

الفصل الثالث:

الخواص الموجيَّة للجسيمات

Chapter 3:

Wave Properties of Particles



المحاضرة ٩

ف ٢٥١ : فيزياء حديثة ١

قسم الفيزياء – جامعة اليرموك

٢١١٦٣ إربد الأردن

الفصل الثالث:
الخواص الموجيَّة للجسيمات

Lecture 9

Phys. 251: Modern Physics

Physics Department

Yarmouk University 21163 Irbid Jordan

Chapter 3 : Wave Properties of Particles

http://ctaps.yu.edu.jo/physics/Courses/Phys251/Lec3-1

الجسيم والموجة

في عام 1924 اقترح دي بروي (Louis De Broglie) فكرة أنَّه إذا كان للموجات طبيعة جسيميَّة، فلِمَ لا تكن هناك طبيعة موجيَّة للجسيمات الماديَّة؟

لقد رأينا أنَّ الفوتون (*جسيم الضوء*) يمتلك زخمًا خطيًّا يُعطى بالعلاقة التالية:

$$p = \frac{h}{\lambda} \qquad \text{1-3}$$

أو أنَّ طول موجة الفوتون (*جسيم الضوء*) الذي يمتلك زخمًا خطيًّا p هوَ:

$$\lambda = \frac{h}{p} \qquad \text{2-3}$$

Wave associated to a moving particle

$$\lambda = h/p$$

كانت فكرة دي بروي هي أنَّ جسيماً متحركًا بزخم خطي p مصحوب بموجة طول موجتها يُعطى بعلاقة مُماثلة للعلاقة 2-3 السابقة، ويسمَّى طول الموجة في هذه العلاقة طول موجة دي بروي.

إنَّ اقتراح دي بروي يبدو منطقيًّا لأنَّه يجعل من الطبيعة الموجيَّة للجسيمات تصرفًا متجانساً في الطبيعة، ويُساهم في التماثل الذي يحبه الفيزيائيون!

مثال 1-3

حساب طول موجة دي بروي المصاحبة لجسيم كتلته 60 kg وسرعته 20 m/s.

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\,v} = \frac{6.626\times10^{-34}}{60\times 20} = 5.52\times10^{-37}\ \text{m}$$

من الواضح أنَّه من المستحيل أنْ نكشف عن مثل هذه الموجة، بسبب عجز أجهزتنا عن ذلك، ولكنَّ هذا لا يعني أنَّ هذه الموجة غير موجودة!

مثال 2-3

حساب طول موجة دي بروي المصاحبة لإلكترون سرعته 0.8c:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\,v} = \frac{h\,c}{m\,c^2\,\beta} = \frac{12400\ \text{eV}.\overset{0}{\text{A}}}{0.511\times10^{6}\ \text{eV}\times 0.8} = 0.03\ \overset{0}{\text{A}}$$

طول الموجة هنا قريب من الأبعاد الذريَّة وسوف نرى أنَّ هذه الحقيقة هي التي ساعدت في إثبات فرضيَّة دي بروي

Plane Wave دالة الموجة المستوية

تُعبِّر عادة عن موجة حرة سرعتها v وترددها ν تنتشر في اتجاه x^+ (أي في بعد واحد) بدلالة احداثيات المكان والزمن بدالة جيبيَّة على الشكل التالي:

$$\Psi(x,t) = A\cos(\omega\, t - k\, x) \qquad 3\text{-}3$$

حيثُ تمثِّل Ψ سعة الموجة (amplitude) في أيَّة نقطة في الفراغ في أيَّة لحظة t.

السرعة الزاوية $\omega = 2\,\nu = 2\,\pi\,(v/\lambda)$

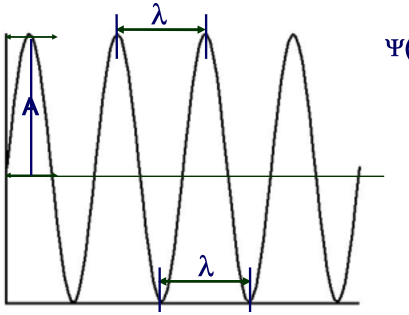
عدد الموجة $k = 2\,\pi\,/\lambda$

تُعمَّم هذه الدالة في ثلاثة أبعاد باستبدال المتغير x بالمتجه $\vec{r}$ وعدد الموجة في بعد واحد بمتجه عدد الموجة ثلاثي الأبعاد:

$$\Psi(\vec{r},t) = A\,e^{i(\omega t - \vec{k}\bullet\vec{r})} \qquad 4\text{-}3$$

Plane Wave دالة الموجة المستوية

يبين الشكل (3-1) التالي موجة مستوية طول موجتها λ تنتشر في اتجاه x^+



$$\Psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$

يمثِّل هذا الشكل الموجة في لحظة ما t (snapshot) أو، ويشكل مُكافئ تغير نقطة تنتمي للموجة خلال فترة زمنية محدَّدة.

