مذكرة الجبـــــر

للصف الثالث الاعدادى

الفصل الدراسى الثانى

اعداد

أ/ رفعت سعيد عبد المجيد

معلم أول (أ) رياضيات بمعهد شعشاع الأزهرى

حل معادلتين فى متغيرين من الدرجة الاولى بيانيا

① أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين بيانياً

٥ س + ٢ ص = ٩ ، ٣ س + ٤ ص = ١١

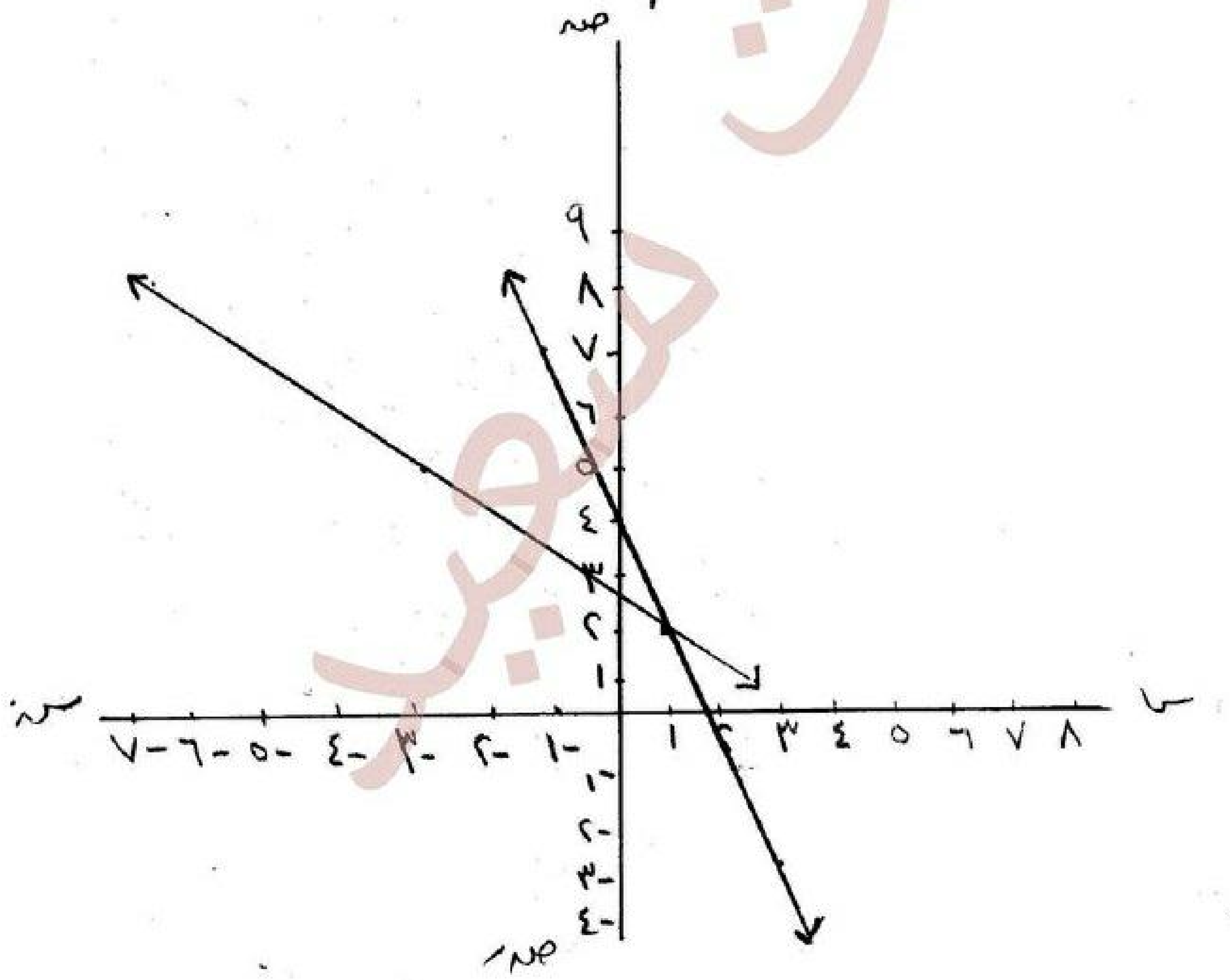
الحل

$$ص = \frac{٩ - ٥ س}{٢}$$

س	١	−١	٣
ص	٢	٧	−٣

$$ص = \frac{١١ - ٣ س}{٤}$$

س	١	−٣	−٧
ص	٢	٥	٨



من الرسم نجد أن مجموعة الحل

