أحمد فيزازي

(أستاذ مساعد مكلف بالدروس)

دفـــــــتــــــــر

الـــكـهـربـــاء و الـــمـــغـــنـاطـــيـــســـيــــة

LMD1 / PHYSIQUE-2-/ لـــ.مــــ.د1

(الطبعة العربية)

دروس مبسّطة

80 تمرين محلول

(النصوص باللغتين العربية و الفرنسية)

معجم للمصطلحات العلمية

(عربي–فرنسي، فرنسي–عربي)

موجه لطلبة السنة أولى من التعليم العالي

لـــ.مــــ.د\1

علم المادة و العلوم التكنولوجية

LEXIQUE معجم المصطلحات
Français-Arabe * فرنسي-عربي /II

Français	عربية
A	
Absolu	مطلق
Actif	نشط
Algébrique	جبري
Alliage	فرز ، خليط معدني
Angle	زاوية
Association	ضم أو جمع أو ربط
Atome	ذرة
Attraction	تجاذب
B	
Barreau	قضيب
Branche	فرع
Balance	ميزان
C	
Capacité	سعة
Cartésien	كارتيزي
Champ	حقل
Charge	شحنة
Circuit	دارة
Circulation	تجوال ، تجوّل
Circulaire	دائري
Coefficient	معامل
colinéaire	متوافق خطيا
Conducteur	ناقل
Conductivité	ناقلية
Conservatif	محافظ
conservation	إنحفاظ
Constant	ثابت
Continu	مستمر
Convention	مصطلح
Coordonnée	إحداثية
Correspondant	متناسب
Couple	مزدوجة
Courant	تيار
Courbe	منحنى

Cylindre	**أسطوانة**
Cylindrique	**أسطواني**
D	
d.d.p ou tension	**فرق الكمون ، توتر**
Densité	**كثافة**
Dérivé	**مشتق**
Différentiel	**تفاضل**
Dipôle	**ثنائي قطب**
Discontinu	**متقطع**
Disque	**قرص**
Distance	**مسافة ، بعد**
Divergence	**تباعد**
E	
Effet	**مفعول ، فعل**
Electricité	**كهرباء**
Electrisation	**تكهرب**
Electromagnétisme	**الكهرومغناطيسية**
Electromagnétique	**كهرومغناطيسي**
Electrostatique	**الكهرباء الساكنة ، كهروساكن**
Elément	**عنصر**
Elémentaire	**عنصرية**
Energie	**طاقة**
Equation	**معادلة**
Equilibre	**توازن**
Equipotentiel	**متساوي الكمون**
Espace	**فضاء ، فراغ**
F	
Farad	**فاراد**
Fermé	**مغلق**
Fil	**سلك ، خيط**
Flux	**تدفق**
Force électromotrice	**قوة محركة كهربائية**
Forme	**شكل**
G	
Générateur	**مولد ، منبع**
Gradient	**تدرج**
Grandeur	**مقدار**
Groupement	**جمع ، ضم ، ربط**
I	
inducteur	**محرض**
Induction	**تحريض**

Induit	متحرض
Infini	لامتناهي
Influence	تأثير
Intégrale	تكامل
Intensité	شدة
Ion	شاردة ، أيون
Isolant	عازل
Jonction	توصيل ، وصلة
L	
Laplacien	لابلاسيان
Ligne	خط
Linéaire	خطي ، مستقيم
Linéique	خطي ، طولي
longueur	طول
M	
Magnétique	مغناطيسي
Maille	عروة
Masse	كتلة
Molécule	جزيء
Moment	عزم
N	
Négatif	سلبي
Nœud	عقدة
Notion	مفهوم
Noyau	نواة
Nucléon	نكليون
Nul	معدوم
O	
Opérateur	مؤثر
Ordre de grandeur	رتبة
P	
parallèle	موازي ، توازي
Particule	جسيمة
Partiel	جزئي
Passif	خامل
Permittivité	سماحية ، نفاذية
Plaque	صفيحة
Pointe	رأس حاد
Polaire	قطبي
Ponctuel	نقطي
Positif	موجب

Potentiel	كمون
Pouvoir	قدرة
Pression	ضغط
Principe	مبدأ
Propre	ذاتية
Propriété	خصائص
Q	
Qualitatif	كيفي
Quanta	كم
Quantification	تكميم
Quantitatif	كمي
Quark	كوارك
R	
Règle	قاعدة
Répartition	توزيع
Répulsion	تنافر
Réseau	شبكة
Résistivité	مقاومية
S	
Scalaire	سلمي
Série	تسلسل
Solide	صلب
Source	منبع ، مولد
Spectre	طيف
Sphère	كرة
Sphérique	كروي
Stéradian	ستيراديان
Superposition	تراكب
Supraconducteur	فائق الناقلية
Surface	سطح ، مساحة
Surfacique,superficiel	سطحي
T	
Tension, d.d.p	توتر ، فرق في الكمون
Théorème	نظرية
Total	كلي
Tube	أنبوب
U	
Uniforme	منتظم
V	
Variation	تغيّر
Vecteur	شعاع

Vectoriel	**شعاعي**
Vide	**فراغ**
Volume	**حجم**
Volumique	**حجمي**

LEXIQUE معجم المصطلحات

I/ عربي-فرنسي*Arabe-Français

Français	عربية
	ا
Coordonnée	إحداثية
Conservation	إنحفاظ
Cylindre	أسطوانة
Cylindrique	أسطواني
Convention	إصطلاح
Electrostatique	الكهرباء الساكنة ، كهروساكن
Electrocinétique	الكهرباء المتحركة
Tube	أنبوب
	ت
Influence	تأثير
Divergence	تباعد
Induction	تحريض
Attraction	تجاذب
Circulation	تجوال ، تجوّل
Gradient	تدرج
Flux	تدفق
Superposition	تراكب
Série	تسلسل
Variation	تغيّر
Différentielle	تفاضل
Parallèle, dérivation	تفرع ، توازي
Intégrale	تكامل
Quantification	تكميم
Electrisation	تكهرب
Répulsion	تنافر
Courant	تيار
Equilibre	توازن
Parallèle, dérivation	توازي ، تفرع
Tension, d.d.p	توتر ، فرق في الكمون
Répartition	توزيع
Jonction	توصيل ، وصلة
	ث
Constante	ثابت
Dipôle	ثنائي قطب

	ج
Algébrique	**جبري**
Partiel	**جزئي**
Molécule	**جزيء**
Particule	**جسيمة**
Groupement,association	**جمع ، ضم ، ربط**
	ح
Champ	**حقل**
	خ
Passif	**خامل**
Propriétés	**خصائص**
Ligne	**خط**
linéaire	**خطي ، مستقيم**
Linéique	**خطي ، طولي**
	د
Circuit	**دارة**
Circulaire	**دائري**
	ذ
Propre	**ذاتية**
Atome	**ذرة**
	ر
Pointe	**رأس حاد**
Ordre de grandeur	**رتبة**
	ز
angle	**زاوية**
	س
Stéradian	**ستيراديان**
Surface	**سطح ، مساحة**
Surfacique	**سطحي**
Négatif	**سلبي**
Fil	**سلك ، خيط**
Scalaire	**سلمي**
Permittivité	**سماحية ، نفاذية**
	ش
Ion	**شاردة ، أيون**
Réseau	**شبكة**
Charge	**شحنة**
Intensité	**شدة**
Forme	**شكل**
	ص
Plaque	**صفيحة**

Solide	صلب
Pression	ضغط
Groupement,association	ضم أو جمع أو ربط
ط	
Energie	طاقة
Longueur	طول
Linéïque	طولي ، خطي
Spectre	طيف
ع	
Isolant	عازل
Maille	عروة
Moment	عزم
Nœud	عقدة
Elément	عنصر
Elémentaire	عنصري
ف	
Farad	فاراد
supraconducteur	فائق الناقلية
Alliage	فرز ، خليط معدني
d.d.p , tension	فرق الكمون ، توتر
Effet	فعل ، مفعول
Espace	فضاء ، فراغ
ق	
Règle	قاعدة
Pouvoir	قدرة
Disque	قرص
Barreau	قضيب
Polaire	قطبي
Force électromotrice	قوة محركة كهربائية
ك	
Cartésien	كارتيزي
Masse	كتلة
Densité	كثافة
Sphère	كرة
Sphérique	كروي
Total	كلي
Quanta	كم
Potentiel	كمون
Quantitatif	كمي
Electricité	كهرباء
Electromagnétique	كهرومغناطيسي

Electromagnétisme	**كهرومغناطيسية**
Quark	**كوارك**
Qualitatif	**كيفي**
	ل
Laplacien	**لابلاسيان**
Infini	**لامتناهي**
	م
Opérateur	**مؤثر**
Principe	**مبدأ**
Inducteur	**محرّض**
Induit	**متحرّض**
Equipotentiel	**متساوي الكمون**
Discontinu	**متقطع**
Correspondant	**متناسب**
colinéaire	**متوافق خطيا**
Conservatif	**محافظ**
Couple	**مزدوجة**
Effet	**مفعول ، فعل**
Distance	**مسافة ، بعد**
Continu	**مستمر**
Dérivé	**مشتق**
Absolu	**مطلق**
Equation	**معادلة**
Coefficient	**معامل**
Nul	**معدوم**
Fermé	**مغلق**
Aimant	**مغناطيس**
Magnétique	**مغناطيسي**
Notion	**مفهوم**
Résistance	**مقاومة**
Résistivité	**مقاومية**
Grandeur	**مقدار**
Condensateur	**مكثفة**
Source, générateur	**منبع ، مولد**
Uniforme	**منتظم**
Courbe	**منحنى**
Parallèle	**موازي ، توازي**
Positif	**موجب**
Générateur, source	**مولد ، منبع**
Balance	**ميزان**
	ن

Conducteur	ناقل
Conductivité	ناقلية
Théorème	نظرية
Ponctuel	نقطي
Nucléon	نكليون
Actif	نشط
Noyau	نواة

I/ الكهرباء الساكنة

ELECTROSTATIQUE

الكهرباء السّاكنة هي دراسة الظواهر الناتجة عن الشحنات الكهربائية في حالة السكون.

كلمة **كهرباء** مصطلح للكلمة الفرنسية « électricité » و هي بدورها مشتقة من الكلمة اليونانية « élektron » و التي تعني **عنبر**(ambre) ، حيث لاحظ طاليس من ميلي (Thalès de Milet) المولود بـــ إيوني (Ionie) – الساحل الغربي لتركيا الحديثة – و الذي عاش ما بين 625 و 545 قبل الميلاد ، لاحظ انجذاب هشيم التّبن إلى قطعة من العنبر الأصفر المدلوك بواسطة الصوف.

A/ المفاهيم الأساسية: (Notions fondamentales)

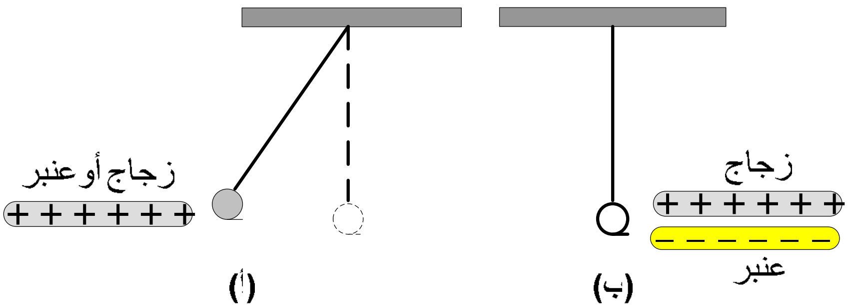
1/ تجارب التكهرب: (Expériences d'électrisation)

إذا قرّبنا المشط ، بعد عملية المشط ، من قصاصات الورق ، نلاحظ أن القصاصات تنجذب إلى المشط . نفس الظاهرة تحصل عند دلكنا لقضيب من زجاج بواسطة قطعة من حرير أو قضيب من العنبر بواسطة قطعة من الصوف.

❖ **التجربة الأولى:** (الشكل 1.1–أ) نعلق كرية من البوليستيرين و نقرب لها قضيبا من زجاج أو من عنبر بعد دلكه مسبقا: القضيبان بعد ملامستهما الكرية ينفرانها. و عكس ذلك إذا قربنا القضيبين معا للكرة ، لا شيء يحدث. (الشكل1.1–ا)

❖ **التجربة الثانية:** (الشكل 2.1) إذا كانت الكريتان مكهربتين بفعل ملامستهما أحد القضيبين المدلوك فإنهما تتنافران. و بالعكس فإن الكريتين تتجاذبان إذا كانت كل منهما لامست قضيبا مدلوكا و مصنوعا من مادة مختلفة عن مادة الآخر.

نستنتج من هذه التجارب أن هذه المواد إكتسبت خاصية جديدة نسميها "**تكهرب**". هذه الخاصية تولّد تجاذبا أكثر شدة من التجاذب الكوني الحاصل بين كتلتين.



الشكل 1.1: تجربتان للتكهرب

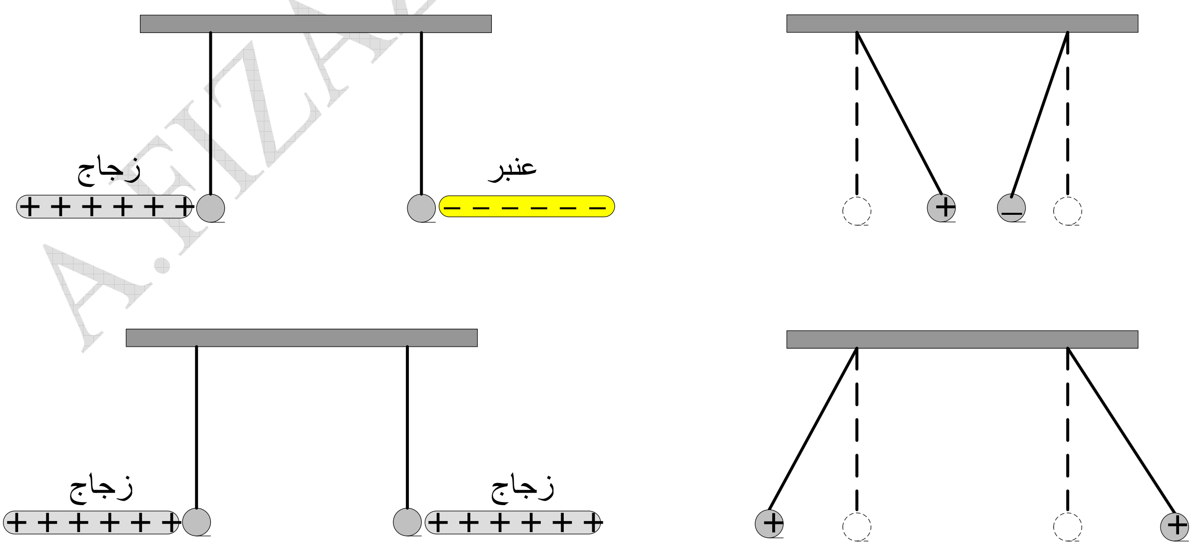
كل جسيمة تتميز أذن بخاصيتين مستقلتين و أساسيتين:

- كتلتها m
- شحنتها الكهربائية q.

تظهر تجارب بسيطة مثل التي وصفناها على وجود حالتين للتكهرب و الموافقة لصنفين من الشحن الكهربائية و الموصوفتين بـــ **شحنة موجبة** (+) و **شحنة سالبة** (-). يرجع هذا التصنيف إلى العالم بنجمين فرنكلان (1706-1790) (Benjamin Franklin) .

يتنافر جسمان يحملان شحنة كهربائية من نفس الإسم و يتجاذبان إذا كانا يحملان شحنتين كهربائيتين من اسمين مختلفين .

حسب الشكل 2.1 فإن كل كرية تتكهرب و تشحن بنفس الشحنة التي يحملها القضيب المدلوك الذي لامسها.



الشكل 2.1: التكهرب ، التجاذب و التنافر بين الشحنات

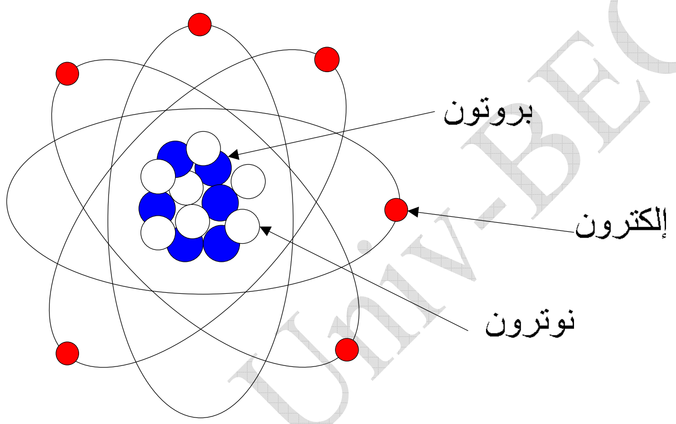
2/ الشحنة الأساسية و تكميم الشحنة الكهربائية:

(Charge électrique élémentaire et quantification de la charge électrique)

تجد الخصائص الكهربائية للمادة مبدأها على مستوى الذرة.

تتكون المادة كما هو معلوم من ذرات . كل ذرة تتكون من نواة(noyau) (تم اكتشافها سنة 1911 من قبل روثيرفورد(Ernest Rutherford of Nelson 1871-1937). تطوف حول النواة سحابة متشكلة من إلكترونات. هذه الإلكترونات تتنافر فيما بينها غير أنها تبقى متموقعة حول النواة. النواة متكونة من بروتونات (protons) تحمل شحنات موجبة و نوترونات (neutrons)عديمة الشحنة اكتشفت في 1932 من قبل شادفيك (James Chadwick 1891-1935).

يطلق على الجسيمات المشكلة للنواة اسم النوكليونات(nucléons) .



الشكل 3.1: شكل الذرة

الإلكترونات و البروتونات تحمل نفس الشحنة الكهربائية بالقيمة المطلقة و نرمز لها بـــ e. هذه الشحنة الكهربائية تسمى الشحنة الأساسية أو كم للشحنة الكهربائية:

$$\boxed{e = 1,602.10^{-19}\ [\mathrm{A.s = C}]} \qquad (1.1)$$

القوى الكهربائية المطبقة بين البروتونات المشحونة إيجابا و الإلكترونات المشحونة سلبا هي المسئولة عن تماسك الذرات و الجزيئات. الذرات الغير مشرّدة (أي التي لم تفقد و لم تكسب إلكترونات) شحنتها الإجمالية معدومة.

لا يمكن لشحنة كهربائية أن تأخذ أي قيمة عددية كانت. و بالفعل فإن كل شحنة كهربائية هي مضاعف طبيعي للشحنة الأساسية:

$$\boxed{q = \pm n.e\ \ [\mathrm{A.s = C}]\ ,\ n \in \mathrm{N}} \qquad (2.1)$$

و هذا يترجم المبدأ الأساسي لتكميم الشحنة الكهربائية.

في جملة مغلقة ، المجموع الجبري للشحنات الكهربائية الموجودة ثابت خلال الزمن.

هذا ما ينصّ عليه مبدأ انحفاظ الشحنة الكهربائية للجملة المغلقة.

في الحقيقة أثبتت الدراسة الدقيقة لفيزياء الطاقات العليا أن البروتونات و النوترونات تتكون من جسيمات أساسية أخرى و تدعى كوارك (quark). غير أنه ، و حتى يومنا هذا ، لم يتمكن العلماء من عزلها ، و هي تحمل جزءا من الشحنة الأساسية نكتفي بذكر نوعين: $(u = +\frac{2}{3}e\ ,\ d = -\frac{1}{3}e)$.

مثال1.1:أحسب عدد الشحنات الأساسية المشكلة لشحنة مقدارها 1 كولومب.

الجواب: $n = \frac{1}{1,60.10^{-19}}$ **و منه** $n = 625.10^{16}$ شحنة أساسية.

3/ النواقل و العوازل: (conducteurs et isolants)

تتكون أي مادة من عدد كبير من الشحنات الكهربائية ، غير أن هذه الشحنات تتكافأ و تنعدم (عدد الإلكترونات = عدد البروتونات). في درجة الحرارة العادية ، تكون الشحنة الكهربائية للمادة معدومة. حين تحصل عملية تكهرب هذا يعني حدوث انتقال شحنات من جسم إلى آخر.

هذه الشحنة التي تظهر على الجسم بالزيادة أو بالنقصان هي المسئولة عن الأفعال الكهربائية التي تظهر على هذا الجسم(مثل القضيب المدلوك).

في ذرة ، تطوف الإلكترونات حول النواة وفق مدارات متباينة. إلكترونات الطبقات الخارجية و القابلة للتحرّر يمكنها المشاركة في الناقلية الكهربائية.

إذا كانت الطبقة الأخيرة لذرة عنصر كيميائي قريبة من التشبع فإنها لن تفقد أي إلكترون ، و إنما تحاول اكتساب إلكترون أو أكثر حتى تتشبع. مثل هذا العنصر يكون عازلا. و بالعكس إذا كانت الطبقة الخارجية بعيدة عن التشبع ، فإن العنصر يفقد بسهولة إلكترونا أو أكثر. مثل هذا العنصر يكون ناقلا جيّدا.

و عليه فإن الناقل الجيد هو عنصر يحتوي على عدد كبير من الإلكترونات الحرة (أي الإلكترونات التي لها حرية الانتقال). و بالمقابل ، فإن العازل هو العنصر الذي يملك عددا قليلا من الإلكترونات الحرة. العازل المثالي هو الذي لا يتوفر على أي إلكترون حرّ.

بقي أن نشير أن في السوائل حاملات الشحنة المتنقلة هي الشّوارد(ions).

نقول عن جسم أنه ناقل مثالي إذا كان بإمكان حاملات الشحنة - بعد تكهرب الجسم- أن تنتقل بكل حرية في كل الحجم المحتل من قبل المادة . و يكون الجسم عازلا إذا بقيت حاملات الشحنة في نفس الموضع الذي ظهرت فيه.

4/ تفسير ظاهرة التكهرب (Explication du phénomène d'électrisation)

كما سبق و أن ذكرنا فإن ذرّات المواد تحتوي في حالتها الطبيعية على عدد متساو من الإلكترونات و البروتونات فتكون معتدلة كهربائيا (غير مشحونة) ، و لا تظهر أي تأثيرات كهربائية. أما إذا اختلّ هذا التوازن الطبيعي للشحنات– كأن يزداد عدد الإلكترونات أو ينقص لسبب من الأسباب–تصبح المادة مشحونة كهربائيا.

بصورة عامة ، تفسر كل ظواهر التكهرب بانتقال الإلكترونات مع إهمال تغير الكتلة الذي يرافق عملية الانتقال.

فمثلا، الزجاج المدلوك يفقد إلكترونات فيتكهرب إيجابا. أما البلاستيك المدلوك يكتسب إلكترونات فيتكهرب سلبا.

B/ قانون كولومب–كافنديش:(Loi de Coulomb-Cavendish)

وضع العالم الفرنسي شارل أوغيستان دي كولومب (1736–1806) قانونه سنة 1785 غير أن ، و حسب تاريخ العلوم ، فإن هذا القانون كان أول من اكتشفه هو الإنجليزي هنري كافنديش (1731–1810) و بقي مجهولا بسبب عدم نشره في حينه. و لذا ، و للأمانة العلمية ، يحق تسمية هذا القانون بقانون كافنديش– كولومب. غير أننا نشير إليه في كل ما يتبع بقانون كولومب. (يرى المؤلف أن اسم Coulomb يكتب **كولومب** ونطقه أقرب للأصل).

1/ الدراسة الكيفية: (Etude qualitative)

للحصول على قياس كيفي لقوة التجاذب أو التنافر الكهربائية بين جسمين مشحونين يمكن تحقيق التركيب المبين على الشكل (4.1) و الذي يمثل جسيمتين نقطيتين تحملان شحنتين q_1 و q_2 كتلتاهما على التوالي m_1 و m_2 متباعدتين بالمسافة r.

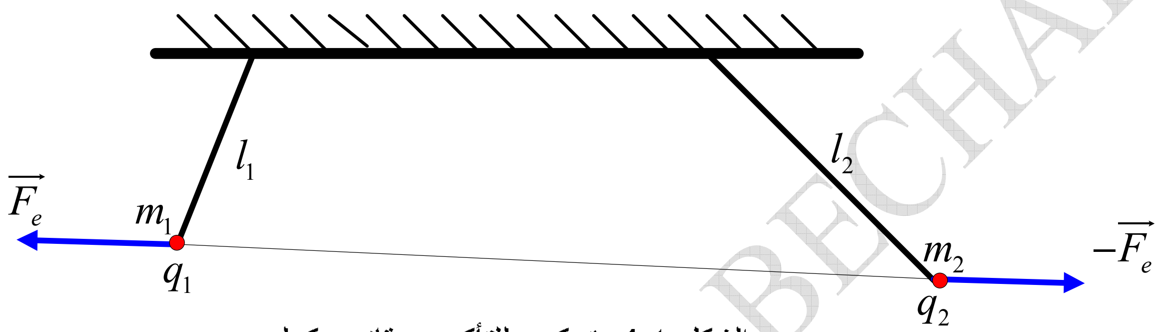
من خلال هذا التركيب نبين كيفيا الخصائص الأربعة التالية:

ا/ حامل القوة الكهربائية $\vec{F}_e$ هو المستقيم المار من الشحنتين ،

ب/ شدة القوة $\vec{F}_e$ تتناسب عكسا مع مربع المسافة r الفاصلة بين الشحنتين ،

ج/ القوة تتناسب طردا مع شحنة كل من الجسيمتين q_1 و q_2 ،

د/ من أجل مسافة معينة r بين الجسيمتين فإن شدة $\vec{F}_e$ مستقلة عن إشارة كل من الشحنتين.



الشكل 4.1: تركيب للتأكد من قانون كولومب

2/ الدراسة الكمية: (Etude quantitative)

عبارة قانون كولومب: القوة الكهروساكنة التي تؤثر بها الشحنة q_1 على الشحنة q_2 و العكس بالعكس; تعطى بالعلاقة التجريبية :

- **الشعاعية** :

$$\boxed{\vec{F}_e = K.\frac{q_1.q_2}{r^2}\vec{u} \qquad [\mathrm{N}]}$$ حيث $\vec{u}$ يمثل شعاع الوحدة $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$ (3.1)

- **السلمية** :

$$\boxed{F_e = K.\frac{|q_1.q_2|}{r^2} \qquad [\mathrm{N}]} \qquad (4.1)$$

في الجملة الدولية الثابت K يعطى بالعبارة:

$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ حيث ε_0 تمثل سماحية أو نفاذية الفراغ (permittivité du vide) .

القيمة التجريبية لـــ K هي:

$K = 8{,}9875.10^{+9}\left[\dfrac{\text{Nm}^2}{C^2}\right]$ نأخذ عمليا $K \simeq 9.10^{+9}\left[\text{Nm}^2\text{C}^{-2}\right]$

و منه فإن ε_0 تأخذ القيمة $$\varepsilon_0 = 8{,}8542.10^{-12}\left[\frac{C^2}{N.m^2}\right] \qquad (5.1)$$

توجد عبارة أخرى لحساب ε_0 و هي: $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi c^2}$ حيث c يمثل سرعة انتشار الضوء في الفراغ $c = 3.10^8 ms^{-1}$.

مناقشة:

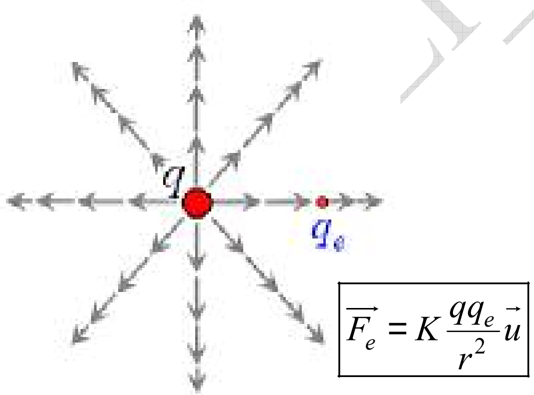
إذا كان :

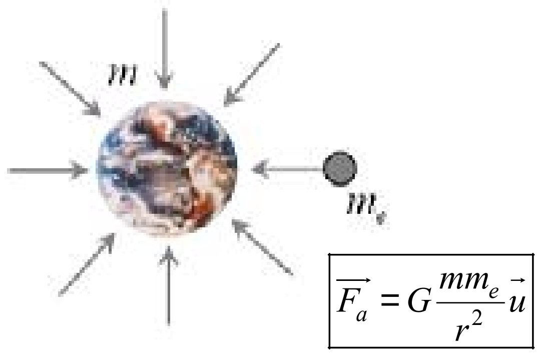
$q_1.q_2 \succ 0$: الشحنتان لهما نفس الإشارة $\Leftarrow$ تنافر ، $\vec{F}_e$ تباعد الشحنتين ،

$q_1.q_2 \prec 0$: الشحنتان مختلفتا الإشارة $\Leftarrow$ تجاذب ، $\vec{F}_e$ تقارب الشحنتين.

و حسب مبدإ الفعل و رد الفعل فإن $\vec{F}_{q_1} = -\vec{F}_{q_2}$.

تذكرنا عبارة قانون كولومب بعبارة قوة الجذب الكوني (أو العام) التي صادفناها في دروس الميكانيك. باستثناء القيمة العددية للثابت K ، فإن هذا القانون له بالضبط نفس الخصائص الشعاعية لقوة الجذب الكوني (قانون نيوتن). و لهذا السبب فليس من الغريب أن نجد تشابها بين القانونين.





الشكل 5.1 : مقارنة بين قوة الجذب الكوني و القوة الكولومبية

مثال 2.1: ما هي النسبة بين قوة الجذب الكوني و التنافر الكولومبي بين إلكترونين؟

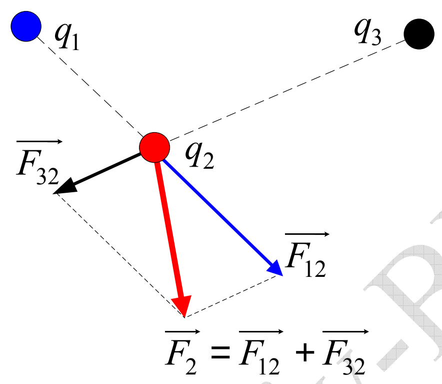
الجواب:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{K\dfrac{e^2}{r^2}}{G\dfrac{m_e^2}{r^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{F_e}{F_g} = \frac{K.e^2}{G.m_e^2}} \;;\; \boxed{\frac{F_e}{F_g} \approx 4.10^{42}}$$

مثال 3.1: ما هي قوة التنافر الكولومبي بين شحنتين من $1C$ متباعدتين بـــ $1km$؟

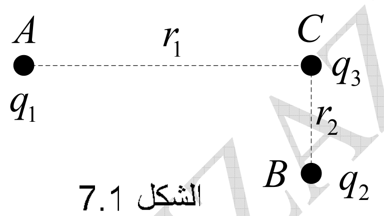
الجواب: $\boxed{F_e = 9.10^3 N}$; $F_e = 9.10^9 \dfrac{1}{(10^3)^2}$; $\boxed{F_e = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\dfrac{q^2}{r^2}}$

ملاحظة: في الحالة العامة إذا كان لدينا n شحنة كهربائية في الفراغ فإن مبدأ التراكب (Principe de superposition) يسمح بالجمع الشعاعي للقوى الكهروساكنة. هذا المبدأ لا يصلح إلا في حالة الشحنات الساكنة فقط !!



الشكل 6.1: مبدأ تراكب القوى

مثال 4.1: أحسب شدة المحصلة المؤثرة على الشحنة q_3 انطلاقا من الشكل (7.1).



الشكل 7.1

$$q_1 = -1,5mC \;;\; q_2 = 0,5mC \;;\; q_3 = 0,2mC$$
$$r_1 = AC = 1,2m \;;\; r_2 = BC = 0,5m$$

الجواب: ننظر إلى الشكل 8.1:

بما أن $q_1.q_3 \prec 0$ فإن $\vec{F}_{13} \prec 0$ و هي قوة تجاذب،

و بما أن $q_2.q_3 \succ 0$ فإن $\vec{F}_{23} \succ 0$ و هي قوة تنافر.

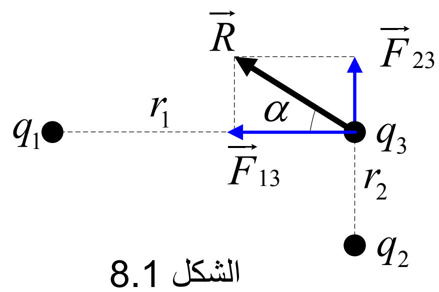
$$\vec{F}_{13} = -K\frac{q_1q_3}{r_1^2}\vec{u}_1 \;;\; F_{13} = 9.10^9\frac{1,5.10^{-3}\times 0,2.10^{-3}}{(1,2)^2} \Rightarrow F_{13} = 1,875.10^3 N$$

$$\vec{F}_{23} = K\frac{q_2q_3}{r_2^2}\vec{u}_2 \;;\; F_{23} = 9.10^9\frac{0,5.10^{-3}\times 0,2.10^{-3}}{(0,5)^2} \Rightarrow F_{23} = 3,6.10^3 N$$

$$R = \sqrt{F^2{}_{13} + F^2{}_{23}} \Rightarrow \boxed{R = 4,06.10^3 N}$$

أما الزاوية التي تصنعها المحصلة $\vec{R}$ مع المستقيم AC فتحسب كما يلي:

$$\tan\alpha=\frac{F_{23}}{F_{13}}\;;\;\tan\alpha=1{,}92\Rightarrow\boxed{\alpha=62.49°}$$



الشكل 8.1

C/ الحقل الكهروساكن: (Champ électrostatique)

كون شحنتين متجاورتين تتأثران بقوتي تجاذب أو تنافر ، يجرنا لاعتبار كل شحنة كهربائية تغيّر الخصائص الفيزيائية للمجال الفضائي المحيط بها. لوصف هذا التغيّر فإننا نقول أن كل شحنة كهربائية تولّد في المجال الفضائي من حولها **حقلا كهربائيا**.

1/ مفهوم الحقل الكهربائي: (Notion de champ électrique)

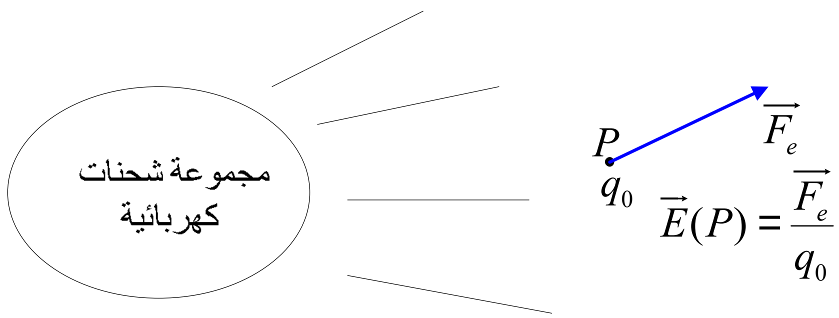
تعريف كيفي: نقول أنه يوجد حقل كهربائي في نقطة معينة من الفضاء إذا أثرت قوة $\vec{F}_e$ كهروساكنة على شحنة نقطية q_0 موضوعة في تلك النقطة.

تعريف كمي: نسمي الحقل الكهروساكن $\vec{E}$ ، النسبة بين القوة الكهروساكنة $\vec{F}_e$ و الشحنة الكهربائية q_0 **المتأثرة** بالقوة $\vec{F}_e$. الشكل 9.1

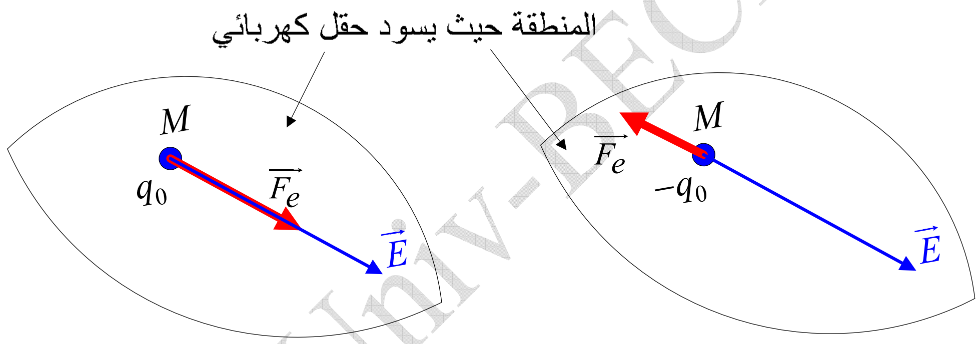
$$\boxed{\vec{E}=\frac{\vec{F}_e}{q_0}} \qquad (6.1)$$

في الجملة الدولية للوحدات نعبر عن الحقل الكهربائي بـالفولط على المتر Vm^{-1}.

بما أن $\vec{E}(M)=\dfrac{\vec{F}_e}{q_0}$ فإن $\vec{E}(M)$ و $\vec{F}_e$ لهما نفس الحامل. أما الاتجاه في هذه الحالة فيتعلق بإشارة q_0 أي بالشحنة المتأثرة بالقوة $\vec{F}_e$. الشكل10.1



الشكل 9.1 : الحقل الكهربائي في نقطة من الفضاء



الشكل 10.1 : الحقل الكهربائي الناتج عن شحنة

2/ الحقل الكهروساكن الناتج عن شحنة نقطية:

(Champ électrostatique crée par une charge ponctuelle)

تعريف: إذا وجدت جسيمة شحنتها q في النقطة O فإنها تولد في كل نقطة M من الفضاء المحيط بها حقلا شعاعيا يسمى الحقل الكهروساكن المعبر عنه بالعبارة:

$$\boxed{\vec{E}(M)=\frac{\vec{F}_e}{q_M}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\vec{u}} \qquad (7.1)$$

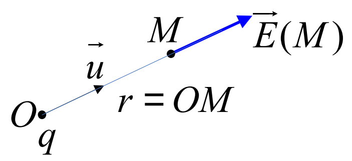
q: الشحنة **الموجودة** في النقطة O.

q_M: شحنة افتراضية موضوعة في النقطة M (ليس لها أي تأثير في حساب الحقل الكهربائي) و هي **المتأثرة** بالقوة $\vec{F}_e$.

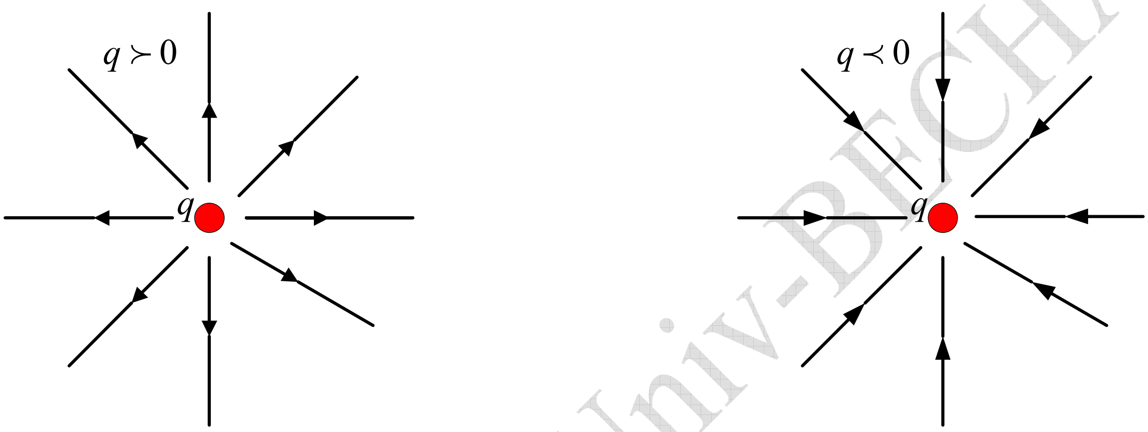
و باختصار فإن الحقل الكهربائي المتولد عن شحنة نقطية يكون:

- قطريا : حامله يمر من الشحنة،
- موجها نحو الخارج إذا كانت $q \succ 0$ ،
- موجها نحو الداخل إذا كانت $q \prec 0$ ،
- شدته

$$E(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{|q|}{r^2} \qquad (8.1)$$



الشكل 11.1: الحقل الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية



الشكل 12.1: إتجاه الحقل الكهربائي في حالة شحنة موجبة و في حالة شحنة سالبة

3/ الحقل الكهربائي الناتج عن عدة شحنات نقطية:

(Champ électrique crée par un ensemble de charges ponctuelles)

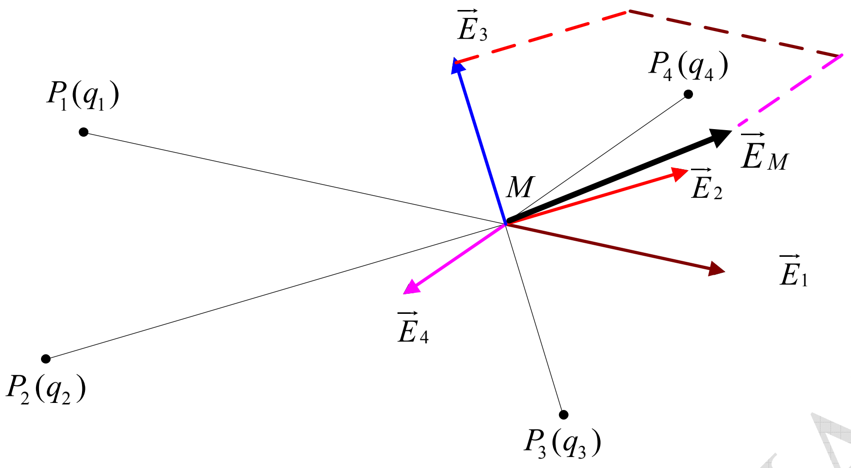
إذا كان لدينا الآن n جسيمة شحنها الكهربائية q_i ، الواقعة في النقاط P_i ، فما هو الحقل الكهروساكن المتولد عن هذه المجموعة من الشحن في نقطة M ؟

فكما هو الشأن بالنسبة للقوى ، فإن مبدأ التراكب صالح كذلك بالنسبة للحقل الكهربائي.

(و بما أنه مبدأ فلا يمكن البرهنة عليه و إنما يجد صحته في التجربة).

و منه فإن:

$$\boxed{\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i} \qquad (9.1)$$



الشكل 13.1 : تراكب الحقول الكهربائية في النقطة M

4/ الحقل الكهربائي الناتج عن توزيع مستمر للشحنة:

(Champ électrique crée par une distribution continue de charges)

في حالة عدد كبير من الشحنات ، يمكن لها أن تكون موزعة توزيعا مستمرا على استقامة واحدة ، على سطح مستو أو في حجم.

في مثل هذا التوزيع للشحنة فإن مبدأ التراكب يبقى صالحا. وعليه فيجب تجزئة هذا التوزيع إلى عدد لا متناهي من الأحجام أو السطوح أو القطع المستقيمة الصغيرة جدا و المشحونة ، ثم القيام بحساب العناصر الأساسية من الحقل $d\vec{E}$ المتولدة عن كل عنصر من تلك العناصر المشحونة ، ثم القيام بالجمع الشعاعي للحقول العنصرية $d\vec{E}$. و بما أننا نأخذ العناصر اللامتناهية الصغر فإننا نحول الجمع $(\sum)$ إلى تكامل ثلاثي $\left(\iiint\right)$ ، ثنائي $\left(\iint\right)$ أو عادي $\left(\int\right)$ و هذا حسب ما إذا كان لدينا حجم ، سطح أو طول.

و انطلاقا من ذلك نحصل على:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} \qquad (10.1)$$

حذار من الاعتقاد أن $E = \int dE$ لأن $d\vec{E}$ عبارة عن أشعة.

في حالة جملة محاور كارتيزية O_{xyz} ، يكون لدينا :

$$d\vec{E} = dE_x.\vec{i} + dE_y.\vec{j} + dE_z.\vec{k} \qquad (11.1)$$

وبعملية التكامل نصل إلى:

$$\vec{E} = \int\left(dE_x.\vec{i} + dE_y.\vec{j} + dE_z.\vec{k}\right) = E_x.\vec{i} + E_y.\vec{j} + E_z.\vec{k} \qquad (12.1)$$

و منه فأن :

$$E_x = \int dE_x \quad , \; E_y = \int dE_y \quad , \; E_z = \int dE_z \qquad (13.1)$$

و في كل الحالات فإن العبارة الواجب الاحتفاظ بها هي:

$$\boxed{\vec{E}(M) = \int d\vec{E}(M)} \qquad (14.1)$$

مع العلم أن:

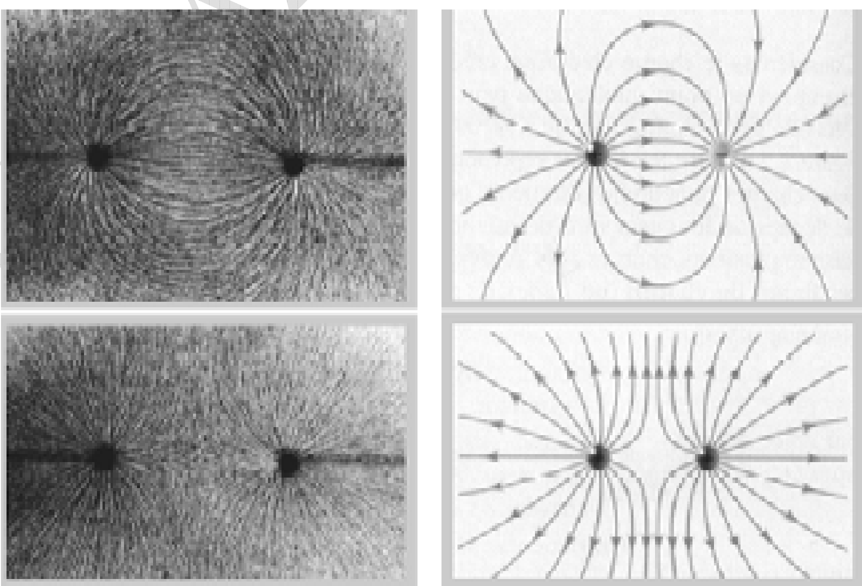
$$\boxed{d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{dq}{r^2}\vec{u}} \qquad (15.1)$$

لتوضيح هذا المبدإ نقترح دراسة ثلاث تطبيقات شائعة لاحقا.

5/ خطوط الحقل الكهربائي(أو الطيف الكهربائي): (Lignes ou spectre de champ)

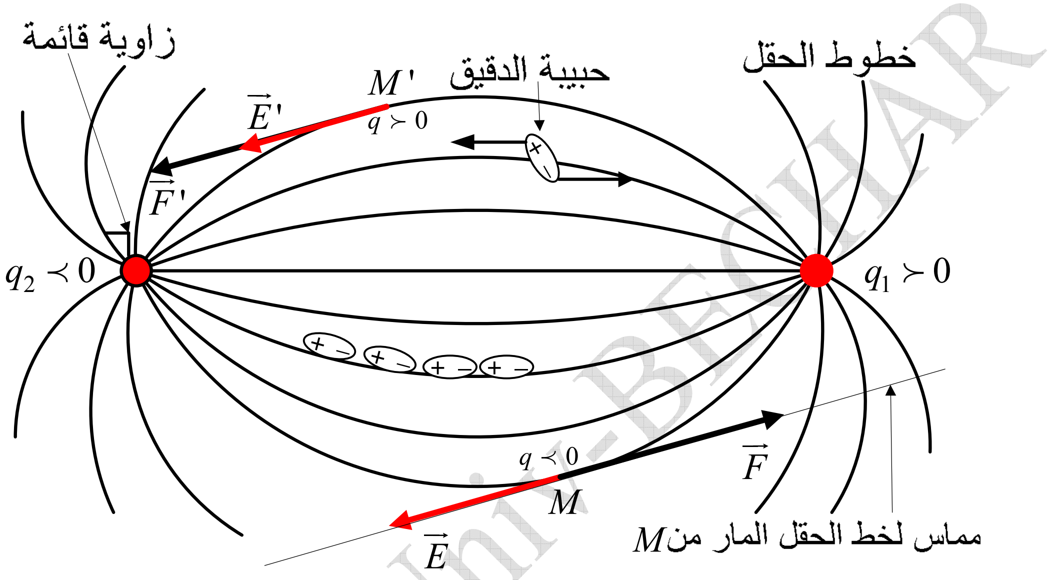
❖ **وصف تجربة:** بجوار مسريين مشحونين ، الواحد إيجابا $(q_1 \succ 0)$ و الآخر سلبا $(q_2 \prec 0)$ ، نذرّ حبيبات الدقيق الغليظ (أو بذور العشب الطبيعي) على سطح من الزيت.

❖ **ملاحظة:** نلاحظ أن حبيبات الدقيق (أو بذور العشب الطبيعي) ترسم منحنيات نطلق عليها اسم خطوط الحقل الكهربائي. الشكل (14.1).



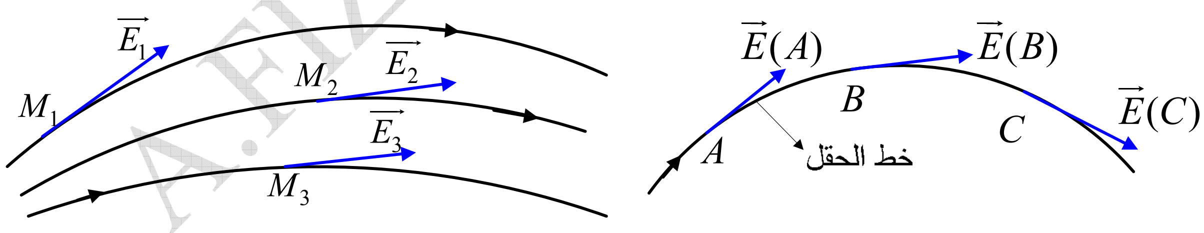
الشكل 14.1 : بذور العشب الطبيعي على سطح من الزيت،صورة و تمثيلا

❖ تفسير: تحت تأثير الحقل الناتج عن الشحنتين q_1 و q_2 فإن حبيبات الدقيق تستقطب. و هكذا تصبح كل حبيبة عبارة عن ثنائي قطب كهربائي بحيث تخضع الشحنات لقوة كهربائية مطبقة من قبل q_1 و q_2. هذه القوى لها فعل توجيه كل حبيبة موازاة للقوى الكهربائية. الشكل (15.1).



الشكل 15.1: خطوط الحقل التي ترسمها حبيبات الدقيق

تعريف:خطوط الحقل الكهربائي هي خطوط موجهة و مماسية في كل نقطة لشعاع الحقل $\vec{E}$. و هي خطوط تمر من الشحنة q. (الشكل 16.1)

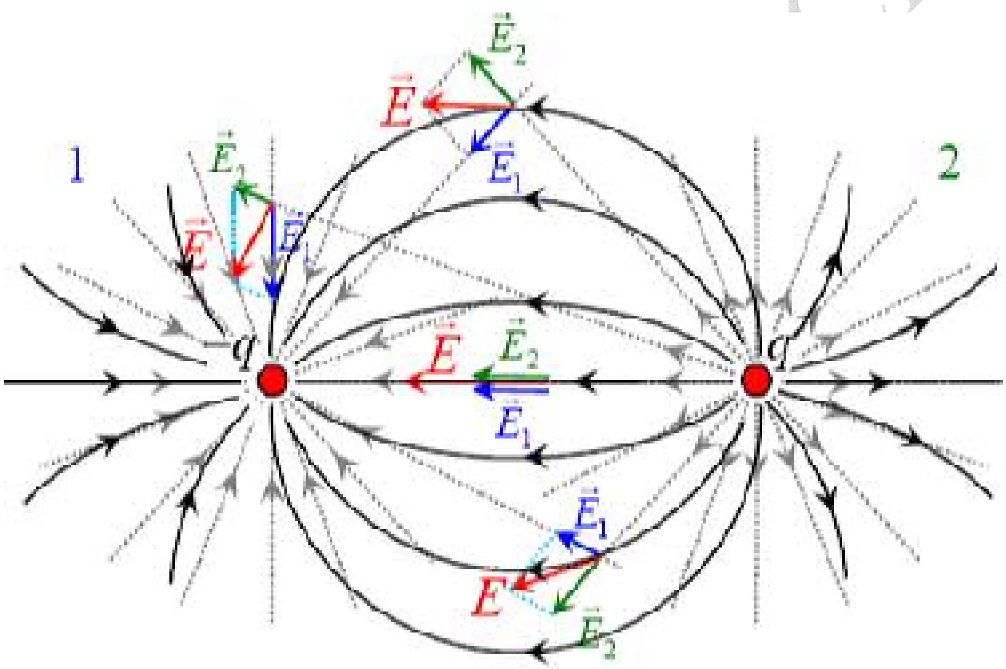


الشكل 16.1: خطوط الحقل الكهربائي

في حالة شحنة نقطية ، فإن خطوط الحقل هي نصف مستقيمات تتقاطع في النقطة حيث تتمركز الشحنة. في حالة شحنة موجبة ، الحقل يكون موجها نحو الخارج و نقول أنه مغادر و هو الأمر نفسه بالنسبة لخطوط الحقل. و العكس صحيح بالنسبة للشحنة السالبة و نقول أن الحقل يصل أو يرد. الشكل(17.1)

الشكل 17.1: خطوط الحقل الكهربائي لشحنة موجبة و لشحنة سالبة منفردتين

يمثل الشكل (18.1) خطوط الحقل حول شحنتين نقطيتين متجاورتين و متساويتين و مختلفتي الإشارة.



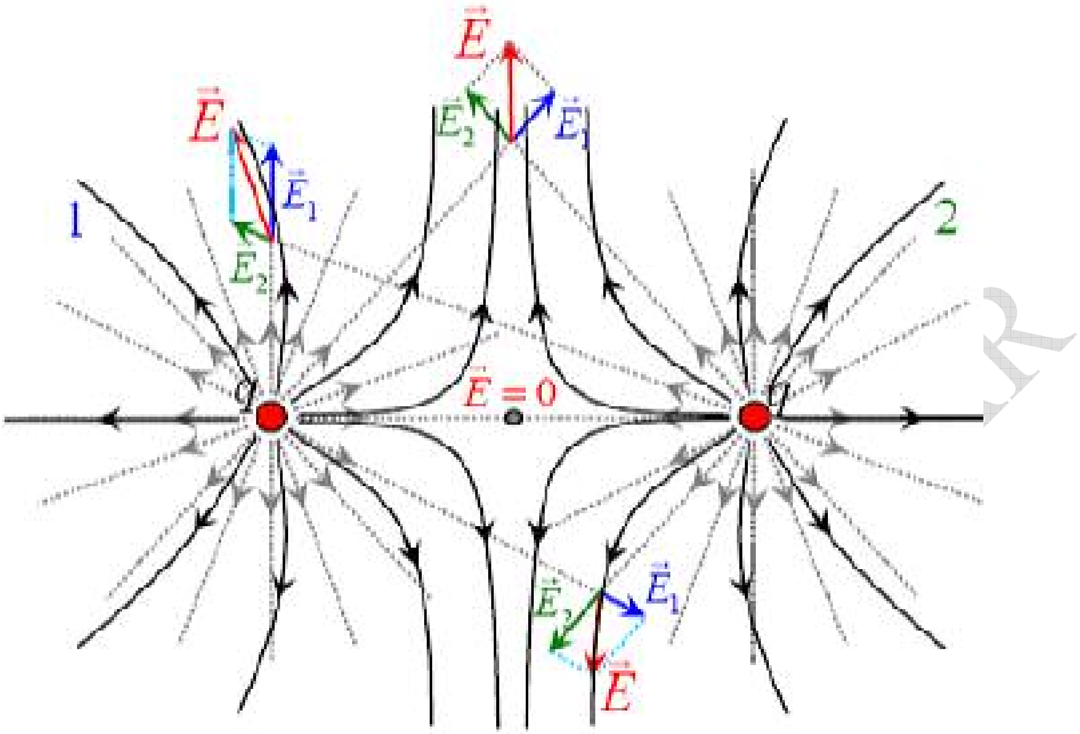
الشكل 18.1:خطوط الحقل لشحنتين متساويتين و متعاكستي الإشارة

كما يمثل الشكل(19.1) خطوط الحقل حول شحنتين نقطيتين متجاورتين و متساويتين و تحملان نفس الشحنة.

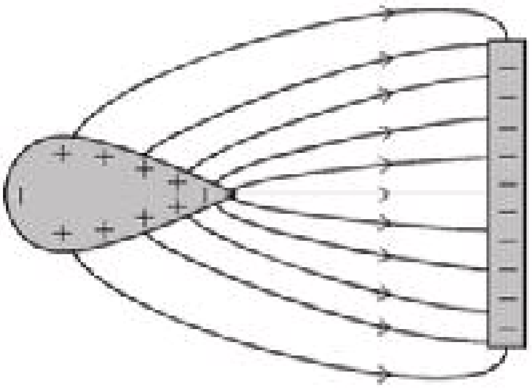
و يمثل الشكل (20.1) خطوط الحقل المنتظم (صفيحتان متوازيتان متقاربتان ومشحونتان الواحدة إيجابا و الأخرى سلبا، و بشحنتين متساويتين بالقيمة المطلقة).

باستثناء حافتي المكثفة ، فإن خطوط الحقل داخل المكثفة متوازية، متعامدة مع كل من الصفيحتين، و متساوية الكثافة.

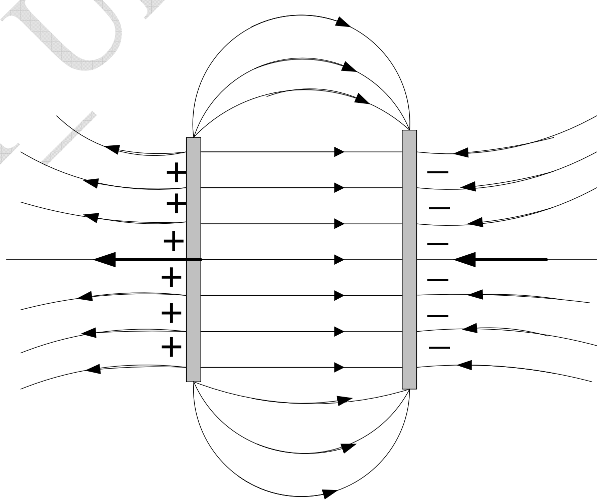
كما يمثل الشكل (21.1) خطوط الحقل لناقل حاد.



الشكل 19.1 : خطوط الحقل لشحنتين متساويتين



الشكل 21.1 : الحقل الكهربائي لناقل حاد



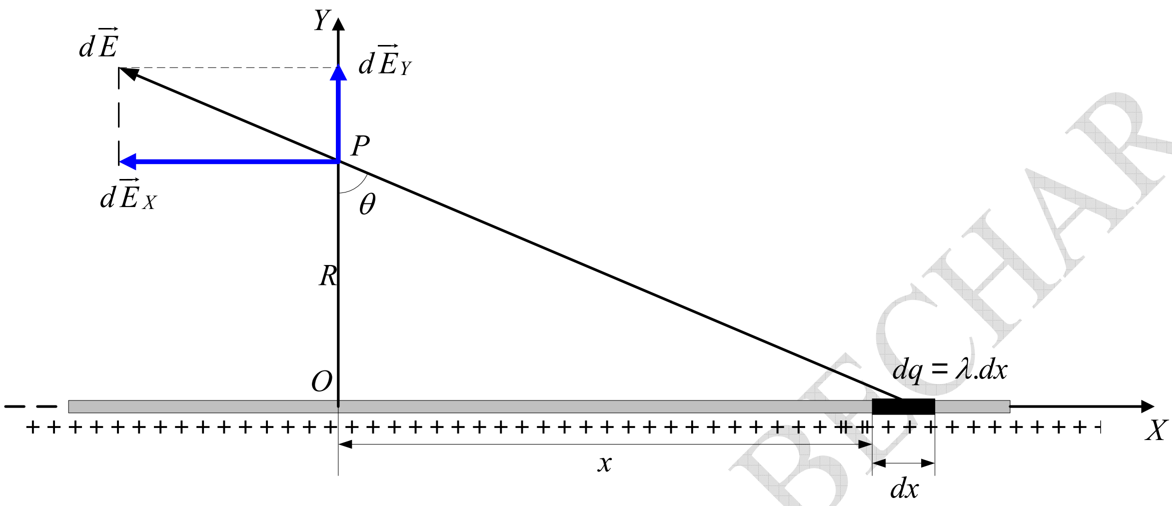
الشكل 20.1: خطوط الحقل الكهربائي المنتظم

6/ تطبيقات:

ا/ التطبيق الأول: الحقل الكهروساكن الناتج عن سلك رقيق لامتناهي الطول يحمل شحنة موجبة طولية كثافتها λ ثابتة.

<u>المطلوب</u>: حساب الحقل الكهربائي الساكن $\vec{E}$ المتولد في النقطة P الواقعة على محور السلك عن كامل الشحنة التي يحملها السلك.(الشكل22.1).

<u>الحل</u>:العنصر الصغير الواجب أخذه هو قطعة مستقيمة طولها dx تحمل الشحنة العنصرية : $dq = \lambda.dx$ ،



الشكل 22.1: الحقل الكهروساكن في النقطة P الناتج عن السلك المشحون

الحقل العنصري $d\vec{E}$ المتولد عن الشحنة dq يقع على امتداد القطعة المستقيمة و التي طولها r الواصلة بين P و dq.

بتطبيق العلاقة (14.1) نصل إلى:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{\lambda.dx}{r^2}$$

مع العلم أن:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$$

كما أن:

$$E_x = \int dE_x = \int dE.\sin\theta$$
$$E_y = \int dE_y = \int dE.\cos\theta$$

أي:

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dx}{r^2}.\sin\theta$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dx}{r^2}.\cos\theta$$

نلاحظ أن r,θ,x متغيرات، بينما R ثابت. نستنتج هندسيا أن:

$$x = R.tg\theta \Rightarrow dx = R.d\theta.\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$r = \frac{R}{\cos\theta}$$

تبعا لهذه النتائج نحصل على:

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dx}{r^2}.\sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\frac{(R/\cos^2\theta).d\theta}{R^2/\cos^2\theta}.\sin\theta$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\frac{1}{R}.\sin\theta.d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{R}.[-\cos\theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} \Rightarrow \boxed{E_x = 0}$$

هذه النتيجة $(\vec{E_x} = \vec{0})$ كانت متوقّعة بسبب التناظر في المسألة.

أما المركبة العمودية فتحسب بنفس الطريقة حيث:

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dx}{r^2}.\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\frac{(R/\cos^2\theta).d\theta}{R^2/\cos^2\theta}.\cos\theta$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\frac{1}{R}.\cos\theta.d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{R}.[\sin\theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} \Rightarrow \boxed{E_y = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}.\frac{\lambda}{R}}$$

أي أن في النهاية:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{E_y} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}.\frac{\lambda}{R}\vec{j}}$$

نفس الطريقة إذا كان الأمر يتعلق بحلقة رقيقة. يمكن الاستعانة بحل التطبيق الثاني.

ب/ التطبيق الثاني:الحقل الكهروساكن الناتج عن قرص رقيق يحمل شحنة موجبة سطحية كثافتها ثابتة σ.

قرص مركزه O و نصف قطره R مشحون بانتظام بكثافة سطحية $\sigma \succ 0$. ليكن OX محور عمودي في النقطة Oعلى القرص.

أحسب بدلالة x الحقل $\vec{E}$ في كل نقطة من المحور $X'X$.(علينا دراسة $x \succ 0 \; ; \; x \prec 0 \; ; \; x = 0$).

الحل: لتكن P نقطة من المحور OX حيث $OP = x$. لنحسب الحقل الكهربائي الناتج عن الشحنة السطحية في هذه النقطة. (الشكل23.1)

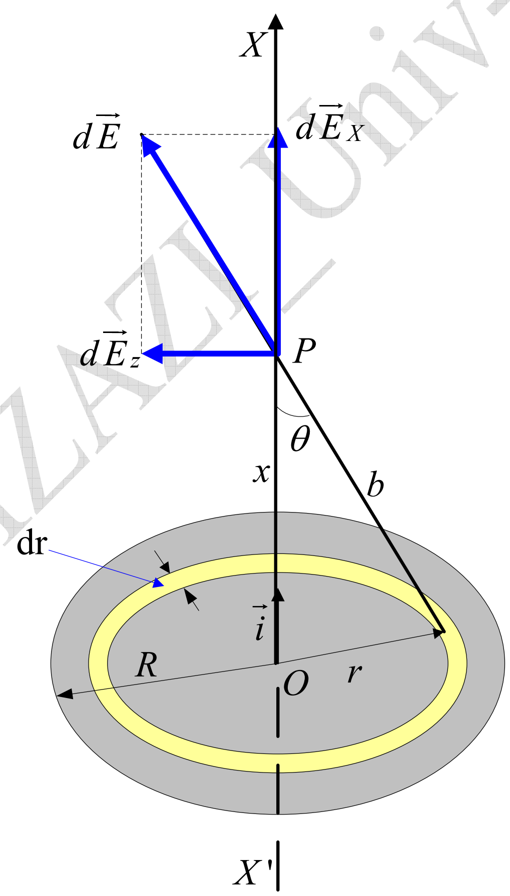
العنصر الصغير الواجب أخذه بعين الاعتبار هو إكليل (حلقة) عرضه dr و سطحه dS يحمل الشحنة العنصرية: $dq = \sigma.dS = \sigma.2\pi r.dr$

بتطبيق العلاقة (14.1) يمكن حساب الحقل العنصري $d\vec{E}$ المتولد عن الشحنة dq:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{b^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{\sigma.2\pi rdr}{b^2}$$

مع العلم أن:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_z$$



الشكل 23.1: الحقل الكهروساكن في النقطة P والناتج عن القرص المشحون

للحصول على الحقل الناتج عن كل القرص نكامل من 0 إلى R.

نرى أن:

$$E_x = \int dE_x = \int dE.\cos\theta$$
$$E_z = \int dE_z = \int dE.\sin\theta$$

نظرا لتناظر المسألة فإن :

$$\boxed{\vec{E_z} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E_x}}$$

نترك للطالب فرصة التحقق بالحسابات من أن $\vec{E_z} = \vec{0}$

$$E_x = \frac{\sigma.2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{r.dr}{b^2}.\cos\theta$$

نلاحظ من خلال الشكل أن:

$$b^2 = x^2 + r^2$$
$$\cos\theta = \frac{x}{b} \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

تبعا لهذه النتائج نحصل على:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int\frac{x.r.dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$
$$E = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r.dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \Rightarrow E = \frac{\sigma.x}{2\varepsilon_0}.\left[\frac{-1}{(x^2 + r^2)^{1/2}}\right]_0^R$$

في النهاية:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.\left[\frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{(x^2 + R^2)}}\right]}$$

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_z \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{E_x} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right]\vec{i}} \rightarrow (1)$$

مناقشة:

$$x \succ 0 \;\Rightarrow\; \vec{\mathrm{E}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right)\vec{i} \rightarrow (2)$$

$\vec{E}$ موجه وفق $\vec{i}$ و يبتعد عن الشحنات الموجبة.

$$x \prec 0 \;\Rightarrow\; \vec{\mathrm{E}} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right)\vec{i} \rightarrow (3)$$

$\vec{E}$ عاكس $\vec{i}$ و يبتعد من الشحنات الموجبة.

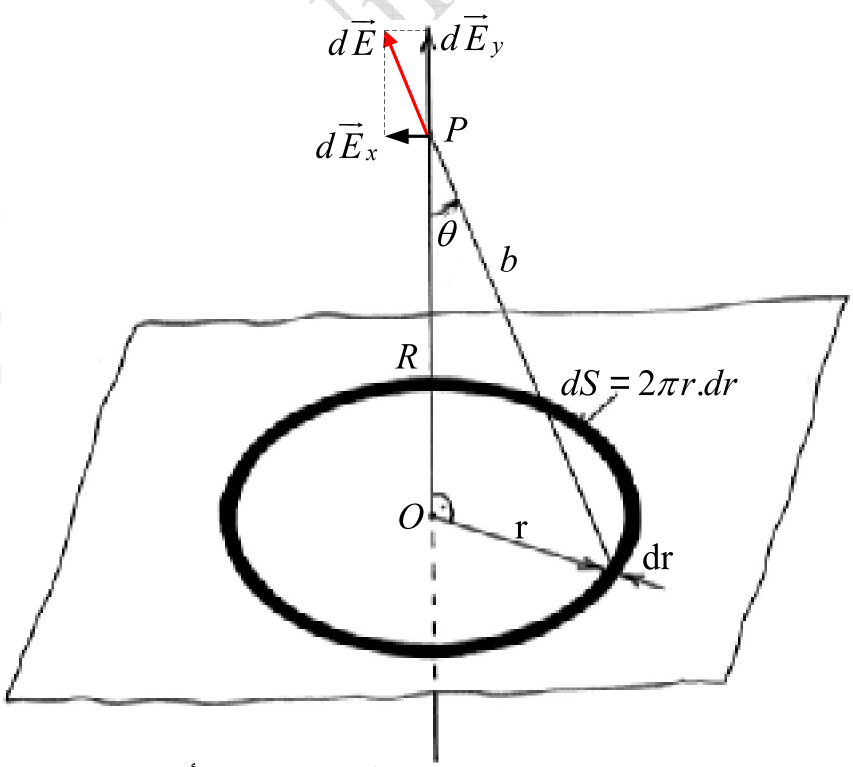
للحصول على عبارة $\vec{E}$ من أجل $x = 0$ لا بد من القيام من دراسة نهاية المعادلة (2) أو المعادلة (3) لما يؤول x إلى الصفر. نجد:

$$x = 0 \;\Rightarrow\; \vec{\mathrm{E}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

ج/ التطبيق الثالث: الحقل الكهروساكن الناتج عن مستوى لا متناهي يحمل شحنة موجبة سطحية كثافتها ثابتة σ.

هنا السطح العنصري هو عبارة عن حلقة نصف قطرها r و سمكها dr و مركزها O. (الشكل 24.1)

هذه الحلقة تولد حقلا كهربائيا شاقوليا في النقطة P (المركبات الأفقية تتعدم مثنى مثنى نتيجة التناظر)، $\vec{E_x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E_y}$ و على الطالب أن يتحقق من هذه النتيجة.



الشكل 24.1: حقل سطح لا متناهي الأبعاد

نلاحظ من الشكل أن: $dE_y = dE.\cos\theta$

الحلقة تحمل الشحنة الكلية: $dq = dS.\sigma = 2\pi r.dr.\sigma$

و منه فإن الحقل العنصري المتولد في النقطة P عن الحلقة هو:

$$dE = dE_y = K.\frac{dq}{b^2}.\cos\theta = K.\frac{2\pi r.dr.\sigma}{\left(R^2 + r^2\right)}.\frac{R}{b}$$

و بالتالي فإن الحقل الكهربائي الكلي الناتج عن كل السطح هو:

$$E = \int_0^\infty K.\frac{2\pi r.dr.\sigma.R}{\left(R^2 + r^2\right)^{3/2}} = K.2\pi\sigma.R\int_0^\infty \frac{r.dr}{\left(R^2 + r^2\right)^{3/2}} \Rightarrow E = K.2\pi\sigma.R\left[-\frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2}}\right]_0^\infty$$

و في الأخير: $\boxed{E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$

و هذا معناه أن الحقل الكهربائي ثابت على طول المحور Oy. فحيث ما وجدت النقطة P على المحور Oy فإن الحقل الكهربائي هو نفسه.

D/ الكمون الكهربائي: (Potentiel électrique)

1/ تجوّل حقل أشعة: (Circulation d'un champ de vecteurs)

نفترض جسيمة ما تنتقل من A إلى B بإتباع المسار المنحني L داخل حقل للأشعة (قد يكون حقل الجاذبية أو حقلا كهربائيا أو حقلا مغناطيسيا...) و الذي نرمز إليه بــ $\vec{V}$.

تعريف: نسمي **التكامل المنحني لحقل الأشعة $\vec{V}$** من النقطة A إلى النقطة B على طول المسار L العبارة:

$$\boxed{\int_L \vec{V}.d\vec{l} = \int_A^B \vec{V}.d\vec{l}}$$ حيث $d\vec{l}$ هو شعاع الانتقال العنصري. (16.1)

ملاحظة: في الحالة العامة التكامل المنحني يتعلق بالمسلك.

تعريف: إذا كان المسلك أو المسار عبارة عن منحني مغلق فإن التكامل المنحني يسمى **تجول حقل الأشعة** و يكتب على الشكل:

(17.1) $\boxed{\text{Circulation de } \vec{V} = \oint \vec{V}.d\vec{l} = \vec{V} \text{ تجـــوّل}}$

لنطبق في ما يلي هذين التعريفين على الحقل الكهربائي $\vec{E}$.

2/ تجوّل الحقل الكهربائي: (Circulation du champ électrique)

نعتبر منطقة من الفضاء يسود فيها حقل كهربائي. كل جسيمة q_0 تقع في هذا الحقل تخضع لقوة كهربائية:

(18.1) $\vec{F} = q_0.\vec{E}$ ($\vec{F}$ لها نفس اتجاه $\vec{E}$ إذا كانت $q_0 \succ 0$).

إذا لم تمسك هذه الشحنة فإنها ستنتقل في اتجاه $\vec{F}$. نفترض مجربا يريد نقل الشحنة q_0 وفق مسلك ما ببطء شديد. من أجل ذلك ، يجب أولا تطبيق قوة معاكسة مباشرة للقوة $\vec{F}$ لإبطال مفعولها ، ثم تطبيق قوة إضافية في اتجاه الانتقال المراد. في أقصى الحدود و للحصول على انتقال لا متناهي البطء، نعتبر أنه يكفي تطبيق قوة على q_0 لتعوض القوة الكهربائية مساوية لها. هذا يعني تطبيق القوة $\vec{F}_d = -q_0.\vec{E}$.

من أجل انتقال عنصري $d\vec{l}$ فإن العمل العنصري المناسب هو:

$$dW = \vec{F}_d.d\vec{l} \Rightarrow dW = -q_0\vec{E}.d\vec{l}$$

إذا أردنا نقل الشحنة q_0 وفق مسلك كيفي AB ، يجب بذل عمل W_{AB}:

(19.1) $$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_d.d\vec{l} \;\Rightarrow\; W_{AB} = -\int_A^B q_0.\vec{E}.d\vec{l} \;\Rightarrow\; W_{AB} = -q_0\int_A^B \vec{E}.d\vec{l}$$

تعريف: التكامل $\int_A^B \vec{E}.d\vec{l}$ يسمى **تجول الحقل الكهربائي** على طول المنحنى من A إلى B.

تنبيه: هذا التجول **محافظ** أي أنه لا يتعلق بالمسلك المتبع. كما أن تجول الحقل الكهربائي وفق منحى مغلق (الرجوع إلى نقطة الانطلاق) معدوم كما سنرى.

حالة خاصة: إذا كانت $|q_0| = 1C$ ، في هذه الحالة $W = \int_A^B \vec{E}.d\vec{l}$ و يسمى العمل المنجز في هذه الحالة **القوة المحركة الكهربائية** (Force électromotrice). و هكذا:

تعريف: القوة المحركة الكهربائية تساوي العمل المنجز لنقل شحنة الوحدة $(q = 1C)$ على طول منحنى.

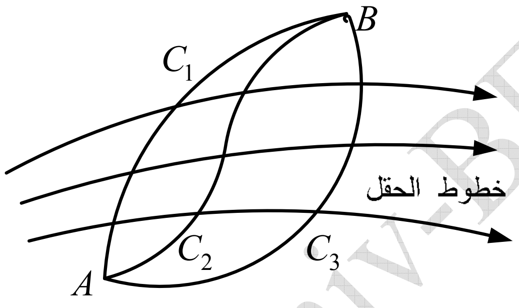
توضيح: إن كلمة "قوة" هنا مغالطة. لأننا نتكلم عن طاقة ، فالعادة هي التي أورثتنا كلمة "قوة" عوض طاقة.

3/ الكمون الكهربائي: (Potentiel électrique)

في المثال المجسد على الشكل25.1 يكون لدينا:

$$\underset{C_1\ \text{المسلك}}{\int_A^B \vec{E}.d\vec{l}} = \underset{C_2\ \text{المسلك}}{\int_A^B \vec{E}.d\vec{l}} = \underset{C_3\ \text{المسلك}}{\int_A^B \vec{E}.d\vec{l}} \qquad (20.1)$$

هذا يعني أن العمل اللازم لنقل الشحنة من النقطة A إلى النقطة B مستقل عن المسلك المتبع. عندما لا يتعلق تجول الحقل على طول منحنى بالمسلك، و لكن يتعلق فقط بنقطة الانطلاق و نقطة الوصول ، نقول عن هذا الحقل أنه **محافظ**. و هذا هو حال الحقل الكهروساكن.



الشكل 25.1 : العمل لا يتعلق بمسار الشحنة

في العبارة (19.1) نضع :

$$\boxed{dV = -\vec{E}.d\vec{l}} \qquad (21.1)$$

V هو مقدار سلمي يسمى **الكمون الكهربائي**. نقول في هذه الحالة أن الحقل الكهربائي $\vec{E}$ **مشتق من الكمون** V.

الطاقة اللازمة لنقل الشحنة q_0 بين النقطتين B و A هي إذن:

$$W_{AB} = -q_0\int_A^B \vec{E}.d\vec{l} = q_0\int_A^B dV = q_0\left|V\right|_A^B = \left(V_B - V_A\right).q_0 \qquad (22.1)$$

المقدار $V_B - V_A$ يسمى **التوتر أو فرق الكمون** بين النقطتين B و A و نرمز له بـــ U_{BA} حيث:

$$U_{BA} = V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0} \qquad (23.1)$$

و هذا ما يؤدي بنا إلى تعريف فرق الكمون:

تعريف: فرق الكمون $\left(U_{BA}=V_B-V_A\right)$ يساوي العمل الواجب تقديمه لشحنة الواحدة (قيمتها تساوي الواحدة) لنقلها من النقطة A إلى النقطة B.

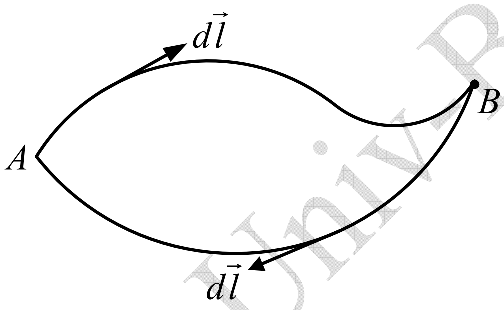
4/ تجوّل الحقل الكهربائي على طول منحنى مغلق:

إذا كان المنحنى المتبع من قبل الشحنة مغلقا، فكيف نبرهن أن تجول $\vec{E}$ معدوم؟

يكون الجواب سهلا إذا حددنا على هذا المنحنى L المغلق نقطتين A و B. الشكل 26.1.

$$\oint_L \vec{E}.d\vec{l}=\int_A^B \vec{E}.d\vec{l}+\int_B^A \vec{E}.d\vec{l} \qquad (24.1)$$

$$\oint_L \vec{E}.d\vec{l}=\left(V_A-V_B\right)+\left(V_B-V_A\right)=0 \qquad (25.1)$$



الشكل 26.1 : تجول $\vec{E}$ وفق منحنى مغلق

الخلاصة: في الكهرباء الساكنة ، يكون تجول الحقل الكهربائي على طول كل منحنى مغلق معدوما.

$$\boxed{\oint_L \vec{E}.d\vec{l}=0} \qquad (26.1)$$

هذه النتيجة صحيحة دائما كلما كان **الحقل مشتق من كمون.**

5/ الكمون الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية q:

عرفنا أن $\vec{E}$ الناتج عن q يكون قطريا (أي يمر من الشحنة q)،

$$E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q}{r^2} \qquad (27.1)$$

لحساب V نحسب تجول $\vec{E}$ على طول نصف قطر ما:

لدينا

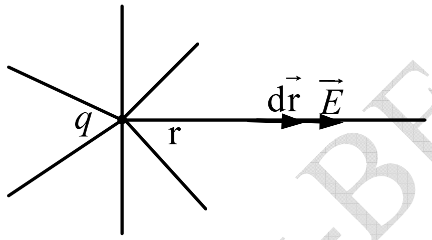
$$d\vec{l} \parallel d\vec{r}$$

و بما أن

$$d\vec{r} \parallel \vec{E}$$

فإن

$$\left.\begin{array}{l} dV = -\left(\vec{E}.d\vec{r}\right) \\ dV = -E.dr \end{array}\right| \Rightarrow dV = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{r^2}dr \qquad (28.1)$$



الشكل 27.1 : تجول الحقل وفق القطر

ومنه

$$V(r) = \int dV = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{r^2}dr \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{r} + C^{te}} \qquad (29.1)$$

بافتراض $V = 0$ لما $r = \infty$ فإن $C^{te}=0$

في النهاية نصل إلى:

$$\boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{r}} \qquad (30.1)$$

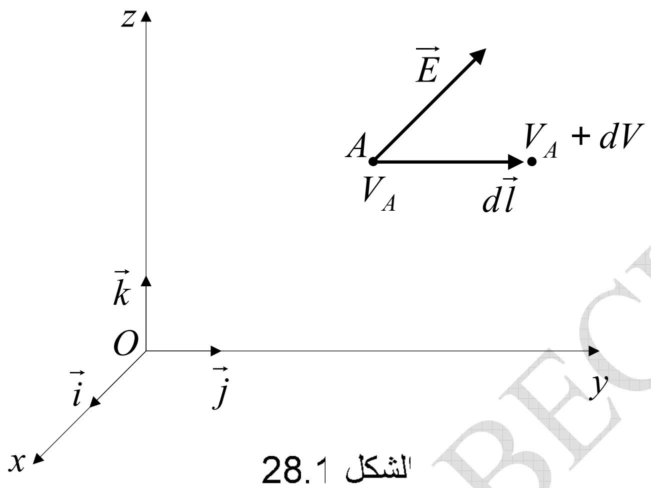
يكون الكمون ثابتا على كرات نصف قطرها r و مركزها الشحنة q. نقول أن هذه الكرات تشكل سطوح متساوية الكمون.(surfaces équipotentielles)

نبرهن أن فرق الكمون بين كرتين نصفي قطريهما r_1 و r_2 يعطى بالعبارة:

$$\boxed{V_1 - V_2 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]} \qquad (31.1)$$

6/ حساب $\vec{E}$ من V:

رأينا أن $dV = -\vec{E}.d\vec{l}$ ، و باعتبار معلم كارتيزي O_{xyz} ، و بافتراض أن الكمون V و الحقل $\vec{E}$ معروفان في النقطة A من الفضاء، يمكن حساب الكمون $V_A + dV$ في كل نقطة موصولة إلى A بالشعاع العنصري $d\vec{l}$. الشكل28.1.



الشكل 28.1

حالة خاصة: نفترض أننا نبتعد عن A في جهة x (و تبقى y و z ثابتتان). و عليه فإن $d\vec{l} = \vec{i}dx$ و منه $dV = -\left(\vec{E}.\vec{i}\right).dx$ أي:

$$\boxed{dV = -E_x.dx} \qquad (32.1)$$

نتوصل في هذه الحالة الخاصة إلى أن:

$E_x = -\dfrac{dV}{dx}$ حيث dV هو تغير V عندما y و z تكونان ثابتتين و أن x وحدها تتغير.

هذا الشرط في الإحداثيات يتطابق مع مفهوم **الاشتقاق الجزئي**. و عليه يمكن كتابة:

$$\boxed{E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}} \qquad (33.1)$$

بتكرار نفس التحليل من أجل y و z نجد:

$$\boxed{E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}} \qquad (34.1)$$

$$\boxed{E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}} \qquad (35.1)$$

بما أننا في المعلم O_{xyz} فإن:

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y + \vec{E}_z \Rightarrow \vec{E} = E_x.\vec{i} + E_y.\vec{j} + E_z.\vec{k}$$

و عليه:

$$\vec{E}=\left[-\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}-\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right]\Rightarrow\vec{E}=-\left[\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right] \qquad (36.1)$$

نتعرف في هذه العبارة على **مؤثر التدرج** و بالتالي فإن:

$$\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V=-\left[\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right] \qquad (37.1)$$

$$\boxed{\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V} \qquad (38.1)$$

نفهم جيدا هنا العبارة "**الحقل الكهربائي** $\vec{E}$ **مشتق من الكمون** V" .

عبارة $\vec{E}$ بالإحداثيات الأسطوانية هي:

$$\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V=-\left[\frac{\partial V}{\partial \rho}\overrightarrow{u_\rho}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta}+\frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{u_z}\right] \qquad (39.1)$$

أما بالإحداثيات الكروية فإن $\vec{E}$ يعطى بالعبارة:

$$\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V=-\left[\frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{u_r}+\frac{1}{r}.\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}.\frac{\partial V}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}\right] \qquad (40.1)$$

مثال 5.1: أستنتج عبارة شعاع الحقل الكهربائي من عبارة الكمون الكهربائي التالية: $V(x,y,z)=3x^2y+z^2$.

أحسب شدة $\vec{E}$ في النقطة $A(1,2,-1)$.

الجواب: يكفي اشتقاق $V(x,y,z)$ باستعمال المعادلة(37.1) لنجد:

$$\boxed{\vec{E}=-\left[6xy\vec{i}+3x^2\vec{j}+2z\vec{k}\right]}$$

أما الشدة في النقطة $A(1,2,-1)$ فهي:

$$\vec{E}=-12\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}\Rightarrow E=\sqrt{12^2+3^2+2^2}$$

$$E=\sqrt{157} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E \approx 12{,}53 V/m}$$

7/ الكمون الكهربائي الناتج عن عدة شحن نقطية متفرقة:

بما أن V مقدار سلمي فإن الكمون $V(M)$ في النقطة M الناتج عن عدة شحن يعطى بالعبارة السلمية:

$$\boxed{V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}} \qquad (41.1)$$

حيث r_i هي المسافة بين q_i و النقطة M علما أن q_i يمكن أن تكون موجبة أو سالبة و لذا لابد من أخذها بإشارتها(+ أو −).

8/ الكمون الكهربائي الناتج عن توزيع مستمر للشحنة:

في مثل هذه الحالة يكفي القيام بعملية تكاملية بعد تعيين شحنة عنصرية مناسبة dq ، مثلما قمنا به في حالة الحقل الكهربائي:

$$\boxed{V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r}} \qquad (42.1)$$

نصيحة: في الحالة العامة ، يستحسن حساب الكمون الكهربائي أولا ثم استنتاج شعاع الحقل الكهربائي بعملية اشتقاق.

مثال 6.1: تحمل حلقة ، مركزها O و نصف قطرها R ، شحنة q موزعة بانتظام بكثافة طولية $\lambda \succ 0$.

1/ أحسب الكمون الكهربائي الناتج في النقطة M من المحور Oy و الواقعة على البعد y من O.

2/ إستنتج شعاع الحقل في النقطة M .

الحل: بالنسبة للنقطة M المحددة فإن r,y,R ثوابت ، و اعتمادا على الشكل 29.1 و بوضع $K=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ يمكننا كتابة:

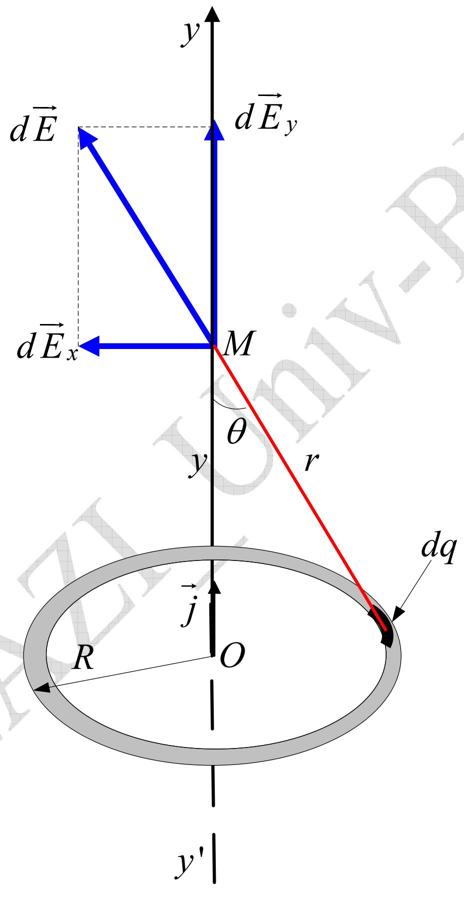
$$dV=K\frac{dq}{r} \quad \Rightarrow \quad \int dV=\frac{K}{r}\int dq \quad \Rightarrow \quad V=\frac{Kq}{r}+C^{te}$$

من الشكل نلاحظ أن $r=\sqrt{R^2+y^2}$ و بعد تعويض K و $q=\lambda.2\pi R$ نصل إلى:

$$\boxed{V=\frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2+y^2}}+C^{te}}$$

يبقى الآن استنتاج E. بغية هذا يكفي اشتقاق عبارة V بالنسبة لـــ y باستغلال المعادلة (34.1):

$$\boxed{E=-\frac{dV}{dy}\quad\Rightarrow\quad \mathrm{E}=\frac{\lambda.R}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{y}{\left(R^2+y^2\right)^{3/2}}}$$



الشكل 29.1: الحقل الكهروساكن في النقطة M والناتج عن الحلقة المشحونة

كما يمكن كتابة عبارة الشعاع $\vec{E}$

$$\boxed{\vec{\mathrm{E}}=\left[\frac{\lambda.R}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{y}{\left(R^2+y^2\right)^{3/2}}\right]\vec{j}}$$

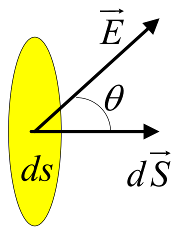
E/ التدفق الكهروساكن: نظرية غوص: (flux électrostatique et théorème de Gauss)

1/ التدفق الكهربائي:

❖ **تعريف**: نسمي تدفق الحقل الكهربائي عبر سطح المقدار:

$$\boxed{\Phi = \int \vec{E}.d\vec{S}} \qquad (43.1)$$

$d\vec{S}$: شعاع السطح العنصري و هو دائما عمودي على السطح و موجه إلى خارج الحجم المحدود بالسطح.



الشكل 30.1: التدفق عبر سطح عنصري

إذا كانت الزاوية بين $\vec{E}$ و $d\vec{S}$ هي θ فإن:

$$\boxed{\Phi = \oint_S E.dS.\cos\theta} \qquad (44.1)$$

وحدة التدفق الكهربائي هي **الويبر** $(weber\ Wb)$ و معادلته ذات الأبعاد هي:

$$[\Phi] = L^3.T^{-3}.A^{-1}$$

2/ نظرية غوص:

تعبر نظرية غوص عن العلاقة بين التدفق الكهربائي عبر سطح مغلق و عدد الشحنات المتواجدة داخل الحجم المحاط بهذا السطح.

مثلا: لتكن q شحنة نقطية موجبة و التي تولد حقلا كهربائيا قطريا موجها نحو الخارج شدته $E(r) = K.\frac{q}{r^2}$.

نعتبر كسطح مغلق كرة مركزها الشحنة q. الشكل 31.1

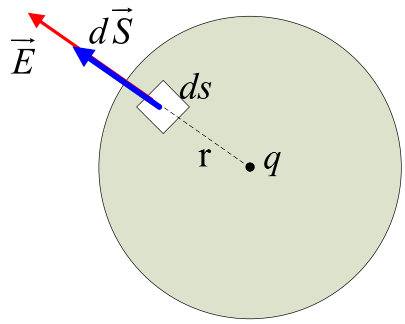
بما أننا في حالة كرة فإن كل الأشعة $d\vec{S}$ هي قطرية أي أن لها نفس حامل $\vec{E}$ و بالتالي فإن $\cos 0 = 1 \Rightarrow (\vec{E}, d\vec{S}) = 0$.

