وزارة التربية والتعليم
MINISTRY OF EDUCATION
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الأول الثانوي

الفصل الدراسي الأول

McGraw Hill Education

العبيكان Obeikan

الطبعة التجريبية
١٤٣١ هـ - ٢٠١٠ م

قررت وزارة التربية والتعليم بالمملكة العربية السعودية
تدريس هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

يوزع مجاناً ولا يباع

Original Title:

FOR GRADE 10

By:
Cindy J. Boyd
Jerry Cummins
Carol E. Malloy, Ph. D.
John A. Carter, Ph. D.
Alfinio Flores, Ph. D.

Contributing Authors
Prof. Viken Hovsepian
Prof. Dinah Zike

CONSULTANTS

Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Prof. Bob McCollum
Differentiated Instruction
Nancy Frey, Ph. D.
Gifted and talented
Ed Zaccaro
Graphing Calculator
Ruth M. Casey
Jerry Cummins
Learning Disabilities
Kate Garnett, Ph. D.
Mathematical Fluency
Jason Mutford
Pre-AP
Dixie Ross
Reading and Vocabulary
Douglas Fisher, Ph. D.
Lynn T. Havens

الرياضيات

الصف الأول الثانوي

أعدَّ النسخة العربية : شركة العبيكان للأبحاث والتطوير

التحرير والمراجعة والمواءمة
د. ناصر بن حمد العويشق
محمد بن عبدالله البصيص
د. عبدالله بن محمد الجوعي
صلاح بن عبد الله الزيد
عبدالحكيم عبدالله سليمان
هاني جميل زريقات

التعريب والتحرير اللغوي
نخبة من المتخصصين

إعداد الصور
د. سعود بن عبدالعزيز الفراج

www.glencoe.com

www.obeikaneducation.com

McGraw Hill Education

العبيكان Obeikan

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيِّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية، وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التربية والتعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءًا من المرحلة الابتدائية، سعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلاً متكاملاً، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، وحل المشكلات، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن المناهج المطوَّرة والكتب الجديدة سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، بالإضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطالب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممارسة، مما يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.

ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق.

الفصل 1
التبرير والبرهان

الفصل 2
التوازي والتعامد

الفصل 3 تطابق المثلثات

الفصل 4 العلاقات في المثلث

الفصل
1

التبرير والبرهان
Reasoning and Proof

الأفكار العامة

- أخمنُ ما إذا كانت العبارة صحيحة أم خاطئة وتحديد ذلك، وإعطاء مثال مضادٍّ للعبارة.
- أستعمل التبرير الاستنتاجي للتوصل إلى نتيجة صحيحة.
- أتحقق من التخمينات الهندسية والجبرية باستعمال البراهين المختلفة.
- أكتب براهين تتضمن نظريات القطع المستقيمة والزوايا.

المفردات

التبرير الاستقرائي (ص 10)
inductive reasoning

التبرير الاستنتاجي (ص 31)
deductive reasoning

المسلّمة (ص 37)
postulate or axiom

البرهان (ص 38)
proof

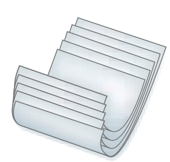
الربط مع الحياة:

صحة: يتحدث الأطباء مع المرضى، ويجرون الفحوصات الطبية لهم، ويحللون النتائج، ويستعملون التبرير لتشخيص الحالة ومعالجة المريض.

المَطْويّات
مُنَظِّمُ أَفْكار

التبرير والبرهان: نظم المطويَّة لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك. ابدأ بخمس ورقات قياس A4 .

1 **ضع** الأوراق بعضها فوق بعض بحيث تبعد كل ورقة عن سابقتها 2 cm. اطْوِ الطرف السفلي لها لتكون أشرطة.



2 **ثبت** الأوراق على طول خط الطيّ. اكتب اسم الفصل على الشريط العلوي، وأرقام الدروس على الأشرطة الثمانية الأخرى، وخصص الشريط الأخير لمفردات الدرس.

التهيئة للفصـــل 1

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المهارات السابقة الضرورية.

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية www.obeikaneducation.com

البديل 1

أجب عن الاختبار التالي. ارجع إلى «المراجعة السريعة» لمساعدتك في ذلك.

اختبار سريع

أوجد قيمة كل تعبير من التعابير التالية: (مهارة سابقة)

1) $3n - 2; n = 4$

2) $(n + 1) + n; n = 6$

3) $n^2 - 3n; n = 3$

4) $180(n - 2); n = 5$

5) $n\left(\frac{n}{2}\right); n = 10$

6) $\frac{n(n-3)}{2}; n = 8$

7) اكتب التعبير الذي يدل على "*أقل بثلاثة من مربع عدد مضاف إليه اثنان*".

8) اكتب التعبير الذي يدل على "*أكثر بثلاثة من مربع عدد*".

حُلَّ كل معادلة من المعادلات التالية: (مهارة سابقة)

9) $6x - 42 = 4x$

10) $8 - 3n = -2 + 2n$

11) $3(y + 2) = -12 + y$

12) $12 + 7x = x - 18$

13) $3x + 4 = \frac{1}{2}x - 5$

14) $2 - 2x = \frac{2}{3}x - 2$

15) **حاسوب:** اشترى مالك 3 أقراص مُدْمجة بـ 24 ريالًا. اكتب معادلة تمثل متوسط ثمن القرص الواحد وحُلَّها.

استعمل الشكل المرسوم في المثال 3 في حل الأسئلة 16–19

16) حدد زاويتين حادتين متقابلتين بالرأس.

17) حدد زاويتين منفرجتين متجاورتين.

18) إذا كان $m\angle AGB = 4x + 7$ و $m\angle EGD = 71$ فأوجد قيمة x.

19) إذا كان $m\angle BGC = 45$ وَ $m\angle CGD = 8x + 4$ وَ $m\angle DGE = 15x - 7$ فأوجد قيمة x.

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد قيمة التعبير $n^3 - 3n^2 + 3n - 1$ حيث $n = 1$.

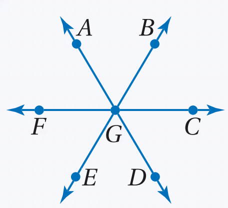
$n^3 - 3n^2 + 3n - 1$	بكتابة التعبير
$= (1)^3 - 3(1)^2 + 3(1) - 1$	بالتعويض بـ 1 عن n
$= 1 - 3(1) + 3(1) - 1$	أوجد قيمة القوى
$= 1 - 3 + 3 - 1$	بالضرب
$= 0$	بالتبسيط

مثال 2

حل المعادلة: $70x + 140 = 35x$.

$70x + 140 = 35x$	بكتابة المعادلة
$35x + 140 = 0$	بطرح $35x$ من كلا الطرفين
$35x = -140$	بطرح 140 من كلا الطرفين
$x = -4$	بقسمة كلا الطرفين على 35

مثال 3



استعمل الشكل المجاور، إذا علمت أن $m\angle AGE = 6x + 2$ و $m\angle BGD = 110$ فأوجد قيمة x.

$\angle AGE$ و $\angle BGD$ متقابلتان بالرأس

$m\angle AGE = m\angle BGD$	الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان
$6x + 2 = 110$	بالتعويض
$6x = 108$	بطرح 2 من الطرفين
$x = 18$	بقسمة الطرفين على 6

1-1 التبرير الاستقرائي والتخمين الرياضي
Inductive Reasoning and Conjecture

الأفكار الرئيسة:

- أعمل تخمينات رياضية مبنية على التبرير الاستقرائي.
- أجد أمثلة مضادة.

المفردات:

تخمين رياضي
conjecture

تبرير استقرائي
inductive reasoning

مثال مضاد
counterexample

استعد

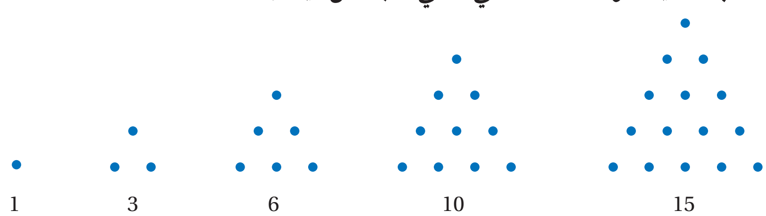
طورت الشعوب قديمًا في الشرق الرياضيات بسبب حاجتهم إليها في الزراعة والتجارة والهندسة، حيث أظهرت وثائق من تلك العصور أن عملية تعلم الرياضيات كانت من خلال الملاحظة والبحث عن النمطية والتكرار في حلول المسائل، وهذه العملية تسمى التبرير الاستقرائي.

تخمينات: **التخمين** هو إصدار ادعاء عام (بهدف تعليمي) يرتكز على معطيات ومعلومات معروفة. وتسمى العملية التي يتم من خلالها اختبار عدة مواقف محددة للوصول إلى هذا الادعاء العام **التبرير الاستقرائي**. وتستعمل عملية التفكير هذه عددًا من الأمثلة الخاصة للوصول إلى تعميم أو تنبؤ.

مثال لأنماط والتخمين

1 تسمى الأعداد الممثلة أدناه أعدادًا مثلثية.

اكتب تخمينًا حول العدد المثلثي التالي: (ابدأ من اليسار)



لاحظ: يتشكل كل مثلث بإضافة صف من النقاط.

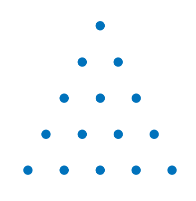
أوجد النمط:

$$1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+4} 10 \xrightarrow{+5} 15$$

تزداد الأعداد بمقدار 5 ,4 ,3 ,2.

التخمين: العدد المثلثي التالي يزيد بمقدار 6 عن سابقه.
لذلك سيكون 15+ 6 أو 21.

التحقُّق: نرسم مثلثًا يلي المثلثات أعلاه يحقق التخمين.



تحقق من فهمك

1) خمّن الحد التالي في المتتابعة:
$-10 , -2 , 5 , 11 , 16 , 20$.

إرشادات

التخمينات

دوّن ملاحظاتك وحدد الأنماط قبل الشروع في وضع التخمين.

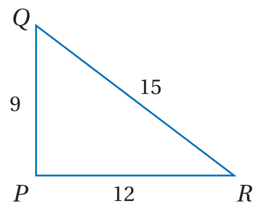
من خلال دراستك الهندسية لديك بعض المفاهيم الهندسية الأساسية التي يمكن استعمالها لعمل تخمينات هندسية.

مثــــال تحديد العلاقات

2 النقاط P, Q, R تحقق $PR = 12, QR = 15, PQ = 9$:
اكتب تخمينًا، وارسم الشكل الذي يوضح تخمينك.

المعطيات: النقاط P, Q, R تحقق $PR = 12, QR = 15, PQ = 9$

تحقق من قياسات القطع المستقيمة. ولأن $PQ + PR \neq QR$ فإن النقاط الثلاث لا تقع على استقامة واحدة.



التخمين: النقاط P, Q, R ليست على استقامة واحدة.

التحقق: ارسم المثلث PQR وهذا يوضح التخمين.

تحقق من فهمك

2) لتكن النقطة K منتصف القطعة المستقيمة $\overline{JL}$. اعمل تخمينًا وارسم الشكل الذي يوضح تخمينك.

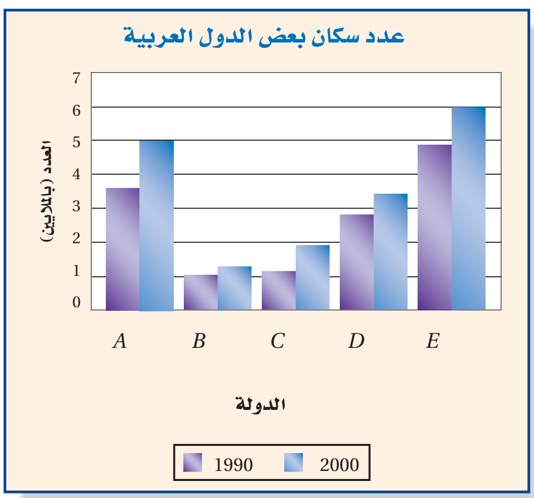
إيجاد مثال مضاد: يُبنى الادعاء أو التخمين عادة على ملاحظات أو أمثلة ربما تكون في كثير من الأحيان صحيحة، ولكن في بعض الحالات لا تكون صحيحة. ولنفي الادعاء أو التخمين يكفي إعطاء مثال يكون الادعاء فيه غيرَ صحيح. والمثال الذي يكون فيه الادعاء غير صحيح يسمى **مثالاً مضادًا.**

مثال من واقع الحياة

3 **عدد السكان:** بالاعتماد على التمثيل البياني المجاور، أعط مثالاً مضادًا للادعاء أو التخمين التالي:

"إن الزيادة في عدد سكان هذه الدول العربية لا يتجاوز المليون خلال الأعوام 1990 – 2000".

بالرجوع إلى التمثيل البياني، نرى أن العبارة صحيحة للدول B,C,D ولكن عدد سكان الدولة A مثلًا ازداد أكثر من مليون خلال الأعوام المذكورة؛ فهذا البلد يمثل مثالاً مضادًا للعبارة أو الادعاء المعطى.



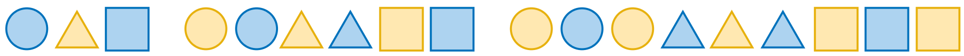
تحقق من فهمك

3) أعط مثالاً مضادًا للعبارة أو الادعاء التالي:
إن الدول العربية الواردة في المثال أعلاه التي لا تتجاوز الزيادة في عدد سكانها المليون خلال الأعوام 1990–2000 كانت نسبة الزيادة في عدد سكانها تتجاوز 25% .

تأكد

مثال 1
(ص 10)

خمِّن الحد التالي في كل من المتتابعتين التاليتين: (ابدأ من اليسار)

1) 

2) $-8, -5, -2, 1, 4$

مثال 2
(ص 11)

اكتب بناءً على المعلومات المعطاة. وارسم شكلاً يوضح تخمينك:

3) $PQ = RS$, $RS = TU$

4) يتقاطع المستقيمان $\overleftrightarrow{CD}$ ، $\overleftrightarrow{AB}$ في النقطة P.

مثال 3
(ص 11)

توزيع سكاني: للسؤالين 5 و 6 ارجع إلى الجدول وأوجد مثالاً مضادًا لكل من العبارات التالية:

5) النسبة المئوية لعدد السكان أقل من 20% من سكان المملكة العربية السعودية.

6) كل منطقة مذكورة في الجدول عدد سكانها أكثر من مليوني نسمة.

التوزيع السكاني لبعض المواطنين

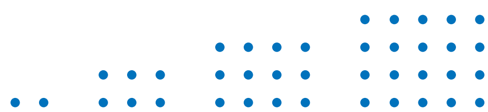
المنطقة	عدد السكان بالمليون	النسبة المئوية من عدد السكان
الرياض	3.7	22.5%
مكة المكرمة	3.6	21.7%
المدينة المنورة	1.2	6.9%
الشرقية	2.7	15.5%

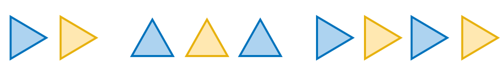
تمارين ومسائل

إرشادات للتمارين

للأسئلة	انظر الأمثلة
7–16	1
17–22	2
23–29	3

خمِّن الحد التالي في كل من المتواليات التالية: (ابدأ من اليسار)

7) 

8) 

9) $1, 2, 4, 8, 16$

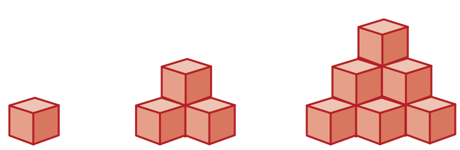
10) $4, 6, 9, 13, 18$

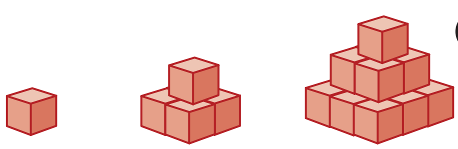
11) $3, \frac{7}{3}, \frac{5}{3}, 1, \frac{1}{3}$

12) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$

13) $2, -6, 18, -54$

14) $-5, 25, -125, 625$

15) 

16) 

اكتب تخمينًا بناءً على المعلومات المعطاة. وارسم شكلاً يوضح تخمينك:

17) المستقيمان ℓ و m متعامدان.

18) $A(-2, -11), B(2, 1), C(5, 10)$

19) الزاويتان $\angle 4$, $\angle 3$ متجاورتان على مستقيم.

20) $\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABC$.

21) الشكل الرباعي $HIJK$ مربع.

22) الزاوية $\angle B$ في المثلث ABC قائمة.

للأسئلة التالية، حدد ما إذا كان التخمين صحيحًا أو خاطئًا، وأعطِ مثالاً مضادًا في حالة كونه خاطئًا:

23) **المعطيات:** $m + y \geq 10, y \geq 4$
التخمين: $m \leq 6$

24) **المعطيات:** X, Y, Z, W نقاط في المستوى
التخمين: النقاط X, Y, Z, W ليست على استقامة واحدة.

25) **المعطيات:** $A(-4, 8), B(3, 8), C(3, 5)$
التخمين: المثلث ABC قائم الزاوية.

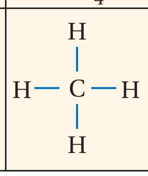
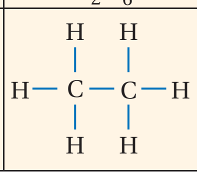
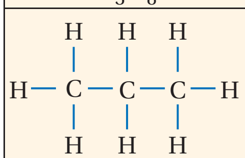
26) **المعطيات:** n عدد حقيقي.
التخمين: n^2 عدد حقيقي غير سالب.

27) **المعطيات:** $DE = EF$
التخمين: النقطة E هي منتصف القطعة المستقيمة $\overline{DF}$.

28) **منازل:** تكون معظم سطوح المنازل في البلدان القريبة من القطب الشمالي مائلة بينما في المناطق الحارة تكون الأسطح مستوية. أعط تخمينًا عن سبب اختلاف شكل الأسطح.

29) **قراءة:** يتعلم كثير من الناس قراءة القرآن سماعيًّا، دون دراسة قواعد القراءة الصحيحة. ما الوسيلة التي يتم استعمالها؟

كيمياء: في التمارين 32– 30 استعمل المعلومات التالية:
الهيدروكربونات هي جزيئات مكونة من ذرات الكربون (C) والهيدروجين (H) فقط. أبسط هذه المركبات في تركيبها الكيميائي تسمى الكانات. وأول ثلاثة مركبات منها مبينة في الجدول التالي:

الكانات			
اسم المركب	الميثان	الإيثان	البروبان
الصيغة الكيميائية	CH_4	C_2H_6	C_3H_8
الصيغة البنائية			

30) **التخمين:** اكتب تخمينًا حول البوتان وهو المركب التالي في المجموعة، ثم اكتب الصيغة البنائية له.

31) اكتب الصيغة الكيميائية للمركب السابع في المجموعة.

32) طوِّرْ قاعدة لإيجاد الصيغة الكيميائية للمركب الذي رتبته n في المجموعة.

مسائل مهارات التفكير العليا

33) **التبرير المنطقي:** حدد ما إذا كانت العبارة التالية "*صحيحة دائمًا*" أو "*صحيحة أحيانًا*" أو "*ليست صحيحة أبدًا*" اعتمادًا على المعطيات. وبرِّرْ إجابتك:
المعطيات: النقاط D, E, F على استقامة واحدة.
التخمين: $DE + EF = DF$

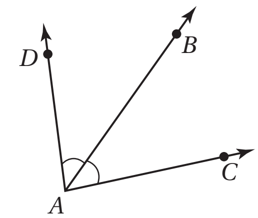
34) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارة، ثم أوجد مثالاً مضادًا لها. برِّرْ إجابتك.

35) **تحدّ :** إن العبارة التربيعية $n^2 - n + 41$ تعطي عددًا أوليًّا عند التعويض بالقيم $n = 1, 2, 3$.
إذا كتب عبدالله التخمين التالي: "إن هذه الصيغة تولد أعدادًا أولية دائمًا في حالة التعويض بأعدادٍ صحيحة موجبة". فجرب قيمًا أخرى بالتعويض عن n في العبارة التربيعية، وتحقق من صحة التخمين أو عدمه مع التبرير، وإعطاء مثال مضاد في حال عدم صحة التخمين.

36) **اكتب :** استعمل المعلومات الواردة في صفحة 10 وقارن بين طرائق تدريس الرياضيات عند الأمم القديمة وطرائق التدريس الحالية، مع وصْفِ أوجه التشابه والاختلاف.

تدريب على اختبار معياري

37) في الرسم التالي، $\overrightarrow{AB}$ منصف $\angle DAC$.



أي من الاستنتاجات التالية ليس بالضرورة صحيحًا ؟

A $\angle DAB \cong \angle BAC$

B $\angle DAC$ زاوية قائمة.

C A و D على استقامة واحدة.

D $2(m\angle BAC) = m\angle DAC$

38) **مراجعة :** مزج طالب يدرس الكيمياء كمية من محلول كبريتات النحاس تركيزها 30% مع كمية أخرى من محلول كبريتات النحاس تركيزها 40% فنتج 100 ml من محلول كبريتات النحاس ذات تركيز 32% . ما الكمية التي استعملها من محلول كبريتات النحاس ذات التركيز 30%؟

F 90 ml

G 80 ml

H 60 ml

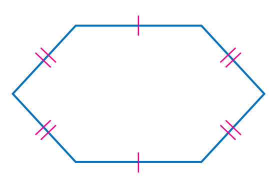
J 20 ml

مراجعة تراكمية

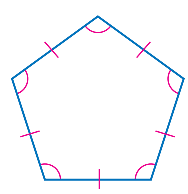
39) **أحواض السمك :** اشترى باسم حوضَ سمكٍ صغيرًا على شكل أسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها 25 cm وارتفاع الحوض 35 cm. أوجد حجم الماء اللازم لِملءِ الحوض؟

اذكر اسم كل من المضلعات التالية حسب عدد الأضلاع وصنّفه إلى محدب أو مقعر، ومنتظم أو غير منتظم:

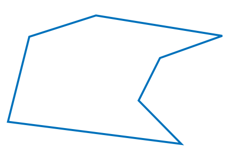
(40



(41



(42



استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة : حدد أي القيم في مجموعة التعويض تجعل المتباينة صحيحة:

43) $x + 2 > 5$
$\{2, 3, 4, 5\}$

44) $12 - x < 0$
$\{11, 12, 13, 14\}$

45) $5x + 1 > 25$
$\{4, 5, 6, 7\}$

1-2 المنطق
Logic

الأفكار الرئيسة :

- أُحدد قيم الصواب للروابط المنطقية "و"، "أو".
- أكوّن جداول الصواب.

المفردات

عبارة
statement

قيمة الصواب
truth value

النفي
negation

عبارة مركبة
compound statement

عبارة الوصل
conjunction

عبارة الفصل
disjunction

جدول الصواب
truth table

استعد

عند إجابتك على «الصحيح والخاطئ» في اختبار فإنك تستعمل مبدأً أساسيًا في المنطق.
فمثلاً انظر خريطة المملكة العربية السعودية وأجب عن الخبر التالي بصحيح أو خاطئ: أبها مدينة سعودية.
أنت تعرف أنه يوجد إجابة وحيدة صحيحة، إما صحيح أو خاطئ.

تحديد قيم الصواب: **العبارة** جملة خبرية إما أن تكون صحيحة فقط أو خاطئة فقط ولا تحتمل أي وضع ثالث. وتختلف العبارة عن التخمين أو الادعاء (الدرس 1−1)؛ لأن التخمين يحتمل أن يكون صحيحًا في بعض الحالات وخاطئًا في حالات أخرى. تُسمّى صحة أو خطأ العبارة المنطقية **قيمة الصواب** لتلك العبارة. يرمز للعبارة المنطقية برمز مثل p أو q . فمثلًا يمكن أن يرمز للعبارة "أبها مدينة سعودية" بالرمز p. (عبارة صحيحة).

ونفي **العبارة المنطقية** يفيد معنى مضادًا لمعنى العبارة. وقيمة الصواب لها عكس قيمة الصواب للعبارة.
فمثلاً نفي العبارة p أعلاه هو ليس p حيث:
ليس p: أبها ليست مدينة سعودية. (عبارة خاطئة)

مفهوم أساسي	النفي
التعبير اللفظي	إذاكانت العبارة المنطقية تمثل بالرمز p فإن "ليس p" هو نفي العبارة p.
الرموز	ويرمز له بالرمز $\sim p$ ويقرأ ليس p

ويمكن ربط عبارتين أو أكثر لتكوين **عبارة مركبة**. فمثلًا، إذا كانت
p: أبها مدينة سعودية.
q: أبها مدينة سياحية.
فإنه يمكن ربط العبارتين بأداة الربط "و" للحصول على عبارة مركبة هي:
p و q: أبها مدينة سعودية وهي مدينة سياحية.

هذا مثال على تكوين عبارة مركبة من العبارتين p و q باستعمال أداة الربط المنطقي «و». وتسمى العبارتان p و q مركبتي العبارة المركبة.

مفهوم أساسي **عبارة الوصل**

التعبير اللفظي **عبارة الوصل** عبارة مركبة مكونة من ربط عبارتين أو أكثر بأداة الربط «و».

الرموز إذا كانت p, q عبارتين فيرمز لعبارة الوصل بالرمز $p \wedge q$ وتقرأ p و q

وتكون عبارة الوصل صحيحة فقط عندما تكون جميع مركباتها عبارات صحيحة.
فمثلاً العبارة « أبها مدينة سعودية» صحيحة والعبارة « أبها مدينة سياحية» صحيحة أيضًا. لذلك تكون عبارة الوصل « أبها مدينة سعودية وهي مدينة سياحية» عبارة صحيحة.

مثال قيم الصواب لعبارة الوصل

1 استعمل العبارات التالية لكتابة عبارة مركبة باستعمال الأداة «و»، ثم أوجد قيمة الصواب لها:

p: 1 من المحرم هو أول أيام السنة الهجرية.

q: $-5 + 11 = -6$

r: المثلث مكون من ثلاثة أضلاع.

a) p و q

1 من المحرم هو أول أيام السنة الهجرية و$-5 + 11 = -6$.

p و q عبارة خاطئة لأن p صحيحة لكن q خاطئة.

b) $\sim q \wedge r$

$-5 + 11 \neq -6$ ، والمثلث مكون من ثلاثة أضلاع .

$\sim q \wedge r$ عبارة صحيحة لأن $\sim q$ صحيحة و r صحيحة.

تحقق من فهمك

1A) $r \wedge p$ **1B)** p وليس r

لغة الرياضيات

إن نفي العبارة ليس بالضرورة أن يكون خطأ وإنما له عكس قيمة صواب العبارة الأصلية.

ويمكن ربط العبارات المنطقية باستعمال أداة الربط "أو" وعندها تسمى العبارة المركبة «عبارة الفصل».
فمثلاً، إذا كانت:

p: أحمد يدرس الكيمياء.

q: أحمد يدرس الأدب العربي.

فإن p أو q: أحمد يدرس الكيمياء أو الأدب العربي.

مسلمة **عبارة الفصل**

التعبير اللفظي **عبارة الفصل** عبارة مركبة مكونة من ربط عبارتين أو أكثر بأداة الربط "أو".

الرموز إذا كانت p , q عبارتين فيرمز لعبارة الفصل بالرمز $p \vee q$ وتقرأ p أو q.

وتكون عبارة الفصل صحيحة إذا كانت إحدى مركباتها على الأقل صحيحة. وتكون خاطئة عندما تكون جميع مركباتها خاطئة.
فعندما يكون أحمد لا يدرس الكيمياء ولا يدرس الأدب العربي فإن قيمة الصواب للعبارة $p \vee q$ خطأ.

مثـــال قيم الصواب لعبارات الفصل

2 استعمل العبارات التالية لكتابة عبارة فصل، ثم أوجد قيمة الصواب لها:

p: $100 \div 5 = 20$

q: طول نصف قطر الدائرة هو ضعف طول قطرها.

r: مجموع طولَيْ ضلعي القائمة في المثلث القائم الزاوية يساوي طول الوتر.

a) p أو q

$100 \div 5 = 20$ أو طول نصف قطر الدائرة هو ضعف طول قطرها

إن العبارة المركبة p أو q صحيحة لأن p صحيحة، ولا يهم لو كانت قيمة الصواب لـ q خاطئة.

b) $q \vee r$

طول نصف قطر الدائرة هو ضعف طول قطرها أو مجموع طولَيْ ضلعي القائمة في المثلث القائم الزاوية يساوي طول الوتر.

العبارة المركبة $q \vee r$ خاطئة لأن كلًّا من q و r عبارة خاطئة.

تحقق من فهمك

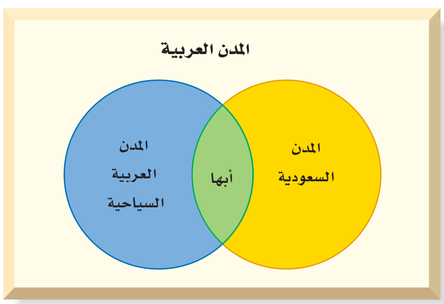
2) $\sim q \vee r$

إرشـــادات

أشكال ڤن

إن مساحة منطقة التقاطع في شكل ڤن لا تشير إلى عدد العناصر الموجودة في تلك المنطقة.

يمكن تمثيل عبارة الوصل باستعمال أشكال ڤن، فلو عدنا إلى العبارة الموجودة في بداية الدرس مع مجموعة المدن العربية السياحية، فإن منطقة التقاطع في أشكال ڤن (عن اليسار) تمثل المدن السعودية السياحية، ومنها أبها.



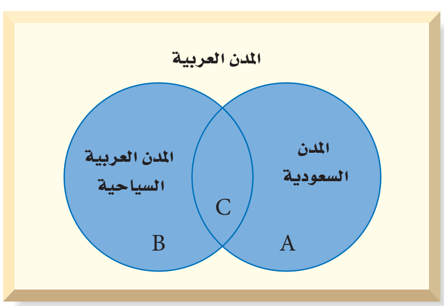
ويمكن استعمال أشكال ڤن لتوضيح « عبارة الفصل »، فإذا كانت:

p: فاطمة تسكن في مدينة سعودية

q: فاطمة تسكن في مدينة عربية سياحية.

$p \vee q$: فاطمة تسكن في مدينة عربية سياحية أو فاطمة تسكن في مدينة سعودية.

في أشكال ڤن (عن اليسار) يمثل اتحاد المجموعتين عبارة الفصل «جميع المدن السعودية وكذلك جميع المدن العربية السياحية» وعليه فإن فاطمة يمكن أن تكون ساكنة في أي من المناطق الثلاث التالية:



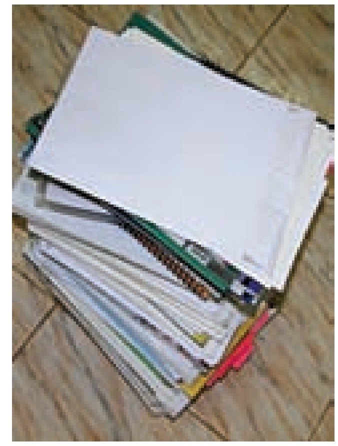
A مدينة سعودية ليست سياحية مثل رأس تنورة.

B مدينة عربية سياحية وليست سعودية مثل تونس.

C مدينة سعودية سياحية مثل مدينة أبها.

لغة الرياضيات

كلمة التقاطع تعني النقاط المشتركة بين مجموعتين أو أكثر. والاتحاد يعني جميع عناصر المجموعتين.

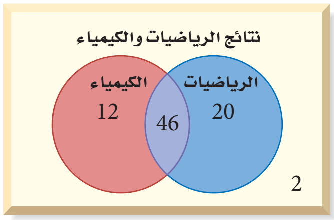


الربط مع الحياة

يمكن أن يحيط الورق الذي تستعمله الولايات المتحدة في يوم واحد الكرة الأرضية 20 مرة.

مثـــال: استعمال أشكال ڤن

3 امتحانات: يمثل شكل ڤن (عن اليسار) طلاب الصف العاشر الذين نجحوا في امتحاني الرياضيات أو الكيمياء.



a) ما عدد طلاب الصف العاشر الذين نجحوا في الرياضيات وفي الكيمياء؟

من أشكال ڤن: تمثل منطقة التقاطع الطلاب الذين نجحوا في الرياضيات وفي الكيمياء، وعددهم 46 طالبًا

b) ما عدد طلاب الصف العاشر الذين نجحوا في الرياضيات أو في الكيمياء؟

من أشكال ڤن: عدد الطلاب الذين نجحوا في الرياضيات فقط 20 طالبًا والذين نجحوا في الكيمياء فقط 12 طالبًا، بالإضافة إلى الذين نجحوا في المادتين معاً 46 طالبًا، وعليه فإن $12 + 46 + 20 = 78$ هو عدد طلاب الصف العاشر الذين نجحوا في الرياضيات أو في الكيمياء.

c) ما عدد الطلاب الذين لم ينجحوا في مادة الكيمياء؟

عدد الطلاب الذين لم ينجحوا في الكيمياء من طلاب الصف العاشر، وهم الذين نجحوا في الرياضيات فقط 20 طالبًا، بالإضافة إلى 2 لم ينجحا في المادتين، أي 22 طالبًا.

تحقق من فهمك

3) ما عدد الطلاب الذين نجحوا في الرياضيات ولم ينجحوا في الكيمياء.

جداول الصواب: من الطرائق المناسبة لتنظيم قيم الصواب للعبارات المنطقية استعمال ما يسمى **بجدول الصواب**.

النفي	
p	$\sim p$
T	F
F	T

إذا كانت p عبارة صحيحة (T) فإن $\sim p$ تكون عبارة خاطئة (F).
وإذا كانت p عبارة خاطئة (F) فإن $\sim p$ تكون عبارة صائبة (T).

تستعمل جداول الصواب لتحديد قيم الصواب للعبارة المركبة.

تكون عبارة الوصل صحيحة عندما تكون مركبتاها صحيحتين.

عبارة الوصل		
p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

تكون عبارة الفصل خاطئة عندما تكون مركبتاها خاطئة.

عبارة الفصل		
p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ويمكن استعمال قيم الصواب لنفي العبارة ولعبارتي الوصل والفصل لبناء جداول صواب لعبارات مركبة أخرى.

مثـــال إيجاد قيم المجاهيل

4 كون جدول صواب لكل من العبارات المركبة التالية:

(a $p \wedge \sim q$

الخطوة 1: ارسم عمودًا لكل من $p, q, \sim q, p \wedge \sim q$.

الخطوة 2: حدد جميع الحالات لقيم الصواب لـ p و q.

الخطوة 3: استعمل قيم الصواب لـ q لتحديد قيم الصواب لـ $\sim q$.

الخطوة 4: استعمل قيم الصواب لـ p و $\sim q$ لتحديد قيم الصواب لـ $p \wedge \sim q$.

الخطوة 1

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F

الخطوة 2 الخطوة 3 الخطوة 4

(b $(p \wedge q) \vee r$

ارسم أعمدة لـ $p, q, p \wedge q, r, (p \wedge q) \vee r$.

p	q	$p \wedge q$	r	$(p \wedge q) \vee r$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T
F	T	F	F	F
F	F	F	F	F

إرشـــادات

جدول الصواب

استعمل طرائق العد الأساسية لتحديد عدد الصفوف اللازمة. في المثال (4b) حالتان لكل من العبارات الثلاث P ؛ q ؛ r وعليه يوجد $2 \times 2 \times 2$ أو 8 صفوف في الجدول.

تحقق من فهمك

(4 $\sim p \vee \sim q$

تأكد

المثالان 1–2 (ص 16, 17)

استعمل العبارات التالية لكتابة عبارة مركبة لكل عبارة وصل أو فصل مما يلي، ثم أوجد قيمة الصواب لها:

p: $9+5 = 14$

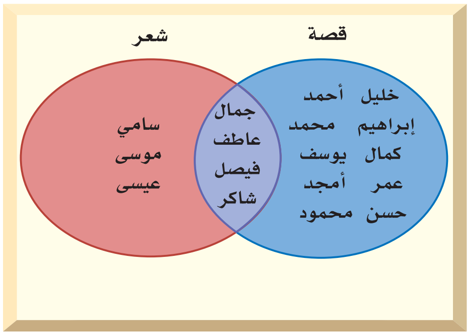
q: شهر رمضان 31 يومًا.

r: للمربع أربعة أضلاع.

(1 p و q (2 $p \wedge r$ (3 $q \wedge r$

(4 $p \vee \sim p$ (5 $q \vee r$ (6 $\sim p \vee \sim r$

مثال 3 (ص 18)



للسؤالين 7 وَ 8 استعمل أشكال ڤن التي تمثل أسماء الطلاب الذين يكتبون القصة أو يقرضون الشعر:

7) ما عدد الطلاب الذين يقرضون الشعر؟

8) ما عدد الطلاب الذين يكتبون القصة ويقرضون الشعر؟

مثال 4 (ص 19)

9) انسخ الجدول التالي وأكمله:

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
T	T	F	
T	F		
F	T		
F	F		

كون جدول صواب لكل عبارة من العبارتين التاليتين:

10) $p \wedge q$ **11)** $\sim p \wedge r$

تمارين ومسائل

إرشادات للتمارين	
للأسئلة	انظر الأمثلة
14–19	1
20–26	2
27–32	3

استعمل العبارات التالية لكتابة عبارة مركبة لكل عبارة وصل أو فصل مما يلي، ثم أَوجِدْ قيمة الصواب لكل منها.

p: $\sqrt{-64} = 8$

q: للمثلث ثلاثة أضلاع.

r: $0 > 0$

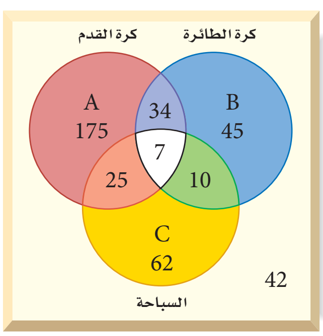
s: الزاوية المنفرجة قياسها أكبر من °90 وأقل من °180.

12) p وَ q **13)** p أو q **14)** $p \vee s$ **15)** $\sim q \wedge r$

16) $p \vee r$ **17)** $q \vee s$ **18)** $(\sim p \wedge q) \vee s$ **19)** $s \vee (q \wedge \sim r)$

رياضة : للأسئلة 23 – 20 استعمل المعلومات التالية:

سئل طلاب مدرسة ما، عددهم 400 عن الرياضة التي يمارسونها من بين كرة القدم والكرة الطائرة والسباحة. وقد مثِّلتْ إجاباتهم في أشكال ڤن عن اليسار.



20) ما عدد الطلاب الذين لا يمارسون أيًّا من الرياضات الثلاث؟

21) ما عدد الذين يمارسون الرياضات الثلاث؟

22) ما عدد الذين يمارسون كرة القدم والسباحة فقط؟

23) ما عدد الذين يمارسون رياضة واحدة على الأقل؟

الربط مع الحياة

يمارس عدد كبير من طلاب المرحلة الثانوية نشاطات غير منهجية مثل الرياضة والفن والنوادي العلمية.

مدرسة : للأسئلة 26 – 24 استعمل المعلومات التالية:

عدد طلاب مدرسة 310، منهم 80 طالبًا أعضاء في نادي النشاط العلمي، و115 عضوًا في نادي النشاط الرياضي و 20 طالبًا يشاركون في الناديين:

24) ارسم شكل ڤن الذي يمثل هذه المعلومات.

25) ما عدد الطلاب الذين يشاركون في النشاط الرياضي أو العلمي؟

26) ما عدد الطلاب الذين لا يشاركون في أي من النشاطين؟

انسخ جدولي الصواب التاليين وأكملهما:

27)

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

28)

p	q	~p	~q	$\sim p \wedge \sim q$
T		F	F	
T		F	T	
F		T	F	
F		T	T	

كون جدول الصواب لكل من العبارات المركبة التالية:

29) $q \wedge \sim r$ **30)** $\sim p \wedge \sim q$ **31)** $\sim p \vee (q \wedge \sim r)$ **32)** $p \wedge (\sim q \vee \sim r)$

جغرافية : للأسئلة 35–33 استعمل المعلومات التالية:

سألت وكالة سياحة وسفر زبائنها عن الأماكن التي قاموا بزيارتها فكانت الإجابات كما يلي : 60 منهم زاروا أوربا ، وَ 45 زاروا بريطانيا، و 50 زاروا فرنسا.

33) ارسم شكل ڤن ليمثل هذه المعلومات. **34)** اكتب عبارة وصل من هذه المعلومات.

35) اكتب عبارة فصل من هذه المعلومات.

بحث : استعمل الإنترنت أو مصدرًا آخر لتحديد قيم الصواب للعبارات التالية:

36) الرياض عاصمة المملكة العربية السعودية، وهي لا تقع على ساحل البحر الأحمر.

37) الرياض عاصمة المملكة العربية السعودية، أو العاصمة اللبنانية بيروت تقع على ساحل البحر الأبيض المتوسط.

38) ليس صحيحًا أن مدينة الإسكندرية تقع على ساحل البحر الأبيض المتوسط.

مسائل مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة : اكتب عبارة مركبة لكل شرط من الشروط التالية:

39) عبارة فصل صحيحة. **40)** عبارة وصل خاطئة. **41)** عبارة صحيحة تتضمن نفيًا.

تحدّ : للسؤالين 43 – 42 استعمل المعلومات التالية:

جميع أعضاء الفريق A هم أعضاء في الفريق B ولكنَّ بعضًا من أعضاء الفريق B هم أعضاء في الفريق C والفريقان A و C ليس بينهما أعضاء مشتركون.

42) ارسم شكل ڤن يمثل هذه المعلومات

43) أي من العبارات التالية صحيحة؟ برر إجابتك.

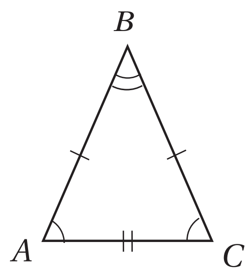
p: إذا كان الشخص عضواً في الفريق C فإن هذا الشخص ليس عضوًا في الفريق A.

q: إذا كان الشخص ليس عضوًا في الفريق B فإنه ليس عضوًا في الفريق A.

r: لا يوجد عضو في الفريق A يمكن أن يكون عضوًا في الفريق C.

44) **اكتب :** ارجع إلى الصفحة 15 وبيِّن كيف يمكنك تطبيق المنطق في تقديم الاختبارات، ومنها الفرق بين عبارة الوصل وعبارة الفصل.

تدريب على اختبار معياري



45) أي العبارات التالية لها قيمة الصواب نفسها للعبارة $AB = BC$ ؟

A $m\angle A = m\angle C$ **C** $AC = BC$

B $m\angle A = m\angle B$ **D** $AB = AC$

مراجعة تراكمية

خمِّن الحد التالي في كل من المتتابعات التالية . (ابدأ من اليسار) (الدرس 1-1)

46) $3, 5, 7, 9$ **47)** $1, 3, 9, 27$ **48)** $6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}$

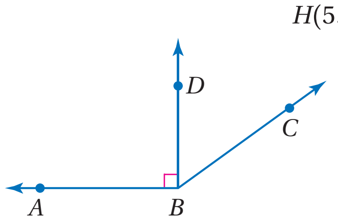
49) هرم خشبي قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها 2 m ، وطول ارتفاعه المائل 2.5 m . ما مساحة سطحه؟

هندسة إحداثية : أوجد محيط كل من المضلعات التالية إلى أقرب عشر:

50) المثلث ABC الذي إحداثيات رؤوسه $A(-6 , 7)$,$B(1 , 3)$, $C(-2 , -7)$

51) الشكل الرباعي $HIJK$ الذي إحداثيات رؤوسه $H(5, -10), I(-8, -9), J(-5, -5), K(-2, -4)$

قس كلًّا من الزوايا التالية وصنفها إلى قائمة، أوحادة، أو منفرجة:



52) $\angle ABC$ **53)** $\angle DBC$ **54)** $\angle ABD$

55) سياج: أرادت مروة وضعَ سياج حول حديقتها المستطيلة الشكل، حيث طول كل من الواجهة الأمامية والخلفية للحديقة 35 m، وطول كل من الجانبين 75 m، كما أرادت أن يكون هناك 5 m زيادة في طول السياج للاحتياط، فكم مترًا عليها أن تشتري؟

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة : أوجد قيمة كل مقدار لكل من القيم المعطاة:

56) $5a - 2b$ إذا كانت $a = 4$ وَ $b = 3$

57) $4cd + 2d$ إذا كانت $c = 5$ وَ $d = 2$

58) $4e + 3f$ إذا كانت $e = -1$ وَ $f = -2$

59) $3g^2 + h$ إذا كانت $g = 8$ وَ $h = -8$

1-3 العبارات الشرطية
Conditional Statements

الأفكار الرئيسة:

- أحلل العبارة الشرطية (إذا كان .... فإن ...).
- أكتب العكس، والمعكوس والمعاكس الإيجابي لـ (إذا كان .... فإن...).

المفردات:

العبارة الشرطية (إذا كان ... فإن ....)
conditional statement
if-then

الفرض
hypothesis

النتيجة
conclusion

عبارة شرطية مرتبطة
related conditionals

عكس
converse

معكوس
inverse

المعاكس الإيجابي
contrapositive

التكافؤ المنطقي
logically equivalent

استعد

كيف تُستعمل العبارات الشرطية في الإعلانات؟ غالبا ما يغري المعلنون المستهلكين بأنهم سيحصلون على أشياء مجانًا إذا ما اشتروا أشياء غالية الثمن.

عبارة إذا كان ... فإن....: العبارات أعلاه هي أمثلة على **عبارات شرطية**، وهي تكون على صورة (إذا كان .... فإن....) ويمكن كتابة المثال الثاني أعلاه لتوضيح ذلك على الصورة:

"*إذا اشتريت سيارة فإنك تحصل على 6000 ريال*".

مفهوم أساسي — إذا كان .... فإن .....

التعبير اللفظي تكتب عبارة (**إذا كان .... فإن ....**) على الصورة "إذا كانت p فإن q". الجملة التي تتبع كلمة إذا تسمى **الفرض**، والجملة التي تتبع كلمة فإنَّ تسمى **النتيجة**.

الرموز إذا كانت p , q عبارتين فيرمز لعبارة الشرط بالرمز $p \rightarrow q$ وتقرأ إذا كانت p فإن q أو تقرأ p تؤدي إلى q.

مثال 1 — تحديد الفَرْض والنتيجة

حدد الفرض والنتيجة في كل عبارة:

a) إذا وقعت النقاط A, B, C على الخط ℓ، فإنها تكون على استقامة واحدة.

$\underbrace{\text{إذا وقعت النقاط } A, B, C \text{ على الخط } \ell}_{\text{الفرض}}$، $\underbrace{\text{فإن النقاط تكون على استقامة واحدة}}_{\text{النتيجة}}$.

الفرض: تقع النقاط A, B, C على الخط ℓ.

النتيجة: النقاط على استقامة واحدة.

b) سيشارك فريق كرة القدم في النهائيات إذا فاز في المباراة القادمة.

الفرض: فاز فريق كرة القدم في المباراة القادمة.

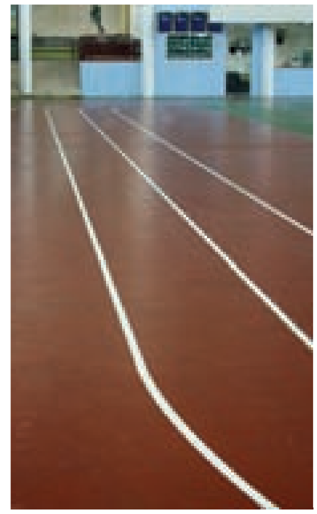
النتيجة: سيشترك الفريق في النهائيات.

تحقق من فهمك

1A) إذا تكوّن المضلع من ستة أضلاع فإنه شكل سداسي.

1B) سيتم إنجاز الطبعة الثانية إذا نفدت الطبعة الأولى من الكتاب.

تكتب بعض العبارات الشرطية دون استعمال (إذا كان ... فإن ...)، ولكن يمكنك كتابتها على صورة (إذا كان ... فإن ...) بعد تحديد الفرض والنتيجة.



الربط مع الحياة

تعتبر رياضة الجري من أكثر الرياضات انتشارًا في العالم.

مثال كتابة عبارة شرطية على الصورة (إذا كان ... فإن ...)

2 حدد الفرْض والنتيجة في كل عبارة، ثم اكتبها على صورة (إذا كان ... فإن ....)

a) **الزاوية التي قياسها أكبر من 90 هي زاوية منفرجة.**

الفرض: زاوية قياسها أكبر من 90.

النتيجة: هي زاوية منفرجة.

إذا كان قياس الزاوية أكبر من 90 فإنها زاوية منفرجة.

b) **طول مضمار الجري يساوي 400 متر.**

الفرض: مضمار الجري.

النتيجة: طول المضمار 400 متر.

إذا كان المضمار خاصًا بالجري، فإن طوله 400 متر.

تحقق من فهمك

2A) الزاوية التي تتشكل من مستقيمين متعامدين هي زاوية قائمة.

2B) الزاوية التي قياسها أصغر من 90 هي زاوية حادة.

تذكر أن قيمة الصواب لأي عبارة منطقية إما صواب أو خطأ. فالفرض والعبارة الشرطية نفسها كلها عبارات منطقية قد تكون صحيحة أو خاطئة.

مثال من واقع الحياة قيم الصواب للعبارات الشرطية

3 **مدرسة:** حدد قيمة الصواب للعبارة التالية لكل شرط من الشروط:

"إذا حصلت على الدرجة 100 في الاختبار فإن مدرسك سيعطيك تقدير ممتاز".

a) **حصلت على الدرجة 100، والمدرس وضع لك تقدير ممتاز.**

الفرض صحيح لحصولك على الدرجة 100 والنتيجة صحيحة؛ لأن المدرس أعطاك تقدير امتياز، وبما أن وعد المدرس صحيح فإن العبارة الشرطية صحيحة.

b) **حصلت على علامة 100، والمدرس وضع لك تقدير جيد جدًّا.**

الفرض صحيح وهو حصولك على الدرجة 100، لكن النتيجة خاطئة؛ لأن المدرس أعطاك تقدير جيد جدًّا وليس كما وعدك به، ولذلك فالعبارة الشرطية خاطئة.

c) **حصلت على علامة 98 والمدرس وضع لك تقدير ممتاز.**

الفرض خاطئ وهو عدم حصولك على الدرجة 100، ولكن النتيجة صحيحة، وهي إعطاء المدرس لك تقدير ممتاز. وبما أن العبارة لا تُقرّ شيئًا في حالة عدم حصولك على الدرجة 100، فالتقدير متروك للمدرس يمكن أن يقدره امتيازًا أو جيدًا جدًّا أو أي تقدير آخر، لكن العبارة الشرطية تكون صحيحة بغض النظر عن نتيجة التقدير.

تحقق من فهمك

3) حصلت على 85 % في الاختبار، ومدرسك وضع لك تقدير جيد جدًّا

إرشادات

خطأ شائع

صحة الفرض لا تعني بالضرورة صحة العبارة الشرطية، بالمثل خطأ النتيجة لا يضمن خطأ العبارة الشرطية.

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

يمكن أن تستعمل قيم الصواب الناتجة في المثال (3) لبناء جدول الصواب للعبارة الشرطية.
لاحظ أن العبارة الشرطية تكون صحيحة في جميع الحالات إلا أن يكون الفرض صحيحًا والنتيجة خاطئة.

العكس، والمعكوس والمعاكس الإيجابي: يرتبط **بالعبارة الشرطية المعطاة عبارات شرطية أخرى تسمى العبارات الشرطية المرتبطة**. اعتبر العبارة الشرطية **التالية:**

"*إذا كنت تسكن في مدينة الدمام فإنك تقطن في المملكة العربية السعودية*".
الفرض: تسكن في مدينة الدمام والنتيجة تقطن في المملكة العربية السعودية.
إذا بدلت الفرض بالنتيجة والنتيجة بالفرض فإنك تحصل على العبارة الشرطية:
"إذا كنت تقطن في المملكة العربية السعودية فإنك تسكن في مدينة الدمام".
تسمى هذه العبارة عكس العبارة الشرطية المعطاة.
ويصاغ المعكوس والمعاكس الإيجابي باستعمال نفي الفرض ونفي النتيجة .

مفهوم أساسي — العبارات الشرطية المرتبطة

العبارة	مكونة من	بالرموز	أمثلة
الشرطية	فرض معطى ونتيجة	$p \to q$	إذا تساوى قياس زاويتين فإنهما متطابقتان.
العكس	تبديل الفرض والنتيجة	$q \to p$	إذا تطابقت زاويتان فإن لهما القياس نفسه.
المعكوس	نفي كل من الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية.	$\sim p \to \sim q$	إذا كان قياسا زاويتين غير متساويين فإنهما غير متطابقتين.
المعاكس الإيجابي	نفي كل من الفرض والنتيجة في عكس العبارة الشرطية.	$\sim q \to \sim p$	إذا كانت الزاويتان غير متطابقتين فإن قياسيهما غير متساويين.

إرشادات

المعاكس الإيجابي

العلاقة بين قيم الصواب للعبارة الشرطية ومعاكسها الإيجابي يعرف بقانون المعاكس الإيجابي.

إذا كانت العبارة الشرطية صحيحة فليس بالضرورة أن يكون عكسها ومعكوسها صحيحين، في حين يكون المعاكس الإيجابي صحيحًا دائمًا إذا كانت العبارة الشرطية صحيحة. ويكون المعاكس الإيجابي خطأ إذا كانت العبارة الشرطية خطأ.
وبالمثل فإن عكس العبارة الشرطية ومعكوسها إما أن يكونا صحيحين معا أو خطأً معاً.
والعبارات التي لها قيم الصواب نفسها يقال لها عبارات **متكافئة منطقيًا**.
فالمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية يكافئ منطقيًا العبارة الشرطية، وعكس العبارة الشرطية يكافئ منطقيًّا معكوسها.
وهذه العلاقات تلخص في الجدول التالي:

p	q	العبارة الشرطية $p \to q$	عكس العبارة الشرطية $q \to p$	معكوس العبارة الشرطية $\sim p \to \sim q$	المعاكس الإيجابي $\sim q \to \sim p$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T

مثـــال عبارات شرطيّة مرتبطة

4 **اكتب العكس، والمعكوس، والمعاكس الإيجابي للعبارة التالية، وحدّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أو خاطئة. وإذا كانت العبارة خاطئة فأعطِ مثالاً مضادًا:**

"*الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان*".

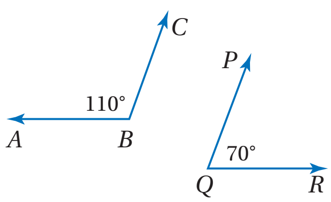
أولاً، اكتب العبارة على صورة "إذا كان ... فإن ...".

العبارة الشرطية: إذا كانت الزاويتان متجاورتين على مستقيم فإنهما زاويتان متكاملتان. وهي عبارة صحيحة.

لكتابة عكس العبارة الشرطية بدّل الفرض والنتيجة.

عكس العبارة الشرطية: إذا كانت الزاويتان متكاملتين فإنهما متجاورتان على مستقيم. وهي عبارة خاطئة. $\angle ABC$ و $\angle PQR$ زاويتان متكاملتان، ولكنهما غير متجاورتين على مستقيم.

معكوس العبارة الشرطية: إذا كانت الزاويتان غير متجاورتين على مستقيم فإنهما غير متكاملتين. وهذه عبارة خاطئة، والمثال المضاد هو المثال نفسه أعلاه؛ فالزاويتان $\angle ABC$ و $\angle PQR$ غير متجاورتين على مستقيم ولكنهما متكاملتان.



ويكتب معكوس العبارة الشرطية عن طريق نفي الفرض ونفي النتيجة في العبارة الشرطية. أما المعاكس الإيجابي فيتشكل بنفي الفرض ونفي النتيجة في عكس العبارة الشرطية.

المعاكس الإيجابي: إذا كانت الزاويتان غير متكاملتين فإنهما غير متجاورتين على مستقيم وهذه العبارة صحيحة.

تحقق من فهمك

4) الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان.

تأكد

حدد الفرض والنتيجة لكل عبارة من العبارتين التاليتين:

مثال 1 (ص 23)

1) إذا أمطرت يوم الإثنين فإنني سأبقى في المنزل.

2) إذا كان $x - 3 = 7$ فإن $x = 10$.

مثال 2 (ص 24)

3) **اكتب العبارة التالية على صورة (إذا كان ... فإن ...):**

مجموع قياسي الزاويتين المتكاملتين هو $180°$.

4) **أشجار:** تشتهر بعض الدول العربية بنوع من الأشجار المثمرة. اكتب العبارات الثلاث التالية على صورة إذا كان ... فإن .....:

- تغطي أشجار البرتقال في فلسطين معظم مناطق الساحل.
- تغطي أشجار التفاح في لبنان المناطق الجبلية.
- تنتشر أشجار الزيتون في الأردن في المناطق الشمالية والغربية.

مثال 3
(ص 24)

حدّد قيمة الصواب للعبارة التالية وفقًا للشروط المعطاة:
"إذا كانت سرعتك تتجاوز 100 كلم / ساعة فإنك ستحصل على مخالفة سرعة".

5) كانت سرعتك 110 كلم / ساعة وتلقيت مخالفة سرعة.

6) كانت سرعتك 90 كلم/ ساعة ولم تتسلم مخالفة سرعة.

7) كانت سرعتك 105 كلم/ ساعة ولم تتسلم مخالفة سرعة.

مثال 4
(ص 26)

اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لكل عبارة شرطية، وحدد صحة أو خطأ كل عبارة مرتبطة. وفي حالة خطأ العبارة المرتبطة أعطِ مثالًا مضادًّا:

8) إذا رُويت المزروعات بالماء فإنها ستنمو.

9) السفر بالطائرة أكثر أمانًا من السفر بالسيارة.

تمارين ومسائل

إرشادات للتمـــاريـــن	
للأسئلة	انظر الأمثلة
10–14	1
15–18	2
19–27	3
28–30	4

حدد الفرض والنتيجة في كل من العبارات التالية:

10) إذا كنت طالبًا في المرحلة الثانوية فإن عمرك على الأقل 14 سنة.

11) إذا كانت $2x + 6 = 10$، فإن $x = 2$.

12) إذا كانت ثلاث نقاط تقع على مستقيم واحد فإنها تسمى نقاطًا مستقيمة.

13) إذا كان قياس الزاوية بين 0 و 90 فإنها حادة.

14) إذا كانت أضلاع الشكل الرباعي متطابقة فإنه مربع.

اكتب كل عبارة من العبارات التالية على صورة (إذا كان ... فإن ...):

15) يفضل مدرسو الرياضيات حل المسائل.

16) أنا أفكر فأنا موجود.

17) الزاويتان المتجاورتان بينهما ضلع مشترك.

18) المثلث المتطابق الزوايا يكون متطابق الأضلاع.

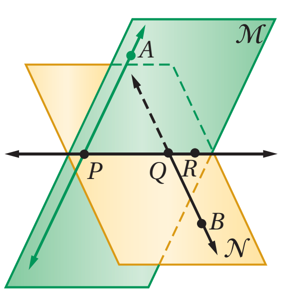
حدد قيم الصواب للعبارة التالية تحت الشروط المعطاة:
"إذا تجاوز عمرك 18 عامًا فإنه يحق لك استخراج رخصة قيادة".

19) عمرك 19 سنة واستخرجت رخصة قيادة.

20) عمرك 21 سنة ولا يحق لك استخراج رخصة قيادة.

21) عمرك 17 سنة واستخرجت رخصة قيادة.

في الشكل المجاور، P, Q, R ثلاث نقاط على استقامة واحدة، A, P تقعان في المستوى $\mathcal{M}$ وَ Q, B تقعان في المستوى $\mathcal{N}$.
حدد قيم الصواب لكل عبارة مما يلي:



22) P, Q, R نقاط في المستوى $\mathcal{M}$.

23) $\overleftrightarrow{QB}$ يقع في المستوى $\mathcal{N}$.

24) Q نقطة تقع في المستوى $\mathcal{M}$.

25) P, Q, A, B نقاط مستوية.

26) $\overleftrightarrow{AP}$ مستقيم يحوي النقطة Q.

27) المستويان $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ يتقاطعان في المستقيم $\overleftrightarrow{RQ}$.

اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لكل عبارة شرطية. وحدّد صحة أو خطأ كل عبارة مرتبطة بالعبارة الشرطية، وإذا كانت العبارة المرتبطة خاطئة فأعطِ مثالا مضاداً.

28) مجموع قياسي الزاويتين المتتامتين $90°$.

29) جميع المستطيلات أشكال رباعية.

30) كل زاوية حادة قياسها أقل من $90°$.

فصول السنة: للسؤالين 32 وَ 31 استعمل المعلومات التالية:

"*نتيجة لدوران الأرض حول الشمس نجد أن نهار أيام الصيف في الجزء الشمالي للكرة الأرضية أطول من فترة الليل، في حين أن أيام الشتاء تكون فترة الليل فيها أطول من نهارها*".

31) اكتب عبارتين شرطيتين صحيحتين على صورة (إذا كان ... فإن ...) حول أيام الصيف وأيام الشتاء في الجزء الشمالي للكرة الأرضية.

32) اكتب عكس العبارتين الشرطيتين في السؤال (31)، وحدد قيمة الصواب لكل عبارة. وإذا كانت العبارة خاطئة فأعطِ مثالًا مضادًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

33) مسألة مفتوحة: اكتب مثالًا لعبارة شرطية.

34) تبرير: قارن بين المعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية.

35) تحدّ: اكتب عبارة شرطية خاطئة، وابحث عن إمكانية إضافة كلمة ليس إلى العبارة الشرطية لجعلها صحيحة، ثم اكتب العبارة الشرطية الصحيحة.

36) اكتب: ارجع إلى صفحة 23 وَصِفْ كيفَ تستعمل العبارات الشرطية في الإعلانات وضمّن إجابتك مثالًا لعبارة شرطية على الصورة "*إذا كان ... فإن ...*" يمكن استعمالها في إعلان.

تدريب على اختبار معياري

37) إذا كان مجموع قياسي زاويتين $90°$ فإن الزاويتين متتامتان. أي من العبارات التالية هي عكس العبارة الشرطية أعلاه؟

A إذا كانت الزاويتان متتامتين فإن مجموع قياسيهما $90°$.

B إذا كانت الزاويتان غير متتامتين فإن مجموع قياسيهما $90°$.

C إذا كانت الزاويتان متتامتين فإن مجموع قياسيهما لا يساوي $90°$.

D إذا كانت الزاويتان غير متتامتين فإن مجموع قياسيهما لا يساوي $90°$.

38) مراجعة: ما أبسط صورة للمقدار $\frac{10a^2 - 15ab}{4a^2 - 9b^2}$

A $\frac{5a}{2a - 3b}$

B $\frac{5a}{2a + 3b}$

C $\frac{a}{2a + 3b}$

D $\frac{a}{2a - 3b}$

مراجعة تراكمية

استعمل العبارات التالية لكتابة عبارات مركبة باستعمال أدوات الربط المنطقية مع تحديد قيم الصواب لكل منها: (الدرس 2-1)

p: أبو بكر الصديق أول الخلفاء الراشدين.

q: الشكل السداسي مكون من خمسة أضلاع.

r: $3 \times 60 = 18$

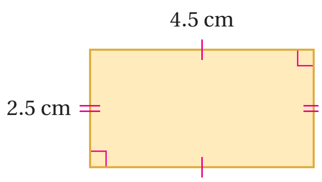
39) $p \wedge q$ 40) $q \vee r$ 41) $p \wedge \sim q$ 42) $\sim p \wedge \sim r$

اكتب تخمينًا باستعمال المعلومات المعطاة، وارسم شكلًا لتوضيح تخمينك : (الدرس 1-1)

43) $ABCD$ مستطيل

44) $J(-3, 2), K(1, 8), L(5, 2)$

45) في المثلث PQR , $m\angle PQR = 90°$



استعمل المستطيل المجاور في حل الأسئلة التالية:

46) أوجد محيط المستطيل.

47) أوجد مساحة المستطيل.

48) افرض أن كلًّا من طول المستطيل وعرضه قد تضاعف، فما تأثير ذلك على المحيط؟

49) وما تأثير ذلك على المساحة؟

استعمل قانون المسافة بين نقطتين في المستوى لحساب المسافة بين كل زوج من النقاط:

50) $C(-2 , -1), D(0 , 3)$

51) $P(-3 , -1), Q(2 , -3)$

ارسم الشكل وسمه لكل علاقة للأسئلة التالية:

52) $\overleftrightarrow{FG}$ يقع في المستوى $\mathcal{M}$ ويحوي النقطة H.

53) المستقيمان r و s يتقاطعان في النقطة W.

54) المستقيم ℓ يحوي النقطتين P و Q ولكنه لا يحوي النقطة R.

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية : حدد العملية التي استعملت لتغير المعادلة (1) إلى المعادلة (2):

55) (1) $3x + 4 = 5x - 8$
(2) $3x = 5x - 12$

56) (1) $\frac{1}{2}(a - 5) = 12$
(2) $a - 5 = 24$

57) (1) $8p = 24$
(2) $p = 3$

اقرأ

العبارة الشرطية الثنائية:

حصل أحمد على عمل في العطلة الصيفية وكان أجره 10 ريالات عن كل ساعة عمل. وإذا اشتغل أكثر من 40 ساعة في الأسبوع فسيحصل على 15 ريالاً عن كل ساعة عمل. وإذا تقاضى أحمد 15 ريالاً في الساعة فإنه عمل أكثر من 40 ساعة في ذلك الأسبوع.

p: أجر أحمد 15 ريالاً عن كل ساعة عمل

q: عمل أحمد أكثر من 40 ساعة في الأسبوع

$p \rightarrow q$: إذا كانت أجرة أحمد 15 ريالاً لكل ساعة عمل، فإنه يكون قد عمل أكثر من 40 ساعة في الأسبوع.

$q \rightarrow p$: إذا عمل أحمد أكثر من 40 ساعة في الأسبوع، فإن أجره في الساعة 15 ريالاً.

في هذه الحالة العبارة الشرطية $p \rightarrow q$ صحيحة وعكسها $q \rightarrow p$ صحيح. وإذا تم ربط العبارة الشرطية وعكسها بأداة الربط المنطقية "و" فإن العبارة الناتجة تسمى **العبارة الشرطية الثنائية**.

مفهوم أساسي	العبارة الشرطية الثنائية
التعبير اللفظي	**العبارة الشرطية الثنائية هي ربط عبارة شرطية وعكسها بأداة الربط "و".**
بالرموز	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ **ويرمز لها اختصارا** $(p \leftrightarrow q)$ **وتقرأ** p **إذا وفقط إذا** q.

أمثلة

لكل عبارة شرطية ثنائية اكتب العبارة الشرطية وعكسها، وحدد ما إذا كانت العبارة الثنائية صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فأعط مثالًا مضادًا.

a) تكون الزاويتان متتامتين إذا وفقط إذا كان مجموع قياسيهما °90.

العبارة الشرطية: إذا كانت الزاويتان متتامتين فإن مجموع قياسيهما °90.

عكس العبارة: إذا كان مجموع قياسي زاويتين °90 فإنهما متتامتان.

وبما أن كلًّا من العبارة الشرطية وعكسها صحيح فإن العبارة الشرطية الثنائية صحيحة.

b) $x > 9$ إذا وفقط إذا كان $x > 0$

العبارة الشرطية: إذا كانت $x > 9$، فإن $x > 0$.

عكس العبارة: إذا كانت $x > 0$، فإن $x > 9$

إن العبارة الشرطية صحيحة لكن عكسها خاطئ. فمثلا إذا كانت $x = 2$ فإن $x > 0$ ولكن $x \not> 9$.

وعليه فإن العبارة الشرطية الثنائية خاطئة.

اقرأ وتعلّم

لكل عبارة شرطية ثنائية اكتب العبارة الشرطية وعكسها، وحدّد ما إذا كانت العبارة الشرطية الثنائية صحيحة أم خاطئة، وإذا كانت خاطئة فأعطِ مثالا مضادًّا:

1) تعمل الآلة الحاسبة إذا وفقط إذا احتوت على بطاريات.

2) يتقاطع مستقيمان إذا وفقط إذا كانا غير متعامدين.

3) تتطابق زاويتان إذا وفقط إذا كان لهما القياس نفسه.

4) $3x - 4 = 20$ إذا وفقط إذا كانت $x = 7$.

1-4 التبرير الاستنتاجي
Deductive Reasoning

الأفكار الرئيسة:

- أستعمل قانون الفصل المنطقي.
- أستعمل قانون القياس المنطقي.

المفردات:

التبرير الاستنتاجي
deductive reasoning

قانون الفصل المنطقي
Law of Detachment

قانون القياس المنطقي
Law of Syllogism

استعد

عندما يمرض شخص فإن الطبيب يصف له مضادًّا حيويًّا لمساعدته على الشفاء بإذن الله، فالأطباء يستعملون لوحة مقادير الجرعات لتحديد عيار الجرعة حسب وزن المريض.

الوزن kg	الجرعة mg
10–20	150
20–30	200
30–40	250
40–50	300
50–60	350
60–70	400

قانون الفصل المنطقي: عملية الاستنتاج التي يتبعها الأطباء في تحديد عيار الجرعة من الدواء لكل مريض تسمى **التبرير الاستنتاجي**، على عكس التبرير الاستقرائي الذي يستعمل أمثلة لإنشاء التخمين أو الادعاء، فإن التبرير الاستنتاجي يستعمل حقائق أو قواعد أو تعاريف أو خصائص للوصول إلى نتائج منطقية.

والتبرير الاستقرائي لا يثبت شيئًا بمفرده، لكن التبرير الاستنتاجي يمكن أن يستعمل لإثبات العبارات. أحد أشكال التبرير الاستنتاجي والذي يستعمل للحصول على النتائج من عبارات شرطية صحيحة يسمى **قانون الفصل المنطقي**.

إرشادات

تحقق من صحة المعطيات

عند تطبيق قانون الفصل المنطقي تأكد من صحة الشروط قبل اختبار صحة النتائج.

مفهوم أساسي — قانون الفصل المنطقي

التعبير اللفظي إذا كانت العبارة الشرطية $p \rightarrow q$ صحيحة والفرض p صحيحًا فإن q تكون صحيحة.

الرموز $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$.

مثال — تحديد صحة النتائج

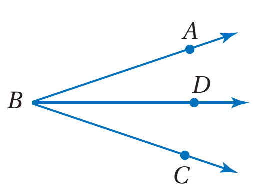
1 العبارة الشرطية أدناه صحيحة. حدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم خاطئة بناء على المعطيات المعطاة مع تبرير إجابتك.

"إذا كان نصف المستقيم منصّفًا لزاوية فإنه يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين".

المعطيات: $\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABC$.

النتيجة: $\angle ABD \cong \angle CBD$

بما أن العبارة الشرطية المعطاة صحيحة والفرض الذي ينص على أن $\overrightarrow{BD}$ منصف للزاوية ABC صحيح فلا بد أن تكون النتيجة صحيحة.



تحقق من فهمك

1) إذا توازت قطعتان مستقيمتان فإنهما لا تتقاطعان.

المعطيات : $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

النتيجة : $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ لا تتقاطعان

قانون القياس المنطقي: طريقة أخرى للحصول على النتائج هي استعمال **قانون القياس المنطقي** والذي يشابه خاصية التعدي لعلاقة المساواة.

مفهوم أساسي — قانون القياس المنطقي

التعبير اللفظي إذا كانت العبارتان الشرطيتان $p \to q$, $q \to r$، صحيحتين فإن العبارة الشرطية $p \to r$ تكون صحيحة.

الرموز $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)]$

مثال إذا كان $2x = 14$ فإن $x = 7$ وإذا كان $x = 7$ فإن $\frac{1}{x} = \frac{1}{7}$ وعليه فإنه إذا كان $2x = 14$ فإن $\frac{1}{x} = \frac{1}{7}$.

مثال من واقع الحياة — تحديد نتائج صحيحة من عبارتين شرطيتين

2 **كيمياء :** استعمل قانون القياس المنطقي لتحديد ما إذا كان ممكنًا الوصول إلى نتيجة صحيحة من كل مجموعة من العبارات التالية:

a) (1) إذا كان رمز المادة **Pb**، فإنها مادة الرصاص.

(2) إذا كانت المادة هي الرصاص فإن عددها الذري هو 82.

لتكن p: رمز المادة Pb

q: مادة الرصاص

r: العدد الذري 82

العبارة الشرطية (1): $p \to q$

العبارة الشرطية (2): $q \to r$

وبما أن العبارتين الشرطيتين صحيحتان فإنه باستعمال قانون القياس المنطقي نستنتج أن $p \to r$. عبارة شرطية صحيحة أي أنه إذا كان رمز المادة Pb فإن عددها الذري 82.

b) (1) يرمز للماء بالرمز H_2O.

(2) يوجد كل من الهيدروجين (H) والأكسجين (O) في الغلاف الجوي.

مع أن العبارتين صحيحتان إلا أنه لا يمكن الوصول إلى نتيجة صحيحة منهما؛ لأنه لم تستعمل نتيجة أي منهما كفرض في العبارة الأخرى.

إرشادات

العبارات الشرطية

حدد الفرضيات والنتائج في العبارات الشرطية قبل البدء بتطبيق قانون القياس المنطقي.

تحقق من فهمك

2A) (1) إذا وقفت في الصف فيمكنك تجربة السيارة الجديدة.

(2) إذا كنت تحمل رخصة قيادة فيمكنك تجربة السيارة الجديدة .

2B) (1) إذا كان للمضلع ستة أضلاع متطابقة فهو شكل سداسي منتظم.

(2) إذا كان طول ضلع الشكل السداسي المنتظم 3 وحدات فإن محيطه هو 6×3 أو 18 وحدة.

مثـــال تحليل النتائج

3 بين ما إذا كانت العبارة (3) نتيجة للعبارتين (1) و (2) من قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي، وإذا كانت كذلك فاكتب أيّ قانون استعمل؟ أما إذا لم تكن ناتجة عن أي من القانونين المذكورين فاكتب: "*ليس صحيحًا*".

(1) الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان.

(2) إذا كانت الزاويتان متطابقتين فإن لهما القياس نفسه.

(3) إذا كانت الزاويتان متقابلتين بالرأس فإن لهما القياس نفسه.

p: الزاويتان متقابلتان بالرأس

q: الزاويتان متطابقتان

r: الزاويتان لهما القياس نفسه

العبارة (3) في المثال أعلاه صحيحة وهي نتيجة استعمال قانون القياس المنطقي.

تحقق من فهمك

3) (1) طول ضلع المربع A يساوي طول ضلع المربع B.
(2) إذا كانت أطوال أضلاع مربعين متساوية فإن لهما المحيط نفسه.
(3) المربع A والمربع B لهما المحيط نفسه.

تأكد

مثال 1 (ص 31)

بين ما إذا كانت النتيجة المعطاة صحيحة اعتمادًا على المعلومات المعطاة، وإن لم تكن فاكتب "*غير صحيح*" مُبررًا إجابتك:

"*إذا كانت الزاويتان متقابلتين بالرأس فهما متطابقتان*".

1) **المعطيات:** $\angle A$ و $\angle B$ متقابلتان بالرأس.
النتيجة: $\angle A \cong \angle B$

2) **المعطيات:** $\angle C \cong \angle D$
النتيجة: $\angle C$ و $\angle D$ زاويتان متقابلتان بالرأس.

مثال 2 (ص 32)

استعمل قانون القياس المنطقي لبيان ما إذا كان من الممكن الحصول على نتيجة من العبارات المعطاة وإلا فاكتب النتائج:

3) إذا كان عمرك 18 عاما يحق لك استخراج رخصة قيادة.
يمكنك استخراج رخصة قيادة.

4) نقطة المنتصف تقسم القطعة المستقيمة إلى قطعتين متطابقتين. إذا كانت القطعتان المستقيمتان متطابقتين فإن طوليهما متساويان.

مثال 3 (ص 33)

بيّن ما إذا كانت العبارة (3) نتيجة للعبارتين (1) و (2) من خلال قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي، وإن لم تكن فاكتب (ليس صحيحًا):

5) (1) إذا وصلت منى إلى المدرسة قبل الساعة السابعة والنصف صباحا فإنها ستحصل على مساعدة في الرياضيات.
(2) إذا حصلت منى على مساعدة في الرياضيات فإنها ستنجح في الاختبار.
(3) إذا وصلت منى إلى المدرسة قبل الساعة السابعة والنصف صباحا فإنها ستنجح في اختبار الرياضيات.

6) (1) الزوايا القائمة متطابقة.

(2) $\angle X \cong \angle Y$

(3) $\angle X$ و $\angle Y$ زوايتان قائمتان.

عروض: في مدينة الرياض أعلنَ عن أسعار التذاكر لحضور احتفالات العيد حسب القائمة التالية:

	عرض صباحي	عرض مسائي
أطفال دون العاشرة	10 ريالات	12 ريالاً
نساء	15 ريالاً	25 ريالاً
ذكور من 10-15 سنة	15 ريالاً	20 ريالاً
رجال	18 ريالاً	30 ريالاً

7) إذا كان عمر سناء ثماني سنوات وأرادت حضور العرض المسائي فما ثمن تذكرتها؟

8) مع والد وسام تذاكر ثمنها 15 ريالاً، هل يمكن أن نستنتج أن عمر وسام بين 15–10 سنة؟ وضح إجابتك.

تمارين ومسائل

إرشادات للتمـــاريـن	
للأسئلة	انظر الأمثلة
9–13	1
14–16	2
17–21	3

للأسئلة 13–9 حدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم خاطئة بناء على المعلومات المعطاة، مع إعطاء تبرير لإجابتك:

"*إذاكان العددان فرديين فإن مجموعهما عدد زوجي*".

9) **المعطيات:** مجموع عددين هو 22.

النتيجة: العددان فرديان .

10) **المعطيات:** العددان هما 5 و 7.

النتيجة: مجموعهما زوجي.

"*إذا كانت ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة فإن النقاط الثلاث تحدد مستوى وحيداً*".

11) **المعطيات:** A, B, C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

النتيجة: النقاط A, B, C تحدد مستوى وحيداً.

12) **المعطيات:** تقع النقاط E, F, G في المستوى $\mathcal{M}$.

النتيجة: النقاط E, F, G ليست على استقامة واحدة.

13) **المعطيات:** المثلث XYZ

النتيجة: النقاط X, Y, Z تحدد مستوى وحيدًا.

استعمل قانون القياس المنطقي لبيان ما إذا كان يمكن الحصول على النتيجة من مجموعة العبارات المعطاة، وإذا كان ممكنًا الحصول على نتيجة صحيحة فاكتبها، وإلا فاكتب "*لا نتائج*":

14) إذا ذهبت من أجل مقابلة عمل فإنك تلبس ثوبًا جديدًا.

إذا ذهبت إلى مقابلة من أجل عمل فإن هذا العمل سيعرض عليك .

15) إذا كان قياس زاوية أقل من 90° فإنها زاوية حادة.

إذا كانت الزاوية حادةً فإنها ليست منفرجة.

16) إذا كانت النقطة X منتصف YZ، فإن $YX = XZ$

إذا كان طولا قطعتين متساويين فإنهما متطابقتان.

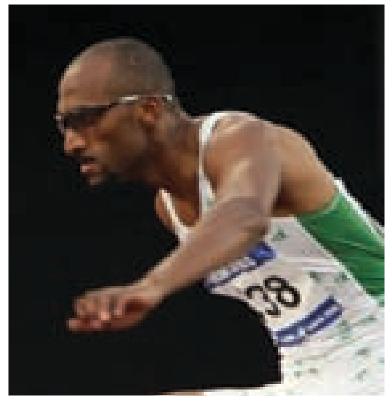
بين ما إذا كانت العبارة (3) نتيجة للعبارتين (1) و (2) من خلال قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي. إذا كانت كذلك فاذكر أي قانون استعمل، وإذا لم تكن ناتجة عن أي منهما فاكتب: "*ليس صحيحًا* ".

17) (1) يحب المهندسون مادة الرياضيات.
(2) إذا كنت تحب الرياضيات فإن معدل ذكائك مرتفع.
(3) إذا كنت مهندسًا فإن معدل ذكائك مرتفع.

18) (1) الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة.
(2) $\angle 3 \cong \angle 4$
(3) $\angle 3$ و $\angle 4$ زاويتان متقابلتان بالرأس.

19) (1) إذا كانت الزاوية منفرجة فإنها لا يمكن أن تكون حادة.
(2) $\angle A$ منفرجة.
(3) $\angle A$ لا يمكن أن تكون حادة.

20) (1) إذا كنت رياضيًّا فإنك تحب الرياضة.
(2) إذا كنت تحب المنافسة فإنك تحب الرياضة.
(3) إذا كنت تحب المنافسة فإنك رياضي.



الربط مع الحياة
يعتبر هادي صوعان أول رياضي سعودي يحقق ميدالية أولمبية.

21) أخبار رياضية: حقق العداء السعودي هادي صوعان إنجازًا سعوديًّا كبيرًا في دورة الألعاب الأولمبية في سيدني عام 2000 في سباق 400 m حواجز، حيث تمكن من إحراز الميدالية الفضية بزمن قدره 47.53 ثانية.
(1) إذا وصل هادي صوعان خط النهاية بعد صاحب المركز الأول مباشرةً، فسيحل في المركز الثاني.
(2) إذا حل العداء في المركز الثاني، فسيحصل على الميدالية الفضية.
استعمل العبارتين (1) , (2) للحصول على نتيجة صحيحة.

مسائل مهارات التفكير العليا

22) مسألة مفتوحة: اكتب مثالًا يوضح الاستعمال الصحيح لقانون الفصل المنطقي.

23) تبرير: وضح كيف تتشابه خاصية التعدي للمساواة مع قانون القياس المنطقي.

24) أوجد الخطأ: ذكر مقال في صحيفة ما أنه إذا أُصبت بدوار البحر فإنك ستصاب بحالة عدم توازن. وذكرت الصحيفة أيضا أنه إذا أصبت بدوار البحر فإنك ستصاب بحالة اضطراب معوي. قالت سلمى تعليقًا على المقال إنه إذا أصبت بحالة عدم توازن فإنك ستصاب باضطراب معوي. فأجابتها فاطمة بأنها مخطئة. أيهما على صواب سلمى أم فاطمة؟ وضح ذلك.

25) تحدّ: افرض أن كل المثلثات التي تحقق الخاصية B تُحقق نظرية فيثاغورس، فهل الجملة التالية صحيحة أم خاطئة؟ علّل إجابتك على ما تعلمته في الدرسين السابقين.
(إذا لم يكن المثلث قائم الزاوية فإنه لا يحقق الخاصية B).

26) اكتب: بالرجوع إلى الصفحة 31. وضح كيف يستعمل الطبيب التبرير الاستنتاجي في تشخيص المرض مثل التهاب الحلق أو الجدري.

تدريب على اختبار معياري

27) بين أي من العبارات التالية تنتج منطقياً من العبارتين التاليتين.

إذا طلبت وجبتي كبسة فإنك ستحصل على علبة عصير .
خليل طلب وجبتي كبسة.

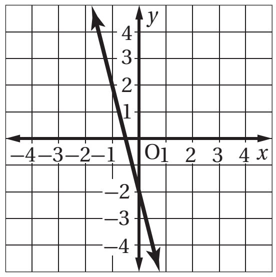
A طلب خليل وجبة كبسة واحدة فقط.

B طلب خليل علبتي عصير.

C طلب خليل علبة عصير ووجبتي كبسة

D حصل خليل على علبة عصير.

28) مراجعة : ما ميل المستقيم المرسوم في المستوى الديكارتي؟



A $\frac{1}{4}$

B $-\frac{1}{4}$

C 4

D -4

مراجعة تراكمية

تسويق : استعمل المعلومات التالية في حل الأسئلة 31– 29. (الدرس 3-1)

يستعمل مديرو التسويق عبارات على صورة (إذا كان ... فإن ...) للترويج للسلع والخدمات. يوجد إعلان في إحدى ورش تصليح السيارات جاء فيه: "*إذا كنت تتطلع إلى السرعة والإتقان فعليك بورشة المهندس لصيانة السيارات*".

29) اكتب عكس العبارة الشرطية.

30) ما الرسالة– باعتقادك – التي يريد الإعلان إيصالها إلى الناس حول ورشة المهندس؟

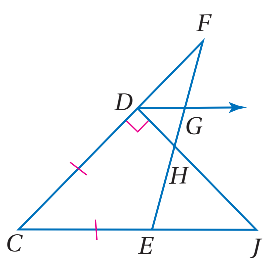
31) هل ينص الإعلان أن ورشة المهندس لصيانة السيارات لديها السرعة في الإنجاز والإتقان في العمل؟

أَنشِئْ جدول الصواب لكل عبارة مركبة: (الدرس 2-1)

32) $q \wedge r$

33) $p \vee (\sim q \wedge r)$

استعمل الشكل المجاور في حل الأسئلة 37–34.



34) ما الزاوية التي تتمم $\angle FDG$؟

35) سَمِّ زاويتين متقابلتين بالرأس؟

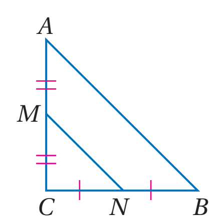
36) سَمِّ زاويتين غير متطابقتين ولكنهما متكاملتان .

37) حدد الصفات التي تصلح لوصف الزاويتين $\angle FDH$ و $\angle CDH$:متطابقتان، متجاورتان، متقابلتان بالرأس، متتامتان، متكاملتان، متجاورتان على مستقيم.

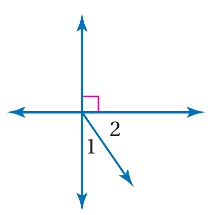
استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضروريّة : اكتب ما يمكنك أن تفرضه حول القطع المستقيمة أو الزوايا المذكورة مع كل شكل من الأشكال: (الدرس 5-1)

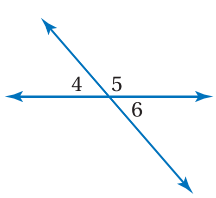
38) $\overline{AM}, \overline{CM}, \overline{CN}, \overline{BN}$



39) $\angle 1 , \angle 2$



40) $\angle 4 , \angle 5 , \angle 6$



1-5 المسلّمات والبراهين الحرة
Postulates and Paragraph Proofs

الأفكار الرئيسة:

- أتعرف المسلمات الأساسية حول النقاط والمستقيمات والمستويات وأستعملها.
- أكتب براهين حرة.

المفردات:

المسلمة
postulate or axiom

النظرية
theorem

البرهان
proof

البرهان الحر
paragraph proof

البرهان غير الشكلي
informal proof

استعد

خُلق الإنسان على فطرة الإسلام. ولذلك نجد أن مبادئ الإسلام هي المسلمات أو الحقائق التي يجب الاعتماد عليها، لاشتقاق القوانين التي تتوافق مع طبيعته وتيسر عليه حياته. كذلك الأمر في الهندسة، فهناك بعض العبارات التي يُسلَّم بصحتها، وعليها يُبنى برهان النتائج الهندسية الأخرى.

النقاط والمستقيمات والمستويات: **المسلمة** عبارة تُقبل على أنها صحيحة. ولقد درست مبادئ أساسية حول النقاط والمستقيمات والمستويات، حيث تُعتبر هذه المبادئ الأساسية مسلمات.

مسلمات

1.1 كل نقطتين مختلفتين يمر بهما مستقيم واحد.

1.2 كل ثلاث نقاط مختلفة ولا تقع على مستقيم واحد يمر بها مستوى واحد.

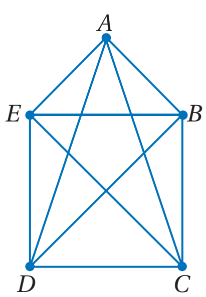
مثال من واقع الحياة — النقاط والمستقيمات

1 **حاسوب** يراد توصيل خمسة أجهزة حاسوب بعضها مع بعض بحيث يوصل كل جهاز مع الأربعة الأخرى. كم وصلة نحتاج؟

افهم هناك خمسة أجهزة حاسوب، وكل جهاز موصل بالأربعة الأخرى.

خطط ارسم شكلًا يوضح الحل.

حل لتكن A, B, C, D, E خمس نقاط ليست على استقامة واحدة، وكل نقطة تمثل جهازًا من الأجهزة الخمسة. صل كل نقطة بكل نقطة من النقاط الأخرى.



بين كل نقطتين توجد قطعة مستقيمة واحدة؛ فالقطعة $\overline{AB}$ تمثل الوصلة بين الجهاز A والجهاز B، وهي نفسها تصل بين الجهاز B و الجهاز A. وعلى ذلك يمكن رسم عشر قطع مستقيمة.

تحقق $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{CD}, \overline{CE}, \overline{DE}$
كل منها تمثل وصلة. وعليه فهناك عشر وصلات.

تحقق من فهمك

1) حدد عدد الوصلات اللازمة لمجموعة من 4 أجهزة.

إرشادات

رسم شكل يوضح الحل

لرسم شكل يوضح الحل في المثال (١) ابدأ بنقطة مثل A صلها مع باقي النقاط الأخرى، وانتقل إلى نقطة ثانية وصلها مع باقي النقاط ما عدا A وهكذا...

مسلمات

1.3 كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل.

1.4 كل مستوى يحوي ثلاث نقاط مختلفة على الأقل وليست على استقامة واحدة.

1.5 إذا وقعت نقطتان في مستوى فإن المستقيم الوحيد المار بهاتين النقطتين يقع كليًّا في ذلك المستوى.

1.6 إذا تقاطع مستقيمان فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة.

1.7 إذا تقاطع مستويان فإنهما يتقاطعان في مستقيم.

مثال استعمال المسلمات

2 **بين إذا كانت كل عبارة من العبارات التالية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو ليست صحيحة أبدًا، مع التوضيح:**

a) إذا كانت النقاط A, B, C تقع في مستوى فإنها على استقامة واحدة.

الجواب: أحيانا صحيحة ولكن النقاط ليس بالضرورة أن تكون على استقامة واحدة حتى تقع في المستوى نفسه.

b) يوجد مستوى وحيد يحتوي النقاط P, Q, R والتي لا تقع على استقامة واحدة.

