المصفوفـــات

* تنظيم البيانات في مصفوفات

هي تنظيم للبيانات في شكل صفوف (أفقية) وأعمدة(رأسية) توضع بين قوسين ( ) أو [ ]
إذا كانت المصفوفة تحتوي علي م صف ، ن عمود فإنها تكون من النوع م × ن حيث
م ، ن ∈ $ص^+$ والمصفوفة تتكون من عدد من الصفوف والاعمدة ويرمز للمصفوفة بالحروف الكبيرة ولعناصرها بالحروف الصغيرة . وسوف نتعامل مع المصفوفة فقط حيث م ≤٣، ن ≤ ٣
امثلة :

م = $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ من النوع ١ × ٣

ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ من النوع ٢ × ٣

ج = $\begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ ٧ & ١ \\ ٩ & ٢ \end{bmatrix}$ من النوع ٣ × ٢

س = $\begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ -٤ & ٠ \end{bmatrix}$ من النوع ٢ × ٢

ص = $\begin{bmatrix} ٧ \\ -٢ \\ ١ \end{bmatrix}$ من النوع ٣ × ١

مثال :فى مسابقة لاوائل الطلبة بالصف الأول الثانوى العام أجرى أختبار لثلاثة طلاب فى مادتى الرياضيات والفيزياء فأجاب الطالب الأول على ٦ أسئلة فى الرياضيات ، ٤ أسئلة فى الفيزياء وأجاب الطالب الثانى على ٥ أسئلة فى الرياضيات ،٨ أسئلة فى الفيزياء ، وأجاب الطالب الثالث على ٧ أسئلة فى الرياضيات فقط .

(١) أكتب هذه البيانات فى صورة مصفوفة أ على النظم ٣ × ٢

(٢) إذا كان مخصصاً لكل سؤال ٥ درجات فأكتب المصفوفة ج على نفس النظم والتى تبين درجات كل واحد منهم فى المادتين

الحل :

	الرياضيات	الفيزياء
الاول	٦	٤
الثانى	٥	٨
الثالث	٧	صفر

$$\text{م} = \begin{pmatrix} ٤ & ٦ \\ ٨ & ٥ \\ \text{صفر} & ٧ \end{pmatrix} \qquad \text{ج} = \begin{pmatrix} ٢٠ & ٣٠ \\ ٤٠ & ٢٥ \\ \text{صفر} & ٣٥ \end{pmatrix}$$

موقع العناصر فى المصفوفة :

في المصفوفة م يكون العنصر ($أ_{\text{ص ع}}$) هو العنصر الذي يقع في الصف ص ، العمود ع

مثال : إذا كانت المصفوفة $\text{م} = \begin{pmatrix} ٤ & ٦ \\ ٨ & ٥ \\ \text{صفر} & ٧ \end{pmatrix}$ **اكتب نظم م ثم أوجد** $أ_{١٢}$ ، $أ_{٢٢}$ ، $أ_{٢٣}$

الحل :

نظم م هو ٣ × ٢ ، $أ_{١٢} = ٥$ ، $أ_{٢٢} = ٨$ ، $أ_{٢٣} = \text{صفر}$

مثال : أكتب بطريقة السرد المصفوفة ($\text{م}_{\text{ص ع}}$) حيث $أ_{\text{ص ع}} = ٢\text{ع} + \text{ص}$ ، م على النظم ٣ × ٢

الحل :

$أ_{١١} = ٢(١) + ١ = ٢ + ١ = ٣$ ، $أ_{٢١} = ٢(٢) + ١ = ٤ + ١ = ٥$

$أ_{١٢} = ٢(١) + ٢ = ٢ + ٢ = ٤$ ، $أ_{٣٢} = ٢(٣) + ٢ = ٦ + ٢ = ٨$

$أ_{١٣} = ٢(١) + ٣ = ٢ + ٣ = ٥$ ، $أ_{٢٣} = ٢(٢) + ٣ = ٤ + ٣ = ٧$

$$\text{م} = \begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٨ & ٤ \\ ٧ & ٥ \end{pmatrix}$$

المصفوفات الخاصة

(١) <u>المصفوفة المربعة</u> : المصفوفة التي فيها عدد الصفوف = عدد الأعمدة : م = ن

$\text{م} = \begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٨ & ٤ \end{pmatrix}$ **مصفوفة مربعةعلى النظم ٢ × ٢ ، ب =** $\begin{pmatrix} -٢ & ٥ & ٣ \\ ٠ & ٨ & ٤ \\ -١ & ٧ & ٥ \end{pmatrix}$ **مصفوفة مربعة ٣ × ٣**

(٢) <u>المصفوفة الصفرية</u> : المصفوفة التي كل عناصرها أصفار ورمزها ▭ مستطيل

$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة صفرية على نظم ٢ × ٢ $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة صفرية على ٣ × ١

(٣) <u>مصفوفة الصف</u> :

هي المصفوفة التي تتكون من صف واحد وأي عدد من الأعمدة م = ١ أي علي النظام ١ × ن

مثل أ = $(\,٧ \quad ٥\,)$ النظم ١×٢ ، ب = $(\,صفر \quad ٨ \quad ٤-\,)$ النظم ١×٣

(٤) <u>مصفوفة العمود</u> :

هي المصفوفة التي تتكون من أي عدد من الصفوف وعمود واحد فقط ن =١ ، ج= $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$

أي علي النظام م × ١

(٥) <u>مصفوفة الوحدة</u>:

هى مصفوفة مربعة جميع عناصر أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسى فهى تساوى واحد ويرمز لها بالرمز I

$I_{٢×٢} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ $I_{٣×٣} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

<u>مدوّر المصفوفة</u> : هو تبديل الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف ويكون رمز مدور المصفوفة $أ_{م×ن}$ هو $(أ_{ن×م})^{مد}$

إذا كانت أ على النظم ٣ × ٢ فإن $أ^{مد}$ تكون على النظم ٢ × ٣

<u>ملاحظة هامة</u> :- $(أ^{مد})^{مد}$ = أ ، $(ب^{مد})^{مد}$ = ب

مثال :إذا كانت أ = $(\,٩ \quad ٦ \quad ٣\,)$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٨ & ٤ \\ ٧ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٠ & ٥ \\ ٨ & ٦ & ١- \end{pmatrix}$ أوجد $أ^{مد}$ ، $ب^{مد}$ ، $ج^{مد}$

الحل :

$أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٦ \\ ٩ \end{pmatrix}$ ، $ب^{مد} = \begin{pmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ ٧ & ٨ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $ج^{مد} = \begin{pmatrix} ١- & ٥ & ٣ \\ ٦ & ٠ & ٢ \\ ٨ & ٤ & ١ \end{pmatrix}$

$(أ^{مد})^{مد}$ = $(\,٩ \quad ٦ \quad ٣\,)$ = أ (مدور مدور مصفوفة نفس المصفوفة)

المصفوفات المتماثلة وشبه المتماثلة

إذا كانت $م$ مصفوفة مربعة فإنها تسمى متماثلة إذا وإذا فقط إذا كانت $م = م^{مد}$
و تسمى شبة متماثلة إذا و إذا فقط إذا كانت $م = - م^{مد}$

مثال : هل المصفوفة ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ & -١ \\ -١ & ٠ & ٣ \\ ١ & -٣ & ٠ \end{pmatrix}$ **متماثلة أم شبة متماثلة ؟**

الحل :

$$ب^{مد} = \begin{pmatrix} ٠ & -١ & ١ \\ ١ & ٠ & -٣ \\ -١ & ٣ & ٠ \end{pmatrix} = -١ \times \begin{pmatrix} ٠ & ١ & -١ \\ -١ & ٠ & ٣ \\ ١ & -٣ & ٠ \end{pmatrix} = - ب$$

$\therefore$ $ب^{مد} = - ب$ فيكون $ب = - ب^{مد}$ $\therefore$ المصفوفة ب شبة متماثلة

<u>تساوي مصفوفتين</u> :- تتساوي المصفوفتان $م$ ، ب إذا كان :

[١] لهما نفس النظم

[٢] كل عنصر في $م$ يساوي نظيره في ب أي أن العنصر $أ_{ص ع} = ب_{ص ع}$

استخدام المصفوفات المتساوية في حل المعادلات

مثال : أوجد قيمة س ، ص ، ع إذا كانت : $\begin{pmatrix} س - ١ & ع \\ ٣ ص & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١٥ & ٠ \end{pmatrix}$

الحل : المصفوفتان متساويتان $\therefore$ س − ١ = ٣ $\therefore$ س = ٣ + ١ = ٤ $\therefore$ س = ٤

، ٣ ص = ١٥ $\therefore$ ص = ٥ ، ع = ٢

مثال : إذا كانت $\begin{pmatrix} ٣ & جـ - د \\ ٢ & ١ \\ هـ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & جـ + د \\ ٧ & ٤ \end{pmatrix}$ **أوجد جـ ، د ، هـ**

الحل :ـ من التساوي نجد : هـ = ٧

جـ - د = ٥ (١)

، جـ + د = ١ (٢)

بجمع ١ ، ٢ نجد : ٢ جـ = ٦ ∴ جـ = ٣ و بالتعويض فى (٢)

∴ ٣ + د = ١ ، د = ١ – ٣ = ـ ٢

مثال : أوجد قيمة كل من أ ، ب إذا كان $\begin{pmatrix} ١- & ٤ \\ ٣ب+١ & ٢أ-١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١- & ٤ \\ ٧ & ٣ \end{pmatrix}$

الحل : من التساوى نجد :

٢ أ – ١ = ٣ ∴ ٢ أ = ٤ ∴ أ = ٢

، ٣ ب + ١ = ٧ ∴ ٣ ب = ٦ ∴ ب = ٢

العمليات على المصفوفات

الجمع و الطرح

يمكن الجمع والطرح عندما تكون المصفوفات من نفس النظام والناتج يكون مصفوفة من نفس هذا النظام

مثلا إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٤ & ٢- \\ ٧ & ٥- \end{pmatrix}$ **فإن : أ + ب =** $\begin{pmatrix} ٦ & ١ \\ ٧ & ١٠ \end{pmatrix}$

أ + ب^{مد} = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٥- & ٢- \\ ٧ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤- & ١ \\ ٧ & ١٩ \end{pmatrix}$

أ - ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١٥ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٤ & ٢- \\ ٧ & ٥- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤- & ٢ \\ ٧- & ٥ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٢- & ٥ \\ ٧- & ٢٠ \end{pmatrix}$

ضرب عدد حقيقي في مصفوفة

لضرب عدد في مصفوفة يضرب العدد في كل عناصر هذه المصفوفة وتصبح المصفوفة الناتجة على نفس النظم و على العكس يمكن أخذ عنصر مشترك من جميع عناصر المصفوفة

$$\text{ك} \begin{pmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ك س} & \text{ك ص} \\ \text{ك ع} & \text{ك ل} \end{pmatrix}$$

فمثلاً $-٢ \begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٥ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ \times ٤ & -٢ \times ١ \\ -٢ \times ٥ & -٢ \times -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٨ & -٢ \\ -١٠ & ٢ \end{pmatrix}$

مثال :

إذا كانت $\text{م} = \begin{pmatrix} -٢ & -٥ \\ ٤ & ٧ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ **أوجد** $\text{م}^{\text{مد}} - ٢\ \text{ب}$

الحل:

$$\text{م}^{\text{مد}} - ٢\ \text{ب} = \begin{pmatrix} -٢ & ٤ \\ -٥ & ٧ \end{pmatrix} - ٢ \begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & ٤ \\ -٥ & ٧ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & -٦ \\ ٢ & -٤ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -٢ & -٢ \\ -٣ & ٣ \end{pmatrix}$$

مثال :

إذا كانت $\text{م} = \begin{pmatrix} -٢ & -٢ \\ -٣ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ **اثبت أن** $(\text{م} + \text{ب})^{\text{مد}} = \text{م}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$

الحل :

$$\text{م} + \text{ب} = \begin{pmatrix} -٢ & -٢ \\ -٣ & ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ -٤ & ٥ \end{pmatrix}$$

$$(\text{م} + \text{ب})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ -٤ & ٥ \end{pmatrix}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -٢ & -٤ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix} \quad (١)$$

$$\text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -٢ & -٢ \\ -٣ & ٣ \end{pmatrix}^{\text{مد}} + \begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -٢ & -٣ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -٢ & -٤ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix}$$ **(٢) من ١ ، ٢ نجد :** $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$

مثال :

إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} -٢ & -٤ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$

فاوجد المصفوفة س التى تحقق $\text{س} - ٢\,\text{أ} = \text{ب}$

الحل :

$$\text{س} = \text{ب} + ٢\,\text{أ} = \begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} + ٢ \begin{pmatrix} -٢ & -٤ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٤ & -٨ \\ ٢ & ١٠ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -٤ & -٥ \\ ١ & ١٢ \end{pmatrix}$$

مثال :

إذا كانت $\text{ب} = \begin{pmatrix} -٢ & -٤ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -٤ & -٥ \\ ١ & ١٢ \end{pmatrix}$ **أوجد المصفوفة أ**

الحل :

$$\text{أ} + \text{ب} = \begin{pmatrix} -٤ & ١ \\ -٥ & ١٢ \end{pmatrix} \Leftarrow \text{أ} = \begin{pmatrix} -٤ & ١ \\ -٥ & ١٢ \end{pmatrix} - \text{ب}$$

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} -٤ & ١ \\ -٥ & ١٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -٢ & -٤ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & ٥ \\ -٦ & ٧ \end{pmatrix}$$

مثال :

إذا كانت س + ٢ س^{مد} = $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ١- & ٦ \end{pmatrix}$ أوجد المصفوفة س

الحل :

بفرض س = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{pmatrix}$ ∴ $\begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{pmatrix}$ + ٢ $\begin{pmatrix} أ & حـ \\ ب & د \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ١- & ٦ \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢أ & ٢حـ \\ ٢ب & ٢ د \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣أ & ب + ٢ حـ \\ حـ + ٢ ب & ٣ د \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ١- & ٦ \end{pmatrix}$$

المصفوفتان متساويتان ∴ ٣ أ = ٣ ∴ أ = ١ ، ٣ د = ٦ ∴ د = ٢

ب + ٢ حـ = ٤ (١)

حـ + ٢ ب = - ١ (٢) بضرب المعادلة (٢) فى – ٢ و الجمع مع المعادلة (١) نجد

- ٣ ب = ٦ ∴ ب = - ٢ و بالتعويض فى (١) :

- ٢ + ٢ حـ = ٤ ∴ ٢ حـ = ٦ ∴ حـ = ٣ ∴ س = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ - \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

خواص عملية الجمع

بفرض أن م ، ب ، ج ثلاث مصفوفات من النظم م × ن وأن ▭ مصفوفة صفرية من نفس النظم فإن الخواص الآتية تتحقق:

١- خاصية الانغلاق : م + ب تكون مصفوفة من نفس النظم م × ن

٢- خاصية الإبدال : م + ب = ب + م

٣- خاصية الدمج : أ + ب + ج = (أ + ب) + ج = أ + (ب + ج)

٤- خاصية وجود المحايد الجمعي :

المصفوفة الصفرية □ هي المحايد الجمعي أي أن أ + □ = □ + أ = أ

٥- خاصية المعكوس الجمعي : أ + (- أ) = (- أ) + أ = □

لاحظ $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$ يمكن اثبات ذلك

٦- في الطرح أ - ب ≠ ب - أ فهي ليست إبدالية

أ - ب = أ + (-١) ب أي حول الطرح الي جمع بضرب المصفوفة في السالب

مثال : إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ **، ب =** $\begin{pmatrix} ٢ & ١- & ٤ \\ ١- & ١ & ٧ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س التى تحقق أن : ٣ س + ٢ ب = أ

الحل : ٣ س = أ ـ ٢ ب ∴ ٣ س = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ **ـ ٢** $\begin{pmatrix} ٢ & ١- & ٤ \\ ١- & ١ & ٧ \end{pmatrix}$

٣ س = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤- & ٢ & ٨- \\ ٢ & ٢- & ١٤- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤- & ٤ & ٧- \\ ٥ & ٢- & ١٢- \end{pmatrix}$

س = $\begin{pmatrix} \frac{٤-}{٣} & \frac{٤}{٣} & \frac{٧-}{٣} \\ \frac{٥}{٣} & \frac{٢-}{٣} & ٤- \end{pmatrix}$

مثال : إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٥ \\ ٢ & ٦ \end{pmatrix}$ **، ب =** $\begin{pmatrix} ٣ & ١- \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س التى تحقق: ٢ أ + س = ٣ ب ـ ٢ $\text{س}^{\text{مد}}$

الحل : س + ٢ $\text{س}^{\text{مد}}$ = ٣ ب ـ ٢ م = ٣ $\begin{pmatrix} ٣ & ١- \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ ـ ٢ $\begin{pmatrix} ٠ & ٥ \\ ٢ & ٦ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٩ & ٣- \\ ١٥ & ٦ \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} ٠ & ١٠- \\ ٤- & ١٢- \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٩ & ١٣- \\ ١١ & ٦- \end{pmatrix}$ (١)

بتدوير الطرفين نجد :

$\text{س}^{\text{مد}}$ + ٢ س = $\begin{pmatrix} ٦- & ١٣- \\ ١١ & ٩ \end{pmatrix}$ **بالضرب فى ـ ٢**

ـ ٢ $\text{س}^{\text{مد}}$ ـ ٤ س = $\begin{pmatrix} ١٢ & ٢٦ \\ ٢٢- & ١٨- \end{pmatrix}$ (٢) **بجمع ١، ٢ نجد :**

ـ ٣ س = $\begin{pmatrix} ٩ & ١٣- \\ ١١ & ٦- \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} ١٢ & ٢٦ \\ ٢٢- & ١٨- \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٢١ & ١٣ \\ ١١- & ٢٤- \end{pmatrix}$

س = $\begin{pmatrix} ٧- & \frac{١٣-}{٣} \\ \frac{١١-}{٣} & ٨- \end{pmatrix}$

مثال : إذا كان م = $\begin{pmatrix} ٣- & ٢ \\ ٤ & ١- \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١- & ٢ء \\ ٤ & ٣هـ \end{pmatrix}$ **حيث** م = $\text{ب}^{\text{مد}}$

فأوجد قيمة كل من ء ، هـ

الحل : ∵ م = $\text{ب}^{\text{مد}}$ ∴ $\begin{pmatrix} ٣- & ٢ \\ ٤ & ١- \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٣هـ & ٢ء \\ ٤ & ١- \end{pmatrix}$

∴ ٢ = ٢ ء ∴ ء = ١ ، ـ ٣ = ٣ هـ ∴ هـ = ـ ١

مثال : إذا كانت م = (أ س ص) لكل س ، ص ∈ { ١ ، ٢ ، ٣ } أكتب المصفوفة م

إذا علم أن : أ س ص = ص ـ س ثم أوجد م^مد

الحل:

∵ أ س ص = ص ـ س ∴ أ ١١ = ١ ـ ١ = ٠ ، أ ٢١ = ٢ ـ ١ = ١ ، أ ٣١ = ٣ ـ ١ = ٢

، أ ١٢ = ١ ـ ٢ = ـ ١ ، أ ٢٢ = ٢ ـ ٢ = ٠ ، أ ٣٢ = ٣ ـ ٢ = ١

، أ ١٣ = ١ ـ ٣ = ـ ٢ ، أ ٢٣ = ٢ ـ ٣ = ـ ١ ، أ ٣٣ = ٣ ـ ٣ = ٠

∴ م = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ـ١ & ٠ & ١ \\ ـ٢ & ـ١ & ٠ \end{pmatrix}$ ∴ م^مد = $\begin{pmatrix} ٠ & ـ١ & ـ٢ \\ ١ & ٠ & ـ١ \\ ٢ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$

تمارين على جمع و طرح المصفوفات

[١] أكمـــــــــل ما يأتى :

(١) المصفوفة التى تتكون من صفين وثلاثة أعمدة تكون على النظم ....

(٢) المصفوفة التى على النظم ٢ × ٣ عدد أعمدتها = ... وعدد صفوفها = ...

(٣) المصفوفة التى على النظم ٢ × ٣ عدد عناصرها = ...

(٤) المصفوفة التى على النظم ٢ × ٢ عدد عناصرها = ...

(٥) إذا كانت ب = (ـ١ ٣ ٤) ، ج = $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٦ \\ ٩ \end{pmatrix}$

أكمل :

(١) المصفوفة ب على النظم .... بينما المصفوفة ج على النظم ....

(٢) ب ١١ = ... ، ب ٢١ = ... ، ب ٣١ = ...

(٣) جـ ١١ = ... ، جـ ١٢ = ... ، جـ ١٣ = ...

[٦] اكتب نوع كل مصفوفة ونظمها.

