المعهد العالى للحاسبات ونظم المعلومات
الإدارية وعلوم الإدارة – شبرا الخيمة

الرياضيات و التامين

الباب الأول : المتغيرات والدوال

الدوال : الدالة الخطية : ص = أ + ب س
الدالة الأسية : ص = أ $ب^{س}$
دالة القوة : ص = $أس^{ب}$

الباب الثانى : الأعداد الطبيعية

أ – **مجموع متتالية الأعداد الطبيعية** : إذا كا لدينا متتالية من الأعداد الطبيعيى تبدأ من ١ فإن مجموعها : **جـ = ٠,٥ ن (١+ن)**

مثال ١: أوجد مجموع الأعداد الطبيعية من ١ الى ٢٠ .
الحل : **جـ = ٠,٥ ن (١+ن)** ** لاحظ أن ذكر القانون جزء من الحل.
∴ جـ = ٠,٥ (٢٠) (١ + ٢٠) = ١٠ (٢١) = ٢١٠

مثال٢: متتالية أعداد طبيعية تبدأ من ١ ومجموعها ٧٨ أوجد حدودها.
الحل : **جـ = ٠,٥ ن (١+ن)**
∴ ٧٨ = ٠,٥ ن (١ + ن) = ٠,٥ن + ٠,٥ $ن^{٢}$ بضرب الطرفين فى ٢ للتخلص من الكسر : ١٥٦ = ن + $ن^{٢}$
∴ $ن^{٢}$ + ن -١٥٦ = صفر بتحليل هذا المقدار الثلاثى
∴(ن – ١٢) (ن +١٣) = صفر ∴ ن = ١٢ أو ن= -١٣ تستبعد القيمة السالبة
∴ المتتالية : { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ }

مثال ٣:أوجد مجموع الحدود العشرة الأخيرة من متتالية أعداد طبيعية من ١ الى ٣٠ الحل : هنا سوف نوجد مجموع ٣٠ حدا . ثم نوجد مجموع ٢٠ حدا . ثم نطرح المجموع الثانى من الأول لإيجاد الحدود العشرة الأخيرة .
جـ (٣٠) = ٠,٥ (٣٠) (٣٠ +١) = ١٥ × ٣١ = ٤٦٥
جـ (٢٠) = ٠,٥ (٢٠) (٢٠+ ١) = ١٠ × ٢١ = ٢١٠
∴ مجموع الحدود العشرة الأخيرة = ٤٦٥ – ٢١٠ = ٢٥٥

ب – **مجموع مربعات الأعداد الطبيعية** :
لإيجاد مجموع مربعات أعداد المتتالية { $١^{٢}$ ، $٢^{٢}$ ، $٣^{٢}$ ، $٤^{٢}$ ، ...... }

$$جـ (ر^{٢}) = \frac{ن (ن + ١) (٢ن +١)}{٦}$$

مثال ٤: أوجد مجموع مربعات أعداد متتالية من ١ الى ٢٠ .
الحل : بما أن [ن(ن+١) (٢ن+١)] /٦

∴ [٢٠ (٢٠ +١) ((٢ × ٢٠) + ١)] ÷ ٦
= (٢٠ × ٢١ × ٤١) ÷ ٦ = ١٧٢٢٠ ÷ ٦ = ٢٨٧٠

<u>ج – مجموع مكعبات الأعداد الطبيعية :</u>
جـ (ر^{٣}) = [٠,٥ ن (ن + ١)]^{٢}

<u>مثال٥</u> : أوجد مجموع مكعبات متتالية الأعداد الطبيعية من ١ الى ٨ .
الحل : جـ (ر^{٣}) = [٠,٥ ن (ن + ١)]^{٢} <u>*** القانون جزء من الحل</u>
∴ [(٠,٥ × ٨) (٨ + ١)]^{٢} = [٤ × ٩]^{٢} = ٣٦^{٢} = ١٢٩٦

***** لاحظ أن مربع مجموع متتالية الأعداد الطبيعية = مجموع مكعب هذه الأعداد**
أى : (١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + ن)^{٢} = (١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + ٤^{٣} + ... + ن^{٣})
<u>حاول تجربتها</u> .
(١ + ٢ + ٣ + ٤)^{٢} = (١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + ٤^{٣}) = ١٠٠

الباب الثالث : المتتاليات

<u>١ – المتتالية العددية</u>

هى سلسلة من القيم تتغير (بالزيادة أو النقصان) بمقدار ثابت . ومقدار التغير يسمى أساس المتتالية ، ونرمز له بالرمز (د) . { المتتالية ٨ ، ١٢ ، ١٦ ، ... أساسها (د) = ٤ ، المتتالية العددية ٤٥ ، ٤٠ ، ٣٥ ، ٣٠ ، .. .. أساسها (د) = – ٥ }

<u>قانون ١</u> . جـ = ٠,٥ ن (أ + ل)
حيث ن عدد الحدود ، أ الحد الأول ، ل الحد الأخير

<u>مثال١</u> : أوجد مجموع المتوالية العددية التى حدها الأول ٢ وحدها الأخير ٢٩ وتتكون من ١٠ حدود .
الحل : بما أن جـ = ٠,٥ ن (أ + ل)
∴ جـ = ٠,٥ (١٠) (٢ + ٢٩) = ٥ × ٣١ = ١٥٥

<u>مثال٢</u> : متوالية عدد مجموعها ٢٤٠ وتتكون من ٦ حدود ، وحدها الأول ٢٠ .
<u>الحل</u> : المجهول هنا هو الحد الأخير (ل) .

بما أن جـ = ٠,٥ ن (أ + ل)
∴ ٢٤٠ = ٠,٥ (٦) (٢٠ + ل) = ٣ (٢٠ + ل) = ٦٠ + ٣ ل
∴ ٢٤٠ _ ٦٠ = ٣ل   ∴ ١٨٠ = ٣ل   ∴ ل = ١٨٠÷٣ = ٦٠

<u>قانون</u>٢ : جـ = ٠,٥ ن [٢ أ + (ن - ١) د]
لاحظ أن الحد الأول فى المتولية أ والثانى ا+د والثالث ا + ٢د وهكذا
∴ ح$_{٥}$ (الحد الخامس) = أ + ٤د   ، ح$_{١٢}$ = أ+١١د   وهكذا
ولذلك يمكن أن نستغنى عن الحد الأخير (ل) فى القانون الأول ونضع بدلا منه
أ + (ن-١) د

<u>مثال</u>٣ : متوالية عددية مكونة من ١٠ حدود ، حدها الأول = ٥ وأساسها = ٢
أوجد مجمرعها .
الحل : بما أن جـ = ٠,٥ ن [٢ أ + (ن - ١) د]
*** القانون جزء من الحل
∴ جـ = ٠,٥ (١٠) [٢ ×٥ + (١٠ -١) ٢]
∴ جـ ٥ (١٠ + ١٨) = ٥× ٢٨ = ١٤٠

<u>مثال</u>٤ : متوالية عددية حدها العاشر = ٣٢ وحدها الثامن = ٢٤ وعدد حدودها ٢٠ حدا . أوجد مجموعها .
الحل : من معرفه حدين يمكن أن نعرف الأساس د أولا ثم نوجد المجموع .
ح$_{١٠}$ = أ + ٩ د = ٣٢
، ح$_{٨}$ = أ + ٧ د = ٢٤   بالطرح
∴   ٢ د = ٨   ∴ د = ٤
بما أن ح$_{٨}$ = أ + ٧ د = ٢٤
∴ أ + ٧ × ٤ = ٢٤
∴ أ = ٢٤ _ ٢٨ = -٤
بما أن جـ = ٠,٥ ن [٢ أ + (ن - ١) د]
∴ جـ = ٠,٥ (٢٠) [٢ (-٤) + (٢٠ -١) ٤]
∴   = ١٠ [-٨ + (١٩×٤)] = ١٠ × ٦٨ = ٦٨٠

<u>٢ _ المتوالية الهندسية</u>

هى سلسلة القيم التى تتغير **<u>بمعدل</u>** ثابت وليس بمقدار ثابت وهى كالآتى :
أ ، أر ، أر^{٢} ، أر^{٣} ، .... ، أر$^{ن-١}$
***** لاحظ : لإيجاد الأساس (ر) نقسم أى حد من المتوالية على الحد السابق له**

فمثلا : $ر = أر^{٢} \div أر^{٢}$ ، $ر = أر^{٢} \div أر$

مجموع المتوالية الهندسية : $جـ = \frac{أ(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$

مثال ١ : أوجد مجموع ٥ حدود من متوالية هندسية حدها الأول ٣ وأساسها ٢ .

الحل : بما أن $جـ = \frac{أ(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$

$$جـ = \frac{٣(٢^{٥} - ١)}{٢ - ١} = \frac{٣(٣٢ - ١)}{١} = ٣ \times ٣١ = ٩٣$$

مثال٢ : ماهى حدود المتوالية السابقة ؟

الحل : المتوالية هى { ٣ ، ٣×٢ ، ٣×$٢^{٢}$ ، ٣×$٢^{٣}$ ، ٣×$٢^{٤}$ }

= { ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ }

مثال٣ : إذا كان الحد الرابع من متوالية هندسية = ٤٨ ، وحدها الثانى = ١٢ أوجد مجموع الحدود الخمسة الأولى .