الجواب: دائمًا صحيحة من المسلمة (1.2).

c) يوجد مستقيمان على الأقل يمران بالنقطتين M و N.

الجواب: ليست صحيحة أبدًا لأن المسلمة (1.1) تنص على أنه يوجد مستقيم واحد يمر بنقطتين.

تحقق من فهمك

2) إذا تقاطع مستقيمان فإن نقطة تقاطعهما تقع في المستوى نفسه.

إرشادات

نظام المسلمات

هو مجموعة من المسلمات التي يمكن استعمال بعضها أو كلها لاستنتاج النظريات عن طريق المنطق.

البراهين الحرة: تستعمل المفردات غير المعرفة، والمفردات المعرفة والمسلمات والخصائص الجبرية للمساواة لإثبات صحة عبارات أو تخمينات أخرى، وفي حال إثبات صحة العبارة أو التخمين تسمى **نظرية**، وهي بدورها تستعمل لتبرير صحة عبارات أخرى.

وسوف تدرس عدة طرائق لإثبات صحة عبارات أو تخمينات في الهندسة.

البرهان هو دليل منطقي، بحيث إن كل عبارة تكتبها تكون مبررة بعبارة سبق إثبات صحتها. ومن أنواعه **البرهان الحر**. وفي هذا النوع من البرهان تكتب فقرة توضح فيها لماذا يكون التخمين لوضع معطى صحيحًا؟

مفهوم أساسي

للبرهان الجيد خمسة أجزاء أساسية:

- كتابة النظرية أو التخمين المراد إثباته.
- تحديد المعطيات.
- رسم شكل توضيحي للمعطيات إن أمكن.
- تحديد المطلوب إثباته.
- بناء البرهان باستعمال التبرير الاستنتاجي.

مثـــال

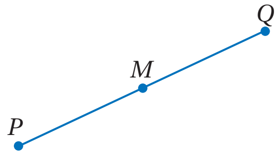
اكتب برهانًا حرًا

3 لتكن M نقطة منتصف $\overline{PQ}$. اكتب برهانًا حرًا لإثبات أن $\overline{PM} \cong \overline{MQ}$

المعطيات: M هي نقطة منتصف $\overline{PQ}$.

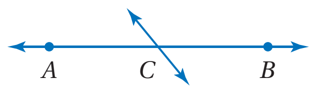
المطلوب: إثبات أن $\overline{PM} \cong \overline{MQ}$

البرهان: من تعريف نقطة منتصف قطعة مستقيمة يكون $PM = MQ$. وهذا يعني أن $\overline{PM}$, $\overline{MQ}$ لهما القياس نفسه، ومن تعريف التطابق إذا كانت قطعتان مستقيمتان لهما القياس نفسه فإنهما متطابقتان وعليه فإن $\overline{PM} \cong \overline{MQ}$.



تحقق من فهمك

3) افرض أن $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ ، وأن C تقع بين A و B. اكتب برهانًا حرًا لإثبات أن C هي نقطة منتصف $\overline{AB}$.



إرشـــادات

البراهين

قبل الشروع في كتابة البرهان يجب أن يكون لديك استراتيجية. من هذه الاستراتيجيات الحل عكسيًا، أي أن تبدأ من المطلوب إثباته ثم الرجوع خطوة فخطوة حتى تصل إلى المعطيات.

عندما تثبت صحة التخمين فإنه يصبح نظرية ويمكن استعماله في البراهين اللاحقة. فالتخمين في المثال (3) أعلاه يمكن تسميته نظرية نقطة المنتصف.

نظرية 1.1 نظرية نقطة المنتصف

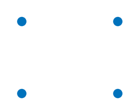
إذا كانت M هي نقطة منتصف $\overline{AB}$ فإن $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.

تأكد

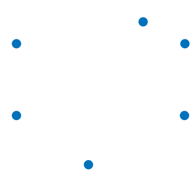
مثال 1 (ص 37)

حدد عدد القطع المستقيمة التي تصل بين نقاط كل من المجموعتين التاليتين:

(1



(2



(3 مجموعة مكونة من ستة أطفال يمسكون بأشرطة من القماش ملونة بألوان مختلفة، فكل طفلين منهما يمسكان بطرفي شريط. ما عدد الأشرطة المستعملة؟

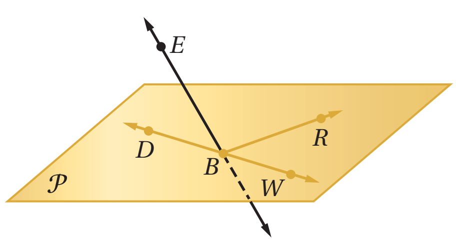
مثال 2 (ص 38)

(4 بين ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو ليست صحيحة أبدًا مع التوضيح:

"*تتقاطع ثلاثة مستويات في مستقيمين*".

مثال 3 (ص 39)

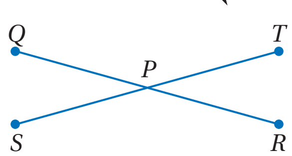
في الشكل المجاور، $\overleftrightarrow{BD}$ و $\overleftrightarrow{BR}$ يقعان في المستوى $\mathcal{P}$، والنقطة W تقع على المستقيم $\overleftrightarrow{BD}$. اذكر المسلمة التي يمكن استعمالها لبيان صحة كل من العبارتين التاليتين:



(5 النقاط B, D, W على استقامة واحدة.

(6 النقاط E, B, R مستوية.

(7 **برهان:** في الشكل المجاور النقطة P منتصف $\overline{QR}$ و $\overline{ST}$ و $\overline{QR} \cong \overline{ST}$ اكتب برهانًا حرًا لإثبات أن $PQ = PT$.

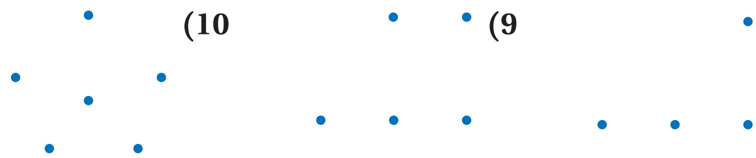


تمارين ومسائل

إرشادات للتمارين	
للأسئلة	انظر الأمثلة
8–10	1
11–14	2
15	3

حدد عدد القطع المستقيمة التي تصل بين نقاط كل مجموعة مما يأتي:

8) **9)** **10)**



بين ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو ليست صحيحة أبدًا، مع التوضيح:

11) أي ثلاث نقاط تحدد مستوى.

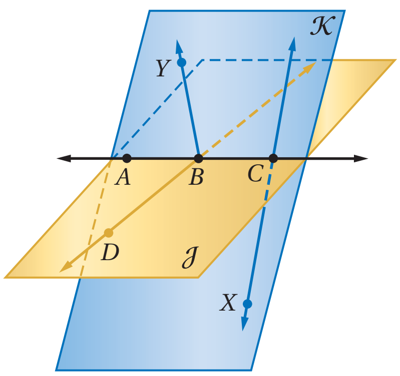
12) النقطتان G و H تقعان في المستوى $\mathcal{X}$. أي نقطة تقع على استقامة واحدة مع G و H تقع أيضا في المستوى $\mathcal{X}$.

13) يمكن أن يكون تقاطع مستويين نقطة.

14) النقاط S, T, U تحدد ثلاثة مستقيمات.

15) **برهان:** إذا كانت النقطة C منتصف $\overline{AB}$، والنقطة B هي منتصف القطعة المستقيمة $\overline{CD}$ فأثبت أن $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

في الشكل المجاور، $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{BD}$ يقعان في المستوى $\mathcal{J}$، وكذلك $\overleftrightarrow{BY}$ و $\overleftrightarrow{CX}$ يقعان في المستوى $\mathcal{K}$. اذكر المسلمة التي تبين صحة كل من العبارات التالية:



16) النقطتان C و D تقعان على استقامة واحدة.

17) $\overleftrightarrow{XB}$ يقع في المستوى $\mathcal{K}$.

18) النقاط A, C, X تقع في مستوى واحد.

19) $\overleftrightarrow{AD}$ يقع في المستوى $\mathcal{J}$.

20) **نموذج:** سألت المعلمة عائشة إذا كان باستطاعتها عمل نموذج تبين فيه عدد المستقيمات وعدد المستويات التي يمكن أن تحددها أربع نقاط لا تقع على استقامة واحدة، ولا تقع في مستوى واحد. فأحضرت عائشة مجموعة من أقلام الرصاص والورق الملون، وفكرت في إلصاق الورق على الأقلام ووصل أطراف الأقلام لتكوين مجموعة من المستويات المتصلة، بحيث إن الأقلام تتصل بعضها ببعض في أربع نقاط فقط، فتكون لديها ما يشبه الهرم الثلاثي. ما عدد المستويات (الأوراق الملونة) والخطوط (الأقلام)؟

مسائل مهارات التفكير العليا

21) **تبرير:** وضح كيف يستعمل التبرير الاستنتاجي في البرهان، واذكر نوع المبررات التي تستعمل فيه.

22) **مسألة مفتوحة:** ارسم أشكالًا توضح المسلمتين 1.6 و 1.7.

23) **أيها لا ينتمي؟** حدد المفهوم الذي يختلف عن باقي المفاهيم الثلاثة الأخرى مبررًا إجابتك:

النتيجة	التخمين	النظرية	المسلمة

24) **تحدّ:** تقع أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة في مستوى واحد. وجدت في السؤال 20 عدد المستويات التي تحددها أربع نقاط ليست على استقامة واحدة. ما أقل عدد وأكبر عدد من المستويات يتم تحديدها من خمس نقاط لا تقع على استقامة واحدة؟

25) **اكتب:** بالرجوع إلى صفحة 37، صف كيف تستعمل المسلمات في الأدب والتاريخ مضمنًا إجابتك مثالًا من التاريخ الإسلامي.

تدريب على اختبار معياري

26) أي من العبارات التالية ليست صحيحة؟

A تحدد أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة مستوى وحيدًا.

B يتقاطع المستقيمان في نقطة واحدة.

C يوجد على الأقل مستقيمان يحويان النقطتين نفسيهما.

D تقسم نقطة المنتصف القطعة المستقيمة إلى قطعتين متطابقتين.

27) **مراجعة:** أي مما يلي حلٌّ للمعادلة:

$$3x^2 - 5x + 1 = 0$$

F $\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}$

G $\dfrac{-5-\sqrt{13}}{6}$

H $\dfrac{5}{6} - \sqrt{13}$

J $-\dfrac{5}{6} + \sqrt{13}$

مراجعة تراكمية

28) حدد ما إذا كانت العبارة (3) تنتج عن العبارتين (1) ، (2) من قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي، وإذا كانت كذلك فاذكر أي قانون استُعمل؟ وإذا لم تكن كذلك فاكتب "*ليست صحيحة*": (الدرس 4-1).

(1) العمل الإضافي يتطلب العمل 20 ساعة أسبوعيًّا.

(2) لدى داود عمل إضافي.

(3) يعمل داود 20 ساعة أسبوعيًّا .

29) اكتب عكس ومعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية: "*إذا استطعت الدخول إلى الإنترنت من بيتك فإن لديك حاسوبًا*". وحدد قيمة الصواب لكل منها مع مثال مضاد للعبارة غير الصحيحة منها. (الدرس 3-1)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضروريّة: حل المعادلات التالية.

30) $m - 17 = 8$

31) $3y = 57$

32) $\dfrac{y}{6} + 12 = 14$

33) $-t + 3 = 27$

1 اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1-1 إلى 1-5

حدد ما إذا كان كل تخمين من التخمينات التالية صحيحًا أو خطأً مع إعطاء مثال مضاد في حال الخطأ. (الدرس 1-1)

1) **المعطيات:** $WX = XY$.

التخمين: النقاط $W، X، Y$ على استقامة واحدة.

2) **المعطيات:** $\angle 1$، $\angle 2$ ليستا متتامتين و $\angle 2$ ، $\angle 3$ متتامتان .

التخمين: $m\angle 1 = m\angle 3$

3) **سفر:** قام خليل بعمل إحصائية على ستة من أصدقائه وحصل على الجدول التالي.

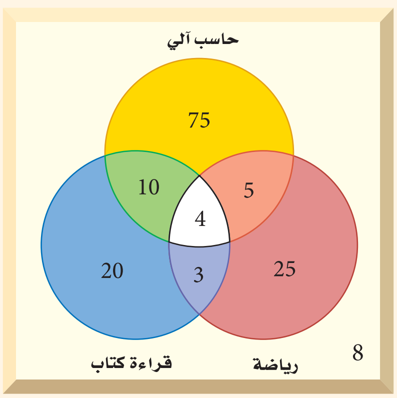
عدد مرات السفر إلى ...			
الاسم	**جدة**	**المدينة المنورة**	**مكة المكرمة**
كمال	2	0	0
جمال	0	0	5
مازن	0	2	2
خالد	1	1	0
إبراهيم	2	1	10
فهد	1	1	1

تَوصَّل خليل إلى النتيجة التالية: إذا كان عدد مرات سفر الشخص ثلاث مرات أو أكثر فإنه قد سافر إلى المدينة المنورة .هل هذه النتيجة صحيحة؟ وإذا كانت غير صحيحة فأعطِ مثالاً مضادًا. (الدرس 1-1)

كوّن جدول الصواب لكل من العبارات المركبة التالية: (الدرس 1-2)

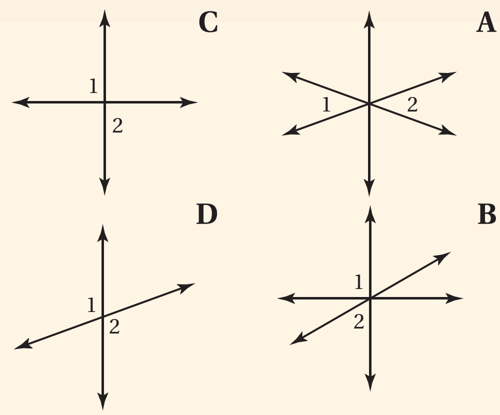
4) $\sim p \wedge q$ **5)** $p \vee (q \wedge r)$

6) **هوايات:** سئلت مجموعة مكونة من 150 طالبًا عما يفعلونه في أوقات فراغهم. ما عدد الطلاب الذين يستعملون الحاسب الآلي أو يقرؤون كتابًا؟ (الدرس 1-2)



7) **اختيار من متعدد:** أي الأشكال التالية يعتبر مثالاً مضادًّا للتخمين التالي؟

"*إذا تشاركت $\angle 1$ ، $\angle 2$ بنقطة واحدة فإن الزاويتين متقابلتان بالرأس* ".



8) اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية: "*إذا تجاورت زاويتان فإن لهما الرأس نفسه*". وبين قيمة الصواب لكل عبارة، مع إعطاء مثال مضاد في حالة الخطأ. (الدرس 1-3)

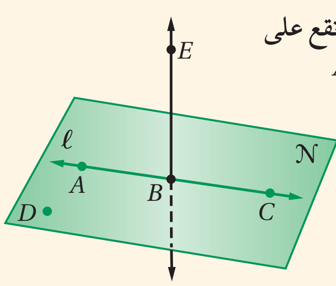
9) حدد ما إذا كانت العبارة (3) تنتج عن العبارتين (1) و (2) من خلال قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي. وإذا كانت كذلك فاذكر أي قانون استُعْمِل. وإذا لم تكن ناتجة عن أيٍ من القانونين فاكتب "*غير صحيحة*". (الدرس 1-4)

(1) إذا كان n عددًا صحيحًا فإن n عدد حقيقي.

(2) n عدد حقيقي.

(3) n عدد صحيح.

في الشكل المجاور النقاط A, B, C تقع على استقامة واحدة . والنقاط A, B, C, D تقع في المستوى $\mathcal{N}$. اذكر المسلمة أو النظرية التي تدعم صحة كل من العبارات التالية: (الدرس 1-5)



10) A, B, D تحدد المستوى $\mathcal{N}$.

11) $\overleftrightarrow{BE}$ يقطع $\overleftrightarrow{AC}$ في النقطة B.

12) المستقيم ℓ يقع في المستوى $\mathcal{N}$.

1-6 البرهان الجبري
Algebraic Proof

الأفكار الرئيسة:

- أَسْتَعمل الجبر في كتابة برهان ذي عمودين.
- أَسْتَعمل خصائص علاقة المساواة في البراهين الهندسية.

المفردات:

المناقشة الاستنتاجية
deductive argument

البرهان ذو العمودين
two-column proof

استعد

تعتمد مهنة المحاماة على النقاش المنطقي المستند إلى الأدلة لتوجيه انتباه القاضي للحكم لصالح الموكّل في نهاية المحاكمة، وقبل النطق بالحكم يقوم المحامي بتلخيص الدلائل والشهادات التي يشعر أنها تفيد موكله، وهي تشبه إلى حدٍّ بعيدٍ البرهان في الرياضيات.

البرهان الجبري: الجبر نظام مكون من مجموعات من الأعداد وعمليات عليها، والخصائص تمكنك من إجراء هذه العمليات. والجدول التالي يلخص عدة خصائص على الأعداد الحقيقية التي ستدرسها في الجبر.

ملخص المفاهيم — خصائص الأعداد الحقيقية

الخصائص التالية صحيحة لأي ثلاثة أعداد حقيقية $a، b، c$.	
خاصية الانعكاس	$a = a$
خاصية التماثل	إذا كان $a = b$ فإن $b = a$.
خاصية التعدي	إذا كان $a = b$ و $b = c$ فإن $a = c$.
خاصيتا الجمع والطرح	إذا كان $a = b$ فإن $a + c = b + c$ و $a - c = b - c$.
خاصيتا الضرب والقسمة	إذا كان $a = b$ فإن $a \cdot c = b \cdot c$ وإذا كان $a = b$ و $c \neq 0$ فإن $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$
خاصية التعويض	إذا كانت $a = b$ فإن a تحل مكان b في أي معادلة أو أي مقدار جبري.
خاصية التوزيع	$a(b + c) = ab + ac$

إرشادات

خاصيتا الإبدال والتجميع

عبر هذا الكتاب سنفترض صحة خاصيتي الإبدال والتجميع لكل من عمليتي الجمع والضرب.

تستعمل خصائص علاقة المساواة لتبرير خطوات حل المعادلات. ومجموعة الخطوات الجبريّة التي تستعمل لحل المسائل تشكل ما يسمى **المناقشة الاستنتاجية**.

مثـــال التحقق من العلاقات الجبرية

1 حل المعادلة $3(x-2)=42$ مع تبرير كل خطوة.

الخطوات الجبرية	الخاصية المستعملة
$3(x-2)=42$	المعادلة الأصلية
$3x-6=42$	خاصية التوزيع
$3x-6+6=42+6$	خاصية الجمع
$3x=48$	تبسيط
$\frac{3x}{3}=\frac{48}{3}$	خاصية القسمة
$x=16.$	تبسيط

تحقق من فهمك

1) حل المعادلة $2x+3=5$. وعلل كل خطوة.

إن المثال (1) أعلاه هو إثبات على صحة العبارة الشرطية "إذا كان $3(x-2)=42$ فإن $x=16$" ولاحظ أن العمود عن اليمين هو تفصيل الطريقة خطوة خطوة والتي تقود إلى الحل، والعمود عن اليسار يحتوي مبرّر كل خطوة. ويستعمل في الهندسة نموذج مشابه لبرهان التخمينات والنظريات.
إن **البرهان ذا العمودين** يحتوي العبارات مرتبة في عمود والتبريرات مرتبة في عمود موازٍ.

مثـــال كتابة برهان ذي عمودين

2 اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أنه إذا كان $3\left(x-\frac{5}{3}\right)=1$ فإن $x=2$.

العبارات	المبررات
1) $3\left(x-\frac{5}{3}\right)=1$	**1)** معطى
2) $3x-3\left(\frac{5}{3}\right)=1$	**2)** خاصية التوزيع
3) $3x-5=1$	**3)** تبسيط
4) $3x-5+5=1+5$	**4)** خاصية الجمع
5) $3x=6$	**5)** تبسيط
6) $\frac{3x}{3}=\frac{6}{3}$	**6)** خاصية القسمة
7) $x=2$	**7)** تبسيط

تحقق من فهمك

2) تنص نظرية فيثاغورس على أنه في المثلث القائم الزاوية ABC الذي وتره c وطولا ضلعي القائمة a,b ، يكون $c^2=a^2+b^2$. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $a=\sqrt{c^2-b^2}$.

إرشـادات

رياضيات ذهنية

إذا سمح لك المدرس فإن بعض الخطوات يمكن حذفها لأنه يمكن القيام بها ذهنيًا. فمثلًا في المثال (2) العبارتان (4) (6) يمكن حذفهما، وعليه يكون السبب في العبارتين 7 ، 5 خاصية الجمع وخاصية القسمة على الترتيب.

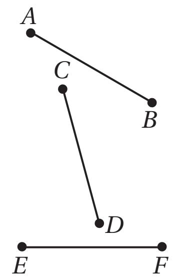
البرهان الهندسي: إن قياس الزوايا وأطوال القطع المستقيمة هي أعداد حقيقية. وعليه فإنه يمكن استعمال خصائص الأعداد الحقيقية في إثبات العلاقات بين الزوايا والقطع المستقيمة.

الخاصية	القطع المستقيمة	الزوايا
الانعكاس	$AB=AB$	$m\angle 1=m\angle 1$
التماثل	إذا كان $AB=CD$، فإن $CD=AB$.	إذا كان $m\angle 1=m\angle 2$، فإن $m\angle 2=m\angle 1$.
التعدي	إذا كان $AB=CD$ و $CD=EF$ فإن $AB=EF$.	إذا كان $m\angle 1=m\angle 2$ و $m\angle 2=m\angle 3$، فإن $m\angle 1=m\angle 3$.

مثال على اختبار معياري

تبرير العلاقات الهندسية

3 إذا كان $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ و $\overline{EF} \cong \overline{CD}$ فأي نتيجة مما يلي صحيحة؟



I $AB = CD$ و $CD = EF$

II $\overline{AB} \cong \overline{EF}$

III $AB = EF$

A I فقط　　　**C** I و III

B I و II　　　**D** I و II و III

إرشادات الاختبار

تحليل العبارات: يمكن أن تكون أكثر من عبارة واحدة صحيحة. ناقش كل عبارة قبل تحديد جوابك.

اقرأ فقرة الاختبار:

اعتمادًا على المعطيات حدّد ما إذا كانت العبارات صحيحة أم لا.

حل فقرة الاختبار:

العبارة I: تفحص المعطيات $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ و $\overline{EF} \cong \overline{CD}$. ومن تعريف تطابق القطع المستقيمة $AB = CD$ و $CD = EF$. وعليه فإن العبارة I صحيحة.

العبارة II: من تعريف تطابق القطع المستقيمة إذا كان $AB = EF$ فإن $\overline{AB} \cong \overline{EF}$، وعليه فإن العبارة II صحيحة.

العبارة III: إذا كان $AB = CD$ و $CD = EF$، فإن $AB = EF$ من خاصية التعدي، وعليه فإن العبارة III صحيحة أيضًا.

وبما أن جميع العبارات صحيحة فإن البديل D هو الصحيح.

تحقق من فهمك

3) إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ وكان $m\angle 2 = 90$ فأي عبارة مما يلي صحيحة؟

F $m\angle 1 = 45$　　　**H** $m\angle 2 = 180$

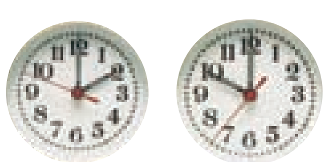
G $m\angle 1 = 90$　　　**J** $m\angle 1 + m\angle 2 = 90$

في المثال 3، كل نتيجة تم تبريرها باستعمال تعريف أو خاصية. و تستعمل هذه الطريقة في الهندسة للتحقق وإثبات صحة العبارات.

مثال

برهان هندسي

4 **قراءة الساعة:** قياس الزاوية المتكونة من عقربي الساعات والدقائق عند الساعة الثانية يساوي 60. وإذا كانت الزاوية المتكونة عند الساعة الثانية تطابق الزاوية المتكونة عند تمام الساعة العاشرة، فأثبت أن قياس الزاوية المتكونة عند الساعة العاشرة يساوي 60.



المعطيات: $m\angle 2 = 60$

$\angle 2 \cong \angle 10$

المطلوب: إثبات أن $m\angle 10 = 60$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $m\angle 2 = 60; \angle 2 \cong \angle 10$	1) معطيات
2) $m\angle 2 = m\angle 10$	2) تعريف تطابق زاويتين
3) $60 = m\angle 10$	3) خاصية التعويض
4) $m\angle 10 = 60$	4) خاصية التماثل

تحقق من فهمك

4) إذا كانت $\angle A$ و $\angle B$ متطابقتين. وقياس $\angle A$ هو 110. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن قياس الزاوية $\angle B$ يساوي 110.

تأكد

مثال 1 (ص 44)

اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يلي:

1) إذا كان $\frac{x}{2} = 7$، فإن $x = 14$.

2) إذا كان $x = 5$ و $b = 5$، فإن $x = b$.

3) إذا كان $XY - AB = WZ - AB$، فإن $XY = WZ$.

مثال 2 (ص 44)

4) أكمل البرهان التالي:

المعطيات: $5 - \frac{2}{3}x = 1$

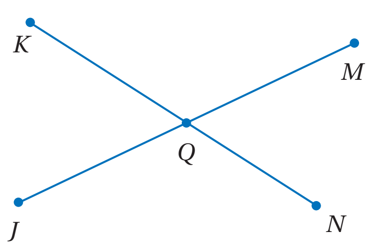
المطلوب إثبات أن: $x = 6$

البرهان:

العبارات	المبررات
a) ____ ؟	a) معطى
b) $3\left(5 - \frac{2}{3}x\right) = 3(1)$	b) ____ ؟
c) $15 - 2x = 3$	c) ____ ؟
d) ____ ؟	d) خاصية الطرح
e) $x = 6$	e) ____ ؟

مثال 3 (ص 45)

5) **اختيار من متعدد:** إذا تقاطعت $\overline{KN}$, $\overline{JM}$ عند النقطة Q لتشكلا $\angle JQK$ و $\angle MQN$، فأي استنتاج مما يلي ليس صحيحًا؟



A $\angle JQK$ و $\angle MQN$ زاويتان متقابلتان بالرأس.

B $\angle JQK$ و $\angle MQN$ زاويتان متكاملتان.

C $\angle JQK \cong \angle MQN$

D $m\angle JQK = m\angle MQN$

مثال 2 و 4 (ص 44-45)

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكل عبارة مما يلي:

6) إذا كان $-7(y - 3) + 5y = 25$، فإن $y = -2$

7) في المستطيل $ABCD$ إذا كان $AD = 3$ و $AB = 10$، فإن $AC = BD$.

تمارين ومسائل

إرشادات للتمارين	
للأسئلة	انظر الأمثلة
8–10	1
11–12	2
13–15	3
16	4

اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يلي:

8) إذا كان $m\angle A = m\angle B$ و $m\angle B = m\angle C$ فإن $m\angle A = m\angle C$.

9) إذا كان $XY + 20 = YW$ و $XY + 20 = DT$، فإن $YW = DT$.

10) إذا كان $\frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}AB$ فإن $AB = EF$.

11) إذا كان $2\left(x - \frac{3}{2}\right) = 5$ فإن $2x - 3 = 5$

12) إذا كان $EF = GH$ و $GH = JK$ ، فإن $EF = JK$.

أكمل البرهان التالي.

13) **المعطيات:** $\frac{3x+5}{2} = 7$

المطلوب إثبات أن: $x = 3$

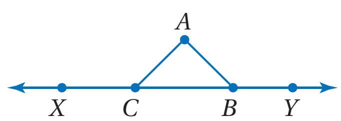
البرهان:

العبارات	المبررات
a) $\frac{3x+5}{2} = 7$	**a)** ؟
b) ____؟____	**b)** خاصية الضرب
c) $3x + 5 = 14$	**c)** ؟
d) $3x = 9$	**d)** ؟
e) ____؟____	**e)** خاصية القسمة

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين:

14) إذا كان $m\angle ACB = m\angle ABC$،

فإن $\angle XCA \cong \angle YBA$.



برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكل مما يلي:

15) إذا كان $-\frac{1}{2}m = 9$ ، فإن $m = -18$.

16) إذا كان $-2y + \frac{3}{2} = 8$، فإن $y = -\frac{13}{4}$.

17) **فيزياء:** ترتبط كل من السرعة (v) والتسارع (a) والمسافة المقطوعة (d) والزمن (t) بالصيغة $d = vt + \frac{1}{2}at^2$. اكتب التسارع (a) بدلالة بقية المتغيرات مبررًا كل خطوة.

الربط مع الحياة

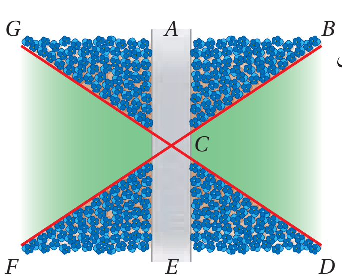
يُقيِّم تصميم سيارات السباق بناءً على عوامل عدة منها التسارع.

18) **كيمياء:** إن قانون الغاز المثالي يعطى بالصيغة $PV = nRT$، حيث P تعني الضغط، V الحجم، n كمية المادة، R ثابت، و T تعني درجة الحرارة. اكتب درجة الحرارة (T) بدلالة بقية المتغيرات والرموز مبررًا كل خطوة.

19) **حدائق:** في تنسيق لأزهار البنفسج المبين، قسمت الطريق القطاعين إلى أربعة أحواض متساوية المساحة.

إذا كان $m\angle ACB = m\angle DCE$، فما الذي يمكنك استنتاجه حول العلاقة بين:

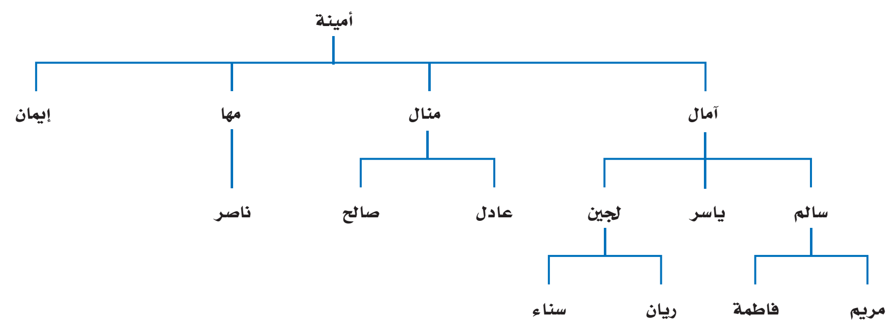
$\angle ACB, \angle DCE, \angle ECF, \angle ACG$؟



20) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارة توضح خاصية التعويض للمساواة.

21) **تبرير:** ما الجزآن في العبارة الشرطية اللذان يقابلان كلًّا من "*المعطيات*" و "*المطلوب*" في البرهان ؟

22) **تحدّ:** يمثل الرسم التالي شجرة عائلة عبد العزيز. آمال ومنال ومها وإيمان جميعهن بنات أمينة. ولأنهن أخوات فإن علاقة الأخوة (أخ شقيق أو أخت شقيقة)بينهن تكون علاقة تماثل وتعدٍّ، بمعنى أن آمال أخت منال ، ومنال أخت إيمان، وعليه فإن آمال أخت إيمان.

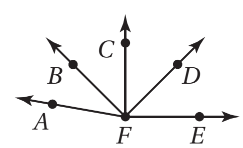


اذكر علاقات أخرى في العائلة تكون علاقة انعكاس، أو تماثل أو تعدٍّ موضحًا السبب. تذكر أن ابن كل شخص – أو أبناءه – يندرج تحت اسم هذا الشخص في شجرة العائلة. خذ بعين الاعتبار علاقات مثل ابن الخالة أو العم والعمة والحفيد والجد وأية علاقة أخرى.

23) **اكتب:** قارن بين برهنة نظرية في الرياضيات وإثبات حالة في قاعة المحكمة، واصفًا كيف تستعمل الأدلة للتأثير في القاضي؟ وكيف تستعمل المبررات لعمل استنتاجات في الرياضيات؟

تدريب على اختبار معياري

24) في الشكل أدناه، $m\angle CFE = 90$ و $\angle AFB \cong \angle CFD$.



أي من النتائج التالية ليس صحيحًا بالضرورة؟

A $m\angle BFD = m\angle BFD$

B $\overline{BF}$ تنصف $\angle BFD$

C $m\angle CFD = m\angle AFB$

D $\angle CFE$ زاوية قائمة.

25) **مراجعة:** أي علاقة يمكن أن تُستعمل لإيجاد قيم $s(n)$ في الجدول التالي؟

n	−8	−4	−1	0	1
s(n)	1.00	2.00	2.75	3.00	3.25

F $s(n) = -n + 7$

G $s(n) = -2n + 3$

H $s(n) = \frac{1}{2}n + 5$

J $s(n) = \frac{1}{4}n + 3$

مراجعة تراكمية

26) **أعمال البناء:** هناك أربع بنايات في مدرسةٍ ما، ليس بينها ثلاث بنايات على استقامة واحدة. ما عدد ممرات المشاة اللازمة لربط كل بنايتين بممر مشاة واحد؟ (الدرس 5-1)

حدد ما إذا كانت النتيجة في كل من الأسئلة 29–27 صحيحة بناءً على المعلومات المعطاة مبررًا إجابتك.

"*يقبل العدد القسمة على 3 إذا كان يقبل القسمة على 6*". (الدرس 4-1)

27) **المعطيات:** 24 يقبل القسمة على 6. **النتيجة:** 24 يقبل القسمة على 3.

28) **المعطيات:** 27 يقبل القسمة على 3. **النتيجة:** 27 يقبل القسمة على 6.

29) **المعطيات:** 85 لا يقبل القسمة على 3. **النتيجة:** 85 لا يقبل القسمة على 6.

اكتب العبارة التالية على الصورة "إذا كان ... فإن ..." (الدرس 3-1)

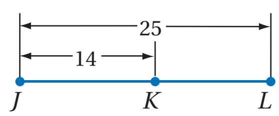
30) من يصبرْ ينلْ مراده.

31) عدم بلوغك هدفًا تريده جزء لا غنى عنه من السعادة.

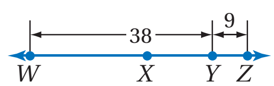
استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضروريّة: أوجد طول القطعة المستقيمة:

32) $\overline{KL}$



33) $\overline{WZ}$



1-7 إثبات علاقات بين القطع المستقيمة
Proving Segment Relationships

الأفكار الرئيسة:

- أكتب براهين تتضمن جمع القطع المستقيمة.
- أكتب براهين تتضمن تطابق القطع المستقيمة.

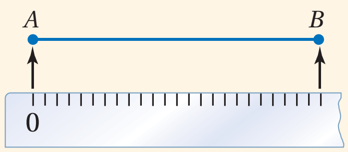
استعد

عندما تغادر الطائرة الدمام متجهة إلى الرياض فإن قائد الطائرة يخبر الركاب أن طول الرحلة 395 كيلومترًا . وكذلك الأمر عندما تغادر الطائرة الرياض متجهة إلى جدة فهو يخبرهم أن طول الرحلة 949 كيلومترًا .تقاس المسافات على الخريطة في بعض الأحيان بالمسطرة.

جمع القطع المستقيمة : علمت كيف تقيس القطع المستقيمة باستعمال المسطرة، بوضع صفر المسطرة على أحد طرفي القطعة المستقيمة وقراءة التدريج المقابل للطرف الآخر من القطعة المستقيمة، فيمثل هذا التدريج طول القطعة المستقيمة. وهذا يوضح مسلمة المسطرة.

مسلمة 1.8 مسلمة المسطرة

النقاط التي تقع على مستقيم أو قطعة مستقيمة يمكن ربطها بأعداد حقيقية، بحيث تقابل النقطة الأولى A – مثلًا – الصفر، بينما تقابل النقطة الثانية B عددًا حقيقيًّا موجبًا.

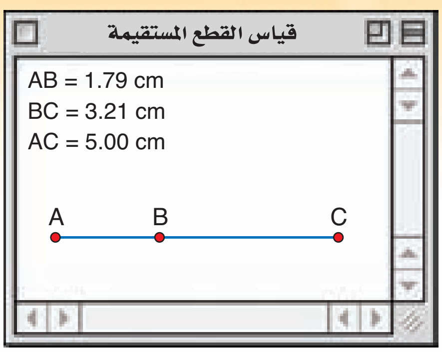


معمل الهندسة

جمع القطع المستقيمة

رسم شكل:

- استعمل برنامجًا هندسيًّا لإنشاء قطعة مستقيمة $\overline{AC}$.
- عين النقطة B على $\overline{AC}$.
- أوجد AB , BC , AC.



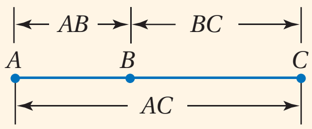
تحليل النموذج:

1) ما ناتج $AB + BC$؟
2) حرِّك النقطة B وأوجد AB , BC , AC. ثم أوجد $AB + BC$
3) كرِّر الخطوة (2) ثلاث مرات وسجل ملاحظاتك.
4) ما العلاقة بين AB , BC , AC ؟
5) هل يمكن وضع B على القطعة المستقيمة $\overline{AC}$ بحيث تكون هذه العلاقة غير صحيحة؟

يوضح معمل الهندسة المسلمة التالية:

مسلمة 1.9 مسلمة جمع القطع المستقيمة

إذا وقعت النقاط A, B, C على استقامة واحدة،
وكانت النقطة B بين A و C، فإن $AB + BC = AC$.
وكذلك إذا كانت $AB + BC = AC$،
فإن النقطة B تقع بين A و C.



مثـــال البرهان باستعمال جمع القطع المستقيمة

1 أثبت ما يلي:

المعطيات: النقاط P, Q, R, S تقع على استقامة واحدة
بحيث إن $PQ = RS$

المطلوب إثبات أن: $PR = QS$

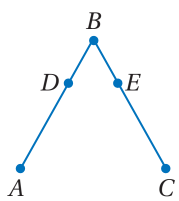
البرهان:

العبارات	المبررات
1) $PQ = RS$	1) معطى
2) $PQ + QR = QR + RS$	2) خاصية الجمع
3) $PQ + QR = PR$ $QR + RS = QS$	3) مسلَّمة جمع القطع المستقيمة
4) $PR = QS$	4) خاصية التعويض

تحقق من فهمك

1) **المعطيات:** $\overline{AD} \cong \overline{CE}$, $\overline{DB} \cong \overline{EB}$

المطلوب إثبات أن: $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.



تطابق القطع المستقيمة: تعلمت في الجبر خصائص المساواة. أما خاصية الانعكاس فتنصّ على أن كل كمية تساوي نفسها. وخاصية التماثل للمساواة تنص على أنه إذا كانت $a = b$، فإن $b = a$. أما خاصية التعدي للمساواة فتنص على أنه لأي ثلاثة أعداد a, b, c، إذا كان $a = b$ و $b = c$، فإن $a = c$. وخصائص المساواة هذه تشبه الخصائص التالية للتطابق.

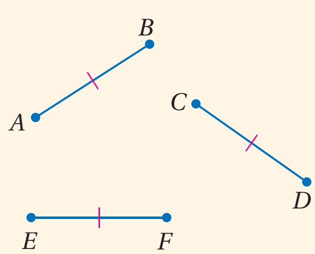
نظرية 1.2 خواص تطابق القطع المستقيمة

يحقق تطابق القطع المستقيمة خصائص الانعكاس والتماثل والتعدي.

خاصية الانعكاس $\overline{AB} \cong \overline{AB}$

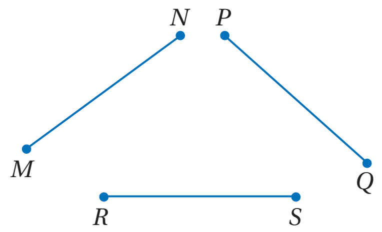
خاصية التماثل إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ فإن $\overline{CD} \cong \overline{AB}$

خاصية التعدي إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{CD} \cong \overline{EF}$
فإن $\overline{AB} \cong \overline{EF}$



ستبرهن خاصيتي الانعكاس والتماثل في السؤالين 4 وَ 5 على الترتيب

البرهان — خاصية التعدي لتطابق القطع المستقيمة



المعطيات: $\overline{MN} \cong \overline{PQ}$

$\overline{PQ} \cong \overline{RS}$

المطلوب إثبات أن: $\overline{MN} \cong \overline{RS}$

البرهان:

الطريقة الأولى: (البرهان الحر)

بما أن $\overline{MN} \cong \overline{PQ}$ و $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$ ، فإن $MN = PQ$ و $PQ = RS$ من تعريف تطابق القطع المستقيمة. ومن خاصية التعدي لعلاقة المساواة يكون، $MN = RS$. وعليه، $\overline{MN} \cong \overline{RS}$ من تعريف تطابق القطع المستقيمة.

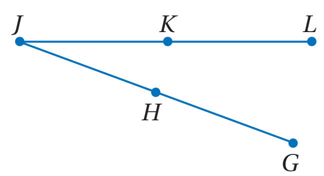
الطريقة الثانية: (البرهان ذو العمودين)

العبارات	المبررات
1) $\overline{MN} \cong \overline{PQ}, \overline{PQ} \cong \overline{RS}$	1) معطى
2) $MN = PQ, PQ = RS$	2) تعريف تطابق القطع المستقيمة
3) $MN = RS$	3) خاصية التعدي لعلاقة المساواة
4) $\overline{MN} \cong \overline{RS}$	4) تعريف تطابق القطع المستقيمة

يمكن استعمال نظريات تطابق القطع المستقيمة لإثبات العلاقات على القطع المستقيمة .

مثال — برهان باستعمال تطابق القطع المستقيمة

2 أثبت ما يلي:



المعطيات: $\overline{JK} \cong \overline{KL}, \overline{HJ} \cong \overline{GH}, \overline{KL} \cong \overline{HJ}$

المطلوب إثبات أن: $\overline{GH} \cong \overline{JK}$

البرهان:

الطريقة الأولى: (البرهان الحر)

بما أن $\overline{JK} \cong \overline{KL}$ و $\overline{KL} \cong \overline{HJ}$ فإن $\overline{JK} \cong \overline{HJ}$ من خاصية التعدي لتطابق القطع المستقيمة. وحيث إن $\overline{HJ} \cong \overline{GH}$ معطى ومن خاصية التعدي مرة أخرى يكون $\overline{JK} \cong \overline{GH}$ وعليه فإن $\overline{GH} \cong \overline{JK}$ من خاصية التماثل.

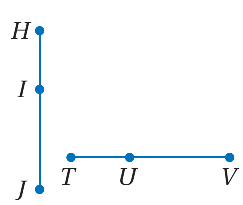
الطريقة الثانية: (البرهان ذو العمودين)

العبارات	المبررات
1) $\overline{JK} \cong \overline{KL}, \overline{KL} \cong \overline{HJ}$	1) معطى
2) $\overline{JK} \cong \overline{HJ}$	2) خاصية التعدي لتطابق القطع المستقيمة
3) $\overline{HJ} \cong \overline{GH}$	3) معطى
4) $\overline{JK} \cong \overline{GH}$	4) خاصية التعدي لتطابق القطع المستقيمة
5) $\overline{GH} \cong \overline{JK}$	5) خاصية التماثل لتطابق القطع المستقيمة

تحقق من فهمك

2) **المعطيات:** $\overline{HJ} \cong \overline{TV}$ ، $\overline{HI} \cong \overline{TU}$

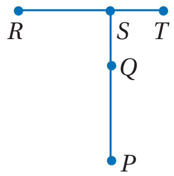
المطلوب إثبات أن: $\overline{IJ} \cong \overline{UV}$



تأكد

مثال 1 (ص 51)

1) انقل البرهان التالي إلى دفترك وأكمله:



المعطيات: $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$, $\overline{QS} \cong \overline{ST}$

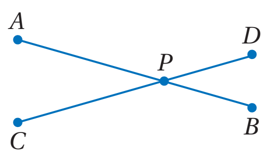
المطلوب: إثبات أن $\overline{PS} \cong \overline{RT}$

البرهان:

العبارات	المبررات
a) ؟ , ؟	a) معطى
b) $PQ = RS$, $QS = ST$	b) ؟
c) $PS = PQ + QS$, $RT = RS + ST$	c) ؟
d) ؟	d) خاصية التعويض
e) ؟	e) خاصية التعويض
f) $\overline{PS} \cong \overline{RT}$	f) ؟

مثال 2 (ص 52)

2) **البرهان:** أثبت ما يلي:



المعطيات: $\overline{AP} \cong \overline{CP}$

$\overline{BP} \cong \overline{DP}$

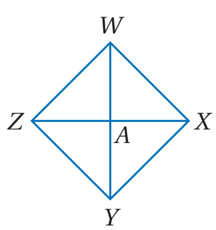
المطلوب إثبات أن: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

تمارين ومسائل

إرشادات للتمارين

للأسئلة	انظر الأمثلة
3	1
4 - 7	2

3) انقل البرهان التالي إلى دفترك وأكمله:



المعطيات: $\overline{WY} \cong \overline{ZX}$

النقطة A منتصف $\overline{WY}$.

النقطة A منتصف $\overline{ZX}$.

المطلوب إثبات أن: $\overline{WA} \cong \overline{ZA}$

البرهان:

العبارات	المبررات
a) $\overline{WY} \cong \overline{ZX}$ النقطة A منتصف $\overline{WY}$. النقطة A منتصف $\overline{ZX}$.	a) ؟
b) $WY = ZX$	b) ؟
c) ؟	c) تعريف نقطة المنتصف
d) $WY = WA + AY$, $ZX = ZA + AX$	d) ؟
e) $WA + AY = ZA + AX$	e) ؟
f) $WA + WA = ZA + ZA$	f) ؟
g) $2WA = 2ZA$	g) ؟
h) ؟	h) خاصية القسمة
i) $\overline{WA} \cong \overline{ZA}$	i) ؟

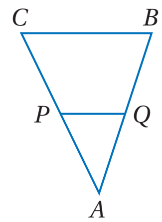
أثبت كلًّا مما يلي:

4) خاصية الانعكاس لتطابق القطع المستقيمة (نظرية 1.2).

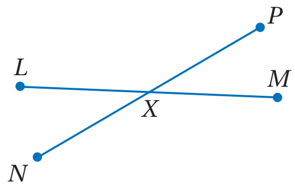
5) خاصية التماثل لتطابق القطع المستقيمة (نظرية 1.2).

برهان: أثبت ما يلي:

6) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ و $\overline{PC} \cong \overline{QB}$ ، فإن $\overline{AP} \cong \overline{AQ}$.



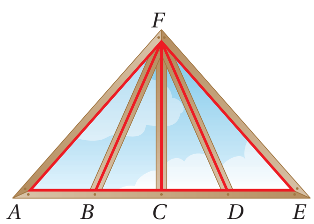
7) إذا كان $\overline{LM} \cong \overline{PN}$ و $\overline{XM} \cong \overline{XN}$ فإن $\overline{LX} \cong \overline{PX}$



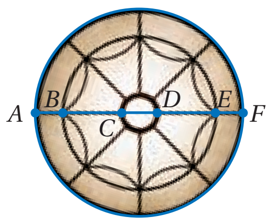
الربط مع الحياة

تختلف النوافذ في أشكالها وأبعادها. ومن الأشكال المنتشرة للنوافذ الدائرية والمستطيلة والمربعة والمثلثة والخماسية والثمانية.

8) تصميم: يعلو الباب الرئيس لبناية نافذة مثلثة الشكل، إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ والنقطة C منتصف القطعة $\overline{BD}$ ، أثبت أن $\overline{AC} \cong \overline{CE}$.



9) إنارة: عند تثبيت المصباح الكهربائي كان $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ و $\overline{BC} \cong \overline{DE}$، أثبت أن $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

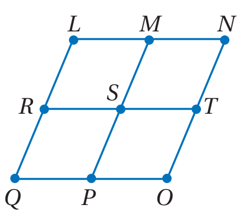


مسائل مهارات التفكير العليا

10) مسألة مفتوحة: ارسم ثلاث قطع مستقيمة متطابقة، ووضّح خاصية التعدي باستعمال هذه القطع المستقيمة.

11) تبرير منطقي: على خارطة الطرق في المملكة العربية السعودية، اختر مدينتين وصف المسافة بينهما مستعملًا خاصية الانعكاس.

12) تحدّ: افرض أن $\overline{MP} \cong \overline{NO}$, $\overline{RT} \cong \overline{QO}$, $\overline{LN} \cong \overline{RT}$, $\overline{LQ} \cong \overline{NO}$ والنقطة S منتصف $\overline{RT}$ والنقطة M منتصف $\overline{LN}$ والنقطة P منتصف $\overline{QO}$ اكتب ثلاث عبارات يمكنك إثباتها باستعمال المسلمات والنظريات والتعريفات التي سبق أن درستها.



13) اكتب: كيف يمكن أن تستعمل العلاقات على القطع المستقيمة في السفر؟ وبين كيف يمكن للمسافر بالطائرة أن يستعمل المسافات التي يعلنها قائد الطائرة لإيجاد المسافة الكلية بين مدينة الدمام وجدة؟ ولماذا تكون مسلّمة جمع القطع المستقيمة مفيدة أو غير مفيدة في عمليات السفر؟

تدريب على اختبار معياري

14) ما تبرير العبارة (5) المعطاة في البرهان أدناه؟

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, $\overline{BC} \cong \overline{CD}$

المطلوب إثبات أن: $3AB = AD$

العبارات	المبررات
1) $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, $\overline{BC} \cong \overline{CD}$	1) معطى
2) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	2) ؟
3) $AB = BC$, $BC = CD$	3) ؟
4) $CD = BC$	4) ؟
5) $AB + BC + CD = AD$	5) ؟
6) $AB + AB + AB = AD$	6) خاصية التعويض
7) $3AB = AD$	7) تعريف عملية الضرب

A مسلمة جمع الزوايا

B تطابق القطع المستقيمة

C مسلمة جمع القطع المستقيمة

D نظرية نقطة المنتصف

15) **مراجعة:** قام هاني بصنع نموذج مصغر لمتنزه المدينة التي يعيش فيها بحيث إن كل سنتمتر على النموذج يمثل 5 أمتار في المتنزَّه، إذا كان طول الممر الرئيس في النموذج 45 سنتمترًا. فما طوله الحقيقي في المتنزه؟

F 225 مترًا

G 125 مترًا

H 15 مترًا

J 5 أمتار

16) **مراجعة:** أي الكسور التالية يكافئ $\frac{12x^{-4}}{4x^{-8}}$ ؟

A $\frac{1}{3x^4}$

B $3x^4$

C $8x^2$

D $\frac{x^4}{3}$

مراجعة تراكمية

اذكر الخاصية التي تبرِّر كل عبارة مما يلي:

17) إذا كانت $m\angle P + m\angle Q = 110$ وَ $m\angle R = 110$ فإن $m\angle P + m\angle Q = m\angle R$.

18) إذا كانت $x\,(y + z) = a$ فإن $xy + xz = a$.

حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي " صحيحة دائمًا " أو " صحيحة أحيانًا " أو " ليست صحيحة أبدًا ":

19) نقطة المنتصف تقسم القطعة المستقيمة إلى قطعتين غير متطابقتين.

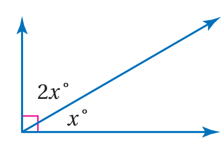
20) ثلاثة مستقيمات تتقاطع في نقطة واحدة.

21) تقاطع مستويين هو مستقيم.

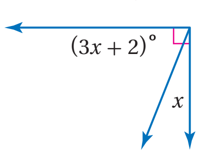
استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضروريّة: أوجد قيمة x فيما يلي.

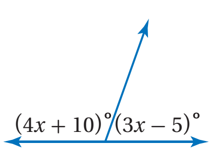
22)



23)



24)



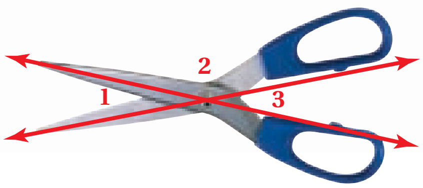
1-8 إثبات علاقات الزوايا
Proving Angle Relationships

الأفكار الرئيسة:

- أكتب براهين تتضمن زوايا متكاملة وزوايا متتامة.
- أكتب براهين تتضمن زوايامتطابقة وزوايا قائمة.

استعد

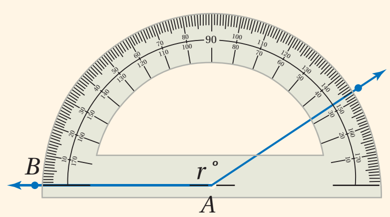
تلاحظ عند فتح المقص أن $\angle 1$ بين شفرتي المقص، و $\angle 2$ بين الشفرة ومقبض المقص تشكلان زوجًا من الزوايا المتجاورة على مستقيم. وبالمثل فإن $\angle 2$ و $\angle 3$ بين مقبضي المقص تشكلان أيضا زوجًا من الزوايا المتجاورة على مستقيم.



الزوايا المتكاملة والزوايا المتتامة تذكر أنك عند قياس الزوايا باستعمال المنقلة تضع المنقلة بحيث إن أحد ضلعي الزاوية ينطبق على صفر المنقلة، ثم تقرأ التدريج على المنقلة المنطبق على ضلع الزاوية الآخر. ولرسم زاوية معلوم قياسها على نصف مستقيم معطى ضع المنقلة بحيث يكون طرف نصف المستقيم عند مركز المنقلة ويمر بعلامة الصفر على المنقلة، ثم عيّن نقطة عند القياس المحدد للزاوية لتحديد الضلع الثاني لها. تؤكد مسلمة المنقلة وجود نصف مستقيم وحيد يمكن رسمه لإنشاء زاوية على نصف مستقيم معطى وبقياس محدد مسبقًا.

مسلمة 1.10 مسلمة المنقلة

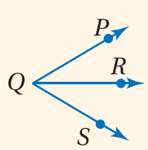
إذا كان $\overrightarrow{AB}$ نصف مستقيم معطى والعدد r بين 0 و 180، فإنه يوجد نصف مستقيم وحيد طرفه النقطة A ويقع في إحدى جهتي $\overrightarrow{AB}$ ، بحيث يكون قياس الزاوية المتكونة يساوي r.



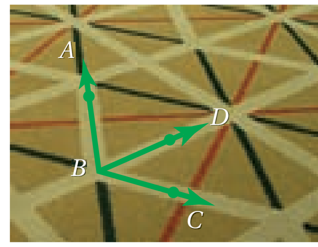
تعلمت في الدرس 7–1، مسلمة جمع القطع المستقيمة، وهنا يوجد علاقة مشابهة بين قياسات الزوايا.

مسلمة 1.11 مسلمة جمع الزوايا

إذا وقعت النقطة R داخل $\angle PQS$ فإن $m\angle PQR + m\angle RQS = m\angle PQS$. وإذا كانت $m\angle PQR + m\angle RQS = m\angle PQS$ فإن النقطة R تقع داخل $\angle PQS$.



يمكنك استعمال مسلمة جمع الزوايا لحل مسائل تتضمن قياسات زوايا.



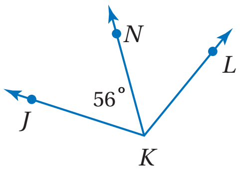
مثـــال 1 جمع الزوايا

يحوي السجاد المجاور عدة زوايا. فإذا كان $m\angle ABD = 60$ و $m\angle ABC = 105$، فأوجد $m\angle DBC$.

$m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$	مسلمة جمع الزوايا
$60 + m\angle DBC = 105$	بتعويض $m\angle ABD = 60^\circ, m\angle ABC = 105^\circ$
$m\angle DBC = 45$	خاصية عملية الطرح

تحقق من فهمك

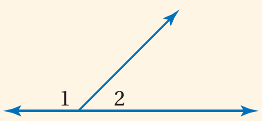
(1 أوجد $m\angle NKL$ إذا كان $m\angle JKL = 2m\angle JKN$.



يمكن استعمال مسلمة جمع الزوايا مع علاقات أخرى على الزوايا لإثبات نظريات أخرى تتعلق بالزوايا.

نظريات

1.3 نظرية تكامل الزوايا: إذا كانت زوايتان متجاورتين على مستقيم فإنهما متكاملتان.



$m\angle 1 + m\angle 2 = 180$

1.4 نظرية تتام الزوايا: إذا شكّل الضلعان غير المشتركين لزاويتين متجاورتين زاوية قائمة فإن الزاويتين متتامتان.

$m\angle 1 + m\angle 2 = 90$

ستبرهن النظريتين (1.3) و (1.4) في السؤالين 12 و 13 على الترتيب.

مراجعة المفردات

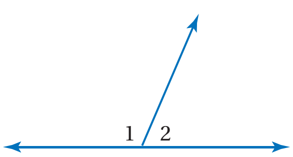
الزاويتان المتكاملتان: تكون زاويتان متكاملتين إذا كان مجموع قياسيهما 180.

الزاويتان المتتامتان: تكون زاويتان متتامتين إذا كان مجموع قياسيهما 90.

مثـــال 2 الزوايا المتكاملة

إذا كانت $\angle 1$ و $\angle 2$ متجاورتين على مستقيم وكان $m\angle 2 = 67$، فأوجد $m\angle 1$.

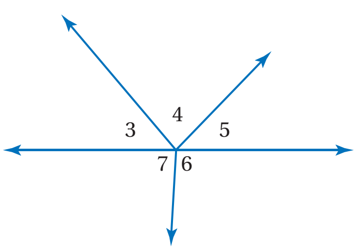
$m\angle 1 + m\angle 2 = 180$	نظرية تكامل الزوايا
$m\angle 1 + 67 = 180$	بتعويض $m\angle 2 = 67$
$m\angle 1 = 113$	خاصية الطرح



تحقق من فهمك

(2A في الشكل المجاور أوجد قياسات الزوايا $\angle 3, \angle 4, \angle 5$ إذا كان $m\angle 3 = x + 20, m\angle 4 = x + 40, m\angle 5 = x + 30$

(2B إذا كانت $\angle 6$ و $\angle 7$ زاويتين متجاورتين على مستقيم وكان $m\angle 6 = 3x + 32$ و $m\angle 7 = 5x + 12$، فأوجد كلًّا من $x, \angle 6, \angle 7$.



الزوايا المتطابقة والزوايا القائمة: إن الخصائص الجبرية التي تنطبق على تطابق القطع المستقيمة وتساوي قياساتها صحيحة على تطابق الزوايا وتساوي قياساتها.

نظرية 1.5

تحقق علاقة تطابق الزوايا خصائص الانعكاس والتماثل والتعدي.

خاصية الانعكاس $\angle 1 \cong \angle 1$

خاصية التماثل إذاكان $\angle 2 \cong \angle 1$، فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.

خاصية التعدي إذا كان $\angle 2 \cong \angle 1$ و $\angle 3 \cong \angle 2$، فإن $\angle 3 \cong \angle 1$.

ستبرهن خاصيتي الانعكاس والتعدي لتطابق الزوايا في السؤالين 14 و 15.

البرهان خاصية التماثل لتطابق الزوايا

المعطيات: $\angle A \cong \angle B$

المطلوب إثبات أن: $\angle B \cong \angle A$

الطريقة الأولى: البرهان الحر:

$\angle A \cong \angle B$ معطى ومن تعريف تطابق الزوايا يكون $m\angle A = m\angle B$. وباستعمال خاصية التماثل لعلاقة المساواة يكون $m\angle B = m\angle A$. وعليه يكون $\angle B \cong \angle A$ من تعريف تطابق الزوايا.

الطريقة الثانية: البرهان ذو العمودين:

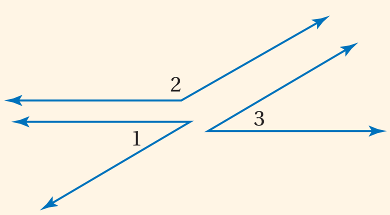
العبارات	المبررات
1) $\angle A \cong \angle B$	1) معطى
2) $m\angle A = m\angle B$	2) تعريف تطابق الزوايا
3) $m\angle B = m\angle A$	3) خاصية التماثل لعلاقة المساواة
4) $\angle B \cong \angle A$	4) تعريف تطابق الزوايا

يمكن تطبيق الخصائص الجبرية لإثبات نظريات على تطابق الزوايا تتضمن زوايا متكاملة وزوايا متتامة.

نظريات

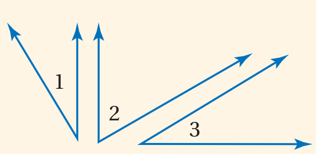
1.6 الزاويتان المكملتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.

مثال: إذاكان $m\angle 1 + m\angle 2 = 180$ و $m\angle 2 + m\angle 3 = 180$، فإن $\angle 1 \cong \angle 3$.



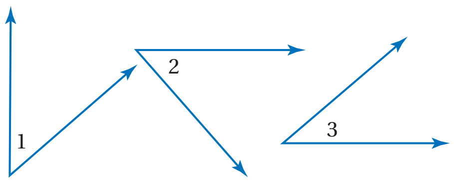
1.7 الزاويتان المتممتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.

مثال: إذا كان $m\angle 1 + m\angle 2 = 90$ و $m\angle 2 + m\angle 3 = 90$، فإن $\angle 1 \cong \angle 3$.



ستبرهن نظرية (1.6) في السؤال 3.

البرهان نظرية 1.7



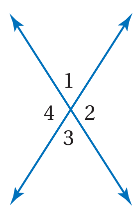
المعطيات: $\angle 1$ و $\angle 3$ متتامتان
والزاويتان $\angle 2$ و $\angle 3$ متتامتان.

المطلوب إثبات أن: $\angle 1 \cong \angle 2$

البرهان:

العبارات	المبررات
(1 $\angle 1$ و $\angle 3$ متتامتان و $\angle 2$ و $\angle 3$ متتامتان .	**(1** معطى
(2 $m\angle 1 + m\angle 3 = 90$ $m\angle 2 + m\angle 3 = 90$	**(2** تعريف الزوايا المتتامة
(3 $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$	**(3** التعويض
(4 $m\angle 3 = m\angle 3$	**(4** خاصية الانعكاس
(5 $m\angle 1 = m\angle 2$	**(5** خاصية الطرح
(6 $\angle 1 \cong \angle 2$	**(6** تعريف تطابق الزوايا

مثـــال استعمال الزوايا المتكاملة



3 **في الشكل المجاور، $\angle 1$ و $\angle 2$ متجاورتان على مستقيم و $\angle 2$ و $\angle 3$ متجاورتان على مستقيم. أثبت أن $\angle 1$ و $\angle 3$ متطابقتان.**

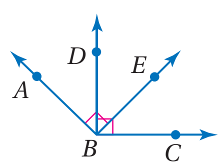
المعطيات: $\angle 1$ و $\angle 2$ متجاورتان على مستقيم
و $\angle 2$ و $\angle 3$ متجاورتان على مستقيم.

المطلوب إثبات أن: $\angle 1 \cong \angle 3$

البرهان:

العبارات	المبررات
(1 $\angle 1$ و $\angle 2$ متجاورتان على مستقيم و $\angle 2$ و $\angle 3$ متجاورتان على مستقيم.	**(1** معطى
(2 $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتان و$\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان	**(2** نظرية تكامل الزوايا
(3 $\angle 3 \cong \angle 1$	**(3** الزاويتان المكملتان للزاوية نفسها متطابقتان

تحقق من فهمك



(3 في الشكل المجاور $\angle ABE$ و $\angle DBC$ قائمتان.
أثبت أن $\angle ABD \cong \angle EBC$.

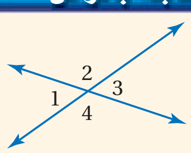
مراجعة المفردات

الزاويتان المتقابلتان بالرأس
هما زاويتان غير متجاورتين ناتجتان عن تقاطع مستقيمين

تلاحظ أن الزاويتين في المثال (3) هما زاويتان متقابلتان بالرأس والنتيجة في المثال (3) تبرهن النظرية التالية:

نظرية 1.8 نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس

الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان.



$\angle 1 \cong \angle 3$
$\angle 2 \cong \angle 4$

مثـــال الزوايتان المتقابلتان بالرأس

4 إذا كانت $\angle 1$ و $\angle 2$ متقابلتين بالرأس وكان $m\angle 1 = x$ و $m\angle 2 = 228 - 3x$، فأوجد $m\angle 1$ و $m\angle 2$.

$\angle 1 \cong \angle 2$	نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس	بالتعويض لإيجاد قياس الزوايا.
$m\angle 1 = m\angle 2$	تعريف تطابق الزوايا	$m\angle 1 = x$
$x = 228 - 3x$	بالتعويض	$= 57$
$4x = 228$	بإضافة $3x$ لكل طرف	$m\angle 2 = m\angle 1$
$x = 57$	بقسمة طرفي المعادلة على 4	$= 57$

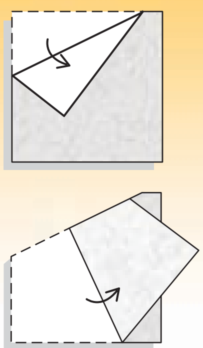
تحقق من فهمك

4) إذا كانت $\angle 3$ و $\angle 4$ متقابلتين بالرأس وكان، $m\angle 3 = 6x + 2$ و $m\angle 4 = 8x - 14$، فأوجد $m\angle 3$ و $m\angle 4$.

يمكنك عمل زوايا قائمة واختبار تطابق الزوايا بِطَيِّ ورقة.

معمل الهندسة

الزوايا القائمة



إنشاء نموذج:

- اطو أحد أركان ورقة للأسفل لتشكل حافة (كما في الصورة).
- قم بِطَيِّ الورقة مرة أخرى بحيث تنطبق الحافة على نفسها كما في الصورة.
- افرد الورقة لترجع إلى الوضع الأصلي وأوجد قياس كل زاوية.
- كرر النشاط ثلاث مرات أخرى.

تحليل النموذج:

1) ماذا تلاحظ حول خطوط الطي التي تشكلت؟

2) ماذا تلاحظ حول كل زوج من الزوايا المتجاورة؟

3) ما قياس كل زاوية من الزوايا التي تشكلت؟

4) اكتب تخميناً يتعلق بالخطوط المتعامدة.

النظريات التالية تؤكد صحة التخمينات التي حصلت عليها في معمل الهندسة.

نظريات — نظريات الزاوية القائمة

1.9 تتقاطع المستقيمات المتعامدة وتشكل أربع زوايا قائمة.

1.10 جميع الزوايا القائمة متطابقة.

1.11 تشكل المستقيمات المتعامدة زوايا متجاورة ومتطابقة.

1.12 إذا كانت الزاويتان متطابقتين ومتكاملتين فإنهما قائمتان.

1.13 إذا كانت الزاويتان المتطابقتان متجاورتين على مستقيم فإنهما قائمتان.

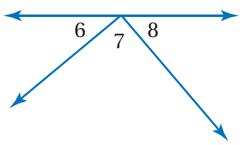
ستبرهن هذه النظريات في الأسئلة 20–16

تأكد

أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة في السؤالين 1 و 2:

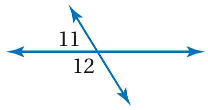
مثال 1
(ص 57)

1) $\angle 6$ وَ $\angle 8$ متتامتان، $m\angle 8 = 47$



مثال 2
(ص 57)

2) $m\angle 11 = x - 4 \,,\, m\angle 12 = 2x - 5$



مثال 3
(ص 59)

3) **برهان:** انقل إلى دفترك وأكمل برهان النظرية 1.6.

المعطيات: $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان متكاملتان

$\angle 3$ و $\angle 4$ زاويتان متكاملتان.

$\angle 1 \cong \angle 4$

المطلوب: إثبات أن $\angle 2 \cong \angle 3$

البرهان:

العبارات	المبررات
a) $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتان. $\angle 3$ و $\angle 4$ متكاملتان. $\angle 1 \cong \angle 4$	a) ؟
b) $m\angle 1 + m\angle 2 = 180$ $m\angle 3 + m\angle 4 = 180$	b) ؟
c) $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3 + m\angle 4$	c) ؟
d) $m\angle 1 = m\angle 4$	d) ؟
e) $m\angle 2 = m\angle 3$	e) ؟
f) $\angle 2 \cong \angle 3$	f) ؟

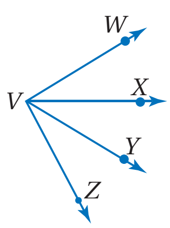
مثال 4
(ص 60)

4) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين

المعطيات: $\overrightarrow{VX}$ ينصف $\angle WVY$.

$\overrightarrow{VY}$ ينصف $\angle XVZ$.

المطلوب: إثبات أن $\angle WVX \cong \angle YVZ$

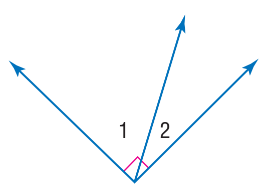


تمارين ومسائل

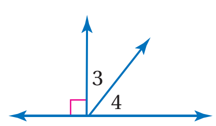
إرشادات للتمارين	
للأسئلة	انظر الأمثلة
5 - 7	1
8	2
10	3
11 - 15	4

أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة في الأسئلة 7–5:

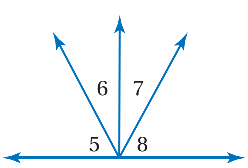
5) $m\angle 1 = 64$



6) $m\angle 3 = 38$

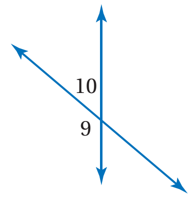


7) $\angle 7$ و $\angle 8$ زاويتان متتامتان.
$\angle 5 \cong \angle 8$ و $m\angle 6 = 29$.

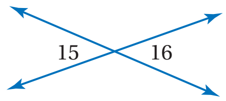


أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة.

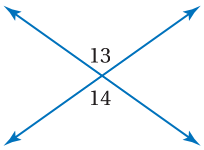
8) $m\angle 9 = 100 + 20x$
$m\angle 10 = 20x$



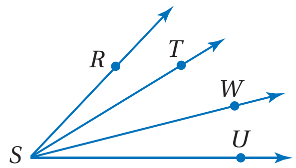
9) $m\angle 15 = x$
$m\angle 16 = 6x - 290$



10) $m\angle 13 = 2x + 94$
$m\angle 14 = 7x + 49$



11) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين:
المعطيات: $m\angle RSW = m\angle TSU$
المطلوب إثبات أن: $m\angle RST = m\angle WSU$



اكتب برهانًا لكل نظرية مما يلي:

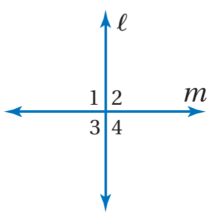
12) نظرية تكامل الزوايا.

13) نظرية تتام الزوايا.

14) خاصية الانعكاس لتطابق الزوايا.

15) خاصية التعدي لتطابق الزوايا.

برهان: استعمل الشكل المجاور لكتابة برهان لكل نظرية:

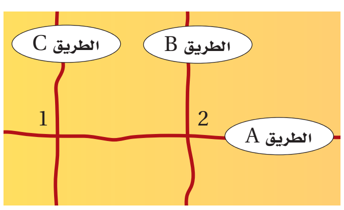


16) نظرية 1.9 **17)** نظرية 1.10 **18)** نظرية 1.11

19) نظرية 1.12 **20)** نظرية 1.13

21) أنهار: تشكل روافد الأنهار أحيانًا زوجًا من الزوايا المتجاورة على مستقيم عند نقطة الالتقاء مع النهر الرئيس، في الصورة، إذا كانت $\angle 1$ و $\angle 2$ متجاورتين على مستقيم وكان $m\angle 1 = 28$، فأوجد $m\angle 2$.

22) طرق: إذا كانت الطريق A تتجه من الشرق إلى الغرب وعمودية على الطريقين B و C اللتين تتجهان من الشمال إلى الجنوب، فبيّن أن زاويتي تقاطع الطريق A مع الطريقين B ، C متطابقتان.



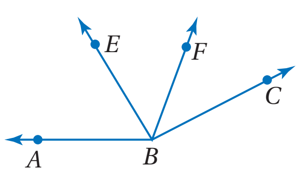
مسائل مهارات التفكير العليا

23) مسألة مفتوحة: ارسم ثلاث زوايا متطابقة واستعملها في توضيح خاصية التعدي لتطابق الزوايا.

24) أوجد الخطأ: كتب كل من يوسف وثامر معادلة تتضمن قياسات الزوايا المبينة بالشكل. مَنْ منهما على صواب ؟ برر إجابتك.

يوسف
$m\angle ABE + m\angle EBC = m\angle ABC$

ثامر
$m\angle ABE + m\angle FBC = m\angle ABC$

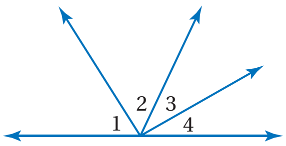


تبرير: بين ما إذا كانت كل عبارة فيما يلي صحيحة دائمًا أو أحيانًا أو ليست صحيحة أبدًا، مع التوضيح:

25) الزاويتان غير المتجاورتين تكونان متقابلتين بالرأس.

26) الزاويتان الحادتان المتطابقتان متممتان للزاوية نفسها.

27) **تحدّ** ماذا يمكنك أن تستنتج حول مجموع $m\angle 1$ و $m\angle 4$ إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ و $m\angle 3 = m\angle 4$ ؟ برر إجابتك.



28) **اكتب:** بالرجوع إلى صفحة 56. صف كيف يمثل المقص زاويتين متكاملتين؟ هل العلاقة هي نفسها لزاويتين متممتين للزاوية نفسها؟

تدريب على اختبار معياري

29) إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين هي 1:4 فما قياس الزاوية الصغرى؟

A 15

B 18

C 24

D 36

30) **مراجعة:** اكتب المقدار التالي في أبسط صورة:

$4(3x-2)(2x+4)+3x^2+5x-6$

F $9x^2+3x-14$

G $9x^2+13x-14$

H $27x^2+37x-38$

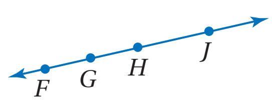
J $27x^2+27x-26$

مراجعة تراكمية

البرهان اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 1-7)

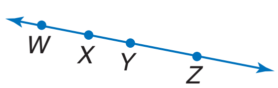
31) **المعطيات:** النقطة G تقع بين النقطتين F و H. والنقطة H تقع بين G و J.

المطلوب إثبات أن: $FG + GJ = FH + HJ$

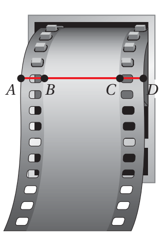


32) **المعطيات:** النقطة x منتصف $\overline{WY}$.

المطلوب إثبات أن: $WX + YZ = XZ$



33) **تصوير** يتم تثبيت الفيلم داخل الكاميرا عن طريق مسننات تمسك الثقوب الموجودة على طرفي شريط الفيلم. فإذا كانت المسافة من A لشريط الفيلم إلى C على الحافة اليمنى للشريط تساوي المسافة من الحافة اليسرى B للشريط إلى الحافة اليمنى D للشريط. بيِّن أن الشريحتين المثقبتين لهما العرض نفسه. (الدرس 1-6)



الفصل 1 دليل الدراسة والمراجعة

المَطْوِيّاتُ مُنَظِّمُ أفْكار

استعد

تأكد أن المفاهيم الأساسية قد سجلت في مطويتك.

مفاهيم أساسيّة

التبرير الاستقرائي والمنطق (الدرسان 1-1 و 1-2)

- إذا مثلت عبارة بالرمز p، فإن "ليس p" يعني نفي العبارة.
- الجمل المركبة: أكثر من عبارة ترتبط إما بأداة الوصل المنطقي "و" أو بأداة الفصل المنطقي "أو".

العبارات الشرطية (الدرس 1-3)

- تكتب العبارة الشرطية على الصورة "إذا كان p فإن q" حيث p هي الفرض للعبارة الشرطية و q هي النتيجة.
- عكس العبارة الشرطية وتكتب بتبديل كل من الفرض والنتيجة، فالعبارة "إذا كان q فإن p" عكس العبارة "إذا كان p فإن q".
- معكوس العبارة الشرطية وتكتب بنفي الفرض والنتيجة للعبارة الشرطية، فالعبارة "إذا كان (ليس p) فإن (ليس q)" هي معكوس العبارة "إذا كان p فإن q".
- المعاكس الإيجابي وتكتب بنفي الفرض والنتيجة لعكس العبارة الشرطية، فالعبارة "إذا كان (ليس q) فإن (ليس p)" هي المعاكس الإيجابي للعبارة "إذا كان p فإن q".

التبرير الاستنتاجي (الدرس 1-4)

- قانون الفصل المنطقي: إذا كانت العبارة الشرطية $p \to q$ صحيحة وكانت p صحيحة فإن q تكون أيضًا صحيحة.
- قانون القياس المنطقي: إذاكانت العبارة الشرطية $p \to q$ صحيحة وكانت $q \to r$ صحيحة، فإن $p \to r$ أيضًا صحيحة.

البرهان (الدروس من 1-5 إلى 1-8)

- حدد ما يراد إثباته.
- اكتب جميع المعلومات المعطاة.
- ارسم رسماً توضيحيًّا للمسألة إن أمكن.
- حدد المطلوب على الرسم.
- طوّر نظام تبرير استنتاجي للوصول إلى المطلوب.

المفردات الأساسية:

التخمين (ص 10)	النتيجة (ص 23)
التبرير الاستقرائي (ص 10)	معكوس العبارة الشرطية (ص25)
مثال مضاد (ص 11)	المعاكس الإيجابي (ص 25)
قيمة الصواب (ص. 15)	الفرض (ص 25)
نفي العبارة (ص. 15)	مناقشة استنتاجية (ص 31)
أداة الوصل المنطقي (ص 16)	المسلمة (ص. 37)
أداة الفصل المنطقي (ص 16)	البرهان الحر (ص. 38)
عبارة على الصورة	البرهان (ص. 38)
"إذا كان... فإن... " (ص 23)	النظرية (ص. 38)
العبارة الشرطية (ص 25)	دليل استنتاجي (ص 43)
عكس العبارة الشرطية (ص 25)	برهان ذو عمودين (ص. 44)

التأكد من المفردات

بين ما إذا كانت كل جملة فيما يلي صحيحة أو خاطئة. وإذا كانت خطأ استبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمةً مناسبة لتجعلها جملة صحيحة:

1) النظريات يسلم بصحتها دائمًا.
2) عبارة الفصل تكون صحيحة فقط عندما تكون جميع مركباتها صحيحة.
3) في البرهان ذي العمودين، الخصائص التي تبرر كل خطوة تسمى المبررات.
4) التبرير الاستقرائي يستعمل الحقائق والقواعد والتعاريف والخواص للوصول إلي النتائج المنطقية.
5) إن خاصية الانعكاس للمساواة تنص على أن لكل عدد a يكون $a = a$
6) لبيان أن تخمينًا ما خاطئ فإنك تعطي مثالاً مضاداً.
7) تتكون العبارة التي على الصورة "*إذا كان .. فإن ..* "من تخمين ونتيجة.
8) المعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية يكون بتبديل كل من الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية.
9) عبارة الفصل المنطقي تتكون من ربط جملتين أو أكثر بأداة الربط "أو".

مراجعة الدروس

1-1 التبرير الاستقرائي والتخمين الرياضي (الصفحات 14-10)

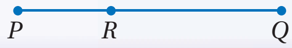
خمِّن مبنيًّا على المعطيات. وارسم شكلًا يوضح تخمينك.

11) $\angle A$ و $\angle B$ متكاملتان.

12) النقاط X, Y, Z على استقامة واحدة و $XY = YZ$.

مثال 1: لتكن النقاط P, Q, R على استقامة واحدة. حدد ما إذا كان التخمين "*النقطة Q تقع بين النقطتين P و R*" صحيحًا أو خاطئًا. وأعط مثالًا مضادًّا في حالة الخطأ.

يمكن أن يستعمل الشكل التالي لنفي صحة التخمين، في هذه الحالة النقطة R تقع بين النقطتين P و Q. وبما أننا استطعنا إيجاد مثال مضاد فإن التخمين أعلاه خاطئ.



1-2 المنطق (الصفحات 22-15)

استعمل العبارات التالية لكتابة عبارة مركبة بوساطة أداة الوصل المنطقي أو الفصل المنطقي، وبين قيمة الصواب لكل عبارة مركبة.

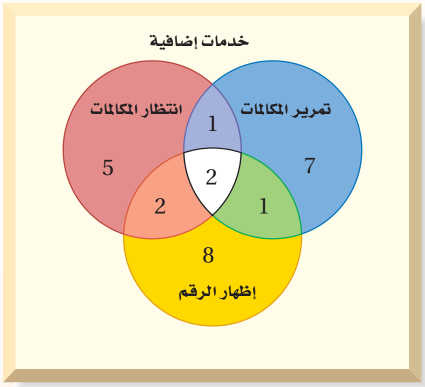
p: $1- > 0$

q: في المثلث القائم الزاوية الذي وتره c يكون $a^2 + b^2 = c^2$.

r: مجموع قياسي زاويتين متكاملتين هو $180°$.

13) p وَ $\sim q$ **14)** $\sim p \vee \sim r$

15) هواتف: أظهرت نتائج دراسة إحصائية حول خدمات إضافية تقدمها شركة اتصالات كما هو مبين في شكل فن أدناه. أوجد عدد الزبائن الذين يتلقون خدمتي انتظار المكالمات وإظهار الرقم.



مثال 2: استعمل العبارات التالية لكتابة عبارة مركبة بوساطة أداتي الفصل والوصل المنطقي، وبيّن قيمة الصواب لكل عبارة مركبة.

p: $\sqrt{15} = 5$

q: قياس الزاوية القائمة يساوي 90.

a) p وَ q

$\sqrt{15} = 5$ وقياس الزاوية القائمة يساوي 90.

إن العبارة المركبة p و q خاطئة لأن p خاطئة، رغم أن q صواب.

b) $p \vee q$

$\sqrt{15} = 5$، أو قياس الزاوية القائمة يساوي 90.

إن العبارة المركبة $p \vee q$ صحيحة لأن q عبارة صحيحة، رغم أن p خطأ.

دليل الدراسة والمراجعة

1-3 العبارات الشرطية (الصفحات 29-23)

اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لكل من العبارات الشرطية التالية، وحدد ما إذا كانت هذه العبارات الشرطية الناتجة صحيحة أو خاطئة، وإذاكانت خاطئة فأعط مثالاً مضاداً.

16) عدد الدول العربية 22 دولةً.

17) إذا كان الإحداثي السيني لزوج مرتب هو 0 فإن النقطة التي تمثل بهذا الزوج المرتب تقع على محور الصادات.

درجة الحرارة: أوجد قيمة الصواب لكل عبارة مما يلي تحت الشرط "يتجمد الماء عندما تكون درجة الحرارة على الأكثر $0°C$".

18) يتجمد الماء عند درجة حرارة $-10°C$.

19) يتجمد الماء عند درجة حرارة $15°C$.

20) لا يتجمد الماء عند درجة حرارة $-2°C$.

21) لا يتجمد الماء عند درجة حرارة $30°C$.

مثال 3: حدد كلًّا من الفرض والنتيجة للعبارة: "*تقاطع مستويين هو مستقيم*"، ثم اكتب العبارة على صورة "*إذا كان ... فإن ...*".

الفرض: مستويان متقاطعان

النتيجة: تقاطعهما مستقيم

إذا تقاطع مستويان فإن تقاطعهما مستقيم.

مثال 4: اكتب عكس العبارة "*جميع الأسماك تعيش تحت الماء*". وبين قيمة الصواب لعكس العبارة، وإذا كانت خاطئة فأعط مثالًا مضادًّا.

عكس العبارة أعلاه هو "إذا كانت تعيش تحت الماء فهي أسماك" هذه العبارة خاطئة، لأن الدلفين يعيش تحت الماء ولا يصنف على أنه من الأسماك.

1-4 التبرير الاستنتاجي (الصفحات 36-31)

حدد ما إذا كانت العبارة رقم (3) تنتج عن العبارتين (1) و (2) من خلال قانون الفصل المنطقي أو القياس المنطقي، وإذا كانت كذلك فاكتب أي قانون استعمل. أما إذا لم تكن ناتجة عن أيّ من هذين القانونين فاكتب "*ليس صحيحًا*".

22) (1) إذا كنت طالبًا في المدرسة الثانوية فإنك تحصل على بطاقة شخصية.

(2) فواز طالبٌ في المدرسة الثانوية.

(3) حصل فواز على بطاقة شخصية.

23) (1) إذا كانت أضلاع مستطيل متطابقة فإنه مربع.

(2) قطرَا المربع متعامدان.

(3) قطرَا المستطيل متعامدان.

مثال 5:

استعمل قانون القياس المنطقي لتحديد ما إذا كان ممكنًا التوصل إلى نتيجة صحيحة من العبارات التالية:

(1) إذا كان الجسم في نظامنا الشمسي شمسًا فإنه نجمٌ.

(2) إن النجوم في حركة ثابتة.

p: الجسم في نظامنا الشمسي هو الشمس.

q: الجسم نجم.

r: النجوم في حركة ثابتة.

العبارة (1): $p \rightarrow q$

العبارة (2): $q \rightarrow r$

بما أن العبارات المعطاة صحيحة فاستعمل قانون القياس المنطقي لاستنتاج أن $p \rightarrow r$. أي أن "*إذا كان الجسم في نظامنا الشمسي هو الشمس فإنها في حركة ثابتة*".

1-5 المسلمات والبراهين الحرّة (الصفحات 41-37)

بين ما إذا كانت كل عبارة من العبارات التالية صحيحة دائمًا أو أحيانًا أو ليست صحيحة أبدًا مع التبرير.

24) تقاطع مستقيمين مختلفين هو مستقيم.

25) إذا كانت النقطة P هي منتصف $\overline{XY}$، فإن $XP = PY$.

26) أربع نقاط تحدد ستة مستقيمات.

27) إذا كان $MX = MY$، فإن النقطة M هي منتصف $\overline{XY}$.

28) **الأرجوحة:** في حديقة بيت صغير ست شجرات مزروعة على شكل سداسي منتظم. بكم طريقة يمكن تعليق الأرجوحة وتثبيتها على شجرتين من الشجرات الست؟

مثال 6: بين ما إذا كانت كل عبارة من العبارات التالية صحيحة دائمًا أو أحيانًا أو ليست صحيحة أبدًا مع التبرير.

"*تحدد النقطتان مستقيمًا*".

بناء على المسلمة المرتبطة بالنقاط والمستقيمات، كل نقطتين تحددان مستقيمًا وعليه فإن العبارة دائمًا صحيحة.

"*إذا كانت الزاويتان قائمتين فإنهما متجاورتان*".

إذا شكلت الزاويتان القائمتان خطًّا مستقيمًا فإنهما متجاورتان، وعليه فإن هذه العبارة أحيانًا تكون صحيحة.

1-6 البرهان الجبري (الصفحات 49-43)

اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة:

29) إذا كان $3(x + 2) = 6$ فإن $3x + 6 = 6$.

30) إذا كان $CD=3$ و $CD = XY$، فإن $XY = 3$.

اكتب برهانًا ذا عمودين لكل مما يلي:

31) إذا كان $AC = AB, AC = 4x + 1$, و $AB = 6x - 13$، فإن $x = 7$.

32) إذا كان $MN = PQ$ و $PQ = RS$، فإن $MN = RS$.

33) **تاريخ الميلاد:** يصادف تاريخ ميلاد أمينة تاريخ ميلاد سعاد وتاريخ ميلاد سعاد هو نفسه تاريخ ميلاد آلاء. ما الخاصية التي تعطي موافقة تاريخ ميلاد أمينة لتاريخ ميلاد آلاء؟

مثال 7:

المعطيات: $2x + 6 = 3 + \frac{5}{3}x$

المطلوب: إثبات أن $x = -9$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $2x + 6 = 3 + \frac{5}{3}x$	1) معطى
2) $3(2x + 6) = 3\left(3 + \frac{5}{3}x\right)$	2) خاصية الضرب
3) $6x + 18 = 9 + 5x$	3) خاصية توزيع الضرب على الجمع
4) $6x + 18 - 5x = 9 + 5x - 5x$	4) خاصية الطرح
5) $x + 18 = 9$	5) تبسيط
6) $x + 18 - 18 = 9 - 18$	6) خاصية الطرح
7) $x = -9$	7) تبسيط

الفصل 1

دليل الدراسة والمراجعة

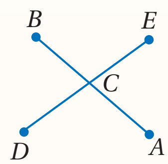
1-7 إثبات العلاقات بين القطع المستقيمة (الصفحات 50-55)

البرهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكل مما يلي.

34) **المعطيات:** $BC = EC$

$CA = CD$

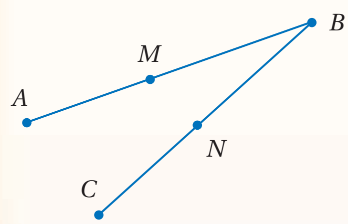
المطلوب: إثبات أن $BA = DE$



35) إذا كان $AB = CB$، M هي نقطة منتصف القطعة AB،

و N هي نقطة المنتصف للقطعة CB،

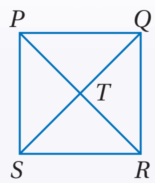
فأثبت أن $AM = CN$.



مثال 8 اكتب برهانًا ذا عمودين:

المعطيات: $QT = RT,\ TS = TP$

المطلوب: إثبات أن $QS = RP$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $QT = RT,\ TS = TP$	1) معطى
2) $QT + TS = RT + TS$	2) خاصية الجمع
3) $QT + TS = RT + TP$	3) خاصية التعويض
4) $QT + TS = QS$ $RT + TP = RP$	4) مسلمة جمع القطع المستقيمة
5) $QS = RP$	5) خاصية التعويض

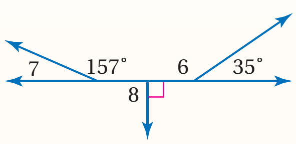
1-8 إثبات علاقات الزوايا (الصفحات 56-63)

أوجد قياس كل من الزوايا التالية:

36) $\angle 6$

37) $\angle 7$

38) $\angle 8$



39) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين:

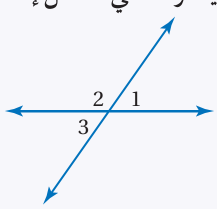
المعطيات: $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان متجاورتان على مستقيم،

$m\angle 2 = 2(m\angle 1)$

المطلوب إثبات أن: $m\angle 1 = 60$

مثال 9

أوجد قياس كل زاوية مرقمة في الشكل إذا كان $m\angle 3 = 55$.



