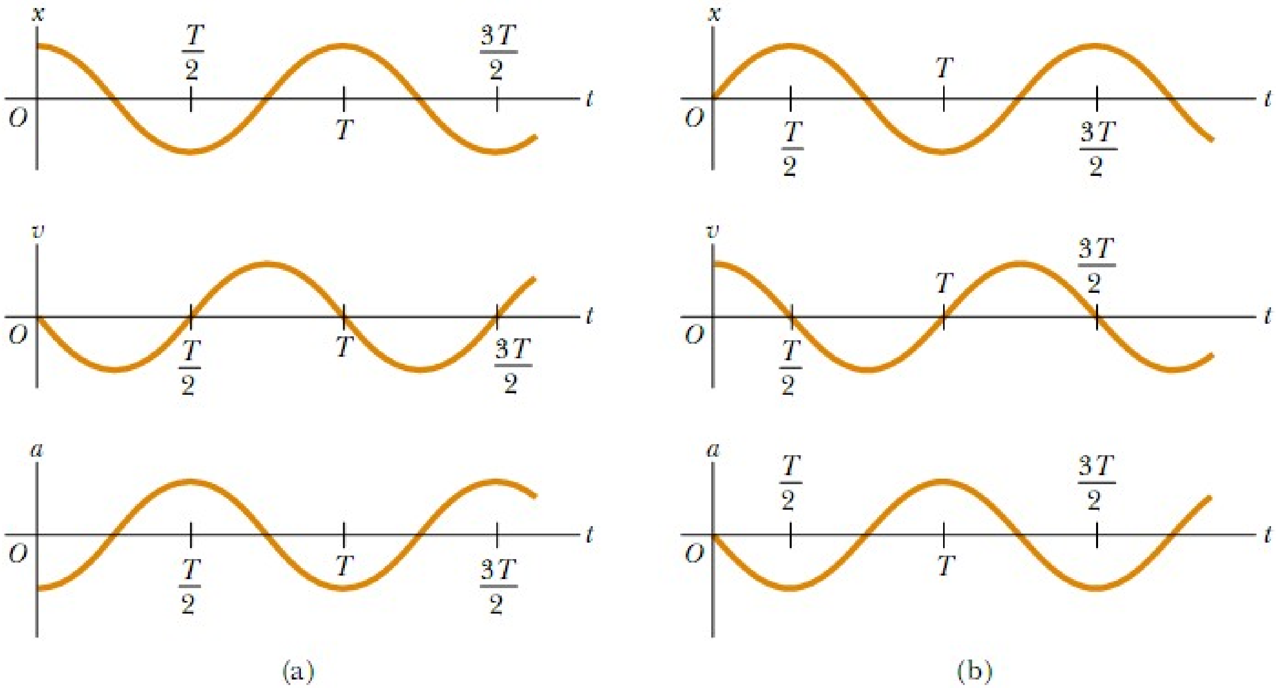
د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

المعادلة 6.15 تصف الحركة التوافقية البسيطة للجسم بصفة عامة، لنرى الان كيف نحسب ثوابت الحركة. فالتردد الزاوي ω يحسب من المعادلة 9.15. والثوابت A و φ تحدد الحالة الابتدائية للحركة عند الزمن t=0.

افترض إن الحركة بدأت عند سحب الجسم من موضع الاتزان مسافة A ومن ثم ترك من السكون عند الزمن t=0، كما في الشكل 7.15.



الشكل 7.15 كتلة متصلة بزنبرك تبدأ الحركة من السكون عند x=A و t=0، وفي هذه الحالة تكون j =0 و عليه فان x=Acoswt



الشكل 8.15 (a) يوضح الموضع، والسرعة، والعجلة كدالة في الزمن لجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة بشروط ابتدائية هي $t=0$ و $x(0)=A$ و $v(0)=0$. (b) يوضح الموضع، والسرعة، والعجلة كدالة في الزمن لجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة بشروط ابتدائية هي $t=0$ و $x(0)=A$ و $v(0)=v_i$.

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

وهذا يتطلب أن نجد حلا لكلا من x(t) و v(t) (المعادلتين 6.15 و 5.15) تحققان الشروط الابتدائية وهي x(0) = A و v(0)=0:

$$x(0) = A\cos f = A$$
$$v(0) = -wA\sin f = 0$$

هذه الشروط تتحقق إذا اخترنا الطور الابتدائي initial phase φ=0، و x=A cosωt كحل. وللتحقق من الحل يجب أن يكون x(0)=A لان cos0=1.

علاقة الموضع والسرعة والعجلة مع الزمن ممثلة في الشكل a8.15 لهذه الحالة الخاصة. تصل العجلة إلى أقصى قيمة لها وهي $\pm\omega^2 A$ عندما يكون موضع الجسم في أقصى قيمة له وهي ±A. أضف إلى ذلك إن السرعة لها أقصى قيمة وهي ±ωA، عند x=0. وعليه فان الحل يكون متفقا مع الحالة التي ندرسها.

لنفترض احتمالية أخرى وهي عندما يتذبذب الجسم، واخترنا الزمن t=0 عندما يمر الجسم بنقطة اتزان الزنبرك وهو في حركته إلى اليمين كما في الشكل 9.15. في هذه الحالة يجب أن يكون الحل الذي يحقق هذه الحالة لــ x(t) و v(t) يحقق الشروط الابتدائية وهي إن x(0)=0 و $v(0)=v_i$:

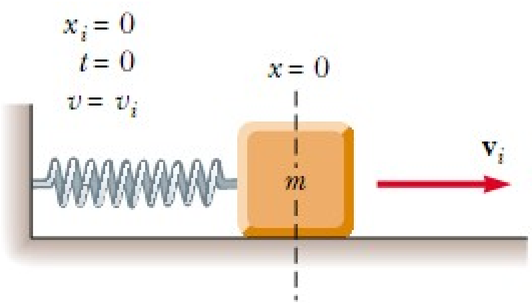
$$x(0) = A\cos f = 0$$
$$v(0) = -wA\sin f = v_i$$

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

الشرط الأول يخبرنا إن $\varphi=\pm\pi/2$. ولهذين الخياران لـــ φ، ومن الشرط الثاني نحصل على السعة $A=\pm v_i/\omega$، ولان السرعة الابتدائية موجبة والسعة لابد وان تكون موجبة أيضا، فإننا نحصل على $\varphi = -\pi/2$. ولهذا فان الحل يعطى على النحو التالي:

$$x = \frac{v_i}{w}\cos\left(wt - \frac{p}{2}\right)$$

منحنيات علاقة الموضع والسرعة والعجلة مع الزمن لهذه الحالة عند $t=0$ موضحة في الشكل b8.15. لاحظ إن هذه المنحنيات هي نفسها المنحنيات في الشكل b8.15، ولكنها مزاحة إلى اليمين بربع دورة. ويعبر عن ذلك رياضيا بواسطة ثابت الطور phase constant $\varphi=-\pi/2$، وهذا يمثل ربع دورة من 2π.



الشكل 9.15 كتلة متصلة بزنبرك تتحرك حركة توافقية بسيطة، و $t=0$ تعرف في اللحهة التي تمر فيه الكتلة نقطة الاتزان $x=0$ وتتحرك لليمين بسرعة v_i.

مثال 1.15 جسم متذبذب

جسم يتذبذب بحركة توافقية بسيطة على محور x. موقعه يتغير بالنسبة للزمن طبقا للمعادلة التالية:

$$x = (4.00m)\cos\left(pt - \frac{p}{4}\right)$$

حيث t الزمن بالثواني والزاوية بين القوسين مقدرة بوحدة rad. (A) حدد مقدار السعة، والتردد، والزمن الدوري للحركة. (B) احسب السرعة والعجلة للجسم عند أي زمن t. (C) من النتائج التي ستحصل عليها من حل الجزء (B) قم بحساب موضع الجسم وسرعته وعجلته عند الزمن t=1s. (D) حدد قيمة أعظم سرعة وأعظم عجلة للجسم. (E) اوجد إزاحة الجسم بين t=0 و t=1.

الحل: بمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة 15.6

$$x(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$$

(A) نجد أن A=4.00m و التردد الزاوي ω=π rad/s وعليه فان التردد f=ω/2π=π/2π= 0.5Hz والزمن الدوري T=1/f=2sec

(B) لإيجاد السرعة v نقوم بإجراء عملية التفاضل لــ x بالنسبة للزمن t. نحصل على

$$v = \frac{dx}{dt} = -(4.00m/s)\sin\left(pt + \frac{p}{4}\right)\frac{d}{dt}(pt)$$

$$v = -(4.00p\ \ m/s)\sin\left(pt + \frac{p}{4}\right)$$

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

وللحصول على العجلة نقوم بإجراء عملية التفاضل للسرعة v بالنسبة للزمن فنحصل على المعادلة التالية:

$$a = \frac{dv}{dt} = -(4.00pm/s)\cos\left(pt + \frac{p}{4}\right)\frac{d}{dt}(pt)$$

$$a = -(4.00p^{2}\ m/s^{2})\ \cos\left(pt + \frac{p}{4}\right)$$

(C) بالتعويض عن الزمن t=1s نستطيع عن نحصل على المعلومات المطلوبة لكل من الموقع والسرعة والعجلة.

$$x = -(4.00m)\cos\left(p + \frac{p}{4}\right) = (4.00m)\cos\left(\frac{5p}{4}\right) = (4.00m)(-0.707) = -2.83m$$

$$v = -(4.00pm/s)\sin\left(\frac{5p}{4}\right) = -(4.00pm/s)(-0.707) = 8.89m/s$$

$$a = -(4.00p^{2}m/s^{2})\cos\left(\frac{5p}{4}\right) = -(4.00p^{2}m/s^{2})(-0.707) = 27.9m/s^{2}$$

(D) بصفة عامة فان السرعة والعجلة للجسم هي التي قمنا بحسابها في الجزء (B) وأعظم قيمة للسرعة والعجلة يكون عندما تكون كل من دالة الجيب وجيب التمام تساوي الوحدة. ولهذا فإن السرعة v تتغير بين القيمتين $\pm 4.00\pi m/s$، والعجلة a تتغير بين القيمتين $\pm 4.00\pi^2 m/s^2$. ولهذا فان

$$v_{max} = 4.00\ \pi m/s = 12.6 m/s$$

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

$$a_{max} = 4.00\pi^2 m/s^2 = 39.5 m/s^2$$

ويمكن أن نحصل على نفس النتائج باستخدام المعادلة $v_{max}=\omega A$ و $a_{max}=\omega^2 A$ حيث ان $A=4.00m$ و $\omega=\pi$ rad/s

(E) موضع الجسم عند الزمن $t=0$ هو

$$x_i = (4.00m)\cos\left(0 + \frac{p}{t}\right) = 2.83m$$

وحيث إننا من حل الجزء (C)، وجدنا إن الموضع عند الزمن $t=1$ هو $-2.83m$ ولهذا فان الإزاحة بين $t=0$ و $t=1$ يكون على النحو التالي:

$$\Delta x = x_f - x_i = -2.83m - 2.83m = -5.66m$$

مثال 2.15

سيارة كتلتها 1300kg مثبتة على أربعة زنبركات.ثابت كل زنبرك 20,000N/m. إذا صعد السيارة رجلين كتلتهما 160kg، اوجد تردد الاهتزاز للسيارة عندما تمر على أخدود ضيق على الطريق.

الحل: لنتمكن من حل هذا المثال دعنا نسترجع خبرتنا العملية حيث اننا عندما نركب السيارة فانه نتيجة لقوة وزن الجسم تنخفض السيارة بقدر بسيط نتيجة لانضغاط الزنبرك. كما انك لا شك وانك قد حاولت مرة ان تقوم بالضغط على مقدمة السيارة بالقوة للأسفل لتتذبذب السيارة عدة

مرات. وحيث ان السيارة تكون محمولة بواسطة 4 زنبركات لذلك سوف نقوم بالتعامل مع زنبرك مكافئ، وحيث ان الإزاحة التي سببها ركوب الرجلين للسيارة هي إزاحة x يمكن ان نجدها من المعادلة التالية:

$$F_{total} = \sum(-kx) = -\left(\sum k\right)x$$

حيث ان x تمثل إزاحة متساوية للأربع زنبركات في السيارة لذلك تم إخراجها من أقواس المجموع. وهنا نلاحظ ان ثابت الزنبرك المكافئ يعطى بالعلاقة

$$k_{eff} = \sum k = 4 \times 20{,}000\,N/m = 80{,}000\,N/m$$

وعليه فان تردد الاهتزاز الذي يحدث في السيارة يحسب من المعادلة 15.14،

$$f = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{k_{eff}}{m}} = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{80{,}000\,N/m}{1460kg}} = 1.18Hz$$

لاحظ هنا اننا استخدمنا كتلة السيارة + كتلة الرجلين عند التعويض عن m في المعادلة السابقة.

