حل مُعادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين جبرياً و بيانياً

أولاً الحل البيانى :-

إذا كان لدينا المُعادلتين : $٢_١$س + ب$_١$ص + جـ$_١$ = ٠ ، $٢_٢$س + ب$_٢$ص + جـ$_٢$ = ٠

فإن حل هاتين المُعادلتين معاً يُقصد به إيجاد الأزواج المرتبة التى تحقق كلاً من المعادلتين فى آن واحد و نحصل عليه بيانياً من تقاطع المستقيمين الممثلين لكلاً منهما حيث تكون نقطة التقاطع هى الحل المشترك للمعادلتين

أمثـــــلة

١ أوجد مجموعة الحل للمعادلتين : ص = ٢س -٣ ، ص = س-١ بيانياً

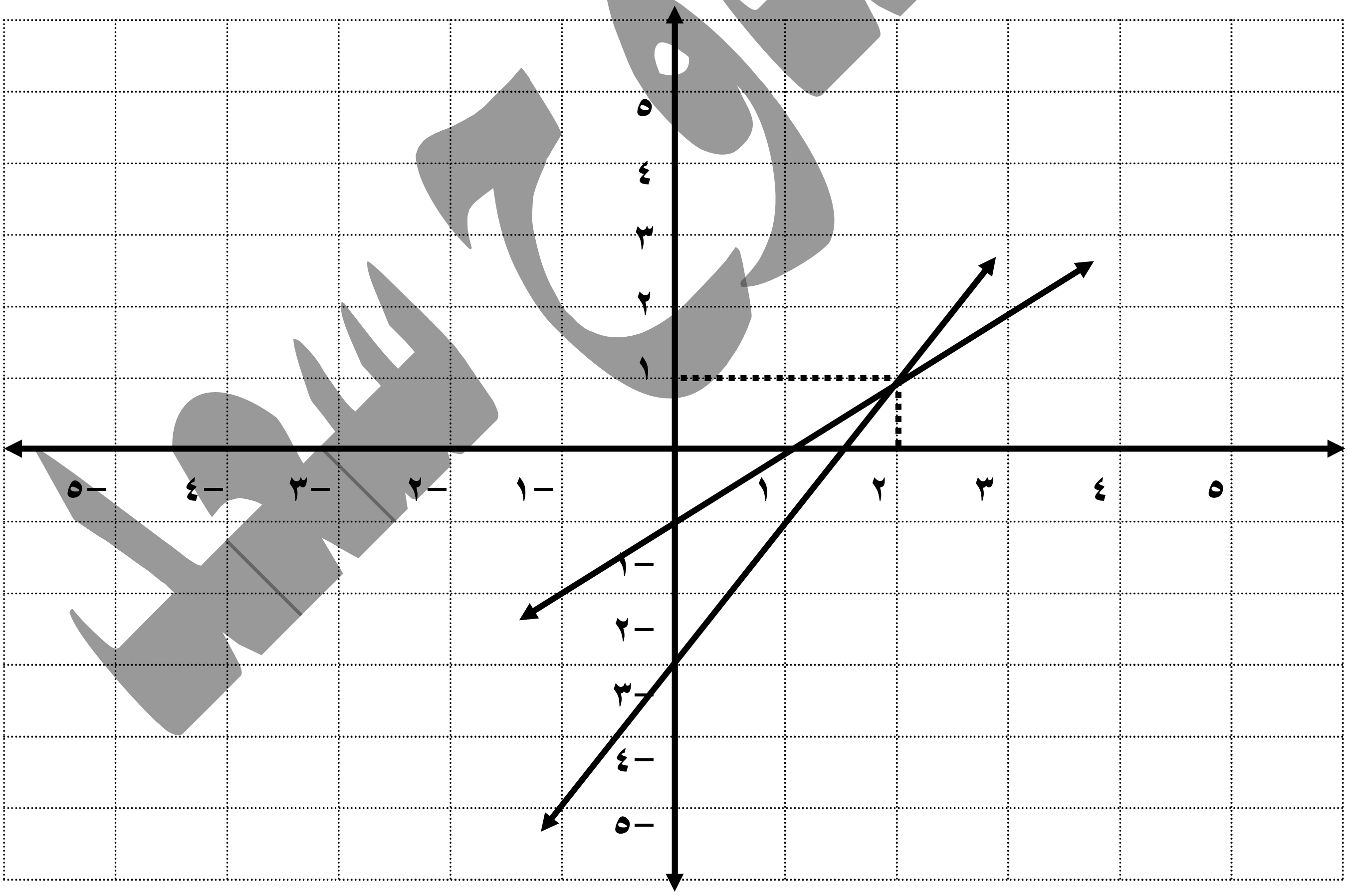
الحــــــل

ص = ٢س -٣

س	٠	٢
ص	-٣	١

ص = س-١

س	٠	٢
ص	-١	١



من الرسم يتضح أن : م . ح = $\{$ (٢ ، ١) $\}$

[٢] أوجد مجموعة الحل للمعادلتين : ص = ٢س −٣ ، س + ٢ص = ٤ بيانياً

الحـــــــــــل

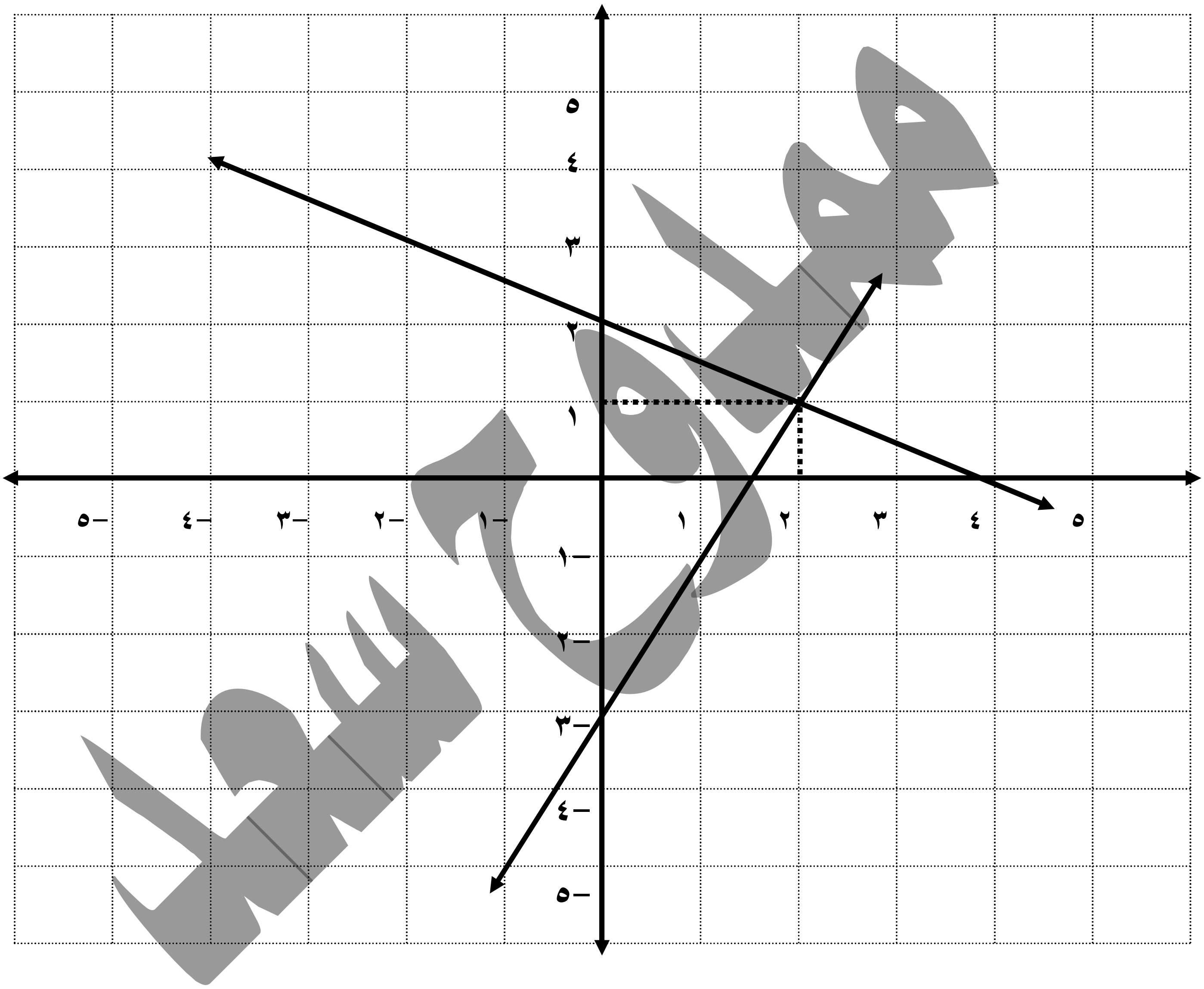
نضع المعادلتين على الصورة :

ص = ٢س − ٣

س	٠	٢
ص	−٣	١

ص = $\frac{١}{٢}$ (٤ − س)