(أ) $\begin{pmatrix} -١ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٧ & ٥ & ٣ & ١ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \\ ٥ \end{pmatrix}$

(د) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ (هـ) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ (و) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

[٧] أكتب المصفوفة م = ($م_{ص ع}$) على النظم ٣ × ٢ حيث $أ_{ص ع}$ = ص + ٢ ع

[٨] إذا كانت $ب^{مد}$ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٥ \\ ٢ & ٦ \end{pmatrix}$ أوجد المصفوفة ب

[٩] إذا كانت $\begin{pmatrix} س - ٢ ص & ٣ \\ ٥ & س + ٢ ص \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ع & ٨ \end{pmatrix}$ أوجد قيم س ، ص ، ع

[١٠] إذا كانت

م = $\begin{pmatrix} ٥ & ٧ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ أوجد المصفوفة س التى تحقق س + م = ٢ ب

[١١] إذا كانت م = $\begin{pmatrix} -٥ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ إثبت أن م + $م^{مد}$ = ٤ I

[١٢] إذا كانت م = $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ -٣ & ١ & ٢ \\ -١ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٢ & ٠ & ٣ \\ ٣ & ٣ & -٢ \\ ٥ & -٥ & -٤ \end{pmatrix}$

أوجد أ + ب ، أ – ب ، أ + ٢ب ، ب – ٣أ

[١٣] إذا كان (٣ س   س + ص   س – ع) = (ـ ٩   ٤   ـ ١٠) أوجد قيم س ، ص ، ع

[١٤] إذا كان أ = $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -7 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 7 & 0 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$ فأوجد ناتج العمليات الآتية إن أمكن،

مع ذكر السبب فى حالة تعذر إجراء العملية

(أ) أ + ب   (ب) أ + ب^مد   (ج) أ^مد + ب

[١٥] إذا كان س = $\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ ، ع = $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة ٢ س – ص + ع

[١٦] إذا كان: أ = $\begin{pmatrix} -6 & 8 & 4 \\ 8 & -4 & 2 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 0 & -10 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة س بحيث : س = ٢أ – ٣ب

[١٧] أوجد قيم أ، ب، جـ ، د التى تحقق المعادلة:

$$2\begin{pmatrix} 2 & أ \\ ب & 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} د & أ \\ -2 & جـ \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 & جـ \\ أ & 0 \end{pmatrix}$$

خذ من شبابك لهرمك

لا تغتر بالدنيا فهى فانية

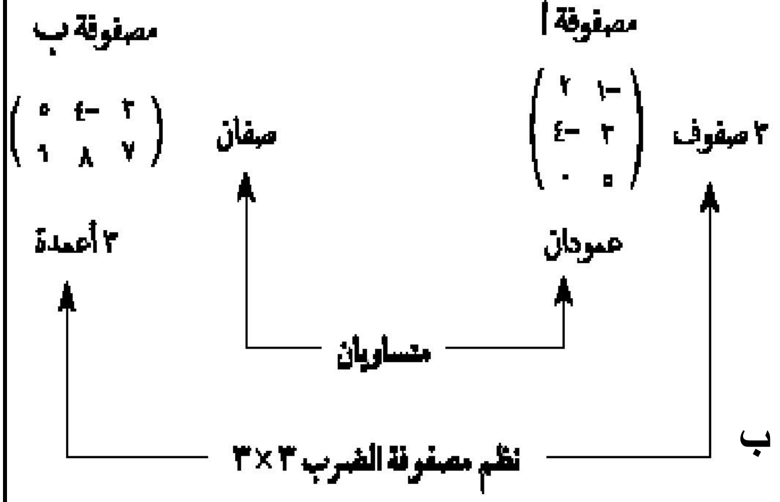
ضرب المصفوفات

تعريف : إذا كانت أ مصفوفة على النظم م × ن ، ب مصفوفة على النظم ك × ل فإن حاصل ضرب أ × ب يكون معرف إذا كان ن = ك

أى عدد أعمدة المصفوفة أ

= عدد صفوف المصفوفة ب

و يكون ح = أ ب على النظم م × ل .



مثال

إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ & ٤ \\ ٤ & ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$

أوجد قيمة أب ، $أ^{٢}$

الحل : ∵ أب معرفة لأن عدد أعمدة أ = عدد صفوف ب

$$\therefore أ ب = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ & ٤ \\ ٤ & ٢ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٢×٣+٣×٥+٢×٤ & ٥×٣+٤×٥+٣×٤ \\ ٢×٤+٣×٢+٢×٣ & ٥×٤+٤×٢+٣×٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٩ & ٤٧ \\ ٢٠ & ٣٧ \end{pmatrix}$$

$أ^{٢} = أ_{٢×٣} × أ_{٢×٣}$ غير معرفة (لان عدد الاعمدة $\neq$ عدد الصفوف)

ملحوظة هامة

لا تضرب المصفوفة فى نفسها إلا إذا كانت مربعة

مثال إذا كان $ﻡ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -١ & ٢ & -٤ \end{pmatrix}$

أوجد إن أمكن ﻡ ب ، ﻡ ب^{مد} ، ﻡ^{مد} ب

الحل : ﻡ ب غير ممكنة (لأن عدد أعمدة ﻡ $\neq$ عدد صفوف ب)

ﻡ$_{٢\times٣}$ ، ب$^{مد}_{٣\times٢}$ $\therefore$ ﻡ ب^{مد} ممكنة لان عدد أعمدة ﻡ = عدد صفوف ب^{مد}

$$ﻡ\,ب^{مد} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٣\times٣+٥\times٢+١\times١ & -٤\times٣+٢\times٢+-١\times١ \\ ٥\times٤+٤\times٢+٣\times٣ & -٤\times-٢-٢\times٠+-١\times١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٠ & -٩ \\ -٥ & ٧ \end{pmatrix}$$

ﻡ^{مد} ب ممكنة لان عدد أعمدة ﻡ^{مد} = عدد صفوف ب

$$ﻡ^{مد}\,ب = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٠ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -١ & ٢ & -٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٤ & -١ \\ ٢ & ٤ & ٦ \\ ٥ & ٢ & ١٧ \end{pmatrix}$$

خواص ضرب المصفوفات

[١] ﻡ ب $\neq$ ب ﻡ لان عملية الضرب ليست إبدالية

[٢] (ﻡ ب) ج = ﻡ (ب ج) أى أن عملية الضرب دامجة

[٣] ﻡ × I = I × ﻡ = ﻡ أى أن المحايد الصربى هو I (حيث I هى مصفوفةالوحدة)

[٤] ﻡ (ب + ج) = ﻡ ب + ﻡ ج أى أن عملية الضرب قابلة للتوزيع على الجمع

[٥] (ﻡ ب)^{مد} = ب^{مد} ﻡ^{مد} أى أن مدور حاصل ضرب مصفوفتين = حاصل ضرب مدور المصفوفة الثانية × مدور المصفوفة الأولى

مثال

إذا كان $م = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ٧ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٦ & ١ \\ -٣ & ٩ \\ ٣ & -٨ \end{pmatrix}$

تحقق من العلاقة $(م\ ب)^{\text{مد}} = ب^{\text{مد}}$

الحل :

$$م\ ب = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ٧ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٦ & ١ \\ -٣ & ٩ \\ ٣ & -٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢+٣+٨ & ٢-٩-٣٢ \\ ١٨-١٥+١٤ & ٣+٤٥-٥٦ \end{pmatrix}$$

$$م\ ب = \begin{pmatrix} ٢٣ & -٣٩ \\ ١٧ & -٨ \end{pmatrix} \quad \therefore \quad (م\ ب)^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٢٣ & ١٧ \\ -٣٩ & -٧ \end{pmatrix} \quad (١)$$

$$ب^{\text{مد}}\ م^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٦ & -٣ & ٢ \\ ١ & ٩ & -٨ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٥ \\ ٤ & ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢+٣+٨ & ٢-٩-٣٢ \\ ١٨-١٥+١٤ & ٣+٤٥-٥٦ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٢٣ & ١٧ \\ -٣٩ & -٧ \end{pmatrix} \quad (٢)$$

من ١ ، ٢ ينتج أن : $(م\ ب)^{\text{مد}} = ب^{\text{مد}}\ م^{\text{مد}}$

مثال

أوجد المصفوفة س إذا كان $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix} \times س = \begin{pmatrix} -١ \\ ٣ \\ ١٣ \end{pmatrix}$

الحل :

المصفوفة الأولى على نظم ٣ × ٢ ، المصفوفة الآخيرة على النظم ٣ × ١

نفرض أن $س = \begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ \\ ٣ \\ ١٣ \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} ٢أ - ب \\ ٣أ \\ أ + ٤ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ \\ ٣ \\ ١٣ \end{pmatrix}$$

$\therefore$ ٣ أ = ٣ $\therefore$ أ = ١ ، أ + ٤ ب = ١٣

$\therefore$ ٤ب = ١٣ – ١ = ١٢ ، ب = ٣ $\therefore$ $س = \begin{pmatrix} ١ \\ ٣ \end{pmatrix}$

مثال

إذا كان $ٲ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} -٢ & ٣ & ٦ \\ ٥ & -٧ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ -٥ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س التى تحقق العلاقة : $١٥\ س^{مد} = ٲ^{٢} + (ب\ ج)^{مد}$

الحل :

$$ٲ^{٢} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & -٧ \\ -٢١ & ٢٨ \end{pmatrix}$$

$$\text{، } ب\ ج = \begin{pmatrix} -٢ & ٣ & ٦ \\ ٥ & -٧ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ -٥ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٣٦ \\ ٥٢ & -١٣ \end{pmatrix}$$

$\therefore (ب\ ج)^{مد} = \begin{pmatrix} ١ & ٥٢ \\ ٣٦ & -١٣ \end{pmatrix}$ وبالتعويض فى الطرف الأيسر

$$\therefore ١٥\ س^{مد} = \begin{pmatrix} ٧ & -٧ \\ -٢١ & ٢٨ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٥٢ \\ ٣٦ & -١٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٤٥ \\ ١٥ & ١٥ \end{pmatrix}$$

و بقسمة الطرفين على ١٥

$$\therefore س^{مد} = \begin{pmatrix} \frac{٨}{١٥} & ٣ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} \qquad \therefore س = \begin{pmatrix} \frac{٨}{١٥} & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$$

مثال

أوجد قيم أ ، ب ، حـ إذا كان :

$$\begin{pmatrix} ١ & أ & ٢ \\ ٠ & ٢ & ٤ \\ ٥ & -١ & ب \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -١ & ٠ & ٢ \\ ٧ & ٦ & ٤ \\ -٢ & ٣ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١٩ & -٦ & ٤ \\ ٦ & حـ & ٢٨ \\ -٢٤ & ١٢ & ٣٦ \end{pmatrix}$$

الحل :

$$\begin{pmatrix} ٧\text{أ} - ٥ & ٦\text{أ} + ٦ & ٤\text{أ} + ١٢ \\ ٦ & ٢٤ & ٢٨ \\ -١٢ - ٢ب & -٦ + ٣ب & ٦ + ٥ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١٩ & -٦ & ٤ \\ ٦ & حـ & ٢٨ \\ -٢٤ & ١٢ & ٣٦ \end{pmatrix}$$

$\therefore ٧\text{أ} - ٥ = -١٩$ ، $٧\text{أ} = -١٩ + ٥ = -١٤$ $\therefore \text{أ} = -٢$

، $-١٢ - ٢ب = -٢٤$ ، $-٢ب = -٢٤ + ١٢ = -١٢$ $\therefore ب = ٦$ ، $حـ = ٢٤$

مثال إذا كان $م = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ أوجد $م^{٢}$ ، $م^{٣}$ ، $م^{٤}$ ثم استنتج $م^{٧}$

الحل : $م^{٢} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٠ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix} = ٧ \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = ٧ I$

$م^{٣} = م^{٢} \times م = ٧ \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix} = ٧ \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix} = ٧ م$

$م^{٤} = م^{٢} \times م^{٢} = ٧ I \times ٧ I = ٧^{٢} I$

و من ذلك نستنتج أن : $م^{٧} = ٧^{٣} م$

$أ^{١} = ١ أ$
$أ^{٢} = ٧ I$
$أ^{٣} = ٧ أ$
$أ^{٤} = ٧^{٢} I$
$أ^{٥} = ٧^{٢} أ$
$أ^{٦} = ٧^{٣} I$
$أ^{٧} = ٧^{٣} أ$

مثال إذا كان $م = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix}$

أوجد : $م^{٢}$ ، $م^{٣}$ ، $م^{٤}$ ، $م^{٥}$ ثم استنتج $م^{ن}$ حيث ن عدد صحيح موجب

مثال معرضان لبيع السيارات فى القاهرة و الاسكندرية ، يعرض كل منهما ٣ أنواع سيارات أ ، ب ، حـ ، معرض القاهرة باع فى شهر مارس ٧ سيارات من النوع أ ، ٥ من النوع ب ، ٢ من النوع حـ ، و باع معرض الاسكندرية ٤ سيارات من النوع أ ، ٣ من النوع ب و لم يبع من النوع حـ اكتب ذلك فى صورة مصفوفة ٢×٣ ، وإذا كانت المبيعات فى شهر يوليو ٣ أمثال المبيعات فى شهر مارس ، اكتب مجموع مبيعات المعرض فى الشهرين فى شكل مصفوفة ، وإذا كان ربح المعرض من بيع السيارة أ = ٣٠٠ جنية ، والسيارة ب يساوى ٥٠٠ جنية . أوجد مجموع أرباح كل معرض باستخدام المصفوفات

الحل :

مصفوفة مبيعات شهر مارس هى س = $\begin{pmatrix} ٧ & ٥ & ٢ \\ ٤ & ٣ & ٠ \end{pmatrix}$

مصفوفة مبيعات شهر يوليو هى ص = ٣ س = $\begin{pmatrix} ٢١ & ١٥ & ٦ \\ ١٢ & ٩ & ٠ \end{pmatrix}$

مصفوفة مجموع مبيعات هى ع = س + ص = $\begin{pmatrix} ٨ & ٢٠ & ٢٨ \\ ٠ & ١٢ & ١٦ \end{pmatrix}$

مصفوفة الأرباح هى ل = $\begin{pmatrix} ٣٠٠ \\ ٥٠٠ \\ ٨٠٠ \end{pmatrix}$

مجموع الأرباح = ع × ل = $\begin{pmatrix} ٨ & ٢٠ & ٢٨ \\ ٠ & ١٢ & ١٦ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣٠٠ \\ ٥٠٠ \\ ٨٠٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٤٨٠٠ \\ ١٠٨٠٠ \end{pmatrix}$

أى أن مجموع أرباح معرض القاهرة = ٢٤٨٠٠ جنية
مجموع أرباح معرض الاسكندرية = ١٠٨٠٠ جنية

تدريبات على ضرب المصفوفات

[١] أكمــــــل :

١- إذا كان ﻡ مصفوفة على النظم م × ن ، ب مصفوفة على النظم ك × ل فإن حاصل ضرب ﻡ ب يكون معرفا إذا كان ٠٠٠٠٠ و يكون الناتج على النظم ٠٠٠٠

٢- إذا كان ﻡ مصفوفة على النظم ٢×٣ ، ﻡ ب مصفوفة على النظم ٢ × ١ فإن ب مصفوفة على النظم ٠٠٠٠

٣- إذا كان ﻡ مصفوفة مربعة ، I هى مصفوفة الوحدة على نفس النظم للمصفوفة ﻡ

فإن : ﻡ × I = ٠٠٠ ، $I^{مد}$ = ٠٠٠ ، $(ﻡ^{مد})^{مد}$ = ٠٠٠
، $I^{٢}$ = ٠٠٠ ، $I^{٣}$ = ٠٠٠ ، $I^{ن}$ = ٠٠٠ حيث ن عدد صحيح موجب

٤- إذا كان ﻡ = $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٢- \end{pmatrix}$ **، ب =** $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ **فإن $(ب ﻡ)^{مد}$ = ٠٠٠٠**

٥- إذا كان $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & \text{س} \\ ٤ & ٥ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \\ \text{ص} & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٤ & -١ \\ ١٩ & -٢ \end{pmatrix}$ فإن س ـ ص = . . .

٦- إذا كان أ ، ب مصفوفتين حيث أ ب = $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ فأن $\text{ب}^{\text{مد}}\ \text{أ}^{\text{مد}}$ = . . .

---

[٢] إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٣ & ٠ \\ ٧ & ٦ \end{pmatrix}$

أوجد كلا من أ ب ، ب أ ، $\text{أ}^{٢}$ ، $\text{ب}^{٢}$ ، $\text{أ}^{\text{مد}}$ ب ، أ $\text{ب}^{\text{مد}}$ ، $(\text{أ ب})^{٢}$ ، $\text{أ}^{\text{مد}}\ \text{ب}^{\text{مد}}$

---

[٣] أذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$ أثبت أن : أ ب = ١٣ I

---

[٤] إذا كان م = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ -١ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ن = $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ & ١ \\ -١ & -١ & ٠ \\ ١ & ٢ & ٢ \end{pmatrix}$ أثبت أن : $\text{م}^{٢}$ ـ م ن = م

---

[٥] إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ أثبت أن : $\text{أ}^{٢}$ ـ أ ـ ٥ I = ▭

---

[٦] إذا كان أ = $\begin{pmatrix} \text{ك} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{ك} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{ك} \end{pmatrix}$ أوجد $\text{أ}^{٢}$ ، $\text{أ}^{٣}$ و استنتج قيمة $\text{أ}^{\text{ن}}$ [$\text{ك}^{\text{ن}}$ I]

---

[٧] إذا كان $\begin{pmatrix} ٢ & \text{س} \\ ٤ & \text{ص} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ ٥ & ١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١١ & \text{ع} \\ ٢ & \text{ل} \end{pmatrix} = ٥ \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

أوجد قيمة س ، ص ، ع ، ل [٣ ، ١ ، ٠ ، ـ ٥]

اعداد الاستاذ / خالد المنفلوطى ت/ ٠١٠٠٦٥٢٢١٣٨ - ٠١١٥٤٨٠٢٨١١

[٨] إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ١- \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١- & ١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢ & ١- \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س حيث ٣ س^{مد} = أ^{٢} − (أ ب − ج^{مد}) [س = $\begin{pmatrix} ٥- & ١ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$]

---

[٩] اشترى محمد بدلتين، ٤ قمصان، ٣ بنطلونات واشترى أحمد بدلة واحدة ،٤ بنطلونات . اكتب المشتريات فى مصفوفة من النظم ٢×٣ فإذا كان ثمن البدلة ١٥٠ جنية ، ثمن القميص ٢٥ جنية ، ثمن البنطلون ٣٠ جنية أوجد المصفوفة التى تبين ما دفعه كلا منهما ثمناً لمشترياته .

---

[١٠] أوجد المصفوفة س إذا كان $\begin{pmatrix} ١- & ١ \\ ٠ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}$ × س = $\begin{pmatrix} ١- \\ ٤ \\ ٢١ \end{pmatrix}$ [س = $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$]

---

[١١] إذا كان $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٧ & س \\ ص & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٧ \\ ١٨ & ١١ \end{pmatrix}$ أوجد قيمة كل من س، ص:

---

[١٢] الربط بالسياحة: يستهلك أحد الفنادق في مدينة الغردقة السياحية الكميات الآتية من اللحوم والخضراوات والفاكهة بالكيلو جرام، فى وجبتى الغداء والعشاء، وذلك تبعًا للجدول التالى:

	لحوم	خضراوات	فاكهة
وجبة الغداء	٢٠٠	١٠٠	١٥٠
وجبة العشاء	١٢٠	٨٠	١٠٠

فإذا كان متوسط سعر الكيلو جرام من اللحوم ٦٥ جنيهًا ومتوسط سعر الكيلو جرام من الخضراوات أربعة جنيهات ومتوسط سعر الكيلو جرام من الفاكهة هو خمسة جنيهات ، فأوجد باستخدام ضرب المصفوفات التكاليف الكلية للوجبتين.

المحددات

إذا كانت م مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ حيث م = $\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ء} \end{pmatrix}$ فإن محدد المصفوفة م

يرمز له بالرمز | م | و يسمى بمحدد الرتبة الثانية وهو العدد المعرف كالاتى :

القطر

$$|\text{م}| = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ء} \end{vmatrix} = \text{أ ء} - \text{جـ ب}$$

القطر الرئيسي

مثلا $\begin{vmatrix} ٨ & ٥ \\ ٧ & ٣ \end{vmatrix} = ٨ \times ٣ - ٧ \times ٥ = -١١$

و نلاحظ أن:
قيمة محدد الرتبة الثانية يساوى حاصل ضرب عنصرى القطر الرئيسي مطروحا منه حاصل ضرب عنصرى القطر الآخر .

---

(١) أوجد قيمة كل محدد ممايلى:

(أ) $\begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} ٠ & ٥ \\ ٧ & ٣ \end{vmatrix}$ (جـ) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix}$ (د) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٧ \end{vmatrix}$

الحل :

(أ) $\begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix} = ٤ \times ٧ - ٣ \times ٥ = ٢٨ - ١٥ = ١٣$

(ب) $\begin{vmatrix} ٠ & ٥ \\ ٧ & ٣ \end{vmatrix} = ٠ \times ٥ - ٧ \times ٥ = ٠ - ٣٥ = -٣٥$

(جـ) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١ \times ١ - ٠ \times ٠ = ١ - ٠ = ١$

(د) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٧ \end{vmatrix} = ١ \times ٧ - ٢ \times ٠ = ٧ - ٠ = ٧$

محدد الرتبة الثالثة

يسمى محدد المصفوفة على النظم ٣ × ٣ محدد الرتبة الثالثة، ولإيجاد قيمة محدد الرتبة الثالثة $\begin{vmatrix} أ & ب & حـ \\ د & هـ & و \\ ز & ح & ط \end{vmatrix}$ فإن:

$$\begin{vmatrix} أ & ب & حـ \\ د & هـ & و \\ ز & ح & ط \end{vmatrix} = أ \begin{vmatrix} هـ & و \\ ح & ط \end{vmatrix} - ب \begin{vmatrix} د & و \\ ز & ط \end{vmatrix} + حـ \begin{vmatrix} د & هـ \\ ز & ح \end{vmatrix}$$

= أ(هـ ط − ح و) − ب (د ط − ز و) + حـ (د ح − ز هـ)

لاحظ إشارات كل عنصر من عناصر المحدد ٣ × ٣ $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

اشارة المحدد الأصغر للعنصر $ص_{وهـ}$ تتعين بالقاعدة : إشارة | $ص_{وهـ}$| هى نفس إشارة $(-١)^{و+هـ}$

تنبية للحل :
يمكنك فك المحدد باستخدام أى صف أو عمود فيه أكبر عدد من الأصفار لتسهيل حصولك على قيمة المحدد بعد أخذ الاشارة المناشبة .