ماذا لو؟ افترض ان رجلين خرجا من السيارة وقام احدهما بالضغط على مقدمة السيارة لتتذبذب. فهل تردد الاهتزازات يختلف عن ما سبق؟

للإجابة على هذا التساؤل سنقوم بحساب التردد ولكن هنا الكتلة ستكون اقل ولهذا نتوقع ان يكون التردد أعلى.

$$f = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{k_{eff}}{m}} = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{80{,}000\,N/m}{1300kg}} = 1.25Hz$$

مثال 3.15 جسم متصل بزنبرك

جسم كتلته 200g متصل بزنبرك (k=5.00N/m) يتذبذب أفقيا على سطح عديم الاحتكاك. فإذا تم سحب الجسم مسافة مقدارها 5.00cm من نقطة الاتزان ثم ترك من السكون كما في الشكل 7.15 (A) اوجد الزمن الدوري للحركة، (B) أقصى سرعة للجسم، (C) أقصى عجلة للجسم، (D) عبر عن موضع الجسم وسرعته وعجلته بدالة مع الزمن.

الحل: (A) بمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة 9.15 و 10.15 يمكن ان نحسب التردد الزاوي للجسم والزنبرك على النحو التالي:

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{5.00N/m}{200\times10^{-3}kg}} = 5.00rad/\sec$$

والزمن الدوري يكون

$$T = \frac{2p}{w} = \frac{2p}{5.00rad/\sec} = 1.26\sec$$

(B) باستخدام المعادلة 17.15 نحصل على

$$v_{max} = \omega A = (5.00\ rad/s)(5.00x10^{-2}m)=0.250\ m/s$$

(C) باستخدام المعادلة 18.15 نحصل على

$$a_{max} = \omega^2 A = (5.00\ rad/s)^2\,(5.00x10^{-2}m)=1.25\ m/s^2$$

(D) سنقوم بحساب ثابت الطور phase constant من خلال استخدام الشروط الابتدائية للحركة حيث x=A و t=0 نحصل على

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

$$x(0) = A\cos\phi = A$$

وهذا يخبرنا ان $\phi=0$. وعليه فان الحل سيكون على الشكل التالي $x=A\cos\omega t$. وباستخدام هذه المعادلة يمكن ان نجد المعادلات المطلوبة للموضع والسرعة والعجلة على النحو التالي:

$$x = A\cos\omega t = (0.0500\text{m})\cos 5.00\,t$$

$$v = \omega A\sin\omega t = -(0.250\text{m/s})\sin 5.00t$$

$$a = -\omega^2 A\cos\omega t = -(1.25\text{m/s}^2)\cos 5.00t$$

ماذا لو؟ ان الجسم سحب لمسافة $x_i = 5.00\text{cm}$، ولكن بسرعة ابتدائية مقدراها $v_i = -0.1\text{m/s}$؟ نلاحظ هنا ان الجزء (A) من الحل لا يتأثر لان الزمن الدوري لا يعتمد على الشروط الابتدائية للحركة. أما الأجزاء (B) و (C) و (D) من الحل سوف يتغير، وذلك على النحو التالي:

$$x(0) = A\cos\phi = xi \qquad (1)$$

$$v(0) = -\omega A\sin\phi = vi \qquad (2)$$

بتقسيم المعادلة (2) على المعادلة (1) نحصل على ثابت الطور وهو

$$\frac{-wA\sin f}{A\cos f} = \frac{v_i}{x_i}$$

$$\tan f = -\frac{v_i}{wx_i} = -\frac{-0.100m}{(5.00rad/s)(0.0500m)} = 0.400$$

$$f = 0.21p$$

من المعادلة (1) يمكن ان نحسب قيمة A

$$A = \frac{x_i}{\cos f} = \frac{0.0500m}{\cos(0.12p)} = 0.0539m$$

وعليه تكون السرعة القصوى في هذه الحالة هي

$$v_{max} = \omega A = (5.00 \text{rad/s})(5.39\text{x}10^{-2}\text{m}) = 0.269 \text{ m/s}$$

وبالنسبة لأقصى عجلة يصل لها الجسم في هذه الحالة هي

$$a_{max} = \omega^2 A = (5.00 \text{rad/s})^2 \, (5.39\text{x}10^{-2}\text{m}) = 1.35 \text{ m/s}^2$$

وبالتالي تكون معادلات الحركة على النحو التالي:

$$x = (0.0539\text{m}) \cos (5.00\, t+0.12\pi)$$

$$v = - (0.269\text{m/s}) \sin (5.00\, t+0.12\pi)$$

$$a = - (1.35\text{m/s}^2) \cos (5.00\, t+0.12\pi)$$

ملاحظة: بالتأكيد يمكن الوصول لهذه الاجابات لو اعتمدنا في الحل على الطاقة كأساس للتغير في الحركة. وهذا ما سوف نقوم بدراسته في الجزء التالي من الموضوع.

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

3.15 طاقة الحركة التوافقية البسيطة Energy of the simple harmonic oscillator

لنقوم الآن بحساب الطاقة الميكانيكية لنظام الجسم المتصل بالزنبرك الموضح في الشكل 1.15. وبما ان السطح عديم الاحتكاك، فإننا نتوقع أن تكون الطاقة الميكانيكية للنظام ثابتة، نفرض أيضا إن كتلة الزنبرك مهملة، فان الطاقة الحركية للنظام تتعلق فقط بكتلة الجسم. وباستخدام المعادلة 15.15 للتعبير عن الطاقة الحركية للجسم نحصل على:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mw^2A^2\sin^2(wt+f) \qquad (15.19)$$

وطاقة الوضع المختزنة في الزنبرك لأي استطالة تحدث له تعطى بـــ $½kx^2$ وباستخدام المعادلة 6.15 نحصل على

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(wt+f) \qquad (15.20)$$

نلاحظ إن كلا من طاقة الحركة K وطاقة الوضع U كميات موجبة دائماً. لان $\omega^2=k/m$، وبالتالي تكون الطاقة الميكانيكية للحركة التوافقية البسيطة هي

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2\left[\sin^2(wt+f) + \cos^2(wt+f)\right]$$

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

ومن المعادلة $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$، فان الكمية بين القوسين المربعين [] تساوي الوحدة، ولهذا فان المعادلة السابقة تصبح على النحو التالي:

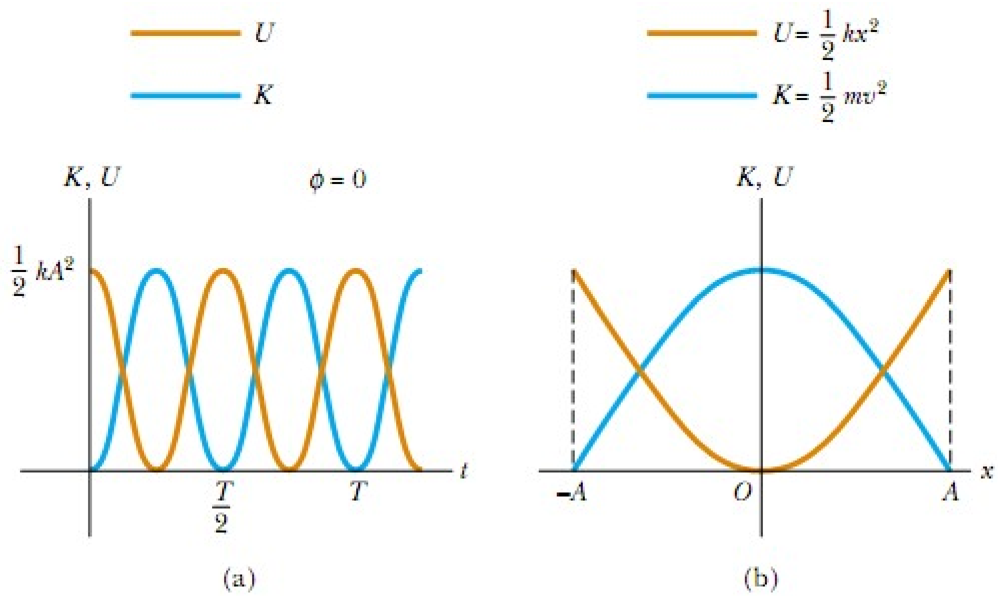
$$E=\frac{1}{2}kA^2 \qquad (15.21)$$

وعليه فان الطاقة الميكانيكية الكلية للحركة التوافقية البسيطة ثابتة وتتناسب طرديا مع مربع السعة. لاحظ ان طاقة الوضع U تكون صغيرة عندما تكون طاقة الحركة K كبيرة، والعكس صحيح، لان مجموعهما دائما ثابتاً. في الحقيقة، الطاقة الميكانيكية الكلية تساوي أقصى طاقة وضع عندما $x=\pm A$ لان السرعة في هذه الحالة تساوي صفر، ولهذا لا يكون هناك طاقة حركة. عند نقطة الاتزان فإن $U=0$ لان $x=0$، وتكون الطاقة الكلية تساوي مرة أخرى $\frac{1}{2}kA^2$. أي إن

$$E=\frac{1}{2}mv_{\max}^2=\frac{1}{2}mw^2A^2=\frac{1}{2}m\frac{k}{m}A^2=\frac{1}{2}kA^2 \qquad \text{(at x=0)}$$

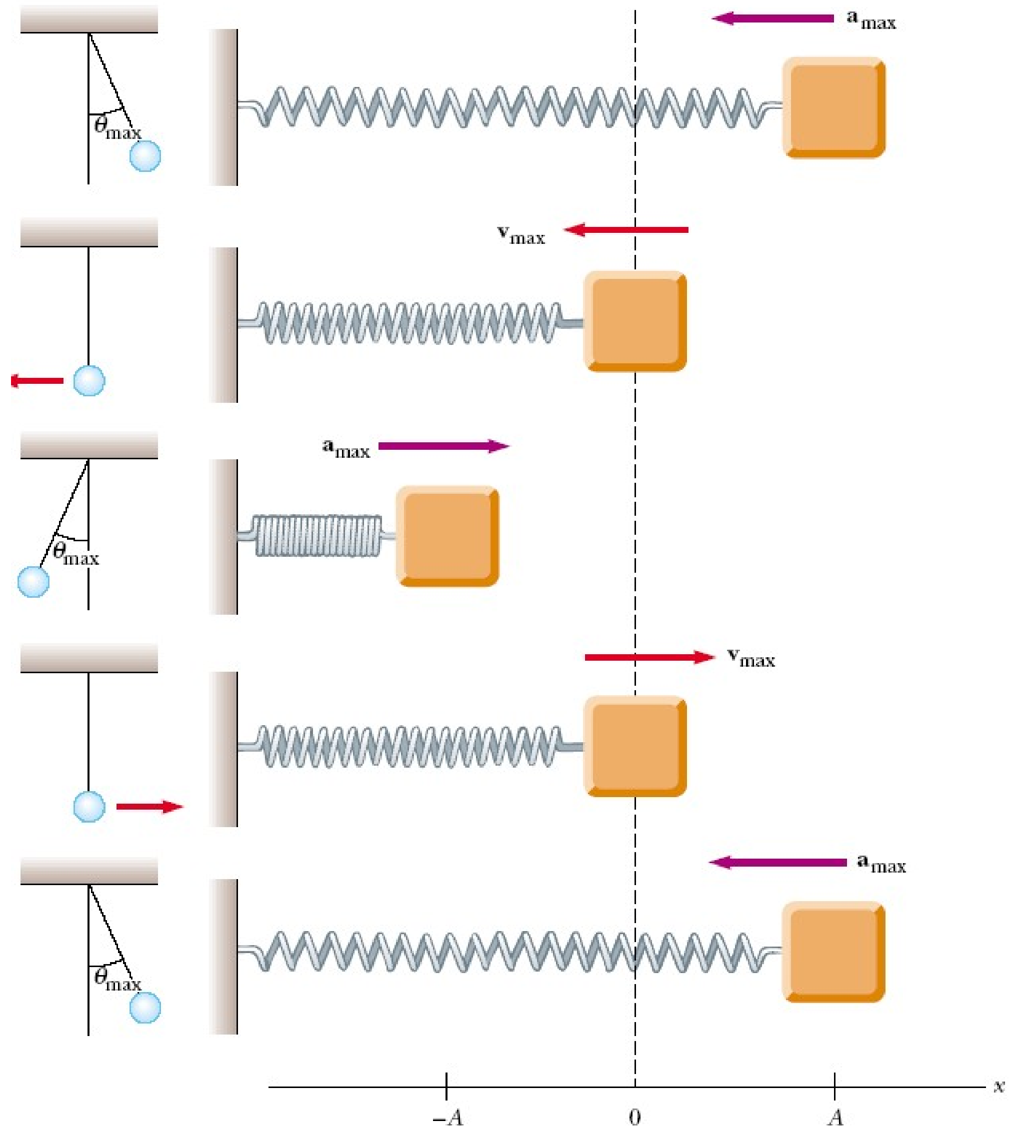
برسم العلاقة بين طاقة الحركة وطاقة الوضع مع الزمن كما في الشكل a10.15، عندما تكون قيمة $\varphi=0$. وكما ذكرنا مسبقا فان كلا من طاقة الحركة وطاقة الوضع دائما موجبة، ودائما حاصل جمعهما يساوي مقدار ثابت وهو الطاقة