س	٠	٢
ص	٢	١



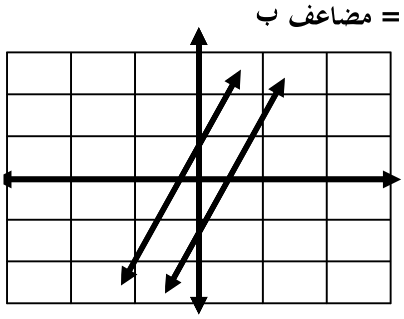
من الرسم يتضح أن : م . ح = { (٢ ، ١) }

حالات خاصة

① المستقيمان المتوازيان

أس + ب ص = جـ١ ، ك س + ى ص = جـ٢ حيث : ك = مضاعف أ ، ى = مضاعف ب

و حيث أن المستقيمان متوازيان فلا توجد نقطة تقاطع ويكون : م . ح = ∅

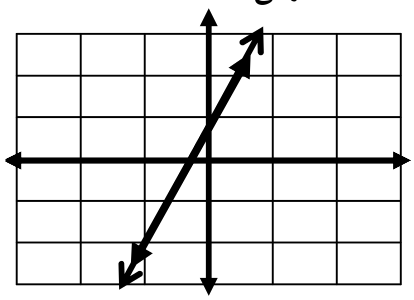


أمثلة :–
- ☑ س + ٢ص = ٣ ، ٢س + ٤ص = ٥
- ☑ ٢س + ص = –٣ ، ٦س + ٣ص = ٤

② المستقيمان المُتطابقان (مُنطبقان)

أس + ب ص = جـ ، ك س + ى ص = م جـ حيث : ك = مضاعف أ ، ى = مضاعف ب ، م جـ = مضاعف جـ

و حيث أن المستقيمان متطابقان فيوجد عدد لانهائى من نقاط التقاطع ويكون : م . ح = عدد لانهائى



أمثلة :–
- ☑ س + ٢ص = ٣ ، ٢ س + ٤ص = ٦
- ☑ ٢س + ص = –٣ ، ٦س + ٣ص = –٩

تدريـــــــب

أولاً : أكمل مايلى

١ المستقيمان الممثلان للمعادلتين س = ٤ ، ص–٣ = ٠ يتقاطعان فى النقطة ....

٢ نقطة تقاطع المستقيمين س = –١ ، ص + ١ = ٠ تقع فى الربع ....

٣ مجموعة حل المعادلتين س + ٣ص = ٤ ، ٣ص + س = ١ هى ....

٤ مجموعة حل المعادلتين ٤س + ص = ٦ ، ٨س + ٢ص = ١٢ هى ....

٥ إذا كان المستقيمان الممثلان للمعادلتين : س + ٣ص = ٤ ، س + أص = ٧ متوازيين فإن أ = ...

٦ إذا كان للمعادلتين : س +٢ص = ١ ، ٢س + ك ص = ٢ حل وحيد فإن ك لا يمكن أن تساوى ....

٧ المستقيمان : س + ٥ص = ١ ، س + ٥ص – ٨ = ٠ فإن المستقيمان يكونان ....

٨ المستقيمان : ٣س + ٤ص = ١ ، ٦س + ٨ص = ٢ فإن المستقيمان يكونان ....

٩ عدد حلول المعادلتين س + ص =٢ ، س + ص –٣ = ٠ معاً هو ....

١٠ إذا كان للمعادلتين س + ٤ص = ٧ ، ٣س + ك ص = ٢١ عدد لانهائى من الحلول فإن ك = ...

ثانياً : أوجد مجموعة حل المعادلات التالية بيانيا :–

① س + ص = ٤ ، ٢س – ص = ١١ { (٥ ، –١) }

② ص = ٣س + ٤ ، ص = ٢س + ٣ { (–١ ، ١) }

ثانياً : حل مُعادلات الدرجة الأولى فى متغيرين جبرياً

توجد طريقتان للحل :-

① **طريقة التعويض :-** و فيها نستخدم إحدى المعادلتين لإيجاد أحد المتغيرين بدلالة الآخر ثم نعوض عنه فى المعادلة الثانية فنحصل على معادلة فى متغير واحد و بحلها نحصل على قيمة هذا المتغير ثم بالتعويض فى إحدى المعادلتين نحصل على قيمة المتغير الآخر

② **طريقة الحذف :-** و فيها نجعل معاملى أحد المتغيرين فى المعادلتين كل منها معكوساً جمعياً للآخر و بإجراء عملية جمع (طرح) نحذف هذا المتغير ثم بالتعويض فى إحدى المعادلتين نحصل على قيمة المتغير الآخر

أمثـــــلة

[١] أوجد مجموعة حل المعادلتين التاليتين جبرياً : ٢س + ص = ٥ ، س – ص = ١

الحـــــــــــل

① طريقة التعويض

∵ س – ص = ١ ⟸ ص = س – ١

بالتعويض فى المعادلة ٢س + ص = ٥

∴ ٢س + س – ١ = ٥ ⟸ ٣س – ١ = ٥

∴ ٣س = ١ + ٥ ⟸ س = ٦/٣ = ٢

∴ ص = ٢ – ١ = ١

∴ م . ح = { (٢ ، ١) }

② طريقة الحذف

٢س + ص = ٥

س – ص = ١

بالجمع

٣س = ٦ ⟸ س = ٦/٣ = ٢

∴ ص = ٢ – ١ = ١

∴ م . ح = { (٢ ، ١) }

[٢] أوجد مجموعة حل المعادلتين التاليتين جبرياً : ٤س + ٣ص = ٦ ، س – ٢ص = ٧

الحـــــــــــل

∵ س – ٢ص = ٧ ⟸ س = ٧+٢ص

بالتعويض فى المعادلة ٤س + ٣ص = ٦

∴ ٤(٧+٢ص) + ٣ص = ٦ ⟸ ٢٨ +٨ص +٣ص= ٦

∴ ١١ص = – ٢٢ ⟸ ص = –٢

∴ س = ٧ –٢×٢ = ٧– ٤ =٣

∴ م . ح = { (٣ ، –٢) }

[٣] أوجد مجموعة حل المعادلتين التاليتين جبرياً : ٢س – ص = ٣ ، س + ٢ص = ٤

الحـــــــــــل

∵ س +٢ص = ٤ ⟸ س = ٤ –٢ص

بالتعويض فى المعادلة ٢س – ص = ٣

∴ ٢(٤–٢ص) – ص = ٣ ⟸ ٨ – ٤ص – ص= ٣

∴ –٥ ص = – ٥ ⟸ ص = ١

∴ س = ٤ – ٢×١ = ٤ – ٢ = ٢

∴ م . ح = { (٢ ، ١) }

ثالثاً مسائل لفظية تؤول فى حلها إلى معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين :–

و فى هذه المسألة يجب قراءة المسألة جيداً و تحديد المتغيرين (س ، ص) و فرضهما س ، ص
و إستخدام مُعطيات المسألة لتكوين معادلتين و حلهما كما سبق شرحه

أمثـــــــــــلة

١ إذا كان مجموع عمر أحمد و أسامة الآن ٤٣ سنة و بعد ٥سنوات يكون الفرق بين عمريهما ٣ سنوات أوجد عمر كل منهما بعد ٧ سنوات

الحـــــــــــــل

نفرض عمر أحمد الأن س ، عمر أسامة الأن ص

∴ س + ص = ٤٣ ⟵ ①

بعد ٥ سنوات يصبح عمر أحمد = س + ٥ ،

يصبح عمر أسامة = ص + ٥

∴ (س + ٥) – (ص + ٥) = ٣

∴ س – ص = ٣ ⟵ ②

س + ص = ٤٣

س – ص = ٣

ـــــــــــ بالجمع

٢س = ٤٦ ⟸ س = $\frac{٤٦}{٢}$ = ٢٣

∴ عمر أحمد الأن = ٢٣ سنة

∴ عمر أسامة الأن = ٤٣– ٢٣ = ٢٠ سنة

∴ عمر أحمد بعد ٧سنوات = ٢٣ + ٧ = ٣٠ سنة

∴ عمر أسامة بعد ٧سنوات = ٢٠ + ٧ = ٢٧ سنة

٢ عدد مكون من رقمين مجموعهما ٥ و إذا تغير وضع الرقمين فإن العدد الناتج ينقص عن العدد الأصلى بمقدار ٩ فما هو العدد الأصلى

الحـــــــــــــل

نفرض العددان س ، ص

العدد الأصلى = س + ١٠ص

الرقم الناتج بعد تغيير الرقمين = ص + ١٠س

∴ س + ص = ٥ ⟵ ①

(س + ١٠ص) – (ص + ١٠س) = ٩

٩ص – ٩س = ٩ ÷ ٩

∴ ص – س = ١ ⟵ ②

ص + س = ٥

ص – س = ١

ـــــــــــ بالجمع

٢ص = ٦ ⟸ ص = $\frac{٦}{٢}$ = ٣

بالتعويض فى ①

∴ س = ٥ –٣ = ٢

∴ العدد الأصلى = س + ١٠ص = ٢ + ١٠×٣ = ٢ + ٣٠ = ٣٢

التمثيل البيانى للدالة التربيعية

ملاحظات هامة

الصورة العامة لمعادلة الدالة : د(س)= أس^٢ + ب س + جـ　　　بشرط أ ≠ ٠

① مجال الدالة : هو الفترة التى تشغلها الدالة على محور السينات و هو ح

② مدى الدالة : هو الفترة التى تشغلها الدالة على محور الصادات و هو ح

③ محور تماثل الدالة : هو الخط الذى يقسم الدالة إلى نصفين متماثلين

④ نقطة رأس المنحنى الدالة : هى النقطة الوحيدة على منحنى الدالة و التى تحقق معادلة محور التماثل