مثال: أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٣ & ١- & ٢ \\ ٥ & ٢- & ١ \\ ٤ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$

الحل:

المحدد = ٣ $\begin{vmatrix} ٢- & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$ − (١-) $\begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ + ٢ $\begin{vmatrix} ٥ & ٢- \\ ٤ & ١ \end{vmatrix}$

= ٣ (٤- ١-) + ١ (١٠ – ٤) +٢ (٥ + ٨)

= ٣ × ٥- +١ × ٦ +٢ × ١٣ = ١٥- + ٦ + ٢٦ = ١٧

المحدد الأصغر المناظر لأى عنصر في مصفوفة

إذا كانت المصفوفة ص هى مصفوفة على النظم ٣ × ٣ حيث ص = $\begin{pmatrix} ص_{١١} & ص_{٢١} & ص_{٣١} \\ ص_{١٢} & ص_{٢٢} & ص_{٣٢} \\ ص_{١٣} & ص_{٢٣} & ص_{٣٣} \end{pmatrix}$

فإن المحدد الأصغر المناظر للعنصر a_{11} يرمز له بالرمز $|a_{11}|$

و هو $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$ و لاحظ إننا حصلنا على هذا المحدد بحذف الصف و العمود المتقاطعين

على العنصر a_{11}

مثال: أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

الحل:

الفك عن طريق الصف الثالث

المحدد $= 5 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$

$= 5(-6+1) - 3(2+12) = 5 \times -5 - 3 \times 14$

$= -25 - 42 = -67$

مثال : أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر العمود الثانى

الحل:

نلاحظ أن إشارات المحدد الأصغر المناظر لعناصر العمود الثاني هي $-$ ، $+$ ، $-$ على الترتيب فيكون:

المحدد $= -2 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$

$= -2(-4-35) + 0 + 2(5-12)$

$= 78 - 14 = 64$

مثال: أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} \text{قا س} & \text{ظا}^{٢}\text{ س} \\ ١ & \text{قا س} \end{vmatrix}$

الحل:

المحدد = قا س × قا س ــ ١ × ظا^{٢} س = قا^{٢} س ــ ظا^{٢} س = ١

تذكر أن :

حا^{٢} س + حتا^{٢} س = ١

١ + ظا^{٢} س = قا^{٢} س

١ + ظتا^{٢} س = قتا^{٢} س

محدد المصفوفة المثلثية

المصفوفة المثلثية هي مصفوفة جميع عناصرها التي تحت القطر الرئيسي (أو فوقه) أصفار مثل:

$$\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ٦ \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} -١ & ٠ & ٠ \\ ٢ & -٤ & ٠ \\ ٥ & -١ & ٢ \end{pmatrix}$$

ونلاحظ أن: قيمة محدد المصفوفة المثلثية يساوى حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسي.

$$\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} = أ_{١١} \times أ_{٢٢} \times أ_{٣٣}$$

مثال :ما قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & -٣ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ٦ \end{vmatrix}$

الحل:

نلاحظ أن المحدد هو محدد مصفوفة مثلثية فيكون:

المحدد = ١ × −٣ × ٦ = −١٨

أنت معنا دائما فى القمة
حافظ على تفوقك

إيجاد مساحة سطح المثلث باستخدام المحددات

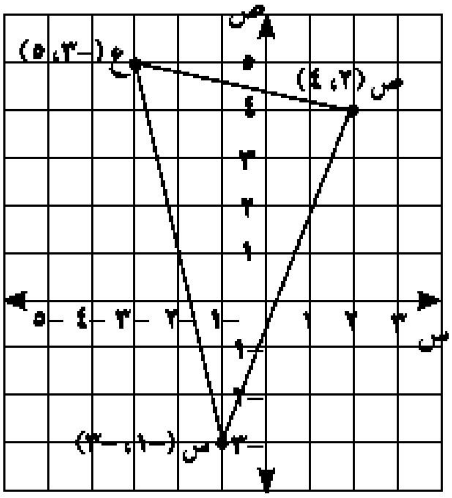
يمكنك استخدام المحددات لايجاد مساحة سطح المثلث بمعلومية إحداثيات رؤوس كالاتى :

مساحة سطح امثلث الذى رؤوسه س (أ ، ب) ، ص (جـ ، ى) ، ع (هـ ، و) هى | مـ |

$$مـ = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} أ & ب & 1 \\ جـ & ى & 1 \\ هـ & و & 1 \end{vmatrix}$$

حيث | مـ | تعنى قيمة مـ الموجبة

مثال : أوجد مستخدمًا المحددات مساحة سطح المثلث الذى إحداثيات رؤوسه (-١، -٣) ، (٢، ٤)، (-٣، ٥)



الحل:

$$مـ = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

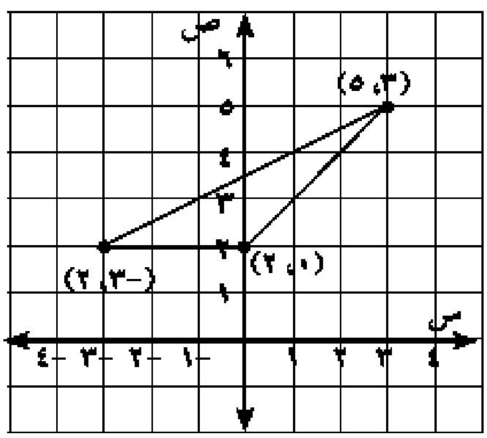
$$= \frac{1}{2}\left[-1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-1\,(4-5) + 3\,(2+3) + 1\,(10+12)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,(1 + 15 + 22) = 19 \text{ وحدة مربعة}$$

مثال : أوجد مستخدما المحددات مساحة المثلث ٱبجـ الذى فيه

ٱ (٠ ، ٢) ، ب (٣ ، ٥) ، جـ (- ٣ ، ٢)



الحل:

$$مـ = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[0\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 - 0 - 3\,(2-5)\right] = 4\frac{1}{2} \text{ متر مربع}$$

خواص المحددات

(١) قيمة المحدد لا تتغير إذا :

- جعلنا الصفوف أعمدة و الأعمدة صفوف
- تم فكه عن طريق أي صف أو أي عمود
- أضفنا لعناصر أي صف أو عمود عناصر صف أخر أوعمود مضروب في عدد مثل ك

(٢) قيمة المحدد = صفر: * إذا كان عناصر أي صف أو أي عمود كلها أصفار
* إذا تساوي عناصر صفين (أو عمودين)

(٣) إذا بدلنا صفين أوعمودين فإن قيمة المحدد الناتج = ـ١ ×(قيمة المحدد الأصلي)

(٤) إذا وجد في أي صف أو عمود عامل مشترك نأخذه خارج المحدد

(٥) يمكن كتابة عناصر أي صف (أو عمود) كمجموع صفين (أو عمودين) ويمكن كتابة المحدد كمجموع محددتين

(٦) قيمة المحدد على الصورة المثلثية تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى

حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر

١) **حل أنظمة المعادلات الخطية فى مجهولين :**

إذا كان لدينا نظام من المعادلات الخطية فى مجهولين كالاتى :

أ س + ب ص = م ، جـ س + ء ص = ن

١ـ نوجد محدد المعاملات $= \Delta = \begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{vmatrix}$ (Δ تقرأ دلتا)

يلاحظ أن : إذا كانت قيمة $\Delta \neq$ صفر فإن للنظام حلاً وحيدًا
، إذا كانت قيمة $\Delta =$ صفر فإن للنظام عدد لانهائى من الحلول أو ليس له حل

٢- نوجد محدد المجهول س = $\Delta_{س}$ = $\begin{vmatrix} م & ب \\ ن & د \end{vmatrix}$ نبدل العمود الاول (معاملات س) بالثوابت

٣- نوجد محدد المجهول ص = $\Delta_{ص}$ = $\begin{vmatrix} أ & م \\ جـ & ن \end{vmatrix}$ نبدل العمود الثانى(معاملات ص) بالثوابت

٤- بفرض أن : $\Delta \neq$ صفر فإن حل النظام هو

$$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{م د - ن ب}{أ د - جـ ب} \quad ، \quad ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{أ ن - جـ م}{أ د - جـ ب}$$

٥- م . ح = { (س ، ص) }

مثال : حل نظام المعادلتين الآتيتين بطريقة كرامر

س + ٢ ص = ٠ ، ٢ س – ٣ ص = ١

الحل :

$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & -٣ \end{vmatrix} = ١ \times -٣ - ٢ \times ٢ = -٣ - ٤ = -٧ \neq ٠$ (له حل وحيد)

$س = \Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & -٣ \end{vmatrix} = ٠ \times -٣ - ١ \times ٢ = ٠ - ٢ = -٢$

$ص = \Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ١ \times ١ - ٢ \times ٠ = ١ - ٠ = ١$

$$\therefore س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{-٢}{-٧} = \frac{٢}{٧} \quad ، \quad ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{١}{-٧} = \frac{-١}{٧}$$

$$\therefore م . ح = \{ (\frac{٢}{٧} ، \frac{-١}{٧}) \}$$

التحقيق : المعادلة الاولى $\frac{٢}{٧} + ٢ \times \frac{-١}{٧} = ٠$ (✓)

المعادلة الثانية $٢ \times \frac{٢}{٧} - ٣ \times \frac{-١}{٧} = ١$ (✓)

* حل أنظمة المعادلات الخطية فى ثلاث مجاهيل :

إذ كان لدينا نظام من المعادلات الخطية فى ثلاث مجاهيل كالاتى :

$\text{أ}_1\text{س} + \text{ب}_1\text{ص} + \text{ج}_1\text{ع} = \text{م}$ ، $\text{أ}_2\text{س} + \text{ب}_2\text{ص} + \text{ج}_2\text{ع} = \text{ن}$ ، $\text{أ}_3\text{س} + \text{ب}_3\text{ص} + \text{ج}_3\text{ع} = \text{ل}$

نوجد : $\text{س} = \dfrac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$ ، $\text{ص} = \dfrac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$ ، $\text{ع} = \dfrac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta}$

∴ م . ح = { (س ، ص ، ع) }

مثال : حل نظام المعادلات الخطية التالية باستخدام طريقة كرامر :

س + ص – ع = ٢ ، س + ٢ص + ع = ٧ ، ٣ س – ص + ع = ١٠

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1(2+1) - 1\times(1-3) - 1\times(-1-6) = 3 + 2 + 7 = 12$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 10 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(2+1) - 1\times(7-10) - 1\times(-7-20) = 6 + 3 + 27 = 36$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 1\times(7-10) - 2\times(1-3) - 1(10-21) = -3 + 4 + 11 = 12$$

$$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 1\times(20+7) - 1(10-21) + 2(-1-6) = 27 + 11 - 14 = 24$$

∴ $\text{س} = \dfrac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \dfrac{36}{12} = 3$ ، $\text{ص} = \dfrac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \dfrac{12}{12} = 1$ ، $\text{ع} = \dfrac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta} = \dfrac{24}{12} = 2$

∴ م . ح = { (٣ ، ١ ، ٢) }

تمارين على المحددات

(١) أوجد قيمة كل من المحددات الآتية:

(أ) $\begin{vmatrix} ٥ & ٧ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{vmatrix}$ (جـ) $\begin{vmatrix} -٣ & ٦ \\ -٧ & ١٩ \end{vmatrix}$

(د) $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ}+\text{س} \\ \text{ب} & \text{ب}+\text{ص} \end{vmatrix}$ (هـ) $\begin{vmatrix} \text{س}^{٢}+١ & \text{س}+١ \\ \text{ص}^{٢}+١ & \text{ص}+١ \end{vmatrix}$ (و) $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٤ & -١ \\ ٨ & ٧ & ٠ \end{vmatrix}$

(ز) $\begin{vmatrix} ٣ & ٤٢ & ٠ \\ ٧ & ١٨ & ٢ \\ ٣ & ٢٨ & ٠ \end{vmatrix}$ (ح) $\begin{vmatrix} -٣ & -٤ & ٣ \\ -٣١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ & ٥ \end{vmatrix}$ (ط) $\begin{vmatrix} ٢٣ & ٣ & ١٣ \\ ٥ & ٧ & ٣٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

(٢) حل كل نظام من المعادلات الخطية التالية بطريقة كرامر:

(أ) ٢ س − ٣ ص = ٥ ، ٣ س + ٤ ص = −١

(ب) س + ص = ٥ ، ٢ س + ٥ ص = ١٦

(جـ) س + ٣ ص = ٥ ، ٢ س + ٥ ص = ٨

(د) ٣ س + ٢ ص = ٥ ، ٢ س + ص = ٣

(هـ) ٣ س = ١ − ٤ ص ، ٥ س + ١٢ = ٧ ص

(و) ٢ س = ٣ + ٧ ص ، ص = ٥ − س

(ز) ٢س + ص − ٢ع = ١٠ ، ٣س + ٢ص + ٢ع = ١ ، ٥س + ٤ص + ٣ع = ٤

(ح) س + ٢ص − ٣ع = ٦ ، ٢ س − ص − ٤ ع = ٢ ، ٤س + ٣ص − ٢ ع = ١٤

(ط) ص + ٢س + ٣ع = ٦ ، ٢س − ص + ع = −٣ ، س − ٢ص + ٢ع = −١١

(٣) أوجد مساحة سطح المثلث أ ب جـ الذى فيه أ(٢، ٤)، ب (−٢، ٤) جـ(٠، −٢).

(٤) أوجد مساحة سطح المثلث س ص ع الذى فيه س (٣، ٣)، ص (−٤، ٢)، ع (١، −٤).

(٥) باستخدام المحددات أثبت أن النقط (٣، ٥)، (٤، −١)، (٥، ٧) تقع على استقامة واحدة.

المعكوس الضربى للمصفوفة

* **المعكوس الضربى للمصفوفة ٢ × ٢ :**

إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{pmatrix}$ **فإن المعكوس الضربى للمصفوفة أ يكون معرفا (موجودا)**

عندما يكون محدد $أ = \Delta \neq ٠$ **و نرمز له بالرمز** $أ^{-١}$

و بفرض أن المصفوفة $أ^{-١}$ **هى المعكوس الضربى للمصفوفة أ و أن** $|أ| = \Delta \neq ٠$ **فإن:**

$$أ^{-١} = \frac{١}{\Delta} \begin{pmatrix} ء & -ب \\ -جـ & أ \end{pmatrix}$$ **[بدل عنصرى الرئيسى و غير إشارة الاخر]**

مثلا :إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ **فإن** $|أ| = \Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} = -٢ - ١٥ = -١٧ \neq ٠$

و يكون $أ^{-١} = \frac{١}{\Delta} \begin{pmatrix} -١ & -٥ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix} = \frac{١}{-١٧} \begin{pmatrix} -١ & -٥ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix}$

تذكر أن : إذا كان $\Delta \neq ٠$ **فإن للمصفوفة أ معكوسا ضربيا** $أ^{-١}$ **يتعين كالاتى:**

١- تبادل وضعى العنصرين الواقعين على القطر الرئيسي للمصفوفة أ

٢- نغير كلا من إشارتى العنصرين الواقعين على القطر الآخر للمصفوفة أ

٣- نضرب المصفوفة الناتجة بعد إجراء (١) ، (٢) بالعدد $\frac{١}{\Delta}$ فنحصل على $أ^{-١}$

مثال : إذا كان $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ **فأثبت أن للمصفوفة أ معكوسا ضربيا ثم أوجده**

الحل :

$$|أ| = \Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} = ٢ \times ٤ - ٣ \times ٠ = ٨ - ٠ = ٨ \neq ٠$$

$\therefore$ **للمصفوفة أ معكوسا ضربيا هو :** $\begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ \frac{-٣}{٨} & \frac{١}{٤} \end{pmatrix}$

$$أ^{-1} = \frac{١}{\Delta}\begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix} = \frac{١}{٨}\begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix} =$$

مثال : أوجد قيم س التى تجعل للمصفوفة $\begin{pmatrix} س & ٩ \\ ٤ & س \end{pmatrix}$ **معكوسا ضربيا**

الحل : المصفوفة ليس لها معكوسا ضربيا عندما نحدد المصفوفة يساوى صفرا

أى عندما $\begin{vmatrix} س & ٩ \\ ٤ & س \end{vmatrix} =$ **صفر** $\therefore$ $س^{٢} - ٣٦ = ٠$ $\therefore$ $س^{٢} = ٣٦$ $\therefore$ $س = \pm ٦$

$\therefore$ **توجد قيمتان لـ أ هما ٦ ، - ٦ تجعلان المصفوفة المعطاة ليس لها معكوس ضربى**

$\therefore$ **عندما أ ∈ ح - { ٦ ، - ٦ } يكون للمصفوفة المعطاة معكوسا ضربيا**

مثال : إذا كانت $\underset{\sim}{س} = \begin{pmatrix} ١ & أ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$ **فأثبت أن** $\underset{\sim}{س}^{-١} = \underset{\sim}{س}$

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & أ \\ ٠ & -١ \end{vmatrix} = -١ \neq ٠$$

$$\therefore \underset{\sim}{س}^{-١} = \frac{١}{-١}\begin{pmatrix} -١ & -أ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & أ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix} = \underset{\sim}{س}$$

مثال :إذا كانت $ب = \begin{pmatrix} س & -س ص \\ ٠ & ص \end{pmatrix}$ **فأثبت أن** $ب^{-١} = \begin{pmatrix} \frac{١}{س} & ١ \\ ٠ & \frac{١}{ص} \end{pmatrix}$

علما بأن $س ص \neq ٠$

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} س & -س ص \\ ٠ & ص \end{vmatrix} = س ص \neq ٠$$

$$\therefore \text{ب}^{-1} = \frac{1}{\text{س ص}}\begin{pmatrix} \text{ص} & \text{س ص} \\ 0 & \text{س} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\text{س}} & 1 \\ 0 & \frac{1}{\text{ص}} \end{pmatrix}$$

حل معادلتين آنيتين باستخدام معكوس المصفوفة

إذا كان لدينا نظام من معادلتين خطيتين كالآتى :

$\text{ا}_1\text{س} + \text{ب}_1\text{ص} = \text{ك}_1$ ، $\text{ا}_2\text{س} + \text{ب}_2\text{ص} = \text{ك}_2$ فإنه يمكن كتابتهما كالتالى :

$$\begin{pmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ك}_1 \\ \text{ك}_2 \end{pmatrix}$$

بفرض أن : $\text{ا} = \begin{pmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{pmatrix}$ **مصفوفة المعاملات ، س~** $= \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ **مصفوفة المجاهيل ، ج** $= \begin{pmatrix} \text{ك}_1 \\ \text{ك}_2 \end{pmatrix}$

مصفوفة الثوابت و عليه يمكن كتابتها على صورة معادلة مصفوفية كالتالى :

$$\boxed{\text{ا س~} = \text{ج} \quad \text{و منها} \quad \text{س~} = \text{ا}^{-1}\text{ج} \quad \text{حيث } \text{ا}^{-1} \text{ معكوس ضربى ا}}$$

مثال : حل نظام المعادلتين الآنيتين التاليتين باستخدام المصفوفات :

٣ س + ٢ ص = ٥ ، ٢ س + ص = ٣

الحل :

تكتب المعادلة المصفوفية ا س~ = ج حيث

$$\text{ا} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} ، \text{س~} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} ، \text{ج} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{محدد ا} = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$$

فيكون للمصفوفة ا معكوسًا ضربيًا ويكون الحل هو س~ = ا$^{-1}$ ج وحيث أن:

$$\text{ا}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{س~} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

أى أن س = ١ ، ص = ١

مجموعة الحل {(١ ، ١)}

التحقق: $3(1) + 2(1) \stackrel{?}{=} 5$

$5 = 5 \quad (\checkmark)$

$2(1) + 1 \stackrel{?}{=} 3$

$3 = 3 \quad (\checkmark)$

مثال : حل نظام المعادلتين الآنيتين التاليتين باستخدام المصفوفات

س + ٣ ص ـ ٥ = ٠ ، ٢ س = ٨ ـ ٥ ص

الحل:

نضع المعادلتين فى الصورة العامة : أ س + ب ص = ل أولا قبل استخدام المصفوفات

فتصبح : س + ٣ ص = ٥ ، ٢ س + ٥ ص = ٨

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix} \text{ ، } \tilde{\text{س}} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} \text{ ، ج} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٨ \end{pmatrix}$$

محدد أ $= \Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = ٥ - ٦ = -١ \neq ٠$ **فيكون لللمصفوفة أ معكوسا ضربيا**

و يكون الحل هو $\tilde{\text{س}} = \text{أ}^{-١} \text{ ج}$ **حيث** $\text{أ}^{-١} = \frac{١}{-١} \begin{pmatrix} -٣ & ٥ \\ ١ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$

$\therefore \tilde{\text{س}} = \text{أ}^{-١} \text{ ج} \quad \therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ \\ ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ **∴ س = ـ ١ ، ص = ٢**

مثال : اشترت أمل ٨ كجم من الدقيق ، ٢ كجم من الزبد بمبلغ ١٤٠ جنيها ، واشترت صديقتها ريم ٤ كجم من الدقيق ، ٣ كجم من الزبد بمبلغ ١٧٠ جنيها .

استخدم المصفوفات فى إيجاد سعر الكيلو جرام الواحد من كلا النوعين .

الحل :

نفرض ثمن الدقيق = س جنيها ، ثمن الزبد = ص جنيها فيكون :

٨ س + ٢ ص = ١٤٠ ، ٤ س + ٣ ص = ١٧٠

نكون المعادلة المصفوفية على الصورة : أ س~ = ج

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ٨ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix} \text{ ، } \tilde{\text{س}} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} \text{ ، ج} = \begin{pmatrix} ١٤٠ \\ ١٧٠ \end{pmatrix}$$

محدد أ $= \Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٨ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} = ٢٤ - ٨ = ١٦ \neq ٠$

∴ المصفوفة أ لها معكوس ضربى $\text{أ}^{-١}$

$$\therefore \text{أ}^{-١} = \frac{١}{١٦} \begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ ٨ & -٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-١}{٨} & \frac{٣}{١٦} \\ \frac{١}{٢} & \frac{-١}{٤} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{س}\sim = \text{أ}^{-1}\,\text{ج} \qquad \therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 140 \\ 170 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 50 \end{pmatrix}$$

∴ س = ٥ ، ص = ٥٠

∴ ثمن الدقيق = ٥ جنيهات ، ثمن الزبد = ٥٠ جنيها

انت مع عاشق الرياضيات دائما فى القمة
معلم خبير
مدرسة أحمد لطفى السيد الثانوية العسكرية

تمارين على المعكوس الضربى لمصفوفة

① بين المصفوفات التى لها معكوسات ضربية، والمصفوفات التى ليس لها معكوسات ضربية فيما يلى، وأوجد المعكوس إن وجد.

(أ) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(هـ) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (و) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ز) $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ (ح) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

② ما قيم أ التى تجعل لكل من المصفوفات التالية معكوسًا ضربيًّا

(أ) $\begin{pmatrix} \text{أ} & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} \text{أ} & 9 \\ 4 & \text{أ} \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} \text{أ} & 4 \\ 2 & \text{أ}-2 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} \text{أ}-1 & -2 \\ 1 & \text{أ}-2 \end{pmatrix}$

③ إذا كانت $\text{س}\sim = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ فأثبت أن $\text{س}\sim^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

④ أوجد المصفوفة أ إذا كان: أ $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

⑤ إذا كانت س $= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، ص $= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ أثبت أن = (س ص)$^{-1}$ = ص$^{-1}$ س$^{-1}$

⑥ حل كل نظام من المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات، ثم تحقق من صحة الناتج:

(أ) ٤ س + ٣ ص = ٢٦ ، ٥ س − ص = ٤ (ب) ٢ س − ٧ ص = ٣ ، س − ٣ ص = ٢

(جـ) ٢ س = ٣ + ٧ ص، ص = ٥ − س (د) ٢ ص = ٥ − ٣س ، ٢ س = ٣ − ص

⑦ الخط المستقيم الذى معادلته ص + أ س = حـ يمر بالنقطتين (١، ٥)، (٣، ١)، استخدم المصفوفات لإيجاد قيمة الثابتين أ، حـ .