الشكل (3-1)

دالة الموجة

نُعبِّر في الفيزياء الحديثة عن موجات دي بروي بدالة موجة Ψ تمثِّل سعة هذه الموجة بدلالة احداثيَّات المكان والزمان.

أدخل شرودينغر (Schrödinger) هذا المفهوم الجديد في اطار رياضي أنيق يُسمَّى الميكانيكا الموجيَّة وتظهر هذه الدالة بحدِّ ذاتها كمتغير ليس ذا معنى وما يعنينا منها هو مربعها (مربع قيمتها المطلقة بالضبط $|\Psi|^2$) والذي يرتبط باحتمال وجود النظام المدروس (جسيم مادي مثلاً) في مكان ما في الفضاء في لحظة ما.

دالة شرودينغر

دالة شرودينغر دالة مركبَّة (complex)، وتكون عادة على الصيغة:

$$\Psi = A + iB \qquad A, B \in \boldsymbol{R} \ \ \& \ i = \sqrt{-1}$$

$$\Psi(x,t) = A(x,t) + i\,B(x,t) \qquad \text{A and B are real functions}$$

ومربع هذه الدالة هو:

$$|\Psi|^2 = \Psi^*\Psi = (A - iB)\times(A + iB) = A^2 + B^2 \in \boldsymbol{R}^* \qquad 5\text{-}3$$

Probability Density كثافة الاحتمال

تُسمَّى الكميَّة $|\Psi|^2$ كثافة الاحتمال. يتناسب احتمال وجود الجسيم في مكان ما في الفراغ (x,y,z) في لحظة ما، t، طردياً مع $|\Psi|^2$.

تفسير ماكس بورن (1926):

يجب أنْ نفصل بينَ الحدث واحتمال حدوثه. لنفرض أنَّنا ندرس حركة الكترون. إنَّ الالكترون سيكون موجوداً في نقطة ما في الفراغ أو سوف لا يكون موجوداً. الحدث هنا هو وجود الجسيم في النقطة (x,y,z,t)

وإذا أجرينا عدداً كبيراً من القياسات لإيجاده في مكان ما في لحظة ما (أي في النقطة المُعرَّفة بإحداثيَّات الزمكان (x,y,z,t)) فإنَّ قولنا أنَّ احتمال وجوده في ذلك المكان في تلك اللحظة (احتمال الحدث) يمثِّل عدد المرات التي وُجد فيها في النقطة (x,y,z,t).

سوف نرى في الفصل الخامس كيف نجد دالة الموجة لنظام وكيف نربط ذلك باحتمال وجوده في نقطة ما في الزمكان، أو احتمال أنْ يمتلك طاقة مُعيَّنة.

سرعة موجة دي بروي

من حيثُ المبدأ، فإنَّنا نتوقع أنْ تكون سرعة موجة دي بروي مساوية لسرعة الجسيم الذي تُصاحبه!

باستخدام التعريفات السابقة جميعها نجد أنَّ سرعة موجة دي بروي (w) تُعطى بالعلاقة التالية:

$$\mathbf{w} = \lambda\nu = \frac{h}{p}\nu = \frac{h}{mv}\nu = \frac{E}{mv} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v} \qquad \text{6-3}$$

وبما أنَّ سرعة الجسيم (v) أقل دومًا من سرعة الضوء في الفراغ فإنَّ هذا يعني أنَّ موجة دي بروي تسير بسرعة أكبر من سرعة الضوء!

إنَّ هذا يعني حتمًا أنَّ موجة دي بروي ليست موجة كالأمواج التي نعرفها!

