وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل

أساسيات
الكهربائية والمغناطيسية

تأليف

يحيى عبد الحميد الحاج علي

مدرس في قسم الفيزياء

كلية العلوم / جامعة الموصل

احمد عبدالجبار .جامعة الموصل / القسم الفيزياء

احمد عبدالجبار
جامعة الموصل /قسم فيزياء

الفصل الاول

الشحنة والمادة
Charge and Matter

1 – 1 الشحنات الكهربائية Electric charges

من المعروف جيداً أنه عند دلك مادتين ببعضهما فان كل مادة منهما تمتلك خاصية جذب الأشياء الخفيفة. عندئذ نقول بأن كلاً من الجسمين قد تكهرب (electrified) أي أنه قد أكتسب شحنة كهربائية. هناك ظواهر عديدة تدل على التكهرب، منها تكهرب المشط وسماع طقطقة خفيفة أثناء تمشيط الشعر، وتعرضك لصعقة كهربائية خفيفة عندما تمسك مقبض باب السيارة بعد نزولك منها. وان التجارب العديدة التي اجريت على دراسة هذه الظواهر دلت على أن هناك نوعين من الشحنات الكهربائية. شحنات موجبة وشحنات سالبة

1 – 2 الشحنة والمادة Charge and matter

تتركب ذرات المادة أساساً من ثلاثة دقائق هامة هي البروتون والنيوترون والالكترون *، فالنيوترون كما هو معروف متعادل كهربائيا فهو لا يحمل شحنة أما البروتون فيحمل شحنة كهربائية موجبة تعادل الشحنة السالبة للالكترون في المقدار وتتكون الذرة من نواة تتكدس فيها البروتونات والنيوترونات فهي بذلك موجبة الشحنة محاطة

* هناك جسيمات أخرى كثيرة تم اكتشافها منذ عام 1940 مثل البوزترون – وهو الجسيم الذي يحمل نفس مقدار شحنة الالكترون (الا أنها موجبة) وله نفس كتله – والنيوترينو ، وغيرذلك من الجسيمات الاولية المستقرة وغير المستقرة التي اكتشفت في الأشعة الكونية وفي نواتج التفاعلات المتولدة في أجهزة المعجلات الذرية .

بسحابة من الالـكترونات السالبة . والذرة الاعتيادية غير المشحونة تكون متعادلــة كهربائيـــا نظراً لانهـا تحتوي عـلى عدد متســاومــن الالـكترونات والبروتونـــات ، ان كتلة البروتون تقريبا مساوية لـكتلة النيوترون كما هومبين في الجدول(1 – 1) ، على حين نجد أن كتلة الالـكترون الساكن أصغر بحوالــي 1840 مرة من كتلــة البروتون . لذا فان كتلة الذرة تعد مركزة في نواتها .

الجدول 1 – 1

الجسيـــم	الكتلــة	الشحنة
الألـكترون	$9{\cdot}1091 \times 10^{-31}$ kg	$-\,1{\cdot}6021 \times 10^{-19}$C
البروتون	$1{\cdot}6725 \times 10^{-27}$ kg	$+\,1{\cdot}6021 \times 10^{-19}$C
النيوترون	$1{\cdot}6748 \times 10^{-27}$ kg	0

فاذا تصورنا نواة الذرة بشكل كرة فان نصف قطرها يتراوح بين 1×10^{-15}m لنواة ذرة الهيدروجين (وهي أبسط الذرات وأصغرها) الى حوالــي 7×10^{-15}m بالنسبة للذرة الثقيلة التي تحتوي نواتها على عدد كبيرمن البروتونات كاليورانيوم مثلاً – على حين يتراوح قطر الذرة بين 1×10^{-10}m الى حوالي 3×10^{-10}m . وبملاحظة هذه الأرقام يتضح ان قطر الذرة حوالــي مائة الف مرة أكبرمن قطـر النـــواة .

وكما ذكرنا فان ذرة أي عنصر في حالتها الطبيعية متعادلة الشحنة ، وان عــدد الالـكترونات الدائرة حول النواة يكون مساوياً لعدد البروتونات داخل النواة ويسمى هذا العدد بالعدد الذري Atomic number ويرمز له بالحرف Z . ويرمز الحرف N لعدد البروتونات داخل النواة . على حين يرمز الحرف A للعدد الـكلي للبروتونات والنيوترونات ويسمى بالعدد الـكتلي Mass number . وبهذا يكون :

$A = Z + N$

ان الذرات التي لها نفس العدد الذري Z ولكنها تختلف في عددها الكتلي A تسمى النظائر Isotopes ، ومن هذا يتضح ان ذرات النظائر المختلفة للعنصر الواحد تتساوى في عدد البروتونات الموجودة داخل النواة وكذلك في عدد الالـكترونات خارج ولما كانت الخواص الـكيمياوية للعناصر تعتمد بصورة رئيسية على عدد الالـكترونات

وتوزيعها خارج النواة لذلك فان النظائرتتشابه في الخواص الكيمياوية . على حين تختلف في بعض خواصها الفيزياوية نتيجة لاختلاف كتلتها

ولتوضيح ذلك نأخذ أبسط الذرات تركيبا وهي ذرة الهايدروجين الذي يوجد على شكل ثلاثة نظائر يعبر عنها بالرموز الآتية :

$$_1H^1 , _1H^2 , _1H^3$$

اذ يشير العدد المكتوب في أسفل الرمز الكيمياوي للعنصر نحو اليسار الى العدد الذري Z ومقداره واحد . على حين يشير العدد المكتوب في أعلى الرمز نحو اليمين الى العدد الكتلي A الذي يختلف من نظير الى آخر . من هذا نجد أن نواة النظير الاول للهايدروجين تحتوي على بروتون واحد . أما نواة النظير الثاني المسمى ديوتيريوم Deuterium (أو الهايدروجين الثقيل (Heavy hydrogen) فتحتوي على بروتون واحد ونيوترون واحد . وتحتوي نواة النظير الثالث المسمى تريتيوم Tritium على بروتون واحد ونيوترونين .

ويلي الهايدروجين في الجدول الدوري عنصر الهيليوم الذي يوجد على شكل نظيرين هما :

$$_2He^3 , _2He^4$$

تحتوي نواة النظير الأول على بروتونين ونيوترون واحد ويدور حولهما الكترونان . ويوجد هذا النظير في الطبيعة بنسبة ضئيلة جدا . أما النظير الثاني فتحتوي نواته على بروتونين ونيوترونين ويدور حولهما الكترونان . ويكون هذا النظير نسبة كبيرة من عنصر الهيليوم ويطلق على نواته « دقيقة ألفا » وبذلك يزداد العدد الذري والعدد الكتلي للعناصر كلما تقدمنا تدريجيا في الجدول الدوري الى أن نصل الى أثقل العناصر الموجودة في الطبيعة وهو عنصر اليورانيوم الذي يوجد على شكل خليط من ثلاثة نظائر هي :

$$_{92}U^{234} , _{92}U^{235} , _{92}U^{238}$$

وهناك عناصر أخرى أكثر ثقلا أمكن تصنيعها منها البلوتونيوم Plotonium الذي يستعمل في صناعة القنبلة الذرية اذ تتكون نواته من 94 بروتون و145 نيوترون .

مما تقدم يتبين أن كل جسم يحتوي على عدد هائل من الذرات . وهذه الذرات عندما تكون متعادلة كهربائيا (غير متأينة) فان شحنة الجسم تعتبر صفرا . ولكنه لو اختل هذا التعادل الطبيعي للشحنات كأن يكتسب الجسم الكترونات أو يفقد

قسماً من الـكتروناته تصبح المادة مشحونة كهربائياً . فإذا دلك قضيب من الزجاج بالحرير مثلا ، انتقلت بعض الإلكترونات من الزجاج الى الحرير وعندها يصبح الزجاج موجب الشحنة نظرا للنقص الذي حدث في الكتروناته ، ويصبح الحرير سالب الشحنة نظراً للزيادة التي حدثت في الـكتروناته . وبهذا دلت التجارب على تكهرب كل من الدالك والمدلوك واكتساب كل منهما شحنة كهربائية مختلفة في النوع ومتساوية فـي المقدار . ومعنى هذا ان التكهرب يحدث نتيجة لانتقال الالـكترونات .

