

# الميكانيكا التحليلية

تأليف  
كرانت ر. فاولس  
جامعة يوتا

ترجمة  
الدكتور طاهر ناهي الحفياي

الاستاذ المساعد في قسم الفيزياء  
كلية العلوم - جامعة بغداد

هذه ترجمة لكتاب

Analytical Mechanics

By

Grant R. Fowles

Second Edition - 1970

Holt Rinehart and Winston, Inc.

New York, London.

## قدمة المترجم

لا شك في ان التحولات العلمية في بلدنا العزيز ، وما تخضع عنها من مردودات ايجابية مستمرة ومتواصلة في المجالات العلمية ، تتطلب منا الانفتاح التام على المنجزات العلمية التي تمت وتتم في البلدان المتقدمة ، بغية الاستفادة منها في اضافة لبنات جديدة لبنائنا الصناعي المتنامي . ومن مستلزمات ذلك الانفتاح تعريب الكتب العلمية القيمة ، خصوصا وان المكتبة العربية تكاد ان تخلو من المصادر العلمية العربية . لذا اقدمت على ترجمة هذا الكتاب في موضوع الميكانيك التحليلي . وكان سبب اختياري لهذا الكتاب بالذات ، دقته العلمية ووضوح عبارته وسلسلة اسئلته وشمول موضوع بحثه وما تميز به من امثلة وتمارين تقرب الفكرة الى ذهن الطالب وتمكنه في معرفة مدى استيعابه للمادة . اضافة الى احاطة علم القارئ ببعض الجوانب المتعلقة بعلم حيوى يلعب دورا اساسيا في بناء الصناعة الحديثة ، الا وهو علم الفيزياء .

وقد حاولت جهد امكاني التوفيق بين لغة المؤلف الانكليزية واللغة العربية - رغم ما في ذلك من معائب - طامحا قدر المستطاع في نقل مضمونه بأمانة واخلاص وآملا ان اكسون قد وفقت في هذا المضمار لتحقيق الغرض المطلوب منه والله ولي التوفيق .

طالب ناهي الخفاجي

## ب

### مقدمة المؤلف

ان الغاية المتوخاة من هذا الكتاب هي ان يكون كتابا مدرسيا نسي موضوع الميكانيك التحليلي لطلبة الصفوف الثالثة في الفيزياء أو العلم الهندسية . وسنن متطلباته ان يكون الطالب ملما في الفيزياء العامة رياضيات التفاضل والتكامل ، اصف الى ذلك ، يفضل ان يكون الطالب قد درس او يدرس في الوقت ذاته رياضيات متقدمة تتضمن المعادلات التفاضلية .

ان المخطط التمهيدي للطبعة الحالية هو مخطط الطبعة الاولى نفسه ، ولكن ، هناك توسع في بحث عدد كبير من بنوده ، كما اضيفت اليه بنسود جديدة اخرى ، خصوصا نسي الفصل الاخير عن نظرية النسبية . كما اضيفت اليه عدد كبير من النمازين مما جعل عددها في هذه الطبعة ضعف ما كانت عليه في الطبعة الاولى ، كما اعيد تنظيم الفصل الرابع بصورة مستفيضه " داينميك الجسيم ، الحركة العامة " وقد عرضت رياضيات المتجهات نسي الفصل الاول واستخدمت في كل مكان من الكتاب . حيث اشتمل الفصلان الاول والثاني على مقدمة قصيرة عن رياضيات المتجهات . وفي الفصل الثالث فقد بحثت حركة الجسيم على خط مستقيم وفي الفصل الرابع بحثت حركة الجسيم بصورة عامة . أما في الفصل الخامس فقد شرحت تأثيرات حركة المحاور الانتقالية والدورانية وعلقتها بوصف حركة الجسيم . ولما كان لتطبيق ميكانيك الاجرام السماوية اهمية خاصة نسي علم الفضاء ، لذلك افرد له بحث مستفيض في الفصل السادس . وهناك تطبيقات اخرى عن علم الفضاء نسي الفصلين الخامس والسابع .

ورهننت النظريات العامة التي تخص حركة منظومة مكونة من عدد من الجسيمات نسي الفصل السابع ، ووضعت بدراسة التصادم وحركة العارنج . وخصص الفصلان التاليان لدراسة حركة الجسيم الصلب . أما الفصل الثامن فقد تضمن قليلا من الستاتيک ، لان في هذه المرحلة ، يكون الطالب قد اكتسب خبرة نسي هذا الموضوع من حل تمارين التوازن الستاتيکی نسي مواضيع الفيزياء التي سبقت هذا الموضوع . لم يحتوي الكتاب على موضوعي البرونته والهيديرداينميک ، لان المؤلف يرى وجود تأجيل هذيبن الموضوعين الى الصف الرابع او للدراسة العليا . اي بعد ان يتهيأ الطالب تماما نسي الرياضيات .

احتوى الفصل العاشر على بحث ميكانيك لاکرا ننج ، كما تضمن هذا الفصل بحثا

مختصرا عن معادلات هملتن • واستخدمت طريقة لاكرانج في الفصل الحادى عشر  
لدراسة تذبذب المنظومات كما احتوى هذا الفصل على شرح مختصر عن استقرار التوازن •  
يحتوى الفصل الاخير على مقدمة في النظرية النسبية الخاصة • والجزء الاول منه اقتصر على  
تحولات لورنس ونتائجها الباشرة • وتضمن الجزء الاخير من هذا الفصل على بحث  
استخدام المصفوفات في دراسة النظرية النسبية الخاصة •  
هناك مجموعة كبيرة من التمارين فى نهاية كل فصل • بعض منها نظريات مهمة  
على الطالب برهنتها • على ان يعطيه المدرس تلميحا • كما ان المؤلف يتوقع من الطالب  
ان يساهم فى تطوير المادة • بدلا من تعويض ارقام فى المعادلات التى اشتقت فى الكتاب •  
كما اعطيت اجوة التمارين الفردية فى نهاية الكتاب • كما اننا مستعدون لتزويد المدرس  
بأجوة التمارين الاخرى عند الطلب •  
وقد وضعت علامة النجمة على البنود المتقدمة والتى يمكن حذفها دون ان تؤثر  
على سير تدريس الموضوع • خصوصا اذا كان الوقت المخصص لتدريس الموضوع قصيرا •  
وطلى أية حال • يفضل ان يقرأ الطلبة الجيدون هذه البنود •  
واخيرا اقدم شكرى السى جميع الذين ساعدونى فى طبعة الكتاب الاولى والى الذين  
انتقدوه انتقادا بناء بعد استخدامه • حيث ساعدنى هذا كثيرا فــــــــــــــــــــى  
تحضير الطبعة الحالية •

## المحتويات

صفحة

١

## ٠١ مفاهيم اساسية • المتجهات

- ١-١ • الكميات الفيزيائية والوحدات ١-٢ • الكميات العددية  
 والمتجهة ١-٣ • رموز ١-٤ • تعاريف اصطلاحية وقواعد ١-٥ •  
 مقدار المتجه ١-٦ • الوحدات المتجهه للمحاور ١-٧ • المعنسى  
 الهندسى لجبر المتجهات ١-٨ • الضرب العددي ١-٩ •  
 بعض تطبيقات المتجهات ١-١٠ • الضرب الانجاسى ١-١١ •  
 التفسير الهندسى للضرب الاتجاهى ١-١٢ • عزم القوة ١-١٣ •  
 تمثيل متجه معلوم كحاصل ضرب كمية عددية ووحدة متجهه منفردة  
 ١-١٤ • الضرب الثلاثى ١-١٥ • تغيير نظام الاحداثيات •

٣١

## ٠٢ تفاضل وتكامل المتجهات وعلم الحركة

- ٢-١ • مشتقة المتجه ٢-٢ • متجه الموضع للجسيم ٢-٣ • متجه  
 السرعة ٢-٤ • متجه التعجيل ٢-٥ • تكامل المتجه ٢-٦ • السرعة  
 النسبية ٢-٧ • تفاضل ضرب المتجهات ٢-٨ • المركبات المعاسمة  
 والعمودية للتعجيل ٢-٩ • السرعة والتعجيل فى الاحداثيات  
 القطبية المستوية ٢-١٠ • السرعة والتعجيل فى الاحداثيات  
 الاسطوانية والكروية •

٥٦

## ٠٣ دايناميكه الجسيم • الحركة على خط مستقيم

- ٣-١ • قوانين نيوتن للحركة ٣-٢ • قانون نيوتن الاول • المحاور  
 المرجعية المستمرة ٣-٣ • الكتلة والقوة • قانون نيوتن الثانى والثالث  
 ٣-٤ • الزخم الخطى ٣-٥ • حركة الجسيم ٣-٦ • الحركة على  
 خط مستقيم ٣-٧ • القوة كدالة للموضع فقط مفهومها للطاقة الحركية  
 والكامنة ٣-٨ • القوة كدالة للسرعة فقط ٣-٩ • القوة كدالة  
 للزمن فقط ٣-١٠ • الحركة الشاقولية فى وسط مقاوم • سرعة المنتهى

- ١١-٣ • تغيير الجاذبية مع الارتفاع ٣-١٢ • القوة المعيدة الخطية  
 - الحركة التوافقية ٣-١٣ • اعتبارات الطاقة في الحركة التوافقية  
 ٣-١٤ • الحركة التوافقية المتضائلة ٣-١٥ • الحركة التوافقية

### الاضطرارية - الرنين

- ١٠٨ • ٤ • ديناميك الجسم - الحركة بصورة عامة

- ١-٤ • قاعدة الشغل ٤-٢ • القوى المحافظة ومجالات القوى  
 ٤-٣ • دالة الطاقة الكامنة ٤-٤ • شروط تواجد دالة الجهد  
 - مؤشر دلتا ٤-٥ • القوى من النوع القابل للفرز ٤-٦ • حركة  
 التغذية في مجال ثقالي منتظم ٤-٧ • المتذبذب التوافقي في  
 البعدين والثلاثة ابعاد ٤-٨ • حركة الجسيمات المشحونة في  
 المجالات الكهربائية والمغناطيسية ٤-٩ • حركة الجسيم القيدة  
 ٤-١٠ • معادلة الطاقة للقيدات الملساء ٤-١١ • الحركة على  
 منحنى ٤-١٢ • البندول البسيط ٤-١٣ • الحل الاكثر دقة  
 لمسألة البندول البسيط والمتذبذب غير الخطى ٤-١٤ • الحل  
 الدقيق لحركة البندول البسيط بدلالة التكاملات الموجزة  
 ٤-١٥ • مسألة تماوى الزمن ٤-١٦ • البندول الكروي •

١٦١

### ٥ • حركة المحاور المرجعية

- ٥-١ • حركة المحاور الانتقالية ٥-٢ • القوى الزائفة ٥-٣ • الحركة  
 العامة للمحاور ٥-٤ • ديناميك جسيم في محاور دائرة ٥-٥ •  
 تأثيرات دوران الارض ٥-٦ • بندول فوكو •

١٨٨

### ٦ • القوى المركزية والميكانيك السماوى

- ٦-١ • قانون الجاذبية ٦-٢ • قوة الجاذبية بين كرة منتظمة  
 وجسيم ٦-٣ • الطاقة الكامنة في مجال الجاذبية • جهـد  
 الجاذبية ٦-٤ • الطاقة الكامنة في مجال مركزى عام ٦-٥ •

الزخم الزاوى ٦-٦ • قانون المساحات • قوانين كبلر لحركة الكواكب  
السيارة ٦-٧ • مدار جسيم فى مجال قوة مركزية ٦-٨ • معادلة  
الطاقة للمدار ٦-٩ • المدارات فى مجال التربيع العكسى ٦-١٠ •  
الطاقات المدارية فى مجال التربيع العكسى ٦-١١ • مدة الدورة  
للحركة المدارية ٦-١٢ • الحركة فى مجال التربيع العكسى  
التنافرى - تشتت جسيمات الفا ٦-١٣ • الحركة فى

مدارات دائرية تقريبا - الاستقرار

٢٣٠

٧- دايناميك منظومة الجسيمات

٧-١ • مركز الكتلة والزخم الخطى ٧-٢ • الزخم الزاوى للمنظومة  
٧-٣ • الطاقة الحركية لمنظومة جسيمات ٧-٤ • حركة  
جسمين يؤثر احدهما على الآخر • الكتلة المصغرة ٧-٥ • التصادم  
٧-٦ • التصادم المائل والتشتت • مقارنة بين المحاور  
المختبرية ومحاور مركز الكتلة ٧-٧ • الدفع ٧-٨ • حركة  
جسم متغير الكتلة • حركة الصاروخ •

٢٥٦

٨- ميكانيك الاجسام الصلدة - الحركة فى مستو

٨-١ • مركز الكتلة لجسم صلد ٨-٢ • التوازن الستاتيكي لجسم  
صلد ٨-٣ • دوران جسم صلد حول محور ثابت - عزم القصور  
الذاتى ٨-٤ • حساب عزم القصور الذاتى ٨-٥ • الهندس  
الفيزيائى ٨-٦ • نظرية عامة خاصة بالزخم الزاوى ٨-٧ •  
الحركة الصفائحىة للجسم الصلد ٨-٨ • جسم يتدحرج اسفل  
مستوى مائل ٨-٩ • حركة جسم صلد تحت تاثير قوة دافعة  
٨-١٠ • تصادم الاجسام الصلدة •

٢٩٨

٩- حركة الجسم الصلد العامة

٩-١ • زخم الجسم الصلد الزاوى - ضرب القصورات الذاتية



## ل

٠٢-٩ محاور الجسم الصلب الرئيسية ٦-٣ الطاقة الحركية  
 الدورانية لجسم صلب ٩-٤ عزم القصور الذاتي لجسم  
 صلب حول محور اعتباطي ٠ المجسم الناقص للعزم ٩-٥ المجسم  
 الناقص للعزم ٩-٦ معادلات اولسر لحركة الجسم الصلب  
 ٩-٧ الدوران الحر لجسم صلب عندما لا تؤثر عليه قوى  
 الوصف الهندسي للحركة ٩-٨ الدوران الحر لجسم صلب له  
 محور تناظر - المعالجة التحليلية ٠ ٩-٩ الطواف  
 الجيروسكوبي - حركة الخدروف ٩-١٠ استعمال المصفوف في  
 ديناميك الجسم الصلب ٠ الكمية الممتدة للقصور الذاتي ٠

٣٥٣

١٠- معادلات لاكرانج

١٠-١ الاحداثيات المعممة ١٠-٢ القوى المعجمة ١٠-٣  
 معادلات لاكرانج ١٠-٤ بعض تطبيقات معادلات لاكرانج  
 ١٠-٥ الزخم المعممة الاحداثيات المهملة ١٠-٦  
 معادلات لاكرانج للقوى الدافعه ١٠-٧ قاعدة التغير  
 لهملتن ١٠-٨ دالة هملتن ٠ معادلات هملتن ١٠-٩  
 معادلات لاكرانج للحركة المقيدة ٠

٣٨٩

١١- نظرية التذبذب

١١-١ الطاقة الكامنة والتوازن - الاستقرار ١١-٢ فك دالة  
 الطاقة الكامنه بمتسلسلة اساسية ١١-٣ تذبذب منظومة  
 ذات درجة حريه واحدة ١١-٤ متذبذبان توافقيان مزدوجان  
 ١١-٥ الاحداثيات العياريه ١١-٦ النظرية العامة للمنظومات  
 المتذبذبة ١١-٧ تذبذب وتر محمل ١١-٨ تذبذب مستمر  
 لمنظومة ٠ معادلة الموجه ١١-٩ موجات منحني الجيب

٤٣٤

١٢- النظرية النسبية الخاصة

١٢-١ ملاحظات تمهيدية ١٢-٢ تجربة مكلسن - مورلي

- ٠٣-١٢ فرضيات انشتين في النسبية الخاصة ١٢-٠٤ • تحويلات  
 لورنتز ١٢-٠٥ • نتائج تحويل لورنتز - تقلص الطول وتمديد  
 الزمن ١١-٠٦ • الفضاء والزمن ١٢-٠٧ • الرحلة الفضائية وسوا م  
 التناقض الظاهري ١٢-٠٨ • نسبية الحركة المجردة • تحويلات  
 السرعة ١٢-٠٩ • نسبية ديناميك الجسم • تغير الكتلة مع  
 السرعة ١٢-٠١٠ • علاقة الكتلة والطاقة ١٢-٠١١ • استعمال  
 المصفوفات والمتجهات - الاربعه في النسبية •

## الفصل الاول

### مفاهيم اساسية - الاتجاهات

#### Fundamental Concepts-Vectors

في اية نظرية علمية وخصوصا في علم الميكانيك يجب ان نبدأ بمفاهيم معينة اولية . كذلك من الضروري وضع عدد معين من الفرضيات المعقولة .

ان من اكثر المفاهيم اساسية مفهومان هما - الفضاء Space والزمن Time واعتمادا على دراستنا الاولى لعلم الحركة في الميكانيك سنفترض ان الفضاء الفيزيائي المتعامل فيه اعتياديا يوصف بالفضاء الرياضي ذي الابعاد الثلاثة للهندسة الاقليدية وهذا وصف نستطيع الاكتفاء به الان . . اما بالنسبة لمفهوم الزمن ، سنفترض سلسلة من الاحداث المرتبة المتتابعة التي يمكن ان تقاس بقياس زماني منتظم مطلق . . بالاضافة الى ذلك سنفترض ان لكل من الفضاء والزمن كيانا مستقلا واضحا . الا اننا عندما ندرس النظرية النسبية فيما بعد سنعيد النظر في مفهومي الفضاء والزمن اللذين سوف نجد هما غير مستقلين ولا مطلقين . وهي مسألة سوف نعود اليها بعد ان ندرس اساس الميكانيك الكلاسيكي .

لاجل تعريف موضع جسم في الفضاء ، من الضروري اتخاذ محاور مرجعية . وسنستعمل نظام الاحداثيات في الميكانيك والنوع الاساسي لنظام الاحداثيات الذي يفي باغراضنا هو نظام الاحداثيات الديكارتيّة

Cartesian Coordinate او نظام الاحداثيات المتعامدة وهو مجموعة مكونة من ثلاث مستقيمت ( اومحاور ) متعامدة في هذه الاحداثيات يعين موضع نقطة بثلاثة اعداد اومحاور هي  $x, y, z$  وتتفسير احداثيات النقطة المتحركة بمرور الزمن ، اى تخون الاحداثيات دوال للكمية  $t$  المقاسة على مقياسنا الزمني .

ان الجسم او النقطة الكلية من المفاهيم المفيدة في الميكانيك ، والجسم شىء له كتلة <sup>(١)</sup> ولكن ليس له امتداد بعدى . انه ، بتعبير ادق ، مفهوم مثالي مجرد لا وجود له في الطبيعة فحتى الالكترون له حجم محدود . ولكن فكرة الجسم مفيدة كتقريب لجسم صغير او بتعبير ادق لجسم ذى حجم غير مهم نسبيا في نطاق بحث معين . وهكذا يمكننا مثلا معاملة الارض كجسم في ميكانيك الفلك .

#### ١- الكميّات الفيزيائية والوحدات Physical Quantities & Units

يعبر عن الحقائق الفيزيائية التي تحت المشاهدة بدلالة مكروونات اساسية ثابتة تسمى الكميّات الفيزيائية مثل الطول والزمن والقوة وهلم جرا . . . والكمية الفيزيائية هي الشىء الذى يمكن قياس مقداره بدلالة وحدة مختارة . فمثلا عندما نقول ان طول جسم معين (  $\gamma$  سم ) نعى بذلك ان القياس الكمي (  $\gamma$  ) هو العلاقة ( النسبة ) بين طول الجسم وطول الوحدة ( ١ سم ) .

وقد وجد انه من الممكن تعريف جميع الكميّات الفيزيائية في الميكانيك بدلالة ثلاث وحدات اساسية فقط هي الطول والكتلة والزمن .

#### وحدة الطول

ان وحدة الطول القياسية هي المتر . وقد كان المتر سابقا

(١) سيشرح مفهوم الكتلة في الفصل الثالث

المسافة المحصورة بين حدين ثابتين على قضيب من البلاتين محفوظ  
في دار القاييس العالمية في فرنسا . اما الان فان المتر يعرف بالمسافة التي  
تحتويها ٧٣ ر ١٦٥٠٧٦٣ موجة ضوئية كاملة لخط الطيف البرتقالي  
لنظير الكريبتون - ٨٦ .

### وحدة الكتلة

ان وحدة الكتلة القياسية هي الكيلوغرام . وهي كتلة اسطوانة من  
فلزي البلاتين والايراديوم محفوظة في دار القاييس العالمية .

### وحدة الزمن

الوحدة الاساسية لقياس الزمن هي الثانية وقد عرفت سابقا بدلالة  
دوران الارض . الثانية بهذا التعريف هي مقدار الزمن لـ ٩١٩٢٦٣١٧٢٠ ذبذبة  
تحدث في انتقال ذري خاص لنظير السيزيم  $^{133}\text{Cs}$  ذي العدد  
الكتلي - ١١٣ .

ان نظام الوحدات آنف الذكر يسمى بالنظام العالمي ( I.S. )  
والمعيار الذري الحديث للطول والزمن في هذا النظام ليس تقريبا  
اكثر دقة من المعايير السابقة واما يمكن استنتاجه عالميا وهو غير قابل  
للفناء الا ان التكنيك الحالي لسر الحظ ، غير عملي لاستخدام معيار  
ذري للكتلة .

في الواقع ليس هناك سبب خاص لاستخدام الطول والكتلة والزمن  
كمجموعة اساسية لتعريف الوحدات . فقد استخدمت مجموعات اخرى من

( ٢ ) في هذا النظام توجد وحدة رابعة هي الكولوم التي تستعمل لتعريف  
الوحدات الكهربائية .

الكميات الفيزيائية مثل الطول والقوة والزمن في النظام التناقلي .  
وتوجد أنظمة اخرى شائعة الاستعمال بالاضافة الى نظام  
I.S. كنظام cgs اوسنتيمتر - غرام - ثانية ونظام FPS اوقدم  
- باوند - ثانية . وهذان النظامان يمكن اعتبارهما ثانويين بالنسبة  
لنظام I.S. لان وحداتهما عرفت بصورة خاصة ككسور لوحدات I.S.

$$1 \text{ م} = 10^2 \text{ سم}$$

$$1 \text{ كغم} = 10^3 \text{ غم}$$

$$1 \text{ قد} = 3.048 \text{ ر م}$$

$$1 \text{ پا} = 4.536 \text{ ر كغم}$$

١-٢ الكميات العددية والتجهة Scalar and Vector Quantities

ان الكميات الفيزيائية التي تعين تعيينا كاملا بمعرفة مقدارها  
فقط تسمى " الكميات العددية Scalars " ومن الامثلة الشائعة  
للكميات العددية - الكثافة والحجم ودرجة الحرارة . وتعامل الكميات  
العددية رياضيا كاعداد حقيقية عادية . وتخضع عند الجمع والطرح و  
الضرب والقسمة لجميع القوانين المألوفة في الجبر .

وهناك كميات فيزيائية معينة تحوى على خاصية  
اتجاهية ، مثل الازاحة من نقطة في الفضاء الى اخرى .  
مثل هذه الكميات يلزم لوصفها بصورة كاملة ذكر اتجاهها  
فضلا عن مقدارها . وتسمى هذه الكميات بالكميات المتجهية  
Vectors وهي اذا اتحدت مع بعضها تخضع لقانون متوازي

الاضلاع للجمع والذي سنشرحه فيما بعد في بند ١ - ٦<sup>(٣)</sup> بالاضافة الى الازاحة في الفضاء هناك امثلة شائعة اخرى للمتجهات مثل السرعة والتعجيل والقوة . ان مفهوم المتجه وتطوير رياضيات الكميات المتجهة ككل اثبتا ضرورتها في تطوير علم الميكانيك . وسيكرس ما تبقى من هذا الفصل لدراسة مختصرة في جبر المتجهات .

١ - ٣ رموز Notation

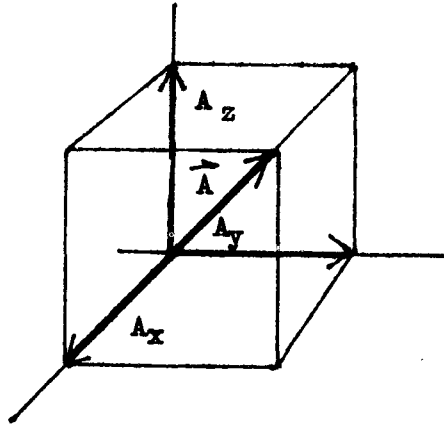
تمثل الكميات المتجهة بحروف الطابعة الثقيلة مثل (A) بينما تمثل الكميات العددية بحروف الطابعة الاعتيادية . اما في الكتابة فتستعمل اعتياديا علامة مميزة كالسهم الذي يدل على ان الكمية متجهة مثل  $\vec{A}$  .

يعين اى متجه مثل  $\vec{A}$  بمؤرة كاملة بذكر مقداره واتجاهه بالنسبة الى محاور يتفق عليها كمرجع . ويمثل في الرسم بسهم يشير الى اتجاه المتجه ويتناسب طوله مع مقداره

---

(٣) كمثال لكمية لها اتجاه ولكن لا تخضع لقانون الجمع هو الدوران المحدود لجسم حول محور معين ويمكن للقارئ ان يتحقق بسهولة من ان دورتين متتابعتين حول محاور مختلفة لا تحدثان نفس تأثير الدوران المنفرد الذي يعين من قانون متوازي الاضلاع على اية حال سوف لا نهتم في الوقت الحاضر بكميات من هذا النوع .

كما هو مبين في الشكل ( ١ - ١ ) ويعين كذلك تعييننا كاملا



الشكل ( ١ - ١ ) مركبات متجه في المحاور الديكارتيه

بذكر مركباته او مساقطه على طول المحاور المستخدمة وسيستعمل

رمز مركبات المتجه  $[A_x, A_y, A_z]$  كتمثيل آخر للمتجه .

فالتصرف الأيمن من المعادلة  $\vec{A} = [A_x, A_y, A_z]$

يمثل المتجه  $\vec{A}$  بدلالة مركباته في محاور خاصة ( سيفرض ان المحاور

الديكارتيه هي المقصودة ، ان لم يذكر خلافنا لذلك ) . فمثلا اذا كان  $\vec{A}$

يمثل الازاحة من النقطة  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  الى النقطة  $P_2(x_2, y_2, z_2)$

عندئذ  $A_x = x_2 - x_1, A_y = y_2 - y_1, A_z = z_2 - z_1$

واذا كان  $\vec{A}$  يمثل قوة • عندئذ تكون  $A_x$  مركبة القوة وهم جرا .

وواضح ان القيم العددية لمركبات متجه معين تعتمد على اختيار المحاور

اذا اقتصر بحث خاص على اتجاهات واقعة في مستو واحد يلزمنا

في هذه الحالة تمركبتان فقط وبالعكس ، فمن الممكن تعريف فضاء رياضي

لاي عدد من الابعاد . اذن يمثل الرمز  $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$



متجها ابعاده  $n$  . وفي هذا المفهوم المجرد يعنى المتجه  
كجموعة اعداد .

1- { تعاريف اصطلاحية وقواعد Formal Definitions and Rules

تبدأ دراسة جبر المتجهات ببعض التعاريف الاصطلاحية الخاصة  
بالمتجهات :-

1- تساوى المتجهات Equality of Vectors

$$\vec{A} = \vec{B} \quad \text{المعادلة}$$

$$(A_x, A_y, A_z) = (B_x, B_y, B_z) \quad \text{او}$$

تكافئ المعادلات الثلاث التالية :-

$$A_x = B_x \quad A_y = B_y \quad A_z = B_z$$

اى تتساوى المتجهات اذا تساوت مركباتها المتعاقبة

2- جمع المتجهات Vector Addition

يعرف جمع اى متجهين بالمعادلة التالية :

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x, A_y, A_z) + (B_x, B_y, B_z) = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$$

وهذا يعنى ان مجموع اى متجهين هو متجه اخر مركباته مساوية  
لمجموع مركبات المتجهين المعلومين .

3- الضرب بكمية عددية Multiplication by a scalar

اذا كانت  $c$  كمية عددية و  $\vec{A}$  كمية متجهة فان

$$c\vec{A} = c(A_x, A_y, A_z) = (cA_x, cA_y, cA_z) = \vec{Ac}$$

اى حاصل الضرب  $c\vec{A}$  كمية متجهة اخرى مركباتها  $c$  من المرات  
اكبر من مركبات المتجه  $\vec{A}$  .

## ٤- طرح المتجهات Vector Subtraction

يعرف طرح المتجهات كما يلي :

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-1)\vec{B} = (A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z)$$

## ٥- متجه الصفر The Null Vector

المتجه  $\vec{0} = (0, 0, 0)$  يسمى متجه الصفر .

واتجاه متجه الصفر غير معرف ومن (٤) نحصل على  $\vec{A} - \vec{A} = 0$

ولما كان استعمال الصفر بدلا من متجه الصفر ليس مريحا لذلك

سنستعمل في المستقبل الرمز  $\vec{0} = 0$  .

## ٦- قانون تبادل الحدود في الجمع The Commutative Law of Addition

يصح هذا القانون في جبر المتجهات اي ان

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

لان  $A_x + B_x = B_x + A_x$  كذلك بالنسبة لمركبات  $y$  ,  $z$

## ٧- قانون ترتيب الحدود The Associative Law

ويصح كذلك قانون ترتيب الحدود في المتجهات لان

$$\begin{aligned} \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) &= [A_x + (B_x + C_x), A_y + (B_y + C_y), A_z + (B_z + C_z)] \\ &= (A_x + B_x) + C_x, (A_y + B_y) + C_y, (A_z + B_z) + C_z = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} \end{aligned}$$

## ٨- قانون توزيع الحدود The Distributive Law

يصح قانون توزيع الحدود عند ضرب المتجهات في كمية عددية

لأننا نحصل من (٢) و (٣) على -

$$\begin{aligned} c(\vec{A} + \vec{B}) &= c(A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) \\ &= c(A_x + B_x), c(A_y + B_y), c(A_z + B_z) \\ &= (cA_x + cB_x, cA_y + cB_y, cA_z + cB_z) \\ &= c\vec{A} + c\vec{B} \end{aligned}$$

اي ان المتجهات تخضع لقوانين الجبر الاعتيادية فيما يخص العمليات  
انفة الذكر .

١- مقدار المتجه Magnitude of a Vector  
يرمز لمقدار المتجه  $\vec{A}$  بالرمز  $|\vec{A}|$  او بـ  $A$  ويعرف بالجذر  
التربيعي لحاصل جمع مربع مركبات المتجه .

$$A = |\vec{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1-1)$$

واخذ الجذر الموجب شيء بديهي في الهندسة يكون مقدار  
المتجه هو طوله ، اي طول قطر متوازي مستطيلات اضلاعه  
•  $A_x, A_y, A_z$

١-٦) الوحدات المتجهة للمحاور Unit Coordinate Vectors  
المتجه الذي مقداره واحد عدد صحيح يسمى (الوحدة المتجهة)  
والوحدات المتجهة الثلاث

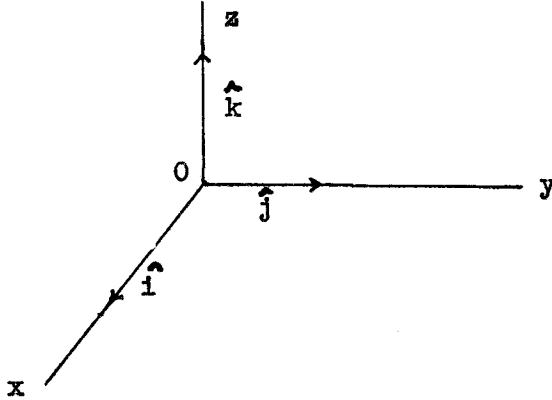
$$\hat{i} = [1, 0, 0], \quad \hat{j} = [0, 1, 0], \quad \hat{k} = [0, 0, 1] \quad (2-1)$$

تسمى (الوحدات المتجهة للمحاور) او (المتجهات الاساسية)  
ويمكن تمثيل اي متجه بدلالة هذه المتجهات كجميع على النحو التالي

$$\begin{aligned} \vec{A} &= (A_x, A_y, A_z) = (A_x, 0, 0) + (0, A_y, 0) + (0, 0, A_z) \quad (3-1) \\ &= A_x(1, 0, 0) + A_y(0, 1, 0) + A_z(0, 0, 1) \\ &= \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z \end{aligned}$$

ان تمثيل "المجموع" ملائم لاغراض كثيرة وسيستخدم كثيرا وسوف  
نسميه صيغة -  $ijk$  لتمثيل المتجه .

وتعرف اتجاهات الوحدات المتجهة بواسطة نظام الإحداثيات  
(الشكل ١ - ٢)



الشكل ( ١ - ٢ ) الوحدات المتجهة للإحداثيات  $i, j, k$ .

وهي تكون ثلاثي اليد - اليمنى أو اليسرى ويتوقف ذلك على نوع  
المحاور المستخدمة واعتياديا تستخدم محاور اليد اليمنى ، وهي  
المحاور المبينة في الشكل ( ١ - ٢ ) .

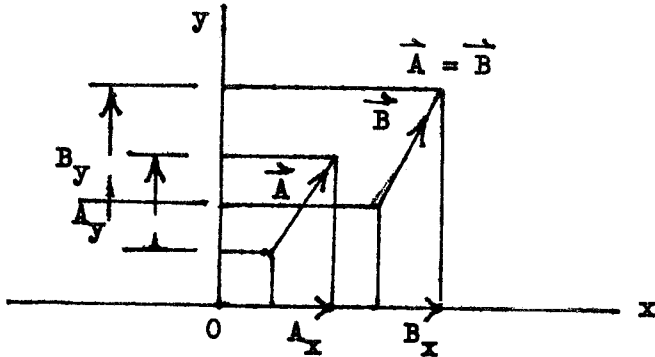
(٧-١) المعنى الهندسي لجبر المتجهات

Geometric Meaning of Vector Operations

إذا فرضنا أن المتجهة يمثل بمستقيم طوله واتجاهه معلومان ،  
فيمكن ببساطة التحقق من أن التعاريف التي ذكرنا نصوصها تؤول لها  
التفسير البسيطة التالية :

١- تساوي المتجهات Equality of Vectors

إذا تساوى متجهان ، فإنهما عندئذ يكونان متوازيين ولهما نفس الطول  
ولكن ليس من الضروري أن يكون لهما نفس الموضع . والشكل ( ١ - ٣ )  
يبين متجهين متساويين حيث رسمت مركبتان فقط لكل منهما  
للموضوح .

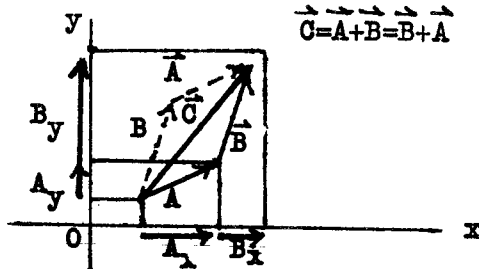


الشكل ( ١ - ٣ ) يوضح المتجهات المتساوية

لاحظ ان المتجهين يكونان ضلعين متقابلين لتوازي الاضلاع ( كما انه ليس من الضروري ان تكون المتجهات المتساوية متكافئة في جميع النواحي . . فمثلا حتى اذا تساوى متجهان في ثوران في نقطتين مختلفتين في جسم فان كلا منهما قد تولد تأثيرا ميكانيكيا يختلف عن تأثير الاخرى ) .

٢ - جمع المتجهات Vector Addition

الجمع الاتجاهي لمتجهين يساوي الضلع الثالث لثلاث ، ضلعاه الاخران يساويان المتجهين المعنيين . الشكل ( ١ - ٤ ) يوضح جمع المتجهات \* كذلك يعين

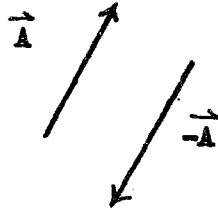


الشكل ( ١ - ٤ ) الجمع لمتجهين

الجمع بقاعدة متوازي الاضلاع كما هو مبين في نفس الشكل. (يعرف جمع المتجهات من ناحية ثانية طبقا للتعريف (١-٤) (٢) حتى لو لم يكن للمتجهات نقطة مشتركة)

٢- ضرب المتجه بكمية عددية Multiplication of a Vector by a Scalar

المتجه  $k\vec{A}$  يوازي المتجه  $\vec{A}$  وطوله  $k$  مرة اكبر من  $\vec{A}$  عندما يكون  $k = 1$  يعني ان اتجاه  $-\vec{A}$  هو معكوس اتجاه  $\vec{A}$  كما هو مبين في الشكل



الشكل (١-٥) السالب للمتجه

(١-٨) الضرب العددي The Scalar Product

الضرب العددي لاي متجهين مثل  $\vec{A}$  و  $\vec{B}$  يمثل بالرمز  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  ويقرا (A dot B) وهو كمية عددية تعرف بالمعادلة التالية :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1-1)$$

وينتج من التعريف المذكور انما ان

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad (1-2)$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \quad (1-3)$$

لان  $A_x B_x = B_x A_x$  وهم جرا وينتج كذلك ما يلي :-

لناتنا اذا استخدمنا التعريف (١-٤) بالتفصيل نصل على :-

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) &= A_x (B_x + C_x) + A_y (B_y + C_y) + A_z (B_z + C_z) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z + A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z \\ &= \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \end{aligned}$$

تذكر من الهندسة التحليلية العلاقة التالية لجيب تمام الزاوية المحصورة بين مستقيمين والتي هي :-

$$\cos \theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{\frac{1}{2}} (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

وباستعمال المعادلتين (١-١) و (١-٢) يمكن كتابة المعادلة المذكورة

اعلاه على الشكل التالي :-

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

أو  
(٧-١)

يمكن اعتبار العلاقة السابقة كتعريف آخر للضرب العددي . هندسيا

$\vec{A} \cdot \vec{B}$  تساوي طول مسقط  $\vec{A}$  على  $\vec{B}$  مضروبا في طول  $\vec{B}$  .

اذا كان الضرب العددي  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  يساوي صفرا ، عندئذ يكون  $\vec{A}$

عموديا على  $\vec{B}$  ، على الا يكون اى من  $\vec{A}$  او  $\vec{B}$  مساويا للصفر .

ان مربع مقدار المتجه  $\vec{A}$  ينتج من ضرب المتجه  $\vec{A}$  في نفسه

$$A^2 = |\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$$

عدديا . اى ان

من تعاريف الوحدات المتجهة للاحداثيات  $\hat{i}$  ,  $\hat{j}$  ,  $\hat{k}$  يمكن

التحقق من صحة العلاقات التالية بسهولة . . .

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$

(٨-١)

لنفرض ان عددا من قوى متلاقية في نقطة واحدة  
 مثل  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$  واحدة

تؤثر على جسم عندئذ يكون شرط التوازن السكوني للجسم  
 اى الشرط الذى فيه الجسم ساكنا تحت تأثير هذه القوى ، هو ان يكون  
 مجموعها الاتجاهي يساوى صفرا ٠ اى -

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_i = \vec{0}$$

اذا مثلنا مركبة  $\vec{F}_1$  باتجاه المحور - x بالرمز  $x_1$  وهلم جـرا ،  
 عندئذ تكون معادلة التوازن المذكورة اعلاه مكافئة للمعادلات الثلاث التالية

$$\sum x_1 = 0$$

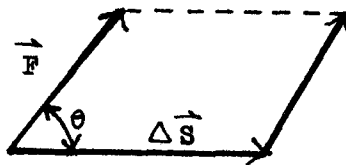
$$\sum y_1 = 0$$

$$\sum z_1 = 0$$

كما هو جلي من تعريف جمع المتجهات الذى سبق توضيحه في البند  
 ١-٢ (٢) اذا كانت جميع القوى معروفة باستثناء واحدة منها فممكن  
 ايجاد مركبات هذه القوة المجهولة من حل معادلات التوازن المذكورة اعلاه

٢- الشغل Work

افرض ان جسما قد ازيح خطيا  $\Delta \vec{S}$  بتاثير قوة ثابتة  $\vec{F}$  ،  
 كما هو مبين في الشكل (٦-١) فالشغل  $\Delta W$  يساوى حاصل ضرب  
 مركبة القوة  $\vec{F}$  باتجاه الازاحة  $\Delta \vec{S}$



الشكل (٦-١) قوة تعاني ازاحة

١-٩) بعض تطبيقات المتجهات Some Applications of Vectors

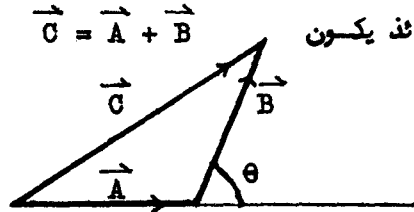
١- توازن جسم Equilibrium of a Particle



في مقدار الازاحة  $\Delta S$  اي  $\Delta W = (F \cos \theta) \Delta S$  حيث  $\theta$  تمثل الزاوية بين  $\vec{F}$  و  $\vec{\Delta S}$  ولكن الطرف الايمن عبارة عن الضرب العددي للقوة  $\vec{F}$  في الازاحة  $\vec{\Delta S}$  اي  $\Delta W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta S}$

٢- قانون الجيب تمام Law of Cosines

يمثل الشكل (٧-١) مثلثا اضلاعه المتجهات  $\vec{A}$  ،  $\vec{B}$  ،  $\vec{C}$  عندئذ يكون



الشكل (٧-١) قانون الجيب تمام

وبضرب المتجه  $\vec{C}$  في نفسه عدديا نحصل على

$$\vec{C} \cdot \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B})$$

$$= \vec{A} \cdot \vec{A} + 2\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{B}$$

والخطوة الثانية تنتج من تطبيق القوانين في المعادلات (٥-١)

و (٦-١) واستبدال  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  بما يساويه  $AB \cos \theta$  اي  $C^2 = A^2 + 2AB \cos \theta + B^2$  وهذا هو قانون الجيب تمام المعروف .

(١٠-١) الضرب الاتجاهي The Vector Product

يمثل الضرب الاتجاهي للمتجهين  $\vec{A}$  و  $\vec{B}$  بالرمز  $\vec{A} \times \vec{B}$  ويقراً ( $\vec{A}$  cross  $\vec{B}$ ) ويعرف بالمتجه الذي مركباته تعطى بالمعادنة التالية :

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \quad (10-1)$$

بيحث التفسير الهندسي للضرب الاتجاهي في الهندس ( ١٢ - ١ ) و  
يمكن البرهنة على ان القواعد التالية تصح في الضرب الاتجاهي :-

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \quad (10-1)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \quad (11-1)$$

$$n(\vec{A} \times \vec{B}) = (n\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (n\vec{B}) \quad (12-1)$$

وبرهنتها تأتي مباشرة من التعريف وقد تركت كتعبير

وفقا للتعريف الجبرية للوحدات المتجهة للاحداثيات - المعادلة ( ١ - ٢ )

نستطيع ان نثبت صحة العلاقات التالية للضرب الاتجاهي بسهولة

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} = -\hat{k} \times \hat{j}$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} = \hat{j} \times \hat{i}$$

( ١٣ - ١ )

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} = -\hat{i} \times \hat{k}$$

فمثلا

$$\hat{i} \times \hat{j} = (0-0, 0-0, 1-0) = (0,0,1) = \hat{k}$$

ويمكن بسهولة برهنة بقية المعادلات بنفس الاسلوب .

( ١١ - ١ ) التفسير الهندسي للضرب الاتجاهي

Geometric Interpretation of the Cross Product

ان تمثيل الضرب الاتجاهي بصيغة -  $i, j, k$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

وكل حد داخل الاقواس مساو الى محدد . اى

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{i} \begin{vmatrix} A_y A_z \\ B_y B_z \end{vmatrix} + \hat{j} \begin{vmatrix} A_z A_x \\ B_z B_x \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} A_x A_y \\ B_x B_y \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad \text{واخيرا} \quad (14-1)$$

وبفك المحدد يمكن التحقق من صحته بسهولة . وصيغة المحدد اداة ملائمة تساعدنا على تذكر تعريف الضرب الاتجاهي . من خواص المحددات يمكن على الفور معرفة ما اذا كان المتجه  $\vec{A}$  موازيا للمتجه  $\vec{B}$  اى ما اذا كان  $\vec{A} = \alpha \vec{B}$  وذلك عندما يكون الصفان الاخيران من المحدد متناسبين اى تكون قيمة المحدد تساوى صفرا . اذن يكون الضرب الاتجاهي لتجهين متوازيين يساوى صفرا . لنحسب مقدار الضرب الاتجاهي عندنا :-

$$|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = (A_y B_z - A_z B_y)^2 + (A_z B_x - A_x B_z)^2 + (A_x B_y - A_y B_x)^2$$

وبقليل من الصبر يمكن تبسيطها الى الشكل التالي

$$|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)^2$$

او من تعريف الضرب العددى ، يمكن كتابة المعادلة المذكورة

اعلاه على الشكل التالي

$$|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = A^2 B^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$$

وباخذ الجذر التربيعي لطرفي هذه المعادلة وباستخدام المعادلة

(٧-١) نستطيع ان نكتب مقدار الضرب الاتجاهي على النحو التالي

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB(1 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} = AB \sin \theta \quad (١٥-١)$$

حيث  $\theta$  تمثل الزاوية بين  $\vec{A}$  ,  $\vec{B}$  .

لتفسير الضرب الاتجاهي هندسيا نلاحظ ان المتجه  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$  يكون عموديا على كل من  $\vec{A}$  ,  $\vec{B}$  لان

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z$$

$$= A_x(A_y B_z - A_z B_y) + A_y(A_z B_x - A_x B_z) + A_z(A_x B_y - A_y B_x) = 0$$

وبالمثل  $\vec{B} \cdot \vec{C} = 0$  اذن المتجه  $\vec{C}$  يكون عموديا على المستوى

الذي يحوى المتجهين  $\vec{A}$  و  $\vec{B}$  .

ان اتجاه المتجه  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$  يعين من فرضية كون المتجهات

الثلاث  $\vec{A}$  ,  $\vec{B}$  ,  $\vec{C}$  تشكل ثلاثي اليد اليمنى كما هو واضح من الشكل

(٨-١) . هذا ينسجم مع النتيجة التي برهنت سابقا ، فمن ثلاثي اليد -

اليمنى  $ijk$  حصلنا على  $(\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k})$  . اذن نستطيع

ان نكتب من المعادلة (١٥-١) ما يلي

$$\vec{A} \times \vec{B} = (AB \sin \theta) \vec{n}$$

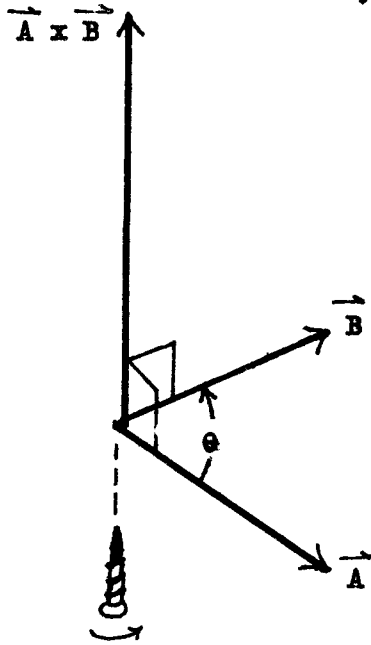
حيث  $\vec{n}$  تمثل الوحدة المتجهة العمودية على مستوى المتجهين

$\vec{A}$  و  $\vec{B}$  ويعين اتجاه  $\vec{n}$  من قاعدة اليد اليمنى ، اي ، في اتجاه

تقوم لولب (برغي) أيمن يدور من الاتجاه الموجب للمتجه  $\vec{A}$

الى  $\vec{B}$  خلال الزاوية المحصورة بينهما ، كما هو مبين

في الشكل ( ٨ - ١ ) ويمكن اعتبار المعادلة ( ١٦ - ١ ) كتعريف آخر  
 للضرب الاتجاهي .



الشكل ( ٨ - ١ ) الضرب الاتجاهي

المثال

١- إذا علمت أن  $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$  ،  $\vec{B} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$  جد

$\vec{A} \times \vec{B}$  ،  $\vec{A} \cdot \vec{B}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2)(1) + (1)(-1) + (-1)(2) = 2 - 1 - 2 = -1$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \hat{i}(2-1) + \hat{j}(1-4) + \hat{k}(-2-1) \\ &= \hat{i} - 3\hat{j} - 3\hat{k} \end{aligned}$$

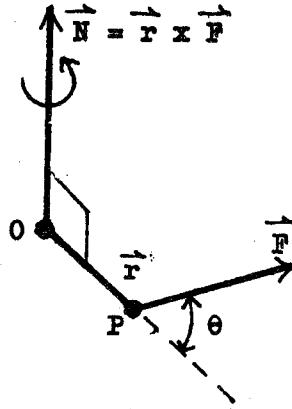
٢- جد الزاوية المحصورة بين  $\vec{A}$  ،  $\vec{B}$  من تعريف الضرب المزدوج نعلم أن

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{-1}{(2^2 + 1^2 + (-1)^2)^{\frac{1}{2}} (1^2 + (-1)^2 + 2^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{-1}{6^{\frac{1}{2}} 6^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(-\frac{1}{6}\right) = 99.6^\circ$$

### (١٢-١) عزم القوة Moment of a Force

من التطبيقات المفيدة وبصورة خاصة للضرب الاتجاهي هو تمثيل العزم  
لفرض ان القوة  $\vec{F}$  تؤثر في النقطة  $P(x, y, z)$  كما  
هو مبين في الشكل (١-١) ولنمثل المتجه  $\vec{OP}$  بالرمز  $\vec{r}$  اي ان



الشكل (١-١) عزم القوة

$$\vec{OP} = \vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

ويعرف العزم  $\vec{N}$  حول نقطة معلومة مثل  $O$  بالضرب الاتجاهي

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (١٧-١)$$

اي ان عزم القوة حول نقطة ما هو كمية اتجاهية لها مقدار واتجاه .  
اذا سلطت قوة منفردة في النقطة  $P$  لجسم حر الدوران حول محور  
ثابت له في النقطة  $O$  ، عندئذ يظهر الجسم ميلا للدوران . ولما  
كان محور هذا الدوران عموديا على القوة  $\vec{F}$  وعلى المستقيم  $OP$  اذن  
يكون اتجاه العزم  $\vec{N}$  على طول محور الدوران .

المعادلة التالية تعطي مقدار العزم

$$|\vec{N}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = rF \sin \theta \quad (18-1)$$

حيث  $\theta$  تمثل الزاوية بين  $\vec{r}$  و  $\vec{F}$  . اذن يمكن اعتبار  $|\vec{N}|$  مساوية لحاصل ضرب مقدار القوة في الكمية  $r \sin \theta$  والاخيرة تمثل المسافة العمودية من النقطة  $O$  على خط تأثير القوة .

عندما تؤثر عدة قوى في نقاط مختلفة من جسم منفرد تجمع العزم بطريقة جمع المتجهات وهذا ينتج من قانون توزيع الحدود لضرب المتجهات اى من المعادلة (11-1) ومن شرط التوازن للحركة الدورانية يكون المجموع الاتجاهي لجميع العزم يساوى صفرا . اى

$$\sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \sum_i \vec{N}_i = 0$$

ان هذا الموضوع سيبحث فيما بعد بصورة وافية في الفصل الثامن .  
(13-1) تمثيل متجه معلوم كحاصل ضرب كمية عددية ووحدة متجهة منفردة .

Representation of a Given Vector as the Product of a Scalar and a single Unit Vector

$$\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z \quad \text{افرض المعادلة}$$

اضرب واقسم الطرف الايمن بمقدار  $\vec{A}$

$$\vec{A} = A \left( \hat{i} \frac{A_x}{A} + \hat{j} \frac{A_y}{A} + \hat{k} \frac{A_z}{A} \right)$$



الآن

$$\frac{A_x}{A} = \cos \alpha, \quad \frac{A_y}{A} = \cos \beta, \quad \frac{A_z}{A} = \cos \gamma$$

حيث  $\alpha, \beta, \gamma$  تمثل زوايا اتجاه  $A$  لذلك يمكننا كتابة

$$\vec{A} = A(\hat{i} \cos \alpha + \hat{j} \cos \beta + \hat{k} \cos \gamma)$$

$$= A(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$\vec{A} = A\vec{n}$$

أو (١٩-١)

حيث  $\vec{n}$  تمثل وحدة متجهة مركباتها هي  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ .

افرض اى متجه اخر مثل  $\vec{B}$

من الواضح ان مسقط  $\vec{B}$  على  $\vec{A}$  هو

$$B \cos \theta = \frac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{A} = \vec{B} \cdot \vec{n} \quad (٢٠-١)$$

حيث  $\theta$  تمثل الزاوية بين  $\vec{A}$  و  $\vec{B}$

### مثال

جد وحدة متجهة عمودية على المستوى الذى يحوى المتجهين

$$\vec{B} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} - 3\hat{k}$$

من المثال (١) عندنا -

$$\vec{n} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \frac{\hat{i} - 3\hat{j} - 3\hat{k}}{(1^2 + 3^2 + 3^2)^{\frac{1}{2}}}$$

اذن

$$= \frac{\hat{i}}{\sqrt{19}} - \frac{3\hat{j}}{\sqrt{19}} - \frac{3\hat{k}}{\sqrt{19}}$$

## Triple Products الضرب الثلاثي (١٤-١)

يسمى التعبير  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$  بالضرب العددي الثلاثي للمتجهات  $\vec{A}$  ،  $\vec{B}$  ، و  $\vec{C}$  . وهو كمية عددية لانه ضرب عددي لكميتين متجهيتين وعند الرجوع الى محدد ضرب المتجهات المعادلة (١٤-١) نرى من الممكن كتابة الضرب العددي الثلاثي على النحو التالي

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (٢١-١)$$

عند تبادل صفين او عمودين في محدد تتغير اشارته ولكن لا تتغير قيمته المطلقة ومن هذه الخاصية المعروفة للمحددات نستطيع ان نشق بسهولة المعادلة المفيدة التالية

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \quad (٢٢-١)$$

اي يمكن تبادل علامة الضرب العددي وعلامة الضرب الاتجاهي في الضرب الاتجاهي الثلاثي  
يسمى التعبير

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

## Triple Vector Product بالضرب الاتجاهي الثلاثي

وقد تركنا للطالب البرهنة على صحة المعادلة التالية لضرب المتجهات الثلاثي :

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \quad (٢٣-١)$$

١-١٥) تغيير نظام الاحداثيات Change of Coordinate System  
 افترض ان المتجه  $\vec{A}$  قد مثل بدلالة الثلاثي  $\hat{i}\hat{j}\hat{k}$  على النحو التالي :-

$$\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$$

ومثل نفس المتجه  $\vec{A}$  بدلالة ثلاثي جديد  $\hat{i}'\hat{j}'\hat{k}'$  اتجاهه يختلف عن اتجاه  $\hat{i}\hat{j}\hat{k}$  على النحو التالي :-

الان الضرب العددي  $\vec{A} \cdot \hat{i}'$  عبارة عن  $A_x'$  اي سقط  $\vec{A}$  على الوحدة المتجه  $\hat{i}'$  وهكذا يمكننا كتابة

$$A_x' = \vec{A} \cdot \hat{i}' = (\hat{i} \cdot \hat{i}') A_x + (\hat{j} \cdot \hat{i}') A_y + (\hat{k} \cdot \hat{i}') A_z$$

$$A_y' = \vec{A} \cdot \hat{j}' = (\hat{i} \cdot \hat{j}') A_x + (\hat{j} \cdot \hat{j}') A_y + (\hat{k} \cdot \hat{j}') A_z \quad (٢٤-١)$$

$$A_z' = \vec{A} \cdot \hat{k}' = (\hat{i} \cdot \hat{k}') A_x + (\hat{j} \cdot \hat{k}') A_y + (\hat{k} \cdot \hat{k}') A_z$$

قد سمي الضرب العددي  $(\hat{i} \cdot \hat{i}')$  و  $(\hat{i} \cdot \hat{j}')$  وهلم جرا  
 بمعامل التحويل Coefficients of Transformation وهي تساوي  
 جيب تمام الزوايا بين المحاور ذات الفتحة وبين التي بدون فتحه .  
 وبالتماثل يعبر عن مركبات المحاور الاخيرة على النحو التالي :-

$$A_x = \vec{A} \cdot \hat{i} = (\hat{i}' \cdot \hat{i}) A_x' + (\hat{j}' \cdot \hat{i}) A_y' + (\hat{k}' \cdot \hat{i}) A_z'$$

$$A_y = \vec{A} \cdot \hat{j} = (\hat{i}' \cdot \hat{j}) A_x' + (\hat{j}' \cdot \hat{j}) A_y' + (\hat{k}' \cdot \hat{j}) A_z' \quad (٢٥-١)$$

$$A_z = \vec{A} \cdot \hat{k} = (\hat{i}' \cdot \hat{k}) A_x' + (\hat{j}' \cdot \hat{k}) A_y' + (\hat{k}' \cdot \hat{k}) A_z'$$

ان جميع معاملات التحويل في المعادلات (٢٥-١) قد ظهرت في

المعادلات (٢٤-١) لان  $\hat{i} \cdot \hat{i}' = \hat{i}' \cdot \hat{i}$  وهلم جرا .

ولكن تلك التي في مصفوف معادلات (٢٥-١) قد ظهرت في اعمدة حدود -  
 معادلات (٢٤-١) وبالعكس .  
 ان قوانين التحويل التي عبرت عنها هاتان المجموعتان من المعادلات  
 هي خواص عامة للمتجهات ، وهما تكونان في الحقيقة طريقته اخرى  
 لتعريف المتجهات (٤) .  
 ان رمز المصفوف Matrix يمكن ان يعبر عن معادلات التحويل  
 بصورة ملائمة حيث تكتب المعادلات (٢٤-١) على الشكل التالي :-

$$\begin{bmatrix} A_x' \\ A_y' \\ A_z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{i} \cdot \hat{i}' & \hat{j} \cdot \hat{i}' & \hat{k} \cdot \hat{i}' \\ \hat{i} \cdot \hat{j}' & \hat{j} \cdot \hat{j}' & \hat{k} \cdot \hat{j}' \\ \hat{i} \cdot \hat{k}' & \hat{j} \cdot \hat{k}' & \hat{k} \cdot \hat{k}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (٢٦-١)$$

ويسمى المصفوف ٣ في ٣ المذكور توا بمصفوف التحويل  
 ومن فوائده امكانية استخدام عدة تحويلات متتابعة بسهولة وذلك  
 بضرب مصفوف كل تحويل في الاخر .

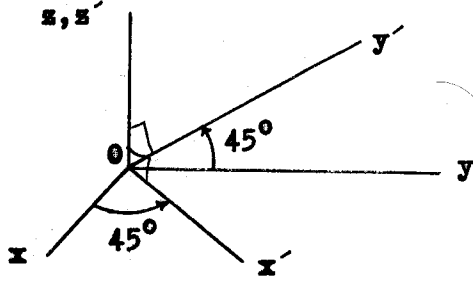
### امثلة

١- مثل المتجه  $\hat{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$  بدلالة  
 الثلاثي  $\hat{i}' \hat{j}' \hat{k}'$  افرض ان المحورين  $x'$  و  $y'$  دارا بزاوية  
 ٤٥ حول المحور  $z$  - ويتطابق المحوران  $z$  و  $z'$

(٤) انظر على سبيل المثال

L. P. Smith, Mathematical Methods for Scientists and  
 Engineers, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1953

كما هو مبين في الشكل ( ١ - ١٠ ) وبالرجوع الى الشكل



الشكل ( ١ - ١٠ ) دورات المحاور ذات الفتحة  $0 < \theta < 90^\circ$  حول المحور - z .

تحسب معامل التحويل كالاتي : -

$$\begin{aligned} \hat{i} \cdot \hat{i}' &= 1/\sqrt{2} & \hat{j} \cdot \hat{i}' &= 1/\sqrt{2} & \hat{k} \cdot \hat{i}' &= 0 \\ \hat{i} \cdot \hat{j}' &= -1/\sqrt{2} & \hat{j} \cdot \hat{j}' &= 1/\sqrt{2} & \hat{k} \cdot \hat{j}' &= 0 \\ \hat{i} \cdot \hat{k}' &= 0 & \hat{j} \cdot \hat{k}' &= 0 & \hat{k} \cdot \hat{k}' &= 1 \end{aligned}$$

$$\Lambda_{x'} = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

هذه تعطى

$$\Lambda_{y'} = \frac{-3}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad \Lambda_{z'} = 1$$

وبذلك يمكن كتابة المتجه  $\vec{A}$  بدلالة المحاور ذات الفتحة على النحو التالي :

$$\vec{A} = \frac{5}{\sqrt{2}} \hat{i}' - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{j}' + \hat{k}'$$

٢ - جد مصفوف التحويل عند دوران المحاور ذات الفتحة بزوايا  $\theta$  حول المحور - z

( المثال السابق حالة خاصة لهذه الحالة ) . عندنا

$$\begin{aligned} \hat{i} \cdot \hat{i}' &= \hat{j} \cdot \hat{j}' = \cos \theta \\ \hat{j} \cdot \hat{i}' &= -\hat{i} \cdot \hat{j}' = \sin \theta, \quad \hat{k} \cdot \hat{k}' = 1 \end{aligned}$$

وكل ضرب عددي اخر يساوى صفرا . اذن مصفوف التحويل يكون

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تأريـن

$$\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \quad \vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}.$$

١-١ من المتجهين

→

$$|\vec{A} - \vec{B}|$$

(أ) قيمة

$$\vec{A} \cdot \vec{B}$$

(ب) قيمة

$$\vec{B}, \vec{A}$$

(ج) الزاوية بين

١-٢ لنفس المتجهين في التمرين (١-١) عبر بصيغة  $ijk$  عما يلي :-

$$2\vec{A} + 3\vec{B} \quad (أ)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} \quad (ب)$$

$$(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B}) \quad (ج)$$

١-٣ اذا كان المتجه  $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$  عموديا على المتجه  $2\hat{i} - 3\hat{j} + q\hat{k}$ ما هي قيمة  $q$  ؟١-٤ جد طول مسقط المتجه  $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$  على المتجه  $\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ 

١-٥ جد قيمة

$$[\hat{i} + \hat{j}] \times (\hat{i} + \hat{k}) \cdot [(\hat{i} - \hat{j}) \times (\hat{j} - \hat{k})].$$

٦-١ إذا علمت ان  $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j}$  ,  $\vec{B} = 2\hat{j} + 3\hat{k}$  ,  $\vec{C} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$  جيد

(أ)  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$  ,  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$  (١)

(ب)  $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$  ,  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$  (٢)

٧-١ سلطت القوة  $\vec{F}_1 = \hat{i} + \hat{j}$  على جسم في النقطة  $P_1$  بحيث كان النجيه  $\vec{OP}_1 = \vec{r}_1 = 2\hat{i} + \hat{j}$  نسم سلطت قوة ثانية  $\vec{F}_2 = \hat{j} - \hat{k}$  في النقطة  $\vec{r}_2 = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$  جد العزم الكلي  $N$  مقدار  $N$  وزوايا جيوب تمام محصلة محور الدوران ؟

٨-١ برهن المتطابقة التالية

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

٩-١ اذا كان المتجهان  $\vec{A}$  و  $\vec{B}$  يمثلان ضلعين متلاقيين من متوازي اضلاع . برهن على ان مساحة متوازي الاضلاع تساوي  $|\vec{A} \times \vec{B}|$

١٠-١ برهن بطريقة جبر المتجهات ان الزاوية المرسومة داخل نصف دائرة تكون قائمة .

١١-١ برهن قانون الجيوب في المثلثات باستخدام جبر المتجهات .

١٢-١ اذا كانت المتجهات  $\vec{A}$  ,  $\vec{B}$  ,  $\vec{C}$  تمثل ثلاثة اضلاع متلاقية لتوازي مستطيلات . برهن على ان حجم متوازي المستطيلات يساوي

$$[\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})]$$

١٣-١ مثل المتجه  $\hat{i} + \hat{j}$  بدلالة الثلاثي  $\hat{i}'\hat{j}'\hat{k}'$  عندما يسدور المحوران  $x'$  ,  $z'$  حول المحور  $y$  ( الذي ينطبق على المحور  $y'$  ) بزاوية  $60^\circ$  درجة .

١٤-١ برهن على ان مقدار المتجهة لا يتغير بالدوران . استخدم

$$\text{المصفوف} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لدوران حول المحور - z بزاوية مقدارها  $\theta$  .

١٥-١ جد مصفوف التحويل لدوران حول المحور - z بزاوية  $\theta$

يتبعه دوران آخر حول المحور - y بزاوية  $\theta$  .

١٦-١ المجموعتان من المتجهات  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  ,  $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$  تسمى

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{c} = 1 \quad \text{متبادلة اذا كان}$$

وكل ضرب عددي مختلط مثل  $\vec{a} \cdot \vec{b}' = 0$  برهن على ان

$$\vec{c}' = \frac{(\vec{a} \times \vec{b})}{Q}, \quad \vec{a}' = \frac{(\vec{b} \times \vec{c})}{Q}, \quad \vec{b}' = \frac{(\vec{c} \times \vec{a})}{Q}$$

$$Q = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

حيث

١٧-١ جد مجموعة متجهات تكون متبادلة مع المجموعة  $\hat{i}, \hat{j}$  ,

$$\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$



## الفصل الثاني تفاضل وتكامل المتجهات وطلم الحركة

في هذا الفصل سنطور شكلية علم الحركة المجردة لوصف حركة الجسم

و هذه المعالجة ستبسط كثيرا باستعمال علم التفاضل والتكامل المطبقة على الكميات المتجهة .

### ٢-١ مشتقة المتجه Derivative of a Vector

افرض ان مركبات المتجه  $\vec{A}$  هي دوال لمتغير واحد مثل  $u$  ، والمتجه قد يمثل موضعا او سرعة او ما الى ذلك ويمثل البرامتر " Parameter " اعتيادي الزمن  $t$  ، وقد تكون اية كمية اخرى تعين مركبات المتجه  $\vec{A}$  .

$$\vec{A}(u) = \hat{i}A_x(u) + \hat{j}A_y(u) + \hat{k}A_z(u)$$

وتعرف مشتقة المتجه  $\vec{A}$  بالنسبة للكمية  $u$  بصورة ماثلة تماما لتعريف

التفاضل الاعتيادي لدوال الكميات العددية بواسطة الغاية Limit نحصل على

$$\frac{d\vec{A}}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left( \hat{i} \frac{\Delta A_x}{\Delta u} + \hat{j} \frac{\Delta A_y}{\Delta u} + \hat{k} \frac{\Delta A_z}{\Delta u} \right)$$

حيث -  $\Delta A_x = A_x(u + \Delta u) - A_x(u)$  وهلم جرا . اي ان

$$\frac{d\vec{A}}{du} = \hat{i} \frac{dA_x}{du} + \hat{j} \frac{dA_y}{du} + \hat{k} \frac{dA_z}{du} \quad (١-٢)$$

اذن مشتقة المتجه هي متجه اخر مركباته مشتقات اعتيادية .

يتضح من المعادلة السابقة ان مشتقة مجموع متجهين تساوي مجموع مشتقة

كل منهما اي :

$$\frac{d}{du} (\vec{A} + \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\vec{B}}{du} \quad (٢-٢)$$

وستتعالج قواعد تفاضل ضرب المتجهات بعدئذ في البند (٢-٧)

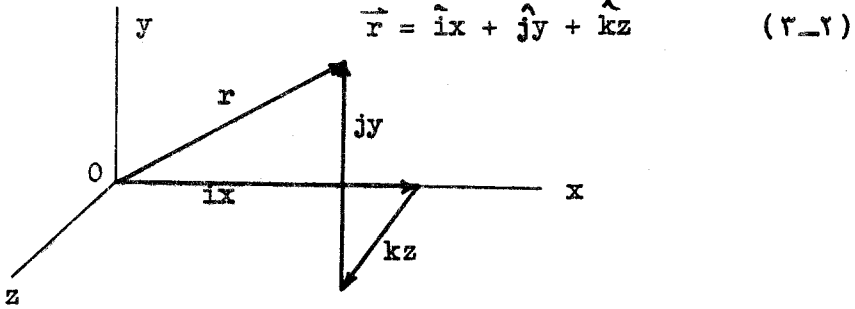
### (٢-٢) متجه الموضع لجسيم Position Vector of a particle

في محاور مرجعية معينة ، يمكن تعيين موضع جسم بصورة كاملة بمتجه واحد

اي ازاحة الجسم بالنسبة الى نقطة اصل المحاور . وهذا المتجه يسمى متجه الموضع

Position Vector للجسيم . في المحاور الديكارتيه المبينة في الشكل .

(١-٢) يكون متجه الموضع بكل بساطه هو



الشكل (١-٢) متجه الموضع

ومركبات متجه الموضع لجسيم متحرك تكون دوال للزمن ، اي

$$x = x(t) , y = y(t) , z = z(t)$$

The Velocity Vector متجه السرعة (٣-٢)

بيننا في البند (١-٢) التعريف الاصولي لتفاضل اي متجه بالنسبة لاي بوا متر

ومصورة خاصة اذا كان المتجه هو متجه الموضع  $\vec{r}$  لجسيم متحرك والهرامتر هو الزمن  $t$  ،

وتفاضل  $\vec{r}$  بالنسبة للزمن  $t$  يسمى " السرعة " والتي سوف نرمز لها بالحرف  $\vec{v}$  .

اذن

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y} + \hat{k}\dot{z} \quad (٤-٢)$$

حيث النقاط تمثل التفاضل بالنسبة للزمن  $t$  . ( ان هذا الاصطلاح تياسي وسوف

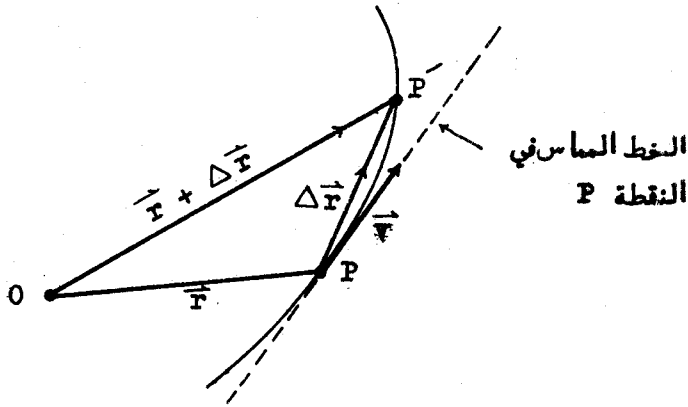
يستعمل من اول الكتاب الى اخره ) . ولنختبر المعنى الهندسي لمتجه السرعة

افرض ان جسما كان في موضع معين في الزمن  $t$  وبعد مرور فترة زمنية

مقدارها " $\Delta t$ " تحرك الجسم من الموضع  $\vec{r}(t)$  الى الموضع  $\vec{r}(t + \Delta t)$ .  
 فمتجه الازاحة خلال الفترة الزمنية  $t$  هو

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

لذلك يكون خارج القسمة  $\Delta \vec{r} / \Delta t$  متجها موازيا للازاحة . وكلما افترضنا فترات  
 زمنية اصغر فاصغر اقترب خارج القسمة  $\Delta \vec{r} / \Delta t$  من الغاية  $d\vec{r} / dt$   
 والتي تسمى بالسرعة . والمتجه  $d\vec{r} / dt$  يمثل اتجاه الحركة ومعدلها الزمني كما  
 هو موضح في الشكل التخطيطي (٢-٢) في الفترة الزمنية  $\Delta t$



( الشكل ٢-٢ ) متجه الازاحة لجسيم متحرك

يتحرك الجسم على طول المسار من النقطة P الى P' .  
 وعندما تقترب  $\Delta t$  من الصفر تقترب النقطة P' من P وذلك يقترب اتجاه  
 المتجه  $\Delta \vec{r} / \Delta t$  من اتجاه المماس للمسار في P . فمتجه السرعة اذن يكون  
 دائما مماسا لمسار الحركة .

يسمى مقدار السرعة بالانطلاق Speed وبدلالة المركبات المتعامدة يكون الانطلا

$$v = \left| \vec{v} \right| = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{1}{2}}$$

في الشكل التالي :-  
 (٢-٥)

اننا نستطيع ان نعبر عن الانطلاق بطريقة اخرى اذا مثلنا المسافة العددية

على طول المسار بالرمز  $s$  وذلك على النحو التالي :

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]^{\frac{1}{2}}}{\Delta t}$$

والتي عند تبسيطها تصبح مساوية للمقدار الجبري ليمين المعادلة (٥-٢) ..

(٤-٢) متجه التعجيل Acceleration Vector

ان مشتقة السرعة للزمن تسمى التعجيل ، وتمثله بالرمز  $\vec{a}$  يكون عندنا

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (٦-٢)$$

مدالة المركبات المتعامدة

$$\vec{a} = \hat{i}\ddot{x} + \hat{j}\ddot{y} + \hat{k}\ddot{z} \quad (٧-٢)$$

اي ان التعجيل كمية متجهة مركباته بدلالة المحاور المتعامدة هي المشتقة الثانية

لاحداثيات موضع الجسم المتحرك . وسوف نشرح تحليل التعجيل  $\vec{a}$  الى مركباته

العمودية والعمودية في البند (٨-٢) .

امثلة

١- لنختبر الحركة المثلثة بالمعادلة -

$$\vec{r}(t) = \hat{i}bt + \hat{j}(ct - \frac{gt^2}{2}) + \hat{k}0$$

لما كانت مركبة  $z$  ثابتة وتساوى صفراً ، فالمعادلة تمثل حركة في المستوى  $xy$  .

ونحصل على السرعة  $\vec{v}$  عند تفاضل  $\vec{r}$  بالنسبة للزمن  $t$  ، اي ..

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}b + \hat{j}(c - gt)$$

وتفاضلها للمرة الثانية نحصل على التمجيل ، اى

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\hat{j}g$$

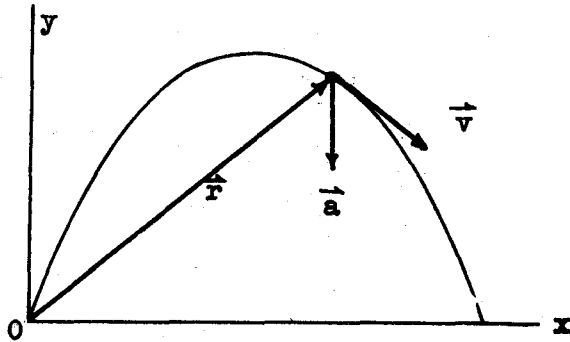
اى ان  $\vec{a}$  يكون بالاتجاه السالب للمحور  $y$  ، وله المقدار الثابت  $g$  و مسار

الحركة يكون قطعا مكافئا كما هو مبين في الشكل (٣-٢) .

( ان هذه المعادلة تمثل في الحقيقة حركة القذيفة ) . ويتغير الانطلاق

$v$  مع  $t$  وفقا للمعادلة التالية :

$$v = [b^2 + (c - gt)^2]^{\frac{1}{2}}$$



الشكل (٣-٢) متجهات الموضع والسرعة والتمجيل

لجسيم يتحرك على مسار قطع مكافئ

$$-٢ \quad \vec{r} = \hat{i}b \sin \omega t + \hat{j}b \cos \omega t + \hat{k}c$$

ولنحلل الحركة . المسافة من نقطة الاصل والتي

$$\begin{aligned} |\vec{r}| = r &= (b^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t + c^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

وعد تفاضل  $\vec{r}$  نجد ان :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}b\omega \cos \omega t - \hat{j}b\omega \sin \omega t + \hat{k}0$$

ولما كانت مركبة السرعة  $\vec{v}$  باتجاه المحور z تساوى صفرا ، فمتجه السرعة يكون موازيا

للمستوى xy والجسيم يقطع مساره بانطلاق ثابت ، اى

$$v = |\vec{v}| = (b^2\omega^2 \cos^2 \omega t + b^2\omega^2 \sin^2 \omega t)^{\frac{1}{2}} = b\omega$$

والتعجيل

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\hat{i}b\omega^2 \sin \omega t - \hat{j}b\omega^2 \cos \omega t$$

يكون عموديا على السرعة ، لان الضرب العددي للسرعة  $\vec{v}$  والتعجيل  $\vec{a}$  يساوى

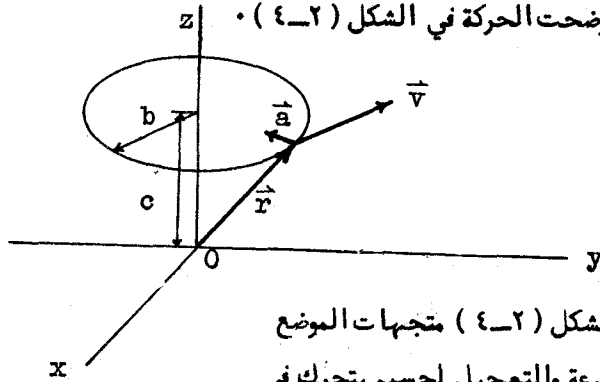
صفرا ، اى

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = (b\omega \cos \omega t)(-b\omega^2 \sin \omega t) + (-b\omega \sin \omega t)(-b\omega^2 \cos \omega t) = 0$$

بالاضافة الى ذلك فان التعجيل يكون عموديا على المحور z كما هو واضح في الشكل

لان  $\vec{a} \cdot \hat{k} = 0$  والمسار الفعلي هو دائرة نصف قطرها b وتقع في المستوى

z = c وقد وضحت الحركة في الشكل (٤-٢) .



الشكل (٤-٢) متجهات الموضع

والسرعة والتعجيل لجسيم يتحرك في دائرة

Vector Integration

٥-٢ تكامل المتجه

افرض ان مشتقة المتجه  $\vec{r}$  بالنسبة للزمن اعطيت بدلالة المحاور

الديكارتيه وان مركباتها دوال معلومة للزمن ، ايمان

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}f_1(t) + \hat{j}f_2(t) + \hat{k}f_3(t)$$

وخذ تكاملها بالنسبة للزمن  $t$  نحصل على

$$\vec{r} = \hat{i} \int f_1(t) dt + \hat{j} \int f_2(t) dt + \hat{k} \int f_3(t) dt \quad (٨-٢)$$

ان هذه العملية بطبيعة الحال تماما عكس عملية ايجاد متجه السرعة عندما يكون متجه الموضع معلوما كدالة للزمن . وينطبق الشيء نفسه على الحالة التي يكون فيها التعجيل معروفا كدالة للزمن فالتكامل يعطي السرعة .

### مثال

اذا علمت ان متجه السرعة لجسيم متحرك هو  $\vec{v} = \hat{i}A + \hat{j}Bt + \hat{k}Ct^{-1}$  حيث  $A, B, C$  هي ثوابت . جد  $\vec{r}$  .

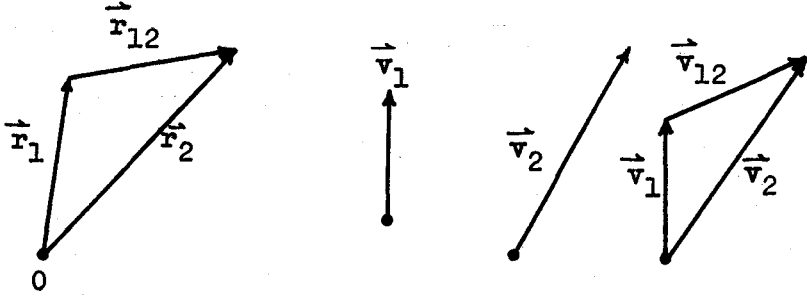
$$\begin{aligned} \vec{r} &= \hat{i} \int A dt + \hat{j} \int Bt dt + \hat{k} \int Ct^{-1} dt \\ &= \hat{i}At + \hat{j}B \frac{t^2}{2} + \hat{k}C \ln t + \vec{r}_0 \end{aligned}$$

حيث المتجه  $\vec{r}_0$  هو ثابت التكامل .

### ٦-٢) السرعة النسبية Relative Velocity

افرض ان متجهي موضع جسيمي هما  $\vec{r}_1$  و  $\vec{r}_2$  على التوالي ، كما هو مبين

في الشكل (٥-٢) .



الشكل (٤-٥)

أ- متجه الموضع النسبي      ب- متجه السرعة النسبي للجسمين

ان ازاحة الجسم الثاني بالنسبة للاول هو الفرق  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$  والذي سنسميه  
 •  $(\vec{r}_{12})$

اذن سرعة الجسم الثاني بالنسبة للاول هي :

$$\vec{v}_{12} = \frac{d\vec{r}_{12}}{dt} = \frac{d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{dt} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \quad (١-٢)$$

التي سنسميها السرعة النسبية • عند نقل  $\vec{v}_1$  نحصل على :  $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{12}$

هذه تمثل السرعة الفعلية للجسم الثاني بدلالة سرعة الجسم الاول والسرعة  
 النسبية للجسمين •

وعلينا ملاحظة ان مقدار السرعة النسبية للجسمين لا يساوى تغيير المعدل

الزمني للمسافة بينهما • والكمية الاخيرة هي :

$$\frac{d}{dt} |\vec{r}_{12}| = \frac{d}{dt} |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$$

وهذه تختلف بصورة عامة عن  $|\vec{v}_{12}|$

### امثلة

١- طائرة تتجه شمالا بسرعة  $v_a$  بالنسبة للهواء • فاذا كانت الريح متجهة



شرقاً بانطلاق  $\cdot v_{\omega}$  ما هي الحركة الحقيقية للطائرة ؟

من تعريف السرعة النسبية نرى ان السرعة الحقيقية للطائرة بالنسبة للأرض

هي مجموع متجهي سرعة الهواء وسرعة الطائرة بالنسبة للهواء ، أي

$$\vec{v}_{\text{true}} = \vec{v}_a + \vec{v}_{\omega}$$

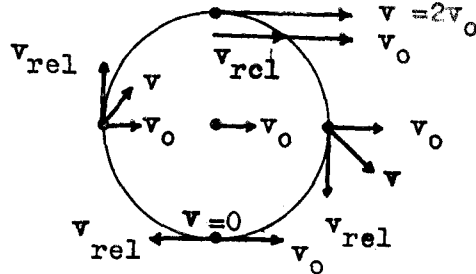
نفرض في مسألتنا ان الوجدتين المتجهتين  $i, j$  توشران باتجاه الشرق

والشمال على التوالي . عندئذ نحصل على

$$\vec{v}_{\text{true}} = \hat{i}v_a + \hat{j}v_{\omega}$$

٢- عجلة نصف قطرها  $b$  تتدحرج على الأرض بانطلاق إمامي  $\cdot v_0$  جد السرعة

لاية نقطة على حافة العجلة مثل  $P$  بالنسبة للأرض .



الشكل (٦-٢) متجهات السرعة لنقاط مختلفة

على العجلة المتدحرجة

اولاً- افرض العلاقة

$$\vec{r}_{\text{op}} = \hat{i}b \cos \theta - \hat{j}b \sin \theta$$

$$\theta = \omega t$$

حيث

هذه تمثل حركة دائرية باتجاه عقرب الساعة حول نقطة الاصل ، وهي مركز العجلة

في هذه الحالة . نمشتقة الزمن عندئذ تعطي سرعة النقطة  $P$  بالنسبة لمركز العجلة

أي :

$$\vec{v}_{\text{rel}} = -\hat{i}b\omega \sin \theta - \hat{j}b\omega \cos \theta$$

و لكن السرعة الزاوية بالنسبة للأرض هي  $\omega = v/b$  ولما كانت سرعة مركز الأرض

العجلة هي  $\hat{i}v_0$  عندئذ تكون السرعة الحقيقية للنقطة P بالنسبة للأرض كالآتي

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \hat{i}v_0 - \hat{i}b\omega \sin \theta - \hat{j}b\omega \cos \theta \\ &= \hat{i}v_0 (1 - \sin \theta) - \hat{j}v_0 \cos \theta\end{aligned}$$

والمشكل (٢ - ٦) يبين متجهات السرعة لقيم مختلفة للمزاوية  $\theta$ .

٢ - ٧ تفاضل ضرب المتجهات Derivatives of Products of Vectors

نجد من الضروري في احوال كثيرة ان نتعامل مع حاصل الضرب  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ,  $\vec{A} \times \vec{B}$ ,  $n\vec{A}$

حيث الكمية العددية n والكميات المتجهية  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  دوال للبرمتر المنفرد u كما

في البند (٢ - ١) من التعريف العام للتفاضل عندنا .

$$\frac{d(n\vec{A})}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{n(u + \Delta u) \vec{A}(u + \Delta u) - n(u) \vec{A}(u)}{\Delta u}$$

$$\frac{d(\vec{A} \cdot \vec{B})}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(u + \Delta u) \cdot \vec{B}(u + \Delta u) - \vec{A}(u) \cdot \vec{B}(u)}{\Delta u}$$

$$\frac{d(\vec{A} \times \vec{B})}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(u + \Delta u) \times \vec{B}(u + \Delta u) - \vec{A}(u) \times \vec{B}(u)}{\Delta u}$$

ويجمع وطرح كميات مثل  $(n(u + \Delta u) \vec{A}(u))$  في بسوط المعادلات الآتية

الذكر نحصل على القوانين التالية

$$\frac{d(n\vec{A})}{du} = \frac{dn}{du} \vec{A} + n \frac{d\vec{A}}{du} \quad (٢ - ١٠)$$

$$\frac{d(\vec{A} \cdot \vec{B})}{du} = \frac{d\vec{A}}{du} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{du} \quad (٢ - ١١)$$

$$\frac{d(\vec{A} \times \vec{B})}{du} = \frac{d\vec{A}}{du} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{du} \quad (٢ - ١٢)$$

٢-١ ان من الضروري المحافظة على بقاء ترتيب الحدود في الضرب الاتجاهي عند التفاضل

وقد تركت الخطوات كتمرين للطالب .

٢-٨ المركبات المماسية والعمودية للتعجيل

Tangential and Normal Components of Acceleration:

رأينا في الهند ( ١ - ١٣ ) ان اى متجه يمكن تمثيله بحاصل ضرب مقداره ووحدة اتجاهه

تجاهه لتعيين اتجاهه . ووفقا لذلك يمكن كتابة متجه السرعة لجسيم متحرك كحاصل لضرب

انطلاق الجسيم  $v$  في وحدة متجهة  $\tau$  لتعطي اتجاه حركة الجسيم اى -

$$\vec{v} = v \vec{\tau} \quad (٢ - ١٣)$$

ويسمى المتجه  $\tau$  بالوحدة المتجهة المماسية . عندما يتحرك الجسيم فقد يتغير

انطلاقه  $v$  وقد يتغير اتجاه  $\tau$  . لنستخدم قاعدة تفاضل ضرب كمية عددية

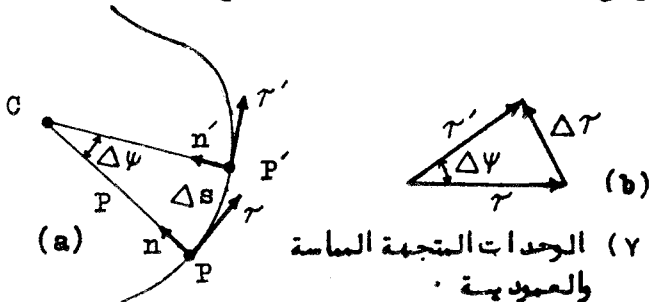
في اخرى متجهة للحصول على التعجيل . فالنتيجة تكون -

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (v \tau) = \dot{v} \tau + v \frac{d\tau}{dt} \quad (٢ - ١٤)$$

بالرغم من ان الوحدة المتجهة لها مقدار ثابت فان لها المشتقة  $d\tau/dt$

وهذه بالضرورة يجب ان تعبر عن تغيير اتجاه  $\tau$  بالنسبة للزمن  $t$  . كما

هو مبين في الشكل ( ٢ - ١٧ ) . كان موضع الجسيم الابتدائي



الشكل ( ٢ - ١٧ ) الوحدات المتجهة المماسية والعمودية .

في أية نقطة مثل P ثم تحرك مسافة  $\Delta s$  على طول مساره الى نقطة اخرى مثل P' في مدة زمنية مقدارها  $\Delta t$  . ولنمثل الوحدات المتجهة للساسات في P و P' بالرموز  $\vec{T}$  و  $\vec{T}'$  على التتالي كما هو مبين في الشكل . ويختلف اتجاه هاتين الوحدتين المتجهتين زاوية  $\Delta \psi$  كما هو مبين في الشكل ( ٢ - ٧ ب ) . وواضح ان الفرق  $\Delta \mathcal{T}$  يقترب من  $\Delta \psi$  بالمقدار عندما تكون قيم  $\Delta \psi$  صغيرة . كذلك يصبح اتجاه  $\Delta \mathcal{T}$  عموديا على اتجاه  $\mathcal{T}$  في الغاية ، عندما يقترب  $\Delta \psi$  و  $\Delta s$  من الصفر . نستنتج مما ذكرنا ان مقدار المشتقة  $d\mathcal{T}/d\psi$  يساوى واحدا واتجاهها عمودى على  $\mathcal{T}$  . اذن سنسميها

بالوحدة المتجهة العمودية وسنمثلها بالرمز  $\vec{n}$  ، اى

$$\frac{d\vec{\mathcal{T}}}{d\psi} = \vec{n}$$

ثم لايجاد مشتقة الزمن  $d\vec{\mathcal{T}}/dt$  نستعمل القانون المتسلسل Chain Rule

$$\frac{d\vec{\mathcal{T}}}{dt} = \frac{d\vec{\mathcal{T}}}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} = \vec{n} \frac{d\psi}{ds} \frac{ds}{dt} = \vec{n} \frac{v}{\rho}$$

كالاتى

$$\rho = \frac{ds}{d\psi}$$

حيث

وهو يمثل نصف قطر تكور مسار الجسم المتحرك في النقطة P . وعند تعويض  $d\vec{\mathcal{T}}/dt$

المذكورة في المعادلة ( ٢ - ١٤ ) نحصل على النتيجة النهائية التالية

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{\mathcal{T}} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n} \quad (٢ - ١٦)$$

اذ هناك مركبة لتعجيل الجسم المتحرك باتجاه الحركة مقدارها  $a_{\tau} = \dot{v} = \ddot{s}$

وهذه تمثل التعجيل المماس . ومركبه اخرى مقدارها  $a_{n} = v^2/\rho$  وهي

المركبة العمودية . وهذه المركبة تتجه دائما نحو مركز التكور من الجانب القعر لمسار

الحركة . ولهذا السبب سميت المركبة العمودية كذلك بتعجيل الجذب المركزي .

ما تقدم نرى ان مشتقة الزمن للانطلاق هي مركبة التعجيل المماسية . ويعين مقدار

التعجيل الكلي كما يلي

$$|\vec{a}| = \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = \left( \dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (17-2)$$

مثلا اذا تحرك جسم على محيط دائرة بانطلاق ثابت  $v$  فمقدار متجه التعجيل

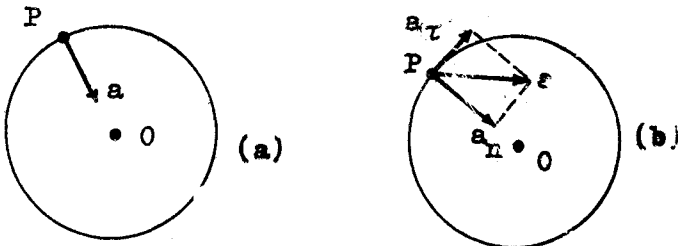
يكون  $v^2/R_0$  حيث  $R_0$  يمثل نصف قطر الدائرة . ومتجه التعجيل في هذه

الحالة يوتر دائما نحو مركز الدائرة . اما اذا كان الانطلاق غير ثابت وانما يزداد بمعدل

زمني معين مقدار  $\dot{v}$  فعندئذ مركبة التعجيل الامامية تكون مساوية لهذه الكمية

ولكنها تنحرف مبتعدة عن مركز الدائرة نحو الاتجاه الامامي كما هو مبين في الشكل

( ٢ - ٨ ) . اما اذا كانت حركة الجسم متباطئة فان متجه التعجيل ينحرف بالاتجاه



المعاكس .

الشكل ( ٢ - ٨ ) متجهات التعجيل لجسيم يتحرك على مسار دائري

ب - انطلاق متزايد

أ - انطلاق ثابت

## ٩ - ٢ السرعة والتعجيل في الإحداثيات القطبية المستوية Velocity and Acceleration in Plane Polar Coordinates

من الملائم في الغالب استعمال الإحداثيات القطبية  $r, \theta$  لتمثيل موضع جسم يتحرك في مستوى. ويمكن كتابة موضع الجسم بدلالة جبر المتجهات

كحاصل ضرب المسافة القطبية  $r$  في الوحدة المتجهة القطبية  $\hat{i}_r$

أي

$$\vec{r} = r\hat{i}_r \quad (18 - 2)$$

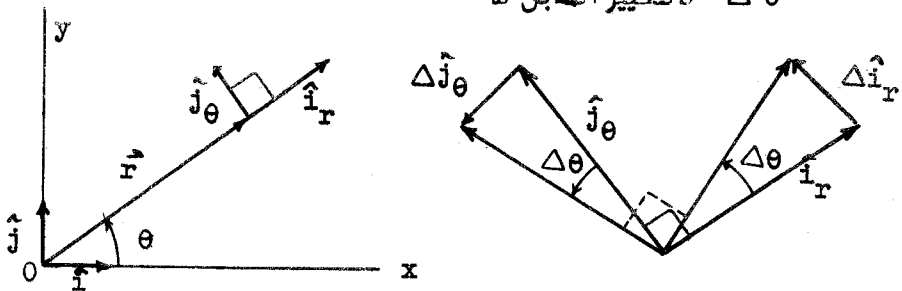
فبمجرد ما يتحرك الجسم يتغير كل من  $\vec{r}$  و  $\hat{i}_r$  لأن كليهما دوال للزمن.

أذن إذا فاضلنا بالنسبة للزمن نحصل على

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{i}_r + r\frac{d\hat{i}_r}{dt} \quad (19 - 2)$$

لكي نحسب المشتقة  $d\hat{i}_r/dt$  نفترض مخطط المتجهات المبين في الشكل (٩ - ٢) • تبين دراسة الشكل أنه عندما يتغير اتجاه  $\vec{r}$  بمقدار

$\Delta\theta$  فالتغيير المقابل له



الشكل (٩ - ٢) الوحدات المتجهية للإحداثيات القطبية المستوية

من الوحدة المتجهة القطبية  $\Delta \hat{i}_r$  يتكون كما يلي مقدار  $|\Delta \hat{i}_r|$  تقريبا يساوي  $\Delta \theta$  واتجاه  $\Delta \hat{i}_r$  تقريبا عمودي على  $\hat{i}_r$  لتستخدم وحدة متجهيه اخرى  $\hat{j}_\theta$  اتجاهها عمودي على  $\hat{i}_r$  عندئذ يكون عندنا

$$\Delta \hat{i}_r \simeq \hat{j}_\theta \Delta \theta$$

فاذا قسمنا على  $\Delta t$  واخذنا النهاية نحصل على

$$\frac{d\hat{i}_r}{dt} = \hat{j}_\theta \frac{d\theta}{dt} \quad (20 - 2)$$

مشتقة الوحدة المتجهة القطبية بالنسبة للزمن • وطريقة مماثلة تماما يمكن ان نثبت بشأن التغير في الوحدة المتجهة  $\hat{j}_\theta$  يعين بالتعريب التالي -

$$\Delta \hat{j}_\theta \simeq -\hat{i}_r \Delta \theta$$

والاشارة السالبة ادخلت هنا لتشير الى ان اتجاه تغير  $\Delta \hat{j}_\theta$  معاكس لاتجاه  $\hat{i}_r$  كما يمكن رؤيته في الشكل • وعليه تكون مشتقة الزمن

$$\frac{d\hat{j}_\theta}{dt} = -\hat{i}_r \frac{d\theta}{dt} \quad (21 - 2)$$

واخيرا باستخدام المعادلة (20 - 2) لمشتقة الوحدة المتجهة القطبية نستطيع ان نكتب معادلة السرعة كالآتي

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{i}_r + r \dot{\theta} \hat{j}_\theta \quad (22 - 2)$$

اذن  $\dot{r}$  يمثل مقدار المركبة القطبية لمتجهة السرعة و  $r \dot{\theta}$  مقدار المركبة المستعرضة لكي نجد متجه التعجيل نأخذ مشتقة السرعة بالنسبة للزمن وهذا يعطى

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r} \hat{i}_r + \dot{r} \frac{d\hat{i}_r}{dt} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \hat{j}_\theta + r\dot{\theta} \frac{d\hat{j}_\theta}{dt}$$

عند التعويض عن قيم  $\frac{d\hat{i}_r}{dt}$  ,  $\frac{d\hat{j}_\theta}{dt}$  من المعادلتين ( ٢ - ٢٠ ) و  
( ٢ - ٢١ ) نحصل على المعادلة التالية لمتجه التعجيل بدلالة الاحداثيات  
القطبية المستوية .

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{i}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{j}_\theta \quad (٢ - ٢٣)$$

اذن يكون مقدار المركبة القطبية لمتجه التعجيل هو

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad (٢ - ٢٤)$$

والمركبة المستعرضة هي

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) \quad (٢ - ٢٥)$$

تربنا النتيجة السابقة . مثلا انسه عندما يتحرك جسيم على دائرة نصف قطرها  
ثابت  $b$  ، اى ان  $\dot{r} = 0$  عندئذ يكون مقدار المركبة القطبية مساويا لـ  
 $b\dot{\theta}^2$  وتتجه الى الداخل نحو مركز المسار الدائرى . وفى هذه الحالة  
يكون مقدار المركبة المستعرضة مساويا الى  $b\ddot{\theta}$  . ومن ناحية اخرى اذا تحرك  
الجسيم على خط قطبي ثابت اى اذا كانت  $\theta$  ثابتة ، فان المركبة القطبية  
تساوى  $\ddot{r}$  ، والمركبة المستعرضة تساوى صفرا . اما اذا كان كل من  
 $r$  ،  $\theta$  متغيرا ، فان العلاقة العامة ( ٢ - ٢٣ ) تحظى بالتعجيل .



مثال

يتحرك جسم على مسار حلزوني بحيث موضعه بالاحداثيات القطبية هو كالآتي -

$$r = bt^2 \quad \theta = ct$$

حيث  $b$  و  $c$  هي ثوابت . جد السرعة والتعجيل كدوال للزمن  $t$  .

من المعادلة ( ٢٢ - ٢ ) نجد ان

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \hat{i}_r \frac{d}{dt} (bt^2) + \hat{j}_\theta (bt^2) \frac{d}{dt} (ct) \\ &= (2bt)\hat{i}_r + (bct^2)\hat{j}_\theta \end{aligned}$$

والتماثل نحصل من المعادلة ( ٢٣ - ٢ ) على ما يلي

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \hat{i}_r (2b - bt^2c^2) + \hat{j}_\theta [0 + 2(2bt)c] \\ &= b(2 - t^2c^2)\hat{i}_r + 4bct\hat{j}_\theta \end{aligned}$$

من المفيد ان نلاحظ في هذا المثال ان المركبة القطبية للتعجيل تصبح سالبة عندما

تكون  $t$  كبيرة ولو ان نصف القطر يزداد دائما بصورة رتيبة مع الزمن .

( ٢ - ١٠ ) السرعة والتعجيل في الاحداثيات الاسطوانية والكروية

Velocity and Acceleration in Cylindrical and Spherical Coordinates:

الاحداثيات الاسطوانية Spherical coordinate

في حالة الحركة ذات الابعاد الثلاثة . يمكن تعيين موضع الجسم بدلالة الاحداثيات

الاسطوانية  $R, \phi, z$  عندئذ يكتب موضع المتجه على النحو التالي

$$\vec{r} = R\hat{i}_R + z\hat{k} \quad (٢-٢٦)$$

حيث  $\hat{i}_R$  يمثل وحدة المتجه القطبية في المستوى  $xy$ , و  $\hat{k}$  وحدة المتجه بانجسiah المحور  $z$  يلزمنا وحدة متجهة ثالثة  $\hat{j}_\phi$  بحيث تكون المتجهات الثلاثة

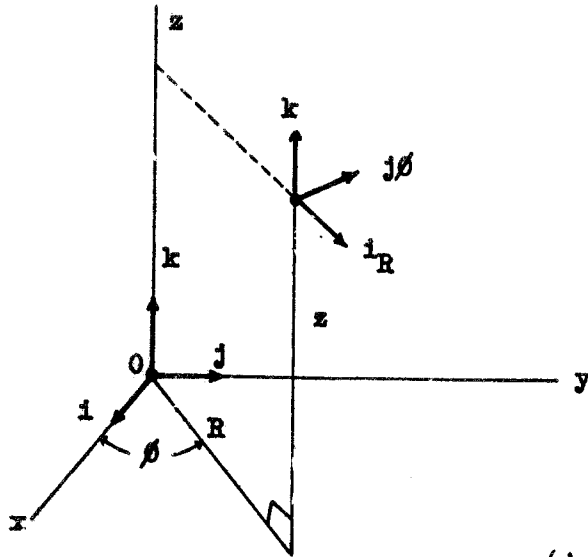
$$\hat{i}_R, \hat{j}_\phi, \hat{k}$$

• ثلاثى اليد اليمنى كما هو موضح في الشكل (٢-١٠).

يمكن ايجاد متجهات السرعة والتعجيل كالسابق بالتفاضل • وهذا يتطلب مرة ثانية تفاضل الوحدات المتجهه • واستخدام طريقة مماثلة لتلك التي استخدمت في حالة المستوى

$$\frac{d\hat{j}_\phi}{dt} = -\hat{i}_R \dot{\phi}, \quad \frac{d\hat{i}_R}{dt} = \hat{j}_\phi \dot{\phi}$$

نجد ان



الشكل (٢-١٠)  
الوحدات المتجهه للاحداثيات  
الاسطوانية

ولما كانت الوحدة المتجهة  $\hat{k}$  لا تغير اتجاهها ، فمشتقتها بالنسبة للزمن تساوى صفراً ومن هذه المغايق ، يمكن ايجاد متجهات السرعة والتعجيل بسهولة

المعادلات التالية

$$\vec{v} = R\dot{\hat{i}}_R + R\dot{\phi}\hat{j}_\phi + \dot{z}\hat{k} \quad (27-2)$$

$$\vec{a} = (\ddot{R} - R\dot{\phi}^2)\hat{i}_R + (2R\dot{\phi} + R\ddot{\phi})\hat{j}_\phi + \ddot{z}\hat{k} \quad (28-2)$$

هذه تعطى قيم  $v$  و  $a$  بدلالة مركباتها فى الثلاثى الدائرى  $\hat{i}_R \hat{j}_\phi \hat{k}$

طريقة اخرى لايجاد مشتقات الوحدات هى بتفاضل المعادلات التالية التى تمثل العلاقات

بين وحدات الثلاثى الثابت  $\hat{i} \hat{j} \hat{k}$  والثلاثى الدائرى -

$$\hat{i}_R = \hat{i} \cos \phi + \hat{j} \sin \phi$$

$$\hat{j}_\phi = -\hat{i} \sin \phi + \hat{j} \cos \phi$$

$$\hat{k} = \hat{k}$$

وقد تركت الخطوات كتمرين

Spherical Coordinates الاحداثيات الكروية

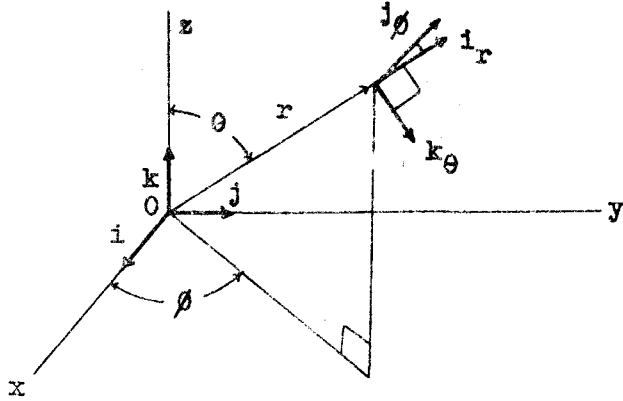
عند استخدام الاحداثيات الكروية  $r, \phi, \theta$  لوصف موضع جسم يكتب متجه الموضع

كحاصل لضرب المسافة القطبية  $r$  والوحدة المتجهة القطبية  $\hat{i}_r$  كما هى

الحال فى الاحداثيات القطبية المستوية . اذن

$$\vec{r} = r\hat{i}_r \quad (30-2)$$

فانجاه  $\hat{i}_r$  يعين الان بالزاويتين  $\phi$  و  $\theta$  لندخل وحدتين متجهتين اخريين  
 كما هو مبين في الشكل ( ٢ - ١١ ) . فالمتجهات الثلاث  
 $\hat{i}_r$   $\hat{j}_\phi$   $\hat{k}_\theta$  تكون ثلاثى اليد اليسرى كما هو مبين في الشكل (١)



الشكل ( ٢ - ١١ ) الوحدات المتجهه للاحداثيات الكروية

والسرعة هي -

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{i}_r + r \frac{d\hat{i}_r}{dt} \quad (٢ - ٣١)$$

مشكلتنا التالية هي كيفية تمثيل المشتقة  $d\hat{i}_r/dt$  بدلالة الوحدات المتجهه ففى  
 الثلاثى الدائى .

(١) ان اختيار ثلاثى اليد اليسرى للاحداثيات الكروية الى حد ما ملائم بحيث سيكون  
 لوحدها متجهات سمت نفس الرمز ، اى  $\hat{j}_\phi$  فى كل من الاحداثيات الاسطوانية  
 والكروية . ويعين ثلاثى اليد اليمنى فى الاحداثيات الكروية بسهولة ويكون ذلك  
 يمكن ترتيب متجهات الزوايا اى -

$$\hat{i}_r \hat{k}_\theta \hat{j}_\phi$$

بالرجوع الى الشكل نرى ان العلاقات التالية تصح بين الثلاثي  $\hat{i}_R \hat{j}_\phi \hat{k}_\theta$  والثلاثي  $\hat{i} \hat{j} \hat{k}$

$$\hat{i}_R = \hat{i}_R \sin \theta + \hat{k} \cos \theta$$

$$\hat{j}_\phi = \hat{j}_\phi \quad (٢٢ - ٢)$$

$$\hat{k}_\theta = \hat{i}_R \cos \theta - \hat{k} \sin \theta$$

اذن من المعادلات ( ٢١ - ٢ ) يمكننا ان نجد بسهولة

$$\hat{i}_R = \hat{i} \sin \theta \cos \phi + \hat{j} \sin \theta \sin \phi + \hat{k} \cos \theta$$

$$\hat{j}_\phi = - \hat{i} \sin \phi + \hat{j} \cos \phi \quad (٢٣ - ٢)$$

$$\hat{k}_\theta = \hat{i} \cos \theta \cos \phi + \hat{j} \cos \theta \sin \phi - \hat{k} \sin \theta$$

والتي تمثل الوحدات المتجهة لثلاث الدائر بدلالة الثلاثي الثابت  $\hat{i} \hat{j} \hat{k}$  لتجسّد مشتقة المعادلة الاولى بالنسبة للزمن . فالنتيجة تكون

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{i}_R}{dt} &= \hat{i} (\dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi) \\ &+ \hat{j} (\dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi) - \hat{k} \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

ثم باستخدام علاقات الوحدات المتجهه  $\hat{j}_\phi$  ,  $\hat{k}_\theta$  من المعادلة ( ٢٣ - ٢ )

نجد ان المعادلة السابقة تختصر الى

$$\frac{d\hat{i}_R}{dt} = \dot{\phi} \hat{j}_\phi \sin \theta + \dot{\theta} \hat{k}_\theta \quad (٢٤ - ٢)$$

ويمكن ايجاد المشتقين الاخرين بالانوار نفسه والنتائج تكون

$$\frac{d\hat{j}_\phi}{dt} = - \dot{\phi} \hat{i}_R \sin \theta - \dot{\theta} \hat{k}_\theta \cos \theta \quad (٢٥ - ٢)$$

$$\frac{d\hat{k}_\theta}{dt} = - \dot{\theta} \hat{i}_R + \dot{\phi} \hat{j}_\phi \cos \theta \quad (٢٦ - ٢)$$

قد تركت الخطوات كتمرين للطالب . نعود الان الى مسألة ايجاد  $\vec{v}$  ، اذا عوضنا

العلاقة الجبرية للمشتقة  $d\hat{i}_r/dt$  من المعادلة ( ٢ - ٣٤ ) في المعادلة

( ٢ - ٣١ ) فالنتيجة النهائية تكون

$$\vec{v} = \hat{i}_r \dot{r} + \hat{j}_\theta r \dot{\theta} \sin \theta + \hat{k}_\theta r \dot{\theta} \quad ( ٢ - ٣٧ )$$

والتي تعطى متجه السرعة بدلالة مركباته في الثلاثى المتكافئ  $\hat{i}_r \hat{j}_\theta \hat{k}_\theta$

ولايجاد التعجيل نفاضل العلاقة المذكورة اعلاه بالنسبة للزمن فنحصل على -

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} &= \hat{i}_r \ddot{r} + \dot{r} \frac{d\hat{i}_r}{dt} + \hat{j}_\theta \frac{d(r\dot{\theta} \sin \theta)}{dt} + r\dot{\theta} \sin \theta \frac{d\hat{j}_\theta}{dt} \\ &+ \hat{k}_\theta \frac{d(r\dot{\theta})}{dt} + r\dot{\theta} \frac{d\hat{k}_\theta}{dt} \end{aligned}$$

عند استخدام العلاقات السابقة لمشتقات الوحدات المتجهة نجد بسهولة ان العلاقات

السابقة للتعجيل تصبح كالآتي

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta - r\dot{\theta}^2) \hat{i}_r \\ &+ (r\ddot{\theta} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\theta} \cos \theta) \hat{j}_\theta \\ &+ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{k}_\theta \quad ( ٢ - ٣٨ ) \end{aligned}$$

والتي تعطى متجه التعجيل بدلالة مركباته في الثلاثى  $\hat{i}_r \hat{j}_\theta \hat{k}_\theta$  -

## تمارين

٢ - ١ المعادلات التالية تمثل متجه موضع جسيم متحرك . جد السرعة ، الانطلاق ،

والتعجيل كد وال للزمن في كل حالة وارسم كذلك منحنى لمسار الحركة .

$$(a) \vec{r} = \hat{i}ct - \hat{j} \frac{g}{2} t^2$$

$$(b) \vec{r} = \hat{i}ct + \hat{j}A \sin \omega t$$

$$(c) \vec{r} = \hat{i}A \sin \omega t + \hat{j}B \cos \omega t$$

$$(d) \vec{r} = \hat{i}ct + \hat{j}b \cos \omega t + \hat{k}b \sin \omega t$$

٢ - ٢ تمثل العلاقة التالية حركة جسيم

$$\vec{r} = \hat{i} \cos \omega t + 2\hat{j} \sin \omega t$$

جد الزاوية بين متجه التعجيل ومتجه السرعة في الزمن

$$t = \pi / 4 \omega$$

٢ - ٣ تمثل العلاقتان التاليتان موضع جسيمين يتحركان على مسار دائري مشترك

$$\vec{r}_1 = \hat{i}t \sin \omega t + \hat{j}b \cos \omega t$$

$$\vec{r}_2 = \hat{i}b \cos \omega t - \hat{j}b \sin \omega t$$

جد السرعة النسبية ، مقدار السرعة النسبية ، ومعدل التغيير الزمني للمسافة بين

الجسيمين ، الجميع كد وال للزمن  $t$  .

٢ - ٤ يتخير تعجيل جسيم مع الزمن وفقا للمعادلة

$$\vec{a} = \hat{i}At + \hat{j}Bt^2 + \hat{k}Ct^3$$

اذا كانت السرعة تساوى  $\vec{v}_0$  والموضع  $\vec{r}_0$  في الزمن  $t = 0$  ، جد متجه الموضع

كدالة للزمن .

٢ - ٥ يتحرك جسيم بانطلاق ثابت ولكنه يغير اتجاهه باستمرار . اثبت ان متجه التعجيل

يكون دائما عموديا على متجه السرعة . حل التمرين بالطريقتين التاليتين -

- أ - باستخدام علاقات المركبات المماسية والعمودية للسرعة والتعجيل .  
 ب - اثبت ان  $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$  اذا اعطيت  $\vec{a}$  ,  $\vec{v}$  بالاحداثيات الديكارتيية .

٢ - ٦ اثبت ان مقدار المركبة المماسية للتعجيل هي

$$a_T = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$a_n = (a^2 - a_T^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{والمركبة العمودية}$$

- ٢ - ٧ استخدم النتيجة السابقة لاجاد المركبات العمودية والمماسية للتعجيل كـ دوال للزمن في التمرين ( ٢ - ١ ) .

٢ - ٨ يتحرك جسيم على دائرة نصف قطرها ثابت  $b$  . فاذا كان انطلاق الجسيم

يتغير مع الزمن وفقا للمعادلة  $v = At^2$  فاية قيمة اوتيم للزمن  $t$  يصنع فيها

متجه التعجيل زاوية  $45^\circ$  مع متجه السرعة .

٢ - ٩ اذا علمت ان الاحداثيات القطبية لجسيم هي

$$(a) \quad r = be^{kt} \quad \theta = \omega t$$

$$(b) \quad r = A \cos \omega t \quad \theta = c \omega t$$

جد متجهات السرعة والتعجيل كدوال للزمن . كذلك جد الانطلاق ومقدار التعجيل

في الزمن  $t = 0$  .

٢ - ١٠ يتحرك جسيم على مسار لولبي ، فاذا كانت احداثياته الاسطوانية تتغير مع

الزمن وفقا للعلاقات التالية

$$R = A, \phi = Bt^2, z = Ct^2$$

حيث  $A, B, C$  ثوابت . جد متجهات السرعة والتعجيل كدوال للزمن  $t$



جد كذلك الزاوية بين متجهي السرعة والتعجيل في الزمن  $t = 1$  .

٢ - ١١ اذا اعطيت حركة جسم بالاحداثيات الكروية كالآتى -

$$r = b \quad \phi = \omega t \quad \theta = \frac{\pi}{2} (1 + \frac{1}{2} \cos \omega t)$$

جد الانطلاق ومقدار التعجيل كدوال للزمن  $t$  . وما هو شكل المسار الذى تمثله

المعادلات السابقة .

$$\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = A \frac{dA}{dt} \quad ١٢ - ٢ \text{ برهن على ان}$$

١ ملاحظة - جد مشتقة العلاقة  $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$  بالنسبة للزمن  $t$  .

$$\vec{A} = 2t^2 \hat{i} + 3t\hat{j} - 2\hat{k} \quad ١٣ - ٢ \text{ اذا كان}$$

$$\vec{B} = \hat{i} \cos \omega t + \hat{j} \sin \omega t + t^2 \hat{k}$$

جد

$$\frac{d}{dt} (\vec{A} \cdot \vec{B}), \quad \frac{d}{dt} (\vec{A} \times \vec{B})$$

كدوال للزمن  $t$  .

١٤ - ٢ اثبت ان

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{a})) = \vec{r} \cdot (\vec{v} \times \dot{\vec{a}})$$

$$\dot{\vec{a}} = d\vec{a}/dt, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{حيث}$$

١٥ - ٢ تتدحرج عجلة على سطح الارض بتعجيل امامى ثابت  $a_0$  جد التعجيل فى

اية نقطة على حافة العجلة بالنسبة الى

أ - مركز العجلة • و ( ب ) الارض • اية نقطة على حافة العجلة لها كهر تعجيل  
بالنسبة للارض •

٢ - ١٦ اثبت ان  $\dot{\phi}_R = \dot{\phi}_R - \dot{\phi}_R$  ،  $\dot{\phi}_R = \dot{\phi}_R - \dot{\phi}_R$  بتفاضل المعادلات (٢-٢٩)

٢ - ١٧ اكمل اشتقاق المعادلات (٢-٣٥) و (٢-٣٦) •

٢ - ١٨ املاء الخطوات اللازمة ليجاد التعجيل في الاحداثيات الكروية • معادلة  
(٢-٣٨) •

٢ - ١٩ وضعت عجلة نصف قطرها  $b$  في جهاز ودورت على النحو التالي - حول محورها  
بسرعة زاوية ثابتة  $\omega_1$  والمحور يدور بدوره بسرعة زاوية ثابتة  $\omega_2$  حول محور  
عمودي بطريقة يبقى معها محور العجلة في مستوى افقي ومركز العجلة  
ساكنا • استخدم الاحداثيات الكروية ليجاد التعجيل لاية نقطة على حافة  
العجلة وصورة خاصة التعجيل في اطي نقطة من العجلة •

٢ - ٢٠ افرض ان الوحدة المتجهه المماسية  $\hat{\tau}$  يمكن تمثيلها بالعلاقة التالية

$$\hat{\tau} = \frac{\vec{v}}{v}$$

جد علاقة للوحدة المتجهه العمودية  $\hat{n}$  بدلالة  $\vec{v}, v, \vec{a}, \hat{a}$

كما في تمرين (٢-٦) •

## الفصل الثالث

دايناميك الجسيم • الحركة على خط مستقيم

Dynamics of a Particle-Rectilinear Motion

ان الدايناميك - كما بيئنا في المقدمة - هو احد فروع الميكانيك الذى يستخدم قوانين الفيزياء التى تتحكم بالحركة الفعلية للاجسام المادية • واحد اغراض الدايناميك الاساسية التنبؤ بكل الطرق الممكنة التى تتحرك فيها منظومة مادية • ونوع الحركة التى ستحدث فى ظروف معينة • ان دراستنا للدايناميك فى هذا الموضع سوف تعتمد على قوانين الحركة كما صاغها نيوتن لاول مرة • وسندرس فى فصل متأخر طرقا اخرى متقدمة اكثر لتوضيح قوانين الحركة وذلك باستخدام معادلات لاكرانج وهلمتن •

وهي ليست على كل حال نظريات مختلفة وانما يمكن اشتقاقها من قوانين نيوتن

٣-١) قوانين نيوتن للحركة Newton's Laws of Motion

ما لا شك فيه ان القارئ لم حاليًا بقوانين نيوتن للحركة المألوفة وهي كالآتي :

١- كل جسم يستمر فى حالة السكون او الحركة المنتظمة فى خط مستقيم ما لم ترغبه قوة على تغيير تلك الحالة •

٢- يتناسب تغيير الحركة مع القوة المسلطة وتحدث باتجاه تأثير القوة •

٣- هناك لكل فعل دائما رد فعل مساو له فى القدار ومعاكس فى الاتجاه

او الاعمال المتبادلة لجسمين تكون دائما متساوية ومتعاكسة بالاتجاه ••

دعنا الان نختبر هذه القوانين بشئ من التفصيل القصورية

٣-٢) قانون نيوتن الاول • المحاور المرجعية

Newton's First Law. Inertial Reference System.