رزمة الموجة
Wave Packet

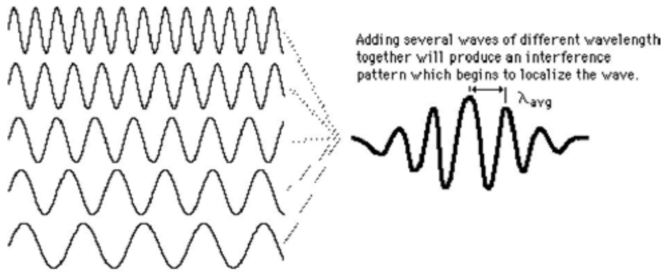
رزمة الموجة – موجة دي بروي موجة احتمال!

موجة دي بروي مُصاحبة لجسيم حر يسير بسرعة v وتُعطينا فكرة عن احتماليَّة وجود الجسيم في نقطة ما في الفراغ في لحظة ما. وبالتالي فهي تختلف تمامًا عن الموجة المستوية (الحرة) التي رأيناها، والتي تصف رتلاً من الموجات متساوية السعة (A).

يُمكن (ويجب) النظر إلى موجة دي بروي، وكأنَّها عبارة عن حُزمة موجيَّة (wave packet) أو مجموعة موجيَّة (wave group) أي حزمة من الأمواج مختلفة السعات. إنَّ هذه الرزمة (المجموعة) محصورة في الفراغ الذي يتواجد فيه الجسيم الذي تُصاحبه لأنَّها مرتبطة باحتماليَّة وجود الجسيم والتي هي نفسها محصورة في الفراغ الملازم للجسيم!

رزمة الموجة – مجموعة الموجة

يبين الشكل 3-2 رزمة الأمواج التي نتحدث عنها. تتكون الرزمة من تداخل مجموعة من الموجات البسيطة بأطوال موجة مختلفة.



الشكل :3-2 رزمة الأمواج

17

سرعة الموجة وسرعة المجموعة

إذا كانت سرعة الموجات المُكونَّة للرزمة متساويَّة، فإنَّ سرعة الرزمة تساوي هذه السرعة. أمَّا إذا كانت سرعة الموجات المُكونَّة للرزمة تتغير مع طول الموجة لأفراد الرزمة فمن الواضح أنَّ سرعة الرزمة ستكون مختلفة عن سرعة الموجات المكونة لها!

حساب سرعة الموجة:

للتبسيط سوف نعتبر أنَّ الرزمة مكونَّة من موجتين، السرعة الزاويَّة للأولى هي ω وعدد الموجة لها هو k والسرعة الزاويَّة للثانية هي $\omega + d\omega$ وعدد الموجة لها هو $k + dk$. حيثُ ($d\omega << \omega$ و $dk << k$) كميَّتان صغيرتان (تفاضليَّتان). تنتشر الموجتان في اتجاه x^+.

أي أنَّ دالتي الموجة للموجتين هما:

$$\Psi_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$

7-3

$$\Psi_2(x,t) = A\cos((\omega + d\omega)t - (k + dk)x)$$

18

تراكب (تداخل) موجتيْن

حسب مبدأ التراكب فإنَّ تداخل الموجتين يُعطي الموجة:

$$\Psi(x,t) = \Psi_1(x,t) + \Psi_2(x,t)$$

8-3

$$\Psi(x,t) = A[\cos(\omega t - kx) + \cos((\omega + d\omega)t - (k + dk)x)]$$

وباستخدام المتطابقة المثلَّثيَّة: $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

نجد أنَّ : $\Psi(x,t) = 2A\cos\left[\left(\frac{2\omega + d\omega}{2}\right)t - \left(\frac{2k + dk}{2}\right)x\right]\cos\left(\left(\frac{d\omega}{2}\right)t - \left(\frac{dk}{2}\right)x\right)$

ولأنَّ $d\omega << \omega$ و $dk << k$ فإنَّ:

$$\Psi(x,t) = B(x,t)\cos[\omega t - kx] \text{ where } B(x,t) = 2A\cos\left(\left(\frac{d\omega}{2}\right)t - \left(\frac{dk}{2}\right)x\right)$$

9-3

19

سرعة الطور وسرعة المجموعة

تعني العلاقة 3-9 السابقة أنَّ حاصل الجمع هو موجة تسير في اتجاه x^+ (الحد $\cos(\omega t - kx)$) وسعتها (الحد $2A\cos\left(\left(\frac{d\omega}{2}\right)t - \left(\frac{dk}{2}\right)x\right)$)تتغير مع الزمن - (بلغة الأمواج نقول أنَّ الموجة معدَّلة modulated)