3 – 1 قانون حفظ الشحنة Charge conservation

يتبين مما تقدم ان عملية الدلك لاتخلق الشحنة بل تيسر الأمر لانتقالها من جسم لآخر فتخل بحالة التعادل الـكهربائـي للاجسام . وبذلك فان الشحنة لاتفنـى ولا تستحدث ، وهذا ما يعرف بقانون حفظ الشحنة . ان الادلة التي تثبت صحة ذلـك كثيرة نذكر منها على سبيل المثال عندما يتحد الالـكترون Electron بالبوزترون Positron مكونا أشعة كاما ، فتتحول كتلتا الدقيقتين الى طاقة طبقا لمعادلـة أنشتاين المشهورة $E = mc^2$. فمن المعروف أن شحنة الالـكترون ويرمزلها $(-e)$ مساوية ومعاكسة لشحنة البوزترون ويرمزلها $(+e)$ ، وواضح جداً ان مجموع شحنتي الدقيقتين هو صفر قبل التفاعل وبعده . مثال اخر نورده للدلالة على صحة قانون حفظ الشحنة هو مايحدث خلال التفاعلات النووية ، فعندما يقصف البيريليوم Beryllium بدقائق ألفا السريعة ، ينبعث النيوترون من نواة البيريليوم تاركا الـكاربون نواة متبقية . ومن الممكن تمثيل هذا التفاعل بالمعادلة الآتية :

ماهي الادلة التي تثبت أن الشحنة لاتفنى ولا تستحدث ؟

$${}_2He^4 + {}_4Be^9 \rightarrow {}_6C^{12} + {}_0n^1$$

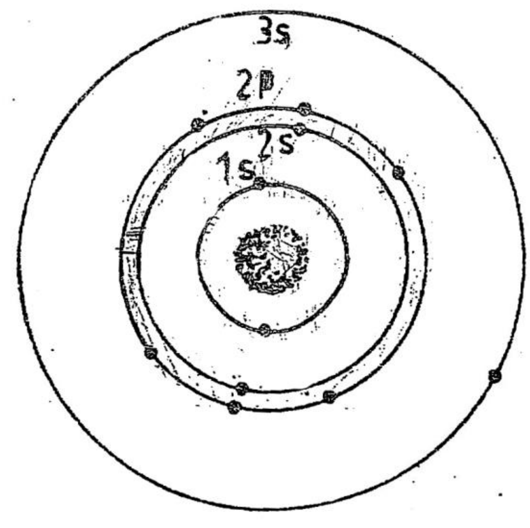
ومن ملاحظة هذه المعادلة يتضح بأن المجموع الجبري للأعداد الذرية قبل التفاعل $(4 + 2)$ يساوي المجموع الجبري للاعداد الذرية الناتجة من التفاعل $(6 + 0)$ ، مما يؤكد صحة قانون حفظ الشحنة .

4 – 1 المواد الموصلة والمواد العازلة Conductors and insulators

تختلف المواد من حيث قابليتها في نقل الشحنات الـكهربائية خلالها . وبصورة عامة يمكن تقسيمها الى ثلاثة أصناف .

ا – المـواد الموصلـة

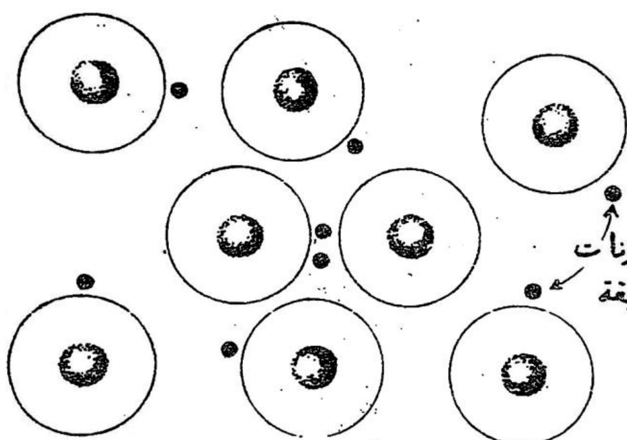
وهـي المواد التـي تنتقل خلالها الشحنة الـكهربائية في الحال وتعتبر المعادن metals من أجود المواد ايصالا للـكهربائية وعلى راسها الفضة يليه النحاس فالالمنيوم ان ذلك يعود الى التركيب البلوري crystal structure لهذه المعادن حيث يتراصف عدد من الذرات مكونا نظاما هندسيا معيناً يسمـى شبيكة بلوريـة crystal lattice ، ويتكرر هذا التنظيم في اتجاهات ثلاثة متعامدة مكونا الجسم الذي نراه . أن الـكترونـات المدارات الخارجيـة للذرات التـي تسمـى الـكترونات التكافؤ Valence electrons (وعددها يتراوح بين 1 الى 3 في المعادن) تكون جميعها مشتركة بين جميع الذرات فهي ليست تابعة لذرة معينة . على حين نجد أن الـكترونات المدارات الداخلية تكون مرتبطة بنواة ذراتها بقوى كهربائية قوية ، وتسمـى الالـكترونات المقيدة bound electrons . وعليه فان ارتباط الالـكترونات الخارجية بنواة الذرة يكون ضعيفا فهـي حرة في التنقل داخل التركيب البلوري للمعدن ولهذا تدعـى أيضا بالالـكترونات الطليقة free electrons ، وبتنقلها هذا تجعل المعادن متميزة عن غيرها في جودتها للتوصيل الـكهربائـي . وسوف نأتـي الى بحث هذه النقطة بالتفصيل في فصل قادم . ولتوضيح ماذكرناه انظر الـى الشكل (1 – 1) الذي يمثل ذرة عنصر الصوديوم بالـكتروناتها المقيدة وعددها



الشكل (1 – 1) ذرة الصوديوم

عشرة موزعة في المدارات الداخلية ، والـكترون التكافؤ الاحادي في المدار الخارجي ، ثم الشكل (2 – 1) الذي يمثل مجموعة من ذرات الصوديوم . ويلاحظ في هذا الشكل الـكترونات التكافؤ (ممثلة بنقط) وقد انفكت من مداراتها الخارجية .واصبحت حرة في التنقل بين الذرات ، واما الدوائر الـكبيرة فتمثل المدارات الداخلية وفيها الالـكترونات المقيدة .

وكما ذكرنا فان الشحنات السالبة هي المسؤولة عن نقل الشحنة في المعادن . أمـا الشحنات الموجبة الموجودة في داخل نوى الذرات فهي ثابتة في أماكنها في التركيب البلوري للمعدن . ومما يجدر ذكره هو أن هناك حالات أخرى قد تكون فيها الايونات الموجبة الشحنة والايونات السالبة الشحنة مسؤولة عن نقل الشحنات الـكهربائيـة كما هي الحالة في المحاليل الالـكتروليتية Electrolytes التـي تعتبـر من الموصلات الجيدة .



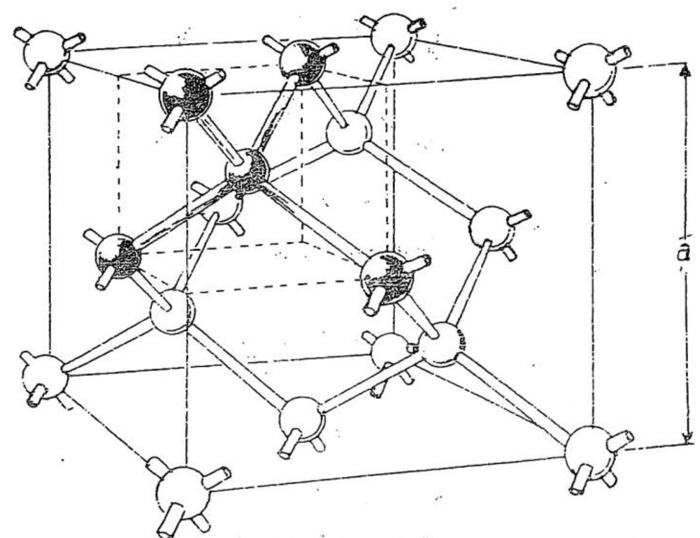
الشكل (2 – 1)

رسم تخطيطي مسطح لبلورة الجيرمانيوم المشوبة بالزرنيخ

ب – المـواد العازلـة :

وهـي المواد التي لاتنتقل خلالها الشحنة الـكهربائية في الحال لعدم احتوائها على الـكترونات طليقة ، اذ أن جميع الـكترونات المدار الخارجـي للذرة مرتبطة بالشبكة البلوريـة أو التركيب الجزيئـي للمادة . من أمثـال هذه المواد المايكـا والـكبريت والزجاج والبلاستيك . ولتوضيح ذلك لابد من دراسة التركيب البلوري للمادة العازلة ولنأخـذ مثـلاً المـاس diamond وذلك لبساطـة تركيبـه البلوري المكون

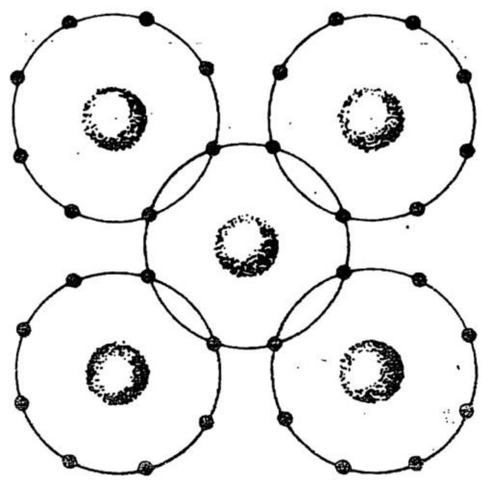
تراصف ذرات الكاربون بشكل هندسي منظم كما هومبين في الشكل (3 - 1) حيث نجد أن الذرات الخارجية تشكل مكعباً كبيراً ، وأن كل ذرة مربوطة بأواصر كيمياوية Chemical bonds بأقرب أربع ذرات مجاورة . كما ان كل مجموعة من هذه الذرات الاربع تقع على اربع زوايا لمكعب آخر اصغر مبين في الشكل بخطوط متقطعة بحيث ان كل ذرتين من هذه الذرات تقع على نهايتي قطر لاحد سطوح هذا لمكعب الستة .