التدفق الكهربائي العنصري عبر سطح عنصري $d\vec{S}$ هو:

$$d\Phi = \vec{E}.d\vec{S} = E.dS \qquad (45.1)$$

بعملية تكاملية نحصل على:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \oint_S K.\frac{q}{r^2}.dS \qquad (46.1)$$



الشكل 31.1 : شحنة نقطية داخل كرة

و بما أن نصف قطر الكرة ثابت فإن :

$$\Phi = K.\frac{q}{r^2}\oint_S dS \qquad (47.1)$$

يكفي التذكر بأن المساحة الكلية للكرة هي:

$$\oint_S dS = S = 4\pi r^2 \qquad (48.1)$$

و بالتعويض نجد:

$$\boxed{\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}} \qquad (49.1)$$

النتيجة: تدفق الحقل الكهربائي الصادر من كرة $(\forall r)$ يوجد في مركزها شحنة نقطية موجبة $(q \succ 0)$ يساوي $\frac{q}{\varepsilon_0}$.

في حالة $q \prec 0$ ، الحقل الكهربائي $\vec{E}$ موجه نحو مركز الكرة و التدفق الكهربائي Φ يكون سالبا لأن $\cos\pi = -1 \Rightarrow (\vec{E}, d\vec{S}) = \pi$.

تعميم: النتيجة المتوصل إليها بالحساب من أجل شحنة واحدة هي محققة في الحالة العامة.

من أجل ذلك نعتبر سطحا مغلقا كيفيا يحتوي على n شحنة $q_1 + q_2 .... + q_n$ (مهما كانت إشاراتها).

نبرهن في هذه الحالة أن :

$$\boxed{\Phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} q_i.\frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}} \quad [\mathrm{Wb}] \tag{50.1}$$

و هذه هي **نظرية غوص**:

النص: التدفق لحقل كهربائي و العابر لسطح مغلق يساوي **المجموع الجبري** للشحنات المتواجدة **داخل** الحجم المحدود من قبل السطح ، تقسيم نفاذية الفراغ ε_0.

الفائدة من هذا القانون: يسمح هذا القانون بتسهيل حساب الحقل الكهربائي الناتج عن توزيع بسيط للشحنات.

نورد في ما يلي بعض الأمثلة لتوضيح كيفية تطبيق نظرية غوص.

3/ تطبيق نظرية غوص:

ا/ الحقل الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية:

نعتبر الشحنة الموجبة q مركزا لكرة نصف قطرها r ، $\vec{E}$ قطري و مغادر أي $\cos 0 = 1$:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} \Rightarrow \Phi = \oint_S E.dS \Rightarrow E.S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

سطح الكرة هو $S = 4\pi r^2$ و منه:

$$\boxed{E = \frac{q}{\varepsilon_0 .S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{r^2}} \tag{51.1}$$

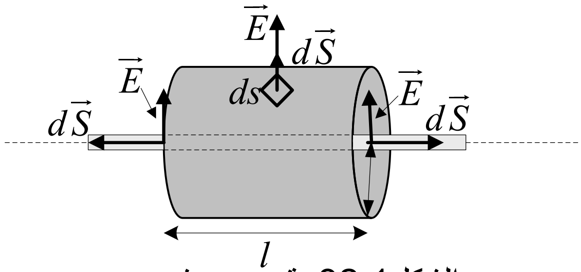
ب/ الحقل الكهربائي الناتج عن قضيب مشحون بانتظام و لا متناهي الطول:

سطح غوص الملائم لهذه الحالة هو أسطوانة محورها منطبق مع القضيب و طولها l.

هناك ثلاث سطوح: سطح قاعدي S_1 ، سطح قاعدي S_2 ، و السطح الجانبي S_L :

التدفق عبر كل السطوح المكونة لأسطوانة غوص هي مجموع التدفقات عبر كل سطح أي : $\Phi = \sum \Phi_i$

$$\Phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \underbrace{\oint_{S_1} \vec{E}.d\vec{S}}_{0} + \underbrace{\oint_{S_2} \vec{E}.d\vec{S}}_{0} + \oint_{S_L} \vec{E}.d\vec{S} \qquad (52.1)$$



الشكل32.1: قضيب مشحون

على السطحين القاعديين (S_1) و (S_2) ، الحقل $\vec{E}$ عمودي على الشعاع $d\vec{S}$، و لذلك لا يوجد أي تدفق عبر هذين السطحين $(\cos\pi/2=0)$. أما على السطح الجانبي (S_L) الأشعة $d\vec{S}$ كلها قطرية شأنها شأن $\vec{E}$ $(\cos 0=1)$ و عليه:

$$\Phi = \oint_{S_L} \vec{E}.d\vec{S} = E.S_L = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} \qquad (53.1)$$

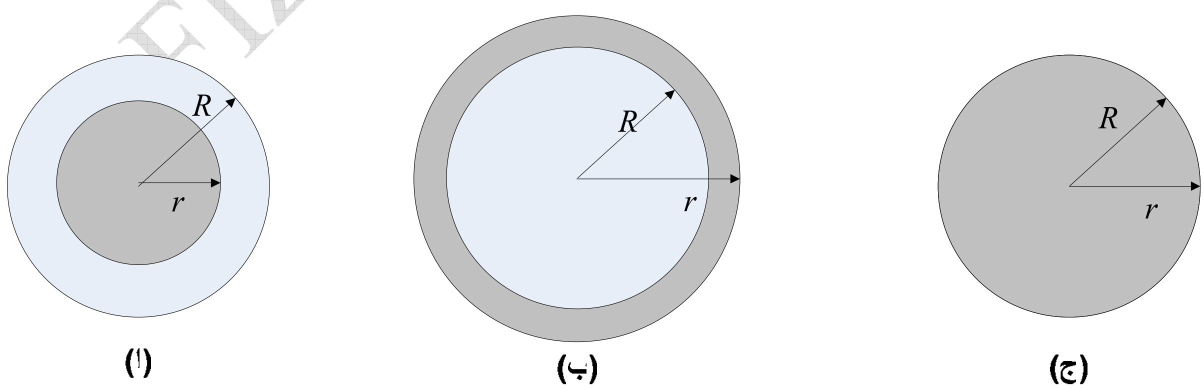
علما أن $Q_i = \lambda.l$ و $S_L = 2\pi Rl$ من ثمة :

$$E.2\pi R.l = \frac{\lambda.l}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}} \qquad (54.1)$$

ج/ الحقل الكهربائي الناتج عن كرة مصمتة مشحونة بانتظام:

مساحة غوص الملائمة هنا هي كرة نصف قطرها r. بتطبيق قانون غوص:

$$\Phi = \oint \vec{E}.d\vec{S} \Rightarrow \Phi = \oint_S E.dS \Rightarrow E.S = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} \qquad (55.1)$$



الشكل33.1: كرة مصمتة مشحونة

مناقشة:

❖ $r \succ R$: الشكل 33.1 –ا– جزء فقط من الشحنة التي تحملها الكرة محصور داخل سطح غوص:

$$E.4\pi r^2 = \frac{\rho.V}{\varepsilon_0} = \frac{\rho.\frac{4}{3}\pi.r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}.r} \tag{56.1}$$

E يتناسب طردا مع البعد r .

❖ $r \prec R$: الشكل33.1 –ب- كل الشحنة التي تحملها الكرة موجودة داخل سطح غوص:

$$E.4\pi r^2 = \frac{\rho.V}{\varepsilon_0} = \frac{\rho.\frac{4}{3}\pi.R^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}.\frac{R^3}{r^2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \tag{57.1}$$

الكرة و كأنها شحنة نقطية.

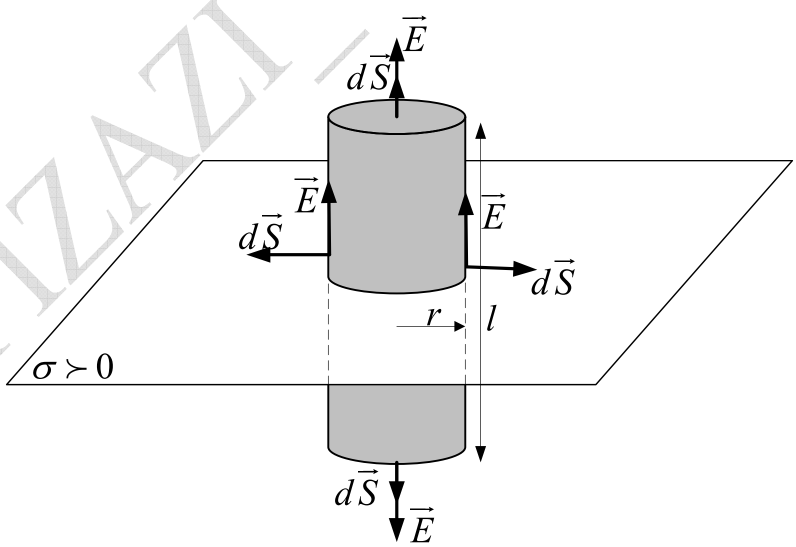
❖ $r = R$:الشكل 33.1 –ج– سطح غوص منطبق مع سطح الكرة:

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}.\frac{R^3}{R^2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}.R} \tag{58.1}$$

شدة الحقل الكهربائي على سطح الكرة ثابت.

د/ الحقل الكهربائي الناتج عن مستوى لا نهائي مشحون بانتظام:

سطح غوص الملائم هنا هو أسطوانة عمودية على السطح. هنا كذلك لدينا ثلاثة سطوح:



الشكل34.1: سطح لامتناهي مشحون

التدفق عبر السطح القاعدي S_1 : $\Phi_1 = E.S_1$ ،

التدفق عبر السطح القاعدي S_2 : $\Phi_2 = E.S_2$ ،

التدفق عبر السطح الجانبي S_Lمعدوم $\left(d\vec{S} \perp d\vec{E}\right)$ ،

إنتبه إلى أن $\vec{E_1} = -\vec{E_2}$ و لكن $E.S_1 = E.S_2$ و منه:

$$\Phi = 2E.S = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

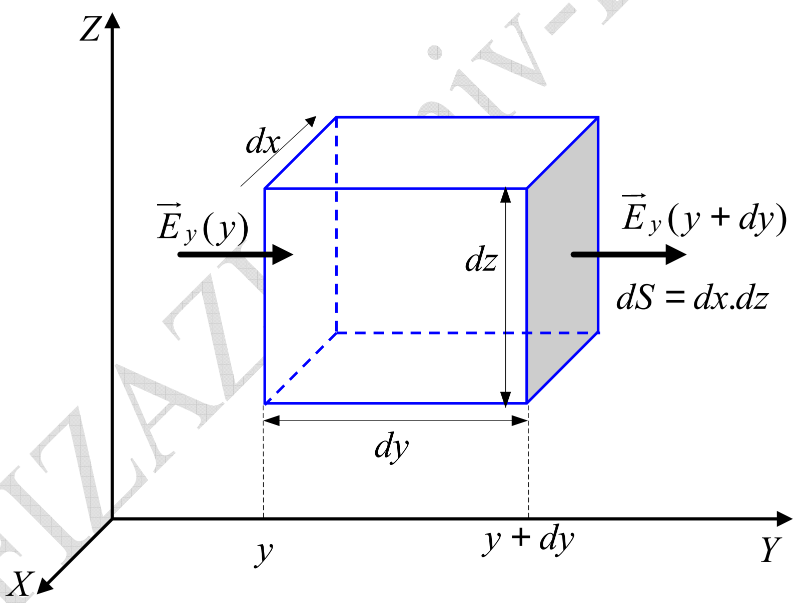
و أخيرا نلاحظ أن الحقل الكهربائي منتظم مهما كان بعد النقطة عن المستوى:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}} \qquad (59.1)$$

الخلاصة: من خلال هذه الأمثلة نلاحظ أن النتائج المتحصل عليها هي مطابقة لتلك التي وجدناها في الفقرة C و لكن بأكثر سهولة ، و هذه هي الفائدة من تطبيق نظرية غوص.

4/ الشكل التفاضلي لنظرية غوص: (forme différentielle du théorème de Gauss)

الإحداثيات الديكارتية للحقل $\vec{E}$ هي $E_x\ ,E_y\ ,E_z$. لنحسب التدفق الصادر من مكعب عنصري حجمه $dv = dx.dy.dz$.(الشكل35.1)



الشكل 35.1: التدفق عبر حجم عنصري

التدفق الناتج عن المركبة E_y :

- ✓ معدوم على الوجوه : الأمامي ، الخلفي ، العلوي والسفلي و ذلك لأن شعاع الحقل عمودي على شعاع السطح.
- ✓ يبقى حساب التدفق على الوجهين الجانبيين ذاتي المساحة $dS = dx.dz$.

- التدفق الداخل في y سالب نظرا لأن الحقل موجه نحو داخل الحجم عكس $d\vec{S}$ $\left(\left(\overrightarrow{E_y},\overrightarrow{dS}\right)=\pi\right)$ و يساوي:

$$-E_y(y).dx.dz$$

- التدفق الخارج في $y+dy$ موجب و يساوي: $+E_y(y+dy).dx.dz$

و من هذا نحصل على التدفق عبر الوجهين الجانبيين:

$$\Phi_{dSy}=\big(E_y(y+\partial y).dx.dz-E_y(y)\big)\partial x.\partial z$$

بما أن المسافة dy بين السطحين صغيرة جدا فإن الرياضيات تسمح لنا بكتابة:

$$E_y(y+\partial y)-E_y(y)=\Delta E_y=dE_y=\left(E_y\right)'.dy=\frac{\partial E_y}{\partial y}dy$$

النتيجة لكل هذا:

$$d\Phi_{dSy}=\big(E_y(y+\partial y).dx.dz-E_y(y)\big)\partial x.\partial z=\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)\partial x.\partial y.\partial z$$

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)\partial x.\partial y.\partial z=\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right).dv$$

بما أن النتائج متماثلة بالنسبة للتدفق عبر الواجهات الأربعة المتبقية ، فإن التدفق الكلي للحجم العنصري dv يساوي: $d\Phi_E=d\Phi_{dS_x}+d\Phi_{dS_y}+d\Phi_{dS_z}$

$$d\Phi_{\vec{E}}=\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dx.dy.dz=\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right).dv$$

إذا كانت dq هي شحنة الحجم dv فإنه حسب نظرية غوص:

$$d\Phi_{\vec{E}}=\left[\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right]dv=\frac{dq}{\varepsilon_0}$$

إذا كانت ρ ترمز إلى الكثافة الشحنية الحجمية فإن $dq=\rho.dv$ و منه:

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad (60.1)$$

نتعرف في هذه العبارة على تباعد $\vec{E}$:

(61.1) $$\boxed{div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

و التي تعبّر عن نظرية غوص على الشكل التفاضلي.

فكيف تكون عبارة الكمون الكهربائي؟

نعرف أن $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$

أي :
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

و منه:
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

أي: (62.1)
$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

يطلق على هذه العبارة اسم **معادلة بواسون** (équation de Poisson) التي تسمح بحساب V إذا كنا نعرف توزيع الشحنة و العكس صحيح.

مثال7.1: يسود في منطقة من الفراغ حقل كهروساكن من الشكل: $\vec{E} = x.\vec{i} + 2y.\vec{j} + 3\vec{k}$

أوجد عبارة الكثافة الحجمية للشحنة.

الجواب: تطبيقا للمعادلة (61.1):
$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho = \varepsilon_0\left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right]$$
$$\rho = \varepsilon_0[1 + 2 + 0] \Rightarrow \boxed{\rho = 3\varepsilon_0}$$

مثال8.1: تعطى عبارة الكمون: $V(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left(x^2 + y^2 - z^2\right)$

إستنتج عبارة كثافة الشحنة.

الجواب: من معادلة بواسون نتوصل إلى ρ :
$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}[2 + 2 - 2] = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0 . a^3}}$$

ماذا لو لم تكون هناك أي شحنة؟

هذا يعني أن:

$$\rho = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0} \qquad (62.1)$$

تعرف هذه العبارة باسم **معادلة لابلاس**(équation de Laplace) و تستعمل خاصة في ميكانيك السوائل. يظهر في هذه المعادلة مؤثر يسمى **مؤثر لابلاس** أو **لابلاسيان** (Le Laplacien) و هو :

$$\boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}} \qquad (64.1)$$

5/ مفهوم الزاوية الصلبة:(Notion de l'angle solide)

في الهندسة المستوية الزاوية المستوية هي التي نهتم بها في تقديراتنا. أما حين يتعلق الأمر بالهندسة الفضائية فإن الحديث يكون على الزاوية الصلبة أو المجسدة. فعلى سبيل المثال الأشعة الضوئية المنبعثة من منبع ضوئي نقطي في الظلام يتميز بمقدارين: المنحى أو الجهة (عبارة عن مستقيم) و الزاوية الأعظمية لانتشار الحزمة الضوئية حول هذا المستقيم (عبارة عن مخروط). في الحالة الأخيرة تلك الزاوية هي التي نسميها **الزاوية الصلبة أو المجسدة**. الشكل 36.1–ا–

تعريف: الزاوية الصلبة ، أو المجسدة العنصرية هي الفضاء الموجود داخل سطح مخروطي عنصري dS البعيد بالمسافة R عن قمة المخروط ، و تحسب بالعبارة:

$$\boxed{d\Omega = \frac{dS}{R^2}} \qquad (65.1)$$

تكون الزاوية الصلبة موجبة دائما و هي مستقلة عن R. وحدتها **ستيراديان** (sr) (stéradian).

لتحديد قيمة الزاوية الصلبة Ω ، نرسم مخروطا مركزه O و نصف قطره R. مساحة الدائرة التي يقطعها المخروط هي S (الشكل 36.1–ب–) . قيمة الزاوية الصلبة هي:

$$\boxed{\Omega = \frac{S}{R^2}} \qquad (66.1)$$

بالإحداثيات الكروية فإن السطح العنصري ، باعتبار R ثابتة ، يساوي:

$$dS = R^2 \sin\theta . d\theta . d\varphi \quad (67.1)$$

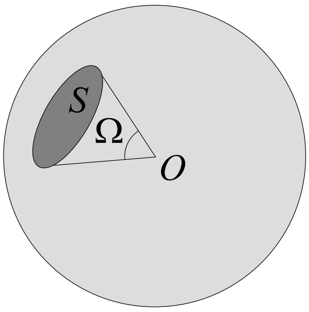
إذن الزاوية الصلبة العنصرية تكتب:

$$d\Omega = \sin\theta . d\theta . d\varphi \quad (68.1)$$

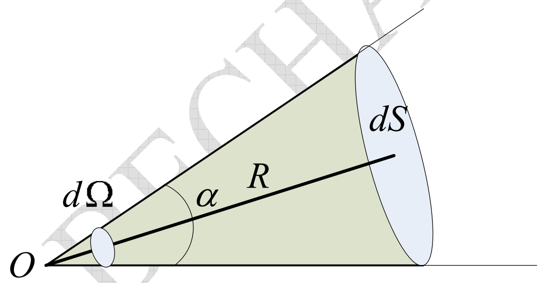
و منه فإن الزاوية الصلبة المحيطة بمخروط ، زاويته في القمة α ، تساوي:

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi . \int_0^{\alpha} \sin\theta . d\theta = 2\pi(1-\cos\alpha) \quad (69.1)$$

$$\boxed{\Omega = 2\pi(1-\cos\alpha)} \quad (70.1)$$



(ب)



(ا)

الشكل36.1: الزاوية الصلبة

❖ **مناقشة:**

الحالة الأولى: $\boxed{\Omega = 2\pi \text{ sr}} \Leftarrow \alpha = \pi/2$ مناسب لنصف الفضاء المشكل من قبل الزاوية $\alpha = \pi/2$.

الحالة الثانية : $\boxed{\Omega = 4\pi \text{ sr}} \Leftarrow \alpha = \pi$ مناسب لكل الفضاء حول نقطة و هي أكبر قيمة للزاوية الصلبة.

الحالة العامة:

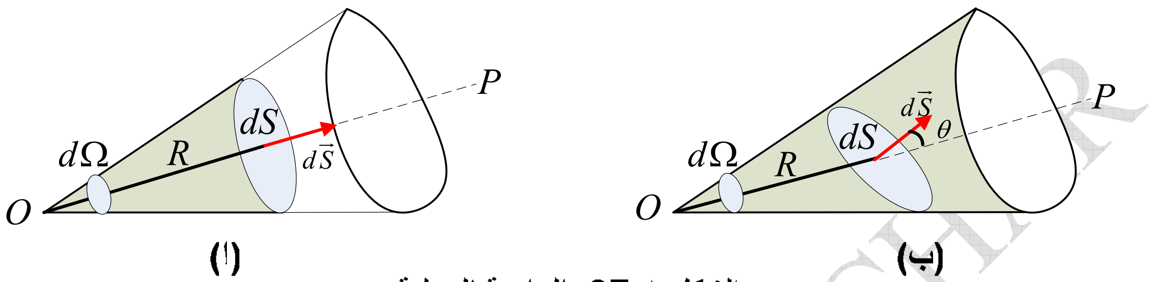
☜ إذا كان شعاع السطح العنصري موازيا للمستقيم OP (الشكل37.1–ا–) فإن $\cos\theta = 1$ ، و بالتالي الزاوية الصلبة العنصرية تساوي:

$$\boxed{d\Omega = \frac{dS}{R^2}} \quad (71.1)$$

☜ أما إذا كان شعاع السطح العنصري يصنع الزاوية θ مع المستقيم OP (الشكل37.1–ب–) فإن الزاوية الصلبة العنصرية تساوي:

$$\boxed{d\Omega = \frac{dS.\cos\theta}{R^2}} \qquad (72.1)$$

هذه العلاقة هي التي يجب الاحتفاظ بها لحساب الزاوية الصلبة في الحالة العامة.



الشكل 37.1: الزاوية الصلبة

❖ **العلاقة بين الزاوية الصلبة و التدفق الكهربائي:**

الحقل الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية q على البعد r من الشحنة هو $E = K\dfrac{q}{r^2}$.

التدفق العنصري $d\Phi$ عبر السطح العنصري dS الموجود على البعد r من الشحنة يكتب:

$$d\Phi = E.dS = K.q\frac{dS}{r^2} \qquad (73.1)$$

$$\boxed{d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.d\Omega} \qquad (74.1)$$

بعملية تكاملية نحصل على التدفق الكلي العابر لكل السطح S:

$$\boxed{\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega} \qquad (75.1)$$

التدفق الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية عبر سطح كيفي يساوي $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}$ مضروب في الزاوية الصلبة Ω التي نرى من خلالها هذا السطح من الشحنة النقطية.

إذا كان السطح مغلقا و يحيط بالشحنة q فإن الزاوية الصلبة هي 4π و التدفق يساوي $\dfrac{q}{\varepsilon_0}$.

أما إذا كان السطح مغلقا و لا يحيط بالشحنة q فإن الزاوية الصلبة معدومة $(\Omega = 0)$ و التدفق الكهربائي معدوم كذلك.

F/ ثنائي القطب الكهربائي:(Dipôle électrique)

❖ **تعريف:** يتكون ثنائي قطب كهربائي من شحنتين متساويتين و متعاكستين في الإشارة و متباعدتين بمسافة صغيرة جدا.

الشكل 18.1 يمثل خطوط الحقل لثنائي القطب الكهربائي.

❖ **تعريف:** العزم الكهربائي لثنائي القطب (moment dipolaire) هو شعاع حرّ $\vec{p}$ يساوي جداء قيمة الشحنة q في شعاع الإنتقال $\vec{a}$ للشحنة ، موجه من الشحنة الموجبة نحو الشحنة السالبة (الشكل 38.1):

$$\boxed{\vec{p} = q.\vec{a}} \qquad (76.1)$$

❖ **الكمون الكهربائي الناتج عن ثنائي القطب الكهربائي:**

نريد حساب الكمون الكهربائي الناتج عن الشحنتين $+q$ ،$-q$ في نقطة P تبعد بـــ r_1 عن الشحنة $+q$ و بـــ r_2 عن الشحنة $-q$. البعد a صغير جدا أمام المسافتين r_1 و r_2. (الشكل 38.1).

$$V = \sum V_i \Rightarrow V = K\left[\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right] \Rightarrow V = K.q.\frac{(r_2 - r_1)}{r_2.r_1}$$

بما أن $r \succ\succ a$ فإن $r_1.r_2 \approx r^2$ و $r_2 - r_1 = a.\cos\theta$ و عليه فإن:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q.a.\cos\theta}{r^2} \Rightarrow \boxed{V = \frac{p.\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0.r^2}} \qquad (77.1)$$

❖ **الحقل الكهربائي الناتج عن ثنائي القطب الكهربائي:**

سنحاول إيجاد E انطلاقا من المعادلة $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V$.

☜ **بالإحداثيات المستطيلة:** اعتمادا على الشكل 38.1 نرى أن:

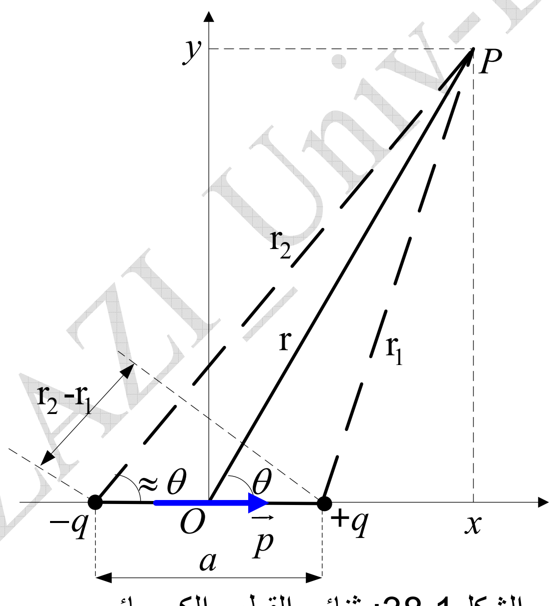
$$r_1=\left[y^2+(x-a/2)^2\right]^{1/2} \quad ; \quad r_2=\left[y^2+(x+a/2)^2\right]^{1/2}$$

و بما أن

$$V=K.q\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right]$$

إذن:

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.q\left[\frac{1}{\left[y^2+(x-a/2)^2\right]^{1/2}}-\frac{1}{\left[y^2+(x+a/2)^2\right]^{1/2}}\right] \qquad (78.1)$$



الشكل38.1: ثنائي القطب الكهربائي

يبقى الآن القيام بعملية الاشتقاق:

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.q\left[\frac{x-a/2}{\left[y^2+(x-a/2)^2\right]^{3/2}}-\frac{x+a/2}{\left[y^2+(x+a/2)^2\right]^{3/2}}\right] \qquad (79.1)$$

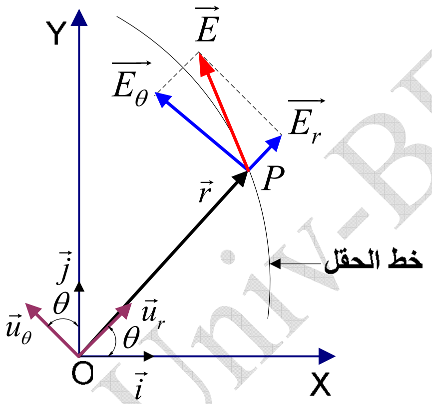
$$(80.1)\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.q\left[\frac{y}{\left[y^2+(x-a/2)^2\right]^{3/2}} - \frac{y}{\left[y^2+(x+a/2)^2\right]^{3/2}}\right]$$

☜ **بالإحداثيات القطبية:**

نتبع نفس الطريقة السابقة و نعتمد على الشكل 39.1

نعرف أن: $\vec{E} = \vec{E_r} + \vec{E_\theta}$ و عليه:

$$\boxed{E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p.\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0.r^3}\ ;\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = p.\frac{\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0.r^3}} \quad (81.1)$$



الشكل 39.1: الإحداثيتان القطبيتان للحقل

EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

Exercice 1.1

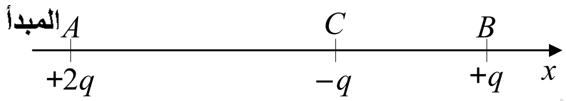
Soit la distribution de charges (de l'ordre du microcoulomb) ci-dessous ; $AB = d = 0,2m$; Les deux charges placées en A et B sont fixes; par contre la charge placée en C est mobile sur la droite AB.

Quelle est la position d'équilibre de la charge placée en C, si elle existe ?

التمرين 1.1

ليكن توزيع الشحنات(من مرتبة الميكروكولومب) المبين أسفله؛ $AB = d = 0,2m$ ؛ الشحنتان الموضوعتان في A و B ساكنتان؛ بعكس الشحنة الموضوعة في C المتحركة على المستقيم AB.

/ ما هو موضع التوازن للشحنة الموضوعة في C ، إن وجد؟



Exercice 1.2

Aux deux extrémités d'un fil de longueur $2l$, sont attachés deux ballons sphériques gonflés avec de l'hélium (l'hélium étant plus léger que l'air), et portent la même charge $+q$. On suspend au milieu du fil une masse m. Le système abandonné à lui même dans l'atmosphère occupe alors une position d'équilibre stable dans un même plan vertical, telle que chaque moitié du fil fait un angle α avec l'horizontale (figure ci-dessous).

En négligeant les masses du fil et des ballons , calculer la valeur de q.

Application numérique :

$$g = 10N.kg^{-1},\ l=1m\ ,\ m=5g\ ,\ \alpha=\pi/6\ rad$$

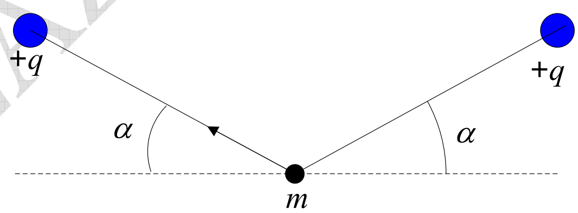
تمرين 2.1

تربط في نهاتي خيط طوله $2l$ نفختان (بالونان) كرويتان متماثلتان مملوءتان بغاز الهليوم (الهليوم أخف من للهواء) ، وتحملان نفس الشحنة $+q$. تعلق في منتصف الخيط كتلة m. تترك النفختان في الهواء فتتوازنان و تستقران في مستوى شاقولي واحد بحيث يصنع كل جزء من الخيط عندئذ مع الأفق الزاوية α.(الشكل أسفله)

بإهمال كتلة الخيط و النفختين أحسب قيمة q.

تطبيق عددي:

$$g = 10N.kg^{-1},\ l=1m\ ,\ m=5g\ ,\ \alpha=\pi/6\ rad$$



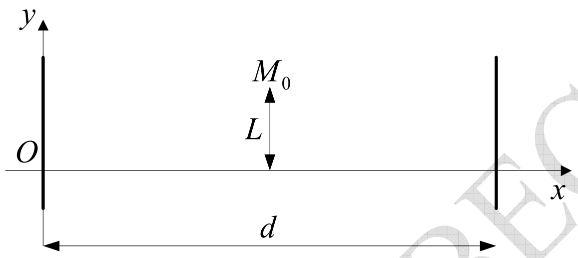
Exercice 2.3

Une petite boule (supposée ponctuelle) électrisée de masse m et portant une charge positive q telle que $\frac{q}{m} = 10^{-6}Ckg^{-1}$ est placée entre deux plaques métalliques A et B verticales distantes de $d = 4cm$. Ces deux plaques soumises à une tension positive $U_{AB} = U$ créent un champ électrique supposé uniforme.

التمرين 3.1

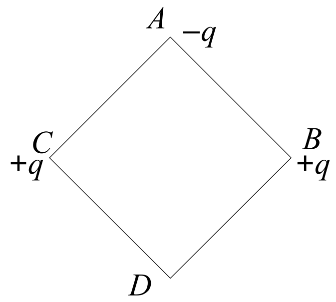
كرة صغيرة (مفترضة نقطية) مشحونة كتلتها m و تحمل الشحنة الموجبة q بحيث $\frac{q}{m} = 10^{-6}Ckg^{-1}$ وضعت بين صفيحتين معدنيتين A و B شاقوليتين متباعدتين بـــ $d = 4cm$. حين تخضع هاتين الصفيحتين للتوتر $U_{AB} = U$ الموجب ينشأ حقل كهربائي مفترض منتظم.

A la date $t=0$, la boule est abandonnée sans vitesse initiale en un point M_0 de coordonnées $x_0=\frac{d}{2}$ et $y_0=L=1m$. Soit $g=10ms^{-2}$ l intensité du champ de pesanteur. 1/ Trouver l'équation de la trajectoire de la boule. 2/ Calculer la date de passage de la boule dans le plan horizontale $y=0$. 3/ Quelle valeur doit-on donner à U pour que la trajectoire de la boule passe par le point P de coordonnées $(d,0)$?	في اللحظة $t=0$، تترك الكرة بدون سرعة ابتدائية من النقطة M_0 ذات الإحداثيتين $x_0=\frac{d}{2}$ و $y_0=L=1m$. ليكن $g=10ms^{-2}$ ، شدة حقل الجاذبية. 1/ أوجد معادلة مسار الكرة. 2/ أحسب لحظة مرور الكرة في المستوى الأفقي $y=0$. 3/ ما هي القيمة الواجب إعطاؤها لـــ U حتى يمر مسار الكرة من النقطة ذات الإحداثيتين $(d,0)$ ؟



Exercice 1.4 Soient n charges ponctuelles $(q \prec 0)$ placées aux sommets A_i d'un polygone régulier de centre O, de côtés de longueur a. 1/ Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(z)$ en un point M de l'axe Oz du polygone (orthogonal en O à son plan) 2/ En déduire $\vec{E}(z)$ dans le cas : a/ d'un triangle équilatéral d'axe Oz , b/ d'un carré d'axe Oz .	**التمرين 4.1** لتكن n شحنة نقطية $(q \prec 0)$ موضوعة في القمم A_i لمتعدد الأضلاع المنتظم مركزه O، ذي أضلاع طولها a. 1/ عين الحقل الكهربائي $\vec{E}(z)$ في نقطة M من المحور Oz العمودي في O على مستوى متعدد الأضلاع. 2/ إستنتج $\vec{E}(z)$ في حالة: ا/ مثلث متساوي الأضلاع محوره Oz. ب/ مربع محوره Oz.

Exercice 1.5 Des charges ponctuelles occupent les sommets A,B et C d'un losange de côté a, comme indiqué sur la figure ci-dessous (il n'y a pas de charge en D). 1/ Calculer le champ électrique produit par les trois charges au sommet D ; représenter graphiquement ce champ. 2/ Calculer le potentiel produit en D . 3/ On place la charge $+2q$ au point D. Calculer la force électrique exercée par les autres charges sur cette charge. 4/ Calculer l'énergie potentielle de la charge $+2q$.	**التمرين :5.1** وضعت شحنات نقطية على الرؤوس B,A و C لمعين ضلعه a ، كما هو مبين في الشكل أسفله (في D لا توجد شحنة). 1/ أحسب الحقل الكهربائي الناتج عن الشحنات الثلاثة عند النقطة D ؛ مثل هذا الحقل بيانيا. 2/ أحسب الكمون (الجهد) الناتج في النقطة D. 3/ نضع الشحنة $+2q$ في النقطة D ؛ أحسب القوة الكهربائية المطبقة عليها من طرف الشحن الأخرى. 4/ أحسب الطاقة الكامنة للشحنة $+2q$.



Exercice 1.6

On considère deux charges q et $-2q$ situées respectivement aux deux points $A(a,0,0)$ et $A'(4a,0,0)$ dans les coordonnées cartésiennes.

1/ Calculer le potentiel électrique en un point quelconque $M(x,y,z)$.

2/ Déterminer la surface équipotentielle $V=0$.

3/ Montrer qu'en chaque point de cette surface le champ électrique passe par un point constant qu'il faudra déterminer.

التمرين 6.1

نعتبر شحنتين q و $-2q$ موضوعتين على الترتيب في النقطتين $A(a,0,0)$ و $A'(4a,0,0)$ في الإحداثيات الكارتيزية.

1/ إحسب الجهد الكهربائي في نقطة ما $M(x,y,z)$.

2/ حدد السطح متساوي الكمون $V=0$.

3/ بين أنه في كل نقطة من هذا السطح يمر الحقل الكهربائي بنقطة ثابتة و التي عليك تعيينها.

Exercice 1.7

On considère un segment AB électrisé positivement de densité linéique homogène λ de longueur $2a$ et de centre O.

1/ Démontrer que la composante $\vec{E}_y$ du champ électrostatique est nulle.

2/ Déterminer le champ électrostatique en un point M de l'axe de symétrie Ox. On pose $OM = x$.

3/ En déduire en ce point M le champ créé par un fil « infini ».

التمرين 7.1

نعتبر قطعة مستقيمة AB مكهربة إيجابا ذات كثافة طولية λ متجانسة طولها $2a$ و منتصفها O .

1/ برهن أن المركبة $\vec{E}_y$ للحقل الكهروساكن معدومة.

2/ حدد الحقل الكهروساكن في نقطة M من محور التناظر Ox . نضع $OM = x$.

3/ إستنتج في هذه النقطة M الحقل الناتج عن سلك " لا متناهي".

Exercice 1.8

Un fil de longueur L porte une densité linéaire de charge $\lambda \succ 0$ (figure ci-dessous).

1/ Montrer que les composantes du champ électrique au point P situé à une distance R du fil sont données par :

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

Où E_x et E_y sont les composantes du champ, consécutivement parallèle et perpendiculaire au fil, et θ_1 et θ_2 les angles que font avec la perpendiculaire au fil les droites joignant le point P aux extrémités du fil.

التمرين 8.1

يحمل سلك طوله L كثافة خطية لشحنة $\lambda \succ 0$ (الشكل في الأسفل).

1/ برهن أن مركبتي الحقل الكهربائي في نقطة P واقعة على بعد R من السلك هما على التوالي:

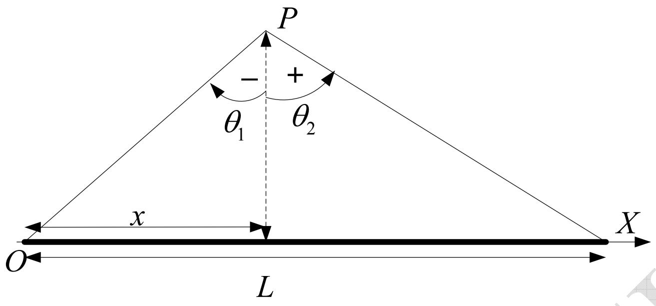
$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

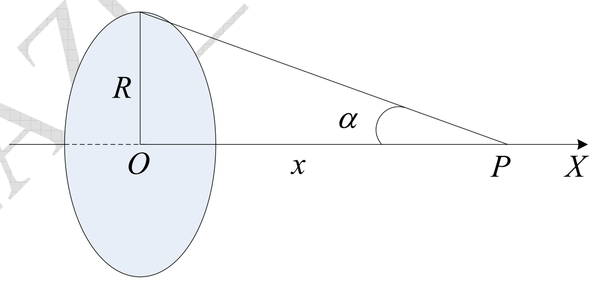
حيث E_x و E_y هما مركبتا الحقل ،على التوالي الموازية و العمودية على السلك، و θ_1 و θ_2 الزاويتان اللتان يصنعهما المستقيمان الواصلان النقطة P بنهايتي السلك مع العمود للسلك.

2/ أوجد الحقل حينما تقع النقطة P على نفس البعد من

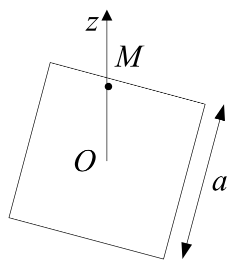
2/ Trouver le champ quand le point P est équidistant des deux extrémités du fil. 3/ En déduire le champ en un point de l'axe de symétrie d'un fil infiniment long. Les signes des angles θ_1 et θ_2 sont ceux indiqués sur la figure.	نهايتي السلك. 3/ إستنتج عبارة الحقل في نقطة من محور تناظر سلك لا متناهي الطول إشارتا الزاويتين θ_1 و θ_2 هما كما هو مبين على الشكل.



<u>Exercice 1.9</u> Une charge linéaire $(\lambda > 0)$ est répartie uniformément sur un fil en forme d'anneau de rayon R . (figure ci-dessous). 1/ Calculer le champ électrique produit par le fil au point P situé sur l'axe OX à une distance x du centre O. 2/ Calculer le potentiel électrique produit au même point P . 3/ Déterminer par le calcul le point pour lequel le champ électrique est maximal.	**<u>التمرين9.1</u>** تتوزع شحنة خطية $(\lambda > 0)$ بانتظام على سلك في شكل حلقة نصف قطرها R. (الشكل في الأسفل) 1/أحسب الحقل الكهربائي الناشئ عن السلك في النقطة P الواقعة على المحور OX و التي تبعد بـــ x عن المركز O. 2/ أحسب الجهد (الكمون) الكهربائي في نفس النقطة P. 3/ عين حسابيا النقطة التي من أجلها يكون الحقل الكهربائي أعظميا.

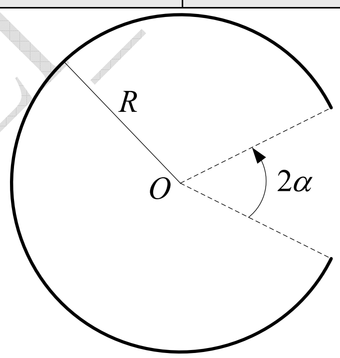


<u>Exercice 1.10</u> Une plaque métallique en forme de carré de côté a et de centre O est chargée uniformément d'une densité surfacique $\sigma \succ 0$. Ecrire l'expression du champ électrostatique crée au point M situé sur l'axe de symétrie perpendiculaire à la plaque et telle que $OM = z = \frac{a}{2}$	**<u>التمرين 10.1</u>** صفيحة معدنية على شكل مربع ضلعها a ، مركزها O و مشحونة بانتظام بكثافة سطحية $\sigma \succ 0$. أكتب عبارة الحقل الكهروساكن الناتج في النقطة M الواقعة على محور التناظر Oz العمودي على الصفيحة و حيث $OM = z = \frac{a}{2}$.

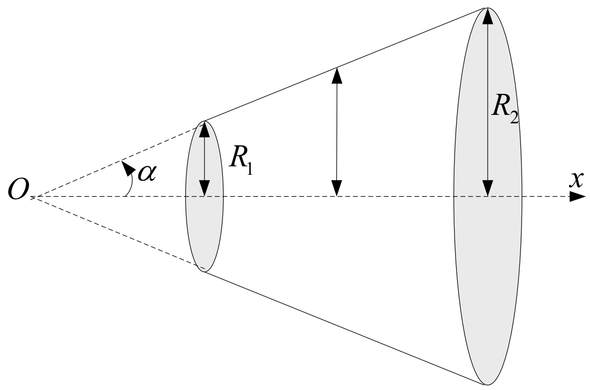


Exercice 1.11	التمرين 11.1
Une rondelle métallique de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 porte une charge répartie uniformément (densité surfacique de charge σ). 1/ Calculer le champ électrostatique sur l'axe de la rondelle à la distance z de son centre. 2/ Retrouver le résultat à partir du calcul du potentiel. 3/ Etudier le cas particulier $R_1 = 0$. 4/ Quel est le champ créé par un plan chargé infini ?	تحمل حلقة معدنية ذات نصف قطر داخلي R_1 و نصف قطر خارجي R_2 شحنة موزعة بانتظام (الكثافة السطحية للشحنة σ). 1/ أحسب الحقل الكهروساكن على محور الحلقة على البعد z من مركزها. 2/ أوجد من جديد النتيجة انطلاقا من حساب الكمون. 3/ أدرس الحالة الخاصة $R_1 = 0$. 4/ ما هو الحقل الناتج عن مستوى مشحون لامتناهي؟

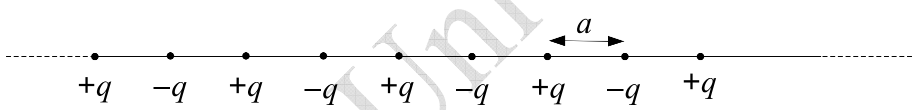
Exercice 1.12	التمرين 12.1
Un anneau de centre O et de rayon R porte une densité linéique uniforme de charges λ sauf sur un arc d'angle au centre 2α . (Figure ci-dessous). Déterminer le champ électrostatique en O.	حلقة مركزها O و نصف قطرها R تحمل كثافة طولية منتظمة للشحنات λ ما عدى على قوس ذي زاوية في المركز 2α . (الشكل في الأسفل) عين الحقل الكهروساكن في O .



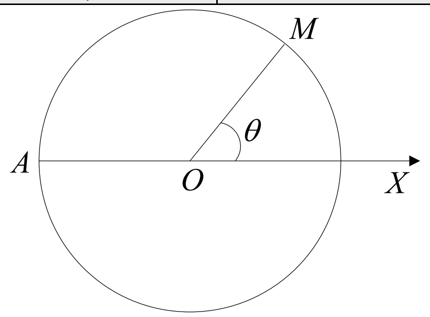
Exercice 1.13	التمرين 13.1
On considère une portion de cône, de demi-angle au sommet α et de rayons limites R_1 et R_2 $(R_1 \prec R_2)$. Ce système est chargé en surface avec la densité non uniforme : $\sigma = \sigma_0 \frac{a}{}$ a est une constante homogène à une longueur et le rayon du cône en un point de son axe de symétrie. Déterminer le champ électrostatique au sommet O du cône.	نعتبر جزءا من مخروط ، ذي نصف زاوية رأسية α و نصفي قطر حديين R_1 و R_2 $(R_1 \prec R_2)$. هذه الجملة مشحونة سطحيا بكثافة غير منتظمة: $\sigma = \sigma_0 \frac{a}{}$ a ثابت متجانس مع طول و نصف قطر المخروط في نقطة من محور تناظره. عين الحقل الكهروساكن في الرأس (القمة) O للمخروط.



Exercice 1.14	التمرين 14.1
Un nombre infini d'ions de charges alternativement positives et négatives $\pm q$ sont disposés à intervalle régulier a le long d'une droite (figure ci-dessous). Trouver l'énergie potentielle d'un ion. Application numérique : $a = 2,8.10^{-10}\,m$, $q = 1,6.10^{-18}\,C$ On rappelle : $\ln(1+x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...\frac{x^n}{n}\right)$	وضع عدد لا متناهي من الشوارد ذات الشحنات المتناوبة موجبة و سالبة $\pm q$ على بعد منتظم a على طول مستقيم (الشكل في الأسفل). أوجد الطاقة الكامنة لشاردة واحدة. تطبيق عدي: $q = 1,6.10^{-18}\,C$ ، $a = 2,8.10^{-10}\,m$ تذكير: $\ln(1+x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...\frac{x^n}{n}\right)$



Exercice 1.15	التمرين 15.1
Une sphère S de rayon R porte une charge surfacique $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta$ à symétrie de révolution autour d'un axe diamétral $\overrightarrow{OX}$. On demande de calculer le champ électrique aux points O et A de l'axe $\overrightarrow{OX}$. (Figure ci-dessous)	كرة S نصف قطرها R و تحمل شحنة سطحية $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta$ ذات تناظر دوراني حول المحور القطري $\overrightarrow{OX}$. المطلوب حساب الحقل الكهربائي في النقطتين O و A من المحور $\overrightarrow{OX}$. (الشكل أسفله)



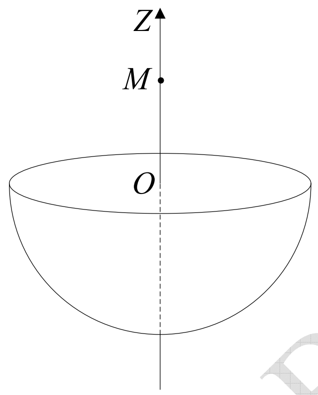
Exercice 1.16	التمرين 16.1
Soit une demi sphère de centre O, de rayon R, chargée uniformément en surface avec la densité surfacique $\sigma \succ 0$. 1/ Exprimer le potentiel et le champ électriques au point O. Expliquer pourquoi dans ce cas,	لتكن نصف كرة مركزها O، نصف قطرها R، مشحونة بانتظام على السطح بكثافة سطحية $\sigma \succ 0$. 1/ عبر عن الكمون و الحقل الكهربائيين في النقطة O. إشرح لماذا في هذه الحالة لا يمكن استنتاج

l’expression du champ ne peut pas être déduite par dérivation de l’expression du potentiel $\left(\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V\right)$.

2/ Exprimer le potentiel $V(z)$ en un point $M(z)$ de l’axe de symétrie Oz de cette demi sphère. En déduire le champ $E(z)$ et retrouver alors les expressions de 1/.

عبارة الحقل باشتقاق عبارة الكمون $\left(\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V\right)$

2/ عبر عن الكمون $V(z)$ في نقطة $M(z)$ من محور التناظر OZ لنصف الكرة هذه. إستنتج الحقل و اوجد من جديد عبارتي 1/.



Exercice 1.17

1/ Trouver une expression pour le champ et le potentiel électriques d’un plan portant une densité superficielle de charge uniforme $\sigma \succ 0$:

a/ en supposant qu’il est constitué d’une série de couronnes toutes concentriques de centre O,

b/ en utilisant l’angle solide.

2/ Retrouver les mêmes résultats en appliquant le théorème de Gauss.

Qu’observez-vous ?

3/ Une charge $-q$ de masse m est placée à une distance z du plan. La charge est libérée de sa position de repos. Calculer son accélération, la vitesse avec laquelle elle tombera sur le plan et le temps qu’elle mettra pour atteindre le plan.

التمرين 17.1

1/ أوجد عبارة للحقل و للكمون الكهربائيين لمستوى يحمل كثافة سطحية لشحنة منتظمة $\sigma \succ 0$:

ا/ بافتراض أنه مشكل من سلسلة من أكاليل كلها متمركزة ذات مركز O،

ب/ باستعمال الزاوية الصلبة.

2/ أوجد نفس النتائج باستعمال نظرية غوص.

ماذا تلاحظ؟

3/ توضع شحنة $-q$ كتلتها m على البعد z من المستوى. تحرر الشحنة من موضع سكونها. أحسب تسارعها، السرعة التي تسقط بها على المستوى و الزمن الذي تأخذه لبلوغ المستوى.

Exercice 1.18

Une sphère, de rayon R , porte une charge volumique ρ qui est répartie uniformément dans tout le volume qu'elle occupe à l'exception d'une cavité de rayon . Le centre de cette cavité est à la distance d du centre de cette sphère. La cavité est vide de charges.

En utilisant le théorème de Gauss et le principe de superposition, calculer le champ en tout point de la cavité. Que concluez-vous ?

التمرين 18.1

تحمل كرة، نصف قطرها R، شحنة حجمية ρ موزعة بانتظام على كل الحجم الذي تشغله باستثناء تجويف نصف قطره . مركز التجويف يبعد عن مركز الكرة بالمسافة d. التجويف فارغ من الشحنات.

باستعمال نظرية غوص و مبدإ التراكب ، أحسب الحقل في كل نقطة من التجويف. ماذا تستنتج؟

Exercice 1.19

Une sphère creuse de rayon R porte une densité de charge surfacique uniforme $\sigma \succ 0$.

1/ Calculer le champ électrostatique produit en un point P, situé à une distance b du centre O, à l'extérieur, à l'intérieur puis à la surface de la sphère.

2/ En appliquant le théorème de Gauss, retrouver les résultats précédents.

3/ Calculer le potentiel électrique à l'intérieur, à l'extérieur et à la surface de la sphère. Que concluez-vous ?

3/ Partant des résultats de la question 3/, retrouver le champ à l'extérieur, à l'intérieur et à la surface de la sphère.

التمرين 19.1

يشحن سطح كرة مجوفة نصف قطرها R بالكثافة السطحية المنتظمة $\sigma \succ 0$.

1/ أحسب الحقل الكهروساكن الناتج في النقطة P، الواقعة على المسافة b عن المركز O، خارج ، داخل ثم على سطح الكرة.

2/ بتطبيق نظرية غوص أوجد من جديد النتائج السابقة.

3/ أحسب الكمون الكهربائي داخل، خارج و على سطح الكرة. ماذا تستنتج؟

4/ انطلاقا من نتائج السؤال 3/ أوجد من جديد الحقل داخل، خارج و على سطح الكرة.

Exercice 1.20

Un cylindre plein de longueur infinie, de rayon R porte une densité de charge volumique $\rho \succ 0$.

1/ En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ électrostatique à l'intérieur, à la surface et à l'extérieur du cylindre.

2/ En déduire le potentiel à l'intérieur, à la surface et à l'extérieur du cylindre, en supposant $V = 0$ sur l'axe du cylindre.

التمرين 20.1

أسطوانة مصمتة لا متناهية الطول، نصف قطرها R، تحمل بانتظام كثافة شحنية حجمية $\rho \succ 0$.

1/ باستعمال نظرية غوص أحسب الحقل الكهربائي الساكن داخل، على سطح و خارج الأسطوانة.

2/ إستنتج الكمون (الجهد) الكهربائي داخل، على سطح و خارج الأسطوانة، بافتراض $V = 0$ على محور الأسطوانة.

Exercice 1.21

On considère deux sphères, s_1 pleine et s_2 creuse, concentriques au point O, de rayons R_1 et R_2 tel que $(R_1 \prec R_2)$. La première porte une charge volumique de densité $\rho \succ 0$ et la deuxième une charge surfacique de densité $\sigma \succ 0$.

1/ En appliquant le théorème de Gauss calculer le champ électrostatique dans les régions : $r \prec R_1$, $R_1 \prec r \prec R_2$ et $r \succ R_2$. On note par le rayon de la surface de Gauss.

2/ En déduire le potentiel électrique dans les mêmes régions à une constante prés.

3/ Représenter les fonctions $E(r)$ et $V(r)$.

التمرين 21.1

نعتبر كرتين، s_1 مصمتة و s_2 مجوفة، متمركزتين في النقطة O، نصف قطريهما R_1 و R_2 بحيث $(R_1 \prec R_2)$. تحمل الأولى شحنة حجمية كثافتها $\rho \succ 0$ و تحمل الثانية شحنة سطحية كثافتها $\sigma \succ 0$.

1/ بتطبيق نظرية غوص أحسب الحقل الكهربائي الساكن الناتج في المناطق: $r \prec R_1$، $R_1 \prec r \prec R_2$ و $r \succ R_2$. تمثل نصف قطر سطح غوص.

2/ إستنتج الكمون الكهربائي في نفس المناطق بثابت تقريبي.

3/ أرسم الدالتين $E(r)$ و $V(r)$.

Exercice 1. 22

On considère deux cylindres coaxiaux infiniment longs, de rayons R_1 et R_2, $(R_1 \prec R_2)$, portant des charges respectives $+\lambda$ et $-\lambda$ par unité de longueur.

1/ Montrer, en utilisant le théorème de Gauss, que le champ électrique est :

a/ nul si $r \prec R_1$ ou si $r \succ R_2$ sachant que est le rayon de la surface de Gauss(cylindre),

b/ inversement proportionnel à pour $R_1 \prec r \prec R_2$.

التمرين 22.1

نعتبر أسطوانتين متمحورتين لا متناهيتي الطول ، نصف قطريهما R_1 و R_2، $(R_1 \prec R_2)$، و تحملان على التوالي الشحنتين $+\lambda$ و $-\lambda$ لوحدة الطول.

1/ بين باستخدام نظرية غوص أن:

ا/ الحقل الكهربائي معدوم إذا كان $r \prec R_1$ أو $r \succ R_2$ علما أن هو نصف قطر سطح غوص (أسطوانة)،

ب/ الحقل الكهربائي يتناسب عكسا مع من أجل

2/ En déduire le potentiel dans tout l'espace. Où sont rapprochées les surfaces équipotentielles le plus?	$R_1 \prec r \prec R_2$. 2/ إستنتج الكمون الكهربائي في كل الفضاء. أين تكون السطوح متساوية الكمون أكثر تقاربا؟

Exercice 1.23

Soit le potentiel à symétrie sphérique suivant :

$$V(r)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(k+\frac{1}{r}\right)\exp(-2kr)\rightarrow(1)$$

où désigne la distance entre l'origine O et un point M , où k désigne une constante et où e désigne la charge élémentaire : $e=1,6.10^{-19}C$. Ce potentiel est créé par une distribution de charges inconnue et que l'on cherche à caractériser.

1/ Quelle est la dimension de la constante k ? Quelle est son unité dans le système international ?

2/ Calculer l'expression du champ électrique créé par la distribution de charges. On rappelle que le vecteur gradient en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\overrightarrow{grad}\,f=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{u}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{u}_\varphi$$

3/ En appliquant le théorème de Gauss à la sphère S de centre O et de rayon , montrer que la charge $q(r)$ contenue dans cette sphère s'écrit :

$$q(r)=e\left(1+2kr+2k^2r^2\right)\exp(-2kr)\rightarrow(2)$$

4/ Montrer que la distribution étudiée contient une charge ponctuelle e placée en O.

5/ Calculer la $\lim_{r\to\infty}q(r)$ et en déduire qu'en outre la charge ponctuelle placée en O, il existe dans tout l'espace une densité volumique de charge non nulle. Expliquez pourquoi le potentiel donné par l'équation (1) peut être utilisé pour modéliser un atome d'hydrogène.

6/ A partir de la relation (2), montrer que la densité volumique de charge $\rho(r)$ s'écrit :

$$\rho(r)=\frac{-e}{\pi}k^3\exp(-2kr)$$

التمرين 23.1:

ليكن الكمون ذي التناظر الكروي التالي:

$$V(r)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(k+\frac{1}{r}\right)\exp(-2kr)\rightarrow(1)$$

حيث ترمز إلى المسافة بين المركز O و نقطة M، حيث k ترمز إلى ثابت و e ترمز إلى الشحنة العنصرية: $e=1,6.10^{-19}C$. هذا الكمون ناتج عن توزيع للشحنات مجهول و الذي نبحث عن تمييزه.

1/ ما هو بعد الثابت k ؟ ما هي وحدته في الجملة الدولية؟

2/ أحسب عبارة الحقل الكهربائي الناتج عن هذا التوزيع للشحنات. نذكر أن شعاع التدرج بالإحداثيات الكروية يكتب:

$$\overrightarrow{grad}\,f=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{u}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{u}_\varphi$$

3/ بتطبيق نظرية غوص على الكرة S ذات المركز O و نصف القطر ، بيّن أن الشحنة $q(r)$ المتواجدة داخل هذه الكرة تكتب:

$$q(r)=e\left(1+2kr+2k^2r^2\right)\exp(-2kr)\rightarrow(2)$$

4/ بيّن أن التوزيع المدروس يحتوي شحنة نقطية e موضوعة في O.

5/ أحسب نهاية $\lim_{r\to\infty}q(r)$ و استنتج أنه بالإضافة إلى الشحنة النقطية الموضوعة في O ، يوجد في كل الفضاء كثافة حجمية للشحنة غير معدومة. إشرح لماذا الكمون المعطى بالمعادلة (1) يمكن استعماله لنموذجة ذرة هيدروجين.

6/ انطلاقا من العلاقة (2)، بيّن أن الكثافة الحجمية للشحنة $\rho(r)$ تكتب:

$$\rho(r)=\frac{-e}{\pi}k^3\exp(-2kr)$$

Exercice 1.24

On considère une distribution de charges à symétrie sphérique de centre O. Le potentiel en un point M de l'espace est: $V(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-r/a}}{r}$ avec $OM=r$ et a une constante positive.

1/ Déterminer le champ électrostatique en ce

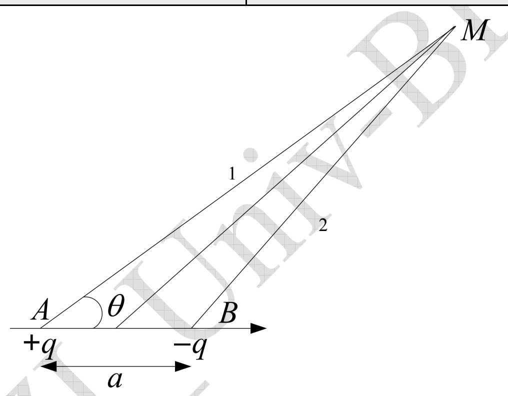
التمرين 24.1

نعتبر توزيعا ذي تناظر كروي مركزه O. الكمون في نقطة M من الفضاء هو:

$V(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-r/a}}{r}$، مع $OM=r$ و a ثابت موجب.

point M . 2/ Calculer le flux du champ à travers une sphère de centre O et de rayon . Faire tendre successivement vers O, puis vers l'infini. Conclure. 3/ Déterminer la densité volumique de charge ρ . 4/ Etudier la fonction $z(r)=4\pi r^2\rho(r)$.Quelle est la signification de cette fonction?	1/ عين الحقل الكهروساكن في هذه النقطة M . 2/ أحسب التدفق عبر كرة مركزها O و نصف قطرها . قم بتمديد على التوالي نحو O، ثم نحو اللانهائي. ماذا تستخلص؟ 3/ حدد الكثافة الحجمية للشحنة ρ . 4/ أدرس الدالة $z(r)=4\pi r^2\rho(r)$. ما هو مدلول هذه الدالة؟

<u>Exercice 1.25</u> Soit un dipôle D , son moment étant $\vec{p}$ et a la distance entre ses deux charges $-q$ et $+q$. (Figure ci-dessous) 1/ Calculer le champ et le potentiel électriques produits par le dipôle D au point M en fonction de p,θ et , sachant que $a \prec\prec$. 2/ Trouver l'équation des surfaces équipotentielles ainsi que l'équation des lignes de champ.	**<u>التمرين 25.1</u>** ليكن ثنائي قطب D، عزمه $\vec{p}$ و a المسافة الفاصلة بين شحنتيه $-q$ و $+q$. (الشكل أسفله) 1/ أحسب الحقل و الكمون الكهربائيين الناتجين عن ثنائي القطب D عند النقطة M بدلالة p,θ و علما أن $a \prec\prec$. 2/ أوجد معادلة سطوح تساوي الكمون.



Corrigés des exercices 1.1 à 1.25 :	حلول التمارين من 1.1 إلى 25.1

التمرين 1.1:

الشحنتان الموضوعتان في A و C متعاكستا الإشارة، إذن تتجاذبان. إذا وضعنا $AC = x$ فإن شدة قوة الجذب تساوي:

$$F_{AC} = 9.10^9 \frac{|2q||-q|}{x^2} \Rightarrow F_{AC} = 9.10^9 \frac{2q^2}{x^2}$$

الشحنتان الموضوعتان في B و C متعاكستا الإشارة، إذن تتجاذبان. و بما أن $BC = d - x$ فإن شدة قوة الجذب تساوي:

$$F_{BC} = 9.10^9 \frac{|q||-q|}{(d-x)^2} \Rightarrow F_{BC} = 9.10^9 \frac{q^2}{(d-x)^2}$$

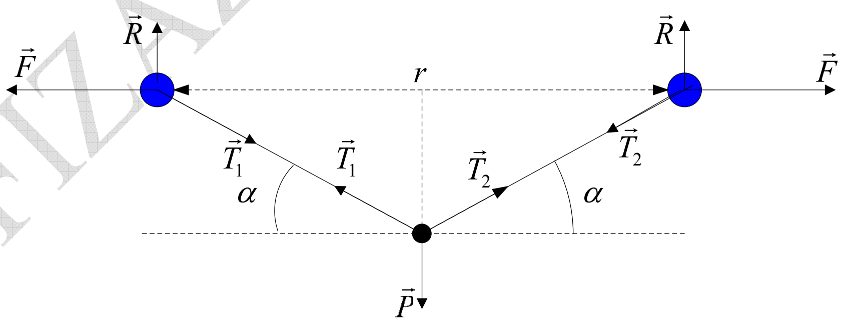
الشحنة الموضوعة في C، الخاضعة للقوتين الكهربائيتين لا يمكنها أن تتوازن إلا إذا كانت القوتان متعاكستين مباشرة. لا يتحقق هذا إلا إذا وقعت C بين A و B. و عليه:

$$F_{AC} = F_{BC} \Rightarrow 9.10^9 \frac{2q^2}{x^2} = 9.10^9 \frac{q^2}{(d-x)^2} \Rightarrow \frac{2}{x^2} = \frac{1}{(d-x)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{1}{(d-x)^2} \\ d = 0,2 \end{array}\right| \Rightarrow x^2 - 0,8x + 0,08 = 0 \Rightarrow \boxed{x = AC = 0,117m}$$

التمرين 2.1

أساس الحل هو الرسم الهندسي المبين على الشكل أسفله:



الجملة في توازن: $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$ علما أن $\vec{F}$ هي القوة الكهروساكنة التنافرية.

عند مركز الكتلة m يمكننا أن نكتب: $\vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$ علما أن: $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = |\vec{T}|$

نسقط على المحور الشاقولي: $2.T.\sin\alpha - P = 0 \Rightarrow T = \dfrac{P}{2\sin\alpha} \rightarrow (1)$

عند مركز أحد البالونين: $\vec{T}_1 + \vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$ ؛ $\vec{R}$ تمثل دافعة أرخميدس.

بالإسقاط على المحور الأفقي: $F - T\cos\alpha = 0 \Rightarrow F = T\cos\alpha \rightarrow (2)$

من (1) و (2) نحصل على عبارة شدة القوة $\vec{F}$ و التي هي:

$$F = \frac{P.\cos\alpha}{2.\sin\alpha} \Rightarrow \boxed{F = \frac{P}{2}\cot\alpha}$$

حسب قانون كولومب:

$$F = k.\frac{q^2}{r^2} \Rightarrow k.\frac{q^2}{r^2} = \frac{P}{2}.\cot\alpha \Rightarrow q^2 = \frac{P}{2}.\frac{r^2}{k}\cot\alpha \Rightarrow \boxed{q = r\sqrt{\frac{P}{2.}\frac{\cot\alpha}{k}}.}$$

غير أن غير معروفة، و لذا ينبغي تحديدها هندسيا: $\boxed{r = 2l\cos\alpha}$

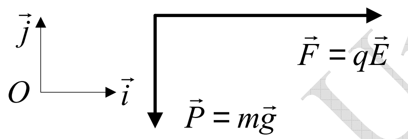
الخطوة الأخيرة هي القيام بالتطبيق العددي:

$$\left.\begin{array}{l} P = mg = 5.10^{-2}\,N \\ cot\pi/6=1,732 \\ r=1,732 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{q = 3,8.10^{-6}\,N = 3,8\mu C}$$

التمرين 3.1:

الكرة المشحونة خاضعة لثقلها $\vec{P}$ و للقوة الكهروساكنة $\vec{F} = q\vec{E}$. بما أن التوتر U_{AB} موجب فإن الحقل الكهروساكن $\vec{E}$ يتجه نحو B، أي نحو الكمون الأصغر.

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على الكرة لنستنتج عبارة التسارع اللحظي المكتسب:



$$\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} + q\vec{E} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{g} + \frac{q}{m}\vec{E}$$

نكتب عبارة التسارع في القاعدة $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} \\ \vec{g} = -g.\vec{j} \\ \vec{E} = E\vec{i} \end{array}\right| \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}E.\vec{i} - g.\vec{j}$$

السرعة الابتدائية معدومة. السرعة اللحظية هي الدالة الأصلية للتسارع. انطلاقا من مركبتي السرعة اللحظية نصل إلى المعادلتين الزمنيتين لحركة الكرة دون نسيان الوضع الإبتدائي للمتحرك:

$$\left(t = 0\ ,\ x_0 = \frac{1}{2}d\ ,\ y_0 = L = 1m\right)$$

$$a_x = \frac{q}{m}E \Rightarrow v_x = \frac{q}{m}E.t \Rightarrow x = \frac{1}{2}\frac{q}{m}E.t^2 + \frac{1}{2}d \rightarrow (1)$$

$$a_y = -g \Rightarrow v_y = -gt \Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + 1 \rightarrow (2)$$

بحذف الزمن ما بين المعادلتين الزمنيتين نحصل على معادلة مسار الكرة:

$$t^2 = \frac{2m}{qE}\left(x - \frac{1}{2}d\right) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}g\left[\frac{2m}{qE}\left(x - \frac{1}{2}d\right)\right] + 1$$

$$\boxed{y = -\frac{mg}{qE}x + \frac{mg}{qE}\frac{d}{2} + 1} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{10^7}{E}x + \frac{2.10^5}{E} + 1}$$

مسار الكرة مستقيم.

2/ نعوض في المعادلة الزمنية (2) الترتيب بصفر لنحصل على لحظة مرور الكرة من المستوى $y=0$:

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+1=0 \Rightarrow \boxed{t=0,447s}$$

3/ لحساب التوتر، علينا أولا تعيين الحقل الكهربائي في النقطة $(d,0)$. نعوض في معادلة المسار كل من الإحداثيتين بقيمتيهما:

$$\left.\begin{array}{l} y=-\dfrac{10^7}{E}x+\dfrac{2.10^5}{E}+1 \\ x=d=0,04m \\ y=0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{E=2.10^5\,Vm^{-1}}$$

إذن التوتر اللازم هو: $\boxed{U=8.10^3V}$, $\boxed{U=Ed}$

<u>التمرين 4.1:</u>

توزيع الشحنات غير متواصل. الحقل الكهروساكن يحمله المحور بسبب تناظر متعدد الأضلاع بالنسبة للمحور Oz : $E_z=E\cos\theta$. لتكن R نصف قطر الدائرة التي تحصر متعدد الأضلاع.

الحقل الناتج في النقطة M عن الشحنة q الموضوعة في القمة A_1 : (أنظر الشكل)

$$\left.\begin{array}{l} E_{1z}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{\left(A_1M\right)^2}\cos\theta \\ \cos\theta=\dfrac{OM}{A_1M}=\dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \end{array}\right| \Rightarrow E_{1z}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

كل ضلع يرى من المركز تحت الزاوية $\dfrac{2\pi}{n}$. بالنظر إلى الشكل فإن:

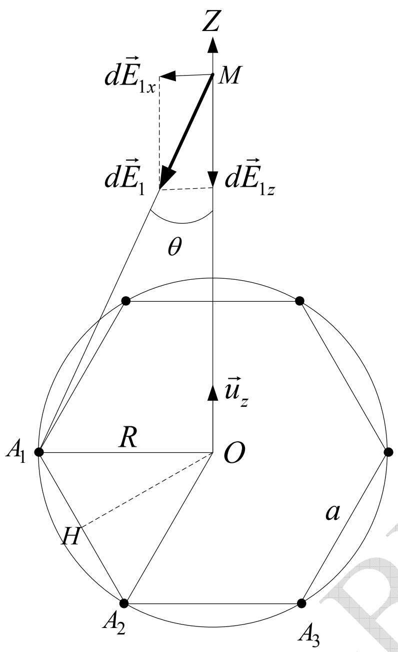
$$\left.\begin{array}{l} A_1H=\dfrac{a}{2}=R\sin\widehat{A_1OH} \\ \widehat{A_1OH}=\dfrac{2\pi}{n}/2 \Rightarrow \widehat{A_1OH}=\dfrac{\pi}{n} \end{array}\right| \Rightarrow R=\frac{a}{2\sin\dfrac{\pi}{n}}$$

الحقل الكهربائي الحاصل يساوي مجموع كل الحقول الناتجة عن كل الشحنات النقطية:

$$\vec{E}=\vec{E}_z=\sum_1^n\vec{E}_{iz}$$

و عليه:

$$\boxed{\vec{E}_z=n\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(\dfrac{a^2}{4\sin^2\dfrac{\pi}{n}}+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{u}_z}$$



2/ في حالة مثلث متساوي الأضلاع فإن $n=3$ و منه فالحقل الكهروساكن هو:

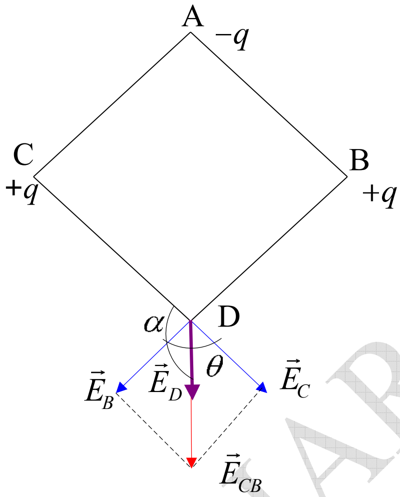
$$\vec{E}_z = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(\dfrac{a^2}{4\sin^2\dfrac{\pi}{3}}+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{u}_z \Rightarrow \boxed{E_z = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(\dfrac{a^2}{3}+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

في حالة مربع فإن $n=4$ و منه فالحقل الكهروساكن هو:

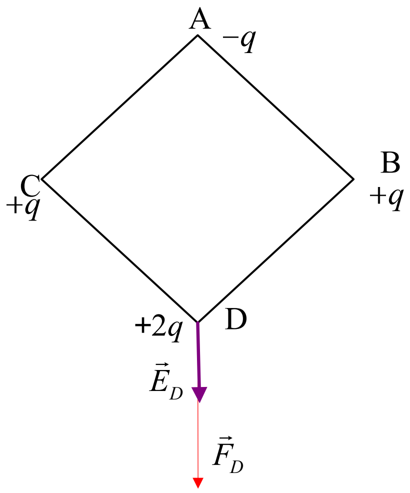
$$\vec{E}_z = \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(\dfrac{a^2}{4\sin^2\dfrac{\pi}{4}}+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{u}_z \Rightarrow \boxed{E_z = \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(\dfrac{a^2}{2}+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

التمرين5.1:

1/ تمثيل و حساب الحقل الكهربائي:



شكل تابع للسؤال 1



شكل تابع للسؤال3

$$\left.\begin{array}{l}\vec{E}_D=\vec{E}_A+\vec{E}_B+\vec{E}_C\\ \vec{E}_{CB}=\vec{E}_C+\vec{E}_B\end{array}\right|\Rightarrow \vec{E}_D=\vec{E}_{CB}+\vec{E}_A$$

$$E_C=E_B=k\frac{q}{a^2}\quad ;\quad (AD=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}\,)\Rightarrow\quad E_A=k\frac{q}{2a^2}$$

$$E_{CB}=\sqrt{{E_C}^2+{E_B}^2+2E_BE_C\cos\pi/2}\Rightarrow E_{CB}=E_C\sqrt{2}\Rightarrow E_{CB}=\sqrt{2}\frac{kq}{a^2}$$

$$\alpha=\pi\quad\Rightarrow\quad E_D=\sqrt{{E_{CB}}^2+{E_A}^2-2E_AE_{CB}.\cos\pi}\Leftrightarrow E_D=E_{CB}-E_A$$

$$E_D=\frac{kq}{a^2}.\sqrt{2}-\frac{kq}{2a^2}\Rightarrow E_D=\frac{kq}{a^2}.\left[\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right]\Rightarrow\boxed{E_D=0{,}914.\frac{kq}{a^2}}(V.m^{-1})$$

2/ حساب الكمون الناتج في النقطة D:

$$V_D=V_A+V_C+V_B\quad ;\quad V_D=-\frac{kq}{\sqrt{2}a}+\frac{kq}{a}+\frac{kq}{a}\Rightarrow V_D=\frac{kq}{a}(2-\frac{1}{\sqrt{2}})\Rightarrow\boxed{V_D=1{,}29\frac{kq}{a}}$$

3/حساب القوة المطبقة على الشحنة $(+2q)$ في النقطة D:

$$\vec{F}_D=2q.\vec{E}_D\Rightarrow F_D=2q.E_D$$

$$F_D=2q.\left[\frac{kq}{a^2}(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right]\Rightarrow F_D=\frac{kq^2}{a^2}(2\sqrt{2}-1)\Rightarrow\boxed{F_D\simeq 1{,}83.\frac{kq^2}{a^2}}(N)$$

4/حساب الطاقة الكامنة للشحنة $+2q$:

$$E_p=Q.V\ ,\ E_p=2q.V\ ,\ E_p=2q.\frac{kq}{a}(2-\frac{1}{\sqrt{2}})\quad\Rightarrow\boxed{\begin{array}{l}E_p=2.\frac{kq^2}{a}(4-\sqrt{2})\\ E_p\simeq\ 2{,}59\frac{kq^2}{a}\end{array}}(J)$$

التمرين 6.1:

1/ لحساب الكمون الكهربائي نستعمل العبارة السلمية: $V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d}$

بعد وضع النقطتين على المعلم كما هو مبين على الشكل نحسب البعدين d و d' للنقطة M عن الشحنتين:

$$d'=\sqrt{(x-4a)^2+y^2+z^2} \quad ، \quad d=\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}$$

الكمون الناتج في النقطة $M(x,y,z)$ هو إذن:

$$V_M=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d}-\frac{2}{d'}\right)$$

$$\boxed{V_M=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}-\frac{2}{\sqrt{(x-4a)^2+y^2+z^2}}\right)}$$

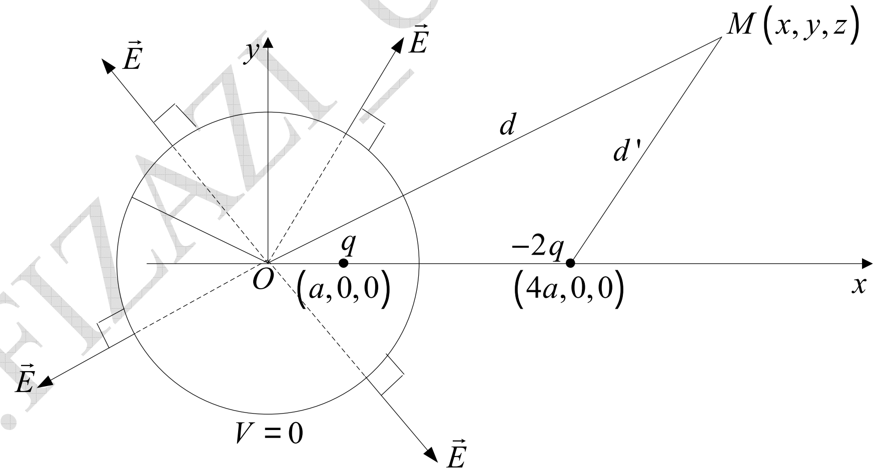
2/ السطح متساوي الكمون:

$$V(x,y,z)=0\Rightarrow\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d}-\frac{2}{d'}\right)=0$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}-\frac{2}{\sqrt{(x-4a)^2+y^2+z^2}}=0\Rightarrow\boxed{x^2+y^2+z^2=4a^2}$$

يتبين لنا أن السطح متساوي الكمون $V=0$ هو كرة نصف قطرها $r=2a$.

3/ الحقل الكهربائي عمودي على السطح المتساوي الكمون. مهما كانت النقطة التي يمر منها الحقل فإنه عمودي على سطح الكرة و بالتالي فإنه يمر لا محالة بالمركز O لهذه الكرة.



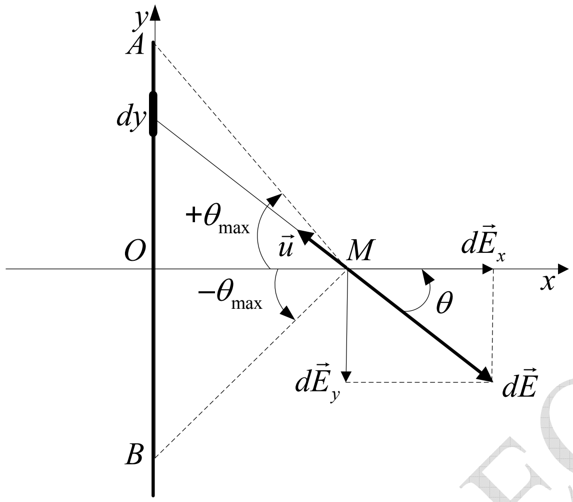
التمرين 7.1 :

1/ ليكن الحقل العنصري $d\vec{E}$ في النقطة M الناتج عن طول عنصري dy من القطعة المستقيمة. M تبعد عن dy مسافة .

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{E}(M)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u} \\ dq=\lambda dy \end{array}\right| \Rightarrow d\vec{E}(M)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy}{r^2}\vec{u}$$

للحقل العنصري $d\vec{E}(M)$ مركبتان:

$$d\vec{E}(M) = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$$
$$d\vec{E}(M) = dE_x.\vec{u}_x + dE_y.\vec{u}_y$$
$$dE_x = dE.\cos\theta \quad , \quad dE_y = dE.\sin\theta$$



لنبرهن أن $E_y = 0$

$$\left.\begin{array}{l} dE_y = dE.\sin\theta \\ dE_y = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda dy}{r^2}\sin\theta \\ r^2 = \dfrac{x^2}{\cos^2\theta} \\ y = xtg\theta \Rightarrow dy = \dfrac{x}{\cos^2\theta}d\theta \end{array}\right| \Rightarrow E_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\int_{-\theta_{\max}}^{+\theta_{\max}}\sin\theta d\theta$$

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\left[\cos\theta\right]_{-\theta_{\max}}^{+\theta_{\max}} \Rightarrow E_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\underbrace{\left[\cos(+\theta_{\max}) - \underbrace{\cos(-\theta_{\max})}_{\cos\theta_{\max}}\right]}_{0}$$

$$\boxed{E_y = 0}$$

2/ إذن الحقل الناتج يساوي مركبته الأفقية (حسب الشكل). نعبر عن r^2 و dy بدلالة x و $\cos\theta$:

$$\left.\begin{aligned} &dE_x = dE.\cos\theta \\ &dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy}{r^2}\cos\theta \\ &r^2 = \frac{x^2}{\cos^2\theta} \\ &y = xtg\theta \Rightarrow dy = \frac{x}{\cos^2\theta}d\theta \end{aligned}\right| \Rightarrow E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\int_{-\theta_{\max}}^{+\theta_{\max}}\cos\theta d\theta$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\left[\sin\theta\right]_{-\theta_{\max}}^{+\theta_{\max}} \Rightarrow E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\left[\sin\left(+\theta_{\max}\right) - \underbrace{\sin\left(-\theta_{\max}\right)}_{-\sin\theta_{\max}}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} &E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}.2\sin\left(+\theta_{\max}\right) \\ &\sin\left(+\theta_{\max}\right) = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{E = E_x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\vec{u}_x}$$

3/ في حالة سلك لا متناهي الطول فإن $a \to \infty$ و هذا يقودنا إلى $\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \to 1$. و منه:

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x} \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\vec{u}_x}$$

التمرين 8.1:

1/ نبحث أولا عن محصلة الحقلين العنصرين في النقطة P الناتجين عن طول عنصري من الجزء x و طول عنصري من الجزء $L-x$. ننظر إلى الشكل المرافق:

بالنسبة للجزء x : $d\vec{E}_1 = d\vec{E}_{1x} + d\vec{E}_{1y}$

بالنسبة للجزء $L-x$: $d\vec{E}_2 = d\vec{E}_{2x} + d\vec{E}_{2y}$

مركبتا الحقل العنصري $d\vec{E}$ الناتج عن تركيب $d\vec{E}_1$ و $d\vec{E}_2$ هما:

$$d\vec{E}_x = d\vec{E}_{1x} - d\vec{E}_{2x} \Rightarrow dE_x = dE_{1x} - dE_{2x}$$
$$d\vec{E}_y = d\vec{E}_{1y} + d\vec{E}_{2y} \Rightarrow dE_y = dE_{1y} + dE_{2y}$$

لحساب E_x علينا بحساب E_{1x} و E_{2x} :

حساب E_{1x}:

$$\left.\begin{aligned} &dE_{1x} = dE_1\sin\alpha \\ &dE_{1x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r_1^2}\sin\alpha \\ &dq = \lambda dx \end{aligned}\right| \Rightarrow dE_{1x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{r_1^2}\sin\alpha$$

نعبر عن dx و $_1$ بدلالة الزاوية α فنحصل على:

$$\left.\begin{array}{l} x = R\tan\alpha \Rightarrow dx = R\dfrac{d\alpha}{\cos^2\alpha} \\ r_1 = \dfrac{R}{\cos\alpha} \end{array}\right| \Rightarrow dE_{1x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\dfrac{d\alpha}{\cos^2\alpha}}{\left(\dfrac{R}{\cos\alpha}\right)^2}\sin\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\sin\alpha.d\alpha$$

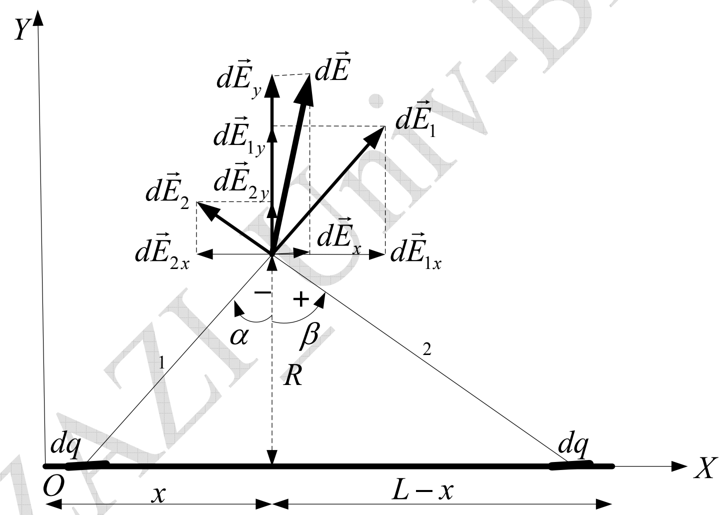
نكامل فنحصل على E_{1x}:

$$E_{1x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\int_0^{-\theta_1}\sin\alpha.d\alpha \Rightarrow E_{1x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left[-\cos\alpha\right]_0^{-\theta_1}$$

$$\boxed{E_{1x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left(-\cos\theta_1 + 1\right)}$$

بالمثل نحسب E_{2x}:

$$\left.\begin{array}{l} dE_{2x} = -dE_2\sin\beta \\ dE_{2x} = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{r_2^2}\sin\beta \\ dq = \lambda dx \end{array}\right| \Rightarrow dE_{2x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{r_2^2}\sin\beta$$



نعبر عن dx و $_2$ بدلالة الزاوية β فنحصل على:

$$\left.\begin{array}{l} x = R\tan\beta \Rightarrow dx = R\dfrac{d\beta}{\cos^2\beta} \\ r_2 = \dfrac{R}{\cos\beta} \end{array}\right| \Rightarrow dE_{2x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\dfrac{d\beta}{\cos^2\beta}}{\left(\dfrac{R}{\cos\beta}\right)^2}\sin\beta = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\sin\beta.d\beta$$

نكامل لنحصل على E_{2x}

$$E_{2x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\int_0^{\theta_2}\sin\beta d\beta \Rightarrow E_{2x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left[-\cos\beta\right]_0^{+\theta_2}$$

$$\boxed{E_{2x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left(-\cos\theta_2 + 1\right)}$$

و منه فأن المركبة الموازية للسلك هي:

$$E_x = E_{1x} - E_{2x} \Rightarrow E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left(-\cos\theta_1 + 1\right) - \left[-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left(-\cos\theta_2 + 1\right)\right]$$

$$\boxed{E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right)}$$

لحساب E_y علينا بحساب E_{1y} و E_{2y} :

حساب E_{1y}:

$$\left.\begin{aligned} dE_{1y} &= dE_1 \cos\alpha \\ dE_{1y} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r_1^2}\cos\alpha \\ dq &= \lambda dx \end{aligned}\right| \Rightarrow dE_{1y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{r_1^2}\cos\alpha$$

نعبر عن dx و r_1 بدلالة الزاوية α فنحصل على:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\tan\alpha \Rightarrow dx = R\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} \\ r_1 &= \frac{R}{\cos\alpha} \end{aligned}\right| \Rightarrow dE_{1y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\dfrac{d\alpha}{\cos^2\alpha}}{\left(\dfrac{R}{\cos\alpha}\right)^2}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\cos\alpha.d\alpha$$

نكامل لنحصل على E_{1y}:

$$E_{1y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\int_0^{-\theta_1}\cos\alpha.d\alpha \Rightarrow E_{1y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left[\sin\alpha\right]_0^{-\theta_1}$$

$$\boxed{E_{1y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left(-\sin\theta_1\right)}$$

بالمثل نحسب E_{2y}:

$$\left.\begin{aligned} dE_{2y} &= dE_2 \cos\beta \\ dE_{2y} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r_2^2}\cos\beta \\ dq &= \lambda dx \end{aligned}\right| \Rightarrow dE_{2x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{r_2^2}\cos\beta$$

نعبر عن dx و r_2 بدلالة الزاوية β فنحصل على:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\tan\beta \Rightarrow dx = R\frac{d\beta}{\cos^2\beta} \\ r_2 &= \frac{R}{\cos\beta} \end{aligned}\right| \Rightarrow dE_{2y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\dfrac{d\beta}{\cos^2\beta}}{\left(\dfrac{R}{\cos\beta}\right)^2}\cos\beta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\cos\beta.d\beta$$

نكامل لنحصل على E_{2y}

$$E_{2y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\int_0^{\theta_2}\cos\beta d\beta \Rightarrow E_{2y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left[\sin\beta\right]_0^{+\theta_2}$$

$$\boxed{E_{2y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left(\sin\theta_2\right)}$$

و منه فأن المركبة العمودية للسلك هي:

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} \Rightarrow E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left(-\sin\theta_1\right) + \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left(\sin\theta_2\right)\right]$$

$$\boxed{E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right)}$$

و عليه فإن الحقل الناتج في النقطة P عن كل السلك هو:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left[\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right)\vec{u}_x + \left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right)\vec{u}_y\right]}$$

2/ حينما تقع النقطة P على نفس البعد من نهايتي السلك فإن: $\theta_1 = -\theta_2$. نضع $\theta_2 = \theta$، و عليه يكون الحقل الناتج هو:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left[\underbrace{\left(\cos\theta - \cos(-\theta)\right)}_{0}\vec{u}_x + \underbrace{\left(\sin\theta - \sin(-\theta)\right)}_{2\sin\theta}\vec{u}_y\right]$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\sin\theta\,\vec{u}_y} \Leftrightarrow \boxed{E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\sin\theta}$$

بالنسبة لسلك لا متناهي الطول فإن $\theta \to \frac{\pi}{2}$ أي $\sin\theta \to 1$ و عليه:

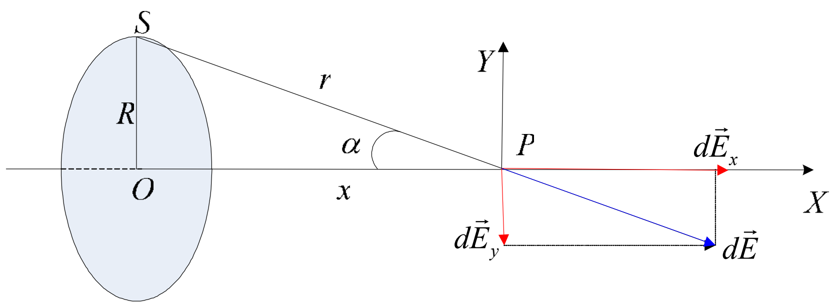
$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\vec{u}_y} \Leftrightarrow \boxed{E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}}$$

<u>التمرين 9.1</u>

الحقل الكهربائي العنصري $d\vec{E}$ الناتج في النقطة P عن شحنة عنصرية dq من السلك هو: $d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y \Rightarrow d\vec{E} = dE_x.\vec{i} + dE_y.\vec{j}$

بسبب التناظر فأن $\vec{E}_y = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_x$

$$\left.\begin{array}{l} dE = k\dfrac{dq}{r^2} \\ dE_x = dE.\cos\alpha \\ dq = \lambda.dl \end{array}\right| \Rightarrow dE_x = k\frac{dq}{r^2}.cos\alpha \Rightarrow dE_x = k\frac{\lambda dl}{r^2}.cos\alpha$$



في المثلث القائم POS :

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} \Rightarrow dE_x = \frac{k\lambda x}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}dl \quad ;$$

$$E_x = \frac{k\lambda x}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi R} dl \Rightarrow E_x = \frac{k\lambda x}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}.2\pi R$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda x R}{2.\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}\vec{i}} \Leftrightarrow \boxed{E = \frac{\lambda x R}{2.\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}}(V.m^{-1})$$

2/حساب الجهد الكهربائي:

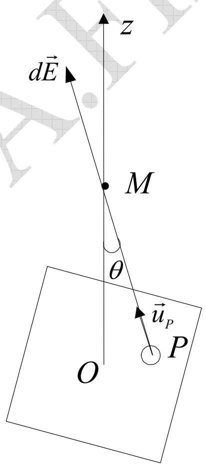
$$dV = k\frac{dq}{r} \quad , dV = k\frac{\lambda dl}{\left(x^2+R^2\right)^{1/2}} \Rightarrow V = k\frac{\lambda}{\left(x^2+R^2\right)^{1/2}}\int_0^{2\pi R} dl \Rightarrow \boxed{V = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{\left(x^2+R^2\right)}}}(V)$$

3/تعيين النقطة ذات الحقل الكهربائي الأعظمي: لكي يكون الحقل أعظميا يجب أن تكون مشتقته بالنسبة لـــ x معدومة: $\left.\frac{dE_x}{dx}\right|_M = 0$ و لذا نبدأ بحساب هذه المشتقة.