⑧ يشترى سائق دراجة بخارية ٢٤ لترًا من البنزين و ٥ لترات من الزيت بمبلغ ٥٦ جنيهًا لتموين دراجته، بينما يشترى سائق دراجة بخارية أخرى ١٨ لترًا من البنزين، ١٠ لترات من الزيت بمبلغ ٦٧ جنيهًا لتموين دراجته،
استخدم المصفوفات فى إيجاد ثمن كل من لتر البنزين ولتر الزيت، إذا علمت أنهما يستخدمان نفس النوعية من البنزين والزيت.

⑨ يمر المنحنى ص = أس^{2} + ب س بالنقطتين (٢، ٠) ، (٤، ٨)، استخدم المصفوفات لإيجاد الثابتين أ، ب .

⑩ نصف الفرق بين عددين هو ٢ ومجموع العدد الأكبر وضعف العدد الأصغر هو ١٣. باستخدام المصفوفات أوجد العددين.

⑪ إذا كان ب $= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$، أ ب = I فأوجد المصفوفة أ.

⑫ إذا كان أ $= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$، أ ب $= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة ب

⑬ تفكير ناقد: باستخدام المصفوفات ، أوجد عددين مجموعهما ١٠، والفرق بينهما ٤

الفصل الثانى : البرمجة الخطية

أولا : حل متباينات الدرجة الاولى فى متغير

خواص علاقة > ، < فى ح : بفرض أن ٢ ، ب ، جـ ∋ ح (اعداد حقيقية) فإن :

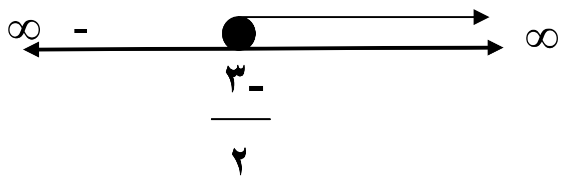
إذا كان ٢ ≤ ب فإن	إذا كان ٢ ≥ ب فإن
٢ + جـ ≤ ب + جـ ، جـ موجبة أوسالبة	٢ + جـ ≥ ب + جـ ، جـ موجبة أوسالبة
٢ × جـ ≤ ب × جـ ، جـ > ٠ موجب	٢ × جـ ≥ ب × جـ ، جـ > ٠ موجب
٢ × جـ ≥ ب × جـ ، جـ < ٠ سالب	٢ × جـ ≤ ب × جـ ، جـ < ٠ سالب

ملاحظة : أى أن عند (ضرب فى أو القسمة على) عدد سالب يتغير إتجاه علامة التباين .

مثال : أوجد مجموعة الحل للمتباينة ٢ س + ٣ ≤ ١ حيث س ∋ ح بيانيا

الحل : ٢ س ≤ ١ – ٣ ، ٢ س ≤ -٣ ، س ≤ $\frac{-٣}{٢}$

∴ م . ح = { س : س ∋ ح ، س ≤ $\frac{-٣}{٢}$ } الصفة المميزة

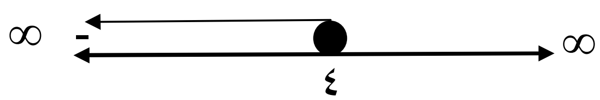


=] $\frac{-٣}{٢}$ ، ∞ [على صورة فترة

مثال :مثل بيانيا مجموعة حل المتباينة ٣ س + ١ ≥ ٢ س + ٥ حيث س ∋ ح

الحل : ٣ س ـ ٢ س ≥ ٥ ـ ١ ، س ≥ ٤

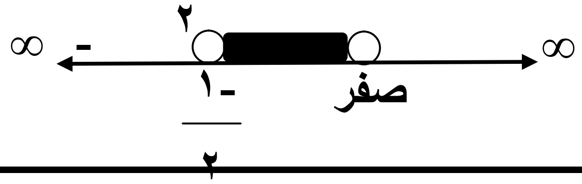
∴ م . ح =] - ∞ ، ٤]



مثال : مثل بيانيا مجموعة حل المتباينة ٢ < ٢ س ـ ٣ < ٣ حيث س ∋ ح

الحل : ٢ – ٣ < ٢ س < ٣ – ٣ ، - ١ < ٢ س < ٠ ، $\frac{-١}{٢}$ < س < ٠

∴ م . ح =] $\frac{-١}{٢}$ ، ٠ [



مثال : أوجد مجموعة حل المتباينة س ـ ١ ≤ ٢س + ٣ < س + ٧ حيث س ∋ ح

الحل : باضافة (- س) لجميع الاطراف : س – س – ١ ≤ ٢ س + ٣ – س < س + ٣ – س

∴ - ١ ≤ س + ٣ < ٣ ، - ١ - ٣ ≤ س < ٣ – ٣ ، - ٤ ≤ س < ٠

∴ م . ح = [- ٤ ، ٠ [

ملاحظة : إذا كانت معاملات س متساوية فى أطراف المتباينة الثلاثية فلا داعى لتجزئة المتباينة

مثال : أوجد مجموعة حل المتباينة ٢ س ـ ١ < س + ٣ < ٣ س + ٧ حيث س ∋ ح

الحل : ٢ س ـ ١ < س + ٣ ∴ س < ٤ ∴ م.ح$_١$ =] - ∞ ، ٤ [

س + ٣ < ٣ س + ٧ ∴ س > - ٢ ∴ م.ح$_٢$ =] – ٢ ، ∞ [

∴ محموعة الحل للمتباينة الاصلية =] - ∞ ، ٤ [∩] – ٢ ، ∞ [=] – ٢، ٤ [

ثانيا : حل متباينات الدرجة الاولى فى متغيرين بيانيا

- لحل المتباينة : أ س + ب ص < جـ نتبع الخطوات الآتية :

[١] نرسم المستقيم الحدي ل الذي معادلته : أ س + ب ص = جـ (وهو

ملاحظة : المستقيم الحدي ل يُرسم :

❶ خطاً متصلاً (غير متقطع) : إذا اشتملت المتباينة على علامة التساوي مع علامة التباين أي اشتملت على إحدى العلامتين (≤) أ، (≥) . وهذا يعني أن نقط المستقيم الحدي تنتمي إلى مجموعة حل المتباينة

❷ خطاً متقطعاً : إذا كانت المتباينة لا تشتمل على علامة التساوي مع علامة التباين أي تشتمل على إحدى العلامتين (<) أ، (>) . وهذا يعني أن نقط المستقيم الحدي لا تنتمي إلى مجموعة حل المتباينة .

[٢] نختارأي نقطة (س$_١$، ص$_١$) ليست على الحد (تنتمي إلى نصفي المستوى ف$_١$ أ، ف$_٢$) وللسهولة يمكن اختيار نقطة الأصل (٠ ، ٠) بشرط أن يكون المستقيم الحدي ل لا يمر بنقطة الأصل .

[٣] اختبار النقطة على المتباينة : نعوض بإحداثيي النقطة المختارة (س$_١$، ص$_١$) فإذا كان :

- (س$_١$، ص$_١$) تحقق المتباينة : ظلل المنطقة التي تحويها .
فيكون نصف المستوى الذي تقع فيه هذه النقطة هو مجموعة الحل للمتباينة المُعطاة .

[٢] نختارأي نقطة ($س_١$، $ص_١$) ليست على الحد (تنتمي إلى نصفي المستوى ف$_١$، أ، ف$_٢$ وللسهولة يمكن اختيار نقطة الأصل (٠ ، ٠) بشرط أن يكون المستقيم الحدي ل لا يمر بنقطة الأصل .

[٣] اختبار النقطة على المتباينة : نعوض بإحداثيي النقطة المختارة ($س_١$، $ص_١$) فإذا كان :

- ($س_١$، $ص_١$) تحقق المتباينة : ظلل المنطقة التي تحويها .
  فيكون نصف المستوى الذي تقع فيه هذه النقطة هو مجموعة الحل للمتباينة المُعطاة .
- ($س_١$، $ص_١$) لا تحقق المتباينة : ظلل المنطقة التي لا تحويها (المنطقة الأخرى) .
  فيكون نصف المستوى الذي لا تقع فيه هذه النقطة هو مجموعة الحل للمتباينة المُعطاة .

ملاحظة وإرشادات عند رسم المستقيم الحدي :

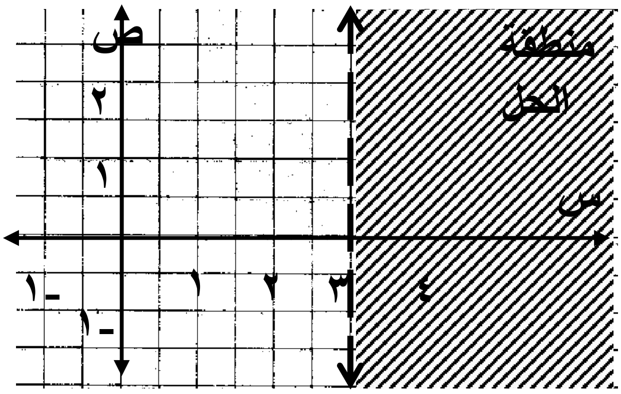
❶ المعادلة: ص = ٠ تمثل بيانياً بمحور السينات. ❷ المعادلة: س = ٠ تمثل بيانياً بمحور الصادات.

❸ المعادلة : ص = ﻫ تمثل بيانياً بمستقيم يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، ﻫ) .

❹ المعادلة : س = ﻫ تمثل بيانياً بمستقيم يوازي محور الصادات ويمر بالنقطة (ﻫ ، ٠) .

مثال : مثل بيانيا مجموعة حل المتباينة : س > ٣ فى ح × ح

الحل :



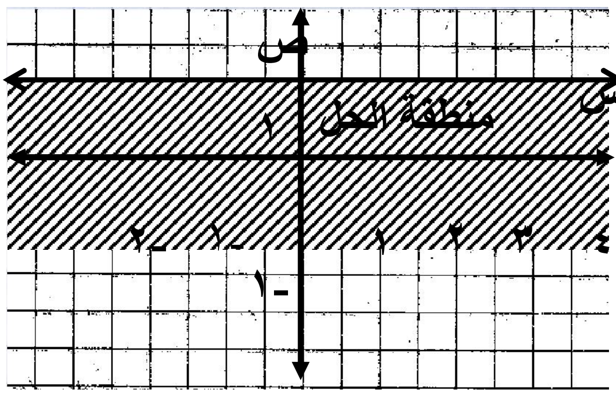
نرسم المستقيم الحدى ل : س = ٣ (خط متقطع)

∵ (٠،٠) لا تحقق المتباينة المعطاة لان ٠ > ٣

∴ مجموعة الحل هى نصف المستوى الذى لا تنتمي إلية نقطة الاصل و تمثلها المنطقة المظللة

مثال : مثل بيانيا مجموعة حل المتباينة : ص ≤ ١ فى ح × ح

الحل :



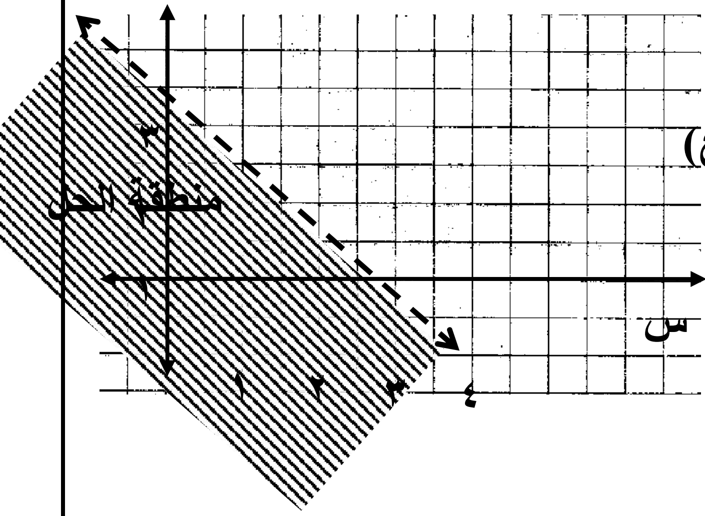
نرسم المستقيم الحدى ل : ص = ١ (خط متصل)

∵ (٠،٠) تحقق المتباينة المعطاة لان ٠ < ١

∴ مجموعة الحل هى المستقيم ل ∪ نصف المستوى الذى تنتمي إلية نقطة الاصل و تمثلها المنطقة المظللة

مثال : مثل بيانيا مجموعة حل المتباينة : س + ص < ٣ فى ح × ح

الحل :



نرسم المستقيم الحدى ل : س + ص = ٣ (خط متقطع)

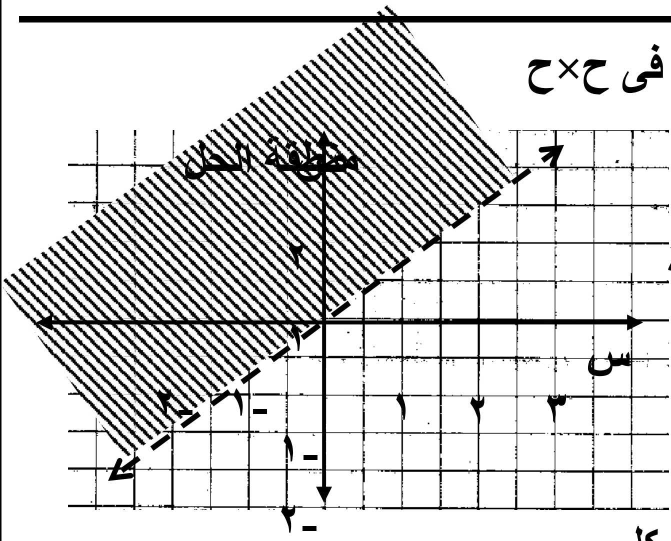
يمر بالنقطتين (٠ ، ٣) ، (٣ ، ٠)

∵(٠،٠) تحقق المتباينة المعطاة لان ٠ < ٣

∴ مجموعة الحل هى نصف المستوى الذى تنتمي إلية نقطة الاصل و تمثلها المنطقة المظللة فى الشكل

مثال : مثل بيانيا مجموعة حل المتباينة : ص > س فى ح×ح

الحل :



نرسم المستقيم الحدى ل : ص = س (خط متقطع)

يمر بالنقطتين (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٢) نختار أى نقطة لا تقع على المستقيم ل و لتكن النقطة (١ ، ٢)

∵(١،٢) تحقق المتباينة المعطاة لان ٢ > ١

∴ مجموعة الحل هى نصف المستوى الذى تنتمي إلية النقطة (١، ٢) و تمثلها المنطقة المظللة فى الشكل

<u>ملاحظة هامة:</u> نلاحظ أن المستقيم الحدى ل يمر بنقطة الاصل (٠،٠) لذلك لا يصلح استخدام هذه النقطة فى تحديد نصف المستوى الذى يمثل مجموعة الحل .

مثال : مثل بيانيا مجموعة حل المتباينة : $\frac{٢}{٣}$ س ـ $\frac{ص}{٢}$ $\leqslant$ ١ فى ح × ح

الحل :

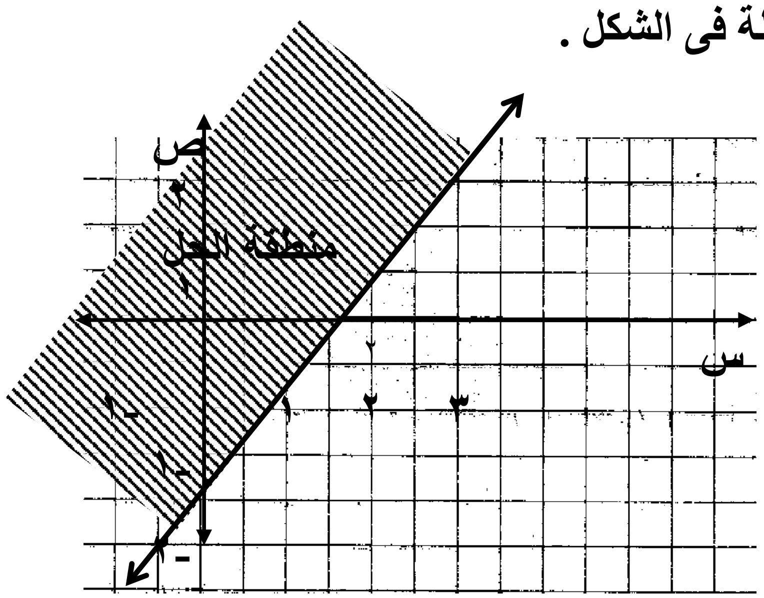
نرسم المستقيم الحدى ل : $\frac{٢}{٣}$ س ـ $\frac{ص}{٢}$ = ١ (خط متصل) ، بضرب الطرفين فى ٦ نجد : ٤ س ـ ٣ ص = ٦ و هذا المستقيم يمر بالنقطتين (٠ ، ـ ٢) ، ($\frac{٣}{٢}$ ، ٠)

∴ (٠ ، ٠) تحقق المتباينة المعطاة (لان ٠ < ١)

∴ مجموعة حل المتباينة هى المستقيم ل ∪ نصف المستوى الذى تنتمى إليه نقطة الاصل و

تمثلها المنطقة المظللة فى الشكل .

تابع الحل :



ثالثا : الحل البيانى لمتباينتين أو أكثر من الدرجة الاولى فى متغيرين

يقصد تحديد على الرسم المنطقة المشتركة التى تمثل جميع الازواج المرتبة التى تحقق كلا من المتباينتين معا (فى وقت واحد) [تمثل تقاطع مجموعتى الحل لكل من المتباينتين]

خطوات الحل البيانى لمتباينتين :

١- نظلل المنطقة $س_١$ الممثلة لمجموعة حل المتباينة الاولى.

٢- نظلل المنطقة $س_٢$ المنطقة لمجموعة حل المتباينة الثانية.

٣- المنطقة المشتركة س من التظليل هى مجموعة الحل للمتباينتين معا س= $س_١ \cap س_٢$

ملاحظة هامة : قد لا توجد منطقة تقاطع و عندها مجموعة الحل = $\varnothing$

مثال : حل نظام المتباينات الخطية التالى بيانيا : س + ٢ ص > ١ ، س $\geqslant$ ١ فى ح×ح

الحل:

١) نرسم المستقيم الحدى $ل_١$: س + ٢ ص = ١ (خط متقطع) و يمر بالنقطتين (٠ ، $\frac{١}{٢}$) ، (١ ، ٠)

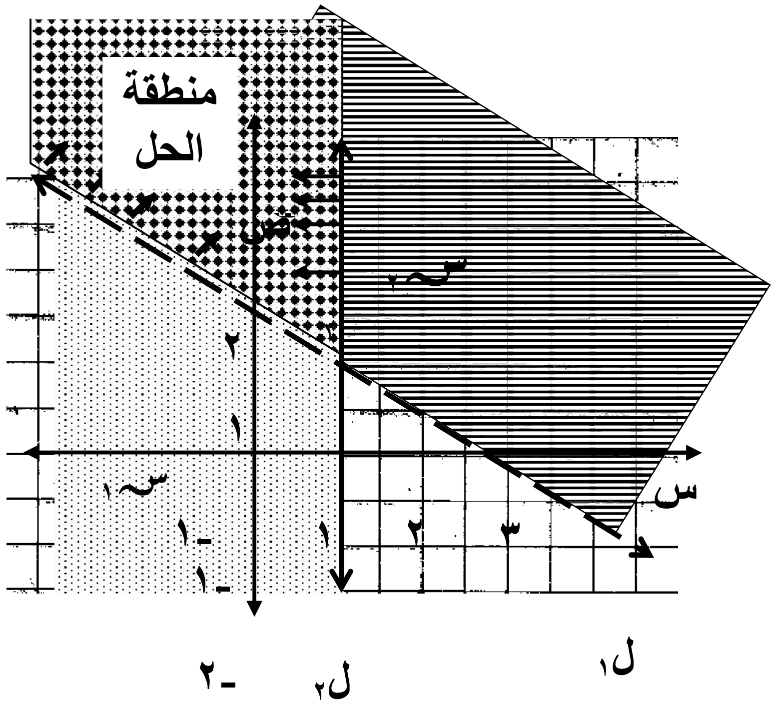
∵ (٠ ، ٠) لا تحقق المتباينة س + ٢ ص > ١ (لان ٠ $\ngtr$ ١)

∴ $س_١$ (مجموعة حل المتباينة س +٢ص > ١) = نصف المستوى الذى لا تقع فيه نقطة الاصل

٢) نرسم المستقيم الحدى ل٢ : س = ١ (خط متصل) و هو مستقيم // محور الصادات و يمر بالنقطة (١ ، ٠) ∵ (٠ ، ٠) تحقق المتباينة س ⩽ ١ (لان ٠ < ١)

∴ ع٢ (مجموعة حل المتباينة س ⩽١) = ل٢∪ نصف المستوى الذى تنتمى إليه نقطة الاصل

٣) ∴ مجموعة حل المتباينتين معاهى ع = ع١ ∩ ع٢ وتمثلها المنطقة المشتركة فى التظليل



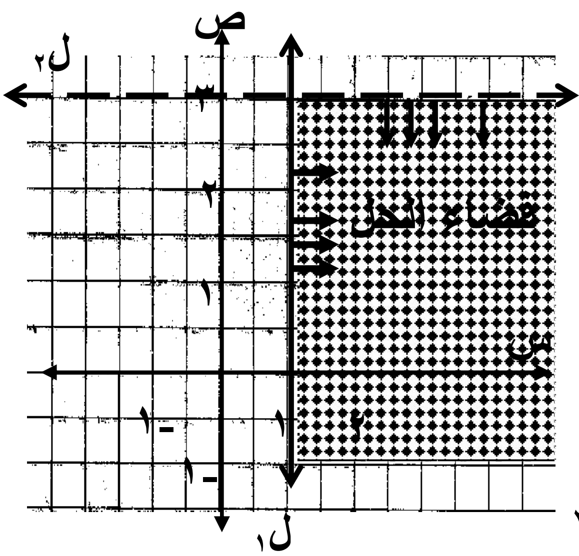
مثال: حل النظام الآتى بيانيا : س ≥ ١ ، ص < ٣ فى ح × ح

الحل :

١)نرسم المستقيم الحدى ل١ : س =١(خط متصل)
و هو مستقيم // محور الصادات و يمر بالنقطة (١، ٠)

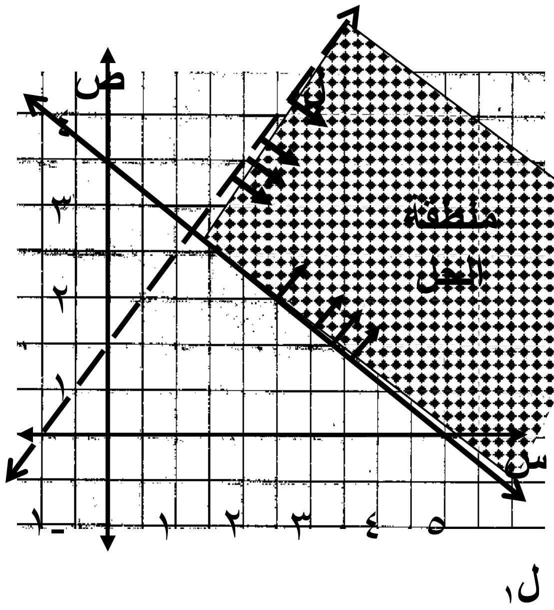
∵ (٠ ، ٠) لا تحقق المتباينة س ≥ ١ (لان س ≱ ١)
∴ ع١= ل١∪ نصف المستوى الذى لا تقع فيه نقطة الاصل

٢) نرسم المستقيم الحدى ل٢ : ص = ٣ (خط متقطع)
و هو مستقيم // محور السينات و يمر بالنقطة (٠ ، ٣)
∵ (٠ ،٠) تحقق المتباينة ص < ٣ (لان ٠ < ١)
∴ ع٢= نصف المستوى الذى تنتمى إليه نقطة الاصل
٣) مجموعة حل المتباينتين معا هى ع=ع١∩ع٢
و تمثلها المنطقة المشتركة فى التظليل فى الشكل.