الحل : الحد الرابع ($ح_{٤}$) = $أر^{٣}$ = ٤٨ ، $ح_{٢}$ = أر = ١٢

$\therefore$ $أر^{٣} \div أر$ = ٤٨ ÷ ١٢

$\therefore$ $ر^{٢}$ = ٤ ، ر = ٢

بما أن أر = ١٢ $\therefore$ أ × ٢ = ١٢ $\therefore$ أ = ١٢ ÷ ٢ = ٦

$$\therefore جـ = \frac{٦(٢^{٥} - ١)}{٢ - ١} = ٦ \times ٣١ = ١٨٦$$

المتوالية الهندسية اللانهائية : هى التى يكون بها عدد لانهائى من الحدود ومجموعها

$$جـ = \frac{أ}{١ - ر}$$

مثال ٤ : أوجد مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية { ٤ ، ٢ ، ١ ، ٠,٥ ، ...}

الحل : ر = $ح_{٢} \div ح_{١}$ = ٢ ÷ ٤ = ٠,٥

جـ = أ ÷ (١ – ر)

$\therefore$ جـ = ٤ ÷ (١ – ٠,٥) = ٤ ÷ ٠,٥ = ٨

الباب الرابع : طرق العد والتوافيق والتباديل

١٠ – طرق العد

قاعدة ١ : إذا أجريت تجربة بثلاث طرق هى أ ، ب ، ج فإن عدد الطرق الكلية لإجراء التجربة = أ × ب × ج .

مثال١ : معهد بة ٤ سنوات دراسية ، بكل سنة شعبتين ، وبكل شعبة ٣ أقسام ، ماعدد أقسام المعهد ؟
الحل : عدد أقسام المعهد = ٤ × ٢ × ٣ = ٢٤ قسما.

مثال٢ : إذا كان طالب يمكنه أن يحضر للمعهد بواحدة من أربع وسائل مواصلات مختلفة ، ويرجع بواحدة من ثلاث وسائل مختلفة . ما عدد الطرق الكلية للذهاب والعودة ؟
الحل : عدد الطرق الكلية = ٤×٣ = ١٢ طريقة

قاعدة ٢ : إذا كان لدينا عدد من العناصر مقداره (ن) ويراد إختيارها واحدا بعد الأخر (أو يراد ترتيبها) فإن عدد طرق الإختيار الكلية (أو عدد الترتيبات) = ن!
** **لاحظ أن :** مضروب ٤ مثلا أى ٤! = ٤×٣×٢×١ ،مضروب صفر ٠! = ١

مثال٣: يراد تعيين٣ أشخاص فى ٣ وظائف مختلفة ماهى كل الترتيبات الممكنة لهم.
الحل: عدد الترتيبات الممكنة = ٣ ! = ٣×٢×١ = ٦ .
الترتيبات هى (أ ب ج ، أ ج ب ، ب أ ج ، ب ج أ ، ج أ ب ، ج ب أ)

قاعدة٣ : إذا كان لدينا عدد (ن) من العناصر وكل عنصر يمكن أن يتكرر (ر) مرة فعدد الطرق الكلية للتكرارات = نر .

مثال٤ : أسرة بها ٣ أطفال ، ماهى كل التصنيفات الممكنة من حيث الذكور والإناث لهؤلاء الأطفال وما عددها .
الحل : عدد التصنيفات = نر = ٢^٣ = ٢×٢×٢ = ٨
لاحظ أن عدد العناصر هنا ٢ (ذكور وإناث) وعدد التكرارات ٣ وهم عدد الأشخاص . والتصنيفات هى { ذ ذ ذ ، ذ ذ ث ، ذ ث ذ ، ث ذ ذ ، ث ث ذ ، ث ذ ث ، ذ ث ث ، ث ث ث } (ذ = ذكر ، ث = أنثى)

٢ – التباديل

إذا كان لدينا عدد من العناصر مقداره (ن) ويراد إختيار عدد مقداره (ر) عنصر من بينها ، فإن :

$$\text{عدد الإختيارات} = {}^{ن}ل_{ر} = \frac{ن\,!}{(ن - ر)\,!}$$

****** لاحظ أن الترتيب مهم هنا .**

مثال٥ : لدينا ٥ أشخاص يراد إختيار ٢ منهم لتعيينهم فى وظيفتى رئيس ونائب رئيس ، ما عدد طرق الإختيار الكلية .

الحل : عدد طرق الإختيار الكلية (مع الترتيب) $= {}^{ن}ل_{ر} = \frac{ن\,!}{(ن - ر)\,!}$

$$= \frac{٥\,!}{(٥ - ٢)\,!} = \frac{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥}{١ \times ٢ \times ٣} = ٢٠ \text{ طريقة}$$

*** راجع وجود عناصر متشابهة بالكتاب ص٣٤ ، ٣٥ .

٣ – التوافيق

التوافيق هى عدد طرق إختيار عدد مقداره (ر) من العناصر من بين عدد (ن) عنصر بدون مراعاة الترتيب .

وبذلك فالفرق بين التباديل والتوافيق أن الأولى يتم فيها مراعاة الترتيب ، والثانية لاتعطى أهمية للترتيب .

وعدد طرق إختيار (ر) عنصر من بين (ن) عنصر =

$${}^{ن}ق_{ر} = \frac{ن\,!}{(ن - ر)\,!\ .\ ر!}$$

<u>مثال</u>٦: ما عدد طرق إختيار ٣ أشخاص من بين ٥ أشخاص .

<u>الحل</u> : هنا لايوجد نص على الترتيب ، ولذلك فالحل بالتوافيق . بما أن :

$${}^{ن}ق_{ر} = \frac{ن\,!}{(ن - ر)\,!\ .\ ر!}$$

$$\text{عدد طرق إختيار ٣ من ٥} = \frac{٥!}{(٥ - ٣)\,!\,٣!} = \frac{١\times٢\times٣\times٤\times٥}{١\times٢\times٣ \times ١\times٢} = ١٠$$

مثال٦ : يراد تكوين فريق من ٦ طلاب ، منهم ٣ طلاب ذكور من بين ٥ مرشحين ، ٣ طالبات من بين ٤ مرشحات. ما عدد طرق الإختيار الكلية .

الحل: هنا الترتيب ليس له أهمية .

∴ عدد طرق إختيار ٣ طلاب من بين ٥ = $\frac{٥!}{(٥-٣)!\ .\ ٣!}$ = ١٠

عدد طرق إختيار ٣ طالبات من بين ٤ = $\frac{٤!}{(٤-٣)!\ .\ ٣!}$ = ٤

وفقا للقاعدة رقم١ : عدد طرق الإختيار الكلية = أ×ب = ١٠ × ٤ = ٤٠ طريقة

٤ ــ مفكوك نظرية ذات الحدين

مفكوك المقدار (س + ص)^{ن} = س^{ن} + ^{ن}ق$_{١}$. ص . س$^{ن-١}$ + ^{ن}ق$_{٢}$. ص^{٢} . س$^{ن-٢}$ + ... + ص^{ن}

مثال١ : أوجد مفكوك المقدار (س + ص)^{٤}

الحل:(س+ص)^{٤} = س^{٤} + ^{٤}ق$_{١}$ ص$_{١}$ س^{٣} + ^{٤}ق$_{٢}$ ص^{٢} س^{٢} + ^{٤}ق$_{٣}$ ص^{٣} س+ ص^{٤}

= س^{٤} + ٤ ص س^{٣} + ٦ ص^{٢} س^{٢} + ٤ ص^{٣} س + ص^{٤}

مثال٢ : أوجد مفكوك المقدار (س – ص) ^{٤} .

الحل: (س –ص)^{٤} = س^{٤} – ^{٤}ق$_{١}$ ص س^{٣} + ^{٤}ق$_{٢}$ ص^{٢} س^{٢} – ^{٤}ق$_{٣}$ ص^{٣} س + ص^{٤}

**** **لاحظ** : تكون إشارة ص سالبة حينما يكون أس ص فرديا ، وتكون موجبه فى حالة الأس الزوجى .

مثال٣ : أوجد مفكوك المقدار (س + ٢ص)^{٣}

الحل: (س+ ٢ص)^{٣} = س^{٣} + ^{٣}ق$_{١}$ س^{٢} (٢ص) + ^{٣}ق$_{٢}$ س (٢ص)^{٢} + (٢ص)^{٣}

مثال٤ : إستخدم مفكوك ذو الحدين لإيجاد جملة مبلغ ١٠٠٠ جنيه وضع فى البنك بفائدة مركبة لمدة ٣ سنوات بسعر فائدة ٦% .

الحل: جملة المبلغ بعد ٣ سنوات بفائدة مركبة = ١٠٠٠ (١ + ٠,٠٦)^{٣}

ولذلك سوف نوجد القيمة (١ + ٠,٠٦)^{٣} بمفكوك ذو الحدين كالآتى :-

(١ + ٠,٠٦)^{٣} = ١^{٣} + ^{٣}ق$_{١}$ ١^{٢} (٠,٠٦) + ^{٣}ق$_{٢}$ ١(٠,٠٦)^{٢} + (٠,٠٦)^{٣}

= ١ + ٣(٠,٠٦) + ٣(٠,٠٦ × ٠,٠٦) + (٠,٠٦×٠,٠٦×٠,٠٦)

= ١ + ٠,١٨ + ٠,٠٠٥٤ + ٠,٠٠٠٢١٦ = ١,١٨٥٦١٦

∴ جملة المبلغ = ١٠٠٠ × ١,١٨٥٦١٦ = ١١٨٥,٦١٦ جنيه

الباب الخامس : العلاقات المنطقية

كل جملة تحمل خبر معين نسميها جملة بسيطة ، مثل " الجو حار" ومثل " الأسعار مرتفعة" وغيرها . وكل جملة بسيطة تحتمل الصواب (ص) أو الخطأ (خ).

يمكن ربط جملتين أو أكثر معا ، وهناك عدد من الروابط منها :

١- رابطة الضم (٨) : تكون صحيحة إذا كانت كل من الجملتين البسيطتين صحيحة، والجدول الذى يشتمل على كل الإحتمالات المنطقية لمدى صحة أو خطأ الجمل البسيطة والجملة المركبة يسمى جدول الصدق ، وجدول الصدق لرابطة الضم كالآتى (بفرض أن لدينا جملتين بسيطتين هما ع ، ف):

ع	ف	ع ٨ ف
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	خ

وهذا الجدول يعنى أن الجملة المركبة فى حالة الضم تكون صحيحة فى حالة واحدة فقط هى أن تكون كلا من الجملتين البسيطتين صحيحة .