هى {(١ ، ٢)}

② أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين بيانيا

٥ س + ٦ ص = ١٦ ، ٤ س + ٧ ص = ١٥

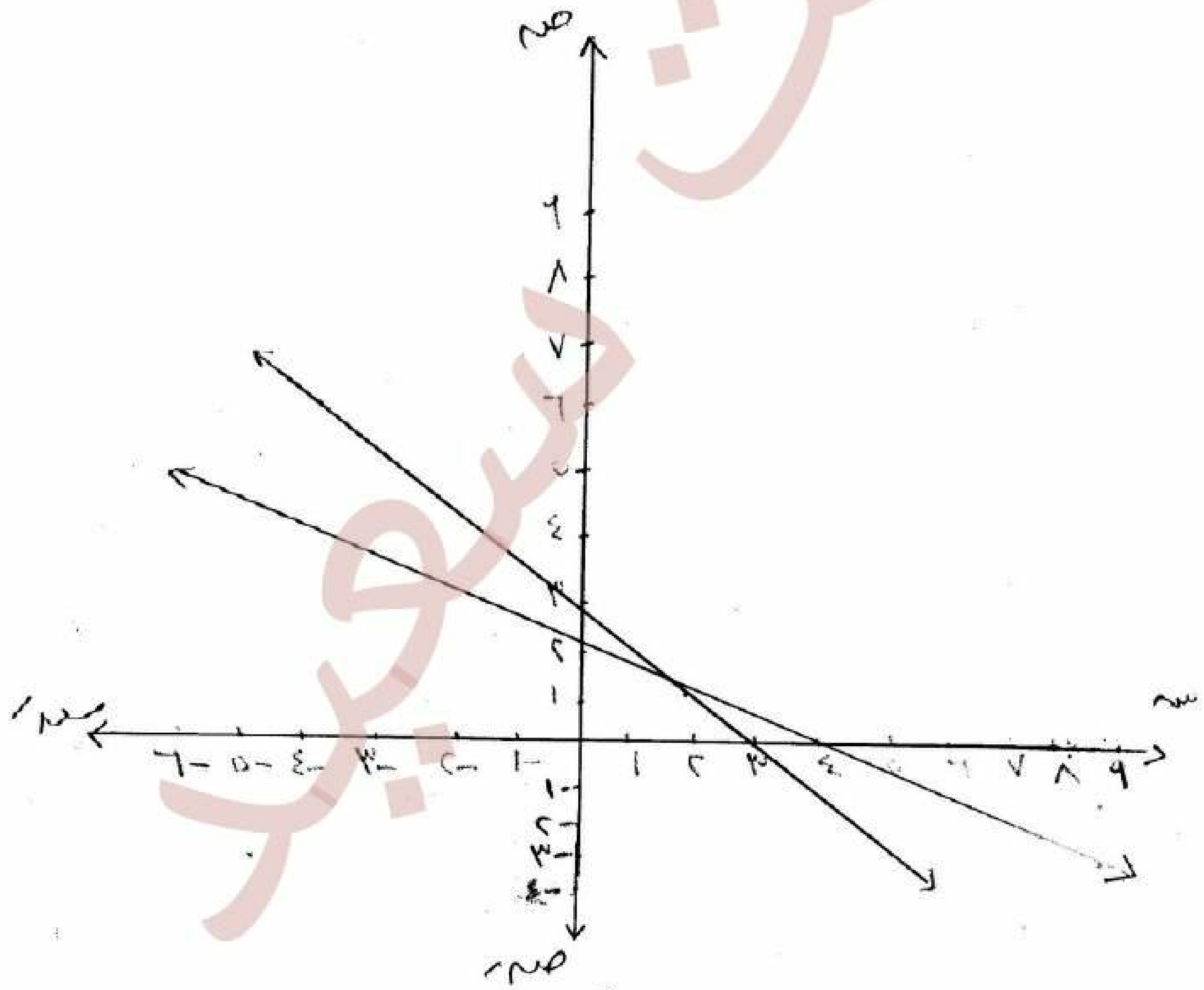
الحل

ص = (١٦ − ٥ س) ÷ ٦

س	٢	−٤	٨
ص	١	٦	−٤

ص = (١٥ − ٤ س) ÷ ٧

س	٢	−٥	٩
ص	١	٥	−٣



من الرسم نجد أن مجموعة الحل

هي {(٢ ، ١)}

حل معادلتين من الدرجة الاولى فى متغيرين جبريا

① أوجد مجموعة حل المعادلتين الاتيتين جبرياً

٧س + ٣ص = ٤ ، ٣س + ٢ص = ١

الحل

٧س + ٣ص = ٤ ← [١]