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{\left(x^2+R^2\right)^{3/2} - \frac{3}{2}(2x)\left(x^2+R^2\right)^{1/2} - x}{(x^2+R^2)^3}\right] = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{\left(x^2+R^2\right)^{1/2} \times \left(x^2+R^2-3x^2\right)}{(x^2+R^2)^3}\right]$$

العلاقة النهائية: $\boxed{\frac{dE_x}{dx} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{R^2-2x^2}{(x^2+R^2)^{5/2}}\right]}$

$$\frac{dE_x}{dx} = 0 \Rightarrow R^2 - 2x_{\max} = 0 \Rightarrow \boxed{x_{\max} = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}}$$



<u>التمرين 10.1:</u>

الحقل الكهروساكن العنصري الناتج عن الشحنة العنصرية المتمركزة حول النقطة P يساوي:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS}{r^2}\vec{u}_P$$

بسبب التناظر فإن الحقل الحاصل يحمله المحور OZ :

$$dE_z = dE.\cos\theta \Rightarrow E(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma dS}{r^2}.\cos\theta$$

نتعرف على الزاوية المجسدة العنصرية $d\Omega = \frac{dS.\cos\theta}{r^2}$ و التي من خلالها، و من النقطة M، نرى السطح العنصري dS حول النقطة P :

$$\boxed{E(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Omega(M)}$$

تقع النقطة M على البعد $\frac{a}{2}$، أي في مركز مكعب حيث الصفيحة تشكل إحدى واجهاته.

لما ننظر من النقطة M إلى كل فضاء المكعب(6 واجهات) تكون الزاوية المجسدة تساوي $\Omega=4\pi$، و منه فإن واجهة واحدة تقابلها زاوية مجسدة قدرها: $\Omega(M)=\frac{4\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$. و في الأخير فإن الحقل الكهروساكن الناتج عن الصفيحة في النقطة M يساوي:

$$E(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\boxed{E(M)=\frac{1}{6\varepsilon_0}}$$

التمرين 11.1:

1/ نعتبر على القرص سطحا عنصريا واقعا على البعد من المركز O. يكتب هذا العنصر من السطح، في قاعدة اسطوانية $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$: $d^2S=dr.rd\theta$ ، يحمل شحنة عنصرية $d^2q=\sigma d^2S$ و ينتج حقلا $\overrightarrow{d^2E}$ بحيث $\overrightarrow{d^2E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d^2q}{l^2}$.

بما أن الحقل الكلي يحمله $\vec{u}_z$، علينا بالبحث عن عبارة المسقط على هذا المحور.

كل السطوح العنصرية الواقعة على البعد من O تنتج حقولا كهروساكنة عنصرية تصنع نفس الزاوية مع المحور OZ. يمكننا إذن مكاملة النتيجة السابقة بتغير θ بين 0 و 2π :

$$dE_z=\int_0^{2\pi}d^2E.\cos\alpha=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{r\cos\alpha.dr}{l^2}d\theta=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{r\cos\alpha.dr}{l^2}$$

بقي لنا أن نكامل ما بين R_1 و R_2 بالانتباه إلى أن $l^2=r^2+z^2$ و $\cos\alpha=\frac{z}{l}$:

$$E=\int_{R_1}^{R_2}dE_z=\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{rdr}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}$$

نضع: $u=\left(r^2+z^2\right)$. و منه $du=2rdr$. مع $u_1=\left(R_1^2+z^2\right)$ و $u_2=\left(R_2^2+z^2\right)$.

نحصل على:

$$E=\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{2u^{3/2}}\Rightarrow E=\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[-2\sqrt{u}\right]_{u_1}^{u_2}$$

و في الأخير:

$$\boxed{E=\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right)}$$

2/ الكمون الناتج عن السطح العنصري d^2S هو $d^2V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d^2q}{l}$. بعد مكاملة الزاوية θ، نحصل على $dV=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{rdr}{\sqrt{r^2+z^2}}$. كما فعلنا في السابق، نضع $u=\left(r^2+z^2\right)$، فنحصل على $dV=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\frac{du}{\sqrt{u}}$.

كل هذا يؤدي بنا إلى:

$$V=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{\sqrt{u}}\Rightarrow V=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{u}\right]_{u_1}^{u_2}$$

$$V=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{u_2}-\sqrt{u_1}\right]\Rightarrow \boxed{V=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R_2^2+z^2}-\sqrt{R_1^2+z^2}\right]}$$

نعرف أن $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V$

بالإحداثيات الأسطوانية يكتب التدرج: $\overrightarrow{grad}V=\frac{\partial V}{\partial\rho}\vec{u}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\theta}\vec{u}_\theta+\frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$

بتطبيق هذا على النتيجة السابقة نجد مركبة واحدة للحقل الكهروساكن وفق المحور OZ و ذلك لأن المشتقتان الجزئيتان بالنسبة لــ و θ معدومتين.

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{R_1^2+z^2}}-\frac{z}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right)\Rightarrow \boxed{E=\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right)}$$

3/ عندما $R_1=0$ نجد الحقل الكهروساكن الناتج على محور قرص مشحون بانتظام:

$$E=\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right)\Rightarrow \boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R_2^2}{z^2}}}\right)}$$

4/ بالنسبة لمستوى لامتناهي $R_2\to\infty$. يكون لدينا:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R_2^2}{z^2}}}\approx\frac{1}{\sqrt{\frac{R_2^2}{z^2}}}=\frac{z}{R}\to 0\Rightarrow \boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

يصبح الحقل مستقلا عن z، أي عن المسافة إلى المستوى. في كل نقطة خارج المستوى المشحون، الحقل يساوي $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

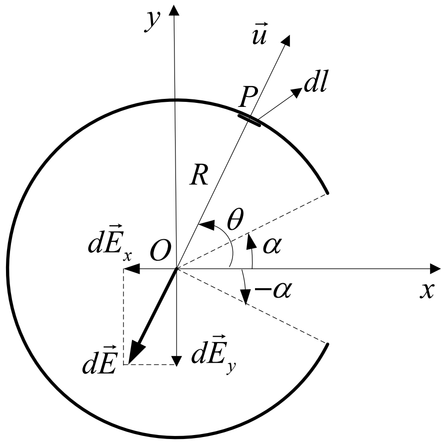
<u>التمرين 12.1</u>

ليكن الحقل العنصري $d\vec{E}$ الناتج في النقطة O عن طول عنصري dl متمركز في نقطة P من المحيط المشحون للحلقة: (إشارة ناقص ناتجة عن الاتجاهين المتعاكسين للحقل العنصري $d\vec{E}(O)$ و شعاع الواحدة $\vec{u}$ حسب ما هو موضح في الشكل أسفله).

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{E}(O)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}\vec{u}_r \\ dq=\lambda dl \\ dl=Rd\theta \end{array}\right|\Rightarrow d\vec{E}(O)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda d\theta}{R}\vec{u}$$

للحقل العنصري $d\vec{E}(O)$ مركبتان: $d\vec{E}(O)=d\vec{E}_x+d\vec{E}_y$، غير أن، و بسبب تناظر توزيع الشحنات، فإن المركبة $d\vec{E}_x$ هي وحدها المساهمة في الحقل الإجمالي في O. و منه:

$$dE_x = dE.\cos\theta \Rightarrow dE_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\cos\theta.d\theta$$



للحصول على الحقل الكلي الناتج عن كل الشحنة في النقطة O، نكامل من $\theta = \alpha$ حتى $\theta = 2\pi - \alpha$:

$$dE_x = dE.\cos\theta \Rightarrow E = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left[\sin\theta\right]_{\alpha}^{2\pi-\alpha}$$

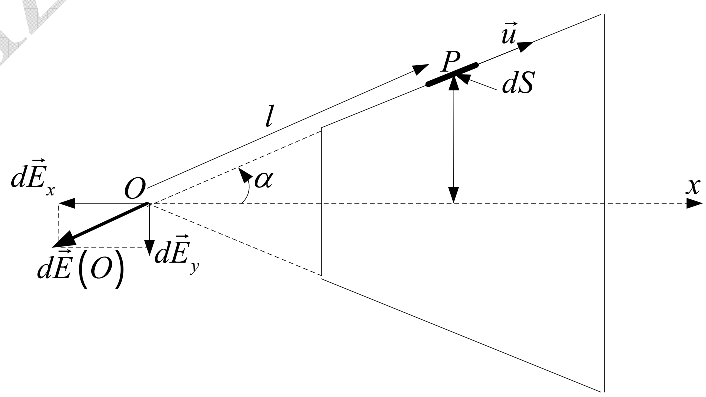
$$E = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\left[\sin(2\pi-\alpha) - \sin\alpha\right]$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\sin\alpha \Leftrightarrow \vec{E} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\sin\alpha.\vec{u}_y}$$

<u>التمرين 13.1:</u>

المستويات المارة من المحور Ox هي مستويات تناظر لتوزيع الشحنات. لا بد أن الحقل الكهروساكن ينتمي تباعا لمجموع هذه المستويات إذن لتقاطعها: الحقل الناتج $\vec{E}(O)$ حامله هو المحور Ox.

نعتبر سطحا عنصريا dS الواقع على جسم المخروط و المتمركز حول النقطة P. هذا ما هو موضح على الشكل التالي:



السطح العنصري يولد في O الحقل العنصري:

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{E}(O) = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{l^2}\vec{u} \\ dq = \sigma dS \\ dS = rd\theta dl \end{array}\right| \Rightarrow d\vec{E}(O) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma rd\theta dl}{l^2}\vec{u}$$

للحقل العنصري $d\vec{E}(O)$ مركبتان: $d\vec{E}(O) = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$، غير أن، و بسبب تناظر توزيع الشحنات، فإن المركبة $d\vec{E}_x$ هي وحدها المساهمة في الحقل الإجمالي في O. و منه:

$$dE_x = dE(O).\cos\theta \Rightarrow dE_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma rd\theta dl}{l^2}\cos\alpha \rightarrow (1)$$

نعبر عن l بدلالة :

$$\sin\alpha = \frac{r}{l} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{l^2} = \dfrac{\sin^2\alpha}{r^2} \\ dl = \dfrac{1}{\sin\alpha}dr \end{cases}$$

نعوض في المعادلة (1):

$$dE_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma rd\theta\frac{1}{\sin\alpha}dr\frac{\sin^2\alpha}{r^2}\cos\alpha$$

$$dE_x = -\frac{\sigma_0 a}{4\pi\varepsilon_0}\cos\alpha\sin\alpha.\frac{dr}{r^2}d\theta$$

للحصول على الحقل الكلي الناتج عن كل الشحنة في النقطة O، نكامل تكاملا مضاعفا:

$$E_x = -\frac{\sigma_0 a}{4\pi\varepsilon_0}\cos\alpha\sin\alpha\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2}\int_0^{2\pi}d\theta$$

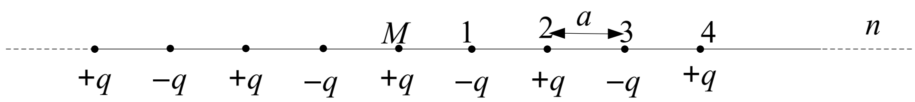
$$E_x = -\frac{\sigma_0 a}{4\pi\varepsilon_0}\cos\alpha\sin\alpha\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2}[\theta]_0^{2\pi}$$

$$E(O) = E_x = \frac{\sigma_0 a}{2\varepsilon_0}\underbrace{\cos\alpha\sin\alpha}_{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right]$$

$$\boxed{E(O) = \frac{\sigma_0 a}{4\varepsilon_0}\sin 2\alpha\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \Leftrightarrow \vec{E}(O) = \frac{\sigma_0 a}{4\varepsilon_0}\sin 2\alpha\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\vec{u}_x}$$

التمرين 14.1:

كل الشوارد تقع على استقامة واحدة. لتكن M نقطة تناظر. (الشكل)



ندرس أولا النصف الأيمن للمستقيم: الطاقة الكامنة للشحنة الواقعة في النقطة M تساوي:

$$E_{P_M} = q_M . V_M$$

الكمون الكهربائي V_M الناتج في النقطة M عن شوارد النصف المذكور هي:

$$\left.\begin{array}{l} V_M = \sum V_i = \sum \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_i}{r_i} \\ V_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1}{a} \prec 0 \\ V_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_2}{2a} \succ 0 \\ V_3 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_3}{3a} \prec 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ |q_1| = |q_2| = |q_3| = \ldots.. = |q| \end{array}\right| \Rightarrow V_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a}\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n}\right)$$

و عليه فإن الطاقة الكامنة للشحنة الواقعة في النقطة M (باعتبار نصفي المستقيم معا) هي:

$$\left.\begin{array}{l} E_{P_M} = 2q_M . V_M \\ |q_M| = q \end{array}\right| \Rightarrow E_{P_M} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n}\right)$$

و هذا ما يعادل:

$$E_{P_M} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n}\right)$$

باعتبار $\ln(1+x) = \left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\ldots\ldots\ldots\dfrac{x^n}{n}\right)$ فإن $\ln(1+1) = \left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots\ldots\ldots\dfrac{1}{n}\right)$

إذن:

$$E_{P_M} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}\ln 2 \Rightarrow \boxed{E_{P_M} = -3,2.10^{-26}J}$$

التمرين 15.1:

الحقل الكهربائي في النقطة O : (أنظر الشكل)

الإكليل الكروي العنصري عرضه $Rd\theta$ و محيطه $2\pi R\sin\theta$ يحمل الشحنة العنصرية $dq = \sigma dS = 2\pi R^2\sigma_0 \sin\theta\cos\theta d\theta$. بسبب التناظر الحقل $\vec{E}_x$ هو وحده المساهم في الحقل $\vec{E}$.

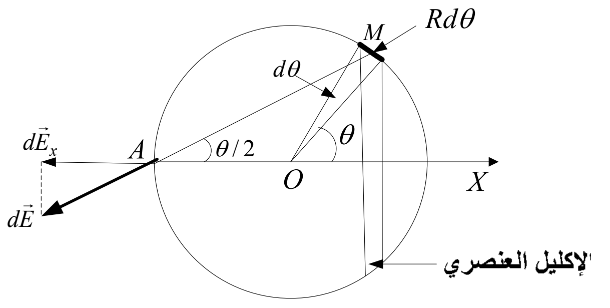
نلاحظ من خلال الشكل أن:

$$dE_x(O) = -dE(O)\cos\theta = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}\cos\theta$$

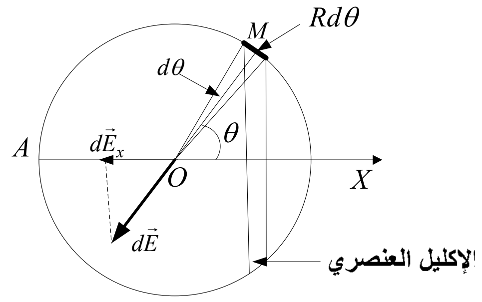
$$dE_x(O) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi R^2\sigma_0\sin\theta\cos\theta^2 d\theta}{R^2}$$

$$E_x(O) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\underbrace{\sin\theta\cos^2\theta.d\theta}_{\cos^2\theta.d(\cos\theta)} \Rightarrow E_x(O) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi}$$

$$\boxed{E(O) = -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}(O) = -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\vec{u}_x}$$



الحقل في النقطة A



الحقل في النقطة O

<u>الحقل الكهربائي في النقطة A</u> (أنظر الشكل)

نفس الإكليل الكروي العنصري عرضه $Rd\theta$ و محيطه $2\pi R\sin\theta$ يحمل الشحنة العنصرية $dq = \sigma dS = 2\pi R^2\sigma_0 \sin\theta\cos\theta d\theta$. غير أن الفرق بين الحالة هذه و الحالة السابقة تتمثل في المسافة بين النقطة M و النقطة A. حسب الشكل:

$$\left.\begin{array}{l}(OM)^2 = (OA)^2 + (AM)^2 + 2(OA)(AM)\cos\dfrac{\theta}{2}\\ R^2 = R^2 + r^2 + 2rR\cos\dfrac{\theta}{2}\end{array}\right| \Rightarrow (OA) = r = 2R\cos\frac{\theta}{2}$$

بسبب التناظر الحقل $\vec{E}_x$ هو وحده المساهم في الحقل $\vec{E}$.

نلاحظ من خلال الشكل أن:

$$dE_x(A) = -dE(A)\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$dE_x(A) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi R^2\sigma_0\sin\theta\cos\theta d\theta}{\left(2R\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$E_x(A) = -\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0}\int_0^\pi \frac{\sin\theta\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}.d\theta = -\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0}\int_0^\pi \frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}.d\theta$$

نقوم بالتحويل المثلثي $\sin\theta = \sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$، ثم نعوض:

$$E_x(A) = -\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0}\int_0^\pi \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\cos\theta.d\theta = -\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0}\int_0^\pi 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta.d\theta$$

نقوم بتحويل مثلثي آخر $2\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta = \sin\frac{3\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}$، ثم نعوض:

$$E_x(A) = -\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{3\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right).d\theta$$

$$E_x(A) = -\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0}\left[-\frac{2}{3}\cos\frac{3\theta}{2} + 2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = -\frac{\sigma_0}{8\varepsilon_0}\left[+\frac{2}{3} - 2\right]$$

$$\boxed{E_x(A) = \frac{\sigma_0}{6\varepsilon_0}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}(A) = \vec{E}_x(A) = \frac{\sigma_0}{6\varepsilon_0}\vec{u}_x}$$

التمرين 16.1:

1/ الكمون العنصري dV الناتج في المركز O عن شحنة عنصرية dq هو: $dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R}$ (كل dq و مهما كان موقعها على سطح نصف الكرة تبعد بنفس المسافة R عن المركز O).

بما أن سطح نصف الكرة هو $S = \frac{4\pi R^2}{2}$ فإنه يحمل الشحنة الكلية: $q = \sigma S \Rightarrow q = 2\sigma\pi R^2$. إذن الكمون في النقطة O الناتج عن كل الشحنة هو:

$$\left.\begin{array}{l} V(O) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R} \\ V(O) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \\ q = 2\sigma\pi R^2 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{V(O) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}}$$

لحساب الحقل في مركز نصف الكرة، نجزئ نصف الكرة إلى أكاليل عنصرية. الإكليل الواحد محيطه 2π، حيث $r = R\sin\theta$، و سمكه $Rd\theta$ و سطحه $dS = 2\pi R^2 d\theta$. كل إكليل عنصري يحمل الشحنة العنصرية $dq = \sigma dS = 2\pi\sigma R^2 \sin\theta d\theta$. (أنظر الشكل في الأسفل)

الحقل العنصري dE الناتج في المركز O عن شحنة عنصرية يحملها إكليل هو: $d\vec{E} = dE_z + d\vec{E}_x$.

بسبب التناظر فإن الحقل الناتج يحمله المحور Oz و بالتالي فإن:

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{E}_x = dE.\sin\theta.\vec{u}_x = \vec{0} \\ d\vec{E}_z = dE.\cos\theta.\vec{u}_z \end{array}\right| \Rightarrow d\vec{E} = d\vec{E}_z$$

و من كل هذا نستنتج أن:

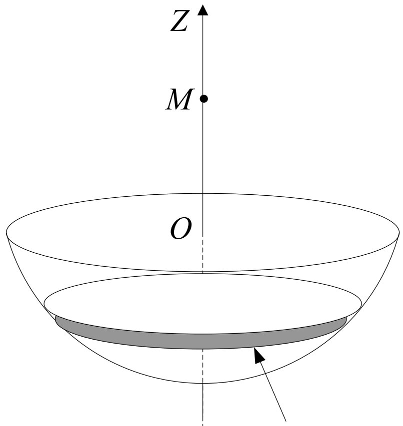
$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS}{R^2}\cos\theta$$

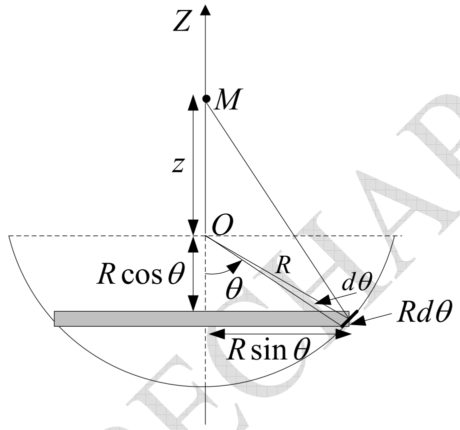
$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma 2\pi R^2 \sin\theta d\theta}{R^2}\cos\theta \Rightarrow dE_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\theta\cos\theta d\theta$$

نقوم بالتحويل المثلثي: $s\,\text{in}\,\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$، ثم نعوض و نكامل لنحصل في الأخير على الحقل الكهروساكن $E(O)$ الناتج عن كل الشحنة السطحية في مركز نصف الكرة :

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin 2\theta d\theta \Rightarrow E_z = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]$$

$$\boxed{E_z = E(O) = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}_z = \vec{E}(O) = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\vec{u}_z}$$





لم نحسب سوى قيمة الكمون في نقطة معينة $V(O)$ وليس دالة الكمون $V(z)$ على طول المحور Oz.
و لهذا السبب لا يمكن استعمال القانون $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ لحساب الحقل.
2/ نتبع نفس الخطوات السابقة في هذا السؤال ما عدى أن في هذه الحالة ،الشحنة العنصرية dq لا تبعد بنفس المسافة عن النقطة M الواقعة على المحور Oz.
الكمون العنصري:

$$\left.\begin{array}{l} dV = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{r} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\sigma dS}{r} \\ dS = dS = 2\pi R^2 d\theta \\ r^2 = (z + R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2 \end{array}\right| \Rightarrow dV = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0}\frac{\sin\theta . d\theta}{(z^2 + R^2 + 2Rz\cos\theta)^{1/2}}$$

لمكاملة هذه العبارة نضع $u = z^2 + R^2 + 2Rz\cos\theta$ و التي تفاضلها $du = -2Rz\sin\theta . d\theta$، و نعرف أن: $\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u}$. و منه:

$$V(M) = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0}\frac{1}{(-2zR)}\int_{u(\theta=0)}^{u(\theta=\pi/2)}\frac{du}{2\sqrt{u}}$$

$$V(M) = -\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z}\left[\sqrt{u}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \Rightarrow \boxed{V(M) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z}\left[z + R - \sqrt{z^2 + R^2}\right]}$$

للحصول على الحقل الكهربائي يكفي اشتقاق دالة الكمون بالنسبة لـــ z:

$$\vec{E}(z) = -\frac{dV(z)}{dz}\vec{u}_z \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left(\frac{R}{z^2} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{\sqrt{z^2 + R^2}}{z^2}\right)$$

$$\boxed{E(z)=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left(\frac{R-\sqrt{z^2+R^2}}{z^2}+\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)}$$

حين $z=0$ ، فإن $V(0)$ و $E(0)$ تأخذان شكلين غير محددين. و لذا يجب علينا البحث عن نهايتيهما عندما $z\to 0$.

نكتب الكمون على الشكل:

$$V(z)=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left[1+\frac{R}{z}-\frac{\left(z^2+R^2\right)^{1/2}}{z}\right]=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left[1+\frac{R}{z}-\frac{R}{z}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)^{1/2}\right]$$

نحسب نهاية الكمون عندما $z\to 0$:

$$V(0)=\lim_{z\to 0}V(z)=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left[1+\frac{R}{z}-\frac{R}{z}\left(1+\frac{1}{2}\frac{z^2}{R^2}\right)\right]\Rightarrow\boxed{V(0)=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}}$$

بالنسبة للحقل نتبع نفس المنهجية:

$$E(0)=\lim_{z\to 0}\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left(\frac{R}{z^2}-R\frac{\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)^{1/2}}{z^2}+\frac{1}{\sqrt{\underbrace{z^2}_{\to 0}+R^2}}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{R}{z^2}\left(\frac{z^2}{2R^2}\right)+\frac{1}{R}\right)$$

$$\boxed{E(0)=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}}$$

و هكذا نكون قد وجدنا من جديد قيمتي الكمون و الحقل و المتطابقتين تماما مع نتيجتي السؤال1/.

التمرين 17.1:

ليكن Oz محور تناظر (عمودي على المستوى اللامتناهي)، و M نقطة من المحور Oz لامتناهية القرب من السطح.

الحقل الناتج يحمله المحور Oz و ذلك بسبب التناظر.

1/ ا/ نقسم المستوى إلى سلسلة من الأكاليل، ذات نصف قطر و سمك d، كما هو مبين على الشكل-أ-:

كل إكليل يحمل الشحنة العنصرية $dq=2\pi rdr.\sigma$ و يبعد عن النقطة M مسافة R .

الكمون الكهربائي الناتج عن الإكليل هو: $dV=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma.2\pi rdr}{R}$

باعتبار $V=0$ لما $r\to\infty$ ، فإن الكمون الكهربائي الناتج عن كل المستوى يساوي:

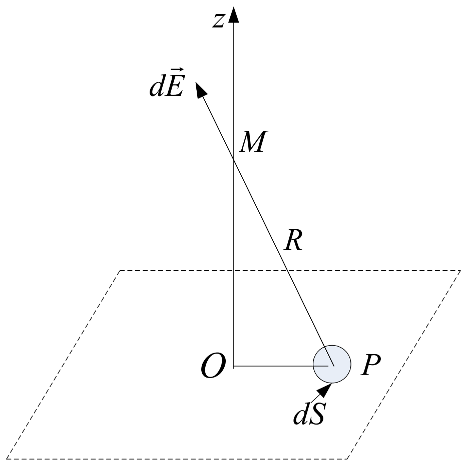
$$V=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^\infty\frac{rdr}{\sqrt{r^2+z^2}}\Rightarrow V=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{r^2+z^2}\right]_0^\infty$$

$$\boxed{V=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z}$$

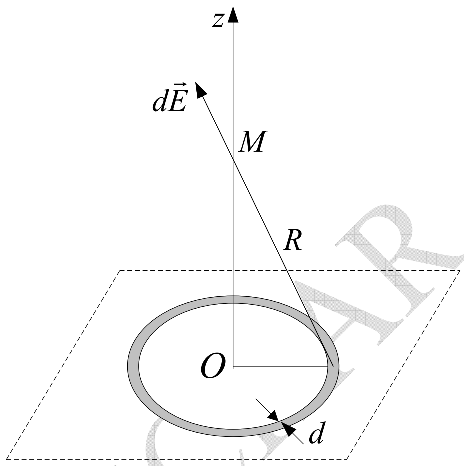
يكفي الآن اشتقاق عبارة الكمون التي توصلنا إليها لنحصل على الحقل الكهربائي:

$$E=-\frac{dV}{dz}\Rightarrow\boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

ب/ للتنويع نحسب في هذا السؤال الحقل الكهربائي ثم نستنتج الكمون الكهربائي.
ليكن $d\vec{E}$ الحقل العنصري المتولد عن الشحنة $dq = \sigma dS$ التي يحملها سطح عنصري dS حول النقطة P من السطح (الشكل-ب-):



(ب)



(أ)

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{(PM)^2}\vec{u}_P$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{E}(M) = \int dE.\cos\theta.\vec{u}_z \\ dq = \sigma.dS \\ PM = r \end{array}\right| \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dS.\cos\theta}{r^2}\vec{u}_z$$

نتعرف على الزاوية الصلبة العنصرية $d\Omega = \dfrac{dS\cos\theta}{r^2}$ التي نرى من خلالها، و من النقطة M، السطح العنصري dS حول النقطة P. و بما أن السطح لا متناهي فإننا نراه تحت الزاوية الصلبة $\Omega_M = 2\pi$. و عليه:

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z} \Leftrightarrow \boxed{E(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

نحصل على عبارة الكمون الكهربائي انطلاقا من عبارة الحقل الكهربائي التي وجدناها:

$$dV = -Edz \Rightarrow V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^z dz \Rightarrow \boxed{V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z}$$

2/ **<u>باستعمال نظرية غوص</u>:** بالنظر إلى الشكل-ج- نختار سطح غوص الملائم و هو أسطوانة.
التدفق عبر السطح الجانبي معدوم لأن $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS}$، بينما التدفق عبر كل من السطحين القاعديين S_1 و S_2 يساوي $\Phi_{S1} = \Phi_{S2} = ES$. أما الشحنة المحصورة داخل الأسطوانة فهي: $Q_{\text{int}} = \sigma S$. و عليه، و حسب نظرية غوص فإن الحقل الكهربائي الناتج عن السطح اللامتناهي هو:

$$\Phi = 2ES = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

نلاحظ من خلال النتائج المتوصل إليها أن الحقل الكهربائي الناتج عن سطح لا متناهي ثابت في كل الفضاء المحيط بالمستوى؛ بينما الكمون الكهربائي يتناسب طردا مع المسافة بين السطح و النقطة الواقعة على محور هذا السطح.

3/ خلال سقوطها الشحنة خاضعة لقوتين شاقوليتين: ثقلها $\vec{P}$ و القوة الكهروساكنة $\vec{F}_e$. نطبق العلاقة الأساسية للتحريك لحساب تسارع الشحنة:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{P}+\vec{F}_e=m\vec{a}\\ &F_e=qE=q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\\ &P=mg \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{a=g+\frac{q}{2m}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

التسارع ثابت و المسار مستقيم إذن الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام. سرعة الشحنة عند وصولها المستوى تساوي:

$$v=\sqrt{2az} \Rightarrow \boxed{v=\sqrt{2\left(g+\frac{q}{2m}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)}}$$

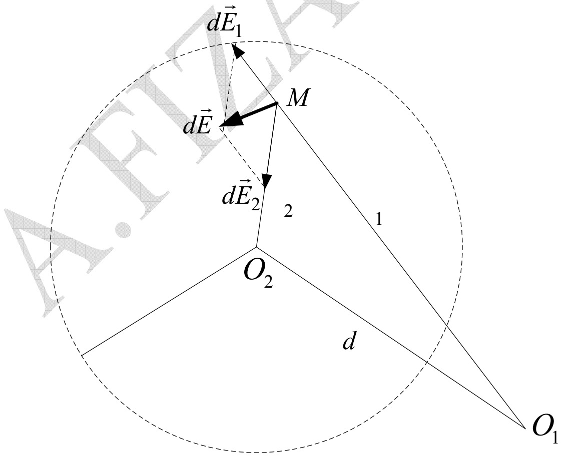
و في الأخير مدة سقوط الشحنة تساوي:

$$z=\frac{1}{2}at^2$$

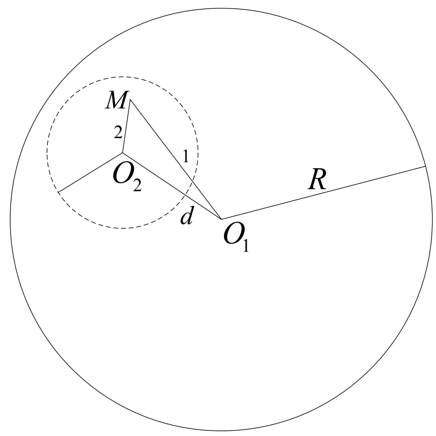
$$t=\sqrt{\frac{2z}{a}} \Rightarrow \boxed{t=\sqrt{\frac{2z}{g+\frac{q}{2m}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}}}}$$

التمرين 18.1:

يمكن نمذجة (تمثيل الشيء بنموذج) التجويف ذي النصف قطر المحفور داخل الكرة R على أنه تراكب لكرة مشحونة نصف قطرها ذات كثافة $-\rho$ مركزها O_2 و كرة نصف قطرها R ذات كثافة حجمية $+\rho$ مركزها O_1.



الحقل داخل التجويف



الكرة بداخلها التجويف

نطبق مبدأ التراكب في نقطة M من التجويف:

$$\vec{E}(M)=\vec{E}_1(M)+\vec{E}_2(M)$$

$\vec{E}_1(M)$: الحقل الناتج عن ρ

$\vec{E}_2(M)$: الحقل الناتج عن $-\rho$

التناظر و انعدام التغيرات لكل منبع تؤكد أن كل حقل هو قطري:

$$\vec{E}_1(M) = E_1\vec{u}_1 \quad , \quad \vec{u}_1 = \frac{\overrightarrow{O_1M}}{r_1}$$

$$\vec{E}_2(M) = E_2\vec{u}_2 \quad , \quad \vec{u}_2 = \frac{\overrightarrow{O_2M}}{r_2}$$

نستعمل نظرية غوص: من أجل كل توزيع نأخذ كرة نصف قطرها $_i$ و مركزها O_i و سطحها المغلق S_i يمر من النقطة M.

$$\oiint \vec{E}_i.\overrightarrow{dS}_i = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho V_i}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint E_1.dS_1 = E_1.4\pi r_1^2 = \rho\frac{4}{3\varepsilon_0}\pi r_1^3 \Rightarrow E_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r_1$$

$$\oiint E_2.dS_2 = E_2 4\pi r_2^2 = -\rho\frac{4}{3\varepsilon_0}\pi r_2^3 \Rightarrow E_2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r_2$$

نكتب العبارتين الشعاعيتين للحقلين الناتجين:

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r_1\vec{u}_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r_1\frac{\overrightarrow{O_1M}}{r_1} \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1M} \rightarrow (1)$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r_2\vec{u}_2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r_2\frac{\overrightarrow{O_2M}}{r_2} \Rightarrow \vec{E}_2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_2M} \rightarrow (2)$$

بجمع الحقلين نحصل على الحقل الناتج في نقطة M منتمية للتجويف:

$$(1)+(2) \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\underbrace{\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M}}_{\overrightarrow{O_1O_2}}\right)$$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}} \Leftrightarrow \boxed{E(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}d = C^{te}}$$

الحقل الكهروساكن الناتج منتظم داخل كل التجويف.

التمرين 19.1:

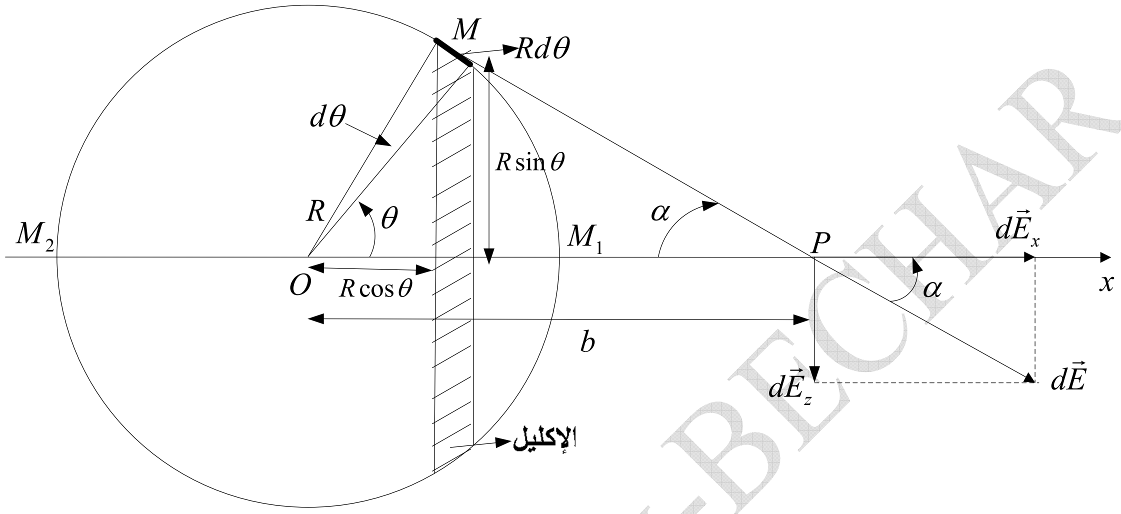
لحساب الحقل خارج الكرة، نجزئ الكرة إلى أكاليل عنصرية. الإكليل الواحد محيطه $2\pi\rho$، حيث $\rho = R\sin\theta$ (ρ نصف قطر الإكليل)، و سمكه $Rd\theta$ و سطحه $dS = 2\pi R^2\sin\theta d\theta$. كل إكليل عنصري يحمل الشحنة العنصرية $dq = \sigma dS = 2\pi\sigma R^2\sin\theta d\theta$.

الحقل العنصري dE الناتج عن الشحنة العنصرية التي يحملها إكليل هو: $d\vec{E} = dE_z + d\vec{E}_x$.

بسبب التناظر فإن الحقل الناتج يحمله المحور OX و بالتالي فإن:

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{E}_z = -dE.\sin\alpha.\vec{u}_z = \vec{0} \\ d\vec{E}_x = dE.\cos\alpha.\vec{u}_x \end{array}\right| \Rightarrow d\vec{E} = d\vec{E}_x \Leftrightarrow dE_x = dE\cos\alpha$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\cos\alpha \Rightarrow dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi\sigma R^2\sin\theta d\theta}{r^2}\cos\alpha \to (1)$$



نريد حذف θ و α من عبارة dE_x: نعوض $\cos\theta$ و $\sin\theta d\theta$:

$$R^2 = b^2 + r^2 - 2br\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2 + r^2 - R^2}{2br}$$

$$r^2 = R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{R^2 + b^2 - r^2}{2Rb} \to (2)$$

نشتق طرفي المعادلة (2) فنحصل على: $\sin\theta d\theta = \dfrac{rdr}{Rb}$

نعوض في المعادلة (1) و ننظم الناتج لنحصل على عبارة الحقل العنصري:

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi\sigma R^2\sin\theta d\theta}{r^2}\cos\alpha \Rightarrow dE_x = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma R^2}{r^2}\frac{rdr}{Rb}\left(\frac{b^2 + r^2 - R^2}{2br}\right)$$

$$dE_x = \frac{1}{4\varepsilon_0}\frac{\sigma R}{b^2}\left(\frac{b^2 + r^2 - R^2}{r^2}\right)dr = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\frac{R}{b^2}\left(\frac{b^2 - R^2}{r^2} + 1\right)dr$$

$$\boxed{dE_x = \frac{\sigma R}{4b^2\varepsilon_0}\frac{b^2 - R^2}{r^2}dr + \frac{\sigma R}{4b^2\varepsilon_0}dr}$$

نكامل الآن:

$$E_x = \frac{\sigma R}{4b^2\varepsilon_0}\left[\int_{r_1}^{r_2}\frac{b^2 - R^2}{r^2}dr + \int_{r_1}^{r_2}dr\right] \Rightarrow \boxed{E_x = \frac{\sigma R}{4b^2\varepsilon_0}\left(-\frac{b^2 - R^2}{r}\Bigg|_{r_1}^{r_2} + r\Big|_{r_1}^{r_2}\right)}$$

بقي أن نعين الحدين $_1$ و $_2$: بالنظر إلى الشكل نتتبع مواقع النقطة M المنتمية للإكليل العنصري المتخذ:

خارج الكرة: حين تكون M منطبقة على M_1 : $r_1 = PM_1 = b - R$ ، حين تكون منطبقة على M_2 :
$r_2 = PM_2 = b + R$

$$E = E_x = \frac{\sigma R}{4b^2\varepsilon_0}\left(-\frac{b^2 - R^2}{r}\bigg|_{b-R}^{b+R} + r\big|_{b-R}^{b+R}\right)$$

الحقل الناتج هو إذن:

$$E = \frac{\sigma R}{4b^2\varepsilon_0}\left\{\left[(b+R)-(b-R)\right]-\left[\left(\frac{b^2-R^2}{b+R}\right)-\left(\frac{b^2-R^2}{b-R}\right)\right]\right\}$$

$$E = \frac{\sigma R}{4b^2\varepsilon_0}(2R+2R) \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\frac{R^2}{b^2}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{b^2}\vec{u}_x}$$

داخل الكرة: (الشكل في الأسفل) حين تكون M منطبقة على M_1 : $r_1 = PM_1 = R - b$ ، حين تكون منطبقة على M_2 : $r_2 = PM_2 = b + R$

الحقل الناتج هو إذن:

$$E = E_x = \frac{\sigma R}{4b^2\varepsilon_0}\left(-\frac{b^2 - R^2}{r}\bigg|_{R-b}^{b+R} + r\big|_{R-b}^{b+R}\right)$$

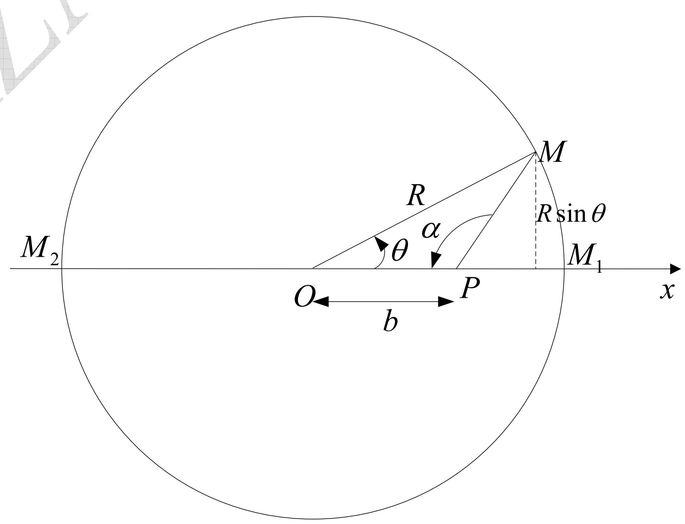
$$E = \frac{\sigma R}{4b^2\varepsilon_0}\left\{\left[(b+R)-(R-b)\right]-\left[\left(\frac{b^2-R^2}{b+R}\right)-\left(\frac{b^2-R^2}{R-b}\right)\right]\right\}$$

$$E = \frac{\sigma R}{4b^2\varepsilon_0}(2b-2b) \Rightarrow \boxed{E=0}$$

على سطح الكرة:

وجدنا أن خارج الكرة الحقل يساوي: $E = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 b^2}$. على السطح يأخذ الحقل الناتج قيمة خاصة:

$$b = R \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_x}$$



2/ **نطبق نظرية غوص:** سطح غوص الواجب اختياره هو كرة نصف قطرها $b(b \succ R)$:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi = E.S = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ S = 4\pi b^2 \\ Q_{\text{int}} = \sigma.S = \sigma.4\pi R^2 \end{array}\right| \Rightarrow E = \frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi b^2 \varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 b^2}}$$

المناقشة:

خارج الكرة: $b \succ R : E = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 b^2}$

داخل الكرة: الشحنة الداخلية معدومة و عليه: $Q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow E = 0$

على سطح الكرة: $b = R \Rightarrow E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

3/ حساب الكمون الكهربائي: بالتباع نفس الطريقة يمكننا كتابة:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi\sigma R^2 \sin\theta d\theta}{r} \Rightarrow dV = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma R^2}{r}\frac{rdr}{Rb}$$

خارج الكرة:

$$dV = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\sigma R}{b}dr = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{R}{b}dr \Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{R}{b}\int_{b-R}^{b+R} dr$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{R}{b}r\Big|_{b-R}^{b+R} \Rightarrow \boxed{V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{b}}$$

على سطح الكرة:

$$\text{b=R} \Rightarrow \boxed{V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}R}$$

داخل الكرة:

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{R}{b}r\Big|_{R-b}^{b+R} \Rightarrow \boxed{V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}R}$$

نلاحظ أن داخل الكرة الكمون ثابت، و هذا ما يفسر تساوي الكمون على سطح الكرة و بداخلها فنقول أن الكرة تشكل حجما متساوي الكمون.

4/ استنتاج الحقل من الكمون:

خارج الكرة: نعتبر b متغيرة $(b \succ R)$:

$$\left.\begin{array}{l} V = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\dfrac{R^2}{b} \\ E = -\dfrac{dV}{db} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{b^2}}$$

على سطح الكرة: في العبارة السابقة نضع $b = R$:

$$\text{b=R} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

<u>داخل الكرة:</u> $(b \prec R)$ الكمون ثابت و عليه فإن مشتقته معدومة:

$$\left.\begin{array}{l} V = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} R = Cte \\ E = -\dfrac{dV}{db} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{E = 0}$$

<u>التمرين 20.1:</u>

الحقل الكهروساكن داخل الأسطوانة: سطح غوص المناسب في هذه الحالة هو اسطوانة طولها h، نصف قطرها $r \prec R$ و تحصر بداخلها شحنة $Q_{\text{int}} = \rho V = \rho\pi r^2 h$. حسب قانون غوص فإن:

$$\Phi = ES = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\pi r^2 h}{2\pi rh.\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_i = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}_i = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r.\vec{u}_r}$$

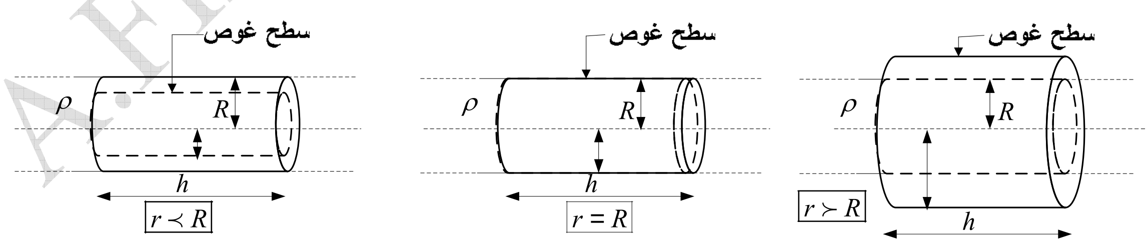
الحقل الكهروساكن على سطح الأسطوانة: سطح غوص المناسب في هذه الحالة هو اسطوانة طولها h، نصف قطرها $r = R$ و تحصر بداخلها شحنة $Q_{\text{int}} = \rho V = \rho\pi R^2 h = \rho\pi r^2 h$. حسب قانون غوص فإن:

$$\Phi = ES = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\pi R^2 h}{2\pi Rh.\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_S = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}_S = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R.\vec{u}_r}$$

ملاحظة: يمكن الوصول إلى عبارة الحقل على سطح الأسطوانة بتعويض بــ R في العبارة السابقة للحقل داخل الأسطوانة أو في العبارة اللاحقة للحقل خارج الأسطوانة.

الحقل الكهروساكن خارج الأسطوانة: سطح غوص المناسب في هذه الحالة هو اسطوانة طولها h، نصف قطرها $r \succ R$ و تحصر بداخلها شحنة $Q_{\text{int}} = \rho V = \rho\pi R^2 h$. حسب قانون غوص فإن:

$$\Phi = ES = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\pi R^2 h}{2\pi rh.\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_e = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{r}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}_e = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{r}\vec{u}_r}$$



2/ لاستنتاج الكمون الكهربائي نلجأ للقانون: $\vec{E} = -\overrightarrow{gradV}$. و بما أن الحقل قطري فإنه يمكننا كتابة:

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E dr$$

ما علينا إلا مكاملة العبارتين E_e و E_i السابقتين للحقل.

$$V_i = -\int \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r dr \Rightarrow V_i = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2 + C_1$$

$$V_e = -\int \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{R^2}{r} dr \Rightarrow V_e = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} R^2 \ln r + C_2$$

نحصل عل ثابتي التكامل استنادا لشرط انعدام الكمون في $r=0$ و استمرارية الكمون في $r=R$.

الكمون داخل الأسطوانة: $(R \succ r \succ 0)$

$$\left. \begin{array}{l} V_i = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2 + C_1 \\ r=0 \ , \ V=0 : \ C_1 = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{V_i = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2}$$

الكمون على سطح الأسطوانة: إذا عوضنا في عبارة V_i نحصل على الكمون على سطح الأسطوانة:

$$\left. \begin{array}{l} V_i = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2 \\ r = R \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{V_S = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} R^2}$$

الكمون خارج الأسطوانة: $(R \prec r)$

$$V_e = -\int \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{R^2}{r} dr \Rightarrow V_e = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} R^2 \ln r + C_2$$

$$\left. \begin{array}{l} V_e = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} R^2 \ln r + C_2 \\ r = R \ , \ V = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} R^2 \end{array} \right| \Rightarrow C_2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R^2 \ln r - \frac{\rho}{4\varepsilon_0} R^2$$

$$\boxed{V_e = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R^2 \ln \frac{R}{r} - \frac{\rho}{4\varepsilon_0} R^2}$$

<u>التمرين 21.1:</u>

سطح غوص المناسب في هذه الحالة هو كرة نصف قطرها و سطحها $S = 4\pi r^2$. إذا وجدت بداخلها شحنة Q_{int} فإن الحقل الكهربائي الناتج بداخلها يساوي حسب نظرية غوص:

$$\Phi = ES = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi r^2 \varepsilon_0}}$$

في الحالات الثلاثة الحقل قطري.

الحقل الكهروساكن داخل الكرة الداخلية $(r \prec R_1)$: الشحنة الداخلية هي الشحنة التي يحصرها سطح غوص المتمثل في كرة نصف قطرها (هي جزء من شحنة الكرة الداخلية).

$$\left. \begin{array}{l} E = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \\ Q_{\text{int}} = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \end{array} \right| \Rightarrow E = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r . \vec{u}_r}$$

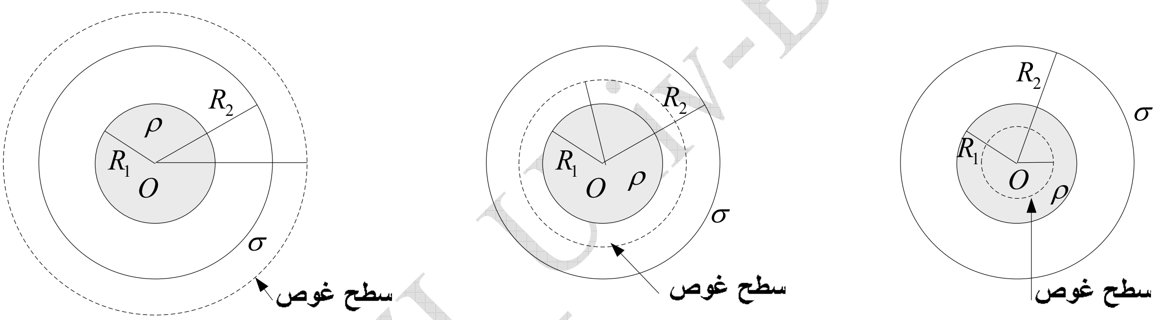
الحقل الكهروساكن السائد بين الكرتين $(R_1 \prec r \prec R_2)$: الشحنة الداخلية لسطح غوص هي شحنة الكرة الداخلية كلها:

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \\ Q_{\text{int}} &= \rho V_1 = \rho \frac{4}{3}\pi R_1^3 \end{aligned}\right| \Rightarrow E = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R_1^3}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{r^2}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{r^2}.\vec{u}_r}$$

الحقل الكهروساكن السائد خارج الكرتين $(r \succ R_2)$: الشحنة الداخلية لسطح غوص هي شحنة الكرتين معا:

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \\ Q_{\text{int}} &= \rho V_1 + \sigma S_2 = \rho \frac{4}{3}\pi R_1^3 + \sigma 4\pi R_2^2 \end{aligned}\right| \Rightarrow E = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R_1^3 + \sigma 4\pi R_2^2}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{r^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R_2^2}{r^2}} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{r^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R_2^2}{r^2}\vec{u}_r}$$



$\boxed{R_2 \prec r}$ $\boxed{R_1 \prec r \prec R_2}$ $\boxed{R_1 \succ r}$

الكمون الكهروساكن في نفس المناطق: لاستنتاج الكمون الكهربائي نلجأ للقانون: $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$. و بما أن الحقل قطري فإنه يمكننا كتابة:

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E dr$$

في المنطقة $(r \prec R_1)$:

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \\ V &= -\int E dr \end{aligned}\right| \Rightarrow V = -\int \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r dr \Rightarrow \boxed{V = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + C_1}$$

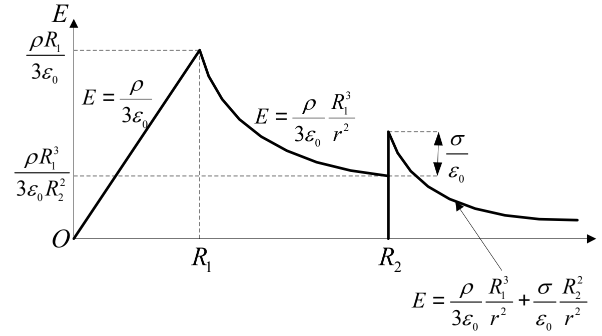
في المنطقة $(R_1 \prec r \prec R_2)$:

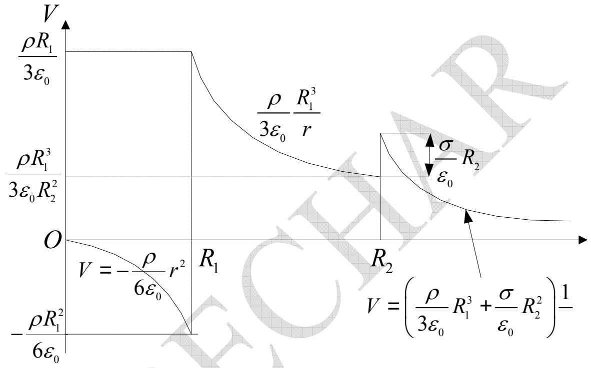
$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{r^2} \Rightarrow V = -\int \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{r^2} dr \Rightarrow \boxed{V = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{r} + C_2}$$

في المنطقة $(r \succ R_2)$:

$$E=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{r^2}+\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R_2^2}{r^2}\Rightarrow V=-\int\left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{r^2}+\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R_2^2}{r^2}\right)dr\Rightarrow\boxed{V=\left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}R_1^3+\frac{\sigma}{\varepsilon_0}R_2^2\right)\frac{1}{r}+C_3}$$

3/ مثلنا على الشكلين التاليين الدالتين $E(r)$ و $V(r)$. لتبسيط تمثيل $V(r)$ أخذنا $C_1=C_2=C_3=0$.





<ins>**التمرين 22.1:**</ins>

1/ نظرية غوص: $\Phi=ES=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}\Rightarrow E=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}\Rightarrow\boxed{E=\frac{Q_{\text{int}}}{4\pi r^2\varepsilon_0}}$

ا/ حين تكون $r \prec R_1$ فهذا يعني أن الشحنة داخل سطح غوص معدومة و عليه فإن الحقل معدوم.

حين تكون $r \succ R_2$ فإن مجموع الشحنتين الداخليتين معدوم كذلك: $Q_{\text{int}}=-\lambda l+\lambda l=0$ و بالتالي فإن الحقل معدوم كذلك. (l يمثل طول أسطوانة غوص).

ب/ حين تكون $R_1 \prec r \prec R_2$، الشحنة الداخلية هي الشحنة التي تحملها الأسطوانة الداخلية أي $Q_{\text{int}}=+\lambda l$. إذن الحقل الكهربائي هو:

$$\left.\begin{aligned}E&=\frac{\lambda l}{\varepsilon_0 S}\\ S&=\pi r^2 l\end{aligned}\right|\Rightarrow\boxed{E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}}\Leftrightarrow\boxed{\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\vec{u}_r}\rightarrow(1)$$

2/ لاستنتاج الكمون الكهربائي نلجأ للقانون: $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V$. و بما أن الحقل قطري فإنه يمكننا كتابة:

$$E=-\frac{dV}{dr}\Rightarrow V=-\int Edr$$

❖ من أجل $r \prec R_1$ و $r \succ R_2$ الحقل معدوم و عليه الكمون في هاتين المنطقتين يكون ثابتا:

$$\boxed{E=0\Leftrightarrow V=C^{te}}$$

❖ من أجل $R_1 \prec r \prec R_2$ نكامل العبارة (1) السابقة للحقل:

$$V=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{r}dr\Rightarrow\boxed{V=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r+C}$$

سطوح تساوي الكمون تكون أكثر تقاربا لما يكون الحقل أكثر شدة أي لما تكون صغيرة. هذا يقودنا إلى استنتاج أن سطوح تساوي الكمون تكون أكثر تقاربا بجوار الأسطوانة الداخلية.

<u>التمرين 23.1 :</u>

1/ حسب ما هو بين القوسين فإن k و $\frac{1}{r}$ لهما نفس البعد. نعرف أن بعد هو طول (L) و عليه فإن بعد k هو: $\left[\frac{1}{r}\right]=[k]=L^{-1}$. أما الوحدة في الجملة الدولية فهي m^{-1}.

2/ بسبب التناظر الكروي فإن الحقل قطري:

$$\vec{E}(r)=-\frac{dV}{dr}\Rightarrow E(r)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(2k^2+\frac{2k}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\exp(-2kr)\vec{u}$$

3/ حسب نظرية غوص:

$$\Phi=ES=\frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}\Rightarrow q_{\text{int}}=ES$$

$$q(r)=e\left(2k^2r^2+2kr+1\right)\exp(-2kr)\rightarrow(1)$$

4/ من أجل $r=0$ فإن الشحنة تساوي e. هذا يدل على أن التوزيع يحتوي على شحنة نقطية e في المركز O.

5/ $\lim\limits_{r\to\infty}q(r)=0$: هذا يعني أن الشحنة الكلية للتوزيع معدومة. و بما أن في المركز توجد شحنة نقطية e فلا بد من وجود شحنة $-e$ موزعة على كل الفضاء حول المركز O بحيث يكون مجموع الشحنتين معدوما.

6/ نقسم في هذا السؤال الفضاء إلى كرات عنصرية حجمها $dv=4\pi r^2dr$، و تحمل الشحنة العنصرية $dq=\rho(r)dv$. و عليه:

$$dq=\rho(r)4\pi r^2dr\rightarrow(2)$$

تفاضل العبارة (1) هو:

$$dq=-4ek^3r^2\exp(-2kr)\rightarrow(3)$$

بمطابقة العبارتين (2) و (3) نحصل على عبارة كثافة الشحنة:

$$\rho(r)=\frac{-e}{\pi}k^3\exp(-2kr)$$

<u>التمرين 24.1:</u>

1/ بسبب التناظر فإن الحقل قطري و لذا يمكننا استعمال العلاقة $E=-\frac{dV}{dr}$:

$$\boxed{E(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\left(1+\frac{r}{a}\right)e^{-r/a}}\Leftrightarrow\boxed{\vec{E}(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\left(1+\frac{r}{a}\right)e^{-r/a}.\vec{u}_r}$$

2/ تدفق الحقل: بما أن مركبة الحقل قطرية و ثابتة على كرة ذات نصف قطر فإن التدفق هو:

$$\Phi=\iint\vec{E}\overrightarrow{dS}\Rightarrow\Phi=ES\Rightarrow\boxed{\Phi=\frac{q}{\varepsilon_0}\left(1+\frac{r}{a}\right)e^{-r/a}}$$

دراسة النهايات تقود إلى النتيجتين:

عندما تؤول إلى 0 : $\Phi=\frac{q}{\varepsilon_0}$

عندما تؤول إلى ∞ : $\Phi=0$

الخلاصة: حسب نظرية غوص، عبارة الشحنة الداخلية لكرة نصف قطرها هي: $Q(r)=\varepsilon_0\Phi$.
نستنتج من هذا أن الشحنة الكلية للتوزيع معدومة و أن في المركز O توجد شحنة نقطية موجبة q.
3/ الكثافة الحجمية للشحنة:
الشحنة العنصرية dq المحصورة بين كرتين ذاتي نصفي قطر و d هي $dq=\rho(r)\,dV=4\pi r^2 dr.\rho(r)$، فنحصل على:

$$\left.\begin{array}{l}\rho(r)=\dfrac{\varepsilon_0}{4\pi r^2}\dfrac{d\Phi}{dr}\\ \dfrac{d\Phi}{dr}=-\dfrac{q}{\varepsilon_0}\dfrac{r}{a^2}e^{-r/a}\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{\rho(r)=-\dfrac{q}{4\pi a^2}\dfrac{1}{r}e^{-r/a}}$$

هذه الكثافة سالبة و الشحنة الكلية هي $-q$.

4/ دراسة الدالة تبدأ بحساب المشتقة، ثم تحديد نقطة انعدام المشتقة لتتبين لنا قمة الدالة :

$$\frac{d\rho(r)}{dr}=\frac{q}{4\pi a^2}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)$$

$$\frac{d\rho(r)}{dr}=0\Leftrightarrow\boxed{r=a}$$

الدالة $\rho(r)$ تمر بقيمة أعظمية في $r=a$. لمعرفة مدلول هذه الدالة نبحث عن بعدها ثم نستنتج وحدتها:

$$\left[\rho(r)\right]=\frac{[q]}{[r]}=\frac{C}{L}\rightarrow C.m^{-1}$$

الدالة المدروسة هي إذن الكثافة الطولية(هنا القطرية) للشحنات.

معلومة هامة: فعليا التوزيع الذي درسناه هو لذرة الهيدروجين. توجد شحنة البروتون $(+q)$ الموجبة في مركز الذرة التي تشكل النواة التي يطوف حولها الإلكترون الوحيد و الذي يحمل شحنة سالبة $(-q)$. أما a فتمثل نصف قطر بوهر (Bohr) و هو المسافة بين النواة و المنطقة التي يكون فيها أعظم احتمال لوجود الإلكترون.

التمرين 25.1:

1/ الكمون الكهربائي الناتج في النقطة M:

$$V_M=V_A+V_B=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\Rightarrow V_M=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_2-r_1}{r_1r_2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}a\prec\prec r\Rightarrow r_1\approx r_2\approx r\\ r_2-r_1=a\cos\theta\\ p=qa\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{V_M=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}}$$

للحقل في القاعدة القطبية $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ مركبتان: $\vec{E}=\vec{E}_r+\vec{E}_\theta$. انطلاقا من القانون $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V$ يمكن تعيين المركبتين القطبيتين:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow E_r = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \Rightarrow E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}$$

و منه فإن الحقل يساوي:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\left(2\cos\theta.\vec{u}_r + \sin\theta.\vec{u}_\theta\right)}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\left(4\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)^{1/2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\left(3\cos^2\theta + 1\right)^{1/2}}$$

2/ **<u>معادلة سطوح تساوي الكمون</u>:** انطلاقا من معالة الكمون الموجودة سابقا نستنتج معادلة هذه السطوح:

$$V = C^{te} = V_0 \Rightarrow r^2 = \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0 V_0}\cos\theta \Rightarrow \boxed{r^2 = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 V_0}\cos\theta}$$

كل قيمة لـــ V_0 يقابلها سطح متساوي الكمون الواقع على البعد من O.

<u>معادلة خطوط الحقل</u>: خط الحقل $\vec{E}$ معرف بأنه متوافق خطيا مع $\vec{dl}$، و عليه: $\vec{E} = \lambda\vec{dl}$، ($\lambda = C^{te}$). نعرف مركبتي $\vec{E}$ و مركبتي $\vec{dl}$ ، و من العلاقة بين الشعاعين يمكن الوصول إلى معادلة خطوط الحقل:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{E} = \lambda\vec{dl} \\ \vec{E}\begin{pmatrix}E_r \\ E_\theta\end{pmatrix},\ \vec{dl}\begin{pmatrix}dr \\ rd\theta\end{pmatrix}\end{array}\right| \Rightarrow \frac{dr}{E_r} = r\frac{d\theta}{E_\theta} \Rightarrow \boxed{\frac{dr}{r} = \frac{E_r}{E_\theta}d\theta} \rightarrow (1)$$

نكامل المعادلة (1) فنحصل، **بثابت تقريبي**، على:

$$\frac{dr}{r} = \frac{E_r}{E_\theta}d\theta \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{\dfrac{2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p\cos\theta}{r^3}}{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p\sin\theta}{r^3}}d\theta$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}d\theta \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{2d\left(\sin\theta\right)}{\sin\theta}$$

$$\int\frac{dr}{r} = 2\int\frac{d\left(\sin\theta\right)}{\sin\theta} \Rightarrow \ln r = 2\ln\left(\sin\theta\right) + K$$

$$\ln r - \ln\left(\sin^2\theta\right) = K \Rightarrow \ln\frac{r}{\sin^2\theta} = K \Rightarrow \frac{r}{\sin^2\theta} = K$$

و من كل هذا فإن معادلة خطوط الحقل هي:

$$\boxed{r = K\sin^2\theta}$$

كل قيمة لـــ K يقابلها خط للحقل الواقع على البعد من O بحيث $r = K\sin^2\theta$.

خطوط الحقل عمودية على سطوح تساوي الكمون.

II/ النواقل المتوازنة
CONDUCTEURS EN EQUILIBRE

A/ تعريف النواقل المتزنة و خصائصها (Définition et propriétés des conducteurs en équilibre)

نذكّر أولا أن الناقل الكهربائي (أو الموصّل) هو كل جسم يمكن لحاملات الشحنة أن تتحرك (أي تنتقل) بداخله بحرية.

1/ تعريف: نقول عن ناقل أنه في حالة توازن كهروساكن إذا كانت كل الشحنات المتواجدة بداخله ساكنة.

2/ خواص النواقل المتزنة:

☜ بما أن الشحنات داخل الناقل المتزن ساكنة ، فهي لا تخضع لأية قوة ، و هذا يعني أن **الحقل الكروساكن داخل الناقل المتزن معدوم:**

$$\vec{F} = q.\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0}}$$

☜ **يتعامد شعاع الحقل الكهربائي مع سطح الناقل المتوازن:** هذا راجع لكون خطوط الحقل مماسية لشعاع الحقل و هي متعامدة مع السطح.

☜ **يشكل الناقل المتوازن حجما لتساوي الكمون:** عرفنا أن فرق الكمون بين نقطتين M و M' معرف بالعلاقة $dV = -\vec{E}.d\vec{l}$. و بما أن $\vec{E} = \vec{0}$ فهذا يعني أن الكمون ثابت في كل نقطة **داخل الناقل** المتوازن ، و بالتالي فإن السطح الخارجي للناقل هو سطح تساوي الكمون ، مما يؤكد تعامد شعاع الحقل الكهربائي مع سطح الناقل.

☜ **الشحنة داخل الناقل معدومة وتتموضع على سطح الناقل:** بالفعل و بما أن عدد البروتونات يساوي عدد الإلكترونات فإن الشحنة المجملة داخل الناقل معدومة. الشحنات الحرة الكلية تتوزع على سطح يشغل سمكا مكونا من بضعة طبقات من الذرات (و لا تعني كلمة السطح هنا ما يفهم من المعنى الهندسي). الشحنات الكهربائية المتحركة **تتراكم** على السطح حتى يصبح الحقل الذي تنتجه مساويا للحقل الخارجي المطبق على هذا السطح مما يؤدي إلى حالة التوازن.

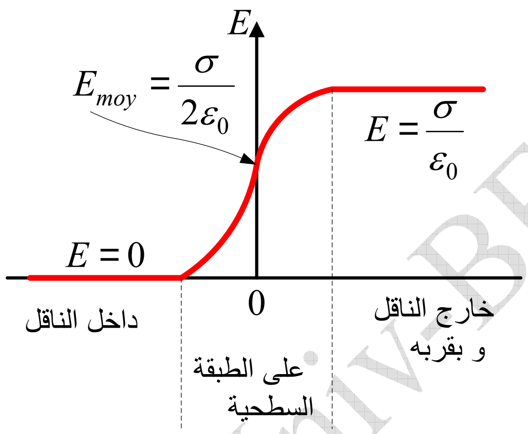
3/ نظرية كولومب:(Théorème de Coulomb)

بجوار ناقل متوازن ، الحقل عمودي على سطح الناقل و عبارة شدّته هي $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

σ تمثل الكثافة السطحية للناقل.

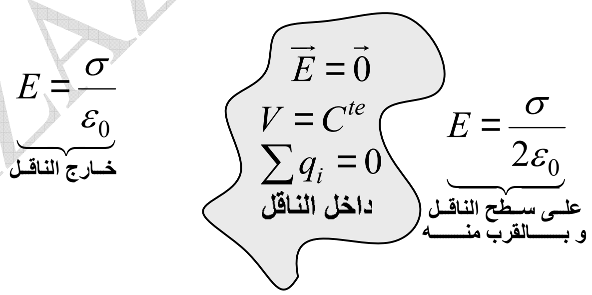
تعطي هذه العبارة قيمة الحقل الكهربائي في نقطة مجاورة للسطح و بخارج الناقل ، بينما الحقل في الداخل معدوم. أما على السطح فإن الحقل يأخذ قيمة متوسطة E_{moy}.

و نتيجة لهذا و عند عبور سطح الناقل ، فإن الحقل الكهربائي يتغير وفق ما هو مبين على الشكل1.2.



الشكل 1.2 : تغير الحقل الكهربائي عند عبور سطح الناقل

يمكن اختصار خصائص الناقل المتزن بما هو مبين على الشكل2.2:



الشكل 2.2 : خصائص الناقل المتزن

4/ الضغط الكهروساكن:(Pression électrostatique)

❖ **تعريف**:الضغط الكهروساكن هو القوة الكهربائية المطبقة على واحدة السطح.

(هذه القوة ناتجة عن التنافر الحاصل بين الشحنات على السطح و الشحنات الأخرى)

$$\boxed{p_e=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}} \qquad (1.2)$$

التحليل: القوة العنصرية $d\vec{f}$ المطبقة على سطح عنصري خارجي $d\vec{S}_{ext}$ لناقل ، يحمل على سطحه شحنة عنصرية $dq = \sigma.dS_{ext}$ ، عبارتها هي:

$$d\vec{f} = dq.\vec{E}_{moy} = \sigma.d\vec{S}_{ext}.\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

و منه:

$$d\vec{f} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}.d\vec{S}_{ext} \Rightarrow \frac{d\vec{f}}{d\vec{S}_{ext}} = p_e = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

نستنتج من عبارة الضغط الكهروساكن أنه مقدار سلمي و أنه دائما موجب كما يمكن اعتباره بمثابة القوة التي بإمكانها نزع الشحنات من الناقل.

وحدة الضغط الكهروساكن: **الباسكال** (Pa) $(Pascal)$.

5/ قدرة السطوح الحادة (Pouvoir des pointes): تميل الشحنات إلى التراكم على السطوح الحادة (التي يكون نصف قطر انحنائها صغيرا). نبين هذا في المثال التالي.

يمثل الشكل 3.2 ناقلين متكونين من كرتين موصلتين بسلك.

الشكل 3.2 : قدرة السطوح الحادة

الكرتان لهما نفس الكمون V:

$$V = K\frac{Q_1}{R_1} = K\frac{Q_2}{R_2}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_1.4\pi R_1^2}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_2.4\pi R_2^2}{R_2} \Rightarrow \sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$$

و بما أن $R_2 \succ R_1$ فإن $\sigma_1 \succ \sigma_2$ ، وهذا يدل على أن الشحنات تميل إلى التراكم على السطوح الحادة.

تستعمل قدرة الرؤوس الحادة لتسهيل عملية التفريغ لتفادي الأخطار التي قد تنجم عن تراكم الشحنات. نجد تطبيقاتها في:

واقية الصواعق التي تثبّت فوق المباني (لاسيما العالية منها) و هي موصلة بالأرض بواسطة أسلاك ناقلة مما يسمح بجذب الشحنات المتراكمة في الهواء و تفريغها في

الأرض. و في حالة توفر شروط لحدوث صاعقة بجوار البناية فإن شحناتها تفضل الاتجاه صوب الرأس الحاد ثم تفرغ في الأرض و تسلم البناية و من فيها.

و كذا الأمر بالنسبة للأطراف المعدنية الحادة المشدودة بأجنحة الطائرات التي تسمح بالتفريغ المستمر للهواء من الشحنات الكهربائية.

6/ السعة الذاتية لناقل منفرد في الفضاء: (Capacité propre d'un conducteur isolé)

تعريف: السعة الكهربائية لناقل معزول هي النسبة بين شحنته و كمونه:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}} \qquad (2.2)$$

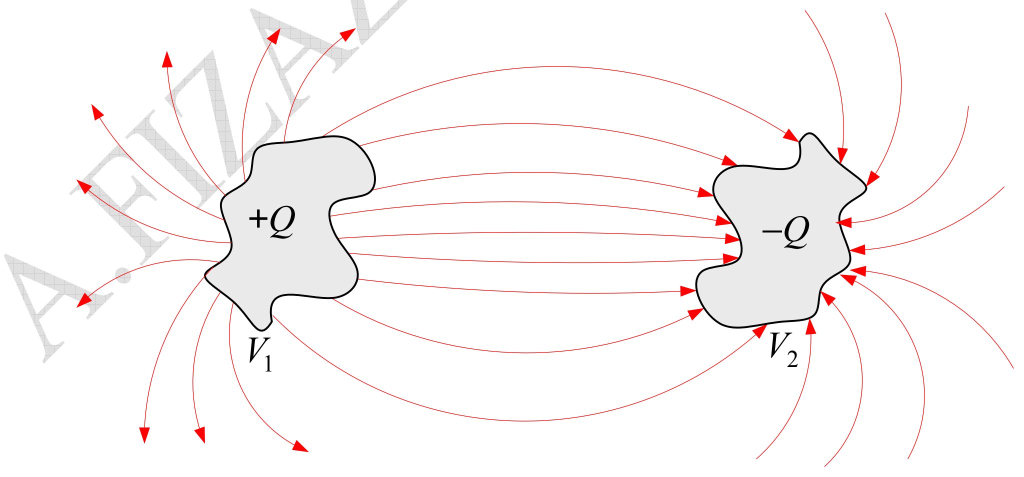
فمثلا ، سعة ناقل كروي في الفراغ ، بما أن كمونه $V = K\dfrac{Q}{R}$ ، هي:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 .R$$

إذا كان العازل المحيط بالناقل الكروي ليس الفراغ فإن $C = 4\pi\varepsilon .R$ حيث ε هي سماحية العازل.

توسيع: يمكن توسيع مفهوم السعة إلى جملة نواقل. ففي حالة ناقلين يحملان شحنتين $+Q$ و $-Q$ و فرق الكمون بينهما $U = V_1 - V_2$ (الشكل 4.2) فإن سعة الجملة هي:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{U}$$



الشكل 4.2 : سعة ناقلين

الوحدة: الكولومب\الفولط $(C.V^{-1})$ و نسميها **الفاراد** (F) نسبة إلى **ميكائيل فارادي** (Michael Faraday 1791-1867).

رتية بعض المقادير: (Ordre de grandeur de la capacité de quelques corps)

سعة الأرض ، باعتبار نصف قطرها $R = 6400km$ ، هي $C = 70\mu F$.

سعة كرة نصف قطرها $r = 10cm$ ، كمونها $V = 1000V$ بالنسبة للأرض ، هي $C = 10pF$.

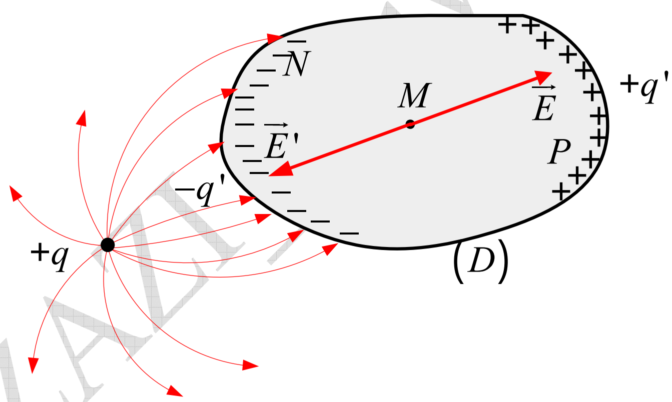
7/ ظاهرة التأثير بين النواقل المشحونة: (Phénomène d'influence entre conducteurs)

ما الذي يحدث عندما نضع ناقلا معتدلا كهربائيا في حقل كهروساكن منتظم ؟

بما أن الشحنات حرة في حركتها، سنشهد انتقالا للشحنات الموجبة في جهة $\vec{E}$ ، و الشحنات السالبة في الجهة المعاكسة. يحدث استقطاب للناقل (أي ظهور قطب موجب و قطب سالب). ينجرّ عن هذا توزيع سطحي σ غير منتظم ، غير أن الشحنة الكلية تبقى معدومة.

التأثير الجزئي: (Influence partielle)

نضع الشحنة $+q$ بجوار الناقل (D) الغير مشحون.(الشكل5.2).



الشكل 5.2 : تأثير شحنة على ناقل متزن

الشحنة $+q$ تولّد ، في كل نقطة من الفضاء المحيط بها ، و خاصة داخل (D) ، حقلا كهربائيا $\vec{E}$ و الذي يجبر الإلكترونات الحرة للانتقال نحو الوجه N فتشحن هذه المنطقة سلبا. بسبب هجرة الإلكترونات للوجه P يشحن هذا الأخير إيجابا.

شحنات N و P تنتج بدورها في النقطة M حقلا $\vec{E}'$ معاكسا للحقل $\vec{E}$. تتوقف هجرة الإلكترونات عندما يصبح $\vec{E} + \vec{E}' = \vec{0}$ ، فتصبح للناقل (D) كل خصائص الناقل المتزّن حيث:

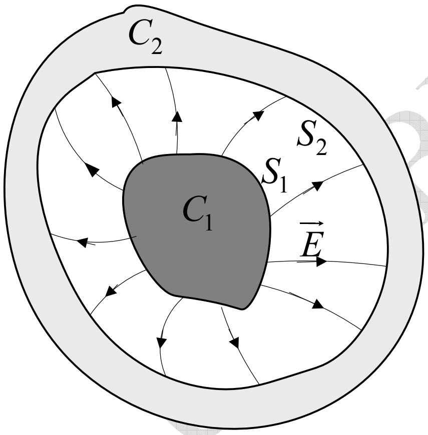
- في النقطة M : $\vec{E}_{(+q)} + \vec{E}_{(+q')} + \vec{E}_{(-q')} = \vec{0}$ ، الحقل معدوم داخل الناقل ،
- سطحه متساوي الكمون ،

- الشحنات متراكمة على السطح و موزّعة بطريقة فريدة. حصل هنا تكهرب بطريقة نعرفها، و هي التكهرب بالتأثير. الشحنة الكلية للناقل (D)تبقى معدومة. كلما هناك أننا فرّقنا بين الشحنتين المتساويتين و المتعاكستين في الإشارة $-q'$ و $+q'$.

$|q| \succ |q'|$: هذا يعني أن كل خطوط الحقل المنبعثة من الشحنة النقطية q لا تصل إلى الناقل (D) و هذا ما يميز التأثير الجزئي.الشكل 5.2

التأثير الكلي: (Influence totale)

ناقلان C_1 و C_2 يكونان في تأثير كلي عندما يحيط الجسم المتأثر كليا بالجسم المؤثر.(الشكل 6.2)



الشكل 6.2 : التأثير الكلي

بافتراض C_1 مشحون إيجابا فهذا يعني أن السطح الداخلي S_2 للناقل C_2 يشحن سلبا. في هذه الحالة كل خطوط الحقل المنطلقة من C_1 تصل إلى السطح S_2 للناقل C_2 ، و عليه فإن $|Q_1| = |Q_2|$.

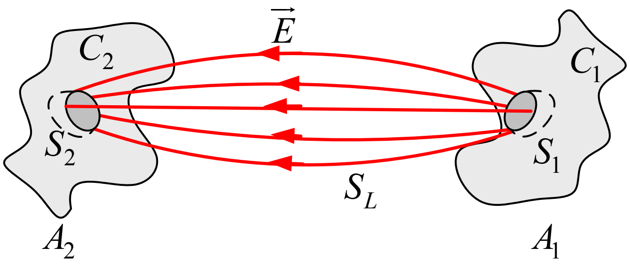
8/ نظرية العناصر المتناسبة:(Théorème des éléments correspondants)

ليكن الناقلان المتزنان (A_1) و (A_2) المتجاوران و الحاملان لكثافتين سطحيتين σ_1 و σ_2. (الشكل 7.2)

إذا لم يكن الناقلان في نفس الكمون ، فإن خطوط الحقل الكهروساكن تربط الناقلين (A_1) و (A_2).

ليكن (C_1) محيط صغير واقعا على سطح (A_1)، بحيث أن كل خطوط الحقل الصادرة من (A_1) و المرتكزة على (C_1) تصل إلى (A_2) و ترسم عليه محيطا مغلقا (C_2).الشكل 7.2

مجموع خطوط الحقل هذه تشكل ما يسمى **أنبوب التدفق**(Tube de flux).



الشكل 7.2: عنصران متناسبان

التدفق الكهروساكن ، عبر السطح الجانبي S_L الذي يرسمه هذا الأنبوب ، معدوم بسبب تعامد شعاع السطح مع شعاع الحقل.

ليكن السطح المتشكل من S_L ، S_1 و S_2 : تطبيقا لنظرية غوص ، و بما أن الناقلين في حالة توازن، فإن:

$$\Phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \underbrace{\Phi_{S_L}}_{0} + \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = 0$$

إذا كانت Q_1 الشحنة التي يحملها S_1 و Q_2 الشحنة التي يحملها S_2 فإن :

$$\frac{Q_1}{\varepsilon_0} + \frac{Q_2}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \boxed{Q_1 = -Q_2} \qquad (3.2)$$

نص نظرية العناصر المتناسبة: يحمل عنصران متناسبان شحنتين كهربائيتين متساويتين و متعاكستين في الإشارة.

9/ سعات و معاملات التأثير: (Capacités et coefficients d'influence)

ليكن n ناقل متزن و Q_i الشحنة الكهربائية الإجمالية.(الشكل 8.2)

الحالة الولى: الناقل A_1 كمونه V_1 و النواقل المتبقية متصلة بالأرض (أي أن كموناتها معدومة).

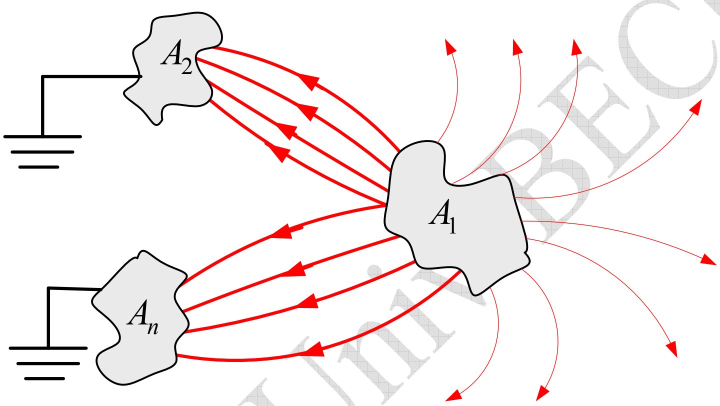
الناقل A_1 يحمل الشحنة: $q_{11} = C_{11}.V_1$

الناقل A_1 يؤثر على بقية النواقل $A_2, A_3 ....A_n$ فتشحن بالتأثير و تحمل الشحنات:

$$q_{21} = C_{21}.V_1$$
$$q_{31} = C_{31}.V_1$$
$$...............$$
$$q_{j1} = C_{j1}.V_1$$
$$................$$
$$q_{n1} = C_{n1}.V_1$$

شحنة النواقل مجتمعة تساوي شحنة الناقل A_1 + شحنات بقية النواقل التي حصلت عليها بالتأثير:

$$Q_1 = C_{11}.V_1 + C_{21}.V_1 + C_{31}.V_1 ... + C_{j1}.V_1 + ... + C_{n1}.V_1$$



الشكل 8.2: تأثر عدة نواقل بشحنة الناقل A_1

<u>الحالة الثانية</u>: نفس التحليل الخاص بالناقل A_2 يقودنا إلى المعادلات:

$$q_{12} = C_{12}.V_2 \qquad q_{22} = C_{22}.V_2 \qquad q_{32} = C_{32}.V_2 \quad .... \quad q_{j2} = C_{j2}.V_2$$
$$Q_2 = C_{12}.V_2 + C_{22}.V_2 + C_{32}.V_2 ... + C_{j2}.V_2 + ... + C_{n2}.V_2$$

بتكرار هذه العملية على كل ناقل نتوصل إلى حساب شحنة أي ناقل i مهما كان :

$$Q_i = C_{1i}.V_i + C_{2i}.V_i + C_{3i}.V_i ... + C_{ji}.V_i + ... + C_{ni}.V_i$$

يمكن كتابة هذه العلاقات على شكل مصفوفة:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ ... \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & ... & C_{1j} & ... & C_{1n} \\ C_{21} & ... & C_{2j} & ... & C_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ C_{n1} & ... & C_{nj} & ... & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ ... \\ V_n \end{bmatrix}$$

تعريف:

☜ المعاملات C_{ij} تسمى **بمعاملات التأثير**.

و **نقرأه:** معامل تأثير الناقل j على الناقل i.

☜ المعاملات C_{ii} تسمى **سعات التأثير** .

و **نقرأه** : سعة الناقل i بوجود نواقل أخرى. لا يجب خلطها بسعة مكثفة منفردة أو معزولة C.

خصائص سعات و معاملات التأثير:

✓ معاملات التأثير تكون دائما سالبة: $C_{ij} \prec 0$

✓ سعات التأثير تكون دائما موجبة: $C_{ii} \succ 0$

✓ $C_{ij} = C_{ji}$

✓ $C_{ii} \geq -\sum_{j\neq i} C_{ji}$ مثلا: $q_{11} = C_{11}V_1 \geq |q_{21}| + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + |q_{n1}| = \sum_{j\neq i} |C_{ji}| V_1$

في الحالة الأخيرة هذا يعني أن الشحنة التي يحملها (A_1) هي أكبر (بالقيمة المطلقة) من مجموع الشحنات التي تحملها النواقل الأخرى مجتمعة تحت تأثير الناقل (A_1). سبب هذا هو أن أنابيب التدفق الصادرة من (A_1) لا تصل بالضرورة كلها إلى النواقل الأخرى.لا يمكن أن يتحقق هذا إلا في حالة التأثير الكلي حيث: $q_{11} = C_{ii}.V_i = \sum_{j\neq i} |C_{ji}|$.

✓ في حالة ناقلين في تأثير كلي نبرهن أن $C_{11} = -C_{21}$ و $C_{11} = -C_{12}$.

B/ المكثفات: (Les condensateurs)

1/ سعة و شحنة مكثفة: (Capacité et charge d'un condensateur)

❖ **تعريف:** المكثفة هي كل جملة ناقلين A_1 و A_2 في تأثير كهروساكن.

❖ **نوعا المكثفات:** (Les deux types de condensateurs)

- ذات لبوسين متقاربين
- ذات تأثير كلي

يفصل بين اللبوسين عازل يزيد في سعة المكثفة. في كل ما سيتبع نفترض وجود الفراغ بين اللبوسين.

سميت المكثفة بهذا الاسم لأنها تسمح بإبراز ظاهرة تكثيف الكهرباء ، أي تراكم الشحنات الكهربائية في منطقة صغيرة من الفضاء. كلما كانت السعة كبيرة كلما حصلنا على شحنات كهربائية كبيرة تحت توترات منخفضة.

❖ ثوابت المكثفة:(Constantes d'un condensateur)

- **سعة المكثفة:** سعة مكثفة هي معامل السعة C_{11} للبوس A_1 بوجود A_2 ، $C = C_{11}$.
- **شحنة المكثفة:** نعتبر أن شحنة المكثفة هي شحنة اللبوس الداخلي $Q = Q_{\text{int}}$.
- **العلاقة الأساسية للمكثفات:**(Relation fondamentale des condensateurs)

$$\left.\begin{array}{l} Q = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ C_{11} = -C_{12} = -C_{21} \end{array}\right| \Rightarrow Q = C\left[V_1 - V_2\right] \Rightarrow \boxed{Q = CU} \qquad (4.2)$$

اللبوس A_2 يحمل الشحنة الكلية:

$$\left.\begin{array}{l} Q_2 = Q_{2,ext} + Q_{2,\text{int}} \\ Q_{2,ext} = -Q_1 \end{array}\right| \Rightarrow Q_2 = Q_{2,ext} - Q_1$$

إذا كان A_2 موصل بالأرض فإن $Q_{2,ext} = 0$ و عليه:

$$Q_2 = -Q_1 \qquad (5.2)$$

في حالة التأثير الجزئي نحصل على نفس النتيجة. في مثل هذا النوع من المكثفات الشحنتان Q_1 و Q_2 تناسب الشحنتين الموزعتين على كامل سطح كل ناقل: $Q_2 = -Q_1$.

2/ سعات بعض أنواع المكثفات:

لإيجاد السعة C لمكثفة ، يجب حساب العلاقة بين شحنتها Q و التوتر $U = V_1 - V_2$ المطبق بين اللبوسين. لحساب U نستعمل عبارة تجوال الحقل الكهربائي:

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}.d\vec{l} = \frac{Q}{C}$$

ا/ المكثفة الكروية: (Condensateur sphérique)

تتكون المكثفة الكروية من كرتين لهما نفس المركز يفصل بينهما عازل. الشكل9.2.

نتناول المسألة بالإحداثيات الكروية و هي الأكثر ملائمة في هذه الحالة.