الكلية للنظام والذي يساوي $\frac{1}{2} kA^2$. التغيرات في الطاقة الحركية وطاقة الوضع بالنسبة لموضع الجسم x موضحة في الشكل b10.15.



الشكل 10.15 (a) يوضح طاقة الحركة وطاقة الوضع كدالة في الزمن للحركة التوافقية البسيطة عند f=0. (b) يوضح طاقة الحركة وطاقة الوضع كدالة في الموضع للحركة التوافقية البسيطة. وفي كلا المنحنيين لاحظ ان K+U دائما قيمة ثابتة.

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com



t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$T/4$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$T/2$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$3T/4$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$

شكل 11.15

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

الطاقة باستمرار تتحول بين طاقة الوضع المختزنة في الزنبرك وطاقة الحركة للجسم. الشكل 11.15 يوضح الموضع والسرعة والعجلة وطاقة الحركة وطاقة الوضع للجسم والزنبرك في دورة كاملة من حركته. معظم ما قمنا بشرحه حتى الآن موضح في هذا الشكل. ولهذا يجب عليك عزيزي القارئ إن تدرسه بعناية.

في النهاية، يمكننا استخدام مبدأ حفظ الطاقة لتعيين السرعة للجسم عند أي موضع من خلال الطاقة الكلية للنظام عند أي موضع x.

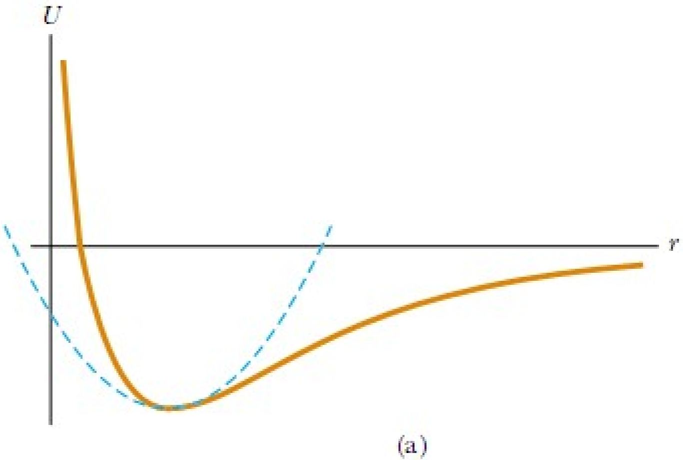
$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

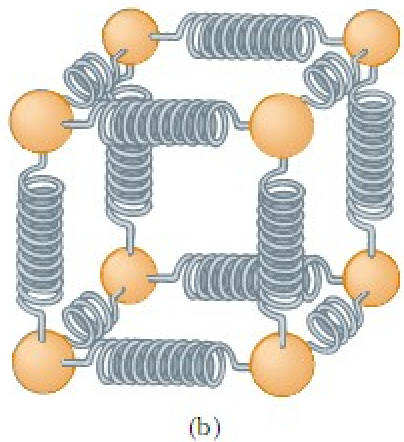
$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm w\sqrt{A^2 - x^2} \qquad (15.22)$$

عند فحص المعادلة 22.15 لنرى إنها تتفق مع هذه الحالة، نجد إنها تثبت حقيقة وهي إن السرعة تكون عظمى عند x=0 وتكون صفر عند نقطة العودة أي عند أقصى إزاحة x=±A.

بعد ان قمنا بشرح موسع للحركة التوافقية البسيطة سوف نقوم بتطبيق ذلك على الكثير من النماذج العملية التي تتحرك بحركة توافقية بسيطة. مثل دراسة القوة التي تربط الذرات بعضها ببعض. الشكل a12.15 يوضح هذا الأمر حيث ان ازاحة بسيطة عن موضع الاتزان فان منحنى طاقة الوضع يظهر على شكل منحنى قطع ناقص، وهذا يمثل طاقة وضع متذبذب توافقي. وعليه يمكن ان نشبه القوة التي تربط الذرات ببعضها البعض بزنبرك صغير يربط بين الذرات كما في الشكل b12.15. هذا بالاضافة إلى الكثير من الظواهر العملية التي يمكن ان ندرسها من خلال الحركة التوافقية البسيطة.

الشكل 12.15 (a) اذا كانت الذرات في الجزيئات لا تتحرك بعيدا عن مواضع اتزانها، فان منحنى طاقة الوضع كدالة في المسافة بين الذرات يشبه تمام منحنى طاقة الوضع كدالة في الموضع للجسم المتحرك حركة توافقية بسيطة (المنحنى الازرق). (b) القوة بين الذرات في الاجسام الصلبة يمكن تشبيهها بزنبرك يربط الذرات المتجاورة.





د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

مثال 4.15 حركة اهتزازية على سطح افقي

عربة كتلتها 0.500kg متصلة بزنبرك (k=20.0N/m) يتذبذب على سطح افقي عديم الاحتكاك. (A) احسب الطاقة الكلية للنظام واقصى سرعة للعربة اذا كانت سعة الحركة 3.00cm، (B) ما هي سرعة العربة عندما تكون على بعد 2.00cm، (C) احسب كلا من طاقة الحركة وطاقة الوضع عندما تكون العربة على بعد 2.00cm.

الحل: باستخدام المعادلة 21.15، نحصل على

$$E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}(20.0N/m)(3.00\times10^{-2}m)^2=9.00\times10^{-3}J$$

عندما تكون العربة عن x=0، فان U=0 وتكون طاقة الحركة اكبر ما يمكن

$$E=\frac{1}{2}mv_{\max}^2=9.00\times10^{-3}J$$

$$v_{\max}=\sqrt{\frac{2(9.00\times10^{-3}J)}{0.500kg}}=0.190m/s$$

(B) بتطبيق المعادلة 22.15 نحصل على

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{20{,}0N/m}{0.500kg}\left[(0.0300m)^2 - (0.0200m)^2)\right]}$$

$$v = \pm 0.141 m/s$$

الإشارة الموجبة والسالبة تدل على أن العربة ممكن أن تتحرك لليمين أو لليسار في تلك اللحظة.

(C) باستخدام النتائج التي حصلنا عليها في الجزء (B)، نجد ان

$$K = \tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2}(0.500kg)(0.141m/s)^2 = 5.00\times10^{-3}J$$

$$U = \tfrac{1}{2} kx^2 = \tfrac{1}{2}(20.0N/m)(0.0200m)^2 = 4.00\times10^{-3}J$$

لاحظ إن الطاقة الكلية E تساوي مجموع طاقتي الحركة K وطاقة الوضع U

ماذا لو؟ إن حركة العربة في المثال بدأت عندما كانت العربة عند x=3.00cm وبسرعة ابتدائية مقدارها v=-0.100m/s. ما هي سعة الحركة وما هو أقصى سرعة للعربة؟

لاحظ إن هذه الحالة تشبه تماماً الحالة التي ناقشناها في المثال 3.15، ولكننا هنا سوف نعتمد على الطاقة لإيجاد المطلوب. سنبدأ أولا بحساب الطاقة الكلية للنظام عند الزمن t=0،

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$
$$= \frac{1}{2}(0.500kg)(-0.100m/s)^2 + \frac{1}{2}(20.0N/m)(0.30m)^2$$
$$= 1.15\times10^{-2}\,J$$

ولإيجاد سعة الحركة، نقوم بمساواة الطاقة الكلية بطاقة الوضع عندما تكون العربة عند أقصى نقطة لها في الحركة

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$
$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2(1.15\times10^{-2}\,J)}{20.0N/m}} = 0.0339m$$

ولإيجاد أقصى سرعة للعربة سنقوم بمساواة الطاقة الكلية مع طاقة الحركة عندما تكون العربة عند نقطة الاتزان.

$$E = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$
$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.15\times10^{-2}\,J)}{0.500kg}} = 0.214m/s$$

وهذه القيمة اكبر من القيمة السابقة وهذا متوقع لان العربة تمتلك في هذه الحالة سرعة ابتدائية عند الزمن t=0.

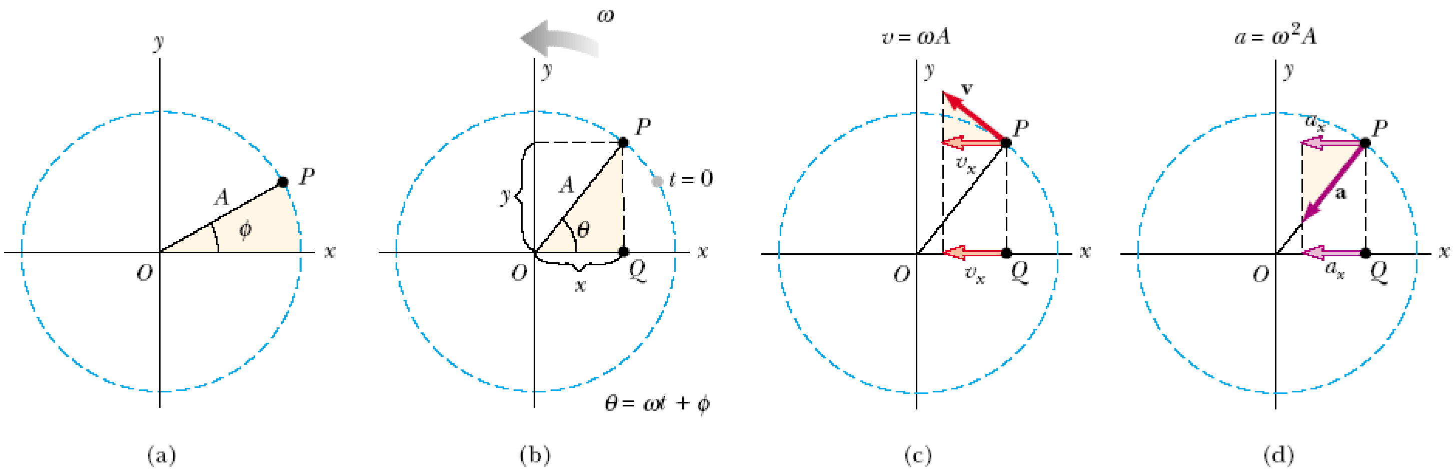
4.15 مقارنة الحركة التوافقية البسيطة مع الحركة الدائرة المنتظمة Comparing simple harmonic motion with uniform circular motion

الكثير من الأجهزة التي نستخدمها في حياتنا العملية تظهر علاقة بين الحركة الاهتزازية والحركة الدورانية. على سبيل المثال، حركة مكبس محرك السيارة (الشكل a13.15) يتحرك للأعلى والأسفل بحركة اهتزازية تنتقل إلى حركة دورانية إلى عجلات السيارة. أيضا تتكرر هذه الحالة في حركة القطارات البخارية (الشكل b13.15). في هذا الجزء سنقوم بشرح العلاقة بين الحركة الاهتزازية والحركة الدورانية وهذه العلاقة سوف تفيدنا كثيرا في شرح النظرية الكهرومغناطيسية لاحقاً.

