المدرسة العليا للأساتذة ـ القبة ـ
دروس السنة الثالثة من المستوى الجامعي

مدخل إلى الهندسة التآلفية

$$\overrightarrow{AB}+A=B$$

$$E=A+\overrightarrow{E}$$

من إعداد

الطالب وليد سعدي

2019/2018

فهرس الموضوعات

الفضاءات التآلفية

تعاريف

تأثير زمرة على مجموعة

نقول عن زمرة G إنها تؤثر على مجموعة غير خالية E، إذا وُجد تطبيق:

$$G \times E \to E$$
$$(g,x) \mapsto g \cdot x$$

يحقّق الشرطين:

$$1)\ \forall (a,b) \in G^2, \forall x \in E,\ \ a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x,$$
$$2)\ \forall x \in E,\ \ e \cdot x = x.$$

ونقول إنّ تأثير الزمرة G على E بسيط إذا، وفقط إذا، كان:

$$\forall (g,x) \in G \times E, \quad g \cdot x = x \Leftrightarrow g = e,$$

أي مثبت كل عنصر x من E هي الزمرة الجزئية التافهة $\{e\}$. وهو ما يكافئ بلغة الرموز:

$$\forall x \in E,\ \ st(x) = \{e\}.$$

ونقول عن تأثير الزمرة G على E إنّه متعدٍّ إذا تحقّق الشرط:

$$\forall (x,y) \in E^2, \exists g \in G \,/\, y = g \cdot x,$$

أي:

$$\forall x \in E,\ \ \Omega_x = E.$$

حيث يمثل Ω_x صف تكافؤ العنصر x من E وفق علاقة التكافؤ التالية:

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists g \in G \,/\, y = g \cdot x.$$

كما يطلق على Ω_x بمدار العنصر x في E.

قضية

يكون تأثير زمرة ما G على مجموعة E بسيطًا ومتعدٍّ في آنٍ واحدٍ إذا، وفقط إذا، وُجد عنصر a من E من أجله يكون التطبيق:

$$\varphi_a : G \to E$$
$$g \mapsto g \cdot a$$

تقابليًا.

إثبات

لدينا: φ_a غامر $\Leftrightarrow \forall x \in E, \quad \Omega_x = E$ ،

φ_a متباين $\Leftrightarrow st(a) = \{e\}$ ، وينجرّ عن هذه الأخيرة أنّه:

أيًا كان (g,x) من $G \times E$ فإنّ:

$$\begin{aligned} g \cdot x = x &\Rightarrow \exists h \in G \,/\, g \cdot (h \cdot a) = h \cdot a \\ &\Rightarrow \exists h \in G \,/\, (gh) \cdot a = h \cdot a \\ &\Rightarrow \exists h \in G \,/\, \left(h^{-1}gh\right) \cdot a = a \\ &\Rightarrow \exists h \in G \,/\, h^{-1}gh = e \\ &\Rightarrow \exists h \in G \,/\, gh = h \\ &\Rightarrow \exists h \in G \,/\, g = e \end{aligned}$$

وهو ما يبرز التكافؤ المنتظر.

ملحوظة

في حالة الكتابة الجمعية (حالة $(G,+)$ زمرة جمعية) نستبدل بالكتابة $g \cdot x$ الكتابة $g + x$ في كل ما سبق.

الفضاءات الشعاعية

ليكن $(K,+,\cdot)$ حقلاً تبديليًا، ولتكن E مجموعة غير خالية. نقول إنّ E فضاء شعاعي على الحقل التبديلي K إذا عرّفنا عمليتين نرمز لهما أيضًا بـ $(+)$ و $(\cdot)$ بحيث تتحقّق الشروط التالية:

1) $(E,+)$ لها بنية زمرة تبديلية،

2) العملية الثانية معرّفة كما يلي:

$$\begin{aligned} \cdot : K \times E &\to E \\ (\alpha, x) &\mapsto \alpha \cdot x \end{aligned}$$

وتحقّق الشروط التالية:

1) $\forall (x,y) \in E^2, \forall \alpha \in K, \ \alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,$

2) $\forall x \in E, \forall (\alpha,\beta) \in K^2, \ (\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,$

3) $\forall x \in E, \forall (\alpha,\beta) \in K^2, \ \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x,$

4) $\forall x \in E, \ 1_K \cdot x = x.$

أمثلة

1- كل حقل تبديلي هو فضاء شعاعي على نفسه،
2- المجموعات $\mathbb{R}^n$، حيث n ينتمي إلى $\mathbb{N}^*$ المزودة بجمع الأشعة وضرب شعاع في سلمية هي فضاءات شعاعية على الحقل الحقيقي $(\mathbb{R},+,\cdot)$. وبصفة خاصّة $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ فضاءين شعاعيين على الحقل $\mathbb{R}$،
3- مجموعة كثيرات الحدود بمعاملات حقيقيّة $\mathbb{R}[X]$ هي فضاء شعاعي على الحقل الحقيقي،
4- مجموعة التطبيقات الحقيقيّة لمتغير حقيقي $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ هي فضاء شعاعي على الحقل الحقيقي.

الفضاءات التآلفية

ليكن K حقلاً تبديليًا و $(\vec{E},+,\cdot)$ فضاءً شعاعيًا مُنتّهيَ البُعد على الحقل التبديلي K. و E مجموعة غير خالية.

تعريف 1

نقول إنّ المجموعة E مزودة ببنية فضاء تآلفي موجّه بالفضاء الشعاعي $\vec{E}$ (أو منحاه الفضاء الشعاعي $\vec{E}$) إذا عرّفنا تأثير زمرةٍ بسيطٍ ومتعدٍّ من الزمرة التبديلية $(\vec{E},+)$ على المجموعة E. أي نعرّف تطبيقًا:

$$\vec{E}\times E\to E$$
$$(\vec{u},A)\mapsto \vec{u}+A$$

بحيث:

$$1)\ \forall(\vec{u},\vec{v})\in\vec{E}^2,\ \forall A\in E,\ \ \vec{u}+(\vec{v}+A)=(\vec{u}+\vec{v})+A,$$

$$2)\ \forall A\in E,\ \ \vec{0}+A=A,$$

$$3)\ \forall A\in E,\ \ st(A)=\{\vec{0}\},$$

$$4)\ \forall A\in E,\ \ \Omega_A=E.$$

تعريف 2

نقول عن مجموعة E إنّها مزودة ببنية فضاء تآلفي مُوجّهه الفضاء الشعاعي $\vec{E}$ إذا عرّفنا تأثيرًا لزّمرة التبديلية $\left(\vec{E},+\right)$ على المجموعة E بـ:

$$\begin{aligned}&\vec{E}\times E\to E\\&\left(\vec{u},A\right)\mapsto\vec{u}+A\end{aligned}$$

ويحقّق:

$$1)\ \forall\left(\vec{u},\vec{v}\right)\in\vec{E}^{2},\ \forall A\in E,\ \vec{u}+\left(\vec{v}+A\right)=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+A,$$

$$2)\ \forall A\in E,\ \vec{0}+A=A,$$

ومن أجل كل نقطة A مثبّتة من E، يكون التطبيق:

$$\begin{aligned}\varphi_A:\vec{E}&\to E\\\vec{u}&\mapsto\vec{u}+A\end{aligned}$$

تقابليًا.

ويكون عندئذ $\Omega_A=E$ أيًا كانت النقطة A من E (أي أنّ E هو مدار النقطة A).

أي:

$$E=\vec{E}+A=\left\{\vec{u}+A,\ \vec{u}\in\vec{E}\right\}$$

وA نقطة ما من E.

تعريف 3

نقول عن مجموعة غير خالية E إنّها مزودة ببنية فضاء تآلفي مُوجّهه الفضاء الشعاعي $\vec{E}$. إذا عرفنا تطبيقًا:

$$\begin{aligned}&E\times E\to\vec{E}\\&\left(A,B\right)\mapsto\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

(أي أنّ كلّ نقطتين من E تعرّفان شعاعًا من $\vec{E}$)

بحيث تتحقّق العلاقة الشعاعية التالية:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\qquad\text{(علاقة شال)}$$

لأجل كل ثلاث نقط A، B و C من المجموعة E.

ومن أجل كل نقطة A مثبّتة من E فإنّ التطبيق:

$$\psi_A:E\to\vec{E},\quad B\mapsto\overrightarrow{AB}$$

حيث $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ ، هو تقابل.
(أي أنّ كل شعاع من $\vec{E}$ يعرّف نقطة من E بالنسبة لنقطة ما مثبتة من E).

قضية

التعاريف الثلاث متكافئة فيما بينها.

إثبات

$(1)\Leftrightarrow(2)$

واضح

$(2)\Rightarrow(3)$

يكفي وضع $\psi_A=\varphi_A^{-1}$ وملاحظة أنّ:

$$\begin{aligned}&E\times E\longrightarrow\vec{E}\times E\longrightarrow E\longrightarrow\vec{E}\\&(C,B)\mapsto\left(\overrightarrow{AC},B\right)\mapsto\overrightarrow{AC}+B\mapsto\overrightarrow{A\left(\overrightarrow{AC}+B\right)}\end{aligned}$$

(حيث $\overrightarrow{AB}=\varphi_A^{-1}(B)$ لأنّ $\psi_A=\varphi_A^{-1}$)

يكون تطبيقًا، وأنّه من أجل كل ثلاث نقط A، B و C من E لدينا:

$$\overrightarrow{AB}+A=B,\quad\overrightarrow{BC}+B=C$$

أي:

$$\begin{aligned}C=\overrightarrow{BC}+B&=\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{AB}+A\right)\\&=\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\right)+A\\&=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+A\end{aligned}$$

إذن $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ لأنّ φ_A متباين. ومن ثمّ علاقة شال محقّقة.
أمّا ψ_A فيكون تقابليًا كتطبيق عكسي لتطبيق تقابلي.

$(3)\Rightarrow(2)$

نضع بنفس الطريقة $\varphi_A=\psi_A^{-1}$ ونعرّف التطبيق:

$$\begin{aligned}&\vec{E}\times E\to E\\&\left(\vec{u},A\right)\mapsto\vec{u}+A=B\end{aligned}$$

حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ من غمر التطبيق ψ_A.

فيكون هذا الأخير تأثيرًا من الزمرة $\left(\vec{E},+\right)$ على E، لما يلي:

$$\begin{aligned}\forall\left(\vec{u},\vec{v}\right)\in\vec{E}^{2},\forall A\in E,\ \vec{u}+\left(\vec{v}+A\right)&=\vec{u}+\left(\overrightarrow{AC}+A\right)\\&=\vec{u}+C\\&=\overrightarrow{CB}+C=B\end{aligned}$$

ومن جهة أخرى، لدينا:

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+A=\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}\right)+A=\overrightarrow{AB}+A=B$$

وأخيرًا، نلاحظ أنّ:

$$\vec{0}+A=\overrightarrow{AA}+A=A$$

ومنه الشرطين (1) و (2) محقّقين. وهو ما يوصلنا إلى المطلوب.

ترميز

نسمّي عناصر الفضاء التآلفي E نقاطًا، كما نسمّي الفضاء الشعاعي $\vec{E}$ منحى E أو الفضاء الموجه للفضاء التآلفي E.