يصف القانون الاول خاصة عامة تشترك فيها جميع المواد • اى الاستمرارية

او القصور الذاتي Inertia وينص القانون على ان الجسم المتحرك يسير على خط مستقيم بانطلاق ثابت ما لم يمنعه تأثير ما يسمى بالقوة يحول دون استمراره على ذلك . سواء تحرك الجسم على خط مستقيم بانطلاق ثابت ام لا فان ذلك لا يعتمد فقط على التأثيرات الخارجية ( القوى ) وانما يعتمد كذلك على محاور مرجعية خاصة تستخدم لوصف الحركة . في الحقيقة ان قانون نيوتن الاول ما هو الا تعريف لنوع معين من محاور مرجعية تسمى بالمحاور المرجعية المستمرة او النيوتونية - Newtonian or Inertial- Reference system ومحاور كمنه يعح فيها قانون نيوتن الاول .

هنا يكون طبيعيا ان يظهر السؤال التالي :

كيف يمكن معرفة ما اذا كانت محاور معينة تكون محاورا نيوتونية اولا ؟ ان الجواب على سؤال كهذا ليس بسيطا . فلاجل تخليص الجسم من تأثير جميع القوى فان من الضروري عزله تماما . وهذا غير ممكن بطبيعة الحال لحيمة وجود على الاقل بعض قوى الجاذبية التي تؤثر على الجسم ما لم يبعد الى مسافة لانتهائية من جميع المواد الاخرى .

اما في الاغراض العملية التي لا تحتاج الى دقة متناهية وهي كثيرة ، فان المحاور المثبتة على الارض تكون اقرب الى المحاور النيوتونية لذلك - وعلى سبيل المثال - تبدو كرة البليارد وكأنها تسير بخط مستقيم وبانطلاق ثابت طالما لا تصدم بكرة اخرى او تضرب الحافة ولكن اذا قيست حركة الكرة بدقة متناهية فسوف نكتشف ان مسارها مقوس قليلا . وهذا ينشأ بسبب دوران الارض ، ولذلك المحاور المثبتة على الارض ليست في الواقع محاور نيوتونية . والافضل منها هي التي تستخدم مركز الارض ومركز الشمس وكوكب بعيد كنقاط مرجعية . ولكن حتى هذه المحاور ليست نيوتونية تماما بسبب حركة الارض حول الشمس . ان التقريب الافضل هو - على سبيل المثال - اعتبار مركز الشمس

ونجمتين بعيدتين كقطا مرجعية • وقد اتفق بصورة عامة ان تكون المحاور النيوتونية الاخيرة في مفهوم الميكانيك النيوتوني هي التي تعتمد على معدل خلفية جميع المادة الموجودة في الكون •

٣-٣) الكتلة والقوة • قانوني نيوتن الثاني والثالث

Mass and Force. Newton's Second and Third Laws

من الحقائق المألوفة لدينا جميعا اننا عند رفع حجر كبير لا نعاني صعوبة كصعوبة تحريكه ( او ايقافه ) بينما لا نجد صعوبة بهذا المستوى في التعامل مع قطعة خشبية صغيرة فنقول ان القصور الذاتي للحجر اكبر من الخشب والقياس الكمي للقصور الذاتي يسمى بالكتلة • لنفرض ان عندنا جسمين  $B, A$  نقيس نحسب مقياس القصور الذاتي لاحدهما بالنسبة الى الاخر ؟ هناك تجارب عديدة يمكن استنباطها للاجابة على هذا السؤال منها محاولة جعل الجسمين يوتر احدهما على الاخر كربطهما بلولب حلزوني مثلا ، عندئذ نجد من التجارب الدقيقة ان تعجيلي الجسمين يكونان دائما متعاكسين بالاتجاه والنسبة بينهما ثابتة ( على لرض ان التعجيل معطي في المحاور النيوتونية واخذ بنظر الاعتبار التأثير المتبادل للجسمين  $A$  و  $B$  فقط ) ويمكننا التعبير عن هذه الحقيقة المهمة جدا والاساسية بالمعادلة التالية :

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = - \frac{d\vec{v}_B}{dt} \mu_{BA} \quad \vec{a}_A = - \vec{a}_B \mu_{BA} \quad (1-3)$$

الثابت  $\mu_{BA}$  يمثل في الحقيقة معيار القصور الذاتي النسبي للجسم  $B$  بالنسبة الى  $A$  من المعادلة (١-٣) ينتج ان  $\mu_{BA} = 1/\mu_{AB}$  اذن قد نعبر عن  $\mu_{BA}$  بالنسبة  $\mu_{BA} = \frac{m_B}{m_A}$  حيث استعمل جسم ما كعيار لوحدية القصور الذاتي • الان النسبة  $m_B / m_A$  يجب ان تكون مستقلة عن اختيار الوحدة • هذه الحالة ستكون نفسها اذا كان لاي جسم ثالث  $C$

$$\frac{\mu_{BC}}{\mu_{AC}} = \mu_{BA}$$

وهذه فعلا وجدت صحيحة. نسمي الكمية  $m$  بالكتلة .  
 وبعبارة أدق يجب ان نسمي  $m$  كتلة القصور الذاتي لان تعريفها  
 اعتمد على خواص القصور الذاتي . في الممارسة الفعلية تعين عادة نسب  
 الكتل بالوزن . فالوزن او قوة جذب الارض تتناسب مع ما قد يسمى بالكتلة  
 التثاقلية للجسم . على اية حال ، ان جميع التجارب المعروفة لحد الان -  
 تشير الى ان كلا من كتلة القصور الذاتي والكتلة التثاقلية تتناسب كل منهما  
 بدقة مع الاخرى . اذن لا نحتاج لاغراضنا ان نفرق بين هذين النوعين  
 من الكتلة .

يمكن الان كتابة الحقيقة الاساسية التي عبرت عنها المعادلة (٣-١)  
 على الشكل التالي : -

$$m_A \frac{d\vec{v}_A}{dt} = - m_B \frac{d\vec{v}_B}{dt} \quad (٢-٣)$$

ان حاصل ضرب الكتلة في التمجيل في المعادلة السابقة يمشى  
 " تغيير الحركة " لقانون نيوتن الثاني ، ووفقا لهذا القانون فان هذا التغيير  
 يتناسب مع القوة . وبعبارة اخرى يمكننا كتابة القانون الثاني على النحو التالي

$$\vec{F} = km \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (٣-٣)$$

حيث  $\vec{F}$  تمثل القوة ، و  $k$  ثابت التناسب اضياديا نضع  $k=1$  ونكتب (١)

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (٤-٣)$$

(١) ان وحدة القوة في نظام mks والتي عرفت في المعادلة (٤-٣) تسمى بالنيوتن  
 لذلك قوة نيوتن واحد تعجل جسم كتلته ١ كغم بمقدار ١ متر/ثانية . ووحدة  
 القوة في نظام cgs ( ١ غم x ١ سم / ثا ) هي الداين .

### المعادلة المذكورة اعلاه تسمى

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (٥-٣)$$

اذا كانت الكتلة ثابتة • وسنرى في المستقبل ان النظرية النسبية تتكهن بان كتلة الجسم المتحرك غير ثابتة وانما تكون دالة لانطلاقه • وذلك تكون المعادلتان (٤-٣) و (٥-٣) غير متكافئتين تماما وعلى اية حال • فان الانبلاجات عندما تكون صغيرة نياسا الى انطلاق الضوء (٣ × ١٠<sup>٨</sup> متر / ثا ) يكون تغيير الكتلة مهملا •

وفقا للمعادلة (٤-٣) يمكننا الان تفسير الحقيقة الاساسية التي بينتها المعادلة (٢-٣) كتعبير عن حالة الجسمين الذين يوتر احدهما على الاخر بقوتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه • اى

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

وهذا هو مضمون قانون نيوتن الثالث • القوى تأثير متبادل وتحدث بمقادير متساوية بين اى جسمين يوتر كل منهما على حركة الاخر ••

فائدة واحدة كبيرة لمفهوم القوة هي تمكننا من حصر انتباهنا على جسم منفرد • والاهمية الفيزيائية لفكرة القوة هي امكانية ايجاد دالة بسيطة نسبيا للاحداثيات في ظروف معينة بصورة اعتيادية والتي تسمى بدالة القوة • وعندما توضع هذه الدالة مساوية لحاصل ضرب الكتلة في التمجيل فانها تصف حركة الجسم بصورة صحيحة •

### ٤-٣ الزخم الخطي Linear Momentum

ان حاصل ضرب الكتلة في السرعة يسمى بالزخم الخطي • ويمثل بالرمز p •

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (٦-٣)$$

فالنص الرياضي لقانون نيوتن • المعادلة (٥-٣) عندئذ يمكن كتابتها على النحو التالي :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (٧-٣)$$

بعبارة اخرى ه القوة تساوى التغيير الزمني للزخم الخطي .  
ويمكن التعبير بصورة افضل عن القانون الثالث ه قانون الفعل ورد الفعل ه  
بدلالة الزخم الخطي . اذن لجسمين A و B بينهما تأثير متبادل نحصل على

$$\frac{d\vec{p}_A}{dt} = - \frac{d\vec{p}_B}{dt}$$

او

$$\frac{d}{dt} (\vec{p}_A + \vec{p}_B) = 0$$

وفقا لذلك

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \text{ثابت}$$

اذن يتضمن القانون الثالث بقا الزخم الخطي الكلي لجسمين بينهما تأثير متبادل  
ثابتا في جميع الاحوال

ان ثبوت مجموع الزخم الخطي لجسمين بينهما تأثير متبادل هو حالة خاصة  
لقانون هام سنشرحه بالتفصيل فيما بعد ه اى ان الزخم الخطي الكلي لاي  
مجموعة معزولة يبقى ثابتا بمرور الزمن . ويسمى هذا النص الاساسي بقانون  
حفظ الزخم الخطي وهو احد القوانين الاساسية في الفيزياء . وقد فرضت  
صحته حتى في الحالات التي يفشل فيها تطبيق قوانين نيوتن نفسها .

### ٣-٥) حركة الجسم Motion of a Particle

ان معادلة حركة الجسم الاساسية تعطي بالعلاقة الرياضية لقانون  
نيوتن الثاني ه اى المعادلة (٣ - ٤) و عندما يكون الجسم تحت تأثير اكثر  
من قوة واحدة ه نيمكن اعتبار جمع هذه القوى بطريقة جبر المتجهات من  
العلاقات العجزية ه ه اى

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{a} \quad (٣-٨)$$



المثلة بالاحداثيات الديكارتيه و المعادلة المذكورة اعلاه تكافئ المعادلات

المددية التالية

$$\begin{aligned} F_x &= \sum F_{ix} = m\ddot{x} \\ F_y &= \sum F_{iy} = m\ddot{y} \\ F_z &= \sum F_{iz} = m\ddot{z} \end{aligned} \quad (1-3)$$

تستخدم غالباً محاور اخرى غير المحاور الديكارتيه و التي سوف نبحثها فيما بعد. اذا كان تمثيل جسيم ما معروفاً فان معادلة الحركة ( المعادلية ٣-١) تعطي القوة التي تؤثر على الجسيم . ولكن المسائل الاحيادية لديناميك جسيم هي تلك التي تكون فيها القوى دوال معينة معروفة للاحداثيات بغضها الزمن . و المهم هو ايجاد موضع الجسيم كدالة للزمن . ان هذا يتطلب حل مجموعة من المعادلات التفاضلية . و في بعض المسائل يظهر من المستحيل ايجاد حلول للمعادلات التفاضلية للحركة بدلالة الدوال التحليلية المعروفة . و في هذه الحالة يجب استعمال بعض طرق التقريب . و في تطبيقات عملية كثيرة كحركة القذريات ballistics و التوابع وغيرها تكون المعادلات التفاضلية من التعقيد بحيث يصبح من الضروري الاستعانة بالتكامل العددي . و غالباً يحسب بواسطة الحاسبات الالكترونية طالية السرعة للتيوه بالحركة .

٣-٦ الحركة على خط مستقيم Rectilinear Motion

اذا بقي جسيم متحرك على خط مستقيم ، سميت الحركة بالحركة على خط مستقيم و في هذه الحالة نحتاج الى مركبة واحدة فقط من المعادلة (٣-١) مثل مركبة - x ، لاننا يمكننا ان نختار المحور - x كخط للحركة دون ان نخسر التعميم . فندفد تصبح الحروف التي تكتب في اسفل الرموز لا ضرورة لها و تكتب المعادلة العامة للحركة على النحو التالي : -

$$F(x, \dot{x}, t) = m\ddot{x}$$

ولنعتبر الان بعض الحالات الخاصة التي يمكن فيها تكامل المعادلة بالطرق الاوليية

Constant Force

القوة ثابتة

ان ابسط الحالات هي التي تكون فيها القوة ثابتة • وفي هذه الحالة يكون التعجيل ثابتا ••

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} = \text{constant} = a$$

ويمكن ايجاد حل هذه المعادلة بسهولة بالتكامل المباشر

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt$$

$$v = at + v_0 = dx/dt \quad (11-3)$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t (at + v_0) dt$$

$$x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0 \quad (12-3)$$

حيث  $v_0$  تمثل السرعة الابتدائية  $x_0$  الموضع الابتدائي • وتعمير الزمن  $t$  بين المعادلة (11-3) و (12-3) نحصل على

$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2 \quad (13-3)$$

سنذكر الطالب بان المعادلات المذكورة اعلاه هي معادلات الحركة المألوفة

ذات التعجيل المنتظم •

هناك تطبيقات اساسية عديدة فمثلا في حالة سقوط الجسم الحر

بالقرب من سطح الكرة الارضية اهمال مقاومة الهواء يكون التعجيل

ثابتا تقريبا • وتمثل تعجيل الجسم الحر السقوط بالرمز  $\vec{g}$  (فيتمسه

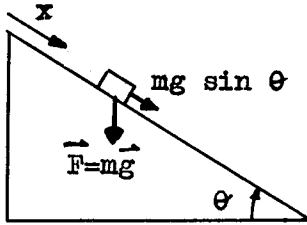
العددية المقاسة  $(g = 9.8 \text{ m/sec}^2)$

ووفقاً لذلك تكون قوة جاذبية الأرض متجهة نحو الأسفل (القليل) وتساوي  $mg$  وقوة الجاذبية متواجدة دائماً بصرف النظر عن حركة الجسم وهي مستقلة عن أية قوى أخرى والتي قد تؤثر على الجسم • وننسبها من الآن فصاعداً  $mg$ .

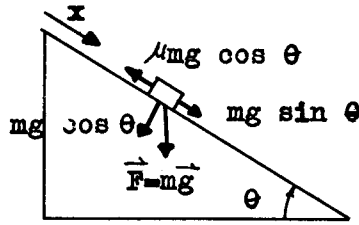
### مثال

افرض ان جسماً ينزلق اسفل سطح امس يميل بزاوية  $\theta$  عن الافق كما هو مبين في الشكل ( ١١-٣ ) وقد اخترنا الاتجاه الموجب لمحور  $x$  نحو اسفل السطح • كما هو مبين • ولذلك تكون مركبة قوة الجاذبية باتجاه  $x$  تساوي  $mg \sin \theta$  ولما كانت هذه الكمية ثابتة لذلك تستخدم المعادلات (١١-٣) و (١٢-٣) و (١٣-٣) لهذه الحركة حيث

$$a = \frac{\vec{F}}{m} = g \sin \theta$$



(a)



(b)

الشكل ( ١٣-٣ ) جسم ينزلق اسفل سطح مائل (أ) سطح امس

(ب) سطح خشن

لو فرضنا سطحاً خشن بدلاً من السطح الامس • أي ان السطح يؤثر بقوة احتكاكية على الجسم • عندئذ تكون محصلة القوى بالاتجاه  $x$  مساوية

الى  $mg \sin \theta - f$  ولكن من المعروف ان مقدار القوة الاحتكاكية يتناسب مع مقدار القوة العمودية  $N$  للتماس الانزلاقي اى  $f = \mu N$  حيث ثابت التناسب  $\mu$  يسمى بمعامل الاحتكاك الانزلاقي . في هذا المثال القوة العمودية  $N$  تساوى  $mg \cos \theta$  كما هو واضح من الشكل اى

$$f = \mu mg \cos \theta$$

وهكذا تكون محصلة القوة باتجاه  $x$  مساهمة الى

$$mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta$$

مرة اخرى القوة ثابتة ولذلك يصح استخدام المعادلات (٣-١١) و (٣-١٢) و (٣-١٣) حيث

$$a = \frac{F}{m} = g(\sin \theta - \mu \cos \theta) \quad (٣-١٤)$$

وسيزداد انطلاق الجسم اذا كان القدار الجبرى داخل الاقواس موجبا اى اذا كانت  $\theta > \tan^{-1} \mu$  وتمثل الزاوية  $\tan^{-1} \mu$  عادة بالرمز  $\epsilon$  وتسمى بزاوية الاحتكاك . اذا كانت  $\theta < \epsilon$  عندئذ  $a = 0$  اى ان الجسم ينزلق اسفل السطح بانطلاق ثابت . اما اذا كانت  $\theta < \epsilon$  فعندئذ تكون  $a$  سالبة وبذلك يصل الجسم اخيرا الى حالة السكون . وعلينا ملاحظة ان اتجاه قوة الاحتكاك ينعكس . عندما تكون الحركة الى اعلى السطح المائل . اى بالاتجاه المـسـوجـب لمحور  $x$  - والتعجيل ( بالحقيقة تباطؤى ) عندئذ يكون

$$a = g(\sin \theta + \mu \cos \theta)$$

(٣-٧) القوة كدالة للموضع فقط، مفهوما الطاقة الحركية والكامنة

The Force as a Function of Position Only.

The Concepts of Kinetic and Potential Energy

في امثلة عديدة يعتمد تأثير القوة على جسم على موضعه فقط بالنسبة الى اجسام اخرى . فعلا تنطبق هذه الحالة على قوى الجذب الارضى والالكتروستاتيك وتنطبق كذلك على قوى الكبس او الشد المرن . والمعادلة التفاضلية للحركة على

خط مستقيم لهذه الحالة هي :

$$\vec{F}(x) = m\ddot{x} \quad (15-3)$$

اعتيادياً يمكن حل هذا النوع من المعادلات التفاضلية بوحدة من طرق

كثيرة . ومن الطرق المفيدة والمهمة لحلها هي كتابة التعجيل على النحو التالي :

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{d\dot{x}}{dx} = v \frac{dv}{dx} \quad (16-3)$$

وهكذا يمكن كتابة المعادلة التفاضلية للحركة كالآتي :

$$F(x) = mv \frac{dv}{dx} = \frac{m}{2} \frac{d(v^2)}{dx} = \frac{dT}{dx} \quad (17-3)$$

حيث الكمية  $T = \frac{1}{2}mv^2$  تسمى بالطاقة الحركية للجسم ويمكننا الان وضع

المعادلة (17-3) بصيغة التكامل اى :

$$\int F(x) dx = \int dT \quad (18-3)$$

الان يمثل التكامل  $\int F(x) dx$  الشغل المسلط على الجسم من تأثير

القوة  $F(x)$  ولنعرف دالة مثل  $V(x)$  على النحو التالي :

$$- \frac{dV}{dx} = F(x) \quad (19-3)$$

والدالة  $V(x)$  تسمى بالطاقة الكامنة . وهوت نقط ضمن ثابت (اعتباطي)

مضاف وبذلك يكون تكامل الشغل بدلالة  $V(x)$  على النحو التالي :

$$\int F(x) dx = - \int \frac{dV}{dx} dx = -V(x) + \text{constant}$$

ومن المعادلة (18-3) يمكن كتابة

$$T + V = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \text{constant} = E \quad (20-3)$$

وتسمى  $E$  بالطاقة الكلية • بعبارة اخرى - اذا كانت القوة المؤثرة دالة للموضع فقط للحركة على خط مستقيم ، فان مجموع الطاقة الحركية والكامنة يبقى ثابتا خلال الحركة • وتسمى القوة في هذه الحالة محافظة <sup>(٧)</sup> Conservative • اما القوى غير المحافظة اى التي لا تتواجد لها دالة كامنة فنكون اعتياديا من نوع التبديد ، مثل الاحتكاك •

يمكن ايجاد حركة الجسم من حل معادلة الطاقة [المعادلة (٢٠-٣)] للانطلاق  $v$

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]} \quad (21-3)$$

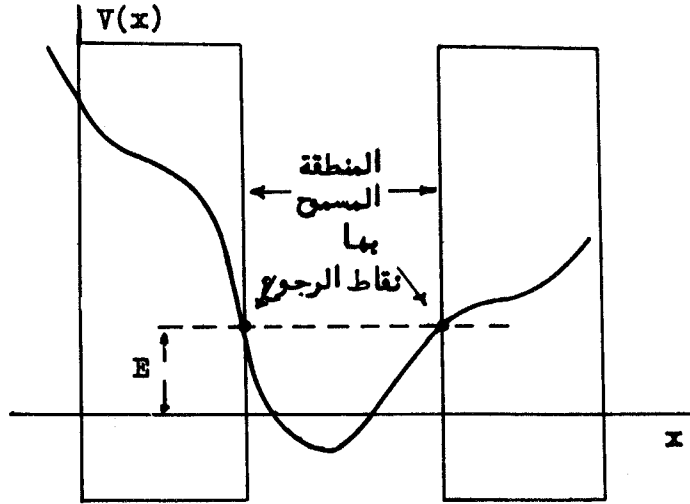
والتي يمكن كتابتها بصيغة التكامل على النحو التالي :

$$\int \frac{\pm dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]}} = t \quad (22-3)$$

وهذه تعطي  $t$  كدالة للموضع  $x$

من المعادلة (٢١-٣) نرى ان الانطلاق يكون حقيقيا فقط لقيم  $x$  عندما تكون  $V(x) \leq E$  اقل من الطاقة الكلية  $E$  او مساوية لها • فيزيائيا ، وهذا يعني ان الجسم محصور في المنطقة او المناطق التي يستوفي فيها الشرط  $V(x) \leq E$  • اضافة الى ذلك يصبح الانطلاق صفرا عندما تكون  $V(x) = E$  وهذا يعني ان الجسم يجب ان يقف ويعكس حركته في تلك النقاط التي تصح فيها المساواة • وتسمى هذه النقاط بنقاط الرجوع Turning points للحركة • وقد وضحت الحقائق المبينة اعلاه في الشكل (٢-٣)

(٧) سوف نتحدث القوى المحافظة في الفصل القادم بالتفصيل •



الشكل ٣-٢٠ خط بياني دالة الطاقة الكامنة  $V(x)$  يبين  
المنطقة المسموح بها للحركة ونقاط الرجوع لقيمة معلومة للطاقة  
الكلية  $E$

### مثال

ان حركة الجسم الحر السقوط للحالة التي تكون فيها القوة ثابتة  $\epsilon$   
المشروحة اعلاه هي حالة خاصة للحركة المحافظة "Conservative" اذا اخترنا  
اتجاه  $x$  موجبا الى الاعلى ، فان قوة الجذب الارضى تكون  $-mg$  . ودالة الطاقة  
الكامنة تساوي اذن  $v = mgx + C$  . هنا  $C$  ثابت اعتباطي يمكن  
وضعه مساويا للصفر للملائمة . عندئذ تصبح الطاقة الكلية مساوية الى

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + mgx$$

افرض - على سبيل المثال - ان جسما قد قذف الى الاعلى بانطلاق ابتدائي  $v_0$   
وعند اختيار  $x = 0$  كنقطة ابتدائية للقذف نحصل على

$$E = \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + mgx$$

لمعادلة الطاقة • وفي هذه الحالة تكون نقطة الرجوع عبارة عن اعظم ارتفاع يصله الجسم والتي يمكن ايجادها بوضع  $\dot{x} = 0$  إذن

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = mgx_{\max}$$

$$h = x_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \quad \text{او}$$

والحركة • بدلالة تكامل معادلة الطاقة تكون على النحو التالي :

$$\int_0^x (v_0^2 - 2gx)^{-\frac{1}{2}} dx = t$$

$$\frac{v_0}{g} - \frac{1}{g} (v_0^2 - 2gx)^{\frac{1}{2}} = t$$

على الطالب ان يتحقق من ان هذه العلاقة تصبح نفس العلاقة بين  $x$  و  $t$  المبينة في المعادلة (١٢-٣) عند وضع  $a$  مساويا الى  $-g$

٨-٣ القوة كدالة للسرعة فقط only The Force as a Function of Velocity

يحدث في اكثر الاحيان ان تكون القوة المؤثرة على جسم ما دالة لسرعته

يصح هذا مثلا في حالة مقاومة الموائع التي تؤثر على جسم يتحرك في مائع

في السرع الواطئة لوحظ ان مقاومة المائع تتناسب تقريبا مع السرعة • بينما

في السرع العالية يقترب تناسبها اكثر من مربع  $v$  • فان لم يكن هناك قوى

مؤثرة اخرى فان من الممكن كتابة المعادلة التفاضلية للحركة على الكيفية التالية

$$F(v) = m \frac{dv}{dt} \quad (٢٣-٣)$$

وبتكاملها مرة واحدة نحصل على  $t$  كدالة للسرعة  $v$

$$t = \int \frac{m dv}{F(v)} = t(v) \quad (٢٤-٣)$$



إذا فرضنا ان بإمكاننا حل المعادلة السابقة للسرعة  $v$  أي

$$v = v(t)$$

فان تكاملا ثانيا يعطي الموضع  $x$  كدالة للزمن  $t$

$$x = \int v(t) dt = x(t) \quad (٢٥-٣)$$

الطريقة الاخرى هي بتمويض  $v \frac{dv}{dx}$  بدلا من  $\frac{dv}{dt}$  في المعادلة

(٢٣-٣) لنحصل على

$$F(v) = mv \frac{dv}{dx} \quad (٢٦-٣)$$

وباجراء التكامل نحصل على  $x$  بدلالة  $v$ .

$$x = \int \frac{mv dv}{F(v)} = x(v) \quad (٢٧-٣)$$

وعند حل هذه المعادلة للسرعة  $v$  كدالة للموضع  $x$  نحصل على

$$v = v(x)$$

وعند تكامل الاخيرة نحصل على

$$t = \int \frac{dx}{v(x)} = t(x) \quad (٢٨-٣)$$

في الحقيقة يجب ان يكون للمعادلات (٢٥-٣) و (٢٨-٣) نفس العلاقة

بين  $x$  و  $t$ .

### مثال

افرض ان قالبا قد قذف بسرعة ابتدائية  $v_0$  على سطح مستو املس، وكان

متأثرا بمقاومة الهواء التي تتناسب مع  $v$ ، أي ان  $F(v) = -cv$  حيث  $c$  يمثل

ثابت التناسب ( المحور  $x$  باتجاه الحركة ) . المعادلة التفاضلية

للحركة هي :

$$-cv = m \frac{dv}{dt}$$

والتي تعطي عند تكاملها

$$t = \int_{v_0}^v - \frac{mdv}{cv} = - \frac{m}{c} \ln \left( \frac{v}{v_0} \right)$$

يمكننا حلها بسهولة للسرعة  $v$  كدالة للزمن  $t$  ويكون ذلك بضرب المتساوية بالكمية  $-\frac{c}{m}$  واخذ الاس (exponent) لطرفيها فالنتيجة تكون

$$v = v_0 e^{-ct/m}$$

اي ان السرعة تتناقص اسيا مع الزمن . وعند تكاملها للمرة الثانية نحصل على :

$$x = \int_0^t v_0 e^{-ct/m} dt = \frac{mv_0}{c} (1 - e^{-ct/m})$$

نرى ، من المعادلة المذكورة اعلاه ، ان القالب لا يتعدى ابدا مسافة نهائية مقدارها  $mv_0/c$

ويمكن كذلك كتابة المعادلة التفاضلية على النحو التالي :

$$-cv = mv \frac{dv}{dx}$$

كما في المعادلة (٣-٢٦) وبحذف العامل المشترك  $v$  من طرفي المتساوية ، وتكاملها نحصل على

$$-c \int_0^x dx = m \int_{v_0}^v dv$$

$$- \frac{c}{m} x = v - v_0$$

$$v_0 - \frac{c}{m} x = v = \frac{dx}{dt}$$

او

اي ان سرعة القالب تتغير خطيا مع المسافة • وبتكاملها مرة اخرى نحصل على :

$$t = \int_0^x \frac{dx}{v_0 - (c/m)x} = \frac{-m}{c} \ln \left( \frac{v_0 - (c/m)x}{v_0} \right)$$

وعند حل هذه المعادلة للموضع  $x$  (بضربها بالكمية  $-c/m$  واخذ الاس  $e$ )  
 نحصل على نفس العلاقة بين  $x$  و  $t$  التي حصلنا عليها سابقا •  
 (١-٣) القوة كدالة للزمن فقط •

The Force as a Function of Time Only:

اذا اعتمدت القوة بصورة صريحة على الزمن • فيمكن تكامل معادلة الحركة :

$$F(t) = m \frac{dv}{dt} \quad (٢٩-٣)$$

مباشرة • وذلك

$$\frac{dx}{dt} = \int \frac{F(t)}{m} dt = v(t) \quad (٣٠-٣)$$

معطية  $v$  كدالة للزمن  $t$  • وبتكاملها للمرة الثانية نحصل على  $x$  كدالة  
 للزمن  $t$  اي

$$x = \int v(t) dt = \int \left[ \int \frac{F(t)}{m} dt \right] dt \quad (٣١-٣)$$

ويجب ملاحظة الحالة التي تكون فيها القوة معلومة كدالة للزمن  $t$  فقط • فيكون  
 حل معادلة الحركة على شكل تكامل ثنائي بسيط • اما في الحالات الاخرى جميعها  
 فيجب استعمال الطرق المتنوعة لحل المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية  
 لايجاد الموضع  $x$  كدالة للزمن  $t$  •

## مثال

قالب كان ابتدائيا في حالة السكون على سطح افقي أملس . فـسـي  
الزمن  $t = 0$  ، سلطت عليه قوة افقية متزايدة تزايدا ثابتا - اي  $F = ct$  .  
جد السرعة والازاحة كدوال للزمن .

من المعادلة التفاضلية للحركة

$$ct = m \frac{dv}{dt}$$

$$v = \frac{1}{m} \int_0^t ct dt = \frac{ct^2}{2m}$$

فان

$$x = \int_0^v \frac{ct^2}{2m} dt = \frac{ct^3}{6m}$$

و

حيث ان موضع القالب الابتدائي كان في نقطة الاصل (  $x = 0$  )

٢-١٠ الحركة الشاقولية في وسط مقاوم - سرعة المنتهي

Vertical Motion in a Resisting Medium. Terminal Velocity

يتعرض الجسم المقاوم شاقوليا في الهواء او في اي مائع آخر الى مقاومة  
اللزوجة (viscous resistance) فاذا كانت المقاومة تتناسب مع السرعة  $v$   
دقيقة للقوة الاولى (الحالة الخطية) ، نستطيع تمثيل قوة المقاومة بالكيفية  $-cv$   
بصرف النظر عن اشارة  $v$  ، لان المقاومة تكون دائما مماكسة لاتجاه الحركة .  
وثابت التناسب  $c$  يعتمد على حجم وشكل الجسم وعلى لزوجة المائع .  
لنأخذ المحور  $x$  موجبا الى الاعلى . عندئذ تكون المعادلة التفاضلية للحركة

$$-mg - cv = m \frac{dv}{dt} \quad (٢٢ - ٢)$$

ولما كانت القوة دالة للسرعة  $v$  لذلك نحصل على

$$t = \int \frac{m dv}{F(v)} = \int_{v_0}^v \frac{m dv}{-mg - cv} = -\frac{m}{c} \ln \frac{mg + cv}{mg + cv_0}$$

والتي يمكن حلها بسهولة للسرعة  $v$  أي

$$v = -\frac{mg}{c} + \left( \frac{mg}{c} + v_0 \right) e^{-ct/m} \quad (٣٣-٣)$$

يذهب الحد الاسي الى مقدار مهمل بعد مرور فترة زمنية كافية ( $t \gg \frac{m}{c}$ ) وبذلك تقترب السرعة من الغاية  $-mg/c$ . وتسمى سرعة الغاية للجسم الساقط بـ سرعة المنتهي terminal velocity، وهي تلك السرعة التي تكون فيها قوة المقاومة مساوية تماما ومعاكسة لثقل الجسم بحيث تكون القوة الكلية على الجسم تساوى صفرًا. ويسمى مقدار سرعة المنتهي بانطلاق المنتهي terminal speed. فمثلا، انطلاق المنتهي لقطرة المطر الساقطة ينحصر بين  $m/٦$  ثا و  $m/٣$  ثا وذلك يعتمد على حجمها.

المعادلة (٣٣-٣) تعبر عن  $v$  كدالة للزمن  $t$ ، وبتكاملها للمرة

الثانية نحصل على  $x$  كدالة للزمن  $t$ .

$$x - x_0 = \int_0^t v(t) dt = -\frac{mg}{c} t + \left( \frac{m^2 g}{c^2} + \frac{mv_0}{c} \right) (1 - e^{-ct/m}) \quad (٣٤-٣)$$

لنمثل انطلاق المنتهي  $\frac{mg}{c}$  بالرمز  $v_t$  ولنكتب  $T$  (الذي قد نسميه بالزمن النهي Characteristic Time) للكمية  $m/c$ . فعندئذ يمكن كتابة المعادلة

(٣٣-٣) على الشكل التالي الاكثراهمية

$$v = -v_t + (v_t + v_0) e^{-t/T} \quad (٣٥-٣)$$

وتصبح المعادلة ( ٣٤ - ٣ )

$$x = x_0 - v_t t + x_1 (1 - e^{-t/\tau}) \quad (٣٦-٣)$$

$$x_1 = \frac{m^2 g}{c^2} + \frac{m v_0}{c} = g \tau^2 + v_0 \tau \quad \text{حيث}$$

لذلك اذا اسقط جسم من السكون ( $v_0 = 0$ ) فمن المعادلة (٣٥-٣) نستنتج بأنه سوف يبلغ انطلاقا مقداره  $1 - e^{-1}$  مضروبا في انطلاقي المنتهي في الزمن  $\tau$  و  $(1 - e^{-2})v_t$  في زمن  $2\tau$  ، وهلم جرا . وبعد زمن  $10\tau$  يصبح الانطلاق تقريبا مساويا للقيمة النهائية ، أي  $0.99995 v_t$  اذا كانت مقاومة اللزوجة تتناسب مع  $v^2$  ( حالة الدرجة الثانية ) فالمعادلة التفاضلية للحركة بعد ان تذكر باننا اخذنا الاتجاه الموجب الى الاعلى تكون :

$$-mg \pm cv^2 = m \frac{dv}{dt} \quad (٣٧-٣)$$

وتشير الاشارة السالبة لحد المقاومة الى ان اتجاه الحركة الى الاعلى (  $v$  موجبة ) كما تشير الاشارة الموجبة الى ان اتجاه الحركة الى الاسفل (  $v$  سالبة ) والاشارتان ضروريتان لاية قوة مقاومة تحتوى على  $v$  مرفوعة الى عدد زوجي . وكما في الحالة السابقة يمكن تكامل المعادلة التفاضلية للحركة لتعطي  $t$  كدالة للسرعة  $v$  .

$$t = \int \frac{m dv}{-mg - cv^2} = -\tau \tan^{-1} \frac{v}{v_t} + t_0 \quad (\text{للمصعد})$$

$$t = \int \frac{m dv}{-mg + cv^2} = -\tau \tan^{-1} \frac{v}{v_t} + t'_0 \quad (\text{للسقوط})$$

حيث

$$\sqrt{\frac{m}{cg}} = \mathcal{T} \quad (\text{يمثل الزمن النهي})$$

و

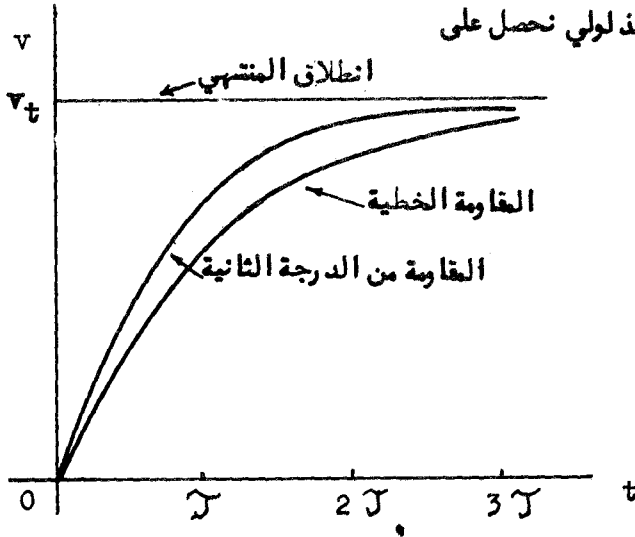
$$\sqrt{\frac{mG}{c}} = v_t \quad (\text{يمثل انطلاق المنتهي})$$

وعند الحل للسرعة  $v$ 

$$v = v_t \tan \frac{t_0 - t}{\mathcal{T}} \quad (38-3) \quad (\text{للمصعود})$$

$$v = -v_t \tanh \frac{t - t'_0}{\mathcal{T}} \quad (39-3) \quad (\text{للسقوط})$$

إذا اطلق الجسم من السكون في الزمن  $t = 0$  عندئذ يكون  $t'_0 = 0$  ومن تعريف الظل الهذلولي نحصل على



الشكل (3-3) الخطوط البيانية لتغيير الانطلاق مع زمن جسم ساقط تحت تأثير مقاومة الهواء الخطية ومن الدرجة الثانية ..

$$v = -v_t \tanh \frac{t}{T} = -v_t \left( \frac{e^{t/T} - e^{-t/T}}{e^{t/T} + e^{-t/T}} \right) \quad (٤٠ - ٣)$$

مرة ثانية نرى بان انطلاق المنتهي يوصل اليه عمليا بعد مرور بضعة ازمان  
نوعية فمثلا عندما يكون  $t = 5T$  يكون الانطلاق  $v_t \cdot 0.99991$  الشكل  
(٣-٣) يبين تغيير الانطلاق مع زمن السقوط لقانوني المقاومة الخطية و من  
الدرجة الثانية .

من المفيد ملاحظة ان الزمن  $T$  يساوي  $v_p/g$  في الحالتين الخطية ومن  
الدرجة الثانية . فمثلا - اذا كان انطلاق المنتهي لمظلي يساوي ١٢ متر في  
الثانية فالزمن النهي يساوي ١٢ متر في الثانية \ ١٨ متر في (الثانية) <sup>٢</sup> ويساوي  
 $\frac{1}{8}$  ثانية .

ويمكن تكامل العلاقات (٣٨-٣) و (٣٩-٣) لتعطي علاقات صريحة  
للموضع  $x$  كدالة للزمن  $t$  .

(١١-٣) تغيير الجاذبية مع الارتفاع

Variation of Gravity with Height

لا تكون قوة جذب الارض فوق سطحها ثابتة بل متغيرة وفقاً لقانون  
التربيع العكسي للمسافة (قانون نيوتن للجاذبية) <sup>٣</sup> . اذن قوة جذب الارض  
على جسم كتلته  $m$  هي :

$$F = - \frac{GMm}{r^2} \quad (٤١ - ٣)$$

(٤) سندرس قانون نيوتن للجاذبية بصورة مفصلة في الفصل السادس .



حيث  $G$  يمثل ثابت الجاذبية و  $M$  كتلة الارض و  $r$  المسافة بين مركز  
الكرة الارضية والجسم . اذا اهلنا مقاومة الهواء تكون المعادلات التفاضلية  
للحركة على النحو التالي

$$m\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2}$$

وعند كتابة  $\ddot{r} = \dot{r} \frac{dr}{dt}$  نستطيع ان نكامل كما يلي

$$m \int \dot{r} dr = -GMm \int \frac{dr}{r^2}$$

$$\frac{1}{2}mr^2 - \frac{GMm}{r} = E \quad (٤٢-٣)$$

والتي فيها  $E$  هو ثابت التكامل . وهذه بالضبط معادلة الطاقة .  
مجموع الطاقة الحركية ( الحد الاول ) والطاقة الكامنة  $(-\frac{GMm}{r})$  يبقى ثابتا  
اتناء حركة الجسم الساقط .  
لنطبق المعادلة المذكورة اعلاه على حالة قذيفة رميت الى الاعلى من سطح  
الارض بانطلاق ابتدائي مقداره  $v_0$  فالثابت  $E$  اذن يكون

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = E$$

حيث  $r_0$  يمثل نصف قطر الكرة الارضية . والانطلاق على اي ارتفاع  $h$  عندئذ  
يكون

$$v^2 = v_0^2 + 2GM \left( \frac{1}{r_0+h} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (٤٣-٣)$$

والان قوة جذب الارض عند سطحها هي

$$-\frac{GMm}{r_0^2} = -mg$$

والتجهيل الارضي على السطح اذن يكون

$$g = \frac{GM}{r_0^2}$$

لذلك يمكن كتابة علاقة الانطلاق على النحو التالي

$$v^2 = v_0^2 + 2g \left( \frac{r_e^2}{r_e + x} - r_e \right)$$

$$= v_0^2 - 2gx \left( 1 + \frac{x}{r_e} \right)^{-1} \quad (٤٤-٣)$$

وتختصر المعادلة اعلاه الى المعادلة المألوفة لمجال الجاذبية المنتظم .

$$v^2 = v_0^2 - 2gx$$

اذا كانت  $x$  صغيرة جدا بالمقارنة مع  $r_e$  بحيث يمكن اهمال الحد  $\frac{x}{r_e}$  بالنسبة الى الواحد

نحصل على نقطة رجوع حركة القذيفة ، اى اعظم ارتفاع تبينه وذلك بوضع  $v=0$  وحل المعادلة للموضع  $x$  ، فالنتيجة تكون

$$x_{\max} = h = \frac{v_0^2}{2g} \left( 1 - \frac{v_0^2}{2gr_e} \right)^{-1} \quad (٤٥-٣)$$

مرة اخرى نحصل على العلاقة الاعتيادية

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

اذا امكن اهمال الحد الثاني

اخيرا نطبق العلاقة الدقيقة (٤٥-٣) لايجاد قيمة  $v_0$  التي تعطي  $h$  قيمة لا نهائية . هذه تسمى بانطلاق الافلات escape speed ومن الواضح يمكن ايجاد قيمتها بوضع الكمية داخل الاقواس مساوية للصفر - النتيجة هي :

$$v_e = (2gr_e)^{\frac{1}{2}} \quad \text{هذه تعطي}$$

لقيمة انطلاق الافلات العددية من سطح الارض

$$v_e \approx 11 \text{ km/sec.}$$

ان معدل سرعة جزيئة الهواء ( $N_2, O_2$ ) في جو الكرة الارضية يساوى حوالي  $500 \text{ م/ثا}$  (٤) الذى يصغر انطلاق الافلات بكثير ولذلك تحفظ الارض بجوها عكس ذلك ، القمر ، الخالي من الجو لان انطلاق الافلات على سطحه اصغر منه على سطح الارض بسبب صغر كتلته ، ولهذا السبب اختفى اخيرا الاكسجين والنروجين من على سطحه ، ومع ذلك فان جو الارض هو بدوره ايضا لا يحتوى على كمية ذات اهمية تذكر من الهيدروجين بالرغم من كثرته في الكون ككل . لقد ترك الهيدروجين جو الارض منذ زمن بعيد لان الانطلاق الجزيئي من الكبر ( بسبب صغر كتلة جزيئة الهيدروجين ) بحيث ان هناك عددا كبيرا من جزيئات الهيدروجين انطلقها في اية لحظة يفوق انطلاق افلات الارض .

### ١٢-٣) القوة المعيدة الخطية - الحركة التوافقية

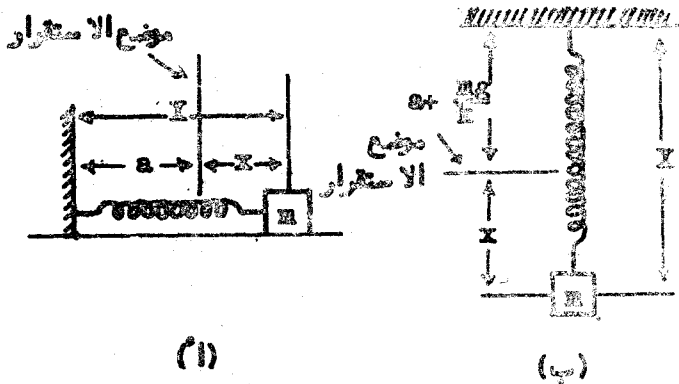
Linear Restoring Force. Harmonic Motion

واحدة من اهم حالات الحركة على خط مستقيم من الناحية العملية والنظرية هي تلك الحركة التي تحدثها قوة معيدة خطية Linear Restoring Force هذه القوة يتناسب مقدارها مع ازاحة الجسم من موضع الاستقرار واتجاهها يكون دائما مضادا لاتجاه الازاحة . قوة كهذه يهتبطها بترمرن او نابض يخضعان لقانون هوك

$$F = -k(X - a) = -kx \quad (٤٦-٣)$$

(٤) وفقا للنظرية الحركية Kinetic Theory ان معدل انطلاق جزيئة الغاز يساوى  $(3kT/m)^{\frac{1}{2}}$  حيث  $k$  يمثل ثابت بولتزمان ويساوى  $1.38 \times 10^{-16}$  ارك لكل درجة ، و  $T$  درجة الحرارة المطلقة و  $m$  كتلة الجزيئة .

حيث  $X$  يمثل الطول الكلي و  $a$  طول النابض عندما يكون غير ممتد (الطول  
 مساوي صفر) • يمثل التعبير  $X-a$  ازاحة النابض من موضع الاستقرار  
 ويسمى ثابت التناسب  $k$  بالصلابة *Stiffness*.  
 نفرض ان جسما كتلته  $m$  قد ربط بالنابض كما هو مبين في الشكل  
 (٤٤-٢)



المثل (٤-٣) تمثيل التذبذب التوافقي العظمي بواسطة  
 جسم كتلته  $m$  ونابض (أ) الحركة الاقمية (ب) الحركة  
 المتناظرة

• ناتجة الحركة على الجسم تعطي من المعادلة (٤٦-٣)  
 نفرض ان نفس النابض والجسم طنا شاقوليا كما هو مبين في الشكل  
 (كتاب) ناتجة الكلية التي تؤثر على الجسم الان هي :

$$F = -k(X - a) + mg \quad (٤٧-٣)$$

حيث الاتجاه الموجب نحو الاسفل • والان لنفحص  $x$  في الحالة الاخيرة  
 بالتقسيم لموضع الاستقرار الجديد  $x = a - mg/k$   
 هذا يعطي  $F = -kx$  مرة ثانية وهكذا المعادلة التفاضلية للحركة

في أي من الحالتين تكون  
أو

$$-kx = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

( ٤٨-٣ )

تصادفنا المعادلة التفاضلية للحركة المذكورة اعلاه في مسائل فيزيائية كثيرة

متنوعة وكثيرة . في المثال الخاص الذي نستخدمه هنا ، الثابتان  $k$  و  $m$  يمثلان كتلة الجسم و مرونة النابض على التوالي و الازاحة  $x$  هي مسافة . وكما سنرى فيما بعد ان نفس هذه المعادلة ستعمل في حالة البندول ولكن الازاحة تكون زاوية و الثوابت هي التمجيل الارضي و طول البندول . كما ان هذه المعادلة تطبق في بعض الدوائر الكهربائية الخاصة ، ولكن الثوابت تمثل بـ Parameters (Parameters) الدائرة ، و الكمية  $x$  تمثل التيار الكهربائي او الفولتية . يمكن حل المعادلة ( ٤٨-٣ ) بطرق عديدة . وهناك صنف مهم من

المعادلات التفاضلية يعرف بالمعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة (٥) . عدد كبير من المعادلات التفاضلية في الفيزياء ان لم تكن منظومة هي معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الثانية . و سنتستخدم طريقة التجربة لحل المعادلة ( ٤٨-٣ ) والتي ستكون فيها الدالة  $Ae^{qt}$  هي تجربة الحيل و  $q$  هو ثابت علينا ايجاد مقداره . فاذا كان  $x=Ae^{qt}$  هو عملاً الحيل ، عندئذ يجب ان نحصل لجميع قيم  $t$  على

$$m \frac{d^2}{dt^2} (Ae^{qt}) + k(Ae^{qt}) = 0$$

وعند اختصار العوامل المشتركة نحصل على المعادلة التالية (٦)

(٥) معادلة الرتبة النونية العامة لهذا النوع هي  $c_n \frac{d^n x}{dt^n} + c_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + c_1 \frac{dx}{dt} + c_0 = b(t)$

وتسمى هذه المعادلة متجانسة homogeneous اذا كان  $b = 0$

(٦) هذه المعادلة تسمى بالمعادلة المتجانسة

$$mq^2 + k = 0$$

اى ان

$$q = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \omega_0$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad , \quad i = \sqrt{-1} \quad \text{حيث}$$

ولما كانت حلول المعادلة التفاضلية الخطية تجمع (اى ، اذا كان  $f_2, f_1$  حلين ، عندئذ مجموعهما  $f_1 + f_2$  يكون حلاً ايضاً ) اذن الحل العام للمعادلة ( ٢٨ - ٣ ) هو

$$x = A_+ e^{i \omega_0 t} + A_- e^{-i \omega_0 t} \quad (٤٩-٣)$$

ولما كان  $e^{iu} = \cos u + i \sin u$  ، فاشكال الاخرى للحلول هي

$$x = a \sin \omega_0 t + b \cos \omega_0 t \quad (٥٠-٣)$$

$$x = A \cos (\omega_0 t + \theta_0) \quad \text{او} \quad (٥١-٣)$$

وبحسب قيم ثابت التكامل في الحلول المذكورة تما من الشروط الابتدائية وبالتعويض المباشر يمكن التحقق من ان جميع التعابير الجبرية الثلاثة هي حل للمعادلة ( ٤٨-٣ ) .

الحركة هي تذبذب منحني الجيب للازاحة  $x$  ، ولهذا السبب تسمى غالباً المعادلة ( ٤٨-٣ ) بالمعادلة التفاضلية للتذبذب التوافقي او المتذبذب الخطي .

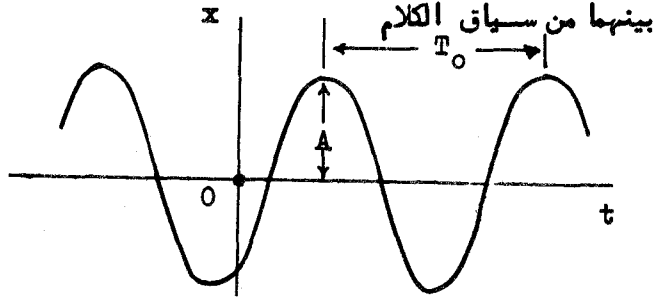
يسمى المعامل  $\omega_0$  بالتردد الزاوي angular frequency والقيمة العظمى للازاحة  $x$  بسعة التذبذب ، وهو الثابت  $A$  في المعادلة ( ٥١-٣ ) ، او  $\frac{1}{2} (a^2 + b^2)$  في المعادلة ( ٥٠-٣ ) وزمن الذبذبة "Period"  $T_0$  هو الزمن اللازم لدورة كاملة ، كما هو مبين في الشكل ( ٥-٣ ) ، اى ان زمن الذبذبة هو الزمن الذى يزداد فيه  $\omega t$  بمقدار  $2\pi$  اى

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (٥٣-٢)$$

ويعرف التردد الخطي  $f_0$  للمتذبذب بعدد الدورات في وحدة الزمن  
اذن

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{و}$$

تستعمل كلمة "التردد" عادة للتردد الزاوي او الخطي ويمكن التمييز



الشكل (٥-٣) العلاقة بين الازاحة والزمن  
للمتذبذب التوافقي

### مثال

تمطط نابض خفيف بقدار  $b$  عندما يعلق به قالب كتلته  $m$  . فاذا  
سحب القالب الى الاسفل مسافة  $b$  من موضع استقراره وترك في  
الزمن  $t=0$  جد محصلة الحركة للزمن  $t$  .

اولا - لايجاد مرونة النابض ، نلاحظ من شرط التوازن السكوني ان

$$F = -kb = -mg$$

اي

$$k = \frac{mg}{b}$$

ونجمتين بعيدتين كقطا مرجمية • وقد اتفق بصورة عامة ان تكون المحاور النيوتونية الاخيرة في مفهوم الميكانيك النيوتوني هي التي تعتمد على معدل خلفية جميع المادة الموجودة في الكون •

### ٣-٢) الكتلة والقوة • قانوني نيوتن الثاني والثالث

Mass and Force. Newton's Second and Third Laws

من الحقائق المألوفة لدينا جميعا اننا عند رفع حجر كبير لا نعاني صعوبة كصعوبة تحريكه ( او ايقانه ) بينما لا نجد صعوبة بهذا المستوى في التعامل مع قطعة خشبية صغيرة فنقول ان القصور الذاتي للحجر اكبر من الخشب والقياس الكمي للقصور الذاتي يسمى بالكتلة • لنفرض ان عندنا جسمن B, A فكيف نحسب مقياس القصور الذاتي لاحدهما بالنسبة الى الاخر ؟ هناك تجارب عديدة يمكن استبطاها للاجابة على هذا السؤال منها محاولة جعل الجسيمين يوتر احدهما على الاخر كريطهما بلولب حلزوني مثلا ، عندئذ نجد من التجارب الدقيقة ان تعجيلي الجسيمين يكونان دائما متعاكسين بالاتجاه والنسبة بينهما ثابتة ( على فرض ان التعجيل معطي في المحاور النيوتونية واخذ بنظر الاعتبار التأثير المتبادل للجسيمين A و B فقط ) ويمكننا التعبير عن هذه الحقيقة المهمة جدا والاساسية بالمعادلة التالية :

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = - \frac{d\vec{v}_B}{dt} \mu_{BA} \quad (1-3)$$

الثابت  $\mu_{BA}$  يمثل في الحقيقة معيار القصور الذاتي النسبي للجسم B بالنسبة الى A من المعادلة (١-٣) ينتج ان  $\mu_{BA} = 1/\mu_{AB}$  اذ ان قد نعبّر عن  $\mu_{BA}$  بالنسبة  $\mu_{BA} = \frac{m_B}{m_A}$  حيث استعمل جسم ما كعيار لوحد القصور الذاتي • الان النسبة  $m_B / m_A$  يجب ان تكون مستقلة عن اختيار الوحدة • هذه الحالة ستكون نفسها اذا كان لاي جسم ثالث C

$$\frac{\mu_{BC}}{\mu_{AC}} = \mu_{BA}$$



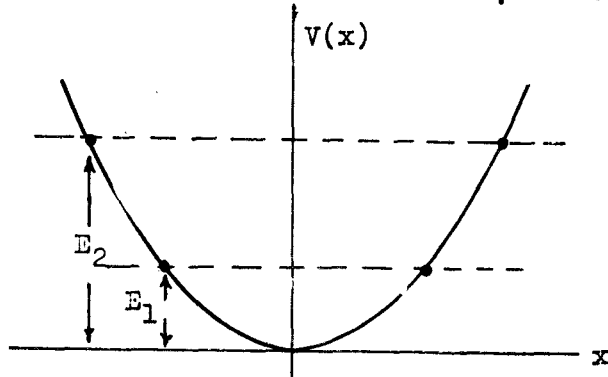
وهذه يمكن تكاملها للحصول على  $t$  كدالة للازاحة  $x$  كالآتي :-

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{(2E/m) - (k/m)x^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \cos^{-1} \left( \frac{x}{A} \right) + C$$

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

حيث

$C$  هو ثابت التكامل . عند حل المعادلة المتكاملة للموضع  $x$  كدالة للزمن  $t$  نجد بان النتيجة التي سوف نحصل عليها هي نفس العلاقة التي حصلنا عليها في البند السابق ، سوى اننا الان نحصل على قيمة واضحة للسعة  $A$  . ويمكننا ايضا ايجاد السعة مباشرة من معادلة الطاقة ( ٣ - ٥٥ ) وذلك بملاحظة ان قيمة  $x$  يجب ان تقع بين  $-\sqrt{2E/k}$  و  $\sqrt{2E/k}$  لكي تكون حقيقتية . لقد وضحت هذه النتيجة في الشكل ( ٣ - ٦ ) الذي يبين دالة الطاقة الكامنة ونقاط الرجوع الحركية لقيم مختلفة من الطاقة الكلية  $E$  .



الشكل ( ٣ - ٦ ) مخطط دالة الطاقة الكامنة لتمذب توافقى . وقد وضحت نقاط الرجوع التي تعرف السعة لقيمتين من الطاقة الكلية .

نلاحظ من معادلة الطاقة ان القيمة العظمى ل  $\dot{x}$  تحدث عندما يكون  $x=0$  والتي سنسميها  $v_{max}$  وبذلك نحصل على

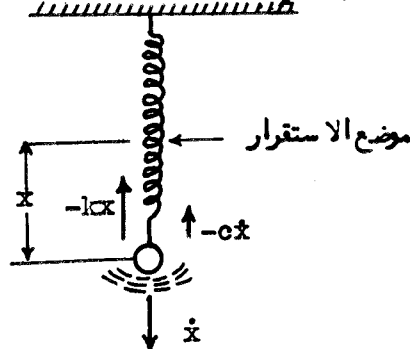
$$E = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

او

$$v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}} A = \omega_0 A \quad (٥٧-٣)$$

Damped Harmonic Motion الحركة التوافقية المتضائلة (١٤-٣)

التحليل السابق للمتذبذب التوافقي كان مثاليا الى حد ما لاننا اخفنا في اخذ قوى الاحتكاك بنظر الاعتبار . وهذه تتواجد دائما بمقدار ما ه في الاجهزة الميكانيكية . كما في الدوائر الكهربائية التي تحتوى دائما على كمية معينة من المقاومة . وعلى سبيل المثال ه لنعتبر حركة جسم معلق بنابض مرونته k . وسنفرض وجود قوة معيقة لجزه تتغير خطيا مع الانطلاق ( كما في البند ٣ - ٨ ) ه اى ه كالتي تسببها مقاومة الهواء وقد وضحت هذه القوى في الشكل ( ٧ - ٣ ) .



الشكل ( ٧ - ٣ ) المتذبذب التوافقي المتضائل

اذا كانت  $x$  تمثل الازاحة موضع الاستقرار ه فان القوة المعيقة التي يؤثر بها النابض هي  $-kx$  والقوة المعيقة هي  $-c\dot{x}$  حيث ه يمثل ثابت التناسب . اذن تصبح المعادلة التفاضلية للحركة

$$F = m\ddot{x}$$

على النحو التالي :

$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

أو

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

(٥٨ - ٢)

مرة أخرى كالسابق سنستعمل الدالة الأسية  $Ae^{qt}$  كحل تجريبي للمعادلة وهي حل إذا كان

$$m \frac{d^2}{dt^2} (Ae^{qt}) + c \frac{d}{dt} (Ae^{qt}) + k(Ae^{qt}) = 0$$

لجميع قيم  $t$  ، وهذه ستكون الحالة إذا استوفت  $q$  المعادلة المساعدة

التالية :

$$mq^2 + cq + k = 0$$

والتي نحصل على جذورها بطريقة الدستور لمعادلات الدرجة الثانية المعروفة

$$q = \frac{-c \pm (c^2 - 4mk)^{1/2}}{2m} \quad (٥٩ - ٢)$$

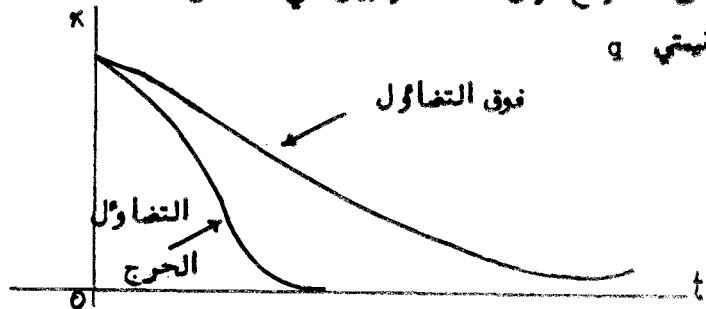
في الحالات التي تكون فيها  $c^2 > 4mk$  (نوع التضاؤل over damping)

و  $c^2 = 4mk$  (حالة التضاؤل الحرجة critical damping) تكون  $q$

حقيقية وسالبة ، لذلك تكون الحركة غيرذبذبية وتهدأ الازاحة  $x$  أسياً

إلى الصفر مع الزمن ، كما هو مبين في الشكل (٨-٣) ، لنسبي  $-\gamma_1$  و  $-\gamma_2$

تحتي  $q$



الشكل (٨-٣)

مخططا العلاقة بين الازاحة والزمن للحالتين نوع التضاؤل

والتضاؤل الحرج لمتذبذب توافقى

البينة بالمعادلة (٥٩-٣) لحالة نوسق التضاؤل • عندئذ يمكن كتابة  
الحل العام على النحو التالي :

$$x = A_1 e^{-\sqrt{1}t} + A_2 e^{-\sqrt{2}t} \quad (٦٠-٣)$$

في حالة التضاؤل الحرج تكون جذور المعادلة متساوية والحل العام يكون كما يلي :

$$x = e^{-\sqrt{t}} (A_1 + A_2 t) \quad (٦١-٣)$$

حيث  $\sqrt{c} = c/2m$  ويمكن تحقيق الحل المذكور اعلاه بالتعويض المباشر •  
اذا كان ثابت المقاومة  $c$  صغيرا بحيث يكون  $c^2 < 4mk$  نحصل على الحالة  
الثالثة (حالة دون التضاؤل Underdamping) . وفي هذه الحالة  
تكون  $q$  خيالية • وجذرا المعادلة المساعدة يكونان عددين مركبين متوافقين  
و تعطي الحركة بالحل العام التالي :

$$x = A_+ e^{(-\sqrt{c} + i\omega_1)t} + A_- e^{(-\sqrt{c} - i\omega_1)t} \quad (٦٢-٣)$$

حيث

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \sqrt{c}^2} \quad (٦٣-٣)$$

$$e^{iu} = \cos u + i \sin u \quad \text{هد استعمال العلاقة}$$

نرى ان الحل يمكن كتابته على النحو التالي :

$$x = e^{-\sqrt{c}t} (A_+ e^{i\omega_1 t} + A_- e^{-i\omega_1 t})$$

$$= e^{-\sqrt{c}t} [(iA_+ - iA_-) \sin \omega_1 t + (A_+ + A_-) \cos \omega_1 t] \quad \text{او}$$

$$x = e^{-\sqrt{c}t} (a \sin \omega_1 t + b \cos \omega_1 t) \quad (٦٤-٣)$$

$$b = A_+ + A_- , \quad a = i(A_+ - A_-) \quad \text{حيث}$$

يمكننا كذلك كتابة الحل على النحو التالي

$$x = A e^{-\sqrt{c}t} \cos (\omega_1 t + \theta_0) \quad (٦٥-٣)$$

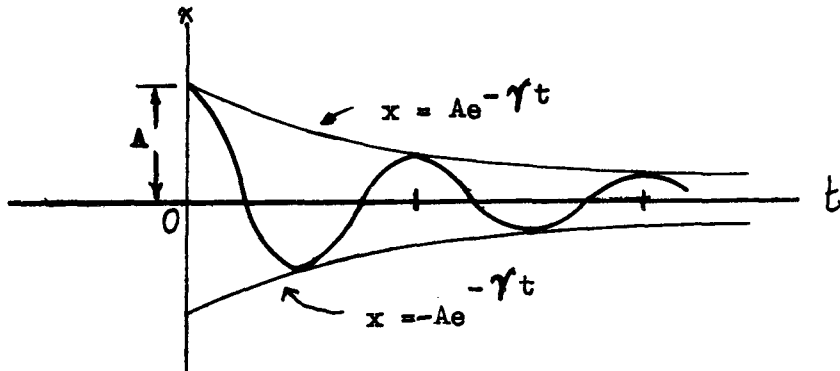
$$\theta_0 = -\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right), \quad A = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{حيث}$$

تبين الصيغة الحقيقية للحل ان الحركة ذبذبية وان المسعة  $Ae^{-\gamma t}$  تتضاءل اسيا مع الزمن . اصف الى ذلك اننا نلاحظ ان التردد الزاوي للتذبذب  $\omega_1$  هو اقل من المتذبذب الحر  $\omega_0$  ويسمى التردد  $\omega_1$  بالتردد الطبيعي . في حالة التضاؤل الضعيف ، اذا كانت  $\gamma$  صغيرة جدا بالمقارنة مع  $\omega_0$  نحصل على العلاقة المقررة التالية :

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0} \quad (٦٦-٣)$$

والتي تنتج من فك الطرف الايمن للمعادلة (٦٣-٣) باستخدام نظرية ذات الحدين واستبقاء الحدين الاولين فقط .

يبين الشكل (٩-٣) رسم لمنحني الحركة . ونستج من المعادلة (٦٥-٣) ان المنحنيين  $x = Ae^{-\gamma t}$  ,  $x = -Ae^{-\gamma t}$  يكونان غلافاً لمنحني الحركة ، لان عامل الجيب تام يأخذ القيم بين + او - ١ ، بضمها + او - ١ والتي يمس فيها منحنى الحركة ، الغلاف ، لذلك تتصل نقاط التماس بفترة زمنية مقدارها نصف مدة الذبذبة ، او  $\pi/\omega_1$  ، ولكن هذه النقاط هي ليست تماما القيم العظمى والصغرى للازاحة  $x$  . وقد ترك للطالب ايجاد



الشكل (٩-٣) منحني العلاقة بين الازاحة والزمن  
لمتذبذب توافقي في حالة التضاؤل

نوم  $t$  التي تأخذ فيها الازاحة قيمها العظمى والصغرى .

اعتبارات الطاقة Energy Consideration

الطاقة الكلية لتذبذب توافقى متضائل تتساوى في أي لحظة  
لحظة مجموع الطاقة الحركية  $\frac{1}{2} m\dot{x}^2$  والطاقة الكامنة  
 $\frac{1}{2} kx^2$  أي

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

وقد رأينا ان هذا المجموع ثابت للتذبذب غير المتضائل .  
لنفاضل المعادلة المذكورة اعلاه بالنسبة للزمن  $t$  ليجاد معدل التغيير  
الزمني ل  $E$  . أي

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = (m\ddot{x} + kx) \dot{x}$$

ولكن من المعادلة التفاضلية للحركة ، أي المعادلة ( ٣ - ٥٨ ) والتي هي

$$m\ddot{x} + kx = -c\dot{x} \quad \text{نحمل على}$$

$$\frac{dE}{dt} = -c\dot{x}^2 \quad (٣ - ٦٧)$$

وهذه دائما سالبة وتثل معدل تبدد الطاقة الى حرارة بالاحتكاك .

### امثلة

١- علق جسم كتلته  $m$  بنابض مرونته  $k$  . وكان التضاؤل بحيث  $\omega = \omega_0/4$   
اوجد التردد الطبيعي .  
من المعادلة ( ٣ - ٦٣ )

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c^2}{16}} = \omega_0 \sqrt{\frac{15}{16}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\frac{15}{16}}$$

٢- في المثال المذكور اعلاه اوجد النسبة بين سمتي تذبذبتين متعاقبتين .

من النظرية السابقة • تكون النسبة كالآتي :

$$\frac{Ae^{-\sqrt{T_1}}}{A} = e^{-\sqrt{T_1}}$$

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \text{حيث ان}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} \sqrt{\frac{16}{15}} = \frac{2\pi}{4\sqrt{15}} \sqrt{\frac{16}{15}} \quad \text{اذن في مثالنا}$$

$$\sqrt{T_1} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{16}{15}} = 1.56 \quad \text{او}$$

اذن النسبة بين ذبذبتين متعاقبتين هي :

$$e^{-1.56} = 0.21.$$

٣ - ١٥) الحركة التوافقية الاضطرارية - الرنين

Forced Harmonic Motion. Resonance

سندرس في هذا البند حركة المتذبذب التوافقي المتضائل المدفوع بقوة خارجية توافقية • اى قوة تتغير بدالة جييبية sinusoidally مع الزمن • افرض ان لهذه القوة المسلطة  $F_{ext}$  ترددا زاويا  $\omega$  وسعة معينة  $F_0$  وذلك يمكن تشغيلها

$$F_{ext} = F_0 \cos(\omega t + \theta)$$

ومن الافضل استخدام الصيغة الاسية

$$F_{ext} = F_0 e^{i(\omega t + \theta)}$$

بدلا من الجيبية (٧) . عندئذ تكون القوة الكلية مساوية لجميع القوى الثلاث التالية - القوة المميدة للمرونة  $-kx$  ، قوة التضاؤل للزوجنة  $-c\dot{x}$  ، القوة الخارجية  $F_{ext}$  . لذلك تصبح المعادلة التفاضلية

$$-kx - c\dot{x} + F_{ext} = m\ddot{x}$$

او

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{ext} = F_0 e^{i(\omega t + \theta)} \quad (٦٨ - ٣)$$

يتكون حل المعادلة التفاضلية الخطية المذكورة اعلاه من مجموع الجزئين التاليين الاول من حل المعادلة المتجانسة  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$  والسدى سبق وان وجدناه في البند السابق والثاني اى حل خاص للمعادلة . كما رأينا ، ان حل المعادلة المتجانسة يمثل تدبذبا يتفائل في اخر الامر الى الصفر والذي يسمى بالحد العاب *Transient term* . ان ما يهنا هو الحل الذى يعتمد على طبيعة القوة المسلطة . ولما كانت سعة هذه القوة ثابتة وتتغير دالتها جيبييا مع الزمن ، فمن المعقول توقع امكانية ايجاد حل تكون فيه الازاحة  $x$  دالة جيبيية متغيرة مع الزمن ايضا . لذن ، لشرط حالة الاستقرار ، سنجرب حلا من النوع التالي

$$x = A e^{i(\omega t + \theta')}$$

(٧) يمكن كتابة الصيغة الاسية على النحو التالي

$$F_{ext} = F_0 \cos(\omega t + \theta) + i F_0 \sin(\omega t + \theta)$$

والمعادلة التفاضلية الناتجة تكون مستوفية اذا تماوت الاجزاء الحقيقية والخيالية لجانبي المعادلة .



إذا كان هذا " الحدس " صحيحا فيجب ان تصح المعادلة

$$m \frac{d^2}{dt^2} [Ae^{i(\omega t + \theta)}] + c \frac{d}{dt} [Ae^{i(\omega t + \theta)}] + kAe^{i(\omega t + \theta)}$$

$$= F_0 e^{i(\omega t + \theta)}$$

لكل قيم  $t$ . وهذه تختصر بعد اجراء العمليات الرياضية واختصار العبار المشتركة الى

$$-m \omega^2 A + i \omega c A + kA = F_0 e^{i(\theta - \theta')} = F_0 [\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')]$$

وعد مساواة الاجزاء الحقيقية والخيالية لطرفي المعادلة نحصل على :

$$A(k - m \omega^2) = F_0 \cos \vartheta \quad (٦٩ - ٣)$$

$$c \omega A = F_0 \sin \vartheta \quad (٧٠ - ٣)$$

حيث فرق الطور او زاوية الطور  $\theta - \theta'$  مثلت بالرمز  $\vartheta$  ويقسم المعادلة الثانية على الاولى واستخدام المتطابقة

$$\sin \vartheta / \cos \vartheta = \tan \vartheta$$

نحصل على

$$\tan \vartheta = \frac{c \omega}{k - m \omega^2} \quad (٧١ - ٣)$$

وبترتيب طرفي المعادلتين (٦٩ - ٣) و (٧٠ - ٣) وجمعها ثم استخدام

$$\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1 \quad \text{المتطابقة}$$

$$A^2(k - m \omega^2)^2 + c^2 \omega^2 A^2 = F_0^2$$

وبحلها لسعة حالة الاستقرار التذبذبية  $A$  نحصل على

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \quad (٧٢ - ٣)$$

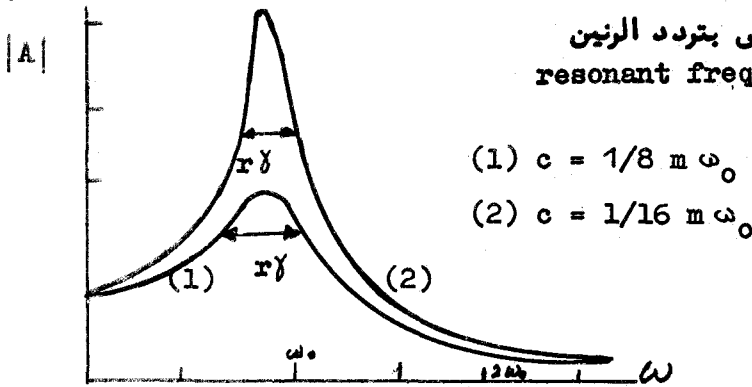
وبدلالة الاختصار  $\gamma = c/2m$ ,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  نستطيع ان نكتب

$$\tan \phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (٧٣ - ٣)$$

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad (٧٤ - ٣)$$

المعادلة المذكورة اعلا والتي تبين العلاقة بين السعة A والتردد الدافئع الموتر، impressed driving frequency هي من العلاقات الاساسية البنية .  
يرينا الضحني في الشكل (٣ - ١٠) ان A لها قيمة عظمى لتردد محسوب  $\omega_r$

والذي يسمى بتردد الرنين  
resonant frequency



الشكل (٣ - ١٠) تغيير ضحني السعة مع التردد الدافئع

لايجاد تردد الرنين ، نحسب  $dA/d\omega$  من المعادلة (٣ - ٧٤) ونضع النتيجة مساوية للصفر . وعند حل المعادلة الناتجة ل  $\omega$  نجد ان تردد الرنين يكون :

$$\omega = \omega_r = (\omega_0^2 - 2\gamma^2)^{1/2} \quad (٧٥ - ٣)$$

في حالة التضاؤل الضعيف ، اي عندما يكون ثابت التضاؤل c صغيرا جدا  
 $c \ll 2\sqrt{mk}$  او ما يكافئ ذلك اذا كان  $\gamma \ll \omega_0$  نرى ان تردد

الرنين  $\omega \neq \omega_0$  يكون تقريبا مساويا لتردد التذبذب حر مستمر دون تضارؤل  $\epsilon$   
 فاذا استخدمنا نظرية ذى الحدين لفك الطرف الايمن من المعادلة (٣-٧٥)  
 واحتفظنا بالحدين الاول والثاني فقط نحصل على :

$$\omega_r \simeq \omega_0 - \frac{\sqrt{\epsilon^2}}{\omega_0} \quad (٣-٧٦)$$

ويجب مقارنة المعادلتين (٣-٧٥) و (٣-٧٦) مع المعادلتين (٣-٣٣)  
 و (٣-٦٦) اللتين تعطيان تردد التذبذب  $\omega_1$  للتذبذب حر مستمر بوجـود  
 التضارؤل  $\epsilon$ . لنفرض ان  $\epsilon$  تمثل الكمية  $\omega_0^2/\omega^2$   $\epsilon$  هدفذ يمكننا كتابة :

$$\omega_1 \simeq \omega_0 - \frac{1}{2} \epsilon \quad (٣-٧٧)$$

لقيمة التردد الطبيعي التقريبية كذلك

$$\omega_r \simeq \omega_0 - \epsilon \quad (٣-٧٨)$$

لقيمة تردد الرنين التقريبية  $\epsilon$ .

سعة حالة الاستقرار في تردد الرنين  $\epsilon$  يمكن الحصول عليه  $\epsilon$  من المعادلات  
 (٣-٧٤) و (٣-٧٥) والذي سنسميه  $A_{max}$  والنتيجة هي :

$$A_{max} = \frac{F_0/m}{2\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \simeq \frac{F_0}{c(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (٣-٧٩)$$

ويمكننا اجمال  $\omega^2$  في حالة التضارؤل الضعيف وكتابة

$$A_{max} \simeq \frac{F_0}{2\sqrt{m}\omega_0} = \frac{F_0}{c\omega_0} \quad (٣-٨٠)$$

اذن تصبح سعة التذبذب التآري في شرط الرنين كبيرة جدا اذا كان ثابت  
 التضارؤل  $c$  صغيرا جدا وبالعكس  $\epsilon$  قد يكون من المرفوب فيه او لا يكون - الحصول  
 على سعة عالية للرنين في الاجهزة الميكانيكية  $\epsilon$  فمثلا يستعمل مسند اونساي  
 في المحرك الكهربائي لتقليل انتقال الاهتزازات وتختار مرونة هذه المساند

بحيث تأمن اعتماد محصلة تردد الرنين عن تردد المحرك المستمر .  
 في اغلب الاحيان ، تكون حدة قمة الرنين مهمة . لنفرض حالة التضائل  
 الضعيف  $\omega \ll \omega_0$  . هدفذ يكون في امكاننا اجراء التعويضات التالية في علاقة  
 سعة حالة الاستقرار ، اي في المعادلة ( ٢٤ - ٣ )

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \simeq 2\omega_0(\omega_0 - \omega), \sqrt{\omega_0} \simeq \sqrt{\omega_0}$$

هذا وعلاقة  $A_{max}$  يكون باستطاعتنا كتابة معادلة السعة بالصيغة التالية :

$$A = \frac{A_{max} \sqrt{\gamma}}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}} \quad (٨١ - ٣)$$

هدفذ تربنا المعادلة المذكورة اعلاه عندما تكون  $|\omega_0 - \omega| = \gamma$  او ما يكافئ  
 ذلك ، اذا كانت

$$\omega = \omega_0 \pm \gamma$$

$$A^2 = \frac{1}{2} A_{max}^2 \quad \text{هدفذ}$$

وهذا يعني ان  $\gamma$  هي مقياس لعرض ضحني الرنين . لذلك  $2\gamma$  تمثل فرق  
 التردد بين النقطتين اللتين تهبط فيهما الطاقة بمقدار نصف طاقة الرنين ،  
 بسبب تناسب الطاقة مع  $A^2$  . كما هو واضح من الشكل ( ١٠ - ٣ )

هناك طريقة اخرى لتوضيح حدة قمة الرنين وذلك بدلالة الهرمستر  $Q$   
 الذي يسمى بمعامل النوعية Quality Factor للرنين وتعريفه هو

$$Q = \frac{\omega_F}{2\gamma} \quad (٨٢ - ٣)$$

$$Q \simeq \frac{\omega_0}{2\gamma} \quad \text{اوللتضائل الضعيف}$$

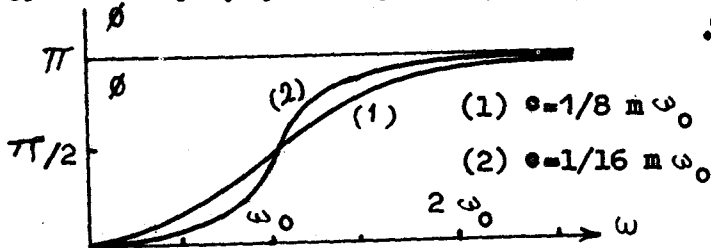
لذلك العرض  $\Delta\omega$  في منتصف نقطتي الطاقة تقريبا يساوي

$$\Delta\omega = 2\gamma \simeq \frac{\omega_0}{Q}$$

اولما كانت  $\omega = 2\pi f$  اذن

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0} \simeq \frac{1}{Q} \quad (٨٣ - ٣)$$

والتي تعطي العرض الجزئي لقمة الرنين .  
تستخدم متذبذبات بلورات الكوارتز المدفوعة كهربائياً للسيطرة على محطات  
ارسال المذياع . وتقدر  $Q$  لبلورات الكوارتز في هذه التطبيقات بحوالي  $10^4$  .  
هذه القيم العالية لـ  $Q$  تضمن بقاء تردد التذبذب تماماً في تردد الرنين .  
تعطي المعادلة ( ٣ - ٢٣ ) فرق الطور  $\phi$  بين القوة الدافعة المسطلة  
والاستجابة response وقد رسمت هذه المعادلة في الشكل ( ١١ - ٣ ) الذي  
يبين  $\phi$  كدالة لـ  $\omega$  . نرى ان فرق الطور يكون صغيراً عندما تكون  $\omega$  صغيرة بحيث  
تكون الاستجابة متوافقة الطور (In phase) مع القوة الدافعة . وقد ازدادت  
 $\phi$  الى  $\pi/2$  في تردد الرنين ولذلك تكون الاستجابة مخالفة الطور بـ  $90^\circ$  -  
للقوة الدافعة في الرنين . واخيراً تقترب قيمة  $\phi$  من  $\pi$  لقيم عالية جداً  
من  $\omega$  ، اذن خلاف الطور بين حركة المنظومة والقوة الدافعة يكون مساوياً  
الى  $180^\circ$  .



الشكل ( ٣ - ١١ ) منحنى العلاقة بين زاوية الطور والتردد الدافع

امثلة

١- احسب تردد الرنين و عامل النومية للمتذبذب المتضائل في المثال ( ١ )

$$\begin{aligned}\omega_r &= (\omega_0^2 - 2\sqrt{2})^{1/2} && \text{صفحة ( ١١ ) عدنا} \\ &= (\omega_0^2 - 2\omega_0^2/16)^{1/2} \\ &= \omega_0 \sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\frac{7}{8}}\end{aligned}$$

لتردد الرنين في المقياس الزاوي  $\omega$  و يعين عامل النومية كما يلي :

$$Q = \frac{\omega_r}{2\gamma} = \frac{\omega_0(7/8)^{1/2}}{2(\omega_0/4)} = 2\sqrt{7/8} = 1.87$$

٢- اذا كان التردد المسلط يساوي  $\omega_0/2$  للمتذبذب المذكور املاه

$$\begin{aligned}\text{جد زاوية الطور } \phi \\ \tan \phi = \frac{2(\omega_0/4)(\omega_0/2)}{\omega_0^2 - (\omega_0/2)^2} = \frac{1/2}{3/4} = 1/3 \text{ عدنا } \phi = \tan^{-1}(1/3) \\ \text{من المعادلة ( ٣ - ٢٣ ) عدنا } \phi = 18.5^\circ \\ \text{اذن}\end{aligned}$$

$$\phi = \tan^{-1}(1/3) = 18.5^\circ$$

٣- ١٦) الحركة تحت تأثير قوة دافعة توافقية غير جيبيية

### Motion under a Nonsinusoidal Driving Force

من الضروري استخدام طريقة اكثر تعقيدا من التي استخدمت في البند

السابق لاجل تعيين حركة متذبذب توافقي تحت تأثير قوة دافعة توافقية

ولكن غير جيبيية و من الملائم استخدام قاعدة التداخل

Principle of superposition لهذه الحالة

العامة و تتم هذه القاعدة ان امكن حل القوة السلطة  $F(t)$

على متذبذب الى المجمع

$$F(t) = \sum_n F_n(t)$$

بحيث ان كلا من المعادلات التفاضلية التالية

$$m\ddot{x}_n + c\dot{x}_n + kx_n = F_n(t)$$

تستوفيهما الدوال

$$x_n = x_n(t)$$

فدفع المعادلة التفاضلية

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) = \sum_n F_n(t) \quad (٨٤-٣)$$

تستوفيهما الدالة

$$x = \sum_n x_n(t) \quad (٨٥-٣)$$

ان صحة النظرية المذكورة اعلا تتبع مباشرة من كون المعادلات التفاضلية للحركة خطية .

خصوصا عندما تكون القوة الدافعة  $F(t)$  توافقية تردددها الزاوى  $\omega$  فان من الممكن تحليلها بسلسلة فوريير  $(\omega)$  . وفقا لهذه النظرية يمكننا تمثيل  $F(t)$  كمجموعة من حدود الجيب والجيب تمام ، او بطريقة اخرى يمكن ان تكتب كمجموعة اساسية مركبة ، اى

$$F(t) = \sum_n \dot{F}_n e^{in\omega t} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (٨٦-٣)$$

وتمطي المعامل من

$$F_n = \frac{\omega}{2\pi} \int F(t) e^{-in\omega t} dt \quad (٨٧-٣)$$

حيث غايات التكامل هي  $t = -\pi/\omega$  الى  $t = +\pi/\omega$  .

كما في البند السابق ، تمطي الحركة الحقيقية من مجموع جزئين ، اى الحد العاير الذى سوف نهمله وحل حالة - الاستقرار .

$$x(t) = A_0 + A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{i2\omega t} + \dots \quad (٨٨-٣)$$

(٨) انظرني اى كتاب عن طرق فوريير

الحد الاول  $A_0$  ثابت تعتمد قيمته على شكل  $F(t)$  • ويمساوى  
 صفر لقوة دافعة متناظرة • الحد الثاني يعطي استجابة المتذبذب  
 المذبذب في التردد الاساسي  $\omega$  • الحد الثالث يمثل الاستجابة للتوافق  
 الثاني  $2\omega$  للقوة المسلطة وهلم جرا •

يمكننا استخدام نظرية البند السابق لاييجاد السعة  $A_n$  بدلالة  
 المعامل  $F_n$  لذلك نحصل من المعادلة ( ٢ - ٧٤ ) على

$$A_n = \frac{F_n/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - n^2 \omega^2)^2 + 4 \gamma^2 n^2 \omega^2}} \quad ( ٢ - ٨٩ )$$

ما سبق نرى ان حالة الاستقرار النهائية للحركة تكون توافقية • والتوافق  
 الخاص  $n\omega$  الذي يكون الاقرب من تردد الرنين  $\omega_r$  له اعظم سعة • وبالاخص  
 اذا كان ثابت التضاؤل صغيراً جداً • و اذا حدث وان تطابق تردد الرنين مع احد  
 توافقيات القوة الدافعة بحيث لاى تيسر ل  $n$  نحصل على

$$\omega_r = n\omega$$

عندئذ ستسيطر السعة  $A_n$  في هذا التوافق بصورة كبيرة وعليه فان محصلة  
 الحركة للمتذبذب ربما تقترب كثيراً من الدالة الجيبية حتى لو سلطت قوة دافعة  
 غير جيبية •



### تمارين

(١-٣) جسيم كتلته  $m$  كان يبدأ في حالة السكون . اثرت عليه قوة ثابتة مقدارها  $F_0$  لفترة زمنية  $t_0$  . ثم وضعت هذه القوة نجاة الى  $2F_0$  وبقيت ثابتة لهذه القيمة . جد المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم في الزمن  $2t_0$  .

(٢-٣) جسيم كتلته  $m$  كان يبدأ في حالة السكون . سلطت عليه القوة  $F$  تزداد تربيعيا مع الزمن  $F=ct^2$  جد  $v$  و  $x$  كدوال للزمن  $t$  .

(٣-٣) جسيم كتلته  $m$  كان يبدأ في حالة السكون في الزمن  $t=0$  سلطت عليه قوة متزايدة خطيا  $F=ct$  لفترة زمنية مقدارها  $t_0$  بعدئذ تناقصت القوة خطيا مع الزمن وانخفضت الى الصفر في الزمن  $t=2t_0$  جد المسافة التي يقطعها الجسيم في هذا الزمن .

(٤-٣) جسيم كتلته  $m$  كان يبدأ في حالة السكون . سلطت عليه قوة ثابتة  $F_0$  لزمن  $t_0$  ثم ازدادت القوة خطيا مع الزمن فاصبحت  $2F_0$  بعد فترة زمنية اضافية مقدارها  $t_0$  اثبت ان المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم في الزمن الكلي  $2t_0$  تساوي

$$\frac{F_0 t_0^2}{m} \quad (\frac{13}{6})$$

(٥-٣) قذف قالب اعلى سطح مائل بانطلاق ابتدائي مقدارها  $v_0$  . فاذا كان ميل السطح  $\theta$  و معامل الاحتكاك الانزلاقي بين السطح والقالب يساوي  $\mu$  جد الزمن الكلي اللازم للقالب حتى يعود الى نقطة انطلاقه .

(٦-٣) ينزلق قالب على سطح مستو مزيت بدهن ثقيل بحيث يعاني القالب مقاومة لزوجة تتغير مع الجذر التربيعي للانطلاق

$$F(v) = - cv^{1/2}$$

فاذا كان الانطلاق الابتدائي للقالب في الزمن  $t=0$  يساوي  $v_0$   
جد قيم  $v$  و  $x$  كدوال للزمن  $t$

(٧-٣) اثبت ان القالب في التمرين (٦-٣) لا يمكنه السير ابعد من :

$$\frac{2m}{3c} v_0^{3/2}$$

(٨-٣) حل التمرين (٦-٣) للحالة التي تتغير فيها القوة مع الانطلاق مرفوعا

$$F(v) = -cv^n \quad \text{للقوة } n \text{ اى}$$

بين فيما اذا كانت توجد اولا توجد غاية للموضع لاية قيمة ل  $n$

(٩-٣) تتغير القوة المسلطة على جسيم مع المسافة  $x$  وفقا لقانون الاساسية

Power Law . اى

$$F(x) = -kx^n$$

آ- جد دالة الطاقة الكامنة

ب- اذا كانت  $v = v_0$  في الزمن  $t=0$  و  $x=0$  جد  $v$

• كدالة للمسافة  $x$

ج- جد نقاط رجوع الحركة

(١٠-٣) جسيم كتلته  $m$  ترك ليسقط من السكون مسافة  $b$  من نقطة اصل

نومتر فيها قوة ثابتة تجذب الجسيم وفقا لقانون التربيع العكسي .

$$F(x) = -kx^{-2}$$

اثبت ان الزمن اللازم للجسيم لكي يصل نقطة الاصل هو

$$\pi \left( \frac{mb^3}{8k} \right)^{1/2}$$

١١-٣) جد العلاقة بين مسافة السقوط وانطلاق جسيم ترك يسقط من السكون تحت تأثير مقاومة الهواء التي تتناسب مع  
أ- السرعة  
ب- مربع السرعة

١٢-٣) اطلقت قذيفة شاتوليا الى الاعلى بانطلاق ابتدائي  $v_0$  ، اذا فرضنا ان مقاومة الهواء تتناسب مع مربع الانطلاق اثبت ان انطلاق القذيفة عند عودتها وتضرب الارض

$$\frac{v_0 v_t}{(v_0^2 + v_t^2)^{1/2}}$$

حيث  $v_t = \text{انطلاق المنتهي} = \left(\frac{mg}{c}\right)^{1/2}$

١٣-٣) تغيير سرعة جسيم كتلته  $m$  مع الازاحة  $x$  وفقا للمعادلة

$$v = \frac{b}{x}$$

جد القوة التي تؤثر على الجسيم كدالة لـ  $x$  .

١٤-٣) اذا كانت القوة المؤثرة على جسيم تساوي حاصل ضرب دالة المسافة في دالة السرعة  $F(x,v) = f(x) g(v)$  اثبت ان المعادلة التفاضلية للحركة يمكن حلها بالتكامل اذا كانت القوة تساوي حاصل ضرب دالة المسافة في دالة الزمن ، هل يمكن حل معادلة الحركة بالتكامل البسيط؟ هل يمكن حلها اذا كانت القوة تساوي حاصل ضرب دالة الزمن في دالة السرعة ؟

١٥-٣) القوة التي تؤثر على جسيم كتلته  $m$  هي

$$F = kvx$$

حيث  $k$  ثابت نأذا مر الجسيم في نقطة الاصل بانطلاق  $v_0$  في الزمن  $t=0$  جد  $x$  كدالة للزمن  $t$  .

١٦-٣) يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة سمعتها  $A$  ويمر من نقطة الاستقرار بانطلاق  $v_0$  ما هو زمن الذبذبة Period ؟

١٧-٣) جسيمان كتلتاهما  $m_1, m_2$  على التوالي ، يتحرك كل منهما حركة توافقية بسيطة سعة الاولى  $A_1$  والثانية  $A_2$  فاذا كانت الطائفة الكلية للجسيم الاول ضعف طاقة الجسيم الثاني ، جد نسبة زمن ذبذبة الاول الى الثاني  $(T_1/T_2)$  .

١٨-٣) يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة فاذا كان انطلاقه  $v_1$  عندما تكون ازاحته  $x_1$  ،  $v_2$  عندما تكون ازاحته  $x_2$  جد مدة الذبذبة والسعة للحركة بدلالة الكميات المذكورة .

١٩-٣) نابضان مرونتهما  $k_1, k_2$  على التوالي علقا بوضع شاتولي لحمل جسيم كتلته  $m$  برهن على ان التردد الزاوي للتذبذب هو  $\left[ \frac{k_1 + k_2}{m} \right]^{\frac{1}{2}}$  اذا ربطت النابضان على التوازي و  $\left[ \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2) m} \right]^{\frac{1}{2}}$  اذا ربطا على التوالي .

٢٠-٣) نابض مرونته  $k$  يحمل صندوقا كتلته  $M$  موضوعا فيه قالب كتلته  $m$  فاذا سحب الجهاز الى الاسفل من موضع استقراره مسافة  $d$  وترك . جد قوة رد الفعل بين القالب وقعر الصندوق كدالة للزمن . ما هي تيممة  $d$  التي يبدأ فيها القالب على وشك ان يترك قعر الصندوق عندما يكون في اعلى التذبذب الشاتولي ؟ اهلل مقاومة الهواء .

٢١-٣) يعرف المعدل الزمني للدالة  $f(t)$  بالعلاقة التالية :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

اثبت ان المعدل الزمني ( لزمن ذبذبة واحدة ) للطاقة الحركية

لتمذب توافقي فهو متضائل يساوي المعدل الزمني للطاقة الكامنة •

(٢٢-٣) اثبت ان النسبة بين ازاحتين متتاليتين في النهاية العظمى لتمذب توافقى متضائل تكون ثابتة ( لاحظ ان النهايات العظمى لا تحدث نسي نقاط تماس منحنى الازاحة مع المنحنى  $(Ae^{-\sqrt{t}}$ ).

(٢٣-٣) اذا علمت ان سعة تمذب توافقي متضائل تهبط الى  $1/e$  من قيمتها الابتدائية بعد مرور  $n$  من الاهتزازات الكاملة • اثبت ان نسبة زمن ذبذبتة الى زمن ذبذبتة بدون تضاؤل هي

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{1}{4 \pi^2 n^2}\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{8 \pi^2 n^2}$$

(٢٤-٣) اذا كان انطلاق المنتهي لكرة حرة السقوط هو  $4.66$  متر/ ثا • وعند تعليقها وهي في حالة السكون بوتر من خفيف يتمطط مسافة  $61$  متر • فاذا تركت تتذبذب شاقوليا • جد زمن الذبذبة • افرض القانون الخطي لمقاومة الهواء •

(٢٥-٣) في المسألة السابقة ، جد عدد الذبذبات عندما تهبط السعة بمقدار واحد بالمائة من السعة الابتدائية •

(٢٦-٣) جد التردد الطبيعي وتردد الرنين للكرة في التمرين (٣-٢٤) • جد كذلك معامل النوعية  $Q$  للجهاز •

(٢٧-٣) اثبت ان التردد الدافع  $\omega$  الذى تكون فيه سعة تمذب توافقى مد نوع تساوى نصف السعة في تردد الرنين هي تقريبا  $\omega_0 \pm \sqrt{3}$ .

(٢٨-٣) جد التردد الدافع للحالة التي يكون فيها انطلق تمذب توافقى اضطرارى اكبر ما يمكن [تلميح - خذ النهاية العظمى للكبيسة

$$v_{\max} = \omega A(\omega)]$$

٢٩-٣) اثبت ان معامل النوعية  $Q$  لتذبذب توافقى مدفوع يساوى العامل الذى يجب ضربه فى الاستجابة لتردد دافع فى الصفر للحصول على الاستجابة فى تردد الرنين .

٣٠-٣) حل المعادلة التفاضلية لحركة متذبذب توافقى تحت تأثير قوة دافعة توافقية متضائلة من النوع

$$F_{\text{ext}} = F_0 e^{-bt} \cos(\omega t)$$

٣- (٣) برهن ان متسلسلة فوريير " للموجة المربعة " التوافقية

Periodic Square Wave هي

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right]$$

حيث

$$f(t) = +1 \text{ for } 0 < \omega t < \pi ; 2\pi < \omega t < 3\pi$$

وهلم جرا

$$f(t) = -1 \text{ for } \pi < \omega t < 2\pi ; 3\pi < \omega t < 4\pi$$

وهلم جرا

٣- (٣٢) استخدم النتيجة السابقة لاجاد حالة الاستقرار لحركة متذبذب توافقى متضائل اى مدفوع بقوة موجة - مربعة توافقية سعته  $F_0$  . وبصورة خاصة ، جد السعات النسبية للحدود الثلاث الاولى  $A_1$  ،  $A_3$  ،  $A_5$  لدالة الاستجابة  $x(t)$  فى الحالة التى يتطابق فيها التوافقى الثالث  $3\omega$  للتردد الدافع مع تردد رنين التذبذب . افرض ان معامل النوعية  $Q = 100$  .

## الفصل الرابع

### ديناميك الجسيم - الحركة بصورة عامة

#### Dynamics of a Particle-General Motion

الآن نحول انتباهنا الى الحالة العامة لحركة جسيم في الفضاء . رأينا تبين  
تليد ان الصيغة الاتجاهية لمعادلة حركة الجسيم هي -

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

او ميكانيكي ذلك

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) \quad (1-4)$$

هذه بالحقيقة تمثل اختصارا للمعادلات التركيبية الثلاث التالية -

$$F_x = \frac{d}{dt} (m\dot{x}) \quad F_z = \frac{d}{dt} (m\dot{z}) \quad F_y = \frac{d}{dt} (m\dot{y})$$

حيث مركبات القوى  $F_z, F_y, F_x$  قد تتضمن الاحداثيات ومشتقاتها بالنسبة للزمن  
والزمن . ان من المؤسف حقا ، ان لا توجد طريقة عامة لايجاد حلول تحليلية لجميع  
الحالات الممكنة . ولكن هناك انواع خاصة عديدة لدوال قوى ذات اهمية فيزيائية يمكن  
التصدي لمعادلاتها التفاضلية بطرق بسيطة نسبيا . وسندرس بعضا منها في البنود  
التالية -

#### The Work Principle قاعدة الشغل (1-4)

لنضرب طرفي المعادلة العامة للحركة عدديا بالسرعة  $\vec{v}$  اي

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \cdot \vec{v} \quad (2-4)$$

والان من قوانين التفاضل للضرب العددي نعلم ان

$$\frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{2\vec{v} \cdot d\vec{v}}{dt}$$

لذلك اذا فرضنا ان الكتلة  $m$  ثابتة ، نرى المعادلة المذكورة توا تكافئ

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = \frac{dT}{dt} \quad (3-4)$$

حيث ادخلنا  $T = \frac{1}{2}mv^2$  • الطاقة الحركية • ولما كان  $\vec{v}dt = d\vec{r}$  يمكننا

التكامل لنحصل على

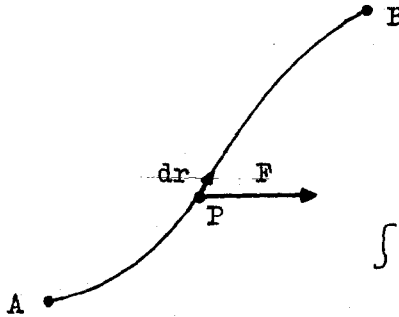
$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int dT \quad (4-4)$$

الطرف الايسر لهذه المعادلة • هو تكامل خطي وهو يمثل الشغل المنجز على الجسم من تأثير القوة  $F$  خلال حركته على طول مسار الحركة • ويمثل الطرف الايمن محصلة التغير في الطاقة الحركية للجسيم • فالمعادلة تنص ان • على ان الشغل المنجز على جسم يساوى الزيادة في الطاقة الحركية •

(4-2) القوى المحافظة ومجالات القوة

#### Conservative Forces and Force Fields

ان مقدار التكامل الخطي • الشغل في هذه الحالة • يعتمد بصورة عامة على مسار التكامل • لاحظ الشكل (4-1) • وصيغة اخرى يعتمد الشغل المنجز اعتماديا على الطريق الخاص الذي يسلكه الجسم في ذهابه من نقطة الى اخرى •



الشكل (4-1)

الشغل الذي تنجزه القوة  $F$   
هو التكامل الخطي  $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$



اي لو طلب منا حساب قيمة تكامل الشغل فنسحتاج تهل كل شي الى معرفة مسار حركة الجسم . ومن ناحية اخرى ، الانواع الاعتيادية للمسائل التي لها اهمية في ديناميك الجسم هي التي يكون مسار حركتها مجهولا منذ البداية ، اي ان المسار هو احد الاشياء التي يجب حسابها . عندئذ ، يظهر ان قاعدة الشغل الجينية نسي المعادلة ( ٤-٤ ) ربما لاتكون مفيدة جدا لاغراضنا . ولكن ظهر ان قاعدة الشغل مفيدة جدا في دراسة حركة الجسم تحت تاثير نوع خاص من القوى والتي تعرف بالقوى المحافظة . Conservative Forces ولحسن الحظ هناك عدد كبير من القوى الفيزيائية المهمة هي قوى محافظة .

عندما تكون القوة  $\vec{F}$  دالة لاحداثيات الموضع فقط يقال عنها بانها تعرف مجال قوة استاتيكي Static Force Field . ضمن انواع المجالات الممكنة ، يوجد صنف مهم فيه تكامل الشغل  $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$  لا يعتمد على مسار التكامل . ان مجالات نسوي كهذه تكون محافظة رياضيا . المجال المحافظ هو الذي يكون فيه  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$  تفاضلا دقيقا Exact differential . عندما يتحرك جسم في مجال محافظ فتكامل الشغل ومن ثم الزيادة في الطاقة الحركية يمكن معرفتها مقدما . وهذه المعلومات يمكن استخدامها للتكهن عن حركة الجسم .

( ٣-٤ ) دالة الطاقة الكامنة - Potential Energy Function

عند استخدام الاحداثيات الديكارتية ، يمكن التعبير عن تكامل الشغل على النحو التالي :

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (٥-٤)$$

لنفرض ان من الممكن ايجاد مركبات القوة بتفاضل داله عددية معينة مثل  $V(x, y, z)$  بالطريقة التالية

$$F_x = - \frac{\partial V}{\partial x} , \quad F_y = - \frac{\partial V}{\partial y} , \quad F_z = - \frac{\partial V}{\partial z} \quad (٦-٤)$$

الدالة  $V$  التي عرفت بهذه الطريقة تسمى بدالة الطاقة الكامنة ، كما في حالة البعد الواحد حيث  $F(x) = -\frac{dV}{dx}$  . اذا تواجدت داله طاقة كامنة ، عندئذ يمكننا كتابسة

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \left( -\frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy - \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) = - \int dV \quad \dots\dots (٧-٤)$$

وتصبح قاعدة الشغل ببساطة

$$\int dT = - \int dV \quad (٨-٤)$$

وهذا يدل بوضوح علان  $T$  ،  $-V$  يختلف في الغالب احدهما عن الاخر بكمية ثابتة .

ولنمثل هذا الثابت بالرمز  $E$  عندئذ  $T - (-V) = E$  او  $T + V = E$  ونسئ الطاقة الكلية ، ونكتبها بصورة واضحة كالآتي -

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x, y, z) = E \quad (٩-٤)$$

وهذه تعني - عندما يتحرك جسيم في مجال محافظ للقوة فان مجموع الطاقة الحركية والكامنة يبقى ثابتا خلال الحركة .

### الطاقة الكامنة لمجال جاذبية منتظم

لنعتبر حركة جسيم في مجال قوة منتظم ، كحركة جسيم تحت تاثير الجاذبية قرب سطح الارض . اذا اخترنا المحور  $z$  شاقوليا ، عندئذ مقدار القوة يكون  $mg$  والاتجاه السالب لمحور  $z$  . اذن يجب ان تحقق داله الجهد المعادلات التالية -

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (١٠-٤)$$

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -mg$$



اذن يمكن كتابة قانون التربيع العكسي للقوة ايضا على النحو التالي-

$$\vec{F} = -k \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (١٤-٤)$$

فاذا استخدمنا الاحداثيات الديكارتية • عندئذ  $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$  و

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \text{ و عليه نحصل على -}$$

$$\vec{F} = -k (\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \quad (١٥-٤)$$

لقانون التربيع العكسي بدلالة الاحداثيات الديكارتية •

سبق وان استتبطننا في البند (٣-٨) مسألة البعد الواحد لقانون التربيع

العكسي للقوة • حيث رأينا ان الدالة  $V(r) = -\frac{k}{r}$  تعطي القوة الصحيحة •

اي  $F(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{k}{r^2}$  وقد ظهر ان نفس الدالة تعطي القوة الصحيحة

للحالة ذات الابعاد الثلاثة • لذلك لو اخذنا  $V(x,y,z) = -k(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -kx(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \text{ عندئذ}$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -ky(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -kz(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

• هذه تماما مركبات القوة اللازمة لكي تعطي دالة القوة لمعادلة (١٥-٤) •

(٤-٤) شروط تواجد دالة الجهد - موثر دلتا

Conditions for the Existance of a potential Function-

The Del Operator.

رأينا في الفصل الثالث ان الحركة في خط مستقيم لجسيم تكون دائما محافظة •

اذا كانت القوة دالة للموضع فقط • بالطبع تد يسأل السائل الان اذا كان هذا يصح

للحالة العامة للحركة ذات البعدين والثلاثة ابعاد ام لا ؟ اي اذا كانت القوة

المسلطة على جسيم دالة لاحداثيات الموضع فقط فهل تتواجد دالة مشابهة  $V$

تحقق دائما المعادلة (٦-٤) المذكورة اعلاه . والجواب على هذا السؤال هو لا . ان دالة الجهد تتواجد فقط في الحالة التي تحقق فيها مركبات القوى

$$F_x = F_x(x, y, z)$$

$$F_y = F_y(x, y, z)$$

$$F_z = F_z(x, y, z)$$

معيارا خاصا .

لنفرض ان دالة الجهد متواجدة ، اي ، ان المعادلات (٦-٤) تصح . عندئذ ، اذا فاضلنا  $F_x$  جزئيا بالنسبة للمحور  $y$  و  $F_y$  جزئيا بالنسبة للمحور  $x$  فاننا

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} , \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$$

نحصل على

ولكن  $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$  لان ترتيب المفاضلة غير مهم (على فرض ان الدالة  $V$  مستمرة وكذلك مشتقتها الاولى والثانية) . وبالتماثل يمكن الحصول من الزوجين  $(F_x, F_z)$  و  $(F_y, F_z)$  على مايلي -

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

(١٦-٤)

هذه هي الشروط الضرورية عندئذ لـ  $F_x, F_y, F_z$  لكي تتواجد دالة للجهد وهي تعبر عن الشرط الذي يكون فيه -

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

(١)

دقيق التفاضل Exact Differential كذلك يمكننا ان نثبت بانها شروط كافية اي اذا صحت المعادلات (١٦-٤) ، فان مركبات القوة هي فعلا مشتقة من دالة الجهد  $V(x, y, z)$  . ويكون مجموع الطاقة الحركية والطاقة الكامنة ثابتاً .

(١) انظر في كتاب متقدم في التفاضل مثل

### الموتر "دلتا" The Del Operator

إذا كان مجال القوة محافظا بحيث اعطيت المركبات بالمشتقات الجزئية لدالة الطاقة الكامنة ، عندئذ يمكننا تمثيل  $\vec{F}$  بجبر المتجهات على النحو التالي

$$\vec{F} = - \hat{i} \frac{\partial V}{\partial x} - \hat{j} \frac{\partial V}{\partial y} - \hat{k} \frac{\partial V}{\partial z} \quad (17-4)$$

ويمكننا كتابة هذه المعادلة بطريقة ملائمة ومختصرة كالآتي

$$\vec{F} = - \nabla V \quad (18-4)$$

هنا ادخلنا الموتر لمفاضلة المتجه وهو

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

ويسمى بموتر دلتا Del Operator ويسمى التمثيل  $\nabla V$  بمحدر  $V$

" gradient  $V$ " ويكتب بعض الاحيان على النحو  $\text{grad } V$  . اما من

الناحية الرياضية ، فنحدر الدالة كمية متجهة تمثل التفاضل الفراغي Spatial

للدالة في المقدار والاتجاه . من الناحية الفيزيائية ، فان المنحدر السالب لدالة

الطاقة الكامنة يعطي اتجاه ومقدار القوة التي تؤثر على جسيم موضوع في مجال كونتسه

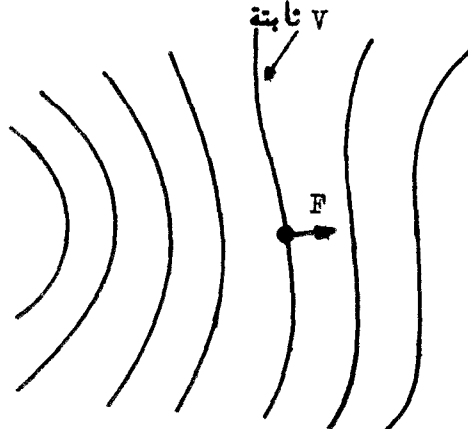
جسيما تاخرى . وتعني الاشارة السالبة ان الجسيم اجبر على الحركة باتجاه تناقص

الطاقة الكامنة بدلا من الاتجاه المعاكس . الشكل (٢-٤) يمثل توضيحا للمنحدر .

حيث رسمت دالة الجهد على شكل خطوط مناسب Contour Lines وكل منها

تمثل ضحني لطاقة كامنة ثابتة . والقوة في اية نقطة تكون دائما عمودية على المنحني

المتساوي الجهد او السطح المار خلال النقطة التي نحن بصدد ها .



الشكل (٢-٤)

توة المجال ممثلة بخطوط  
مناسب الطاقة الكامنة

• يستخدم موثر دلتا كعيار ملائم لمعرفة ما اذا كانت قوة المجال محافظة ام لا .  
 نستخدم لهذا التطبيق الضرب الاتجاهي لموثر دلتا اى

$$\nabla \times \vec{F} = \hat{i} \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \quad (20-4)$$

ان الضرب الاتجاهي كما عرّف اعلاه يسمى بدوران  $\vec{F}$  ،  $(\text{Curl } \vec{F})$  ونرى وفقا للمعادلات (10-4) ان كل من مركبات  $k, j, i$  في دوران  $\vec{F}$  يتلاشى اذا كانت القوة  $\vec{F}$  محافظة . وهكذا يمكن كتابة الشرط اللازم بشكله المحكم التالي لكي تكون القوة محافظة .

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \quad (21-4)$$

رياضيا ، تمثل المعادلة المذكورة اعلاه الشرط الضروري والكافي لكي يكون الحـد  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$  تفاضلي دقيق او بعبارة اخرى لايعتمد التكامل  $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$  على مساره .  
 اما من الناحية الفيزيائية ، فيعني تلاشي دوران  $\vec{F}$  ، ان الشغل الذى تقوم به القوة  $\vec{F}$  لتحريك جسيم لايعتمد على مسار الجسيم في ذهابه من نقطة معينة الى اخرى .  
 هناك ثلاثة جبرية تالفة تحتوى على موثر دلتا ، نعني الضرب العددى  $\nabla \cdot \vec{F}$  .  
 وهذا يسمى بمتفرقة  $\vec{F}$  (divergence of  $\vec{F}$ ) . ففي حالة قوة المجال تمثل المتفرقة مقياس كثافة المجال في نقطة معينة . وللمتفرقة اهمية خاصة في نظرية الكهربية والمغناطيسية .

### امثلة

1- جد قوة المجال لدالة الجهد  $V = x^2 + yx + xz$  عند استخدام موثر

$$\vec{F} = - \nabla V = -\hat{i} (2x+y+z) - \hat{j}x - \hat{k}x$$

2- هل قوة المجال  $\vec{F} = \hat{i}xy + \hat{j}xz + \hat{k}yz$  محافظة ؟

باخذ دوران  $\vec{F}$  - نحصل على

$$\nabla_x \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & xz & yz \end{vmatrix} = \hat{i}(z-x) + \hat{j}0 + \hat{k}(z-x)$$

ولما كانت النتيجة لساوى صفرا فال مجال اذن غير محافظ

٣- ما تيم الثوابت  $a, b, c$  التي تكون فيها القوة  $\vec{F} = \hat{i}(ax+by^2) + \hat{j}cxy$  محافظة .

باخذ دوران  $F$  - نحصل على

$$\nabla_x \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax+by^2 & cxy & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(c - 2b) y$$

تبين هذه النتيجة ان القوة محافظة ، شريطة ان يكون  $c=2b$  . تيمية  $a$  لا اهمية لها .

(٤-٥) القوى من النوع القابل للفرز . Forces of the Separable Type

في حالات كثيرة يمكن اختيار محاور بحيث تكون مركبات قوة المجال دوال لاحداثياتها فقط اى -

$$\vec{F} = \hat{i}F_x(x) + \hat{j}F_y(y) + \hat{k}F_z(z) \quad (٤ - ٢٢)$$

هذا النوع من القوى تسمى قابلة للفرز Separable سبق وان برهنا بسهولة ان دوران قوة كهذه يساوى صفرا ولهذا السبب يكون مجالها محافظا بصرف النظر عن الاشكال الخاصة لمركبات القوة مادامت كل منها دالة فقط - للاحداثي المستخدم . عندئذ يكون تكامل المعادلات التفاضلية للحركة بسيطا جداً . لان معادلة كل مركبة تكون من نوع  $m\ddot{x} = F(x)$  . في هذه الحالة يمكن حل المعادلات بالطرق التي وصفت في الفصل السابق تحت عنوان الحركة في خط مستقيم .



• سنبحث في البنود القادمة بعض امثلة القوى قابلة الغرز المحافظة منها وغير المحافظة .  
(٦-٤) حركة القذيفة في مجال تناقلي منتظم

### Motion of a Projectile in a Uniform Gravitational Field

تعتبر حركة القذيفة من المسائل التقليدية المشهورة في ديناميك الجسميم .  
سوف ندرس هذه المسألة بالتفصيل لانها توضح القواعد العامة التي اوردها نسي  
البنود السابقة .

#### اهمال مقاومة الهواء

للسهولة ، لنفرض اولا الحالة التي تتحرك فيها القذيفة عندما تهمل مقاومة الهواء  
في هذه الحالة المثالية توجد قوة موثرة واحدة فقط ، هي قوة جذب الارض . وضد  
اختيار محور  $z$  شاقوليا تكون المعادلة التفاضلية للحركة على النحو التالي -

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -mg\hat{k}$$

ملاحظة على ذلك لجعل المسألة اكثر مثاليةً نفرض ان التعجيل الارضي ثابت . من الواضح  
هذه ان دالة القوة تكون من النوع القابل الغرز والمحافظة ايضا لانها تمثل حالة خاصة  
من معادلة (٢٢-٤) سبق وان استتبعت معادلة الطاقة في البند (٣-٤) سوف  
نعود الى تخصيص المسألة اكثر وذلك باختيار الانطلاق الابتدائي مساويا للسر  $v_0$   
والموضع الابتدائي في نقطة الاصل عندما يكون الزمن  $t = 0$  . عندئذ معادلة الطاقة

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz = \frac{1}{2}mv_0^2$$

او

$$v^2 = v_0^2 - 2gz$$

تعطي الانطلاق كدالة للارتفاع . هذه جميع المعلومات التي يمكننا الحصول عليها  
بمباشرة من معادلة الطاقة .

لكي نتابع الموضوع اكثره يجب ان نعود الى المعادلة التفاضلية للحركة . التي  
يمكن كتابتها على النحو التالي

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = -g\hat{k}$$

وهذه من نفس صيغة تلك التي بحثت في البند (٢-١٠) • ويمكن تكاملها مباشرة •  
فبتكاملها مرة واحدة نحصل على السرعة • اى

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -gt\hat{k} + \vec{v}_0$$

حيث ثابت التكامل  $v_0$  يمثل السرعة الابتدائية • وتكاملها للمرة الثانية نحصل على

$$r = -\frac{1}{2}gt^2\hat{k} + v_0t \quad \text{موضع المتجه • اى}$$

في هذه الحالة يساوى ثابت التكامل  $r_0$  صفرا • لان الموضع الابتدائي للقذيفة اخذ في نقطة الاصل • وتصبح المعادلة المذكورة اعلاه بدلالة المركبات على النحو التالي -

$$x = \dot{x}_0 t \quad (٤-٢٣)$$

$$y = \dot{y}_0 t$$

$$z = \dot{z}_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

هنا  $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$  تمثل مركبات السرعة الابتدائية  $\vec{v}_0$  • قمنا اذن بحل مسألة حساب  
موضع القذيفة كدالة للزمن •

اما بالنسبة لمسار القذيفة • نلاحظ عند حذف  $t$  من معادلتى  $x$  و  $y$  ان

$$v = bx \quad \text{النتيجة تكون}$$

$$b = \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}$$

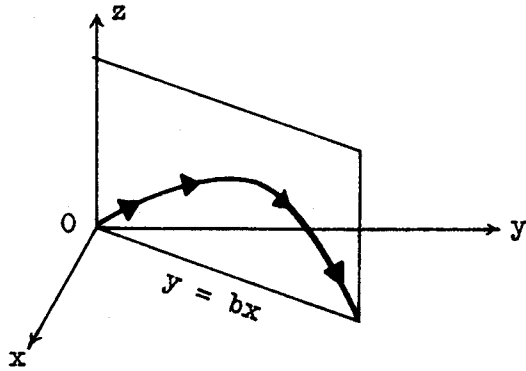
حيث  $b$  ثابت ويساوى

لذلك يقع المسار كليا في مستوى وصورة خاصة • اذا كان  $\dot{y}_0 = 0$  • عندئذ  
يقع المسار في المستوى  $xz$  • بعد ذلك • اذا حذفنا  $t$  من معادلتى  $x, z$   
تكون معادلة المسار على الشكل التالي -

$$z = \alpha x - \beta x^2$$

$$\alpha = \frac{\dot{z}_0}{\dot{x}_0} \quad , \quad \beta = \frac{g}{2\dot{x}_0^2} \quad \text{حيث}$$

اذن المسار قطع مكافئ • يقع في المستوى  $y=bx$  • كما هو مبين في  
الشكل (٤-٣) •



الشكل (٣-٤) مسار قذيفة متحركة  
في ثلاثة ابعاد

### مقاومة الهواء الخطية

لنفرض الان حركة القذيفة في الحالة الاكثر واقعية والتي تكون فيها القوة المعوقة ناشئة عن مقاومة الهواء . في هذه الحالة تكون الحركة غير محافظة . وتتناقص الطاقة الكلية بصورة مستمرة كنتيجة للخسار بسبب الاحتكاك .