الشكل (3 - 1)

التركيب البلوري للماس

ومن المعلوم أن الكاربون وجميع العناصر الرباعية التكافؤ ، شأنها في ذلك شأن الجيرمانيوم والسليكون . تصل الى حالة الاستقرار والخمول الكيمياوي اذا ماحصلت الذرة على اربعة الكترونات اخرى ليصبح عدد الالكترونات في المدار الخارجي ثمانية . وهذا مايحدث لذرة الكاربون نتيجة لارتباطها بالذرات الاربع المجاورة في التركيب البلوري للماس . ولتوضيح ذلك سنكتفي بتوجيه النظر نحو المكعب المرسوم بخطوط متقطعة والمبين في الشكل (3- 1) بذراته الخمس . ولتبسيط الموضوع أكثر نتصور هذه الذرات الخمس مرسومة بشكل مسطح كما هو مبين في الشكل (4-1) ان كل ذرة كاربون تشترك بأثنين من الالكترونات في مدارها الخارجي مع كل من



الشكل (4 – 1)

رسم تخطيطي مسطح لبلورة الماس

الذرات المجاورة . ان هذا النوع من الارتباط بين ذرات الكاربون في بلورة الماس يكون مايسمى بآصرة التكافؤ المزدوج Covalent bond . وبارتباط الذرات بهذا الشكل لم يبق هناك الكترونات حرة . وبهذا تكون المادة غير موصلة للكهربائية .

ان السؤال الذي قد يتبادر الى الذهن هو هل بالأمكان فك الأرتباط بين عدد من ذرات الكاربون وهو في الحالة المتبلورة وكسر قسم من هذه الأواصر وتحرير بعض الألكترونات ؟ للاجابة على هذا السؤال لابد وان ننتقل الى الصنف الثالث من المواد .

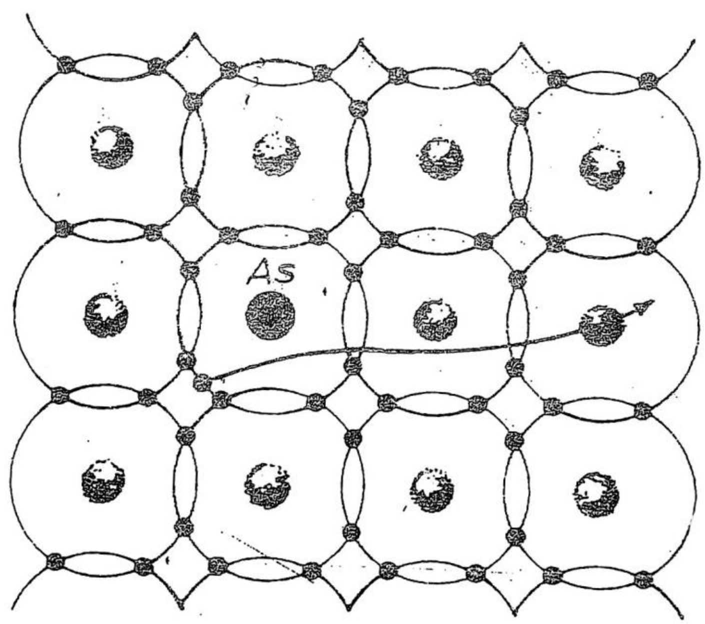
جـ – المـــواد شبـــه الموصلـــة : Semiconductors

وهي تلك المواد التي لها خواص وسطية بين الموصلات والعوازل من حيث قابليتها في التوصيل الكهربائي . من أشهرها الجرمانيوم والسيليكون ولهذين العنصرين أهمية خاصة في التكنولوجيا لأستعمالهما في صناعة الترانزسترات والخلايا الشمسية . ان الجرمانيوم (كما بينا) رباعي التكافؤ مثله في ذلك مثل السليكون والكاربون ، كما ان له نفس التركيب البلوري للماس الموضح في الشكلين (3 – 1) و (4 – 1) . فلـــو

أخذنا بلورة نقية لعنصر الجيرمانيوم وهي في درجة حرارة منخفضة جداً وقريبة من الصفر المطلق . لوجدنا بأن جميع الألكترونات مشدودة بواسطة الأواصر التي سبق ذكرها . وعلى هذا الأساس يمكن عدّ الجيرمانيوم ومعظم أشباه الموصلات عوازلاً قوية . ولكن اذا رفعت درجة حرارة البلورة الى درجة حرارة الغرفة الأعتيادية مثلاً ، فان الطاقة الحرارية التي تكتسبها الألكترونات تكون كافية لكسر بعض الأواصر وتحرير قسم من الألكترونات لتتجول داخل البلورة

وكذلك بالأمكان زيادة قابلية التوصيل الكهربائي باضافة كميات صغيرة من الشوائب impurities الى بلورة الجيرمانيوم مثل الزرنيخ arsenic او القصدير antimony أو أي عنصر خماسي التكافؤ .

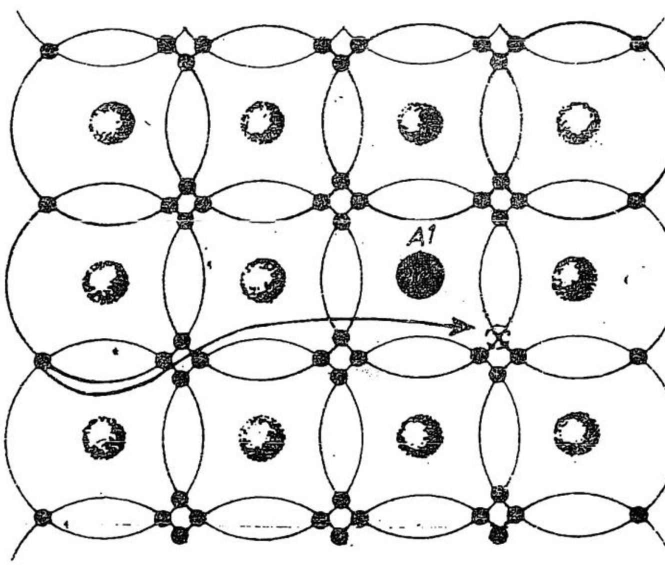
ان الشكل (5 – 1) يمثل رسماً تخطيطياً مسطحاً لبلورة الجيرمانيوم وقد حلت ذرة زرنيخ بدلاً من ذرة جيرمانيوم ، فكما هو موضح بالشكل فان كل ذرة زرنيخ ترتبط



الشكل (5 – 1)
رسم تخطيطي مسطح لبلورة
الجيرمانيوم المشوبة بالزرنيخ

بذرات الجيرمانيوم الأربع المجاورة لها (كما سبق شرحه) باربعة الكترونات فقط من الخمسة الموجودة في مدارها الخارجي. أما الألكترون الخامس فيبقى طليقاً، ليقوم بمهمة التوصيل الكهربائي في المادة ولكن بدرجة أضعف مما هو عليه في المعادن. وتعد بلورة الجيرمانيوم التي تحتوي على الزرنيخ مادة نصف موصلة من النوع السالب negative - type semiconductor ، نظراً لأن الألكترونات السالبة هي المسؤولة عن توصيل الكهربائية في المادة .

كما يمكن زيادة التوصيل الكهربائي في الجيرمانيوم باضافة كمية صغيرة من أحد العناصر الثلاثية التكافؤ كالألمنيوم أو البورون الى بلورة الجيرمانيوم ، فالشكل (6 – 1) يمثل رسماً مسطحاً لبلورة الجيرمانيوم وقد أحتوت على ذرة المنيوم بدلاً من أحدى ذرات الجيرمانيوم كمادة شائبة . ان عجز ذرة الألمنيوم عن تهيأة الألكترون الرابع لكي تكتمل الشبيكة البلورية وترتبط ذرة الألمنيوم (الذي يحتوي مدارها الخارجي على ثلاثة الكترونات) بذرات الجيرمانيوم الأربع المجاورة كما هو موضح بالشكل ، يولد فراغا في البلورة يدعى الفجوة hole. هذه الفجوة تكون على استعداد لتقبل



الشكل (6 – 1)
رسم تخطيطي مسطح لبلورة
الجيرمانيوم المشوبة بالألمنيوم

الكتروناً في الحال لكي يملأ الفجوة ، والألكترون الذي يملأ هذه الفجوة سيترك بدوره فجوة أخرى تكون مهيأة لأستقبال الكترون آخر، وبهذا يتكون مايمكن اعتباره نمطاً لنقل الشحنات الكهربائية ؛ فبدلاً أن نتكلم عن هذه الألكترونات ، يبدو أنه أكثر ملائمة أن نتكلم عن الفجوات ونعاملها كشحنات مماثلة للألكترونات ولكنها تحمل شحنة موجبة. ولذا فان بلورة الجيرمانيوم التي تحتوي على الألمنيوم عنصراً شائباً تعد مادة نصف موصلة من النوع الموجب - positive-type semiconductor .

5 - 1 قانون كولوم Coulomb's law

كان العالم الفرنسي شارل اوغسطين كولوم (1736 - 1806) أول من قام بدراسة مستفيضة حول القوى بين الأجسام المشحونة وذلك في عام 1785 . أما النتائج العملية لهذه الدراسة فيمكن تلخيصها بما يأتي :-

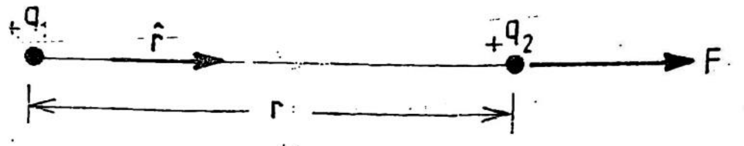
١- الشحنات المتشابهة تتنافر والشحنات المختلفة تتجاذب .
٢- مقدار قوة التجاذب أو التنافر بين شحنتين تتناسب عكسياً مع مربع المسافة بينهما .
٣- مقدار قوة التجاذب أو التنافر بين شحنتين تتناسب مع حاصل ضرب الشحنتين .
٤- اتجاه القوة يقع على امتداد الخط المستقيم الذي يصل بين الشحنتين .