$m\angle 1 = 55$، لأن $\angle 1$ و $\angle 3$ زاويتان متقابلتان بالرأس.

$\angle 2$ و $\angle 3$ متجاورتان على مستقيم.

$m\angle 2 + 55 = 180$	تعريف تكامل الزوايا
$m\angle 2 = 180 - 55$	خاصية الطرح
$m\angle 2 = 125$	بالتبسيط

اختبار الفصل

حدد ما إذا كان كل تخمين صحيحًا أو خاطئًا. وضح إجابتك مع إعطاء مثال مضاد لكل تخمين خاطئ:

1) **المعطيات:** $\angle A \cong \angle B$
التخمين: $\angle B \cong \angle A$.

2) **المعطيات:** y عدد حقيقي.
التخمين: $-y > 0$

3) **المعطيات:** $3a^2 = 48$
التخمين: $a = 4$

استعمل العبارات التالية لكتابة عبارة مركبة لكل عبارة فصل أو وصل، ثم أوجد قيمة الصواب لهذه العبارة المركبة.

p: $-3 > 2$

q: $3x = 12$ عندما $x = 4$.

r: المثلث المتطابق الأضلاع هو مثلث متطابق الزوايا أيضًا.

4) p و q

5) p أو q

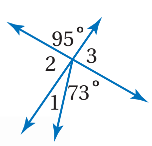
6) $p \vee (q \wedge r)$

7) حدد كلًّا من الفرض والنتيجة للعبارة "***الناس الذين يجهدون أنفسهم بالعمل يستحقون إجازة مريحة***" ثم اكتب العبارة على صورة "إذا كان ... فإن ..."

بيّن ما إذا كانت العبارة (3) ناتجة عن العبارتين (1)، (2) من قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي، وإلا فاكتب غير صحيح:

8) (1) تتقاطع المستقيمات المتعامدة.
(2) المستقيمان m و n متعامدان.
(3) يتقاطع المستقيمان m و n.

أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة في الشكل:



9) $\angle 1$

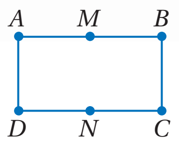
10) $\angle 2$

11) $\angle 3$

برهان: اكتب برهانًا لكل من العبارات التالية بالطريقة المطلوبة:

12) طريقة البرهان ذي العمودين.
إذا كان $2(n-3)+5=3(n-1)$ فإن $n = 2$.

13) طريقة البرهان الحر.
المعطيات: $AM = CN, MB = ND$
المطلوب: إثبات أن $AB = CD$



حدد ما إذا كانت العبارة صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو ليست صحيحة أبدًا. برر إجابتك.

14) الزاويتان اللتان تشكلان زاوية قائمة متتامتان.

15) الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متطابقتان.

16) حدد الفرض والنتيجة للعبارة التالية، ثم اكتبها على صورة "إذا كان .. فإن .." ثم اكتب كلًّا من عكسها ومعكوسها والمعكوس الإيجابي لها:

"***كثرة الاستغفار تقرب من الرحمن***".

17) **اختيار من متعدد:** اعتمادًا على العبارات التالية.

p: بيروت عاصمة الأردن.

q: $8 + 12 = 20$

r: عدد أيام الأسبوع 8.

أي من العبارات المركبة التالية صحيحة؟

A p و q

B p أو q

C p أو r

D q و r

الفصل 1

اختبار معياري تراكمي

أجب عن كل من الأسئلة الآتية:

1) *"المستقيمان غير المتقاطعين يكونان متوازيين دائمًا"* .

أي مما يلي يصف أفضل مثال مضاد للعبارة أعلاه؟

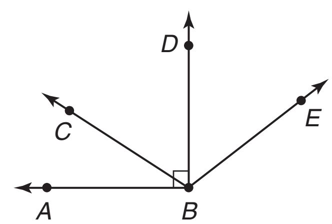
A مستقيمان في مستوى واحد.

B المستقيمان المتوازيان

C المستقيمان المتعامدان

D مستقيمان في مستويين مختلفتين

2) اعتبر العبارات التالية حول الشكل أدناه:



p $\angle ABC$ زاوية حادة .

:q $\angle ABC$ و $\angle CBD$ زاويتان متكاملتان

:r $m\angle ABE$ أكبر من $90°$.

أي من العبارات المركبة التالية ليس صحيحًا؟

F) $p \vee q$

G) $\sim q \wedge r$

H) $\sim r \wedge \sim q$

J) $\sim p \vee \sim q$

3) أي من العبارات التالية يعطي وصفًا أفضل للمسلمة؟

A تخمين ينشأ عن أمثلة.

B تخمين ينشأ عن حقائق وقواعد وتعريفات وخصائص.

C عبارة تقبل على أنها صحيحة.

D عبارة أو تخمين ثم أثبت صحتها / صحته.

4) حدد أي عبارة تنتج منطقيًا من العبارتين التاليتين:

"إذا أمطرت السماء اليوم ستلغى المباراة"

و"المباريات الملغاة ستقام أيام الجمع" .

F إذا ألغيت المباراة فبسبب المطر.

G إذا أمطرت السماء اليوم فإن المباراة ستقام يوم الجمعة.

H بعض المباريات الملغاة لن تقام يوم الجمعة.

J إذا لم تمطر السماء اليوم فإن المباراة لن تقام يوم الجمعة.

إرشادات للاختبار

سؤال 4 عند الإجابة عن سؤال اختيار من متعدد اقرأ دائمًا جميع الخيارات، واستبعد الخيارات التي تتأكد من أنها ليست صحيحة. وبهذه الطريقة ربما تستنتج الإجابة الصحيحة.

5) أي من العبارات التالية هي المعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية *"إذا كان مجموع قياسات زوايا مضلع °180 فإن هذا المضلع مثلث"* ؟

A إذا لم يكن المضلع مثلثًا فإن مجموع قياسات زواياه لا يساوي °180.

B إذا كان مجموع قياسات زوايا مضلع لا يساوي °180، فإن المضلع ليس مثلثًا.

C إذا كان المضلع مثلثًا فإن مجموع قياسات زواياه يساوي °180.

D إذا لم يكن المضلع مثلثًا فإن مجموع قياسات زواياه هو °180.

6) **ميداليات:** لدى سعد 3 ميداليات أكثر من مروان، ولدى ياسر ثلاثة أمثال ما لدى سعد من الميداليات، ومجموع ما لديهم جميعًا 22 ميدالية. ما عدد الميداليات التي لدى ياسر؟

7) استعمل البرهان للإجابة عن السؤال التالي:

المعطيات: $\angle A$, $\angle B$ متتامتان

$m\angle B = 46$

المطلوب إثبات أن : $m\angle A = 44$

العبارات	المبررات
1) $\angle A$, $\angle B$ متتامتان $m\angle B = 46$	**1)** معطى
2) $m\angle A + m\angle B = 90$	**2)** تعريف الزوايا المتتامة
3) $m\angle A + 46 = 90$	**3)** خاصية التعويض.
4) $m\angle A + 46 - 46 = 90 - 46$	**4)** ؟
5) $m\angle A = 44$	**5)** خاصية التعويض.

ما مبرر العبارة 4؟

F خاصية الجمع **H** خاصية الطرح

G خاصية التعويض **J** خاصية التماثل

8) **المعطيات:** النقاط A, B, C, D على استقامة واحدة بحيث إن النقطة B تقع بين A و C والنقطة C تقع بين B و D. أي عبارة مما يلي ليست بالضرورة صحيحة؟

A $AB + BD = AD$ **C** $\overline{BC} \cong \overline{BC}$

B $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ **D** $BC + CD = BD$

9) أراد مزارع إحاطة منطقة مستطيلة مساحتها 1000 قدم مربع كحظيرة لأبقار. ومن أجل توفير النقود قام بشراء أقل كمية من السياج لإحاطة الحظيرة. ما الأبعاد الصحيحة للحظيرة من بين الخيارات التالية التي ستحتاج لأقل كمية من السياج؟

F 8 أقدام × 125 قدمًا **H** 20 قدمًا × 50 قدمًا

G 10 أقدام × 100 قدم **J** 25 قدمًا × 40 قدمًا

10) **المعطيات:** $\angle EFG$ و $\angle GFH$ زاويتان متتامتان. أي مما يلي سيكون صحيحًا بالتأكيد؟

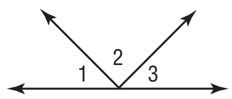
A $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{FG}$

B $\overrightarrow{FG}$ ينصف $\angle EFH$

C $m\angle EFG + m\angle GFH = 180$

D $\angle GFH$ هي زاوية حادة.

11) في الشكل المجاور، $\angle 3 \cong \angle 1$.



فأي من النتائج التالية ليس بالضرورة صحيحًا؟

F $m\angle 1 - m\angle 2 + m\angle 3 = 90$

G $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180$

H $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 3$

J $m\angle 2 - m\angle 1 = m\angle 2 - m\angle 3$

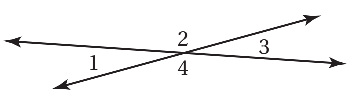
أسئلة ذات مستوى متقدم

دوّن إجابتك على دفترك مبينًا خطوات الحل.

12) **المعطيات:** $\angle 1$ و $\angle 3$ زاويتان متقابلتان بالرأس.

$m\angle 1 = 3x + 5$, $m\angle 3 = 2x + 8$

المطلوب إثبات أن: $m\angle 1 = 14$



13) من نقطة معينة في حديقة، قاس صالح 18 مترًا ووضع علامة، ثم قاس 30 مترًا باتجاه آخر، ووضع علامة أخرى ليشكل ضلعين لمنطقة مثلثية قائمة. كم مترًا يجب أن يكون طول الضلع الثالث الذي سيشكل زاوية قائمة مع الضلع الذي طوله 18 مترًا؟ وإذا أراد صالح أن يستعمل سياجًا طوله يساوي محيط هذه المنطقة المثلثية ويحيط به منطقة مربعة، فكم مترًا سيكون طول ضلعها؟ وأي المنطقتين ستكون مساحتها أكبر؟

هل تحتاج لمساعدة إضافية													
إذا أخطأت في السؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فَعُدْ إلى ...	1–1	1–2	1–5	1–4	1–3	مهارة سابقة	1–6	1–7	مهارة سابقة	مهارة سابقة	1–8	1–8	مهارة سابقة

الفصل
2

التوازي والتعامد
Parallel and Perpendicular Lines

الأفكار العامة

- أحدد علاقات بين الزوايا الناتجة عن قطع مستقيم لمستقيمين متوازيين.
- أثبت توازي مستقيمين من علاقات معلومة بين الزوايا.
- أستعمل الميل لتحليل مستقيم وكتابة معادلته.
- أجد المسافة بين نقطة ومستقيم وبين مستقيمين متوازيين.

المفردات

المستقيمان المتوازيان (ص 74)
parallel lines

المستقيم المستعرض (ص 75)
transversal

الربط مع الحياة :

هندسة : يعتمد المهندسون في تصاميم المباني على المستقيمات والأشكال الهندسية المختلفة، وتتضمن واجهة هذا المبنى مجموعة من المستقيمات المتوازية والمتعامدة.

المَطْوِيّاتُ
مُنَظِّمُ أَفْكار

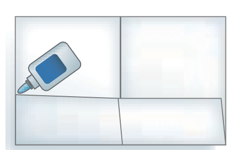
المستقيمان المتوازيان والمستقيمان المتعامدان : اعمل هذه المطوية لمساعدتك على تنظيم ملاحظاتك.

ابدأ بورقة A4.

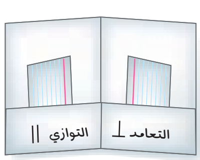
1 **اطو** الورقة من المنتصف عرضيًا.

2 **افرد** الورقة واطو الحافة الطويلة إلى الأعلى بمقدار ٥ سم لعمل جيبين.

3 **ثبت** بالصمغ حواف الجيب.



4 **اكتب** عنوانًا لكل جزء. واستعمل أوراقًا لكتابة الملاحظات.



التهيئة للفصل 2

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المهارات السابقة الضرورية.

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية www.obeikaneducation.com

البديل 1

أجب عن الاختبار التالي. ارجع إلى «المراجعة السريعة» لمساعدتك في ذلك.

اختبار سريع

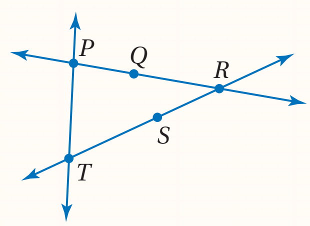
سمّ جميع المستقيمات التي تحتوي النقطة المعطاة.

(1 Q

(2 R

(3 S

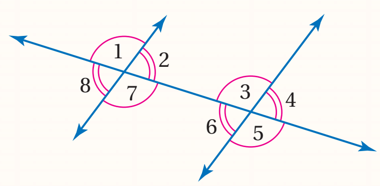
(4 T



سمّ جميع الزوايا التي تطابق الزاوية المعطاة.

(5 $\angle 2$ **(6** $\angle 5$

(7 $\angle 3$ **(8** $\angle 8$

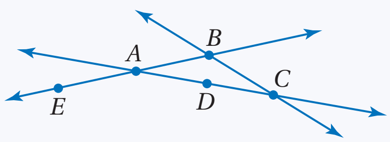


(9 **معارض:** يقدم معرض هدية بسعر تشجيعي قدره 15 ريالًا عند شراء بطاقتي دخول. إذا دفع أحمد وأخوه 95 ريالًا، فاكتب معادلة تمثل ما دفعه أحمد وأخوه، ثم حلها لإيجاد ثمن بطاقة الدخول. (مهارة سابقة)

مراجعة سريعة

مثال 1

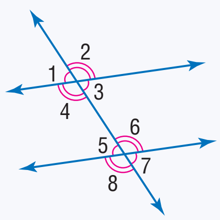
سمّ جميع المستقيمات التي تحتوي النقطة C .



النقطة C نقطة تقاطع المستقيمين $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{BC}$.

مثال 2

سمّ جميع الزوايا التي تطابق $\angle 5$.



لاحظ إشارات التطابق. في الشكل $\angle 7$, $\angle 3$, $\angle 1$ جميعها تطابق $\angle 5$.

مثال 3

أوجد قيمة y في المعادلة $2x - y = 4$ عندما $x = -4$.

$2x - y = 4$	بكتابة المعادلة
$-y = -2x + 4$	بطرح $2x$ من كلا الطرفين
$y = 2x - 4$	بقسمة كلا الطرفين على -1
$y = 2(-4) - 4$	بتعويض (-4) عن x.
$y = -8 - 4$	بالضرب
$y = -12$	بالتبسيط

2-1 المستقيمان المتوازيان والمستقيمات المستعرضة
Parallel Lines and Transversals

الأفكار الرئيسة:
- أتعرَّف العلاقات بين مستقيمين أو مستويين.
- أسمي الزوايا المتكونة من مستقيمين متوازيين وقاطع لهما.

المفردات:

المستقيمان المتوازيان
parallel lines

المستويان المتوازيان
parallel planes

المستقيمان المتخالفان
skew lines

المستقيم المستعرض
transversal

الزاويتان الداخليتان المتحالفتان
consecutive interior angles

الزاويتان الخارجيتان المتبادلتان
alternate exterior angles

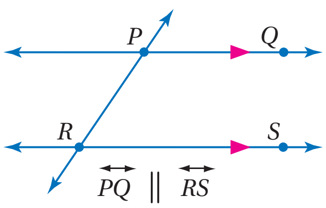
الزاويتان الداخليتان المتبادلتان
alternate interior angles

الزاويتان المتناظرتان
corresponding angles

استعد

انظر إلى البناء المجاور تجد فيه أمثلة عديدة على المستقيمات المتوازية والمستويات المتوازية والمستقيمات المتخالفة التي تظهر في التصميم.

العلاقات بين المستقيمات والمستويات: إذا كان المستقيمان m و ℓ الواقعان في مستوى واحد غير متقاطعين سُمّيا **مستقيمين متوازيين**، وتكون أجزاؤهما (القطع المستقيمة وأنصاف المستقيمات) متوازية أيضا. والرمز $\parallel$ يعني "**يوازي**". وتستعمل الأسهم في الأشكال لتدل على أن المستقيمات متوازية. ففي الشكل المجاور تدل الأسهم على أن $\overleftrightarrow{PQ}$ يوازي $\overleftrightarrow{RS}$.



$\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$

الرمز $\nparallel$ يعني لا يوازي.

وبالمثل، يمكن أن يتقاطع مستويان أو يكونا متوازيين. ففي الشكل أعلاه الواجهات الأمامية للبناء تتكون من **مستويات متوازية**. والجدران والسقف لكل طبقة تقع في مستويات متقاطعة.

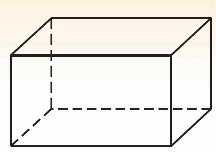
معمل الهندسة

ارسم متوازي المستطيلات:

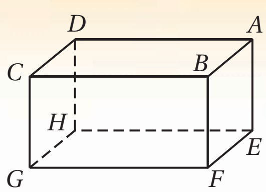
يمكن رسم متوازي المستطيلات باستعمال مستقيمات متوازية ومستويات متوازية.

الخطوة 1: ارسم مستويين متوازيين يمثلان القاعدتين.

الخطوة 2: ارسم الأحرف: واجعل الأحرف غير الظاهرة متقطعة.



الخطوة 3: سمِّ الرؤوس.



حلّل

1) عين المستويات المتوازية في الشكل.

2) سمِّ المستويات التي تقطع المستوى ABC ثم سم تقاطعاتها.

3) عيِّن جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{BF}$.

لاحظ في معمل الهندسة أن $\overline{AE}$ و $\overline{GF}$ لا تتقاطعان وهما غير متوازيتين؛ لأنهما لا تقعان في مستوى واحد. ويسمى المستقيمان غير المتقاطعين اللذان لا يقعان في مستوى واحد **مستقيمين متخالفين**. والقطع المستقيمة وأنصاف المستقيم المحتواة في مستقيمين متخالفين تكون متخالفة أيضًا.

مثـــال — تحديد العلاقات

1 (a سمِّ جميع المستويات التي توازي المستوى ABG

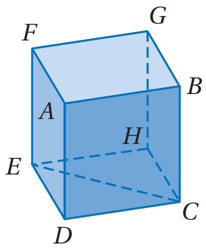
المستوى CDE

(b سمِّ جميع القطع المستقيمة التي تتقاطع مع $\overline{CH}$

$\overline{BC}$,$\overline{CD}$,$\overline{CE}$,$\overline{EH}$, $\overline{GH}$

(c سمِّ جميع القطع المستقيمة المتخالفة مع $\overline{BG}$.

$\overline{AD}$,$\overline{CD}$,$\overline{CE}$,$\overline{EF}$, $\overline{EH}$



تحقق من فهمك

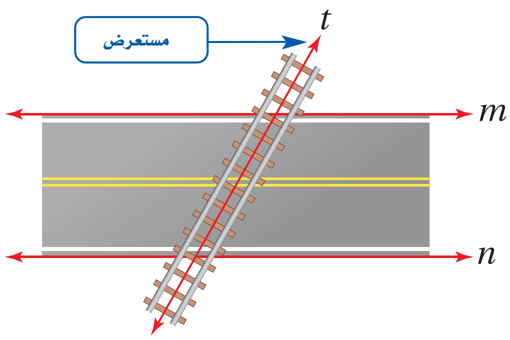
(1 سمِّ جميع القطع المستقيمة الموازية لـ $\overline{EF}$.

إرشادات

تحديد القطع المستقيمة

استعمل القطع المستقيمة المرسومة في الشكل فقط حتى لو وُجدت قطع مستقيمة أخرى.

علاقات الزوايا: في الشكل المجاور قاطع لسكة الحديد. لاحظ أن المسارات الممثلة بالمستقيم t تقطع جانبي الطريق الممثلين بالمستقيمين m و n. والمستقيم الذي يقطع مستقيمين أو أكثر في مستوى وفي نقاط مختلفة يسمى **مستقيمًا مستعرضًا**.



مثال من واقع الحياة — تحديد المستقيم المستعرض

2 **المطار:** الشكل المجاور يمثل مدرج مطار في إحدى المدن. عيّن جميع المستقيمات التي يكون كل مستقيم مما يلي مستعرضًا لها:

(a المستقيم q

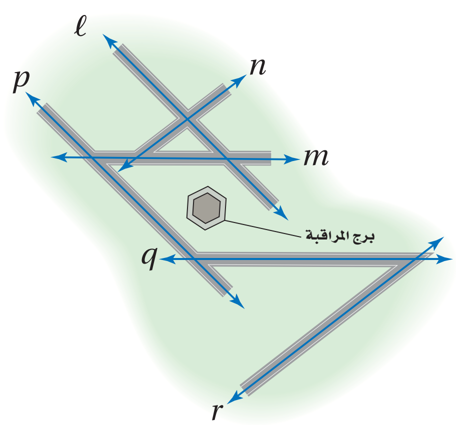
يقطع المستقيم q المستقيمات ℓ , n , p , r.

(b المستقيم m

يقطع المستقيم m المستقيمات ℓ , n , p , r.

(c المستقيم n

يقطع المستقيم n المستقيمات ℓ , m , p , q.



تحقق من فهمك

(2 المستقيم r .

إرشادات

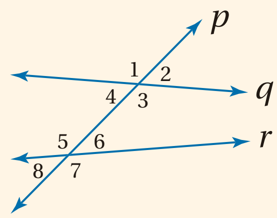
المستقيم المستعرض

المستقيمات التي يقطعها مستقيم مستعرض لا يشترط أن تكون متوازية.

في الشكل الذي يمثل سكة الحديد أعلاه لاحظ أن المستقيم t يكوّن ثماني زوايا مع المستقيم n ، m. وتعطى هذه الزوايا أسماء خاصة عند ربطها بروابط خاصة.

مفاهيم أساسية — المستقيمات المستعرضة والزوايا

المستقيم المستعرض p يقطع المستقيمين q و r.



الاسم	الزوايا
الزوايا الخارجية	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
الزوايا الداخلية	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
الزاويتان الداخليتان المتحالفتان	$\angle 3$ و $\angle 6$ ؛ $\angle 4$ و $\angle 5$
الزاويتان الخارجيتان المتبادلتان	$\angle 1$ و $\angle 7$ ؛ $\angle 2$ و $\angle 8$
الزاويتان الداخليتان المتبادلتان	$\angle 3$ و $\angle 5$ ؛ $\angle 4$ و $\angle 6$
الزاويتان المتناظرتان	$\angle 1$ و $\angle 5$ ؛ $\angle 2$ و $\angle 6$ $\angle 3$ و $\angle 7$ ؛ $\angle 4$ و $\angle 8$

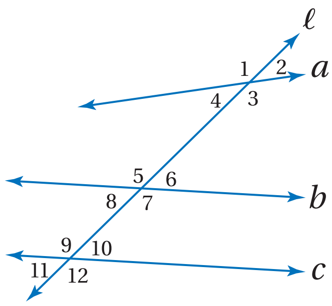
إرشادات

الزوايا الداخلية في الجهة نفسها

تسمى الزاويتان الداخليتان المتحالفتان أيضًا زاويتين داخليتين في الجهة نفسها.

مثـــال — تحديد علاقات الزوايا

3 من الشكل المجاور صنف كل زوج من الزوايا إلى: زاويتين داخليتين متبادلتين أو خارجيتين متبادلتين أو متناظرتين،أو زاويتين داخليتين متحالفتين:



a) $\angle 1$ و $\angle 7$.
خارجيتان متبادلتان

b) $\angle 2$ و $\angle 10$.
متناظرتان

c) $\angle 8$ و $\angle 9$.
داخليتان متحالفتان

d) $\angle 3$ و $\angle 12$.
متناظرتان

e) $\angle 4$ و $\angle 10$.
داخليتان متبادلتان

f) $\angle 6$ و $\angle 11$.
خارجيتان متبادلتان

تحقق من فهمك

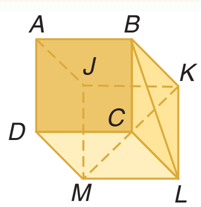
3A) $\angle 4$ و $\angle 11$.

3B) $\angle 2$ و $\angle 8$.

تأكد

مثال 1 (ص 75)

لحل الأسئلة من 3–1، ارجع إلى الشكل المجاور:



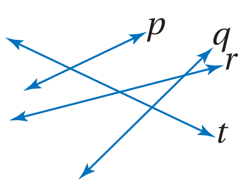
1) سمّ جميع المستويات التي تتقاطع مع المستوى ADM.

2) سمّ جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{CD}$.

3) سمّ جميع القطع المستقيمة التي تتقاطع مع $\overline{KL}$.

مثال 2 (ص 75)

عيّن أزواج المستقيمات التي يكون الخط المُعطى مستعرضاً لهما:

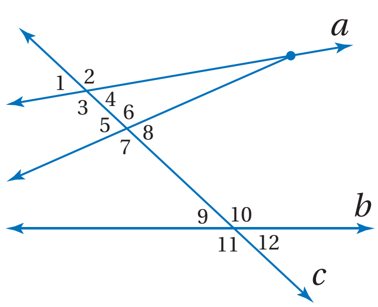


4) p **5)** r

6) q **7)** t

مثال 3 (ص 76)

صنف كل زوج من الزوايا إلى: داخليتين متبادلتين،خارجيتين متبادلتين، متناظرتين، داخليتين متحالفتين:



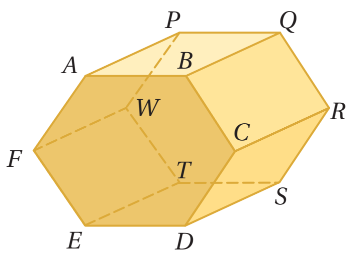
8) $\angle 7$ و $\angle 10$ **9)** $\angle 1$ و $\angle 5$

10) $\angle 4$ و $\angle 6$ **11)** $\angle 8$ و $\angle 1$

تمارين ومسائل

إرشادات للتمارين	
للأسئلة	انظر الأمثلة
12–15	1
16–19	2
20–25	3

لحل الأسئلة 15–12،ارجع إلى الشكل المجاور:



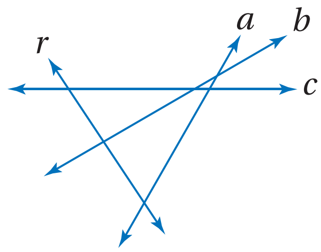
12) سمِّ جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{TW}$.

13) سمِّ جميع المستويات المتقاطعة مع المستوى EDS.

14) سمِّ جميع القطع المستقيمة المتخالفة مع $\overline{AP}$.

15) سمِّ جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{DS}$.

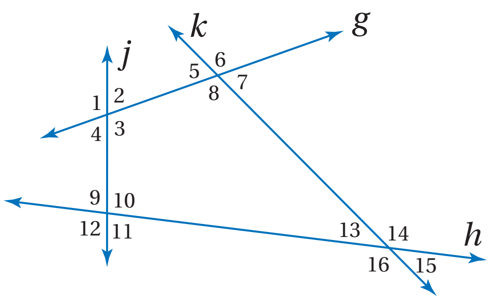
عيّن أزواج المستقيمات التي يكون الخط المُعطى مستقيمًا مستعرضًا لهما:



16) a 17) b

18) c 19) r

صنف كل زوج من الزوايا إلى: داخليتين متبادلتين، خارجيتين متبادلتين، متناظرتين، داخليتين متحالفتين.

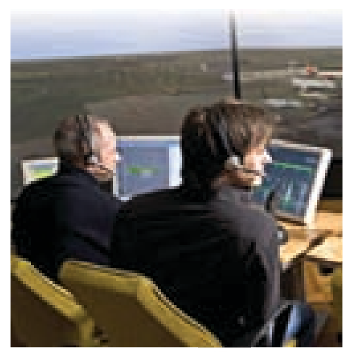


20) $\angle 2$ و $\angle 10$ 21) $\angle 1$ و $\angle 11$

22) $\angle 5$ و $\angle 3$ 23) $\angle 6$ و $\angle 14$

24) $\angle 5$ و $\angle 15$ 25) $\angle 11$ و $\angle 13$

26) **ملاحة جوّية :** الطائرات المتجهة شرقًا تطير على ارتفاعات فردية من آلاف الأقدام. والطائرات المتجهة غربًا تطير على ارتفاعات زوجية من آلاف الأقدام.
إذا طارت طائرة باتجاه الشمال الغربي على ارتفاع 34000 قدم، وأخرى نحو الشرق على ارتفاع 25000 قدم، فصف أنواع المستقيمات المتكوّنة من مساري الطائرتين. وضح إجابتك.

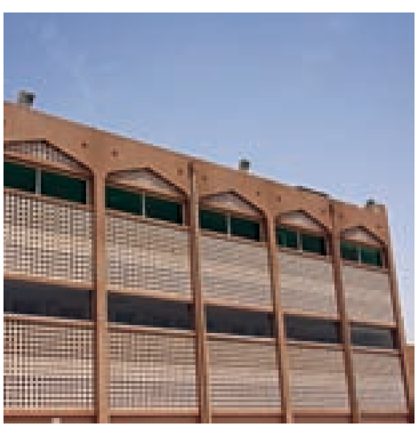


الربط مع الحياة

الملاحة الجوية

تُتابع حركة الملاحة الجوية بتحديد إحداثيات المسارات في المطار أو بين المطارات. وتُتابع مواقع الطائرات لتكون على مسافات آمنة بعضها من بعض.

مدرسة : لحل الأسئلة 30–27، ارجع إلى الصورة المجاورة:



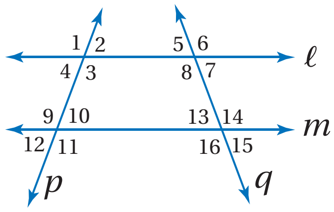
27) اذكر مستقيمين متوازيين في الصورة .

28) أعطِ مثالا على مستويين متوازيين.

29) عين مستقيمين متخالفين.

30) عين مستعرضًا يقطع مستقيمين.

حدد المستقيم المستعرض الذي يكوّن كل زوج من الزوايا فيما يلي، ثم حدد الاسم الخاص للزاويتين:

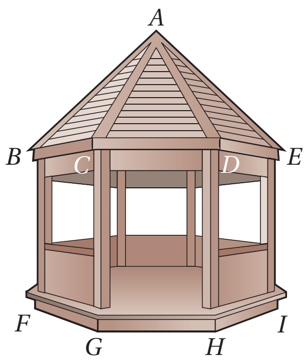


31) $\angle 3$ و $\angle 10$

32) $\angle 2$ و $\angle 12$

33) $\angle 8$ و $\angle 14$

34) $\angle 9$ و $\angle 16$



إنشاءات: لحل الأسئلة 35–37،ارجع إلى الصورة المجاورة:

35) سمِّ جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{BF}$.

36) سمِّ جميع القطع المستقيمة المتخالفة مع $\overline{AC}$.

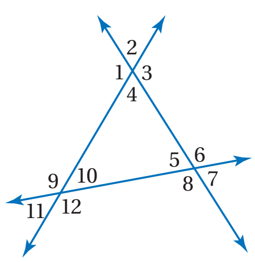
37) هل توجد مستويات في الصورة توازي المستوى ADE؟ وضح.

38) بحث: كلمة "متواز" تصف عمليات الحاسوب التي تحدث في آن واحد، أو الآلات مثل الطابعات،التي تتلقى أكثر من معلومة في الوقت نفسه. أوجد مثالين آخرين لاستعمال كلمة متوازٍ في مواضيع أخرى مثل: التاريخ والرياضة.

مسائل مهارات التفكير العليا

39) مسألة مفتوحة: ارسم مجسمًا فيه مستويات متوازية. واذكر الأجزاء المتوازية.

40) أوجد الخطأ: ذكرت كل من منال وليلى زاويتين داخليتين متبادلتين مع $\angle 4$ في الشكل إلى اليسار.
أيهما كانت إجابتها صحيحة؟ وضّح تفسيرك.



منال	ليلى
$\angle 4$ و $\angle 9$	$\angle 4$ و $\angle 10$
$\angle 4$ و $\angle 6$	$\angle 4$ و $\angle 5$

تحدٍّ: إذا كان ℓ مستقيمًا والنقطة P لا تقع عليه:

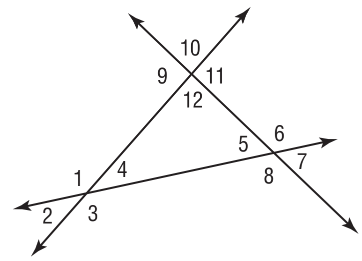
41) كم مستقيمًا يمكن رسمه في الفضاء يمر بالنقطة P ولا يقطع ℓ؟

42) كم مستقيمًا يمكن رسمه في الفضاء يمر بالنقطة P ويوازي ℓ؟

43) اكتب: استعمل المعلومات حول الشكل المعماري صفحة 74 لتوضح كيف استعملت المستقيمات والمستويات المتوازية في الشكل. ضمّن ذلك وصفًا لما يمكنك أن تجد فيه أمثلة على مستقيمات متوازية ومستويات متوازية ومستقيمات متخالفة ومستويات غير متوازية.

تدريب على اختبار معياري

44) أي أزواج الزوايا التالية يمثل زاويتين خارجيتين متبادلتين؟



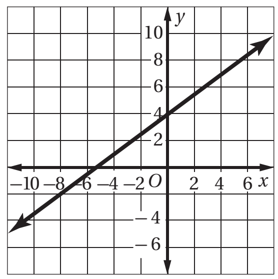
A $\angle 1$ و $\angle 5$

B $\angle 2$ و $\angle 10$

C $\angle 2$ و $\angle 6$

D $\angle 5$ و $\angle 9$

45) مراجعة: ما النقطتان اللتان تمثل إحداثياتهما المقطع السيني والمقطع الصادي للمستقيم المبين في الشكل أدناه؟



F $(-5.6\,,0)\,,(0\,,4)$

G $(5.6\,,0)\,,(4\,,0)$

H $(6\,,0)\,,(0\,,4)$

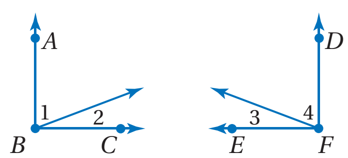
J $(0\,,4)\,,(0\,,6)$

مراجعة تراكمية

46) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 8-1)

المعطيات: $m\angle ABC = m\angle DFE\,,\ m\angle 1 = m\angle 4$

المطلوب: إثبات أن $m\angle 2 = m\angle 3$



حدد ما إذا كان ممكنًا الوصول إلى نتيجة واضحة من العبارتين الصحيحتين باستعمال قانون الفصل أو قانون القياس المنطقي. وإذا كانت النتيجة صحيحة فاكتبها، واذكر القانون المستعمل. أما إذا لم تكن صحيحة فاكتب (لا نتيجة). (الدرس 4-1)

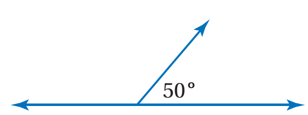
47) **(1)** إذا كانت الزاويتان متقابلتين بالرأس فإنهما لا تشكلان زوجًا من الزوايا المتجاورة على مستقيم.

(2) إذا كوّنت زاويتين متجاورتين على مستقيم فإنهما غير متطابقتين.

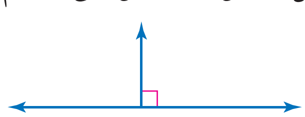
استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية: اذكر قياسي كل زاويتين متجاورتين على مستقيم في كل مما يلي: (الدرس 6-1)

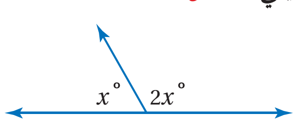
(48



(49



(50



استكشاف 2-2

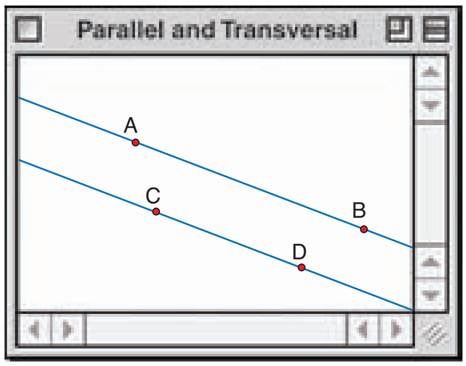
معمل برمجيات هندسية

الزوايا والمستقيمات المتوازية

نشاط

الخطوة 1: ارسم مستقيمين متوازيين.

- عيّن النقطتين A و B.
- ارسم مستقيمًا يمر بهما.
- عيّن النقطة C بحيث لا تقع على $\overleftrightarrow{AB}$.
- ارسم مستقيمًا يمر في C ويوازي $\overleftrightarrow{AB}$.
- حدد النقطة D على هذا المستقيم.

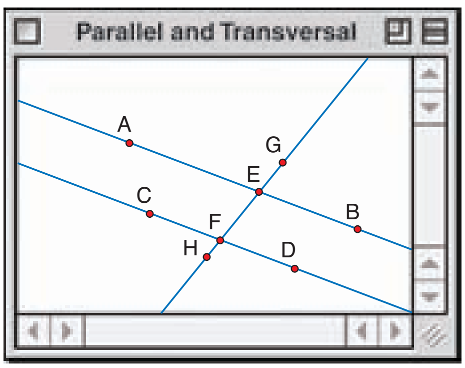


الخطوة 2: ارسم مستقيمًا مستعرضًا للمستقيمين.

- عين النقطة E على $\overleftrightarrow{AB}$ و النقطة F على $\overleftrightarrow{CD}$.
- ارسم مستقيمًا يمر بالنقطتين E و F.
- عين النقطتين G و H على $\overleftrightarrow{EF}$.

الخطوة 3: قياس الزوايا.

- أوجد قياس كل زاوية في الشكل.



حلل النتائج:

1) ضع أزواج الزوايا في قوائم تحت الأسماء التي تعلمتها في الدرس 1–2.
أي الأزواج لها القياس نفسه؟

2) ما العلاقة بين الزاويتين الداخليتين المتحالفتين؟

3) خمّنْ علاقة حول أزواج الزوايا التالية المتكوّنة من المستقيمين المتوازيين وقاطعهما المستعرض.
اكتب تخمينك بصيغة إذا كان – فإن.

a) زاويتان متناظرتان
b) زاويتان داخليتان متبادلتان
c) زاويتان خارجيتان متبادلتان
d) زاويتان داخليتان متحالفتان

4) دوّرْ المستقيم المستعرض. هل الزوايا المتطابقة تكون في الوضع نفسه مثل نظيراتها في الوضع الأول؟

5) اختبر تخمينك بتدوير المستقيم المستعرض وتحليل الزوايا.

6) دوّر المستقيم المستعرض بحيث يكون قياس زاوية على الأقل 90.

a) ماذا تلاحظ حول قياسات الزوايا الأخرى؟
b) كوّن تخمينًا حول المستقيم المستعرض عندما يكون عموديًّا على أحد المستقيمين المتوازيين.

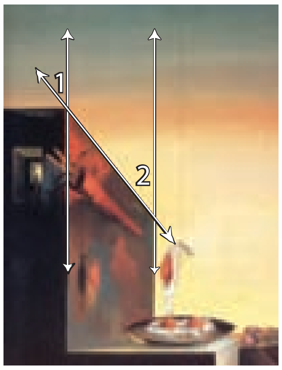
2-2 الزوايا والمستقيمات المتوازية
Angles and Parallel Lines

الأفكار الرئيسة:

- أستعمل خصائص المستقيمين المتوازيين لتعيين الزوايا المتطابقة.
- أستعمل الجبر لإيجاد قياسات الزوايا.

استعد

يستعمل الرسامون أحيانًا المستقيمات والقواطع المستعرضة في رسم لوحاتهم الفنية. ويظهر في اللوحة المجاورة مستقيمان متوازيان وقاطع لهما.
توجد علاقة بين أزواج الزوايا المتكونة من هذه المستقيمات.



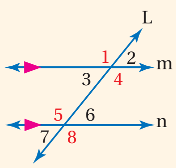
المستقيمان المتوازيان وأزواج الزوايا: في الشكل أعلاه $\angle 1$ و $\angle 2$ متناظرتان. وعندما يكون المستقيمان متوازيين فإنه توجد علاقة خاصة بين أزواج هذه الزوايا.

مسلمة 2.1 مسلمة الزاويتين المتناظرتين

إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متناظرتين متطابقتان.

مثال:

$\angle 1 \cong \angle 5 , \angle 2 \cong \angle 6 , \angle 3 \cong \angle 7 , \angle 4 \cong \angle 8$



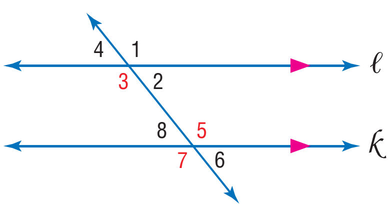
مراجعة المفردات

الزاويتان المتقابلتان بالرأس. هما زاويتان غير متجاورتين، وناتجتان عن تقاطع مستقيمين.

مثال إيجاد قياسات الزوايا

1 في الشكل المجاور، إذا كان $m\angle 3 = 133$. فأوجد $m\angle 5$:

$\angle 3 \cong \angle 7$	مسلمة الزاويتين المتناظرتين
$\angle 7 \cong \angle 5$	نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
$\angle 3 \cong \angle 5$	خاصية التعدي
$m\angle 3 = m\angle 5$	تعريف الزاويتين المتطابقتين
$m\angle 5 = 133$	بالتعويض

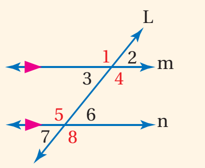


تحقق من فهمك

1) في الشكل السابق،إذا كان $m\angle 8 = 47$. فأوجد $m\angle 4$.

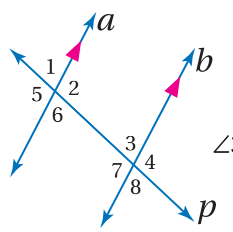
في مثال 1،الزاويتان المتبادلتان 3 و 5 متطابقتان. وهذا يدل على علاقة أخرى بين الزوايا المتكونة من مستقيمين متوازيين وقاطع مستعرض لهما. وهناك علاقات أخرى تلخصها النظريات 3–2 , 2–2 , 1–2.

نظرية المستقيمان المتوازيان وأزواج الزوايا

النظريات	الأمثلة	النموذج
2.1 الزاويتان الداخليتان المتبادلتان: إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين داخليتين متبادلتين متطابقتان.	$\angle 4 \cong \angle 5$ $\angle 3 \cong \angle 6$	
2.2 الزاويتان الداخليتان المتحالفتان: إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين داخليتين متحالفتين متكاملتان.	$\angle 4$ و $\angle 6$ متكاملتان. $\angle 3$ و $\angle 5$ متكاملتان.	
2.3 الزاويتان الخارجيتان المتبادلتان: إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين خارجيتين متبادلتين متطابقتان.	$\angle 1 \cong \angle 8$ $\angle 2 \cong \angle 7$	

ستبرهن النظريتين 2-2 و 3-2 في السؤالين 21 و 18 على الترتيب.

برهان نظرية 2.1



المعطيات: $a \parallel b$ ؛ p قاطع مستعرض للمستقيمين a و b.

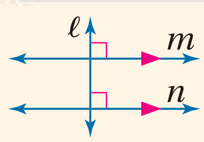
المطلوب: إثبات أن $\angle 2 \cong \angle 7 , \angle 3 \cong \angle 6$

برهان حر: لدينا من المعطيات $a \parallel b$ و p قاطع مستعرض لهما. ومن مسلمة الزاويتين المتناظرتين،تكون $\angle 2 \cong \angle 4$ و $\angle 8 \cong \angle 6$. وكذلك، $\angle 4 \cong \angle 7$ و $\angle 3 \cong \angle 8$ لأن الزاويتين المتقابلتين بالرأس متطابقتان. إذن، $\angle 2 \cong \angle 7$ و $\angle 3 \cong \angle 6$ حسب خاصية التعدي لتطابق الزوايا.

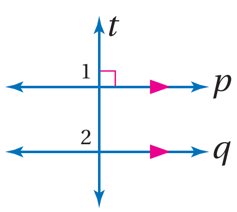
وتظهر علاقة خاصة عندما يكون المستقيم المستعرض عموديًّا.

نظرية 2.4 نظرية المستقيم المستعرض العمودي

في مستوى،إذا كان المستقيمُ عموديًّا على أحد مستقيمين متوازيين فإنه يكون عموديًّا على الآخر.



برهان نظرية 2.4



المعطيات: $p \parallel q$ ، $t \perp p$.

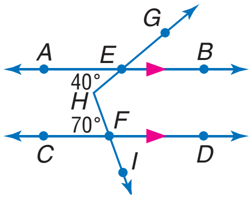
المطلوب: إثبات أن $t \perp q$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $p \parallel q$ ، $t \perp p$	1) معطى
2) $\angle 1$ زاوية قائمة	2) تعريف تعامد مستقيمين
3) $m\angle 1 = 90$	3) تعريف الزاوية القائمة
4) $\angle 1 \cong \angle 2$	4) مسلمة الزاويتين المتناظرتين
5) $m\angle 1 = m\angle 2$	5) تعريف الزاويتين المتطابقتين
6) $m\angle 2 = 90$	6) خاصية التعويض
7) $\angle 2$ زاوية قائمة	7) تعريف الزوايا القائمة
8) $t \perp q$	8) تعريف تعامد مستقيمين

مثال على اختبار معياري

استعمال خط مساعد



2 ما قياس $\angle GHI$؟

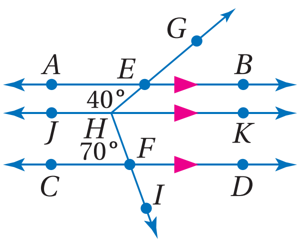
A $50°$ **B** $110°$ **C** $130°$ **D** $140°$

اقرأ فقرة الاختبار:

المطلوب إيجاد $m\angle GHI$.

حل فقرة الاختبار:

ارسم $\overleftrightarrow{JK}$ يمر بالنقطة H ويوازي $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$.



$\angle EHK \cong \angle AEH$	نظرية الزاويتين الداخليتين المتبادلتين
$m\angle EHK = m\angle AEH$	تعريف الزوايا المتطابقة
$m\angle EHK = 40$	بالتعويض
$FHK \cong \angle CFH$	نظرية الزاويتين الداخليتين المتبادلتين
$m\angle FHK = m\angle CFH$	تعريف الزوايا المتطابقة
$m\angle FHK = 70$	بالتعويض
لكن $m\angle GHI = m\angle EHK + m\angle FHK$	مسلمة جمع الزوايا
$= 40 + 70 = 110$	لأن $m\angle EHK = 40, m\angle FHK = 70$

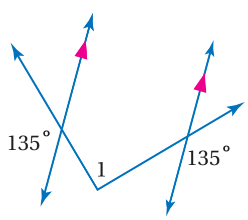
لذا،فالجواب هو البديل B.

إرشادات الاختبار

ارسم

إذا سمح لك بالكتابة في دفتر الاختبارات، ارسم شكلا تخطيطيًا قريبًا من السؤال يمثل السؤال وينظم الحل. لا تترك إشارة على ورقة الإجابة سوى إجابتك.

تحقق من فهمك



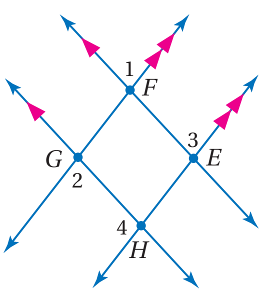
2) ما قياس $\angle 1$؟

F $45°$ **G** $65°$ **H** $90°$ **J** $135°$

الجبر وقياسات الزوايا: يمكن استعمال الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع مستعرض لهما لإيجاد القيم المجهولة.

مثـــال

إيجاد قيم المجاهيل



3 **جبر:** إذا كان $m\angle 1 = 3x + 40$ و $m\angle 3 = 2x + 70$، فأوجد قيمة x.

بما أن $\overleftrightarrow{EH} \parallel \overleftrightarrow{FG}$ فحسب مسلمة الزوايا المتناظرة فإن $\angle 3 \cong \angle 1$.

$m\angle 1 = m\angle 3$	تعريف الزوايا المتطابقة
$3x + 40 = 2x + 70$	بالتعويض
$x = 30$	بطرح $2x$ و 40 من كل طرف.

تحقق من فهمك

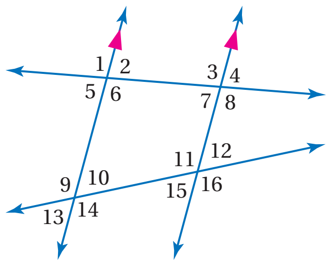
3) ارجع إلى الشكل. إذا كان $m\angle 2 = 4x + 7$ و $m\angle 3 = 5x - 13$، فأوجد $m\angle 3$.

تأكد

مثال 1
(ص 81)

في الشكل المجاور، $m\angle 3 = 110$ و $m\angle 12 = 55$.
أوجد قياس كل زاوية مما يلي:

(1 $\angle 1$ **(2** $\angle 6$ **(3** $\angle 2$

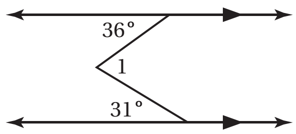


مثال 2
(ص 83)

(4 تدريب على اختبار معياري: ما قياس $\angle 1$؟

(A 5° **(C** 36°

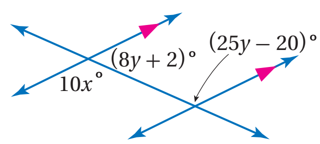
(B 31° **(D** 67°



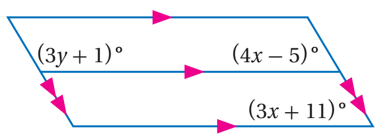
مثال 3
(ص 83)

أوجد قيمة x و y في كل من الشكلين الآتيين:

(5



(6



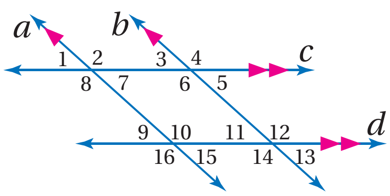
تمارين ومسائل

إرشادات للتمارين	
للأسئلة	انظر الأمثلة
7–10	1
11–14	2
15	3

في الشكل المجاور، إذا كان $m\angle 3 = 43$. فأوجد قياس كل زاوية مما يلي:

(7 $\angle 2$ **(8** $\angle 10$

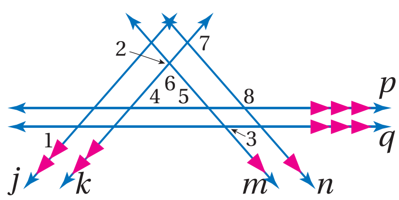
(9 $\angle 13$ **(10** $\angle 16$



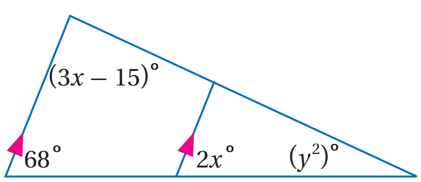
في الشكل المجاور، $m\angle 1 = 50$ و $m\angle 3 = 60$.
أوجد قياس كل زاوية مما يلي.

(11 $\angle 4$ **(12** $\angle 5$

(13 $\angle 2$ **(14** $\angle 7$

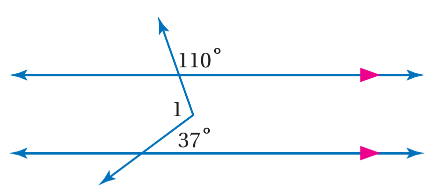


(15 أوجد قيمة x و y في الشكل التالي:

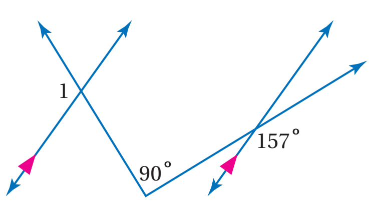


أوجد $m\angle 1$ في كلٍّ من الشكلين التاليين:

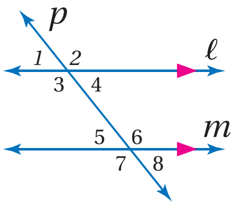
(16



(17



18) **برهان:** انسخ برهان النظرية 2.3 ثم أكمله.



المعطيات: $\ell \parallel m$

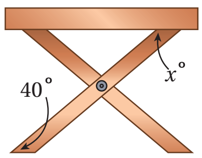
المطلوب إثبات أن: $\angle 1 \cong \angle 8$

$\angle 2 \cong \angle 7$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\ell \parallel m$	1) ___?___
2) $\angle 1 \cong \angle 5 \,,\, \angle 2 \cong \angle 6$	2) ___?___
3) $\angle 5 \cong \angle 8 \,,\, \angle 6 \cong \angle 7$	3) ___?___
4) $\angle 1 \cong \angle 8 \,,\, \angle 2 \cong \angle 7$	4) ___?___

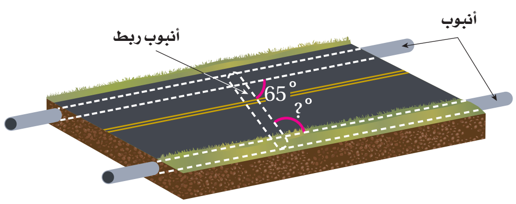
19) **نجارة:** صنع عامر طاولة من الخشب لحديقته.
قصَّ إحدى أرجلها بزاوية $40°$.
بأي زاوية يجب أن تقصَّ الرجل الأخرى لها حتى يكون سطح الطاولة موازيًا للأرض؟ وضّح ذلك.



الربط مع الحياة

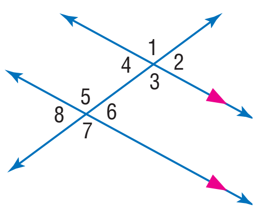
ترصد حكومتنا الرشيدة في ميزانيتها مبالغ كبيرة لمشاريع الطرق السريعة والجسور.

20) **إنشاءات:** أنبوبان متوازيان لتصريف المياه يصل بينهما أنبوب ثالث يصنع زاوية قياسها $65°$ مع أحدهما كما هو مبين. ما قياس الزاوية التي يصنعها مع الأنبوب في الجهة الأخرى من الطريق؟ وضح إجابتك.



21) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 2.2.

استعمل الشكل المجاور لحل السؤالين 23 – 22:



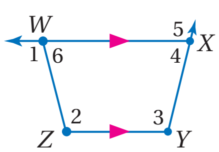
22) حدد ما إذا كانت $\angle 1$ تطابق $\angle 2$ دائمًا، أو أحيانًا، أو لا تطابقها أبدًا، وضّح ذلك.

23) حدّد أقل عدد من الزوايا التي يلزم معرفة قياساتها لإيجاد قياسات جميع الزوايا في الشكل.

مسائل مهارات التفكير العليا

24) **مسألة مفتوحة:** استعمل مسطرة ومنقلة لرسم مستقيمين متوازيين يقطعهما مستقيم بحيث يكون فيه قياس زاويتين متناظرتين $35°$.

25) **تبرير:** اكتب تخمينًا حول زاويتين خارجيتين وفي جهة واحدة من المستقيم المستعرض. ثم أثبته.



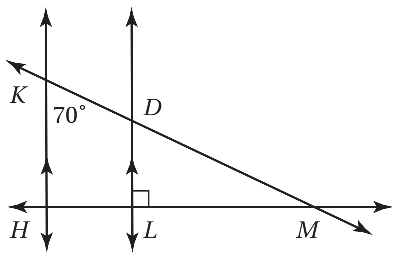
26) **تحدّ:** وضّح لماذا يمكنك استنتاج أن $\angle 2$ و $\angle 6$ متكاملتان، ولكن لا يمكنك أن تقرر أن $\angle 4$ و $\angle 6$ متكاملتان.

27) **اكتب:** استعمل المعلومات حول اللوحة الفنية في صفحة 81 لتوضيح كيف يمكن استعمال الزوايا والمستقيمات في الفن التشكيلي. ضمّن إجابتك وصفًا لكيفية استعمال الزوايا والمستقيمات لرسم الأنماط، وضمنها أيضًا أمثلة من أعمال فنَّانين يستعملون المستقيمات والزوايا في أعمالهم.

تدريب على اختبار معياري

28) في الشكل التالي:

ما قياس كل زاوية من زوايا المثلثين KHM ، DLM؟

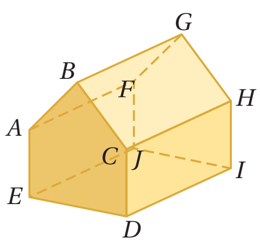


A $20°$ ، $70°$، $90°$ **C** $30°$ ، $60°$، $90°$

B $38°$ ، $62°$، $90°$ **D** $20°$ ، $30°$، $100°$

مراجعة تراكمية

لحل الأسئلة 31– 29، استعمل الشكل المجاور:



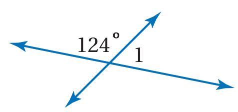
29) سمّ جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{AB}$.

30) سمّ جميع القطع المستقيمة التي تخالف $\overline{CH}$.

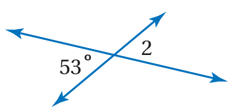
31) سمّ جميع المستويات التي توازي AEF.

أوجد قياس الزاوية المرقمة في كل من الشكلين الآتيين: (الدرس 8-1)

32)



33)



حدّد الفرض والنتيجة في كل من العبارتين الآتيتين: (الدرس 3-1)

34) إذا أمطرت هذا المساء فسأقص عشب الحديقة غدًا.

35) عندما تأكل باتزان فسوف تحافظ على صحتك.

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية : بسط كلًا مما يلي:

36) $\frac{14-11}{23-15}$

37) $\frac{-3-6}{2-8}$

38) $\frac{2}{9}\cdot\left(-\frac{18}{5}\right)$

2-3 ميل المستقيم
Slopes of Lines

الأفكار الرئيسة:

- أجد ميل المستقيم.
- أستَعْمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:

الميل
slope

معدل التغير
rate of change

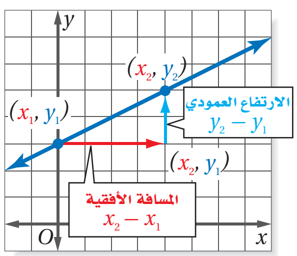
استعد

غالبًا ما تستعمل إشارات المرور لتنبه السائقين إلى حالة الطريق. فالإشارة المجاورة تشير إلى تلّة درجة انحدارها 6% . وهذا يعني أن الطريق ترتفع أو تهبط 6 أمتار رأسيًّا لكل 100 متر مقطوعة أفقيًّا.

ميل المستقيم: ميل المستقيم هو نسبة ارتفاعه العمودي إلى المسافة الأفقية.

$$\text{الميل} = \frac{\text{الارتفاع العمودي}}{\text{المسافة الأفقية}}$$

ويمكنك استعمال إحداثيات النقاط على مستقيم لتشتق قاعدة للميل. ففي المستوى الإحداثي يكون ميل المستقيم هو النسبة بين التغير في اتجاه المحور الصادي (المحور y) إلى التغير في اتجاه المحور السيني (المحور x). ويحسب الارتفاع العمودي بإيجاد الفرق بين الإحداثيين الصاديين لنقطتين على المستقيم. وبالمثل،تُعرّف المسافة الأفقية بالفرق بين الإحداثيين السينيين للنقطتين على المستقيم.



مفهوم أساسي — قانون الميل

الميل m لمستقيم يحتوي النقطتين $(x_1،y_1)$ و $(x_2،y_2)$ يعطى بالقانون التالي:

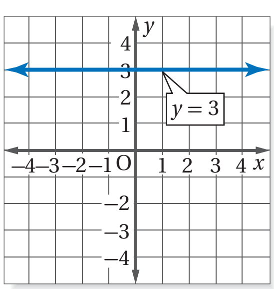
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$، حيث $x_1 \neq x_2$.

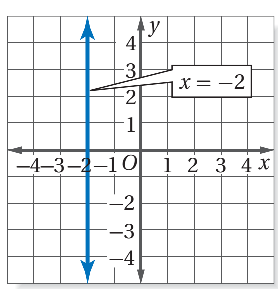
إرشادات

الميل

إذا كان ميل المستقيم موجبًا فإن المستقيم يكون صاعدًا عندما تتحرك من اليسار إلى اليمين، وإذا كان الميل سالبًا فإن المستقيم يكون نازلًا عندما تتحرك من اليسار إلى اليمين.

يشير ميل المستقيم إلى وضع المستقيم صاعداً أو نازلاً أو أفقيًّا عند التحرك من اليسار إلى اليمين. أما ميل الخط العمودي عندما $x_1 = x_2$، فهو غير معرّف.





إرشادات

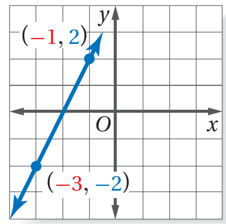
لكيلا تخطئ

ميل المستقيم الأفقي يساوي 0، وميل المستقيم العمودي غير معرف.

مثـــال إيجاد ميل مستقيم

1 أوجد ميل كل مستقيم مما يلي.

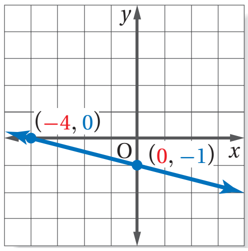
a)



عندما تنتقل من $(-3,-2)$ إلى $(-1,2)$، فإنك تتحرك 4 وحدات إلى الأعلى ووحدتين نحو اليمين.

لذلك $2 = \frac{4}{2} = \frac{\text{الارتفاع العمودي}}{\text{المسافة الأفقية}}$

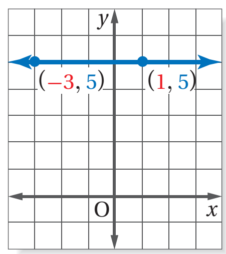
b)



افرض أن $(-4,0)$ هي (x_1,y_1) و $(0,-1)$ هي (x_2,y_2).

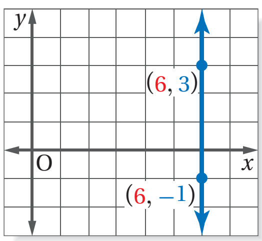
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{-1 - 0}{0 - (-4)} = -\frac{1}{4}$$

c)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{5 - 5}{-3 - 1}$$
$$= \frac{0}{-4} = 0$$

d)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{3 - (-1)}{6 - 6}$$
$$= \frac{4}{0}$$

وهذا غير معرّف

تحقق من فهمك

1) أوجد ميل المستقيم الذي يحتوي النقطتين: $(3, -5)$, $(-6 , -2)$

يستعمل ميل المستقيم لتعيين إحداثيات أي نقطة واقعة عليه . ويستعمل أيضًا لوصف معدّل التغيّر.

معدل التغير يصف كيف تتغير الكمية مع الزمن.

الربط مع الحياة

زادت المبيعات السنوية لشركة عالمية لصنع الأدوات الرياضية بين عامي 2000 ، 2003 بمعدل 314.3 مليون دولار كل سنة. وفي عام 2003 بلغت قيمة مبيعاتها 4553 مليون دولار.

مثـال من واقع الحياة استعمال معدل التغير لحل مسألة

2 **رياضة :** ارجع إلى المعلومات عن اليمين. إذا استمرت الزيادة في المبيعات بالمعدل نفسه، فكم تكون قيمة المبيعات عام **2010**؟

افرض أن $m = 314.3$ و $(x_1,y_1) = (2003,4553)$.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ قانون الميل

$314.3 = \frac{y_2 - 4553}{2010 - 2003}$ $\quad y_1 = 4553، x_1 = 2003، x_2 = 2010 ، m = 314.3$

$314.3 = \frac{y_2 - 4553}{7}$ تبسيط

$2200.1 = y_2 - 4553$ ضرب كلا الطرفين في 7

$6753.1 = y_2$ جمع 4553 لكلاالطرفين

إذن إحداثيات النقطة التي تمثل قيمة المبيعات لعام 2010 هي (2010, 6753.1). أي أن قيمة مبيعات الشركة في عام 2010 تساوي 6753.1 مليون دولار.

تحقق من فهمك

2) **أقراص مدمجة:** كانت مبيعات إحدى الشركات 20 مليون قرص مدمج عام 2003، و200 مليون قرص عام 2004، إذا حافظت الشركة على نفس المعدل من الزيادة، فكم يكون عدد مبيعاتها من الأقراص المدمجة عام 2008 ؟

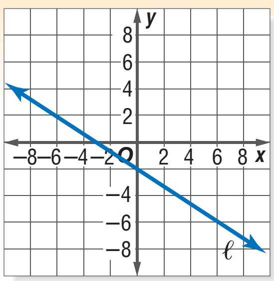
المستقيمات المتوازية والمتعامدة: في معمل الهندسة التالي،ستكتشف العلاقة بين ميلي مستقيمين متوازيين، ومستقيمين متعامدين.

معمل الهندسة

المستقيمات المتوازية والمتعامدة:

إنشاء نموذج:

المواد: معكرونة جافة، ورقة رسم بياني



1) ضع عودًا من المعكرونة على ورقة الرسم البياني بحيث يقع على النقطتين (0 ،3−) و (3− ،2). ثم سم هذه القطعة " بالمستقيم ℓ".

2) ضع عودًا ثانيًا من المعكرونة على ورقة الرسم البياني بحيث تكون موازية للقطعة الأولى. وسمِّها "المستقيم m".

3) ضع عودًا ثالثًا من المعكرونة بحيث يكون عموديًّا على المستقيمين ℓ, m. وسمِّه "المستقيم n".

تحليل النموذج:

1) ما ميل المستقيم ℓ؟

2) عيّن نقطتين على المستقيم m. ما ميل المستقيم m؟

3) عيّن نقطتين على المستقيم n. حدد ميل المستقيم n.

4) قارن بين ميلي المستقيمين n و m.

خمِّنْ:

5) كوّن تخمينًا حول ميلي المستقيمين المتوازيين.

6) كوّن تخمينًا حول ميلي المستقيمين المتعامدين.

7) اختبر تخمينك باستعمال نقاط مختلفة.

من معمل الهندسة يمكن استنتاج خاصيتين جبريتين للمستقيمات المتوازية والمتعامدة.

مسلمات المستقيمات المتوازية والمتعامدة

2.2 يكون للمستقيمين غير الرأسيين الميل نفسه إذا وفقط إذا كانا متوازيين.

2.3 يكون المستقيمان غير الرأسيين متعامدين إذا وفقط إذا كان حاصل ضرب ميليهما يساوي -1.

إرشادات

مراجعة

لمراجعة العبارة الشرطية المزدوجة (إذا وفقط إذا) انظر "اقرأ" صفحة 30.

مثـــال تحديد العلاقات بين المستقيمات

3 حدّد ما إذا كان المستقيمان $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك.

a) $A(-2,-5), B(4,7), C(0,2), D(8,-2)$

أوجد ميل كل من $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$.

ميل $\overleftrightarrow{AB} = \dfrac{7-(-5)}{4-(-2)} = \dfrac{12}{6} = 2$

ميل $\overleftrightarrow{CD} = \dfrac{-2-2}{8-0} = \dfrac{-4}{8} = \dfrac{-1}{2}$

حاصل ضرب الميلين هو $2\left(-\frac{1}{2}\right)$ أو -1. لذا فإن $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على $\overleftrightarrow{CD}$.

b) $A(-8,-7), B(4,-4), C(-2,-5), D(1,7)$

ميل $\overleftrightarrow{AB} = \dfrac{-4-(-7)}{4-(-8)} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$

ميل $\overleftrightarrow{CD} = \dfrac{7-(-5)}{1-(-2)} = \dfrac{12}{3} = 4$

بما أن ميلي المستقيمين غير متساويين، فإن $\overleftrightarrow{AB}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{CD}$.

وحاصل ضرب الميلين $4\left(\frac{1}{4}\right) = 1$. لذا فإن $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ ليسا متوازيين ولا متعامدين.

تحقق من فهمك

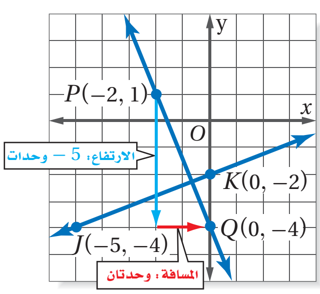
3A) $A(14, 13), B(-11, 0), C(-3, 7), D(-4, -5)$

3B) $A(3, 6)$، $B(-9, 2)$، $C(-12, -6), D(15, 3)$

يمكن استعمال العلاقة بين ميلي مستقيمين لرسم مستقيم موازٍ لمستقيم مُعطى أو عمودي عليه.

مثـــال استعمال الميل لرسم مستقيم

4 ارسم المستقيم المار بالنقطة $P(-2, 1)$ وعمودي على $\overleftrightarrow{JK}$ حيث $J(-5, -4)$ و $K(0, -2)$.



أولًا، أوجد ميل $\overleftrightarrow{JK}$

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ قانون الميل

$= \dfrac{-2-(-4)}{0-(-5)}$ تعويض

$= \dfrac{2}{5}$ تبسيط.

حاصل ضرب ميلي مستقيمين متعامدين يساوي -1.

بما أن $-1 = \left(-\frac{5}{2}\right)\frac{2}{5}$. فإن ميل المستقيم العمودي على $\overleftrightarrow{JK}$ ويحتوي $P(-2, 1)$ يساوي $-\frac{5}{2}$.
لرسم المستقيم، ابدأ من $(-2, 1)$ وتحرّك 5 وحدات إلى أسفل ثم تحرّك إلى اليمين وحدتين.
سمِّ النقطة Q. ثم ارسم $\overleftrightarrow{PQ}$.

تحقق من فهمك

4) ارسم المستقيم المار بالنقطة $P(0, 1)$ والعمودي على $\overleftrightarrow{QR}$ حيث $Q(-6, -2)$ و $R(0, -6)$.

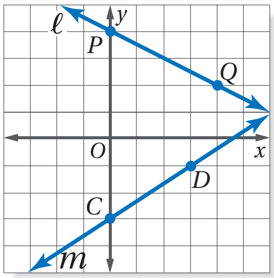
إرشادات

الميل السالب

للمساعدة في تحديد الاتجاه عندما يكون الميل سالبًا تذكر أن $\frac{5}{-2} = \frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}$.

تأكد

مثال 1 (ص 88)



أوجد ميل كل من المستقيمين في الشكل المجاور:

(1 ℓ

(2 m

مثال 2 (ص 88)

ركوب الدراجة: للأسئلة 3–5، استعمل المعلومات التالية:
درجة انحدار طريق جبلي لقيادة الدراجات 8%.

(3 ما ميل الطريق؟

(4 بعد قيادة الدراجة على الطريق، وجد راكب الدراجة نفسه منخفضًا عن النقطة التي بدأ منها بمقدار 120 مترًا. إذا مثلت نقطة البداية نقطة الأصل على مستوى إحداثي فما الإحداثيات الممكنة لموقعه الحالي؟

(5 ما المسافة التي قطعها راكب الدراجة على الطريق؟ قرب الجواب إلى أقرب متر.

مثال 3 (ص 90)

(6 حدد ما إذا كان $\overleftrightarrow{GH}$ و $\overleftrightarrow{RS}$ متوازيين، أو متعامدين، أو غير ذلك إذا علم أنّ $G(15\,,-9)\,,H(9\,,-9)\,,R(-4\,,-1)\,,S(3\,,-1)$

مثال 4 (ص 90)

في السؤالين التاليين، ارسم المستقيم الذي يحقق الشروط المعطاة:

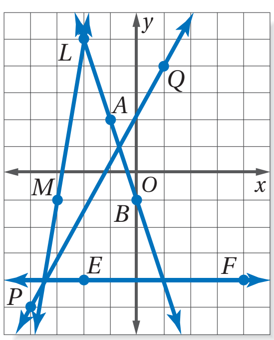
(7 الميل $= 2$، ويمر بالنقطة $P(1\,,2)$.

(8 يمر بالنقطة $A(6\,,4)$، وعمودي على $\overleftrightarrow{MN}$ حيث $M(5\,,0)$ و $N(1\,,2)$.

تمارين ومسائل

إرشادات للتمارين

للأسئلة	انظر الأمثلة
9–10، 13–14	1
15	2
11–12، 16–18	3
19–23	4



أوجد ميل كل مستقيم فيما يلي:

(9 $\overleftrightarrow{AB}$ **(10** $\overleftrightarrow{PQ}$

(11 مستقيم يوازي $\overleftrightarrow{LM}$

(12 مستقيم عمودي على $\overleftrightarrow{EF}$

أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين في كل مما يلي:

(13 $A(0\,,2)\,,B(7\,,3)$ **(14** $W(3\,,2)$، $X(4\,,-3)$

(15 في بلد ما أُجري مسح شامل عام 2002 على طلاب المدارس في الصفوف من الأول المتوسط حتى الثالث الثانوي حول هواياتهم المفضلة، فكان عدد الذين يفضلون المطالعة 194900 طالب. وفي عام 2005، وبعد تطبيق خطة لتشجيع الطلاب على المطالعة، أعيد المسح مرة أخرى فكان عدد الذين يفضلون المطالعة 220900 طالب. إذا استمرت الجهات المسؤولة في تطبيق خطتها، وعلى افتراض أن الزيادة في عدد الطلاب الذين يفضلون المطالعة استمرت بالمعدل نفسه، فكم يكون عددهم عام 2012 مقرَّبًا إلى أقرب ألف؟

للأسئلة 19–16، حدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{UV}$ ، $\overleftrightarrow{PQ}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك.

16) $P(-3\,,-2), Q(9\,,1), U(3\,,6), V(5,-2)$

17) $P(-4,0), Q(0\,,3), U(-4,-3)\,,\, V(8\,,6)$

18) $P(5,-4), Q(10\,,0), U(9,-8)\,,\, V(5,-13)$

19) $P(1\,,1), Q(9\,,8), U(-6\,,1)\,,\, V(2\,,8)$

في كل من الأسئلة 22 – 20 ، ارسم المستقيم الذي يحقق الشروط المعطاة:

20) الميل $= -4$، ويمر بالنقطة $P(-2\,,1)$.

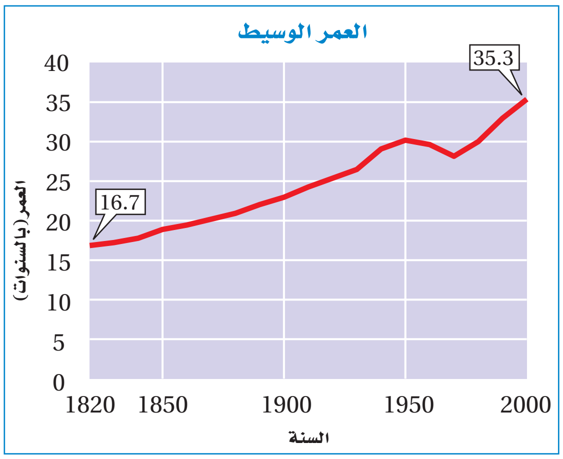
21) يمر بالنقطة $A(-1\,,-3)$،ويوازي $\overleftrightarrow{CD}$ حيث $C(-1\,,7)$ و $D(5\,,1)$.

22) يمر بالنقطة $M(4\,,1)$،وعمودي على $\overleftrightarrow{GH}$ حيث $G(0\,,3)$ و $H(-3\,,0)$.

23) أوجد قيمة x التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(2\,,6)$ و $(x\,,-1)$ يساوي $-\frac{3}{7}$ ،ثم ارسم المستقيم.

24) أوجد قيمة x التي تجعل المستقيم المار بالنقطتين $(4\,,8)$ و $(2\,,-1)$ عموديًّا على المستقيم المار بالنقطتين $(x\,,2)$ و $(-4\,,5)$. ثم ارسم المستقيمين.

سكّان : لحل الأسئلة 27–25،ارجع إلى الرسم المجاور.



25) قدّر معدل التغير السنوي للعمر الوسيط من 1970 إلى 2000.

26) إذا استمر العمر الوسيط في الازدياد بالمعدل نفسه،فكم يكون العمر الوسيط سنة 2010؟

27) افرض بعد سنة 2000،أن العمر الوسيط يزداد بـ $\frac{1}{3}$ معدّله السنوي. في أي سنة يكون العمر الوسيط 40.6 سنة؟

عمرة : للأسئلة 30–28، استعمل المعلومات التالية:

بلغ عدد المعتمرين من إحدى الدول الإسلامية 541960 معتمرًا في عام 1420هـ ، وفي عام 1424 بلغ عدد المعتمرين 518271 معتمرًا.

28) ما معدل التغير في عدد المعتمرين بين عامي 1420 وَ 1424؟

29) إذا استمر التغير في عدد المعتمرين بالمعدل نفسه، فكم تتوقع أن يكون عدد المعتمرين في عام 1432؟

30) هل يستمر التناقص في عدد المعتمرين بلا نهاية؟ وضح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) أوجد الخطأ : حسب خالد وطارق ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $A(15\,,4)$ و $B(-6\,,-13)$. مَنْ منهما إجابته صحيحة؟ وضّح ذلك.

خالد

$$m = \frac{4-(-13)}{15-(-6)} = \frac{17}{21}$$

طارق

$$m = \frac{4-13}{15-6} = -1$$

32) مسألة مفتوحة : أعطِ مثالاً من واقع الحياة لمستقيم ميله يساوي 0 ، ولمستقيم آخر ميله غير معرّف.

33) **تحدّ:** المستقيم المار بالنقطة $(5 + 2t ، -3 + t)$ يمكن وصفه بالمعادلتين $x = 5 + 2t$ و $y = -3 + t$. اكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع.

34) **اكتب:** استعمل المعلومات حول درجة انحدار الطريق في صفحة 87 لتوضح كيف يستعمل الميل في طرق المواصلات. ضمّن إجابتك توضيحًا لماذا يكون من المهم أحيانًا إظهار درجة انحدار الطريق؟ وأعط مثالاً على استعمال الميل في مجال غير الطرق.

تدريب على اختبار معياري

35) أي المعادلات التالية تمثّل المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2 ، 1)$ ويكون عموديًّا على المستقيم $y = \frac{1}{3}x + 5$ ؟

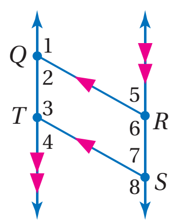
A $y = 3x + 7$

B $y = -3x - 5$

C $y = \frac{1}{3}x + 7$

D $y = -\frac{1}{3}x - 5$

مراجعة تراكمية



في الشكل المجاور $m\angle 1 = 131$ ،$\overleftrightarrow{RS} \parallel \overleftrightarrow{QT}$ ،$\overline{TS} \parallel \overline{QR}$. أوجد قياس كل زاوية مما يلي: (الدرس 2-2)

36) $\angle 6$ 37) $\angle 7$ 38) $\angle 4$

39) $\angle 2$ 40) $\angle 5$ 41) $\angle 8$

أوجد محيط المثلث ABC إلى أقرب جزء من مائة،باستعمال إحداثيات رؤوسه المعطاة: (مهارة سابقة)

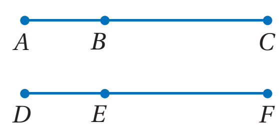
42) $A(-3 , 2)$ ، $B(2 , -9)$ ، $C(0 , -10)$ 43) $A(10 , -6), B(-2, -8), C(-5 , -7)$

44) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين: (الدرس 6-1)

المعطى: $AC = DF$

$AB = DE$

المطلوب إثبات أن: $BC = EF$



كوّن جدول الصواب لكل عبارة مركبة مما يلي: (الدرس 2-1)

45) p و q 46) p أو $\sim q$ 47) $\sim p \wedge q$ 48) $\sim p \wedge \sim q$

اعمل تخمينًا يعتمد على المعلومات المعطاة في كل من الأسئلة التالية، وارسم شكلًا يوضّح تخمينك. (الدرس 1-1)

49) النقاط H , I , J تقع كل منها على ضلع مختلف للمثلث.

50) النقاط X, Y, Z على استقامة واحدة؛ Z تقع بين X و Y.

استعد للدرس اللاحق

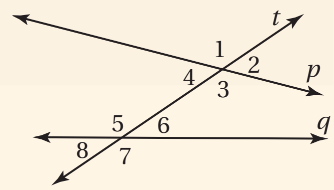
مهارة سابقة وضروريّة: اكتب y بدلالة x فيما يلي:

51) $2x + y = 7$ 52) $2x + 4y = 5$ 53) $5x - 2y + 4 = 0$

اختبار منتصف الفصل

الدروس 2-1 إلى 2-3

1) اختيار من متعدد: في الشكل التالي، المستقيم t قاطع مستعرض للمستقيمين p و q. (الدرس 2-1)



أيّ ما يلي أفضل وصف للزاويتين 3، 5 ؟

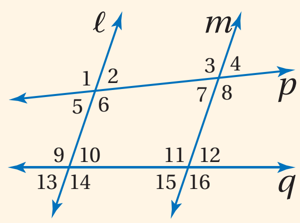
A خارجيتان متبادلتان

B داخليتان متبادلتان

C داخليتان متحالفتان

D متناظرتان

سمِّ المستقيم المستعرض الذي يكوّن كل زوج من أزواج الزوايا التالية. ثم أعطِ الاسم الخاص لكل زوج من الزوايا: (الدرس 2-1)



2) $\angle 1$ و $\angle 8$

3) $\angle 6$ و $\angle 10$

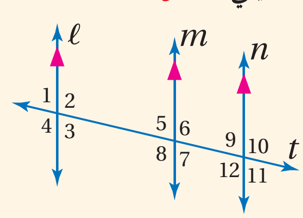
4) $\angle 11$ و $\angle 14$

ارجع إلى الشكل أعلاه. وأوجد قياس كل زاوية من الزاويتين التاليتين.

إذا كان $\ell \parallel m$ و $m\angle 1 = 105$. (الدرس 2-2)

5) $\angle 6$ **6)** $\angle 4$

في الشكل أدناه إذا كان $m\angle 9 = 75$، فأوجد قياس كل زاوية مما يلي: (درس 2-2)



7) $\angle 3$ **8)** $\angle 5$ **9)** $\angle 6$

10) $\angle 8$ **11)** $\angle 11$ **12)** $\angle 12$

13) اختيار من متعدد: أوجد ميل المستقيم العمودي على المستقيم المار بالنقطتين $(-5, 1)$ و $(-3, -2)$ (الدرس 2-3)

F $\frac{-2}{3}$

G $-\frac{3}{2}$

H $\frac{2}{3}$

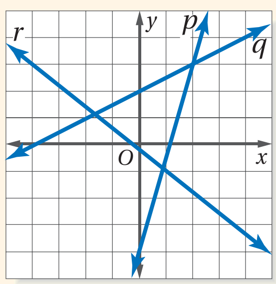
J $\frac{3}{2}$

حدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيين، أو متعامدين، أو غير ذلك. (الدرس 2-3)

14) $A(3,-1)\ , B(6\ , 1)\ , C(-2,-2), D(2\ , 4)$

15) $A(-3,-11), B(3\ ,13), C(0,-6), D(8,-8)$

أوجد ميل كل مستقيم من المستقيمات التالية: (الدرس 2-3)



16) p

17) مستقيم يوازي q

18) مستقيم عمودي على r

كرة قدم: عمل المسؤولون عن أحد الملاعب الرياضيّة إحصائية عن متوسط عدد الحضور للمباريات التي تمّت على ذلك الملعب في عامي 1422 ، 1424 فكانت النتائج كما في الجدول التالي. (الدرس 2-3)

السنة	متوسط عدد الحضور
1422	31078
1424	38122

19) ما معدّل التغير في متوسط عدد الحضور للمباريات بين عامي 1422 و 1424؟

20) إذا استمر معدّل التغير هذا فماذا تتوقع أن يكون متوسط عدد الحضور لمباريات عام 1432؟

2-4 معادلة المستقيم
Equations of Lines

الأفكار الرئيسة:

- أكتب معادلة مستقيم إذا عرفت معلومات عن رسمه.
- أحلّ مسألة بكتابة معادلة مستقيم.

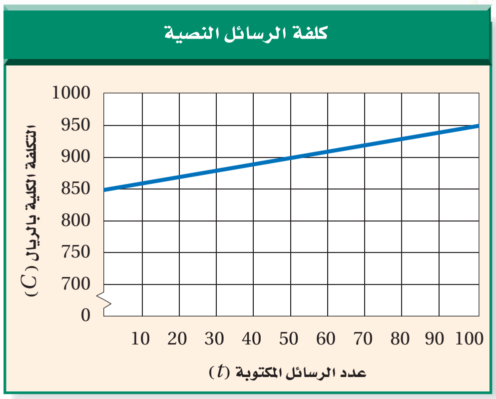
المفردات:

صيغة الميل والمقطع
slope-intercept form

صيغة النقطة والميل
point-slope form

استعد

قدّمت إحدى شركات الهاتف الجوال عرضًا يدفع بموجبه المشترك 850 ريالًا شهريًّا عن المكالمات التي يجريها مهما كان عددها، ويدفع 0.1 ريال عن كل رسالة نصية. فإذا رمزنا للكلفة الكلية في الشهر بالرمز C ولعدد الرسائل النصية بالرمز t فإن $C = 0.1t + 850$.



كتابة معادلات مستقيمات: تذكر من الجبر أنه يمكن كتابة معادلة مستقيم إذا علم أيٌّ مما يلي:

- الميل والمقطع الصادي.
- الميل ونقطة على المستقيم.
- نقطتان على المستقيم.

ميل المستقيم الذي معادلته $C = 0.1t + 850$ يساوي 0.1،ويقطع محور الصادات عند 850. يمكن استعمال هاتين القيمتين لكتابة معادلة المستقيم. **صيغة الميل والمقطع** العامّة لمعادلة المستقيم هي $y = mx + b$، حيث m ميل المستقيم و b المقطع من محور الصادات.

الميل

$$y = mx + b \qquad C = 0.1t + 850$$

المقطع الصادي

مثال — الميل والمقطع الصادي

1 اكتب معادلة المستقيم الذي ميله 4– والمقطع الصادي 1 بصيغة الميل والمقطع.

$y = mx + b$ — صيغة الميل والمقطع

$y = -4x + 1$ — لأن $m = -4$، $b = 1$

إذن معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع هي $y = -4x + 1$.

تحقق من فهمك

1) اكتب معادلة المستقيم الذي ميله 3 و المقطع الصادي 8– بصيغة الميل والمقطع.

وتستعمل طريقة أخرى لكتابة معادلة المستقيم، هي صيغة النقطة والميل. **صيغة النقطة والميل** العامّة هي $y - y_1 = m(x - x_1)$، حيث (x_1, y_1) إحداثيًّا أي نقطة على المستقيم و m ميل المستقيم.

النقطة المعطاة (x_1, y_1)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

الميل

مثال 2 الميل ونقطة

اكتب معادلة المستقيم الذي ميله يساوي $-\frac{1}{2}$ ويمر بالنقطة $(3, -7)$ بصيغة النقطة والميل.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة النقطة والميل

$(y - (-7)) = -\frac{1}{2}(x - 3)$ لأن $m = -\frac{1}{2}, (x_1, y_1) = (3, -7)$

$y + 7 = -\frac{1}{2}(x - 3)$ التبسيط.

إذن معادلة المستقيم بصيغة النقطة والميل هي: $y + 7 = -\frac{1}{2}(x - 3)$.

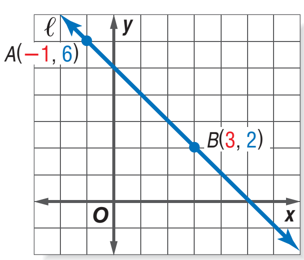
تحقق من فهمك

2) اكتب معادلة المستقيم الذي ميله 4 ويحوي النقطة $(-6, -3)$ بصيغة النقطة والميل.

تحتاج كل من الصيغتين الميل والمقطع، والنقطة والميل، إلى ميل المستقيم حتى يمكن كتابة معادلته. وتوجد حالات لا يُعطى فيها الميل. في مثل هذه الحالات،استعمل نقطتين على المستقيم لحساب ميله، ثم استعمل صيغة الميل والمقطع، أو صيغة النقطة والميل لكتابة معادلة المستقيم.

مثال 3 نقطتان

اكتب معادلة المستقيم ℓ بصيغة الميل والمقطع.



أوجد ميل ℓ باستعمال $A(-1, 6)$ و $B(3, 2)$.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ قانون الميل

$= \frac{6 - 2}{(-1) - 3}$ $x_1 = -1, x_2 = 3, y_1 = 6, y_2 = 2$

$= -\frac{4}{4} = -1$ بالتبسيط.

والآن استعمل صيغة النقطة والميل مع أي نقطة من النقطتين.

الطريقة 1: باستعمال النقطة A.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة النقطة والميل

$y - 6 = -1[x - (-1)]$ لأن $m = -1, (x_1, y_1) = (-1, 6)$

$y - 6 = -1(x + 1)$ بالتبسيط.

$y - 6 = -x - 1$ خاصية التوزيع

$y = -x + 5$ بإضافة 6 لكل من الطرفين.

الطريقة 2: باستعمال النقطة B

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة النقطة والميل

$y - 2 = -1(x - 3)$ لأن $m = -1,(x_1,y_1) = (3\ ,2)$

$y - 2 = -x + 3$ خاصية التوزيع

$y = -x + 5$ بإضافة 2 لكل من الطرفين.

لاحظ أن النتيجة هي نفسها باستعمال أي من النقطتين.

تحقق من فهمك

3) اكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع الذي يمر بالنقطتين $(-2\ ,4)$ و $(8\ ,10)$.

مثال نقطة ومعادلة

4 **اكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع الذي يمر بالنقطة $(2،0)$ والعمودي على المستقيم الذي معادلته $y = -x + 5$.**

بما أن ميل المستقيم $y = -x + 5$ يساوي -1،فإن ميل المستقيم العمودي عليه يساوي 1.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة النقطة والميل

$y - 0 = 1(x - 2)$ لأن $m = 1,(x_1\ ,y_1) = (2\ ,0)$

إذن $y = x - 2$ خاصية التوزيع

تحقق من فهمك

4) اكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع الذي يمر بالنقطة $(-3\ ,6)$ ويوازي المستقيم الذي معادلته $y = -\frac{3}{4}x + 3$.

تطبيقات: كثير من تطبيقات الحياة يمكن عمل نماذج لها باستعمال معادلات خطية. ففي كثير من تطبيقات عالم الأعمال يدل الميل على **المعدل**.

