كتاب التصميم بمساعدة الحاسوب

الفصل الأول

أسلوب العنصر المحدَّد (.F. E. M)

(Finite Element Method)

تأليف:

د. أسامة محمد المرضي سليمان خيَّال

Dr. Osama Mohammed Elmardi Suleiman Khayal

قسم الهندسة الميكانيكية

كلية الهندسة والتقنية

جامعة وادي النيل

عطبرة، السودان

الطبعة الأولي ديسمبر 1998م

الطبعة الثانية يناير 2019م

الفصل الأول

أسلوب العنصر المحدَّد (F. E. M.)

(Finite Element Method)

1.1 مقدمة: (Introduction)

أسلوب العنصر المحدَّد هو الأسلوب المباشر لحساب التفاوتات للوصول إلي الحل التقريبي للمسائل المتصلة المعقدة (الحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية العادية والجزئية). وهذا يتم بتحويل المســائل المتصــلة المعقدة (continuum) بدرجة حريتها اللانهائية إلي المسائل بديلة لها درجة حرية محددة خواصها قريبة من النموذج الأصلي.

يستخدم أسلوب العنصر المحدد لحل المسائل ذات الشكل الهندسي المعقد التي لا يمكن حلها بالأساليب التحليلية القياسية. ولكن عندما يكون الشكل الهندسي المراد حساب التفاوتات فيه معقداً فإنَّ المهمة تصبح أكثر تعقيداً وصعوبة. في طريقة العناصر المحدَّدة يمكن تفادي هذه المصــاعب بتخيل أنَّ الجســم المصــمت المراد إجراء هذه الطريقة عليه يمكن تقسيمه إلي عدد من التقسيمات المحدَّدة لتسهيل حله.

1.2 الفكرة الأساسية لأسلوب العنصر المحدَّد:

أفترض أنَّه يُراد إيجاد توزيع درجة الحرارة للحالة المستقرة في لوحة. الفكرة الأساسية هي تقسيم الشكل الهندسي للوحة إلي عقد (nodes) وعناصر (elements).

من بعد يتم إفتراض أنَّ مجال درجة الحرارة يتفاوت بصيغة بسيطة خلال أي عنصر محدَّد (عادة يتم اســتخدام التفاوت الخطي أو متعدِّد الحدود الثنائي لاســتكمال مجال المتغير). يقود

إجراء التقسيم هذا لنظام معادلات جبرية خطية يمكن حلها بسهولة على حاسوب رقمي.

1.3 فحص جبر المصفوفات: (Review of Matrix Algebra)

يتم تعريف المصفوفة كصفوف وأعمدة $m \times n$ من الأعداد، حيث:

m = عدد الصفوف.

n = عدد الأعمدة.

يُرمز لعنصر من المصفوفة كـ A_{ij}، حيث:

i = صف.

j = عمود.

A_{ij} هو العنصر أو العدد الذي يحتل الصف i والعمود j.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

تُسمي المصفوفة مصفوفة مربعة (Square Matrix) إذا كان $m = n$. إذا كان $m = 1$ تُسمي المصفوفة مصفوفة صف، وإذا كانت $n = 1$ تُسمي المصفوفة مصفوفة عمود أو متجه.

ترميز: (Notation)

$\underline{A}$: مصفوفة (حروف كبيرة).

$\underline{a}$: متجه (حروف صغيرة).

C: قياسي (ليس تحته خط).

الضرب بواسطة مقدار قياسي: (Multiplication of a scalar)

إذا كان $\underline{C} = \alpha \underline{A}$، بالتالي $C_{ij} = \alpha A_{ij}$.

تحوير المصفوفة: (Transpose of a matrix)

يتم الحصول على تحوير المصفوفة بتبادل الصفوف والأعمدة.

مثال:

$$\underset{2\times 3}{\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{3\times 2}{A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}$$

إذا كان $\underline{A}^T = \underline{A}$، بالتالي فإن $\underline{A}$ يقال عنها مصـــــفوفة متماثلة (symmetric). فقط تكون المصفوفات المربعة متماثلة.

