ادارة الخليفة والمقطم التعليمية

منتدى توجيه الرياضيات

# الرياضيات

# الصف الثالث الثانوى

# ملخص الاحصاء

تقديم

م/عادل ادوار

# الإحتمال

## تعاريف

* **التجربة العشوائية** : هى تجربة نستطيع معرفة جميع نواتجها الممكنة قبل إجرائها ، ولكن لا يمكن تحديد الناتج الذى سيحدث فعلاً
* **فضاء العينة** : هو مجموعة جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية و عدد عناصرها هو ن ( ف )
*

**الحدث** : هو مجموعة جزئية من فضاء العينة فإذا كان : أ حدث فى ف فإن : أ ⊂ ف و عدد عناصره هو : ن ( أ ) أى عدد فرص وقوع الحدث أ

* **الحدث المستحيل " ∅ "** = : هو الحدث الذى لا يمكن وقوعه
* **الحدث المؤكد** : هو الحدث الذى له كل النواتج الممكنة
* **الحدث البسيط** : هو حدث يتكون من عنصر واحد و يسمى حدث أولى
* **الحدث المركب** : هو حدث يتكون من أكثر من عنصر و يسمى حدث غير بسيط
* **الحدثان المتنافيان** : هما حدثان لا يمكن وقوعهما معاً

أى أن : هما حدثان تقاطعهما = ∅

**ملاحظة** : الأحداث البسيطة فى فضاء العينة تكون متنافية مثنى مثنى

## مسلمات الإحتمال

إذا كان : أ حدثاً من أحداث فضاء العينة لتجربة عشوائية ما أى أ ⊂ ف فإن :

(١) إحتمال الحدث أ " ل ( أ ) " هو عدد حقيقى يحقق ما يأتى : ل ( أ ) = ن ( أ ) / ن ( ف )

حيث : ٠ ≤ ل ( أ ) ≤ ١

أى أن : ل ( أ ) ∈ [ ٠ ، ١ ]

(٢) ل ( ف ) = ١

أى أن : إحتمال الحث المؤكد = ١

(٣) ل ( ∅ ) = صفر

أى أن : إحتمال الحدث المستحيل = صفر

(٤) إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة فإن : ل ( أ ∩ ب ) = صفر ، ل ( أ ∪ ب ) = ل ( أ ) + ل ( ب )

(٥) إذا كان : ف = { أ١ ، أ٢ ، أ٣ ، ... ، أن } فإن : ل ( أ١ ) + ل ( أ٢ ) + ل ( أ٣ ) + ... ل ( أن ) = ١

(٦) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة ، أ ⊂ ب فإن : ل ( أ ∩ ب ) = ل ( أ ) ، ل ( أ ∪ ب ) = ل ( ب )

## العمليات على الأحداث

| الصورة اللفظية | الصورة الرمزية |
|---|---|
| إحتمال وقوع الحدث أ أو الحدث ب<br>إحتمال وقوع كلا الحدثين<br>إحتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل | ل ( أ ∪ ب ) = ل ( أ ) + ل ( ب ) – ل ( أ ∩ ب ) |
| إحتمال وقوع أ و ب<br>إحتمال وقوعهما معا | ل ( أ ∩ ب ) = ل ( أ ) + ل ( ب ) – ل ( أ ∪ ب ) |
| إحتمال عدم وقوع أ | ل ( أ′ ) = ١ – ل ( أ ) |
| إحتمال وقوع أ فقط<br>إحتمال وقوع أ و عدم وقوع ب | ل ( أ – ب ) = ل ( أ ) – ل ( أ ∩ ب )<br>ل ( أ ∩ ب′ ) = ل ( أ ) – ل ( أ ∩ ب ) |
| إحتمال وقوع ب فقط<br>إحتمال وقوع ب و عدم وقوع أ | ل ( ب – أ ) = ل ( ب ) – ل ( أ ∩ ب )<br>ل ( أ′ ∩ ب ) = ل ( ب ) – ل ( أ ∩ ب ) |
| إحتمال عدم وقوع ب فقط<br>إحتمال وقوع أ أو عدم وقوع ب | ل ( أ ∪ ب′ ) = ١ – ل ( ب – أ )<br>ل ( ب – أ )′ = ١ – ل ( ب – أ ) |
| إحتمال عدم وقوع أ فقط<br>إحتمال وقوع ب أو عدم وقوع أ | ل ( أ′ ∪ ب ) = ١ – ل ( أ – ب )<br>ل ( أ – ب )′ = ١ – ل ( أ – ب ) |
| إحتمال وقوع حدث واحد على الأكثر<br>إحتمال عدم وقوع أ و ب معا | ل ( أ′ ∪ ب′ ) = ١ – ل ( أ ∩ ب )<br>ل ( أ ∩ ب )′ = ١ – ل ( أ ∩ ب ) |
| إحتمال عدم وقوع أحدهما على الأقل<br>إحتمال عدم وقوع أ أو ب | ل ( أ′ ∩ ب′ ) = ١ – ل ( أ ∪ ب )<br>ل ( أ ∪ ب )′ = ١ – ل ( أ ∪ ب ) |
| إحتمال وقوع أحدهما فقط<br>إحتمال وقوع أ أو ب فقط<br>إحتمال وقوع أحدهما دون الآخر | ل [ ( أ – ب ) ∪ ( ب – أ ) ]<br>= ل ( أ ) + ل ( ب ) – ٢ ل ( أ ∩ ب ) |