تعريف

. نسمّي بعد الفضاء التآلفي E بعد موجّهه أي بعد الفضاء الشعاعي $\vec{E}$،
. نسمّي مستقيمًا تآلفيًا كلّ فضاءٍ بعده 1،
. نسمّي مستوٍ تآلفيًا، كلّ فضاءٍ بعده 2.

أمثلة

1- كل فضاء شعاعي $\vec{E}$ هو فضاء تآلفي موجّه لنفسه.
وبالفعل، نتحقّق من التعريف بأخذ التطبيق:

$$\begin{aligned}&\vec{E}\times\vec{E}\to\vec{E}\\&\left(\vec{u},\vec{v}\right)\mapsto\vec{u}+\vec{v}\end{aligned}$$

حيث العملية $(+)$ هي العملية الداخلية في $\vec{E}$.

لدينا الخاصيتان (1) و(2) واضحتان إذ أنّ الخاصية (1) ماهي إلاّ خاصية التجميع و الخاصية (2) ماهي إلاّ خاصية تعريف العنصر الحيادي. كما أنّه من أجل كل شعاع $\vec{v}$ من $\vec{E}$ يكون التطبيق:

$$\varphi_{\vec{v}}:\vec{E}\to\vec{E},\quad \vec{u}\mapsto\vec{u}+\vec{v}$$

تقابليًا.

2- ينتج من المثال (1) أنّ الفضاءين $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ وبصفة عامّة $\mathbb{R}^n$ $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ هي فضاءات تآلفية.

الفضاءات التآلفية الجزئية

تعريف

ليكن E فضاءً تآلفيًا منحاه الفضاء الشعاعي $\vec{E}$. وليكن F جزءًا غير خالٍ من الفضاء التآلفي E. نقول إنّ F فضاء تآلفي جزئي من E، إذا وُجد فضاء شعاعي جزئي $\vec{F}$ من $\vec{E}$، وعنصرٌ x من F بحيث:

$$F = x + \vec{F} = \left\{x + \vec{u},\ \vec{u} \in \vec{F}\right\}$$

ملحوظات

1. بما أنّ عملية الجمع المعرّفة على الفضاءات الشعاعية تبديلية فلا حاجة لنا إلى التمييز بين التأثير من اليسار و التأثير من اليمين بالزمرة الجمعية $\left(\vec{E},+\right)$ على مجموعة ما، وهو ما جعلنا نكتب آنفًا $F = x + \vec{F}$ عمدًا وتنبيهًا على ما أشرنا سلفًا.
2. نقاط أي فضاء تآلفي هي فضاءات تآلفية جزئية موجّهة بالفضاء الشعاعي التافه $\left\{\vec{0}\right\}$. نطلق عليها عادةً فضاءات تآلفية بسيطة.

قضية

إنّ موجّه الفضاء التآلفي الجزئي F يعطى بالعلاقة التالية:

$$\vec{F} = \left\{\overrightarrow{AB},\ \left(A,B\right) \in F^2\right\}$$

ويمكن النظر إلى إحدى النقطتين A أو B على أنّها مثبتة من F.

إثبات

تنبع هذه الأخيرة من كون كل فضاء تآلفي جزئي F فضاءً تآلفيًا ضمنيًا وأنّ التطبيق:

$$\begin{aligned}\Psi_{A|F} : F &\to \vec{F} \\ B &\mapsto \overrightarrow{AB}\end{aligned} \quad , A \in F$$

تقابل.

وهو ما يترّتب عنه أنّ:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \psi_{A|F}(F) = \left\{\overrightarrow{AB} /\ \ B \in F\right\} \\ &= \left\{\overrightarrow{AB} /\ \ (A,B) \in F^2\right\}\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

ملحوظة هامّة

في كل ما سيأتي من فصول نعني بالشعاع $\overrightarrow{AB}$ الصورة العكسية للنقطة B من E وفق التطبيق φ_A. أي أنّ $\overrightarrow{AB} = \varphi_A^{-1}(B)$. (مالم نشر بخلاف ذلك صراحةً).

ومن ثمّ تتحقّق الخواص التالية:

1) $\forall (A,B) \in E^2, \quad \overrightarrow{AB} + A = B$

2) $\forall A \in E, \quad \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

3) $\forall (A,B,C) \in E^3, \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (علاقة شال)

4) $\forall (A,B) \in E^2, \quad \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

5) $\forall (A,B,C,D) \in E^4, \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

الاستقامية

تعريف

نقول عن نقاط ما من فضاءٍ تآلفي E إنّها تقع على استقامة واحدة إذا، كانت تنتمي إلى نفس المستقيم التآلفي.

تعريف

ليكن $\vec{E}$ فضاءً شعاعيًا بعده n. نسمّي مستوٍ متصاعد كلّ فضاءٍ شعاعي جزئي $\vec{F}$ من $\vec{E}$ بعده $n-1$.

التوازي

تعريف

ليكن F و G فضاءين تآلفيين جزئيين من E موجهين بالفضاءين الشعاعيين الجزئيين $\vec{F}$ و $\vec{G}$ من $\vec{E}$ على الترتيب.

نقول عن الفضاء التآلفي الجزئي F أنّه يوازي الفضاء التآلفي الجزئي G إذا، وفقط إذا، كان موجّه الفضاء التآلفي F فضاءً شعاعيًا جزئيًا من موجّه الفضاء التآلفي G. أي:

$$F \text{ يوازي } G \Leftrightarrow \vec{F} \subset \vec{G}$$

ونقول عنهما إنّهما متوازيان إذا، تساوى موجّهيهما. أي:

$$F \text{ و } G \text{ متوزيان} \Leftrightarrow \vec{F} = \vec{G}$$

ملحوظة

إنّ علاقة التوازي هي علاقة ترتيب جزئي على مجموعة الفضاءات التآلفية الجزئية المتقاطعة مثنى مثنى من فضاء تآلفي E.

أمثلة

1- الفضاءات التآلفية البسيطة من فضاءٍ تآلفي E (أُحاديات العناصر) توازي كلّ فضاءٍ تآلفي جزئي من هذا الفضاء التآلفي،

2- في فضاء تآلفي بعده 3. لدينا:

- توجد مستقيمات تآلفية جزئية متوازية،
- توجد مستويات تآلفية جزئية متوازية،
- يوجد مستقيم تآلفي جزئي يوازي مستوٍ تآلفي جزئي،
- لا وُجود لمستوٍ تآلفي جزئي يوازي مستقيم تآلفي جزئي.

مبرهنة

ليكن E فضاءً تآلفيًا موجّهًا بفضاءٍ شعاعي $\vec{E}$، وليكن F و G فضاءين تآلفيين جزئيين من E موجهين بالفضاءين الشعاعيين الجزئيين $\vec{F}$ و $\vec{G}$ من $\vec{E}$ على الترتيب. عندئذ:

1) إذا كان F يوازي G كان عندئذ:

$$F \cap G = \phi \text{ أو } F \subset G$$

2) إذا كان F و G متوازيان كان عندئذ:

$$F \cap G = \phi \text{ أو } F = G$$

إثبات

1) لنفترض أنّ $F \cap G \neq \phi$، نجد بذلك نقطة A تنتمي إلى $F \cap G$. وعليه يكون:

$$G = A + \vec{G} \text{ أو } F = A + \vec{F}$$

وبما أنّ F يوازي G فإنّ:

$$F = A + \overrightarrow{F} \subset A + \overrightarrow{G} = G$$

وهو المطلوب.

2) ينتج مباشرة من (1).

تقاطع فضاءات تآلفية جزئية

مبرهنة

ليكن E فضاءً تآلفيًا موجّهًا بالفضاء الشعاعي $\overrightarrow{E}$ ، وليكن F وG فضاءين تآلفيين جزئيين من E وموجّهين بالفضاءين الشعاعيين الجزئيين $\overrightarrow{F}$ و $\overrightarrow{G}$ من $\overrightarrow{E}$ على التوالي. عندئذ:

إذا كان $F \cap G$ غير خالٍ كان عندئذ $F \cap G$ فضاءً تآلفيًا جزئيًا من E موجهًا بالفضاء الشعاعي الجزئي $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}$.

إثبات

لنفترض أنّ $F \cap G$ غير خالٍ. توجد بذلك نقطة A من $F \cap G$. ومن جهة أخرى لدينا:

$$\begin{aligned} F \cap G &= \{M \in E / M \in F \wedge M \in G\} \\ &= \{M \in E / M \in A + \overrightarrow{F} \wedge M \in A + \overrightarrow{G}\} \\ &= \{A + \vec{u} / \vec{u} \in \overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}\} \\ &= A + \overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G} \end{aligned}$$

إذن $F \cap G$ هو فضاء تآلفي جزئي من E موجه بالفضاء الشعاعي الجزئي $\overrightarrow{F \cap G} = \overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}$ من $\overrightarrow{E}$.

نتيجة

تقاطع فضاءين تآلفيين جزئيين F وG من E موجّهين بفضاءين شعاعيين جزئيين متكاملين $\overrightarrow{F}$ و $\overrightarrow{G}$ على الترتيب ($\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$) من الفضاء الشعاعي $\overrightarrow{E}$ هو فضاء تآلفي بسيط من E (أحادي العنصر).

إثبات

لدينا:

$$F = A + \overrightarrow{F}, \quad G = B + \overrightarrow{G} \quad / (A, B) \in F \times G$$

ومنه:

$$\overrightarrow{AB} \in \vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G}$$

وعليه يوجد شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من $\vec{F}$ و $\vec{G}$ على الترتيب بحيث $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$

ومنه:

$$B = \overrightarrow{AB} + A = \left(\vec{u} + \vec{v}\right) + A = \vec{v} + \left(\vec{u} + A\right)$$

أي:

$$\underbrace{-\vec{v} + B}_{\in G} = \underbrace{\vec{u} + A}_{\in F}$$

ومنه $F \cap G$ غير خالٍ.

إذن حسب المبرهنة السابقة $F \cap G$ هو فضاء تآلفي جزئي من E موجّه بالفضاء الشعاعي الجزئي $\vec{F} \cap \vec{G} = \{\vec{0}\}$ ومنه $F \cap G$ فضاء بسيط من E.

مبرهنة وتعريف

لتكن X مجموعة جزئية وغير خالية من فضاء تآلفي E.

تقاطع كل الفضاءات التآلفية الجزئية التي تحوي X هو فضاء تآلفي جزئي أصغري يحوي X ندعوه بالفضاء التآلفي الجزئي المولد بـ X ونرمز له بالرمز $Aff\left(X\right)$.

إثبات

أنظر الأعمال الموجهة.

التطبيقات التآلفية

تعريف

ليكن E و F فضاءين تآلفيين موجّهين بالفضاءين الشعاعيين $\vec{E}$ و $\vec{F}$ على الترتيب.

نقول عن تطبيق $f : E \to F$ إنّه تطبيق تآلفي، إذا وُجد تطبيق خطي $\varphi : \vec{E} \to \vec{F}$ يحقّق:

$$\forall \left(A, B\right) \in E^2, \quad \overrightarrow{f\left(A\right) f\left(B\right)} = \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right)$$

نسمّي التطبيق φ بالجزء الخطي للتطبيق التآلفي f ونرمز له بـ $\vec{f}$.

