دروس لأساتذة التعليم المتوسط

السنة الثالثة رياضيات

القياس والمكاملة

الإرسال الأول

إعداد:

الأستاذة: دوجة هبول

الأستاذ : عبد الوهاب بورغدة

البريد الإلكتروني: boureghda@ens-kouba.dz

قسم الرياضيات، المدرسة العليا للأساتذة – القبة، الجزائر

تصدير

*الدرس الذي نحن بصدد التطرق إليه موجه لأساتذة التعليم المتوسط في إطار **التكوين عن بعد** مستوى السنة الثالثة تخصص رياضيات. إن هذا الدرس مدرج ضمن برنامج **شهادة التعليم المتوسط** (باكالوريا + أربع سنوات) الممنوحة من طرف المدرسة العليا للأساتذة بالقبة. أثناء إعداد هذا الدرس تمت مراعاة طبيعة هذا التكوين **(عن بعد)** وذلك بالإكثار من الأمثلة وكذلك القضايا التي تعتبر بمثابة تمارين محلولة. يجب التنبيه إلى أن هذا الدرس يعتمد أساسا على معظم المعلومات المقدمة في الدروس السابقة أي دروس السنة الأولى والثانية.*

الفهرس

1 مدخل

1.1 تكامل ريمان[1]

1.1.1 تقسيمات مجال

ليكن $[a,b]$ مجالا مغلقا ومحدودا من $\mathbb{R}$، نسمي تقسيما لـــ $[a,b]$ كل مجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية:

$$P=\{x_O, x_1, \ldots, x_n\}$$

بحيث

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

ونسمي المجالات :

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$$

المعينة بواسطة التقسيم P بقطع هذا التقسيم. إن عدد القطع في هذا التقسيم يساوي n. نضع :

$$\delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i=1,\ldots,n$$

[1] ريمان: رياضياتي ألماني 1826-1866 (Riemann Bernhard) تلميذ كل الرياضياتيين غوص، جاكوبي وديرخلي منشأ نظرية التوابع الجبرية.

ونسمي هذا العدد الموجب تماما بطول القطعة $[x_{i-1}, x_i]$. نرمز بـــ δP إلى طول أطول قطعة في التقسيم P أي أن:

$$\delta P = \max\{\delta x_i \,/\, i = 1, \ldots, n\}$$

ونسمي δP بوسيط أو نظيم التقسيم P.

نقول عن تقسيم P' أنه أدق من التقسيم P إذا كان $P \subset P'$ (أي إذا كانت كل نقطة مستخدمة في P مستخدمة أيضا في P')

مثال1.1

نعتبر المجال $I = [0,1]$

نضع : $P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ ، إن $\delta P = \frac{1}{2}$

وليكن $P' = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ ، إن $\delta P' = \frac{1}{3}$ ، في هذه الحالة P' ليست أدق من P.

لو نختار $P' = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ يكون لدينا $\delta P' = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{2}$ ، في هذه الحالة إن P' أدق من P لأن $P \subset P'$ ▪

من الواضح أنه إذا كان P' أدق من P فإن $\delta P' \leq \delta P$.

نرمز بـــ $\mathscr{P}_{a,b}$ إلى مجموعة كل تقسيمات المجال $[a,b]$. إن عناصر $\mathscr{P}_{a,b}$ هي إذن مجموعات منتهية من نقاط المجال $[a,b]$ حيث كل مجموعة عناصرها مرتبة تماما وتنطبق نقطة اليسار مع a ونقطة اليمين مع b.

2.1.1 مجاميع ريمان

ليكن f تابعا معرفا ومحدودا على $[a,b]$ ولنشير بـــ m و M إلى حديه الأدنى والأعلى على التوالي على $[a,b]$:

$$m = \inf_{[a,b]} f, \quad M = \sup_{[a,b]} f$$

ليكن $p = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in \mathscr{P}_{\mathrm{a,b}}$ من الواضح أن f يبقى محدودا على كل قطعة $[x_{i-1}, x_i]$ من قطع P. لنرمز عندئذ بـــ

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f, \quad M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \quad \forall i = 1, ..., n$$

ولنشكل المجموعين :

$$\overline{R}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \delta x_i, \quad \underline{R}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \delta x_i$$

يدعى $\underline{R}(f,P)$ بمجموع ريمان السفلي للتابع f المرافق للتقسيم P

ويدعى $\overline{R}(f,P)$ بمجموع ريمان العلوي للتابع f المرافق للتقسيم P.

لدينا

$$m(b-a) \le \underline{R}(f,P) \le \overline{R}(f,P) \le M(b-a) \quad \forall P \in \mathscr{P}_{\mathrm{a,b}}$$

ولدينا أيضا إذا كان P' تقسيم أدق من P كان:

$$\overline{R}(f,P') \le \overline{R}(f,P), \quad \underline{R}(f,P) \le \underline{R}(f,P')$$

ثم إن

$$\underline{R}(f,P_1) \le \overline{R}(f,P_2) \quad \forall P_1, P_2 \in \mathscr{P}_{\mathrm{a,b}}$$

وهذه العلاقة الأخيرة تأتي من النتائج السابقة علما أن $P_1 \cup P_2$ أدق من P_1 ومن P_2 فيكون لدينا:

$$\underline{R}(f\ ,P_1) \leq \underline{R}(f\ ,P_1 \cup P_2) \leq \overline{R}(f\ ,P_1 \cup P_2) \leq \overline{R}(f\ ,P_2)$$

مثال2.1

لنعتبر ψ الدالة المميزة للأعداد الناطقة المحصورة بين a و b حيث $a < b$ أي :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

(يدعى ψ بتابع ديريخلي[2]).

وليكن $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in \mathscr{P}_{a,b}$، لدينا :

$$\forall i,\ m_i = 0$$

هذا من كون أنه بين كل عددين حقيقيين من $\mathbb{R}$ يوجد ما لا نهاية من الأعداد الصماء ومنه:

$$\underline{R}(\psi, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \,\delta x_i = 0$$

ثم إن:

$$\forall i,\ M_i = 1$$

هذا من كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$ ومنه :

[2] ديرخلي: رياضياتي ألماني 1805-1859 (Dirichlet (Le Jeune) Peter Gustave) تلميذ كل من غوص وجاكوبي لديه أعمال قيمة حول نظرية الزمر غير المنتهية وسلاسل فوريي. هناك ما يسمى بتكامل ديرخلي وتابع ديرخلي ومسألة ديرخلي.

$$\overline{R}(\psi,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\,\delta x_i=\sum_{i=1}^{n}1\cdot\delta x_i=b-a$$

إذن في الأخير نحصل على:

$$\forall P\in\mathscr{P}_{a,b}\,,\underline{R}(\psi,P)=O\,,\overline{R}(\psi,P)=b-a$$

تعريف 1.1

نقول عن تابع محدود

$$f:[a,b]\to\mathbb{R}$$

أنه ريمان كمول على $[a,b]$ إذا كان :

$$^{3}\underline{\int_a^b}f\doteq\sup_{P\in\mathscr{P}_{a,b}}\underline{R}(f,P)=\inf_{P\in\mathscr{P}_{a,b}}\overline{R}(f,P)\doteq\overline{\int_a^b}f$$

نسمي القيمة المشتركة للحدين السابقين بتكامل ريمان للتابع f على $[a,b]$. ونشير إليها تقليديا بـــ

$$\int_a^b f$$

يدعى

$$\overline{\int_a^b}f$$

بتكامل ريمان العلوي على المجال $[a,b]$ و

---

[3] $\doteq$ يقصد بهذا الرمز المعرّف بـ

$$\underline{\int_a^b} f$$

بتكامل ريمان السفلي على المجال $[a,b]$.

مثال 3.1

التابع ψ المعرف آنفا ليس ريمان كمول على المجال $[a,b]$ لأن:

$$\forall P \in \mathscr{P}_{\mathrm{a,b}}, \underline{R}(\psi, P) = O, \overline{R}(\psi, P) = b - a.$$

ينتج من التعريف السابق المبرهنة الآتية:

مبرهنة 1.1

حتى يكون تابع محدود $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ريمان كمول على $[a,b]$ يلزم ويكفي أن يحقق ما يلي:

$$\forall \varepsilon > O, \exists P \in \mathscr{P}_{\mathrm{a,b}};\ \overline{R}(f, P) - \underline{R}(f, P) \le \varepsilon.$$

مثال 4.1

لنعتبر التابع $f(x) = x$ المعرف على مجال $[a,b]$. لنتأكد من أن f ريمان كمول على $[a,b]$.

في البداية من الواضح أن f محدودا على $[a,b]$ لكون:

$$\forall x \in [a,b],\ a \le f(x) \le b.$$

ثم من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ نضع:

$$P_n=\left\{a+i\frac{b-a}{n},\ 0\le i\le n\right\}$$
$$=\left\{a,a+\frac{b-a}{n},a+2\frac{b-a}{n},\dots,a+n\frac{b-a}{n}\right\}$$

إن $P_n\in\mathscr{P}_{a,b}$ حيث أن $x_i=a+i\frac{b-a}{n}$ و $\delta x_i=\frac{b-a}{n}$.

لنقوم الآن بحساب $\overline{R}(f\ ,P_n)$ و $\underline{R}(f\ ,P_n)$.