وللمسئلة ، نفرض ان قانون مقاومة الاحتكاك خطي بحيث تتخير قوة المقاومة طردياً مع السرعة  $\vec{v}$  . سيكون من الملائم كتابة ثابت التناسب على الشكل  $\gamma$  حيث  $m$  تمثل كتلة القذيفة . فهناك اذن قوتان تؤثران على القذيفة ، هما مقاومة الهواء  $-\gamma \vec{v}$  والقوة الثقالية والتي كما في السابق تساوي  $-mg\hat{k}$  ، عندئذ المعادلة

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m \gamma \vec{v} - mg\hat{k} \quad \text{التفاضلية تصبح}$$

واختصار  $m$  من كل حد ، نحصل على

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\gamma \vec{v} - g\hat{k}$$

ويتم تكامل المعادلة المذكورة اعلاه بسهولة عند كتابتها بدلالة مركباتها .

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\gamma \dot{x} & \text{اى} \\ \ddot{y} &= -\gamma \dot{y} \\ \ddot{z} &= -\gamma \dot{z} - g\end{aligned}$$

نلاحظ ان هذه المعادلات قد فرزت الآن . اذن يمكن حل كل منها بصورة منه سرده  
باساليب الفصل السابق . واستخدام نتائجنا من البند (٣-٧) نستطيع كتابة الحلول

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{x}_0 e^{-\gamma t} & \text{مباشرة والتي} \\ \dot{y} &= \dot{y}_0 e^{-\gamma t} & (٢٤-٤)\end{aligned}$$

$$\dot{z} = \dot{z}_0 e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t})$$

لاحداثيات السرعة و

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t})$$

$$y = \frac{\dot{y}_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \quad (٢٥-٤)$$

$$z = \left( \frac{\dot{z}_0}{\gamma} + \frac{g}{\gamma^2} \right) (1 - e^{-\gamma t}) - \frac{g}{\gamma} t$$

لاحداثيات الموضع . هنا كالسابق \* مركبات السرعة الابتدائية هي

• وقد اخذ موضع القذيفة الابتدائي في نقطة الاصل  
كالحالة التي اهلجت فيها مقاومة الهواء\* ، تبقى الحركة كليا في المستوى  
حيث  $y = bx$  حيث  $b = \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}$  . والمسار في هذا المستوى ليس قطعاً مكافئاً ،

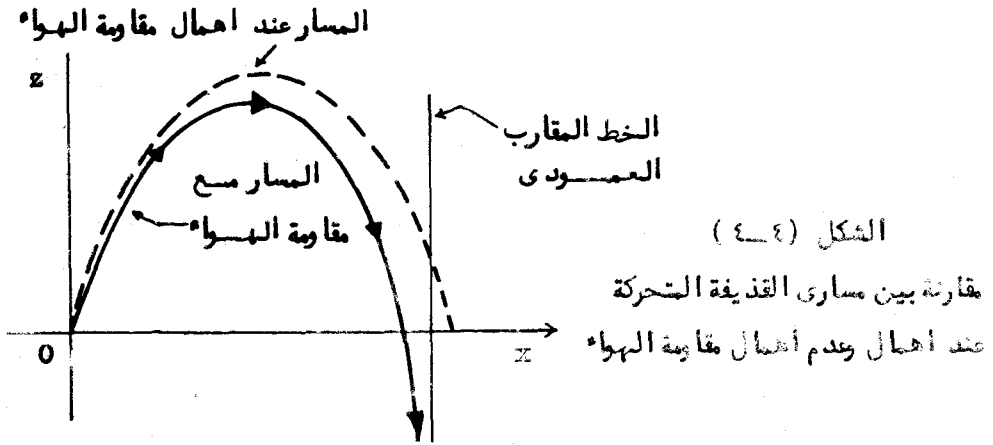
وانما منحن يقع اسفل المسار المكافئ\* ، كما هو مبين في الشكل (٤-٤) .

ان فحص معادلتى  $x$  و  $y$  يرينا ان  $x$  و  $y$  يقتربان من الغاية عندما تكون  $t$

كبيرة اى

$$\begin{aligned}x &\rightarrow \frac{\dot{x}_0}{\gamma} \\ y &\rightarrow \frac{\dot{y}_0}{\gamma}\end{aligned}$$

وهذا يعني ان للمسار الكامل خط مقارب عمودى كما هو مبين في الشكل .



تمثل المعادلة (٤-٢٥) الحل النهائي لحركة القذيفة عندما تعتبر مقاومة الهواء خطية ، والتي يمكن كتابتها بجبر المتجهات بالطريقة التالية

$$\vec{r} = \left( \frac{\vec{v}_0}{\gamma} + \frac{\hat{k}g}{\gamma^2} \right) (1 - e^{-\gamma t}) - \hat{k} \frac{gt}{\gamma} \quad (٤-٢٦)$$

اي ان حل المعادلة التفاضلية الاتجاهية للحركة يمكن تحقيقه بالتفاضل بسهولة . من المهم اعتبار الحالة التي تكون فيها مقاومة الهواء صغيرة جدا ، اي عندما يكون مقدار الكمية  $\gamma t$  في الدالة الاسية اصغر بكثير من واحد . ولهذا الغرض سوف تستخدم المتسلسلة الاسية التالية

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots$$

والتي عندما نعوض فيها  $u = -\gamma t$  ، تصبح النتيجة ، بعد الاختصار وتجميع الحدود كما يلي

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{k} - \Delta \vec{r} \quad (٤-٢٧)$$

حيث

$$\Delta \vec{r} = \gamma \left[ \vec{v}_0 \left( \frac{t^2}{2!} - \frac{\gamma t^3}{3!} + \dots \right) + \hat{k}g \left( \frac{t^3}{3!} - \frac{\gamma t^4}{4!} + \dots \right) \right] \quad (٤-٢٨)$$

يمكن اعتبار الكمية  $\Delta \vec{r}$  كصحیح لمسار القذيفة الذي اهملت فيه المقاومة ليعطي المسار الحقيقي .

في الحركة الفعلية للقديفة خلال الجو ، لا يكون قانون المقاومة خطيا ، ولكنه دالة معقدة جدا للسرعة . ويمكن حساب المسار بدورة دقيقة بطريقة التكامل الممدد ، ومساعدة الحاسبات عالية الانطلاق .

(٤-٧) المتذبذب التوافقي في البعدين والثلاثة ابعاد .

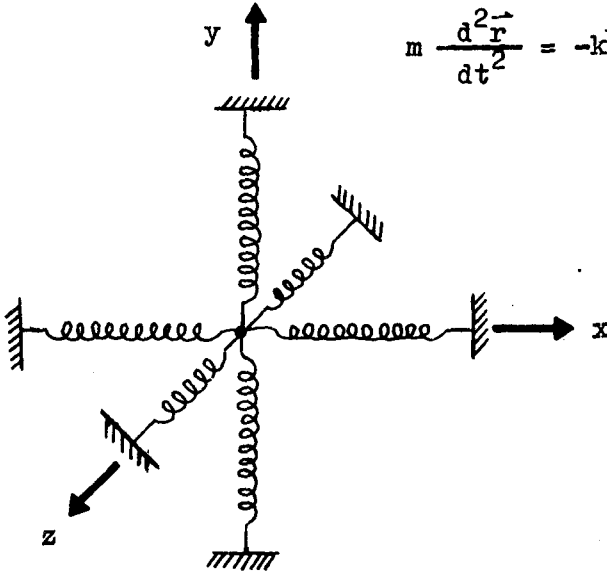
### The Harmonic Oscillator in two and three Dimensions

سنفترض في هذا البند حركة جسم توتر عليه قوة معيدة خطية تتجه دائما نحو نقطة ثابتة ، نقطة الاصل في نظام احداثياتنا . قوة كهذه يمكن تمثيلها بالعلاقة

$$\vec{F} = -k\vec{r} \quad \text{التالية}$$

عندئذ يمكن كتابة المعادلة التفاضلية للحركة بسهولة على النحو التالي

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r} \quad (٤-٢٩)$$



الشكل (٤-٥)

موديل لمتذبذب توافقي  
ذو ابعاد ثلاث

ويمكن تمثيل هذه الحالة ، على وجه التقريب ، بجسيم مربوط بمجموعة من النوابض  
المرنة ، كما هو مبين في الشكل (٤-٥)

المتذبذب ذو البعدين

لحالة الحركة في سطح مستو ، المعادلة التفاضلية المذكورة اعلاه تكافئ  
المعادلتين المفروقتين التاليتين

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$m\ddot{y} = -ky$$

وكل من هاتين المعادلتين تماثل معادلة المتذبذب التوافقي في خط مستقيم والذي  
درسناه في البند (٢-١٢) . لذلك يمكننا كتابة الحلول مباشرة على النحو التالي

$$x = A \cos (\omega t + \alpha)$$

$$y = B \cos (\omega t + \beta)$$

(٤ - ٣٠)

$$\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

حيث

وتحسب ثوابت التكامل  $A$  ،  $B$  ،  $\alpha$  ،  $\beta$  لاية حالة معينة من الشروط  
الابتدائية .

لايجاد معادلة المسار، نحذف الزمن  $t$  من المعادلتين . ويكون ذلك بكتابة  
المعادلة الثانية على النحو التالي

$$y = B \cos (\omega t + \alpha + \Delta)$$

$$\Delta = \beta - \alpha$$

حيث

$$y = B \left[ \cos(\omega t + \alpha) \cos \Delta - \sin(\omega t + \alpha) \sin \Delta \right]$$

عندئذ

ونحصل من اولى معادلتنا (٤-٣٠) على

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \Delta - \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \Delta$$

ونقل الحدود وتربيع طرفي المعادلتين الاخرين نحصل على

$$\frac{x^2}{A^2} - xy \frac{2 \cos \Delta}{AB} + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \Delta \quad (٣١-٤)$$

هذه المعادلة من الدرجة الثانية في  $x$  و  $y$  . والان ، المعادلة العامة لمن  
الدرجة الثانية

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$$

تمثل قطعاً ناقصاً ، قطعاً مكافئاً او قطعاً زائداً . ويعتمد ذلك على

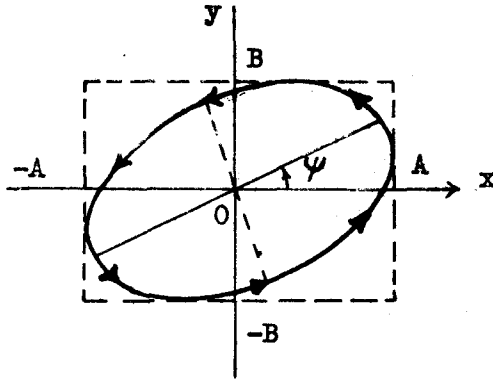
$$b^2 - 4ac$$

المميز

سالبا ، صفرا ، او موجبا على التوالي . في الحالة التي نحن بصددھا المميز

يساوي  $(\frac{2 \sin \Delta}{AB})^2$  - اي انه كمية سالبة ، لذلك يكون المسار قطعاً

ناقصاً كما هو مبين في الشكل (٦-٤)



الشكل (٦ - ٤)

مسار قطع ناقص لحركة متذبذب

توافق في بعديين



في الحالة الخاصة ، عندما يكون فرق الطور  $\Delta$  يساوي  $\pi/2$  ، عندئذ تختصر معادلة المسار الى المعادلة التالية

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

وهذه معادلة قطع ناقص محاوره منطبقة على محاور الاحداثيات . اما اذا كان فرق الطور صفرا او  $\pi$  فمعادلة المسار تصبح خطاً مستقيماً ، اى

$$y = \pm \frac{B}{A} x$$

وتؤخذ بنظر الاعتبار الاشارة الموجبة عندما تكون  $\Delta = 0$  ، والسالبة عندما تكون  $\Delta = \pi$  . يمكننا البرهنة للحالة العامة ، ان محاور مسار القطع الناقص تيمثل بزاوية  $\psi$  مع المحور - x حيث

$$\tan 2\psi = \frac{2AB \cos \Delta}{A^2 - B^2} \quad (٤ - ٣٢)$$

وقد ترك استنباط هذه العلاقة كتمرين للطالب .

### المتذبذب التوافقي ذو الابعاد الثلاثة

في حالة الحركة في ثلاثة ابعاد ، المعادلة التفاضلية للحركة تكافئ المعادلات

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$m\ddot{y} = -ky$$

$$m\ddot{z} = -kz$$

المفروزة الثلاث التالية

$$(٤ - ٣٣)$$

فحلولها تكون اذن

$$x = A \cos (\omega t + \alpha)$$

$$y = B \cos (\omega t + \beta)$$

$$z = C \cos (\omega t + \gamma)$$

$$(٤ - ٣٤)$$

او ، قد تكتب بطريقة اخرى هي

$$x = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t$$

$$y = A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t \quad (٣٥ - \epsilon)$$

$$z = A_3 \sin \omega t + B_3 \cos \omega t$$

وتحسب ثوابت التكامل الستة في كل من المجموعتين من موضع وسرعة الجسم الابتدائيتين .  
الان افرض المعادلة الاولى والثانية من مجموعة المعادلات (٣٥-٤) . منهما نستطيع  
ان نجد  $\sin \omega t$  و  $\cos \omega t$  بدلالة  $x$  و  $y$  والثوابت  $A_1, A_2, B_1, B_2$

وهند تعويض النواتج في المعادلة الثالثة نحصل على معادلة من النوع  $z = ax + by$

حيث الثوابت  $a, b$  تحسب من مجموعة ثوابت  $A's$  وثوابت  $B's$  مسار  
الحركة يقع اذن في مستويين من نقطة الاصل . المسار في هذه الحالة يكون قطعاً  
ناقصاً ايضاً \* ( كما هي الحالة في الحركة ذات البعدين ) . يمكن رؤية ذلك من  
المناقشة التالية . اذا حولنا معادلات الحركة الى محاور جديدة مثل  $x', y', z'$

والتي لها نفس نقطة اصل المحاور القديمة ودررت بحيث انطبق المستوى  $x'y'$

على مستوى الحركة . عندئذ سوف لايتغير شكل المعادلات التفاضلية للحركة بدلالة

$$m\ddot{x}' = -kx'$$

$$m\ddot{y}' = -ky'$$

$$z' = 0$$

الاحداثيات الجديدة اي

مع

اذن ، للمسار نفس شكل مسار الحركة ذات البعدين ، اي قطع ناقص في المستوى

$x'y'$  . بطبيعة الحال ، يعتمد دوران مستوى الحركة على السرعة الابتدائية

والجسم الابتدائي للجسيم .

تمثل المعادلات (٣٣-٤) وحلولها ، حركة مايسمى بالمتذبذب المتجانس

isotropic oscillator ذي الابعاد الثلاثة ، وفيه لانتعند القوة المعيدة على اتجاه الازاحة . اما اذا اعتمدت القوة المعيدة على اتجاه الازاحة ، فنحصل على حالة المتذبذب غير المتجانس . يمكن كتابة المعادلات التفاضلية لحالة المتذبذب غير المتجانس وذلك باختيار محاور ملائمة على النحو التالي

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_1x \\ m\ddot{y} &= -k_2y \\ m\ddot{z} &= -k_3z \end{aligned} \quad (٣٦ - \text{ع})$$

هنا عندنا حالة ثلاثة ترددات مختلفة للتذبذب هي  $\omega_1 = \sqrt{k_1/m}$  ،  $\omega_2 = \sqrt{k_2/m}$  ،  $\omega_3 = \sqrt{k_3/m}$  وتعطي الحركة بالحلول التالية

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega_1 t + \alpha) \\ y &= B \cos(\omega_2 t + \beta) \\ z &= C \cos(\omega_3 t + \gamma) \end{aligned} \quad (٣٧ - \text{ع})$$

مرة اخرى ، تحسب ثوابت التكامل الستة في المعادلات المذكورة اعلاه من الشروط الابتدائية . وموقع التذبذب الناتج للجسيم كليا في صندوق متوازي المستطيلات (اضاعه 2A ، 2B ، 2C) ومركزه في نقطة الاصل . في الحالة التي تتناسب فيها  $(\omega_3, \omega_2, \omega_1)$  أي

$$\frac{\omega_1}{n_1} = \frac{\omega_2}{n_2} = \frac{\omega_3}{n_3} \quad (٣٨ - \text{ع})$$

حيث  $n_1, n_2, n_3$  تمثل اعداداً صحيحة ، سيكون المسار مغلقاً لان الجسيم بعد مرور زمن مقداره  $\frac{2\pi n_1}{\omega_1} = \frac{2\pi n_2}{\omega_2} = \frac{2\pi n_3}{\omega_3}$

يعود الى موضعه الابتدائي وتعاد الحركة مرة اخرى . (افترض في المعادلات (٣٨ - ع) ان اي عامل مشترك قد اختصر) . والعكس ، يكون المسار مفتوحاً

إذا كانت  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  غير متناسبة . وفي هذه الحالة يمكن ان يقال ان المسار يملاء متوازي المستطيلات المذكور اعلاه تماماً ، ومعنى اخر اذا انتظرنا — على الاقل — زمنا كافيا ، فالجسيم سيعود مقتربا بصورة اعتباطية الى اية نقطة معينة .

في حالات عديدة تكون ازاحة محصلة القوة المعيدة المسلطة على ذرة معينة في مادة بلورية صلدة تقريبا خطية . وتقع محصلة ترددات التذبذب اعتياديا في منطقة طيف تحت الحمراء : ١٠ الى ١٢ الى ١٤ ذبذبة في الثانية .

(٤ - ٨) . حركة الجسيمات المشحونة في المجالات الكهربائية والمغناطيسية

Motion of Charged Particles in Electric and Magnetic Fields

عندما يكون جسيم مشحون كهربائيا بجوار شحنات كهربائية اخرى ، تؤثر عليه قوة هذه القوة  $\vec{F}$  تنشأ من المجال الكهربائي  $\vec{E}$  للشحنات المجاورة . وتكتب

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (٤ - ٣٩)$$

حيث  $q$  تمثل الشحنة الكهربائية التي يحملها الجسيم في السوال (٢) .  
وعليه تكون معادلة حركة الجسيم على النحو التالي

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q\vec{E} \quad (٤ - ٤٠)$$

او بدلالة المركبات

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= q E_x \\ m\ddot{y} &= q E_y \end{aligned} \quad (٤ - ٤١)$$

$$m\ddot{z} = q E_z$$

(٢) تقاس  $F$  بالنيوتن و  $q$  بالكولوم و  $E$  بالفولت لكل متر في وحدات

MKS و تقاس  $F$  بالداينيات و  $q$  بوحدات الالكتروستاتيك و  $E$  بالاستافلوت

لكل سنتيمتر في وحدات CGS .

وصورة عامة ، تكون مركبات المجال دوال لاحداثيات الموضع  $z, y, x$  .  
 وفي حالة المجالات المتغيرة مع الزمن ( اى ، اذا كانت الشحنات التي تولد  $\vec{E}$   
 متحركة ) فالمركبات تكون ، طبعا ، دوال للزمن  $t$  ايضاً .

لنفرض حالة بسيطة ، اى ، تلك التي يكون فيها المجال الكهربائي منتظماً .  
 بناختيار احد المحاور ، كالمحور  $z$  ، باتجاه المجال . عندئذ  $E_x = E_y = 0$   
 و  $E = E_z$  . ومعادلات الحركة ، اى معادلات (٤ - ٤) ، لجسيم شحنته  $q$   
 يتحرك في هذا المجال اذن تكون

$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{y} = 0$$

$$\ddot{z} = \frac{qE}{m} = \text{constant}$$

وهذه هي تماماً نفس معادلات حركة القذيفة في مجال جاذبية الارض المنتظم .  
 اذن المسار يكون قطعاً مكافئاً .

برهن في الكتب المدرسية للنظرية الكهرومغناطيسية (٣)

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \text{ان}$$

اذا كانت  $\vec{E}$  ناشئة من شحنات ساكنة . وهذا يعني ان الحركة في مثل هذا  
 المجال تكون محافظة ، اى تتواجد دالة جهد  $\phi$  بحيث تكون  $\vec{E} = -\nabla\phi$  .  
 والطاقة الكامنة لجسيم شحنته  $q$  في مجال كهذا تساوى عندئذ  $q\phi$  والطاقة  
 الكلية تكون ثابتة وتساوى  $\frac{1}{2}mv^2 + q\phi$  .

عند تواجد مجال مغناطيسي ساكن  $\vec{B}$  ( يسمى الحث المغناطيسي )

تمثل القوة المؤثرة على جسيم متحرك بدلالة الضرب الاتجاهي بصورة ملائمة ، على

النحو التالي

$$\vec{F} = q (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (٤٢ - ٢)$$

حيث  $\vec{v}$  تمثل السرعة و  $q$  الشحنة <sup>(٤)</sup> . والمعادلة التفاضلية للحركة لجسيم

يتحرك في مجال مغناطيسي نقي هي

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (٤٣ - ٤)$$

تبين المعادلة المذكورة اعلاه ان تعجيل الجسيم يكون دائما عموديا على اتجاه

الحركة . وهذا يعني ان مركبة التسجيل المماسية ( $\dot{\vec{v}}$ ) تساوى صفرا ، ولذلك

يتحرك الجسيم بانطلاق ثابت . ويصح ذلك حتى لو كانت  $\vec{B}$  دالة متغيرة للموضع

$\vec{r}$  شريطة ان لا يتغير مع الزمن .

(٤) تصح المعادلة (٤٢ - ٤) لوحدات mks حيث تقاس  $F$  بالنيوتن ،

$q$  بالكولوم ،  $v$  متر/ ثانية ، و  $B$  الهر/ متر مربع ، اما بوحدات cgs

فيجب ان نكتب ( $\vec{v} \times \vec{B}$ ) ( $q/c$ ) حيث  $\vec{F}$  تقاس

بالداينات و  $q$  بالوحدات الالكتروستاتيكية و  $c$  سرعة الضوء وتساوى

$3 \times 10^{10}$  سم / ثانية و  $\vec{B}$  بالكاوس ( لاحظ خط الهامش (٣) )

## مَسْأَلَةٌ

لنختبر حركة جسم مشحون في مجال مغناطيسي منتظم ثابت ، لنختار محور  $z$  باتجاه المجال ، أي ، اننا سنكتب

$$\vec{B} = \hat{k}B$$

والمعادلة التفاضلية للحركة تكون على النحو التالي

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q(\vec{v} \times \hat{k}B) = qB \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= m(\hat{i}\ddot{x} + \hat{j}\ddot{y} + \hat{k}\ddot{z}) = qB(\hat{i}\dot{y} - \hat{j}\dot{x})$$

ومساواة المركبات ، نحصل على

$$m\ddot{x} = qB\dot{y}$$

$$m\ddot{y} = -qB\dot{x} \quad (44-4)$$

$$\ddot{z} = 0$$

نصادف هنا ، ولأول مرة ، مجموعة من المعادلات التفاضلية للحركة ليست من النوع القابلة للفرز ، ولكن حلها بسيط نسبياً لان بإمكاننا تكاملها مباشرة بالنسبة للزمن  $t$  لنحصل على

$$m\dot{x} = qBy + c_1$$

$$m\dot{y} = -qBx + c_2$$

$$\dot{z} = \text{constant} = \dot{z}_0$$

أو

$$\dot{x} = \omega y + C_1$$

$$\dot{y} = -\omega x + C_2$$

$$\dot{z} = \dot{z}_0$$

(45-4)

حيث استخدمنا الاختصاره  $\omega = \frac{qB}{m}$  . وتمثل  $\omega$  ثابت التكامـل

و  $\sigma_1 = \frac{c_1}{m}$  ،  $\sigma_2 = \frac{c_2}{m}$  • وعند تعويض  $\ddot{y}$  من المعادلة الثانية

لمجموعة المعادلات (٤ - ٤٥) في المعادلة الاولى من مجموعة المعادلات (٤ - ٤٤) نحصل على المعادلة المفروزة لـ  $x$  التالية

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 a \quad (٤٦ - ٤)$$

حيث  $a = \frac{\theta_2}{\omega^2}$  • وواضح ان حل هذه المعادلة هو

$$x = a + A \cos (\omega t + \theta_0) \quad (٤٧ - ٤)$$

حيث  $\theta_0$  ،  $A$  يمثلان ثابتي التكامل • والان ، اذا فاضلنا بالنسبة للزمن  $t$  نحصل على

$$\dot{x} = -A \omega \sin (\omega t + \theta_0) \quad (٤٨ - ٤)$$

وعند تعويض  $\dot{x}$  من المعادلة المذكورة اعلاه في الطرف الايسر من اولى معادلات (٤٥-٤) وحل المعادلة الناتجة للمتغير  $y$  • النتيجة تكون

$$y = b - A \sin (\omega t + \theta_0) \quad (٤٩ - ٤)$$

حيث  $b = -c_1 / \omega$  • ولايجاد شكل مسار الحركة ، نحذف  $t$  بين المعادلتين (٤٧ - ٤) و (٤٩ - ٤) فنحصل على

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = A^2 \quad (٥٠ - ٤)$$

اي ان مسقط مسار الحركة على المستوى  $xy$ - هو دائرة نصف قطرها  $A$  ومركزها في النقطة ( $a$  و  $b$ ) • لما كان الانطلاق من المعادلة الثالثة لمجموعة المعادلات (٤٥-٤) ثابتا باتجاه  $z$  نستنتج ان مسار الحركة حلزوني الشكل • ويكون محور المسار الحلزوني باتجاه المجال المغناطيسي كما هو مبين في الشكل (٤-٧) •

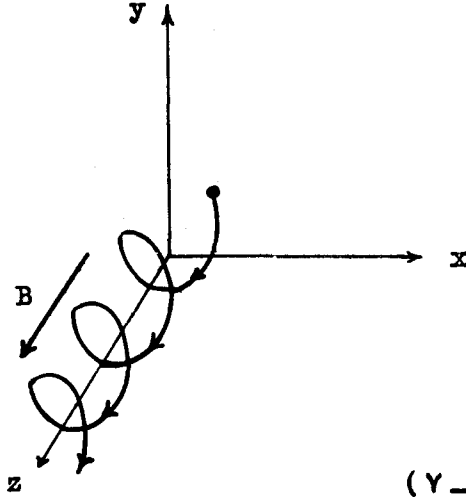


ونحصل من المعادلة (٤٨ - ٤) على

$$\dot{y} = -A \omega \cos(\omega t + \theta) \quad (٥١ - ٤)$$

عند حذف  $t$  بين المعادلة (٤٨ - ٤) والمعادلة (٥١ - ٤) نجد ان

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = A^2 \omega^2 = A^2 \left(\frac{qB}{m}\right)^2 \quad (٥٢ - ٤)$$



الشكل (٤ - ٧)

المسار الحلزوني لجسيم مشحون يتحرك في مجال مغناطيسي

ومتعريف  $v_1 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$  ، نرى ان نصف قطر الحلزون  $A$  يكـون كالاتي

$$A = \frac{v_1}{\omega} = v_1 \frac{m}{qB} \quad (٥٣ - ٤)$$

اذا كانت لاتوجد مركبة للسرعة باتجاه  $z$  ، فالمسار يكون دائرة نصف قطرها  $A$ .  
وواضح ان  $A$  يتناسب طرديا مع الانطلاق  $v_1$  ، والتردد الزاوي  $\omega$  للحركة  
في المسار الدائري لا يعتمد على الانطلاق ، وتسمى  $\omega$  بتردد السايكترون ، وقد اخترع  
ارنست لمرنس Ernest Lawrence السايكترون ، الذي يعتمد عمله على حقيقة

كون  $\vec{R}$  لا تعتمد على انطلاق الجسم المشحون .

#### (٩-٤) حركة الجسم المقيدة Constrained Motion of a Particle

عندما يكون الجسم المتحرك مقيدا هندسيا بالمفهوم الذي يجب ان يبقى فيه على منحنى او سطح معين محدود ، فيقال عندئذ عن الحركة بانها مقيدة . من امثلة الحركة المقيدة قطعة الجليد المنزلق حول وداخل اناء نصف كروي او الخرزة المنزلقة على سلك . والتقيد قد يكون كاملا كما في مثال الخرزة او قد يكون من جانب واحد كالمثال الاول . والمقيدات قد تكون ثابتة او متحركة . وفي هذا الفصل سندرس المقيدات الثابتة فقط .

#### (١٠-٤) معادلة الطاقة للمقيدات الملساء

#### The Energy Equation for Smooth Constraints

القوة الكلية الموضرة على جسم مقيد الحركة تساوى المجموع الاتجاهي للقوة الخارجية  $\vec{F}$  وقوة التقيد  $\vec{R}$  . القوة الاخيرة هي رد فعل المقيد على الجسم . اذن يمكن كتابة معادلة الحركة على النحو التالي .

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{R} \quad (٥٤-٤)$$

اذا ضربنا طرفي المعادلة عدديا بالسرعة  $\vec{v}$  نحصل على

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v} + \vec{R} \cdot \vec{v} \quad (٥٥-٤)$$

في حالة التقيد الامس - مثل السطح عديم الاحتكاك - يكون رد الفعل  $\vec{R}$  عموديا على السطح او المنحني بينما تكون السرعة  $\vec{v}$  مماسة له . لذلك يتلاشى الضرب العددي  $\vec{R} \cdot \vec{v}$  لان  $\vec{R}$  يكون عموديا على  $\vec{v}$  . والمعادلة (٥٥ - ٤) (

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad \text{تصبح}$$

لذلك ، اذا كانت  $\vec{F}$  محافظة ، يكون بإمكاننا التكامل كما في البند (٤-٥) والحصول على نفس معادلة الطاقة اى -

$$\frac{1}{2} mv^2 + V(x,y,z) = \text{constant} = E \quad (٤-٥٦)$$

اى ان الجسيم ولويبقى على السطح او المنحني ، لكنه يتحرك ، بمسار بحيث تكون الطاقة الكلية ثابتة . وهذه طبعا هي حالة التقيد الاملى .

### مثال

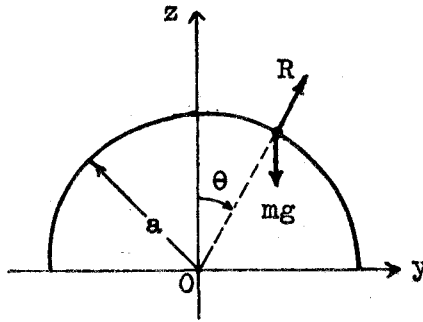
ضع جسيم على قمة كرة ملساء نصف قطرها  $a$  . اذا ازبح الجسيم قليلا ، ففي ايئة نقطة سوف يترك الكرة ؟

القوى المؤثرة على الجسيم هي قوة الجذب الارضي الى الاسفل وقوة رد فعل السطح الكروي  $\vec{R}$  . فمعادلة الحركة اذن تكون

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{R}$$

لنختار الاحداثيات كما هو مبين في الشكل (٤ - ٨) . فالطاقة الكامنة عندئذ تكون  $mgz$  ، ومعادلة الطاقة تصبح

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = E$$



الشكل (٤ - ٨) القوى المؤثرة على جسيم ينزل على كرة ملساء

من الشروط الابتدائية (  $v = 0$  لـ  $z = a$  ) تكون  $E = mga$  .

لذلك ، انطلق الجسم عند انزلاقه الى الاسفل يكون

$$v^2 = 2g(a - z)$$

والآن ، اذا اخذنا المركبات القطبية لمعادلة الحركة ، يمكننا كتابة معادلة القوة على النحو التالي

$$-\frac{mv^2}{a} = -mg \cos \theta + R = -mg \frac{z}{a} + R$$

اذن

$$R = mg \frac{z}{a} - \frac{mv^2}{a} = mg \frac{z}{a} - \frac{m}{a} 2g(a - z)$$

$$= \frac{mg}{a} (3z - 2a)$$

اذن  $R$  تساوى صفرا عندما تكون  $z = \frac{2a}{3}$  ، اى في النقطة التي يترك فيها الجسم الكرة ، يمكن معرفة هذه ، من حقيقة كون تغير اشارة  $R$  هنا ، من الموجب الى السالب .

#### (١١-٤) الحركة على منحنى Motion on a Curve

للحالة التي تكون فيها حركة الجسم مفيدة على منحنى معين ، فمعادلة الطاقة مع معادلات المنحنى بشكلها البارمترى parametric form

$$x = x(s) \quad y = y(s) \quad z = z(s) \quad (٥٧-٤)$$

تكفي لحساب الحركة . ( البارمتر  $s$  يمثل المسافة المقاسة على طول المنحنى من نقطة مرجعية اعتباطية ) . ويمكن ايجاد الحركة اذا اخذنا بنظر الاعتبار مكانية تمثيل الطاقة الكامنة كدالة للموضع  $s$  فقط ، بينما الطاقة الحركية عبارة عن  $\frac{1}{2}ms^2$  . اذن يمكن كتابة معادلة الطاقة كالآتي

$$\frac{1}{2}ms^2 + V(s) = E \quad (٥٨-٤)$$

ومن هذه المعادلة يمكن ايجاد  $s$  ( اى  $x, y, z$  ) بالتكامل .

وهناك طريقة اخرى ، وهي بتفاضل المعادلة المذكورة اعلاه بالنسبة للزمن  $t$  واختصار

العامل المشترك  $\delta$  لنحصل على المعادلة التفاضلية التالية لحركة الجسم .

$$m\ddot{s} + \frac{dV}{ds} = 0 \quad (٥٩-٤)$$

وهذه تكافئ المعادلة

$$m\ddot{s} - F_s = 0 \quad (٦٠-٤)$$

حيث  $F_s$  تمثل مركبة القوة الخارجية  $\vec{F}$  باتجاه  $s$  ، وهذا يعني ان

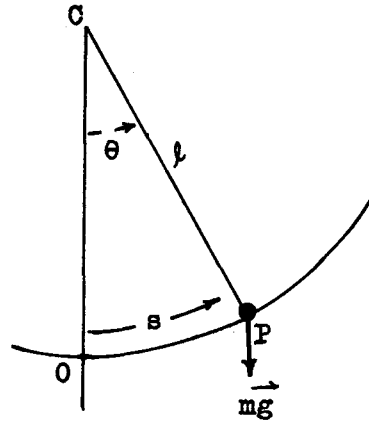
$$F_s = - \frac{dV}{ds}$$

### The Simple Pendulum

### (١٢-٤) البندول البسيط

ان ما ذكرناه توا ، يوضح بصورة جيدة ، بواسطة البندول البسيط ، وهو عبارة عن جسم ثقيل مربوط بطرف قضيب او حبل خفيفين غير قابلين للشد او البسط ، وتكون الحركة بمستو شاقولي ، والبندول البسيط يكافئ ، ايضا من الناحية الديناميكية الخرزة المنزقة على سلك دائري امس في موضع شاقولي ، كما هو مبين في الشكل (٤-٩) .

افرض ان  $\theta$



الشكل (٩-٤) البندول البسيط

تمثل الزاوية التي يصنعها الخيط CP مع الشاقول حيث C هي مركز المسار

الدائري و P الموضع الآتي للجسيم . تقاس المسافة s من موضع الاستقرار . 0  
 ومن الشكل نرى ان المركبة  $F_g$  لقوة الجذب الارضي mg باتجاه s هي  
 $-mg \sin \theta$  . فاذا كان l يمثل طول البندول عند  $\theta = s/l$  . والمعادلة  
 التفاضلية للحركة تصبح

$$m\ddot{s} + mg \sin\left(\frac{s}{l}\right) = 0$$

او قد نكتبها بدلالة  $\theta$  على النحو الآتي -

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (٤ - ٦١)$$

ويجب ملاحظة ان الطاقة الكامنة v هي mgz حيث z هي المسافة العمودية  
 للجسيم من النقطة 0 ، اي -

$$\begin{aligned} v &= mgz = mg l (1 - \cos \theta) \\ &= mg l - mg l \cos\left(\frac{s}{l}\right) \end{aligned}$$

اذن

$$-\frac{dv}{ds} = -mg \sin\left(\frac{s}{l}\right) = -mg \sin \theta = F_g .$$

لايجاد الحل التقريبي لمعادلة الحركة التفاضلية . نفرض ان  $\theta$  تبقى صغيرة .

ففي هذه الحالة

$$\sin \theta \simeq \theta$$

وهذا نحصل على

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (٤ - ٦٢)$$

وحل هذه المعادلة ، كما رأينا في البند (٣ - ٨) هو

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) \quad (٤ - ٦٣)$$

حيث  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  ،  $\theta_0$  تمثل سعة التذبذب و  $\phi_0$  هي عامل الطور . اذن ،

الى الحد الذي يكون فيه تقريب  $\sin \theta$  الى  $\theta$  سارى المفعول تكون الحركة  
 توافقية بسيطة ، وزمن تذبذبها  $T_0$  هو

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (٦٤-٤)$$

وهي العلاقة البسيطة المشهورة .

(١٣-٤) الحل الأكثر دقة لمسألة البندول البسيط والمتذبذب غير الخطي

More Accurate Solution of the Simple Pendulum  
Problem and the Nonlinear Oscillator:

المعادلة التفاضلية لحركة البندول البسيط

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

هي حالة خاصة من المعادلات التفاضلية العامة لحركة تحت تأثير قوة معيَّدة غير خطية ، أي ، قوة تتغير بنمط ما غير التناسب المباشر مع الازاحة . ويمكن كتابة المعادلة العامة في خط مستقيم بدون تضالُّول على النحو التالي

$$\ddot{\xi} + f(\xi) = 0 \quad (٦٥-٤)$$

حيث المتغير  $\xi$  يمثل الازاحة من موضع الاستقرار ، بحيث  $f(0) = 0$

تتطلب المعادلات التفاضلية غير الخطية ، اعتياديا ، بعض الطرق التقريبية لحلها . افترض ان الدالة  $f(\xi)$  قد فكت كتسلسلة اساسية power series في  $\xi$  ،

$$f(\xi) = a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + \dots \quad \text{اي}$$

عندئذ المعادلة التفاضلية للحركة تصبح

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + \dots = 0 \quad (٦٦-٤)$$

هذا هو شكل مفكوك معادلة الحركة العامة لمتذبذب غير خطي بدون تضالُّول الحد  $a_1 \xi$  في المعادلة المذكورة اعلاه هو الحد الخطي . اذا كان هذا الحد طافيا ، اي ، اذا كان  $a_1$  اكبر بكثير من المعاملات الاخرى ، عندئذ تكون الحركة تقريبا

توافقية بسيطة بتردد زاوى مقداره  $a_1^{\frac{1}{3}}$  • ولايجاد الحل الاكثر دقة يجب اخذ  
بنظر الاعتبار الحدود غير الخطية المتبقية •

لتوضيح ذلك • دعنا نعود الى مسألة البندول البسيط • فاذا استخدمنا

المتسلسلة

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

واحتفظنا بالحددين الاول والثاني فقط • فنحصل على

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta - \frac{g}{6l} \theta^3 = 0 \quad (٦٧-٤)$$

كتقريب ثان للمعادلة التفاضلية للحركة • نعلم • قبل كل شيء • ان الحركة توافقية  
ولنفرض اننا نجرب حلا بشكل دالة جيبيية بسيطة مثل •

$$\theta = A \cos \omega t$$

فعند تعويض هذه • في المعادلة التفاضلية • نحصل على

$$-A \omega^2 \cos \omega t + \frac{g}{l} A \cos \omega t - \frac{g}{6l} A^3 \cos^3 \omega t = 0$$

او عند استخدام المتطابقة المثلثية

$$\cos^3 u = \frac{3}{4} \cos u + \frac{1}{4} \cos 3u$$

وتجميع الحدود • نحصل على

$$\left(-A \omega^2 + \frac{g}{l} A - \frac{gA^3}{8l}\right) \cos \omega t - \frac{gA^3}{24l} \cos 3\omega t = 0$$

وماستثناء الحالة الاعتيادية  $A = 0$  • نرى ان المعادلة المذكورة اعلاه لا يمكن

ان تصح لجميع قيم  $t$  • لذلك دالة اختبارنا  $A \cos \omega t$  لا يمكن ان تكون حلا •

بسبب ظهور الحد  $\cos 3 \omega t$  في المعادلة المذكورة اعلاه • ولكن قد تتوقع ان

الحل الاختبارى بشكل

$$\theta = A \cos \omega t + B \cos 3 \omega t \quad (٦٨ - ٤)$$



سيكون تقريبها افضل من  $A \cos \omega t$  وقد ثبت ان هذه هي الحالة المقصودة .  
 فاذا عوضنا الحل المذكور اعلاه في المعادلة (٦٧-٤) ، نحصل ، بعد اجراء  
 عمليات مشابهة للعمليات السابقة ، على المعادلة التالية -

$$(-A\omega^2 + \frac{g}{l} A - \frac{gA^3}{8l}) \cos \omega t + (-9B\omega^2 + \frac{g}{l} B - \frac{9gA^3}{24l}) \cos 3\omega t \\ + (\text{حدود ل B مرفوعة لقوى اكبر ، و اعلى مضاعفات ل } \omega t) = 0$$

مرة اخرى لاتصح المعادلة لجميع قيم  $t$  ، ولكن ستكون دقة حلنا التقريبي معقولة  
 اذا امكن وضع كل من معامل الحدين الاولين لجيوب التمام مساويا للصفر كل على  
 انفراد . اي ان

$$-A\omega^2 + \frac{g}{l} A - \frac{gA^3}{8l} = 0, \quad -9B\omega^2 + \frac{g}{l} B - \frac{9gA^3}{24l} = 0$$

من المعادلة الاولى

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \left(1 - \frac{A^2}{8}\right) \quad (٦٩-٤)$$

من قيمة  $\omega^2$  هذه ، نجد من المعادلة الثانية ان

$$B = -A^3 \frac{1}{3(64 + 27 A^2)} \approx -\frac{A^3}{192}$$

الان ، من معادلة حلنا الاختباري (٦٨-٤) نرى ان السعة  $\theta_0$  لتذبذب البندول

$$\theta_0 = A + B \quad \text{هي}$$

$$= A - \frac{A^3}{192}$$

او ، اذا كانت A صغيرة

$$\theta_0 \approx A$$

معنى المعادلة (٦٩-٤) الان واضح . ويعتمد تردد التذبذب على السعة  $\theta_0$   
 والحقيقة يمكننا كتابته ،

$$\omega \approx \sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 - \frac{1}{8} \theta_0^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \simeq 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1 - \frac{1}{8} \theta_0^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{او لزمن الذبذبة}$$

$$\simeq 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \dots) \quad (٧٠-٤)$$

$$\simeq T_0 (1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \dots)$$

حيث  $T_0$  تمثل زمن الذبذبة لسعة مقدارها صفر كما حصلنا على ذلك في البنسـد (١٢-٤) ان التحليل السابق وان كان على نحو لا يمكن معه انكار عدم اتقانه ، الا انه يوضح مظهرين جوهريين للتذبذب الحر تحت تاثير قوة معيدة غير خطية ، وهي ان زمن ذبذبة الاهتزاز هي دالة لسعة الاهتزاز ، ثم التذبذب ليس تاما داله جيبييه وانما يمكن اعتباره تداخلا من خليط من التوافقيات harmonics . ويمكن البرهنة على ان الاهتزاز لجهاز غير خطي ، مدفوع بقوة دافعة جيبييه نقيسة سيكون مشوها ايضا ، اى انه سوف يحتوى على توافقيات ، فمثلا مكبر الصوت لمستلم الراديو او جهاز الهياى فائى قد يحدث تشوها (توافقيات) فوق وعلى تلك التي ادخلت من اجهزة التكبير الالكروني .

(١٤-٤) الحل الدقيق لحركة البندول البسيط بدلالة التكاملات الموجزة

Exact Solution of the Motion of the Simple Pendulum  
by Means of Elliptic Integrals:

يمكن كتابة معادلة الطاقة من تعبير الطاقة الكامنة للبندول البسيط كالانسي -

$$\frac{1}{2} m (\dot{\theta})^2 + mg l (1 - \cos \theta) = E \quad (٧١-٤)$$

اذا سحب البندول جانبها بزاوية  $\theta_0$  (السعة) واطلق ( $\dot{\theta}_0 = 0$ ) ، عندئذ

$$E = mg l (1 - \cos \theta_0) \quad \cdot \text{وتصبح المعادلة المذكورة اعلاه بعد نقل}$$

الحدود والقسمة على  $m l^2$  ، على النحو التالي -

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (٧٢-٤)$$

وعند استعمال المتطابقة  $\cos \theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$  ، يمكن كتابتها كالانسي

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{l} \left( \sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (٧٣-٤)$$

من المناسب تمثيل الحركة بدلالة المتغير  $\phi$  المعروف بالمعادلة

$$\sin \phi = \frac{\sin (\theta/2)}{\sin (\theta_0/2)} = \frac{1}{k} \sin \frac{\theta}{2} \quad (٧٤-٤)$$

وهندفاضلها بالنسبة للزمن  $t$  ، نحصل على

$$(\cos \phi) \dot{\phi} = \frac{1}{k} \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \frac{\dot{\theta}}{2} \quad (٧٥-٤)$$

من المعادلتين (٧٤-٤) و (٧٥-٤) يمكننا تحويل المعادلة (٧٣-٤) بسهولة الى معادلة مناظرة بدلالة  $\phi$  ، اى

$$\dot{\phi}^2 = \frac{g}{l} (1 - k^2 \sin^2 \phi) \quad (٧٦-٤)$$

عندئذ يمكن ايجاد العلاقة بين  $\phi$  و  $t$  بفرض المتغيرات والتكامل

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{l}{g}} F(k, \phi) \quad (٧٧-٤)$$

وتسمى الدالة

$$F(k, \phi) = \int_0^{\phi} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-\frac{1}{2}} d\phi$$

بالتكامل الموجز الناقص من النوع الاول Incomplete elliptic integral- of the first kind.

وحسب زمن ذبذبة البندول بملاحظة زيادة  $\theta$  من 0 الى  $\theta_0$  بربع دورة واحدة .

لذلك نرى ان  $\phi$  تتغير من 0 الى  $\frac{\pi}{2}$  بنفس الفترة الزمنية . اذن يمكننا

كتابة زمن الذبذبة  $T$  كالآتى

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K(k) \quad (٧٨-٤)$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-\frac{1}{2}} d\phi = F(k, \pi/2) \quad \text{وتسمى الدالة}$$

بالتكامل الموجز التمام من النوع الاول . وهناك جداول <sup>(٥)</sup> رتب فيها قيم التكاملات الموجزة . على اية حال يمكن ايجاد علاقة جبرية مقربة وذلك بفك تكامل المعادلة (٧٨-٤) باستخدام نظرية ذات الحدين ، والتكامل حدا فحدا .  
والنتيجة تكون

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} (1 + \frac{k^2}{2} \sin^2 \theta + \dots) d\theta$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + \frac{k^2}{4} + \dots) \quad (٧٩-٤)$$

والان لقيم صغيرة للسعة  $\theta_0$  ، نحصل على

$$k^2 = \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \simeq \frac{\theta_0^2}{4}$$

لذلك يمكننا كتابة التقريب

$$T \simeq 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \dots) \quad (٨٠-٤)$$

الذي يتفق مع قيمة  $T$  التي استنتجت في الهند السابق .

### مثال

جد زمن ذبذبة بندول بسيط يهتز بسعة (٢٠) درجة . استخدم جداول التكاملات الموجزة ، وقارنها ايضا مع القيم المحسوبة بالتقريب المذكورة اعلاه .

(٥) انظر في كتاب L. M. Milne-Thomson, Jacobian Elliptic Function Tables, Dover, New York, 1950, or B. O. Peirce, A Short Table of Integrals, Ginn, Boston, 1929.

$$k = \sin 10^\circ = 0.17365 \quad \text{للسمة } 20^\circ$$

$$\theta/2 = 0.17453 \text{ radians} \quad \text{و}$$

النواتج هي كما يلي

من الجداول والمعادلة (٧٨-٤)

$$T = 4 \sqrt{l/g} K(10^\circ) = \sqrt{l/g} (6.3312)$$

من المعادلة (٧٩-٤)

$$T = 2\pi \sqrt{l/g} (1 + \frac{1}{4} \sin^2 10^\circ) = \sqrt{l/g} (6.3306)$$

من المعادلة (٨٠-٤)

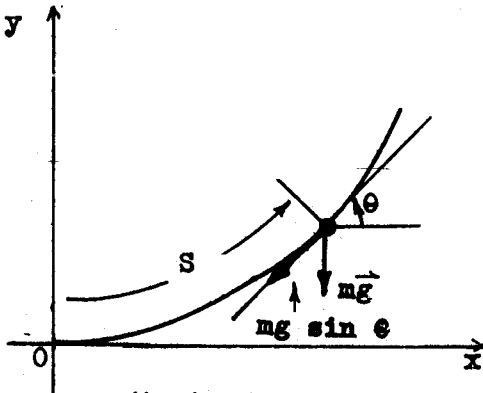
$$T = 2\pi \sqrt{l/g} (1 + \theta^2/16) = \sqrt{l/g} (6.3310)$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{l/g} = \sqrt{l/g} (6.2832) \quad \text{العلاقة الابتدائية}$$

### The Isochronous Problem

(١٥-٤) مسألة تساوى الزمن

من المتع تحرى السؤال فيما اذا كان هناك منحني مقيد ام لا ، بحيث يتذبذب فيه الجسم تحت تأثير الجاذبية الارضية بازمان متساوية ، اى بزمن ذبذبة لا يعتمد على السعة



الشكل (١٠-٤) القوى المؤثرة في حالة تساوى الزمن

افرض ان  $\theta$  تمثل الزاوية بين الخط الافقي والماس للمنحني القيد كما هو مبين في الشكل (١٠-٤) • عندئذ تكون مركبة الجذب الارضي باتجاه الحركة  $-mg \sin \theta$  والمعادلة التفاضلية للحركة على طول المسار القيد (افرضه املى) عندئذ تكون

$$m\ddot{s} = -mg \sin \theta \quad (٨١-٤)$$

ولكن اذا كانت المعادلة المذكورة اعلاه تمثل حركة توافقية بسيطة على طول المنحني، فيجب ان نحصل على -

$$m\ddot{s} = -ks \quad (٨٢-٤)$$

اذن، المنحني القيد الذى يستوفي المعادلة

$$s = c \sin \theta \quad (٨٣-٤)$$

سيسبب حركة توافقية بسيطة •

الان يمكننا ايجاد  $x$  و  $y$  بدلالة  $\theta$  من المعادلة المذكورة اعلاه كالاتي

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{d\theta} = (\cos \theta) (c \cos \theta)$$

اذن

$$x = \int c \cos^2 \theta d\theta = \frac{c}{4} (2\theta + \sin 2\theta) \quad (٨٤-٤)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{d\theta} = (\sin \theta) (c \cos \theta) \quad \text{والمثل}$$

وهكذا

$$y = \int c \sin \theta \cos \theta d\theta = -\frac{c}{4} \cos 2\theta \quad (٨٥-٤)$$

تمثل (٨٤-٤) و (٨٥-٤) محادلات البارمتر الدوري cycloid • لذلك

سيسبب المنحني القيد الذى على شكل ديمورى حركة تتغير فيها  $s$  توافقيا مع الزمن •

وسوف لا يعتمد زمن الذبذبة على السعة • وكنتيجة طبيعية • نرى ان الجسم الذي يبدأ من السكون على منحني دوري املس سيستغرق نفس الزمن ليصل الى القعر بغض النظر عن نقطة البداية •

لقد اكتشف الفيزيائي والرياضي الهولندي كريستيان هويجنس *Christiaan Huygens*

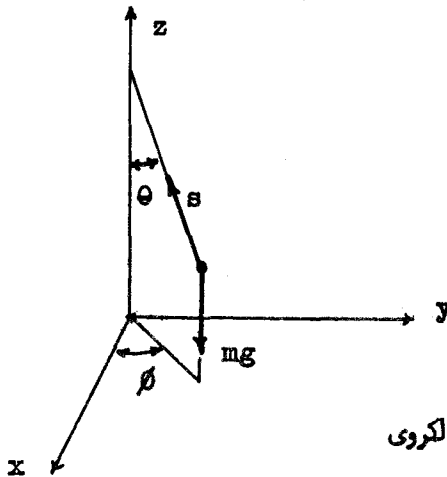
الحقائق المذكورة اعلاه لعلاقتها بالمحاولات التي اجراها لتحسين بندول الساعات • كذلك اكتشف نظرية المحلات الهندسية لمراكز الانحناء ( *evolute* ) ووجد ان المحل الهندسي لمركز انحناء الدوري هو دوري ايضا • اذن عند تجهيز البندول (بحدود) دورية • فان حركة كرة البندول • يجب ان تتبع مسارا دوريا وزمنا الذبذبة اذن لا يعتمد على السعة • وبالرغم من براءة الاختراع • الا انه لم يستغل ابدا في تطبيقات عملية •

The Spherical Pendulum

(١٦-٤) البندول الكروي

من امثلة الحركة المقيدة الكلاسيكية حركة جسم على سطح كروي املس • كانسزلاق كتلة صغيرة داخل وحول اناء كروي املس • وقد تمثل الحالة بصورة ملائمة بواسطة كرة عميلة مبربوطة في نهاية ستر او قضيب غير قابل للمطاو والبسط وتتاخرج بحريسة بأى اتجاه كان حول نقطة ثابتة • كما هو مبين في الشكل (٤-١١) وهذا يسمى بالبندول

الكروي



الشكل (٤-١١) البندول الكروي

## الحل التقريبي بالاحداثيات الديكارتية

هناك قوتان تؤثران على الجسم ، هما قوة الجذب الارضي التي تتجه نحو الاسفل وقوة الشد  $\vec{S}$  في القضيب المقيد او الوتر . عندئذ تكون المعادلة التفاضلية للحركة

$$m\vec{r} = m\vec{g} + \vec{S} \quad (٨٦-٤)$$

اذا اخذنا المحور  $z$  بالاتجاه الشاقولي ، تكون مركبات معادلة الحركة بدلالة الاحداثيات الديكارتية ، على النحو التالي

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= S_x \\ m\ddot{y} &= S_y \\ m\ddot{z} &= S_z - mg \end{aligned} \quad (٨٧-٤)$$

يمكن ايجاد حل تقريبي بسهولة عندما تكون الازاحة عن موضع الاستقرار صغيرة جدا ، حيث يكون مقدار الشد ثابتا تقريبا ومساويا الى  $mg$  ولما كانت  $|x| \ll l$

عندئذ مركبات  $x$  و  $y$  للشد  $\vec{S}$  تعطى بالعلاقات التالية

$$S_x \approx -mg \frac{x}{l} \quad S_y \approx -mg \frac{y}{l}$$

والتي يمكن تحقيقها بسهولة من هندسة الشكل . ومعادلات  $x$  -  $y$  التفاضلية للحركة عندئذ تصبح

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{g}{l} x &= 0 \\ \ddot{y} + \frac{g}{l} y &= 0 \end{aligned} \quad (٨٨-٤)$$

وهذه مماثلة لمعادلات المتذبذب التوافقي ذي البعدين الذي سبق وان بحثناه فسي

(٧-٤) والحلول هي

$$x = A \cos (\omega t + \alpha) \quad (٨٩-٤)$$

$$y = B \cos (\omega t + \beta)$$

حيث

$$\omega = \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (٩٠-٤)$$



كما فسي البندول المستوى البسيط .  
الى الحد الذي تكون فيه تقريبا تناسلية المفعول ، يكون مسقط الحركة على المستوى  
-  $x, y$  قطعا ناقصا . هناك ، طبعا ، حالات خاصة يكون فيها المسقط خطا  
مستقيما او دائرة ويعتمد ذلك على الشروط الابتدائية .

الحل باستخدام الاحداثيات الكروية  
سنستخدم الاحداثيات الكروية كما عرفت في الشكل (٤-١١) لمعالجة البندول  
الكروي بدقة اكثر من التي ذكرت اعلاه . هناك للشد  $\vec{S}$  مركبة قطبية واحدة فقط  
بينما للثقل  $m\vec{g}$  مركبتان قطبية  $mg \cos \theta$  ومستعرضة  $-mg \sin \theta$  لذلك  
يمكن تحليل المعادلة التفاضلية للحركة بالاحداثيات الكروية على النحو التالي -

$$\begin{aligned} ma_r &= F_r = mg \cos \theta - S \\ ma_\theta &= F_\theta = -mg \sin \theta \\ ma_\phi &= F_\phi = 0 \end{aligned} \quad (٤-٩١)$$

سبق وان استنبطت مركبات التعجيل الثلاث  $a_\theta, a_\phi, a_r$  في الفصل الثاني ،

$$\text{البند (٢-٩) ، ولما كان التقييد هو } r = l = \text{constant}$$

فيمكننا اهمال المركبة القطبية للتعجيل ، والمركبتان الاخرتان تصبحان -

$$\begin{aligned} a_\theta &= l \ddot{\theta} - l \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ a_\phi &= l \ddot{\phi} \sin \theta + 2l \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \end{aligned}$$

ومعد نقل الحدود واجراء الاختصارات الضرورية تصبح المعادلات التفاضلية  
في  $\theta, \phi$  على النحو التالي -

$$\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (٤-٩٢)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{dt} (\dot{\phi} \sin^2 \theta) = 0 \quad (٤-٩٣)$$

المعادلة الثانية تعني ان الكمية المحصورة بين القوسين ثابتة ، فلنسمها  $h$  .

عندئذ يمكننا كتابة

$$\dot{\theta} = \frac{h}{\sin^2 \theta} \quad (٩٤ - ٤)$$

عندتصويص قيمة  $\dot{\theta}$  المذكورة اعلاه في المعادلة (٩٢-٤) ، نحصل على  
المعادلة المفروزة نسي  $\theta$  التالية -

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta - h^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} = 0 \quad (٩٥ - ٤)$$

من المستحسن تناول بعض الحالات الخاصة في هذا الصدر . اولا اذا كانت الزاوية  
 $\theta$  ثابتة ، عندئذ  $\dot{\theta} = 0$  ولذلك  $h = 0$  . اذن تصبح المعادلة

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (٩٥ - ٤) \text{ كالاتي -}$$

وهذه هي بالضبط المعادلة التفاضلية للبندول البسيط . والحركة تحدث فسي

المستوى  $\theta = \theta_0 = \text{constant}$  ( ثابت )

الحالة الخاصة الثانية هي البندول المخروطي conical pendulum

الذي فيه ( ثابت )  $\theta = \theta_0 = \text{constant}$  . وفي هذه الحالة  $\ddot{\theta} = 0$

و  $\ddot{\theta} = 0$  ، لذلك تختصر المعادلة (٩٥-٤) الى

$$\frac{g}{l} \sin \theta_0 - h^2 \frac{\cos \theta_0}{\sin^3 \theta_0} = 0$$

او

$$h^2 = \frac{g}{l} \sin^4 \theta_0 \sec \theta_0 \quad (٩٦ - ٤)$$

من قيمة  $h$  المبينة في المعادلة السابقة ، نجد من المعادلة (٩٤-٤) ، ان

$$\dot{\theta}_0^2 = \frac{g}{l} \sec \theta_0 \quad (٩٧ - ٤)$$

كشرط لحركة البندول المخروطي

يمكن كذلك استنباط المعادلة السابقة ، اذا اخذنا بنظر الاعتبار القوى المؤثرة على الجسم في حركته الدائرية ، كما هو مبين في الشكل (٤-١٢) . التعجيل ثابت

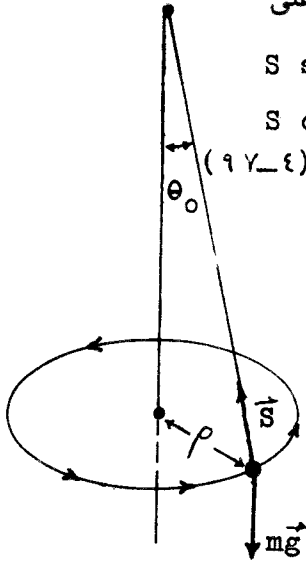
المقداره اى  $\dot{\theta}_0^2 = (l \sin \theta_0) \dot{\theta}_0^2$  ، ويتجه نحو مركز المسار الدائري .

اذن ، عند اخذ المركبات الافقية والعمودية ، نحصل على

$$S \sin \theta_0 = (m l \sin \theta_0) \dot{\theta}_0^2 \quad (٤ - ٩٨)$$

$$S \cos \theta_0 = mg$$

وعند حذف S بين المعادلتين نحصل على المعادلة (٤-٩٧)



الشكل (٤ - ١٢)

الحالة المخروطية للبندول الكروي

لنفرض الان الحالة التي تكون فيها الحركة مخروطية ، الى حد بعيد ، اى ، تبقى قيمة  $\theta$  قريبة من قيمة  $\theta_0$  . فاذا عوضنا عن مقدار  $h^2$  من المعادلة (٤-٩٦) ، في المعادلة التفاضلية المفروزة في  $\theta$  ، اى المعادلة (٤-٩٥) فان النتيجة تكون

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \left( \sin \theta - \frac{\sin^4 \theta_0}{\cos \theta_0} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \right) = 0 \quad (٤ - ٩٩)$$

من الملائم هنا ، ادخال متغير جديد ،  $\xi$  ، والمعروف كما يلي

$$\xi = \theta - \theta_0 \quad (٤-١٠٠)$$

وفك القوس في المعادلة (٤-٩٩) كتسلسلة اساسية في  $\xi$  وفقا للعلاقة القياسية

التالية

$$f\left(\frac{\xi}{\epsilon}\right) = f(0) + f'(0) \frac{\xi}{\epsilon} + f''(0) \frac{\xi^2}{2!} + \dots$$

نجد بعد اجراء العمليات الضرورية ، ان  $f(0) = 3 \cos \theta_0 + \sec \theta_0$  ،  $f'(0) = 0$

ولما كانت تهمننا الحالة التي تكون فيها قيم  $\xi$  صغيرة ، فنسهمل  $\xi$  المرفوعة الى قوى اكبر من واحد ، وذلك نستطيع كتابة المعادلة (١٩-٤) على الشكل التالي-

$$\xi^2 + \frac{g}{l} b \xi = 0 \quad (101-4)$$

حيث  $b = 3 \cos \theta_0 + \sec \theta_0$  . فالحركة بدلالة  $\xi$  او  $\theta$  اذن تكون

$$\xi = \theta - \theta_0 = \xi_0 \cos \left( \sqrt{\frac{gb}{l}} t + \epsilon \right) \quad (102-4)$$

اذن تتذبذب  $\theta$  توافقيا حول القيمة  $\theta_0$  ، بزمن ذبذبة مقداره -

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{gb}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g(3 \cos \theta_0 + \sec \theta_0)}} \quad (103-4)$$

والان قيمة  $\dot{\theta}$  ، من المعادلة (١٤-٩٤) ، لا تتغير كثيرا عن القيمة المبينة فسي

الحركة المخروطية الصرفة  $\dot{\theta}_0$  ، لذلك تزداد  $\dot{\theta}$  باستمرار خلال تذبذب  $\theta$  حول

$\theta_0$  . وقد وضع مسار الجسم في الشكل (٤-١٣) ، وتزداد قيمة زاوية السمث  $\dot{\theta}$

خلال ذبذبة واحدة كاملة للزاوية  $\theta$  بمقدار

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_0 T_1$$

من قيم  $\dot{\theta}_0$  و  $T_1$  المذكورة اعلاه ، نجد بسهولة ان

$$\dot{\theta}_1 = 2\pi (3 \cos^2 \theta_0 + 1)^{-\frac{1}{2}} \quad (104-4)$$

لفرض ان  $m$  تمثل نصف قطر الدائرة عندما تكون  $\theta = \theta_0$  ، كما هو مبين

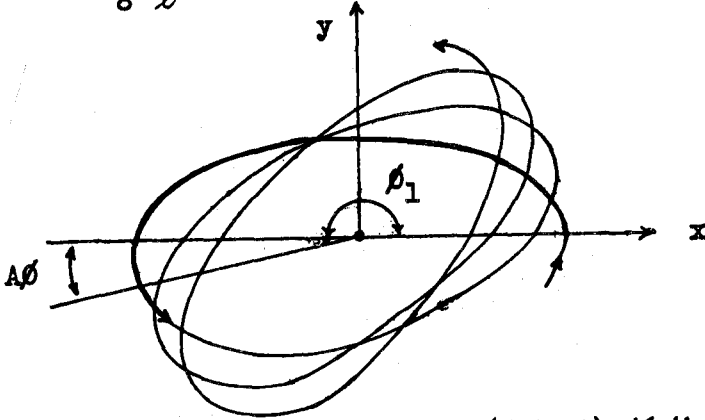
في الشكل (٤-١٢) . عندئذ  $\cos^2 \theta_0 = 1 - m^2/l^2$  وبناء على ذلك يمكن كتابة

$$\dot{\theta}_1 = 2\pi (4 - 3m^2/l^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (104-4) \text{ على النحو التالي}$$

اذن  $\dot{\theta}_1$  اكبر من  $\pi$  بقليل . ومنك القوس لقوى  $m$  ، نجد ان الزيادة  $\dot{\theta}$

تكون

$$\Delta \theta \approx \frac{3\pi \rho^2}{8 l^2} + \dots \quad (105-4)$$



الشكل (٤-١٣)

المسقط على المستوى -  $xy$  لمسار حركة  
البندول الكروي

برهنا في بداية هذا البند ، ان مسقط مسار كرة البندول على المستوى -  $xy$  يكون  
تقريبا قطعاً ناقصاً ، اذا كانت الزاوية  $\theta$  صغيرة . يمكننا الان تفسير النتيجة  
السابقة لتعني ان محور القطع الناقص الاكبر غير مستقر ، وانما يتقدم Precesses بانجا ،  
ازدياد  $\theta$  . حيث يدور محور القطع الناقص بزاوية  $\Delta \theta$  خلال كل ذبذبة كاملة  
في  $\theta$  . كما هو مبين في الشكل (٤-١٣) .

اعتبارات الطاقة - غيات الحركة الشاقولية

Energy Considerations. Limits of the Vertical Motion

من المستحسن استخدام معادلة الطاقة ، لايجاد العلاقة بين سعة الذبذبة  
الشاقولية للبندول الكروي ومرشأت المسألة ، بدلالة رموزنا ، تكون الطاقة الكامنة

$$V = -mg l \cos \theta$$

لايجاد الطاقة الحركية • نستخدم مركبات السرعة بدلالة الاحداثيات الكروية

والتي هي  $(\dot{r}, r\dot{\theta}, r\dot{\phi} \sin \theta)$  اذن • لما كانت ثابت  $r = l$  لذلك

$$\cdot T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \quad \text{نحصل على}$$

عندئذ تصبح معادلة الطاقة

$$E = \frac{m l^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - mg l \cos \theta \quad (106 - \epsilon)$$

لنحل المعادلة المذكورة اعلاه لـ  $\dot{\theta}^2$  • لانجاز ذلك • علينا استخدام العلاقة

التي استنبطت سابقا • والتي  $\dot{\phi} = h/\sin^2 \theta$  • ولنفرض ايضا ان  $\cos \theta = u$  •

وذلك تكون النتيجة

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2E}{ml^2} + \frac{g}{l} u - \frac{h^2}{1-u^2} = f(u) \quad (107 - \epsilon)$$

وجذور المعادلة  $f(u) = 0$  تعطي غايات او نقاط رجوع التذبذب في  $\theta$  • لان  $\dot{\theta} = 0$

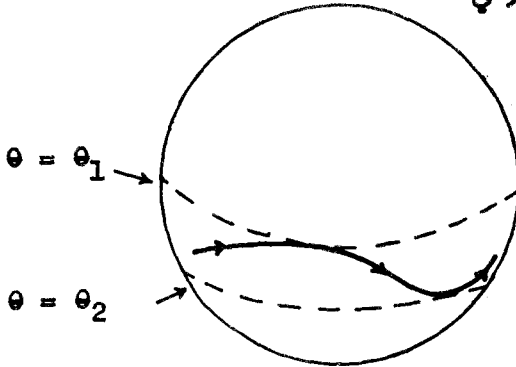
• تتلاشى لهذه الجذور • والحركة تنحصر لقيم  $\theta$  التي تكون فيها  $f(u)$  غير سالبة •

لذلك يقع التذبذب الشاقولي بين دائرتين افقيتين • انظر الشكل (108 - \epsilon) • في

الحالة الخاصة التي يتماوى فيها الجذران الحقيقيان عندئذ تنحصر الحركة بدائرتين

منفردة افقية •

• اي اننا نحصل على حالة البندول المخروطي •



الشكل (108 - \epsilon)

توضيح الحركة الشاقولية

للبنود الكروي

تمارين

٤-١ بايجاد الدوران ( curl ) ، بين أياً من القوى التالية محافظة -

(a)  $\vec{F} = \hat{i}cyz + \hat{j}ozx + \hat{k}oxy$

(b)  $\vec{F} = \hat{i}cyz + \hat{j}oxy + \hat{k}ozx$

(c)  $\vec{F} = \hat{i}\frac{cy}{z} + \hat{j}\frac{cx}{z} - \hat{k}\frac{cxy}{z^2}$

(d)  $\vec{F} = k \frac{\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z}{x^4 + y^4 + z^4}$

(e)  $\vec{F} = k \frac{\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = k\vec{r}/r^4$

(f)  $\vec{F} = k\vec{r}/r^3$

(g)  $\vec{F} = \hat{i}e^{a(x+y)} + \hat{j}e^{b(x+y)} + \hat{k}e^{cz}$

$a \neq b$

حيث

(h)  $a = b$

كما في ( g ) ولكن ضع

٤-٢ جد دالة القوة التي ترافق كلاً من دوال الطاقة الكامنة التالية

(a)  $V = k(x^2 + 2xy + y^2)$

(b)  $V = ax^2 + bxy + cy^2$

(c)  $V = kxy/z^2$

(d)  $V = ke^{a(x+y+z)}$

(e)  $V = ke^{a(x^2+y^2+z^2)}$

(f)  $V = k(x + y + z)^n$

٤-٣ جسم كتلته  $m$  يتحرك في مجال قوة دالة جهده  $V = ax + by^2 + cz^3$  .

إذا مر الجسم من نقطة الاصل بانطلاق  $v_0$  فما هو انطلاقه عندما يمر في

النقطة ( 1 , 1 , 1 ) ؟

٤ - ٤ بين ان تغير الجاذبية مع الارتفاع يمكن حسابه تقريبا من دالة الطاقة الكامنة

$$V = mgz \left( 1 - \frac{z}{R} \right) \quad \text{التالية}$$

حيث R يمثل نصف قطر الارض . جد القوة من دالة الجهد المذكورة اعلاه . ومنها  
جد مركبات المعادلات التفاضلية لحركة القذيفة تحت تأثير قوة كهذه .

٤ - ٥ افرض دالتي القوتين التاليتين -

$$(a) \vec{F} = \hat{i}x + \hat{j}y$$

$$(b) \vec{F} = \hat{i}y - \hat{j}x$$

بين ان ( a ) محافظة وان ( b ) غير محافظة . حقق ان  $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$  لا يعتمد

على مسار التكامل لـ ( a ) ولكنه يعتمد لـ ( b ) . باخذ مسارين بدايتيهما

نقطة الاصل ( 0 , 0 ) ونهايتيهما النقطة ( 1 , 1 ) . لاحد المسارين خذ المستقيم

$x = y$  . وللمسار الاخر خذ المحور  $x$  حتى النقطة ( 1 , 0 ) ثم خذ المستقيم

$x = 1$  الى النقطة ( 1 , 1 ) .

٤ - ٦ في التمرين ( ٤ - ١ ) جد دالة الطاقة الكامنة للقوى المحافظة .

٤ - ٧ اطلقت قذيفة من نقطة الاصل بانطلاق ابتدائي  $v_0$  وميل  $\theta$  مع الافق .

اذا اهملت مقاومة الهواء ، واعتبرت الارض مستوية ، برهن ان القذيفة ستضرب الارض على

$$\text{مسافة} \quad \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

من نقطة الاصل . هذه المسافة تسمى بالمدى الافقي .

٤ - ٨ في التمرين ( ٤ - ٧ ) اذا كانت مقاومة الهواء خطية ، فبرهن على ان النقصان

في المدى الافقي من نقطة الاصل يساوي تقريبا

$$4v_0^3 \gamma \sin \theta \sin 2\theta / 3g$$



٤ - ٩ اغذفت جسيمات من الطين من الحافة العليا لعجلة متدحرجة . اذا كان  $v_0$  الانطلاق الامامي للعجلة ونصف قطرها  $b$  ، اثبت ان اعلى ارتفاع يمكن ان يصله الطين فوق سطح الارض هو

$$b + \frac{v_0^2}{2g} + \frac{gb^2}{2v_0^2}$$

في اية نقطة سيترك الطين محيط العجلة المتدحرجة ؟

٤ - ١٠ وضعت بندقية في اسفل تل انحداره ثابت وليكن  $\theta$  . برهن على ان مدى الهندقية المقاس اعلى انحدار التل هو

$$\frac{2v_0^2 \cos \theta \sin (\theta - \theta)}{g \cos^2 \theta}$$

حيث  $\theta$  تمثل زاوية ميل الهندقية .

٤ - ١١ اثبت ان اعظم قيمة لمدى الانحدار في التمرين السابق هو

$$v_0^2/g (1 + \sin \theta)$$

٤ - ١٢ اكتب مركبات المعادلة التفاضلية لحركة القذيفة ، اذا كانت مقاساة الهـواء متناسب مع مربع الانطلاق . هل المعادلات قابلة للفرز ؟ بين ان مركبة  $x$  للسرعة

$$\dot{x} = \dot{x}_0 e^{-\gamma s} \quad \text{هي}$$

حيث  $s$  هي المسافة التي قطعتها القذيفة على طول مسار الحركة .

٤ - ١٣ اذا علمت ان  $\omega = 2 \text{ sec}^{-1}$  لتذبذب توافقي معين موحد الخواص يتحرك في بعدين . واذا كانت الشروط الابتدائية هي

$$x_0 = 2 \text{ cm}$$

$$\dot{x}_0 = 0$$

$$y_0 = 2 \text{ cm}$$

$$\dot{y}_0 = 4 \text{ cm/sec}$$

جد ثوابت مسار القطع الناقص وارسم القطع الناقص

٤ - ١٤ وضعت ذرة بداخل بلورة شبكية بسيطة مكعبة الشكل . اذا كانت الطاقة الكامنة للتصادم بين اي ذرتين من النوع  $or^{-\alpha}$  حيث  $\alpha, c$  ثوابت و  $r$  المسافة بين الذرتين . اثبت ان الطاقة الكلية للتصادم لذرة معينة مع الذرات الست العائدة لها

والقريبة منها تقريبا تساوى جهد متذبذب توافقى ذى الابعاد الثلاثة

$$V = A + B (x^2 + y^2 + z^2) \quad \text{أى -}$$

حيث  $A, B$  ثوابت • (ملاحظة - افرض ان الذرات الست المجاورة ثابتة ومواضعها

هي النقاط  $(0, 0, \pm d), (0, \pm d, 0), (\pm d, 0, 0)$  والازاحة

•  $(x, y, z)$  للذرة من موضع الاستقرار  $(0, 0, 0)$  صغيرة بالمقارنة مع  $d$  •

٤ - ١٥ جسم وحدوى الكتلة يتحرك في جهد متذبذب توافقى ثلاثى الابعاد • ونحسب

موحد الخواص  $V = x^2 + 2y^2 + 4z^2$  فاذا مر الجسم في نقطة الاصل بانطلاق

مقداره واحد واتجاه  $(1, 1, 1)$  في الزمن  $t = 0$  جد  $x, y, z$  كدوال للزمن •

٤ - ١٦ يتحرك الكترون في مجال قوة يتكون من مجال كهربائى منتظم  $\vec{E}$  ومجال

مغناطيسى منتظم  $\vec{B}$  عموديا على  $\vec{E}$  • افرض ان  $\vec{E} = \hat{j}E$  و  $\vec{B} = \hat{k}B$  • وخذ

موضع الكترون الابتدائى في نقطة الاصل وسرعة ابتدائية  $\vec{v}_0 = \hat{i}v_0$  • واتجاه  $x$  •

جد محصلة الحركة للجسيم • واثبت ان مسار الحركة هو الدورى

$$x = a \sin \omega t + bt$$

$$y = c(1 - \cos \omega t)$$

$$z = 0$$

• مستفاد من الحركة الدورية للالكترتون في المكنترون magnetron وقد استخدم

الصمام الالكترونى للحصول على موجات راديوية عالية التردد •

٤ - ١٧ • وضع جسيم على جانب كرة ملساء نصف قطرها  $b$  وعلى مسافة  $b/2$  من

مستواها المركزى • عند انزلاق الجسيم اسفل جانب الكرة • فباى نقطة سوف يتركها •

٤ - ١٨ • تنزلق خرزة على سلك محلزن املس محوره شاقولى • فاذا كان نصف قطر

الحلزون  $b$  وهناك  $n$  لفه في وحدة الطول • جد تعجيل الخرزة كدالة للزمن •

افرض ان الخرزة تبدأ من السكون •

- ٤ - ١٩ تنزلق خرزة على سلك دائري املس نصف قطره  $b$  . فاذا كان مستوى الحلقة شاقولياً ، وابتدأت الخرزة من السكون من نقطة بمستوى مركز الحلقة .  
 جد انطلاق الخرزة في الاسفل ورد فعل السلك على الخرزة في هذه النقطة .
- ٤ - ٢٠ في التمرين السابق جد الزمن اللازم للخرزة حتى تنزلق الى اسفل الحلقة .  
 اعتبر  $b$  مساوياً الى  $١٠$  سم .
- ٤ - ٢١ استخدم بندول بسيط في تجربة مختبرية لايجاد قيمة  $g$  . اذا كانت مسعة تذبذب البندول  $٣٠^\circ$  ، جد الخطأ الذي يسببه استخدام العلاقة الابتدائية التالية -  

$$T = 2\pi \sqrt{l/g}$$
- ٤ - ٢٢ بندول كروي طوله متر واحد يصنع ذبذبات صغيرة حول الزاوية المخروطية  $\theta_0$  .  
 اذا كانت  $\theta_0$  تساوى  $٣٠^\circ$  ، جد زمن ذبذبة الحركة المخروطية  $\theta$  وزمن ذبذبة  $\theta$  حول  $\theta_0$  وزاوية التقدم  $\Delta \theta$  .
- ٤ - ٢٣ برهن على ان الجذرين الحقيقيين للمعادلة  $f(u)=0$  ، اى المعادلة  
 (٤ - ١٠٧) يتساويان في حالة البندول المخروطي .
- ٤ - ٢٤ تُثبت سلك بندول كروي طوله  $l$  في موضع ابتدائي بحيث يصنع زاوية  $١٠^\circ$  مع الشاقول . فاذا ابتدأت الكرة بسرعة افقية  $v_0$  عمودياً على السلك . وكان  

$$v_0^2 = \frac{1}{2} g l$$
  
 جد اوطأ مستوى تصله كرة البندول خلال حركتها . [ تلميح - من الشروط الابتدائية ،  $u = 0$  هي احدى جذور المعادلة  $f(u) = 0$  ]

## الفصل الخامس

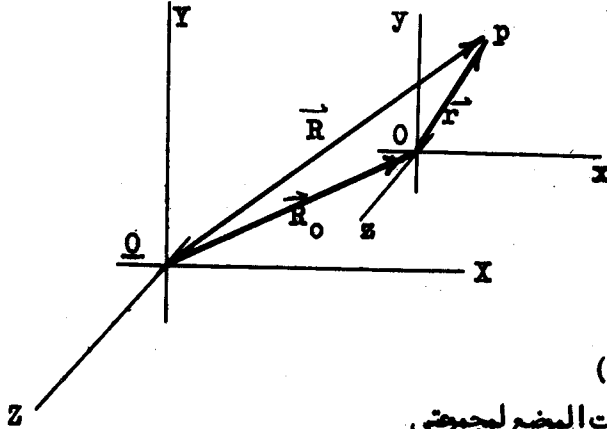
## حركة المحاور المرجعية Moving Reference Systems

- من الأفضل، في اغلب الأحيان استخدام محاور متحركة لوصف حركة جسمين .
- فبالرغم من حركة الأرض ودورانها مثلا يفضل استخدام محاور مثبته فيها لدراسة حركة القذيفة .

## ١٠٥ حركة المحاور الانتقالية Translation of the Coordinate System

ان حركة المحاور الانتقالية هي ابسط انواع الحركات . ففي الشكل (١-٥) تمثل  $\underline{OXYZ}$  المحاور الاساسية (فرضت ثابتة) و  $\underline{O'x'y'z'}$  المحاور المتحركة . وفي حالة الحركة الانتقالية تبقى المحاور المتعاقبة  $\underline{Ox}$  و  $\underline{O'x'}$  وهلم جرا ، متوازية . فاذا كان  $\vec{R}$  يمثل متجه موضع الجسم P في المحاور الاساسية او الثابتة ، و  $\vec{r}$  ففسي المحاور المتحركة ، وكانت  $\vec{R}_0$  تمثل ازاحة نقطة الاصل المتحركة  $\underline{O'}$  . اذن

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{R}_0 \quad (1-5)$$



الشكل (١-٥)

العلاقة بين متجهات الموضع لمجموعتي محاوره يتحرك كل منهما حركة انتقالية محضة بالنسبة للأخر

عند اخذ مشتقة الزمن الاولى والثانية ، نحصل على متجهي السرعة والتعجيل ،

اي

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{V}_0 \quad (٢-٥)$$

$$\vec{A} = \vec{a} + \vec{A}_0 \quad (٣-٥)$$

حيث  $\vec{V}_0$  و  $\vec{A}_0$  يمثلان سرعة وتعجيل نقطة الاصل المتحركة على التوالي و  $\vec{v}$  ،  $\vec{a}$  ، سرعة وتعجيل الجسم P في المحاور المتحركة على التوالي .

في الحالة الخاصة ، عندما تكون المحاور المتحركة غير معجلة ، اي

$$\vec{A}_0 = 0 \quad \text{عندئذ} \quad \vec{A} = \vec{a}$$

اي ان ، التعجيل متساوي في مجهتي المحاور ، وهذه تصح فقط في حالة انعدام الحركة الدورانية في المحاور المتحركة . سوف ندرس موضح الحركة الدورانية في البند (٣-٥) القادم .

### Inertial Forces

### (٢-٥) القوى الزائفة

اذا فرضنا ان قانون نيوتن الثاني

$$\vec{F} = m\vec{A}$$

يصح في المحاور الاساسية ، عندئذ ، من المعادلة (٣-٥) ، معادلة الحركة في المحاور المتحركة ، تكون

$$\vec{F} - m\vec{A}_0 = m\vec{a} \quad (٤-٥)$$

اذن يمكن اخذ تعجيل المحاور المرجعية  $\vec{A}_0$  ، بنظر الاعتبار ، وذلك باضافة الحد  $-m\vec{A}_0$  الى القوة  $\vec{F}$  . وسوف نسمي هذا بالحد الزائفة

inertial term

فاذا رغبتنا ، فيمكننا كتابة

$$" \vec{F} " = m\vec{a} \quad (٥-٥)$$

لمعادلة الحركة في المحاور المتحركة ، اذا ادخلنا الحد الزائغ كجزء من القسوة  
 $\vec{F}$  . وهذا الحد لم ينتج من تصادم الاجسام بعضها مع بعض ، كما هسي  
 الحالة في القوى الاعتيادية ، ولكنه ينتج من اختيار محاور مرجعية . والمحاور المرجعية  
 النيوتونية ، كما شرحت في الفصل الثالث ، هي بالتمريف تلك المحاور التي لا تحسوى  
 معادلة الحركة فيها على حدود زائفة .

تسمى بعض الاحيان الحدود الزائفة في معادلة الحركة بالقوى الزائفة او القسوى  
 الخيالية . على اية حال ، اذا كان هناك من يرغب ان يسيبها قوى فهذا في الحقيقة  
 مصطلح فني . ومهما يكن ، تظهر هذه الحدود عند استخدام محاور معجلة لوصف  
 حركة جسم .

### مثال

قالب خشبي موضوع على طاولة انقيسة خشنة . فاذا عجلت الطاولة باتجاه اقصي ،  
 فما هي الشروط التي سينزلق بموجبها القالب ؟

لنفرض ان  $\mu$  تمثل معامل الاحتكاك بين القالب وسطح الطاولة . عندئذ  
 تكون لقوة الاحتكاك  $\vec{F}$  قيمة عظمى هي  $\mu mg$  ، حيث  $m$  هي كتلة القالب .  
 وشروط الانزلاق هو ان تتفوق القوة الزائفة  $-\vec{mA}_0$  على قوة الاحتكاك ، حيث  $\vec{A}_0$  يمثل  
 تعجيل الطاولة . اذن ، شرط الانزلاق هو

$$|-\vec{mA}_0| > \mu mg$$

$$A_0 > \mu g$$

او

## ٥-٣ الحركة العامة للمحاور

## General Motion of the Coordinate System

لنعتبر الان الحالة التي تتحرك فيها المحاور المرجعية حركة انتقالية ودورانية على حد سواء ، بالنسبة الى المحاور النيوتونية . لنمثل كالسابق متجه موضع الجسم في المحاور المرجعية بالرمز  $\vec{R}$  ، وفي المحاور المتحركة

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z \quad (٥-٦)$$

عندئذ اذا كان  $\vec{R}_0$  يمثل متجه موضع نقطة الاصل المتحركة كما هو مبين في الشكل (٥-٢) ، نحصل على

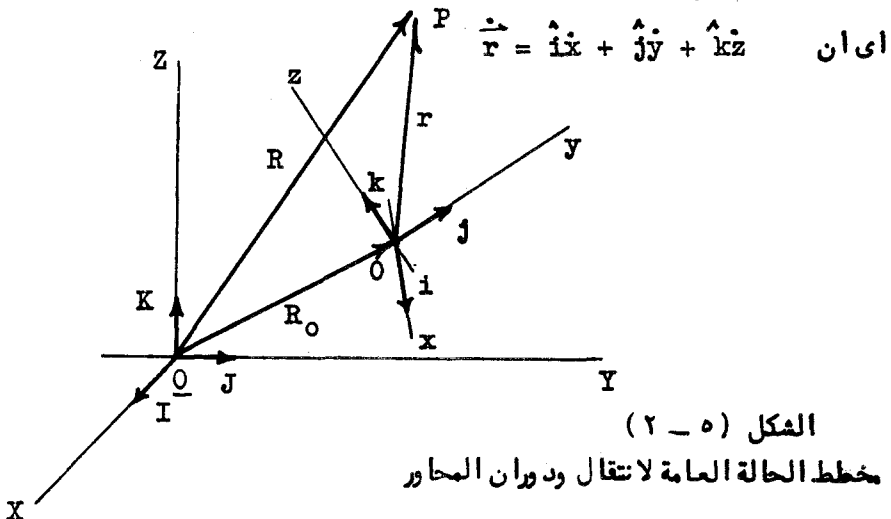
$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{r} = \vec{R}_0 + \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z \quad (٥-٧)$$

ومتفاضلها بالنسبة للزمن نجد ان

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}_0 + \hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y} + \hat{k}\dot{z} + x \frac{d\hat{i}}{dt} + y \frac{d\hat{j}}{dt} + z \frac{d\hat{k}}{dt} \quad (٥-٨)$$

الكمية  $\hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y} + \hat{k}\dot{z}$

تمثل سرعة الجسم بالنسبة للمحاور المتحركة . دعنا نسمي هذه السرعة  $\dot{\vec{r}}$  ،



سوف نستخدم نفس الرمز لما تبقى من هذا الفصل ، اى ان النقطة التي فوق المتجه تعني مشتقة ذلك المتجه بالنسبة للزمن في المحاور الدائرية . الحدود الثلاثة التالية

$$x \frac{d\hat{i}}{dt} + y \frac{d\hat{j}}{dt} + z \frac{d\hat{k}}{dt}$$

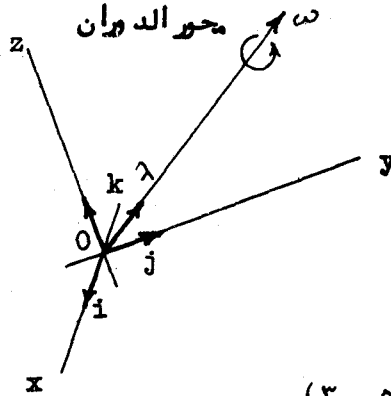
تمثل السرعة الناشئة من دوران المحاور  $Oxyz$  .

لنمثل اتجاه محور الدوران في المحاور  $Oxyz$  بالوحدة المتجهية  $\lambda$

(الشكل ٥ - ٣) ، والانطلاق الزاوي للدوران حول هذا المحور بالرمز  $\omega$  .

وسوف نسمى حاصل الضرب  $\omega \lambda$  بالسرعة الزاوية للمحاور الدائرية ، اى يمكننا كتابة

$$\vec{\omega} = \omega \vec{\lambda} \quad (٥ - ١)$$



الشكل (٥ - ٣)  
متجه السرعة الزاوية للمحاور  
الدائرية

ويعين اتجاه متجه السرعة الزاوية  $\vec{\omega}$  بقاعدة اليد اليمنى ، كما هو مبين في الشكل .

لايجاد  $d\hat{k}/dt$  ،  $d\hat{j}/dt$  ،  $d\hat{i}/dt$  بدلالة  $\vec{\omega}$  ، افرض الشكل

(٥ - ٤) . الذى يوضح التعبير  $\Delta \hat{i}$  للوحدة المتجهية  $\hat{i}$  . (حذفت المتجهات



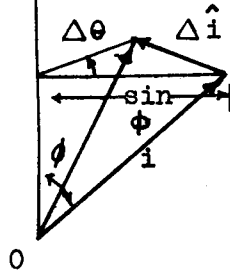
$\hat{k}, \hat{j}$  للوضوح) من الشكل نرى ان مقدار  $\Delta \hat{i}$  يساوى

$$|\Delta \hat{i}| \simeq (\sin \phi) \Delta \theta$$

حيث  $\Delta \theta$  تمثل مقدار دوران المحاور  $Oxyz$  الذى يحدث في فترة زمنية

معينة  $\Delta t$ ,  $\phi$  الزاوية بين  $\hat{i}$ ,  $\vec{\omega}$  اذن

$$\omega \left| \frac{d\hat{i}}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \hat{i}}{\Delta t} \right| = (\sin \phi) \frac{d\theta}{dt} = \omega \sin \phi$$



الشكل (٥ - ٤)

التغيير في الوحدة المتجهة  $\hat{i}$   
بسبب دوران المعطار

ولكن  $\Delta \hat{i}$  عمودى على كل من  $\vec{\omega}$ ,  $\hat{i}$  و بناء على ذلك يمكننا التعبير

عن  $d\hat{i}/dt$  بالضرب الاتجاهي للكميتين  $\vec{\omega}$  و  $\hat{i}$  ، اى

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i} \quad (١٠ - ٥)$$

والتماثل

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j} \quad (١١ - ٥)$$

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k} \quad (١٢ - ٥)$$

اذن يمكننا التعبير عن ذلك الجزء من السرعة الناتجة من دوران المحاور كما

يلسي

$$\begin{aligned} x \frac{d\hat{i}}{dt} + y \frac{d\hat{j}}{dt} + z \frac{d\hat{k}}{dt} &= x(\vec{\omega} \times \hat{i}) + y(\vec{\omega} \times \hat{j}) + z(\vec{\omega} \times \hat{k}) \\ &= \vec{\omega} \times (\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z) \\ &= \vec{\omega} \times \vec{r} \end{aligned} \quad (13-5)$$

ووفقا لذلك ، تصبح المعادلة (5 - 8) على الشكل التالي

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{V}_0 \quad (14-5)$$

تعبير المعادلة المذكورة اعلاه عن العلاقة بين مشتقات الزمن لمتجهي موضع جسم متحرك في نظامي محاوره الاول اعتبر ثابتا والثاني يتحرك حركة انتقالية ويدور . يظهر الحد  $\vec{V}_0$  بسبب الحركة الانتقالية للمحاور المتحركة فقط . كما انه لا يظهر في حالة الحركة الدورانية المحضة .

عند اعتبار الحالة العامة لاي متجه مثل  $\vec{q}$  سنرى بعد اجراء مناقشات

مماثلة للمذكورة اعلاه ، ان مشتقة  $\vec{q}$  بالنسبة للزمن هي

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \dot{\vec{q}} + \vec{\omega} \times \vec{q} \quad (15-5)$$

حيث  $\dot{\vec{q}}$  تمثل معدل التغير الزمني للمتجه  $\vec{q}$  في المحاور الدائرة ، وهي

تساوي الكمية  $\hat{i}\dot{q}_x + \hat{j}\dot{q}_y + \hat{k}\dot{q}_z$  والضرب الاتجاهي  $\vec{\omega} \times \vec{q}$  يمثل معدل

التغير الزمني للمتجه  $\vec{q}$  الناتج من دوران المحاور ، اي

$$\dot{q}_x (\hat{d}\hat{i}/dt) + \dot{q}_y (\hat{d}\hat{j}/dt) + \dot{q}_z (\hat{d}\hat{k}/dt).$$

لنطبق المعادلة (5 - 15) لايجاد العلاقة بين متجهات التعجيل .

افرض ان  $q$  تساوى الكمية  $\frac{d\vec{R}}{dt} - \vec{V}_0 = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r}$  عندئذ نحصل على  
 المعادلة التالية -

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{A}_0 \quad (٥ - ١١)$$

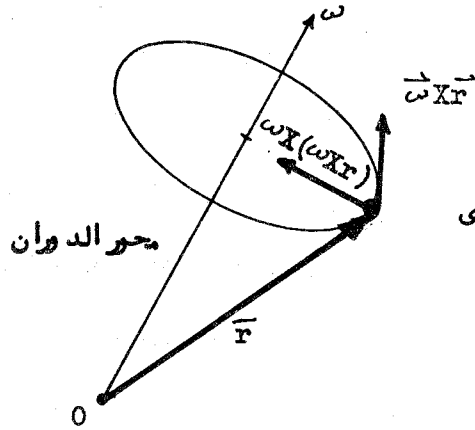
بعد تركت الخطوات كتمرين . الحد الاول في الجانب الايمن من المعادلة يمثل  
 تعجيل الجسم في المحاور المتحركة . اما الحد وند الثالث الاخرى فهي تمثل الحد وند  
 الدورانية لتعجيل الجسم كما تلاحظ في المحاور الثابتة . والحد الاخير هو تعجيل  
 نقطة اصل المحاور المتحركة .

ويسمى الحد  $2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$  بالتعجيل الكوريوليس " Coriolis " . والحد

$\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$  بالتعجيل المستعرض Transverse . والحد الاخير

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  بتعجيل الجذب المركزى \* Centripetal \*

ويتجه دائما نحو محور الدوران ويكون عموديا عليه ، كما هو مبين في الشكل  
 . ( ٥ - ٥ )

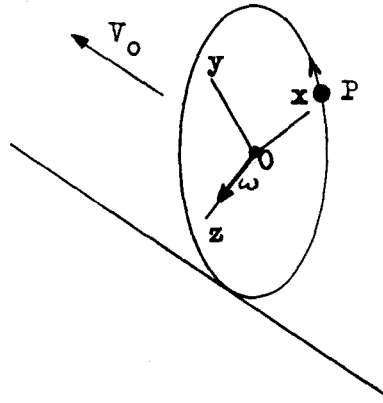


الشكل ( ٥ - ٥ )  
 يوضح التعجيل المركزى

## امثلة

٧. ١- عجلة نصف قطرها  $b$  تتدحرج على الارض بانطلاق امامي ثابت مقداره  $v_0$ .

جد التعجيل لاي نقطة على محيط العجلة بالنسبة للارض .  
 لتتخذ محاور مثبتة في العجلة الدائرة ، ولنفرض ان نقطة الاصل المتحركة  
 في مركز العجلة ، والمحور  $x$  يمر من النقطة التي نود حساب تعجيلها كما هو  
 موضح في الشكل (٥ - ٦) .



الشكل (٥ - ٦)  
 محاور دائرة مثبتة في  
 العجلة المتدحرجة

عندئذ نجد ان

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \hat{i}b \\ \dot{\vec{r}} &= 0 \\ \ddot{\vec{r}} &= 0\end{aligned}$$

ومتجه السرعة الزاوية هو

$$\vec{\omega} = \hat{k} \omega = \hat{k} \frac{v_0}{b}$$

للمحاور المختارة المبينة . اذن تتلاشى جميع حد ودالتعجيل في المعادلة الجبرية

ما عدا الحد الجذب المركزي . وهو كما يلي-

$$\begin{aligned}\vec{A} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \hat{k} \omega \times (\hat{k} \omega \times \hat{i}b) \\ &= \frac{v_0^2}{b} \hat{k} \times (\hat{k} \times \hat{i}) \\ &= \frac{v_0^2}{b} \hat{k} \times \hat{j} \\ &= \frac{v_0^2}{b} (-\hat{i})\end{aligned}$$

اذن مقدار  $\vec{A}$  يساوي  $v^2/b$  ، متجه دائما نحو مركز العجلة المتدحرجة

٢- دراجة هوائية تسير بانطلاق ثابت على طريق منحني نصف قطره  $\rho$  .

ما تعجيل اعلى نقطة ، لأي من العجلتين ؟

لنفرض ان  $v$  تمثل انطلاق الدراجة الهوائية و  $b$  نصف قطر العجلة .

للختطار محاور بحيث تكون نقطة اصلها في مركز العجلة ويكون المحور  $x$  افقيا متجهها

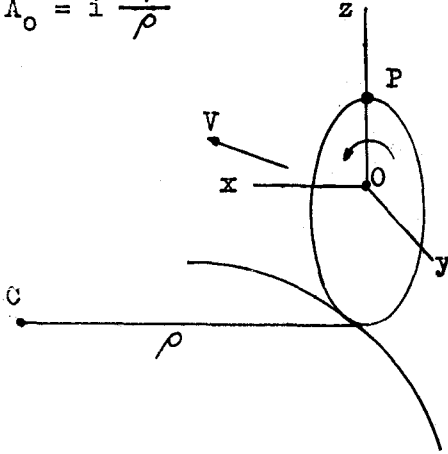
نحو مركز انحناء الطريق  $C$  والمحور  $z$  يكون عموديا كما هو واضح من الشكل

(٥-٧) اذن تدور المحاور  $Oxyz$  بسرعة زاوية هي

$$\vec{\omega} = \hat{k} \frac{v}{\rho}$$

$$\vec{A}_O = \hat{i} \frac{v^2}{\rho}$$

وتعجيل نقطة الاصل المتحركة هو



الشكل (٥-٧)

عجلة تتدحرج على طريق منحني

لما كانت كل نقطة على العجلة تتحرك بدائرة نصف قطرها  $b$  بالنسبة الى نقطة الاصل المتحركة ، فالتعجيل في المحاور  $Oxyz$  لاية نقطة على العجلة يتجه نحو  $0$  ويكون مقداره  $v^2/b$  . لذلك ، نحصل في المحاور المتحركة

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\hat{k} \frac{v^2}{b} \quad \text{على}$$

للكل نقطة التي في اعلى العجلة . كذلك ، تكون سرعة هذه النقطة في المحاور المتحركة

$$\frac{d \vec{r}}{dt} = -\hat{j}v \quad \text{عكسي}$$

اذن ، يصبح التعجيل الكوريولي

$$2 \vec{\omega} \times \frac{d \vec{r}}{dt} = 2 \left( \frac{v}{\rho} \hat{k} \right) \times (-\hat{j}v) = 2 \frac{v^2}{\rho} \hat{i}$$

لما كانت السرعة الزاوية  $\vec{\omega}$  ثابتة ، فالتعجيل المستعرض يكون صفرا . كذلك تعجيل الجذب المركزي يكون صفرا ، لأن

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{v^2}{\rho^2} \hat{k} \times (\hat{k} \times b\hat{k}) = 0$$

اذن التعجيل الكلي في اعلى نقطة للعجلة هو

$$\vec{A} = 3 \frac{v^2}{\rho} \hat{i} - \frac{v^2}{b} \hat{k}$$

(٥ - ٤) ديناميك جسيم في محاور دائرة

### Dynamics of a Particle in a Rotating Coordinate System

لما كانت المحاور الثابتة قد اعتبرت محاور نيوتونية ، عندئذ تكون المعادلة

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad \text{الاساسية للحركة هي}$$

ووفقا للمعادلة (٥ - ١٦) ، يمكننا الان كتابة معادلة الحركة بدلالة المحاور المتحركة

كما يلي

$$\vec{F} = m\vec{A}_0 - 2m \vec{\omega} \times \frac{d \vec{r}}{dt} - m \frac{d \vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m\vec{r}'' \quad (٥ - ١٧)$$

لقد رتبنا الحدود بشكل يظهر القوى الزائفة مضافة الى القوى الفيزيائية "  $\vec{F}$  " واعطيت الحدود الزائفة الاسماء التالية -

$$\vec{F}_{\text{cor}} = -2m \vec{\omega} \times \vec{Xr} \quad \text{القوة الكوريوليوية}$$

$$\vec{F}_{\text{trans}} = -m \vec{\omega} \times \vec{Xr} \quad \text{القوة المستعرضة}$$

$$\vec{F}_{\text{cent}} = -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{Xr}) \quad \text{القوة النابذة}$$

القوة المتبقية  $-m\vec{A}_0$  هي الحد الزائف الناشئ عن

الحركة الانتقالية للمحاور ، والذي سبق بحثه في البند (٥ - ٢) .

مرة اخرى ، كما في الشرح السابق للحد الزائف  $-m\vec{A}_0$  ، يمكننا كتابة معادلة الحركة في المحاور المتحركة كما يلي

$$\vec{F} = m\vec{r} = m(\hat{i}\ddot{x} + \hat{j}\ddot{y} + \hat{k}\ddot{z})$$

لذلك تصبح " القوة " الكلية

$$\vec{F} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{cor}} + \vec{F}_{\text{trans}} + \vec{F}_{\text{cent}} - m\vec{A}_0 \quad (٥ - ١٨)$$

جميع الحدود الاربعة الزائفة في الجانب الايمن من المعادلة تعتمد على نوع المحاور التي وصفت فيها الحركة . وهي تنشأ من خواص استمرارية للمادة بدلا من تواجد اجسام اخرى .

للقوة الكوريوليوية اهمية خاصة . وتظهر فقط عندما يتحرك الجسم في محاور دائرية . واتجاهها يكون دائما عموديا على متجه سرعة الجسم في المحاور المتحركة . لذلك تبدد القوة الكوريوليوية وكأنها تحرف جسيما متحركا باتجاه عمودى على اتجاه حركته . وهذه القوة مهمة ، مثلا ، في حساب مسار القذيفة . وتسبب التأثيرات الكوريوليوية دوران الهواء حول مساحات الضغط العالي والواطى على سطح الكرة الارضية . لذلك في حالة المساحات ذات الضغط العالي يحاول الهواء التدفق الى

الخارج وإلى اليمين في نصف الكرة الأرضية الشمالي ، بحيث يكون الدوران باتجاه عقرب الساعة . والامر على العكس في نصف الكرة الأرضية الجنوبي .

وتظهر القوة المستعرضة اذا كان للمحاور الدائرة تحجيج زاوى فقط . وسميت

هذه القوة بالمستعرضة لانها تكون دائما عمودية على متجه نصف القطر  $\vec{r}$  .

واخيرا تنشأ القوة النابذة ، وهي قوة مألوفة ، من الدوران حول محور .

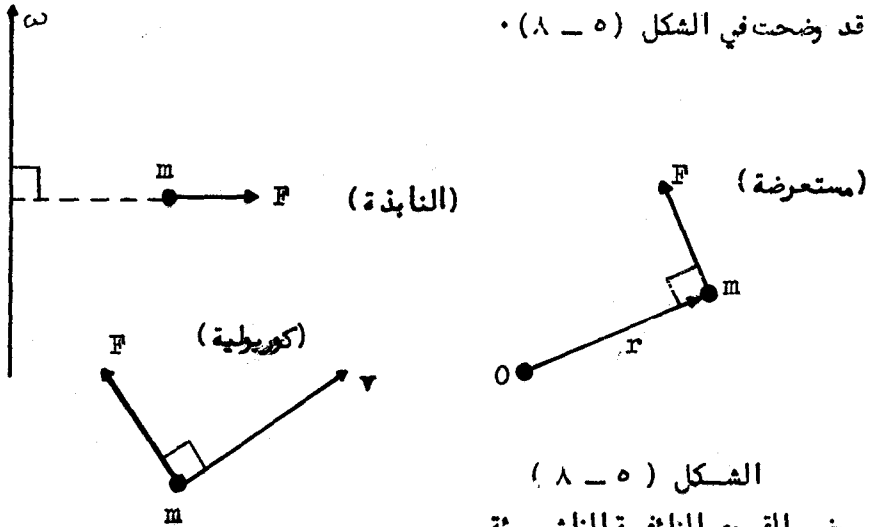
ومتجه دائما نحو الخارج مبتعدة عن محور الدوران وتكون عمودية عليه . فاذا كانت

$\theta$  تمثل الزاوية بين متجه نصف القطر  $\vec{r}$  ومتجه الدوران  $\vec{\omega}$  ، عندئذ ،

يكون مقدار القوة النابذة هو  $mr\omega^2 \sin \theta$  أو  $m\omega^2 r \sin \theta$  حيث  $m$  يمثل

المسافة العمودية بين الجسم المتحرك ومحور الدوران . وهذه القوى المتنوعة ،

قد وضحت في الشكل ( ٥ - ٨ ) .



الشكل ( ٥ - ٨ )

يوضح القوى الزائفة الناشئة من دوران المحاور . وقد رسمت القوى بصورة منفصلة للوضوح



### امثلة

١- تزحف بقية الى الخارج بانتلاق ثابت مقداره  $v$  على شعاع دولا ب عجلة يدور بسرعة زاوية ثابتة حول محور عمودي . حدد جميع القوى المؤثرة على البقصة .

لنختار اولاً ، محاور مهيئة بالدولاب ولنفرض ان المحور  $x$  يتجه على طول شعاع الدولاب . عندئذ تكون

$$\vec{r} = \hat{i}x = \hat{i}vt$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \hat{i}\dot{x} = \hat{i}v \\ \ddot{\vec{r}} &= 0 \end{aligned}$$

هذه معادلات الحركة للبقصة كما توصف في المحاور الدائرية . فاذا اخترنا المحاور

$$\vec{\omega} = \hat{k}\omega \quad z - \text{ شاقولياً ، نحصل على}$$

عندئذ تكون القوى المتنوعة على النحو التالي -

القوة الكوريولية

$$-2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = -2m\omega v(\hat{k} \times \hat{i}) = -2m\omega v\hat{j}$$

القوة المستعرضة

$$-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} = 0 \quad (\omega = \text{ثابتة})$$

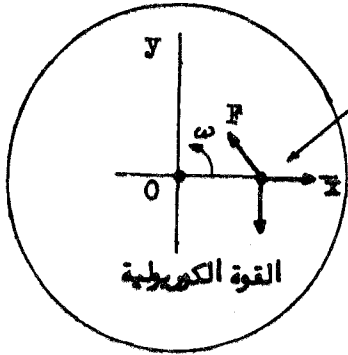
$$\begin{aligned} -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= -m\omega^2 [\hat{k} \times (\hat{k} \times \hat{i}x)] && \text{القوة النابذة} \\ &= -m\omega^2 (\hat{k} \times \hat{j}x) \\ &= m\omega^2 x\hat{i} \end{aligned}$$

اذن المعادلة (١٧-٥) تصبح

$$\vec{F} - 2m\omega v\hat{j} + m\omega^2 x\hat{i} = 0$$

هنا القوة  $\vec{F}$  هي القوة الحقيقية التي يسلطها شعاع الدولاب على البقصة .

لقد وضحت القوى في الشكل (٥ - ٩)



الشكل (٥ - ٩)

القوى على بقعة تزحف الى الخارج  
على طول الخط القطبي  
لدولاب عجلة يدور

٢- في السؤال السابق، جد المسافة التي يمكن ان تزحفها البقعة قبل ان تبدأ بالانزلاق، اذا علمت ان معامل الاحتكاك بين البقعة والشعاع هو  $\mu$ .  
لما كانت لقوة الاحتكاك  $\vec{F}$  قيمة عظمى هي  $\mu mg$  سيبدأ الانزلاق

عندما

$$|\vec{F}| = \mu mg$$

او

$$[(2m\omega v)^2 + (m\omega^2 x)^2]^{\frac{1}{2}} = \mu mg$$

وعند حل هذه المعادلة للمسافة  $x$  نجد ان

$$x = \frac{(\mu^2 g^2 - 4\omega^2 v^2)^{\frac{1}{2}}}{\omega^2}$$

وهي المسافة التي تزحفها البقعة قبل ان تنزلق.

٥-٥) تأثيرات دوران الارض Effects of the Earth's Rotation

لنطبق النظرية التي بحثت في البنود السابقة لمحاوّر تتحرك مع الارض. لما كان الانطلاق الزاوي لدوران الارض يساوي  $2\pi$  زاوية قطرية في اليوم، او حوالي  $73 \times 10^{-5}$  زاوية نصف قطرية في الثانية، قد تتوقع ان هذه التأثيرات للسدوران صغيرة نسبياً. وبالرغم من ذلك، فان الانتفاخ الاستوائي تولد بسبب دوران الارض

حول نفسها وكما هو معروف فان نصف قطر الارض الاستوائي اكبر من نصف قطرها القطبي بحوالي ١٣ ميل .

التأثيرات الستاتيكية - شاقول البناء

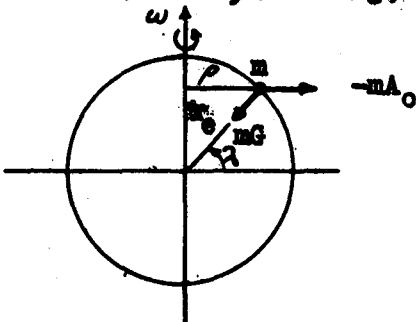
Static Effects. The Plumb Line

لنفرض اولا جسم في حالة السكون على سطح الكرة الارضية . ولكي نعطي صورة واضحة منعتجر الجسم يمثل الكرة التي في نهاية شاقول البناء . لنختار نقطة اصل محاورنا في موضع الكرة ، بحيث تكون  $\vec{r} = 0$  . الان ، يتجه منحه السرعة الزاوية  $\vec{\omega}$  باتجاه محور الارض وهو تقريبا ثابت ، اي ان ، التحجيل الزاوي  $\vec{\omega}$  يساوى صفرا . عندئذ تتلاشى جميع حدود معادلة الحركة (١٧-٥) للحالة الستاتيكية باعدا القوة المسلطة

$\vec{F}$  والحد الزائف  $-\vec{m}\vec{A}_0$  . وذلك تكون النتيجة

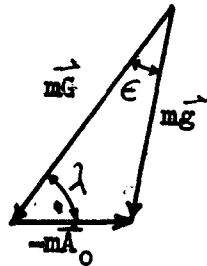
$$\vec{F} + \vec{m}\vec{A}_0 = 0 \quad (19-5)$$

وتعطي القوة  $\vec{F}$  بالمجموع الاتجاهي للقوتين : قوة جذب بالارض الحقيقية (التي سوف نسميها  $\vec{m}\vec{g}$ ) والشد العمودي لخيط شاقول البناء (الذي سوف نمثله بـ  $-\vec{m}\vec{g}$ ) . وقد وضحت هاتين القوتين بالشكلين (١٠-٥) و (١١-٥) عندئذ نحصل على



الشكل (١٠-٥)

القوى النابذة والجاذبية على جسم على سطح الكرة الارضية



الشكل (١١-٥)

مثلت المتجهات لتعريف الكمية  $m\vec{g}$

$$\vec{mG} - m\vec{g} - m\vec{A}_0 = 0 \quad (٢٠-٥)$$

$$\vec{g} = \vec{G} - \vec{A}_0 \quad \text{أو}$$

ويتجه المتجه  $\vec{mG}$  نحو مركز الكرة الأرضية. التعجيل  $\vec{A}_0$  يمثل التعجيل الجذب المركزي لنقطة اصل محاورنا الضحكة. ومقداره هو  $\omega^2 r_e \cos \lambda$  حيث  $r_e$  يمثل نصف قطر الكرة الأرضية و  $\lambda$  هي زاوية خط العرض مقاسة من مركز الأرض *geocentric latitude* ومقدار الحد  $-m\vec{A}_0$  (القوة النابذة) يساوي  $\omega^2 (mr_e \cos \lambda)$  وهو يتجه الى الخارج ويكون عموديا على محور الأرض كما هو مبين في الشكل (١٠-٥). لذلك لا يؤثر خط ميزان البناء نحو مركز الكرة الأرضية تماما، وإنما ينحرف بزاوية صغيرة  $\epsilon$ . ومن المعادلة (٢٠-٥) يمكن تمثيل المتجه  $\vec{mG}$  بالرسم، كضلع ثالث للضلعين الآخرين  $\vec{mG}$  و  $-\vec{mA}_0$

(الشكل ٥-١١) • وتطبيق قانون الجيوب، نحصل على

$$\frac{\sin \epsilon}{mr_e \omega^2 \cos \lambda} = \frac{\sin \lambda}{mg}$$

أوه لما كانت  $\epsilon$  صغيرة، فإننا نحصل على

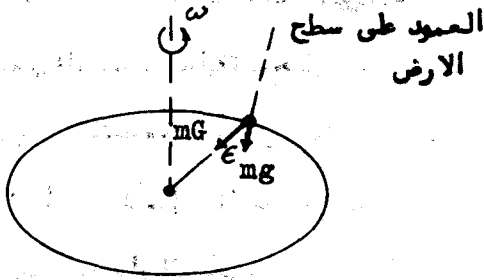
$$\sin \epsilon \simeq \epsilon = \frac{r_e \omega^2}{g} \sin \lambda \cos \lambda = \frac{r_e \omega^2}{2g} \sin 2\lambda \quad (٢١-٥)$$

لذلك تتلاشى  $\epsilon$  في خط الاستواء ( $\lambda = 0$ ) وفي القطبين ( $\lambda = \pm 90^\circ$ )، كما توقعنا. ويكون الانحراف الاعظم لخط شاقول البناء عن العمود الحقيقي.

عندما تكون  $\lambda = 45^\circ$  حيث

$$\epsilon_{\max} = \frac{r_e \omega^2}{2g} \simeq 1.7 \times 10^{-3} \text{ radian} \simeq \frac{1}{10} \text{ degree}$$

وشكل الارض يجعل خط شاقول البناء عموديا على سطحها في اية نقطة . والقسطوع العرضي الناتج يكون تقريبا قطعاً ناقصاً (الشكل ٥ - ١٢) . في الشرح المذكور اعلاه



الشكل (٥ - ١٢)

رسم مهالغ فيه يوضح انبساط الارض الناشئ عن دورانها

فرضنا ان قوة الجذب  $m\vec{G}$  ثابتة وتتجه نحو مركز الارض . ان هذا الفرض لا يصح تماما لان الارض ليست كرة حقيقية . كذلك تؤثر قليلا ، الاختلافات المحلية ، كالجبال والترسبات المعدنية وهلم جرا على اتجاه شاقول البناء .

التاثيرات الديناميكية - حركة القذيفة  
Dynamic Effects. Motion of a Projectile

يمكن كتابة معادلة الحركة (٥ - ١٢) على النحو التالي

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + (m\vec{G} - m\vec{A}_0) - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

حيث  $\vec{F}$  تمثل اى قوى مسلطة باستثناء قوة الجذب الارضي . ولكن ، من الحالة الستاتيكية التي شرحناها سابقا ، التركيب  $m\vec{G} - m\vec{A}_0$  سمي  $m\vec{g}$  ، اذن

يمكننا كتابة معادلة الحركة على النحو التالي

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

لفرض حركة القذيفة . اذا اهملنا مقاومة الهواء ، عندئذ  $F = 0$  . اضع الى

ذلك الحد  $m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  يكون صغيراً جداً إذا قورن بالحدود الأخرى) لذلك سنهمله. إذن تختصر معادلة الحركة إلى

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \quad (٥ - ٢٢)$$

حيث يمثل الحد الأخير القوة الكوريولية.

ولحل المعادلة السابقة سنختار اتجاهات المحاور  $Oxyz$  بحيث يكون المحور  $z$

عمودياً (باتجاه خط شاقول البناء)  $\omega$  والمحور  $x$  متجهاً نحو الشرق  $\omega$  والمحور  $y$

مؤمراً نحو الشمال (الشكل (٥ - ١٣)).