⑤ إذا كان : أ > ٠ (شكل المنحنى لأعلى ∪) فإن القيمة تكون صغرى

إذا كان : أ < ٠ (شكل المنحنى لأسفل ∩) فإن القيمة تكون عظمى

لاحظ أن : يمكن إيجاد البيانات الجبرية دون الحاجة إلى الرسم كالتالى

١ إحداثى رأس المنحنى = [$\frac{-ب}{٢أ}$ ، د ($\frac{-ب}{٢أ}$)]

٢ معادلة محور التماثل : س = $\frac{-ب}{٢أ}$

٣ القيمة العظمى / الصغرى : ص = د ($\frac{-ب}{٢أ}$)

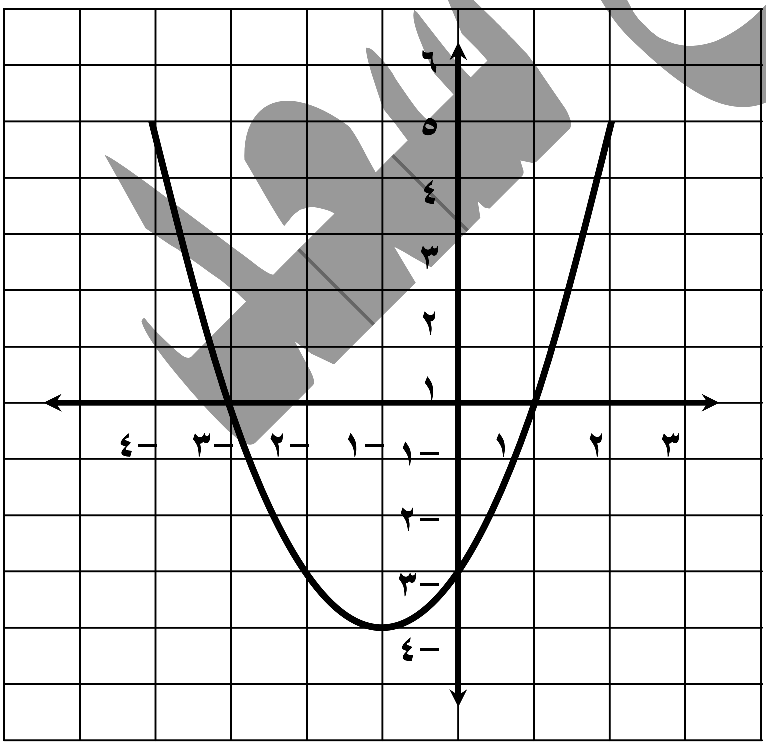
أمثلة

① إرسم الدالة : د(س)= س^٢ + ٢س − ٣　　حيث س ∋ [−٤ ، ٢] و من الرسم أوجد التالى :−

+ نقطة رأس المنحنى　　　+ معادلة محور التماثل　　　+ القيمة العظمى أو الصغرى

الحـــل

س	س^٢	٢س	− ٣	د(س)	النقطة
− ٤	١٦	− ٨	− ٣	٥	(−٤ ، ٥)
−٣	٩	− ٦	− ٣	٠	(−٣ ، ٠)
−٢	٤	− ٤	−٣	− ٣	(−٢ ، −٣)
−١	١	− ٢	−٣	− ٤	(−١ ، −٤)
٠	٠	٠	− ٣	− ٣	(٠ ، −٣)
١	١	٢	− ٣	٠	(١ ، ٠)
٢	٤	٤	− ٣	٥	(٢ ، ٥)



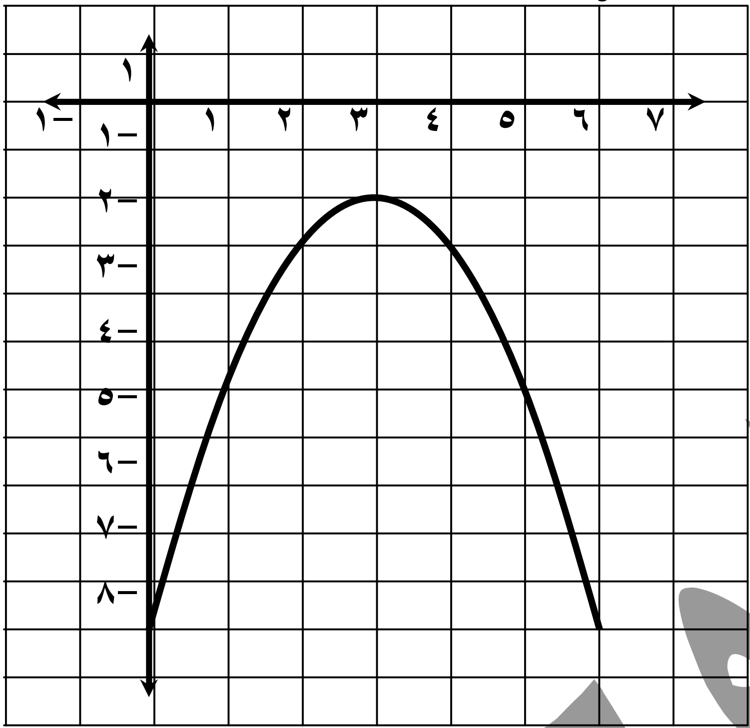
+ نقطة رأس المنحنى (−١ ، −٤)　　+ معادلة محور التماثل : س = −١　　+ القيمة الصغرى : ص = −٤

② إرسم الدالة : د(س)= − س٢ + ٦س − ١١ حيث س ∋ [٠ ، ٦] و من الرسم أوجد التالى :−

+ نقطة رأس المنحنى   + معادلة محور التماثل   + القيمة العظمى أو الصغرى

الحــــــــــل

س	− س٢	٦س	− ١١	د(س)	النقطة
٠	٠	٠	− ١١	− ١١	(٠ ، − ١١)
١	−١	٦	− ١١	− ٦	(١ ، −٦)
٢	− ٤	١٢	− ١١	− ٣	(٢ ، −٣)
٣	− ٩	١٨	− ١١	− ٢	(٣ ، −٢)
٤	− ١٦	٢٤	− ١١	− ٣	(٤ ، −٣)
٥	− ٢٥	٣٠	− ١١	−٦	(٥ ، −٦)
٦	− ٣٦	٣٦	− ١١	− ١١	(٦ ، −١١)



+ نقطة رأس المنحنى (٣ ، −٢)   + معادلة محور التماثل : س = ٣   + القيمة العظمى : ص = −٢

تدريبــــــات

③ إذا كان : د(س)= س٢ − ٩ حيث س ∋ [−٥ ، ٥] أكمــــــل

ⓐ نقطة رأس المنحنى هى (..... ، ......)

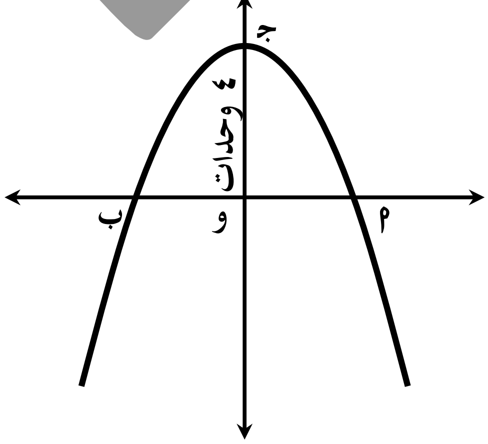
ⓑ معادلة محور التماثل هى : ....

ⓒ القيمة العظمى / الصغرى : ....

④ فى الشكل المقابل أوجد

[ٲ] قيمة كلاً من ٲ ، ب ، ج

[ب] مساحة △ ٲب ج



حل المُعادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانياً و جبرياً

أولاً : حل المعادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانياً

نرسم منحنى الدالة د حيث : د(س)= ؟س² + ب س + جـ 	بشرط ؟ ≠ ٠

نعين مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات فتكون هى مجموعة حل المعادلة

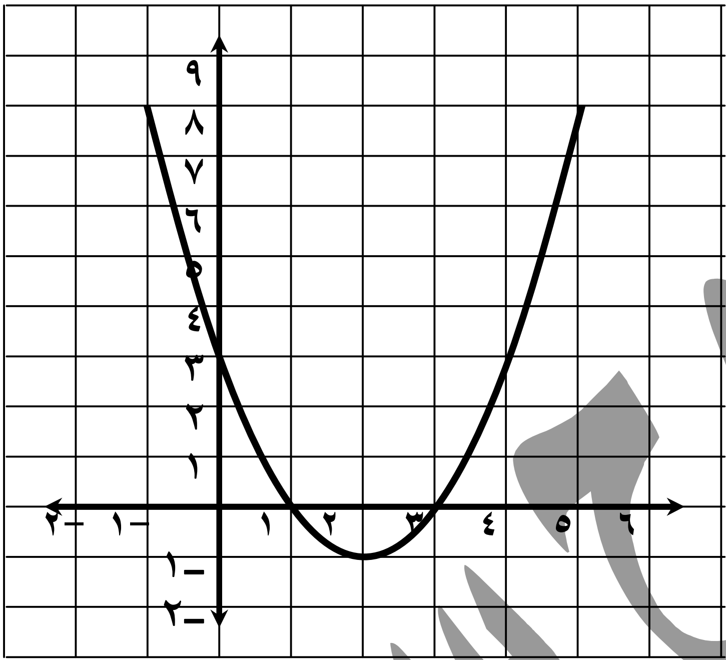
أمثـــــــلة

[١] إرسم الشكل البيانى للدالة د(س)= س² – ٤س + ٣ فى الفترة [–١ ، ٣]