لحساب $\overline{R}(f\ ,P_n)$ و $\underline{R}(f\ ,P_n)$ نحتاج إلى :

$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}x=x_i$$

و

$$m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}x=x_{i-1}$$

ونذكر بـــ

$$\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$$

بهذا نحصل على:

$$\overline{R}(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}M_i\,\delta x_i=\sum_{i=1}^{n}x_i\,\frac{b-a}{n}$$
$$=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a+i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$$
$$=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}a+\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\sum_{i=1}^{n}i$$
$$=\frac{b-a}{n}\bullet na+\frac{(b-a)^2}{n^2}\bullet\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=ba-a^2+\frac{(b-a)^2}{n^2}\bullet\frac{n(n+1)}{2}$$

و

$$\underline{R}(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}m_i\,\delta x_i=\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}\,\frac{b-a}{n}$$
$$=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}a+\left((i-1)\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$$
$$=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}a+\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(i-1)$$
$$=\frac{b-a}{n}\bullet na+\frac{(b-a)^2}{n^2}\bullet\sum_{j=0}^{n-1}j$$
$$=ba-a^2+\frac{(b-a)^2}{n^2}\bullet\frac{n(n-1)}{2}$$

إذن حصلنا على:

$$\overline{R}(f,P_n)=ba-a^2+\frac{(b-a)^2}{n^2}\bullet\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\underline{R}(f,P_n)=ba-a^2+\frac{(b-a)^2}{n^2}\bullet\frac{n(n-1)}{2}$$

بإجراء الفرق بين المقدارين يكون لدينا:

$$\begin{aligned}\overline{R}(f,P_n)-\underline{R}(f,P_n)&=\frac{(b-a)^2}{n^2}\bullet\left[\frac{n(n+1)-n(n-1)}{2}\right]\\&=\frac{(b-a)^2}{n^2}\bullet\frac{2n}{2}\\&=\frac{(b-a)^2}{n}\end{aligned}$$

هذا يمكننا من القول :

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0;\ \overline{R}(f,P_{n_0})-\underline{R}(f,P_{n_0})=\frac{(b-a)^2}{n_0}\leq\varepsilon$$

حيث يمكن تقدير n_0 بـــ:

$$n_0=\left[\frac{\varepsilon}{(b-a)^2}\right]+1$$

وجود n_0 يعني وجود تقسيم P_{n_0} أي:

$$\forall\varepsilon>0,\exists P_{n_0}\in\mathscr{P}_{a,b};\ \overline{R}(f,P_{n_0})-\underline{R}(f,P_{n_0})\leq\varepsilon$$

ينتج من هذا القول أن f ريمان كمول على $[a,b]$.

بجعل n يؤول إلى ما لا نهاية في حساب $\underline{R}$ أو $\overline{R}$ نجد:

$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \lim_{n\to+\infty} \overline{R}(f,P_n) = ba - a^2 + \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \lim_{n\to+\infty} \underline{R}(f,P_n) = \underline{\int_a^b} f\,dx$$

ومنه

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

3.1.1 تمارين حول تكامل ريمان

1. اثبت أن كل تابع رتيب على مجال متراص $[a,b]$ قابل للمكاملة حسب ريمان على هذا المجال.
2. أحسب، مستخدما المجاميع السفلى أو العليا لريمان، التكاملات الآتية:

$$\int_a^b x\,dx\ ,\ \int_a^b x^2 dx\ ,\ \int_a^b e^x dx\ ,\ \int_a^b \frac{dx}{x^2}$$

حيث $[0<a<b]$.

3. استخدم تعريف التكامل $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$ بواسطة المجاميع لتحسب النهاية:

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{2n}\right\}$$

واحسب، مستعملا تكامل تابع ملائم، النهاية:

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+....+\frac{n}{2n^2}\right\}$$

4. أثبت أنه إذا كان f تابعا ريمان كمولا على $[a,b]$ وإذا وجد عددان m و M بحيث $0<m<f<M$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b \frac{1}{f}$ موجود.

5. ليكن $f: I=[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعا معرفا كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in I\bigcap\mathbb{Q} \\ 1+x & x\in I\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

هل التابع f ريمان كمول على I؟

نفس السؤال من أجل التابع: $g:I\longrightarrow\mathbb{R}$ مع

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}x^2 & x\in I\bigcap\mathbb{Q} \\ \sqrt{x} & x\in I\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

.

2.1 مفهوم النهايات العليا والسفلى

1.2.1 حالة الأعداد

لتكن $\{x_n\}_{n\geq 1}$ متتالية من $\mathbb{R}$. نعرف النهاية السفلى لهذه المتتالية والتي نرمز لها بـــ $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$ أو $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ كما يلي :

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \sup_{n\geq 1}\left(\inf_{k\geq n} x_k\right)$$

ونعرف النهاية العليا لها والتي نرمز لها بـــ $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$ أو $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ كما يلي :

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n} x_k\right)$$

مثال 5.1

نعتبر المتتالية : $x_n = (-1)^n$ ولنقوم بحساب كل من النهاية السفلى والعليا لهذه المتتالية.

من أجل n مثبت كيفي لدينا :

$$\begin{aligned}\inf_{k\geq n} x_k &= \inf\{x_k, k\geq n\} = \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}\\ &= \begin{cases}\inf\{1,-1,1,-1,.....\}; n = 2p\\ \inf\{-1,1,-1,1,.....\}; n = 2p+1\end{cases}\\ &= -1\end{aligned}$$

أي

$$\forall n \geq 1, \quad \inf_{k \geq n} x_k = -1$$

ومنه

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\geq 1}\left(\inf_{k\geq n} x_k\right) = \sup\left\{\inf_{k\geq n} x_k, n\geq 1\right\} = -1$$

ثم إنه من أجل n مثبت كيفي لدينا:

$$\sup_{k\geq n} x_k = \sup\{x_k, k\geq n\} = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}$$
$$= \begin{cases} \sup\{1,-1,1,-1,.....\};\ n = 2p \\ \sup\{-1,1,-1,1,.....\};\ n = 2p+1 \end{cases}$$
$$= 1$$

أي

$$\forall n \geq 1, \quad \sup_{k \geq n} x_k = 1$$

ومنه

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n} x_k\right) = \inf\left\{\sup_{k\geq n} x_k, n\geq 1\right\} = 1$$

مثال 6.1

كما فعلنا في المثال الأول لنحسب النهاية السفلى والعليا من أجل المتتالية $y_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$.

ليكن n مثبت من $\mathbb{N}^*$

$$\inf_{k\geq n} y_k = \inf\{y_k, k\geq n\} = \inf\{y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, ...\}$$

$$= \begin{cases} \inf\left\{2+\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n+1}, 2+\frac{1}{n+2}, ...\right\}; \; n=2p \\ \inf\left\{2-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n+1}, 2-\frac{1}{n+2}, ...\right\}; n=2p+1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2-\frac{1}{n+1}; \quad n=2p \\ 2-\frac{1}{n} \quad ; \quad n=2p+1 \end{cases}$$

نضع $z_n = \inf\limits_{k\geq n} y_k$ ولنحسب بعض حدود المتتالية z_n :

$$z_1 = 2-\frac{1}{1},\; z_2 = 2-\frac{1}{3},\; z_3 = 2-\frac{1}{3},\; z_4 = 2-\frac{1}{5},\; z_5 = 2-\frac{1}{5}, ...$$

نلاحظ أن

$$\sup_{n\geq 1}\left(\inf_{k\geq n} y_k\right) = \sup_{n\geq 1}\left\{2-\frac{1}{2n+1}\right\} = 2$$

أي

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} y_n = 2$$

وبنفس الطريقة نجد أن

$$\sup_{k\geq n} y_k = \begin{cases} 2+\frac{1}{n} \quad ; \quad n=2p \\ 2+\frac{1}{n+1}; \quad n=2p+1 \end{cases}$$

ومنه

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n = \inf_{n\geq 1}\left\{2+\frac{1}{2n}\right\} = 2$$

ملاحظة:

لتكن $\{x_n\}_{n\geq 1}$ متتالية أعداد حقيقية. بوضع $\forall n,\ y_n = \inf_{k\geq n} x_k$، نلاحظ أن $\{y_n\}_{n\geq 1}$ متتالية من $\overline{\mathbb{R}}$ حيث $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ ومتزايدة:

$$y_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\} \leq \inf\{x_{n+1}, x_{n+2}, ...\} = y_{n+1}$$

ومنه يمكن كتابة ما يلي :

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \sup_{n\geq 1} y_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{k\geq n} x_k\right)$$

باستدلال مماثل يمكن أن نجد ما يلي:

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{k\geq n} x_k\right)$$

2.2.1 حالة المجموعات

لتكن $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية من أجزاء مجموعة X. نعرف النهاية السفلى لهذه المتتالية والتي يرمز لها بـ $\liminf_{n\to+\infty} A_n$ أو $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ كما يلي:

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)$$

كما نعرف النهاية العليا لها والتي يرمز لها بـ $\limsup_{n\to+\infty} A_n$ أو $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$

كما يلي:

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$$

مثال 7.1

لتكن $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية من أجزاء مجموعة X بحيث أن $A_{2n}=B$ و $A_{2n+1}=C$ حيث A و B أجزاء من X.

من أجل n مثبت يمكن كتابة:

$$\bigcap_{k\geq n} A_k = \begin{cases} B\cap C\cap B\cap C.... & n=2p \\ C\cap B\cap C\cap B.... & n=2p+1 \end{cases}$$
$$= B\cap C$$

أي

$$\forall n,\quad \bigcap_{k\geq n} A_k = B\cap C$$

ومنه

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right) = (B\cap C)\cup(B\cap C)\cup....$$
$$= B\cap C$$

ودائما من أجل n مثبت وبنفس الطريقة السابقة نجد:

$$\bigcup_{k\geq n} A_k = B\cup C$$

ومنه

$$\bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) = (B\cup C)\cap(B\cup C)\cap......$$
$$= B\cup C$$

3.2.1 تمارين حول النهايات العليا والسفلى

1. أحسب النهايتين العليا والسفلى لمتتاليتين المعطاتين بحديهما العام كما يلي : $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n},\ b_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}$

2. أثبت أنه حتى تتقارب المتتالية الحقيقية $\{x_n\}_{n\geq 1}$ نحو l يلزم ويكفي أن يكون لدينا :

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \liminf_{n\to+\infty} x_n = l$$

3. أثبت من أجل كل متتاليتين حقيقيتين ومحدودتين $\{a_n\}_{n\geq 1}$ و $\{b_n\}_{n\geq 1}$ أن:

$$\begin{aligned}
\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to+\infty} b_n &\leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \\
&\leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to+\infty} b_n \\
&\leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to+\infty} b_n
\end{aligned}$$

4. لتكن $\{x_n\}_{n\geq 1}$ و $\{y_n\}_{n\geq 1}$ متتاليتين حقيقيتين بحيث أن $\forall n \geq 1,\ x_n \leq y_n$

بين أن:

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} y_n,\ \ \underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} y_n$$