٣س + ٢ص = ١ ← [٢]

بضرب المعادلة [١] فى ٢ وضرب المعادلة [٢] فى ٣

١٤س + ٦ص = ٨ ← [٣]

٩س + ٦ص = ٣ ← [٤]

بطرح المعادلة [٤] من المعادلة [٣]

٥س = ٥

∴ $\boxed{\text{س} = ١}$

بالتعويض عن قيمة س فى المعادلة [١]

٧ + ٣ص = ٤

٣ص = ٤ − ٧

∴ $\boxed{\text{ص} = -١}$

∴ مجموعة الحل = {(١ ، −١)}

---

② أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين جبرياً

٤س + ٥ص = ١٣ ، ٢س + ٣ص = ٩

الحل

٤س + ٥ص = ١٣ ← $\boxed{١}$

٢س + ٣ص = ٩ ← $\boxed{٢}$

بضرب المعادلة $\boxed{٢}$ في ٢

٤س + ٦ص = ١٨ ← $\boxed{٣}$

بطرح المعادلة $\boxed{١}$ من المعادلة $\boxed{٣}$

$\boxed{\therefore \text{ص} = ٥}$

بالتعويض عن قيمة ص في المعادلة $\boxed{٢}$

٢س + ٣(٥) = ٩

٢س + ١٥ = ٩

٢س = −٦

$\boxed{\therefore \text{س} = -٣}$

∴ مجموعة الحل = {(−٣ ، ٥)}

---

(٣) أوجد قيمة كل من أ ، ب في كل مما يأتي

أس + ب ص = ٥ ، ٣أس + ب ص = ١٧

علماً بأن (٣ ، −١) حل للمعادلتين

الحل

٣أ − ب = ٥ ← $\boxed{١}$

٩أ − ب = ١٧ ← $\boxed{٢}$

بطرح المعادلة $\boxed{١}$ من المعادلة $\boxed{٢}$

٦أ = ١٢

$\boxed{\therefore \text{أ} = ٢}$

بالتعويض عن قيمة أ في المعادلة ١

٦ − ب = ٥

∴ ب = ١

---

④ اذا كانت د(س) = أس² + ب وكانت د(١) = ٥ ، د(٢) = ١١ أوجد قيمتى أ ، ب

الحل

∵ د(١) = ٥

أ + ب = ٥ ← ١

∵ د(٢) = ١١

٤أ + ب = ١١ ← ٢

بطرح المعادلة ٢ من المعادلة ١

−٣أ = −٦

أ = ٢

بالتعويض عن قيمة أ في المعادلة ١

٢ + ب = ٥

ب = ٣

---

⑤ أوجد قيمة أ ، ب علماً بأن (١ ، ٢) حل للمعادلتين

٢أس + ب ص = ١ ، أس + ب ص = −٥

الحل

٢أ + ٢ب = ١ ← ١

أ + ٢ب = −٥ ← ٢

بطرح المعادلة ① من المعادلة ②

-أ = -٦

$\boxed{\text{أ} = ٦}$

بالتعويض في المعادلة ①

٢(٦) + ٢ب = ١

١٢ + ٢ب = ١

$\boxed{\text{ب} = \frac{-١١}{٢}}$

---

⑥ أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين جبرياً

$\frac{\text{س}}{٦} + \frac{\text{ص}}{٣} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{\text{س}}{٢} + \frac{٢\text{ص}}{٣} = ١$

الحل

$\frac{\text{س}}{٦} + \frac{\text{ص}}{٣} = \frac{١}{٣} \leftarrow \boxed{١}$

$\frac{\text{س}}{٢} + \frac{٢\text{ص}}{٣} = ١ \leftarrow \boxed{٢}$

بضرب المعادلتين في (٦)

س + ٢ص = ٢ ← ③

٣س + ٤ص = ٦ ← ④

بضرب المعادلة ③ في -٢

-٢س - ٤ص = -٤ ← ⑤

بجمع المعادلتين ⑤ ، ④

$\boxed{\text{س} = ٢}$

بالتعويض في ③ ∴ ص = ٠

∴ مجموعة الحل = {(٢ ، ٠)}

تطبيقات على حل معادلتين من الدرجة الاولى فى متغيرين

[١] عددان نسبيان مجموعهما ٤٢ والفرق بينهما ١٠ أوجد العددين ؟

الحل

نفرض أن العددين هما س ، ص

س + ص = ٤٢ ← [١]

س − ص = ١٠ ← [٢]

بجمع المعادلتين [١] ، [٢]

٢س = ٥٢

$\boxed{\text{س} = ٢٦}$

بالتعويض عن س فى المعادلة [١]