و من الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة : س² – ٤س + ٣ = صفر

الحـــــــــــل

س	س²	–٤س	٣	د(س)=	النقطة
–١	١	٤	٣	٨	(–١ ، ٨)
٠	٠	٠	٣	٣	(٠ ، ٣)
١	١	–٤	٣	٠	(١ ، ٠)
٢	٤	–٨	٣	–١	(٢ ، –١)
٣	٩	–١٢	٣	٠	(٣ ، ٠)



نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات :

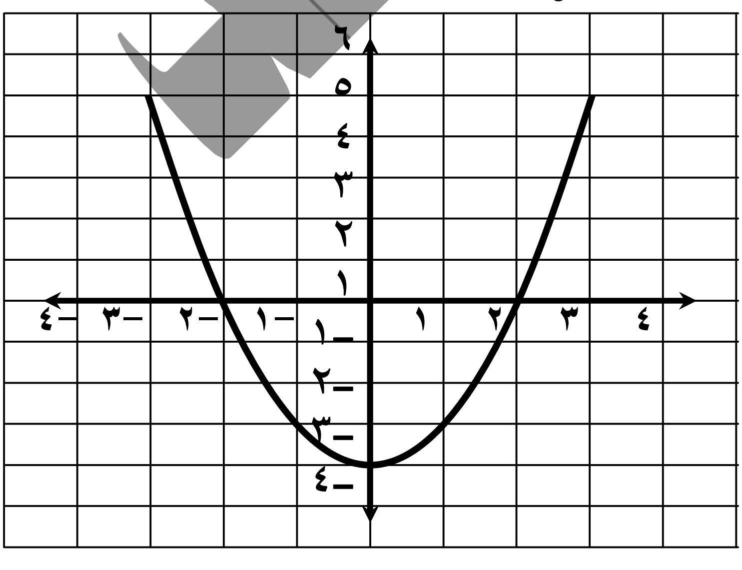
(١ ، ٠) ، (٣ ، ٠)

∴ م . ح = {١ ، ٣}

[٢] عين جذرى المعادلة د(س)= س² – ٤فى الفترة [–٢ ، ٢] بيانياً

الحـــــــــــل

س	س²	–٤	د(س)=	النقطة
–٢	٤	– ٤	٠	(–٢ ، ٠)
–١	١	– ٤	– ٣	(– ١ ، – ٤)
٠	٠	–٤	– ٤	(٠ ، –٤)
١	١	– ٤	–٣	(١ ، –٣)
٢	٤	– ٤	٠	(٢ ، ٠)



جذرا المعادلة هما : س = –٢ ، س = ٢

∴ م . ح = {–٢ ، ٢}

ثانياً : حل المعادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد جبرياً

يمكن حل المعادلة من الدرجة الثانية : $\text{د(س)} = \text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ}$ حيث أ ≠ ٠ بأستخدام القانون العام

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ}}}{٢\,\text{أ}}$$

حيث أ ≠ ٠ ، أ ، ب، جـ ∈ ح

أمثلــــــــــة

① أوجد مجموعة حل المعادلة : $٣\text{س}^{٢} = ٥\text{س} - ١$

مُقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين

الحــــــــــل

$٣\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ١ = \text{صفر}$

أ = ٣ ، ب = − ٥ ، جـ = ١

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ}}}{٢\,\text{أ}} = \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٤ \times ٣ \times ١}}{٢ \times ٣}$$

$$= \frac{٥ \pm \sqrt{١٣}}{٦}$$

س = { ١,٤٣ ، ٠,٢٣ }

② أوجد مجموعة حل المعادلة : $\text{س} + \frac{٤}{\text{س}} = ٦$

مُقرباً الناتج لأقرب رقم عشرى واحد

الحــــــــــل

$\text{س} + \frac{٤}{\text{س}} = ٦$ × س

$\text{س}^{٢} + ٤ - ٦\text{س} = \text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٤ = \text{صفر}$

أ = ١ ، ب = − ٦ ، جـ = ٤

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ}}}{٢\,\text{أ}} = \frac{٣٦ \pm \sqrt{٣٦ - ٤ \times ١ \times ٤}}{٢ \times ١}$$

$$= \frac{٦ \pm \sqrt{٢٠}}{٢}$$

س = { ٥,٢ ، ٠,٨ }

③ أوجد مجموعة حل المعادلة : $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{١}{٥ - \text{س}}$ مقرباً الناتج إلى أقرب ثلاثة أرقام عشرية

الحــــــــــل

$\frac{\text{س}}{٣} = \frac{١}{٥ - \text{س}}$ × ٣ (٥ − س) ⇐ س (٥ − س) = ٣ ⇐ ٥س − س^{٢} = ٣

∴ $\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٣ = \text{صفر}$

أ = ١ ، ب = −٥ ، جـ = ٣

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ}}}{٢\,\text{أ}} = \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٤ \times ١ \times ٣}}{٢ \times ١} = \frac{٥ \pm \sqrt{١٣}}{٢}$$

س = { ٤,٣٠٢ ، ٠,٦٩٧ }

حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى و الآخرى من الدرجة الثانية

نستخدم معادلة الدرجة الأولى فى الحصول على احد المتغيرين بدلالة المتغير الاخر ثم نعوض بهذه القيمة فى معادلة الدرجة الثانية نحصل على قيمة هذا المتغير ثم نعوض فى معادلة الدرجة الأولى لنحصل على قيمة المتغير الآخر

١ س + ص = ٥ ، س^{٢} + ص^{٢} = ١٣

الحـــــــــل

∵ س + ص = ٥ ⇐ ص = ٥ − س

بالتعويض فى معادلة الدرجة الثانية

∴ س^{٢} + (٥ − س)^{٢} = ١٣

س^{٢} + ٢٥ + س^{٢} − ١٠س − ١٣ = صفر

٢س^{٢} − ١٠س + ١٢ = صفر ÷ ٢

س^{٢} − ٥س + ٦ = صفر

∴ (س − ٢)(س − ٣) = ٠

∴ س − ٢ = ٠ أ، س − ٣ = ٠

س = ٢ | س = ٣

بالتعويض فى معادلة الدرجة الأولى

∴ ص = ٥ − ٢ أ، ص = ٥ − ٣

= ٣ | = ٢

∴ م . ح = { (٢، ٣) ، (٣ ، ٢) }

٢ س − ص = ٣ ، س^{٢} + ص^{٢} = ٢٩

الحـــــــــل

∵ س − ص = ٣ ⇐ س = ٣ + ص

بالتعويض فى معادلة الدرجة الثانية

∴ (٣ + ص)^{٢} + ص^{٢} = ٢٩

٩ + ٦ص + ص^{٢} + ص^{٢} − ٢٩ = صفر

٢ص^{٢} + ٦ص − ٢٠ = صفر

∴ (٢ص + ١٠)(ص − ٢) = ٠

∴ ٢ص + ١٠ = ٠ أ، ص − ٢ = ٠

٢ص = ١٠ | ص = ٢

ص = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥

بالتعويض فى معادلة الدرجة الأولى

∴ س = ٣ + ٥ أ، س = ٣ + ٢

= ٨ | = ٥

∴ م . ح = { (٨ ، ٥) ، (٥ ، ٢) }

٣ س + ص = ٧ ، س ص = ١٢

الحـــــــــل

∵ س + ص = ٧ ⇐ ص = ٧ − س

بالتعويض فى معادلة الدرجة الثانية

∴ س (٧ − س) = ١٢

٧س − س^{٢} − ١٢ = صفر × −١

س^{٢} − ٧ س + ١٢ = صفر

(س − ٣)(س − ٤) = ٠

س − ٣ = ٠ أ، س − ٤ = ٠

س = ٣ | س = ٤

بالتعويض فى معادلة الدرجة الأولى

∴ ص = ٧ − ٣ أ، ص = ٧ − ٤

= ٤ | = ٣

∴ م . ح = { (٣، ٤) ، (٤ ، ٣) }

٤ س − ص = ٢ ، س ص = ١٥

الحـــــــــل

∵ س − ص = ٢ ⇐ س = ٢ + ص

بالتعويض فى معادلة الدرجة الثانية

∴ ص (٢ + ص) = ١٥

٢ص + ص^{٢} − ١٥ = صفر

ص^{٢} + ٢ص − ١٥ = صفر

(ص + ٥)(س − ٣) = ٠

ص + ٥ = ٠ أ، ص − ٣ = ٠

ص = − ٥ | ص = ٣

بالتعويض فى معادلة الدرجة الأولى

∴ س = ٢ − ٥ أ، س = ٢ + ٣

= −٣ | = ٥

∴ م . ح = { (−٣ ، −٥) ، (٥ ، ٣) }

ثانياً : مسائل لفظية تؤول فى حلها إلى معادلتين من الدرجة الأولى و الدرجة الثانية فى متغيرين :-