مثال من واقع الحياة كتابة معادلة خطية

5 **رسائل نصية: يدفع معتز مبلغ 999.50 ريالاً شهريًّا ثمن مكالماته في جهازه الجوال مهما كان عددها ويدفع 0.05 ريال عن كل رسالة نصية يرسلها.**

a) **اكتب معادلة تمثل النفقات الكلية الشهرية C إذا أرسل t من الرسائل النصية.**

لكل رسالة نصية يرسلها يزداد الثمن 0.05 ريال. لذا فإن معدل التغير،أو الميل،يساوي 0.05. المقطع الصادي يحدد عندما لا ترسل أي رسالة نصية،أي 999.50 ريالاً.

$C = mt + b$ صيغة الميل والمقطع

$= 0.05t + 999.50$ حيث $m = 0.05, b = 999.50$

أي أن الكلفة الكلية الشهرية تُمثّل بالمعادلة: $C = 0.05t + 999.50$.

b) قارن بين هذا العرض والعرض المقدّم في بداية هذا الدرس. إذا كان معدّل الرسائل التي يرسلها معتز أو يستقبلها 150 رسالة كل شهر، فأيّ العرضين أفضل له؟

احسب التكلفة من كل معادلة عند $t = 150$.

العرض الحالي: $C = 0.05t + 999.50$

$= 0.05(150) + 999.50$ ؛ $t = 150$

$= 1007$

العرض السابق: $C = 0.1t + 850$

$= 0.1(150) + 850$ ، $t = 150$

$= 865$

إذن فالعرض السابق أفضل لمعتز.

تحقق من فهمك

5) افترض أن معتزًّا كان يرسل بمعدل 500 رسالة نصية شهريًّا. قارن بين العرضين، وأيهما أفضل له؟

تأكد

مثال 1 (ص 95)

اكتب معادلةً بصيغة الميل والمقطع للمستقيم الذي أُعطي ميله ومقطعه الصادي في السؤالين 1 وَ 2 :

1) الميل $m = 3$
والمقطع الصادي يساوي: -4

2) الميل $m = -\frac{3}{5}$
والمقطع الصادي عند النقطة $(0، -2)$

مثال 2 (ص 96)

اكتب معادلة بصيغة النقطة والميل للمستقيم المعطى ميله ونقطة عليه في كل مما يلي:

3) $m = \frac{3}{2}, (4, -1)$

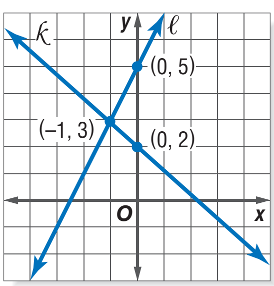
4) $m = 3, (7, 5)$

مثال 3 (ص 96)

اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع لكل مستقيم في الشكل المجاور:

5) k

6) ℓ



مثال 4 (ص 97)

7) المستقيم الذي يوازي ℓ ويمر بالنقطة $(4, 4)$

8) المستقيم العمودي على ℓ والمار بالنقطة $(2, -1)$

مثال 5 (ص 97)

مكتبات: للسؤالين 10 ,9، استعمل المعلومات التالية:
يدفع وليد 25 ريالًا اشتراكًا شهريًّا لخدمات المكتبات الإلكترونية عن طريق الإنترنت. ويدفع 0.8 ريال عن كل صفحة ينسخها. وفي عرض آخر يدفع 35 ريالًا شهريًّا على ألّا يزيد عدد الصفحات التي ينسخها في ذلك الشهر على 40 صفحة.

9) اكتب معادلة تمثل التكلفة الشهرية لكل عرض.

10) إذا كان وليد ينسخ 15 صفحة كل شهر، فأي العرضين أفضل له؟ اشرح إجابتك.

تمارين ومسائل

إرشادات للتمـــارين

للأسئلة	انظر الأمثلة
11–14	1
15–17	2
18–21	3
22–25	4
26,27	5

اكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع في كل مما يلي:

11) $m = 2$ ، $(0, 8)$

12) $m = -\frac{1}{12}, b = 1$

13) $m = \frac{2}{9},\ b = \frac{1}{3}$

14) $m = -1 , b = -3$

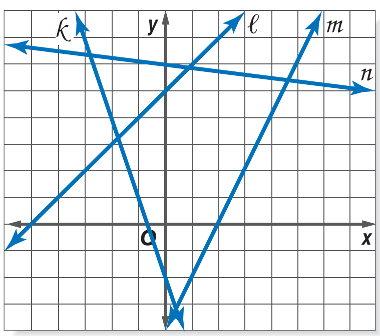
اكتب معادلة كل من المستقيمات التالية بصيغة النقطة والميل.

15) $m = 2 , (3, 1)$

16) $m = \frac{-4}{5} , (-12 , -5)$

17) $m = 0.48 , (5, 17.12)$

استعمل الشكل المجاور واكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع لكل من المستقيمات التالية:



18) k

19) ℓ

20) m

21) n

22) عمودي على المستقيم ℓ، ويمر بالنقطة $(-1 , 6)$

23) يوازي المستقيم k ، ويمر بالنقطة $(7 , 0)$

24) يوازي المستقيم n، ويمر بالنقطة $(0 , 0)$

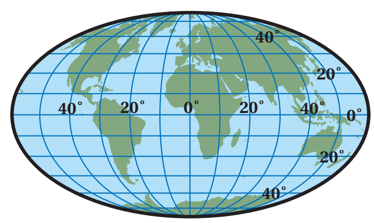
25) عمودي على المستقيم m، ويمر بالنقطة $(-3 , -3)$

تجارة : لحل السؤالين 26 و 27، استعمل المعلومات التالية:

تبيع شركة دهانات بمعدل 750 جالوناً من الدهان كل يوم.

26) يوجد في المخزن 10800 جالون من الدهان. اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع تبين عدد الجالونات المتبقية بعد x من الأيام إذا عُلم أنه لا إضافة على مخزون الدهان.

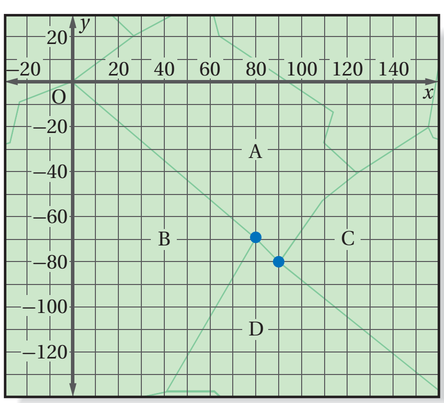
27) ارسم شكلًا بيانيًا يمثل عدد جالونات الدهان المتبقية عند أي زمن مُعطى.



الربط مع الحياة

تقسم الكرة الأرضية إلى دوائر عرض على مسافات متساوية من خط الإستواء. وخطوط طول، على مسافات متساوية شرق أو غرب خط الزوال.

خرائط : لحل السؤالين 28 و 29 استعمل المعلومات التالية:



في الشكل المجاور خريطة مساحية لأربع قطع أراضي وضعت على مستوى إحداثي بحيث كان الركن الغربي للقطعة A عند نقطة الأصل. إذا كانت القطع A, B, D تلتقي عند النقطة $(80 , -70)$، والقطع A, C, D تلتقي عند النقطة $(90 , -80)$ فاكتب:

28) اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع تمثل المستقيم الفاصل بين القطعتين A, D.

29) اكتب معادلة المستقيم الفاصل بين القطعتين A ، C إذا علم أنه عمودي على الخط الفاصل بين القطعتين A ، D

اكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع الذي يحقق الشروط المعطاة في كل من السؤالين التاليين:

30) المقطع السيني = 5 والمقطع الصادي = 3

31) يمر بالنقطتين $(-1 , 4)$ و $(-1 , -2)$

32) مسألة مفتوحة: اكتب معادلتين لمستقيمين بصيغة الميل والمقطع بحيث يحتويان النقطة $(-5 ، -1)$.

33) تحدٍّ: صيغة النقطة والميل لمعادلة مستقيم يمكن كتابتها بالصيغة $y = m(x - x_1) + y_1$. صِف كيف يرتبط رسم المعادلة $y = m(x - x_1) + y_1$ برسم المعادلة $y = mx$.

34) اكتب: استعمل المعلومات حول الهاتف الجوال ومعدلات الرسائل النصية في الصفحة 95 لتوضح كيف يمكن لمعادلة مستقيم أن تصف خدمة الهاتف الجوال. وضمّن إجابتك وصفًا لكيفية استعمال المعادلات في المقارنة بين عروض مختلفة.

تدريب على اختبار معياري

35) مراجعة: اتفقت هناء وبعض الطالبات على التبرع بمبلغ 81 ريالًا، إذا شاركت هناء بـ 24 ريالًا، وشاركت كل طالبة بـ 3 ريالات. فاستعمل المعادلة أدناه لتجد عدد الطالبات المشاركات:

$$3s + 24 = 81$$

A 3 طالبات   **C** 12 طالبة

B 9 طالبات   **D** 19 طالبة

36) أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-3, -2)$ وعمودي على المستقيم الذي معادلته $y = \frac{3}{4}x + 8$؟

F $y = -\frac{4}{3}x - 6$

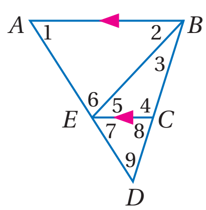
G $y = -\frac{4}{3}x + 5$

H $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

J $y = -\frac{3}{4}x - 5$

مراجعة تراكمية

37) برمجيات: لعام 1430 هـ خصص مبلغ 152 مليون ريال لإنتاج برمجيات تربوية، و لعام 1434 هـ خصص مبلغ 498 مليون ريال. ما معدل تغير الإنفاق بين سنتي 1430 وَ 1434؟ (الدرس 2-3)



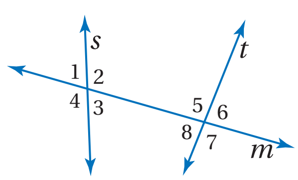
في الشكل المجاور، $m\angle1 = 58 , m\angle2 = 47 , m\angle3 = 26$. أوجد قياس كل من الزوايا التالية: (الدرس 2-2)

38) $\angle7$ **39)** $\angle5$ **40)** $\angle6$

41) $\angle4$ **42)** $\angle8$ **43)** $\angle9$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضروريّة: سمِّ أزواج الزوايا في الشكل، التي تحقق الوصف في كل من الأسئلة التالية: (الدرس 2-1)



44) زاويتين داخليتين متحالفتين

45) زاويتين متناظرتين

46) زاويتين خارجيتين متبادلتين

توسع 2-4

معمل الهندسة

معادلة العمود المنصف

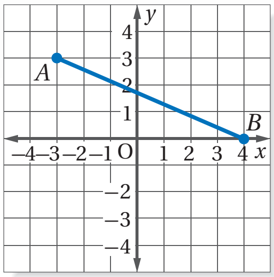
Equation of Perpendicular Bisector

يمكنك تطبيق ما تعلمته عن الميل وعن معادلة المستقيم على الأشكال الهندسية في المستوى.

نشاط

أوجد معادلة العمود المنصِّف للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ إذا كان طرفاها النقطتين $A(-3، 3)$ و $B(4، 0)$.

الخطوة 1: منصف القطعة المستقيمة يمر بنقطة منتصفها. استعمل قانون نقطة المنتصف لتجد النقطة M منتصف $\overline{AB}$.



$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=M\left(\frac{-3+4}{2},\frac{3+0}{2}\right)$$

$$=M\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

الخطوة 2: العمود المنصف يكون عموديًّا على القطعة المستقيمة من منتصفها. ولتجد ميل المنصف أوجد أولاً ميل $\overline{AB}$.

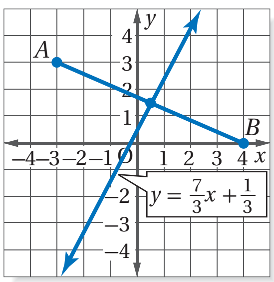
$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ قانون الميل

$=\frac{0-3}{4-(-3)}$ لأنّ $x_1=-3، x_2=4، y_1=3، y_2=0$

$=-\frac{3}{7}$ بالتبسيط

الخطوة 3: استعمل صيغة النقطة والميل لكتابة معادلة المستقيم.

ميل العمود المنصف يساوي $\frac{7}{3}$ لأن $-\frac{3}{7}\left(\frac{7}{3}\right)=-1$



$y-y_1=m(x-x_1)$ صيغة النقطة والميل

$y-\frac{3}{2}=\frac{7}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ لأنّ $m=\frac{7}{3}، (x_1، y_1)=\left(\frac{1}{2}، \frac{3}{2}\right)$

$y-\frac{3}{2}=\frac{7}{3}x-\frac{7}{6}$ خاصية التوزيع

$y=\frac{7}{3}x+\frac{1}{3}$ بإضافة $\frac{3}{2}$ إلى لكل طرف.

تدريبات:

أوجد معادلة العمود المنصف للقطعة $\overline{PQ}$ إذا كانت نقطتا طرفيها كما في الأسئلة التالية:

(1 $P(5, 2), Q(7, 4)$

(2 $P(-3, 9), Q(-1, 5)$

(3 $P(-2, 1), Q(0, -3)$

(4 $P(0, 1.6), Q(0.5, 2.1)$

(5 استعمل ما تعلمته لإيجاد معادلات المستقيمات التي تحوي أضلاع المثلث XYZ حيث: $X(-2, 0), Y(1, 3), Z(3, -1)$ هي رؤوس المثلث .

2-5 إثبات توازي المستقيمات
Proving Lines Parallel

الأفكار الرئيسة:

- أتعرّف الشروط التي تحققها الزوايا حتى يتوازي مستقيمان.
- أُثبت توازي مستقيمين انطلاقًا من علاقات معطاة بين الزوايا.

استعد

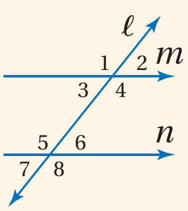
هل صعدت يومًا إلى مبنى عالٍ ونظرت إلى أسفل نحو موقف سيارات؟ سترى فيه خطوطًا كثيرة، ويحرص عمّال الدهان على أن تكون هذه الخطوط متوازية.

تعيين المستقيمات المتوازية: عندما تتقاطع خطوط مواقف السيارات مع خط المنتصف فإن الزوايا المتكونة تكون متناظرة. وعندما تكون الخطوط متوازية فإن الزوايا المتناظرة تكون متطابقة. والعكس صحيح، إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة فإن المستقيمات تكون متوازية.

مسلمة 2.4

إذا قطع قاطع مستعرض مستقيمين في مستوى وكانت الزوايا المتناظرة متطابقة فإن المستقيمين متوازيان.

مثال: إذا كانت $\angle 1 \cong \angle 5$, $\angle 2 \cong \angle 6$, $\angle 3 \cong \angle 7$, $\angle 4 \cong \angle 8$، فإن $m \parallel n$.

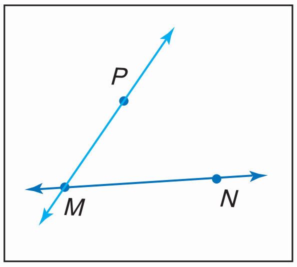


المسلمة 2.4 تبيّن كيفيّة رسم مستقيمات متوازية.

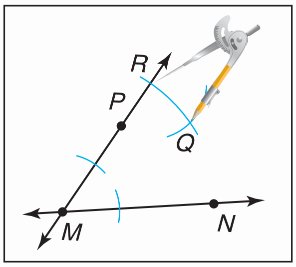
إنشاءات هندسية

رسم مستقيم موازٍ لمستقيم معلوم ويمرّ بنقطة لا تقع عليه:

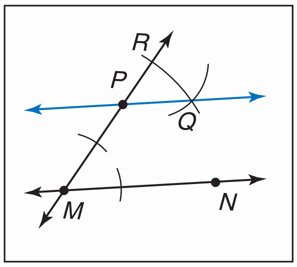
الخطوة 1: استعمل المسطرة لرسم $\overleftrightarrow{MN}$. عيّن نقطة P لا تقع على $\overleftrightarrow{MN}$. وارسم $\overleftrightarrow{PM}$.



الخطوة 2: انقل الزاوية PMN بحيث تكون النقطة P رأس الزاوية الجديدة. سمِّ نقطتي التقاطع Q و R.



الخطوة 3: ارسم $\overleftrightarrow{PQ}$. بما أن $\angle RPQ \cong \angle PMN$ بالعمل، وهما متناظرتان فإن $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{MN}$.



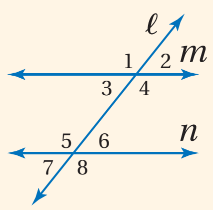
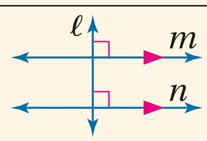
طريقة الإنشاء السابقة تبيّن أن هناك مستقيم وحيد يمر بالنقطة P ويوازي $\overleftrightarrow{MN}$. وفي سنة 1795، أعطى الرياضي والفيزيائي الأسكتلندي جون بلافير صيغة حديثة لمسلمة التوازي لإقليدس، والتي تنص على أن هناك مستقيم واحد فقط يوازي مستقيمًا معلومًا ويمر بنقطة لا تقع على المستقيم المعلوم.

مسلمة 2.5 — مسلمة التوازي

إذا عُلم مستقيم ونقطة لا تقع عليه، فإن هناك مستقيمًا واحدًا فقط يمر بتلك النقطة يوازي المستقيم المعلوم.

يكوّن المستقيمان المتوازيان والمستقيم المستعرض أزواجًا من الزوايا المتطابقة، والعكس، أزواج الزوايا المتطابقة تلك يمكن أن تحدد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أم لا.

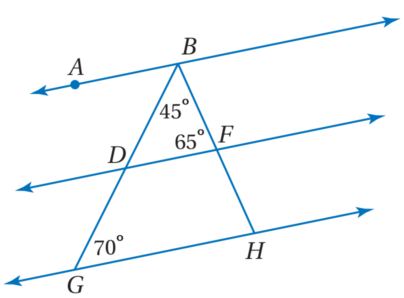
نظريات — برهنة توازي مستقيمات

النظرية	الأمثلة	النماذج
2.5 إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين في مستوى وكانت زاويتان خارجيتان متبادلتان متطابقتين فإن المستقيمين متوازيان.	إذا كانت $\angle 1 \cong \angle 8$ أو $\angle 2 \cong \angle 7$، فإن $m \parallel n$.	
2.6 إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين في مستوى وكانت زاويتان داخليتان متحالفتان متكاملتين فإن المستقيمين متوازيان.	إذا كانت $\angle 3$, $\angle 5$ زاويتين متكاملتين أو $\angle 4$, $\angle 6$ زاويتين متكاملتين فإن $m \parallel n$.	
2.7 إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين في مستوى وكانت زاويتان داخليتان متبادلتان متطابقتين فإن المستقيمين متوازيان.	إذا كانت $\angle 3 \cong \angle 6$ أو $\angle 4 \cong \angle 5$، فإن $m \parallel n$.	
2.8 في المستوى، إذا كان مستقيمان عموديين على مستقيم فإنهما متوازيان.	إذا كان $m \perp \ell$ و $n \perp \ell$، فإن $m \parallel n$.	

ستبرهن النظريات 2.8 , 2.7 , 2.6 على الترتيب في المسائل 16 و 17 و 18 على الترتيب
وستبرهن نظرية 2.5 في " تحقق من فهمك " (3)

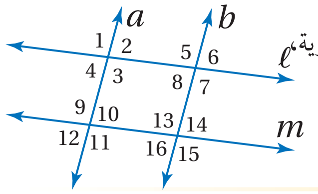
مثـــال — تعيين المستقيمات المتوازية

1 في الشكل المجاور، $\overline{BG}$ تُنصّف $\angle ABH$، عيّن المستقيمات المتوازية في الشكل إن وجدت.



- مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي 180، لذا فإن $m\angle BDF = 180 - (45 + 65) = 70$.
- وبما أن $\angle BDF$ و $\angle BGH$ متساويتان في القياس، فإنهما متطابقتان.
- وتطابق زاويتين متناظرتين يدل على أن المستقيمين متوازيان. لذلك، $\overleftrightarrow{DF} \parallel \overleftrightarrow{GH}$.
- $\angle ABD \cong \angle DBF$، لأن $\overline{BG}$ ينصّف $\angle ABH$. لذلك، $m\angle ABD = 45$.
- $\angle ABD$ و $\angle BDF$ زاويتان داخليتان متبادلتان، ولكن قياسيهما مختلفان لذلك فإنهما غير متطابقتين.
- إذن، $\overleftrightarrow{AB}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{DF}$ أو $\overleftrightarrow{GH}$.

تحقق من فهمك

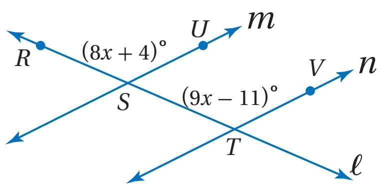


(1 إذا كانت $\angle 8 \cong \angle 2$ ، فحدد المستقيمات المتوازية، موضحًا المسلمة أو النظرية التي استخدمتها.

ويمكن استعمال العلاقات بين الزوايا لحل مسائل تحتوي قيمًا مجهولة.

مثـــال — استعمال المستقيمات المتوازية في حل المسائل

2 **جبر:** أوجد قيمة x و $m\angle RSU$ حتى يكون $m \parallel n$.



استكشف: من الشكل، تعلم أن $m\angle RSU = 8x + 4$ و $m\angle STV = 9x - 11$. وتعلم أيضًا أن $\angle RSU$ و $\angle STV$ متناظرتان.

خطط: لكي يكون المستقيم m موازيًا للمستقيم n، فإن الزاويتين المتناظرتين يجب أن تكونا متطابقتين. لذلك، $m\angle RSU = m\angle STV$. عوّض قياسات الزوايا المعطاة في المعادلة وأوجد قيمة x. وبعد إيجاد قيمة x، عوّض لتجد $m\angle RSU$.

حلّ:

$m\angle RSU = m\angle STV$	زاويتان متناظرتان
$8x + 4 = 9x - 11$	بالتعويض
$4 = x - 11$	بطرح $8x$ من كل طرف
$15 = x$	بإضافة 11 إلى كل طرف

والآن استعمل قيمة x لتجد $m\angle RSU$.

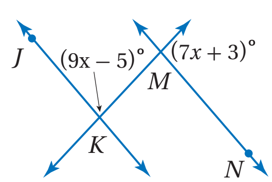
$m\angle RSU = 8x + 4$	المعادلة الأصلية
$= 8(15) + 4$	لأنّ $x = 15$
$= 124$	بالتبسيط

تحقق: تأكد من قياس الزاوية باستعمال قيمة x لتجد $m\angle STV$. أي أن، $9x - 11 = 9(15) - 11 = 124$. ولأنّ $m\angle RSU = m\angle STV$، فإنّ $\angle RSU \cong \angle STV$ و $m \parallel n$.

تحقق من فهمك

(2A أوجد x حتى يكون $\overline{JK} \parallel \overline{MN}$.

(2B أوجد $m\angle JKM$



إرشـــادات

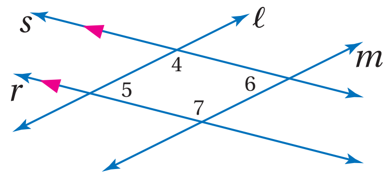
إثبات توازي مستقيمين

عندما تبرهن توازي مستقيمين تأكد من تطابق الزوايا المتناظرة أو المتبادلة أو من تكامل الزوايا المتحالفة.

إثبات توازي مستقيمين: يمكن استعمال العلاقة بين أزواج الزوايا الناتجة عن قاطع مستقيمين لإثبات أن المستقيمين متوازيان.

> **الربط مع المواد الأخرى**
> خطوط العرض متوازية، وتبدو خطوط الطول متوازية في بعض المواقع على سطح الكرة الأرضية.

مثال إثبات توازي مستقيمين



3 **المعطيات:** $r \parallel s\,;\ \angle 5 \cong \angle 6$

المطلوب: إثبات أن $\ell \parallel m$

البرهان:

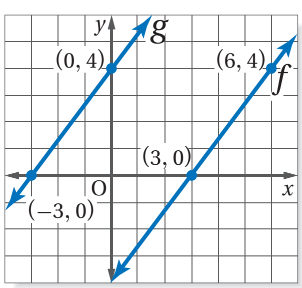
العبارات	المبررات
1) $r \parallel s;\ \angle 5 \cong \angle 6$	1) معطيات
2) $\angle 4$ و $\angle 5$ متكاملتان	2) نظرية الزاويتين الداخليتين المتحالفتين
3) $m\angle 4 + m\angle 5 = 180$	3) تعريف الزاويتين المتكاملتين
4) $m\angle 5 = m\angle 6$	4) تعريف الزاويتين المتطابقتين
5) $m\angle 4 + m\angle 6 = 180$	5) بالتعويض.
6) $\angle 4$ و $\angle 6$ متكاملتان	6) تعريف الزاويتين المتكاملتين
7) $\ell \parallel m$	7) إذا كانت زاويتان داخليتان متكاملتين فإن المستقيمين متوازيان.

تحقق من فهمك

3) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 2.5.

تعلّمت في الدرس 2.3، أن المستقيمات المتوازية لها الميل نفسه. ويمكنك استعمال الميل لإثبات أن المستقيمات متوازية.

مثال الميل والمستقيمات المتوازية



4 حدّد ما إذا كان $f \parallel g$ أم لا.

ميل f: $m = \dfrac{4-0}{6-3} = \dfrac{4}{3}$

ميل g: $m = \dfrac{4-0}{0-(-3)} = \dfrac{4}{3}$

بما أن الميلين متساويان فإن، $f \parallel g$.

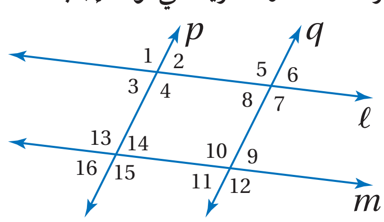
تحقق من فهمك

4) المستقيم ℓ يمر بالنقطتين $(-5, 3)$ و $(0, 4)$. والمستقيم m يمر بالنقطتين $(12, 1)$ و $\left(2, -\frac{2}{3}\right)$. هل $\ell \parallel m$؟

تأكد

مثال 1
(ص 103)

حسب المعلومات المعطاة حدّد المستقيمات المتوازية إن وُجدت، واذكر المسلمة أو النظرية التي تؤكد إجابتك:



1) $\angle 3 \cong \angle 16$

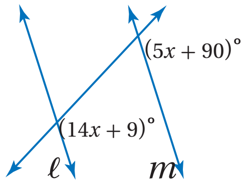
2) $\angle 13 \cong \angle 4$

3) $m\angle 14 + m\angle 10 = 180$

4) $\angle 7 \cong \angle 1$

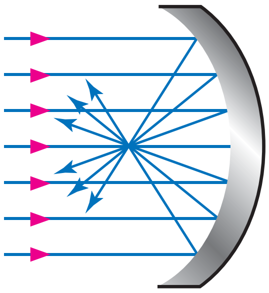
مثال 2
(ص 104)

5) أوجد قيمة x حتى يكون $\ell \parallel m$.



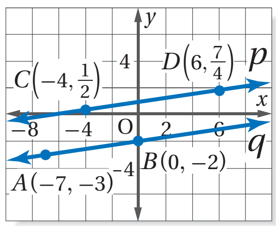
مثال 3
(ص 105)

6) **فيزياء:** يجمع تلسكوب هابل الأشعة المتوازية ويعكسها لتلتقي في نقطة البؤرة . استعمل المنقلة لتقيس بعض الزوايا المبيّنة في الشكل. هل هذه المستقيمات متوازية؟ وضّح كيف تعرف ذلك.



مثال 4
(ص 105)

7) حدّد ما إذا كان $p \parallel q$.



تمارين ومسائل

للأسئلة	انظر الأمثلة
8–10	1
11–13	2
14–15	3
16–20	4

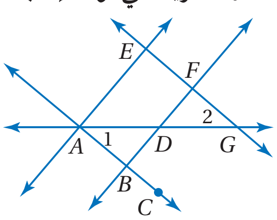
إرشادات للتمارين

حسب المعلومات المعطاة، حدّد المستقيمات المتوازية إن وُجدت، واذكر المسلمة أو النظرية التي تؤكد إجابتك:

8) $\angle AEF \cong \angle BFG$

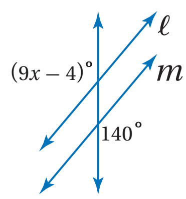
9) $\angle EFB \cong \angle CBF$

10) $m\angle GFD + m\angle CBD = 180$

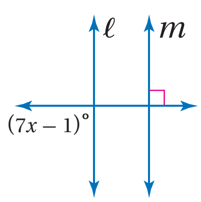


أوجد قيمة x حتى يكون $\ell \parallel m$.

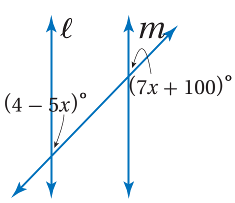
11)



12)

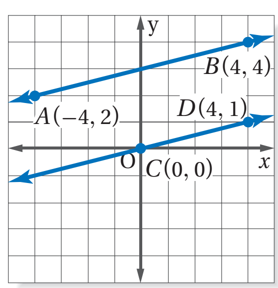


13)

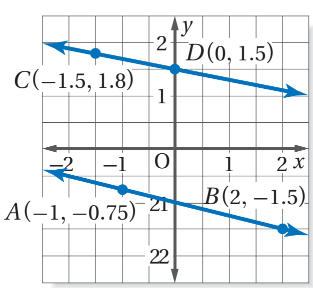


حدّد ما إذا كان كل زوج من المستقيمات متوازيين أو غير متوازيين. وضّح السبب:

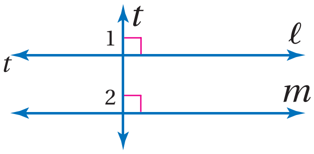
14)



15)



16) برهان: أكمل برهان النظرية 2.8 .



المعطيات: $\ell \perp t$

$m \perp t$

المطلوب: إثبات أن $\ell \parallel m$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\ell \perp t, m \perp t$	1) ___?___
2) $\angle 1$ و $\angle 2$ قائمتان	2) ___?___
3) $\angle 1 \cong \angle 2$	3) ___?___
4) $\ell \parallel m$	4) ___?___

17) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 2.6 .

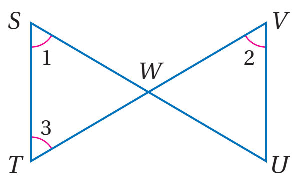
18) برهان: اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 2.7 .

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكل مما يلي:

19) المعطيات: $\angle 2 \cong \angle 1$

$\angle 1 \cong \angle 3$

المطلوب إثبات أنّ: $\overline{ST} \parallel \overline{UV}$

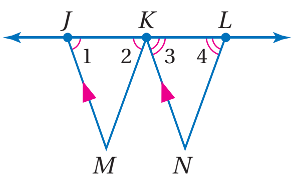


20) المعطيات: $\overline{JM} \parallel \overline{KN}$

$\angle 1 \cong \angle 2$

$\angle 3 \cong \angle 4$

المطلوب إثبات أنّ: $\overline{KM} \parallel \overline{LN}$



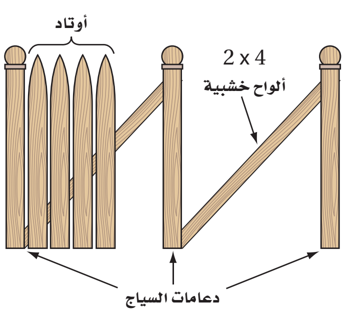
الربط مع الحياة

يعتبر ثابت بن قُرَّة (221 هـ - 288 هـ) واحدًا من أعظم علماء الهندسة في التاريخ. فهو أول من ربط الهندسة والجبر ليؤسس ما عُرف لاحقًا بالهندسة التحليلية.

21) بحث: استعمل الإنترنت أو أيّ مصدر آخر لتجد علماء رياضيات أمثال ثابت بن قُرَّة ممن اكتشفوا مفاهيم جديدة، وبرهنوا نظريات جديدة ذات علاقة بالهندسة. صف اكتشافاتهم باختصار، وضمّن بحثك العوامل التي دفعتهم للبحث، مثل تحقيق حاجة من واقع الحياة، أو البحث في حقل آخر.

22) تجميل الحديقة: لبناء سياج حول حديقة المنزل، ثبّت فراس دعامات السياج ووضع ألواحًا خشبية تميل بزاوية مع كل من دعامتي السياج. وعند تثبيته السياج، حرص على أن تكون الزوايا بين ألواح الخشب والأوتاد متساوية في القياس.

لماذا يجعل ما صنعه فراس الأوتاد متوازية؟



23) تأطير: تصنع الأُطر الخشبية للوحات باستعمال منشار الزاوية المتري، هذه الآلة تمكنك من قطع الخشب بزاوية وبأي قياس. فإذا قُطعت كل القطع الأربع المكونة للإطار بزاوية °45، هل القطع المتقابلة في الإطار متوازية؟ برِّر إجابتك.

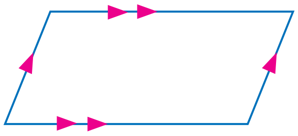
مسائل مهارات التفكير العليا

24) تبرير: لخّصْ خمس طرق مختلفة يمكن استعمالها لإثبات أن مستقيمين متوازيان.

25) تبرير: أوجد مثالاً مضادًا للعبارة التالية:
إذا قُطع المستقيمان ℓ و m بالمستقيم t بحيث كانت الزوايا الداخلية المتحالفة متطابقة، فإن المستقيمين ℓ و m متوازيان و t عموديّ على كل من المستقيمين.

26) مسألة مفتوحة: صف موقفين مررت بهما في حياتك وواجهت فيهما خطين متوازيين. كيف يمكنك التحقق من أن الخطين متوازيان؟

27) تحدٍّ: يعمل عادل في مشروع فني، رسم شكلًا رباعيًّا كل ضلعين متقابلين فيه متوازيان، فلاحظ بعض العلاقات تربط بين زوايا الشكل. اكتب أكبر عدد من العلاقات حول الأشكال الرباعية التي فيها كل ضلعين متقابلين متوازيان.



28) اكتب: استعمل المعلومات حول موقف السيارات صفحة 102 لتبين كيف تعرف أن جوانب أماكن وقوف السيارات متوازية. ضمّن ذلك مقارنة بين الزوايا التي تصنعها هذه الخطوط الفاصلة مع الخط في مركز الموقف، ثم أعطِ وصفًا لأماكن وقوف السيارات التي تشكل جوانبها زوايا داخلية متحالفة ومتطابقة.

تدريب على اختبار معياري

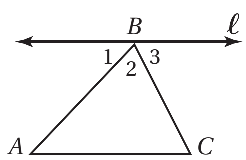
29) أي الحقائق التالية كافٍ لإثبات أن المستقيم ℓ يوازي $\overline{AC}$؟

A $\angle 1 \cong \angle 3$

B $\angle 3 \cong \angle C$

C $\angle 1 \cong \angle C$

D $\angle 2 \cong \angle A$



مراجعة تراكمية

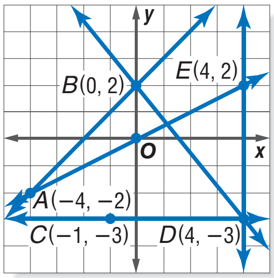
اكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع الذي يحقق الشروط التالية: (الدرس 4-2)

30) $m = 0.3$، المقطع الصادي يساوي -6.

31) $m = \frac{1}{3}$ ، ويحوي $(-3 , -15)$.

32) يحوي $(5 , 7)$ و $(-3 , 11)$.

33) عمودي على $y = \frac{1}{2}x - 4$، ويحوي $(4 , 1)$.



أوجد ميل كل مستقيم في الشكل المجاور. (الدرس 3-2)

34) $\overleftrightarrow{CD}$

35) $\overleftrightarrow{AB}$

36) $\overleftrightarrow{AE}$

37) أي مستقيم عمودي على $\overleftrightarrow{BD}$.

38) **نجارة:** يحتاج نجار أن يقطع قطعتي خشب بزاويتين متلائمتين ليشكل زاوية لإطار صورة. ما العلاقة بين الزاويتين اللتين سيستعملهما حتى تكون زاوية الإطار $90°$ ؟

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضروريّة: استعمل قانون المسافة لتجد البعد بين كل نقطتين فيما يلي:

39) $(2، 7)، (7، 19)$

40) $(8، 0)، (1، 2)$

41) $(-6، -4)، (-8، 2)$

استكشاف
2-6

معمل الحاسبة البيانيّة

نقاط التقاطع

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية لتحدد نقاط تقاطع قاطع مستعرض مع مستقيمين متوازيين.

مثال

المستقيمان المتوازيان ℓ و m يقطعهما المستقيم المستعرض t. إذا كانت معادلات ℓ, m, t هي $y=\frac{1}{2}x-4,\ y=\frac{1}{2}x+6,\ y=-2x+1,$ على الترتيب، فاستعمل الحاسبة البيانية لإيجاد نقاط تقاطع ℓ و m مع t.

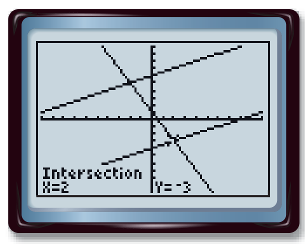
الخطوة 1: أدخل المعادلات في Y= list وارسم في standard viewing window.

KEYSTROKES: [Y=] .5 [X,T,θ,n] [−] 4 [ENTER] .5 [X,T,θ,n] [+] 6 [ENTER] −2 [X,T,θ,n] [+] 1 [Zoom] 6

الخطوة 2: استعمل قائمة CALC حتى تجد نقاط التقاطع.

- أوجد نقاط تقاطع ℓ و t.

KEYSTROKES: [2nd] [CALC] 5 [▼] [ENTER] [ENTER] [ENTER]

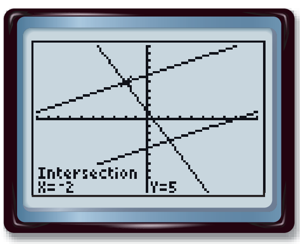


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

المستقيمان ℓ و t يتقاطعان في $(2\ ,\ -3)$.

- أوجد نقاط تقاطع m و t.

KEYSTROKES: [2nd] [CALC] 5 [▼] [ENTER] [ENTER] [ENTER]



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

المستقيمان m و t يتقاطعان في $(-2\ ,\ 5)$.

تمارين

المستقيمان المتوازيان a و b يقطعهما المستقيم المستعرض t. استعمل الحاسبة البيانية لتحديد نقاط تقاطع t مع a و b. قرّب إلى أقرب عُشر.

1) $a: y=2x-10$
$b: y=2x-2$
$t: y=-\frac{1}{2}x+4$

2) $a: y=-x-3$
$b: y=-x+5$
$t: y=x-6$

3) $a: y=-3x+1$
$b: y=-3x-3$
$t: y=\frac{1}{3}x+8$

2-6 الأعمدة والمسافة
Perpendiculars and Distance

الأفكار الرئيسة:
- أجد المسافة بين نقطة ومستقيم.
- أجد المسافة بين مستقيمين متوازيين.

استعد

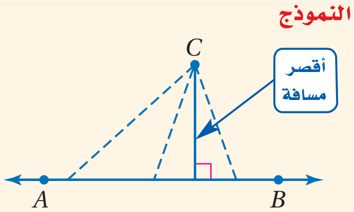
عند تركيب الرفوف، يجب أن تكون أكتاف الرفوف الرأسية متوازية حتى تصطف الرفوف. إحدى الطرائق أن تُثبت أحد أكتاف الرفوف، ثم تستعمل زاوية النجار لتقيس وتحدد نقطتين أو أكثر على المسافة نفسها من الكتف الأولى. بعد ذلك يمكنك أن تثبت الكتف الثانية حسب الإشارات التي حددتها.

البعد بين نقطة ومستقيم تعلّمت في الدرس 5–2، أنه إذا كان المستقيمان عموديين على مستقيم آخر، فإنهما متوازيان. وقد استعملت زاوية النجار لرسم مستقيم عمودي على كل كتف. وهذا يؤكد أن الأكتاف متوازية. هذا مثال على استعمال المستقيمات والقطع المستقيمة العمودية لتحديد المسافة. وأقصر قطعة مستقيمة من نقطة إلى مستقيم هي القطعة المستقيمة العمودية من النقطة إلى المستقيم.

مفاهيم أساسية — البعد بين نقطة ومستقيم

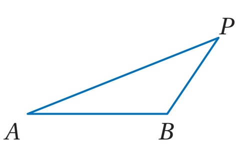
التعبير اللفظي: البعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه هو: طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة.

النموذج

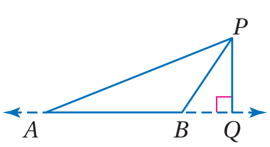


مثال — بُعد نقطة عن مستقيم

1 ارسم القطعة المستقيمة التي تمثّل المسافة من P إلى $\overleftrightarrow{AB}$.

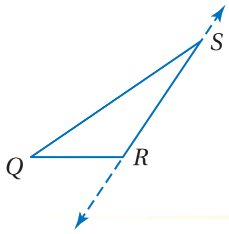


بما أن المسافة بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه هي طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة، مُدّ $\overline{AB}$ وارسم $\overline{PQ}$ بحيث تكون $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{PQ}$.



تحقق من فهمك

1) ارسم القطعة المستقيمة التي تمثل العمود النازل من Q على $\overleftrightarrow{RS}$.

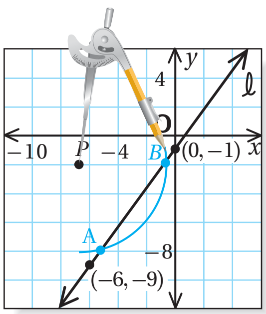


عندما ترسم قطعة مستقيمة عمودية من نقطة إلى مستقيم، يمكنك أن تتأكد أنه عمودي باستعمال عملية رسم مستقيم عمودي على مستقيم من نقطة لا تقع عليه.

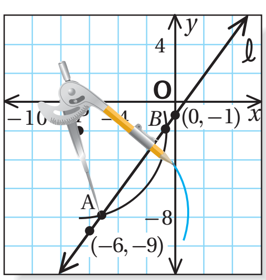
مثـــال رسم قطعة مستقيمة عمودية

2 هندسة إحداثية : المستقيم ℓ يمر بالنقطتين $(-6 , -9)$ و $(0 , -1)$. ارسم مستقيمًا عموديا على المستقيم ℓ ويمر بالنقطة $P(-7 , -2)$ التي لا تقع على ℓ. ثم أوجد طول العمود من P إلى ℓ.

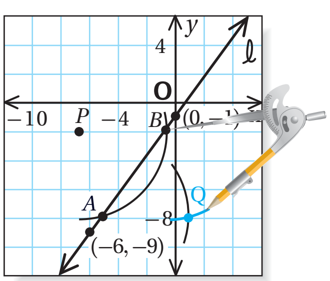
الخطوة 1 ارسم المستقيم ℓ والنقطة P. ركّز الفرجار على النقطة P. ثم افتحه فتحة مناسبة بحيث إذا رُسم قوس فإنه يقطع ℓ في نقطتين. سمِّ نقطتي التقاطع A و B.



الخطوة 2 ركّز الفرجار على النقطة A ثم ارسم قوسًا تحت المستقيم ℓ.
(إرشاد: بفتحة فرجار أكبر من $\frac{1}{2}AB$)



الخطوة 3 باستعمال فتحة الفرجار نفسها في الخطوة 2، ركّز الفرجار على النقطة B وارسم قوسًا يقطع القوس الأول في الخطوة 2 . سمِّ نقطة التقاطع Q.



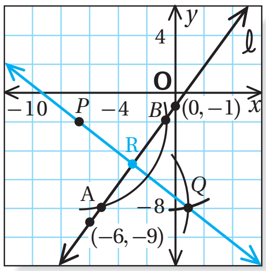
إرشـادات

البعد

لاحظ أن بُعد نقطة عن المحور السيني يمكن إيجاده بتحديد الإحداثي الصادي لها.

أمّا بُعد نقطة عن المحور الصادي فيمكن إيجاده بتحديد الإحداثي السيني.

الخطوة 4: ارسم $\overleftrightarrow{PQ}$ بحيث يكون $\overleftrightarrow{PQ} \perp \ell$. سمِّ نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{PQ}$ و ℓ بـ R. استعمل ميلي $\overleftrightarrow{PQ}$ و ℓ لتتحقق من تعامد المستقيمين.



القطعة المستقيمة المرسومة من النقطة $P(-7، -2)$ والعموديّة على المستقيم ℓ، تقطع المستقيم ℓ عند $R(-3، -5)$.
استعمل قانون المسافة لتجد المسافة بين النقطة P والمستقيم ℓ.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-7-(-3))^2 + (-2-(-5))^2}$$
$$= \sqrt{25} = 5$$

بُعد P عن ℓ يساوي 5 وحدات.

تحقق من فهمك

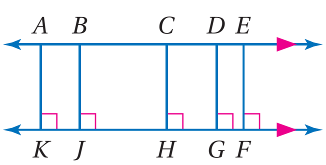
2) المستقيم ℓ يمر بالنقطتين $(2 , 1)$ و $(5 , 4)$. ارسم مستقيمًا عموديًّا على ℓ ويمر بالنقطة $P(1 , 7)$. ثم أوجد المسافة من P إلى ℓ.

إرشادات

قياس أقصر مسافة

يمكنك استعمال أدوات مثل ركن قطعة ورق أو ركن كتابك لتساعدك في رسم زاوية قائمة.

البعد بين مستقيمين متوازيين: يكون المستقيمان متوازيين إذا كان البعد بينهما ثابتًا دائمًا. والبعد بين مستقيمين متوازيين هو طول القطعة المستقيمة العمودية على كل منهما وطرفاها على المستقيمين.

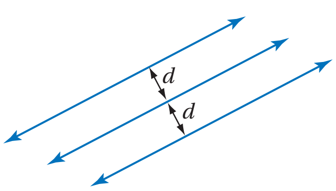


$AK = BJ = CH = DG = EF$

مفاهيم أساسية **البعد بين مستقيمين متوازيين**

البعد بين مستقيمين متوازيين هو البعد بين أحد المستقيمين وأي نقطة على المستقيم الآخر.

المحل الهندسي هو مجموعة النقاط التي تحقق شرطًا معلومًا. ويمكن وصف مستقيمين متوازيين بالمحل الهندسي لنقاط في المستوى تبعد البعد نفسه عن مستقيم معلوم.



نظرية 2.9

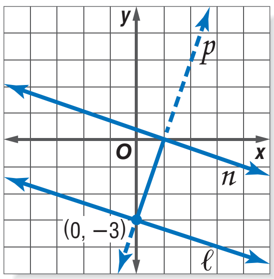
في المستوى، المستقيمان اللذان يبعد كل منهما بعدًا ثابتًا عن مستقيم ثالث يكونان متوازيين.

ستبرهن نظرية 9–2 في السؤال 19.

مثـــال البُعد بين مستقيمين

3 أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين ℓ و n إذا كانت معادلتاهما $y = -\frac{1}{3}x - 3$ و $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$، على الترتيب.

ستحتاج إلى حل نظام من المعادلات لتجد طرفي القطعة المستقيمة العمودية على كل من ℓ و n. ميل كل من ℓ و n يساوي $-\frac{1}{3}$.



- اكتب معادلة المستقيم p العمودي على ℓ و n. ميل p يساوي مقلوب $-\frac{1}{3}$، ويخالفه في الإشارة أي 3. استعمل المقطع الصادي للمستقيم ℓ، والنقطة $(0, -3)$، كنقطة طرف للقطعة المستقيمة العمودية.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة النقطة والميل

$y - (-3) = 3(x - 0)$ لأن $x_1 = 0$، $y_1 = -3$، $m = 3$

$y + 3 = 3x$ بالتبسيط

$y = 3x - 3$ بطرح 3 من كل طرف

- ثم استعمل نظامًا من المعادلات لتحديد نقطة تقاطع المستقيمين n و p.

$n:\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

$p:\ y = 3x - 3$

$-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = 3x - 3$ بوضع $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ بدلاً من y في المعادلة الثانية

$-\frac{1}{3}x - 3x = -3 - \frac{1}{3}$ بجمع الحدود المتشابهة في كلا الطرفين

$-\frac{10}{3}x = -\frac{10}{3}$ بتبسيط كلا الطرفين

$x = 1$ بقسمة كلا الطرفين على $-\frac{10}{3}$

حل بالنسبة لـ y.

$y = 3(1) - 3$ بتعويض $x = 1$ في معادلة p.

$= 0$ بالتبسيط.

إذن نقطة التقاطع هي $(1, 0)$.

- بعد ذلك، استعمل قانون المسافة حتى تجد المسافة بين النقطتين: $(0, -3)$ و $(1, 0)$.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ قانون المسافة

$= \sqrt{(0 - 1)^2 + (-3 - 0)^2}$ $x_2 = 0$، $x_1 = 1$، $y_2 = -3$، $y_1 = 0$

$= \sqrt{10}$ بالتبسيط

إذن البعد بين المستقيمين يساوي $\sqrt{10}$ أو 3.16 وحدة تقريبًا.

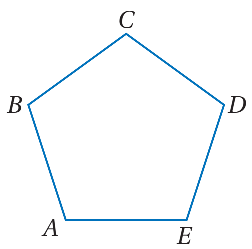
تحقق من فهمك

3) أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين a و b إذا كانت معادلتاهما $x + 3y = 6$ و $x + 3y = -14$، على الترتيب.

تأكد

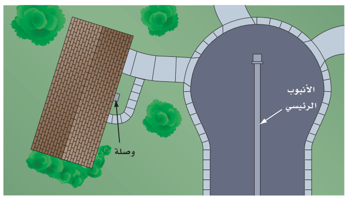
مثال 1 (ص 111)

1) انقل الشكل. ثم ارسم القطعة المستقيمة التي تمثّل المسافة بين النقطة D و $\overleftrightarrow{AE}$.



مثال 2 (ص 112)

2) **بنى تحتية :** غالبًا ما تقوم مؤسسة المياه بتزويد البيوت بالمياه، وذلك بربط المنزل بأقصر أنبوب للمياه مع مصدر المياه الرئيس في الشارع. انقل الشكل، ثم ارسم الوضع المناسب للأنبوب.



مثال 3 (ص 114)

3) **هندسة إحداثية :** يحوي المستقيم ℓ النقطتين $(0, 0)$ و $(2, 4)$. ارسم مستقيمًا عموديًّا على ℓ، ويمر بالنقطة $A(2, -6)$. ثم أوجد بعد النقطة A عن المستقيم ℓ.

4) أوجد المسافة بين المستقيمين المتوازيين إذا كانت معادلتاهما:

$$y = \frac{3}{4}x - 1$$

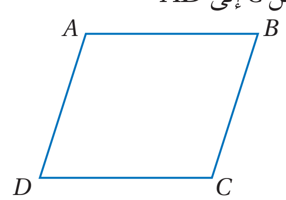
$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$$

تمارين ومسائل

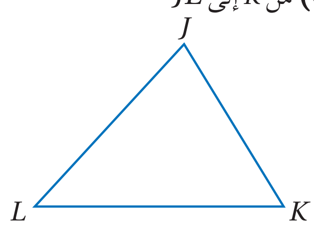
إرشادات للتمارين	
للأسئلة	انظر الأمثلة
9–7	1
12–10	2
16 ،13	3
18 ،17	4

ارسم القطعة المستقيمة التي تمثل البعد المطلوب:

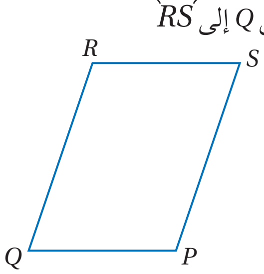
5) من C إلى $\overleftrightarrow{AD}$



6) من K إلى $\overleftrightarrow{JL}$



7) من Q إلى $\overleftrightarrow{RS}$



هندسة إحداثية : ارسم مستقيمًا عموديًّا على ℓ ويمر بالنقطة P. ثم أوجد بعد النقطة P عن المستقيم ℓ:

8) المستقيم ℓ يمر بالنقطتين $(-3, 0)$ وَ $(3, 0)$. وإحداثيًّا P هما $(4, 3)$.

9) المستقيم ℓ يمر بالنقطتين $(0, -2)$ وَ $(1, 3)$. وإحداثيًّا P هما $(-4, 4)$.

أوجد المسافة بين كل زوج من المستقيمات المتوازية إذا كانت معادلتاهما:

10) $y = -3$ ، $y = 1$

11) $x = 4$ ، $x = -2$

12) $y = 2x + 2$ ، $y = 2x - 3$

13) $y = \frac{1}{3}x - 3$ ، $y = \frac{1}{3}x + 2$

14) $x = 8.5$ ، $x = -12.5$

15) $y = 15$ ، $y = -4$

أوجد المسافة بين كل مستقيمين متوازيين إذا كانت معادلتاهما:

(16 $y = 4x$
$y = 4x - 17$

(17 $y = 2x - 3$
$2x - y = -4$

(18 $y = -\frac{3}{4}x - 1$
$3x + 4y = 20$

(19 **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 2.9.

ارسم كل مستقيم. وارسم قطعة مستقيمة عمودية على المستقيم وتمر بالنقطة المعطاة، ثم أوجد البعد بين النقطة والمستقيم:

(20 $y = 5 , (-2 , 4)$

(21 $y = 2x + 2 , (-1 , -5)$

(22 $2x = 3y - 9 , (2 , 0)$

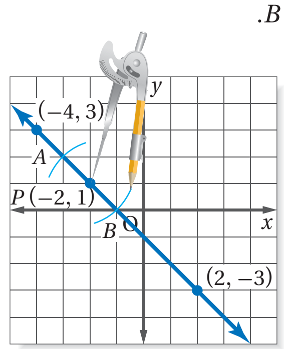
(23 **بناء:** عند تلييس جدار غالبًا ما يستعمل العمال الخيط الشاقولي. والخيط الشاقولي عبارة عن خيط مع ثقل يُسمى الشاقول مربوط بأحد طرفيه. ويعلّق طرف الخيط الشاقولي الآخر في نقطة. ويستعمل للتأكد من أن اللياسة مستوية على الجدار الرأسي. كيف يمكن أن يساعد الخيط الشاقولي في إيجاد البعد بين نقطة وأرضية الغرفة.

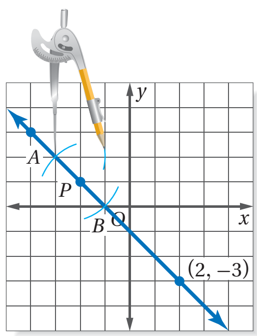
إنشاءات: المستقيم ℓ يمر بالنقطتين $(3 , -4)$ و $(-3 , 2)$. والنقطة $P(-2 , 1)$ تقع على المستقيم ℓ. تتبّع الخطوات التالية وأجب عن السؤال 24.

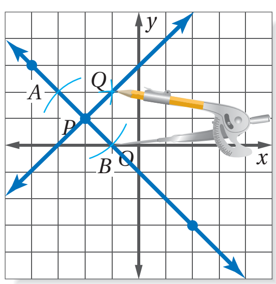
الخطوة 1: ارسم المستقيم ℓ وعيّن النقطة P، ثم ركّز الفرجار في النقطة P. باستعمال فتحة الفرجار نفسها، ارسم قوسين عن يسار ويمين النقطة P. سمِّ النقطتين A و B.

الخطوة 2: افتح الفرجار فتحة أكبر من AP. ركّز الفرجار في النقطة A وارسم قوسًا فوق المستقيم ℓ.

الخطوة 3: باستعمال فتحة الفرجار نفسها، ركّز الفرجار في النقطة B وارسم قوسًا يقطع القوس السابق، سمِّ نقطة التقاطع Q. ثم ارسم $\overleftrightarrow{PQ}$.







مسائل مهارات التفكير العليا

(24 ما العلاقة بين المستقيمين ℓ و $\overleftrightarrow{PQ}$؟ وضّح تخمينك باستعمال ميلي المستقيمين.

(25 كرر النشاط أعلاه باستعمال مستقيم آخر ونقاط عليه.

(26 **تبرير:** قارن بين ثلاث طرائق مختلفة يمكنك استعمالها لتوضيح أن مستقيمين في مستوى متوازيان.

تحدٍّ: **للأسئلة 27–32، ارسم شكلاً يمثل كل وصف مما يلي:**

(27 النقطة P متساوية البعد عن مستقيمين متوازيين.

(28 النقطة P متساوية البعد عن مستقيمين متقاطعين.

(29 النقطة P متساوية البعد عن مستويين متوازيين.

(30 النقطة P متساوية البعد عن مستويين متقاطعين.

(31 مستقيم متساوي البعد عن مستويين متوازيين.

(32 مستوى متساوي البعد عن مستويين آخرين متوازيين.

33) اكتب: ارجع إلى المعلومات حول تركيب الرفوف في صفحة 111 لتوضيح علاقة البعد بين خطين متوازيين مع تركيب رفوف جديدة. ضمّن إجابتك توضيح لماذا يكون وضع عدة إشارات لنقاط متساوية البعد عن الكتف الأولى؟ مؤكدًا على أن الرفين متوازيان، ثم صف وضعًا آخر في البيت يحتاج إلى توازي عنصرين أو أكثر.

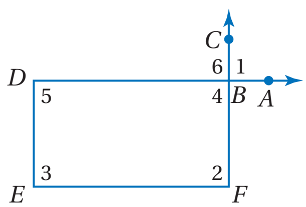
تدريب على اختبار معياري

34) القطعتان $\overline{AB}$ وَ $\overline{BD}$ متعامدتان والقطعتان $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ تنصف كل منهما الأخرى في النقطة X.
إذا كان $AB = 16$ و $CD = 20$، فما طول $\overline{BD}$ ؟

A 6 **B** 8 **C** 10 **D** 18

مراجعة تراكمية

من المعلومات المعطاة، حدّد المستقيمات المتوازية، إن وُجدت، واذكر المسلمة أو النظرية التي تبرر إجابتك: (الدرس 5-2)

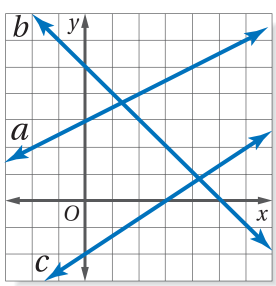


35) $\angle 5 \cong \angle 6$.

36) $\angle 6 \cong \angle 2$.

37) $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتان.

اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع لكل مستقيم. (الدرس 4-2)



38) a **39)** b **40)** c

41) عمودي على المستقيم a، ويحوي النقطة $(-4 ، -1)$.

42) يوازي المستقيم c، ويحوي النقطة $(2، 5)$.

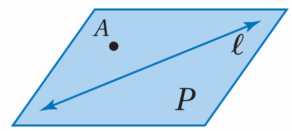
43) حاسوب: في عام 1426 كانت نسبة مستخدمي شبكة الإنترنت في المملكة العربية السعودية حوالي 11%، وبعد سنتين ارتفعت النسبة لتصل إلى 20%، إذا استمر معدل التغير هذا ثابتًا فقدّر في أي سنة ستكون نسبة المشتركين 50 %. (الدرس 3-2)

معمل الهندسة

الهندسة غير الإقليدية

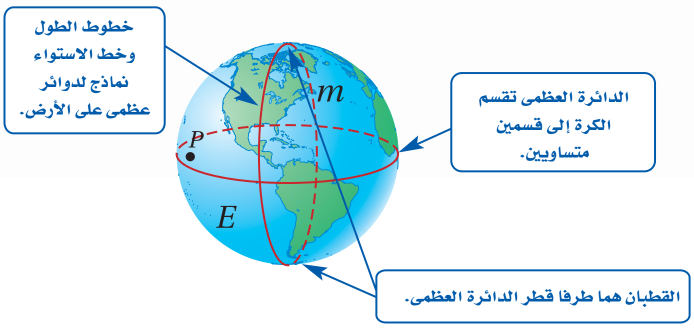
ما درسته في هذا الكتاب حتى الآن هو **الهندسة الإقليدية المستوية**، وتعتمد على نظام من النقاط والمستقيمات والمستويات. أمّا **الهندسة الكروية** فهي نظام من نقاط، ودوائر عظمى (مستقيمات)، وسطوح كرويّة (مستويات). وهي نوع من **الهندسات غير الإقليدية**. وقد وضع البابليون والعرب والإغريق الكثير من مفاهيم الهندسة الكروية، وذلك لدراسة الفلك ولقياس الزمن بدقة.

الهندسة الإقليدية المستوية

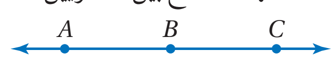
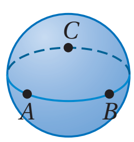


المستوى P يحوي المستقيم ℓ
والنقطة A لا تقع على ℓ.

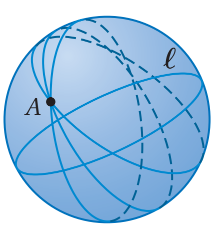
الهندسة الكروية

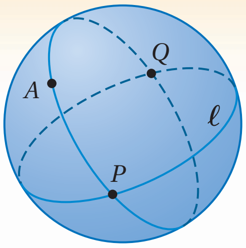


والجدول التالي يبين أوجه الشبه والاختلاف بين المستقيمات في نظام الهندسة الإقليدية المستوية والمستقيمات (الدوائر العظمى) في الهندسة الكروية.

الهندسة الإقليدية المستوية المستقيمات في المستوى	الهندسة الكروية الدوائر العظمى (المستقيمات) على الكرة
1) القطعة المستقيمة هي أقصر مسار بين نقطتين.	1) قوس من دائرة عظمى هو أقصر مسار بين نقطتين.
2) يمر مستقيم وحيد بأي نقطتين.	2) تمر دائرة عظمى وحيدة بأي نقطتين غير قطبيتين.
3) يمتد المستقيم بلا نهاية في الاتجاهين.	3) الدائرة العظمى محدودة وتعود إلى نقطة البداية الأصلية.
4) إذا كانت ثلاث نقاط على استقامة واحدة، فإن واحدة منها فقط تقع بين الأُخريين.  B تقع بين A و C.	4) إذا كانت ثلاث نقاط على استقامة واحدة، فإنّ كل واحدة منها تقع بين النقطتين الأُخريين. A تقع بين B و C. B تقع بين A و C. C تقع بين A و B. 

المسلمات الأربع الأولى لإقليدس وما يتعلق بها من نظريات تبقى صحيحة في الهندسة الكروية، ولكن النظريات التي تعتمد على مسلمة التوازي (المسلمة 5) يمكن أن تكون غير صحيحة.
ففي الهندسة الإقليدية، المستقيمات المتوازية لا تتقاطع. وفي الهندسة الكروية، سطح الكرة هو المستوى، والدائرة العظمى تمثل مستقيمًا. وكل دائرة عظمى تحتوي A تتقاطع مع ℓ. لذلك، لا يوجد خط يمر بالنقطة A ويوازي ℓ.



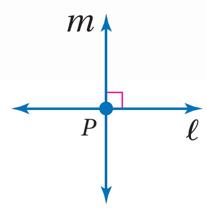


تتقاطع كل دائرة عظمى في سطح كرة مع أي دائرة عُظمى أخرى على سطح هذه الكرة في نقطتين بالضبط. ففي الشكل المجاور، الدائرة التي تمر في النقطة A تقطع الدائرة ℓ في النقطتين P و Q.
إذا قسمت دائرتان عظميان سطح الكرة إلى أربع مناطق متطابقة، فإن الدائرتين متعامدتان عند نقطتي تقاطعهما. وكل دائرةِ طولٍ على سطح الأرض تتقاطع مع خط الاستواء في زاوية قائمة.

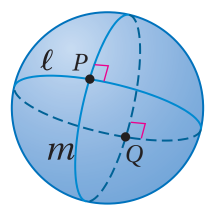
مثال مقارنة المستوى والهندسة الكروية

لكل خاصية في الهندسة الإقليدية المستوية، اكتب العبارة المقابلة في الهندسة الكروية:

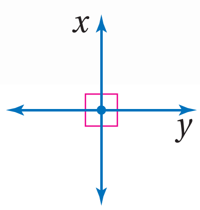
a) المستقيمان المتعامدان يتقاطعان في نقطة واحدة.



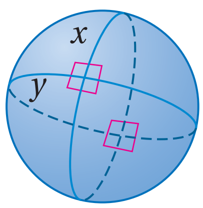
تتقاطع الدائرتان العظميان المتعامدتان في نقطتين.



b) المستقيمان المتعامدان يكوّنان أربع زوايا قائمة.



تكوّن الدائرتان العظميان ثماني زوايا قائمة.



تدريبات

لكل خاصية من الخصائص التالية في الهندسة الإقليديّة المستوية، اكتب العبارة المقابلة في الهندسة الكروية:

1) المستقيم يمتدّ من جهتيه بلا نهاية.

2) القطعة المستقيمة أقصر مسار بين نقطتين.

3) المستقيمان اللذان لا يتقاطعان في أي نقطة يكونان متوازيين.

4) المستقيمات المتوازية لها عدد غير منتهٍ من الأعمدة المشتركة.

إذا كانت النقاط الكروية ليست نقاطًا قطبية، فحدّد ما إذا كانت كل من العبارات الصحيحة التالية في الهندسة الإقليدية المستوية صحيحةً أيضًا في الهندسة الكروية. وإذا كانت خطأ فوضّح تبريرك.

5) كل نقطتين مختلفتين تحددان مستقيمًا واحدًا فقط.

6) إذا كانت ثلاث نقاط على استقامة واحدة، فإن نقطة واحدة فقط تقع بين النقطتين الأخريين.

7) إذا كانت النقطة P لا تقع على المستقيم ℓ، فإنّه يوجد مستقيم واحد فقط يوازي ℓ ويمر بالنقطة P.

اقرأ

الشروط الضرورية الكافية

نعلم جميعًا أن الماء شرط ضروريّ لتبقى الأسماك حيةً ، ومع ذلك فهو شرط غير كافٍ. فتحتاج الأسماك مثلاً إلى الطعام أيضًا لتبقى حيةً.
والشروط الضرورية والكافية مهمّة في الرياضيات. فخاصّية تكوُّن شكل من أربعة أضلاع شرط ضروريّ لكي يكون الشكل مربّعًا، ولكنه لا يكفي وحده لكي يكون الشكل مربّعًا. فشبه المنحرف مكوّن من أربعة أضلاع ولكنّه ليس مربّعًا.

الشرط	التعريف	الأمثلة
الضروري	يكون الشرط A ضروريًّا للشرط B، إذا وفقط إذا كان خطأ الشرط A أو عدم توافره يؤدي إلى خطأ أو عدم توافر الشرط B.	إنَ كَوْنَ كلِّ ضلعين متقابلين متوازيين شرط ضروري لكي يكون الشكل مربّعًا.
الكافي	يكون الشرط A كافيًا للشرط B، إذا وفقط إذا كانت صحة الشرط A أو توافره يؤدي إلى صحة أو توافر الشرط B.	إنَ كَوْنَ الشكل مربعًا شرط كافٍ لكي يكون الشكل مستطيلاً.

اقرأ وتعلّم

حدّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أو خطأ. وإذا كانت خطأ فأعطِ مثالاً مضادًا:

1) أن يكون الشكل مربّعًا شرط ضروري لكي يكون مستطيلاً.

2) أن يكون الشكل مستطيلاً شرط ضروري لكي يكون مربّعًا.

3) أن يكون العدد أكبر من 15 شرط ضروري لكي يكون أقل من 20.

4) أن يكون العدد أقل من 12 شرط كافٍ لكي يكون أقل من 20.

5) أن يكون الشيء يمشي على رجلين شرط كافٍ لكي يكون إنسانًا.

6) تنفّس الهواء شرط ضروري لكي يكون الشيء إنسانًا.

7) أن يكون المستطيل متطابق الأضلاع شرط ضروري وكافٍ لكي يكون مربّعًا.

حدّد ما إذا كان الشرط I ضروريًّا أو كافيًا أو ضروريًّا وكافيًا للشرط II. وضح إجابتك:

8) I. نقطتان معلومتان.
II. يمكن كتابة معادلة مستقيم.

9) I. مستويان متوازيان.
II. المستويان لا يتقاطعان.

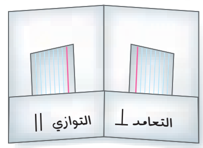
10) I. زاويتان متطابقتان.
II. الزاويتان داخليتان متبادلتان.

الفصل 2

دليل الدراسة والمراجعة

المَطْوِيّاتُ مُنَظِّـمُ أفْكـار

استعد



تأكّد أنك دوّنت المفاهيم الأساسية في مطويتك.

مفاهيم أساسيّة

المستقيم المستعرض (الدرسان 2-1 و 2-2)

- إذا قطع قاطع مستعرض مستقيمين متوازيين فإن جميع العبارات التالية تكون صحيحة:
  - كل زاويتين داخليتين متبادلتين متطابقتان.
  - كل زاويتين داخليتين متحالفتين متكاملتان.
  - كل زاويتين خارجيتين متبادلتين متطابقتان.

الميل (الدرسان 2-3 و 2-4)

- الميل m للمستقيم الذي يمر بالنقطتين $(x_1، y_1)$ و $(x_2، y_2)$ يُعطى بالعلاقة: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ و $x_1 \neq x_2$.

إثبات توازي مستقيمين (الدرس 2-5)

- إذا قطع قاطع مستعرض مستقيمين وكانت إحدى العبارات التالية صحيحة فإن المستقيمين متوازيان:
  - زاويتان خارجيتان متبادلتان متطابقتان.
  - زاويتان داخليتان متحالفتان متكاملتان.
  - زاويتان داخليتان متبادلتان متطابقتان.
- في المستوى، إذا كان مستقيمان عموديين على مستقيم ثالث فإنهما متوازيان.

البعد (الدرس 2-6)

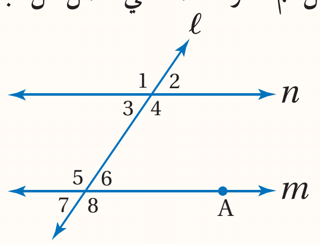
- البعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه يساوي طول القطعة العمودية من النقطة إلى المستقيم.
- البعد بين مستقيمين متوازيين هو المسافة بين أحد المستقيمين وأي نقطة على المستقيم الآخر.

المفردات الأساسية

مستويان متوازيان (ص 74)	زاويتان متناظرتان (ص 76)
المستقيم المستعرض (ص 75)	الميل (ص 87)
زاويتان خارجيتان متبادلتان (ص 76)	معدل التغير (ص 88)
زاويتان داخليتان متبادلتان (ص 76)	صيغة الميل والمقطع (ص 95)
زاويتان داخليتان متحالفتان (ص 76)	صيغة النقطة والميل (ص 96)

اختبر مفرداتك

ارجع إلى الشكل ثم اختر الكلمة التي تكمل كل عبارة مما يلي:



1) الزاويتان 4 و 5 (متحالفتان، متبادلتان) داخليتان.

2) بعد النقطة A عن المستقيم n يساوي طول القطعة المستقيمة (العمودية، الموازية) على المستقيم n من النقطة A.

3) إذا كانت $\angle 4$ و $\angle 6$ متكاملتين، فإنّ المستقيمين m و n (متوازيان، متقاطعان) .

4) المستقيم ℓ هو (الميل والمقطع، المستقيم المستعرض) للمستقيمين n و m.

5) $\angle 1$ و $\angle 8$ زاويتان (داخليتان متبادلتان، خارجيتان متبادلتان).

6) إذا كان $m \parallel n$ فإن $\angle 3$ ، $\angle 6$ زاويتان (متكاملتان، متطابقتان).

7) الزاويتان 5 و 3 زاويتان داخليتان (متحالفتان، متبادلتان) .

8) إذا كانت $\angle 2 \cong \angle 7$، فإن المستقيمين n و m مستقيمان (متخالفان، متوازيان).

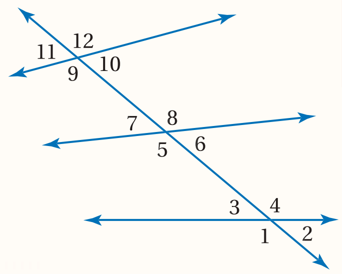
الفصل 2

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

2-1 المستقيمان المتوازيان والمستقيمات المستعرضة (الصفحات: 79-74)

حدد ما إذا كان كل زوج من الزوايا التالية: متبادلتين داخليتين، متبادلتين خارجيتين، متناظرتين، داخليتين متحالفتين.



9) $\angle 3$ و $\angle 6$

10) $\angle 3$ و $\angle 5$

11) $\angle 2$ و $\angle 7$

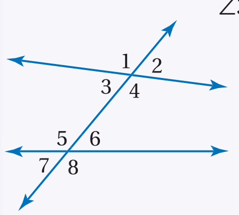
12) $\angle 4$ و $\angle 8$

13) نسور: تم متابعة نسرين، الأول على ارتفاع 8500 قدم ويطير من الشمال إلى الجنوب، أما النسر الثاني فكان على ارتفاع 12000 قدم ويطير من الغرب إلى الشرق. صف نوعي المستقيمين اللذين يكونان مساري النسرين.

مثال 1: حدد ما إذا كان كل زوج من الزوايا التالية: داخليتين متبادلتين، خارجيتين متبادلتين، متناظرتين، داخليتين متحالفتين.

a) $\angle 3 ، \angle 7$ **b)** $\angle 4 ، \angle 6$

c) $\angle 2 ، \angle 7$ **d)** $\angle 3 ، \angle 6$



a) $\angle 7$ و $\angle 3$ متناظرتان.

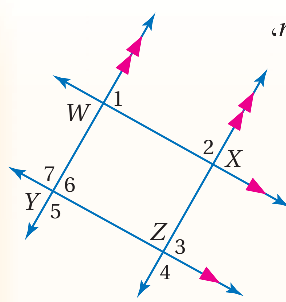
b) $\angle 4$ و $\angle 6$ داخليتان متحالفتان

c) $\angle 7$ و $\angle 2$ خارجيتان متبادلتان

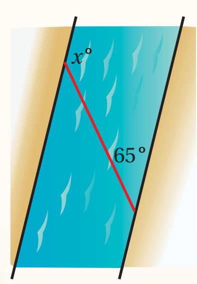
d) $\angle 3$ و $\angle 6$ متبادلتان داخليتان

2-2 الزوايا والمستقيمات المتوازية (الصفحات: 86-81)

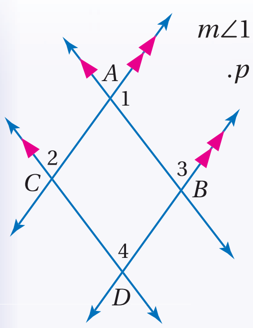
14) إذا كان $m\angle 1 = 3a + 40$، $m\angle 2 = 2a + 25$، $m\angle 3 = 5b - 26$، فأوجد a و b.



15) ركوب الزوارق: ليقطع النهر بأمان، عبر محمد النهر بزورقه بزاوية 65° مع حافته، كما في الشكل. فما قيمة الزاوية x التي يصل بها إلى الحافة الثانية للنهر؟



مثال 2: إذا كان $m\angle 1 = 4p + 15$ و $m\angle 3 = 3p - 10$، فأوجد قيمة p.



بما أن $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ فإن $\angle 1$ و $\angle 3$ متكاملتان حسب نظرية الزاويتين الداخليتين المتحالفتين.

$m\angle 1 + m\angle 3 = 180$	تعريف زاويتين متكاملتين
$(4p + 15) + (3p - 10) = 180$	بالتعويض
$7p + 5 = 180$	بالتبسيط
$7p = 175$	بالطرح
$p = 25$	بالقسمة

2 دليل الدراسة والمراجعة

2-3 ميل المستقيم (الصفحات: 93-87)

ارسم المستقيم الذي يحقق الشروط في كل مما يلي :

16) يمر بالنقطة $(2 , 3)$ ويوازي المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ حيث $A(-1 , 2)$ و $B(1 , 6)$.

17) يمر بالنقطة $(-2 , -2)$ وعمودي على $\overleftrightarrow{PQ}$ حيث $P(5 , 2)$ و $Q(3 , -4)$.

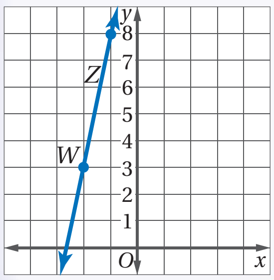
18) إذا تحرك محمد من النقطة $A(-3 , -5)$ إلى $B(4 , 3)$ وتحرك زيد من النقطة $(2 , -7)$ D إلى $C(-6 , 5)$. فحدّد إن كان المساران متوازيين، أو متعامدين، أو غير ذلك.

مثال 3 :
ارسم المستقيم الذي يمر بالنقطة $W(-2، 3)$ ويوازي $\overleftrightarrow{XY}$ حيث $X(3 , -4)$ و $Y(5 , 6)$.

ميل $\overleftrightarrow{XY} = \frac{6-(-4)}{5-3} = \frac{10}{2} = 5$

ميل المستقيم الذي يوازي $\overleftrightarrow{XY}$ ويحوي $W(-2، 3)$ يساوي أيضًا 5؛ لأن المستقيمين المتوازيين لهما الميل نفسه.

لرسم المستقيم:
ابدأ من $(-2 , 3)$.
تحرّك إلى الأعلى 5 وحدات، ثم تحرك وحدة واحدة نحو اليمين.
سم النقطة Z.
ارسم $\overleftrightarrow{WZ}$.



2-4 معادلة المستقيم (الصفحات: 100-95)

اكتب معادلة المستقيم بالصيغة المحددة التي تحقق الشروط في كل مما يلي:

19) $m = 2$، ويمر بالنقطة $(1 , -5)$
النقطة والميل

20) يمر بالنقطتين $(-3 , -7)$ ، $(9,1)$، الميل والمقطع

21) قيادة السيارات: تسير سيارة بسرعة 30 مترًا في الثانية، وبدأت تتباطأ بمعدل ثابت. وبعد ثانيتين، أصبحت سرعتها 16 مترًا في الثانية. اكتب معادلة تمثّل سرعة السيارة v بعد t ثانية. ثم استعمل المعادلة لتحدّد الزمن الذي تستغرقه السيارة حتى تقف.

مثال 4 :
اكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2 , -4)$ و $(-3 , 1)$ بصيغة الميل والمقطع.

أوجد ميل المستقيم.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ قانون الميل

$= \frac{1-(-4)}{-3-2}$ $(x_1، y_1) = (2, -4)$ ، $(x_2، y_2) = (-3, 1)$

$= \frac{5}{-5} = -1$ بالتبسيط

والآن استعمل صيغة النقطة والميل، وأي من النقطتين لتكتب المعادلة.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة النقطة والميل

$y - (-4) = -1(x - 2)$ $m = -1، (x_1، y_1) = (2، -4)$

$y + 4 = -x + 2$ بالتبسيط

$y = -x - 2$ بطرح 4 من كلا الطرفين

الفصل 2

دليل الدراسة والمراجعة

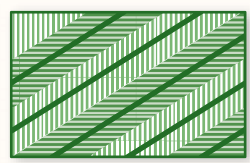
2-5 إثبات توازي المستقيمات (الصفحات: 102-109)

ارجع إلى الشكل عن اليسار. عيّن أي المستقيمات تكون متوازية إن وُجدت، إذا عُلمت المعلومات التالية. واذكر المسلمة أو النظرية التي تؤكد إجابتك.

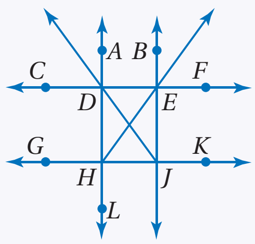
22) $\angle GHL \cong \angle EJK$

23) $m\angle ADJ + m\angle DJE = 180$

24) خداع بصري: وضح كيف يمكنك استعمال المنقلة لتبرهن أن الخطوط في شكل الخداع البصري أدناه متوازية.



مثال 5: إذا كان $\angle GHL \cong \angle ADE$، فحدّد أي المستقيمات، إن وجدت، متوازية.

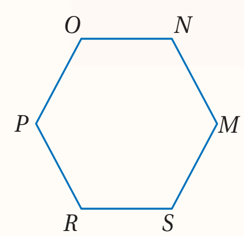


$\angle GHL$ و $\angle ADE$ زاويتان خارجيتان متبادلتان للمستقيمين $\overleftrightarrow{GK}$ و $\overleftrightarrow{CF}$. وبما أن الزاويتين متطابقتان فإن $\overleftrightarrow{GK}$ و $\overleftrightarrow{CF}$ متوازيان حسب نظرية الزاويتين الخارجيتين المتبادلتين.

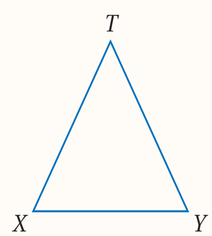
2-6 الأعمدة والمسافة (الصفحات: 111-117)

انقل كل شكل. وارسم القطعة المستقيمة التي تمثّل البعد المطلوب:

25) M إلى $\overleftrightarrow{RS}$

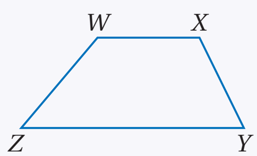


26) T إلى $\overleftrightarrow{XY}$



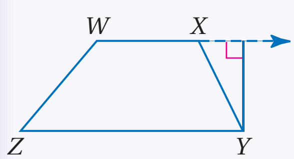
27) يقع أقصى حد شمالي للمدينة على المستقيم $y = 90$، ويقع أقصى حد جنوبي لها على المستقيم $y = -48$ أوجد المدى الطولي لهذه المدينة.

مثال 2: انقل الشكل. وارسم القطعة المستقيمة التي تمثل البعد من Y إلى $\overleftrightarrow{WX}$.



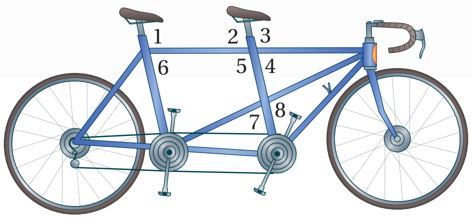
البعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه يساوي طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من النقطة المعطاة.

مدّ $\overline{WX}$ ثم ارسم القطعة المستقيمة العمودية على $\overline{WX}$ من Y.



اختبار الفصل

1) اختيار من متعدد: يظهر في شكل الدراجة دعامتان يثبت عليهما مقعدان وقضبان مستعرضة أخرى.



ما المصطلح الذي يصف $\angle 6$ و $\angle 5$ أفضل ما يمكن؟

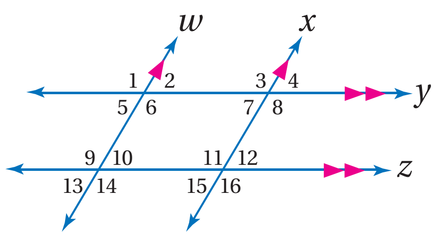
A زاويتان خارجيتان متبادلتان.

B زاويتان داخليتان متبادلتان.

C زاويتان داخليتان متحالفتان.

D زاويتان متناظرتان.

في الشكل التالي $m\angle 12 = 64$. أوجد قياس كل زاوية مما يلي:



2) $\angle 8$ **3)** $\angle 13$

4) $\angle 7$ **5)** $\angle 11$

6) $\angle 3$ **7)** $\angle 9$

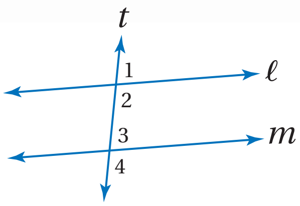
ارسم المستقيم الذي يحقق الشرط المعطى في كل مما يلي:

8) الميل $= -1$، ويمر بالنقطة $P(-2, 1)$.

9) يمر بالنقطة $Q(-1, 3)$ وعمودي على $\overleftrightarrow{AB}$ حيث $A(-2, 0)$ و $B(4, 3)$.

10) يمر بالنقطة $M(1, -1)$ ويوازي $\overleftrightarrow{FG}$ حيث $F(3, 5)$ و $G(-3, -1)$.

11) اختيار من متعدد: في الشكل أدناه، أي مما يلي لا يمكن أن يكون صحيحًا إذا عُلم أن $\ell \parallel m$ و $m\angle 1 = 73$؟



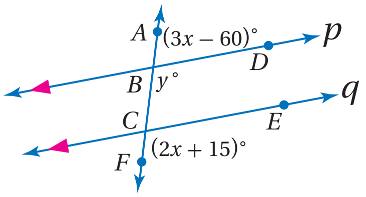
F $m\angle 4 > 73$

G $\angle 1 \cong \angle 4$

H $m\angle 2 + m\angle 3 = 180$

J $\angle 3 \cong \angle 1$

لحل الأسئلة 12–15، ارجع إلى الشكل أدناه. وأوجد كل قيمة مما يلي إذا كان $p \parallel q$:



12) x **13)** y

14) $m\angle FCE$ **15)** $m\angle BCE$

أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين:

16) $y = 2x + 9$, $y = 2x - 1$

17) $y = -x + 4$, $y = -x - 2$

18) إذا كانت معادلة مستقيم $y = -x - 4$ ومعادلة مستقيم آخر $y = -x$. فما البعد بينهما؟

فصل

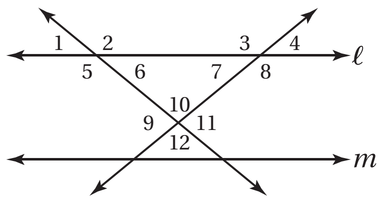
2

اختبار معياري تراكمي

للفصول 2-1

أجب عن كلٍّ من الأسئلة الآتية:

(1 إذا كانت $\angle 8 \cong \angle 3$.



أي النتائج التالية ليس صحيحًا؟

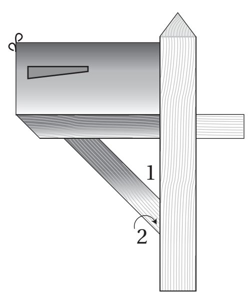
A $\angle 7 \cong \angle 4$

B $\angle 4$ و $\angle 8$ زاويتان متكاملتان.

C المستقيم ℓ يوازي المستقيم m.

D $\angle 5$ و $\angle 6$ زاويتان متكاملتان.

(2 يمثل الشكل المجاور صندوق البريد، أي المصطلحات التالية تصف $\angle 1$ و $\angle 2$؟



A زاويتان خارجيتان متبادلتان

B زاويتان داخليتان متبادلتان

C زاويتان داخليتان متحالفتان

D زاويتان متناظرتان

(3 **جبر:** أي مسألة مما يلي لا يمكن وصفها بدالّة خطيّة؟

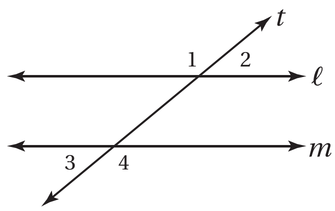
A المسافة المقطوعة بمعدل سرعة 70 كيلومترًا في الساعة لمدّة h من الساعات.

B مساحة المثلث القائم والمتطابق الساقين معطاة بدلالة طول أحد ساقيه.

C قيمة زكاة مال إذا كانت نسبة الزكاة 2.5 %

D إجمالي الراتب الأسبوعي بمعدل 7 ريالات في الساعة ولمدة t من الساعات.

(4 في الشكل أدناه، المستقيم المستعرض t يقطع المستقيمين المتوازيين ℓ و m.



أي العبارات التالية حول الزاويتين 1 و 4 صحيح؟

A $\angle 1 \cong \angle 4$

B $\angle 1$ تُتمّم $\angle 4$.

C $\angle 1$ تكمّل $\angle 4$.

D $\angle 1$ و $\angle 4$ زاويتان حادّتان.

(5 ما العبارة اللازمة في الخطوة 2 لإكمال هذا البرهان؟

المعطيات: $\frac{4x-6}{3} = 10$

المطلوب: إثبات أنّ $x = 9$

العبارات	المبررات
.1 $\frac{4x-6}{3} = 10$	**.1** معطيات
.2 $\underline{\quad ? \quad}$	**.2** خاصّية الضرب
.3 $4x - 6 = 30$	**.3** التبسيط
.4 $4x = 36$	**.4** خاصية الجمع
.5 $x = 9$	**.5** خاصية القسمة

A $3\left(\frac{4x-6}{3}\right) = 10$

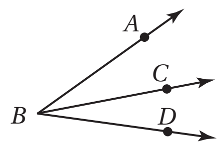
B $\frac{4x-6}{3} = 3(10)$

C $3\left(\frac{4x-6}{3}\right) = 3(10)$

D $4x - 6 = 30$

(6 **الشبكة:** النقطة E منتصف $\overline{DF}$. إذا كانت $DE = 8x - 3$ و $EF = 3x + 7$، فما قيمة x؟

7) إذا كانت $\angle ABC \cong \angle CBD$، فأي العبارات التالية صحيح؟



F $\overline{BC}$ تُنصف $\angle ABD$.

G $\angle ABD$ زاوية قائمة.

H $\angle ABC$ و $\angle CBD$ متكاملتان.

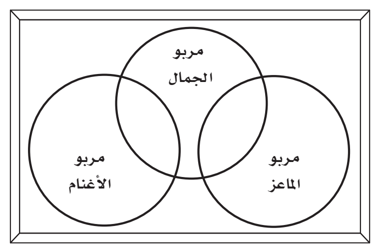
J $\overline{AB}$ و $\overline{BD}$ متعامدتان.

8) **جبر:** أي المقادير التالية يكافئ $4y^{3}8y^{-5}$ ؟

A $32y^{8}$ C) $32y^{-8}$

B $32y^{-2}$ D) $32y^{-15}$

9) اعتمادًا على الشكل التالي، أي النتائج التالية صحيح؟



A لا يوجد مربو جمال لديهم ماعز.

B لا يوجد مربو أغنام لديهم جمال.

C لا يوجد مربو ماعز لديهم أغنام.

D لا يوجد مربو حيوانات أليفة لديهم أكثر من حيوان أليف.

إرشادات للاختبار

سؤال 9 تذكّر أن المناطق المشتركة في شكل ڤن تمثّل العناصر المشتركة بين مجموعتين.