إنَّ أثر هذا التعديل هو في انتاج مجموعات موجات متتالية، وتعطى سرعة الطور لهذه الموجة بالعلاقة:

$$v_P = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu$$

10-3

وتسير المجموعة بسرعة

$$v_G = \frac{\frac{d\omega}{2}}{\frac{dk}{2}} = \frac{d\omega}{dk}$$

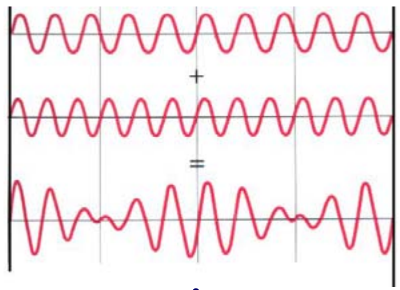
11-3

إنَّ هذا يعني أنَّ مجموعة من الأمواج لا تسير بالضرورة بنفس سرعة الأمواج فرديًّا

20

تراكب (تداخل) موجتيْن

يبين الشكل 3-3 حاصل جمع الموجتيْن السابقتيْن



الشكل :3-3 جمع موجتيْن مختلفتي طول الموجة

حساب سرعة الطور وسرعة المجموعة

لقد رأينا أنَّ سرعة الطور لموجة دي بروي هي $v_P = c^2/v$

لنحسب سرعة المجموعة: لهذا الغرض نحتاج للتعبير عن ω بدلالة k

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{E}{h} = 2\pi\frac{mc^2}{h} = \frac{\gamma m_0 c^2}{\hbar}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\frac{p}{h} = 2\pi\frac{mv}{h} = \frac{\gamma m_0 v}{\hbar} \qquad \text{12-3}$$

$$\hbar c = \frac{hc}{2\pi} \cong 1970\ \text{eV}.\mathring{A} = 197\ \text{MeV}.\text{F}$$

حساب سرعة المجموعة

باستخدام قاعدة السلسلة نجد أنَّ:

$$v_G = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\frac{d\omega}{dv}}{\frac{dk}{dv}} = \frac{\gamma^3 m_0 v/\hbar}{\gamma^3 m_0/\hbar} = v! \qquad \text{13-3}$$

إنَّ هذا يعني أنَّ سرعة مجموعة الموجة الديبرويَّة يُساوي سرعة الجسم الذي تُصاحبه هذه المجموعة وهو ما نتوقعه.

حساب المشتقتيْن $\frac{d\omega}{dv}$ و $\frac{dk}{dv}$

باستخدام قاعدة السلسلة نجد أنَّ:

$$\frac{d\omega}{dv} = \frac{m_0 c^2}{\hbar}\left(\frac{d\gamma}{dv}\right) = \frac{m_0 c^2}{\hbar}\left(\frac{\beta\gamma^3}{c}\right) = \frac{m_0\gamma^3}{\hbar}v$$

$$\frac{dk}{dv} = \frac{m_0}{\hbar}\left(\frac{d(\gamma v)}{dv}\right) = \frac{m_0}{\hbar}\gamma^3$$

حساب المشتقتيْن $\frac{d\omega}{dv}$ و $\frac{dk}{dv}$

باستخدام قاعدة السلسلة نجد أنَّ:

$$\frac{d\gamma}{dv} = \frac{d\gamma}{d\beta}\times\frac{d\beta}{dv} = \frac{d}{d\beta}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]\times\frac{1}{c} = \frac{\beta}{\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^3}\times\frac{1}{c} = \frac{\beta\gamma^3}{c}$$

$$\frac{d(\gamma v)}{dv} = \left(\frac{d\gamma}{dv}\right)v + \gamma = \frac{\beta\gamma^3}{c}v + \gamma = \gamma\left(\beta^2\gamma^2 + 1\right) = \gamma^3$$

$$\beta^2\gamma^2 + 1 = \beta^2\frac{1}{1-\beta^2} + 1 = \frac{1}{1-\beta^2} = \gamma^2$$

مثال

حساب سرعة الطور وسرعة المجموعة لموجة دي بروي المُصاحبة لإلكترون ولبروتون طاقة كل منهما تُساوي 100 MeV. (أنظر المسألة 19)

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow v = \sqrt{\left(1-\frac{m_0 c^2}{K+m_0 c^2}\right)} \times c$$