و فى هذه المسألة يجب قراءة المسألة جيداً و تحديد المتغيرين و فرضهما س ، ص و إستخدام معطيات المسألة لتكوين معادلتين إحداهما من الدرجة الأولى نستخدمها فى الحصول على احد المتغيرين بدلالة المتغير الاخر ثم نعوض بهذه القيمة فى معادلة الدرجة الثانية لنحصل على قيمة هذا المتغير ثم نعوض فى معادلة الدرجة الأولى لنحصل على قيمة المتغير الآخر

[١] عدد مكون من رقمين رقم آحاده ضعف رقم عشراته فإذا كان حاصل ضرب الرقمين يساوى نصف العدد الأصلى ، فما هو العدد الأصلى ؟

الحـــــــل

نفرض العدد الأصلى : س + ١٠ص

∴ س = ٢ص ⟵ (١)

∴ س ص = $\frac{1}{2}$ (س + ١٠ص) ⟵ (٢)

بالتعويض من المعادلة (١) فى المعادلة (٢)

∴ ٢ص × ص = $\frac{1}{2}$ (٢ص + ١٠ ص)

∴ ٢ص^{٢} = ٦ص

∴ ٢ص^{٢} − ٦ص = صفر

∴ ٢ص (ص − ٣) = ٠

∴ ٢ص = ٠ أ، ص − ٣ = ٠

∴ ص = ٠ | ص = ٣

بالتعويض فى (١)

∴ س = ٢ × ٠ أ، س = ٢ × ٣

= ٠ | = ٦

∴ العدد الأصلى = س + ١٠ص = ٦ + ١٠×٣ = ٣٦

[٢] مُستطيل محيطه ٢٤سم و مساحته ٣٥سم^{٢} أوجد طولا بُعديه

الحـــــــل

نفرض بُعدا المستطيل هما س ، ص

∵ محيط المستطيل = ٢٤سم ⟸ ٢(س + ص) = ٢٤

∴ س + ص = ١٢ ⟸ س = ١٢ − ص ⟵ (١)

∵ مساحة المستطيل = ٣٥ ⟸ س ص = ٣٥ ⟵ (٢)

بالتعويض من المعادلة (١) فى المعادلة (٢)

∴ ص (١٢ − ص) = ٣٥

∴ ١٢ص − ص^{٢} − ٣٥ = صفر

∴ − ص^{٢} + ١٢ص − ٣٥ = صفر　　× −١

∴ ص^{٢} − ١٢ص + ٣٥ = صفر

∴ (ص − ٥)(ص − ٧) = ٠

∴ ص − ٥ = ٠ أ، ص − ٧ = ٠

∴ ص = ٥ | ص = ٧

بالتعويض فى (١)

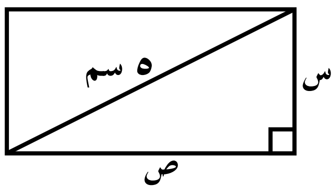
∴ س = ١٢ − ٥ أ، س = ١٢ − ٧

= ٧ | = ٥

∴ بُعدا المستطيل هما ٥ سم ، ٧ سم

[٣] مستطيل طول قطره ٥سم و محيطه ١٤ سم أوجد طولا بعُديه

الحـــــــل



نفرض أن بُعدا المستطيل هما س ، ص

∵ محيط المستطيل = ٢٤سم ⟸ ٢(س + ص) = ١٤

∴ س + ص = ٧ ⟸ س = ٧ − ص ⟵ (١)

∵ Δ قائم الزاوية

∴ س^{٢} + ص^{٢} = (٥)^{٢} ⟵ (٢)

بالتعويض من المعادلة (١) فى المعادلة (٢)

∴ (٧ − ص)^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

∴ ٤٩ − ١٤ص + ص^{٢} + ص^{٢} − ٢٥ = صفر

∴ ٢ص^{٢} − ١٤ص + ٢٤ = صفر　　÷ ٢

∴ ص^{٢} − ٧ص + ١٢ = صفر

(ص − ٣)(ص − ٤) = ٠

∴ ص = ٣ | ص = ٤

بالتعويض فى (١) ⟸ س = ٤ أ، س = ٣

∴ بُعدا المستطيل هما ٣ سم ، ٤ سم

الدوال الكسرية و العمليات عليها

الدالة الكسرية الجبرية

إذا كانت كلاً من ٯ ، د دوال كثيرات الحدود حيث : ٯ(س) = س + ٣　،　د(س)= $س^{٢}$ +٥س + ١

فإن : ه(س) = $\frac{ٯ(س)}{د\,(س)}$ = $\frac{س + ٣}{س^{٢} + ٥س + ١}$　　تسمى دالة كسرية جبرية (كسر جبرى)

مجموعة أصفار الدالة

+ إذا كانت الدالة عادية : – هى قيم س التى عندها الدالة تساوى صفر و نحصل عليها بوضع الدالة = صفر

+ إذا كانت الدالة كسرية جبرية :– هى قيم س التى عندها بسط الدالة = صفر ماعدا القيم التى تجعل المقام = صفر و ذلك بعد وضع الدالة فى أبسط صورة

أمثـــــــــــلة

أوجد مجموعة أصفار الدوال التالية :–

① د(س)= $س^{٣}$ – ٤$س^{٢}$

الحـــــــل

∵ د(س)= ٠ ⇐ $س^{٣}$ – ٤$س^{٢}$ = ٠

$س^{٢}$ (س – ٤) = ٠

∴ $س^{٢}$ = ٠　أ،　س – ٤ = ٠

س = ٠　|　س = ٤

∴ ص (د) = { ٠ ، ٤ }

② د(س)= $س^{٢}$ – ٢س + ١

الحـــــــل

∵ د(س)= ٠ ⇐ $س^{٢}$ – ٢س + ١ = ٠

∴ $(س – ١)^{٢}$ = ٠

∴ س – ١ = ٠

∴ س = ١

∴ ص (د) = { ١ }

③ د(س)= $س^{٤}$– $س^{٢}$

الحـــــــل

∵ د(س)= ٠ ⇐ $س^{٤}$ – $س^{٢}$ = ٠

∴ $س^{٢}$ ($س^{٢}$ – ١) = ٠

∴ $س^{٢}$ = ٠　أ،　$س^{٢}$ – ١ = ٠

س = ٠　أ،　س = ± $\sqrt{١}$ = ± ١

∴ ص (د) = { ٠ ، ± ١ }

④ د(س)= $\frac{س – ٢}{س – ٣}$

الحـــــــل

نضع البسط = صفر

س – ٢ = ٠ ⇐ س = ٢

ص (د) = { ٢ } – { ٣ }

⑤ د(س)= $\frac{س^{٢} – ٩}{س – ٤}$

الحـــــــل

نضع البسط = صفر

$س^{٢}$ – ٩ = ٠

(س – ٣)(س + ٣) = ٠

س = ٣　أ،　س = –٣

ص (د) = { ٣ ، –٣ } – { ٤ }

⑥ د(س)= $\frac{س^{٢} + ٤}{س}$

الحـــــــل

نضع البسط = صفر

$س^{٢}$ + ٤ = ٠

$س^{٢}$ = – ٤

ص (د) = ∅

مجال الدالة الكسرية

مجال الدالة الكسرية = ح – أصفار دالة المقام

أوجد المجال للدوال الكسرية التالية

① د(س) = $\frac{\text{س} + ٣}{\text{س}}$

الحـــــل

نضع المقام = ٠

∴ س = ٠

المجال = ح – { ٠ }

② د(س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٦}$

الحـــــل

نضع المقام = ٠

∴ $\text{س}^{٢}$ + ٥س + ٦ = ٠

(س + ٢)(س + ٣) = ٠

∴ س = –٢ ، س = – ٣

المجال = ح – { – ٢ ، – ٣ }

③ د(س) = $\frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} + ١}$

الحـــــل

نضع المقام = ٠

∴ $\text{س}^{٢}$ + ١ = ٠

∴ $\text{س}^{٢}$ = – ١

المجال = ح – ∅

= ح

المجال المشترك لكسرين جبريين أو أكثر

المجال المشترك لكسرين جبريين أو أكثر = ح – مجموعة أصفار المقامين (المقامات)

أوجد المجال للدوال التالية

① $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س}}$ ، $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} - ٢}$

الحـــــل

أصفار المقام الأول = { ٠ }

أصفار المقام الثانى = { ٢ }

مجموعة أصفارالمقامين = { ٠ ، ٢ }

المجال المشترك = ح – { ٠ ، ٢ }

② $\frac{٥}{\text{س}}$ ، $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} - ١}$ ، $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٧\text{س} + ١٢}$