مبرهنة

كل تطبيق تآلفي $f : E \to F$ هو مجموع تطبيقين أحدهما التطبيق الثابت والآخر هو جزؤه الخطي.

إثبات

لدينا بالتعريف:

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right), \quad \forall (A,B) \in E^2$$

ومن أجل نقطة A مثبتة من E و M نقطة ما كيفية من E فإنّ:

$$\overrightarrow{f(A)f(M)} = \vec{f}\left(\overrightarrow{AM}\right)$$

وهو ما يكافئ أنّ:

$$f(M) = f(A) + \vec{f}\left(\overrightarrow{AM}\right)$$

إنّه المطلوب.

ملحوظات

1. من أجل كل نقطتين A و M من E، وكل تطبيق تآلفي $f : E \to F$ ، فإنّ:

$$f\left(A + \overrightarrow{AM}\right) = f(A) + \vec{f}\left(\overrightarrow{AM}\right)$$

2. كل تطبيق خطي هو تطبيق تآلفي، إذ يكفي أخذ $\vec{f}$ مطابقًا لـ f.
3. يعرّف التطبيق التآلفي بإعطاء صورة نقطة من فضاء البدء و جزئه الخطي.

أمثلة

1- التطبيقات التآلفية المعرّفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ هي من الشكل: $x \mapsto ax + b$ حيث a و b عددين حقيقيين.

2- التطبيقات التآلفية من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}$ هي من الشكل: $(x, y) \mapsto ax + by + c$ حيث a، b و c أعداد حقيقيّة.

3- التطبيقات التآلفية من $\mathbb{R}^n$ نحو $\mathbb{R}^m$ هي من الشكل:

$$X = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(f_1(X), \ldots, f_m(X)\right)$$

حيث:

$$f_i(X) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i$$

مهما يكن i من $\{1, \ldots, n\}$

حيث $\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ و $\left(b_i\right)_{1\le i\le n}$ معاملات من $\mathbb{R}$.

التطبيقات التآلفية و الفضاءات التآلفية الجزئية

مبرهنة

ليكن $f:E\to F$ تطبيقًا تآلفيًا ما. وليكن H فضاءً تآلفيًا جزئيًا من الفضاء التآلفي E موجّهًا بالفضاء الشعاعي الجزئي $\vec{H}$ من $\vec{E}$. عندئذ يكون $f\left(H\right)$ فضاءً تآلفيًا جزئيًا من F موجّهًا بالفضاء الشعاعي الجزئي $\vec{f}\left(\vec{H}\right)$ من $\vec{F}$.

إثبات

لتكن A نقطة من H، لدينا:

$$H=A+\vec{H}=\left\{A+\vec{h}/\ \vec{h}\in\vec{H}\right\}$$

وعليه:

$$\begin{aligned} f\left(H\right)&=\left\{f\left(A+\vec{h}\right)/\ \vec{h}\in\vec{H}\right\}\\ &=\left\{f\left(A\right)+\vec{f}\left(\vec{h}\right)/\ \vec{h}\in\vec{H}\right\}\\ &=f\left(A\right)+\vec{f}\left(\vec{H}\right)\end{aligned}$$

مبرهنة

1) التطبيقات التآلفية تحافظ على الاستقاميّة،
2) التطبيقات التآلفية تحافظ على التوازي.

إثبات

1) بالفعل، إذا كان D مستقيمًا تآلفيًا فإنّ:

$$D=A+\vec{D}\quad /A\in D$$

و $\vec{D}$ فضاء شعاعي جزئي من E بعده يساوي 1. أي أنّ:

$$D=A+\left\langle\vec{u}\right\rangle/\quad \vec{u}\in\vec{D}\setminus\left\{\vec{0}\right\}$$

وعليه:

$$\begin{aligned} f\left(D\right)&=f\left(A\right)+\vec{f}\left(\left\langle\vec{u}\right\rangle\right)\\ &=f\left(A\right)+\left\langle\vec{f}\left(\vec{u}\right)\right\rangle\end{aligned}$$

مع $\dim\left\langle \vec{f}\left(\vec{u}\right)\right\rangle \leq 1$.

ومنه $f\left(D\right)$ هو إمّا نقطة وإمّا مستقيم تآلفي.

2) ليكن F و G فضاءين تآلفيين جزئيين من فضاء تآلفي E وموجهين بالفضاءين الشعاعيين الجزئيين $\vec{F}$ و $\vec{G}$ من $\vec{E}$ على الترتيب. لدينا:

$$F = A+\vec{F}, \quad G = B+\vec{G}$$

حيث $\left(A,B\right)$ عنصر من $F\times G$.

ومن ثمّ يكون:

$$f\left(F\right)= f\left(A\right)+\vec{f}\left(\vec{F}\right)$$

و

$$f\left(G\right)= f\left(B\right)+\vec{f}\left(\vec{G}\right)$$

ومنه إذن إذا كان F يوازي G فإنّ $\vec{F}\subset\vec{G}$ وعليه:

$$\vec{f}\left(\vec{F}\right)\subset\vec{f}\left(\vec{G}\right)$$

وبالتالي $f\left(F\right)$ يوازي $f\left(G\right)$. وبه ننهي الإثبات.

تركيب تطبيقات تآلفية

مبرهنة

إذا كان $f: E\to F$ و $g: F\to G$ تطبيقان تآلفيان، كان عندئذ تركيبهما $g\circ f: E\to G$ تطبيقًا تآلفيًا هو الآخر.

إثبات

لتكن A و B نقطتين ما من E. نكتب إذن:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\left(g\circ f\right)\left(A\right)\left(g\circ f\right)\left(B\right)} &= \overrightarrow{g\left(f\left(A\right)\right)g\left(f\left(B\right)\right)}\\ &=\vec{g}\left(\overrightarrow{f\left(A\right)f\left(B\right)}\right)\\ &=\vec{g}\left(\vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right)\\ &=\left(\vec{g}\circ\vec{f}\right)\left(\overrightarrow{AB}\right)\end{aligned}$$

وبما أنّ تركيب تطبيقين خطيين خطيٌّ فإنّ $g\circ f$ هو تطبيق تآلفي جزؤه الخطي هو $\vec{g}\circ\vec{f}$. أي $\overrightarrow{g\circ f}=\vec{g}\circ\vec{f}$.

تسمية

1. نسمّي تشاكلاً تآلفيًا (أو تحويلاً تآلفيًا) كلّ تطبيق تآلفي و تقابلي.
2. نسمّي تشاكلاً تآلفيًا ذاتيًا كلّ تشاكل تآلفي مجموعة منطلقه تطابق مجموعة وصوله.

مبرهنة

1) تركيب تشاكلين تآلفيين هو تشاكل تآلفي،
2) التطبيق العكسي لتشاكل تآلفي هو تشاكل تآلفي.

إثبات

1) واضح
2) ليكن $f : E \to F$ تشاكل تآلفي ولنثبت أنّ $f^{-1} : F \to E$ تشاكل تآلفي.
يكفي إذن إثبات أنّ f^{-1} تطبيق تآلفي ولتكن بُغية ذلك A و B نقطتين ما من F، لدينا:

$$\vec{f}\left(\overrightarrow{f^{-1}(A)\,f^{-1}(B)}\right)=\overrightarrow{f\left(f^{-1}(A)\right)f\left(f^{-1}(B)\right)}$$
$$=\overrightarrow{AB}$$

ومنه:

$$\overrightarrow{f^{-1}(A)\,f^{-1}(B)}=\left(\vec{f}\right)^{-1}\left(\overrightarrow{AB}\right)$$

وبما أنّ التطبيق العكسي لتطبيق خطي هو تطبيق خطي فإنّ f^{-1} تطبيق تآلفي جزؤه الخطي $\overrightarrow{f^{-1}}=\left(\vec{f}\right)^{-1}$.

مبرهنة

يكون تطبيق تآلفي تشاكلاً تآلفيًا إذا، وفقط إذا، كان جزؤه الخطي تقابلي أي أنّ:

f تشاكل تآلفي $\Leftrightarrow$ $\vec{f}$ تشاكل خطي

إثبات

في الحقيقة، يتمّ البرهان بإثبات أنّ:

f متباين $\Leftrightarrow$ $\vec{f}$ متباين

و

f غامر $\Leftrightarrow$ $\vec{f}$ غامر

ونترك مُهمّة صياغة التفاصيل تمرينًا للقارئ.

نتيجة

مجموعة التشاكلات التآلفية الذاتية المزودة بعملية تركيب التطبيقات لها بنية زمرة.

مبرهنة

ليكن E فضاءً تآلفيًا، و X جزءًا غير خالٍ منه. لدينا:

1) $\forall Y \in \mathcal{P}(E): X \subseteq Y \Rightarrow Aff(X) \subseteq Aff(Y)$

2) يكون X فضاءً تآلفيًا جزئيًا من الفضاء التآلفي E، إذا، وفقط إذا، كان $Aff(X) = X$.

3) $$\overrightarrow{Aff(X)} = \left\{ \overrightarrow{MN} / (M,N) \in \left(Aff(X)\right)^2 \right\}$$
$$= \left\{ \overrightarrow{MN} / (M,N) \in X^2 \right\}$$

إثبات

1) لدينا:

$$X \subseteq Y \subseteq Aff(Y)$$

وبما أنّ $Aff(X)$ هو أصغر (بمفهوم الاحتواء) فضاء تآلفي جزئي يحوي X فإن $Aff(X) \subseteq Aff(Y)$.

(2

$\Leftarrow$)

لدينا $X \subseteq Aff(X)$ تعريفًا، وبما أنّ X فضاء تآلفي جزئي من E وكون كل جزء يحوي نفسه فإنّ X فضاء تآلفي جزئي من E يحوي X يأتي من ذلك أنّ $Aff(X) \subseteq X$ وهو ما يضمن المساواة.

$\Rightarrow$)

واضح.

3) بالنسبة للمساواة الأولى فقد سبق إثباتها. لنتكفّل إذن بإثبات المساوات الأخيرة، أي نثبت أنّ:

$$\overrightarrow{Aff(X)} = \left\{ \overrightarrow{MN} / (M,N) \in X^2 \right\}$$

لنشير بادئ ببدء إلى أنّ الاحتواء:

$$\overrightarrow{Aff\left(X\right)} \supseteq \left\{\overrightarrow{MN} \,/\, \left(M,N\right) \in X^2\right\}$$

بيّنٌ، كما أنّه واضح أنّ $\left\{\overrightarrow{MN} \,/\, \left(M,N\right) \in X^2\right\}$ يكون فضاءً شعاعيًا جزئيًا من $\vec{E}$ ، ولنا أن نلاحظ أنّه من أجل أيّ نقطة A من X يكون $A+\left\{\overrightarrow{MN} \,/\, \left(M,N\right) \in X^2\right\}$ فضاءً تآلفيًا جزئيًا من E ويحوي X. ما ينجرُّ عنه الاحتواء $A+\overrightarrow{Aff\left(X\right)} \subseteq A+\left\{\overrightarrow{MN} \,/\, \left(M,N\right) \in X^2\right\}$ ومن ثمّ الاحتواء $\overrightarrow{Aff\left(X\right)} \subseteq \left\{\overrightarrow{MN} \,/\, \left(M,N\right) \in X^2\right\}$ الذي يوصل بدوره إلى المطلوب.