جمع المصفوفات: (matrix addition)

إذا كان $\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$، بالتالي فإن $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$.

يتم تعريف جمع المصفوفة عاليه عندما يكون $\underline{B}, \underline{A}, \underline{C}$ جميعها بنفس الرتبة i.e. جميعها لها نفس عدد الصفوف والأعمدة.

$$\underset{m\times n}{C} = \underset{m\times n}{A} + \underset{m\times n}{B}$$

حاصل ضرب المتجه القياسي: (vector scalar product)

حاصل ضرب متجهين $\underline{a}$، $\underline{b}$ يكون مقداراً قياسياً α

$$\underline{a}.\underline{b} = \underline{a}^T\ \underline{b} = \underline{b}^T\ a = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$$

مثال:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}^T\ \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 12 + 0 + 2 = \underline{\underline{14}}$$

ضرب المصفوفة: (matrix multiplication)

اجعل $\underset{m\times n}{C} = \underset{m\times q}{A} + \underset{q\times n}{B}$

بالتالي، $C_{ij} = \sum_{k=1}^{q} A_{ik} B_{kj}$

يتم تعريف حاصل ضرب المصفوفة عندما يكون عدد الأعمدة في $\underline{A}$ مساوٍ لعدد الصفوف في $\underline{B}$.

مثال:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{AB} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

عموماً، يكون ضرب المصفوفة غير قابل للتبديل i.e.

$$\underline{AB} \neq \underline{BA}$$

وضِّح أنَّ: $\underline{(AB)}^T = \underline{B^T\ A^T}$.

مصفوفة الوحدة: (unit or identity matrix)

المكونات δ_{ij} لمصفوفة الوحدة I يتم تعريفها كـــ

$$\delta_{ij}\begin{cases} 0 & if \quad i \neq j \\ 1 & if \quad i = j \end{cases}$$

δ_{ij} تُسمي بدلتا كرونيكر (kronecker delta).

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}\,\underline{I} = \underline{I}\,\underline{A} = \underline{A}$$

محدِّدة المصفوفة: (determinant of a matrix)

يتم ترميز محدَّدة مصفوفة $\underline{A}$ كـ $\det(\underline{A})$ (يجب أن تكون $\underline{A}$ مصفوفة مربعة).

$$\underline{\det(A)} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} C_{ij}$$

حيث C_{ij} هو العامل المرافق (cofactor) لــ A_{ij}.

معكوس المصفوفة: (Inverse of a matrix)

يتم تعريف معكوس مصفوفة بحيث أنَّ حاصل ضرب مصفوفة A ومعكوسها A^{-1} ينتج مصفوفة وحدة.

$$\underline{A}\ \underline{A}^{-1} = I = \underline{A}^{-1}\ \underline{A}$$

فقط يكون هنالك معكوساً للمصفوفة المربعة. معكوسة المصفوفات الصغيرة (كمثال حتى رتبة 3×3) يمكن تحديده بالصيغة التالية،

$$\underline{A}^{-1} = \frac{\underline{C}^{T}}{\det(\underline{A})}$$

حيث $\underline{C}^{T}$ هو تحوير مصفوفة العامل المرافق لـ $\underline{A}$.

المعادلات الجبرية الخطية: (Linear Algebraic Equation)

هي نظم لمعادلات تظهر فيها القيم الغير معلومة خطياً ولا يكون هنالك عوامل تفاضلية أو تكاملية.

مثال:

$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -2$$

$$2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1$$

$$4x_2 + x_3 = 3$$

المعادلات الثلاث عاليه يمكن كتابتها كمصفوفة كالآتي:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$$

مثال:

أوجد الحل للنظام $\underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$.