ان هذه النتائج تعد صحيحة بالنسبة للشحنات النقطية point charges ، وهي تلك الشحنات التي أبعادها صغيرة بالنسبة للمسافات الفاصلة بينها . ومن هذه النتائج استنتج كولوم قانون التجاذب أو التنافر الكهربائي الذي يشبه قانون نيوتن في الجذب العام الذي وضع قبل تجارب كولوم بأكثر من مائة عام .

ينص قانون كولوم على ان القوة الكهروستاتيكية بين شحنتين نقطيتين في حالة سكون تتناسب طردياً مع حاصل ضرب مقدار الشحنتين وعكسياً مع مربع المسافة بينهما . ويمكن وضع صيغته الرياضية بالشكل الآتي :

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad (1-1)$$

اذ ان F كما هو مبين في الشكل (1-7) تمثل القوة الكهروستاتيكية المؤثرة على الشحنة النقطية q_2 من قبل الشحنة النقطية q_1 (وهي نفس القوة المؤثرة من قبل الشحنة q_2 على الشحنة q_1 ولكن بعكس الأتجاه) ، و r تمثل المسافة بين الشحنتين .



الشكل (٣ — ١) قانون كولوم

ولما كانت القوة هي كمية متجهة وكذلك الأزاحة هي الأخرى كمية متجهة ، فمن الأفضل كتابة قانون كولوم بصيغة رياضية تشير الى اتجاه القوة اضافة الى مقدارها . وبعد تحويل التناسب في المعادلة (1–1) الى مساواة يصبح قانون كولوم بالشكل الآتي :

$$\vec{F} = k\,\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{r} \qquad (1\text{–}2)$$

اذ أن k تمثل مقداراً ثابتاً تعتمد قيمته على نظام الوحدات المستعملة وكذلك على نوع الوسط الفاصل بين الشحنتين ، كما ان الحرف الذي فوقه سهم يشير الى كونه يمثل كمية اتجاهية ، والرمز $\hat{r}$ هو متجه مقداره واحد واتجاهه من q_1 الى q_2 ويسمى وحدة المتجه unit vector .

لقد حاول علماء آخرون بعد كولوم التأكد من صحة قانونه وبالأخص الأس 2 في المعادلة (1–2) وذلك باستعمال أجهزة أدق من الجهاز الذي استعمله كولوم ، ومن أشهر هؤلاء هو هنري كافندش الذي وجد أن قيمة الأس تتراوح بين العددين 1.98 و 2.02 . ثم أعاد ماكسويل تجربة كافندش بدقة أكثر فوجد بأن الأس يتراوح بين العددين 2.00005 و 1.99995 . وفي عام 1936 وجد العالمان بليمبتون ، ولوتون ان الأس ممكن أن يقع بين العددين 2.000000002 و 1.999999998 تقريباً . فلا غرابة اذا كنا نعد قيمة الأس العدد الصحيح 2 بالضبط .

6 — 1 وحدات الشحنة الكهربائية Units of electric charge

هنالك أكثر من نظام واحد متبع لقياس الشحنة . ففي الأيام الأولى من تطور موضوع الكهروستاتيكية استعمل نظام الوحدات الكهروستاتيكية ومختصرة (e.s.u.) وحسب هذا النظام عرفت وحدة الشحنة وفقاً لقانون كولوم بحيث تكون قيمة k مساوية لواحد صحيح في حالة وجود الشحنات في الفراغ ، وأطلق عليها أسم ستات كولوم . فالستات كولوم اذن هو كمية الشحنة التي اذا وضعت في الفراغ على بعد سنتيمتر واحد

من شحنة أخرى مماثلة لها في النوع ومساوية لها في المقدار لتنافرت معها بقوة قدرها داين واحد. ومما تجدر الأشارة اليه هو ان فكرة تحديد الوحدات الفيزيائية المختلفة بجعل الثابت مساوياً للواحد تعد من الأمور الأعتيادية التي تبناها العاملون في الفيزياء منذ أخذ هذا العلم بالتطور.

بيد أن موضوع المغناطيسية أخذ في التطور بادىء الأمر من حقائق تجريبية غير مرتبطة بالكهربائية ، على الرغم مما نعرفه اليوم من ترابط وثيق بين الكهربائية والمغناطيسية ، مما حمل بعض المفكرين الى اعتبارهما وجهين لعملة واحدة . وبناءً على تلك الحقائق نشأ نظام آخر للوحدات دعي بنظام الوحدات الكهرومغناطيسية ومختصرة (e.m.u.) . واستعملت وحدة أخرى لقياس الشحنة دعيت باسم الوحدة الكهرومغناطيسية للشحنة ، وقيمتها تختلف بطبيعة الحال عن الوحدة الكهروستاتيكية . كما استعملت مجموعة من الوحدات الكهربائية في القياسات العملية مثل الأمبير والفولت والأوم والهنري والفاراد وغيرها ، مما أدى الى نشوء نظام ثالث للوحدات دعي النظام العملي .

ان هذا الأرباك في تعدد أنظمة الوحدات حفز ذوي الأمر الى تبني النظام المدعو (MKSA) الذي وضع أسسه الأيطالي جيورجي Giorgi في روما في بداية هذا القرن . حيث أقترح ان يمتد النظام المتري (المتر–كيلوغرام–ثانية) ليشمل الوحدات العملية الكهربائية . حظي هذا النظام باهتمام كبير على النطاق العالمي وأطلق عليه اختصاراً أسم MKSA أي متر–كيلوغرام–ثانية–أمبير. اذ اضيف الأمبير (وهو وحدة قياس التيار) الى الوحدات الأساسية الثلاث في النظام المتري . وتبنته أقطار عديدة في العالم عام 1935 .

واخيرا جاء النظام الدولي للوحدات SI system of units* الذي يعد امتداداً للنظام الذي ذكرناه آنفا . وأقر هذا النظام من قبل المؤتمر الدولي العام للاوزان والمقاييس المنعقد في فرنسا عام 1960 ، واعتبر هذا النظام هو النظام الامثل للوحدات الذي جنب العالم الكثير من المشاكل الناجمة عن تعدد الأنظمة وما يصاحب ذلك من بعثرة للجهود. شمل هذا النظام ست وحدات اساسية هي المتر والكيلوغرام والثانية والأمبير ودرجة كلفن للحرارة والكانديلا candela .

ان وحدة الشحنة في هذا النظام لاتعرف طبقا لقانون كولوم بل بدلالة وحدة التيار الكهربائي (الأمبير) ، وتسمى الكولوم ومختصرها (C) فالكولوم يعرف بأنه

---

* هي أختصار لأصل التسمية " Systeme Internotinale d' Unites " باللغة الفرنسية

كمية الشحنة التي تمر في مقطع معين لسلك في ثانية واحدة اذا مر تيار مستمر قدره أمبير واحد في هذا السلك . ان الكولوم شحنة كبيرة نسبيا لذلك تستعمل في كثير من الاحيان وحدة اصغر واكثر ملائمة منه وهي المايكروكولوم (μC) وتساوي واحد من مليون من الكولوم . بعد تحديد وحدات كل من القوة F (بالنيوتن N) والمسافة r (بالمتر m) والشحنة q (بالكولوم C) وفق النظام الدولي (SI) ؛ يصبح من السهل ايجاد وحدة الثابت k طبقا لقانون كولوم . أما مقدار هذا الثابت فبالأمكان ايجاده تجريبيا ، وقد وجد أنه يساوي في الفراغ :

$$k = 8.987 \times 10^9 \; Nm^2C^{-2}$$

وقد يقرب هذا المقدار الى (8.99×10^9) أو (9.0×10^9) لغرض حل المسائل التي تتعلق بالشحنات الموضوعة في الفراغ (بل وفي الهواء ايضا) .

وفي اغلب الاحيان يستبدل k بثابت آخر يدعى سماحية الفراغ permittivity of vacuum ، ويرمز له بالحرف الاغريقي ε_0 ، وفق العلاقة الآتية :

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad (1\text{–}3)$$

والغرض من ذلك هو تبسيط المعادلات المشتقة من قانون كولوم في الفروع المتقدمة من هذا الموضوع ، وتجنب ظهور العامل (4π) فيها . ولهذا يأخذ قانون كولوم الصيغة الآتية :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1q_2}{r^2}\,\hat{r} \qquad (1\text{–}4)$$

ومن المعادلة (1–3) يمكننا ايجاد قيمة ووحدة سماحية الفراغ :

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \; C^2N^{-1}m^{-2}$$

اما اذا كان الوسط الفاصل بين الشحنتين ليس فراغاً فان قانون كولوم يكتب بالشكل الآتي :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{q_1q_2}{r^2}\,\hat{r} = \frac{1}{4\pi K\varepsilon_0}\,\frac{q_1q_2}{r^2}\,\hat{r} \qquad (1\text{–}5)$$

وذلك بان يستبدل ثابت سماحية الفراغ (ε_0) بثابت يدعى بسماحية الوسط العازل permittivity of the medium ورمزه (ε) وله نفس وحدة ε_0 . اما الثابت K فيدعى بمعامل النفوذية النسبي relative permittivity او ثابت العازل dielectric constant ، ويعرف بانه النسبة بين سماحية الوسط العازل وسماحية الفراغ ، اي $K = \varepsilon / \varepsilon_0$ ؛ وليس له وحدة . ان قيمة ثابت العازل للفراغ يساوي واحدا صحيحاً ، وقيمته للهواء تساوي 1.0006 ، على حين تتراوح قيمته بين الواحد والعشرة لمعظم المواد ، ولو ان هناك بعض السوائل والبلورات التي تمتاز بكون ثابت عازلها اعلى من ذلك المدى بكثير . وسنأتي الى شرح المواد العازلة بالتفصيل في فصل قادم .