## المتغير العشوائى

إذا كان: ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ، ح مجموعة الأعداد الحقيقية فإن: أى دالة س: ف ← ح تسمى متغيراً عشوائياً معرفاً على ف

## المتغير العشوائى المتقطع " المنفصل ، الوثاب "

هو متغير عشوائى مداه مجموعة محدودة من الأعداد الحقيقية

### التوزيع الإحتمالى المتقطع

إذا كان: س متغير عشوائى متقطع مداه المجموعة { $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ..... $س_ن$ } فإن الدالة د المعرفة كالآتى:

د : { $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ..... $س_ن$ } ← ح

حيث: د ( $س_ر$ ) = ل ( س = $س_ر$ ) لكل ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، ن تحدد ما يسمى بالتوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى س و الذى يعبر عنه بمجموعة الأزواج المرتبة المحددة لبيان الدالة د

### ملاحظات

(١) الدالة د تحقق الشرطين:

١- د ( $س_ر$ ) ≥ ٠ لكل ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، ن

٢- د($س_1$) + د($س_2$) + د($س_3$) + ... + د($س_ن$) = ١

(٢) يكتب التوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى س بالصورة

{($س_1$ ، د($س_1$))،($س_2$ ، د($س_2$))، ....،($س_ن$ ، د($س_ن$))} أو

فى صورة جدول:

| $س_1$ | $س_2$ | $س_3$ | $س_4$ | ... | $س_ن$ |
|---|---|---|---|---|---|
| د ( $س_1$ ) | د ( $س_2$ ) | د ( $س_3$ ) | د ( $س_4$ ) | ... | د |

## المتغير العشوائى المتصل

هو متغير عشوائى مداه فترة مفتوحة أو مغلقة من الأعداد الحقيقية

### التوزيع الإحتمالى المتقطع

إذا كان س متغير عشوائى متصل مداه الفترة [ أ ، ب ] ، الدالة د حيث د: [ أ ، ب ] ← ح بحيث تحقق:

(١) د (س) ≥ ٠ لكل س ∈ [ أ ، ب ]

(٢) الشكل البيانى لهذه الدالة هو منحنى متصل بحيث تكون مساحة المنطقة أسفل منحنى الدالة و فوق [ أ ، ب ] مساوية للواحد الصحيح

### دالة الكثافة

إذا كان س متغير عشوائى متصل فإن الدالة الحقيقية د تسمى دالة كثافة المتغير العشوائى س إذا كان:

ل ( أ ≤ س ≤ ب ) = مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى د و فوق محور السينات فى [ أ ، ب ] و ذلك لكل عددين حقيقيين أ ، ب حيث أ ≤ ب