٢٦ + ص = ٤٢

$\boxed{\text{ص} = ١٦}$

∴ العددان هما ٢٦ ، ١٦

---

[٢] عددان صحيحان مجموعهما ٥٤ ، ضعف العدد الاول يساوى العدد الثانى فأوجد العددين ؟

الحل

نفرض أن العددين هما س ، ص

س + ص = ٥٤ ← [١]

ص = ٢س ← [٢]

بالتعويض من [٢] فى [١]

$$س + ٢س = ٥٤$$

$$\boxed{س = ١٨}$$

بالتعويض في $\boxed{٢}$

$$\boxed{ص = ٣٦}$$

∴ العددان هما ١٨ ، ٣٦

$\boxed{٣}$ مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٤ سم فإذا كان محيط المستطيل ٢٨ سم أوجد مساحة المستطيل ؟

الحل

نفرض أن الطول = س سم ، العرض = ص سم

$$س - ص = ٤ \longrightarrow (١)$$

$$٢(س + ص) = ٢٨$$

$$س + ص = ١٤ \longrightarrow (٢)$$

بجمع المعادلتين (١) ، (٢)

$$٢س = ١٨$$

$$\boxed{س = ٩}$$

بالتعويض في (١)

$$\boxed{ص = ٥}$$

∴ الطول = ٩ سم ، العرض = ٥ سم

∴ المساحة = ٤٥ سم٢

٤ زاويتان متكاملتان ضعف قياس أكبرهما يساوي سبعة أمثال قياس الصغرى أوجد قياس كل زاوية ؟

الحل

نفرض أن قياس الزاوية الكبرى = س

، قياس الزاوية الصغرى = ص

س + ص = ١٨٠ ← (١)

٢ س - ٧ ص = ٠ ← (٢)

بضرب المعادلة ① في ٢ والطرح

٩ ص = ٣٦٠

∴ $\boxed{\text{ص} = ٤٠}$

بالتعويض في المعادلة (١)

س + ٤٠ = ١٨٠

$\boxed{\text{س} = ١٤٠}$

∴ قياسا الزاويتين ٤٠ ، ١٤٠

---

٥ زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية الفرق بين قياسيهما ٥٠ أوجد قياس كل زاوية ؟

الحل

نفرض أن قياس الزاويتين س ، ص

س + ص = ٩٠ ← (١)

س - ص = ٥٠ ← (٢)

بجمع المعادلتين ① ، ② نجد أن

٢س = ١٤٠

$\boxed{\text{س} = ٧٠}$

بالتعويض في (١)

$\boxed{\text{ص} = ٢٠}$

∴ قياسا الزاويتين ٧٠ ، ٢٠

---

٦ عددان نسبيان مجموعهما ١٤ وضعف أكبرهما يزيد عن ثلاثة أمثال أصغرهما بمقدار ٣ أوجد العددين ؟

الحل

نفرض أن العدد الأكبر س

، العدد الأصغر ص

س + ص = ١٤ ⟵ (١)

٢س − ٣ص = ٣ ⟵ (٢)