5. أحسب النهايتين العليا والسفلى لمتتالية أجزاء $\mathbb{R}$ التالية :

a. $\{A_n\}_n$ بحيث $A_{2n+1} = [1,2],\ A_{2n} = [0,1]$

b. $\{B_n\}_n$ بحيث $B_n = \left[0, 1 + \frac{(-1)^n}{n}\right]$

6. لتكن X مجموعة و $\{E_n\}_n$ و $\{F_n\}_n$ متتاليتين من أجزائها، أثبت أن:

$$\left(\underline{\lim}_{n\to+\infty} E_n\right) \cup \left(\underline{\lim}_{n\to+\infty} F_n\right) \subset \underline{\lim}_{n\to+\infty} (E_n \cup F_n) \subset \underline{\lim}_{n\to+\infty} (E_n) \cup \left(\overline{\lim}_{n\to+\infty} F_n\right)$$
$$\subset \overline{\lim}_{n\to+\infty} (E_n \cup F_n) = \left(\overline{\lim}_{n\to+\infty} E_n\right) \cup \left(\overline{\lim}_{n\to+\infty} F_n\right)$$

وأن:

$$\left(\underline{\lim}_{n\to+\infty} E_n\right) \cap \left(\underline{\lim}_{n\to+\infty} F_n\right) = \underline{\lim}_{n\to+\infty} (E_n \cap F_n) \subset \underline{\lim}_{n\to+\infty} (E_n) \cap \left(\overline{\lim}_{n\to+\infty} F_n\right)$$
$$\subset \overline{\lim}_{n\to+\infty} (E_n \cap F_n) \subset \left(\overline{\lim}_{n\to+\infty} E_n\right) \cap \left(\overline{\lim}_{n\to+\infty} F_n\right)$$

2 الجبور والعشائر

0.2 تمهيد

لتكن X مجموعة و $\mathcal{P}(X)$ مجموعة أجزائها.

نقول عن مجموعة $\mathscr{A}$ إنها فئة (أسرة) من أجزاء X إذا وفقط إذا حققت:

$$\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$$

أي أن $\mathscr{A}$ هي مجموعة وكل عنصر منها جزءا من X.

نرمز لفئة المجموعات عادة بالكيفية الآتية:

$$\mathscr{A}\ \mathscr{B}\ \mathscr{C}\ \mathscr{D}\ \mathscr{E}\ \mathscr{F}\ \mathscr{G}\ \mathscr{H}\ \mathscr{I}\ \mathscr{J}\ \mathscr{K}\ \mathscr{L}\ \mathscr{M}\ \mathscr{N}\ \mathscr{O}\ \mathscr{P}\ \mathscr{Q}$$
$$\mathscr{R}\ \mathscr{S}\ \mathscr{T}\ \mathscr{U}\ \mathscr{V}\ \mathscr{W}\ \mathscr{X}\ \mathscr{Y}\ \mathscr{Z}$$

مثال 1.2

نعتبر المجموعة $X = \mathbb{N}$ ولتكن الجماعتين:

$$\mathscr{B} = \{\{n\}, n \in \mathbb{N}\} \text{ ، } \mathscr{A} = \{\{0,1\}, 2\mathbb{N}, \{0\}\}$$

إن $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ فئتين من أجزاء X.

لاحظ: إذا اعتبرنا A جزءا من X و y عنصر من الجزء A فيمكن كتابة:

$$y \in A, A \in \mathscr{A}, A \in \mathscr{A} \Rightarrow A \in \mathcal{P}(X)$$

تعاريف 1.2

لتكن $\mathscr{F}$ فئة من أجزاء مجموعة X.

- نقول عن $\mathscr{F}$ أنها مستقرة بالنسبة للتقاطع المنته إذا تحقق ما يلي:

$$\forall A, B \in \mathscr{F} \Rightarrow A \bigcap B \in \mathscr{F}$$

وينتج بالتدريج أن:

$$\forall \{A_i\}_{1 \le i \le n} \subset \mathscr{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}$$

- نقول عن $\mathscr{F}$ أنها مستقرة بالنسبة للتقاطع القابل للعد (العدود) إذا تحقق ما يلي:

$$\{A_n\}_{n \ge 1} \subset \mathscr{F} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$$

- نقول عن $\mathscr{F}$ أنها مستقرة بالنسبة للاتحاد المنته إذا تحقق ما يلي:

$$\forall A, B \in \mathscr{F} \Rightarrow A \bigcup B \in \mathscr{F}$$

وينتج بالتدريج أن:

$$\{A_i\}_{1 \le i \le n} \subset \mathscr{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}$$

- نقول عن $\mathscr{F}$ أنها مستقرة بالنسبة للاتحاد القابل للعد (العدود) إذا تحقق ما يلي:

$$\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathscr{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$$

- نقول عن $\mathscr{F}$ أنها مستقرة بالنسبة للفرق إذا تحقق ما يلي:

$$\forall A, B \in \mathscr{F} \Rightarrow (A - B) \in \mathscr{F}$$

- نقول عن $\mathscr{F}$ أنها مستقرة بالنسبة للفرق التناظري (جمع بوول Boole) إذا تحقق ما يلي:

$$\forall A, B \in \mathscr{F} \Rightarrow A \Delta B \in \mathscr{F}$$

مع

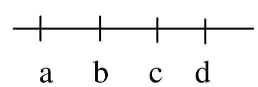
$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

مثال 2.2

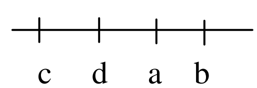
نعتبر المجموعة $X = \mathbb{R}$ ، ولتكن $\mathscr{I}_0$ فئة كل المجالات المفتوحة.

- إن $\mathscr{I}_0$ مستقرة بالنسبة للتقاطع المنته لأن:

ليكن $]a,b[\in \mathscr{I}_0$ ، $]c,d[\in \mathscr{I}_0$ مع $-\infty \leq a,c;\ b,d \leq +\infty$ لدينا عدة حالات:

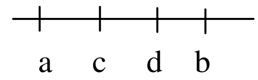


هنا $]a,b[\cap]c,d[= \varnothing \in \mathscr{I}_0$

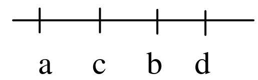


هنا $]a,b[\cap]c,d[= \varnothing \in \mathscr{I}_0$

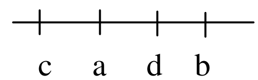
هنا $\left]a,b\right[\cap\left]c,d\right[=\left]c,d\right[\in\mathscr{I}_0$



هنا $\left]a,b\right[\cap\left]c,d\right[=\left]c,b\right[\in\mathscr{I}_0$

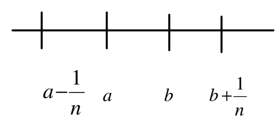


هنا $\left]a,b\right[\cap\left]c,d\right[=\left]a,d\right[\in\mathscr{I}_0$



لكن $\mathscr{I}_0$ ليست مستقرة بالنسبة للتقاطع العدود لأن:

هنا $\bigcap_{n\geq 1}\underbrace{\left]a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}\right[}_{\in\mathscr{I}_0\ \forall n}=[a,b]\notin\mathscr{I}_0$



من الواضح أن $\bigcap_{n\geq 1}\left]a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}\right[\subset[a,b]$ ثم أنه إذا كان:

$$x\in\bigcap_{n\geq 1}\left]a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}\right[\Leftrightarrow a-\frac{1}{n}<x<b+\frac{1}{n},\forall n\geq 1\Rightarrow a\leq x\leq b$$

- إن $\mathscr{I}_0$ ليست مستقرة بالنسبة للاتحاد المنته:

$$\underbrace{\left]1,2\right[}_{\in\mathscr{I}_0}\cup\underbrace{\left]3,4\right[}_{\in\mathscr{I}_0}\notin\mathscr{I}_0$$

- إن $\mathscr{I}_0$ ليست مستقرة بالنسبة للفرق:

$$\left]1,4\right[-\left]2,3\right[=\left]1,2\right]\cup\left[3,4\right[\notin\mathscr{I}_0$$

1.2 جبر المجموعات

لتكن X مجموعة غير خالية.

1.1.2 الحلقة

قضية 1.2

إن $\left(\mathcal{P}(X),\Delta,\bigcap\right)$ تتمتع ببنية الحلقة صفرها $\varnothing$ ووحدتها X.

$$\varnothing\Delta A = A\Delta\varnothing = A\,;\; X \cap A = A \cap X = A$$

الإثبات يترك كتمرين.

قضية 2.2

حتى تتمتع فئة $\mathscr{A}$ غير خالية من أجزاء X ببنية الحلقة يكفي أن تكون مستقرة بالنسبة للإتحاد المنته والفرق.

الإثبات: البرهان يأتي على مرحلتين.

المرحلة الأولى:

$\mathscr{A}$ مستقرة بالنسبة للفرق التناظري والتقاطع المنته يستلزم أن $\mathscr{A}$ حلقة جزئية من $\mathcal{P}(X)$ (وبذلك فهي حلقة).

حتى تكون $\mathscr{A}$ حلقة جزئية من $\mathcal{P}(X)$ يكفي أن تحقق ما يلي: $(\mathscr{A},\Delta)$ زمرة جزئية و $\mathscr{A}$ مستقرة بالنسبة للتقاطع،

لدينا

$$\forall A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow \begin{cases} A\Delta B \in \mathscr{A} \\ A \cap B \in \mathscr{A} \end{cases}$$

لكن نظير B بالنسبة لـ Δ هو B نفسه ومنه فإن:

$$\forall A , B \in \mathscr{A} \Rightarrow A\,\Delta B \in \mathscr{A}$$

تعني أن $\mathscr{A}$ زمرة جزئية و

$$\forall A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{A}$$

تعني استقرار $\mathscr{A}$ بالنسبة للتقاطع، ومنه فالمرحلة الأولى محققة.

المرحلة الثانية:

$\mathscr{A}$ مستقرة بالنسبة للإتحاد المنته والفرق يستلزم $\mathscr{A}$ مستقرة بـــ Δ و $\cap$.