10) أي المعادلات التالية تصف المستقيم الذي يمر بالنقطتين (0، −2) و (4 ، 2)؟

A $y = \frac{1}{3}x - 4$ C $y = \frac{1}{3}x - 2$

B $y = -3x + 2$ D $y = 3x - 2$

11) ما الخاصية التي تبرر الخطوة الأولى في حل $3 \times \frac{14x+6}{8} = 18$ ؟

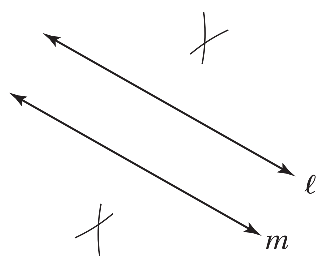
F خاصية الجمع

G خاصية القسمة

H خاصية التعويض

J خاصية التعدي

12) إذا كان المستقيم ℓ يوازي المستقيم m، فما أفضل وصف للإنشاء التالي؟



A مستقيم يعامد المستقيمين ℓ و m

B مستقيم يوازي المستقيمين ℓ و m

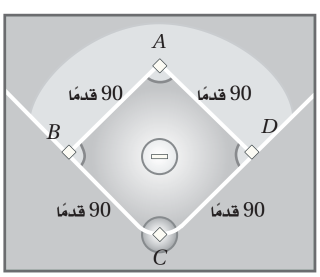
C مستقيم يقطع المستقيم ℓ

D مستقيم يطابق المستقيم m

أسئلة ذات مستوى متقدم

سجّل إجابتك على ورقة. ووضّح عملك.

13) ألقى خليل كرة من الركن A مسافة 120 قدمًا نحو C. هل ستصل الكرة الركن C؟ وإذا كانت الإجابة لا، فعلى بعد كم قدم من C تصل الكرة؟ وضّح وبين حساباتك التي تبرّر إجابتك.



هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟													
إذا لم تجب عن سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعُد إلى ...	2-2	2-1	مهارة سابقة	2-2	1-4	مهارة سابقة	2-5	مهارة سابقة	1-2	2-4	مهارة سابقة	1-1	مهارة سابقة

الفصل 3

تطابق المثلثات
Congruent Triangles

الأفكار العامة

- أصنف المثلثات.
- أطبق نظرية مجموع زوايا المثلث ونظرية الزاوية الخارجية.
- أحدد العناصر المتناظرة للمثلثات المتطابقة.
- أختبر تطابق مثلثين باستعمال الحالات: SSS, SAS, ASA, AAS
- أستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين والمتطابقة الأضلاع.
- أكتب براهين إحداثية.

المفردات

الزاوية الخارجية (ص 138)
exterior angle

البرهان التسلسلي (ص 139)
flow proof

نتيجة (ص 140)
corollary

المثلثات المتطابقة (ص 143)
congruent triangles

البرهان الإحداثي (ص 145)
coordinate proof

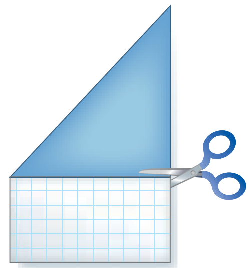
الربط مع الحياة:

مثلثات: المثلثان المتساويان في القياس و الشكل يمكن تشبيههما بجناحي فراشة.

المَطْويّـات
مُنَظِّــمُ أفكــار

المثلثات المتطابقة: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك. ابدأ بورقتي رسم بياني وقطعة من الورق المقوى.

1 **ضع** ورقة الرسم البياني فوق قطعة الورق المقوى، ثم اطو ورقة الرسم البياني قطريًا لتشكل مثلثًا، ثم قص الورق الزائد.



2 **ثبت** الحافة بسلك بحيث تشكل الأوراق دفترًا. واكتب عنوان الفصل على الصفحة الأولى، ثم اكتب رقم كل درس وعنوانه على صفحات الدفتر.

التهيئة للفصـــل 3

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المهارات السابقة الضرورية.

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية www.obeikaneducation.com

البديل 1

أجب عن الاختبار التالي. ارجع إلى «المراجعة السريعة» لمساعدتك في ذلك.

اختبار سريع

حل كل معادلة مما يلي: (مهارات سابقة)

1) $2x + 18 = 5$

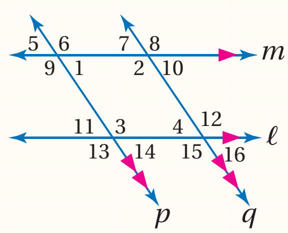
2) $3m - 16 = 12$

3) $\frac{2}{3}b + 9 = -15$

4) $6 = 2a + \frac{1}{2}$

5) اشترى مروان 4 سمكات زينة وأشياء أخرى ثمنها 20 ريالاً. فإذا أعطى صاحب المحل 25 ريالاً، فاكتب معادلة لإيجاد ثمن كل سمكة، ثم حلها. (مهارة سابقة)

سمِّ الزوايا المشار إليها فيما يلي، إذا كان $m \parallel \ell$ و $p \parallel q$ (الدرس 1-2)



6) الزوايا المطابقة للزاوية 8

7) الزوايا المكملة للزاوية 12

أوجد المسافة بين كل زوج من النقط الآتية إلى أقرب عُشر: (مهارة سابقة)

8) $(11, -8), (-3, -4)$

9) $(6, 8), (-4, 3)$

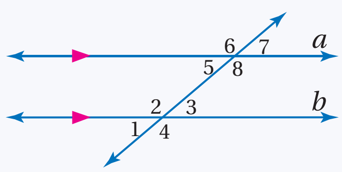
10) **خرائط:** وضع خالد شبكة الإحداثيات على خريطة حيث يمثل كل مربع موقعًا في المدينة. فإذا كانت إحداثيات ملعب كرة القدم $(15, -25)$ وإحداثيات بيت خالد $(-8, 14)$. فما المسافة بين الملعب وبيت خالد؟ قرّب الجواب إلى أقرب عُشر. (مهارة سابقة)

مراجعة سريعة

مثال 1 حل المعادلة: $\frac{7}{8}t + 4 = 18$

$\frac{7}{8}t + 4 = 18$	بكتابة المعادلة
$\frac{7}{8}t = 14$	بالطرح
$8\left(\frac{7}{8}t\right) = 14(8)$	بالضرب
$7t = 112$	بالتبسيط
$t = 16$	بقسمة الطرفين على 7

مثال 2 إذا كان $a \parallel b$، فما الزوايا المطابقة للزاوية 6؟



$\angle 8 \cong \angle 6$	نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس
$\angle 2 \cong \angle 6$	مسلّمة الزوايا المتناظرة
$\angle 4 \cong \angle 6$	نظرية الزوايا الخارجية المتبادلة

مثال 3 أوجد المسافة بين $(-1, 2)$ و $(3, -4)$ إلى أقرب عشر:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	قانون المسافة
$= \sqrt{(3 - (-1))^2 + (-4 - 2)^2}$	$(x_1, y_1) = (-1, 2)$, $(x_2, y_2) = (3, -4)$
$= \sqrt{(4)^2 + (-6)^2}$	بالطرح
$= \sqrt{16 + 36}$	بالتبسيط
$= \sqrt{52}$	بالجمع
≈ 7.2	باستعمال الآلة الحاسبة

1-3 تصنيف المثلثات
Classifying Triangles

الأفكار الرئيسة:
- أحدد المثلثات وأصنفها وفقًا لزواياها.
- أحدد المثلثات وأصنّفها وفقاً لأضلاعها.

المفردات:

المثلث الحاد الزوايا
acute triangle

المثلث المنفرج الزاوية
obtuse triangle

المثلث القائم الزاوية
right triangle

المثلث المتطابق الزوايا
equiangular triangle

المثلث المختلف الأضلاع
scalene triangle

المثلث المتطابق الضلعين
isosceles triangle

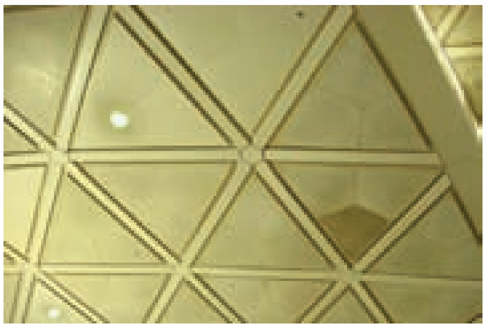
المثلث المتطابق الأضلاع
equilateral triangle

إرشادات

أخطاء شائعة

من الخطأ أن تصنف المثلث وفقًا لزواياه بأكثر من طريقة. لأن التصنيفات الصحيحة تشكل مجموعات منفصلة، فمثلاً لا يمكن أن يكون المثلث قائم الزاوية وحاد الزوايا.

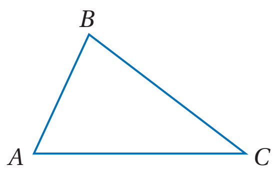
استعد



يعدُّ المثلث عنصرًا زخرفيًا مميزًا في العمارة التقليدية في المملكة العربية السعودية وقد استخدم عنصرًا محوريًا يربط أجزاء مطار الملك خالد الدولي بمدينة الرياض بعضها ببعض، كما يُلاحظ ذلك في صالات المسافرين.

تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها: يكتب المثلث ABC على الصورة $\triangle ABC$، وتُسمى عناصره باستعمال الأحرف A, B, C كما يلي:

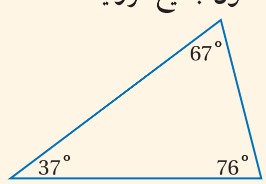
- أضلاع $\triangle ABC$ هي: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$
- الرؤوس هي: A, B, C
- الزوايا هي: $\angle A$ أو $\angle BAC$, $\angle C$ أو $\angle BCA$, $\angle B$ أو $\angle ABC$



يمكن تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها أو لأضلاعها. وبما أن جميع المثلثات فيها زاويتان حادتان على الأقل، فإن الزاوية الثالثة تستعمل في تصنيف المثلث.

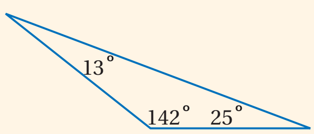
تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها

في **المثلث الحاد الزوايا** تكون جميع الزوايا حادة.



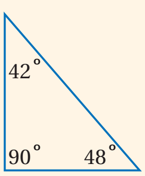
قياس كل زاوية أقل من 90

في **المثلث المنفرج الزاوية** زاوية واحدة منفرجة.



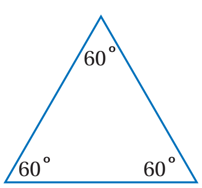
زاوية واحدة منفرجة قياسها أكبر من 90

في **المثلث القائم الزاوية** زاوية واحدة قائمة.



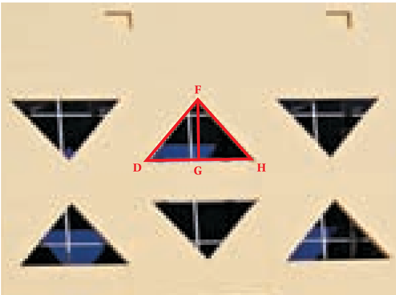
زاوية واحدة قياسها يساوي 90

يُسمّى المثلث الحاد الزوايا، والذي جميع زواياه متطابقة **مثلثًا متطابق الزوايا**.



مثال من واقع الحياة — تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها

1 هندسة العمارة: زينت واجهة بناية بمثلثات كما يظهر في الصورة جانبًا. استعمل المنقلة لتصنيف $\triangle HFG, \triangle DFG, \triangle DFH$ إلى حاد الزوايا، أو متطابق الزوايا، أو منفرج الزاوية، أو قائم الزاوية.

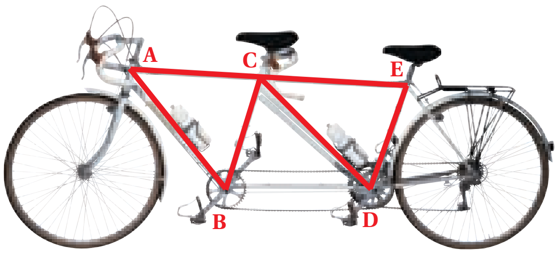


$\triangle DFH$ جميع قياسات زواياه أقل من $90°$. لذا، فإنه حاد الزوايا.

$\triangle HFG$ و$\triangle DFG$ في كل منهما زاوية قياسها $90°$. إذن، فكل منهما مثلث قائم الزاوية.

تحقق من فهمك

1) دراجات: هيكل هذه الدراجة ذات المقعدين يحتوي على أشكال مثلثية. استعمل المنقلة لتصنف $\triangle CDE$, $\triangle ABC$.

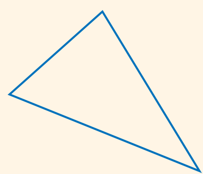


إرشادات
التطابق

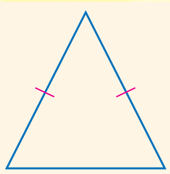
للإشارة إلى أن أضلاع المثلث متطابقة يوضع عدد متساوٍ من العلامات « / » على الأضلاع المتطابقة.

تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها

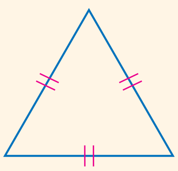
أضلاع **المثلث المختلف الأضلاع** غير متطابقة.



يوجد ضلعان متطابقان على الأقل في **المثلث المتطابق الضلعين**.



جميع أضلاع **المثلث المتطابق الأضلاع** متطابقة.



إرشادات
المثلث المتطابق الأضلاع

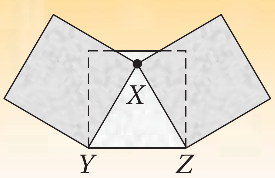
المثلث المتطابق الأضلاع حالة خاصة من المثلث المتطابق الضلعين.

معمل الهندسة

المثلثات المتطابقة الأضلاع

نموذج:

- رتّب ثلاث قطع صغيرة كما في الشكل، وضع نقطة عند X
- اطو قطعة الورق حول $\overline{XY}$، ثم حول $\overline{XZ}$.



تحليل:

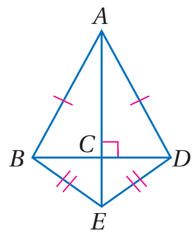
1) هل $\triangle XYZ$ متطابق الأضلاع؟ وضح ذلك.

2) استعمل ثلاث قطع صغيرة من الورق لتكون مثلثًا فيه ضلعان متطابقان فقط.

3) استعمل ثلاث قطع صغيرة لتكون مثلثًا مختلف الأضلاع.

مثـــال تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها

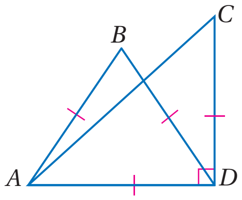
2 صنّف المثلثات في الشكل حسب النوع المشار إليه:



a) مثلثات متطابقة الضلعين
بما أن المثلث المتطابق الضلعين فيه ضلعان على الأقل متطابقان. لذا، فالمثلثان $\triangle ABD$, $\triangle EBD$ متطابقا الضلعين.

b) مثلثات مختلفة الأضلاع
بما أن المثلث المختلف الأضلاع، لا يحوي أضلاعًا متطابقة. فالمثلثات $\triangle AEB, \triangle AED, \triangle ACB, \triangle ACD, \triangle BCE, \triangle DCE$، جميعها مختلفة الأضلاع.

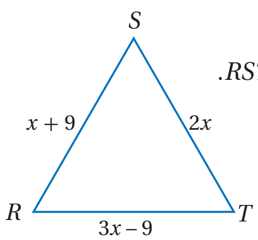
تحقق من فهمك



2) حدد مثلثًا في الشكل من النوع المشار إليه:

2A) متطابق الأضلاع. **2B)** متطابق الضلعين.

مثـــال إيجاد القيم المجهولة



3 **الجبر:** أوجد قيمة x، وطول كل ضلع في المثلث المتطابق الأضلاع RST.

بما أن $\triangle RST$ متطابق الأضلاع، فإن $RS = ST$.

$x + 9 = 2x$ بالتعويض

$9 = x$ بطرح x من الطرفين

عوض الآن لتجد طول كل ضلع.

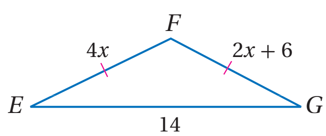
$RT = 3x - 9$
$= 3(9) - 9 = 18$

$ST = 2x$
$= 2(9) = 18$

$RS = x + 9$
$= 9 + 9 = 18$

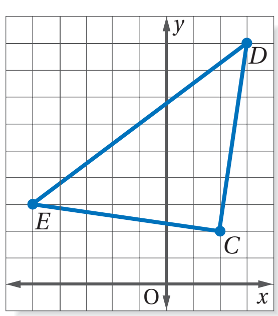
إذن في $\triangle RST$؛ $x = 9$ وطول كل ضلع فيه يساوي 18.

تحقق من فهمك



3) أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في المثلث المتطابق الضلعين EFG .

مثـــال استعمال قانون المسافة



4 **الهندسة الإحداثية:** أوجد أطوال أضلاع المثلث DEC، وصنفه وفقًا لأضلاعه.

استعمل قانون المسافة لتجد أطوال أضلاع المثلث.

$$EC = \sqrt{(-5-2)^2 + (3-2)^2}$$
$$= \sqrt{49 + 1}$$
$$= \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$ED = \sqrt{(-5-3)^2 + (3-9)^2}$$
$$= \sqrt{64 + 36}$$
$$= \sqrt{100} = 10$$

$$DC = \sqrt{(3-2)^2 + (9-2)^2}$$
$$= \sqrt{1 + 49}$$
$$= \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

بما أن $\overline{EC}$, $\overline{DC}$ لهما الطول نفسه، فإن المثلث DEC متطابق الضلعين.

إرشادات

مراجعة
تذكر أن المسافة بين النقطتين (x_1, y_1) , (x_2, y_2) تساوي $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

تحقق من فهمك

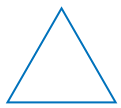
4) أوجد أطوال أضلاع $\triangle HIJ$ ذي الرؤوس $H(-3,1)$, $I(0,4)$, $J(0,1)$ وصنّفه وفقًا لأضلاعه.

تأكد

مثال 1 (ص 131)

استعمل المنقلة لتصنيف كل من المثلثين إلى: حاد الزوايا،أو متطابق الزوايا، أو منفرج الزاوية، أو قائم الزاوية.

1) 

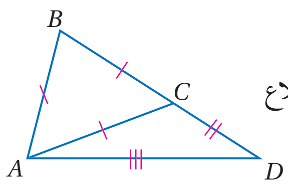
2) 

مثال 2 (ص 132)

حدّد مثلثًا في الشكل المجاور من النوع المشار إليه.

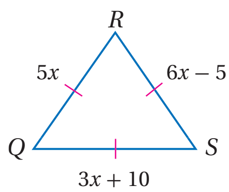
3) متطابق الضلعين

4) مختلف الأضلاع



مثال 3 (ص 132)

5) **الجبر:** أوجد قيمة x، وأطوال الأضلاع المجهولة في المثلث المجاور.



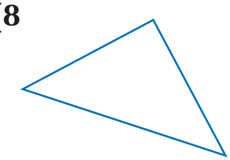
مثال 4 (ص 132)

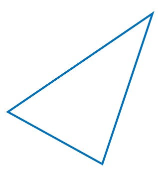
6) **الهندسة الإحداثية:** أوجد أطوال أضلاع $\triangle TWZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $T(2,6)$, $W(4,-5)$, $Z(-3,0)$ وصنفه وفقًا لأطوال أضلاعه .

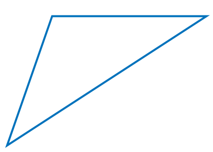
تمارين ومسائل

إرشادات للتمارين	
للأسئلة	انظر الأمثلة
7–9	1
10–11	2
12	3
13,14	4

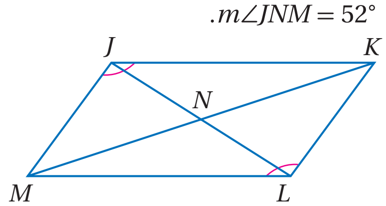
استعمل المنقلة لتصنّف كل مثلث إلى: حاد الزوايا، أو متطابق الزوايا، أو منفرج الزاوية، أو قائم الزاوية.

7) 

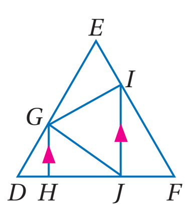
8) 

9) 

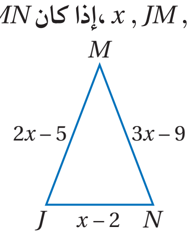
10) عين المثلثات المنفرجة الزاوية، إذا كان $\angle MJK \cong \angle KLM$, $m\angle MJK = 126°$, $m\angle JNM = 52°$.



11) عين المثلثات القائمة الزاوية، إذا كان $\overline{IJ} \parallel \overline{GH}$, $\overline{GH} \perp \overline{DF}$, $\overline{GI} \perp \overline{EF}$



12) **الجبر:** أوجد كلًّا من x , JM , MN , JN، إذا كان $\triangle JMN$ متطابق الضلعين $\overline{JM} \cong \overline{MN}$.

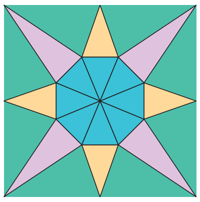


الهندسة الإحداثية : أوجد أطوال أضلاع $\triangle ABC$، وصنف كل مثلث وفقًا لأضلاعه.

13) $A(-4, 1), B(5, 6), C(-3, -7)$.

14) $A(5, 4), B(3, -1), C(7, -1)$.

15) التطريز: المربع المطرز على شكل نجمة مكون من أربعة أنواع مختلفة من المثلثات. استعمل المسطرة لتصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها.



16) فلك: في $5/5/2002$ ميلادي، ظهرت كواكب، الزهرة، وزحل والمريخ مكونة رؤوس مثلث كما في الصورة. استعمل المنقلة أو المسطرة لتصنيف المثلث وفقاً لأضلاعه وزواياه.

17) بحث: استعمل الإنترنت أو أي مصدر آخر لتجد كيف يتنبأ الفلكيون بمواقع الكواكب؟

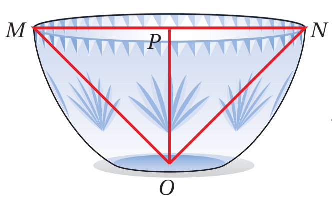
الجبر: في السؤالين 18 , 19 أوجد قيمة x وطول كل ضلع في المثلث.

18) $\triangle GHJ$ متطابق الضلعين فيه: $\overline{HG} \cong \overline{JG}$, $GH = x + 7$, $GJ = 3x-5$, $HJ = x-1$

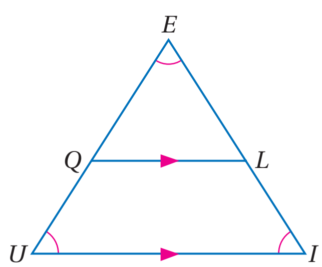
19) $\triangle QRS$ متطابق الأضلاع فيه: QR أقل باثنين من ضعف عدد ما x. RS أكبر من العدد نفسه بستة، وQS أقل من ثلاثة أمثال العدد بعشرة.

20) رحلة : المسافة الكلية من الرياض إلى مكة المكرمة ثم إلى المدينة المنورة والعودة إلى الرياض حوالى 2076 كيلومترًا. والمسافة بين الرياض والمدينة المنورة أكبر بـ 490 كيلومترًا من المسافة بين مكة المكرمة والمدينة المنورة. والمسافة بين الرياض ومكة المكرمة أكبر بـ 22 كيلومترًا من المسافة بين المدينة المنورة والرياض.
صنف المثلث الذي يربط المدن الثلاث وفقًا لأضلاعه.

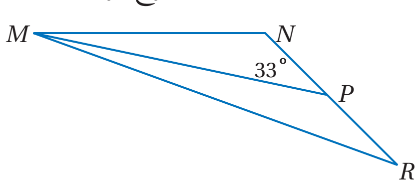
21) كريستال : الفوهة العلوية لوعاء من الكريستال ،الظاهر في الشكل المجاور دائرية الشكل. قطرها $\overline{MN}$، P نقطة منتصف $\overline{MN}$ و $\overline{OP} \perp \overline{MN}$. إذا كان $MN = 24$ و $OP = 12$. حدد ما إذا كان كل مثلث من المثلثين OPM , OPN متطابق الأضلاع أم لا.

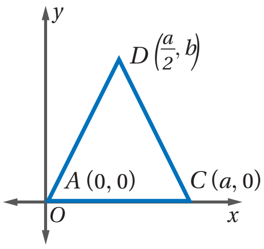


22) برهان : اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $\triangle EQL$ متطابق الزوايا.



23) برهان : إذا كان $m\angle NPM = 33°$، فأثبت أن $\triangle RPM$ منفرج الزاوية.





24) الهندسة الإحداثية : أثبت أن $\triangle ADC$ متطابق الضلعين.

مسائل مهارات التفكير العليا

25) مسألة مفتوحة : ارسم مثلثاً متطابق الضلعين وقائم الزاوية.

تبرير : حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي *صحيحة دائمًا*، أو *صحيحة أحيانًا*، أو *ليست صحيحة أبدًا* :

26) المثلث المتطابق الزوايا يكون حاد الزوايا أيضًا.

27) المثلثات القائمة تكون حادة الزوايا.

28) تحدّ : $\overline{KL}$ قطعة مستقيمة تمثل ضلعًا في $\triangle KLM$ المتطابق الضلعين والقائم الزاوية، حيث $K\,(2\,,6)\,,\,L(4\,,2)\,,\,\angle KLM$ قائمة، $\overline{KL} \cong \overline{LM}$. صف كيف تجد إحداثيي M، ثم حدد قيمتيهما.

29) اكتب : استعمل التعليمات في صفحة 130 لتوضح لماذا تكون المثلثات مهمة في الإنشاءات. وضمّن توضيحك وصفًا يبين كيف تصنف المثلثات، وتبريرًا لاستعمال نوع من أنواع المثلثات أكثر من غيره في الإنشاءات.

تدريب على اختبار معياري

30) أي نوع من المثلثات يمكن أن يكون مثالاً مضادًّا للعبارة التالية؟

إذا كانت في مثلث زاويتان حادتان، فإن قياس الزاوية الثالثة يجب أن يكون أكبر من أو يساوي °90.

A متطابق الأضلاع **B** منفرج الزاوية

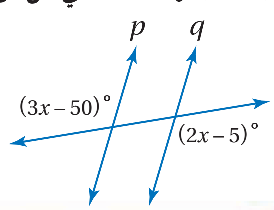
C قائم الزاوية **D** متطابق الضلعين

مراجعة تراكمية

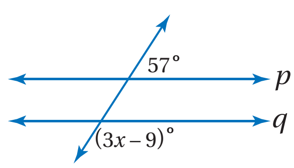
31) مثل بيانيًّا المستقيم $y = x + 2$ ، وارسم القطعة المستقيمة العمودية عليه من النقطة $(2\,,\,-2)$ ، ثم أوجد طولها. (الدرس 6-2)

أوجد قيمة x ليكون $p \parallel q$ في كل من السؤالين 32، 33. (الدرس 5-2)

(32



(33



استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة : في الشكل المجاور $\overline{RQ} \parallel \overline{AB}$ و $\overline{PR} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$ اذكر ما يلي: (الدرسان 1-2 وَ 2-2)

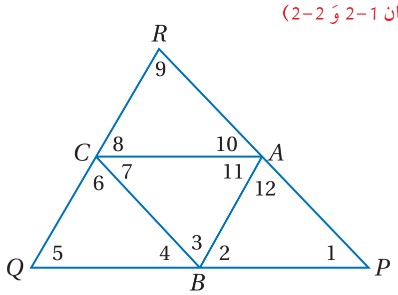
34) ثلاثة أزواج من الزوايا الداخلية المتبادلة.

35) ستة أزواج من الزوايا المتناظرة.

36) جميع الزوايا التي تطابق $\angle 3$.

37) جميع الزوايا التي تطابق $\angle 7$.

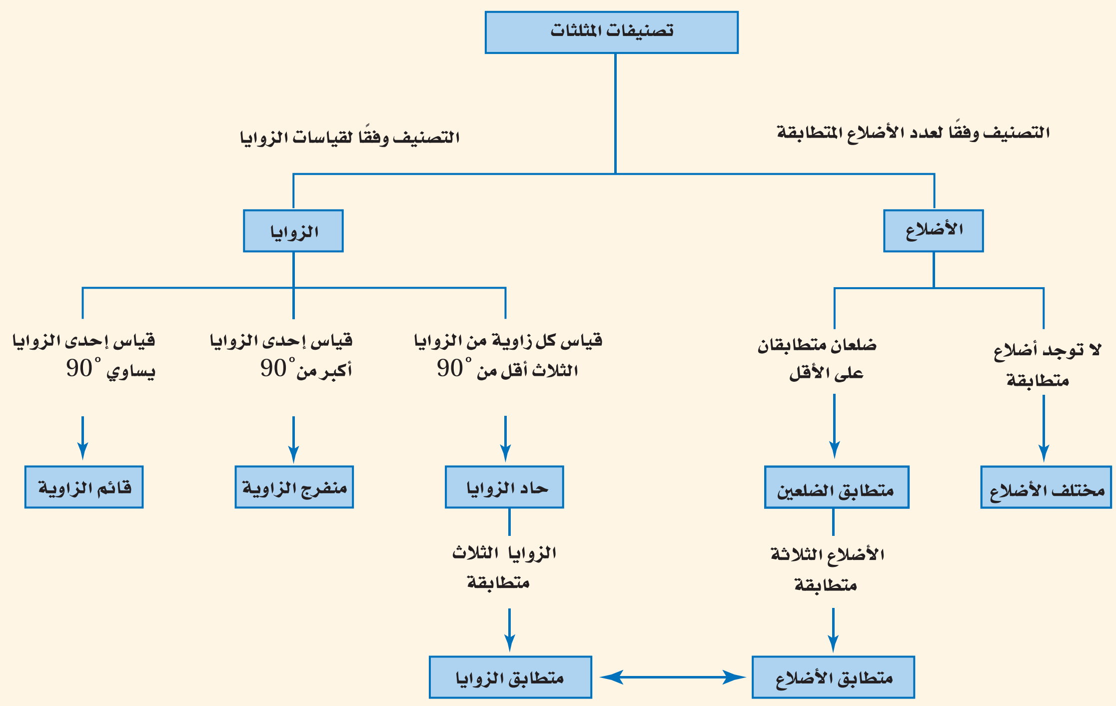
38) جميع الزوايا التي تطابق $\angle 11$.



اقرأ

خرائط المفاهيم

عند دراستك لأي فصل في الرياضيات، من الحكمة أن تسجل العناوين الرئيسة لذلك الفصل ومفرداته. فمن مفردات هذا الفصل مثلًا: المثلث، المثلث الحاد الزوايا، المثلث المنفرج الزاوية، المثلث القائم الزاوية، المثلث المتطابق الزوايا، المثلث المختلف الأضلاع، المثلث المتطابق الضلعين، المثلث المتطابق الأضلاع، حيث يتم تصنيف المثلثات وفق زواياها أو أضلاعها. ويمكنك الاستعانه بخارطة المفاهيم التالية لتوضيح هذه التصنيفات. في خارطة المفاهيم تُكتب الأفكار الرئيسة داخل مستطيلات، وتُكتب المعلومات اللازمة للانتقال من مستطيل إلى آخر على الأسهم التي تصل المستطيلات بعضها ببعض.



اقرأ لتتعلم

1) صف كيف يمكنك استعمال خارطة المفاهيم لتصنيف المثلثات وفق أطوال أضلاعها.

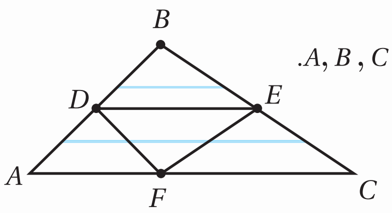
2) في $\triangle ABC$: $m\angle A = 48°, m\angle B = 41°, m\angle C = 91°$
استعمل خارطة المفاهيم لتصنيف $\triangle ABC$.

معمل الهندسة

استكشاف 3-2

زوايا المثلث
Angles of Triangles

نشاط 1



لإيجاد العلاقة بين قياسات الزوايا الداخلية في المثلث اتبع ما يأتي:

خطوة 1: ارسم مثلثًا منفرج الزاوية على ورقة وقُصَّهُ، وسمِّ الرؤوس A, B, C.

خطوة 2: حدد نقطة منتصف $\overline{AB}$ بإطباق A على B. وسمِّها D.

خطوة 3: حدد نقطة منتصف $\overline{BC}$ بإطباق B على C. وسمِّها E.

خطوة 4: ارسم $\overline{DE}$.

خطوة 5: اطو $\triangle ABC$ حول $\overline{DE}$ ، وسمِّ موقع النقطة B على $\overline{AC}$ بالحرف F.

خطوة 6: ارسم $\overline{DF}$ و $\overline{FE}$ ، وقِسْ كل زاوية.

تحليل النموذج:

صف العلاقة بين كل زوج مما يلي:

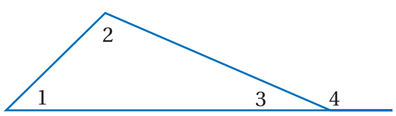
(1 $\angle DFA$ و $\angle A$ **(2** $\angle DFE$ و $\angle B$ **(3** $\angle EFC$ و $\angle C$

(4 ما مجموع قياسات الزوايا $\angle DFA$, $\angle DFE$, $\angle EFC$؟

(5 ما مجموع قياسات الزوايا $\angle C$, $\angle B$, $\angle A$ ؟

(6 خمِّن مجموع قياسات زوايا أي مثلث.

في الشكل المجاور تسمى $\angle 4$ زاوية خارجية للمثلث. والزاويتان $\angle 1$ و $\angle 2$ هما الزاويتان الداخليتان البعيدتان عن $\angle 4$.



نشاط 2

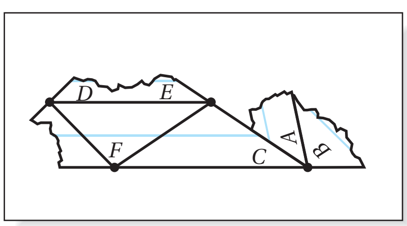
لإيجاد العلاقة بين الزوايا الداخلية والخارجية في المثلث، اتبع ما يلي:

خطوة 1: انسخ $\triangle ABC$ من النشاط 1 على ورقة. وسمّ رؤوسه.

خطوة 2: مُدّ $\overline{AC}$ لترسم زاوية خارجية عند C .

خطوة 3: قص $\angle A$ و $\angle B$ من المثلث في النشاط 1.

خطوة 4: ضع $\angle A$ و $\angle B$ على الزاوية الخارجية.



تحليل النتائج:

(7 أعط تخمينًا حول العلاقة بين $\angle A$ و $\angle B$ والزاوية الخارجية عند C.

(8 كرر الخطوات نفسها مع الزوايا الخارجية للزاويتين $\angle A$ و $\angle B$.

(9 هل تخمينك صحيح لجميع الزوايا الخارجية لأي مثلث؟

(10 كرر النشاط 2 مع المثلث الحاد الزوايا وآخر مع القائم الزاوية.

(11 أعط تخمينًا حول قياس الزاوية الخارجية ومجموع قياسي الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها.

3-2

زوايا المثلث
Angles of Triangles

الأفكار الرئيسة:

- أطبق نظرية مجموع الزوايا.
- أطبق نظرية الزاوية الخارجية.

المفردات:

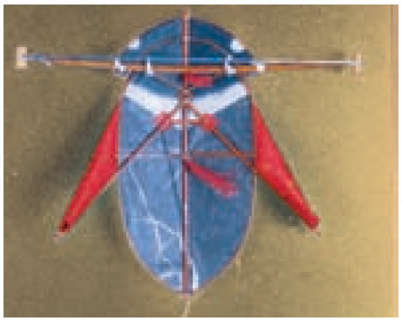
الزاوية الخارجية
exterior angle

الزاويتان الداخليتان البعيدتان
remote interior angles

البرهان التسلسلي
flow proof

نتيجة
corollary

استعد



في مهرجان سنوي للطائرات الورقية فازت الطائرة الظاهرة في الصورة بالمرتبة الثانية في الجمال ودقّة الصنع. وكانت أبعادها 10.5 cm في 9.5 cm وجناحا الطائرة يبدوان كمثلثين.

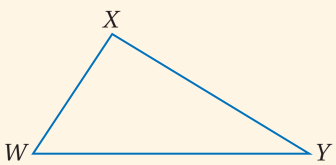
نظرية مجموع زوايا المثلث: إذا عُلم قياس زاويتين في المثلث فكيف يمكن إيجاد قياس الزاوية الثالثة؟ نظرية مجموع الزوايا توضح أن مجموع قياسات زوايا أي مثلث تساوي دائمًا 180°.

نظرية 3.1 نظرية مجموع زوايا المثلث

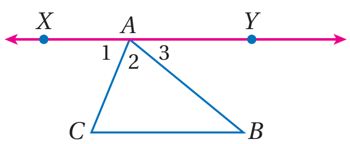
مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180°.

مثال:

$m\angle W + m\angle X + m\angle Y = 180°$



برهان نظرية مجموع زوايا المثلث



المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب إثبات أن: $m\angle C + m\angle 2 + m\angle B = 180$

البرهان:

العبارة	المبرر
1) $\triangle ABC$	1) معطى
2) ارسم $\overleftrightarrow{XY}$ يمر بالنقطة A ويوازي $\overline{CB}$.	2) مسلمة التوازي
3) $\angle 1$ و $\angle CAY$ زاويتان متجاورتان على مستقيم.	3) تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم
4) $\angle 1$ و $\angle CAY$ متكاملتان.	4) الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان.
5) $m\angle 1 + m\angle CAY = 180$	5) تعريف الزوايا المتكاملة.
6) $m\angle CAY = m\angle 2 + m\angle 3$	6) مسلمة جمع الزوايا.
7) $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180$	7) بالتعويض.
8) $\angle 1 \cong \angle C, \angle 3 \cong \angle B$	8) نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة.
9) $m\angle 1 = m\angle C, m\angle 3 = m\angle B$	9) تعريف الزوايا المتطابقة.
10) $m\angle C + m\angle 2 + m\angle B = 180$	10) بالتعويض.

إرشادات

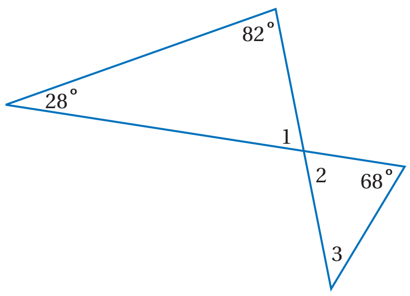
الخطوط المساعدة

تذكر أننا نحتاج أحيانًا إلى رسم خطوط إضافية لإتمام البرهان. هذه الخطوط تسمى الخطوط المساعدة.

وعليه، إذا علمنا قياسي زاويتين في المثلث فإنه يمكننا إيجاد قياس الزاوية الثالثة.

مثـــال الزوايا الداخلية

1 أوجد قياسات الزوايا المجهولة.



أوجد $m\angle 1$ أولا، لأن قياسي زاويتي المثلث معلومتان فيكون

$m\angle 1 + 28 + 82 = 180$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle 1 + 110 = 180$ بالتبسيط

$m\angle 1 = 70$ بطرح 110 من الطرفين

وبما أن $\angle 1$ و $\angle 2$ متقابلتان بالرأس، فإن $m\angle 2 = 70$.

إذن $m\angle 3 + 68 + 70 = 180$ نظرية مجموع زوايا المثلث

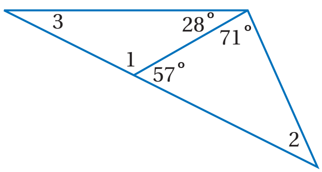
$m\angle 3 + 138 = 180$ بالتبسيط

$m\angle 3 = 42$ بطرح 138 من الطرفين

إذن $m\angle 1 = 70 , m\angle 2 = 70 , m\angle 3 = 42$.

تحقق من فهمك

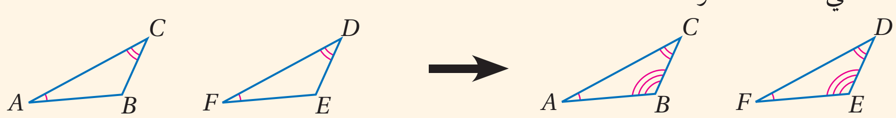
1) أوجد قياسات الزوايا المجهولة.



تقودنا نظرية مجموع زوايا المثلث إلى نظرية مفيدة حول الزوايا في مثلثين.

نظرية 3.2 نظرية الزاوية الثالثة

إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر، فإن الزاوية الثالثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الآخر

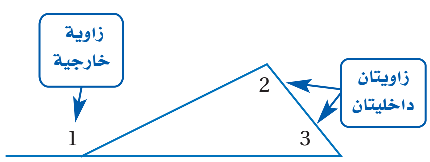


مثال: إذا كانت $\angle F \cong \angle A$ و $\angle D \cong \angle C$ ، فإن $\angle E \cong \angle B$.

ستبرهن هذه النظرية في سؤال 28.

نظرية الزاوية الخارجية: كل زاوية في المثلث لها زاوية خارجية وتتكون **الزاوية الخارجية** من ضلع في المثلث مع امتداد ضلع آخر.

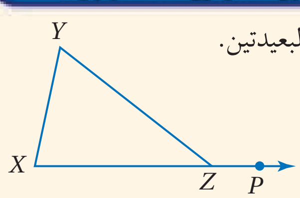
والزاويتان الداخليتان في المثلث غير المجاورتين لزاوية خارجية تسميان **الزاويتين الداخليتين البعيدتين** عن الزاوية الخارجية.



نظرية 3.3 نظرية الزاوية الخارجية

قياس الزاوية الخارجية لمثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين البعيدتين.

مثال: $m\angle X + m\angle Y = m\angle YZP$



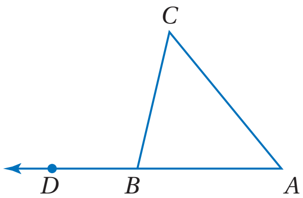
سنستعمل البرهان التسلسلي لإثبات هذه النظرية. وفي **البرهان التسلسلي** تُنظِّمُ سلسلة من العبارات في ترتيب منطقي بدءًا بالعبارات المعطاة، وتُكتب كل عبارة داخل مستطيل، ويكتب المبرر تحت المستطيل. وتستعمل الأسهم لتدل على كيفية ارتباط العبارات.

إرشادات

البرهان التسلسلي

اكتب كل عبارة ومبررها على بطاقة، ثم رتّب البطاقات منطقيًا.

برهان — نظرية الزاوية الخارجية



اكتب برهانًا تسلسليًّا لنظرية الزاوية الخارجية.

المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب إثبات أن: $m\angle CBD = m\angle A + m\angle C$

البرهان التسلسلي:

$\triangle ABC$
المعطيات

$m\angle A + m\angle ABC + \angle C = 180^\circ$
نظرية مجموع زوايا المثلث

$\angle CBD$ و $\angle ABC$ زاويتان متجاورتان
تعريف الزاويتين المتجاورتين على المستقيم

$\angle CBD$ و $\angle ABC$ متكاملتان.
الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان

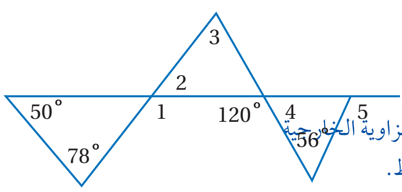
$\angle CBD + \angle ABC = 180^\circ$
تعريف تكامل الزوايا

$m\angle A + m\angle ABC + m\angle C = m\angle CBD + m\angle ABC$
خاصية التعويض

$m\angle A + m\angle C = m\angle CBD$
خاصية الطرح

مثـــال — الزوايا الخارجية

2 أوجد قياس كل زاوية فيما يلي:



a) $m\angle 1$

$m\angle 1 = 50 + 78$ نظرية الزاوية الخارجية

$= 128$ بالتبسيط.

b) $m\angle 2$

$m\angle 1 + m\angle 2 = 180$ الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان

$128 + m\angle 2 = 180$ بالتعويض

$m\angle 2 = 52$ بطرح 128 من الطرفين.

c) $m\angle 3$

$m\angle 2 + m\angle 3 = 120$ نظرية الزاوية الخارجية

$52 + m\angle 3 = 120$ بالتعويض

$m\angle 3 = 68$ بطرح 52 من الطرفين

إذن $m\angle 1 = 128,\ m\angle 2 = 52\ ,\ m\angle 3 = 68$.

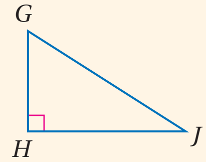
تحقق من فهمك

2A) $m\angle 4$ **2B)** $m\angle 5$

العبارة التي يمكن إثباتها بسهولة باستعمال نظرية ما غالبًا ما تُسمى **نتيجة** لتلك النظرية. والنتيجة مثل النظرية يمكن استعمالها كمبرّر في البرهان.

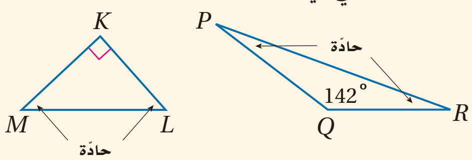
نتائج

3.1 الزاويتان الحادتان في المثلث القائم الزاوية متتامتان.



مثال: $m\angle G + m\angle J = 90°$

3.2 يوجد على الأكثر زاوية قائمة واحدة أو منفرجة واحدة في أي مثلث.



ستبرهِن النتيجتين 3.1 و 3.2 في السؤالين 26 و 27.

مثال من واقع الحياة — الزوايا القائمة

3 **تزلج:** يشكل خط بصر المتزلج في أثناء عملية القفز زاوية قائمة مع زلاجته. أوجد $m\angle 2$ إذا كان $m\angle 1$ يساوي $27°$.

استعمل نتيجة 3.1 لكتابة المعادلة.

$m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$

$27 + m\angle 2 = 90°$ بالتعويض

$m\angle 2 = 63°$ بطرح 27 من الطرفين

تحقق من فهمك

3) **التزلج على سطح الماء:** يشكل شراع التزلج على سطح الماء مثلثاً قائم الزاوية، قياس إحدى زواياه الحادة يساوي $68°$. فما قياس الزاوية الحادة الأخرى؟

تأكد

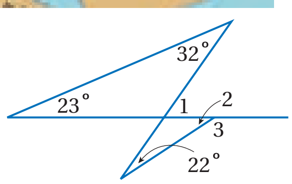
مثال 1 (ص 138)

1) أوجد قياس الزاوية المجهولة في المثلث الموضح على الخريطة:

مثال 2 (ص 139)

أوجد قياس كل زاوية مما يلي:

2) $m\angle 1$ **3)** $m\angle 2$ **4)** $m\angle 3$

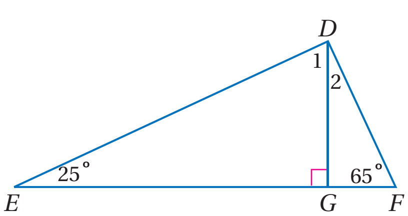


مثال 3 (ص 140)

أوجد قياس كل من الزاويتين الآتيتين:

5) $m\angle 1$

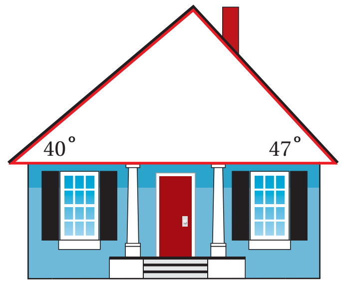
6) $m\angle 2$



إرشادات للتمارين	
للأسئلة	انظر الأمثلة
7,8	1
9–14	2
15–18	3

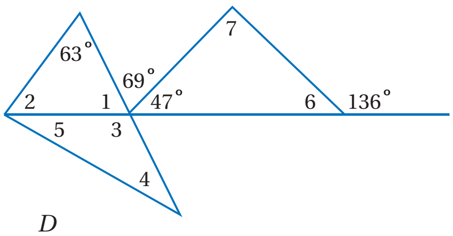
أوجد قياس الزاوية المجهولة في كل مما يلي:

7)



8)

إذا كان $m\angle 4 = m\angle 5$ فأوجد قياس كل زاوية فيما يلي:

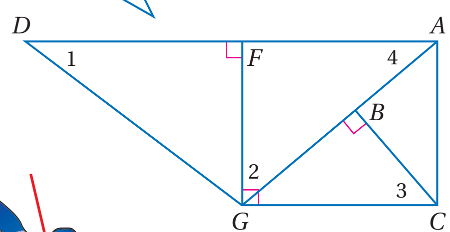


9) $m\angle 1$ **10)** $m\angle 2$ **11)** $m\angle 3$

12) $m\angle 4$ **13)** $m\angle 5$ **14)** $m\angle 6$

إذا كان $m\angle DGF = 53°$ و $m\angle AGC = 40°$.

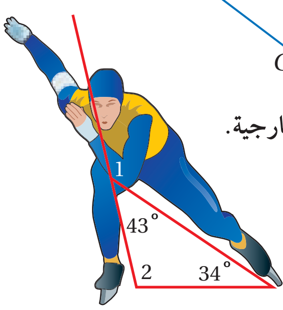
فأوجد قياس كل زاوية مما يلي:



15) $m\angle 1$ **16)** $m\angle 2$

17) $m\angle 3$ **18)** $m\angle 4$

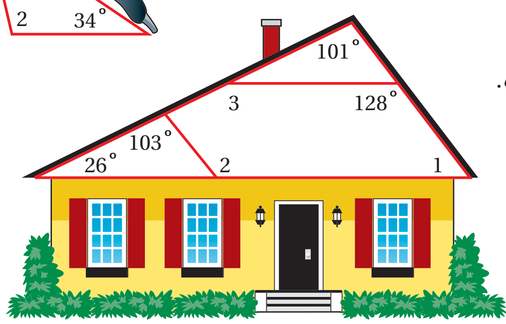
تزلج: يشكل المتزلج في أثناء حركته مجموعتين من المثلثات على الأقل وزاوية خارجية. استعمل قياسات الزوايا المعطاة لإيجاد قياس ما يلي:



19) $m\angle 1$ **20)** $m\angle 2$

المساكن: تشكل دعامتا سقف منزل مثلثات.

أوجد كلًّا مما يلي:



21) $m\angle 1$

22) $m\angle 2$

23) $m\angle 3$

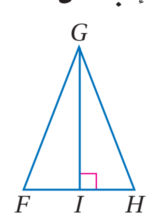
برهان: في الأسئلة 24 – 28، اكتب برهانًا من النوع المشار إليه:

24) برهان تسلسلي.

المعطيات: $\angle FGI \cong \angle IGH$

$\overline{FH} \perp \overline{GI}$

المطلوب إثبات أن: $\angle F \cong \angle H$

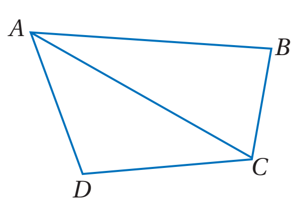


25) برهان ذي عمودين.

المعطيات: $ABCD$ شكل رباعي

المطلوب إثبات أن:

$m\angle DAB + m\angle B + m\angle BCD + m\angle D = 360°$



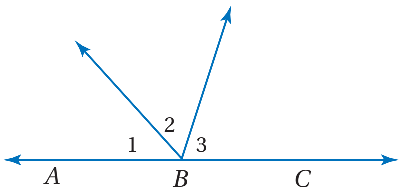
26) برهان تسلسلي للنتيجة 3.1

27) برهان حر للنتيجة 3.2

28) برهان ذي عمودين للنظرية 3.2

مسائل مهارات التفكير العليا

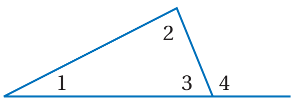
29) مسألة مفتوحة : ارسم مثلثًا. وسمِّ زاوية خارجية، والزاويتين الداخليتين البعيدتين.



30) تحدّ : $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ نصفا مستقيم متضادان، والنسبة بين قياسات الزوايا $\angle 3$,$\angle 2$,$\angle 1$ هي 4:5:6. أوجد قياس كل زاوية.

31) أين الخطأ؟ عبر ناجي ورامي عن نظرية الزاوية الخارجية على النحو التالي. فأيهما تعبيره صحيح؟ برر إجابتك.

ناجي	رامي
$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 4$	$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 4 = 180$



32) اكتب : استعمل المعلومات المتعلقة بالطائرة الورقية الواردة في صفحة 138 لتوضح كيف تستعمل زوايا المثلثات في صنعها، مبينًا كيف تجد قياس الزاوية الثالثة إذا كانت الزاويتان في كل من المثلثين متطابقتين. وصف كذلك خصائص الزاويتين الأخريين في المثلث إذا كان قياس الزاوية الثالثة °90.

تدريب على اختبار معياري

33) إذا كان قياسا زاويتين في مثلث °35 و °80. فأي القياسات التالية لا يمكن أن يكون قياسًا لزاوية خارجية للمثلث؟

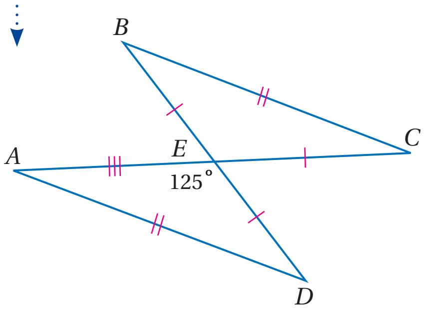
A 165°   **B** 145°   **C** 115°   **D** 100°

مراجعة تراكمية

حدد المثلثات من النوع المشار إليه، إذا كان (الدرس 1-3)

$\overline{BC} \cong \overline{AD}$ وَ $\overline{EC} \cong \overline{EB}$ وَ $\overline{AC}$ ينصف $\overline{BD}$ و $m\angle AED = 125°$

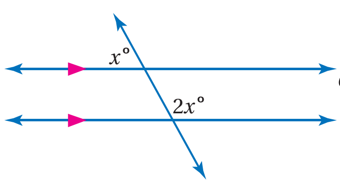
34) مختلف الأضلاع   **35)** منفرج الزاوية   **36)** متطابق الضلعين



37) أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين التاليين: (الدرس 6-2)

$y = x + 6$, $y = x - 10$

38) نموذج سكة حديد : عملت سعاد نموذجًا لسكة حديد، ورسمت خطًّا يقطع خطي السكة المتوازيين بشكل قطري. بحيث تكون الزاوية التي يصنعها الخط القطري مع الخط السفلي تساوي ضعف الزاوية التي يصنعها مع الخط العلوي كما في الشكل المجاور. فما قيمة x؟ (الدرس 2-2)



استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة : اكتب الخاصية المستعملة (الانعكاس، التماثل، التعدي) في كل عبارة مما يلي: (الدرسان 5-1 و 6-1)

39) $\angle 1 \cong \angle 1$ و $\overline{AB} \cong \overline{AB}$

40) إذا كان $\angle 1 \cong \angle 2$، فإن $\angle 2 \cong \angle 1$.

41) إذا كانت $\angle 2 \cong \angle 3$ و $\angle 3 \cong \angle 4$، فإن $\angle 2 \cong \angle 4$.

3-3 المثلثات المتطابقة
Congruent Triangles

الأفكار الرئيسة:

- أحدد الأجزاء المتناظرة في المثلثات المتطابقة وأسميها.
- أتعرف تحويلات التطابق.

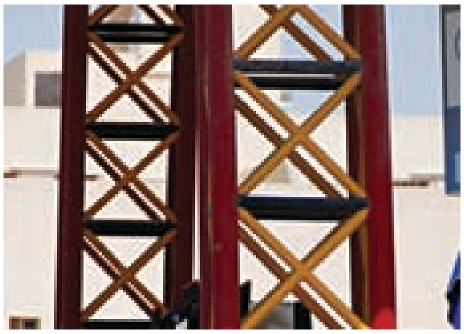
المفردات:

المثلثات المتطابقة
congruent triangles

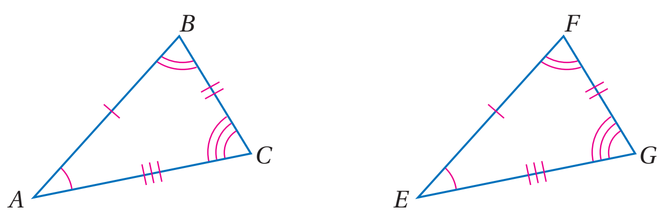
تحويلات التطابق
congruence transformations

استعد

يتكون جسم هذا البرج من مجموعة كبيرة من القضبان الحديدية تكوّن مثلثات لتتحمل وزنه.



الأجزاء المتناظرة في المثلثات المتطابقة: المثلثات التي لها نفس القياس والشكل تكون **مثلثات متطابقة**. وكل مثلث فيه ثلاث زوايا وثلاثة أضلاع. فإذا كانت جميع الأجزاء الستة المتناظرة في مثلثين متطابقة، فإن المثلثين متطابقان:



إذاكان $\triangle ABC$ يطابق $\triangle EFG$، فإن رؤوس المثلثين تتناظر حسب ترتيبها عند تسمية المثلثين.

$$\triangle ABC \cong \triangle EFG$$

هذا التناظر للرؤوس يمكن استعماله في تسمية الأضلاع والزوايا المتناظرة والمتطابقة في المثلثين.

$$\angle A \cong \angle E \qquad \angle B \cong \angle F \qquad \angle C \cong \angle G$$

$$\overline{AB} \cong \overline{EF} \qquad \overline{BC} \cong \overline{FG} \qquad \overline{AC} \cong \overline{EG}$$

ويمكن تحديد الأضلاع والزوايا المتناظرة من أي عبارة تطابق، وذلك باتباع الأحرف حسب ترتيبها.

مفهوم التطابق — **تعريف المثلثات المتطابقة**

يتطابق المثلثان إذا وفقط إذا تطابقت أجزاؤهما المتناظرة.

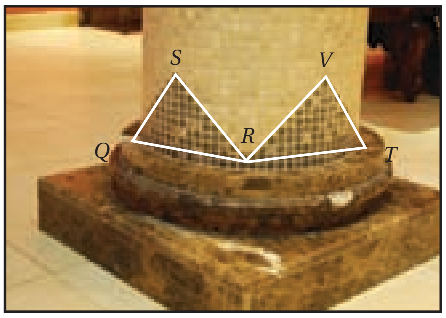
الأجزاء المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة . وتستعمل « إذا وفقط إذا » لبيان أن العبارة الشرطية وعكسها صحيحان.

إرشادات

الأجزاء المتطابقة

في المثلثات المتطابقة، تقابل الأضلاع المتطابقة زوايا متطابقة.

مثال من واقع الحياة ## الأجزاء المتناظرة المتطابقة



1 **زخرفة :** تشكل الزخرفة الظاهرة على هذا العمود مثلثين.
افرض أن قياسات أضلاع المثلثين بالسنتمترات كما يلي :

$QR = 45, RS = 40, QS = 30$

$TR = 45, TV = 30, RV = 40$

a) ما الزوايا والأضلاع المتناظرة المتطابقة؟

$\angle S \cong \angle V$ $\quad \angle QRS \cong \angle TRV$ $\quad \angle Q \cong \angle T$

$\overline{QS} \cong \overline{TV}$ $\quad \overline{RS} \cong \overline{RV}$ $\quad \overline{QR} \cong \overline{TR}$

b) ما المثلثات المتطابقة؟

$\triangle QRS \cong \triangle TRV$

تحقق من فهمك

إذا كانت أطوال أضلاع المثلثين QDP و CEO كما يلي:
$PD = 5,\ DQ = 7,\ PQ = 11; EC = 7, OC = 5, OE = 11.$

1A) ما الزوايا والأضلاع المتناظرة والمتطابقة؟

1B) ما المثلثات المتطابقة؟

يحقق تطابق المثلثات خصائص الانعكاس والتماثل والتعدي كما يحققها تطابق القطع المستقيمة والزوايا.

نظرية 3.4 **خصائص تطابق المثلثات**

الانعكاس

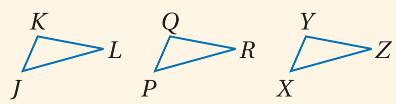
$\triangle JKL \cong \triangle JKL$

التماثل

إذا كان $\triangle JKL \cong \triangle PQR$، فإن $\triangle PQR \cong \triangle JKL$

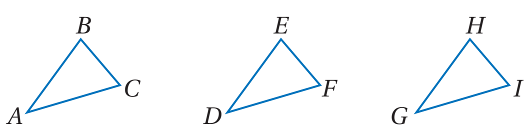
التعدي

إذا كان $\triangle JKL \cong \triangle PQR$ و $\triangle PQR \cong \triangle XYZ$
فإن $\triangle JKL \cong \triangle XYZ$.



ستبرهِن جزأي التماثل والانعكاس من هذه النظرية في السؤالين 22 و 24 بالترتيب.

البرهان ## نظرية 3.4 (التعدي)



المعطيات: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$
$\triangle DEF \cong \triangle GHI$

المطلوب إثبات أن : $\triangle ABC \cong \triangle GHI$

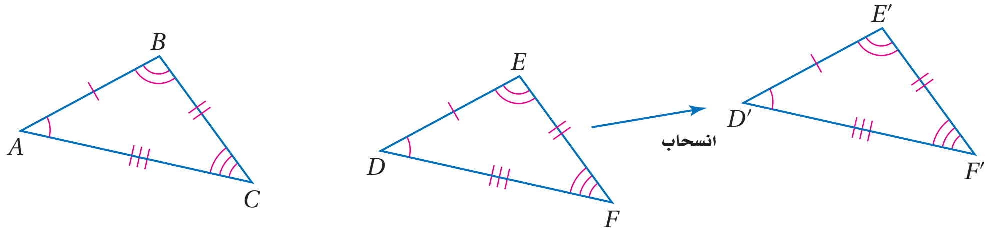
البرهان: من المعطيات $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ولأن الأجزاء المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة فإن $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. ومن المعطيات أيضًا $\triangle DEF$ $\cong \triangle GHI$، لذا $\angle D \cong \angle G, \angle E \cong \angle H$, $\angle F \cong \angle I$, $\overline{DE} \cong \overline{GH}$, $\overline{EF} \cong \overline{HI}$, $\overline{DF} \cong \overline{GI}$.

ومن تعريف المثلثات المتطابقة نستنتج أن:

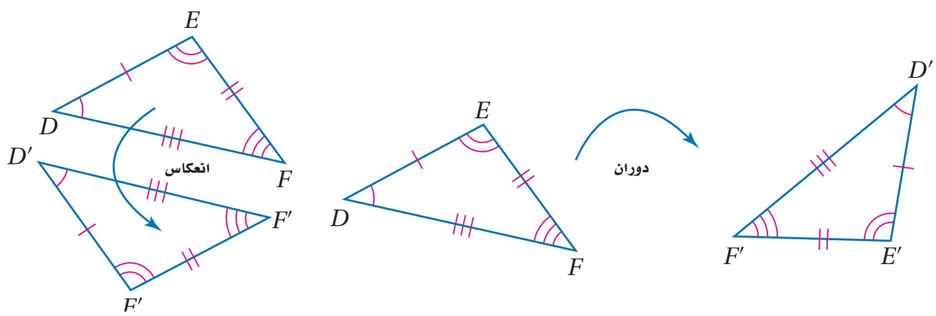
$\angle A \cong \angle G$, $\angle B \cong \angle H$, $\angle C \cong \angle I$, $\overline{AB} \cong \overline{GH}$, $\overline{BC} \cong \overline{HI}$, $\overline{AC} \cong \overline{GI}$.

لأن تطابق الزوايا والقطع المستقيمة متعدٍّ. إذن , $\triangle ABC \cong \triangle GHI$ من تعريف المثلثات المتطابقة.

تعريف تحويلات التطابق: في الأشكال أدناه $\triangle ABC$ يطابق $\triangle DEF$. إذا سحبت أو نقلت $\triangle DEF$ إلى أعلى ثم إلى اليمين، فسيبقى مطابقًا للمثلث $\triangle ABC$.



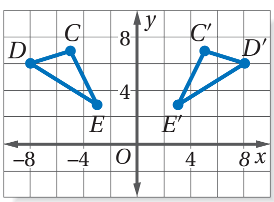
لا يتأثر تطابق المثلثين $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ بتحويلات الانعكاس والدوران.



إذا أجريت انسحابًا أو انعكاسًا أو دورانًا لمثلث، فإن قياسات المثلث وشكله لا تتغير.
وتسمى التحويلات الثلاثة (الانسحاب ، الانعكاس ، الدوران) **تحويلات التطابق**.

مثال
التحويلات في المستوى الإحداثي

2 **الهندسة الإحداثية:** إحداثيات رؤوس المثلث $\triangle CDE$ هي: $C(-5 , 7)$, $D(-8 , 6)$, $E(-3 , 3)$. وإحداثيات رؤوس المثلث $\triangle C'D'E'$ هي: $C'(5 , 7)$, $D'(8 , 6)$, $E'(3 , 3)$.



a) تحقق من أن $\triangle CDE \cong \triangle C'D'E'$.

استعمل قانون المسافة لتجد طول كل ضلع في المثلثين:

$$D'C' = \sqrt{(8-5)^2 + (6-7)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$DC = \sqrt{[-8-(-5)]^2 + (6-7)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$D'E' = \sqrt{(8-3)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$DE = \sqrt{[-8-(-3)]^2 + (6-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$C'E' = \sqrt{(5-3)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$CE = \sqrt{[-5-(-3)]^2 + (7-3)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

ومن تعريف تطابق القطع المستقيمة ، نستنتج أن:
$\overline{DC} \cong \overline{D'C'}$, $\overline{DE} \cong \overline{D'E'}$, $\overline{CE} \cong \overline{C'E'}$.

ثمّ استعمل المنقلة لقياس زوايا المثلثين، ستجد أن القياسات متساوية. ولأن
$\overline{DC} \cong \overline{D'C'}$ ، $\overline{DE} \cong \overline{D'E'}$, $\overline{CE} \cong \overline{C'E'}$, $\angle D \cong \angle D'$, $\angle C \cong \angle C'$, $\angle E \cong \angle E'$ ،
فإن $\triangle CDE \cong \triangle C'D'E'$

إرشادات

التحويلات

لا تحافظ جميع التحويلات على التطابق.

التحويلات التي لا تغير القياس أو الشكل هي تحويلات التطابق فقط. وستتعلم المزيد عن التحويلات في فصل لاحق.

b) ما تحويل التطابق للمثلثين $\triangle CDE$ و $\triangle C'D'E'$؟

$\triangle C'D'E'$ هو انعكاس لـ $\triangle CDE$.

تحقق من فهمك

الهندسة الإحداثية: رؤوس $\triangle LMN$ هي: $L(1, 1), M(3, 5), N(5, 1)$. وإحداثيات رؤوس $\triangle L'M'N'$ هي: $L'(-1, -1), M'(-3, -5), N'(-5, -1)$.

2A) تحقق من أن $\triangle LMN \cong \triangle L'M'N'$.

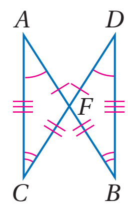
2B) اذكر تحويل التطابق للمثلثين $\triangle LMN$ و $\triangle L'M'N'$.

تأكد

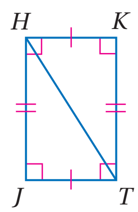
مثال 1 (ص 144)

حدد الزوايا والأضلاع المتناظرة والمتطابقة، ثم المثلثات المتطابقة في الشكلين الآتيين:

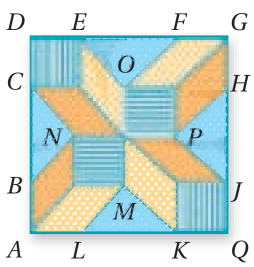
1)



2)



3) **تنجيد:** في التصميم المرفق، افرض أن الزوايا والقطع المستقيمة التي تبدو في الشكل متطابقة هي متطابقة فعلًا. بين أي المثلثات متطابقة.



مثال 2 (ص 145)

4) رؤوس المثلثين $\triangle SUV$ و $\triangle S'U'V'$ هي:

$S(0, 4), U(0, 0)$, $V(2 , 2), S'(0, -4), U'(0 , 0)$, $V'(-2, -2)$.

تحقق من أن المثلثين متطابقان ، ثم اذكر تحويل التطابق.

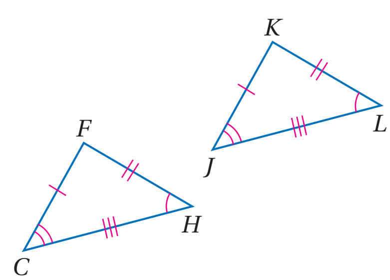
تمارين ومسائل

للأسئلة	انظر الأمثلة
5 ، 6	1
7–10	2

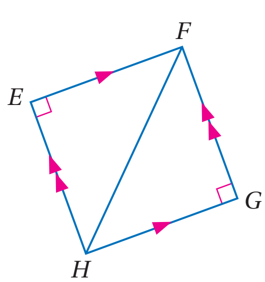
إرشادات للتمارين

حدد الزوايا والأضلاع المتطابقة، ثم حدد المثلثات المتطابقة في كل من المسألتين التاليتين:

5)

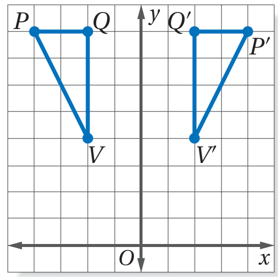


6)

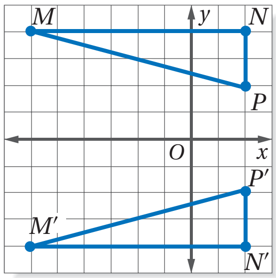


تحقق من تطابق كل مثلثين، واذكر تحويل التطابق في كل مما يلي:

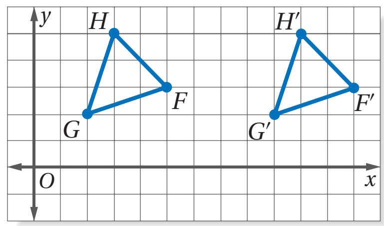
7) $\triangle PQV \cong \triangle P'Q'V'$



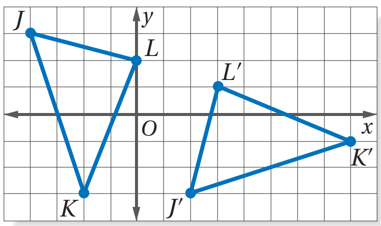
8) $\triangle MNP \cong \triangle M'N'P'$



9) $\triangle GHF \cong \triangle G'H'F'$



10) $\triangle JKL \cong \triangle J'K'L'$

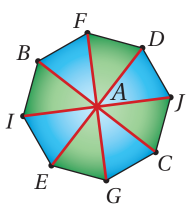


اذكر الزوايا والأضلاع المتطابقة لكل زوج من المثلثات المتطابقة:

11) $\triangle TUV \cong \triangle XYZ$

12) $\triangle BCF \cong \triangle DGH$

13) مظلات: يوجد عادة في المظلات ثمانية قطاعات مثلثة وبأذرع متساوية الطول.
هل العبارتان $\triangle JAD \cong \triangle IAE$ و $\triangle JAD \cong \triangle EAI$ صحيحتان؟ وضح.



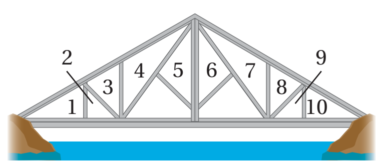
14) فسيفساء: يمثل الشكل المجاور جزءًا من فسيفساء. إذا كانت قواعد المثلثات متساوية في الطول. فما الذي تحتاج إلى معرفته أيضا لتستنتج أن المثلثات الأربعة المحيطة بالمربع متطابقة؟

الربط مع الحياة

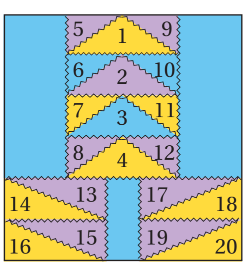
تتكون الفسيفساء من قطع الزجاج والرخام والسيراميك مرتبة عادة بنمط معين، وتثبت هذه القطع بالإسمنت. تستعمل الفسيفساء لتزيين الجدران والأرضيات والحدائق.

لو فرضنا أن القطع والزوايا التي تبدو في الأشكال التالية متطابقة تكون متطابقة فعلاً، فحدد المثلثات المتطابقة:

15)



16)



وضح صحة كل عبارة مما يلي أو خطأها، وأعط مثالاً أو مثالاً مضادًا لكل منها:

17) كل مثلثين زواياهما المتناظرة متطابقة يكونان متطابقين.

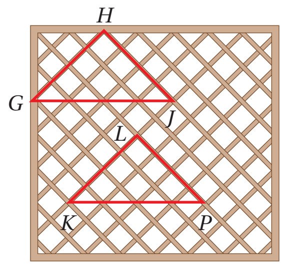
18) كل مثلثين زواياهما وأضلاعهما المتناظرة متطابقة يكونان متطابقين.

جبر: في السؤالين 20 , 19 استعمل المعلومات التالية:
$\triangle QRS \cong \triangle GHJ$, $RS = 12$, $QR = 10$, $QS = 6$, $HJ = 2x - 4$.

19) ارسم شكلًا لتبين المثلثات المتطابقة.

20) أوجد قيمة x.

21) تريد فاطمة أن تغطي النافذة بطبقة عازلة عن الشمس وتريد أن تبقي منطقتين مثلثتين لأعمال فنية. إذا كان $\triangle GHJ \cong \triangle KLP$، فما الزوايا والأضلاع المتطابقة؟



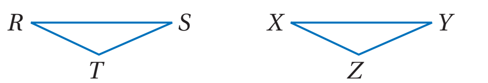
22) برهان: ضع العبارات التي استعملت في برهنة العبارة أدناه بالترتيب الصحيح. واذكر مبررات كل عبارة.

"تطابق المثلثات علاقة متماثلة"

المعطيات: $\triangle RST \cong \triangle XYZ$

المطلوب إثبات أن: $\triangle XYZ \cong \triangle RST$

البرهان:



$\triangle XYZ \cong \triangle RST$
___?___

$\triangle RST \cong \triangle XYZ$
___?___

$\angle R \cong \angle X$, $\angle S \cong \angle Y$, $\angle T \cong \angle Z$, $\overline{RS} \cong \overline{XY}$, $\overline{ST} \cong \overline{YZ}$, $\overline{RT} \cong \overline{XZ}$
___?___

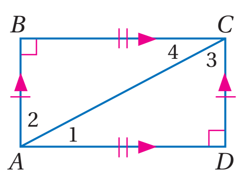
$\angle X \cong \angle R$, $\angle Y \cong \angle S$, $\angle Z \cong \angle T$, $\overline{XY} \cong \overline{RS}$, $\overline{YZ} \cong \overline{ST}$, $\overline{XZ} \cong \overline{RT}$
___?___

23) برهان: انسخ البرهان التسلسلي التالي، واذكر مبرر كل عبارة.

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AD} \cong \overline{CB}$, $\overline{AD} \perp \overline{DC}$, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

المطلوب إثبات أن: $\triangle ACD \cong \triangle CAB$

البرهان:



$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ a. ___?___

$\overline{AD} \cong \overline{CB}$ b. ___?___

$\overline{AC} \cong \overline{CA}$ c. ___?___

$\overline{AD} \perp \overline{DC}$ d. ___?___

$\overline{AB} \perp \overline{BC}$ f. ___?___

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ i. ___?___

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ k. ___?___

$\angle D$ زاوية قائمة e. ___?___

$\angle B$ زاوية قائمة g. ___?___

$\angle 1 \cong \angle 4$ j. ___?___

$\angle 2 \cong \angle 3$ l. ___?___

$\angle D \cong \angle B$ h. ___?___

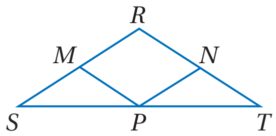
$\triangle ACD \cong \triangle CAB$ m. ___?___

24) برهان: اكتب برهانًا تسلسليًّا يبين أن تطابق المثلثات يحقق خاصية الانعكاس. (نظرية 3.4)

مسائل
مهارات التفكير العليا

25) **مسألة مفتوحة:** أوجد صورة من واقع الحياة لمثلثات متطابقة، ثم بين كيف عرفت أن المثلثات متطابقة.

26) **تحدّ:** $\triangle RST$ متطابق الضلعين فيه $RS = RT$،
والنقاط M, N, P منتصفات أضلاعه و $\angle S \cong \angle MPS$ و $\overline{NP} \cong \overline{MP}$
ما المعلومات الأخرى التي تحتاج إليها لتثبت أن $\triangle SMP \cong \triangle TNP$؟



27) **اكتب:** استعمل المعلومات في الصفحة 144، لتوضح لماذا تستعمل المثلثات في تصميم الجسور وبنائها.

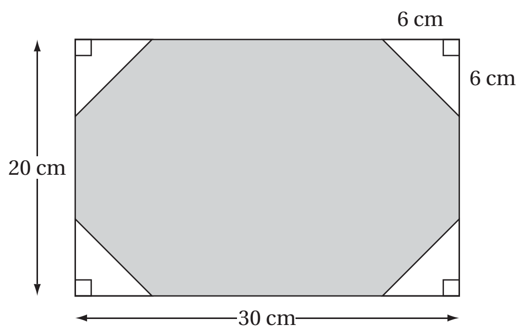
تدريب على اختبار معياري

28) المثلث ABC يطابق المثلث HIJ. رؤوس المثلث ABC هي: $A(-1, 2), B(0, 3), C(2, -2)$. ما طول الضلع $\overline{HJ}$؟

A $\sqrt{2}$　　**C** 5

B 3　　**D** لا يمكن معرفته.

29) قطعت خولة أربعة مثلثات متطابقة من أركان مستطيل لتشكّل شكلًا ثمانيًّا كما هو مبين أدناه.



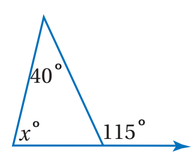
ما مساحة الشكل الثماني؟

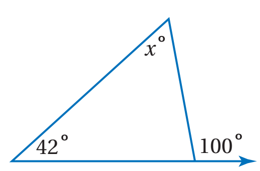
A $456\ cm^2$　　**C** $552\ cm^2$

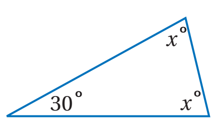
B $528\ cm^2$　　**D** $564\ cm^2$

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة x فيما يلي: (الدرس 3-2)

30)


31)


32)


أوجد قيمة x وطول كل ضلع في المثلث التالي: (الدرس 3-1)

33) $\triangle BCD$ متطابق الضلعين فيه: $CD = 10$, $BD = x + 2$, $\overline{BC} \cong \overline{CD}, BC = 2x + 4$.

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: أوجد المسافة بين النقطتين: (مهارة سابقة)

34) $(-1, 7), (1, 6)$

35) $(8, 2), (4, -2)$

36) $(0, -6), (-3, -1)$

3-4 إثبات التطابق: حالتي SSS, SAS
Proving Congruence — SSS, SAS

الأفكار الرئيسة:

- أستعمل مسلمة SSS للتحقق من تطابق مثلثين.
- أستعمل مسلمة SAS للتحقق من تطابق مثلثين.

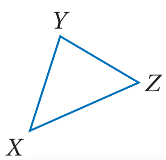
المفردات:

الزاوية المحصورة
included angle

استعد

منذ حوالى 120 سنة قبل الميلاد كان الإغريق يستعملون الخصائص الهندسية لتقسيم الأراضي بدقة. ومنذ ذلك الحين وعلم المساحة يستعمل في أعمال الهندسة المدنية وعمل الخرائط. فللتّحقق من القياسات يقوم المسَّاح برسم مثلث قائم الزاوية على قطعة الأرض، ثم يرسم مثلثًا آخر مطابقًا للمثلث الأول.

مسلمة SSS: هل من الضروري أن نبرهن تطابق الأضلاع المتناظرة وتطابق الزوايا المتناظرة في مثلثين لنثبت أنهما متطابقان؟ في هذا الدرس سنكتشف طريقتين لإثبات تطابق مثلثين.

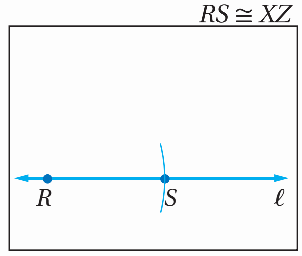


استعمل الخطوات التالية لترسم مثلثًا أضلاعه تطابق أضلاع $\triangle XYZ$ المجاور.

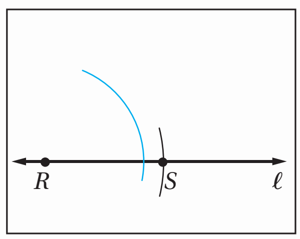
إنشاءات هندسية

رسم مثلثات متطابقة باستعمال الأضلاع

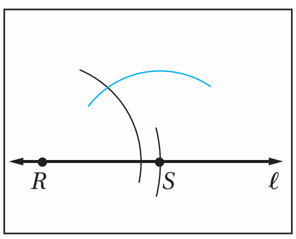
الخطوة 1: استعمل المسطرة لرسم المستقيم ℓ، وحدد عليه نقطة R. استعمل الفرجار لتحديد $\overline{RS}$ على المستقيم ℓ، بحيث يكون $\overline{RS} \cong \overline{XZ}$



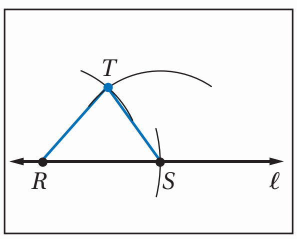
الخطوة 2: استعمل الفرجار لترسم قوسًا من دائرة مركزها R وطول نصف قطرها يساوي XY.



الخطوة 3: استعمل الفرجار لترسم قوسًا من دائرة مركزها S وطول نصف قطرها يساوي YZ.



الخطوة 4: سمّ نقطة تقاطع القوسين T وارسم $\overline{RT}$، $\overline{ST}$ لتحصل على $\triangle RST$.

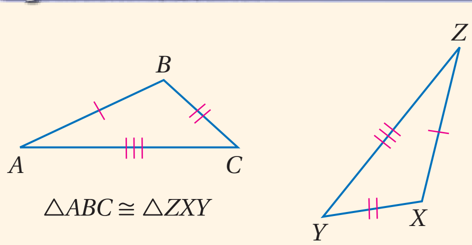


الخطوة 5: قص $\triangle RST$ وضعه فوق $\triangle XYZ$. ماذا تلاحظ؟

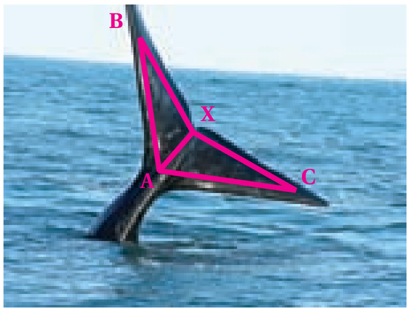
إذا تطابقت الأضلاع المتناظرة في مثلثين فإن المثلثين متطابقان. هذه مسلّمة الأضلاع الثلاثة، وتُكتب باختصار SSS.

مسلمة 3.1 التطابق بثلاثة أضلاع

إذا تطابقت أضلاع مثلث مع أضلاع مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان. وتُختصر هذه الحالة بـ: SSS.



مثال من واقع الحياة — استعمال SSS في البراهين



1 أحياء بحرية: يبدو ذيل الحوت القاتل على صورة مثلثين بينهما ضلع مشترك. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $\triangle BXA \cong \triangle CXA$ إذا علمت أن:

$\overline{BX} \cong \overline{CX}$ و $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

المعطيات: $\overline{BX} \cong \overline{CX}$ و $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

المطلوب إثبات أن: $\triangle BXA \cong \triangle CXA$

البرهان:

العبارة	التبرير
(1 $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{BX} \cong \overline{CX}$	(1 معطى
(2 $\overline{AX} \cong \overline{AX}$	(2 خاصية الانعكاس
(3 $\triangle BXA \cong \triangle CXA$	(3 تطابق بثلاثة أضلاع SSS

الربط مع الحياة

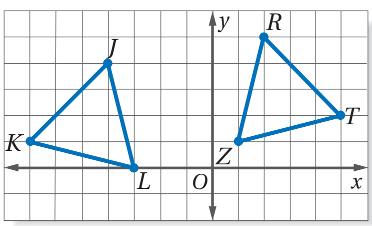
هناك نوع من الحيتان (Orca) يُسمى الحيتان القاتلة، لطبيعتها المفترسة. وهي أكبر نوع في عائلة الدلافين، حيث يتراوح معدل طول الذكر بين 5.5 و 7 أمتار، ووزنه بين 3600 و 5400 كيلوجرام.

تحقق من فهمك

(1 لافتة تحذيرية تفيد أن "الطريق زلق عندما يكون رطبًا" تتكون من مثلثين. إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ و $\overline{CB} \cong \overline{DC}$، أثبت أن $\triangle ACB \cong \triangle ACD$

يمكنك استعمال قانون المسافة بين نقطتين، ومسلمات تطابق المثلثات لإيجاد علاقة بين الأشكال في المستوى الإحداثي.

مثال — تطابق المثلثين بثلاثة أضلاع SSS في المستوى الإحداثي



2 الهندسة الإحداثية: إذا كانت $R(2, 5)$, $Z(1,1)$, $T(5, 2)$, $L(-3, 0)$, $K(-7, 1)$, $J(-4, 4)$.

فهل $\triangle RTZ \cong \triangle JKL$ ؟ وضح ذلك.

استعمل قانون المسافة بين نقطتين لتثبت أن الأضلاع المتناظرة في المثلثين متطابقة.

$$JK = \sqrt{[-4-(-7)]^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$RT = \sqrt{(2-5)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$KL = \sqrt{[-7-(-3)]^2 + (1-0)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$TZ = \sqrt{(5-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$JL = \sqrt{[-4-(-3)]^2 + (4-0)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$RZ = \sqrt{(2-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

واضح أن $RT = JK$, $TZ = KL$, $RZ = JL$. وبحسب تعريف القطع المستقيمة المتطابقة تكون القطع المستقيمة المتناظرة متطابقة، ولهذا يكون $\triangle RTZ \cong \triangle JKL$ بتطبيق SSS.

تحقق من فهمك

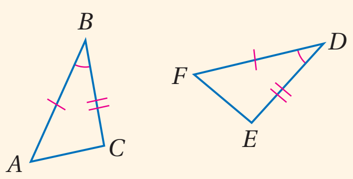
2) إذا كانت $A(1، 1)$ ،$B(3، 2)$، $C(2، 5)$، $T(1، -1)$، $D(3، -3)$، $S(2، -5)$ هي رؤوس المثلثين ABC وَ TDS، فهل المثلثان متطابقان؟ برر إجابتك.

مسلّمة SAS : إذا أُعطيت طولي ضلعين في مثلث وقياس الزاوية التي يشكلانها وتدعى «**الزاوية المحصورة**» فإنك تصف مثلثًا وحيدًا. ولذلك إذا طابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما من مثلث نظائرها من مثلث آخر فإن المثلثين متطابقان.

مسلمة 3.2 التطابق بـ: ضلع - زاوية - ضلع

إذا طابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر فإن المثلثين متطابقان.

وتختصر هذه الحالة بـ: SAS .

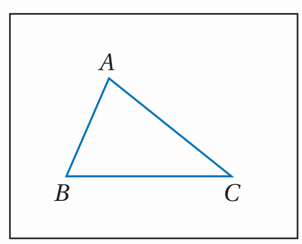


$\triangle ABC \cong \triangle FDE$

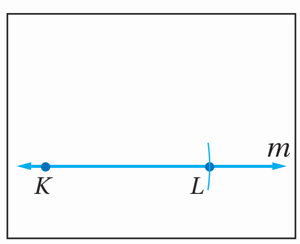
إنشاءات هندسية

رسم مثلث يطابق مثلثًا آخر معطى باستعمال ضلعين والزاوية المحصورة بينهما

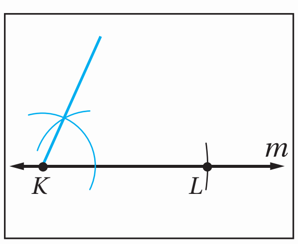
الخطوة 1: ارسم مثلثًا، وسمِّ رؤوسه: A, B, C



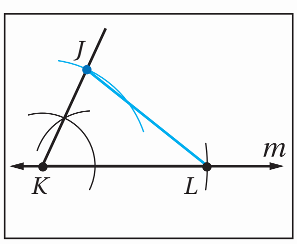
الخطوة 2: اختر أي نقطة K على المستقيم m. واستعمل الفرجار لتحديد $\overline{KL}$ على المستقيم m بحيث يكون $\overline{KL} \cong \overline{BC}$.



الخطوة 3: ارسم زاوية مطابقة للزاوية B بحيث يكون $\overrightarrow{KL}$ أحد ضلعيها، والنقطة K رأسها.



الخطوة 4: حدد $\overline{JK}$ بحيث يكون $\overline{JK} \cong \overline{AB}$، وارسم $\overline{JL}$ ليكتمل $\triangle JKL$.



الخطوة 5: قص $\triangle JKL$ وضعه فوق $\triangle ABC$. ماذا تلاحظ؟

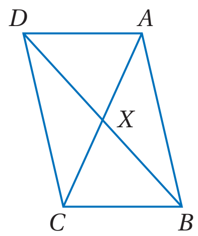
مثـــال استعمال تطابق المثلثين بضلعين وزاوية محصورة SAS في البراهين

3 اكتب برهانًا تسلسليًّا لما يلي.

المعطيات: X منتصف $\overline{BD}$

و X منتصف $\overline{AC}$

المطلوب إثبات أن: $\triangle DXC \cong \triangle BXA$



البرهان:

X هي منتصف $\overline{DB}$ (معطى) ← $\overline{DX} \cong \overline{BX}$ (نظرية نقطة المنتصف)

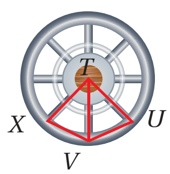
X هي منتصف $\overline{AC}$ (معطى) ← $\overline{CX} \cong \overline{AX}$ (نظرية نقطة المنتصف)

$\angle DXC \cong \angle BXA$ (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

← $\triangle DXC \cong \triangle BXA$ (SAS)

تحقق من فهمك

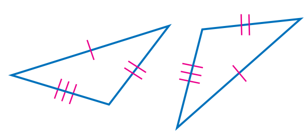
3) قضبان الإطار الداخلية تقسمه إلى ثمانية أجزاء. إذا كان $\overline{TX} \cong \overline{TU}$ وَ $\angle XTV \cong \angle UTV$ ، فبين أن $\triangle XTV \cong \triangle UTV$.