مثـــال : (1)

في عام 1913 وضع بوهر نظريته المشهورة لذرة الهايدروجين وقال بأنها تتكون من نواة تحتوي على بروتون واحد يدور حولها الكترون واحد في مسار دائري . قارن بين قوة الجذب الكهربائية وبين قوة الجذب الكتلي بين الألكترون والنواة ، علماً بأن نصف قطر الدوران يساوي $5.3 \times 10^{-11}\text{m}$

الحـــل

بالأمكان حساب مقدار قوة الجذب الكهربائية F_e من قانون كولوم :

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$= \frac{9 \times 10^9 (\text{N m}^2 \text{C}^{-2})(1.6 \times 10^{-19} \text{C})^2}{(5.3 \times 10^{-11} \text{m})^2}$$

$$= 8.2 \times 10^{-8} \text{N}$$

أما قوة الجذب الكتلي فنحسبها من قانون نيوتن في الجذب العام :

$$F_g = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

$$= \frac{(6.7 \times 10^{-11} \text{Nm}^2 \text{kg}^{-2})(9.1 \times 10^{-31} \text{kg})(1.7 \times 10^{-27} \text{kg})}{(5.3 \times 10^{-11} m)^2}$$

$$= 3.7 \times 10^{-47} \text{N}$$

فإن النسبة بين القوتين :

$$\frac{Fe}{Fg} = \frac{8.2 \times 10^{-8}\,N}{3.7 \times 10^{-47}\,N} = 2.2 \times 10^{39}$$

ومن ذلك يتضح ان القوة الكهربائية أكبر من قوة الجذب الكتلي بحوالي 2×10^{39} مرة ! ومن هذا يتبين ان القوى التي لها شأن أكبر في عالم الذرة هي القوى الكهربائية ، اذا ما قورنت مع قوى الجذب الكتلي .

مثـــال : 2

مامقدار قوة التنافر بين بروتونين في نواة ذرة الحديد علماً بأن المسافة الفاصلة بينهما هي 4.0×10^{-15} متراً ؟

الحـــل :

بالتعويض في قانون كولوم عن شحنة البروتون بالكولومات والمسافة بالأمتار نحصل على قوة التنافر .

$$F = \frac{(9 \times 10^{9}\,Nm^{2}C^{-2})(1.6 \times 10^{-19}\,C)^{2}}{(4 \times 10^{-15}\,m)^{2}} = 14N$$

ومن هذا يتبين ان قوة التنافر بين البروتونات داخل النواة هي قوة هائلة ، وربما سأل سائل لماذا اذن لاتتفتت نواة الذرة وتتناثر محتوياتها طالما هناك قوى تنافر كبيرة تعمل بينها ؟

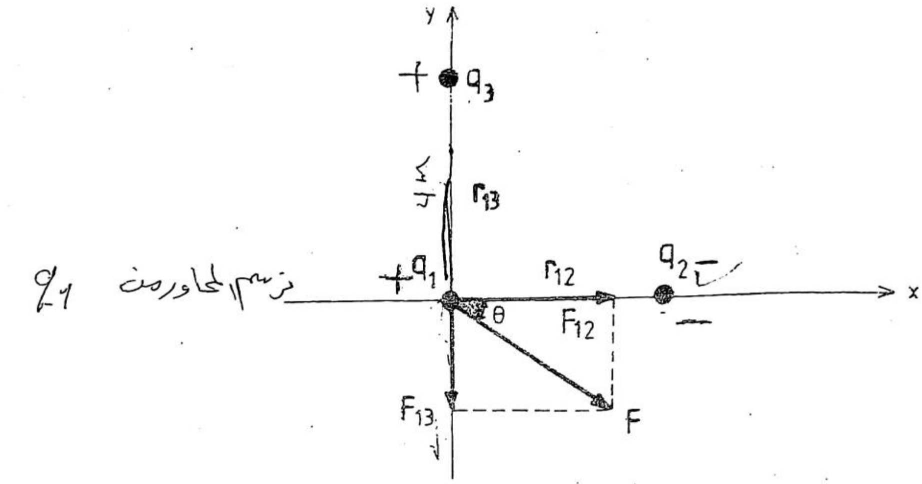
ان السبب يكمن في طبيعة القوى الهائلة التي تجذب مكونات النواة من بروتونات ونيوترونات بعضها بالبعض الاخر. هذه القوى تؤثر في حالة الأبعاد الصغيرة جداً بين البروتونات والنيوترونات وتسمى القوى النووية Nuclear forces ، ولايزال البحث مستمراً حتى وقتنا الحاضر لمعرفة المزيد عن خصائص هذه القوى وطبيعتها .

مثـال 3

يبين الشكل (1–8) ثلاث شحنات نقطية q_1 ، q_2 ، q_3 احسب القوة المؤثرة على الشحنة q_1 علما بأن :

$q_3 = +4.8 \times 10^{-6}C, q_2 = -3.6 \times 10^{-6}C\ q_1 = +1.0 \times 10^{-6}C$

$r_{13} = 4m$, $r_{12} = 3m$



الشكل (8 - 1)

الحل :

من ملاحظة اشارات الشحنات الموجبة والسالبة يمكننا تعيين اتجاه القوتين F_{12} و F_{13} . وهما القوتان اللتان تؤثران على q_1 من قبل الشحنتين q_2 و q_3 على الترتيب كما هومبين في الشكل . وبالأستفادة من قانون كولوم نستطيع ان نحسب مقدار كل من هاتين القوتين .

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2_{12}}$$

$$= \frac{(9 \times 10^9)(1 \times 10^{-6})(3.6 \times 10^{-6})}{3^2}$$

$$= 36 \times 10^{-4} N$$

$$F_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r^2_{13}} = \frac{(9 \times 10^9)(1 \times 10^{-6})(4.8 \times 10^{-6})}{4^2}$$

$$= 27 \times 10^{-4} N$$

ان القوة الكلية التي تؤثرعلى الشحنة q_1 هي بطبيعةالحال المجموع الأتجاهي Vector sum لكلا القوتين :

$$\vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$

ولما كانت القوتان F_{12} و F_{13} متعامدتين فمقدار محصلتهما F يساوي .

$$F = \sqrt{(36 \times 10^{-4})^2 + (27 \times 10^{-4})^2}$$

$$= 45 \times 10^{-4} N$$

أما اتجاه F فيمكن تعيينه من حساب الزاوية θ المبينة في الرسم

$$\tan\theta = \frac{F_{13}}{F_{12}}$$

$$= \frac{27 \times 10^{-4}}{36 \times 10^{-4}} = 0{\cdot}75$$

$$\therefore \theta = 36{\cdot}9^{0}$$

مثـــال 4

احسب محصلة القوى التي تؤثر على الشحنة q_4 كما هومبين في الشكل (1–9) علماً بأن

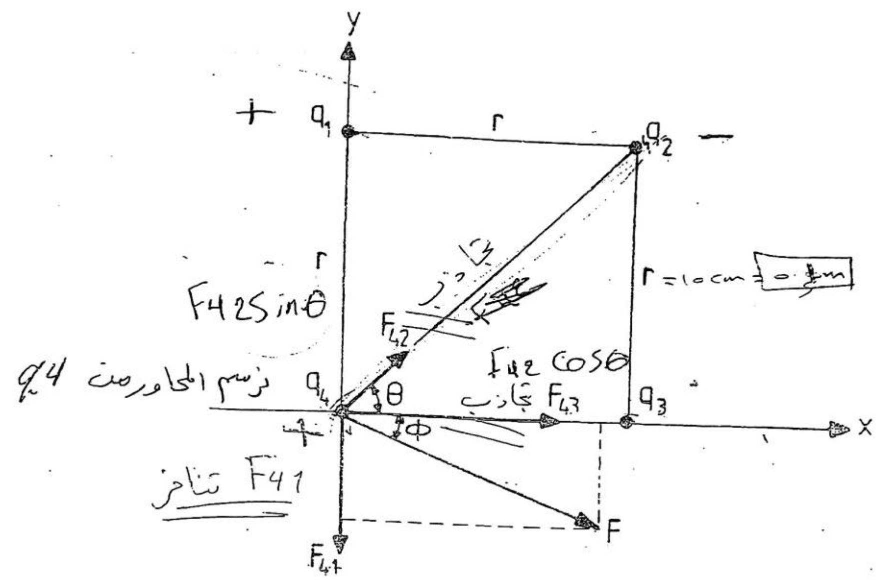
$$q_1 = +1 \times 10^{-6}\,C , q_2 = -1 \times 10^{-6}C , q_3 = -2 \times 10^{-6}C$$
$$q_4 = +2 \times 10^{-6}C , r = 10\ cm .$$

الحـــل :

نحدد اتجاهات القوى الثلاث F_{41} و F_{42} و F_{43} التي تؤثر على الشحنة q_4 من قبل الشحنات q_1 ، q_2 ، q_3 على الترتيب . وباستخدام قانون كولوم يمكننا حساب مقادير هذه القوى .

$$F_{41} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_4 q_1}{r_{41}^2}$$

$$= 9 \times 10^{9}\,\frac{2 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^{-6}}{(0{\cdot}1)^2}$$