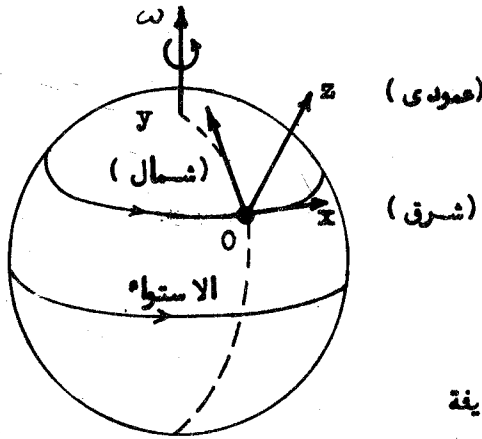
وهذا الاختيار للمحاور  $\omega$  نحصل على

$$\begin{aligned} \vec{g} &= -g\hat{k} \\ \vec{\omega} &= \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k} \\ &= (\omega \cos \lambda) \hat{j} + (\omega \sin \lambda) \hat{k} \end{aligned}$$

إذن

$$\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \hat{i}(\omega_z \dot{z} \cos \lambda - \omega_y \dot{y} \sin \lambda) + \hat{j}(\omega_x \dot{x} \sin \lambda) \\ &+ \hat{k}(-\omega_x \dot{x} \cos \lambda) \quad \dots \dots \dots (٥ - ٢٣) \end{aligned}$$



الشكل (١٣-٥)

المحاور لتحليل حركة القذيفة

وعند التعويض عن  $\vec{x}$  و  $\vec{z}$  في المعادلة (٢٢-٥) واختصار  $m$  من كل حرد ثم موازنة المركبات بين طرفي المعادلة نجد ان مركبات المعادلات التفاضلية للحركة هي

$$\ddot{x} = -2\omega (\dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda) \quad (٢٤-٥)$$

$$\ddot{y} = -2\omega \dot{x} \sin \lambda \quad (٢٥-٥)$$

$$\ddot{z} = -g + 2\omega \dot{x} \cos \lambda \quad (٢٦-٥)$$

هذه المعادلات هي ليست من النوع القابل للفرز ، ولكن يمكننا ان نكامل مرة واحدة بالنسبة الى  $t$  للحصول على

$$\dot{x} = -2\omega (z \cos \lambda - y \sin \lambda) + \dot{x}_0 \quad (٢٧-٥)$$

$$\dot{y} = -2\omega x \sin \lambda + \dot{y}_0 \quad (٢٨-٥)$$

$$\dot{z} = -gt + 2\omega x \cos \lambda + \dot{z}_0 \quad (٢٩-٥)$$

حيث ثوابت التكامل  $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$  تمثل المركبات الابتدائية للسرعة . وقد

تعوض قيم  $\dot{z}$  و  $\dot{y}$  من المعادلتين الاخيرتين السابقتين في المعادلة (٢٤-٥) .

والنتيجة تكون

$$\ddot{x} = 2\omega gt \cos \lambda - 2\omega(\dot{z}_0 \cos \lambda - \dot{y}_0 \sin \lambda) \quad (٢٠-٥)$$

حيث أهملت الحدود التي تحتوي على  $\omega^2$ ، ولأن تكامل مرة أخرى لنحصل على

$$\dot{x} = \omega gt^2 \cos \lambda - 2\omega t (\dot{z}_0 \cos \lambda - \dot{y}_0 \sin \lambda) + \dot{x}_0$$

$$x = \frac{1}{3}\omega gt^3 \cos \lambda - \omega t^2 (\dot{z}_0 \cos \lambda - \dot{y}_0 \sin \lambda) + \dot{x}_0 t$$

$$\dots\dots\dots (٢١-٥)$$

وقد تعوض قيمة  $x$  المذكورة أعلاه في المعادلتين (٢٨-٥) و (٢٩-٥) ونستد  
تكاميل المعادلتين الناتجتين نحصل على

$$y = \dot{y}_0 t - \omega \dot{x}_0 t^2 \sin \lambda \quad (٢٢-٥)$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{z}_0 t + \omega \dot{x}_0 t^2 \cos \lambda \quad (٢٣-٥)$$

حيث أهملت مرة ثانية الحدود من مرتبة  $\omega^2$  على فرض أن التذبذبة كانت فسي  
نقطة الأصل في الزمن  $t = 0$ .

لنفترض بعض الحالات الخاصة • أولا ، إذا سقط جسم من السكون

$$x = \frac{1}{3}\omega gt^3 \cos \lambda \quad (\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0 \text{ نحصل على})$$

$$y = 0$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2$$

أي ان الجسم ينحرف نحو الشرق • فإذا سقط شاقوليا مسافة  $h$  يكون عندئذ

$$t^2 \simeq 2h/g \text{ ، وذلك يكون الانحراف نحو الشرق}$$

$$\frac{1}{3}\omega \cos \lambda \left(\frac{8h^3}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ولما كانت الأرض تدور نحو الشرق ، قد تقصو بان الجسم يجب ان ينحرف نحو الغرب •  
فهبل يستطيع القاري ان يجد تفسيراً لذلك ؟

كحالة خاصة ثانية ، افرض ان قذيفة قد اطلقت بسرعة عالية باتجاه يقترب من الافق ،



ولنفرض ان هذا الاتجاه هو الشرق . عندئذ

$$\dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0 , \quad \dot{x}_0 = v_0$$

ومن المعادلة (٢٢-٥) نحصل على -

$$y = -\omega v_0 t^2 \sin \lambda$$

وذلك يعني ان القذيفة قد انحرفت نحو اليمين . واذا كانت  $H$  المدى الاقصى ،

عندئذ  $H \approx v_0 t_1$  ، حيث  $t_1$  يمثل زمن الطيران . وانحراف القذيفة نحو

اليمن ( لقطع المسافة  $H$  شرقا ) عندئذ ، تقريبا ، يكون

$$\frac{\omega H^2}{v_0} \sin \lambda$$

ويمكن البرهنة على ان هذا هو مقدار الانحراف ، بغض النظر عن الاتجاه الذي

وجهت اليه القذيفة في البداية ، على ان يكون المسار ثابتا .

The Foucault Pendulum

\* (٦-٥) بندول فوكو

• سوف ندرس في هذا البند تأثير دوران الارض على حركة بندول كروى .

وكالمعالجة التقريبية للبندول الكروى التي ذكرناها في البند (٢٢-٥) ، سوف

نستخدم المحاور المتعامدة . وكما هو مبين في الشكل (١٤-٥) ، تكون القوة المؤثرة

على كرة البندول هي الجمع الاتجاهي للحد الشاقولي  $m\vec{g}$  والشد  $\vec{S}$  في الوتر .

عندئذ تكون المعادلة التفاضلية للحركة

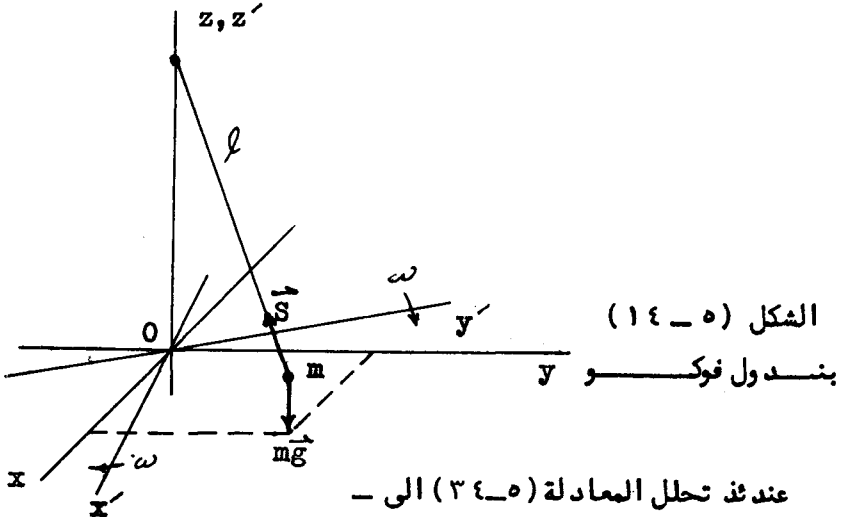
$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{S} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \quad (٢٤-٥)$$

حيث أهمل الحد  $(\vec{\omega} \times \vec{r})$  . وقد سبق ان اعطيت مركبات الحد

$\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$  في المعادلة (٢٣-٥) . ومركبات  $y-x$  للشد  $\vec{S}$  هي كما في البند

(١٤-٤) .

$$S_x = \frac{-x}{l} S \quad S_y = \frac{-y}{l} S$$



$$m\ddot{x} = \frac{-x}{l} S - 2m\omega(\dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda) \quad (٣٥-٥)$$

$$m\ddot{y} = \frac{-y}{l} S - 2m\omega\dot{x} \sin \lambda \quad (٣٦-٥)$$

$$m\ddot{z} = S_z - mg + 2m\omega\dot{x} \cos \lambda \quad (٣٧-٥)$$

ان الحالة التي تهمننا هي عندما تكون الازاحة عن الشاقول صغيرة بحيث يكون الشد  $\vec{S}$  تقريبا ثابتا ومساويا لـ  $mg$ . كذلك في هذه الحالة نستطيع اهمال

$\dot{z}$  بالمقارنة مع  $\dot{y}$  في المعادلة (٣٥-٥). وعندئذ تعطي حركة  $x-y$  بالمعادلات التفاضلية التالية -

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l} x + 2\omega\dot{y} \quad (٣٨-٥)$$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{l} y - 2\omega\dot{x} \quad (٣٩-٥)$$

حيث  $\omega' = \omega \sin \lambda$ ، و  $\omega'$  يكون من السهولة تصور الحركة المثلثة في المعادلات التفاضلية المذكورة اعلاه عند تحويلها الى محاور جديدة  $Oxy$  تدور في المستوى  $xy -$  بانطلاق زاوى ثابت  $\omega'$  بالنسبة الى المحاور  $Oxy$  (الشكل ٥ - ١٤) ومعادلات التحويل هي

$$x = x' \cos \omega' t + y' \sin \omega' t$$

$$y = y' \cos \omega' t - x' \sin \omega' t$$

وعند تعويض قيم  $\ddot{x}$ ،  $\dot{y}$ ،  $\ddot{y}$  (الناجمة من تفاضل المعادلات المذكورة اعلاه) في المعادلة (٥ - ٣٩) نجد  $\omega'$  بعد الاختصار وتجميع الحدود واهمال الحدود التي تحوى على  $\omega'^2$  ان

$$\left(\ddot{x}' + \frac{g}{l} x'\right) \cos \omega' t + \left(\ddot{y}' + \frac{g}{l} y'\right) \sin \omega' t = 0$$

ولما كانت المعادلة السابقة يجب ان تصح لكل قيم  $t$  فان كلاً من معامل الجيب والجيب تمام يجب ان تساوى صفرًا، اى

$$\ddot{x}' + \frac{g}{l} x' = 0 \quad \ddot{y}' + \frac{g}{l} y' = 0$$

ان هذه المعادلات التفاضلية  $\omega'$  كما رأينا في البند (٤ - ١٤)، تمثل الحركة في مسار قطع ناقص  $\circ$  ولما كان قطر القطع الناقص الرئيسي له اتجاه ثابت في المحاور  $Oxy'$  لذلك يعاني هذا القطر طوافاً  $Precession$  مستقرًا باتجاه عقرب الساعة

(في نصف الكرة الشمالي) بانطلاق زاوى مقداره  $\omega' = \omega \sin \lambda$  بالنسبة للمحاور  $Oxy$ . وهذا الطواف يكون طبعاً  $\omega'$  بالاضافة الى الطواف الطبيعي الذى سبق بحثه في البند

(٤ - ١٤)  $\circ$  ولكن  $\omega'$  اذا كانت الحركة الابتدائية للبندول في المحاور  $Oxy'z$

في مستوى فسوف تبقى في هذا المستوى  $\circ$  (ولكي يبدأ البندول بهذه الطريقة  $\omega'$  من الضروري سحبه جانباً بواسطة خيط ثم تركه يبدأ من السكون يقطع هذا الخيط)  $\circ$

ان زمنذبذبة طولالالبندول هو  $\frac{2\pi}{\omega} = 24 \text{ hr}/\sin \lambda$  لذلك ، في خط عرض  $45^\circ$  يكون زمن الذبذبة ٢٤ ساعة . لقد وضحت هذه النتيجة لأول مرة من قبل العالم الفرنسي جان فوكو Jean Foucault في باريس سنة ١٨٥١ .

### تمارين

- ١-٥ ( نقل شاقول بناء في قدار متحرك . فاذا كانت  $m$  تمثل كتلة كرة الشاقول ، جد الشد في الخيط وانحرافه عن العمود الموضعي اذا كان (أ) القطار يتحرك بتعجيل ثابت  $a_0$  واتجاه معلوم ، (ب) القطار يتحرك على منح نصف قطره بانطلاق ثابت  $v_0$  اهمل التأثيرات التي قد تنشأ عن دوران الارض .
- ٢-٥ ( سيارة تسير بتعجيل ثابت  $a_0$  اذا كان انطلاقها في لحظة معينة  $v_0$  . جد اى نقطة على التاير لها اعظم تعجيل بالنسبة الى الارض ، جد كذلك اتجاه هذا التعجيل ومقداره .
- ٣-٥ ( في حركة الدراجة الهوائية مثال (٢) بند ٢-٥ ، ما هو تعجيل او طاً نقطة في العجلة ؟
- ٤-٥ ( حل مثال (٢) ، بند ٣-٥ ، عندما تكون نقطة اصل المحاور في مركز نصف القطر الدائر والمحور  $x$  يمر في مركز العجلة والمحور  $z$  عمودياً .
- ٥-٥ ( حشرة تزحف بانطلاق  $v$  في مسار دائرى نصف قطره  $b$  على قرص حاك دائره يدور بسرعة زاوية ثابتة  $\omega$  . صف الحركة بالنسبة لمحاور مثبتة في القرص الدائر . جد التعجيل  $\vec{A}$  للحشرة بالنسبة الى الخارج ، وقوة الاحتكاك  $\vec{F}$  المؤثرة على الحشرة . وصورة خاصة جد  $\vec{A}$  و  $\vec{F}$  للحالتين .

$$v = b\omega \quad , \quad v = -b\omega$$

- لاحظ في الحالة الأخيرة ، ان الحشرة مستقرة بالنسبة الى الخارج .
- ٥-٦) طفل يركب دولا ب هواء نصف قطره  $b$  ويدور بانطلاق زاوى ثابت  $\omega$  .  
 فاذا كان الطفل يمسك لعبة كتلتها  $m$  مربوطة بخيط قصير ، جد الشد في الخيط  
 عندما يكون الطفل في اعلى واوطأ نقطة وفي مستوى مركز دولا ب الهواء .
- ٥-٧) جد مقدار واتجاه القوة الكوربولية المؤثرة على سيارة سباق كتلتها  $1800$  كغم  
 وتسير نحو الشمال بانطلاق  $560$  كم / ساعة وفي خط عرض  $45^\circ$  شمالا .
- ٥-٨) سقط جسم من ارتفاع  $100$  متر ، اين سيضرب الارض ؟ افرض  $\lambda$  تساوى  
 $45^\circ$  شمالا .
- ٥-٩) نقل شاقول بناء في طائرة متحركة ، فاذا كانت الطائرة متجهة نحو الشرق  
 بانطلاق  $v$  جد الانحراف الزاوى لخيط الشاقول عن العمود الموضعي . ما يجب ان  
 تكون سرعة الطائرة حتى يكون الانحراف ساويا لدرجة واحدة ، افرض  $\lambda$  تساوى  
 $45^\circ$  شمالا .
- ٥-١٠) بين ان معدل التغير الزمني لمتجه السرعة الزاوية يكون نفسه في المحاور  
 الثابتة او الدائرة للشكل (٥-٢) اي ، اثبت ان  $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\omega}$  . هل يصح الشيء  
 نفسه للتعجيل الزاوى ؟
- ٥-١١) اشتق تعبير للمشتقة الثالثة لمتجه الموضع  $\frac{d^3\vec{R}}{dt^3}$  بدلالة المركبات  
 في محاور دائرة .
- ٥-١٢) اطلقت قذيفة شاقوليا بانطلاق ابتدائي  $v_0$  فاذا اهملت مقاومة الهواء  
 وفرضت  $g$  ثابتة ، جد اين تسقط القذيفة عندما تضرب الارض .
- ٥-١٣) بندول كروي طول له  $l$  يتحرك ببذبات صغيرة حول الزاوية المخروطية  $\theta_0$  .

ماهي القيمة لـ  $\theta_0$  التي يختزل فيها الطواف الناشء عن دوران الارض ، الطواف الطبيعي الذي سبق شرحه في الفصل الرابع ؟ افرض ان  $\theta_0$  صغيرة .  
 جد القيمة التقريبية عندما يكون  $l$  يساوي ١٠ أمتار و  $\lambda$  تساوي ٤٥ شمالا .

( ١٤٥ ) معادلة الحركة التفاضلية لجسيم مشحون ، في مجال كهربائي  $\vec{E}$  ومجال مغناطيسي  $\vec{B}$  هي

$$m\vec{r} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

في المحاور النيوتونية ، اذا نسبت الحركة الى محور دائرة بسرعة زاوية  $\vec{B} (q/2m)$  ، اثبت ان المعادلة تصبح

$$m\vec{r} = q\vec{E}$$

حيث فرضت  $\vec{B}$  صغيرة بحيث يمكن اهمال الحدود من رتبة  $B^2$  . وتعرف هذه النتيجة بنظرية لارمور . Larmors Theorem .

## الفصل السادس

### القوى المركزية والميكانيك السماوى

#### Central Forces and Celestial Mechanics

القوة التي يمر خط تأثيرها في نقطة ثابتة او مركز قوة تسمى بالقوة المركزيه  
**Central Force** والقوى المركزيه اهمية اساسية في الفيزياء لانها تشمل قوى مثل  
 قوة جذب الارض وقوى الالكتروستاتيك وغيرها .

#### ٦-١) قانون الجاذبية The Law of Gravity

اعلن نيوتن قانون الجاذبية العام سنة ١٦٦٦ . وليس هناك مبالغة اذا قلنا  
 بان هذا قد سجل بداية علم الفلك الحديث ، لان قانون الجاذبية العام يفسر حركة  
 الكواكب السيارة للمنظومة الشمسية وتوابعها . وكذلك النجوم الثنائية او المزدوجة  
 وحتى المنظومات النجمية . ويمكن صياغة القانون على النحو التالي :-

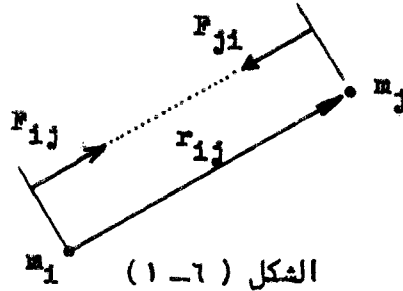
كل جسم في الكون يجذب كل جسم آخر بقوة تتغير طرديا مع حاصل ضرب كتلتيهما  
 عكسيا مع مربع المسافة بينهما . وتوجه القوة على طول المستقيم الواصل بينهما .

ويمكننا التعبير عن القانون بجبر المتجهات بالمعادلة التالية .

$$\vec{F}_{1j} = G \frac{m_1 m_j}{r_{1j}^2} \left( \frac{\vec{r}_{1j}}{r_{1j}} \right) \quad (٦-١)$$

حيث  $\vec{F}_{1j}$  تمثل القوة على جسم ١ كتلته  $m_1$  التي يؤثر بها جسم  $j$   
 كتلته  $m_j$  . والتجه  $\vec{r}_{1j}$  هو المستقيم الذى يبدأ في الجسم ١ وينتهي  
 في الجسم  $j$  ، كما هو مبين في الشكل (٦-١) . وقضي قانون

الفعل ورد الفعل ان  $\vec{F}_{1j} = -\vec{F}_{j1}$  . وابت التناسب  $G$  .  
 يسمى بثابت الجاذبية العام . وحسب قيمته بدقة في المختبر بقياس القوة بين  
 جسمين كرويين كتلتاهما معلومتان . والقيمة المقبولة في الوقت الحاضر ،



الشكل (١-٦) الفعل ورد الفعل في قانون نيوتن للجاذبية

كما أوجدتها دار القياسات الوطنية الأمريكية هي

$$G = (6.673 \pm 0.003) \times 10^{-8} \frac{\text{dyne cm}^2}{\text{g}^2}$$

وتعتمد جميع معلوماتنا الحاضرة عن كتل الاجرام السماوية وضمنها الارض على قيمة G.

(٢-٦) قوة الجذب بين كرة منتظمة وجسيم

### Gravitational Force between a Uniform Sphere and a Particle

في البند (١١-٣) ، حيث بحثنا حركة الجسيم حر السقوط ، اكدنا على ان قوة

جذب الارض على جسيم فوق سطحها تتناسب عكسيا مع مربع المسافة بين الجسيم ومركز

الكرة الارضية ، اي ان ، الارض تجذب وكأن جميع كتلتها متجمعة في نقطة واحدة .

وسنبرهن الان على ان هذا يصح لاي جسم كروي منتظم او اي توزيع كروي متماثل للمادة .

افرض اولا قشرة كروية رقيقة كتلتها  $M$  ونصف قطرها  $R$  . وافرض ان المسافة

بين مركزها  $O$  وجسيم اختبار  $P$  كتلته  $m$  (الشكل (٢-٦) ) على فرضان  $r > R$  .

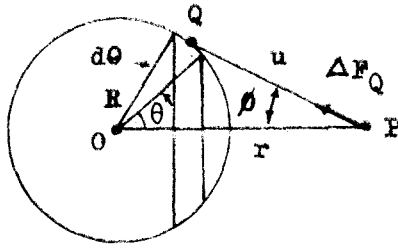
سوف نقسم القشرة الكروية الى حلقات دائرية عرض كل منها  $\Delta \theta$  حيث  $R \Delta \theta$  كما هو

مبين في الشكل ، ان الزاوية  $\theta$  مثلت بالرمز  $\theta$  و  $Q$  تمثل نقطة على الحلقة .

لذا يكون محيط الحلقة  $2\pi R \sin \theta$  ، وكتلتها  $\Delta M$  تساوي

$$\Delta M \simeq \rho 2\pi R^2 \sin \theta \Delta \theta$$





الشكل ( ٦ - ٢ )

الاحداثيات لحساب مجال الجاذبية لقشرة كروية

حيث  $m$  تمثل كتلة وحدة مساحة القشرة .

والان تتجه قوة الجذب المسلطة على  $P$  ، من جزء صغير لعنصر الحلقة

في  $Q$  ( الذي سوف نعتبره جسما ) ، باتجاه  $PQ$  . لنحلل هذه القوة  $\Delta \vec{F}_Q$

الى مركبتين ، احدهما على طول  $PO$  ، ومقدارها  $\Delta F_Q \cos \theta$  والاخرى عمودية

على  $PO$  ، ومقدارها  $\Delta F_Q \sin \theta$  . هنا  $\theta$  تمثل الزاوية  $OPQ$  كما هو

واضح في الشكل . من التناظر يمكننا بسهولة رؤية تلاشي المجموع الاتجاهي لجميع

المركبات العمودية للحلقة ، المسلطة على  $P$  . فالقوة  $\Delta \vec{F}$  المسلطة من الحلقة

كلها ، تكون اذن باتجاه  $PO$  ، ومقدارها  $\Delta F$  ينتج من جمع المركبات  $\Delta F_Q \cos \theta$  .

النتيجة اذن .

$$\Delta F = G \frac{m \Delta M}{u^2} \cos \theta = G \frac{m^2 \rho R^2 \sin \theta \cos \theta}{u^2} \Delta \theta$$

حيث  $u$  هي المسافة  $PQ$  (المسافة من الجسم  $P$  الى الحلقة) كما هو مبين .

عندئذ من اخذ زاوية  $\Delta \theta$  والتكامل ينتج مقدار القوة المسلطة على  $P$  من كسب

القشرة اى

$$F = Gm_2 \pi \rho R^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{u^2}$$

هذا التكامل يحسب بسهولة إذا وضعناه بدلالة  $u$  . ويكون ذلك باستخدام قانون الجيب تمام للمثلث  $OPQ$  ، حيث

$$r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta = u^2$$

ولما كانت  $r$  ،  $R$  ثابتا فعند التفاضل نحصل على

$$rR \sin \theta d\theta = u du$$

كذلك لنفس المثلث  $OPQ$  يمكننا كتابة

$$\cos \theta = \frac{u^2 + r^2 - R^2}{2rv}$$

وعند تعويض المعادلتين المذكورتين اعلاه نحصل على

$$F = Gm_2 \pi \rho R^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{u^2 + r^2 - R^2}{2Rr^2 u^2} du$$

$$= \frac{GmM}{4Rr^2} \int_{r-R}^{r+R} \left( 1 + \frac{r^2 - R^2}{u^2} \right) du$$

$$= \frac{GmM}{r^2}$$

حيث  $M = 4\pi \rho R^2$  تمثل كتلة القشرة . يمكننا عندئذ كتابتها بجبر المتجهات على النحو التالي -

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{n} \quad (٦-٢)$$

حيث  $\vec{n}$  تمثل وحدة متجه شعاعي يبدأ من المركز  $O$  . وتعني النتيجة السابقة ان القشرة الكروية المنتظمة الشكل لمادة عندما تجذب جسما خارجيا تظهر وكأن جميع مادة قشرتها قد تجمعت في مركزها . ويصح هذا لكل جزء كروي متمركز من كسرة

منتظمة صلبة . فالجسيم الكروي المنتظم يجذب اذن جسما خارجيا وكان كتلة الكرة الكلية متجمعه في المركز . ويصح هذا ايضا للكرة غير المنتظمة مادام توزيع الكتلة متماثلا قطبيا .  
 .  
 وقد ترك للطالب ان يبرهن على ان قوة الجذب على جسيم واقع داخل قشرة كروية منتظمة تساوي صفرا .

(٣-٦) الطاقة الكامنة في مجال الجاذبية . جهد الجاذبية

Potential Energy in a Gravitational Field, Gravitational Potential

برهنا في البند ٣-٤ من الفصل الرابع، ان قانون التربيع العكسي للقوة يؤدي الى قانون الدرجة الاولى العكسي لدالة الطاقة الكامنة . وسنشق في هذا الجزء من الفصل العلاقة نفسها بطريقة فيزيائية عميقة .

لنحسب الشغل اللازم  $W$  لتحرك جسيم اختبار كتلته  $m$  على طول مسار معلوم في مجال جاذبية جسيم آخر كتلته  $M$  .  
 سوف نضع الجسيم الذي كتلته  $m$  في نقطة اصل محاورنا، كما هو مبين في الشكل (٣-٦ أ) .

$$\vec{F} = - (GMm / r^2) \vec{n}$$

لما كانت القوة  $\vec{F}$  على جسيم الاختبار هي

عندئذ للتغلب على هذه القوة يجب تسليط قوة خارجية  $-\vec{F}$  . اذن ، الشغل المنجز  $dW$  لتحريك جسيم الاختبار مسافة  $d\vec{r}$  هو

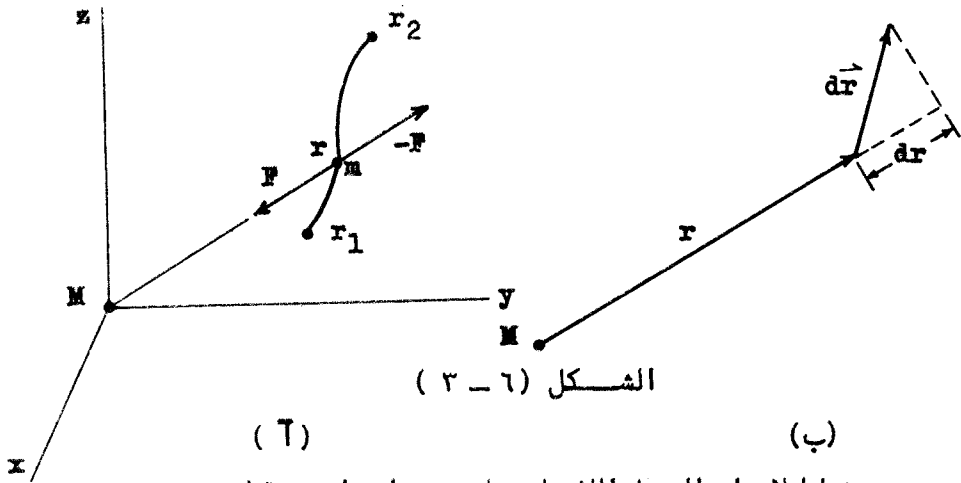
$$dW = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{GMm}{r^2} \vec{n} \cdot d\vec{r} \quad (٣-٦)$$

والان يمكننا تحليل  $d\vec{r}$  الى مركبتين :  $\vec{n}dr$  موازية الى  $\vec{n}$  (المركبة القطبية) والاخرى عمودية على  $\vec{n}$  [ (الشكل ٣-٦ ب) ] من الواضح اذن

$$\vec{n} \cdot d\vec{r} = dr$$

اذن

$$W = GMm \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -GMm \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (٤-٦)$$



الشكل (٦ - ٣)

(ب) مخطط لايجاد الشغل اللازم لتحريك جسيم اختبار من نقطة الى اخرى في مجال الجاذبيية .

حيث  $r_2$  و  $r_1$  يمثلان المسافتين القطبيتين للجسيم في بداية المسار ونهايته على التوالي . اذن لايعتمد الشغل على المسار الذي يتبعه الجسيم ، وانما يعتمد فقط على نقطتي البداية والنهاية للمسار . وهذا يؤكد صحة حقيقة سبق معرفتها وهي ان قانون التربيع العكسي للقوة محافظ .

ويمكننا تعريف الطاقة الكامنة لجسيم ذي كتلة في نقطة معينة واقعة في مجال جاذبية جسيم آخر بالشغل المنجز لتحريك جسيم الاختبار من موضع ( اختياري ) يتخذ كمرجع الى النقطة المعينة في السؤال . من الملائم اتخاذ موضع المرجع في اللانهاية . عند تعويض  $r_2 = r$  ,  $r_1 = \infty$  في المعادلة (٦-٤) ، نحصل على

$$V(r) = G M m \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = - \frac{GMm}{r} \quad (٥-٦)$$

في الحقيقة رأينا في البند (٣-٤) السابق ان دالة الطاقة الكامنة  $V(r) = -\frac{k}{r}$  تعطي قانون التربيع العكسي للقوة  $\vec{F} = -\left(\frac{k}{r^2}\right)\vec{n}$  (من المهم ملاحظة انه ليس من المنطق تعريف طاقة كامنة بالتكامل  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$  ما لم نعرف مسبقا ان القوة  $\vec{F}$  محافظة ، اي ان دالة الجهد متواجدة ) .

ومن المستحسن ، في الغالب ، تعريف كمية مثل  $\Phi$  ، تسمى بجهد الجاذبية ،

$$\Phi = \frac{V}{M} \quad \text{اي} \quad \text{بطاقة جهد الجاذبية لوحدة الكتلة ، اي}$$

اذن جهد الجاذبية في مجال جسيم كتلته  $M$  هو -

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \quad (٦-٦)$$

اذا كان لدينا عدد من الجسيمات مثل  $M_1$  ،  $M_2$  ، ..... ،  $M_n$  وكانت

مواضعها  $\vec{r}_1$  ،  $\vec{r}_2$  ، ..... ،  $\vec{r}_n$  ، فان جهد الجاذبية

في النقطة  $(x, y, z)$  يساوي مجموع جهود الجاذبية لجميع الجسيمات ، اي

$$\Phi(x, y, z) = \sum \Phi_i = -G \sum \frac{M_i}{r_i} \quad (٧-٦)$$

حيث  $r_i$  تمثل المسافة من الجسيم  $i$  الذي كتلته  $M_i$  الى نقطة المجال

$$(x, y, z) \quad \text{اي} \quad \vec{r}$$

$$r_i = |\vec{r} - \vec{r}_i|$$

تسمى النسبة بين قوة الجذب على جسيم معلوم الى كتلته بشدة مجال الجاذبية . ويرمز لها بالحرف  $G$  .

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{M}$$

اي

والعلاقة بين شدة المجال والجهد هي نفسها بين القوة  $\vec{F}$  والطاقة الكامنة

$\nabla \Phi$  اي

$$\vec{g} = - \nabla \Phi$$

$$\vec{F} = - \nabla V \quad (٨-٦)$$

اذن مركبات شدة المجال تساوى تفاضلات الجهد الجزئية على التوالي واطارة سالبة  
اى -

$$g_x = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad g_y = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad g_z = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (٩-٦)$$

يمكن حساب شدة مجال الجاذبية اولا بايجاد دالة الجهد من المعادلة (٧-٦) ثم حساب المنحدر كما هو مبين في المعادلات (٨-٦) او (٩-٦) وهذه الطريقة اسهل و اعتيادية من طريقة حساب المجال رأسا من قانون التربيع العكسي . وسبب ذلك هو ان الجهد جمع عددي بينما المجال جمع اتجاهي . وتشابه هذه الحالة تماما نظرية المجالات الكهرومغناطيسية . وفي الحقيقة يمكن تطبيق اى من نتائج الالكتروديناميك المناظرة لايجاد مجالات وجهد الجاذبية شريطة ان لا توجد كتل سالبة .

### جهد قشرة كروية منتظمة

لنجد  $\Phi$  مثلاه دالة جهد قشرة كروية منتظمة باستعمال نفس الرموز المبينة في الشكل (٣-٦) عندنا -

$$\Phi = -G \int \frac{dM}{u} = -G \int \frac{2\pi \rho R^2 \sin \theta d\theta}{u}$$

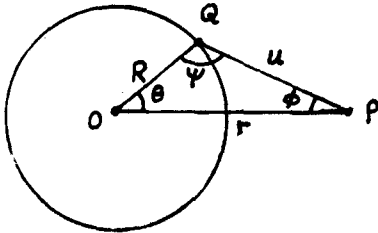
من نفس العلاقة بين  $u$  و  $\theta$  التي استعملناها سابقا نجد ان المعادلة المذكورة اعلاه يمكن تبسيطها الى

$$\Phi = -G \frac{2\pi \rho R^2}{R} \int_{r-R}^{r+R} du = - \frac{GM}{r} \quad (١٠-٦)$$

حيث  $M$  هي كتلة القشرة . هذه هي نفس دالة الجهد لجسيم منفرد كتلته  $M$  و موضع في النقطة  $\theta$  . اذن مجال الجاذبية خارج القشرة هو نفس ذلك المجال المتولد فيما لو تجمعت الكتلة الكلية في المركز . وقد ترك للطالب ان يبرهن بعد اجراء التغيير الملائم على التكامل واطااته ان الجهد داخل القشرة ثابت لذلك يكون المجال هنا صفرا .

\* جهد ومجال حلقة ريفية

نود الان ايجاد دالة الجهد وشدة مجال الجاذبية في مستوى حلقة دائرية ريفية . لنفرض ان نصف قطر الحلقة يساوي  $R$  وكتلتها  $M$  . عندئذ لنقطة خارجية واقعة في مستوى الحلقة ، الشكل ( ٤-٦ ) نجد ان



الشكل ٤-٦ . الاحداثيات لحساب مجال الجاذبية لحلقة .

$$\Phi = -G \int \frac{dM}{u} = -G \int_0^{2\pi} \frac{\mu R d\theta}{u}$$

حيث  $\mu$  تمثل الكثافة الخطية للحلقة . لحساب التكامل ، سنعتبره بدلالة الزاوية  $\psi$  المبينة في الشكل . فمن المثلث  $OPQ$  نجد ان

$$R \sin \psi = r \sin \theta$$

ومتفاضلها نحصل على

$$R \cos \psi d\psi = r \cos \theta d\theta = r \cos \theta (-d\theta - d\psi)$$

$$\theta + \theta + \psi = \pi \quad \text{نتبع الخطوة الاخيرة من حقيقة كون}$$

$$u = R \cos \psi + r \cos \theta \quad \text{عند نقل الحدود واستعمال العازقة}$$

$$u d\psi = -r \cos \theta d\theta = -(r^2 - R^2 \sin^2 \psi)^{\frac{1}{2}} d\theta \quad \text{نحصل على -}$$

$$\Phi = -G \mu R \int_0^{\pi/2} (r^2 - R^2 \sin^2 \psi)^{-\frac{1}{2}} d\psi = -G \frac{4\mu R}{r} K\left(\frac{R}{r}\right) \dots$$

..... ( ١١ - ٦ )

Complete elliptic integral

حيث  $K$  يمثل التكامل الاهليلجي التام

كما عرف في البند (٤-١) عند فك التكامل كمتسلسلة وتكاملها حداً بعد حد نحصل على

$$\begin{aligned} \Phi &= -G \frac{4\mu R}{r} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi R^2}{8r^2} + \dots \right) \\ &= -\frac{GM}{r} \left( 1 + R^2/4r^2 + \dots \right) \end{aligned} \quad (١٢-٦)$$

عندئذ شدة المجال على مسافة  $r$  من مركز الحلقة ، تكون بالاتجاه القلبي (لان  $\Phi$  ليست دالة للزاوية  $\theta$ ) وهي تعطى بالمعادلة التالية

$$\vec{G} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{n} = \left( -\frac{GM}{r^2} - \frac{3GMR^2}{4r^4} - \dots \right) \vec{n} \quad (١٢-٦)$$

فالمجال اذن لا يخضع لقانون التربيع العكسي . اما اذا كانت  $r$  كبيرة جداً بالنسبة الى  $R$  فالحد الاول يكون هو الغالب ويصبح المجال تقريباً من نوع التربيع العكسي .  
(٤-٦) الطاقة الكامنة في مجال مركزي عام

Potential Energy in a General Central Field.

رأينا سابقاً ان المجال المركزي من نوع التربيع العكسي يكون محافظاً . ولنفرض الان السؤال التالي :

" هل اى مجال مركزي لقوة يكون محافظاً ؟ يمكن كتابة المجال المركزي المتجانس العام كما يلي -

$$\vec{F} = f(r) \vec{n} = \frac{f(r)}{r} (\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z) \quad (١٤-٦)$$

حيث  $\vec{n} = (\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)/r$  تمثل الوحدة المتجهة القطبية . ولكي نطبق

اختبار المحافظة ، لنحسب دوران  $\vec{F}$  . اى

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$



حيث

$$f_x = f(r) \frac{x}{r}, \quad f_y = f(r) \frac{y}{r}, \quad f_z = f(r) \frac{z}{r}$$

ثم نحسب التفاضل الجزئي على النحو التالي

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = x \frac{d}{dr} \left( \frac{f(r)}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} = y \frac{d}{dr} \left( \frac{f(r)}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x}$$

ولكن

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{r}$$

وبالتماثل

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

من الواضح ، عندئذ

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{xy}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{f(r)}{r} \right) = \frac{\partial f_y}{\partial x}$$

وهناك معادلات مماثلة للزوجين  $f_x$  ،  $f_z$  و  $f_y$  ،  $f_z$  . واستعمال

النتيجة السابقة ، نستطيع ان نجد بسهولة ان الدوران يساوي صفرًا ولذلك يكون

مجال القوة المركزية المذكور اعلاه محافظًا . اذن يمكننا تعريف دالة الطاقة الكامنة

كما في البند (٦-٣) ، على النحو التالي

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^r f(r) dr \quad (١٥-٦)$$

وهذا يجيز لنا حساب دالة الطاقة الكامنة ، اذا كانت دالة القوة معلومة .

وبالعكس اذا كنا نعرف دالة الطاقة الكامنة ، فمن

$$f(r) = - \frac{\partial V(r)}{\partial r} \quad (١٦-٦)$$

نحصل على دالة القوة للمجال المركزي .

## ٦- الزخم الزاوي - Angular Momentum

افرض المعادلة العامة لحركة جسيم

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

لنضرب طرفي المعادلة اتجاهيا بالمتجه  $\vec{r}$ 

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\vec{a}$$

من التعريف ، الطرف الايسر لهذه المعادلة ، يمثل عزم القوة حول نقطة الاصل .  
والطرف الايمن عبارة عن مشتقة زمن الكمية  $\vec{r} \times m\vec{v}$  ، ولكي نثبت ذلك ، عندنا

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times m\vec{a}$$

نتجت الخطوة الاخيرة لان  $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$  . والكمية

$$\vec{r} \times m\vec{v} = \vec{L} \quad (17-6)$$

تسمى بزخم الجسيم الزاوي . لذلك يمكننا كتابة

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (18-6)$$

اي ان العزم حول نقطة اصل معلومة لقوة تؤثر على جسيم تساوي تغير زمن الزخم  
الزاوي حول هذه النقطة .

## الزخم الزاوي في المجالات المركزية

## Angular Momentum in Central Fields

لنطبق القاعدة العامة المذكورة اعلاه على حالة خاصة وهي حركة جسيم في مجال  
مركزي . هنا القوة  $\vec{F}$  تؤثر باتجاه متجه نصف القطر  $\vec{r}$  . اي ان الضرب  
الاتجاهي  $\vec{r} \times \vec{F}$  يساوي صفرا ، وهذا يعني ، ان العزم يساوي صفرا ، لذلك لا  
مجال مركزي يكون -

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$$L = \text{constant}$$

اذن

اي ان الزخم الزاوى لجسيم يتحرك في مجال مركزى يبقى دائما ثابتا .  
 نستنتج من ذلك ، ان مسار حركة الجسيم في مجال مركزى يبقى في مستوا واحد ،  
 لان متجه الزخم الزاوى الثابت  $L$  يكون عموديا على كل من  $\vec{r}$  ،  $\vec{v}$  ، اذن  
 يكون عموديا على المستوى الذى يتحرك فيه الجسيم .

Magnitude of the Angular Momentum مقدار الزخم الزاوى

لحساب مقدار الزخم الزاوى ، يفضل تحليل متجه السرعة  $\vec{v}$  الى مركبتيه القابضة  
 والمستعرضة في المحاور القطبية . وذلك يمكن كتابة

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{n} + r\dot{\theta}\vec{n}'$$

حيث  $\vec{n}$  تمثل الوحدة المتجهة القابضة و  $\vec{n}'$  الوحدة المتجهة المستعرضة . عندئذ  
 مقدار الزخم الزاوى يكون

$$L = |\vec{r} \times m\vec{v}| = |\vec{r}\vec{n} \times m(\dot{r}\vec{n} + r\dot{\theta}\vec{n}')|$$

ولما كان  $\vec{n} \times \vec{n} = 0$  و  $\vec{n} \times \vec{n}' = 1$  اذن

$$L = mr^2 \dot{\theta} = \text{constant}$$

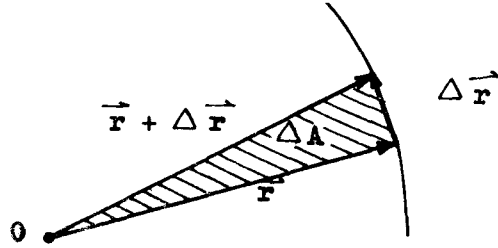
لجسيم يتحرك في مجال قوة مركزية .

(٦-٦) قانون المساحات . قوانين كبلر لحركة الكواكب السيارة

The Law of Areas. Kepler's Laws of Planetary Motion.

يرتبط الزخم الزاوى لجسيم بالمعدل الزمني للمساحة التي يقطعها متجه الموضع .  
 لتوضيح ذلك ، افرض الشكل (٦-٥) الذى يبين متجهي موضع متتاليين  $\vec{r}$  ،  
 $\vec{r} + \Delta \vec{r}$  يمثلان حركة جسيم في فترة زمنية مقدارها  $\Delta t$  .  
 مساحة المثلث المظلل  $\Delta A$  الواقعة بين المتجهين هي

$$\Delta A = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \Delta \vec{r}|$$



الشكل (٦-٥) المساحة التي يقطعها متجه نصف القطر

وعند قسمة طرفي هذه المعادلة على  $\Delta t$  واخذ النهاية نحصل على -

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \vec{v} \right| \quad (٦-٢٠)$$

ومن تعريف  $\vec{L}$  يمكننا كتابة هذه المعادلة على النحو التالي

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} \left| \vec{r} \times m\vec{v} \right| = \frac{\vec{L}}{2m} \quad (٦-٢١)$$

للمعدل الزمني الذي يسمح فيه متجه نصف القطر مساحته  $\cdot$  ولما كان الزخم الزاوي

$\vec{L}$  ثابتا في اى مجال مركزي  $\cdot$  نستنتج من ذلك ان السرعة المساحية  $dA/dt$

تكون ثابتة ايضا في المجال المركزي

### قوانين كبلر Kepler's Laws

اكتشف يوهانز كبلر Johannes Kepler سنة ١٦٠٩ بطريقة التجريبية ان الكواكب عندما تدور حول الشمس تكون سرعاتها المساحية ثابتة  $\cdot$  لقد استنتج كبلر هذا القانون واثنين آخرين  $\cdot$  بعد ان قام تيشورا Tycho Brahe بدراسة مضمينة لمواقع الكواكب وتسجيلها  $\cdot$  وقوانين كبلر الثلاثة هي -

- ١- كل كوكب يتحرك بمسار قطع ناقص تكون الشمس في بؤرتيه  $\cdot$
- ٢- يقطع متجه نصف القطر مساحات متساوية في ازمان متساوية  $\cdot$

٣- يتناسب مربع زمن الدورة حول الشمس مع مكعب طول المحور الرئيسي للمسار  
 وقد وضع نيوتن ان قوانين كبلر الثلاثة هي نتائج لقانون الجاذبية . ومن المناقشة  
 التي نفودنا الى معادلة (٦- ٢١) ، نرى ان القانون الثاني قد نتج من حقيقة كون  
 مجال جاذبية الشمس مركزيا . اما القانونان الاخران - كما سنبين بعد ذلك - فهما  
 نتيجتان لحقيقة كون القوة تتخبر مع مربع المسافة العكسي .  
 (٦- ٧) مدار جسيم في مجال قوة مركزيه

### Orbit of a Particle in a Central-Force Field

لدراسة حركة جسيم في مجال مركزي ، من الملائم التعبير عن المعادلة التفاضلية

للحركة  

$$m\ddot{\vec{r}} = f(r)\vec{n}$$
 بالاحداثيات القطبية . وكما بينا في البند (٢- ٩) ، ان مركبة  $\ddot{\vec{r}}$  القطبية هي  $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

والستعرضة هي  $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$  . وعند التعويض نحصل على مركبات المعادلات التفاضلية  
 للحركة وهي

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) \quad (٦- ٢٢)$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \quad (٦- ٢٣)$$

ومن المعادلة الثانية نحصل على  

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$
 أو

$$r^2\dot{\theta} = \text{constant} = h \quad (٦- ٢٤)$$

ومن معادلة (٦- ١٩) نرى ان

$$h = \frac{L}{m} \quad (٦- ٢٥)$$

اذن  $h$  يمثل الزخم الزاوي لوحدة الكتلة . ان ثبوته يعني ببساطة صياغة الحقيقة  
 المعروفة مرة ثانية ، وهي ان الزخم الزاوي لجسيم يكون ثابتا عندما ما يتحرك تحت تأثير  
 قوة مركزيه .

ويمكننا نظريا حل المعادلتين التفاضليتين [المعادلتان (٦- ٢٢) و (٦- ٢٤)] لدالة

قطبية معلومة  $r$  (  $r$  ) للحصول على  $r$  و  $\theta$  كدوال للزمن  $t$  . وفي اغلب الحالات يهملنا فقط المسار في الفضاء ( المدار ) بغض النظر عن الزمن  $t$  . فلايجاد معادلة المدار سنستخدم المتغير  $u$  المعروف كما يلي -

$$r = \frac{1}{u} \quad (٦ - ٢٦)$$

اذن

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \dot{u} = -\frac{1}{u^2} \dot{\theta} \frac{du}{d\theta} = -h \frac{du}{d\theta} \quad (٦ - ٢٧)$$

حيث نتجت الخطوة الاخيرة من

$$\dot{\theta} = hu^2 \quad (٦ - ٢٨)$$

وفقا للمعادلتين (٦-٢٤) و (٦-٢٦) .

وبند التفاضل للمرة الثانية ، نحصل على

$$\ddot{r} = -h \frac{d}{dt} \frac{du}{d\theta} = -h \dot{\theta} \frac{d^2u}{d\theta^2} = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} \quad (٦ - ٢٩)$$

من قيم  $r$  ،  $\dot{\theta}$  ،  $\ddot{r}$  نجد بسهولة ان المعادلة (٦-٢٢) تتحول الى

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{1}{mh^2 u^2} f(u^{-1}) \quad (٦ - ٣٠)$$

المعادلة المذكورة اعلاه هي معادلة المدار التفاضلية لجسيم يتحرك تحت تأثير قوة مركزية . والحل يعطى  $u$  (اذن  $r$ ) كدالة للمتغير  $\theta$  . والعكس . اذا كانت

المعادلة القطبية للمدار معلومة . اى  $r=r(\theta)=u^{-1}$  ، عندئذ يمكن ايجاد دالة

القوة بتفاضلها للحصول على  $d^2u/d\theta^2$  وتموضها في المعادلة التفاضلية .

### امثلة

١- جسيم في مجال مركزى يتحرك بمدار لولبي

$$r = c\theta^2$$

جد شكل دالة القوة .

$$u = \frac{1}{c\theta^2} \quad \text{عندنا}$$

و

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{2}{c} \theta^{-3}, \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{6}{c} \theta^{-4} = 6cu^2$$

عندئذ \* من المعادلة (٢٠-٦)

$$6cu^2 + u = \frac{-1}{mh^2u^2} f(u^{-1})$$

اذن

$$f(u^{-1}) = -mh^2 (6cu^4 + u^3)$$

$$f(r) = -mh^2 \left( \frac{6c}{r^4} + \frac{1}{r^3} \right) \quad \text{و}$$

فالقوة تتكون اذن من قانوني التكميب العكسي والقوة الرابعة العكسية .

٢- في المسألة السابقة جد كيف تتغير الزاوية  $\theta$  مع الزمن .

نستعمل هنا حقيقة كون  $h = r^2\dot{\theta}$  ثابتا . اذن

$$\dot{\theta} = hu^2 = h \frac{1}{c^2\theta^4}$$

أو

$$\theta^4 d\theta = \frac{h}{c^2} dt$$

وهكذا \* بالتكامل نجد ان

$$\frac{\theta^5}{5} = hc^{-2}t$$

حيث نرض ان ثابت التكامل يساوى صفرا . عندئذ

$$\theta = ct^{1/5}$$

حيث

$$C = \text{constant} = (5hc^{-2})^{1/5}$$

Energy Equation of the Orbit (٨-٦) معادلة الطاقة للمدار

ان مربع الانطلاق بالمحاور القطبية هو

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

لما كانت القوة المركزية محافظة ، فالطاقة الكلية  $T + V$  ثابتة ، وهي تساوي

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E = \text{constant} \quad (٣١-٦)$$

ويمكننا كذلك كتابة المعادلة السابقة بدلالة المتغير  $u = \frac{1}{r}$  . ومن المعادلتين (٢٧-٦) و (٢٨-٦) نحصل على

$$\frac{1}{2}mh^2 \left[ \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] + V(u^{-1}) = E \quad (٣٢-٦)$$

وفي المعادلة السابقة هناك متغيران فقط هما  $u$  ،  $\theta$  . ونسمي هذه المعادلة اذن بمعادلة الطاقة للمدار .

### مثال

من المثال ، في البند السابق ، حصلنا للمدار اللولبي  $r = c\theta^2$  على

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{-2}{c} \theta^{-3} = -2c^{\frac{1}{2}} u^{3/2}$$

فمعادلة الطاقة للمدار تكون اذن

$$\frac{1}{2}mh^2 (4cu^3 + u^2) + V = E$$

او

$$V(r) = E - \frac{1}{2} mh^2 \left( \frac{4c}{r^3} + \frac{1}{r^2} \right)$$

وهذه تعطي دالة القوة بسهولة لان

$$f(r) = -dV/dr$$

(٩-٦) المدارات في مجال التربيع المعكسي

Orbits in an Inverse-square Field



من أهم أنواع المجالات المركزية هو الذي تتغير فيه القوة عكسياً مع مربع المسافة القطبية

$$f(r) = -k/r^2 \quad (٢٢-٦)$$

لما كانت هذه المجالات الاعارة المماثلة في المعادلة المماثلة انما هي تناسب  $k$  يكون مرجحاً لقوة التجاذب والعكس بالعكس. (كما رأينا في البند (٢-٦)  $k=GMm$  لمجال الجاذبية). عندئذ تصبح معادلة المدار [المعادلة (٦-٢٠)]

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{mh^2} \quad (٢٤-٦)$$

ومن الواضح ان الحل العام هو

$$u = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{k}{mh^2} \quad (٢٥-٦)$$

أو

$$r = \frac{1}{A \cos(\theta - \theta_0) + k/mh^2} \quad (٢٦-٦)$$

وتحسب ثابت التكامل  $A$  من الشروط الابتدائية. ولما كانت قيمة  $\theta_0$  تعين ميلان المدار ليس غيره، لذلك يمكننا بدون فقدان عمومية المعادلة اختصار  $\theta_0 = 0$  عند بحث شكل المدار، أي -

$$r = \frac{1}{A \cos \theta + k/mh^2} \quad (٢٧-٦)$$

هذه هي معادلة المدار القطبية. وهي معادلة قطع مخروطي (قطع ناقص، مكافئ، أو زائد) مع نقطة الاصل في البؤرة. ويمكن كتابة المعادلة بشكل قياسي على

النحو التالي

$$r = r_0 \frac{1 + e}{1 + e \cos \theta} \quad (٢٨-٦)$$

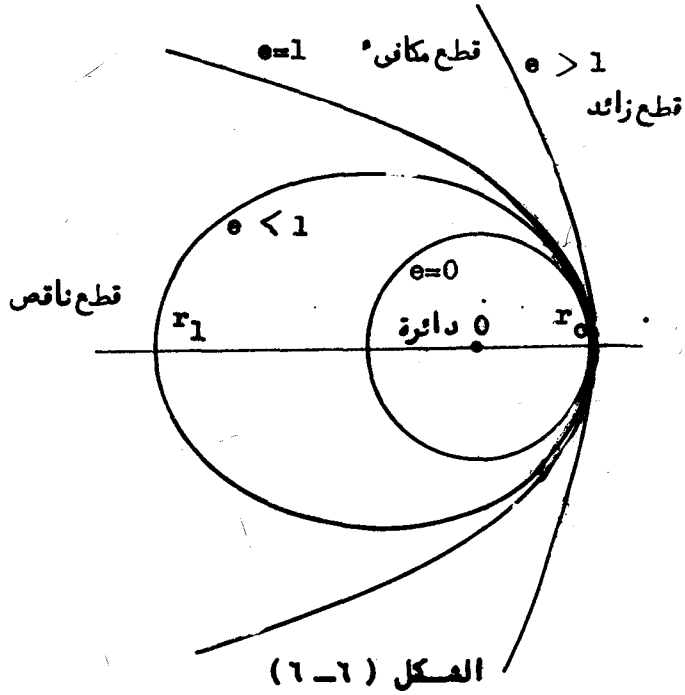
حيث

$$e = \frac{A mh^2}{k} \quad (٢٩-٦)$$

$$r_0 = \frac{mh^2}{k(1+e)}$$

(٤٠-٦)

الثابت  $e$  يسمى باختلاف المركز • eccentricity والفعل (٦-٦) يوضح الحالات المختلفة وهي



عائلة مقاطع المخروط المركزية

قطع ناقص:  $e < 1$  • دائرة (حالة خاصة من القطع الناقص):  $e = 0$  •

قطع مكافئ:  $e = 1$  • قطع زائد:  $e > 1$  •

من المعادلة (٢٨-٦)  $r_0$  هي قيمة  $r$  عندما  $e = 0$  • قيمة  $r$

عندما  $e = \pi$  هي

$$r_1 = r_0 \frac{1+e}{1-e}$$

(٤١-٦)

والنسبة الى المدارات الاهليجية للكواكب حول الشمس ، تسمى المسافة  $r_0$  بالضيض الشمسي Perihelion (اقرب مسافة الى الشمس) ، والمسافة  $r_1$  تسمى بالوج . . . aphelion (ابعد مسافة من الشمس) . اما المسافات المماثلة لها لمدار القمر حول الارض ، ومدارات تنوع الارض الصناعية ، فتسمى مسافات الضيض القمري Perigen و الاوج apogee على التتالي .

ان الاختلافات المركزية لمدارات الكواكب حول الشمس صغيرة جدا ( انظر جندول  $1 - 6^\circ$  ادناء ) على سبيل المثال ، في حالة مستدار الارض  $e = 0.017$  ، ومن ناحية اخرى ، فان المذنبات بصورة عامة لها اختلافات مركزية كبيرة ( مدارات كبيسرة الاستطالة ) . فمثلا الاختلاف المركزي لمذنب هالي يساوي  $17$  اونساف كبيسرة ضيضه . . . . . ميل ، بينما اوجه خلف مدار نبتون ، ولمذنبات كثيرة ( النوع غير الدائر ) مدارات قطع مكافئ ، او زائد .

انيجاد البرهوزات المدارية مع الشروط الابتدائية

رأيتنا من المعادلة (٤٠-٦) ان اختلاف المركز يمكن التعبير عنه كما يلي -

$$e = \frac{mh^2}{kr_0^2} - 1 \quad (٤٢-٦)$$

لتفرض ان  $v_0$  تمثل انطلاق الجسم عندما تكون  $\theta=0$  . عندئذ ، من تعريف الثابت  $h$  المعادلة (٢٤-٦) ، عندنا

$$h = r^2 \dot{\theta} = r_0^2 \dot{\theta}_0 = r_0 v_0 \quad (٤٣-٦)$$

فاختلاف المركز عندئذ يكون

$$e = \frac{mr_0 v_0^2}{k} - 1 \quad (٤٤-٦)$$

للمدار الدائري ( $e = 0$ ) عندئذ نحصل على

$$\frac{k}{r_0^2} = \frac{mv_0^2}{r_0} \quad (٤٥-٦)$$

ولنرمز الان للكمية  $k/mr_0$  بالرمز  $v_0^2$  بحيث ، اذا كانت  $v_0 = v_0$

يكون المدار دائريا • عندئذ يمكن كتابة علاقة اختلاف المركز في المعادلة (٤٤-٦) كما يلي -

$$e = \left(\frac{v_0}{v_c}\right)^2 - 1 \quad (٤٦-٦)$$

يمكن كتابة معادلة المدار على النحو التالي

$$r = r_0 \frac{(v_0/v_c)^2}{1 + [(v_0/v_c)^2 - 1] \cos \theta} \quad (٤٧-٦)$$

ونحصل على قيمة  $r_1$  عندما تكون  $\theta = \pi$  إذن

$$r_1 = r_0 \frac{(v_0/v_c)^2}{2 - (v_0/v_c)^2} \quad (٤٨-٦)$$

### مثال

تابع صاروخي يدور حول الارض بمدار دائري نصف قطره  $r_0$  • وقد سبب انفجار محرك الصاروخ المفاجيء زيادة انطلاقه بنسبة عشرة بالمائة • جد معادلة المدار الجديد واحسب مسافة نقطة الاوج •

لفترض ان  $v_c$  تمثل الانطلاق في المدار الدائري، و  $v_0$  الانطلاق الابتدائي الجديد، اي ان

$$v_0 = 1.1 v_c$$

عندئذ تصبح المعادلة (٤٧-٦) للمدار الجديد •

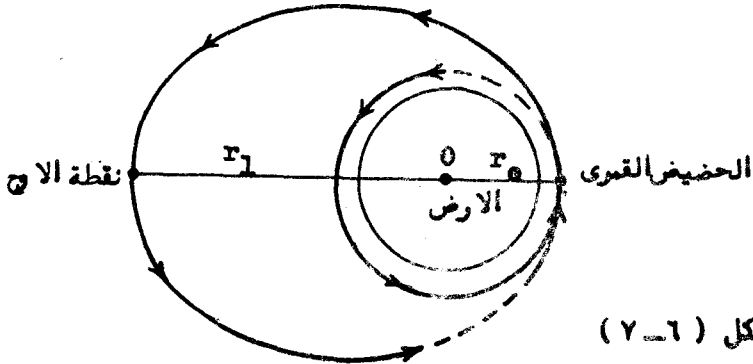
$$r = r_0 \frac{1.21}{1 + 0.21 \cos \theta}$$

ومسافة نقطة الاوج من المعادلة (٤٨-٦) هي

$$r_1 = r_0 \frac{1.21}{2 - 1.21} = 1.53 r_0$$

وقد بينت المدارات في الشكل (٧-٦) •

(١٠-٦) الطاقات المدارية في مجال التربيع المعكسي



المكمل (٧-٦)  
 يغير الصاروخ الفضائي مداره  
 من دائرة إلى قطع ناقص.

لما كانت دالة الطاقة الكامنة  $V(r)$  ل مجال قوة التربيع العكسية هي

$$V(r) = -\frac{k}{r} = -ku$$

عندئذ نحصل من المعادلة (٣٢-٦) على معادلة الطاقة للمدار وهي -

$$\frac{1}{2}mh^2 \left[ \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] - ku = E \quad (٤٤-٦)$$

او عند فرز المتغيرات نحصل على

$$d\theta = \left( \frac{2E}{mh^2} + \frac{2ku}{mh^2} - u^2 \right)^{-\frac{1}{2}} du \quad (٤٥-٦)$$

عند التكامل نجد ان

$$\theta = \sin^{-1} \left[ \frac{mh^2 u - k}{(k^2 + 2Ekh^2)^{\frac{1}{2}}} \right] + \theta_0$$

حيث  $\theta_0$  تمثل ثابت التكامل. لذا فرضنا ان  $\theta_0 = -\pi/2$  وحلت للمتغير  $u$

نحصل على

$$u = \frac{k}{mh^2} \left[ 1 + (1 + 2Ekh^2 k^{-2})^{\frac{1}{2}} \cos \theta \right]$$

او

$$r = \frac{mh^2 k^{-1}}{1 + (1 + 2Ekh^2 k^{-2})^{\frac{1}{2}} \cos \theta} \quad (٤٦-٦)$$

هذه هي معادلة المدار القطبية . وعند مقارنتها بالمعادلتين ( ١ - ٢٨ )  
و ( ٦ - ٢٩ ) نرى ان الاختلاف المركزي هو

$$e = (1 + 2Emh^2E^{-2})^{1/2} \quad (٥٢ - ٦)$$

العلاقة المذكورة اعلاه للاختلاف المركزي تجيز لنا تصنيف المدارات وفقاً للاطاقة الكلية  $E$  كما يلي -

$E < 0$	$e < 1$	:	مدارات مغلقة (قطع ناقص او دائرة)
$E = 0$	$e = 1$	:	قطع مكافئ
$E > 0$	$e > 1$	:	قطع زائد

لما كانت  $E = T + V$  وكذلك ثابتة ، فالمدارات المغلقة هي التي تكون فيها

$$T \geq |V| \quad \text{والمدارات المفتوحة هي التي تكون فيها} \quad T < |V|$$

### مثال

لوحظ ان انطلاق نجم مذنب يساوي  $v_0$  عندما يكون على مسافة  $r_0$  من الشمس ،  
واتجاه حركته يصنع زاوية  $\theta$  مع اتجاه نصف القطر من الشمس . جد الاختلاف  
المركزي لمدار النجم المذنب .

في مجال جاذبية الشمس  $k = GMm$  حيث  $M$  تمثل كتلة الشمس و  $m$

كتلة الجسم . الطاقة الكلية  $E$  ، عندئذ تعطى من

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \text{constant}$$

وسيكون المدار قطعاً ناقصاً ، مكافئاً او زائداً حسبما تكون  $E$  سالبة ، صفراً او موجبة .

وفقاً لذلك اذا كانت  $(v_0^2)$  اقل من ، تساوى او اكبر من

$$\frac{2GM}{r_0}$$

سيكون المدار قطعاً ناقصاً ، مكافئاً او زائداً على التوالي . الآن

$$h = |\vec{r} \times \vec{v}| = r_0 v_0 \sin \theta$$

اذن تكون قيمة الاختلاف المركزي  $e$  من المعادلة (٥٢-٦) هي

$$e = \left[ 1 + \left( v_0^2 - \frac{2GM}{r_0} \right) \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \theta}{GM^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

قد يعبر عن حاصل القرب  $GM$  بدلالة انطلاق الارض  $v_0$  ونصف قطرها

المدارى  $r_0$  (على فرض ان المدار دائرى)  $e$  اى

$$GM = r_0 v_0^2$$

وئذ يمكن كتابة المعادلة التي تعبر عن الاختلاف المركزي على النحو التالي-

$$e = \left[ 1 + \left( \frac{v_0^2}{v_0^2} - \frac{2r_0}{r_0} \right) \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \theta}{r_0^2 v_0^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

ظلمات الحركة نصف القطرية

من معادلة المدار النصف قطريه (٥١-٦)  $e$  نرى ان قيم  $r$  عندما  $e = 0$

هي  $r_0$  وعندما  $e = \pi$  هي  $r_1$  اى ان

$$r_0 = \frac{mh^2 k^{-1}}{1 + (1 + 2Emh^2 k^{-2})^{\frac{1}{2}}} \quad (٥٣-٦)$$

$$r_1 = \frac{mh^2 k^{-1}}{1 - (1 + 2Emh^2 k^{-2})^{\frac{1}{2}}} \quad (٥٤-٦)$$

في حالة المدار الاهليجي تكون  $E$  سالبة والقطر الرئيسي  $2a$  للقطع

$$2a = r_0 + r_1$$

هو

معدل نجد  $e$  من المعادلتين (٥٣-٦) و (٥٤-٦)  $e$  ان

$$2a = -\frac{k}{|E|} \quad (٥٥-٦)$$

اذن ه قيمة  $a$  تحسب كلها من الطاقة الكلية .  
 وهي حالة المدار الدائرى الذى نصف قطره  $a$  عندنا

$$V = -\frac{k}{a} = \text{constant}$$

$$E = -\frac{k}{2a} = \text{constant}$$

اذن الطاقة الحركية تكون

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = E - V = k/2a$$

يمكن البرهنة على ان معدل زمن الطاقة الحركية ه للحركة الاهليلجية في مجال

التربيع العكسي هي  $k/2a$  ايضا ه والمعدل الزمنى للطاقة الكامنة هو  $-k/a$

حيث  $a$  يمثل المحور الرئيسى للقطع الناقص . وقد ترك البرهان كتبرين .

٦- (١) مدة الدورة للحركة المدارية Periodic Time of Orbital Motion

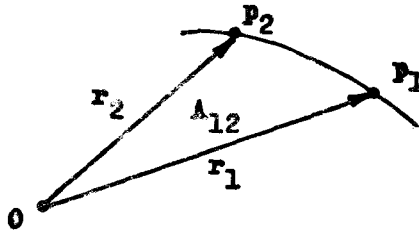
بيننا في البند (٦-٦) ان السرعة المساحية  $\dot{A}$  لجسيم يتحرك في اى مجال مركزى

تكون ثابتة . اذن ه الزمن اللازم  $t_{12}$  ليتحرك جسيم من نقطة مثل  $P_1$  الى اى

نقطة اخرى  $P_2$  (العكس ٦-٨) نحصل عليه من المعاد لتبين (٦-٢١)

و (٦-٢٥) وهو

$$t_{12} = \frac{A_{12}}{\dot{A}} = A_{12} \frac{2a}{L} = A_{12} \frac{2}{h}$$



العكس (٦-٨)

المساحة التي يقطعها

متجه نصف القطر



حيث  $A_{12}$  تمثل المساحة التي يقطعها متجه نصف القطر بين النقطتين  $P_1$  و  $P_2$ .  
 نستخدم النتيجة السابقة لحالة مدار قطع ناقص لجسيم في مجال التربيع العكسي .  
 لما كانت مساحة القطع الناقص هي  $\pi ab$  حيث  $a$  و  $b$  يمثلان نصفي المحور الرئيسي  
 والثانوي ، على التوالي ، عندئذ ، الزمن اللازم  $\gamma$  لكي يكمل جسيم مسارا مداريا  
 واحدا هو

$$\gamma = \frac{2 \pi ab}{h} \quad (٥٦-٦)$$

ولكن للقطع الناقص

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$$

حيث  $e$  هي الاختلاف المركزي . اذن يمكننا كتابة

$$\gamma = \frac{2 \pi a^2}{h} \sqrt{1 - e^2}$$

علاوة على ذلك ، نجد من المعادلتين (٤٠-٦) و (٤١-٦) ان المحور الرئيسي

$$2a = r_0 + r_1 = \frac{mh^2}{k} \left( \frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e} \right) = \frac{2mh^2}{k(1-e^2)} \quad \text{هو}$$

هذلك يمكننا التعبير عن زمن الدورة كما يلي

$$\gamma = 2 \pi \left( \frac{m}{k} \right)^{\frac{1}{2}} a^{3/2} \quad (٥٧-٦)$$

اذن ، زمن الدورة لمجال قوة تربيع عكسية معينة يعتمد فقط على طول المحور الرئيسي  
 لمدار القطع الناقص .

ولما كان  $k = GMm$  لجرم كتلته  $m$  يتحرك في مجال جاذبية الشمس ، يمكننا  
 كتابة زمن دورة حركة الجرم المدارية كما يلي -

$$\gamma = ca^{3/2} \quad (٥٨-٦)$$

حيث  $c = 2\pi(GM)^{-1/2}$  من الواضح ان  $c$  هي نفسها لجميع الاجرام . والمعادلة

(٥٨-٦) تمثل الصيغة الرياضية لقانون كبلر الثالث . (البند ٦-٦) .

اذا استعملت الوحدات الفلكية لقياس  $a$  (٩٣ ٠٠٠ ٠٠٠ ميل =  $a_{\text{earth}}$ )

وحدة فلكية) وقيمت  $T$  بالسنين ، عندئذ تكون قيمة  $e$  العددية واحدا . وقد  
 سطرت في الجدول (٦-١) ازمان الدورات والمطاور نصف الرئيسية بالوحدات  
 الفلكية وكذلك الاختلافات المركزية لمدارات الاجرام في المجموعة الشمسية .  
 الجدول (٦-١)

الاختلاف المركزي	زمن الدورة بالسنوات	المطاور نصف الرئيسية بالوحدات الفلكية	الجرام	
٠.٢٠٦	٠.٢٤١	٠.٣٨٧	Mercury	عطارد
٠.٠٠٧	٠.٦١٥	٠.٧٢٣	Venus	الزهرة
٠.٠١٧	١.٠٠٠	١.٠٠٠	Earth	الارض
٠.٠٩٣	١.٨٨١	١.٥٢٤	Mars	المريخ
٠.٠٤٨	١١.٨٦	٥.٢٠٣	Jupiter	المشتري
٠.٠٥٦	٢٩.٤٦	٩.٥٣٩	Saturn	زحل
٠.٠٤٧	٨٤.٠٢	١٩.١٩	Uranus	اورانوس
٠.٠٠٩	١٦٤.٨	٣٠.٠٦	Neptune	نبتون
٠.٢٤٩	٢٤٧.٧	٣٩.٤٦	Pluto	بلوتو

٦-١٢) الحركة في مجال التربيع العكسي التنافري - تشتت الجسيمات الذرية

Motion in an Inverse-square Repulsive Field.

Scattering of Atomic Particles

هناك تطبيق فيزيائي مهم يتضمن حركة جسم في مجال مركزي ، قانون القوة فيه من نوع  
 التربيع العكسي التنافري ، كانهراف الجسيمات الذرية العالية الانطلاق (البروتونات  
 جسيمات الفا وهلم جرا) بتأثير نهايات الذرات الموجبة الشحنة . ان الابحاث الاساسية  
 التي لها الاولوية في معلوماتنا الحالية للتركيب الذري والنووي هي تجارب التشتت ،

وكان اول من بدأها الفيزيائي البريطاني اللورد ردفورد في بداية القرن الحالي .  
افرض ان جسما شحنته  $q$  وكتلته  $m$  (الجسيم الساقط بانطلاق عال) يمر بالقرب  
من جسيم هيل شحنته  $Q$  (النواة - فرضت ثابتة) . والجسيم الساقط توتر عليه قوة  
تنافرية تعطى من قانون كولوم  $e$  اى

$$f(r) = \frac{Qq}{r^2}$$

حيث فرض موضع  $Q$  في نقطة الاصل ( سنستعمل الوحدات الاكتروستاتيكية egs )  
للشحنات  $q, Q$  . عندئذ تكون  $r$  مقياسا بالمستمرات والقوة بالداينات ، عندئذ  
تصبح المعادلة التفاضلية للمدار (٦-٣٠) كما يلي

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = - \frac{Qq}{mh^2} \quad (٦-٥٩)$$

اذن معادلة المدار تكون

$$u^{-1} = r = \frac{1}{A \cos(\theta - \theta_0) - Qq/mh^2} \quad (٦-٦٠)$$

ويمكننا كذلك كتابة معادلة المدار بالشكل الذى تعطيه المعادلة (٦-٥١) ، اى

$$r = \frac{1}{mh^2 Q^{-1} q^{-1} - 1} \quad (٦-٦١)$$

لأن  $k = -Qq$  . المدار قطع مكافئ . ويمكن رؤية ذلك من الحقيقة الفيزيائية وهي ان  
الطاقة  $E$  تكون دائما اكبر من الصفر في مجال قوة تنافرية . ( في الحالة التي عندنا .

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{Qq}{r} .$$

اذن ، في المعادلة (٦-٦١) ، الاختلاف المركزى  $e$

وهو معامل  $(\theta - \theta_0)$   $\cos$  يكون اكبر من واحد . وهذا يعني ان المدار يجب  
ان يكون قطعاً مكافئاً <sup>مركزياً</sup>

يقترّب الجسيم الساقط على طول احد خطوط المقاربة asymptote ويتعد على  
طول الآخر كما هو مبين في الشكل (٦-٩) . وقد اخترنا اتجاه المحور القطبي بحيث

يكون موضع الجسم الابتدائي في  $\theta = 0$  ,  $r = \infty$  ، وواضح ان  $r$  في اى مـن  
معادلتى المدار تاخذ قيمة النهاية الصغرى عندما تكون  $\cos(\theta - \theta_0) = 1$  اى  
عندما  $\theta = \theta_0$  . ولما كانت  $r = \infty$  عندما  $\theta = 0$  ، عندئذ  $r$  تساوى كذلك  
ما لا نهاية عندما  $\theta = 2\theta_0$  . فالزاوية بين الخطين المتقاربين للقطع المكافئ اذ ن  
تساوى  $2\theta_0$  ، والزاوية  $\phi$  التي ينحرف فيها الجسم الساقط هي

$$\phi = \pi - 2\theta_0 \quad (٦٢ - ٦)$$

علاوة على ذلك ، يتلشى مقام يعين المعادلة (٦١ - ٦) ، عندما  $\theta = \theta_0$   
و  $\theta = 2\theta_0$  . اذن

$$-1 + (1 + 2Emh^2q^{-2}q^{-2})^{\frac{1}{2}} \cos \theta_0 = 0$$

ومنها نجد بسهولة ان

$$\tan \theta_0 = (2Em)^{\frac{1}{2}} hq^{-1}q^{-1} = \cot \frac{\phi}{2} \quad (٦٣ - ٦)$$

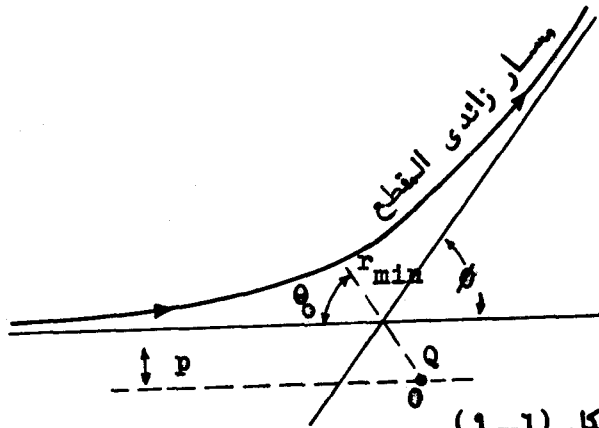
وتنتج الخطوة الاخيرة من المعادلة (٦٢ - ٦) .

عند تطبيق المعادلة السابقة على مسائل التشتت ، فمن المناسب التعبير عن الثابت  $h$   
بدلالة كمية اخرى  $p$  تسمى بـ *Impact Parameter* . وبـ *Impact Parameter* هو  
المسافة العمودية بين نقطة الاصل ( مركز التشتت ) والخط الابتدائي لحركة الجسم  
كما هو مبين في الشكل (٦ - ٦) . اى ان

$$h = |\vec{r} \times \vec{v}| = pv_0 \quad (٦٤ - ٦)$$

حيث  $v_0$  تمثل الانطلاق الابتدائي للجسيم . ونعلم ايضا ان الطاقة  $E$  ثابتة وتساوى  
الطاقة الحركية الابتدائية  $\frac{1}{2}mv_0^2$  ، لان الطاقة الكامنة الابتدائية تساوى صفرا  
(  $r = \infty$  ) . وفقا لذلك ، يمكننا كتابة علاقة التشتت من المعادلة (٦٣ - ٦)

$$\cot \frac{\phi}{2} = \frac{pmv_0^2}{Qq} = \frac{2pE}{Qq} \quad \text{على النحو التالي} \quad (٦٥ - ٦)$$



الشكل (٦-١)  
مسار زائد القطع لجسيم مشحون يتحرك في مجال  
التبرع العكسي التنازري لجسيم مشحون آخر

### امثلة

١- يتهمت جسيم الفا من الراديوم ( E تساوي خمسة ملايين الكترون فولت وتساوي

$5 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}$  ارك ) وينحرف بزاوية  $10^\circ$  عند مروره بالقرب من  
نواة الذهب . فما قيمة برتر التصادم ؟

لجسيمات الفا  $q = 2e$  ، وللذهب  $Q = 79e$  ، حيث  $e$  تمثل الشحنة الاولية  
( الشحنة التي يحملها الالكترون تساوي  $e^-$  ) في وحداتنا  $e = 4.8 \times 10^{-10}$  esu .

اذن  $e$  من المعادلة (٦-١) ، نحصل على

$$p = \frac{Qq}{2E} \cot 45^\circ = \frac{2 \times 79 \times (4.8)^2 + 10^{-20} \text{ em}}{2 \times 5 \times 1.6 \times 10^{-6}}$$

$$= 2.1 \times 10^{-12} \text{ cm}$$

٢- احسب اقرب مسافة دنو لجسيم الفا في السؤال السابق .

تعطي معادلة المدار (٦-٦١) مسافة اقرب دونه عندما تكون  $\theta = \theta_0$  ، اى

$$r_{\min} = \frac{mh^2 Q^{-1} q^{-1}}{-1 + (1 + 2Emh^2 Q^{-2} q^{-2})^{\frac{1}{2}}} \quad (٦٦-٦)$$

عند استخدام المعادلتين (٦-٦٤) و (٦-٦٥) ، يمكن كتابة المعادلة السابقة ، بعد تبسيطها قليلا على النحو التالي -

$$r_{\min} = \frac{p \cot(\theta/2)}{-1 + [1 + \cot^2(\theta/2)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{p \cos(\theta/2)}{1 - \sin(\theta/2)} \quad (٦٧-٦)$$

اذن عندما  $\theta$  تساوى ٩٠ درجة ، نجد

$$r_{\min} = 2.41 p = 5.1 \times 10^{-12} \text{ cm.}$$

لاحظ ان المعادلتين (٦-٦٦) و (٦-٦٧) تصحان معادلتين غير محددتين نحو النواة ، وقترب منها على طول خط مستقيم ، وتتافرا معها باستمرار بقسوة كولوم ، فيتناقص انطلقه الى الصفر عندما يصل الى نقطة معينة  $r_{\min}$  ، ثم من هذه النقطة يعود على طول المستقيم نفسه ، اى بزوايا انحراف مقدارها ١٨٠ درجة . وفي هذه الحالة يمكن ايجاد قيمة  $r_{\min}$  باستخدام حقيقة كون الطاقة  $E$  ثابتة . الطاقة الكامنة في نقطة الرجوع تساوى  $Qq/r_{\min}$  ، والطاقة الحركية تساوى صفرا .

اذن

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 = Qq/r_{\min}$$

و

$$r_{\min} = \frac{Qq}{E} \quad (٦٨-٦)$$

رأينا ان  $r_{\min} \approx 10^{-12} \text{ cm}$  لجسيمات الفا المنبعثة من الراديوم والمنحرفة بنهاية الذهب عندما تكون زاوية الانحراف تساوى ١٨٠ درجة . ان ملاحظة هذه الانحرافات تبين ان نصف قطر النواة محدود . ١٠ - ١٢ سم

\* (١٣-٦) الحركة في مدارات تقرب من الدائرية - الاستقرار

Motion in a Nearly Circular Orbit-Stability

من الممكن الحصول على مسار دائري تحت تأثير اى قوة تجاذب مركزية ، ولكن ليست جميع القوى المركزية تحدث مدارات دائرية مستقرة . ولنتناقش السؤال التالي ، اذا كان جسيم يتحرك في مدار دائري وانى اضطرابا صغيرا ، فهل يبقى المدار الناهي قريبا من المسار الدائري الاصلي ؟ لكي نجيب على هذا السؤال ، نعود الى المعادلة التفاضلية القطبية للحركة ، اى المعادلة (٦-٢٢) .

لما كانت  $\dot{m}h/r^2$  ، فيمكننا كتابة المعادلة القطبية على النحو التالي

$$m\ddot{r} - \frac{mh^2}{r^3} = f(r) \quad (٦-٦٩)$$

الآن ، للمدار الدائري ،  $r$  ثابتة اى ،  $\ddot{r} = 0$  . اذن ، عند تسمية نصف قطر

المدار الدائري " a " نحصل على

$$- \frac{mh^2}{a^3} = f(a) \quad (٦-٧٠)$$

•  $r = a$  للقوة عندما

الآن لنعبر عن الحركة القطبية بدلالة المتغير  $x$  الذى يعرف كالاتى

$$x = r - a \quad (٦-٧١)$$

عندئذ يمكن كتابة المعادلة (٦-٦٩) على النحو التالي

$$m\ddot{x} - mh^2 (x + a)^{-3} = f(x + a) \quad (٦-٧٢)$$

وفك الحدين اللذين يحتويان على  $x + a$  كتسلسلة اساسية في  $x$  ، نحصل على

$$m\ddot{x} - mh^2 a^{-3} (1 - 3 \frac{x}{a} + \dots) = f(a) + f'(a) x + \dots \quad (٦-٧٣)$$

وتختصر هذه المعادلة استنادا الى العلاقة المهيمنة في المعادلة (٦-٧٠) الى

$$m\ddot{x} + \left[ \frac{-3}{a} f(a) - f'(a) \right] x = 0 \quad (٦-٧٤)$$

هذا اذا اهلطنا الحدود التي تحوى على  $x^2$  فما تبقى  $\cdot$  وانما كان معامل  $x$  ( الكمية التي في داخل الاقواس) في المعادلة السابقة موجبا ، عندئذ تكون المعادلة هي نفس معادلة المتذبذب التوافقي البسيط  $\cdot$  وفي هذه الحالة ، اذا اقلق الجسم ، فسيذبذب توافقيا حول الدائرة  $x=a$  ، بحيث يكون المدار الدائرى مستقرا  $\cdot$  والعكس ، اذا كان معامل  $x$  سالبا في المعادلة (٦-٧٤) ، فعندئذ تكون الحركة غير متذبذبة والنتيجة هي ازدياد  $x$  اسيا  $\text{exponentially}$  مع الزمن  $\cdot$  والمدار غير مستقر  $\cdot$  ( اذا كانت معامل  $x$  تساوى صفرا ، عندئذ يجب ان يحوى المفكوك على الحدود العالية لاجل حساب الاستقرار )  $\cdot$  اذن ، يمكننا القول ان المدار الدائرى الذى نصف قطره  $a$  يكون مستقرا اذا كانت دالة القوة  $f(x)$  تستوفي المتباينة

$$f(a) + \frac{a}{3} f'(a) < 0 \quad (٦-٧٥)$$

ومرة خاصة ، اذا كانت دالة القوة القطبية مرفوعة الى اى أس ، اى ان

$$f(r) = -cr^n$$

عندئذ يكون شرط الاستقرار كما يلي

$$-ca^n - \frac{a}{3} cna^{n-1} < 0$$

وبند تبسيطه يصبح

$$n > -3$$

(٦-٧٦)

اذن قانون التربيع العكسي (  $n = -2$  ) يعطي مدارات دائرية مستقرة ، كما هو الحال في قانون المسافة المباشرة (  $n = 1$  )  $\cdot$  والحالة الاخيرة هي لمتذبذب توافقي يتذبذب في بعدين  $\cdot$  وللقوة الرابعة العكسية (  $n = -4$  ) تكون المدارات الدائرية غير مستقرة  $\cdot$  ويمكن ايضا البرهنة على ان المدارات الدائرية غير مستقرة لقانون التكميب العكسي للقوة (  $n = -3$  )  $\cdot$  ولاشك ذلك فمن الضرورى ادخال حدود مرفوعة الى قوى اكبر من واحد في المعادلة القطبية  $\cdot$



٦-٤١) القبا والزوايا القبية للمدارات التي تقترب من الدائرية

Apsides and Apisidal Angles for Nearly Circular Orbits

الاج او القبا هو نقطة في مدار يكون فيها متجه نصف القطر في نهايته الصغرى او العظمى . ان نقاط الحضيض الشمسي والاج هي اقبا لانصاف اقطار المدارات . والزوايا التي يقطعها متجه نصف القطر بين قبيين متتاليين تسمى بالزاوية القبية . فالزاوية القبية اذن تساوي  $\pi$  للمدارات الاهليلجية تحت تأثير قانون التربيع العكسي للقوة .

رأينا في حالة الحركة التي تقترب من المدار الدائري ، ان  $r$  تتذبذب حول الدائرة  $r = a$  ( اذا كان المدار مستقرا ) . ومن المعادلة (٦-٧٤) ينتج ان زمن الذبذبة  $\tau_r$  لهذا التذبذب هو -

$$\tau_r = 2\pi \sqrt{\frac{m}{-\left[\frac{3}{a} f(a) + f'(a)\right]}} \quad (٦-٧٧)$$

في هذه الحالة تكون الزاوية القبية مساوية تماما لقدار الزيادة في الزاوية القطبية  $\theta$  خلال الفترة الزمنية التي يتذبذب فيها  $r$  من قيمة النهاية الصغرى الى قيمة النهاية العظمى التالية . اي ان هذا الزمن يساوي  $\frac{1}{2} \tau_r$  . ولما كانت  $\dot{\theta} = h/r^2$  ، اذن تبقى  $\dot{\theta}$  ثابتة تقريبا . يمكننا كتابتها كما يلي -

$$\dot{\theta} \simeq \frac{h}{a^2} = \left[ -\frac{f(a)}{ma} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (٦-٧٨)$$

وقد تجت الخطوة الاخيرة من المعادلة (٦-٧٠) . اذن الزاوية

القبية تعطى من

$$\psi = \frac{1}{2} \tau_r \dot{\theta} = \pi \left[ 3 + a \frac{f'(a)}{f(a)} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (٦-٧٩)$$

اذن لقانون القوة الاساسي

$$f(r) = -cr^n$$

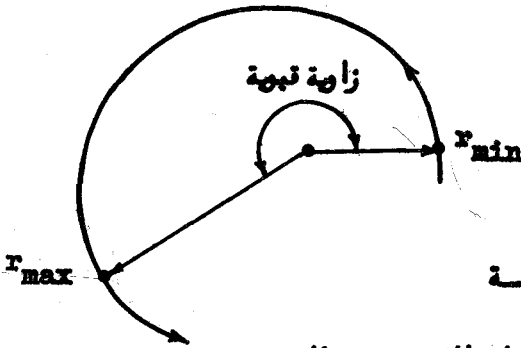
نحصل على

$$\psi = \pi (3 + n)^{-\frac{1}{2}}$$

(٨٠-٦)

في هذه الحالة تكون الزاوية القهوية مستقلة عن حجم المدار . فالمدار يكسبون تكراريا او ثنائي الدخول ، في حالة قانون التربيع العكسي (  $n = -2$  ) الذي تكون فيه  $\psi = \pi$  وكذلك في حالة القانون الخطي (  $n = 1$  ) الذي تكون فيه  $\psi = \frac{\pi}{2}$  . وعلى اية حال اذا كانت  $n = 2$  مثلا ، عندئذ  $\psi = \pi/\sqrt{5}$  وهو عدد اسم لمضاعفات  $\pi$  ، ولذلك لا تعيد الحركة نفسها .

واذا اهتمد قانون القوة قليلا عن قانون التربيع العكسي ، فعندئذ اما ان تتقدم الاقواء او تتأخر باستمراره ، ويعتمد ذلك على ما اذا كانت الزاوية القهوية اكبر قليلا او اصغر قليلا من  $\pi$  . ( انظر الشكل ١٠-٦ ) .



الشكل (١٠-٦)

الزاوية القهوية

لتفرض ، على سبيل المثال ، ان القوة هي من النوع

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{\epsilon}{r^4}$$

(٨١-٦)

حيث  $\epsilon$  صغيرا جدا . ( هذا هو نوع دالة القوة في سطح حلقة ، كما هو واضح من المثال ٢ ، بند ٣-٦ ) . الزاوية القهوية ، من المعادلة ( ٧٩-٦ )

$$\psi = \pi \left( 3 + a \frac{2ka^{-3} + 4\epsilon a^{-5}}{-ka^{-2} - \epsilon a^{-4}} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{هي}$$

$$= \pi \left( \frac{1 - \epsilon k^{-1} a^{-2}}{1 + \epsilon k^{-1} a^{-2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \sim \pi \left( 1 + \frac{\epsilon}{ka^2} \right) \quad (٨٢-٦)$$

قد أهملنا في الخطوة الأخيرة حدود الكمية  $\epsilon/ka^2$  المرفوعة الى اسس اكبر من واحد . نرى ان الاقواء تتقدم اذا كانت  $\epsilon$  موجبة ، بينما تتأخر اذا كانت  $\epsilon$  سالبة .

لقد قرب اضطراب الجاذبية لكوكب معين بسبب الكواكب الاخرى في المنظومة الشمسية بالحد  $\epsilon/r^4$  في المعادلة (٦-٨١) . ويمكن اعتبار ظاهرة التجمع لاحد الكواكب السيارة تقريبا هي نفسها فيما لو اتشعرت على شكل حلقة . (انظر المعادلة ٦-١٣) . وعند حساب الاضطرابات لعطارد ، الكوكب الاقرب ، نجد ان الحضيض الشمسي لهذا الكوكب يحدث مقدما بمداره ٥٣١ ثانية في القوس لكل قرن . لكن التقدم القاس هو ٥٧٤ ثانية في القرن . هذا الفرق الذي مداره ٤٣ ثانية قد فسر بالنظرية النسبية العامة لآينشتاين (٢) .

يبتعد مجال الجاذبية بالقرب من الارض قليلا من قانون التربيع المعكوس ، لان الارض ليست كروية تماما . وسبب هذا تقدم الحضيض القمري للتابع الصناعي الذي يقع مداره بالقرب من مستوى الاستواء باستمرار باتجاه حركة التابع . ان ملاحظة هذا التقدم كانت احدى الطرق الدقيقة لحساب شكل الارض . فقد بينت هذه الملاحظات ان شكل الارض يقرب من الشكل المرموطي . واضافة الى حدوث تقدم في الحضيض القمري للتابع الدائر فان تفلطح الارض يسبب ايضا طوافا process لسطح المدار اذا لم يكن المدار في مستوى السطح الاستوائي الارضي .

(٢) يوجد تقدم متبق صغير بسبب تهلطح الشمس . هذا التقدم غير ثابت ولكن

قد يكون اقل من ثانية واحدة في القرن .

تمارين

٦-١) اثبت ان قوة الجاذبية على جسيم داخل قشرة كروية رقيقة تساوى صفراً بطريقة (أ) ايجاد القوة مباشرة و (ب) البرهنة على ان جهد الجاذبية ثابت .

٦-٢) اذا فرضنا ان الكرة الارضية منتظمة وحببت من قطبها الشمالي الى قطبها الجنوبي ثم اسقط جسيم في القرب المستقيم . برهن على ان حركته ستكون توافقية بسيطة ثم جد زمن دورة هذه الحركة .

٦-٣) جد قانون القوة على كوكب اذا كانت المجوعة الشمسية مغمورة في غار سطحى منتظم كثافته  $\rho$  .

٦-٤) جسيم ينزلق داخل انبوب مستقيم املس يمر بصورة مائلة خلال الارض . اثبت ان الحركة ستكون توافقية بسيطة ولها نفس زمن دورة التمرين (٦-٢) اهمل تأثيرات الدوران .

٦-٥) جد جهد الجاذبية والقوة على جسيم احادى الكتلة وموضوع على محور حلقة رقيقة نصف قطرها  $a$  وكتلتها  $M$  . اذا كان جسيم الاختبار على مسافة  $r$  من مركز الحلقة .

٦-٦) يتحرك جسيم في مجال مركزى بالمدار الحلزوني  $r = a e^{k\theta}$  . جد قانون القوة . ثم بين كيف تتغير  $\theta$  مع الزمن  $t$  .

٦-٧) اذا كان مدار جسيم دائرى وقع مركز القوة على محيط الدائرة . فما هو قانون القوة ؟

٦-٨) اذا تحرك جسيم في مجال التكميب المكسي للقوة ، جد المدارات الممكنة .

٦-٩) اذا تحرك جسيم في المدار الحلزوني

$$r = a\theta^3$$

وكانت  $\theta$  تتغير مع الزمن  $t$  وفقاً للمعادلة

$$\theta = \omega t^3$$

هل يكون مجال القوة مركزياً ؟ فان لم يكن كذلك فكيف تتغير  $\theta$  مع الزمن  $t$  اذا كانت القوة مركزية ؟

١٠-٦) يتحرك قمر صاروخي بالقرب من الارض مبتدئاً بمدار دائري، فاذا رغبنا في وضع القمر في مدار جديد بحيث تكون مسافة نقطة الاوج مساوية لنصف قطر مدار القمر حول الارض (٢٤٠ ٠٠٠ ميل) (أ) احسب نسبة الانطلاق الجديد الى انطلاقه في المدار الدائري اللازمة لانجاز ذلك. افرض ان نصف قطر المدار الدائري الاصلي يساوي ٤٠٠٠ ميل (ب) احسب بعد نقطة الاوج الجديدة اذا كانت نسبة الانطلاق ١٦ ر٠ من القيمة المحسوبة اعلاه. هذه المسألة توضح الدقة المتناهية اللازمة لانجاز المدار حول القمر.

١١-٦) اذا كان المحور الرئيسي لمدار مذنب اهليولوجي يساوي ١٠٠ وحدة فلكية (أ) ماهو زمن الدورة  $\theta$  (ب) اذا كان بعده عن الشمس يساوي ٥ ر٠ وحدة فلكية في الحضيض الشمسي، فما هي قيمة الاختلاف المركزي للمدار؟ (ج) ماهو انطلاق المذنب في الحضيض الشمسي والوج.

١٢-٦) لوحظ ان انطلاق كويكب يساوي  $v_a$  عندما يكون على مسافة  $r_a$  من الشمس، واتجاه حركته يصنع زاوية  $\theta$  مع متجه نصف القطر من الشمس. برهن على ان المحور الرئيسي لمدار الكويكب الاهليولوجي يصنع زاوية مع متجه نصف قطر

$$\cot^{-1} \left( \tan \theta - \frac{2r_a v_a^2}{r_a v_a^2} \cos 2\theta \right)$$

الكويكب الابتدائي، حيث  $r_a$  و  $v_a$  يمثلان نصف قطر مدار الارض وانطلاقها على التالي

١٣-٦) لوحظ مذنب في البداية على مسافة  $\frac{1}{3}$  وحدة فلكية من الشمس وسير بانطلاق يساوي ضعف انطلاق الارض. بين من علاقة الطاقة، فيما اذا كان مدار المذنب

قطعا ناقصا مكافئا او قطعما زائدا .

١٤-٦) يصير مذنب في مدار على شكل قطع مكافئ واقع في مستوى مدار الارض . فاذا فرضنا ان مدار الارض دائري الشكل نصف قطره  $a$  ، اثبت ان النقاط التي يقطع فيها المذنب مدار الارض هي

$$\cos \theta = -1 + \frac{2p}{a}$$

حيث  $p$  تمثل مسافة الحضيض الشمسي للمذنب كما عرفت في  $\theta = 0$  .

١٥-٦) استخدم نتيجة التمرين السابق للبرهنة على ان الفترة الزمنية التي يبقى فيها المذنب داخل مدار الارض هي الكسر .

$$\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3\pi} \left( -\frac{2p}{a} + 1 \right) \left( 1 - \frac{p}{a} \right)^{\frac{3}{2}}$$

من السنة ، والقيمة العظمى لهذه الفترة الزمنية هي  $\frac{2}{3\pi}$  سنة ، او حوالي

١١ اسبوع .

١٦-٦) يتحرك جسم في مجال مركزي فيه قانون القوة

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} + \frac{c}{r^3}$$

جد معادلة المدار . برهن بصورة خاصة ، عندما تكون  $c$  صغيرة يكون المسدار قطعاً ناقصاً طائفاً بهبطاً .

١٧-٦) برهن النص في البند (١٠-٦) الذي يقول ان معدل زمن الطاقة الكامنة

$$f(r) = -\frac{k}{r^2}$$

هو  $-k/a$  حيث  $a$  يمثل نصف المحور الرئيسي للقطع الناقص .

١٨-٦) جد الزاوية القبضة لمدارات تغترب من الدائرة في مجال مركزي فيه قانون

القوة كما يلي

$$f(r) = -k \frac{e^{-br}}{r^2}$$

١٦-١١) يتحرك جسم بمدار قطع ناقص في مجال التربيع العكسي للقوة . اثبت ان حاصل ضرب انطلاقي النهاية العظمى والصغرى بمساوي  $(2\pi a/\gamma)^2$  حيث  $a$  تمثل نصف المحور الرئيسي و  $\gamma$  زمن الدورة .

١٦-٢٠) برهن على ان المدار الدائري الذي نصف قطره  $r$  في التمرين (٦ - ١٨) مستقرا اذا كانت  $r$  اقل من  $b^{-1}$  .

١٦-٢١) اثبت ان المعادلة التفاضلية القطبية لحركة جسم في مجال مركزي  $\theta$  المعادلة (٦ - ٦٩) هي نفس معادلة الجسم الذي يتحرك على خط مستقيم تحت تأثير "الجهد الفعلي" effective potential  $U(r)$  والذي يساوي

$$U(r) = V(r) + \frac{nh^2}{2r^2}$$

حيث القوة الحقيقية  $f(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$  . ارسم خطا بيانها تقريبا للجهد

$\theta$   $V(r) = -k/r$  لحالة المدار الدائري المستقره مثل

والمدار غير المستقر مثل  $V(r) = -k/r^3$  .

١٦-٢٢) اثبت ان شرط الاستقرار لمدار دائري نصف قطره  $a$  يكافئ الشرط

$\theta$   $d^2U/dr^2 > 0$  عندما تكون  $r=a$  حيث  $U(r)$  تمثل "الجهد الفعلي" الذي

عرف في التمرين السابق .

١٦-٢٣) جد الشرط الذي تكون فيه المدارات الدائرية مستقرة اذا كانت دالة القوة

في المجال المركزي على الشكل التالي

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{\epsilon}{r^4}$$

١٦-٢٤) اذا انفجرت المجموعة الشمسية في سحاب غازي منتظم (التمرين "٦ - ٢")

فما هي الزاوية القبة لكوكب يتحرك بمدار يقرب من الدائري ؟ لقد اقترح هذا

السؤال سابقا كتوضيح ممكن لتقدم الحضيض الشمسي لمطارد .

٦-٢٥) الكتب المتقدمة لموضوع نظرية الجهد تبين ان الطاقة الكامنة لجسيم كتلته  $m$  في مجال جاذبية جسم كروي مفلطح مشابه للكرة الارضية هو تقريباً

$$V(r) = -\frac{k}{r} \left(1 + \frac{\epsilon}{r^2}\right)$$

حيث  $r$  تشير الى مسافات المستوى الاستوائي ،  $k = GMm$  كالمسابق ،

و  $\epsilon = \left(\frac{2}{3}\right)R \Delta R$  حيث  $R$  تمثل نصف القطر الاستوائي و  $\Delta R$  هي الفرق بين

الاستوائي وانصاف الاقطار القطبية . جد الزاوية القبوة لتابع صنفي في مدار

يقرب من الدائري في مستوى الاستواء الارضي حيث  $R=4000 \text{ m}$  و  $\Delta R = 13 \text{ m}$  .

٦-٢٦) وفقاً للنظرية النسبية ، الجسم الذي يتحرك في مجال مركزي بطاقة كامنة

بقدارها  $V(r)$  سيكون له نفس المدار الذي يعمله جسيم طاقته الكامنة

$$V(r) = \frac{[E - V(r)]^2}{2mc^2}$$

وفقاً للميكانيك الكلاسيكي . حيث  $E$  تمثل الطاقة الكلية و  $m$  كتلة الجسيم

و  $c$  سرعة الضوء . من هذه ، جد الزاوية القبوة للحركة في مجال التربيع

المعكسي للقوة  $V(r) = -k/r$  .



## الفصل السابع

### ديناميك منظومة الجسيمات

#### Dynamics of a System of Particles

لدراسة منظومة او مجموعة كبيرة من الجسيمات الحرة ، سوف نركز اهتمامنا بالدرجة الاولى على المظهر العام لحركة تلك المجموعة .

#### ٧-١) مركز الكتلة والزخم الخطي

#### Center of Mass and Linear Momentum

تتكون منظومتنا العامة من  $n$  جسيمة كتلتها  $m_1, m_2, \dots, m_n$  ومجهايات مواضعها  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$  على التالسي . ونعرف مركز كتلة المنظومة بالنقطة التي متجه موضعها  $\vec{r}_{cm}$  ( الشكل ٧-١ )

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} \quad \text{كما يلي} \quad (٧-١)$$

حيث  $m = \sum m_i$  تمثل الكتلة الكلية للمنظومة . ومن الواضح ان التعريف

المذكور اعلاه يكافئ المعادلات الثلاث التالية -

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{m} \quad y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{m} \quad z_{cm} = \frac{\sum m_i z_i}{m}$$

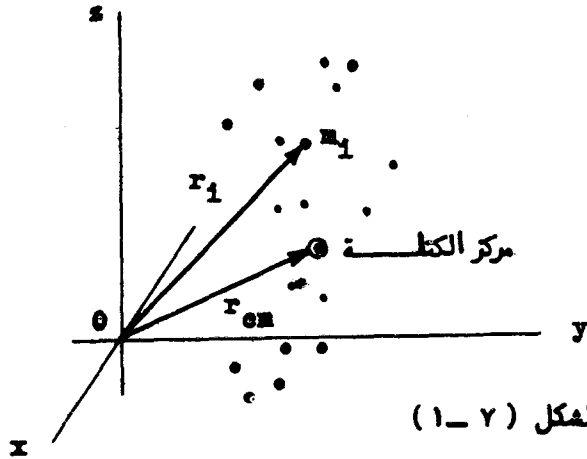
ونعرف الزخم الخطي  $\vec{p}$  للمنظومة بالمجموع الاتجاهي لعزوم الجسيمات

المفردة ، اي

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i \quad (٧-٢)$$

ومن تفاضل المعادلة (٧-١) بالنسبة للزمن نحصل على

$$\dot{\vec{p}} = \sum m_i \dot{\vec{v}}_i = m \dot{\vec{v}}_{cm} \quad (٧-٣)$$



مركز الكتلة لمنظومة من الجسيمات

اي ان الزخم الخطي لمنظومة من الجسيمات يساوي سرعة مركز الكتلة مضروبة فسي  
الكلية للمنظومة .

افرض الان وجود قوى خارجية مثل  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  تؤثر على الجسيمات المناظرة (اي ان  $F_1$  تؤثر على  $M_1$  و  $F_2$  تؤثر على  $M_2$  الخ...) والاضافة الى ذلك قد توجد قوى تعادم داخلية بين اي جسيمين في المنظومة . وسموز لهذه القوى الداخلية بـ  $\vec{F}_{1j}$  الذي يعني القوة المؤثرة على الجسيم 1 من قبل الجسيم j . فمعادلة الحركة للجسيم 1 عندئذ تكون -

$$\vec{F}_1 + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{1j} = M_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{F}}_1 \quad (٤-٧)$$

حيث  $\vec{F}_1$  تعني القوة الخارجية الكلية المؤثرة على الجسيم 1 . ومثل  
الحد الثاني في المعادلة السابقة المجمع الاتجاهي لجميع القوى الداخلية المؤثرة على  
الجسيم 1 من جميع الجسيمات الاخرى للمنظومة (تعني الفتحه على علامة المجمع  
استثناء الحد  $j = 1$ ) . وند جمع المعادلة (٤-٧) لـ  $n$  من الجسيمات .

نحصل على

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i \quad (5-7)$$

معنى الجمع الثنائي المذكور اعلاه ، ان لكل قوة  $\vec{F}_{ij}$  يوجد ايضا قوة

$\vec{F}_{ji}$  وهاتان القوتان متساويتان ومتعاقدتان ، اي ان

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad (6-7)$$

وفقا لقانون نيوتن الثالث للفعل ورد الفعل ، لذلك تختصر القوى الداخلية بأزواج

وتلغى الجمع الثنائي ، اذن يمكننا كتابة المعادلة (5-7) كالآتي -

$$\sum \vec{F}_d = \sum \vec{P}_i = \vec{P} = m\vec{a}_{cm} \quad (7-7)$$

والكلمات : ان تعجيل مركز الكتلة للمنظومة من الجسيمات هو نفس تعجيل جسيم

مفرد كتلته تساوى الكتلة الكلية للمنظومة تحت تأثير مجموع القوى الخارجية .

افرضه على سهل المثال ، حهدا من الجسيمات تتحرك في مجال جاذبية منتظم .

ولما كان  $\vec{F}_i = m_i \vec{g}$  لكل جسيم فعندئذ -

$$\sum \vec{F}_i = \sum m_i \vec{g} = m \vec{g}$$

وتنتج الخطوة الاخيرة لان  $\vec{g}$  ثابتة ، اذن

$$\vec{a}_{cm} = \vec{g} \quad (8-7)$$

هذه هي نفس معادلة الجسيم المفرد او القذيفة .

اذن يكون مسار مركز كتلة الشظايا المتطايرة من قنبلة مدفع متفجرة فسي

الهباء هو نفس مسار القطع المكافئ الذي تسلكه القذيفة فسي

حالة عدم انفجارها .

وفي الحالة الخاصة التي لا توجد فيها قوى خارجية تؤثر على المنظومة  
(او اذا كانت  $\sum \vec{F}_1 = 0$ ) ، عندئذ  $\vec{a}_{cm}$  يساوى صفرا و  $\vec{v}_{cm}$  تكون  
ثابتة . لذلك يبقى الزخم الخطي للمنظمة ثابتا .

$$\sum \vec{p}_1 = \vec{p} = M\vec{v}_{cm} = \text{constant} \quad (١-٧)$$

هذه هي قاعدة حفظ الزخم الخطي . ان ثبوت الزخم الخطي في الميكانيك  
النيرتوني لمنظمة معزولة يرتبط مباشرة بقانون نيوتن الثالث ، وفي الحقيقة هو نتيجة  
له ، وحتى في الحالات التي تكون فيها القوى بين الجسيمات لا تخضع بصورة مباشرة  
لقانون الفعل ورد الفعل ، مثل قوى المغناطيسية بين الشحنات المتحركة ، تنقسي  
قاعدة حفظ الزخم الخطي صحيحة عندما يحسب الزخم الخطي الكلي للجسيمات والجمال  
الإلكترو مغناطيسي (١) .

## ٢-٧) الزخم الزاوي للمنظمة

### Angular Momentum of a System

كما ورد في البند (٥-٦) ، الزخم الزاوي لجسيم منفرد عرف بالضرب الاتجاهي

$\vec{r} \times M\vec{v}$  . لذلك يعرف الزخم الزاوي  $\vec{L}$  لمنظمة جسيمات بالجمع الاتجاهي لزوجم  
الجسيمات الزاوي ، هي

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

لنحسب مشتقة الزمن للزخم الزاوي . واستعمال قانون التفاضل للضرب الاتجاهي

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n (\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i) + \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i) \quad (١٠-٧)$$

(١) انظر على سبيل المثال

ان الحد الاول في يمين المعادلة يساوى صفرا ، لان  $\vec{v}_1 \times \vec{v}_1 = 0$  ولما كان

$m_1 \vec{a}_1$  يساوى القوة الكلية المؤثرة على الجسم 1 ، لذلك يمكننا كتابة -

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij})] \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \quad (11-7) \end{aligned}$$

حيث ، كما في البند (١-٧)  $\vec{F}_i$  تمثل القوة الخارجية الكلية على الجسم

1 و  $\vec{F}_{ij}$  تمثل القوة (الداخلية) المؤثرة على الجسم 1 من اى جسم آخر

مثل 2 . يتكون الجمع الثنائي في يمين المعادلة من حدود مزدوجة على الشكل

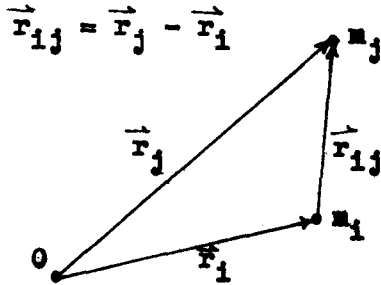
التالى -

$$(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}) + (\vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}) \quad (12-7)$$

وهد تمثيل متجه الازاحة للجسم 2 بالنسبة للجسم 1 بالرمز  $\vec{r}_{ij}$

نرى من المثلث المبين في الشكل (٧-٢) ان

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i \quad (13-7)$$



الشكل (٧-٢)

تعريف المتجه  $\vec{r}_{ij}$  .

ولما كان  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$  لذلك تبسط العلاقة (١٢-٧) الى

$$-\vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij} \quad (14-7)$$

الذى يساوى صفرا عندما تكون القوى الداخلية مركزة ، اى اذا كانت توتر على طول

الخطوط التي تربط كل زوج من الجسيمات . فالجمع الثاني ، في المعادلة (٧ - ١١) ،  
 اذن يساوى صفراً . والضرب الاتجاهي  $\vec{r}_1 \times \vec{F}_1$  كما عرف ، في البند (١ - ١٢) ،  
 هو عزم القوة الخارجية  $\vec{F}_1$  . والمجموع  $\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$  هو اذن العزم الكلي  
 لجميع القوى الخارجية المؤثرة على المنظومة . فاذا مثلنا العزم الخارجي الكلي  
 بـ  $\vec{N}$  ، عندئذ تصبح المعادلة (٧ - ١١) كما يلي -

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \quad (٧ - ١٥)$$

اي ان ، المعدل الزمني لتغير الزخم الزاوي لمنظومة يساوى مجموع عزوم القوى الخارجية  
 المؤثرة على المنظومة .

اذا كانت المنظومة معزولة ، عندئذ  $\vec{N} = 0$  ، اي يبقى الزخم الزاوي ثابتاً  
 في المقدار والاتجاه .

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \text{constant} \quad (٧ - ١٦)$$

هذه صياغة لقاعدة حفظ الزخم الزاوي . وهي تعميم للمعادلة (٦ - ١٨) لجسيم  
 منفرد في مجال مركزي . كثبت الزخم الخطي الذي بحث في البند السابق ، كذلك  
 الزخم الزاوي لمنظومة شحنات متحركة معزولة يكون ثابتاً ، عند اعتبار الزخم الزاوي  
 للمجال الكهرومغناطيسي (٢) .

(٧ - ٣) الطاقة الحركية لمنظومة جسيمات

#### Kinetic Energy of a System of Particles

الطاقة الحركية الكلية  $T$  لمنظومة جسيمات تساوي مجموع طاقات الجسيمات فسي  
 المنظومة ، اي

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) \quad (٧ - ١٧)$$

(١) انظر ملاحظة (١) .

وكما هو واضح من الشكل (٧-٣) ، يمكننا التعبير عن متجه كل موضع  $\vec{r}_i$  على النحو التالي

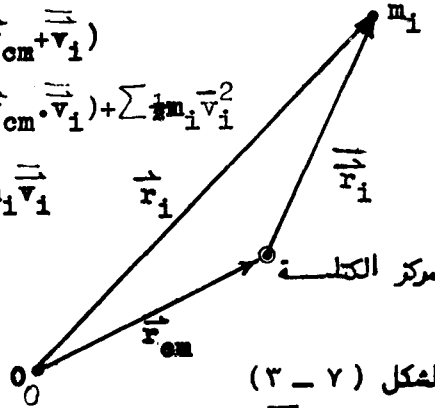
$$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_i \quad (٧-١٨)$$

حيث  $\vec{r}_i$  يمثل موضع الجسم  $i$  بالنسبة الى مركز الكتلة . وعند التفاضل بالنسبة للزمن  $t$  ، نحصل على

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i \quad (٧-١٩)$$

حيث  $\vec{v}_{cm}$  تمثل سرعة مركز الكتلة و  $\vec{v}_i$  سرعة الجسم  $i$  بالنسبة الى مركز الكتلة ، اذن يمكن كتابة  $T$  على النحو التالي

$$\begin{aligned} T &= \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i) \cdot (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i) \\ &= \sum \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum m_i (\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i) + \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\ &= \frac{1}{2} v_{cm}^2 \sum m_i + \vec{v}_{cm} \cdot \sum m_i \vec{v}_i + \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \end{aligned}$$



الشكل (٧-٣)  
تعريف  $\vec{r}_i$

من المعادلة (٧-١٨) ، عندنا

$$\sum m_i \vec{r}_i = \sum m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{cm}) =$$

والتماثل ، نحصل على

$$\begin{aligned} \sum m_i \vec{v}_i &= 0 \\ &= \sum m_i \vec{r}_i - m \vec{r}_{cm} = 0 \end{aligned}$$

اذن تبسط معادلة الطاقة الحركية الى

$$T = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \sum m_1 \bar{v}_1^2 \quad (٢٠ - ٧)$$

الطاقة الحركية الكلية لمنظومة جسيمات اذن ، تماوى مجموع الطاقة الحركية الانتقالية لمركز الكتلة ( الحد الاول على اليمين ) زائداً مجموع الطاقات الحركية لجسيمات المنظومة بالنسبة لمركز الكتلة ( الحد الاخير ) . وهذا الفرز في الطاقة الحركية الى اجزائها مفيد في حالات كثيرة ، كما في الفيزياء الجزيئية . لان ، الطاقة الحركية الكلية للجزيئة تتكون من الطاقة الانتقالية للجزيئة ككل زائداً الطاقة الذبذبية والدرائية داخل الجزيئة .

(٤٧ - ٤) حركة جسيمين يؤثر احدهما على الآخر . الكتلة المصغرة .

Motion of Two Interacting Bodies. The Reduced Mass

لنفرض حركة منظومة متكونة من جسيمين (تعايل كجسيمين) يؤثر احدهما على الآخر بقوة مركزية . سنفرض ان المنظومة معزولة ، اذن يتحرك مركز الكتلة بسرعة ثابتة . وللسهولة سنأخذ مركز الكتلة في نقطة الاصل . عندئذ نحصل على

$$m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 = 0 \quad (٢١ - ٧)$$

حيث كما هو واضح من الشكل (٤٧ - ٤) ، ان المتجهات  $\bar{r}_1$  و  $\bar{r}_2$  تشمل مواضع الجسيمات  $m_1$  و  $m_2$  ، على التوالي ، بالنسبة الى مركز الكتلة . فاذا كانت  $\bar{R}$

تمثل موضع الجسيم "1" بالنسبة الى الجسيم "2" عندئذ -

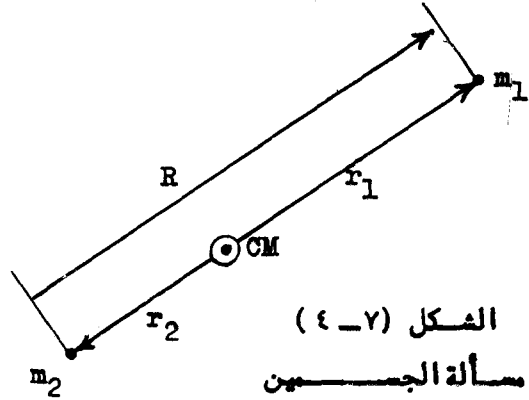
$$\bar{R} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2 = \bar{r}_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \quad (٢٢ - ٧)$$

وتنتج الخطوة الاخيرة من المعادلة (٢١ - ٧) .

ان المعادلة التفاضلية لحركة الجسيم "1" بالنسبة الى مركز الكتلة هي -

$$m_1 \frac{d^2 \bar{r}_1}{dt^2} = \bar{F}_1 = f(R) \frac{\bar{R}}{R} \quad (٢٣ - ٧)$$





حيث  $f(R)$  تمثل مقدار القوة المتبادلة بين الجسمين • واستعمال المعادلة (٢٢-٧) يمكننا كتابة -

$$\mu \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = f(R) \frac{\vec{R}}{R} \quad (٢٤-٧)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{حيث -} \quad (٢٥-٧)$$

ونسمى الكمية  $\mu$  بالكتلة المصغرة • reduced mass • المعادلة الجديدة للحركة (٢٤-٧) تعطي حركة الجسم 1 بالنسبة الى الجسم 2 هذه المعادلة هي تماما نفس المعادلة الاعتيادية لحركة جسم منفرد كتلته  $\mu$  يتحرك في مجال قوة مركزي يعطى من  $f(R)$  • لذلك اخذت بنظر الاعتبار حركة  $m_2$  بالنسبة الى مركز الكتلة ارضياتيكيا وذلك باحلال الكتلة المصغرة  $\mu$  محل  $m_1$  • واذا كان للجسمين نفس الكتلة  $m$  • عندئذ  $\mu = m/2$  • والعكس • اذا كانت  $m_2$  اكبر بكثير من  $m_1$  • بحيث  $m_1/m_2$  تصبح صغيرة • جدا • عندئذ تقترب قيمة  $\mu$  من  $m_1$  •

ولجسمين يجذب احدهما الآخر ثقليا • يكون عندنا

$$f(R) = - \frac{Gm_1m_2}{R^2} \quad (٢٦-٢)$$

وفي هذه الحالة تكون معادلة الحركة

$$\mu \ddot{\vec{R}} = - \frac{Gm_1m_2}{R^2} \left( \frac{\vec{R}}{R} \right) \quad (٢٧-٢)$$

وهذه تماثل معادلة جسيم منفرد في مجال التربيع العكسي المركزي ( كما بحث فسي الهند ٦-٨ ) . ولما كان اختيار الرمز السفلية (subscripts) اعتباريا ، نستنتج ان كل جسيم يتحرك بقطع ناقص مركزي حول الآخر ويتخذا كل منهما الآخر كهوارة له . اذن ، عند اعتبار الارض والقمر منظومة معزولة ، فالقمر يتحرك بقطع ناقص يوترته مركز الارض ، والارض تتحرك بقطع ناقص يوترته مركز القمر .