الحل:

أضرب مسبقاً بـ A^{-1}

$$\underline{A}^{-1}\underline{A}\,x = \underline{A}^{-1}\,\underline{b}$$

$$\underline{I}\,\underline{x} = \underline{A}^{-1}\,\underline{b}$$

$$\Rightarrow \underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{b}$$

الصيغ التربيعية: (Quadratic forms)

إذا كانت $\underline{A}$ مصفوفة مربعة و x متجه (بنفس عدد الصفوف كـ $\underline{A}$)، بالتالي فإنَّ المقدار القياسي الناتج ،

$$\alpha = \underset{1\times n}{x^T}\ \underset{\substack{1\times 1\\ n\times n}}{A}\ \underset{n\times 1}{x}$$

يسمي بالصيغة التربيعية. يُقال أنَّ المصفوفة A تكون:

1/ محدَّدة ايجابياً إذا كانت $\alpha > 0$ لكل قيم $\underline{x} \neq 0$.

2/ شبه محدَّدة ايجابياً إذا كانت $\alpha \geq 0$ لكل قيم $\underline{x} \neq 0$.

إذا كانت A محدَّدة ايجابياً (positive definite)، بالتالي فإنَّ لها معكوساً، و $\det(\underline{A}) \neq 0$

تفاضل وتكامل المصفوفات: (Differentiation and Integration of Matrices)

افترض أنَّ مكونات مصفوفة $\underline{A}$ هي دوال للمتغير x. تكامل المصفوفة $\underline{A}$ هي مصفوفة بنفس الرتبة كـ A والتي يتم الحصول على مكوناتها بتكامل أي مكونة لـ $\underline{A}$ على انفراد. وبالمثل، فإنَّ مشتقة المصفوفة $\underline{A}$ هي مصفوفة بنفس الرتبة كـ $\underline{A}$ والتي يتم الحصول على مكوناتها بتفاضل أي مكونة لـ $\underline{A}$.

مثال:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} 2x & 0 & x \\ 3 & x^2 & x^3 \\ x & x^3 & 2x \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\underline{A}}{dx}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 3x^2 & 2 \end{bmatrix}$$