مثال : هنا إعلان عن وظيفة معينة يقول " يشترط الحصول على تقدير جيد فى البكالوريوس(الجملة ع) ، وأداء الخدمة العسكرية(الجملة ف) "

إذا كونت جدول صدق للجملتين ع ، ف أى (ع ٨ ف) يتضح أن تحقيق شرط الإعلان عندما يكون كل من (ع) ، (ف) صحيح فى وقت واحد.

٢ – رابطة عدم الإقتران (أو) : تنقسم قسمين ، القسم الأول نرمزله بالرمز(٧) وتكون الجملة المركبة صحيحة إذا كانت إحدى الجملتين على الأقل صحيحة، بمعنى أن تكون جملة واحدة أو الإثنين صحيحة .

والنوع الثانى نرمز له بالرمز (٧̲) وهنا تكون الجملة المركبة صحيحة إذا كانت أحد الجملتين صحيحة والثانية خطأ .

جدول الصدق لرابطتى عدم الإقتران

ع	ف	ع ٧ ف	ع ٧̲ ف
ص	ص	ص	خ
ص	خ	ص	ص
خ	ص	ص	ص
خ	خ	خ	خ

٣ – رابطة الشرط (←) : تكون صحيحة فى كل الحالات إلا إذا كانت الجملة الأولى (ص) والثانية (خ) .

جدول الصدق لرابطة الشرط

ع	ف	ع ← ف
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	ص
خ	خ	ص

<u>٤ – رابطة التعادل (⇔) :</u> تكون صحيحة إذا كانت كلا الجملتين متشابهتين أى صحيحتين معا أو غير صحيحتين معا .

جدول الصدق لرابطة التعادل

ع	ف	ع ⇔ ف
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	ص

<u>٥ – النفى (~)</u> : نفى أى جملة هو وضع عكسها بمعنى إذا كانت الجملة (ص) فنفيها يكون (خ) ، والجملة (~ ع) تعنى ليس ع ، أو عكس ع .

تكوين جدول صدق لجملة مركبة

<u>مثال ١</u> : كون جدول الصدق للجملة [(ع ← ف) ٧ ~ ع]

الحل : نكون جدول صدق ونلاحظ ترتيب خطوات فك الأقواس كما بالجدول :

ع	ف	[(ع ← ف)	٧	~ ع]
ص	ص	ص	ص	خ
ص	خ	خ	خ	خ
خ	ص	ص	ص	ص
خ	خ	ص	ص	ص
رقم الخطوة		١	٣	٢

تكوين جدول صدق من ثلاث جمل

فى هذه الحالة سوف يكون لدينا ٨ تباديل مختلفة للصواب والخطأ ، كما بالمثال التالى :

<u>مثال٢</u> : أكتب جدول الصدق للجملة [(ع ٨ ف) ← ك]

<u>الحل</u> : جدول الصدق كالآتى :-

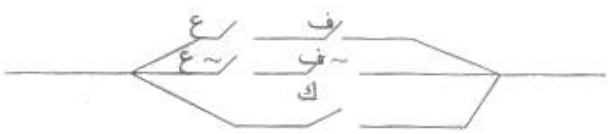
ع	ف	ك	[(ع ٨ ف)	←	ك
ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	خ	ص	خ	خ
ص	خ	ص	خ	ص	ص
ص	خ	خ	خ	ص	خ
خ	ص	ص	خ	ص	ص
خ	ص	خ	خ	ص	خ
خ	خ	ص	خ	ص	ص
خ	خ	خ	خ	ص	خ
رقم الخطـــــــــــــوة			١	٣	٢

وبذلك تكون الخطوة ٣ هى نتيجة الجدول .

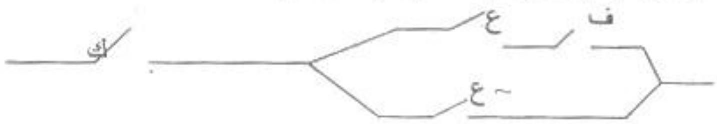
تكوين الدوائر الكهربية

***** لاحظ أن الدوائر الكهربية تتكون من رابطتى الضم وعدم الإقتران فقط .**
الضم يعنى توصيل على التوالى ، وعدم الإقتران تعنى توصيل على التوازى .

مثال٣ : كوّن توصيلة كهربية من الجملة [(ع٨ف) ٧ (~ع ٨~ف) **٧** ك]
الحل : التوصيلة كالآتى :-



مثال ٤ : حوّل التوصيلة التالية لجملة منطقية



الحل: الجملة هى [ك ٨ { (ع ٨ ف) ٧ (~ ع) }]

الباب السادس : نظرية المجموعات

المجموعة : هى عدد من العناصر يمثل ظاهرة معينة . مثل المجموعة (أ) تمثل الطلاب الذين يدرسون رياضة ، المجموعة (ب) هم الطلاب الذين يبدأ إسمهم بحرف الميم ، المجموعة (ج) تمثل محتويات حجرة معينة من كراسى وترابيزات وغيرها .

المجموعة الشاملة : هى المجموعة التى تشتمل على جميع عناصر ظاهرة معينة .

عمليات المجموعات

١ ـ **الإتحاد (∪)** : إتحاد أ ، ب يكتب (أ ∪ ب) = هو كل العناصر الموجودة فى أ بالإضافة الى العناصر الموجودة فى ب بدون تكرار أى عنصر .

مثال١ : أوجد إتحاد المجموعتين أ ، ب التاليتين :

أ = { س ، ص ، ع ، ف ، ك } ، ب = { ص ، ع ، ف ، م ، ن }

الحل: أ ∪ ب = { س ، ص ، ع ، ف ، ك ، م ، ن }

٢ ـ **التقاطع (∩)** : تقاطع مجموعتين أ ، ب هو العناصر الموجودة فى أ وموجودة فى ب فى نفس الوقت .

مثال٢ : أوجد (أ ∩ ب) من بيانات المثال السابق .

الحل : (أ ∩ ب) = { ص ، ع ، ف }

٣ ـ **الطرح** : طرح (ب) من (أ) أى (ب ـ أ) = العناصر الموجودة فى أ فقط وغير موجودة فى ب .

مثال ٣ : أوجد ا ـ ب من المثال ١ .

الحل : أ ـ ب ={ س ، ص ، ع ،ف، ك}ـ { ص ، ع ،ف ، م ، ن}= { س،ك}

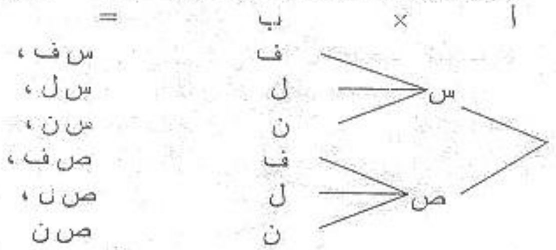
٤ ـ **المكمل للمجموعة** : المكمل للمجموعة (أ) هو العناصر الموجودة بالمجموعة الشاملة وغير موجودة فى (أ) . ومكمل أ = أ^

مثال٤: إذا كانت ش = { ت ، ع ، خ ، و ، ز ، ى } ، أ = { ع ، ز ، خ ، و} أوجد أ^ .

الحل: أ^ = { ت ، ى }

٥ - **ضرب المجموعات** : حاصل ضرب مجموعتين هو كل البدائل لعناصر المجموعتين

مثال٥: إذا كانت أ = { س ، ص} ، ب = { ف ، ل ، ن } أوجد أ×ب
الحل :أ×ب = { (س،ف) ، (س،ل) ، (س،ن) ، (ص،ف) ، (ص،ل)، (ص،ن)}
ويمكن إجراء الحل بما يسمى الشجرة البيانية كالآتى :



أهم قوانين المجموعات

أ $\cup$ ش = ش ، أ $\cap$ ش = أ

أ $\cup$ أ^ = ش ، أ $\cap$ أ^ = ϕ

أ $\cup$ ϕ = أ ، أ $\cap$ ϕ = ϕ

(أ $\cup$ ب)^ = أ^ $\cap$ ب^ ، (أ $\cap$ ب) ^ = أ^ $\cup$ ب^

أ $\cup$ (ب $\cap$ جـ) = (أ $\cup$ ب) $\cap$ (أ $\cup$ جـ)

أ ـ ب = أ ـ (أ $\cap$ ب)

مثال٦ : مدينة بها ١٠٠ ألف أسرة منها ٤٠ ألف أسرة لديهم سيارات ، ٦٥ ألف أسرة لديهم شقق تمليك ، ٢٥ ألف أسرة لديهم سيارات ولديهم شقق تمليك في نفس الوقت . أوجد :

أ ـ عدد الأسر التى لديها سيارة وليس لديها شقق تمليك

ب - عدد الأسر التى لديها شقق تمليك وليس لديها سيارات

ج - عدد الأسر التى ليس لديها شقق تمليك وليس لديها سيارات .

الحل : أ = عدد الأسر التى لديها سيارات ، ب = الأسر التى لديها شقق تمليك

$\therefore$ (أ $\cap$ ب) = من لديهم سيارات ولديهم شقق تمليك = ٢٥ ألف

$\therefore$ من لديهم سيارات وليس لديهم شقق تمليك = أ - (أ $\cap$ ب) = ٤٠ ـ ٢٥ = ١٥

من لديهم شقق تمليك وليس لديهم سيارات = ب - (أ $\cap$ ب) = ٦٥ ـ ٢٥= ٤٠

عدد الأسر التى ليس لديها شقق تمليك وليس لديها سيارات = (أ $\cup$ ب) ^

= ١٠٠ ـ (٢٥ + ١٥ + ٤٠)

= ١٠٠ ـ ٨٠ = ٢٠ ألف .