لقد رأينا في ما مضى أنّ كلّ فضاءٍ شعاعي يكون فضاءً تآلفيًا، إنّ هذا جعلنا نتساءل عن إمكانية تزويد الفضاءات التآلفية ببنية فضاء شعاعي.
سنرى في هذه الفقرة أنّ الرّد سيكون بالإيجاب.

تشعيع فضاء تآلفي

ليكن E فضاءً تآلفيًا موجّهًا بفضاءٍ شعاعي $\vec{E}$ مجموعة مؤثراته K و A نقطة ما من E.
إنّ التطبيق:

$$\begin{aligned} \varphi_A : \vec{E} &\to E \\ \overrightarrow{AM} &\mapsto A+\overrightarrow{AM} = M \end{aligned}$$

تقابلي كما سبق رؤيته.
هذا التقابل يسمح لنا بنقل بنية الفضاء الشعاعي $\vec{E}$ إلى الفضاء التآلفي E.
وبالفعل، نعرّف العمليتين $\left(+_A\right)$ و $\left(\cdot_A\right)$ على E كما يلي:

$$\begin{aligned} +_A : E \times E &\to E \\ \left(M,N\right) &\mapsto M +_A N = \varphi_A\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right) \\ &\qquad\qquad = A+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot_A : K \times E &\to E \\ \left(\lambda,M\right) &\mapsto \lambda \cdot_A M = \varphi_A\left(\lambda\overrightarrow{AM}\right) \\ &\qquad\qquad = A+\lambda\overrightarrow{AM} \end{aligned}$$

نتحقّق بسهولة من أنّ $\left(E_A,+_A,\cdot_A\right)$ فضاءٌ شعاعيٌ على الحقل K.

حيث تمثل النقطة A العنصر الحيادي في الزمرة التبديلية $(E_A,+_A)$ ونظير كل نقطة M من E_A هي النقطة $-M = A-\overrightarrow{AM}$.
نسمّي الفضاء الشعاعي $(E_A,+_A,\cdot_A)$ المبني أعلاه، بمشعّع الفضاء التآلفي E في النقطة A ونرمز له بـ E_A.
نقول أيضًا إنّ تشعيع فضاءٍ تآلفي يعني تثبيت نقطة A منه.

ملحوظات

1. التطبيق φ_A هو تشاكل فضاءات شعاعية حسب بناء E_A.
2. تشعيع الفضاءات التآلفية ليس قانونيًا لأنّ العمليات التي تجعل فضاءً تآلفيًا E فضاءً شعاعيًا تتعلق بنقطة مثبتة A. وعليه فإنّه يمكن إنشاء عدّة فضاءات شعاعية انطلاقًا من فضاءٍ تآلفي E.

المعالم الكارتيزية

تعريف

ليكن E فضاءً تآلفيًا موجّهًا بفضاءٍ شعاعي $\overrightarrow{E}$ بعده n.
نسمّي معلمًا كارتيزيًا ذو n بعدًا (أو معلمًا كارتيزيًا اختصارًا) لفضاءٍ تآلفي E كلّ ثنائية $(\Omega,\mathcal{B})$ حيث Ω نقطة من الفضاء التآلفي E (ندعوها بمركز المعلم) و $\mathcal{B}$ أساس لـ $\overrightarrow{E}$.
ومن ثمّ نسمّي إحداثيات نقطة ما M من E في المعلم $(\Omega,\mathcal{B})$ الشعاع $(x_1,\dots,x_n)$ من K^n بحيث:

$$\overrightarrow{\Omega M}=\sum_{i=1}^{n}x_i\overrightarrow{e_i}$$

مع $\mathcal{B}=\left\{\overrightarrow{e_i}\right\}_{1\le i\le n}$.
لاحظ أنّ إحداثيات كلّ مركزٍ Ω في أيّ أساسٍ ذي n بعدًا هو الشعاع المعدوم $0_{K^n}=(0_K,\dots,0_K)$.

إننا حتّى اللحظة نعرف فقط أنّ التطبيقات الخطية هي تطبيقات تآلفية بالإضافة إلى الأمثلة التي سقناها عند تعريفنا لهذه التطبيقات ولإثراء مجموعة التطبيقات التآلفية نقدّم بعض التطبيقات التآلفية الشهيرة.

الانسحابات و التحاكيات

الانسحابات

تعريف

نسمّي انسحابًا لفضاءٍ تآلفي E شعاعه $\vec{u}$ من $\vec{E}$ كل تطبيق معرّفٍ بالشكل التالي:

$$t_{\vec{u}} : E \to E$$
$$M \mapsto M + \vec{u}$$

قضية

الانسحاب هو تشاكل تآلفي جزؤه الخطي هو $Id_{\vec{E}}$ $\left(\vec{t_{\vec{u}}} = Id_{\vec{E}}\right)$.

إثبات

بالفعل، إنّ هذا الادعاء صادق لأنّه:

$$\forall (A,B) \in E^2, \quad \overrightarrow{t_{\vec{u}}(A)t_{\vec{u}}(B)} = \overrightarrow{(\vec{u}+A)(\vec{u}+B)}$$

$$= \overrightarrow{\left(\overrightarrow{AC}+A\right)\left(\overrightarrow{BD}+B\right)}$$ (من غمر التطبيقين φ_A و φ_B)

$$= \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} = Id_{\vec{E}}\left(\overrightarrow{AB}\right)$$ (لأنّ $\vec{u} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$)

وكون $Id_{\vec{E}}$ تطبيق خطي. ومن ثمّ $\vec{t_{\vec{u}}} = Id_{\vec{E}}$.

و هو تقابلي لأنّ $Id_{\vec{E}}$ كذلك.

نتيجة

مجموعة الانسحابات على فضاءٍ تآلفي E المزودة بعملية تركيب التطبيقات هي زمرة تبديلية يلعب التطبيق المطابق $t_{\vec{0}} = Id_{\vec{E}}$ دور العنصر الحيادي في هذه الزمرة كما يتمتع كل عنصر منها $t_{\vec{u}}$ بنظير منها هو العنصر $t_{-\vec{u}}$.

مبرهنة

يكون تطبيق تآلفي $f : E \to E$ انسحابًا إذ، وفقط إذا، كان جزؤه الخطي هو التطبيق المطابق على $\vec{E}$ أي $\vec{f} = Id_{\vec{E}}$.

إثبات

إنّ لزوم الشرط سبق توضيحه لنبيّن إذن:

كفاية الشرط:

لنفترض أنّ $\vec{f} = Id_{\vec{E}}$ ونثبت أنّ f يكون عندئذ انسحاب.

لتكن قصد ذلك نقطة M من E و A نقطة ما مثبتة من E، لدينا:

$$\begin{aligned} f(M) &= f\left(A+\overrightarrow{AM}\right) \\ &= f(A)+\vec{f}\left(\overrightarrow{AM}\right) \\ &= f(A)+\overrightarrow{AM} \\ &= A+\overrightarrow{Af(A)}+\overrightarrow{AM} \\ &= M+\overrightarrow{Af(A)} \end{aligned}$$

لنثبت أنّ الشعاع $\overrightarrow{Af(A)}$ ثابت لا يتعلق بالنقطة A. لتكن بُغية ذلك نقطة B من E ولنثبت أنّ $\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{Bf(B)}$. وبالفعل، لدينا:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{Bf(B)} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{f(A)f(B)} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

محقّقة دومًا.

الخلاصة، f انسحاب شعاعه $\overrightarrow{Af(A)}$ من $\vec{E}$ حيث A نقطة ما من E.

التحاكيات

تعريف

ليكن E فضاءً تآلفيًا موجهًا بفضاءٍ شعاعي $\vec{E}$، ولتكن Ω نقطة ما مثبتة من E، و k سلمية من K^* $\left(k \in K \setminus \{0_K\}\right)$.

نسمّي تحاكٍ مركزه Ω ونسبته k كلّ تطبيقٍ من E نحو E، معرف كما يلي:

$$M \mapsto M' = \Omega + k\overrightarrow{\Omega M}$$

ترميز

نرمز للتحاكي ذي المركز Ω و النسبة k بالرمز $h_{\Omega,k}$.

ملحوظتين

1. مركز التحاكي $h_{\Omega,k}$ هي نقطة صامدة وفق هذا التحاكي.
2. هناك نوعين من الصمود، الصمود نقطة بنقطة، والصمود إجمالاً.

مبرهنة

التحاكي $h_{\Omega,k}$ الذي مركزه Ω ونسبته k من K^* . هو تشاكل تآلفي جزؤه الخطي هو $kId_{\vec{E}}$ $\left(\overrightarrow{h_{\Omega,k}} = kId_{\vec{E}}\right)$.

إثبات

لتكن M نقطة ما من E، لدينا:

$$\begin{aligned} h_{\Omega,k}(M) &= \Omega + k\overrightarrow{\Omega M} \\ &= h_{\Omega,k}(\Omega) + kId_{\vec{E}}\left(\overrightarrow{\Omega M}\right) \end{aligned}$$

ومنه $h_{\Omega,k}$ تطبيق تآلفي جزؤه الخطي $kId_{\vec{E}}$ كما أنّ $h_{\Omega,k}$ تقابلي لأنّ $kId_{\vec{E}}$ كذلك.

أمثلة

1- التحاكي الذي نسبته 1 هو التطبيق المطابق على E.
2- التحاكي الذي نسبته 1- هو تناظر مركزي.
3- صورة مستقيم وفق تحاكٍ هو مستقيم موازٍ له، وبشكل عام صورة فضاءٍ تآلفي جزئي وفق تحاكٍ هو فضاءٌ تآلفيٌ جزئيٌ موازٍ له.

نتيجة

الانسحاب والتحاكي يحافظان على الاستقامية والتوازي.

مبرهنة

ليكن k عنصرًا من K $(k \in K)$ و $f : E \to E$ تطبيقًا تآلفيًا جزؤه الخطي التطبيق $kId_{\vec{E}}$. أي $\vec{f} = kId_{\vec{E}}$. عندئذ يكون:

1) f انسحابًا إذا، وفقط إذا، كان $k = 1$،
2) f تحاكٍ إذا، وفقط إذا، كان $k \neq 0$.

إثبات

1) سبق إثباتها من قبل.

2) إنّ لزوم الشرط محقّق تعريفًا وبالنسبة لكفاية الشرط فإنّ حالة $k=1$ قد عالجناها كما سلف ذكره لنفترض إذن أنّ $\vec{f}=kId_{\vec{E}}$ و $k\notin\{0,1\}$ ونثبت أنّ f تحاكٍ.

لإثبات أنّ f تحاكٍ يكفي إثبات أنّه:

$$\forall M\in E,\quad f(M)=\Omega+k\overrightarrow{\Omega M}$$

مع Ω نقطة ما من E.

لتكن في سبيل ذلك نقطة M من E وكذلك نقطة A مثبتة من E، لدينا:

$$\begin{aligned} f(M)&=f\left(A+\overrightarrow{AM}\right)\\ &=f(A)+\vec{f}\left(\overrightarrow{AM}\right)\\ &=f(A)+k\left(\overrightarrow{AM}\right)\end{aligned}$$

لإثبات أنّ f تحاكٍ يكفي أن نبيّن أنّ f يتمتع بنقطة صامدة نرمز لها بـ Ω في حال وجودها. أي نثبت أن $f(\Omega)=\Omega$.