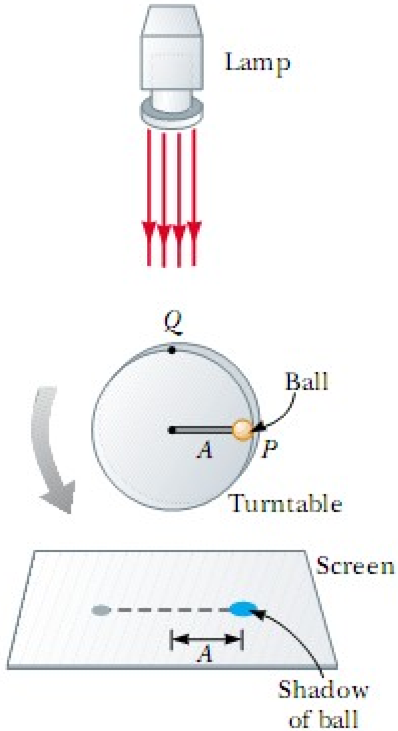
(a) (b)

الشكل 13.15 (a) يوضح مكبس محرك سيارة يتحرك حركة توافقية بسيطة. هذه الصورة توضح مقطع جانبي لمكبسين. حركة المكبس تسبب الحركة الدائرية لناقل الحركة المتصل بعجلات السيارة. (b) الحركة للامام والخلف في مكبس محرك بخاري تسبب حركة دائرية لاطارات القطار.

الشكل 14.15 يظهر مسقط رأسي لتجربة تظهر العلاقة بين الحركتين الاهتزازية والدورانية. كرة متصلة بذراع نصف قطره A يدور بانتظام، ويسقط على مستوى الدوران الأفقي شعاع ضوئي يصدر من مصباح. نستقبل ظل الكرة على شاشة. وبحركة الكرة الدورانية بسرعة زاوية منتظمة نشاهد ظلها يتحرك حركة توافقية بسيطة.



الشكل 15.15 يوضح العلاقة بين الحركة الدائرية للنقطة P والحركة التوافقية البسيطة للنقطة Q.



الشكل 14.15 تجربة تظهر العلاقة بين الحركة التوافقية البسيطة والحركة الدائرة المنتظمة. عندما تدور الكرة بسرعة زاوية ثابتة، فإن ظل الجسم الظاهر على شاشة يتحرك حركة توافقية بسيطة ذهابا وايابا.

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

اعتبر جسم عند النقطة P على محيط الدائرة نصف قطرها A، كما في الشكل a15.15، إذا كان الخط OP يعمل زاوية مقدارها ϕ بالنسبة لمحور x عند الزمن $t=0$. وسوف نقوم بتسمية هذه الدائرة بدائرة المرجع، وبأخذ النقطة P عند الزمن $t=0$ كمرجع. إذا كان الجسم يتحرك على محيط الدائرة بسرعة زاوية منتظمة ω حتى OP تعمل زاوية مقدارها θ مع محور x، كما في الشكل b15.15، عند زمن $t>0$، فان الزاوية بين OP ومحور x هي $\theta=\omega t+\phi$. وباستمرار حركة الجسم على محيط الدائرة فان مسقط النقطة P على محور x، النقطة Q، تتحرك للأمام والخلف على محور x بين النقطتين $x=\pm A$.

لاحظ إن النقاط P و Q لها دائما نفس إحداثيات x. من المثلث OPQ، نجد أن الإحداثي x هو

$$x(t) = A\cos(\omega t+\phi) \qquad (15.23)$$

هذه المعادلة هي نفسها المعادلة 6.15 التي تظهر ان النقطة Q تتحرك حركة توافقية بسيطة على محور x، وعليه نستنتج أن

الحركة التوافقية البسيطة على خط مستقيم ممكن أن نمثلها بمسقط نقطة تتحرك على مسار دائري بسرعة منتظمة.

كذلك يمكن أن نصل إلى نفس النتيجة لو اعتبرنا مسقط النقطة P على محور y (الشكل b15.15). **وعليه نستنتج ان الحركة الدائرية المنتظمة تعتبر حركة مركبة من حركة توافقية بسيطة على محور x حركة توافقية على محور y بفارق في الطور بينهما مقداره 90^o.**

هذا التفسير الهندسي يوضح إن الزمن اللازم للنقطة P لتعمل دورة كاملة على محيط الدائرة يساوي الزمن الدوري T للحركة التوافقية البسيطة بين النقطتين $x=\pm A$. وبالتالي فان السرعة الزاوية ω للنقطة P هي نفسها التردد الزاوي ω للحركة التوافقية البسيطة على محور x (ولهذا السبب نستخدم نفس الرمز لهما). أما ثابت الطور ϕ للحركة التوافقية البسيطة يعادل الزاوية الابتدائية التي يعملها OP مع محور x. ونصف القطر A للدائرة يساوي سعة الحركة التوافقية البسيطة.

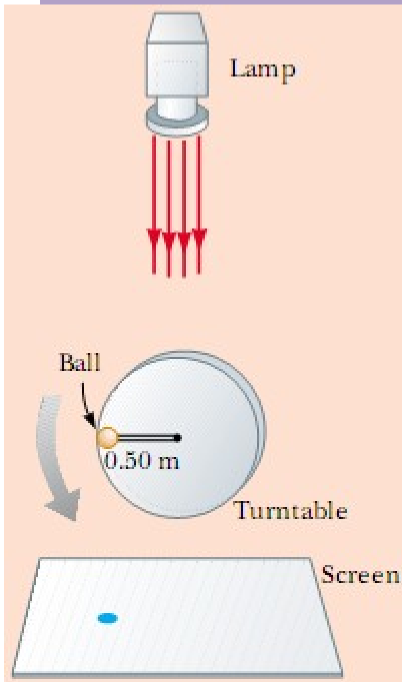
لان العلاقة بين السرعة الخطية والزاوية للحركة الدائرية $v=r\omega$، الجسم الذي يتحرك على محيط دائرة نصف قطرها A له سرعة مقدارها ωA. من التمثيل الهندسي في الشكل c15.15، نلاحظ إن المركبة x للسرعة يساوي $-\omega A\sin(\omega t+\phi)$. وبالتعريف فان النقطة Q لها سرعة تعطى بـــ dx/dt. باشتقاق المعادلة 23.15 بالنسبة للزمن، نجد أن سرعة النقطة Q هي نفسها سرعة المركبة x للنقطة P.

اتجاه العجلة للنقطة P على محيط الدائرة هو في اتجاه مركز الدائرة O وله مقدار $v^2/A=\omega^2A$. من الشكل الهندسي الموضح في الشكل d15.15، نجد أن المركبة x للعجلة تساوي $-\omega^2A\cos(\omega t+\phi)$. هذه القيمة هي نفسها العجلة لمسقط النقطة Q على محور x، ويمكن التحقق من ذلك من خلال المشتقة الثانية للمعادلة 23.15.

سؤال للتفكير 6.15

الشكل 16.15 يبين موقع جسم يتحرك على مسار دائري عند الزمن t=0. سلط عليه ضوء من الأعلى والظل المتكون للجسم يستقبل على شاشة اسفل الحركة الدائرية. فاذا كانت قيمة السعة وثابت الطور للحركة التوافقية البسيطة للظل هي (a) 0.50m و 0، (b) 1.00m و 0، (c) 0.50m و π، (d) 1.00m و π.

الشكل 16.15 جسم يتحرك حركة دائرية يظهر ظل الجسم على شاشة في الاسفل. موضحة موضع الجسم عند أي لحظة



شكل 16.15

مثال 5.15 حركة دائرية بسرعة زاوية منتظمة

جسم يدور عكس عقارب الساعة في حركة دائرية نصف قطرها 3.00m بسرعة زاوية ثابتة 8.00rad/s. عند الزمن t=0، الجسم له مركبة x تساوي 2.00m والجسم يتحرك إلى اليمين. (A) اوجد المركبة x كدالة في الزمن. (B) أوجد مركبة السرعة والعجلة في اتجاه المحور x عند أي زمن.

الحل: لان سعة الحركة للجسم تساوي نصف قطر الدائرة التي يتحرك عليها الجسم بسرعة ω=8.00rad/s، نحصل على

$$x = A\cos(\omega t + \phi) = (3.00m)\cos(8.00t + \phi)$$

يمكن ان نحسب ϕ من خلال استخدام الشروط الابتدائية للحركة x=2.00m عند الزمن t=0.

$$2.00m = (3.00m)\cos(0+\phi)$$

$$f = \cos^{-1}\left(\frac{2.00m}{3.00m}\right)$$

$$f = 48.2^{o} = 0.841 rad$$

وعليه تكون

$$x = (3.00m)\cos(8.00t+0.841)$$

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

ولكن لان الجسم يتحرك لليمين وهذا يعني أن ثابت الطور ϕ يجب ان يكون سالبا أي ϕ=-0.84 rad وبالتالي فان الإجابة الصحيحة هي على النحو التالي:

$$x = (3.00m)\cos(8.00t-0.841)$$

لاحظ أن الزاوية ϕ يجب أن تكون بوحدة الـ rad.

(B) لإيجاد السرعة v_x

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-3.00m)(8.00rad/s)\sin(8.00t-0.841)$$
$$= -(24.0m/s)\sin(8.00t-0.841)$$

ولإيجاد العجلة a_x

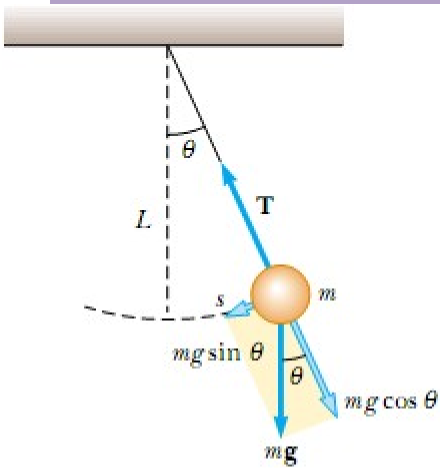
$$a_x = \frac{dv}{dt} = (-24.0m/s)(8.00rad/s)\cos(8.00t-0.841)$$
$$= -(192m/s^2)\cos(8.00t-0.841)$$

ومن هذه النتائج نستنتج أن، v_{max}=24.0m/s وان a_{max}=192m/s^2.

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

5.15 البندول The pendulum

يعتبر البندول البسيط أحد الأنظمة الميكانيكية التي تعمل حركة دورية. يتكون البندول البسيطة من جسم كتلته m معلق بخيط طوله L في أحد طرفيه والطرف الأخر مثبت، كما في الشكل 17.15. تحدث الحركة على المستوى الأفقي وتستمر تحت تأثير قوة الجاذبية. وسوف نثبت انه عندما تكون الزاوية θ صغيرة (اقل من 10^{o})، فان حركة البندول هي حركة توافقية بسيطة.



الشكل 17.15 عندما تكون q صغيرة، يتذبذب البندول بحركة توافقية بسيطة حول موضع الاتزان عند q=0. القوة الاسترجاعية - mgsinq، وهي المركبة المماسية لقوة وزن الجسم بالنسبة لمنحنى الحركة.