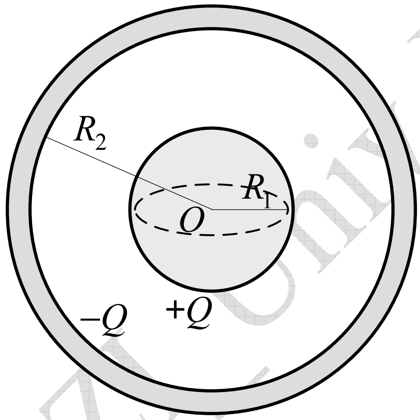
ننطلق من العبارة المعروفة لشعاع الحقل الكهربائي الناتج عن كرة: $\vec{E}(r) = K\dfrac{Q}{r^2}\overrightarrow{u_r}$

نحسب تجوّل الحقل لنحصل على فرق الكمون بين اللبوسين:

$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.d\vec{r} = KQ\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

و في الأخير نتوصل إلى عبارة سعة المكثفة الكروية:

$$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}} \qquad (6.2)$$



الشكل 9.2 : المكثفة الكروية

ب/ المكثفة الأسطوانية: (Condensateur cylindrique)

تتشكل المكثفة الاسطوانية من اسطوانتين ناقلتين لهما نفس المحور يفصل بينها عازل. الشكل 10.2

نختار لهذه الحالة الإحداثيات الأسطوانية و نتبع نفس الخطوات السابقة: حسب نظرية غوص فإن $\vec{E}$ بين اللبوسين هو:

$$\vec{E}(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 .\rho}\overrightarrow{u_\rho}$$

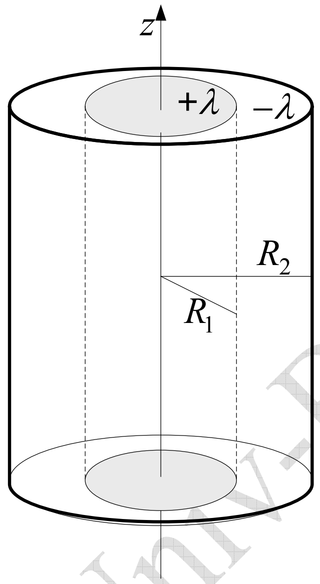
λ: الكثافة الطولية (أو الخطية)

و منه فإن فرق الكمون بين اللبوسين هو:

$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.d\vec{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

علما أن $Q = \lambda h$ ، h هي ارتفاع الأسطوانتين ، فإن سعة المكثفة الأسطوانية المدروسة هي:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\lambda.h}{U} \Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0.h}{\ln\left(R_2/R_1\right)}} \qquad (7.2)$$



الشكل 10.2 : المكثفة الأسطوانية

ج/ المكثفة المستوية: (Condensateur plan)

تتشكل المكثفة المستوية من مستويين ناقلين يفصل بينهما عازل. الشكل11.2

في هذه الحالة نستعمل الإحداثيات الديكارتية. الحقل الكهروساكن بين اللبوسين هو تركيب الحقلين الناتجين عن المستويين اللانهائيين أي:

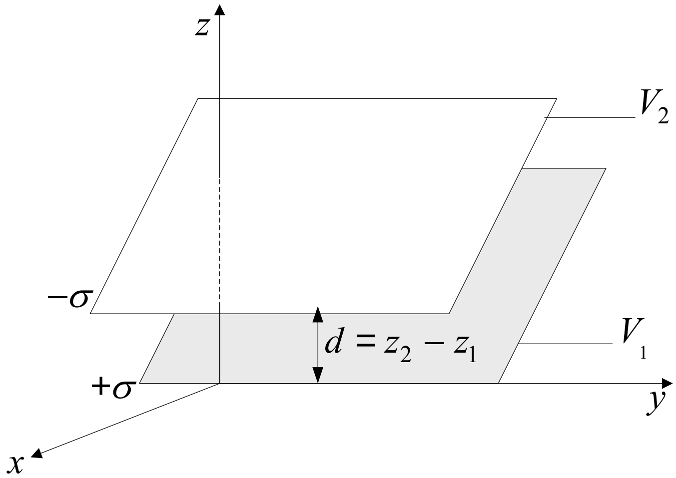
$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(-\vec{k}\right) \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{k}$$

$$U = V_1 - V_2 = \int_{z_1}^{z_2} E..dz = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(z_2 - z_1\right) \Rightarrow U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d$$

σتمثل الكثافة السطحية: $\sigma = \frac{Q}{S} \Rightarrow Q = \sigma.S$

سعة المكثفة المستوية هي إذن:

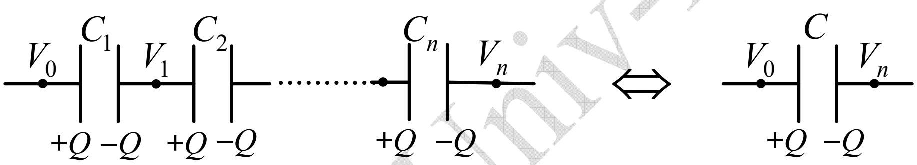
$$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow \boxed{C = \varepsilon_0\frac{S}{d}} \qquad (8.2)$$



الشكل 11.2 : المكثفة المستوية

3/ جمع المكثفات: (Groupement de condensateurs)

ا/ الربط على التسلسل: (Groupement en série) الشكل12.2



الشكل 12.2 : ربط المكثفات على التسلسل

كل المكثفات تأخذ نفس الشحنة Q بسبب ظاهرة التأثير. التوتر بين طرفي كل المجموعة يساوي مجموع التوترات:

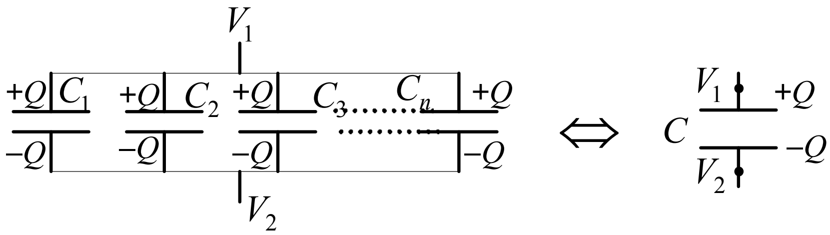
$$U = V_0 - V_n = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + \dots\dots\dots (V_{n-1} - V_n)$$

$$U = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \dots\dots\dots \frac{Q}{C_n}$$

النتيجة: مقلوب السعة المكافئة يساوي مجموع مقالب السعات:

$$\boxed{\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}} \qquad (9.2)$$

ب/ الربط على التفرع:(Groupement en parallèle) الشكل13.2



الشكل 13.2: ربط المكثفات على التفرع

كل المكثفات تخضع لنفس التوتر U. تثبت التجربة أن الشحنة Q_i لكل مكثفة تتناسب طردا مع سعتها C_i. الشحنة الإجمالية تساوي مجموع الشحنات:

$$Q = Q_1 + Q_2 + ...Q_n$$
$$Q = C_1.U + C_2.U + ...C_n.U$$
$$Q = \left(C_1 + C_2 + ...C_n\right).U$$
$$C.U = \left(C_1 + C_2 + ...C_n\right).U$$

<u>النتيجة</u>: السعة المكافئة تساوي مجموع السعات:

$$\boxed{C = \sum_{i=1}^{n} C_i} \qquad (10.2)$$

4/ طاقة مكثفة مشحونة: (énergie d'un condensateur chargé)

بينت الدراسة النظرية و أثبتت التجارب أن الطاقة التي تختزنها مكثفة مشحونة تتناسب طردا مع مربع التوتر المطبق بين لبوسيها. عبارتها هي:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}C.U^2} \qquad (11.2)$$

كما يمكن استنتاج العبارة التالية بتعويض $Q = C.U$:

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad (12.2)$$

5/ طاقة الحقل الكهربائي: (énergie du champ électrique)

شحن ناقل كهربائي يفرض صرف طاقة، لأن جلب شحنة إضافية إلى الناقل يتطلب بذل عمل للتغلب على قوة التنافر الناتجة عن الشحنات الموجودة على الناقل مسبقا. هذا العمل ينتج زيادة في طاقة الناقل.

ليكن ناقل سعته C يحمل شحنة q و كمونه $V=\dfrac{q}{C}$.

إذا أضفنا شحنة عنصرية dq للناقل، و ذلك بجلبها من لانهاية، فإن العمل المنجز هو:

$$dW = Vdq = \frac{q}{C}dq$$

الزيادة الإجمالية في طاقة الناقل حين تمرّ الشحنة من الصفر إلى القيمة Q يساوي:

$$W_E = \frac{1}{C}\int_0^Q qdq \Rightarrow \boxed{W_E = \frac{Q^2}{2C}}$$

و هذا ما يتطابق مع المعادلة (12.2).

في حالة ناقل كروي مثلا، حيث $C = 4\pi\varepsilon_0 R$، فإن طاقة الحقل الكهربائي هي:

$$W_E = \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)$$

6/ كثافة الطاقة الكهربائية: (densité de l'énergie électrique)

<u>نعتبر على سبيل المثال مكثفة مستوية:</u>

سعتها: $C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d}$

الطاقة التي تخزنها هي: $W_E = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{1}{2}CU^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}U^2$

إذا قسمنا هذه الطاقة على حجم المكثفة نحصل على ما نسميه كثافة الطاقة الكهربائية :

$$w = \frac{W_E}{v} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 SU^2}{dSd} \Rightarrow w = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 U^2}{d^2} \rightarrow (1)$$

نعرف أن شدة الحقل الكهربائي بين اللبوسين هي: $E = \dfrac{U}{d}$

بعد التعويض تصبح المعادلة (1):

$$\boxed{w = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2} \qquad (13.2)$$

تمثل w **كثافة الطاقة الكهربائية في الفراغ**. و وحدتها الجول على المتر مكعب: Jm^{-3}.

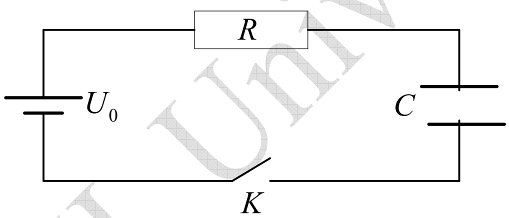
بوجود عازل، غير الفراغ، نعوض ε_0 بـــ $\varepsilon = \varepsilon_0.\varepsilon$ حيث ε تمثل النفاذية النسبية للعازل بينما ε ترمز إلى النفاذية المطلقة للعازل. و عليه يمكن كتابة كثافة الطاقة على الشكل:

$$\boxed{w = \frac{\varepsilon}{2} E^2} \qquad (14.2)$$

7/ شحن و تفريغ مكثفة عبر مقاومة: (charge et décharge d'un condensateur à travers une résistance)

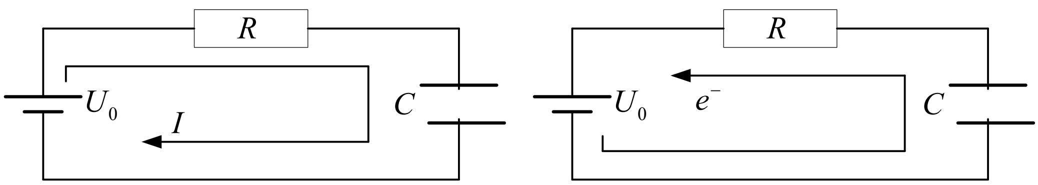
❖ شحن مكثفة:

ليكن التركيب المبين على الشكل (14.2) المتكون من مقاومة R مربوطة على التسلسل مع مكثفة سعتها C. نغذي الجملة بواسطة منبع للتوتر المستمر U_0.



الشكل 14.2: تركيب لدراسة شحن مكثفة

في اللحظة $t = 0$ نغلق القاطعة K، المكثفة فارغة من الشحن. لتكن $i(t)$ شدة التيار الكهربائي الجاري في الدارة في اللحظة t. الإلكترونات تنتقل في الجهة المعاكسة للتيار. تغادر هذه الإلكترونات اللبوس العلوي، حسب الشكل (15.2)، لتنتقل إلى اللبوس السفلي الذي يشحن سلبا. لتكن $q(t)$ و $u(t)$ على التوالي شحنة اللبوس العلوي و الكمون الكهربائي بين طرفي المكثفة(المقادير i ، q و u موجبة اصطلاحا). الشكل (15.2)



الشكل 15.2: شحن المكثفة

قانون أوم يسمح لنا بكتابة: $U_0 = Ri + U$

علما أن $q = CU$ و $i = \dfrac{dq}{dt}$ (التي تمثل زيادة الشحنة خلال زمن dt).

نحصل على المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى:

$$U_0 = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \Rightarrow U_0C = RC\frac{dq}{dt} + q$$

أو:
$$U_0C - q = RC\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dq}{U_0C - q} = \frac{dt}{RC}$$

نكامل طرفي المعادلة فنحصل على:

$$\ln\left(U_0C - q\right) = -\frac{t}{RC} + A$$

ثابت التكامل A يحدد حسب الشروط الابتدائية: في اللحظة $t = 0$ كانت الشحنة $q = 0$ و بالتالي: $A = \ln U_0C$

و منه:

$$\ln\left(U_0C - q\right) - \ln U_0C = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \ln\frac{U_0C - q}{U_0C} = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \frac{U_0C - q}{U_0C} = \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

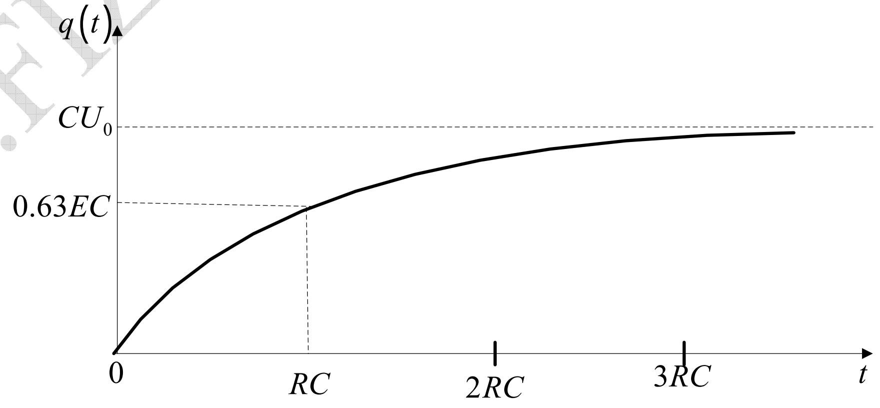
و في الأخير:
$$\boxed{q\left(t\right) = U_0C\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)} \qquad (15.2)$$

<u>تعريف</u>: ثابت الزمن (constante de temps) هو المقدار الثابت:

$$\boxed{\tau = RC} \qquad (16.2)$$

<u>مدة شحن أو التفريغ</u>: أثبتت التجارب و الدراسات النظرية أن مدة شحن أو تفريغ مكثفة تقدر بـــ $t = 5RC = 5\tau$

يمثل الشكل (16.2) تغيرات الشحنة بدلالة الزمن خلال عملية الشحن.



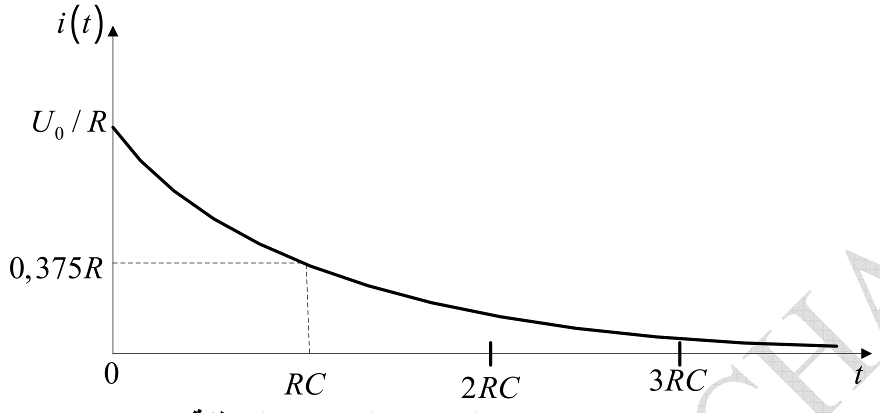
الشكل 16.2 : تغيرات الشحنة خلال شحن المكثفة

نستنتج شدة التيار في كل لحظة $i\left(t\right) = \dfrac{dq}{dt}$:

$$\boxed{i(t)=\frac{U_0}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)}$$

(17.2)

يمثل الشكل (17.2) تغيرات شدة التيار الكهربائي بدلالة الزمن خلال عملية الشحن.



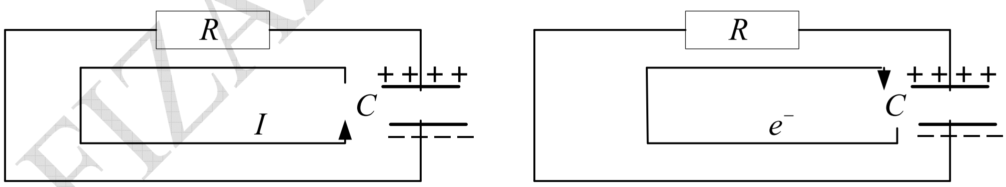
الشكل 17.2: تغيرات شدة التيار خلال شحن المكثفة

❖ **تفريغ مكثفة:**

❖ بعد بلوغ المكثفة شحنتها القصوى $q_0=CU_0$، نستبدل الآن (في $t=0$) منبع التوتر بدارة قصيرة كما هو مبين في الشكل (18.2).

غير التيار الكهرباء الآن اتجاهه: تغادر الإلكترونات اللبوس السفلي لتلتحق باللبوس العلوي. تتناقص الشحنة $q(t)$ بمرور الزمن.

باعتبار دائما المقادير i ، q و U موجبة اصطلاحا، نكتب قانون أوم: $Ri=U$ ، مع $q=CU$ و $i=\frac{dq}{dt}$.



الشكل 18.2: تفريغ المكثفة

بما أن q تتناقص فإن $\frac{dq}{dt}\prec 0$. و عليه:

$$-R\frac{dq}{dt}=\frac{q}{C}\Rightarrow R\frac{dq}{q}=-\frac{dt}{C}$$

$$\ln q=-\frac{t}{RC}+B$$

الثابت B تحدده الشروط الابتدائية: $t=0\ ,\ q=q_0=\mathrm{CU_0}\ :\ B=\ln q_0\Rightarrow B=\ln CU_0$

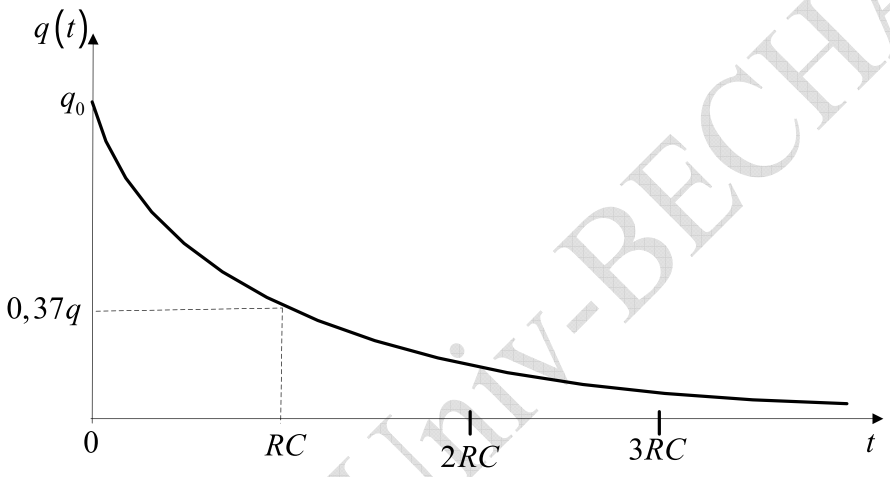
و عليه: $\ln q=-\frac{t}{RC}+\ln CU_0\Rightarrow \ln\frac{q}{CU_0}=-\frac{t}{RC}$

و عليه فإن عبارتي الشحنة و شدة التيار اللحظيين هما على التوالي:

$$\boxed{q = CU_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)} \tag{18.2}$$

$$i = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow \boxed{i = \frac{U_0}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)} \tag{19.2}$$

يمثل الشكل (19.2) تغيرت الشحنة خلال عملية التفريغ.



الشكل 19.2: تغيرات الشحنة خلال تفريغ المكثفة

بهذا نكون قد انتهينا من الإلمام بأهم خصائص النواقل المتزنة، التي تنهي دراسة "**الكهرباء الساكنة**". في الفصل الموالي ننتقل إلى دراسة الشحنات و هي في حالة حركة، و هذا ما سندرسه تحت العنوان الكبير "**الكهرباء المتحركة**".

EXERCICES ** تـــمـــاريـــن

Exercice 2.1 Considérons une boule en métal de rayon R ayant une charge globale Q. 1/ A l'équilibre, comment se répartissent les charges dans le conducteur ? 2/ En déduire l'expression de la densité surfacique de charge $\sigma\left(en\ Cm^{-2}\right)$. 3/ Que vaut le champ électrostatique dans le conducteur ? 4/ En appliquant le théorème de Coulomb, vérifier qu'à la surface du conducteur : $E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$ 5/ En utilisant le théorème de Gauss, montrer que l'intensité du champ électrostatique crée à la distance $\left(r\geq R\right)r$ du centre du conducteur est : $E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$.	**التمرين 1.2** نعتبر كرة معدنية نصف قطرها R و شحنتها الكلية Q. 1/ في حالة التوازن، كيف تتوزع الشحنات في الناقل؟ 2/ إستنتج عبارة الكثافة السطحية للشحنة σ بـــ $\left(Cm^{-2}\right)$. 3/ كم يساوي الحقل الكهربائي داخل الناقل؟ 4/ بتطبيق نظرية كولومب، تحقق أن على سطح الناقل: $E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$ 5/ باستعمال نظرية غوص، بين أن شدة الحقل الكهربائي المتولد على البعد $\left(r\geq R\right)r$ من مركز الناقل هي: $E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$.

Exercice 2.2 Une sphère conductrice ayant un rayon $R=8cm$ porte initialement une charge de $80\mu C$. Par la suite, une charge ponctuelle de $-20\mu C$ est introduite au centre d'une cavité sphérique ayant un rayon $r=2,5cm$ à l'intérieur de la sphère. 1/ Quelle est la grandeur du champ électrique $\vec{E}$ près de la surface extérieure de la sphère conductrice ? 2/ Quelle est la grandeur du champ électrique $\vec{E}$ près de la surface intérieure de la sphère conductrice (dans la cavité) ? 3/ Quelle est la charge totale Q_i sur la surface intérieure de la cavité de la sphère conductrice ? 4/ Quelle est la charge totale sur la surface extérieure de la sphère conductrice ?	**التمرين2.2** كرة ناقلة ذات نصف قطر $R=8cm$ تحمل في البداية شحنة $80\mu C$. ندخل في ما بعد، شحنة نقطية $-20\mu C$ في مركز تجويف كروي ذي نصف قطر $r=2,5cm$ بداخل الكرة. 1/ ما هي شدة الحقل الكهربائي $\vec{E}$ الناتج بقرب السطح الخارجي للكرة الناقلة؟ 2/ ما هي شدة الحقل الكهربائي $\vec{E}'$ الناتج بقرب السطح الداخلي للكرة الناقلة (داخل التجويف)؟ 3/ ما هي الشحنة الكلية Q_i على السطح الداخلي لتجويف الكرة الناقلة؟ 4/ ما هي الشحنة الكلية Q_e على السطح الخارجي للكرة الناقلة؟

Exercice 2.3 Un cylindre creux et conducteur, de rayon $3cm$, porte initialement une densité linéaire de charge de $9\mu Cm^{-1}$. Par la suite, une tige mince ayant une densité linéaire de charge de $5\mu Cm^{-1}$ est entièrement glissée au centre du cylindre creux. La tige et le cylindre ont, tous les deux, une longueur infinie. 1/ Quelle est la grandeur du champ électrique près de la surface extérieure du cylindre avant que la tige chargée soit glissée à l'intérieur ? 2/ Quelle est la densité linéaire de charge portée par la surface extérieure du cylindre creux après que la tige chargée soit glissée à l'intérieur ?	**التمرين 3.2** أسطوانة ناقلة و مجوفة، نصف قطرها $3cm$ ، تحمل في البداية كثافة خطية للشحنة مقدارها $9\mu Cm^{-1}$. في ما بعد، تزلق تماما إلى مركز الأسطوانة المجوفة، ساق رقيقة ذات كثافة خطية للشحنة مقدارها $5\mu Cm^{-1}$. كل من الأسطوانة و الساق لهما طول لا متناهي. 1/ ما هي شدة الحقل الكهربائي بقرب السطح الخارجي للأسطوانة قبل زلق الساق المشحونة داخل الأسطوانة؟ 2/ ما هي الكثافة الخطية التي يحملها السطح الخارجي للأسطوانة المجوفة بعد زلق الساق المشحونة بداخلها؟

3/ Quelle est la grandeur du champ électrique près de la surface extérieure du cylindre après que la tige chargée soit glissée à l'intérieur ? 4/ Quelle est la grandeur du champ électrique à $2cm$ du centre du cylindre après que la tige chargée soit glissée à l'intérieur ?	3/ ما هي شدة الحقل الكهربائي بقرب السطح الخارجي للأسطوانة بعد زلق الساق المشحونة بداخلها؟ 4/ ما هي شدة الحقل الكهربائي على بعد $2cm$ من مركز الأسطوانة بعد زلق الساق المشحونة بداخلها؟

Exercice 2.4 Une sphère de rayon R porte une charge Q. 1/ Calculer son énergie potentielle en fonction de la pression électrostatique. 2/ On décharge cette sphère en la reliant à la terre par l'intermédiaire d'un fil métallique. Que devient l'énergie emmagasinée précédemment ? 3/ On suppose que cette sphère a été chargée à l'aide d'une source de force électromotrice E constante. Quelle est l'énergie fournie par la source à la sphère ? La trouve-t-on sous forme d'énergie potentielle ? Sinon, où a disparu la différence ? 4/ soit σ la densité surfacique de charge de la sphère : a) calculer sa capacité en fonction de π, ε_0 et σ, b) trouver une relation littérale entre l'énergie interne et la pression électrostatique.	**التمرين 4.2** كرة نصف قطرها R و تحمل شحنة Q: 1/ أحسب طاقتها الكامنة بدلالة الضغط الكهروساكن. 2/ نفرغ هذه الكرة بتوصيلها بالأرض بواسطة سلك معدني. كيف تصبح الطاقة المختزنة سابقا؟ 3/ نفترض أنه تم شحن هذه الكرة بواسطة منبع قوته المحركة الكهربائية E ثابتة. ما هي الطاقة التي قدمها المنبع للكرة؟ هل نجدها كلية على شكل طاقة كامنة؟ إذا كان الجواب لا، أين اختفى الفرق؟ 4/ إذا كانت σ هي الكثافة السطحية لشحنة الكرة: أ) إحسب سعة الكرة بدلالة π، ε_0 و σ، ب) أوجد علاقة حرفية بين الطاقة الداخلية و الضغط الكهروساكن.

Exercice 2.5 Une sphère métallique de rayon $R_1 = 1m$ porte une charge électrique totale $Q = 10^{-9}C$. On la relie par un fil conducteur à une sphère initialement non chargée de rayon $R_2 = 0,30m$ (placée à grande distance de la première sphère) de telle sorte q'elles se mettent au même potentiel. 1/ Quelle sera la charge à l'équilibre sur chacune des sphères après que la connexion sera faite ? 2/ Quelle est l'énergie de la sphère chargée avant la connexion ? 3/ Quelle est l'énergie du système après que les sphères soient reliées entre elles ? S'il y a une perte, expliquer où a été dissipée. 4/ Montrer que la charge est distribuée sur les deux sphères reliées entre elles de telle sorte que $\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = \dfrac{R_2}{R_1}$ où σ est la densité superficielle de charge. 5/ Montrer en conséquence que $\dfrac{E_{1,surface}}{E_{2,surface}} = \dfrac{R_2}{R_1}$. On négligera dans le problème l'effet du fil de jonction.	**التمرين 5.2** كرة معدنية نصف قطرها $R_1 = 1m$ و تحمل شحنة كهربائية إجمالية $Q = 10^{-9}C$. نوصّلها بواسطة سلك توصيل إلى كرة نصف قطرها $R_2 = 0,30m$ و غير مشحونة في البداية(موضوعة على مسافة كبيرة من الكرة الأولى) بحيث تخضعان لنفس الكمون. 1/ في التوازن ما هي قيمة الشحنة على كل كرة بعد توصيلهما مع بعض؟ 2/ ما هي طاقة الكرة المشحونة قبل التوصيل؟ 3/ ما هي طاقة الجملة بعد ربط الكرتين معا؟ إذا كان هناك ضياع لطاقة، إشرح أين ضاعت. 4/ بيّن أن الشحنة موزعة على الكرتين المربوطتين معا بحيث $\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = \dfrac{R_2}{R_1}$، حيث σ هي الكثافة السطحية للشحنة. 5/ بين أنه بالتالي $\dfrac{E_{1,surface}}{E_{2,surface}} = \dfrac{R_2}{R_1}$. نهمل في المسألة أثر سلك التوصيل.

Exercice 2.6

Une sphère conductrice S_1 de centre O et de rayon $R_1 = 10cm$ est placée dans une cavité sphérique creuse conductrice S_2, de rayon $R_2 = 20cm$ et de mince épaisseur. L'ensemble baigne dans le vide. Les deux conducteurs sont initialement en équilibre. Quelle est la charge et comment se répartit-elle dans les deux cas :

1/ La sphère est portée au potentiel $V_1 = 10^4 V$ tout en gardant la cavité creuse S_2 isolée comme indiqué sur la figure (a).

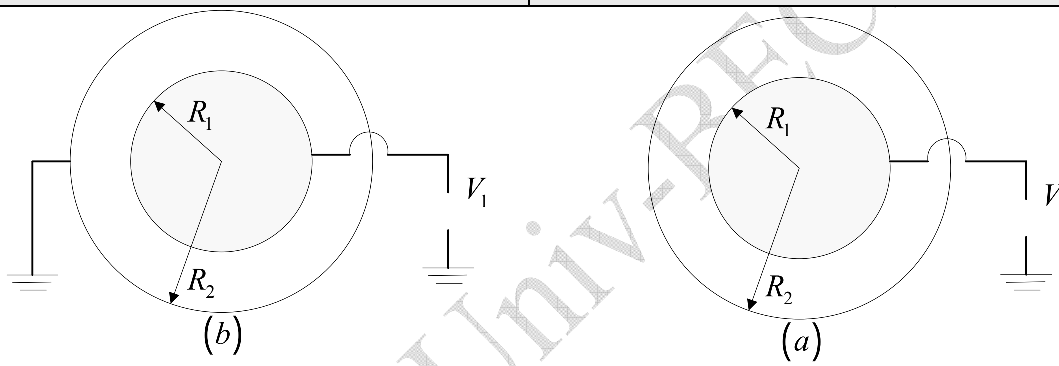
2/ La sphère est maintenue au potentiel V_1 tout en reliant la cavité creuse S_2 à la terre comme indiqué sur la figure (b).

التمرين 6.2

توضع كرة ناقلة S_1 مركزها O و نصف قطرها $R_1 = 10cm$ في مركز تجويف كروي ناقل S_2، نصف قطره $R_2 = 20cm$ و رقيق السمك. الجملة تسبح في الفراغ. الكرتان متعادلتان في البداية. ما هي قيمة الشحنات و طبيعة توزيعها في الحالتين:

1/ تحمّل الكرة S_1 تحت الكمون $V_1 = 10^4 V$ مع بقاء التجويف S_2 معزولا كما هو مبين على الشكل (a).

2/ نبقي الكرة تحت الكمون V_1 مع توصيل التجويف S_2 بالأرض كما هو مبين على الشكل (b).



Exercice 2.7

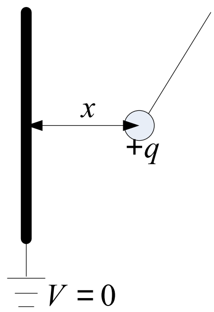
Un plateau circulaire vertical métallique de très grande dimension est relié à la terre (potentiel $V = 0$). On place à une distance x une petite sphère métallique de rayon et de charge q suspendue à un fil. La sphère prend une position d'équilibre x_e.

Trouver la force qui s'exerce sur la petite sphère assimilée à une charge ponctuelle en utilisant la notion d'image électrique..

التمرين7.2

طبق دائري شاقولي معدني ذي أبعاد كبيرة جدا و موصول بالأرض (الكمون معدوم $V = 0$). نضع على البعد x منه كرية معدنية نصف قطرها و شحنتها q معلقة بواسطة خيط. تأخذ الكرية موضع توازن x_e .

أوجد القوة المطبقة على الكرية المشبهة بشحنة نقطية باستعمال مفهوم الصورة الكهربائية.



Exercice 2.8

Une charge q est placée à une distance a d'un plan conducteur infini maintenu au potentiel zéro. On peut montrer que le champ résultant à la surface est le même que si une charge négative $-q$ placée à une distance $-a$ remplaçait le plan. (Figure ci-dessous).

Cette seconde charge est appelée ***image*** de la première.

1/ Montrer que le potentiel est nul en tout point du plan et que le champ est normal au plan et calculer son intensité..

2/ Montrer que la densité de charge sur le plan est $qa/2\pi r^3$.

3/ Calculer le flux électrique à travers le plan en utilisant la notion de l'angle solide, et vérifier que la charge totale du plan est $-q$.

التمرين 8.2

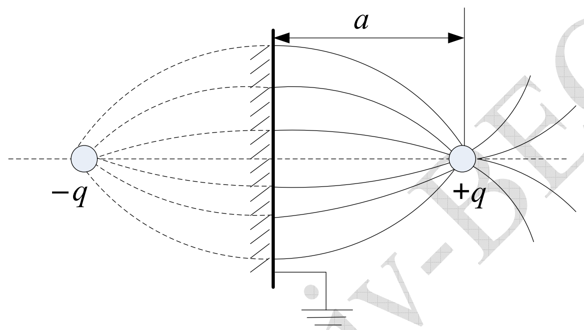
توضع شحنة q على بعد a من مستوى ناقل لا متناهي مثبت في كمون معدوم. يمكن البرهان على أن الحقل الناتج على السطح هو نفسه لو توضع شحنة سالبة $-q$ على البعد $-a$ مكان المستوى. (الشكل أسفله).

الشحنة الثانية هذه تسمى ***صورة*** الأولى.

1/ بيّن أن الكمون معدوم في كل نقطة من المستوى و أن الحقل عمودي على المستوى و أحسب شدته.

2/ بيّن أن كثافة الشحنة على المستوى هي $qa/2\pi r^3$.

3/ أحسب التدفق الكهربائي عبر المستوى باستعمال مفهوم الزاوية الصلبة و تأكد أن الشحنة الكلية للمستوى هي $-q$.



Exercice 2.9

Trouver le flux du champ électrique , la charge intérieure totale et la densité de charge pour un cube de côté a (figure ci-dessous) placé dans une région où le champ électrique est de la forme :

1/ $\vec{E} = Cx\vec{u}_x$

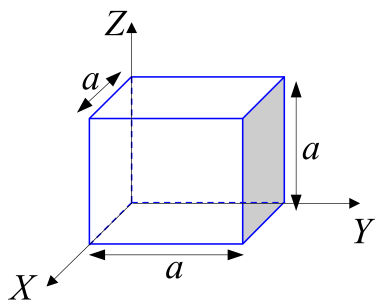
2/ $\vec{E} = C\left(y\vec{u}_x + x\vec{u}_y\right)$, $C =$ constante

التمرين 9.2

أوجد تدفق الحقل الكهربائي، الشحنة الداخلية الكلية و كثافة الشحنة لمكعب ضلعه a (الشكل أسفله) و الموضوع في منطقة حيث الحقل الكهربائي هو من الشكل:

1/ $\vec{E} = Cx\vec{u}_x$

2/ $\vec{E} = C\left(y\vec{u}_x + x\vec{u}_y\right)$ ، $C =$ ثابت



Exercice 2.10

1/ Trouver les capacités et les coefficients d'influence de l'ensemble de deux conducteurs sphériques $S_1\left(O_1, R_1\right)$ et $S_2\left(O_2, R_2\right)$ éloignés l'un de l'autre par la distance d $\left(d \succ\succ R_1, R_2\right)$.

2/ discuter les deux cas :

التمرين 10.2

1/ أوجد السعات و عوامل التأثير لجملة ناقلين كرويين متباعدين $S_1\left(O_1, R_1\right)$ و $S_2\left(O_2, R_2\right)$، تفصلهما المسافة d $\left(d \succ\succ R_1, R_2\right)$.

2/ ناقش الحالتين:

a) si $d \to \infty$, b) si $d = R_1 = R_2$.	أ) لو كانت $d \to \infty$ ب) لو كانت $d = R_1 = R_2$

Exercice 2.11

Un condensateur de capacité $C = 100\mu F$ est chargé sous une tension $U = 20V$.

On le relie à un condensateur de même capacité C , mais initialement déchargé.

1/ Calculer la tension qui apparaît aux bornes de l'ensemble.

2/ Faire le bilan énergétique avant et après connexion. Commenter ?

التمرين 11.2

تشحن مكثفة ذات سعة $C = 100\mu F$ تحت توتر $U = 20V$.

نربط هذه المكثفة إلى مكثفة أخرى لها نفس السعة C و لكنها غير مشحونة في البداية.

1/ أحسب التوتر الذي يظهر بين طرفي الجملة.

2/ قم بالحوصلة الطاقوية قبل و بعد الربط. ما هو تعليقك؟

Exercice 2.12

Un condensateur de capacité $C_1 = 3,3\mu F$ a été chargé sous une tension de $24V$; l'armature A porte une charge positive Q_A .

1/ Calculer l'énergie emmagasinée dans ce condensateur.

2/ Les bornes A et B sont reliées aux bornes E et D d'un condensateur complètement déchargé, de capacité $C_2 = 2,2\mu F$ (voir figure ci-dessous). Il apparaît un courant transitoire très bref, puis un équilibre électrique s'établie. La tension U_{AB} est alors égale à la tension U_{ED} ; l'armature A porte une charge Q'_A et l'armature E la charge Q'_E .

a) Ecrire une relation entre Q_A , Q'_A et Q'_E .

b) Ecrire une seconde relation entre Q'_A , Q'_E , C_1 et C_2 .

c) En déduire numériquement Q'_A et Q'_E .

3/ Après la connexion, calculer l'énergie emmagasinée dans les deux condensateurs. Au cours de cette opération, l'énergie a-t-elle été conservée ? Sous quelle forme une partie de l'énergie électrique s'est-elle transformée dans les fils de jonction ? et en quelle quantité ?

التمرين 12.2

شحنت مكثفة سعتها $C_1 = 3,3\mu F$ تحت توتر $24V$ ؛ اللبوس A يحمل الشحنة الموجبة Q_A .

1/ أحسب الشحنة المخزنة في المكثفة.

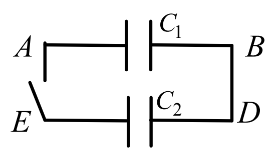
2/ الطرفان A و B موصلان بالطرفين E و D لمكثفة فارغة تماما، سعتها $C_2 = 2,2\mu F$ (أنظر الشكل أسفله). يظهر تيار مؤقت و جد سريع، ثم يسود توازن كهربائي مستقر. التوتر U_{AB} يساوي حينها التوتر U_{ED}؛ اللبوس A يحمل الشحنة Q'_A و اللبوس E يحمل الشحنة Q'_E .

ب) أكتب علاقة بين Q_A ، Q'_A و Q'_E .

ت) أكتب علاقة ثانية بين Q'_A ، Q'_E ، C_1 و C_2 .

ج) إستنتج عدديا Q'_A و Q'_E .

3/ بعد التوصيل، أحسب الطاقة المخزنة في المكثفتين. خلال هذه العملية، هل الطاقة حفظت؟ إلى أي شكل تحول جزء من الطاقة الكهربائية في أسلاك التوصيل؟ و بأي كم؟



Exercice 2.13

On considère un condensateur plan formé de deux armatures conductrices identiques parallèles, espacées d'une distance d . Chaque armature est une plaque rectangulaire de surface S . On suppose que les deux

التمرين 13.2

نعتبر مكثفة مستوية مكونة من لبوسين ناقلين متماثلين متوازيين و متباعدين بمسافة d. كل لبوس عبارة عن صفيحة مستطيلة ذات سطح S . نفترض أن اللبوسين في

armatures sont en influence totale et on néglige les effets de bord.

1/ Dans ce cas précis, que signifie l'expression "armatures en influence totale" ? Que peut-on dire de la répartition de la charge dans chaque armature ? Soit σ la densité de charge sur la surface plane d'équation $y=0$; quelle est la densité de charge sur la surface plane d'équation $y=d$?

2/ Calculer l'expression du champ électrique au voisinage de chacune des armatures.

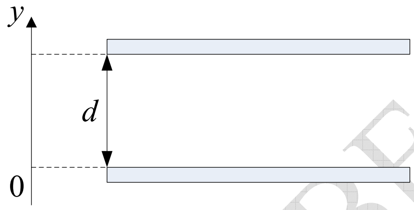
3/ Montrer que le champ électrique est uniforme entre les armatures et relier cette valeur à la différence de potentiel $V(0)-V(d)$ entre les armatures. En déduire l'expression de la capacité C du condensateur.

تأثير كلي و نهمل آثار الطرف.

1/ في هذه الحالة بالضبط، ماذا تعني عبارة " لبوسان في تأثير كلي"؟ ماذا يمكن قوله عن توزيع الشحنة على كل لبوس؟ لتكن σ كثافة الشحنة على السطح المستوي ذي المعادلة $y=0$ ؛ ما هي كثافة الشحنة على السطح المستوي ذي المعادلة $y=d$ ؟

2/ أحسب عبارة الحقل الكهربائي بجوار كل لبوس.

3/ بيّن أن الحقل الكهربائي منتظم بين اللبوسين، إربط هذه القيمة بفرق الكمون بين اللبوسين $V(0)-V(d)$.
إستنتج عبارة السعة C للمكثفة.



Exercice 2.14

Un générateur de tension continue et trois condensateurs sont assemblés comme indiqué sur la figure ci-dessous :

$U=3V \quad , \quad C_1=30\mu F$

$C_2=10\mu F \;,\; C_3=5\mu F$

Quelles sont les charges Q_1 , Q_2 , Q_3 que portent les trois condensateurs ?

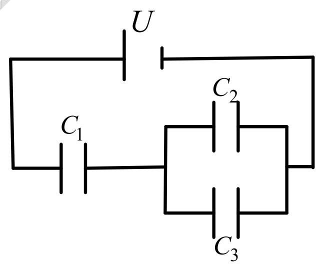
التمرين 14.2

يجمع مولد لتوتر مستمر و ثلاث مكثفات كما هو مبين على الشكل أسفله:

$U=3V \quad , \quad C_1=30\mu F$

$C_2=10\mu F \;,\; C_3=5\mu F$

ما هي الشحنات Q_1 , Q_2 , Q_3 التي تحملها المكثفات الثلاثة؟



Exercice 2.15

Un condensateur sphérique est constitué :

• D'une sphère interne conductrice pleine portant la charge Q,

• D'une couronne sphérique conductrice de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur $\mathrm{R_e}$, (figure ci-dessous),

1. En appliquant le théorème de Gauss à une surface fermée sphérique de rayon compris entre R_i et $\mathrm{R_e}$, calculer la charge portée par la paroi interne de la couronne conductrice.

2. Calculer le champ entre les deux armatures.

التمرين 15.2

تتكون أسطوانة كروية من:

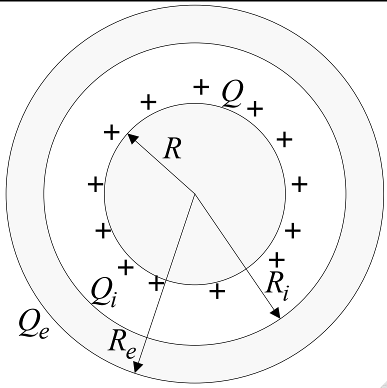
. كرة داخلية مصمتة تحمل الشحنة Q ،

. إكليل كروي ناقل نصف قطره الداخلي R_i و نصف قطر خارجي $\mathrm{R_e}$ ،(الشكل في الأسفل)،

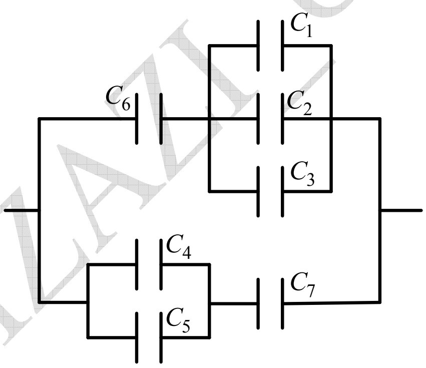
1/ بتطبيق نظرية غوص على سطح كروي مغلق نصف قطره محصور بين R_i و $\mathrm{R_e}$ ، أحسب الشحنة التي يحملها الجدار الداخلي للإكليل الناقل.

2/ أحسب الحقل بين اللبوسين.

3. Que devient ce champ si on place entre les deux armatures du condensateur un matériau de permittivité relative ε ? 4. En déduire le potentiel entre les deux armatures. 5. Calculer la capacité de ce condensateur. 6. Retrouver l'expression de la capacité d'un condensateur plan en considérant R_i très voisin de R : $R_i = R + d$.	3/ كيف يصبح هذا الحقل لو وضعنا بين لبوسي المكثفة مادة سماحيتها النسبية ε ؟ 4/ إستنتج الكمون بين اللبوسين. 5/ أحسب سعة المكثفة. 6/ أوجد من جديد عبارة سعة مكثفة مستوية باعتبار R_i قريب جدا من R : $R_i = R + d$.



Exercice 2.16 1/Déterminer la capacité de l'ensemble des condensateurs représenté sur la figure ci-dessous. 2/ Si la tension appliquée est de $120V$, trouver la charge et la différence de potentiel pour chaque condensateur ainsi que l'énergie de l'ensemble.	**التمرين16.2** 1/ عين سعة مجموع المكثفات الممثلة على الشكل أسفله. 2/ إذا كان التوتر المطبق هو $120V$ ، أحسب الشحنة و فرق الكمون بين طرفي كل مكثفة و كذا الطاقة المخزنة من قبل كل المجموعة.



$$C_1 = 1\mu F \ , \ C_2 = 2\mu F$$
$$C_3 = 3\mu F \ , \ C_4 = 4\mu F$$
$$C_5 = 5\mu F \ , \ C_6 = 12\mu F$$
$$C_7 = 18\mu F$$

Exercice 2.17

La capacité d'un condensateur variable d'un récepteur radio peut varier de $50pF$ à $950pF$ par rotation d'un bouton de $0°$ à $180°$. Le cadran marquant $180°$, le condensateur est relié à une batterie de $400V$. Après qu'il a été chargé, le condensateur est déconnecté de la batterie et le bouton ramené à $0°$.

1/ Quelle est la charge du condensateur ?

2/ Quelle est la différence de potentiel entre les armatures quand le cadran marque $0°$?

3/ Quelle est l'énergie du condensateur dans cette position ?

4/ En négligeant tout frottement, calculer le travail nécessaire pour tourner le bouton.

التمرين17.2

يمكن لسعة مكثفة متغيرة لجهاز استقبال راديو أن تتغير من $50pF$ إلى $950pF$ بتدوير زر من $0°$ إلى $180°$. حين يسجل الميناء $180°$، تكون المكثفة مربوطة إلى بطارية ذي $400V$. بعد شحنها، نقطع التوصيل بين المكثفة و البطارية و نضبط الزرّ في الوضع $0°$.

1/ ما هي شحنة المكثفة؟

2/ ما هو فرق الكمون بين اللبوسين حين يشير الميناء إلى $0°$.

3/ ما هي طاقة المكثفة في هذا الوضع؟

4/ بإهمال كل احتكاك، أحسب العمل اللازم لتدوير الزرّ.

Exercice 2.18

On monte deux résistances : $R_1 = 8,8\Omega$ et $R_2 = 4,4\Omega$ et deux condensateurs : $C_1 = 0,48\mu F$ et $C_2 = 0,24\mu F$ non chargés de la manière illustrée dans la figure ci-dessous.

Sachant qu'il y a une différence de potentiel de $24V$ aux bornes de ce réseau, déterminer :

1/ le potentiel au point F lorsque l'interrupteur K est ouvert depuis un temps assez long (poser que $V = 0$ à la borne négative de la source),

2/ le potentiel au point G lorsque l'interrupteur est ouvert,

3/ le potentiel final au même point G lorsque l'interrupteur K est fermé depuis un temps assez long,

4/ la quantité de charge qui a traversé l'interrupteur K fermé.

التمرين18.2

نركب مقاومتين: $R_1 = 8,8\Omega$ و $R_2 = 4,4\Omega$، و مكثفتين: $C_1 = 0,48\mu F$ و $C_2 = 0,24\mu F$ كما هو مبين على الشكل أسفله.

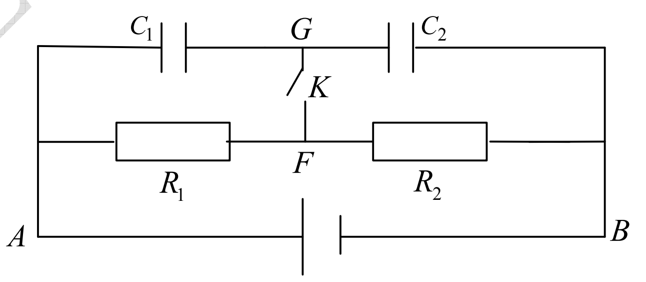
إذا علمت أن فرقا في الكمون مقداره $24V$ يسود بين طرفي هذا التركيب، عيّن:

1/ الكمون في النقطة F حين نكون القاطعة مفتوحة منذ زمن طويل(ضع $V = 0$ في الطرف السالب للمنبع)،

2/ الكمون في النقطة G حين تكون القاطعة مفتوحة،

3/ الكمون في النقطة G حين تكون القاطعة مغلقة منذ زمن طويل،

4/ كمية الشحنة التي عبرت القاطعة K المغلقة.



Exercice 2.19

1/ Calculez la quantité d'énergie emmagasinée dans un condensateur constitué de deux plaques carrées de $9cm$ de côté, séparées par un espace d'air de $2mm$, lorsque ses armatures portent une charge de $\pm300\mu C$.

2/ Que devient cette énergie si on introduit une plaque en mica (de permittivité relative $\kappa = 7$) de

التمرين19.2

1/ أحسب كمية الطاقة المخزنة في مكثفة مكونة من صفيحتين مربعتين ضلع كل واحدة $9cm$ ، يفصل بينهما حيّز من الهواء سمكه $2mm$،حينما يحمل لبوسيها شحنة $\pm300\mu C$.

2/ كيف تصبح هذه الطاقة لو أدخلنا صفيحة من الميكا

$2mm$ d'épaisseur qui remplit donc tout l'espace entre les armatures ?

c) Même question que 2/ pour le cas où la plaque de mica ne fait que $1mm$ d'épaisseur.

(نفاذيته النسبية $\kappa = 7$) و سمكه $2mm$ و الذي يملأ إذن كل الفراغ بين اللبوسين؟

3/ نفس سؤال 2/ في حالة ما إذا كان سمك صفيحة الميكا لا يساوي إلا $1mm$.

Exercice 2.20

On considère le montage comme indiqué sur la figure ci-dessous. Tous les interrupteurs sont ouverts et les condensateurs déchargés.

I. On ferme l'interrupteur K_1 :

1/ Quelle est la charge finale portée par chaque condensateur ?

2/ Quelle est la différence de potentiel finale entre les armatures de chaque condensateur ?

II On laisse l'interrupteur K_1 fermé, puis on ferme les interrupteurs K_2 et K_3 :

1/ Quelle est la charge finale portée par chaque condensateur ?

2/ Quelle est la différence de potentiel finale entre les armatures de chaque condensateur ?

III. On ouvre les interrupteurs K_2 et K_3 puis on ferme les interrupteurs K_1 et K_4, quelle est la charge finale portée par chaque condensateur ?

VI. On laisse les interrupteurs K_1 et K_4 fermés, puis on ferme aussi les interrupteurs K_2 et K_3 :

1/ Quelle est la différence de potentiel finale entre les armatures de chacun des deux condensateurs C_1 et C_2 ?

2/ Quelles sont les charges finales des deux condensateurs C_1 et C_2 ?

Application numérique :

$$R_1 = R_2 = 100\Omega \ , \ E = 6V$$
$$C_2 = 2\mu F \ , \ C_1 = 1\mu F$$

التمرين 20.2

نعتبر الدارة المبينة على الشكل أسفله. كل القواطع مفتوحة و المكثفات غير مشحونة.

I. نغلق القاطعة K_1:

1/ كم هي الشحنة النهائية التي تحملها كل مكثفة؟

2/ كم هو فرق الكمون النهائي بين لبوسي كل مكثفة؟

II. نترك القاطعة K_1 مغلقة، ثم نغلق القاطعتين K_2 و K_3:

1/ كم هي الشحنة النهائية التي تحملها كل مكثفة؟

2/ كم هو فرق الكمون النهائي بين لبوسي كل مكثفة؟

III. نفتح القاطعتين K_1 و K_3 و نغلق القاطعتين K_2 و K_4:

كم هي الشحنة النهائية التي تحملها كل مكثفة؟

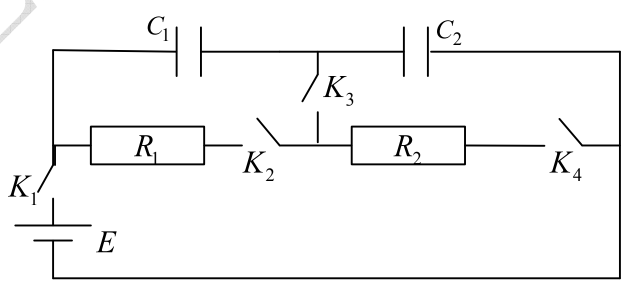
IV. نترك K_2 و K_4 مغلقتين، ثم نغلق K_1 و K_3 أيضا:

1/ كم هو فرق الكمون بين لبوسي كل من المكثفتين C_1 و C_2؟

2/ كم هما الشحنتان النهائيتان للمكثفتين C_1 و C_2؟

تطبيق عددي:

$$R_1 = R_2 = 100\Omega \ , \ E = 6V$$
$$C_2 = 2\mu F \ , \ C_1 = 1\mu F$$



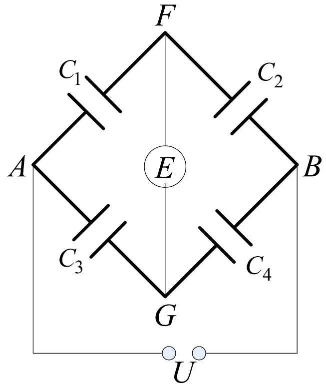
Exercice 2.21

Quatre condensateurs sont groupés comme indiqué sur la figure ci-dessous. On applique une différence de potentiel U entre les points A et B et l'on branche un électromètre E entre les points F et G pour déterminer leur différence de potentiel. Montrer que

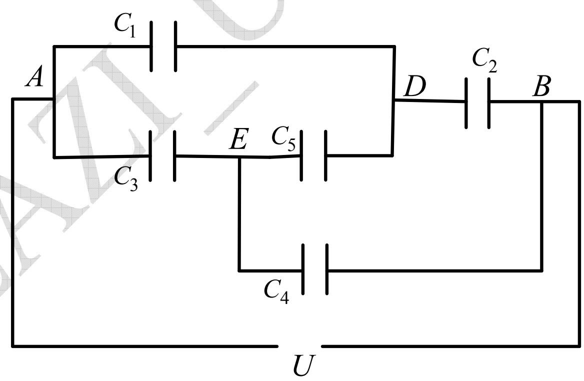
التمرين 21.2

تربط أربع مكثفات كما هو مبين على الشكل في الأسفل. نطبق فرقا في الكمون U بين النقطتين A و B، كما نربط إلكترومترا E بين النقطتين F و G من أجل تحديد التوتر بينهما. بيّن أن الإلكترومتر يشير

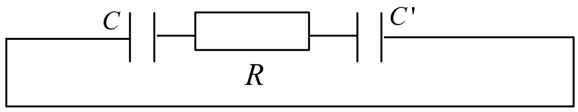
l'électromètre indique zéro si $\frac{C_1}{C_2}=\frac{C_3}{C_4}$. Ce dispositif représente un pont utilisable pour la mesure de la capacité d'un condensateur en fonction d'un condensateur étalon et du rapport de deux capacités.	إلى الصفر إذا كانت $\frac{C_1}{C_2}=\frac{C_3}{C_4}$. هذا التركيب يمثل جسرا يستعمل لحساب سعة مكثفة بدلالة مكثفة معيارية و نسبة سعتين.



Exercice 2.22 Soit le montage de condensateurs comme indiqué sur la figure ci-dessous. 1/ Redessiner le schéma de ce montage en faisant apparaître la symétrie par rapport à la branche ED. 2/ Si $U=100V$ et $U_{CD}=0$, calculer la capacité du condensateur équivalent, la charge de chaque condensateur ainsi que la différence de potentiel entre les armatures de chaque condensateur. On donne $C_1=C_2=C_3=C_4=1\mu F$	**التمرين22.2** ليكن تركيب المكثفات كما هو مبين على الشكل أسفله. 1/ أعد رسم هذا التركيب بحيث تظهر التناظر حول الفرع ED. 2/ إذا كان $U=100V$ و $U_{CD}=0$ ، أحسب سعة المكثفة المكافئة، شحنة كل مكثفة و كذا فرق الكمون بين لبوسي كل مكثفة. تعطى: $C_1=C_2=C_3=C_4=1\mu F$



Exercice 2.23 Un condensateur de capacité C, initialement chargé sous une tension U_0 est rapidement connecté à un autre condensateur de capacité C', initialement déchargé, par l'intermédiaire d'un circuit électrique de résistance R. La décharge de C et la charge de C', en série, se fait avec la constante de temps $\tau=RC_{éq}=R\frac{CC'}{C+C'}$. On demande d'établir le bilan des énergies libres du système, de calculer l'énergie perdue et de comparer cette énergie à celle consommée par effet Joule dans R.	**التمرين 23.2** مكثفة سعتها C ، مشحونة في البداية تحت توتر U_0 توصل بسرعة بمكثفة أخرى سعتها C'، فارغة في البداية، بواسطة دارة كهربائية ذات مقاومة R . تفريغ C و شحن C' ، على التسلسل، تتمّ بثابت الزمن $\tau=RC_{éq}=R\frac{CC'}{C+C'}$. المطلوب هو وضع حوصلة للطاقات الحرة للجملة، حساب الطاقة الضائعة و مقارنة هذه الطاقة بتلك المستهلكة بفعل جول في R .



Exercice 2.24

On étudie la décharge d'un condensateur, en envisageant le circuit de la figure ci-dessous, constitué d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un condensateur de capacité C chargé.

1/ Quel est le signe de i ? Établir la relation liant l'intensité i du courant à la tension u_C.

2/ Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de u_C.

3/ Une solution de l'équation différentielle peut s'écrire $u_C = A\exp(-at)$ où A et a sont deux constantes positives non nulles.

a) En utilisant l'équation différentielle, déterminer A et a.
b) Donner l'expression littérale de la constante de temps τ.
c) Montrer par analyse dimensionnelle que τ a la même unité qu'une durée.
d) Sachant que $R = 33\Omega$, et $\tau = 0,07s$, en déduire la valeur de la capacité C du condensateur.

4/ En utilisant les résultats précédents :

a) montrer que $i = -\frac{U_0}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$.
b) Déterminer la valeur I_0 de i à $t = 0$.
c) Calculer la valeur de i pour $t = 0,5s$.
d) Déterminer la valeur de u_C à la même date.
e) Le condensateur est-il déchargé ? Justifier la réponse.

5/ On remplace ce condensateur par un autre condensateur de capacité C' supérieure à C. Ce condensateur est chargé sous la même tension U_0. L'énergie emmagasinée dans ce condensateur est-elle supérieure à la précédente ?

التمرين 24.2

ندرس تفريغ مكثفة، باعتبار الدارة المبينة على الشكل أسفله، و المتكونة من ناقل أومي مقاومته R و مكثفة مشحونة سعتها C .

1/ / ما هي إشارة i ؟ ضع العلاقة التي تربط الشدة i للتيار بالتوتر u_C .

2/ ضع المعادلة التفاضلية المسيرة لتطور u_C .

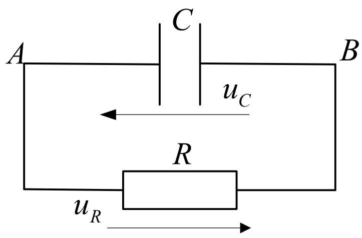
3/ إحدى حلول المعادلة التفاضلية يمكن أن تكتب $u_C = A\exp(-at)$ حيث A و a ثابتين موجبين و غير معدومين.

أ) باستعمال المعادلة التفاضلية، حدّد A و a.
ب) إعط العبارة الحرفية لثابت الزمن τ.
ج) بيّن بالتحليل البعدي أن τ لها نفس وحدة مدة زمنية.
د) علما أن $R = 33\Omega$ ، و $\tau = 0,07s$ ، استنتج قيمة السعة C للمكثفة.

4/ باستعمال النتائج السابقة:

أ) بيّن أن $i = -\frac{U_0}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$.
ب) حدّد القيمة I_0 لــ i في $t = 0$.
ج) أحسب قيمة i من أجل $t = 0,5s$.
د) أحسب قيمة u_C في نفس اللحظة.
ه) هل المكثفة أفرغت؟ برر إجابتك.

5/ نستبدل هذه المكثفة بمكثفة أخرى سعتها C' أكبر من C. هذه المكثفة مشحونة تحت توتر U_0 . هل الطاقة المخزنة في هذا المكثفة أكبر من السابقة؟



Exercice 2.25

On étudie le champ électrostatique et le potentiel crées par deux conducteurs sphériques concentriques chargés, en équilibre électrostatique.

Le conducteur central (C) est une boule de centre O et de rayon R ; il porte une charge négative $-Q$.

Le conducteur externe (C') est une boule creuse, de centre O et porte une charge positive égale à $2Q$; le rayon de sa surface interne est égal à $2R$, celui de sa surface externe est égal à $3R$.

Il n'y a pas d'autres charges, ni à l'intérieur de l'espace vide entre les deux conducteurs, ni à l'extérieur des deux conducteurs. Chacun des deux conducteurs est isolé. Le potentiel est nul à l'infini.

On note $\vec{E}(M)$ le champ électrostatique et $V(M)$ le potentiel en un point M quelconque de l'espace, repéré par ses coordonnées sphériques $M(r,\theta,\varphi)$, où $\overrightarrow{OM}=r\vec{u}$.

1/ Pourquoi peut-on affirmer que la densité volumique de charge est nulle dans les conducteurs ? Où trouve-t-on les charges?

2/ Pourquoi peut-on écrire $\vec{E}(M)=E(r)\vec{u}$ et $V(M)=V(r)$?

3/ Démontrer que la charge $2Q$ du conducteur externe (C') se répartit également sur ses deux surfaces.

4/ Calculer $E(r)$ et tracer le graphe correspondant. Cette fonction est-elle continue? Commenter.

5/ Calculer $div\vec{E}(M)=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d^2\left(r^2E(r)\right)}{dr}$ dans les différentes régions de l'espace. Pouvait-on prévoir ces résultats?

6/ Déterminer le potentiel $V(r)$ et tracer le graphe correspondant.

7/ En déduire le potentiel de chacun des deux conducteurs et la capacité du condensateur sphérique formé du conducteur (C) et de la surface interne du conducteur (C').

8/ Faire une figure donnant l'allure de quelques lignes de champ (à l'intérieur du condensateur et à l'extérieur). Les orienter.

9/ Donner l'énergie emmagasinée dans ce condensateur.

التمرين25.2

ندرس الحقل الكهروساكن و الكمون الناتجين عن ناقلين كرويين متمركزين و مشحونين و هما في حالة توازن كهروساكن.

الناقل المركزي (C) هو كرة مصمتة مركزها O و نصف قطرها R ؛ تحمل الشحنة السالبة $-Q$.

الناقل الخارجي هو كرة مجوفة، مركزها O و تحمل الشحنة الموجبة المساوية لـــ $2Q$ ؛ نصف قطر سطحه الداخلي يساوي $2R$، و نصف قطره الخارجي يساوي $3R$.

لا وجود لشحنات أخرى، لا داخل الحيّز الفارغ بين الناقلين، و لا خارج الناقلين. كل من الناقلين معزول. الكمون معدوم في ما لا نهاية.

نرمز بـــ $\vec{E}(M)$ للحقل الكهروساكن و بـــ $V(M)$ للكمون في نقطة M مهما كانت في الفضاء، و المعيّنة بإحداثياتها الكروية $M(r,\theta,\varphi)$ ، حيث $\overrightarrow{OM}=r\vec{u}$.

1/ لماذا يمكن الجزم بان الكثافة الحجمية للشحنة معدومة داخل الناقلين؟ أين نجد الشحنات؟

2/ لماذا يمكن كتابة $\vec{E}(M)=E(r)\vec{u}$ و $V(M)=V(r)$؟

3/ برهن أن الشحنة $2Q$ للناقل الخارجي (C') موزعة بانتظام على السطحين.

4/ أحسب $E(r)$ و ارسم البيان المناسب. هل هذه الدالة مستمرة؟ ناقش.

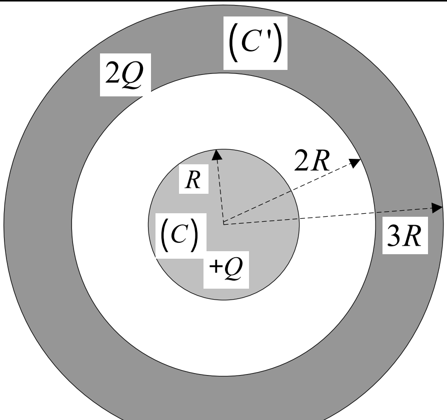
5/ أحسب $div\vec{E}(M)=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d^2\left(r^2E(r)\right)}{dr}$ في مختلف مناطق الفضاء. هل كان بالإمكان التنبؤ بهذه النتائج؟

6/ عيّن الكمون $V(r)$ و ارسم البيان المناسب.

7/ إستنتج كمون كل من الناقلين و سعة المكثفة الكروية المكونة من الناقل (C) و السطح الداخلي للناقل (C').

8/ أرسم شكلا تبين فيه بعض خطوط الحقل(داخل و خارج المكثفة). بين اتجاهها.

9/ إعط الطاقة المخزنة في المكثفة.



Exercice 2.26

Un condensateur plan est constitué de deux plaques métalliques rectangulaires A et B (figure-a- ci-dessous) de longueur L et de largeur x, séparées par une couche d'air d'épaisseur $2d$.

1/ Calculer la capacité du condensateur.

2/ Calculer la charge du condensateur lorsqu'il est mis sous une tension U.

3/ On introduit entre les deux armatures du condensateur une plaque métallique (figure-b- ci-dessous) d'épaisseur $d/2$ et initialement neutre.

Calculer les charges réparties sur les faces et les représenter sur les faces.

On donne :

$$L = 12cm;\ x = 10cm;\ 2d = 4cm;$$
$$U = 400V;\ \varepsilon_0 = 8.85.10^{-12}$$

التمرين26.2

تتكون مكثفة مستوية من صفيحتين معدنيتين مستطيلتين A و B (الشكل أسفله−a−) طول كل منهما L و عرض كل منهما x، تفصل بينهما طبقة من الهواء سمكها $2d$.

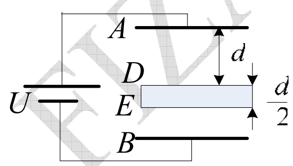
1/ أحسب سعة المكثفة.

2/ أحسب شحنة المكثفة حينما تربط بين طرفي فرق في الكمون U.

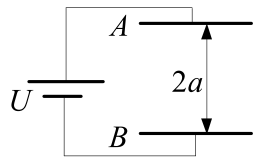
3/ ندخل بين لبوسي المكثفة صفيحة معدنية (الشكل أسفله−b−) ذات سمك $d/2$ و معتدلة في البداية. أحسب الشحنات Q_E, Q_D, Q_B, Q_A الموزّعة على الأوجه و مثّلها على الأوجه.

تعطى:

$$L = 12cm;\ x = 10cm;\ 2d = 4cm;$$
$$U = 400V;\ \varepsilon_0 = 8.85.10^{-12}$$



b



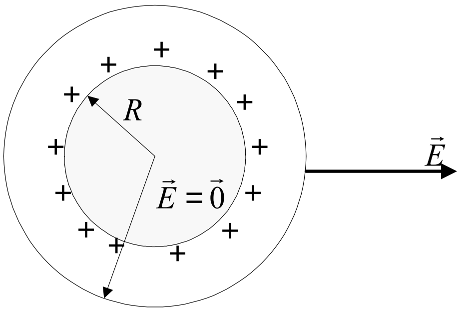
a

Corrigés des exercices 2.1 à 2.26 : | حلول التمارين من 1.2 إلى 26.2

التمرين 1.2:

1/ في حالة التوازن، تتوزع الشحنات بانتظام على سطح الناقل أي على سطح الكرة. داخل الناقل الشحنة الكلية معدومة.

2/ إستنتاج عبارة الكثافة السطحية للشحنة:



$$\left.\begin{array}{l}\sigma=\dfrac{Q}{S}\\ S=4\pi R^2\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{\sigma=\dfrac{Q}{4\pi R^2}}\left(C/m^2\right)$$

3/ في ناقل متوازن، يكون الحقل الكهروساكن معدوما.

4/ حسب نظرية كولومب فإن:

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\Rightarrow\boxed{E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}}\left(V/m\right)$$

5/ لتطبيق نظرية غوص نعتبر سطحا كرويا مغلقا نصف قطره . تدفق الحقل الكهروساكن عبر هذا السطح هو: $\Phi=ES=E.4\pi r^2$. و عليه فإن شدة الحقل الكهروساكن الناتج على البعد $r\,(r\geq R)$ من مركز الناقل هو:

$$E4\pi r^2=\frac{Q}{\varepsilon_0}\Rightarrow\boxed{E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}}\left(V/m\right)$$

التمرين 2.2:

1/ نطبق نظرية غوص: الشحنة الداخلية هي مجموع الشحنات داخل سطح غوص و الذي هو كرة نصف قطرها R_G أكبر بقليل من نصف قطر الكرة الناقلة:

$$Q_{\text{int}}=80-20\Rightarrow Q_{\text{int}}=60.10^{-6}C$$

$$\boxed{E=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0 S_G}=\frac{Q_{\text{int}}}{4\pi R_G^2.\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{E=84,3.10^6\,Vm^{-1}}$$

2/ سطح غوص في هذه الحالة يحيط بالتجويف وحده. الشحنة الداخلية هي التي يحملها التجويف أي $-20\mu C$. و عليه فإن الحقل بقرب سطح التجويف:

$$\boxed{E'=\frac{Q'_{\text{int}}}{\varepsilon_0 S'_G}=\frac{Q'_{\text{int}}}{4\pi r_G^2.\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{E'=2,81.10^6\,Vm^{-1}}$$

3/ الشحنة على السطح الداخلي للتجويف هي الشحنة المساوية للشحنة النقطية و المعاكسة لها في الإشارة و هذا حسب التأثير الكلي الذي تحدثه الشحنة النقطية.

$$q+Q_i=0\Rightarrow\boxed{Q_i=20\mu C}$$

4/ الشحنة على السطح الخارجي + الشحنة على السطح الداخلي للتجويف = الشحنة التي تحملها الكرة. و عليه فإن الشحنة التي يحملها السطح الخارجي للكرة هي:

$$Q_e + Q_i = 80\mu C \ , \ Q_e + 20 = 80 \Rightarrow \boxed{Q_e = 60\mu C}$$

التمرين 3.2:

1/ نطبق نظرية غوص. نختار كسطح غوص اسطوانة نصف قطرها أكبر بقليل من نصف قطر الأسطوانة الناقلة بحيث تكون كل الشحنة التي تحملها الأسطوانة داخل سطح غوص.

$$\boxed{E = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0 S_G} = \frac{Q_{int}}{4\pi R_G^2 .\varepsilon_0 .}}$$

$$\boxed{E = 5,4.10^6 Vm^{-1}}$$

2/ الكثافة الخطية تساوي مجموع الكثافتين الخطيتين لكل من الأسطوانة و الساق:

$$\lambda = 9 + 5 \ , \ \boxed{\lambda = 14\mu Cm^{-1}}$$

3/ نطبق نظرية غوص. نختار كسطح غوص اسطوانة نصف قطرها أكبر بقليل من نصف قطر الأسطوانة الناقلة بحيث تكون كل الشحنة التي تحملها الأسطوانة و الساق معا داخل سطح غوص:

$$E = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0 S} = \frac{\lambda l}{2\pi r l \varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}} \ , \ \boxed{E = 8,4.10^6 Vm^{-1}}$$

4/ نطبق نظرية غوص. نختار كسطح غوص اسطوانة نصف قطرها $R = 2cm$ بحيث تكون كل الشحنة التي داخل سطح غوص هي الشحنة التي تحملها الساق وحدها:

$$E = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0 S} = \frac{\lambda_T l}{2\pi R l \varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi R \varepsilon_0}} \ , \ \boxed{E = 4,5.10^6 Vm^{-1}}$$

التمرين 4.2:

1/ نعلم أنه لشحن ناقل يجب القيام بعمل. لإضافة شحنة عنصرية dq (نفترض أننا نجلبها من ما لا نهاية حيث $V_\infty = 0$) لناقل يجب توفير العمل العنصري: $dW_e = dq(V_\infty - V)$. الطاقة الكامنة العنصرية هي إذن $dE_p = -dW_e \Rightarrow dE_p = dq.V$. للحصول على الطاقة الكلية علينا بالمكاملة:

$$E_p = \int_0^q V dq = \int_0^q \frac{q}{C} dq \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

$$q = CV \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} CV^2 \rightarrow (1)$$

الكمون على سطح الكرة هو: $\left.\begin{array}{l} V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R} \\ q = \sigma.4\pi R^2 \end{array}\right| \Rightarrow V = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} R \rightarrow (2)$

نعوض الكمون في المعادلة (1) فنحصل على:

$$\left.\begin{array}{l} C = 4\pi\varepsilon_0 R \\ V^2 = \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2} R^2 \end{array}\right| \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} 4\pi\varepsilon_0 R \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2} R^2 \ , \ \boxed{E_p = 4\pi R^3 p_e}$$

2/ خلال عملية التفريغ، الطاقة التي كانت على سطح الكرة تتحول إلى طاقة حرارية بفعل جول في السلك الواصل بين الكرة و الأرض.

3/ الطاقة التي قدّمها المولد للكرة هي: $E_p = qV$، و هي ضعف الطاقة المخزّنة في النهاية في الكرة الناقلة. أما النصف الآخر فقد تحول إلى طاقة حرارية أثناء عملية نقل الشحنات عبر السلك.

التمرين5.2:

1/ الكرتان لهما نفس الكمون: $V_1 = V_2$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \rightarrow (1)$$

و حسب مبدإ انحفاظ الشحنة فإن: $Q = Q_1 + Q_2 \rightarrow (2)$

من المعادلتين (1) و (2) يمكن استنتاج شحنة كل كرة:

$$\begin{cases} Q_1R_2 = Q_2R_1 \rightarrow Q_1 = Q_2\dfrac{R_1}{R_2} \\ Q = Q_1 + Q_2 \rightarrow Q_1 = Q - Q_2 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \boxed{Q_2 = \dfrac{Q}{\dfrac{R_1}{R_2}+1}} \rightarrow \boxed{Q_2 = \dfrac{3}{13}10^{-9}C} \\ \boxed{Q_1 = Q_2\dfrac{R_1}{R_2}} \rightarrow \boxed{Q_1 = \dfrac{10}{13}10^{-9}C} \end{array} \right.$$

2/ طاقة الكرة قبل ربطها مع الأخرى: (بمعرفة السعة C لناقل كروي $C = 4\pi\varepsilon_0 R_1$)

$$W = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow \boxed{W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}} \rightarrow \boxed{W = 4,5.10^{-9}J}$$

3/ طاقة الجملة بعد وصل الكرتين مع بعضهما:

$$\left. \begin{array}{l} W = W_1 + W_2 \\ W = \dfrac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{Q_2^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2} \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1^2}{R_1} + \frac{Q_2^2}{R_2}\right]} \rightarrow \boxed{W = 4,46.10^{-9}C}$$

نلاحظ ضياعا للطاقة، و إن كان مهملا. بما أن أثر السلك لا يؤخذ بعين الاعتبار فيمكن تفسير ضياع الطاقة على انه تحول إلى إشعاع كهرومغناطيسي حين توصيل الكرتين معا.

4/ من المعادلة (1) نستنتج:

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{R_1} = \frac{\sigma_2 4\pi R_2^2}{R_2} \Rightarrow \boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}}$$

5/ بتطبيق نظرية غوص يمكن حساب الحقل الكهربائي على سطح كل كرة:

$$ES = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\left. \begin{array}{l} E_{1,surface} = \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \\ E_{2,surface} = \dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0} \\ \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = \dfrac{R_2}{R_1} \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{\frac{E_{1,surface}}{E_{2,surface}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}}$$

التمرين 6.2:

1/ تكتسب الكرة S_1 عند حملها إلى الكمون V_1 شحنة $+Q_1$. يتأثر التجويف S_2 كليا بشحنة الكرة S_1 فتظهر على سطحه الداخلي شحنة $-Q_1$ و على سطحه الخارجي شحنة $+Q_1$، بحيث تبقى شحنته الكلية معدومة لكونه معزولا و متوازنا(الشكل (a)). و لهذا السبب فإن الحقل داخل التجويف $R_1 \prec r \prec R_2$ يساوي حسب نظرية غوص:

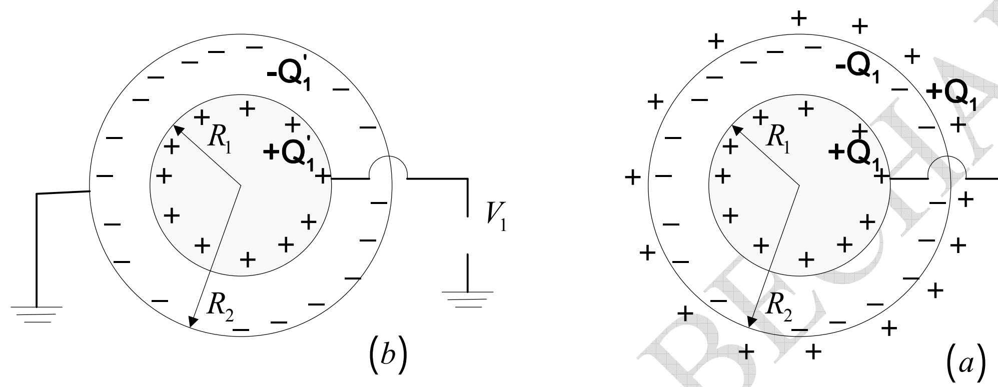
$$\left.\begin{aligned} E(r).S &= \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \\ S &= 4\pi r^2 \end{aligned}\right| \Rightarrow E(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

نحسب تجوال الحقل من R_1 إلى ∞ علما أن $V_\infty = 0$:

$$V_1 - V_\infty = \int_{R_1}^{\infty} \vec{E}\,\overrightarrow{dr} \Rightarrow V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{\infty}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_1}}$$

و منه فإن قيمة الشحنة التي تحملها الكرة S_1 هي:

$$\boxed{Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 V_1} \ , \ \boxed{Q_1 = 1{,}1\mu C}$$



2/ وصل الكرة المجوفة بالأرض يعني تفريغ سطحها الخارجي من الشحن ، بينما سطحها الداخلي يحمل الشحنة $-Q_1^{'}$، كمون هذا التجويف معدوم.الشكل (b)

بالتباع نفس خطوات السؤال السابق نتوصل إلى:

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\,\overrightarrow{dr} \Rightarrow V_1 = \frac{Q_1^{'}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{Q_1^{'}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

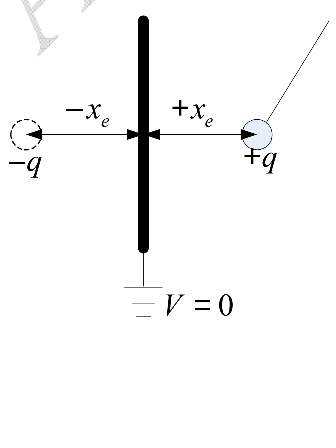
نستنتج من هذا شحنة السطح الداخلي للتجويف و التي تساوي و تعاكس شحنة الكرة S_1 بفعل التأثير الكلي:

$$\left.\begin{aligned} Q_1^{'} &= 4\pi\varepsilon_0 V_1\left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\right) \\ Q_1 &= 4\pi\varepsilon_0 R_1 V_1 \end{aligned}\right| \Rightarrow Q_1^{'} = \frac{R_2}{R_2 - R_1} Q_1$$

$$R_2 = 2R_1 \Rightarrow \boxed{Q_1^{'} = 2Q_1} \ , \ \boxed{Q_1^{'} = 2{,}2\mu C}$$

الخلاصة: شحنة الكرة S_1 تتغير بمجرد توصيل التجويف S_2 بالأرض.

التمرين 7.2:



يتمثل توزيع الشحنة في شحنة $+q$ و التي يمكن اعتبارها نقطية، و مستوى كمونه معدوم $V = 0$.

قبل وضع الشحنة $+q$ بجوار الطبق، كان الطبق غير مشحون. عند تقريب الشحنة $+q$ من الطبق، و بفعل التكهرب بالتأثير، يشحن الطبق سلبا بحيث يبقى كمونه معدوما. ينجرّ عن هذا انجذاب الشحنة إلى الطبق.

الشحنة $+q$ و الطبق ينشئان في الفضاء توزيعا للكمون متميّز بمستوى كمونه معدوما(سطح متساوي الكمون) في $x = 0$.

إذا استبدلنا الطبق بشحنة نقطية $-q$ تقع على المسافة $-x_e$، يكون لدينا نفس التوزيع للكمون(المستوى المنصف كمونه $V=0$). تسمى هذه الشحنة **بالصورة الكهربائية** للشحنة $+q$ بالنسبة للمستوى.
التجاذب بين الشحنة $+q$ و الطبق المحمول إلى الكمون $V=0$ هو نفسه التجاذب الحاصل بين الشحنة $+q$ و الشحنة $-q$.
إذن القوة المطبقة على الكرية، حسب قانون كولومب، هي:

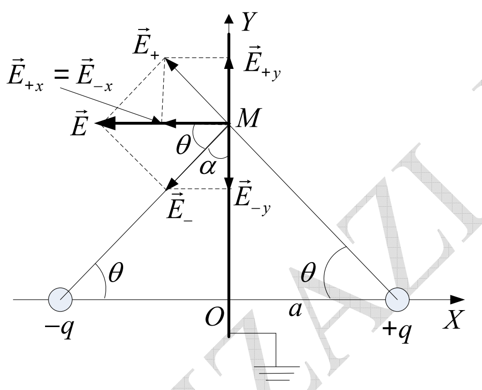
$$\boxed{F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4x_e^2}}$$

التمرين 8.2:

1/ مهما كانت النقطة M المنتمية للمستوى الناقل فإن فرق الكمون الناتج عن الشحنتين يكون معدوما:

$$\left.\begin{array}{l}\forall M\ ,\ V(M)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)\\ r_1=r_2=r\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{V(M)=0}$$

للحقل مركبة واحدة $\vec{E}_x$ تقع على محور الـــ X و بالتالي فإن الحقل الناتج عن الشحنتين في النقطة M عمودي على المستوى الناقل الشاقولي كما هو مبين في التحليل التالي:
نرمز بـــ $\vec{E}_+$ و $\vec{E}_-$ إلى الحقلين الناتجين عن كل من الشحنتين $+q$ و $-q$. استنادا إلى الشكل الموالي فإن:



$$\vec{E}(M)=\vec{E}_++\vec{E}_-$$

$$\vec{E}_+=\vec{E}_{+x}+\vec{E}_{+y}$$

$$\vec{E}_-=\vec{E}_{-x}+\vec{E}_{-y}$$

$$E_+=E_-=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{E}_{+x}=\vec{E}_{-x}\\ \vec{E}_{+y}=-\vec{E}_{-y}\end{array}\right|\Rightarrow\vec{E}(M)=2\vec{E}_{+x}$$

$$\boxed{\vec{E}(M)=\vec{E}_x=-2E_+\cos\theta.\vec{u}_x}\Leftrightarrow\boxed{E(M)=-\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\cos\theta}$$

2/ لحساب كثافة الشحنة نستعمل نظرية غوص:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi=ES=\dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}\\ Q_{\text{int}}=\sigma S\end{array}\right|\Rightarrow\sigma=E\varepsilon_0$$

$$\left.\begin{array}{l}E=-\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\cos\theta\\ \cos\theta=\dfrac{a}{r}\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{\sigma=-\frac{1}{2\pi}\frac{qa}{r^3}}$$

3/ للتأكد من شحنة المستوى نحسب التدفق الذي تحدثه الشحنة النقطية $+q$ عبر سطح مستوى الناقل:

نعرف أن التدفق العنصري هو $d\Phi = EdS$:

$$d\Phi = 2E_+ \cos\theta . dS \Rightarrow d\Phi = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}dS$$

نتعرف على الزاوية الصلبة العنصرية $d\Omega$: $d\Omega = \frac{\cos\theta}{r^2}dS \Rightarrow d\Phi = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}d\Omega$

من الشحنة $+q$ نرى نصف الفضاء و المناسب للزاوية الصلبة $\Omega = 2\pi$ ، و منه: $\Phi = -\frac{q}{\varepsilon_0}$

حسب نظرية غوص $\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$.

في الأخير نتأكد أن الشحنة التي يحملها المستوى هي: $\boxed{Q_{\text{int}} = -q} \Rightarrow \Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = -\frac{q}{\varepsilon_0}$. هذه النتيجة تثبت أن هناك تأثير كلي بين الشحنة $+q$ و المستوى الناقل بشرط أن يكون لامتناهيا: $q = -q$.

التمرين 9.2:

لحساب التدفق نستعمل العبارة التي مررنا عليها في الدرس خلال تحليلينا للبرهان على الشكل التفاضلي لنظرية غوص:

$$d\Phi_{\vec{E}} = \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right]dv = \frac{dq}{\varepsilon_0}$$

لحساب الشحنة الداخلية نستعمل نظرية غوص: $\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

أما لحساب كثافة الشحنة ρ فنستعمل نظرية غوص على الشكل التفاضلي:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

الحالة الأولى: $\vec{E} = Cx\vec{u}_x$

للحقل الكهربائي مركبة واحدة فقط و هي $\vec{E}_x$. التدفق هو إذن:

$$d\Phi_{\vec{E}} = \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}}_{0}\right]dv = \frac{dq}{\varepsilon_0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dE_x}{dx} = C \\ dv = dxdydz \\ d\Phi_{\vec{E}} = Cdv \end{array}\right| \Rightarrow \Phi_{\vec{E}} = Cv \ , \ \boxed{\Phi_{\vec{E}} = Ca^3}$$

الشحنة الداخلية: $\left.\begin{array}{l} \Phi = \frac{q}{\varepsilon_0} \\ q = \Phi\varepsilon_0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{q = \varepsilon_0 Ca^3}$

كثافة الشحنة:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}}_{0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho = \varepsilon_0\frac{dE_x}{dx} \Rightarrow \boxed{\rho = \varepsilon_0 C}$$

الحالة الثانية: $\vec{E} = C\left(y\vec{u}_x + x\vec{u}_y\right)$

للحقل الكهربائي مركبتان $\vec{E}_x$ و $\vec{E}_y$. التدفق هو إذن:

$$d\Phi_{\vec{E}} = \left[\underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial z}}_{0}\right] dv = 0 \Rightarrow \boxed{\Phi_{\vec{E}} = 0}$$

الشحنة الداخلية: $q = \varepsilon_0 \Phi = 0 \Rightarrow \boxed{q = 0}$

كثافة الشحنة:

$$\underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}}_{0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\rho = 0}$$

التمرين 10.2:

الناقل S_1 يحمل شحنته الذاتية $q_{11} = C_{11}V_1$، بالإضافة إلى الشحنة $q_{12} = C_{12}V_2$ الناتجة عن تأثره بالناقل S_2. و كذلك الأمر بالنسبة للناقل S_2:

$$q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \rightarrow (1)$$

$$q_2 = C_{21}V_{12} + C_{22}V \rightarrow (2)$$

و بما أن المسافة بينهما كبيرة جدا بالنسبة لقطريهما، فإن كمون كل كرة يكافئ كمون شحنة نقطية، و يساوي مجموع كمونهما الذاتي و كمونهما التحريضي، أي:

$$V_1 \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{d} \rightarrow (3)$$

$$V_2 \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{d} \rightarrow (4)$$

نجعل الناقل S_1 في الكمون $(V_1 \succ 0)$، و نصل الناقل S_2 بالأرض $(V_2 = 0)$، فنحصل بالترتيب على:

$$q_1^{'} = C_{11}V_1 \rightarrow (5)$$

$$q_2^{'} = C_{21}V_1 \rightarrow (6)$$

$$0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1^{'}}{d} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2^{'}}{R_2} \rightarrow (7)$$

نستنتج من المعادلة (7) أن:

$$q_1^{'} = -\frac{d}{R_2}q_2^{'} \rightarrow (8)$$

$$q_2^{'} = -\frac{R_2}{d}q_1^{'} \rightarrow (9)$$

بتعويض النتيجة (8) في (3)، مع مراعاة أن $(d \succ\succ R_1, R_2)$ نجد:

$$V_1 \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}\left(-\frac{d}{R_2}q_2^{'}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}q_2^{'} \Rightarrow V_1 \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_1R_2 - d^2}{dR_1R_2}$$

$$V_1 \approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{R_1R_2} \rightarrow (10)$$

بمطابقة المعادلتين (9) و (6) نجد معامل التأثير:

$$\boxed{C_{21}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_1R_2}{d}}$$

بتعويض النتيجة (9) في (3)، مع مراعاة أن $(d \succ\succ R_1, R_2)$ نجد:

$$V_1 \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}q_1^{'}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}\left(-\frac{R_2}{d}q_1^{'}\right) \Rightarrow V_1 \approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_1R_2-d^2}{d^2R_1}q_1^{'}$$

$$V_1 \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_1}q_1^{'} \to (11)$$

بمطابقة المعادلتين (11) و (5) نجد سعة التأثير:

$$\boxed{C_{11}=4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

نجعل الآن الناقل S_2 في الكمون $(V_2 \succ 0)$، و نصل الناقل S_1 بالأرض $(V_1=0)$. بالتباع نفس الخطوات التي مررنا بها في الحالة الأولى نتوصل إلى:

$$\boxed{C_{22}=4\pi\varepsilon_0 R_2} \quad , \quad \boxed{C_{12}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_1R_2}{d}=C_{21}}$$

<u>مناقشة:</u>

أ) لو كان الناقلان على بعد لامتناهي عن بعضهما البعض لكان: $C_{12}=C_{21}=0$، مما يدل على عدم تأثر الواحد بالآخر، أي أن كل واحد معزول تماما و بالتالي $C_1=C_{11}$ و $C_2=C_{22}$.

ب) لو كان الناقلان متماثلين و على بعد $d=R_1=R_2$ لكان: $C_{11}=C_{22}=-C_{12}=-C_{21}=4\pi\varepsilon_0 d$

<u>يكون الحل سريعا لو استعملنا طريقة المصفوفات.</u>

نكتب المعادلتين (1) و (2) على الشكل:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

كما يمكن كتابة المعادلتين (3) و (4) على الشكل:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{bmatrix} R_1^{-1} & \mathrm{d}^{-1} \\ \mathrm{d}^{-1} & R_2^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفة الأولى، التي تمثل مصفوفة عوامل السعة و التأثير، تكافئ مقلوب المصفوفة الوسطى في المصفوفة الثانية، و بالنظر لإلى خصائص المصفوفات فإن:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}=4\pi\varepsilon_0\begin{bmatrix} R_1^{-1} & \mathrm{d}^{-1} \\ \mathrm{d}^{-1} & R_2^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \\ \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}=4\pi\varepsilon_0 R_1R_2\begin{bmatrix} R_2^{-1} & -\mathrm{d}^{-1} \\ -\mathrm{d}^{-1} & R_1^{-1} \end{bmatrix} \end{array}\right| \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{C_{11}=4\pi\varepsilon_0 R_1} \\ \boxed{C_{22}=4\pi\varepsilon_0 R_2} \\ \boxed{C_{12}=C_{21}=-4\pi\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{d}} \end{array}\right.$$

<u>التمرين 11.2:</u>

1/ بعد وصل المكثفتين معا، تتوزع الشحنة Q، التي كانت تحملها المكثفة الأولى، على المكثفتين بحيث تحمل كل منهما الشحنة $\frac{Q}{2}$.