بضرب المعادلة (١) في ٢ ثم الطرح

٢س + ٢ص = ٢٨

∴ ٥ص = ٢٥

$\boxed{\text{ص} = ٥}$

بالتعويض في ① ⇐ $\boxed{\text{س} = ٩}$

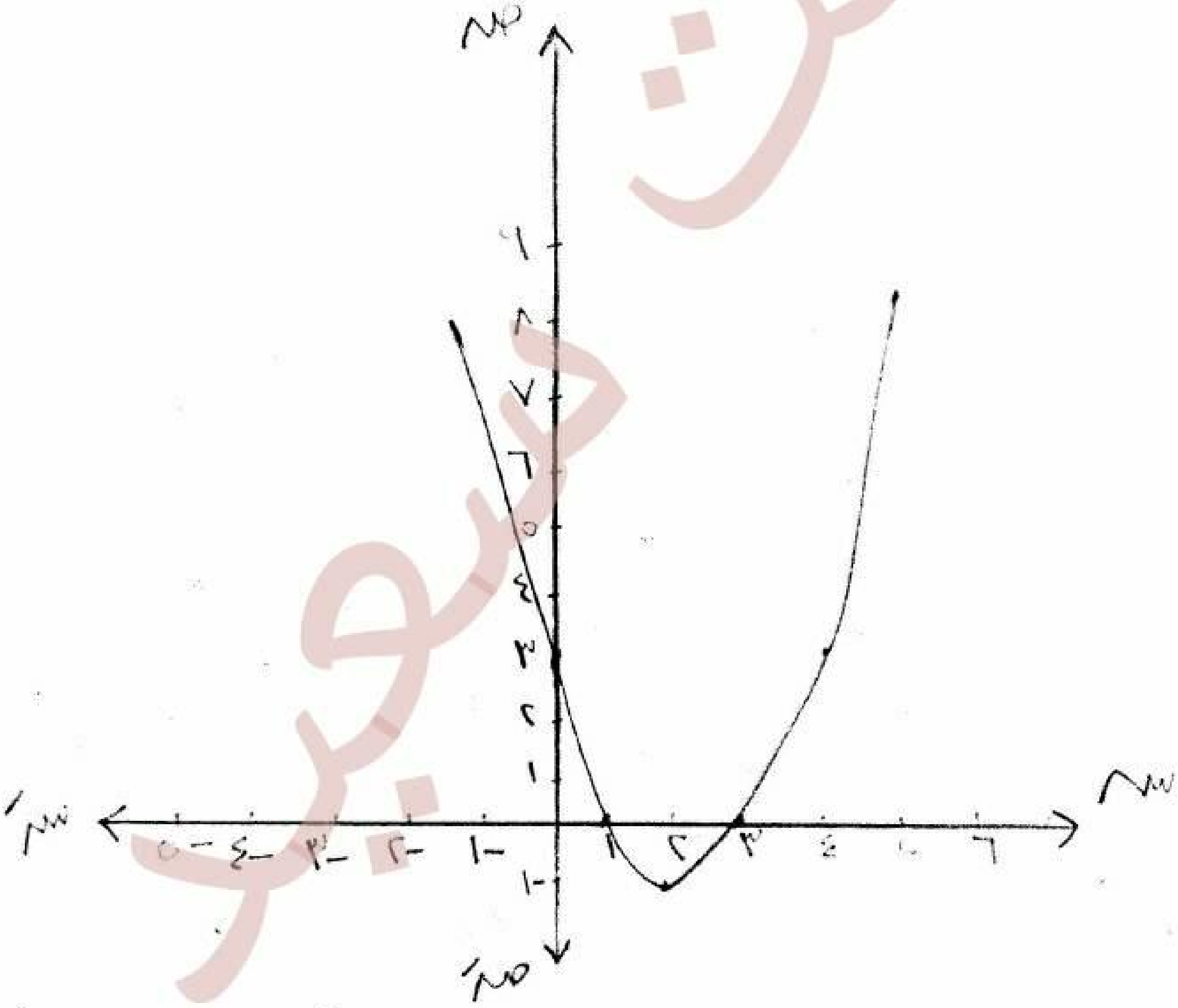
∴ العدد الأكبر = ٩ ، الأصغر = ٥

حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد جبرياً وبيانياً

[1] أوجد بيانياً مجموعة حل المعادلة $س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠$
مستعيناً بالفترة [-١ ، ٥]