لنفرض أن $\mathscr{A}$ مستقرة بالنسبة للإتحاد المنته والفرق ولتكن A و B من $\mathscr{A}$.

$$A \Delta B = \underbrace{(A-B)}_{\in \mathscr{A}} \cup \underbrace{(B-A)}_{\in \mathscr{A}} \in \mathscr{A}$$

($\mathscr{A}$ مستقرة بالنسبة للإتحاد)

$$A \bigcap B = \underbrace{A \bigcup B}_{\in \mathscr{A}} - \underbrace{\left(\underbrace{(A-B)}_{\in \mathscr{A}} \cup \underbrace{(B-A)}_{\in \mathscr{A}} \right)}_{\in \mathscr{A}} \in \mathscr{A}$$

2.1.2 الجبر

تعريف: نسمي جبرا على X كل حلقة واحدية أي كل حلقة تحتوي على X.

قضية 3.2

لتكن $\mathscr{A}$ فئة غير خالية من أجزاء X. حتى تكون $\mathscr{A}$ جبرا على X يلزم ويكفي أن يتحقق ما يأتي:

$$\forall A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{A} \quad (1)$$

$$\forall A \in \mathscr{A} \quad A^c \in \mathscr{A} \quad \left(A^c = \complement_X^A\right) \qquad (2)$$

الإثبات:

نفرض أن $\mathscr{A}$ جبرا على X. حسب (**القضية 2.2**) فإن (1) محققة. ليكن الآن $A \in \mathscr{A}$ لدينا: $A^c = \left(X - A\right) \in \mathscr{A}$ لأن $X, A \in \mathscr{A}$ وحسب (**القضية 2.2**) نصل إلى (2).

نفرض الآن أن $\varnothing \neq \mathscr{A} \subset P(\mathrm{x})$ وتحقق (1) و (2) ولنتأكد من أن $\mathscr{A}$ جبرا (حلقة واحدية).

(1) يستلزم أن $\mathscr{A}$ مستقرة بالنسبة للإتحاد. ليكن A و B من $\mathscr{A}$:

$$A - B = A \bigcap C_X^B = \left(A^c \bigcup B\right)^c \in \mathscr{A}$$

ومنه $\mathscr{A}$ حلقة.

هل $X \in \mathscr{A}$ ؟ بما أن $\mathscr{A} \neq \varnothing$ فإنه يوجد $A \in \mathscr{A}$. من (2) $\left(A^c \in \mathscr{A}\right)$ ومن (1) $\left(X = A \bigcup A^c \in \mathscr{A}\right)$

ملاحظة:

يمكن استبدال الشرط (1) في (**القضية 3.2**) بالشرط $(1')$

$$\forall A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \bigcap B \in \mathscr{A} \qquad (1')$$

لأن

$$A \bigcup B = \left(A^c \bigcap B^c\right)^c \wedge A \bigcap B = \left(A^c \bigcup B^c\right)^c$$

▪

قضية 4.2

لتكن $\mathscr{C}$ فئة غير خالية من أجزاء مجموعة X. يوجد عندئذ جبرا أصغريا $\mathscr{A}$ يحتوي على $\mathscr{C}$ (بمعنى أنه إذا كان $\mathscr{B}$ جبرا يحتوي على $\mathscr{C}$ فإن $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$). يدعى $\mathscr{A}$ بالجبر المولد من $\mathscr{C}$.

الإثبات:

لتكن $\mathscr{F}$ جماعة كل الجبور $\mathscr{B}$ (المكونة من أجزاء X) التي تحوي على $\mathscr{C}$.

إن $\mathscr{F} \neq \varnothing$ لأن $\mathcal{P}(X) \in \mathscr{F}$. لنضع $\mathscr{A} = \bigcap_{\mathscr{B} \in \mathscr{F}} \mathscr{B}$.

إن :

1. $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$ لأن $(\forall \mathscr{B} \in \mathscr{F}, \mathscr{C} \subset \mathscr{B})$
2. $\mathscr{A}$ جبرا لأن:

- $\mathscr{A} \neq \varnothing$ لأنها تحتوي على $\mathscr{C}$.
- $(A \in \mathscr{A}) \wedge (B \in \mathscr{A}) \Rightarrow A, B \in \mathscr{B}; \forall \mathscr{B} \in \mathscr{F}$

$$\Rightarrow A \cup B \in \mathscr{B}; \forall \mathscr{B} \in \mathscr{F} \Rightarrow A \cup B \in \bigcap_{\mathscr{B} \in \mathscr{F}} \mathscr{B} = \mathscr{A}$$

- $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A \in \mathscr{B}, \forall \mathscr{B} \in \mathscr{F}$ ($\mathscr{B}$ جــــــبر)

$$\Rightarrow A^c \in \mathscr{B}, \forall \mathscr{B} \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$$

▪

ومن تعريف $\mathscr{A}$ نرى أنه إذا كان $\mathscr{B}$ جبرا يحتوي على $\mathscr{C}$ فإن $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ (لأن $\mathscr{B} \in \mathscr{F}$).

قضية 5.2

ليكن $\mathscr{A}$ جبر مجموعات و $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية عناصر من $\mathscr{A}$، توجد عندئذ متتالية $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ من عناصر $\mathscr{A}$ غير متقاطعة مثنى مثنى تحقق $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ مع $\forall n \geq 1; B_n \subset A_n$.

(**لاحظ** أن $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ لا ينتمي بالضرورة إلى $\mathscr{A}$)

الإثبات:

لتكن المتتالية $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بالتدريج على النحو الآتي:

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_n = A_n \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right)^c, \; n \geq 2 \end{cases}$$

$$B_1 = A_1,\, B_2 = A_2 \cap A_1^c = A_2 - A_1,\, B_3 = A_3 \cap \left(\bigcup_{j=1}^{2} A_j\right)^c = A_3 - (A_1 \cup A_2)....$$

غير متقاطعة B_n ثم إن المجموعات $B_n \subset A_n$ و $B_n \in \mathscr{A}$، من أجل كل n

لدينا: $m < n$ مع B_m و B_n لأنه من أجل

$$B_m \cap B_n \subset A_m \cap B_n = A_m \cap A_n \cap A_1^c \cap A_2^c \cap ... \cap A_{n-1}^c = \varnothing$$

ولدينا طبعا $\bigcup_n B_n \subset \bigcup_n A_n$ لأن $B_n \subset A_n$

ليكن الآن:

$$x \in \bigcup_n A_n \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*,\; x \in A_n$$

ليكن n_0 أصغر عدد طبيعي بحيث $x \in A_{n_0}$، إذا كان $n_0 = 1 \Leftarrow x \in B_1$

وإذا كان $1 < n_0$ فإن

$$\left(x \notin A_{n_0-1}\right) \wedge \left(x \notin A_{n_0-2}\right) \wedge .... \wedge \left(x \notin A_1\right)$$

وهذا يستلزم أن

$$x \in A_{n_0} \cap \left(A_{n_0-1}\right)^C \cap \left(A_{n_0-2}\right)^C \cap .... \cap \left(A_1\right)^C = B_{n_0}$$

ومنه فإن

$$x \in \bigcup_n B_n$$

3.1.2 السيغما (σ) جبور أو العشائر

تعريف 2.2

نسمي σ – جبرا أو عشيرة على مجموعة X كل جبر مجموعات $\mathscr{A}$ يتمتع بخاصية الجمعية العدودة التي تعني أن كل إتحاد عدود لعناصر من $\mathscr{A}$ يبقى في $\mathscr{A}$.

$$\forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathscr{A} \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{A}$$

ينتج من هذا التعريف أنه إذا كانت $\mathscr{A}$ عشيرة فإن:

$$\forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathscr{A} \Rightarrow \bigcap_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{A}$$

نتيجة:

حتى تكون جماعة $\mathscr{A}$ من أجزاء مجموعة X عشيرة على X يكفي التأكد من الخواص الآتية:

1. $\mathscr{A} \neq \varnothing$.
2. $\forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathscr{A} \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{A}$
3. $\forall A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$

أمثلة 3.2

1. $\mathcal{P}(X)$ عشيرة على X.
2. من أجل $X = \mathbb{N}$، $\mathscr{A} = \{\varnothing, \mathbb{N}, 2\mathbb{N}, 2\mathbb{N}+1\}$ عشيرة على $\mathbb{N}$.
3. ليكن (X, τ) فضاءا تبولوجيا إن τ ليست على العموم عشيرة على X.

4. $\mathscr{A}=\{\varnothing,\mathbb{R},2\mathbb{N},2\mathbb{N}+1\}$ ليست عشيرة على $\mathbb{R}$.

قضية 6.2

لتكن $\mathscr{G}$ فئة غير خالية من أجزاء مجموعة X، توجد عندئذ عشيرة أصغرية $\mathscr{A}$ تحتوي على $\mathscr{G}$ (تدعى $\mathscr{A}$ بالعشيرة المولدة من $\mathscr{G}$) ونرمز لها بـــ $\sigma(\mathscr{G})$.

إن إثبات هذه القضية يشبه إثبات **القضية 4.2** .

4.1.2 العشيرة البوريلية

تعريف 3.2

ليكن (X,τ) فضاءا توبولوجيا، نسمي عشيرة بوريلية[4] على X نسبة إلى τ ونرمز لها بـــ $B_\tau(X)$ العشيرة المولدة من الفئة τ لأجزاء X المفتوحة. نسمي عناصر هذه العشيرة بالمجموعات البوريلية.

قضية 7.2

إن العشيرة $B_\tau(X)$ تنطبق مع العشيرة المولدة من $\mathscr{F}$ فئة أجزاء X المغلقة.

الإثبات:

لنرمز بـــ $\mathscr{F}^*$ إلى العشيرة المولدة من $\mathscr{F}$. إن $\tau\subset\mathscr{F}^*$ (من كون عناصر τ هم متممات لعناصر $\mathscr{F}$) ومنه فإن $B_\tau(X)\subset\mathscr{F}^*$. لكن

---

[4] بوريل: رياضياتي فرنسي 1871-1956 (Borel Emil Félix Edward Justin) احد مؤسسي نظرية القياس، واضع رفقة جوردان نظرية قياس المجموعات (1897) معلن تكامل لوبيغ (1901). له أعمال هامة: حول التوابع بمتغيرات عقدية، حول دراسة الأعداد الحقيقية والحساب ألاحتمالاتي.

$\mathscr{F} \subset B_\tau(X)$ (لأن عناصر $\mathscr{F}$ هم متممات لعناصر من τ) ومنه $\mathscr{F}^* \subset B_\tau(X)$.