## ٢ - ٥) التصادم Collisions

كلما تصادم جسمان ، تكون القوة التي يوتر كل منهما على الآخر خلال التلامس قوة داخلية ، اذا فرض ان الجسمين يكونان منظومة واحدة . فالزخم الكلي اذن لا يتغير ، اى يمكننا كتابة

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \quad (٢٨-٢)$$

او ما يكافئها

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 \quad (٢٩-٢)$$

حيث تشير الرموز السفلية ( 1 و 2 ) الى الجسمين وعلامة الفتحة الى الموضع الزخومي

والمرح بعد التصادم على التوالي . والمعادلات السابقة عامة وهي تطبق على اى جسمين بغض النظر عن اشكالها ، صلابتها ، وهلم جرا .

اما بالنسبة الى معادلة توازن الطاقة ، فيمكننا كتابة

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} + Q \quad (٣٠-٢)$$

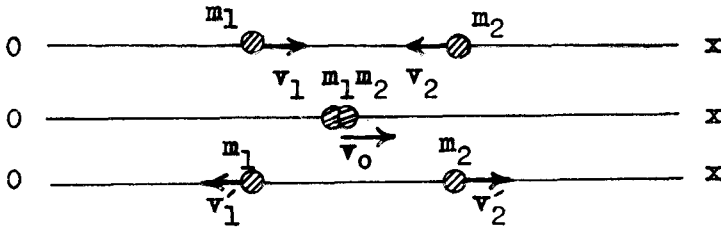
$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + Q \quad (٣١-٢)$$

وقد ادخلت هنا الكمية  $Q$  لتشير الى مقدار الزيادة ، او النقصان ، في الطاقة التي تحدث نتيجة التصادم .

في حالة التصادم التام المرنة لا يحدث تغيير في الطاقة الحركية الكلية اي  $Q = 0$  . واذا كانت هناك خسارة في الطاقة عندئذ تكون  $Q$  موجبة ويسمى هذا النوع من التصادم بالاص للطاقات  $endoergic$  . وقد يحدث ان يكون هناك اكتساب في الطاقة . فمثلا عند انفجار احد الجسمين في نقطة التماس . في هذه الحالة تكون  $Q$  سالبة ويسمى التصادم بالياعش للطاقات  $exoergic$  . ان دراسة التصادم له اهمية خاصة في الفيزياء الذرية والنوية . قد تكون هذه الاجسام ذرات ، نويات ، او اي جسم اولي ، مثل الالكترونات ، البروتونات ، وهلم جرا .

### التصادمات المباشرة Direct Collisions

لنفرض الحالة الخاصة التي يكون فيها تصادم جسمين او جسمين رأسيا والتي تحدث فيها الحركة كليا على خط مستقيم واحد كما هو مبين في الشكل (٧ - ٥) .



(الشكل ٧ - ٥) تصادم جسمين رأسيا

في هذه الحالة يمكن كتابة معادلة توازن الزخم ، معادلة (٧ - ٢٩) ، بدون

استخدام رموز المتجهات كما يلي :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (٧ - ٣٢)$$

واعبارات السرعة (  $v$ 's ) تعين الاتجاه على طول خط الحركة . ولاجل حساب

قيم السرعة بعد التصادم ، اذا كانت قيمها قبل التصادم معلومة ، يمكننا استخدام

معادلة الزخم المذكورة اعلاه مع معادلة توازن الطاقة ، المعادلة (٧ - ٣١) ، اذا كنا نعرف قيمة  $Q$  . وفي اغلب الاحيان يكون من الملائم لهذا النوع من المسائل ادخال برمتير آخر  $\epsilon$  يسمى بمعامل الارتداد coefficient of restitution وتعرف هذه الكمية بالنسبة بين انطلاق الابتعاد  $v'$  الى انطلاق الاقتراب  $v$  . وفي رموزنا يمكن كتابة  $\epsilon$  على النحو التالي

$$\epsilon = \frac{|v_2' - v_1'|}{|v_2 - v_1|} = \frac{v'}{v} \quad (٧ - ٣٣)$$

تعتمد القيمة العددية لمعامل الارتداد بصورة رئيسية على التركيب والتكوين الفيزيائي للجسمين . ويمكن التحقق بسهولة من ان التصادم التام المرنة تكون فيه قيمة  $\epsilon = 1$  ، ويتم ذلك بالتعمير عن  $Q = 0$  في المعادلة (٧ - ٣١) ، وحلها مع المعادلة (٧ - ٣٢) للحصول على السرعة النهائية .

وفي حالة التصادم غير التام المرنة يلتصق الجسمان معا بعد ان يتصادما ، بحيث تكون  $\epsilon = 0$  . ولمعظم الاجسام الحقيقية تقع قيمة  $\epsilon$  بين اقصى الحدين صفر وواحد . فقيمتها لكرات البليارد العاجية تكون حوالي ٩٥ ٠ . وقد تعتمد قيمة معامل الارتداد ايضا على انطلاق الاقتراب . ويكون هذا واضحا بصورة خاصة في حالة مركبات السلكون التي تعرف في الصناعة باسم المعجون المخيف " silly putty " فالكرة المصنوعة من هذه المادة ترتد بسرعة عالية عندما تضرب سطحها ولكنها تتصرف كمعجون عادي في السرعة الواطئة .

ويمكننا حساب قيم السرعة النهائية من المعادلة (٧ - ٣٢) ومن تعريف معامل الارتداد ، المعادلة (٧ - ٣٣) فالنتيجة تكون -

$$v_1' = \frac{(m_1 - \epsilon m_2)v_1 + (m_2 + \epsilon m_2)v_2}{m_1 + m_2} \quad (٧ - ٣٤)$$

$$v_2' = \frac{(m_1 + \epsilon m_1)v_1 + (m_2 - \epsilon m_1)v_2}{m_1 + m_2} \quad (٢٤ - ٧)$$

وعند اعتبار حالة التصادم غير المرن ، وذلك بالتميز عن  $\epsilon = 0$  ، نجد ان  $v_1' = v_2'$  اي لا يوجد ارتداد . والعكس ، في الحالة الخاصة التي تكون فيها كتلتا الجسمين متساويتين ، اي  $m_1 = m_2$  ، وهي تامة المرونة ،  $\epsilon = 1$  ، عندئذ نحصل على -

$$v_1' = v_2$$

$$v_2' = v_1$$

فالجسمان ، اذن ، يتبادلان سرعتيهما فقط بسبب التصادم .

وفي الحالة العامة اي التصادم المباشر غير التام المرونة ، يمكن بسهولة التحقق من ان الخسارة في الطاقة  $Q$  ترتبط بواسطة معامل الارتداد بالمعادلة التالية

$$Q = \frac{1}{2} \mu v^2 (1 - \epsilon^2)$$

حيث  $\mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$  هي الكتلة الصغيرة ، و  $v = |v_2 - v_1|$  هي الانطلاق النسبي قبل التصادم . والاشتقاق ترك كتميين .

(٦ - ٧) التصادم المائل والتشتت . مقارنة بين المحاور المختبرية ومحاور مركز الكتلة

Oblique Collisions and Scattering. Comparison of Laboratory and Center-of-mass Coordinates

نلفت انتباهنا الآن الى الحالة الاكثر عمومية وهي الحركة غير القيدة بخط مستقيم . حيث يجب استخدام معادلات الزخم بصيغة جبر الضجبات ، اي المعادلات (٢٨ - ٧)

و (٢٩ - ٧) ، ولندرس الحالة الخاصة لجسيم كتلته  $m_1$  وسرعته الابتدائية  $\vec{v}_1$

(الجسيم الساقط) الذي يضرب جسما آخر كتلته  $m_2$  وابتدائيا في حالة السكون

(جسيم الهدف) . هذه هي مسألة نموذجية تتواجد في الفيزياء النووية . فمعادلات

الزخم لهذه الحالة تكون على النحو التالي

$$\vec{r}'_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \quad (٣٥ - \gamma)$$

$$m_1 \vec{v}'_1 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \quad (٣٦ - \gamma)$$

وشرط توازن الطاقة هو

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} + Q \quad (٣٧ - \gamma)$$

او

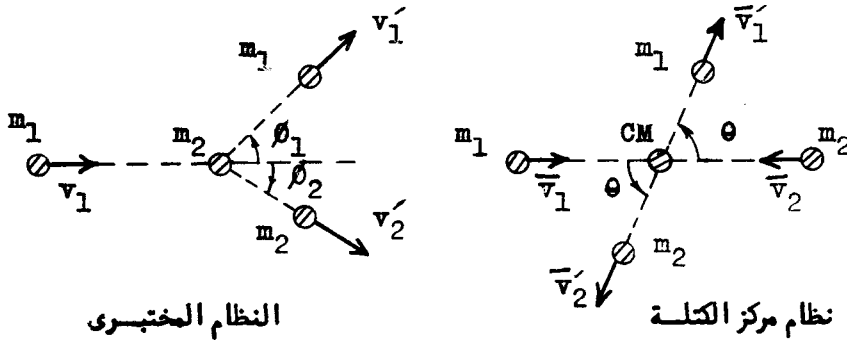
$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 + Q \quad (٣٨ - \gamma)$$

حيث تشير الفتحاحات هنا ، كالمابق ، الى السرع والزخوم بعد التصادم ، وتمثل Q مصصلة الطاقة المقفودة او المكسبة بسبب التصادم . ان Q هي من الكميات الاساسية والمهمة في الفيزياء الذرية والنوية ، لانها تمثل الطاقة المتحررة او المتصصة فسي التصادمات الذرية والنوية . في حالات كثيرة ، يتحطم جسيم الهدف او يتغير عند التصادم . في حالات كهذه ، تختلف الجسيمات التي تترك التصادم عن الجسيمات التي تدخله . وحسب هذه بسهولة وذلك بتعيين كتل مختلفة للجسيمات التي تترك التصادم مثل  $m_3$  و  $m_4$  . وعلى اية حال ، يبقى قانون حفظ الزخم الخطي دائما ساري المنعول . ولكن وفقا للنظرية النسبية ، تتغير كتلة الجسيم مع الانطلاق بسرعة واضحة والتي سوف ندرسها في الفصل الاخير . في هذا الموضع ، يمكننا القول ان قانون حفظ الزخم ، سبين في المعادلة (٣٨ - ٧) يصح في النظرية النسبية اذا فرضت الكتلة كدالة للانطلاق .

## محاور مركز الكتلة Center-of-mass Coordinates

تجرى الحسابات النظرية في الفيزياء النووية غالبا بدلالة كميات منسمة الى محاور يكون فيها مركز كتلة الجسيمات المتصادمة ساكنا . وعكس ذلك ، تجري الملاحظات التجريبية على تشتت الجسيمات بدلالة المحاور المختبرية . فمن المهم ان نبحث باختصار مسألة التحول من أحد النظامين الى الآخر .

يوضح الشكل (٦ - ٧) مخطط لمتجهات السرعة في النظام المختبري ونظام مركز الكتلة . حيث تمثل  $\theta_1$  زاوية انحراف الجسيم الساقط بعد ان يضطدم بجسيم الهدف و  $\theta_2$  تمثل الزاوية التي يصنعها خط حركة جسيم الهدف مع خط حركة الجسيم الساقط . كلتا الزاويتين  $\theta_1$  و  $\theta_2$  مقاسة بالنظام المختبري . ولما كان مركز الكتلة في نظام مركز الكتلة ، يجب ان يقع دائما على الخط الواصل بين الجسيمين ، فانهما يقتربان من مركز الكتلة فيتصادمان ثم يبتعدان عنه باتجاهين متضادين .



الشكل (٦ - ٧)

مقارنة بين المحاور المختبرية ومركز الكتلة

وتمثل  $\theta$  زاوية انحراف الجسيم الساقط في نظام مركز الكتلة . من تعريف مركز الكتلة ، يكون الزخم الخطي في نظام مركز الكتلة صفرا قبل التصادم وبعده . اذن يمكننا كتابة

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \quad (٣٩ - ٧)$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \quad (٤٠-٧)$$

وقد استعملت الخطوط هنا لتبين ان الكمية في السؤال منسوبة الى نظام مركز الكتلة .  
ومعادلة توازن الطاقة هي

$$\frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + Q \quad (٤١-٧)$$

ويمكننا الآن حذف  $\vec{p}_2$  و  $\vec{p}_2'$  من معادلة الطاقة وذلك باستخدام علاقات الزخم .  
والنتيجة بدلالة الكتلة المصغرة هي

$$\frac{\vec{p}_1^2}{2\mu} = \frac{\vec{p}_1^2}{2\mu} + Q \quad (٤٢-٧)$$

وتكتب علاقات الزخم ، المعادلات (٣٩-٧) و (٤٠-٧) بدلالة السرع على النحو  
التالي

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0 \quad (٤٣-٧)$$

$$m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = 0 \quad (٤٤-٧)$$

وسرعة مركز الكتلة هي

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} \quad (٤٥-٧)$$

اذن

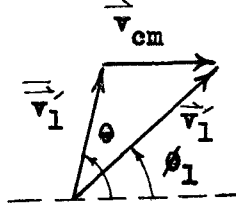
$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{cm} = \frac{m_2 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} \quad (٤٦-٧)$$

وقد وضحت العلاقة بين متجهات السرع  $\vec{v}_1'$ ،  $\vec{v}_1$ ،  $\vec{v}_{cm}$  في الشكل (٧-٧) ومن الشكل نرى ان -

$$v_1' \sin \theta_1 = v_1' \sin \theta \quad (٤٧-٧)$$



$$v_1' \cos \theta_1 = \bar{v}_1' \cos \theta + v_{cm} \quad (٤٨ - \gamma)$$



الشكل (٧-٢) : العلاقة بين متجهات السرعة في النظام المختبرى ونظام مركز الكتلة

وقسمة المعادلتين نجد ان العلاقة التي تربط زوايا التشتت تكون على النحو التالي

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\gamma + \cos \theta} \quad (٤٩ - \gamma)$$

حيث  $\gamma$  تمثل البرمتر العددي وقيمته تعطى بالعلاقة التالية

$$\gamma = \frac{v_{cm}}{\bar{v}_1'} = \frac{m_1 v_1}{\bar{v}_1' (m_1 + m_2)} \quad (٥٠ - \gamma)$$

والخطوة الاخيرة نتجت من استعمال المعادلات (٤٥ - ٧) .

والآن يمكننا حساب قيمة  $\bar{v}_1'$  بسهولة بدلالة الطاقة الابتدائية للجسيم

الماقط من معادلة الطاقة ، اى المعادلة (٤٢ - ٧) . وهذه تعطينا المعلومات

الضرورية لاجاد  $\gamma$  وهكذا نستنتج العلاقة بين زوايا التشتت . فمثلا ، في حالة

التصادم التام المرنة ،  $Q = 0$  ، نجد من معادلة الطاقة ان  $\bar{p}_1 = \bar{p}_1'$  ،

أو  $\bar{v}_1 = \bar{v}_1'$  . وهذه النتيجة مع المعادلة (٤٦ - ٧) ، تعطيان القيم

$$\gamma = \frac{m_1}{m_2} \quad (٥١ - \gamma)$$

للتصادم السرن .

ولنفرض حالتين خاصتين لمثل هذه التصادمات المرنة لاحتيمتها التعليميصة .  
 الأولى ، اذا كانت كتلة جسم الهدف  $m_2$  اكبر بكثير من كتلة الجسم الساقط  
 $m_1$  عندئذ تكون  $\beta_1$  صغيرة جدا . اذن  $\tan \beta_1 \approx \tan \theta$  أو  $\beta_1 \approx \theta$  .  
 اي ان  $\theta$  زوايا التشتت كما توى في النظامين المختبرى ومركز الكتلة تكون متساوية تقريبا .  
 الحالة الخاصة الثانية هي ان تتساوى كتلة الجسم الساقط مع كتلة الجسم  
 الهدف ، اي  $m_1 = m_2$  . وفي هذه الحالة تكون  $\beta = 1$  . وفي هذه الحالة

$$\tan \beta_1 = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \tan \frac{\theta}{2}$$

التشتت الى مايلي

$$\beta_1 = \frac{\theta}{2}$$

اي ان  $\theta$  زاوية الانحراف في النظام المختبرى تساوى تماما نصف زاوية الانحراف في  
 نظام مركز الكتلة . ولما كانت زاوية انحراف جسم الهدف تساوى  $\pi - \theta$  في نظام  
 مركز الكتلة ، كما هو مبين في الشكل (٧ - ٦) ، عندئذ ، نفس الزاوية في النظام  
 المختبرى تساوى  $\frac{\pi - \theta}{2}$  . اذن ، يترك الجسمان نقطة التصادم  
 بحيث يكون اتجاه كل منهما عموديا على الآخر عندما ينظر اليهما في النظام المختبرى .  
 وللحالة العامة لتصادمات غير تامة المرنة فقد تركت كثيرين للبرهنة على ان  $\beta$

تعطى بالعلاقة التالية

$$\beta = \frac{m_1}{m_2} \left[ 1 - \frac{e}{1} \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \right] \quad (٧ - ٥٢)$$

حيث  $T$  تمثل الطاقة الحركية للجسم الساقط القاسم بالنظام المختبرى .

Impulse - الدفع (٧ - ٧)

التي بالتالي يستغرق تأثيرها فترة قصيرة جدا ، مثل تلك التي تؤثر بها الاجسام

عند التصادم ، تسمى بالقوى الدافعة *impulsive forces* ان احصرنا انتباهنا الى جسم واحد او جسيم فنعلم ان معادلة الحركة التفاضلية هي

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \quad (٥٣-٧)$$

او بميخنة التفاضل

$$d(m\vec{v}) = \vec{F}dt \quad (٥٤-٧)$$

ولذلك نعمل بالنسبة للزمن في الفترة بين  $t_1 = t$  الى  $t_2 = t$  وهذا هو الزمن الذي تؤثر فيه القوة . عندئذ نحصل على

$$\Delta(m\vec{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \quad (٥٥-٧)$$

ويسمى تكامل الزمن للقوة بالدفع ويمثل بالرمز  $\hat{p}$  . ووفقا لذلك تصبح المعادلة السابقة

$$\Delta(m\vec{v}) = \hat{p} \quad (٥٦-٧)$$

اي ان التغيير في الزخم الخطي لجسم تحت تأثير قوة دافعة يساوي دفع القوة . ويمكننا اعتبار الدفع المثالي هو الذي ينتج من قوة لانتهائية في الكبر ولكنها تنتهي في فترة زمنية تقرب من الصفر بحيث يبقى التكامل  $\int \vec{F}dt$  ثابتا . ودفع مثالي كهذا سيحدث تغييرا آليا في الزخم وفي سرعة الجسم بدون ان ينتج عنه اية ازاحة .

العلاقة بين الدفع ومعامل الارتداد

لنطبق مفهوم الدفع على حالة التصادم المباشر بين جسمين كرويين (بحث في البند ٧-٥) . وسوف نقسم الدفع الى قسمين ، الدفع المضاغط  $\hat{p}_C$  ، ودفع الارتداد  $\hat{p}_T$  . وسنركز اهتمامنا فقط على المركبات التي تقع على طول الخط الواصل

بين المركزين . فللتضاغط ان ، يمكننا كتابة

$$m_1 v_0 - m_1 v_1 = \hat{P}_0 \quad (٥٧-٧)$$

$$m_2 v_0 - m_2 v_2 = -\hat{P}_0 \quad (٥٨-٧)$$

حيث  $v_0$  تمثل السرعة المشتركة للجسيمين في اللحظة التي يكون فيها انطلاقهما النسبي صفراً • وبالتماثل • للارتداد • نحصل على

$$m_1 v'_1 - m_1 v_0 = \hat{P}_R \quad (٥٩-٧)$$

$$m_2 v'_2 - m_2 v_0 = -\hat{P}_R \quad (٦٠-٧)$$

وحذف  $v_0$  من المعادلتين (٥٧-٧) و (٥٨-٧) وكذلك من المعادلتين

(٥٩-٧) و (٦٠-٧) • نحصل على المعادلتين التاليتين

$$m_1 m_2 (v_2 - v_1) = \hat{P}_0 (m_1 + m_2)$$

$$m_1 m_2 (v'_1 - v'_2) = \hat{P}_R (m_1 + m_2)$$

وقسمة المعادلة الثانية على الاولى نحصل على العلاقة التالية

$$\frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} = \frac{\hat{P}_R}{\hat{P}_0} \quad (٦١-٧)$$

ولكن الطرف الايسر هو تعريف معامل الارتداد  $\epsilon$  • اذن

$$\epsilon = \frac{\hat{P}_R}{\hat{P}_0} \quad (٦٢-٧)$$

اذن • معامل الارتداد يساوى النسبة بين دفع الارتداد والدفع الضاغط •

(٧-٨) حركة جسم متغير الكتلة . حركة الصاروخ

Motion of a Body with Variable Mass. Rocket Motion.

علينا ان نكون حذرين عند وضع المعادلات التفاضلية للحركة لحالة جسم متغير كتلته مع الزمن . ان مفهوم الدفع قد يكون مفيدا لهذا النوع من المسائل .  
خذ الحالة العامة لحركة جسم متغير كتلته . وافرض ان  $\vec{F}_{ext}$  تمثل القوة الخارجية التي تؤثر على الجسم في زمن معين و  $\Delta m$  تمثل الزيادة في كتلة الجسم التي تحدث في فترة زمنية قصيرة  $\Delta t$  . عندئذ تمثل  $\vec{F}_{ext} \Delta t$  الدفع المتولد عن القوة الخارجية ويكون لدينا -

$$\vec{F}_{ext} \Delta t = (\vec{P}_{total})_{t+\Delta t} - (\vec{P}_{total})_t$$

للتغيير في الزخم الخطي لكلي المنظومة . فاذا كانت  $\vec{v}$  تمثل سرعة الجسم و  $\vec{v}$  سرعة الزيادة في الكتلة  $\Delta m$  بالنسبة للجسم ، عندئذ يمكننا كتابة -

$$\vec{F}_{ext} \Delta t = (m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta \vec{v}) - [m\vec{v} + \Delta m(\vec{v} + \vec{v})]$$

وهذه تبسيط الى

$$\vec{F}_{ext} \Delta t = m \Delta \vec{v} + \Delta m \Delta \vec{v} - \vec{v} \Delta m$$

ومقسمة كل حد على  $\Delta t$  نحصل على -

$$\vec{F}_{ext} = (m + \Delta m) \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} - \vec{v} \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

اذن عندما تقترب  $\Delta t$  من الصفر في الغاية نحصل على المعادلة العامة التالية

$$\vec{F}_{ext} = m\dot{\vec{v}} - \vec{v}\dot{m} \quad (٧ - ٦٣)$$

قد تمثل القوة  $\vec{F}_{ext}$  هنا جاذبية الارض او مقاومة الهواء والخ . وفي حالة

الصاروخ يمثل الحد  $\vec{v}\dot{m}$  الدفع المضاد " Thrust "

ولنطبق المعادلة على حالتين خاصتين . اولاه افرض ان جسما يتحرك في ضباب

او سديم بحيث تزداد كتلته عند مروره . في هذه الحالة تكون السرعة الابتدائية

لتراكم المادة صفرا . اذن  $\vec{v} = -\vec{v}$  ونحصل على

$$\vec{F}_{ext} = m\dot{\vec{v}} + \vec{v}\dot{m} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (٦٤-٧)$$

لمعادلة الحركة . ونستخدم هذه فقط عندما تكون السرعة الابتدائية للمادة المتراكمة تساوي صفرا . وما عدا ذلك يجب استخدام المعادلة العامة (٦٣-٧) .

خذ حركة الماروخ للحالة الثانية . في هذا المثال تكون إشارة  $m$  سالبة . لان الماروخ يفقد كتله على شكل وقود . عندئذ يتجه  $\vec{v}$  بعكس اتجاه السرعة النسبية للوقود المقذوف  $\vec{v}$  . وللتبسيط سوف نحل معادلة الحركة للمعالة التي تكون فيها القوة الخارجية  $\vec{F}_{ext}$  صفرا . عندئذ نحصل على

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{v}\dot{m} \quad (٦٥-٧)$$

ويمكننا فرز المتغيرات والتكامل ليجاد  $\vec{v}$  كما يلي -

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \frac{dm}{m dt}$$

$$\int d\vec{v} = \int \frac{\vec{v} dm}{m}$$

فاذا فرضت  $\vec{v}$  ثابتة . عندئذ يمكننا التكامل بين الغائتين ليجاد الانطلاق كدالة

للكلثة  $m$  .

$$\int_{v_0}^v dv = -v \int_{m_0}^m \frac{dm}{m}$$

$$v = v_0 + v \ln \frac{m_0}{m}$$

حيث  $m_0$  تمثل الكلثة الابتدائية للماروخ زائدا الوقود غير المحترق .  $m$  الكلثة في اي زمن و  $v$  انطلاق الوقود المقذوف بالنسبة الى الماروخ . وسبب طبيعيتة الدالة اللوغارتمية . من الضروري استعمال كمية كبيرة من الوقود الى نسبة وزن الماروخ فارغ ( بدون وقود ) لاجل الحصول على انطلاقات عالية لضرورتها في منصة انطلاق القمر الصناعي .

تمارين

٧-١) منظومة متكونة من ثلاث جسيمات • كتلة كل منها واحد • فاذا كانت  
بإحداثياتها وسرعها كالتالي

$$\vec{r}_1 = \hat{i} + \hat{j}$$

$$\vec{v}_1 = 2\hat{i}$$

$$\vec{r}_2 = \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{v}_2 = \hat{j}$$

$$\vec{r}_3 = \hat{k}$$

$$\vec{v}_3 = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

جـ موضع وسرعة مركز الكتلة • جد كذلك الزخم الخطي للمنظومة •

٧-٢) (أ) جد الطاقة الحركية للمنظومة السابقة • (ب) جد الزخم الزاوي حول المركز •

٧-٣) • بندقية كتلتها  $m$  تطلق قذيفة كتلتها  $M$  • فاذا كانت سرعة الفوهة

(سرعة القذيفة بالنسبة الى البندقية) هي  $v_0$  • ماهو الانطلاق الفعلي

للقذيفة مباشرة بعد ان تترك ماسورة البندقية ؟ •

٧-٤) • اطلقت قذيفة كتلتها  $m$  وانطلقها  $v_0$  مباشرة نحو قالب خشبي كتلته  $M$

موضوع على طاولة افقية خشنة • فاذا كانت  $\mu$  تمثل معامل الاحتكاك

الانزلاقي بين القالب والطاولة • فما هي المسافة التي ينزلقها القالب قبل

ان يصل الى حالة السكون ؟ •

٧-٥) • قذفت شظية بزواية  $\theta$  ؟ ما انطلاق ابتدائي  $v_0$  • وفي اعلى نقطة من المسار

انفجرت الشظية الى قسمين متساويين • احدهما تحرك مباشرة نحو اليمين

بالنسبة الى الارض ما انطلاق ابتدائي  $2v_0$  • ماهو اتجاه وانطلاق القسم

الآخر مباشرة بعد الانفجار ؟ •

٧-٦) ثلاثة جسيمات متساوية الكتلة تتحرك على خط مستقيم . في البداية كانت مواضع الجسيمات في النقاط - ١ صفره + ١ وسرعها  $v_0, 2v_0, 4v_0$  على التوالي . جد السرعة النهائية للجسيمات على فرض ان التصادم كان تام المرنة .

٧-٧) سقطت كرة من ارتفاع  $h$  على رصيف اقي . فاذا كانت  $\epsilon$  تمثل معامل الارتداد اثبت ان المسافة العمودية الكلية التي تقطعها الكرة قبل ان يتوقف ه ارتداد الكرة هي -  

$$h(1 + \epsilon^2)/(1 - \epsilon^2).$$

٧-٨) في السؤال السابق جد الزمن الكلي الذي ترتد فيه الكرة .

٧-٩) اشتق المعادلات (٣٤ - ٧) .

٧-١٠) افرض ان الارض والقمر يمثلان منظومة معزولة اثبت ان كلا منهما يتحرك بقطع ناقص حول مركز كتلتهما المشترك .

٧-١١) اثبت ان الطاقة الحركية لمنظومة مكونة من جسيمين هي

$$\frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu v^2$$

حيث  $v, m = m_1 + m_2$  الانطلاق النسبي و  $\mu$  الكتلة المعنوية .

٧-١٢) اثبت ان الثابت  $h$  في المعادلة (٦ - ٥٨) لزمن دورة كوكب حول الشمس يجب ان يكون  $2\pi [G(M+m)]^{-\frac{1}{2}}$  بدلا من  $2\pi (GM)^{-\frac{1}{2}}$  حيث  $M$  تمثل كتلة الشمس و  $m$  كتلة الكوكب .

٧-١٣) اذا حدث تصادم مباشر بين جسيمين اثبت ان الخسارة في الطاقة الحركية تساوي

$$\frac{1}{2}\mu v^2(1 - \epsilon^2)$$



حيث  $\mu$  تمثل الكتلة المصغرة ،  $v$  الانطلاق النسبي قبل التصادم و  $\epsilon$  هي معامل الارتداد .

(١٤-٧) جسم متحرك كتلته  $m_1$  اصطدم اصطداما مرنا بجسم هدف كتلته  $m_2$  وكان ابتدائيا في حالة السكون . فاذا كان التصادم رأسيا اثبت ان الجسم الساقط يفقد  $m / \mu \cdot 4$  من طاقته الحركية الاصلية ، حيث  $\mu$  هي الكتلة المصغرة و  $m = m_1 + m_2$  .

(١٥-٧) اثبت ان الزخم الزاوي لمنظومة متكونة من جسيمين هو

$$\vec{r}_{cm} \times m\vec{v}_{cm} + \vec{R} \times \mu \vec{v}$$

حيث  $m = m_1 + m_2$  هي الكتلة المصغرة ،  $\vec{R}$  متجه الموضع النسبي و  $\vec{v}$  هي السرعة النسبية للجسيمين .

(١٦-٧) بروتون كتلته  $m_p$  وسرعته الابتدائية  $\vec{v}$  يصطدم بذرة هليوم ، كتلتها  $4m_p$  ابتدائيا في حالة السكون . اذا كان البروتون يترك نقطة الاصطدام بزاوية  $45^\circ$  مع خط الحركة الاصلية . جد السرعة النهائية لكل جسم . افرض ان التصادم تام المرنة .

(١٧-٧) حل السؤال السابق للحالة التي يكون فيها التصادم غير مرن و  $Q$  تساوى  $\frac{1}{4}$  طاقة البروتون الابتدائية .

(١٨-٧) بالرجوع الى السؤال (١٦-٧) ، جد زاوية التشتت Scattering للبروتون في مركز كتلة المنظومة .

(١٩-٧) جد زاوية تشتت البروتون في مركز كتلة المنظومة في السؤال (١٧-٧) .

٢٠-٧) جسم كتلته  $m$  وزغمه الابتدائي  $p_1$  اصطدم بجسم له نفس الكتلة وكان في حالة السكون. فاذا كان مقدار الزخم النهائي للجسمين هو  $p_1$  و  $p_2$  على التوالي. اثبت ان مقدار الخسارة في الطاقة للتصادم هو

$$Q = \frac{p_1 p_2}{2m} \cos \psi$$

حيث  $\psi$  هي الزاوية بين مساري الجسمين بعد التصادم.

٢١-٧) اشتق المعادلة (٢-٥٢).

٢٢-٧) اطلق صاروخ عموديا الى الاعلى. اذا فرضت  $g$  ثابتة و جد معادلة الحركة.

ماهي نسبة الوقود الى وزن الصاروخ بدون وقود للحصول على انطلاق نهائي.

يساوي انطلاق انفلات الارض (٧ ميل بالثانية) اذا كان انطلاق الغاز المستنفذ

(أ)  $\frac{1}{4}$  ميل في الثانية. و (ب) ٢ ميل في الثانية؟ افرض ان معدل

الخسارة في الوقود في الثانية ثابتا و مساوي ١ % من الكتلة الابتدائية للوقود.

٢٣-٧) سلسلة منتظمة جميلة طولها  $a$  علقنا ابتدائيا بحيث كان جزءا من طولها

بقدره  $b$  يتدلى من حافة الطاولة. والجزء الباقي والذي طولها  $a - b$

ملفوف بالقرب من الحافة. فاذا تركت السلسلة تتحرك اثبت ان انطلاقها عند

آخر حلقة تترك نهاية الطاولة هو  $\left[ \frac{2g(a^3 - b^3)}{3a^2} \right]^{\frac{1}{2}}$

٢٤-٧) جد المعادلة التفاضلية لحركة قطرة مطر تسقط خلال الضباب فتزداد كتلتها

اثناء سقوطها. افرض انها تبقى كروية الشكل وان معدل التراكم يتناسب مع

القطع العرضي للقطرة مضروبا في انطلاق المقطوع. اثبت ان القطرة تبدأ

من السكون عندما تكون ابتدائيا بمغيره جدا عندئذ يكون

التعجيل ثابتا و مساوي  $g/7$ .

## الفصل الثامن

ميكانيك الاجسام الصلده - الحركة في مستو

### Mechanics of Rigid Bodies Motion in a Plane

قد يعتبر الجسم الصلب مكوناً من منظومة جسيمات مواضعها النسبية ثابتة ،  
او عبارة اخرى ، المسافة بين اى جسيمين ثابتة . هناك مثالية في هذا التعريف  
للجسم الصلب ، لانه اولاً ، كما اثبتنا في تعريف الجسيم ، لا توجد في الطبيعة  
جسيمات حقيقية - وثانياً لانكون الاجسام الممتدة الحقيقية تامة الصلده ، اذ يتغير  
شكلها ( سطحه ، كثافته او تلنوي ) بقدر اقل يزداد او ينقص عند تطبيق قوة خارجية  
عليها ، على اية حال ، سوف نهمل في الوقت الحاضر مثل هذه التغيرات .

٨-١) مركز الكتلة لجسم صلب Center of Mass of a Rigid Body

سبق ان عرفنا مركز الكتلة (البند ٧-١) لمنظومة جسيمات الممثل بالنقطة

$$x_{cm} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} \quad \text{و} \quad y_{cm} = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i} \quad \text{و} \quad z_{cm} = \frac{\sum z_i m_i}{\sum m_i}$$

(  $x_{cm}$  ،  $y_{cm}$  ،  $z_{cm}$  ) وهي كما يلي

ولجسم ممتد صلب ، يمكننا استبدال عملية الجمع بالتكامل على حجم الجسم ، اى

$$x_{cm} = \frac{\int_V \rho x \, dv}{\int_V \rho \, dv} \quad \text{و} \quad y_{cm} = \frac{\int_V \rho y \, dv}{\int_V \rho \, dv} \quad \text{و} \quad z_{cm} = \frac{\int_V \rho z \, dv}{\int_V \rho \, dv} \quad (٨-١)$$

حيث  $\rho$  تمثل الكثافة و  $dv$  عنصر الحجم .

اذا كان الجسم الصلب فشرة رقيقة الشكل فمعادلات مركز الكتلة تصبح -

$$x_{cm} = \frac{\int_S \rho x \, ds}{\int_S \rho \, ds} \quad \text{و} \quad y_{cm} = \frac{\int_S \rho y \, ds}{\int_S \rho \, ds} \quad \text{و} \quad z_{cm} = \frac{\int_S \rho z \, ds}{\int_S \rho \, ds} \quad (٨-٢)$$

حيث  $ds$  يمثل عنصر المساحة و  $\rho$  كتلة وحدة المساحة . ويمتد التكامل على مساحة الجسم .

ماتتائل ، اذا كان الجسم على شكل سلك رفيع ، فيكون عندنا

$$x_{cm} = \frac{\int \rho x \, dl}{\int \rho \, dl}, \quad y_{cm} = \frac{\int \rho y \, dl}{\int \rho \, dl}, \quad z_{cm} = \frac{\int \rho z \, dl}{\int \rho \, dl} \quad (٢-٨)$$

في هذه الحالة ،  $\rho$  تمثل كتلة وحدة الطول و  $dl$  عنصر الطول . وللجسام المنتظمة المتجانسة ، تكون عوامل الكثافة  $\rho$  ثابتة لجميع الحالات ولذلك يمكن حذفها من كل المعادلات السابقة .

واذا كان هناك جسم مركب اى يتكون من جزئين او اكثر وكانت مراكز كتل الاجزاء معروفة فمن الواضح عندئذ انه يمكن من تعريف مركز الكتلة كتابة -

$$x_{cm} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} \quad (٤-٨)$$

مع معادلات مماثلة لكل من  $y_{cm}$  و  $z_{cm}$  . اى ان  $(x_1, y_1, z_1)$  يمثل مركز كتلة الجزء  $m_1$  ، وهلم جرا .

### فرضيات التناظر

اذا كان هناك جسم متناظره فمن الممكن الاستفادة من هذا التناظر لتعيين مركز الكتلة . اذن ، اذا كان للجسم مستو للتناظر ، اى ، اذا كان لكل جسيم  $m_1$  صورة مثل  $m'_1$  بالنسبة لمستوما ، عندئذ يقع مركز الكتلة في ذلك المستوى . ولكي نبرهن هذا ، لنفرض ان المستوى  $xy$  يمثل مستوى التناظر . عندئذ يكون عندنا -

$$z_{cm} = \frac{\sum (z_1 m_1 + z'_1 m'_1)}{\sum (m_1 + m'_1)}$$

ولكن  $m_1 = m_1'$  و  $z_1 = -z_1'$  اذن تختزل حدود البسط بازواج ، ولذلك

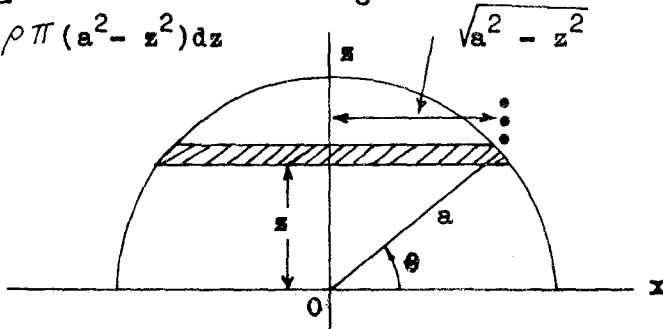
$$z_{om} = 0 \text{ ، وهذا يعني ، ان مركز الكتلة يقع في المستوى } xy$$

والتماثل ، اذا كان للجسم خط للتناظر فمن السهل ان نثبت ان مركز الكتلة يقع على ذلك الخط . وقد ترك البرهان كتمرين .

### نصف كرة متلثة

لايجاد مركز كتلة نصف كرة متجانسة متلثة نصف قطرها  $a$  ، ومن التناظره يقع مركز الكتلة على نصف القطر العمودي على سطحها المستوي . واختيار محور كما هو مبين في الشكل (٨-١) ، يكون مركز الكتلة واقعا على المحور  $z$  ولحساب  $z_{om}$  نستعمل عنصر حجوم مدور سمكه  $dz$  ونصف قطره  $(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$  كما هو مبين في الشكل . اى ان

$$z_{om} = \frac{\int_0^a \rho \pi z (a^2 - z^2) dz}{\int_0^a \rho \pi (a^2 - z^2) dz} = \frac{3}{8} a \quad (٨-٥)$$



الشكل (٨-١)

المحاور لحساب مركز كتلة نصف كرة

قشرة نصف كروية

لقشرة نصف كروية نصف قطرها  $a$  نستخدم نفس المحاور التي استخدمت في  
المسألة السابقة (الشكل (٨-١)) بكرة أخرى  $\theta$  من التناظره يقع مركز الكتلة على  
المحور  $z$  • ولنختار للعنصر السطحي حلقة دائرية عرضها  $a \sin \theta$  اذن يمكن

$$ds = 2\pi (a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} a d\theta$$

كتابة

$$\theta = \sin^{-1} (z/a),$$

ولكن

$$d\theta = (a^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}} dz$$

اي ان

$$ds = 2\pi a dz$$

اذن •

ووفقا لذلك يكون موضع مركز الكتلة كما يلي

$$z_{cm} = \frac{\int_0^a \rho 2\pi az dz}{\int_0^a \rho 2\pi a dz} = \frac{1}{2} a$$

(٨-٦)

نصف دائرة

لايجاد مركز كتلة سلك رفيع على شكل نصف دائرة نصف قطرها  $a$  • نستخدم  
محاور كالمبينة في الشكل (٨-٢) • فيكون عندنا

$$dl = a d\theta$$

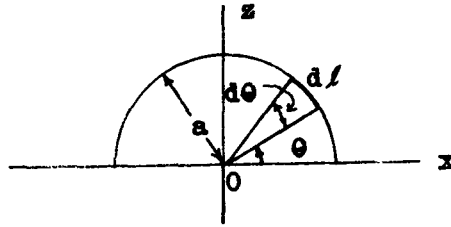
$$z = a \sin \theta$$

•

اذن

$$z_{cm} = \frac{\int_0^{\pi} \rho (a \sin \theta) a d\theta}{\int_0^{\pi} \rho a d\theta} = \frac{2}{\pi} a$$

(٨-٧)



الشكل ( ٨ - ٢ )

المحاور لحساب مركز كتلة سلك نصف دائري

صفحة نصف دائرية

في حالة صفحة نصف دائرية منتظمة ، يكون مركز الكتلة على المحور - z  
( الشكل ٨ - ٢ ) . وقد ترك ذلك كمسألة للبرهنة على ان -

$$z_{\text{cm}} = \frac{4}{3\pi} a \quad (٨ - ٨)$$

٢-٨ التوازن الستاتيكي لجسم صلبStatic Equilibrium of a Rigid Body

رأينا (بند ٧-١) ان تعجيل مركز كتلة منظومة يساوي المجموع الاتجاهي للقوى الخارجية تقسمة على الكتلة . وصورة خاصة ، اذا كانت المنظومة جسماً صلباً ، وكان مجموع جميع القوى الخارجية يساوي صفراً - اي

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = 0 \quad (٩-٨)$$

عندئذ سيبقى مركز الكتلة ساكناً ، اذا كان في البداية ساكناً . فالعلاقة ( ٩-٨ )

تعبّر اذن عن شرط التوازن الاتقالي للجسم الصلب .

والتماثل ، ان تلاشي عزوم جميع القوى المسلطة ، اي

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots = 0 \quad (١٠-٨)$$

يعني ان الزخم الزاوي للجسم لا يتغير (بند ٧-٢) . هذا هو شرط التوازن الدوراني للجسم الصلب ، اى اذا كان الجسم في البداية ساكنا ، فانه سوف لا يبدأ بالدوران . والمعادلتان (٨-٩) و (٨-١٠) معا يكونان الشرطين الضروريين لان يكون الجسم الصلب تام التوازن .

التوازن في مجال جاذبية منتظم

#### Equilibrium in a Uniform Gravitational Field

نفرض ان جسما صلبا في مجال جاذبية منتظم كوجوده على سطح الكرة الارضية . لما كان مجموع قوى الجاذبية يساوى  $m\vec{g}$  حيث  $m$  هي كتلة الجسم ، فمكننا كتابة شرط التوازن الاتقالي كما يلي -

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + m\vec{g} = 0 \quad (١١-٨)$$

حيث  $\vec{F}_1$  و  $\vec{F}_2$  وهلم جرا ، هي جميع القوى الخارجية باستثناء الجاذبية . وبالتماثل ، يمكن كتابة شرط التوازن الدوراني كما يلي -

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots + \sum_1 \vec{r}_1 \times m_1 \vec{g} = 0 \quad (١٢-٨)$$

ولكن  $\vec{g}$  متجه ثابت ، لذلك يمكننا كتابة -

$$\sum_1 \vec{r}_1 \times m_1 \vec{g} = \left( \sum_1 m_1 \vec{r}_1 \right) \times \vec{g} = m\vec{r}_{cm} \times \vec{g} = \vec{r}_{cm} \times m\vec{g} \quad (١٣-٨)$$

المعادلة السابقة تنص على ان عزم قوة الجاذبية حول اية نقطة ، يساوى عزم قوة منفردة  $m\vec{g}$  مؤثرة على مركز الكتلة (١) . فمعادلة التوازن الدوراني عندئذ تصبح

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_{cm} \times m\vec{g} = 0 \quad (١٤-٨)$$

(١) يسمى مركز قوة التجاذب الظاهري بمركز الثقل . وفي مجال جاذبية منتظم

كالذى فرضناه يتطابق مركز الثقل ومركز الكتلة .



التوازن تحت تأثير قوى واقعه في نفس المستوى

### Equilibrium under Coplanar Forces

إذا كانت خطوط تأثير منظومة قوى مسلطة على جسم صلب تقع في مستو واحد

عندئذ يمكن ان نكتب  $\vec{F}_1 = \hat{i}X_1 + \hat{j}Y_1$  وهلم جرا . فصيغ مركبات معادلات التوازن ،

اي المعادلات (٨-٩) و (٨-١٠) ، (التي يتذكرها الطالب من الفيزياء الولىة) ،

عندئذ تكون

التوازن الانتقالي :

$$X_1 + X_2 + \dots = 0 \quad Y_1 + Y_2 + \dots = 0 \quad (٨-١٥)$$

التوازن الدوراني

$$x_1Y_1 - y_1X_1 + x_2Y_2 - y_2X_2 + \dots = 0 \quad (٨-١٦)$$

(٨-٣) دوران جسم صلب حول محور ثابت - عزم القصور الذاتي

Rotation of a Rigid Body about a Fixed Axis. Moment of Inertia.

من ابسط حركات الجسم الصلب ، عدا الحركة الانتقالية الصرفة ، حركته الدورانية

القيدة حول محور ثابت . لنختار المحور - z في محاور مناسبة كمحور للدوران . فمسار

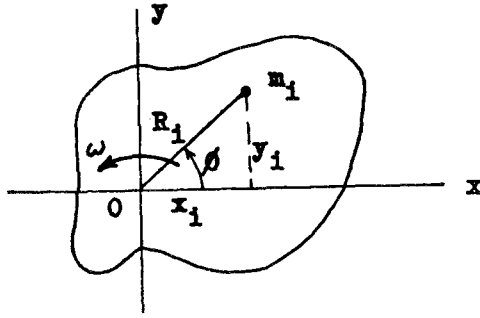
الجسيم النموذجي  $m_1$  الذى موضعه النقطة  $(x_1, y_1, z_1)$  عندئذ يكون .

دائرة نصف قطرها  $R_1 = (x_1^2 + y_1^2)^{\frac{1}{2}}$  ومركزها يقع على المحور - z . ومثل

الشكل (٨-٣) قطعاً عرضياً للحركة موازياً للمستوى - xy .

انطلاق الجسم i هو

$$v_i = R_1 \omega = (x_1^2 + y_1^2)^{\frac{1}{2}} \omega \quad (٨-١٧)$$



الشكل ( ٨ - ٣ )

### مقطع عرضي لجسم صلب يدور حول المحور - 2

حيث  $\omega$  تمثل الانطلاق الزاوي للدوران . من دراسة الشكل ه نرى ان للسرعة المركبات التالية -

$$\dot{x}_1 = -v_1 \sin \phi = -\omega y_1 \quad (٨ - ١٨)$$

$$\dot{y}_1 = v_1 \cos \phi = \omega x_1 \quad (٨ - ١٩)$$

$$\dot{z}_1 = 0 \quad (٨ - ٢٠)$$

حيث عرفت الزاوية  $\phi$  كما هو مبين في الشكل . ويمكن كذلك الحصول على المعادلات السابقة بإيجاد مركبات المعادلة التالية -

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega} \times \vec{r}_1 \quad (٨ - ٢١)$$

$$\vec{\omega} = \vec{k} \omega \quad \text{حيث}$$

لنحسب الطاقة الحركية لدوران الجسم • من العلاقة

$$T = \sum_1 \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_1 m_1 R_1^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (٢٢-٨)$$

حيث

$$I = \sum_1 m_1 R_1^2 = \sum_1 m_1 (x_1^2 + y_1^2) \quad (٢٣-٨)$$

الكمية  $I$  التي عرفت في المعادلة السابقة • لها اهمية خاصة في دراسة حركة الاجسام الصلدة • وتسمى بعزم القصور الذاتي •

لنوضح كيفية دخول عزم القصور الذاتي بصورة عميقة في الموضوع • لنحسب الزخم

الزاوي حول محور الدوران • لما كان الزخم الزاوي لجسيم • من التعريف • يساوي

$$\vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 \quad \text{فمركبة } z \text{ عندئذ هي}$$

$$m_1 (x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1) = m_1 (x_1^2 + y_1^2) \omega = m_1 R_1^2 \omega \quad (٢٤-٨)$$

حيث استعملنا المعادلتين (١٨-٨) و (١٩-٨) • ونحصل على مركبة  $z$

الكلية للزخم الزاوي • والتي سنسميها  $L$  • باخذ المجموع لجميع الجسيمات • اى -

$$L = \sum_1 m_1 R_1^2 \omega = I \omega \quad (٢٥-٨)$$

رأينا في البند (٧-٢) ان معدل التغير الزمني للزخم الزاوي لاي منظومة يساوي

العزم الكلي للقوى الخارجية • ولجسم يقيد الدوران حول محور ثابت يكون عندنا -

$$N = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} \quad (٢٦-٨)$$

حيث  $N$  تمثل العزم الكلي لجميع القوى المسلطة حول محور الدوران (مركبة  $\vec{N}$  على

طول المحور) • اذا كان الجسم صلباً • عندئذ تكون  $I$  ثابتة ويمكننا ان نكتب -

$$N = I \frac{d\omega}{dt} \quad (٢٧-٨)$$

والتناظر بين معادلات الحركة الاتقالية والدورانية حول محور ثابت هو كما يلي -

<u>الدورانية</u>	<u>الاتقالية</u>
$L = I\omega$ الزخم الزاوي	$P = mv$ الزخم الخطي
$\vec{H} = I\vec{\omega}$ العزم	$\vec{F} = m\vec{v}$ القوة
$T = \frac{1}{2}I\omega^2$ الطاقة الحركية	$T = \frac{1}{2}mv^2$ الطاقة الحركية

عزم القصور الذاتي يناظر اذن الكتلة ، وهو قياس للقصور الذاتي الدوراني لجسم نسبة الى محور ثابت للدوران ، تماما كما تكون الكتلة قياسا للقصور الذاتي الاتقالي لجسم

(٤-٨) حساب عزم القصور الذاتي -

Calculation of the Moment of Inertia

في الحسابات الفعلية لعزم القصور الذاتي  $\sum mR^2$  للجسام الممتدة ، يمكننا استبدال المجموع بالتكامل على الجسم ، تماما كما فعلنا في حساب مركز الكتلة ، اى يمكننا كتابة -

$$I = \int R^2 dm \quad (٢٨-٨)$$

حيث  $dm$  تمثل عنصر الكتلة وتساوى حاصل ضرب الكثافة في عنصر مناسب ( الحجم المساحة ، او الطول ) . ومن المهم ان نتذكر ان  $R$  هي المسافة العمودية من عنصر الكتلة على محور الدوران .

ومن الواضح ، لطالة الجسم المركب يمكننا ان نكتب من تعريف القصور الذاتي مايلي

$$I = I_1 + I_2 + \dots \quad (٢٩-٨)$$

حيث  $I_2 \neq I_1$  والخ هي عزوم القصور الذاتي لمختلف الاجزاء حول المحاور  
الخاص الذي تم اختياره .  
لنحسب الآن عزوم القصور الذاتي لبعض الحالات الخاصة المهمة .

قضيب متين

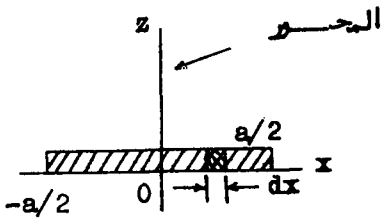
ان عزم القصور الذاتي لقضيب رفيع منتظم طوله  $a$  وكتلته  $m$  حول محور  
مبني على احد طرفيه (الشكل ٨-٤ (أ) ) هو -

$$I = \int_0^a x^2 \rho dx = \frac{1}{3} \rho a^3 = \frac{1}{3} ma^2 \quad (٨-٢٠)$$

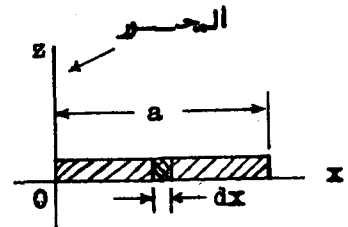
وقد نتجت الخطوة الاخيرة لان  $m = \rho a$  .

اما اذا كان المحور يمر في مركز القضيب (الشكل ٨-٤ "ب" ) فنحصل على

$$I = \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \rho dx = \frac{1}{12} \rho a^3 = \frac{1}{12} ma^2 \quad (٨-٢١)$$



( ب )



( أ )

الشكل ( ٨ - ٤ )

المحاور لحساب عزم القصور الذاتي لقضيب (أ) حول احد طرفيه

(ب) حول المركز

## Hoop or Cylindrical Shell

## الطوق او القشرة الاسطوانية

في حالة الطوق الدائري الدقيق او القشرة الاسطوانية تقع جميع الجسيمات على نفس البعد من المحور ، فعزم القصور الذاتي اذن يكون -

$$I = ma^2 \quad (٣٢-٨)$$

حيث  $a$  يمثل نصف القطر و  $m$  الكتلة .

## Circular Disc or Cylinder

## قرص دائري او اسطوانة

سنستخدم المحاور القطبية لحساب عزم القصور الذاتي لقرص دائري منتظم نصف قطره  $a$  وكتلته  $m$  . ونصير الكتلة هنا عبارة عن حلقة دقيقة نصف قطرها  $r$  بسماكها  $dr$  ، وهي تعطى كما يلي -

$$dm = \rho 2\pi r dr$$

حيث  $\rho$  تمثل كتلة وحدة المساحة . فعزم القصور الذاتي حول محور يمر من مركز القرص وعمودى على وجهه المستوي ( الشكل ٨ - ٥ ) عندئذ يكون -

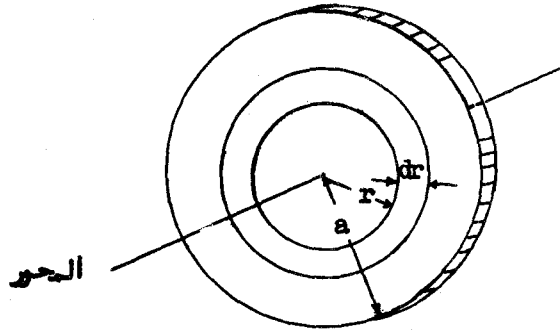
$$I = \int_0^a \rho (r^2) (2\pi r dr) = 2\pi \rho \frac{a^4}{4} = \frac{1}{2} ma^2 \quad (٣٣-٨)$$

والخطوة الاخيرة تنتج من العلاقة  $m = \rho \pi a^2$  .

من الواضح ، ان المعادلة (٣٣-٨) تستخدم كذلك لاسطوانة دائرية قائمة منتظمة نصف قطرها  $a$  وكتلتها  $m$  ، والمحور هو المحور المركزي للاسطوانة .

## الكرة

لنجد عزم القصور الذاتي لكرة صلبة منتظمة نصف قطرها  $a$  وكتلتها  $m$  حول محور ( المحور -  $z$  ) يمر من مركزها . سوف نقسم الكرة الى اقراص دائرية رقيقة ،



الشكل (٨ - ٥)

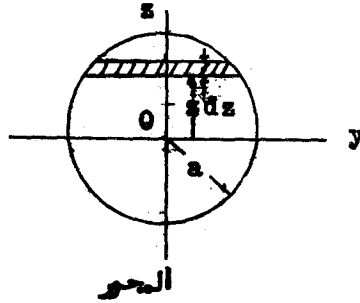
المحاور لإيجاد عزم القصور الذاتي للقرص

كما هو مبين في الشكل (٨ - ٦) من المعادلة (٨ - ٢٢) يكون عزم القصور الذاتي

لهذا القرص النموذجي الذي نصف قطره  $y$  هو  $\frac{1}{2}\pi y^2 dm$  ولكن  $dm = y^2 dz \cdot \rho \cdot \pi$

اذن

$$I = \int_{-a}^a \rho \frac{1}{2}\pi y^4 dz = \int_{-a}^a \frac{1}{2}\pi \rho (a^2 - z^2)^2 dz = \frac{8}{15}\pi \rho a^5 (24 - 8)$$



الشكل (٨ - ٦)

المحاور لإيجاد عزم القصور الذاتي لكرة حول المحور - 2

على الطالب استنتاج الخطوة الأخيرة • ولما كانت الكتلة  $m$  هي

$$m = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$$

اذن

$$I = \frac{2}{5} ma^2 \quad (٣٥ - ٨)$$

Spherical Shell

قشرة كروية

يمكن ايجاد عزم القصور الذاتي لقشرة رقيقة كروية منتظمة بسهولة من تطبيق

المعادلة (٣٤-٨) فاذا فاضلناها بالنسبة الى  $a$  نحصل على

$$\frac{8}{3} \pi \rho a^4 da$$

وهذه النتيجة هي عزم القصور الذاتي لقشرة سمكها  $da$  ونصف قطرها  $a$  .  
ولما كانت كتلة القشرة تساوي  $4\pi a^2 \rho da$  اذن يمكننا كتابة -

$$I = \frac{8}{3} ma^2 \quad (٣٦ - ٨)$$

لعزم القصور الذاتي لقشرة رقيقة نصف قطرها  $a$  وكتلتها  $m$  . ولى الطالب

التحقق من صحة هذه النتيجة بالتكامل المباشر .

Perpendicular-axis Theorem

نظرية المحاور المتعامدة

افرض ان جسمًا صلبًا على شكل صفحة رقيقة مستوية اعتبارية الشكل . لنضع هذه

الصفحة في المستوى  $xy$  (الشكل ٨-٧) . فعزم القصور الذاتي حول

المحور  $z$  اذن يكون

$$I_z = \sum_1 m_1 (x_1^2 + y_1^2) = \sum_1 m_1 x_1^2 + \sum_1 m_1 y_1^2$$

ولكن المجمع  $\sum_1 m_1 x_1^2$  هو عزم القصور الذاتي  $I_y$  حول المحور  $y$  ، لان

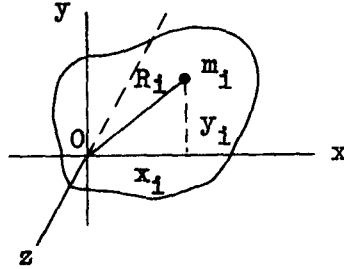
$z_1$  يساوى صفرا لجميع الجسيمات . وبالتماثل  $\sum_1 m_1 y_1^2$  يمثل عزم القصور

الذاتي  $I_x$  حول المحور  $x$  . اذن يمكن كتابة المعادلة السابقة على النحو التالي -

$$I_z = I_x + I_y \quad (٣٧ - ٨)$$



هذه هي نظرية المحاور المتعامدة . اى ان عزم القصور الذاتي لاي صفيحة مستوية حول محور عمودى على سطحها يساوى مجموع عزمي القصور الذاتي حول اى محورين متعامدين يقعان في مستوى الصفيحة ويمران بالمحور العمودى .



الشكل (٨-٧)

### نظرية المحاور المتعامدة

كمثال لاستخدام هذه النظرية ، لنفرض قرصا دائريا رقيقا في المستوى  $xy$

(الشكل ٨-٨) من المعادلة (٨-٣٣) عندنا -

$$I_z = \frac{1}{2} ma^2 = I_x + I_y$$

ولكن هذه الحالة نعرف ان  $I_x = I_y$  من التناظر . اذن يجب ان نحصل على -

$$I_x = I_y = \frac{1}{4} ma^2 \quad (٨-٣٨)$$

لعزم القصور الذاتي حول اى محور في مستوى القرص ويمر من مركزه . والمعادلة

(٣-٣٨) يمكن استنباطها ايضا من التكامل المباشر .

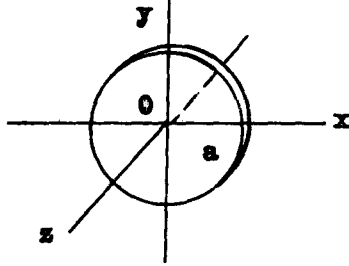
### Parallel-axis Theorem

### نظرية المحاور المتوازية

افرض معادلة القصور الذاتي حول اى محور كالمحور  $z$

$$I = \sum_1 m_1 (x_1^2 + y_1^2)$$

يمكننا الآن التعبير عن  $x_1$  و  $y_1$  بدلالة إحداثيات مركز الكتلة



الشكل (٨ - ٨)

(  $x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}$  ) ولاحداثيات (  $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1$  ) بالنسبة الى مركز الكتلة  
(الشكل ٨ - ٩) كما يلي -

$$x_1 = x_{cm} + \bar{x}_1 \quad y_1 = y_{cm} + \bar{y}_1 \quad (٢٩ - ٨)$$

بعد التعميم وتجميع الحدود نحصل على

$$I = \sum_1 m_1 (\bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2) + \sum_1 m_1 (x_{cm}^2 + y_{cm}^2) \quad (٤٠ - ٨)$$

المجموع الاول من اليمين هو عزم القصور الذاتي حول محور مواز للمحور  $z$  يمر  
في مركز الكتلة . سنسميه  $I_{cm}$  . من الواضح ان المجموع الثاني يساوي كتلة الجسم  
مضروبة في مربع المسافة بين مركز الكتلة والمحور  $z$  . ولنسم هذه المسافة  $l$  .

$$l^2 = x_{cm}^2 + y_{cm}^2 \quad \text{اي ان}$$

من تعريف مركز الكتلة عندنا

$$\sum_1 m_1 \bar{x}_1 = \sum_1 m_1 \bar{y}_1 = 0$$

اذن  $I$  المجموعان الاخيران في يمين المعادلة (٨-٤٠) يتلازمان والتنتيجة الاخيرة

تكتب على النحو التالي -

$$I = I_{om} + m\ell^2 \quad (٨-٤١)$$

هذه هي نظرية المحاور المتوازية . والتي يمكن تطبيقها على اى جسم صلد  $m$  مجسم او صفحة . ونص النظرية في الواقع على ان عزم القصور الذاتي للجسم الصلد حول اى محور يساوى عزم القصور الذاتي حول محور مواز له ويمر من مركز الكتلة زائداً حاصل ضرب كتلة الجسم في مربع المسافة بين المحورين .

وهد تطبيق النظرية السابقة على القرص الدائرى  $m$  نحصل من المعادلتين

$$(٨-٣٣) \text{ و } (٨-٤١) \text{ على}$$

$$I = \frac{1}{2} ma^2 + ma^2 = \frac{3}{2} ma^2 \quad (٨-٤٢)$$

لعزم القصور الذاتي لقرص دائرى منتظم حول محور عمودى على سطح القرص ويمر من حافته . اذ الى ذلك  $m$  من المعادلتين (٨-٣٩) و (٨-٤١) نجد ان

$$I = \frac{1}{2} ma^2 + ma^2 = \frac{5}{4} ma^2 \quad (٨-٤٣)$$

لعزم القصور الذاتي حول محور واقع في مستوى القرص وبماس لحافته .

Radius of Gyration

نصف قطر التدوير

من الملائم  $m$  لبعض الاغراض  $m$  التعبير عن عزم القصور الذاتي للجسم الصلد

بتدلالة المسافة  $k$  والتي تسمى بنصف قطر التدوير  $m$  حيث  $k$  يعرف بالمعادلة

$$I = mk^2$$

التالية -

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

او (٨-٤٤)

فعلى سبيل المثال  $m$  ان نصف قطر التدوير لقضيب دقيق حول محور يمر من احد

طرفيه [بالرجوع للمعادلة (٨-٣٠)] هو -

$$k = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} ma^2}{m}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

ويمكن ترتيب عزوم القصور الذاتية لاجسام مختلفة بسهولة على صورة جدول وذلك بدرج مربع انصاف اقطار التدوير كما هو في الجدول (٨-١)

جدول رقم (٨-١)

قيم  $k^2$  لمختلف الاجسام

(عزم القصور الذاتي = الكتلة  $\times k^2$ )

الجسم	المحور	$k^2$
قضيب رفيع	عمودى على القضيب ويمر من مركزه	$\frac{a^2}{12}$
طولها $a$	عمودى على القضيب ويمر من احد طرفيه	$\frac{a^2}{3}$
صفيحة رقيقة متوازية الاضلاع $a$ ضلعها	يمر من المركز وموازي للضلع $b$	$\frac{a^2}{12}$
$a$ و $b$	يمر من المركز وعمودى على الصفيحة	$\frac{a^2 + b^2}{12}$
قرص دائرى رقيق نصف قطره $a$	يمر من المركز وواقع في مستوى القرص	$\frac{a^2}{4}$
	يمر من المركز وعمودى على القرص	$\frac{a^2}{2}$
حلقة رقيقة نصف قطرها $a$	يمر من المركز وواقع في مستوى الحلقة	$\frac{a^2}{2}$
	يمر من المركز وعمودى على سطحها	$a^2$
فترة اسطوانية رقيقة نصف قطرها $a$ وطولها $b$	محورها الطولى المركزى	$a^2$

$\frac{a^2}{2}$	محورها الطولي المركزي	اسطوانة دائرية قائمة
$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{12}$	يمر من مركزها وعمودى على محورها الطولي المركزي	صلدة نصف قطرها $a$ وطولها $b$
$\frac{8}{3} a^2$	اي قطر	قشرة كروية نصف قطرها $a$
$\frac{2}{5} a^2$	اي قطر	كرة صلدة منتظمة نصف قطرها $a$
$\frac{a^2 + b^2}{12}$	يمر من المركز وعمودى على الوجه $ab$ وهو مواز للحافة $c$	متوازي المستطيلات منتظم صلدة اضلاعه $a, b, c$

## The Physical Pendulum

## ٨-٥) البندول الفيزيائي

الجسم الصلدة الذى يتأرجح بحرية تحت تأثير ثقله حول محور افقى ثابت للدوران

يسمى بالبندول الفيزيائي أو البندول المركب • Compound Pendulum

والشكل (٨-١٠) يبين بندول فيزيائي فيه  $O$  تمثل موضع محور الدوران و  $OM$

مركز كتلته • والمسافة بين  $O$  و  $OM$  هي  $l$  كما هو موضح •

وتمثيل الزاوية بين الخط  $OCM$  والخط الشاقولي  $OA$  بالرمز  $\theta$  يكون

مقدار عزم القوة التثاقلية (تعمل في  $CM$ ) حول محور الدوران على النحو التالي

$$mg l \sin \theta$$

معادلة الحركة الاساسية

$$\frac{dL}{dt} = I \dot{\omega}$$

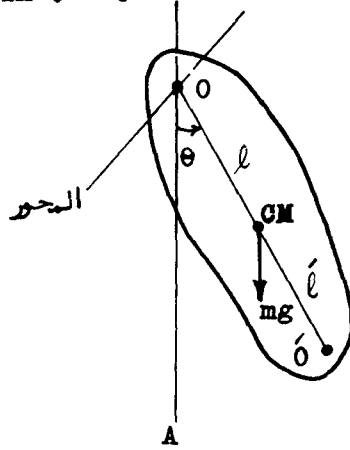
عندئذ تأخذ الشكل التالي

$$-mg l \sin \theta = I \ddot{\theta}$$

أو

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I} \sin \theta = 0$$

(٤٥-٨)



الشكل (١٠-٨)

البندول الفيزيائي

هذه المعادلة تماثل معادلة البندول البسيط بالشكل ٤، وكما هي الحالة في البندول البسيط، يمكننا هنا الاستعاضة عن  $\sin \theta$  بالزاوية  $\theta$  لذبذبات صغيرة،

أي

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I} \theta = 0$$

(٤٦-٨)

وحلها هو

$$\theta = \theta_0 \cos(2\pi ft + \epsilon)$$

(٤٧-٨)

حيث  $\theta_0$  هي السعة و  $\epsilon$  زاوية الطور. تردد التذبذب  $f$  يكون

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

(٤٨-٨)

اذن  $\omega$  زمن الذبذبة هو

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\ell}} \quad (٤٩ - ٨)$$

(لتلاني الارياك الذي قد يحصل  $\omega$  سوف لانستعمل رمزا معيننا لتسمية التردد

الزاوي  $2\pi f$ ) . يمكننا كذلك التعبير عن زمن الذبذبة بدلالة نصف قطر

التدويم  $k$  اي

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2}{g\ell}} \quad (٥٠ - ٨)$$

فزمن الذبذبة اذن هو نفس زمن ذبذبة بندول بسيط طولها  $k^2/\ell$

وهي سهيل المثال  $\omega$  قضيب رفيع منتظم طولها  $a$  يتأرجح كبندول فيزيائي حول

احد طرفيه (  $k^2 = a^2/3$  ) بزمن ذبذبة مقداره

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}$$

Center of Oscillation

مركز التذبذب

باستخدام نظرية المحاور المتوازية  $\omega$  يمكننا التعبير عن نصف قطر التدويم  $k$

بدلالة نصف قطر التدويم حول مركز الكتلة  $k_{cm}$  كما يلي

$$I = I_{cm} + m\ell^2$$

او

$$mk^2 = mk_{cm}^2 + m\ell^2$$

وهذا اختصار  $m$ 's من كل حد نحصل على

$$k^2 = k_{cm}^2 + \ell^2 \quad (٥١ - ٨)$$

اذن يمكن كتابة المعادلة (٥٠-٨) على النحو التالي

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k_{cm}^2 + \ell^2}{g\ell}} \quad (٥٢ - ٨)$$

افرض ان محور دوران بندول فيزيائي قد ازبح الى موضع آخر  $O'$  وعلى مسافة  $l'$  من مركز الكتلة ، كما هو مبين في الشكل (٨-١٠) . فزمن الذبذبة  $T'$  حول هذا المحور الجديد يكون

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{k_{cm}^2 + l'^2}{gl'}}$$

نستنتج من ذلك ان زمني التذبذب حول  $O$  وحول  $O'$  سيكونان متساويين ، اذا كان

$$\frac{k_{cm}^2 + l^2}{l} = \frac{k_{cm}^2 + l'^2}{l'}$$

والمعادلة السابقة تبسط بسهولة الى

$$ll' = k_{cm}^2 \quad (٨-٥٣)$$

فالنقطة  $O'$  التي ترتبط بالنقطة  $O$  بالمعادلة السابقة تسمى بمركز التذبذب للنقطة  $O$  . وواضح ان  $O$  هي ايضا مركز تذبذب للنقطة  $O'$  . اذن لقضيب طوله  $a$  يتأرجح حول طرف واحد يكون  $k_{cm}^2 = a^2/12$  ،  $l = a/2$  . لذا من المعادلة (٨-٥٣) ،  $l' = a/6$  . ولذلك سيكون للقضيب الذي يتأرجح حول محور يبعد مسافة  $a/6$  من المركز ، نفس زمن الذبذبة ، فيما لومر المحور من احد طرفيه .

٨-٦) نظرية عامة تتعلق بالزخم الزاوي

A General Theorem Concerning Angular Momentum

لاجل دراسة الحالة الاكثر عمومية لحركة الجسيم الصلب ، اى التي يكون فيها محور الدوران غير ثابت ، نحتاج الى استنباط نظرية اساسية للزخم الزاوي . رأينا في البنسد (٧-٢) ان معدل التغير الزمني للزخم الزاوي لاية منظومة يساوى العزم المسط علىها ، اى

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \quad (٨-٥٤)$$



او على نحو واضح

$$\frac{d}{dt} \sum_1 (\vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1) = \sum_1 (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) \quad (55-8)$$

حيث نسبت جميع كميات المعادلة المذكورة اعلاه الى محاور نيوتونية .

لندخل الآن مركز الكتلة وذلك بالتعبير عن متجه الموضع لكل جسم  $\vec{r}_1$  بدلالة موضع مركز الكتلة  $\vec{r}_{om}$  ومتجه موضع الجسم  $i$  بالنسبة الى مركز الكتلة

$\vec{r}_1$  (كما في البند ٧ - ٣) هو

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{om} + \vec{r}_1$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{om} + \vec{v}_1$$

عندئذ المعادلة (55-8) تصبح

$$\frac{d}{dt} \sum_1 [(\vec{r}_{om} + \vec{r}_1) \times m_1 (\vec{v}_{om} + \vec{v}_1)] = \sum_1 (\vec{r}_{om} + \vec{r}_1) \times \vec{F}_1 \quad (56-8)$$

وعندئذ الحدود واستخدِام حقيقة كون ثلاثي الكميتين  $\sum_1 m_1 \vec{v}_1$  ،  $\sum_1 m_1 \vec{r}_1$  نجد ان المعادلة (56-8) تبسط الى

$$\vec{r}_{om} \times \sum_1 m_1 \vec{a}_{om} + \frac{d}{dt} \sum_1 \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 = \vec{r}_{om} \times \sum_1 \vec{F}_1 + \sum_1 \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \quad (57-8)$$

$$\vec{a}_{om} = \vec{v}_{om}$$

حيث

رأينا في البند (٧-١) ان الحركة الاتقالية لمركز كتلة اية منظومة من الجسيمات

تخضع للمعادلة

$$\sum_1 \vec{F}_1 = \sum_1 m_1 \vec{a}_1 = m \vec{a}_{om} \quad (58-8)$$

لذلك يختصر الحد الاول من يسار المعادلة (57-8) مع الحد الاول من يمينها .  
والنتيجة النهائية تكون

$$\frac{d}{dt} \sum_1 \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 = \sum_1 \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \quad (59-8)$$

والمجموع في يسار المعادلة المذكورة اعلاه عبارة عن الزخم الزاوي للمنظومة حول مركز الكتلة ، والمجموع على يمينها هو العزم الكلي لجميع القوى الخارجية حول مركز الكتلة .

وهذا تسمية هاتين الكميتين  $\vec{L}$  و  $\vec{H}$  على التوالي ، نحصل على

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{H} \quad (٦٠-٨)$$

هذه النتيجة المهمة تنص على ان معدل التغير الزمني للزخم الزاوي حول مركز الكتلة لا ي منظومة يساوي العزم الكلي للقوة الخارجية حول مركز الكتلة . وتكون هذه صحيحة حتى لو كان مركز الكتلة يتحرك بتمجيل . واذا اخترنا اية نقطة اخرى عدا مركز الكتلة كنقطة مرجعية ، عندئذ يجب ان تكون هذه النقطة في حالة سكون في نظام المحاور النيوتونية (باستثناء حالات خاصة معينة فسوف لن نناول شرحها ) وسنمطي مثالا لاستخدام النظرية المذكورة اعلاه في البند ٨ - ٨ .

#### ٨ - ٧ ) الحركة الصفائحية للجسم الصلب

##### Laminar Motion of a Rigid Body

اذا كانت حركة الجسم بحيث تتحرك جميع جسيمااته بموازاة لمستويات ثابتة ، عندئذ تسمى الحركة بالصفائحية Laminar . قد يغير محور الدوران موضعه في الحركة الصفائحية ولكن لا يغير اتجاهه. الدوران حول محور ثابت هو حالة خاصة للحركة الصفائحية . ان تدحرج اسطوانة على سطح مستو هو مثال آخر على الحركة الصفائحية . اذا عانى جسم ازاحه صفائحية ، فهذه الازاحة يمكن وصفها كما يلي : اختر نقطة مرجعية في الجسم ، كمركز الكتلة مثلا . فالنقطة المرجعية ستعاني ازاحة ما مثل  $\Delta \vec{r}$  ، بالاضافة الى دوران الجسم حول النقطة المرجعية خلال زاوية ما مثل  $\theta$  . وهكذا يمكن وصف اية ازاحة صفائحية وصفا كاملا . ووفقا لذلك يمكن وصف الحركة الصفائحية وصفا كاملا عندما تعطى السرعة الانتقالية لنقطة مرجعية ملائمة مع السرعة الزاوية .

المعادلة الأساسية التي تتحكم في حركة الجسم الصلب الانتقالية هي -

$$\vec{F} = m\vec{r}_{cm} = m\vec{v}_{cm} = m\vec{a}_{cm} \quad (٦١ - ٨)$$

حيث  $\vec{F}$  تمثل مجموع جميع القوى الخارجية التي تؤثر على الجسم ،  $m$  الكتلة ،  $\vec{a}_{cm}$  تعجيل مركز الكتلة .

ينتج من تطبيق المعادلة (٦١ - ٨) لحالة حركة الجسم الصلب الصفائحية ان

$$\vec{L} = I_{cm} \omega \quad (٦٢ - ٨)$$

لقدار الزخم الزاوي حول محور  $O$  يمر من مركز الكتلة ، حيث  $\omega$  هي الانطلاق الزاوي للدوران حول ذلك المحور . فالمعادلة الأساسية التي تتحكم في دوران الجسم ، اى المعادلة (٦٠ - ٨) عندئذ تصبح

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I_{cm} \dot{\omega} = \vec{N} \quad (٦٣ - ٨)$$

حيث  $\vec{N}$  يمثل العزم الكلي للقوى المسلطة حول المحور  $O$

(٨ - ٨) جسم يتدحرج اسفل مستوى مائل

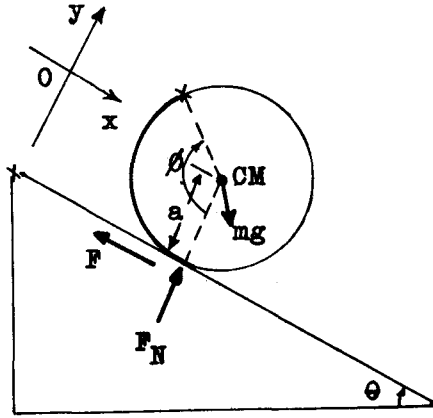
### Body Rolling Down an Inclined Plane

كتوضيح للحركة الصفائحية ، سندرس حركة جسم مستدير ( اسطوانة ، كرة ، وصا الى ذلك ) يتدحرج اسفل سطح مائل . الشكل (٨ - ١١) يبين ثلاث قوى تؤثر على الجسم وهي (١) قوة الجاذبية التي تؤثر شاقوليا الى الاسفل (٢) رد الفمسل العمودي للسطح  $\vec{F}_N$  و (٣) قوة الاحتكاك  $\vec{F}$  الموازية للسطح . واختيار المحاور

كما هو مبين في الشكل تكون معادلات حركة مركز الكتلة الانتقالية

$$m\ddot{x}_{cm} = mg \sin \theta - F \quad (٦٤ - ٨)$$

$$m\ddot{y}_{cm} = -mg \cos \theta + F_N \quad (٦٥ - ٨)$$



الشكل (٨-١)

جسم يتدحرج أسفل سطح مائل

حيث  $\theta$  تمثل زاوية ميل السطح عن الأفق  $\phi$  ولما كان الجسم يبقى ملاصقا

للسطح  $\phi$  عندئذ

$$y_{cm} = \text{constant}$$

أى

$$\ddot{y}_{cm} = 0$$

اذن من المعادلة (٨-٦٥) نحصل على

$$F_N = mg \cos \theta \quad (٨-٦٦)$$

• ان القوة الوحيدة التي تسلط عزمها حول مركز الكتلة هي قوة الاحتكاك  $\vec{F}$

وقدار هذا العزم يساوى  $Fa$  حيث  $a$  تمثل نصف قطر الجسم • المعادلة

الدورانية أى المعادلة (٨-٦٣) تصبح اذن

$$I_{cm} \dot{\omega} = Fa \quad (٨-٦٧)$$

ولشرح المسألة اكثر  $\phi$  نحتاج الى وضع بعض الفرضيات بخصوص التماس بين السطح

والجسم • وسنحل معادلات الحركة لحالتين

## Motion with No Slipping

## الحركة بدون انزلاق

إذا كان التماس خشنا تماما بحيث لا يحدث انزلاق ، تكون عندنا العلاقات

التالية

$$x_{cm} = a\theta$$

$$\dot{x}_{cm} = a\dot{\theta} = a\omega$$

$$\ddot{x}_{cm} = a\ddot{\theta} = a\alpha$$

(٦٨ - ٨)

حيث  $\theta$  تمثل زاوية الدوران . عندئذ يمكن كتابة المعادلة (٦٧-٨) على النحو التالي

$$\frac{I_{cm}}{a^2} \ddot{x}_{cm} = F$$

(٦٩ - ٨)

وتموض قيمة  $F$  المذكورة اعلاه في المعادلة (٦٤-٨) نحصل على

$$m\ddot{x}_{cm} = mg \sin \theta - \frac{I_{cm}}{a^2} \ddot{x}_{cm}$$

وهند حلها ل  $\ddot{x}_{cm}$  نجد ان

$$\ddot{x}_{cm} = \frac{mg \sin \theta}{m + (I_{cm}/a^2)} = \frac{g \sin \theta}{1 + (k_{cm}^2/a^2)} \quad (٧٠-٨)$$

حيث  $k_{cm}$  يمثل نصف قطر التدويم حول مركز الكتلة . فالجسم اذن يتدحرج اسفل

السطح بتعجيل خطي ثابت وتعجيل زاوي ثابت وفقا للمعادلة (٦٨ - ٨) فمثلا

تعجيل اسطوانة منتظمة (  $k_{cm}^2 = \frac{a^2}{2}$  ) يساوي

$$\frac{g \sin \theta}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} g \sin \theta$$

بينما الكرة المنتظمة (  $k_{cm}^2 = 2a^2/5$  ) يساوي

$$\frac{g \sin \theta}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{7} g \sin \theta$$

فرضيات الطاقة Energy Considerations

يمكن استنهاط النتيجة السابقة ايضا من فرضيات الطاقة . في مجال الجاذبية

المنتظم ، الطاقة الكامنة  $V$  للجسم الصلب تساوي مجموع الطاقات الكامنة لجسيماته ،

اي ان

$$V = \sum (m_1 g z_1) = mgz_{cm}$$

• حيث  $z_{cm}$  هي المسافة العمودية من مركز الكتلة الى مستوى مرجعي (اعتبا طسي) .  
الآن اذا كانت القوى ، باستثناء قوة الجاذبية ، التي تؤثر على الجسم لاتنجز شغلا ،  
عندئذ تكون الحركة محافظة ويمكننا كتابة

$$T + V = T + mgz_{cm} = E = \text{constant}$$

حيث  $T$  تمثل الطاقة الحركية

وفي حالة الجسم الذي يتدحرج اسفل السطح المائل ، الشكل ٨ — ١١ ،  
الطاقة الحركية للحركة الانتقالية تساوي  $\frac{1}{2}m\dot{x}_{cm}^2$  وللحركة الدورانية تساوي  
 $\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$  اي ان معادلة الطاقة تصبح

$$\frac{1}{2}m\dot{x}_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + mgz_{cm} = E$$

ولكن  $z_{cm} = -x_{cm} \sin \theta$  ،  $\omega = \dot{x}_{cm}/a$  اذن

$$\frac{1}{2}m\dot{x}_{cm}^2 + \frac{1}{2}mk_{cm}^2 \frac{\dot{x}_{cm}^2}{a^2} - mgx_{cm} \sin \theta = E$$

وتفاضلها بالنسبة للزمن  $t$  وتجميع الحدود نحصل على —

$$m\dot{x}_{cm}\ddot{x}_{cm}\left(1 + \frac{k_{cm}^2}{a^2}\right) - mg\dot{x}_{cm} \sin \theta = 0$$

بإختصار العامل المشترك  $\dot{x}_{cm}$  (طبعا على فرض ان  $\dot{x}_{cm} \neq 0$ ) وحلها

لـ  $\ddot{x}_{cm}$  نحصل على نفس النتيجة التي حصلنا عليها سابقا باستخدام القوى والعزم .

### Occurrence of Slipping

\* حدوث انزلاق

لفرض الآن ، الحالة التي يكون فيها التلامس مع السطح غير تام الخشونة اي ان

هناك معاملا للاحتكاك الانزلاقي معين مقدارها  $\mu$  . فاذا حدث انزلاق يكون مقدار

قوة الاحتكاك  $\vec{F}$  عندئذ كالاتي

$$F = F_{\max} = \mu F_N = \mu mg \cos \theta \quad (٧١-٨)$$

ومعادلة الحركة الانتقالية (٦٤-٨) تصبح

$$m\ddot{x}_{cm} = mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta \quad (٧٢-٨)$$

ومعادلة الحركة الدورانية (٦٧-٨) تكون

$$I_{cm} \dot{\omega} = \mu mga \cos \theta \quad (٧٣-٨)$$

من المعادلة (٧٢-٨) نرى مرة ثانية ان مركز الكتلة يتحرك بتعجيل ثابت وهو

$$\ddot{x}_{cm} = g(\sin \theta - \mu \cos \theta) \quad (٧٤-٨)$$

وفي الوقت نفسه يكون التعجيل الزاوي ثابتا :

$$\dot{\omega} = \frac{\mu mga \cos \theta}{I_{cm}} = \frac{\mu ga \cos \theta}{k_{cm}^2} \quad (٧٥-٨)$$

لنكامل هاتين المعادلتين بالنسبة للزمن  $t$  ، على فرض ان الجسم يبدأ من

السكون ، اي عندما  $\dot{x}_{cm} = 0, \dot{\omega} = 0, t = 0$  نحصل على

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cm} &= g(\sin \theta - \mu \cos \theta)t \\ \omega &= \dot{\omega} = g(\mu a \cos \theta / k_{cm}^2)t \end{aligned} \quad (٧٦-٨)$$

وفقا لذلك ، النسبة بين الانطلاق الخطي والزاوي تكون ثابتة ، عندئذ يمكننا كتابة

$$\dot{x}_{cm} = \gamma a \omega$$

حيث

$$\gamma = \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{\mu a^2 \cos \theta / k_{cm}^2} = \frac{k_{cm}^2}{a^2} \left( \frac{\tan \theta}{\mu} - 1 \right) \quad (٧٧-٨)$$

ولكن  $a \omega$  لا يمكن ان تكون اكبر من  $\dot{x}_{cm}$  ، لذلك  $\gamma$  لا يمكن ان تكون اقل

من واحد . عندما يكون هناك تدحرج فقط (نقي) اي في الحالة المحدده ، تعطى

$$\dot{x}_{cm} = a \omega \quad \text{من اي ان}$$

$$\gamma = 1$$

عند حل المعادلة (٧٧-٨) للعامل  $\mu$  مع  $\lambda = 1$  ، نجد ان قيمة  $\mu$  الحرجة تكون

$$\mu_{\text{crit}} = \frac{\tan \theta}{1 + (a/k_{\text{cm}})^2} \quad (٧٨ - ٨)$$

اذا كانت  $\mu$  اكبر من المقدار المذكور اعلاه ، عندئذ يتدحرج الجسم بدون انزلاق ،  
مثلا ، اذا وضعت كرة على سطح ميله  $5^\circ$  ، ستدحرج بدون انزلاق على ان تكون  
 $\mu$  اكبر من  $(\frac{5}{2}) / \tan 45^\circ$  أو  $2/7$

٨-٩) حركة جسم صلب تحت تأثير قوة دافعة

Motion of a Rigid Body Under an Impulsive Force

في الفصل السابق ادخلنا مفهوم القوة الدافعة Impulsive Force التي توتر على جسم . وجدنا ان تأثير هذه القوة ، او الدفع ، هو احداث تغيير مفاجي في سرعة الجسم . وفي هذا البند سوف نتوسع في مفهوم الدفع لحالة الحركة الصفائحية لجسم صلب ممتد .

Free Motion

الحركة الحرة

افرض ان جسما حرا الحركة في مستو وقد سلط عليه دفع مثل  $\hat{P}$  . عندئذ ، علينا اخذ كل من الحركة الانتقالية والدورانية وفقا للنظرية العامة التي بحثت في البند (٧٨-٨) ، اولا ، الحركة الانتقالية تعطى بالعلاقة العامة التالية

$$\vec{F} = m \vec{v}_{\text{cm}}$$

اذا كانت نوعية القوة  $\vec{F}$  دافعة ، فنحصل على

$$\int \vec{F} dt = \hat{P} = m \Delta \vec{v}_{\text{cm}}$$

اذن ينتج بسبب الدفع تغيير في سرعة مركز الكتلة مقداره

$$\Delta \vec{v}_{\text{cm}} = \frac{\hat{P}}{m} \quad (٧٩ - ٨)$$

ثانيا ، دوران الجسم تتحكم فيه المعادلة التالية

$$N = \dot{L} = I_{\text{cm}} \dot{\omega}$$



ويمكننا التكامل بالنسبة للزمن  $t$  للحصول على العلاقة التالية

$$\int N dt = I_{cm} \Delta \omega \quad (٨٠-٨)$$

ونسمي التكامل  $\int N dt$  بالدفع الدوراني . ولنستخدم الرمز  $\hat{L}$  للإشارة اليه .

تأثير الدفع الدوراني عندئذ ، هو تغيير سرعة الجسم الزاوية بالقدر

$$\Delta \omega = \frac{\hat{L}}{I_{cm}} \quad (٨١-٨)$$

وإذا سلب الدفع الاولي  $\hat{P}$  . على الجسم بحيث يكون خط تأثيره على بعد  $b$  من مركز

الكتلة ، فالعزم عندئذ يساوى  $N=Pb$  ووفقا لذلك

$$\hat{L} = \hat{P}b \quad (٨٢-٨)$$

ويمكننا عندئذ التعبير عن التغيير في السرعة الزاوية الناتجة عن الدفع كما يلي

$$\Delta \omega = \frac{\hat{P}b}{I_{cm}} \quad (٨٣-٨)$$

والخلاصة - تأثير الدفع على جسم صلب حر الحركة في حركة صفائحية هو (١) احداث

تغيير مفاجيء في سرعة مركز الكتلة - التأثير الانتقالي و (٢) احداث تغيير مفاجيء في

سرعة الجسم الزاوية - التأثير الدوراني .

### Constrained Motion

### الحركة المقيدة

إذا سلب دفع على جسم غير حر الحركة ولكنه مقيد ليدور حول محور ثابت لسه ،

نحتاج ان نأخذ بعين الاعتبار الشرط الدوراني فقط  $N=I\omega$ . اذن

$$\int \vec{N} dt = \hat{L} = I \Delta \omega$$

في المعادلة المذكورة اعلاه ،  $I$  يمثل عزم القصور الذاتي حول المحور المطبق

للدوران ، و  $\vec{N}$  هو العزم حول ذلك المحور . وفي هذه الحالة ، الدفع الدوراني

$\hat{L}$  الذي ينتج عن دفع اولي منفرد  $\hat{P}$  يقع خط تأثيره على مسافة  $b$  من محور

الدوران يعطى أيضا من

$$\hat{L} = \hat{P}b$$

بحيث

$$\Delta \omega = \frac{\hat{P}b}{I}$$

(٨٤-٨)

يمثل التغير في السرعة الزاوية حول محور الدوران الثابت

تأثير عدة دفعات أنية

### Effect of Several Simultaneous Impulses

إذا سلطت عدة دفعات مختلفة على جسم صلب في وقت واحد ، فمحصلة التغير في سرعة مركز الكتلة والسرعة الزاوية للجسم تنتج من جمع الدفع والعزوم كما يجب على التوالي .

اذن ، نحصل على التأثيرات الانتقالية لعدد من الدفعات من الجمع الاتجاهي الفردي

لها ، أي ان المعادلة (٨٠-٧٩) تصبح

$$\Delta \vec{v}_{cm} = \frac{\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots}{m}$$

(٨٥-٨)

والتماثل ، للتأثير الدوراني ، بعد تحويل المعادلة (٨٣-٨) نحصل على

$$\Delta \omega = \frac{\hat{P}_1 b_1 + \hat{P}_2 b_2 + \dots}{I_{cm}}$$

(٨٦-٨)

في حالة جسم حركته مقيدة حول محور ثابت يوجد دفع ثانوي ناشئ عن رد فعل المحور على الجسم متى ما سلط دفع خارجي . عندئذ تستنبط الحركة من مجموع جميع الدفعات وفقا للمعادلات المذكورة اعلاه .

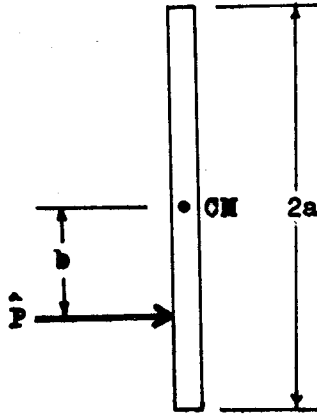
### أمثلة

١- دفع مطبق على قضيب حركته حرة Impulse Applied to a Free Rod

كنوضح للنظرية المذكورة اعلاه افرض ان قضيبا يتزلق بحرية على سطح أفقي

أملس . وقد سلط دفع  $\hat{P}$  باتجاه عمودي على طول القضيب وعلى مسافة  $b$  من مركز

كتلته ، كما هو مبين في الشكل (٨-١٢) .



الشكل (٨ - ١٢)

دفع مسلط على قضيب حركته حرة

إذا كان القضيب في البداية ساكناً عندئذ تكون معادلتا الحركة الانتقالية

والدورانية على التوالي -

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{P}}{m} \quad (٨٧ - ٨)$$

$$\omega = \frac{\vec{P}b}{I_{cm}} \quad (٨٨ - ٨)$$

ومصورة خاصة إذا كان القضيب منتظماً وطوله يساوي  $2a$  عندئذ  $I_{cm} = ma^2/3$

وفقاً لذلك -

$$\omega = \hat{P} \frac{3b}{ma^2} \quad (٨٩ - ٨)$$

ولذلك تكون السرعة التي تعطى لمركز الكتلة هي نفسها بغض النظر عن نقطة تأثير الدفع •

بينما تعتمد السرعة الزاوية التي يكتسبها القضيب على موقع الدفع المسلط ونزوى أيضاً •

ان الطاقة الحركية النهائية للقضيب هي

$$T = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{3\hat{P}^2}{2m} \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

وواضح ان هذا يعتمد على النقطة التي يسلمت فيها الدفع •

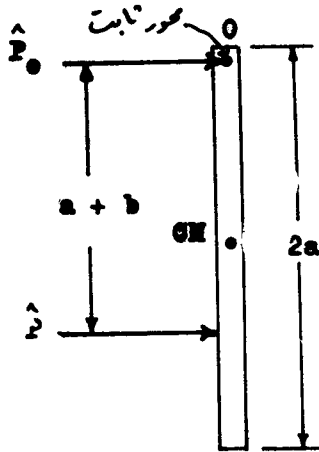
٢- دفع مسلط على قضيب مقيد ليدور حول محور ثابت  
Impulse Applied to a Rod Constrained to Rotate about  
a Fixed Axis

لنفرض بعد ذلك الحالة التي يكون فيها القضيب نفسه مقيداً ليدور حول محور ثابت. افترض ان موضع المحور  $O$  في احد طرفي القضيب كما هو مبين في الشكل (٨-١٣). في هذه الحالة نجد ان معادلة الحركة الدورانية تكون على النحو التالي

$$L = \hat{P}(a + b) = I_0 \omega \quad (٨-٩٠)$$

عندئذ لما كان  $I_0 = \left(\frac{4}{3}\right)ma^2$  تحصل على

$$\omega = \hat{P} \frac{3(a+b)}{4ma^2} \quad (٨-٩١)$$



الشكل (٨-١٣)

دفع  $\hat{P}$  مسلط على قضيب مقيد ليدور حول احد طرفيه .  
 $\hat{P}_0$  هو رد فعل الدفع في المحور

للسرعة الزاوية التي يتسببها القضيب . والآن لما كان القضيب يدور حول النقطة  $O$  ،  
فمركز الكتلة يتحرك بانطلاق مقداره

$$v_{cm} = a \omega$$

او

$$v_{cm} = \hat{P} \frac{3(a+b)}{4ma}$$

نلاحظ ان هذه لاتساوي  $\hat{P}/m$  . وللنظر في الاولى قد تظهر هذه النتيجة مناقضة للمعادلة

العامة للحركة الانتقالية ، المعادلة (٨ - ٧٩) ، وفي الحقيقة ، لا يوجد هناك تناقض ، لانه يوجد دفع آخر يعمل على القضيب في الوقت نفسه كدفع اولى . وهذا الدفع الثاني هو دفع رد الفعل الذى يسلطه المحرر في 0 على القضيب . ولنسم دفع رد الفعل هذا  $\vec{P}_0$  . عندئذ يكون الدفع الكلي المسلط على القضيب هو المجموع الاتجاهي  $\vec{P} + \vec{P}_0$  . ووفقا لذلك تكون السرعة التي يكتسبها مركز الكتلة هي -

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{P} + \vec{P}_0}{m} \quad (٨ - ٩٣)$$

ويمكننا الآن حساب قيمة  $\vec{P}_0$  باستعمال قيمة  $\vec{v}_{cm}$  من المعادلة (٨ - ٩٢) اذن

$$\hat{P} \frac{3(a+b)}{4ma} = \frac{\hat{P} + \hat{P}_0}{m}$$

التي تعطي

$$\hat{P}_0 = \hat{P} \frac{3b-a}{4a} \quad (٨ - ٩٤)$$

للدفع الذى يكتسبه القضيب من المحرر القيد . من قانون الفعل رد الفعل يكون  $\vec{P}_0 - \vec{P}$  الدفع الذى يسلطه القضيب على المحرر في 0 .

علينا ملاحظة ان دفع رد الفعل يتلاشى اذا اختيرت نقطة تأثير الدفع الاولى كما يجب . تسمى هذه النقطة بمركز الصدم center of percussion وفي حالة القضيب المذكور اعلاه تكون هذه النقطة بحيث  $b = a/3$

### ٨-١٠) تصادم الاجسام الصلده Collisions of Rigid Bodies

في المسائل التي تتضمن تصادم اجسام صلده ممتدة ، القوى التي تؤثر بها الاجسام بعضها على بعض اثناء التماس تكون دائما متساوية ومتعاكسه . اذن تصح قوانين حفظ الزخم الخطي والزواى . ان مفهوم الدفع الدوراني والخطي سيساعدان غالبا في مثل هذه المسائل .

## مشال

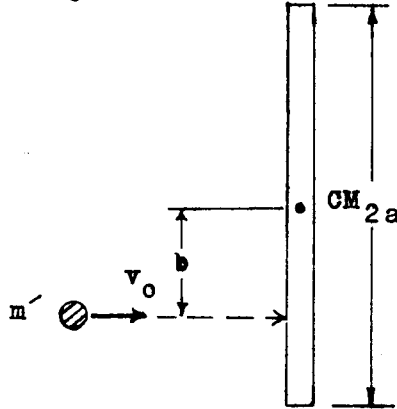
### تصادم كرة قضيب

افرض "مثلا" تصادم كرة كتلتها  $m'$  بقضيب منتظم طول له  $2a$  وكتلته  $m$ . ولنفرض ان القضيب في البداية كان ساكنا على سطح اقي امسء كالسابق وان نقطة التصادم على مسافة  $b$  من مركز القضيب كما هو مبين في الشكل (٨ - ١٤). ان المعادلتين (٨٧-٨) و (٨٨-٨) تعطيان حركة القضيب بعد التصادم بدلالة الدفع  $\hat{P}$  الذي يكسبه القضيب من الكرة. نعلم ايضا ان الدفع الذي تتسلمه الكرة

كنتيجة للدفع هو  $-\hat{P}$ . لذلك يمكننا كتابة معادلات الحركة الانتقالية كما يلي

$$\hat{P} = m\vec{v}_{CM} \quad (٨-٩٥)$$

$$-\hat{P} = m(\vec{v}_1 - \vec{v}_0) \quad (٨-٩٦)$$



الشكل (٨-١٤)

### تصادم جسم قضيب

حيث  $\vec{v}_{CM}$  تمثل سرعة مركز كتلة القضيب بعد التصادم،  $\vec{v}_0$  السرعة الابتدائية للكرة

قبل التصادم، و  $\vec{v}_1$  السرعة النهائية للكرة. معادلتا الحركة الانتقالية يتضمنان حفظ الزخم الخطي لان عند حذف  $\vec{P}$  نحصل على -

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_{cm} \quad (٨-٩٧)$$

لاجل حساب دوران القضيب بعد التصادم، يمكننا استخدام قاعدة حفظ الزخم الزاوي. ان الزخم الزاوي الابتدائي للكرة حول مركز الكتلة هو  $bm\vec{v}_0$  والزمخ الزاوي النهائي هو  $bm\vec{v}_1$ . والزمخ الزاوي الابتدائي للقضيب يساوي صفرا والزمخ الزاوي النهائي يساوي  $I_{cm}\omega$ . اذن

$$bm\vec{v}_0 = bm\vec{v}_1 + I_{cm}\omega \quad (٨-٩٨)$$

ان معادلتا الانتقالية والدورانية المذكورتين اعلاه لاتعطينا لنا معلومات كافية لاجاد هورتات السرعة للحركة النهائية، اي  $v_1$ ،  $v_{cm}$ ،  $\omega$ . فلاجل حساب الحركة النهائية بصورة كاملة، نحتاج الى معادلة اخرى. قد تكون هذه معادلة توازن الطاقة.

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_0^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + Q \quad (٨-٩٩)$$

حيث Q تمثل الخسارة في الطاقة. وطريقة اخرى، يمكننا استخدام معادلة معامل الارتداد.

$$e = \frac{\text{انطلاق الاقتراب}}{\text{انطلاق الابتعاد}}$$

في المسألة تحت البحث، عندنا  $v_0$  تساوي انطلاق الاقتراب.

لايجاد انطلاق الابتعاد، نحتاج معرفة انطلاق القضيب في نقطة التلامس. وهذا يعطينا من مجموع الانطلاق الانتقالي لمركز الكتلة والانطلاق الدوراني لتلك النقطة بالنسبة للمركز. اذن انطلاق نقطة التلامس مباشرة بعد التصادم هو  $v_{cm} + b\omega$ .

وفقا لذلك يمكننا كتابة سرعة الابتعاد =  $v_{cm} + b\omega - v_0$

اذن  $\epsilon v_0 = v_{cm} + b\omega - v_0$

عندنا الآن معادلات كافية لحل الحركة النهائية . وند تعوض  $\epsilon I_{cm} = ma^2/3$

نحصل على  $v_{cm} = v_0 (\epsilon + 1) \left( \frac{b}{a} + 3 \frac{b^2}{a^2} + 1 \right)^{-1}$

$$v_1 = v_0 - \frac{a}{b} v_{cm} \quad (100-8)$$

$$\omega = v_{cm} \left( \frac{3b}{a^2} \right)$$

على القارىء تحقيق هذه النتيجة .

### تارين

١-٨ . جد مركز كتلة كل مما يأتي (أ) صفيحة رقيقة منتظمة شكلها ربع دائرة (ب) سلك

دقيق حني بشكل ربع دائرة (ج) مخروط صلد دائري قائم منتظم ارتفاعه  $h$  (د)

المساحة المحددة بالقطع المكافئ  $x^2 = by$  والمستقيم  $y = b$  (هـ) الحجم

المحدد بالقطع المكافئ  $z = (x^2 + y^2)/b$  والمستوى  $z = b$  .

٢-٨ . جد مركز كتلة ثمن قطع ناقص مجسم صلد منتظم انصاف محاوره  $a$  ،  $b$  ،  $c$  .

٣-٨ . جد مركز كتلة نصف كرة صلده نصف قطرها  $a$  وكثافتها تتغير خطيا مع المسافة

من المركز حيث تساوى صفرا في المركز و  $\rho_0$  خارجة .

٤-٨ . كرة منتظمة صلده نصف قطرها  $a$  تحوى على جوف كروي نصف قطره  $(\frac{1}{2} a)$

ومركزه في نقطة تبعد  $(\frac{1}{2} a)$  من مركز الكرة . جد مركز الكتلة .

٥-٨ . ماهي المسافة التي يعلها رجل وزنه  $W$  يصعد سلم طوله  $l$  ووزنه  $w$

قبل ان ينزلق . اذا كان السلم يستند الى جدار قائم خشن ؟ الزاوية بين

السلم والارض تساوى  $\theta$  . افرض ان معامل الاحتكاك  $\mu$  هو

نفسه بين السلم والحائط وبين السلم والارض .



٨ - ٦ . سلك منتظم حني على شكل نصف دائرة وعلق على مسمار خشبي خشن . فاذا كان الخط الواصل بين طرفي السلك يصنع زاوية  $\theta$  مع الافق وكان السلك على حافة الانزلاق . فما هو معامل الاحتكاك بين السلك والمسار ؟

٨ - ٧ . نصف كرة صلبة منتظمة تستند الى حائط عمودي وهي على حافة التوازن فاذا كان الجزء المدور لنصف الكرة في تماس مع الحائط والارض ومعامل الاحتكاك  $\mu$  هو نفسه للحائط والارض . جد الزاوية بين الوجه المستوي لنصف الكرة والارض .

٨ - ٨ . قهورة منتظمة بشكل نصف كرة تستند الى سطح خشن مائل بزاوية  $\theta$  وهي على حافة التوازن . فاذا كان الجانب المدور للقهورة يمس المستوى ومعامل الاحتكاك يساوي  $\mu$  . جد ميلان القهورة .

٨ - ٩ . اذا اثرت مجموعة القوى  $(F_1, F_2, \dots)$  على جسم صلب وكان (أ) في حالة توازن انتقالي و(ب) في حالة توازن دوراني حول نقطة ما مثل  $O$  . برهن ان مجموعة القوى هذه تكون ايضا في حالة توازن دوراني حول اى نقطة اخرى مثل  $O'$  .

٨ - ١٠ . اثبت ان عزم القصور الذاتي لتوازي مستطيلات صلبة منتظمة ، قطع ناقص اسطوانتي ، قطع ناقص مجسم ، هي  $\frac{m}{3}(a^2 + b^2)$  ،  $\frac{m}{4}(a^2 + b^2)$  على التوالي ، حيث  $m$  تمثل الكتلة و  $2a$  و  $2b$  هي الاقطار الرئيسية للجسم الصلب وتكون عمودية على محور الدوران ويمر المحور خلال المركز في كل حالة .

٨ - ١١ . اثبت ان عزم القصور الذاتي لثمن كرة صلبة منتظمة نصف قطرها  $a$  هو  $\frac{2}{5} ma^2$  حول محور على طول احد حافته المستقيمة . حيث  $m$  تمثل كتلة الثمن (ملاحظة - هذه نفس العلاقة لكرة كتلتها  $m$ ) .

٨ - ١٢ . جد عزم القصور الذاتي لمخروط دائري قائم صلب منتظم كتلته  $m$  حول

## المحور المركزي •

١٣-٨ • جد عزم القصور الذاتي لصفحة شكلها نصف دائرة حول محور يمر من مركز

الكتلة وهمودي على مستوى الصفحة •

١٤-٨ • قضيب رفيع AB طوله  $l$  وكتلته  $m$  ربط جسم كتلته  $m$  في طرفه B •

جد ذبذبة القضيب اذا كان يتأرجح كبندول فيزيائي حول طرفه A •

١٥-٨ • صفحة مربعة طول ضلعها  $a$  تتذبذب كبندول فيزيائي حول احدى زواياها،

جد زمن الذبذبة ومركز التذبذب اذا كان محور الدوران (A) عموديا على الصفحة

و (ب) في مستوى الصفحة •

١٦-٨ • اثبت ان زمن ذبذبة البندول الفيزيائي تساوي  $2\pi(\frac{d}{g})^{\frac{1}{2}}$  ، حيث

$d$  تمثل المسافة بين نقطة التعليق O ومركز التذبذب O' •

١٧-٨ • كرة صلبة منتظمة لف حولها خيط رقيق لفات قليلة • فاذا امسك طرف الخيط

بصورة ثابتة ثم تركت الكرة لتسقط تحت تأثير الجاذبية الارضية • جد تعجيل مركز

الكرة •

١٨-٨ • رجلان يسكان طرفي لوح خشبي منتظم طوله  $l$  وكتلته  $m$  • فاذا ترك

احد الرجلين طرفه بصورة مفاجئة • اثبت ان الحمل يهبط عند الرجل الثاني

من  $mg/2$  الى  $mg/4$  •

١٩-٨ • ثقلان كتلتاهما  $m_1, m_2$  ربطا بطرفي وتد خفيف لا يقبل المد او البسط •

فاذا كان الوتد يمر على بكرة نصف قطرها  $a$  وهزم قصورها الذاتي I • جد

تعجيل الثقليين • افرض ان  $m_1 > m_2$  وقد اهمل الاحتكاك في محور البكرة •

٢٠-٨ • اسطوانة دائرية قائمة منتظمة نصف قطرها  $a$  توازنت على اسطوانة ثابتة خشنة

نصف قطرها  $b$  ( $b > a$ ) بحيث كان محورا الاسطوانتين متوازيين •

فاذا اقلق التوازن قليلا ، جد النقطة التي تترك فيها الاسطوانة المتدحرجة  
الاسطوانة الثابتة .

٢١-٨ . قضيب طويل منتظم طوله  $l$  يقف عموديا على ارض خشنة . اذا اقلق القضيب قليلا  
وسقط على الارض (أ) جد المركبتين العمودية والافقية لرد فعل الارض كدوال  
للزاوية  $\theta$  بين القضيب والعمود في اية لحظة (ب) جد كذلك الزاوية التي  
يبدأ فيها القضيب بالانزلاق وما هو الاتجاه الذي يحدث فيه الانزلاق . افرض  
ان  $\mu$  هو معامل الاحتكاك بين القضيب والارض .

٢٢-٨ . قد فت ككرة في البداية بدون دوران بانطلاق  $v_0$  اعلى سطح مائل  
خشنة ميلانه  $\theta$  ومعامل احتكاكه  $\mu$  . جد موضع الكرة كدالة للزمن ،  
واحسب الموضع الذي تبدأ فيه الكرة دورانا تقيا . افرض ان  $\mu$  اكبر  
من  $\frac{2}{7} \tan \theta$  .

٢٣-٨ . وضع قرص دائري منتظم على سطح افقي املس . فاذا ضرب باتجاه مماسي  
في نقطة على محيطه ، حول اية نقطة سيبدأ القرص بالدوران ؟

٢٤-٨ . صنع بندول قذوفات (بلستي) ballistic pendulum من لوح خشبي طوله  $l$   
وكتلته  $m$  . وهو حر الحركة حول احد طرفيه  $O$  ، وكان في البداية  
في حالة السكون بالوضع العمودي . اطلقت عليه قذيفة كتلتها  $m$   
بصورة افقية وهلى مسافة  $l$  بين  $O$  وسكنت فيه . اذا كانت  $\theta_0$   
تمثل مسحة البندول الناتجة جد سرعة القذيفة .

٢٥-٨ . لوح خشبي منتظم  $AB$  كتلته  $m$  ومعلق من طرفه  $A$  . فاذا امسك  
في البداية بحيث يصنع زاوية  $45^\circ$  مع الافق ثم ترك ليمسقط . عند سقوطه

الى الموضع الاقسي يصطدم طرفه B بمساره وكان التصادم غير مرن مطلقا  
 بحيث سكن اللوح مباشرة بعد التصادم . احسب الدفعين اللذين يكتسبهما  
 الطرفان A و B .

- ٢٦-٨ . حل المسألة السابقة على فرض ان التصادم في B كان تام المرونة .  
 ٢٧-٨ . قضبان منتظمان AB و BC متساوي الكتلة  $m$  والطول  $l$  ربطا في  
 النقطة B بملاسة . وكانت المنظومة في البداية في حالة سكون على  
 سطح اقسي املس ، بحيث وقعت النقاط A ، B ، C على خط  
 مستقيم . فاذا سلط الدفع  $\vec{P}$  في النقطة A باتجاه عمودي على  
 القضيب ، جد الحركة الابتدائية للمنظومة ( ملاحظة - اعزل القضيبين ) .  
 ٢٨-٨ . حل المسألة السابقة للحالة التي يكون فيها القضبان في البداية  
 متعامدين .

## الفصل التاسع

### حركة الجسم الصلب العامة

#### General Motion of a Rigid Body

في حركة الجسم الصلب المقيدة ، اما ليدور حول محور ثابت أو يتحرك موازياً لمستويات ثابتة ، ففي الحالتين لا يتغير اتجاه محور الدوران . اما في حالات حركة الجسم الصلب العامة فيتغير اتجاه محور الدوران . فتكون الحالة هنا أكثر تعقيداً . وفي الحقيقة لا تكون الحركة بسيطة حتى في الجسم الذي لا تؤثر عليه قوى خارجية .

٩ - ١ ) زخم الجسم الصلب الزاوي . ضرب القصورات الذاتية

#### Angular Momentum of a Rigid Body. Products of Inertia

لما كان للزخم الزاوي أهمية كبيرة في دراسة ديناميك الاجسام الصلبة سنبدأ باستنباط العلاقة العامة للزخم الزاوي للجسم الصلب . الزخم الزاوي  $\vec{L}$  لاى منظومة من الجسيمات ، كما عرف في البند ٧ - ٢ ، هو المجموع الاتجاهي للزخوم الزاوية لجميع الجسيمات عندما تؤخذ منفردة ، اى

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_i \times m\vec{v}_i)$$

وسوف نركز اهتمامنا ، في هذا الفصل ، على الخواص الاتجاهية للزخم الزاوي وعلاقته بالمعادلة الاساسية للحركة الدورانية .

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

حيث  $\vec{N}$  يمثل العزم المسلط . وقد شرحت الظروف التي تصح فيها المعادلة السابقة في الفصل الفات .

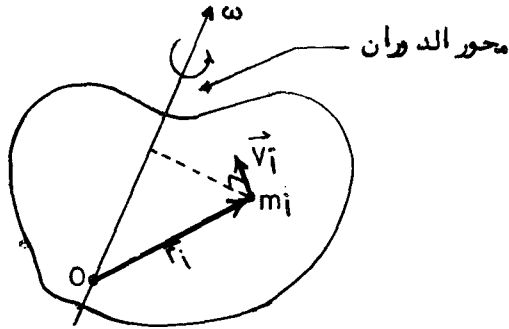
سنحسب اولاً الزخم الزاوي لجسم صلب يدور حول نقطة ثابتة .

يمكننا في هذه الحالة تصور محاور مثبتة في الجسم تكون نقطة أصلها 0 في النقطة الثابتة ( الشكل ١-٩ ) .  
وبالرجوع الى البند ( ٤-٥ ) نعلم ان السرعة  $\vec{v}_i$  لاي جسيم من مكونات الجسم يمكن التعبير عنها بالضرب الاتجاهي التالي

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

حيث  $\vec{\omega}$  تمثل السرعة الزاوية للجسم الصلب و  $\vec{r}_i$  متجه موضع الجسيم و وفقاً لذلك ، يكون الزخم الزاوي الكلي لجميع الجسيمات كما يلي

$$\vec{L} = \sum_i [m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)] \quad (1-1)$$



الشكل ( ١-١ ) : متجه سرعة جسيم نموذجي  $\vec{v}_i$  في جسم صلب يدور حول محور معين معرف بمتجه السرعة الزاوية  $\vec{\omega}$

الان ، مركبة  $x$  للضرب الاتجاهي الثلاثي  $[\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)]$  هي

$$[\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)]_x = \omega_x (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y x_i y_i - \omega_z x_i z_i \quad (2-1)$$

ويمكن التحقق من صحتها بسهولة من فك محدد الضرب الاتجاهي

( وعلى الطالب ان يعتبر هذا كتمرين ) .

فمركبة  $x$  للزخم الزاوي تكون اذن

$$L_x = \sum m_i [\omega_x (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y x_i y_i - \omega_z x_i z_i]$$

$$= \omega_x \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum m_i x_i y_i - \omega_z \sum m_i x_i z_i \quad (٢-٩)$$

وهناك علاقات مماثلة للمركبات  $I_x$  ,  $I_y$  ,  $I_z$

لحساب الزخم الزاوي لجسم صلب ممتد ، نستبدل المجموع بتكامل على الحجم ، كالسابق ، ولندخل الاختصارات التالية :

عزم القصور الذاتي حول المحور  $x$ -

$$I_{xx} = \sum (y_i^2 + z_i^2) m_i = \int (y^2 + z^2) dm$$

عزم القصور الذاتي حول المحور  $y$ -

$$I_{yy} = \sum (z_i^2 + x_i^2) m_i = \int (z^2 + x^2) dm$$

عزم القصور الذاتي حول المحور  $z$ -

$$I_{zz} = \sum (x_i^2 + y_i^2) m_i = \int (x^2 + y^2) dm$$

ضرب  $xy$ - للقصور الذاتي

$$I_{yx} = I_{xy} = - \sum x_i y_i m_i = - \int xy \, dm$$

ضرب  $xz$ - للقصور الذاتي

$$I_{zx} = I_{xz} = - \sum x_i z_i m_i = - \int xz \, dm$$

ضرب  $zy$ - للقصور الذاتي

$$I_{zy} = I_{yz} = - \sum z_i y_i m_i = - \int zy \, dm$$

سبق ان حسبنا عزوم القصورات الذاتية لعدد من الحالات البسيطة في الفصل السابق ، ونحصل على ضرب القصورات الذاتية بطريقة حساب مماثلة ، وباستخدام الرموز السابقة يمكننا التعبير عن الزخم الزاوي كالاتي :

$$\vec{L} = \hat{i}I_x + \hat{j}I_y + \hat{k}I_z$$

$$= \hat{i}(I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z) + \hat{j}(I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z) \\ + \hat{k}(I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z) \quad (١-٤)$$

ويظهر ان متجه الزخم الزاوي  $\vec{L}$  لا يكون دائما في نفس اتجاه محور الدوران او متجه السرعة الزاوية  $\vec{\omega}$ .

### امثلة

١- جسم اعتباطي الشكل يدور حول المحور  $z$ . جد الزخم الزاوي  $\vec{L}$ .

لما كان في هذه الحالة  $\omega_z = \omega$ ,  $\omega_x = \omega_y = 0$  عندئذ نحصل على

$$\vec{L} = \hat{i}I_{xz}\omega + \hat{j}I_{yz}\omega + \hat{k}I_{zz}\omega$$

ولا سيما اذا كان كل من ضرب القصور الذاتي  $I_{yz}$  او  $I_{xz}$  لا يساوى صفرا . عندئذ توجد للزخم الزاوي  $\vec{L}$  مركبة عمودية على  $\omega$  ، لهذا لا يكون الزخم الزاوي في نفس اتجاه محور الدوران .