مثـــال تحديد المثلثين المتطابقين

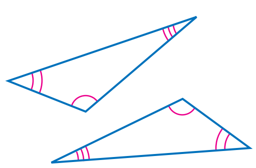
4 حدد المسلمة التي يمكنك استعمالها لإثبات أن المثلثين متطابقان. اكتب "غير ممكن" في الحالة التي لا يمكنك فيها إثبات التطابق.

(a



بما أن الأضلاع المتناظرة متطابقة فإن المثلثين متطابقان وفق المسلمة SSS.

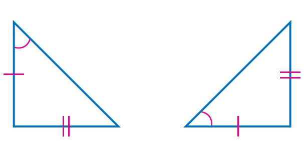
(b



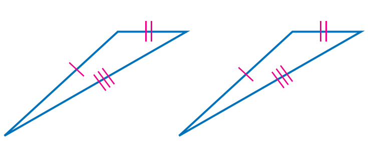
الزوايا المتناظرة متطابقة ولكن هذا لا يتفق مع أي من المسلمتين SAS , SSS إذن، فإثبات التطابق «غير ممكن».

تحقق من فهمك

(4A



(4B



إرشادات

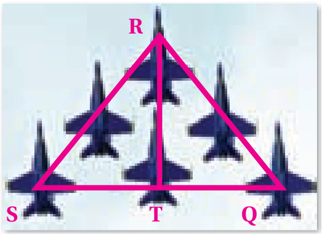
البراهين التسلسلية

يمكن كتابة البراهين التسلسلية إما رأسيًّا أو أفقيًّا.

تأكد

مثال 1 (ص 152)

1) الطائرات النفاثة: في عرض للطائرات النفاثة شكلت الطائرات تشكيلاً يبدو كمثلثين بينهما ضلع مشترك. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $\triangle SRT \cong \triangle QRT$ علمًا بأن T منتصف $\overline{SQ}$ و $\overline{SR} \cong \overline{QR}$.

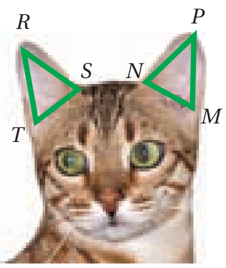


مثال 2 (ص 152)

2) إذا كانت $E(-4, -3)$, $F(-2, 1)$, $G(-2, -3)$, $M(4, -3)$, $N(2, 1)$, $P(2, -3)$ هي رؤوس المثلثين EFG وَ MNP فهل $\triangle EFG \cong \triangle MNP$ ؟ برر إجابتك.

مثال 3 (ص 154)

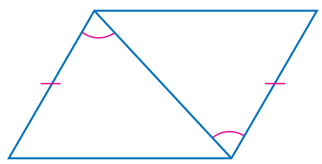
3) قطط: تشبه أذن القط شكل المثلث. اكتب برهانًا لإثبات أن $\triangle RST \cong \triangle PNM$، علمًا بأن $\overline{RS} \cong \overline{PN}$, $\overline{RT} \cong \overline{PM}$, $\angle S \cong \angle N$, $\angle T \cong \angle M$.



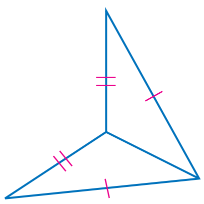
مثال 4 (ص 154)

اذكر المسلمة التي يمكنك استعمالها لإثبات أن المثلثين متطابقان. اكتب «غير ممكن» في الحالة التي لا يمكنك فيها إثبات التطابق.

4)



5)



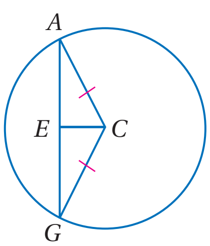
تمارين ومسائل

إرشادات للتمارين	
للأسئلة	انظر الأمثلة
6	1
7 , 8	2
9 , 10	3
11 , 12	4

6) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين :

المعطيات: $\overline{AC} \cong \overline{GC}$, $\overline{EC}$ تنصف $\overline{AG}$

المطلوب إثبات أن: $\triangle GEC \cong \triangle AEC$



حدد ما إذا كان $\triangle JKL \cong \triangle FGH$. وبرر إجابتك.

7) $J(-1, 1), K(-2, -2), L(-5, -1), F(2, -1), G(3, -2), H(2, 5)$

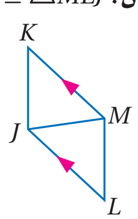
8) $J(3 , 9), K(4 , 6), L(1 , 5), F(1 , 7), G(2 , 4), H(-1 , 3)$

برهان: اكتب برهانًا حسب النوع المشار إليه:

9) برهان ذو عمودين

المعطيات: $\overline{KM} \parallel \overline{LJ}$, $\overline{KM} \cong \overline{LJ}$

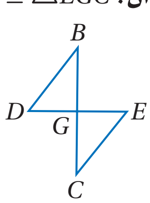
المطلوب إثبات أن: $\triangle JKM \cong \triangle MLJ$



10) برهان تسلسلي

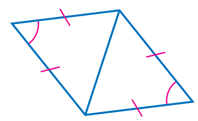
المعطيات: $\overline{BC}$ و $\overline{DE}$ تنصف كل منهما الأخرى.

المطلوب إثبات أن: $\triangle DGB \cong \triangle EGC$

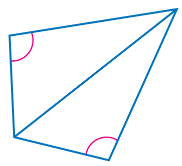


في السؤالين 11 ، 12 : اذكر المسلّمة التي يمكنك استعمالها لإثبات أنّ المثلثين متطابقان، واكتب « غير ممكن » في الحالة التي لا يمكنك فيها إثبات التطابق:

(11



(12

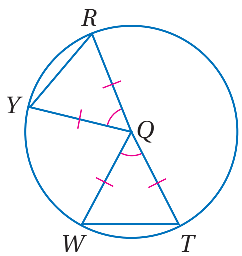


مسائل مهارات التفكير العليا

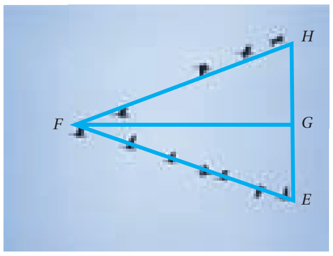
(13 **برهان:** اكتب برهانًا تسلسليًّا :

المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{TQ} \cong \overline{YQ} \cong \overline{WQ}$, $\angle RQY \cong \angle WQT$

المطلوب إثبات أن: $\triangle QWT \cong \triangle QYR$



(14 **الإوَزُّ:** يطير سرب من الإوز مشكّلًا الرسم الذي تراه في الصورة المجاورة. أثبت أن $\triangle EFG \cong \triangle HFG$ إذا علم أن $\overline{EF} \cong \overline{HF}$، وأن G هي منتصف $\overline{EH}$.

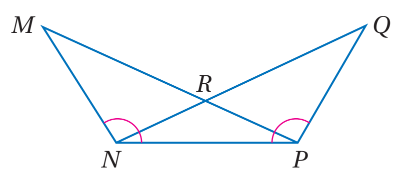


برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين للسؤالين 15 , 16

(15 **المعطيات:** $\triangle MRN \cong \triangle QRP$

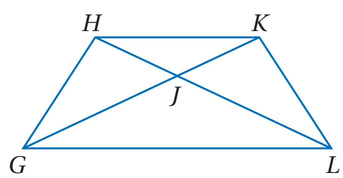
$\angle MNP \cong \angle QPN$

المطلوب إثبات أن: $\triangle MNP \cong \triangle QPN$



(16 **المعطيات:** $\triangle GHJ \cong \triangle LKJ$

المطلوب إثبات أن: $\triangle GHL \cong \triangle LKG$

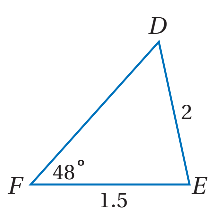


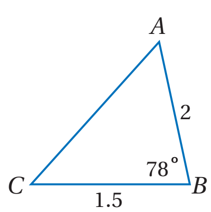
(17 **تبرير:** فسر كيف يمكن استعمال المسلمة SSS لبرهنة تطابق مثلثين.

(18 **مسألة مفتوحة :** ابحث عن مثلثين في جريدة أو في مجلة، وقرر ما إذا كانا متطابقين أم لا.

(19 **أين الخطأ؟** حاول أحمد وزيد التأكد من تطابق المثلثين $\triangle ABC$ وَ $\triangle DEF$. فأيهما كان تبريره صحيحًا؟ ولماذا؟

أحمد	زيد
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ مسلمة SAS	لا يمكن التأكد من التطابق.



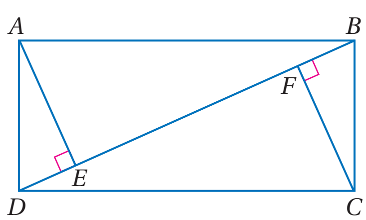


(20 **تحد :** اكتب برهاناً ذا عمودين:

المعطيات: $\overline{FB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AE} \cong \overline{FC}$

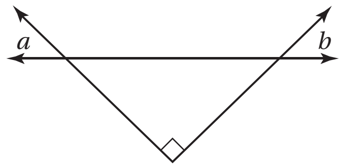
$\overline{AE} \perp \overline{DB}$, $\overline{CF} \perp \overline{DB}$

المطلوب إثبات أن: $\triangle ABD \cong \triangle CDB$



(21 **أكتب:** صف طريقتين مختلفتين يمكن استعمالهما لإثبات أن مثلثين متطابقان.

تدريب على اختبار معياري



(22 أي العبارات التالية تصف العلاقة الصحيحة بين الزاويتين a, b في الشكل المجاور؟

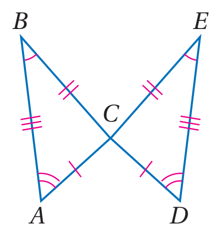
A $a+b<90$ **C** $a+b=90$

B $a+b>90$ **D** $a+b=45$

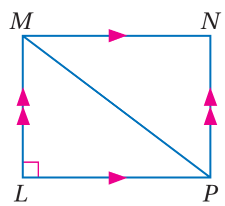
مراجعة تراكمية

سمِّ المثلثين المتطابقين في كل شكل مما يلي: (الدرس 3-3)

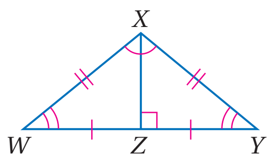
(23



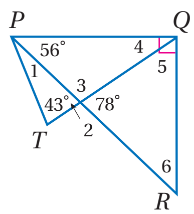
(24



(25



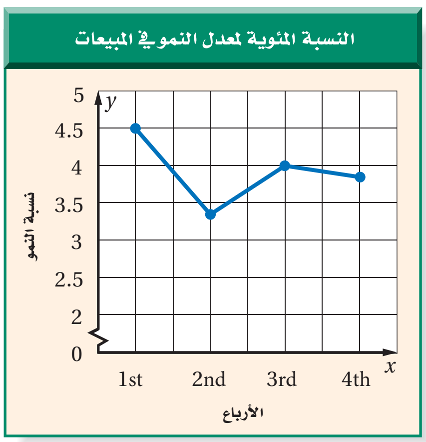
أوجد قياس كل من الزوايا التالية مع العلم أن $\overline{PQ} \perp \overline{QR}$. (الدرس 3-2)



(26 $m\angle 2$ **(27** $m\angle 3$ **(28** $m\angle 5$

(29 $m\angle 4$ **(30** $m\angle 1$ **(31** $m\angle 6$

تحليل الرسوم البيانية : لحل السؤالين 32 و 33، استعمل الرسم البياني المجاور والذي يوضح النمو في مبيعات إحدى السلع خلال سنة. (الدرس 3-2)

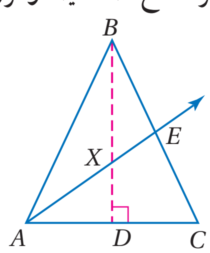


(32 أوجد معدل التغير من الربع الأول إلى الربع الثاني.

(33 أيهما أكبر: معدل التغير من الربع الأول إلى الربع الثاني، أم من الثالث إلى الرابع؟

استعد للدرس اللاحق

مهارات سابقة : إذا علمت أن $\overline{BD}$ و $\overline{AE}$ ينصفان الزاويتين والضلعين اللذين يقطعانهما فاذكر القطع المستقيمة والزوايا المشار إليها فيما يلي: (مهارات سابقة)



(34 قطعة مستقيمة تطابق $\overline{EC}$ **(35** زاوية تطابق $\angle ABD$

(36 زاوية تطابق $\angle BDC$ **(37** قطعة مستقيمة تطابق $\overline{AD}$

(38 زاوية تطابق $\angle BAE$ **(39** زاوية تطابق $\angle BXA$

اختبار منتصف الفصل

الدروس: 3-1 → 3-4

1) اختيار من متعدد: ما نوع المثلث الذي رؤوسه $A(-1\ ,\ 1), B(1, 3), C(3\ ,\ -1)$. (الدرس 1-3)

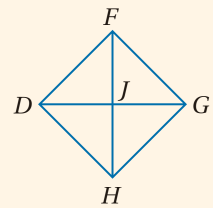
A مختلف الأضلاع

B متطابق الأضلاع

C متطابق الضلعين وحاد الزوايا

D متطابق الضلعين وقائم الزاوية

2) حدد المثلثات المتطابقة الضلعين في الشكل أدناه مع العلم أن $\overline{FH}$ و $\overline{DG}$ متطابقتان ومتعامدتان وتنصف كل منهما الأخرى. (الدرس 1-3)

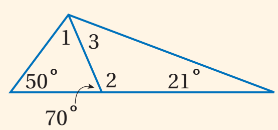


إذا كان $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع، وكان $AB = 2x$, $BC = 4x - 7$, و $AC = x + 3.5$. فأوجد: (الدرس 1-3)

3) قيمة x.

4) طول ضلع المثلث.

أوجد قياس كل زاوية مما يلي: (الدرس 2-3)

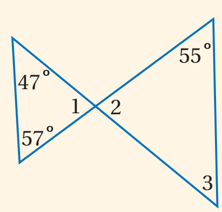


5) $m\angle 1$

6) $m\angle 2$

7) $m\angle 3$

أوجد قياس كل زاوية مما يلي: (الدرس 2-3)

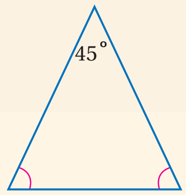


8) $m\angle 1$

9) $m\angle 2$

10) $m\angle 3$

11) أوجد قياس كل من الزاويتين المجهولتين: (الدرس 2-3)



12) إذا كان $\triangle JKL \cong \triangle MNP$، فاذكر كلًّا من الأضلاع والزوايا المتناظرة فيهما. (الدرس 3-3)

هندسة إحداثية: رؤوس $\triangle JKL$ هي:
$J(7, 7), K(3, 7), L(7, 1)$
ورؤوس $\triangle J'K'L'$ هي: $J'(7, -7), K'(3, -7), L'(7, -1)$.
استعمل هذه المعطيات في حل السؤالين 13 , 14: (الدرس 3-3)

13) برهن على أن $\triangle JKL \cong \triangle J'K'L'$

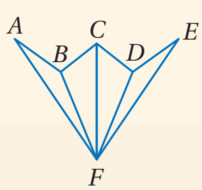
14) اذكر تحويل التطابق للمثلثين $\triangle JKL$ و $\triangle J'K'L'$.

15) إذا علمت أن $J(-4\ ,5\ ), M(-2\ ,6)\ , L(-1\ ,\ 1\ )$
$B(-3\ ,-4)\ , D(-4\ ,\ -2)\ , G(1\ ,\ -1)$
فهل $\triangle JML \cong \triangle BDG$؟ (الدرس 4-3)

16) إذا علمت أن إحداثيات رؤوس المثلثين XYZ وَ TUV هي:
$X(0, 0), Y(3, 3), Z(0, 3), T(-6, -6),$
$U(-3, -3), V(-3, -6)$
فهل $\triangle XYZ \cong \triangle TUV$؟ برر إجابتك. (الدرس 4-3)

17) اكتب برهانًا ذا عمودين للسؤال التالي: (الدرس 4-3)

المعطيات: $\triangle ABF \cong \triangle EDF$.
$\overline{CF}$ تنصف $\angle DFB$.
المطلوب إثبات أن: $\triangle BCF \cong \triangle DCF$.



3-5 إثبات التطابق: حالتي ASA, AAS
Proving Congruence—ASA, AAS

الأفكار الرئيسة:

- أستعمل المسلمة ASA لاختبار التطابق بين مثلثين.
- أستعمل المسلمة AAS لاختبار التطابق بين مثلثين.

المفردات:

الضلع المحصور
included side

استعد

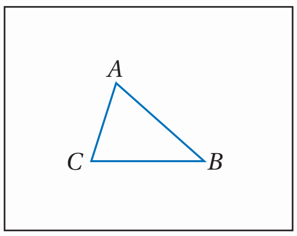
تبين الصورة الدعامات المثلثية لهذا المبنى، لاحظ أنها تشكل مثلثات متطابقة . سنستكشف في هذا الدرس طريقتين جديدتين لإثبات تطابق مثلثين.

مسلمة ASA: افرض أنك أُعطيت قياسي زاويتين وطول الضلع بينهما، ويُدعى الضلع المحصور فهل تشكل هذه القياسات مثلثًا وحيدًا؟

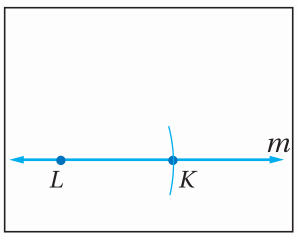
إنشاءات هندسية

رسم مثلثات متطابقة باستعمال زاويتين وضلع محصور

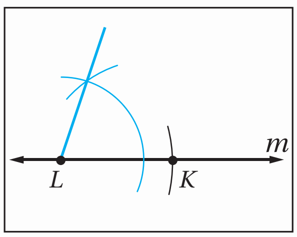
الخطوة 1: ارسم مثلثًا، وسمِّ رؤوسه A, B, C



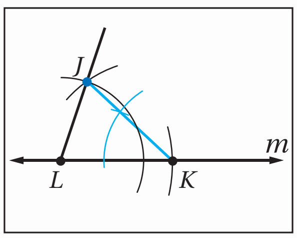
الخطوة 2: ارسم مستقيمًا m، واختر نقطة L عليه، ثم حدد $\overline{LK}$ بحيث $\overline{LK} \cong \overline{CB}$.



الخطوة 3: ارسم زاوية تطابق $\angle C$ بحيث يكون رأسها عند النقطة L ويكون $\overrightarrow{LK}$ أحد ضلعيها.



الخطوة 4: ارسم زاوية تطابق $\angle B$ بحيث يكون رأسها عند النقطة K ويكون $\overrightarrow{LK}$ أحد ضلعيها. وسم النقطة التي يتقاطع فيها ضلعا الزاويتين اللتين أنشأتهما J .



الخطوة 5: قص $\triangle JKL$ وضعه فوق $\triangle ABC$. ماذا تلاحظ؟

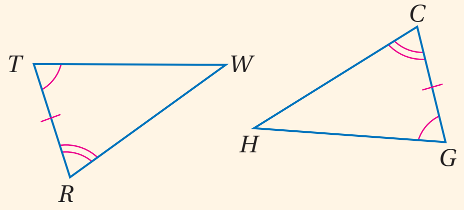
لغة الرياضيات

الضلع المحصور بين زاويتين هو ضلع مشترك بينهما.

مسلمة 3.3 التطابق بـ: زاوية - ضلع - زاوية

إذا طابقتْ زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان

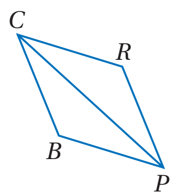
وتختصر هذه الحالة بـ: ASA .



$\angle RTW \cong \angle CGH$

مثـــال استعمال حالة تطابق زاويتين وضلع محصور ASA في البراهين

1 اكتب برهانًا حرًّا.

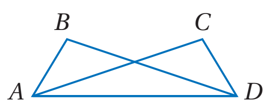


المعطيات: $\overline{CP}$ تنصف الزاويتين $\angle BCR$ و $\angle BPR$.

المطلوب إثبات أن: $\triangle BCP \cong \triangle RCP$

البرهان: بما أن $\overline{CP}$ تُنصِّف كلًّا من $\angle BCR$ و $\angle BPR$ ،
فإنّ $\angle RCP \cong \angle BCP$ و $\angle RPC \cong \angle BPC$،
و $\overline{CP} \cong \overline{CP}$ حسب خاصية الانعكاس، لذا $\triangle RCP \cong \triangle BCP$ وفق المسلّمة ASA.

تحقق من فهمك



1) **المعطيات:** $\angle CAD \cong \angle BDA$ و $\angle CDA \cong \angle BAD$

المطلوب إثبات أن: $\triangle ABD \cong \triangle DCA$

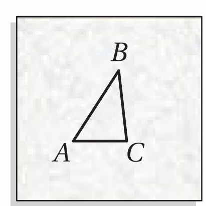
نظرية AAS: افرض أنك أُعطيت قياس زاويتين وطول ضلع غير محصور بينهما في مثلث، فهل تكفي هذه المعلومات لإثبات أن المثلثين متطابقان؟

معمل الهندسة

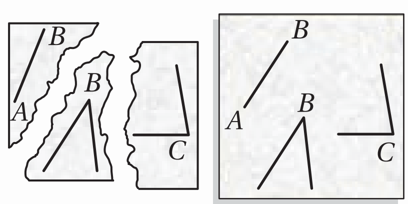
التطابق بـ: زاوية - زاوية - ضلع

نموذج:

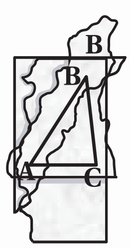
الخطوة 1: ارسم مثلثًا على ورق مقوى، وسمِّ رؤوسه A, B, C.



الخطوة 2: انسخ $\overline{AB}, \angle C, \angle B$ على قطعة ورق أخرى، ثم قصها.



الخطوة 3: كوِّن مثلثًا من القصاصات بحيث لا يكون الضلع محصورًا بين الزاويتين.



تحليل النتائج:

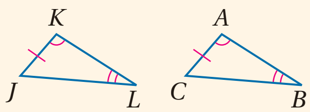
1) ضع $\triangle ABC$ الأصلي فوق المثلث الذي كوَّنته. ماذا تلاحظ؟

2) **خمن:** ماذا تستنتج من تطابق زاويتين وضلع غير محصور بينهما في أحد المثلثين، مع زاويتين وضلع غير محصور بينهما في المثلث الآخر؟

تقودنا هذه التجربة إلى نظرية زاوية – زاوية – ضلع AAS التالية:

نظرية 3.5 التطابق بـ: زاوية - زاوية - ضلع

إذا طابقتْ زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرها من مثلث آخر يكون المثلثان متطابقين. وتختصر هذه الحالة بـ : AAS



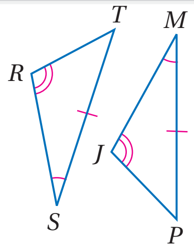
مثال: $\triangle JKL \cong \triangle CAB$

برهان نظرية 3.5

المعطيات: $\angle M \cong \angle S$, $\angle J \cong \angle R$, $\overline{MP} \cong \overline{ST}$

المطلوب إثبات أن: $\triangle JMP \cong \triangle RST$

البرهان:



العبارة	التبرير
1) $\angle M \cong \angle S$, $\angle J \cong \angle R$, $\overline{MP} \cong \overline{ST}$	1) معطى
2) $\angle P \cong \angle T$	2) نظرية الزاوية الثالثة
3) $\triangle JMP \cong \triangle RST$	3) تطابق بـزاويتين وضلع محصور ASA

مثال استعمال AAS في البراهين

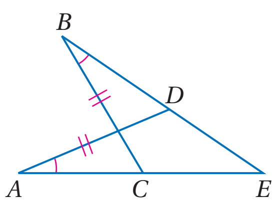
2 اكتب برهانًا تسلسليًّا.

المعطيات: $\angle EAD \cong \angle EBC$

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$

المطلوب إثبات أن: $\overline{AE} \cong \overline{BE}$

البرهان:



$\angle EAD \cong \angle EBC$ — معطى

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ — معطى

$\angle E \cong \angle E$ — خاصية الانعكاس

$\rightarrow$ $\triangle ADE \cong \triangle BCE$ — AAS

$\rightarrow$ $\overline{AE} \cong \overline{BE}$ — ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين

إرشادات

المثلثات المتداخلة

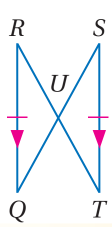
عندما يتداخل مثلثان يستحسن أن يرسم كل مثلث على حدة، وتوضح الأجزاء المتطابقة.

تحقق من فهمك

2) اكتب برهانًا تسلسليًّا.

المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$ ، $\overline{RQ} \parallel \overline{ST}$

المطلوب إثبات أن: $\triangle RUQ \cong \triangle TUS$



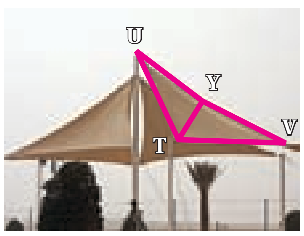
لقد تعلمت طرائق مختلفة لإثبات تطابق مثلثين. ملخص المفاهيم في الصفحة التالية يحتوي قائمة طرائق تساعدك على اختيار الطريقة الأنسب لإثبات تطابق مثلثين.

ملخص المفاهيم

الطريقة	تستعمل عندما. . .
تعريف المثلثين المتطابقين	العناصر المتناظرة في المثلثين متطابقة.
SSS	الأضلاع الثلاثة في مثلث تطابق نظائرها في المثلث الآخر.
SAS	يتطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في مثلث مع نظائرها في المثلث الآخر.
ASA	تتطابق زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث مع نظائرها في المثلث الآخر.
AAS	تتطابق زاويتان وضلع غير محصور بينها في مثلث مع نظائرها في المثلث الآخر.

مثال من واقع الحياة — تحديد ما إذا كان المثلثان متطابقين

3 فن التصميم: استعملت الأشكال المثلثية في تصميم هذه المظلة.
افرض أن $TV = TU = 90\ cm$, $TY = 48\ cm$
وكان $m\angle U = m\angle V = 31°$.
فهل $\triangle TYV \cong \triangle TYU$؟ برر إجابتك.

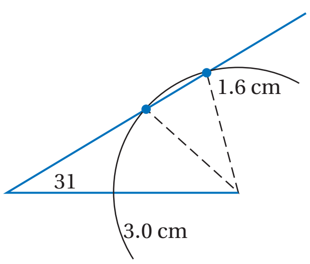


استكشف: نعلم ثلاثة قياسات من كل مثلث ونريد أن نحدد ما إذا كان المثلثان متطابقين.

خطط: بما أن $m\angle U = m\angle V = 31°$, فإن $\angle U \cong \angle V$. وبالمثل بما أن $TV = TU$ ، فإن $\overline{TV} \cong \overline{TU}$. وكذلك بما أن $TY = TY$ ، فإن $\overline{TY} \cong \overline{TY}$. تحقق من التطابق باستعمال الملخص أعلاه.

حل: تشمل المعلومات المعطاة ضلعًا – ضلعًا – زاوية (SSA). وهذه المعطيات لا تبرهن التطابق.

تحقق: استعمل المسطرة والفرجار والمنقلة لترسم مثلثًا يحقق القياسات الثلاثة المعطاة. لتتمكن من الرسم على الورق استبدل بكل 30 cm سنتمترًا واحدًا.



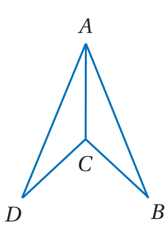
- ارسم قطعة مستقيمة طولها 3سم.
- ارسم على أحد طرفي القطعة زاوية قياسها 31°.
واجعل طول الضلع الثاني للزاوية أكبر من 3 cm.
- ارسم من الطرف الآخر قوسًا لدائرة طول نصف قطرها 1.6 cm يقطع الضلع الثاني للزاوية.
- لاحظ أن القوس يقطع الضلع الثاني للزاوية في نقطتين بدلا من نقطة واحدة. وهذا يدل على أن المعطيات لا تُعرِّفُ مثلثًا وحيدًا. ولهذا، لا نستطيع أن نثبت أن المثلثين متطابقان.

الربط مع الحياة

يعمل حوالى 28٪ من المعماريين في العالم عملاً حرًا، ويصممون المباني والمكاتب والمدارس.

تحقق من فهمك

3) في الشكل المقابل مثلثان . إذا كان $AB = AD = 28\ cm$ و $DC = CB = 11\ cm$
فهل $\triangle ADC \cong \triangle ABC$ ؟ برر إجابتك.



تأكد

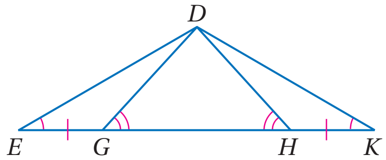
برهان: في السؤالين 2 ,1 اكتب برهاناً من النوع المشار إليه في كل مما يلي:

مثال 1 (ص 160)

1) برهان حر

المعطيات: $\angle E \cong \angle K$, $\angle DGH \cong \angle DHG$, $\overline{EG} \cong \overline{KH}$

المطلوب إثبات أن: $\triangle EGD \cong \triangle KHD$

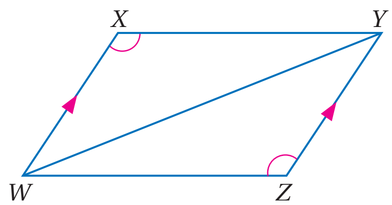


مثال 2 (ص 161)

2) برهان تسلسلي

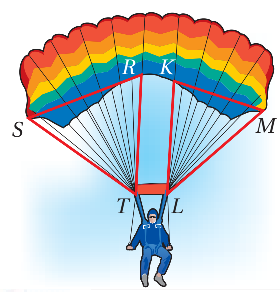
المعطيات: $\overline{XW} \parallel \overline{YZ}$, $\angle X \cong \angle Z$

المطلوب إثبات أن: $\triangle WXY \cong \triangle YZW$



مثال 3 (ص 162)

3) مظلات: افرض أن طول كل من $\overline{ML} = \overline{ST} = 210$ cm ، وأن $\overline{MK} = \overline{SR} = 165$ cm وأن $m\angle T = m\angle L = 49°$.
هل $\triangle SRT \cong \triangle MKL$؟
برر إجابتك.



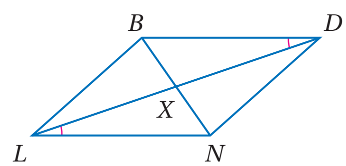
تمارين ومسائل

إرشادات للتمارين	
للأسئلة	انظر الأمثلة
4	1
5	2
7 ،6	3

4) اكتب برهاناً حرًّا:

المعطيات: $\overline{BN}$ تنصف $\overline{DL}$.
$\angle XLN \cong \angle XDB$

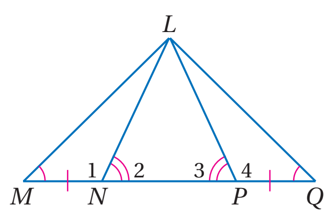
المطلوب إثبات أن: $\overline{LN} \cong \overline{DB}$



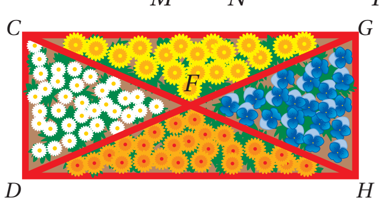
5) اكتب برهانًا تسلسليًا:

المعطيات: $\overline{PQ} \cong \overline{MN}$
$\angle 3 \cong \angle 2$ ، $\angle Q \cong \angle M$

المطلوب إثبات أن: $\triangle MLP \cong \triangle QLN$



بستنة: استعمل المعلومات التالية لحل السؤالين 6 و 7.
تريد فاطمة أن تخطط حديقة بحيث يكون المثلثان $\triangle CFD$ و $\triangle HFG$ متطابقين، والنقطة F منتصف $\overline{DG}$ ، $DG = 16$ m



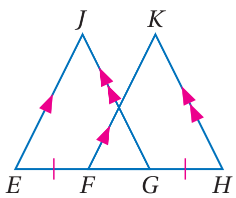
6) افرض أن طول كل من $\overline{CD} = \overline{GH} = 4$ m وَ $m\angle CFD = 29°$.
هل $\triangle CFD \cong \triangle HFG$؟ برر إجابتك.

7) افرض أن F هي منتصف $\overline{CH}$ وأن $\overline{CH} \cong \overline{DG}$ ، فهل $\triangle \overline{CFD} \cong \triangle \overline{HFG}$؟
برر إجابتك.

8) اكتب برهانًا تسلسليًا:

المعطيات: $\overline{EJ} \parallel \overline{FK}$ ، $\overline{JG} \parallel \overline{KH}$ ، $\overline{EF} \cong \overline{GH}$

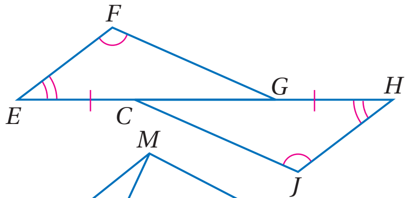
المطلوب إثبات أن: $\triangle EJG \cong \triangle FKH$



9) اكتب برهانًا حرًّا:

المعطيات: $\angle F \cong \angle J$, $\angle E \cong \angle H$, $\overline{GH} \cong \overline{EC}$

المطلوب إثبات أن: $\overline{EF} \cong \overline{HJ}$

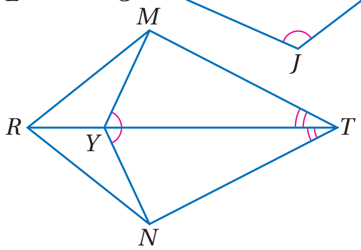


10) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين:

المعطيات: $\angle MYT \cong \angle NYT$

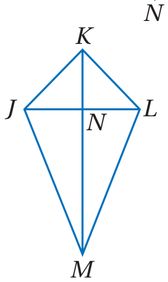
$\angle MTY \cong \angle NTY$

المطلوب إثبات أن: $\triangle RYM \cong \triangle RYN$



استعمل المعلومات التالية لحل السؤالين 11 و 12. في الشكل المجاور،

افرض أن: $m\angle NJM = 68°$, $JM = 82$ cm , $JL = 60$ cm

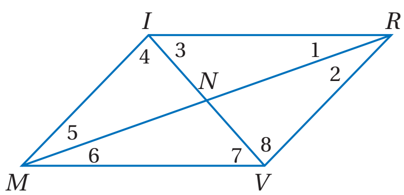


11) إذا كانت N منتصف $\overline{JL}$ وكان $\overline{KM} \perp \overline{JL}$ ، فهل $\triangle JKN \cong \triangle LKN$؟ برر إجابتك.

12) إذا كان $\overline{LM} \cong \overline{JM}$ وكانت $\angle NLM \cong \angle NJM$، فهل $\triangle LNM \cong \triangle JNM$؟

برر إجابتك.

أكمل العبارتين التاليتين، واذكر المسلّمة أو النظرية التي اعتمدتها:



13) إذا كان $\overline{IM} \cong \overline{RV}$ وكانت $\angle 2 \cong \angle 5$، فإن

$\triangle INM \cong \triangle$ ____؟____ وفق ____؟____.

14) إذا كان $\overline{IR} \parallel \overline{MV}$ وكان $\overline{IR} \cong \overline{MV}$ ، فإن

$\triangle IRN \cong \triangle$ ____؟____ وفق ____؟____.

15) أيها لا ينتمي؟ ما الاختصار الذي لا ينتمي إلى مجموعة الاختصارات الأخرى؟ وضح إجابتك.

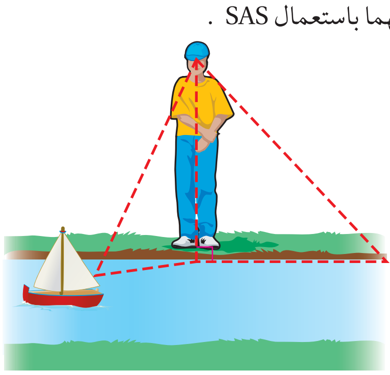
ASA	SSS	SSA	AAS

16) تبرير: أعطِ مثالًا لتبين أن حالة تطابق ثلاث زوايا AAA (زاوية – زاوية – زاوية) لا يمكن استعمالها لإثبات تطابق مثلثين.

مسائل مهارات التفكير العليا

17) مسألة مفتوحة: ارسم مثلثين يمكن إثبات تطابقهما باستعمال SAS .

18) تحدّ: أراد سالم أن يقدر المسافة بينه وبين نموذج قارب في الماء. فعدَّل سالم حافة قبعته بحيث أصبحت على استقامة خط بصره لنموذج القارب. وثبت عنقه، ثم استدار بجسمه ليشكل خط بصر نحو نقطة على الأرض اليابسة، ثم قاس المسافة من مكانه إلى تلك النقطة. فهل هذه المسافة تساوي المسافة بين مكانه الأول ونموذج القارب؟ برر إجابتك.



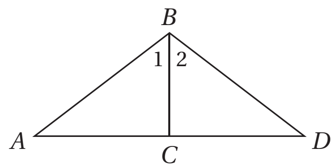
19) **أكتب:** استعمل المعلومات الواردة في صفحة 159 لتفسر كيف تُستعمل المثلثات المتطابقة في الرسم، وبين أهميتها لدعم خطوات العمل.

تدريب على اختبار معياري

20) **إذا علمت أن** $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ وأن $\angle 1 \cong \angle 2$
فأي نظرية أو مسلّمة يمكنك استعمالها لتبرهن أن $\triangle ABC \cong \triangle DBC$؟

A AAS **C** SAS

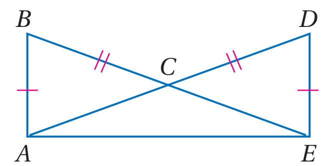
B ASA **D** SSS



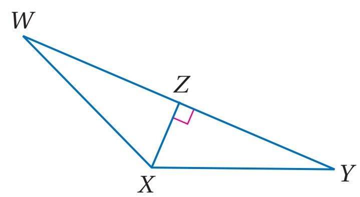
مراجعة تراكمية

اكتب برهانًا تسلسليًّا لكل من السؤالين التاليين: (الدرس 3-4)

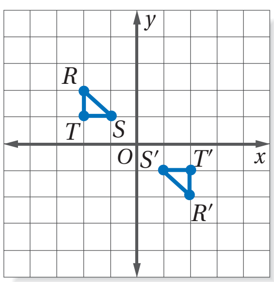
21) **المعطيات:** $\overline{DE} \cong \overline{BA}$ و $\overline{BE} \cong \overline{DA}$
المطلوب إثبات أن: $\triangle DAE \cong \triangle BEA$



22) **المعطيات:** $\overline{WY} \perp \overline{XZ}$ و $\overline{XZ}$ تنصف $\overline{WY}$.
المطلوب إثبات أن: $\triangle YZX \cong \triangle WZX$



23) تحقق من تطابق المثلثين، واذكر تحويل التطابق : (الدرس 3-3)
$\triangle R'T'S' \cong \triangle RTS$



اكتب كلًّا من العبارتين الآتيتين بصيغة « إذا كان – فإنّ»: (الدرس 3-1).

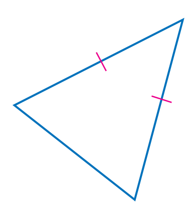
24) الأشخاص السعداء نادرًا ما يفشلون في حياتهم.

25) يخاف البطل من الخسارة.

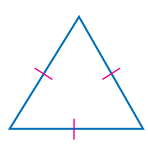
استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: صنف كل مثلث وفقًا لأضلاعه: (الدرس 3-1)

(26



(27



توسع 3-5

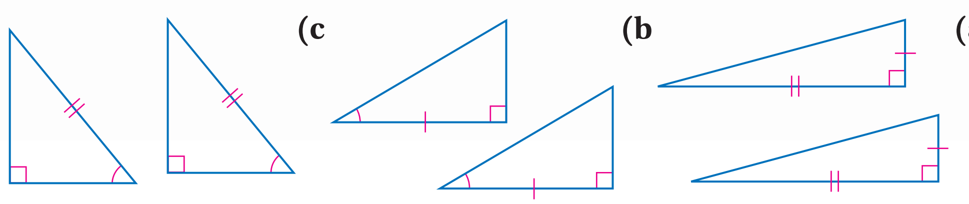
معمل الهندسة

التطابق في المثلثات القائمة الزاوية

تعلمت في الدرسين 4-3 و 5-3 نظريات ومسلمات لإثبات تطابق مثلثين. فهل تنطبق هذه النظريات والمسلمات على المثلثات القائمة الزاوية؟

نشاط 1 تطابق المثلثات

ادرس تطابق كل زوج من المثلثات القائمة الزاوية الآتية:



تحليل النتائج:

1) هل كل زوج من المثلثات متطابق؟ إذا كان كذلك، فأي نظرية أو مسلمة اعتمدت عليها ؟

2) أعِدْ كتابة قوانين التطابق من السؤال 1 ، مستعملاً الرمز (L) لكلمة ساق (ضلع القائمة)، و (H) لكلمة وتر. احذف الحرف (A). لأننا نعلم أن كل مثلث قائم الزاوية يحوي زاوية قائمة ، وأن الزوايا القائمة متطابقة.

3) **خمِّن:** إذا علمت أن ساقي مثلث قائم الزاوية يطابقان ساقي مثلث آخر قائم الزاوية أيضًا، فما المعطيات الأخرى التي تحتاج إليها لتتحقق من تطابق المثلثين؟ وضح إجابتك.

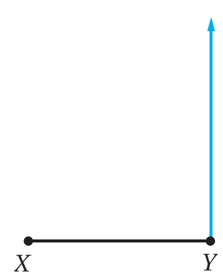
تعلمت في الدرس 5-3 أن SSA لا تصلح لإثبات تطابق مثلثين. ولكن هل يمكن استعمالها إذا كان المثلثان قائمي الزاوية؟

نشاط 2 حالة ضلعين وزاوية SSA والمثلثات القائمة الزاوية

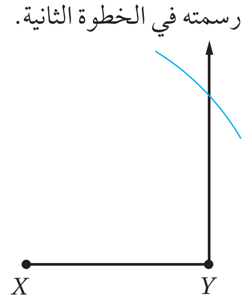
كم مثلثًا قائم الزاوية طول وتره 10 cm، وطول أحد ساقيه 7 cm؟

الخطوة 1: ارسم $\overline{XY}$ بحيث يكون $XY = 7$ cm.

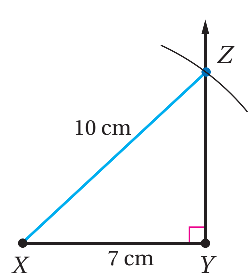
الخطوة 2: استعمل المنقلة لترسم من النقطة Y نصف مستقيم عمودي على $\overline{XY}$.



الخطوة 3: افتح الفرجار فتحة تساوي 10 cm، وثبت الرأس المدبب في النقطة X، وارسم قوسًا يقطع نصف المستقيم الذي رسمته في الخطوة الثانية.



الخطوة 4: سمّ نقطة التقاطع Z، ثم صل $\overline{XZ}$ ليكتمل $\triangle XYZ$.



تحليل النتائج:

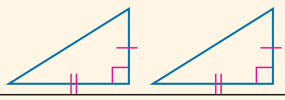
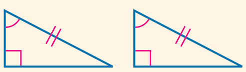
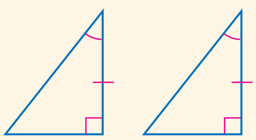
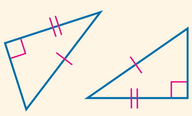
4) هل نتج عن النشاط السابق مثلث وحيد؟

5) هل تستطيع استعمال طولي الوتر وأحد الساقين (ضلعي القائمة) في إثبات تطابق مثلثين قائمي الزاوية؟

6) **خمّن:** هل تستطيع استعمال SSA لبرهنة تطابق مثلثات قائمة الزاوية؟

من النشاطين السابقين نستطيع استعمال أربع طرائق لإثبات تطابق مثلثين قائمي الزاوية.

المفهوم **تطابق المثلثات القائمة الزاوية**

النظرية	الاختصار	مثال
3.6 **التطابق بـ «ساق – ساق»** : إذا تطابق ساقا مثلث قائم الزاوية مع ساقي مثلث آخر قائم الزاوية يكون المثلثان متطابقين.	LL	
3.7 **التطابق بـ «وتر – زاوية»**: إذا تطابق وتر وإحدى الزاويتين الحادتين في مثلث قائم الزاوية مع نظائرهما في مثلث آخر قائم الزاوية، يكون المثلثان متطابقين.	HA	
3.8 **التطابق بـ «ساق – زاوية»**: إذا تطابق ساق وإحدى الزاويتين الحادتين في مثلث قائم الزاوية مع نظائرهما في مثلث آخر قائم الزاوية، يكون المثلثان متطابقيْن.	LA	
مسلّمة		
3.4 **التطابق بـ «وتر – ساق»**: إذا تطابق وتر وساق في مثلث قائم الزاوية مع نظائرهما في مثلث آخر قائم الزاوية، يكون المثلثان متطابقين.	HL	

تدريبات:

برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكل من النظريات التالية:

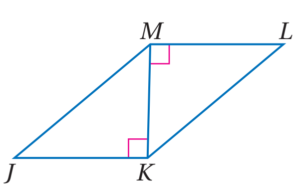
7) نظرية 3.6   8) نظرية 3.7

9) نظرية 3.8 (مساعدة: توجد حالتان ممكنتان)

10) **استعمل الشكل المجاور لتكتب برهانًا ذا عمودين :**

المعطيات: $\overline{ML} \perp \overline{MK}, \overline{KM} \perp \overline{JK},$
$\angle J \cong \angle L$

المطلوب إثبات أن: $\overline{JM} \cong \overline{KL}$



3-6 المثلثات المتطابقة الضلعين
Isosceles Triangles

الأفكار الرئيسة:

- أستعمل خصائص المثلث المتطابق الضلعين.
- أستعمل خصائص المثلث المتطابق الأضلاع.

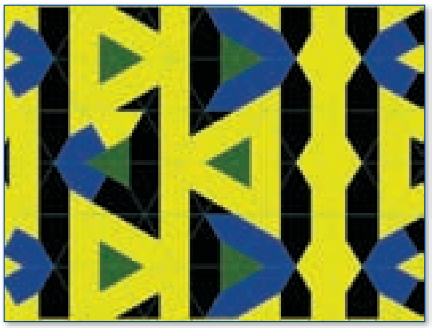
المفردات:

زاوية الرأس
vertex angle

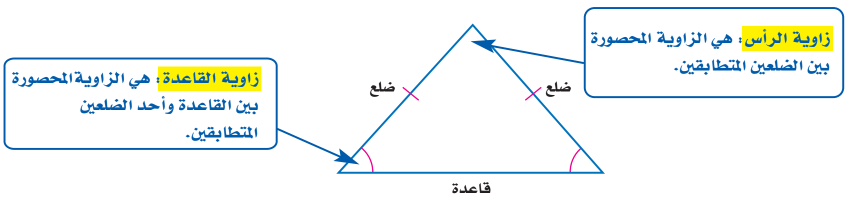
زاويتا القاعدة
base angles

استعد

تتضمن لوحات وتصميمات بعض الفنانين أشكالًا هندسية كالمثلثات والمربعات ...
تأمل الصورة المجاورة، ولاحظ المثلثات المتطابقة الضلعين.



خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين: تعلمت في الدرس (1 – 3) أن المثلث المتطابق الضلعين له ضلعان متطابقان على الأقل. وكما في المثلث القائم الزاوية، فإن أجزاء المثلث المتطابق الضلعين لها أسماء خاصة.

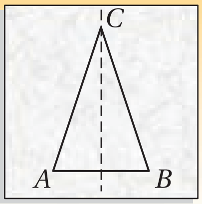


معمل الهندسة

المثلثات المتطابقة الضلعين

نموذج:

- ارسم على ورقة مثلثًا حاد الزوايا ، فيه $\overline{AC} \cong \overline{BC}$
- اطو المثلث حول النقطة C بحيث تنطبق A على B



تحليل:

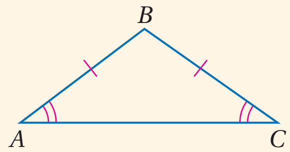
1) ماذا تلاحظ بالنسبة للزاويتين: $\angle A$ و $\angle B$؟
2) ارسم مثلثًا منفرج الزاوية ومتطابق الضلعين، وقارن بين زاويتي القاعدة.
3) ارسم مثلثًا قائم الزاوية ومتطابق الضلعين، وقارن بين زاويتي القاعدة.

تشير نتائج معمل الهندسة إلى النظرية (3.9) التالية:

نظرية 3.9 المثلث المتطابق الضلعين

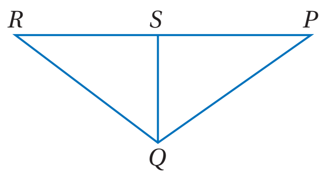
إذا تطابق ضلعان في مثلث فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين متطابقتان.

مثال: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CB}$، فإن $\angle A \cong \angle C$.



مثـــال برهان النظرية

1 اكتب برهانًا ذا عمودين لنظرية المثلث المتطابق الضلعين.



المعطيات: $\triangle RQP$ فيه: $\overline{PQ} \cong \overline{RQ}$

المطلوب إثبات أن: $\angle P \cong \angle R$

البرهان:

العبارة	التبرير
(1 لتكن S منتصف $\overline{PR}$	(1 كل قطعة لها نقطة منتصف واحدة.
(2 ارسم القطعة المستقيمة $\overline{QS}$	(2 كل نقطتين تحددان مستقيماً.
(3 $\overline{PS} \cong \overline{RS}$	(3 نظرية نقطة المنتصف.
(4 $\overline{QS} \cong \overline{QS}$	(4 تطابق القطع المستقيمة خاصية انعكاسية.
(5 $\overline{PQ} \cong \overline{RQ}$	(5 معطى.
(6 $\triangle PQS \cong \triangle RQS$	(6 حالة SSS.
(7 $\angle P \cong \angle R$	(7 تعريف تطابق المثلثات

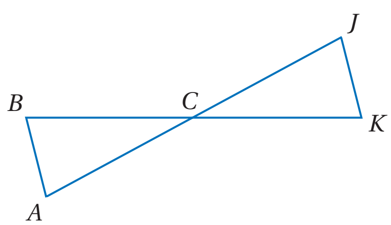
تحقق من فهمك

(1 اكتب برهانًا ذا عمودين لما يلي:

المعطيات: $\overline{CA} \cong \overline{CB}$, $\overline{KC} \cong \overline{CJ}$

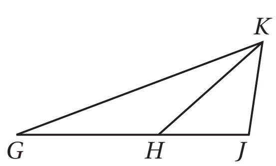
C منتصف $\overline{BK}$

المطلوب إثبات أن: $\triangle ABC \cong \triangle JKC$



مثال على اختبار معياري إيجاد قياس زاوية مجهولة

2 إذا كان $\overline{HJ} \cong \overline{JK}$, $\overline{GH} \cong \overline{HK}$ و $m\angle GJK = 100°$،
فأوجد $m\angle HGK$.



A 10   **B** 15   **C** 20   **D** 25

اقرأ فقرة الاختبار أعلاه

$\triangle GHK$ متطابق الضلعين، قاعدته $\overline{GK}$. وكذلك $\triangle HJK$ متطابق الضلعين، قاعدته $\overline{HK}$.

حل فقرة الاختبار

الخطوة 1 : زاويتا قاعدة $\triangle HJK$ متطابقتان، افرض أن $x = m\angle KHJ = m\angle HKJ$ فيكون

$m\angle KHJ + m\angle HKJ + m\angle HJK = 180$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$x + x + 100 = 180$ بالتعويض

$2x + 100 = 180$ بالجمع

$2x = 80$ بطرح 100 من كلا الطرفين

$x = 40$ إذن ، $m\angle KHJ = m\angle HKJ = 40$.

الخطوة 2 : الزاويتان $\angle GHK$ و $\angle KHJ$ متجاورتان على مستقيم. نوجد $m\angle GHK$.

$m\angle KHJ + m\angle GHK = 180$ الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان.

$40 + m\angle GHK = 180$ بالتعويض

$m\angle GHK = 140$ بطرح 40 من كلا الطرفين

الخطوة 3 : زاويتا قاعدة $\triangle GHK$ متطابقتان. افرض أن $y = m\angle HGK = m\angle GKH$.

$m\angle GHK + m\angle HGK + m\angle GKH = 180$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$140 + y + y = 180$ بالتعويض

$140 + 2y = 180$ بالجمع

$2y = 40$ بطرح 140 من كلا الطرفين

$y = 20$ قسمة الطرفين على 2

إذن $m\angle HGK = 20$ أي أن البديل C هو الصحيح.

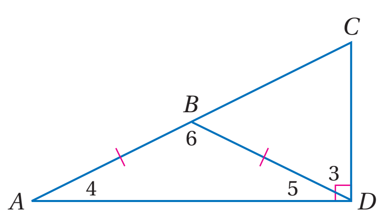
تحقق من فهمك

2) $\triangle ABD$ متطابق الضلعين، $\triangle ACD$ قائم الزاوية.

إذا كان $m\angle 6 = 136$، فما $m\angle 3$؟

A 21 **C** 68

B 37 **D** 113

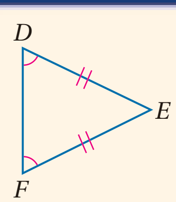


وعكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين صحيحة أيضًا.

نظرية 3.10

إذا تطابقت زاويتان في مثلث، فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين متطابقان.

مثال: إذا كانت $\angle D \cong \angle F$ فإن $\overline{DE} \cong \overline{FE}$.



ستثبت نظرية 3.10 في السؤال 9

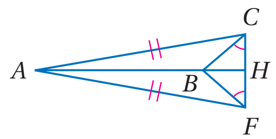
إرشادات

مراجعة

ارجع إلى الدرس 3-1 لمراجعة « عكس العبارة ».

مثــــال: القطع المتطابقة والزوايا المتطابقة

3 a) اذكر زاويتين متطابقتين.



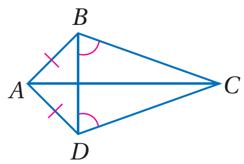
بما أن $\angle AFC$ تقابل $\overline{AC}$، $\angle ACF$ تقابل $\overline{AF}$

والضلعين $\overline{AC}$ و $\overline{AF}$ متطابقان، فإن $\angle ACF \cong \angle AFC$

b) اذكر قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

إذا استعملنا عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين، يكون الضلعان المقابلان لزاويتين متطابقتين في مثلث متطابقين، لذلك $\overline{BC} \cong \overline{BF}$.

تحقق من فهمك



3A) اذكر زاويتين متطابقتين.

3B) اذكر قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

خصائص المثلث المتطابق الأضلاع تذكر أن أضلاع المثلث المتطابق الأضلاع تكون متطابقة. ولذلك، فإن نظرية المثلث المتطابق الضلعين تؤدي إلى نتيجتين تتعلقان بزوايا المثلث المتطابق الأضلاع.

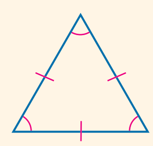
إرشادات

مراجعة

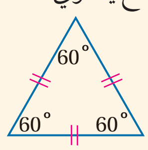
ارجع إلى اقرأ في ص 136، وحاول أن توضح على الخارطة نوع المثلث المشترك بين مجموعتي التصنيف مستعملاً النتيجتين 3.3 و 3.4.

نتائج

3.3 يكون المثلث متطابق الأضلاع إذا وفقط إذا كان متطابق الزوايا.



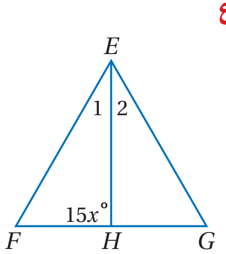
3.4 قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع يساوي °60.



سوف تبرهن هاتين النتيجتين في السؤالين 7 ، 8 .

مثــــال: استعمال خصائص المثلث المتطابق الأضلاع

4 $\triangle EFG$ متطابق الأضلاع، $\overline{EH}$ تنصف $\angle E$.



a) أوجد كلًّا من $m\angle 1$ و $m\angle 2$.

بما أن قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع يساوي °60.

فإن $m\angle 1 + m\angle 2 = 60$.

وبما أن $\overline{EH}$ تنصف $\angle E$ ، فإن $m\angle 1 = m\angle 2$.

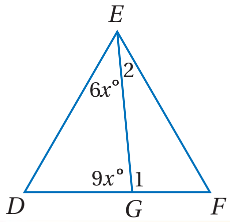
إذن، $m\angle 1 = m\angle 2 = 30$.

b) **جبر:** أوجد قيمة x.

بما أن $m\angle EFH + m\angle 1 + m\angle EHF = 180$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
فإن $60 + 30 + 15x = 180$	بالتعويض
$90 + 15x = 180$	بالجمع
$15x = 90$	بطرح 90 من كلا الطرفين
$x = 6$	بقسمة كلا الطرفين على 15

تحقق من فهمك

$\triangle DEF$ متطابق الأضلاع.



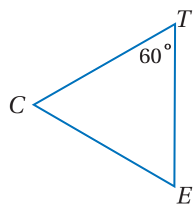
4A) أوجد قيمة x.

4B) أوجد $m\angle 1$ و $m\angle 2$.

تأكد

مثال 4.1 (ص 169 و 171)

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.

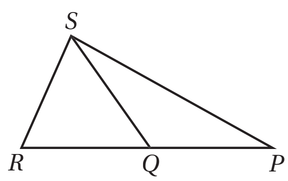


1) **المعطيات:** $\triangle CTE$ متطابق الضلعين رأسه $\angle C$.
و $m\angle T = 60°$

المطلوب: إثبات أن $\triangle CTE$ متطابق الأضلاع.

مثال 2 (ص 169)

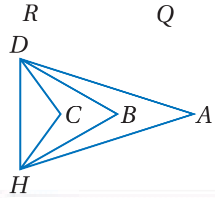
2) **تدريب على اختبار معياري:** إذا كان $\overline{PQ} \cong \overline{QS}$, $\overline{QR} \cong \overline{RS}$, $m\angle PRS = 72$
فما قياس الزاوية $\angle QPS$.



A 27 **B** 54 **C** 63 **D** 72

مثال 3 (ص 171)

في الشكل المجاور.



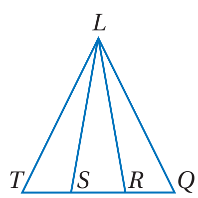
3) إذا كان $\overline{AH} \cong \overline{AD}$، فاذكر زاويتين متطابقتين.

4) إذا كانت $\angle BHD \cong \angle BDH$ فاذكر قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

تمارين ومسائل

إرشادات للتمارين	
للأسئلة	انظر الأمثلة
5–6	3
7–9	1
10–11	4
27 ،28	2

ارجع إلى الشكل المجاور للإجابة عن السؤالين التاليين:



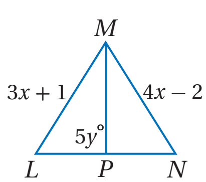
5) إذا كان $\overline{LR} \cong \overline{LT}$ ، فاذكر زاويتين متطابقتين.

6) إذا كانت $\angle LRS \cong \angle LSR$، فاذكر قطعتين متطابقتين.

البرهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكل من:

7) نتيجة 3.3 **8)** نتيجة 3.4 **9)** نظرية 3.10

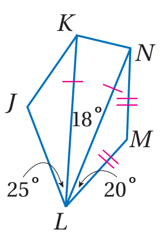
إذا كان المثلث LMN متطابق الأضلاع، وكانت $\overline{MP}$ تُنصّف $\overline{LN}$.



10) فأوجد كلًّا من x و y.

11) أوجد طول كل ضلع.

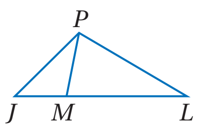
إذا كان كل من $\triangle KLN$ و $\triangle LMN$ مثلثًا متطابق الضلعين وكان $m\angle JKN = 130°$.
فأوجد كلًّا مما يلي:



12) $m\angle LNM$ **13)** $m\angle M$

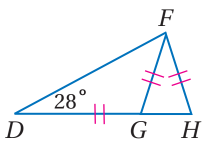
14) $m\angle LKN$ **15)** $m\angle J$

16) في الشكل المجاور؛ $\overline{JM} \cong \overline{PM}$ وَ $\overline{ML} \cong \overline{PL}$، إذا كان $m\angle PLJ = 34°$، فأوجد $m\angle JPM$.



إذا كان كل من $\triangle DFG$ و $\triangle FGH$ مثلثًا متطابق الضلعين، وكان $m\angle FDH = 28$، $\overline{DG} \cong \overline{FG} \cong \overline{FH}$ فأوجد كلًّا من:

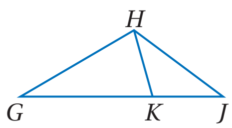
17) $m\angle DFG$ **18)** $m\angle DGF$



في الشكل المجاور، $\overline{GK} \cong \overline{GH}$، $\overline{HK} \cong \overline{KJ}$:

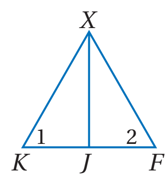
19) إذا كان $m\angle HGK = 28$، فأوجد $m\angle HJK$.

20) إذا كان $m\angle HGK = 42$، فأوجد $m\angle HKJ$.

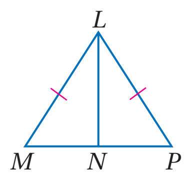


برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكل مما يلي:

21) **المعطيات:** $\triangle XKF$ متطابق الأضلاع و $\overline{XJ}$ تنصف $\angle X$.
المطلوب إثبات أن: J منتصف $\overline{KF}$

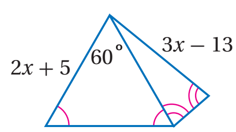


22) **المعطيات:** $\triangle MLP$ متطابق الضلعين و N منتصف $\overline{MP}$.
المطلوب إثبات أن: $\overline{LN} \perp \overline{MP}$

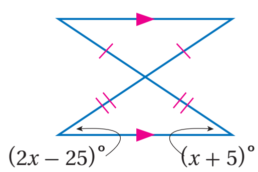


جبر: أوجد x في كل مما يلي:

23)



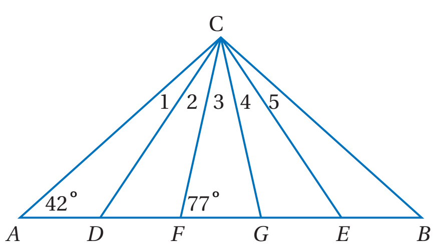
24)



مسائل مهارات التفكير العليا

25) **مسألة مفتوحة:** صف طريقة لإنشاء مثلث متطابق الأضلاع.

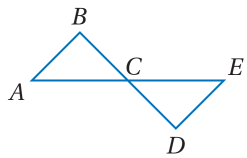
26) **تحدٍّ:** في الشكل المجاور: $\triangle FCG$، $\triangle ABC$ متطابقا الضلعين و $\triangle DCE$ متطابق الأضلاع. أوجد قياس كل من الزوايا الخمس المرقمة عند الرأس C.



27) **اكتب:** اشرح كيف يمكن أن تَستعملَ المثلثات في إنشاء أشكال فنية . فسر كيف استعْمِلت المثلثات المتطابقة الضلعين في الرسم المبين في صفحة 168، ولماذا؟

تدريب على اختبار معياري

28) في الشكل المجاور؛ $\overline{AE}$، $\overline{BD}$ تنصّف كل منهما الأخرى عند النقطة C.



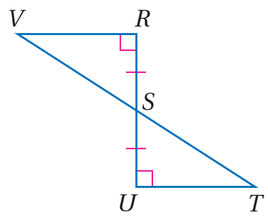
أيّ معلومة إضافية من المعلومات التالية تكفي لإثبات أن $\overline{CD} \cong \overline{DE}$؟

A $\angle A \cong \angle C$ **C** $\angle ACB \cong \angle EDC$

B $\angle B \cong \angle D$ **D** $\angle A \cong \angle B$

مراجعة تراكمية

29) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا: (الدرس 5-3).



المعطيات: $\overline{VR} \perp \overline{RS}$, $\overline{UT} \perp \overline{SU}$, $\overline{RS} \cong \overline{US}$,

المطلوب إثبات أن: $\triangle VRS \cong \triangle TUS$

30) بين ما إذا كان $\triangle QRS \cong \triangle EGH$ علما بأن إحداثيات الرؤوس كما يلي، فسر إجابتك: (الدرس 4-3).

$Q(-3، 1)$، $R(1، 2)$، $S(-1، -2)$، $E(6، -2)$، $G(2، -3)$، $H(4، 1)$

31) **تصميم حدائق:** يرسم سلطان تصميمًا لحديقة أحد الزبائن على ورقة رسم بياني. ويرغب صاحب الحديقة في طريقين متعامدتين تمران بمركزها. فإذا وقع مركز الحديقة عند النقطة $(0، 0)$ والطريق الأولى تبدأ من أحد أركان الحديقة عند النقطة $(-6، 12)$ وتنتهي في الركن المقابل عند النقطة $(6 ، -12)$، فما إحداثيات كل من نقطة البداية ونقطة النهاية للطريق الثانية؟ (الدرس 3-2)

كوّن جدول الصواب لكل عبارة مركبة مما يلي: (الدرس 2-1)

32) $a \wedge b$ 33) $\sim p \vee \sim q$ 34) $k \wedge \sim m$ 35) $\sim y \vee z$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: أوجد إحداثيات نقطة المنتصف للقطعة التي إحداثيات طرفيها كما يلي:

36) $A(2, 15)$, $B(7, 9)$ 37) $C(-4 , 6)$, $D(2, -12)$ 38) $E(3 , 2.5)$, $F(7.5 , 4)$

3-7 المثلثات والبرهان الإحداثي
Triangles and Coordinate Proof

استعد

طوّر الملاحون سلسلة من الدوائر لعمل شبكة إحداثيات تسمح لهم بتحديد مواقعهم على سطح الكرة الأرضية.

وكما تُحدد النقطة في الهندسة التحليلية (الإحداثية)، فإن الموقع على هذه الشبكة يحدد بقيمتين: الأولى تحدد خط الطول، والثانية تحدد خط العرض.

الأفكار الرئيسة:

- أرسم المثلثات، وأحدد مواقعها لاستعمالها في البرهان الإحداثي.
- أكتب براهين إحداثية.

المفردات:

البرهان الإحداثي
coordinate proof

رسم المثلثات وتحديد مواقعها: إن معرفة إحداثيات النقط في رسم توضيحي يمكنك من تكوين استنتاجات حولها، كما هو الحال في شبكة خطوط الطول والعرض. ويستعمل **البرهان الإحداثي** الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات صحة المفاهيم الهندسية. فالخطوة الأولى في البرهان هي رسم الشكل على المستوى الإحداثي.

تعليمات: رسم الأشكال على المستوى الاحداثي

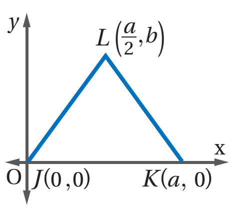
1) ضع رأس المضلع أو مركزه عند نقطة الأصل.
2) ارسم ضلعًا على الأقل من أضلاع المضلع على أحد المحورين.
3) ضع المضلع في الربع الأول من المستوى الإحداثي إن أمكن.
4) استعمل الإحداثيات التي تجعل الحسابات أبسط ما يمكن.

إرشادات

تطبق هذه التعليمات على أي مضلع مرسوم في مستوى إحداثي.

مثال: تحديد مكان مثلث وترقيمه

1 **ارسم المثلث JKL المتطابق الضلعين في المستوى الإحداثي بحيث يكون طول القاعدة JK يساوي a وحدة طول.**



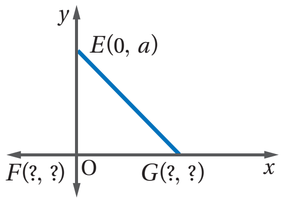
- اجعل رأس المثلث J عند نقطة الأصل.
- ارسم قاعدة المثلث $\overline{JK}$ على الجزء الموجب من محور السينات.
- ارسم المثلث في الربع الأول من المستوى.
- بما أن النقطة K على محور السينات، فإن إحداثيها الصادي صفر، وإحداثيها السيني a، لأن طول القاعدة يساوي a وحدة.
- وبما أن $\triangle JKL$ متطابق الضلعين فإن الإحداثي السيني للرأس L يقع في منتصف المسافة بين الصفر، و a ، أي $\frac{a}{2}$ أما الإحداثي الصادي فلا يمكن التعبير عنه بدلالة a ، ولذلك سمه b.

تحقق من فهمك

1) ارسم المثلث HIJ القائم الزاوية بحيث يقع ضلعاه $\overline{HI}$ ، $\overline{IJ}$ على المحورين الإحداثيين و يكون طول $\overline{HI}$ يساوي a وحدة، وطول $\overline{IJ}$ يساوي b وحدة.

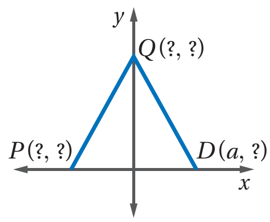
مثـــال إيجاد الإحداثيات المجهولة

2 **اذكر الإحداثيات المجهولة للمثلث EFG القائم الزاوية والمتطابق الضلعين.**



بما أن الرأس F يقع عند نقطة الأصل، فإن إحداثياته هي (0، 0). ولأن الرأس E يقع على محور الصادات، والرأس G يقع على محور السينات، فإن $\angle EFG$ قائمة، وبما أن $\triangle EFG$ متطابق الضلعين، حيث $\overline{GF} \cong \overline{EF}$

وطول $\overline{EF}$ يساوي a وحدة، فإن طول $\overline{GF}$ يساوي a وحدة أيضًا. لذلك تكون إحداثيات الرأس G هي $(a، 0)$.



تحقق من فهمك

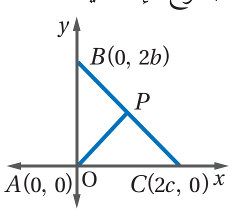
2) اذكر الإحداثيات المجهولة في المثلث المتطابق الضلعين PDQ.

كتابة البراهين: بعد رسم الشكل في المستوى الإحداثي، وتحديد موقعه يمكننا استعمال البرهان الإحداثي للتحقق من صحة الخصائص وبرهنة النظريات.

مثـــال البرهان الإحداثي

3 **اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس الزاوية القائمة في مثلث قائم الزاوية ومنتصف الوتر يساوي نصف طول الوتر.**

اجعل رأس الزاوية القائمة عند نقطة الأصل وسمّها A، واستعمل مضاعفات العدد 2 كإحداثيات؛ لأن القاعدة التي نحسب بموجبها إحداثيات نقطة المنتصف تتضمن أخذ نصف مجموع الإحداثيات.



المعطيات: $\triangle ABC$ قائم الزاوية $\angle BAC$ قائمة.
و P نقطة منتصف $\overline{BC}$.

المطلوب إثبات أن: $AP = \frac{1}{2}BC$

البرهان:

من قاعدة إحداثيات نقطة المنتصف، تكون إحداثيات P هي $\left(\frac{0+2c}{2}, \frac{2b+0}{2}\right) = (c,b)$

استعمل قانون المسافة بين نقطتين لإيجاد AP و BC.

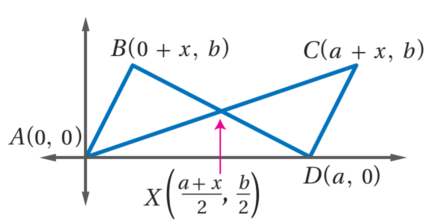
$$BC = \sqrt{(2c-0)^2 + (0-2b)^2} \qquad AP = \sqrt{(c-0)^2 + (b-0)^2}$$

$$BC = \sqrt{4c^2 + 4b^2} = 2\sqrt{c^2 + b^2} \qquad = \sqrt{c^2 + b^2}$$

$$\frac{1}{2}BC = \sqrt{c^2 + b^2}$$

إذن، $AP = \frac{1}{2}BC$.

تحقق من فهمك



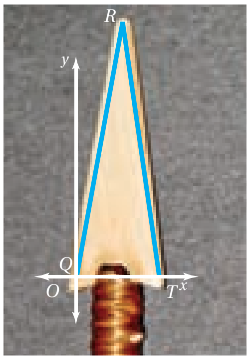
3) استعمل البرهان الإحداثي لبيان أن المثلثين CDX و ABX متطابقان.

إرشادات

زاوية الرأس

تذكّر أن المثلث المتطابق الضلعين يمكن طيه إلى نصفين (معمل الهندسة ص 168). ولذلك فإن الإحداثي السيني لرأس المثلث يساوي الإحداثي السيني لمنتصف القاعدة.

مثال من واقع الحياة



4 رؤوس السهام: اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن رأس هذا السهم على هيئة مثلث متطابق الضلعين، علما بأن طوله 8 cm وعرضه 4 cm، والنقطة R عند المنتصف بين T, Q.

الخطوة الأولى هي تحديد إحداثيات كل رأس من رؤوس المثلث. فالنقطة Q عند نقطة الأصل وإحداثياتها $(0 , 0)$، وتقع النقطة T عند $(4 , 0)$. أما نقطة R فإحداثيها الصادي 8، وإحداثيها السيني يساوي نصف المسافة بين Q و T أيْ 2.

لذلك فالنقطة R تقع عند $(2 , 8)$.

إذا كان ساقا المثلث متساويتين في الطول فإن المثلث متطابق الضلعين.

استعمل قانون المسافة بين نقطتين لإيجاد كل من QR ، RT.

$$QR = \sqrt{(2-0)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$RT = \sqrt{(4-2)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

بما أن الساقين متساويتان في الطول، فإنهما متطابقتان. أيْ أن رأس السهم على هيئة مثلث متطابق الضلعين.

تحقق من فهمك

4) استعمل الهندسة الإحداثية لتصنيف مثلث رؤوسه النقاط التالية:
$A\,(0 , 0)$, $B\,(6 , 0)$, $C\,(3 , 3)$.

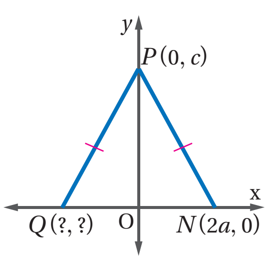
تأكد

مثال 1 (ص 175)

1) ارسم المثلث $\triangle FGH$ المتطابق الضلعين الذي طول قاعدته $\overline{FH}$ يساوي $2b$ وحدة،

مثال 2 (ص 176)

2) ما الإحداثيات المجهولة في المثلث المجاور؟



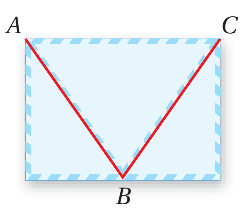
مثال 3 (ص 176)

3) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة التالية:

"*تبعد نقطة منتصف الوتر في مثلث قائم الزاوية أبعادًا متساوية عن رؤوسه*"

مثال 4 (ص 177)

4) اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن المثلث ABC متطابق الضلعين. علمًا بأن بُعدي المظروف، هما: 10 cm, 20 cm، والنقطة B في منتصف الحافة السفلى للمظروف.



إرشادات للتمارين	
للأسئلة	انظر الأمثلة
5–7	1
8–10	2
11–14	3
15 ،16	4

ارسم كل مثلث مما يلي على المستوى الإحداثي.

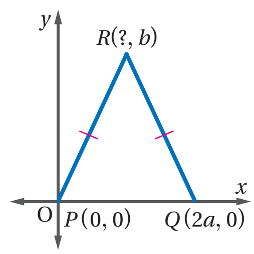
5) $\triangle QRT$ متطابق الضلعين، طول قاعدته $\overline{QR}$ يساوي b وحدة.

6) $\triangle MNP$ متطابق الأضلاع، طول ضلعه $2a$ وحدة.

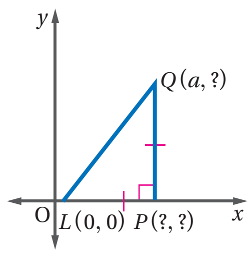
7) $\triangle JML$ قائم الزاوية ومتطابق الضلعين، وتره $\overline{JM}$، وطول كل من ضلعيه c وحدة.

اذكر الإحداثيات المجهولة لكل مثلث مما يلي:

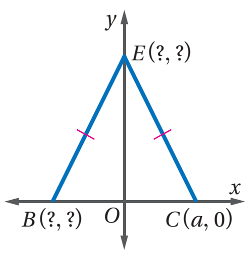
8)



9)



10)



اكتب برهانًا إحداثيًّا لكل عبارة مما يلي:

11) القطعتان المستقيمتان المتقاطعتان والواصلتان بين طرفي قاعدة مثلث متطابق الضلعين ومنتصفي ساقيه متطابقتان.

12) القطع المستقيمة الثلاث الواصلة بين منتصفات أضلاع مثلث متطابق الضلعين تشكّل مثلثًا متطابق الضلعين.

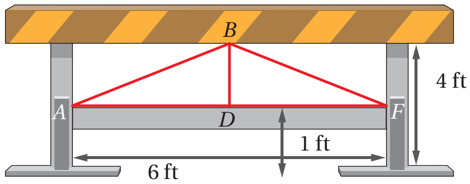
13) القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث توازي الضلع الثالث.

14) طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث يساوي نصف طول الضلع الثالث.

15) **ملاحة:** يقع قارب على بعد 800 m عن الميناء. وتقف سفينة على بعد 800 m إلى الشرق من القارب، وسفينة أخرى على بعد 800 m إلى الشمال من القارب. اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن الميناء والقارب والسفينة الواقعة شمال القارب تشكل رؤوس مثلث قائم الزاوية ومتطابق الضلعين.

16) **نزهة:** قام فهد وسعد بنزهة سيرًا على الأقدام. سار فهد من المخيم 300 m نحو الشرق، ثم اتجه شمالًا وسار 500 m. أما سعد فانطلق من المخيم نحو الغرب وسار 500 m، ثم اتجه شمالًا وسار 300 m. أثبت أن مواقع كل من فهد وسعد والمخيم تشكل رؤوس مثلث قائم الزاوية.

17) سباق الحواجز للخيول: اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن المثلثين ABD ، FBD متطابقان. افرض أن عرض الحاجز 6 أقدام، وارتفاعه 4 أقدام، وارتفاع العارضة السفلى عن سطح الأرض قدم واحد.



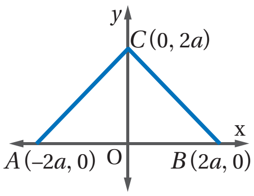
أوجد إحداثيات النقطة C كي يكون $\triangle ABC$ من النوع المشار إليه، علمًا بأن إحداثيات النقطة A هي $(0 ، 0)$ وإحداثيات النقطة B هي $(a ، b)$:

18) قائم الزاوية **19)** متطابق الضلعين **20)** مختلف الأضلاع

مسائل مهارات التفكير العليا

21) مسألة مفتوحة: ارسم مثلثًا مختلف الأضلاع وقائم الزاوية على المستوى الإحداثي بوضع يُسهِّل البرهان الإحداثي، وحدّد إحداثيات كل رأس من رؤوسه. واشرح لماذا رسمت المثلث بهذا الوضع؟

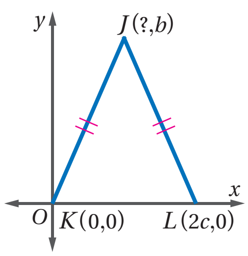
22) تحدّ: صنف $\triangle ABC$ وفقًا لزواياه وأضلاعه. ووضح إجابتك.



23) اكتب: استعمل المعلومات عن المستوى الإحداثي والواردة في صفحة 175 لتوضح كيف يمكن استعماله في البراهين. اكتب قائمة بطرائق البرهان المختلفة، واختر نظرية من هذا الفصل يمكن إثباتها باستعمال البرهان الإحداثي.

تدريب على اختبار معياري

24) ما قيمة الإحداثي السيني للنقطة J في المثلث JKL ؟

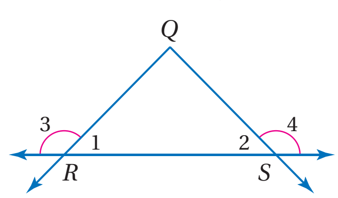


A $2c$ **B** c **C** $\frac{c}{2}$ **D** b

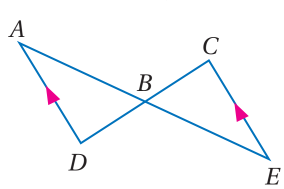
مراجعة تراكمية

اكتب برهانًا ذا عمودين لكل مما يلي: (الدرسان 5-3 و 6-3) .

25) المعطيات: $\angle 3 \cong \angle 4$
المطلوب إثبات أن: $\overline{QR} \cong \overline{QS}$



26) المعطيات: $\overline{AD} \cong \overline{CE}$ و $AD \parallel CE$
المطلوب إثبات أن: $\triangle ABD \cong \triangle EBC$



27) وظائف: يطلب مهندس مقابل استئجار أجهزة أستوديو لتصوير البرامج التلفزيونية مبلغ 1800 ريال، ويتقاضى مقابل كل ساعة عمل 200 ريال. اكتب معادلة تبين تكلفة استئجار الأستوديو كدالة في الزمن، وكم سيكلف استئجاره لمدة 17 ساعة؟ (الدرس 4-2)

الفصل 3

دليل الدراسة والمراجعة

المَطْويّاتُ
مُنَظِّمُ أَفْكارٍ

استعد

تأكد من أن المفاهيم الأساسية التالية مدونة في مطويتك.

المفاهيم الأساسية:

تصنيف المثلثات (الدرس 3-1)

- تُصنّف المثلثات وفقًا لزواياها إلى مثلث حادّ الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.
- تصنف المثلثات وفقًا لأضلاعها إلى مثلث مختلف الأضلاع أو متطابق الضلعين، أو متطابق الأضلاع.

زوايا المثلثات (الدرس 3-2)

- مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي $180°$.
- قياس الزاوية الخارجية للمثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها.

المثلثات المتطابقة (الدروس 3-3 إلى 3-5)

- إذا تطابقت جميع الأضلاع المتناظرة في مثلثين فإنهما متطابقان، الحالة (SSS).
- إذا تطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في مثلث مع نظائرها في مثلث آخر فإن المثلثين متطابقان، الحالة (SAS).
- إذا تطابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث مع نظائرها في مثلث آخر فإن المثلثين متطابقان، الحالة (ASA).
- إذا تطابقت زاويتان وضلع غير محصور في مثلث مع نظائرها في مثلث آخر فإن المثلثين متطابقان. (AAS)

المثلثات المتطابقة الضلعين (الدرس 3-6)

- يكون المثلث متطابق الأضلاع إذا وفقط إذا كان متطابق الزوايا.

المثلثات والبرهان الإحداثي (الدرس 3-7)

- يستعمل الجبر في البراهين الإحداثية لإثبات صحة المفاهيم الهندسية.
- يستعمل قانون المسافة بين نقطتين، وقانون الميل، وقاعدة نقطة منتصف القطعة المستقيمة غالبًا في البرهان الإحداثي.

المفردات الأساسية:

المثلث الحاد الزوايا (ص 130)
المثلث المنفرج الزاوية (ص 130)
المثلث القائم الزاوية (ص 130)
المثلث المتطابق الزوايا (ص 130)
المثلث المختلف الأضلاع (ص 131)
المثلث المتطابق الضلعين (ص 131)
المثلث المتطابق الأضلاع (ص 131)
الزاوية الخارجية (ص 139)
الزاويتان الداخليتان البعيدتان (ص 139)
البرهان التسلسلي (ص 140)
نتيجة (ص 141)
المثلثات المتطابقة (ص 144)
تحويلات التطابق (ص 146)
الزاوية المحصورة (ص 153)
الضلع المحصور (ص 159)
زاوية الرأس (ص 168)
زاوية القاعدة (ص 168)
البرهان الإحداثي (ص 175)

تحقق من المفردات:

اختر الكلمة المناسبة من القائمة، وأكمل ما يلي:

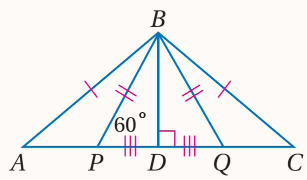
1) المثلث الذي قياس إحدى زواياه أكبر من $90°$ هو ___?___ .
2) المثلث الذي يحوي ضلعين متطابقين فقط هو ___?___ .
3) المثلث الذي قياس إحدى زواياه $90°$ هو ___?___ .
4) المثلث المتطابق الزوايا يكون ___?___ .
5) ___?___ يستعمل الجبر والأشكال في المستوى الإحداثي لإثبات صحة المفاهيم الهندسية.
6) ___?___ تحافظ على الأشكال وقياساتها.
7) إذا تطابقت جميع الأضلاع والزوايا المتناظرة في مثلثين، فإن هذين المثلثين ___?___ .

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس:

3-1 تصنيف المثلثات (الصفحات 130-135)

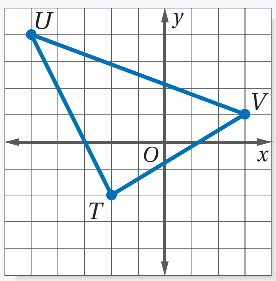
صنف كل مثلث وفقًا لزواياه وأضلاعه، إذا كان $m\angle ABC = 100°$.



8) $\triangle ABC$ 9) $\triangle BDP$ 10) $\triangle BPQ$

11) **المسافة:** المسافة الكلية من منزل سالم إلى منزل محمد، ثم إلى منزل سعيد تساوي 18.77 كيلومترًا، والمسافة بين منزل سالم ومنزل سعيد تزيد 0.81 كيلومتر على المسافة بين منزل سالم ومنزل محمد. والمسافة بين منزل سالم ومنزل سعيد تساوي 2.25 مرة المسافة بين منزل محمد ومنزل سعيد. أوجد المسافة بين كل منزلين، واستعمل هذه المسافات في تصنيف المثلث الذي تشكله المنازل الثلاثة. .

مثال 1: أوجد قياسات أضلاع $\triangle TUV$ وصنفه وفقًا لأضلاعه.



استعمل قانون المسافة لإيجاد طول كل ضلع.

$$TU = \sqrt{[-5-(-2)]^2 + [4-(-2)]^2}$$
$$= \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$
$$UV = \sqrt{[3-(-5)]^2 + (1-4)^2}$$
$$= \sqrt{64+9} = \sqrt{73}$$
$$VT = \sqrt{(-2-3)^2 + (-2-1)^2}$$
$$= \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

بما أن قياسات الأضلاع كلها مختلفة فإن المثلث مختلف الأضلاع.

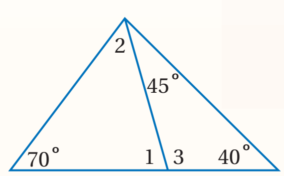
3-2 زوايا المثلثات (الصفحات 138-143)

أوجد كلًّا من القياسات التالية:

12) $m\angle 1$

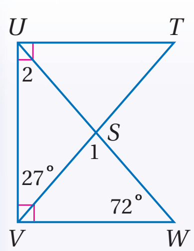
13) $m\angle 2$

14) $m\angle 3$



15) **بناء:** غطّى محمود سقف بيته الجديد بالقرميد. فإذا ظهر أحد أوجهه على صورة مثلث متطابق الضلعين قياس زاوية رأسه 72°، فما قياس زاويتي القاعدة؟

مثال 2: إذا كان $\overline{TU} \perp \overline{UV}$، وَ $\overline{UV} \perp \overline{VW}$، فأوجد $m\angle 1$.



استعمل نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث، واكتب معادلة لإيجاد $m\angle 1$ في $\triangle SVW$.

$$m\angle 1 + 72 + m\angle TVW = 180$$
$$m\angle 1 + 72 + (90-27) = 180$$
$$m\angle 1 + 135 = 180$$
$$m\angle 1 = 45$$

الفصل

3 دليل الدراسة والمراجعة

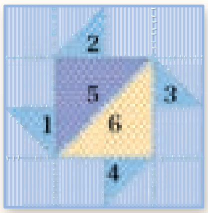
3-3 المثلثات المتطابقة (الصفحات 144-150)

اذكر الزوايا والأضلاع المتناظرة لكل مثلثين فيما يلي:

16) $\triangle EFG \cong \triangle DCB$

17) $\triangle NCK \cong \triangle DCB$

18) **صناعة اللحف:** ذهب عمرو لمعرض يبيع اللحف. فأعجبه اللحاف المرسوم أدناه. اذكر المثلثات المتطابقة فيه.



مثال 3: إذا كان $\triangle EFG \cong \triangle JKL$، فاذكر الزوايا والأضلاع المتناظرة والمتطابقة في المثلثين.

$\angle E \cong \angle J$, $\angle F \cong \angle K$, $\angle G \cong \angle L$,
$\overline{EF} \cong \overline{JK}$, $\overline{FG} \cong \overline{KL}$, $\overline{EG} \cong \overline{JK}$.

3-4 إثبات التطابق — حالتي: SSS, SAS (الصفحات 151-157)

19) حدد ما إذا كان $\triangle MNP \cong \triangle QRS$ إذا كانت إحداثيات رؤوسهما كما يلي:

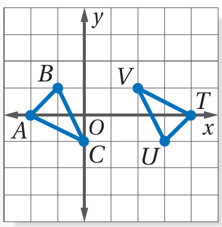
$M(0, 3), N(-4, 3), P(-4, 6)$
$Q(5, 6), R(2, 6), S(2, 2)$

20) **ألعاب:** في لعبة مائية كانت قوارب مصعب عند الإحداثيات $(-4, 6)$ و $(-4, 5)$, $(2, 3)$. فهل قوارب مصعب تشكل رؤوس مثلث متطابق الأضلاع؟

21) المثلث ABC متطابق الضلعين، فيه $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. إذا كانت $\overline{BD}$ تنصف الزاوية $\angle ABC$ ، وضح أن: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$

مثال 4:

حدد ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle TUV$.
واشرح إجابتك.



$$AB = \sqrt{[-1-(-2)]^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{[0-(-1)]^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$CA = \sqrt{(-2-0)^2 + [0-(-1)]^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$TU = \sqrt{(3-4)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$UV = \sqrt{(2-3)^2 + [1-(-1)]^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

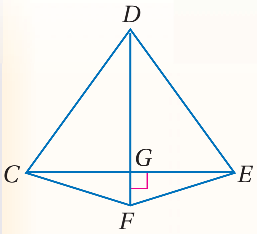
$$VT = \sqrt{(4-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

إذن، $\triangle ABC \cong \triangle TUV$ (الحالة SSS).