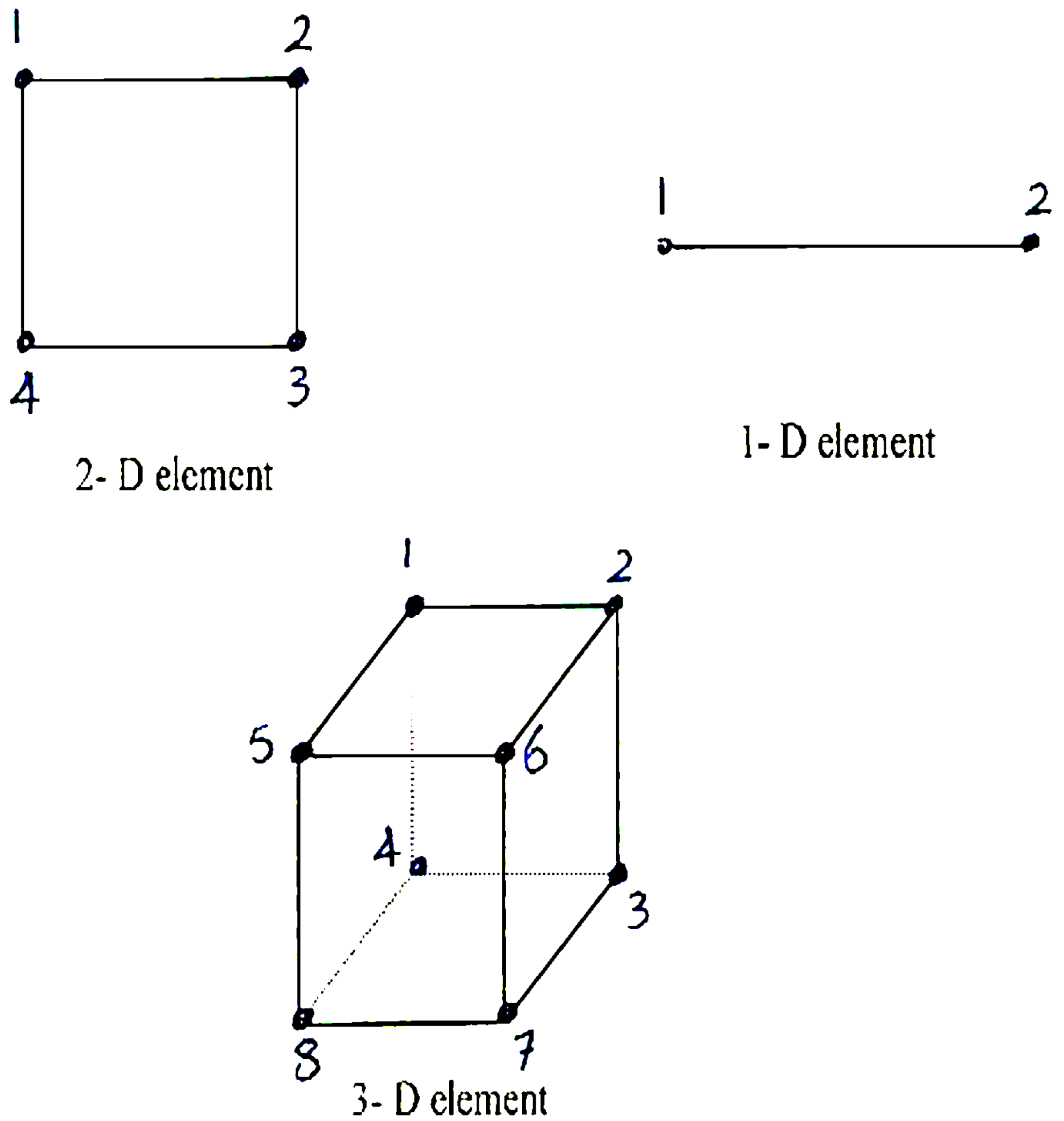
$$\int_{-1}^{1}\underline{A}dx=\begin{bmatrix} \int_{-1}^{1}2xdx & \int_{-1}^{1}0dx & \int_{-1}^{1}xdx \\ \int_{-1}^{1}3dx & \int_{-1}^{1}x^2dx & \int_{-1}^{1}x^3dx \\ \int_{-1}^{1}x\,dx & \int_{-1}^{1}x^3dx & \int_{-1}^{1}2xdx \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.4 خطوات أسلوب العنصر المحدَّد:

(Procedure of Finite Element Method)

1. التقسيم: (Discretization)

يُقصد به تقسيم نطاق الحل إلي عناصر محدَّدة. هذه العناصر قد تكون ذات بعد واحد أو بعدين أو ثلاثة اعتماداً على المسـألة التي بأيدينا (شـكل (1.1)). تُسـمي النقاط التي تحد العنصر بالعقد (nodes). سيتم التعامل في هذه الدراسة بعنصر ذو بعد واحد.



شكل (1.1)

2. معادلة العنصر: **(Element Equation)**

يتم تكوين معادلات لافتراض شـــكل الحل لكل عنصــــر على حده. هذا الإجراء يتم على مرحلتين هما:

1/ اختيار دالة تقريبية لها معاملات مجهولة القيم.

2/ تحديد قيم لهذه المعاملات لإيجاد الحل لعنصر واحد.

في المرحلة (1) يتم اختيار دوال متعددة الحدود (polynomials). مثلاً لعنصـــر ذو بعد واحد تكون الدالة من الرتبة الأولي (معادلة خط مستقيم) أي أن:

$$u(x)=a_0+a_1x \qquad (1)$$

حيـث $u(x)$ هي المتغير التـابع، a_0 وa_1 هي معـاملات مجهولـة القيم، x هي المتغير المستقل. بالإشارة للشكل (1.2)، تكتب المعادلة (1) لطرفي العنصر كالآتي:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= a_0+a_1x_1 \\ u_2 &= a_0+a_1x_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

حيث $u_1=u(x_1)$ ، و $u_2=u(x_2)$.