القوة المؤثرة على الجسم المعلق هي قوة الشد T التي تنتج في الخيط وقوة الجاذبية الأرضية mg. المركبة المماسية mgsinθ تؤثر دائما في الاتجاه الذي يجعل الزاوية θ=0، وفي عكس الإزاحة التي تحدث للجسم بالنسبة لموضع الاتزان. ولهذا فان المركبة المماسية تعتبر القوة الاسترجاعية restoring force، ويمكننا هنا أن نطبق قانون نيوتن الثاني على الحركة في الاتجاه المماسي.

$$F_t = -mg\sin q = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

حيث s هي موضع الجسم مقاسا بطول المنحنى والإشارة السالبة تشير إلى أن القوى المماسية تعمل في اتجاه نقطة الاتزان. ولان s=Lθ وحيث أن L ثابتة فان المعادلة السابقة تصبح على النحو التالي:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin q$$

باعتبار ان θ هي الموضع، دعنا نقارن هذه المعادلة مع المعادلة 3.15 - **هل تمتلك نفس الشكل الرياضي؟** الشق الأيمن يتناسب مع sinθ وليس مع θ، وهذا قد يقودنا إلى أن نتوقع أن تكون هذه الحركة لا تخضع للحركة التوافقية البسيطة، لان هذه المعادلة ليس لها نفس الشكل الرياضي للمعادلة 3.15. على كل حال، إذا افترضنا إن الزاوية θ صغيرة فمن الممكن أن نستفيد من التقريب $\sin\theta \approx \theta$، وعليه فان هذا التقريب سوف يجعل المعادلة على النحو التالي:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{g}{L}q \qquad (15.24)$$

الآن لدينا معادلة حركة توافقية بسيطة مثل المعادلة 3.15، ومنها نستنتج ان حركة البندول بإزاحات صغيرة هي حركة توافقية بسيطة. وعليه يمكن أن نكتب دالة الزاوية θ تكتب على إن $\theta=\theta_{max}\cos(\omega t+\phi)$، حيث θ_{max} هي اكبر موضع زاوي للبندول والتردد الزاوي ω يعطى على النحو التالي:

$$w = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad (15.25)$$

اما الزمن الدوري فيعطى على النحو التالي:

$$T = \frac{2p}{w} = 2p\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (15.26)$$

ومن هنا نستنتج ان الزمن الدوري والتردد للبندول البسيط يعتمدان على طول الخيط وعلى عجلة الجاذبية الارضية. ولان الزمن الدوري لا يعتمد على كتلة الجسم المعلق في البندول، نستنتج ان كل بندول بسيط له نفس الطول له نفس الزمن الدوري بالطبع اذا كانوا على الكرة الارضية تحت تأثير عجلة الجاذبية الارضية. المقارنة بين حركة الزنبرك وحركة البندول البسيط موضحة في الشكل 11.15.

البندول البسيط يمكن ان يتسخدم في تحديد الوقت لان زمنه الدوري يعتمد فقط على طول البندول وعلى عجلة الجاذبية الارضية، كما يمكن ان يستخدم كاداة لقياس عجلة الجاذبية الارضية، وهذه القياسات مهمة جداً لرصد التغيرات في عجلة الجاذبية الارضية في مناطق مختلفة على سطح الكرة الارضية وربما تساعد هذه القياسات في التنقيب عن النفط في بعض الاحيان.

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

سؤال للتفكير 7.15

ساعة قديمة تعتمد في عملها على البندول البسيطة، افترض انه تم ضبط الساعة، إذا قام شخص ما وسحب الجسم المعلق ببندول الساعة هل تتوقع ان يتحرك البندول (a) أبطء، (b) أسرع (c) لا يحدث تغير؟

سؤال للتفكير 8.15

افترض إن الساعة في السؤال السابق تم أخذها إلى مكان مرتفع كقمة جبل هل تتوقع أن يتحرك البندول (a) أبطء، (b) أسرع (c) لا يحدث تغير؟

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

مثال 6.15 الربط بين الزمن والطول

اقترح العالم Christian Huygens (1629-1695)، وحدة للطول تعتمد على فكرة البندول البسيط وهي طول البندول الذي له زمن دوري يساوي 1s . فكم يبلغ طول هذه الوحدة بالنسبة للمتر؟

الحل: بحل المعادلة 26.15

$$L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(1.00s)^2(9.80m/s^2)}{4\pi^2} = 0.248m$$

وعليه سيكون المتر اقصر بقليل من طوله الحالي بمقدار ربع طوله الحالي.

ماذا لو؟ كان العالم Huygens في كوكب أخر غير الأرض عندما قدم هذه الفكرة لوحدة الطول. فكم تبلغ قيمة الجاذبية لهذا الكوكب؟

الحل: بحل المعادلة 26.15

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2(1.00m)}{(1.00)^2} = 4\pi^2 m/s^2 = 39.5m/s^2$$

لا يوجد أي كوكب في المجموع الشمسية له هذه القيمة الكبيرة من عجلة الجاذبية الأرضية.

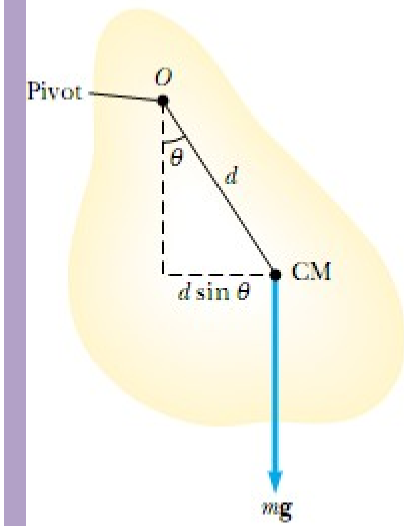
د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

البندول الطبيعي Physical Pendulum

افترض انك قمت بموازنة حمالة ملابس معلق بها جاكيت بواسطة إصبع السبابة. فإذا ما قمت بإعطاء الجسم المتزن إزاحة زاوية صغيرة. فان الجسم المعلق سوف يتذبذب. وإذا كان الجسم المعلق يتذبذب حول محور لا يمر بمركز الثقل وان الجسم لا يمكن وصفه بجسم نقطي فإننا لا نستطيع ان نتعامل معه على انه بندول بسيط. في هذه الحالة يسمى هذا البندول بالبندول الطبيعي physical pendulum.

اعتبر محور جسم صلب عند النقطة O (Pivot) على مسافة d من مركز كتلة الجسم كما في الشكل 18.15. فان قوة الجاذبية الارضية سوف تسبب ازدواج torque على محور الجسم عبر النقطة O، ومقدار هذا الازدواج هو mgd sinθ حيث θ موضحة في الشكل 18.15، باستخدام قانون نيوتن الثاني للدوران $\Sigma\tau=I\alpha$، حيث I عزم القصور الذاتي moment of inertia على محور الجسم عبر النقطة O، نحصل على،

$$-mgd\sin q = I\frac{d^2q}{dt^2}$$



الشكل 18.15 بندول طبيعي معلق عند النقطة O

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

الاشارة السالبة تشير الى ان الازدواج على النقطة O يعمل على تقليل الزاوية θ. أي ان، قوة الجاذبية الارضية تنتج قوة استرجاعية في شكل قوة ازدواج. فاذا ما افترضنا ان الزاوية θ صغيرة، فاننا يمكن ان نطبق التقريب $\sin\theta \approx \theta$، وعليه تكون معادلة الحركة على النحو التالي:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right)q = -w^2 q \qquad (15.27)$$

ولان هذه المعادلة تشبه المعادلة 3.15، فإنها معادلة حركة توافقية بسيطة. وحل المعادلة 27.15 هو $\theta=\theta_{max}\cos(\omega t+\phi)$، حيث θ_{max} تعبر عن أقصى إزاحة زاوية وعليه فان

$$w = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

والزمن الدوري يكون

$$T = \frac{2p}{w} = 2p\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad (15.28)$$

من الممكن أن نستخدم هذه المعادلة في قياس عزم القصور الذاتي للجسم الصلب. إذا كان موقع مركز الكتلة والمسافة d معلومة فان عزم القصور يمكن ان يحسب عملياً بقياس الزمن الدوري للجسم. وفي النهاية، لاحظ ان المعادلة

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

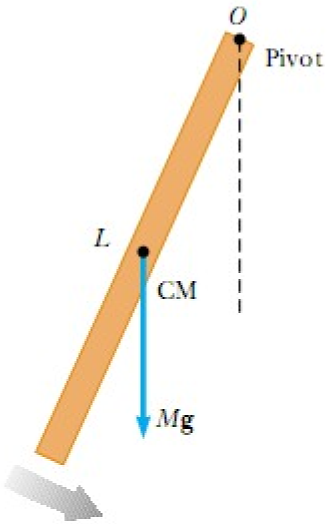
28.15 تختصر إلى الزمن الدوري للبندول البسيط (المعادلة 26.15) عندما تكون $I=md^2$ أي عندما تكون الكتلة مركزة في مركز ثقل الجسم.

مثال 7.15 ساق يتأرجح

ساق منتظم كتلته M وطوله L معلق من احد طرفيه والطرف الأخر ترك ليتذبذب على مستوى أفقي (الشكل 19.15). اوجد الزمن الدوري للحركة إذا كانت سعة الحركة صغيرة

الحل: من معلوماتنا السابقة نعرف إن عزم القصور الذاتي للساق هو $1/3ML^2$. المسافة d من مركز التعليق إلى مركز الثقل هي L/2. بالتعويض عن هذه المعلومات في المعادلة 15.28 نحصل على

$$T = 2p\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg(L/2)}} = 2p\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$



الشكل 19.15 يمثل بندول طبيعي مكون من ساق يتذبذب حول نقطة ارتكازه $d=L/2$ و $I=1/3\ ML^2$

بندول اللي Torsional Pendulum

يظهر الشكل 20.15 جسم صلب معلق بسلك مثبت من الأعلى بدعامة ثابتة. عندما لف الجسم بزاوية θ، فان السلك الملتوي يبذل على الجسم قوة ازدواج استرجاعية تتناسب طرديا مع زاوية اللي وعليه فان الازدواج τ يعطى على النحو التالي:

$$\tau = -\kappa\theta$$

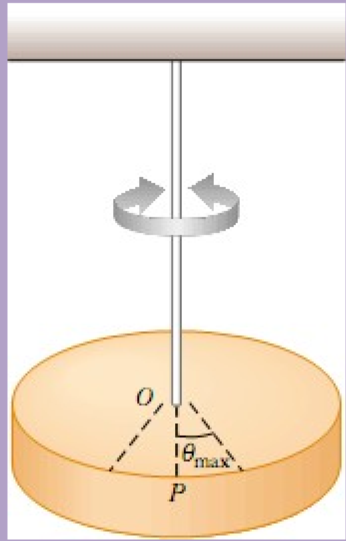
حيث κ هي ثابت اللي torsion constant للسلك. قيمة κ تحسب عن طريق تطبيق ازدواج معين على السل وقياس الزاوية θ. بتطبيق قانون نيوتن الثاني للحركة الدوارنية نحصل على:

$$t = -kq = I\frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{k}{I}q \qquad (15.29)$$

مرة أخرى، هذه معادلة حركة توافقية بسيطة تتذبذب بتردد زاوي $w = \sqrt{k/I}$ والزمن الدوري هو

$$T = 2p\sqrt{\frac{I}{k}} \qquad (15.29)$$



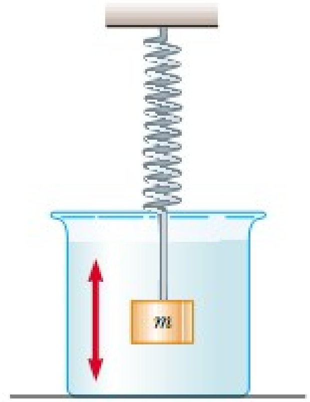
الشكل 20.15 بندول لي مكون من جسم معلق في سلك. ويتذبذب الجسم حول الخط OP بسعة q_{max}.

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

وهذا يدعى بندول اللي torsional pendulum. وهنا لا يوجد قيد لقيمة زاوية اللي طالما ان السلك لازال في حد الليونة elastic limit المسموح بها.

6.15 الاهتزازات المخمدة Damped oscillations

الحركة الاهتزازية التي درسنها حتى الآن هي حركة اهتزازية لنظام مثالي حيث إن النظام يستمر في الاهتزاز إلى مالا نهاية تحت تأثير قوة واحدة هي القوة الاسترجاعية. ولكن في الأنظمة الحقيقية فان قوى غير محافظة مثل قوة الاحتكاك يكون لها تأثير لم يؤخذ في الحسبان. ولهذا فان الطاقة الميكانيكية للنظام تضمحل مع مرور الزمن، ونقول عن هذه الحركة بأنها حركة مخمدة damped. الشكل 21.15 يظهر جسم معلق بزنبرك وفي نفس الوقت الجسم مغمور في سائل.



الشكل 21.15 من الامثلة على الحركة الاهتزازية المخمدة جسم معلق في زنبرك مغمور في سائل.