٢- قضيب رفيع طوله  $l$  وكتلته  $m$  مقيد ليدور بسرعة زاوية ثابتة  $\vec{\omega}$  حول محور يمر من المركز ويصنع زاوية  $\alpha$  مع القضيب . جد  $\vec{L}$  .  
نختار محاور مثبتة في القضيب كما هو مبين في الشكل ( ١ - ٢ ) . عندئذ نحصل على

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{ml^2}{12}$$

وجميع عزوم القصور الذاتية وضرب القصورات الذاتية الاخرى تساوى صفرا . ولما كان محور الدوران يقع في المستوى  $yz$  فمركبات  $\vec{\omega}$  تكون كما يلي

$$\omega_x = 0$$

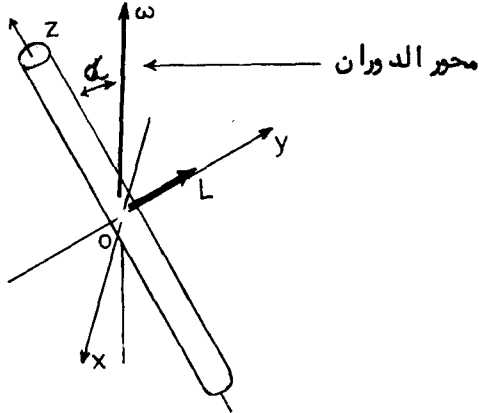
$$\omega_y = \omega \sin \alpha$$

$$\omega_z = \omega \cos \alpha$$



فتمجه الزخم الزاوي يكون اذن

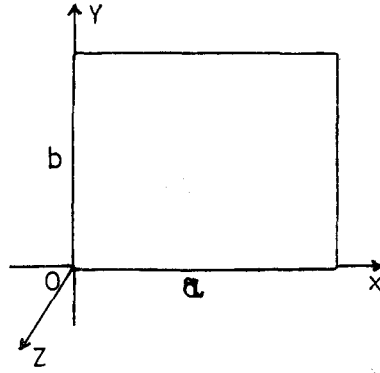
$$\vec{L} = \hat{j} \frac{m \ell^2}{12} \omega \sin \alpha$$



الشكل (٩-٢) • قضيب صلب مقيد الدوران حول محور مائل يمر من المركز •

اذن يبقى  $\vec{L}$  باتجاه  $y$  ، كما هو مبين في الشكل ، ويدور مع الجسم حول  $\vec{\omega}$  • (من السهل التحقق من ان  $\vec{r}_x \times m\vec{v}$  لاى جزء من القضيب يكون على طول  $y$  ) • وبصورة خاصة ، اذا كانت  $\alpha = 90^\circ$  عندئذ  $\vec{L}$  ،  $\vec{\omega}$  يوشران في نفس الاتجاه ، اى في اتجاه المحور  $y$  • وغير ذلك يكونان باتجاهين مختلفين •

٣- جد عزم القصور الذاتي وضرب القصور الذاتي لصفيحة مستطيلة الشكل كتلتها  $m$  وضلعاها  $a, b$  لمحاور تقع نقطة اصلها على احد زوايا الصفيحة كما هو مبين في الشكل (٩-٣) •



الشكل (٣-٤) صفيحة مستطيلة الشكل  
من نتائج الفصل السابق ، عندنا

$$I_{xx} = \frac{1}{3} m b^2$$

$$I_{yy} = \frac{1}{3} m a^2$$

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} = \frac{1}{3} m (a^2 + b^2)$$

المعادلة الاخيرة نتجت من نظرية المحاور المتعامدة ، ولما كان  $z = 0$  لجميع نقاط الصفيحة ، ففرضنا القصور الذاتية التي تحوى على  $z$  يجب ان تتلاشى اى ان

$$I_{zx} = I_{yz} = 0$$

واخيرا ، نحصل على ضرب  $xy$  للقصور الذاتي من

$$I_{xy} = - \int xy \, dm = - \int_0^b \int_0^a xy \, m \, dx \, dy = - m \frac{a^2 b^2}{4}$$

حيث  $m$  تمثل كتلة وحدة المساحة . اضع الى ذلك ، لما كان

$$m = \rho ab$$

فنحصل علو

$$I_{xy} = - \frac{1}{4} mab$$

لضرب  $xy$  للقصور الذاتي للصفحة

الكمية الممتدة للقصور الذاتي Inertia Tensor

نرى الان ان الخواص الدورانية للجسم الصلب حول نقطة تتطلب صفا set من تسع كميات هي  $I_{xx}, I_{yy}, \dots, I_{xy}$  لاجل وصفها بصورة كاملة . وهناك امثلة اخرى كثيرة تتطلب صفوفا كهذه الكميات لوصف خاصية فيزيائية في نقطة صففاً كاملاً . ومثل هذه الصفوف تسمى بالكميات الممتدة Tensors على ان تخضع لقوانين تحولات معينة لا نحاول بحثها هنا . والصف الذى عرف اعلاه يسمى بالكمية الممتدة للقصور الذاتي للجسم . وقد بحث تمثيله بدلالة الصفوف في البند ٩ - ١٠ . فاقارئ الحسنى الاطلاع في رموز الصفوف يستحسن ان يقرأ هذا البند الان .

(٩ - ٢) محاور الجسم الصلب الرئيسية Principal Axes of a Rigid Body

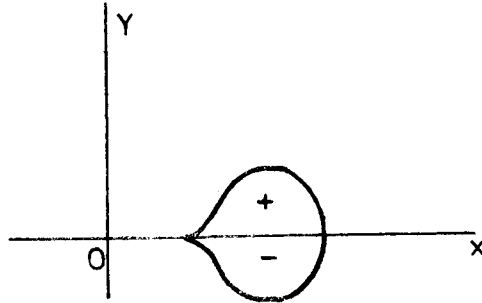
تبسط معادلات الجسم الصلب الرياضية كثيرا اذا استخدمت محاور بحيث تتلاشى جميع ضروب القصورات الذاتية . ويقال عن هذه المحاور بانها محاور الجسم الرئيسية في النقطة 0 نقطة اصل المحاور . وبصورة خاصة الزخم الزاوى يصبح

$$L = \hat{i}I_{xx}\omega_x + \hat{j}I_{yy}\omega_y + \hat{k}I_{zz}\omega_z \quad (٩ - ٥)$$

عند استخدام المحاور الرئيسية . وفي هذه الحالة يقال عن عزوم القصورات الذاتية الثلاث بعزوم الجسم الرئيسية في النقطة 0 .

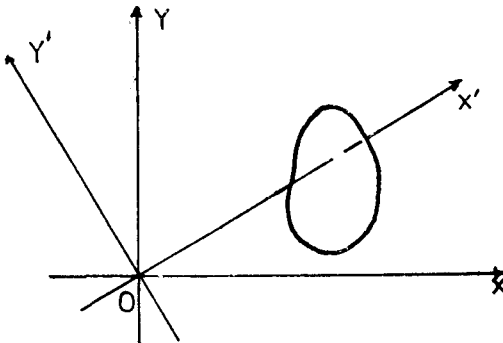
لنبحث مسالة ايجاد المحاور الرئيسية . اولاً ، اذا كان في الجسم نوع من التناظر ، عندئذ بصورة اعتيادية يمكن اختيار محاور بالمعانيمة

بحيث يكون كل ضرب قصور ذاتي متكونا من جزئين متساويين في القسـدار ومتعاكسين في الاتجاه وبذلك يتلاشى ٠ فمثلا جسم الصفيحة المستوية المتناظرة المبينة في الشكل (٩-٤) له محاور رئيسية في النقطة 0 وهي المحاور المبينة ٠



الشكل (٩-٤) صفيحة متناظرة موضوعة بحيث ضرب القصور الذاتي  $xy$  يساوى صفرا

وعلى كل ليس من الضروري ان يكون الجسم متناظرا لكي يتلاشى ضرب القصورات الذاتية ٠ فمثلا افرض صفيحة مستوية اعتباطية الشكل (الشكل ٩-٥) ٠ فاذا كان المستوى  $xy$  هو مستوى الصفيحة عند  $z = 0$  ويتلاشى كل من  $I_{xz}$  و  $I_{yz}$  فبالنسبة لاية نقطة اصل معينة في مستوى الصفيحة ٠ من السهل البرهنة على تواجد محاور ٠ وبصورة دائمية ٠ بحيث يتلاشى التكامل  $\int xy \, dm$  ٠ ولتوضيح هذا ٠ نلاحظ ان التكامل يغير اشارته عند دوران المحاور  $Oxy$  بزاوية  $90^\circ$  ٠ لان موضع الصفيحة يتغير من رجع الى الذي يليه كما مبين



الشكل (٩-٥) محاور دائرة

ونقلا لذلك يجب ان يتلاشى التكامل لزاوية دورانية تقع بين  
 الصفرو ٩٠° . هذه الزاوية تعرّف محاوراً يتلاشى فيها ضرب القصورات  
 الذاتية ، وهذه بالتعريف ، محاور رئيسية .  
 ويمكن ان نبرهن بطريقة مماثلة انه لاى جسم صلب تتواجد دائماً  
 محاور رئيسية في اية نقطة معينة . وسوف تشرح طريقة عامة نسي  
 الهند ٩ - ١٠ لاجداد المحاور الرئيسية .

افرض ان جسماً يدور حول محور رئيسي مثل المحور  $z$  . عندئذ  
 $\omega_x = \omega_y = 0$  ،  $\omega_z = \omega$  وعلاقة الزخم الزاوي تبسط الى حد واحد هو  

$$\vec{L} = \hat{k} I_{zz} \omega$$
  

$$\vec{\omega} = \hat{k} \omega$$
  
 حيث السرعة الزاوية هي

وفي هذه الحالة يكون متجه الزخم الزاوي موازياً لمتجه السرعة الزاوية  
 او محور الدوران . اذن لدينا الحقيقة المهمة التالية : اما ان يكون  $\vec{L}$   
 في نفس اتجاه محور الدوران او لا يكون ، ويعتمد ذلك على ما اذا كان محور  
 الدوران محورا رئيسيا او ليس رئيسيا

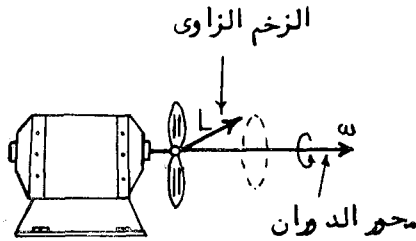
#### التوازن الديناميكي Dynamic Balancing

هناك تطبيق للقاعدة السابقة في حالة جهاز داتركدولاب الموازنة  
 او المروحة ، يقع مركز الكتلة على محور الدوران اذا كان الجهاز متوازناً  
 استاتيكيًا . ولكي يتوازن ديناميكيا يجب ان يكون محور الدوران محورا رئيسيا  
 ايضا ، بحيث يقع متجه الزخم الزاوي  $\vec{L}$  على طول المحور عند دوران  
 الجسم . وبالعكس ، اذا لم يكن محور الدوران محورا رئيسيا فيغير متجه  
 الزخم الزاوي اتجاهه ليرسم بخروطا عند دوران الجسم .

( الشكل ٩ - ٦ ) ولما كان  $\frac{d\vec{L}}{dt}$  يساوى العزم المسلط فعندئذ يجب ان  
 يكون هناك عزم يؤثر على الجسم واتجاهه يكون عموديا على المحور  
 فينتج عنه رد فعل على الحوامل bearing's . اذن في حالة الدولاب

غير المتوازن ديناميكيا ، قد يكون هناك تذبذب عنيف ورجفة حتى لو كان السدولاب متوازنا استاتيكيًا .

ايجاد المحاور الرئيسية عندما يكون احدهما معلوما  
في حالات كثيرة قد يكون لجسم ما نوع من التناظر بحيث يمكن ايجاد محور رئيسيا واحد له على الاقل بالمعانية . فاذا كانت هذه الحالة فعندئذ يمكن ايجاد المحورين الرئيسيين الاخرين كما يلي :  
افرض ان المحور  $z$  معروف كمحور رئيسي في نقطة اصل محاور ملائمة .



الشكل ( ٩ - ٦ ) . مروحة دائرة . يرسم متجه الزخم الزاوي  $\vec{L}$  مخروطا حول محور الدوران عندما تكون المروحة غير متوازنة ديناميكيا .  
فمن التعريف

$$I_{zx} = I_{zy} = 0$$

اي ان المحورين الرئيسيين الاخرين يجب ان يقعوا في المستوى  $xy$  .  
واذا كان الجسم يدور حول احد المحورين الرئيسيين او الاخر ، يكتسب اتجاه متجه الزخم الزاوي في نفس اتجاه متجه السرعة الزاوية وبذلك يمكننا كتابة

$$I_p \vec{\omega} = \vec{L}$$

حيث  $I_p$  يمثل احد العزمين الرئيسيين للقصور الذاتي في السؤوال .  
ويمكن كتابة المعادلة السابقة بدلالة المركبات على النحو التالي :

$$I_p \omega_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y$$

$$I_p \omega_y = I_{xy} \omega_x + I_{yy} \omega_y \quad (٦-٩)$$

ولنفرض ان  $\theta$  تمثل الزاوية بين المحور  $x$ - والمحور الرئيسي الذي يدور حوله الجسم . عندئذ

$$\tan \theta = \omega_y / \omega_x \quad \text{و}$$

$$I_p = I_{xx} + I_{xy} \tan \theta$$

$$I_p \tan \theta = I_{xy} + I_{yy} \tan \theta$$

وعند حذف  $I_p$  من المعادلتين نحصل على

$$I_{xy} (\tan^2 \theta - 1) = (I_{yy} - I_{xx}) \tan \theta$$

ومنها يمكن ايجاد  $\theta$  . في هذا التطبيق ، يستحسن استخدام المتطابقة

$$\tan 2\theta = 2 \tan \theta / (1 - \tan^2 \theta) \quad \text{المثلثية}$$

والتي تعطي

$$\tan 2\theta = \frac{2 I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}} \quad (٧-٩)$$

وهناك قيمتان للزاوية  $\theta$  تقعان بين  $\pi/2$  و  $-\pi/2$  ، وهما متطولتان المعادلة السابقة ، وهاتان القيمتان تعينان اتجاهي المحورين الرئيسيين في المستوى  $xy$  .

### مثال

جد اتجاهات المحاور الرئيسية في مستوى قفحة متوازية الاضلاع

طول ضلعها  $a, b$  ، في زاوية .

من مثالنا السابق ، مقال (٣) بند ١-١ نرى ان

$$\tan 2\theta = \frac{-2(mab/4)}{(mb^2/3)-(ma^2/3)} = \frac{3ab}{2(a^2 - b^2)}$$

او

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[ \frac{3ab}{2(a^2 - b^2)} \right]$$

١-٣ . الطاقة الحركية الدورانية لجسم صلب

**Rotational Kinetic Energy of a Rigid Body**

لنحسب الطاقة الحركية لجسم صلب يدور حول نقطة ثابتة بسرعة زاوية  $\vec{\omega}$  . وكما في حسابنا للزخم الزاوي ، نحصل على السرعة  $\vec{v}_i$  لجسيم

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \quad \text{نموذجي } i \text{ ، وهي}$$

حيث  $\vec{r}_i$  يمثل متجه موضع الجسم بالنسبة الى النقطة الثابتة . اذن نحصل على الطاقة الحركية  $T$  من المجموع .

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_i [(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (m_i \vec{v}_i)] \quad (٨-٩)$$

ويمكننا في الضرب العددي الثلاثي استبدال علامة الضرب العددي

(dot) بعلامة الضرب الاتجاهي (cross) . (انظر البند ١٤-١) . اذن

$$T = \frac{1}{2} \sum_i [\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)] = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) \quad (٩-٩)$$

ولكن  $\sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$  يمثل من التعريف ، الزخم الزاوي  $\vec{L}$  . لذلك يمكننا كتابة

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} \quad (١٠-٩)$$

والمعادلة السابقة تعطي الطاقة الحركية الدورانية لجسم صلب

بدلالة السرعة الزاوية  $\vec{\omega}$  والزمخ الزاوي  $\vec{L}$  . وهي نظيرة المعادلة



للطاقة الحركية الانتقالية لجسيم او منظومة  
 حيث  $\vec{v}$  تمثل سرعة مركز الكتلة و  $\vec{P}$  الزخم الخطي ، والطاقة الحركية  
 الكلية لحركة جسم الانتقالية والدورانية هي المجموع

$$\frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I} + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{P}$$

وبالتعبير عن الضرب العددي  $\vec{\omega} \cdot \vec{I}$  بصورة واضحة بدلالة المركبات  
 يمكننا كتابة

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I} = \frac{1}{2} (\omega_x I_x + \omega_y I_y + \omega_z I_z) \quad (11-1)$$

للطاقة الحركية الدورانية ، وبالإضافة الى ذلك ، يمكننا التعبير عن الزخم  
 الزاوي بدلالة مركبات  $\vec{\omega}$  وعزم القصور الذاتي وضرب القصورات الذاتية  
 للحصول على

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I} = \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2 + 2I_{yz} \omega_y \omega_z + 2I_{zx} \omega_z \omega_x + 2I_{xy} \omega_x \omega_y) \quad (12-1)$$

للطاقة الحركية الدورانية ، واذا استخدمنا المحاور الرئيسية ، تتلاشى  
 الحدود التي تحوى على ضرب القصورات الذاتية ونصل على العلاقة  
 البسيطة التالية :

$$T = \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2) \quad (13-1)$$

حيث  $I_{xx}$  ،  $I_{yy}$  ،  $I_{zz}$  هي العزوم الرئيسية للقصور الذاتي

### مثال

جد الطاقة الحركية الدورانية لقضيب رفيع طوله  $l$  فيسند  
 الدوران حول محور يمر من المركز ويصنع زاوية  $\alpha$  مع القضيب ، كما في  
 الشكل (٩-٢) .

باختيار المحاور البينية  $\theta$  تكون السرعة الزاوية

$$\vec{\omega} = \hat{j} \omega \sin \alpha + \hat{k} \omega \cos \alpha$$

ورقيا لذلك ولما كانت المحاور عبارة عن محاور رئيسية فيكون عندنا

$$\vec{L} = \hat{j} \frac{m l^2}{12} \omega \sin \alpha$$

عندئذ نحصل على

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{m l^2}{24} \omega^2 \sin^2 \alpha$$

للطاقة الدورانية للفضيب

(٤-١) عزم القصور الذاتي لجسم صلب حول محور اعتباطي . الجسم الناقص للمعزم

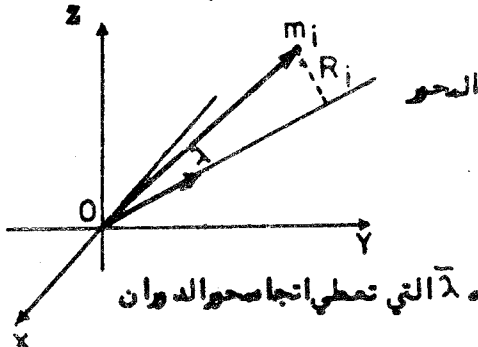
**Moment of Inertia of a Rigid Body about an Arbitrary Axis. The Momental Ellipsoid**

لنستخدم التعريف الاساسي

$$I = \sum m_i R_i^2$$

لايجاد عزم القصور الذاتي لجسم صلب حول اى محور . في الملائمة السابقة  $R_i$  يمثل المسافة العمودية بين الجسم  $m_i$  والمحور كما هو

مبين في الشكل ٢-١



الشكل ٢-١ تعريف الوحدة المتجه  $\hat{\lambda}$  التي تمطي اتجاه محور الدوران

لفرضاتنا مثلنا اتجاه محور الدوران بالوحدة المتجهة  $\vec{\lambda}$  عندئذ

$$R_1 = |\vec{r}_1 \times \vec{\lambda}|$$

حيث

$$\vec{r}_1 = \hat{i}x_1 + \hat{j}y_1 + \hat{k}z_1$$

يمثل متجه الموضع للجسيم  $_1$  ، فضلا عن ذلك ، لفرضان  $\alpha$  ،  $\beta$  ،  $\gamma$  هي اتجاهات جيوب تمام المحور ، اى ان

$$\vec{\lambda} = \hat{i} \cos \alpha + \hat{j} \cos \beta + \hat{k} \cos \gamma$$

عندئذ نحصل

$$R_1^2 = |\vec{r}_1 \times \vec{\lambda}|^2 = (y_1 \cos \gamma - z_1 \cos \beta)^2 + (z_1 \cos \alpha - x_1 \cos \gamma)^2 + (x_1 \cos \beta - y_1 \cos \alpha)^2$$

وعند ترتيب الحدود مرة اخرى ، نجد ان

$$R_1^2 = (y_1^2 + z_1^2) \cos^2 \alpha + (z_1^2 + x_1^2) \cos^2 \beta + (x_1^2 + y_1^2) \cos^2 \gamma - 2y_1z_1 \cos \gamma \cos \beta - 2z_1x_1 \cos \alpha \cos \gamma - 2x_1y_1 \cos \alpha \cos \beta$$

ويمكن التعبير عن عزم القصور الذاتي  $I = \sum m_1 R_1^2$  اذن كما يلي

$$I = I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \beta + I_{zz} \cos^2 \gamma + 2I_{yz} \cos \gamma \cos \beta + 2I_{zx} \cos \alpha \cos \gamma + 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta \quad (14-9)$$

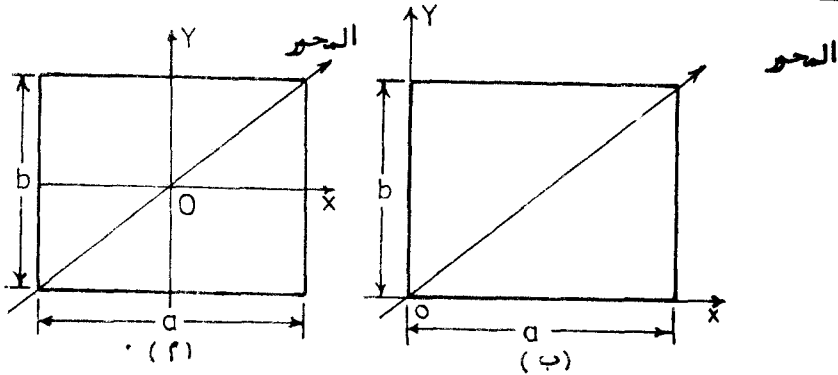
والعلاقة المذكورة اعلاه تعطي عزم القصور الذاتي لجسم صلب حول اى محور بدلالة اتجاهات جيوب تمام لذلك المحور والعزم وضرب القصور الذاتية للجسم في محاور اعتباطية تقع نقطة اصلها على المحور . فاذا كانت المحاور هي محاور رئيسية في نقطة الاصل ، عندئذ تتلاشى ضرب القصور الذاتية وتختصر العلاقة الى علاقة بسيطة هي

$$I = I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \beta + I_{zz} \cos^2 \gamma \quad (10-9)$$

### مثال

جيد عزم القصور الذاتي لصفحة مستطيلة الشكل منتظمة حول احد

اقطارها



الشكل (٩ - ٨) • صفحة مستطيلة الشكل تدور حول القصر •

(أ) نقطة الاصل في المركز (ب) نقطة الاصل في الزاوية

اولا - لنختار نقطة الاصل في مركز الصفحة والمحاور كما هو مبين في

الشكل (٩ - ٨) • وواضح من التناظر انها تمثل محاور رئيسية • فاذا

كانت  $a$  و  $b$  هي اضلاع الصفحة وكتلتها  $m$  ، فعندئذ تكون العزوم

الرئيسية في المركز هي :

$$I_{xx} = \frac{1}{12} mb^2$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12} ma^2$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

واتجاهات جيوب تمام القطر وهي :

$$\cos \alpha = \frac{a}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos \beta = \frac{b}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos \gamma = 0$$

فاذا عوضت هذه القيم في المعادلة (٩ - ١٥) نحصل على

$$I = \frac{mb^2a^2}{12(a^2+b^2)} + \frac{ma^2b^2}{12(a^2+b^2)} = \frac{ma^2b^2}{6(a^2+b^2)}$$

وكطريقة ثانية ، افرضاننا اخترنا المعاور على طول حافتي المفيحة كما هو مبين في الشكل (٩ - ٨) (ب) . هذه ليست محور رئيسية ، ولكن سبق ان استنبطنا العلاقة للمزوم وضرب القصور الذاتية في المثال ٣ الهند (٩ - ١) . اتجاهات الجيوب تمام القطر هي نفسها كالمسابق . اذن - باستخدام المعادلة (٩ - ١٤)

$$I = \frac{mb^2}{3} \left( \frac{a^2}{a^2+b^2} \right) + \frac{ma^2}{3} \left( \frac{b^2}{a^2+b^2} \right) - \frac{mab}{4} \left( \frac{2ab}{a^2+b^2} \right)$$

$$= \frac{ma^2b^2}{6(a^2 + b^2)}$$

والتي تتفق مع نتيجتنا السابقة .

The Momental Ellipsoid (٩ - ٥) الجسم الناقص للمزوم

تد نحصل على تمثيل هندسي مفيد جدا لعلاقة مزوم ، محور الذاتي العامة

بالطريقة التالية :

افرض محور دوران اعتباطي حول نقطة معينة  $O$  . لنعرف النقطة  $P$  على محور الدوران بحيث تكون المسافة  $OP$  تساوي عدديا مقلوب الجذر التربيعي لعزم القصور الذاتي حول المحور .

$$OP = \frac{1}{\sqrt{I}}$$

الآن لنفرض ان  $x, y, z$  هي احداثيات النقطة  $P$  ، ولنفرض ان  $\alpha, \beta, \gamma$  هي اتجاهات زوايا المستقيم  $OP$  . عندئذ نحصل على :

$$\cos \alpha = \frac{x}{OP} = x \sqrt{I}$$

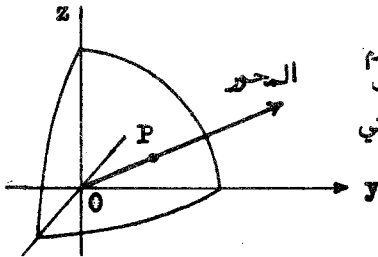
$$\cos \beta = \frac{y}{OP} = y \sqrt{I}$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{OP} = z \sqrt{I}$$

فاذا عوضنا هذه القيم لاتجاهات جيوب التمام في العلاقة العامة لعزم القصور الذاتي في المعادلة ( ٩ - ١٤ ) ، نحصل على

$$x^2 I_{xx} + y^2 I_{yy} + z^2 I_{zz} + 2yz I_{yz} + 2zx I_{zx} + 2xy I_{xy} = 1 \quad \dots\dots ( ١٦ - ٩ )$$

المعادلة السابقة تمثل معادلة سطح ، الشكل ( ٩ - ٩ ) . فهي تعرف المحل الهندسي للنقاط  $P$  عندما يتغير اتجاه المحور  $OP$  . ولما كانت من الدرجة الثانية لذلك فهي تمثل المعادلة العامة لسطح ثلاثي الابعاد . ولما كان  $I$



الشكل ( ٩ - ٩ ) . شحن مجسم ناقص للعزم المسافة  $OP$  تساوي الى مقلوب الجذر التربيعي لعزم القصور الذاتي حول المحور .

لا يمكن ان يساوى صفرا لاي جسم مقسّد ، فالسطح محدود . اذن يجب ان يكون مجسماً ناقصاً (٢) ellipsoid . ويسمى بالمجسم الناقص للعزم لجسم في النقطة 0 .

اذا كانت المحاور هي محاور رئيسية ، فمعادلة المجسم الناقص للعزم

$$x^2 I_{xx} + y^2 I_{yy} + z^2 I_{zz} = 1 \quad (17-1)$$

اذن تتطابق المحاور الرئيسية للجسم مع المحاور الرئيسية للمجسم الناقص للعزم . ولما كان هناك دائما ما لا يقل عن ثلاثة محاور رئيسية لكل مجسم ناقص ، ينتج ان يتواجد دائما ما لا يقل عن ثلاثة محاور رئيسية لجسم في نقطة معينة .

اذا تساوى اثنان من العزوم الثلاثة الرئيسية فعندئذ يكون الجسم الناقص للقصور دورانها . واذا كانت جميع العزوم للقصور متساوية فهي النقطة 0 ، فالمجسم الناقص للعزم يكون كرة وينتج عن ذلك ان عزم القصور هو نفسه لاي مستقيم يمر من 0 مهما كان اتجاهه

### مثال

جد معادلة المجسم الناقص للعزم لمفيحة مستطيلة الشكل ضلعها  $a$  و  $b$  لمحاور نقطه اصلها في المركز .

من مثالنا السابق في الهند (١ - ٤) الذي وجدنا فيه عزم القصور

(٢) في حالة جسم مستقيم ورفيع ما لا نهاية ، فعزم القصور حول محور الجسم يساوى صفرا ، ويتحول المجسم الناقص الى اسطوانة .

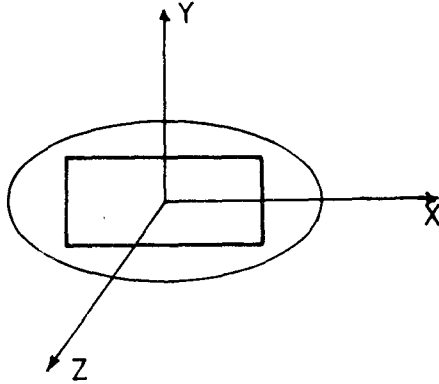
الذاتي ، نحصل مباشرة على

$$x^2 \left( \frac{mb^2}{12} \right) + y^2 \left( \frac{ma^2}{12} \right) + z^2 \left( \frac{ma^2 + mb^2}{12} \right) = 1$$

لمعادلة الجسم الناقص للعزم • نلاحظ ان الاقطار الرئيسية للجسم الناقص هي بالنسب التالية :

$$b^{-1} : a^{-1} : (a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}$$

فمثلا اذا كانت  $a/b = 2$  فالنسب هي  $2 : 1 : 2/\sqrt{5}$   
 اذا يقابل القطر الطويل للجسم الناقص للعزم محور الصفيحة الطويل  
 الجسم موضح في الشكل (١ - ١٠)



الشكل (١ - ١٠) الجسم الناقص للعزم لتوازي مستطيلات

٦-٩) معادلات اولر لحركة الجسم الصلب •

Euler's Equations of Motion of a Rigid Body



افرض للمعادلة الاساسية التي تتحكم في دوران جسم صلب تحت تاثير العزم

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

فاذا كانت المحاور هي محاور رئيسية للجسم يمكن التعبير عن  $\vec{L}$  بالعبارة البسيطة التالية

$$\vec{L} = \hat{i}I_{xx}\omega_x + \hat{j}I_{yy}\omega_y + \hat{k}I_{zz}\omega_z$$

حيث  $I_{zz}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{xx}$  تمثل عزوم القصور الذاتي الرئيسية للجسم في نقطة اصل المحاور . ولاجل ان تبقى الصيغة للزخم الزاوي الانفة الذكر صحيحة عند دوران الجسم ، يجب ان تدور المحاور ايضا مع الجسم . اي ان سرعة الجسم الزاوية هي نفسها للمحاور . ( هناك استثناء . اذا كان اثنان من عزوم القصور الثلاثة الرئيسية متساويين بحيث يكون الجسم الناقص للعزم دورانيا ، فعندئذ لا حاجة ان تكون المحاور ثابتة في الجسم لكي تكون محاور رئيسية . وسوف نأخذ هذه الحالة بنظر الاعتبار في البند ( ٩ - ٨ ) .

وفقا لنظرية المحاور الدائرية التي استنبطت في الفصل الخامس ، يعطي معدل التغيير الزمني لمتجه الزخم الزاوي المنسوب للمحاور الدائرية عندئذ بالعلاقة التالية :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

اذن ، معادلة الحركة بالمحاور الدائرية هي :

$$\vec{N} = \dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L} \quad (٩ - ١٨)$$

وتصبح المعادلة المذكورة اعلاه بدلالة المركبات الديكارتيه على النحو التالي :

$$N_x = \dot{L}_x + (\vec{\omega} \times \vec{L})_x \quad (19-1)$$

$$N_y = \dot{L}_y + (\vec{\omega} \times \vec{L})_y$$

$$N_z = \dot{L}_z + (\vec{\omega} \times \vec{L})_z$$

او بوضوح اكثر

$$N_x = I_{xx} \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (I_{zz} - I_{yy})$$

$$N_y = I_{yy} \dot{\omega}_y + \omega_z \omega_x (I_{xx} - I_{zz}) \quad (20-1)$$

$$N_z = I_{zz} \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (I_{yy} - I_{xx})$$

وتعرف هذه بمعادلات اولر لحركة الجسم الصلب . وهي لها اهمية اساسية في نظرية دوران الاجسام الصلدة الممتدة .  
جسم مقيد الدوران حول محور ثابت

#### Body Constrained to Rotate about a Fixed Axis

كتطبيق لمعادلات اولر ، لنفرض الحالة الخاصة لجسم صلب مقيد دورانه حول محور ثابت بسرعة زاوية ثابتة . عندئذ

$$\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0$$

وتبسط معادلات اولر عندئذ الى

$$N_x = \omega_y \omega_z (I_{zz} - I_{yy})$$

$$N_y = \omega_z \omega_x (I_{xx} - I_{zz}) \quad (21-1)$$

$$N_z = \omega_x \omega_y (I_{yy} - I_{xx})$$

هذه تعطي مركبات العزم التي يؤثر بها المسند المقيد على الجسم . وبصورة خاصة ، اذا كان محور الدوران محورا رئيسيا فعندئذ يكون اثنان

من مركبات  $\vec{\omega}$  الثلاث يساويان صفرا . وفقا لذلك تتلاشى جميع المركبات الثلاث للمعزم  $\vec{M}$  . وهذا يتفق مع الشرح السابق الخاصة بالتوازن الديناميكي في البند ( ١ - ٢ ) .

### مثال

احسب المعزم الذي يجب ان يسلم على قضيب رفيع لكي يدور بانطلاق زاوى ثابت  $\omega$  حول محور يمر من المركز ويصنع زاوية  $\alpha$  مع القضيب كما في المثال ( ٢ ) بند ( ١ - ١ ) .  
 باستخدام نتائج المثال المشار اليه ، نجد ان معادلات اويلر تعطي مركبات المعزم كالآتي :

$$N_x = \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \left( -\frac{Ml^2}{12} \right)$$

$$N_y = 0$$

$$N_z = 0$$

اذن يتلاشى المعزم عندما يتلاشى الجيب او الجيب التمام ، اى عندما تكون  $\alpha$  تساوى صفرا او  $90^\circ$  .

وفي الحالتين يدور القضيب حول محور اساسي .  
 ( ١ - ٢ ) الدوران الحر لجسم صلب عندما لا تؤثر عليه قوى الوصف الهندسي للحركة

Free Rotation of a Rigid Body Under no Forces.

Geometric Description of the Motion.

لنفرض حالة الجسم الصلب الذى يدور بحرية في اى اتجاه كان حول نقطة معينة مثل • . ولا توجد هناك عزم توتر على الجسم . هذه الحالة للدوران الحرتوضح مثلا بواسطة جسم يستند من مركز كتلته

على محور الماس . ومثال آخر هو جسم صلب يتحرك بحرية ولا تؤثر عليه قوى او السقوط الحر في مجال جاذبية منتظم بحيث لا توجد عزم الزخم النقطة 0 في هذه الحالة هي مركز الكتلة .

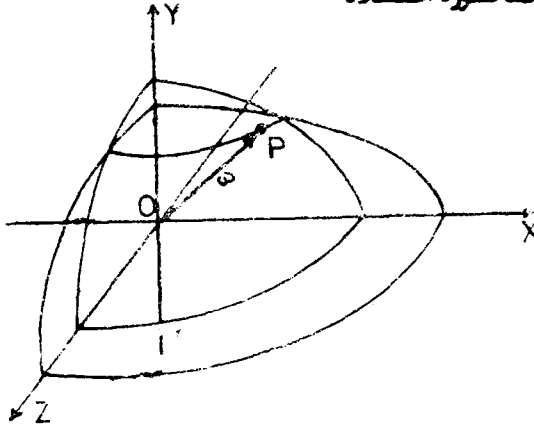
عندما يكون العزم صفرا ، فالزخم الزاوي للجسم ، كما يرى من الخارج يجب ان يبقى ثابتا في الاتجاه والقدر وفقا لقانون حفظ الزخم الزاوي العام . ولكن بالنسبة لمحاور دائرة مثبتة في الجسم ، قد يتغير اتجاه الزخم الزاوي في الاتجاه ولوان مقداره يجب ان يبقى ثابتا . ويمكن التعبير عن هذه الحقيقة بالمعادلة التالية

$$\vec{L} \cdot \vec{L} = \text{const.} \quad (22-1)$$

وبدلالة المركبات المنسوبة الى المحاور الرئيسية للجسم تصبح المعادلة السابقة كالآتي :

$$I_{xx}^2 \omega_x^2 + I_{yy}^2 \omega_y^2 + I_{zz}^2 \omega_z^2 = L^2 = \text{constant} \quad (23-1)$$

وعند دوران الجسم ، قد تتغير مركبات  $\vec{\omega}$  ، ولكنها يجب ان تبقى دائما مستوفية للمعادلة المذكورة اعلاه .



الشكل (١١-١) تقاء جسمين الناقعين لجسم صلب يدور بحرية فيهما  $I_x, I_y$  ثابتان .

ونحصل على علاقة ثابتة عند اخذ الطاقة الحركية للدوران بنظر الاعتبار .  
مرة اخرى ، لما كان العزم يساوى صفرا ، فالطاقة الحركية للدوران  
الكلي يجب ان تبقى ثابتة . هذه قد يعبر عنها كما يلي :

$$\vec{\omega} \cdot \vec{I} = 2T = \text{constant} \quad (٢٤ - ٩)$$

او ما يكافئ ذلك بدلالة المركبات ، اى

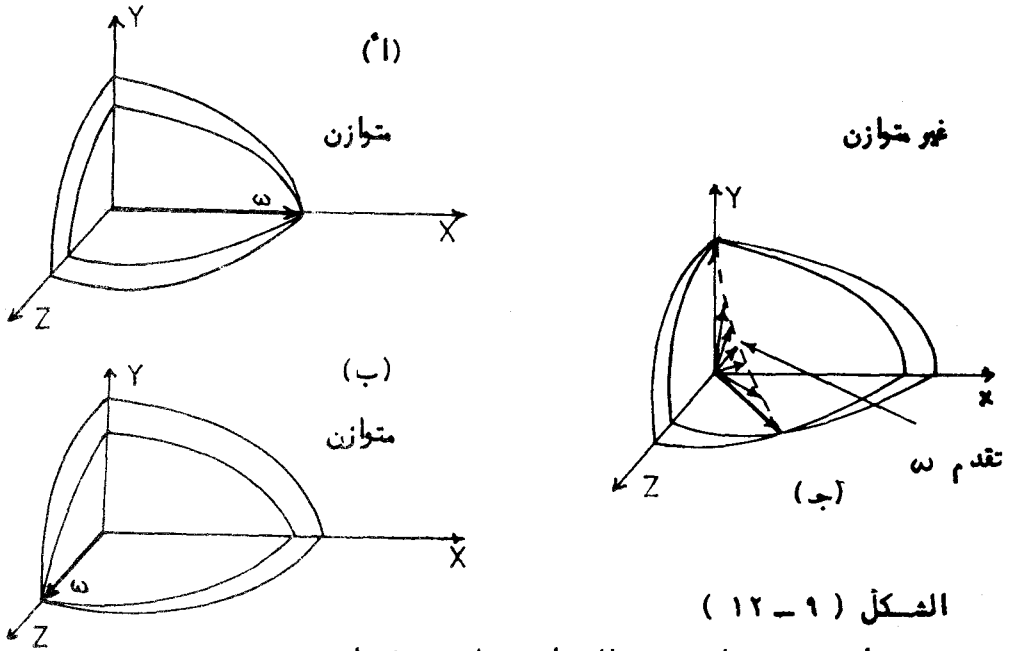
$$I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2 = 2T = \text{constant} \quad (٢٥ - ٩)$$

نرى الان ان مركبات  $\vec{\omega}$  يجب ان تستوفى في آن واحد معادلتين  
مختلفتين تعبران عن ثبوت الطاقة الحركية ومقدار الزخم الزاوى ، والمعادلتان  
(٢٣ - ٩) و (٢٥ - ٩) . هاتان هما معادلتا الجسمين الناقصين للذين  
محاورهما الرئيسية تتطابق مع المحاور الرئيسية للجسم . الجسم الاول ،  
المعادلة (٢٣ - ٩) ، نسب اقطاره الرئيسية هي  $I_{xx}^{-1} : I_{yy}^{-1} : I_{zz}^{-1}$   
الجسم الثانى ، المعادلة (٢٥ - ٩) ، نسب اقطاره الرئيسية

$$I_{xx}^{-\frac{1}{2}} : I_{yy}^{-\frac{1}{2}} : I_{zz}^{-\frac{1}{2}} \quad \text{هي}$$

وهذا يعرف بجسم پوانسوت الناقص Poinsoit ellipsoid وهو مماثل للجسم  
الناقص للعزم . عند دوران الجسم يرسم نهايه متجه السرعة الزاوية  
منحنيا هو تقاطع الجسمين الناقصين ، وهذا موضح في الشكل (٩-١١) .  
من معادلتى تقاطع الجسمين الناقصين ، المعادلتان (٢٣ - ٩) و  
(٢٥ - ٩) ، يمكن البرهنة في الطالة التي يتطابق فيها محور الدوران  
الابتدائي مع احد المحاور الرئيسية للجسم ، عندئذ يتقلص منحنى التقاطع  
الى نقطة . وبعبارة اخرى يتلامس الجسمان الناقصان في قطر رئيسي ،  
ويدور الجسم بسورة مستقرة حول هذا المحور . ولكن هذا يكون صحيحا  
فقط عندما يكون الدوران الابتدائي حول المحور الذى عزم قصوره الذاتي

في نهايته العظمى او الصغرى . و اذا كان حول المحور المتوسطه كالمحور  
 $I_{xx} > I_{yy} > I_{zz}$  حيث  $I_{xx} > I_{yy} > I_{zz}$  عندئذ تقاطع الجسمين لا يكون نقطة ،  
 ولكنه منحني يدور كلياً حولهما ، كما هو موضح في الشكل ( ١٢-٩ ) . وفي  
 هذه الحالة يكون الدوران قلقاً لان محور الدوران يطوف حول الجسم .  
 ويمكن توضيح هذه الحقائق بسهولة وذلك بقذف قطعة مستطيلة  
 او كتاب في الهواء .



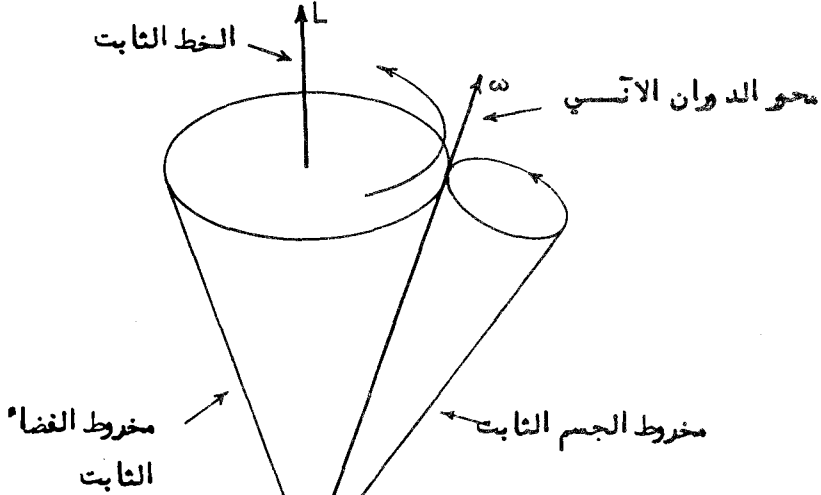
الشكل ( ١٢-٩ )

جسمان جسم صلب حر الدوران حول محور فيها  $T, I$   
 ثابت . قصور العزم الذاتي في ( أ ) اصغر ( ب ) اعظم ( ج ) متوسط

Body and Space Cones مخروطا الفضاء والجسم

يمكن وصف حركة متجه السرعة الزاوية المذكورة اعلاه بقولنا ان  $\vec{\omega}$   
 ترسم مخروطاً في المحاور الدائرة المثبتة في الجسم . ويسمى هذا المخروط  
 بمخروط الجسم الثابت Body-Fixed cone . كذلك بالنسبة للمحاور المثبتة في

المفضاء ، السرعة الزاوية تطرف *Precesses* حول متجه الزخم الزاوي الثابت  $\vec{L}$  . وكذلك يمكن وصف هذا الطواف بقولنا ان  $\vec{\omega}$  ترسم مخروطاً حول  $\vec{L}$  . هذا المخروط يسمى بمخروط الفضاء الثابت *Space-Fixed cone* ويمين محور الدوران . في اية لحظة من اتجاه  $\vec{\omega}$  . فالحركة الحقيقية للجسم اذن تشمل بتدحرج مخروط الجسم على مخروط الفضاء . ويمثل خط التلامس الانبي اتجاه  $\vec{\omega}$  . وقد وضحت هذه الحالة في الشكل ( ٩ - ١٣ ) . وفي الحالة العامة يكون قطعاً مخروطي الفضاء والجسم قطعاً ناقصاً اذا كان للجسم محور تناظر ، فعندئذ يكونان مخروطين دائريين قائمين .



الشكل ( ٩ - ١٣ ) مخروطا الجسم والفضاء  
 ٩ - ٨ ) الدوران الحر لجسم صلد له محور تناظر . المعالجة التحليلية

**Free Rotation of a Rigid Body with an Axis of Symmetry. Analytical Treatment.**

ولوان الوصف الهندسي لحركة الجسم الصلد الذي اعطي في البند السابق يساعد على تصور الدوران الحر غير الخاضع لتاثير العزم ولكن هذه الطريقة

لا تعطي قيم عددية بصورة مباشرة • وسنستمر الان لفهم هذا الوصف بالطرق التحليلية التي تعتمد على تكامل معادلات اويلر المباشر •  
سوف نحل معادلات اويلر للحالة الخاصة التي يكون فيها للجسم محور تناظر • بحيث يتساوى اثنان من عزم القصور الذاتي الثلاثة ( في الحقيقة ان ذلك يتطلب ان يكون للجسم الناقص للعزم محور تناظر وليس للجسم نفسه ) •

لنختار المحور  $z$  كمحور للتناظر وندخل الرموز التالية

$$I_S = I_{zz} \quad (\text{عزم القصور الذاتي حول محور التناظر})$$

$$I = I_{xx} = I_{yy} \quad (\text{العزم حول المحاور العمودية على محور التناظر})$$

للحالة التي يكون فيها العزم مساويا للصفر تصبح معادلات اويلر كما يلي :

$$I \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (I_S - I) = 0$$

$$I \dot{\omega}_y + \omega_z \omega_x (I - I_S) = 0 \quad (٢٦ - ١)$$

$$I_S \dot{\omega}_z = 0$$

وينتج من المعادلة الاخيرة ان

$$\omega_z = \text{constant} \quad (٢٧ - ١)$$

ولنعرف الان الثابت  $\Omega$  بالكمية

$$\Omega = \omega_z \frac{I_S - I}{I} \quad (٢٨ - ١)$$

عندئذ يمكن كتابة المعادلتين الاولى والثانية من (٢٦-١) على النحو التالي

$$\dot{\omega}_x + \Omega \omega_y = 0 \quad (٢٩ - ١)$$

$$\dot{\omega}_y - \Omega \omega_x = 0 \quad (٣٠ - ١)$$



لفرز المتغيرات في المعادلتين المذكورتين اعلاه ، نفاضل الاولى بالنسبة للزمن  $t$  لنحصل على

$$\ddot{\omega}_x + \Omega \dot{\omega}_y = 0$$

وعند حلها للمتغير  $\dot{\omega}_y$  وتعميم النتيجة في المعادلة (١-٣٠) نجد ان

$$\ddot{\omega}_x + \Omega^2 \omega_x = 0 \quad (١-٣١)$$

هذه هي معادلة الحركة التوافقية البسيطة . وحلها هو

$$\omega_x = \omega_1 \cos (\Omega t) \quad (١-٣٢)$$

حيث  $\omega_1$  تمثل ثابت التكامل . لكي نجد  $\omega_y$  نفاضل المعادلة السابقة بالنسبة للزمن  $t$  ثم نعرض النتيجة في المعادلة (١-٢٩) . ويمكننا عندئذ حلها للمتغير  $\omega_y$  للحصول على

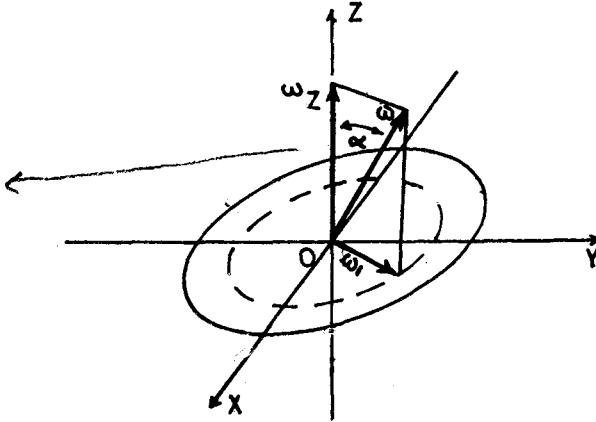
$$\omega_y = \omega_1 \sin (\Omega t) \quad (١-٣٣)$$

اذن  $\omega_x$  و  $\omega_y$  يتغيران توافيقا مع الزمن بتردد زاوي  $\Omega$  ، ويختلفان في الطور بمقدار  $\pi/2$  . لذا يرسم مسقط  $\vec{\omega}$  على المستوى  $xy$  دائرة نصف قطرها  $\omega_1$  في التردد الزاوي  $\Omega$  .

ويمكننا تلخيص النتائج السابقة كما يلي : في الدوران الحُر لجسم صلب فيه محور تناظره يرسم بتجه السرعة الزاوية حركة مخروطية (طواف) حول محور التناظر . والتردد الزاوي لهذا الطواف هو الثابت  $\Omega$  الذي عرف في المعادلة (١-٢٨) . لنفرض ان  $\alpha$  تمثل الزاوية بين محور التناظر (المحور  $z$ ) ومحور الدوران (اتجاه  $\vec{\omega}$ ) كما هو موضح في الشكل (١-١٤) عندئذ يمكننا تمثيل  $\Omega$  كما يلي

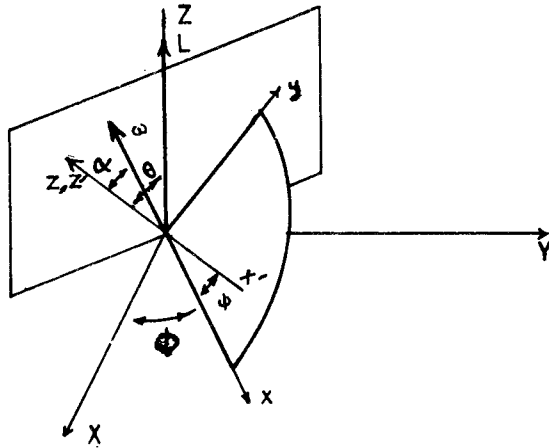
$$\Omega = \left( \frac{1}{I} - 1 \right) \omega \cos \alpha \quad (١-٣٤)$$

وهذا يعطي المعدل الزمني لطواف متجه السرعة الزاوية حول محور التناظر .



الشكل (١٤-٩) اتجاهات السرعة الزاوية لطواف حر لقرص

وصف دوران جسم صلب بالنسبة لمحاور ثابتة • زوايا اهله •  
 في التحليل السابق لدوران جسم صلب حر كانت حركة الطواف منسوبة  
 لمحاور مثبتة في الجسم وتدور معه • ولاجل وصف الحركة بالنسبة  
 لمشاهد خارج الجسم يجب ان نستعمل محاور ثابتة • في الشكل (٩-١٥)  
 للمحاور  $OXYZ$  توجيهه ثابت في الفضاء • والمحاور  $Ox'y'z'$  مثبتة  
 في الجسم وتدور معه • وتعرف بمحاور ثلاثة  $Oxyz$  كما يلي :  
 ينطبق المحور -  $z$  على المحور -  $z'$  او محور تناظر الجسم • والمحور  
 -  $x$  هو خط تقاطع المستوى  $XY$  مع المستوى -  $xy'$  .  
 وقد مثلت الزاوية بين المحور -  $x$  والمحور -  $x'$  بالرمز  $\theta$   
 والتي بين  $z, z'$  بالرمز  $\theta$  ويحسب دوران الجسم حول محور التناظر



الشكل ( ٩-١٥ ) يوضح الشكل العلاقة بين زوايا اويلر وبين المحاور

الثابتة والدائرية .

- من الزاوية بين المحور - x والمحور - x' والتي تمثل بالرمز  $\psi$  وتسمى الزوايا الثلاث  $\theta, \phi, \psi$  بزوايا اويلر .

وفي الحالة التي لا تؤثر فيها عزم على الجسم ، يكون متجه الزخم

الزاوي  $\vec{L}$  ثابتا في الغدار والاتجاه بالنسبة للمحاور الثابتة OXYZ .

لنختار المحور - z باتجاه  $\vec{L}$  وهذا يعرف بالخط غير المتقلب

invariable من الشكل نرى ان مركبات  $\vec{L}$  في المحاور Oxyz هي

$$L_x = 0$$

$$L_y = L \sin \theta \quad ( ٩- ٢٥ )$$

$$L_z = L \cos \theta$$

مرة اخرى نقيّد انفسنا في حالة الجسم الذي له محور تناظر

( المحور - z ) بحيث يكون الجسم الناقص للعزم الدوراني ، ووفقا

لذلك تكون المحاور Oxyz محاور رئيسية كالمحاور Oxy'z' .

عندنا الان من اولى معادلات ( ١ - ٣٥ ) ان  $\omega_x = 0$  . اذن تقع  $\vec{\omega}$  في المستوى  $yz$  . لنفرض ان  $\alpha$  تمثل الزاوية بين المحور  $z$  والسرعة الزاوية  $\vec{\omega}$  . فمركبات  $\vec{\omega}$  عندئذ تكون

$$\begin{aligned} \omega_x &= 0 \\ \omega_y &= \omega \sin \alpha \end{aligned} \quad ( ١ - ٣٦ )$$

$$\omega_z = \omega \cos \alpha$$

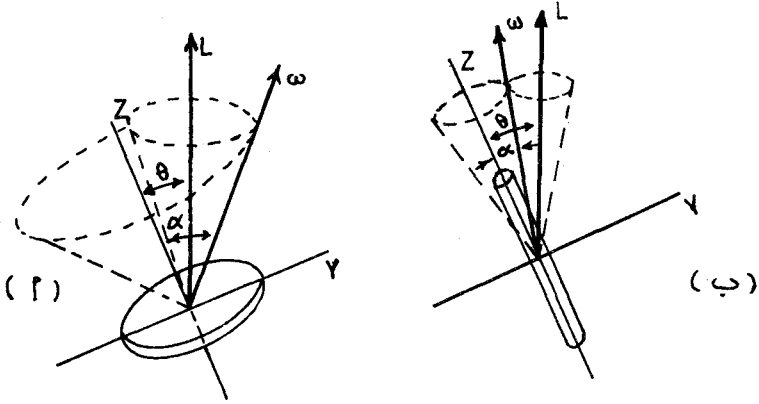
وفقا لذلك

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx} \omega_x = 0 \\ L_y &= I_{yy} \omega_y = I \omega \sin \alpha \\ L_z &= I_{zz} \omega_z = I_z \omega \cos \alpha \end{aligned} \quad ( ١ - ٣٧ )$$

وبسهولة ينتج ان

$$\frac{L_y}{L_z} = \tan \theta = \frac{I}{I_z} \tan \alpha \quad ( ١ - ٣٨ )$$

وفقا للنتيجة الانفة الذكر تكون  $\theta$  اصغرا واكبرا من  $\alpha$  ، ويعتمد ذلك على ما اذا كان  $I$  اصغرا واكبرا من  $I_z$  على التوالي وبعبارة اخرى يقع متجه الزخم الزاوي بين محور التناظر ومحور الدوران في حالة الجسم المنبسط ( $I < I_z$ ) بينما في حالة الجسم الذي يستطيل ( $I > I_z$ ) يقع محور الدوران بين محور التناظر ومتجه الزخم الزاوي . لقد وضحت الحالتان في الشكل ( ١ - ١٦ ) . في كل من الحالتين يرسم محور التناظر ( المحور  $z$  ) عند دوران الجسم ، حركة مخروطية ( طواف ) حول متجه الزخم الزاوي الثابت  $\vec{L}$  . وفي الوقت نفسه يطوف محور دوران ( المتجه  $\vec{\omega}$  ) حول  $\vec{L}$  بنفس التردد .



الشكل (٩-١٦) الدوران الحر (أ) لقرص و (ب) لفضيب • وقد ظهر  
مخروطاً الجسم والفضاء منقطة •

بالرجوع الى الشكل (٩-١٥) • نرى ان الانصلاق الزاوي لدوران المستوى  
yz - حول المحور z - يساوي المعدل الزمني لتغيير  
الزاوية  $\theta$  . اذن  $\dot{\theta}$  تمثل المعدل الزمني لطواف محور التناظر •  
(والمتجه  $\vec{\omega}$ ) حول الخط غير المتقلب (المتجه  $\vec{L}$ ) كما يرى من  
الخارج • وواضح من دراسة الشكل ان مركبات  $\vec{\omega}$  هي

$$\begin{aligned} \omega_x &= 0 \\ \omega_y &= \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (٩-٣٩)$$

$$\omega_z = \dot{\theta} \cos \theta + \psi$$

ومن ثاني معادلة للمجموعة المذكورة اعلاه والمعادلة الثانية من  
المعادلات (٩-٣٣) نجد ان

$$\sin \alpha \quad (٩-٤٠)$$

ويمكن وضع المعادلة السابقة بصيغة مفيدة أكثر وذلك بالتعبير عن  $\theta$  كدالة لـ  $\alpha$  بواسطة المعادلة (٩ - ٣٨) ، ونحصل بعد تبسيطها

$$\dot{\theta} = \omega \left[ 1 + \left( \frac{I_S^2}{I^2} - 1 \right) \cos^2 \alpha \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{جبرياً على} \quad (٩ - ٤١)$$

• للمعدل الزمني لطواف محور التناظر حول الخط غير المتقلب .

### امثلة

#### ١- الطواف الحر للقرص Free Precession of a Disc

كمثال على النظرية السابقة ، لنفرض حالة قرص رقيق ، او اي جسم صفائحي متناظر من نظرية المحاور المتعامدة نحصل على

$$I_{xx} + I_{yy} = I_{zz}$$

ولما كان  $I_S = I_{zz}$  ،  $I = I_{xx} = I_{yy}$  اذن

$$2I = I_S$$

وبالتعميم في المعادلة (٩ - ٣١) نحصل على

$$\Omega = \left( \frac{2I}{I_S} - 1 \right) \omega \cos \alpha = \omega \cos \alpha$$

للمعدل الزمني لطواف متجه السرعة الزاوية حول محور التناظر ، كما يرى في المحاور الدائرية المثبتة في القرص . اما اذا كان القرص ميكانيكياً فعندئذ  $I_S$  لا يساوي  $2I$  ويختلف المعدل الزمني للطواف من

العلاقة السابقة وذلك يعتمد على قيمة النسبة  $I/I_S$  .

المعدل الزمني لطواف محور التناظر حول المتجه  $\vec{I}$  او المحور z-

كما يرى من الخارج يعطى من المعادلة (٩ - ٤١) كما يلي :

$$\dot{\theta} = \omega (1 + 3 \cos^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}$$

وبصورة خاصة اذا كانت  $\alpha$  صغيرة جدا بحيث يكون  $\cos \alpha \approx 1$  عندئذ  
نحصل على التقريب

$$\Omega \approx \omega$$

$$\dot{\theta} \approx 2\omega$$

اذن يطوف محور التناظر في الفضاء تماما بقدر ضعف الانطلاق  
الزاوي للدوران . ويظهر هذا الطواف كحركة ذبذبية .

## ٢- طواف الارض الحر Free Precession of the Earth

من المعروف في حركة الارض ان محور الدوران يميل قليلا عن القطب  
الجغرافي الذي يمثل محور التناظر . والزاوية  $\alpha$  تساوي حوالي ٢٠° -  
ثانية من القوس ( كما هو مبين في الشكل ٩-١٧ المبالغ فيه ) - كذلك من  
المعروف ان النسبة  $I_g/I$  تساوي حوالي ١٠٠٣٢٧ ر. كما حسبت  
من تفلطح الارض . من المعادلة ( ٩-٣٤ ) نحصل اذن على

$$\Omega = 0.00327 \omega$$

ولما كانت ( يوم  $\omega = 2\pi /$  ) ، فان زمن ذبذبة الطواف الانف المذكر  
يحسب اذن كما يلي :

$$\frac{2\pi}{\Omega} = \frac{1}{0.00327} \text{ days} = 305 \text{ days}$$

وزمن الذبذبة الملاحظة لطواف محور دوران الارض حول القطب يساوي  
تقريبا ٤٤٠ يوم . ويعزى عدم التوافق بين القيم الملاحظة والمحسوبة الى  
كون الارض ليست تامة الصلادة .  
وفي ما يتعلق بطواف محور تناظر الارض كما يرى من الفضاء ، فالمعادلة

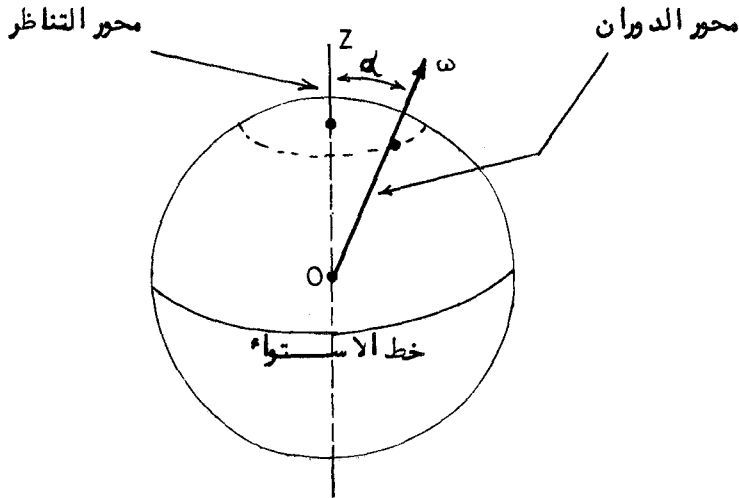
$$\dot{\phi} = 1.00327 \omega$$

( ٩ - ٤١ ) تعطي

وزمن الذبذبة المرافق عندئذ يكون

$$\frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{1.00327} \simeq 0.997 \text{ day}$$

هذا الطواف الحر لمحور الارض في الفضاء يتداخل من الطواف الجيروسكوبي الاطول بكثير ، حوالي ٢٦٠٠٠ سنة ، والاخير ينتج من العزم التي تؤثر بها الشمس والقمر على الارض ( بسبب تفلطحها ) . ان حقيقة كون زمن ذبذبة طواف الجيروسكوبي اطول بكثير من الطواف الحر يبرر اهمال العزم الخارجية لحساب زمن ذبذبة الطواف الحر .



الشكل (٩-١٧) محور التناظر ودوران الارض . الزاوية  $\alpha$  التبالغ فيها كثيرا

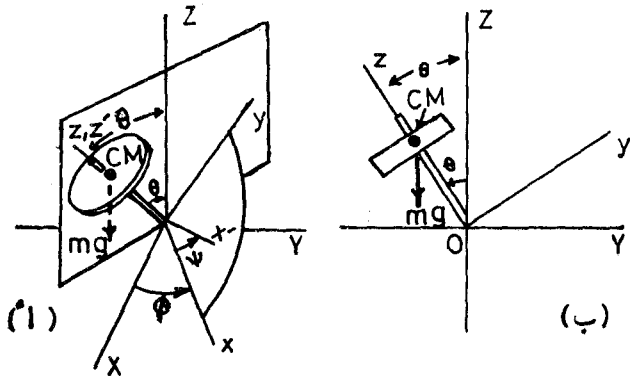
( ٩ - ٩ ) الطواف الجيروسكوبي - حركة الخدروف

Gyroscopic Precession. Motion of a Top.

سندرس في هذا الهند حركة الجسم الصلب الذي يدور بحرية حول نقطة



- ثابتة ويؤثر عليه عزم  $\theta$  بدلا من حالة الطواف الحر الذي لا يؤثر عليه عزم •  
 • وتبسط الحالة بمثال الجايسكوب البسيط (او الخذروف) •
- الشكل (٩-١٨) يبين رموز محاورنا ورسمت المحاور  $z, y, Z$  للتوضيح فقط في الشكل (٩-١٨ ب) حيث المحور  $x$  عمودى على سطح الورقة • ونقطة الاصل  $O$  هي النقطة الثابتة التي يدور حولها الجسم •



الشكل (٩ - ١٨) الجايسكوب البسيط

ان مقدار العزم حول  $O$  الناتج من الثقل هو  $mg \ell \sin \theta$  حيث  $\ell$  يمثل المسافة من  $O$  الى مركز الكتلة  $O$  • ويعمل هذا العزم حول المحور  $x$  - اى ان

$$N_x = mg \ell \sin \theta$$

$$N_y = 0$$

$$N_z = 0$$

(٩ - ٤٢)

ولنمثل السرعة الزاوية للمحاور  $z, y, x$  بالرمز  $\vec{\omega}$  • وواضح ان مركبات  $\vec{\omega}$  بدلالة زوايا اولر هي

$$\omega_x = \dot{\theta}$$

$$\omega_y = \dot{\phi} \sin \theta \quad (٤٣ - ١)$$

$$\omega_z = \dot{\phi} \cos \theta$$

اذن مركبات الزخم الزاوي للذخروف المدوم هي

$$L_x = I_{xx} \omega_x = I \dot{\theta}$$

$$L_y = I_{yy} \omega_y = I \dot{\phi} \sin \theta \quad (٤٤ - ١)$$

$$L_z = I_{zz} (\omega_z + \dot{\psi}) = I_B (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) = I_B S$$

هنا نستخدم نفس الرموز لعزوم القصورات الذاتية التي استخدمناها في البند السابق وقد اختصرنا في المعادلة الاخيرة الكمية  $\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}$  بالحرف S والذي يسمى بالتدويم Spin .

معادلة الحركة الاساسية المنسوبة الى محورنا الدائرة هي

$$\vec{N} = \vec{L} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

اذن ، بدلالة المركبات ، نحصل على معادلات الحركة التالية

$$mg\ell \sin \theta = I\ddot{\theta} + I_B S \dot{\phi} \sin \theta - I\dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta \quad (٤٥ - ١)$$

$$0 = I \frac{d}{dt} (\dot{\phi} \sin \theta) - I_B S \dot{\theta} + I\dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta \quad (٤٦ - ١)$$

$$0 = I_B \dot{S} \quad (٤٧ - ١)$$

ان المعادلة الاخيرة تبين ان تدويم الجسم S ، حول محور التناظر يبقى ثابتا .

• بالطبع تكون مركبات الزخم الزاوي على طول نفس المحور ثابتة ايضا

$$L_z = I_g S = \text{constant} \quad (٤٨ - ١)$$

عندئذ المعادلة الثانية تكافئ

$$0 = \frac{d}{dt} (I \dot{\theta} \sin^2 \theta + I_g S \cos \theta)$$

بحيث

$$I \dot{\theta} \sin^2 \theta + I_g S \cos \theta = B = \text{constant} \quad (٤٩ - ١)$$

### Steady Precession الطواف المستقر

وقبل ان نتابع تكامل بقية المعادلات ، سوف نشرح حالة خاصة متممة وهي الطواف المستقر . في هذه الحالة يرسم محور الجايرسكوب او الخذروف مخروطا دائريا قائما حول المحور الشاقولي ( المحور - z ) في هذه الحالة  $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$  ، وتبسط المعادلة ( ٤٥ - ١ ) ، بعد اختصار العامل المشترك  $\sin \theta$  الى

$$mg l = I_g S \dot{\theta} - I \dot{\theta}^2 \cos \theta$$

او عند حلها للعامل S ، نجد ان

$$S = \frac{mg l}{I_g \dot{\theta}} + \frac{I}{I_g} \dot{\theta} \cos \theta \quad (٥٠ - ١)$$

كشرط للطواف المستقر . هنا  $\dot{\theta}$  تمثل التردد الزاوي للطواف ، اي ان التردد الزاوي للحركة المتناظرة او محور التدويم حول الشاقول ، ولا سيما اذا كانت  $\dot{\theta}$  صغيرة جدا ، عندئذ S تكون كبيرة . ( هذه هي الحالة الاعتيادية لخذروف اوجايرسكوب ) . عندئذ قد يهمل الحد الثاني في يمين المعادلة ( ٥٠ - ١ ) وقد نكتب على وجه التقريب

$$\dot{\theta} \approx \frac{mg\ell}{I_g S} \quad (٥١ - ١)$$

وهذه النتيجة المألوفة في نظرية الجايسكوب الاولية التي تعطيها معظم كتب الفيزياء العامة . وفي الواقع لما كانت المعادلة ( ٥٠ - ١ ) هي من الدرجة الثانية في  $\dot{\theta}$  فهناك قيمتان ل  $\dot{\theta}$  لقيمة معلومة ل S ، ولكن قيمة التقريب المذكور اعلاه هو الذي يلاحظ اعتياديا .

The Energy Equation and Nutation معادلات الطاقة والترنح  
اذا لم تكن هناك قوى احتكاكية تؤثر على الجايسكوب لتبديد الطاقة فان الطاقة الكلية  $T + V$  تبقى ثابتة .

$$\frac{1}{2}(I \omega_x^2 + I \omega_y^2 + I_g S^2) + mg\ell \cos \theta = E$$

! وما يكافئها بدلالة زوايا اولر

$$\frac{1}{2}(I\dot{\theta}^2 + I\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + I_g S^2) + mg\ell \cos \theta = E$$

يمكننا حل المعادلة ( ٤٩ - ١ ) ل  $\dot{\theta}$  وتعميضا في المعادلة المذكورة اعلاه والنتيجة تكون

$$\frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{(B - I_g S \cos \theta)^2}{2 I \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} I_g S^2 + mg\ell \cos \theta = E \quad (٥٢ - ١)$$

والتي كليا بدلالة  $\theta$  . هذه المعادلة تجيز لنا من حيث المبدأ ايجاد  $\theta$  كدالة للزمن  $t$  بطريقة التكامل . ولنعمل التعويض التالي :

$$u = \cos \theta$$

$$\dot{u} = -(\sin \theta) \dot{\theta} = -(1-u^2)^{\frac{1}{2}} \dot{\theta} \quad \text{عندئذ}$$

$$\dot{u}^2 = (1-u^2) (2E - I_g S^2 - 2mg\ell u) I^{-1} - (B - I_g S u)^2 I^{-2}$$

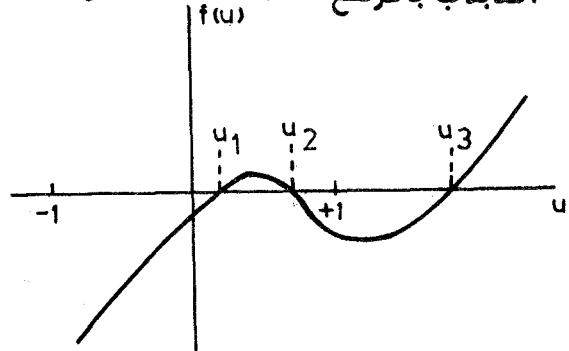
او  $\dot{u}^2 = f(u)$

لذا يمكن ايجاد  $u$  ( ومنها  $\theta$  ) كدالة للزمن  $t$  بالتكامل

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}} \quad (٩-٥٣)$$

الان  $f(u)$  هو متعدد الحدود Polynomial من الدرجة الثالثة ، اذن يمكن ايجاد قيمة التكامل بدلالة الدوال الاهليلجية elliptic functions على اية حال ، لانحتاج في الحقيقة الى اجراء التكامل لشرح الخواص العامة للحركة . ونرى ان  $f(u)$  يجب ان يكون موجبا لكي يكون  $t$  حقيقيا . فغايات الحركة في  $\theta$  تحسب اذن من جذور المعادلة  $f(u)=0$  . ولما كانت  $\theta$  يجب ان تقع بين صفر و  $٩٠$  درجة ، عندئذ يجب ان تأخذ  $u$  القيم بين صفر و  $+١$  . يمثل المنحني في الشكل (٩-١٩) الدالة  $f(u)$  للحالة التي يكون فيها جذران متميزان  $u_1$  و  $u_2$  بين صفر و  $+١$  ، عندئذ تكون قيم  $\theta$  المناظرة لها اي  $\theta_1$  و  $\theta_2$  هي غايات الحركة الشاقولية ويتذبذب محور الخدروف الى الامام والخلف بين هاتين القيمتين للزاوية  $\theta$  عند طواف الخدروف حول الشاقول الشكل (٩-٢٠) . ويسمى هذا

التذبذب بالترنح Nutation اذا

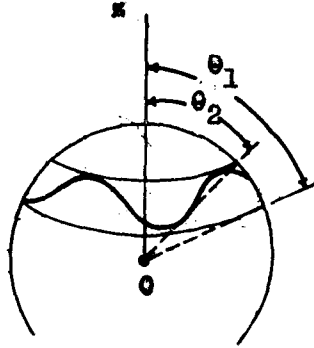


الشكل (٩-١٩) بياني الدالة  $f(u)$  .

كان هناك جذر مزدوج Double root أي إذا كانت  $u_1 = u_2$  فعندئذ لا يحصل ترنج ويطوف الخدروف بصورة مستقرة . وفي الحقيقة يعطى شرط الجذر المزدوج من المعادلة (٩ - ٥٠) .

الخدروف النائم Sleeping Top

كل من لعب بالخدروف يعرف إذا بدأ بالموضع الشاقولي بسرعة تدور



الشكل (٩ - ٢٠) توضيح لترنج الجايرسكوب البسيط

كافية فمحور الخدروف يبقى ثابتا في الاتجاه الشاقولي ، كشرط لما يسمى بالنائم Sleeping . وبدلالة التحليل السابق ، نرى ان النوم يجب ان يقابل جذر مزدوج في  $u = +1$  في هذه الحالة ، لما كانت  $\theta = \dot{\theta} = 0$  و

$$B = I_g S \quad \text{و} \quad E = mgh + \frac{1}{2} I_g S^2$$

$$f(u) = 0$$

عندئذ تصبح

$$(1 - u)^2 \left[ \frac{2mgh}{I} (1 + u) - \frac{(I_g S)^2}{I^2} \right] = 0$$

في الحقيقة ، عندنا جذر مزدوج في  $u = +1$  . وعند وضع الحد السدى

بين القوسين في المعادلة السابقة مساويا للصفر نحصل على جذر ثالث هو  $u_3$  . ونجد ان

$$u_3 = \frac{I_s^2 s^2}{2 I m g h} - 1$$

اذا كان الجذر  $u_3$  لا يقابل قيمة فيزيائية ممكنة ل  $\theta$  ، اي اذا كانت  $u_3$  اكبر من واحد ، عندئذ ستكون الحركة النائمة مستقرة . وهذه تعطي

$$s^2 > \frac{4 I m g h}{I_s^2} \quad (٥٤ - ٩)$$

كمحك لاستقرار الخدروف النائم . فاذا تباطأ الخدروف بسبب الاحتكاك بحيث لا يبقى الشرط المذكور اعلاه صحيحا ، عندئذ يعاني الخدروف ترنحا واخيرا ينقلب

\* ٩ - ١٠) استخدام المصفوف في ديناميك الجسم الصلب

الكمية الممتدة للقصور الذاتي

Use of Matrices in Rigid Body Dynamics.

The Inertia Tensor

يمكن كتابة معادلات كثيرة من التي استنبطت في هذا الفصل ببساطة وبصورة ملائمة بصيغة المصفوف . فمثلا ، افرض التعبير العام للزخم الزاوي ، المعادلة (٩ - ٤) هذه المعادلة بدلالة المصفوف تصبح

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (٥٥ - ٩)$$

هنا ، كما عولجت تحويلات المحاور في البند ( ١ - ١٥ ) مثلت المتجهات بالمصفوفات العمودية . المصفوف  $3 \times 3$  الذي يحتوى على العزم وضرب القصور الذاتية يتضمن الخواص الكاملة للجسم الصلب بالنسبة الى خواصه الدورانية . وهذا المصفوف هو طريقة خاصة لتمثيل الكمية الممتدة للقصور الذاتي **Inertia Tensor** .

ولندخل الرمز المنفرد | للكمية الممتدة للقصور الذاتي . عندئذ يمكن التعبير عن الزخم الزاوى كما يلي :

$$\vec{L} = | \vec{\omega} \quad (٥٦-٩)$$

فمفهوم ان المتجهات  $\vec{L}$  و  $\vec{\omega}$  هي مصفوفات عمودية الطاقة الحركية **Kinetic Energy**

يمكن البرهنة بسهولة على ان التعبير العام للطاقة الحركية الدورانية للجسم الصلب ، المعادلة ( ٩ - ١٢ ) ، يعطي بدلالة المصفوف على النحو التالي

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (٥٧-٩)$$

او بصيغة مختصرة

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T | \vec{\omega} \quad (٥٨-٩)$$

هنا المصفوف الانقى  $\vec{\omega}^T$  هو مصفوف التحويل **Transpose matrix** للمصفوف العمودى  $\vec{\omega}$  و | هو الكمية الممتدة للقصور الذى عُرف سابقا .

**Principal Axes** المحاور الرئيسية

اذا كانت المحاور هي محاور رئيسية للجسم ، فان تمثيل الكمية الممتدة لمصفوف القصور الذاتي ياخذ الصيغة القطرية **diagonal** التالية :



$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (٥٩-١)$$

ومن الواضح ، ان المسألة العامة لايجاد المحاور الرئيسية للجسم الصلب تكافئ المسألة الرياضية لتحويل المصفوف  $3 \times 3$  الى مصفوف قطري . ومعروف من نظرية المصفوفات ، ان اى مصفوف مربع متناظر يمكن تحويله الى مصفوف قطري . في الحالة التي نحن بمدها  $I_{xy} = I_{yx}$  وبالتماثل للزوج الاخرى . فالمصفوف اذن هو متناظر ، ولذلك يجب ان يتواجد صف من المحاور الرئيسية في اية نقطة .

ويتم تحويل المصفوف الى مصفوف قطري بايجاد جذور معادلتها المحدد التالية :

$$|\vec{I} - \lambda \vec{1}| = 0$$

حيث  $\vec{1}$  يمثل مصفوف الوحدة unit matrix وتكتب هذه المعادلة بصورة واضحة على النحو التالي :

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - \lambda & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - \lambda & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (٦٠-١)$$

وهذه من الدرجة الثالثة في  $\lambda$  ، اى

$$-\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \quad (٦١-١)$$

حيث  $A, B, C$  هي دوال بسيطة للـ  $I'$  . الجذور الثلاثة

هي  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  هي عزوم القصورات الذاتية الرئيسية الثلاثة .

ولكي نجد ميلان المحاور الرئيسية ، نستخدم الحقيقة الفيزيائية وهي انه

عند دوران جسم حول احد محاوره الرئيسية يكون متجه الزخم الزاوي بنفس اتجاه متجه السرعة الزاوية . ولنفرض ان الاتجاهات الزاوية لاحد المحاور الرئيسية هي  $\alpha$  ،  $\beta$  ،  $\gamma$  ولنفرض ان الجسم يدور بسرعة زاوية  $\vec{\omega}$  حول هذا المحور فالزخم الزاوي عندئذ يكون

$$\vec{L} = \lambda \vec{\omega} = I \vec{\omega} \quad (١٢-١)$$

حيث  $\lambda$  تمثل احد الجذور الثلاثة  $\lambda_1$  ،  $\lambda_2$  ، او  $\lambda_3$  . وتكتب المعادلة السابقة بصورة واضحة على النحو التالي :

$$\begin{bmatrix} \lambda \omega \cos \alpha \\ \lambda \omega \cos \beta \\ \lambda \omega \cos \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \cos \alpha \\ \omega \cos \beta \\ \omega \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (١٣-١)$$

وهذه المعادلة ، تبعاً لذلك ، تكافئ المعادلات العددية الثلاث التالية :

$$(I_{xx} - \lambda) \cos \alpha + I_{xy} \cos \beta + I_{xz} \cos \gamma = 0$$

$$I_{yz} \cos \alpha + (I_{yy} - \lambda) \cos \beta + I_{yz} \cos \gamma = 0 \quad (١٤-١)$$

$$I_{zx} \cos \alpha + I_{zy} \cos \beta + (I_{zz} - \lambda) \cos \gamma = 0$$

حيث اختزل العامل المشترك  $\omega$  . لذلك يمكن ايجاد اتجاهات جيوب التمام للمحاور الرئيسية بحل المعادلات والجذور ليست حرة ، من الواضح ، يجب ان تستوفي الشرط التالي :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (١٥-١)$$

### امثلة

١- جد الكمية الممتدة للقصور الذاتي لصفحة مربعة طول ضلعها  $l$  وكتلتها  $m$  في المحاور  $Oxyz$  حيث  $0$  في احدى زوايا الصفحة

والمحوران  $x$  و  $y$  على طول ضلعين منها .  
 باستخدام نواتج المشال - ٣ بند (١-١) عندنا

$$I_{xx} = I_{yy} = m \ell^2 / 3, \quad I_{zz} = 2m \ell^2 / 3, \quad I_{xy} = -m \ell^2 / 4, \quad I_{xz} = I_{yz} = 0$$

اذن الكمية الممتدة للقصور الذاتي هي

$$I = \begin{bmatrix} m \ell^2 / 3 & -m \ell^2 / 4 & 0 \\ -m \ell^2 / 4 & m \ell^2 / 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2m \ell^2 / 3 \end{bmatrix} = \frac{m \ell^2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

٢- جد الزخم الزاوي للصفحة المذكورة اعلاه عندما تدور حول احد  
 اقطارها . في هذه الحالة يمكن التعبير عن متجه السرعة الزاوية بالمصفوف

العمودى التالي :

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega / \sqrt{2} \\ \omega / \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

والزخم الزاوي ، وفقا لذلك هو

$$\vec{L} = I \vec{\omega} = \frac{m \ell^2 \omega}{3 \sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{m l^2 \omega}{3 \sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{m l^2 \omega}{12 \sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

٣- جد الطاقة الحركية للدوران في المسألة السابقة  
بأستعمال النتائج السابقة ، عندنا

$$T = \frac{1}{2} \omega^T \vec{I} \omega = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \vec{L} = \frac{m l^2 \omega^2}{24} [1 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{m l^2 \omega^2}{12}$$

٤- جد عزوم القصور الذاتي الرئيسية لصفحة مربعة حول احدى زواياها  
هنا المعادلة (٦٠ - ١) تصبح

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} m l^2 - \lambda & -\frac{1}{2} m l^2 & 0 \\ -\frac{1}{2} m l^2 & \frac{1}{3} m l^2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} m l^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

او

$$[(\frac{1}{3} m l^2 - \lambda)^2 - (\frac{1}{2} m l^2)^2] (\frac{1}{3} m l^2 - \lambda) = 0$$

العامل الثاني يعطي

$$\lambda = \frac{1}{3} m l^2$$

لاحد عزوم القصور الذاتي . العامل الاول يعطي

$$\frac{1}{3} m l^2 - \lambda = \pm \frac{1}{2} m l^2$$

$$\lambda = \frac{7}{12} m \ell^2 \quad \text{أو}$$

$$\lambda = \frac{1}{12} m \ell^2 \quad \text{و}$$

وقيم  $\lambda$  الثلاث هذه هي العزوم الرئيسية الثلاثة .  
 ٥ - جد اتجاهات المحاور الرئيسية للمسالة المذكورة اعلاه  
 المعادلات (٦٤ - ٩) تعطي

$$\left(\frac{1}{3} m \ell^2 - \lambda\right) \cos \alpha - \frac{1}{3} m \ell^2 \cos \beta = 0$$

$$-\frac{1}{3} m \ell^2 \cos \alpha + \left(\frac{1}{3} m \ell^2 - \lambda\right) \cos \beta = 0$$

$$\left(\frac{2}{3} m \ell^2 - \lambda\right) \cos \gamma = 0$$

ومن المعادلة الاخيرة نرى ان  $\gamma = 90^\circ$  هي احد الجذور . واذنا وضعنا  
 $\lambda$  تساوى  $\frac{1}{12} m \ell^2$  ، فان المعادلة الاولى تصبح

$$\cos \alpha - \cos \beta = 0$$

وهذه مع المعادلة (٦٥ - ٩) تعطي

$$2 \cos^2 \alpha = 1$$

او ، باخذ الجذر الموجب ، عندنا  $\alpha = 45^\circ$  لمحور رئيسي واحد .  
 الاخر يعطي باخذ الجذر السالب ، اي ان  $\alpha = 135^\circ$  اذن يكون احد  
 المحاور الرئيسية على طول القطر ، والاخر عموديا على القطر وفي مستوى  
 السطح ، والمحور الرئيسي الثالث يكون عموديا على مستوى السطح .

## تمارين

١- صفيحة مستطيلة الشكل منتظمة كتلتها  $m$  وهلماعها  $a$  و  $b$  تدور حول احد قطريها بانطلاق زاوى  $\omega$  . جد مقدار واتجاه الزخم الزاوى حول زاوية محور الدوران .

٢- جد مقدار واتجاه الزخم الزاوى حول المركز في السؤال السابق

٣- قرص دائرى منتظم كتلته  $m$  ونصف قطره  $a$  مقيد الدوران بانطلاق زاوى ثابت  $\omega$  حول محور يمر من المركز ويصنع زاوية  $45^\circ$  مع محور القرص . جد اتجاهه ومقدار الزخم الزاوى

٤- جد عزوم وضرب القصورات الذاتية لتوازي مستطيلات منتظم اطبـال اغضاعه  $a, b, c$  لمحاور نقطة اصلها في احدى الزوايا والمحاور على طول حافات متوازي المستطيلات . واذا كان متوازي المستطيلات يدور حول احد اقطاره ، جد الزخم الزاوى حول نقطة الاصل .

٥- حل السؤال السابق عندما تكون نقطة اصل المحاور في مركز متوازي المستطيلات والمحاور عمودية على اوجهه .

٦- جد عزوم وضرب القصورات الذاتية لصفحة مثلثة منتظمة  $A O B$  اذا كانت الزاوية في  $O$  تساوى  $90^\circ$  والاضلاع  $OA=a, OB=b$  تقع على المحورين  $x, y$  .

٧- جد المحاور الرئيسية للصفحة في السؤال السابق

٨- جد معادلات المجسمات الناقصة للعزوم لما يلي : (أ) قرص دائرى منتظم نصف قطره  $a$  و (ب) اسطوانة دائرية قائمة صلدة نصف قطرها  $a$  وطولها  $b$  . استخدم محاور تقع نقطة اصلها في المركز لكل حالة .

٩- في الجزء ( ب ) للمسألة السابقة ، ما هي نسبة نصف القطر الى الطول لكي يكون الجسم الناقص للعزم كرة ؟

- ١٠- متوازي مستطيلات صلد منتظم  $\omega$  اضلاعه  $a$  و  $2a$  و  $3a$  ما هـسي  
نسب الاقطار الرئيسية للمجسم الناقص للعزم في مركز متوازي المستطيلات ؟
- ١١- جسد عزم القصور الذاتي الرئيسية لكرة صلدة نصف قطرها  $a$  وفيها  
جسوف كروي نصف قطره  $a/2$  ومركزه في نقطة تبعد  $a/4$  من مركز  
الكرة • (جد العزم في مركز الكرة وفي مركز الكتلة)
- ١٢- جد الطاقة الحركية الدورانية في المسالتين (١-٩) و (٣-٩)
- ١٣- برهن على ان الطاقة الحركية للدوران كما اعطيت في المعادلة (١٢-٩)  
تساوي  $\frac{1}{2} I \omega^2$  وذلك باستخدام المعادلة (١٤-٩) والعلاقات  
 $\omega_x = \omega \cos \alpha$  ,  $\omega_y = \omega \cos \beta$  ,  $\omega_z = \omega \cos \gamma$
- ١٤- جد مقدار واتجاه العزم المسلط على الجسم من المحور الساند في  
النريين (١-٩) و (٣-٩)
- ١٥- صفيحة اعتباطية الشكل تدور بحرية تحت تأثير عزم يساوي صفرا •  
اثبت باستخدام معادلات اويلر ان المركبة  $\omega_1$  للسرعة الزاوية في مستوى  
الصفيحة (المستوى - xy) تكون ثابتة بالمقدار  $\omega$  ولو ان مركبة  
z للسرعة الزاوية  $\omega_z$  ليست من الضروري ان تكون ثابتة (تبيه استخدم  
نظرية المحاور المتعامدة) • ما نوع الصفيحة التي تعطي  $\omega_z = \text{constant}$
- ١٦- صفيحة مربعة طول ضلعها  $a$  تدور بحرية بدون تأثير عزم • اذا كان  
محور الدوران يصنع زاوية  $45^\circ$  مع محور تناظر الصفيحة • جد  
زمنذبذبة طواف محور الدوران حول محور التناظر وزمنذبذبة  
طواف محور التناظر حول الخط غير المتقلب للحالتين. (أ) صفيحة  
رقيقة و (ب) صفيحة سمكها  $a/4$  .
- ١٧- اشتق المعادلتين (١-٢٣) و (١-٢٥) مباشرة من معادلات اويلر  
(تبيه : ضع معادلات اويلر للحالة التي تكون فيها العزم يساوي  
صفرا ثم اضرب الاولى بـ  $\omega_x$  والثانية بـ  $\omega_y$  والثالثة بـ  $\omega_z$  واجمع المعادلات الثلاث)

- ١٨- املأ الخطوات التي تؤدي الى استنباط المعادلة ( ٩ - ٤١ ) .  
 ١٩- جسم صلد له محور تناظر  $\omega$  يدور بحرية حول نقطة ثابتة بدون تأثير عزم  $\bullet$  اذا كانت الزاوية بين محور التناظر والمحور الانسي للدوران هي  $\alpha$   $\bullet$  برهن على ان الزاوية بين محور الدوران والخط غير المتقلب ( متجه  $\vec{I}$  ) هي :

$$\tan^{-1} \left[ \frac{(I_g - I) \tan \alpha}{I_g + I \tan^2 \alpha} \right]$$

- حيث  $I_g$  ( عزم القصور الذاتي حول محور التناظر ) هو اكبر من  $I$  (عزم القصور الذاتي حول المحور العمودي على محور التناظر) اثبت ان هذه الزاوية لا يمكن ان تتعدى  $(8^{-\frac{1}{2}})$   $\tan^{-1}$  .  
 ٢٠- جد الزاوية بين  $\vec{\omega}$  و  $\vec{I}$  للحالتين في تمرين (١٦)  
 ٢١- جد نفس الزاوية للارض .

- ٢٢- جسم صلد يدور بحرية حول مركز كتلته  $\bullet$  لا توجد هناك عزم مؤثرة  $\bullet$  اذا كانت جميع القصور الذاتية الرئيسية الثلاثة مختلفة اثبت بواسطة معادلات اويلر ان دوران الجسم سوف يكون مستقرا حول المحور الذي له اعظم عزم قصور ذاتي او المحور الذي له اصغر عزم قصور ذاتي  $\bullet$  اما اذا كان الدوران حول المحور المتوسط لعزم القصور الذاتي فدوران الجسم سوف لا يكون مستقرا ( يمكن توضيح ذلك بقذف كتاب في الهواء بعد لفه بخيط مرن )

- ٢٣- قرص فضائي دائري الشكل  $\bullet$  رقيق نصف قطره  $a$  وكتلته  $m$  يدور في الفضاء بانطلاق زاوي  $\omega$  حول محور تناظره  $\bullet$  فاذا ضرب نيزك حادة القرص واعطاه دفع  $\hat{P}$  وكان اتجاه  $\hat{P}$  موازيا لمحور القرص  $\bullet$  جد محصلة حركة القرص  $\bullet$



- ٢٤- جسم صلد له محور تناظر ويدور بسرعة زاوية  $\vec{\omega}$  في حركة ذات ابعاد ثلاثة حول مركز كتلته . حيث يسلط عليه عزمًا احتكاكيًا  $\vec{c}$  كالذي تد يحدث من سحب الهواء (أ) اثبت ان - مركبة  $\vec{\omega}$  باتجاه محور التناظر تتناقص اسياً exponentially مع الزمن (ب) اثبت ايضاً ان الزاوية بين السرعة الزاوية  $\vec{\omega}$  ومحور التناظر تتناقص بصورة مستمرة اذا كان عزم القصور الذاتي حول محور التناظر هو اعظم عزم رئيسي .
- ٢٥- جايرسكوب بسيط يتكون من قرص دائري ثقيل كتلته  $m$  ونصف قطره  $a$  مثبت في مركز قضيب رفيع كتلته  $m/2$  وطوله  $a$  . اذا دوام الجايرسكوب بمعدل زمني معين  $S$  بحيث صنع محوره زاوية  $45^\circ$  مع العمود ، اثبت ان هناك قيمتين ممكنتين للمعدل الزمني للطواف  $\dot{\theta}$  بحيث يطوف الجايرسكوب بصورة مستمرة بقيمة ثابتة ل  $\theta = 45^\circ$  .  
جد قيمتين عدديتين ل  $\dot{\theta}$  عندما يكون  $S = 900 \text{ rpm}$  ,  $a = 10 \text{ cm}$  .
- ٢٦- اذا بدأ الجايرسكوب في التمرين السابق باطلائه بزاوية  $\theta_1 = 45^\circ$  و  $\dot{\theta} = 0$  و بنفس التدويم بدلا من طوائفه بصورة مستمرة بزاوية ثابتة  $\theta$  . اكتب معادلة الطاقة وجد الغاية الاخرى ل  $\theta_2$  التي يصنعها محور الجايرسكوب مع العمود عند ترنجه .
- ٢٧- دوام قلم رصاص بموضع عمودي . ما هو اسرع تدويم يجب ان تصله به بالدوران بالدقيقة ، لكي يبقى القلم في موضعه العمودي . افرض ان القلم عبارة عن قضيب منتظم طوله ٢٠ سم وقطره ٨ مم .
- ٢٨- اذا قيد محور تدويم الجايرسكوب بحيث يبقى في مستوائتي على سطح الارض ، ولكه حر يوشرباي اتجاهه في ذلك المستوى . اثبت ان دوران الارض ينتج عنه عزم يحاول ان يوجه الجايرسكوب باتجاه خط الشمال - الجنوب . وهذا هو اساس البوصلة الجيروسكوبية .

- ٢٩- جد الكمية الممتدة للقصور الذاتي لمكعب صلب منتظم ضلعه  $a$  لمحاور نقطة اصلها (أ) في مركز المكعب (ب) في احد زوايا المكعب
- ٣٠- جد الكمية الممتدة للقصور الذاتي لتوازي مستطيلات صلب منتظم اضلعه  $4a, 2a, a$  لمحاور نقطة اصلها في احدى الزوايا وعندما تكون المحاور على امتداد حواف متوازي المستطيلات .
- ٣١- استخدم طريقة الحذف لايجاد الزخم الزاوي والطاقة الحركية للمكعب في التمرين ( ٩ - ٢٩ ) . عندما يدور المكعب حول القطر الطويل والمار في المركز . اعمل نفس الشئ في التمرين ( ٩ - ٣٠ )
- ٣٢- جد اتجاهات المحاور الرئيسية للمكعب في التمرين ( ٩ - ٢٩ ) و(ب) المكعب في التمرين ( ٩ - ٣٠ ) .

## الفصل العاشر

## معادلات لاكرانج

## Lagrange's Equations

سوف نضاف الان الى تطبيق قوانين نيوتن المباشر على حركة المنظومات البسيطة طريقة عامة اكثر متعة - فقد اكتشف عالم الرياضيات الفرنسي جوزيف لوس لاكرانج Joseph Louis Lagrange طريقة متنازة ومفيدة لايجاد معادلات حركة جميع المنظومات الديناميكية .

١٠-١) الاحداثيات المعممة Generalized Coordinates

رأينا ان موضع الجسم في الفضاء يمكن تعيينه تعيينا كاملا بثلاث احداثيات . وقد تكون هذه ، ديكارتيه ، كروية ، اسطوانية ، او محيية الحقيقية اية ثلاثة برمترات مختارة بصورة ملائمة . ونحتاج الى احداثيان فقط اذا كان الجسم مقيد الحركة في مستواو سطح ثابت . بينما اذا كان الجسم يتحرك على خط مستقيم او ضحني ثابت فعندئذ يكفي احداثي واحد . في حالة منظومة متكونة من  $n$  من الجسيمات نحتاج بصورة عامة الى  $3n$  من الاحداثيات لتعيين مواضع جميع الجسيمات في وقت واحد بصورة كاملة - الشكل العام configuration للمنظومة . اما اذا فرضت تسود على المنظومة ، فنحتاج الى عدد من الاحداثيات اقل من  $3n$  لتعيين الشكل الهام للمنظومة . مثلاً ، اذا كانت المنظومة عبارة عن جسم صلب فعندئذ نحتاج فقط الى موضع نقطة ملائمة تتخذ مرجعاً في الجسم ( مثلاً مركز الكتلة ) وميلان الجسم في الفضاء لتعيين الشكل العام ونحتاج في هذه الحالة الى ستة احداثيات فقط = ثلاث للنقطة المرجعية وثلاث اخرى ( مثل زوايا اويلر ) للميلان . ويتطلب بصورة عامة اصغر عدد معين  $n$  لتعيين الشكل العام للمنظومة معينة . وسوف نرسل لهذه الاحداثيات بالرموز

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

والتي تسمى بالاحداثيات المعممة *generalized coordinates*. قد يكون الاحداثي  $q_i$  زاوية او مسافة . فاذا كان بالاضافة الى تعيين شكل المنظومة العام ، بإمكان اى احداثي ان يتغير بصورة مستقلة عن الاحداثيات الاخرى فعندئذ يقال عن المنظومة بانها هولونوميك *holonomic* وفي هذه الحالة يساوي عدد الاحداثيات  $n$  عدد

درجات الحرية *degrees of freedom* للمنظومة .

وفي منظومة ليست هولونوميك ، لا تتغير جميع الاحداثيات بصورة مستقلة عن بعضها البعض ، اى ان عدد درجات الحرية تكون اقل من عدد الاحداثيات الاضطرر اللزيم لتعيين الشكل . وكشال على منظومة ليست هولونوميك الكرة المقيدة لتدحرج على مستو تام الخفيفة . حيث يتطلب هنا خمسة احداثيات لتعيين الشكل العام اثنان منها لموضع مركز الكرة وثلاث لميلانها . ولكن لا يمكن ان تتغير جميع الاحداثيات بصورة مستقلة لانه ، اذا تدحرجت الكرة فعلى الاقل يجب ان يتغير احداثيان . وفي بحثنا الحالي ، سوف نعتبر نقط منظومات الهولونوميك . اذا كانت المنظومة متكونة من جسيم واحد ، فيمكن كتابة الاحداثيات

الديكارتيه كدوال للاحداثيات المعممة على النحو التالي :

$x = x(q)$  درجة حرية واحدة - الحركة على منحني

$\left. \begin{aligned} x &= x(q_1, q_2) \\ y &= y(q_1, q_2) \end{aligned} \right\}$  درجتا حرية - الحركة على سطح

$\left. \begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3) \\ y &= y(q_1, q_2, q_3) \\ z &= z(q_1, q_2, q_3) \end{aligned} \right\}$  ثلاث درجات حرية . الحركة في الفضاء

افرض ان الاحداثيات  $q$ 's تتغير من القيم الابتدائية  $(q_1, q_2, \dots)$  الى القيم المجاورة  $(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2)$ . فالتغيرات التي تقابلها في الاحداثيات الديكارتية هي كما يلي :

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots$$

وهكذا المشتقات الجزئية  $\partial x / \partial q_1$  وهلم جرا ، هي دوال للاحداثيات  $q$ 's . وكشال خاص ، افرض حركة جسيم في مستو لنختار المحاور القطبية

$$q_1 = r \quad q_2 = \theta$$

هدف

$$x = x(r, \theta) = r \cos \theta$$

$$y = y(r, \theta) = r \sin \theta$$

,

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial r} \delta r + \frac{\partial x}{\partial \theta} \delta \theta = \cos \theta \delta r - r \sin \theta \delta \theta$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial r} \delta r + \frac{\partial y}{\partial \theta} \delta \theta = \sin \theta \delta r + r \cos \theta \delta \theta$$

تمثل التغيرات في  $x$  و  $y$  الناتجة عن تغيرات صغيرة في  $r$  و  $\theta$  . افرض الان ان منظومة تتكون من عدد كبير من الجسيمات ، لنفرض ان هذه المنظومة لها  $n$  درجات حرية واحداثياتها المعممة  $q_1, q_2, \dots, q_n$  هدفنا ان نهي تغير من الشكل  $q_1, q_2, \dots, q_n$

الى الشكل المجاور  $(q_1 + \delta q_1, \dots, q_n + \delta q_n)$  فيتحرك الجسم  $i$  من نقطة مثل  $(x_1, y_1, z_1)$  الى النقطة المجاورة  $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, z_1 + \delta z_1)$

حيث

$$\delta x_1 = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_1}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$\delta y_1 = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_1}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$\delta z_1 = \sum_{k=1}^n \frac{\partial z_1}{\partial q_k} \delta q_k$$

فالمشتقات الجزئية هي مرة اخرى دوال للاحداثيات  $q$ 's سوف نتبنى الاصطلاح الذى يلزم الرمز  $i$  ليشير الى المحاور الديكارتيه والحرف  $x$  ليشير الى الاحداثيات المعممة . ونتبنى ايضا الرموز الملائمة والتي تلزم الرمز  $x_1$  ليشير الى اى المحاور الديكارتيه . اذن لمنظومة تتكون من  $N$  من الجسيمات  $i$  ستأخذ القيم من  $1$  الى  $3N$ .

القوى المعممة (٢-١٠) Generalized Forces

اذا هانى جسم اراحة  $\delta \vec{r}$  تحت تاثير قوة  $\vec{F}$  نعلم ان الشغل  $\delta W$  المنجز من القوة عندئذ يكون

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z$$

وبدلالة رموزنا التي تهيئهاها تساوي يكون الشغل

$$\delta W = \sum_i F_i \delta x_i \quad 1-10$$

و واضح ان العلاقة المذكورة اعلاه لا تصح لجسيم واحد فقط ، وانما تصح كذلك لمنظومة متكونة من عدد كبير من الجسيمات . لجسيم واحد تاخذ 1 القيم من واحد الى ثلاثة . وتمتد 1 لـ  $\infty$  من الجسيمات من واحد الى  $\infty$  .

لتعبر الان عن الزيادة  $\delta x_1$  بدلالة المحاور المعممة ، ههنا

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_1 (F_1 \sum_k \frac{\delta x_1}{\delta q_k}) \delta q_k \\ &= \sum_1 ( \sum_k F_1 \frac{\delta x_1}{\delta q_k} ) \delta q_k \end{aligned}$$

ومن ثم ترتيب الجسيم نحصل على

$$\delta W = \sum_k ( \sum_1 F_1 \frac{\delta x_1}{\delta q_k} ) \delta q_k$$

ويمكن كتابة هذه على النحو التالي :

$$\delta W = \sum_k Q_k \delta q_k \quad (10-2)$$

حيث

$$Q_k = \sum_1 (F_1 \frac{\delta x_1}{\delta q_k}) \quad (10-3)$$

الكمية  $Q_k$  المرنة بالمعادلة المذكورة اعلاه تسمى بالقوة المعممة المرافقة للاحداثي  $q_k$  . ولما كان لحاصل الضرب  $\delta q_k$  وحدات المسار ههنا تكون وحدات  $Q_k$  وحدات قوة اذا كانت  $q_k$  تمثل مسافة ووحدات عزم اذا كانت  $q_k$  تمثل زاوية .

اعتياديا ، ليس من الضروري ، وغير عطلي استخدام المعادلات  
 (١٠-٣) لحساب قيمة  $Q_k$  الحقيقية ، بدلا من ذلك يمكن ايجاد كل  
 قوة معممة  $Q_k$  مباشرة من حقيقة كون  $\delta q_k$   $Q_k$  يمثل الشغل المنجز  
 على المنظومة من القوى الخارجية عندما يتغير الاحداثي  $q_k$  بمقدار  $\delta q_k$   
 (تبقى بقية الاحداثيات المعممة ثابتة) . فمثلا ، اذا كانت المنظومة  
 جسما صلبا ، فالشغل المنجز من القوى الخارجية عندما يدور الجسم  
 خلال زاوية  $\delta \theta$  حول محور معلوم هو  $\delta \theta I_0$  حيث  $I_0$  هو مقدار  
 العزم الكلي لجميع القوى حول المحور . وفي هذه الحالة تكون  $I_0 \theta$  هي  
 القوى المعممة المرافقة للاحداثي  $\theta$  .  
 القوى المعممة للمنظومات الحافظة

راينا في الفصل الرابع ان المركبات المتعامدة للقوة الموضرة على  
 جسيم في مجال قوة محافظ تعطي كالاتي  

$$F_i = - \frac{\partial V}{\partial x_i}$$
 حيث  $V$  هي دالة طاقة الجهد . ونفقا لذلك تصبح علاقتنا للقوة  
 المعممة كما يلي

$$Q_k = - \left( \sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right)$$

والتعبير بين القوسين هو المشتقة الجزئية للدالة  $V$  بالنسبة للاحداثي

$$q_k \text{ . اذن} \quad (١٠-٤)$$

$$Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

فمثلا اذا استخدمنا المحاور القطبية  $q_1=r$  ،  $q_2=\theta$  فعندئذ تصبح  
 القوى المعممة  $Q_r = -\partial V / \partial r$  ،  $Q_\theta = -\partial V / \partial \theta$  اذا كانت  $V$  هي دالة  $r$   
 فقط (قوة مركزية) فعندئذ  $Q_\theta = 0$  .



لكي نجد المعادلات التفاضلية للحركة بدلالة الاحداثيات المعممة

$$F_i = m_i \ddot{x}_i$$

يمكن ان نهتديء بالمعادلة

ونحاول كتابتها مباشرة بدلالة الاحداثيات المعممة  $q^s$  ولكن هناك طريقة اخرى تعتمد على فرضيات الطاقة يكون استخدامها سهلا سنحسب اولا الطاقة الحركية  $T$  بدلالة المحاور الديكارتية ثم سنعتبر فيها هدفذ كدالة للاحداثيات المعممة ومشتقاتها بالنسبة للزمن  $t$  اذن  $T$  الطاقة الحركية لنظومة تتكون من  $N$  من الجسيمات والتي عبرها فيها في السابق كما يلي

$$T = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \right]$$

سوف نكتب ببساطة الان كما يلي :

$$T = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \quad (5-10)$$

حيث الاحداثيات الديكارتية  $x_i$  هي دوال للاحداثيات المعممة  $q_k$  وللتعميم سوف نشملا ايضا امكانية احتواء العلاقة الدالية بين  $x^s$  و  $q^s$  على الزمن  $t$  بوضوح  $t$  وهذه هي الحالة اذا كانت هناك مقيدات متحركة كجسيم مقيد ليتحرك على سطح  $t$  هو نفسه  $t$  يتحرك بطريقة ما  $t$  يمكننا كتابة

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

اذن

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (6-10)$$

في المعادلة المذكورة اعلاه وكل ما يتبع  $t$  ما لم نذكر العكس  $t$  سوف نفرض ان مدى  $i$  هو  $3N, \dots, 2, 1$  حيث تمثل  $N$  عدد الجسيمات في النظومة  $t$  ومدى  $k$  هو  $3, 2, 1, \dots, n$  حيث  $n$  هو عدد الاحداثيات المعممة (درجات الحرية) للنظومة  $t$  ومن معاينة المعادلة السابقة

نرى ان بإمكاننا اعتبار  $T$  كدالة للاحداثيات المعممة ، مشتقاتها بالنسبة للزمن ، وقد تكون دالة للزمن وواضح من علاقة  $\dot{x}_1$  ان

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x}{\partial q_k} \quad (7-10)$$

لنضرب الان بـ  $\dot{x}_1$  ونفاضل بالنسبة للزمن  $t$  . عندئذ نحصل على :

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{x}_1 \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left( \dot{x}_1 \frac{\partial x_1}{\partial q_k} \right) = \ddot{x}_1 \frac{\partial x_1}{\partial q_k} + \dot{x}_1 \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \frac{\dot{x}_1^2}{2} \right) = \ddot{x}_1 \frac{\partial x_1}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{\dot{x}_1^2}{2} \right) \quad \text{او}$$

تنتج الخطوة الاخير من امكانية عكس ترتيب التفاضل بالنسبة للزمن  $t$  و  $q_k$  او  $\dot{q}_k$  . ثم اذا اضربنا بـ  $m_1$  ووضعنا  $m_1 \ddot{x}_1 = F_1$  يمكننا كتابة

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} \right) = F_1 \frac{\partial x_1}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} \right)$$

اذن باخذ المجموع على 1 نجد ان

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_1 \left( F_1 \frac{\partial x_1}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_k} \quad (8-10)$$

واخيرا من تعريف القوة المعممة  $Q_k$  نحصل على النتيجة التالية :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} \quad (9-10)$$

هذه هي معادلات الحركة التفاضلية في الاحداثيات المعممة • وتسمى بمعادلات لاكرانج للحركة •

في الحالة التي تكون فيها الحركة محافظة بحيث  $Q' = Q$  تعطي من المعادلة (١٠-١٠) • عندئذ يمكن كتابة معادلات لاكرانج على النحو التالي :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (10-10)$$

وتلطم المعادلات اكثر عند تعريف دالة مثل  $L$  تسمى بدالة لاكرانج بحيث

$$\dot{L} = T - V$$

ومفهوم ان  $V, T$  هي دوال للاحداثيات المعممة • اذن • لما كانت

$$\partial V / \partial \dot{q} = 0 \quad \text{و} \quad V = V(q)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

عندئذ يمكن كتابة معادلات لاكرانج على النحو التالي

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (11-10)$$

اذن يمكن استنباط المعادلات التفاضلية للحركة لمنظومة محافظة بسهولة

اذا عرفنا دالة لاكرانج بدالة محاور مناسبة •

اذا كان قسم من القوى المعممة غير محافظ ونقل  $Q'_k$  والقسم الاخر

يمكن اشتقاقه من دالة جهد مثل  $V$  فيمكننا كتابة

$$Q_k = Q'_k - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (12-10)$$

عندئذ يمكننا ايضا تعريف دالة لاكرانج  $L = T - V$  ونكتب المعادلات التفاضلية

للحركة على الشكل التالي :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = Q_k' + \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (13-10)$$

ان الصيغة المذكورة اعلاه مناسبة للاستخدام ، مشلا هند تواجد  
نوى احتكاكية .

١٠- بعض تطبيقات معادلات لاكرانج

### Some Applications of Lagrange's Equations

سوف نوضح في هذا البند تعدد استخدامات معادلات لاكرانج  
الجديرة بالملاحظة وذلك بتطبيقها على عدد من الحالات الخاصة . والطريقة  
العامة لايجاد المعادلات التفاضلية لنظومة هي كما يلي :

- ١- اختر محاور مناسبة لتمثيل شكل النظومة العام .
- ٢- جد الطاقة الحركية  $T$  كدالة لهذه المحاور ومشتقاتها بالنسبة للزمن
- ٣- اذا كانت النظومة محافظة ، جد الطاقة الكامنة  $V$  كدالة للاحداثيات  
او اذا كانت النظومة غير محافظة ، جد القوى المعممة  $Q_k$  .
- ٤- المعادلات التفاضلية للحركة يمكن ان تعطى عندئذ من المعادلات (١٠-١٠) أو (١١-١٠) .

### Harmonic Oscillator المتذبذب التوافقي

خذ بنظر الاعتبار حالة متذبذب توافقي ذو بعد واحد والرض ان هناك  
قوة تضاهل تتناسب مع السرعة ، فالنظومة اذن غير محافظة . اذا كانت  $x$   
تمثل احداثي الازاحة ، عندئذ تصبح دالة لاكرانج كالآتي :

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

حيث  $m$  تمثل الكتلة و  $k$  برمتر المرونة الاضادي .  
اذن

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

، لتأخذ صورة غير محافظة يمكن استخدام معادلات لاكرانج بصيغة  
المعادلة (١٠ - ١٣) ، وهكذا فإن  $Q' = -c\dot{x}$  ومعادلة الحركة تصبح .

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}) = -c\dot{x} + (-kx)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

أو

هذه معادلة المتذبذب التوافقي المتضائل المعروفة والتي درسناها سابقاً .

جسيم منفرد في مجال مركزي

لنجد معادلات لاكرانج للحركة لجسيم يتحرك

في مستو تحت تأثير قوة مركزية . سوف نختار الاحداثيات القطبية

$$q_2 = \theta , q_1 = r \text{ . هدفنا}$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

$$V = V(r)$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r)$$

المشتقات الجزئية المناسبة هي كما يلي :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} , \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} - \frac{\partial V}{\partial r} = m r^2 \dot{\theta} + F_r$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 , \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$$

معادلات الحركة ، أي المعادلات (١٠ - ١١) ، هي إذن

$$m\ddot{r} = m r \dot{\theta}^2 + F_r \quad \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = 0$$

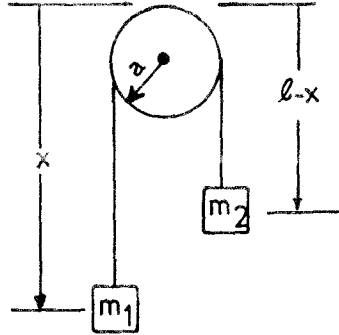
وهذه مماثلة للمعادلات التي استعملناها في البند (٦-٧) لحركة جسيم

في مجال مركزي •

### Atwood's Machine

ماكسة اتود

منظومة ميكانيكية تسمى بـماكسة اتود تتكون من ثلثين كتليين متساويين  $m_1$  و  $m_2$  على التتالي • وقد ربطتا بحبل خفيف غير قابل للمد والبسط طولها  $l$  ويمر على بكره (الشكل ١٠ - ١) • للمنظومة درجة حرية واحدة • سوف نفرض ان المتغير  $x$  يمثل شكل المنظومة العام • حيث  $x$  هي المسافة العمودية من البكره الى الكتلة  $m_1$  كما هو مبين في الشكل



الشكل ١٠ - ١ ماكسة اتود

وواضح ان الانطلاق الزاوي للبكره هو  $\dot{x}/a$  حيث  $a$  يمثل نصف القطر  
اذن الطاقة الحركية للمنظومة هي

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \frac{\dot{x}^2}{a^2}$$

حيث  $I$  يمثل عزم القصور الذاتي للبكره وتعطى الطاقة الكامنة كما يلي

$$V = -m_1 g x - m_2 g (l - x)$$

إذا أهبطنا الاحتكاك ، فسدالة لاكرانج تكون كما يلي :

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}) \dot{x}^2 + g(m_1 - m_2) x + m_2 g \ell$$

ومن معادلة لاكرانج

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

نحصل على

$$(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}) \ddot{x} = g(m_1 - m_2)$$

أو

$$\ddot{x} = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + I/a^2}$$

وهذا هو تعجيل المنظومة . إذا كانت  $m_1 > m_2$  نلاحظ أن  $m_1$  تهبط بتعجيل ثابت ، بينما إذا كانت  $m_1 < m_2$  عندئذ ترتفع  $m_2$  بتعجيل ثابت . والحد  $I/a^2$  في المقام يبين تأثير القصور الذاتي للبكرة .

The Double Atwood Machine      ماكسة اتود المزدوجة

افرض المنظومة الصينية في الشكل ( ١٠ - ٢ ) . هنا استبدلنا احدى ثقلي ماكسة اتود البسيطة ببكرة اخرى تحمل ثقليين مربوطين بحبل اخر للمنظومة الان درجتان من درجات الحرية . سوف نعين شكلها الممام بالاحداثيين  $x$  و  $x'$  كما هو مبين في الشكل . لنهمل كتلي البكرتين في هذه الحالة للسهولة . عندنا

$$T = \frac{1}{2}m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 (-\dot{x} + \dot{x}')^2 + \frac{1}{2}m_3 (-\dot{x} - \dot{x}')^2$$

$$V = -m_1 g x - m_2 g (\ell - x + x') - m_3 g (\ell - x + \ell' - x')$$

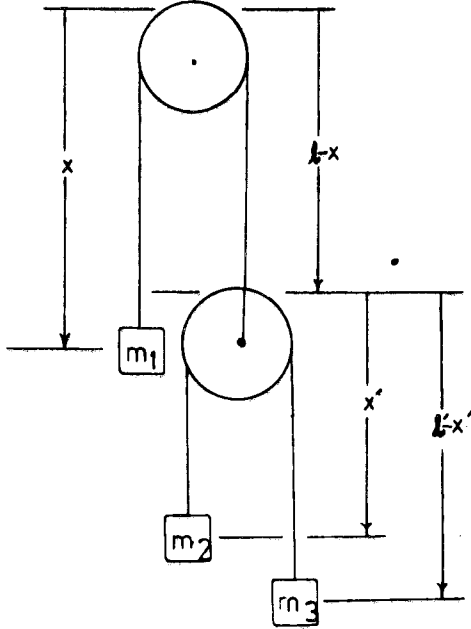
حيث  $m_3, m_2, m_1$  تمثل الكتل الثالث و  $\ell, \ell'$  تمثل طولي حبلتي

التوصيل • عندئذ

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(-\dot{x} + \dot{x}')^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{x} + \dot{x}')^2 + g(m_1 - m_2 - m_3)x + g(m_2 - m_3)x' + \text{constant}$$

ومعادلات الحركة

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} = \frac{\partial L}{\partial x'}$$



الشكل (١٠-٢) ماكسة اتود المركبة

$$m_1\ddot{x} + m_2(\ddot{x} - \ddot{x}') + m_3(\ddot{x} + \ddot{x}') = g(m_1 - m_2 - m_3)$$

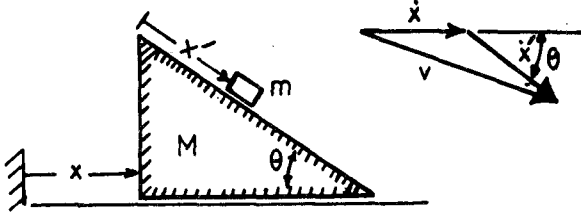
$$m_2(-\ddot{x} + \ddot{x}') + m_3(\ddot{x} + \ddot{x}') = g(m_2 - m_3)$$

ومهما يمكن ايجاد التعجيلين  $\ddot{x}$  و  $\ddot{x}'$  بواسطة الجبر البسيط.