يمكن حل المعادلة (2) لتحديد a_0 وa_1 كما يلي:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{u_1x_2-u_2x_1}{x_2-x_1} \\ a_1 &= \frac{u_2-u_1}{x_2-x_1} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

بتعويض المعادلة (3) في المعادلة (1)،

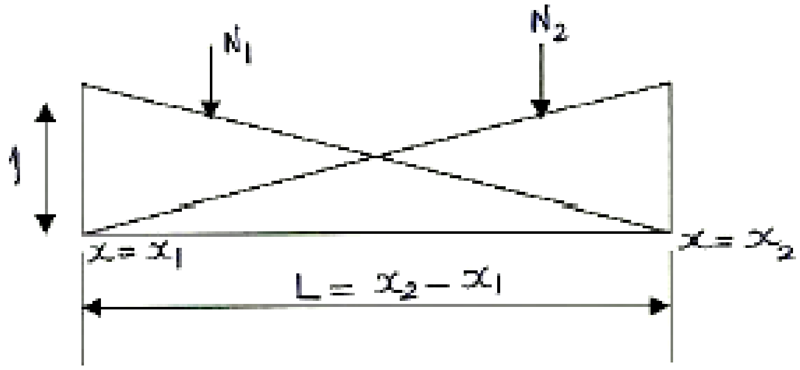
$$u=N_1u_1+N_2u_2 \qquad (4)$$

أو في شكل مصفوفة،

$$u=\begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

حيث N_1 وN_2 تسميان بدوال الشكل (shape functions) وهما:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{x_2-x}{x_2-x_1} \\ N_2 &= \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$



شكل (1.2)

من المعادلة (6)، عندما $x = x_1$،

$$N_1 = 1$$
$$N_2 = 0$$

وعندما $x = x_2$،

$$N_1 = 0$$
$$N_2 = 1$$

أيضاً يمكن وضع N_1 وN_2 في صورة دالة متعدد الحدود،

$$N_i = a_i + b_i x \qquad (7)$$

قيم a_i وb_i تعتمدان على رتبة العنصر وشروطه الحدية. مثلاً للعنصر الأول:

$$x_2 = L, \quad x_1 = 0$$

عندما $b_1 = -\frac{1}{L},\ a_1 = 1 : i = 1$

عندما $b_2 = \frac{1}{L},\ a_2 = 0 : i = 2$

حيث L هو طول العنصر ويُعطي بالعلاقة: $L = x_2 - x_1$

بالتعويض في المعادلة (7)،

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \\ N_2 = \frac{x}{L} \quad \Bigg\} \qquad (8)$$

بهذه الطريقة يمكن إيجاد دالة الشــكل لأي عنصــر. الجدول (1.1) أدناه يبين قيم a_i و b_i للأربع عناصر الأولي عندما تكون متساوية الطول.

جدول رقم (1.1)

العنصر	a_1	a_2	b_1	b_2
1	1	0	-1/L	1/L
2	2	−1	-1/L	1/L
3	3	−2	-1/L	1/L
4	4	−3	-1/L	1/L

يلاحظ من الجدول (1.1) أعلاه أنَّ القيم العمومية لهذه الثوابت هي:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= n \\ a_2 &= 1 - n \\ b_1 &= -\tfrac{1}{L} \\ b_2 &= \tfrac{1}{L} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

حيث n هي رتبة العنصر.