التوتر بين طرفي الجملة هو: $\boxed{U'=10V}$ $\boxed{U'=\dfrac{Q}{2C}}$ $\Leftarrow \dfrac{Q}{2}=CU'$

2/ إحصاء الطاقة:

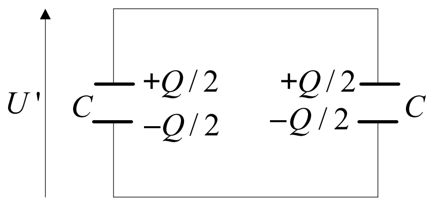
قبل الربط: $\boxed{W=20\mu J}$ $\boxed{W=\dfrac{1}{2}CU^2}$

بعد الربط: $\boxed{W'=10\mu J}$ $\boxed{W'=\dfrac{1}{2}CU'^2+\dfrac{1}{2}CU'^2}$

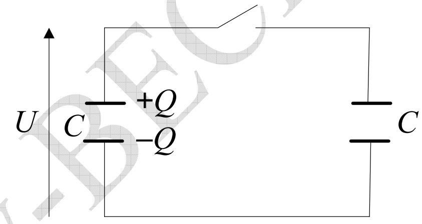
<u>تعليق</u>: الفرق بين الحالتين هو نقصان في الطاقة قدره $10\mu J$!! هذه الطاقة لم تختفي !!!

تفسير: عند وصل المكثفتين معا، تيار التفريغ يولد حقلا مغناطيسيا: الــ $10\mu J$ تحولت إلى إشعاع (مثل ما يحدث على مستوى هوائية إرسال موجات الراديو).

لكي نقتنع يكفي وضع جهاز مذياع(الراديو) بجوار الدارة: نسمع خشخشة مميزة لاستقبال موجة كهرومغناطيسية. لنفس السبب يمكننا سماع الصاعقة في المذياع.



بعد الوصل



قبل الوصل

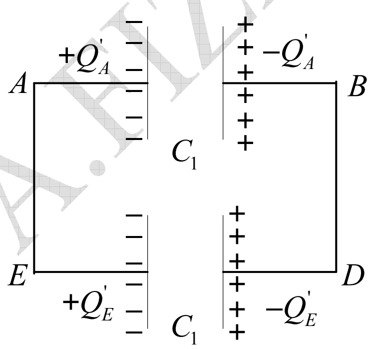
<u>التمرين12.2:</u>

1/ الطاقة المخزنة:

$$\boxed{W_E=\frac{1}{2}CU^2}\ ,\ \boxed{W_E=9,5.10^{-4}J}$$

2/ ا) العلاقة بين الشحنات: انحفاظ الشحنة يفرض علينا: $(1)\leftarrow \boxed{Q_A=Q_A^{'}+Q_E^{'}}$

ب) علاقة أخرى بين الشحنات:



$$U=Q_A^{'}.C_1=Q_E^{'}.C_2\Rightarrow\boxed{\frac{Q_A^{'}}{Q_E^{'}}=\frac{C_2}{C_1}}\rightarrow(2)$$

ج) من المعادلتين (1) و (2) نصل إلى قيمتي $Q_A^{'}$ و $Q_E^{'}$:

$$\boxed{Q_A^{'}=4,7.10^{-5}C}\ ,\ \boxed{Q_E^{'}=3,2.10^{-5}C}$$

3/ الطاقة المخزنة في المكثفتين:

$$\boxed{W_E^{'}=\frac{1}{2}\left[\frac{Q_A^{'2}}{C_1}=\frac{Q_E^{'2}}{C_2}\right]}\ ,\ \boxed{W_E^{'}=5,7.10^{-4}J}$$

نلاحظ أن الطاقة غير محفوظة، الفرق ΔW_E ضاع على شكل طاقة حرارية بفعل جول في سلك التوصيل عند وصل المكثفتين معا.

$$\boxed{\Delta W_E=W_E-W_E^{'}}\ ,\ \boxed{\Delta W_E=3,8.10^{-4}J}$$

<u>التمرين 13.2:</u>

1/ في القاعدة العامة، نقول عن ناقلين أنهما في حالة تأثير كلي إذا كانت كل خطوط الحقل الصادرة من سطح أحدهما تصل إلى سطح الآخر. هذا ما يحدث خصوصا في حالة ما إذا كان أحد الناقلين يحيط كليا بالناقل الثاني. في حالتنا هذه لا يمكن قول أي شيء عن خطوط الحقل المغادرة للسطح الخارجي للبوسين. في حين، إذا بقينا بعيدين بما فيه الكفاية عن طرفي كل لبوس، فإن خطوط الحقل الصادرة من السطح الداخلي للبوس تصل إلى اللبوس الآخر. بهذا المعنى يمكن القول أن هناك تأثير كلي.

في ناقل متوازن، الكثافة الحجمية للشحنة معدومة و بالتالي فإن الشحنة موزعة على السطح.

بفعل التأثير الكلي فإن الشحنة التي يحملها سطح داخلي للبوس تساوي و تعاكس الشحنة التي يحملها السطح الداخلي للبوس المقابل. بسبب تناظر المسألة، كثافتا الشحنة تكونان منتظمتين و المستوى $y = d$ يحمل كثافة شحنة ثابتة تساوي $-\sigma$.

2/ ينص قانون كولومب على أن الحقل الكهربائي بجوار ناقل يكون عموديا على سطح الناقل و يساوي $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$، حيث σ الكثافة الشحنية السطحية للناقل. لدينا لكل لبوس $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_y$.

3/ الحقل الكهربائي أحادي التوجيه أي أن له مركبة واحدة وفق محور الــ y و شدته ثابتة؛ إذن هو منتظم. نعرف أن $\vec{E} = -\overrightarrow{gradV}$. إذن:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dy}\vec{u}_y \Rightarrow \int_{V(0)}^{V(d)} dV = -\int_0^d E dy$$

$$V(d) - V(0) = -Ed$$

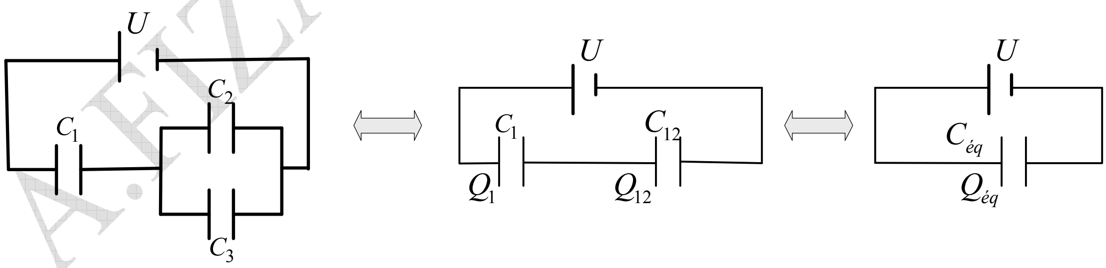
$$V(0) - V(d) = Ed \Rightarrow \boxed{V(0) - V(d) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d}$$

بقي لنا أن نحدد قيمة سعة المكثفة:

$$\left.\begin{array}{l} Q = C\left[V(0) - V(d)\right] \Rightarrow C = \dfrac{Q}{V(0) - V(d)} \\ Q = \sigma S \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}}$$

التمرين 14.2 :

يمكن تبسيط التركيب كما هو مبين على الشكل التالي:



المكثفتان C_2 و C_3 على التفرع و لتكن C_{12} سعتهما المكافئة:

$$C_{12} = C_1 + C_2 \Rightarrow C_{12} = 15\mu F$$

المكثفتان C_{12} و C_1 على التسلسل و لتكن $C_{éq}$ سعتهما المكافئة::

$$\frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_1} \Rightarrow C_{éq} = \frac{C_{12} + C_1}{C_{12}C_1} \Rightarrow C_{éq} = 10\mu F$$

الشحنة الكلية للجملة:

$$Q_{éq} = C_{éq}U \Rightarrow Q_{éq} = 30\mu C$$

شحنة المكثفة C_1:

$$Q_1 = Q_{12} = Q_{éq} \Rightarrow \boxed{Q_1 = 30\mu C}$$

التوتر بين طرفي المكثفة المكافئة C_{12} هو: $U_{12} = \dfrac{Q_{12}}{C_{12}} \Rightarrow U_{12} = 2V$

شحنة المكثفة ذات السعة C_2: $Q_2 = C_2 U_{12} \Rightarrow \boxed{Q_2 = 20\mu C}$

شحنة المكثفة ذات السعة C_3: $Q_3 = C_3 U_{12} \Rightarrow \boxed{Q_3 = 10\mu C}$

التمرين 15.2:

1/ نطبق نظرية غوص على سطح كروي مغلق نصف قطره محصور بين R_e و R_i. داخل هذا السطح الحقل معدوم نظرا لتوازن الناقل. الشحنة التي يحملها الجدار الداخلي للإكليل هي إذن:

$$\left.\begin{array}{l} E = 0 \\ \Phi = ES = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = 0 \\ Q_{\text{int}} = Q + Q_i \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{Q_i = -Q}$$

2/ هنا كذلك نطبق نظرية غوص. سطح غوص هو كرة نصف قطرها $R_i \succ r \succ R$:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi = E'S = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ Q_{\text{int}} = Q \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{E' = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}}$$

3/ في هذه الحالة نعرف أن النفاذية المطلقة (ε) للعازل تساوي جداء نفاذية الفراغ (ε_0) في نفاذية العازل النسبية (ε_r): $\varepsilon = \varepsilon_0.\varepsilon_r$. إذا علمنا أن $\varepsilon \succ \varepsilon_0$، و بما أن الحقل يتناسب عكسا مع النفاذية فالنتيجة هي تناقص شدة الحقل.

$$\left.\begin{array}{l} E'' = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\dfrac{1}{r^2} \\ \varepsilon_0\varepsilon_r \succ \varepsilon_0 \end{array}\right| \Rightarrow E'' \prec E'$$

4/ الكمون بين اللبوسين:

$$V' = -E'dr \Rightarrow V' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + K$$

بافتراض، كما هو الحال دائما، $V' = 0$ لما $r \to \infty$، فإن $K = 0$. و عليه:

$$\boxed{V' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}}$$

5/ سعة المكثفة: نحسب أولا فرق الكمون بين اللبوسين ثم نستنتج السعة:

$$U = V - V_i \Rightarrow U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R_i}\right]$$

$$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{RR_i}{R_i - R}}$$

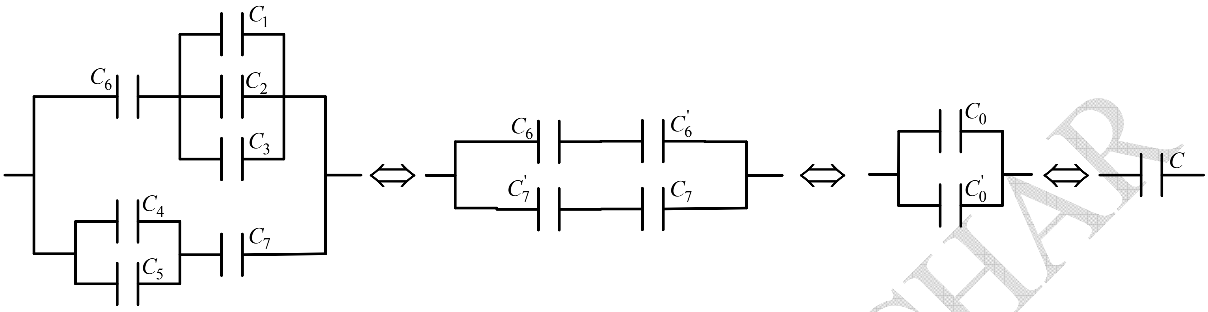
6/ في هذه الحالة يكون لدينا $RR_i = R_i(R_i + d) = R_i^2\left(1 + \dfrac{d}{R_i}\right) \approx R_i^2$ و $R_i - R \approx d$. إذن يمكن كتابة:

$$\left.\begin{array}{l} S = 4\pi R_i^2 \\ d = R_i - R \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}}$$

و هذه هي سعة مكثفة مستوية.

التمرين16.2:

نستعين بالشكل التالي:



1/ حساب سعة المكثفة المكافئة للتركيب:

$$C_6' = C_1 + C_2 + C_3 \Rightarrow C_6' = 6\mu F$$

$$C_7' = C_4 + C_5 \Rightarrow C_7' = 9\mu F$$

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_6'} \Rightarrow C_0 = 4\mu F$$

$$\frac{1}{C_0'} = \frac{1}{C_7} + \frac{1}{C_7'} \Rightarrow C_0' = 6\mu F$$

و في الأخير فإن السعة المكافئة تساوي:

$$C = C_0' + C_0 \Rightarrow \boxed{C = 10\mu F}$$

2/ حساب الشحنة و فرق الكمون لكل مكثفة:

$$\left.\begin{array}{l} Q_6 = Q_6' \Rightarrow 6U_6' = 12U_6 \Rightarrow U_6' = 2U_6 \\ U_6' + U_6 = 120 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{U_6 = 40V} \ , \ \boxed{U_6' = 80V}$$

$$\left.\begin{array}{l} Q_7 = Q_7' \Rightarrow 9U_7' = 18U_7 \Rightarrow U_7' = 2U_7 \\ U_7' + U_7 = 120 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{U_7 = 40V} \ , \ \boxed{U_7' = 80V}$$

نستنتج من هذا:

$$\boxed{U_1 = U_2 = U_3 = 80V} \ , \ \boxed{U_4 = U_5 = 40V}$$

يسهل الآن حساب شحنة كل مكثفة بتطبيق القانون $Q = CU$

$$Q_6 = C_6 U_6 \Rightarrow Q_6 = 480\mu C$$

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = C_1 U_1 \Rightarrow Q_1 = 80\mu C \\ Q_2 = C_2 U_2 \Rightarrow Q_2 = 160\mu C \\ Q_3 = C_3 U_3 \Rightarrow Q_3 = 240\mu C \end{array}\right| = Q_6 = Q_6' \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} Q_4 = C_4 U_4 \Rightarrow Q_4 = 320\mu C \\ Q_5 = C_5 U_5 \Rightarrow Q_5 = 400\mu C \end{array}\right| = Q_7 = Q_7'$$

$$Q_7 = C_7 U_7 \Rightarrow Q_7 = 720\mu C$$

طاقة كل المجموعة:

$$W = \frac{1}{2} C U^2 \Rightarrow \boxed{\text{W=0,72J}}$$

التمرين17.2:

ملاحظة: نشير بالدليل 0 إلى كل ما يتعلق بالوضع °0 و بالدليل 1 إلى كل ما يتعلق بالوضع °180.

1/ شحنة المكثفة لما توصل بالبطارية: $\boxed{Q_1 = C_1U}$, $Q_1 = 950.10^{-12}.400$, $\boxed{Q_1 = 380nC}$

2/ فرق الكمون لما يشير الميناً إلى °0 هو: $\boxed{U_0 = \dfrac{Q_1}{C_0}}$, $U_0 = \dfrac{38.10^{-8}}{50.10^{-12}}$, $\boxed{U_0 = 7,6.10^3 V}$

3/ طاقة المكثفة لما يشير الميناً إلى °0: $\boxed{W_0 = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q_1^2}{C_0}}$, $\boxed{W_0 = 1,444.10^{-3} J}$

4/ العمل اللازم لتدوير الزّر يساوي النقص في الطاقة بين الوضعين °0 و °180 :

طاقة المكثفة لما يشير الميناً إلى °180 : $\boxed{W_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q_1^2}{C_1}}$, $\boxed{W_1 = 0,076.10^{-3} J}$

إذن العمل المصروف هو: $\boxed{w = W_1 - W_0}$, $\boxed{w = -1,368.10^{-3} J}$

إشارة الناقص تعني صرف للطاقة.

التمرين18.2:

1/ **القاطعة K مفتوحة:** ننظر إلى الشكل-أ- المناسب:

حسب قانون التوترات: $U_{AB} = U_{AF} + U_{FB}$

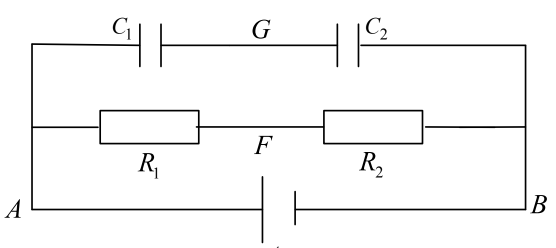
و منه:
$$\left.\begin{array}{l} U_{AB} = (R_1 + R_2)I \\ R_1 = 2R_2 \end{array}\right| \Rightarrow U_{AB} = 3R_2 I = 3U_{FB}$$

الكمون في B هو إذن:
$$\left.\begin{array}{l} V_A - V_B = 3(V_F - V_B) \\ V_B = 0 \ , \ V_A = 24V \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{V_F = 8V}$$

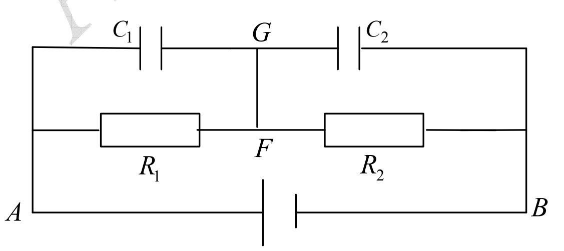
2/ بالتباع نفس الخطوات نجد قيمة الكمون V_G: $U_{AB} = U_{AG} + U_{GB}$

المكثفتان تحملان نفس الشحنة Q لأنهما مربوطتان على التسلسل:
$$\left.\begin{array}{l} U_{AB} = QC_1 + QC_2 \\ C_2 = 2C_1 \end{array}\right| \Rightarrow U_{AB} = 3QC_1 = 3U_{AG}$$

الكمون في G هو إذن:
$$\left.\begin{array}{l} V_A - V_B = 3(V_A - V_G) \\ V_B = 0 \ , \ V_A = 24V \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{V_G = \frac{2V_A}{3}} \quad \boxed{V_G = 16V}$$



الشكل -أ-



الشكل -ب-

3/ **القاطعة K مغلقة:** ننظر إلى الشكل-ب- المناسب.

كمون النقطة F هو نفسه كما في السؤال (1) أي $V_F = 8V$. و عليه فأن:

$$\boxed{V_F = V_G = 8V}$$

4/ قبل غلق القاطعة كانت كل مكثفة تحمل شحنة مقدارها:

$$\left.\begin{array}{l} Q = Q_1 = Q_2 \\ C_1U_1 = C_2U_2 \\ U_1 = V_A - V_G = 16V \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{Q = 7,69.10^{-6}C}$$

لحظة غلق القاطعة، و مؤقتا، كل مكثفة تحمل شحنة خاصة بها:

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = C_1U_1 \to Q_1 = 7,69.10^{-6}C \\ Q_2 = C_2U_2 \to Q_2 = 1,92.10^{-6}C \end{array}\right| \Rightarrow Q_1 \neq Q_2$$

غير أن هذا الوضع لا يدوم. حين بلوغ حالة التوازن بسرعة فإن شحنتي المكثفتين تتساويان. لكي تتساوى شحنتا اللبوسين المشتركين في النقطة G يجب أن تغادر الشحنات السالبة، و هي وحدها القادرة على الحركة، البوس C_1. لا تتوقف هذه الهجرة إلا بعد تساوي شحنتي اللبوسين.

إذا كانت $Q_1^{'}$ هي قيمة الشحنة التي عبرت القاطعة فإن قيمتها تساوي:

$$Q_2 = Q_1 + Q_1^{'} \Rightarrow Q_1^{'} = Q_2 - Q_1 \;\; , \;\; \boxed{Q_1^{'} = -5,76.10^{-6}C}$$

التمرين 19.2:

1/ لحساب كمية الطاقة المخزنة في المكثفة، نحسب أولا سعة المكثفة:

$$\boxed{C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d}} \;\; , \;\; \boxed{C_1 = 35,8.10^{-12}F}$$

$$\boxed{W_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1}} \;\; , \;\; \boxed{W_E = 1,25.10^3 J}$$

2/ إذا أدخلنا صفية من الميكا فإن السعة تزداد مما ينجرّ عنه تناقص الطاقة. النفاذية المطلقة للميكا هي $\varepsilon = \varepsilon_0\kappa$. إذن:

$$\boxed{C_2 = \kappa\varepsilon_0 \frac{S}{d}} \;\; , \;\; \boxed{C_2 = 250,6.10^{-12}F}$$

$$\boxed{W_{E2} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_2}} \;\; , \;\; \boxed{W_{E2} = 1,8.10^2 J}$$

3/ في حالة نقصان البعد بين اللبوسين فإن السعة تزداد و الطاقة المخزنة تنقص:

$$\boxed{C_3 = \kappa\varepsilon_0 \frac{S}{d/2}} \;\; , \;\; \boxed{C_2 = 501,2.10^{-12}F}$$

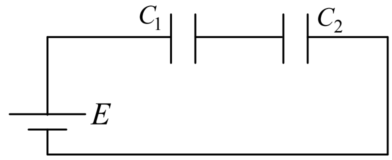
$$\boxed{W_{E3} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_3}} \;\; , \;\; \boxed{W_{E3} = 89,8J}$$

التمرين 20.2:

I. القاطعة K_1 مغلقة: ننظر إلى الشكل المناسب في الأسفل:

1/ المكثفتان على التسلسل و تحملان نفس الشحنة. التوتر بين لبوسي المكثفة المكافئة يساوي القوة المحركة الكهربائية E للمولد:

$$\left.\begin{array}{l} C=\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2} \\ q=CV=CE \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{q=E\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}} \ , \ \boxed{q=4\mu C}$$

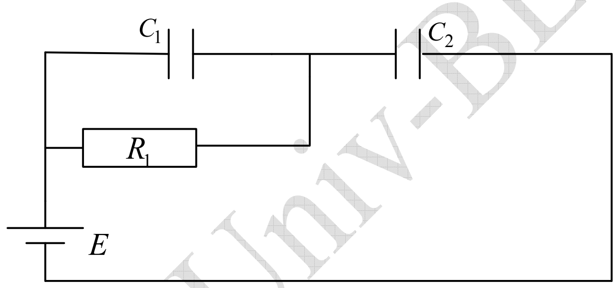


2/ فرق الكمون بين طرفي كل مكثفة:

$$U_1=\frac{q}{C_1}\Rightarrow \boxed{U_1=4V}$$

$$U_2=\frac{q}{C_2}\Rightarrow \boxed{U_2=2V}$$

II. نترك القاطعة K_1 مغلقة، ثم نغلق القاطعتين K_2 و K_3. ننظر إلى الشكل المناسب التالي :



1/ بعد الفترة الوجيزة لعملية الشحن ينعدم التيار الكهربائي، غير أن المولد يفرض توترا بين قطبه. بالتباع المسلكين المختلفين لحساب التوتر بين طرفي المولد نتوصل إلى:

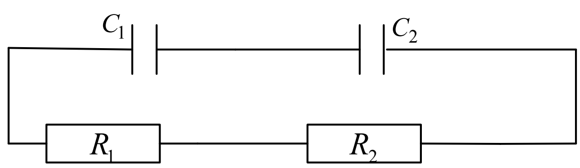
$$\left.\begin{array}{l} E=U_1+U_2 \\ E=U_2 \end{array}\right| \Rightarrow U_1=0 \Rightarrow \boxed{q_1=0}$$

إذن المكثفة C_1 تتفرّغ في المقاومة R_1، بينما المكثفة C_2 تشحن تحت التوتر E للمولد حيث:

$$q_2=C_2E\Rightarrow \boxed{q_2=12nC}$$

2/ فرق الكمون بين طرفي كل مكثفة: $\boxed{U_2=E=6V}$, $\boxed{U_1=0}$

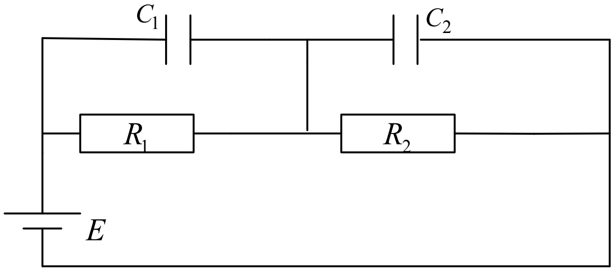
III. نفتح القاطعتين K_1 و K_3 و نغلق القاطعتين K_2 و K_4. أنظر الشكل المناسب الموالي:



المكثفتان تتفرغان كلية في المقاومتين: $\boxed{q_1=q_2=0}$

IV. نترك K_2 و K_4 مغلقتين، ثم نغلق K_1 و K_3 أيضا. أنظر الشكل التالي:

1/ التوتر بين طرفي كل مكثفة:



$$E=\left(R_1+R_2\right)I\Rightarrow\boxed{I=\frac{E}{R_1+R_2}}\ ,\ \boxed{I=0,03A}$$

$$R_1=R_2\Rightarrow\ \boxed{U_1=U_2=R_1I}\qquad\boxed{U_1=U_2=3V}$$

2/ شحنة كل مكثفة:

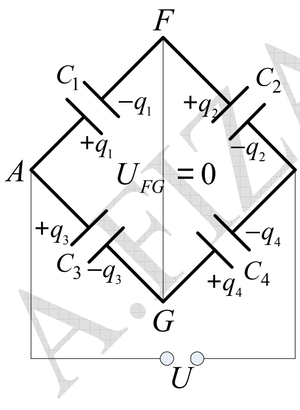
$$\boxed{q_1=C_1U_1}\boxed{q_1=3\mu C}$$

$$\boxed{q_2=C_2U_2}\boxed{q_2=6\mu C}$$

التمرين 21.2:

إذا كان الإلكترومتر يشير إلى الصفر فهذا يعني أن النقطتين F و G لهما نفس الكمون. نرى في الشكل المقابل أن:

$$U_{AF}=U_{AG}\Rightarrow\frac{q_1}{C_1}=\frac{q_3}{C_3}\rightarrow(1)$$



$$U_{FB}=U_{GB}\Rightarrow\frac{q_2}{C_2}=\frac{q_4}{C_4}\rightarrow(2)$$

حسب مبدإ انحفاظ الشحنة يتبن لنا أن:

$$-q_1+q_2=0\Rightarrow q_1=q_2$$

$$-q_3+q_4=0\Rightarrow q_3=q_4$$

في المعادلة (2) نعوض q_2 و q_4 على التوالي بـــ q_1 و q_3 فنكتب:

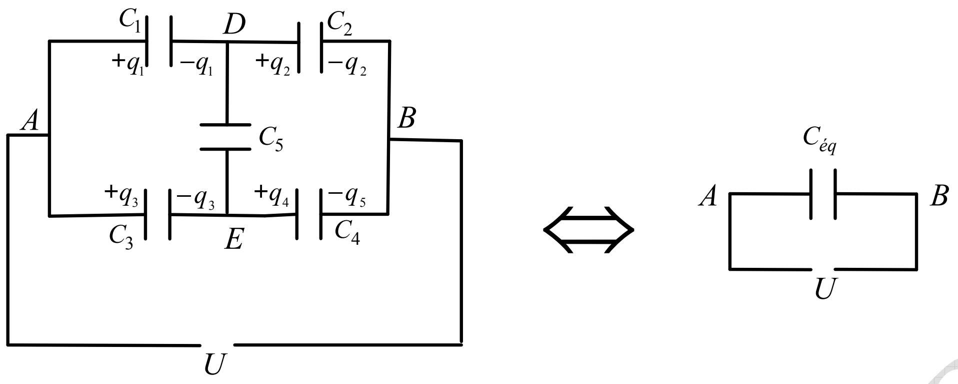
$$\frac{q_1}{C_2}=\frac{q_3}{C_4}\rightarrow(3)$$

نقسم المعادلتين (3) و (1) طرف لطرف فنحصل على:

$$\frac{(3)}{(1)}\Rightarrow\boxed{\frac{C_1}{C_2}=\frac{C_3}{C_4}}$$

التمرين 22.2:

1/ نلاحظ أن E نقطة مشتركة للمكثفات C_3، C_4 و C_5، كما أن D نقطة مشتركة للمكثفات C_1، C_2 و C_5. المكثفة C_5 تقع و حدها بين النقطتين E و D. و على هذا الأساس يكون الشكل الذي يظهر التناظر هو التالي:



/2 نضع $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C$

حسب مبدإ انحفاظ الشحنة و بالنظر إلى الشكل السابق فإن:

$$q = q_1 + q_3 = q_2 + q_4 \rightarrow (1)$$

$$C_{éq}U = CU_1 + CU_3 = CU_2 + CU_4$$

$$C_{éq}U = C(U_1 + U_3) = C(U_2 + U_4) \rightarrow (2)$$

حسب قانون التوترات يمكن أن نكتب:

$$\left.\begin{array}{l} U = U_1 + U_2 \\ U = U_3 + U_4 \end{array}\right| \Rightarrow 2U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 \rightarrow (3)$$

من المعادلة (1) نستنتج أن:

$$C_{éq}U = CU_1 + CU_3 = CU_2 + CU_4 \Rightarrow U_1 + U_3 = U_2 + U_4$$

ننقل هذه النتيجة الأخيرة في المعادلة (3) لتصبح:

$$2U = \underbrace{U_1 + U_3}_{U_2 + U_4} + U_2 + U_4$$

$$\boxed{U = U_2 + U_4} \rightarrow (4)$$

من المعادلتين (2) و (4) يمكننا حساب السعة المكافئة $C_{éq}$:

$$\left.\begin{array}{l} (1) \rightarrow C_{éq}U = C(U_2 + U_4) \\ (4) \rightarrow U = U_2 + U_4 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{C_{éq} = C = 1\mu F}$$

شحنة كل مكثفة: نبين أن الشحنات q_3, q_2, q_1 و q_4 متساوية:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} U_1 = U_3 \\ U_2 = U_4 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} q_1 = q_3 \\ q_2 = q_4 \end{cases} \\ -q_1 + q_2 = 0 \Rightarrow q_1 = q_2 \\ -q_3 + q_4 = 0 \Rightarrow q_3 = q_4 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{q_1 = q_2 = q_3 = q_4}$$

نقيّم الشحنة q_2 مثلا:

$$U = U_1 + U_2 \Rightarrow \frac{q}{C_{éq}} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} \Rightarrow q = q_1 + q_2 = 2q_2$$

$$q = C_{éq}U = 2Cq_2 \Rightarrow \boxed{q_2 = \frac{C_{éq}}{2}U}$$

$$\boxed{q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 5.10^{-7}\,C}$$

أما الشحنة q_5 فهي معدومة: $q_5 = C_5 U_5 \Rightarrow \boxed{q_5 = 0}$

فرق الكمون بين طرفي كل مكثفة:

$$\left.\begin{array}{l} U = U_1 + U_2 \\ U_1 = U_2 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = 50V} \quad \boxed{U_5 = 0}$$

التمرين 23.2:

الطاقة الحرة الكهروساكنة الإبتدائية للجملة هي: $W_{e1} = \frac{1}{2}CU_0^2 \rightarrow (1)$

نحصل على الطاقة النهائية، بعد انتهاء النظام الانتقالي، بدلالة C و C' و التوتر U المشترك بين طرفي المكثفتين بكتابة: $W_{e2} = \frac{1}{2}(C+C')U^2 \rightarrow (2)$

لمعرفة هذا التوتر U، ندخل انحفاظ الشحنة الكهربائية خلال تحويل الطاقة. بالفعل، الجملة معزولة عن الخارج و الشحنة الكهربائية ، كمية مادية، لا يمكن لها إلا الانحفاظ. الشحنة الابتدائية Q_0 توزعت في النهاية إلى الشحنتين q و q' بحيث:

$$Q_0 = CU_0 = q + q' = (C + C')U^2$$

$$U = \frac{C}{C+C'}U_0$$

$$W_{e2} = \frac{1}{2}(C+C')\frac{C^2U_0^2}{(C+C')^2} \Rightarrow \boxed{W_{e2} = \frac{1}{2}\frac{C^2}{C+C'}U_0^2}$$

الطاقة المخزنة في جملة المكثفتين هي إذن $(1)-(2)$:

$$\boxed{\Delta W_e = W_{e2} - W_{e1} = -\frac{1}{2}\frac{CC'}{C+C'}U_0^2}$$

إشارة الناقص تدل على نقص في الطاقة. الطاقة الضائعة تحولت إلى الوسط الخارجي عن الجملة على شكل طاقة حرارية، في المقاومة R. تكون استطاعة هذا التحويل أكبر كلما كانت مدة التفريغ أصغر، و بالتالي المقاومة أضعف.

للتأكد من هذا الأمر، نحسب الطاقة المبددة بفعل جول: لتكن i الشدة اللحظية للتيار الكهربائي في الدارة.

شكل هذا التيار أسي. قيمته الإبتدائية هي $\frac{U_0}{R}$، لأن في هذه اللحظة كانت المكثفة ذات السعة C' تحت توتر معدوم. ثابت الزمن هو $\tau = RC_{éq}$.

و عليه: $i = \frac{U_0}{R}e^{-t/\tau}$

الطاقة الضائعة بفعل جول تعطى بـــ:

$$W_J = \int_0^\infty Ri^2dt = \int_0^\infty R\frac{U_0^2}{R^2}\exp(-2t/\tau).dt$$

$$W_J = \frac{1}{2}\frac{U_0^2}{R}\tau \Rightarrow \boxed{W_J = \frac{1}{2}U_0^2\frac{CC'}{C+C'}}$$

الاستطاعة المتوسطة خلال تحوّل الجملة، إذا افترضنا أن العملية تمّت فعليا في ظرف زمني $t = 5\tau$، هي:

$$P_{moy} = \frac{W_J}{t} = \frac{1}{2}\frac{U_0^2}{R}\frac{\tau}{5\tau} \Rightarrow \boxed{P_{moy} = \frac{1}{10}\frac{U_0^2}{R}}$$

إذا قربنا المقاومة R من الصفر، فإن التحوّل يكون عنيفا. الاستطاعة الحرارية المحولة تقود لتسخين كبير، حتى و لو كانت كمية الطاقة الممنوحة مستقلة عن R.
الخلاصة: يجب تفادي ربط هذين المنبعين للتوتر، أي المكثفتين. إذا كانت المقاومة هي مقاومة قاطعة، و هي بالضرورة ضعيفة، فإن لحظة غلق القاطعة تؤدي إلى إتلافها. **يمنع تحقيق مثل هذا التركيب.**

التمرين 24.2:

1/ خلال عملية شحن مكثفة تحسب شدة التيار إيجابا، خلال عملية التفريغ يغيّر التيار من اتجاهه، إذن i سالبة: $i = -\frac{dq_A}{dt}$

ملاحظة: $dq_A = q_A(t+dt) - q_A(t) \prec 0$ لأن الشحنة التي يحملها اللبوس A تتناقص خلال التفريغ فنجد بالفعل $i \prec 0$.

العلاقة بين i و u_C :

$$\left.\begin{aligned} q_A &= Cu_c \\ i &= -\frac{dq_A}{dt} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{i = -C\frac{du_C}{dt}}$$

2/ المعادلة التفاضلية لتطور التوتر u_C:

$$\left.\begin{aligned} u_C &= u_R \\ u_R &= Ri \\ i &= -C\frac{du_C}{dt} \end{aligned}\right| \Rightarrow u_C = -RC\frac{du_C}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{RC}u_C + \frac{du_C}{dt} = 0}$$

3/ ا) تعيين الثابتين A و a:

لنعبر أولا عن $\frac{du_C}{dt} = \frac{d\left(Ae^{-at}\right)}{dt} \Rightarrow \frac{du_C}{dt} = -aA\exp(-at)$

نعوض في المعادلة التفاضلية:

$$\frac{1}{RC}A\exp(-at) - aA\exp(-at) = 0 \Rightarrow A\left(\frac{1}{RC} - a\right)\exp(-at) = 0$$

هذه المعادلة محققة مهما كان الزمن t:

إذا كانت $A = 0$ ، و هذا مستحيل لأن النص يفرض $A \succ 0$،

أو $\frac{1}{RC} - a = 0$ و هذا يؤدي بنا إلى:

$$\frac{1}{RC} - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{RC}}$$

في اللحظة $t = 0$ لدينا $u_C(0) = U_0 = 10V$، و منه:

$$A\exp(-a.0) = U_0 \Rightarrow \boxed{A = U_0} \;,\; \boxed{A = 10V}$$

ب) ثابت الزمن هو: $\boxed{\tau = RC}$

ج) قيمة سيعة المكثفة:

$$\boxed{C = \frac{\tau}{R}} \quad , \quad \boxed{C = 2.10^{-3} F}$$

د) بعد ثابت الزمن هو متجانس مع زمن :

$$\left.\begin{array}{l} \tau = RC \Rightarrow [\tau] = [R][C] \\ R = \dfrac{u_R}{i} \Rightarrow [R] = \dfrac{[U]}{[I]} \\ C = i\dfrac{dt}{du_C} \Rightarrow [C] = [I]\dfrac{[T]}{[U]} \end{array}\right| \Rightarrow [\tau] = \frac{[U]}{[I]}[I]\frac{[T]}{[U]} \Rightarrow \boxed{[\tau] = [T]}$$

4/ ا) عبارة الشدة اللحظية:

$$\left.\begin{array}{l} i = C.\dfrac{du_C}{dt} \\ u_C = U_0 e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{i = -\frac{U_0}{C}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)}$$

ب) شدة التيار في $t = 0$: $\mathrm{i}(0) = -\dfrac{\mathrm{U_0}}{\mathrm{R}}$, $\boxed{\mathrm{I_0} = -0,3\mathrm{A}}$

ج) شدة التيار في $t = 0,5s$: $\mathrm{i}(\mathrm{t}) = -\dfrac{\mathrm{U_0}}{\mathrm{R}}\exp\left(-\dfrac{\mathrm{t}}{\mathrm{RC}}\right)$, $\boxed{\mathrm{i}(0,5) = -0,2\mathrm{A}}$

د) التوتر في نفس اللحظة: $\mathrm{u}(\mathrm{t}) = \mathrm{U_0}\exp\left(-\dfrac{\mathrm{t}}{\mathrm{RC}}\right)$, $\boxed{\mathrm{u}(0,5) = 8.10^{-3}\mathrm{V}}$

ه) المدة المنقضية تفوق بأكثر من خمس مرات قيمة ثابت الزمن τ، نجد قيمة لـــ u_C قريبة من الصفر. يمكن إذن اعتبار أن المكثفة أفرغت.

5/ عبارة الطاقة المخزنة في المكثفة C في اللحظة $t = 0$ هي $W_E = \frac{1}{2}CU_0^2$. بالنسبة لمكثفة C' $(C' \succ C)$ يكون لدينا $W_E' = \frac{1}{2}C'U_0^2$. و بما أن U_0 ثابت فإن $W_E' \succ W$.

التمرين 25.2:

1/ في ناقل متوازن، الحقل $\vec{E}$ معدوم و بالتالي $div\vec{E} = 0$. حسب الشكل التفاضلي لنظرية غوص فإن $div\vec{E} = \rho / \varepsilon_0$. إذن $\boxed{\rho = 0}$.

2/ بفعل التناظر الكروي لجملة الناقلين في حالة التوازن الكهروساكن، الحقل $\vec{E}(M)$ الذي هو شعاع قطبي، هو محتو في كل المستويات المحتوية على المحور $\overrightarrow{OM}$؛ إذن الحقل قطري أي يحمله $\vec{u}$.

إضافة إلى هذا فإنه لا يوجد تغيّر بفعل التدوير حول O . هذا يعني أن قيم الحقل و الكمون لا تتعلق بالمتغيرين θ و φ.

و عليه يمكن كتابة $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}$ و $V(M) = V(r)$.

3/ توزيع الشحنات على سطوح الناقلين: بسبب التناظر الكروي لجملة الناقلين فإن الشحنات تتوزع بانتظام على سطوحهما. الشحنة $2Q$ للناقل الخارجي (C') تتوزع على سطحيه الداخلي و الخارجي.

بما أن الناقلين (C) و (C') في تأثير كلي، فإنه يوجد بالضرورة على السطح الداخلي للناقل (C') الشحنة $+Q$.

تظهر الشحنة المتبقية $+Q$ على السطح الخارجي للناقل (C') .

يمكن تبيان هذا كذلك بتطبيق نظرية غوص: الحقل معدوم على كرة نصف قطرها بحيث $2R \prec r \prec 3R$. تدفق الحقل الخارج هو إذن معدوم. إذن الشحنة الداخلية لهذا السطح يجب أن تكون معدومة.

4/ **بيان** $E(r)$:

نطبق نظرية غوص على كرة نصف قطرها بحيث $R \prec r \prec 2R$. الشحنة الداخلية هي $-Q$.

نحصل على: $4\pi r^2 E(r) = \dfrac{-Q}{\varepsilon_0}$

نطبق نظرية غوص عل كرة نصف قطرها بحيث $r \succ 3R$. الشحنة الداخلية هي $+Q$. نحصل على:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{+Q}{\varepsilon_0}$$

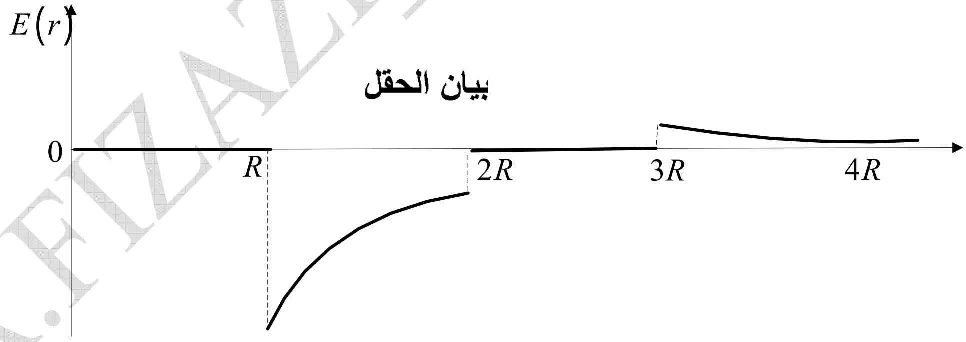
و عليه يكون لدينا:

من أجل $R \prec r \prec 2R$: $4\pi r^2 E(r) = \dfrac{-Q}{\varepsilon_0}$

من أجل $r \succ 3R$: $4\pi r^2 E(r) = \dfrac{+Q}{\varepsilon_0}$

الحقل معدوم خارج هذا الفضاء المدروس، كما أن الحقل غير مستمر عند عبور كل سطح مشحون.

5/ $div\vec{E}(M) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d^2\left(r^2E(r)\right)}{dr} = 0$: بالفعل، في هذه المسألة، لا وجود لكثافة شحنية حجمية في أي موضع. الشحنة موزع على سطوح الناقلين.



6/ <u>**بيان الكمون**</u> $V(r)$:

الكمون مستمر. نحصل عليه بالانطلاق من لانهاية حيث قيمته معدومة. بعملية تكاملية لـــ $V(r) = -\int E(r)dr$ في مختلف الحالات.

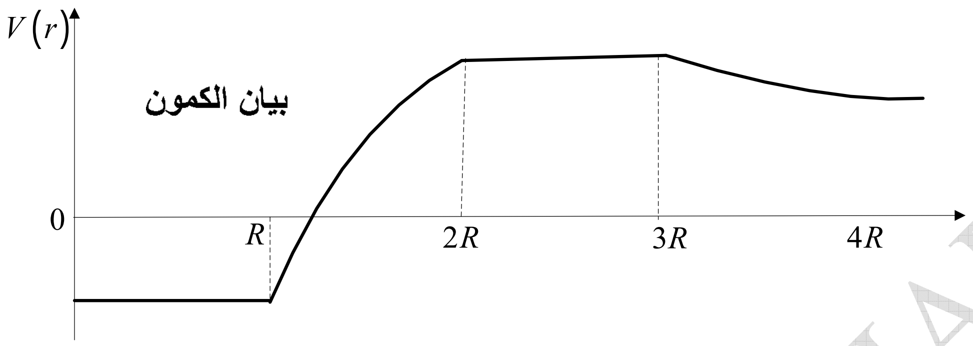
إذن من أجل $r \succ 3R$: $V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}$

الكمون ثابت من أجل $3R \succ r \succ 2R$: $V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{3R}$

من أجل $2R \succ r \succ R$ يكون لدينا : $V(r) = \dfrac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{2R} + K$

ثابت التكامل K هو بحيث $V(2R)=\dfrac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{2R}+K=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{3R}$

نجد في الأخير: $V(r)=\dfrac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}+\dfrac{5Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{6R}$



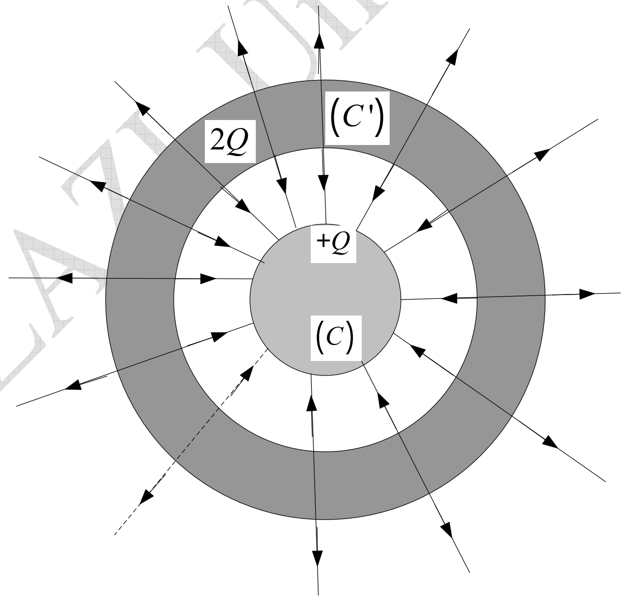
7/ كمون الناقل (C') هو: $V_{C'}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{3R}$

كمون الناقل (C) هو: $V_C=\dfrac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{6R}$

الفرق في الكمون هو إذن: $V_{C'}-V_C=U=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{2R}$

باستعمال العلاقة الأساسية للمكثفات $Q=CU$، نحصل على سعة هذه المكثفة الكروية: $\boxed{C=8\pi\varepsilon_0 R}$

8/ شكل بعض خطوط الحقل الموجهة(أنظر الشكل).



9/ طاقة المكثفة: $W=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}\Rightarrow \boxed{W=\dfrac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 R}}$

<u>التمرين26.2:</u>

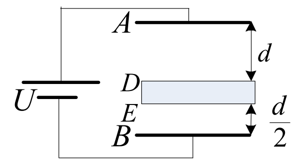
1/سعة المكثفة المستوية: $\boxed{C=\varepsilon_0\dfrac{S}{2d}=\varepsilon_0\dfrac{x.L}{2d}\Rightarrow C=2.65\times10^{-12}F}$

2/شحنة المكثفة:

$$\left.\begin{array}{l} Q = CV \\ C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{2d} = \varepsilon_0 \dfrac{x.L}{2d} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{Q = \varepsilon_0 \dfrac{x.L}{2d} V}\ ;\ \boxed{Q = 1.1\times10^{-9}C}$$

3/حساب شحنات الأوجه:

تحدث عملية التكهرب بالتأثير: $\boxed{Q_E = -Q_B\ ;\ Q_A = -Q_D}$ و بما أن الصفيحة الدّاخيلة معتدلة كهربائيا في البداية فإن:

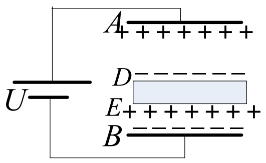


$\boxed{Q_D = -Q_E} \Rightarrow \boxed{Q_D = -Q_E = +Q_B = -Q_A = Q'}$.

و النتيجة هي أن لدينا مكثفتان مربوطتان على التسلسل.

سعة المكثفة المكافئة هي إذن :

$$C_{éq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\ ;\ \left.\begin{array}{l} C_1 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d} \\ C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d/2} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{C_{éq} = \frac{2\varepsilon_0 S}{3d}}$$



الشحنات التي تحملها الأوجه الأربعة هي:

$$\boxed{Q' = C_{éq} V = 2\varepsilon_0 \frac{L.x}{3d}}$$

$$\boxed{Q' = Q_D = -Q_E = +Q_B = -Q_A = 1.4\times10^{-9}C}$$

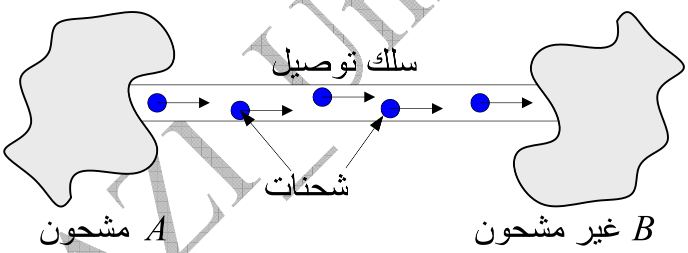
III/ الكهرباء المتحركة
ELECTROCINETIQUE

الكهرباء المتحركة هي دراسة التيارات الكهربائية ، أي دراسة الشحنات الكهربائية في حالة الحركة في أوساط مادية تسمى النواقل. و بعبارة أخرى ، فإنها دراسة الدارات و الشبكات الكهربائية.

في ما يتبع نعتني بالسبب الذي يجعل الشحنات تتحرك و السبب الذي يعيق حركتها.

A/ التيار الكهربائي:(courant électrique)

يمثل الشكل 1.3 جسمين ، B غير مشحون و هو في حالة توازن ، والجسم A مشحون بإحدى طرق التكهرب. نوصل الجسمين بواسطة سلك.يشحن الجسم B، أي أنه يكتسب شحنة dQ خلال وقت وجيز dt ، و هكذا فإنه فقد التوازن الكهروساكن مؤقتا.



الشكل 1.3: مرور التيار الكربائي من A نحو B

نفسّر هذا بانتقال شحنات كهربائية من الجسم A نحو الجسم B عبر السلك الواصل بينهما. و من هنا نعرف التيار الكهربائي:

❖ **تعريف**: التيار الكهربائي هو انتقال جماعي ومنظم لحاملات الشحنة (إلكترونات أو شوارد) . قد يحدث هذا السيل من الشحنات في الفراغ (حزمة إلكترونات في أنبوب مهبطي...) أو في المادة الناقلة (الإلكترونات في المعادن أو الشوارد في المحاليل المائية...).

يظهر تيار كهربائي في الناقل عندما يوجد فرق في الكمون بين طرفي هذا الأخير.

1/ شدة التيار الكهربائي: (intensité du courant électrique)

❖ **الشدة المتوسطة:** (intensité moyenne) الشدة المتوسطة للتيار الكهربائي هي كمية الكهرباء (الشحنة) التي تجتاز مقطعا من الناقل خلال واحدة الزمن:

$$\boxed{I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}} \qquad (1.3)$$

❖ **الشدة اللحظية:** (intensité instantanée) هي مشتق الشحنة الكهربائية بالنسبة للزمن:

$$\boxed{i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}} \qquad (2.3)$$

❖ **الوحدة:** **الأمبير** (A) ، (نسبة للعالم 1775-1836 André-Marie Ampère) ، هو شدة تيار كهربائي مناسبة لمرور شحنة مقدارها 1 كولومب عبر مقطع الناقل خلال ثانية واحدة.

❖ **رتبة سرعة حاملات الشحنات:** (ordre de grandeur de la vitesse des porteurs de charges)

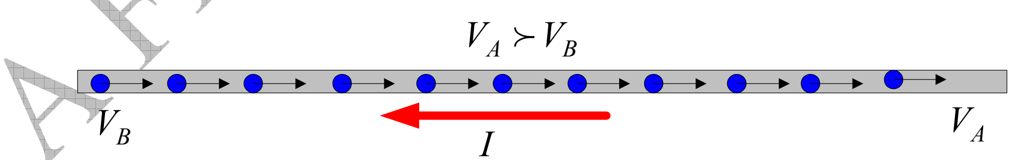
– في سلك معدني تنتقل الإلكترونات الحرة بسرعة متوسطة تقارب $1mm/s$.

– في المحاليل المائية سرعة الشوارد تكون أضعف.

في الفراغ سرعة الإلكترونات تقارب $10000km/s$. و حتى هذه القيمة تبقى ضعيفة جدا أمام سرعة انتشار الضوء $\left(c = 3.10^5\, kms^{-1}\right)$.

❖ **إتجاه التيار الكهربائي:** (sens du courant)

يسري التيار الكهربائي في الجهة المتناقصة للكمونات أي في اتجاه شعاع الحقل الكهربائي. و هكذا فإن الاتجاه المختار **اصطلاحا** هو عكس اتجاه حركة الشحنات السالبة.



الشكل 2.3: الإتجاه الإصطلاحي للتيار الكربائي

❖ **تذكير بقانون أوم:** (Georges-Simon Ohm 1789-1854)

السهولة التي تتدفق بها الشحنات بين قطبين تتعلق بالطريقة التي يربط بها هذين القطبين. إذا وصّلناهما بسلك توصيل، فإن الشحنات لا تواجه أي صعوبات تذكر للانتقال، أما إذا وصلناهما بعازل ، فإن كل انتقال للشحنات يصبح صعبا جدا، إن لم يكن مستحيلا.

هذه الخاصية التي تميّز المادة، بالسماح أو بمنع الشحنات الكهربائية من المرور، تسمى بـــ **مقاومة** المادة المذكورة. تقاس المقاومة بـــ **الأوم** (Ω).

في حين تكون مقاومة المعادن ضعيفة، فأن مقاومة العوازل كبيرة جدا و لا متنهائية حتى. في الصناعة توجد عناصر صغيرة (تسمى مقاومات) يمكن لمقاومتها أن تتراوح بين بضع أومات إلى ملايين الأومات.

بالنسبة لناقل معدني، تحت درجة حرارة ثابتة، فإن النسبة بين فرق الكمون (التوتر) U بين طرفيه، و شدة التيار الكهربائي I الذي يجتازه، ثابتة و تساوي مقاومة الناقل:

$$\boxed{R = \frac{U}{I} = C^{te}} \qquad (3.3)$$

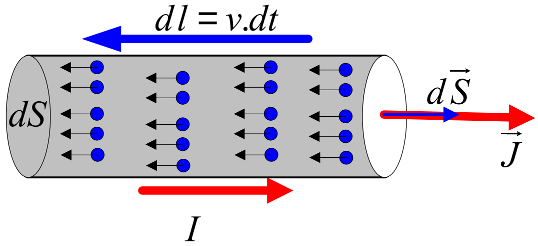
هذه العبارة بين شدة التيار و التوتر و المقاومة تعرف بـــ **قانون أوم**.

قانون أوم يظهر أنه من أجل فرق في الكمون محدد، يمكن وضع عدد من المقاومات في الدارة و هذا للحد من شدة التيار الكهربائي الذي يعبر الجهاز المغذى كهربائيا.

2/ كثافة التيار الكهربائي:(densité de courant)

سبق و أن عرّفنا التيار الكهربائي على أنه سيل من الشحنات في الفراغ أو عبر وسط مادي ناقل. يمكن التعبير عن شدة التيار الكهربائي بدلالة سرعة الشحنات المتحركة(الحرة).

نعتبر ناقلا مقطعه dS. ليكن n عدد الشحنات q المتحركة و المحصورة داخل واحدة الحجم و تتحرك بسرعة $\vec{v}$ ثابتة.



الشكل 3.3: كثافة التيار

تتقدم الشحنات خلال المدة الوجيزة dt بمسافة: $d\vec{l} = \vec{v}.dt$

خلال نفس المدة dt، الشحنة dQ المحصورة داخل حجم عنصري dV من الناقل هي

إذن: $dQ = nq.dV$

و بما أن $dV = d\vec{l}.d\vec{S}$

فإن: $dQ = n.q.\vec{v}.dt.d\vec{S}$

❖ **تعريف:** كثافة التيار الكهربائي هي المقدار الشعاعي $\vec{J}$ المساوي للشحنة المارة خلال واحدة الزمن عبر واحدة السطح:

$$\boxed{\vec{J} = nq.\vec{v}} \qquad (4.3)$$

و من ثمة فإن:

$$dQ = \vec{J}.dt.d\vec{S}$$

في حالة بلّور متكون من شوارد ساكنة و إلكترونات حرة متحركة فإن:

$$\boxed{\vec{J} = -ne.\vec{v}} \qquad (5.3)$$

نلاحظ هنا أن شعاع كثافة التيار يعاكس في اتجاهه الحركة الحقيقية للالكترونات، أي أن اتجاه التيار هو اتجاه الشعاع $\vec{J}$.

إذا كان $\vec{S}$ يمثل شعاع السطح للمقطع العرضي للناقل، و المنطبق على الشعاع $\vec{J}$ فإن شدة التيار الكهربائي هي المقدار السلمي:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \int_S \vec{J}.d\vec{S}$$

$$I = \vec{J}.\vec{S} \Rightarrow \boxed{I = nqv.S} \qquad (6.3)$$

نعبّر عن وحدة كثافة التيار الكهربائي بـ **الأمبير\ المتر المربع** $(A.m^{-2})$.

✓ **مثال 1.3:** الكتلة المولية الجزيئية للنحاس تساوي $M = 63,54\,g.mol^{-1}$ ، و كتلته الحجمية $\rho = 8,8.10^3\,kg.m^{-3}$.

ا/ أحسب عدد الذرات في وحدة الحجم ،

ب/ بافتراض أن كل ذرة من النحاس تحرر إلكترونين، و أن سلكا من نحاس مقطعه $10\,mm^2$ يجتازه تيار كهربائي شدته $30\,A$، أحسب كثافة التيار الكهربائي،

ج/ استنتج سرعة انتقال الإلكترونات داخل بلّور النحاس.

الإجابة:

ا/ حساب عدد الذرات في $1m^3$ من مادة النحاس:

$$\boxed{\eta = \frac{N.\rho}{M}} \Rightarrow \eta = \frac{6,03.10^{23} \times 8,8.10^6}{63.54} \Rightarrow \boxed{\eta = 8,35.10^{28}}$$

ب/ حساب الكثافة:
$$J = \frac{I}{S} \Rightarrow J = \frac{30}{10.10^{-6}} \Rightarrow \boxed{J = 3.10^6\ A/m^2}$$

ج/ استنتاج سرعة تحرك الإلكترونات:

$$J = nev \Rightarrow \boxed{v = \frac{J}{ne}} \Rightarrow v = \frac{3.10^6}{2\times 8,35.10^{28}\times 1,66.10^{-19}} \Rightarrow \boxed{v = 108\mu m.s^{-1}}$$

❖ **العلاقة بين الحقل الكهربائي و كثافة التيار الكهربائي:**

نعتبر جزءا $AB = l$ من ناقل يجتازه تيار كهربائي شدته I. وجود تيار كهربائي يعني بالضرورة وجود فرق في الكمون بين النقطتين A و B.

كنا تعلمنا في درس سابق كيف نحسب فرق الكمون الكهربائي المطبق بين نقطتين:

$$U = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}.d\vec{l} \qquad (7.3)$$

إذا كان الناقل سلكا مقطعه S فأن الحقل الكهروساكن منتظم على طول الجزء AB.

بما أن:

$$U = E.l \qquad (8.3)$$

فإن:

$$U = R.I = E.l \Rightarrow RJS = E.l$$

و هكذا نحصل على عبارة جديدة لكثافة التيار:

$$\boxed{J = \frac{l}{S.R}E} \qquad (9.3)$$

نضع
$$\sigma = \frac{l}{S.R} = C^{te} \qquad (10.3)$$

نطلق على هذا الثابت اسم **الناقلية الكهربائية** (conductivité électrique) للمادة الناقلة ، و وحدتها واحد على الأوم متر $(\Omega^{-1}.m^{-1})$.

تتعلق الناقلية بالخواص المجهرية للمادة ، فهي كمية محلية تفيد في تمييز الخواص الكهربائية للمادة. على أساس الناقلية تصنف المواد إلى نواقل ، عوازل و شبه نواقل.

مقلوب الناقلية يدعى **المقاومية الكهربائية**(résistivité électrique) للناقل (أو المقاومة النوعية):

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{R.S}{l}} \qquad (11.3)$$

و وحدتها هي **الأوم.متر** $(\Omega.m)$.

و هكذا يمكن كتابة عبارة مقاومة ناقل على الشكل:

$$\boxed{R = \frac{l}{\sigma.S} = \rho\frac{l}{S}} \qquad (12.3)$$

هذه العبارة البسيطة بين مقاومة سلك أسطواني و خصائصه الهندسية معروفة باسم **قانون بوييه** نسبة لصاحبه(Claude Pouillet 1719-1868).

يبين المخطط (الشكل 4.3) تصنيفا عاما للمواد من جهة نظر كهربائية.

الشكل 4.3 : مرتبة الناقلية و المقاومية

مقاومية بعض الأجسام :

المعادن $(\Omega.m)$	**الشبه نواقل** $(\Omega.m)$ في 300K	**العوازل** $(\Omega.m)$
الفضة: $1,47.10^{-8}$	السيليسيوم: 2400	الزجاج: من 10^{11} إلى 10^{14}
النحاس: $1,72.10^{-8}$	الجيرمانيوم: 0,5	الميكا: من 10^{11} إلى 10^{15}
الألمونيوم: $2,63.10^{-8}$		الماء: من 0,1 إلى 10^{5}

❖ **ملاحظة:** تتغير مقاومية ناقل بدلالة درجة الحرارة. بالنسبة للمعادن تزداد المقاومية بازدياد درجة الحرارة (إذن المقاومة تزداد). بينما بالنسبة لأشباه النواقل ، فإن العكس هو الذي يحدث. بعض الخلائط المعدنية (alliages) ، مقاوميتها تؤول إلى

الصفر حين تنخفض درجة الحرارة و تقارب الصفر المطلق. يتعلق الأمر بالنواقل الفائقة الناقلية (supraconducteurs).

بالنسبة للمعادن فإن تغير مقاومیتها يحكمها القانون:

$$\boxed{\rho = \rho_0\left[1+\alpha\left(T-T_0\right)\right]} \qquad (13.3)$$

ρ: المقاومية في درجة الحرارة $T°C$.

ρ_0 : المقاومية في درجة الحرارة $T_0°C$ المرجعية.

α: المعامل الحراري للمقاومة و يساوي بالتقريب $\frac{1}{273}$.

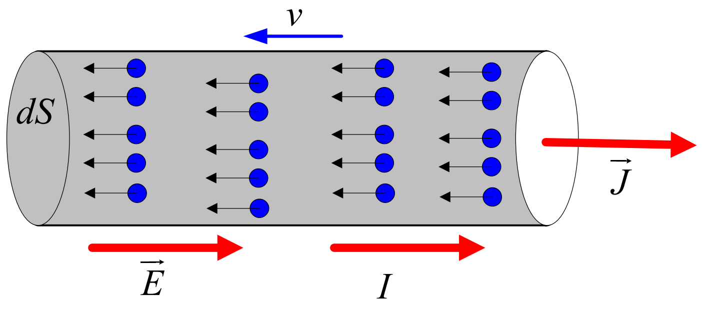
تغير المقاومية مع درجة الحرارة يتبعه بالضرورة تغير المقاومة وفق القانون:

$$\boxed{R = R_0\left[1+\alpha\left(T-T_0\right)\right]}$$

يشذ عن قاعدة تغير المقاومة مع درجة الحرارة، وفق القانون السابق، عنصر الكربون (الفحم) ، و جميع السوائل القابلة للتحليل الكهربائي ، إذ أن مقاومتها تزداد كلما انخفضت درجة الحرارة و تنقص كلما ارتفعت. كما أن مقاومة بعض الخلائط المعدنية (مثل المانكنين (manganine) و الكونستنتان(Constantin) تكاد تكون ثابتة ، فلا تتغير بتغير درجة الحرارة. و لذلك يستعمل المانكنين في عمل المقاومات القياسية. و تنعدم المقاومة الكهربائية للنواقل قرب درجة الصفر المطلق. و تتغير مقاومة الناقل بتغير نقاوته كذلك.

❖ **العلاقة بين $\vec{E}$ ، $\vec{J}$ و I:**

من المعادلة $\vec{J} = \frac{l}{S.R}\vec{E}$ يتبين لنا أن الشعاعين $\vec{E}$ و $\vec{J}$ لهما نفس الاتجاه. و بما أن I و $\vec{E}$ لهما نفس الاتجاه فإن التيار الكهربائي يسري في اتجاه الشعاعين $\vec{E}$ و $\vec{J}$.



الشكل 5.3: إتجاهات $\vec{J}$ و $\vec{E}$ و I

3/ فعل جول: (James Prescott Joule 1818-1889)

حسب تعريف الكمون الكهربائي، العمل dW المنجز من قبل شحنة عنصرية dq تنتقل بين نقطتين، يسود بينهما فرق في الكمون الكهربائي (أو توتر) U هو:

$$dW = U.dq$$

نعرّف بصفة عامة (في الكهرباء كما في الميكانيك) الاستطاعة على أنها العمل المنجز خلال وحدة الزمن ، أي:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

في حالتنا هذه ، لدينا:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{U.dq}{dt} = U.I$$

و هكذا يمكن كتابة:

$$\boxed{P = U.I} \qquad (14.3)$$

هذه العبارة تترجم ما يعرف باسم **فعل جول** (effet joule) في الحالة العامة. وحدة الاستطاعة هي **واط** (W) .(James Watt 1736-1819)

بالنسبة لثنائيات القطب التي تخضع لقانون أوم $(U = RI)$ ، فإن مرور تيار كهربائي من خلالها ينتج حرارة: تسمى هذه الظاهرة كذلك **فعل جول**. و بالفعل فإن ثنائي قطب خامل يحول الطاقة الكهربائية إلى طاقة حرارية. الاستطاعة المبددة من قبل ثنائي القطب تساوي:

$$\boxed{P = RI^2} \qquad (15.3)$$

نمثل الناقل الأومي بأحد الرسمين كما في الشكل 6.3.

الشكل 6.3 : تمثيل المقاومة

تبدد الطاقة على شكل حرارة يوحي لنا بتماثل بين المقاومة الكهربائية و قوى الاحتكاك الميكانيكي. كل احتكاك يؤدي إلى ضياع في الطاقة الميكانيكية الذي نجده على شكل حرارة (طاقة حرارية) ، بينما في المقاومة الكهربائية، "احتكاك" الإلكترونات داخل المادة، يؤدي بالمثل إلى تبدد الطاقة الكهربائية على شكل طاقة حرارية...هنا تتجلى لنا فائدة

النواقل الفائقة الناقلية، أي المواد ذات المقاومة المعدومة تماما، التي تسمح بنقل التيار الكهربائي بدون أي ضياع للطاقة.

حسب تعريف الطاقة، نستنتج أن الطاقة E التي ينتجها منبع أو الطاقة المستهلكة من قبل مقاومة خلال مدة زمنية t تساوي:

$$E = U.I.t = R.I^2.t = \frac{U^2}{R}.t \qquad (16.3)$$

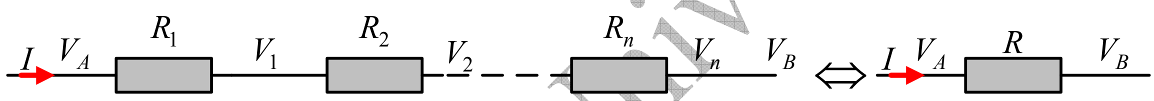
وحدة الطاقة هي **الجول** (J).

4/ تذكير بربط النواقل الأومية:(groupement de résistances)

نميّز حالتين لربط النواقل الأومية أو المقاومات:

ا/ الربط على التسلسل:(groupement en série) الشكل 7.3

كل المقاومات R_i يعبرها نفس التيار الكهربائي I و ليس لها إلا طرف مشترك واحد مع ثنائي قطب آخر. التوتر $U_{AB} = U$ يساوي مجموع التوترات بين طرفي كل ثنائي قطب.



الشكل 7.3 : ربط المقاومات على التسلسل

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n = R.I$$

$$U = R_1.I + R_2.I + R_3.I .... R_n.I = RI$$

و هكذا نحصل على المقاومة المكافئة لمجموع ثنائيات القطب الخاملة المربوطة على التسلسل:

$$\boxed{R = \sum_{i=1}^{n} R_i} \qquad (17.3)$$

ب/ الربط على التفرع: (groupement en parallèle) الشكل8.3(أ)

هذا الربط يتميّز بكون كل ثنائيات القطب أطرافها مشتركة مثنى مثنى. التوتر هو نفسه بين طرفي أي من المقاومات R_i.

التيار الكهربائي المغذي يتفرع على ثنائيات القطب بحيث:

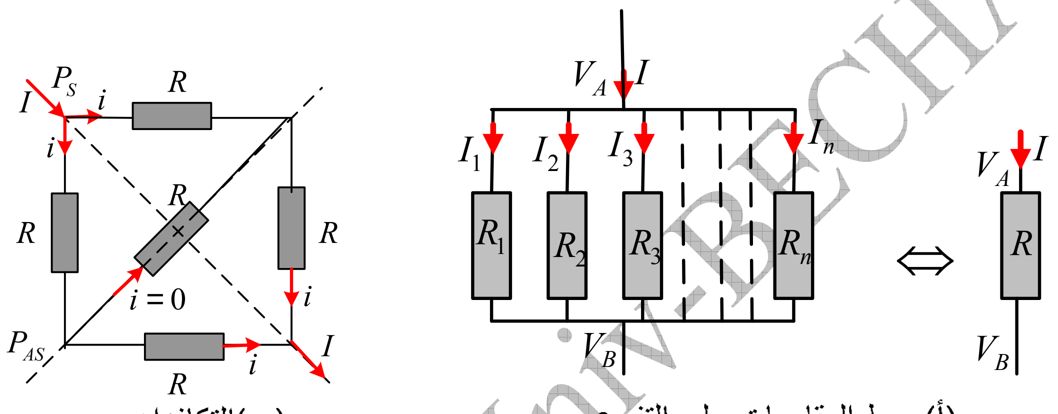
$$I = I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n$$

$$I=\frac{U}{R}=\frac{U}{R_1}+\frac{U}{R_2}+\frac{U}{R_3}+........\frac{U}{R_n}\Rightarrow\frac{U}{R}=\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+........\frac{1}{R_n}\right].U$$

و هكذا نحصل على المقاومة المكافئة لمجموع ثنائيات القطب الخاملة المربوطة على التفرع:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+........\frac{1}{R_n}\Rightarrow\boxed{\frac{1}{R}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}} \qquad (18.3)$$

المقاومة المكافئة لمقاومات مربوطة على التفرع (أو التوازي) تكون قيمتها أصغر من قيمة أصغر مقاومة من المقاومات المتفرعة.



(ب)التكافؤان (أ) ربط المقاومات على التفرع

الشكل 8.3

ج/ تكافؤات مفيدة: (Des équivalences utiles)

- إذا كان، من أجل ناقل أومي (مقاومة) و في كل الأحوال، $i=0$ (أو $u=0$) فإنه يمكن استبداله بسلك أو حذفه من الدارة.
- إذا كانت نقطتان في نفس الكمون فإنه يمكن وصلهما بسلك.
- إذا كان يسري في سلك تيار كهربائي معدوم فإنه يمكن حذف هذا السلك.

د/ تناظران: (symétries) الشكل3.8-ب-

في بعض الحالات يصبح استعمال التناظر جد مفيد و يجنبنا كثير من الحسابات.

P: مستوى تناظر فيزيائي للشبكة. من وجهة النظر الكهربائية يمكن لـــ P أن يكون من نوعين:

P_S: مستوى التناظر للتيارات و الكمونات.

P_{AS}: مستوى لاتناظر للتيارات و الكمونات (باعتبار الكمون معدوم على المستوى). فرع موضوع على P_{AS} يجتازه تيار معدوم.

لتوضيح هذه القواعد نعتبر كمثال الشكل8.3(ب) أعلاه. كل المقاومات (R) متماثلة مما ينتج عنه عدد من التناظرات P_S أو P_{AS}.

التيار I يتفرق إلى تيارين متماثلين i. و بالفعل لا يوجد أي سبب يجعل حاملات الشحنة تتسرب في جهة بأكثر عدد من في الجهة الأخرى. نفس الشيء يحدث حين يخرج التيار I.

عند تطبيق قانون العقد فإن المقاومة المركزية يجتازها تيار معدوم مهما كان التيار I أو التوتر U المفروضين على الجزء من الدارة.

حسب قواعد التكافؤات المذكورة أعلاه فإنه يمكننا حذف هذه المقاومة المركزية(دون حذف الفرع). تصبح المقاومة المكافئة تساوي بكل بساطة: $R_{éq}=\frac{R}{2}+\frac{R}{2}=R$.

B/ عناصر الدارة الكهربائية:(éléments d'un circuit électrique)

كل التطبيقات في الكهرباء تستغل السهولة التي يتم بها تحويل الطاقة الكهربائية من منبع كهربائي إلى جهاز مهما كان (مكواة ، مصباح ، جهاز التليفزيون ....). هذا التحويل يتم بواسطة **دارة كهربائية** تصل المنبع بالجهاز ، و تسمح بانتقال الإلكترونات. المنابع الكهربائية متعددة: الأعمدة ، البطاريات ، الخلايا الشمسية ، المولدات... في كل هذه الحالات المنابع لها قطبان على الأقل يسود بينهما فرق في الكمون.

1/ عناصر و مصطلحات الدارة الكهربائية: (éléments et vocabulaire)

تتكون الدارة الكهربائية من مجموعة عناصر تسمى ثنائيات قطب موصلة فيما بينها بأسلاك ناقلة، فتشكل بنية مغلقة.

- ✓ **العقدة:** (noeud)هي نقطة من الدارة حيث تصل ثلاث أسلاك أو أكثر.
- ✓ **الفرع:** (branche)هو جزء من دارة محصور بين عقدتين.
- ✓ **العروة:**(maille) هي مجموعة فروع تشكل حلقة مغلقة.
- ✓ **ثنائي القطب:**(dipôle) ثنائي القطب ينحصر في دارة كهربائية بواسطة قطبين ، يدخل التيار من أحدهما و يخرج من الثاني. يتميز ثنائي القطب بالاستجابة لفرق في الكمون بين طرفيه، أي المنحنى المميز $U=f(I)$.
- ✓ **ثنائي القطب الخامل:**(dipôle passif) يستهلك الطاقة الكهربائية.
- ✓ **ثنائي القطب النشط:**(dipôle actif) ينتج تيارا كهربائيا.

✓ **ثنائي القطب الخطي:** (dipôle linéaire) يكون المنحنى المميز له $U = f(I)$ عبارة عن مستقيم.

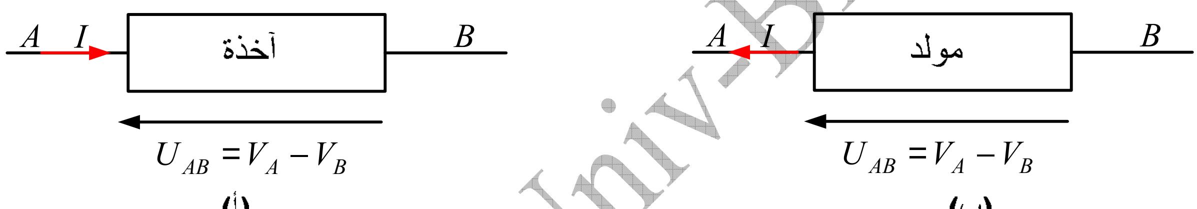
✓ **أسلاك التوصيل:**(fils de jonction) نهمل مقاوماتها أمام مقاومات ثنائيات قطب أخرى، بحيث نعتبرها متساوية الكمونات.

✓ **الشبكة:** (réseau)هي مجموعة من الدارات الكهربائية.

أصطلاح:(convention)في الدراسة العملية لثنائيات القطب يستعمل مصطلحان:

مصطلح الآخذة: التوتر و التيار الكهربائيان موجهان إيجابا و في اتجاهين متعاكسين. الشكل 9.3 (أ).

مصطلح المولد: التوتر و التيار الكهربائيان موجهان إيجابا و في نفس الجهة. الشكل 9.3(ب).



الشكل 9.3 : مصطلحا الآخذة و المولد

2/ ضرورة توفر قوة محركة كهربائية: (force électromotrice)

يجب على المولد أن يكون قادرا على بذل عمل كهربائي على الشحنات لتمريرها من خلاله من القطب ذي الكمون المنخفض إلى القطب ذي الكمون العالي. إن عمل المولد يشبه عمل مضخة تضخ الماء من مستوى منخفض إلى مستوى أعلى. بالفعل يمكن فهم ظاهرة التيار الكهربائي بمقارنته مع التيار المائي في نهر:

الماء يجري من منطقة مرتفعة نحو منطقة منخفضة بفضل قوة الجاذبية أي الثقل.

لكن إذا أردنا أنشاء دارة مغلقة للماء فلا بد من توفير طاقة (وجوب استعمال مضخة) لسحب الماء إلى ارتفاع أعلى.

يمكن تعريف القوة المحركة الكهربائية لمنبع كهربائي بأنها العمل المبذول على واحدة الشحنة لنقلها خلال دارة مغلقة. فإذا كان dW هو العمل المبذول لتمرير شحنة مقدارها dq خلال الفترة الزمنية الصغيرة dt في الدارة، فإن القوة المحركة الكهربائية e تكون :

$$e=\frac{dW}{dq}$$

وبما أن الاستطاعة هي العمل المبذول خلال واحدة الزمن فإن:

$$P=\frac{dW}{dt}\Rightarrow P=e.\frac{dq}{dt}$$

و من هذا نصل إلى العبارة:

$$\boxed{P=e.I} \qquad (19.3)$$

نعرف من جهة أخرى أن : $U=V_A-V_B=\int_A^B \vec{E}.d\vec{l}=e$

في حالة دارة مغلقة: الاستطاعة الكلية المقدمة بين A و A من قبل قوة كولومب تساوي:

$$P=U.I=I\int_A^A \vec{E}.d\vec{l}=I\left(V_A-V_A\right)=0$$

أي استطاعة معدومة. و هذا يعني أن الحقل الكهروساكن لا يضمن استمرارية تيار كهربائي في دارة مغلقة.

حين يسري تيار كهربائي في دارة مغلقة، فهذا يدل على أن قوة كولومب ليست المسئولة عن الحركة الإجمالية لحاملات الشحنة في الناقل.

هذا ما يحدث تماما في دارة كهربائية، بحيث يجب على قوة أخرى غير القوة الكهروساكنة الكولومبية من تمكين حاملات الشحنة صعود الكمون و التغلب عليه.

للحصول على تيار كهربائي متواصل في دارة مغلقة لا بد من تغذية الدارة بطاقة.

الأجهزة التي تنتج هذه الطاقة تسمى **مولدات** كهربائية، و يمكن القول على أنها منابع للقوة المحركة الكهربائية (e).

هناك طرق عديدة لإنتاج قوة محركة كهربائية:

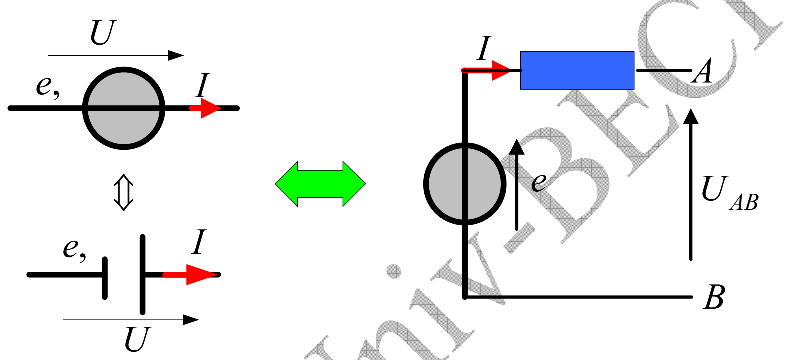
- البطارية تحول الطاقة الكيميائية إلى طاقة كهربائية ،
- مولد كهروساكن يحول الطاقة الميكانيكية إلى طاقة كهربائية ،
- المولد الكهربائي يحول الطاقة الميكانيكية إلى طاقة كهربائية ،
- الخلية الشمسية تحول الطاقة الإشعاعية إلى طاقة كهربائية .

3/ نوعا المولدات: (les deux types de générateurs)

ا/ مولدات أو منابع التوتر: (générateurs ou sources de tension)

منبع التوتر ، أو مولد التوتر ، هو ثنائي قطب يتميز بتوتر ثابت بين طرفيه مهما كانت شدة التيار الذي يجريه. لا نهتم في كل ما يتبع، في هذا الفصل، إلا بمولدات التوتر المستمر. تتميّز هذه المولّدات بقوة محركة كهربائية (e) و مقاومة داخلية (r) ضعيفة، و نمثلها كما في الشكل 10.3.

كما يمكن تعويض مولد توتر مميزاته (e,r) بمنبع توتر مثالي، قوته المحركة الكهربائية e، مربوط على التسلسل مع ناقل أومي، مقاومته . الشكل 10.3



الشكل 10.3: تمثيل مولد توتر

القوة المحركة الكهربائية لمولد توتر تساوي فرق الكمون بين طرفيه حين لا يجري أي تيار كهربائي.

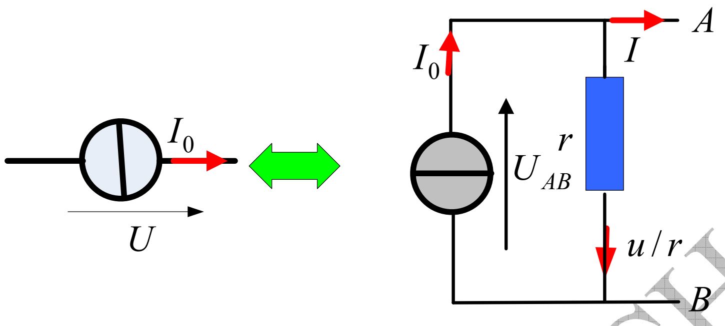
$$\boxed{I = 0 \Rightarrow e = U_{AB}} \qquad (20.3)$$

ب/ مولدات أو منابع التيار: (générateurs ou sources de courant)

منبع التيار، أو مولد التيار، هو ثنائي قطب يتميّز بإجراء تيار ثابت مهما كان فرق الكمون المتغير بين طرفيه. لا نهتم في كل ما يتبع، في هذا الفصل، إلا بمولدات التيار المستمر. يمكن تحقيق مثل هذه المنابع بواسطة أنظمة إلكترونية و يكون التوتر بين طرفي كل منها محدودا بقيمة أعظمية. نمثل مولد التيار كما في الشكل 11.3.

يمكن تعويض مولد تيار بمنبع تيار مثالي، يجري تيارا ثابتا I_0، مربوط على التفرع مع ناقل أومي، مقاومته . الشكل 11.3

$$\boxed{I = I_0 - \frac{u}{r}} \qquad (21.3)$$

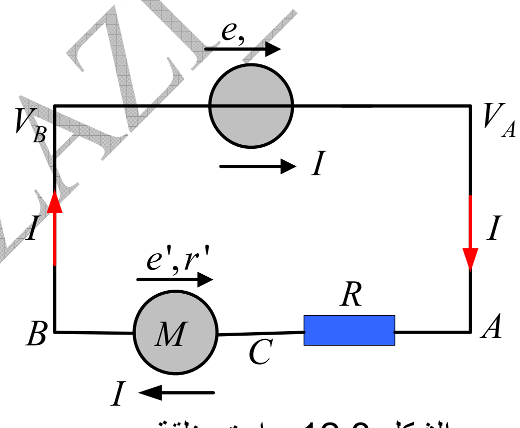


الشكل 11.3: تمثيل مولد تيار

C/ القوانين المسيرة للدارات الكهربائية:(lois régissant les circuits électriques)

1/ معادلة الدارة الكهربائية:(équation du circuit électrique)

لتكن الدارة الممثلة على الشكل 12.3 و المتكونة من مولد، قوته المحركة الكهربائية e و مقاومته الداخلية ، مقاومة خارجية R، و محرك قوته المحركة الكهربائية العكسية e' و مقاومته الداخلية r'.



الشكل 12.3: دارة مغلقة

المولد ينتج استطاعة كهربائية : $P = e.I$

الناقل الأومي (R) يحول الطاقة الكهربائية إلى طاقة حرارية مقدارها RI^2.

المقاومة الداخلية للمولد هي بدورها تستهلك استطاعة مقدارها rI^2 (هذا ما يفسر سخونة المولد). في حين يستهلك المحرك M (أو آخذة أو مولد مركب على التضاد بشرط أن

تكون $e' \prec e$) استطاعة $e'I$ و التي يحولها إلى طاقة ميكانيكية، و مقاومته الداخلية تستهلك استطاعة تساوى $r'I^2$ (بسبب وجود نواقل أومية بداخل المولد).

استنادا إلى قانون انحفاظ الطاقة فإن الطاقة المنتجة تساوي الطاقة المستهلكة:

$$eI = e'I + RI^2 + rI^2 + r'I^2$$

و منه فإن شدة التيار الذي يجتاز الدارة تساوي:

$$I = \frac{e - e'}{R + r + r'}$$

و في **<u>الحالة العامة</u>** إذا رمزنا بـ للمقاومات الداخلية و بـ R للمقاومات الخارجية فإن:

$$\boxed{I = \frac{\sum e}{\sum r + \sum R}} \qquad (22.3)$$

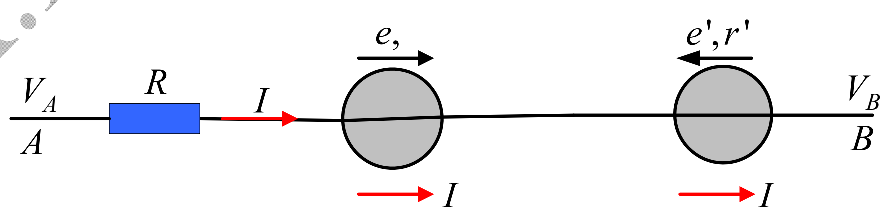
شدة التيار الكهربائي في دارة كهربائية تساوي المجموع الجبري للقوى المحركة الكهربائية مقسومة على مجموع المقاومات. تسمى هذه العلاقة **بمعادلة الدارة الكهربائية.**

<u>اصطلاح</u>: عند تطبيق العلاقة (22.3)، نختار اتجاها معينا حول الدارة و نعتبره موجبا؛ تكون التيارات و القوى المحركة الكهربائية موجبة إذا كانت في نفس الاتجاه المختار، و تكون سالبة عكس ذلك.

2/ <u>فرق الكمون بين نقطتين من دارة</u> (قانون أوم المعمم)

(différence de potentiel entre deux points d’un circuit électrique)

يمثل الشكل13.3 جزءا من دارة كهربائية يجتازها تيار شدته I، يجريه منبع غير ظاهر في الشكل، و الذي يزوّد هذا الجزء AB باستطاعة $P = UI$، حيث U يمثل فرق الكمون بين النقطتين A و B.



الشكل 13.3 : فرق الكمون بين نقطتين

$R = \sum R_i$ ترمز إلى **المقاومة الكلية** للجزء AB (نواقل أومية ، أسلاك توصيل ، المقاومات الداخلية للمولدات أو الآخذات....).

$e=\sum e_i$ ترمز إلى **المجموع الجبري** لكل القوى المحركة الكهربائية و القوى المحركة الكهربائية العكسية.

الاستطاعة الناتجة بين النقطتين A و B تساوي :

$$UI+\left(\sum e_i\right).I$$

في المقاومات الاستطاعة المستهلكة هي:

$$\left(\sum R_i\right).I^2$$

إذا ساوينا بين الاستطاعتين الناتجة و المستهلكة وفق انحفاظ الطاقة فإن:

$$UI+\left(\sum e_i\right).I=\left(\sum R_i\right).I^2$$

و في الأخير نحصل على ما يسمى بالقانون المعمم لأوم:

$$\boxed{V_A-V_B=U=\left(\sum R_i\right).I-\sum e_i} \qquad (23.3)$$

اصطلاح: إذا اخترنا الاتجاه من A نحو B موجبا، و كانت التيارات و القوى المحركة الكهربائية بنفس الاتجاه فإن إشاراتها تكون موجبة، أما إذا كانت بعكسه فإشاراتها سالبة.

إذا كانت النقطة A منطبقة على النقطة B فإن:

$$\left(\sum R\right).I-\sum e=0 \qquad (24.3)$$

فرق الكمون بين طرفي مولد التوتر:

(différence de potentiel aux bornes d'un générateur de tension)

يمثل الشكل 14.3 مولدا للتوتر باحتمالين:

ا/ اتجاه التيار باتجاه القوة المحركة الكهربائية، أي أن التيار يخرج من القطب الموجب للمولد.

ب/ اتجاه التيار بعكس اتجاه القوة المحركة الكهربائية، أي أن التيار يخرج من القطب السالب للمولد.

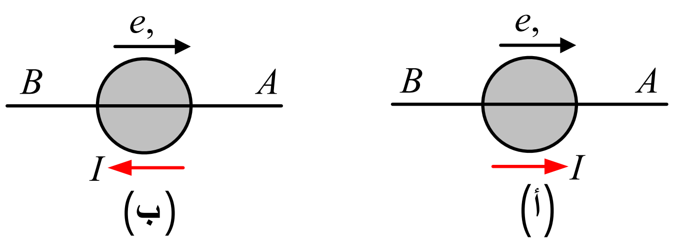
نستخدم على الجزء من الدارة العلاقة العامة: $U_{AB}=\sum R_i I-\sum e_i$، و نختار الاتجاه الموجب من A نحو B:

الشكل 14.3 (ا): e و I معاكستان للاتجاه الموجب المختار، إذن هما سالبتان:

$$U_{AB}=\sum R_i I-\sum e_i=-rI-(-e)$$

$$\boxed{U_{AB}=e-rI} \qquad (25.3)$$

هذه العبارة تمثل فرق الكمون بين طرفي مولد.



الشكل 14.3: فرق الكمون بين طرفي مولد

الشكل 14.3 (ب): e تعاكس الاتجاه الموجب المختار ، إذن هي سالبة ، بينما I يوافق الاتجاه الموجب المختار و عليه فهو موجب:

$$U_{AB} = \sum R_i I - \sum e_i = rI - (-e)$$

$$\boxed{U_{AB} = rI + e} \qquad (26.3)$$

<u>هذه العبارة الأخيرة تناسب أيضا فرق الكمون بين طرفي **آخذة** حيث e هي قوتها المحركة الكهربائية العكسية. هذا ليس غريبا لأن المولد الذي يدخل التيار من قطبه الموجب يسلك سلوك آخذة.</u>

3/ <u>ربط المولدات</u>:(groupement de générateurs)

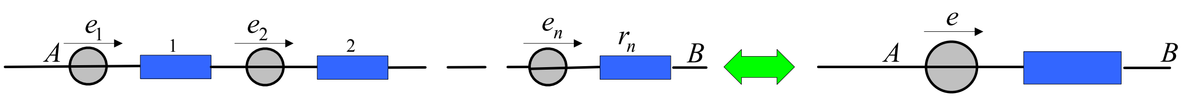
يمكن لدارة كهربائية أن تضم أكثر من مولد.

ا/ <u>مولدات التوتر</u>: كل مولد يتميز بقوة محركة كهربائية e_i و مقامة داخلية $_i$.