الحل

س	٥	٤	٣	٢	١	٠	-١
ص	٨	٣	٠	-١	٠	٣	٨

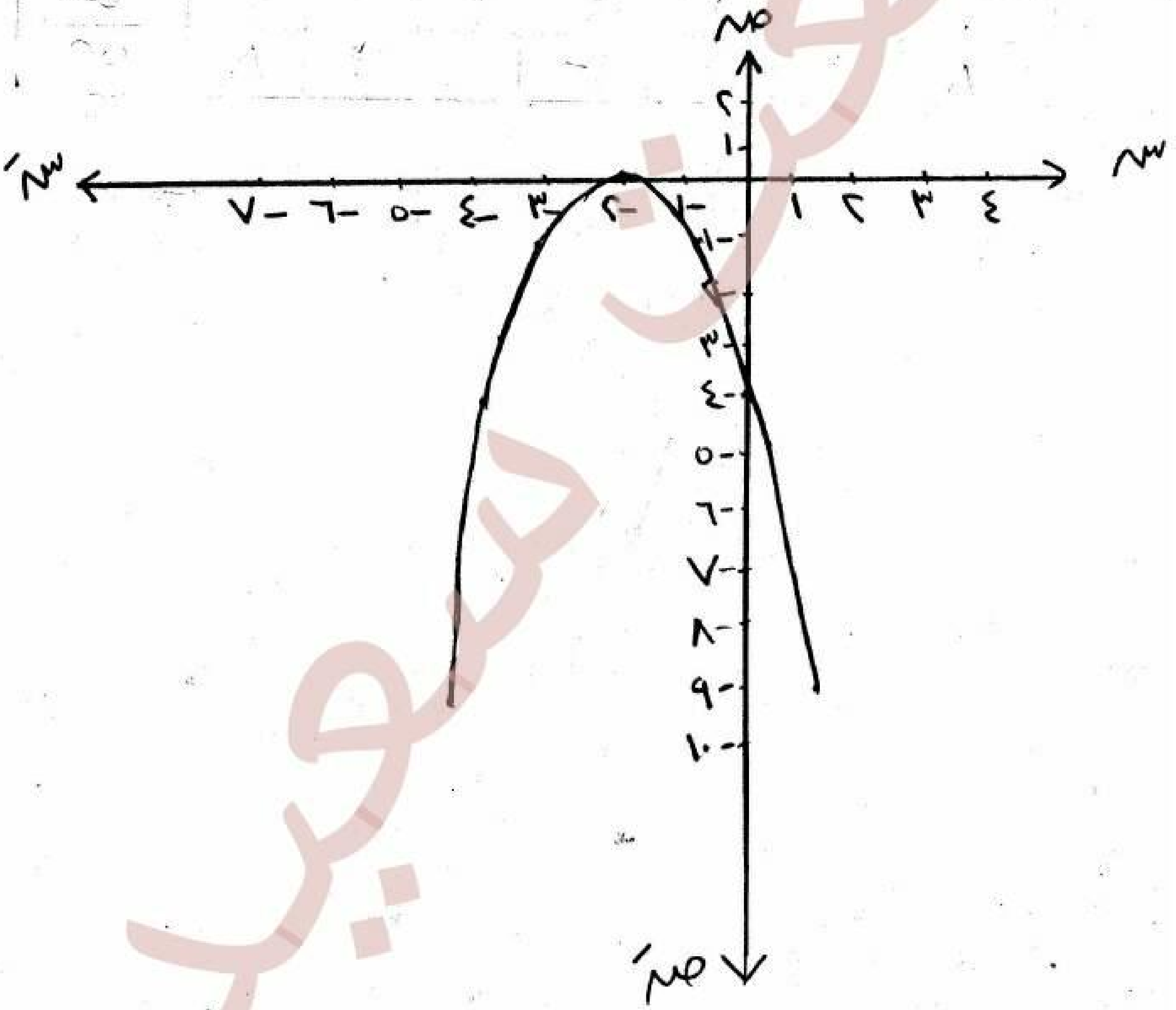


من الرسم نجد مجموعة الحل = {١ ، ٣}

٢ أوجد بيانيا مجموعة حل المعادلة $-س^2 - ٤س - ٤ = ٠$ مستعينا بالفترة $[-٥ ، ١]$

الحل

س	-٥	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١
ص	-٩	-٤	-١	٠	-١	-٤	-٩



من الرسم نجد أن مجموعة الحل = $\{-٢\}$

حل معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد بالقانون العام

① أوجد في ح مجموعة حل المعادلة $\text{س}^2 + 2\text{س} - 6 = 0$ مقربا الناتج لثلاثة أرقام عشرية

الحل

$\text{أ} = 1 \ ، \ \text{ب} = 2 \ ، \ \text{جـ} = -6$

$$\therefore \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{أجـ}}}{2\text{أ}}$$

$$\text{س} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 24}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$\text{س} = 1{,}646$ أو $\text{س} = -3{,}646$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{1{,}646 \ ، \ -3{,}646\}$

---

② أوجد في ح مجموعة حل المعادلة

$\text{س}(5\text{س} + 2) = 4$ علماً بأن $\sqrt{21} \simeq 4{,}58$

الحل

$5\text{س}^2 + 2\text{س} - 4 = 0$

$\text{أ} = 5 \ ، \ \text{ب} = 2 \ ، \ \text{جـ} = -4$

$$\text{س} = \frac{-2 \pm \sqrt{84}}{10} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{21}}{10}$$

$\because \sqrt{21} \simeq 4{,}58$

$\therefore \text{س} = 0{,}716$ أو $\text{س} = -1{,}116$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{0{,}716 \ ، \ -1{,}116\}$

حل معادلتين في متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية

(١) أوجد في ح×ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين

ص − س = ٣

س² + س ص = ٥

الحل

من المعادلة الأولى

ص = ٣ + س

بالتعويض عن ص في المعادلة الثانية

س² + س (٣ + س) = ٥

س² + ٣س + س² − ٥ = ٠

٢س² + ٣س − ٥ = ٠

(٢س + ٥)(س − ١) = ٠

إما ٢س + ٥ = ٠ ومنها س = −٥/٢ ⟸ ص = ١/٢

أو س − ١ = ٠ ومنها س = ١ ⟸ ص = ٤

(٢) عددان حقيقيان مجموعهما ٧ والفرق بين مربعيهما ٧ أوجد العددين؟

الحل

نفرض أن العدد الأكبر س ، الأصغر ص

س + ص = ٧ ⟵ (١)