بتعويض المعادلة (9) في المعادلة (7)،

$$N_i = a_i + b_i x \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= n - \tfrac{x}{L} \\ N_2 &= (1 - n) + \tfrac{x}{L} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

بتفاضل المعادلة (10)،

$$\left.\begin{aligned}\frac{dN_1}{dx} &= -\tfrac{1}{L}\\ \frac{dN_2}{dx} &= \tfrac{1}{L}\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

معادلات العناصــر الناتجة تتكون من مجموعة معادلات جبرية خطية يمكن وضــعها على هيئة معادلة مصفوفة كالآتي:

$$[k][u]=[m] \qquad (12)$$

حيث [k] هي مصـــفوفة كزازة العنصـــر (element stiffness matrix)، و [u] هي مصفوفة من عمود واحد بها الكميات المراد تحديدها و [m] هي مصفوفة الكتلة للعنصـر (element mass matrix) وهي أيضاً من عمود واحد.

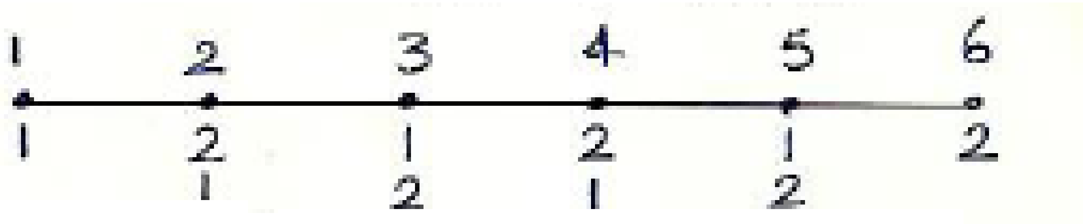
3. التجميع: (Assembly)

هي عملية لربط معادلات العناصــر لتحديد الســلوك الموحد للنظام ككل، ويراعي فيه مبدأ الاستمرار، أي أنَّ نهاية عنصر هي بداية عنصر جديد. تُعرف إحداثيات عقد كل عنصر على حدة بالإحداثيات الموضـــعية (Local co-ordinates) و إحداثيات عقد النظام بالكامل بالإحداثيات الكونية (Global co-ordinates) الشكل (1.3) أدناه يوضح هاتين التسميتين.

بعد عملية التجميع يتم الحصول على معادلة المصفوفة الكونية كما يلي:

$$[k]\ [u'] = [M] \qquad (13)$$

حيث [k] هي مصـــفوفة الكزازة، [u'] هي مصـــفوفة من عمود واحد بها الكميات المراد تحديدها للنظام كله و [M] هي مصفوفة الكتلة للنظام وهي أيضاً من عمود واحد.



شكل (1.3)، التسميتان الموضعية والكونية للعناصر

4. الشروط الحدودية: (Boundary Conditions)

قبل حل المعادلة (13) يجب تعديلها لتســـتوعب الشـــروط الحدودية لنطاق الحل. هذه الشــروط الحدودية تُمثَّل قيم الحل في بداية العنصــر الأول ونهاية العنصــر الأخير. هذه التعديلات تقود للمعادلة:

$$\left[\bar{k}\right]\left[\overline{u'}\right]=\left[\overline{M}\right] \qquad (14)$$

5. يتم حل المعادلة (14) لإيجاد قيم المجاهيل في المصفوفة [u'] بعدة طرق، منها تفكيك معادلة المصـــفوفة إلي معادلات آنية ثم حلها. تســـتخدم هذه الطريقة عندما يكون عدد العناصــر بسـيطاً (أقل من 5 مثلاً). أما في حالة أن يكون عدد العناصــر كبيراً، فلابد من استخدام الحاسوب في الحل. يستخدم الحاسوب لإيجاد مقلوب مصفوفة الكزازة وضربه في معادلة الكتلة. أي أنَّ:

$$\left[\overline{u'}\right]=\left[\bar{k}\right]^{-1}\left[\overline{M}\right] \qquad (15)$$

الكتب والمراجع

الكتب والمراجع العربية:

1. د. أسامة محمد المرضي سليمان ، "مذكرة محاضرات التصميم بمساعدة الحاسوب" ، جامعة وادي النيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، ديسمبر 1998م.