من أنواع الحركة المخمدة حركة سقوط جسم في سائل حيث تتولد في السائل قوة مضادة تعمل على تقليل سرعة الجسم وتتناسب القوة المضادة مع سرعة الجسم واتجاه القوة في عكس اتجاه الحركة. هذه القوة المضادة ممكن التعبير عنها

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

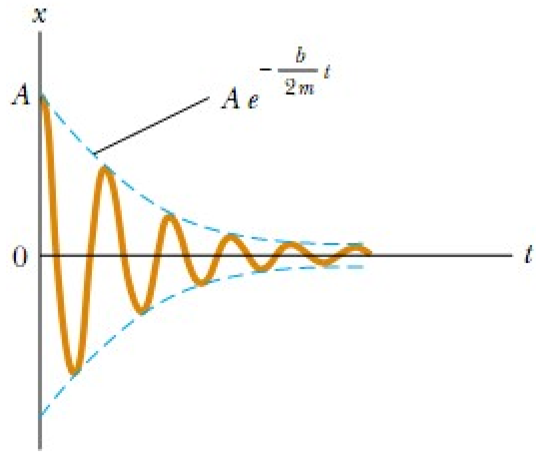
على إنها R=-bv (حيث b ثابت يعرف بمعامل الإخماد damping coefficient) والقوة الاسترجاعية للنظام هي kx–، من الممكن الآن أن نطبق قانون نيوتن الثاني على النحو التالي:

$$\sum F_x = -kx - bv_x = ma_x$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}_x \qquad (15.31)$$

حل المعادلة يتطلب مهارات معينة في الرياضيات قد لا تكون مألوفة لك في هذه المرحلة، ولكن من الممكن أن نبسط الحالة هنا بدون الحاجة إلى إثبات. عندما تكون القوة المضادة صغيرة بالنسبة للقوة الاسترجاعية هذا يتحقق عندما تكون b صغيرة ويكون الحل للمعادلة (31.15) هو

$$x = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(wt + f) \qquad (15.32)$$



الشكل 22.15 يوضح منحنى تغير الموضع بالنسبة للزمن لمتذبذب مخمد. لاحظ النقصان في سعة الحركة مع الزمن.

حيث إن التردد الزاوي يتذبذب بـــ

$$w = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \qquad (15.33)$$

هذه النتيجة من الممكن أن نتحقق منها بتعويض المعادلة 32.15 في المعادلة 31.15.

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

يظهر الشكل 22.15 موقع الجسم كدالة في الزمن عندما يتحرك الجسم حركة اهتزازية في وجود قوة مضادة. وكما هو موضح في الشكل عندما تكون القوة المضادة صغيرة، نجد ان خصائص الحركة الاهتزازية تبقى بدون تغير ولكن سعة الحركة تتناقص مع الزمن، وتكون النتيجة ان تتوقف الحركة في النهاية. أي نظام يكون له نفس السلوك يعرف بالحركة المخمدة damped oscillator. اما الخط الازرق المتقطع في الشكل 22.15، يوضح التغير في سعة الحركة (يعرف بغلاف الحركة envelope) والممثل بدالة اسية موضحة في المعادلة 32.15. يظهر المنحنى اضمحلال السعة بدالة اسية مع الزمن. ويكون اضمحلال الحركة اكبر ما يمكن عندما تصبح القوة المضادة تساوي القوة الاسترجاعية.

من المناسب أن نستخدم التردد الزاوي (المعادلة 33.15) للحركة المخمدة على النحو التالي:

$$w = \sqrt{{w_o}^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

حيث ان $w_o = \sqrt{k/m}$ تمثل التردد الزاوي في حالة غياب القوة المضادة (أي الحركة الغير مخمدة) وتعرف باسم التردد الطبيعي للنظام natural frequency.

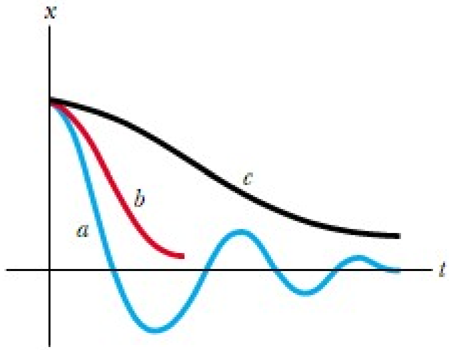
عندما تكون قيمة القوة المضادة اقصى ما يمكن $R_{max}=bv_{max}<kA$، فهذه حالة تعرف باسم تحت حد الاخماد underdamped وفي هذه الحالة تكون الحركة اهتزازية ولكنها مضمحلة وهي الحالة الموضحة بالمنحنى الازرق في

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

الشكل 23.15. وبزيادة قيمة الثابت b فإن سعة الاهتزازات تتناقص بسرعة أكثر. وعندما تصل b إلى قيمة حرجة b_c مثل $b_c/2m=\omega_o$، وفي هذه الحالة لا يوجد اهتزازات وتسمى هذه الحالة بالاخماد الحرج critically damped. وعند الاخماد الحرج فإن النظام لا يظهر حركة اهتزازية انما يتحرك النظام في اتجاه نقطة الاتزان ويتوقف عن الحركة ولا يمكن ان يتجاوز نقطة الاتزان، وهذه الحالة موضحه بالمنحنى الاحمر في الشكل 23.15.

إذا كانت لزوجة الوسط عالية بحيث ان القوة المضادة اكبر من القوة الاسترجاعية أي ان $R_{max}=bv_{max}>kA$ و $b/2m>\omega_o$ فان النظام في هذه الحالة يكون فوق حد الاخماد overdamped. وهنا اذا اعطي للنظام ازاحة فانه لا يتذبذب انما يعود إلى نقطة الاتزان. وكلما زاد الاخماد، فإن الزمن اللازم للنظام لكي يعود الى نقطة الاتزان تزداد، وهذا موضح في المنحنى باللون الاسود في الشكل 23.15. إذا في حالة الاخماد الحرج وفي حالة فوق حد الاخماد لا يوجد تردد زاوي ω والحل في المعادلة 32.15 غير متحقق.

في حالة وجود احتكاك في النظام، فانه في حالة فوق حد الاخماد وتحت حد الاخماد، تؤول طاقة المتذبذب الى الصفر. والفقد في الطاقة الميكانيكية يتحول الى طاقة داخلية للجسم والوسط الذي يتذبذب فيه الجسم.

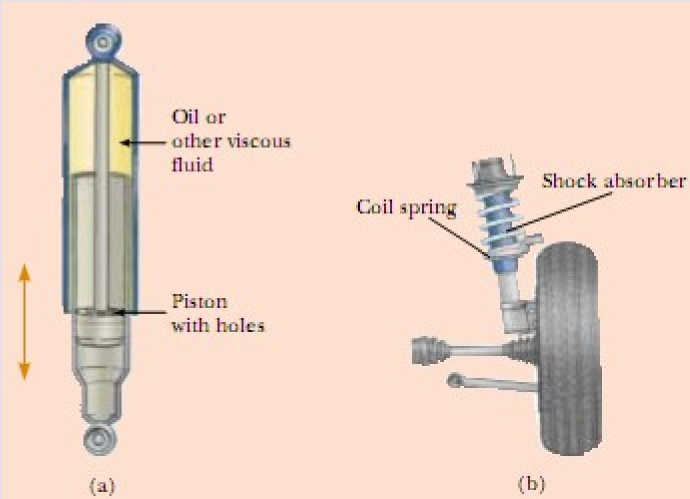


الشكل 23.15 يوضح منحنيات لتغير الموضع مع الزمن في عدة حالات هي (a) حالة تحت حد الاخماد، و(b) حالة الاخماد الحرج، و(c) حالة فوق حد الاخماد.

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

سؤال للتفكير 9.15

نظام تعليق السيارة يتكون من زنبركات ولامتصاص الصدمات كما في الشكل 24.15. فإذا كنت مهندساً ميكانيكيا فهل تصمم نظام التعليق بحيث ان (a) تحت حد الإخماد، (b) عند حد الإخماد (c) فوق حد الإخماد؟



شكل 24.15 (a) ماص الصدمات في السيارة يتكون من مكبس يتحرك داخل اسطوانة بها زيت. عند حدوث الاهتزازات في المكبس فإن الزيت يمر من فتحات بين المكبس والاسطوانة، وهذا يعمل على إخماد الاهتزازات. (b) من أنواع أنظمة التعليق في السيارات استخدام ماص للصدمات يتكون من زنبرك مثبت على عجل السيارة.

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

7.15 الاهتزازات القسرية Forced oscillations

لاحظنا ان الطاقة الميكانيكية للمتذبذب المتعرض للإخماد تتناقص مع الزمن نتيجة للقوة المضادة. ومن الممكن ان نستخدم قوة خارجية تبذل شغلا موجبا لتعويض الفقد في طاقة النظام. في أي لحظة، الطاقة تنتقل إلى النظام من خلال تطبيق قوة تعمل في اتجاه حركة المتذبذب. على سبيل المثال، يمكن جعل الأرجوحة تستمر في الحركة بإعطائها دفعة صغيرة. وبنسبة لسعة الحركة فإنها تبقى ثابتة إذا كانت الطاقة المعطاة في كل دورة تساوي مقدار النقص في الطاقة المفقودة نتيجة الإخماد.

ومن الأمثلة الشائعة للحركة القسرية هو المتذبذب المخمد الذي يؤثر عليه قوة خارجية تتغير دوريا مع الزمن، على النحو $F(t) = F_o \sin\omega t$ حيث w التردد الزاوي للقوة الخارجية، وF_o ثابت. وبصورة عامة، التردد ω للقوة الخارجية تغير بينما يكون التردد الطبيعي ω_o للمتذبذب ثابتا من خلال قيمة k و m. وبتطبيق قانون نيوتن الثاني على هذه الحالة نحصل على

$$\sum F = ma \rightarrow Fo\sin wt - b\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (15.34)$$

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

حل هذه المعادلة طويل ولن نقوم بسرده هنا. وسنكتفي بالناتج فقط لتوضيح المفهوم الفيزيائي له. بعد ان تقوم القوة الخارجية بالتأثير على جسم ساكن فان الجسم يبدأ بالحركة، وتزداد سعة الحركة تباعاً. وبعد فترة من الزمن، عندما تصبح الطاقة الداخلة للنظام من القوة الخارجية في كل دورة تساوي قيمة الطاقة الميكانيكية المتحولة لطاقة داخلية في كل دورة، فإن حالة استقرار steady state سوف تظهر على الحركة في صورة ثبات سعة الحركة. وفي هذه الحالة، فإن المعادلة 34.15 لها الحل التالي:

$$x = A\cos(wt + f) \qquad (15.35)$$

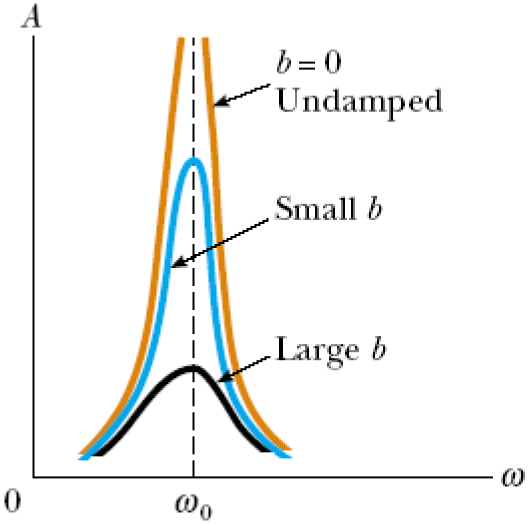
حيث ان

$$A = \frac{F_o / m}{\sqrt{(w^2 - w_o{}^2)^2 + \left(\frac{bw}{m}\right)^2}} \qquad (15.36)$$

حيث $w_o = \sqrt{k/m}$ وهو التردد الطبيعي للمتذبذب الغير مخمد عندما تكون (b=0).