المجموعات G_δ و F_σ

ليكن X فضاءا توبولوجيا، نقول عن جزء E من X إنه من نوع G_δ إذا كان $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ مع V_n أجزاء مفتوحة من X. ونقول عن E أنه من نوع F_σ إذا كان $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ مع F_n أجزاء مغلقة من X.

إن المجموعات من نوعي G_δ وF_σ مجموعات بوريلية.

ليكن E من نوع G_δ هذا يستلزم أن $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ وهذا بدوره يستلزم $E^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n^c$ ومنه فأن E^c من النوع F_σ

ومتممة مجموعة من النوع F_σ هي مجموعة من النوع G_δ.

أمثلة 4.2

نعتبر $\mathbb{R}$ مزود بالتوبولوجيا الاعتيادية

- كل أجزاء $\mathbb{R}$ المفتوحة من النوع G_δ.
- كل أجزاء $\mathbb{R}$ المغلقة من النوع F_σ.
- $]a,b[$ من النوع F_σ لأن $]a,b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]$.
- $[a,b[$ من النوع F_σ لأن $[a,b[=]a,b[\cup \{a\}$.
- $[a,b[$ من النوع G_δ أيضا لأن $[a,b[= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left]a-\frac{1}{n}, b\right[$.

- $[a,b]$ من النوع G_δ لأن $\left]a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}\right[$ $[a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}$.
- $\mathbb{Q}$ من النوع F_σ لأن $\left(\mathbb{Q}=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}\right)$.

5.1.2 الفئات الرتيبة

تعريف 4.2

لتكن $\{A_n\}$ متتالية متزايدة من أجزاء X، نسمي نهاية هذه المتتالية إتحاد الأجزاء A_n ونكتب:

$$A_\infty=\lim\uparrow A_n=\bigcup_n A_n\ ,\ \ A_n\subset A_{n+1}$$

- إذا كانت $\{B_n\}$ متتالية متناقصة من أجزاء X، نسمي نهاية هذه المتتالية تقاطع الأجزاء B_n ونكتب:

$$B_\infty=\lim\downarrow B_n=\bigcap_n B_n\ ,\ \ B_{n+1}\subset B_n$$

نقول عن متتالية مجموعات إنها رتيبة إذا كانت متناقصة أو متزايدة.

تعريف 5.2

نسمي فئة رتيبة كل فئة $\mathscr{M}$ من أجزاء X، تشمل على نهايات كل متتالياتها الرتيبة. أي من أجل كل متتالية $\{A_n\}$ رتيبة عناصرها من $\mathscr{M}$ فإن:

$$A_\infty=\lim A_n\in\mathscr{M}$$

قضية 8.2

كل عشيرة فئة رتيبة.

الإثبات

- لتكن $\{A_n\}_{n\geq 0}$ متتالية متزايدة من عشيرة $\mathscr{A}$. إذن $\bigcup_n A_n \in \mathscr{A}$
- لتكن $\{A_n\}_{n\geq 0}$ متتالية متناقصة من عشيرة $\mathscr{A}$. إذن $\bigcap_n A_n \in \mathscr{A}$

قضية 9.2

كل تقاطع لفئات رتيبة فئة رتيبة.

الإثبات

لتكن $\mathscr{F}$ جماعة كل الفئات الرتيبة نضع $\mathscr{M} = \bigcap_{\mathscr{B}\in\mathscr{F}} \mathscr{B}$. إن $\mathscr{M}$ فئة رتيبة لأنه من أجل $\{A_n\}_n$ متتالية متزايدة (متناقصة) من $\mathscr{M}$ تكون $\{A_n\}_n$ متتالية متزايدة (متناقصة) من $\mathscr{B}$ مهما كان $\mathscr{B}\in\mathscr{F}$، ولكن $\mathscr{B}$ فئة رتيبة إذن $\bigcup_n A_n$ $\left(\bigcap_n A_n\right)$ ينتمي إلى $\mathscr{B}$ من أجل كل $\mathscr{B}\in\mathscr{F}$. أي أن $\bigcup_n A_n$ $\left(\bigcap_n A_n\right)$ ينتمي إلى $\mathscr{M}$.

نتيجة

ينتج من القضية السابقة أنه من أجل كل فئة $\mathscr{E}$ من المجموعات الجزئية من X، توجد فئة رتيبة أصغرية $\mathscr{M}$ تحتوي على $\mathscr{E}$ والتي تدعى بالفئة الرتيبة المولدة من $\mathscr{E}$.

قضية 10.2

ليكن $\mathscr{A}$ جبرا على X، إذا كان مغلقا (مستقرا) نسبة إلى النهايات المتزايدة (بمعنى إذا كانت $\{A_n\}_n$ متتالية متزايدة من $\mathscr{A}$ فإن $\lim_n A_n \in \mathscr{A}$) فإنه عشيرة.

الإثبات

بما أن $\mathscr{A}$ جبرا فيكفي التأكد من أن:

$$\forall \{A_n\}_n \subset \mathscr{A} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathscr{A}$$

لتكن

$$\{A_n\}_n \subset \mathscr{A}$$

نضع

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{A}$$

إن $\{B_n\}_n$ متتالية متزايدة من $\mathscr{A}$ ومنه فإن $\lim_n B_n \in \mathscr{A}$ أي $\bigcup_n A_n \in \mathscr{A}$.

6.1.2 تمارين حول الجبور والعشائر

1. لتكن X مجموعة غير منتهية، نعتبر الفئة. $\mathscr{A}=\{A\subset X, cardA<+\infty\}$. تأكد من $\mathscr{A}$ حلقة، هل هي جبر؟

2. لتكن X مجموعة و A جزء منها أي $A\subset X$. عين الجبر المولد بـــ $\{A\}$ ثم العشيرة المولدة بـــ $\{A\}$.

3. أثبت أن عدد عناصر كل جبر منته هو دائما من قوى 2

4. ليكن (X,τ) فضاء طبولوجيا منفصلا و K مجموعة أجزاء X المتراصة. نشير بـــ $\mathscr{B}_K(X)$ إلى العشيرة المولدة من K وبـــ $\mathscr{B}_\tau(X)$ إلى العشيرة البوريلية (المولدة من τ).

    i. بين أن $\mathscr{B}_K(X)\subset\mathscr{B}_\tau(X)$

    ii. أثبت أن الفئة :

$$\mathscr{A}=\{A\subset X\ ,\ A\cap k\in\mathscr{B}_K(X),\ \forall k\in K\}$$

تحتوي على كل أجزاء X المغلقة وتشكل عشيرة على X.

5. لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية مزودة بالتوبولوجيا المألوفة (الاعتيادية) . نذكر بأن كل مفتوح من $\mathbb{R}$ هو اتحاد عدود لمجالات مفتوحة وغير متقاطعة مثنى مثنى.

نعتبر المجموعات الآتية:

مجموعة كل مجالات $\mathbb{R}$.

مجموعة كل مجالات $\mathbb{R}$ المفتوحة.

مجموعة كل مجالات $\mathbb{R}$ من الشكل $]-\infty,\alpha[$, $\alpha \in \mathbb{R}$

مجموعة كل مجالات $\mathbb{R}$ من الشكل $]\alpha,+\infty[$, $\alpha \in \mathbb{R}$

مجموعة كل مجالات $\mathbb{R}$ ذات طرفين ناطقين.

مجموعة أجزاء $\mathbb{R}$ المتراصة.

أثبت أن كل جماعة من هذه الجماعات تولد عشيرة بوريل على $\mathbb{R}$.

3 الفضاءات القيوسة

1.3 الصورة العكسية لعشيرة بتطبيق

لتكن X و X' مجموعتين كيفيتين غير خاليتين و

$$f : X \to X'$$

تطبيقا ولتكن $\mathscr{F}'$ فئة من أجزاء X' أي $\mathscr{F}' \subset \mathcal{P}(X')$.

نضع

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathscr{F}') &= \left\{ A \in \mathcal{P}(X);\ A = f^{-1}(A'),\ A' \in \mathscr{F}' \right\} \\ &= \left\{ f^{-1}(A'),\ A' \in \mathscr{F}' \right\} \end{aligned}$$

قضية 1.3

لتكن $\mathscr{A}'$ عشيرة على X'. عندئذ تكون $f^{-1}(\mathscr{A}')$ عشيرة على X تدعى عشيرة الصورة العكسية لـــ $\mathscr{A}'$ وفق f نشير لها بـــ $\mathscr{A} = f^{-1}(\mathscr{A}')$.

الأثبات:

لتكن $\mathscr{A}'$ عشيرة على X' و $f : X \to X'$ تطبيقا عندئذ يكون لدينا:

1. $f^{-1}(\mathscr{A}') \neq \varnothing$ لأنها تحتوي على $\varnothing$ من كون $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

2. لتكن $A \in f^{-1}(\mathscr{A}')$ هذا يستلزم

$$\exists A' \in \mathscr{A}';\ A = f^{-1}(A')$$

ومنه

$$\complement_X^A = \complement_X^{f^{-1}(A')} = f^{-1}\left(\complement_{X'}^{A'}\right)$$

مع $\complement_{X'}^{A'} \in \mathscr{A}'$ هذا يستلزم أن $\complement_X^A \in f^{-1}(\mathscr{A}')$.

3. لتكن $\{A_n\}_n \subset f^{-1}(\mathscr{A}')$ هل $\bigcup_n A_n \in f^{-1}(\mathscr{A}')$ ؟

لدينا

$$\forall n,\ A_n \in f^{-1}(\mathscr{A}') \Rightarrow \forall n, \exists A_n^{'} \in \mathscr{A}';\ A_n = f^{-1}(A_n^{'})$$

ومنه

$$\bigcup_n A_n = \bigcup_n f^{-1}(A_n^{'}) = f^{-1}(\bigcup_n A_n^{'}) \in \mathscr{A}$$

لأن $\bigcup_{i=1}^{n} A_n^{'} \in \mathscr{A}'$ من كون $\mathscr{A}'$ عشيرة على X'.

مثال 1.3

ليكن $B \subset X'$ و

$$\begin{aligned} i: \quad & B \to X' \\ & b \to b \end{aligned}$$

التباين القانوني.