س² − ص² = ٧ ⟵ (٢)

من (١)

من المعادلة (١) نجد أن س = ٧ − ص

بالتعويض في المعادلة (٢)

(٧ − ص)^{٢} − ص^{٢} = ٧

٤٩ − ١٤ص + ص^{٢} − ص^{٢} = ٧

−١٤ ص = −٤٢

$\boxed{\text{ص} = ٣}$

بالتعويض في المعادلة (١)

$\boxed{\text{س} = ٤}$

∴ العددان هما ٣، ٤

---

(٣) عددان حقيقيان حاصل ضربهما ٢ وإذا أضيف أكبرهما إلى ضعف أصغرهما كان الناتج ٤ أوجد العددين ؟

الحل نفرض العدد الأصغر س، الأكبر ص

س ص = ٢ ⟵ (١)

ص + ٢س = ٤ ⟵ (٢)

من المعادلة (٢) نجد أن ص = ٤ − ٢س

بالتعويض في المعادلة (١)

س (٤ − ٢س) = ٢

٢س^{٢} − ٤س + ٢ = ٠

س^{٢} − ٢س + ١ = ٠

(س − ١)^{٢} = ٠ ⟸ س = ١

بالتعويض في المعادلة (١) ⟸ ص = ٢

∴ العددان هما ١، ٢

مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود

① اثبت أن مجموعة أصفار الدالة ل(س) = س³ - ٥س² هي نفسها مجموعة أصفار الدالة د(س) = س³ - ١٠س² + ٢٥س

الحل

ل(س) = س² (س - ٥)

∴ ص(ل) = {٠ ، ٥}

د(س) = س (س - ٥)²

ص(د) = {٠ ، ٥}

∴ ص(ل) = ص(د)

---

② إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د حيث د(س) = أ س² + ب س + ١٠ هي {٣ ، ٥}

أوجد قيمة أ ، ب

الحل

∵ د(٣) = ٠

٩أ + ٣ب + ١٠ = ٠ ← (١)

∵ د(٥) = ٠

٢٥أ + ٥ب + ١٠ = ٠ ← (٢)

بحل المعادلتين ① ، ②

نجد أن :

أ = ١

ب = -٨

دالة الكسر الجبري

أوجد المجال المشترك لكل مما

1) $ن_1(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ - ٩}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^٢ + ٥}{س^٢ - ٥س + ٦}$

2) $ن_1(س) = \frac{س}{س^٢ - ٤}$ ، $ن_2(س) = \frac{٣}{س - ٢}$

الحل

1) $ن_1(س) = \frac{س + ٣}{(س - ٣)(س + ٣)}$

مجال $ن_1$ = ح − {٣ ، −٣}

$ن_2(س) = \frac{س^٢ + ٥}{(س - ٢)(س - ٣)}$

مجال $ن_2$ = ح − {٢ ، ٣}

∴ المجال المشترك = ح − {٣ ، −٣ ، ٢}

2) $ن_1(س) = \frac{س}{(س + ٢)(س - ٢)}$

مجال $ن_1$ = ح − {٢ ، −٢}

مجال $ن_2$ = ح − {٢}

∴ المجال المشترك = ح − {−٢ ، ٢}

تساوي كسرين جبريين

إذا كان
$$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 + 3\text{س}}{\text{س}^2 - 3\text{س}}$$

$$\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 + 10\text{س} + 21}{\text{س}^2 + 4\text{س} - 21}$$

اثبت أن $\text{ن}_1(\text{س}) = \text{ن}_2(\text{س})$ لجميع قيم س التي تنتمي إلى المجال المشترك وأوجد هذا المجال

الحل

$$\text{ن}_1(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س}+3)}{\text{س}(\text{س}-3)} = \frac{\text{س}+3}{\text{س}-3}$$

مجال $\text{ن}_1 = \text{ح} - \{0 ، 3\}$

$$\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{(\text{س}+7)(\text{س}+3)}{(\text{س}+7)(\text{س}-3)}$$

$$\text{ن}_2(\text{س}) = \frac{\text{س}+3}{\text{س}-3}$$

مجال $\text{ن}_2 = \text{ح} - \{-7 ، 3\}$

$\therefore$ $\text{ن}_1(\text{س}) = \text{ن}_2(\text{س})$ لجميع قيم س التي تنتمي للمجال المشترك للدالتين ن_1 ، ن_2 وهو $\text{ح} - \{0 ، 3 ، -7\}$