## التوزيع الإحتمالى

### الوسط الحسابى و التباين و الإنحراف المعيارى

إذا كان: س متغير عشوائى متقطع مداه المجموعة { $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ... ، $س_ن$ } بإحتمالات د($س_1$) ، د($س_2$) ، د($س_3$) ، .... ، د($س_ن$) على الترتيب فإن:

الوسط الحسابى " التوقع " $(\mu) = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر \cdot د(س_ر)$

التباين: $(\sigma^2) = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 \cdot د(س_ر) - \mu^2$

الإنحراف المعيارى: $(\sigma) = \sqrt{(\sigma^2)}$

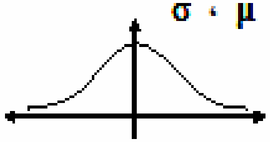
### جدول حساب (μ) ، (σ²) ، (σ)

| $س_ر$ | د ( $س_ر$ ) | $س_ر$ · د ( $س_ر$ ) | $س_ر^2$ · د ( $س_ر$ ) |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | $\mu = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر \cdot د(س_ر)$ | $\sigma^2 = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 \cdot د(س_ر) - \mu^2$ |

معامل الإختلاف = $\dfrac{\text{الإنحراف المعيارى}}{\text{الوسط الحسابى}}$

## التوزيع الطبيعى

هو توزيع لمتغير عشوائى ص متصل مداه ] − ∞ ، ∞ [ و دالة كثافة الإحتمال له دالة أسية تعتمد على القيمتين μ ، σ لهذا المتغير العشوائى ص



### خواصه

١ ـ المنحنى متصل و يقع بأكمله فوق محور السينات

٢ ـ متماثل بالنسبة للمستقيم : س = μ

٣ ـ له قيمة واحدة عند س = μ

٤ ـ يتزايد فى ] − ∞ ، μ [ ، و يتناقص فى ] μ ، ∞ [

٥ ـ يقترب طرفاه من محور السينات دون أن يقطعه

## التوزيع الطبيعى المعيارى

هو توزيع طبيعى وسطه الحسابى μ = صفر ، و إنحرافه المعيارى σ = ١

### خواصه

١ ـ المنحنى متصل و يقع بأكمله فوق محور السينات

٢ ـ متماثل بالنسبة للمستقيم : س = صفر

٣ ـ المساحة فوق محور السينات و تحت المنحنى = ١ و المستقيم س = صفر يقسم هذه المساحة إلى قسمين متساويين كل منهما = ٠,٥

٤ ـ مساحة المنطقة الواقعة أسفل المنحنى و فوق الفترة [ أ ، ب ] تمثل عدداً إحتمال وقوع المتغير العشوائى ص فى [ أ ، ب ] أى أن : ل ( أ ≥ ص ≥ ب ) = مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى و فوق [ أ ، ب ]

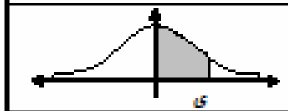
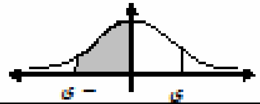
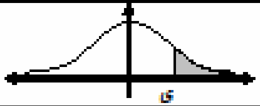
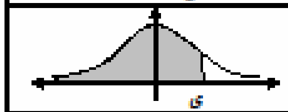
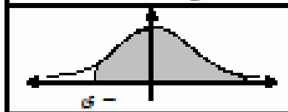
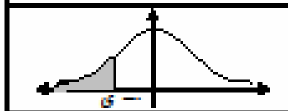
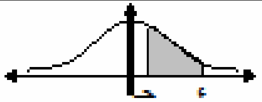
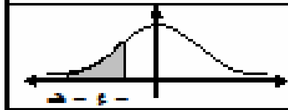
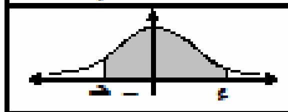
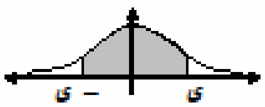
### قاعدة التحويل إلى متغير طبيعى معيارى :

إذا كان س متغير طبيعى غير معيارى وسطه الحسابى μ و إنحرافه المعيارى σ تحول هذا المتغير إلى متغير طبيعى معيارى ص بالقاعدة ص = (س − μ) / σ و يكون :