الحـــــل

أصفار المقام الأول = { ٠ }

بوضع مقام الدالة الثانية = ٠ ⇐ (س – ١)(س + ١) = ٠

أصفار المقام الثانى = { –١ ، ١ }

بوضع مقام الدالة الثالثة = ٠ ⇐ (س – ٣)(س – ٤) = ٠

أصفار الدالة الثالثة = { ٣ ، ٤ }

مجموعة أصفار المقامات = { –١ ، ٠ ، ١ ، ٣ ، ٤ }

∴ المجال المشترك = ح – { –١ ، ٠ ، ١ ، ٣ ، ٤ }

تساوى كسريين جبريين

أولاً : إختزال الكسر الجبرى

المقصود بإختزال الكسر الجبرى هو وضع الكسر الجبرى فى أبسط صورة و ذلك عن طريق تحليل كلاً من دالة البسط و دالة المقام ثم حذف العوامل المشتركة بين دالتى البسط و المقام

ملحوظة هامة :– يتم تعيين مجال الكسر الجبرى قبل إختزال الكسر الجبرى

إختزل كلاً من الكسور الجبرية التالية موضحاً مجالها

(١) $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} - \text{٥س} + ٦}{\text{س}^{٢} - ٩}$

الحـــــل

$\text{د(س)} = \dfrac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)}{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ٣)}$

$= \dfrac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٣}$

مجال الدالة = ح – { –٣ ، ٣ }

(٢) $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س}^{٢} - ٤}$

الحـــــل

$\text{د(س)} = \dfrac{(\text{س} - ٢)(\text{س}^{٢} + \text{٢س} + ٤)}{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٢)}$

$= \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{٢س} + ٤}{\text{س} + ٢}$

مجال الدالة = ح – { –٢ ، ٢ }

ثانياً : تساوى الكسرين الجبريين

يقال أن ن١ ، ن٢ متساويتان (أى : ن١ = ن٢) إذا تحقق الشرطان التاليان معاً

[١] مجال ن١ = مجال ن٢ [٢] ن١(س) = ن٢(س) لكل س ∈ للمجال المشترك

أمثـــــلة

(١) إذا كانت : $\text{ن}_{١}\text{(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢}}$ ، $\text{ن}_{٢}\text{(س)} = \dfrac{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س}}{\text{س}^{٤} - \text{س}}$ أثبت أن : ن١ = ن٢

الحـــــل

$\text{ن}_{١}\text{(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}(\text{س} - ١)} = \dfrac{١}{\text{س} - ١}$ مجال ن١ = ح – { ٠ ، ١ }

$\text{ن}_{٢}\text{(س)} = \dfrac{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \text{س}}{\text{س}^{٤} - \text{س}} = \dfrac{\text{س}(\text{س}^{٢} + \text{س} + ١)}{\text{س}(\text{س}^{٣} - ١)} = \dfrac{\text{س}(\text{س}^{٢} + \text{س} + ١)}{\text{س}(\text{س} - ١)(\text{س}^{٢} + \text{س} + ١)} = \dfrac{١}{\text{س} - ١}$

مجال ن٢ = ح – { ٠ ، ١ }

∵ (١) مجال ن١ = مجال ن٢ (٢) ن١(س) = ن٢(س)

∴ ن١ = ن٢

② إذا كانت : $ن_١(س) = \frac{س^٢ + ٣س + ٢}{س^٢ - ٤}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ١}{س^٢ - ٣س + ٢}$ هل $ن_١ = ن_٢$

ثم أوجد المجال المشترك الذى تتساوى فيه الدالتين

الحـــــــــــــــــــل

$ن_١(س) = \frac{س^٢ + ٣س + ٢}{س^٢ - ٤} = \frac{(س + ٢)(س + ١)}{(س + ٢)(س - ٢)} = \frac{س + ١}{س - ٢}$ مجال $ن_١ = ح - \{-٢ ، ٢\}$

$ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ١}{س^٢ - ٣س + ٢} = \frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)(س - ٢)} = \frac{س + ١}{س - ٢}$ مجال $ن_٢ = ح - \{٢ ، ١\}$

$\because$ ① مجال $ن_١ \neq$ مجال $ن_٢$ ② $ن_١(س) = ن_٢(س)$

$\therefore ن_١ \neq ن_٢$

المجال الذى تتساوى فيه الدالتان هو : $ح - \{-٢ ، ١ ، ٢\}$

العمليات على الكسور الجبرية

أولاً : جمع كسرين جبريين

لاحظ التالى :　　　**قاعدة الجمع**

$$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} + \frac{\text{جـ}}{\text{ء}} = \frac{\text{ا} \times \text{ء} + \text{ب} \times \text{جـ}}{\text{ب} \times \text{ء}} \qquad \text{أ،} \qquad \frac{\text{ا}}{\text{ب}} + \frac{\text{جـ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ا} + \text{جـ}}{\text{ب}}$$

① أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبيناً مجالها حيث

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣} + \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}$$

و أوجد ن (٠) ، ن (٣) إن أمكن

الحـــــــــل

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣} + \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦} = \frac{\text{س} - ٣}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ١)} + \frac{\text{س} - ٢}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)}$$

$$= \frac{١}{\text{س} - ١} + \frac{١}{\text{س} - ٣} = \frac{(\text{س} - ٣) + (\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)(\text{س} - ٣)} = \frac{٢\text{س} - ٤}{(\text{س} - ١)(\text{س} - ٣)}$$

المجال = ح − { ١ ، ٢ ، ٣ }　　　.

$$\text{ن}(٠) = \frac{٢ \times ٠ - ٤}{(٠ - ١)(٠ - ٣)} = \frac{-٤}{-١ \times -٣} = -\frac{٤}{٣}$$

، ن (٣) لاتوجد لأن : ن (٣) $\notin$ لمجال ن(س)

ملاحظة هامة :　مجال الكسر = مجال المعكوس الجمعى للكسر

ثانياً: طرح كسرين جبريين

لاحظ التالى :　　　**قاعدة الطرح**

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} - \frac{\text{ج}}{\text{ء}} = \frac{\text{أ} \times \text{ء} - \text{ب} \times \text{ج}}{\text{ب} \times \text{ء}} \quad \text{،} \quad \frac{\text{أ}}{\text{ب}} - \frac{\text{ج}}{\text{ب}} = \frac{\text{أ} - \text{ج}}{\text{ب}}$$

① أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبيناً مجالها حيث

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^2}{\text{س} - ١} + \frac{\text{س}}{١ - \text{س}}$$

و أوجد ن(٠) ، ن (١) إن أمكن

الحـــــــــــل

$$\text{ن(س)} = \frac{\text{س}^2}{\text{س} - ١} + \frac{\text{س}}{١ - \text{س}} = \frac{\text{س}^2}{\text{س} - ١} + \frac{\text{س}}{-(\text{س} - ١)} = \frac{\text{س}^2}{\text{س} - ١} - \frac{\text{س}}{\text{س} - ١}$$

$$= \frac{\text{س}^2 - \text{س}}{\text{س} - ١} = \frac{\text{س} (\text{س} - ١)}{\text{س} - ١} = \text{س}$$

المجال = ح − { ١ }

ن (٠) = صفر　　،　　ن (١) لا توجد لأن : ن (١) ∌ لمجال ن(س)

لاحظ التالى :−

$\boxed{١}$ المعكوس الجمعى للكسر الجبرى $\frac{\text{س}}{١ - \text{س}}$ هو $\frac{-\text{س}}{١ - \text{س}}$ أ، $\frac{\text{س}}{\text{س} - ١}$

$\boxed{٢}$ المعكوس الضربى للكسر الجبرى $\frac{\text{س}}{١ - \text{س}}$ هو $\frac{١ - \text{س}}{\text{س}}$

ثالثاً : ضرب الكسور الجبرية

لاحظ التالى : $\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{ء} = \frac{أ \times جـ}{ب \times ء}$

① أوجد ﻥ (س) فى أبسط صورة مبيناً مجالها حيث

$$ﻥ(س) = \frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٤س + ٤} \times \frac{٣س^{٢} - س - ١٠}{س^{٢} + ٢س + ٤}$$

الحـــــــــــل

$$ﻥ(س) = \frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٤س + ٤} \times \frac{٣س^{٢} - س - ١٠}{س^{٢} + ٢س + ٤} = \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{(س - ٢)(س - ٢)} \times \frac{(٣س + ٥)(س - ٢)}{س^{٢} + ٢س + ٤}$$

$= ٣س + ٥$ المجال $=$ ح $- \{ ٢ \}$

② أوجد ﻥ (س) فى أبسط صورة مبيناً مجالها حيث

$$ﻥ(س) = \frac{س^{٣} - ١}{س^{٢} - ٢س + ١} \times \frac{٢س - ٢}{س^{٢} + س + ١}$$

الحـــــــــــل

$$ﻥ(س) = \frac{س^{٣} - ١}{س^{٢} - ٢س + ١} \times \frac{٢س - ٢}{س^{٢} + س + ١} = \frac{(س - ١)(س^{٢} + س + ١)}{(س - ١)(س - ١)} \times \frac{٢(س - ١)}{س^{٢} + س + ١} = ٢$$

المجال $=$ ح $- \{ ١ \}$

رابعاً : قسمة الكسور الجبرية

لاحظ التالى : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \div \frac{\text{جـ}}{\text{ء}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{ء}}{\text{جـ}} = \frac{\text{أ} \times \text{ء}}{\text{ب} \times \text{جـ}}$