جمع وطرح الكسور الجبرية

(١) أوجد ن(س) في أبسط صورة مبيناً المجال حيث

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 + ٣\text{س}}{\text{س}^2 + ٤\text{س} + ٣} + \frac{\text{س} - ٥}{\text{س}^2 - ٤\text{س} - ٥}$$

الحل

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س}+٣)}{(\text{س}+٣)(\text{س}+١)} + \frac{\text{س}-٥}{(\text{س}-٥)(\text{س}+١)}$$

مجال ن $= \text{ح} - \{-٣ ، ٥ ، -١\}$

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}+١} + \frac{١}{\text{س}+١}$$

$$= \frac{\text{س}+١}{\text{س}+١} = ١$$

---

(٢) أوجد ن(س) في أبسط صورة مبيناً المجال حيث

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ١}{\text{س}^2 - \text{س}} - \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^2 + ٦ - ٥\text{س}}$$

الحل

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}-١}{\text{س}(\text{س}-١)} - \frac{\text{س}-٣}{(\text{س}-٣)(\text{س}-٢)}$$

مجال ن $= \text{ح} - \{١ ، ٣ ، ٠ ، ٢\}$

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}-٢}$$

$$= \frac{-٢}{\text{س}(\text{س}-٢)}$$

ضرب وقسمة الكسور الجبرية

① أوجد $ن(س)$ في أبسط صورة مبيناً المجال

$$ن(س) = \frac{س^2 + 5س}{س^2 + س - 6} \times \frac{س^2 - 7س + 10}{س^2 - 25}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{س(س+5)}{(س-2)(س+3)} \times \frac{(س-2)(س-5)}{(س-5)(س+5)}$$

مجال $ن = \mathbb{R} - \{-3 ، 2 ، 5 ، -5\}$

$$ن(س) = \frac{س}{س+3}$$

---

② أوجد $ن(س)$ في أبسط صورة مبيناً المجال

$$ن(س) = \frac{س^2 - 7س + 10}{س^2 - 4س - 5} \div \frac{س^3 - 8}{س^2 + 2س + 4}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{(س-2)(س-5)}{(س-5)(س+1)} \div \frac{(س-2)(س^2 + 2س + 4)}{س^2 + 2س + 4}$$

مجال $ن = \mathbb{R} - \{-1 ، 5 ، 2\}$

$$ن(س) = \frac{س-2}{س+1} \times \frac{1}{س-2}$$

$$ن(س) = \frac{1}{س+1}$$

الاحتمال

العمليات على الأحداث

قاعدة

لأى حدثين م ، ب من فضاء العينة ف يكون

ل (م ∪ ب) = ل (م) + ل (ب) − ل (م ∩ ب)

تمرين

إذا كان م ، ب حدثين من فضاء العينة ف وكان

ل (م) = ٠,٣ ، ل (ب) = ٠,٢ أوجد

١ ل (م ∪ ب) إذا كان ل (م ∩ ب) = ٠,١

٢ ل (م ∪ ب) إذا كان م ، ب حدثين متنافيين

٣ ل (م ∩ ب) إذا كان ل (م ∪ ب) = ٠,٣

الحل

١ ل (م ∪ ب) = ٠,٣ + ٠,٢ − ٠,١ = ٠,٤

٢ ∵ م ، ب حدثين متنافيين

∴ ل (م ∪ ب) = ل (م) + ل (ب)

= ٠,٣ + ٠,٢ = ٠,٥

٣ ∵ ل (م ∪ ب) = ل (م) + ل (ب) − ل (م ∩ ب)

٠,٣ = ٠,٣ + ٠,٢ − ل (م ∩ ب)

∴ ل (م ∩ ب) = ٠,٢

الحدث المكمل والفرق بين حدثين

قاعدة

ل(أ) = ١ − ل(أ') ، ل(أ') = ١ − ل(أ)

تمرين

اذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ما وكان

ل(أ) = $\frac{١}{٦}$ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{١٨}$ ، ل(أ ∪ ب) = $\frac{٤}{٩}$

أوجد

١) احتمال عدم وقوع الحدث أ

٢) ل(ب')

الحل

١) احتمال عدم وقوع الحدث أ = ل(أ')

∵ ل(أ') = ١ − ل(أ)

∴ ل(أ') = ١ − $\frac{١}{٦}$ = $\frac{٥}{٦}$

٢) ∵ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

$\frac{٤}{٩}$ = $\frac{١}{٦}$ + ل(ب) − $\frac{١}{١٨}$

∴ ل(ب) = $\frac{١}{٣}$

∵ ل(ب') = ١ − ل(ب)

∴ ل(ب') = ١ − $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$