2. بروفيسور محمود يس عثمان، "مذكرة محاضرات أسلوب العناصر المحددة (F.E.M) في حل مسائل ميكانيكا المصمتات" ، جامعة وادي لنيل ، كلية الهندسة والتقنية ، قسم الهندسة الميكانيكية، مارس 1990م.

الكتب والمراجع الإنجليزية

1. Alexandre Ern, Jean – Luc Guermond, "Theory and practice of finite elements", springer, New York, (2008), ISBN 0-387-20574-8.
2. Patricia L. Smith, Tillman J. Ragan, "Instructional design 3rd edition", (2004).
3. Narayan K. Lalit, "Computer aided design and manufacturing", New Delhi, Prentice Hall of India, (2008).
4. Daryl L. Lohan, "A first course in the finite element method", Cengage learning, (2011), ISBN 978 – 0495668251.
5. Ready J. N., "An introduction to finite element method 3rd edition", McGraw-Hill, (2006), ISBN 9780071267618.
6. Strang Gilbert, Fix George, "An analysis of the finite element method", Prentice Hall, (1973), ISBN 0 – 13 – 032946 – 0.
7. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z., "The finite element method: its basis and fundamentals sixth edition", Butterworth – Heinemann, (2005), ISBN 0750663200.

8. Bathe K. J., "Finite element procedures", Cambridge, (2006), ISBN 097900490X.
9. Smith I.M., Griffiths D. V., Margetts L., "Programming the finite element method fifth edition", Wiley, ISBN 978 – 1 – 119 – 97334 – 8.
10. Arregui Mena J. D., Margetts L., et al., "Practical application of the stochastic finite element method", Archives of computational methods in engineering, 23(1), PP. (171 – 190), (2014).
11. Arregui Mena J. D., et al., "Characterization of the spatial variability of material properties of gilso carbon and NBG – 18 using random fields", Journal of nuclear materials, 511, PP. (91 – 108), (2018).
12. Osama Mohammed Elmardi Suleiman, " lecture notes on computer aided design using finite element method ", Nile valley university, faculty of engineering and technology, department of mechanical engineering, (2002).
13. Osama Mohammed Elmardi Suleiman, " lecture notes on computer aided design using dynamic relaxation method coupled with finite differences ", Nile valley university, faculty of engineering and technology, department of mechanical engineering, (2002).

نبـذة عـن المـؤلـف:

أسـامة محمد المرضـي سـليمان وُلِدَ بمدينة عطبرة بالسـودان في العام 1966م. حـاز على دبلوم هندســـة ميكانيكية من كلية الهندسـة الميكانيكية – عطبرة في العام 1990م. تحصَّـل أيضـاً على درجة البكالوريوس في الهندســـة الميكانيكية من جامعة السـودان للعلوم والتكنولوجيا – الخرطوم في العام 1998م ، كما حاز على درجة الماجســـتير في تخصـــص ميكانيكا المواد من جامعة وادي النيل – عطبرة في العام 2003م ودرجة الدكتوراه من جامعة وادي النيل في العام 2017م. قام بالتدريس في العديد من الجامعات داخل الســـودان، بالإضـــافة لتأليفه لأكثر من ثلاثين كتاباً باللغة العربية ولعشـرة كتب باللغة الإنجليزية بالإضـافة لخمسـين ورقة علمية منشـورة في دور نشـــر ومجلات عالمية إلى جانب إشـــرافه على أكثر من ثلاثمائة بحث تخرج لكل من طلاب الماجسـتير، الدبلوم العالي، البكالوريوس، والدبلوم العام. يشـغِل الآن وظيفة أسـتاذ مسـاعد بقسـم الميكانيكا بكلية الهندسـة والتقنية – جامعة وادي النيل. بالإضـافة لعمله كاسـتشـاري لبعض الورش الهندسية بالمنطقة الصناعية عطبرة. هذا بجانب عمله كمدير فني لمجموعة ورش الكمالي الهندســـية لخراطة أعمدة المرافق واســـطوانات الســـيارات والخراطة العامة وكبس خراطيش الهيدروليك.