ملاحظات هامة : سبق و أن تعلمنا أن المعكوس الضربى للعدد $\frac{\text{٣}}{\text{٥}}$ هو $\frac{\text{٥}}{\text{٣}}$

و كذلك : إذا كان : $\text{د(س)} = \frac{\text{س} - \text{٢}}{\text{س} + \text{٣}}$ فإن المعكوس الضربى لهذه الدالة $\text{د}^{-\text{١}}\text{(س)} = \frac{\text{س} + \text{٣}}{\text{س} - \text{٢}}$

و يكون مجال المعكوس الضربى = ح − { −٣ ، ٢ }

(١) أوجد د (س) فى أبسط صورة مُبيناً مجالها حيث

$$\text{د (س)} = \frac{\text{س}^{\text{٣}} - \text{٨}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٦}} \div \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢س} + \text{٤}}{\text{٢س} + \text{٦}} = \frac{\text{س}^{\text{٣}} - \text{٨}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٦}} \times \frac{\text{٢س} + \text{٦}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢س} + \text{٤}}$$

$$= \frac{\text{(س} - \text{٢)(س}^{\text{٢}} + \text{٢س} + \text{٤)}}{\text{(س} + \text{٣)(س} - \text{٢)}} \times \frac{\text{٢(س} + \text{٣)}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢س} + \text{٤}} = \text{٢}$$

المجال = ح − { −٣ ، ٢ }

(٢) إذا كان : $\text{د (س)} = \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} + \text{٦}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٩}}$ فأوجد

(أ) المجال الذى يكون فيه للكسر الجبرى معكوس ضربى

(ب) $\text{د}^{-\text{١}}\text{(١)}$ ، $\text{د}^{-\text{١}}\text{(٣)}$ إن وجدت

(جـ) قيمة س التى تحقق أن $\text{د}^{-\text{١}}\text{(س)} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}}$

الحـــــــل

(أ) $\text{د}^{-\text{١}}\text{(س)} = \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٩}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} + \text{٦}} = \frac{\text{(س} - \text{٣)(س} + \text{٣)}}{\text{(س} - \text{٣)(س} - \text{٢)}} = \frac{\text{س} + \text{٣}}{\text{س} - \text{٢}}$

مجال المعكوس الضربى = ح − { −٣ ، ٢ ، ٣ }

(ب) $\text{د}^{-\text{١}}\text{(١)} = \frac{\text{١} + \text{٣}}{\text{١} - \text{٢}} = \frac{\text{٤}}{-\text{١}} = -\text{٤}$ ، $\text{د}^{-\text{١}}\text{(٣)}$ لا يوجد لأن: $\text{د}^{-\text{١}}\text{(٣)} \notin$ مجال المعكوس الضربى

(جـ) $\frac{\text{س} + \text{٣}}{\text{س} - \text{٢}} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}}$ ⇐ $\text{٥س} + \text{١٥} = \text{٣س} - \text{٦}$ ⇐ $\text{٥س} - \text{٣س} = -\text{٦}-\text{١٥}$ ⇐ $\text{٢س} = -\text{٢١}$

∴ $\text{س} = -\frac{\text{٢١}}{\text{٢}}$

الإحتمـــــــالات

التجربة العشوائية : هى تجربة يمكن معرفة جميع نواتجها الممكنة قبل إجرائها ، ولكن لا يمكن تحديد الناتج الذى سيحدث فعلاً إلا بعد إجرائها

فضاء العينة (ف) : هو مجموعة جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية

الحدث : هو مجموعة جزئية من فضاء العينة

أنواع الحدث : ① الحدث الأولى (البسيط) : هو الحدث الذى يحتوى على عنصر واحد من فاء العينة (ف)

② الحدث المؤكد : هو الحدث الذى يحتوى كل عناصر فضاء العينة (ف)

③ الحدث المستحيل : هو الحدث الذى لا يحتوى أية عناصر من فضاء العينة (مجموعة خالية أو $\varnothing$)

ملاحظات هامة : + إحتمال الحدث = $\dfrac{\text{عدد عناصر الحدث}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$ ل(أ) = $\dfrac{ن (أ)}{ن (ف)}$

حيث : ل (أ) إحتمال وقوع الحدث (أ) ، ن (أ) عدد عناصر الحدث (أ) ، ن (ف) عدد عناصر فضاء العينة ف

+ أى حدث أ $\subset$ ف ، و إحتمال حدوثه = كسراً أى أن : ٠ $\leqslant$ ل (أ) $\leqslant$ ١

+ إحتمال الحدث المؤكد = ١

+ إحتمال الحدث المستحيل = صفر

أمثـــــــــلة

① فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة فقط أكتب فضاء العينة ثم عين إحتمال الأحداث التالية :

أ حدث ظهور عدد فردى ب حدث ظهور عدد أولى

ج حدث ظهور عدد فردى ، أولى د حدث ظهور عدد فردى أو أولى

الحــــــــــل

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

أ أ = { ١ ، ٣ ، ٥ } ⇐ ل (أ) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

ب ب = { ٢ ، ٣ ، ٥ } ⇐ ل (ب) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

ج ج = { ٣ ، ٥ } ⇐ ل (ب) = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

د د = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ } ⇐ ل (ب) = $\frac{٤}{٦}$ = $\frac{٢}{٣}$

تدريب :

سلة بها ٢٠ كرة منها ٨ كرات حمراء ، ٧ كرات بيضاء ، ٥ كرات صفراء فإذا سحبت كرة واحدة عشوائياً أوجد إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة :

أ حمراء ب حمراء أو صفراء ج ليست صفراء

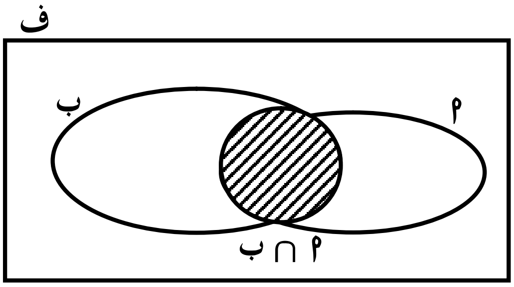
العمليات على الأحداث

حيث أن الأحداث هى مجموعات جزئية من فضاء العينة لذا فإن العمليات على الأحداث هى نفس العمليات على المجموعات مثل التقاطع و الإتحاد و بإعتبار أن فضاء العينة (ف) المجموعة الشاملة يمكن التعبير عن الأحداث و العمليات عليها بأشكال فن كما يلى :

أولاً : التقاطع

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف فإن تقاطع الحدثين أ ، ب و الذى يرمز له بالرمز أ ∩ ب و يعنى

حدث وقوع أ و ب معاً



و يكون ل(أ∩ب) = $\frac{ن (أ ∩ ب)}{ن (ف)}$

حالة خاصة :

الأحداث المتنافية : يقال لحدثين أ ، ب أنهما متنافيان إذا كان أ ∩ ب = ∅ و يكون ل (أ ∩ ب) = صفر

(١) صندوق به ١٠ بطاقات متماثلة و مرقمة من ١ إلى ١٠ خلطت جيداً و سحبت بطاقة واحدة عشوائياً أوجد إحتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عدداً : (أ) يقبل القسمة على ٢ (ب) يقبل القسمة على ٣ (جـ) يقبل القسمة على ٢ و يقبل القسمة على ٣

الحـــــــــــــــــــــــــل

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ١٠ }

أ = حدث أن يكون العدد يقبل القسمة على ٢ = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } ⇐ ل (أ) = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$

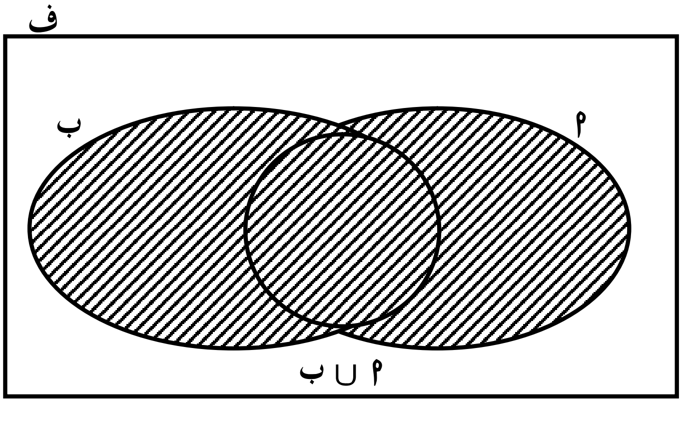
ب = حدث أن يكون العدد يقبل القسمة على ٣ = { ٣ ، ٦ ، ٩ } ⇐ ل (ب) = $\frac{٣}{١٠}$

جـ = حدث أن يكون العدد يقبل القسمة على ٢ و يقبل القسمة على ٣ = { ٦ } ⇐ ل (جـ) = $\frac{١}{١٠}$