جسيم ينزلق على سطح مائل متحرك

لنفرض حالة جسيم ينزلق على سطح مائل الملس الذي ينزلق بحرية على سطح افقي الملس، كما هو مبين في الشكل (١٠-٣). في هذه المسألة هناك درجتان من درجات الحرية، لذلك نحتاج الى احدائين لتعيين



الشكل (١٠-٣) متوازي مستطيلات ينزلق اسفل سطح مائل متحرك .  
 الشكل المام تعيننا كاملا . سنختار الاحدائين  $x$  و  $x'$  ، لاذاحة  
 السطح الانقبة من نقطة مرجعية . و لاذاحة الجسيم من نقطة مرجعية  
 على السطح المائل على التالي ، كما هو مبين .  
 من دراسة مخطط السرعة ، المبين في يمين الشكل ، نرى ان مربع انطلاق  
 الجسيم يعطى من قانون الجيب تمام .

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{x}'^2 + 2\dot{x}\dot{x}' \cos \theta$$

اذن الطاقة الحركية  $T$  للمنظومة هي كما يلي

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{x}'^2 + 2\dot{x}\dot{x}' \cos \theta) + \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

حيث  $M$  تمثل كتلة السطح المائل ، و  $\theta$  زاوية الاسفين كما هو مبين  
 و  $m$  هي كتلة الجسيم . الطاقة الكامنة للمنظومة لا تتوى على  $x$   
 لان المستوى يتحرك على سطح افقي . اذن يمكننا كتابة

$$V = -mgx' \sin \theta + \text{constant}$$

و

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{x}'^2 + 2\dot{x}\dot{x}' \cos \theta) + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + mgx' \sin \theta + \text{constant}$$

## معادلات الحركة

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} = \frac{\partial L}{\partial x'}$$

عندئذ تصبح

$$m(\ddot{x} + \ddot{x}' \cos \theta) + M\ddot{x} = 0$$

$$m(x - \ddot{x}' \cos \theta) = mg \sin \theta$$

عند حلها للتعجيلين  $\ddot{x}$  و  $\ddot{x}'$  نجد ان

$$\ddot{x} = \frac{-g \sin \theta \cos \theta}{\frac{m+M}{m} - \cos^2 \theta} \quad \ddot{x}' = \frac{g \sin \theta}{1 - \frac{m \cos^2 \theta}{m+M}}$$

ويمكن الحصول على النتيجة المذكورة اعلاه من تحليل القوى وردود فعل المنظومة ، ولكن هذه الطريقة مضجرة اكثر من طريقة معادلات لاكرانج المذكورة اعلاه .

اشتقاق معادلات اولر لجسم صلد حر الدوران

يمكن استخدام طريقة لاكرانج لاشتقاق معادلات اولر لحركة جسم عند . في هذا البند سنفرض حالة جسم صلد يدور بدون تأثير عزم رايانا ان الطاقة الحركية لجسم صلد تعطي من

$$T = \frac{1}{2}(I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2)$$

حيث السرعة الزاوية  $\omega$  منسوبة الى محاور الجسم الرئيسية . ولنعد الى الشكل ( ١ - ٥ ) الذي يبين زوايا اولر  $\phi$  ،  $\psi$  ،  $\theta$  . من دراسة الشكل نرى ان العلاقة بين السرعة الزاوية  $\omega$  و زوايا اولر ومشتقات ازماتها هي كما يلي :-

$$\omega_x = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi$$

$$\omega_y = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \quad (14-10)$$

$$\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$$

و عند اعتبار زوايا الاويلر كاحداثيات معممة تصبح معادلات الحركة كالآتي :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial T}{\partial \phi}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial T}{\partial \psi}$$

لان جميع القوى المعممة  $Q'_s$  تماوى صفرا . الان ، من قانون التسلسل

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial T}{\partial \omega_z} \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{\psi}} = I_{zz} \omega_z$$

اى ان

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = I_{zz} \dot{\omega}_z$$

(10-10)

وبالتماثل

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = I_{xx} \omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial \dot{\psi}} + I_{yy} \omega_y \frac{\partial \omega_y}{\partial \dot{\psi}}$$

$$= I_{xx} \omega_x (-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi)$$

$$+ I_{yy} \omega_y (-\dot{\theta} \cos \psi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi)$$

$$= I_{xx} \omega_x \omega_y - I_{yy} \omega_y \omega_x \quad (16-10)$$

ومن المعادلتين (10-10) و (16-10) ، المعادلة  $\psi$  تصبح

$$I_{zz} \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (I_{yy} - I_{xx}) = 0$$

والتي سبق ان راينا (البند 1-6) بانها تمثل احدى معادلات اولر لعركة جسم صلب بدون تأثير عزم . ويمكن الحصول على المعادلتين الاخرين من التبديل الدوري للاحداثيات  $x, y, z$  ويكون هذا صحيحا لاننا لم نعين اى محاور ديكارتية خاصة كما يفضل .

١٠-٥) الزخوم المعممة . الاحداثيات المهملة

Generalized Momenta. Ignorable Coordinates

افرض حركة جسيم مفرد يتحرك على خط مستقيم ( حركة خطية )

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad \text{طاقته الحركية تكون}$$

حيث  $m$  تمثل كتلة الجسيم ، و  $x$  احداثي موضعه . والان بدلا من تعريف زخم الجسيم  $P$  بحاصل الضرب  $m \dot{x}$  يمكننا تعريف  $P$  بالكيفية  $\partial T / \partial \dot{x}$  ، اى

$$P = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

في حالة منظومة توصف بالاحداثيات المعممة  $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_n$  الكميات  $P_k$  المعرنة بما يلي :

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (17-10)$$

تسمى بالزخوم المعممة (١) . عندئذ يمكن كتابة معادلات لاغرانج للمنظومة المحافظة كما يلي

(١) اذا كانت دالة الطاقة الكامنة  $V$  لا تحتوى على  $\dot{q}_k$  بشكل ظاهر ، عندئذ

$$P_k = \partial L / \partial \dot{q}_k = \partial T / \partial \dot{q}_k$$

$$\dot{p}_x = \frac{\partial L}{\partial q_x} \quad (18-10)$$

افرض وبصورة خاصة ان احد الاحداثيات مثل  $q_\lambda$  لا يحتويه  $L$  بشكل ظاهر • عندئذ

$$\dot{p}_\lambda = \frac{\partial L}{\partial q_\lambda} = 0 \quad (19-10)$$

و

$$p_\lambda = \text{constant} = C_\lambda \quad (20-10)$$

في هذه الحالة يسمى  $q_\lambda$  بالاحداثي المهمل ignorable فالزخم المعمم المرافق للاحداثي المهمل اذن يكون ثابت حركة المنظومة •  
فمثلا ، في مسألة الجسم الذي ينزلق على سطح مائل ( بحث نسبي البند السابق ) • رأينا ان دالة لاكرانج  $L$  لا تحتوي على الاحداثي  $x$  • موضع السطح • اذن يكون  $x$  احداثي مهمل في هذه الحالة •

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} + m\dot{x}' \cos \theta = \text{constant}$$

وفي الحقيقة يمكننا ان نرى • ان  $p_x$  هو المركبة الانفية الكلية للزخم الخطي للمنظومة • ولما كانت لا تؤثر قوة انفية خارجية على المنظومة • فالمركبة الانفية للزخم الخطي يجب ان تكون ثابتة •

مثال اخر على الاحداثي المهمل يتواجد في حالة حركة جسم • في مجال مركزي • في الاحداثيات القطبية

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r)$$

كما هو مبين في المثال في البند ( ٤ - ١٠ ) • في هذه الحالة تكون  $\theta$  هي الاحداثي المهمل ، و

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} = \text{constant}$$

هنا  $p_\theta$  هو مقدار الزخم الزاوي •

## \* (١٠-٦) معادلات لاكرانج للقوى الدافعة

Lagrange's Equations for Impulsive Forces

افرض ان لدينا منظومة دايناميكية موصوفة بالاحداثيات المعممة  $q_k$  فيها جميع القوى المعممة المسلطة  $Q_k$  تكون صفرا باستثناء فترة زمنية قصيرة  $\mathcal{T}$ . يمكننا تكامل معادلات لاكرانج كما يلي :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} + Q_k$$

$$\int_0^{\mathcal{T}} d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) = \int_0^{\mathcal{T}} \frac{\partial T}{\partial q_k} dt + \int_0^{\mathcal{T}} Q_k dt$$

الان اذا كانت  $Q_k$  تقترب من اللانهاية بطريقة بحيث ان الدفع المعمم

$$\lim_{\mathcal{T} \rightarrow 0} \int_0^{\mathcal{T}} Q_k dt = \hat{p}_k \quad (١٠-٢١)$$

يتواجد ويكون محدودا ، عندئذ التكامل  $\int_0^{\mathcal{T}} \left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\right) dt$  يقترب من الصفر

لان الكمية  $\partial T / \partial q_k$  تبقى محدودة . يمكننا ان كتابه

$$\Delta \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) = \hat{p}_k$$

للتغيرات في الكميات  $\partial T / \partial \dot{q}_k$  نتيجة تطبيق الدفع المعمم  $\hat{p}_k$  على المنظومة للمنظومات التي لا تحتوى فيها دالة الجهد  $V$  على  $\dot{q}$ 's بشكل ظاهر بحيث  $\partial T / \partial \dot{q}_k = p_k$  ، يمكننا كتابة المعادله (١٠-٢٢) كما يلي :

$$\Delta p_k = \hat{p}_k \quad (١٠-٢٣)$$

حيث  $P_k$  هو الزخم المعمم المرافق للاحداثيات المعممة  $q_k$  .  
 يمكن ايجاد الدفوع المعممة  $\hat{P}_k$  بكل بساطة من حساب الشغل  
 الدفوعي  $\delta \hat{W}$  الذي يعطي من

$$\begin{aligned} \delta \hat{W} &= \hat{P}_a \delta q_a + \dots = \hat{P}_1 \delta q_1 + \hat{P}_2 \delta q_2 + \dots \\ &= \sum_k \hat{P}_k \delta q_k \end{aligned} \quad (10-11)$$

حيث  $\hat{P}_a$  هي الدفوع المسلطة و  $\delta q_a$  هي ازاحات  
 اعتباطية صغيرة من خلالها تعمل القوى الدافعة المسلطة ( خاضعة الى  
 مقيدات المنظومة ) .

### مثال

قضبان  $AB$  و  $BC$  طول كل منهما  $2a$  وكتلته  $m$  وصلا بفصل ناعم  
 في  $B$  ووضعا على طاولة افقية مسطحة بحيث تقع النقاط  $A, B, C$  على خط  
 مستقيم . جد الحركة مباشرة بعد ان سلط دفع  $\hat{P}$  في النقطة  $A$  كما  
 هو مبين في الشكل ( 10 - 1 )

لنختار الاحداثيات المعممة  $\theta_1, \theta_2, x, y$  حيث  $\theta_1, \theta_2$  هي  
 احداثيات موضع المفصل في  $B$  و  $\theta_1$  و  $\theta_2$  هما الزاويتان اللتان يصنعهما  
 القضيبين مع الخط الابتدائي  $ABC$  على التوالي . نالطاقة الحركية  $T$   
 للحركة الابتدائية تعطي من

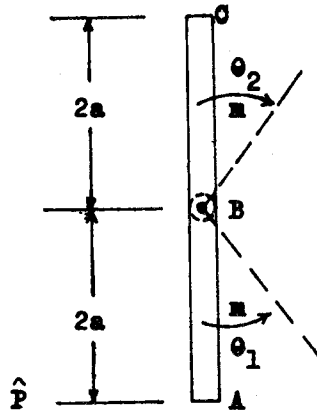
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\dot{x} + a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x} + a\dot{\theta}_2)^2 \\ &+ \frac{1}{2} I_{cm} \dot{\theta}_2^2 + m\dot{y}^2 \end{aligned}$$

حيث  $I_{cm}$  يمثل عزم القصور الذاتي لاي من القضيبين حول مركز كتلته .  
 الان ، الشغل الدفوعي يساوي  $\delta \hat{W}$  حيث

$$\delta s = \delta x + 2a \delta \theta_1$$

$$\delta \hat{W} = \hat{P} \delta s = \hat{P} (\delta x + 2a \delta \theta_1)$$

اذن



الشكل (١٠-١) دفع مسطوح على احد طرفي قضيب متصل بقضيب آخر .

ولكن للازاحة العامة للمنظومة ، عندما

$$\delta \hat{W} = \hat{P}_x \delta x + \hat{P}_y \delta y + \hat{P}_{\theta_1} \delta \theta_1 + \hat{P}_{\theta_2} \delta \theta_2$$

اذن ، للحالة التي نحن بصددنا

$$\hat{P}_x = \hat{P} \quad \hat{P}_y = 0 \quad \hat{P}_{\theta_1} = 2a\hat{P} \quad \hat{P}_{\theta_2} = 0$$

ان الحركة الابتدائية للمنظومة تعطي من المعادلات (١٠-٢٢) .

$$\Delta \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \hat{P}_x : m(\dot{x} + a\dot{\theta}_1) + m(\dot{x} + a\dot{\theta}_2) = \hat{P}$$

$$\Delta \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \hat{P}_{\theta_1} : ma(\dot{x} + a\dot{\theta}_1) + I_{cm}\dot{\theta}_1 = 2a\hat{P}$$

$$\Delta \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \hat{P}_{\theta_2} : ma(\dot{x} + a\dot{\theta}_2) + I_{cm}\dot{\theta}_2 = 0$$



$$\Delta \left( -\frac{\delta T}{\delta \dot{y}_2} \right) = \hat{P}_y : m\dot{y} = 0$$

وبتمويض  $I_{cm} = \frac{1}{3} ma^2$  وبحلها للسرع ، نحصل اخيرا على

$$\dot{x} = -\frac{\hat{P}}{m} \quad \dot{y} = 0$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{9}{4} \frac{\hat{P}}{am} \quad \dot{\theta}_2 = \frac{1}{4} \frac{\hat{P}}{am}$$

ويجب على القارئ ان يتحقق من ان النتيجة السابقة تعطي  $\vec{v}_{cm} = \frac{\hat{P}}{m}$  حيث  $\vec{v}_{cm}$  هي سرعة مركز كتلة المنظومة (١٠-٧) قاعدة التغير لهملتن

#### Hamilton's Variational Principle

لحد الان ، ارتكزت دراستنا في الميكانيك بصورة واسعة على قوانين نيوتن للحركة . وفي الحقيقة ، في الجزء الاول من هذا الفصل ، عندما استتبطننا معادلات لاكرانج استخدمنا قانون نيوتن الثاني في احدى الخطوات ؛ للمعادلة (١٠-٨) . وفي هذا البند سوف نستقصي طريقة اخرى لاستنباط معادلات لاكرانج هذه الطريقة تستند على فرضية اثبتت شموليتها بنتائجها قاعدة التغير لهملتن

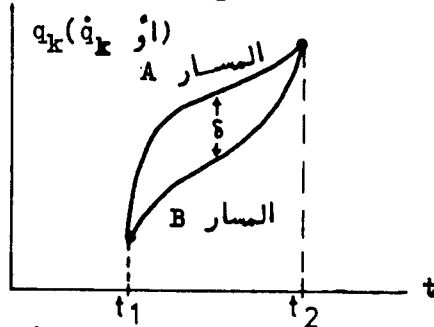
اعلنت هذه القاعدة في ١٨٣٤ من قبل رياضي اسكتلندي يسمى سيروليم هملتن Sir William R. Hamilton وهي تنص على ان حركة اى منظومة تحدث

بطريقة بحيث ان التكامل  $\int_{t_1}^{t_2} L dt$  ياخذ دائما اعظم او اصغر Extreme قيمة ، حيث ان  $L = T - V$  يمثل دالة لاكرانج للمنظومة . وبعبارة اخرى ، تنص قاعدة هملتن على انه

باستثناء جميع الطرق الممكنة التي يمكن ان تتغير فيها منظومة في فترة زمنية معينة  $t_2 - t_1$  فهناك حركة خاصة سوف تحدث ، التي يكون فيها التكامل المذكور اعلاه في نهايته العظمى او الصغرى ، ويمكن التعبير عن هذا النص رياضيا بالصيغة التالية :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (10 - 25)$$

حيث  $\delta$  تمثل تغييرا صغيرا ، وينتج هذا التغيير من اخذ الطرق المختلفة للتكامل بتغيير الاحداثيات المعممة والسرع المعممة كدوال للزمن  $t$  الشكل (10-5)



الشكل (10 - 5) توضيح لتغيير  $q_k$  أو  $\dot{q}_k$

ولكي نثبت ان معادلات لاكرانج للحركة تشتق مباشرة من المعادلة المذكورة اعلاه ، نحسب التغيير بوضع على فرض ان  $L$  تكون دالة معروفة للاحداثيات المعممة  $q_k$  ومشتقاتها الزمنية  $\dot{q}_k$  . عندنا

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt$$

الان  $\delta q_k$  تساوي الفرق بين دالتين للزمن  $t$  ومختلفتين قليلا . اذن

$$\delta \dot{q}_k = \frac{d}{dt} \delta q_k$$

اذن ، عند تكامل الحد الاخير بطريقة التجزئة ، نجد ان

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k dt = \left[ \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k dt$$

ولكن لقيمتين ثابتتين للغايته  $t_1$  و  $t_2$  يكون التغيير  $\delta q_k = 0$  في  $t_1$  ،  $t_2$  ،

اذن يتلاشى الحد المتكامل وينتج عن ذلك ان

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left[ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right] \delta q_k dt = 0 \quad (10-21)$$

الان ، اذا كانت جميع الاحداثيات المعممة  $q_k$  مستقلة عندئذ تكون تغييراتها

$\delta q_k$  ايضا مستقلة . اذن يجب ان يتلاشى كل حد بين قوسين ، في التكامل

لكي يتلاشى التكامل نفسه . اذن

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

هذه هي تماما معادلات لاكرانج للحركة التي وجدناها في السابق .

فرضنا في الاشتقاق المذكور اعلاه تواجد دالة جهد اى ان المنظومة

التي نحن بصدد ها تكون محافظة . يمكن جعل طريقة التغيير بحيث تتضمن

المنظومات غير المحافظة وذلك باستبدال  $L$  في تكامل التغيير بالكمية

$T + W$  حيث  $W$  هو الشغل المنجز من جميع القوى ، محافظة كانت ام غير

محافظة . عندئذ تدخل القوة المعممة  $Q_k$  كما عرفت سابقا ، المعادلة

(10-2) ، ويقودنا نفس الاسلوب المذكور اعلاه الى الصيغة العامة

لمعادلات لاكرانج ، المعادلة (10-1) .

١٠-٨) دالة هملتن • معادلات هملتن

The Hamiltonian Function. Hamilton's Equations

افرض الدالة التالية للاحداثيات المعممة

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L$$

فالطاقة الحركية  $T$  لنظومات ديناميكية بسيطة هي دالة متجانسة من الدرجة الثانية في الـ  $q$ 's والطاقة الكامنة  $V$  هي دالة في الـ  $q$ 's

$$L = T(q_k, \dot{q}_k) - V(q_k) \quad \text{نقطه، بحيث ان}$$

والان من نظرية اولر للدوال المتجانسة (٧) عندنا

$$\sum_k \dot{q}_k p_k = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T$$

اذن

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L = 2T - (T - V) = T + V \quad (٢٧-١٠)$$

اي ان الدالة  $H$  تساوي الطاقة الكلية من نوع المنظومات التي نرضاهما

افرض اننا نأخذ بنظر الاعتبار حلول المعادلات  $n$  التالية

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

لـ  $q$ 's بدلالة الـ  $p$ 's و  $q$ 's اي

$$\dot{q}_k = \dot{q}_k(p_k, q_k)$$

(٧) تنص نظرية اولر لدالة متجانسة  $f$  من درجة  $n$  في المتغيرات

$x_1, x_2, \dots, x_r$  اي ان

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_r \frac{\partial f}{\partial x_r} = nf$$

بهذه المعادلات يمكننا عندئذ ان نمسّر عن  $H$  كدالة ل  $p$ 's و  $q$ 's

$$H(p_k, q_k) = \sum_k p_k \dot{q}_k (p_k, q_k) - L \quad (10 - 28)$$

لحسب تغيير الدالة  $H$  الذي يقابل تغيير  $p_k, q_k$  عندنا

$$\delta H = \sum_k \left[ p_k \delta \dot{q}_k + \dot{q}_k \delta p_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k \right]$$

ويختصر في داخل القوسين الحد الاول مع الحد الثالث لان  $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$  من التعريف . كذلك ، لما كانت معادلات لاكرانج يمكن كتابتها كالآتي :

$$\delta H = \sum_k \left[ \dot{q}_k \delta p_k - \dot{p}_k \delta q_k \right] \quad \dot{p}_k = \partial L / \partial q_k$$

والان التغيير في  $H$  يجب ان يعطى من المعادلة

$$\delta H = \sum_k \left[ \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k \right]$$

وينتج من هذا ان

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k$$

(10 - 29)

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k$$

هذه المعادلات تسمى بمعادلات هملتن القانونية للحركة

**Hamilton's canonical equations of motion**

وهي تتكون من  $2n$  من المعادلات التفاضلية من الدرجة الاولى هيمنما تتكون معادلات لاكرانج من  $n$  من المعادلات من الدرجة الثانية . لقد استتبطننا معادلات هملتن للنظومات المحاذية البسيطة . ويمكن البرهنة

على ان المعادلات ( ١٠ - ٢٩ ) تصح ايضا للمنظومات الاكثر عمومية كالمنظومات غير المحافظة ، اى المنظومات التي تحتوى فيها دالة الطاقة الكامنة على الـ  $q$ 's وللنظومات التي يحتوى فيها  $T$  على الزمن بوضوح ، ولكن ليس من الضروري في هذه الحالات ان تكون الطاقة الكلية مساوية الى  $H$  . وسوف يصادف الطالب معادلات هملتن عندما يدرس الميكانيك الكمي ( النظرية الاساسية للظاهرة الذرية ) وهناك تطبيقات ايضا لمعادلات هملتن في الميكانيك السماوي

### امثلة

١- اشتق معادلات هملتن للحركة لتذبذب توافقى احادى البعد . عندنا

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad V = \frac{1}{2} kx^2$$

$$P = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \dot{x} = \frac{P}{m}$$

اذن

$$H = T + V = \frac{1}{2m} P^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

### نمادلات الحركة

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x} \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p}$$

عندئذ تصبح

$$\frac{P}{m} = \dot{x} \quad kx = -\dot{P}$$

المعادلة الاولى عبارة عن نص ثاب للعلاقة بين السرعة والزخم في هذه الحالة . وعند استعمال المعادلة الاولى ، يمكن كتابة الثانية كما يلي :

$$kx = - \frac{d}{dt} (m\dot{x})$$

او عند اعادة ترتيب الحدود نحصل على

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

وهذه معادلة المتذبذب التوافقي المعروفة

٢- جد معادلات هاملتن لحركة جسيم في مجال مركزي .

هنا عندنا

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

$$V = V(r)$$

بالاحداثيات القطبية . اذن

$$P_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$\dot{r} = \frac{P_r}{m}$$

$$P_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{P_\theta}{mr^2}$$

ووفقا لذلك

$$H = \frac{1}{2m} (P_r^2 + \frac{P_\theta^2}{r^2}) + V(r)$$

معادلات هاملتن

$$\frac{\partial H}{\partial P_r} = \dot{r}, \quad \frac{\partial H}{\partial r} = -\dot{P}_r, \quad \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \dot{\theta}, \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = -\dot{P}_\theta$$

عندئذ تصبح

$$\frac{P_r}{m} = \dot{r}$$

$$\frac{\partial V(r)}{\partial r} - \frac{P_\theta^2}{mr^3} = -\dot{P}_r$$

$$\frac{P_{\theta}}{mr^2} = \dot{\theta}$$

$$0 = -\dot{P}_{\theta}$$

تظهر المعادلتان الاخرتان ثبوت الزخم الزاوى اى

$$P_{\theta} = \text{constant} = mr^2 \dot{\theta} = h$$

ومنها المعادلتان الاوليتان يعطيان

$$m\ddot{r} = \dot{P}_r = \frac{h^2}{mr^3} + F_r$$

$$F_r = - \partial V(r) / \partial r \quad \text{لمعادلة الحركة القطبية ، حيث}$$

\* (١-١) • معادلات لاكرانج للحركة المقيدة

### Lagrange's Equations of Motion with Constraints

من المناسب في بعض الاحيان التعمير عن المعادلات التفاضلية للحركة لنظومة مقيدة بدلالة عدد من الاحداثيات اكثر من الحاجة الحقيقية • هدفنا يجب ان تكون المعادلات التفاضلية منسجمة compatible ايضا مع المعادلة او معادلات • المقيد الذى قد يكون بصيغة معادلات شرطية من النوع

$$g(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \quad (٣٠-١٠)$$

وبتفاضلها نحصل على الصيغة التفاضلية لشرط المقيد

$$\sum_k \frac{\partial g}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \quad (٣١-١٠)$$



هناك ايضا انواع معينة للمقييدات تكون فيها العلاقة التفاضلية من النوع

$$\sum_k h_k \delta q_k = 0 \quad (10 - 32)$$

التي يمكن ايجادها ولكن هذه المعادلات لا يمكن تكاملها لتعطي المعادلة الشرطية من النوع  $r(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$  . مقيدات كهذه يقال عنها بانها ليست هولونوميك nonholonomic بينما اذا كان المقيد على شكل المعادلة (10 - 30) فيسمى هولونوميك .

على اية حال ، سواء كانت المقيدات هولونوميك او ليست هولونوميك فمن الممكن ايجاد المعادلات التفاضلية للحركة بالصيغة اللاگرانجية وذلك باستخدام طريقة المضروبات غير المعينة *undetermined multipliers* . من الملائم في هذا التطبيق استعمال قاعدة التغير لهيلتن .

لنضرب المعادلة التفاضلية للمقيد ، المعادلة (10 - 32) ، بالبرمتر  $\lambda$  . وهذا يمثل المضروب غير المعين الذي تيمته غير معروفة لحد الان . فاذا اضيف التعبير الناتج الى التكميلية للمتغير التكاملي في المعادلة (10 - 32) فمن الواضح ان النتيجة لا تتغير من ناحية تلاشي التكاملي ، اي

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \lambda h_k \delta q_k \right) dt = 0$$

وبسبب المقيد ،  $n - 1$  نقط من  $n$  يمكن اعتبارها حرة من الكميات  $\delta q_k$  . نختار الان قيمة للبرمتر  $\lambda$  بحيث يتلاشى احد الحدود بين القوسين ، من الحد الاول . عندئذ يمكن اعتبار الحدود  $n-1$  المتبقية مستقلة . ووفقا لذلك ، يجب ان يتلاشى الحدود المتبقية بين القوسين ايضا . اذن يمكننا كتابة

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \lambda h_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (10 - 33)$$

$$\sum_k h_k \dot{q}_k = 0 \quad (10 - 34)$$

نتجت المعادلة الاخيرة من تسمية المعادلة التفاضلية ذات المقيد، المعادلة (١٠ - ٣٤) على  $\delta t$ . هناك الان ما مجموعه  $n+1$  من المعادلات التفاضلية اذن يمكن ايجاد  $n+1$  من الكميات  $\lambda, q_1, q_2, \dots, q_n$  ويمكن التوسع في هذه الطريقة لكي تحتوى على اكثر من معادلة واحدة لقط ذات مقيد وذلك باضافة مفروضات غير معينة اكثر مع ما يقابلها من ال  $\lambda$  الى معادلات لاكرانج. ويمكن البرهنة على ان معادلات الحركة كما اصليت اصلاحه تطبق ايضا عندما تكون المقيدات متحركة. وللتوسع في معالجة هذه الطريقة على القارى ان يراجع كتابا متقدما (٣)

---

See, for example E.T. Whittaker, *Analytical Dynamics*, Cambridge University press, Cambridge, 1937.  
or G. Lanczos, *The Variational principles of Mechanics*, University of Toronto press, Toronto, 1949.

## تعارين

يجب استخدام طريقة لاكرانج لحل التعارين التالية ، ما لم يذكر خلاف ذلك .

١٠-١) • جد تعجيل كرة صلدة منتظمة تتدحرج اسفل سطح تمام الخشونة ، اذا علمت ان السطح ثابت ويعمل بزاوية  $\theta$  مع الاتق .

١٠-٢) • كرة كتلتها  $M$  تتدحرج اسفل اسفين متحرك كتلته  $M$  وزاويته  $\theta$  . فاذا كان الاسفين ينزلق بحرية على سطح افقي امس وكان التلامس بين الكرة والاسفين تام الخشونة جد تعجيل الاسفين .

١٠-٣) • ينزلق جسيم على سطح مائل امس ، ميله  $\theta$  يزداد بمعدل زمني ثابت  $\omega$  . فاذا كانت  $\theta=0$  في الزمن  $t=0$  ، وهو زمن بداية حركة الجسيم من السكون ، جد حركة الجسيم اللاحقة .

١٠-٤) • قالمبان كتلتاهما متساويتان ومقدار كل منهما  $m$  ربطا بحبل خفيف غير قابل للمط . فاذا وضع احد القالمبين على طاولة انقبة لمساء وعلق القالب الاخر على حافة الطاولة . جد تعجيل الضلومة .

١٠-٥) • حل تعرين ( ١٠-٤ ) للحالة التي يكون فيها الحبل ثقيلًا كتلته  $M$  .

١٠-٦) • جد حركة قذيفة في مجال جاذبية منتظم ، بدون مقاومة الهواء .

١٠-٧) • ضع معادلات الحركة لمزدوجة - مزدوجة ماكسة اتود السمي تتكون من ماكسة اتود واحدة ( كتلتها  $m_1$  و  $m_2$  ) مربوطتين بحبل خفيف يمر على بكره الى ماكسة اتود ثانية كتلتها  $m_3$  ،  $m_4$  اهل كتل جميع البكرات . جد التعجيلات الحقيقية للحالة  $m_2 = 4m$  ،  $m_1 = m$  .  $m_4 = 3m$  ،  $m_3 = 2m$

١٠-٨) • اثبت ان طريقة لاكرانج تعطى اتوماتيكيا معادلات الحركة الصحيحة

لجسيم يتحرك في مستويي محاور دائرة Oxy (تلميح)  $T = \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v}$

حيث  $(F_y = -\delta V / \delta y, F_x = -\delta V / \delta x, \vec{V} = \hat{i}(\dot{x} - \omega y) + \hat{j}(\dot{y} + \omega x))$

١٠-١ (١) حل التعرین السابق مرة ثانية للحركة في ثلاثة ابعاد

١٠-١٠ (١٠) جد المعادلات التفاضلية لحركة (بندول مرن) الذي يتكون من جسيم كتلته  $m$  مربوط بوتر مرن صلابته  $k$  وطوله غير الممتد يساوي  $l_0$ . افرض ان الحركة تحدث في مستوي افقي. استخدم المحاور القطبية  $r, \theta$ . واثبت ان المعادلات التفاضلية تختصر الى معادلة البندول البسيط عندما تكون  $r$  ثابتة والى معادلة نابض متذبذب بسيط عندما تكون  $\theta = \text{ثابت} = \text{صفر}$

١٠-١١ (١١) جد المعادلات التفاضلية العامة لحركة جسيم في المحاور الاسطوانية  $R, \theta, z$ . استخدم العلاقة

$$v^2 = v_R^2 + v_\theta^2 + v_z^2 = \dot{R}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2$$

١٠-١٢ (١٢) جد المعادلات التفاضلية العامة لحركة جسيم في المحاور الكروية  $r, \theta, \phi$ . استخدم العلاقة

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 + v_\phi^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2$$

١٠-١٣ (١٣) ارتفعت نقطة استناد بندول بسيط بتعجيل ثابت  $a$  بحيث كان ارتفاعها يساوي  $\frac{1}{2}at^2$  وسرعتها الشاقولية هي  $at$ . جد المعادلة التفاضلية لحركة بندول ذبذباته صغيرة بطريقة لاكرانج. اثبت ان زمنذبذبة البندول هي  $2\pi \left[ \frac{l}{(g+a)} \right]^{\frac{1}{2}}$  حيث  $l$  يمثل طول البندول.

١٠-١٤ (١٤) اذا كانت نقطة استناد بندول بسيط تتحرك باتجاه افقي بتعجيل ثابت  $a$  جد معادلة الحركة وزمن البذبذبة لذبذبات صغيرة.

١٠-١٥ (١٥) استخدم طريقة لاكرانج لايجاد المعادلات التفاضلية للحركة لبندول كروي في المحاور الكروية.

١٠-١٦) جد المعادلات التفاضلية لحركة بندول كروي من  $\theta$  كما في التمرين  
١٠-١٠ .

١٠-١٧) جد المعادلات التفاضلية لحركة جسيم مقيد الحركة على مخروط دائري - قائم الملس علما بان محور المخروط في وضع شاقولي .

١٠-١٨) اثبت في التمرين السابق انه عندما يعطى الجسيم حركة ابتدائية سيتذبذب بين دائرتين افقيتين على المخروط . ( تنبيه : استخدم المحاور الكروية مع  $\theta = \text{ثابت}$  ) . اثبت ان  $\dot{r}^2 = r(r)$  حيث  $r(r)=0$  له جذران يعرفان الغائيتين التي يجب ان يبقى الجسيم بينهما .

١٠-١٩) قضبان متماثلان AC, BC كتلة كل منهما  $m$  وطوله  $2a$  ربطا بمفصل ناعم في النقطة B . ووضع القضبان في حالة سكون على طاولة انقوية ملساء وكان كل منهما عمودي على الاخرى في البداية . فاذا سلط دفع P في النقطة A وعلى طول القضيب AB . جد حركة المنظومة مباشرة بعد تسليط الدفع .

١٠-٢٠) اثبت ان دالة لاكرانج

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - q \phi + q \vec{v} \cdot \vec{A}$$

تعطي المعادلة الصحيحة لحركة جسيم في مجال كهرومغناطيسي ، اي

$$m \ddot{\vec{r}} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

حيث

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad , \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

( تسمى الكمية المتجهة  $\vec{A}$  بمتجه الجهد والكمية العددية  $\phi$  بالجهد المسمى )

١٠-٢١) جد (أ) الزخم المعموم و (ب) دالة هملتن H لدالة لاكرانج المذكورة في تمرين (١٠-٢٠)

١٠- (٢٢) جد وحل معادلات هملتن القانونية ل (أ) تذبذبة ببمسدين

(ب) بندول بسيط

١٠- (٣٣) ضع معادلات هملتن لبندول كروى

١٠- (٢٤) تحقق من ان التكامل  $\int \mathcal{L} dt$  ياخذ قيمة عظمى وصغرى لحالة

جسم يسقط فى مجال جاذبية منتظم : لحل هذا التمرين ، افرض ان

$y(t) = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$  وقارن ناتج التكامل مع القيمة التماسية استنتجت من اخذ

دالة تختلف قليلا عن  $y(t)$  .

## الفصل الحادى عشر

## نظرية التذبذب Theory of Vibrations

الحالات البسيطة للمنظومات التي يمكنها ان تتذبذب حول وضع توازن configuration of equilibrium تشتمل على البندول البسيط، الجسم المربوط بنابض مرن، البندول الفيزيائي وما الى ذلك، جميع هذه الحالات لها درجة حرية واحدة، تتصف بتذبذب احادى التردد. عندما نفرض منظومات اكثر تعقيدا - منظومات لها عدة درجات حرية - سوف نجد انها لا تتصف بتردد واحد بل يحتمل حدوث عدة ترددات مختلفة. وعند دراستنا للمنظومات المتذبذبة، سوف نجد من المناسب استخدام الاحداثيات المعممة واستخدام طريقة لاكرانج لايجاد معادلات الحركة بدلالة هذه الاحداثيات.

## (١-١) الطاقة الكامنة والتوازن - الاستقرار

## Potential Energy and Equilibrium. Stability

قبل ان نبدأ بدراسة حركة منظومة حول وضع توازن، لنختبر باختصار التوازن نفسه. افرض ان منظومة لها  $n$  درجة حرية، وان الاحداثيات المعممة  $q_1, q_2, \dots, q_n$  تعين الوضع تعيينا كاملا. سوف نفرض ان المنظومة محافظة وان الطاقة الكامنة  $V$  هي دالة للاحداثيات  $q_i$  فقط. اى

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

راينا ان القوى المعممة  $Q_k$  تعطى من

$$Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1-11)$$

يعرف وضع التوازن بان انه الوضع الذى تتلاشى فيه جميع القوى المعممة، اى

$$Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \quad (2-11)$$

تحتوى هذه المعادلات على الشرط الضروري للمنظومة لكي تبقى في حالة سكون ، اذا كانت في البدء في حالة سكون . لكن اذا ازيحت المنظومة ازاحة صغيرة فقط فقد تعود او لاتعود الى حالة التوازن واذا ازيحت منظومة ازاحة صغيرة وحاولت دائما العودة الى التوازن ، يكون التوازن مستقرا ، stable وعا ذلك يكون التوازن غير مستقر unstable ( اذا كانت المنظومة لاتحاول الحركة نحو التوازن او بعيد منه ، يسمى التوازن بالمستمر neutral) الكرة الموضوعة (١) في قعر وعاء كروي (٢) على قمة وعاء كروي (٣) على سطح مستو هي امثلة على التوازن المستقر ، غير المستقر والمستمر على التوالي .

لنر كيف تدخل دالة الطاقة الكامنة  $V$  في الشرح . افرض ان دفنا صغيرا قد سلط على منظومة فجعلها تتحرك في وضع توازن . ولما كانت الطاقة الكلية ثابتة ، فيمكننا كتابة

$$T + V = T_0 + V_0$$

او

$$T - T_0 = -(V - V_0) \quad (3-11)$$

حيث  $T_0$  هي طاقة المنظومة الحركية عندما تكون في وضع التوازن (كنتيجة للدفع) ، و  $V_0$  هي الطاقة الكامنة في وضع التوازن . الان ، اذا كانت الطاقة الكامنة في نهايتها العظمى في وضع التوازن ، عندئذ  $V - V_0$  تكون سالبة ، وبناء على ذلك تكون  $T - T_0$  موجبة ، اي ان  $T$  تزداد عندما تبتعد المنظومة عن التوازن . وواضح ان هذه الحالة تكون غير مستقرة . والعكس ، اذا كانت الطاقة الكامنة في وضع التوازن في نهايتها الصغرى ، عندئذ تكون  $V - V_0$  موجبة ، و  $T - T_0$  سالبة ، اي ان  $T$  تتناقص . ولكن لايمكن ان تكون  $T$  سالبة ، وهكذا تتناقص  $T$  السى



- الصغرى وضع حدى قريب من التوازن ، طبعا يجب ان تكون  $T_0$  صغيرة جدا .
- ان التوازن في هذه الحالة يكون مستقرا . فمعيار التوازن المستقر اذن هو ان تكون الطاقة الكامنة في نهايتها الصغرى .

لمنظومة ذات درجة حرية واحدة  $q$  عندنا

$$V = V(q) \quad (٤-١١)$$

وفي التوازن

$$\frac{dV}{dq} = 0 \quad (٥-١١)$$

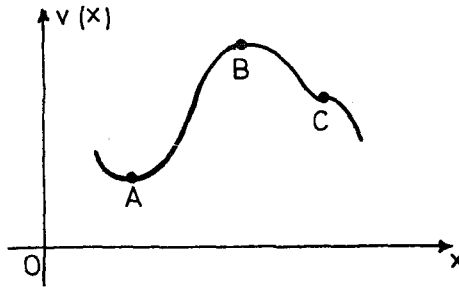
عندئذ يعبر عن الاستقرار كما يلي

$$\frac{d^2V}{dq^2} > 0 \quad (\text{مستقرة}) \quad (٦-١١)$$

$$\frac{d^2V}{dq^2} < 0 \quad (\text{غير مستقرة}) \quad (٧-١١)$$

اذا كانت  $d^2V/dq^2 = 0$  فيجب علينا اختبار المشتقات الاعلى رتبة .

(لقد بحثت هذه في البند التالي) . يمثل الشكل (١-١١) مخطط دالة جهد افتراضية



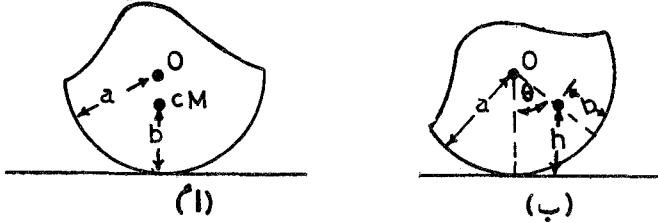
الشكل (١-١١)

دالة طاقة الجهد  $V(x)$  . تمثل النقطة A توازن مستقر . النقطتان B و C غير مستقرتي .

تمثل النقطة A موضع توازن مستقر وتمثل النقاط B, C مواضع توازن غير مستقره .

### مثال

لنختبر توازن جسم قاعدته مدوره (كروية او اسطوانية) التي تتوازن على سطح مستواقي . لنفرض ان a يمثل نصف قطر تقوس القاعدة ، وان مركز الكتلة OCM يبعد بمسافة b من نقطة التماس الابتدائية ، كما هو مبين في الشكل ٢-١١ (أ) . يبين الشكل ٢-١١ ب موضع الجسم بعد ازاحته ، حيث  $\theta$  تمثل الزاوية بين العمود والخط OCM (O هي مركز التقوس) ، كما هو مبين في الشكل .



الشكل ٢-١١ . الاحداثيات لتحليل التوازن المستقر لجسم قاعدته مستديرة

لنفرض ان h تمثل المسافة بين المستوى ومركز الكتلة ، عندئذ الطاقة الكامنة تعطى من

$$V = mgh = mg [a - (a - b) \cos \theta]$$

حيث m هي كتلة الجسم . عندئذ

$$\frac{dV}{d\theta} = mg (a - b) \sin \theta$$

اي ان

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \quad \text{عندما} \quad \theta = 0$$

اذن  $\theta = 0$  هي موضع توازن . اضف الى ذلك

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = mg (a - b) \cos \theta$$

$$\theta = 0 \quad \text{عندما} \quad \frac{d^2V}{d\theta^2} = mg(a - b)$$

اذن يكون التوازن مستقرا عندما  $a > b$  ، اي ان ، اذا كان مركز الكتلة يقع تحت مركز القوس .

(٢ - ١) فك دالة الطاقة الكامنة بمتسلسلة اساسية

Expansion of the Potential-Energy Function in a Power Series.

لنفرض اولا منظومة لها درجة حرية واحدة . وافرض اننا نملك دالة الطاقة الكامنة  $V(q)$  كمتسلسلة اساسية حول النقطة  $q = a$  . عندنا

$$V(q) = k_0 + k_1 (q - a) + \frac{1}{2!} k_2 (q - a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} k_n (q - a)^n + \dots$$

حيث

$$k_n = \left( \frac{d^n V}{dq^n} \right)_{q=a}$$

الان ، اذا كانت النقطة  $q=a$  هي موضع توازن ، عندئذ

$$k_1 = \left( \frac{dV}{dq} \right)_{q=a} = 0$$

$$V(q) = k_0 + \frac{1}{2!} k_2 (q - a)^2 + \dots \quad (٨ - ١)$$

ويعتمد استقرار التوازن في النقطة  $q = a$  على اول حد غير متلاشي بعد الحد

الاول  $k_0$  ، في المفكوك السابق . اذا كان اس هذا الحد  $n$  زوجيا ، عندئذ يكون

التوازن مستقرا ، اذا كانت المشتقة  $d^n V/dq^n$  موجبة . واذا كانت المشتقة سالبة

او كانت  $n$  فردية فالتوازن يكون غير مستقر . لكي نرى لماذا يكون ذلك ، لنفرض ان  $n$

تمثل رتبة الحد غير المتلاشي الاول . عندئذ لابتعاد صغير من نقطة التوازن عندنا

$$F = - \frac{\partial V}{\partial q} \simeq -k_n (q - a)^{n-1}$$

والان للتوازن المستقر يجب ان يكون اتجاه  $F$  نحو  $a$  ، اي انها سالبة اذا كانت  $q > a$  وموجبة اذا كانت  $q < a$  . يمكن ان تكون هذه الحالة فقط اذا كانت  $k_n$  موجبة و  $n$  زوجية .

في معظم الحالات التي لها اهمية فيزيائية هي عندما تكون  $n = 2$  اي ان الطاقة الكامنة تكون دالة من الدرجة الثانية للازاحة والقوة دالة خطية . فاذا نقلنا نقطة الاصل الى النقطة  $q=a$  واعتباطيا وضعنا  $V(0)=0$  عندئذ يمكننا كتابة

$$V(q) = \frac{1}{2} k_2 p^2 \quad (٩-١١)$$

اذا اهلنا القوى الاعلى ل  $q$  .

والتماثل ، لحالة منظومة لها عدة درجات حرية ، فيمكننا ان نسبب تحويل خطي بحيث يكون  $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$  وضعنا توازنا . اذا كان يتواجد وضع توازن . فدالة الطاقة الكامنة يمكن فكها عندئذ بالصيغة التالية

$$V(q_1, q_2, \dots, q_n) = \frac{1}{2} (k_{11} q_1^2 + 2k_{12} q_1 q_2 + k_{22} q_2^2 + \dots) \quad (١٠-١١)$$

حيث

$$k_{11} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} \right)_{q_1=q_2=\dots=q_n=0}$$

$$k_{12} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_{q_1=q_2=\dots=q_n=0}$$

وهلم جرا . وضعنا اعتباطيا  $V(0, 0, \dots, 0) = 0$  . لقد اختفت الحدود

الخطية في المفكوك لان الفك كان حول وضع توازن .

التعبير بين القوسين في المعادلة (١١-١٠) يسمى بصيغة الدرجة الثانية .  
 فاذا حددت (١) هذه الصيغة بانها موجبة اي اما ان تكون صفراً او موجبة لجميع  
 قيم  $q$ 's عندئذ وضع التوازن  $q_1=q_2=...=q_n=0$  يكون مستقراً .  
 ٣-١١ تذبذب منظومة ذات درجة حرية واحدة

Oscillations of a System with one Degree of Freedom.

اذا كانت منظومة لها درجة حرية واحدة فيمكن كتابة الطاقة الحركية  
 كما يلي :

$$T = \frac{1}{2} \mu \dot{q}^2 \quad (11-11)$$

هنا قد يكون المعامل  $\mu$  ثابتا او دالة للاحداثيات المعممة  $q$  على اية  
 حال . يمكننا فك  $\mu$  كتسلسلة اساسية في  $q$  ونكتب

$$\mu = \mu(0) + \left(\frac{d\mu}{dq}\right)_{q=0} q + \dots \quad (12-11)$$

اذ كانت  $q=0$  هي موضع توازن ، فسوف نفرض  $q$  صغيرة بحيث يكون التقريب  
 ساري المفعول .

$$\mu = \mu(0) = \text{constant} \quad (13-11)$$

ومن المعادلة (١١-٩) نرى ان دالة لاكرانج  $L$  يمكن كتابتها كما يلي :

(١) الشرطان الضروري والكافي للصيغة ذات الدرجة الثانية في المعادلة (١١-١٠)

لكي تكون موجبة هي

$$k_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} > 0 \quad \cdot \quad \text{وهلم جرا}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} \mu \dot{q}^2 - \frac{1}{2} kq^2 \quad (14-11)$$

حيث  $k = k_2 = (d^2V/dq^2)_{q=0}$  معادلة لاكرانج للحركة

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

عندئذ تعطى

$$\mu \ddot{q} + kq = 0 \quad (15-11)$$

اذن اذا كانت  $q = 0$  هي موضع توازن مستقر، اى اذا كانت  $k > 0$  عندئذ

تذبذب  $q$  توافقيا حول موضع التوازن بتردد زاوى

$$\omega = \sqrt{k/\mu} \quad (16-11)$$

و

$$q = q_0 \cos(\omega t + \epsilon) \quad (17-11)$$

حيث  $q_0$  تمثل سعة التذبذب، و  $\epsilon$  هي زاوية الطور، وتنتج قيم ثوابت التكامل

من الشروط الابتدائية.

### مثال

افرض حركة الجسم المدور-القاعدة الذى بحث في مثال البند السابق (الشكل

(11-2) اذا كان التماس تام الخشونة نحصل على حركة دورانية فقط، ويكون

انطلاق مركز الكتلة القرب هو  $b\dot{\theta}$  لزاوية صغيرة  $\theta$ . وفقا لذلك الطاقة الحركية

$T$  تكون كما يلي :

$$T = \frac{1}{2} m (b\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \dot{\theta}^2$$

حيث  $I_{cm}$  يمثل عزم القصور الذاتي حول مركز الكتلة، كذلك، يمكننا التعبير عن

دالة الطاقة الكامنة  $V$  كما يلي

$$\begin{aligned} V(\theta) &= mg [a - (a - b) \cos \theta] \\ &= mg \left[ a - (a - b) \left( 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} mg (a - b) \theta^2 + \text{ثابت} + \text{حدود عليا}$$

عندئذ يمكننا كتابة

$$L = \frac{1}{2} (mb^2 + I_{cm}) \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} mg(a - b) \theta^2$$

بعد اهمال الثوابت والحدود العليا . وعند المقارنة مع المعادلتين

(١٤-١١) و (١٥-١١) نرى ان

$$\mu = mb^2 + I_{cm}$$

$$k = mg(a - b)$$

وعليه فان الحركة حول موضع التوازن  $\theta = 0$  تكون تقريبا حركة توافقية بسيطة

تردد ها الزاوي

$$\omega = \sqrt{\frac{mg(a - b)}{mb^2 + I_{cm}}} \quad (١٨ - ١١)$$

٤-١١ متذبذبان توافقيان مزدوجان

### Two Coupled Harmonic Oscillators

قبل ان نستنبط النظرية العامة للمنظومات المتذبذبة باى عدد من درجات الحرية ،

سوف ندرس مثالا خاصا وهو منظومة مكونة من متذبذبين توافقيين مزدوجين معا .

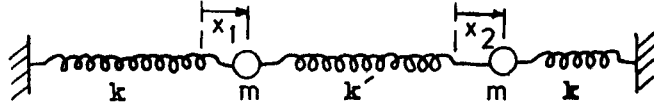
يبين الشكل (٣-١١) جسيمين كتلة كل منهما  $m$  وقد ربط كل جسيم بنابض خفيف

صلابته  $k$  . وازدوج الجسيمين ايضا معا بنابض ثالث صلابته  $k'$  . سنفرض

ان الجسيمين يقيدا الحركة على خط مستقيم (الاتجاه  $x$  كما هو مبين) .

فالمنظومة اذن لها درجتا حرية ، سنختار الاحداثيين  $x_1$  و  $x_2$  لاذاتسي

## مواضع التوازن



الشكل ١١-٣ • نموذج لتمديد بين توافقين مزدوجين

الجسيمين من موضعي توازنهما المتتاليين ، ليمثلان وضع المنظومة .

الطاقة الحركية للمنظومة هي

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 \quad (19-11)$$

والطاقة الكامنة هي

$$V = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k' (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 \quad (20-11)$$

اذن دالة لاگرانج  $L$  هي كالآتي

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k' (x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2} k x_2^2 \quad (21-11)$$

والمعادلات التفاضلية للحركة

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial L}{\partial x_1} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial L}{\partial x_2}$$

عندئذ تصبح

$$m \ddot{x}_1 = -k x_1 + k' (x_2 - x_1) \quad (22-11)$$

$$m \ddot{x}_2 = -k x_2 - k' (x_2 - x_1)$$



او

$$\ddot{x}_1 + \frac{k}{m} x_1 - \frac{k'}{m} (x_2 - x_1) = 0 \quad (٢٣-١١)$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{k}{m} x_2 + \frac{k'}{m} (x_2 - x_1) = 0$$

ولولم يكن نابض الازدواج  $k'$  ، لاماكن فوز المعادلتين ولتحرك كل جسيم بحرية بحركة توافقية بسيطة ترددها  $\sqrt{k/m}$  . فمن المناسب ان تجربة الحل الذى يعتمد فيه كل من  $x_2$  و  $x_1$  على الزمن من خلال العامل  $\cos \omega t$  حيث  $\omega$  يجب ان تستنتج . حلنا التجريبي هو

$$x_1 = A_1 \cos \omega t \quad (٢٤-١١)$$

$$x_2 = A_2 \cos \omega t$$

وبالتعويض المباشر في المعادلة (٢٣-١١) نجد ان

$$-\omega^2 A_1 \cos \omega t + \frac{k}{m} A_1 \cos \omega t + \frac{k'}{m} (A_1 - A_2) \cos \omega t = 0 \quad (٢٥-١١)$$

$$-\omega^2 A_2 \cos \omega t + \frac{k}{m} A_2 \cos \omega t + \frac{k'}{m} (A_2 - A_1) \cos \omega t = 0$$

وتند حذف العامل المشترك  $\cos \omega t$  وتجميع الحدود نحصل على

$$\left( \frac{k + k'}{m} - \omega^2 \right) A_1 - \frac{k'}{m} A_2 = 0 \quad (٢٦-١١)$$

$$-\frac{k'}{m} A_1 + \left( \frac{k + k'}{m} - \omega^2 \right) A_2 = 0$$

هذه هي الشروط المفروضة على المعامل  $A_1$  ،  $A_2$  اذا كانت دالتنا التجريبية هي فعلا حل . اذن اما ان تكون  $A_1 = A_2 = 0$  والا يجب ان يتلاشى محدد

المعامل التالي

$$\begin{vmatrix} \frac{k+k'}{m} - \omega^2 & -\frac{k'}{m} \\ -\frac{k'}{m} & \frac{k+k'}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (٢٧-١١)$$

وتسمى هذه بالمعادلة البدائية secular equation

وبعد فك المعادلة البدائية المذكورة اعلاه نحصل على

$$\left(\frac{k+k'}{m} - \omega^2\right)^2 - \left(\frac{k'}{m}\right)^2 = 0 \quad (٢٨-١١)$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في  $\omega^2$  . والجذران اللذان يمثلها بالرمز

$$\omega_a = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{و } \omega_b \text{ هما}$$

$$\omega_b = \left(\frac{k+2k'}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

والترددان  $\omega_a$  ,  $\omega_b$  يسميان بالترددين المعياريين -

normal frequencies للمنظومة . عندنا الان حلين ممكنين

(أ)

$$x_1 = A_1 \cos \omega_a t \quad x_2 = A_2 \cos \omega_a t \quad (٢٩-١١)$$

و (ب)

$$x_1 = B_1 \cos \omega_b t \quad x_2 = B_2 \cos \omega_b t \quad (٣٠-١١)$$

لاحظ ان الجذور السالبة للمعادلة الاولية لاتعطي حلولاً مختلفة لان  $\cos(-\omega t)$

$\cos \omega t =$  والسعات  $A_1, A_2, B_1, B_2$  مستقلة . فاذا عوضنا قيم

$\omega$  في المعادلات (٢٦-١١) نحصل على ماييلي

$$\omega = \omega_a \quad \text{عندما (أ)}$$

$$\left(\frac{k+k'}{m} - \frac{k}{m}\right)A_1 + \frac{k'}{m} A_2 = 0$$

وهذا يختصر الى

$$A_1 = A_2 \quad (٣١-١١)$$

$$\omega = \omega_b \quad (\text{ب) عندما}$$

$$\left(\frac{k+k'}{m} - \frac{k+2k'}{m}\right)B_1 - \frac{k'}{m}B_2 = 0$$

وهذا يختصر الى

$$B_1 = -B_2 \quad (٣٢-١١)$$

اذن حلولنا (المعادلات (٣١-١١) و (٣٠-١١) يمكن التعبير عنها كما يلي

$$x_1 = A \cos \omega_a t \quad x_2 = A \cos \omega_a t \quad (٣٣-١١)$$

$$x_1 = B \cos \omega_b t \quad x_2 = -B \cos \omega_b t \quad (٣٤-١١)$$

وليس من الضروري الاستمرار في استخدام الحروف السفلية • والتذبذبات المثلثة فسي  
الحلول اعلاه تسمى بالصيغ العيارية normal modes • والشرط الذي تتميز بسسه  
الصيغ العيارية هو ان جميع الاحداثيات تتذبذب بنفس التردد • في حالتنا يكسون  
التذبذب في التردد  $\omega_a$  بحيثان

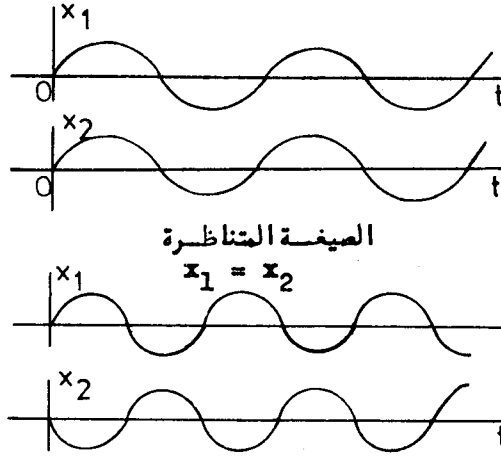
$$x_1 = x_2$$

وهذه تسمى بالصيغة المتناظرة Symmetric mode • ويكون التذبذب فسي

$$x_1 = -x_2 \quad \text{التردد } \omega_b \text{ بحيثان}$$

وتسمى هذه بالصيغة غير المتناظرة • الشكل (١-٤) يبين مخططات الصيغتين

العياريتين •



$x_1 = -x_2$  الصيغة غير المتناظرة

الشكل (١١-٤) : مخططات ازاحة - زمن للصيغ العيارية  
لمزدوج متذبذب توافقي

### The Complete Solution

### الحل الكامل

لنعود الى البراء ونفرض المعادلات التفاضلية الاصلية للحركة ، المعادلة

(١١-٤) . يمكننا بسهولة رؤية ان الحل التجريبي الذي تعتمد فيه  $x$ 's على

الزمن من خلال العامل  $\sin \omega t$  بدلا من  $\cos \omega t$  سيعطي جوهريا نفس

النتائج التي حصلنا عليها سابقا . اى على نفس الترددات والصيغ العيارية اى ان

$$x_1 = A' \sin \omega_a t \quad x_2 = A' \sin \omega_a t \quad (١١-٣٥)$$

و

$$x_1 = B' \sin \omega_b t \quad x_2 = -B' \sin \omega_b t \quad (١١-٣٦)$$

تكون ايضا حلولا . ولما كانت المعادلات التفاضلية خطية نعلم ان الحلول قد تجمع  
سما لتعطي حلولا اخرى . لذلك يمكننا كتابة الحل الكامل على النحو التالي

$$x_1 = A \cos \omega_a t + A' \sin \omega_a t + B \cos \omega_b t + B' \sin \omega_b t \quad (٣٧-١١)$$

$$x_2 = A \cos \omega_a t + A' \sin \omega_a t - B \cos \omega_b t - B' \sin \omega_b t$$

وتستج السعات من الشروط الابتدائية . اذن في الزمن  $t = 0$  عندنا

$$x_1(0) = A + B \quad x_2(0) = A - B$$

كذلك ، عند تفاضلها بالنسبة للزمن  $t$  ، نحصل في الزمن  $t=0$  على العلاقات  
التالية

$$\dot{x}_1(0) = A' \omega_a + B' \omega_b$$

$$\dot{x}_2(0) = A' \omega_a - B' \omega_b$$

والآن يمكننا الحل للسعات لنجد

$$A = \frac{1}{2} [x_1(0) + x_2(0)] \quad , \quad B = \frac{1}{2} [x_1(0) - x_2(0)] \quad (٣٨-١١)$$

$$A' = \frac{1}{2\omega_a} [\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)] \quad , \quad B' = \frac{1}{2\omega_b} [\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)]$$

هذه المعادلات تسمح لنا بايجاد تهييجات الصيغتين العياريتين من الشروط  
الابتدائية . افرض على سبيل المثال أن الجسمين قد سحبا في البدء من موضعي  
توازنهما بقدارين متساويين وفي نفس الاتجاه واطلقا بحيث كانت الشروط الابتدائية

$$x_1(0) = x_2(0) \quad , \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

على النحو التالي

فالنتيجة هي تهييج الصيغة المتناظرة فقط لان تتلاشى جميع الثوابت ما عدا  $A$  .  
وبالعكس اذا بدأت الحركة بسحب الجسمين بقدارين متساويين وفي اتجاهين متعاكسين  
ثم اطلقا ، فعندئذ الشروط الابتدائية تكون  $x_1(0) = -x_2(0) , \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$

في هذه الحالة جميع الثوابت تساوى صفرا ما عدا B اى ان غير المتناظر فقط يكسبون  
 متجهيا • وصورة عامة يتكون تذبذب المنظومة من مزيج الصيغتين •

### (٥-١١) الاحداثيات العيارية Normal Coordinates

لوصف حركة مزدوج متذبذبين توافقيين ، نستخدم منظومة احداثيات جديدة

هي  $q_a$  ،  $q_b$  والمعروفة كالآتي

$$q_a = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_2) \quad (٣٩-١١)$$

$$q_b = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 - x_2)$$

لتعبر عن دالة لاگرانج بدلالة هذه الاحداثيات • عندنا

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_a + q_b) \quad (٤٠-١١)$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_a - q_b)$$

اذن

$$T = \frac{m}{2} \frac{(\dot{q}_a + \dot{q}_b)^2}{2} + \frac{m}{2} \frac{(\dot{q}_a - \dot{q}_b)^2}{2} = \frac{m}{2} \dot{q}_a^2 + \frac{m}{2} \dot{q}_b^2$$

$$V = \frac{k}{2} \frac{(q_a + q_b)^2}{2} + \frac{k}{2} \frac{(q_a - q_b)^2}{2} + \frac{k'}{2} q_b^2 = \frac{k}{2} q_a^2 + \frac{k''}{2} q_b^2$$

وهكذا دالة لاگرانج تصبح

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}_a^2 + \frac{m}{2} \dot{q}_b^2 - \frac{k}{2} q_a^2 - \frac{k''}{2} q_b^2 \quad (٤١-١١)$$

حيث

$$k'' = k + 2k'$$

معادلات لاكرانج للحركة

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial L}{\partial q_a} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b} = \frac{\partial L}{\partial q_b}$$

تصبح ببساطة

$$m\ddot{q}_a = -kq_a \quad m\ddot{q}_b = -k''q_b \quad (٤٢-١١)$$

فالمعادلات اذن قد فرت • ويمكن كتابة الحلول بالمعينة كما يلي :

$$q_a = A \cos(\omega_a t + \phi_a) \quad (٤٣-١١)$$

$$q_b = B \cos(\omega_b t + \phi_b)$$

$$\omega_a = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{حيث}$$

$$\omega_b = \left(\frac{k''}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{k + 2k'}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

نرى الان ، لحركة اية منظومة يتذبذب الاحدائي  $q_a$  دائما بتردد  $\omega_a$

ويتذبذب الاحدائي  $q_b$  بتردد  $\omega_b$  • وتسمى الاحداثيات الجديدة  $q_a$  و  $q_b$

بالاحداثيات العيارية للمنظومة Normal Coordinates .

وفي الحالة العامة ، يكون الاحدائي العيارى تركيبا خطيا للاحداثيات بحيث

تختصر الطاقتين الحركية والكامنة الى مجموعات مربعة • عندئذ تغرز معادلات لاكرانج

للحركة اتوماتيكيا كالمعادلات (٤٢-١١) • ولذلك يوجد تردد واحد فقط يرافق

كل احدائي عيارى • وتتميز الصيغ العيارية لمنظومة متذبذبة بحقيقة كون وجود لكل صيغة

عيارية احدائي عيارى مرافق مع تردد العيارى • وعندما تتذبذب المنظومة بصيغة

عيارية نقيية تتذبذب جميع الجسيمات بتردد واحد وهناك احدائي عيارى واحد فقط

لايساوى صفرًا •

في حالة مزدوجين متذبذبين ، عندنا

(أ) الصيغة المتناظرة

$$\omega = \omega_a, q_a \text{ نشط}, q_b = 0, x_1 = x_2$$

(ب) الصيغة غير المتناظرة

$$\omega = \omega_b, q_b \text{ نشط}, q_a = 0, x_1 = -x_2$$

الاحداثيات العيارية لاي منظومة لها درجتين من درجات الحرية لاجل ايجاد الاحداثيات العيارية للحالة العامة التي لها درجتان من درجات الحرية ، نعود الى المعادلات الشرطية للسعات ، المعادلات (١١ - ٢٦) . في الحالة العامة ، يمكن كتابة كل معادلة كالنسبة

$$\frac{A_1}{A_2} = c = \frac{x_1}{x_2}$$

حيث  $c$  يمثل عددا يمكن ايجاد قيمته اذا كانت الترددات العيارية معلومة .  
 وصورة عامة ، تختلف  $c$  لكل تردد عياري . في مثالنا السابق ،  $c = +1$   
 او  $c = -1$  . ومن الواضح انه ، اذا استخدمنا احداثيات جديدة معرفة كالاتي

$$q_a = x_1 - c_1 x_2$$

(١١-٤٤)

$$q_b = x_1 - c_2 x_2$$

حيث  $c_1$  ،  $c_2$  هما قيمتا  $c$  ، عندئذ  $q_a$  ،  $q_b$  يجب ان يكونا احداثيين عياريين . لان هذا او ذاك يكون بالضرورة صفرًا اذا كانت المنظومة تتذبذب باحد تردداتها العيارية . وواضح ان اي ثابت مضاعف للكميات المعرفة بالمعادلات (١١-٤٤) يكون ايضا احداثيا عياريا .



## مثال

لنفرض حركة مايسسى (بالبندول المزدوج) الذى يتكون من وتر خفيف غير قابل للتمطط طوله  $2l$  وقد ثبت احد طرفيه وعلق في الطرف الآخر جسم كتلته  $m$  ، وعلق في مركز الوتر جسم كتلته ايضا  $m$  كما في الشكل (١١-٥) . اذا فرضنا ان المنظومة تبقى في مستو واحد ، فيمكننا تعيين الوضع بالزاويتين  $\theta$  و  $\phi$  كما هو مبين في الشكل . لتذبذبات صغيرة حول موضع التوازن ، يكون انطلاقا الجسيمين على وجه التقريب  $\dot{\theta}$  ،  $\dot{\phi}$  ،  $l(\dot{\theta} + \dot{\phi})$  وطاقتاهما الكامتان  $-mg l \cos \theta$   $-mg l (\cos \theta + \cos \phi)$  . عندئذ تصبح دالة لاكرانج على النحو التالي .

$$L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} l^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 + 2mg l \cos \theta + mg l \cos \phi$$

معادلات لاكرانج للحركة

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \phi}$$

عندئذ تصبح

$$m l^2 \ddot{\theta} + m l^2 (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) = -2mg l \sin \theta$$

$$m l^2 (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) = -mg l \sin \phi$$

اذا فرضنا ان  $\sin \theta \simeq \theta$  و  $\sin \phi \simeq \phi$  ، وعند ترتيب الحدود

نجد ان

$$2\ddot{\theta} + \frac{2g}{l} \theta + \ddot{\phi} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \ddot{\phi} + \frac{g}{l} \phi = 0$$

(١١-٥)

عندئذ المحدد الاولي للمنظومة يكون على النحو التالي

$$\begin{vmatrix} -2\omega^2 + \frac{2g}{l} & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2 + \frac{g}{l} \end{vmatrix} = 0$$

او

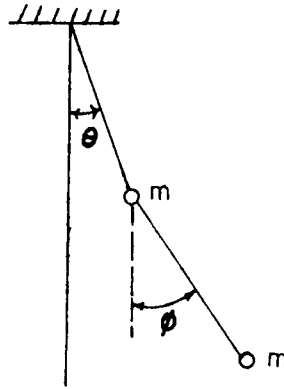
$$\omega^4 - 4\omega^2 \left(\frac{g}{l}\right) + 2\left(\frac{g}{l}\right)^2 = 0$$

اذن الترددان العياريان هما

$$\omega_a = \left[ \frac{g}{l} (2 - \sqrt{2}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_b = \left[ \frac{g}{l} (2 + \sqrt{2}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

(٤٦ - ١١)



الشكل (١١ - ٥) • البندول المزدوج

اذا كانت المنظومة لتذبذب في اي من تردداتها العيارية ، عندئذ اولى معادلات

(٤٥ - ١١) تعطي

$$(-2\omega^2 + 2\frac{g}{l}) \theta = \omega^2 \phi$$

وهند تمويض قيمتي  $\omega$  من المعادلات (٤٦ - ١١) في المعادلة المذكورة اعلاه ،

نحصل على العلاقات التالية بين  $\theta$  و  $\phi$  للصيغ العيارية

$$\phi = + \sqrt{2} \theta , \omega = \omega_a$$

الصيغة المتناظرة

$$\phi = - \sqrt{2} \theta , \omega = \omega_b$$

الصيغة غير المتناظر

نستنتج ان الثابت  $\theta$  ، في المعادلات (١١-٤٤) يكون له قيمتان ، وهي

$$q_a = \theta + \sqrt{2} \theta$$

$$q_b = \theta - \sqrt{2} \theta$$

قد ترك كتمرين للبرهنة ان دالة لاكرانج تختصر الى مجموعات مربعة عند التعمير  
عنها بدلالة الاحداثيات المعيارية المذكورة اعلاه  
(١١-٦) النظرية العامة للمنظومات المتذبذبة \*

### General Theory of Vibrating Systems

نعود الان الى منظومة عامة لها  $n$  درجة من درجات الحرية ، اثبتنا في  
الفصل السابق (البند ١٠-٣) ان الطاقة الحركية  $T$  تكون دالة من الدرجة الثانية  
ومتجانسة للسرع المعممة ، اى

$$T = \frac{1}{2} \mu_{11} \dot{q}_1^2 + \mu_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} \mu_{22} \dot{q}_2^2 + \dots$$

$$= \sum_j \sum_k \frac{1}{2} \mu_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (١١-٤٧)$$

بشرط ان لا توجد قيود متحركة . ولما كانت الحركة حول وضع التوازن تمثفا ، فسوف  
نفرض ، كما في البند ١١-٣ المعادلة (١١-١٣) ان ال  $\mu_{jk}$  هي ثوابت  
وتساوى قيمها في وضع التوازن . سوف نفرض اكثر من ذلك ، ان التحويل الخطي  
قد استخدم بحيث وضع التوازن يعطى من

$$q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$$

ووفقا لذلك ، الطاقة الكامنة  $V$  من المعادلة (١١-١٠) هي كالآتي

$$V = \frac{1}{2}k_{11}q_1^2 + k_{12}q_1q_2 + \frac{1}{2}k_{22}q_2^2 + \dots = \sum_j \sum_k \frac{1}{2}k_{jk}q_jq_k \quad (٤٨-١١)$$

عندئذ نأخذ دالة لاكرانج الشكل التالي

$$L = \sum_k \sum_j \frac{1}{2}(\mu_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k - k_{jk}q_jq_k) \quad (٤٩-١١)$$

معادلات الحركة

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

عندئذ تصبح

$$\sum_j (\mu_{jk}\ddot{q}_j + k_{jk}q_j) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (٥٠-١١)$$

فاذا تواجد حل بالشكل التالي

$$q_k = A_k \cos \omega t \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (٥١-١١)$$

عندئذ يجب ان تتحقق المعادلات التالية بالتعويض المباشر

$$\sum_j (-\mu_{jk}\omega^2 + k_{jk})A_j = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (٥٢-١١)$$

والحل غير العادي يتطلب تلاشي محدد العوامل  $A$ 's اى

$$\begin{vmatrix} -\mu_{11}\omega^2 + k_{11} & -\mu_{12}\omega^2 + k_{12} & \dots \\ -\mu_{21}\omega^2 + k_{21} & -\mu_{22}\omega^2 + k_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (٥٣-١١)$$

المعادلة الاولية المذكورة اعلاه هي معادلة من درجة  $n$  في  $\omega^2$  الجذور

التي عددها  $n$  هي مربعات الترددات العيارية للمنظومة .

## تواجد الاحداثيات العيارية

## Existence of Normal Coordinates

لما كانت الطاقة الحركية  $T$  لا يمكن ان تكون سالبة ، فأى تمثيل ل  $T$  بدلالة الاحداثيات المعممة (المعادلة (٤٧-١)) يجب ان يكون موجباً بصورة محددة . وهناك نظرية اساسية في نظرية التحولات الخطية <sup>(٢)</sup> نصها : اذا كانت عوامل صيغتي الدرجة

الثانية

$$\sum_j \sum_k a_{jk} x_j x_k \quad \sum_j \sum_k b_{jk} x_j x_k$$

تحقق

$$a_{jk} = a_{kj} \quad b_{jk} = b_{kj}$$

وكانت الاولى موجبة بصورة محددة ، عندئذ يتواجد التحويل الخطي

$$x_k = \sum_j c_{kj} y_j \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

بحيث تختصر صيغتنا الدرجة الثانية الى مجموعات مربعة ، اى

$$\sum_j \sum_k a_{jk} x_j x_k = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \dots + \alpha_n y_n^2$$

$$\sum_j \sum_k b_{jk} x_j x_k = \beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_2^2 + \dots + \beta_n y_n^2$$

(٢) انظر على سبيل المثال

See, for example, L. P. Smith, *Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1953.

تنص النظرية أيضا على ان جذور معادلة المحدد

$$\begin{vmatrix} -\gamma a_{11} + b_{11} & -\gamma a_{12} + b_{12} & \dots \\ -\gamma a_{21} + b_{21} & -\gamma a_{22} + b_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

هي مطابقة لجذور المعادلة

$$\begin{vmatrix} -\gamma \alpha_1 + \beta_1 & 0 & \dots \\ 0 & -\gamma \alpha_2 + \beta_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

- عند تطبيق النظرية على الحالة التي نحن بصدد ها اي المنظومة المتذبذبة —  
 نرى ان هناك مجموعة احداثيات  $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n$  والتي تعطى بالتحويل الخطي

$$q_k = \sum_j c_{kj} \bar{q}_j \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (٥٤-١١)$$

بحيث ان  $T$  و  $V$  تختصر الى المجموعات المربعة التالية

$$T = \frac{1}{2} (\bar{\mu}_1 \dot{\bar{q}}_1^2 + \bar{\mu}_2 \dot{\bar{q}}_2^2 + \dots + \bar{\mu}_n \dot{\bar{q}}_n^2) \quad (٥٥-١١)$$

$$V = \frac{1}{2} (\bar{k}_1 \bar{q}_1^2 + \bar{k}_2 \bar{q}_2^2 + \dots + \bar{k}_n \bar{q}_n^2) \quad (٥٦-١١)$$

عندئذ تعطى دالة لاكرانج المتحولة ببساطة على النحو التالي

$$L = \sum_k \frac{1}{2} (\bar{\mu}_k \dot{\bar{q}}_k^2 - \bar{k}_k \bar{q}_k^2) \quad (٥٧-١١)$$

ومعادلات الحركة التفاضلية المقابلة لها هي

$$\bar{\mu}_k \ddot{\bar{q}}_k + \bar{k}_k \bar{q}_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (٥٨-١١)$$

فالحلول هي

$$\bar{q}_k = \bar{A}_k \cos (\omega_k t + \epsilon_k) \quad (11-59)$$

حيث

$$\omega_k = (\bar{k}_k / \bar{m}_k)^{\frac{1}{2}}$$

اذن الكميات  $q_k$  هي الاحداثيات العيارية والترددات العيارية المرافقة لها هي  $\omega_k$  . ووفقا للنظرية العامة التي اوردناها تواء ، تعطى الترددات العيارية من المحدد الاولي ، المعادلة (11-53) . يمكن كتابة هذا المحدد بدون معرفة الاحداثيات العيارية .

ان مسألة ايجاد تحويل الاحداثيات العيارية المعادلة (11-54) ، للمنظومة العامة تقتضي تحويل المصفوف الى قطري . لقد استنبطنا مايكافى ، هذا في معالجة منظومة الجسيمين في البند السابق .

حركة منظومة عامة عند تواجد قوى تضاؤل وقوى دافعة خارجية ، - في شرحنا السابق لتذبذب منظومة عامة ، اهلنا وجود اى قوى احتكاكية . فاذا تعرضت المنظومة الى قوى تضاؤل لزجة تتناسب مع سرعة من الدرجة الاولي للجسيمات فيمكننا كتابة معادلات لاكرانج على النحو التالي

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_k} = \frac{\delta L}{\delta q_k} + Q'_k \quad (11-60)$$

حيث قوة التضاؤل المعممة  $Q'_k$  تعطى من

$$Q'_k = -c_{1k} \dot{q}_1 - c_{2k} \dot{q}_2 - \dots - c_{nk} \dot{q}_n \quad (11-61)$$

معادلات الحركة التفاضلية الناتجة تماثل الحالة غير المتضائلة [المعادلات (11-50)] .  
ماعدا تواجد الحدود التي تحتوى على  $\dot{q}$  . في الغالب ( ولكن ليس دائما )

يمكن في هذه الحالة ايجاد تحويل احداثي عياري بحيث تكون المعادلات التفاضلية الناتجة على النحو التالي

$$\bar{\mu}_k \ddot{\bar{q}}_k + \bar{c}_k \dot{\bar{q}}_k + \bar{k}_k \bar{q}_k = 0 \quad (٦٢-١١)$$

حيث

$$\bar{q}_k = A_k e^{-\lambda_k t} \cos(\omega_k t + \epsilon_k) \quad (٦٣-١١)$$

اذن تتضال ساعات الصيغ العيارية اسيا مع الزمن . هناك ايضا امكانية حدوث حالة لا تدبذبية مشابهة للتضائل الحرج او فوق المتضائل لحالة البعد الواحد .  
اخيرا لحركة المنظومة التي تخضع بالاضافة الى قوى معيدة خطية وقوى تشتت لقوى دافعة خارجية تتغير توافقيا مع الزمن يمكننا التعبير عنها تحليليا بادخال حدود من النوع  $Q_{kext} \cos \omega t$  (او  $Q_{kext} e^{i\omega t}$ ) في كل معادلة حركة ، المعادلة (٦٠-١١) . تأخذ معادلات الحركة الناتجة في الاحداثيات المعممة الصيغة التالية

$$\bar{\mu}_k \ddot{\bar{q}}_k + \bar{c}_k \dot{\bar{q}}_k + \bar{k}_k \bar{q}_k = Q_k e^{i\omega t} \quad (٦٤-١١)$$

وعلى سبيل المثال ، اذا خضعت المنظومة لقوة دافعة منفردة تتغير توافقيا بتردد يساوي احد الترددات العيارية للمنظومة . عندئذ الصيغة العيارية التسي تقابلها تاخذ اكبر سعة في شرط الحالة - المستقرة . وفي الحقيقة ، اذا كانت ، ثوابت التضاؤل متناهية في الصغر ، فعندئذ الصيغة العيارية التي ترددها يساوي التردد الدافع تكون هي الوحيدة المتهيجة .

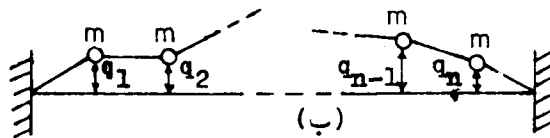
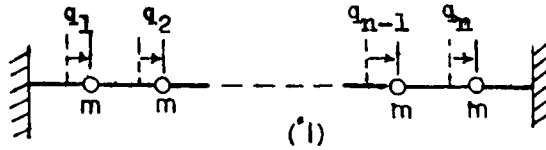


### Vibration of a Loaded String (٧-١١) تذبذب وتر محمول

نأخذ في هذا البند بنظر الاعتبار حركة منظومة ميكانيكية بسيطة تتكون من وتر مرن خفيف مشدود الطرفين وقد علق فيه عدد معين  $n$  من الجسيمات بمسافات متساوية على طولها وكلية كل منها يساوي  $m$ . المسألة توضح النظرية العامة للتذبذب وتقودنا أيضا بصورة طبيعية الى نظرية الحركة الموجية التي ستعالج باختصار في البند القادم .

لنرمز لازاحات مختلف الجسيمات من مواضع توازنها بالاحداثيات  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . وفي الحقيقة ، قد يحدث نوعين من الازاحات ، ازاحة طولية يتحرك فيها الجسم على طول الوتر وازاحة مستعرضة التي يتحرك فيها الجسم عموديا على طول الوتر . كما هو موضح في الشكل (١١-٦) . وللسهولة سنفرض الحركة اما ان تكون طولية نقية او مستعرضة نقية ، ولو في الحالة الفيزيائية الحقيقية قد يحدث مزيج من النوعين عندئذ الطاقة الحركة تعطى من

$$T = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dots + \dot{q}_n^2) \quad (١١-٦٥)$$



الشكل (١١-٦) ترتيب خطي للجسيمات او الوتر المحمل (أ) حركة طولية (ب) حركة مستعرضة

إذا استعملنا الحرف  $l$  ليرمز الى اى جسيم ، عندئذ في حالة الحركة العاولية ،  
جزء الوتر المشدود بين الجسيمين  $l$  و  $l + 1$  هو

$$q_{r+1} - q_r$$

اذن الطاقة الكامنة لهذا الجزء من الوتر هي

$$\frac{1}{2}K(q_{r+1} - q_r)^2$$

حيث  $K$  يمثل معامل مرونة مقطع الوتر الذى يربط الجسيمين المتجاورين  
لحالة الحركة المستعرضة ، المسافة بين الجسيم  $l$  و  $l + 1$  هي

$\left[ h^2 + (q_{r+1} - q_r)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = h + \frac{1}{2h} (q_{r+1} - q_r)^2 + \dots$   
حيث  $h$  هي مسافة التوازن بين جسيمين متجاورين . عندئذ تمطط جزء الوتر الذى

يربط الجسيمين تقريبا هو

$$\Delta l = \frac{1}{2h} (q_{r+1} - q_r)^2$$

اذن ، اذا كان  $s$  يمثل الشد في الوتر ، فالطاقة الكامنة للجزء الذى اخذ  
بنظر الاعتبار هو

$$s \Delta l = \frac{s}{2h} (q_{r+1} - q_r)^2$$

نستنتج من ذلك ان الطاقة الكامنة الكلية للمنظومة اما ان تكون من النوع الطولي  
او المستعرض للحركة ويعبر عنها كدالة من الدرجة الثانية على النحو التالى

$$V = \frac{k}{2} \left[ q_1^2 + (q_2 - q_1)^2 + \dots + (q_n - q_{n-1})^2 + q_n^2 \right] \quad (11 - 11)$$

وفيهما

$$k = \frac{s}{h} \quad (\text{الحركة المستعرضة})$$

او

$$k = K \quad (\text{الحركة الطولية})$$

اذن دالة لاكرانج للوتر المحمل تكون على النحو التالي

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\nu} \left[ m\dot{q}_{\nu}^2 - k(q_{\nu+1} - q_{\nu})^2 \right] \quad (٦٧-١١)$$

ومعادلات لاكرانج للحركة

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\nu}} = \frac{\partial L}{\partial q_{\nu}}$$

عندئذ تصبح

$$m\ddot{q}_{\nu} = -k(q_{\nu} - q_{\nu-1}) + k(q_{\nu+1} - q_{\nu}) \quad (٦٨-١١)$$

$$\nu = 1, 2, \dots, n$$

حيث

لحل المنظومة السابقة المتكونة من  $n$  من المعادلات ، نستعمل الحل التجريبي الذي نفرض فيه  $q = a e^{i\omega t}$  تنغير توافقياً مع الزمن . ومن المناسب استعمال الصيغة الاسية التالية

$$q_{\nu} = a_{\nu} e^{i\omega t} \quad (٦٩-١١)$$

حيث  $a_{\nu}$  يمثل سعة التذبذب للجسيم  $\nu$ th . وعند تعويض الحل التجريبي السابق في المعادلات التفاضلية (٦٨-١١) نتج العلاقة التالية للسعات

$$-m\omega^2 a_{\nu} = k(a_{\nu-1} - 2a_{\nu} + a_{\nu+1}) \quad (٧٠-١١)$$

هذه العلاقة ستحتوى على نقطتي طرفي الوتر اذا وضعنا

$$a_0 = a_{n+1} = 0 \quad (٧١-١١)$$

اذن المحدد الاولي يكون

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k & 0 & \dots & 0 \\ -k & -m\omega^2 + 2k & -k & \dots & 0 \\ 0 & -k & -m\omega^2 + 2k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -m\omega^2 + 2k \end{vmatrix} = 0 \quad (٧٢-١١)$$

والمحدد هو من المرتبة  $n$ th فهناك اذن  $n$  قيم ل  $\omega$  التي تستوفي المعادلة. ولكن ، بدلاً من ايجاد  $n$  هذه من الجذور بطريقة جبرية ، نجد ان بإمكاننا ايجادها باستخدام المعادلة (٧٠-١١) المباشر .

هنا ، نعرف كمية  $\theta$  المنسوبة للسعات  $a_r$  بالمعادلة التالية

$$a_r = A \sin(\nu \theta) \quad (٧٣-١١)$$

والتعويض المباشر في العلاقة (٧٠-١١) عندئذ نحصل على

$$-m\omega^2 A \sin(\nu \theta) = kA \left[ \sin(\nu \theta - \theta) - 2 \sin(\nu \theta) + \sin(\nu \theta + \theta) \right] \quad (٧٤-١١)$$

والتي تختصر بسهولة الى

$$m\omega^2 = k(2 - 2 \cos \theta) = 4k \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (٧٥-١١)$$

او

$$\omega = 2\omega_0 \sin \frac{\theta}{2} \quad (٧٦-١١)$$

حيث

$$\omega_0 = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (٧٧-١١)$$

تعطي المعادلة (١١-٧٦) الترددات العيارية بدلالة الكمية  $\theta$  التي لم نستنتجها حتى الان . وفي الحقيقة سنحصل على نفس العلاقة التي حصلنا عليها لاي من التعميزات التالية  $A \cos \theta$  ,  $A e^{i\theta}$  ,  $A e^{-i\theta}$  للسمعة  $a_{\theta}$  ، او اي تركيب خطي منها . على اية حال ، فقط التعميز  $a_{\theta} = A \sin(\theta)$  يستوفي شرط النهاية  $a_0 = 0$  . ولجل حساب القيمة الحقيقية للبرمتر  $\theta$  ، وذلك لاجاد الترددات العيارية للوتر المتذبذب ، نستمعل شرط النهاية الآخر

اي  $a_{n+1} = 0$  وسيستوفي هذا الشرط اذا وضعنا

$$(n + 1)\theta = N\pi \quad (١١-٧٨)$$

حيث  $N$  يمثل عدداً صحيحاً ، اذ نحصل عندئذ على

$$a_{n+1} = A \sin(N\pi) = 0$$

وايجاد  $\theta$  يمكننا الان حساب الترددات العيارية ، التي تعطى من

$$\omega_N = 2\omega_0 \sin\left(\frac{N\pi}{2n+2}\right) \quad (١١-٧٩)$$

والاضافة الى ذلك ، نرى من المعادلات (١١-٧٣) و (١١-٧٨) ان السمات للصيغ العيارية تعطى من

$$a_{\nu} = A \sin\left(\frac{N\pi\nu}{n+1}\right) \quad (١١-٨٠)$$

هنا القيم  $\nu = 1, 2, \dots, n$  تمثل جسيما خاصا في ترتيب خطي والقيم

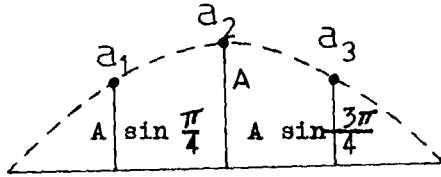
$N = 1, 2, \dots, n$  تشير الى الصيغة العيارية التي تتذبذب بها المنظومة .

لقد وضحت الصيغ العيارية المختلفة بيانيا وذلك برسم السمات كما اعطيت من

المعادلة (١١-٨٠) . وهذه تقع على منحني جيب كما هو موضح في الشكل (١١-٧)

والذى يبين حالة ثلاث جسيمات  $n = 3$  . تعطي الحركة الحقيقية للمنظومة ،  
عندما تتذبذب بصيغة واحدة نقيية من المعادلة

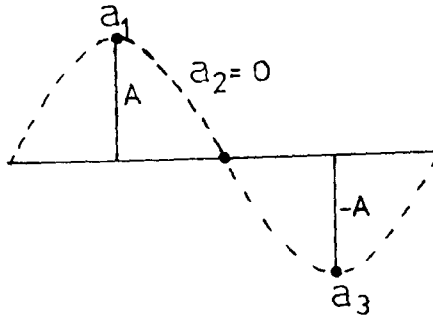
$$q_{\nu} = a_{\nu} \cos(\omega_N t) = A \sin\left(\frac{\pi N \nu}{n+1}\right) \cos(\omega_N t) \quad (٨١-١١)$$



الصيغة الاولى

$$N = 1$$

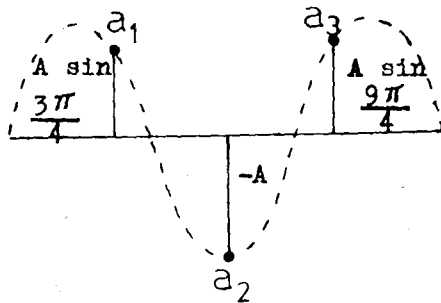
$$a_{\nu} = A \sin\left(\frac{\nu \pi}{4}\right)$$



الصيغة الثانية

$$N = 2$$

$$a_{\nu} = A \sin\left(\frac{2\nu \pi}{4}\right)$$



الصيغة الثالثة

$$N = 3$$

$$a_{\nu} = A \sin\left(\frac{3\nu \pi}{4}\right)$$

الشكل ٧-١١ الصيغ المعيارية لمنظومة مكونة من ثلاثة جسيمات

النوع العام للحركة هو تركيب خطي لجميع الصيغ العيارية . ويمكن التعبير عن هذا كما يلي

$$q_{\nu} = \sum_{N=1}^n A_N \sin \left( \frac{N\pi\nu}{n+1} \right) \cos (\omega_N t + \beta_N) \quad (٨٢-١١)$$

حيث القيم  $A_N$  و  $\beta_N$  تحسب من الشروط الابتدائية .

في الحالة التي يكون فيها عدد الجسيمات  $n$  كبيراً بالمقارنة مع عدد الصيغة  $N$  ، بحيث تكون النسبة  $(2n + 2) / N\pi$  صغيرة ، يمكننا استبدال حد الجيب في المعادلة (١١-٧٩) بالازاحة الزاوية . اذن يكون عندنا تقريبا

$$\omega_N \approx N \left( \frac{\pi\omega_0}{n+1} \right) \quad (٨٣-١١)$$

وهذا يعني ان الترددات العيارية تكون تقريبا مضاعفات صحيحة لاوطياً تسرد و  $(n + 1) / \pi\omega_0$  . ومعبارة اخرى ، يمكننا اعتبار الترددات العيارية المختلفة ، اساسية ، التوافقي الثاني ، التوافقي الثالث ، وهلم جرا . وتحسن دقة هذه العلاقة التوافقية التكاملية كلما كبر عدد الجسيمات .

٨-١١ تذبذب منظومة مستمرة . معادلة الموجة

Vibration of a Continuous System. The Wave Equation.

لنفرض الحركة لصف من الجسيمات المربوطة والمرتبة بصورة خطية وكان عدد الجسيمات غير محدود في الكبر والمسافة بين كل جسيمين متجاورين متناهية في الصغر . ومعبارة اخرى ، عندنا وتر مستمر ثقيل او قضيب . لتحليل منظومة من هذا النوع ، من الملائم اعادة كتابة المعادلات التفاضلية للحركة لمنظومة محدودة ، المعادلة

(١١-٦٨) ، على النحو التالي

$$m\ddot{q} = kh \left[ \left( \frac{q_{\nu+1} - q_{\nu}}{h} \right) - \left( \frac{q_{\nu} - q_{\nu-1}}{h} \right) \right] \quad (٨٤-١١)$$

حيث  $h$  تمثل المسافة بين موضعي التوازن لاي جسيمين متجاورين ، والان  $\nu$  اذا كان المتغير  $x$  يمثل المسافات بصورة عامة في الاتجاه الطولي ، وكان عدد الجسيمات  $n$  كبير جدا بحيث تكون  $h$  صغيرة بالمقارنة مع الطول الكلى ، عندئذ يمكننا كتابة

$$\frac{q_{\nu+1} - q_{\nu}}{h} \approx \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right)_{x=\nu h + h/2}$$

$$\frac{q_{\nu} - q_{\nu-1}}{h} \approx \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right)_{x=\nu h - h/2}$$

ورفقا لذلك ، يساوى الفرق بين التعبيرين السابقين المشتقة الثانية مضرومة في  $h$  ، اى

$$\frac{q_{\nu+1} - q_{\nu}}{h} - \frac{q_{\nu} - q_{\nu-1}}{h} \approx h \left( \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right)_{x=\nu h} \quad (٨٥-١١)$$

اذن يمكن كتابة معادلة الحركة على النحو التالي

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \frac{kh^2}{m} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad (٨٦-١١)$$

او

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad (٨٧-١١)$$

حيث استعملنا الاختصار

$$v^2 = \frac{kh^2}{m} \quad (٨٨-١١)$$

- المعادلة (٨٧-١١) من المعادلات التفاضلية المشهورة في الفيزياء النظرية .
- تسمى بمعادلة الموجة ذات البعد الواحد . وهي تصادف في مواضع كثيرة مختلفتة .
- تمثل حلول معادلة الموجة نوعا من الاضطراب المنتقل . ومن السهل التحقق من ان حل النوع العام لمعادلة الموجة هو كما يلي



$$q = f(x + vt) \quad (٨٩-١١)$$

او

$$q = f(x - vt) \quad (٩٠-١١)$$

حيث  $f$  تمثل اية دالة قابلة للتفاضل ازاحتها الزاوية  $x \pm vt$  يمثل الحل الاول اضطراباً يتشرب باتجاه  $x$  السالب بانطلاق  $v$  ، وتمثل المعادلة الثانية اضطراباً يتحرك بانطلاق  $v$  باتجاه  $x$  الموجب .  
 وفي مسألتنا الخاصة ، الاضطراب  $q$  هو ازااحة جزء صغير للمنظومة من وضع توازنها .  
 الشكل (٨-١١) . قد تكون هذه الازااحة للوتر ضرية تتحرك على طولها وقد



الشكل ٨-١١ موجة منتشرة

تكون منطقة تضغط او تخلخل لقضيب صلد تتحرك على طولها .

#### حساب انطلاق الموجة

رأينا في البند السابق ان الثابت  $k$  ، لحركة الوتر المحمل المستعرضة ، يساوى النسبة  $S/h$  حيث  $S$  يمثل الشد في الوتر . وقد تصبح طبعا هذه النسبة للوتر المستمر ما لا نهاية عندما تقترب  $h$  من الصفر . ولكن اذا ادخلنا الكثافة الخطية او كتلة وحدة الطول  $m$  ، يكون عندنا

$$\rho = \frac{m}{h} \quad (11-91)$$

وفقا لذلك ، يمكن كتابة علاقة  $v^2$  ، المعادلة ( ١١ - ٨٨ ) ،

على النحو التالي

$$v^2 = \frac{(S/h) h^2}{\rho h} = \frac{S}{\rho} \quad (11-92)$$

حيث تختصر  $h$  . عندئذ يكون انطلاق واتشار الموجات المستعرضة

كما يلي

$$v = \left(\frac{S}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (11-93)$$

وفي حالة التذبذبات الطولية ، ندخل معامل المرونة  $Y$  السدى

يعرف بالنسبة بين القوة والاستطالة لوحدة الطول . اذن  $k$  ،

صلاية مقطع صغير طوله  $h$  يعطى من

$$k = \frac{Y}{h} \quad (11-94)$$

وفقا لذلك ، يمكن كتابة المعادلة ( ١١ - ٨٨ ) على النحو

التالي

$$v^2 = \left(\frac{Y/h) h^2}{\rho h}\right) = \frac{Y}{\rho} \quad (11-95)$$

مرة اخرى نرى ان  $h$  تختصر . اذن انطلاق انتشار الموجات الطولية في قضيب مرن هو

$$v = \left(\frac{Y}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (٩٦-١١)$$

### ٩-١١ موجات منحن الجيب Sinusoidal Waves

في دراسة الحركة الموجية ، الحلول الخاصة لمعادلة الموجة

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

حيث  $q$  تمثل دالة جيبيه في  $x$  ،  $t$  اى

$$q = A \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x + vt) \right] \quad (٩٧-١١)$$

$$q = A \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right] \quad (٩٨-١١)$$

ذات اهمية اساسية . تمثل هذه الحلول اضطرابات منتشرة تتغير فيها الازاحة فسي

نقطة معينة  $x$  توافقيا مع الزمن . سعة هذه الحركة هو الثابت  $A$  ، والتردد  $f$

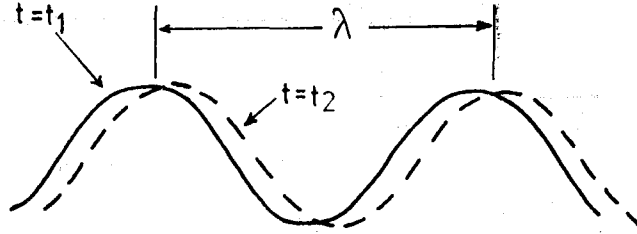
هو كما يلي

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{\lambda} \quad (٩٩-١١)$$

علاوة على ذلك ، لقيمة معينة للزمن  $t$  ، مثل  $t = 0$  ، تتغير الازاحة جيبييا مع

المسافة  $x$  . المسافة بين ازاحتين متتاليتين في النهاية العظمى او الصغرى هي

الثابت  $\lambda$  ، وتسمى طول الموجة . وتنتشر الامواج الممثلة بالمعادلة ( ١١-٩٧ ) باتجاه  $x$  السالب وتنتج تلك التي تمثل بالمعادلة ( ١١-٩٨ ) باتجاه  $x$  الموجب ، كما هو مبين في الشكل ( ١١-٩ ) . وهي حالات خاصة للحل من النوع العام المشمل بالمعادلات ( ١١-٨٩ ) و ( ١١-٩٠ ) .



الشكل ( ١١-٩ ) موجة جيبيية

### الموجات المستقرة Standing Waves

لما كانت معادلة الموجة ، المعادلة ( ١١-٨٧ ) خطية ، يمكننا تكوين اى عدد من الحلول بعمل تراكيب خطية من الحلول المعروفة . احدى التراكيب الخطية الممكنة ذات الاهمية الخاصة هي التي نحصل عليها من جمع موجتين سعتهما متساويتان وتنتشران في اتجاهين متعاكسين . في رموزنا حل كهذا يعطي من

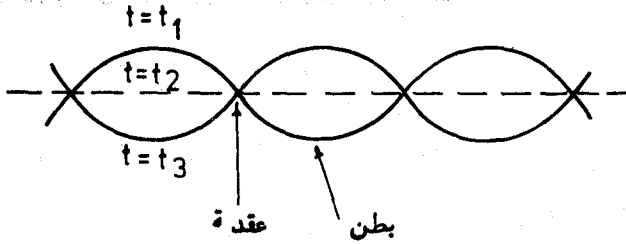
$$q = \frac{1}{2} A \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x+vt) \right] + \frac{1}{2} A \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x-vt) \right]$$

واستخدام المطابقة المثلثية المناسبة وتجميع الحدود نجد ان المعادلة تختصر الى

$$q = A \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} x \right) \cos (\omega t) \quad (١١-١٠٠)$$

حيث تعطى  $\omega$  من المعادلة ( ١١-٩٩ ) . وتمثل المعادلة السابقة مايسمى بالموجات المستقرة . هنا نرى ان سعة الازاحة لاتبقى ثابتة وانما تتغير مع قيمة  $x$  .

اذن عندما تكون  $x = 0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2, \dots$  تكون الازاحة دائما صفرا اذ يتلاشى احد الجيب في هذه النقاط . وتسمى النقاط التي ازاحتها صفرا بالعقد nodes . والعكس ، لقيم  $x$  التي تكون فيها قيمة حد الجيب المطلقة تساوي واحدا ، اي  $x = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4, \dots$  تكون سعة التذبذب التوافقي العظمى هي  $A$  . وتسمى هذه النقاط بالبطن Antinode والمسافة بين اي عقدتين متتاليتين او بطنين متتالين تساوي تماما نصف طول الموجة . لقد بينت الحقائق السابقة في الشكل (١١-١٠) .



الشكل (١١-١٠) الموجات المستقرة

تفسير حركة الوتر المحمل بدلالة الموجات المستقرة

اذا قارنا معادلة الموجة المستقرة ، المعادلة (١١-١٠٠) مع حلنا السابق

لحركة الوتر المحمل ، المعادلة (١١-٨٢) نلاحظ ان التعبيرين متماثلان . يمكن اظهار التماثل اكثر بملاحظة ان حل الموجة المستقرة سيستوفي شروط الحد ودلماً لتفنيا الاصلية ، اي ان

$$q = 0 ; x = 0 , x = l$$

شريطة ان تكون نقاط نهايات الوتر عقد الموجة المستقرة . ونصادف هذا الشرط اذا كان

طول الوتر  $l$  هو عدد صحيح  $n$  لانصاف اطوال الموجة ، اي ان

$$l = (n + 1) h = n \frac{\lambda}{2} \quad (101-11)$$

عند حلها لـ  $\lambda$  والتعويض في المعادلة (100-11) نحصل على

$$q = A \sin \left[ \frac{\pi n x}{(n+1)h} \right] \cos (\omega t) \quad (102-11)$$

وهذا يتفق مع حلنا السابق ، المعادلة (11-82) ، إذ في مواضع الجسيمات المختلفة عندنا

$$x_{\nu} = \nu h \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

إذن يمكن اعتبار تذبذب الوتر المحمل كموجة مستقرة . وكل صيغة عيارية تحتوي على عدد صحيح معين من العقد في وسط الموجة المستقرة .

### تمارين

11-1 . يتحرك جسيم في الجهد ذي البعد الواحد التالي

$$V(x) = k(3x^4 - 2bx^3 - 3b^2x^2)$$

حيث  $k, b$  ثابت موجبة . جد مواضع التوازن واحسب استقرارها .

11-2 . يتحرك جسيم في الجهد ذي البعدين التالي

$$V(x, y) = k(x^2 + y^2 - 4bx - 6by)$$

احسب موضع التوازن والاستقرار .

11-3 . شريطان خفيفان من المطاط ، طول كل منهما الطبيعي ( غير الممتد )

هو  $l$  وصلابته  $k$  ، ثبتت نهايتاهما العلويان بعيدا بعضهما من بعض بمسافة  $2l$  وعلى نفس المستوى . وربطت نهايتاهما السفليتان معا ليحملان جسيما كتلته  $m$  .

جد الطاقة الكامنة للمنظومة بدلالة الانخفاض العمودي  $y$  للجسيم عن الخط  
الواصل بين الطرفين العلويين .

١١-٤ . برهن ان موضع التوازن في التمرين السابق يعطى من اكبر جذر موجب

للمعادلة التالية

$$u^4 - 2bu^3 + b^2u^2 - 2bu + b^2 = 0$$

حيث  $u = y/l$  ,  $b = mg/(2kl)$  . جد القيمة الحقيقية للحالة  $b = 2$  .

١١-٥ . مكعب منتظم كتلته  $m$  وطول ضلعه  $2a$  . توازن على كرة خشنة نصف

قطرها  $b$  . اثبت ان دالة جهد الطاقة يمكن التعبير عنها كما يلي .

$$V = mg [(a + b) \cos \theta + b \theta \sin \theta]$$

حيث  $\theta$  هي الزاوية بين خط التماس والعمود من مركز الكرة . من هذا ، اثبت

ما اذا كان التوازن مستقرا او غير مستقر معتمدا على كون  $a$  اقل او اكبر من  $b$   
على التالي .

١١-٦ . استقصي الاستقرار للحالة السابقة عندما تكون  $a = b$  .

١١-٧ . نصف كرة متجانسة نصف قطرها  $a$  تستند على قمة نصف كرة خشنة نصف

قطرها  $b$  ، بحيث كان السطحان المنحنيان متلامسين . اثبت ان التوازن مستقر اذا كانت

$a$  اصغر من  $3b/5$  .

١١-٨ . يتحرك جسيم كتلته  $m$  على خط مستقيم ، كالمحور  $x$  ، الطاقة

$$V(x) = -kxe^{-ax}$$

حيث  $a, k$  هما ثابتان . جد موضع التوازن وزمن ذبذبات صغيرة للجسيم حول  
موضع التوازن .

- ١١-٩٠ يتحرك جسيم كتلته  $m$  في جهد التمرين (١١-١) جد زمن ذبذبات صغيرة حول مواضع استقرار التوازن .
- ١١-١٠ احسب التردد لذبذبات شاقولية حول موضع التوازن للجسيم في التمرين (١١-٤) .

- ١١-١١ احسب ذبذبة المكعب في التمرين (١١-٥) .
- ١١-١٢ احسب زمن ذبذبة نصف الكرة المتذبذبة في التمرين (١١-٧) .
- ١١-١٣ كرة حديدية صغيرة تتدحرج الى الامام والخلف حول موضع توازنها داخل تجويف كروي خشن . جد زمن الذبذبة .

- ١١-١٤ قضيب منتظم  $AB$  طوله  $l$  وكتلته  $m$  ثبت طرفه السفلي  $A$  بمفصل . وثبت الطرف العلوي  $B$  بوتر من طوله الطبيعي  $l/2$  . وثبت الطرف الآخر للوتر في نقطة  $C$  التي تقع مباشرة فوق القضيب بحيث تكون المسافة  $AC$  مساوية الى  $2l$  . جد الصلابة  $k$  المتطلبة للوتر بحيث يكون الموضع الشاقولي للقضيب هو احد التوازن المستقر . جد كذلك ازمان ذبذبات صغيرة للقضيب حول الموضع .

- ١١-١٥ اكتب الحل الكامل لمتذبذب توافقى مزدوج ، المعادلة (١١-٣٧) ،

للشروط الابتدائية التالية

$$t = 0 \quad x_1 = A_0 \quad x_2 = 0 \quad \dot{x}_1 = v_0 \quad \dot{x}_2 = 0$$

- ١١-١٦ جد الحل الكامل للبندول المزدوج الشكل (١١-٥) ، للشروط الابتدائية

التالى

$$t = 0, \quad \theta = A, \quad \phi = 0, \quad \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$$

عبر عن هذه الحركة بدلالة الاحداثيات المعيارية .



١١- ٠١٧ احسب الترددات العيارية للمتذبذب التوافقي المزدوج في الشكل

١١- ٣ للحالة التي يكون فيها كتلتا الجسمين غير متساويتين ،  $m_1$  ،  $m_2$

ومصورة خاصة جد الترددات لحالة

$$m_1 = m$$

$$m_2 = 2m$$

$$k' = \frac{k}{2}$$

عبر عن النتيجة بدلالة الكمية

$$\omega_0 = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

١١- ٠١٨ جد الاحداثيات العيارية للتمرين المذكور اعلاه .

تحقق من ان دالة لاكرانج تختصر الى مجموعتين مربعة لهذه الاحداثيات .

١١- ٠١٩ جد الترددات العيارية للهندول المزدوج في الشكل ( ١١ - ٥ )

للحالة التي يكون فيها طول الوتر العلوي  $l_1$  والطول السفلي  $l_2$  .

١١- ٠٢٠ نابض مرن خفيف صلابته  $k$  ثبت طرفه العلوي وعلق جسم كتلته  $m$

في الطرف السفلي . ثم ثبت نابض ثاني صلابته  $k$  في الجسم وهو بدوره يحمل

جسيما كتلته  $2m$  في طرفه السفلي . جد الترددات العيارية للمنظومة للتذبذبات

الشاقلوية حول وضع التوازن . جد ايضا احداثيات العيارية .

١١- ٠٢١ نابض مرن ثقيل صلابته وكتافته ، منتظمتان يحمل جسيما كتلته  $m$  .

اذا كانت  $m'$  كتلة النابض و  $k$  صلابته ، اثبت ان زمن الذبذبة لذبذبات

الجسيم الشاقلوية هو

$$2\pi \sqrt{\frac{m + (m'/3)}{k}}$$

يبين هذا التمرين تأثير كتلة النابض على زمن الذبذبة .

١١- ٢٢ . جد الاحداثيات العيارية في التمرين ١١- ١٩ للحالة الخاصة

$$l_1 = 2l \quad , \quad l_2 = l$$

١١- ٢٣ . قضيب كتلته  $m$  وطوله  $a$  ربط احد طرفيه بنابض طوله  $b$  وقد ثبت طرف النابض الثاني . جد الترددات العيارية لتذبذب المنظومة حول وضع التوازن العمودي . افرض ان الحركة في مستوى شاقولي واحد .

١١- ٢٤ . جد الاحداثيات العيارية للتمرين السابق عندما تكون  $a = b$  .

١١- ٢٥ . ضع المعادلة الاولية لحالة ثلاثة جسيمات مزدوجة مرتبة بصورة خطية واثبت ان الترددات العيارية هي نفسها التي تعطىها المعادلة (١١- ٨٠) .

١١- ٢٦ . بندولان بسيطان متماثلان ازيد وجاهما بقوة تجاذب ضعيفة جدا تتغير مع مربع المسافة العكسية بين الجسيمين . اثبت لازاحات صغيرة عن وضع التوازن يمكن اختصار دالة لاكرانج الى نفس صيغتها لتذبذب بين توافقين مزدوجين . اثبت ايضا انه اذا بدأ احد البندولين متذبذبا وكان الآخر ساكنا ، عندئذ سيتحرك البندول الثاني ويكون الاول ساكنا وهكذا .

١١- ٢٧ . جزيئة ثلاثية خطية (مثل  $CO_2$ ) تتكون من ذرة مركزية كتلتها

$m$  وذرتان اخريان كتلة كل منهما  $m$  . والذرات الثلاث تقع على خط مستقيم .

ضع دالة لاكرانج لهذه الجزيئة على فرض ان الحركة تحدث في خط مستقيم

(المحير -  $\alpha$ ) وجد الصيغ العيارية والترددات العيارية . افرض ان القوة

بين كل ذرتين متجاورتين يمكن تمثيلها بناهض صلابته  $\alpha$  .

١١ - ٢٨ . وضع الصيغ العيارية لحالة اربعة جسيمات مرتبة بصورة خطية .

جد القيم العددية لنسب الترددات العيارية الثانية والثالثة والرابعة

الى اوطأ او التردد العيارى الاول .

١١ - ٢٩ . ترخفيف طوله الطبيعي  $l$  وصلابته  $\alpha$  مطا الى طول  $l + \Delta l$

وحصل بعدد  $n$  من الجسيمات رتبته على مسافات متساوية على طول الوتر .

فاذا كانت  $m$  الكتلة الكلية لجميع الجسيمات  $\alpha$  . جد انطلاق الموجات الطولية

والمستعرضة في الوتر .

١١ - ٣٠ . حل التمرين السابق للحالة التي يكون فيها الوتر عميلا كثافته الخطية

$\rho$  بدلا من ان يكون محملا .

## الفصل الثاني عشر

### النظرية النسبية الخاصة

#### The Special Theory of Relativity

قدمت النظرية النسبية الخاصة هنا بصورة مختصرة ، وهي تطوير مهم للفيزياء الحديثة كما أن لها تطبيقات تمتد من ديناميك النوية الى الميكانيك السماوى وقد اثرت هذه النظرية بعمق على مفاهيمنا للفضاء والزمن .

#### Introductory Remarks

#### (١٢ - ١) ملاحظات تمهيدية

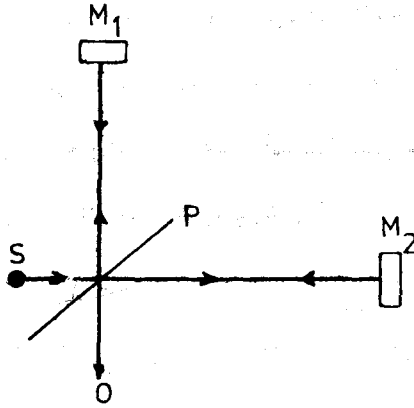
ان احدى التطورات المهمة التي حدثت في تاريخ الفيزياء خلال الجزء الاخير من القرن التاسع عشر هي عندما اعلن جيمس كلارك ماكسويل ، James Clerk Maxwell نظريته الكهرومغناطيسية للضوء في عام ١٨٦١ . اذ نجحت هذه النظرية في توحيد كميات ضخمة من المعارف التجريبية الخاصة في انتشار الضوء خلال المادة بدلالة خواص كهربائية ومغناطيسية معروفة لاساط ماديسية . ولكن ، بالرغم من نجاح النظرية الكهرومغناطيسية العظيم كما قدمها ماكسويل في بادىء الامر فانها كانت تحوى على صورة مشوشة عن فرضية كانت سائدة في ذلك الوقت حول وسط يتخلل كل شيء يسمى بالاثير . وان المحتويات الرياضية والاستنتاجات النظرية لم تتطلب فكرة الاثير ولكن تواجد الفيزيائي كان يعتبر ضروريا لانتشار الضوء خلال الفضاء الفارغ حتى ان ماكسويل ارتأى في سنة ١٨٧٩ انه قد يكون من الممكن حساب حركة المنظومة الشمسية خلال الاثير بملاحظة التغييرات في انطلاق الضوء الظاهرى وذلك باستخدام طريقة رومر Romer القديمة المتضمنة خسوف اقمار كوكب المشتري ولسو الحظ لم تكن البيانات الفلكية كافية الدقة لهذا الغرض .

#### The Michelson-Merley Experiment

#### (١٧ - ٢) تجربة مكلسن - مولي

في هذا الوقت اصبح الفيزيائي الامريكى مكلسن الذى قاس انطلاق الضوء قبل هذا

الوقت بدقة متناهية مولعا بفكرة امكانية الكشف عن حركة الارض خلال الاثير بواسطة الموجات الضوئية ، فسم لهذا الغرض الخاص المدخال الضوئي Optical Interferometer الذي يحمل اسمه الآن وستعمل في قياسات متوعدة كثيرة اخرى .  
 يبين الشكل (١٢ - ١) رسما تخطيطيا له . تنقسم حزمة ضوئية من المصدر S الى حزمتين بواسطة لوح زجاجي P هو عاكس جزئي للضوء . فتنقل احدي الحزمتين الى المرآة  $M_1$  التي تعكس الضوء مرة ثانية الى P والحزمة الثانية تمر مباشرة خلال P الى المرآة  $M_2$  التي تعكس الضوء ايضا الى P . عندئذ تتحد الحزمتان المنعكستان في P وينعكس جزء من الضوء الى عيّن المشاهد في O .



الشكل ١٢ - ١ رسم تخطيطي لتجربة مكلس - مورلي

وسبب تداخل الامواج الضوئية الاتلافي والتفوية ، يشاهد نمط من الحزم المتداخلة الضيئة والمظلمة او نمط هديفي في مجال الرويا . ويمكن جعل نمط التداخل يتغير بهدئية واحدة اذا ازاحت اى من المرآتين  $M_1$  او  $M_2$  مسافة مساوية لربع طول موجة ضوئية . ان ازاحة مساوية لواحد من المليون من الانسج

تقابل ازاحة مساوية لـ  $\frac{1}{\gamma}$  من طول الموجة او يمكن الكشف بسهولة عن  $\frac{1}{\sigma}$  تغيير  
 عددي .

افرض الآن ان كلا المرآتين على نفس المسافة  $d$  من الصفحة  $P$  . فاذا كان  
 الجهاز لا يتحرك خلال زمن انعكاس الضوء الى الامام والخلف ، عندئذ تسير  
 الموجتان الى  $P$  في نفس الوقت ولتقيان بنفس الطور في  $O$  . ومن ناحية ثانية ،  
 افرض ان الجهاز يتحرك بسرعة  $\vec{v}$  باتجاه الحزمة الابتدائية من  $S$  . فالزمنان  
 اللذان تستغرقهما الموجتان الجزيتان بمفرتيهما القتاليتين لن يكونا متساويين اذا  
 فرضنا ان الضوء يسير بانطلاق ثابت  $c$  خلال الاثير . وهذه الحالة مشابهة لحالة  
 سباحين ، احدهما يسبح ضد التيار واتجاهه والاخر يسبح من جانب التيار السرى  
 الجانب الاخر ثم يعود . اذن الموجة التي تذهب الى  $M_2$  تسير بانطلاق  $c-v$  ،  
 بالنسبة الى الجهاز ، وعند عودة هذه الموجة تسير بانطلاق نسبي مقداره  $c+v$  .  
 فالزمن الكلي  $t_2$  للذهاب والاياب يكون اذق

$$t_2 = \frac{d}{c-v} + \frac{d}{c+v} = \frac{2cd}{c^2-v^2} \quad (1-12)$$

ومعكس ذلك ، فان الموجة التي تسير الى  $M_1$  يكون انطلاقها النسبي  $(c^2-v^2)^{\frac{1}{2}}$   
 بالنسبة الى الجهاز من قانون جمع المتجهات للسرع . فالزمن  $t_1$  للصفرة عندئذ  
 يكون

$$t_1 = \frac{2d}{(c^2-v^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2-12)$$

ورفقا لذلك ، الفرق في الزمن  $\Delta t$  يعطى من

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 2d \left[ \frac{c}{(c^2-v^2)} - \frac{1}{(c^2-v^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = \frac{dv^2}{c^3} + \dots \quad (3-12)$$

في هذه الفترة الزمنية يسير الضوء مسافة

$$\Delta l = c \Delta t = d \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots$$

هذا هو فرق الطريق ( الفعلي ) ومقابل الكسر

$$\frac{\Delta l}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots \quad (١٢ - ٤)$$

• لطول موجة الضوء  $\lambda$

• لحركة الارض المدارية حول الشمس ، تكون قيمة  $v/c$  حوالي  $10^{-4}$  . وهذا يساوى فرق مسار فعلي يقدر بحوالي  $\frac{1}{4}$  طول موجة ضوء الصوديوم الازرق ،  $\lambda = 6 \times 10^{-5}$  cm لمسار طولاه ١٠ امتار . ( وفي الحقيقة ان قيمة  $v/c$  السابقة هي القيمة الصغرى المتوقعة لان قيمة  $v/c$  للمنظومة الشمسية التي تنتج عن دوران المجرة تقدر بحوالي  $10^{-3}$  . وهذا سيرفع قيمة فرق المسار الفعلي السابقة بقدر مرتبتين ) .