الباب السادس : التفاضل والتكامل

١ – التفاضل

التفاضل هو عملية إيجاد معدل التغير للدالة أى إيجاد الدالة الحدية من الدالة الكلية ، مثل إيجاد دالة الإنتاج الحدى من الإنتاج الكلى ، والتكاليف الحدية من التكاليف الكلية

قواعد التفاضل

قاعدة ١ : تفاضل المقدار الثابت يساوى صفرا .

قاعدة ٢ : الدالة ص = س^{ن}

تفاضلها د ص/ دس = ن س$^{ن-١}$

مثال١ : ص = س^{٤} + ١٢ أوجد تفاضل الدالة .

الحل: تفاضل الدالة يكتب دص/دس أو ص′

ص′ = ٤ س^{٣} (مع ملاحظة أن تفاضل ١٢ تساوى صفر لأنها مقدار ثابت).

مثال٢ : أوجد ص′ للدالة ص = ٦ س^{٤} + ٣ س^{٢} – ٤ س + ١٠

الحل: ص′ = ٦×٤ س^{٣} + ٣×٢ س – ٤ + صفر

= ٢٤ س^{٣} + ٦ س – ٤

مثال٣ : ص = $\sqrt{\text{٤ س}}$ أوجد ص′

الحل : ص = (٤ س)^{٠,٥}

ص′ = ٠,٥ × ٤ س$^{-٠,٥}$ = ٢ س$^{-٠,٥}$

مثال٤ : ص = ٥/س + ٤ س^{٢} – ٢٠س أوجد ص′

الحل : بما أن ٥/س = ٥ س$^{-١}$

∴ ص = ٥ س$^{-١}$ + ٤ س^{٢} – ٢٠ س

∴ ص′ = - ٥ س$^{-٢}$ + ٨ س – ٢٠

ملاحظة هامة : إذا كانت قيمة الدالة فى صورة متغير بين قوسين ومرفوع الى أس معين فإن تفاضل المقدار هو تفاضل القوس ككل مضروب فى تفاضل ما بداخل القوس .

مثال٥ : ص = (٢ س^{٤} + ٥)^{٢} أوجد ص′

الحل : يمكن أن يتم الحل بطريقتين :

<u>الأولى</u> : نفك القوس أولا ثم نوجد التفاضل كالآتى :

(٢ س^{٤} + ٥)^{٢} = ٤ س^{٨} + ٢٠ س^{٤} + ٢٥

∴ ص′ = ٣٢ س^{٧} + ٨٠ س^{٣}

<u>الثانية</u> : نوجد تفاضل القوس ونضربه فى تفاضل ما بداخل القوس كالآتى :

ص′ = ٢ (٢س^{٤} + ٥) (٨س^{٣}) (حيث المقدار الأول هو تفاضل القوس والمقدار الثانى هو تفاضل ما بداخل القوس) = ٣٢ س^{٧} + ٨٠ س^{٣}

<u>قاعدة ٣</u> : تفاضل حاصل ضرب متغيرين = (المتغير الأول × تفاضل المتغير الثانى) + (المتغير الثانى × تفاضل المتغير الأول)

فإذا كانت ص = هـ × و فإن ص′ = (هـ × و′) + (و × هـ′)

<u>مثال٦</u> : ص = (٢س^{٤} + ١٠) (٣ س^{٥} – ٢٥) أوجد ص′

<u>الحل</u> : ص′ = (٢س^{٤} + ١٠) (١٥ س^{٤}) + (٣س^{٥} – ٢٥) (٨س^{٣})

<u>قاعدة ٤</u> : تفاضل متغيرين مقسومين على بعضهما يساوى :

$$\frac{(\text{المقام} \times \text{تفاضل البسط}) - (\text{البسط} \times \text{تفاضل المقام})}{\text{مربع المقام}}$$

فإذا كانت الدالة ص = هـ/و فإن :

ص′ = (و هـ′ - هـ و′) ÷ و^{٢}

<u>مثال٧</u> : إذا كانت ص = $\frac{٢س^{٥} - ١٠}{٢س^{٣}}$ أوجد ص′

<u>الحل</u> : ص′ = $\frac{(٢س^{٣})(١٠ س^{٤}) - (٢س^{٥} - ١٠)(٦س^{٢})}{(٢س^{٣})^{٢}}$

*** لاحظ أن : (٢س^{٣})^{٢} = (٢س^{٣} × ٢س^{٣}) = ٤ س^{٦}

<u>قاعدة٥</u> : تفاضل الدالة الضمنية :-

الدالة الضمنية هى الدالة التى يختلط فيها المتغير ص مع المتغير س .

لتفاضل هذه الدالة يتم إجراء تفاضل كل حد على حده ثم إيجاد دص/دس فى النهاية ، كالآتى :-

<u>مثال٨</u> : ص^{٢} = ٢س^{٥} + ٤ص^{٣} – ١٠٠ أوجد ص′

الحل : ٢ص . دص/دس = ١٠س^{٤} + ١٢ ص^{٢} . دص/دس
بنقل الحدود التى بها دص/دس للجانب الأيمن
∴ ٢ص . دص/دس − ١٢ ص^{٢} . دص/دس = ١٠ س^{٤}
∴ دص/دس (٢ص − ١٢ص^{٢}) = ١٠ س^{٤}

∴ دص/دس = (١٠ س^{٤}) / (٢ص − ١٢ ص^{٢})

مثال٩ : أوجد ص' من الدالة ٢ص^{٢} = ٣س^{٢}ص^{٣} + ٤س^{٥} − ٦ص^{٣}
الحل : ٤ص . دص/دس = ٣س^{٢}(٣ص^{٢} . دص/دس) + ص^{٣}(٦س) + ٢٠س^{٤}
− ١٨ص^{٢}دص/دس
بنقل الحدود التى بها (دص/دس) الى الجانب الأيـ ن ، والحدود الأخرى للجانب الأيسر
∴ (٤ص . دص/دس) − (٩ س^{٢}ص^{٢} . دص/دس) + (١٨ ص^{٢} . دص/دس)
= ٦س ص^{٣} + ٢٠س^{٤}
بأخذ دص/دس كعامل مشترك :
∴ دص/دس (٤ص − ٩س^{٢}ص^{٢} + ١٨ص^{٢}) = ٦س ص^{٣} + ٢٠س^{٤}

∴ دص/دس = (٤ص − ٩س^{٢}ص^{٢} + ١٨ ص^{٢}) / (٦س ص^{٣} + ٢٠س^{٤})

ملاحظة ١ − التفاضل بالنسبة للمتغير س ولذلك فتفاضل ص يقرن ب دص/دس
٢ − الحد الأول من الدالة (٣س^{٢}ص^{٣}) هو متغيرين مضروبين فى بعضهما ولذلك فتفاضل هذا الحد هو الأول فى تفاضل الثانى + الثانى فى تفاضل الأول.

قاعدة٦ : تفاضل س بالنسبة للمتغير ص يساوى مقلوب تفاضل ص بالنسبة للمتغير س ، أى أن :

دص / دس = ١ / (د س / د ص)

مثال١٠ : إذا كانت ص = ٢ س^{٧} − ٤س^{٣} أوجد د س/ د ص
الحل : لإيجاد دس/د ص نوجد د ص / د س أولا ، ثم نوجد مقلوبها :
د ص / د س = ١٤ س^{٦} − ١٢ س^{٢}

$$\therefore\ \text{د س / د ص} = \frac{1}{14\,\text{س}^{6} - 12\,\text{س}^{2}}$$

مثال١١ : إذا كانت $\text{ص} = \dfrac{4\,\text{س}^{3} + 5}{\text{س}^{2}}$

أوجد د س / د ص

الحل : $\text{د ص / د س} = \dfrac{\text{س}^{2}\,(12\,\text{س}^{2}) - (4\,\text{س}^{3} + 5)\,(2\,\text{س})}{(\text{س}^{2})^{2}}$

$$\text{د س / د ص} = \frac{\text{س}^{4}}{\text{س}^{2}\,(12\,\text{س}^{2}) - (4\,\text{س}^{3} + 5)\,(2\text{س})}$$

التفاضل الأعلى

يمكن إيجاد التفاضل الثانى أى تفاضل الدالة التى تم تفاضلها مرة ثانية ، ويمكن إيجاد التفاضل الثالث والرابع وهكذا .

مثال١٢ : أوجد تفاضلات الدالة : $\text{ص} = 4\text{س}^{3} + 2\text{س}^{2} + 50$

الحل: $\text{دص / د س} = 12\,\text{س}^{2} + 4\text{س}$

$\text{د}^{2}\text{ص / دس}^{2}$ (التفاضل الثانى) $= 24\,\text{س} + 4$

$\text{د}^{3}\text{ ص / د س}^{3}$ (التفاضل الثالث) $= 24$

$\text{د}^{4}\text{ ص / د س}^{4}$ (التفاضل الرابع) = صفر

تفاضل الدالة اللوغاريتمية للأساس الطبيعى هـ

قاعدة ٦ : تفاضل الدالة اللوغاريتمية يساوى مقلوب المقدار الجبرى للدالة مضروبا فى تفاضل هذا المقدار .

مثال١٣ : إذا كانت $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\ 2\,\text{س}^{4}$ أوجد د ص / د س

الحل : $\text{د ص / د س} = (1 / 2\text{س}^{4})\ (2 \times 4\,\text{س}^{3})$

(مقلوب القيمة الجبرية للدالة) (تفاضل القيمة الجبرية)

$$= \frac{\text{٨ س}^{\text{٣}}}{\text{٢ س}^{\text{٤}}} = \frac{\text{٤}}{\text{س}}$$

تفاضل الدالة الأسية

<u>قاعدة</u> ٧ : تفاضل الدالة الأسية يساوى نفس الدالة مضروبا فى تفاضل الأس .