ثانياً : الإتحاد

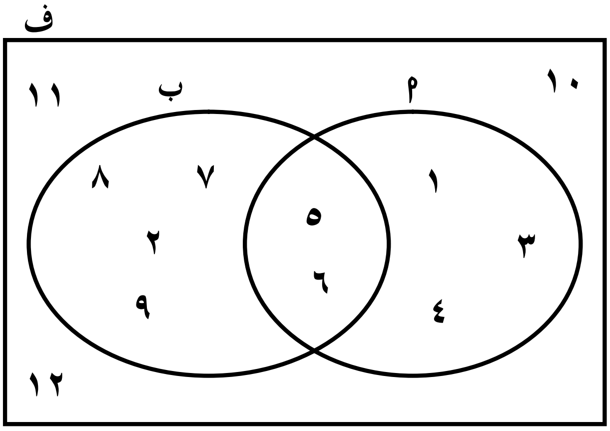
كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف فإن إتحاد الحدثين أ ، ب و الذى يرمز له بالرمز أ ∪ ب و يعنى

حدث وقوع أ أو ب أو كلاهما أى حدث وقوع أحدهما على الأقل



و يكون ل (أ ∪ ب) = $\frac{ن (أ ∪ ب)}{ن (ف)}$

① من الشكل المقابل إحسب مايلى :-



١ ل (أ)　　　٢ ل (ب)

٣ ل (أ ∩ ب)　　　٤ ل (أ ∪ ب)

الحـــــــــل

١ ل (أ) = $\frac{٥}{١٢}$　　　٢ ل (ب) = $\frac{٦}{١٢}$ = $\frac{١}{٢}$

٣ ل (أ ∩ ب) = $\frac{٢}{١٢}$ = $\frac{١}{٦}$　　　٤ ل (أ ∪ ب) = $\frac{٩}{١٢}$ = $\frac{٣}{٤}$

ملاحظات هامة جداً

① ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∩ ب)

و إذا كان الحدثان متنافيان فإن : ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

② إذا كان : أ ⊂ ب فإن : أ ∩ ب = أ ⇐ ل (أ ∩ ب) = ل (أ)

فإن : أ ∪ ب = ب ⇐ ل (أ ∪ ب) = ل (ب)

② إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ما و كان :

ل (أ) = ٠,٤٣ ، ل (ب) = ٠,٣٢ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٣ أوجد ل (أ ∪ ب)

الحـــــــــل

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∩ ب) = ٠,٤٣ + ٠,٣٢ – ٠,٣ = ٠,٧٥ – ٠,٣ = ٠.٤٥

③ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ما و كان :

ل (أ) = $\frac{٣}{٥}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٣}{٤}$ أوجد ل (ب) فى الحالات التالية :-

١ أ ، ب حدثين متنافيين　　　٢ أ ⊂ ب

الحـــــــــل

١ ∵ أ ، ب حدثين متنافيين ⇐ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

∴ ل (ب) = ل (أ ∪ ب) – ل (أ) = $\frac{٣}{٤}$ – $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{١٥}{٢٠}$ – $\frac{١٢}{٢٠}$ = $\frac{٣}{٢٠}$

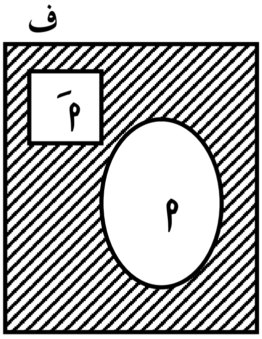
٢ ∵ أ ⊂ ب ⇐ ل (أ ∪ ب) = ل (ب) = $\frac{٣}{٤}$

④ إذا كان أ ، ب حدثين من ف ، ل(أ) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٧ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٤ أوجد إحتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

الحـــــــــل

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∩ ب) = ٠,٦ + ٠,٧ – ٠,٤ = ٠,٩

الحدث المُكمل و الفرق بين حدثين



أولاً : الحدث المُكمل

الحدث المُكمل للحدث أ هو أَ و يعنى حدث عدم وقوع أ

أى أن : إذا كان أ ⊂ ف فإن أَ هو الحدث المكمل للحدث أ حيث : أ ∪ أَ = ف ، أ ∩ أَ = ∅

و بذلك يكون الحدثان أ ، أَ هما حدثان متنافيان و يكون

ل (أَ) = ١ − ل (أ) ، ل (أ) = ١ − ل (أَ)

① إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ما و كان : ل (أ) = ٠,٧ ، ل (ب) = ٠,٤ أوجد ل (أَ) ، ل (بَ)

الحـــــــــــل

ل (أَ) = ١ − ل (أ) = ١− ٠,٧ = ٠,٣ ، ل (بَ) = ١ − ل (بَ) = ١ − ٠,٤ = ٠,٦

② إذا كان إحتمال نجاح طالب فى إمتحان الشهادة الإعدادية ٨٥٪ أوجد إحتمال رسوبه

الحـــــــــــل

إحتمال رسوب الطالب = ١٠٠٪ − ٨٥ ٪ = ١٥٪

③ إذا كان إحتمال فوز المنتخب المصرى لكرة القدم فى بطولة كاس الأمم الأفريقية ٠,٣١٨ فإوجد إحتمال عدم فوزه

الحـــــــــــل

إحتمال عدم فوز المنتخب المصرى = ١ − ٠,٣١٨ = ٠,٦٨٢

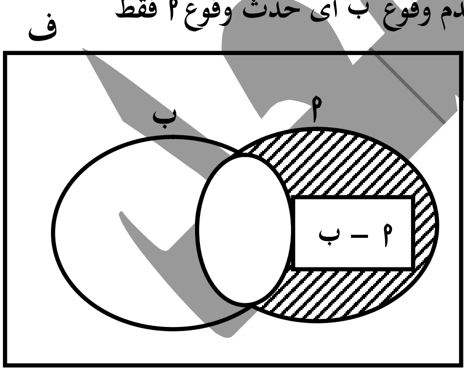
ثانياً : الفرق بين حدثين

إذا كان أ ، ب حدثين من ف فإن : أ − ب هو حدث وقوع أ و عدم وقوع ب أى حدث وقوع أ فقط

لاحظ أن : (أ − ب) ∪ (أ ∩ ب) = أ

و بالتالى يكون : ل (أ − ب) + ل (أ ∩ ب) = ل (أ)

أى أن : ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)



① إذا كان أ ، ب حدثين من ف ، ل(أ) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٧ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٤

أوجد : ل (أ − ب) ، ل (ب− أ)

الحـــــــــــل

ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب) = ٠,٦ − ٠,٤ = ٠,٢

ل (ب− أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = ٠,٧ − ٠,٤ = ٠,٣

(٢) إذا كان : ؟ ، ب حدثين من ف ، ل(؟) = ٠,٧ ، ل(؟ – ب) = ٠,٣ أوجد : ل (؟ ∩ ب)

الحـــــــــــل

∵ ل (؟ – ب) = ل (؟) – ل (؟ ∩ ب)

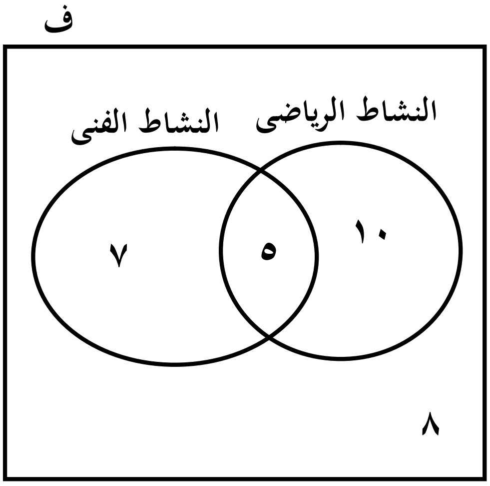
∴ ل (؟ ∩ ب) = ل (؟) – ل (؟ – ب) = ٠,٧ – ٠,٣ = ٠,٤

(٣) فصل دراسى به ٣٠ طالبا منهم ١٥ طالبا يمارسون النشاط الرياضى ؛ ١٢ طالبا يمارسون النشاط الفنى ، ٥ يمارسون النشاطين معا اختير منهم طالب عشوائيا مثل ذلك بشكل فن ثم أوجد إحتمال أن يكون الطالب المختار

[١] يمارس النشاط الرياضى فقط [٢] لا يمارس النشاط الفنى

[٣] لا يمارس النشاطين معاً [٤] يمارس كلا النشاطين

[٥] لا يمارس أى نشاط



الحـــــــــــل

من الشكل المقابل :

[١] إحتمال أن يكون الطالب المختار يمارس النشاط الرياضى فقط = $\frac{١٠}{٣٠}$ = $\frac{١}{٣}$

[٢] إحتمال أن يكون الطالب المختار لا يمارس النشاط الفنى = $\frac{١٨}{٣٠}$ = $\frac{٩}{١٥}$

[٣] إحتمال أن يكون الطالب المختار لا يمارس النشاطين معاً = $\frac{٢٥}{٣٠}$ = $\frac{٥}{٦}$

[٤] إحتمال أن يكون الطالب المختار يمارس كلا النشاطين = $\frac{٢٢}{٣٠}$ = $\frac{١١}{١٥}$

[٥] إحتمال أن يكون الطالب المختار لا يمارس أى نشاط = $\frac{٨}{٣٠}$ = $\frac{٤}{١٥}$

(٤) إذا كان ؟ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية و كان ؟ ⊂ ب فإن ل (؟ – ب) = ...

الحـــــــــــل

∵ ؟ ⊂ ب

∴ ل (؟ ∩ ب) = ل (؟)

∴ ل (؟ – ب) = ل (؟) – ل (؟ ∩ ب)

= ل (؟) – ل (؟)

= صفر