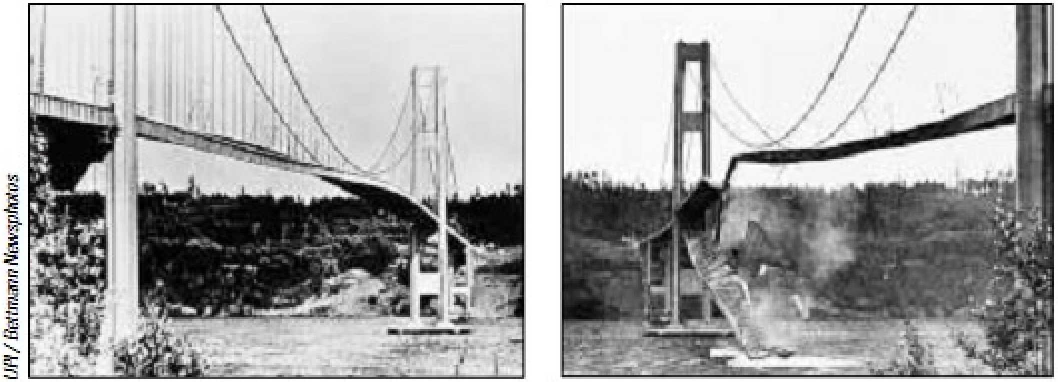
المعادلتين (35.15) و (36.15) تبين ان المتذبذب القسري يتذبذب بتردد القوة الخارجية وسعة المتذبذب تكون ثابتة لكل قيمة محددة للقوة الخارجية لأنها تعمل في حالة الاستقرار. ولقيم إخماد صغيرة، فان السعة تكون كبيرة عندما يكون تردد القوة الخارجية قريبا من التردد الطبيعي للمتذبذب، أو عندما تكون $\omega \cong \omega_o$. أما في حالة الزيادة الكبيرة في السعة عند التردد الطبيعي فان هذا يعرف باسم الرنين resonance، والتردد الطبيعي ω_o يعرف باسم تردد الرنين resonance frequency للنظام.

اما السبب للزيادة الكبيرة في السعة عند التردد الرنيني يعود الى ان الطاقة تتحول إلى النظام في افضل شروطها. ويمكن ان نفهم هذه النقطة من خلال اخذ مشتقة x في المعادلة 35.15، لنحصل على معادلة سرعة المتذبذب. نجد ان السرعة v تتناسب طردياً مع $\sin(\omega t+\phi)$، حيث انها نفس المعادلة التي تصف القوة الخارجية. ولهذا فان القوة الخارجية المطبقة F تكون في نفس طور السرعة. وعليه فإن معدل بذل الشغل على المتذبذب بواسطة القوة F يساوي حاصل الضرب القياسي **F.v**. ويكون حاصل الضرب قيمة عظمى عندما تكون **F** و **v** في نفس الطور، نستنتج من ذلك انه **عند الرنين فان القوة الخارجية في نفس طور السرعة وان الطاقة المتحولة للمتذبذب تكون في أقصى قيمة.**



الشكل 25.15 يوضح منحنى السعة كدالة في التردد للمتذبذب القسري بوجود وعدم وجود اخماد. لاحظ ان السعة تزداد بنقصان الاخماد (b ® 0) ومنحنى الرنين يتسع بزيادة الاخماد. وفي حالة الاستقرار وعند أي تردد للقوة الخارجية فان الطاقة المتحولة للنظام تساوي الطاقة المفقودة بسبب وجود الاخماد، وعليه فان متوسط الطاقة الكلية للحركة يبقى ثابت. في حالة عدم وجود قوة الاخماد (b=0)، فانه من المعادلة 15.36 نرى ان السعة في حالة الاستقرار تصل الى ملا نهاية عندما تؤول w إلى w_0. بمعنى اخر، اذا لم يكن هناك فقد في النظام واذا استمرت القوة الخارجية بالتأثير على النظام نفس طور سرعة حركة الجسم فان سعة الحركة ستستمر في الزيادة (انظر المنحنى البني اللون في الشكل 25.15). ولكن في الحقيقة هذا لا يحدث لانه دائما يكون هناك اخماد.

في دروس لاحقة من هذا الكتاب سوف نكتشف المزيد عن ظاهرة الرنين والتي تحدث في ظواهر مختلفة في الفيزياء. على سبيل المثال، العديد من الدوائر الكهربية لها تردد طبيعي، كذلك الكباري أيضا لها ترددات طبيعية، ومن أمثلة الرنين أيضا الحادثة المروعة التي حدثت في العام 1940، عندما تعرض كوبري Tacoma Narrows Bridge في واشنطن بالولايات المتحدة للدمار نتيجة للتردد الرنيني، وحدث ذلك بسبب قوة الرياح والتي هي في العادة لا تكون قوية لتدمير كوبري ولكن عندما تعمل قوة الرياح بتردد يساوي التردد الطبيعي للكوبري فإن النتيجة تكون كبيرة جدا وقد تبين لاحقا ان هناك خلل في تصميم الكوبري لم يراعي شروط السلامة والأمان.



(a) (b)

الشكل 26.15 (a) في العام 1940 حدث اعصار قوي احدث اهتزاز في كوبري Tacoma Narrows Bridge، سبب اهتزاز الكوبري بتردد قريب من تردده الطبيعي. (b) بمجرد ان حدث الرنين تحطم الكوبري.

الكثير من الأمثلة الأخرى للتذبذب الرنين مثل كسر بعض الأدوات عندما تعمل على تردد يعادل التردد الرنيني، أو في حالة المشي العسكري لفريق من الجيش على كوبري قد يسبب انهيار للكوبري. وفي النهاية فان ظاهرة الرنين تحدث لأي نظام حقيق يعمل عند تردد قريب من تردده الطبيعي فإننا نتوقع أن يكون هناك اهتزاز بسعة كبيرة.

الخلاصـــــــــــــة

- عندما تكون العجلة التي يتحرك بها جسم ما تتناسب طرديا مع الإزاحة وفي الاتجاه المعاكس لنقطة الاتزان، فان الجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة. موضع الجسم x يتغير بدالة دورية مع الزمن حسب المعادلة التالية:

$$x(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$$

حيث A هي سعة الحركة، و ω هي التردد الزاوي، و ϕ ثابت الطور. تعتمد قيمة ϕ على الموضع الابتدائي والسرعة الابتدائية.

- الفترة الزمنية T اللازمة لإكمال دورة كاملة تعرف باسم الزمن الدوري للحركة:

$$T = \sqrt{\frac{2p}{w}}$$

في نظام الكتلة والزنبرك الذي يتحرك حركة توافقية بسيطة على سطح عديم الاحتكاك فان زمنه الدوري

$$T = \frac{2p}{w} = 2p\sqrt{\frac{m}{k}}$$

ومقلوب الزمن الدوري هو التردد والذي يساوي عدد الاهتزازات في الثانية.

- السرعة والعجلة للحركة التوافقية البسيطة تعطى بالمعادلات التالية:

$$v = \frac{dx}{dt} = -wA\sin(wt + j)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -w^2 A\cos(wt + j)$$

$$v = \pm w\sqrt{A^2 - x^2}$$

لهذا، فان أقصى سرعة هي ωA، وأقصى عجلة $\omega^2 A$. وتكون السرعة تساوي صفر عند نقاط تغير اتجاه السرعة أي عند $x=\pm A$ وتكون اكبر ما يمكن عندما يكون المتذبذب عند نقطة الاتزان $x=0$. وقيمة العجلة أقصى ما يمكن عند نقاط التحول وتكون صفر عند نقطة الاتزان.

الطاقة الحركية وطاقة الوضع للحركة التوافقية البسيطة تتغير مع الزمن حسب المعادلة التالية:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mw^2A^2\sin^2(wt + f)$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(wt + f)$$

والطاقة الكلية للحركة التوافقية البسيطة ثابتة وتعطى بالعلاقة التالية:

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

تكون طاقة الوضع اكبر ما يمكن عندما يكون الجسم المتذبذب عند نقطة التحول وتكون صفر عندما يكون الجسم المتذبذب عند نقطة الاتزان. وتكون طاقة الحركة تساوي صفر عند نقطة التحول وتكون في اقصى قيمة لها عند نقطة الاتزان.

- البندول البسيط طوله L يتحرك حركة توافقية بسيطة بزمن دوري يساوي

$$T = 2p\sqrt{\frac{L}{g}}$$

والبندول الطبيعي الذي يزاح بزاوية صغيرة عن المحور الرأسي يتحرك حركة توافقية بسيطة حول نقطة ارتكازه اذا كانت لا تمر عبر مركز الكتلة. والزمن الدوري يعطي بالمعادلة التالية:

$$T = 2p\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

حيث I عزم القصور الذاتي و d المسافة بين محور الحركة ومركز الثقل.

إذا كان المتذبذب يتعرض لقوة إخماد صغيرة R=-bv، فان موضع الجسم يعطى بالمعادلة

$$x = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(wt + f)$$

حيث ان

$$w = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

اذا كان المتذبذب يتعرض لقوة خارجية $F(t) = F_o \sin\omega t$، فانه سوف يتعرض لرنين، بحيث تصبح سعة الحركة كبيرة عندما يكون تردد القوة الخارجية يعادل التردد الطبيعي للمتذبذب.

أسئلة للتفكير

(1) هل الكرة التي تسقط على الأرض وتصعد ثم ترتفع عدة مرات تعتبر مثالاً على الحركة التوافقية البسيطة؟ وهل الحركة اليومية للطالب في ذهابه وإيابه للمدرسة يعتبر حركة توافقية بسيطة؟ علل إجابتك.

(2) إذا كانت إحداثيات جسم تتغير حسب المعادلة $x=-A\cos\omega t$، ما هو ثابت الطور وما هو موضع الجسم عند الزمن $t=0$؟

(3) هل الإزاحة لجسم متذبذب بين $t=0$ وأي زمن أخر t من الضروري ان يساوي موضع الجسم عند الزمن t؟ اشرح ذلك.

(4) حدد إذا كانت هذه الكميات لها نفس الاتجاه في الحركة التوافقية البسيطة: (a) الموضع والسرعة، (b) السرعة والعجلة، (c) الموضع والعجلة.

(5) أوصف حركة كتلة متصلة بزنبرك عندما لا تكون كتلة الزنبرك مهملة.

(6) كتلة متصلة بزنبرك تتحرك حركة توافقية بسيطة بسعة A. هل الطاقة الكلية تتغير إذا تضاعفت الكتلة ولكن السعة لم تتغير؟ هل طاقة الحركة وطاقة الوضع تعتمد على الكتلة؟ وضح إجابتك.

(7) ماذا يحدث للزمن الدوري للبندول البسيط إذا زاد طوله بمقدار الضعف؟ وماذا يحدث للزمن الدوري إذا زادت كتلة الجسم المعلق بالبندول إلى الضعف؟

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

(8) إذا تم تحديد الزمن الدوري لبندول بسيط معلق في سقف مصعد. أوصف التغير الذي يطرأ على الزمن الدوري عندما يتحرك المصعد (a) بتسارع إلى الأعلى، (b) بتسارع إلى الأسفل، (c) بسرعة ثابتة.

(9) يتحرك بندول بسيط حركة توافقية بسيطة عندما تكون الزاوية θ صغيرة. هل تعتبر الحركة اهتزازية عندما تكون الزاوية θ كبيرة؟ كيف تؤثر زيادة الزاوية على الزمن الدوري للحركة؟

(10) إذا كانت ساعة حائط من النوع الذي يعتمد على البندول البسيط تؤخر قليلا، كيف يمكن ضبط طول البندول بحيث تشير للوقت بدقة بدون تأخير؟

(11) هل الحركة الاهتزازية المخمدة تحدث عند أي قيمة لـــ b و k؟ وضح.

(12) هل من الممكن أن يكون هناك حركة اهتزازية مخمدة عندما يكون النظام في حالة الرنين؟ وضح.

(13) إذا كانت الكتلة المعلقة بالبندول البسيط عبارة عن كرة مملوءة بالماء. ماذا يحدث لتردد البندول إذا كان هناك ثقب في الكرة يسمح بتسرب الماء ببطء؟

مسائل وتمارين

1.15 حركة جسم متصل في زنبرك

(1) أسقطت كرة من ارتفاع 4.00m لتصطدم بالأرض تصادما مرنا. افترض انه لا يوجد فقط في الطاقة الميكانيكية نتيجة لمقاومة الهواء، (a) اثبت إن الحركة دورية و (b) حدد الزمن الدوري للحركة، (c) هل الحركة توافقية بسيطة؟ وضح إجابتك.