<u>الربط على التسلسل</u>: الشكل 15.3

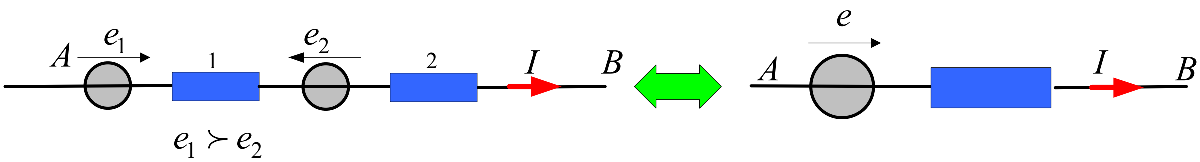
في هذه الحالة القوة المحركة الكهربائية للمولد المكافئ تساوي <u>**المجموع الجبري**</u> للقوى المحركة الكهربائية للمولدات المربوطة، و مقاومته الداخلية تساوي المجموع الحسابي لكل المقاومات الداخلية.

$$\boxed{r = \sum_i r_i} \quad \boxed{e = \sum_i e_i} \qquad (27.3)$$



الشكل 15.3: ربط مولدات توتر عل التسلسل

الربط على التضاد: الشكل16.3



الشكل 16.3: ربط مولدات توتر عل التضاد

نعتبر الآخذة (محرك مثلا) كمولد مربوط على التضاد مع المولد الفعلي، و بالعكس المولد المربوط على التضاد يقوم بدور محرك. المولد ذو القوة المحركة الكهربائية الأكبر هو الذي يفرض نفسه كمولد:

$$\boxed{e_1 \succ e_2 \Rightarrow e = e_1 - e_2} \qquad (28.3)$$

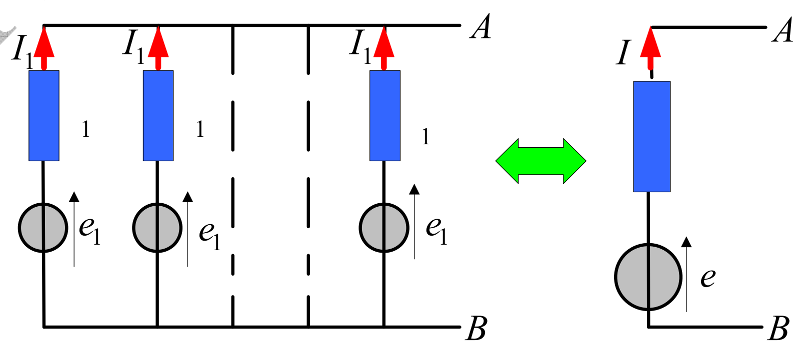
$$\boxed{r = r_1 + r_2} \qquad (29.3)$$

الربط على التفرع: الشكل 17.3

يمنع ربط منبعين للتوتر مختلفي التوتر على التفرع. لا بد أن تكون كل المولدات في هذه الحالة متماثلة.

في هذه الحالة القوة المحركة الكهربائية للمولد المكافئ تساوي القوة المحركة الكهربائية لمولد واحد، و مقلوب مقاومته الداخلية يساوي مجموع المقالب لكل المقاومات الداخلية.

$$\boxed{I = nI_1} \quad \boxed{e = e_1} \quad \boxed{\frac{1}{\mathrm{r}} = \sum_i \frac{1}{r_i} = \frac{n}{r_1}} \qquad (30.3)$$



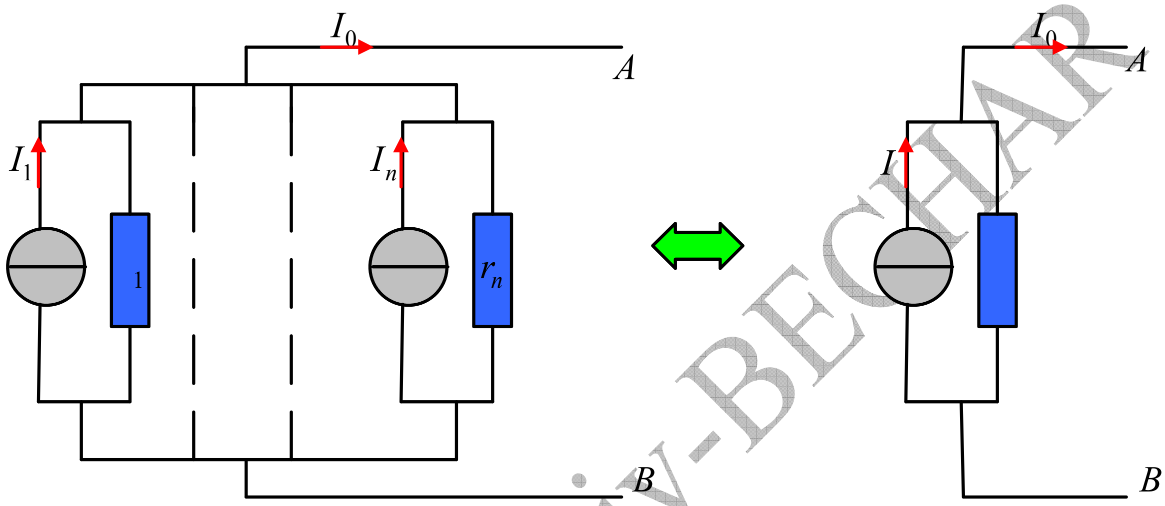
الشكل 17.3: ربط مولدات توتر عل التفرع

ب/ مولدات التيار:

الربط على التفرع: الشكل 18.3

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + ...I_n}$$

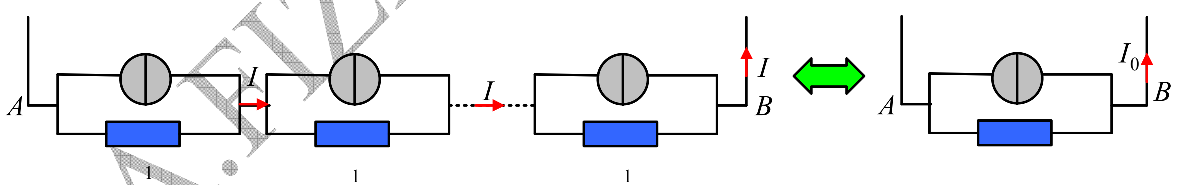
$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + ... + \frac{1}{r_n}} \quad (31.3)$$



الشكل 18.3: ربط مولدات تيار عل التفرع

الربط على التسلسل: الشكل 19.3

كل المنابع يجب أن تكون متماثلة. يمنع ربط منبعين للتيار يجريان تيارين مختلفي الشدة.



الشكل 19.3: ربط مولدات التيار عل التسلسل

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + ... + \frac{1}{r_n}} \quad (32.3)$$

$$\boxed{I_0 = I} \qquad \boxed{V_A - V_B = V_1 + V_2 + ...V_n}$$

لتوضيح كيفية تطبيق هذه القوانين نورد في ما يلي بعض الأمثلة التطبيقية:

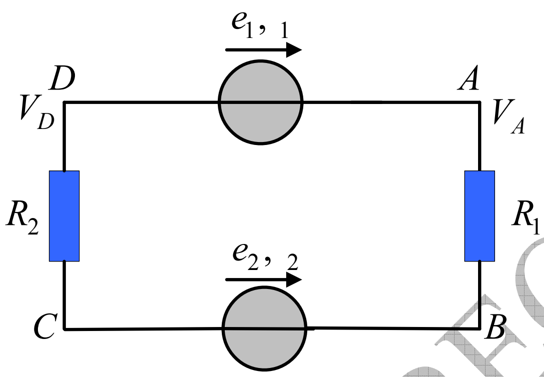
<u>المثال 2.3</u>: نعتبر الدارة المبينة على الشكل 20.3

$e_1 = 12V \ , \ r_1 = 0,2\Omega \ , \ e_2 = 6V \ , \ r_2 = 0,1\Omega \ , \ R_1 = 1,4\Omega \ , \ R_2 = 2,3\Omega$

أوجد:

ا/ اتجاه و شدة التيار في الدارة الكهربائية،

ب/ فرق الكمون بين النقطتين A و C.



الشكل 20.3

<u>الحل</u>:

ا/ بما أن $e_1 \succ e_2$ نستنتج أن اتجاه التيار باتجاه عقارب الساعة.

بما أن المولد الثاني مركب على التضاد مع المولد الأول، فإن قوته المحركة الكهربائية سالبة. نحسب الشدة باستعمال العلاقة: $I = \dfrac{\sum e}{\sum}$

$$I = \frac{12 - 6}{0,1 + 0,2 + 1,4 + 2,3} \Rightarrow \boxed{I = 1,5A}$$

ب/ لإيجاد فرق الكمون بين النقطتين A و C نستعمل العلاقة:

$$V_A - V_C = U_{AC} = \left(\sum R_i\right).I - \sum e_i$$

و يتم هذا باختيار أحد المسلكين ABC أو ADC:

وفق المسلك ABC:
$$V_A - V_C = U_{AC} = \underbrace{(0,1 + 1,4) \times 1,5}_{\sum R_i.I} - \underbrace{(-6)}_{\sum e_i} \Rightarrow \boxed{U_{AC} = 8,25V}$$

وفق المسلك ADC:
$$V_A - V_C = U_{AC} = \underbrace{(0,2 + 2,3) \times -1,5}_{\sum R_i.I} - \underbrace{(-12)}_{\sum e_i} \Rightarrow \boxed{U_{AC} = 8,25V}$$

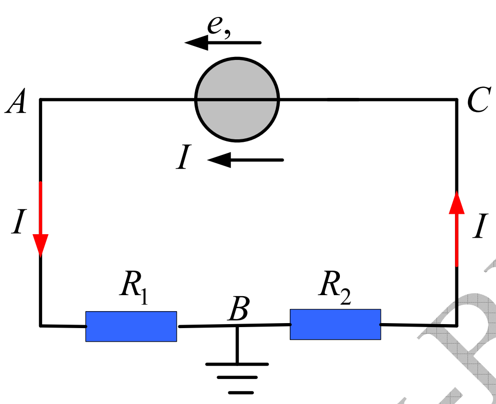
<u>المثال 3.3</u>:

إن جميع الدارات الكهربائية المستعملة في حياتنا اليومية ، مثل دارات الأجهزة الإلكترونية ، تحتوي على نقطة واحدة أو عدة نقاط موصلة بالأرض يكون الكمون فيها

صفرا. و ذلك لأن الأرض جسم ناقل كبير جدا لا يتأثر كمونها بتوصيلها بالنواقل المشحونة المعتادة. لذلك يعتبر كمون الأرض صفرا دائما. وكمون أية نقطة أخرى في الدارة يحسب بالنسبة لهذه النقاط و التي تعتبر كمرجع للكمون.

في الدارة المبينة على الشكل 21.3 وصلت النقطة B بالأرض. المطلوب حساب الكمون في النقطتين A و C.

تطبيق عددي: $e=10V\ ,\ r=1\Omega\ ,\ R_1=3\Omega\ ,\ R_2=1\Omega$



الشكل 21.3

الحل:

نحسب أولا الشدة باستعمال العلاقة: $I=\dfrac{\sum e}{\sum}$

$$I=\frac{10}{5}\Rightarrow\boxed{I=2A}$$

حساب V_{AB} و V_{BC} :

$$V_{AB}=R_1.I\Rightarrow V_{AB}=3.2=6V$$

$$V_{BC}=R_2.I\Rightarrow V_{BC}=1.2=2V$$

و بما أن $V_B=0$ فإن:

$$V_{BC}=V_B-V_C=2\Rightarrow\boxed{V_C=-2V}\quad \text{و}\quad V_{AB}=V_A-V_B=6\Rightarrow\boxed{V_A=6V}$$

يمكننا التأكد من هذه النتيجة بحساب فرق الكمون بين طرفي المولد بالذهاب من A إلى C عبر المولد:

$$V_A-V_C=U_{AC}=r.I-\sum e_i\Rightarrow V_A-V_C=1.(-2)-(-10)\Rightarrow\boxed{V_A-V_C=8V}$$

4/ قانونا كيرشوف: (lois de Kirchhoff)

ا/ انحفاظ الشحنة: (قانون العقد) (conservation de la charge ou loi des noeuds)

في عقدة من دارة كهربائية مجموع شدّات التيارات الداخلة يساوي مجموع شدات التيارات الخارجة:

$$\boxed{\sum I_s = \sum I_e} \qquad (33.3)$$

هذا يعني أن الشحنات لا تتراكم ، و تتسرب عند عقدة في الشبكة أي أنها تخضع لقانون انحفاظ الشحنة.

ب/ انحفاظ الطاقة: (قانون العروات) (conservation de l'énergie ou loi des mailles)

في عروة k من دارة كهربائية، المجموع الجبري لحاصل جداء المقاومة في التيار ($\sum_{k=1}^{n} R_k . I_k$) يساوي المجموع الجبري للقوى المحركة الكهربائية ($\sum_{k=1}^{n} e_k$).

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} e_k = \sum_{k=1}^{n} R_k . I_k} \qquad (34.3)$$

و هذه القاعدة ترجمة لقانون انحفاظ الطاقة و هي مطابقة للعلاقة (24.3):

نصيحة عملية: عند استعمال قانوني كيرشوف ينصح إتباع الخطوات التالية:

☜ عند استعمال القانون الأول المجموع الحسابي لشدات التيارات الداخلة للعقدة يساوي المجموع الحسابي لشدات التيارات الخارجة منها.

☜ عند استعمال القانون الثاني اختر اتجاها موجبا حول العروة. إن جميع التيارات و القوى المحركة الكهربائية، إذا كانت في هذا الاتجاه تكون موجبة، و التي بعكسه سالبة. نعتبر اتجاه e موجبا عندما ندخل من القطب السالب للمولد و نخرج من قطبه الموجب و سالبا بالعكس.

في حالة الشبكات المعقدة ، من الصعب معرفة عدد المعادلات المستقلة ، لاستنتاج جميع المجاهيل. لذلك ينصح استخدام القاعدتين التاليتين:

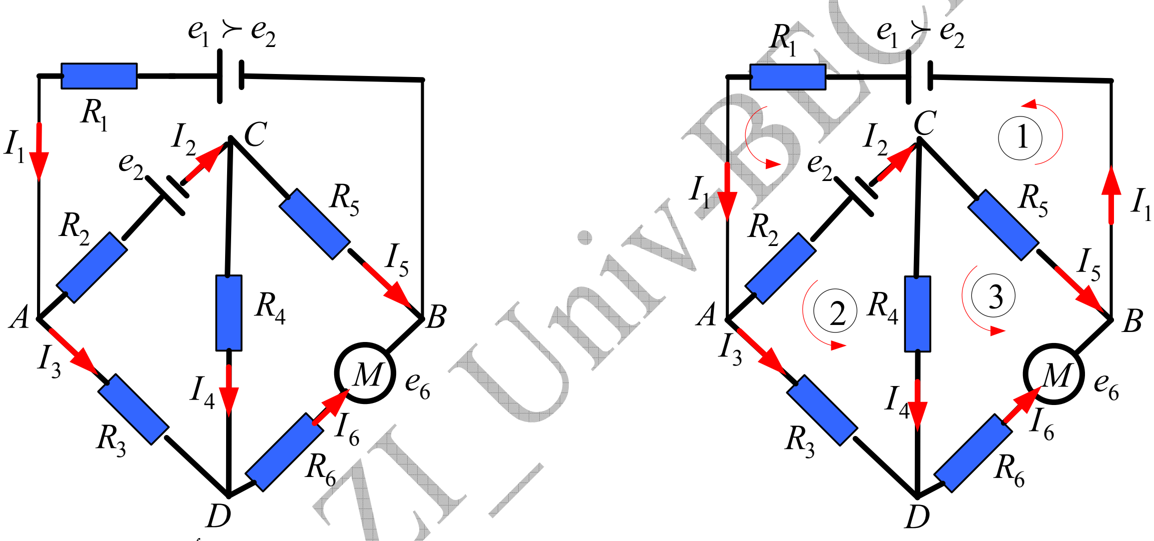
☜ إذا كان عدد العقد في الشبكة الكهربائية يساوي m ، فقانون العقد ينطبق على $m-1$ عقدة. و لنا كامل الحرية في اختيار العقد.

☜ افصل الشبكة إلى مكوناتها من العروات المستقلة ، أي لها على الأقل فرع غير مشترك مع عروة أخرى ، و اعتبر كل عروة و كأنها قائمة بذاتها و طبق عليها القانون الثاني لكيرشوف.

نوضح هذه الخطوات في الأمثلة التالية.

المثال 4.3:

يمثل الشكل22.3 (أ) دارة كهربائية مغلقة. نقترح تطبيق قانوني كيرشوف بكتابة المعادلات المناسبة. المقاومات الداخلية للمولدات و كذا للمحرك M مهملة.



(أ) الشكل 22.3 (ب)

الحل:

تطبيق القانون الأول: هناك 4 عقد تقابلها 4 معادلات:

في العقدة A: $I_1 = I_2 + I_3$

في العقدة B: $I_1 = I_5 + I_6$

في العقدة C: $I_2 = I_5 + I_4$

في العقدة D: $I_6 = I_4 + I_3$

تطبيق القانون الثاني: هناك 3 عروات مستقلة. بعد اختيار الاتجاهات كما هو مبين عل الشكل23.3 (ب)، يمكن كتابة مختلف المعادلات:

العروة 1: $e_1 - e_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_5 I_5$

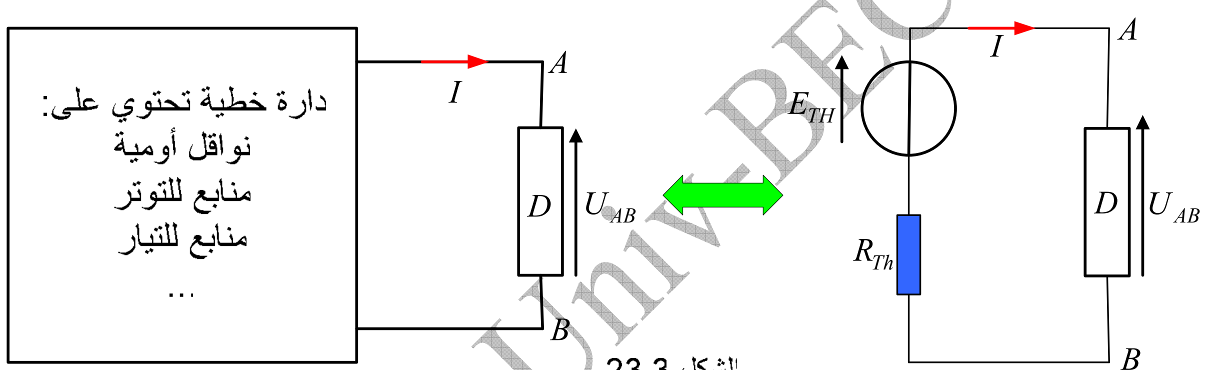
العروة 2: $e_2 = R_3 I_3 - R_4 I_4 - R_2 I_2$

العروة 3: $-e_6 = R_6 I_6 + R_4 I_4 - R_5 I_5$

ملاحظة: العروتان $(e_1 \to A \to D \to B \to e_1)$ و $(A \to C \to B \to D \to A)$ لا فائدة من اعتبارهما لأنهما غير مستقلتين.

5/ نظرية تيفنا: (Théorème de Thévenin)

النص: كل شبكة خطية محصورة بين طرفين A و B، مهما كانت معقدة، تكافئ مولدا وحيدا قوته المحركة الكهربائية (E_{Th}) و مقاومته الداخلية (R_{Th})، الشكل 23.3



الشكل 23.3

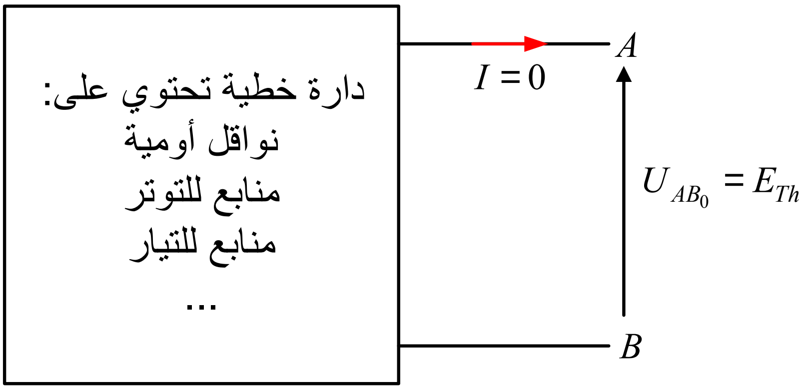
بحيث:

$U_{AB_0} = E_{Th}$: تمثل القوة المحركة الكهربائية للمولد المكافئ (نسميه مولد تيفنا) و تساوي فرق الكمون الموجود بين الطرفين A و B حينما تكون الدارة مفتوحة ، أي التوصيل بين A و B مقطوعا.

$R_{Th} = R_{éq}$: تمثل المقاومة المكافئة للدارة حين ننظر إليها من الطرفين A و B (التوصيل بين A و B محذوف) و نطفئ كل منابع التوتر و التيار الكهربائيين.

☜ كيفية حساب مميزتي مولد تيفنا:

☜ حساب E_{Th} : نفتح الدارة بين A و B بحذف ثنائي القطب D ثم نحسب $U_{AB_0} = E_{Th}$ كما في الشكل24.3.



الشكل 24.3

☜ **حساب R_{Th} :** نحذف ثنائي القطب D و نطفئ كل منابع التوتر و التيار و نرسم شكلا جديدا للدارة لا يحتوي إلا على المقاومات ، ثم نحسب المقاومة المكافئة R_{Th} لكل الدارة الواقعة بين A و B.

☜ إذا كان ثنائي القطب D عبارة عن مقاومة R فإن شدة التيار العابر لثنائي القطب تساوي:

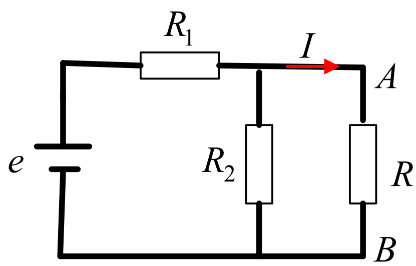
$$I=\frac{E_{Th}}{R+R_{Th}}$$

☜ **ملاحظة:** يمكن أن يحتوي الفرع AB على أكثر من ثنائي قطب.

نوضح كيفية تطبيق هذه النظرية في الأمثلة التالية:

المثال 5.3:

لتكن الدارة المبينة على الشكل25.3. نقترح إيجاد R_{Th} ، E_{Th} ثم استنتاج شدة التيار I الكهربائي الذي يغذي المقاومة R و كذا فرق الكمون بين طرفيها.



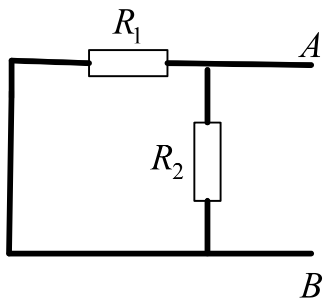
الشكل 25.3

الحل:

نطفئ منابع التوتر و نحسب المقاومة المكافئة R_{Th} ، بحذف الفرع AB (الشكل26.3):

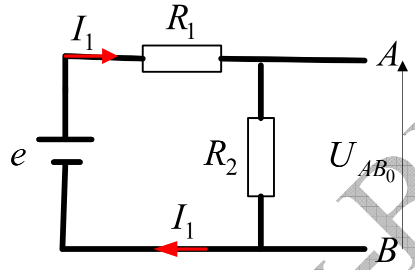
R_1 و R_2 مركبتان على التفرع:

$$\boxed{R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$



الشكل 26.3

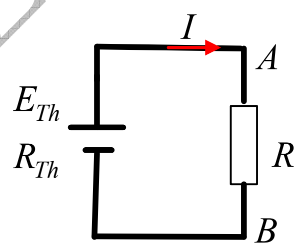
لحساب E_{Th} نعتبر الدارة مفتوحة و نحذف المقاومة بين A و B (الشكل27.3):



الشكل 27.3

$$\left.\begin{aligned} E_{Th} = U_{AB_0} = V_A - V_B = e - R_1.I_1 \\ V_A - V_B = R_2.I_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{E_{Th} = U_{AB_0} = R_2 \frac{e}{R_1 + R_2}}$$

لحساب شدة التيار I، نعتبر مولد تيفنا المكافئ مغذيا الفرع AB (الشكل28.3)



الشكل28.3

$$U_{AB} = RI = E_{Th} - R_{Th} I \Rightarrow I = \frac{E_{Th}}{R + R_{Th}}$$

و بتعويض E_{Th} و R_{Th} نجد عبارة الشدة:

$$\boxed{I = \frac{R_2.e}{R_1 R_2 + RR_1 + RR_2}}$$

تعيين فرق الكمون بين النقطتين A و B:

$$U_{AB} = RI \Rightarrow \boxed{U_{AB} = \frac{RR_2}{R_1R_2 + RR_1 + RR_2}e}$$

المثال 6.3:

بين حرفيا و عدديا أنه يمكن تحويل مولد تيار إلى مولد توتر.

الحل:

يبين الشكل 29.3 تركيبين متكافئين، أي أن شدة التيار المنتج في كل من الدارتين هي نفسها و التوتر بين طرفي كل من الدارتين هو نفسه أيضا. النتيجة هي أنه يمكن تحويل مولد للتيار إلى مولد توتر.

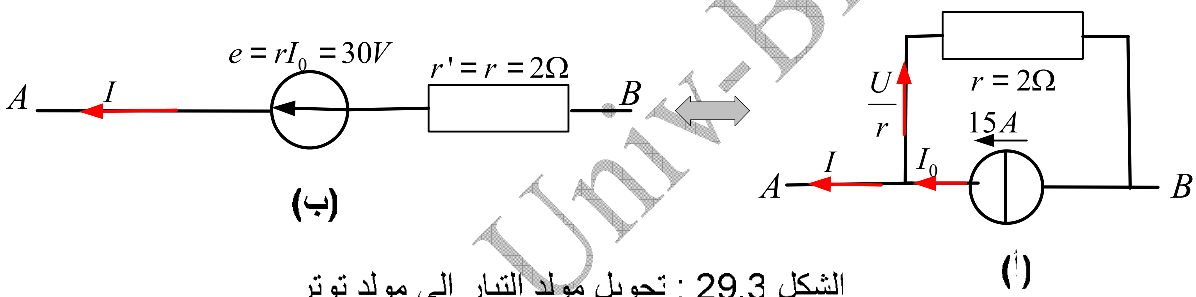
من الشكل(أ) يمكن استنتاج: $I = I_0 - \frac{U}{r} \rightarrow (1)$

من الشكل يمكن استنتاج: $U = V_A - V_B = e - r'I \Rightarrow I = \frac{e}{r'} - \frac{U}{r'} \rightarrow (2)$

بمطابقة المعادلتين (1) و (2) نتوصل إلى مميزتي مولد التوتر بدلالة مميزتي مولد التيار:

$$\boxed{r' = r} \ , \ \boxed{r' = 2\Omega}$$

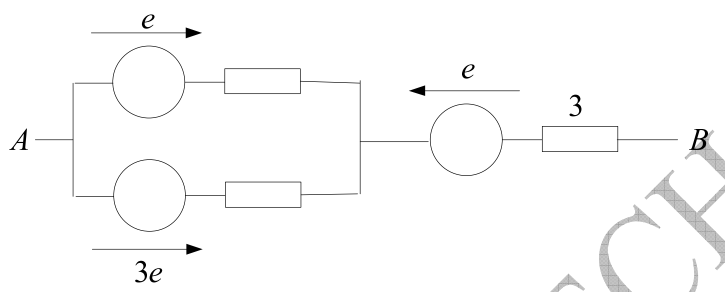
$$\boxed{e = rI_0} \ , \ \boxed{e = 2\times 15 = 30V}$$



الشكل 29.3 : تحويل مولد التيار إلى مولد توتر

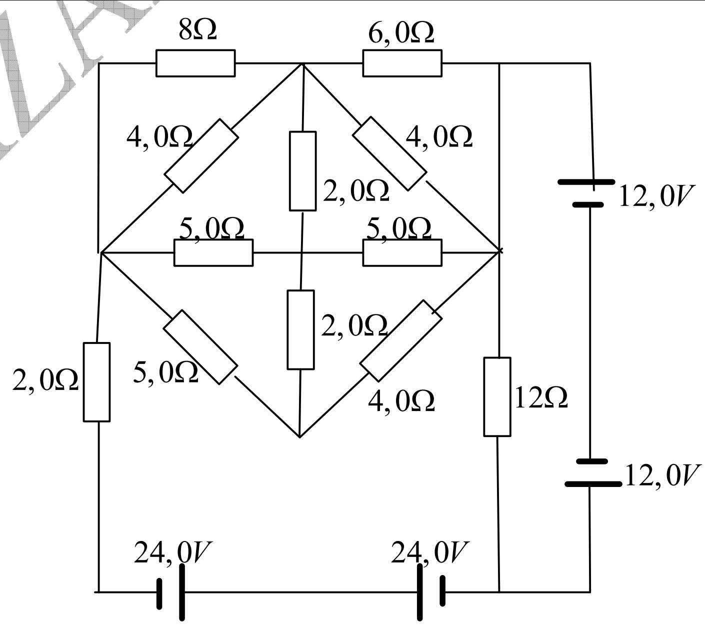
EXERCICES ** تــمــاريــن

Exercice 3.1 Déterminer les paramètres du dipôle équivalent au groupement de générateurs entre les points A et B. Préciser le sens du courant.	**التمرين 1.3** عين مميزتي ثنائي القطب المكافئ لمجموع المولدات بين النقطتين A و B. وضح اتجاه التيار.

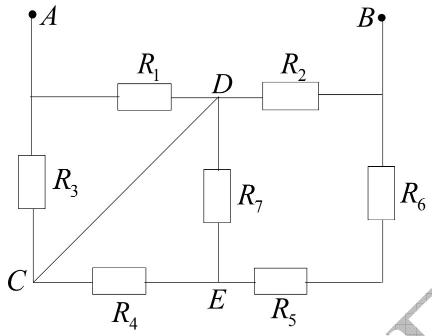


Exercice 3.2 Deux résistances R_1 et R_2 sont montées en parallèle avec un générateur idéal dont la tension entre ses bornes est U. Montrer que les intensités du courant qui traversent ces résistances sont respectivement : $I_1 = I\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)$ et $I_2 = I\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)$	**التمرين 2.3** مقاومتان R_1 و R_2 مركبتان على التوازي مع مولد مثالي حيث التوتر بين قطبيه هو U. بين أن شدتي التيار اللتين تجتازان هاتين المقاومتين هما على التوالي: $I_1 = I\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)$ و $I_2 = I\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)$

Exercice 3.3 Quelle intensité traverse la résistance de 8Ω dans la figure ci-dessous.	**التمرين 3.3** ما هي الشدة التي تجتاز المقاومة 8Ω في الشكل أسفله؟

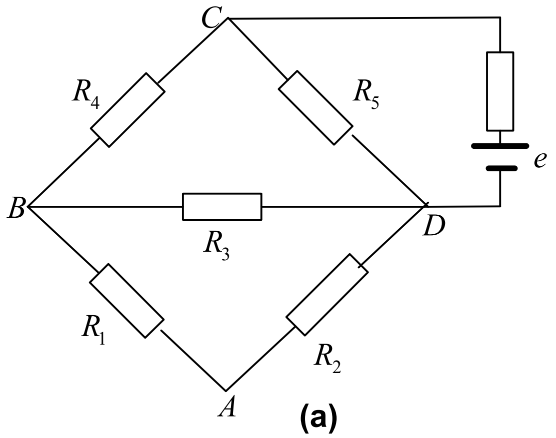


Exercice 3.4	التمرين4.3
Calculer la résistance équivalente entre les points A et B du montage représenté sur la figure ci-dessous sachant que : $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_7 = 10\Omega$; $R_5 = R_6 = 2,5\Omega$	أحسب المقاومة المكافئة للدارة المبينة على الشكل أسفله بين النقطتين A و B علما أن: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_7 = 10\Omega$; $R_5 = R_6 = 2,5\Omega$



Exercice 3.5	التمرين 5.3
Un fil de tungstène de $1,00mm$ de diamètre transporte un courant d'intensité $15,0A$. Déterminer le champ électrique à l'intérieur du fil sachant que la résistivité du tungstène est $5,5.10^{-8}\Omega.m$.	سلك من التنغستين قطره $1,00mm$ يحمل تيارا شدته $15,0A$. حدد الحقل الكهربائي داخل السلك علما أن المقاومة النوعية للتنغستين هي $5,5.10^{-8}\Omega.m$.

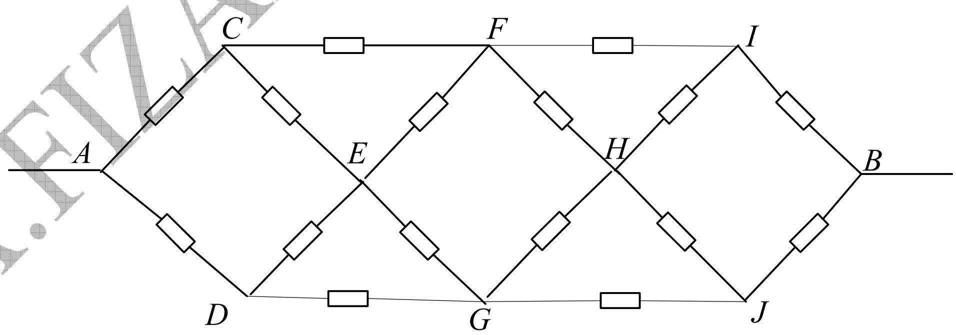
Exercice 3.6	التمرين 6.3
Le générateur de la figure ci-dessous a une force électromotrice $e = 9,0V$ et une résistance $r = 0,50\Omega$. 1/ Calculer l'intensité dans chaque résistance. 2/ Quelle est la puissance fournie par le générateur ? 3/ Quelle est la différence de potentiel entre A et C ? $R_1 = R_2 = R_4 = 1,0\Omega$, $R_3 = 2,0\Omega$, $R_5 = 6,$	لمولد الشكل أسفله قوة محركة كهربائية مقدارها $e = 9,0V$ و مقاومة داخلية $r = 0,50\Omega$. 1/ أحسب الشدة في كل مقاومة. 2/ ما هي الإستطاعة المنتجة من قبل المولد؟ 3/ ما هو فرق الكمون بين A و C ؟ $R_1 = R_2 = R_4 = 1,0\Omega$, $R_3 = 2,0\Omega$, $R_5 = 6,0\Omega$



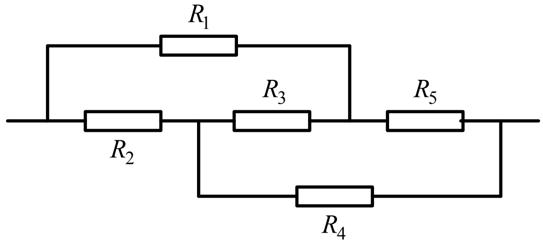
(a)

Exercice 3.7 L'un des dispositifs les plus utiles pour mesurer la température, est le thermomètre à résistance de platine. Un fil d'environ $2,0m$ de platine pur de $0,1mm$ de diamètre est enroulé en forme de bobine de résistance $25,5\Omega$ à $0°C$. Sachant que le coefficient thermique de la résistivité du platine est $0,003927K^{-1}$, déterminer la variation de la résistance due à l'augmentation de température de $1,00°C$. Quelle est la température, si la résistance est de $35,5°C$?	**التمرين 7.3** أحد التجهيزات الأكثر فائدة لقياس درجة الحرارة، هو مقياس الحرارة ذي مقاومة من البلاتين. سلك من البلاتين الخالص طوله $2,0m$ قطره حوالي $0,1mm$ ملفوف على شكل وشيعة مقاومته $25,5\Omega$ في $0°C$. علما أن المعامل الحراري لمقاومية البلاتين هو $0,003927K^{-1}$ ، حدد تغير المقاومة الناتج عن ارتفاع درجة الحرارة بـ $1,00°C$. ما هي درجة الحرارة إذا كانت المقاومة $35,5°C$ ؟

Exercice 3.8 Dans la figure ci-dessous chaque branche contient une résistance $r=1\Omega$. Calculer la résistance équivalente entre A et B.	**التمرين 8.3** في الشكل أسفله كل فرع يحتوي على مقاومة $r=1\Omega$. أحسب المقاومة المكافئة بين A و B .



Exercice 3.9 En utilisant les lois de Kirchhoff, trouver la résistance équivalente entre les bornes du groupe de résistances représenté dans la figure ci-dessous. $R_2=R_3=R_5=6\Omega$, $R_1=R_4=12\Omega$	**التمرين 9.3** باستعمال قانوني كيرشوف، أوجد المقاومة المكافئة بين قطبي مجموعة المقاومات الممثلة في الشكل أسفله. $R_1=R_4=12\Omega$ ، $R_2=R_3=R_5=6\Omega$



Exercice 3.10

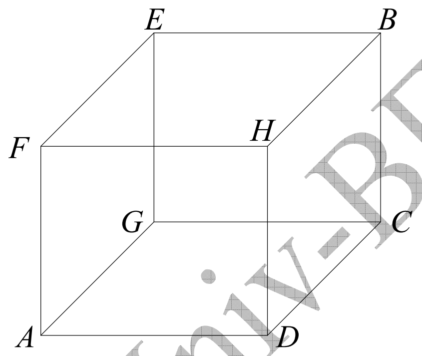
On considère un réseau électrique de forme cubique qui peut être alimenté de trois manières : entre A et B, entre A et C, entre A et D.

Déterminer dans chaque cas la résistance équivalente de ce réseau sachant que la résistance d'un côté est .

التمرين 10.3

نعتبر شبكة كهربائية ذات شكل تكعيبي و التي يمكن تغذيتها بطرق ثلاث: بين A و B، بين A و C، بين A و D.

عين من أجل كل حالة المقاومة المكافئة لهذه الشبكة علما أن مقاومة كل ضلع هي .



Exercice 3.11

On réalise le montage indiqué sur la figure ci-dessous. Le condensateur est initialement déchargé.

On donne :

$$E = 15V,\ R_1 = 50k\Omega\ ,$$
$$R_2 = R_3 = 100k\Omega\ ,\ C = 20\mu F$$

1/ Déterminer les éléments E_{Th} et R_{Th} du modèle de Thévenin équivalent du dipôle actif linéaire situé à gauche des bornes A et B, l'interrupteur K étant ouvert.

2/ Calculer :

a/ l'intensité I du courant à la fermeture de K.

b/ l'énergie du condensateur une fois sa charge terminée.

c/ la durée approximative nécessaire pour la charge complète du condensateur.

التمرين:11.3

نحقق التركيب المبيّن على الشكل في الأسفل. المكثفة فارغة في البداية. تعطى:

$$E = 15V,\ R_1 = 50k\Omega\ ,$$
$$R_2 = R_3 = 100k\Omega\ ,\ C = 20\mu F$$

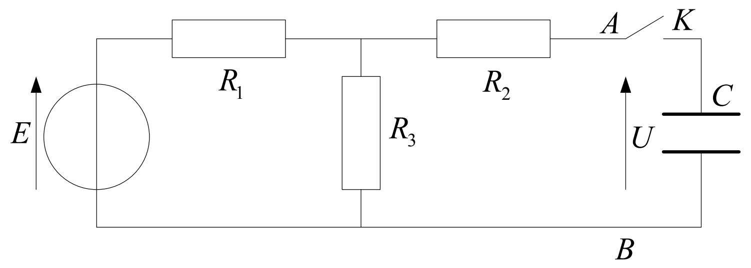
1/ عيّن العنصرين E_{Th} و R_{Th} لنموذج تيفنا المكافئ لثائي القطب الخطي النشط الواقع على يسار الطرفين A و B حين تكون القاطعة K مفتوحة.

2/ أحسب

أ/ الشدة I للتيار عند غلق القاطعة K،

ب/ طاقة المكثفة حين يتم شحنها،

ج/ المدة الزمنية التقريبية اللازمة لشحن المكثفة تماما.

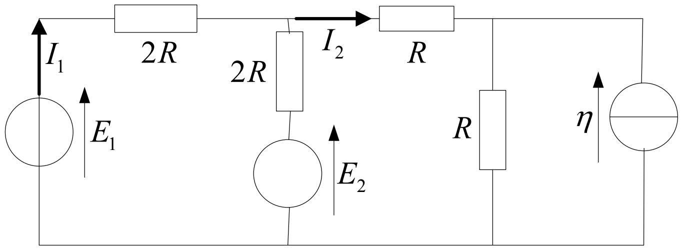


Exercice 3.12	**التمرين 12.3**
Un générateur, de f.é.m. $e = 70,0V$ et de résistance interne $r = 1,00\Omega$, est connecté à un moteur, de f.é.m. e' et de résistance interne r', en série avec un conducteur ohmique de résistance $R = 10,0\Omega$ plongeant dans un calorimètre. 1/ Déterminer en fonction de e', r' et de l'intensité I du courant qui traverse le moteur la puissance totale P_T dissipée par le moteur ainsi que la puissance P_J dissipée par effet Joule par ce dernier. En déduire l'expression de la puissance P_M convertie en puissance mécanique. (On orientera la f.é.m. e' dans le sens opposé à celui du courant I). 2/ a)Le moteur est bloqué, la puissance électrique convertie en puissance mécanique est nulle. On mesure un transfert thermique, au niveau du calorimètre, $Q_1 = 15,00kJ$ en une minute. Calculer l'intensité I_1 du courant dans ce cas et la f.é.m. e'. En déduire r'. b) Le moteur fonctionne. Le transfert thermique n'est plus que de $Q_2 = 1,50kJ$ en une minute. Calculer l'intensité I_2 du courant et e'', nouvelle valeur de la f.é.m. du moteur. 3. On enlève le conducteur ohmique de résistance R et le moteur fonctionne. a) Exprimer le rendement η du moteur, rapport de la puissance utile pour le moteur sur la puissance reçue par celui-ci. b) Le moteur est connecté au générateur précédent. Déterminer le point de fonctionnement du circuit, c'est à dire : intensité I du courant qui traverse le moteur et tension U aux bornes de ce dernier. c) Calculer le rendement η .	مولد قوته المحركة الكهربائية $e = 70,0V$ و مقاومته الداخلية $r = 1,00\Omega$ ، يوصّل بمحرك، قوته المحركة الكهربائية e' و مقاومته الداخلية r'، على التسلسل مع ناقل أومي مقاومته $R = 10,0\Omega$ مغمور في مسعر(جهاز لقياس كمية الحرارة). 1/ حدّد بدلالة e', r' والشدة I للتيار الذي يجتاز المحرك، الاستطاعة الكلية P_T المبددّة من قبل المحرك و كذا الاستطاعة P_J المبددّة بفعل جول من قبل هذا الأخير. إستنتج عبارة الاستطاعة P_M المحولة إلى استطاعة ميكانيكية. (وجه القوة المحركة الكهربائية e' في الاتجاه المعاكس لجهة التيار I). 2/ أ) نمنع المحرك من الدوران، الاستطاعة الكهربائية المحولة إلى استطاعة ميكانيكية معدومة. نقيس تحوّيل حراري، على مستوى المسعر، $Q_1 = 15,00kJ$ في الدقيقة الواحدة. أحسب الشدة I_1 للتيار في هذه الحالة و القوة المحركة الكهربائية e' . إستنتج r' . ب) الآن المحرك يشتغل(يدور). التحويل الحراري هو $Q_2 = 1,50kJ$ فقط في الدقيقة الواحدة. أحسب الشدة I_2 للتيار و القيمة الجديدة e'' للقوة المحركة الكهربائية للمحرك. 3/ ننزع الناقل الأومي ذي المقاومة R و نبقي المحرك يشتغل. أ) عبّر عن المردود η للمحرك، أي النسبة بين الاستطاعة الفعلية للمحرك و الاستطاعة التي يتلقاها هو نفسه. ب) يربط المحرك بالمولد السابق. عيّن نقطة اشتغال الدارة أي: الشدة I للتيار الذي يجتاز المولد و التوتر U بين طرفي هذا الأخير. ج) أحسب المردود η.

Exercice 3.13	**التمرين 13.3**
En utilisant les lois de Kirchhoff déterminer les courants I_1 et I_2 pour le réseau représenté sur la	باستعمال قانوني كيرشوف عيّن التيارين I_1 و I_2 في

figure ci-dessous.

الشبكة الممثلة على الشكل أسفله.



Exercice 3.14

Calculer les caractéristiques E_{Th} et R_{Th} du générateur de Thévenin correspondant au circuit représenté sur la figure ci-dessous, en déduire ensuite l'intensité I du courant qui passe dans le conducteur ohmique R .

Application numérique :

$$R_1 = 5\Omega\ ; R_2 = 2\Omega\ ; R_3 = 4\Omega\ ;$$

$$R_4 = 10\Omega\ ; R = 5\Omega\ ; E = 20V$$

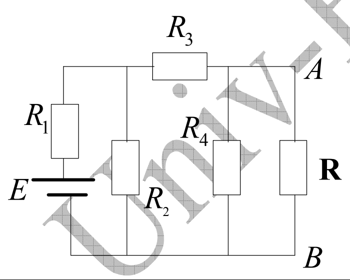
تمرين 14.3

أحسب المميزتين E_{Th} و R_{Th} لمولد "تيفنا" المناسب للدارة الممثلة في الشكل أسفله ، ثم استنتج شدة التيار I المار في الناقل الأومي R .

تطبيق عددي:

$$R_1 = 5\Omega\ ; R_2 = 2\Omega\ ; R_3 = 4\Omega\ ;$$

$$R_4 = 10\Omega\ ; R = 5\Omega\ ; E = 20V$$

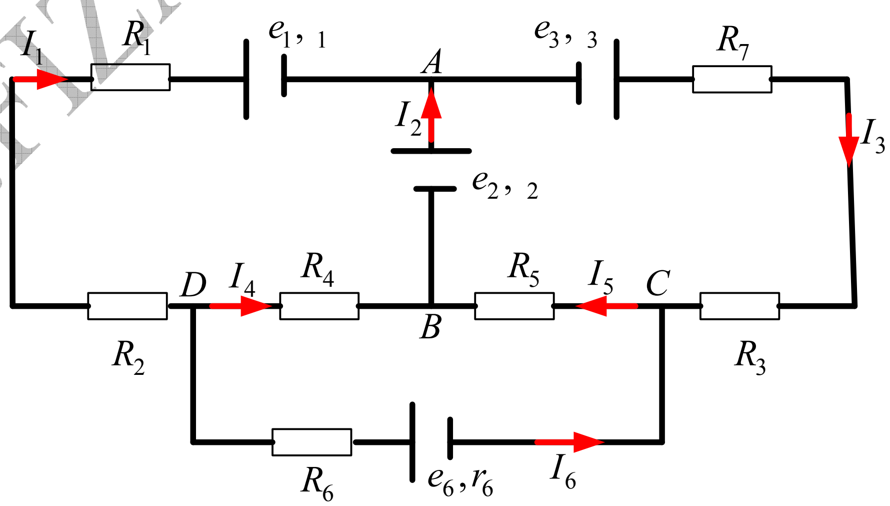


Exercice 3.15

Soit le circuit représenté sur la figure ci-dessous. En appliquant les deux lois de Kirchhoff écrire toutes les équations correspondant aux nœuds et aux mailles.

التمرين15.3

لتكن الدارة المبينة على الشكل في الأسفل. بتطبيق قانوني كيرشوف أكتب كل المعادلات المناسبة للعقد و العروات.



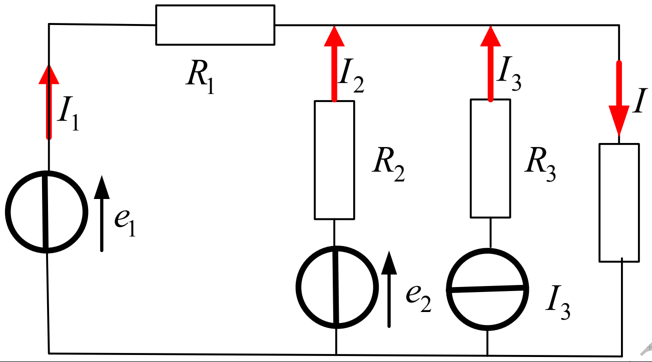
Exercice 3.16

Soit le circuit représenté sur la figure ci-dessous.

التمرين 16.3

Ecrire toutes les équations en appliquant les lois de Kirchhoff. En déduire l'expression de l'intensité I en fonction de $e_1, e_2, R_1, R_2, R_3, R, I_3$. Quelle est la tension (U_3) entre les bornes du générateur ?

لتكن الدارة المبينة على الشكل في الأسفل. أكتب كل المعادلات بتطبيق قانوني كيرشوف. إستنتج عبارة الشدة I بدلالة $e_1, e_2, R_1, R_2, R_3, R, I_3$. كم هو التوتر (U_3) بين طرفي المولد؟



Exercice 3.17

Le schéma ci-dessous représente un circuit appelé pont de Wheatstone. On demande de calculer les deux caractéristiques du générateur de Thévenin R_{Th} et E_{Th}, puis d'en déduire l'intensité I du courant électrique qui alimente la résistance ainsi que la différence de potentiel U_{AB} entre ses bornes.

Application numérique :

$e = 24V$, $R_1 = R_4 = 10k\Omega$

$R_2 = 33k\Omega$, $R_3 = 27k\Omega$, $r = 2k\Omega$

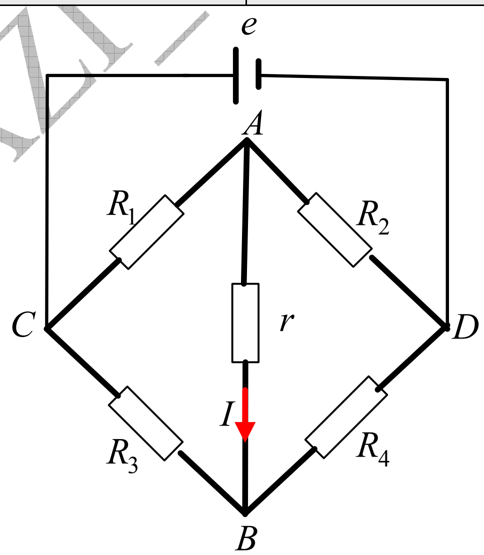
التمرين 17.3

يمثل الشكل قي الأسفل دارة تعرف باسم جسر وتسطون. المطلوب حساب مميزتي مولد تيفنا R_{Th} ، E_{Th} ثم استنتاج الشدة I للتيار الكهربائي الذي يغذي المقاومة و كذا فرق الكمون U_{AB} بين طرفيها.

تطبيق عددي:

$e = 24V$, $R_1 = R_4 = 10k\Omega$

$R_2 = 33k\Omega$, $R_3 = 27k\Omega$, $r = 2k\Omega$

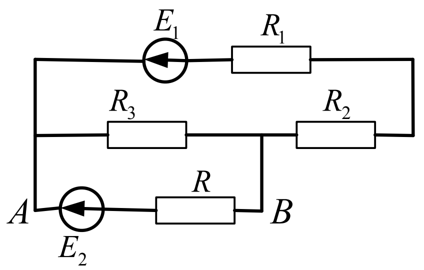


Exercice 3.18

Déterminer littéralement l'intensité du courant qui traverse la branche AB (figure ci-dessous) en fonction de $E_1, E_2, R_1, R_2, R_3, R$.

التمرين 18.3

عين حرفيا شدة التيار العابر للفرع AB (الشكل في الأسفل) بدلالة $E_1, E_2, R_1, R_2, R_3, R$.



Exercice 3.19

Soit le montage indiqué sur la figure ci-dessous.

En procédant par schémas équivalents, déterminer les caractéristiques du générateur de Thévenin équivalent au circuit entre les points A et B .

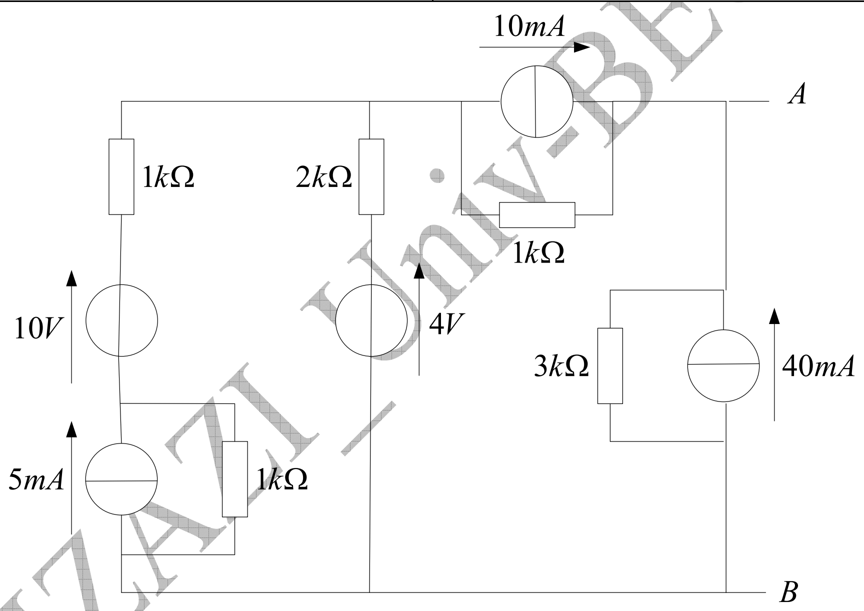
On branche une résistance $R = 4k\Omega$ entre A et B . Calculer le courant I_0 qui circule dans cette résistance.

التمرين19.3

ليكن التركيب المبين على الشكل في الأسفل.

باستعمال الأشكال المتكافئة، عيّن مميزتي مولد تيفنا المناسب للدارة بين A و B .

نربط مقاومة $R = 4k\Omega$ بين A و B . أحسب الشدة I_0 للتيار الذي يجتاز هذه المقاومة.



Exercice 3.20

Un circuit est formé par deux mailles carrées $ABCD$ et $EFGH$, la première entourant la seconde. Chaque côté de ces mailles a une résistance $r = 1,0k\Omega$ et les deux sommets E et A sont connectés par une résistance d'également $r = 1,0k\Omega$. Une force électromotrice $e = 12V$ est branchée entre G et C .

1/ Simplifier ce circuit et déterminer la résistance équivalente entre G et C .

2/ Quelle est l'intensité débitée par le générateur ?

3/ Quelle est la différence de potentielle entre les points C et A ?

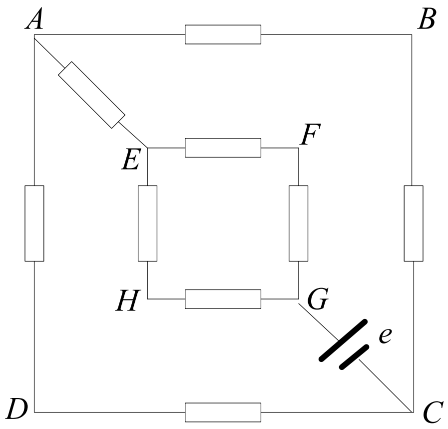
التمرين 20.3

تتكون دارة من عروتين مربعتين $ABCD$ و $EFGH$ ، الأولى تحيط بالثانية. كل ضلع لهاتين العروتين له مقاومة $r = 1,0k\Omega$ و القمّتان A و E موصلتان بواسطة مقاومة قيمتها كذلك $r = 1,0k\Omega$. تربط قوة محركة كهربائية مقدارها $e = 12V$ بين G و C .

1/ بسط هذه الدارة و حدّد المقاومة المكافئة بين G و C .

2/ ما هي الشدة التي يجريها المولد؟

3/ ما هو فرق الكمون بين النقطتين C و A ؟


A
B
F
E
H
G
e
D
C

Solution des exercices 3.1 à 3.20:	حلول التمارين من 1.3 إلى 20.3

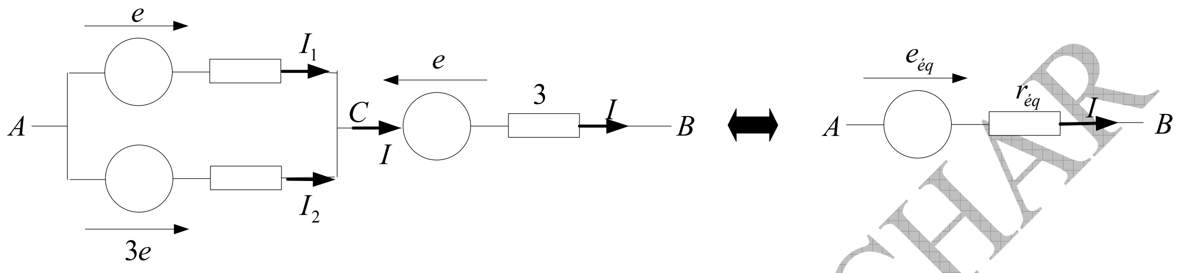
التمرين 1.3

نلاحظ من الشكل أسفله أن: $U_{AB}=U_{AC}+U_{CB}$

بافتراض أن التيار يسري من النقطة A نحو النقطة B فإن:

$I=I_1+I_2$

يمكن حساب فرق الكمون بين النقطتين A و B بإتباع مسلكين مختلفين:



$$U_{AB}=(rI_1-e)+(3rI+e)\rightarrow(1)$$
$$U_{AB}=(rI_2-3e)+(3rI+e)\rightarrow(2)$$

نجمع المعادلتين (1) و (2) فنحصل على:

$$2U_{AB}=r(I_1+I_2)-4e+6rI+2e$$
$$2U_{AB}=rI-4e+6rI+2e$$
$$2U_{AB}=-2e+7rI\rightarrow(3)$$

فرق الكمون بين طرفي التركيب المكافئ هو:

$$U_{AB}=e_{éq}+r_{éq}I\rightarrow(4)$$

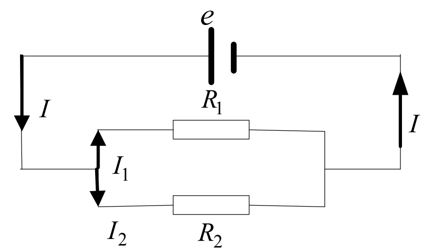
بمطابقة المعادلتين (3) و (4) نحصل على:

$$\boxed{e_{éq}=-2e} \qquad \boxed{r_{éq}=\frac{7}{2}r}$$

نظرا لإشارة القوة المحركة الكهربائية المكافئة $e_{éq}$ فإن الإتجاه الفعلي للتيار الكهربائي هو من النقطة B نحو النقطة A.

التمرين 2.3

حسب الشكل المرافق فإن الشدة الرئيسية I التي يجريها المولد، ذي القوة المحركة الكهربائية e، تتوزع



على المقاومتين بحيث: $e=R_1I_1=R_2I_2$

و بما أن: $I=I_1+I_2$

يمكن أن نحسب كل من الشدتين الفرعيتين :

$$\left.\begin{array}{l} I_2 = I - I_1 \\ R_1 I_1 = R_2 I_2 \end{array}\right| \Rightarrow R_1 I_1 = R_2 \left(I - I_1\right) \Rightarrow \boxed{I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

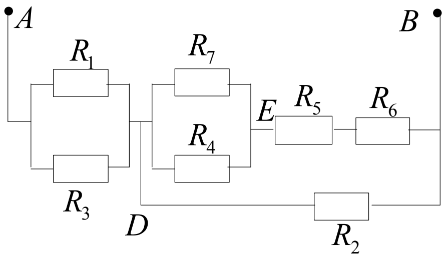
$$\left.\begin{array}{l} I_1 = I - I_2 \\ R_1 I_1 = R_2 I_2 \end{array}\right| \Rightarrow R_1 \left(I - I_2\right) = R_2 I_2 \Rightarrow \boxed{I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

التمرين 3.3

لو ركّزت على الشكل لأجبت بدون حسابات أن **الشدة معدومة** في كل فروع الدارة لأن المولدات تنعدم مثنى مثنى و ذلك لأنها مركبة على التضاد مثنى مثنى و قواها المحركة الكهربائية تنعدم مثنى مثنى.

التمرين4.3:

يكفي أن نميز بين المقاومات المربوطة على التسلسل و تلك المربوطة على التفرع كما يبينه الشكل المرافق. و عليه:



$$R_{éq} = R_{AB} = \left(R_1 \parallel R_3\right) + R_2 \parallel \left[\left(R_4 \parallel R_7\right) + R_5 + R_6\right]$$

$$\boxed{R_{AD} = R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} \Rightarrow \boxed{R_{13} = 5\Omega}$$

$$\boxed{R_{DE} = R_{47} = \frac{R_7 R_4}{R_7 + R_4}} \Rightarrow \boxed{R_{47} = 5\Omega}$$

$$\boxed{R_{DB} = \frac{R_2\left(R_{47} + R_5 + R_6\right)}{R_2 + R_{47} + R_5 + R_6}} \Rightarrow \boxed{R_{DB} = 5\Omega} \; ; \; \boxed{R_{éq} = R_{AD} + R_{DB}} \Rightarrow \boxed{R_{éq} = R_{AB} = 10\Omega}$$

التمرين 5.3

نعرف العلاقة بين كثافة التيار و الناقلية و الحقل الكهربائي:

$$J = \sigma E$$

و بما أن كثافة التيار هي:

$$J = \frac{I}{S}$$

إذن:

$$E = \frac{I}{\sigma S}$$

و بما أن الناقلية هي مقلوب المقاومية فإنه يمكن كتابة:

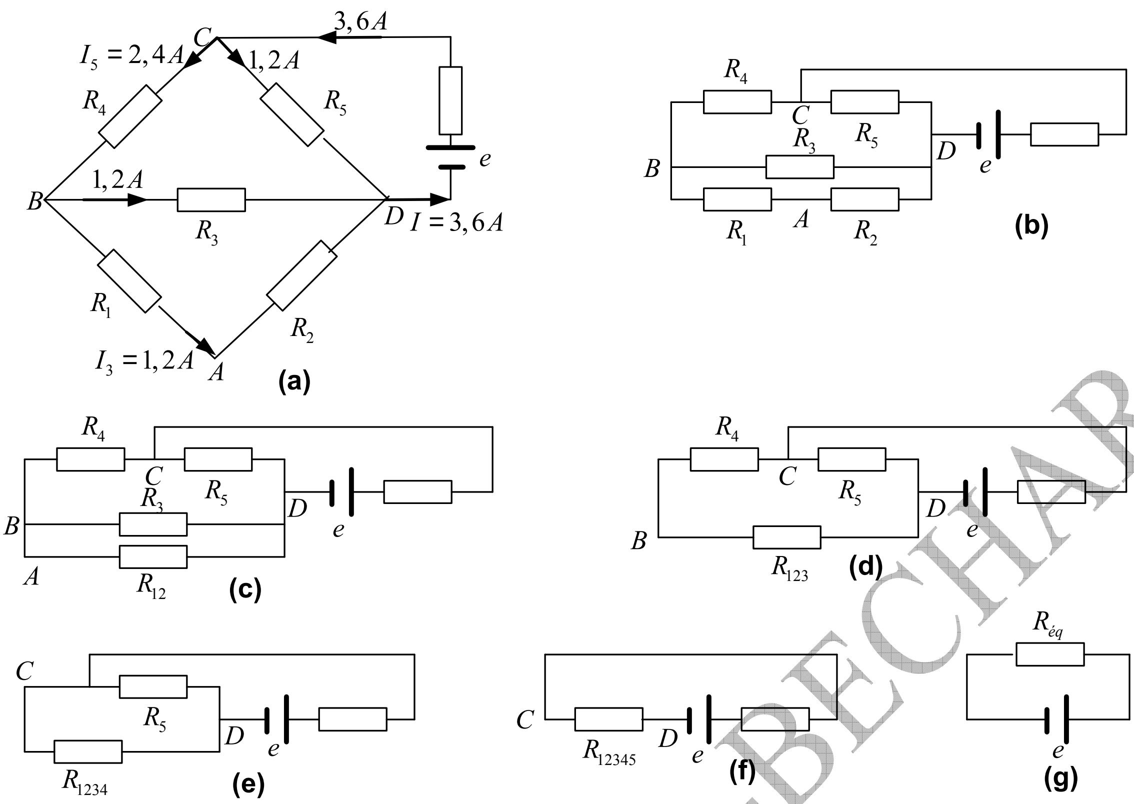
$$\boxed{E = \rho . \frac{I}{S} = \rho \frac{I}{\pi r^2}}$$

تطبيق عددي:

$$E = 5,5.10^{-8} \frac{15,0}{3,14.0,25.10^{-6}} \Rightarrow \boxed{E = 1,05 Vm^{-1}}$$

التمرين 6.3

كل الأشكال الممثلة في الأسفل مكافئة للشكل المعطى في النص.



من الشكل (b) نستنتج المقاومة المكافئة للمقومتين R_1 و R_2 المربوطتين على التسلسل:

$$R_{12} = R_1 + R_2 \rightarrow \boxed{R_{12} = 2,0\Omega}$$

من الشكل (c) نستنتج المقاومة المكافئة للمقومتين R_{12} و R_3 المربوطتين على التفرع:

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R_{123} = \frac{R_{12}.R_3}{R_1 + R_2} \rightarrow \boxed{R_{123} = 2,0\Omega}$$

من الشكل (d) نستنتج المقاومة المكافئة للمقومتين R_{123} و R_4 المربوطتين على التسلسل:

$$R_{1234} = R_{123} + R_4 \rightarrow \boxed{R_{1234} = 3,0\Omega}$$

من الشكل (e) نستنتج المقاومة المكافئة للمقومتين R_{1234} و R_5 المربوطتين على التفرع:

$$\frac{1}{R_{12345}} = \frac{1}{R_{1234}} + \frac{1}{R_5} \Rightarrow R_{12345} = \frac{R_{1234}.R_5}{R_{1234} + R_5} \rightarrow \boxed{R_{12345} = 2,0\Omega}$$

من الشكل (f) نستنتج المقاومة المكافئة للمقومتين R_{12345} و المقاومة الداخلية للمولد و المربوطتين على التسلسل:

$$R_{éq} = R_{12345} + r \rightarrow \boxed{R_{éq} = 2,5\Omega}$$

من الشكل (g) يمكننا الآن حساب الشدة الرئيسية التي يجريها المولد في الدارة:

$$\boxed{I = \frac{e}{R_{éq}}} \rightarrow \boxed{I = 3,6A}$$

انطلاقا من هذه النتيجة و من الشكل (g) المناسب لها و مرورا بالأشكال من (f) و حتى (a) بالترتيب نحصل على مختلف الشدّات في كل فرع من فروع الدارة:

في الشكل (f): $I = 3,6A$

في الشكل (e):

$$U_{CD} = R_5.I_5 = -rI + e \Rightarrow \boxed{I_5 = \frac{rI + e}{R_5}}$$

$$I_5 = \frac{-0,5.3,6+9}{6} \rightarrow \boxed{I_5 = 1,2A}$$

أما عبر المقاومة R_{1234} أي عبر R_{123} و R_4 فالشدة هي: $\boxed{I_4 = 2,4A} \leftarrow I_4 = I - I_5$

في الشكل (c): الشدة عبر R_{12} تساوي الشدة عبر R_3 بما أن المقاومتين متساويتان:

$$I_3 = \frac{2,4}{2} \rightarrow \boxed{I_3 = 1,2A}$$

في الشكل (a) مثلنا قيم و جهات مختلف الشدات.

2/ الإستطاعة المنتجة من قبل المولد هي:

$$P = R_{éq}.I^2 = eI \rightarrow \boxed{P = 32,4W}$$

3/ فرق الكمون بين A و C: يمكن حسابه بالتباع أي فرع كان. بالتباع مثلا الفرع $ADeC$ فإن فرق الكمون المطلوب هو:

$$U_{AC} = R_2I_3 + rI - e$$

$$U_{AC} = (1.1,2) + (0,5.3,6-9) \rightarrow \boxed{U_{AC} = -5V}$$

التمرين 7.3

بما أن $\rho = \rho_0\left[1 + \alpha\left(T - T_0\right)\right]$

ينتج عن هذا $R = R_0\left[1 + \alpha\left(T - T_0\right)\right]$

المطلوب هو تحديد تغير المقاومة $R - R_0$ من أجل تغير في درجة الحرارة $T - T_0$ قدره $1,00°C$. و عليه:

$$\boxed{R - R_0 = R_0\alpha\left(T - T_0\right) \Leftrightarrow \Delta R = R_0\alpha\Delta T}$$

$$\Delta R = 25,5.0,003927.1,00 \Rightarrow \boxed{\Delta R = 0,001\Omega}$$

هذا يعني أن المقاومة تزداد بـــ $0,001\Omega$ كل ما ارتفعت درجة الحرارة بـــ $1K$ أو $1°C$.

فإذا أصبحت المقاومة $35,5\Omega$ فإن درجة الحرارة المناسبة تكون قد بلغت:

$$\Delta T = \frac{\Delta R}{R_0\alpha}$$

$$\Delta T = \frac{35,5 - 25,5}{25,5.0,003927} \Rightarrow \boxed{\Delta T \approx 100°C}$$

التمرين 8.3

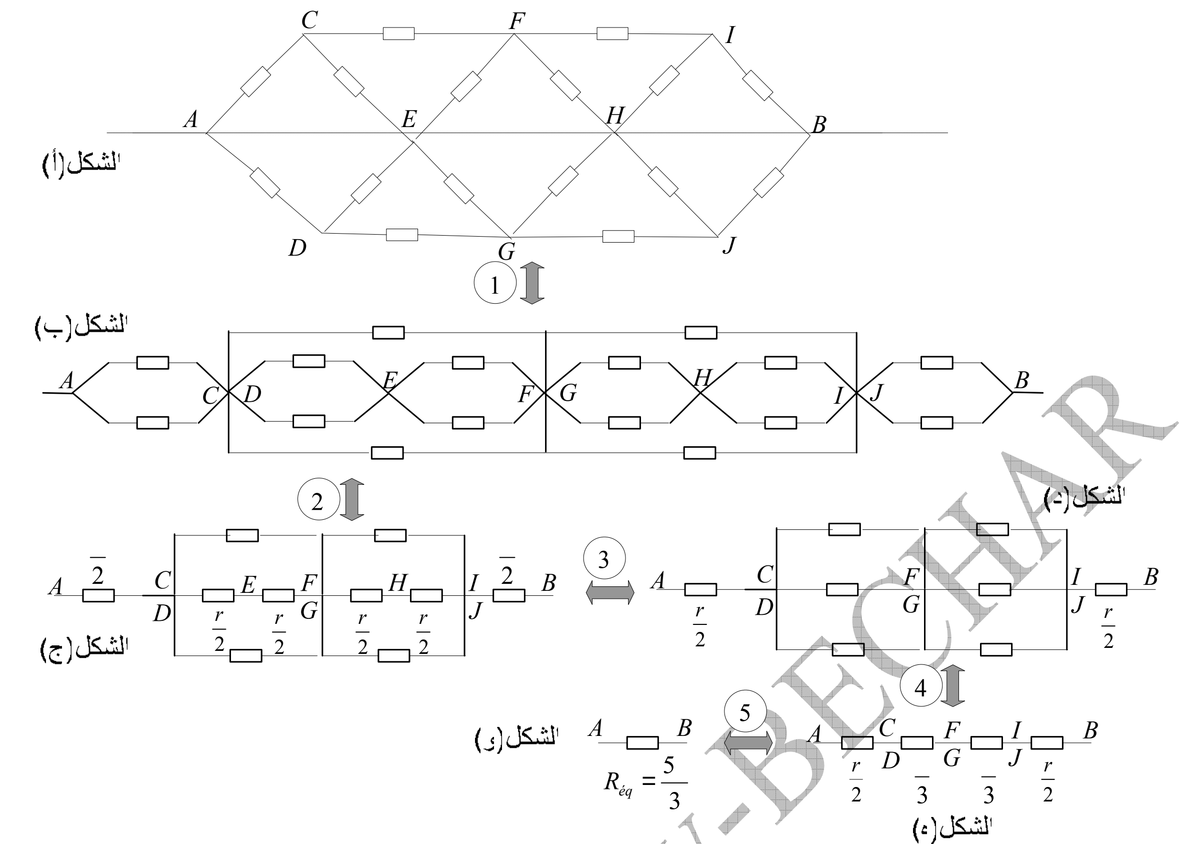
من الشكل(أ) نلاحظ أن الخط $AEHB$ يمثل مستقيم تناظر بالنسبة للكمونات بحيث:

$$U_c = U_D$$

$$U_F = U_G$$

$$U_I = U_J$$

هذا ما يسمح لنا بتبسيط الشبكة كما هو مبين على الشكل(ب) مما يسهل عملية حساب المقاومة المكافئة باتباع خطوات متتالية و منطقية.



التمرين 9.3

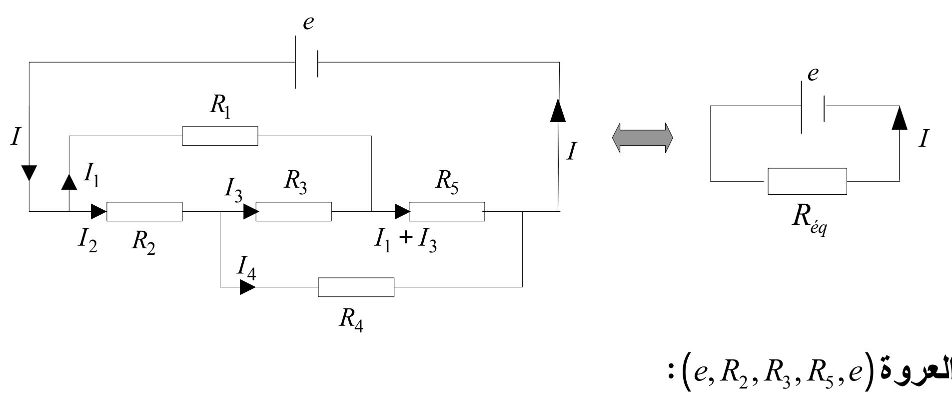
نفترض أن المجموعة يغذيها مولد قوته المحركة الكهربائية $e = 18V$ (يمكنك اختيار أي قيمة أخرى، لأن مهما كانت قيمة e فإن قيمة المقاومة مستقلة عنها). مثلنا على الشكل المرافق الشدة الرئيسية و الشدات
التي تجتاز مختلف الفروع.
قانون كيرشوف للعروات يسمح لنا بكتابة المعالات التالية:

العروة (e, R_1, R_4, R_5, e):

$$R_1I_1 + R_5\left(I_1 + I_3\right) - e = 0 \rightarrow 12I_1 + 6I_1 + 6I_3 - 18 = 0 \rightarrow 3I_1 + I_3 - 3 = 0 \rightarrow (1)$$

العروة (e, R_2, R_5, e):

$$R_2I_2 + R_4\left(I_2 - I_3\right) - e = 0 \rightarrow 6I_2 + 12I_2 - 12I_3 - 18 = 0 \rightarrow 3I_2 - 2I_3 - 3 = 0 \rightarrow (2)$$



العروة (e, R_2, R_3, R_5, e):

$$R_2I_2 + R_3I_3 + R_5\left(I_1 + I_3\right) - e = 0 \rightarrow 6I_2 + 6I_3 + 6\left(I_1 + I_3\right) - 18 = 0 \rightarrow I_1 + I_2 + 2I_3 - 3 = 0 \rightarrow (3)$$

تكونت لدينا جملة ذات ثلاث مجاهيل يمكن تحديدها بإحدى الطرق الجبرية المعروفة:

$$\begin{cases} 3I_1 + 0I_2 + I_3 = 3 \\ 0I_1 + 3I_2 - 2I_3 = 3 \\ I_1 + I_2 + 2I_3 = 3 \end{cases}$$

إذا اخترنا استعمال طريقة المصفوفات فهي كالتالي:

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 21$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18 \rightarrow I_1 = \frac{18}{21} \rightarrow \boxed{I_1 = \frac{6}{7} A}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 27 \rightarrow I_2 = \frac{27}{21} \rightarrow \boxed{I_2 = \frac{9}{7} A}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 \rightarrow I_3 = \frac{9}{21} \rightarrow \boxed{I_3 = \frac{3}{7} A}$$

و منه فإن الشدة الرئيسية هي: $I = I_1 + I_2 \rightarrow \boxed{I = \frac{15}{7} A}$

يمكننا الآن تحديد المقاومة المكافئة بحيث: $\boxed{R_{éq} = \frac{e}{I}} \rightarrow \boxed{R_{éq} = \frac{42}{5} = 8,4\Omega}$

التمرين 10.3

1/ التغذية وفق AB: أنظر الشكل (a) المرافق.

حين تكون الشبكة مغذاة بين النقطتين A و B، AB يمثل محور تناظر بالنسبة للكمونات.

في A التيار الرئيسي I_0 ينقسم إلى ثلاث مرات I و يصل إلى B كذلك ثلاث مرات I $(I_0 = 3I)$.

عند وصول التيار I إلى F فإنه ينقسم إلى جزئين متساويين بما أن المسلكين للوصول إلى B متساويان كون النقطتين E و H هما في نفس الكمون. توزيع مختلف التيارات في المكعب يكون إذن على النحو الممثل على الشكل (a).

بإتباع المسلك $AFEB$:

$$U_{AB} = U_{AF} + U_{FE} + U_{EB}$$

$$U_{AB} = rI + r\frac{I}{2} + rI = \frac{5}{2} rI$$

$$U_{AB} = \frac{5}{2} \times \frac{3}{3} r.I = \frac{5}{6} r3.I \Rightarrow U_{AB} = \frac{5}{6} rI_0 = R_{éq}.I_0$$

و عليه فإن المقاومة المكافئة للشبكة هي:

$$\boxed{R_{éq} = \frac{5}{6} r}$$

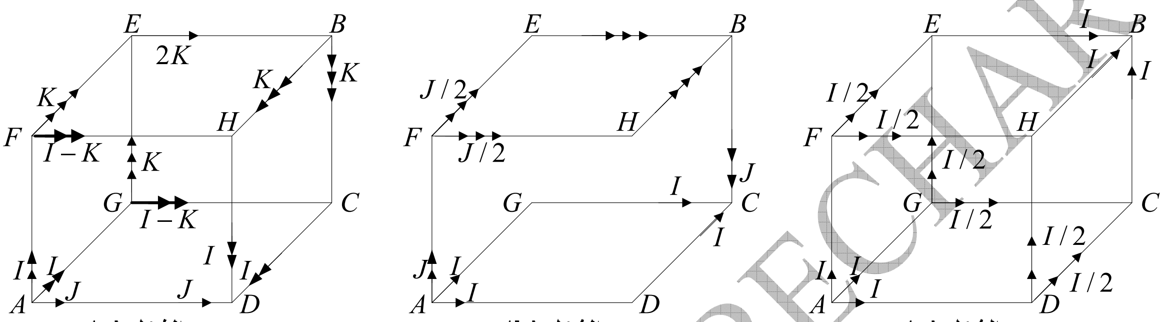
2/ التغذية وفق AC: أنظر الشكل (b) المرافق.

حين تغذية الشبكة وفق AC ، فإن المستوى $AFBC$ يمثل مستوى تناظر للكمونات و المستوى $GDHE$ يمثل مستوى تناظر دخول–خروج لتوزيع التيارات.

ينقسم التيار الرئيسي I_0 إلى I في الفرعين AD و AG و J في الفرع AF . في F المسلك للذهاب إلى B هو نفسه لأن النقطتان E و H توجدان عند نفس الكمون. في F ينقسم التيار J إلى قسمين متساويين. بما أن $EHDG$ هو مستوى تناظر دخول–خروج فإن الفرعين EB و BC يسري فيهما نفس التيار $J/2$. ينجر عن هذا أن الفرعين EG و DH لا يسري فيها أي تيار، و هذا ما يمكّننا من القول على أن الشبكة مفتوحة بين E و G ، و بين D و H .

في النهاية، الفرع BC يجري فيه J و الفرعان GC و DC يسري فيهما I .

يمكن تبسيط الشبكة كما هو مبين على الشكل (b) .



الشكل (c) الشكل (b) الشكل (a)

المقاومة المكافئة هي بحيث:

$$\frac{1}{R_{éq}}=\frac{1}{R_{AC}}+\frac{1}{2r+R_{FB}}$$

غير أن:

$$\frac{1}{R_{FB}}=\frac{1}{R_{AC}}=\frac{1}{2r}+\frac{1}{2r}=\frac{1}{r}$$

و منه:

$$\frac{1}{R_{éq}}=\frac{1}{r}+\frac{1}{2r+r}\Rightarrow\boxed{R_{éq}=\frac{3}{4}r}$$

3/ **<u>التغذية وفق AD :</u>** أنظر الشكل (c) المرافق.

حين تغذى الشبكة بين النقطتين A و D ، فإن المستوى $AEBD$ يمثل مستوى تناظر للكمونات. و من جهة أخرى المستوى المار من منصفي القطعتين AD و GC هو مستوى تناظر دخول–خروج لتوزيع التيارات.

بما أن النقطتين F و G هما عند نفس الكمون فإن الفرعين AF و AG يجتازهما نفس التيار I .

الفرع AD يجتازه التيار J بحيث $I_0=2I+J$ (I_0 يمثل التيار الرئيسي).

بما أن فرق الكمون بين النقطتين F و G هو نفسه، فإن الفرعين FE و GE يجتازهما نفس التيار شدته K . الفرع FH يجتازه التيار $I-K$ و الفرع EB يجتازه التيار $2K$. نحصل على توزيع التيار كما هو مبين على الشكل (c) .

لدينا:

$$U_{AD}=rJ=r\left(I_0-2I\right)\rightarrow(A)$$

وفق المسلك $AFHD$:

$$U_{AD}=r\left(I+I-K+I\right)=r\left(3I-K\right)\rightarrow(B)$$

باعتبار العروة $FEBHF$:

$$0=R\left(K+2K+K-\left(I-K\right)\right)\Rightarrow K=\frac{I}{5}\rightarrow\left(C\right)$$

$$\left(C\right)\rightarrow\left(B\right):U_{AD}=r\left(3I-\frac{I}{5}\right)\Rightarrow I=\frac{5}{14}\frac{U_{AD}}{r}\rightarrow\left(D\right)$$

$$\left(D\right)\rightarrow\left(A\right):U_{AD}=rI-\frac{5}{7}U_{AD}$$

في النهاية نحصل على:

$$U_{AD}=\frac{7}{12}rI=R_{éq}I\Rightarrow\boxed{R_{éq}=\frac{7}{12}r}$$

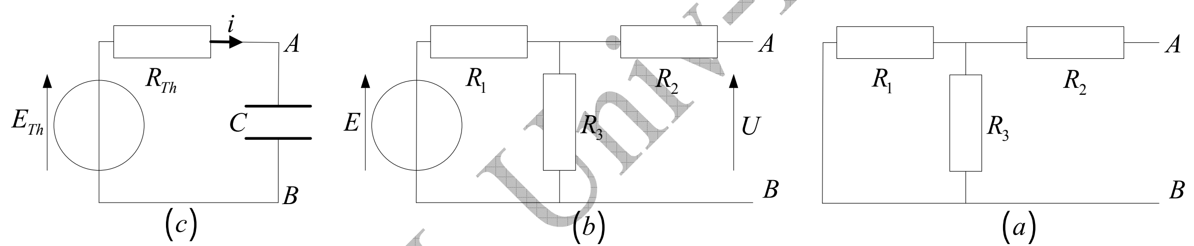
ملاحظة: يمكن استعمال كون النقطتين F و G من جهة ، و H و C من جهة أخرى، هي عند نفس الكمون للربط بينهما بغرض تبسيط الشبكة.

التمرين 11.3:

1/ الشكل (a) المرافق يسمح لنا بحساب المقاومة المكافئة للدارة $R_{éq}=R_{Th}$:

المقومتان R_1 و R_3 مربوطتان على التفرع ، و المقاومة المكافئة لهما مربوطة على التسلسل مع R_2.

$$\boxed{R_{Th}=\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}+R_2}\ ,\ \boxed{R_{Th}=133,3k\Omega}$$



الشكل (b) يمكننا من حساب القوة المحركة الكهربائية لمولد تيفنا: $U=E_{Th}$

المقاومة R_2 لا يجتازها أي تيار. لتكن i شدة التيار الذي يمر في R_1 و R_3 :

$$\left.\begin{array}{l} i=\dfrac{E}{R_1+R_3}\\ U=R_3i\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{U=E_{Th}=R_3\frac{E}{R_1+R_3}}\ ,\ \boxed{E_{Th}=30V}$$

2/ أ/ لحظة غلق القاطعة، شدة التيار الذي يجريه مولد تيفنا(الشكل (c)) هي:

$$\boxed{i=\frac{E_{Th}}{R_{Th}}}\ ,\ \boxed{i=0,075A}$$

ب/ الطاقة W_E المخزنة في المكثفة عند الانتهاء من شحنها:

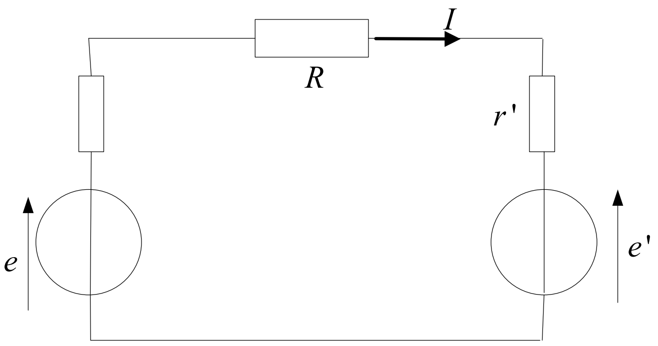
$$\left.\begin{array}{l} W_E=\dfrac{1}{2}CU^2\\ U=E_{Th}\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{W_E=\frac{1}{2}CE_{Th}^2}\ ,\ \boxed{W_E=0,05J}$$

ج/ المدة اللازمة لشحن المكثفة تساوي تقريبا خمس مرات ثابت الزمن τ (قاعدة متعارف عليها و متأكد منها):

$$\left.\begin{array}{l} t=5\tau\\ \tau=R_{Th}C\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{t=5R_{Th}C}\ ,\ \boxed{t=6,65s}$$

<u>التمرين 12.3:</u>

نمثل الدارة بالشكل التالي:



1/ إذا رمزنا بـــ U' إلى فرق الكمون بين طرفي المحرك، فإن الاستطاعة الكهربائية الإجمالية المستهلكة من قبله هي:

$$\left.\begin{array}{l} P_T = U'I \\ U' = e' + r'I^2 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{P_T = e'I + r'I^2}$$

الاستطاعة المبددة بفعل جول من قبل المحرك هي: $\boxed{P_J = r'I^2}$

إذن الاستطاعة الكهربائية المحولة إلى استطاعة ميكانيكية تساوي:

$$P_M = P_T - P_J \Rightarrow \boxed{P_M = e'I}$$

2/ أ) المحرك ممنوع من الدوران أي أنه يسلك سلوك ناقل أومي و بالتالي $P_M = 0$. الاستطاعة الكهربائية المبددة من قبل المحرك بفعل جول هي RI_1^2. و هذه الاستطاعة يستقبلها المسعر و عليه:

$$Q_1 = RI_1^2 t \Rightarrow \boxed{I_1 = \sqrt{\frac{Q_1}{Rt}}} \ , \ \boxed{I_1 = 5A}$$

حسب قانون العروات: $(r + r' + R)I_1 - (e - e') = 0$

و بما أن المحرك لا يدور فإن $e' = 0$. و عليه:

$$\boxed{r' = \frac{e}{I_1} - (r + R)} \ , \ \boxed{r' = 3\Omega}$$

ب) المحرك يشتغل الآن، و هذا يعني أن: $P_M \neq 0$ و $e'' \neq 0$.

يصبح لدينا إذن: $\boxed{I_2 = 1,6A}$, $\boxed{I_2 = \sqrt{\frac{Q_2}{Rt}}}$

لحساب e'' نطبق قانون العروات حيث:

$$(r + r' + R)I_2 - (e - e'') = 0 \Rightarrow \boxed{e'' = e - (r + r' + R)I_2} \ , \ \boxed{e'' = 47,6V}$$

3/ أ) يعرّف المردود على أنه: $\eta = \frac{P_m}{P_T}$

مما يؤدي بنا إلى: $\eta = \frac{e''I}{e''I + r'I^2} \Rightarrow \boxed{\eta = \frac{e''}{e'' + r'I}}$

ب) لدينا حاليا التوتر بين طرفي المولد يساوي التوتر بين طرفي المحرك:

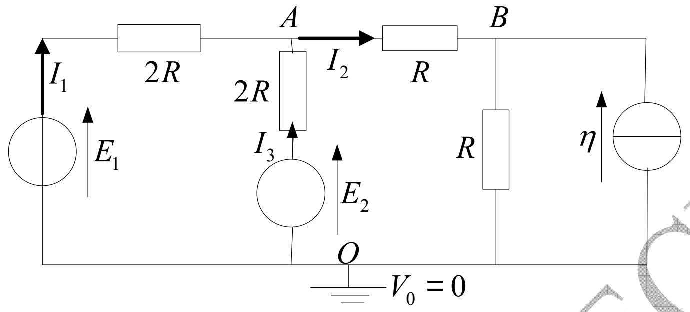
$$\left.\begin{array}{l} U = e - rI \\ U = e'' - r'I \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{I = \frac{e - e''}{r + r'}} \ , \ \boxed{I = 5,6A}$$

و عليه فإن: $\boxed{U = 64,4V}$

ج/ حساب المردود: $\eta = \dfrac{47,6}{47,6 + (3 \times 5,6)} \rightarrow \boxed{\eta = 73,7\%}$

<u>التمرين13.3</u>

تحتوي الدارة على ثلاث عقد. نعطي لأحدها عشوائيا الكمون صفر ثم نكتب قانون العقد في A و Bمع الكمونين المجهولين V_A و V_B.