مثال: أوجد بيانيا مجموعة الحل للمتباينتين ٣ س + ٥ ص ⩽ ١٥ ، ص < س + ١ فى ح×ح

الحل:



١)نرسم المستقيم الحدى ل١ : ٣س + ٥ص =١٥

(خط متصل) و يمر بالنقطتين (٠ ، ٣) ، (٥ ، ٠)

∵ (٠ ، ٠) لا تحقق المتباينة (لان ٠ ⩾̸ ١٥)

∴ س~١= ل١∪ نصف المستوى الذى لا تقع فيه نقطة الاصل

٢) نرسم المستقيم الحدى ل٢ : ص = س+١

(خط متقطع) و يمر بالنقطتين (٠ ، ١) ، (- ١ ، ٠)

∵ (٠ ، ٠) تحقق المتباينة ص < س+١ (لان ٠ < ١)

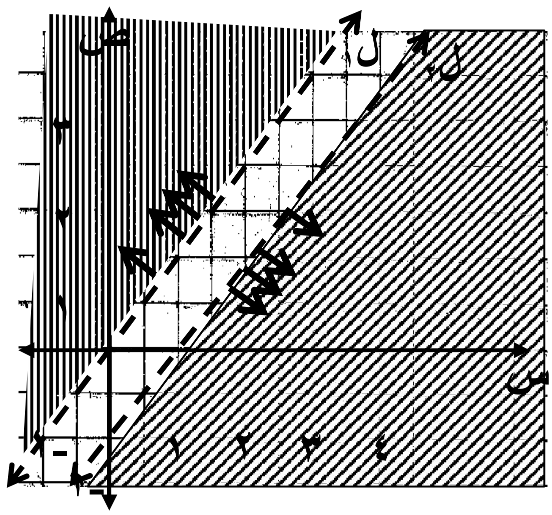
∴ س~٢= نصف المستوى الذى تنتمى إليه نقطة الاصل

٣) مجموعة حل المتباينتين معا هى س~= س~١∩س~٢

و تمثلها المنطقة المشتركة فى التظليل كما بالشكل.

مثال : حل نظام المتباينات الخطية التالى بيانيا : ص > س ، س ـ ص > ١ فى ح × ح

الحل :



١)نرسم المستقيم الحدى ل١ : ص = س (خط متقطع)

و يمر بالنقطتين (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٢)

∵ (١ ، ٣) تحقق المتباينة (لان ٣ > ١)

∴ س~١= نصف المستوى الذى تقع فيه النقطة (١،٣)

٢) نرسم المستقيم الحدى ل٢: س ـ ص =١(خط متقطع

و يمر بالنقطتين (٠ ، -١) ، (١ ، ٠)

∵ (٠ ، ٠) لا تحقق المتباينة س ـ ص < ١(لان٠ ≮ ١)

∴ س~٢= نصف المستوى الذى لا تنتمى إليه نقطة الاصل

٣) ∴ مجموعة حل المتباينتين معا هى

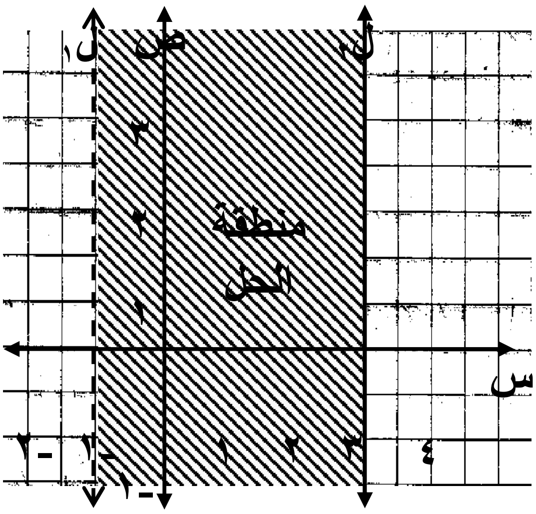
س~ = س~١∪س~٢ = ∅ أى لا توجد منطقة تقاطع.

مثال : مثل بيانيا مجموعة الحل للمتباينة : -١ < س ⩽ ٣ فى ح × ح

الحل :نجزئ المتباينة الى المتباينتين : س > - ١ ، س ⩽ ٣

١) نرسم المستقيم الحدى ل١ : س = -١ (خط متقطع) و هو مستقيم // محور الصادات و يمر بالنقطة (- ١ ، ٠) ، ∵ (٠ ، ٠) تحقق المتباينة س > - ١ (لان ٠ > - ١)

∴ س~١ = نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الاصل



٢) نرسم المستقيم الحدى ل٢ : س = ٣ (خط متصل)
وهو مستقيم // محور الصادات و يمر بالنقطة (٣ ، ٠)
∵ (٠ ، ٠) تحقق المتباينة س ⩽ ٣ (لان ٠ < ٣)
∴ س~٢ = ل٢ ∪ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الاصل .

٣) ∴ مجموعة حل المتباينة الاصلية هى
س~ = س~١ ∩ س~٢ و تمثلها المنطقة المظللة بين ل١ ، ل٢ بالاضافة الى نقط المستقيم ل٢

مثال : مثل بيانيا مجموعة الحل للمتباينة : - ١ < س ⩽ ٣ حيث س ∈ ح

الحل : م . ح = { س : س ∈ ح ، - ١ < س ⩽ ٣ }
=] - ١ ، ٣]

ملاحظة هامه: هناك فرق للحل فى المثالين السابقين إذا قيل س ∈ ح أو س ∈ ح × ح

تمارين (١) على البرمجة الخطية

[١] أوجد مجموعة حل المتباينة : ٣ س + ٢ ⩽ – ٢ و اكتبها على صورة فترة حيث س ∈ ح

[٢] أوجد مجموعة حل المتباينة : ٤ س ـ ٣ > س + ٢ حيث س ∈ ح موضحا ذلك بيانيا

[٣] أوجد مجموعة الحل للمتباينة : س + ٨ ⩽ ٣ س ـ ٢ > س + ٢ حيث س ∈ ح فى صورة فترة موضحا ذلك على خط الاعداد .

[٤] حل نظام المتباينات الخطية التالى بيانيا: س > ٢ ص ـ ٤ فى ح × ح

[٥] حل نظام المتباينات الخطية التالى بيانيا: س + ص > ٤ حيث س ، ص ∈ ح

[٦] حل نظام المتباينات الخطية التالى بيانيا: ص ⩽ ٢ س + ٦ ، ص +٣ س ⩽ – ١ فى ح×ح

[٧] حل نظام المتباينات الخطية التالى بيانيا: س > - ١ ، ص ⩽ ٢ فى ح×ح

[٨] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

١ـ النقطة .... تقع فى منطقة حل المتباينة ٢ س + ٣ ص ⩽ ٦
(١) (- ٤ ، - ٥) (٢) (٢ ، - ٣) (٣) (٤ ، ٥) (٤) (٠ ، ٠)

٢ـ النقطة التى تنتمى الى مجموعة الحل للمتباينتين س > ٢ ، ص > ١ هى ....
(١) (١ ، ٢) (٢) (٢ ، ١) (٣) (٣ ، ١) (٤) (٣ ، ٢)

البرمجة الخطية والحل الأمثل

<u>* حل أكثر من متباينتين معا (من الدرجة الاولى) فى متغيرين بيانيا :</u>

فى هذه الحالة تكون المنطقة المشتركة تمثل بمنطقة مضلَعة و هى تحقق جميع المتباينات معا

<u>* ايجاد رؤوس منطقة الحل المضلَعة :</u>

نعين احداثيات نقاط تقاطع المستقيمات المحددة لهذه المنطقة و ذلك من الرسم أو بحل كل معادلتين (مستقيمين متقاطعين) معا جبريا حسب الرؤوس المطلوبة .

<u>* تعيين أكبر أو أصغر قيمة لدالة الهدف :</u>

١) نعين مجموعة حل المتباينات المعطاة فى المسألة بيانيا (أى نحدد منطقة الحل المشتركة)

٢) نعين نقط رؤوس منطقة الحل و ذلك من الرسم أو بحل المعادلات جبريا .

٣) نعوض بكل نقطة من رؤوس منطقة الحل فى دالة الهدف ر = ل س + م ص

٤) ثم نختار النقطة التى تعطى الحل الأمثل لدالة الهدف (أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن)

مثال : أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية بيانيا :

س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، س + ص < ٣ ، ٢ س + ص < ٤ فى ح × ح

الحل: نرسم المستقيمات الحدية :

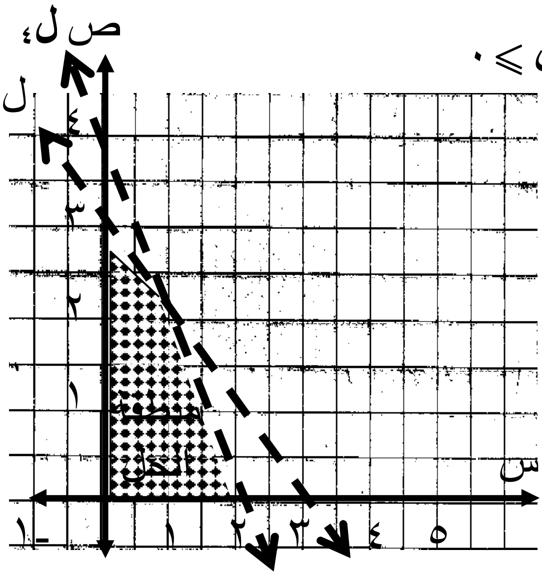
١) نرسم المستقيم الحدى ل$_{١}$: س = ٠محور الصادات
(خط متصل) و نحدد س~$_{١}$ مجموعة حل المتباينة س⩾ ٠

٢) نرسم المستقيم الحدى ل$_{٢}$: ص = ٠ محور السينات
(خط متصل) و نحدد س~$_{٢}$ مجموعة حل المتباينة ص ⩾ ٠

٣) ل$_{٣}$: س + ص = ٣ (خط متقطع)
و يمر بالنقطتين (٠ ، ٣) ، (٣ ، ٠)
و نحدد س~$_{٣}$ مجموعة حل المتباينة س + ص < ٣

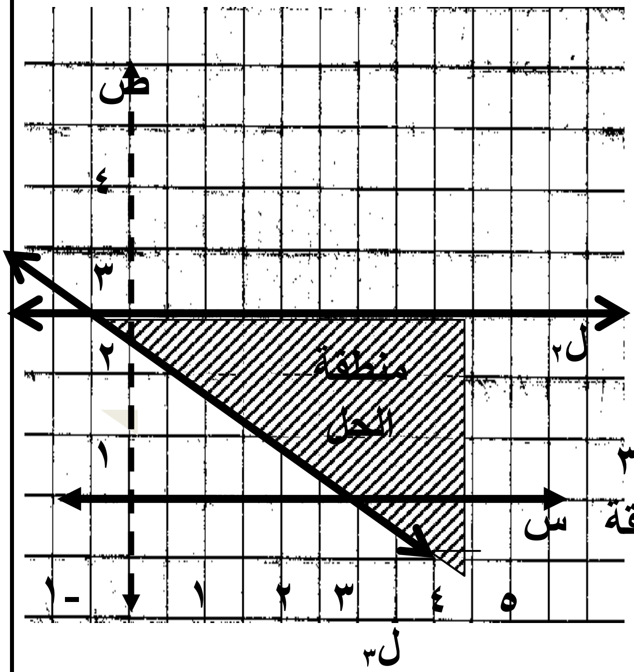
٤) ل$_{٤}$: ٢ س + ص = ٤ (خط متقطع)
و يمر بالنقطتين (٠ ، ٤) ، (٢ ، ٠)
و نحدد س~$_{٤}$ مجموعة حل المتباينة ٢ س + ص < ٤

٥) مجموعة حل المتباينات معا هى س~ وتمثلها المنطقة المظللة كما بالشكل س~ = س~$_{١}$ ∩ س~$_{٢}$ ∩ س~$_{٣}$ ∩ س~$_{٤}$



مثال: أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية بيانيا س> ٠ ، ص ⩽ ٢ ، س + ٢ ص ⩽ ٣

الحل :



نرسم المستقيمات الحدية :

١) ل$_{١}$: س = ٠محور الصادات (خط متقطع)

و نحدد سـ$_{١}$ مجموعة حل المتباينة س > ٠

٢) ل$_{٢}$: ص = ٢ (خط متصل) // محور السينات

و نحدد سـ$_{٢}$ مجموعة حل المتباينة ص ⩽ ٢

٣) ل$_{٣}$: س + ٢ص = ٣ (خط متقطع)

و يمر بالنقطتين (٠ ، ١.٥) ، (٣ ، ٠)

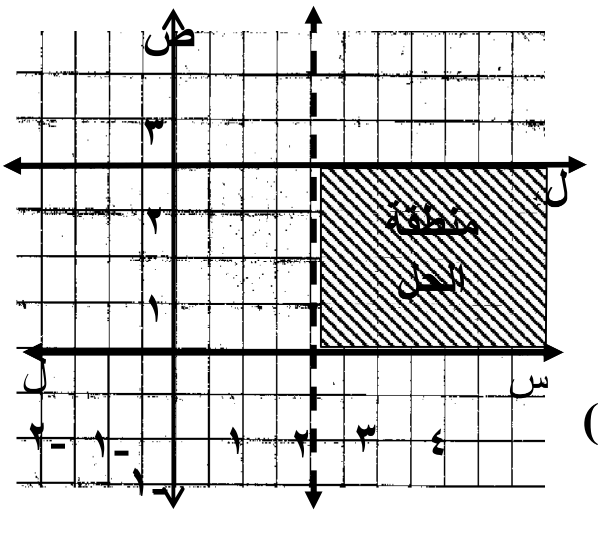
و نحدد سـ$_{٣}$ مجموعة حل المتباينة س + ٢ص ⩽ ٣

٤) مجموعة حل المتباينات معا هى سـ وتمثلها المنطقة المظللة كما بالشكل سـ = سـ$_{١}$ ∩ سـ$_{٢}$ ∩ سـ$_{٣}$

مثال: أوجد بيانيا فى ح × ح مجموعة حل المتباينات الآتية :

س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ، س > ٢ ، ص ≥ ٢

الحل :



نرسم المستقيمات الحدية :

١) ل$_{١}$: س = ٠محور الصادات (خط متصل)

و نحدد سـ$_{١}$ مجموعة حل المتباينة س ≤ ٠

٢) ل$_{٢}$: ص = ٠ محور السينات (خط متصل)

نحدد سـ$_{٢}$ مجموعة حل المتباينة ص ≤ ٠

٣) ل$_{٣}$: س = ٢ (خط متقطع)

وهو مستقيم // محور الصادات و يمر بالنقطة (٢،٠)

ونحدد سـ$_{٣}$ مجموعة حل المتباينة س > ٢

٤) ل$_{٤}$: ص = ٢ (خط متصل)

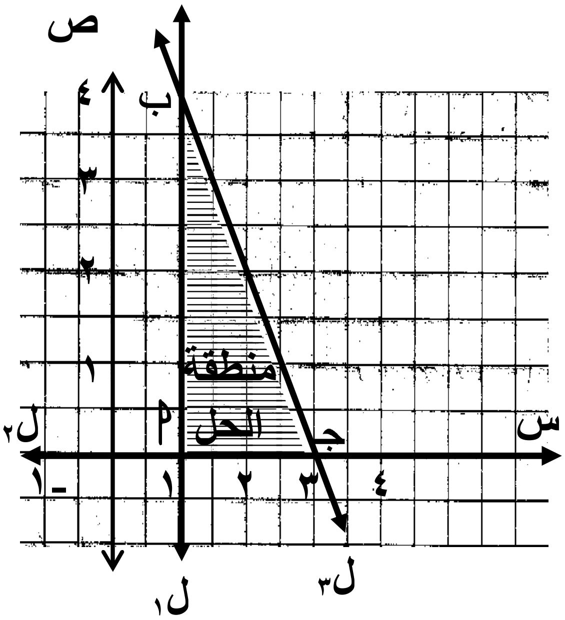
وهو مستقيم // محور السينات و يمر بالنقطة (٠ ، ٢)

ونحدد سـ$_{٤}$ مجموعة حل المتباينة ص ≥ ٢

٥) مجموعة حل المتباينات معا هى سـ وتمثلها المنطقة المظللة كما بالشكل سـ = سـ$_{١}$ ∩ سـ$_{٢}$ ∩ سـ$_{٣}$ ∩ سـ$_{٤}$

مثال: باستخدام البرمجة أوجد قيمتى س ، ص التى تجعل قيمة الدالة ر = ٣ س + ص قيمة عظمى ثم قيمة صغرى تحت القيود : س ≤ ١ ، ص ≤ ٠ ، ٢ س + ص ≥ ٦

الحل :



نرسم المستقيمات الحدية :

١) ل١ : س = ١ (خط متصل) // محور الصادات ويمر بالنقطة (١ ، ٠) و نحدد س١ مجموعة حل المتباينة س ≤ ١

٢) ل٢ : ص = ٠ محور السينات (خط متصل) نحدد س٢ مجموعة حل المتباينة ص ≤ ٠

٣) ل٣ :٢س + ص = ٦ (خط متصل) و تمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (٣ ، ٠) ونحدد س٣ مجموعة حل المتباينة ٢س+ ص ≥ ٦

٤) ∴ مجموعة حل المتباينات معا هى س وتمثلها المنطقة المثلثة المظللة كما بالشكل

حيث س = س١ ∩ س٢ ∩ س٣

٥) رؤوس منطقة فضاء الحل هى

أ (١ ، ٠) ، ب (١ ، ٤) جـ (٣ ، ٠)

٦) مساحة منطقة الحل = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ٤ = ٤ وحدة مربعة

٧) ∵ دالة الهدف : ر = ٣ س + ص بالتعويض عن كل نقطة من رؤوس منطقة الحل

∴ ر | أ = ٣ × ١ + ٠ = ٣

ر | ب = ٣ × ١ + ٤ = ٧

ر | جـ = ٣ × ٣ + ٠ = ٩

∴ القيمة العظمى = ٩ عند النقطة جـ (٣ ، ٠)

، القيمة الصغرى = ٣ عند النقطة أ (١ ، ٠)

مثال : أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية بيانيا :

س > ١ ، ص > ١ ، س + ص ⩾ ٤ ، ٢ س + ص ⩾ ٦ فى ح × ح

الحل:

نرسم المستقيمات الحدية :

١) ل$_١$: س = ١ (خط متقطع) // محور الصادات ويمر بالنقطة (١ ، ٠)
و نحدد س~$_١$ مجموعة حل المتباينة س >١

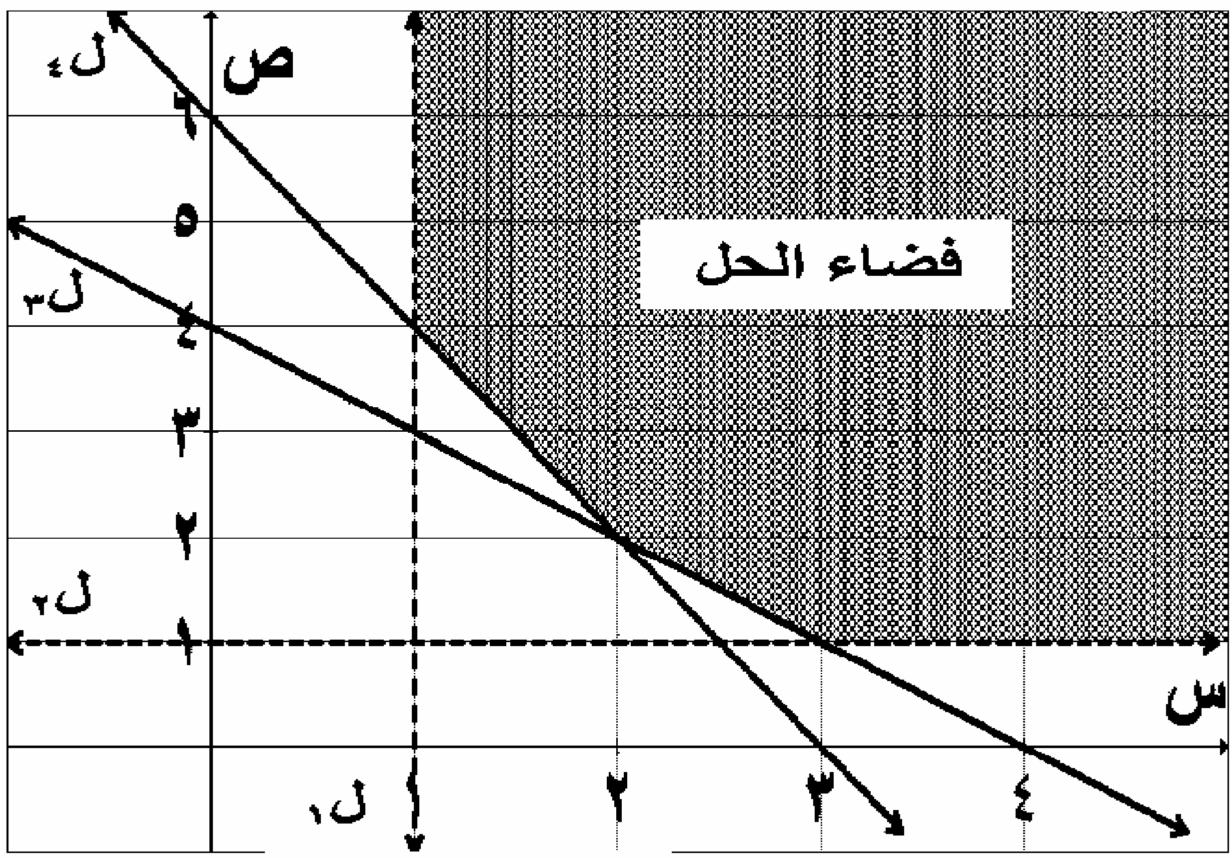
٢) ل$_٢$: ص = ١ (خط متقطع) // محور السينات و يمر بالنقطة (٠ ، ١)
نحدد س~$_٢$ مجموعة حل المتباينة ص > ١