14-3

Particle	m_0c^2 (MeV)	$E = K + m_0c^2$ (MeV)	$v = v_G$	v_P
Electron	0.511	100.511	0.999974 c	1.000 c
Proton	938.28	1038.28	0.18335 c	5.454 c

سرعة موجة دي بروي = سرعة المجموعة

الحل الوحيد للخروج من مأزق ($v_P = c^2/v > c$) هو في اعتبار أنَّ المجموعة هي موجة دي بروي، وبالتالي لسنا معنيين بسرعة الطور v_P، والتي ليس لها أي معنى فيزيائي

وكما قلنا فإنَّ موجة دي بروي، نوع جديد من الموجات يختلف في مفهومه تماماً عن الأمواج التي نعرفها (الكهرُمغناطيسيَّة أو الميكانيكيَّة)

Lecture 10

Phys. 251: Modern Physics

Physics Department

Yarmouk University 21163 Irbid Jordan

Uncertainty Principle

http://ctaps.yu.edu.jo/physics/Courses/Phys251/Lec3-2

المحاضرة ١٠

ف ٢٥١ : فيزياء حديثة ١

قسم الفيزياء – جامعة اليرموك

٢١١٦٣ إربد الأردن

مبدأ عدم التحديد

عدم الدقة وموجة دي بروي

رأينا أنَّ جسيمًا ماديًا يكون مصحوبًا بموجة دي بروي والتي هي عبارة عن رزمة أمواج. أنَّ مجرد قول ذلك يعني أنَّ هناك "عدم دقة" في تحديد مكان وجود الجسيم في الحيز الذي تحتله الرزمة!

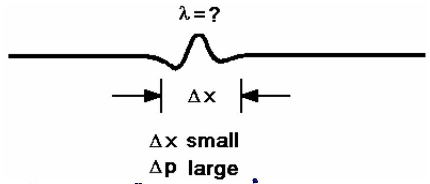
(لا يُمكن أنْ نعرف المستقبل لأنَّه لا يُمكن أنْ نعرف الحاضر)

أنْ ننظرَ الى جسيم مادي كمجموعة موجة يفرض وجود حدود أساسية على الدقة التي نستطيع بها قياس خصائص الجسيم كالموقع والزخم الخطي.

في رزمة الموجة يجب أنْ يكون الجسيم في ايِّ مكان في الرزمة في آيّة لحظة t. تكون كثافة الاحتمال $|\Psi|^2$ أكبر ما يُمكن في منتصف الرزمة بالطبع وبالتالي فإنَّ الجسيم سوف يكون على الأغلب هناك. ومع ذلك فإنَّه بالامكان أيضًا أنْ نجد الجسيم في آيّة نقطة حيثُ $|\Psi|^2$ لا تُساوي صفراً.

الدقة في قياس x تعني عدم دقة في تحديد λ

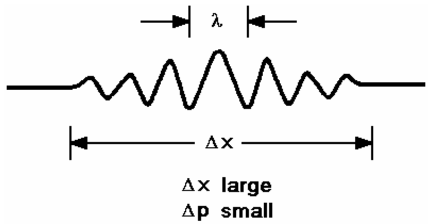
- كلَّما صغَّرنا رزمة الموجة زادت دقتنا في تحديد موقع الجسيم، ولكنَّ هذا يعني في نفس الوقت أنَّ "طول موجة "موجات الرزمة لنْ يكونَ مُعرَّفًا بشكلٍ دقيق، لأنَّه لا يوجد عدد كافٍ من الموجات لقياس λ بدقة، وهذا يعني أنَّ قياس $p = h/\lambda$ لنْ يكونَ دقيقًا.



الشكل 3-4-أ "حصر موقع الجسم"

الدقة في قياس λ تعني عدم دقة في تحديد x

- من ناحية أُخرى، إذا كانت رزمة الموجة واسعة فإنَّها تملك قيماً مُحدَّدة جيدًا لطول الموجة λ، أي أنَّ قيمة p محددَّة، وسوف يُعطي قياسها -عدة مرَّات - قيمًا محصورة في مدى ضيق $(p \pm \Delta p)$ ولكن أيْنَ يكون الجسيم، ما هو موقعه؟



الشكل 3-4-ب "تحديد طول الموجة"