الشكل (9 – 1)

$= 1{\cdot}8\text{N}$

$$F_{42} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_4 q_2}{r_{42}^2}$$

$$= \cancel{9} \times 10^9\,\frac{2 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^{-6}}{\cancel{2}(0{\cdot}1)^2}$$

$= 0{\cdot}9\text{N}$

$$F_{43} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_4 q_3}{r_{43}^2}$$

$$= 9 \times 10^9\,\frac{2 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{-6}}{(0{\cdot}1)^2}$$

$= 3{\cdot}6\text{N}$

أما محصلة هذه القوى الثلاث فتساوي المجموع الأتجاهي لها ، أي .

$$\vec{F} = \vec{F}_{41} + \vec{F}_{42} + \vec{F}_{43}$$

ولحساب مقدار المحصلة نجد أولاً مجموع المركبات الأفقية (F_x) للقوى الثلاث فنحصل على

$$F_x = F_{43} + F_{42} \cos \theta$$
$$= 3{\cdot}6 + 0{\cdot}9 \cos 45$$
$$= 3{\cdot}6 + 0{\cdot}6 = 4{\cdot}2N$$

ثم نجد مجموع المركبات العمودية (F_y)

$$F_y = F_{42} \sin\theta - F_{41}$$
$$= 0{\cdot}9 \sin 45 - 1{\cdot}8$$
$$= 0{\cdot}6 - 1{\cdot}8 = -1{\cdot}2N$$

أن اشارة السالب تعني أن اتجاه F_y يكون نحو الأسفل . أي بالأتجاه السالب لمحور y .
وأخيراً نحصل على مقدار القوة المحصلة من المعادلة الآتية

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$F = \sqrt{(4{\cdot}2)^2 + (1{\cdot}2)^2} = 4{\cdot}4N$$

ولتعيين اتجاه القوة المحصلة ، نحسب الزاوية التي تعملها F مع محور x

$$\tan \phi = \frac{F_y}{F_x}$$

$$= \frac{-1.2}{4.2} = -0.29$$

أي أن

$$\therefore\ \phi = \tan^{-1}(-0.29)$$

$$\phi = 16$$

لاحظ اتجاه القوة لمحصلة في الشكل (1-9) .

مثـــال 5

شحنتان نقطيتان موضوعتان في الفراغ . مقدارهما $+400\mu C$ ، $-900\,\mu C$. والبعد بينهما 50cm عين النقطة الواقعة على امتداد المسافة بينهما والتي عندها تصبح القوة المؤثرة على شحنة نقطية موجبة قدرها q صفراً .

الحـــل :

ينبغي بادىء الأمر أن نحدد الموقع الذي يحتمل عنده ان تكون القوة المحصلة المؤثرة على الشحنة q صفراً ان هذا الموقع هو بالتأكيد لايقع بين الشحنتين . اذ يستحيل ان تكون المحصلة صفرا في هذه المنطقة . لأن القوتين المؤثرتين على q تكونان بنفس الاتجاه . هذا من ناحية . ومن الناحية الأخرى يجب ان يكون بعد الموقع عن الشحنة الصغيرة أقل من بعده عن الشحنة الكبيرة . لكي يمكن أن يتم التعادل بين القوتين المؤثرتين على الشحنة q طبقاً لقانون كولوم .

لنفرض الآن أن بعد الشحنة q عن الشحنة الصغيرة يساوي x من الأمتار . كما هو مبين في الشكل (1-10) . عند ذلك يصبح بعدها عن الشحنة الأخرى $x + 0.5$ من الأمتار .

وبتطبيق قانون كولوم يمكننا ان نجد كل من القوتين المؤثرتين على الشحنة q

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q \times 400 \times 10^{-6}}{x^2}$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q \times 900 \times 10^{-6}}{(x+0.5)^2}$$

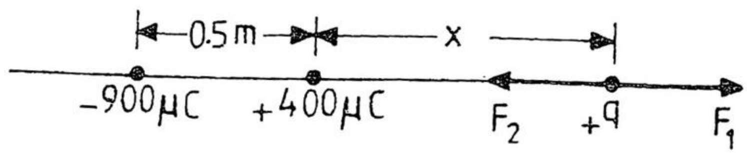
بما كانت هاتان القوتان متعاكستين بالأتجاه . كما هو مبين في الشكل . فأن القوة المحصلة تصبح صفر عندما تكون القوة الأولى مساوية للقوة الثانية بالمقدار .

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q \times 400 \times 10^{-6}}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q \times 900 \times 10^{-6}}{(x + 0.5)^2}$$

وبحذف العوامل المشتركة بين طرفي المعادلة وأخذ الجذر التربيعي للطرفين ينتج :

$$2(x + 0.5) = 3x$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على قيمة x وتساوي مترا واحدا



الشكل (10 – 1)

تمرينات

لاحظ ان جواب هذه التمرينات (وكذلك تمرينات الفصول الاخرى) قد حصر بين قوسين في نهاية التمرين . وان تسلسل الاجوبة للتمرينات المتضمنة اكثر من اجابة واحدة هو من اليسار الى اليمين .

1–1 تصور ان دقيقتي ألفا توأجدتا على بعد قدره (10^{-13}m) فما مقدار القوة التي تؤثر بها احدى الدقيقتين على الاخرى ، علما بأن دقيقة الفا تتكون من نيوترونين وبروتونين ؟
(0.092N)

1–2 احسب القوة الكهروستاتيكية المؤثرة بين شحنتين متماثلتين ، مقدار كل منهما كولوماً واحداً ، موضوعتين في الهواء ، علماً بأن المسافة بينهما تساوي متراً واحداً
(9×10^{9}N)

1–3 احسب عدد الالكترونات التي تتكون منهما شحنة قدرها كولوما واحدا

1–4 احسب قوة التنافر بين نواتي أراغون عندما يكون البعد بينهما $1 \times 10^{-3} \mu m$. علما بان نواة الاراغون تحتوي على 18 بروتونا .
(7.5×10^{-8}N)

1–5 ماهي المسافة لفاصلة بين الكترونين في الفراغ اذا علمت ان القوة الكهروستاتيكية بينهما تساوي قوة جذب الارض للألكترون ؟

شحنة الالكترون = 1.6×10^{-19}C .
كتلة الالكترون = 9.1×10^{-31} kg .

(5.1m)

1–6 احسب السرعة التي يدور فيها الالكترون في ذرة الهايدروجين على ضوء المعلومات المعطاة في المثال (1) .
(2.2×10^{6} ms^{-1})

1–7 شحنتان $q_1 = 100 \times 10^{-8} \mu C$, $q_2 = -400 \times 10^{-8} \mu C$ وضعتا في الهواء على بعد قدره خمسة أمتار كما وضعت شحنة ثالثة قدرها $q_3 = 100 \times 10^{-10} \mu C$

عند منتصف المسافة بينهما . أحسب مقدار محصلة القوة المؤثرة على الشحنة الثالثة وعين اتجاهها ($7.2 \times 10^{-17}N$)

ثلاث شحنات نقطية موجبة مقاديرها 2 و 3 و 4 مايكروكولومات موضوعة على رؤوس مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه 0.1m . أحسب مقدار القوة المحصلة المؤثرة على الشحنة $4\mu C$ وعين اتجاهها (15.7N)

1-9 كرتان موصلتان متماثلتان ، شحنتا بشحنتين مقدارهما $500 \times 10^{-10}\mu C$ و $600 \times 10^{-10}\mu C$ على الترتيب . ووضعتا بحيث كانت المسافة بين مركزيهما عشرين سنتيمترا . فاذا غيرت هذه المسافة الى خمسين سنتيمتراً ، فما هي النسبة بين قيمة القوة الكهربائية المؤثرة بين الكرتين في الموضع الاول الى قيمتها في الموضع الثاني . (6.25:1)

1-10 كرة موصلة تحمل شحنة موجبة قدرها $0.01\ \mu C$ ، وضعت تحتها كرة خفيفة مشحونة كتلتها 50mg ، فاذا بقيت هذه الكرة معلقة في مكانها ، جد الشحنة التي تحملها علما بأن المسافة بين مركزي الكرتين تساوي ثلاثة سنتمترات . ما نوع هذه الشحنة ؟ ($4.9 \times 10^{-4}C$)

1-11 تتكون جزيئة كلوريد الصوديوم من أيون الصوديوم الذي يحتوي على شحنة موجبة مقدارها ($1.6 \times 10^{-13}\ \mu C$) . وأيون الكلور الذي يحتوي على شحنة سالبة بنفس المقدار . فاذا كانت المسافة بين الايونين ($1 \times 10^{-10}m$) فما مقدار قوة التجاذب بينهما ؟ ($23 \times 10^{-9}N$)

1-12 جسمان صغيران يحملان شحنتين موجبتين مقدارهما ($100\mu C$) و ($400\mu C$) وضعا على بعد (6cm) في أي نقط على الخط الواصل بينهما يجب ان يوضع جسم صغير اخر يحمل شحنة موجبة مقدارها q بحيث تكون القوة المؤثرة على هذه الشحنة صفراً ؟

1-13 كرة معدنية صغيرة تحمل شحنة مقدارها ($+ 2C$) وضعت على بعد (20 cm) من كرة مماثلة تحمل شحنة مقدار ($- 1\ C$) ففي أية نقطة يجب ان توضع كرة أخرى مشحونة بشحنة موجبة على استقامة الخط الواصل بين الشحنتين ، بحيث تكون القوة المؤثرة عليها صفراً ؟

(وراء الشحنة الصغيرة بمسافة (0.48m))

1-14 كرتان معدنيتان متماثلتان تحملان شحنتين مقدارهما ($+ 2\ \mu C$) و ($- 4.4\mu C$) جلبت احداهما لكي تلامس الاخرى ، ثم وضعتا على مسافة قدرها (6cm) ما مقدار القوة الكهروستاتيكية العاملة بينهما ؟ وهل هي قوة تنافر أم قوة تجاذب ؟ (3.6 N تنافر)

1-15 وضعت ثلاث شحنات نقطة ، مقدار كل منها (q كولوم) على رؤوس مثلث متساوي الاضلاع . أحسب القوة التي تؤثر على كل شحنة اذا علمت أن طول ضلع المثلث يساوي (10cm) .