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

3-5 إثبات التطابق - حالتي ASA, AAS (الصفحات 159–165)

لحل السؤالين 22، 23، استعمل الشكل المجاور، واكتب برهانًا ذا عمودين لحل كل من الأسئلة التالية:



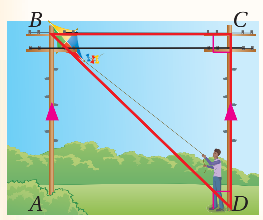
22) **المعطيات:**
DF ينصف $\angle CDE$،
$\overline{CE} \perp \overline{DF}$

المطلوب إثبات أن: $\triangle DGC \cong \triangle DGE$

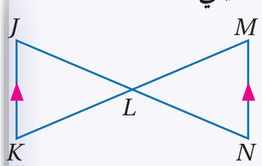
23) **المعطيات:** $\triangle DGC \cong \triangle DGE$
$\triangle GCF \cong \triangle GEF$

المطلوب إثبات أن: $\triangle DFC \cong \triangle DFE$

24) **طائرة ورقية:** علقت طائرة خالد الورقية في أسلاك الكهرباء. إذا كانت أسلاك الكهرباء مشدودة بحيث كانت موازية لسطح الأرض أثبت أن $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.



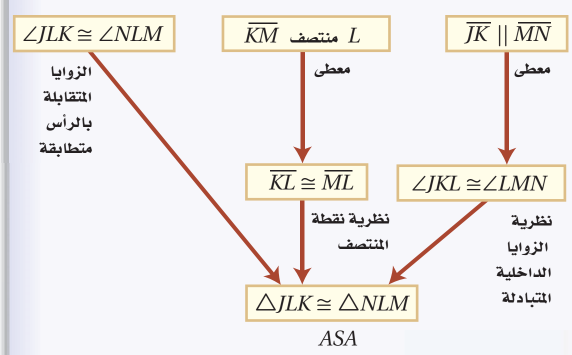
مثال 5: اكتب برهانًا تسلسليًّا لما يلي.



المعطيات: $\overline{JK} \parallel \overline{MN}$
L منتصف $\overline{KM}$

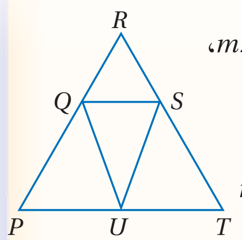
المطلوب إثبات أن: $\triangle JLK \cong \triangle NLM$

البرهان:



3-6 المثلثات المتطابقة الضلعين (الصفحات 168–174)

ارجع إلى الشكل المجاور في حل الأسئلة 25 – 27.



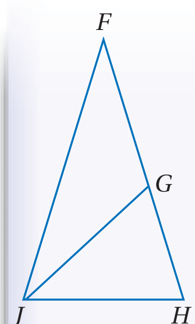
25) إذا كان $\overline{PQ} \cong \overline{UQ}$ و $m\angle P = 32°$، فأوجد $m\angle PUQ$.

26) إذا كان $\overline{RQ} \cong \overline{RS}$، $m\angle RQS = 75$، فأوجد $m\angle R$

27) إذا كان $\overline{RQ} \cong \overline{RS}$، $\overline{RP} \cong \overline{RT}$، $m\angle RQS = 80$، فأوجد $m\angle P$.

28) **فن:** استُعمل في هذا التصميم الهندسي مثلثات متطابقة الضلعين تقريبًا. ارسم واحدًا من كل نوع منها، ثم صِفْ أوجه الشبه بين المثلثات المختلفة.

مثال 6: إذا كان $\overline{FG} \cong \overline{GJ}$, $\overline{GJ} \cong \overline{JH}$, $\overline{FJ} \cong \overline{FH}$, $m\angle GJH = 40$. فأوجد $m\angle H$.



$\triangle GHJ$ متطابق الضلعين، قاعدته $\overline{GH}$، لذلك، فإن $\angle JGH \cong \angle H$ وذلك باستعمال نظرية المثلث المتطابق الضلعين.

إذن، $m\angle JGH = m\angle H$
وباستعمال نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث:

$$m\angle GJH + m\angle JGH + m\angle H = 180$$

$$40 + 2(m\angle H) = 180$$

$$2\ m\angle H = 140$$

$$m\angle H = 70$$

دليل الدراسة والمراجعة

3-7 المثلثات والبرهان الإحداثي (الصفحات 175-179)

ارسم كل مثلث مما يلي على المستوى الإحداثي، وسمه

29) $\triangle TRI$ متطابق الضلعين، طول قاعدته $\overline{TI}$ يساوي $4a$ وحدة.

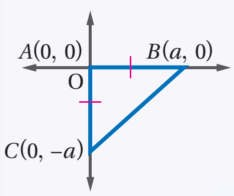
30) $\triangle BCD$ متطابق الأضلاع، طول ضلعه 6 وحدات.

31) $\triangle JKL$ قائم الزاوية طول ساقيه a وحدة، b وحدة.

32) **قوارب:** يقف مركب شراعي في عرض البحر على بعد 400 m شرقًا، و 250 m شمالًا من الميناء. ويقف زورق صغير على بعد 400 m غربًا، و 250 m شمالًا من الميناء نفسه. أثبت أن مواقع المركب الشراعي والزورق والميناء تشكل رؤوس مثلث متطابق الضلعين.

مثال 7: ارسم المثلث $\triangle ABC$ المتطابق الضلعين والقائم الزاوية وطول كل من ساقي القائمة يساوي a وحدة على الربع الرابع في المستوى الإحداثي، وسمه.

- اجعل نقطة الأصل رأسًا للزاوية القائمة في المثلث.
- اجعل أحد ضلعي القائمة على محور السينات، والضلع الآخر على محور الصادات.
- بما أن النقطة B على محور السينات فإن إحداثياها الصادي يساوي صفرًا، وإحداثيها السيني يساوي a.

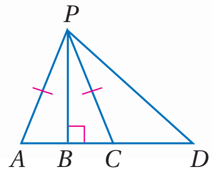


وبما أن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين، فإن C ستبعد عن نقطة الأصل a وحدة وإحداثييها $(0, -a)$ لأنها تقع على الجزء السالب من محور الصادات، وذلك لكي يكون المثلث في الربع الرابع.

الفصل 3

اختبار الفصل

إذا كان $\overline{PA} \cong \overline{PC}$, $\overline{PB} \perp \overline{AD}$ ، فحدد مثلثًا يكون:

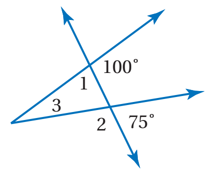


1) منفرج الزاوية.

2) متطابق الضلعين.

3) قائم الزاوية

أوجد قياس كل زاوية من الزوايا التالية في الشكل المجاور:



4) $m\angle 1$

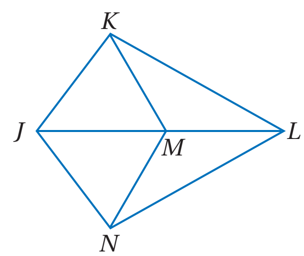
5) $m\angle 2$

6) $m\angle 3$

7) اكتب برهانًا تسلسليًّا :

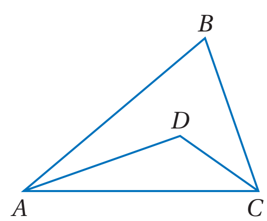
المعطيات: $\triangle JKM \cong \triangle JNM$

المطلوب إثبات أن: $\triangle JKL \cong \triangle JNL$



8) اذكر الزوايا المتناظرة والأضلاع المتناظرة للمثلثين التاليين المتطابقين: $\triangle DEF \cong \triangle PQR$

9) **اختيار من متعدد:** في $\triangle ABC$: $\overline{AD}$ ، $\overline{DC}$ تنصفان الزاويتين $\angle A$ ، $\angle C$ ، $m\angle B = 76$.



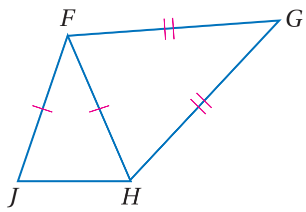
ما قياس $m\angle ADC$؟

A 26 **C** 76

B 52 **D** 128

10) حدد ما إذا كان $\triangle JKL \cong \triangle MNP$ علما بأن $J(-1, -2), K(2, -3), L(3, 1), M(-6, -7), N(-2, 1),$ $P(5, 3)$ ، ووضح إجابتك.

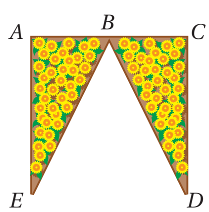
استعمل الشكل التالي في حل السؤالين 11 ، 12، حيث؛ $\overline{FJ} \cong \overline{FH}$, $\overline{GF} \cong \overline{GH}$.



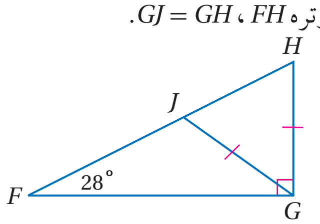
11) إذا كان $m\angle JFH = 34$، فأوجد $m\angle J$.

12) إذا كان $m\angle GHJ = 152$ و $m\angle G = 32$، فأوجد $m\angle JFH$

13) **تصميم حدائق:** صمم منسق حدائق حديقة بالشكل الظاهر أدناه. وقرر أن تبعد النقطتان B، C مسافة 22m, 44m على الترتيب إلى الشرق من نقطة A ، وتبعد النقطة E 36 m جنوب النقطة A، و D تبعد 36 m جنوب C ، علمًا بأن الزاويتين A ، C قائمتان.
أثبت أن $\triangle ABE \cong \triangle CBD$.



14) **اختيار من متعدد:** في الشكل أدناه، $\triangle FGH$ قائم الزاوية، وتره $\overline{FH}$ ، $GJ = GH$.



ما قياس $m\angle JGH$؟

F 104 **H** 56

G 62 **J** 28

الفصل 3

اختبار معياري تراكمي

للفصول 1-3

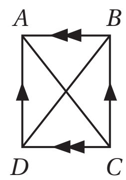
أجب عن كل من الأسئلة التالية:

(1 استعمل البرهان للإجابة عن السؤال أدناه.

المعطيات: $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

المطلوب إثبات أن:

$\triangle ABD \cong \triangle CDB$



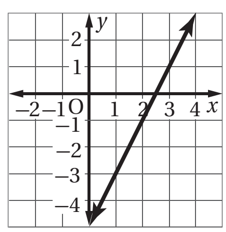
العبارة	التبرير
(1 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	(1 معطى
(2 $\angle ABD \cong \angle CDB,$ $\angle ADB \cong \angle CBD$	(2 نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة.
(3 $\overline{BD} \cong \overline{DB}$	(3 خاصية الانعكاس
(4 $\triangle ABD \cong \triangle CDB$	(4 ؟

ما التبرير المنطقي الذي يمكن وضعه في 4 لإكمال البرهان؟

A AAS **C** SAS

B ASA **D** SSS

(2 يبين الشكل الرسم البياني للمعادلة $y = 2x - 5$ كيف يصبح هذا التمثيل إذا غُيِّر العدد 2 إلى 4 في المعادلة؟



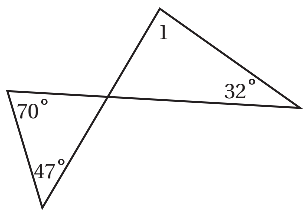
A موازيًا للخط المرسوم مع إزاحة أعلى وحدتين.

B موازيًا للخط المرسوم مع إزاحة إلى أسفل وحدتين.

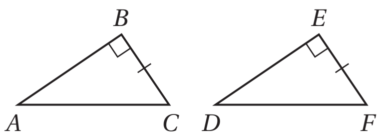
C ذا ميل يقترب من الميل الرأسي مع بقاء المقطع الصادي كما هو.

D ذا ميل يقترب من الميل الأفقي مع بقاء المقطع الصادي كما هو.

(3 ما قياس $m\angle 1$ بالدرجات؟



(4 في الشكل أدناه، $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ و $\angle B \cong \angle E$.

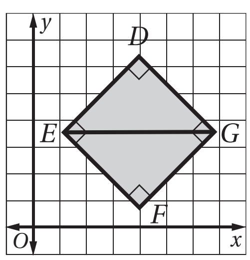


ما المعلومات الإضافية التي تكفي لإثبات أن $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ؟

A $\angle A \cong \angle D$ **C** $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

B $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ **D** $\overline{DE} \cong \overline{EF}$

(5 يبين الشكل أدناه المربع $DEFG$ فأي العبارات لا تستعمل في إثبات أن $\triangle DEG$ قائم الزاوية؟



A $(EG)^2 = (DG)^2 + (DE)^2$

B تعريف المربع

C ميل $\overline{DE} \times$ ميل $\overline{DG} = 1$

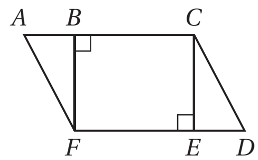
D ميل $\overline{DE} \times$ ميل $\overline{DG} = -1$

(6 **جبر** أي المعادلات التالية تكافئ المعادلة $4(y - 2) - 3(2y - 4) = 9$

A $2y - 4 = 9$ **C** $10y - 20 = 9$

B $-2y + 4 = 9$ **D** $-2y - 4 = 9$

7) في الشكل الرباعي، أي زوج من القطع المستقيمة يجب افتراض تطابقهما لإثبات أن $\overline{AC} \parallel \overline{FD}$؟



A $\overline{AC} \cong \overline{FD}$ | C $\overline{BC} \cong \overline{FE}$

B $\overline{AF} \cong \overline{CD}$ | D $\overline{BF} \cong \overline{CE}$

8) ما معكوس العبارة:

إذا كانت السماء تمطر، فإن خالدًا يحمل مظلة؟

A إذا كان خالد يحمل مظلة فإن السماء تمطر.

B إذا كان خالد لا يحمل مظلة فإن السماء لا تمطر.

C إذا كانت السماء لا تمطر فإن خالدًا يحمل مظلة.

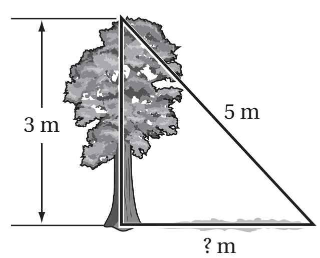
D إذا كانت السماء لا تمطر فإن خالدًا لا يحمل مظلة.

9) **جبر:** أي المعادلات التالية تمثل الخط الذي يمر بالنقطتين $(2, 4)$ و$(0, -2)$؟

A $y = 3x - 2$ | C $y = \frac{1}{3}x - 2$

B $y = -\frac{1}{3}x - 4$ | D $y = -3x + 2$

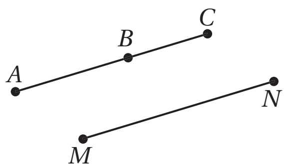
10) يبلغ طول شجرة 3 m. وفي وقت ما من النهار كانت المسافة بين قمة الشجرة و طرف ظلها 5 m. فما طول ظل الشجرة بالمتر؟



A 3 | C 5

B 4 | D 6

11) في البرهان التالي، ما الخاصية التي تبرر العبارة 3؟



المعطيات: $\overline{AC} \cong \overline{MN}$

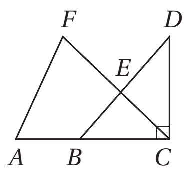
المطلوب إثبات أن: $AB + BC = MN$

العبارة	التبرير
1) $\overline{AC} \cong \overline{MN}$	1) معطى
2) $AC = MN$	2) تعريف تطابق القطع المستقيمة
3) $AC = AB + BC$	3) ؟
4) $AB + BC = MN$	4) بالتعويض

A تعريف نقطة المنتصف | C مسلمة جمع القطع المستقيمة

B خاصية التعدي | D خاصية الإبدال

12) إذا كانت $\angle ACD$ قائمة، فما العلاقة بين الزاويتين $\angle ACF$ و $\angle DCF$؟



A زاويتان متتامتان | C زاويتان متكاملتان

B زاويتان متطابقتان | D زاويتان متجاورتان

إرشادات للاختبار

سؤال 12 : عندما تكون المعطيات عن شكل ما كثيرة، فارسم رسمًا تقريبيًّا له، وضع عليه المعلومات التي تعرفها.

سؤال ذو مستوى متقدم

اكتب حل السؤال 13 على ورقة، واعرضه على زملائك.

13) قياسات زوايا $\triangle ABC$ هي: $3x + 13$, $5x$ ، $4x - 1$.

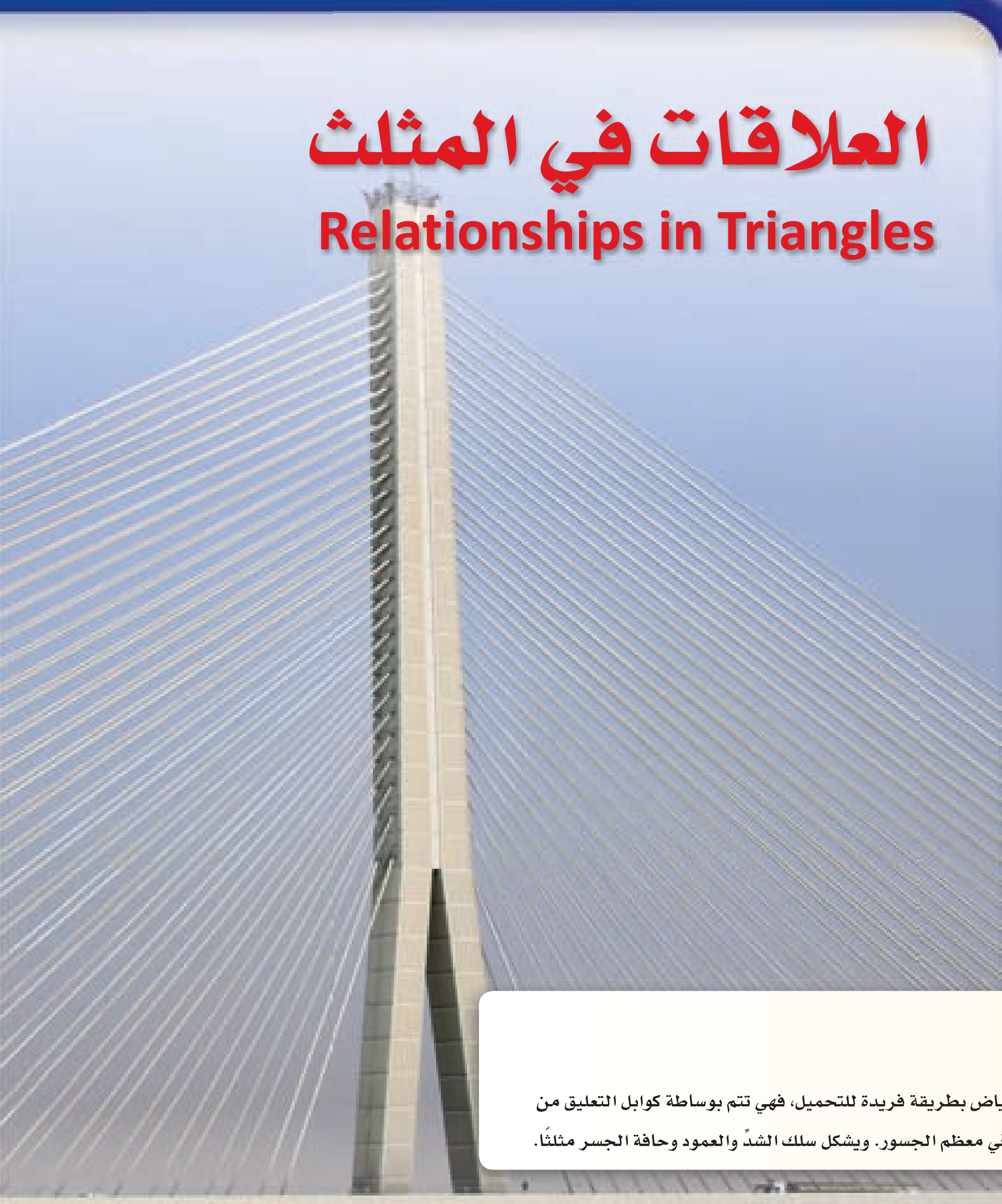
a) ارسم شكلًا توضيحيًّا للمثلث $\triangle ABC$، وأوجد قياس كل زاوية.

b) أثبت أن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين.

هل تحتاج إلى مساعدة؟													
إذا أخطأت في السؤال...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فَعُدْ إلى ...	3-5	2-4	3-2	3-5	2-3	مهارة سابقة	2-6	1-2	مهارة سابقة	مهارة سابقة	1-7	مهارة سابقة	3-6

الفصل 4

العلاقات في المثلث
Relationships in Triangles



الأفكار العامة

- أحدد الأعمدة المنصّفة لأضلاع مثلث ومنصفات زواياه ومتوسطاته وارتفاعاته وأستعملها.
- أطبق خصائص المتباينات المتعلقة بقياسات زوايا المثلث وأضلاعه.
- أستعمل البرهان غير المباشر في الجبر والهندسة.
- أطبق نظرية متباينة المثلث،والمتباينتين SAS و SSS .

المفردات

العمود المنصّف (ص 193)
perpendicular bisector

القطعة المتوسطة (ص 195)
median

الارتفاع (ص 196)
altitude

البرهان غير المباشر (ص 212)
indirect proof

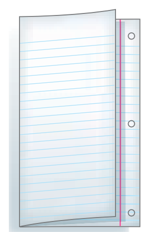
الربط مع الحياة:

جسور: يتميز الجسر المعلق في مدينة الرياض بطريقة فريدة للتحميل، فهي تتم بوساطة كوابل التعليق من وسط الجسر لا من الجوانب كما هو الحال في معظم الجسور. ويشكل سلك الشدّ والعمود وحافة الجسر مثلثًا.

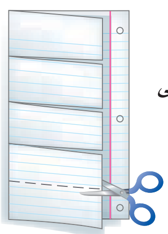
المَطْويّـاتُ
مُنَظِّـمُ أَفْكـار

العلاقات في المثلث: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم معلوماتك. ابدأ بورقة من أوراق دفتر الملاحظات.

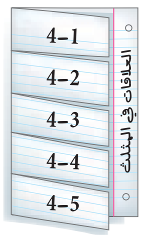
1 **اطو** الورقة طوليًا.



2 **اقطع** الورقة الأولى إلى خمس شرائح.



3 **اكتب** عنوانًا للحافّة. ثم اكتب عنوانًا لكل شريحة باستعمال أرقام الدروس.



التهيئة للفصل 4

تشخيص الاستعداد : هناك بديلان للتأكد من المهارات السابقة الضرورية.

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية www.obeikaneducation.com

البديل 1

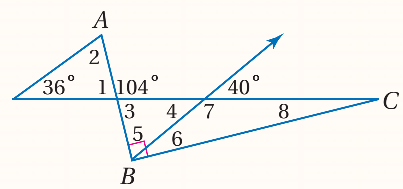
أجب عن الاختبار التالي. ارجع إلى «المراجعة السريعة» لمساعدتك في ذلك.

اختبار سريع

1) أوجد إحداثيّا نقط المنتصف للقطعة المستقيمة التي طرفاها $A(-12,-5), B(4\ ,15)$ (مهارة سابقة)

2) **خرائط** مدينتان أ ، ب على خريطة إحداثية. إذا كان إحداثيّا المدينة أ $(-15\ ,25)$، وإحداثيّا المدينة ب $(5\ ,-16)$. فما إحداثيّا المدينة جـ التي تقع عند منتصف الطريق بين المدينتين أ ، ب؟ (مهارة سابقة)

أوجد قياس كل زاوية مرقّمة إذا كان $\overline{AB} \perp \overline{BC}$: (الدرس 2-3)



3) $\angle 1$ **4)** $\angle 2$ **5)** $\angle 3$

6) $\angle 4$ **7)** $\angle 5$ **8)** $\angle 6$

9) $\angle 7$ **10)** $\angle 8$

حدّد ما إذا كان ممكنًا الوصول إلى استنتاج صحيح من العبارتين الصحيحتين باستعمال قانون الفصل. إذا كان الاستنتاج ممكنًا، فاذكره، وإلاّ فاكتب «غير ممكن». (الدرسان 4-3 و 5-3)

11) (1) إذا كانت الأضلاع الثلاثة لمثلث مطابقة للأضلاع الثلاثة لمثلث آخر فإنّ المثلثين متطابقان.

(2) المثلثان ABC و PQR متطابقان.

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد إحداثيّي نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي طرفاها $Y(9\ ,4)$ و $Z(13\ ,20)$.

لتكن $(x_1, y_1) = (9\ ,4)$ و $(x_2, y_2) = (13\ ,20)$.

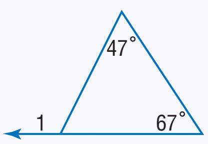
$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$= M\left(\frac{9+13}{2}, \frac{4+20}{2}\right)$$ بالتعويض

$$= M(11,12)$$ بالتبسيط

مثال 2

أوجد $m\angle 1$.



$m\angle 1 = 47 + 67$ نظرية الزاوية الخارجيّة

$m\angle 1 = 114$ بالتبسيط

مثال 3

حدّد ما إذا كان ممكنًا الوصول إلى استنتاج صحيح من العبارتين الصحيحتين باستعمال قانون الفصل. إذا كان الاستنتاج ممكنًا، فاذكره، وإلاّ فاكتب «غير ممكن».

(1) إذا كانت الزاويتان متجاورتين على مستقيم فإنهما متكاملتان.

(2) $\angle A$ و $\angle B$ زاويتان متجاورتان على مستقيم.

يمكن الوصول إلى استنتاج صحيح من العبارتين السابقتين وهو: $\angle A$ و $\angle B$ متكاملتان.

استكشاف
4-1

معمل الهندسة

المنصفات والقطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

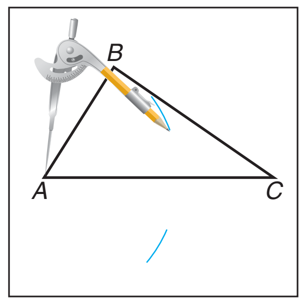
Bisectors, Medians, and Altitudes of Triangles

هناك أربع قطع مستقيمة خاصّة في المثلث. لقد تعلمت سابقًا كيف تعين نقطة منتصف قطعة مستقيمة، والعمود المنصّف لها، ومنصف الزاوية، ويمكنك استعمال ذلك لرسم القطع المستقيمة الخاصّة في المثلث.

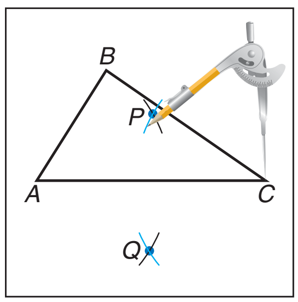
إنشاء هندسي 1 العمود المنصّف

ارسم العمود المنصّف لأحد أضلاع مثلث.

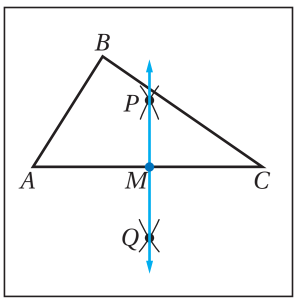
الخطوة 1: ارسم مثلثًا ABC. افتح الفرجار فتحة أكبر من $\frac{1}{2}AC$، وثبته عند الرأس A، وارسم قوسًا أعلى $\overline{AC}$ وقوسًا آخر أسفل منه.



الخطوة 2: استعمل الفتحة نفسها للفرجار، وثبته عند الرأس C. وارسم قوسين يقطعان القوسين السابقين. سمّ نقطتي تقاطع القوسين P و Q.

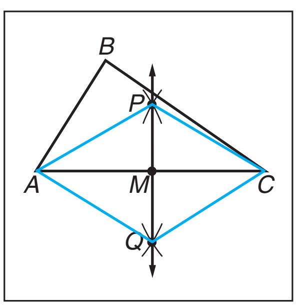


الخطوة 3: استعمل المسطرة لرسم $\overleftrightarrow{PQ}$. سمِّ نقطة تقاطع $\overline{AC}$، $\overleftrightarrow{PQ}$ بالحرف M.



تستعمل هذه الطريقة لتنصيف أيّ قطعة مستقيمة، وليس ضلعًا في مثلث فقط.

تحقق من صحّة عملك.



المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: إثبات أنّ $\overleftrightarrow{PQ}$ عمود منصِّف لـ $\overline{AC}$ عند M.

البرهان: $\overline{AP} \cong \overline{CP} \cong \overline{AQ} \cong \overline{CQ}$ لأن الأقواس رسمت بفتحة الفرجار نفسها. وكذلك $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ من خاصّية الانعكاس. لذلك، وحسب مسلمة SSS نستنتج أن $\triangle AQC \cong \triangle APC$. ومنها تكون $\angle PCA \cong \angle QCA$ ؛ لأنهما زاويتان متناظرتان في مثلثين متطابقين. وكذلك $\overline{MC} \cong \overline{MC}$ من خاصّية الانعكاس. لذلك $\triangle MPC \cong \triangle MQC$ حسب مسلمة SAS. لذلك $\angle PMC \cong \angle QMC$ لأنهما زاويتان متناظرتان في مثلثين متطابقين. وبما أنهما متجاورتان على مستقيم ومتطابقتان، فإنهما قائمتان.لذلك يكون $\overline{AC} \perp \overleftrightarrow{PQ}$. وبما أن $\overline{PM} \cong \overline{PM}$ من خاصيته الانعكاس، $\angle PMA \cong \angle PMC$ لأن المستقيمين المتعامدين يشكلان أربع زوايا قائمة، وجميع الزوايا القائمة متطابقة، فإنّ، $\triangle PMA \cong \triangle PMC$ حسب نظرية **(تطابق الوتر وضلع من ضلعي القائمة في مثلثين قائمي الزاوية)**، $\overline{MA} \cong \overline{MC}$ ، لأنهما ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين. لذلك يكون $\overleftrightarrow{PQ}$ منصّفًا لـ $\overline{AC}$ حسب تعريف المنصّف.

حلل النتائج

1) ارسم العمودين المنصّفين للضلعين الآخرين للمثلث $\triangle ABC$.

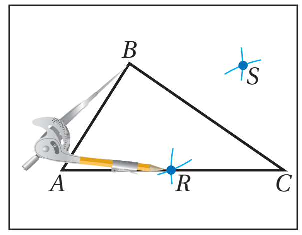
2) ماذا تلاحظ في الأعمدة المنصّفة؟

القطعة المتوسطة في مثلث هي قطعة مستقيمة طرفاها أحد رؤوس المثلث، ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس. يمكنك رسم قطعة متوسطة في مثلث باستعمال عمليّة تنصيف قطعة مستقيمة.

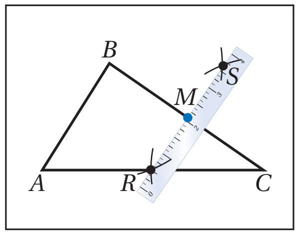
إنشاء هندسي 2 القطعة المتوسطة

ارسم قطعة متوسطة في مثلث.

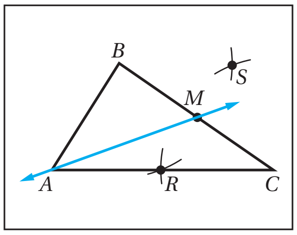
الخطوة 1: ارسم أقواسًا متقاطعة أعلى وأسفل الضلع $\overline{BC}$. سمِّ نقطتي التقاطع R و S.



الخطوة 2: استعمل المسطرة لتعيين نقطة تقاطع $\overline{RS}$ و $\overline{BC}$. سمِّ نقطة المنتصف M.



الخطوة 3: ارسم مستقيمًا يمرّ بالنقطتين A و M. فتكون $\overline{AM}$ قطعة متوسطة للمثلث ABC.



حلّل النتائج

3) ارسم القطعتين المتوسطتين للضلعين الآخرين.

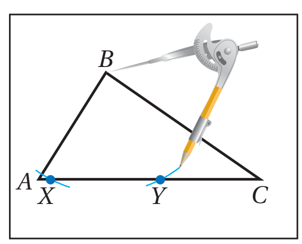
4) ماذا تلاحظ حول القطع المتوسطة للمثلث؟

ارتفاع المثلث هو قطعة مستقيمة طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة على المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس، وتكون عمودية على ذلك المستقيم.

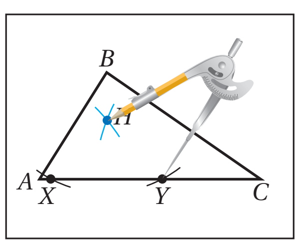
إنشاء هندسي 3 الارتفاع

ارسم ارتفاعًا لمثلث.

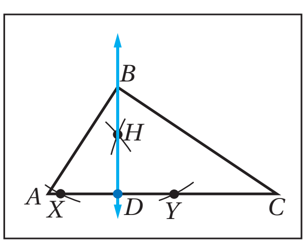
الخطوة 1: ثبّت الفرجار في الرأس B وارسم قوسين يقطعان $\overleftrightarrow{AC}$. سمِّ نقطتي التقاطع X و Y.



الخطوة 2: غيّر فتحة الفرجار بحيث تكون أكبر من $\frac{1}{2}XY$ وثبّته في النقطة X وارسم قوسًا أعلى $\overline{AC}$. استعمل الفرجار بالفتحة نفسها، وثبّته في النقطة Y وارسم قوسًا آخر أعلى $\overline{AC}$ ليقطع القوس الأول في نقطة سمِّها H.



الخطوة 3: استعمل المسطرة لرسم $\overleftrightarrow{BH}$. سمِّ نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{BH}$ و $\overline{AC}$ بالحرف D. فتكون $\overline{BD}$ هي ارتفاع المثلث ABC وعمودية على $\overline{AC}$.



حلّل النتائج

5) ارسم الارتفاعين الآخرين. (**إرشاد**: قد تحتاج إلى مدّ المستقيم الذي يحوي ضلع المثلث).

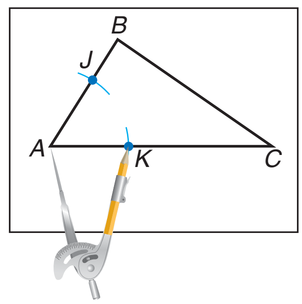
6) ماذا تلاحظ حول ارتفاعات المثلث الثلاثة؟

منصّف زاوية في مثلث هو مستقيم يمر برأس هذه الزاوية وينصفها.

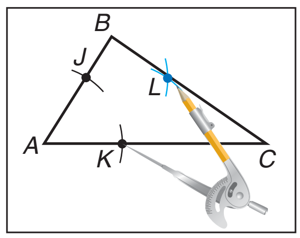
إنشاء هندسي 4 منصّف الزاوية

ارسم منصف زاوية في مثلث.

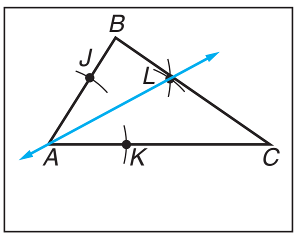
الخطوة 1: ثبت الفرجار عند الرأس A، وارسم قوسًا يقطع $\overline{AB}$ وقوسًا آخر يقطع $\overline{AC}$. سمِّ نقطتي التقاطع J و K.



الخطوة 2: ثبّت الفرجار عند J، وارسم قوسًا. ثم ثبت الفرجار عند K وارسم قوسًا يقطع القوس الأول. سمّ نقطة التقاطع L.



الخطوة 3: استعمل المسطرة لرسم $\overleftrightarrow{AL}$. فيكون $\overleftrightarrow{AL}$ منصفًا للزاوية BAC في $\triangle ABC$.



حلل النتائج

7) **خمّن:** علاقة حول منصّفات زوايا مثلث.

8) ارسم منصّفي الزاويتين C و B للمثلث ABC. كيف تتّفق نتيجة رسمك هذا مع تخمينك السابق؟ اشرح:

توسع

9) كرّر العمليات الأربع لكل نوع من أنواع المثلثات التالية:

a) منفرج الزاوية ومختلف الأضلاع

b) قائم الزاوية ومختلف الأضلاع

c) حادّ الزوايا ومتطابق الضلعين

d) منفرج الزاوية ومتطابق الضلعين

e) قائم الزاوية ومتطابق الضلعين

f) متطابق الأضلاع

10) أين تقع نقط تقاطع المستقيمات للمثلث الحادّ الزوايا؟

11) أين تقع نقط تقاطع المستقيمات للمثلث المنفرج الزاوية؟

12) أين تقع نقط تقاطع المستقيمات للمثلث القائم الزاوية؟

13) تحت أيّة شروط تنطبق المستقيمات الخاصّة لمثلث بعضها على بعض؟

4-1 المنصفات والقطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث
Bisectors, Medians, and Altitudes of Triangles

الأفكار الرئيسة:

- أحدد الأعمدة المنصّفة لأضلاع مثلث ومنصفات زواياه وأستعملها.
- أحدد القطع المتوسطة والارتفاعات في مثلث وأستعملها.

المفردات:

العمود المنصّف
perpendicular bisector

المستقيمات المتلاقية
concurrent lines

نقطة التلاقي
point of concurrency

مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث
circumcenter

مركز الدائرة الداخلية للمثلث
incenter

القطعة المتوسطة
median

مركز المثلث
centroid

ارتفاع المثلث
altitude

ملتقى ارتفاعات المثلث
orthocenter

استعد

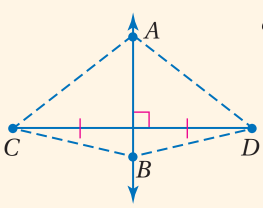
يوازن لاعبو السيرك الأشياء عند تأديتهم الحركات التي يقومون بها. فهم يحتاجون إلى إيجاد مركز الثقل لكل جسم لكي يحافظوا على توازنه. ومركز الثقل لأي مثلث يمكن إيجاده برسم القطع المتوسطة له وتعيين نقطة تقاطعها.

الأعمدة المنصّفة ومنصّفات الزوايا: كانت أول عملية إنشاء قُمت بها في معمل الهندسة في الصفحات 192–190 هي رسم الأعمدة المنصّفة لأضلاع مثلث. و**العمود المنصّف** لأحد أضلاع مثلث هو مستقيم أو قطعة مستقيمة أو نصف مستقيم يمر بنقطة منتصف ذلك الضلع ويكون عموديًا عليه. وللأعمدة المنصّفة للقطع المستقيمة خصائص معيَّنة، اثنتان منها واردتان في النظريتين 1–4 و 2–4 التاليتين:

نظريات — **النقاط على الأعمدة المنصّفة**

نظرية 4-1: كلّ نقطة على العمود المنصف لقطعة مستقيمة تكون على بُعدين متساويين من طرفي القطعة.

مثال: إذا كان $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ و $\overline{AB}$ تنصّف $\overline{CD}$، فإن $AC = AD$ و $BC = BD$.



نظرية 4-2: كلّ نقطة تبعد بُعدين متساويين عن طرفي قطعة مستقيمة تقع على العمود المنصّف لتلك القطعة.

مثال: إذا كان $AC = AD$ فإن النقطة A تقع على العمود المنصّف لـ $\overline{CD}$.
وإذا كان $BC = BD$ فإنّ النقطة B تقع على العمود المنصّف لـ $\overline{CD}$.

سوف تبرهن النظريتين 1–4 و 2–4 في «تحقق من فهمك (1)» وفي السؤال 22، على الترتيب.

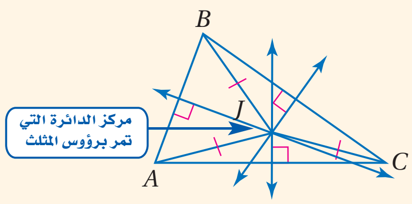
تذكّر أن المحل الهندسي هو مجموعة كافّة النقاط التي تحقق شرطًا معيّنًا.
وعلى ذلك يمكن وصف العمود المنصف لقطعة مستقيمة على أنّه المحل الهندسي للنقاط الواقعة في مستوى، والتي تبعد كل منها بُعدين متساويين عن طرفي تلك القطعة المستقيمة.

بما أنّ للمثلث ثلاثة أضلاع فإنّه يوجد ثلاثة أعمدة منصّفة لأضلاعه. والأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث تتقاطع في نقطة واحدة. وعندما تتقاطع ثلاثة مستقيمات أو أكثر في نقطة واحدة فإنها تسمى **مستقيمات متلاقية**، ونقطة تقاطعها تسمّى **نقطة التلاقي**. ونقطة تلاقي الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث هي **مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث**.

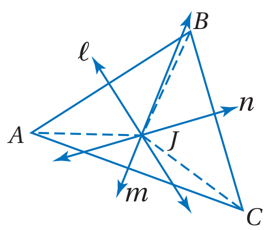
نظرية 4-3 نظرية مركز الدائرة التي تمر بروؤس المثلث

مركز الدائرة التي تمر بروؤس المثلث يبعد أبعادًا متساوية عن رؤوس المثلث.

مثال: إذا كان J مركز الدائرة التي تمرّ بروؤس $\triangle ABC$، فإنّ $AJ = BJ = CJ$.



البرهان نظرية 4-3



المعطيات: n, m, ℓ، أعمدة منصّفة للأضلاع $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ على الترتيب.

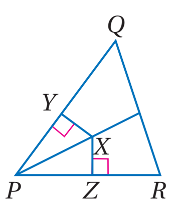
المطلوب إثبات أن: $AJ = BJ = CJ$

البرهان: بما أنّ J تقع على العمود المنصّف لـ $\overline{AB}$ فإنها على بُعدين متساويين من النقطتين A و B. ومن تعريف المسافات المتساوية يكون $AJ = BJ$ والعمود المنصّف لـ $\overline{BC}$ يحوي J أيضًا. لذلك $BJ = CJ$. ومن خاصّية التعدّي للمساواة تكون $AJ = CJ$. لذلك $AJ = BJ = CJ$.

مثال استعمال منصفات الزوايا

مراجعة المفردات

منصف الزاوية هو نصف مستقيم يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين.



1 **المعطيات:** $\overline{PX}$ تنصّف $\angle QPR$، $\overline{XY} \perp \overline{PQ}$ و $\overline{XZ} \perp \overline{PR}$.

المطلوب إثبات أن: $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$

البرهان:

العبارة	المبرر
1) $\overline{PX}$ تنصّف $\angle QPR$ $\overline{XY} \perp \overline{PQ}$ و $\overline{XZ} \perp \overline{PR}$	1) معطى
2) $\angle YPX \cong \angle ZPX$	2) تعريف منصف الزاوية
3) $\angle PYX, \angle PZX$ زاويتان قائمتان	3) تعريف التعامد
4) $\angle PYX \cong \angle PZX$	4) الزوايا القائمة متطابقة
5) $\overline{PX} \cong \overline{PX}$	5) خاصية الانعكاس
6) $\triangle PYX \cong \triangle PZX$	6) AAS.
7) $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$	7) العناصر المتناظرة متطابقة

تحقق من فهمك

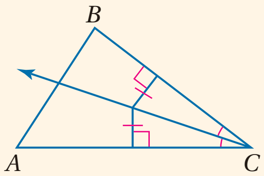
1) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 1–4.

في مثال **1**، XY و XZ يمثّلان المسافة بين X وكل من ضلعي $\angle QPR$. لذلك، فمثال **1** هو برهان للنظرية 4-4.

نظريات النقاط على منصفات الزوايا

نظرية 4-4: كل نقطة على منصف الزاوية تكون على بعدين متساويين من ضلعي الزاوية.

نظرية 4-5: كل نقطة على بُعدين متساويين من ضلعي زاوية تقع على منصف تلك الزاوية.



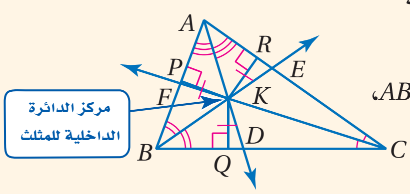
سوف تبرهن نظرية 5-4 في السؤال 23.

كما هو الحال في الأعمدة المنصّفة، هناك ثلاثة منصّفات زوايا في كل مثلث. ومنصّفات زوايا أي مثلث تتلاقى في نقطة تسمّى **مركز الدائرة الداخلية للمثلث**.

نظرية 4-6 نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

مركز الدائرة الداخليّة للمثلث يكون على أبعاد متساوية من أضلاع المثلث.

مثال: إذا كانت K مركز الدائرة الداخلية للمثلث ABC، فإنّ $KP = KQ = KR$.



سوف تبرهن نظرية 6-4 في السؤال 24.

القطع المتوسطة وارتفاعات المثلث

القطع المتوسطة وارتفاعات المثلث: **القطعة المتوسطة** في مثلث هي قطعة مستقيمة طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس.

ولكل مثلث ثلاث قطع متوسطة تتقاطع في نقطة واحدة. تسمّى نقطة تلاقي القطع المتوسطة للمثلث **مركز المثلث**. ومركز المثلث هو نقطة توازن ذلك المثلث.

إرشادات

القطع المتوسطة بصفتها منصّفات

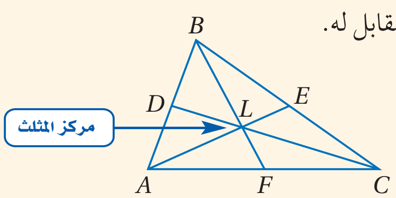
حيث إن القطعة المتوسّطة تحوي نقطة منتصف الضلع المقابل،فإنّها منصّفة لضلع المثلث.

نظرية 4-7 نظرية مركز المثلث

يبعد مركز المثلث عن كل رأس من رؤوس المثلث ثُلثي طول القطعة المتوسطة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.

مثال: إذا كانت L مركز $\triangle ABC$، فإنّ

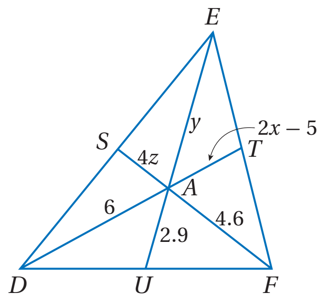
$$AL = \frac{2}{3}AE,\ BL = \frac{2}{3}BF,\ CL = \frac{2}{3}CD$$



يمكنك استعمال النظريات حول القطع المستقيمة الخاصّة بالمثلث لحل مسائل تتضمن إيجاد قياسات في المثلث.

مثـــال قياسات القطع المستقيمة

2 **جبر:** النقاط S, T, U هي منتصفات $\overline{DE}, \overline{EF}, \overline{DF}$ على الترتيب. أوجد قيمة كلٍّ من x, y, z.



• إيجاد قيمة x.

$DT = DA + AT$	مسلمة جمع القطع المستقيمة
$= 6 + (2x - 5)$	بالتعويض
$= 2x + 1$	بالتبسيط
$DA = \frac{2}{3} DT$	نظرية مركز المثلث
$6 = \frac{2}{3}[2x + 1]$	لأن $DA = 6$، $DT = 2x + 1$
$18 = 4x + 2$	بضرب الطرفين في 3 ثم التبسيط
$16 = 4x$	بطرح 2 من كلا الطرفين
$4 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 4

• إيجاد قيمة y.

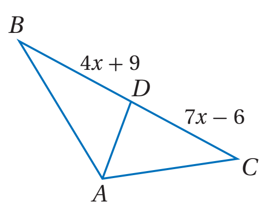
$EA = \frac{2}{3} EU$	نظرية مركز المثلث
$y = \frac{2}{3}(y + 2.9)$	لأن $EA = y$، $EU = y + 2.9$
$3y = 2y + 5.8$	بضرب كلا الطرفين في 3 ثم التبسيط.
$y = 5.8$	بطرح $2y$ من كلا الطرفين

• إيجاد قيمة z.

$FA = \frac{2}{3} FS$	نظرية مركز المثلث
$4.6 = \frac{2}{3}(4z + 4.6)$	لأن $FA = 4.6$، $FS = 4.6 + 4z$
$13.8 = 9.2 + 8z$	بضرب كلا الطرفين في 3 ثم التبسيط.
$4.6 = 8z$	بطرح 9.2 من كلا الطرفين
$z = 0.575$	بقسمة الطرفين على 8

تحقق من فهمك

2) **جبر:** أوجد قيمة x إذا كانت $\overline{AD}$ قطعة متوسطة للمثلث $\triangle ABC$.

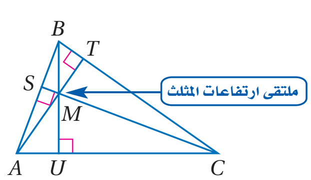


إرشادات

التخلص من الكسور

يمكنك ضرب المعادلة $DA = \frac{2}{3} DT$ في العدد 3 للتخلص من المقام.

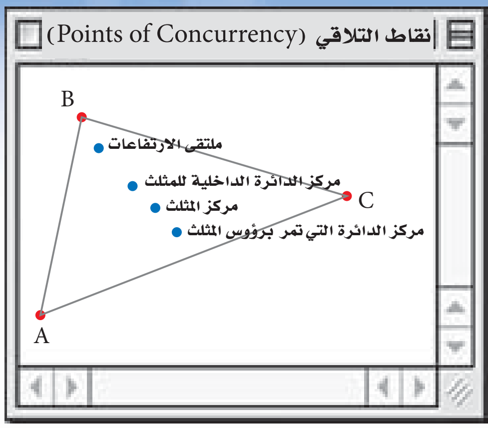
ارتفاع المثلث هو العمود النازل من أحد رؤوس المثلث على المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس. ولكل مثلث ثلاثة ارتفاعات تتقاطع في نقطة واحدة تسمّى **"ملتقى الارتفاعات"**. إذا عُيّنت رؤوس مثلث في مستوى إحداثي فإنّه يمكنك استعمال نظام من المعادلات لإيجاد إحداثيي ملتقى الارتفاعات.



معمل برمجيات الهندسة

نقاط التلاقي

- استعمل برنامجًا للرسم الهندسي لرسم المثلث الحاد الزوايا والمختلف الأضلاع $\triangle ABC$.
- ارسم نقاط التلاقي وعينها: ملتقى الارتفاعات، ومركز الدائرة الداخلية للمثلث، ومركز المثلث، ومركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث.



حلل الشكل

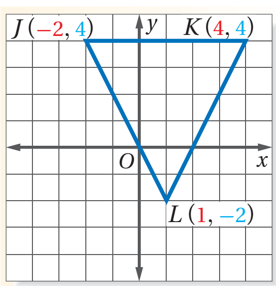
1) حرك رؤوس $\triangle ABC$ بحيث يصبح قائم الزاوية. صف موقع كل نقطة من نقاط التلاقي.

2) حرك رؤوس $\triangle ABC$ بحيث يصبح منفرج الزاوية ومختلف الأضلاع. صف موقع كل نقطة من نقاط التلاقي.

3) فسر نتائجك.

مثـــال: استعمال نظام معادلات لإيجاد إحداثيي نقطة

3 **هندسة إحداثية:** إذا كانت رؤوس $\triangle JKL$ هي $J(-2, 4), K(4, 4), L(1, -2)$. فأوجد إحداثيي نقطة ملتقى الارتفاعات للمثلث JKL.



أوجد معادلة ارتفاع المثلث النازل من J على $\overline{KL}$.
بما أنّ ميل $\overline{KL}$ يساوي 2 فإنّ ميل الارتفاع يساوي $-\frac{1}{2}$.

$y - y_1 = m(x - x_1)$	صيغة الميل – نقطة
$y - 4 = -\frac{1}{2}(x - (-2))$	$(x_1, y_1) = (-2, 4)$
$y - 4 = -\frac{1}{2}x - 1$	بالتبسيط
$y = -\frac{1}{2}x + 3$	بجمع 4 إلى كلا الطرفين.

أوجد معادلة ارتفاع المثلث النازل من K على $\overline{JL}$. بما أنّ ميل $\overline{JL}$ يساوي -2 فإنّ ميل الارتفاع يساوي $\frac{1}{2}$.

$y - y_1 = m(x - x_1)$	صيغة الميل – نقطة
$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 4)$	$(x_1, y_1) = (4, 4)$
$y - 4 = \frac{1}{2}x - 2$	بالتبسيط
$y = \frac{1}{2}x + 2$	بجمع 4 إلى كلا الطرفين

حلَّ نظام المعادلات لإيجاد نقطة تلاقي الارتفاعات.

إرشـــادات

الآلة الحاسبة البيانية

إذا أعطيت معادلتين خطيتين فإنك تستطيع رسم المستقيمين اللذين يمثلانهما، وتستعمل خيار التقاطع من القائمة لتحديد نقطة التقاطع.

اجمع المعادلتين للتخلص من x.

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$ معادلة الارتفاع من J

$$(+)\ y = \frac{1}{2}x + 2$$ معادلة الارتفاع من K

$$2y = 5$$ بالجمع

$$y = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$ بقسمة كلا الطرفين على 2

ثم عوّض عن y بـ $\frac{5}{2}$ في أيّ من المعادلتين لإيجاد x.

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\frac{5}{2} = \frac{1}{2}x + 2$$ لأن $y = \frac{5}{2}$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x$$ بطرح 2 من كلا الطرفين

$$x = 1$$ بقسمة كلا الطرفين على $\frac{1}{2}$

إذن إحداثيّا نقطة تلاقي الارتفاعات للمثلث $\triangle JKL$ هي $(1, 2\frac{1}{2})$. وللتأكد من معقوليّة الجواب ارسم ارتفاعات المثلث على شبكة إحداثيّة . وستكون نقطة التقاطع هي نقطة تلاقي الارتفاعات.

إرشادات

المعادلات الآنيّة

تسمّى أنظمة المعادلات أيضًا المعادلات الآنيّة؛ لأن الحل يتكون من قيم المتغيرات التي تحقق جميع المعادلات في الوقت نفسه،أو آنيًا.

تحقق من فهمك

3) أوجد مركز الدائرة التي تمرّ برؤوس $\triangle JKL$.

ويمكنك أيضًا استعمال أنظمة معادلات لإيجاد إحداثيي مركز الدائرة التي تمر برؤوس مثلث مرسوم في مستوى إحداثي وإيجاد مركزه.

مفاهيم أساسية **قطع مستقيمة خاصّة في المثلث**

الاسم	النوع	نقطة التلاقي
العمود المنصّف	مستقيم أو قطعة مستقيمة أو نصف مستقيم	مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث
منصّف الزاوية	مستقيم أو قطعة مستقيمة أو نصف مستقيم	مركز الدائرة الداخليّة للمثلث
القطعة المتوسطة	قطعة مستقيمة	مركز المثلث
الارتفاع	قطعة مستقيمة	ملتقى الارتفاعات

تأكد

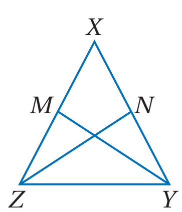
مثال 1
(ص 194)

1) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$

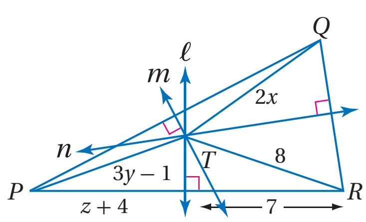
$\overline{YM}$ و $\overline{ZN}$ قطعتان متوسطتان.

المطلوب : إثبات أنّ $\overline{YM} \cong \overline{ZN}$



مثال 2
(ص 196)

2) **جبر:** المستقيمات ℓ, m, n أعمدة منصّفة لأضلاع $\triangle PQR$ تتلاقى عند النقطة T. إذا كان $TQ = 2x, PT = 3y - 1, TR = 8$ فأوجد كلاً من x, y, z.



مثال 3
(ص 197)

3) **هندسة إحداثية :** إذا كانت رؤوس $\triangle ABC$ هي $A(-3, 3), B(3, 2), C(1, -4)$.
فأوجد إحداثيات مركز الدائرة التي تمرّ برؤوس المثلث.

تمارين ومسائل

إرشادات للتمارين	
للأسئلة	انظر الأمثلة
4, 5	1
22-24	2
15-21	3

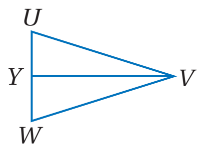
برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.

4) **المعطيات:** $\triangle UVW$ متطابق الضلعين

زاوية رأسه UVW.

$\overline{YV}$ منصّف $\angle UVW$.

المطلوب: إثبات أنّ $\overline{YV}$ قطعة متوسطة.

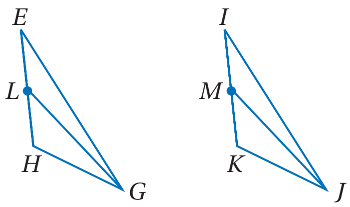


5) **المعطيات:** $\overline{GL}$ قطعة متوسطة لِـ $\triangle EGH$

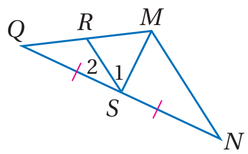
$\overline{JM}$ قطعة متوسطة لِـ $\triangle IJK$.

$\triangle EGH \cong \triangle IJK$

المطلوب: إثبات أن $\overline{GL} \cong \overline{JM}$



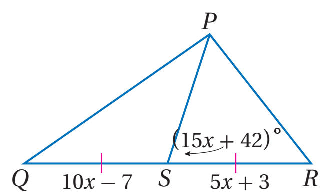
استعمل المثلث MNQ عن اليسار في حل السؤالين 6 و 7



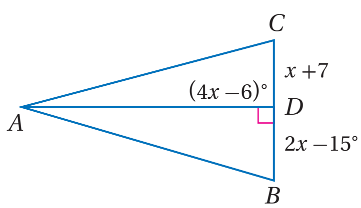
6) **جبر:** أوجد قيمة x و $m\angle 2$ إذا كان $\overline{MS}$ ارتفاعًا للمثلث MNQ وكان $m\angle 1 = 3x + 11, m\angle 2 = 7x + 9$.

7) **جبر:** إذا كان $\overline{MS}$ قطعة متوسطة لـ $\triangle MNQ$ وكان $QS = 3a - 14$, $SN = 2a + 1$, $m\angle MSQ = 7a + 1$, فأوجد قيمة a.
هل $\overline{MS}$ ارتفاع للمثلث MNQ أيضًا. فسّر إجابتك.

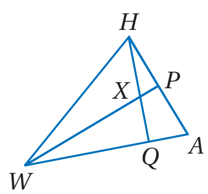
8) **جبر:** أوجد قيمة x إذا كان $\overline{PS}$ قطعة متوسطة للمثلث PQR.



9) **جبر:** أوجد قيمة x إذا كان $\overline{AD}$ ارتفاعًا للمثلث ABC.



جبر: استعمل المثلث WHA المجاور في حل السؤالين 10 و 11

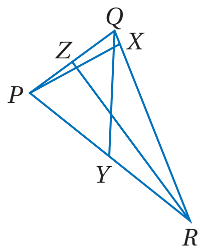


10) إذا كانت $\overline{WP}$ قطعة متوسطة ومنصّفة لزاوية في مثلث، وكان
$AP = 3y + 11, PH = 7y - 5, m\angle HWP = x + 12, m\angle PAW = 3x - 2, m\angle HWA = 4x - 16$
فأوجد قيمة كلٍّ من x و y. هل $\overline{WP}$ ارتفاع للمثلث أيضًا؟ فسّر إجابتك.

11) إذا كان $\overline{WP}$ عمودًا منصّفًا، وكان
$m\angle WHA = 8q + 17, m\angle HWP = 10 + q, AP = 6r + 4, PH = 22 + 3r,$
فأوجد كلاًّ من $r, q , m\angle HWP$

جبر: استعمل المعلومات التالية في حل الأسئلة 14–12:

في $\triangle PQR$: $ZQ = 3a - 11, ZP = a + 5, PY = 2c - 1, YR = 4c - 11, m\angle PRZ = 4b - 17,$
$m\angle ZRQ = 3b - 4, m\angle PXR = 2a + 10, m\angle QYR = 7b + 6,$.



12) إذا كان $\overline{PX}$ ارتفاعًا للمثلث PQR. فأوجد قيمة a.

13) إذا كان $\overline{RZ}$ منصف زاوية، فأوجد $m\angle PRZ$.

14) إذا كانت $\overline{QY}$ قطعة متوسطة، فأوجد PR.

هندسة إحداثية: إذا كانت رؤوس $\triangle DEF$ هي $D(4 , 0), E(-2 , 4) , F(0 , 6)$.
فأوجد إحداثيات نقاط التقاطع التالية للمثلث DEF.

15) مركز المثلث. **16)** ملتقى الارتفاعات. **17)** مركز الدائرة التي تمرّ برؤوس المثلث.

هندسة إحداثية: استعمل المعلومات التالية في حل الأسئلة 21–18.

رؤوس $\triangle RST$ هي $R(3 , 3), S(-1 , 6), T(1 , 8)$ و $\overline{RX}$ قطعة متوسطة.

18) ما إحداثيات X؟

19) أوجد RX.

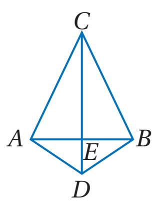
20) أوجد ميل $\overleftrightarrow{RX}$. ثم أوجد معادلته.

21) هل $\overline{RX}$ ارتفاع للمثلث RST؟ اشرح إجابتك.

الربط مع الحياة

سباقات توظيف الخرائط:
يتكون السباق من تسع مراحل حيث يكتسب المتسابق نقاطًا اعتمادًا على الزمن الذي يستغرقه في كل مرحلة.

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكل من النظريات التالية:

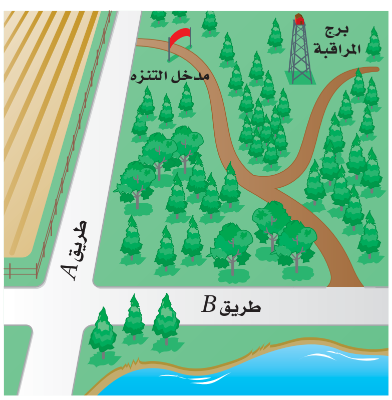


22) نظرية 2–4

المعطيات: $\overline{CA} \cong \overline{CB}\,; \overline{AD} \cong \overline{BD}$

المطلوب: إثبات أن النقطتين C و D تقعان على العمود المنصّف لـ $\overline{AB}$.

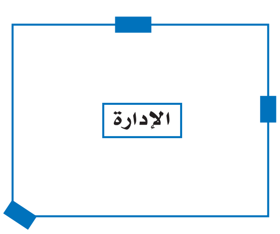
23) نظرية 5–4 **24)** نظرية 6–4



25) توظيف الخرائط: قراءة الخرائط رياضة تنافسيّة نشأت في السويد لاختبار مهارات قراءة الخرائط والجري عبر البلاد. حيث يتسابق المتنافسون عبر مناطق غير معروفة لإيجاد علامات مخبأة مستعملين في ذلك البوصلة والخرائط الطبوغرافية. وفي بداية السباق،تعطى تلميحات لتحديد موقع الراية الأولى.

- تبعد الراية عن البرج مسافة تساوي بُعدها عن مدخل المتنزه.
- إذا ركضت بمستقيم من الطريق A أو من الطريق B نحو الراية فإنك ستقطع المسافة نفسها. صف كيف تجد الراية الأولى.

26) هندسة العمارة: صمم مهندس معماري مبنى لمدرسة ثانوية. صِفْ كيف تحدّد موقع الإدارة بحيث يكون على أبعاد متساوية من المداخل الثلاثة للمدرسة.



إحصاء : استعمل المعلومات التالية في حل الأسئلة 30–27:
المتوسط الحسابي لمجموعة من البيانات هو معدّل تلك البيانات،
افرض أن رؤوس $\triangle ABC$ هي $A(16 ،8)$، $B(2 ، 4)$، $C(-6 ،12)$.

27) أوجد متوسط الإحداثيات السينية لرؤوس المثلث.

28) أوجد متوسط الإحداثيات الصادية لرؤوس المثلث.

29) ارسم $\triangle ABC$ وقطعه المتوسطة.

30) **خمّن** علاقة حول مركز المثلث ومتوسطي إحداثيات الرؤوس.

حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائمًا، أو أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. برّر إجابتك:

31) تتقاطع القطع المتوسطة الثلاث للمثلث في نقطة داخل المثلث.

32) تتقاطع ارتفاعات المثلث الثلاثة عند أحد رؤوس المثلث.

33) تتقاطع منصفات زوايا المثلث في نقطة خارج المثلث.

34) تتقاطع الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث في نقطة خارج المثلث.

مسائل مهارات التفكير العليا

35) **تبرير:** قارن بين الأعمدة المنصّفة لأضلاع مثلث وقطعه المتوسطة.

36) **تبرير:** أوجد مثالاً مضادًا للعبارة «ارتفاع المثلث ومنصّف زاوية فيه لا يمكن أن يكونا القطعة المستقيمة نفسها».

37) **مسألة مفتوحة :** ارسم مثلثًا بحيث يقع مركز الدائرة التي تمرّ برؤوسه خارجه.

38) **أيها لا ينتمي؟** حدّد المفردة التي لا تنتمي لمجموعة المفردات الأخرى. فسّر إجابتك.

مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث	الارتفاع	نقطة التلاقي	ملتقى الارتفاعات

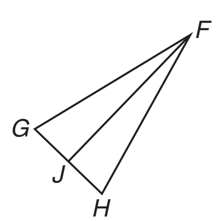
39) **تحدٍّ :** ارسم المثلث XYZ الذي فيه $\overline{XN}$ قطعة متوسطة و $\overline{XQ}$ ارتفاع. تذكّر أنّ مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب طول القاعدة في الارتفاع. ماذا يمكنك أن تستنتج حول العلاقة بين مساحتي المثلثين XYN و XZN؟

40) **اكتب :** اشرح كيف يمكنك أن توازن ورقة مثلثة الشكل على سن قلم. هل من الممكن أن يكون مركز الدائرة الداخليّة للمثلث هو مركز ثقله؟

تدريب على اختبار معياري

41) في الشكل المجاور، $\overline{GJ} \cong \overline{HJ}$ ؟

أي العبارات التالية صحيحة؟



A $\overline{FJ}$ منصّف زاوية للمثلث FGH.

B $\overline{FJ}$ عمود منصّف لضلع في المثلث FGH.

C $\overline{FJ}$ قطعة متوسطة للمثلث FGH.

D $\overline{FJ}$ ارتفاع للمثلث FGH.

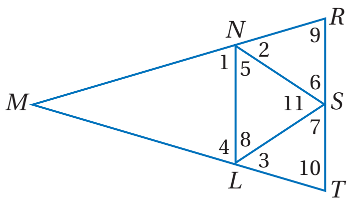
مراجعة تراكمية

ارسم كل مثلث في المستوى الإحداثي وَسَمِّ رؤوسه: (الدرس 6-3)

42) $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع طول قاعدته $\overline{AB}$ يساوي n وحدة.

43) $\triangle DEF$ متطابق الضلعين طول كل من ضلعيه المتطابقين $2a$ وحدة، وطول قاعدته a وحدة.

44) $\triangle GHI$ قائم الزاوية وتره $\overline{GI}$, HI ثلاثة أمثال GH،وطول $\overline{GH}$ يساوي x وحدة.



حُلَّ الأسئلة 48–45 مستعملًا الشكل المجاور: (الدرس 6-3)

45) إذا كانت $\angle 10 \cong \angle 9$،فاذكر قطعتين متطابقتين.

46) إذا كانت $\overline{SL} \cong \overline{NL}$، فاذكر زاويتين متطابقتين.

47) إذا كانت $\overline{LS} \cong \overline{LT}$، فاذكر زاويتين متطابقتين.

48) إذا كانت $\angle 4 \cong \angle 1$،فاذكر قطعتين متطابقتين.

49) **تصميم داخلي:** ثبّت ياسر ماسورةً فوق نافذة بيته لتركيب ستارة. ولضمان أن تكون الماسورة موازيةً لسقف البيت أخذ ياسر مسافة 20 سم تحت السقف وفي أماكن مختلفة. إذا ثبت ياسر الماسورة في هذه الأماكن فكيف له أن يعرف أن الماسورة ستكون موازيةً للسقف؟ (الدرس 6-2)

أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين في كل مما يلي: (الدرس 3-2)

50) $A(0 , 6),B(4 , 0)$

51) $G(8 , 1),H(8 , -6)$

52) $E(6 , 3) , F(-6 , 3)$

53) حدّد إذا كان التخمين التالي صحيحًا أو خَطَأً. وأعط مثالاً مضادًا إذا كان التخمين خطأ.

المعطيات: x عدد صحيح.

التخمين: $-x$ عدد سالب.

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضروريّة: اكتب < أو > مكان العلامة ● لتحصل على عبارة صحيحة.

54) $-\frac{19}{27} \bullet -\frac{18}{25}$

55) $\frac{5}{16} \bullet \frac{3}{8}$

56) $\frac{5}{3} \bullet 2.7$

57) $-\frac{19}{4} \bullet -4.25$

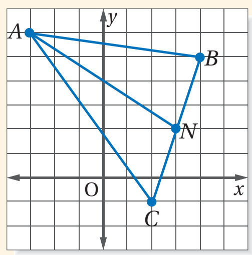
اقرأ

كتابة التفسيرات

غالبًا لا يكون تقديم الجواب في الرياضيات كافيًا، بل عليك أن تُظْهِرَ فهمك بتقديم تفسيرات لإجاباتك أو دعم تبريراتك.

مثـــال

هل $\overline{AN}$ ارتفاع للمثلث ABC؟ برّر إجابتك.



غير كافٍ القول بأن $\overline{AN}$ ليس ارتفاعًا للمثلث ABC لأنه " لا يبدو كذلك". بل عليك أن تدعم تبريرك.

$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ = ميل $\overline{AN}$		صيغة الميل
$= \dfrac{2-6}{3-(-3)}$		$(x_1،y_1)=(-3،6)،(x_2،y_2)=(3،2)$
$= -\dfrac{2}{3}$		بالتبسيط
$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ = ميل $\overline{BC}$		صيغة الميل
$= \dfrac{-1-5}{2-4}$		$(x_1،y_1)=(4،5)،(x_2،y_2)=(2،-1)$
$= 3$		بالتبسيط

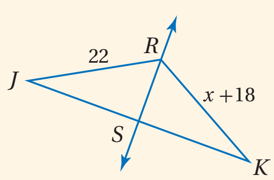
الإجابة الكاملة:

بما أن حاصل ضرب ميلي $\overline{BC}$ و $\overline{AN}$ لا يساوي -1 فإن القطعتين $\overline{BC}$ و $\overline{AN}$ غير متعامدتين. لذلك $\overline{AN}$ ليس ارتفاعًا للمثلث ABC.

اقرأ لتتعلّم:

1) صِفْ بعض الطرائق في الرياضيات التي تمكنك من تفسير إجابتك أو تدعيم تبريرك.

2) استعمل الشكل السابق في حل السؤال التالي: هل $\overline{AN}$ قطعة متوسطة للمثلث ABC؟ برّر إجابتك.



3) في الشكل المجاور، إذا كان $\overleftrightarrow{RS}$ عموداً منصّفًا لـ $\overline{JK}$. فما قيمة x؟ برّر إجابتك.

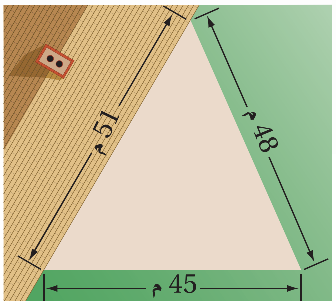
4) في $\triangle XYZ$: $XY=15$ cm ,$YZ=12$ cm , $ZX=23$ cm .
رتب زوايا المثلث حسب قياساتها من الأكبر إلى الأصغر.
اشرح مبرّراتك.

5) كيف تكون كتابة التفسيرات والتبريرات مفيدةً في اتخاذ قرارات وأحكام عند حل المشكلات؟

4-2 المتباينات والمثلثات
Inequalities and Triangles

استعد

فناء منزل ناصر مثلث الشكل، ويريد أن يضع شجرة زينة في الزاوية الكبيرة من هذا الفناء. يمكن لناصر أن يجد الزاوية الكبيرة لأن قياسات زوايا المثلث ترتبط بقياسات أطوال الأضلاع المناظرة.



الأفكار الرئيسة:

- أدرك خصائص المتباينات وأطبقها على قياسات زوايا المثلث.
- أدرك خصائص المتباينات وأطبقها على العلاقات بين زوايا وأضلاع المثلث.

متباينات الزوايا: تعلمت في الجبر المتباينة بصفتها علاقة بين الأعداد الحقيقية. وتستعمل هذه العلاقة غالبًا في البراهين.

مفهوم أساسي — تعريف المتباينة

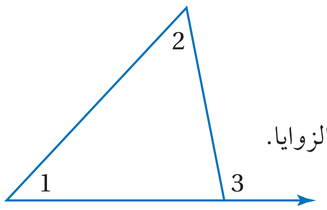
لكل عددين a و b ، يكون $a > b$ إذا وفقط إذا وُجد عدد موجب c بحيث يكون $a = b + c$.

مثال: إذا كان $2 + 4 = 6$ ، فإن $6 > 4$ و $6 > 2$.

وفي الجدول التالي خصائص لمتباينات درستها في الجبر. ويمكن أن تطبق هذه الخصائص على قياسات الزوايا وأطوال القطع المستقيمة لأنها أعداد حقيقية.

خصائص المتباينات على الأعداد الحقيقيّة	
	لكل ثلاثة أعداد حقيقيّة a, b, c
خاصّية المقارنة	$a < b$ أو $a = b$ أو $a > b$
خاصّية التعدّي	(1 إذا كان $a < b$ و $b < c$، فإنّ $a < c$. (2 إذا كان $a > b$ و $b > c$، فإنّ $a > c$.
خصائص الجمع والطرح	(1 إذا كان $a > b$، فإنّ $a + c > b + c$ و $a - c > b - c$. (2 إذا كان $a < b$، فإنّ $a + c < b + c$ و $a - c < b - c$.
خصائص الضرب والقسمة	(1 إذا كان $c > 0$ و $a < b$، فإنّ $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$. (2 إذا كان $c > 0$ و $a > b$، فإنّ $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. (3 إذا كان $c < 0$ و $a < b$، فإنّ $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. (4 إذا كان $c < 0$ و $a > b$، فإنّ $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

مثـــال — مقارنة قياسات الزوايا



1 **حدّد الزاوية التي لها أكبر قياس.**

استكشف: قارن قياس $\angle 3$ مع كل من قياسي $\angle 1$ و $\angle 2$.

خطط: استعمل خصائص ونظريات الأعداد الحقيقيّة لمقارنة قياسات الزوايا.

حل: قارن بين $m\angle 1$ و $m\angle 3$.

من نظرية الزاوية الخارجيّة، $m\angle 3 = m\angle 1 + m\angle 2$.

ولأنّ قياسات الزوايا أعداد موجبة، ومن تعريف المتباينة يكون، $m\angle 3 > m\angle 1$.

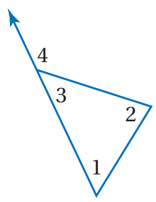
الآن قارن بين $m\angle 2$ و $m\angle 3$.

مرّة أخرى، من نظرية الزاوية الخارجيّة، $m\angle 3 = m\angle 1 + m\angle 2$.

وينص تعريف المتباينة على أنّه إذا كان $m\angle 3 = m\angle 1 + m\angle 2$، فإنّ $m\angle 3 > m\angle 2$.

تحقق: $m\angle 3$ أكبر من $m\angle 1$ ومن $m\angle 2$. لذلك تكون $\angle 3$ لها القياس الأكبر.

تحقق من فهمك

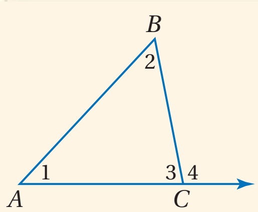


1) حدّد الزاوية التي لها أكبر قياس.

نتائج مثال 1 تبيّن أن قياس الزاوية الخارجية أكبر من قياس كل من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها.

نظرية 4.8 — متباينة الزاوية الخارجيّة

قياس الزاوية الخارجيّة للمثلث أكبر من قياس كلٍّ من الزاويتين الداخليتين البعيدتين المناظرتين لها.



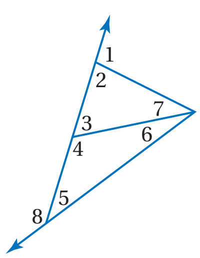
مثال: $m\angle 4 > m\angle 1$

$m\angle 4 > m\angle 2$

برهان نظرية 8-4 يقدم في الدرس 3-4

مثـــال — الزوايا الخارجيّة

2 **استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة لتحديد جميع الزوايا التي تحقق الشرط المذكور.**



a) قياس كل منها أقل من $m\angle 8$

من نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة لدينا

$m\angle 8 > m\angle 4, m\angle 8 > m\angle 6, m\angle 8 > m\angle 2, m\angle 8 > m\angle 6 + m\angle 7$

أي أنّ قياس كل من $\angle 7$, $\angle 2$, $\angle 6$, $\angle 4$ أقل من $m\angle 8$.

b) قياس كل منها أكبر من $m\angle 2$

من نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة لدينا

$m\angle 4 > m\angle 2$ و $m\angle 8 > m\angle 2$. أي أن قياس كل من $\angle 4$ و $\angle 8$ أكبر من $m\angle 2$.

تحقق من فهمك

2) قياس كل منها أقل من $m\angle 3$.

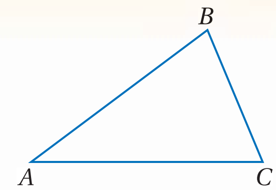
العلاقات بين الأضلاع والزوايا: تذكر أنّه إذا كان ضِلعا مثلث متطابقين فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين متطابقتان. وفي معمل الهندسة التالي سوف تستقصي العلاقة بين الأضلاع والزوايا عندما تكون غير متطابقة.

معمل الهندسة

متباينات أضلاع المثلثات وزواياها

نموذج

الخطوة 1: ارسم مثلثًا حاد الزوايا ومختلف الأضلاع، وسمِّ رؤوسه A, B, C.



الخطوة 2: استعمل المسطرة لقياس أطوال أضلاع المثلث ABC. وسجّل القياسات في الجدول التالي:

الضلع	الطول
$\overline{BC}$	
$\overline{AC}$	
$\overline{AB}$	

الخطوة 3: استعمل المنقلة لقياس كل زاوية للمثلث ABC. وسجّل القياسات في الجدول التالي:

الزاوية	القياس
$\angle A$	
$\angle B$	
$\angle C$	

حلّل النتائج

1) صف قياس الزاوية المقابلة للضلع الأطول بدلالة الزاويتين الأُخريين.

2) صف قياس الزاوية المقابلة للضلع الأقصر بدلالة الزاويتين الأُخريين.

3) كرّر النشاط باستعمال مثلثات أخرى.

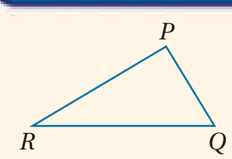
خمّن

4) ما العلاقة التي يمكنك استنتاجها والتي تربط بين أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه؟

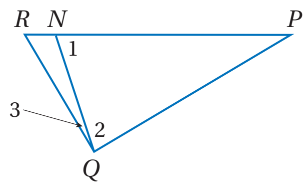
يقودنا معمل الهندسة هذا إلى النظرية التالية.

نظرية 4.9

في أي مثلث، إذا كان أحد أضلاعه أطول من ضلع آخر، يكون قياس الزاوية المقابلة للضلع الأول (الأطول) أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الثاني (الأقصر).



برهان نظرية 4.9



المعطيات: $\triangle PQR$

$PQ < PR$

$\overline{PN} \cong \overline{PQ}$

المطلوب إثبات أن: $m\angle R < m\angle PQR$

البرهان:

العبارات	المبررات
(1 $\triangle PQR,\ PQ < PR,\ \overline{PN} \cong \overline{PQ}$	(1 معطى
(2 $\angle 1 \cong \angle 2$	(2 نظرية المثلث المتطابق الضلعين
(3 $m\angle 1 = m\angle 2$	(3 تعريف الزوايا المتطابقة
(4 $m\angle R < m\angle 1$	(4 نظرية متباينة الزاوية الخارجية
(5 $m\angle 2 + m\angle 3 = m\angle PQR$	(5 مسلمة جمع الزوايا
(6 $m\angle 2 < m\angle PQR$	(6 تعريف المتباينة
(7 $m\angle 1 < m\angle PQR$	(7 خاصيّة التعويض للمساواة
(8 $m\angle R < m\angle PQR$	(8 خاصيّة التعدّي للمتباينة

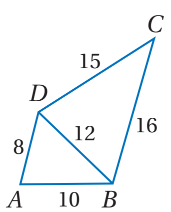
إرشادات

نظرية 4-9

الضلع الأطول في المثلث يقابل الزاوية الكبرى فيه.

مثال العلاقات بين الأضلاع والزوايا

3 حدّد العلاقة بين قياسي كل زاويتين مما يلي:



a) $\angle ADB,\ \angle DBA$

الضلع المقابل للزاوية ADB أطول من الضلع المقابل للزاوية DBA،

لذلك $m\angle ADB > m\angle DBA$.

b) $\angle CDA,\ \angle CBA$

$m\angle DBA < m\angle ADB$

$m\angle CBD < m\angle CDB$

ومن خاصية الجمع للمتباينة

$m\angle DBA + m\angle CBD < m\angle ADB + m\angle CDB$

$m\angle CBA < m\angle CDA$

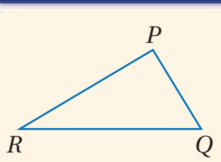
تحقق من فهمك

3) حدد العلاقة بين $\angle CBD,\ \angle CDB$

وعكس النظرية 9–4 صحيح أيضًا.

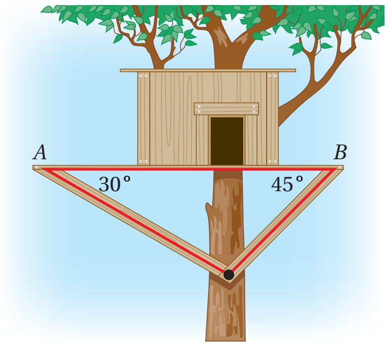
نظرية 4.10

في أي مثلث، إذا كان قياس إحدى زواياه أكبر من قياس زاوية أخرى، يكون الضلع المقابل للزاوية الأولى (الأكبر) أطول من الضلع المقابل للزاوية الثانية (الأصغر).



سوف تبرهن نظرية 10–4 في الدرس 3–4،السؤال 20

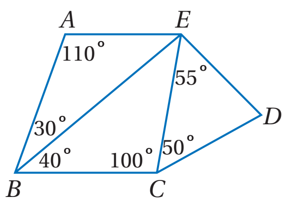
مثال من واقع الحياة



4 بيوت على الأشجار: يبني رجل بيتًا خشبيًّا على شجرة، فبدأ بإنشاء هيكل لجزء من البيت، وخطط لتركيب دعامات تحمل ذلك الجزء، كما في الصورة. أي دعامة هي الأطول: الدعامة المثبتة عند A أو تلك المثبتة عند B؟

تنص نظرية 10–4 على أنّه إذا كان قياس زاوية في مثلث أكبر من قياس زاوية أخرى فإنّ الضلع المقابل للزاوية الكبرى أطول من الضلع المقابل للزاوية الصغرى. لذلك، فالدعامة المثبتة عند A ستكون أطول من الدعامة المثبتة عند B.

تحقق من فهمك

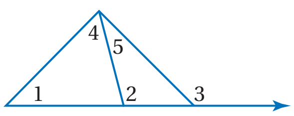


4) حدّد العلاقة بين BC و EC في الشكل المجاور.

تأكد

مثال 1 (ص 205)

حدّد الزاوية التي لها أكبر قياس:



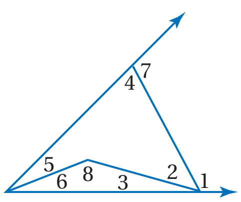
1) $\angle 1, \angle 2, \angle 4$

2) $\angle 2, \angle 3, \angle 5$

3) $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5$

مثال 2 (ص 205)

استعمل نظريّة متباينة الزاوية الخارجيّة لتحديد جميع الزوايا التي تحقق الشرط المعطى:

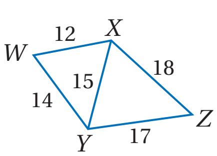


4) قياساتها أقل من $m\angle 1$

5) قياساتها أقل من $m\angle 7$

مثال 3 (ص 207)

حدّد العلاقة بين قياسي الزاويتين التاليتين في كل مما يلي:

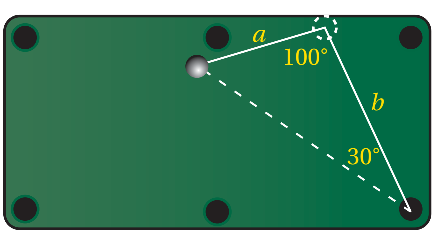


6) $\angle WXY, \angle XYW$

7) $\angle XZY, \angle XYZ$

8) $\angle WXY, \angle XWY$

مثال 4 (ص 208)



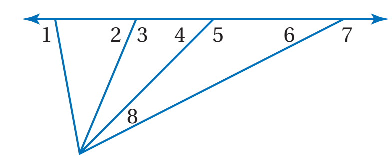
9) بلياردو: ضرب محمد كرة البلياردو لتصطدم بجدار الطاولة ثم لتعود وتسقط في الهدف كما في الشكل. أيهما أكبر، المسافة a أم المسافة b؟ علل إجابتك.

تمارين ومسائل

للأسئلة	انظر الأمثلة
10 - 13	1
14 - 17	2
18 - 21	3
22 - 24	4

إرشادات للتمارين

حدّد الزاوية التي لها أكبر قياس مما يلي:



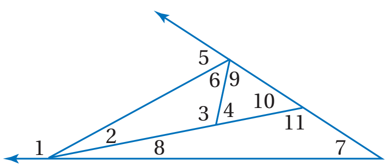
10) $\angle 1, \angle 2, \angle 4$

11) $\angle 2, \angle 4, \angle 6$

12) $\angle 3, \angle 5, \angle 7$

13) $\angle 2, \angle 6, \angle 8$

استعمل نظريّة متباينة الزاوية الخارجيّة لتحديد جميع الزوايا التي تحقق الشرط المعطى:



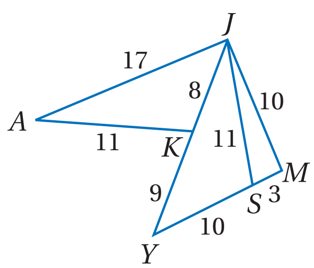
14) قياساتها أقل من $m\angle 5$

15) قياساتها أكبر من $m\angle 6$

16) قياساتها أكبر من $m\angle 10$

17) قياساتها أقل من $m\angle 11$

حدّد العلاقة بين قياسي الزاويتين في كل مما يلي:



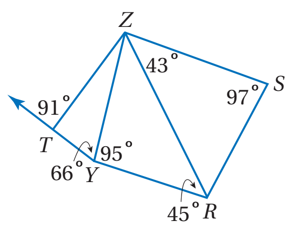
18) $\angle KAJ, \angle AJK$

19) $\angle MJY, \angle JYM$

20) $\angle SMJ, \angle MJS$

21) $\angle MYJ, \angle JMY$

حدّد العلاقة بين طولي كل ضلعين مما يلي:



22) $\overline{ZY}, \overline{YR}$

23) $\overline{ZY}, \overline{RZ}$

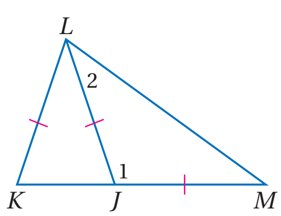
24) $\overline{TY}, \overline{ZT}$

25) برهان اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{JM} \cong \overline{JL}$

$\overline{JL} \cong \overline{KL}$

المطلوب إثبات أن: $m\angle 1 > m\angle 2$

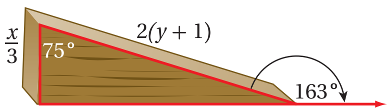


26) رحلة: انطلقت طائرة من تبوك إلى الرياض ثم إلى أبها ثم عادت إلى تبوك. رتّب الأضلاع التي تمثل الرحلة من الأطول إلى الأقصر.

27) **هندسة إحداثية :** النقاط $K(3\,,2), L(-1\,,5), M(-3\,,-7)$ هي رؤوس $\triangle KLM$. اكتب زوايا المثلث مرتّبة حسب قياساتها من الأصغر إلى الأكبر.

28) في $\triangle ABC$، إذا كان $AB > AC > BC$ ،وكانت $\overline{AM}$ ، $\overline{BN}$ ، $\overline{CO}$ هي القطع المتوسطة للمثلث، رتّب AM, BN, CO من الأصغر إلى الأكبر.

29) **التزلج :** يُمثّل الشكل المجاور منحدرًا للتزلج. إذا كانت قيم x و y بالسنتمتر فاكتب متباينة تربط بين x و y، ثمّ حل المتباينة لإيجاد y بدلالة x.



جبر : أوجد قيمة n في كل مما يلي. ثمّ رتّب أضلاع $\triangle PQR$ من الأقصر إلى الأطول:

30) $m\angle P = 9n + 29,\ \ m\angle Q = 93 - 5n,\ \ m\angle R = 10n + 2$

31) $m\angle P = 12n - 9,\ \ m\angle Q = 62 - 3n,\ \ m\angle R = 16n + 2$

32) $m\angle P = 4n + 61,\ \ m\angle Q = 67 - 3n,\ \ m\angle R = n + 74$

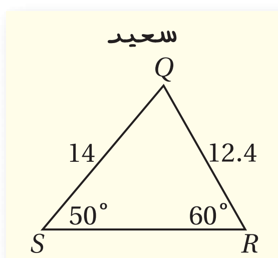
33) **برهان :** اكتب برهانًا حرًّا للعبارة التالية:
"إذا كان المثلث غير متطابق الضلعين فإن طول القطعة المتوسطة أكبر من طول ارتفاع المثلث المرسوم من الرأس نفسه".

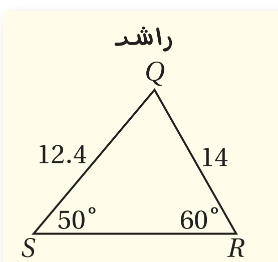
مسائل مهارات التفكير العليا

34) **تبرير :** هل العبارة التالية صحيحة دائمًا،أو أحيانًا،أو غير صحيحة مطلقًا؟ برّر إجابتك.
في $\triangle JKL$ القائم الزاوية في J،إذا كان $m\angle J$ ضعف $m\angle K$،فإنّ طول الضلع المقابل لـ $\angle J$ يساوي ضعف طول الضلع المقابل لـ $\angle K$.