لنفترض أنّ Ω موجودة، يترتب عن هذا الفرض أنّ:

$$\begin{aligned} f(\Omega)=\Omega &\Leftrightarrow f(A)+k\overrightarrow{A\Omega}=\Omega\\ &\Leftrightarrow A+\overrightarrow{Af(A)}+k\overrightarrow{A\Omega}=A+\overrightarrow{A\Omega}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{Af(A)}+k\overrightarrow{A\Omega}=\overrightarrow{A\Omega}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{Af(A)}=(1-k)\overrightarrow{A\Omega}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega}=(1-k)^{-1}\overrightarrow{Af(A)}\\ &\Leftrightarrow \Omega=A+(1-k)^{-1}\overrightarrow{Af(A)}\end{aligned}$$

لنبيّن أنّ Ω لا تتعلق بـ A. أي نريد إثبات أنّ:

$$\forall(A,B)\in E^2,\quad A+(1-k)^{-1}\overrightarrow{Af(A)}=B+(1-k)^{-1}\overrightarrow{Bf(B)}$$

لتكن بُغية ذلك A و B نقطتين من E. لدينا:

$$A+(1-k)^{-1}\overrightarrow{Af(A)}=B+(1-k)^{-1}\overrightarrow{Bf(B)} \quad (*)$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A\left(A+(1-k)^{-1}\overrightarrow{Af(A)}\right)}=\overrightarrow{A\left(B+(1-k)^{-1}\overrightarrow{Bf(B)}\right)}$$
$$\Leftrightarrow (1-k)^{-1}\overrightarrow{Af(A)}=\overrightarrow{AB}+(1-k)^{-1}\overrightarrow{Bf(B)}$$
$$\Leftrightarrow (1-k)^{-1}\left(\overrightarrow{Af(A)}-\overrightarrow{Bf(B)}\right)=\overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow (1-k)^{-1}\left(\overrightarrow{Af(A)}-\overrightarrow{Bf(A)}-\overrightarrow{f(A)f(B)}\right)=\overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow (1-k)^{-1}\left(\overrightarrow{AB}-\vec{f}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right)=\overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow (1-k)^{-1}\left(\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$$

محقّقة دومًا.

وبما أنّ المساواة الأخيرة صحيحة لأجل أي نقطتين A و B من E فمن التكافؤ المنطقي تكون المساواة $(*)$ محقّقة هي الأخرى أيًا كانت النقطتين A و B من E.

إذن Ω نقطة ثابتة من E ولا تتعلق بالنقطة A. يأتي من ذلك أنّ:

$$\forall M\in E,\quad f(M)=f(\Omega)+k\overrightarrow{\Omega M}$$
$$=\Omega+k\overrightarrow{\Omega M}$$

أي أنّ f تحاكٍ مركزه Ω ونسبته k حيث $\Omega=A+(1-k)^{-1}\overrightarrow{Af(A)}$ في حالة $k\neq 1$ مع A نقطة من E أمّا في حالة $k=1$ فإنّ كلّ نقطة Ω من E تلبي الطلب.

العبارة التحليلية للانسحاب

ليكن $\mathcal{R}=(\Omega,\mathcal{B})$ معلمًا ديكارتيًا (ذو n بعدًا) لفضاءٍ تآلفي E موجّهًا بفضاءٍ شعاعي $\vec{E}$.

ليكن $t_{\vec{u}}$ انسحابًا لـ E شعاعه $\vec{u}={}^{t}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ من $\vec{E}$ ولتكن $M=(x_1,\ldots,x_n)$ نقطة ما من E. وعليه فإنّ العبارة التحليلية للانسحاب $t_{\vec{u}}$ هي:

$$M=\left(x_1,\ldots,x_n\right)\mapsto M'=\left(x'_1,\ldots,x'_n\right)$$
$$=t_{\vec{u}}\left(M\right)=M+\vec{u}$$

مع:

$$(*)\begin{cases} x'_1=x_1+\alpha_1 \\ x'_2=x_2+\alpha_2 \\ \vdots \\ x'_n=x_n+\alpha_n \end{cases}$$

لأنّ $\overrightarrow{\Omega M'}=\overrightarrow{\Omega M}+\vec{u}$

وبالعكس إذا كان f تطبيقًا تآلفيًا لـ E عبارته التحليلية هي $(*)$ فإنّ f انسحاب شعاعه $\vec{u}={}^t\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n\right)$.

العبارة التحليلية للتحاكي

ليكن $\Re=\left(\Omega,\mathcal{B}\right)$ معلمًا ديكارتيًا لفضاءٍ تآلفي E موجّهٍ بفضاءٍ شعاعي $\vec{E}$، وليكن $h_{A,k}$ تحاكٍ مركزه $A=\left(a_1,\ldots,a_n\right)$ ونسبته k من K^*.

العبارة التحليلية للتحاكي $h_{A,k}$ في $\Re$ هي:

$$M=\left(x_1,\ldots,x_n\right)\mapsto M'=A+k\overrightarrow{AM}$$

حيث:

$$(*)\begin{cases} x'_1=a_1+k\left(x_1-a_1\right) \\ x'_2=a_2+k\left(x_2-a_2\right) \\ \vdots \\ x'_n=a_n+k\left(x_n-a_n\right) \end{cases}$$

وبالعكس كل عبارة من الشكل:

$$\begin{cases} x'_1=kx_1+b_1 \\ x'_2=kx_2+b_2 \\ \vdots \\ x'_n=kx_n+b_n \end{cases} \quad / \, k\in K^*$$

هو عبارة انسحاب شعاعه $\vec{u} = {}^t(b_1,\ldots,b_n)$ في حالة $k=1$ ويمثل في حالة $k \neq 1$ العبارة تحليلية لتّحاكي الذي نسبته k ومركزه النقطة الصامدة Λ المعرّفة بالعلاقة:

$$\Lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$$

حيث:

$$\lambda_i = (1-k)^{-1} b_i, \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\}$$

أي:

$$\Lambda = (1-k)^{-1}(b_1,\ldots,b_n)$$

حري بنا أن نشير إلى أنّ العبارة $(*)$ ناجمة عن كون:

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega A} + k\left(\overrightarrow{\Omega M} - \overrightarrow{\Omega A}\right)$$

العبارة التحليلية لتطبيق تآلفي

ليكن $f : E \to G$ تطبيقًا تآلفيًا حيث E و G فضاءين تآلفيين موجّهين بـ $\vec{E}$ و $\vec{G}$ على الترتيب.

E و G مزودان بمعلمين ديكارتيين $\mathcal{R} = (\Omega,\mathcal{B})$ و $\mathcal{R}' = (\Omega',\mathcal{B}')$ على التوالي.

نرمز بـ A لمصفوفة التطبيق الخطي $\vec{f}$ (الجزء الخطي لـ f) بالنسبة للأساسين $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$.

وبالمثل نرمز بـ B لمصفوفة إحداثيات النقطة $f(\Omega)$ في $\mathcal{R}'$.

ونرمز أيضًا بـ X لمصفوفة إحداثيات النقطة M في $\mathcal{R}$.

كما نرمز أخيرًا بـ Y لمصفوفة إحداثيات النقطة $f(M)$ في $\mathcal{R}'$.

لدينا عندئذ:

$$Y = A.X + B$$

لنسرع في الإشارة إلى أنّ هذه الأخيرة نابعة من العلاقة الشعاعية التالية:

$$\overrightarrow{\Omega' f(M)} = \vec{f}\left(\overrightarrow{\Omega M}\right) + \overrightarrow{\Omega' f(\Omega)}$$

التمثيل الوسيطي لفضاء تآلفي جزئي

تعريف

نسمّي عائلة أشعة موجّهة لفضاءٍ تآلفي جزئي F كلّ أساسٍ لموجّهه $\vec{F}$.

مثال

كل مستقيم تآلفي له شعاع موجّه واحد وهو شعاع توجيه اتجاهه.

ملحوظة

لاحظ أنّ لفظ "واحد" في المثال أعلاه لا تعني وحيد.

تعريف

إذا كانت $\{\overrightarrow{u_1},\ldots,\overrightarrow{u_p}\}$ عائلة أشعة موجّهة للفضاء التآلفي الجزئي F وكانت A نقطة ما من F فإنّ التطبيق:

$$\varphi : K^P \longrightarrow F$$
$$(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \mapsto A + \sum_{i=1}^{P} \lambda_i \overrightarrow{u_i}$$

تقابلي.

ويدعى بالتمثيل الوسيطي للفضاء التآلفي الجزئي F.

مبرهنة

1) كل مستقيم تآلفي (Δ) يقبل تمثيلاً وسيطيًا من الشكل:

$$K \to (\Delta)$$
$$\lambda \mapsto A + \lambda\vec{u}$$

حيث A نقطة من (Δ) و $(\vec{\Delta}) = \langle\vec{u}\rangle$ مع $\vec{u}$ شعاع من $\vec{E}$.

2) كل مستوٍ تآلفي (P) يقبل تمثيلاً وسيطيًا من الشكل:

$$K^2 \to (P)$$
$$(\alpha,\beta) \mapsto A + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

حيث A نقطة من (P) مع $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين من $\vec{E}$ بحيث $(\vec{P}) = \langle\{\vec{u},\vec{v}\}\rangle$

إثبات

واضح

أمثلة

1- في مستوٍ تآلفي كل مستقيم تآلفي (Δ) يقبل تمثيلاً وسيطيًا من الشكل:

$$\begin{cases} x = a+\lambda\alpha \\ y = b+\lambda\beta \end{cases}$$

حيث λ عنصر من K^* مع $\left(\vec{\Delta}\right)=\left\langle \vec{u}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\right\rangle$ و $A=(a,b)$ نقطة من (Δ).

2- في فضاءٍ تآلفي بعده 3، كل مستقيمٍ تآلفي (Δ) منه يقبل تمثيلاً وسيطيًا من الشكل:

$$\begin{cases} x = a+\lambda\alpha \\ y = b+\lambda\beta \\ z = c+\lambda\gamma \end{cases}$$

حيث $A=(a,b,c)$ نقطة من (Δ) مع $\left(\vec{\Delta}\right)=\left\langle \vec{u}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\right\rangle$ و $\lambda \in K^*$.