٣) ل$_٣$: س + ص = ٤ (خط متصل) و تمر بالنقطتين (٠ ، ٤) ، (٤ ، ٠)
ونحدد س~$_٣$ مجموعة حل المتباينة س+ ص ⩾ ٤

٤) ل$_٣$: ٢س + ص = ٦ (خط متصل) و تمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (٣ ، ٠)
ونحدد س~$_٤$ مجموعة حل المتباينة ٢س+ ص ⩾ ٦

٥) ∴ مجموعة حل المتباينات معا هى س~ وتمثلها المنطقة المظللة كما بالشكل

حيث س~ = س~$_١$ ∩ س~$_٢$ ∩ س~$_٣$ ∩ س~$_٤$



مثال : باستخدام البرمجة أوجد بيانيا فى ح × ح مجموعة حل المتباينات الآتية معا حيث س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، ٢ س + ص ⩾ ٨ ، س + ٣ ص ⩾ ٩ ثم أوجد من مجموعة قيم (س ، ص) التى تجعل الدالة (ر) أصغر ما يمكن حيث ر = ٣ س + ٢ ص

الحل:

نرسم المستقيمات الحدية :

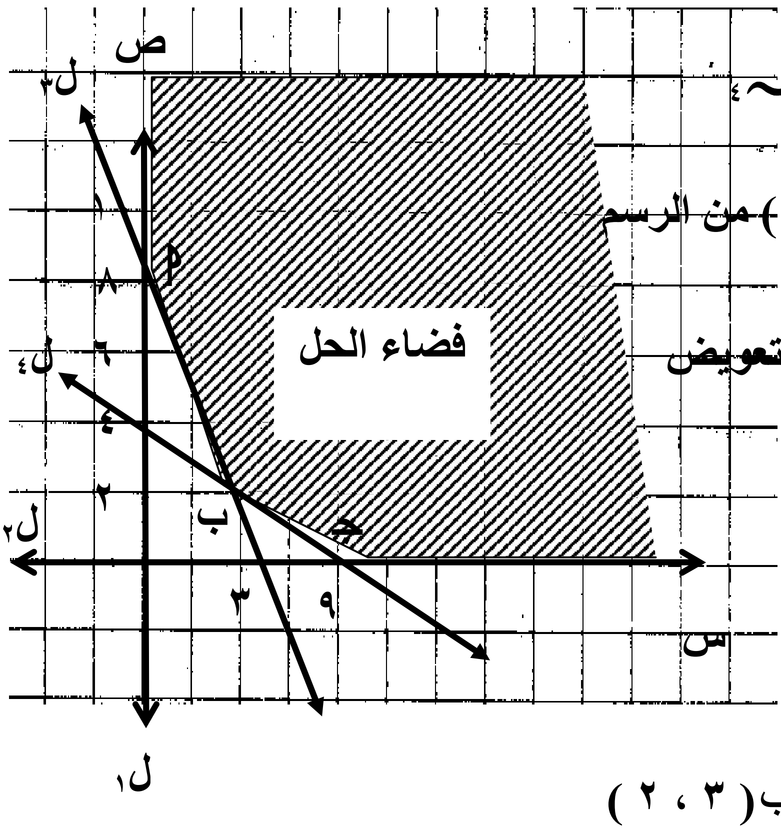
١) ل١ : س = ٠ محور الصادات (خط متصل)
و نحدد ســ١ مجموعة حل المتباينة س ≤ ٠

٢) ل٢ : ص = ٠ محور السينات (خط متصل)
نحدد ســ٢ مجموعة حل المتباينة ص ≤ ٠

٣) ل٣ :٢س + ص =٨ (خط متصل) و تمر بالنقطتين (٠ ، ٨) ، (٤ ، ٠)
ونحدد ســ٣ مجموعة حل المتباينة ٢س+ ص ⩾ ٨

٤) ل٤ : س + ٤ ص = ٩ (خط متصل) يمر بالنقطتين (٠ ، ٣) ، (٩ ، ٠)
و نحدد ســ٤مجموعة حل المتباينة س + ٣ ص ⩾ ٩

٥) ∴ مجموعة حل المتباينات معا هى ســ وتمثلها المنطقة المظللة كما بالشكل
حيث ســ = ســ١ ∩ ســ٢ ∩ ســ٣ ∩ ســ٤
رؤوس منطقة فضاء الحل هى
ρ (٠ ، ٨) ، ب (٣ ، ٢) جـ (٩ ، ٠) من الرسم
أو بحل المعادلات جبريا



٦) ∵ دالة الهدف : ر = ٣ س +٢ ص بالتعويض عن كل نقطة من رؤوس منطقة الحل

∴ |ر |ρ = ٠ + ١٦ = ١٦

|ر |ب = ٩ + ٤ = ١٣

|ر |جـ = ٢٧ + ٠ = ٢٧

، القيمة الصغرى = ١٣ عند النقطة ب(٣ ، ٢)

مثال : باستخدام البرمجة الخطية أوجد القيمة الكبرى للدالة ل = ٦ س + ٤ ص تحت القيود
س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، س + ص ⩽ ١٠٠ ، ٢ س + ص ⩽ ١٤٠

الحل :

نرسم المستقيمات الحدية :

١) ل$_١$: س = ٠ محور الصادات (خط متصل) و نحدد سـ$_١$ مجموعة حل المتباينة س ≥ ٠
٢) ل$_٢$: ص = ٠ محور السينات (خط متصل) ونحدد سـ$_٢$ مجموعة حل المتباينة ص ≥ ٠
٣) ل$_٣$: س + ص = ١٠٠ (خط متصل) و تمر بالنقطتين (٠ ، ١٠٠) ، (١٠٠ ، ٠)
ونحدد سـ$_٣$ مجموعة حل المتباينة س+ ص ⩽ ١٠٠
٤) ل$_٤$: ٢ س + ص = ١٤٠ (خط متصل) يمر بالنقطتين (٠ ، ١٤٠) ، (٧٠ ، ٠)
و نحدد سـ$_٤$مجموعة حل المتباينة ٢ س + ص ⩽ ١٤٠
٥) ∴ مجموعة حل المتباينات معا هى سـ وتمثلها المنطقة المظللة كما بالشكل

حيث سـ = سـ$_١$ ∩ سـ$_٢$ ∩ سـ$_٣$ ∩ سـ$_٤$ و هى المنطقة المضلعة ﻫ ب جـ و و تحدها النقط

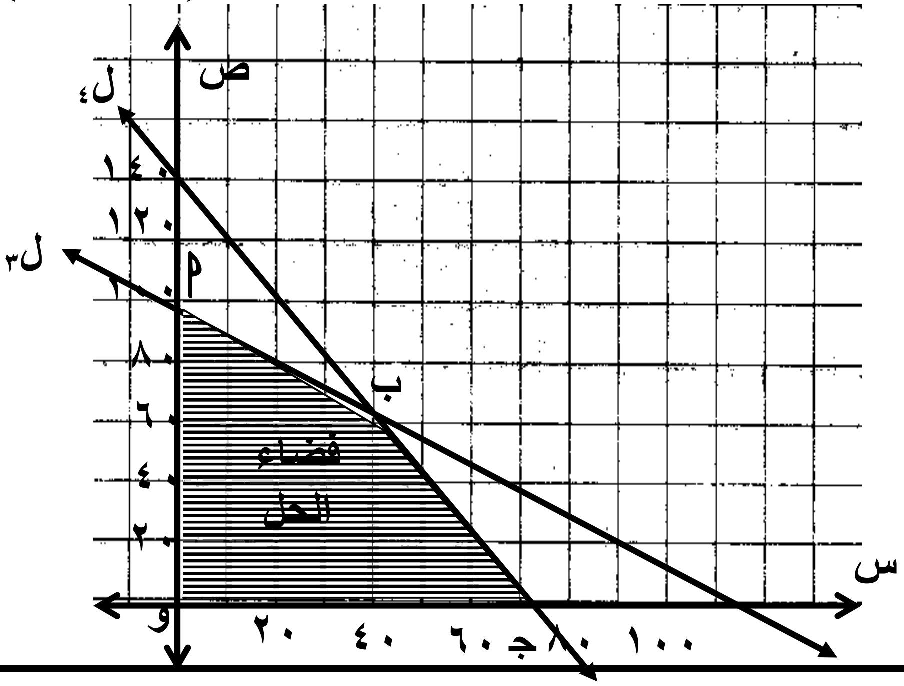
ﻫ (٠ ، ١٠٠) ، ب (٤٠ ، ٦٠) جـ (٧٠ ، ٠) ، و (٠ ، ٠) من الرسم

٦) ∵ دالة الهدف : ل = ٦ س + ٤ ص بالتعويض عن كل نقطة من رؤوس منطقة الحل

∴ ل |$_{ﻫ}$ = ٦ × ٧٠ + ٤ × ٠ = ٤٢٠ ، ل |$_{ب}$ = ٦ × ٤٠ + ٤ × ٦٠ = ٤٨٠

، ل |$_{جـ}$ = ٦ × ٠ + ٤ × ١٠٠ = ٤٠٠ ، ل |$_{و}$ = ٦ × ٠ + ٤ × ٠ = ٠

∴ أكبر قيمة لدالة الهدف = ٤٨٠ و ذلك عند النقطة ب (٤٠ ، ٦٠)



ملاحظة هامة : إذا كان من الصعب عليك تحديد نقط الحدود من الرسم و خاصة عندما تكون الاحداثيات أعداد كسرية تلجأ الى الطريقة الجبرية فمثلا لايجاد نقطة ب جبريا نحل المعادلتين للمستقيميين $ل_٣$ ، $ل_٤$:

س + ص = ١٠٠ (١)

٢ س + ص = ١٤٠ (٢) بطرح ١ من ٢ نجد : س = ٤٠ و بالتعويض فى (١)

∴ ص = ٦٠ ∴ ب (٤٠ ، ٦٠)

تمارين (٢) على البرمجة الخطية

[١] اختر الاجابة الصحيحة من الاجابات المعطاة :

١) مجموعة حل المتباينات س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٢} \leqslant ١$ تمثل بمنطقة مثلثة الشكل مساحة سطحها .... وحدة مربعة

١) ١٢ ٢) ٦ ٣) ٣ ٤) ٢٤

٢) النقطة .... تنمتى لجموعة حل المتباينة س ـ ٣ ص ⩾ ٥ فى ح×ح

١) (١٧ ، ٣) ٢) (٢ ، - ٣) ٣) (٨ ، ١) ٤) (٩ ، ٠)

[٢] أكمـــــــل ما يأتى لتحصل على عبارة صحيحة :

١) النقطة (٤ ، ٧) تنتمى لمجموعة حل المتباينة ص .... ٣ س فى ح×ح

٢) النقطة (٢ ، ٣) تنتمى لمجموعة حل المتباينتين : س ..... ٥ ، ص ٢

٣) مجموعة حل المتباينتين س + ص ⩾ ٣ ، س + ص ⩽ ٣ فى ح×ح هى ....

٤) مجموعة حل المتباينتين : س + ص > ٣ ، س + ص < ٣ فى ح×ح هى ....

٥) إذا كانت النقط م(٨ ، ٠) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (٠ ، ٧) تقع فى منطقة حل المتباينات الآتية معا س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، ٢ س + ص ⩾٧ ، س + ٢ ص ⩾ ٨ فإن :

النقطة .... هى التى تجعل دالة الهدف ر = ٣ س + ٧ ص أصغر ما يمكن .

٦) إذا كانت النقط م(٣.٥ ، ٠) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (٠ ، ٤) تقع فى منطقة حل المتباينات الآتية معا س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، ٢ س + ص ⩽٧ ، س + ٢ ص ⩽٨ فإن :

النقطة .... هى التى تجعل دالة الهدف ل = ٦ س + ١٠ص أكبر ما يمكن .

[٣] أوجد حل نظام المتباينات الخطية التالى بيانيا :

س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، س + ص ⩽ ٥ ، ٢ س + ص ⩽ ٨

[٤] أوجد حل نظام المتباينات الخطية التالى بيانيا :
س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، ٢س + ص ⩽ ١٠ ، ٢ س + ٣ ص ⩽ ١٨

[٥] باستخدام البرمجة الخطية أوجد القيمة الكبرى للدالة ر = ٥٠ س + ٧٥ ص تحت القيود س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، س + ٢ص ⩽ ٨ ، ٣ س +٢ ص ⩽ ١٢

[٦] باستخدام البرمجة الخطية أوجد القيمة الصغرى للدالة ر = ٢ س + ٣ ص حيث
س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، س + ٣ص ⩾ ١٥ ، ٤ س + ٣ ص ⩾ ٢٤

[٧] أوجد فى ح×ح مجموعة حل المتباينات الآتية معا بيانيا :
س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، س + ٢ص ⩽ ٨ ، ٣ س +٢ ص ⩽ ١٢ فى ح×ح
ثم أوجد مجموعة الحل قيم (س ، ص) التى تجعل الدالة (ر) أكبر ما يمكن
حيث ر = ٥٠ س + ٧٥ ص

[٨] عين مجموعة حل المتباينات الآتية معا بيانيا :
س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، س + ٣ص ⩽ ٧ ، ٣ س +٢ ص ⩽ ١٦ فى ح×ح
ثم أوجد مجموعة الحل قيم (س ، ص) التى تجعل الدالة (ر) أكبر ما يمكن
حيث ر = ٣٠ س + ٥٠ ص

[٩] أوجد حل نظام المتباينات الخطية التالى بيانيا :
س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، ص > س + ٣ ، س + ٢ص > ٤

[١٠] أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية:
(أ) ص ⩾ س + ٢ (ب) ص > ٢ س – ٣ (جـ) س + ٣ ص ⩽ ٦

[١١] حل كل نظام من المتباينات الخطية بيانيًا:

(أ) س ⩾ ٤	(ب) ص – س > ٠	(جـ) س + ٤ ص > ٤
ص < س + ٢	٢ س + ٢ ص ⩽ ١٢	٤ س + ص ⩽ ٢
س + ٢ ص ⩽ -٢	ص < ٦ + ٢ س	س – ص < ١

تطبيقات حياتية على البرمجة الخطية

البرمجة الخطية هى وسيلة قوية لإعطاء أفضل قرار فى حل مشكل أو هى الحل الأمثل لتحقيق هدف معين يمكن وضعه على صورة دالة خطية (ل س + م ص) تسمى دالة الهدف و ذلك فى ضوء القيود و الامكانيات المتاحة .

خطوات حل المسائل اللفظية فى البرمجة الخطية :

نتبع الآتى :

١- اخراج المعلومات من السؤال و ترتيبها فى صورة جدول.
٢- نحول هذه المعلومات الى مجموعة من المتباينات الخطية .
٣- تعيين دالة الهدف (ر) أو (ل) أو (ت) بدلالة الاحداثيات .
٤- تمثيل المتباينات الخطية بيانيا و نوجد مجموعة حل هذه المتباينات (تعيين منطقة الحل)
٥- تحديد نقط تقاطع المستقيمات المحددة لمنطقة الحل (رؤوس منطقة الحل) من الرسم أو بحل كل معادلتين معا جبريا (حسب الرؤوس المطلوبة)
٦- اختيار النقطة التى تعطى الحل الأمثل لدالة الهدف من النقط السابقة بالتعويض فى الدالة

مثال : مصنع ينتج ٩٠ وحدة على الأكثر من نوعين مختلفين من السلع و يحقق ربحاً فى كل وحدة من النوع الأول قدره ٥ جنيهات و ربحاً فى كل وحدة من النوع الثانى قدره ٧ جنيهات فإذا كان ما يباع من النوع الأول لا يقل عن ضعف ما يباع من النوع الثانى . فأوجد عدد الوحدات التى يجب انتاجها من كل نوع لكى يحقق المصنع أكبر ربح ممكن .

الحل :

نفرض أن عدد الوحدات من النوع الأول = س ، عدد الوحدات من النوع الثانى = ص

نوع الانتاج	الأول	الثانى	القيود (الشروط)
العدد	س	ص	س⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، س + ص ⩽ ٩٠ ، س ⩾ ٢ ص
الربح	٥ س	٧ص	ر = ٥ س + ٧ ص

نرسم المستقيمات الحدية :

١) $ل_1$: س = ٠ محور الصادات
٢) $ل_2$: ص = ٠ محور السينات

٣) $ل_٣$: س + ص = ٩٠ (خط متصل) يمر بالنقطتين (٠ ، ٩٠) ، (٩٠ ، ٠)

٤) $ل_٤$: س = ٢ ص (خط متصل) يمر بالنقطتين (٠ ، ٠) ، (٢٠ ، ١٠)

٥) ∴ مجموعة حل المتباينات معا تمثلها المنطقة المظللة فى الشكل المقابل (المنطقة ؘ ب جـ

حيث ؘ (٠ ، ٠) ، ب (٩٠ ، ٠) ، جـ (٦٠ ، ٣٠)

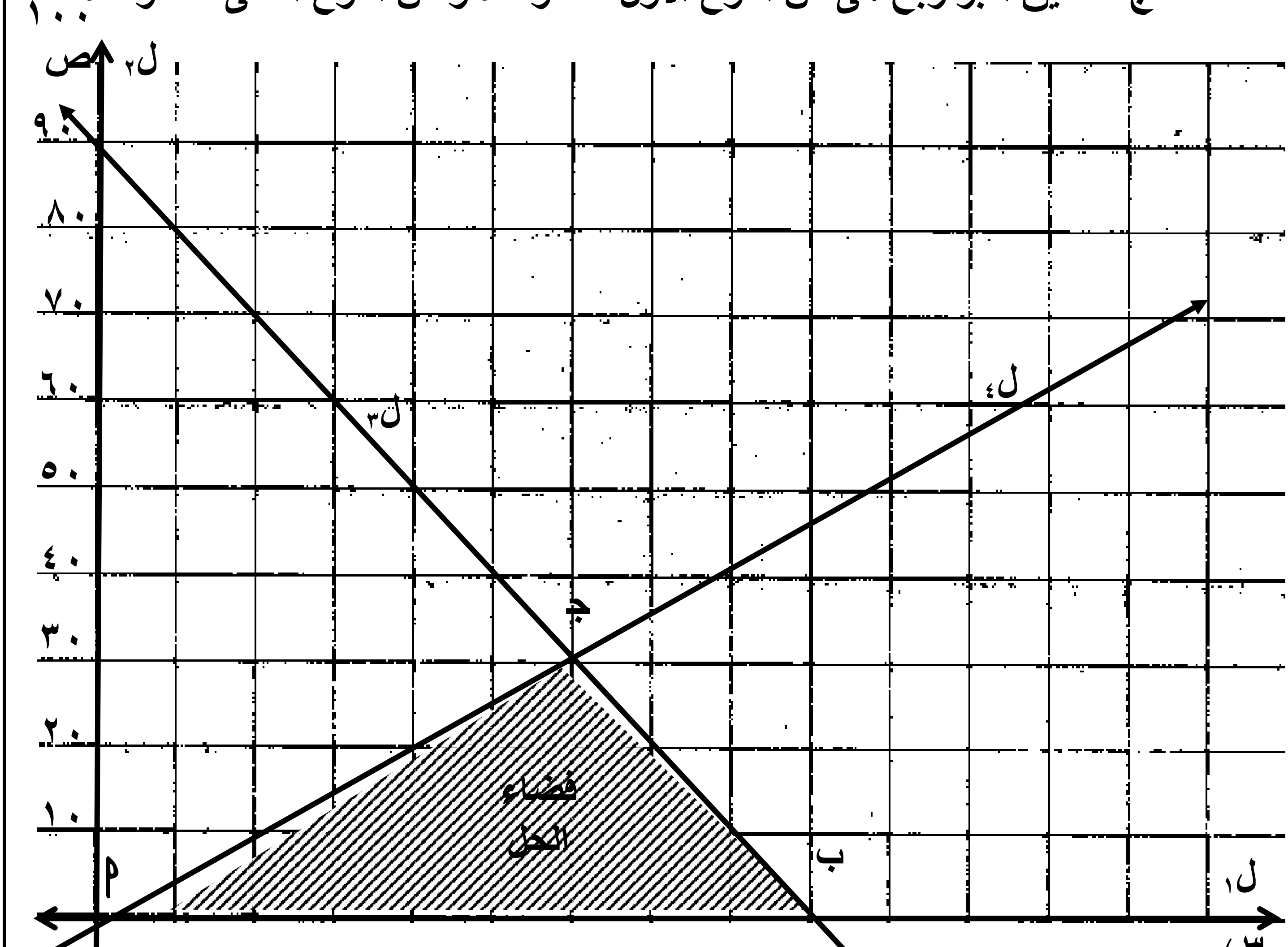
∵ دالة الهدف ر = ٥ س + ٧ ص

∴ $ر_{ؘ}$ = ٠ + ٠ = ٠

، $ر_{ب}$ = ٥ × ٩٠ + ٠ = ٤٥٠

، $ر_{جـ}$ = ٥ × ٦٠ + ٧ × ٣٠ = ٥١٠

∴ أكبر ربح هو ٥١٠ جنيها عند النقطة جـ (٦٠ ، ٣٠) و بذلك يكون عدد الوحدات التى تنتج لتحقيق أكبر ربح هى من النوع الأول ٦٠ وحدة و من النوع الثانى ٣٠ وحدة