ل ( أ ≥ س ≥ ب ) = ل ( (أ − μ)/σ ≥ ص ≥ (ب − μ)/σ )

## حساب الإحتمالات لمتغير طبيعى

غير معيارى ← معيارى

| الإحتمال المطلوب حيث ى عدد موجب ، حـ ، ء موجبان، حـ < ء | صورته الإحتمال المستخدمة فى الجدول | المساحة التى تمثله |
|---|---|---|
| ل ( ٠ ≥ ص ≥ ى ) | يكشف من الجدول مباشرة |  |
| ل ( − ى ≥ ص ≥ ٠ ) | ل ( ٠ ≥ ص ≥ ى ) |  |
| ل ( ص ≤ ى ) | ٠,٥ − ل ( ٠ ≥ ص ≥ ى ) |  |
| ل ( ص ≥ ى ) | ٠,٥ + ل ( ٠ ≥ ص ≥ ى ) |  |
| ل ( ص ≤ − ى ) | ٠,٥ + ل ( ٠ ≥ ص ≥ ى ) |  |
| ل ( ص ≥ − ى ) | ٠,٥ − ل ( ٠ ≥ ص ≥ ى ) |  |
| ل ( حـ ≥ ص ≥ ء ) | ل ( ٠ ≥ ص ≥ ء ) − ل ( ٠ ≥ ص ≥ حـ ) |  |
| ل ( − ء ≥ ص ≥ − حـ ) | ل ( حـ ≥ ص ≥ ء ) = ل ( ٠ ≥ ص ≥ ء ) − ل ( ٠ ≥ ص ≥ حـ ) |  |
| ل ( − حـ ≥ ص ≥ ء ) | ل ( ٠ ≥ ص ≥ ء ) + ل ( ٠ ≥ ص ≥ حـ ) |  |
| ل ( − ى ≥ ص ≥ ى ) | ٢ ل ( ٠ ≥ ص ≥ ى ) |  |

## حساب قيمة عدد إذا علمت المساحة

| | أ < ٠,٥ | أ > ٠,٥ |
|---|---|---|
| ل ( ص ≥ ى ) = أ | ى موجب | ى سالب |
| ل ( ص ≤ ى ) = أ | ى سالب | ى موجب |
| | ل ( ٠ ≥ ص ≥ ى ) = أ − ٠,٥ | ل ( ٠ ≥ ص ≥ ى ) = ٠,٥ − أ |
| | نبحث فى الجدول عن قيمة ى التى تناظر المساحة الناتجة | |

## الإرتباط

هو علاقة بين متغيرين ( ظاهرتين ) أو أكثر

**درجات الإرتباط :**

(١) الإرتباط التام : فيه يمكن معرفة قيمة أحد المتغيرين إذا علمت قيمة المتغير الآخر

(٢) الإرتباط الصفرى ( المنعدم ) : و الذى يعنى عدم وجود أى علاقة بين المتغيرين

(٣) الإرتباط غير التام : و فيه يتبع أحد المتغيرين الآخر فى تغيره إلى حد ما

**أنواع الإرتباط حسب طبيعة إتجاه المتغيرين :**

(١) الإرتباط الطردى : وفيه يكون تغير المتغيرين فى إتجاه واحد أى أنهما يتبعان بعضهما فى الزيادة و النقص

(٢) الإرتباط العكسى : و فيه يكون تغير المتغيرين فى إتجاهين متضادتين بحيث أن أى زيادة فى أحدهما يتبعها نقص فى الآخر أو العكس

**أنواع الإرتباط حسب الوصف التحليلى لعلاقة الإرتباط :**

(١) إرتباط خطى

(٢) إرتباط غير خطى

تقاس درجة العلاقة بين متغيرين بمقياس يسمى " معامل الإرتباط " ( ر )

## معامل الإرتباط

### معامل إرتباط بيرسون للبيانات غير المبوبة

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - (\text{مجـ س}) \times (\text{مجـ ص})}{\sqrt{\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2} \times \sqrt{\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2}}$$