مبدأ عدم التحديد

في هذه الحالة فإنَّنا سنواجه مشكلة في تحديد موقع الجسيم بدقة وهكذا نحصل على مبدأ اللاتحديد. كان هايزنبرغ أولَ من اكتشف هذا المبدأ وصاغه على النحو التالي: "من المستحيل أنْ نعرفَ موقع الجسيم وزخمه الخطي بالضبط في آنٍ واحد"

تحديد Δx و Δp بالاستعانة بتحويلات فورييه

إنَّ الموجة المصاحبة لجسيم واحد عبارة عن رزمة موجة واحدة وليست "رتلاً أو قطاراً" من رزم الموجة. الرزمة الوحيدة عبارة عن تراكب عددٍ محدَّد من الأمواج التوافقية.

من حيثُ المبدأ فإنَّ رزمة من نوع دي بروي يجبُ أنْ تحوي عدداً كبيراً من الأمواج التوافقيّة التي تختلف فيما بينها في التردد $d\omega$ وفي عدد الموجة dk

في لحظة ما t يُعطي تحليل فورييه تعبيراً رياضياً لسعة رزمة الموجة $\Psi(x)$ بالعلاقة:

$$\Psi(x) = \int_0^\infty g(k) \cos kx \, dk \qquad 14\text{-}3$$

حيثُ $g(k)$ دالة تصفُ كيف تتغيَّر سعات الأمواج المكونة لِـ $\Psi(x)$ مع العدد k، وتُسمَّى $g(k)$ مُحوِّلة فورييه (أو تحويل فورييه) للدالة $\Psi(x)$ وتُمثِّل رزمة الموجة تماماً كما تستطيع $\Psi(x)$ تمثيل هذه الرزمة.

تحويلات فورييه

من حيثُ المبدأ فلتمثيل رزمة موجة يلزم أعداد موجة تبدأ من $k=0$ وحتَّى $k=\infty$، لكن لرزمة موجة ذات طول Δx فإنَّ الموجات التي سعاتها $g(k)$ محسوسة (ولا تُساوي صفراً) محصورة في فترة مُحدَّدة من الفترة $[k=0, k=\infty]$ ولنُسمِّها Δk.

بالعودة إلى الشكل 3-4 كُلَّما قصرت المجموعة، الشكل أ، فإنَّ الفترة Δk تكبر وبالعكس (الشكل ب).

موجة غاوسيَّة

هناك حالة خاصة مُميَّزة هي تلك التي تكون فيها رزمة الموجة $\Psi(x)$ عبارة عن دالة غاوسيَّة:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2} \qquad 15\text{-}3$$

إنَّ محولَّة فورييه لدالة غاوسيَّة هي دالة غاوسيَّة أيضاً.

تعتمد العلاقة العكسية بين Δx و Δk على شكل رزمة الموجة وعلى تعريف Δx و Δk.

$$\Delta x \bullet \Delta k = \alpha \qquad 16\text{-}3$$

لأنَّ مُحوِّلة فورييه لدالة غاوسيَّة تُساوي دالةً غاوسيَّةً أيضاً يكون معامل التناسب العكسي (أو حاصل الضرب $\Delta x \,.\, \Delta k$) أقَّل ما يُمكن عندما يكونُ *مُغلف* رزمة الموجة دالة غاوسيَّة.

37

هايزنبرغ – مبدأ اللاتحديد

في حالة رزمة الموجة $\Psi(x)$ الغاوسية، إذا كان Δx و Δk يمثلان الانحراف المعياري للدالتيْن $\Psi(x)$ و $g(k)$ على التوالي فإن حاصل الضرب $\Delta x\, \Delta k$ هو:

$$\Delta x \,.\, \Delta k \geq ½ \qquad 17\text{-}3$$

$$k = 2\pi/\lambda = (2\pi/h)\, p \qquad 18\text{-}3$$

$$p = \left(\frac{h}{2\pi}\right) k = \hbar k \qquad \left(E = h\nu = h\frac{\omega}{2\pi} = \hbar\omega\right)$$

$$\Rightarrow \; \Delta x \bullet \Delta p = \hbar/2 \qquad 19\text{-}3$$

تقول هذه العبارة أنَّ حاصل ضرب عدم الدقة في تحديد موقع جسيم في لحظة ما t في عدم الدقة في تحديد زخمه الخطي يكون على الأقل مُساوياً لِـ $\hbar/2$

38

عدم الدقة خاصيَّة مرتبطة بطبيعة الكميَّات الفيزيائيَّة !