مثال : مصنع لانتاج الحلوى لديه ٧٢ كجم من الدقيق ، ١٢٠ كجم من السكر و ينتج نوعين من الحلوى تحتاج الوحدة من النوع الأول الى ٤ كجم من الدقيق ، ١٢ كجم من السكر . كما يحتاج انتاج وحدة واحدة من النوع الثانى الى ٨ كجم من الدقيق ، ٨ كجم من السكر كما يبلغ ربح الوحدة الواحدة من النوع ٢٥ جنيها و من النوع الثانى ٤٥ جنيها ،
١- فما هى الكمية الواجب انتاجها لتحقيق أقصى ربح ممكن
٢- و ما الكمية المتبقية فى المصنع من الدقيق و السكر فى هذه الحالة.
الحل :
نفرض أن عدد الوحدات من النوع الأول = س ، عدد الواحدات من النوع الثانى = ص

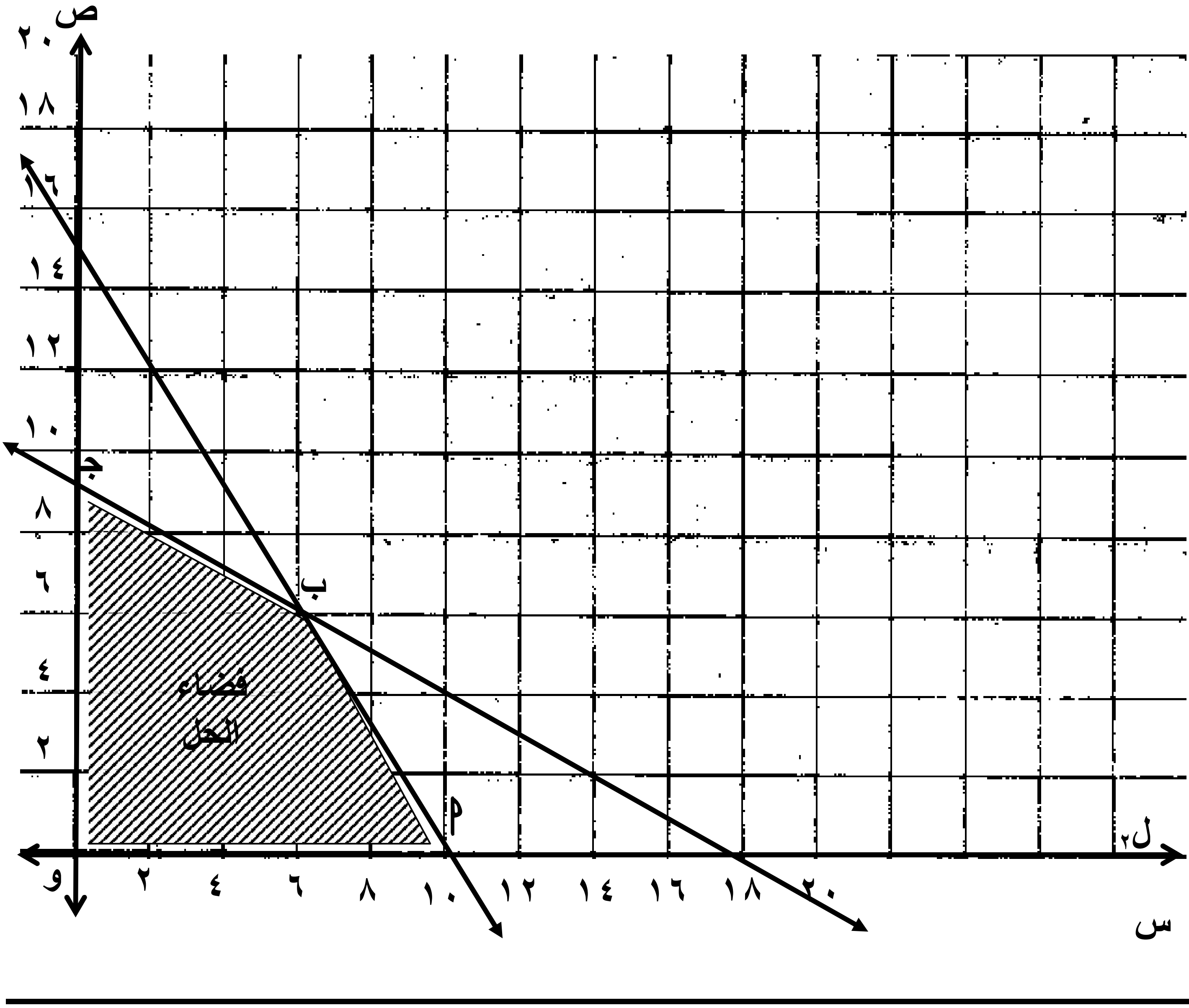
نوع الانتاج	الأول	الثانى	القيود (الشروط)
العدد	س	ص	س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠
الدقيق	٤ س	٨ ص	٤ س + ٨ ص ≤ ٧٢
السكر	١٢ س	٨ ص	١٢ س + ٨ ص ≤ ١٢٠
الربح	٢٥ س	٤٥ ص	ر = ٢٥ س + ٤٥ ص

من الجدول يمكن تبسيط المتباينات :
١) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠
٢) ٤ س + ٨ ص ≤ ٧٢ ← س + ٢ ص ≤ ١٨
٣) ١٢ + ٨ ص ≤ ١٢٠ ← ٣ س + ٢ ص ≤ ٣٠
نعين المنطقة التى تمثل مجموعة حل المتباينات برسم المستقيمات الحدية :
١) ل$_1$: س = ٠ محور الصادات ٢) ل$_2$: ص = ٠ محور السينات
٣) ل$_3$: س + ص = ١٨ (خط متصل) يمر بالنقطتين (٠ ، ٩) ، (١٨ ، ٠)
٤) ل$_4$: ٣ س + ٢ ص = ٣٠ (خط متصل) يمر بالنقطتين (٠ ، ١٥) ، (١٠ ، ٠)
٥) ∴ مجموعة حل المتباينات معا تمثلها المنطقة المظللة فى الشكل و هى المنطقة التى تحدها النقط و (٠ ، ٠) ، أ(١٠ ، ٠) ، ب (٦ ، ٦) ، جـ (٠ ، ٩) ثم بالتعويض فى دالة الهدف : ر = ٢٥ س + ٤٥ ص حيث الربح ر أكبر ما يمكن .

∴ | ر |$_{و}$ = ٠ ، | ر |$_{أ}$ = ٢٥٠ جنيها ،| ر |$_{ب}$ = ٤٢٠ جنيها ،| ر |$_{جـ}$ = ٤٠٥ جنيها

∴ عند النقطة ب (٦ ، ٦) يحقق المصنع أكبر ربح و هو ٤٢٠ جنيها و بذلك يكون عدد الواحدات المنتجة فى هذه الحالة من الدقيق نعوض فى الطرف الايمن المتباينة
٤ س + ٨ ص ≤ ٧٢ ∴ ٤ س + ٨ ص = ٤ × ٦ + ٨ × ٦ = ٢٤ + ٤٨ = ٧٢ كجم

∴ لا يتبقى من الدقيق شئ .
لتحديد الكمية المتبقية فى هذه الحالة من السكر نعوض فى الطرف الايمن المتباينة
١٢ س + ٨ ص ⩽ ١٢٠ ∴ ١٢ س + ٨ ص = ١٢ × ٦ + ٨ ×٦ = ٧٢ + ٤٨ = ١٢٠
∴ لا يتبقى من السكر شئ .



مثال : مصنع ضغير لعمل الملابس الجاهزة ينتج نوعين من الثياب و يلزم لعمل النوع الأول متران من الحرير و متر واحد من القطن ، و يلزم لعمل النوع الثانى متر من الحرير و متران من القطن و كان لدى المصنع ٧ أمتار من الحرير ، ٨ أمتار من القطن . فإذا كان ثمن بيع الثوب من النوع الأول ١٠ جنيهات و ثمن بيع الثوب من النوع الثانى ٨ جنيهات ، فما عدد الأثواب التى يجب أن ينتجها المصنع من كل نوع ليحصل على أكبر دخل ممكن ؟
هل يتبقى فى المصنع بعد هذا الإنتاج شئ من الحرير أو القطن .

الحل :

نفرض أن عدد الأثواب من النوع الأول = س ، و من النوع الثانى = ص

نوع الانتاج	الأول	الثانى	القيود (الشروط)
العدد	س	ص	س⩾ ٠ ، ص⩾ ٠
الحرير	٢س	ص	٢ س + ص ⩽ ٧
القطن	س	٢ص	س + ٢ ص ⩽ ٨
الثمن	١٠س	٨ص	ر = ١٠ س + ٨ ص

من الجدول نحصل على المتباينات :

١) س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠
٢) ٢س + ص ⩽ ٧
٣)س + ٢ ص ⩽ ٨

نعين المنطقة التى تمثل مجموعة حل المتباينات برسم المستقيمات الحدية :

١) $ل_١$: س = ٠ محور الصادات ٢) $ل_٢$: ص = ٠ محور السينات
٣) $ل_٣$: ٢س + ص = ٧ (خط متصل) يمر بالنقطتين (٠ ، ٧) ، (٣.٥ ، ٠)
٤) $ل_٤$: س + ٢ ص = ٨ (خط متصل) يمر بالنقطتين (٠ ، ٤) ، (٨ ، ٠)
٥) ∴ مجموعة حل المتباينات معا تمثلها المنطقة المظللة فى الشكل و هى المنطقة التى تحدها النقط و (٠ ، ٠) ، ﻡ(٠ ، ٤) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (٣.٥ ، ٠) ثم بالتعويض فى دالة الهدف : ر = ١٠ س + ٨ ص حيث الدخل ر أكبر ما يمكن .

∴ | ر |$_و$ = ٠ + ٠ = ٠ ، | ر |$_ﻡ$ = ١٠ × ٠ + ٨ × ٤ = ٣٢ جنيها

،| ر |$_ب$ = ١٠ × ٢ + ٨ × ٣ = ٤٤ جنيها ،| ر |$_{جـ}$ = ١٠×٣.٥ + ٨ × ٠ = ٣٥ جنيها

∴ عند النقطة ب (٢ ، ٣) اعلى دخل هو ٤٤ جنيها

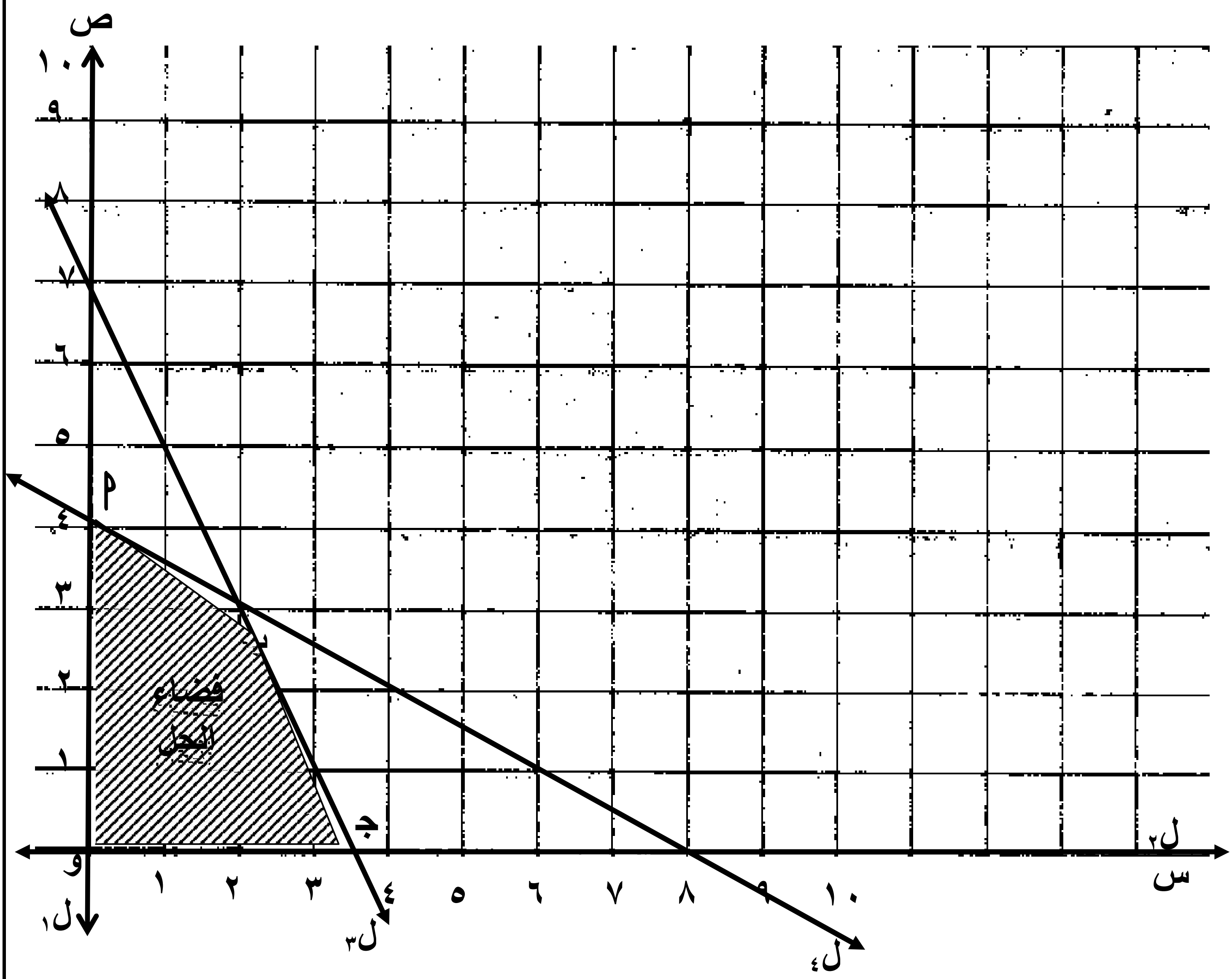
أى عند إنتاج ثوبين من النوع الأول ، ٣ أثواب من النوع الثانى ،

∵ ٢ ثوب من النوع الأول تحتاج ٤ أمتار من الحرير ، ٢ متر من القطن ، ٣ أثواب من النوع الثانى تحتاج ٣ أمتار من الحرير ، ٦ أمتار من القطن

∴ هذا الانتاج كله (٥ أثواب) يحتاج ٧ أمتار من الحرير ، ٨ أمتار من القطن

∴ لا يتبقى من الحريرو لا من القطن شئ .

التمثيل البيانى للمتباينات :



مثال : يقوم مصنع بعمل نوعين مختلفين من السبائك المكونة من خليط من الحديد و الزهر بحيث يتكون النوع الأول من وحدتيتن من الحديد ، وحدتين من الزهر و يتكون النوع الثانى من وحدة من الحديد و ثلاث وحدات من الزهر ، فإذا كانت الكمية المتاحة فى المصنع من الحديد ١٠ كجم و من الزهر ١٨ كجم و كان سعر بيع السبيكة من النوع الأول ١٥ جنيها و سعر بيع السبيكة من النوع الثانى ١٠ جنيهات ، فما عدد السبائك التى ينتجها المصنع من كل نوع ليحقق أكبر دخل ممكن ؟

الحل :

نفرض أن عدد السبائك من النوع الأول = س ، و من النوع الثانى = ص

نوع الانتاج	الأول	الثانى	القيود (الشروط)
العدد	س	ص	س⩾ ٠ ، ص⩾ ٠
الحديد	٢س	ص	٢ س + ص ⩽ ١٠
الزهر	٢س	٣ص	٢س + ٣ ص ⩽ ١٨
الربح	١٥س	١٠ص	ر = ١٥ س + ١٠ ص

من الجدول نحصل على المتباينات :

١) س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠

٢) ٢س + ص ⩽ ١٠

٤) ٢س + ٣ ص ⩽ ١٨

نعين المنطقة التى تمثل مجموعة حل المتباينات برسم المستقيمات الحدية :

١) ل١ : س = ٠ محور الصادات ٢) ل٢ : ص = ٠ محور السينات

٣) ل٣ : ٢س + ص = ١٠ (خط متصل) يمر بالنقطتين (٠ ، ١٠) ، (٥ ، ٠)

٤) ل٤ : ٢س + ٣ ص = ١٨ (خط متصل) يمر بالنقطتين (٠ ، ٦) ، (٩ ، ٠)

٥) ∴ مجموعة حل المتباينات معا تمثلها المنطقة المظللة فى الشكل و هى المنطقة التى تحدها النقط و (٠ ، ٠) ، م(٠ ، ٦) ، ب (٣ ، ٤) ، جـ (٥ ، ٠) ثم بالتعويض فى دالة الهدف : ر = ١٥ س + ١٠ ص حيث الربح ر أكبر ما يمكن .

∴ | ر |و = ٠ + ٠ = ٠ ، | ر |م = ١٥ × ٠ + ١٠ × ٦ = ٦٠ جنيها

،| ر |ب = ١٥ × ٣ + ١٠ × ٤ = ٨٥ جنيها ،| ر |جـ = ١٥×٥ + ١٠ × ٠ = ٧٥ جنيها

∴ عند النقطة ب (٣ ، ٤) يتحقق أكبر ربح هو ٨٥ جنيها

أى عند أنتاج ٣ سبائك من النوع الاول ، ٤ سبائك من النوع الثانى

مثال : سلعتان غذائيتان الأولي بها ٥ وحدات فيتامين و تعطي ٣ سعرات حرارية ـ و الثانية بها وحدتان فيتامين و تعطي ٦ سعرات حرارية ـ فإذا كان المطلوب ٢٥ وحدة فيتامين على الأقل ، ٣٩ سعر حراري على الأقل .. و كان سعر الوحدة من السلعة الأولي ٦ قروش ، سعر الوحدة من السلعة الثانية ٨ قروش فما الكمية الواجب شراؤها من كلا السلعتين لتحقيق المطلوب بأقل تكلفة .؟

الحل :

نفرض أن عدد الوحدات من السلعة الأولى = س ، عدد الواحدات من السلعة الثانية = ص

نوع الانتاج	الأول	الثانى	القيود (الشروط)
العدد	س	ص	س⩾ ٠ ، ص⩾ ٠
فيتامين	٥س	٢ص	٥ س + ٢ ص ⩾ ٢٥
سعر حرارى	٣ س	٦ ص	٣ س + ٦ ص ⩾ ٣٩
الثمن	٦ س	٨ص	ت = ٦ س + ٨ ص

من الجدول نحصل على المتباينات :

١) س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠

٢) ٥ س + ٢ ص ⩾ ٢٥

٣) ٣ س + ٦ ص ⩾ ٣٦ ⟵ س + ٢ ص ⩾ ١٣

نعين المنطقة التى تمثل مجموعة حل المتباينات برسم المستقيمات الحدية :

١) ل$_1$: س = ٠ محور الصادات ٢) ل$_2$: ص = ٠ محور السينات

٣) ل$_3$: ٥س + ٢ص = ٢٥ (خط متصل) يمر بالنقطتين (٠ ، ١٢.٥) ، (٥ ، ٠)

٤) ل$_4$: س + ٢ ص = ١٣ (خط متصل) يمر بالنقطتين (٠ ، ٦.٥) ، (١٣ ، ٠)

٥) ∴ مجموعة حل المتباينات معا تمثلها المنطقة المظللة فى الشكل ومن الرسم أو حل المعادلات جبريا) هى المنطقة التى تحدها النقط ۴(٠ ، ١٢.٥) ، ب(٣، ٥) ، جـ (١٣، ٠)

ثم بالتعويض فى دالة الهدف : ت = ٦ س + ٨ ص

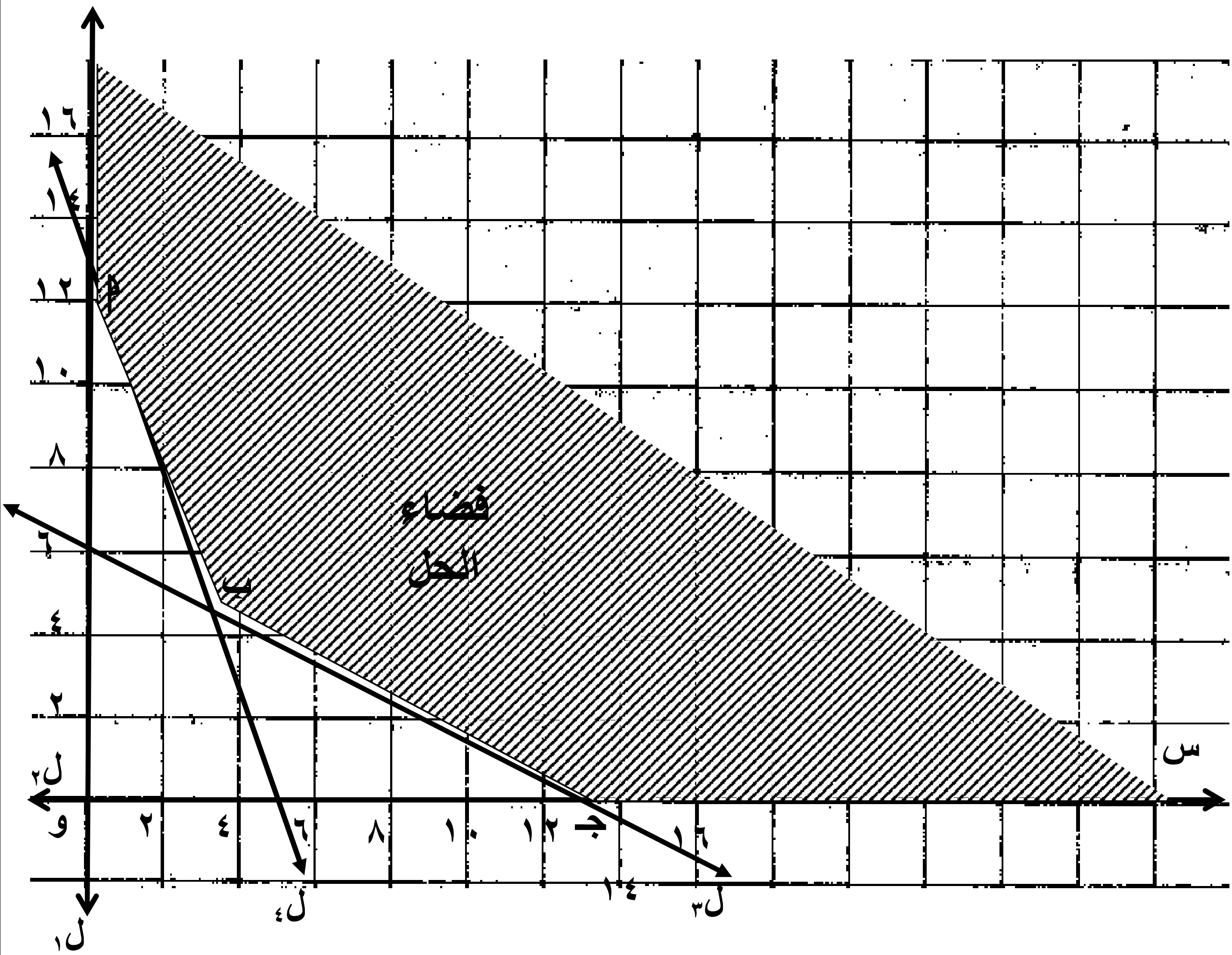
حيث التكلفة ت أقل ما يمكن .