2.15 التمثيل الرياضي للحركة التوافقية البسيطة

(2) في محرك السيارة يتحرك المكبس حركة توافقية بسيطة، فاذا كان المكبس يتحرك طبقا للمعادلة التالية:

$$x = (5.00\ \text{cm})\cos(2t+\pi/6)$$

حيث x بالسنتيمتر والزمن t بالثانية. عند الزمن t=0، اوجد (a) موقع المكبس، (b) سرعة المكبس، و(c) عجلة المكبس. (d) اوجد الزمن الدوري وسعة الحركة.

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

(3) موضع جسم يعطى بالعلاقة $x = (4.00\ cm)\cos(3.00\pi t+\pi)$، حيث x بالمتر و t بالثواني. حدد (a) التردد والزمن الدوري للحركة، (b) سعة الحركة، (c) ثابت الطور، و (d) موضع الجسم عند الزمن t=0.250s.

(4) الموضع الابتدائي والسرعة والعجلة لجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة هي xi و vi و ai، والتردد الزاوي للحركة هو ω (a) اثبت ان موضع الجسم وسرعته في أي زمن تكتب على النحو التالي:

$$x(t) = x_i \cos wt + \left(\frac{v_i}{w}\right)\sin wt$$

$$x(t) = x_i \cos wt + \left(\frac{v_i}{w}\right)\sin wt$$

(b) اذا كانت سعة الحركة A، اثبت ان

$$v^2 - ax = v_i^{\ 2} - a_i x_i = w^2 A^2$$

(5) متذبذب توافقي يحتاج إلى 12.0s لاكمال 5 اهتزازات. اوجد (a) الزمن الدوري للحركة، (b) التردد بوحدة الهيرتز، و(c) التردد الزاوي بوحدة rad/s.

(6) جسم كتلته 7kg معلق بزنبرك، اذا كان الجسم يتذبذب رأسياً بزمن دوري 2.60s. أوجد ثابت الزنبرك.

(7) مكبس محرك سيارة يتحرك حركة توافقية بسيطة. اذا كانت اقصى ازاحة لحركة المكبس من نقطة المركز هي ±5.00cm، أوجد أقصى سرعة وأقصى عجلة للمكبس عندما يتحرك بمعدل 3600rev/min.

(8) جسم كتلته 0.500kg معلق في زنبرك ثابته k=8.00N/m يتذبذب بحركة توافقية بسيطة بسعة مقدارها 10.0cm. احسب (a) اقصى قيمة للسرعة والعجلة، (b) سرعة وعجلة الجسم عندما يكون الجسم على مسافة 6.00cm من نقطة الاتزان، (c) الفترة الزمنية اللازمة للجسم ليتحرك من x=0 إلى x=8.00cm.

(9) جسم كتلته 1.00kg متصل في زنبرك افقي. اذا تعرض الزنبرك لاستطالة قدرها 0.100m، والجسم ترك ليتذبذب من السكون بدون احتكاك. وبعد زمن مقداره 0.500s عادت السرعة لتصبح صفر، ما هو اقصى سرعة للجسم.

(10) جسم معلق بزنبرك يتحرك بتردد زاوي ω. الزنبرك معلق في مصعد يهبط بسرعة v. فاذا توقف المصعد فجأة. (a) اوجد سعة الاهتزاز للجسم. (b) ما هي المعادلة التي تصف حركته؟ (استخدم الحركة للاعلى في الاتجاه الموجب).

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

3.15 طاقة المتذبذب التوافقي البسيط

(11) جسم كتلته غير معلومة متصل في زنبرك (K=6.50N/m) يتحرك حركة توافقية بسيطة بسعة حركة مقدارها 10.0cm. عندما يكون الجسم عند منتصف المسافة بين نقطة الاتزان واقصى ازاحة، فان سرعته تكون 30.0cm/s. احسب (a) كتلة الجسم، (b) الزمن الدوري للحركة، (c) اقصى عجلة للجسم.

(12) جسم كتلته 200g متصل بزنبرك افقي ويتحرك حركة توافقية بسيطة بزمن دوري مقداره 0.250s. إذا كانت الطاقة الكلية للنظام هي 2.00J، أوجد (a) ثابت الزنبرك، (b) سعة الحركة.

(13) اصطدمت سيارة كتلتها 1000Kg بجدار من الطوب في تجربة لفحص قوة تحمل الصدام فيها. فاذا كان الصدام يمثل زنبرك بثابت قوة مقداره 5.00×10^{6}N/m وينضغط مسافة مقدارها 3.16cm لتتوقف السيارة. ما هي سرعة السيارة قبل الاصطدام، مع افتراض ان لا يوجد فقد في الطاقة ناتج عن التصادم.

(14) يتذبذب جسم متصل بزنبرك بسعة مقدارها 3.5cm. اذا كان ثابت الزنبرك 250N/m وكتلة الجسم 0.500kg، اوجد (a) طاقة النظام الميكانيكية، (b) اقصى سرعة يصل لها الجسم، (c) اقصى عجلة للجسم.

(15) كتلة جسم 50.0g متصل بزنبرك (k=35.0N/m) يتذبذب على سطح افقي عديم الاحتكاك بسعة حركة مقدارها 4.00c,. اوجد (a) الطاقة الكلية للنظام، (b) سرعة الجسم عندما تكون ازاحته 1.00cm. اوجد (c) طاقة الحركة، (d) طاقة الوضع عندما تكون ازاحة الجسم 3.00cm.

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

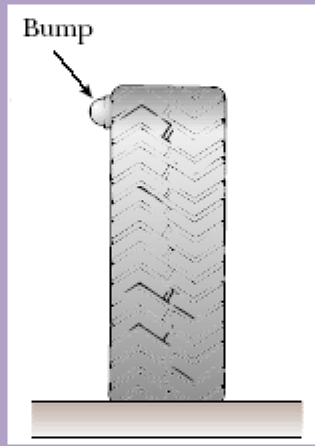
(16) سعة نظام يتحرك حركة توافقية بسيطة تتضاعف. حدد التغير في (a) الطاقة الكلية، (b) اقصى سرعة، (c) اقصى عجلة، (d) الزمن الدوري.

(17) جسم يتحرك حركة توافقية بسيطة بسعة حركة مقدرها 3.00cm. عند أي موضع تكون سرعة الجسم تساوي نصف سرعته القصوى.

4.15 المقارنة بين الحركة التوافقية البسيطة والحركة الدائرية المنتظمة

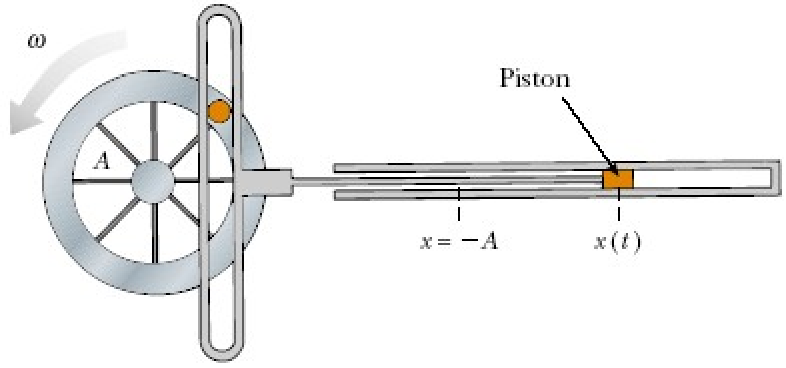
(18) بينما تنطلق سيارة بسرعة 3.00m/s، لوحظ على اطار السيارة انتفاخ جانبي bump كما في الشكل 15.25. (a) اشرح لماذا هذا الانتفاخ يظهر حركة توافقية بسيطة، (b) اذا كان نصف قطر الاطار 0.300m، ما هو الزمن الدوري للانتفاخ؟

(19) افترض محرك بسيط يتكون من اسطوانة واحدة كما في الشكل 15.26. اذا كان الاطار يدور بسرعة منتظمة، اشرح لمذا يعتبر ساق المكبس يتذبذب بحركة توافقية بسيطة.



الشكل 15.25

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com



الشكل 15.26

5.15 البندول

(20) اراد شخص ما ان يقوم بقياس ارتفاح برج، فلاحظ وجود بندول طويل معلق في سقف البرج ليصل تقريبا للأرض وان الزمن الدوري للبندول 12.0s. (a) كم ارتفاع البرج؟ (b) ماذا لو؟ اخذ البندول إلى القمر حيث ان عجلة جاذبية القمر هي $1.67 m/s^2$، ما هو الزمن الدوري للبندول على سطح القمر.

(21) يمثل الموضع الزاوي لبندول بسيط بالمعادلة

$$\theta = (0.320 \text{rad}) \cos \omega t$$

حيث θ بوحدة rad و ω=4.43rad/s. حدد الزمن الدوري وطول البندول.

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

(22) كتلة بندول بسيط 0.250kg وطوله 1.00m. فاذا ازيح بزاوية مقدارها 15.0^o وترك. ما هو (a) اقصى سرعة، (b) اقصى عجلة زاوية، (c) اقصى قوة استرجاع؟

(23) جسم كتلته m ينزلق بدون احتكاك في داخل تجويف نصف كروي بصف قطره R. اثبت ان، اذا بدء الحركة من السكون بازاحة صغيرة من وضع الاتزان، فان الجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة بتردد زاوي يساوي $w=\sqrt{g/R}$

(24) بندول طبيعي على شكل جسم مسطح يتحرك حركة توافقية بسيطة بتردد 0.450Hz. اذا كانت كتلة البندول 2.20kg ومحور تعليق البندول على مسافة 0.350m من مركز الثقل، احسب عزم القصور الذاتي حول نقطة التعليق.

(25) بندول لي عبارة عن مسطرة مترية كتلتها 2.00kg، ومعلقة من الوسط بواسطة سلك. اذا كان الطرف العلوي للسلك مثبت وكانت المسطرة تتذبذب في المستوى الافقي بزمن دوري 3.00minutes، ما هو مقدار ثابت اللي للسلك؟

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com

6.15 الاهتزازات المخمدة

(26) اثبت ان المعدل الزمني لتغير الطاقة الميكانيكية للمتذبذب المخمد يعطى بالعلاقة

$$\frac{dE}{dt} = -bv^2$$

حيث انها دائما سالبة. (**مساعدة**: اشتق المعادلة الخاصة بالطاقة الميكانيكية للمتذبذب $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ واستخدم المعادلة 15.31.

(27) بندول طوله 1.00m ترك عند زاوية 15.0^o. بعد 1000s قلت سعته لتصبح 5.50^o. ما هي قيمة $b/2m$؟

(28) جسم كتلته 10.6kg معلق في نهاية زنبرك ($k=2.05x10^4 N/m$). إذا كانت مقاومة الهواء تسبب اخماد لحركته بمعامل اخماد b=3.00N.s/m. (a) احسب تردد الحركة المخمدة. (b) ما هي النسبة المئوية لنقصان سعة الحركة في كل دورة. (c) اوجد الفترة الزمنية لكي تقل طاقة النظام بمقدار 5.00% عن قيمتها الاصلية.

7.15 الاهتزازات القسرية

(29) جسم كتلته 2.00kg معلق بزنبرك يتحرك بدون احتكاك وبتأثير قوة خارجية $F=(3.00N)\sin(2\pi t)$. إذا كان ثابت الزنبرك 20.0N/m، اوجد (a) الزمن الدوري و (b) سعة الحركة.

(30) افترض حركة اهتزازية قسرية غير مخمدة (b=0)، اثبت ان المعادلة 35.15 حل للمعادلة 34.15، وسعة الحركة تعطى بالمعادلة 36.15.

(31) جسم وزنه 40.0N معلق في زنبرك ثابته 200N/m. النظام غير مخمد ويتعرض لقوة قسرية خارجية بتردد 10Hz ينتج عنها حركة اهتزازية للجسم بسعة 2.00cm اوجد اقصى قيمة للقوة الخارجية.

(32) جسم كتلته 0.150kg معلق بزنبرك ثابته 6.30N/m يتبذب تحت تأثير قوة خارجية جيبية سعتها 1.70N وبدون اخماد، ما هو تردد القوة التي تجعل الجسم يتذبذب بسعة قدرها 0.440m؟

د. حازم فلاح سكيك
www.trgma.com