<u>مثال١٤</u> : إذا كانت $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{٢س}^{\text{٤}}}$ أوجد $\text{ص}'$

الحل : $\text{ص}' = \text{هـ}^{\text{٢س}^{\text{٤}}} \times (\text{٨} \times \text{٢س}^{\text{٣}})$

$= \text{هـ}^{\text{٢س}^{\text{٤}}} \,.\, \text{١٦ س}^{\text{٣}}$

التفاضل الجزئى

إذا كان عندنا أكثر من متغير مستقل مثل $\text{س}_{\text{١}}$ ، $\text{س}_{\text{٢}}$ ، ..... فإنه يمكن إجراء التفاضل بالنسبة للمتغير $\text{س}_{\text{١}}$ فقط ، وهنا يعتبر $\text{س}_{\text{٢}}$ مقدار ثابت . وكذلك يمكن إجراء التفاضل الجزئى للمتغير $\text{س}_{\text{٢}}$ ويعامل $\text{س}_{\text{١}}$ هنا على أنه مقدار ثابت .

وسوف نرمز للتفاضل الجزئى بالرمز (δ)

<u>مثال١٥</u> : أوجد التفاضل الجزئى بالنسبة لكل من $\text{س}_{\text{١}}$ ، $\text{س}_{\text{٢}}$ فى الدالة التالية

$\text{ص} = \text{٤ س}_{\text{١}}^{\text{٢}} + \text{٥ س}_{\text{٢}}^{\text{٣}} + \text{٣ س}_{\text{١}}^{\text{٣}}\,\text{س}_{\text{٢}}^{\text{٤}}$

الحل : نوجد أولا التفاضل الجزئى بالنسبة للمتغير $\text{س}_{\text{١}}$ ، ولذلك سوف نعتبر $\text{س}_{\text{٢}}$ كمقدار ثابت . كالآتى :-

$\delta\,\text{ص} / \delta\,\text{س}_{\text{١}} = \text{٨ س}_{\text{١}} + \text{٩ س}_{\text{٢}}^{\text{٤}}\,\text{س}_{\text{١}}^{\text{٢}}$

<u>**** لاحظ أن الحد ($\text{٥ س}_{\text{٢}}^{\text{٣}}$) تفاضله الجزئى يساوى صفر لأنه مقدار ثابت بالنسبة للمتغير $\text{س}_{\text{١}}$.**</u>

ولاحظ فى الحد ($\text{٣س}_{\text{١}}^{\text{٣}}\,\text{س}_{\text{٢}}^{\text{٤}}$) أن المقدار الثابت له هو ($\text{٣س}_{\text{٢}}^{\text{٤}}$) ولذلك عوملت على أنها معامل $\text{س}_{\text{١}}$.

ثانيا : نوجد التفاضل الجزئى بالنسبة للمتغير $\text{س}_{\text{٢}}$:

$\delta\,\text{ص} / \delta\,\text{س}_{\text{٢}} = \text{١٥ س}_{\text{٢}}^{\text{٢}} + \text{٤} \times \text{٣ س}_{\text{١}}^{\text{٣}}\,\text{س}_{\text{٢}}^{\text{٣}}$

$= \text{١٥ س}_{\text{٢}}^{\text{٢}} + \text{١٢ س}_{\text{١}}^{\text{٣}}\,\text{س}_{\text{٢}}^{\text{٣}}$

<u>****** لاحظ أن تفاضل الحد ($\text{٤ س}_{\text{١}}^{\text{٢}}$) يساوى صفر لأنه مقدار ثابت بالنسبة للمتغير $\text{س}_{\text{٢}}$.**</u>

التكامل

التكامل هو عملية عكسية للتفاضل ، حيث يكون لدينا الدالة الحدية ، ونجرى لها التكامل للحصول على الدالة الكلية .

١ ـ التكامل غير المحدود

حينما يتم تفاضل الدالة فإن المقدار الثابت يساوى صفر ، ولذلك حينما نريد إجراء التكامل لإعادة الدالة لصورتها الأصلية لانعرف قيمة المقدار الثابت بالتحديد ، ولذلك نضع له رمز (جـ) يعبر عنه فقط ، ولذلك سمى تكامل غير محدد . ونرمز للتكامل بالرمز ∫ .

قاعدة ١ : $\int$ س^{ن} . د س = $\dfrac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}$ + جـ

***** لاحظ أننا نضيف واحد للأس فإذا كان (ن) يصبح (ن + ١) ثم نقسم المقدار على الأس الجديد .**

مثال١ : أوجد تكامل الدالة ص' = س^{٤}

الحل : $\int$ س^{٤} . دس = $\dfrac{\text{س}^{4+1}}{4+1}$ + جـ

= $\dfrac{\text{س}^{5}}{5}$ + جـ

مثال٢ : أوجد تكامل ص' = ٨

الحل : $\int$ ص' . د س = ٨ س/١ + جـ = ٨ س + جـ

*** لاحظ أن الدالة ص' = ٨ يمكن كتابتها كالآتى : ص' = ٨ س $^{\text{صفر}}$

لأن س $^{\text{صفر}}$ = ١

قاعدة٢ : تكامل م س^{ن} . دس (حيث م مقدار ثابت) يساوى تكامل س^{ن} . دس × م

أى : $\int$ م س^{ن} . دس = م $\int$ س^{ن} . دس

مثال٣ : أوجد تكامل الدالة ص' = ٤ س^{٧}

الحل : $\int$ ٤ س^{٧} . دس = ٤ $\int$ س^{٧} . دس

$$= \frac{4\,\text{س}^{8}}{8} + \text{ج} = 0.5\,\text{س}^{8} + \text{ج}$$

<u>قاعدة٣</u> : تكامل دالة مكونة من عدد من الحدود يساوى تكامل كل حد من الحدود على حدة

<u>مثال٤</u> : أوجد تكامل $\text{ص}' = 2\text{س}^{2} + 3\text{س}^{5} + 10$

الحل : $\int \text{ص}'\,.\,\text{دس} = \frac{2\text{س}^{3}}{3} + \frac{3\,\text{س}^{6}}{6} + 10\,\text{س} + \text{ج}$

$= 2/3\ \text{س}^{3} + 1/2\ \text{س}^{6} + 10\,\text{س} + \text{ج}$

التكامل المحدود

فى التكامل المحدود يتم الحصول على قيمة رقمية محددة لتكامل الدالة ، حيث يتم تقدير قيمة الدالة بإنتقالها من نقطة مثل أ الى نقطة مثل ب .

لإيجاد التكامل المحدود من أ الى ب يتم إيجاد تكامل الدالة أولا ثم يتم التعويض عن س بقيمة ب ، ثم التعويض عن س بقيمة أ ، ثم إيجاد الفرق بين القيمتين .

<u>مثال٥</u> : أوجد $\int_{2}^{5} 4\,\text{س}^{3}\,.\text{دس}$

<u>الحل</u> : ١ - نوجد تكامل الدالة كالآتى :-

$\int_{2}^{5} 4\,\text{س}^{3}\,.\text{دس} = [\,4\,\text{س}^{4}/4\,]_{2}^{5} = [\,\text{س}^{4}\,]_{2}^{5}$

٢ – نعوض مرة عن س بالقيمة ٥ ، ثم نعوض عنها بالقيمة ٢ ثم نوجد الفرق بينهما كالآتى

$[\,\text{س}^{4}\,]_{2}^{5} = (5^{4}) - (2^{4}) = 625 - 16 = 609$

<u>مثال٦</u> : أوجد $\int_{1}^{4} 8\,\text{س}^{3}\,.\,\text{دس}$

<u>الحل</u> : $\int_{1}^{4} 8\,\text{س}^{3}\,.\,\text{دس} = [\,8\,\text{س}^{4}/4\,]_{1}^{4} = [\,2\,\text{س}^{4}\,]_{1}^{4}$

$2\,\text{س}^{4}\,]_{1}^{4} = 2\,\{(04)^{4} - (4)^{1}\} = 2\,(256 - 4) = 504$

النهاية العظمى والنهاية الصغرى للدالة

النهاية العظمى للدالة هى أعلى قيمة للمتغير التابع ص فى الدالة .

لإيجاد النهايتين العظمى والصغرى نتبع الآتى :-

١ – نوجد التفاضل الأول للدالة

٢ – نساوى التفاضل الأول للدالة بالصفر

٣ – نقوم بتحليل المقدار للحصول على قيمة س

٤ – عند الحصول على قيمتين للمتغير س تكون أحدهما في مقابل النهاية العظمى والأخرى في مقابل النهاية الصغرى .

٥ – لتحديد نقطتى النهاية العظمى والنهاية الصغرى نجرى التفاضل الثانى للدالة أى نقوم بإجراء التفاضل مرة أخرى ، ثم نعوض عن س بإحدى قيمتيها فإذا أصبحت قيمة ص موجبة تكون النهاية صغرى ، وإذا أصبحت قيمة ص سالبة تكون النهاية عظمى .

مثال : أوجد النهايتين العظمى والصغرى للدالة التالية :

ص = ٣/١ س^{٣} – ٥,٥ س^{٢} + ٢٨ س

الحل : ١ – نوجد التفاضل الأول للدالة

د ص / د س = ٣/٣ س^{٢} – ١١ س + ٢٨

٢ – بمساواة المقدار بالصفر

∴ س^{٢} – ١١ س + ٢٨ = صفر

٣ – نحلل المقدار حيث : (س – ٧) (س – ٤) = صفر

∴ س = ٧ أو س = ٤

أحد القيمتين تكون فى مقابل النهاية العظمى ، والأخرى فى مقابل النهاية الصغرى.