($15.6 \times 10^{11} q^2 N$)

1-16 وضعت أربع شحنات نقطية مقدار كل منها (q كولوم) على رؤوس مربع طول ضلعه (0.2m) أ - جد القوة التي تؤثر على شحنة نقطية مقدارها 2q موضوعة في مركز المربع . ب - كم يصبح مقدار القوة فيما اذا أزيلت أحدى الشحنات الأربع ؟

(F = 0 ، $F = 9 \times 10^{11} q^2 N$)

1-17 وضعت ثلاث شحنات نقطية مقاديرها 2 + و 3 + و 8 - مايكروكولومات على رؤوس مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه عشرة سنتيمترات . ما مقدار محصلة القوة المؤثرة على الشحنة السالبة وما اتجاهها ؟

(13.4N)

1-18 كرتان صغيرتان متماثلتان من نخاع البيلسان تفصلهما مسافة قدرها ثلاثون سنتمتراً في الهواء . فاذا شحنت الكرة الأولى بشحنة موجبة قدرها $3 \times 10^{-3} \mu C$ ، والثانية بشحنة سالبة قدرها $12 \times 10^{-3} \mu C$. أحسب قوة التجاذب بينهما . والآن اذا تلامست الكرتان ثم وضعتا على البعد نفسه ، فكم تصبح القوة بينهما ؟ وهل هي قوة تنافر أم تجاذب ؟

($3.6 \times 10^{-4} N$. $2.0 \times 10^{-4} N$)

1-19 كرتان متماثلتان مشحونتان بالتساوي ومعلقتان من نفس النقطة بخيطين طول كل منهما 13cm . استقرت هاتان الكرتان على بعد قدره d بفعل التنافر . فاذا علم أن شحنة كل كرة تساوي $2.1 \times 10^{-8} C$ وكتلتها 100mg ، احسب البعد d بين الكرتين .

(10cm

1-20 كرتان صغيرتان كتلة كل منهما (10g) علقتا من نقطة واحدة بواسطة خيطين من الحرير طول كل منهما متر واحد . فاذا شحنت كل من الكرتين بشحنة موجبة متساوية وحدث التنافر بين الكرتين بحيث أصبحت الزاوية بين الخيطين (8°) ، أحسب مقدار شحنة كل من الكرتين .

($12 \times 10^{-8} C$)

1-21 أثبتت تجارب رذرفورد أن قانون كولوم يصح تطبيقه للمسافات الصغيرة لحد ($10^{-12} cm$) . فاذا كانت نواة ذرة الذهب تحتوي على 118 نيوترون و 79 بروتون وكانت نواة الهيليوم (دقيقة الفا) تحتوي على نيوترونين وبروتونين . احسب

أ – قوة التنافر بين نواة الذهب ونواة الهيليوم عندما تكون المسافة بينهما (10^{-12} cm)

ب – تعجيل نواة الهيليوم عند هذه المسافة .

ج – تعجيل نواة الذهب .

1-22 ثلاث كرات صغيرة كتلة كل منها (10gm) معلقة من نقطة واحدة بثلاثة خيوط من الحرير طول كل منها متر واحد. شحنت الكرات بشحنات متساوية فتنافرت وشكلت مثلثاً متساوي الأضلاع طول ضلعه (10cm) . أحسب مقدار شحنة كل من الكرات الثلاث . (6×10^{-8}C).

1-23 مكعب طول ضلعه (d متر) . وضعت شحنة نقطية مقدارها q كولوم) في كل رأس من رؤوس المكعب الثمانية . جد مقدار محصلة القوة المؤثرة على أي من هذه الشحنات . ما اتجاه المحصلة ؟

($2.95 \times 10^{-10} \dfrac{q^2}{d^2}$ وبأتجاه قطر المكعب)

احمد عبدالجبار
جامعة الموصل / قسم فيزياء

الفصل الثاني

المجال الكهربائي

Electric Field

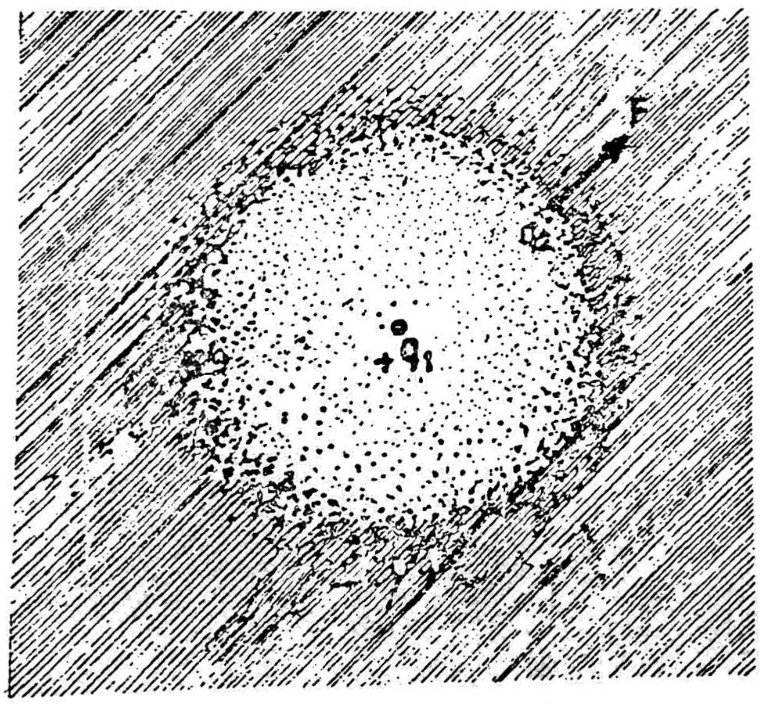
2 - 1 شدة المجال الكهربائي Electric field strength

لا بد وأن يتذكر الطالب من دراسته لقانون نيوتن للجذب الكتلي ان أي جسمين يؤثر أحدهما على الآخر بقوة تجاذب تتناسب طردياً مع حاصل ضرب كتلتيهما وعكسياً مع مربع المسافة بينهما . فالأرض مثلاً في دورانها حول الشمس تتأثر حركتها نتيجة لهذه القوة على الرغم من المسافة الشاسعة بينهما والفراغ الذي يفصلهما . وهذا ما يدعى التأثير عن بعد action - at - a distance . ولا ينحصر هذا المفهوم على قوى التجاذب الكتلي فقط . بل تعداها ليشمل القوى الكهربائية والمغناطيسية أيضاً .

وعلى الرغم من تردد الكثير من العلماء والمفكرين في تقبل فكرة التأثير عن بعد وذلك لاعتقادهم بأن مثل هذا النوع من التأثير الآني يمكن أن يتم فقط بين الجسمين اللذين يلامس أحدهما الآخر ، بقيت هذه الفكرة سائدة وبدون تفسير حتى مطلع القرن التاسع عشر عندما جاء العالم ميخائيل فرادي بمفهوم المجال الكهربائي . فلقد صور فرادي التأثير المتبادل بين الأجسام المشحونة بانه يكمن بطريقة ما في الفضاء الذي يفصل بين الجسمين . فالشحنة q_1 في الشكل (2-1) مثلاً تحدث مجالاً كهربائياً في الحيز المحيط بها ، وهذا المجال بدوره يؤثر على الشحنة q_2 بقوة مقدارها F .

لقد جاءت التجارب العملية بعدئذ منسجمة مع مفهوم المجال ، فالالـكترونـات المعجلة في هوائـي الارسال تؤثر في الـكترونات هوائـي جهاز الاستقبال البعيد بعد مضـي زمن مقداره طول المسافة بين الجهازين مقسوماً على سرعة الضوء . على حين نجد أنه حسب مفهوم « التأثير عن بعد » فان التأثير هو آني اي ينتقل في الحال . وهذا مالا يتفق مع التجربة .

مما تقدم يتضح أنه بالامكان عملياً التأكد من وجود مجال كهربائي في نقطة مـــا وبالتالي قياسه . وذلك بوضع جسم صغير يحمل شحنة اختبار مقدارها q_0 (وقد اتفق على ان تكون موجبة للسهولة) في الموضع المراد اختبار المجال عنده . وبقياس القـــوة الـكهربائية F (ان وجدت) المؤثرة على هذا الجسم يمكننا ان نتعرف على وجود المجال وشدته . وعلى هذا الاساس نستطيع ان نعرف شدة المجال الـكهربائي ورمزها ($\vec{E}$) عند نقطة ما . « بأنها القوة المؤثرة لوحدة الشحنة على شحنة الاختبار الموجبة الموضوعة عند هذه النقطة » . اي ان :



الشكل (1 – 2)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \qquad (2\text{-}1)$$

حيث ان $\vec{E}$ تمثل شدة المجال الكهربائي وهي كمية متجهة واتجاهها هو نفس اتجاه $\vec{F}$ ومن المعادلة (2-1) يتضح أن وحدة شدة المجال الكهربائي هي وحدة القوة مقسومة على وحدة الشحنة . أي نيوتن / كولوم .