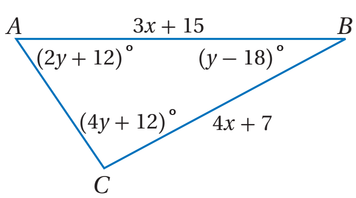
35) **مسألة مفتوحة :** ارسم $\triangle ABC$ بحيث يكون $m\angle A > m\angle B > m\angle C$. وبدون قياس دقيق للزوايا. اشرح كيف تعرف الضلع الأطول والضلع الأقصر.

36) **أوجد الخطأ :** حَدّد كُلٌّ من سعيد وراشد بعض القياسات للمثلث $\triangle QRS$. من منهما كان تحديده صحيحًا؟ اشرح إجابتك.





37) **تحدٍّ :** اكتب متباينة وحلّها لإيجاد قيمة x في الشكل المجاور.



38) **اكتب :** ارجع إلى الشكل صفحة 204. كيف يمكنك معرفة الزاوية الكبرى؟ حدّد اسم النظرية أو المسلمة التي تمكنك من مقارنة قياسات الزوايا، وأيّ زاوية في الشكل هي الأكبر؟

تدريب على اختبار معياري

39) قياسا زاويتين في مثلث °45 و °92. ما نوع هذا المثلث؟

A منفرج الزاوية ومختلف الأضلاع

B منفرج الزاوية ومتطابق الضلعين

C حادّ الزوايا ومختلف الأضلاع

D حادّ الزوايا ومتطابق الضلعين

40) ما المقطع السيني للمستقيم $4x - 6y = 12$؟

F -3 **H** 2

G -2 **J** 3

مراجعة تراكمية

جبر: حل الأسئلة 43–41 مستعملًا المعلومات التالية: (الدرس 1-4)

في المثلث $\triangle ABC$ ، $A(3, 8)$ و $B(9, 12)$. $\overline{AD}$ قطعة متوسطة حيث $D(12, 3)$.

41) ما إحداثيات النقطة C؟

42) هل $\overline{AD}$ ارتفاع للمثلث ABC؟ فسّر.

43) إحداثيا النقطة E هما $(6, 6)$ ، $\overline{EF}$ تقطع $\overline{BD}$ عند F. إذا كانت $F(10\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2})$ ، فهل $\overline{EF}$ عمود منصّف لـ $\overline{BD}$ ؟ برّر إجابتك.

44) حديقة الملاهي: يقف سامر وأصدقاؤه عند المسرح في حديقة الملاهي. ساروا 50 قدمًا شرقًا إلى كوخ الوجبات الخفيفة. ثم سار سامر وأحد أصدقائه 25 قدمًا شمالًا إلى الصحن الدوار لينتظرا دورهما، وأكمل الباقون سيرهم شرقًا 50 قدمًا أخرى إلى جناح الأحياء المائية.

اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن المسرح والصحن الدوار وجناح الأحياء المائيّة تُشكل مثلثًا متطابق الضلعين. (الدرس 7-3)

اذكر الزوايا والأضلاع المتناظرة والمتطابقة لكل زوج من المثلثات المتطابقة التالية: (الدرس 3-3)

45) $\triangle TUV \cong \triangle XYZ$

46) $\triangle CDG \cong \triangle RSW$

47) أوجد قيمة x بحيث يكون المستقيم المار بالنقطتين $(x, 2)$ و $(-4, 5)$ عموديًّا على المستقيم المار بالنقطتين $(4, 8)$ و $(2, -1)$.
(الدرس 3-2)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضرورية: حدّد ما إذا كانت كل معادلة أو متباينة فيما يلي صحيحة أم خطأ إذا كانت $a = 2, b = 5, c = 6$.

48) $2ab = 20$

49) $c(b - a) = 15$

50) $a + c > a + b$

4-3 البرهان غير المباشر
Indirect Proof

الأفكار الرئيسة:
- أستعمل البرهان غير المباشر في الجبر.
- أستعمل البرهان غير المباشر في الهندسة.

المفردات:
التبرير غير المباشر
indirect reasoning

البرهان غير المباشر
indirect proof

البرهان بالتناقض
proof by contradiction

استعد

يصف شارلوك هولمز أسلوبه في كشف الغموض كالآتي: «تبدأ العملية بافتراض، وعندما تستبعد كل ما هو غير معقول، فما الذي سيبقى؟ ... إنّها الحقيقة». هذه الطريقة التي وصفها شارلوك هولمز مثال على البرهان غير المباشر.

البرهان غير المباشر في الجبر: البراهين التي كتبتها حتى الآن استعملت فيها التبرير حيث كنت تبدأ بمعطيات صحيحة وتثبت أن النتيجة صحيحة. وعندما تستعمل **التبرير غير المباشر** فإنك تفترض أن النتيجة خطأ، ثم تبيّن أنّ هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعطيات أو مع أيّ حقيقة سابقة كتعريف، أو مسلمة، أو نظرية، أو نتيجة. وحيث إن جميع خطوات البرهان تكون صحيحة منطقيًّا فإنّ هذا يكون إثباتًا لخطأ الفرض، وعلى ذلك يجب أن تكون النتيجة الأصلية صحيحة. يسمّى هذا النوع من البرهان **برهانًا غير مباشر** أو **برهانًا بالتناقض**. والخطوات التالية تلخص عمليّة البرهان غير المباشر.

إرشادات
قيم الصواب للعبارة
تذكر أن العبارة إما أن تكون صحيحة أو خطأ. ولمراجعة قيم الصواب للعبارات انظر الدرس 2-1.

تعليمات: كتابة برهان غير مباشر

1) افرض أنّ النتيجة خطأ.

2) بيّن أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعطيات، أو مع حقيقة سابقة، كتعريف، أو مسلمة، أو نظرية، أو نتيجة.

3) أشر إلى أنه بسبب افتراض خطأ النتيجة حصلنا على عبارة غير صحيحة، ولذلك يجب أن تكون النتيجة الأصلية صحيحة.

مثال 1 صياغة الافتراضات

اكتب الفرض الذي ستبدأ منه برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يلي:

a) $AB \neq MN$

$AB = MN$

b) $\triangle PQR$ مثلث متطابق الضلعين.

$\triangle PQR$ مثلث غير متطابق الضلعين.

c) إذا كان العدد 9 عاملاً من عوامل العدد n، فإنّ العدد 3 عامل من عوامل العدد n.

نتيجة هذه العبارة الشرطية هي «العدد 3 عامل للعدد n». ونفي هذه النتيجة هي «العدد 3 ليس عاملاً من عوامل العدد n».

تحقق من فهمك

1A) $x < 4$

1B) $\angle 3$ زاوية منفرجة.

يمكن استعمال البرهان غير المباشر لإثبات عبارات جبرية.

مثال برهان جبري

2 **المعطيات:** $2x - 3 > 7$

المطلوب: $x > 5$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افرض أنّ $x \leq 5$. أي افرض أن $x < 5$ أو $x = 5$

الخطوة 2: اعمل جدولاً لعدة قيم ممكنة لـ x بحيث $x < 5$ أو $x = 5$. هذا يقود إلى تناقض لأنه عندما تكون $x < 5$ أو $x = 5$ فإن $2x - 3 \leq 7$

الخطوة 3: في كلتا الحالتين، الفرض يقود إلى تناقض مع حقيقة معطاة، وعليه فإن الفرض $x \leq 5$ خاطئ مما يؤدي إلى أن $x > 5$ صحيح.

تحقق من فهمك

2) **إذا كان** $7x < 56$ فإن $x < 8$.

التبرير غير المباشر يستخدم في الحياة اليومية.

مثال من واقع الحياة

3 **تسوق:** اشترى فهد قميصين بأكثر من **60** ريالاً. وبعد عدّة أسابيع سأله صديقه حامد عن ثمن كل قميص، ولكن فهدًا لم يتذكر ثمن كل قميص. استعمل التبرير غير المباشر لبيان أن أحد القميصين على الأقل ثمنه أكثر من **30** ريالاً.

المعطيات: ثمن القميصين معًا أكثر من 60 ريالاً.

المطلوب إثبات أن: قميصًا واحدًا على الأقل ثمنه أكثر من 30 ريالاً.

أي أنّه، إذا كان $x + y > 60$، فإنّ $x > 30$ أو $y > 30$.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افرض أن ثمن كلّ من القميصين لا يزيد على 30 ريالاً، أي أنّ $x \leq 30$ و $y \leq 30$.

الخطوة 2: إذا كانت $x \leq 30$ و $y \leq 30$، فإنّ $x + y \leq 60$. وهذا تناقض لأن ثمن القميصين معًا أكثر من 60 ريالاً.

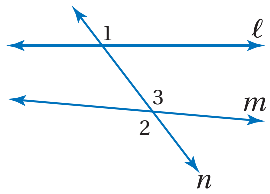
الخطوة 3: بما أن الفرض أدّى إلى تناقض مع حقيقة معلومة. فإن الفرض بأن $x \leq 30$ و $y \leq 30$ فرض خطأ. لذلك، يجب أن يكون ثمن أحد القميصين على الأقل أكثر من 30 ريالاً.

تحقق من فهمك

3) سافر سلطان لمسافة تزيد على 360 كيلومترًا، توقف خلالها مرّة واحدة للاستراحة. استعمل التبرير غير المباشر لإثبات أنه قطع أكثر من 180 كيلومترًا في جزء واحد من رحلته.

البرهان غير المباشر في الهندسة: يمكن أن يستعمل التبرير غير المباشر لإثبات صحة عبارات هندسية.

مثـــال برهان هندسي



4 **المعطيات:** $\ell \nparallel m$

المطلوب: إثبات أنّ $\angle 3 \ncong \angle 1$

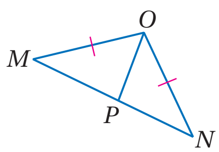
برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افرض أنّ $\angle 3 \cong \angle 1$.

الخطوة 2: $\angle 1$ و $\angle 3$ زاويتان متناظرتان. وإذا قطع مستقيمٌ مستقيمين وكانت الزاويتان المتناظرتان متطابقتين فإنّ المستقيمين متوازيان. إذن $m \parallel \ell$. وهذا يناقض العبارة المعطاة.

الخطوة 3: بما أن الفرض أدّى إلى تناقض، فإنّه فرض خطأ. لذلك، فإن $\angle 3 \ncong \angle 1$ هي العبارة الصحيحة.

تحقق من فهمك

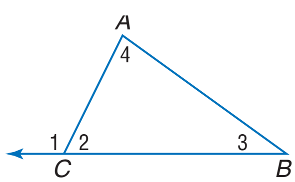


4) **المعطيات:** $\overline{MO} \cong \overline{ON}$ ، $\overline{MP} \ncong \overline{NP}$

المطلوب: إثبات أنّ $\angle MOP \ncong \angle NOP$

ويمكن أن يستعمل البرهان غير المباشر لإثبات النظريات أيضًا.

برهان نظريّة متباينة الزاوية الخارجيّة



المعطيات: $\angle 1$ زاوية خارجية للمثلث $\triangle ABC$

المطلوب: $m\angle 1 > m\angle 3$ و $m\angle 1 > m\angle 4$

الخطوة 1: افرض أنّ $m\angle 1 \not> m\angle 3$ أو $m\angle 1 \not> m\angle 4$. أي، $m\angle 1 \leq m\angle 3$ أو $m\angle 1 \leq m\angle 4$.

الخطوة 2: تحتاج فقط لبيان أن الفرض $m\angle 1 \leq m\angle 3$ يؤدي إلى تناقض، وبالمثل سيؤدي الفرض $m\angle 1 \leq m\angle 4$ إلى تناقض.

الفرض $m\angle 1 \leq m\angle 3$ يعني أنّ $m\angle 1 = m\angle 3$ أو $m\angle 1 < m\angle 3$.

الحالة 1:

$m\angle 1 = m\angle 3$	من الفرض
$m\angle 1 = m\angle 3 + m\angle 4$	نظرية الزاوية الخارجيّة
$m\angle 3 = m\angle 3 + m\angle 4$	بالتعويض
$m\angle 4 = 0$	بطرح $m\angle 3$ من كلا الطرفين

وهذا يناقض حقيقة أن قياس الزاوية أكبر من 0، لذلك $m\angle 1 \neq m\angle 3$.

الحالة 2: $m\angle 1 < m\angle 3$

لكن $m\angle 1 = m\angle 3 + m\angle 4$ نظرية الزاوية الخارجيّة

ولأن قياسات الزوايا موجبة، فإنّ تعريف المتباينة يؤدي إلى أن $m\angle 1 > m\angle 3$ و $m\angle 1 > m\angle 4$. وهذا يناقض الفرض بأن $m\angle 1 < m\angle 3$.

الخطوة 3: مما سبق، نجد أنّ الفرض في الحالتين يؤدي إلى تناقض مع نظرية أو تعريف. لذلك، فالشيء الصحيح هو $m\angle 1 > m\angle 3$ و $m\angle 1 > m\angle 4$.

إرشادات

المتباينات

لاحظ أن عكس المتباينة $m\angle 1 > m\angle 3$ هو $m\angle 1 \leq m\angle 3$، وليس $m\angle 1 < m\angle 3$.

تأكد

مثال 1 (ص 212)

اكتب الفرض الذي ستبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يلي:

1) إذا كان $5x < 25$، فإنّ $x < 5$.

2) المستقيمان اللذان يقطعهما مستقيم ثالث بحيث تكون الزوايا الداخلية المتبادلة متطابقة يكونان متوازيين.

مثال 2 (ص 213)

برهان: اكتب برهانًا غير مباشر لكل من:

3) **المعطيات:** $a > 0$
المطلوب إثبات أنّ: $\frac{1}{a} > 0$

4) **المعطيات:** n عدد فردي.
المطلوب إثبات أن: n^2 عدد فردي.

مثال 3 (ص 213)

5) **ركوب الدراجة:** تمتد دورة سباق الدراجات في فرنسا عدّة أسابيع وعلى مراحل مختلفة عبر فرنسا. وخلال المرحلتين الأولى والثانية من دورة عام 2005، قطع المتسابقون أكثر من 200 كيلومتر. أثبت أن المسافة التي قطعها المتسابقون في مرحلة واحدة تزيد على 100 كيلومتر على الأقل.

مثال 4 (ص 214)

6) **برهان:** اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أن وتر المثلث القائم الزاوية هو الضلع الأطول.

تمارين ومسائل

إرشادات للتمارين

للأسئلة	انظر الأمثلة
8–12	1
13، 14	2
15–20	3، 4

اكتب الفرض الذي ستبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يلي:

7) $\overline{PQ} \cong \overline{ST}$.

8) إذا كان $3x > 12$، فإنّ $x > 4$.

9) إذا كان العدد النسبي هو أي عدد يمكن كتابته على الصورة $\frac{a}{b}$، حيث a و b عددان صحيحان $b \neq 0$، فإنّ العدد 6 عدد نسبي.

10) القطعة المتوسطة في المثلث المتطابق الضلعين تكون ارتفاعًا للمثلث أيضًا.

11) النقاط P, Q, R على استقامة واحدة.

12) منصف زاوية الرأس للمثلث المتطابق الضلعين يكون ارتفاعًا للمثلث أيضًا.

برهان: اكتب برهانًا غير مباشر لحل الأسئلة 13 –18:

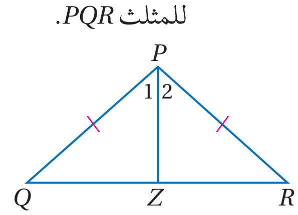
13) **المعطيات:** $\frac{1}{a} < 0$
المطلوب: إثبات أن a عدد سالب.

14) **المعطيات:** n^2 عدد زوجي.
المطلوب: إثبات أن n^2 قابل للقسمة على 4.

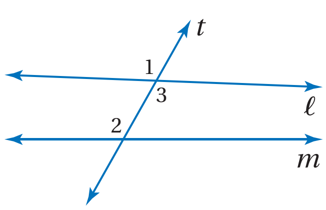
15) إذا كان $a > 0, b > 0, a > b$، فإنّ $\frac{a}{b} > 1$.

16) إذا كان ضلعان في مثلث غير متطابقين، فإن الزاويتين المقابلتين لهما غير متطابقتين.

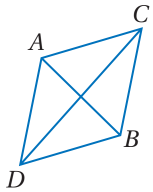
17) **المعطيات:** $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$
$\angle 1 \ncong \angle 2$
المطلوب: إثبات أن $\overline{PZ}$ ليست قطعة متوسطة للمثلث PQR.



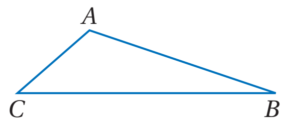
18) **المعطيات:** $m\angle 2 \neq m\angle 1$.
المطلوب: إثبات أن $\ell \nparallel m$.



برهان: اكتب برهانًا غير مباشر لحل السؤالين 19 و 20 :



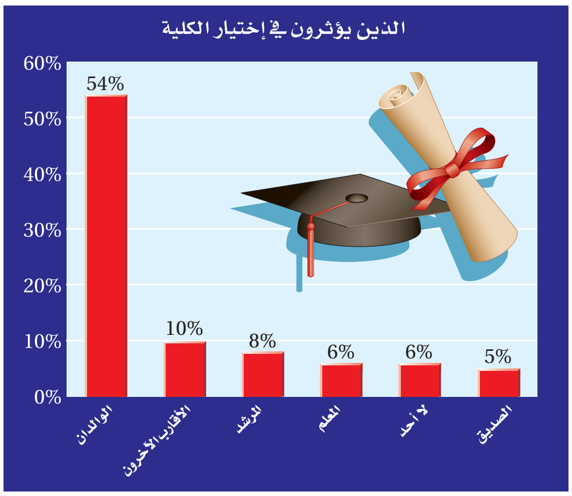
19) **المعطيات:** $\triangle ABC$ و $\triangle ABD$ متطابقا الأضلاع.
$\triangle ACD$ ليس متطابق الأضلاع.
المطلوب: إثبات أن $\triangle BCD$ ليس متطابق الأضلاع.



20) نظريّة 10–4
المعطيات: $m\angle A > m\angle ABC$
المطلوب: إثبات أن $BC > AC$

21) **كرة السلّة:** سجّل سلمان 85 نقطة لفريقه في آخر ست مباريات. أثبت أنّ معدّل النقاط التي سجّلها سلمان في كل مباراة أقل من 15.

اختيار الكلّية: استعمل التمثيل بالأعمدة لحل السؤالين 22 وَ 23:



22) أثبت العبارة التالية.
غالبيّة الطلاب المرشحين للتخرج في إحدى الكليات أفادوا أنّ والِدِيهِم كانوا الأكثر تأثيرًا في اختيار الكلية.

23) أيهما أكثر: الطلاب الذين تأثروا بالمرشد أو الذين تأثروا بمعلميهم وأصدقائهم؟ اشرح إجابتك.

24) **قانون:** خلال مرافعات مفتوحة في إحدى المحاكمات قال المحامي: «إن موكلي بريء. إذ إن تقرير الشرطة يشير إلى أن الجريمة ارتكبت في السادس من صَفَر عند الساعة 10:15 تقريبًا وفي مدينة A. ويمكنني أن أثبت أن موكلي كان في هذا الوقت يقضي إجازة مع عائلته في مدينة B. وعليه فإنّ الحكم ببراءته هو الحكم الممكن فقط». وضح ما إذا كان هذا مثالاً على التبرير غير المباشر.

25) **ألعاب:** استعمل التبرير غير المباشر وخريطة لحل هذه المسألة: تتضمن لُعبَة كمبيوتر فارسًا يبحث عن كنز. في نهاية الرحلة اقترب الفارس من بابين. عُلّق على الباب الواقع عن اليمين لافتة تقول: «خلف هذا الباب يوجد كنز، وخلف الباب الآخر يوجد تنين»، وعلى الباب الواقع عن اليسار لافتة تقول: «يؤدي أحد البابين إلى كنز والآخر إلى تنين». أخبر الحارس الفارس بأن إحدى اللافتتين صحيحة والأخرى خاطئة. أي باب سيختار الفارس؟ اشرح تبريرك.

مسائل مهارات التفكير العليا

26) **تبرير:** قارن بين البرهان غير المباشر والبرهان المباشر.

27) **مسألة مفتوحة:** اكتب تخمينًا، ثم اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات تخمينك.

28) **تحدٍّ:** تذكر أن العدد النسبي هو عدد يمكن كتابته على الصورة $\frac{a}{b}$، حيث a و b عددان صحيحان لا يوجد عوامل مشتركة بينهما و $b \neq 0$. أو يمكن كتابته على صورة كسر عشري منتهٍ أو دوري. استعمل التبرير غير المباشر لإثبات أن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي.

29) **اكتب:** ارجع إلى المعلومات في الصفحة 212. اشرح كيف استعمل شارلوك هولمز البرهان غير المباشر، واذكر مثالاً على البرهان غير المباشر يُستعمل كل يوم.

تدريب على اختبار معياري

30) **نظرية:** الزوايا المكملة للزاوية نفسها تكون متطابقة.

برهن حسن هذه النظرية بالتناقض. وبدأ بفرض أن $\angle A$ و$\angle B$ مكملتان لـ$\angle C$ و $\angle A \not\cong \angle B$. أي من المبررات التالية سيستعملها حسن ليصل إلى تناقض؟

A إذا كانت زاويتان متجاورتين على مستقيم فإنهما متكاملتان.

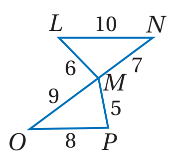
B إذا تطابقت زاويتان متكاملتان فإن قياس كل زاوية منهما $90°$.

C مجموع قياسات زوايا المثلث $180°$.

D إذا كانت زاويتان متكاملتين فإن مجموع قياسيهما $180°$.

مراجعة تراكمية

31) استعمل الشكل المجاور: ما الزاوية في $\triangle MOP$ التي لها أكبر قياس؟ (الدرس 2-4)

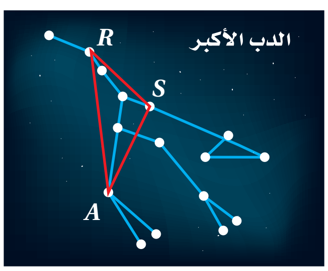


برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكل من السؤالين التاليين: (الدرس 1-4)

32) إذا كان منصف زاوية في مثلث ارتفاعًا للمثلث أيضًا فإنّ المثلث متطابق الضلعين.

33) منصفات الزوايا المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة.

34) **فلك:** دُرست مجموعة من نجوم الدب الأكبر من قبل علماء فلكيين لتطوير أنظمة لضبط الوقت. إذا كانت مواقع ثلاثة نجوم منها كما هو موضح بالرسم، وكان $m\angle R = 41$ و $m\angle S = 109$، فأوجد $m\angle A$. (الدرس 2-3)



استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضروريّة: حدّد ما إذا كانت كل متباينة صحيحة أم خطأ:

35) $19 - 10 < 11$

36) $31 - 17 < 12$

37) $76 + 38 > 109$

الفصل 4

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1-4 إلى 3-4

حدّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة دائمًا، أو أحيانًا، أو ليست صحيحة أبدًا. (الدرس 1-4)

(1 تقاطع القطع المتوسطة للمثلث عند أحد رؤوس المثلث.

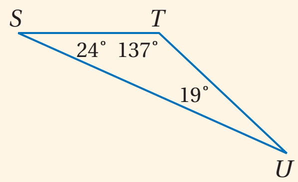
(2 تقاطع منصفات زوايا المثلث في نقطة داخل المثلث.

(3 تقاطع ارتفاعات المثلث عند نقطة خارج المثلث.

(4 تقاطع الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث عند نقطة على المثلث.

(5 صف مثلثًا تتقاطع منصفات زواياه عند نقطة خارج المثلث. وإذا لم يوجد مثل هذا المثلث، فاكتب «لا يوجد». (الدرس 1-4)

(6 **اختيار من متعدد:** أي القوائم التالية تمثل أضلاع المثلث STU مرتبة من الأكبر إلى الأصغر؟ (البدء من اليسار)



A) $\overline{TU}, \overline{ST}, \overline{SU}$ **C)** $\overline{SU}, \overline{ST}, \overline{TU}$

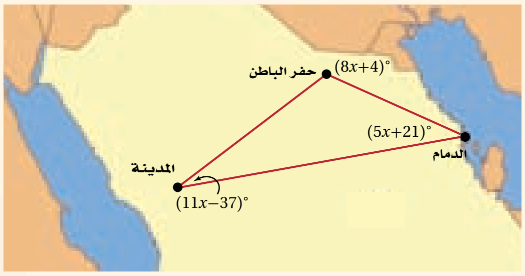
B) $\overline{SU}, \overline{TU}, \overline{ST}$ **D)** $\overline{ST}, \overline{TU}, \overline{SU}$

في $\triangle QRS$: $m\angle Q = x + 15$, $m\angle R = 2x + 10$ و $m\angle S = 4x + 15$ استفد من هذه المعلومات في حل السؤالين 7 وَ 8: (الدرس 2-4)

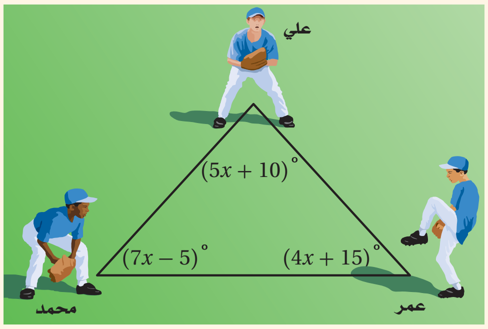
(7 حدّد قياس كل زاوية.

(8 رتّب أضلاع المثلث من الأقصر إلى الأطول.

(9 **رحلة:** أقلعت طائرة من حفر الباطن متّجهة إلى المدينة المنورة ومنها إلى الدمام، ثم العودة إلى حفر الباطن، كما هو موضّح في الخريطة أدناه. اكتب أطوال أضلاع الرحلة من الأكبر إلى الأصغر. (الدرس 2-4)



(10 يقف علي وعمر ومحمد على شكل رؤوس مثلث، كما في الشكل أدناه. أوجد قياسات الزوايا التي يقفون عندها؟ (الدرس 2-4)



اكتب الفرض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يلي: (الدرس 3-4)

(11 العدد 117 يقبل القسمة على 13.

(12 في المثلث القائم الزاوية يكون $a^2 + b^2 = c^2$.

(13 $\angle JKL \cong \angle WXY$

(14 إذا كان n عددًا فرديًّا، فإن $2n$ عدد زوجي.

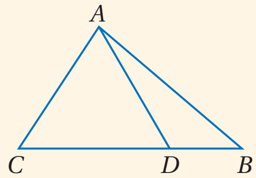
اكتب برهانًا غير مباشر لكل من السؤالين الآتيين: (الدرس 3-4)

(15 **المعطيات:** $\triangle ABC$

المطلوب إثبات أنه: لا يمكن أن يكون في $\triangle ABC$ أكثر من زاوية منفرجة واحدة.

(16 **المعطيات:** $m\angle ADC \neq m\angle ADB$

المطلوب إثبات أن: $\overline{AD}$ ليس ارتفاعًا للمثلث ABC.



4-4 متباينة المثلث
The Triangle Inequality

الأفكار الرئيسة:

- أطبق نظرية متباينة المثلث.
- أحدد أقصر مسافة بين نقطة ومستقيم.

استعد

يُسافر أحمد بين الرياض وجدة والمدينة المنورة كجزء من عمله. يُقيم أحمد الآن في المدينة المنورة ويُريد أن يسافر بالطائرة إلى الرياض وبأسرع وقت ممكن.

فهل يسافر من المدينة إلى الرياض أو من المدينة إلى جدة ثم إلى الرياض؟

متباينة المثلث: إذا فكّرت بأن أحمد سيسافر بالطائرة من المدينة إلى الرياض، فأنت تُبرّر بأنّ الطريق المستقيمة بين موقعين هي أقصر الطرق. هذا مثال على نظرية متباينة المثلث.

نظرية 4-11 نظرية متباينة المثلث

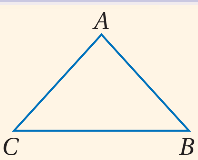
مجموع طولي أيّ ضلعين في المثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

مثال:

$AB + BC > AC$

$BC + AC > AB$

$AC + AB > BC$



سوف تبرهن نظرية 11-4 في السؤال 15.

يمكن أن تستعمل نظرية متباينة المثلث في تحديد ما إذا كانت ثلاث قطع مستقيمة يمكن أن تشكل مثلثًا.

مثال تعيين أضلاع مثلث

1 **حدّد ما إذا كانت الأعداد 5 , 4 , 2 يمكن أن تمثّل أطوال أضلاع مثلث.**

اختبر كل متباينة:

$4 + 5 \overset{?}{>} 2$ $9 > 2$ ✓

$2 + 5 \overset{?}{>} 4$ $7 > 4$ ✓

$2 + 4 \overset{?}{>} 5$ $6 > 5$ ✓

جميع المتباينات صحيحة. لذلك فالأعداد 5 , 4 , 2 يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث.

تحقق من فهمك

(1A 6, 8, 14   **(1B** 8, 15, 17

إرشادات

المتباينة

إذا كان مجموع العدد الأصغر والعدد الأوسط أكبر من العدد الأكبر، فإنّ كل تركيبة للمتباينة تكون صحيحة.

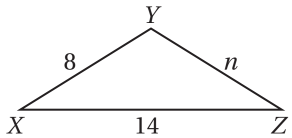
عندما تعرف طولي ضلعين في مثلث، يمكنك تحديد مجال الأطوال المحتملة للضلع الثالث.

مثال على اختبار معياري **تحديد الطول المحتمل لضلع مثلث**

2 أيّ من الأعداد التالية لا يمكن أن يكون قيمةً لـ n؟

A 6 **C** 14

B 10 **D** 18



اقرأ فقرة الاختبار

المطلوب تحديد القيمة غير الممكنة لـ n.

حل فقرة الاختبار

حل كل متباينة لتحديد مجال القيم الممكنة لـ YZ.

$XY + XZ > YZ$	$YZ + XZ > XY$	$XY + YZ > XZ$
$8 + 14 > n$	$n + 14 > 8$	$8 + n > 14$
$22 > n$	$n > -6$	$n > 6$

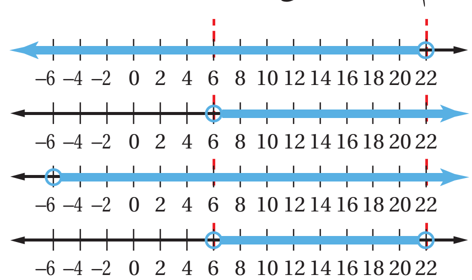
ارسم المتباينات على خط الأعداد نفسه.

ارسم $n < 22$.

ارسم $n > 6$.

ارسم $n > -6$.

أوجد التقاطع.



مجال القيم التي تتوافق مع المتباينات الثلاث هي $6 < n < 22$.

اختبر خيارات الإجابة. ستجد أن القيمة الوحيدة التي لا تحقق المتباينة المركبة هي 6 لأن $6 = 6$. لذلك، فإجابة السؤال هي A.

تحقق من فهمك

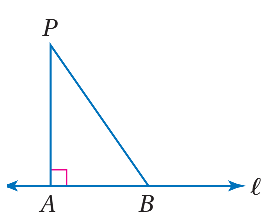
2) إذا كان طولا ضلعين لمثلث 32 ، 57. ما أقل طول ممكن للضلع الثالث إذا كان طوله عددًا صحيحًا؟

F 25 **G** 26 **H** 88 **J** 89

إرشادات الاختبار

بدائل الإجابة: إذا كان الوقت المتاح قصيرًا، يمكن اختبار كل بديل لتجد الإجابة الصحيحة.

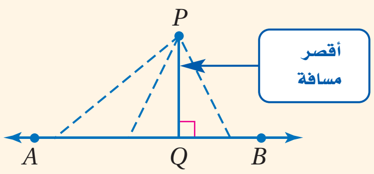
المسافة بين نقطة ومستقيم: تذكر أن المسافة بين النقطة P والمستقيم ℓ هي طول القطعة المستقيمة العمودية من النقطة إلى المستقيم. وقد قُبِلَ دون برهان أن PA هي أقصر قطعة مستقيمة من P إلى ℓ. ويمكن الآن استعمال النظريات التي تتناول العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه لإثبات أن طول القطعة العمودية هو أقصر مسافة بين نقطة ومستقيم.



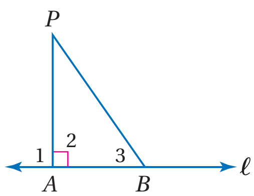
نظرية 4-12

القطعة المستقيمة العموديّة من نقطة إلى مستقيم هي أقصر قطعة من تلك النقطة إلى ذلك المستقيم.

مثال: PQ هي أقصر قطعة مستقيمة من النقطة P إلى المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$.



مثـــال 3 برهان نظرية 4-12



المعطيات: $\overline{PA} \perp \ell$

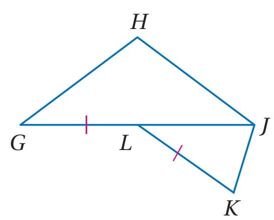
$\overline{PB}$ قطعة مستقيمة ليست عموديّة من P إلى ℓ.

المطلوب: إثبات أنّ $PB > PA$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{PA} \perp \ell$	1) معطى
2) $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان قائمتان	2) المستقيمان المتعامدان يشكلان زوايا قائمة
3) $\angle 1 \cong \angle 2$	3) جميع الزوايا القائمة متطابقة
4) $m\angle 1 = m\angle 2$	4) تعريف الزوايا المتطابقة
5) $m\angle 1 > m\angle 3$	5) نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة
6) $m\angle 2 > m\angle 3$	6) خاصّية التعويض
7) $PB > PA$	7) الضلع المقابل للزاوية الكبرى في أي مثلث أطول من الضلع المقابل للزاوية الصغرى.

تحقق من فهمك



3) اكتب برهانًا ذا عمودين:

المعطيات: $GL = LK$

المطلوب إثبات أن: $JH + GH > JK$

إرشـــادات

أقصر مسافة إلى مستقيم

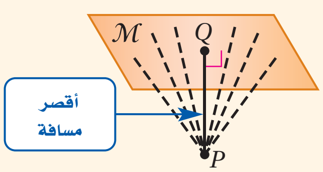
إذا كان المستقيم أفقيًا فإنّ أقصر مسافة من نقطة إلى ذلك المستقيم ستكون عبر مستقيم رأسي. وبالمثل أقصر مسافة من نقطة إلى مستقيم رأسي تكون عبر مستقيم أفقي.

النتيجة 1–4 تأتي مباشرة من نظرية 12–4.

نتيجة 4-1

القطعة المستقيمة العمودية من نقطة إلى مستوى هي أقصر قطعة من تلك النقطة إلى ذلك المستوى.

مثال: $\overline{QP}$ هي أقصر قطعة مستقيمة من P إلى المستوى $\mathcal{M}$.



سوف تبرهن نتيجة 1–4 في السؤال 5.

تأكد

مثال 1
(ص 219)

حدّد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث. اكتب نعم أو لًا، ووضح إجابتك.

(1 $5, 4, 3$ (2 $5, 15, 10$ (3 $30.1, 0.8, 31$

مثال 2
(ص 220)

(4 **اختيار من متعدّد:** مثلث متطابق الضلعين طول قاعدته 10 وحدات.
إذا كان طولا الضلعين المتطابقين عددين كليين، فما أقل طول ممكن لكل منهما؟

A 5 **B** 6 **C** 17 **D** 21

مثال 3
(ص 221)

(5 **برهان:** اكتب برهانًا للنتيجة 1–4.
المعطيات: $\overline{PQ} \perp$ المستوى $\mathcal{M}$
المطلوب: إثبات أنّ $\overline{PQ}$ هي أقصر قطعة مستقيمة من P إلى المستوى $\mathcal{M}$.

تمارين ومسائل

إرشادات للتمارين	
للأسئلة	انظر الأمثلة
6–9	1
10–13	2
14.15	3

حدّد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث. اكتب نعم أو لا، ووضح إجابتك.

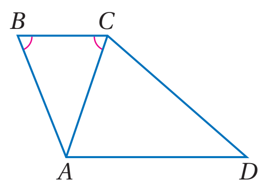
(6 $1, 2, 3$ (7 $2, 6, 11$

(8 $13, 16, 29$ (9 $9, 21, 20$

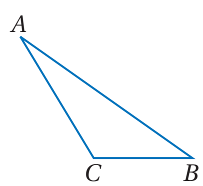
أوجد مجال قياس الضلع الثالث لمثلث عُلِمَ قياسا ضلعين من أضلاعه في كل مما يلي:

(10 5 و 11 (11 7 و 9 (12 10 و 15 (13 32 و 61

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكل من السؤالين التاليين:



(14 **المعطيات:** $\angle B \cong \angle ACB$
المطلوب إثبات أن: $AD + AB > CD$



(15 **المعطيات:** $\triangle ABC$
المطلوب إثبات أن: $AC + BC > AB$ (نظرية متباينة المثلث)
(**إرشاد:** ارسم القطعة المستقيمة المساعدة $\overline{CD}$، بحيث تكون C بين B و D و $\overline{CD} \cong \overline{AC}$)

(16 **تاريخ:** اعتاد المصريون القدماء أن يعملوا مثلثات باستعمال حبل يُعقَد على مسافات متساوية.
على أن يكون كل رأس من رؤوس المثلث هو إحدى هذه العُقَد.
ما عدد المثلثات المختلفة التي يمكن تشكيلها باستعمال الحبل أدناه بحيث تنطبق العقدة الأولى على الأخيرة.

جبر: حدّد ما إذا كانت الإحداثيات المعطاة في كل من الأسئلة 20 - 17 تمثل رؤوس مثلث. وضح إجابتك.

17) $A(5, 8), B(2, -4), C(-3, -1)$

18) $L(-24, -19), M(-22, 20), N(-5, -7)$

19) $X(0, -8), Y(16, -12), Z(28, -15)$

20) $R(1, -4), S(-3, -20), T(5, 12)$

تنظيم القصاصات: لحل السؤالين 21 وَ 22 استعمل المعلومات التالية:
لدى فاطمة شرائح ورقية للزخرفة، وترغب في استعمالها كأطر مثلثية لتضعها في دفتر خاص.
إذا كانت أطوال الشرائح الورقية 3cm ، 4cm ، 5cm ، 6cm ، 12cm.

21) فما عدد المثلثات المختلفة التي يمكن أن تشكلها فاطمة؟

22) وما عدد المثلثات المختلفة التي يمكن أن تشكلها فاطمة بحيث يقبل محيطها القسمة على 3؟

احتمالات: لحل السؤالين 23 وَ 24 استعمل المعلومات التالية:
طول أحد أضلاع مثلث 2cm . افرض أنّ m يمثل طول الضلع الثاني، و n يمثل طول الضلع الثالث. وافرض أنّ m و n عددان كليّان وأنّ $14 < m < 17$, $13 < n < 17$

23) اكتب أطوال أضلاع المثلثات الممكنة.

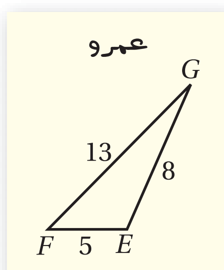
24) ما احتمال اختيار مثلث متطابق الضلعين عشوائيًّا من المثلثات التي تحقق الشروط؟

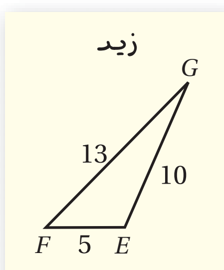
مسائل مهارات التفكير العليا

25) **تبرير:** بيّن لماذا لا يمكن إيجاد المسافة بين مستقيمين متوازيين وغير أفقيين في المستوى الإحداثي باستعمال المسافة بين مقطعيهما من محور الصادات.

26) **مسألة مفتوحة:** أوجد ثلاثة أعداد يمكن أن تمثل أطوالاً لأضلاع مثلث. وأوجد ثلاثة أعداد لا يمكن أن تمثل أطوالاً لأضلاع مثلث. برّر إجابتك بالرسم.

27) **أوجد الخطأ:** رسم كل من زيد وعمرو المثلث $\triangle EFG$ بحيث يكون $FG = 13$ و $EF = 5$.
اختار كل منهما طولاً للضلع $\overline{GE}$. من منهما كان اختياره صحيحًا؟ برّر إجابتك.



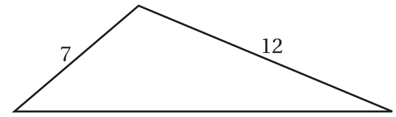


28) **تحدٍّ:** اكتب نظريّة للمقارنة بين طول كل ضلع من أضلاع مثلث والفرق بين طولي الضلعين الآخرين، ثم برهنها.

29) **اكتب:** ارجع إلى المعلومات في صفحة 219. اشرح لماذا لا يمكن تطبيق نظرية متباينة المثلث دائمًا عند السفر.

تدريب على اختبار معياري

30) إذا كان قياسَا ضلعين في مثلث 7 و 12 ، فأيّ مما يلي لا يمكن أن يمثل محيط المثلث؟



A 29   **C** 37

B 34   **D** 38

31) مراجعة : أيّ معادلة تُمثّل المستقيم الذي يمرّ بالنقطة $(5, 3)$ ويوازي المستقيم الذي معادلته $-2x + y = -4$؟

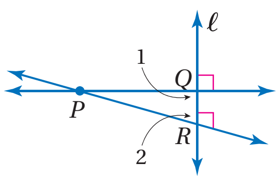
F $y = \frac{1}{2}x + 5.5$

G $y = 2x - 7$

H $y = -2x + 13$

J $y = \frac{2}{3}x + 15$

مراجعة تراكمية



32) برهان : اكتب برهانًا غير مباشر. (الدرس 3-4)

المعطيات: النقطة P لا تقع على المستقيم ℓ.

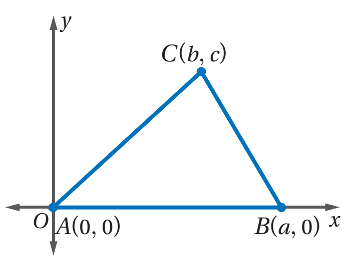
المطلوب: إثبات أن $\overleftrightarrow{PQ}$ هو المستقيم الوحيد الذي يمر بالنقطة P ويكون عموديًّا على المستقيم ℓ.

33) سفر : قطع سعيد مسافة 175 ميلاً بسيارته في 3 ساعات.
أثبت أنّ معدّل سرعته كان أقلّ من 60 ميلاً في الساعة. (الدرس 2-4)

34) جبر : اكتب أضلاع $\triangle PQR$ مرتّبة من الأطول إلى الأقصر إذا كانت قياسات زوايا المثلث كما يلي: (الدرس 2-4)

$m\angle P = 7x + 8$، $m\angle Q = 8x - 10$، $m\angle R = 7x + 6$

لحل السؤالين 35 وَ 36 استعمل الشكل المجاور.



35) أوجد إحداثيي D إذا كان الإحداثي السيني للنقطة D يساوي معدل الإحداثيات السينية لرؤوس $\triangle ABC$، والإحداثي الصادي للنقطة D يساوي معدّل الإحداثيات الصادية لرؤوس $\triangle ABC$.

36) أثبت أنّ النقطة D هي نقطة التقاء القطع المتوسطة للمثلث $\triangle ABC$.

حدّد ما إذا كان $\triangle PQR \cong \triangle JKL$ إذا علمت أن إحداثيات رؤوسهما كما يلي: (الدرس 4-3)

37) $P(4 , 8)$, $Q(4 , 3)$, $R(6 , 3)$، $J(0 , 5)$, $K(0 , 0)$, $L(-2 , 0)$.

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة وضروريّة : حل كلًّا من المتباينات التالية:

38) $3x + 54 < 90$ **39)** $8x - 14 < 3x + 19$ **40)** $4x + 7 < 180$

4-5 متباينات تتضمن مثلثين
Inequalities Involving Two Triangles

الأفكار الرئيسة:

- أطبق المتباينة SAS
- أطبق المتباينة SSS.

استعد

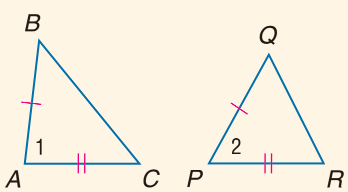
كثير من الأشياء لها ذراع ثابتة مربوطة بمفصلة إلى ذراع أخرى أو قاعدة. فمنصّة الركوب هذه الموجودة في بعض مدن الألعاب ترفع راكبيها إلى أعلى في حركة بندوليّة.

وعندما يكون البندول عاليًا تبدأ الزاوية بين ذراع البندول وأعمدة تثبيت القاعدة تتناقص حتى تمرّ الذراع فوق القاعدة، عندها تبدأ الزاوية في التزايد. وفي أثناء هذه الحركة تتغير المسافة بين الركاب ومحطّة الوقوف مع تغير الزاوية.

المتباينة SAS: توضّح النظرية التالية علاقة الأذرع بالزاوية.

نظرية 4-13

إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين في مثلث آخر، وكان قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فإن الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني.



مثال: المعطيات: $AB \cong PQ$, $AC \cong PR$, .
إذا كان $m\angle 1 > m\angle 2$، فإنّ $BC > QR$.

سوف تبرهن النظرية في السؤال 17

مثـــال استعمال المتباينة SAS في البرهان

1 اكتب برهانًا ذا عمودين.

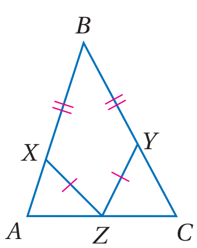
المعطيات: $\overline{YZ} \cong \overline{XZ}$

Z نقطة منتصف $\overline{AC}$.

$m\angle CZY > m\angle AZX$

$\overline{BY} \cong \overline{BX}$

المطلوب إثبات أن: $BC > AB$



البرهان:

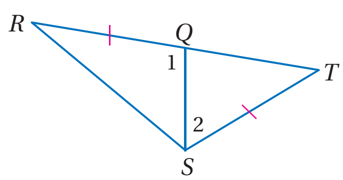
العبارات	المبررات
(1 $\overline{YZ} \cong \overline{XZ}$ Z نقطة منتصف $\overline{AC}$ $m\angle CZY > m\angle AZX$ $\overline{BY} \cong \overline{BX}$	(1 معطيات
(2 $CZ = AZ$	(2 تعريف نقطة المنتصف
(3 $CY > AX$	(3 المتباينة SAS
(4 $BY = BX$	(4 تعريف القطع المستقيمة المتطابقة
(5 $CY + BY > AX + BX$	(5 خاصيّة الإضافة
(6 $BC = CY + BY$ $AB = AX + BX$	(6 مسلمة جمع القطع المستقيمة
(7 $BC > AB$	(7 خاصّية التعويض

تحقق من فهمك

(1 اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$

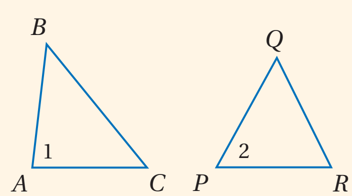
المطلوب إثبات أن: $RS > TQ$



المتباينة SSS: عكس نظرية المتباينة SAS هي نظرية SSS.

نظرية 4-14 نظرية متباينة SSS

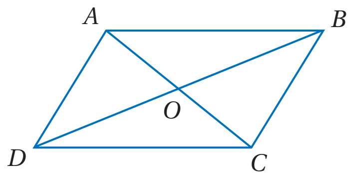
إذا كان ضلعان في مثلث يطابقان ضلعين في مثلث آخر ، وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني، فإنّ قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المناظرة لها في المثلث الثاني.



مثال: المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$, $\overline{AC} \cong \overline{PR}$,
إذا كان $BC > QR$، فإنّ $m\angle 1 > m\angle 2$.

سوف تبرهن نظرية 14-4 في السؤال 18.

مثـــال — برهان علاقات مثلثية



2 **المعطيات:** $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

$CD > AD$

المطلوب إثبات أن: $m\angle AOB > m\angle BOC$

برهان متسلسل:

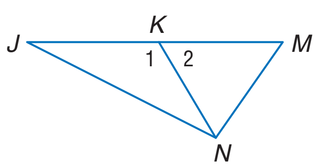
- $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ — معطى
- $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ — معطى
- $\angle BAC \cong \angle ACD$، $\angle ABD \cong \angle BDC$ — نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة
- $\triangle AOB \cong \triangle COD$ — ASA
- $\overline{AO} \cong \overline{CO}$ — تعريف تطابق المثلثات
- $\overline{DO} \cong \overline{DO}$ — خاصية الانعكاس
- $CD > AD$ — معطى
- $m\angle COD > m\angle AOD$ — المتباينة SSS
- $\angle COD \cong \angle AOB$، $\angle AOD \cong \angle COB$ — الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة
- $m\angle COD = m\angle AOB$، $m\angle AOD = m\angle COB$ — تعريف الزوايا المتطابقة
- $m\angle AOB > m\angle BOC$ — بالتعويض

إرشادات

البرهان

تفحص خطوات البرهان، وتأكد من وجود تبرير لكل خطوة وأن كل عبارة تتبع منطقيًّا سابقتها.

تحقق من فهمك



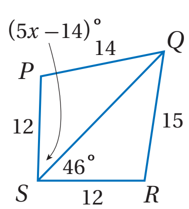
2) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{NK}$ قطعة متوسطة للمثلث $\triangle JMN$.

$JN > NM$

المطلوب إثبات أن: $m\angle 1 > m\angle 2$

مثـــال — العلاقات بين مثلثين



3 **جبر:** اكتب متباينة باستعمال المعلومات في الشكل المجاور.

a) قارن بين $m\angle QSR$ و $m\angle QSP$.

في المثلثين $\triangle PQS$ و$\triangle RQS$، $\overline{QS} \cong \overline{QS}$, $\overline{PS} \cong \overline{RS}$، $QR > QP$. ومن المتباينة SSS نستنتج أنّ $m\angle QSR > m\angle QSP$.

b) أوجد مجال قيم x.

حسب المتباينة SSS، $m\angle QSR > m\angle QSP$ أو $m\angle QSP < m\angle QSR$.

$m\angle QSP < m\angle QSR$	المتباينة SSS
$5x - 14 < 46$	بالتعويض
$5x < 60$	بإضافة 14 إلى كلا الطرفين
$x < 12$	بقسمة كلا الطرفين على 5

تذكر أيضًا، أنّ قياس أيّ زاوية أكبر من الصفر.

$5x - 14 > 0$

$5x > 14$ إضافة 14 كلا الطرفين

$x > \frac{14}{5} = 2.8$ بقسمة كلا الطرفين على 5

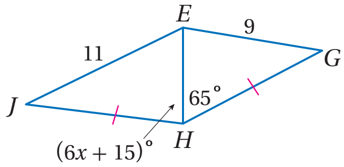
ويمكن كتابة المتباينتين كمتباينة مركبة:

$2.8 < x < 12$

تحقق من فهمك

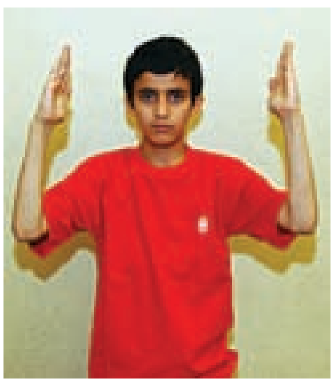
3A) اكتب متباينة للمقارنة بين $m\angle GHE$ و $m\angle JHE$.

3B) أوجد مجال قيم x.



مثـــال استعمال متباينات المثلث

4 **صحة :** المسافة التي تُحرّكها الذراع من وضع الاستقامة توصف بمدى الحركة. ولتحديد مدى حركة ذراع شخص ما، حدّد المسافة من المعصم إلى الكتف عند ثني المرفق بأقصى حد ممكن.



يمكن لسعيد أن يثني ذراعه اليسرى بحيث تكون المسافة بين معصمه وكتفه 5 بوصات، وأن يثني ذراعه اليمنى بحيث تكون المسافة بين معصمه وكتفه 3 بوصات. أي ذراع لها أكبر مدى حركة؟ اشرح إجابتك.

المسافة بين معصم الذراع اليمنى والكتف هي الصغرى. على فرض أن كلتا الذراعين متساويتان في الطول فحسب المتباينة SSS تكون الزاوية المتكونة عند المرفق الأيمن هي الأصغر. وهذا يعني أنّ مدى حركة الذراع اليمنى هو الأكبر.

تحقق من فهمك

4) بعد العلاج الطبيعي، أمكن لسعيد ثني ذراعه اليسرى بحيث تصبح المسافة بين معصمه وكتفه بوصتين. وأمكنه ثني ذراعه اليمنى بحيث تصبح المسافة بين معصمه وكتفه $2\frac{1}{2}$ بوصة. فأيّ الذراعين له مدى حركة أفضل الآن؟ اشرح إجابتك.

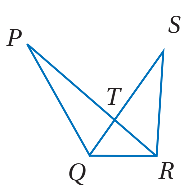
تأكد

مثال 1 (ص 226)

برهان : اكتب برهانًا ذا عمودين للسؤالين 1, 2:

1) **المعطيات:** $\overline{PQ} \cong \overline{SQ}$

المطلوب: إثبات أن $PR > SR$

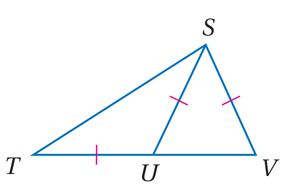


مثال 2 (ص 227)

2) **المعطيات:** $\overline{TU} \cong \overline{US}$.

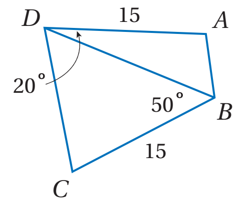
$\overline{US} \cong \overline{SV}$

المطلوب: $ST > UV$

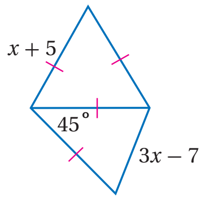


مثال 3
(ص 228)

(3 اكتب متباينة المقارنة بين AB و CD.

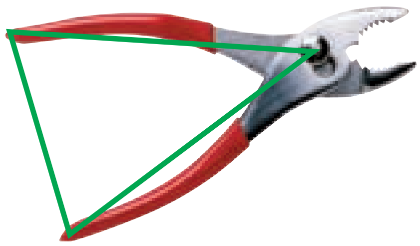


(4 اكتب متباينة لوصف قيم x الممكنة.



مثال 4
(ص 228)

(5 **فيزياء:** تُستعمل الرافعة لمضاعفة القوّة الضاغطة على شيء ما. ومن أمثلة ذلك الزرّاديّة. استعمل المتباينة SAS أو المتباينة SSS لتوضيح كيف تستعمل الزرّاديّة.



تمارين ومسائل

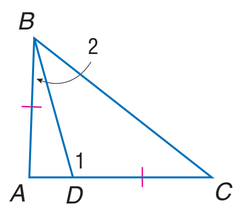
إرشادات للتمارين	
للأسئلة	**انظر الأمثلة**
6,7	1
8–11	2
12,13	3

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين للسؤالين التاليين:

(6 **المعطيات:** $\triangle ABC$

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

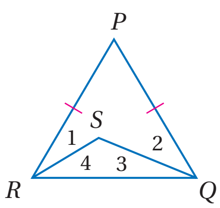
المطلوب إثبات أن: $BC > AD$



(7 **المعطيات:** $\overline{PR} \cong \overline{PQ}$

$SQ > SR$

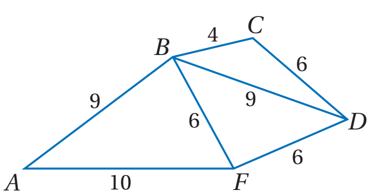
المطلوب إثبات أن: $m\angle 1 < m\angle 2$



اكتب متباينة تربط بين الزاويتين أو القطعتين المستقيمتين في كل مما يلي:

(8 AB, FD

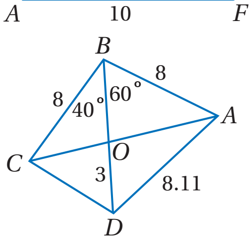
(9 $m\angle BDC, m\angle FDB$



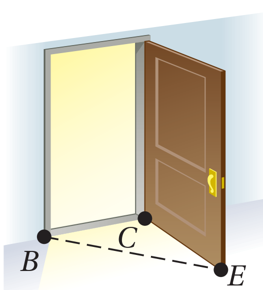
اكتب متباينة تربط بين الزاويتين أو القطعتين المستقيمتين في كل مما يلي:

(10 AD, DC

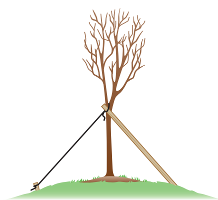
(11 $m\angle AOD, m\angle AOB$



(12 **أبواب:** افتح بابًا قليلاً، وقِس الزاوية التي يشكلها الباب وإطاره، ثم قس المسافة بين نهاية حافّة الباب وإطاره. افتح الباب أكثر، ثم قس مرّة أخرى. قارن بين هذه القياسات.

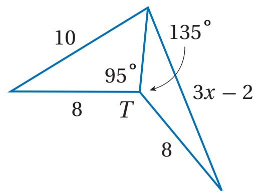


13) زراعة الحدائق: عندما يزرع مزارع أشجارًا جديدة فإنّه يُثبت عادة كل شجرة باستعمال أوتادٍ ويربطها بجذع الشجرة.
استعمل المتباينة SAS أو المتباينة SSS لتفسير لماذا تكون هذه الطريقة فعّالة في المحافظة على الشجرة في وضع عمودي مع الأرض؟

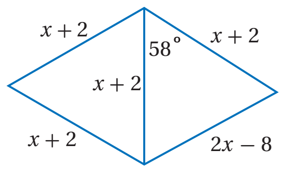


اكتب متباينة تصف قيم x الممكنة في كل مما يلي:

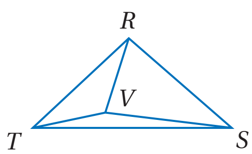
14)



15)



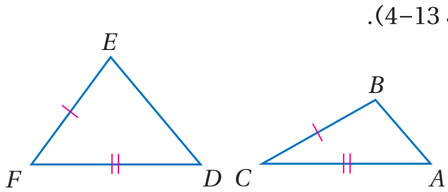
16) اكتب متباينة تصف قيم x الممكنة في الشكل المجاور،
$m\angle RVS = 15 + 5x,\ m\angle SVT = 10x - 20,\ RS < ST,$
$\angle RTV \cong \angle TRV$.



17) برهان: اكتب برهانًا لإثبات نظرية المتباينة SAS (نظرية 13–4).

المعطيات: في المثلثين $\triangle ABC$ وَ $\triangle DEF$
$\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$
$m\angle F > m\angle C$

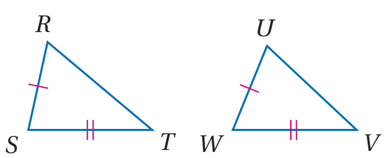
المطلوب: إثبات أنّ $DE > AB$.



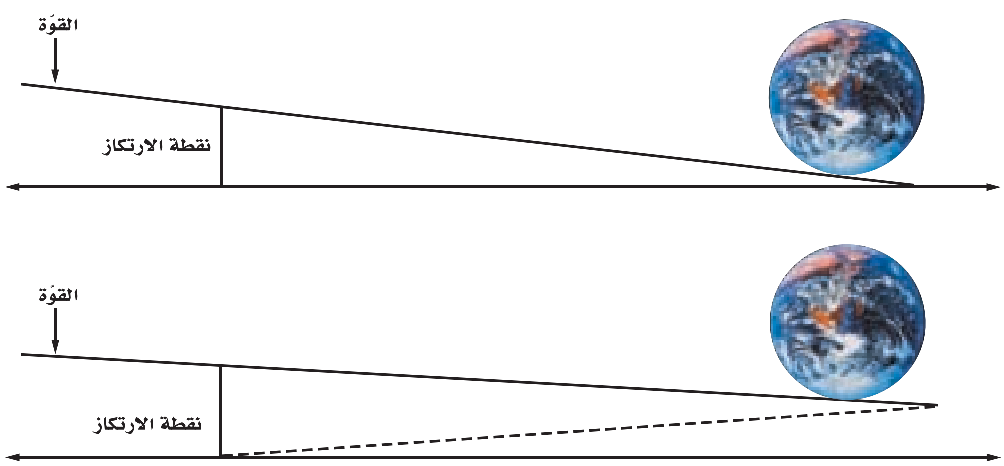
18) برهان: اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات نظرية المتباينة SSS (نظرية 14–4).

المعطيات: $\overline{RS} \cong \overline{UW}$
$\overline{ST} \cong \overline{WV}$
$RT > UV$

المطلوب: إثبات أنّ $m\angle S > m\angle W$.



19) تاريخ: عندما تؤثر بقوّة على رافعة مثبّتة على نقطة ارتكاز فإنه يمكنك رفع جسم ثقيل. ففي القرن الثالث قال أرخميدس: أعطني مكانًا أقف عليه ورافعة لها طول كافٍ وسوف أحرّك كُرَةً بحجم الكرة الأرضية.
اكتب وصفًا لكيفيّة تطبيق المتباينة SAS على المثلث المكون من عمود الارتكاز وطول جزء الرافعة من نقطة الارتكاز حتى سطح الأرض.



مسائل مهارات التفكير العليا

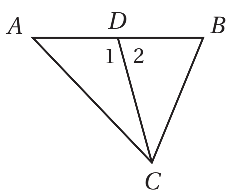
20) **مسألة مفتوحة:** صف جسمًا من واقع الحياة يوضّح المتباينة SAS أو المتباينة SSS.

21) **تبرير:** قارن بين نظرية المتباينة SSS ومسلمة SSS لتطابق المثلثات.

22) **تحدٍّ:** تنص المتباينة SAS على تزايد طول قاعدة المثلث المتطابق الضلعين كلّما زاد قياس زاوية الرأس. صف تأثير التغير في قياس زاوية الرأس على طول ارتفاع المثلث. برّر إجابتك.

23) **اكتب:** ارجع إلى المعلومات في الصفحة 225 واكتب وصفًا للزاوية بين الذراع والدعامة عندما يرفع مسؤول التشغيل ويُنزل البندول، متضمنًا تفسيرًا يربط المسافة بين طرفي الذراع والدعامة مع الزاوية بينهما.

تدريب على اختبار معياري



24) إذا كانت $\overline{DC}$ قطعة متوسطة لـ $\triangle ABC$ وكان $m\angle 1 > m\angle 2$، فأيّ العبارات التالية ليس صحيحًا؟

A $AD = BD$ **C** $AC > BC$

B $m\angle ADC = m\angle BDC$ **D** $m\angle 1 > m\angle B$

مراجعة تراكمية

حدّد ما إذا كانت القياسات المعطاة في الأسئلة 25–27 يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث. اكتب **نعم** أو **لا**. وبرّر إجابتك. (الدرس 4-4)

25) 25، 1، 21 26) 16، 6، 19 27) 8، 7، 15

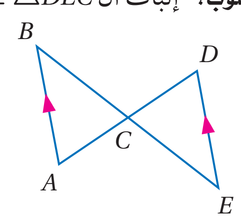
اكتب الفرض الذي ستبدأ به برهانًا غير مباشر لكل من العبارتين التاليتين: (الدرس 3-4)

28) $\overline{AD}$ قطعة متوسطة لـ $\triangle ABC$.

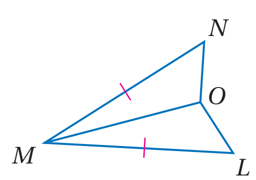
29) إذا تطابق ارتفاعا مثلث فإنّه متطابق الضلعين.

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 5-3)

30) **المعطيات:** $\overline{AD}$ تنصّف $\overline{BE}$.
$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$
المطلوب: إثبات أنّ $\triangle ABC \cong \triangle DEC$



31) **المعطيات:** $\overline{OM}$ تنصّف $\angle LMN$.
$\overline{LM} \cong \overline{MN}$
المطلوب: إثبات أنّ $\triangle MOL \cong \triangle MON$



أوجد أطوال أضلاع $\triangle EFG$ وصنّفه حسب أضلاعه. (الدرس 1-3)

32) $E(4\ ,6), F(4\ ,11), G(9\ ,6)$ 33) $E(-7, 10), F(15, 0), G(-2\ , -1)$

استعمل صيغة نقطة – ميل، واكتب معادلة المستقيم في كل من الأسئلة 34–36. (الدرس 3-4)

34) $m = 2, (4, 3)$ 35) $m = -3, (2, -2)$ 36) $m = 11, (-4, -9)$

37) **إعلانات:** كتب صاحب محل لبيع هدايا الزهور البرّيّة إعلانًا يقول «**عندما تكون الهديّةُ خاصّةً، فإنّها تكون من الزهور البريّة**». تُريد سلمى هديّة خاصّة. فهل عليها أن تذهب لشراء الزهور البرّيّة؟ برّر إجابتك. (الدرس 1-4)

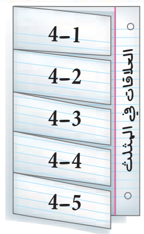
الفصل 4

دليل الدراسة والمراجعة

المَطْويّاتُ
مُنَظِّمُ أفْكارٍ

استعد

تأكد من أن المفاهيم الأساسية التالية كتبت في مطويتك.



مفاهيم أساسيّة:

قطع مستقيمة خاصّة في المثلثات (الدرس 1–4)

- القطع المستقيمة الخاصّة في المثلثات هي: الأعمدة المنصّفة ومنصفات الزوايا والقطع المتوسطة والارتفاعات.
- نقطة تقاطع كل من القطع المستقيمة الخاصّة للمثلث تُسمّى نقطة التلاقي.
- نقط التلاقي للمثلث هي مركز الدائرة التي تمرّ برؤوس المثلث وهي مركز الدائرة الداخليّة، ومركز المثلث، وملتقى الارتفاعات.

البرهان غير المباشر (الدرس 3–4)

- لكتابة برهان غير مباشر:

1) افرض أن النتيجة خطأ.
2) بيّن أنّ هذا الفرض يؤدي إلى تناقض.
3) بما أن خطأ النتيجة يؤدي إلى عبارة غير صحيحة فإنّ النتيجة الأصلية يجب أن تكون صحيحة.

متباينات المثلث (الدروس 2–4، 4–4، 5–4)

- الزاوية الكبرى في المثلث تقابل الضلع الأطول والزاوية الصغرى تقابل الضلع الأقصر.
- مجموع طولي أي ضلعين في المثلث أكبر من طول الضلع الثالث.
- المتباينة SAS: في أي مثلثين، إذا تطابق ضلعان فإنّ قياس الزاوية المحصورة يحدد أيّ المثلثين يكون ضلعه الثالث أطول.
- المتباينة SSS: في أي مثلثين، إذا تطابق ضلعان متناظران فإنّ طول الضلع الثالث يُحدّد أيّ المثلثين تكون زاويته المحصورة قياسها أكبر.

المفردات الأساسية:

العمود المنصّف (ص. 193)
نقطة التلاقي (ص. 194)
مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث (ص. 194)
مستقيمات متلاقية (ص. 194)
مركز المثلث (ص. 195)
مركز الدائرة الداخليّة (ص. 195)
القطعة المتوسطة (ص. 195)
الارتفاع (ص. 196)
ملتقى الارتفاعات (ص. 196)
البرهان غير المباشر (ص. 212)
التبرير غير المباشر (ص. 212)
البرهان بالتناقض (ص. 212)

تأكّد من المفردات:

اختر المصطلح المناسب لتكمل كل جملة مما يلي:

1) جميع منصّفات الزوايا للمثلث تلتقي عند (مركز الدائرة الداخليّة، مركز الدائرة التي تمرّ برؤوس المثلث).

2) في $\triangle RST$، إذا كانت النقطة P منتصف $\overline{RS}$، فإنّ $\overline{PT}$ هي (منصّف زاوية، قطعة متوسطة).

3) النظرية التي تنص على أنّ مجموع طولي أي ضلعين في المثلث أكبر من طول الضلع الثالث هي (نظرية متباينة المثلث، المتباينة SSS).

4) تلتقي القطع المتوسطة للمثلث عند (مركز المثلث، ملتقى الارتفاعات).

5) في $\triangle JKL$، إذا كانت النقطة H متساوية الأبعاد عن $\overrightarrow{KJ}$ و $\overrightarrow{KL}$، فإنّ $\overleftrightarrow{HK}$ هو (منصّف زاوية، ارتفاع).

6) مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث هي النقطة التي تلتقي عندها (الأعمدة المنصفة، القطع المتوسطة) للمثلث.

7) في $\triangle ABC$، إذا كان $\overleftrightarrow{AK} \perp \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BK} \perp \overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{CK} \perp \overleftrightarrow{AB}$، فإنّ K هي (ملتقى الارتفاعات، مركز الدائرة الداخليّة) لـ $\triangle ABC$.

8) عند كتابة برهان غير مباشر ابدأ بفرض أنّ (المعطيات، النتيجة) خطأ.

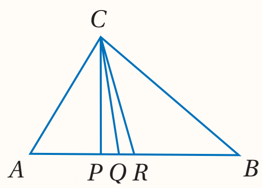
دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

4-1 المنصّفات، والقطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث (190 – 202)

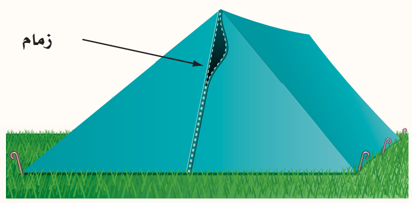
في الشكل المجاور، $\overline{CP}$ ارتفاع، $\overline{CQ}$ منصف $\angle ACB$، و R منتصف $\overline{AB}$.

9) أوجد $m\angle ACQ$ إذا كان $m\angle ACB = 123 - x$ و $m\angle QCB = 42 + x$.

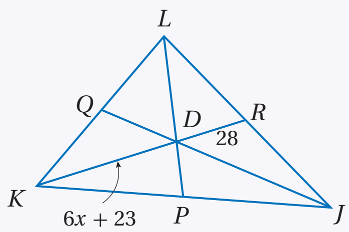


10) أوجد AB إذا كان $AR = 3x + 6$ و $RB = 5x - 14$.

11) **تصميم الخيمة:** وضع سامي تصميمًا لخيمة جديدة لها زمّام يمتد من منتصف قاعدة إحدى واجهتي الخيمة المثلثين إلى قمة الخيمة، كما في الرسم. فما نوع القطعة المستقيمة الخاصّة التي يمثّلها هذا الزمّام؟



مثال 1: النقاط P, Q, R هي منتصفات $\overline{JK}, \overline{KL}, \overline{JL}$ على الترتيب. أوجد قيمة x.



$KD = \frac{2}{3}(KR)$ نظرية مركز المثلث

$6x + 23 = \frac{2}{3}(6x + 51)$ بالتعويض

$6x + 23 = 4x + 34$ بالتبسيط.

$2x = 11$ بطرح $4x + 23$ من الطرفين.

$x = \frac{11}{2}$ بقسمة كلا الطرفين على 2.

4-2 المتباينات والمثلثات (204 – 211)

استعمل الشكل في مثال 2 لتحدّد العلاقة بين طولي الضلعين في كل مما يلي:

12) $\overline{SR}, \overline{SD}$

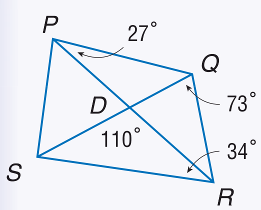
13) $\overline{DQ}, \overline{DR}$

14) $\overline{PQ}, \overline{QR}$

15) $\overline{SR}, \overline{SQ}$

16) **هندسة إحداثية:** رؤوس المثلث WXY هي $W(2, 1), X(-1, -2), Y(3, -4)$. اكتب زوايا المثلث حسب قياساتها من الأصغر إلى الأكبر.

مثال 2: حدّد العلاقة بين طولي $\overline{SD}$ و $\overline{QD}$.



$\overline{SD}$ يقابل $\angle SRD$.

$\overline{QD}$ يقابل $\angle QRD$.

وبما أنّ $m\angle QDR = 70$ حسب نظرية الزوايا المتكاملة و $m\angle QRD = 37$ حسب نظرية مجموع الزوايا، فإنّ $m\angle SRD < m\angle QRD$.

لذلك، $SD < QD$.

الفصل 4 دليل الدراسة والمراجعة

4-3 البرهان غير المباشر (212 – 217)

17) كرة القدم: يلعب نايف ظهيرًا في فريق كرة القدم في مدرسته. مرّر نايف في المباريات الخمس التي لعبها 101 تمريرة. أثبت أنّ نايفًا مرّر في مباراة واحدة على الأقل أكثر من 20 تمريرة.

مثال 3: اكتب الفرض الذي ستبدأ به برهانًا غير مباشر للعبارة "إذا كان $3x + 1 > 10$، فإن $x > 3$".

نتيجة العبارة الشرطية هي $x > 3$. ونفيها هو $x \leq 3$.

4-4 متباينة المثلث (219 – 224)

حدّد ما إذا كانت القياسات المعطاة في كل سؤال يمكن أن تمثل أطوالاً لأضلاع مثلث. اكتب نعم أو لا. وبرّر إجابتك.

18) $7, 20, 5$ **19)** $19, 19, 41$

20) زراعة: لدى كامل ثلاث قطع خشبيّة أطوالها قدمان، 3 أقدام، 6 أقدام. هل يمكن أن تستعمل هذه القطع للإحاطة بحوض زراعي مثلثي الشكل؟ وضح إجابتك.

مثال 4: حدّد ما إذا كانت الأعداد 14 ، 6 ، 7 يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث.

تحقق من كل متباينة.

$7 + 14 \overset{?}{>} 6$ $7 + 6 \overset{?}{>} 14$

$21 > 6$ $13 \ngtr 14$

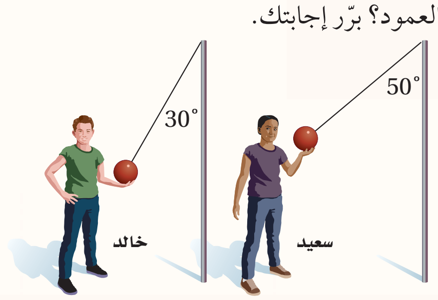
$6 + 14 \overset{?}{>} 7$

$20 > 7$

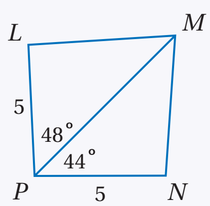
لأنّ المتباينات ليست صحيحة في جميع الحالات، فإنّ الأضلاع لا يمكن أن تشكل مثلثًا.

4-5 متباينات تتضمن مثلثين (225 – 231)

21) رياضة: يلعب سعيد وخالد كرة الحبل. تبيّن الصورة وضعيهما في لحظة ما. من منهما أقرب إلى العمود؟ برّر إجابتك.



مثال 5: اكتب متباينة تربط بين LM و MN.



في $\triangle LMP$ و $\triangle NMP$:

$\overline{LP} \cong \overline{NP}$ ، $\overline{PM} \cong \overline{PM}$

$m\angle LPM > m\angle NPM$.

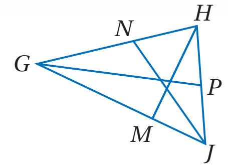
المتباينة SAS تمكّننا

من استنتاج أنّ $LM > MN$.

الفصل 4

اختبار الفصل

في $\triangle GHJ$: $HP = 5x - 16, PJ = 3x + 8$
$m\angle GJN = 6y - 3, m\angle NJH = 4y + 23$
$m\angle HMG = 4z + 14$

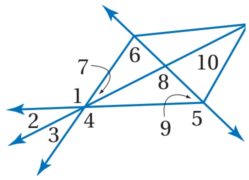


1) إذا كانت $\overline{GP}$ قطعة متوسطة في $\triangle GHJ$. فأوجد HJ.

2) أوجد $m\angle GJH$ إذا كانت $\overline{JN}$ منصف زاوية.

3) إذا كانت $\overline{HM}$ ارتفاعًا للمثلث $\triangle GHJ$، فأوجد قيمة z.

ارجع إلى الشكل أدناه، وحدّد الزاوية ذات القياس الأكبر في كل مجموعة.



4) $\angle 8, \angle 5, \angle 7$

5) $\angle 6, \angle 7, \angle 8$

6) $\angle 1, \angle 6, \angle 9$

اكتب الفرض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة فيما يلي:

7) إذا كان n عددًا طبيعيًّا، فإنّ $2n + 1$ عدد فردي.

8) الزوايا الداخلية المتبادلة تكون متطابقة.

حدّد ما إذا كانت القياسات المعطاة في كل سؤال يمكن أن تمثل أطوال أضلاع لمثلث. اكتب نعم أو لا. برّر إجابتك.

9) $7, 24, 25$

10) $25, 35, 60$

11) $20, 3, 18$

12) $5, 10, 6$

13) **تصميم:** إذا أراد مساح أن يحيط موقعًا ما مستعملًا لذلك 3 حبال، قياس أطوالها $4m, 6m, 8m$ ، فهل يمكن أن تشكل هذه الحبال مثلثًا.

14) **عمل:** حضر عدنان ورشة عمل لمدة ثلاثة أيام، وتحدث لمدة ساعة ونصف عبر الهاتف من أجل شركته للتسويق. استعمل التبرير غير المباشر لبيان أن عدنان أمضى في يوم واحد على الأقل نصف ساعة على الأقل في الحديث عبر الهاتف.

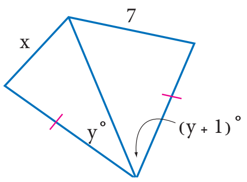
أوجد مجال طول الضلع الثالث لمثلث طولا ضلعين فيه كما هو في السؤالين 15 وَ 16.

15) 1 و 14

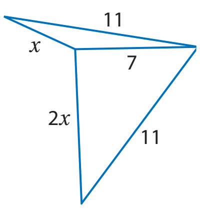
16) 14 و 11

اكتب متباينة لقيم x الممكنة.

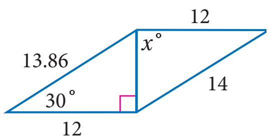
17)



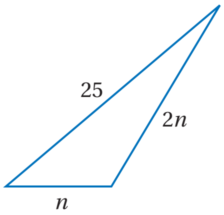
18)



19)



20) **اختيار من متعدّد:** في الشكل أدناه، n عدد كلي. ما أقلّ قيمة ممكنة لِـ n؟



A 8

B 9

C 11

D 42

اختبار معياري تراكمي

الفصل 4

للفصول 1-4

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

1) أيّ مما يلي نتيجة منطقيّة قائمة على أساس العبارة التالية وعكسها؟

العبارة: إذا كان قياس زاوية °50 فإنّ الزاوية حادّة.

عكس العبارة: إذا كانت زاويةٌ حادّةً، فإن قياسها °50.

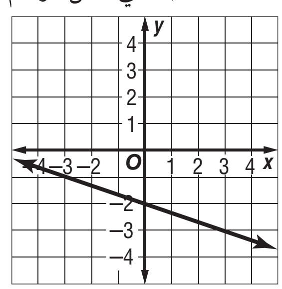
A العبارة وعكسها صحيحان.

B العبارة وعكسها غير صحيحين.

C العبارة صحيحة، ولكن عكسها خاطئ.

D العبارة خاطئة، ولكن عكسها صحيح.

2) **جبر:** ما الدالّة الخطيّة التي تمثل الرسم أدناه؟



F $y = -\frac{1}{3}x - 2$ **H** $y = \frac{1}{3}x + 2$

G $y = \frac{1}{3}x - 2$ **J** $y = -\frac{1}{3}x + 2$

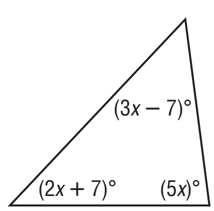
3) أيّ مما يلي تصف المثلث المجاور؟

A حادّ الزوايا ومتطابق الضلعين

B قائم الزاوية ومتطابق الضلعين

C حادّ الزوايا ومختلف الأضلاع

D قائم الزاوية ومختلف الأضلاع



4) إذا كان $\triangle ABC$ متطابق الضلعين. وكان $m\angle A = 94°$، فأي مما يلي يجب أن يكون صحيحًا؟

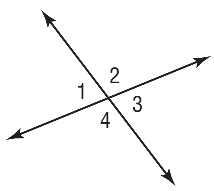
F $\angle B = 94°$

G $\angle B = 47°$

H $AB = AC$

J $AB = BC$

5) **نظريّة:** إذا كانت الزاويتان متقابلتين بالرأس فإنّهما متطابقتان.



تبرهن سارة هذه النظرية بالتناقض. فبدأت سارة بفرض أن $\angle 1$ و $\angle 3$ في الشكل أعلاه غير متطابقتين. أي نظريّة استعملتها سارة للوصول إلى تناقض؟

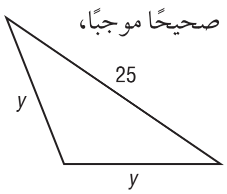
A إذا كان كل من الزاويتين تتمم الزاوية نفسها فإنهما متطابقتان.

B إذا كان كل من الزاويتين تكمل الزاوية نفسها فإنهما متطابقتان.

C جميع الزوايا القائمة متطابقة.

D إذا كانت الزاويتان متكاملتين فإن مجموع قياسيهما °180.

6) في الشكل المجاور، إذا كان y عددًا صحيحًا موجبًا، فما أقلّ قيمة ممكنة له؟

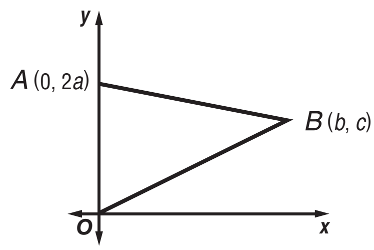


7) أيّ مما يلي لا يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث؟

F 4 , 3.2 , 1.9 **H** 3, 7.2, 7.5

G 1.6 , 3 , 4.6 **J** 2.6 , 4.5 , 6

8) يبيّن الشكل أدناه المثلث OAB.

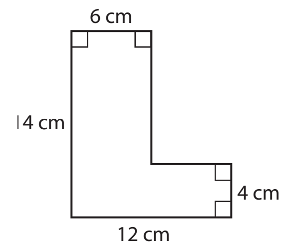


ما ميل المستقيم الذي يحوي الارتفاع من الرأس B في المثلث OAB؟

A $\frac{c-a}{b}$　　**C** 0

B غير معرف　　**D** $\frac{b}{c-a}$

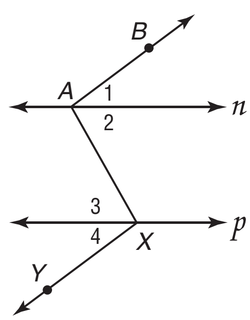
9) كم سنتمترًا محيط الشكل التالي؟



إرشادات للاختبار

سؤال 9: عند إيجاد محيط شكل ما، انظر أولاً إلى الأضلاع التي أطوالها غير معروفة، وأوجد أطوالها قبل حساب المحيط.

10) إذا كان المستقيم n موازيًا للمستقيم p، فأي المعلومات ستكون كافية لإثبات أنّ $\overline{AB} \parallel \overline{XY}$؟



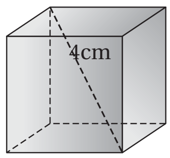
F $m\angle 1 = m\angle 2$

G $m\angle 1 = m\angle 3$

H $m\angle 1 = m\angle 4$

J $m\angle 3 = m\angle 4$

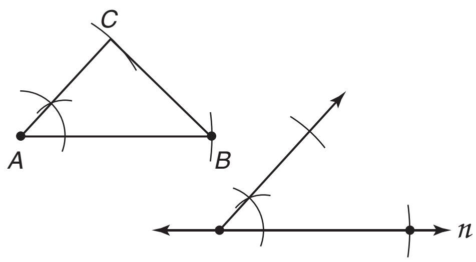
11) ما مساحة سطح مكعب طول قطره 4 سم بالسنتمترات المربعة؟



A $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　**B** 8

C 32　　**D** 60

12) يستعمل سامي مسطرة غير مدرجة وفرجارًا لعمل الرسم أدناه.



ما أفضل وصف للرسم الذي يقوم به سامي؟

F رسم مثلث مطابق لِـ$\triangle ABC$ باستعمال الأضلاع.

G رسم مثلث مطابق لِـ$\triangle ABC$ باستعمال ضلعين والزاوية المحصورة.

H رسم مثلث مطابق لِـ$\triangle ABC$ باستعمال زاويتين والضلع المحصور.

J رسم مثلث مطابق لِـ$\triangle ABC$ باستعمال زاويتين.

سؤال ذو مستوى متقدّم

سجّل إجابتك على ورقة. وضّح خطوات عملك.

13) رؤوس $\triangle ABC$ هي $A(-3, 1), B(0, 2)$, $C(3, 4)$. ارسم $\triangle ABC$. وأوجد طول كل ضلع إلى أقرب عُشر.

a ما نوع المثلث $\triangle ABC$؟ كيف عرفت؟

b صف العلاقة بين كل مما يلي:

$m\angle B$ و $m\angle A$ ، $m\angle C$ و $m\angle A$ ، $m\angle B$ و $m\angle C$.

اشرح إجابتك.

هل تحتاج إلى مساعدة؟													
إذا أخطأت في السؤال...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فَعُدْ إلى ...	1-3	مهارة سابقة	4-4	4-3	3-6	مهارة سابقة	4-4	4-1	3-1	3-4	مهارة سابقة	2-5	4-2

الصيغ

الهندسة الإحداثية

الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
المسافة	على خط الأعداد: $d = \lvert a - b \rvert$ على المستوى الإحداثي: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ في الفراغ: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ طول القوس: $\ell = \frac{N}{360} \cdot 2\pi r$
نقطة المنتصف	على خط الأعداد: $M = \frac{a + b}{2}$ على المستوى الإحداثي: $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ في الفراغ: $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

المحيط

المربع	$P = 4s$
المستطيل	$P = 2\ell + 2w$
الدائرة	$C = 2\pi r$ أو $C = \pi d$

المساحة

المربع	$A = s^2$
المستطيل	$A = \ell w$ أو $A = bh$
متوازي الأضلاع	$A = bh$
شبه المنحرف	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$
المعين	$A = \frac{1}{2}d_1d_2$ أو $A = bh$
المثلث	$A = \frac{1}{2}bh$
المضلع المنتظم	$A = \frac{1}{2}Pa$
الدائرة	$A = \pi r^2$
القطاع الدائري	$A = \frac{N}{360} \cdot \pi r^2$

نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
الصيغة التربيعية	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

المساحة الجانبية

المنشور	$L = Ph$
الأسطوانة	$L = 2\pi rh$
الهرم	$L = \frac{1}{2}P\ell$
المخروط	$L = \pi r\ell$

المساحة السطحية

المنشور	$T = Ph + 2B$
الأسطوانة	$T = 2\pi rh + 2\pi r^2$
الهرم	$T = \frac{1}{2}P\ell + B$
المخروط	$T = \pi r\ell + \pi r^2$
الكرة	$T = 4\pi r^2$

الحجم

المكعب	$V = s^3$
متوازي المستقيمات	$V = \ell wh$
المنشور	$V = Bh$
الأسطوانة	$V = \pi r^2h$
الهرم	$V = \frac{1}{3}Bh$
المخروط	$V = \frac{1}{3}\pi r^2h$
الكرة	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

المعادلات في المستوى الإحداثي

معادلة مستقيم بمعرفة الميل والجزء المقطوع	$y = mx + b$
معادلة مستقيم بمعرفة الميل ونقطة	$y - y_1 = m(x - x_1)$
معادلة الدائرة	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

حساب المثلثات

قانون الجيب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
قانون جيب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

الرموز

h	الارتفاع
$\angle$	زاوية
$\measuredangle$	زوايا
a	العامِد
$\approx$	مساوٍ تقريبًا لـِ
$\widehat{AB}$	القوس الأصغر الذي طرفاه A وَ C
$\widehat{ABC}$	القوس الأكبر الذي طرفاه A وَ B
A	مساحة المضلع أو الدائرة أو مساحة سطح الكرة أو قياس القوس بالدرجات
B	مساحة قاعدة المنشور أو الأسطوانة أو الهرم أو المخروط
b	قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع أو شبه المنحرف
$p \leftrightarrow q$	عبارة الشرط المزدوج: p إذا وفقط إذا q
$\odot P$	دائرة مركزها P
C	محيط الدائرة
$p \rightarrow q$	عبارة الشرط: إذا كان p فإن q
$\cong$	مطابق لـِ
$p \wedge q$	p وَ q
cos	جيب التمام
$^\circ$	درجة

d	قطر الدائرة ، المسافة
$p \vee q$	p أو q
AB	المسافة بين النقطتين A وَ B
$=$	يساوي
$\neq$	لا يساوي
$>$	أكبر من
$\geq$	أكبر من أو يساوي
A'	صورة عن A
$<$	أقل من
$\leq$	أقل من أو يساوي
L	المساحة الجانبية
$\overleftrightarrow{DE}$	مستقيم يمر بالنقطتين D وَ E
$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	مقدار المتجه من A إلى B
$m\angle A$	قياس الزاويه A بالدرجات
$m\widehat{AB}$	قياس القوس AB بالدرجات
M	نقطة المنتصف
$\sim p$	نفي العبارة p
$\sqrt{\ }$	الجذر التربيعي الموجب
(x, y)	الزوج المرتب
(x, y, z)	الثلاثي المرتب
$\parallel$	موازٍ لـِ
$\nparallel$	ليس موازيًا لـِ
$\square$	متوازي أضلاع

P	المحيط
$\perp$	عمودي على
π	باي (ط) النسبة التقريبية
$n-gon$	مضلع له n من الأضلاع
r	نصف قطر الدائرة
$\overrightarrow{PQ}$	شعاع (نصف مستقيم) يمر بالنقطة Q وطرفه P
$\overline{RS}$	قطعة مستقيمة طرفاها S,R
s	جانب من مضلع
$\sim$	مشابه
sin	الجيب
ℓ	المستقيم ℓ ، طول المستطيل، طول القوس، الارتفاع الجانبي
m	الميل
tan	الظل
T	مساحة السطح الكلية
$\triangle$	المثلث
$\vec{a}$	المتجه a
$\overrightarrow{AB}$	المتجه AB من A إلى B
V	الحجم
w	عرض المستطيل

تنسيق أمين مصادر التعلم في ثانوية الرياض

علي بن حمد البدر