٤ – لتحديد كل من النهايتين نوجد التفاضل الثانى للدالة ثم نعوض فية عن قيمة س مرة عندما س = ٧ ، ومرة أخرى عندما س = ٤

٥ – إذا كانت قيمة الدالة بعد التعويض سالبة تكون قيمة س التى تم التعويض بها مقابل النهاية العظمى . وإذا كانت قيمة الدالة فى التعويض موجبة كانت قيمة س التى تم التعويض بها فى مقابل النهاية الصغرى .

التفاضل الثانى : د^{٢} ص / دس^{٢} = ٢ س – ١١

بالتعويض بقيمة س = ٧

∴ د^{٢} ص / دس^{٢} = ٢ × ٧ – ١١ = ٣

بما أن القيمة موجبة إذن فهناك نهاية صغرى مقابل س = ٧

بالتعويض بقيمة س = ٤

د^{٢} ص / دس^{٢} = ٢ × ٤ – ١١ = -٣

بما أن القيمة سالبة ، إذن هناك نهاية عظمى مقابل س = ٤ .

لإيجاد قيمة الدالة عند كل من النهايتين العظمى والصغرى :

قيمة الدالة عند النهاية الصغرى : يتم التعويض فى الدالة الأصلية بقيمة س = ٧

ص = ٣/١ (٧)^{٣} – ٥,٥ (٧)^{٢} + ٢٨ (٧) = ٤٠,٨

قيمة الدالة عند النهاية العظمى : يتم التعويض فى الدالة الأصلية بقيمة س = ٤

ص = ٣/١ (٤)^{٣} – ٥,٥ (٤)^{٢} + ٢٨ (٤) = ٤٥,٣

∴ النهاية الصغرى للدالة = ٤٠,٨ ، والنهاية العظمى للدالة = ٤٥,٣

الباب الثامن : المصـــفوفات الرياضية

المصفوفة هى عدد من القيم مرتب فى صورة أعمدة وصفوف ويعبر عن قيم ظاهرة معية .
جمع وطرح المصفوفات : لجمع عدد من المصفوفات يجب أن يكون لكل منها نفس عدد الصفوف ونفس عدد الأعمدة ، ويجمع كل عنصر مع العنصر المقابل له فى نفس الصف والعمود . وينطبق نفس الشرط على الطرح

مثال:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -2 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 6 & 12 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$$

مثال :

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

ضرب المصفوفات

يمكن ضرب مصفوفتين بحيث يكون عدد أعمدة الأولى يساوى عدد صفوف الثانية . ويتم ضرب صف فى عمود وفقا لهذا النموذج :

$$\begin{pmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} \\ \text{أ}_{13} & \text{أ}_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{ب}_{11} & \text{ب}_{12} \\ \text{ب}_{12} & \text{ب}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\text{أ}_{11}\text{ب}_{11} + \text{أ}_{12}\text{ب}_{12}) & (\text{أ}_{11}\text{ب}_{12} + \text{أ}_{12}\text{ب}_{22}) \\ (\text{أ}_{12}\text{ب}_{11} + \text{أ}_{22}\text{ب}_{12}) & (\text{أ}_{12}\text{ب}_{12} + \text{أ}_{22}\text{ب}_{22}) \\ (\text{أ}_{13}\text{ب}_{11} + \text{أ}_{23}\text{ب}_{12}) & (\text{أ}_{13}\text{ب}_{12} + \text{أ}_{23}\text{ب}_{22}) \end{pmatrix}$$

مثال :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times1 + 2\times5 & 4\times3 + 2\times6 \\ 2\times1 + 7\times5 & 2\times3 + 7\times6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 24 \\ 37 & 48 \end{pmatrix}$$

تحوير المصفوفة

تحوير المصفوفة هو تحويل الصفوف الى أعمدة أو تحويل الأعمدة الى صفوف
مثال : أوجد تحوير المصفوفة أ التالية :

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 8 & 22 \\ 7 & 14 \end{pmatrix} \qquad \text{أ}'(\text{التحوير}) = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 7 \\ 20 & 22 & 14 \end{pmatrix}$$

مصفوفة الوحدة

هى مصفوفة مربعة أى عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة والمحور الرئيسى من أعلى اليمين الى أسفل اليسار عناصره تساوى واحد صحيح وباقى عناصر المصفوفة كل منها يساوى صفر .

$$\begin{pmatrix} 1 & \text{صفر} \\ \text{صفر} & 1 \end{pmatrix}$$

محدد المصفوفة

محدد المصفوفة هى قيمة رياضية معينة يتم تقديرها من المصفوفة بشرط أن تكون مصفوفة مربعة ويتم تقديرها كالآتى :

محدد المصفوفة الثنائية : هو حاصل ضرب عنصرى المحور الرئيسى مطروحا منه حاصل ضرب عنصرى المحور الفرعى(المحور الفرعى من أعلى اليسار لأسفل اليمين) .

مثال : أوجد محدد المصفوفة التالية : $\begin{pmatrix} ٥ & ٦ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$

المحدد = (٦×٤) - (٥×٢) = ١٤

محدد المصفوفة الثلاثية : نعرف أولا ما هو المرافق:

لكل عنصر فى المصفوفة مرافق ، يتم تقديره بحذف الصف العمود الموجود بهما العنصر فيتبقى مصفوفة ثنائية يوجد محددها فيكون هوالمرافق **ولكن يجب تغيير إشارة المرافق إذا كان مجموع رقم الصف والعمود فرديا** . لإيجاد محدد الثلاثية يوجد مرافقات عناصر الصف الأول فقط ثم يضرب كل عنصر منها ويتم جمع حاصل الضرب فيكون هو المحدد .

مثال : أوجد محدد المصفوفة التالية : $\begin{pmatrix} ١ & ٤ & ٢ \\ ٥ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

مرافق العنصر ٢ يتم إلغاء الصف الأول والعمود الأول فتبقى المصفوفة

$$\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$$

محددها = (٢×٤ – ٥×٣) = ٨ – ١٥ = - ٧ وهذا هو مرافق العنصر الأول.

مرافق العنصر ٤ = (٣×٤ - ٥×٢) = ٢ ويجب تغيير إشارته لأنه العنصر الثانى (وفقا للشرط السابق ذكره) فيكون المرافق = - ٢

مرافق العنصر ١ = (٣×٣ - ٢×٢) = (٩ – ٤) = ٥ فيكون المرافق ٥

إذن محدد المصفوفة = العنصر الأول × مرافقه + العنصر الثانى × مرافقه + العنصر الثالث × مرافقه

= (٢ × - ٧) + (٤ × - ٢) + (١ × ٥) = - ١٤ – ٨ + ٥ = - ١٧

معكوس المصفوفة

إذا كان حاصل ضرب المصفوفتين أ×ب يعطى مصفوفة الوحدة فإن المصفوفة ب تكون معكوس أ ، والمصفوفة أ تكون معكوس ب . ولإيجاد المعكوس :

١ – نحور المصفوفة

٢ ـ نوجد المحدد من المحورة .
٣ ـ نوجد مرافق كل عنصر من جميع عناصر المحورة .
٤ ـ نقسم مصفوفة المرافقات السابقة على المحدد فنحصل على المعكوس .

مثال : أوجد معكوس المصفوفة التالية أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$

الحل : ١ ـ تحوير المصفوفة أ' = $\begin{pmatrix} ٦ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$

٢ ـ محدد المحورة = (٤ × ٥) – (٦ × ٢) = ٨

٣ ـ مصفوفة المرافقات من أ' = $\begin{pmatrix} -٢ & ٥ \\ ٤ & -٦ \end{pmatrix}$

٤ ـ إيجاد المعكوس بقسمة مصفوفة المرافقات على المحدد :

$$\begin{pmatrix} -٢/٨ & ٥/٨ \\ ٤/٨ & -٦/٨ \end{pmatrix}$$

للتأكد من الحل إضرب المعكوس فى المصفوفة الأصلية تحصل على مصفوفة الوحدة.

حل المعادلات الخطية بطريقة المحددات

إذا كان لدينا معادلتين كالآتى : $أ_{١١}س_{١} + أ_{٢١}س_{٢} = ب_{١}$ ،
$أ_{١٢}س_{١} + أ_{٢٢}س_{٢} = ب_{٢}$

حيث أ ، ب هى معاملات المعادلات ، س١ ، س٢ المجاهيل المطلوب تقديرها .
يتم الحل بقسمة المحددات الآتية على بعضها كالآتى :

$$س_{١} = \frac{\begin{vmatrix} أ_{٢١} & ب_{١} \\ أ_{٢٢} & ب_{٢} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{vmatrix}} \quad \& \quad س_{٢} = \frac{\begin{vmatrix} أ_{٢١} & ب_{١} \\ أ_{٢٢} & ب_{٢} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{vmatrix}}$$

مثال : أوجد المجهولين فى المعادلتين التاليتين :
$٢س_{١} + ٢س_{٢} = ١٠$
$س_{١} + ٣س_{٢} = ٧$

الحل :

$$س_{١} = \frac{\begin{vmatrix} ٢ & ١٠ \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix}} = \frac{٣٠ - ١٤}{٦ - ٢} = ٤ \quad \& \quad س_{٢} = \frac{\begin{vmatrix} ١٠ & ٢ \\ ٧ & ١ \end{vmatrix}}{٤} = \frac{١٤ - ١٠}{٤} = ١$$

الباب التاسع : مقدمة فى التأمين

- ما تعريف الخطر
- ماهى أنواع أو تصنيفات الأخطار
- عرف التأمين
- ما أهم أهداف التأمين
- ما أهم أنواع التأمين

**** إرجع للكتاب من ص ٢٣٢ الى ص ٢٤٥ للإجابة على هذه الأسئلة الهامة .**

تقدير جدول التوزيعات الإحتمالية للحياة والوفاة

أهم المعادلات المستخدمة :-

نسبة الوفيات فى العام (ر) = عدد الوفيات خلال العام (ر) ÷ عدد الأحياء حتى نهاية العام(ر) .