لتكن $\mathscr{A}'$عشيرة على X'، حسب القضية السابقة إن $i^{-1}(\mathscr{A}')$ عشيرة على B. لنعين $i^{-1}(\mathscr{A}')$.

$$i^{-1}(\mathscr{A}') = \left\{ i^{-1}(A'),\ A' \in \mathscr{A}' \right\}$$

$$i^{-1}(A') = \{b \in B,\ i(b) \in A'\}$$
$$= \{b \in B,\ b \in A'\}$$
$$= B \bigcap A'$$

ومنه

$$i^{-1}(\mathscr{A}') = \{B \bigcap A',\ A' \in \mathscr{A}'\}$$

تدعى $i^{-1}(\mathscr{A}')$ بعشيرة أثر العشيرة $\mathscr{A}'$ على الجزء B.

2.3 استقرار العشيرة المولدة نسبة إلى الصورة العكسية

مبرهنة 1.3

ليكن

$$f : X \to X'$$

تطبيقا و $\mathscr{F}'$ فئة من أجزاء X'. إذا كانت $\mathscr{A}'$ هي العشيرة على X' المولدة من $\mathscr{F}'$ فإن $f^{-1}(\mathscr{A}')$ هي العشيرة على X المولدة من $f^{-1}(\mathscr{F}')$، أي

$$f^{-1}\left(\sigma_{X'}(\mathscr{F}')\right) = \sigma_X\left(f^{-1}(\mathscr{F}')\right)$$

(الرمز $\sigma_Y(\mathscr{C})$ يشير إلى العشيرة على Y المولدة بـــ $\mathscr{C}$)

الإثبات

لدينا $\mathscr{F}' \subset \mathcal{P}(X')$ و $f : X \to X'$ و

$$\mathscr{F}' \subset \sigma_{X'}(\mathscr{F}')$$

($\sigma_{X'}(\mathscr{F}')$: العشيرة على X' المولدة من $\mathscr{F}'$)

ومنه

$$f^{-1}(\mathscr{F}') \subset f^{-1}\left(\sigma_{X'}(\mathscr{F}')\right)$$

وبما أن $f^{-1}(\sigma_{X'}(\mathscr{F}'))$ عشيرة على X فإن

$$\sigma_X\left(f^{-1}(\mathscr{F}')\right) \subset f^{-1}\left(\sigma_{X'}(\mathscr{F}')\right)$$

بقي التأكد من أن:

$$f^{-1}\left(\sigma_{X'}(\mathscr{F}')\right) \subset \sigma_X\left(f^{-1}(\mathscr{F}')\right)$$

أي إثبات أنه:

$$\forall A' \in \sigma_{X'}(\mathscr{F}'),\ f^{-1}(A') \in \sigma_X\left(f^{-1}(\mathscr{F}')\right)$$

من أجل ذلك نعتبر

$$\mathscr{Y} = \left\{A' \in \sigma_{X'}(\mathscr{F}');\ f^{-1}(A') \in \sigma_X\left(f^{-1}(\mathscr{F}')\right)\right\}$$

ونبين أن:

$$\mathscr{Y} = \sigma_{X'}(\mathscr{F}')$$

1. $\mathscr{Y}$ عشيرة على X' ؟

- $\varnothing \in \mathscr{Y}$ لأن $\mathscr{Y} \neq \varnothing$

ليكن $A' \in \mathscr{Y}$ إذن

$$A' \in \sigma_{X'}(\mathscr{F}') \wedge f^{-1}(A') \in \sigma_X\left(f^{-1}(\mathscr{F}')\right)$$

إذن

$$\complement_{X'}^{A'} \in \sigma_{X'}(\mathscr{F}') \wedge \complement_X^{f^{-1}(A')} \in \sigma_X\left(f^{-1}(\mathscr{F}')\right)$$

ومنه

$$\complement_{X'}^{A'} \in \sigma_{X'}(\mathscr{F}') \wedge f^{-1}\left(\complement_{X'}^{A'}\right) \in f^{-1}(\mathscr{F}')$$

وهذا يستلزم أن

$$\complement_{X'}^{A'} \in \mathscr{Y}$$

- ليكن $\{A'_n\}_n \subset \mathscr{Y}$ هل $\bigcup_n A'_n \subset \mathscr{Y}$؟

كون $\{A'_n\}_n \subset \mathscr{Y}$ يمكن من الخطوات الآتية:

$$\begin{aligned}
\forall n, A'_n \in \mathscr{Y} &\Rightarrow \forall n, A'_n \in \sigma(\mathscr{F}') \wedge f^{-1}(A'_n) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{F}')\right) \\
&\Rightarrow \bigcup_n A'_n \in \sigma(\mathscr{F}') \wedge \bigcup_n f^{-1}(A'_n) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{F}')\right) \\
&\Rightarrow \bigcup_n A'_n \in \sigma(\mathscr{F}') \wedge f^{-1}\left(\bigcup_n A'_n\right) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathscr{F}')\right) \\
&\Rightarrow \bigcup_n A'_n \in \mathscr{Y}
\end{aligned}$$

هذا يتم إثبات كون $\mathscr{Y}$ عشيرة على X.

2. إن $\mathscr{F}' \subset \mathscr{Y}$:

$$\begin{aligned}
F' \in \mathscr{F}' &\Rightarrow F' \in \sigma(\mathscr{F}') \wedge f^{-1}(F') \in f^{-1}(\mathscr{F}') \\
&\Rightarrow F' \in \sigma(\mathscr{F}') \wedge f^{-1}(F') \in \sigma_X\left(f^{-1}(\mathscr{F}')\right) \\
&\Rightarrow F' \in \mathscr{Y}
\end{aligned}$$

3. إن $\mathscr{Y}$ عشيرة على X' تحتوي على $\mathscr{F}'$ إذن $\sigma_{X'}(\mathscr{F}') \subset \mathscr{Y}$

وبما أن $\mathscr{Y} \subset \sigma_{X'}(\mathscr{F}')$ من إنشاء $\mathscr{Y}$ فإن $\mathscr{Y} = \sigma_{X'}(\mathscr{F}')$.

تعريف 1.3

نسمي فضاءا قيوسا كل ثنائية $(X, \mathscr{A})$ مكونة من مجموعة X ومن عشيرة $\mathscr{A}$ مكونة من أجزاء X. نسمي عناصر $\mathscr{A}$ بالمجموعات القيوسة أو القابلة للقياس.

تعريف 2.3

- ليكن $(X,\mathscr{A})$ و $(X',\mathscr{A}')$ فضائين قيوسين و $f:X\to X'$

تطبيقا، نقول عن f أنه تطبيق قيوس إذا كان

$$f^{-1}(\mathscr{A}')\subset\mathscr{A}$$
$$\Leftrightarrow\quad f^{-1}(A')\in\mathscr{A}\quad,\forall A'\in\mathscr{A}'$$

- إذا كانت E مجموعة قيوسة من $(X,\mathscr{A})$، نقول عن تابع

$f:E\to X'$ أنه قيوس على E إذا كان:

$$f^{-1}(\mathscr{A}')\bigcap E\subset\mathscr{A}$$

حيث $f^{-1}(\mathscr{A}')\bigcap E=\left\{f^{-1}(A')\bigcap E,\ A'\in\mathscr{A}'\right\}$. نشير بـــ

$$\mathscr{M}\left((X,\mathscr{A}),(X',\mathscr{A}')\right)$$

إلى مجموعة التطبيقات القيوسة من $(X,\mathscr{A})$ إلى $(X',\mathscr{A}')$.

مثال 2.3

نعتبر $X=X'=\mathbb{R}$ مزود بالعشيرة البوريلية $\mathscr{B}_\tau(\mathbb{R})$، حيث τ هي التوبولوجيا الاعتيادية على $\mathbb{R}$، و $f=\chi_{\mathbb{Q}}$ الدالة المميزة لـــ $\mathbb{Q}$:

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

إن $\chi_{\mathbb{Q}}$ تابع قيوس لأن من أجل $A\in\mathscr{B}_\tau(\mathbb{R})$ لدينا:

$$\chi_{\mathbb{Q}}^{-1}(A)=\begin{cases}\mathbb{R} & 0\in A\wedge 1\in A\\ \varnothing & 0\notin A\wedge 1\notin A\\ \mathbb{Q} & 1\in A\wedge 0\notin A\\ \mathbb{Q}^C & 1\notin A\wedge 0\in A\end{cases}$$

إن $\mathbb{Q}\in\mathscr{B}_\tau(\mathbb{R})$ لأن $\mathbb{Q}=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}$ أي اتحاد عدود لمغلقات.

بما أن $\varnothing\in\mathscr{B}_\tau(\mathbb{R})$ و $\mathbb{R}\in\mathscr{B}_\tau(\mathbb{R})$ و $\mathbb{Q}\in\mathscr{B}_\tau(\mathbb{R})$ و $\mathbb{Q}^C\in\mathscr{B}_\tau(\mathbb{R})$

فإن:

$$\forall A\in\mathscr{B}_\tau(\mathbb{R}),\ \chi_{\mathbb{Q}}^{-1}(A)\in\mathscr{B}_\tau(\mathbb{R})$$

وهذا يستلزم أن $\chi_{\mathbb{Q}}$ تطبيق قيوس.

قضية 2.3

تركيب تطبيقين قيوسين تطبيق قيوس.

إثبات

ليكن f و g تطبيقين بحيث:

$$f\in\mathscr{M}\left((X,\mathscr{A}),(Y,\mathscr{B})\right)$$
$$g\in\mathscr{M}\left((Y,\mathscr{B}),(Z,\mathscr{G})\right)$$

$$X\xrightarrow{\ f\ }Y\xrightarrow{\ g\ }Z$$

إن $g\circ f$ قيوس لأن:

$$(g\circ f)^{-1}(\mathscr{G}) = f^{-1}\circ g^{-1}(\mathscr{G}) = f^{-1}\left(g^{-1}(\mathscr{G})\right) \subset f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{A}$$

حيث الاحتواء الأخير ناتج من كون f قيوس والآخر من كون g قيوس.