مع أن رزمة موجة دي برويَّة ليست غاوسيَّة تمامًا كما رأينا، لكنَّا نستطيع تعميم العلاقة السابقة بين عدم الدقة في x وعدم الدقة في k. تُسمَّى هذه العلاقة مبدأ عدم التحديد الذي وضعه هايزنبرغ.

إنَّ عدم الدقة الحاصل ليس ناتجًا عن عجز أجهزتنا ولكن عن طبيعة الكميَّات الفيزيائية نفسها. وأخطاء القياس والأخطاء المخبريّة بأنواعها هي أخطاء تُضاف الى Δx و Δp.

39

لا نعرف حاضر النظام الكمِّي ولكنَّا لا نجهله تماماً

لأنَّنا لا نعرف بالضبط أيْن يتواجد الجسيم في لحظة ما (الآن) وزخمه الخطي في نفس الوقت فإنَّنا لا نستطيع أنْ "نُخمِّنَ" أيْن سيُوجد في اللحظة التالية أو ماذا سيكون زخمه الخطي أو سرعته!

لكنّ جهلنا بالحاضر ليس كلِّيًا !، إذْ لا يزال بإمكاننا أنْ نحسبَ احتمال تواجد الجسيم في نقطة ما من الفراغ في لحظة ما t وأنْ نحسبَ احتمال أنْ تكونَ قيمة الزخم الخطي مُحدَّدة في نقطة ما من الفراغ في لحظة ما t.

Lecture 11

Phys. 251: Modern Physics

Physics Department
Yarmouk University 21163 Irbid Jordan

Uncertainty Principle - Application

http://ctaps.yu.edu.jo/physics/Courses/Phys251/Lec3-3

المحاضرة ١١

ف ٢٥١ : فيزياء حديثة ١

قسم الفيزياء – جامعة اليرموك

٢١١٦٣ إربد الأردن

تطبيقات على مبدأ عدم التحديد

تطبيق هام - أصل الحكاية

يلزمنا أحيانًا قياس الطاقة E في فترة زمنية Δt (الفيزياء الذريَّة وتحت الذريَّة). سوف نرى هنا كيف يرتبط "عدم الدقة" في قياس الطاقة E مع Δt . لنبدأ من تعريف الطاقة:

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \quad \Rightarrow 2\,E\,\Delta E = 2\,pc^2\,\Delta p$$

$$x = v\,t = (p/m)\,t \quad \Rightarrow \Delta x = v\,\Delta t = (p\,/\,m)\,\Delta t$$

$$\Delta p = (E\,/\,pc^2)\,\Delta E$$

$$\Delta x\,\Delta p = (E\,/\,mc^2)\,\Delta E.\Delta t \geq (\hbar\,/2)$$

$$\Rightarrow \Delta E \cdot \Delta t = \frac{\hbar}{2} \qquad 20\text{-}3$$

مبدأ عدم التحديد وحفظ الطاقة

تقول العبارة السابقة $\Delta E \cdot \Delta t = \frac{\hbar}{2}$

أنَّ حاصل ضرب عدم الدقة في تحديد طاقة جسيم في لحظة ما t في عدم الدقة في تحديد الزمن يكون على الأقل مُساويًا لِـ $\hbar/2$.

كانت البداية لمبدأ عدم التحديد هو محاولات فيزيائيي الثلاثينيَّات من القرن العشرين تفسير طيف إشعاع بيتا السالب، وكانت إحدى المحاولات تتعلق بمفهوم حفظ الطاقة والذي وُضع موضع الشك حتى خرج هايزنبرغ بالعلاقة السابقة والتي تُبرِّر "عدم انحفاظ الطاقة" بمقدار محسوس ΔE بشرط أنْ يتمَّ ذلك في فترة زمنية قصيرة جدًا مقدارها هو*:

$$\Delta t = \frac{\hbar}{\Delta E} \qquad 21\text{-}3$$

* أسقطنا هنا المعامل ½.