3- في فضاءٍ تآلفي بعده 3، كل مستوٍ تآلفي (P) منه يقبل تمثيلاً وسيطيًا من الشكل:

$$\begin{cases} x = a+\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2 \\ y = b+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2 \\ z = c+\lambda_1\gamma_1+\lambda_2\gamma_2 \end{cases}$$

حيث:

$$A=(a,b,c)\in(P), \quad \left(\vec{P}\right)=\left\langle \left\{ \vec{u}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}, \vec{v}=\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{pmatrix} \right\}\right\rangle.$$

4- إذا كانت A و B نقطتين متمايزتين من مستوٍ تآلفي فإنّ التمثيل الوسيطي للمستقيم التآلفي (AB) هو من الشكل:

$$\begin{aligned} K &\to (AB) \\ \lambda &\mapsto A+\lambda\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

ويكون التمثيل الوسيطي لنصف المستقيم $[AB)$ كما يلي:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\to [AB) \\ \lambda &\mapsto A+\lambda\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

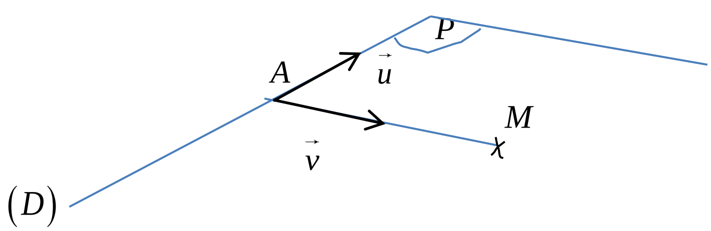
5- إذا كانت A، B و C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة من فضاءٍ تآلفي بعده $2 \leq n$ عندئذ يكون التمثيل الوسيطي للمستوي (ABC) من الشكل:

$$K^2 \to (ABC)$$
$$(\alpha, \beta) \mapsto A + \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

أمّا التمثيل الوسيطي لنصف مستوٍ (P) فيكون من الشكل:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to (P)$$
$$(\alpha, \beta) \mapsto A + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

حيث $\left(\vec{P}\right) = \left\langle \left\{\vec{u}, \vec{v}\right\} \right\rangle$ و A نقطة ما من (D).



في الحقيقة، بالإضافة إلى الانسحاب والتحاكي توجد تطبيقات تآلفية أخرى مألوفة على البنية التآلفية مثل: الاسقاط، التناظر، التآلف،....إلاّ أنّ هذه التطبيقات التآلفية تتطلب معرفة بمفهوم لا يقل أهمية عن التطبيقات التآلفية في حد ذاتها لذلك سنؤجل تعريف هذه التطبيقات إلى ما بعد فقرتنا التالية.

نعلم من معرفتنا بالجبر الخطي، أنّ مفهوم المزج الخطي يُعد مفهومًا أساسيًا في البنية الشعاعية فهو الحجر الأساسي لتعريف الفضاءات الشعاعية الجزئية؛ إذ يكون الفضاء الشعاعي مجموعة مستقرّة بالنسبة للمزج الخطي لأشعته وكذلك التطبيق الخطي يحوّل كل مزج خطي لأشعةٍ من منطلقه إلى مزج خطي لصور هذه الأشعة.
غير أنّه في الحالة التآلفية، مفهوم المرجح سيلعب دورًا مماثلاً لدور مفهوم المزج الخطي في الفضاءات التآلفية.

المرجح

مبرهنة وتعريف

لتكن A_1 ، A_2 ،...، A_n نقط من فضاءٍ تآلفي E و k_1 ، k_2 ،...، k_n سلميات من الحقل K تحقّق الشرط $\sum_{i=1}^{n} k_i \neq 0$ ، عندئذ تُوجد نقطة وحيدة G من E تكون حلاً للمعادلة الشعاعية:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

تسمّى النقطة G بمرجح الجملة $\{(A_i, k_i)\}_{1 \leq i \leq n}$.

إثبات

الوجود:

لتكن A نقطة من E. لدينا:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} k_i \overrightarrow{GA} + \sum_{i=1}^{n} k_i \overrightarrow{AA_i} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} k_i} \sum_{i=1}^{n} k_i \overrightarrow{AA_i}$$

$$\Leftrightarrow G = A + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} k_i} \sum_{i=1}^{n} k_i \overrightarrow{AA_i}$$

الوحدانية:

لنفترض وجود نقطة أخرى C من E تكون حلاً للمعادلة:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \overrightarrow{CA_i} = \vec{0}$$

ينجم عن ذلك أنّ:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \left(\overrightarrow{GA_i} - \overrightarrow{CA_i}\right) = \vec{0}$$

ومنه:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\left(\overrightarrow{GA_i}+\overrightarrow{A_iC}\right)=\vec{0}$$

أي:

$$\overrightarrow{GC}\sum_{i=1}^{n} k_i=\vec{0}$$

وبما أنّ $\sum_{i=1}^{n} k_i \neq 0$ فرضًا فإنّ $\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ومن ثمّ $G=C$.

ترميز

نرمز لمرجح الجملة $\{(A_i,k_i)\}_{1\le i\le n}$ بالرمز $G=bary\begin{bmatrix}A_i\\k_i\end{bmatrix}_{1\le i\le n}$.

مبرهنة

1) لا يتغيّر المرجح إذا ضربنا كل معاملاته في نفس العدد غير المعدوم.

2) إذا كان $\sum_{i=1}^{n} k_i=1$ فإنّ:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} k_i}\sum_{i=1}^{n} k_i\overrightarrow{AA_i}\Leftrightarrow G=A+\sum_{i=1}^{n} k_i\overrightarrow{AA_i}$$

$$\Leftrightarrow\ G=\sum_{i=1}^{n} k_iA_i$$

3) في فضاء شعاعي، المرجح هو حالة خاصّة من المزج الخطي لمّا $\sum_{i=1}^{n} k_i=1$.

إثبات

سهل وميسور نتركه تمرينًا للقارئ.

أمثلة

1- إذا كان $k_i = k$ أيًا كان i من $\{1,...,n\}$ فإنّ المرجح يسمّى مركزًا للمسافات المتساوية ولدينا $G=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}A_i$ لأنّ:

$$G=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{\sum_{i=1}^{n}k_i}A_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{k}{\sum_{i=1}^{n}k}A_i$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}A_i$$

2- مرجح نقطتين بمعاملين متساويين هو منتصف القطعة التي طرفاها هاتين النقطتين إذا كان الحقل $K=\mathbb{R}$ وفي $\mathbb{C}$ المرجح هو مركز ثنائيتين (مجموع مركباتهما قسمة 2).

مبرهنة

التطبيقات التآلفية تحافظ على المرجح.

إثبات

ليكن $f:E\to F$ تطبيقًا تآلفيًا و A_1، ...، A_n نقاطًا منه و k_1، ...، k_n سلمياتٍ من الحقل K تذعن للقيد $\sum_{i=1}^{n}k_i\neq 0$.

ولنفترض أنّ G مرجح للجملة $\{(A_i,k_i)\}_{1\le i\le n}$ أي أنّ $\sum_{i=1}^{n}k_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$ ونبيّن أنّ:

$$\sum_{i=1}^{n}k_i\overrightarrow{f(G)f(A_i)}=\vec{0}$$

وهو كذلك إذ أنّ:

$$\sum_{i=1}^{n}k_i\overrightarrow{f(G)f(A_i)}=\sum_{i=1}^{n}k_i\vec{f}\left(\overrightarrow{GA_i}\right)$$
$$=\vec{f}\left(\sum_{i=1}^{n}k_i\overrightarrow{GA_i}\right)=\vec{f}\left(\vec{0}\right)=\vec{0}$$

ملحوظة

إذا كان $\sum_{i=1}^{n} k_i = 1$ فإنّ:

$$G = \sum_{i=1}^{n} k_i A_i \Rightarrow f(G) = f\left(A + \sum_{i=1}^{n} k_i \overrightarrow{AA_i}\right)$$

$$\Rightarrow f(G) = f(A) + \sum_{i=1}^{n} k_i \vec{f}\left(\overrightarrow{AA_i}\right)$$

$$\Rightarrow f(G) = f(A) + \sum_{i=1}^{n} k_i \overrightarrow{f(A) f(A_i)}$$

$$\Rightarrow f(G) = \sum_{i=1}^{n} k_i f(A_i)$$

مبرهنة

الفضاءات التآلفية الجزئية مُغلقةٌ إزاء المرجح.

إثبات

ليكن E فضاءً تآلفيًا موجّهًا بفضاءٍ شعاعي $\vec{E}$ و F فضاءً تآلفيًا جزئيًا من E موجّهًا بفضاءٍ شعاعي جزئي $\vec{F}$ من $\vec{E}$. لتكن A نقطة ما من F بحيث $F = A + \vec{F}$. ولتكن A_1 ،...، A_n نقط من F و k_1 ،...، k_n سلميات من K بحيث $\sum_{i=1}^{n} k_i \neq 0$. بما أنّ A_i تنتمي إلى F من أجل كل i من $\{1,\ldots,n\}$ فإنّ:

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \exists \vec{u_i} \in \vec{F} / \quad A_i = A + \vec{u_i}$$

ومنه:

$$G = bary\begin{bmatrix} A_i \\ k_i \end{bmatrix}_{1 \le i \le n} \Rightarrow G = A + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} k_i} \sum_{i=1}^{n} k_i \overrightarrow{AA_i}$$

$$\Rightarrow G = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} k_i} \sum_{i=1}^{n} k_i A_i$$

$$\Rightarrow G = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} k_i} \sum_{i=1}^{n} k_i \left(A + \overrightarrow{u_i} \right)$$

$$\Rightarrow G = A + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} k_i} \sum_{i=1}^{n} k_i \overrightarrow{u_i}$$

$$\Rightarrow G \in A + \overrightarrow{F} = F$$

ومنه كل فضاء تآلفي جزئي مستقر بالنسبة للمرجح.

مبرهنة

لتكن A_1 ،…، A_n نقط من فضاء تآلفي E و k_1 ،…، k_n معاملات من K بحيث $\sum_{i=1}^{n} k_i \neq 0$. من أجل j من $\{1,\ldots,n\}$ بحيث $\sum_{i=1}^{n} k_i \neq 0$ نضع:

$$G = bary\begin{bmatrix} A_i \\ k_i \end{bmatrix}_{1\le i\le n} \quad \text{و} \quad G_j = bary\begin{bmatrix} A_i \\ k_i \end{bmatrix}_{1\le i\le n}$$

لدينا عندئذ:

$$G = bary\begin{bmatrix} G_j & A_{j+1}\cdots A_n \\ \sum_{i=1}^{j} k_i & k_{j+1}\cdots k_n \end{bmatrix}$$

إثبات

بما أنّ G مرجح للجملة فإنّ:

$$G = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} k_i} \sum_{i=1}^{n} k_i A_i$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} k_i} \left[\sum_{i=1}^{j} k_i A_i + \sum_{i=j+1}^{n} k_i A_i \right]$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{j}k_i}{\sum_{i=1}^{n}k_i}\left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{j}k_i}\sum_{i=1}^{j}k_iA_i\right]+\frac{\sum_{i=j+1}^{n}k_i}{\sum_{i=1}^{n}k_i}\left[\frac{1}{\sum_{i=j+1}^{n}k_i}\sum_{i=j+1}^{n}k_iA_i\right]$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{j}k_i}{\sum_{i=1}^{n}k_i}G_j+\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}k_i}\sum_{i=j+1}^{n}k_iA_i$$

$$=bary\begin{bmatrix} G_j & A_{j+1}\cdots A_n \\ \sum_{i=1}^{j}k_i & k_{j+1}\cdots k_n \end{bmatrix}.$$

أمثلة

لتكن A و B نقطتين من الفضاء التآلفي $\mathbb{R}^2$ و k عدد حقيقي غير معدوم. وليكن α و β عددين من $\mathbb{R}^*$ بحيث $\alpha+\beta\neq 0$.