قضية 3.3 (معيار القابلية للقياس)

ليكن $(X,\mathscr{A})$ و $(X',\mathscr{A}')$ فضائين قيوسين وليكن $\mathscr{G}'\subset\mathscr{A}'$ جزءا مولدا لـــ $\mathscr{A}'$ عندئذ يصح التكافؤ بين:

1. $f\in\mathscr{M}\left((X,\mathscr{A}),(X',\mathscr{A}')\right)$
2. $f^{-1}(\mathscr{G}')\subset\mathscr{A}$

الإثبات

$(2\Leftarrow 1)$

ليكن $C'\in\mathscr{G}'$ إذن $C'\in\mathscr{A}'$ ومنه $f^{-1}(C')\in\mathscr{A}$ أي أن $f^{-1}(\mathscr{G}')\subset\mathscr{A}$

$(1\Leftarrow 2)$

لدينا $f^{-1}(\mathscr{G}')\subset\mathscr{A}$ و $\mathscr{A}$ عشيرة على X إذن $\sigma_X\left(f^{-1}(\mathscr{G}')\right)\subset\mathscr{A}$ ولكن

$$\sigma_X\left(f^{-1}(\mathscr{G}')\right) = f^{-1}\left(\sigma_{X'}(\mathscr{G}')\right) = f^{-1}(\mathscr{A}')$$

ومنه

$$f^{-1}(\mathscr{A}')\subset\mathscr{A}$$

أي أن:

$$f \in \mathscr{M}\left((X,\mathscr{A}),(X',\mathscr{A}')\right)$$

3.3 القابلية للقياس والاستمرار

ليكن X و X' فضائين توبولوجيين نزودهما بعشيرتيهما لبوريل $\mathscr{B}_\tau(X)$ و $\mathscr{B}_{\tau'}(X')$ على التوالي، حيث τ توبولوجيا على X و τ' توبولوجيا على X'.

قضية 4.3

كل تطبيق مستمر f من X نحو X' تطبيق قيوس من $\left(X,\mathscr{B}_\tau(X)\right)$ نحو $\left(X',\mathscr{B}_{\tau'}(X')\right)$.

الاثبات

بما أن التطبيق $f: X \to X'$ مستمر فإن

$$f^{-1}(\tau') \subset \tau$$

(هذا من : $\forall u' \in \tau', f^{-1}(u') \in \tau$) ومنه

$$f^{-1}(\tau') \subset \mathscr{B}_\tau(X)$$

وحسب معيار القابلية للقياس نحصل على f قيوس من $\left(X,\mathscr{B}_\tau(X)\right)$ نحو $\left(X',\mathscr{B}_{\tau'}(X')\right)$.

4.3 العمليات الجبرية على التوابع القيوسة

ليكن $(X,\mathscr{A})$ و $\left(\mathbb{R},\mathscr{B}_\tau(\mathbb{R})\right)$ فضائين قيوسين حيث أن $\mathscr{B}_\tau(\mathbb{R})$ هي العشيرة البوريلية على $\mathbb{R}$.

نشير بـ $\mathscr{L}^{\circ}(X,\mathscr{A})$ إلى $\mathscr{M}\left((X,\mathscr{A}),(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\tau}(\mathbb{R}))\right)$.

نسمي كل عنصر من $\mathscr{L}^{\circ}(X,\mathscr{A})$ بالتابع القيوس.

ملاحظة في كل ما يلي نشير إلى العشيرة البوريلية على $\mathbb{R}$ $(\mathbb{R}^n)$ بـ $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ $\left(\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\right)$.

قضية 5.3

ليكن التابع F المعرف كما يأتي:

$$\begin{aligned} F:\ (X,\mathscr{A}) &\to \left(\mathbb{R}^2,\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)\right) \\ x &\mapsto \left(f_1(x),f_2(x)\right) \end{aligned}$$

يكون F قيوسا من $(X,\mathscr{A})$ نحو $\left(\mathbb{R}^2,\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)\right)$ إذا وفقط إذا كان f_1 و f_2 قيوسين من $(X,\mathscr{A})$ نحو $\left(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R})\right)$.

القضية تقبل بدون برهان.

قضية 6.3

1. القيمة المطلقة لتابع قيوس تابع قيوس.
2. مجموع تابعين قيوسين تابع قيوس.
3. جداء تابعين قيوسين تابع قيوس.
4. مقلوب تابع قيوس لا ينعدم تابع قيوس.

الاثبات

1. ليكن $f:(X,\mathscr{A})\to\left(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R})\right)$ تابع قيوس ونضع

$$u \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto |x|$$

بما أن u مستمر فهو قيوس (أي $\left(u \in \mathscr{M}\left(\left(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})\right), \left(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})\right)\right)\right)$

ولدينا

$$|f| = u \circ f$$

أي تركيب تابعين قيوسين فهو قيوس.

2. ليكن f_1 و f_2 تابعين قيوسين و

$$(X, \mathscr{A}) \to \left(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}\left(\mathbb{R}^2\right)\right) \ \to \ \left(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})\right)$$
$$x \xrightarrow[F]{} \left(f_1(x), f_2(x)\right) \xrightarrow[u]{} f_1(x) + f_2(x)$$

بما أن u مستمر فهو قيوس وبما أن F قيوس من $(X, \mathscr{A})$ نحو $\left(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$ فإن

$$f_1 + f_2 = u \circ f$$

قيوس.

3. نفس البرهان السابق مع اعتبار

$$(X, \mathscr{A}) \to \left(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}\left(\mathbb{R}^2\right)\right) \ \to \ \left(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})\right)$$
$$x \xrightarrow[F]{} \left(f_1(x), f_2(x)\right) \xrightarrow[v]{} f_1(x) \bullet f_2(x)$$

و v مستمر.

4. ليكن f تابع بحيث $\forall x \in X, f(x) \neq O$ نضع

$$g \quad X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{f(x)}$$

يمكن تفكيكه على الشكل:

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{R}^* \xrightarrow{i} \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) \mapsto \frac{1}{f(x)}$$

حيث f قيوس من $(X,\mathscr{A})$ نحو $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ مع $\forall x\in X, f(x)\neq O$ إذن f قيوس من $(X,\mathscr{A})$ نحو $(\mathbb{R}^*,\mathscr{B}(\mathbb{R}^*))$ و i مستمر من $(\mathbb{R}^*,\mathscr{B}(\mathbb{R}^*))$ نحو $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ فهو قيوس وهذا يستلزم الحصول على $g=i\circ f$ قيوس.

5.3 الحد الأعلى والحد الأدنى لمتتالية توابع قيوسة

مبرهنة 2.3

ليكن f و g تابعين قيوسين عندئذ $\sup(f,g)$ و $\inf(f,g)$ تابعين قيوسين.

توطئة

إن الجماعة $\{]-\infty,\alpha],\ \alpha\in\mathbb{R}\}$ تولد العشيرة البوريلية وكذلك الأمر بالنسبة لـــ $\{[\alpha,+\infty[,\ \alpha\in\mathbb{R}\}$

لإثبات هذه التوطئة نرجع إلى **التمرين5** (حول الجبور و العشائر)

إثبات المبرهنة 2.3

نعتبر

$$f,g:\left(X,\mathscr{A}\right)\longrightarrow\left(\mathbb{R},\mathscr{B}\left(\mathbb{R}\right)\right)$$

نضع $h=\sup\left(f,g\right)$، بما أن الجماعة $\left\{]-\infty,\alpha],\ \alpha\in\mathbb{R}\right\}$ تولد العشيرة البوريلية فيكفي إثبات أن :

$$\forall\alpha\in\mathbb{R},\ h^{-1}\left(]-\infty,\alpha]\right)\in\mathscr{A}$$

حتى يكون h قيوسا.

$$\begin{aligned}h^{-1}\left(]-\infty,\alpha]\right)&=\left\{x\in X,\ h\left(x\right)\leq\alpha\right\}\\&=\left\{x\in X,\sup\left(f,g\right)\leq\alpha\right\}\\&=\left\{x\in X,\ f\left(x\right)\leq\alpha\right\}\cap\left\{x\in X,\ g\left(x\right)\leq\alpha\right\}\\&=\underbrace{f^{-1}\left(]-\infty,\alpha]\right)}_{\in\mathscr{A}}\cap\underbrace{g^{-1}\left(]-\infty,\alpha]\right)}_{\in\mathscr{A}}\end{aligned}$$

ومنه h قيوس.

قضية 7.3

لتكن $\{f_n\}_n$ متتالية عناصرها من $\mathscr{M}\left(\left(X,\mathscr{A}\right),\left(\overline{\mathbb{R}},\mathscr{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)\right)$ عندئذ التابعان $\varphi=\sup\limits_n f_n$ و $\psi=\inf\limits_n f_n$ ينتميان إلى $\mathscr{M}\left(\left(X,\mathscr{A}\right),\left(\overline{\mathbb{R}},\mathscr{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)\right)$.

الإثبات

لبرهان هذه القضية نعتمد على كون $\left\{[-\infty,\alpha],\ \alpha\in\mathbb{R}\right\}$ أو $\left\{[\alpha,+\infty],\ \alpha\in\mathbb{R}\right\}$ جماعة مولدة لــ $\mathscr{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$.

لدينا

$$\varphi^{-1}\left([-\infty,\alpha]\right)=\{x\in X\ ,\ \varphi(x)\leq\alpha\}$$
$$=\left\{x\in X\ ,\ \sup_n\left(f_n(x)\right)\right\}$$
$$=\bigcap_n\{x\in X\ ,f_n(x)\leq\alpha\}$$
$$=\bigcap_n\underbrace{f_n^{-1}\left([-\infty,\alpha]\right)}_{\in\mathscr{A}}\in\mathscr{A}$$

إذا أردنا استعمال الجماعة $\{[\alpha,+\infty],\ \alpha\in\mathbb{R}\}$ فيكون لدينا

$$x\in\varphi^{-1}\left([\alpha,+\infty]\right)\Leftrightarrow\varphi(x)\geq\alpha\Leftrightarrow\sup_n f_n(x)\geq\alpha$$
$$\Leftrightarrow\exists n_0,\ f_{n_0}(x)\geq\alpha\Leftrightarrow\exists n_O,x\in f_{n_0}^{-1}([\alpha,+\infty])$$
$$\Leftrightarrow x\in\bigcup_n f_n^{-1}\left([\alpha,+\infty]\right)$$

أذن

$$\varphi^{-1}\left([\alpha,+\infty]\right)=\bigcup_n f_n^{-1}\left([\alpha,+\infty]\right)$$

بنفس الطريقة والفكرة نعالج حالة ψ.