<u>في العقدة A</u>: $I_1 - I_2 + I_3 = 0$. و منه:

$$\left.\begin{array}{l} V_A - V_0 = -2RI_1 + E_1 \\ V_A - V_0 = -2RI_3 + E_2 \\ V_A - V_B = RI_2 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{E_1 - V_A}{2R} + \frac{V_B - V_A}{R} + \frac{E_2 - V_A}{2R} = 0$$

<u>في العقدة B</u>: $I_2 + I_4 + \eta = 0$. و منه:

$$\left.\begin{array}{l} V_A - V_B = RI_2 \\ V_B - V_0 = -RI_4 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{V_A - V_B}{R} - \frac{V_B}{R} + \eta = 0$$

نحصل على جملة من معادلتين:

$$\begin{cases} 4V_A - 2V_B = E_1 + E_2 \\ -V_A + 2V_B = R\eta \end{cases}$$

نتوصل إلى الحل:

$$V_A = \frac{E_1 + E_2 + R\eta}{3} \quad , \quad V_B = \frac{E_1 + E_2 + 4R\eta}{6}$$

و من ثمة نستنتج الشدتين I_1 و I_2:

$$I_1 = \frac{E_1 - V_A}{2R} \rightarrow \boxed{I_1 = \frac{2E_1 - E_2 - R\eta}{6R}}$$

$$I_2 = \frac{V_A - V_B}{R} \rightarrow \boxed{I_2 = \frac{E_1 + E_2 - 2R\eta}{6R}}$$

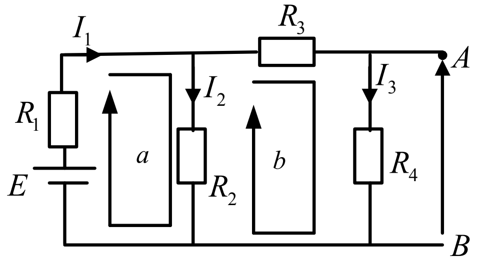
<u>التمرين 14.3</u>

1/**<u>حساب</u>** E_{th} **بفتح الفرع** AB : $E_{Th} = U_{AB_0} \Rightarrow -R_3I_3 + R_2I_2 = R_4I_3$

فلنحسب I_3 بتطبيق قانون العقد: $I_1 = I_2 + I_3 \rightarrow (1)$

حسب قانون العروات:

في العروة (a): (2) $E = R_1I_1 + R_2I_2 \rightarrow$



في العروة (b): $0=(R_3+R_4)I_3-R_2I_2 \rightarrow$ *(3)*

نعوض العلاقة (1) في المعادلة (2) فنحصل على:

$$E=R_1(I_2+I_3)+R_2I_2 \Rightarrow E=(R_1+R_2)I_2+R_1I_3 \rightarrow \text{(4)}$$

V_{AB}

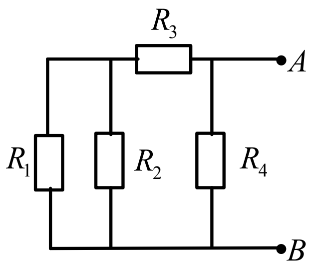
من المعادلة (3) نحسب I_2: $I_2=\dfrac{R_3+R_4}{R_2}I_3 \rightarrow$ *(5)*

نعوض (5) في (4) فنحصل على:

$$E=\frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}{R_2}I_3+R_1I_3 \Rightarrow E=\left[\frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_1R_2)}{R_2}\right]I_3$$

و في الأخير نحصل على I_3 و E_{Th}:

$$I_3=\frac{ER_2}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_1R_2}\ ;\ \boxed{E_{Th}=\frac{R_2R_4E}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_1R_2}} \Rightarrow \boxed{E_{Th}=3.70V}$$



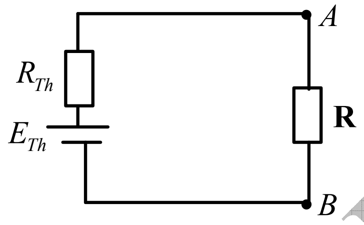
<u>2/حساب R_{Th} بعد نزع المولد:</u>

المقاومة المكافئة لكل الدارة بدون المقاومة R هي:

$$R_{th}=\left[\left(R_1 \parallel R_2\right)+R_3\right] \parallel R_4$$

$$R_1 \parallel R_2 \Rightarrow \frac{1}{R_{12}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=0.715 \Rightarrow \boxed{R_{12}=1.43\Omega}$$

المقاومة المكافئة لـــ R_{12} و R_3: $R'=R_{12}+R_3 \Rightarrow \boxed{R'=5.43\Omega}$



و أخيرا مقاومة مولد تيفنا هي:

$$\frac{1}{R_{Th}}=\frac{1}{R'}+\frac{1}{R_4} \Rightarrow \boxed{R_{Th}=3.52\Omega}$$

3/حساب الشدة I:

$$E_{Th}=\left(R+R_{Th}\right)I \Rightarrow \boxed{I=\frac{E_{Th}}{R+R_{Th}}} \Rightarrow \boxed{I=0.43A}$$

<u>التمرين15.3</u>

<u>تطبيق القانون الأول</u>: هناك 4 عقد تقابلها 4 معادلات:

في العقدة A: $I_1+I_2=I_3$

في العقدة B: $I_2=I_5+I_4$

في العقدة C: $I_5=I_3+I_6$

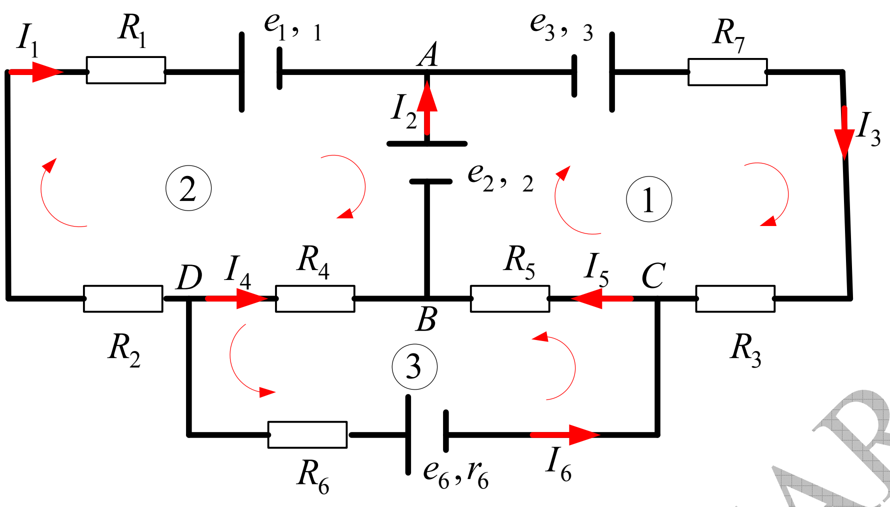
في العقدة D: $0=I_4+I_6+I_1$

<u>تطبيق القانون الثاني</u>: هناك 3 عروات مستقلة. بعد اختيار الاتجاهات كما هو مبين عل الشكل يمكن كتابة مختلف المعادلات:

العروة 1: $e_3+e_2=R_7I_3+R_3I_3+R_5I_5+r_2I_4+r_3I_3$

العروة 2: $-e_1-e_2=R_1I_1-R_4I_4-R_2I_2+r_1I_1-r_2I_2$

العروة 3: $-e_6=R_6I_6-R_4I_4+R_5I_5+r_6I_6$



التمرين 16.3

هناك عقدتان ، إذن يمكن كتابة معادلة واحدة بتطبيق قانون العقد:

$$I_1 + I_2 + I_3 = I$$

ثلاث عروات تقابلها ثلاث معادلات بتطبيق قانون العروات:

$$e_1 - e_2 = R_1 I_1 - R_2 I_2$$
$$e_1 = R_1 I_1 + RI$$
$$e_2 = R_2 I_2 + RI$$

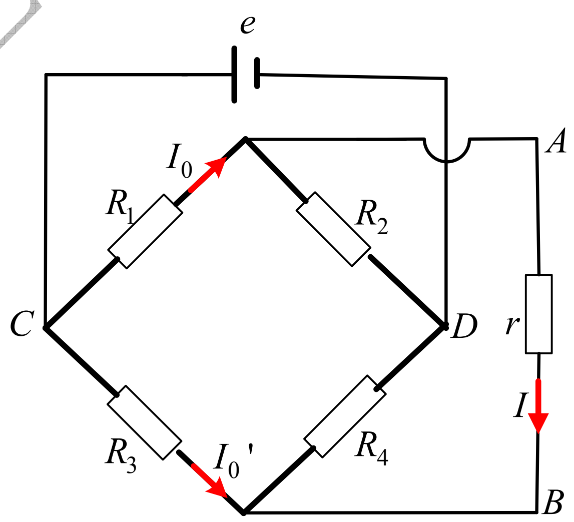
حل جملة المعادلات الثلاثة تعطينا في النهاية الشدة I :

$$\boxed{I = \frac{e_1 R_2 + e_2 R_1 + R_1 R_2 I_3}{R_1 R_2 + RR_1 + RR_2}}$$

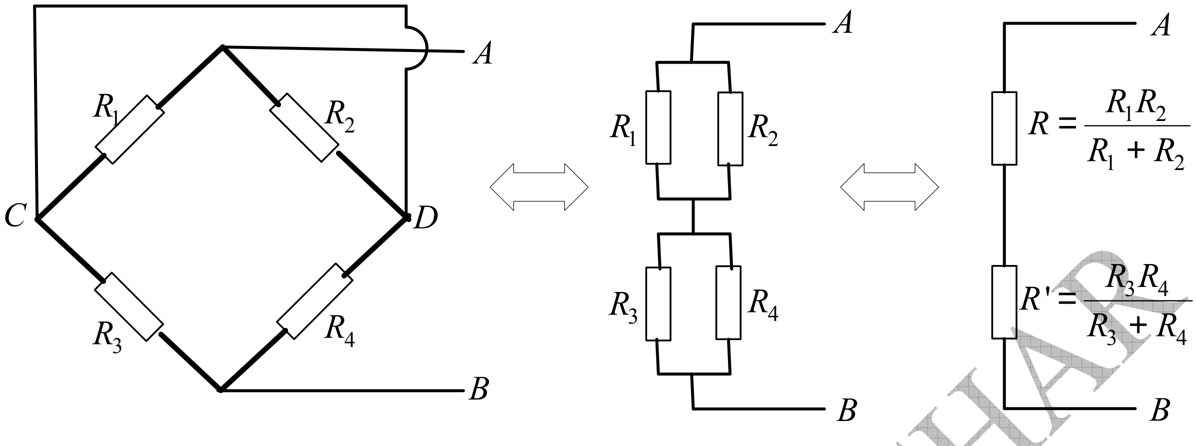
و من ثمة التوتر U_3 هو: $\boxed{U_3 = RI + R_3 I_3}$

التمرين 17.3:

يمثل الشكل التالي التركيب المكافئ للتركيب المعطى في نص التمرين.



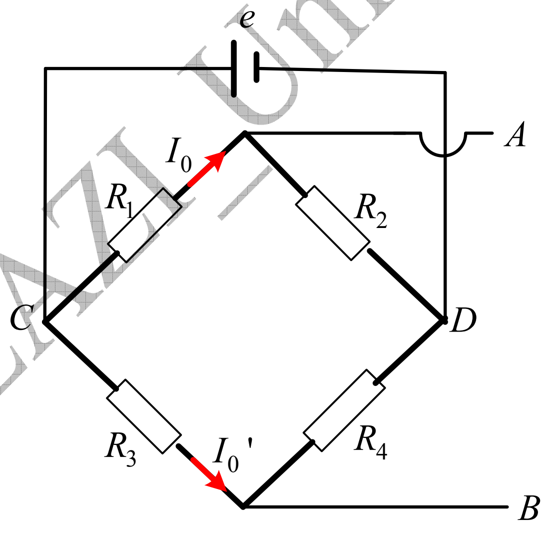
تعيين R_{Th}: نطفئ منابع التوتر و نحسب المقاومة المكافئة R_{Th} باستثناء المقاومة (الشكل التالي):



$$R' = \frac{R_3R_4}{R_3+R_4} \qquad R = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \qquad R_{Th} = R + R'$$

$$\boxed{R_{Th} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + \frac{R_3R_4}{R_3+R_4}} \Rightarrow \boxed{R_{Th} \simeq 15\Omega}$$

تعيين E_{Th} : نعتبر الدارة مفتوحة و نحذف المقاومة بين A و B (الشكل التالي)



$$e = (R_1+R_2)I_0 = (R_3+R_4)I_0'$$

$$E_{Th} = (V_A - V_B)_0 = R_2I_0 - R_4I_0' = R_3I_0' - R_1I_0$$

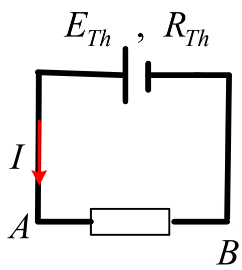
$$E_{Th} = U_{AB_0} = R_2\frac{e}{R_1+R_2} - R_4\frac{e}{R_3+R_4} \quad ; \quad E_{Th} = U_{AB_0} = R_3\frac{e}{R_3+R_4} - R_1\frac{e}{R_1+R_2}$$

و في الأخير:

$$\boxed{E_{Th} = \frac{R_2R_3 - R_1R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}e}$$

$$\boxed{E_{Th} \simeq 12V}$$

حساب I و U: من الشكل التالي

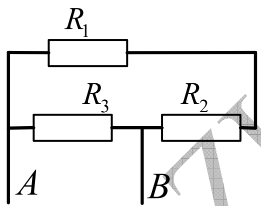


$$U_{AB} = rI = -R_{Th} + E_{Th} \Rightarrow \boxed{I = \frac{E_{Th}}{r + R_{Rh}}} \Rightarrow \boxed{I = 0,70A}$$

$$\boxed{U_{AB} = rI} \Rightarrow \boxed{U_{AB} = 1,4V}$$

التمرين 18.3:

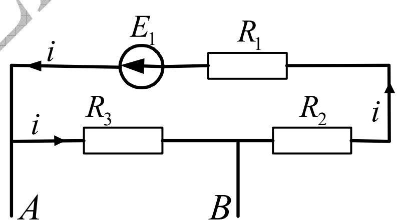
تعيين R_{Th} من الشكل التالي حيث نزعنا الفرع AB و أطفأنا منابع التوتر:



$$\boxed{R_{Th} = \frac{R_1R_3 + R_2R_3}{R_1 + R_2 + R_3}}$$

تعين E_{Th} من الشكل التالي حيث نزعنا الفرع AB فقط:

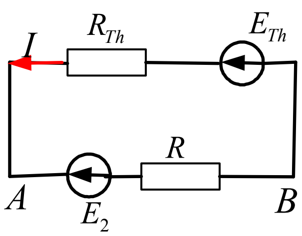
$$U_{AB_0} = R_3.i = -(R_1 + R_2)i - (E_1)$$



$$i = \frac{E_1}{R_3 + R_1 + R_2}$$

$$\boxed{E_{Th} = U_{AB_0} = \frac{R_3E_1}{R_3 + R_1 + R_2}}$$

تعيين I من الشكل التالي:



$$E_{Th} = U_{AB_0} = R.I - (-E_2) = -R_{Th}I - (-E_{Th})$$

$$I = \frac{E_{Th} - E_2}{R + R_{Th}}$$

$$\boxed{I = \frac{R_3E_1 - E_2(R_1 + R_2 + R_3)}{R(R_1 + R_2 + R_3) + R_1R_3 + R_2R_3}}$$

التمرين 19.3 :

بعد تعويض مولدات التيار بمولدات توتر المكافئة، كما هو مبيّن على الشكل التالي، نعيّن القوة المحركة الكهربائية لمولد تيفنا E_{Th} و مقاومته الداخلية R_{Th}.

تحديد E_{Th} : يمكن حساب U_{AB_0} بالتباع الفروع الثلاثة المختلفة للدارة و التي ينتج عنها ثلاث معادلات:

$$\left.\begin{array}{l} U_{AB_0} = E_{Th} = 1000I + 2000I_1 + 10 + 4 \\ U_{AB_0} = E_{Th} = 1000I + 2000I_2 + 10 + 15 \\ U_{AB_0} = E_{Th} = -7000I + 160 \\ I = I_1 + I_2 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} E_{Th} = 1000I + 2000I_1 + 10 + 4 \rightarrow (1) \\ E_{Th} = 1000I + 2000I_2 + 10 + 15 \rightarrow (2) \\ E_{Th} = -7000I + 160 \rightarrow (3) \\ I = I_1 + I_2 \rightarrow (4) \end{cases}$$

نجع المعادلتين (1) و (2) نحصل على:

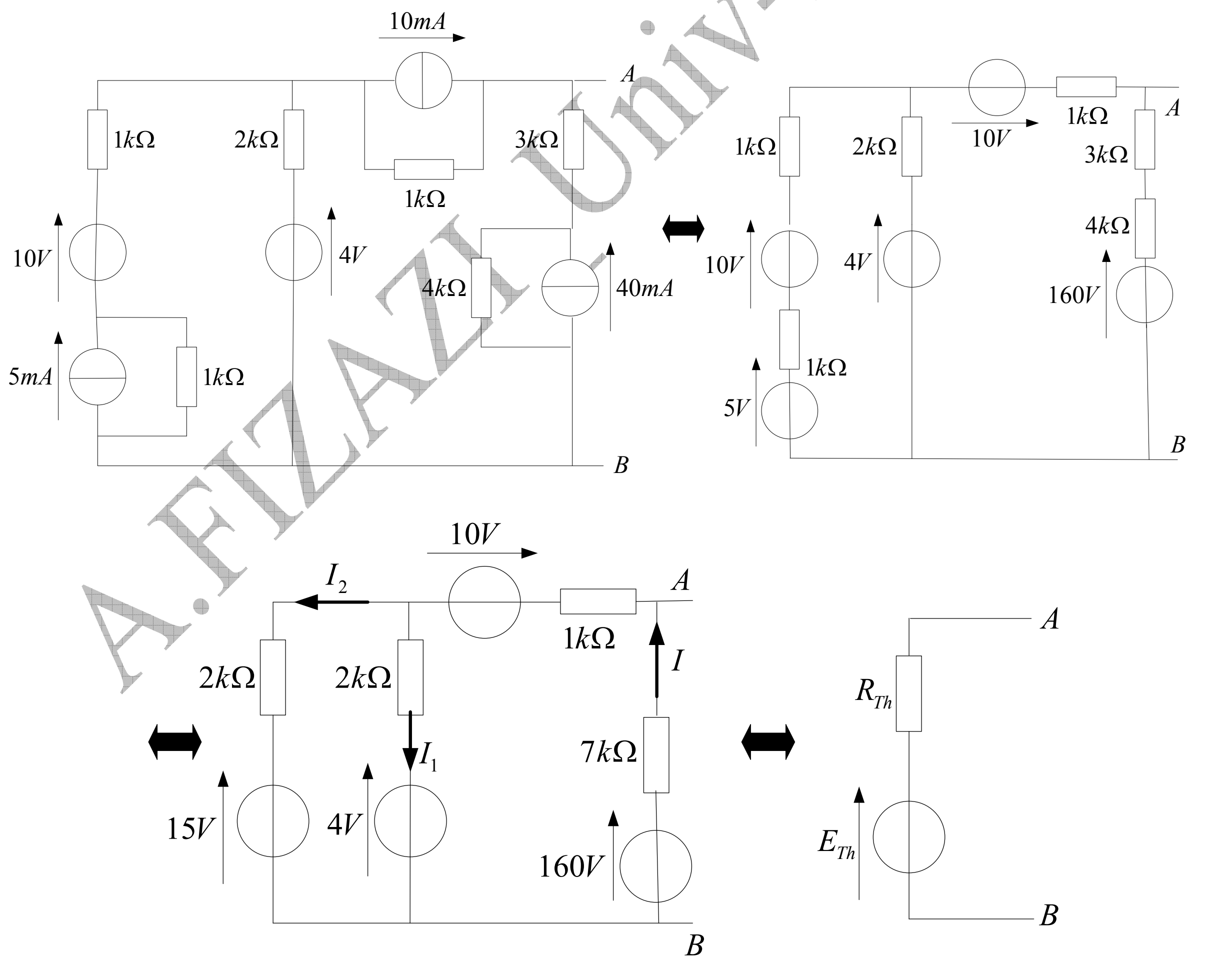
$$2E_{Th} = 2000I + 2000(I_1 + I_2) + 41 \Rightarrow 2E_{Th} = 4000I + 41 \rightarrow (5)$$

نستخرج الشدة I من المعادلة (3) : $I = \dfrac{160 - E_{Th}}{7000}$

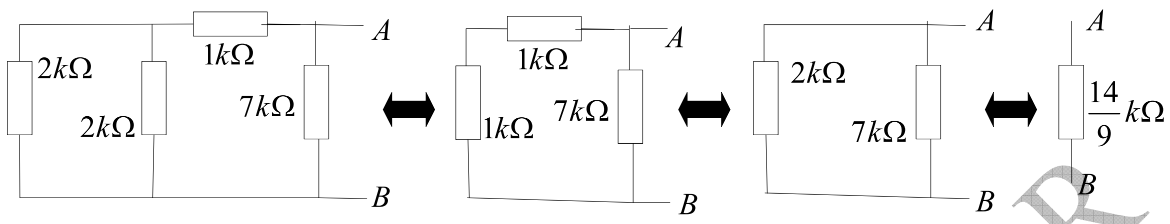
في الأخير نعوض I في المعادلة (5) لنحصل على القوة المحركة الكهربائية لمولد تيفنا:

$$2E_{Th} = \frac{4}{7}(160 - E_{Th}) + 41$$

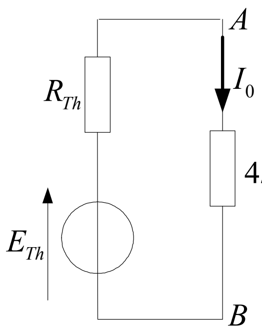
$$18E_{Th} = 927 \Rightarrow \boxed{E_{Th} = 51,5V}$$



تحديد R_{Th} : بعد إطفاء كل منابع التيار و التوتر نحسب المقاومة المكافئة لكل الدارة. على الأشكال التالية بيّنا عليها المقاومات المكافئة المتتالية من اليسار إلى اليمين لنجد في الأخير: $\boxed{R_{Th} = \frac{14}{9}k\Omega}$



حساب شدة التيار العابر للمقاومة $R = 4k\Omega$:



من الشكل التالي نستنتج الشدة I_0:

$$\boxed{I_0 = \frac{E_{Th}}{R_{Th}+R}} \ , \ \boxed{I_0 \approx 9,3mA}$$

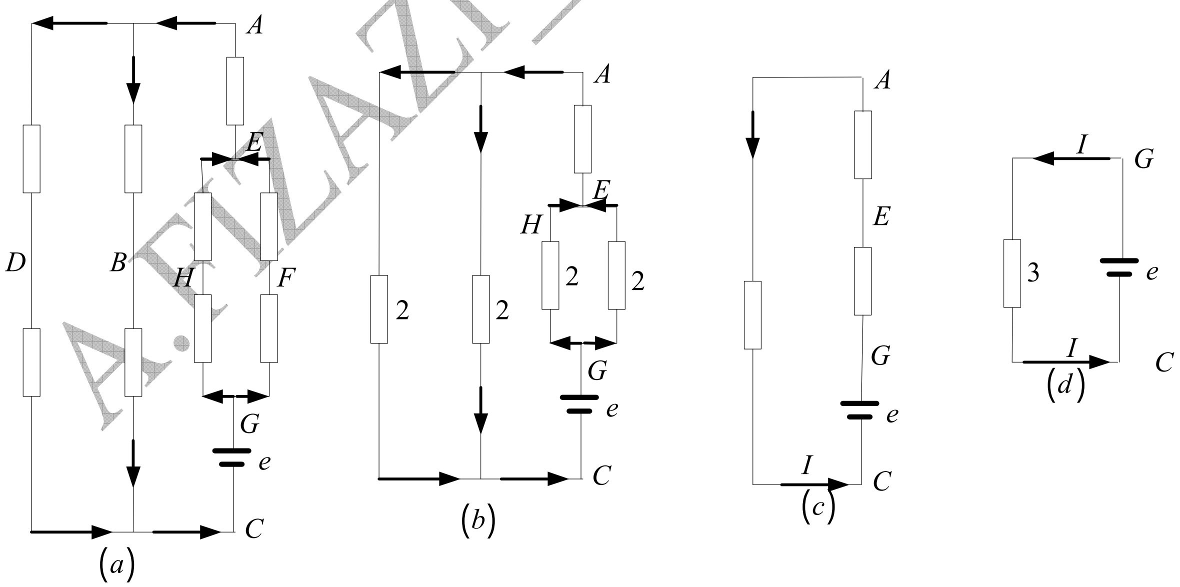
التمرين 3.20

1/ تمثل الأشكال المرتبة $(a),(b),(c)$ و (d) تبسيطات متتالية للشبكة.

يمثل الشكل (d) المقاومة المكافئة $R_{éq} = 3$ لكل الشبكة مربوطة بين طرفي مولد قوته المحركة الكهربائية e.

2/ شدة التيار التي يجريها المولد هي:

$$U_{GC} = R_{éq}I = e \Rightarrow \boxed{I = \frac{e}{R_{éq}}} \quad \boxed{I = 4,0mA}$$



3/ فرق الكمون بين النقطتين C و A :

بما أن الفرعين GFE و GHE متماثلان فإن التيار الذي يخرج من المولد و الذي شدته $4,0mA$ ينقسم إلى شدتين متساويتين $(2mA)$ في النقطة G. الفرع EA يجتازه التيار الرئيسي $4,0mA$.

و عليه فإن فرق الكمون بين النقطتين C و A هو:

$$U_{CA} = U_{CG} + U_{GH} + U_{HE} + U_{EA}$$

$$U_{CA} = -e + r\frac{I}{2} + r\frac{I}{2} + rI \Rightarrow \boxed{U_{CA} = -e + 2rI} \quad \boxed{U_{CA} = -4,0V}$$

أو باتتباع الفرع CBA:

$$U_{CA} = U_{CB} + U_{BA}$$

$$U_{CA} = -r\frac{I}{2} - r\frac{I}{2} \Rightarrow \boxed{U_{CA} = rI} \quad \boxed{U_{CA} = -4,0V}$$

IV/الــكــهــرومــغــنــاطــيــســيــة
ELECTROMAGNETISME

إن كلمة مغناطيس مشتقة من اسم المنطقة التي تقع على الشاطئ الغربي لتركيا الحديثة، حيث لوحظت ظاهرة التمغنط منذ القديم (600 قبل الميلاد). كانت تحتوي تلك المنطقة على مناجم لمعدن المانيتيت الذي له ميزات خاصة.

و بالفعل، فلقد لوحظ أن قطعتين من المعدن المذكور قد تتجاذب أو تتنافر، كما يمكنها أن تمنح خصائصها لقطعة من حديد متواجدة بالقرب منها.

بقيت ظاهرة المغناطيسية دون تفسير حتى سنة 1819، حيث لاحظ العالم الدنمركي هانس كريستيان أورشتيد (Hans Christian Oersted 1777-1851) أن مرور تيار كهربائي في سلك على مقربة من إبرة ممغنطة يجعلها تنحرف، مما يدل على أن هناك قوى مغناطيسية ناتجة عن التيار الكهربائي. أثبتت هذه التجربة أن سلكا يعبره تيار كهربائي يكتسب خصائص مغناطيسية مماثلة لتلك التي يتميز بها مغناطيس طبيعي.

في حاضرنا اتفق على أن كل الظواهر المغناطيسية هي ناتجة لسببين:

☜ لحركة الشحنات الكهربائية (التيار الكهربائي) ،

☜ لبعض الخصائص الداخلية للمادة.

A/ الحقل المغناطيسي: (champ magnétique)

1/ تعريف الحقل المغناطيسي:

يوجد حقل مغناطيسي في منطقة متواجدة بجوار:

☜ مغناطيس طبيعي أو اصطناعي ،

☜ الأرض التي نعتبرها مغناطيس ضخم ،

☜ ناقل يجتازه تيار كهربائي.

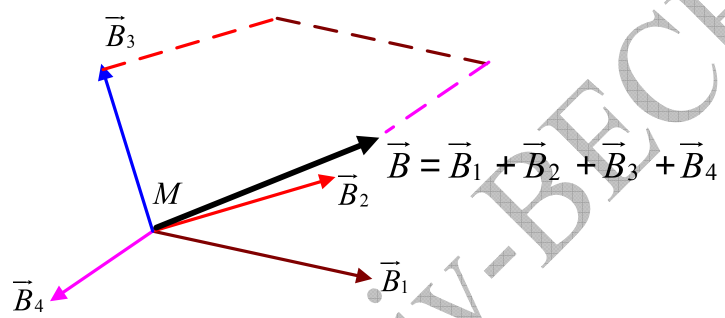
بالمقارنة مع الحقل الكهربائي فإن شحنة، أو مجموع شحنات، في حركة تولد في المنطقة المجاورة بها حقلا مغناطيسيا. هذا الحقل المغناطيسي يؤثر على شحنة كهربائية خارجية

q في حركة بقوة $\vec{F_B}$. و كذلك الأمر بالنسبة لتيار، ما دام التيار الكهربائي هو حركة شحنات.

مثل الحقل الكهربائي $\vec{E}$، الحقل المغناطيسي هو كذلك حقل شعاعي نرمز له بالحرف $\vec{B}$ و اسمه الكامل هو : **حقل التحريض المغناطيسي**(champ d'induction magnétique).

2/ مبدأ تركيب الحقول المغناطيسية:(superposition de champs magnétiques)

إذا أثرت عدة حقول مغناطيسية $\vec{B_1},\vec{B_2},.....,\vec{B_n}$ على شحنة كهربائية في حالة حركة أو على إبرة ممغنطة فإن الحقل المغناطيسي المكافئ $\vec{B}$ يساوي المجموع الشعاعي لكافة الحقول المؤثرة: $\vec{B}=\vec{B_1}+\vec{B_2}+........+\vec{B_n}$.



الشكل 1.4 : تراكب الحقول المغناطيسية

B/ القوة المغناطيسية المؤثرة على شحنة كهربائية متحركة :

(force électromagnétique agissant sur une charge électrique en mouvement)

قانون لورنتز:loi de Lorentz(Hendrik Antoon Lorentz1853-1928)

كما سبق و أن قلنا يوجد حقل مغناطيسي بجوار كل جسم ممغنط، غير أن مثل هذا الحقل ليس له أي تأثير على شحنة كهربائية ساكنة.

إذا اعتبرنا شحنة متحركة في حقل مغناطيسي فإنها تصبح خاضعة لقوة جديدة ، بالإضافة إلى القوة الكهربائية و قوة الجاذبية.

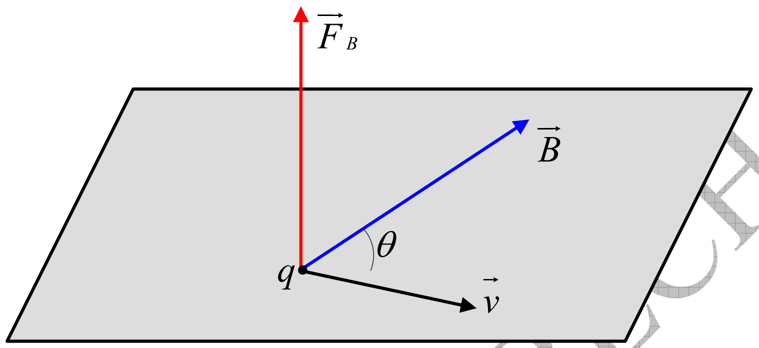
و هكذا حقق تجريبيا أن الحقل المغناطيسي يطبق على شحنة متحركة قوة تتناسب طردا مع قيمة الشحنة و شعاع السرعة و شعاع الحقل المغناطيسي و تتعامد مع شعاع سرعة الشحنة:

$$\boxed{\vec{F_B}=q.\vec{v}\wedge\vec{B}\Leftrightarrow F_B=q.v.B.\sin\theta} \qquad (1.4)$$

حين تنتقل الشحنة في منطقة حيث يسود الحقلان الكهربائي و المغناطيسي، فإن القوة الكلية هي محصلة القوتين الكهربائية و المغناطيسية:

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F_e} + \vec{F_B} = q\vec{E} + q.\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = q\left(\vec{E} + .\vec{v} \wedge \vec{B}\right)} \qquad (2.4)$$

هذه العلاقة تعبّر عن قانون لورنتز.



الشكل 2.4 : القوة المغناطيسية المطبقة على شحنة متحركة في حقل مغناطيسي

C/ القوة المغناطيسية المطبقة على عنصر من سلك مستقيم:

(force électromagnétique exercée sur un élément d'un conducteur rectiligne)

1/ قانون لابلاس: (loi de Laplace)

تعرفنا سابقا على كثافة التيار الكهربائي الذي يجتاز سلكا: $\vec{J} = nq\vec{v}$

و كذلك على العلاقة بين شدة التيار و الكثافة: $I = JS$

إذا وجد هذا الناقل في حقل مغناطيسي فإن القوة المغناطيسية المطبقة على شحنة داخل وحدة الحجم هي:

$$\vec{f} = nq\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{f} = \vec{J} \wedge \vec{B} \qquad (3.4)$$

أما القوة المطبقة على حجم عنصري dV من السلك فتساوي:

$$d\vec{F} = \vec{f}.dV = \left(\vec{J} \wedge \vec{B}\right).dV \qquad (4.4)$$

إذا كان S هو مقطع السلك و dl الطول العنصري المعتبر فإن :

$$d\vec{F} = \left(\vec{J} \wedge \vec{B}\right)S.dl \qquad (5.4)$$

للحصول على القوة الكلية المطبقة على حجم معيّن يجب القيام بعملية تكامل:

$$\vec{F} = \int_{\text{سلك}} \left(\vec{J} \wedge \vec{B}\right) S.dl \qquad (6.4)$$

و بما أن $\vec{J} = J.\overrightarrow{u_T}$ حيث $\overrightarrow{u_T}$ هو شعاع الوحدة المماس لمحور السلك فإن:

$$\vec{F} = \int_{\text{سلك}} (J.S)\overrightarrow{u_T} \wedge \vec{B}.dl \qquad (7.4)$$

$$\vec{F} = \int_{\text{سلك}} I.\overrightarrow{u_T} \wedge \vec{B}.dl \qquad (8.4)$$

إذا اعتبرنا الناقل مستقيما موجودا في حقل مغناطيسي منتظم $\vec{B}$، فهذا يعني أن $\overrightarrow{u_T}$ و $\vec{B}$ ثابتان، مما يسمح لنا بكتابة :

$$\vec{F} = I.\overrightarrow{u_T} \wedge \vec{B} \int_{\text{سلك}} dl \qquad (9.4)$$

إذا كان طول السلك السابح في الحقل المغناطيسي $\int_{\text{سلك}} dl = l$ فإن:

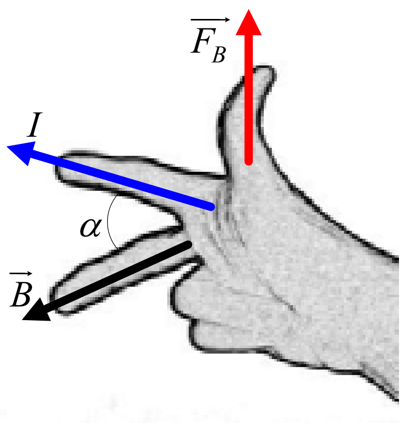
$$\vec{F} = I.l.\overrightarrow{u_T} \wedge \vec{B} \qquad (10.4)$$

بما أن $\left\|\overrightarrow{u_T}\right\| = 1$، و إذا كانت الزاوية بين الناقل المستقيم و شعاع الحقل المغناطيسي هي α فإن:

$$\boxed{F = B.I.l.\sin\alpha} \qquad (11.4)$$

هذه العبارة تدل على قانون لابلاس.

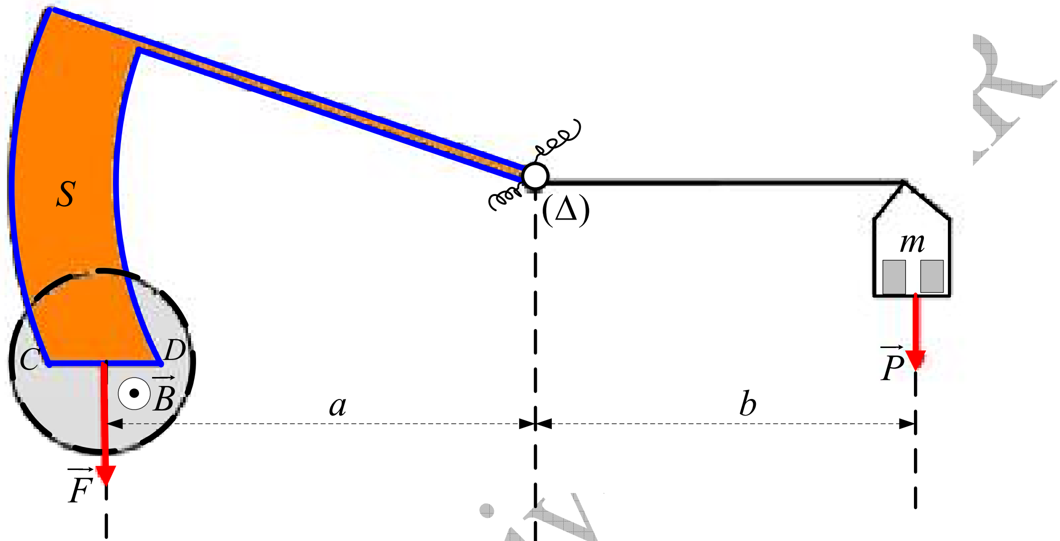
للحصول على الحامل و الاتجاه نستعمل قاعدة اليد اليمنى المعروفة، حيث الإبهام يشير إلى القوة المغناطيسية، السبابة إلى التيار أو السلك و الوسطى إلى شعاع الحقل المغناطيسي.



الشكل 3.4 قاعدة اليد اليمنى

2/ تطبيقات:

ا/ ميزان كوطون: balance de Cotton(Aimé Cotton 1869-1951)



الشكل 4.4 : ميزان كوطون

يتكون ميزان كوطون من ذراعين قابلين للدوران حول محور Δ:

القسم الأول يتميز بشكل خاص متكون من قطاع دائري عازل S مصنوع من مادة بلاستيكية يحده قوسان متمركزان على محور الدوران Δ للرافعة. S يشتمل على جزء مستقيم CD طوله l، أفقي حين يكون الميزان في توازن.

سلك ناقل يخرج من O، يتبع القطاع الدائري و القطعة المستقيمة CD، ثم يعود إلى O.

الذراع الآخر للرافعة يحمل كفة. يكون الميزان متوازنا حين لا يمر أي تيار كهربائي.

إذا غمرنا القطاع في حقل مغناطيسي منتظم $\vec{B}$، عمودي على مستوى الشكل و موجه نحو الأمام، نلاحظ اختلال توازن الميزان عند مرور تيار كهربائي في السلك. من أجل استعادة التوازن يكفي وضع كتل معايرة عل الكفة.

العزمان الغير معدومين والمؤثرين على الجملة هما عزم الثقل $\vec{P}$ للكتل، و عزم قوة لابلاس $\vec{F_B}$.

عند التوازن: $$F_B.a = mg.b \Rightarrow F_B = \frac{mg.b}{a}$$

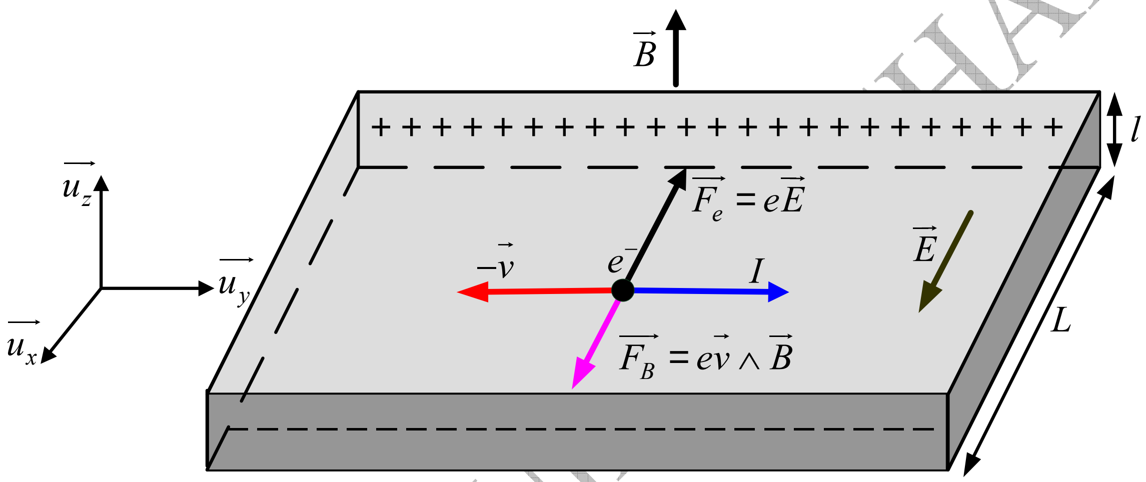
و هكذا يمكن حساب شدة حقل التحريض المغناطيسي:

$$B.I.l.a = mgb \Rightarrow \boxed{B = \frac{mgb}{I.l.a}} \qquad (12.4)$$

وحدة B: تيسلا $tesla(T)$

ب/ فعل هال effet- Hall(Edwin Herbert 1855-1938)

يمثل الشكل 5.4 صفيحة من نحاس مقطعها مستطيل (بضع ميليميترات) يجتازها تيار كهربائي I في اتجاه الطول.



الشكل 5.4 : فعل هال

تتبع الإلكترونات مسارات موازية للمحور Oy، و تنتقل بسرعة $-\vec{v}$ في عكس الاتجاه الاصطلاحي للتيار الذي يجري في اتجاه Oy.

عند تطبيق حقل مغناطيسي $\vec{B}$ عمودي على الصفيحة (حسب الشكل وفق Oz)، فإن كل إلكترون يخضع للقوة المغناطيسية $\vec{F}_B = -e.-\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_B = e.\vec{v} \wedge \vec{B}$. تحت تأثير هذه القوة المغناطيسية تنحرف الإلكترونات نحو يمين الصفيحة و الذي يشحن سلبا، بينما الجانب الآخر من الصفيحة يشحن إيجابا، نظرا لتناقص الإلكترونات التي انحرفت نحو الجهة اليمنى. هذا ما يتسبّب في ظهور حقل كهربائي $\vec{E}$ مواز للمحور Ox.

تخضع الإلكترونات في كل لحظة إلى قوتين :

القوة المغناطيسية: $\vec{F}_B = e.\vec{v} \wedge \vec{B}$ الناتجة عن الحقل المغناطيسي و موجهة في اتجاه Ox،

القوة الكهربائية: $\vec{F}_e = -e\vec{E}$ الناتجة عن الحقل الكهربائي و موجهة عكس اتجاه Ox.

تساوي القوتين يؤدي إلى حالة توازن مما يؤدي إلى فرق في الكمون عرضي بين الطرفين المتقابلين من الصفيحة و هو يتناسب طردا مع $\vec{B}$.

تسمى هذه الظاهرة التي قمنا بوصفها بـــ **فعل هال العادي أو السالب** (effet Hall ordinaire ou négatif) ، الذي يظهر على أغلبية المعادن مثل النحاس، الفضة، الذهب، البلاتين....و لكن في بعض المعادن مثل التوتياء، الكوبالت، و الحديد و في مواد أخرى كأنصاف النواقل يحدث **فعل هال الموجب** (effet Hall positif). و التفسير هو أن شحنات موجبة هي التي تنتقل في اتجاه التيار الكهربائي مما يقلب رأسا عل عقب التحليل الذي قمنا به في حالة فعل هال السالب.

و هكذا فإن فعل هال المكتشف سنة 1879 يقدم طريقة جد مفيدة لتحديد إشارة حاملات الشحنة في ناقل.

من فوائد فعل هال السماح بتحديد كثافة الشحنة، أي عدد الشحنات في واحدة الحجم، كما تبينه الحسابات التالية.

حين بلوغ التوازن: $F_e = F_B \Rightarrow evB = eE \Rightarrow E = vB$

نسمي **توتر هال** فرق الكمون الذي يظهر بين طرفي الصفيحة: $U_H = E.L \Rightarrow E = \dfrac{U_H}{L}$

نعرف مما سبق أن شدة التيار هي: $I = JS = nevS$

و بما أن S هو مقطع الصفيحة فإن : $I = nevLl \Rightarrow v = \dfrac{I}{neLl}$

و من ثمة فإن كثافة حاملات الشحنة هي:

$$vB = \frac{U_H}{L} \Rightarrow \frac{I}{neLl}B = \frac{U_H}{L} \Rightarrow \boxed{n = \frac{IB}{eLU_H}}$$

بالنسبة للمعادن العادية كثافة الشحنات من مرتبة $10^{28}/m^3$.

D/ قاعدة آمبير: (règle d'Ampère)

كان أرشتيد أول من برهن تجريبيا أن التيار الكهربائي يولّد حقلا مغناطيسيا في المنطقة المجاورة له.

توالت التجارب على مدى عدة سنوات إلى أن توصل آمبير سنة 1826، و خلال أيام فقط، إلى قانون تجريبي يحمل اسمه.

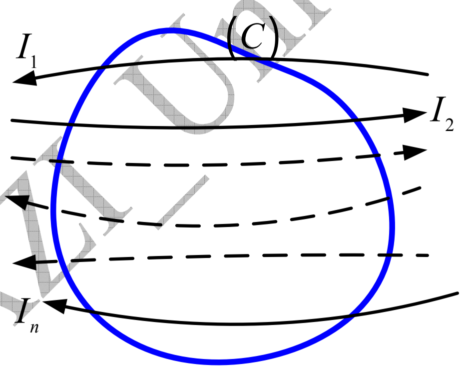
يمثل الشكل 6.4 مجموعة من التيارات تمر داخل منحنى مغلق (C).

نص قانون آمبير:

"تجوال الحقل المغناطيسي على طول منحنى مغلق يضم تيارات $I_1, I_2 .... I_n$ يساوي جداء النفاذية المغناطيسية للفراغ في المجموع الجبري لشدات التيارات المحصورة داخل المحيط (C).

$$\boxed{A_B = \oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i} \qquad (13.4)$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\, T.m.A^{-1}$$



الشكل 6.4 : التيارات داخل منحنى مغلق

مثال 1.4:

يجتاز تيار كهربائي ناقلا اسطوانيا لا متناهي الطول نصف قطره R. كثافة التيار $\vec{J}$ ثابتة عبر كل مقطع الأسطوانة و موازية للمحور oz. نعتبر I_0 التيار الكلي الذي يجتاز الأسطوانة. أحسب الحقل المغناطيسي داخل و خارج الأسطوانة. أرسم تغيراته.

الحل:

نعتبر دائرة تحيط بالأسطوانة و تتعامد معها، نصف قطرها الشكل7.4(أ). تعبر المقطع S_0 لهذه الأسطوانة تيارات شدتها الكلية I_0. إذن تجوال تحريض الحقل المغناطيسي وفق المسار المغلق (C) يساوي:

$$A_B = \oint_C \vec{B}.d\vec{l} = B.2\pi.r$$

$$B.2\pi.r = \mu_0.I_0 \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0.I_0}{2\pi.r}}$$

تمثل هذه العبارة شدة الحقل المغناطيسي خارج الأسطوانة و الناتج عن مرور التيار الكهربائي في الأسطوانة. كما نلاحظ أن هذا الحقل يتناسب عكسا مع المسافة $(R \prec r)$.

أما داخل الأسطوانة $r \prec R$ ، فالتيار الذي يعبر الدائرة الشكل 7.4 (ب) هو I:

$$J = \frac{I_0}{S_0} = \frac{I}{S} \Rightarrow I = \frac{I_0}{S_0}.S$$

$$S_0 = \pi R^2 \quad , \quad S = \pi r^2$$

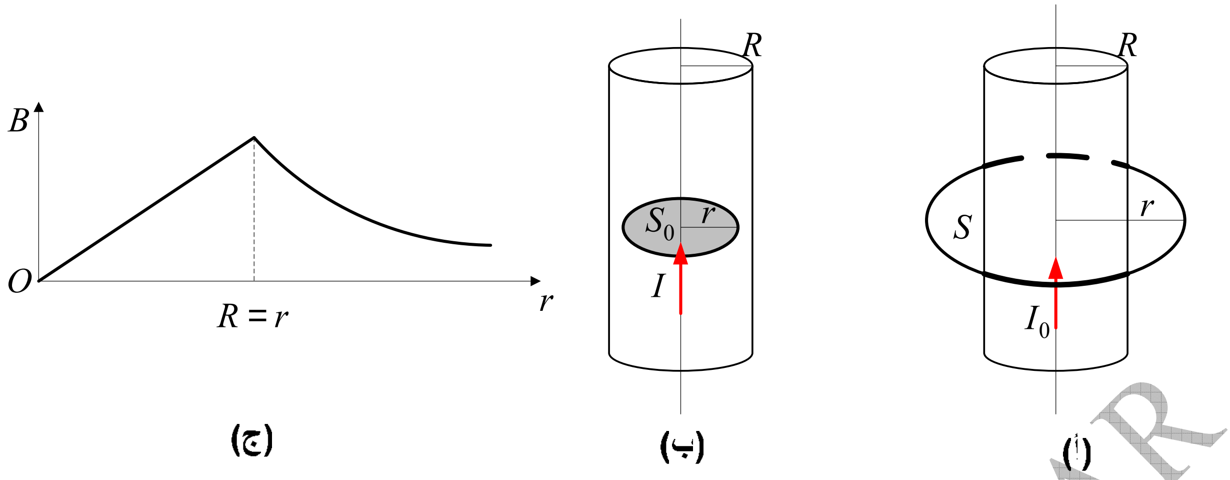
التجوال يساوي إذن:

$$A_B = \oint_C \vec{B}.d\vec{l} = B.2\pi.r = \mu_0.I$$

$$\mu_0.I = \mu_0.I_0\frac{S}{S_0} \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0.I_0}{2\pi.R^2}.r}$$

في هذه الحالة شدة الحقل المغناطيسي في نقطة ما داخل الأسطوانة تتناسب طردا مع البعد بين محور الأسطوانة و هذه النقطة.

يمثل الشكل 7.4(ج) تغيرات شدة الحقل المغناطيسي بدلالة البعد r .



الشكل 7.4 : تطبيق قاعدة آمبير

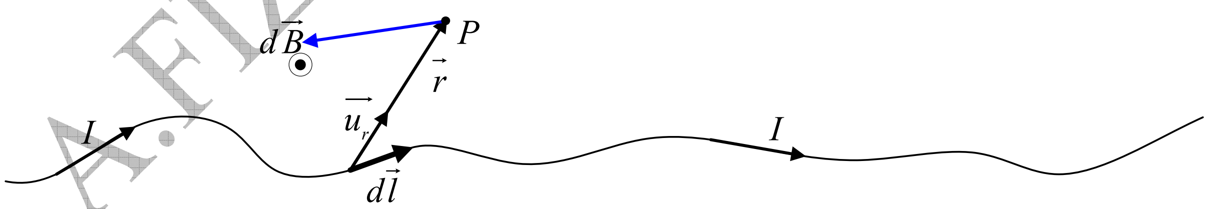
E/ قانون بيوت وسافار:

Loi de Biot et Savard (J.Batiste Biot 1774-1862/Félix Savard 1791-1841)

يسمح هذا القانون التجريبي، الذي وضع سنة 1820، بحساب التحريض المغناطيسي في نقطة من الفضاء، المتولد عن ناقل كيف ما كان شكله، يجتازه تيار كهربائي.

1/ نص القانون: **يولد تيار كهربائي، شدته I، يجتاز عنصرا $d\vec{l}$ من ناقل، حقلا مغناطيسيا عنصريا $d\vec{B}$ يساوي:**

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0 . I}{4\pi . r^2} . d\vec{l} \wedge \vec{u}_r} \qquad (14.4)$$



الشكل 8.4 : الحقل المغناطيسي العنصري الناتج عن تيار كهربائي عنصري

$\vec{u}_r$: يمثل شعاع الوحدة وفق منحى شعاع الموضع $\vec{r}$. إتجاه $d\vec{B}$ يحدد بقاعدة البرغي أو قاعدة اليد اليمنى.

إذا أردنا حساب التحريض المغناطيسي الكلي $\vec{B}$ الناتج عن كل الناقل يكفي القيام بعملية التكامل:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0.I}{4\pi} \int_{\text{الناقل}} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}_r}{r^2} \qquad (15.4)$$

2/ تطبيقات قانون بيوت و سافار: (applications de la loi de Biot et Savart)

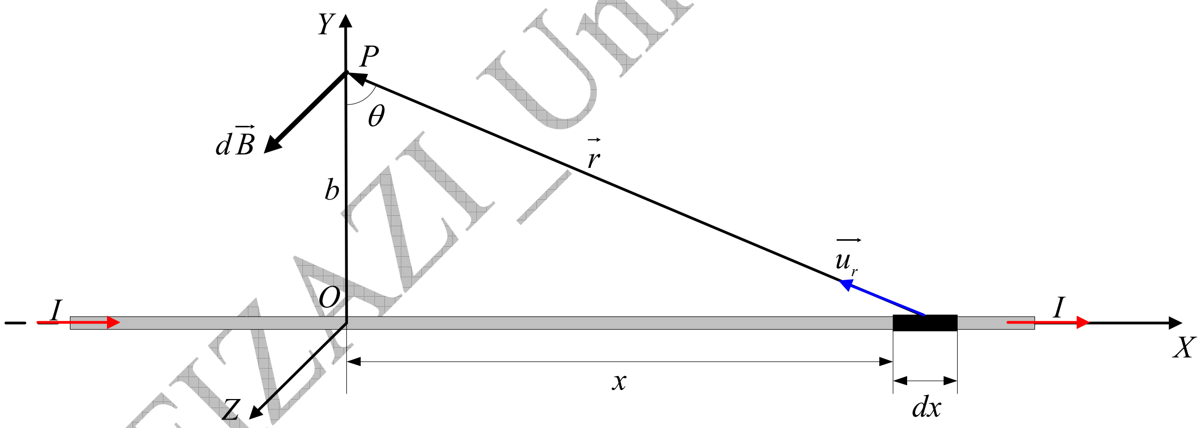
ا/ حقل التحريض المغناطيسي الناتج عن تيار مستقيم لا متناهي الطول:

(champ d'induction magnétique produit par un courant rectiligne infini)

يمثل الشكل 9.4 سلكا لا متناهي الطول ، يجتازه تيار كهربائي شدته I. نريد تعيين حقل التحريض المغناطيسي الناتج عن كل السلك في النقطة P الواقعة على المحور oy.

لتطبيق قانون بيوت و سافار يجب تحديد إحداثيات الشعاعين $d\vec{l}$ و $\vec{}$ في المعلم الديكارتي $Oxyz$. و بما أن $\vec{r} = r.\vec{u}_r \Rightarrow \vec{u}_r = -\vec{}$ ، يمكن كتابة القانون على الشكل:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0.I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0.I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \qquad (16.4)$$



الشكل 9.4 : الحقل المغناطيسي العنصري الناتج عن تيار كهربائي عنصري مستقيم

$$d\vec{l} = \begin{vmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{vmatrix} -x \\ b \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$d\vec{l}\wedge\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & -\vec{j} & \vec{k}\\ dx & 0 & 0\\ -x & b & 0\end{vmatrix}=b.dx.\vec{k}\Rightarrow d\vec{B}=\frac{\mu_0.I}{4\pi}.\frac{b.d\vec{l}}{r^3}\vec{k}$$

و بما أن: $r=\dfrac{b}{\cos\theta}\quad ,\quad x=b.tg\theta\Rightarrow dx=b\dfrac{1}{\cos^2\alpha}d\theta$

بعد التعويض نحصل على: $d\vec{B}=\dfrac{\mu_0.I}{4\pi.b}\cos\theta.d\theta.\vec{k}$

نكامل هذه العبارة من $-\pi/2$ إلى $\pi/2$:

$$\vec{B}=\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}d\vec{B}=\frac{\mu_0.I}{4\pi.b}\vec{k}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\theta.d\theta$$

لنحصل في الأخير على العبارة النهائية:

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0.I}{2\pi.b}\vec{k}\Rightarrow B=\frac{\mu_0.I}{2\pi.b}}\qquad(17.4)$$

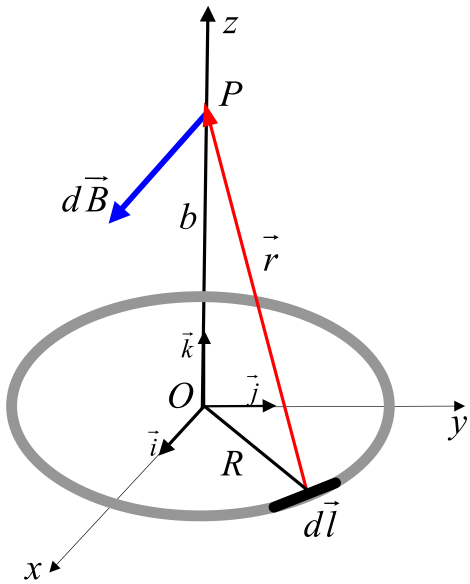
الشعاع $\vec{B}$ في هذه الحالة عمودي على المستوى Oxy و موجه حسب إحدى قواعد التوجيه.

ملاحظة: في حالة ناقل مستقيم ترسم خطوط الحقل دوائر مركزها الناقل و متعامدة معه.

ب/ حقل التحريض المغناطيسي الناتج عن تيار دائري:

(champ d'induction magnétique produit par un courant circulaire)

يبين الشكل 10.4 حلقة يجتازها تيار كهربائي ثابت الشدة I. نريد تحديد حقل التحريض المغناطيسي على محور هذه الحلقة.



الشكل 10.4 : الحقل المغناطيسي الناتج عن تيار دائري

نختار على الحلقة طولا عنصريا $d\vec{l}$، ثم نحسب الحقل المغناطيسي العنصري المتولد في النقطة P. للحصول على الحقل الكلي نقوم بعملية التكامل.

حسب الشكل 11.4:

الزاويتان α و θ متعامدتا الأضلاع: $\left.\begin{matrix} Oy \perp Ox \\ dl \perp R \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha = \theta$

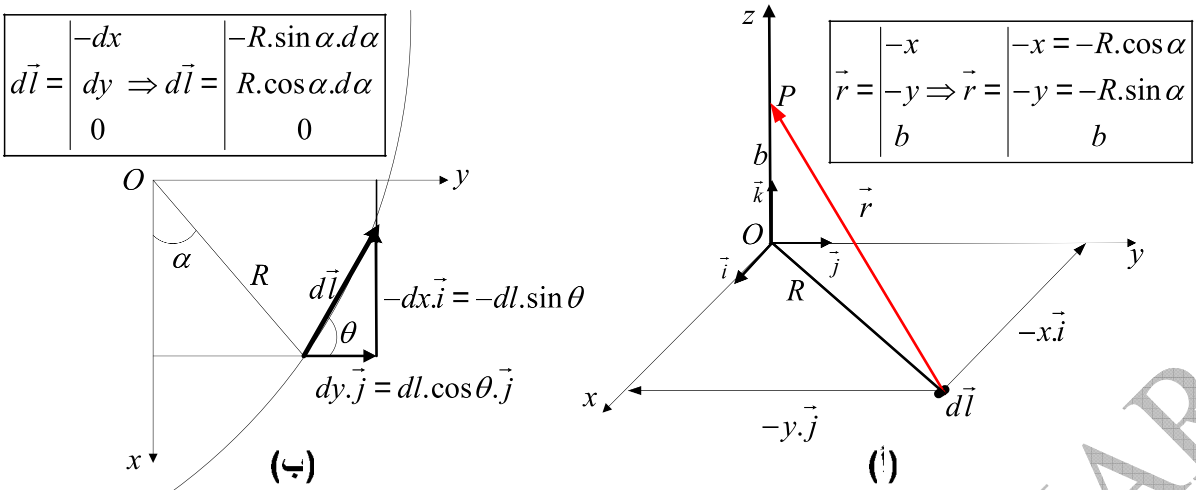
$$d\vec{l} = -dx\vec{i} + dy\vec{j} \Rightarrow d\vec{l} = -dl.\sin\alpha.\vec{i} + dl.\cos\alpha.\vec{j}$$

و بما أن $dl = R.d\alpha$

فإن: $d\vec{l} = -R.\sin\alpha.d\alpha.\vec{i} + R.\cos\alpha.d\alpha.\vec{j}$

و عليه فإن مركبات الشعاعين $d\vec{l}$ و $\vec{r}$ هي:

$$\vec{r} = \left| \begin{matrix} -x = -R\cos\alpha.d\alpha \\ -y = -R\sin\alpha.d\alpha \\ b \end{matrix} \right. \qquad d\vec{l} = \left| \begin{matrix} -R\sin\alpha.d\alpha \\ R\cos\alpha.d\alpha \\ 0 \end{matrix} \right.$$



الشكل 11.4 : تعيين مركبات الشعاعين $d\vec{l}$ و $\vec{r}$

نطبق قانون بيوت وسافار:

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0.I}{4\pi}.d\vec{l}\wedge\frac{\vec{r}}{r^3}=\frac{\mu_0.I}{4\pi.r^3}.d\vec{l}\wedge\vec{r}$$

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0.I}{4\pi.r^3}.\begin{vmatrix}\vec{i} & -\vec{j} & \vec{k}\\ -R\sin\alpha & R\cos\alpha & 0\\ -R\cos\alpha & -R\sin\alpha & b\end{vmatrix}.\mathrm{d}\alpha$$

$$\mathrm{d}\vec{\mathrm{B}}=\underbrace{\frac{\mu_0.I}{4\pi.r^3}.\left(R.b\cos\alpha.d\alpha\right)\vec{i}}_{d\vec{B}_x}+\underbrace{\frac{\mu_0.I}{4\pi.r^3}.\left(R.b\sin\alpha.d\alpha\right)\vec{j}}_{d\vec{B}_y}+\underbrace{\frac{\mu_0.I}{4\pi.r^3}.\left(R^2.d\alpha\right)\vec{k}}_{d\vec{B}_z}$$

يتبين لنا أن لـــ $d\vec{B}$ ثلاث مركبات: $d\vec{B}=d\vec{B}_x+d\vec{B}_y+d\vec{B}_z$

يكفي الآن مكاملة المركبات الثلاثة من 0 إلى 2π للحصول على المركبات الثلاثة للحقل المغناطيسي الناتج عن كل الحلقة:

$$B_x=\int_0^{2\pi}dB_x=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0.I.R.b}{4\pi.r^3}\cos\alpha.d\alpha=\frac{\mu_0.I.R.b}{4\pi.r^3}.\int_0^{2\pi}\cos\alpha.d\alpha\quad=0$$

$$B_y=\int_0^{2\pi}dB_y=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0.I.R.b}{4\pi.r^3}\sin\alpha.d\alpha=\frac{\mu_0.I.R.b}{4\pi.r^3}.\int_0^{2\pi}\sin\alpha.d\alpha\quad=0$$

$$B_z=\int_0^{2\pi}dB_z=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0.I.R^2}{4\pi.r^3}d\alpha=\frac{\mu_0.I.R^2}{4\pi.r^3}.\int_0^{2\pi}d\alpha\quad=\frac{\mu_0.I.R^2}{4\pi.r^3}.2\pi$$

و في النهاية:

$$\boxed{\vec{B}=\vec{B}_z=\frac{\mu_0R^2.I}{2.\left[R^2+b^2\right]^{3/2}}\vec{k}}\Rightarrow\boxed{B=B_z=\frac{\mu_0R^2.I}{2.\left[R^2+b^2\right]^{3/2}}}\qquad(18.4)$$

هذه العبارة لا تصلح إلا إذا كانت النقطة P تقع على المحور العمودي على مستوى الحلقة و المار من مركزها.

مناقشة:

الحالة الأولى: في مركز الحلقة $b=0$ ، و مهما كان نصف قطرها فإن:

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 .I}{2b}} \tag{19.4}$$

الحالة الثانية: إذا كانت الحلقة صغيرة جدا أي $b \succ\succ R$ ، فإن:

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 R^2 .I}{2b^3}} \tag{20.4}$$

الحالة الثالثة: في حالة وشيعة مصفحة مكونة من N حلقة، نأخذ نصف القطر المتوسط للحلقات و نضرب النتائج السابقة في العدد N:

$$B=B_z=\frac{\mu_0 R^2 .I}{2.\left[R^2+b^2\right]^{3/2}}.N$$

$$B=\frac{\mu_0 .I}{2b}.N \tag{21.4}$$

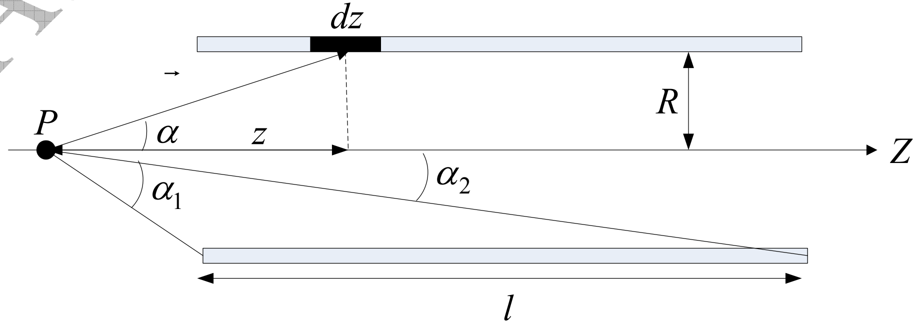
$$B=\frac{\mu_0 R^2 .I}{2b^3}.N$$

ج/ حقل التحريض المغناطيسي الناتج عن تيار حلزوني:

(champ d'induction magnétique produit par un courant solénoïdal)

هنا كذلك لا نهتم إلا بنقطة تقع على محور الوشيعة الحلزونية.

لتكن وشيعة طولها l متكونة من N حلقة ، يجتازها تيار كهربائي شدته I. المطلوب حساب حقل التحريض المغناطيسي $\vec{B}$ في نقطة P تقع على المحور oz للوشيعة.



الشكل 12.4 : الحقل المغناطيسي الناتج عن تيار كهربائي حلزوني

نأخذ النقطة P كمبدإ، و نعتبر الطول العنصري dz من الوشيعة و الذي في حقيقة أمره يحتوي على عدد من الحلقات يساوي $\frac{N}{l}.dz$.(الشكل 12.4)

و باستعمال نتيجة الحقل المغناطيسي الناتج عن تيار دائري يمكننا كتابة:

$$d\vec{B}=\begin{vmatrix}0\\0\\\dfrac{\mu_0 R^2.I}{2.\left[R^2+z^2\right]^{3/2}}.\dfrac{N}{l}.dz\end{vmatrix}$$

نلاحظ من الشكل 12.4 أن:

$$z=R\cot\alpha\Rightarrow dz=-R.\frac{1}{\sin^2\alpha}.d\alpha$$

للتمكن من عملية التكامل بسهولة لا بد من تحويل للمتغيرات:

$$R^2+z^2=R^2+R^2\cot^2\alpha=R^2\underbrace{(1+\cot^2\alpha)}_{1/\sin^2\alpha}=R^2.\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

و بالتعويض في عبارة $d\vec{B}$ نجد:

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0 R^2.I}{2.\left[R^2/\sin^2\alpha\right]^{3/2}}.\frac{N}{l}.(-R/\sin^2\alpha).d\alpha\Rightarrow d\vec{B}=\frac{\mu_0.I}{2.}.\frac{N}{l}.d\alpha$$

للحصول على حقل التحريض المغناطيسي، الناتج في النقطة P الواقعة على المحور oz للوشيعة، عن تيار كهربائي يجتاز هذه الوشيعة، يجب القيام بعملية التكامل من طرف إلى آخر للوشيعة أي من α_1 إلى α_2 فنحصل على:

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0.N.I}{2l}\left(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\right)\vec{k}\Rightarrow B=\frac{\mu_0.N.I}{2l}\left(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\right)}\qquad(22.4)$$

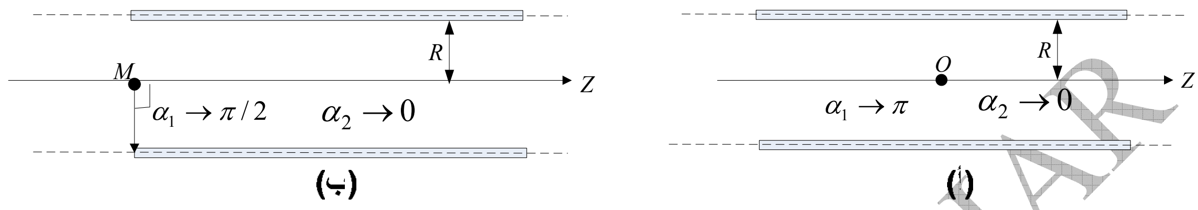
مناقشة:

الحالة الأولى: النقطة O تقع في مركز وشيعة طويلة جدا بحيث $\alpha_1=\pi$ و $\alpha_2=0$، الشكل 13.4(أ):

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0.N.I}{l}\vec{k}\Rightarrow B=\frac{\mu_0.N.I}{l}}\qquad(23.4)$$

الحالة الثانية: النقطة M تقع على المحور oz و على حافة الوشيعة حيث $\alpha_1=\pi/2$ و $\alpha_2=0$ ، الشكل 13.4(ب):

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0.N.I}{2l}\vec{k}\ ;\ \mathrm{B}=\frac{\mu_0.N.I}{2l}} \qquad (24.4)$$

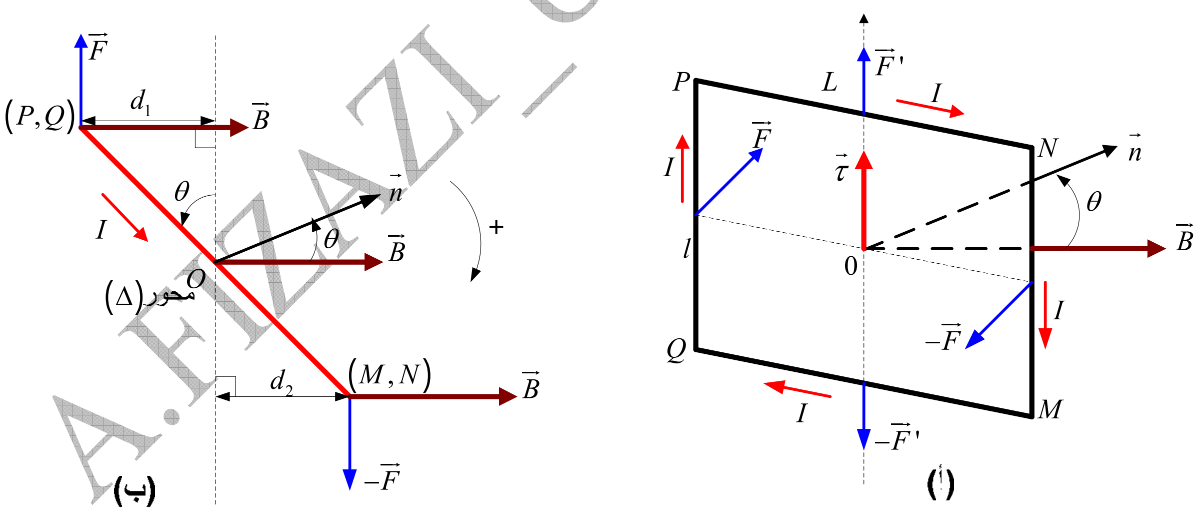


الشكل 13.4 : الحقل المغناطيسي الناتج عن تيار كهربائي حلزوني

F/ ثنائي القطب المغناطيسي: (dipôle magnétique)

1/ المزدوجة الكهرومغناطيسية:(couple électromagnétique)

يمثل الشكل14.4(أ) إطارا مستطيلا $MNPQ$ يجتاز تيار كهربائي شدته I ثابتة و اتجاهه حسب ما هو معيّن على الشكل.



الشكل 14.4 : المزدوجة الكهرومغناطيسية

يسبح هذا الناقل في حقل مغناطيسي منتظم $\vec{B}$ يصنع، مع ناظم سطح الناقل $\vec{n}$، الزاوية θ. $\vec{n}$ موجه بالنسبة للتيار I حسب قاعدة البرغي.

القوتان $\vec{F}'$ تؤثران على الضلعين NP و MQ، و هما متعاكستان مباشرة، بالإضافة لكون مفعولهما معدوم، لأن الإطار غير قابل للتشوه، و هما لا تنتجان أي عزم.
تؤثر القوتان $\vec{F}$ على الضلعين MN و PQ فتكونان مزدوجة من شأنها تدوير الإطار، ليستقر في وضع حيث يكون مستواه عموديا على الحقل المغناطيسي $\vec{B}$. الضلعان MN و PQ متعامدان مع $\vec{B}$ حين يبلغ الإطار موضع توازنه.

يبين الشكل14.4(ب) مسقط الإطار الشاقولي $MNPQ$ على مستوى أفقي. و اعتمادا على هذا الشكل يمكن تحديد مقدار المزدوجة:

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma_\Delta = F.d_1 + F.d_2 \\ d_1 = d_2 = \dfrac{L}{2}.\sin\theta \\ F = B.I.l \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\Gamma_\Delta = BIL.l\sin\theta} \qquad (25.4)$$

بما أن مساحة الإطار تساوي $S = L.l$ فإن:

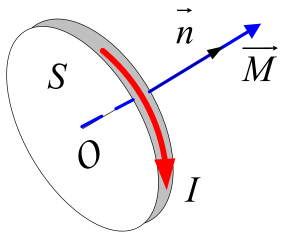
$$\boxed{\Gamma_\Delta = BIS\sin\theta} \qquad (26.4)$$

نشير هنا إلى أن هذه المزدوجة للإرجاع تجعل الإطار يعود إلى وضع توازنه أي الوضع العمودي على الحقل $\vec{B}$ $\left(\vec{n}//\vec{B} \;\;,\;\; \theta=0\right)$، و هذا في حالة إزاحته من موضع توازنه. هذه النتيجة المتحصل عليها في حالة حلقة مستطيلة صالحة لأي دارة مهما كانت.

النتيجة: كل دارة مستوية يجتازها تيار كهربائي و موجودة في حقل مغناطيسي منتظم تخضع لفعل توجيهي ناتج عن مزدوجة. هذه المزدوجة الكهرومغناطيسية من شأنها جعل مستوى الإطار عمودي على $\vec{B}$.

2/ العزم المغناطيسي:(moment magnétique)

كل حلقة (أو أي شكل آخر) لتيار كهربائي تؤثر عليها مزدوجة كهرومغناطيسية تسمى " **ثنائي قطب مغناطيسي**"



الشكل 15.4 : العزم المغناطيسي

تعريف: نسمي شعاع العزم المغناطيسي أو عزم ثنائي القطب المغناطيسي لدارة إطار سطحه S العبارة:

$$\boxed{\vec{M} = I.S.\vec{n}} \qquad (27.4)$$

يمثل الشكل 15.4 شعاع العزم المغناطيسي في حالة حلقة.

انطلاقا من هذا التعريف يمكن كتابة عبارة المزدوجة الكهرومغناطيسية بالصيغة:

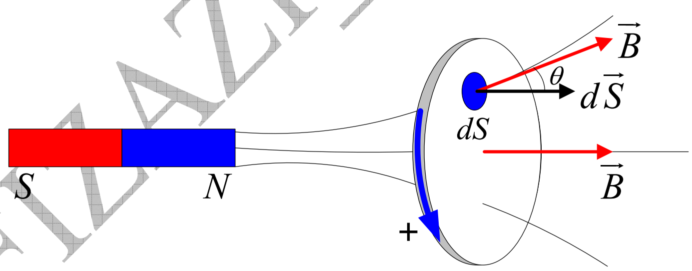
$$\boxed{\Gamma = MB\sin\theta \Leftrightarrow \vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}} \qquad (28.4)$$

G/ التحريض الكهرومغناطيسي: (induction électromagnétique)

1/ التدفق المغناطيسي:(flux magnétique)

❖ **تعريف:** نسمي تدفق الحقل المغناطيسي $\vec{B}$ عبر السطح العنصري dS المقدار:

$$\boxed{\Phi = \int_S \vec{B}.d\vec{S} = \int_S \vec{B}.\vec{n}.dS = \int_S B.\cos\theta.dS} \qquad (29.4)$$



الشكل 16.4 : التدفق المغناطيسي عبر سطح

يمثل $d\vec{S}$ شعاع السطح العنصري، نعتبره دائما عموديا على السطح و مغادر للسطح حسب الاتجاه الموجب المختار اعتباطا (وفق قاعدة البرغي) على محيط السطح. كما نعتبر $\vec{B}$ منتظما عبر السطح العنصري dS. الشعاع $\vec{n}$ يمثل شعاع الواحدة لناظم السطح.

❖ **وحدة التدفق:** ويبر (Wb) (Wilheim Edward Weber1804-1891)

❖ كيف يتغير Φ عند ما نقارب او نباعد المغنطيس و الوشيعة:

☜ عند تقريب المغناطيس من الوشيعة، فإن B تزداد في كل نقطة من السطح فيزداد Φ (و هذا يعني ازدياد عدد خطوط الحقل العابرة للسطح).

☜ عند إبعاد المغناطيس من الوشيعة، فإن B تتناقص في كل نقطة من السطح فيتناقص Φ (و هذا يعني تناقص عدد خطوط الحقل العابرة للسطح).

مثال 2.4:

1/ إخترنا اتجاها موجبا للسير على الوشيعة المصفحة (C) الممثلة على الشكل17.4.

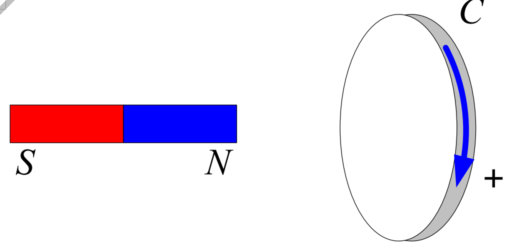
ا/هل التدفق موجب أم سالب؟ نبعد المغناطيس المستقيم عن الوشيعة، هل التدفق يزيد أم ينقص؟

ب/ تناول نفس الأسئلة بعكس قطبي المغناطيس.

2/ تشتمل هذه الوشيعة على 20 حلقة ذات سطح $10cm^2$ و تسبح في حقل مغناطيسي منتظم شدته $0,1T$. الوشيعة عمودية على خطوط الحقل.

ا/ ننقل الوشيعة بحركة انسحابية، هل يتغير التدفق؟

ب/ ندوّر الوشيعة بـــ $180°$ حول أحد أقطارها. أحسب تغير التدفق عبر الوشيعة.



الشكل 17.4 : التحريض الكهرومغناطيسي

الحل:

1/ ا/ الشعاعان $\vec{n},\vec{B}$ في الوشيعة متوازيان و لهما نفس الإتجاه–الشكل18.4(ا)–

$\left(0 \le \theta \prec \pi/2\right)$: $\Phi = B.S.\cos\theta \succ 0$

عند إبعاد المغناطيس من الوشيعة فإن شدة $\vec{B}$ على مستو سطحها تتناقص، إذن التدفق يتناقص.

ب/ الشعاعان $\vec{n},\vec{B}$ في الوشيعة متوازيان و متعاكسا الإتجاه -الشكل18.4(ب)-

$$\left(\pi \geq \theta \succ \pi/2\right):\ \Phi = B.S.\cos\theta \prec 0$$

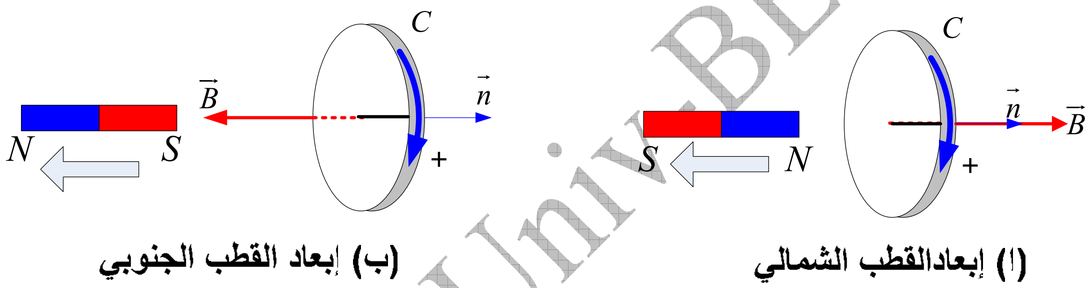
عند إبعاد المغناطيس من الوشيعة فإن شدة $\vec{B}$ على مستو سطحها تتناقص، إذن التدفق يتناقص.

2/ ا/ ما دام $\vec{B}$ منتظم فإن التدفق لا يتغير.

ب/ في الوضع الإبتدائي: $\Phi_1 = N.B.S\cos 0 = 2\times10^{-3}Wb$

في الوضع النهائي: $\Phi_2 = N.B.S\cos 180° = -2\times10^{-3}Wb$

إذن تغير التدفق المغناطيسي يساوي: $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = -4\times10^{-3}Wb$



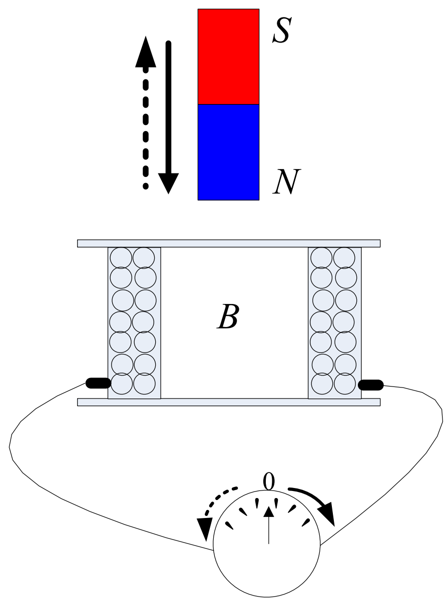
الشكل 18.4

2/ التحريض الكهرومغناطيسي:

حتى الآن اعتبرنا الحقلين الكهربائي و المغناطيسي مستقلين عن الزمن أي حقلين ساكنين. فماذا لو أصبح الحقلان تابعين للزمن؟

في 1830 إكتشف فرادي و هنري(Joseph Henry 1797-1878/Michaël Faraday 1791-1867) في وقت متزامن ظاهرة التحريض الكهرومغناطيسي. هذه الظاهرة هي أساس مبدإ المولدات الكهربائية، المحولات و عديد من الأجهزة الكهرومغناطيسية المستعملة يوميا. و أهم من كل هذا فإن هذه الظاهرة هي أساس توليد التيار المتناوب.

❖ وصف التجربة:



الشكل 19.4 : التحريض الكهرومغناطيسي

يمثل الشكل19.4 وشيعة مجوفة B، تحتوي على عدد كبير من اللفات، موصلة بجهاز غلفاني حساس. المغناطيس في البداية ساكن و موجه وفق محور الوشيعة.

عند تقريب المغناطيس بسرعة من الوشيعة فإن الجهاز الغلفاني يشير إلى مرور تيار كهربائي سرعان ما يختفي بتوقف حركة المغناطيس.

عند سحب المغناطيس من داخل الوشيعة، يسجل الجهاز الغلفاني مرور تيار كهربائي في الإتجاه المعاكس.

التيار المسجل يدعى **تيار تحري**(courant induit) ، المغناطيس هو **المحرض** (inducteur) و الوشيعة هي جزء من **الدارة المتحرضة** (circuit induit).

يمكن الحصول على تيار متحرّض بتدوير الوشية أمام المغناطيس الساكن.

❖ التفسير:

سبب ظهور التيار التحريضي هو تغير التدفق المغناطيسي عبر سطح الوشيعة.

التيار التحريضي لا يدوم إلا مدة دوام **تغير التدفق**(variation du flux).

ظهور هذا التيار التحريضي يدل على وجود قوة محركة كهربائية تحريضية مقرها الوشيعة. تتعلق القوة المحركة الكهربائية التحريضية بسرعة تغير التدفق المغناطيسي $d\Phi_B / dt$.

❖ نص قانون فرادي و هنري:(loi de Faraday-Henry)

تتولد قوة محركة كهربائية تحريضية في كل دارة مغلقة تسبح في حقل مغناطيسي و تساوي مشتقة التدفق المغناطيسي عبر الدارة بالنسبة للزمن (أي سرعة تغير التدفق) بعكس الإشارة.

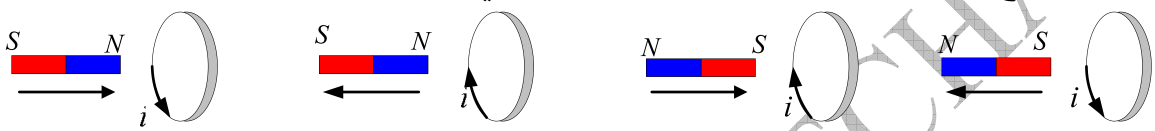
$$\boxed{e = -\frac{d\Phi}{dt}} \qquad (30.4)$$

❖ **نص قانون لانز:** loi de Lenz(Henry Frédéric Lenz 1804-1885):

يعطي هذا القانون كيفية التنبؤ باتجاه التيار المتحرض.

"إتجاه التيار التحريضي يكون بحيث يعاكس بأفعاله السبب الذي أدى إلى ظهوره."

نوضح محتوى هذا القانون بالأمثلة المبينة في الشكل20.4.



إبعاد قطب جنوبي يؤدي إلى ظهور وجه شمالي — تقريب قطب جنوبي يؤدي إلى ظهور وجه جنوبي — إبعاد قطب شمالي يؤدي إلى ظهور وجه جنوبي — تقريب قطب شمالي يؤدي إلى ظهور وجه شمالي

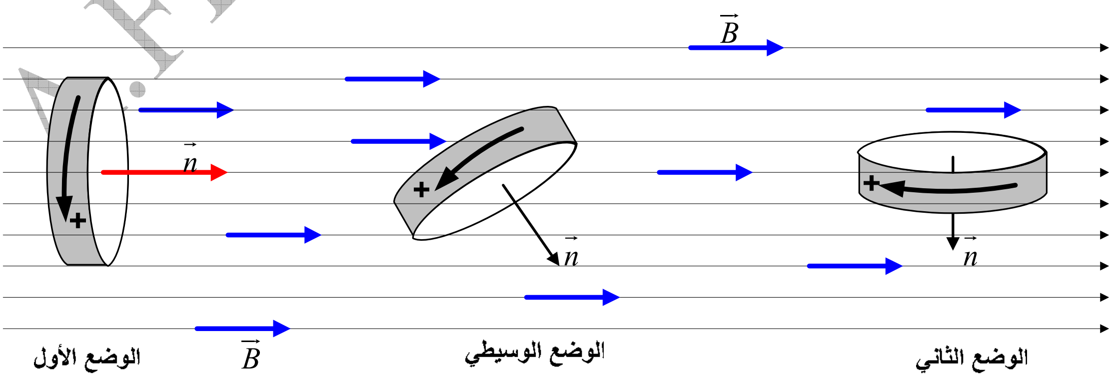
الشكل 20.4 : تعيين اتجاه التيار المتحرض بتطبيق قانون لانز

مثال 3.4:

وشيعة مصفحة متكونة من $N = 500$ حلقة دائرية، نصف قطرها $r = 0,1m$، محورها يوازي في البداية شعاع الحقل المغناطيسي $\vec{B}$ لحقل مغناطيسي منتظم شدته $0,2T$ (الشكل 21.4). في ظرف $0,5s$، يصبح محورها عموديا على $\vec{B}$.

ما هي القوة المحركة الكهربائية التحريضية المتوسطة التي تنشأ؟

ما هو اتجاه التيار المتحرّض؟



الشكل 21.4

الحل:

في وضعها الإبتدائي، نوجه شعاع الواحدة $\vec{n}$ الناظمي على مستوى الحلقات في نفس اتجاه $\vec{B}$. إذن الحلقات موجهة في الإتجاه الموجب المبيّن على الشكل. في هذا الوضع، التدفق موجب و يساوي:

$$\Phi_0 = N.\vec{B}.\vec{n}.S = N.B.S \ \ , \ \ \Phi_0 = 500 \times 3,14 \times (0,1)^2 \times 0,2 \Rightarrow \boxed{\Phi_0 = 3,14 Wb}$$

في الوضع النهائي، $\Phi_1 = 0$ لأن $\vec{B} \perp \vec{n}$. إذن، خلال الحركة تغير التدفق يساوي:

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_0 = -3,14 Wb$$

القوة المحركة الكهربائية التحريضية المتوسطة خلال المدة $\Delta t = 0,5s$ تساوي:

$$e_{moy} = -\frac{-3,14}{0,5} \Rightarrow \boxed{e_{moy} = 6,28V}$$

التدفق Φ يتناقص و التيار المتحرّض يسري أثناء كل مدة الحركة في الإتجاه الموجب المختار.

في هذا الفصل كان اهتمامنا منصبّا بأحد أهم آثار التيار الكهربائي ألا هو الأثر المغناطيسي و الذي يجد تطبيقاته الكثيرة في الصناعة، لا سيما الكهروميكانيك.

EXERCICES ** تـــمــــاريـــن

Exercice 4.1

Un éclair transporte couramment un courant maximum de $20kA$. Quel est le champ magnétique maximum qu'il produit à $1m$? à $300m$?

التمرين 1.4

ينقل برق عادة تيارا أعظميا مقداره $20kA$. ما هو الحقل المغناطيسي الأعظمي الذي ينتجه هذا البرق على بعد $1m$؟ على بعد $300m$؟

Exercice 4.2

Une ligne rectiligne de tension est située a une hauteur de $12m$ au dessus du sol. Elle transporte un courant de $300A$ dans la direction de l'Ouest.

Décrire le champ magnétique qu'elle produit et calculer sa valeur sous la ligne au niveau du sol.

Comparer le avec le champ magnétique terrestre.

تمرين 2.4

يقع خط مستقيم للتوتر على ارتفاع $12m$ فوق سطح الأرض و ينقل تيارا قدره $300A$ في اتجاه الغرب.

صف الحقل المغناطيسي الذي ينتجه و احسب قيمته تحت الخط على مستوى سطح الأرض.

قارنه بالحقل المغناطيسي الأرضي.

Exercice 4.3

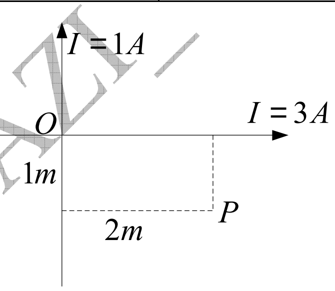
Deux courants électriques perpendiculaires de $1A$ et $3A$ sont orientés comme sur le dessin et se croisent au point O.

Quelles sont l'intensité et l'orientation du champ magnétique au point P situé dans le plan des deux courants, à $1m$ et $2m$ des deux courants comme indiqué dans la figure ?

التمرين 3.4

تيار ان كهربائيان متعامدان ذي $1A$ و $3A$ موجهان كما هو مبين على الرسم و يتقاطعان في النقطة O.

ما هما شدة و توجيه الحقل المغناطيسي في النقطة P الواقعة في مستوى التيارين، على بعدي $1m$ و $2m$ من التيارين كما هو مبين في الشكل؟



Exercice 4.4

Soit une spire de rayon R parcourue par un courant d'intensité I .

1/ Calculer le champ magnétique crée le long de l'axe OZ , à une distance z du centre O, en fonction de l'angle θ sous lequel on voit la spire(figure ci-dessous).

2/ Retrouver l'expression

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

3/ Quelle est la forme approchée de cette expression à grandes distances de l'axe OZ ?

4/ Exprimer le champ magnétique B_z en fonction du moment magnétique M .

5/ En déduire le champ B_o crée au centre O de la

التمرين 4.4

لتكن حلقة نصف قطرها R يجتازها تيار شدته I .

1/ أحسب الحقل المغناطيسي على طول المحور OZ، على بعد z من المركز O ، بدلالة الزاوية θ التي نرى من خلالها الحلقة(الشكل في الأسفل).

2/ أوجد من جديد العبارة

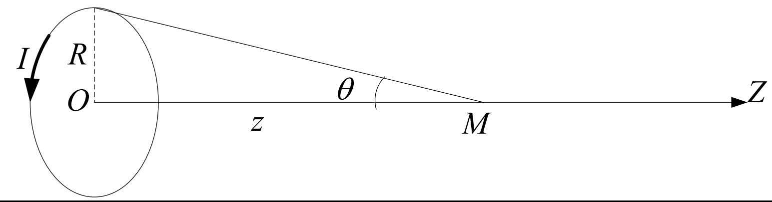
$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

3/ ما هو الشكل التقريبي لهذه العبارة على مسافات كبيرة للمحور OZ ؟

4/ عبّر عن الحقل المغناطيسي B_z بدلالة العزم المغناطيسي M .

5/ إستنتج الحقل B_o الناتج في المركز O للحلقة.

spire.	



Exercice 4.5 Deux fils conducteurs rectilignes, infinis, parallèles, et distants de $d = 20cm$, sont traversés l'un par un courant $I_1 = 20A$, l'autre par un courant $I_2 = 80A$. 1/ les courants sont de même sens. Calculer l'intensité du champ magnétique résultant en un point M situé dans le plan des conducteurs, à égale distance de chacun d'eux. Trouver dans ce plan la distance par rapport aux conducteurs, de la droite où le champ magnétique est nul. 2/ Même questions avec des courants de sens contraires. 3/ En déduire la définition légale de l'ampère.	**التمرين 5.4** سلكان ناقلان مستقيمان، لامتناهيان، متوازيان، و متباعدان بـــ $d = 20cm$، يجتاز أحدهما تيار $I_1 = 20A$ ، و يجتاز الآخر تيار $I_2 = 80A$. 1/ التياران لهما نفس الاتجاه. أحسب شدة الحقل المغناطيسي الناتج في نقطة M الواقعة في مستوى الناقلين، و على نفس البعد من كل منهما. أوجد في هذا المستوى المسافة بالنسبة للناقلين، للمستقيم حيث الحقل المغناطيسي معدوم. 2/ نفس الأسئلة مع تيارين متعاكسي الاتجاهين. 3/ إستنتج التعريف القانوني للأمبير.