1- مرجح الجملة $\{(A,k),(B,k)\}$ هو منتصف القطعة المستقيمة $[A\,B]$ لأنّ:

$$k\overrightarrow{GA}+k\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

2- مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ هو نقطة من المستقيم (AB) لأنّ:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}=\beta\overrightarrow{BA}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

- إذا كان $0\leq\frac{\beta}{\alpha+\beta}\leq 1$ فإنّ النقطة G تقع على $[A\,B]$.
- إذا كان $1\leq\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ فإنّ النقطة G تنتمي إلى نصف مستقيم من (AB) المحدود بـ B ولا يحوي A.
- إذا كان $0\geq\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ فإنّ النقطة G تنتمي إلى نصف مستقيم من (AB) المحدود بـ A ولا يحوي B.

ملحوظات

1. إذا كانت G مرجحًا لجملة $\{(A_i,k_i)\}_{1\le i\le n}$ فإنّه يمكننا دومًا الرجوع إلى حالة G مرجح لجملة $\{(A_i,k_i')\}_{1\le i\le n}$ مع $\sum_{i=1}^{n}k_i'=1$ وذلك بوضع $k_i'=\dfrac{k_i}{\sum_{i=1}^{n}k_i}$ لأجل كل i من $\{1,\ldots,n\}$.

ومن ثمّ تكون الحسابات سهلة و نستفيد من النتائج المتعلقة بالمرجح في حالة $\sum_{i=1}^{n}k_i=1$.

2. ليكن α و β عنصرين من K بحيث $0\neq\alpha+\beta$. عندئذ يكون:

$$\forall(A,B,C)\in E^3,\quad bary\begin{bmatrix}A & B\\ \alpha & \beta\end{bmatrix}=bary\begin{bmatrix}A & B & C\\ \alpha & \beta & 0\end{bmatrix}$$

3- $$\forall A\in E,\forall k\in K^*,\quad A=bary\begin{bmatrix}A\\ k\end{bmatrix}$$

التحدب

في كل ما يأتي $\vec{E}$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$، ذلك لأنّ مفهوم التحدب يتطلب حقلاً مرتبًا. وليكن E فضاءً تآلفيًا موجّهًا بـ $\vec{E}$.

تعريف

لتكن A و B نقطتين من E نسمّي قطعة مستقيمة طرفاها A و B، مجموعة مراجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملات موجبة ونرمز إليها بالرمز $[AB]$ أي:

$$[AB]=\{\alpha A+\beta B/\ \alpha+\beta=1,\alpha,\beta\ge 0\}$$

أو، والأمر سيان

$$[AB]=\{tA+(1-t)B/\ 0\le t\le 1\}$$

تعريف

نقول عن جزء G من فضاءٍ تآلفي E إنّه محدّبٌ إذا تحقّق الشرط:

$$\forall(A,B)\in G^2,\quad [AB]\subseteq G$$

أمثلة

1- كل فضاء تآلفي جزئي من فضاء تآلفي هو جزء محدّب لأنّه مستقرٌّ إزاء المرجح.

2- مجالات $\mathbb{R}$ هي أجزاءٌ محدّبة.

3- المجموعة $F=\{z\in\mathbb{C}/|z|\leq 1\}$ محدّبة لأنّه من أجل كل عددين z و w من F وكل α من $[z\ w]$ فإنّ:

$$\alpha=tz+(1-t)w,\quad 0\leq t\leq 1$$

ومنه:

$$|\alpha|\leq t|z|+(1-t)|w|\leq t+(1-t)\leq 1$$

وعليه α ينتمي إلى F ومنه $[z\ w]$ محتوى في F. ومن ثمّ المطلوب.

ملحوظة

كل فضاء تآلفي جزئي من فضاء تآلفي هو جزء محدّب لكن العكس خاطئ تأمّل المجالات الغير التافهة من $\mathbb{R}$ المختلفة عن الفضاء $\mathbb{R}$ (كأيّ مجالٍ محدودٍ مثلاً).

قضية

1) التطبيقات التآلفية تحافظ على القطع المستقيمة،

2) تقاطع أجزاءٍ محدّبة من فضاءٍ تآلفي هو جزء محدّب،

3) اتحاد أجزاءٍ محدّبةٍ من فضاءٍ تآلفي ليس بالضرورة جزءًا محدبًا،

4) صورة أيٍّ جزءٍ محدّبٍ وفق تطبيق تآلفي يكون جزءًا محدبًا،

5) الصورة العكسية لجزء محدّب وفق تطبيق تآلفي هو جزء محدّب.

إثبات

لنذكّر بأنّ:

$$\forall(A,B)\in G^2,\quad [A\,B]\subseteq G \Leftrightarrow \text{جزء محدّب } G$$

حيث $[A\,B]=\{tA+(1-t)B/0\leq t\leq 1\}$.

(1

$$\forall(A,B)\in E^2,\quad f([A\,B])=\{f(tA+(1-t)B)/0\leq t\leq 1\}$$

$$=\{tf(A)+(1-t)f(B)/0\leq t\leq 1\}$$
$$=[f(A)\,f(B)]$$

(2

لتكن $(G_i)_{1\leq i\leq n}$ عائلة من أجزاء محدبة من فضاء تآلفي E لنضع $G=\bigcap_{i=1}^{n}G_i$

ولنثبت أنّ:

$$\forall (A,B)\in G^2,\quad [A\,B]\subseteq G$$

وهو كذلك لأنّ:

$$\forall (A,B)\in G^2,\quad [A\,B]\subseteq G_i,\ \forall i\in\{1,\dots,n\}$$

ومنه $[A\,B]\subseteq\bigcap_{i=1}^{n}G_i=G$.

(3

لاحظ أنّ اتحاد المجالات في $\mathbb{R}$ ليس مجالاً بالضرورة.

(4

ليكن G جزءًا محدّبًا من E. لدينا:

$$\forall (A,B)\in G^2,\quad [f(A)\,f(B)]=f([A\,B])\subseteq f(G)$$

لأنّ $[A\,B]$ محتوى في G.

(5

$$\forall (A,B)\in G^2,\quad [f^{-1}(A)\,f^{-1}(B)]=f^{-1}([A\,B])\subseteq f^{-1}(G)$$

لأنّ $[A\,B]$ محتوى في G.

بعض التطبيقات التآلفية: الاسقاط، التناظر، التآلف.

في كل ما سيأتي E فضاء تآلفي موجّه بفضاءٍ شعاعي $\vec{E}$ على الحقل $K=\mathbb{Q}\vee\mathbb{R}\vee\mathbb{C}$، F و G فضاءين تآلفيين جزئيين من E موجّهين بفضاءين شعاعيين جزئيين $\vec{F}$ و $\vec{G}$ من $\vec{E}$ على التوالي.

تذكير

إذا كان $\vec{E}=\vec{F}\oplus\vec{G}$ فإنّ:

$$\forall \vec{u} \in \vec{E}, \exists! \vec{x} \in \vec{F}, \exists! \vec{y} \in \vec{G} / \ \vec{u} = \vec{x} + \vec{y}$$

الاسقاط على فضاء تآلفي

تعريف

1) نسمّي التطبيق:

$$\begin{aligned} \Pi_{\vec{F}} : \vec{E} &\to \vec{E} \\ \vec{u} = \vec{x} + \vec{y} &\mapsto \Pi_{\vec{F}}\left(\vec{u}\right) = \vec{x} \end{aligned}$$

بـ الاسقاط الخطي على $\vec{F}$ بموزاة $\vec{G}$.

2) نسمّي التطبيق:

$$\begin{aligned} \Pi_{\vec{G}} : \vec{E} &\to \vec{E} \\ \vec{u} = \vec{x} + \vec{y} &\mapsto \Pi_{\vec{G}}\left(\vec{u}\right) = \vec{y} \end{aligned}$$

بـ الاسقاط الخطي على $\vec{G}$ بموزاة $\vec{F}$.

تعريف

إذا كان $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G}$ فإننا نسمّي اسقاطًا على F بموزاة G كل تطبيق:

$$\begin{aligned} P : E &\to E \\ M &\mapsto P\left(M\right) = M' \end{aligned} \quad / \begin{cases} M \in F, \\ \overrightarrow{MM'} \in \vec{G}. \end{cases}$$

وهو وحيد (تأكد من ذلك).

مبرهنة

الاسقاط على فضاءٍ تآلفي F بموزاة فضاءٍ تآلفي G هو تطبيق تآلفي.

إثبات

لتكن A و B نقطتين من E.

نضع $P\left(A\right) = A'$ و $P\left(B\right) = B'$. فتكون A' و B' نقطتين من F و $\overrightarrow{BB'}$ ، $\overrightarrow{AA'}$ شعاعان من $\vec{G}$. ومن ثمّ لدينا:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B} \\ &= \overrightarrow{A'B'} + \left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{B'B}\right) \end{aligned}$$

بما أنّ $\overrightarrow{AB}$ شعاع من $\vec{E}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ ينتمي إلى $\vec{F}$ و $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{B'B}$ ينتمي إلى $\vec{G}$ فإنّ $\Pi_{\vec{F}}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{A'B'}$ وعليه:

$$\overrightarrow{P(A)P(B)}=\overrightarrow{A'B'}=\Pi\left(\overrightarrow{AB}\right)$$

وبما أنّ Π تطبيق خطي فإنّ الاسقاط P على F بموزاة G تطبيق تآلفي جزؤه الخطي هو الاسقاط الخطي Π. (حيث وضعنا $\Pi=\Pi_{\vec{F}}$ وسنحتفظ بهذا الترميز مالم نشر بخلاف ذلك صراحة).

قضية

التطبيقان التآلفيان اللذان يتطابقان في نقطة ما ولهما نفس الجزء الخطي متطابقان.

إثبات

ليكن f و g تطبيقان تآلفيان منطلقهما E ومصبهما F ولنفترض وجود نقطة ما A من E يتحقّق من أجلها $f(A)=g(A)$ ولنفترض كذلك أن $\vec{f}=\vec{g}$. لدينا:

من أجل كل نقطة M من E:

$$\begin{aligned}f(M)&=f\left(A+\overrightarrow{AM}\right)\\&=f(A)+\vec{f}\left(\overrightarrow{AM}\right)\\&=g(A)+\vec{g}\left(\overrightarrow{AM}\right)\\&=g\left(A+\overrightarrow{AM}\right)\\&=g(M)\end{aligned}$$

وهي المساواة المطلوبة.

مبرهنة

ليكن f تطبيقًا تآلفيًا من E نحو E. يكون التطبيق f اسقاطًا على فضاءٍ تآلفي F بموازاة فضاء تآلفي G إذا، وفقط إذا، كان $f\circ f=f$.

إثبات

لزوم الشرط:

لتكن M نقطة ما من E.

بما أنّ f اسقاط على F فإنّ $f(M)$ تنتمي إلى F ونعلم أنّ F هي مجموعة نقاط f الصامدة. إذن $f\left(f(M)\right)=f(M)$ مهما تكن M من E، وعليه $f\circ f=f$.