كان مكلسن يأمل في تجارسه ايجاد تغيير هديبي عند دوران المدخال بزوايا  $90^\circ$  وهكذا يسبب تأثير ( رياح الاثير ) الناتج بسبب حركة الارض تناها بين مسارى الضوء . لقد اجرى العالم المذكور تجربة اولية سنة ١٨٨١ باستعمال مسار طولاه ١٢ متر . فكانت النتيجة سالبة . ومع ذلك ، فان الكشف عن التغيير الهديبي المتوقع بسبب حركة الارض المدارية ، يكاد يكون مستحيلا . بعد ست سنوات وبالتعاون مع مورلي E.W. Morley بني مدخال محسن مساره الضوئي الكلي يساوى ١١ متر . وقد نصب الجهاز على قالب من الكرانيت طاف في بركة من الزئبق ، فلوحظ التداخل الهديبي باستمرار عند دوران القالب بزوايا  $360^\circ$  مرة ثانية وكما في التجربة السابقة لم يلاحظ اى تغيير هديبي يمكن قياسه ولو هذه المرة . كان المتوقع الكشف

بسهولة عن التغيير بسبب اعتبار انطلاق الارض المدارى فقط .  
 وقد جاءت النتائج السالبة لهذه التجارب للكشف عن حركة الارض خلال الاثير  
 مفاجأة غير متوقعة لعلماء العالم . لان الفكرة الثابتة عن وجوب انتشار الضوء  
 في وسط ما خلال الفضاء اصبحت مرتابا في امرها . ودلا من ان يترك العلماء مفهوم  
 الاثير حاول عدد من الرياضيين ايجاد تفاسير بديلة .

ومن اشهر هذه المحاولات التي قام بها كل من لورنس Lorentz وفتزجيرالد  
 Fitzgerald منفردا عن الآخر في عام ١٨٩٢ . فقد فرضا ان الجسم الصلب تنقلص  
 ابعاده الموازية لحركته خلال الاثير بنسبة  $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - v^2/c^2}$  . وهذه الكمية  
 في التقلص المعروفة بتقلص لورنس - فتزجيرالد تعادل المرات التي تتجازها  
 مسارات الضوء في تجربة مكلسن - مورلي ولذلك لا يظهر تغيير هديبي .

هذه الطريقة بالذات ليست مرضية لشرح الحقائق العملية لان الفرضية  
 لم تكن عرضة للتحقيق المباشر . ان اى محاولة لقياس تقلص لورنس - فتزجيرالد  
 بطرق القياس التقنية الاعتيادية محكوم عليها بالاخفاق لان الجهاز يتقلص مع  
 الجسم المراد قياسه .

ويجب ان نذكر بهذا الخصوص تجربة اخيرة اجريت سنة ١٩٣٢ من قبل كسدى  
 R.J. Kennedy وثورندايك E.M. Thorndike . انهما استملا في تجربتهما  
 مدخالا لمكلسن فيه طولا مسارى الضوء مختلفان . وقد لوحظ التداخل الهدبي لفترة  
 زمنية طويلة ( اشهر ) وكان المدخال خلال هذه الفترة مثبتا في المختبر ولكنه  
 طبعما يدور مع الارض . وكما هي تجربة مكلسن - مورلي لم تلاحظ اى ازاحة هديبية .  
 والان ، اذا قبلت فرضية تقلص مكلسن - مورلي كتفسير لنتيجة مكلسن - مورلي  
 السالبة ، عندئذ تبقى النتيجة السالبة لتجربة كسدى - ثورندايك دون تفسير .



- فمن الضروري عندئذ وضع فرضية بخصوص قياس الزمن اذا استبقينا فكرة الاثير
- هذه الطريقة لتفسير الحقائق التجريبية بصورة مختلفة عند ظهورها تبد و غير مرضية تماما خصوصا اذا كان بالامكان ايجاد معالجة نظرية عامة وسهلة
- ولهذا الحالة وجدت نظرية كهذه وهي النظرية النسبية الخاصة

### ١٢-٠٣ فرضيات آنشتين في النسبية الخاصة

#### Einstein's Postulates of Special Relativity

- افترض آنشتين في سنة ١٩٠٥ ان مفهوم الاثير والحركة " المطلقة " فيه لاعمى لهما كليا . وتبصر مدهش نهد فكرة الاثير كشيء غير ضروري وعضا عن ذلك عرض اسلما جذريا وجديدا للبحث يستند على فرضيتين اساسيتين .
- ١- تصح قوانين الفيزياء بصورة متساوية في جميع المحاور المرجعية للاستمرارية

#### . Inertial reference systems

- ٢- يكون انطلاق الضوء ثابتا لجميع المشاهدين بغض النظر عن اية حركة نسبية للمصدر او المشاهد

وهاتان الفرضيتان تكونان اساس النظرية النسبية الخاصة (١) .

- والفرضية الاولى هي امتداد لشرحنا السابق عن المحاور المرجعية للاستمرارية في البند (٥ - ٢) لتضمنها جميع قوانين الفيزياء وليس فقط قوانين نيوتن للحركة

(١) عالجت النظرية النسبية العامة التي صاغها آنشتين سنة ١٩١٦

المحاور المرجعية غير المستمرة . وقد تركزت بصورة كبيرة على ظاهرة

الجانبيية

كما ان أنشتين لم ينسى قوانين الكهرومغناطيسية حيث اورد في بحثه مايلي (٢) .  
 ان المحاولات الفاشلة لاكتشاف اية حركة للارض بالنسبة " للوسط الخفيف " توحي  
 ان ظاهرة الكهرومغناطيسية كالميكانيك لا يمتلكان خواص تتعلق بفكرة السكون المطلق .  
 واستمر أنشتين في نفس المقال الخاص بعمله المشهور ليؤكد على فرضيته الثانية  
 والتي هي اروغ الفرضيتين . كما انه وضع فرضية اخرى تظهر وكأنها متناقضة مع  
 السابقة وهي ان الضوء ينتشر دائما في الفضاء الخالي بسرعة ثابتة تساوي  $c$  وهي  
 لاتعتمد على حركة مصدر الضوء .

### The Lorentz Transformation

(١٢ - ٤) تحويلات لورنتز

سنطبق في هذا البند فرضيات النسبية لاستنباط المعادلات الرياضية لتحويل  
 قياسات الموضع الفضائي والزمن بين مشاهدين  $A, B$  يتحرك كل منهما بالنسبة الى  
 الاخر بسرعة ثابتة  $v$  . ان النتيجة  $e$  التي تعرف بتحويلات لورنتز سوف تكون  
 الاساس لاستنتاجات اخرى من الفرضيات (٣) .

لنمثل محاور  $A$  بـ  $Oxyz$  ومحاور  $B$  بـ  $O'x'y'z'$  ولتسهيل البحث سنفرض  
 ان المحوران  $Ox$  و  $O'x'$  وهم جرا متوازيان على التالي  $e$  ، وان الحركة النسبية  
 تكون باتجاه  $x$  ، اي ان  $e$  المحاور التي تحمل الفتحة تتحرك بالاتجاه  $x$  بانطلاق  $v$   
 بالنسبة للمحاور التي لانحمل الفتحة ( الشكل ١٢ - ٢ ) .

A. Einstein Ann. Physik, 17, 891 (1905), English (٢)

Translation by W. Perrett and G.B. Jeffery in the  
 Principle of Relativity, Dover, New York, 1923.

(٣) لورنتز هو اول من استنبط التحويلات سنة ١٩٠٤ من فرضيات الكهرومغناطيسية

ولكن أنشتين اكتشفها بصورة مستقلة وبين انها تتج من فرضيات النسبية .

الآن اذا كانت نقطتا الاصل  $0$  و  $0'$  متطابقتان في الزمن من  $t = 0$  ، عندئذ المسافة  $00'$  تساوي  $vt$  . ووفقا لعلم الحركة المجردة النيوتوني او الكلاسيكي تكون معادلات التحويلات عندئذ

$$x = x' + vt$$

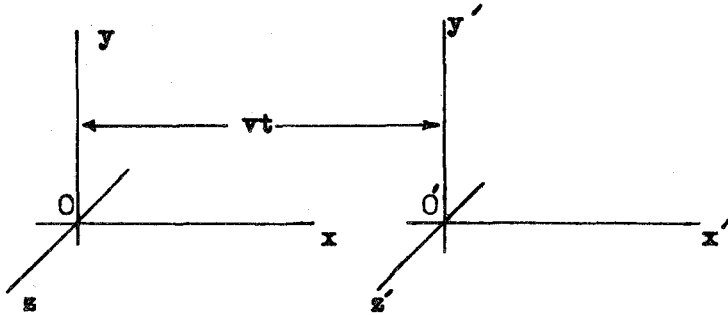
$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = t'$$

(١٢ - ٥)

المعادلة  $t = t'$  تعبر عن المساواة المفروضة لقياس الزمن للمشاهدين . ( يستخدمان ساعتين متطابقتين ) بعض الاحيان يسمى التحويل المذكور اعلاه بتحويل غاليلو .



الشكل (١٢ - ٢) : منظومتا المحاور في حركة نسبية

افرض اننا نعتبر تجربة خاصة ينهت فيها وميض ضوئي من النقطة 0 في اللحظة  $t = 0$  عندما تكون نقطتا الاصل 0 و  $0'$  متطابقتين . ستنتشر الموجة الضوئية في جميع الاتجاهات بانطلاق  $c$  . يمكن ان نتمثيل جبهة الموجة الضوئية بكرة متمددة تعطي بالمعادلة التالية

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (٦-١٢)$$

ورقنا لتحويلات غاليلو، تكون معادلة جبهة الموجة في المحاور التي تحمل الفتحة على النحو التالي

$$(x' + vt')^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (٧-١٢)$$

هذه معادلة كرة نصف قطرها  $ct'$  متمركزة في النقطة  $x' = -vt'$  على المحور  $x'$  . الآن ، اذا كانت المعادلة المذكورة اعلاه صحيحة ، تحرك جبهة الموجة بانطلاق  $c - v$  بالاتجاه الموجب للمحور  $x'$  . وانطلاق  $c + v$  باتجاهه السالب . وواضح ان هذا يناقض الفرضية الثانية . لانه وفقا لهذه الفرضية يجب ان تنتشر جبهة الموجة بسرعة  $c$  في منظومتي المحاور . ومعبارة اخرى ، يجب ان يـرى المشاهد  $S$  ايضا موجة منتشرة في جميع الاتجاهات بانطلاق  $c$  . فيجب ان تكون معادلة جبهة الموجة في المحاور التي تحمل الفتحة على النحو التالي

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (٨-١٢)$$

بدلا من المعادلة (٧-١٢)

نبغي الآن ايجاد تحويل يمتنع المعادلة (٨-١٢) من المعادلة (٦-١٢) .

والتحويل الخطي (٤) . لحسن الحظ من النوع العام التالي

$$x' = a_{11}x + a_{12}t \quad (١-١٢)$$

$$t' = a_{21}x + a_{22}t$$

ستمطي النتيجة المطلوبة بعد اختيار مناسب للمعاملات . لما كانت الحركة النسبية باتجاه  $xx'$  فيمكننا ان نفرض  $y=y$  ,  $z=z$  , والتعمير في المعادلات (١-١٢) نحصل على .

$$(a_{11}x + a_{12}t)^2 + y^2 + z^2 = c^2(a_{21}x + a_{22}t)^2 \quad (١٠-١٢)$$

هذه المعادلة يجب ان تكون متطابقة مع

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

اذن عند فك مساواة معامل الحدود المتناظرة ، نجد ان

$$a_{11}^2 - c^2a_{21}^2 = 1 \quad a_{11}a_{12} - c^2a_{21}a_{22} = 0$$

$$a_{12}^2 - c^2a_{22}^2 = -c^2 \quad (١١-١٢)$$

الآن ، عندنا اربعة مجاهيل ولكن ثلاث معادلات فقط . ولكن نعلم ان النقطة  $x'=0$  هي نقطة الاصل  $0$  ، التي تتحرك بانطلاق  $v$  . باتجاه  $x$  .

(٤) اذا كان التحويل غير خطي ، عندئذ تظهر الحركة المنتظمة في احدى المحاور

معجلة لمشاهد في المحاور الثانية . هذه ليست حقيقية لان كل مسن

منظورتي المحاور غير معجلة بالنسبة الى الاخرى .

اذن المعادلة

$$x' = 0 = a_{11}x + a_{12}t \quad (12-12)$$

يجب ان تختصر الى

$$x = vt$$

وذلك نحصل على معادلة رابعة هي

$$v = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \quad (13-12)$$

من المعادلتين (12-12) و (13-12) نجد بعد استخدام قليلا من الحسابات الجبرية ان المعاملات هي

$$a_{11} = a_{22} = \gamma \quad (14-12)$$

$$a_{12} = -\gamma v$$

$$a_{21} = -\frac{\gamma v}{c^2}$$

حيث

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (15-12)$$

اذن التحويل التالي يستوفي متطلباتنا وهو ان معادلة جبهة الموجة المتشعبة هي

نفسها في منظومي المطور

$$x' = \gamma (x - vt) \quad (16-12)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

هذا هو تحويل لورنتز الذي يعبر عن الجوهر الرياضي للنظرية النسبية الخاصة .  
يمكن البرهنة بسهولة على ان معكوس التحويل السابق هو

$$\begin{aligned}x &= \gamma (x' + vt') \\y &= y' \\z &= z' \\t &= \gamma \left( t' + \frac{vx'}{c^2} \right)\end{aligned} \quad (12-17)$$

نرى انه اذا كانت  $v$  صغيرة جدا بالمقارنة مع انطلاق الضوء ، عندئذ  $\gamma$  تساوي واحداً تقريباً ومختصر تحويل لورنتز الى تحويل غاليلوي الغاية .  
(12-5) نتائج تحويل لورنتز - تقلص الطول وتمديد الزمن

Consequences of the Lorentz Transformation:

Length Contraction and Time Dilatation

هناك استنتاجان مدهشان ومباشران يمكن ان نستلمهما اذاً فرضنا ان تحويل لورنتز يعط فيزيائياً . اعتبر اولاً قياس الطول لقضيب . لنفرض ان القضيب مثبت فسي المحاور التي تحمل الفتحة وواقع على طول المحور  $Ox'$  . عندئذ طول القضيب كما يقيسه المشاهد B ، هو

$$L_0 = x'_2 - x'_1$$

حيث  $x'_1$  و  $x'_2$  هما احداثيا طرفي القضيب . الآن تتحول الكمية  $x'_2 - x'_1$  وفقاً لتحويل لورنتز كالآتي

$$\begin{aligned}L_0 = x'_2 - x'_1 &= \gamma \left[ (x_2 - vt_2) - (x_1 - vt_1) \right] \\&= \gamma \left[ L - v(t_2 - t_1) \right]\end{aligned}$$

حيث  $L = x_2 - x_1$  . على فرض ان المشاهد A يقيس موضعي طرفي القضيب

في نفس الوقت ( بالنسبة له ) ، اى ان ،  $t_2 = t_1$  ، عندئذ تختصر المعادلة المذكورة اعلاه الى

$$L_0 = \gamma L$$

او

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L_0 \quad (11-18)$$

اذن يقول المشاهد A ان طول القنبيب هو اقصر مما يقوله المشاهد B . ويظهر  
اول القنبيب المتحرك قد تغير بنسبة  $1/\gamma$  . هذا التغير الظاهري يساوى عدديا  
تقلص لورنتز - فتزجيرالد . ولكن مفهومى التقلصين مختلفان . لقد اعتبر تقلص لورنتز -  
فتزجيرالد حقيقا ولوانه ذاهرة لا يمكن قياسها ، بينما المفروض هو امكانية قياس  
التقلص النسبي ، ولوانه تأثير مظاهرى .

ثم لنقارن فترات زمنية ، كما تحسب من تكتكات ساعة كبيرة ، يقيسها  
المشاهدان ، لنفرض ان الساعة في حالة السكون في المحاور التي تحمل الفتحة .  
فالفترة الزمنية  $T_0$  بين تكتكين متتاليتين  $t_1 = t_1'$  و  $t_2 = t_2'$  هي

$$T_0 = t_2' - t_1'$$

او

$$\begin{aligned} T = t_2 - t_1 &= \gamma \left[ (t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2} (x_2' - x_1') \right] \\ &= \gamma T_0 + \gamma \frac{v}{c^2} (x_2' - x_1') \end{aligned}$$

لما كانت الساعة في حالة سكون في المحاور التي تحمل الفتحة ، عندئذ

$$x_2' - x_1' = 0$$



ورقاً لذلك

$$T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (12 - 19)$$

اذن لا يتفق المشاهدان على الفترات الزمنية بين التكتكات • المشاهد A يقول ان الفترات هي اطول مما يقوله B • فالساعة المتحركة تظهر بانها تنقص في الزمن بنسبة  $\gamma$  •

وفي المناقشات السابقة لا يهم ابدا ان يسمى اي من المنظومتين بالمحاور المتحركة • وقد يكون القضيب المقاس والساعة منقولين في المحاور التي تحمل الفتحة والتي لا تحمل الفتحة واي من المشاهدين قد يجد ان القضيب الآخر ظهر اقصر والساعة الاخرى ظهرت مقصرة في الزمن • وقد تبدت هذه التعابير لاول وهلة متناقضة ولكن الامر ليس كذلك ، لانها نتائج مباشرة لتحويل لورنتز الذي يستنبط بدوره من فرضيات النسبية •

قد يكون من النافع ملاحظة ان تحويل لورنتز يقتضي ضمنا ان المسافة المفضة او الفترة الفضائية في احدى المنظومتين تظهر كتركيب من مسافة وفترة زمنية في المنظومة الاخرى • وبالتماثل تظهر فترة زمنية مفضة في منظومة كتركيب لفترة فضائية وزمنية في المنظومة الاخرى •

### التوافق ونسبية الزمن

#### Simultaneity and the Relativity of Time

تبين الملاحظات السابقة ما ندر يكون الفرق الاساسي بين نسبية نيوتن ونسبية آينشتين • خصوصاً ، اذا كانت  $t_1 = t_2$  في احدى المحاور المرجعية ، بحيث تمثل الرموز السفلية 1, 2 الى حدثين متزامنين في تلك المحاور وليس من الضروري ان تكون القيم المقابلة للزمنين  $t'_1$  و  $t'_2$  متساوية في محاور مرجعية مختلفة • ومعبارة اخرى ،

يتحقق مفهوم التوقيت فقط في محاور مرجعية خاصة . فاذا تقبلنا قواعد النظرية النسبية الخاصة ، فعلينا ان نتخلى عن فكرتنا الاولية والحدسية وهي ان الفضاء والزمن متميزان ومطلقان .

### ١٢-٦) الفضاء والزمن Space-time

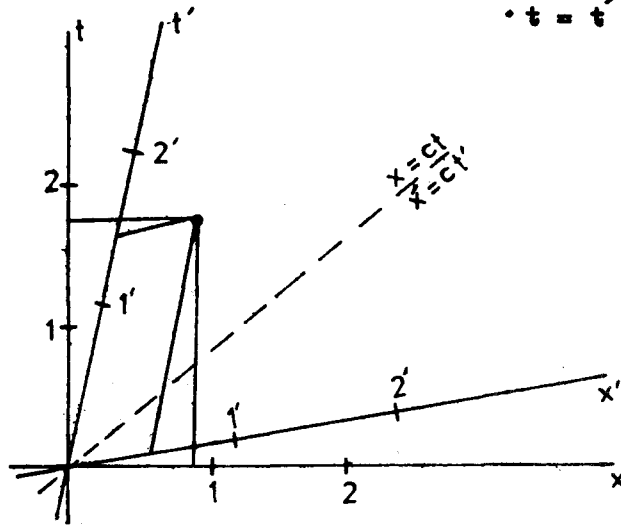
في محاور مرجعية معينة مكونة من مجموعة محاور ومنظومة ساعات لقياس الزمن ، فيجموعة القيم (  $x, y, z, t$  ) يعين موضع في الفضاء تعينا كاملا في فترة زمنية خاصة تسمى حدث event . ويمكن اعتبار الحدث نقطة في اربعة ابعاد مستمرة تسمى الفضاء والزمن . ويمكن تمثيل الحدث الماضي والحاضر والمستقبل لجسيم متحرك بمنحني واحد في الفضاء والزمن . يسمى هذا المنحني بالخط العالمي للجسيم . وواضح من تحويلات لورنتز ان تجزئة الفضاء ، والزمن المستمر الى فضاء وزمن يعتمد على المحاور المرجعية الخاصة ، اى على حركة المشاهد . والمشاهدون المختلفون يجزؤنها بطرق مختلفة .

### Space-time Diagrams

### منحنيات الفضاء والزمن

لكي نوضح الخطوط العالمية بيانيا ، من الضروري طبعا ، حذف بعد واحد على الاقل من الابعاد الفضائية . ابسطها اخذ احداثي فضائي واحد والزمن ، بحيث يكون بياني الخط العالمي عبارة عن رسم اعتيادي للمسافة ضد الزمن . عندئذ ، كما فسي الحركة المجردة غير النسبية ، تكون الخطوط العالمية للجسيمات المتحركة بسرعة ثابتة مستقيمة ، بينما تكون الخطوط العالمية للحركة المعجلة منحنية . ان تمثيل تحويلات لورنتز على منحنى الفضاء والزمن يلقي الاضواء الكاشفة على ذلك . لنبدأ بالاحداثيين  $x$  و  $t$  للمحاور التي لاتحمل الفتحة كخطين متعامدين متقاطعين .

عندئذ نحصل على المحاور التي تحمل الفتحة كما يلي . اولاه المحور  $x'$  هو ذلك الخط الذي يقابل  $t' = 0$  . اذن هنرى من تحويلات لورنتز ان معادلة هذا الخط هي  $t = vx/c^2$  بدلالة المحاور التي لاتحمل الفتحة . ثانياه للاحداثى  $t'$  عندنا  $x' = 0$  . وتعطى تحويلات لورنتز  $x = vt'$  لهذا الخط . اذن ه تميل المحاور التي تحمل الفتحة عن المحاور التي لاتحمل الفتحة كما هو مبين في الشكل ١٢-٣ . بالمناسبة ه نلاحظ ان تحويلات غاليليو تعطى ايضا  $x = vt'$  للمحور  $x'$  . ولكن المحور  $x'$  ينطبق على المحور  $x$  لان تحويلات غاليليو للزمن هي  $t = t'$



الشكل (١٢-٣) احداثيات حدث في نظامين محاور مختلفين

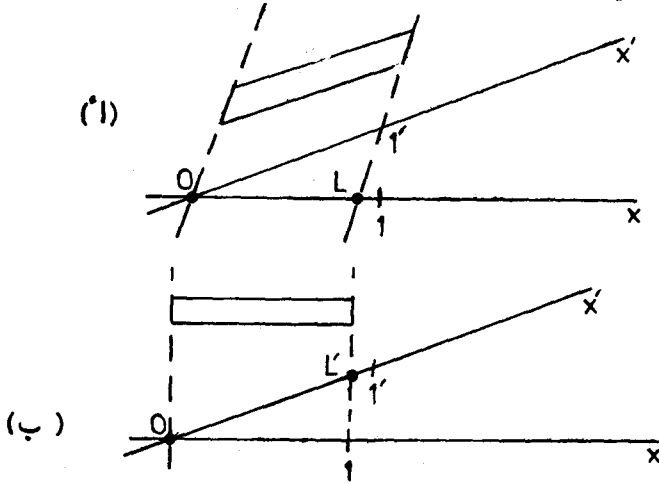
والفرق الرئيسي بين تحويلات غاليليو ولورنتز هو القياس . تعين علامات القياس

على المحاور التي تحمل الفتحة هن تحويلات لورنتز على النحو التالي

العلامة  $t' = 0, x' = 1$  موضعها في النقطة  $x = 1$  .

١.  $t = (\delta v / c^2)$  ، بالتماثل ، موضع علامة مقياس الزمن  $x' = 0$  ،  
 في النقطة  $t' = 1$  ،  $x = (\delta v)$  ، ١.  $t = \delta$  ، بالاستمرار على هذا  
 النحو ، يكون من الممكن بناء مجموعة كاملة من علامات المقياس وشبكة خطوط محزوز  
 متقاطعة تحيط احداثيات اى حدث في اى محور من المحاور المرجعية التي تحمّل  
 الفتحة او التي لاتحملها ، ومعمرة خاصة ، لما كان انطلاق الضوء ثابتا في جميع  
 المنظومات المرجعية ، عندئذ يكون للخط العالمي لوميض ضوئي نفس المعادلة في اى من  
 منظومتي المحاور (  $x' = ct$  ،  $x = ct$  ) كما هو مبين في الشكل بالخط المنقط .  
 لقد وضح تقليص الطول وتمديد الزمن بسهولة في مخطط الفضاء والزمن .  
 خذ ، على سبيل المثال ، طرفي قضيب مترى . فاذا كان القضيب المترى في حالة  
 سكون في المحاور التي تحمل الفتحة وكان احد طرفيه في النقطة  $x' = 0$  والآخر  
 في النقطة  $x' = 1$  عندئذ يقطع خطا طرفيه العالميين المحور  $x$  في النقطتين  
 $O$  ،  $I_1$  ، كما هو مبين في الشكل ١٢-٤ (أ) . والمسافة  $OI_1$  تمثل الطول المتقلص  
 للقضيب المترى في المحاور التي لاتحمل الفتحة . وبالتماثل اذا كان القضيب المترى  
 ساكنا في المحاور التي لاتحمل الفتحة وكان احد طرفيه في النقطة  $x=0$  والطرف  
 الآخر في النقطة  $x = 1$  عندئذ يقطع خطا طرفيه العالميين المحور  $x$   
 في النقطتين  $O$  و  $I_1'$  ، الشكل ١٢-٤ ب فالسافة  $OI_1'$  تمثل الطول المتقلص  
 للقضيب المترى في المحاور التي تحمل الفتحة .  
 لرؤية تمديد الزمن ، اعتبر الحدث  $x' = 0$  ،  $t' = 1$  ، كما تبينه ساعة في  
 حالة السكون موضوعة في نقطة اصل المحاور التي تحمل الفتحة . وظهر هذا  
 الحدث في الزمن ١.  $t = \delta$  في المحاور التي لاتحمل الفتحة .

المعلّمة  $T'$  في الشكل (١٢-٥) .



الشكل ١٢-٤ : يوضح تقلص القضيبي المتحرك الظاهري

(قضيبي متري) (أ) قضيبي في حالة سكون في المحاور التي تحمل الفتحة

(ب) قضيبي في حالة سكون في المحاور التي لا تحمل الفتحة . الخطان العالميان

في طرفي القضيبي مبينان بالخطوط المنقطه) .

والتماثل الحدث  $x = 0$  ,  $t = 1$  ، كما يقرأ من ساعة في حالة السكون في

المحاور التي لا تحمل الفتحة ، يحدث في الزمن  $t = \gamma$  في المحاور التي

تحمل الفتحة . المعلّمة  $T'$  في الشكل . في كل حالة تظهر الساعة في المحاور

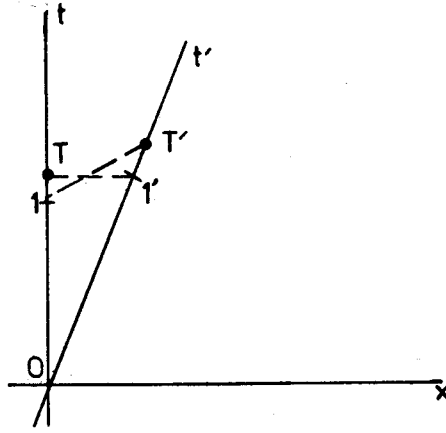
المعاكسة تبطي .

١٢-٧ . الرحلة الفضائية وتأم التناقض الظاهري

### Space Travel and the Twin Paradox

افرض ان مسافرا بدأ بانطلاق عال رحلة الى نجم بعيد . لنفرض ان رحلته

تستغرق فترة زمنية معينة مثل  $T_0$  ، كما تقاس بساعته التي يحملها معه .



(الشكل ١٢-٥ يوضح تنقيص الساعة المتحركة الظاهري • المحور  $t$  هو الخط العالمي للساعة في المحاور التي لا تحمل الفتحة والمحور  $t'$  هو الخط العالمي للساعة في المحاور التي تحمل الفتحة) •

افرض انه بعد وصوله توقف ودار بسرعه عائدا الى الارض بنفس السرعه بحيث كان زمن الرحلة الكلي هو  $2T_0$  • وفقا لتحويل لورنتز • المعادلة (١٢-١٩) • لا يتأثر عامل تمديد الزمن  $\gamma$  باشارة  $v$  • وبناء على ذلك يكون الزمن الكلي للرحلة الانكفايية كما قيست بساعات الارض هو  $(2T_0/\gamma)$  • لا • اى انه اكبر بالعامل  $\gamma$  من الزمن الذى قيس بساعة المسافر • الآن • من المسلم به ان جميع العمليات التسي تتأثر بالزمن • بضمنها ضربات القلب • العمر • وهلم جرا داخل المركبة الفضائية ستتغير بنفس المعدل الزمني كالساعة المتحركة • ( هذا يتفق مع الفرضية الاولى ) • اذا كان الامر كذلك • فان الذى يقوم برحلة فضائية وكان له اخ توأم فانه سيعود وهو اصغر من اخيه التوأم الذى بقي في البيت • ولكن سبق ان بينا ان تمديد الزمن

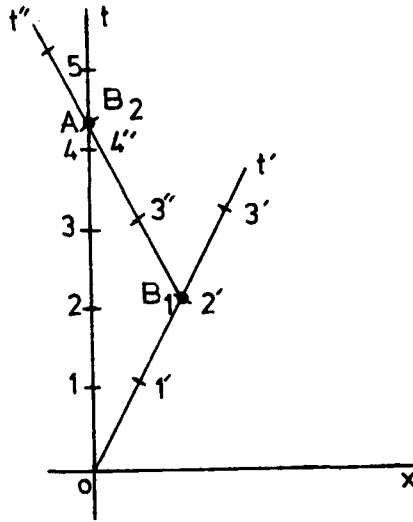
هو تأثير معكوس فكل من التوأمين يستطيع ان يؤكد بان الاخ الآخر هو الذى قام بالسفره ولذلك كل منهما يدعي بان الاخ الآخر اصغر منه . وهذا هو توأم - التناقض الظاهرى المشهور الذى دار حوله جدل كثير . ويمكن حل هذا التناقض بملاحظة ان الرحلة الحقيقية هي التي قام بها الاخ التوأم الذى غير اتجاه سرعته وذلك عانى تغييرا من محاور مرجعية الى اخرى . ويكون هو الذى اصغر سنا من الاخ التوأم الذى بقي في محاور مرجعية واحدة .

يمكن توضيح مزايا العمر غير المتماثل على منحنى الفضاء والزمن . لنسم التوأمين بالرمزين  $A$  و  $B$  ، ولنفرض ان  $A$  يبقى في البيت و  $B$  يقوم بالرحلة فالخطان العالميان للتوأمين هما  $OA$  و  $OB_1 B_2$  في الشكل ١٢-٦ . تتضمن المسالة ثلاثة محاور للزمن . اولا . عندنا المحور  $t$  الذى لا يحمل الفتحة وهو كذلك الخط العالمى للتوأم  $A$  .

ثانياً ، هناك المحور  $t'$  وهو الخط العالمى للتوأم  $B$  خلال الجزء الخارجى للسفرة . اخيراً ، هناك المحور  $t''$  الذى هو خط العالمى لرحلة العودة . الخطوط العالمية الثلاث معلّمة بعقاييسها الزمنية على التتالي كما حسبت من تحويل لورنتز . يظن الشكل ان الزمن الكلى على الخط العالمى  $OA$  يكون اكبر من الذى على  $OB_1 B_2$  .

#### الزمن المناسب Proper Time

اذا كان على المسافر الفضائى في الشرح السابق ان يسافر بانطلاقات واتجاهات مختلفة عندئذ سيكون خطه العالمى اكثر تعقيدا من الرحلة المباشرة ذهابا ورجوعا .



الشكل ١٢-٦ : العمر غير المتماثل للتوأمين • التوأمان A يبقى في البيت والتوأمان B يقوم بالرحلة •

وبمع ذلك • لا زال بإمكاننا بناء قياس زمني على الخط العالمي للساعة المتحركة • وهذا الزمن يسمى بالزمن المناسب • نستعمل الرمز  $\gamma$  ليشير إليه • عندئذ • على أي جزء صغير من الخط العالمي للساعة المتحركة يرتبط عنصر الزمن المناسب  $d\tau$  بعنصر الزمن المقابل له في المحاور الثابتة بالعلاقة التالية

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} = (1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}} dt \quad (١٢-٢٠)$$

حيث  $v$  تمثل الانطلاق الآتي للساعة المتحركة • اذن • بين أي حدثين على الخط العالمي للاخير • عندنا



$$\tau_1 - \tau_2 = \int_{t_1}^{t_2} (1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}} dt$$

الآن عندما  $v \neq 0$  يكون التكامل دائما اقل من واحد ، اذن

$$\tau_2 - \tau_1 < t_2 - t_1$$

ومعبرة اخرى ، فترة الزمن المناسب بين الحدثين يكون دائما اقل من فترة الزمن القابلة لها والمسجلة على المحاور المرجعية الثابتة بغض النظر عن شكل الخط العالمي للماعة المتحركة .

١٢-٨ نسبة الحركة المجردة . تحويلات السرعة

#### Relativistic Kinematics. Transformation of Velocities

من تفاضل المعادلات (١٢-١٢) التي تمثل تحويلات لورنتز نحصل على

$$dx = \gamma (dx' + v dt') \quad (١٢-٢١)$$

$$dy = dy'$$

$$dz = dz'$$

$$dt = \gamma \left( dt' + \frac{v}{c^2} dx' \right)$$

اذن ، بالقسمة ، نحصل على

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma \left( dt' + \frac{v}{c^2} dx' \right)}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\gamma \left( dt' + \frac{v}{c^2} dx' \right)} \quad \text{أو}$$

$$\dot{x} = \frac{\dot{x}' + v}{1 + \frac{v\dot{x}'}{c^2}} \quad (٢٢-١٢)$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{y}'}{\gamma \left( 1 + \frac{v\dot{x}'}{c^2} \right)} \quad (٢٣-١٢)$$

$$\dot{z} = \frac{\dot{z}'}{\gamma \left( 1 + \frac{v\dot{x}'}{c^2} \right)} \quad (٢٤-١٢)$$

• حيث  $\dot{x}' = \frac{dx'}{dt'}$  ،  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  ،  $y$  ،  $z$  مشتقات

ونحصل على قلوب تحويلات السرعة بسهولة كما يلي

$$\dot{x}' = \frac{\dot{x} - v}{1 - \frac{v\dot{x}}{c^2}} \quad (٢٥-١٢)$$

$$\dot{y}' = \frac{\dot{y}}{\gamma \left( 1 - \frac{v\dot{x}}{c^2} \right)} \quad (٢٦-١٢)$$

$$\dot{z}' = \frac{\dot{z}}{\gamma \left( 1 - \frac{v\dot{x}}{c^2} \right)} \quad (٢٧-١٢)$$

هناك نتيجة مباشرة ومهمة لمعادلات تحويل السرعة السابقة هي ان السرعة لا تتحد بعد ذلك بنفس الطريقة التي كانت تتحد بها في الحركة المجردة النيوتونية.

على سبيل المثال ، افرض ان الشاهد B يرى جسماً يتحرك بسرعة  $\dot{x}' = c/2$  في محاوره (التي تحمل الفتحة) . اضع الى ذلك ، لنفرض ان المحاور التي تحمل الفتحة تتحرك بسرعة  $c/2$  باتجاه  $x$  بالنسبة للمحاور التي لاتحمل الفتحة (المشاهد A) . عندئذ وفقاً للمعادلة (١٢ - ٢٢) تكون سرعة الجسيم في المحاور التي لاتحمل الفتحة لاتساوى  $c$  وانما تساوى

$$\dot{x} = \frac{\frac{c}{2} + \frac{c}{2}}{1 + \frac{(\frac{c}{2})(\frac{c}{2})}{c^2}} = \frac{c}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5} c$$

وكمثال ثانٍ، نلاحظ اذا كان شيء ما يتحرك بسرعة  $c$  في احدى المحاور ، مثل  $\dot{x}' = c$  ، عندئذ

$$\dot{x} = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = c$$

اي انه يتحرك بسرعة  $c$  في المحاور الاخرى ايضاً . وهذا يتفق مع فرضية النظرية النسبية الخاصة الثانية .

واخيراً لنفرض ان جسماً يتحرك في المستوي  $xy$  . ولنفرض ان متجه سرعة

الجسيم يميل بزاوية  $\theta$  مع المحور  $x$  ، بحيث يكون

$$\tan \theta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

عندئذٍ من معادلات تحويلات السرعة ، نحصل على

$$\tan \theta' = \frac{\dot{y}'}{\dot{x}'} = \frac{\dot{y}}{\gamma(\dot{x} - v)} = \frac{\tan \theta}{\gamma(1 - v/\dot{x})} \quad (١٢ - ٢٨)$$

للزاوية بين متجه السرعة والمحور  $x'$  كما يقيسها مشاهد في المحاور التي تحمل

الفتحة . في المعركة المجردة غير النسبية ، سوف لا يظهر العامل  $\gamma$  . وهذا يعني ان  $\theta'$  هي اصغر في النسبية منها في الكلاسيكية .

١٢-٩ • نسبية ديناميك الجسم • تغير الكتلة مع السرعة

**Relativistic Particle Dynamics. The Variation of Mass with Velocity**

نستمر الآن في استقصاء المسألة الأساسية وهي كيف تؤثر تحويلات السرعة النسبية

على قوانين حركة الجسم عند اعتبار القوى والكتل • نختار لهبطذا الغرض مثالا بسيطاً يمكن التنبؤ بنتائجه من فرضيات التناظر الأولية •

اعتبر تصادم جسيمين متماثلين • وافرض ان التصادم تام المرونة بحيث يرتد الجسيمن دون تغيير في انطلاقهما النسبي • ليقترب الجسيمن احدهما من الآخر على طول مسارين متوازيين بسرعتين متساويتين ومتعاكستين في محاور مختاره بصورة مناسبة مثل  $Oxy$  ، كما في الشكل ١٢-٧ (أ) • وتحدث الحركة كلياً في المستوى  $xy$  • وقد صنف الجسيمن بالرقمين 1, 2 ومركبتا سرعتيهما الابتدائيتين  $(\dot{x}, -\dot{y})$  و  $(\dot{x}, \dot{y})$  على التوالي • ومعاني كل من الجسيمين عند التصادم انعكاساً في مركبة  $y$  لسرعتيهما ، اما مركباتهما باتجاه  $x$  فتبقى دون تغيير • اذن المركبتان النهائيتان هما  $(\dot{x}, \dot{y})$  و  $(-\dot{x}, -\dot{y})$  كما هو مبين في الشكل •

لنصف بعد ذلك ، نفس التصادم في محاور مختلفة مثل  $O'x'y'$  ، والتي تتحرك

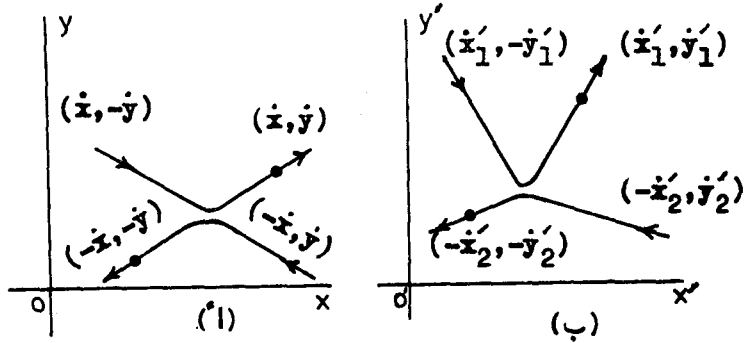
بسرعة  $v$  باتجاه  $x$  بالنسبة للمحاور التي لاتحمل الفتحة •

ولم يعد هناك ، في المحاور التي تحمل الفتحة ، تصادم تام التناظر ، ولذلك من

الضروري استعمال رموز سفلية لتشير الى سرعتي الجسيمين •

ان مركبات السرعة الابتدائية في المحاور التي تحمل الفتحة هي  $(\dot{x}'_1, -\dot{y}'_1)$

و  $(\dot{x}'_2, \dot{y}'_2)$  للجسيمين 1, 2 على التوالي • وعند التصادم تعاني مركبتا



الشكل ١٢-٧ منحنيات التصادم المائل المرين في نظامين  
محاور مختلفين

تغييراً في الاتجاه بينما تبقى مركبتا  $x'$  دون تغيير . فالقيم النهائية تكون  
اذن  $(\dot{x}'_1, \dot{y}'_1)$  و  $(-\dot{x}'_2, -\dot{y}'_2)$  كما هو مبين في الشكل ١٢-٧ ب .  
وفقاً لقواعد تحويلات السرعة ، البند ١٢-٧ نحصل للجسيم (أ) على

$$\dot{x} = \frac{\dot{x}'_1 - v}{1 - \dot{x}'_1 v / c^2} \quad \dot{y} = \frac{\dot{y}'_1}{\gamma(1 - \dot{x}'_1 v / c^2)}$$

والتماثل للجسيم 2 نحصل على

$$-\dot{x} = \frac{-\dot{x}'_2 - v}{1 + \dot{x}'_2 v / c^2} \quad -\dot{y} = \frac{-\dot{y}'_2}{\gamma(1 + \dot{x}'_2 v / c^2)}$$

وبعد حذف  $\dot{x}$  ،  $\dot{y}$  من العلاقتين نحصل على

$$\frac{\dot{x}'_1 - v}{\dot{x}'_2 + v} = \frac{\dot{y}'_1}{\dot{y}'_2} = \frac{1 - v\dot{x}'_1 / c^2}{1 + v\dot{x}'_2 / c^2} \quad (12-29)$$

وإذا حذفنا  $v$  من المعادلتين المذكورتين أعده نحصل بعد إجراء بعض العمليات الجبرية على المعركة التالية

$$\frac{\dot{y}'_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \frac{\dot{y}'_2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} \quad (١٢ - ٣٠)$$

حيث أن

$$v_1^2 = \dot{x}'_1^2 + \dot{y}'_1^2$$

$$v_2^2 = \dot{x}'_2^2 + \dot{y}'_2^2$$

ووفقا للنتيجة السابقة تنشير مركباتي  $v'$  لسرعتي بمقادير مختلفة كنتيجة للتصادم ، لان  $\dot{y}'_1$  و  $\dot{y}'_2$  مختلفان .

اذن اذا كانت كتلتا الجسمين متساويتين فمركبتي  $v'$  لنخميم ما تنشيران عندئذ ، بمقادير مختلفة ، اى سوف لا يكون عندنا زخم خطي محفوظ . اذن امامنا اختياران ، اما ان ننهد قانون حفظ الزخم الخطي ، او يجب علينا ان نفرض ان كتلة الجسم تعتمد بطريقة ما على حركة الجسم بالنسبة لمشاهد معين . وهذا من نهد قانون حفظ الزخم الخطي ، اخترنا البديل الآخر . سنفرض ان كتلة الجسم المتحرك تساوى ( كتلة السكون )  $m_0$  ( اى كتلته كما تقاس في محاور مرجعية يكون فيها الجسم ساكنا ) .

ومضرومة بدالة ما للانطاني . اى

$$m = m_0 f(v)$$

من العلاقة المبينة في المعادلة (١٢-٣٠) ، نلاحظ ان مركبتي  $\gamma$  للزخم الخطي تكون محفوظة اذا اخترنا

$$f(v) = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} = \gamma$$

حيث  $v$  تمثل انطلاق الجسم ، اى  $v_1$  او  $v_2$  على التوالي . اذن كتلة الجسم المتحرك تصبح

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m_0 \quad (١٢-٣١)$$

ووفقاً للنتيجة السابقة ، تزداد الكتلة مع الانطلاق وتقترب قيمتها من المالا نهائية عندما يقترب انطلاقها من انطلاق الضوء . وفي الاجسام المرئية الاعتيادية تزداد الكتلة بقدار صغير جدا بحيث لا يمكن قياسه كالقذائف ولكن اقتراب انطلاقات الجسيمات الذرية من سرعة الضوء شيء اعتيادى . لقد حققت علاقة الكتلة والسرعة النسبية ، المعادلة (١٢-٣١) ، تجريبيا الى درجة كبيرة من الدقة مع الالكترونات والجسيمات الاخرى التي تنتج في المعجلات ذات الطاقة العالية .

١٢-١٠ . علاقة الكتلة والطاقة

#### The Mass-energy Relation

لنعتبر الشغل  $W$  المنجز لتعجيل جسيم حر من السكون الى انطلاق نهائي  $v$  . اذا كانت  $\vec{F}$  القوة المسلطة على الجسيم عندئذ

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = m_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \quad (١٢-٣٢)$$

وللبساطة ، لنفرض فقط الحركة على خط مستقيم ، كالمحور  $x$  - في اى محاور مناسبة ، بحيث يمكننا كتابة

$$dW = F dx = dx \frac{d(mx)}{dt} = \dot{x} d(mx)$$

$$W = \int_0^v \dot{x} d(mx) = [ \dot{x}(mx) ] - \int_0^v mx dx$$

$$= mv^2 - m_0 \int_0^v \frac{\dot{x} dx}{\sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2}}$$

$$= mv^2 + m_0 c^2 (\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1)$$

$$= mc^2 - m_0 c^2$$

(٣٣-١٢)

ولما كان الشغل الكلي المعجز على جسيم حر يظهر كطاقة حركية  $T$  للجسيم ، نحصل على

$$T = mc^2 - m_0 c^2$$

(٣٤-١٢)

او مايكانيكا ذلك

$$T = (\gamma - 1) m_0 c^2$$

(٣٥-١٢)

واستخدام مفكوك ذات الحدين ، نحصل على

$$T = m_0 c^2 \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right) - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots$$



اذن تختصر  $T$  الى قيمتها الكلاسيكية  $\frac{1}{2}m_0v^2$  عندما تكون  $v$  صغيرة جدا بالغايرة

مع  $c$

واذا كتبنا العلاقة النسبية للطاقة الحركية على النحو التالي

$$m = m_0 + \frac{T}{c^2} = m_0 + \Delta m$$

نرى ان الطاقة الحركية تكافئ كتلة  $\Delta m$  حيث

$$T = \Delta mc^2 \quad (١٢-٣٦)$$

عم انشتاين وجهة النظر هذه بقوله ان اى كتلة  $m$  تكافئ مقدارا من الطاقة  $E$

حيث

$$E = mc^2 \quad (١٢-٣٧)$$

عندئذ يجب تحويل قانون حفظ الطاقة ليتضمن الكتلة كشكل من الطاقة .

لقد حققت المعادلة المذكورة اعلاه تجريبيا ، فمثلا في حالة الانشطار النووي ،

تكون الكتلة الكلية للشظايا المتصطرة اقل من كتلة النواة الاصلية ، فالفرق في

الكتلة يظهر كطاقة .

### Inertia of Thermal Energy      استمرارية الطاقة الحرارية

كمثال بسيط لعلاقة الكتلة بالطاقة ، لنعتبر حالة التصادم غير المرن

لجسيمين . افرض ان كتلتي السكون للجسيمين متساويتان وهي  $m_0$  ، وانهما يتصادمان

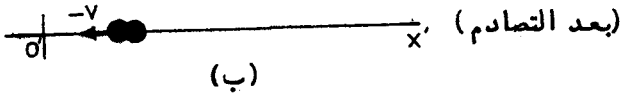
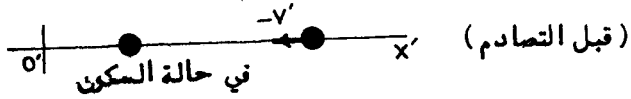
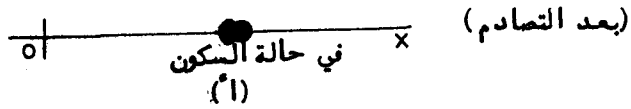
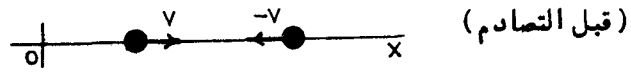
راسيا بسرعتين ابتدائيتين  $v$  و  $-v$  على التوالي ، باتجاه  $x$  لمحاور مناسبة

مثل  $Oxy$  ، كما هو مبين في الشكل ١٢-٨ (أ) . لنفرض ان التصادم غير مرن

تماما بحيث ان الجسيمين يبقيان معا بعد التصادم . ومن التناظر ، يكون هذا الزوج

في حالة سكون في المحاور التي لاتحمل الفتحة • والزخم الخطي الكلي قبل التصادم هو  $m v + (-m v) = 0$  وهو يساوي صفرا ايضا بعد التصادم • اذن الزخم الخطي يكون محافظا في المحاور  $Oxy$

ثم لنصف بعد ذلك نفس التصادم في محاور مختلفة مثل  $Ox'y'$  تتحرك بانطلاق  $v$  بالاتجاه  $x$  بالنسبة للمحاور التي لاتحمل الفتحة •



الشكل (١٢ - ٨) مخطط لتصادم راسي غير مرن تماما لجسيمين

الشكل (١٢ - ٨) (ب) • في هذه المحاور، يكون احد الجسيمين في البدء في حالة السكون، بينما تكون سرعة الجسم الآخر قبل التصادم كما يلي

$$-v' = \frac{\dot{x} - v}{1 - vx/c^2} = \frac{-2v}{1 + v^2/c^2}$$

ورفقا لقوانيننا لتحويلات السرعة •

ان سرعة الجسم المركب بعد التصادم هي  $-v$  في المحاور التي تحمل الفتحة .  
اذن الزخم الخطي في المحاور التي تحمل الفتحة هو كما يلي

$$-m'v' = -m_0 \gamma (v')v' \quad \text{قبل التصادم}$$

$$\gamma (v') = (1 - v'^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{حيث}$$

$$v' = 2v (1 + v^2/c^2)^{-1/2}$$

بعد التصادم

$$-\bar{m}v = -\bar{m}_0 \gamma (v)v$$

حيث

$$\gamma (v) = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

ترمز هنا  $\bar{m}_0$  لكتلة سكون الجسم المركب المتكون بعد التصادم .  
الآن اذا وضعنا بكل بساطة  $\bar{m}_0 = 2m_0$  نجد ان الزخم الخطي الابتدائي  
لايساوى النهائي في المحاور التي تحمل الفتحة . ان سبب ذلك يرجع الى اهمالنا  
زخم الطاقة الحركية  $T$  الذي تحول الى حرارة اثناء التصادم ، ولاجل اخذ  
هذا الزخم بنظر الاعتبار يمكننا اضافة كتلة مقدارها  $T/c^2$  للجسيم المركب ،  
اي

$$\bar{m}_0 = 2m_0 + \frac{T}{c^2}$$

$$= 2m_0 + 2m_0 (\gamma - 1)$$

$$= 2m_0 \gamma$$

حيث

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

في الحقيقة وجد ان الزخم الخطي يكون محافظا في المحاور التي تحمل الفتحة ،  
لهذه القيمة لكتلة السكون .

خلق وإبادة زوج جسيم - وجسيم مضاد

### Creation and Annihilation of Particle-antiparticle Pairs

قد يكون ، احسن توضيح مباشر لعلاقة الكتلة - والجسيم هو ما يتعلق بزوج  
جسيم - وجسيم مضاد . لقد ظهر الآن ان كل الجسيمات الاولية في الطبيعة مثل  
الالكترونات ، والبروتونات ، والنيوترونات ، وما الى ذلك ، لها جسيم نظير مضاد .  
وفي كل حالة ، يكون للجسيم المضاد نفس كتلة الجسيم ولكن له خواص كهرومغناطيسية  
معاكسة ( شحنة ، عزم مغناطيسي ) وفي كل حالة يمكن خلق زوج جسيم - وجسيم  
مضاد بانفاق طاقة كافية او ان يينيد احدهما الآخر فتتحرر طاقة . ان اول جسيم  
مضاد اكتشف هو الالكترون المضاد او البوزيترون وذلك سنة ١٩٣٢ . وقد لوحظ في  
الاشعة الكونية وفي اضمحلال اشعة بيتا المنبعثة من نوايا مشعة معينة . وعندما  
تلامس البوزيترونات مادة عادية تباد تماما وذلك وفقا للعلاقة التالية

$$\text{بوزترون} + \text{الالكترون} \leftarrow \text{طاقة}$$

حيث تتحول الكتلة الكلية الى اشعة كما ما عالية الطاقة . ويمكن ان تحدث عكس  
العملية وذلك عندما تضرب اشعة كما ما عالية الطاقة ذرات مادة ملائمة . ويمكن ايضا  
استحداث جسيمات مضادة بضرب الذرات مباشرة بجسيمات عالية الانطلاق .  
من كتلة الالكترون المعروفة وجد ان طاقة السكون  $m_0c^2$  هي بحدود

0.5 MeV ( مليون الكترون - فولت ) اى ان خلق وابادة الكترون - بيزترون  
يستلزم طاقات من القدر ال MeV ٠ ولما كانت كتلتا البروتون والنيوترون هـي  
حوالي 1800 مرة اكبر من كتلة الالكترون فهذا يعني ان خلقها يستلزم طاقة اكبر .  
ولهذا السبب لم يكتشف البروتون المضاد او النيوترون المضاد الا بعد ان بدأت معجلات  
ذات بليون الكترون - فولت عملها في اواخر الخمسينيات .

لنحسب الطاقة اللازمة لانتاج زوج بروتون - بروتون مضاد من تعادم بروتونين  
بحيث يكون احد البروتونين ، الهدف ، في حالة السكون . وستعطي الطاقة الصغرى  
من الحالة التي يكون فيها الجسيمان الاصليان والزوج المخلوق في حالة السكون فسي  
محاور مركز الكتلة مباشرة بعد عملية انتاج الزوج . اذن ، يقترب البروتونان احدهما  
من الآخر بالسرعتين  $v'$  و  $-v'$  في محاور مركز الكتلة بحيث لكل بروتون كتلة  
سكونه  $m_0$  نحصل على

$$m_0^2 = 2m_0^2$$

$$m = 2m_0 = m_0 \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{او}$$

$$\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{اذن}$$

بحيث يكون في محاور مركز الكتلة

$$v' = c \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ولهذا السبب يكون انطلاق البروتون الساقط  $v$  في المحاور المختبرية  
هو

$$v = \frac{v' + v'}{1 + v'^2/c^2} = \frac{2(\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}} c}{1 + (\frac{3}{4})} = (\frac{48}{49})^{\frac{1}{2}} c$$

وفقاً لقوانين تحويل السرعة ، واخيراً ، نجد ان طاقة البروتون الساقط في المحاور  
المختبرية تعطى من

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{48}{49}}} = 7m_0 c^2$$

بحيث ان الطاقة الحركية  $T = 6m_0 c^2$  او حوالي 5.5 BeV

\* ١٢ - ١١ استخدام المصفوفات والمتجهات - الاربعة في النسبية

### The Use of Matrices and Four-vectors in Relativity

رأينا ان المتطلب الرئيسي لتحويل لورنتز هو ان

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

كمية ثابتة invariant اولها نفس القيمة في جميع المحاور المرجعية ، وهذا  
يعني ، ان لاي نظامين

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

لندخل الرمز الجديدة التالية

$$x_1 = x$$

$$x_2 = y$$

(١٢ - ١٨)

$$x_3 = z$$

$$x_4 = ict$$

ويمكن اعتبار الكميات  $x_\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3, 4$ ) كمركبات متجهة في فضاء

ذى اربعة ابعاد. ان طول المتجه هو الكمية  $s$  والمعرفة كالاتي

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad (٣٩-١٢)$$

ان الخاصة الاساسية لتحويلات لورنتز هو انه يترك مقدار  $s$  ثابتا. ويمكن التعبير

عن هذا كالاتي

$$\sum_{\mu} x_{\mu}^2 = \sum_{\mu} x'_{\mu}{}^2$$

ويمكن التعبير عن تحويلات لورنتز نفسه بصيغة المصفوف كما يلي

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & 1/\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (٤٠-١٢)$$

حيث

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (٤١-١٢)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (٤٢-١٢)$$

ويطبق المصفوف في المعادلة (١٢-٤٠) للحالة الخاصة وهي الحركة الانتقالية في اتجاه المحور -  $x_2$  • ويمكن ايجاد معادلات المصفوف بسهولة للحركة الانتقالية في الاتجاهات الاخرى •

من المتبع ملاحظة انه من الممكن جعل مصفوف التحويل للورنتز يشابه مصفوف الدوران البسيط في الفضاء الاعتيادي وذلك باذخال التعويض التالي

$$\gamma = \cos \psi$$

ولما كانت  $\gamma$  اكبر من واحد ، لذلك تكون  $\psi$  خيالية • عندئذ نحصل على

$$\begin{aligned} \sin \psi &= (1 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{1 - \beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{-\beta^2}{1 - \beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \beta \gamma \end{aligned}$$

اذن يمكن كتابة المصفوف لتحويل لورنتز على النحو التالي

$$\begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & 0 & \cos \psi \end{bmatrix}$$

تذكر من الفصل الاول ان مصفوف التحويل للدوران خلال زاوية صغيرة  $\theta$  حول

المحور -  $z$  هو

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



في الفضاء ذي الابعاد الاربعة هـ دوران كهذا حول المحور  $z$  او  $x_3$  سيمثل بالصفوف

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ولما كان الدوران حول احد المحاور الفضائية يترك طول المتجه الرابع ايضا دون تغيير هـ عندئذ دورات كهذه يمكن ادخالها ضمن مجموعة التحويلات العامة للورتنز .  
احد فوائد المصفوف هو امكان معالجة تراكيب تحويلات لورتنز ببسولة بواسطة ضرب المصفوفات .

تعريف المتجه الرباعي العام

قد يعرف المتجه - الرباعي بطريقة عامة كمجموعة لاربح كميات

$$A_{\mu} \quad (\mu = 1, 2, 3, 4)$$

تتحول بنفس طريقة احدائيات الموضع  $x_{\mu}$  تحت تحويل لورتنز . اي ان

$$\begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \\ A'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & 1/\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \quad (12-43)$$

او بصيغة مختصرة

$$[\dot{A}] = [L] [A] \quad (١٢-٤٤)$$

تشير الكميات التي تحمل الفتحة الى مركبات المتجه الرباعي في المحاور المرجعية التي تتحرك بسرعة نسبية  $v = \beta c$  في الاتجاه  $x_1$  و  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$  و واضح ان المقدار لاى متجه - رباعي يبقى لا يتغير او ثابتا تحت تحويل لورنتز

$$\sum_{\mu} \dot{A}_{\mu}^2 = \sum_{\mu} A_{\mu}^2$$

ويقال عن مركبات المتجه - الرباعي بانها مساوية في درجة ثبوتها covariant بالنسبة الى تحويل لورنتز .

ان مفهوم المتجه - الرباعي مفيد جدا في النظرية النسبية ووفقا للفرضية الاولى تكون جميع المحاور المستمرة متماثلة تماما . وهذا ، عندما يوحد مع الفرضية الثانية ، يعطى تحويل لورنتز الذي يربط المشاهدات بين انظمة محاور مستمرة مختلفة . اذن ، عندما يصاغ اى قانون فيزيائي ، بصورة ملائمة ، يجب ان تبقى صيغته ثابتة عندما ينسب الى منظومات محاور مستمرة مختلفة ولا سيما اذا احتوت معادلة على كميات متجهة فيجب ان توضع بصيغة المتجه - الرباعي لكي تكون صحيحة من النظرية النسبية . وهذا يؤمن ان المعادلة ستحول بدرجة متساوية الثبوت تحت تحويل لورنتز ، ولهذا السبب تستوفى المعادلة فرضيتين النسبية الخاصة .  
صيغة المتجه - الرباعي للسرعة والزخم

#### The Four-vector Form of Velocity and Momentum

افرض ان جسيما متحركا خطه العالمي يعين تعينا كاملا في محاور مرجعية معينة بالعلاقات  $t = t, z = z(t), y = y(t), x = x(t)$  او ما يكافئها

ذلك  $x_4 = x_4$ ,  $x_3 = x_3(x_4)$ ,  $x_2 = x_2(x_4)$ ,  $x_1 = x_1(x_4)$  رأينا ان

المحاور الموضعية  $x_\mu$  تتحول كتجهه - رباعي ، وفقا لذلك ، الفرق  $\Delta x_\mu$  بين

اى نقطتين على الخط العالبي يتحول ايضا كتجهه - رباعي . ولكن النسبة

$$\frac{\Delta x_\mu}{\Delta t} = c \frac{\Delta x_\mu}{\Delta x_4}$$

هي ليست متجهه - رباعي ، لان  $\Delta t$  له قيم مختلفة في منظومات محاور مرجعية

مختلفة . لاجل ايجاد صيغة التجهه - الرباعي للسرعة ، نستخدم حقيقة كون الفترة

الزمنية المناسبة  $\Delta \mathcal{T}$  بين حدثين هي كمية ثابتة . ولبرهنتها عندنا

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 = (\Delta x')^2$$

$$+ (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - c^2(\Delta t')^2$$

او

$$(\Delta r)^2 - c^2(\Delta t)^2 = (\Delta r')^2 - c^2(\Delta t')^2$$

$$\Delta t \left[ 1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\Delta r}{\Delta t} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \Delta t' \left[ 1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\Delta r'}{\Delta t'} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{اذن}$$

وفقا لذلك تكون الفترة الزمنية المناسبة  $\Delta \mathcal{T}$  هي

$$\Delta \mathcal{T} = \Delta t \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \Delta t' \left( 1 - \frac{u'^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

اى ان  $\Delta \mathcal{T}$  لا تتغير invariant . هنا  $u$  و  $u'$  هما انطلاقا الجسيم فسي

نظامي المحاور المرجعية .

نرى الآن ان التجهه

$$v_\mu = \frac{dx_\mu}{d\mathcal{T}}$$

يتحول بنفس طريقة  $x_{\mu}$  ولذلك يعرف متجه - رباعي • وسوف نسميه السرعة -  
الرباعية • وتعطى مركبات السرعة الرباعية بوضوح كما يلي :

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{dx_1}{d\tau} = (1 - \frac{u^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{dt} = \gamma(u)\dot{x} \\v_2 &= \frac{dx_2}{d\tau} = (1 - \frac{u^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{dt} = \gamma(u)\dot{y} \\v_3 &= \frac{dx_3}{d\tau} = (1 - \frac{u^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} \frac{dz}{dt} = \gamma(u)\dot{z} \\v_4 &= \frac{dx_4}{d\tau} = ic (1 - \frac{u^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} = \gamma(u)ic\end{aligned} \quad (٤٦-١٢)$$

لقيم صغيرة ل  $u$  تتحول المركبات الفضائية الثلاث ل  $v_{\mu}$  الى مركبات السرعة  
الاعتيادية  $\vec{u}$  • وتعطى مربع السرعة - الرباعية من

$$\begin{aligned}\sum_{\mu} v_{\mu}^2 &= (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \gamma^2(u) - c^2 \gamma^2(u) \\&= (u^2 - c^2) \gamma^2(u) = -c^2\end{aligned} \quad (٤٧-١٢)$$

والآن لما كانت السرعة - الرباعية تتحول كمتجه رباعي ، فيمكننا كتابة

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \\ v'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & 1/\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (٤٨-١٢)$$

او بوضوح

$$v'_1 = \gamma v_1 + 1/\beta \gamma v_4$$

$$v'_2 = v_2$$

$$v'_3 = v_3$$

$$v'_4 = -1/\beta \gamma v_1 + \gamma v_4$$

(٤٩-١٢)

حيث  $\gamma = \gamma(v) = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$  بناه على ذلك ، ومن معاينة

المعادلات (٤٦-١٢) نجد أن مجموعة المعادلات المذكورة اعلاه تكافئ التي

$$\dot{x}' \gamma(u') = (\dot{x} - \beta c) \gamma \gamma(u)$$

$$\dot{y}' \gamma(u') = \dot{y} \gamma \gamma(u)$$

$$\dot{z}' \gamma(u') = \dot{z} \gamma \gamma(u) \quad (٥٠-١٢)$$

$$\gamma(u') = (1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}) \gamma \gamma(u) \quad (٥١-١٢)$$

اذا حذفنا  $\gamma(u')$  من المعادلات الثلاث الاولى وذلك باستعمال (الاخيرة)

نجد ان

$$\dot{x}' = \frac{\dot{x} - \beta c}{1 - \dot{x} \beta / c}$$

$$\dot{y}' = \frac{\dot{y}}{\gamma(1 - \dot{x} \beta / c)}$$

$$\dot{z}' = \frac{\dot{z}}{\gamma(1 - \dot{x} \beta / c)}$$

(٥٢-١٢)

هذه في الحقيقة هي نفس قوانين تحويل السرعة التي استنبطت سابقا بطريقة مختلفة

في البند ١٢ - ٨ .

#### Four-Momentum

الزخم الرباعي

يعرف الزخم الرباعي كالآتي

$$P_{\mu} = m_0 V_{\mu} \quad (٥٣-١٢)$$

وواضح انه يتحول كمتجه رباعي ، لان كتلة السكون  $m_0$  لا تتغير . ومركبات

الزخم الرباعي هي

$$P_1 = m_0 \frac{dx_1}{d\tau} = m_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{dt}$$

$$P_2 = m_0 \frac{dx_2}{d\tau} = m_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{dt}$$

(٥٤-١٢)

$$P_3 = m_0 \frac{dx_3}{d\tau} = m_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dz}{dt}$$

$$P_4 = m_0 \frac{dx_4}{d\tau} = m_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} i c$$

اذا ادخلنا الكتلة النسبية  $m$  والمعرفة بالعلاقة التالية

$$m = m_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (٥٥-١٢)$$

عندئذ يمكننا كتابة

$$P_{\mu} = m_0 \frac{dx_{\mu}}{d\tau} = m \frac{dx_{\mu}}{dt} \quad (٥٦-١٢)$$

اى ان

$$P_1 = m\dot{x}$$

$$P_2 = m\dot{y} \quad (٥٧-١٢)$$

$$P_3 = m\dot{z}$$

$$P_4 = icm$$

اذن المركبات الفضائية للزخم - الرباعي تشبه تماما مركبات الزخم الاعتيادى ولكن تستعمل هنا الكتلة النسبية بدلا من كتلة السكون .

ان مقدار الزخم - الرباعي لا يتغير ، كما يجب ان يكون ، لان

$$\sum_{\mu} P_{\mu}^2 = m^2 u^2 - m^2 c^2 = m_0^2 (u^2 - c^2) \gamma^2(u) = -m_0^2 c^2$$

لندخل الكتلة E ، الكتلة والطاقة النسبية ، المعرفة كالآتي

$$E = -icP_4 = mc^2 \quad (٥٨-١٢)$$

عندئذ يمكن التعبير عن ثبوت مقدار الزخم - الرباعي كما يلي

$$\sum P_{\mu}^2 = P^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2 \quad (٥٩-١٢)$$

اذا اعتبر بقاء الزخم - الرباعي كمتجه في الفضاء - الرباعي كتعميم طبيعي لقانون حفظ الزخم الاعتيادى ، نرى من المعادلات (٥٧-١٢) ان قانون الحفظ الاعتيادى يستبقى اذا استعملت الكتلة النسبية في كل مكان . اضافة الى ذلك ، ان بقاء المركبة الرابعة للزخم - الرباعي يعني ان الكتلة النسبية الكلية  $\sum m$  ، او الكتلة والطاقة  $\sum E$  تكون محفوظة في اى محاور مرجعية معينة .

افرض على سبيل المثال عملية خلق الزوج pair creation التي شرحت سابقا في البند ١٢-١٠ . لنفرض ان بروتونين قد تصادما بطاقة في نهايتها الصغرى اللازمة لتكوين بروتون وبروتون هاد في نظام مركز - الكتلة . عندئذ تكون كتلة السكون النهائية  $4m_0$  لان الجسيمات الاربعة النهائية تكون ساكنة في نظام مركزز - الكتلة . قبل التصادم ، عندنا في النظام المختبرى  $E + m_0 c^2$  للكتلة والطاقة الكلية للبروتونين الساقط والهدف . اذن يمكن التعبير عن ثبوت مقدار - الرباعي كما يلي

$$P^2 - \frac{(E + m_0 c^2)^2}{c^2} = -16m_0^2 c^2$$

او بعد ترتيب الحدود نحصل على

$$P^2 - \frac{E^2}{c^2} - 2Em_0 = -15 m_0^2 c^2$$

ووفق ذلك ، لما كان الحدان الاوليان يشيران الآن الى البروتون الساقط ، يكون عندنا  $P^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2$  . وبناء على ذلك

$$-m_0^2 c^2 - 2Em_0 = -15 m_0^2 c^2$$

او

$$E = 7 m_0 c^2$$

وهي تتفق مع حساباتنا السابقة

#### The Four-force

#### القوة - الرباعية

نحن الآن في موضع لمياغة معادلة القوة بشكلها الثابت . لندخل متجهه - رباعي جديد  $F$  يسمى بالقوة - الرباعية . عندئذ التعميم النسبي



لقانون نيوتن الثاني يكون

$$F_{\mu} = \frac{dP_{\mu}}{d\tau} \quad (٦٠-١٢)$$

وبالرجوع الى المعادلة (١٢-٥٦) نرى ان المعادلة السابقة يمكن كتابتها على النحو التالي

$$F_{\mu} = \gamma(u) \frac{d}{dt} \left( m \frac{dx_{\mu}}{dt} \right) \quad (٦١-١٢)$$

حيث  $u$  هي انطلاق الجسم . اذن المركبات الثلاث الاولى للقوة - الرباعية تنسب الى القوة الاعتيادية  $\vec{F}$  كالآتي

$$F_1 = \gamma(u) f_x \quad F_2 = \gamma(u) f_y \quad F_3 = \gamma(u) f_z \quad (٦٢-١٢)$$

وهنا للمركبة الرابعة

$$F_4 = i c \gamma(u) \frac{dm}{dt} \quad (٦٣-١٢)$$

او ما يكافئ ذلك

$$F_4 = \frac{1}{c} \gamma(u) \frac{dE}{dt} \quad (٦٤-١٢)$$

اذن تنسب  $F_4$  الى المعدل الزمني الذي تتغير فيه كتلة الجسم او الكتلة والطاقة .

افرض مرة اخرى ثبوت مقدار الزخم الرباعي

$$\sum_{\mu} P_{\mu}^2 = -m_0 c^2$$

وهذا تفاضلها بالنسبة للزمن المناسب نحصل على

$$\sum_{\mu} P_{\mu} \frac{dP_{\mu}}{d\tau} = 0 \quad (٦٥-١٢)$$

او

$$\sum_{\mu} P_{\mu} F_{\mu} = 0 \quad (12-66)$$

يمكن تفسير هذا كصيغة لتعامد  $P_{\mu}$  و  $F_{\mu}$  . وعند كتابة المعادلة بدلالة المركبات وكس الحد  $P_4 F_4$  نحصل على

$$P_1 F_1 + P_2 F_2 + P_3 F_3 = -P_4 F_4 \quad (12-67)$$

وهي من المعادلات (12-57) ، (12-62) ، و (12-63) ، تكون مكافئة الى

$$m\vec{v} \cdot \vec{f} = -(icm) \frac{1}{c} \frac{dE}{dt}$$

او

$$\vec{v} \cdot \vec{f} = \frac{dE}{dt} \quad (12-68)$$

الآن معدل التغيير الزمني للكمية  $E = mc^2$  هو المعدل الذي تنجز فيه الشغل الاجمالية  $\mathcal{E}$  شغلا على الجسم . وهذا يتفق مع شرحنا السابق الخاص بحالة الكتلة والطاقة ، البند 12-10 .

### تأريخ

- 12-1 املأ الخطوط في اشتقاق معامل تحويل لورنتز ، المعادلة 12-14 .
- 12-2 بين ان معكوس تحويل لورنتز ، المعادلة (12-17) يتج جبريا من التحويل المباشر ، المعادلة (12-16) .
- 12-3 اثبت صحة التقريبات التالية

$$(a) \gamma \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} \quad \text{if} \quad v \ll c$$

$$(b) \gamma \approx \sqrt{\frac{c}{2\epsilon}} \quad \text{where} \quad \epsilon = c - v \quad \text{if} \quad v \approx c$$

- ١٢-٤- إذا كان انطلاق الارض المدارى حول الشمس حوالي ٣٠ كم / ثانية  
 احسب تقلص لورنتز لقطر الارض بسبب هذه الحركة .
- ١٢-٥- إذا كان نصف- عمر الاشعاع الكوني  $\mu$  ميزون هو ٢٢ ميكروثانية فسي  
 محاور مرجعية فيها الميزون في حالة سكون . جد نصف- عمر ميزونات  $\mu$  المقترنة  
 من الارض بانطلاق ٠٩٩٩ر من سرعة الضوء كما يقيسها مشاهد على الارض .
- ١٢-٦- في التمرين السابق ، افرض ان الميزونات تسير بخطوط مستقيمة خلال الجو .  
 احسب سمك طبقة ميل واحد للجو كما تظهر للميزونات .
- ١٢-٧- ظهر في محاور مرجعية معينة A حدثان في آن واحد . وكانا مفصولين  
 بمسافة ١٠ متر في تلك المحاور . فما هي فاصلة المسافة والزمن بينهما كما يقيسها  
 مشاهد B يتحرك بانطلاق  $0/2$  في اتجاه خط العشرة الامتار ، ولمشاهد C يتحرك  
 بنفس الانطلاق عموديا على هذا الخط ؟ اعمل نفس الحسابات اذا كانت الفترة الزمنية  
 بين الحدثين هي ١٠ - ثانية في المحاور A .
- ١٢-٨- يقال عن الفترة بين حدثين في محاور مرجعية معينة بانها شبيه فضائسي  
 او شبيه زماني ويعتمد ذلك على ما اذا كانت الفترة الزمنية  $\Delta t$  اكبر او اقل من الكمية  
 $\frac{\Delta l}{c}$  على التوالي ، حيث  $\Delta l$  هي الفاصلة الفضائية بين الحدثين . برهن ان  
 فترات شبيه الفضائية في احدى المحاور تظهر كشبه فضائية في جميع المحاور وان شبيه  
 الزمانية في احدى المحاور تظهر كشبه زمانية في الجميع .
- ١٢-٩- اثبت ان التعاقب الموقت بين حدثين يكون محافظا في جميع انظمة المحاور  
 المرجعية اذا ظهر الحدثان في نفس الموضع الفضائي في محاور ما .

١٠-١٢- اذا كان طول النبضة الضوئية التي تسير في الاتجاه  $x$  في محاور مرجعية معينة A هو  $L$  ، اثبت ان طول نفس النبضة كما تقاس في محاور مختلفة B ، تتحرك بالانطلاق لاوالالاتجاه  $x$  هو  $L \left[ \frac{(c + v)}{(c - v)} \right]^{\frac{1}{2}}$

١٢-١١- مركبة فضائية قامت برحلة الى اقرب نجم  $\alpha$  - بروكسيما

( $\alpha$  - Proxima) وعلى مسافة  $4.3$  سنة ضوئية . وكانت تسير في رحلة ذهابها بانطلاق  $0.9c$  ورحلة عودتها تسير بانطلاق  $0.8c$  بالنسبة للارض . فما هو الزمن الكلي لرحلة الذهاب والاياب كما يقاس بساعة في المركبة وساعة على سطح الارض ؟

١٢-١٢- تركت مركبة فضائية الارض بانطلاق  $c/2$  ورحلت لفترة زمنية معينة . بعدئذ دارت وعادت الى الارض بانطلاق  $c/3$  بالنسبة للارض . فاذا كان الزمن الكلي لرحلة الذهاب والاياب هو سنة كاملة كما قيس بساعة المركبة الفضائية ، فما هو الزمن الكلي كما يقاس بساعات الارض ؟ وماهي المسافة التي تقطعها المركبة قبل ان تدور للعودة ؟ وما هو الزمن في ساعة المركبة عند دورانها للعودة ؟

١٢-١٣- في محاور مرجعية معينة A ، كان موضع المتجه لحدث هو  $\vec{r}$  وظهر في الزمن  $t$  . بين ان موضع المتجه والزمن لنفس الحدث في محاور اخرى B تتحرك بسرعة ثابتة  $\vec{v}$  بالنسبة الى A . هما

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v} \left[ \delta t + \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} (\delta - 1) \right]$$

$$t' = \delta \left( t + \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} \right)$$

حيث  $\delta = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$  ، وكانت نقطتا الاصل لنظامي المحاور منطبقتين فسي

وهذا تعميم لتحويل لورنتز .  $(t = t' = 0)$

١٢-١٤- لوحظت من الارض مجرتان متباعدتان A , B ، وكاتتا تباعدان باتجاهين متعاكسين . فاذا كان انطلاق ابتعاد A هو  $c/2$  و B هو  $3c/4$  ، فما هو انطلاق ابتعاد B كما يقاس من مشاهد على A .

١٢-١٥- اذا كان انطلاق جسيم  $c/2$  في محاور مرجعية معينة . وكان خط مساره يعمل زاوية  $٤٥^\circ$  مع المحور -x . جد انطلاق واتجاه حركة الجسيم كما تقاس في محاور مرجعية تتحرك بانطلاق  $c/4$  في الإتجاه x . علما بان محاور النظامين متوازية . احسب كلا من القيم الكلاسيكية والنسبية .

١٢-١٦- ظهر طول قضيب متحرك مساويا الى  $I_A$  في المحاور المرجعية A وساموا الى  $I_B$  في محاور اخرى B تتحرك بانطلاق v بالنسبة الى A . فما هو الطول السكوني للقضيب ؟ علما بان جميع الحركة كانت في اتجاه واحد .

١٢-١٧- استنبط العلاقات التالية لتحويل التعجيل

$$\ddot{x} = \frac{\ddot{x}'}{\gamma^3 (1 + vx'/c^2)^3}$$

حيث  $\ddot{x} = d^2x/dt^2$  ،  $\ddot{x}' = d^2x'/dt'^2$  ، والمحاور التي تحمل الفتحة

تتحرك بانطلاق v باتجاه x . جد العلاقات المماثلة لتحويل مربعات y و z .  
١٢-١٨ جسيم له تعجيل ثابت a كما قيس في محاور فيها الجسيم آنيا في حالة السكون ، اي ان ، في النظام الملائم للجسيم . اثبت ان انطلاق الجسيم في محاور مرجعية ثابتة هو

$$\dot{x} = c \left[ 1 + (c/at^2) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

حيث يبدأ الجسم من السكون في الزمن  $t = 0$  . اذا كانت  $(a = g = 32 \text{ ft/sec}^2)$  ما هو انطلاق الجسم عندما يكون  $t$  مساويا لسنة واحدة ؟ وعندما يكون  $\gamma$  مساويا لسنة واحدة . حيث  $\gamma$  يمثل الزمن المناسب للجسم .

١٢-١٩ في التمرين السابق ، اثبت ان موضع الجسم كدالة للزمن هو

$$ax^2 + 2c^2x = ac^2t^2$$

من هذا برهن على ان الاشارة الضوئية سوف لا تلحق بالجسم اذا ارسلت متأخرة بزمن اقل من  $t = c/a$  .

١٢-٢٠ سجلت البروتونات في سايلكترون الى انطلاق بحيث تكون طاقتها الحركية ضعف طاقة السكون  $m_0c^2$  فما هو انطلاقها ؟

١٢-٢١ توتر قوة ثابتة  $\vec{F}$  على جسم كتلة  $m_0$  . اذا بدأ الجسم من السكون في الزمن  $t = 0$  ، جد المسافة التي يقطعها في الزمن  $t$  . كيف يختلف هذا التمرين من التمرين ١٢-١٨ المذكور اعلاه ؟

١٢-٢٢ يتحرك قضيب طوله ١٠ سم بالطول على طاولة اقية ملامسا فيها فتحة قطرها ٩ سم . لنفرض ان انطلاق القضيب  $v$  يكون بحيث  $\gamma = 2$  . اى يظهر طول القضيب ٥ سم لمشاهد في حالة السكون بالنسبة للطاولة . اهلل جاذبية الارض ولكن افرض ان دفعين متساويين مقدارهما  $\hat{P}$  قد سلطا عموديا على نهايتي القضيب ، حالما انتهى الطرف الخلفي من الفتحة بذلك يدخل القضيب في الفتحة . بين اذا سلطت الدفوع في آن واحد في محور سكون الطاولة ، عندئذ هي ليست كذلك في محور سكون القضيب ، ولكن الطرف الامامي يتسلم دفعة اولاً . اذن يدخل

القضيب الفتحة بزواوية ويمكنه النفوذ منها ولو ان قطر الفتحة يظهر هر ٤ سم فقط  
 بالنسبة لمحاور السكون الاصلية للقضيب . جد ميلان القضيب الناتج . بين ان القضيب  
 يظهر منحنيًا في محاوره الاصلية للسكون خلال الفترة الزمنية بين الدفعتين .

١٢-٢٣- توهثر قوة  $\vec{F}$  على جسيم كتلة سكونه  $m_0$  . اثبت مبتدأ بـ

$$\text{ان } \vec{F} = d(m\vec{v})/dt$$

$$\vec{F} = m\vec{v} + \vec{v}(\vec{F} \cdot \vec{v}/c^2)$$

١٢-٢٤- بدأ صاروخ من السكون بكتلة سكونية كلية  $m_1$  ، اذا كان  $u$  انطلق

الوقود بالنسبة للصاروخ . اثبت ان انطلق الصاروخ النهائي هو

$$u \frac{(m_1/m_f)^{2u/c} - 1}{(m_1/m_f)^{2u/c} + 1}$$

حيث  $m_f$  هي كتلة السكون النهائية للصاروخ المتحرك . علما بان لانوجسسية  
 هناك قوى خارجية .

١٢-٢٥- جسيم كتلة سكونه  $m_0$  ينحل الى جسيمان كتلتا سكونهما  $m_1$  و  $m_2$

على التالي . اثبت ان طاقتيهما هي

$$m_1 = \left( \frac{m_0^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m_0} \right) c^2$$

$$m_2 = \left( \frac{m_0^2 - m_1^2 + m_2^2}{2m_0} \right) c^2$$

١٢-٢٦- جسيم كتلة سكونه  $m_1$  وسرعته الابتدائية  $v_1$  يصطدم بجسيم آخر كتلة سكونه  $m_2$  الذي كان في حالة السكون . عند التصادم ، التصق الجسيمن ولم يحدث خسارة في الطاقة نتيجة الاشعاع . اثبت ان كتلة سكون الجسيم المتكون النهائية هي

$$(m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 \gamma)^{\frac{1}{2}}$$

حيث

$$\gamma = (1 - v_1^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

١٢-٢٧- حل التمرين السابق للحالة التي يكون فيها انطلاقا الجسيمين الابتدائيان  $v_1$  ،  $v_2$  على التوالي . واتجاههما الابتدائيان للحركة يختلفان بزاوية  $\theta$  .

١٢-٢٨- اصطدم بروتون يتحرك بانطلاق ابتدائي  $v$  مع بروتون آخر في حالة السكون . معد التصادم صنع خطا حركة البروتونين الزاويتين  $\theta$  و  $\psi$  مع اتجاه حركة البروتون الساقط الابتدائية اثبت ان

$$2 \cot \theta \cot \psi = 1 + \gamma$$

حيث

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

١٢-٢٩- جد المصفوف لتحويل لورنتز بين منظومة المحاور  $X_{\mu}$  ،  $X'_{\mu}$  حيث المحوران  $X_1$  ،  $X'_1$  متوازيان ، ومنظومة المحاور التي تحمل الفتحة تتحرك بانطلاق  $v$  باتجاه  $X_1$  والمحوران  $X_2$  و  $X'_2$  دورا بزاوية  $\theta$  حول المحور  $X_3$  .  
ترجم النتيجة النهائية الى المراء بدلالة اربع معادلات في الاحداثيات الاعتيادية

$$. x, y, z, t, x', y', z', t'$$



١٢-٣٠- حل التمرين ١٢-٧ وذلك بالتعبير عن التحجيل بصيغة التجزء - الرباعي

١٢-٣١- حل التمرين ١٢-٢٣ باستعمال القوة - الرباعية .

١٢-٣٢- من حقيقة كون القوة الرباعية  $\vec{F}_R$  تتحول كتجء - رباعي جد قوانين

التحويل للقوة الرباعية . بين من هذه ان القوة الاعتيادية  $\vec{F}$  تتحول كالانسي

$$f'_x = f_x - \frac{\beta}{\gamma} \left( \frac{\dot{y}f_y + \dot{z}f_z}{1 - \dot{x}\beta/c} \right)$$

$$f'_y = \frac{f_y}{\gamma(1 - \dot{x}\beta/c)}$$

$$f'_z = \frac{f_z}{\gamma(1 - \dot{x}\beta/c)}$$

١٢-٣٣- استعمال النتيجة السابقة لتبين ان تحويل القوة يمكن ان يعبر عنها

كما يلي

$$\vec{f} = \vec{f}' + (\gamma - 1)\vec{f}'_p + \gamma \frac{\vec{u}}{c} \times \left( \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{f}' \right)$$

حيث  $\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$  ،  $\vec{f}'_p = \dot{y}f'_y + \dot{z}f'_z$  سرعة المحاور التي تحمل الفتحة و  $\vec{u}$  هي سرعة الجسم . (هذه النتيجة لها

تطبيقات في كهرومغناطيسية . اذن اذا كانت  $\vec{f}'$  هي قوة كهربائية على

جسيم مشحون ، فالحد الاخير يمثل قوة تواتر بزاوية عمودية على حركة

الجسيم ، اي قوة مغناطيسية .

## اجوبة الاسئلة الفردية

الفصل ١

$$17^{\frac{1}{2}} \quad (أ) \quad ١-١$$

(ب) صفر

$$90^{\circ} \quad (ج)$$

$$q = \frac{1}{2} \quad ٢-١$$

$$-1 \quad ٥-١$$

$$\vec{N} = -2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k} \quad ٧-١$$

$$N = 3$$

$$\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\hat{i}/2 + \hat{j}' + \hat{k}' \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2} \quad ١٢-١$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta \cos \theta & \cos \theta \sin \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & \sin \theta \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad ١٥-١$$

$$\hat{i} - \hat{k}, \hat{j} - \hat{k}, \hat{k} \quad ١٧-١$$

الفصل ٢

$$\vec{v} = \hat{i}c - gt\hat{j}, \quad v = (c^2 + g^2t^2)^{\frac{1}{2}} \quad (أ) \quad ١-٢$$

$$\vec{a} = -g\hat{j}$$

$$\vec{v} = \hat{i}A\omega \cos \omega t - \hat{j}B\omega \sin \omega t \quad (ج)$$

$$v = \omega (A^2 \cos^2 \omega t + B^2 \sin^2 \omega t)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 (\hat{i}A \sin \omega t + \hat{j}B \cos \omega t)$$

$$\vec{v}_{12} = \hat{i}b\omega (-\sin \omega t - \cos \omega t) + \hat{j}b\omega (\sin \omega t - \cos \omega t). \quad ٢-٢$$

$$|\vec{v}_{12}| = b\omega 2^{\frac{1}{2}} \quad d |\vec{r}_{12}| / dt = 0$$

$$a_r = g(1 + g^2t^2/c^2)^{\frac{1}{2}}, \quad a_n = g(1 + c^2/g^2t^2)^{\frac{1}{2}} \quad (أ) \quad ٧-٢$$

$$\vec{v} = (\hat{i}_R k + \hat{j}_\theta \omega) b e^{kt}, \quad v(0) = b (k^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$\vec{a} = \hat{i}_R (k^2 - \omega^2) b e^{kt} + \hat{j}_\theta 2bk\omega e^{kt}$$

$$a(0) = b(k^2 + \omega^2)$$

$$v = b\omega \left[ \cos^2\left(\frac{\pi}{4} \cos \omega t\right) + \frac{\pi^2}{16} \sin^2 \omega t \right]^{\frac{1}{2}} \quad 11 - 2$$

$$(3 + 4t) \cos \omega t + (3t - 2t^2) \sin \omega t - 4t \quad 13 - 2$$

$$\hat{i}(9t^2 + 2\omega \cos \omega t) + \hat{j}(-12t^3 + 2\omega \sin \omega t)$$

$$+ \hat{k} \left[ (4 + 3\omega \sin \omega t) + (2t^2\omega - 3) \cos \omega t \right]$$

١٥ - ٢

$$(a_0^2 + v^4/b^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$a_0 \left[ 2 + 2\cos \theta + (2v^2/a_0 b) \sin \theta + v^4/a_0^2 b^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (ب)$$

حيث  $b$  يمثل نصف قطر العجلة ،  $v$  الانطلاق الامامي ، و  $\theta$  قياس من اعلا نقطة على العجلة . يحدث التعجيل في نهايته العظمى في النقطة المعروفة بـ

$$\tan \theta = v^2/a_0 b$$

$$|\vec{a}| = b \left[ (\omega_1^2 + \omega_2^2 \sin^2 \theta)^2 + 4\omega_1^2 \omega_2^2 \cos^2 \theta + \omega_2^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} \quad 19 - 2$$

حيث قياس  $\theta$  من الخط الشاقولي المركزي . في اعلى نقطة  $\theta$  تساوى صفر

$$|\vec{a}| = b (\omega_1^4 + 4\omega_1^2 \omega_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad و$$

### الفصل ٣

$$(5/2) F_0 t_0^2/m \quad 1 - 3$$

$$(7/6) ct_0^3/m \quad 2 - 3$$

$$(v_0/g) \left[ (\sin \theta + \mu \cos \theta)^{-1} + (\sin^2 \theta - \mu^2 \cos^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad 5 - 3$$

$V(x) = kx^{n+1}/(n+1)$	(١)	٩ - ٣
$v(x) = \pm \left[ v_0^2 - 2kx^{n+1} \frac{m(n+1)}{1/n+1} \right]^{-\frac{1}{2}}$	(ب)	
$x = \left[ m v_0^2 (n+1)/2k \right]^{1/n+1}$	(ج)	
$x = -(m/c) \left[ \nu + (mg/c) \ln(1 - cv/mg) \right]$	(١)	١١ - ٣
$x = -(m/2c) \ln(1 - c\nu^2/mg)$	(ب)	
$F(x) = -mb^2x^{-3}$		١٢ - ٣
$x = (2m\nu_0/k)^{\frac{1}{2}} \tan \left[ (k\nu_0/2m)^{\frac{1}{2}} t \right]$		١٥ - ٣
$(A_1/A_2) (m_1/2m_2)^{\frac{1}{2}}$		١٧ - ٣
٤ مرآة نذبذة		٢٥ - ٣

## الفصل ٤

محاذظة (١) ، (ج) ، (د) ، (هـ) ، (و)		١ - ٤
$\left[ \nu_0^2 - 2(a+b+c)/m \right]^{\frac{1}{2}}$		٣ - ٤
$x = 2 \cos \omega t, y = 2 \cos \omega t + 2 \sin \omega t$		١٣ - ٤
$x = 6^{-\frac{1}{2}} \cos(2^{\frac{1}{2}}t), y = 2^{-\frac{1}{2}} \cos 2t,$		١٥ - ٤
$z = 24^{-\frac{1}{2}} \cos(8^{\frac{1}{2}}t)$		
$z = b/3$		١٧ - ٤
$\nu = (2gb)^{\frac{1}{2}}, R = 3mg$		١٩ - ٤

## الفصل ٥

$S = m(g^2 + a_0^2)^{\frac{1}{2}}, \theta = \tan^{-1}(a_0/g)$	(١)	١ - ٥
$S = m(g^2 + v_0^4/\rho^2)^{\frac{1}{2}}, \theta = \tan^{-1}(v_0^2/g\rho)$	(ب)	

$$\begin{aligned}
 & -(\nabla^2/\rho)\hat{i} + (\nabla^2/b)\hat{k} & ٣-٥ \\
 \vec{A} = -\hat{i}_r [b\omega^2 + 2\omega v + \nabla^2/b] , \vec{F} = m\vec{A} & ٥-٥ \\
 \vec{k} = -\hat{i}_r (4\nabla^2/b) & \\
 \vec{A} = \vec{0} &
 \end{aligned}$$

حيث  $\hat{i}_r$  يمثل وحدة متجهة قطبية .

- ٧-٥ حوالي ٦١ باوند قوة شرق .
- ١-٥ حوالي ٣٦٠٠ ميل بالساعة .

$$\begin{aligned}
 d^3\vec{R}/dt^3 = \ddot{\vec{r}} + 3\dot{\vec{\omega}} \times \dot{\vec{r}} + 3\dot{\vec{\omega}} \times \ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{\omega}} \times \vec{r} & ١١-٥ \\
 + 2\dot{\vec{\omega}} \times (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) + \ddot{\vec{\omega}} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 3\dot{\vec{\omega}} \times (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}) & \\
 + \ddot{\vec{\omega}} \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] + d\vec{A}/dt &
 \end{aligned}$$

$$\sin^2 \theta_0 \simeq \omega_0 \sin \lambda (4/3)(l/g)^{3/2} \quad \text{لـ } \theta_0 \text{ صغيرة} \quad ١٣-٥$$

التي تعطى  $\theta_0 \approx 0.004^\circ$

الفصل ٦

$$F = -GMmr^{-2} - G(4/3)\pi\rho mr \quad ٣-٦$$

$$\Phi(r) = -GM(r^2 + a^2)^{-1/2} , G = -GMr(r^2 + a^2)^{-3/2} \quad ٥-٦$$

٧-٦ قانون القوة - الخامسة العكسي

$$\theta = kt^{1/7} \quad \text{كلا} \quad ١-٦$$

$$0.01 \nabla_0 \quad \text{و} \quad 1.995 \nabla_0 \quad \text{(ج) } ٠.١١ \quad \text{(ب) سنة } ٣٥٤ \quad \text{(أ)} \quad ١١-٦$$

$$E \text{ سالبة ، أي المدار اهليلجي} \quad ١٢-٦$$

$$a > (E/\kappa)^{1/2} \quad ٢٢-٦$$

٢٥-٦ يتقدم الحضيض القمري بحوالي ٤ ر' لكل دورة للمدارات القريبة من الارض .

الفصل ٧

$$\vec{r}_{cm} = \hat{i}/3 + 2\hat{j}/3 + 2\hat{k}/3 \quad ١-٧$$

$$\vec{v}_{cm} = \hat{i} + 2\hat{j}/3 + \hat{k}/3$$

$$\vec{F} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$v_0 (1 + m/M)^{-1} \quad ٣ - ٧$$

$$v = 2.45 v_0, \quad \theta = 54^\circ 44' \quad ٥ - ٧$$

$$v'_x = v'_y = v (1 + 21^{\frac{1}{2}})/10 = 0.558 v \quad \text{بروتون } 1٧ - ٧$$

$$v'_x = v (1 + 21^{\frac{1}{2}})/40 = 0.139 v \quad \text{هليوم}$$

$$v'_y = v (9 - 21^{\frac{1}{2}})/40 = 0.11 v$$

$$\theta = \tan^{-1} \left[ (21^{\frac{1}{2}} + 1)/(21^{\frac{1}{2}} - 1) \right] \quad 1٩ - ٧$$

$$= \tan^{-1} 1.84 = 61.5^\circ$$

الفصل ٨

$$x_{cm} = y_{cm} = 4a/3\pi \quad (أ) \quad ١ - ٨$$

$$x_{cm} = y_{cm} = 2a/2\pi \quad (ب)$$

$$h/4 \quad \text{(ج) من القاعدة}$$

$$3b/5 \quad \text{(د) من القمة}$$

$$x_{cm} = 2b/3 \quad (هـ)$$

$$2a/5 \quad \text{من المركز } ٣ - ٨$$

$$l \left[ (\mu^2 + \mu \tan \theta)(1 + \mu^2)^{-1}(1 + \bar{\omega}/W) - \omega/2W \right] \quad ٥ - ٨$$

$$\sin^{-1} (8\mu/3) \quad ٧ - ٨$$

$$ma^2 \left[ (1/2) - (4/3\pi)^2 \right] \quad 1٣ - ٨$$

$$2\pi (2a/3g)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}}, \quad l' = a2^{\frac{1}{2}}/6 \quad (أ) \quad 1٥ - ٨$$

$$2\pi (7a/12g)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}}, \quad l' = a2^{\frac{1}{2}}/12 \quad (ب)$$

$$g(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2 + I/a^2) \quad 1٩ - ٨$$

$$(3/4) mg \sin \theta (3 \cos \theta - 2) \quad \text{(أ) الانفية} \quad ٢١ - ٨$$

$$(1/4) mg (3 \cos \theta - 1)^2 \quad \text{الشاقولية}$$

(ب) يبدأ الانزلاق عندما يكون

$$\left| 3 \sin \theta (3 \cos \theta - 2) \right| = \mu (3 \cos \theta - 1)^2$$

ينزلق القضيب الى الخلف اذا استوفت المعادلة المذكورة

اعلاه ما يلي  $\theta < \cos^{-1}(2/3)$  او خلافا لذلك ينزلق

الى الامام .

$$a/2 \quad \text{من المركز} \quad ٢٣ - ٨$$

$$\hat{P}_A = m(g\ell)^{1/2} (2/9)^{1/2}, \quad \hat{P}_B = m(g\ell)^{1/2} \left[ (9/8)^{1/2} - (2/8)^{1/2} \right] \quad ٢٥ - ٨$$

لحالة غير العرن التام .

$$v_{cm_1} = -\hat{P}/4m, \quad \omega_1 = -3\hat{P}/2m\ell \quad ٢٧ - ٨$$

$$v_{cm_2} = 5\hat{P}/4m, \quad \omega_2 = 9\hat{P}/m\ell$$

$$v_B = -\hat{P}/m$$

الفصل ٩

$$L = mab \omega / 12 \quad ١ - ٩$$

الزاوية بين  $\vec{L}$  والمحور x- هي  $\tan^{-1}(a/b)$

الزاوية بين  $\vec{L}$  والمحور x- هي  $\tan^{-1}(b/a)$

$$L = (3/4) ma^2 \omega / 2^{1/2} \quad ٢ - ٩$$

الزاوية بين  $\vec{L}$  ومحور القرص هي  $\tan^{-1} \frac{1}{2} = 27^\circ 33'$

$$I_{xx} = m(b^2 + c^2)/12, \quad I_{yy} = m(c^2 + a^2)/12 \quad ٥ - ٩$$

$$I_{zz} = m(a^2 + b^2)/12.$$

جميع ضرب القصور الذاتية صفر

$$\vec{L} = m \omega (a^2 + b^2 + c^2)^{-1/2} \left[ a(b^2 + c^2) \hat{i} + b(c^2 + a^2) \hat{j} + c(a^2 + b^2) \hat{k} \right] / 12$$

$$I_{xx} = mb^2/6, I_{yy} = ma^2/6, I_{zz} = m(a^2 + b^2)/6 \quad ٧-٦$$

$$I_{xy} = -mab/12, I_{yz} = I_{xz} = 0$$

$$\theta = \left(\frac{1}{4}\right) \tan^{-1} \left[ ab/(a^2 - b^2) \right]$$

$$a/b = 3^{-1/2} \quad ٩-٦$$

العزم الرئيسية في مركز كرة كبيرة هي ١١-٦

$$(2/5)ma^2, (11/56)ma^2, (11/56)ma^2 \quad ٢١-٦$$

٠.٠٦٥ ثانية من قوس

تتحرك المنصة باتجاه الدفع بسرعة  $\hat{P}/m$  ( لتأثير الانتقال ) ٢٣-٦

وتبدأ 'تتهاوى تحت تأثير الطواف الحريث يعمل متجه السرعة

الزاوية الجديد زاوية  $(4\hat{P}/ma\omega) \tan^{-1}$  مع محور تناظر المنصة .  
حوالي ١٧ دورة بالدقيقة و ٤٣٠ دورة بالدقيقة ٢٥-٦

حوالي ٣٨٥٠٠٠ دورة بالدقيقة ٢٧-٦

$$ma^2 \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix} \quad (أ) \quad ٢٩-٦$$

$$ma^2 \begin{bmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{bmatrix} \quad (ب)$$

$$\vec{L} = ma^2 \omega 3^{-1/2} (1/6) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, T = ma^2 \omega^2 / 36 \quad ٣١-٦$$

١٠. الفصل

$$(5/7)g \sin \theta \quad ١-١٠$$

$$x = (g/2\omega^2)(\sin \omega t - \sin h \omega t) + x_0 \cos h \omega t \quad ٢-١٠$$



$$g \left[ \frac{(m + m^*)}{(2m + m^*)} \right] \quad ٥ - ١٠$$

حيث  $m^*$  هي كتلة الوتر المتعلق على الطاولة

$$m_1 : (23/25)g \quad (\text{اعلى}) \quad ٧ - ١٠$$

$$m_2 : (13/25)g \quad (\text{اسفل})$$

$$m_3 : (1/25)g \quad (\text{اسفل})$$

$$m_4 : (9/25)g \quad (\text{اسفل})$$

$$m d^2 R / dt^2 = m R \dot{\theta}^2 - \partial V / \partial R \quad ١١ - ١٠$$

$$m d(R^2 \dot{\theta}) / dt = - \partial V / \partial \theta$$

$$m d^2 z / dt^2 = - \partial V / \partial z$$

انظر المعادلتين (٤ - ١٢) و (٤ - ١٣) ١٥ - ١٠

$$\ddot{r} = r \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha - g \cos \alpha, \quad d(r^2 \dot{\theta}) / dt = 0 \quad ١٧ - ١٠$$

حيث  $\alpha$  هي نصف زاوية المخروط .

$$v_{cm1} = (4\hat{P}/5m), \quad \omega_1 = 0 \quad ١١ - ١٠$$

$$v_{cm2} = (\hat{P}/5m), \quad \omega_2 = (3\hat{P}/5ma)$$

$$P_x = m\dot{x} - qA_x, \quad P_y = m\dot{y} - qA_y, \quad ٢١ - ١٠$$

$$P_z = m\dot{z} - qA_z$$

$$H = P_\theta^2 / (2m\ell^2) + P_\phi^2 / (2m\ell^2 \sin^2 \theta) - mg\ell \cos \theta \quad ٢٣ - ١٠$$

$$\dot{\theta} = P_\theta / m\ell^2, \quad \dot{P}_\theta = - \left[ \frac{(P_\phi^2 \cos \theta)}{(m\ell^2 \sin^3 \theta)} \right] - mg\ell \sin \theta$$

$$\dot{\phi} = P_\phi / m\ell^2 \sin^2 \theta, \quad \dot{P}_\phi = 0$$

## الفصل ١١

$$x = b \quad (\text{مستقر}) , \quad x = 0 \quad (\text{غير مستقر}) \quad ١ - ١١$$

$$x = -b/2 \quad (\text{مستقر})$$

$$V = k \left[ y^2 - 2l(l^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \right] - mgy \quad ٢ - ١١$$

$$x = b : (2\pi/3b)(m/2k)^{\frac{1}{2}} \quad ١ - ١١$$

$$x = -b/2 : (2\pi/3b)(m/k)^{\frac{1}{2}}$$

$$2\pi \left[ 5a/3g(b-a) \right]^{\frac{1}{2}} \quad ١١ - ١١$$

$$2\pi \left[ 7a^2/5g(b-a) \right]^{\frac{1}{2}} \quad ١٢ - ١١$$

$$x_1 = (A/2) \cos \omega_a t + (V_0/2\omega_a) \sin \omega_a t \quad ١٥ - ١١$$

$$+ (A/2) \cos \omega_b t + (V_0/2\omega_b) \sin \omega_b t$$

$$\omega = \left[ (9 \pm 17^{\frac{1}{2}})/8 \right]^{\frac{1}{2}} \omega_0 \quad ١٧ - ١١$$

$$\omega = \omega_0 \left[ n + 1 \pm (n^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad ١٩ - ١١$$

$$n = l_1/l_2 , \quad \omega_0 = (g/l_2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{حيث}$$

$$\omega = \omega_0 \left[ 3n + 4 \pm (9n^2 + 12n + 16)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad ٢٢ - ١١$$

$$n = b/2a , \quad \omega_0 = (g/2b)^{\frac{1}{2}} \quad \text{حيث}$$

$$\omega_1 = (k/m')^{\frac{1}{2}} \quad ٢٧ - ١١$$

$$\omega_2 = \left[ (k/m') + (2k/m) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$v = (k/m)^{\frac{1}{2}} (l + \Delta l) \quad (\text{طولية}) \quad ٢٩ - ١١$$

$$v = (k/m)^{\frac{1}{2}} \left[ \Delta l(l + \Delta l) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{مستعرضة})$$

## الفصل ١٢

$$\Delta r_B = 11.5 \text{ m}, \quad \Delta t_B = 1.92 \times 10^{-8} \text{ sec} \quad \gamma - 12$$

$$\Delta r_c = 10 \text{ m}, \quad \Delta t_c = 0$$

$$\Delta r_B = 13.2 \text{ m}, \quad \Delta t_B = 3.06 \times 10^{-8} \text{ sec}$$

$$\Delta r_c = 10.14 \text{ m}$$

$$\Delta t_c = 1.15 \times 10^{-8} \text{ sec}$$

٤ره سنة و ١٠ر٣ سنة

١١ - ١٢

$$v = 0.37 c, \quad \theta = 73^\circ 45' \text{ الكلاسيكي}$$

١٥ - ١٢

$$v = 0.39 c, \quad \theta = 73^\circ 11' \text{ حسب النظرية النسبية}$$

$$c \left[ 1 + (m_0 c)^2 / (ft)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

٢١ - ١٢

$$\left[ m_1^2 + m_2^2 + \gamma(v_1) \gamma(v_2) 2m_1 m_2 (2 - v_1 v_2 \cos \theta) \right]^{\frac{1}{2}} \quad ٢٧ - ١٢$$

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & 1/\beta\gamma \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad ٢١ - ١٢$$

## الفهرست

٢	
٤٦٦	ابادة زج جسم
	احداثيات ديكرتية ١
٤٠٤	عبارة
٤١ ٥ ٤٧	كرصة
٣٥٣	معمسة
٣٧٠	مهطمة
٣٨١ ٥ ٢٢٠	استقرار
٤٦٣	استمرارية الطاقة الحرارية
٧١	انطلاق افلات
٧٤	منتمى
ب	
٢٤٠	باعث الحرارة
٤٢٧	بطن
٢١٧	بومترا التصادم
١٣٨	بندول بسيط
١٨٢	فوكو
٢٧٤	فيزيائي
١٤٨	كروي
١٥١	مخروطي
٢٧٤	مركب
٤٠٨	مزدوج

## ت

٤٥٥	تحولات السرعة
٤٤٠	لورنتز
٤٤٨	تحديد الزمن
٣٣٦	تدويم
٦٥	تردد دافع مؤثر
٤٠٠	كيارى
٣٣٨	ترنج
١٤٦	تساوى الزمن
١٠	متجهات
٢١٥	تشتت جسيمات ذرية
٢٣١	تصادم
٢٤٠	مباشر
١٦٨	تعجيل جذب نحو المركز
١٦٨	مستعرض
٤٥٨	تغيير الكتلة مع السرعة
١١٠ و ١١٤	تفاضل دقيق
٤٠	ضرب المتجهات
٤٤٥	تقلص الطول
١٥٤	تقدم
٣٦	تكامل متجهه
١٤٣	موجز
١٤٤	موجز ناقص
٢٦٠	توازن استاتيكي لجسم صلب
٢٦٢	تعد تأثير قوى دافعة في نفس المستوى
١٣	جسيم

٣٠٧	ديناميكي
٢٦١	في مجال جاذبية منتظم
٤٤٧	توافق
٤٥١	توافق التناقض الظاهري

## ج

٤٦٦	جسيم مضاد
١١٢	جسيمات بدائية
١١٦٧	جمع المتجهات
١٩٢	جهد الجاذبية
١٩٥	قشرة كروية منتظمة
٢٢٨	فعلسي

## ح

٨٨	حالة تضارول حرجة
٨٩	دون التضارول
٨٨	فوق التضارول
١٦٢	حد زائف
٩٣	عابر
٢٨٢	حركة بدون انزلاق
٩٩	تحت تأثير قوة دافعة توافقية غير جيبيية
٨٠	توافقية
٩٢	توافقية اضطرارية
٨٧	توافقية متضائلة
٢٨٥	جسم صلد تحت تأثير قوة دافعة

٣٣٤	خذروف
٧٣	شاقولية في وسط مقام
٢٥٠	صاروخ
٢٧١	صفاحية لجسم صلد
٦٢ ٥ ٥٦	على خط مستقيم
١٣٧	على منحني
٢١٥	في مجال التربيع العكسي المتناهي
٢٢٠	في مدارات تقرب من الدائرية
٢٥٦	في مستو
١٧٨	القذيفة
٦٢	قذيفات
١١٨	قذيفة في مجال تناقلي منتظم
١٦١	جوار مرجعية
١٦١	حركة جوار انتقالية
٢٨٦	مقيدة
١٣٥	مقيدة لجسيم
٢٦٥	حساب عزم القصور الذاتي
٢٦٧	اسطوانة
٢٦٧	طوق
٢٦٧	قرص دائري
٢٦٩	قشرة كروية

خ

٣٤٠	خذروف ناعم
٢١٦	خط المقارنة
١١٥	خطوط مناسبة

٤٦٦ خلق زرع جسم

د

٣٥٤ درجات حرمة

٢٤٧ دفع

٢٥٠ مضاد

١٤٧ دورى

٥٦ ديناميك جسم

١٧١ جسم في حاور دائرة

ر

٤٥١ رحلة فضائية

٩٢ رنين

٩٥ تردد

ز

٢٣٠ ٥ ٦٠ زخم خطي

٢٠٠ ٥ ١٦٦ زاوى

١٦٦ زاوى في مجالات مركزية

٢٣٣ زاوى لمنظومة

٢١٨ زاوى لجسم صلد

٤٧٦ زخم - رياضي

١٧٧ زوايا خط العرض

٤٥٣ زمن مناسب

٧٤ نوعي



## س

٧٤	سرعة منتهى
٧٣	نسبية
٣٧	والتعجيل في الاحداثيات القطبية المستوية
٤٤	الاسطوانية والكروية
٤٧	

## ش

## ض

١٥	ضرب اتجاهي
٢٤	اتجاهي ثلاثي
١٢	عددي
٢٦٨	قصوات ذاتية
١٢	متجه بكمية عددية

## ط

٦٥	طاقة حركية
٣٠٠	الحركة الدوانية لجسم صلب
٦٥	كامنة
١١١	كامنة في مجال جاذبية
١١٢	والتوازن
٣٨٦	طاقات مدارية في مجال التربيع العكسي
٢٠٦	طرح متجهات
٨	

٣٣٣	طوائف الارض الحرة
٣٣٢	قرص
٣٣٧	مستقر

## ع

٢١	عزم قوة
٤٦١	علاقة الطاقة والكتلة

## ق

٨	قانون هـادل الحدود ني الجمع
٨	ترتيب الحدود
٨	توزيع الحدود
١٨٨	جاز بيعة
١٥	جيب التمام
٥٦	نيوتن الاو
٥٨	نيوتن الثاني
٥٨	نيوتن الثالث
٢٠٠	كبلر
١٩	قاعدة تداخل
٣٧٥	تخيير لهلمتن
١٠٨	شغل
٢٢٢	تبا والزوايا القبوية
٥٧	تصور ذاتي
١٨٩	قوة جذب بين كرة منتظمة وجسيم

٦١	دالة للسرعة
٧٢	دالة للزمن
٦٥	دالة للموضع
٤٧٨	رباعية
١٦٢	زائفة
١١٧	قابلة للفرز
١٧٢	كوبوليمية
١٨٨	مركبة
١٧٢	مستعرضة
٣٥٦	معينة
١٧٢	نايذة

## ك

٢٣٧	كلية مصفرة
١٤٨	كوستيان هوكين
٣٠٥	كمية متدة للنقص الذاتي

## ل

٣٦٤	ماكبة انود
٣٦٥	انود المزدوجة
٣٢	متجه سرعة
٣٤	تعجيل
٤٧١	رباعي عام
٤٧٢	رباعي عام للسرعة والزخم
٨	صفر

٣١	مشقة
٩	مقدار
٣١	موضع جسم
٦	وحدات
٣٦٢ ٥ ١٢٣	متذبذب توافقى
١٢٧	متجانس
١١٦	متفرقة
٢٠٢	مدار جسم في مجال قوة مركزية
٢٠٥	مدارات في مجال التربيع العكسي
٤٣٥	مدخال ضوئى
٤١	مركبات ماسية وعمودية
٣١٥ ٥ ٣١٢	مجسم ناقص للمعزم
٢٤٢	جوار مختبرية
٢٤٤ ٥ ٢٤٢	مركز كتلة
٣٣٤	مخروط الفضاء والجسم
٢٧٦	مركز تذبذب
٣٠٥ ٥ ٢٥٦	جسم صلب
٢٩٠	صدم
٢٦٠	صفحة نصف دائرية
٢٥٩	قشرة نصف كروية
٢٣٠	كتلة
٢٥٩	نصف دائرة
٢٥٨	نصف كرة ممتلئة
٣٩٠	مستقرة حاله
٣٩٠	غير
٣٩٠	مستقرة ه حالة

٢٦	مصفوف
٣٤٢	التحويل
٢٠٥	معادلة الطاقة للمدار
١٣٥	طاقة للقيود المساوية
٣١٨	معادلات اولسر
٣٥٨	لاكرانج
٣٨٢	لاكرانج للحركة المقيدة
٣٧٩	ملمن القانونية للحركة
٢٤١	معجون سنيف
٢٤١	معامل الارتداد
٤٤٨	منحنيات الفضاء والزمن
٢١٥	منحدر
٤٢٦	موجات مستقرة
٤٢٥	منحن الجيب

## ن

٢٧٢	نصف قطر التدويم
١٨٧	نظرية لامور
٢٦٦	جار متعامدة
٢٧٠	جار متوازية
٦٧	نقاط الرجوع

## المصطلحات العلمية

## A

angular momentum	زخم زاوی
annihilation	ابادة
antipartiele	جسيم مضاد
apsides	قبا
asidal angles	زاويا قبهية
asymptote	خط مقارب

## B

ballistic	قذني ء بلستي
-----------	--------------

## C

canonical	قانوني
canical pendulum	بندول مخروطي
cartesian coordinates	حاورد يارتيية
center of mass coordinates	حاور مركز الكتلة
celestial mechanics	ميكانيك سماوي
central force	قوة مركزية
centripetal	جذب نحو المركز
conservative	حافظ
constraint	مقيسد
contour lines	خطوط مناسب
configuration	شكل عام ء وضع
compound pendulum	بندول مركب
compatible	منسجم
couple	مزدوج

creation	خلق
curve	منحنى
cycloid	دويرى
cross product	ضرب اتجاهى
characteristic time	زمن نوعى
coordinates	محاور
coriolis	كوريوليس
collision	تصادم
coefficient of restitution	معامل الارتداد

## D

del operator	مؤثر دلتا
divergence	متفرقة
dynamic	ديناميك
damped	متضائل
driving frequency	تردد دافع
driving force	قوة دافعة
degree of freedom	درجات حرية

## E

exact differential	تفاضل دقيق
elementary particles	جسيمات بدائية
escape speed	انطلاق الافلات
effective potential	جهد فعلى
exoergic	بامت حرارة
extreme	اعظم او اصغر

exact solution	حل دقيق
elliptic	موجز
F	
field	جال
foucault pendulum	بندول فوكو
forced harmonic motion	حركة توافقية
four-vector form	صيغة المتجه - الرباعي
frequency	تردد
G	
gradient (grad.)	متحدر
gravitational	تثاقلي
geocentric latitude	زوايا خط العرض
generalized coordinates	أحداثيات معممة
H	
harmonic	توافقي
hoop	طوق
I	
isotropic	متجانس في الأبعاد الثلاث
incomplete elliptic	موجز ناقص
isochronous	تساوي الزمن
inertial reference system	حاور مرجعية مستمرة
in phase	متوافقة الطور
impact	تصادم



impulse	دفع
inertia	قصور ذاتي
ignorable	مهمل
interferometer	مدخال
inertial forces	قوى زائفة
inertial terms	حدود زائفة

I

linear	خطي
limit	غاية
laminar	صفائحية

M

magnetron	مكترون
moment	عزم
matrix	مصنوف
moment of inertia	عزم القصور الذاتي
momental ellipsoid	الجسم الناقص للعزم
momentum	زخم
mode	صيغة

## H

nonlinear	غير خطي
nul	صفر
nutaton	توتنج
neutral	مستمر
normal	عبارى
restoring force	قوة معيدة
resonance	رنين
response	استجابة
reduced mass	كتلة مصغرة
rigid body	جسم صلب
radius of gyration	نصف قطر التدوير
rectilinear	على خط مستقيم

## O

oscillator	متذبذب
------------	--------

## P

potential	جهد ، كامنة
projectile	قذيفة
parameter	بارمتر
pendulum	بندول
power series	متسلسلة اساسية
process	تقدم
plumb line	شاقل البناء
polar coordinates	احداثيات قطبية
principle	قاعدة
power law	قانون الاساسية
physical pendulum	بندول فيزيائي
principle axes	حاور رئيسية
proper time	زمن مناسب

## Q

quality factor	معامل النوعية
----------------	---------------

## R

radian	زاوية نصف قطرية
reference	مرجعية
relative	نسبي
resisting	مقاوم

spatial	فراغى
separable	قابلة الفز
spherical pendulum	بندول كروى
static	ستاتيكى
scalar	كمية عددية
speed	انطلاق
stiffness	مرونة
scattering	تشتت
silly putty	معجون سويف
shell	قشرة
slipping	انزلاق
spin	تدوير
stable	مستقر
sinusoidal waves	موجات منحن الجيب
standing waves	موجات مستقرة
simultaneity	توقيت
superposition	تداخل
secular equation	معادلة بدائية

## T

translation	انتقالية
transverse	مستعرض
terminal velocity	سرعة المنتهى
transient	عابر
thrust	دفع مضاد
top	تدوير

transpose matrix  
 time dilatation  
 twin paradox  
 transformation

مصفوف التحويل  
 تمدد الزمن  
 توأماً التناقض الظاهري  
 تحويل

U

unstable

غير مستقر

V

vector

viscous

كمية متجهة  
 لزوجة