نسبة الأحياء فى العام (ر) = ١ – نسبة الوفيات فى العام (ر)

عدد الأحياء فى العام (ر + ١) = عدد الأحياء فى العام (ر) – عدد الوفيات فى العا[illegible])

<u>مثال ١</u> : إذا كان لدينا ٥٠٠٠٠ شخص فى عمر ٤٠ عاما ، وكانت أعداد الوفاة فى ثلاثة أعوام هى : و ٤٠ = ٤٢٠ ، و٤١ = ٤٣٠ ، و٤٢ = ٤٥٠ .
أوجد نسبة الوفاة ونسبة الحياة فى هذه الأعوام.

الحل : نسبة الوفاة فى العمر ٤٠ عاما = ٤٢٠ ÷ ٥٠٠٠٠ = ٠,٠٠٨٤
نسبة الحياة فى العمر ٤٠ = ١ – ٠,٠٠٨٤ = ٠,٩٩١٦
عدد الأحياء فى العمر ٤١ = ٥٠,٠٠٠ – ٤٢٠ = ٤٩٥٨٠
(ح٤١ = ح٤٠ – و٤٠)
نسبة الوفاة فى العام ٤١ = ٤٣٠ ÷ ٤٩٥٨٠ = ٠,٠٠٨٧
نسبة الحياة فى العام ٤١ = ١ – ٠,٠٠٨٧ = ٠,٩٩١٣
عدد الأحياء فى العام ٤٢ = ٤٩٥٨٠ – ٤٥٠ = ٤٩١٣٠
نسبة الوفاة فى العام ٤٢ = ٤٥٠ ÷ ٤٩١٣٠ = ٠,٠٠٩٢
نسبة الحياة فى العام ٤٢ = ١ – ٠,٠٠٩٢ = ٠,٩٩٠٨

مثال ٢ : أكمل جدول التوزيعات الإحتمالية للحياة والوفاة التالي :

العمر (ر)	ح	ور	نسبة الوفيات	نسبة الأحياء
٥٠	...	٤٣	...	...
٥١	٤٩٥٧	٤٤	...	...
٥٢	٤٩١٣	...	....	...
٥٣	٤٨٧٠	٤٥	...	...
٥٤	...	٤٧	...	...

الحل: ح ٥٠ = ح٥١ + و ٥٠

ح٥٠ = ٤٩٥٧ + ٤٣ = ٥٠٠٠

نسبة الوفاة فى العام٥٠ = ٤٣ ÷ ٥٠٠٠ = ٠,٠٠٨٦

نسبة الحياة فى العام ٥٠ = ١ – ٠,٠٠٨٦ = ٠,٩٩١٤

نسبة الوفاة فى العام٥١ = ٤٤ ÷ ٤٩٥٧ = ٠,٠٠٨٩

نسبة الحياة فى العام٥١ = ١ – ٠,٠٠٨٩ = ٠,٩٩١١

عدد الوفيات عام٥٢ = عدد الأحياءعام ٥١ – عدد الأحياء عام٥٢

= ٤٩١٣ – ٤٨٧٠ = ٤٣

نسبة الوفاة عام ٥٢ = ٤٣ ÷ ٤٩١٣ = ٠,٠٠٨٨

نسبة الحياة عام ٥٢ = ١ – ٠,٠٠٨٨ = ٠,٩٩١٢

نسبة الوفاة عام ٥٣ = ٤٥ ÷ ٤٨٧٠ = ٠,٠٠٩٢

نسبة الحياة عام ٥٣ = ١ – ٠,٠٠٩٢ = ٠,٩٩٠٨

عدد الأحياء عام ٥٤ = عدد الأحياء عام ٥٣ – عدد الوفيات عام ٥٣

= ٤٨٧٠ – ٤٥ = ٤٨٢٥

نسبة الوفاه عام ٥٤ = ٤٧ ÷ ٤٨٢٥ = ٠,٠٠٩٧

نسبة الحياة عام٥٤ = ١ - ٠,٠٠٩٧ = ٠,٩٩٠٣

ويتضح ذلك بالجدول التالي

العمر (ر)	ح	ور	نسبة الوفيات	نسبة الأحياء
٥٧	٥٠٠٠	٤٣	٠,٠٠٨٦	٠,٩٩١٤
٥٨	٤٩٥٧	٤٤	٠,٠٠٨٨	٠,٩٩١٢
٥٩	٤٩١٣	٤٣	٠,٠٠٨٨	٠,٩٩١٢
٦٠	٤٨٧٠	٤٥	٠,٠٠٩٢	٠,٩٩٠٨
٦١	٤٨٢٥	٤٧	٠,٠٠٩٧	٠,٩٩٠٣

٩-٤-٢ تقدير القيمة الحالية للقسط الصافى

لقيمة الحالية لقسط التأمين هى القيمة الصافية التى يجب أن يدفعها المؤمن عليه مقابل لتأمين ضد خطر معين وهذه القيمة تعادل قيمة الخسارة المتوقعة . ولكن ليست هى القيمة لوحيدة التى يدفعها بل يجب أن تضاف اليها التكاليف التى تتحملها شركة التأمين وأرباح هذه لشركة . وتقدر كالآتى :

لقيمة الحالية للقسط الصافى لوثيقة التأمين = قيمة الشىء المؤمن عليه (ق) × إحتمال حدوث الخسارة فى هذا النوع من التأمين (أ) × نسبة الخسارة فى الشىء المؤمن عليه ض) × سعر الخصم وفقا لسعر فائدة معين ولمدة نصف عام (ص) .

البنود السابقة يتم تقدير كل منها كالآتى :

١ - **قيمة الشىء المؤمن عليه (ق)** : يتم تقدير قيمة الشىء المؤمن عليه وفقا للأسعار لحالية ، أو وفقا لتقدير خبراء شركة التأمين . كما قد يتم التقدير بالإتفاق مع الشخص المؤمن صالحه . والمعروف أنه كلما زادت قيمة الشىء المؤمن عليه كلما زاد قيمة قسط التأمين .

٢ - **إحتمال حدوث الخسارة (أ)** : ويقدر بقسمة عدد الخسائر المتوقعة فى نوع معين من لتأمين على العدد الكلى للأشياء المؤمن عليها، وهذه النسبة يمكن لشركات التأمين تقديرها فقا للبيانات التى لديها ، فمن خبراتها السابقة تستطيع تقدير نسبة الخسائر فى كل نوع من نواع التأمين . فمثلا إذا كانت سجلات الشركة توضح أن هناك مليون حالة تأمين سيارات ند الحوادث ، وأنه قد حدثت ٣٠٠٠ حادثة خلال العام فى هذه السيارات المؤمن عليها ، عنى ذلك أن إحتمال حدوث الخسارة (أ) = ٣٠٠٠ ÷ ١٠٠٠,٠٠٠ = ٠,٠٠٣ .

٣ - **نسبة الخسارة المتوقعة فى النوع المعين من التأمين (ض)** : تختلف الخسارة من حادث لآخر ، فقد يؤدى حادث معين الى خسارة تمثل ١٥% من قيمة السيارة ، وحادث ثانى ؤدى الى خسارة تبلغ٢٥%... وهكذا وبعضها تصل نسبة الخسارة فيه الى ١٠٠% من قيمة لسيارة . وشركة التأمين لديها بيانات عن عدد السيارات التى تكون الخسارة بها ١٠% ، عدد السيارات التى تبلغ الخسارة بها ٢٠% ... وهكذا . ومن نسب الخسارة السابقة يمكن قدير متوسط نسبة الخسارة فى النوع من التأمين.

٤ - **سعر الخصم** : تدفع قيمة قسط التأمين فى بداية العقد أى فى بداية التأمين لمدة عام ، تقوم الشركة بدفع التعويضات عند حدوث الخسائر على مدار العام ، ولذلك يفترض أن ركة التأمين قد إستثمرت إجمالى الأقساط التى لديها لمدة نصف عام فى المتوسط . ولذلك من حق المؤمن عليه الحصول على عائد إستثمار هذا المبلغ لمدة نصف عام وفقا لسعر فائدة عين فإذا دفع شخص معين قسط قيمته ١٠٠ جنيه فى بداية العام ، وكان سعر الفائدة ٦%

فكأنـه دفـع للشـركة ١٠٣ جنيهـات فـى منتصـف العـام لأن المبلـغ المـدفوع سـوف يـربح ١٠٠×٠,٠٦ = ٦ جنيهات خلال عام كامل أى ٣ جنيهات خلال نصف العام . فإذا كان القسط المطلوب ١٠٣ جنيهات فإن من حق الشخص أن يدفع ١٠٠ جنيه فقط فى بداية العام .

ويقدر سعر الخصم كالآتى :

$$\text{سعر الخصم} = \frac{1}{1 + \text{نصف سعر الفائدة}}$$

فإذا كان سعر الفائدة فى العام ٨% فإن سعر الخصم لمدة نصف عام

$$= \frac{١}{١ + ٠,٠٤} = \frac{١}{١,٠٤} = ٠,٩٦١٥$$

وبذلك فقسط التأمين ١٠٤ جنيهات تبلغ قيمته الصافية أول العام = ١٠٤ × ٠,٩٦١٥ = ١٠٠ جنيه .

تقدير نسبة الخسارة المتوقعة فى النوع المعين من التأمين :

لتوضيح كيفية تكوين جدول تقدير نسبة الخسارة المتوقعة لنوع معين من أنواع التأمين ، سوف نفترض أنه التأمين على السيارات ضد الحوادث .

١ - سنفترض أن أحد شركات التأمين ضد حوادث السيارات تقوم بالتأمين على ١٠٠,٠٠٠ سيارة ضد الحوادث .