كفاية الشرط:
بما أنّ f تآلفي وتركيب تآلفيين تآلفيٌ فإنّ:

$$f \circ f = f \Rightarrow \vec{f} \circ \vec{f} = \vec{f}$$

$\vec{f}$ هو اسقاط خطي على $\vec{F} = \operatorname{Im} \vec{f}$ بموزاة $\vec{G} = \ker \vec{f}$.
f يقبل على الأقل نقطة صامدة لأنّ:

$$\forall M \in E, \quad f\left(f\left(M\right)\right) = f\left(M\right)$$

لتكن A إحدى هذه النقط الصامدة وفق f نضع $F = A + \vec{F}$ و $G = A + \vec{G}$
وليكن g اسقاطًا تآلفيًا على F بموزاة G. وعليه $\operatorname{Im} \vec{g} = \operatorname{Im} \vec{f}$ و $\ker \vec{g} = \ker \vec{f}$
أي $\vec{f} = \vec{g}$. وبما أنّ A تنتمي إلى F فإنّ $g\left(A\right) = A$ وعليه:

$$\begin{cases} g\left(A\right) = f\left(A\right) = A \\ \vec{g} = \vec{f} \end{cases}$$

إذن f=g وبما أنّ g اسقاط بالإنشاء فإنّ f اسقاط هو الأخر.

التناظر بالنسبة لفضاء تآلفي

تعريف

ليكن P الاسقاط على فضاءٍ تآلفي F بموزاة فضاءٍ تآلفي G ($\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G}$).
نسمّي تناظرًا بالنسبة لـ F بموزاة G كل تطبيق S معرّفٍ من E نحو E ويرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث M و M' تحقّقان احدى القضايا المتكافئة التالية:

1) $M' = S\left(M\right) = P\left(M\right) + \overrightarrow{MP\left(M\right)}$

2) $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MP\left(M\right)}$

3) $\overrightarrow{P\left(M\right)M'} = -\overrightarrow{P\left(M\right)M}$

4) $\overrightarrow{MM'} \in \vec{G}, \ \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M' \in F$

5) $M' = 2P\left(M\right) - M$ (وهي الأكثر استعمالاً)

مثال

لتكن Ω نقطة من E. يسمّى التناظر بالنسبة للفضاء التآلفي البسيط $\{\Omega\}$ بموزاة E بالتناظر المركزي بالنسبة إلى Ω.

ملحوظة

إذا كان P اسقاطًا على فضاءٍ تآلفي بموزاة فضاءٍ تآلفي ما وكان S التناظر المرافق له فإنّ:

$$S = 2P - Id_E$$

نظرية

التناظر بالنسبة لفضاءٍ تآلفي F بموزاة فضاءٍ تآلفي G هو تطبيق تآلفي.

إثبات

لتكن A و B نقطتين من E. لدينا:

$$\overrightarrow{S(A)S(B)} + S(A) = S(B) = 2P(B) - B$$

$$2P(A) + A + \overrightarrow{S(A)S(B)} = 2P(A) + 2\overrightarrow{P(A)P(B)} + A + \overrightarrow{BA}$$

ومن ثمّ:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{S(A)S(B)} &= 2\overrightarrow{P(A)P(B)} + \overrightarrow{BA} \\ &= 2\overrightarrow{P(A)P(B)} - \overrightarrow{AB} \\ &= 2\Pi\left(\overrightarrow{AB}\right) - \overrightarrow{AB} \\ &= \left(2\Pi - Id_{\vec{E}}\right)\left(\overrightarrow{AB}\right)\end{aligned}$$

بما أنّ التطبيق Π و $Id_{\vec{E}}$ خطيان فإنّ التناظر S تطبيق تآلفي جزؤه الخطي هو $2\Pi - Id_{\vec{E}}$.

مبرهنة

ليكن f تطبيقًا تآلفيًا من E نحو E، يكون التطبيق f تناظرًا بالنسبة لفضاءٍ تآلفي بموزاة فضاءٍ تآلفي إذا، وفقط إذا، كان $f \circ f = Id_E$.

إثبات

$\Leftarrow$)

نفترض أنّ f تناظر ونبرهن أنّ $f \circ f = Id_E$. لتكن من أجل ذلك نقطة M من E لدينا:

$$f\left(f\left(M\right)\right) = f\left(2P\left(M\right) - M\right)$$

$$
\begin{aligned}
(f\circ f)(M) &= f\big((2P-Id_E)(M)\big)\\
&= f\big(2P(M)-M\big)\\
&= 2P\big(2P(M)-M\big)-2P(M)+M\\
&= 4P\big(P(M)\big)-4P(M)+M \quad (\text{لأنّ الاسقاط } P \text{ يحافظ على المرجح})\\
&= M \quad (\text{لأنّ } P\circ P=P)\\
&= Id_E(M)
\end{aligned}
$$

ومنه $f\circ f=Id_E$.

$\Rightarrow$)

لنفترض الآن أنّ $f\circ f=Id_E$ ونبيّن أنّ f تناظر.

بما أنّ $\overrightarrow{f\circ f}=\vec{f}\circ\vec{f}=Id_{\vec{E}}$

فإنّ $\vec{f}$ تناظر خطي بالنسبة لـ $\vec{F}=\operatorname{Im}\Pi$ بموزاة $\vec{G}=\ker\Pi$، حيث Π الاسقاط الخطي الموافق لـ $\vec{F}$.

لتكن M نقطة ما من E ولنبيّن أنّ النقطة $\dfrac{M+f(M)}{2}$ صامدة وفق f، لدينا:

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{M+f(M)}{2}\right) &= \frac{1}{2}f(M)+\frac{1}{2}f^2(M)\\
&= \frac{1}{2}f(M)+\frac{1}{2}M\\
&= \frac{f(M)+M}{2}
\end{aligned}
$$

إذن f يقبل نقطة صامدة على الأقل ولتكن A إحدى هذه النقط نضع $F=A+\vec{F}$ و $G=A+\vec{G}$.

بما أنّ $\vec{F}\oplus\vec{G}=\vec{E}$ فإنّه يوجد تناظر g بالنسبة لـ F بموزاة G.

لكن $\vec{g}$ تناظر خطي إذاً $\operatorname{Im}\Pi=\vec{F}=\operatorname{Im}\Pi_g$ و $\ker\Pi=\vec{G}=\ker\Pi_g$ وعليه $\Pi=\Pi_g$. ومن ثمّ $\vec{g}=\vec{f}$.

وبما أنّ A نقطة من F فإنّ $g(A)=A$ وبالتالي $f=g$ لأنّ $\vec{f}=\vec{g}$ و $g(A)=f(A)$ ومنه f تناظر لكون g كذلك بالإنشاء.

التآلف

تعريف

ليكن P اسقاطًا على فضاءٍ تآلفي F بموزاة فضاءٍ تآلفي G ($\vec{E}=\vec{F}\oplus\vec{G}$).
نسمّي تآلفًا ذو القاعدة F، والاتجاه G والنسبة α من $\mathbb{R}^*$ كلّ تطبيق f معرّف على E يحقّق الشرط:

$$\forall M\in E,\quad \overrightarrow{P(M)f(M)}=\alpha\overrightarrow{P(M)M}$$

نظرية

التآلف f ، ذو القاعدة F والاتجاه G والنسبة α من $\mathbb{R}^*$ ، هو تطبيق تآلفي وجزؤه الخطي هو التطبيق $(1-\alpha)\Pi+\alpha Id_{\vec{E}}$ حيث نذكّر بأنّ Π هو الجزء الخطي لـ الاسقاط على F بموزاة G.

إثبات

لدينا من تعريف التآلف:

$$\forall M\in E,\quad f(M)=P(M)+\alpha\overrightarrow{P(M)M}$$

لتكن A نقطة مثبتة من E، لدينا:

$$\begin{aligned}f(M)&=P(M)+\alpha\overrightarrow{P(M)A}+\alpha\overrightarrow{AM}\\&=A+\overrightarrow{AP(M)}-\alpha\overrightarrow{AP(M)}+\alpha\overrightarrow{AM}\\&=\alpha M+(1-\alpha)P(M)\end{aligned}$$

لتكن من جهة أخرى M و N نقطتين من E، لدينا:

$$\begin{aligned}f(M)-f(N)&=\alpha M+(1-\alpha)P(M)-\alpha N+(\alpha-1)P(N)\\&=\alpha(M-N)+P(M)-P(N)+\alpha P(N)-\alpha P(M)\\&=\alpha(M-N)+(1-\alpha)\big(P(M)-P(N)\big)\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f(N)f(M)}&=\alpha\overrightarrow{NM}+(1-\alpha)\overrightarrow{P(N)P(M)}\\&=\left(\alpha Id_{\vec{E}}+(1-\alpha)\Pi\right)\left(\overrightarrow{NM}\right)\end{aligned}$$

وبما أنّ $\alpha Id_{\vec{E}}+(1-\alpha)\Pi$ تطبيق خطي فإنّ التآلف f تطبيق تآلفي جزؤه الخطي $\vec{f}=\alpha Id_{\vec{E}}+(1-\alpha)\Pi$.

أمثلة

1) التآلف الذي نسبته 1 هو التطبيق المطابق،
2) التآلف الذي نسبته -1 هو تناظر.

قواعد الحساب في البنية التآلفية

1) $\forall (A,B)\in E^2,\quad \overrightarrow{AB}+A=B\wedge \overrightarrow{AA}=\vec{0}$

2) $\forall (A,B,C)\in E^3,\quad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (علاقة شال)

3) $\forall (A,B)\in E^2,\quad \overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

4) $\forall (A,B,C,D)\in E^4,\quad \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

5) $M\in E\Rightarrow \exists A\in E,\exists \vec{u}\in \vec{E}\,/\,M=A+\vec{u}$

6) $\vec{u}\in \vec{E}\Rightarrow \exists (A,B)\in E^2\,/\,\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

7) $\forall (\vec{u},\vec{v})\in \vec{E}^2,\forall A\in E,\quad \vec{u}+A=\vec{v}+A\Leftrightarrow \vec{u}=\vec{v}$

8) $\forall (\vec{u},\vec{v})\in \vec{E}^2,\forall A\in E,\quad (\vec{u}+\vec{v})+A=\vec{u}+(\vec{v}+A)=\vec{v}+(\vec{u}+A)$

9) $\forall \vec{u}\in \vec{E},\forall A\in E,\quad \vec{u}+A=A\Leftrightarrow \vec{u}=\vec{0}$

10) $\forall \vec{u}\in \vec{E},\forall A\in E,\quad \overrightarrow{A(\vec{u}+A)}=\vec{u}$

11) عند التشعيع (تثبيت نقطة A) يكون:

$$\forall (M,N)\in E^2,\forall (\alpha,\beta)\in K^2,\quad 1)\ M+N=A+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$$

$$2)\ \alpha M=A+\alpha\overrightarrow{AM}$$

$$3)\ \alpha M+\beta N=A+\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{AN}$$

$$4)\ \alpha M-\alpha N=A+\alpha\overrightarrow{AM}-\alpha\overrightarrow{AN}$$

$$=A+\alpha\overrightarrow{NM}$$

المراجع

[1] مطبوعة الأستاذ مصطفى دبّة،
[2] دروس الأستاذة مجراب.

ترقبوا الجزء الثاني من المطبوعة
وكذا كتاب مبادئ وأسس في الجبر والتحليل بنفس القلم **(قلم الطالب وليد سعدي)**
البريد الإلكتروني:
Saadiw868@gmail.com