∴ | ر |$_و$ = ٠ ، | ر |$_۴$ = ٠ + ٨ × ١٢.٥ = ١٠٠ جنيها

، | ر |$_ب$ = ٦ × ٣ + ٨ × ٥ = ٥٨ جنيها

، | ر |$_{جـ}$ = ٦ × ١٣ + ٨ × ٠ = ٧٨ جنيها

∴ عند النقطة ب (٣ ، ٥) أقل تكلفة و هو ٤٢٠ جنيها ذلك عند شراء ٣ وحدات من السلعة الاولى ، ٥ وحدات من السلعة الثانية .



مثال: يبيع أحد محال المأكولات البحرية نوعين من الأسماك المطهية أ، ب، ولاتقل الطلبات من صاحب المحل عن ٥٠ سمكة، كما أنه لايستخدم أكثر من ٣٠ سمكة من النوع (أ)، أو أكثر من ٣٥ سمكة من النوع (ب)، فإذا علمت أن ثمن شراء السمكة من النوع (أ) هو ٤ جنيهات، ومن النوع (ب) هو ٣ جنيهات، كم سمكة من كل من النوعين أ، ب يجب استخدامها لتحقيق أقل ثمن ممكن للشراء؟

الحل : ١- نفرض أن: عدد الأسماك من النوع (أ) هو س، عدد الأسماك من النوع (ب) هو ص

	النوع الأول	النوع الثاني	الحد الأقصى
	س	ص	٥٠
ثمن الشراء	٤	٣	٤س + ٣ص

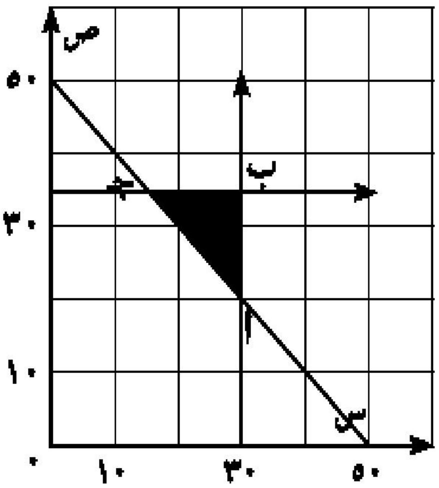
ويكون س ⩾ ٠ (سوف يشترى أسماكًا من النوع أ)

ص ⩾ ٠ (سوف يشترى أسماكًا من النوع ب)

س + ص ⩾ ٥٠ (هو يحتاج ٥٠ سمكة على الأقل)

س ⩽ ٣٠ (لايمكنه استخدام أكثر من ٣٠ سمكة من النوع أ)

ص ⩽ ٣٥ (لايمكنه استخدام أكثر من ٣٥ سمكة من النوع ب)



٢- نكتب دالة الهدف وهي: ثمن الشراء أقل ما يمكن: ر = ٤ س + ٣ ص

٣- نمثل نظام المتباينات بيانيًا كما هو موضح بالشكل المقابل.

٤- نحدد رؤوس منطقة الحل وهي:

أ (٣٠، ٢٠)، ب (٣٠، ٣٥)، جـ (١٥، ٣٥).

٥- نعوض بإحداثيات الرؤوس في دالة الهدف لتحديد أقل ثمن ممكن للشراء، كما هو موضح بالجدول التالي:

النقطة	س	ص	٤س + ٣ص	قيمة الدالة ر
أ (٣٠، ٢٠)	٣٠	٢٠	٤ (٣٠) + ٣ (٢٠)	١٨٠
ب (٣٠، ٣٥)	٣٠	٣٥	٤ (٣٠) + ٣ (٣٥)	٢٢٥
جـ (١٥، ٣٥)	١٥	٣٥	٤ (١٥) + ٣ (٣٥)	١٦٥

← أقل قيمة ممكنة لثمن الشراء

يجب على صاحب محل الأسماك شراء ١٥ سمكة من النوع (أ)، ٣٥ سمكة من النوع (ب) ليكون ثمن الشراء أقل ما يمكن.

معنا دائما فى القمة

مع تمنياتى لكم بالنجاح و التفوق

تمارين على تطبيقات حياتية على البرمجة الخطية

[١] ترزي لديه ٨٠ متر من القطن ، ١٢٠ متر من الصوف - ينتج نوعين من الثياب بحيث يلزم لعمل ثوب من النوع الأول متر من القطن ، ٣متر من الصوف ، و للنوع الثاني يلزم متران من كل من القطن ، الصوف - و كان ثمن الثوب من النوع الأول ٤٠ جنيه ، و ثمن الثوب من النوع الثاني ٢٠جنيه - أوجد عدد الثياب من كل نوع التي يجب أن ينتجها الترزي ليكون دخله اكبر ما يمكن [(٤٠ ، ٠)]

[٢] ينتج مصنع نوعين من النجف ﻡ ، ب - وكل نجفة يقوم بتجميعها كهربائي ثم يقوم عامل بدهانها بالبرونز - و يأخذ الكهربائي ساعة لتجميع النموذج ﻡ ، و ساعتين لتجميع النموذج ب أما عامل الدهان فيأخذ ٣ ساعات لدهان النموذج ﻡ ، ساعة لدهان النموذج ب و يعمل الكهربائي وعامل الدهان ٦ ساعات يومياً - فإذا كان المصنع يكسب ٢٠جنيه من بيع الوحدة من النموذج ﻡ ، ٣٠ جنيه من بيع الوحدة من النموذج ب
- فكم عدد النجف الذي يمكن إنتاجه في اليوم ليعطيه أكبر ربح ممكن [(٠، ٣)]

---

[٣] يراد وضع نوعين من الكتب علي ﻡ ، ب علي رف مكتبه طوله ١٠٢ سم ، و حمولته القصوي ٢٥ كجم . فإذا كان وزن الكتاب من كلا النوعين هو ١ كجم ، و سمك الكتاب من النوع ﻡ هو ٨سم ، و من النوع ب هو ٦ سم - أوجد عدد الكتب من كل نوع التي توضع علي الرف بحيث يكون عددها أكبر ما يمكن .

---

[٤] ينتج مصنع نوعين من قطع الغيار ﻡ ، ب فإذا كان إنتاج قطعة من النوع الأول يلزم تشغيل ماكينتين الأولي لمدة ٣ساعات و الثانية لمدة ٣ساعات و لأنتاج قطعة من النوع ب يلزم تشغيل الماكينة الأولي لمدة ٤ساعات و الثانية لمدة ساعتين - فإذا كانت الماكينة الأولي لا تعمل أكثر من ٨ساعات يومياً ، و الثانية لاتعمل أكثر من ١٢ساعة يومياً . و كان المصنع يكسب ٢٤جنيه

من كل قطعة من النوع ﻡ ، ٤٠ جنيه من كل قطعة من النوع ب . فأوجد أكبر ربح يمكن أن يحصل عليه المصنع في اليوم الواحد ؟

[٥] مصنع صغير به ١٢ آلة و ٢٠ عامل و كان المصنع ينتج نوعين من السلع فإذا كان إنتاج الوحدة من السلعة (ﻡ) تحتاج إلي آلة واحدة ، و عاملين . و إنتاج وحدة من السلعة (ب) تحتاج ٣ آلات و عاملين . وأن سعر الوحدة من السلعة ﻡ هو ١٠ جنيه ، سعر الوحدة من السلعة ب هو ٢٠ جنيه . المطلوب : تحديد الانتاج الأمثل لهذا المصنع لتحقيق أعلي إيراد ممكن .

[٦] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(أ) النقطة التي تنتمي إلى مجموعة حل المتباينات: س > ٢ ، ص > ١ ، س + ص ⩽ ٣ هي: ....

((٣، ١) ، (٢، ٣) ، (٢، ١) ، (١، ٣))

(ب) النقطة التي تكون عندها للدالة ر = ٤٠س + ٢٠ص قيمة عظمى هي: ....

((٠، ٠) ، (٠، −٤) ، (١٥، ١٠) ، (٢٥، ٠))

(ج) النقطة التي تكون عندها للدالة م = ٣٥س + ١٠ص قيمة صغرى هي: ....

((٠، ٠) ، (٠، ١٠) ، (٠، ٤٠) ، (٢٠، ١٠))

[٧] مثل كلًّا من الأنظمة التالية بيانيًّا، ثم أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لدالة الهدف تبعًا لما هو معطى.

(أ) س + ص ⩽ ٥
ص ⩽ ١
س ⩽ ٢
قيمة صغرى لدالة الهدف ر = ٢س + ٣ص

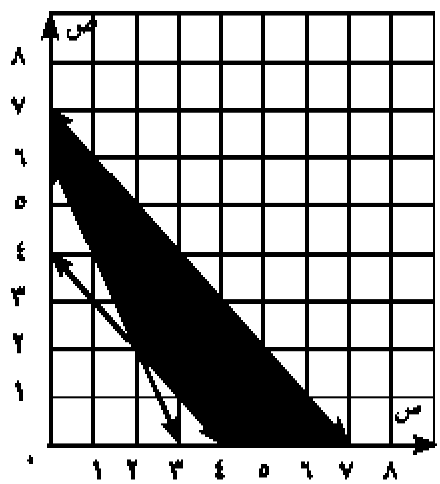
(ب) ٢س + ص ⩽ ٦
س ⩽ ١
ص ⩽ ٢
قيمة عظمى لدالة الهدف ر = ٢س + ٣ص

اعداد الاستاذ / خالد المنفلوطى ت/ ٠١٠٠٦٥٢٢١٣٨ - ٠١١٥٤٨٠٢٨١١

[٨] الربط بالصناعة: افترض أنك تُصنع وتبيع مرطبًا للجلد، وإذا كان تصنيع عبوة المرطب العادى يستلزم ٢سم٣ من الزيت، ١سم٣ من زبدة الكاكاو، وكان تصنيع عبوة المرطب من النوع الممتاز يستلزم ١سم٣ من الزيت، ٢سم٣ من زبدة الكاكاو، سوف يكون ربحك هو ١٠ جنيهات لكل عبوة من النوع العادى، ٨ جنيهات لكل عبوة من النوع الممتاز. فإذا كان لديك ٢٤ سم٣ من الزيت، ١٨ سم٣ من زبدة الكاكاو، فما عدد العبوات التى يمكنك تصنيعها من كل نوع؛ حتى تحصل على أكبر ربح ممكن، وما هذا الربح؟

[٩] الربط بالمهن: لدى أحد الخياطين ١٠ أمتار من قماش الكتان، ٦ أمتار من قماش قطنى، ويريد الخياط تفصيل نوعين من الملابس من المواد المتوافرة لديه، النوع الأول من الملابس يحتاج إلى متر واحد من الكتان، ومتر واحد من القطن، ويحقق ربحًا قدره ٣ جنيهات، بينما يحتاج النوع الثانى إلى ٢ متر من الكتان ومتر واحد من القطن، ويحقق ربحًا قدرة ٤ جنيهات. ما الكمية التى يجب عليه تفصيلها من كل نوع حتى يحقق الخياط أكبر ربح ممكن؟

[١٠] الربط بالصناعة ورشة صغيرة لعمل الأواني المعدنية، تصنع نوعين من الأوانى ا، ب، وتحتاج الآنية أ إلى ١٠ دقائق عمل من الماكينة الأولى، ١٢ دقيقة عمل من الماكينة الثانية، بينما تحتاج الآنية ب إلى ١٥ دقيقة عمل من الماكينة الأولى، ١٠ دقائق من الثانية، فإذا كان ربح الآنية (أ) ٤ جنيهات وربح الآنية (ب) هو ٥ جنيهات، فما عدد الأواني من كل نوع حتى يكون الربح أكبر ما يمكن، علمًا بأن كلًا من الماكينتين لاتعمل أكثر من ثماني ساعات؟



[١١] أوجد من الشكل المقابل قيمتى س، ص التى تجعل قيمة الدالة $ر = \frac{1}{2}$ س + ص قيمة صغرى.

اختبار الوحدة

① حل كل نظام من المتباينات الآتية بيانيًّا:

(أ) س - ٢ص < ٣ ، ٢س + ص > ٨

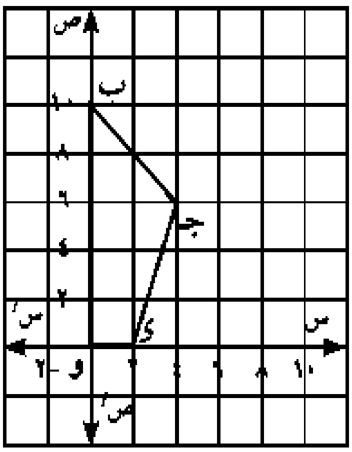
(ب) س ⩽ ٠ ، ص ⩽ ٠ ، س + ص ⩾ ٥ ، ٤س + ص ⩾ ٨

② أوجد القيمتين العظمى و الصغرى لدالة الهدف ر = ٤س + ص تحت القيود:

س + ص ⩾ ٦ ، ٢س + ص ⩾ ١٠ ، س ⩽ ٠ ، ص ⩽ ٠

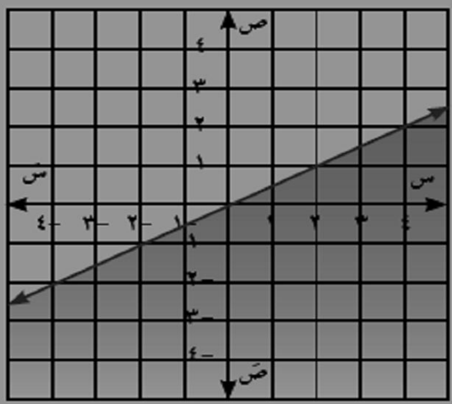
③ **الربط بالصحة:** يحرق سامى ٤ سعر حرارى/ دقيقة عند ممارسة رياضة المشى سيرًا على الأقدام، ١٠ سعر حرارى/دقيقة عند ممارسة رياضة الجرى، يمشى سامى ما بين ١٠، ٢٠ دقيقة يوميًّا، و يجرى ما بين ٣٠، ٤٥ دقيقة يوميًّا، ولا يستغرق أكثر من ساعة يوميًّا فى ممارسة كل من المشى أو الجرى، ما الوقت الذى يجب أن يستغرقه سامى فى كل نشاط؛ ليحرق أكبر قدر ممكن من السعرات الحرارية؟

④ **من الشكل المقابل:** أوجد قيمتى س، ص والتي تجعل دالة الهدف ر = ٢س + ٣ص أكبر ما يمكن ثم أوجد هذه القيمة.



⑤ **الربط بالصناعة:** تنتج إحدى الورش الصغيرة المكتبى نوعين من كراسى المكتب إحداهما من الخشب الزان، والآخر من الخشب الأبيض، و يلزم لإنتاج كل منهما تشغيل نوعين من الماكينات أ، ب، فإذا كان إنتاج الكرسى الزان يقتضى تشغيل الماكينة أ لمدة ثلاث ساعات، والماكينة ب لمدة ساعتين، و إنتاج الكرسى من الخشب الأبيض يقتضى تشغيل الماكينة أ لمدة ساعتين والماكينة ب لمدة ٣ ساعات، وكانت الورشة تربح ٢٠ جنيهًا فى الكرسى من الخشب الزان، ١٢ جنيهًا فى الكرسى من الخشب الأبيض. فأوجد عدد الكراسى من كل نوع، والتي ينبغى على الورشة إنتاجها يوميًّا؛ حتى تحقق أكبر ربح ممكن، علمًا بأن الورشة لاتعمل أكثر من ١٥ ساعة يوميًّا.

اختبار تراكمي



① **اختيار من متعدد:**

اختر المتباينة التى تمثل المنطقة الملونة حلًّا لها:

أ) ص ⩽ $\frac{١}{٢}$ س ب) ص < $\frac{١}{٢}$ س

ج) ص ⩾ $\frac{١}{٢}$ س د) ص > $\frac{١}{٢}$ س

② **صواب أم خطأ:**

هل الجملة التالية صحيحة أم خطأ. فسر إجابتك"النظام المكون من متباينتين خطيتين إما أن يكون ليس له حل، أو أن يكون له عدد لانهائي من الحلول".

③ مثل مجموعة حل كل متباينة ممايلى بيانيًا:

أ) س ⩽ -٣

ب) س - ٣ ص ⩽ ٦

④ حل كل نظام من المتباينات الخطية التالية بيانيًا:

أ) ٣ ص > ٤ س ، ٢س -٣ص > -٦

ب) س + ص >٦ ، ص < - ٥س + ١٢ ، ص < ٥ س + ١٢

⑤ أوجد القيمة العظمى للدالة ر = ٢ س + ص تحت القيود:

س ⩽ ٠ ، ص ⩽ ٠ ، ٢س + ٣ص ⩾ ١٨ ، - ٤س + ص ⩽ -٨.

⑥ مثل مجموعة حل كل من المتباينات التالية بيانيًا:

أ) س + ص ⩽ ٢ ب) س + ٣ ص ⩾ ٦ ج) $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{٣}{٢}$ ص ⩽ $\frac{٣}{٤}$

د) ٤ ص > ٦ س +٢ هـ) ٢ س + ٣ ص > ٦ و) ٤ س - ٢ ص ⩽ ٨

⑦ حل كل نظام من المتباينات الخطية التالية بيانيًا:

أ) ص ⩽ ٢ س -١
س ⩽ ٢

ب) ٣ س + ٢ ص ⩾ ١٢
س - ص ⩾ ٣

ج) ص > ٤ س -١
ص ⩾ - س +٤

د) س ⩽ ٠
ص⩽ ٠
س + ٢ص > ٤
٤س + ص > ٩

هـ) س ⩽ ٠
ص ⩽ ٠
ص - س⩾١
٤س + ٣ص ⩾ ١٢

و) س ⩽ ٠
ص⩽ ٠
س + ص > ٨
س + ٢ص > ١١

اختبار تراكمي

⑧ **النشاط اللاصفي** يريد صاحب متجر للأدوات الرياضية شراء نوعين من كرات لعبة كرة القدم ثمن الكرة الواحدة من النوع (أ) ٣٠ جنيهًا، وثمن الكرة الواحدة من النوع (ب) ٦٠ جنيهًا إذا علمت أن صاحب المتجر لايريد دفع أكثر من ١٨٠٠ جنيه لشراء الكرات، كما أن المكان المخصص لعرض الكرات فى المتجر لايسمح بعرض أكثر من ٥٠ كرة، فكم كرة من كل نوع يستطيع صاحب المتجر شراءها وعرضها.

⑨ ينتج مصنع نوعين من المفارش المطرزة، يحتاج النوع الأول مترًا واحدًا من القماش و أربعة ساعات عمل ويباع بمكسب ١٢ جنيهًا، والنوع الثاني يحتاج ١,٥ متر من القماش وساعتين عمل ويباع بمكسب ٨ جنيهات، فإذا علمت أن كمية القماش المتاحة للمصنع هى ١٥٠ مترًا، وساعات العمل المتاحة ٤٥ ساعة عمل، وأن المصنع يمكنه بيع كل إنتاجه من المفارش، فأوجد عدد المفارش من كل نوع والتي يجب أن ينتجها المصنع؛ لكى يحقق أقصى ربح.

⑩ **النشاط اللاصفي** أقامت إحدى شركات السياحة جسرًا جويًّا لنقل السائحين. ذلك لنقل ١٦٠٠ سائح، ٩٠ طنًّا من الأمتعة بأقل تكلفة وكان المتاح نوعين من الطائرات ا، ب وكان عدد الطائرات المتاحة من النوع ا، ١٢ طائرة، وعدد الطائرات المتاحة من النوع ب ٩ طائرات وكانت الحمولة كاملة للطائرة من النوع ا ٢٠٠ شخص، ٦ أطنان من الأمتعة، والحمولة الكاملة للطائرة من النوع ب ١٠٠ شخص، ١٥ طنًّا من الأمتعة، وكان إيجار الطائرة من النوع ا هو ٣٢٠٠٠٠ جنيه ومن النوع ب هو ١٥٠٠٠٠ جنيه، فكم طائرة من كل نوع يمكن للشركة استئجارها؟

⑪ يقوم مصنع بعمل نوعين مختلفين من السبائك المكونة من خليط من الحديد والزهر، بحيث يتكون النوع الأول من وحدتين من الحديد ووحدتين من الزهر، ويتكون النوع الثاني من وحدة من الحديد وثلاث وحدات من الزهر، فإذا كانت الكمية المتاحة فى المصنع من الحديد ١٠ كجم ومن الزهر ١٨ كجم وكان سعر بيع السبيكة من النوع الأول ١٥ جنيهًا وسعر بيع السبيكة من النوع الثاني ١٠ جنيهات. فما عدد السبائك التى ينتجها المصنع من كل نوع؛ ليحقق أكبر دخل ممكن؟

هل تحتاج لمساعدة إضافية؟

إن لم تستطع حل أى من الأسئلة السابقة استعن بالجدول التالي:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
رقم الدرس	٢-١	٢-٢	٢-١	٢-٢	٢-٢	٢-٢	٢-٢	٢-٣	٢-٣	٢-٣	٢-٣