**بعض خصائص معامل الإرتباط ( ر ) :**

(١) ر تكون موجبة فى حالة الإرتباط الطردى و سالبة فى حالة الإرتباط العكسى

(٢) ر = صفر فى حالة الإرتباط المنعدم

(٣) ر = ١ فى حالة الإرتباط الطردى التام ، ر = − ١ فى حالة الإرتباط العكسى التام

(٤) ر ∋ [ − ١ ، ١ ]

(٥) معامل إرتباط بيرسون لا يتغير إذا طرحنا أو جمعنا أى عدد ثابت " من الممكن أن يكون الوسط الحسابى " من جميع قيم المتغير س ، و أى عدد ثابت آخر من قيم المتغير ص

### جدول حساب معامل إرتباط بيرسون

| س | ص | $\text{س}^2$ | $\text{ص}^2$ | س ص |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| مجـ س | مجـ ص | مجـ $\text{س}^2$ | مجـ $\text{ص}^2$ | مجـ س ص |

### معامل إرتباط بيرسون الرتب لسبيرمان

$$\text{ر} = 1 - \frac{6\ \text{مجـ ف}^2}{\text{ن}(\text{ن}^2 - 1)}$$

### جدول حساب معامل إرتباط الرتب لسبيرمان

| س | ص | رتب س | رتب ص | ف | $\text{ف}^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | مجـ $\text{ف}^2$ |

# الإنحدار

## شكل الإنحدار لمتغيرين

عند دراسة العلاقة بين المتغيرين س ، ص فإنه يمكن تمثيل الأزواج المرتبة الممثلة لهذه العلاقة بنقط فى المستوى و يسمى الشكل الناتج " شكل الإنتشار " للمتغيرين س ، ص و قد يأخذ هذا الشكل صوراً مختلفة " مستقيم ،أو منحنى "

## خط الإنحدار

إذا كانت العلاقة بين المتغيرين س ، ص خطية فإنه يعبر عنها بخط مستقيم يسمى خط الإنحدار

## طرق إيجاد معادلة خط الإنحدار

### المربعات الصغرى

معادلة إنحدار ص على س هى : ص = أ س + ب

" حيث أ معامل إنحدار ص على س "

$$أ = \frac{\text{ن مجـ س ص − مجـ س × مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^{٢} - \text{(مجـ س)}^{٢}}$$

$$\text{، ب} = \frac{\text{مجـ ص − أ مجـ س}}{\text{ن}}$$

معادلة إنحدار س على ص ى : س = حـ ص + ء

" حيث حـ معامل إنحدار س على ص "

$$حـ = \frac{\text{ن مجـ س ص − مجـ س × مجـ ص}}{\text{ن مجـ ص}^{٢} - \text{(مجـ ص)}^{٢}}$$

$$\text{، ء} = \frac{\text{مجـ س − حـ مجـ ص}}{\text{ن}}$$

جدول حساب أ ، ب ، حـ ، ء

هو نفس جدول حساب معامل إرتباط بيرسون

ملاحظة

يحذف العمود غير المناسب من الجدول

### الإنحرافات

تعتمد على تصغير الأعداد الحسابية المستخدمة لحساب أ ، ب ، حـ ، ء و ذلك بوضع :

سَ = س − و ، صَ = ص − هـ

حيث : و ، هـ أى عددين ثابتين يتم إختيارهما حسب ظروف المسألة ثم توجد معادلة خط الإنحدار المطلوبة بدلالة سَ ، صَ و بالتعويض عنهما نحصل على المعادلة المطلوبة بدلالة س ، ص و تكون قيمة أ هى قيمة معامل إنحدار صَ على سَ و فى نفس الوقت هى معامل إنحدار ص على س و كذلك قيمة حـ هى معامل س على ص

الجدول المستخدم

| س | ص | سَ = س − و | صَ = ص − هـ | سَ^٢ | صَ^٢ | سَ صَ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | مجـ سَ | مجـ صَ | مجـ سَ^٢ | مجـ صَ^٢ | مجـ سَ صَ |

ملاحظة

يحذف العمود غير المناسب من الجدول

## العلاقة بين معامل الإنحدار و معامل الإرتباط

$ر^{٢} = أ × حـ$ حيث :

ر يأخذ نفس لإشارة كل من أ ، حـ