مثال: عرض خطوط الطيف الذريَّة (Broadening of spectral lines)

تتخلص ذرّة "مُهيَّجة" من الطاقة الزائدة بأنْ تبثَّ فوتونًا ذا تردد محدَّد. إذا كان معدل الفترة الزمنيَّة بيْنَ "بث الفوتون" وحتى عودة الذرَّة الى حالة أكثر استقرارًا طاقويًا هو 1×10^{-8} s فأحسب عدم الدقة في تحديد تردد الفوتون $\Delta\nu$.

$$\Delta E = h\,\Delta\nu \geq (\hbar/2)\,/\,\Delta t \qquad \Rightarrow \Delta\nu \geq (\pi\,/\,4)\,/\,\Delta t$$

$$\Delta\nu \geq 8 \times 10^{8}\ \text{Hz}$$

ولهذا فإنَّ قياس تردد الفوتونات الصادرة عن مجموعة متماثلة من الذرَّات المتهيجة لا يُعطي قيمة واحدة بل القيمة $\nu \pm \Delta\nu$ وهذا ما يُسبِّب ظهور الخط الطيفي على شكل "غاوسي" عمليًا. تؤدي ظواهر أُخرى كأثر دوبلر إلى توسيع أكبر في الخط الطيفي.

مثال: الأبعاد الذريَّة (Atomic Dimensions)

نصف قطر ذرَّة الهيدروجين يُساوي 0.53 Å، ما هي أقل طاقة يُمكن للالكترون أنْ يمتلكها؟

الحل:

إنَّ "مكان" الإلكترون محدَّد بالكميَّة $\Delta x = 0.53$ Å

$$\Delta p \ge \frac{\hbar}{2}\times\frac{1}{\Delta x} = \left(\frac{\hbar c}{2}\times\frac{1}{\Delta x}\right)\Big/c = \left(\frac{1970\,\text{eV}.\mathring{A}}{2}\times\frac{1}{0.53\,\mathring{A}}\right)\Big/c = 1858.5\,\text{eV}/c$$

$$\beta = \frac{v}{c} \cong \frac{pc}{m_e c^2} = \frac{0.00186}{0.511} = 0.00364!$$

هذا يعني أنَّ الكترون ذرَّة الهيدروجين يتصرف كجسيم غير نسبي، وبالتالي فإنَّ طاقته الحركيَّة هي:

$$KE = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{p^2}{2m_e}\times\frac{c^2}{c^2} \ge \frac{(1858.5)^2}{2\times 511000} = 3.38\,\text{eV}!$$

سوف نرى أنَّ طاقة إلكترون ذرَّة الهيدروجين الحركيَّة تُساوي 13.6 eV

ف ٢٥١ : فيزياء حديثة ١

قسم الفيزياء – جامعة اليرموك

٢١١٦٣ إربد الأردن

مسائل في الخواص الموجيَّة للجسيمات

مسألة 1: حساب طول موجة دي بروي

ما هو طول موجة دي بروي لإلكترون سرعته 1×10^8 m/s؟ لبروتون يمتلك نفس السرعة؟

الحل:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc} = \frac{hc}{\gamma m_{0(e)} c v} = \frac{hc}{\gamma m_{0(e)} c^2 \beta}$$

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{3} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-1/9}} = \frac{3}{\sqrt{8}} = 1.061$$

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_e &= \frac{12400}{1.061\times 511000\times(1/3)} = 0.069\,\mathring{A}\\ \lambda_p &= \frac{1240\,\text{MeV}.\text{F}}{1.061\times 938.28\times(1/3)} = 3.74\,\text{F}\end{aligned}}$$

مسألة 2: سرعة الطور وسرعة المجموعة

أثبت أن

$$v_P = c\sqrt{1+\left(\frac{m_0 c\lambda}{h}\right)^2}$$

الحل:

$$v_P = \frac{c^2}{v} = \frac{c}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}}$$

$$\gamma^2 = \frac{E^2}{(m_0 c^2)^2} = \frac{p^2c^2 + (m_0 c^2)^2}{(m_0 c^2)^2} = 1 + \frac{p^2 c^2}{(m_0 c^2)^2} = 1 + \left(\frac{(hc/\lambda)}{m_0 c^2}\right)^2$$

$$v_P = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}} = c\sqrt{\frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}} = \sqrt{\frac{1+(pc/m_0c^2)^2}{(pc/m_0c^2)^2}} = \sqrt{1+\left(\frac{m_0 c\lambda}{h}\right)^2}$$

Next Lecture

الحلقة القادمة

الفصل الرابع: التركيب الذرّي

Chapter 4: Atomic Structure

End of Lecture 11