" ميلاد $\mathbb{C}$ "

(طريقة وليد في بناء $\mathbb{C}$ انطلاقًا من $\mathbb{R}$)

مجموعة الأعداد العقديّة

لنزود المجموعة $\mathbb{R}^2$ بالعمليتين $(\oplus)$ و $(\otimes)$ المعرّفتين كما يلي:

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d),$$
$$(a,b)\otimes(c,d)=(ac-bd,ad+bc),$$

فتكون بذلك $(\mathbb{R}^2,\oplus,\otimes)$ حقل تبديليّ عنصراه الحياديان هما $(0,0)$ و $(1,0)$ بالنسبة للجمع $(\oplus)$ والضرب $(\otimes)$ المعرّفين على الترتيب.

ولنا أن نتأكد من أنّ $(\mathbb{R}\times\{0\},\oplus,\otimes)$ حقل جزئيّ من الحقل $(\mathbb{R}^2,\oplus,\otimes)$ وأنّ التطبيق f المعرّف بـ:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\{0\}$$
$$x\mapsto(x,0)$$

هو تشاكل حقول. ونسمّي $(x,0)$ أثر العدد الحقيقيّ x.

إذن باستبدال كل عدد حقيقيّ x بصورته $(x,0)$ في المجموعة $\mathbb{R}^2$ نحصل على مجموعة جديدة هي $\mathbb{C}=\mathbb{R}\cup(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*)$ ولنزود هذه الأخيرة بالعمليتين الداخليتين $(+)$ و $(\cdot)$ المعرّفتين كالتالي:

- الجمع $(+)$ والضرب $(\cdot)$ في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ هما مقصورا الجمع $(\oplus)$ والضرب $(\otimes)$ المعرّفين على الترتيب في $\mathbb{R}^2$ سابقًا على أن نستبدل بالناتج سابقته وفق التطبيق f إن كان الناتج عنصرًا من $\mathbb{R}\times\{0\}$.

مثال

$$\begin{aligned}(0,2)\cdot(0,3)&\equiv(0,2)\otimes(0,3)\\&\equiv(-6,0)\\&=-6\end{aligned}$$

- ونعرّف جمع وضرب عدد حقيقيّ x بعنصر (a,b) من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ في $\mathbb{C}$ بالطريقة التالية:

$$\begin{aligned} x+(a,b) &= (x,0)\oplus(a,b) \\ &= (x+a,b), \\ x\cdot(a,b) &\equiv (x,0)\otimes(a,b) \\ &= \begin{cases} (xa,xb) & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases} \end{aligned}$$

- أمّا بالنسبة لجمع وضرب عددين حقيقيين في $\mathbb{C}$ فهما نفس عمليتي الجمع والضرب المألوفتين في $\mathbb{R}$.

ومن ثمّ إذا ما نظرنا إلى طريقة تعريف عمليتي الجمع $(+)$ و الضرب $(\cdot)$ في $\mathbb{C}$، اتّضح لنا أنّ $(\mathbb{C},+,\cdot)$ حقل تبديليّ يحتفظ بـ $(\mathbb{R},+,\cdot)$ كحقل جزئيّ عنصراه الحياديان هما العددان الحقيقيّان 0 و 1 على الترتيب.
نسمّي المجموعة $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد العقديّة. وبالمثل نسمّي كلّ عنصر منها عددًا عقديًا. نرمز لهذه الأعداد العقديّة عادةً بأحرفٍ مثل: z، w، α، ....
كما نسمّي عناصر المجموعة $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ بالأعداد العقديّة الصِرّفة، ونرمز أيضًا للعدد العقديّ الصِرّف $(0,1)$ بالرمز i.

ملحوظة

$$\begin{aligned} i^2 &= (0,1)\cdot(0,1)\equiv(-1,0) \\ &= -1. \end{aligned}$$

نظريّة

إذا كان $z=(x,y)$ عددًا عقديًّا صِرّفًا فإنّ:

$$\begin{aligned} z=(x,y)=(x,0)\oplus(0,y) &= (x,0)\oplus\left[(0,1)\otimes(y,0)\right] \\ &= x+i\cdot y \end{aligned}$$

وبملاحظة أنّه إذا كان $z=x$ عددًا حقيقيًّا فإنّ:

$$z=x=x+i\cdot 0$$

وعلى إثرها نستقي هذه الـ:

نتيجة

إذا كان z عددًا عقديًّا فإنّ z يكتب بالشكل التالي:

$$z = x + iy \quad / \left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2.$$

تسمّى هذه الأخيرة بالشكل الجبريّ للعدد العقديّ z، ويسمّى x بالجزء الحقيقيّ لـ z كما يسمّى y بالجزء التخيليّ لـ z ويرمز بـ $x=Rez$ و $y=Imz$.

هام جدًّا

يتبيّن لنا ممّا سبق أنّ $\left(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes\right) \approx \left(\mathbb{C}, +, \cdot\right)$، وعليه نكتب كلّ عدد عقديّ $z = x + iy$ على شكل ثنائيّة $z = \left(x, y\right)$ قصد تخفيف وتوحيد الكتابة. على أن نستحضر في أذهننا أنّه في حالة انعدام الجزء التخيليّ y نعني بالكتابة $z = \left(x, 0\right)$ العدد الحقيقيّ x، وهذا ما نعنيه بقولنا أنّ $\left(x, 0\right)$ هو أثر العدد الحقيقيّ x في $\mathbb{C}$؛ لأنّه يلازمه طوال الوقت، فهو يدل على العدد الحقيقيّ x كتابة كما يشير أيضًا إلى موضعه في المستوي، بالإضافة إلا أننا نستعين به كوسيط أثناء الجمع والضرب كما سلف إيضاحه في المثال سابقًا. لاكن انتبه !، $x \neq \left(x, 0\right)$ وإنّما يدل عليه كما أنّ $\mathbb{C} \neq \mathbb{R}^2$ وإنّما $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$؛ فالمجموعة $\mathbb{R}^2$ لا تحوي $\mathbb{R}$ ولا تضمّ أيّ عنصر منها كما هو معروف. فلا تخلِطنّ بينهما!.