٢ - تعلم الشركة أن هذا العدد من السيارات يحدث به ١٠٠ حادث سنويا .

٣ – تقوم الشركة بتصنيف نسبة الخسارة فى كل حادث . فمثلا ٥ حوادث تكون نسبة الخسارة بها ٢٠% ، ٩ حوادث بها خسائر ٣٠% ، وهكذا .

٤ – من خلال النسب السابقة تكون الشركة جدول التوزيعات الإحتمالية للخسائر كالآتى :-

العمود الأول : نسبة فئات الخسارة (ت) :-

تقسم نسب الخسارة الى ١٠ فئات. الفئة الأولى عندما تنحصر نسبة الخسارة بين صفر و ١٠%، والفئة الثانية عندما تنحصر نسبة الخسارة بين ١٠% ، ٢٠% ، وهكذا بحيث تكون الفئة العاشرة (الأخيرة) تنحصر نسبة الخسارة بها بين ٩٠% ، ١٠٠% .

العمود الثانى : عدد الحوادث فى كل فئة (ك) :-

يتم توزيع عدد الحوادث على فئات الخسارة المتوقعة ، فالفئة الأولى يحدث بها ٨ حوادث مثلا ، والفئة الثانية ٩ حوادث، وهكذا وفقا للسجلات التى لديها من خبرتها السابقة .

مود الثالث : مراكز الفئات (م):-
تحويل كل فئة فى العمود الأول الى قيمة واحدة هى مركز الفئة أى(الحد الأدنى للفئة + دالأقصى للفئة) ÷٢
ركز الفئة الأولى = (٠ + ٠,١) ÷ ٢ = ٠,٠٥ ،
ركز الفئة الثانية = (٠,١ + ٠,٢) ÷ ٢ = ٠,١٥ ، هكذا .

مود الرابع : نسبة عدد الحوادث فى كل فئة (ل) :-
ى هذا العمود يتم تحويل عدد الحوادث (ك) فى كل فئة الى نسبة مئوية من العدد الكلى حوادث وهو الذى إفترضنا أنه ١٠٠ حادث . وبذلك يكون إحتمال وقوع الخسارة فى الفئة أولى = ٨ ÷ ١٠٠ = ٠,٠٨ (٨%) ، وإحتمال وقوع الخسارة فى الفئة الثانية = ٩÷١٠٠ = ٠,٠ (٩%)
ذلك فتقدير هذه النسب يتم بالمعادلة (ك ÷ مجـ ك) .

عمود الخامس : نسبة قيمة الخسارة المتوقعة لكل فئة :-
يتم تقدير هذه النسبة بضرب نسبة فئة الخسارة وهو عبارة عن مركز الفئة (م) فى نسبة دد الحوادث المقابل لنفس الفئة (ل) . أى يتم إيجاد (م × ل) لكل فئة .

تقدير إجمالى نسبة الخسارة المتوقعة فى النوع المعين من التأمين :
تقدر هذه النسبة بتجميع نسب الخسارة المتوقعة لكل الفئات فى نهاية العمود الخامس وصول الى نسبة واحدة تعبر عن متوسط نسبة الخسارة المتوقعة فى قيمة السيارات التى دث لها حوادث، وهى القيمة التى سبق الإشارة اليها بالرمز (ض) .
ويتم توضيح إجمالى نسبة الخسارة المتوقعة (ض) فى الجدول التالى الذى يفترض أن ناك ١٠٠ حادث سيارة ، وقد تم توزيع هذا العدد على فئات الخسارة المختلفة من واقع سجلات شركة التأمين كما يلى :

جدول التوزيعات الإحتمالية للخسائر

فئات نسب الخسارة	مراكز الفئات (م)	عدد حوادث كل فئة (ك)	نسبة عدد حوادث كل فئة ل = ك ÷ مج ك	النسبة المترقعة لحدوث الخسارة فى الفئة (م×ل)
٠ — ٠,١	٠,٠٥	٨	٠,٠٨	٠,٠٠٤٠
٠,١ — ٠,٢	٠,١٥	٩	٠,٠٩	٠,٠١٣٥
٠,٢ — ٠,٣	٠,٢٥	١٢	٠,١٢	٠,٠٣٠٠
٠,٣ — ٠,٤	٠,٣٥	١٤	٠,١٤	٠,٠٤٩٠
٠,٤ — ٠,٥	٠,٤٥	١٥	٠,١٥	٠,٠٦٧٥
٠,٥ — ٠,٦	٠,٥٥	١٢	٠,١٢	٠,٠٦٦٠
٠,٦ — ٠,٧	٠,٦٥	١٠	٠,١٠	٠,٠٦٥٠
٠,٧ — ٠,٨	٠,٧٥	٩	٠,٠٩	٠,٠٦٧٥
٠,٨ — ٠,٩	٠,٨٥	٦	٠,٠٦	٠,٠٥١٠
٠,٩ — ١,٠	٠,٩٥	٥	٠,٠٥	٠,٠٤٧٥
المجموع		١٠٠	١,٠	٠,٤٦١٠

مثال ١ : أوجد القيمة الصافية لقسط تأمين سيارة قيمتها ١٠٠ ألف جنيه، مع العلم بأن سعر الفائدة المستخدم في الخصم تبلغ ٧% ، وذلك بالإستعانة ببيانات الجدول السابق.

الحل

القيمة الصافية لقسط التأمين = ق × أ × ض × ص

ق = ١٠٠ ألف جنيه .

أ = إحتمال حدوث حوادث السيارات ، ووفقا للبيانات السابقة = عدد الحوادث ÷ عدد السيارات المؤمن عليها = ١٠٠ ÷ ١٠٠٠٠٠ = ٠,٠٠١

ض = قدرت فى الجدول السابق بمقدار ٠,٤٦١

ص = سعر الخصم لمدة نصف عام ويبلغ = ١ ÷ (١ + ٠,٠٧ × ٠,٥)

= ١ ÷ ١,٠٣٥ = ٠,٩٦٦٢

∴ القيمة الصافية لقسط التأمين = ١٠٠٠٠٠ × ٠,٠٠١ × ٠,٤٦١ × ٠,٩٦٦٢ = ٤٤,٥٤٢

مثال٢ : شركة تأمين تؤمن على ١٠٠٠٠٠ مبنى ضد الحريق . وقد تبين للشركة من البيانات التى لديها أنه تقع ٢٠٠ حادثة حريق من هذا النوع لدى الأشخاص المؤمن عليهم فى العام . وإتضح أن نسب الخسائر فى هذه الحوادث تتوزع وفقا للجدول التالى . والمطلوب تكوين جدول التوزيعات الإحتمالية للخسائر .

فئات نسب الخسارة	٠ – ٠,١	٠,١ – ٠,٢	٠,٢ – ٠,٣	٠,٣ – ٠,٤	٠,٤ – ٠,٥	٠,٥ – ٠,٦	٠,٦ – ٠,٧	٠,٧ – ٠,٨	٠,٨ – ٠,٩	٠,٩ – ١,٠
عدد الحوادث	١٠	٢٥	٣٠	٣٥	٣٠	٢٥	٢٠	١٠	١٠	٥

الحل

أ – جدول التوزيعات الإحتمالية للخسائر

فئات نسب الخسارة	عدد حوادث الفئة (ك)	مراكز الفئات (م)	نسبة عدد الحوادث فى الفئة (ل)	النسبة المتوقعة لحدوث الخسارة فى الفئة (م×ل)
٠ – ٠,١	١٠	٠,٠٥	٠,٠٥	٠,٠٠٢٥٠
٠,١ – ٠,٢	٢٥	٠,١٥	٠,١٢٥	٠,٠١٨٧٥
٠,٢ – ٠,٣	٣٠	٠,٢٥	٠,١٥	٠,٠٣٧٥٠
٠,٣ – ٠,٤	٣٥	٠,٣٥	٠,١٧٥	٠,٠٦١٢٥
٠,٤ – ٠,٥	٣٠	٠,٤٥	٠,١٥	٠,٠٦٧٥٠
٠,٥ – ٠,٦	٢٥	٠,٥٥	٠,١٢٥	٠,٠٦٨٧٥
٠,٦ – ٠,٧	٢٠	٠,٦٥	٠,١	٠,٠٦٥٠٠
٠,٧ – ٠,٨	١٠	٠,٧٥	٠,٠٥	٠,٠٣٧٥٠
٠,٨ – ٠,٩	١٠	٠,٨٥	٠,٠٥	٠,٠٤٢٥٠
٠,٩ – ١,٠	٥	٠,٩٥	٠,٠٢٥	٠,٠٢٣٧٥
المجموع	٢٠٠			٠,٤٢٥

ثال٣ : إذا كانت نسبة إحتمال حدوث الخسارة فى السيارات لدى إحدى شركات التأمين تبلغ ٠,٠١ ، وكانت متوسط نسبة الخسارة المتوقعة (ض) تبلغ ٠,٦٤٥٢ ، أوجد القسط تجارى للتأمين على سيارة قيمتها ٢٤٠٠٠٠ جنيه ، مع العلم بأن التكاليف الإضافية تبلغ ٨٥ جنيها ، وسعر فائدة الخصم ٨% .

الحل

لقيمة التجارية لقسط التأمين = القيمة الصافية للقسط + التكاليف الإضافية

لقيمة الصافية للقسط = ق × أ × ض × ص

= ٢٤٠٠٠٠ × ٠,٠١٥ × ٠,٦٤٥٢ × (١ / ١,٠٤)

= ٢٤٠٠٠٠ × ٠,٠١٥ × ٠,٦٤٥٢ × ٠,٩٦١٥

= ٢٢٣٣,٣ جنيها

∴ القيمة التجارية للقسط = ٢٢٣٣,٣ + ٨٥ = ٢٣١٨,٣ جنيها .