لازمة

لتكن $\{f_n\}_n$ متتالية من $\mathscr{M}\left((X,\mathscr{A}),\left(\overline{\mathbb{R}},\mathscr{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)\right)$ عندئذ

$$\limsup_{n\to+\infty} f_n\in\mathscr{M}\left((X,\mathscr{A}),\left(\overline{\mathbb{R}},\mathscr{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)\right)$$

و

$$\liminf_{n\to+\infty} f_n\in\mathscr{M}\left((X,\mathscr{A}),\left(\overline{\mathbb{R}},\mathscr{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)\right)$$

الإثبات

لدينا

$$\liminf_{n\to+\infty} f_n = \sup_{n\geq 1}\left(\inf_{k\geq n} f_k\right)$$

نضع

$$h_n = \inf_{k\geq n} f_k$$

حسب ما سبق من أجل كل n، h_n تطبيق قيوس. أذن يصبح لدينا $\{h_n\}$ متتالية تطبيقات قيوسة ومنه فإن $\sup_n h_n$ قيوس.

نتيجة

لتكن $\{f_n\}_n$ متتالية من $\mathscr{M}\left((X,\mathscr{A}),\left(\overline{\mathbb{R}},\mathscr{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)\right)$ ومتقاربة نحو تابع f عندئذ $f\in\mathscr{M}\left((X,\mathscr{A}),\left(\overline{\mathbb{R}},\mathscr{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)\right)$.

الإثبات

يأتي مباشرة من اللازمة السابقة لأنه في حالة تقارب المتتالية $\{f_n\}_n$ نحو التابع f فإنه يستلزم أن:

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = f$$

(أنظر **التمرين 2** حول النهايات السفلى والعليا)

6.3 تعريف التابع البسيط

نقول عن تابع f من $(X,\mathscr{A})$ نحو $(Y,\mathscr{B})$ أنه تابع بسيط إذا وجدت تجزئة لـــ X منتهية $\{A_i\}_{i=1}^n$ عناصرها قيوسة وأعداد حقيقية $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ بحيث أن

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}(x),\ \ x\in X$$

قضية 8.3

1. كل تطبيق ثابت من $(X,\mathscr{A})$ نحو $(Y,\mathscr{B})$ تطبيق قيوس.

2. لتكن $\mathscr{A}$ عشيرة على مجموعة X و $A\subset X$، لدينا التكافؤ الآتي:

$$\chi_A \text{ تابع قيوس يكافئ } A\in\mathscr{A}$$

3. كل تابع بسيط من $(X,\mathscr{A})$ في $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ قيوس.

الإثبات

لإثبات 1 و2 ، أنظر التمارين أما 3 فهو نتيجة مباشرة لهما.

قضية 9.3

ليكن $(X,\mathscr{F})$ فضاءا قيوسا و $A\subset X$، إن الفئة $\mathscr{F}_A=\{F\cap A,\ F\in\mathscr{F}\}$ عشيرة على A وإذا كان $A\in\mathscr{F}$ فإن $\mathscr{F}_A=\mathcal{P}(A)\cap\mathscr{F}$.

الإثبات

لأثبات أن $\mathscr{F}_A$ عشيرة نحقق الشروط الآتية:

- $A\in\mathscr{F}_A$ محقق بأخذ $F=X,\ X\in\mathscr{F}$ نحصل على $A=X\cap A$
- إذا كان $B\in\mathscr{F}_A$ فإن $B=F\cap A,\ F\in\mathscr{F}$ ومنه فإن $\complement_X^F\cap A,\ \complement_X^F\in\mathscr{F}$ $\complement_A^B=$ إذن $\complement_A^B\in\mathscr{F}_A$

- لتكن $(B_n)_{n\geq 1} \subset \mathscr{F}_A$ إذن $\forall n \geq 1, \exists F_n \in \mathscr{F},\ B_n = F_n \bigcap A,$

ومنه فإن $\bigcup_{n\geq 1} B_n = \bigcup_{n\geq 1}(F_n \bigcap A) = \left(\bigcup_{n\geq 1} F_n\right) \bigcap A$ وبما أن

$\left(\bigcup_{n\geq 1} F_n\right) \in \mathscr{F}$ فإن $\bigcup_{n\geq 1} B_n \in \mathscr{F}_A$. إذن $\mathscr{F}_A$ عشيرة على A.

في الأخير إذا كان $A \in \mathscr{F}$ فإن $\forall B \in \mathscr{F}_A,\ B = (F \bigcap A) \in \mathscr{F}$ مع

$F \bigcap A \subset A$ ومنه $B \in \mathcal{P}(A) \bigcap \mathscr{F}$ أي $\mathscr{F}_A = \mathcal{P}(A) \bigcap \mathscr{F}$.

لنتأكد من الإحتواء العكسي:

ليكن $B \in \mathcal{P}(A) \bigcap \mathscr{F}$ إذن $(B \subset A \wedge B \in \mathscr{F})$ ومنه فإن

$(B = B \bigcap A \wedge B \in \mathscr{F})$ أي $(B \in \mathscr{F}_A)$ ▪

قضية 10.3

ليكن $(X, \mathscr{A})$ فضاءا قيوسا و f تابعا حقيقيا مكتملا (أي $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$) معرفا على X، توجد عندئذ متتالية $\{f_n\}_n$ من التوابع الحقيقية المعرفة على X بالشكل الآتي:

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{k_n} C_{n,i} \chi_{E_{n,i}}(x)$$

مع $C_{n,i} \in \mathbb{R}$ و $E_{n,i}$ أجزاء من X غير متقاطعة مثنى مثنى، بحيث أن

$$\forall x \in X,\ \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

ثم أنه إذا كان:

1. f قيوسا فإن التوابع $\{f_n\}_n$ قيوسة كذلك (أي بسيطة)

2. f موجبا فإن المتتالية $\{f_n\}_n$ متزايدة ولدينا

$$0 \le f_n(x) \le f(x), \ \forall x \in X, \ n = 1,2,3,....$$

3. f محدود (أي $\exists M > O, |f(x)| \le M \ \ \forall x \in X$) فإن المتتالية $\{f_n\}_n$ تتقارب بانتظام نحو f.

الإثبات

لنفرض أولا أن f موجب أي: $f : X \to \overline{\mathbb{R}_+}$

من أجل n مثبت لدينا:

$$[0,n[= \dot{\bigcup_{k=1}^{n2^n}}\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right[$$

بما أن $f(x) \in \overline{\mathbb{R}_+}$ فإن

$$f(x) \in [0,n[\cup [n,+\infty] = \dot{\bigcup_{k=1}^{n2^n}}\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right[\cup [n,+\infty]$$

نضع الآن

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^n}, & x \in \left\{x \in X, \frac{k-1}{2^n} \le f(x) < \frac{k}{2^n}\right\}, \ k = 1,2,...n2^n \\ n, & x \in \{x \in X, f(x) \ge n\} \end{cases}$$

من الواضح أن $0 \le f_n(x) \le f(x)$ ثم إننا يمكن كتابة f_n على النحو التالي:

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \tfrac{k-1}{2^n} \chi_{A_{n,k}}(x) + n\chi_{A_n}(x)$$

مع

$$A_n = \{x \in X, \ f(x) \ge n\}$$

و

$$A_{n,k}=\left\{x\in X,\ \frac{k-1}{2^n}\le f(x)<\frac{k}{2^n}\right\}$$

يمكن أن نتأكد بأن $\{f_n\}$ تحقق شروط المبرهنة من أجل f موجب وقيوس.

أذا كان f من إشارة كيفية نكتب:

$$f=f^{+}-f^{-}$$

حيث

$$f^{+}=\max\left(f,0\right)$$

و

$$f^{-}=-\min\left(f\ ,0\right)$$

من أجل f^{+} توجد متتالية $\{g_n\}_n$ بحيث $g_n=\sum_{i=1}^{l_n}\alpha_{n,i}\chi_{E_{n,i}}$

من أجل f^{+} توجد متتالية $\{h_n\}_n$ بحيث $h_n=\sum_{i=1}^{l'_n}\beta_{n,i}\chi_{E'_{n,i}}$

نضع

$$k_n=g_n-h_n$$

إن المتتالية $\{k_n\}_n$ تحقق المطلوب.

7.3 تمارين حول الفضاءات القيوسة

1) ليكن $(X,\mathscr{A})$ فضاء قيوسا و f تطبيقا من X نحو مجموعة كيفية Y . بين أن المجموعة $\mathscr{T}=\{E\subset Y\ ,\ f^{-1}(E)\in\mathscr{A}\}$ عشيرة على Y.

2) ليكن $(X,\mathscr{A})$ فضاء قيوسا و f تطبيقا من $X\rightarrow\overline{\mathbb{R}}$ مزود بالعشيرة البوريلية. أثبت تكافؤ القضايا الآتية :

أ- المجموعة $\{x\in X\ ,f\ (x)>\alpha\}$ قيوسة $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

ب- المجموعة $\{x\in X\ ,f\ (x)\geq\alpha\}$ قيوسة $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

ت- المجموعة $\{x\in X\ ,f\ (x)<\alpha\}$ قيوسة $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

ث- المجموعة $\{x\in X\ ,f\ (x)\leq\alpha\}$ قيوسة $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

3) ليكن $(X,\mathscr{A})$ فضاء قيوسا و f تطبيقا من $X\rightarrow\overline{\mathbb{R}}$ يزود $\overline{\mathbb{R}}$ بعشيرة بوريلية بالنسبة إلى التوبولوجيا العادية. إذا تحققت إحدى القضايا التمرين السابق فأثبت أن f قيوس

4) أثبت في البداية أن كل تطبيق ثابت من $(X,\mathscr{A})$ نحو $(Y,\mathscr{B})$ تطبيق قيوس. ثم باعتبار $\mathscr{A}$ عشيرة على مجموعة X و $A\subset X$ ، بين التكافؤ الآتي:

$$\chi_A \text{ تابع قيوس يكافئ } A\in\mathscr{A}$$