Exercice 4.6 Une particule de masse $5.10^{-4}kg$ porte une charge de $2,5.10^{-8}C$. On communique à la particule une vitesse initiale horizontale de $6.10^4 ms^{-1}$. Quelles sont la grandeur et la direction du champ magnétique minimum qui maintiendra la particule sur une trajectoire horizontale en compensant l'effet de la pesanteur ?	**التمرين 6.4:** جسيمة كتلتها $5.10^{-4}kg$ تحمل شحنة $2,5.10^{-8}C$. نعطي للجسيمة سرعة ابتدائية أفقية مقدارها $6.10^4 ms^{-1}$. ما هما شدة و جهة الحقل المغناطيسي الأصغري الذي يبقي الجسيمة على مسار أفقي بتعويض فعل الجاذبية؟

Exercice 4.7 1/ Calculer la circulation du champ magnétique le long de l'axe (Ox) d'une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant I . 2/ Calculer de même la circulation du champ magnétique le long de l'axe (Ox) $(\text{de} -\infty \text{ à } +\infty)$ d'un solénoïde circulaire de rayon R, de longueur l et comportant N spires jointives parcourues chacune par un courant I .	**التمرين 7.4** 1/ أحسب تجوال الحقل المغناطيسي على طول المحور (Ox) (من $-\infty$ إلــى $+\infty$) لحلقة دائرية نصف قطرها R يجتازها تيار I. 2/ أحسب تجوال الحقل المغناطيسي على طول المحور (Ox) (من $-\infty$ إلــى $+\infty$) لحلزون دائري نصف قطره R، طوله l و يشتمل على Nحلقة متلاصقة يجتاز كل واحدة منها تيار I.

Exercice 4.8 Un spectromètre de masse permet la séparation des isotopes d'un même élément chimique. Il est constitué essentiellement d'une chambre d'ionisation, d'une chambre accélératrice et d'une chambre de séparation. (figure ci-dessous). On veut séparer des ions lithium $^7_3Li^+$ et $^6_3Li^+$	**التمرين 8.4** جهاز قياس الطيف الكتلي يمكّن من فصل نظائر نفس العنصر الكيميائي. يتكون أساسا من غرفة للتشرّيد، غرفة مسرّعة و غرفة للفصل. (الشكل في الأسفل). نريد فصل شوارد الليثيوم $^7_3Li^+$ و $^6_3Li^+$ الحاملين للشحنة $q = 1,6.10^{19}C$ وذاتي الكتلتين على التوالي

porteurs de la charge $q = 1,6.10^{19}C$ et de masses respectives $m_1 = 7u.m.a$ et $m_2 = 6u.m.a$. Ces ions pénètrent en O' dans un champ électrique uniforme, créé par une tension $U = V_A - V_C = 4000V$ appliquée entre les 2 plaques horizontales P_1 et P_2.

Les ions lithium pénètrent alors dans un champ magnétique uniforme d'intensité $B = 0,1T$, leur trajectoire devient circulaire dans la chambre de séparation.

La partie effectivement décrite de chaque trajectoire est un demi-cercle à la fin duquel les particules arrivent sur la plaque photographique dans les collecteurs C_1 et C_2.

1/ Evaluer les vitesses v_1 et v_2 des deux types d'ions en fonction de q, m_1 ou m_2 et U à la sortie de la chambre d'accélération.

2/ Calculer les distances OC_1 et OC_2.

$1u.m.a = 1,67.10^{-27}kg$

$m_1 = 7u.m.a$ و $m_2 = 6u.m.a$. تدخل هذه الشوارد عند O' في حقل كهربائي منتظم، ناتج عن توتر $U = V_A - V_C = 4000V$، مطبق بين صفيحتين أفقيتين P_1 و P_2.

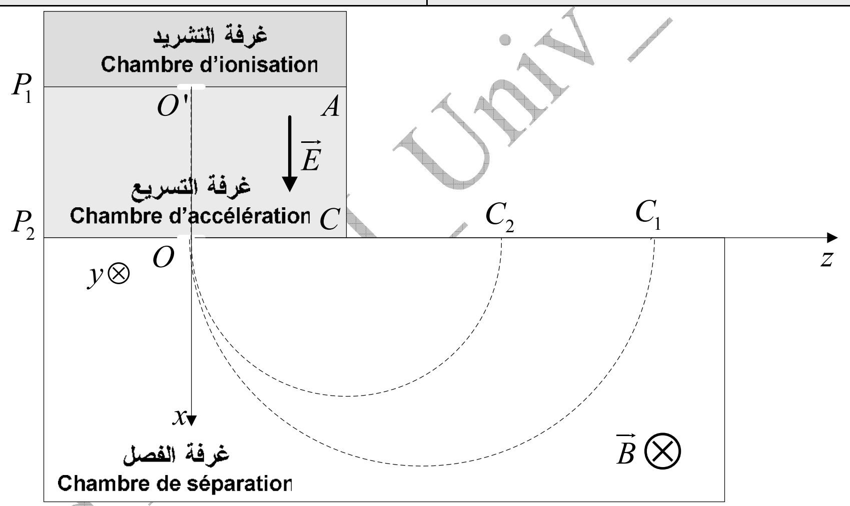
تدخل شوارد الليثيوم بعد ذلك في حقل مغناطيسي شدته $B = 0,1T$ ، يصبح مسارها دائريا في غرفة الفصل.

الجزء الموصوف فعليا لكل مسار هو نصف دائرة و الذي في نهايته تصل الجسيمات إلى الصفيحة الفوتوغرافية في المجمّعين C_1 و C_2.

1/ أحسب السرعتين v_1 و v_2 لصنفي الشوارد بدلالة m_1, q أو m_2 و Uعند الخروج من غرفة التسريع.

2/ أحسب المسافتين OC_1 و OC_2 .

$1u.m.a = 1,67.10^{-27}kg$



Exercice 4.9

Dans un dispositif expérimental un faisceau homocinétique d'ions pénètre en O, pris comme origine des espaces, entre les armatures d'un condensateur plan avec une vitesse initiale horizontale v_0 suivant la longueur. Un écran fluorescent (F) est positionné immédiatement à la sortie du condensateur. Ce condensateur plan est formé de deux plaques carrées de côté L et distantes de h. Le faisceau est soumis à une différence de potentiel U. Un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme parallèle au champ électrique $\vec{E}$ et de direction opposée, de module B règne dans cet espace. Nous ferons l'hypothèse que la vitesse initiale v_0 est grande par rapport aux vitesses acquises à cause des champs

التمرين9.4

في تركيب تجريبي تدخل حزمة شوارد في O ، المأخوذة كمبدإ للمسافات، بين لبوسي مكثفة مستوية بسرعة ابتدائية أفقية v_0 وفق الطول. توضع شاشة مستشعّة (F) مباشرة عند مخرج المكثفة. تتكون هذه المكثفة المستوية من صفيحتين مربعتين ضلع كل من هما L و متباعدتين بـــ h . تخضع الحزمة لفرق في الكمون U. يسود في هذا المجال حقل مغناطيسي $\vec{B}$ منتظم موازي للحقل الكهربائي $\vec{E}$ و يعاكسه في الاتجاه، شدته B. نفترض أن السرعة الابتدائية كبيرة بالنسبة للسرعات المكتسبة بسبب الحقلين الكهربائي و المغناطيسي.

1/ بافتراض أن الحقل الكهربائي ينشط وحده

électrique et magnétique.

1/ En supposant que le champ électrique agit seul $(B=0)$, trouver la trajectoire des ions dans le condensateur et la position des marques qu'ils laissent sur l'écran fluorescent.

2/ En supposant que le champ magnétique agit seul $(E=0)$, trouver la trajectoire des ions dans le condensateur et la position des marques qu'ils laissent sur l'écran fluorescent.

3/ Sous l'action simultanée des deux champs, montrer que l'équation de la trajectoire du faisceau est indépendante de la vitesse initiale du faisceau.

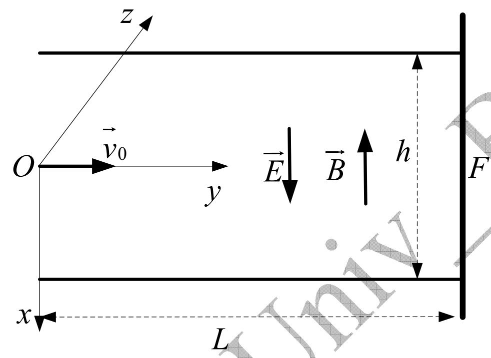
4/ Quelle est la grandeur qu'on peut déduire de cette expérience ?

$(B=0)$، أوجد مسار الشوارد في المكثفة و موضع العلامات التي تتركها على الشاشة المستشعّة.

2/ بافتراض أن الحقل المغناطيسي ينشط وحده $(E=0)$، أوجد مسار الشوارد في المكثفة و موضع العلامات التي تتركها على الشاشة المستشعّة.

3/ تحت التأثير المتزامن للحقلين معا، بيّن أن مسار الحزمة مستقل عن السرعة الابتدائية للحزمة.

4/ ما هو المقدار الذي يمكن تحديده من خلال هذه التجربة؟



Exercice 4.10

On utilise le dispositif représenté ci-dessous pour dévier un faisceau d'électrons qui ont une vitesse $\vec{v}_0$. Ce faisceau traverse, dans le vide, un champ magnétique uniforme d'induction $\vec{B}$ perpendiculaire à $\vec{v}_0$. Le poids de l'électron est négligeable devant la force électromagnétique.

1/ Quelle est la trajectoire des électrons dans le champ ?

2/ Calculer la déviation α infligée par ce champ au faisceau à sa sortie du champ.

3/ Établir l'expression mathématique de la période du mouvement de l'électron.

4/ Comment varient le rayon de la trajectoire, la période et la vitesse angulaire si la vitesse d'injection des électrons est doublée?

5/ Quelle serait la trajectoire si le faisceau d'électrons entrait dans le champ magnétique avec un vecteur vitesse parallèle au vecteur champ ? Justifier.

6/ Décrire la trajectoire si l'angle en O entre $\vec{v}_0$ et $\vec{B}$ est différent de $0°$ et $90°$.

التمرين10.4

يستعمل التركيب المبين على الشكل في الأسفل من أجل انحراف حزمة إلكترونات لها نفس السرعة $\vec{v}_0$. تعبر هذه الحزمة، في الفراغ ، حقلا مغناطيسيا منتظما تحريضه $\vec{B}$ عموديا على $\vec{v}_0$. ثقل الإلكترون مهمل أمام القوة المغناطيسية.

1/ ما هو مسار الإلكترونات داخل الحقل؟

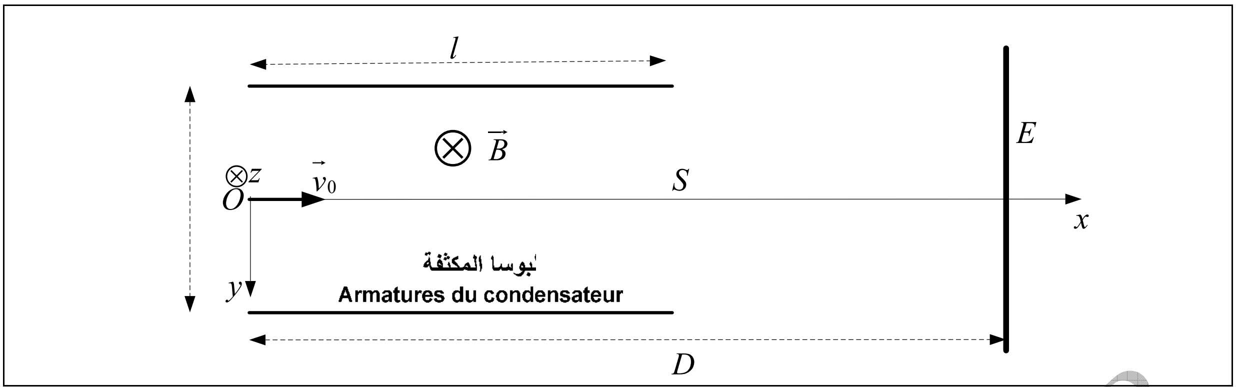
2/ احسب الانحراف α الناتج عن الحقل و الذي طرأ على الحزمة عند خروجها من الحقل.

3/ ضع العبارة الرياضية لدور حركة الإلكترون.

4/ كيف يتغير نصف قطر، دور و السرعة الزاوية إذا تضاعفت سرعة ضخ الإلكترونات؟

5/ كيف سيكون المسار إذا دخلت حزمة الإلكترونات بشعاع سرعة مواز للحقل؟ برّر.

6/ صف المسار إذا كانت الزاوية في O بين $\vec{v}_0$ و $\vec{B}$ مختلفة عن $0°$ و $90°$.



Exercice 4.11

Le plan infini $P(O,x,y)$ est parcouru par un courant électrique constant de densité surfacique $\vec{J}_S = J.\vec{u}_y$. Soit M un point de l'axe Oz de cote z. Figure (a).

1/ Donner, en la justifiant, l'expression vectorielle du champ magnétique $\vec{B}$ en M.

2/ Appliquer le théorème d'Ampère à la boucle $AEDGA$. figure (b), pour calculer la circulation de $\vec{B}$ de part et d'autre du plan. Conclure.

3/ Montrer que ce champ présente une discontinuité à la traversée du plan et vérifier que cette discontinuité peut s'écrire :

$$\Delta\vec{B} = \vec{B}(z=0^+) - \vec{B}(z=0^-) = \mu_0 J.\vec{u}_x$$

التمرين 11.4

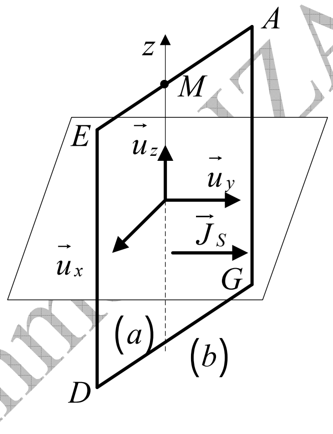
يجتاز المستوى $P(O,x,y)$ اللامتناهي ، تيار كهربائي ثابت كثافته السطحية $\vec{J}_S = J.\vec{u}_y$. لتكن نقطة M من المحور Oz علوها z . الشكل (a).

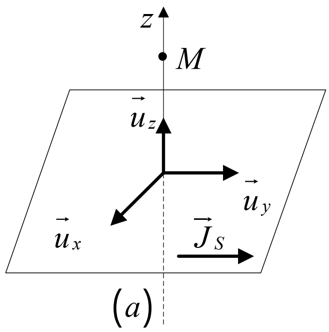
1/ إعط، مبرّرا لها، العبارة الشعاعية للحقل المغناطيسي $\vec{B}$ في M.

2/ طبّق نظرية آمبير على الحلقة $AEDGA$ (الشكل (b))، لحساب شدة الحقل المغناطيسي على جانبي المستوى. ماذا تستنتج؟

3/ بيّن أن هذا الحقل عديم الاستمرارية عند عبور المستوى و تحقق أن عدم هذه الاستمرارية يمكن كتابته:

$$\Delta\vec{B} = \vec{B}(z=0^+) - \vec{B}(z=0^-) = \mu_0 J.\vec{u}_x$$





Exercice 4.12

Une infinité de fils infiniment longs, tous parallèles à l'axe Oz et équidistants de a, sont parcourus par le même courant I. Ils coupent l'axe Ox aux points d'abscisses $x_p = pa$ avec p entier. On cherche à déterminer le champ magnétique en un point M d'ordonnée y positive. Figure ci-dessous.

التمرين 12.4

عدد لامتناهي من الأسلاك لامتناهية الطول، كلها موازية للمحور Oz ومتباعدة بنفس المسافة a، يجتازها نفس التيار I. تقطع الأسلاك المحور Ox في النقاط ذات الفواصل $x_p = pa$ مع p عدد طبيعي. نبحث عن تعيين الحقل المغناطيسي في نقطة M ترتيبها y موجب.
الشكل في الأسفل.

1/ Dans le cas où l'ordonnée y de M est suffisamment grande devant a on peut remplacer les fils par une nappe de courants surfaciques. Soit $\vec{J}$ la densité de ce courant par unité de longueur (le long de l'axe Ox .

a/ Déterminer $\vec{J}$,

b/ en utilisant le théorème d'Ampère, montrer que $B = \frac{1}{2}\mu_0 J$,

c/ déterminer la valeur $\vec{B}_0(M)$ du champ avec ce modèle continu.

2/ A présent on ne fait plus l'approximation de la répartition continue. Pour un point d'abscisse $x = 0$, calculer le champ magnétique $\vec{B}(M)$.

On l'écrira sous la forme $\vec{B}(M) = \vec{B}_0(M) f(y)$, $f(y)$ étant exprimée par la somme d'une infinité de termes.

On utilisera le résultat connu du champ crée par un fil de longueur infinie.

3/ Reprendre ce calcul pour un point d'abscisse $-\frac{a}{2}$.

1/ في حالة ما إذا كان الترتيب y لــ M كبيرا بقدر الإمكان أمام a يمكن استبدال الأسلاك بحزام عريض سطحي . لتكن $\vec{J}$ كثافة هذا التيار لواحدة الطول (على طول المحور Ox) .

ا/ عين $\vec{J}$ ،

ب/ باستعمال نظرية آمبير، برهن أن $B = \frac{1}{2}\mu_0 J$ ،

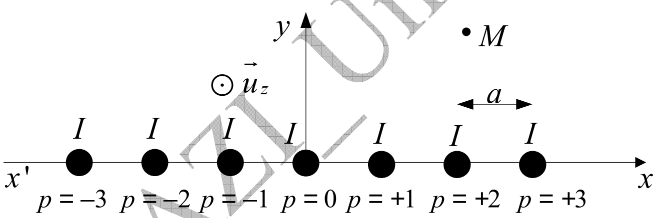
ج/ عيّن القيمة $\vec{B}_0(M)$ للحقل بهذا النموذج المستمر.

2/ الآن لا نفترض التوزيع المستمر. من أجل نقطة $x = 0$ ، أحسب الحقل المغناطيسي $\vec{B}(M)$.

أكتبه على الشكل $\vec{B}(M) = \vec{B}_0(M) f(y)$ ، $f(y)$ تمثّل مجموع عدد لامتناهي من الحدود.

نستعمل النتيجة المعروفة للحقل الناتج عن سلك لامتناهي الطول.

3/ أعد هذه الحسابات لنقطة M فاصلتها $-\frac{a}{2}$.



Exercice 4.13

On considère un solénoïde idéal, infini, comportant N spires jointives par mètre de longueur et compte plusieurs couches. Le rayon intérieur est noté R_1 et le rayon extérieur est noté R_2 . On admet que le champ magnétique est nul à l'extérieur. L'intensité du courant dans une spire est I .

1/ Donner l'expression du champ magnétique en un point de l'axe du solénoïde.

2/ Montrer que le champ est uniforme à l'intérieur du solénoïde.

3/ Donner l'expression du champ à l'intérieur des enroulements à une distance de l'axe.

4/ Donner l'expression du flux du champ magnétique à travers une section droite du solénoïde.

التمرين13.4

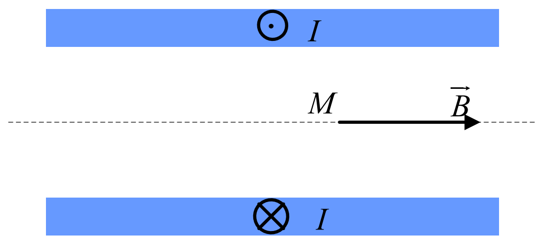
نعتبر حلزونا مثاليا لامتناهي الطول مكونا من N حلقة متلاصقة لواحدة الطول و يشتمل على عديد من الطبقات. نرمز لنصف القطر الداخلي بـــ R_1 و لنصف القطر الخارجي بـــ R_2 . نقبل أن الحقل المغناطيسي معدوم في الخارج. شدة التيار داخل الحلقة الواحدة هي I .

1/ إعط عبارة الحقل المغناطيسي في نقطة من محور الحلزون.

2/ بيّن أن الحقل منتظم داخل الحلزون.

3/ إعط عبارة الحقل داخل اللفات على بعد من المحور.

4/ إعط عبارة تدفق الحقل المغناطيسي عبر مقطع مستقيم للحلزون.



Exercice 4.14

Un câble coaxial est constitué d'un conducteur cylindrique central de rayon R_1 parcouru par un courant d'intensité I. Il est entouré d'un isolant cylindrique de rayon extérieur R_2. Le retour du courant se fait par un conducteur cylindrique de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_3.

La densité volumique J de courant est uniforme dans les conducteurs ; la longueur est bien supérieure aux rayons.

1/ Déterminer en tout point M de l'espace le champ magnétique.

2/ Etudier la continuité du champ.

3/ Représenter B en fonction de la variable dont il dépend.

التمرين14.4

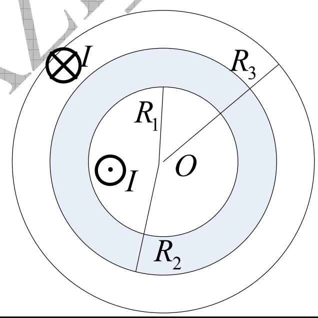
حبل متّحد المحور متكون من ناقل اسطواني مركزي نصف قطره R_1 يمرّ فيه تيار شدته I . يحيط به عازل اسطواني نصف قطره الخارجي R_2. عودة التيار تتم عبر ناقل اسطواني نصف قطره الداخلي R_2 و نصف قطره الخارجي R_3 .

الكثافة الحجمية J للتيار منتظمة في الناقلين؛ طول الحبل كبيرة جدا بالنسبة لأنصاف القطر.

/1 حدّد في كل نقطة M من الفضاء الحقل المغناطيسي.

/2 أدرس استمرارية الحقل.

/3 مثل B بدلالة المتغير الذي تتعلق به.



Exercice 4.15

A l'instant pris pour origine des temps, une particule de masse m et de charge q est au repos dans le vide en un point pris comme origine des espaces. On établit à cet instant un champ magnétique constant $\vec{B} = B\vec{u}_z$ et un champ électrique $\vec{E} = E\vec{u}_y$.

1/ Ecrire les équations différentielles régissant le mouvement de la particule. On posera $\omega = \frac{q}{m}B$.

2/ Trouver les équations paramétriques de la trajectoire. On posera $A = \frac{E}{B\omega}$.

3/ Dessiner l'allure de la trajectoire.

4/ Exprimer l'intensité de la vitesse à l'instant t

التمرين15.4

في اللحظة التي تتخذها كمبدإ للأزمنة ، توجد جسيمة كتلتها m و شحنتها q في سكون في نقطة نأخذها كمبدإ للفضاءات. ننشئ في هذه اللحظة حقلا مغناطيسيا ثابتا $\vec{B} = B\vec{u}_z$ و حقلا كهربائيا $\vec{E} = E\vec{u}_y$.

/1 أكتب المعادلات التفاضلية المسيرة لحركة الجسيمة. نضع $\omega = \frac{q}{m}B$.

/2 أوجد المعادلات الزمنية للمسار. نضع $A = \frac{E}{B\omega}$.

/3 أرسم شكل المسار.

/4 عبر عن شدة السرعة في اللحظة t بدلالة E, B, t

en fonction de E, B, t et ω. Calculer la valeur de celle-ci pour $t = \frac{\pi}{\omega}$.

5/ Retrouver le résultat précédent en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

و ω . أحسب قيمة هذه السرعة من أجل $t = \frac{\pi}{\omega}$.

5/ أوجد من جديد النتيجة السابقة باستعمال نظرية الطاقة الحركية.

Exercice 4.16

Une particule de masse m et de charge $q \succ 0$ est soumise à l'action d'un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$, uniforme et constant. Elle se déplace dans un liquide en subissant une force de frottement $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de la particule par rapport au référentiel du laboratoire.

A l'origine des instants la particule se trouve à l'origine du repère $Oxyz$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$.

1/ Déterminer la position M_Ω de la particule lorsque t tend vers l'infini.

On pose $\tau = \frac{m}{\lambda}$ et $\omega = \frac{q}{m}B$.

2/ On repère la particule dans le plan xOy grâce à des coordonnées polaires : la distance $r = M_\Omega M$ et l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{M_\Omega O}, \overrightarrow{M_\Omega M}\right)$. Déterminer l'équation polaire $r(\theta)$ de la trajectoire de la particule. Représenter l'allure de cette trajectoire. Quel est le nom d'une pareille courbe?

التمرين16.4

تخضع جسيمة كتلتها m و شحنتها $q \succ 0$ لحقل مغناطيسي $\vec{B} = B\vec{u}_z$ ، منتظم و ثابت. تتنقل في سائل و هي خاضعة لقوة احتكاك $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ ، حيث $\vec{v}$ هي سرعة الجسيمة بالنسبة لمرجع المخبر.

في مبدإ الأزمنة توجد الجسيمة في مبدإ المعلم $Oxyz$ بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$.

1/ عيّن الموقع M_Ω للجسيمة حين يؤول t إلى ما لا نهاية.

نضع $\tau = \frac{m}{\lambda}$ و $\omega = \frac{q}{m}B$.

2/ نحدّد موقع الجسيمة في المعلم المستوي xOy بفضل الإحداثيات القطبية: المسافة $r = M_\Omega M$ و الزاوية $\theta = \left(\overrightarrow{M_\Omega O}, \overrightarrow{M_\Omega M}\right)$. عيّن المعادلة القطبية $r(\theta)$ لمسار الجسيمة. مثّل شكل هذا المسار. ما هو اسم مثل هذا المنحنى؟

Exercice 4.17

Un électroaimant produit entre ses pôles un champ magnétique $B(t)$ dépendant du temps. Entre ses pôles on place une bobine de 100 tours, d'aire $4cm^2$, orientée perpendiculairement au champ magnétique. La force électromotrice induite est initialement nulle. Elle passe subitement à la valeur $+3V$ pendant $4ms$, puis à la valeur opposée $-3V$ pendant $4ms$ (voir figure).

1/ Quelle est l'intensité du champ magnétique $B(t)$ entre les pôles de l'électroaimant en fonction du temps (initialement B est nul) ?

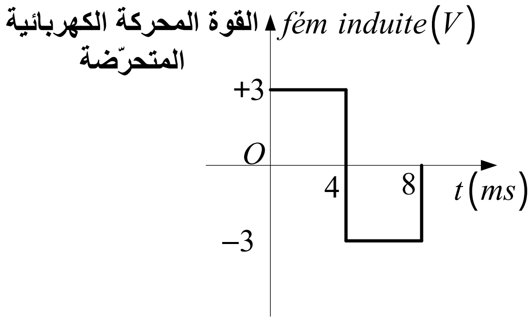
2/ Représenter graphiquement $B(t)$.

التمرين17.4

ينتج كهرومغناطيس بين قطبيه حقلا مغناطيسيا $B(t)$ تابع بالزمن. نضع بين قطبيه وشيعة متكونة من 100 لفة، مساحتها $4cm^2$ ، موجهة عموديا على الحقل المغناطيسي. القوة الكهرومغناطيسية المتحرّضة معدومة في البداية. تقفز فجأة إلى القيمة $+3V$ خلال $4ms$ ، ثم إلى القيمة المعاكسة $-3V$ خلال $4ms$ (أنظر الشكل).

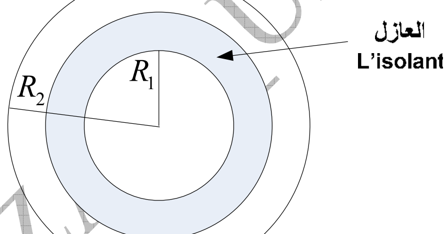
1/ ما هي شدة الحقل المغناطيسي بين قطبي الكهرومغناطيس بدلالة الزمن(في البداية B معدوم)؟

2/ مثل بيانيا $B(t)$.

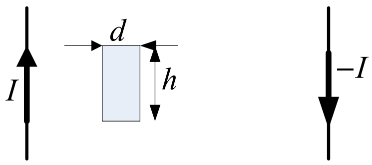


Exercice 4.18	**التمرين18.4**
Une bobine comptant N_2 spires de section S_2 est centrée sur l'axe d'un solénoïde infiniment long comptant n_1 spires par mètre. Son axe fait un angle θ avec celui du solénoïde. Calculer le coefficient d'inductance mutuelle des deux circuits.	وشيعة تشتمل على N_2حلقة ذات مقطع S_2 و متمركزة على محور حلزون لا متناهي الطول يحتوي على n_1حلقة في المتر. يصنع محورها الزاوية θ مع محور الحلزون. أحسب معامل التحريض الذاتي المتبادل للدارتين.

Exercice 4.19	**التمرين19.4**
Calculer l'inductance propre d'une longueur h d'un câble coaxial de longueur infinie de rayons R_1 et R_2.	أحسب التحريض الذاتي لطول h لحبل متّحد المحور طوله لامتناهي و نصفي قطريه R_1 و R_2 .



Exercice 4.20	**التمرين20.4**
On considère deux conducteurs identiques parallèles, de longueur infinie de rayon a dont les axes sont distants de b $(b \succ\succ a)$. Calculer l'inductance propre de ce système.	نعتبر ناقلين متماثلين و متوازيين، طولهما لامتناهي و نصف قطرهما a و بحيث يكون محوراهما متباعدين بـــ b $(b \succ\succ a)$. أحسب التحريض الذاتي لهذه الجملة.



Solution des exercices 4.1 à 4.20 :	حلول التمارين من 1.4 إلى 20.4

التمرين 1.4

بافتراض جزء من البرق خطيا يمكن استعمال القانون:

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}} \to B=\frac{4\pi 10^{-7}\times 20.10^{3}}{2\pi\times 1} \Rightarrow \boxed{B=4.10^{-3}T}$$

هذا على بعد واحد متر من البرق. أما على بعد $300m$ تكون النتيجة:

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}} \to B=\frac{4\pi 10^{-7}\times 20.10^{3}}{2\pi\times 300} \Rightarrow \boxed{B=1,33.10^{-5}T}$$

التمرين 2.4

حسب قاعدة اليد اليمنى: إذا كان التيار الكهربائي يسري نحو الغرب فإن شعاع الحقل المغناطيسي الناتج عن هذا التيار موجه نحو الجنوب.

بالنسبة لتيار مستقيم فإن شدة الحقل المغناطيسي نحصل عليها بالقانون:

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}} \to B=\frac{4\pi 10^{-7}\times 300}{2\pi\times 12} \Rightarrow \boxed{B=5.10^{-6}T}$$

نقارنه مع الحقل المغناطيسي الأرضي $\vec{B}_0$:

$$\frac{B}{B_0}=\frac{5.10^{-6}}{5.10^{-5}}=10^{-1} \Rightarrow \boxed{\frac{B}{B_0}=10^{-1}}$$

الحقل الناتج عن الخط الكهربائي لا يمثل إلا 10% من الحقل المغناطيسي للأرض.

التمرين 3.4

يعطى الحقل المغناطيسي الناتج عن تيار مستقيم شدته I على بعد من الناقل بـــ:

$$B=\mu_0\frac{I}{2\pi}$$

جهة الحقل المغناطيسي تعطى بقاعدة اليد اليمنى.

التيار الذي شدته $1A$ ينتج حقلا مغناطيسيا عموديا على مستوي الناقلين(يدخل في الورقة):

$$B_1=4\pi.10^{-7}\frac{1}{2\pi\times 1} \to B_1=2.10^{-7}T$$

التيار الذي شدته $3A$ ينتج حقلا مغناطيسيا عموديا على مستوي الناقلين(يدخل في الورقة):

$$B_2=4\pi.10^{-7}\frac{3}{2\pi\times 2} \to B_2=3.10^{-7}T$$

الحقل المغناطيسي الكلي هو مجموع الحقلين $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$. بما أن الحقلين لهما نفس الاتجاه ولهما نفس الحامل، فإن الحقل المغناطيسي الكلي عمودي على مستوى الناقلين و شدته:

$$B=B_2+B_1 \to B=5.10^{-7}T$$

التمرين 4.4

حسب قانون بيوت و سافار فإن الحقل المغناطيسي العنصري $d\vec{B}$ الناتج عن طول عنصري dl من الحلقة يجتازها تيار كهربائي شدته I هو:

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\vec{dl}\wedge\vec{u}$$

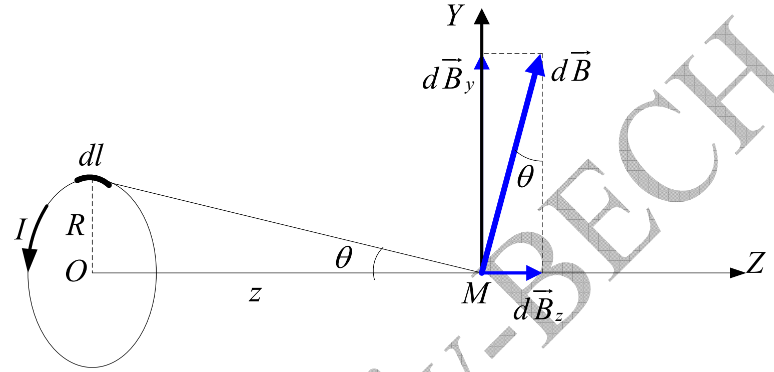
و بما أن $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ فإنه يمكن كتابة القانون السابق على الشكل:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\vec{dl} \wedge \vec{r}$$

نلاحظ أن $\vec{dl} \perp \vec{r}$ ، مما يستلزم $\left|\vec{dl} \wedge \vec{r}\right| = dl.r$ و عليه:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl$$

يمكن تحليل $d\vec{B}$ إلى مركبتين $d\vec{B}_z$ و $d\vec{B}_y$ ، بحيث عند القيام بعملية التكامل فإن كل المركبات $d\vec{B}_y$ تنعدم مثنى مثنى بسبب التناظر. الحقل الكلي الناتج هو محصلة كل المركبات $d\vec{B}_z$ ، و بالتالي فإن $\vec{B}_z$ الحاصل موازي للمحور OZ .



بالإسقاط (أنظر الشكل) : $dB_z = dB.\sin\theta \to dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\sin\theta dl$

للحصول على B_z نكامل العبارة السابقة بالنسبة للمتغير الوحيد l فنحصل على:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\sin\theta \oint dl$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\sin\theta .2\pi R \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R}{r^2}\sin\theta$$

بما أن $\sin\theta = \frac{R}{r}$ فإنه يمكن الحصول على العبارة النهائية:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2R}\frac{R^2}{r^2}\sin\theta \Rightarrow \boxed{B_z = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\theta \Leftrightarrow \vec{B}_z = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\theta .\vec{u}_z}$$

2/ بتعويض هذه المرة $\sin\theta$ بـــ $\frac{R}{r} = \frac{R}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}$ نحصل على العبارة المعطاة:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

3/ الشكل التقريبي لهذه العبارة على مسافات كبيرة للمحور OZ نحصل عليها بإهمال نصف قطر الحلقة أمام المسافة الكبيرة z ، فتكون النتيجة:

$$\boxed{B_z \approx \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{z^3}}$$

4/ التعبير عن B_z بدلالة العزم المغناطيسي M :

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} M = IS \\ S = \pi R^2 \end{array}\right| \rightarrow M = I\pi R^2 \\ B_z = \dfrac{\mu_0 I}{2}\dfrac{R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\dfrac{I\pi R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{B_z = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{M}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}}$$

5/ نحصل على الحقل المغناطيسي الناتج في مركز الحلقة بوضع $z=0$:

$$\boxed{B_o = \frac{\mu_0 I}{2R}}$$

التمرين 5.4

1/ الحقل المغناطيسي الناتج عن ناقل مستقيم على بعد d منه هو $B = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{I}{d}$.

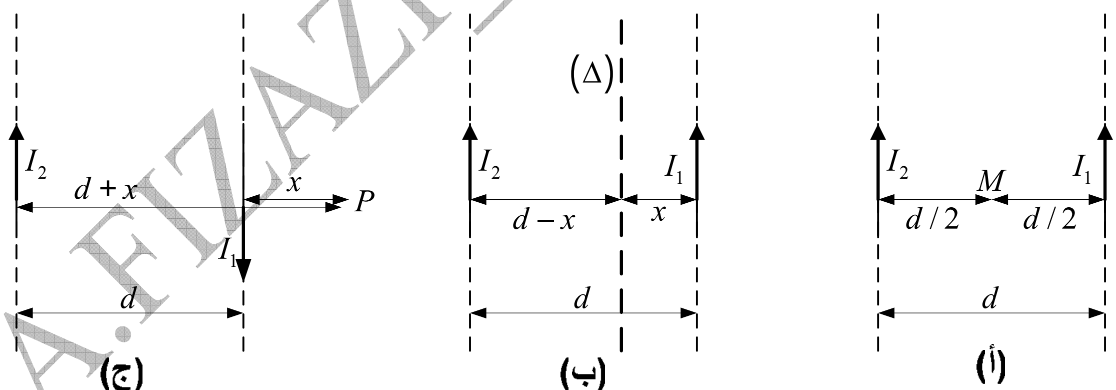
الحقل المغناطيسي الناتج في النقطة M (الشكل $(أ)$) هو محصلة الحقلين المغناطيسيين الناتجين عن الناقلين المستقيمين: $\vec{B}_M = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$

حسب قاعدة اليد اليمنى فإن $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ متعاكسا الإتجاه: $B_M = B_2 - B_1$

$$B_M = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{d/2} - \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{d/2} \Rightarrow \boxed{B_M = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{1}{d/2}\left(I_2 - I_1\right)} \rightarrow \boxed{B_M = 1,2.10^{-4}T}$$

إنعدام $\vec{B}$ يعني: $\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{0}$. لا يمكن لهذا الشرط أن يتحقق خارج الناقلين، لأن $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ لهما نفس الإتجاه وبالتالي $B_0 = B_2 + B_1 \neq 0$. إذن لابد أن المستقيم (Δ) أين $B = 0$ يقع بين الناقلين حيث $B_0 = B_2 - B_1 = 0$. و عليه و بالنظر إلى الشكل (ب):

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{d-x} - \frac{\mu}{2\pi}\frac{I_1}{x} = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{I_1}{I_2 - I_1}d} \rightarrow \boxed{x = \frac{d}{3}}$$



2/ في هذه الحالة $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ لهما نفس الإتجاه: $B_P = B_2 + B_1$

حسب الشكل $(أ)$ و لكن بعكس اتجاه I_1 :

$$B_M = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{d/2} + \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{d/2} \Rightarrow \boxed{B_M = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{1}{d/2}\left(I_2 + I_1\right)} \rightarrow \boxed{B_M = 2.10^{-4}T}$$

مستحيل أن ينعدم الحقل المغناطيسي بين الناقلين لأن $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ لهما نفس الاتجاه. إذن لا بد أن النقطة P تقع خارج الناقلين $B_P = B_2 + B_1 \neq 0$. لابد أن المستقيم أين $B_P = 0$ يقع خارج الناقلين حيث $B_P = B_2 - B_1 = 0 \Leftrightarrow B_2 = B_1$. و عليه و بالنظر إلى الشكل (ج):

$$B_P = \frac{\mu}{2\pi}\frac{I_2}{d+x} - \frac{\mu}{2\pi}\frac{I_1}{x} = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{I_1}{I_2 + I_1}d} \rightarrow \boxed{x = \frac{d}{5}}$$

التمرين6.4:

نعرف أن الشحنة التي تنتقل في حقل مغناطيسي تكون خاضعة لقوة مغناطيسية $\vec{F} = q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$ ، حيث شدتها تساوي $F = qv_0 B\sin\alpha$. $\alpha = (\vec{v}_0, \vec{B})$

الجسيمة المشحونة خاضعة لقوتين: القوة المغناطيسية $\vec{F}$ و ثقلها $\vec{P} = m\vec{g}$. لكي يبقى مسارها أفقيا يجب أن تكون القوتان متعاكستين مباشرة $\vec{F} = -\vec{P}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{B} \perp \vec{v}_0 \Rightarrow \sin\alpha = 1 \Rightarrow F = qv_0 B \\ P = mg \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{B = \frac{mg}{qv_0}}$$

التطبيق العددي:

$$B = \frac{5.10^{-4} \times 9,8}{2,5.10^{-8} \times 6.10^{4}} \rightarrow \boxed{B \approx 3,27T}$$

أما جهة $\vec{B}$ فهي أفقية و عمودية على المستوي الشاقولي المشكل من السرعة $\vec{v}_0$ و القوة $\vec{F}$.

$\vec{v}_0$ أفقية وحاملها المحور $x'x$،

$\vec{F}$ شاقولية و حاملها المحور $z'z$،

$\vec{B}$ أفقية و حاملها المحور $y'y$.

التمرين7.4

1/ رأينا في الدرس و في تمرين سابق أن شعاع الحقل المغناطيسي الناتج عن حلقة دائرية(نصف قطرها R و يجتازها تيار شدته I) في نقطة من محورها يعطى بالعبارة:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2R}\sin^3\theta.\vec{u}_x$$

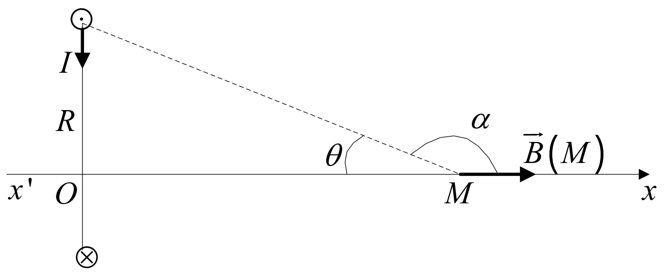
تجوال الشعاع $\vec{B}$ على المحور $(x'Ox)$ يساوي:

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} B(x)\,dx$$

مع العلم أن: $x = -\frac{R}{\tan\alpha} \Rightarrow dx = \frac{R}{\sin^2\alpha}dx$ و بما أن $\alpha + \theta = 180°$ فإن $\sin\theta = \sin\alpha$

و عليه:

$$C = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0}{2R}\frac{\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha}R\,d\alpha \Rightarrow \boxed{C = \mu_0 I}$$



2/ الناقل الحلزوني متكون من N حلقة دائرية. للحصول على التجوال يكفي ضرب النتيجة السابقة في N ، فنجد:

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} B(x)\,dx = \boxed{C = N\mu_0 I}$$

التمرين8.4

1/ الشاردة ذات الشحنة q عند مرورها من O' إلى O تحت تأثير التوتر U تتلقى العمل:

$$W = qU$$

نطبق نظرية الطاقة الحركية للحصول على السرعة النهاية التي تصل بها الشاردة إلى O:

$$\frac{1}{2}mv^2 = qU \Rightarrow v = \sqrt{2\frac{q}{m}U}$$

سرعة الشوارد $^{7}_{3}Li^+$ هي:

$$\boxed{v_1 = \sqrt{2\frac{q}{m_1}U}}$$

سرعة الشوارد $^{6}_{3}Li^+$ هي:

$$\boxed{v_1 = \sqrt{2\frac{q}{m_2}U}}$$

2/ تتنقل الشاردة داخل غرفة الفصل بسرعة $\vec{v}$ و هي تخضع للقوة المغناطيسية:

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

لدينا المقادير الشعاعية التالية:

$$\vec{a}\begin{cases}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{cases} \quad , \quad \vec{v}\begin{cases}v\\ 0\\ 0\end{cases} \quad , \quad \vec{B}\begin{cases}0\\ B\\ 0\end{cases}$$

نكتب تسارع للحركة الآن:

$$\begin{cases}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{cases} = \frac{q}{m}\begin{cases}v\\ 0\\ 0\end{cases} \wedge \begin{cases}0\\ B\\ 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{cases} = \begin{cases}0\\ 0\\ \dfrac{q}{m}vB\end{cases}$$

تظهر لنا من هذه النتائج، و استنادا لما أعطي لنا في النص، أن:

$$\ddot{x} = a_x = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = v_x = C^{te}$$
$$\ddot{y} = a_y = 0 \Leftrightarrow \dot{y} = v_y = 0$$
$$\ddot{z} = a_z = \frac{q}{m} vB \Leftrightarrow \dot{z} = v_z = 0$$

نلاحظ أن التسارع يحمله المحور Oz و هذا يعني أن القوة المغناطيسية التي تخضع لها الشحنة عمودية على المستوى xOy أي عمودية على السرعة $\vec{v}$ و كذا على المسار. الشوارد تبقى في المستوى xOz خلال انتقالها في المجال المغناطيسي. إذن التسارع ناظمي.

في معلم فرينت $(O,\vec{N},\vec{T})$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_N + \vec{a}_T \rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$$

و بما أن السرعة ثابتة فإن المركبة المماسية للتسارع معدومة.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}_T = \dfrac{dv}{dt}\vec{T} = \vec{0} \\ \vec{v} = \overrightarrow{C^{te}} \end{array}\right| \Rightarrow \text{الحركة منتظمة}$$

التسارع ناظمي:

$$\vec{a} = \vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\vec{N} \rightarrow a_N = \frac{v^2}{R} = v\frac{e}{m}B$$

نصف قطر الانحناء هو إذن:

$$R = \frac{mv}{eB} = C^{te} \Rightarrow \text{الحركة دائرية}$$

و الخلاصة أن الحركة دائرية منتظمة.

ننقل عبارة السرعة الموضوعة سابقا في عبارة R فنجد:

$$R_1 = \frac{m_1}{qB}v_1 \Rightarrow \boxed{R_1 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_1U}{q}}} \rightarrow \boxed{OC_1 = 2R_1 \approx 4,8cm}$$

$$R_2 = \frac{m_2}{qB}v_2 \Rightarrow \boxed{R_2 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_2U}{q}}} \rightarrow \boxed{OC_2 = 2R_2 \approx 4,5cm}$$

التمرين 9.4

نهمل في كل هذا الحل الثقل أمام القوى الأخرى.

/1الانحراف الناتج عن الحقل الكهربائي وحده.

معادلة المسار:

وفق المحور Ox القوة الوحيدة المؤثرة على الحزمة الشاردية هي القوة الكهربائية $\vec{F} = qE.\vec{u}_x$.

نطبق المبدإ الأساسي للتحريك فنكتب:

$$m\vec{a}_x = qE.\vec{u}_x \Rightarrow a_x = \frac{q}{m}E$$

و بما أن المكثفة مستوية فإن $E = \dfrac{U}{h}$ ، و عليه:

$$a_x = \frac{qU}{mh}$$

التسارع ثابت وفق المحور Ox. إذن الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام، معادلتها الزمنية هي:

$$x=\frac{1}{2}a_x t^2 \rightarrow x=\frac{1}{2}\frac{qU}{mh}t^2$$

<u>وفق المحور</u> Oy لا تؤثر أي قوة على الحزمة الشاردية التي تتقدم بسرعة ثابتة $\vec{v}=\vec{v}_y=v_y\vec{u}_y$. الحركة وفق هذا المحور مستقيمة منتظمة و معادلتها الزمنية هي:

$$y=v_0 t \Rightarrow t=\frac{y}{v_0}$$

الانحراف النهائي على الشاشة عند خروج الحزمة من المكثفة (أين $y=L$) بعد المدة $\Delta t=\frac{L}{v_0}$ هو:

$$\boxed{x=\frac{1}{2}\frac{qU}{mh}\left(\frac{L}{v_0}\right)^2=\Delta x} \rightarrow (1)$$

2/ <u>الانحراف الناتج عن الحقل المغناطيسي وحده.</u>

<u>معادلة المسار:</u>

<u>وفق المحور</u> Oz القوة الوحيدة المؤثرة على الحزمة الشاردية هي القوة المغناطيسية العمودية على المحور Ox الذي يحمل شعاع الحقل المغناطيسي: $\vec{F}=q\vec{v}_0\wedge\vec{B}$.

نطبق المبدإ الأساسي للتحريك فنكتب:

$$m\vec{a}_z=\frac{q}{m}v_0.\vec{u}_y\wedge -B.\vec{u}_x \Rightarrow \vec{a}_z=\frac{q}{m}v_0 B.\vec{u}_z$$

$$a_z=\frac{q}{m}v_0 B$$

التسارع ثابت وفق المحور Oz. إذن الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام، معادلتها الزمنية هي:

$$z=\frac{1}{2}a_z t^2 \rightarrow z=\frac{1}{2}\frac{q}{m}v_0 B.t^2$$

<u>وفق المحور</u> Oy لا تؤثر أي قوة على الحزمة الشاردية التي تتقدم بسرعة ثابتة $\vec{v}=\vec{v}_y=v_y\vec{u}_y$. الحركة وفق هذا المحور مستقيمة منتظمة و معادلتها الزمنية هي:

$$y=v_0 t \Rightarrow t=\frac{y}{v_0}$$

الانحراف النهائي على الشاشة عند خروج الحزمة من المكثفة (أين $y=L$) بعد المدة $\Delta t=\frac{L}{v_0}$ هو:

$$\Delta z=\frac{1}{2}\frac{q}{m}Bv_0\left(\frac{L}{v_0}\right)^2 \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{2}\frac{q}{m}B\frac{L^2}{v_0}=\Delta z} \rightarrow (2)$$

3/ الأثر الذي تتركه الحزمة على الشاشة إنزاح وفق المحور Oz (أي في مستوى الحركة الأصلية) بينما في الحالة الأولى انزاح الأثر عموديا على هذا المستوى.

الانحراف الناتج هو تراكب الانحرافين الناتجين عن الحقلين الكهربائي و المغناطيسي. بحذف السرعة بين المعادلتين (1) و (2) نحصل على:

$$v_0=\frac{1}{2}\frac{q}{m}B\frac{L^2}{z} \Rightarrow \boxed{x=2\frac{m}{q}\frac{U}{h}\frac{1}{B^2L^2}z^2}$$

نلاحظ أن العبارة مستقلة عن السرعة الابتدائية.

4/ تسمح هذه التجربة باستنتاج الشحنة الكتلية $\frac{q}{m}$ للشوارد المكونة للحزمة. و بالفعل المقادير U, B, L, h معروفة مسبقا و لا يبقى إلا استنتاج النسبة بين كتلة الشاردة و شحنتها.

التاريخ: ميليكان(R.A Millikan) بتجربته الشهيرة استطاع حساب شحنة الإلكترون بفضل النتيجة التي توصل إليها قبله طومسون(J.J Thomson) و هي بالذات الشحنة الكتلية $\frac{q}{m}$. لم يبقى بعد ذلك إلا استنتاج كتلة الإلكترون.

التمرين10.4

1/ كل إلكترون من الحزمة يخضع عند دخوله الحقل المغناطيسي إلى قوة مغناطيسية:

$$\vec{F} = q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$$

نطبق المبدإ الأساسي للتحريك:

$$m\vec{a} = -ev_0.\vec{u}_x \wedge B.\vec{u}_z \rightarrow \vec{a} = \frac{e}{m}v_0 B.\vec{u}_y \Rightarrow \vec{a} = a.\vec{u}_y \Leftrightarrow \vec{F} = F.\vec{u}_y$$

القوة المغناطيسية التي يخضع لها الإلكترون عمودية على كل من $\vec{v}_0$ (أي المسار) و $\vec{B}$. ندرس الحركة في معلم فرينت $\left(O, \vec{N}, \vec{T}\right)$. يكتب التسارع:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_N + \vec{a}_T \rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$$

و بما أن السرعة ثابتة فإن المركبة المماسية للتسارع معدومة.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}_T = \frac{dv}{dt}\vec{T} = \vec{0} \\ \vec{v} = \vec{v_0} = \overrightarrow{C^{te}} \end{array}\right| \Rightarrow \text{الحركة منتظمة}$$

التسارع ناظمي:

$$\vec{a} = \vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\vec{N} \rightarrow a_N = \frac{v_0^2}{R} = v_0 \frac{e}{m} B$$

نصف قطر الانحناء هو إذن:

$$R = \frac{mv_0}{eB} = C^{te} \Rightarrow \text{الحركة دائرية}$$

خلاصة القول فالحركة دائرية منتظمة. المسار داخل مجال المكثفة هو قوس قطره R. أنظر الشكل أسفله

2/ زاوية الانحراف α تساوي الزاوية في المركز للقوس $\widehat{OA}$ (أنظر الشكل) و بالتالي:

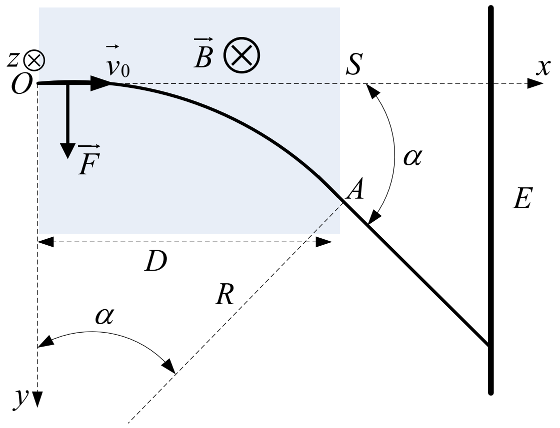
$$\alpha = \frac{\widehat{AO}}{R} \approx \frac{l}{R} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{e}{mv_0}Bl}$$

3/ بما أن الحركة دائرية فالسرعة الزاوية هي:

$$\left.\begin{array}{l} \omega = \frac{v_0}{R} \\ R = \frac{mv_0}{eB} \end{array}\right| \Rightarrow \omega = \frac{eB}{m}$$

إذن الدور هو:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi.m}{eB}}$$



4/ إذا ضاعفنا السرعة v_0 فإن:

نصف القطر يتضاعف، و لكن الدور و السرعة الزاوية لا يتأثران لأنهما مستقلان عن السرعة الإبتدائية.

5/ إذا دخلت حزمة الإلكترونات بسرعة موازية للحقل المغناطيسي فأنها لن تتأثر بأية قوة، إذا أهملنا ثقلها، و بالتالي فمسارها يبقى على حاله أي مستقيا.

$$\left.\begin{array}{l}\vec F = m\vec a = -ev_0.\vec u_x \wedge B.\vec u_x \\ \vec u_x \wedge \vec u_x = \vec 0\end{array}\right| \Rightarrow \vec F = \vec 0 \Rightarrow \vec v = \overrightarrow{C^{te}} \Rightarrow$$ الحركة مستقيمة منتظمة

6/ في هذه الحالة الموصوفة في النص فإن لكل من السرعة و التسارع مركبتان:

$\vec v_\parallel$ و $\vec a_\parallel$: مسقطان عل منحى $\vec B$،

$\vec a_\perp$ و $\vec v_\perp$: مسقطان على المستوى العمودي على $\vec B$.

بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك :

$$\vec F = m\vec a = q\left(\vec v \wedge \vec B\right) \Rightarrow m\left(\vec a_\parallel + \vec a_\perp\right) = q\left(\vec v_\parallel + \vec v_\perp\right) \wedge \vec B$$

عندما ننشر نلاحظ أن الجداء الشعاعي $q.\vec v_\parallel \wedge \vec B$ معدوم لأن $\vec v_\parallel$ و $\vec B$ متوازيان، فنحصل على:

$$\underbrace{m.\vec a_\parallel}_{\vec 0} + m.\vec a_\perp = \underbrace{q.\vec v_\parallel \wedge \vec B}_{\vec 0} + q\vec v_\perp \wedge \vec B \Rightarrow \left|\begin{array}{l} m.\vec a_\parallel = \vec 0 \\ q.\vec v_\parallel \wedge \vec B = \vec 0\end{array}\right.$$

هاتان النتيجتان تظهر لنا أن حركة الشحنة هي محصلة:

حركة مستقيمة منتظمة موازية للحقل: $m.\vec a_\parallel = \vec 0 \Rightarrow \vec v_\parallel = \overrightarrow{C^{te}}$

و حركة دائرية منتظمة حول الشعاع $\vec B$، نصف قطرها $R = \frac{m.v_\perp}{eB}$ و سرعتها الزاوية $\omega = \frac{eB}{m}$.

المسار شكله حلزوني. نصف قطر الحلزون الذي ترسمه الحزمة الالكترونية يساوي $R = \frac{m.v_\perp}{eB}$.

التمرين 11.4

1/ المستوى $O\vec u_y \vec u_z$، الموازي لـــ $\vec J_S$، هو مستوى تناظر للتيارات: و بالتالي، فإن الحقل المغناطيسي $\vec B$ عمودي على هذا المستوى أي $\vec B = B\vec u_x$.

بانسحاب وفق $\vec{u}_x$، توزيع هذا التيار غير متغيّر؛ بانسحاب وفق $\vec{u}_y$، توزيع هذا التيار غير متغيّر.
و عليه فإن شدة الحقل المغناطيسي لا يتعلق إلا بـــ z.

قاعدة اليد اليمنى أو قاعدة آمبير تعطي اتجاه الحقل المغناطيسي: إذا كان $z \succ 0$ فإن $\vec{B}$ موجه وفق $\vec{u}_x$ و إذا كان $z \prec 0$ فإن $\vec{B}$ موجه نحو $-\vec{u}_x$.

2/ تجوال $\vec{B}$ على الحلقة $AEDGA$ يساوي مجموع التجوالات على كل قطعة مستقيمة (الشكل):

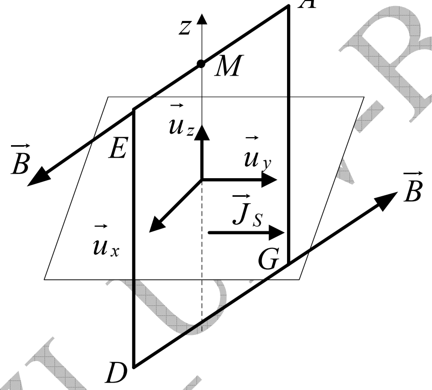
$$C = C_{AE} + C_{ED} + C_{DG} + C_{GA}$$

$C_{ED} = \int_E^D B.ED = 0\ ,\ C_{GA} = \int_G^A B.GA = 0$ لأن $\vec{B}$ عمدي على الضلعين(الإنتقالين). على الضلعين الآخرين $C_{AE} = C_{ED}$. التجوال الكلي هو إذن $C = C_{AE} + C_{DG}$:

$$C = \int_A^E B.AE + \int_D^G B.DG = \mu_0 I$$

$$2B.AE = \mu_0 .J.AE \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{2}\mu_0 .J}$$

الخلاصة أن الحقل المغناطيسي ثابت على جانبي المستوى مهما كان علو النقطة M.



3/ و عليه عند عبور المستوى، أي $z \to 0$، تنعدم استمرارية الحقل المغناطيسي بسبب تغيير إشارته من + إلى −

$$\Delta\vec{B} = \vec{B}\left(z = 0^+\right) - \vec{B}\left(z = 0^-\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{B}\left(z = 0^+\right) = \left(\dfrac{1}{2}\mu_0 J.\vec{u}_x\right) \\ -\vec{B}\left(z = 0^-\right) = -\left(-\dfrac{1}{2}\mu_0 J.\vec{u}_x\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\Delta\vec{B} = \mu_0 J.\vec{u}_x}$$

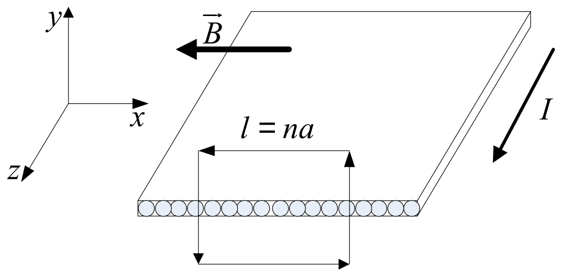
<u>التمرين 12.4</u>

1/ ا/ قطعة مستقيمة من الشريط (أو الحزام) طولها $l = na$، وفق المحور Ox، يجتازها تيار كلي شدته nI. نستنتج كثافة التيار الكهربائي:

$$\vec{J} = \frac{\text{شـــدة التيـــار}}{\text{طـول الناقـل}} = \frac{I}{a}\vec{u}_z$$

ب/ حسب قاعدة اليد اليمنى فإن الحقل المغناطيسي الناتج، و بسبب تناظر المسألة، له مركبة وحيدة وفق المحور Ox و تعاكسه في الاتجاه، أي $\vec{B} = -\vec{B}_x$

ليكن المحيط المربع المبيّن على الشكل التالي:



التجوال C لـ $\vec{B}$ على الضلعين الموازيين لـ Oz معدوم لأن $\vec{B}$ عمودي على كل منهما، و التجوال على الضلعين الموازيين للمحور Ox لا يقحم إلا المركبة $\vec{B}_x$. حسب قاعدة آمبير فإن:

$$C = \sum B\Delta l = \mu_0 \underbrace{\sum I}_{Jl} \Rightarrow C = Bl + Bl = \mu_0 .Jl \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{2}\mu_0 .J}$$

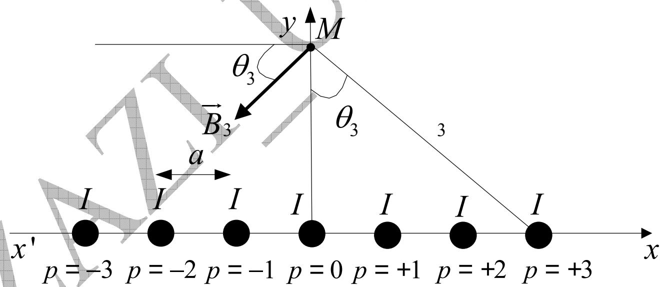
ج/ إذن الحقل المغناطيسي الناتج عن هذا التيار في الحالة المذكورة هو:

$$\boxed{\vec{B}_0\left(M\right) = -\frac{\mu_0 I}{2a}\vec{u}_x}$$

الإشارة − ناتجة عن كون $\vec{B}_0\left(M\right)$ ، و حسب قاعدة اليد اليمنى، يقع على المحور Ox غير أنه يعاكسه في الاتجاه.

2/ المستوى $x = 0$ الذي يحتوي على M هو مستوى تناظر بالنسبة للتيارات؛ المركبة الوحيدة التي لا تنعدم هي B_x.

أنظر الشكل التالي:



السلكان p و $-p$ ، الواقعان على البعد $r_p = \sqrt{p^2a^2 + y^2}$ من M، يولّد كلّ منهما حقلا بحيث المركبات $\vec{B}_{py}$ متعاكسة مباشرة فتنعدم، و الإحداثيات $\vec{B}_{px}$ هي:

$$\vec{B}_{px} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_p}\left(-\cos\theta_p\right)\vec{u}_x \; ; \; B_{px} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_p}\left(-\cos\theta_p\right) \Rightarrow \boxed{B_{px} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r_p}\frac{y}{r_p}}$$

الحقل الكلي هو مجموع كل المركبات $\vec{B}_{px}$، إذن:

$$\vec{B}\left(M\right) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\sum_p \frac{y}{r_p^2}\vec{u}_x = -\frac{\mu_0 Iy}{2\pi}\sum_p \frac{1}{r_p^2}\vec{u}_x \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_0\left(M\right)f\left(y\right)$$

الدالة $f\left(y\right)$ يجب أن تساوي:

$$-\frac{\mu_0 Iy}{2\pi}\sum_p \frac{1}{r_p^2} = -\underbrace{\frac{\mu_0 I}{2a}}_{B_0(M)} f\left(y\right) \Rightarrow f\left(y\right) = \frac{a.y}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{p^2a^2 + y^2}$$

$$\boxed{f(y)=\frac{a}{y.\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{p^2\dfrac{a^2}{y^2}+1}}$$

3/ في هذه الحالة الحقل يبقى دائما موجها وفق Ox . نقوم تقريبا بنفس الحسابات .

$$r_p=\sqrt{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2a^2+y^2}$$

$$\vec{B}(M)=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\sum_p\frac{y}{r_p^2}\vec{u}_x=-\frac{\mu_0 Iy}{2\pi}\sum_p\frac{1}{r_p^2}\vec{u}_x\Rightarrow\vec{B}=\vec{B}_0(M)f(y)$$

الدالة $f(y)$ يجب أن تساوي:

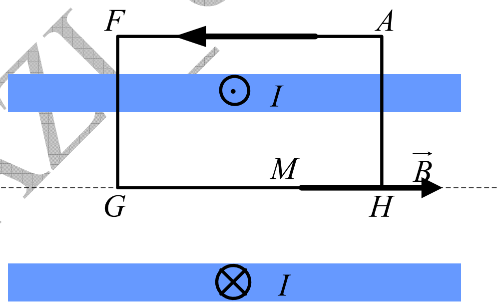
$$-\frac{\mu_0 Iy}{2\pi}\sum_p\frac{1}{r_p^2}=-\frac{\mu_0 I}{2a}f(y)\Rightarrow f(y)=\frac{a.y}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2a^2+y^2}$$

$$\boxed{f(y)=\frac{a}{y.\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2\dfrac{a^2}{y^2}+1}}$$

التمرين 13.4

1/ الحقل المغناطيسي للحلزون مواز لمحور الوشيعة. يبقى غير متغير في حالة انسحاب موازي للمحور $z'z$ أو بدوران حول هذا المحور.

نختار المحيط $AFGHA$ لتطبيق نظرية آمبير.



على المسلك AF : الحقل معدوم لأنه خارج الحلزون، طبقا للنص.

على المسلكين FG و AH : شعاع الحقل و كل من المسلكين متعامدان: تجوال الحقل معدوم.

على المسلك $GH=L$: $C=\int_D^F\vec{B}(r)\vec{dl}\Rightarrow C=B(r)L$

شدة التيارات المتشابكة:

الطول L يحتوي على NL حلقة. في السمك R_2-R_1 توجد $N(R_2-R_1)$ حلقة. إذن شدة التيار التي تجتاز هذه المجموعة من الحلقات المتشابكة هي: $NL.N(R_2-R_1)=N^2(R_2-R_1)L.I$.

نطبق نظرية آمبير:

$$C=B(r)L=\mu_0N^2(R_2-R_1)L.I$$

وفي الأخير شدة الحقل المغناطيسي في نقطة من المحور هي:

$$\boxed{B(r) = \mu_0 N^2 (R_2 - R_1).I}$$

2/ محيط مماثل يمر من P مهما كان موقعها داخل الحلزون يؤدي لنفس النتيجة: إذن الحقل منتظم داخل الحلزون.

3/ نتّبع نفس الطريقة حين تكون النقطة M داخل اللفات على بعد من المحور. يكفي استبدال R_1 بـــ لنجد:

$$\boxed{B(r) = \mu_0 N^2 (R_2 - r).I}$$

4/ التدفق عبر مقطع مستقيم من الحلزون يستوجب جمع تدفقين:

التدفق داخل الحلزون و يساوي:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_i = SB \\ S = \pi R_1^2\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\Phi_i = \pi R_1^2 \mu_0 N^2 (R_2 - R_1).I}$$

التدفق عبر اللفات و الذي من أجله نختار إكليلا نصف قطره و سمكه d ، بحيث يكون سطحه العنصري $dS = 2\pi r dr$. نكامل العبارة التي كنا قد توصلنا إليها في3/، من R_1 إلى R_2 فنحصل على:

$$\Phi_2 = \int_{R_1}^{R_2} \mu_0 N^2 (R_2 - r) I.2\pi r dr \Rightarrow \Phi_2 = \mu_0 \pi N^2 I \left(\frac{1}{3}R_2^3 - R_2 R_1^2 + \frac{2}{3}R_1^3\right)$$

التدفق الكلي هو:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \Rightarrow \boxed{\Phi = \frac{1}{3}\pi\mu_0 N^2 I \left(R_2^3 - R_1^3\right)}$$

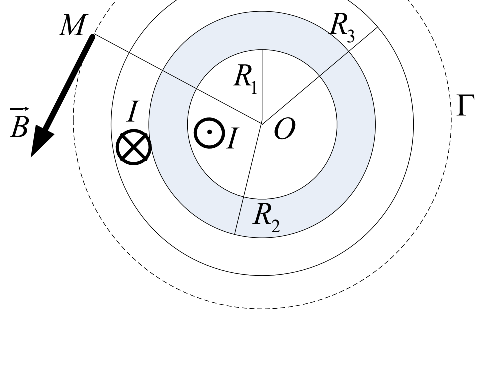
<u>التمرين 14.2</u>

الحقل قطري و لا يتعلق إلا بالبعد الذي هو نصف قطر الدائرة (أنظر الشكل أسفله).

تجوال الحقل المغناطيسي على طول المنحنى Γ الدائري و الذي نصف قطره هو:

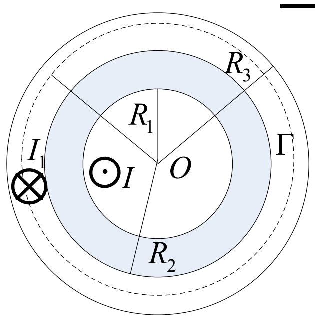
$$C = \oint_\Gamma \vec{B}(r)\vec{dl} \Rightarrow C = 2\pi r B(r)$$

نطبّق نظرية آمبير: $2\pi r B(r) = \mu_0 \sum_i I_i$



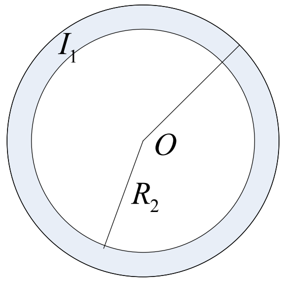
<u>النقطة M خارج الحبل</u> $(r \succ R_3)$: شدة التيار الداخل تساوي شدة التيار الخارج و بالتالي فالمجموع معدوم، و منه: $\mu_0 \sum_i I_i = 0 \Rightarrow B(r) = 0$

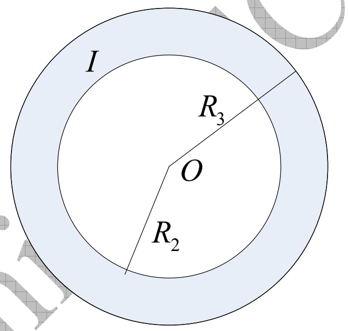
النقطة M بين الناقلين $\left(R_2 \prec r \prec R_3\right)$:



شدة التيار الداخل و العابر للمحيط Γ هي I. نعيّن عبارة الشدة I_1 للتيار الخارج أي العائد و العابر للمحيط Γ أي التيار الذي يمرّ في هذا الحيّز المحصور بين R_2 و $\left(r \succ R_2\right)$.

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= J\pi\left(r^2 - R_2^2\right) \\ I &= J\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right) \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{I_1 = I\,\frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}}$$





$$I_1 = J\pi\left(r^2 - R_2^2\right) \qquad I = J\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)$$

نطبّق نظرية آمبير فنحصل على:

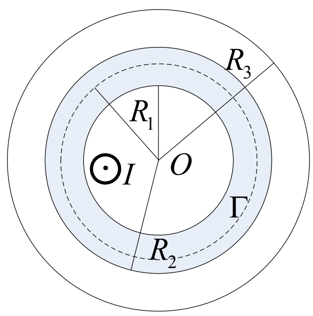
$$2\pi r B\left(r\right) = \mu_0 \sum_i I_i = \mu_0\left(I - I_1\right)$$

$$\boxed{B\left(r\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}}$$

مناقشة:

$$B\left(r\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \rightarrow \left|\begin{aligned} & r \rightarrow R_3 : B\left(r\right) \rightarrow 0 \\ & r \rightarrow R_2 : B\left(r\right) \rightarrow \frac{\mu_0 I}{2\pi} \end{aligned}\right.$$

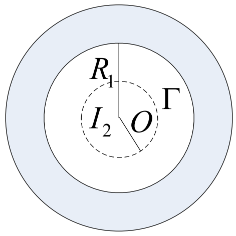
النقطة M داخل العازل $\left(R_1 \prec r \prec R_2\right)$: في هذه الحالة التيار الداخل وحده يعبر المحيط Γ.



$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

$$r \to R_2 : B(r) \to \frac{\mu_0 I}{2\pi R_2}$$

النقطة M داخل الناقل الأول$(r \prec R_1)$:



شدة التيار الداخل و العابر للمحيط Γ داخل الحيّز المحصور بين R_1 و $(r \prec R_1)$ هو:

$$\left.\begin{array}{l} I_2 = J\pi r^2 \\ I = J\pi R_1^2 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{I_2 = I\frac{r^2}{R_2^2}}$$

نطبّق نظرية آمبير فنحصل على:

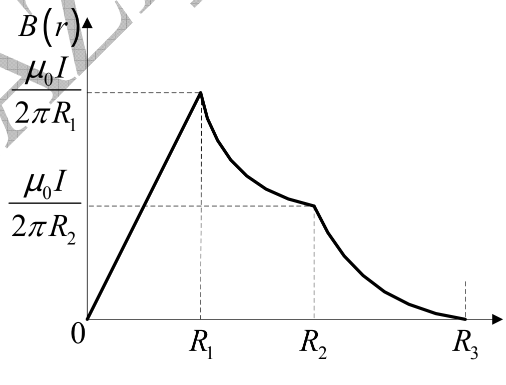
$$2\pi r B(r) = \mu_0 I_2$$

$$\boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{R_1^2}}$$

$$r \to R_1 : B(r) \to \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1}$$

تبعا لكل النتائج المحصل عليها في السؤالين السابقين فإن الحقل مستمر على مختلف السطوح الفاصلة بين مختلف مكونات الحبل.

4/ التمثيل البياني للحقل المغناطيسي $B(r)$ بدلالة البعد :



التمرين 15.4

1/ المعادلات التفاضلية المسيرة لحركة الجملة.

نختار كمعلم لدراسة حركة الجسيمة المعلم الغليلي $\Re(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$. الجسيمة خاضعة لثقلها و قوة لورنتز. غير أننا نهمل تأثير الثقل أمام القوة الكهرومغناطيسية. القانون الثاني لنيوتن يمّكننا من كتابة:

$$\vec{F} = m\vec{a} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

لدينا المقادير الشعاعية التالية:

$$\vec{a}\begin{cases}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{cases} \quad , \quad \vec{v}\begin{cases}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{cases} \quad , \quad \vec{B}\begin{cases}0\\ 0\\ B\end{cases} \quad , \quad \vec{E}\begin{cases}0\\ E\\ 0\end{cases}$$

يكتب التسارع إذن:

$$\vec{a}\begin{cases}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{cases} = \frac{q}{m}\left[\vec{E}\begin{cases}0\\ E\\ 0\end{cases} + \vec{v}\begin{cases}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{cases} \wedge \vec{B}\begin{cases}0\\ 0\\ B\end{cases}\right] \Rightarrow \begin{cases}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{q}{m}B\dot{y}\\ \dfrac{q}{m}E - \dfrac{q}{m}B\dot{x}\\ 0\end{cases}$$

بوضع $\omega = \frac{q}{m}B$، نحصل على جملة المعادلات التفاضلية التالية التي تحكم حركة الجسيمة:

$$\boxed{\begin{cases}\ddot{x} = \omega\dot{y} \rightarrow (1)\\ \ddot{y} = \dfrac{q}{m}E - \omega\dot{x} \rightarrow (2)\\ \ddot{z} = 0 \rightarrow (3)\end{cases}}$$

2/ المعادلات الزمنية للمسار.

نظرا للشروط الإبتدائية فإن المعادلة (3) تؤدي إلى $\boxed{z=0}$.

تتم الحركة إذن في المستوي xOy. تكامل المعادلة (1) يعطي:

$$\dot{x} = \omega y + \dot{x}(0)$$

و بما إن المركبة الإبتدائية للسرعة معدومة $(\dot{x}(0) = 0)$ نحصل على:

$$\dot{x} = \omega y$$

بنقل هذه النتيجة الأخيرة في المعادلة (2) نحصل على المعادلة التفاضلية التالية:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{q}{m}E$$

حل هذه المعدلة هو:

$$y = \frac{q}{m\omega^2}E + C\cos\omega t + D\sin\omega t = \frac{q}{m\omega.\omega}E + C\cos\omega t + D\sin\omega t$$

بما أن:

$$\omega = \frac{q}{m}B \Rightarrow B = \frac{m\omega}{q}$$

فإن:

$$\frac{q}{m\omega.\omega}E = \frac{E}{B\omega} = A$$

و عليه يمكن كتابة حل المعادلة التفاضلية السابقة على الشكل:

$$y = A + C\cos\omega t + D\sin\omega t$$

C و D ثابتا التفاضل و الواجب تحديدهما انطلاقا من الشروط الابتدائية. و بالفعل:

$$y(0) = A + C = 0 \Rightarrow C = -A$$
$$\dot{y}(0) = D\omega = 0 \Rightarrow D = 0$$

و في النهاية نحصل على:

$$\boxed{y = A(1-\cos\omega t)}$$

و بما أن $\dot{x} = \omega y$ يصبح لدينا $\dot{x} = A\omega(1-\cos\omega t)$

تكامل هذه المعادلة الأخيرة ، آخذين بعين الاعتبار الشروط الإبتدائية $x(0) = 0$ ، يعطينا:

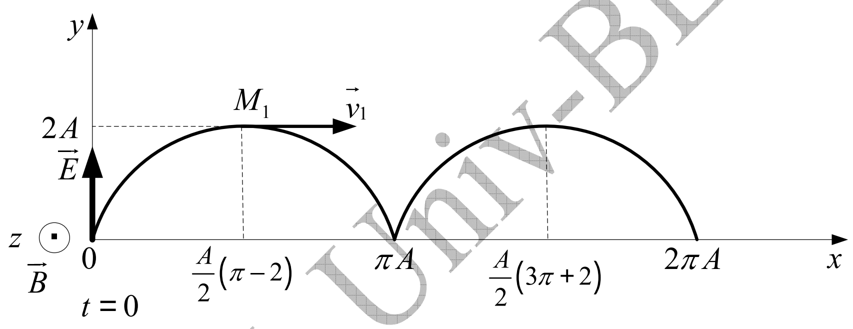
$$\boxed{x = A(\omega t - \sin\omega t)}$$

3/ شكل المسار.

نقيم جدول القيم التالي:

ωt	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2
x	0	$A/2(\pi-2)$	πA	$A/2(3\pi-2)$	$2\pi A$
y	0	A	$2A$	A	0

نظرا لدورية الدالتين المستعملتين نقتصر في دراستنا على المجال الذي اخترناه.



4/ شدة السرعة هي:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = A\omega\left[2(1-\cos\omega t)\right]^{1/2} = 2A\omega \sin\frac{\omega t}{2}$$

في اللحظة $t = \dfrac{\pi}{\omega}$ ، السرعة تساوي:

$$\boxed{v = 2A\omega = 2\frac{E}{B}}$$

5/ استعمال نظرية الطاقة الحركية.

نطبق نظرية الطاقة الحركية $\left(\Delta E_c = \sum W_i\right)$ بين اللحظتين 0 و $t = \dfrac{\pi}{\omega}$:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int_0^{M_1} q\left(\vec{B} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right)d\vec{l} = \int_0^{M_1} q\vec{E}d\vec{l} = \int_0^{M_1} qEdy$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = qE2A$$

و منه:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{E}{B\omega} \\ \omega &= \frac{qB}{m} \end{aligned}\right| \Rightarrow v^2 = 4\left(\frac{q}{m}\right)E\left(\frac{Em}{BqB}\right) = 4\frac{E^2}{B^2} \Rightarrow \boxed{v = 2\frac{E}{B}}$$

التمرين16.4

1/ الموقع M_Ω.

ندرس حركة الجسيمة في المرجع الأرضي المفترض أنه غليلي. تخضع الجسيمة لثلاثة قوى: ثقلها، القوة المغناطيسية و قوة الاحتكاك. نهمل الثقل أمام القوتين المتبقيتين. يسمح المبدأ الأساسي للتحريك بكتابة:

$$\vec{F} = m\vec{a} = -\lambda\vec{v} + q\vec{v}\wedge\vec{B}$$

لدينا المقادير الشعاعية التالية:

$$\vec{a}\begin{cases}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{cases} \quad , \quad \vec{v}\begin{cases}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{cases} \quad , \quad \vec{B}\begin{cases}0\\ 0\\ B\end{cases}$$

نكتب الآن التسارع للحركة:

$$\begin{cases}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{cases} = -\frac{\lambda}{m}\begin{cases}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{cases} + \frac{q}{m}\begin{cases}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{cases}\wedge\begin{cases}0\\ 0\\ B\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{cases} = \begin{cases}-\dfrac{\lambda}{m}\dot{x} + \dfrac{q}{m}B\dot{y}\\ -\dfrac{\lambda}{m}\dot{y} - \dfrac{q}{m}B\dot{x}\\ -\dfrac{\lambda}{m}z\end{cases}$$

ندخل كل من ω و τ فنحصل على جملة المعادلات التفاضلية التالية التي تحكم حركة الجسيمة:

$$\ddot{x} = -\frac{\dot{x}}{\tau} + \omega\dot{y}$$

$$\ddot{y} = -\frac{\dot{y}}{\tau} - \omega\dot{x}$$

$$\ddot{z} = -\frac{z}{\tau}$$

نكامل المعادلات الثلاثة المتحصل عليها فينتج لدينا:

$$\dot{x} = -\frac{x}{\tau} + \omega y + v_0$$

$$\dot{y} = -\frac{y}{\tau} - \omega x$$

$$\dot{z} = -\frac{z}{\tau}$$

حل المعادلة التفاضلية الأخيرة، إذا أخذنا بعين الاعتبار الشروط الابتدائية و بما أن الحركة تتم في المستوي xOy، هو:

$$\dot{z} + \frac{1}{\tau}z = 0 \Rightarrow \boxed{z = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = 0}$$

القوة المغناطيسية لا تعمل لأنها عمودية على مسار الجسيمة. القوة الوحيدة التي تعمل خلال حركة الجسيمة هي إذن قوة الاحتكاك و عملها مقاوم و بالتالي فهو سالب. الطاقة الحركية للجسيمة تتناقص و سرعتها تؤول إلى الصفر. يكون لدينا إذن:

$$t \to \infty \Rightarrow \left| \begin{array}{l}\dot{x}_\infty = 0\\ \dot{y}_\infty = 0\end{array}\right.$$

فنحصل على:

$$\dot{x}_\infty = -\frac{x_\infty}{\tau} + \omega y_\infty + v_0 = 0$$
$$\dot{y}_\infty = -\frac{y_\infty}{\tau} - \omega x_\infty = 0$$

في النهاية:

$$\begin{cases} -\dfrac{x_\infty}{\tau} + \omega y_\infty + v_0 = 0 \\ -\dfrac{y_\infty}{\tau} - \omega x_\infty = 0 \end{cases} \Rightarrow \overline{OM}_\Omega \left| \begin{array}{l} x_\infty = \dfrac{\tau v_0}{1+\omega^2\tau^2} \\ y_\infty = \dfrac{-\tau^2 \omega v_0}{1+\omega^2\tau^2} \\ z_\infty = 0 \end{array} \right.$$

2/ المعادلة القطبية.
بالإحداثيات القطبية:

$$\vec{r} = \overrightarrow{M_\Omega M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_\Omega} = r\vec{u}_r$$
$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} - \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM_\Omega}}{dt}}_{0(t\to\infty)} = \frac{d\overrightarrow{M_\Omega M}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \to (1)$$

كنا كتبنا في مستهل هذا الحل العلاقة الأساسية للتحريك:

$$m\vec{a} = -\lambda\vec{v} + q\vec{v}\wedge\vec{B} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{\lambda}{m}\vec{v} + \frac{q}{m}\vec{v}\wedge\vec{B}$$
$$\vec{a} = -\frac{\lambda}{m}\vec{v} + \frac{q}{m}\vec{v}\wedge B\vec{u}_z = -\frac{\lambda}{m}\vec{v} + \frac{q}{m}B\vec{v}\wedge\vec{u}_z$$

تكامل العبارة الأخيرة ينتج:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -\frac{\lambda}{m}\overrightarrow{OM} + \frac{q}{m}B\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{u}_z\right) + \vec{v}_0$$
$$\vec{v} = -\frac{1}{\tau}\overrightarrow{OM} + \omega\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{u}_z\right) + \vec{v}_0 \to (2)$$

لما $t\to\infty$ هذه المعادلة الأخيرة تكتب:

$$\vec{0} = -\frac{1}{\tau}\overrightarrow{OM}_\Omega + \omega\left(\overrightarrow{OM}_\Omega\wedge\vec{u}_z\right) + \vec{v}_0 \to (3)$$

نطرح المعادلتين (2) و (3):

$$\vec{v} = -\frac{1}{\tau}\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_\Omega}\right) + \omega\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_\Omega}\right)\wedge\vec{u}_z$$
$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{\vec{r}}{\tau} + \omega\vec{r}\wedge\vec{u}_z$$

نحصل على:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{1}{\tau}\vec{r} + \omega\vec{r}\wedge\vec{u}_z \Leftrightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{r}{\tau}\vec{u}_r + \omega r\underbrace{\vec{u}_r\wedge\vec{u}_z}_{\vec{u}_\theta}$$

$$\vec{v} = -\frac{r}{\tau}\vec{u}_r + \omega r\vec{u}_\theta \to (4)$$

بمطابقة المعادلتين (1) و (4) حد لحد، نتوصل إلى:

$$\begin{cases} \dot{r} = -\frac{\ }{\tau} \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

نكامل فنحصل على:

$$\begin{cases} r = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

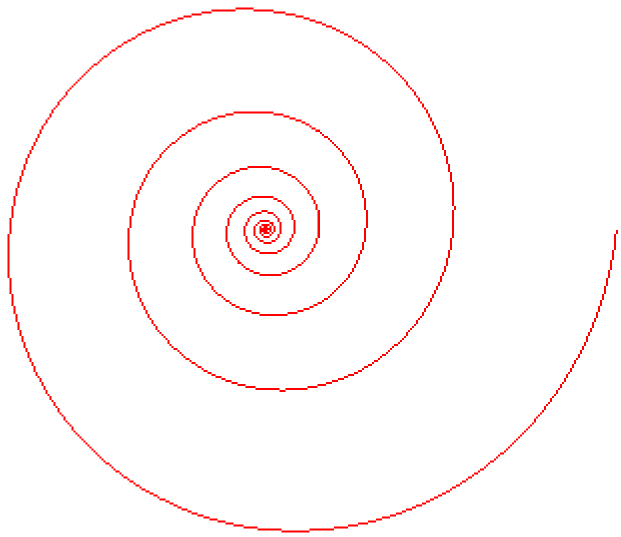
لتحديد K نعرف أن في اللحظة $t=0$ توجد الجسيمة في مبدإ المعلم، هذا المبدإ يوجد على بعد ما لانهاية من الموقع M_Ω. أي بمعنى آخر بالنسبة للنقطة M_Ω ذات الإحداثيات (x_∞, y_∞) فإن إحداثيتي مبدإ المعلم هما $(-x_\infty, -y_\infty)$. لدينا إذن:

$$r(t=0) = \sqrt{x_\infty^2 + y_\infty^2} = \frac{v_0 \tau}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} = K$$

في النهاية نحصل على:

$$\boxed{r = \frac{v_0 \tau}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \exp\left(-\frac{\theta}{\omega\tau}\right)}$$

هذه النتيجة تمثل المعادلة القطبية لحلزون أو لولب لوغاريتمي (spirale logarithmique).



التمرين 17.2

1/ القوة المحركة الكهربائية التحريضية داخل وشيعة هي $e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$، أين التدفق الكلي للحقل المغناطيسي عبر هذه الوشيعة هو $\Phi(t) = NSB(t)$، حيث N يمثل عدد اللفات و S سطح الوشيعة.

إذن:

$$e(t) = -NS\frac{dB(t)}{dt} \rightarrow \frac{dB(t)}{dt} = -\frac{e(t)}{NS} \Rightarrow B(t) = -25\int e(t)\,dt$$

من أجل $t \leq 0$ فإن $e_0 = 0$ و $B_0 = 0$ و عليه $B(t) = 0$

من أجل $0 \prec t \prec 4ms$: $B(t) = -25e\int_0^t dt = -25(+3)\int_0^t dt \Rightarrow \boxed{B(t) = -75t}$

في اللحظة $t = 4ms$، $\boxed{B(4.10^{-3}s) = -0,3T}$

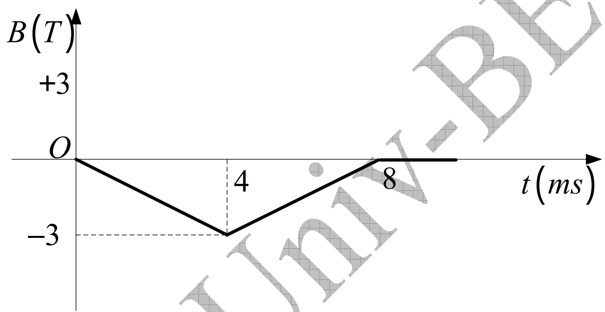
من أجل $4 \prec t \prec 8ms$:

$$B(t) - B(4.10^{-3}s) = -25e\int_{4.10^{-3}}^{t} dt = -25(-3)\int_{4.10^{-3}}^{t} dt \Rightarrow B(t) - B(4.10^{-3}s) = 75t - 0,3$$

في النهاية، عبارة الحقل المغناطيسي اللحظي هي: $\boxed{B(t) = 75t - 0,6}$

من أجل $t \succ 8ms$: $e = 0$ و $B(8.10^{3}) = 0$، و عليه $B(t) = 0$

2/ يمثّل الشكل الموالي تغيرات الحقل المغناطيسي بدلالة الزمن.



<u>التمرين18.4</u>

الحقل المغناطيسي B الناتج عن الحلزون الذي يجتازه التيار الكهربائي I يساوي:

$$B = \mu_0 n_1 I$$

التدفق الذي يجتاز الوشيعة يساوي:

$$\Phi = N_2 B S_2 \cos\theta$$

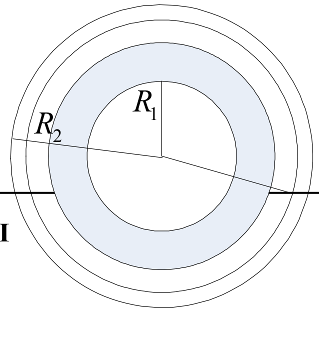
بعد تعويض B نحصل على:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi = N_2 S_2 \mu_0 n_1 \cos\theta I \\ \Phi = LI\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{L = N_2 S_2 \mu_0 n_1 \cos\theta}$$

<u>التمرين19.4</u>

نفترض أن الناقل الداخلي يجتازه التيار I_0، موجه إلى الأمام؛ و الناقل الخارجي يجتازه التيار I_0 موجه إلى الخلف.

الحقل المغناطيسي الناتج في نقطة تبعد بـــ عن المحور هو حسب قاعدة آمبير:



$$B.2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

I تساوي مجموع التيار داخل الحلقة التي نصف قطرها .
تدفق B عبر مقطع مستقيم عرضه d و ارتفاعه h نحصل عليه كالتالي:

$$d\Phi = BdS = Bhdr = \mu_0 Ih\frac{dr}{2\pi r} \Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 Ih}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}$$

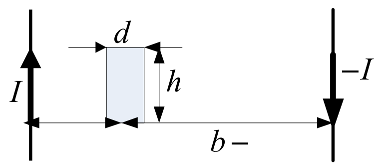
$$\Phi = \frac{\mu_0 Ih}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

نعرف أن التدفق يتناسب طردا مع التحريض الذاتي: $\Phi = LI$. بمطابقة عبارتي التدفق المتحصل عليهما نتوصل إلى عبارة التحريض الذاتي للحبل:

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

التمرين 20.4

الحقل المغناطيسي الناتج عن الناقلين المستقيمين في نقطة، تبعد عن الأول بالمسافة و عن الثاني بـــ $b-$، يساوي:



$$B = \mu_0\frac{I}{2\pi r} + \mu_0\frac{I}{2\pi(b-r)}$$

التدفق العنصري لهذا الحقل عبر شريط عرضه عنصري d و ارتفاعه h موازي للناقلين هو:

$$d\Phi = BS = Bhdr \Rightarrow d\Phi = \mu_0\frac{hI}{2\pi}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{b-r}\right)dr$$

للحصول على التدفق كاملا يجب القيام بالمكاملة من a إلى $b-a$:

$$\Phi = \mu_0\frac{hI}{2\pi}\int_a^{b-a}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{b-r}\right)dr \Rightarrow \Phi = \mu_0\frac{hI}{2\pi}\left[\ln r\Big|_a^{b-a} - \ln(b-r)\Big|_a^{b-a}\right]$$

$$\boxed{\Phi = \mu_0\frac{hI}{\pi}\ln\frac{b-a}{a}}$$

في الحالة العامة التدفق لحقل مغناطيسي عبر سطح معيّن هو: $\Phi = LI$، حيث L يمثل معامل التحريض. بالمطابقة نحصل على التحريض الذاتي لهذه الجملة و هو:

$$\boxed{L = \mu_0\frac{h}{\pi}\ln\frac{b-a}{a}}$$