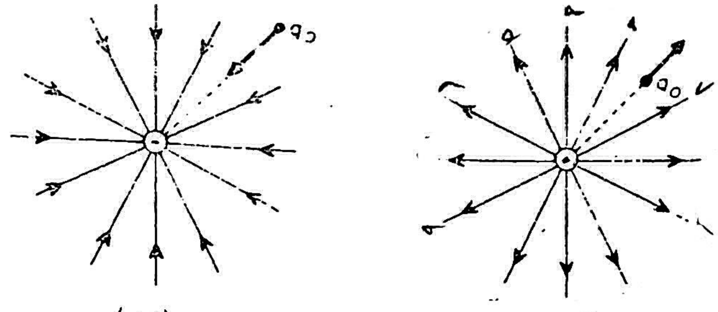
ان وضع شحنة الاختبار في النقطة المراد اختبار المجال عندها . يجب ان لايؤثر على هذا المجال الأصلي ويغير من مقداره واتجاهه . وهذا يقتضي أن تكون شحنة الاختبار اصغر ما يمكن . لذا فالتعريف الدقيق لشدة المجال الكهربائي يكون الآتي :

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{F}}{q_0} \qquad (2\text{-}2)$$

2 - 2 خطوط القوة الكهربائية Lines of force

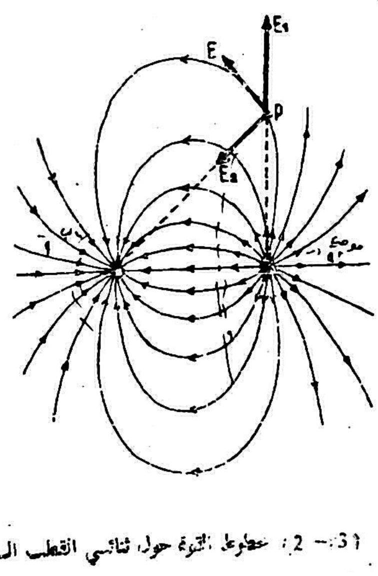
لم يكن العالم الانكليزي ميشيل فراداي (1791 - 1867) مقتنعاً تماماً بالفكرة القائلة بأن المجال الكهربائي (وكذلك المجال المغناطيسي) هو تعبير رياضي مجرد ، فأدخل مفهوم خطوط القوة الكهربائية ، وعدّها طريقة سهلة لتصور نماذج المجال الكهربائي (وكذلك المجال المغناطيسي) . لقد اهتم فراداي كثيراً بفكرة هذه الخطوط (الوهمية) واستخدمها في دراسته ، وصورها كخيوط (أو شعيرات) تنفذ خلال المجال بل وحتى لها خصائص فيزيائية كخاصية التنافر فيما بينها مثلاً .

أما خط القوة هذا فهو المسار الذي تسلكه شحنة اختبارية موجبة موضوعة عند نقطة ما في المجال الكهربائي . فلو تركت هذه الشحنة طليقة لتحركت باتجاه محصلة القوى الكهربائية المؤثرة عليها ($F = q_0 E$) والناتجة عن محصلة شدة المجال عند تلك النقطة . والشكل (2-2) يرينا خطوط القوة لمجال كهربائي ناشيء عن شحنة نقطية معزولة (أو كرة مشحونة) في مستوى الشحنة . ففي هذه الحالة البسيطة تكون خطوط القوة مستقيمة ومنبعثة من الشحنة بشكل شعاعي ومتجهة اما نحو الخارج ان كانت الشحنة النقطية موجبة كما هو مبين في الشكل 2-2 (أ) ، أو متجهة نحو الداخل ان كانت الشحنة سالبة (الشكل 2-2 ب) . فمن الواضح اذن ان اتجاه خط القوة هو نفس الاتجاه الذي تتسارع به الشحنة الاختبارية الموجبة والحرة q_0 .



شكل (2 - 2) خطوط القوة حول شحنة نقطية موجبة واخرى سالبة

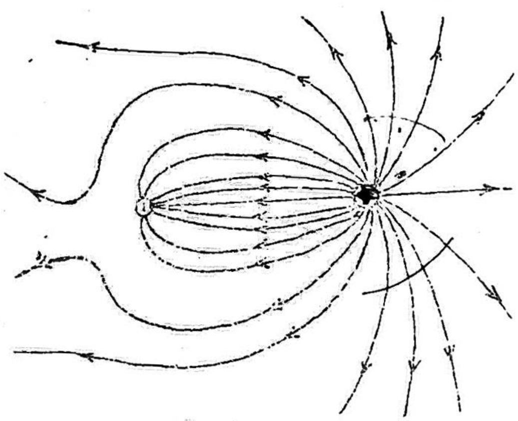
وغالباً لاتكون خطوط القوة مستقيمة بل بشكل منحنيات . فالشكل (3-2) يبين خطوط المجال الناشيء عن شحنتين متساويتين في القيمة ، ولكن احداهما موجبة والأخرى سالبة ، تفصلهما مسافة صغيرة ، وهذا مايدعى بثنائي القطب الكهربائي والذي سنأتي على شرحه في البند القادم . ويبدو واضحاً من الشكل ان القوة المحصلة المؤثرة على شحنة اختبارية موجبة موضوعة عند نقطة ما في المجال (ولتكن P مثلا) هي باتجاه المماس لخط القوة في تلك النقطة . وبمعنى آخر أن متجه شدة المجال E أيضا يكون باتجاه المماس لخط القوة .



الشكل (3 - 2) خطوط القوة حول ثنائي القطب الكهربائي

ان خطوط القوة تبدأ بالشحنة الموجبة وتنتهي بالشحنة السالبة . الا أنه ليس من الضروري ان تكون كذلك دائماً ، فقد تكون خطوط القوة مغلقة على نفسها كما في حالة المجال الكهربائي المتولد عن المجال المغناطيسي المتغير . وكما يلاحظ ان خطوط القوة الكهربائية لاتتقاطع مع بعضها بعضاً وذلك لأنه لايمكن ان يكون للمجال الكهربائي أكثر من اتجاه واحد عند نقطة معينة .

كما يمكننا كذلك ان نتصور من خلال خطوط القوة شكل المجال الكهربائي (لاحظ الشكل 4-2) الناشيء عن شحنتين مختلفتين في الاشارة وغير متساويتين في القيمة . وهنا ايضا نلاحظ ان خطوط القوة المرسومة في مستوى الشحنتين تدل دلالة واضحة على قيمة واتجاه شدة المجال في مختلف المواقع التي تحيط بالشحنتين فحيثما تكون الخطوط محتشدة يكون المجال قوياً ، وكلما تباعدت هذه الخطوط ضعف المجال . ويتبين كذلك من هذا الشكل بصورة واضحة النقطة التي تصبح عندها شدة المجال صفراً ($E = 0$) .



الشكل (4 - 2)

خطوط القوة الكهربائية حول شحنتين غير متساويتين في القيمة ومختلفتين في الاشارة

مما سبق يتبين انه بالامكان اعتبار كثافة خطوط القوة بمثابة قياس لمقدار شدة المجال ، والمقصود بكثافة الخطوط هنا هي عدد الخطوط التي تقطع وحدة المساحة العمودية على اتجاه المجال عند النقطة المعينة . ومن ملاحظة الشكلين (3-2) و (4-2) نرى ان خطوط القوة تكون كثيفة في النقاط القريبة من الشحنة حيث يكون مقدار شدة المجال كبيراً وكلما ابتعدنا عن الشحنة قل مقدار شدة المجال وقلت كذلك كثافة هذه الخطوط .

مما تقدم نستطيع ان نستخلص خاصيتين لخطوط القوة الكهربائية . تتجلى اهميتهما في حل المسائل المتعلقة بالحالات التي يكون فيها المجال متناظراً وذلك بطريقة سهلة (كما سنرى عند تطبيق قانون كاوس في الفصل القادم) .

1 ان المماس لخط القوة عند أي نقطة في المجال يمثل اتجاه شدة المجال E في تلك النقطة .

2 ـ ان عدد خطوط القوة لوحدة المساحة التي تقطع مساحة صغيرة عمودية على المجال عند نقطة معينة تمثل مقدار شدة المجال في تلك النقطة .

3 – 2 حساب شدة المجال الكهربائي Calculation of E

لايجاد شدة المجال الكهربائي لشحنة نقطية معزولة مقدارها q في النقطة P في الفضاء المحيط بالشحنة نفترض وجود شحنة اختبارية q_0 في تلك النقطة عندئذ تكون القوة F المؤثرة على q_0 استناداً الى قانون كولوم مساوية للكمية

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\,q_0}{r^2}\,\hat{r}$$

حيث يمثل الرمز $\hat{r}$ وحدة المتجه بالاتجاه من q الى P كما مبين في الشكل (5-2) . وبالتعويض عن F في المعادلة (1-2) . نجد شدة المجال E .

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}\,\hat{r} \qquad (2-3)$$

ان اتجاه E يكون بنفس اتجاه $\hat{r}$ (اي بعيداً عن q) فيما لوكانت الشحنة q موجبة كما هو مبين في الشكل . أما اذا كانت q سالبة الشحنة فان اتجاه E يكون بعكس اتجاه $\hat{r}$ (أي نحو q) ، لماذا ؟

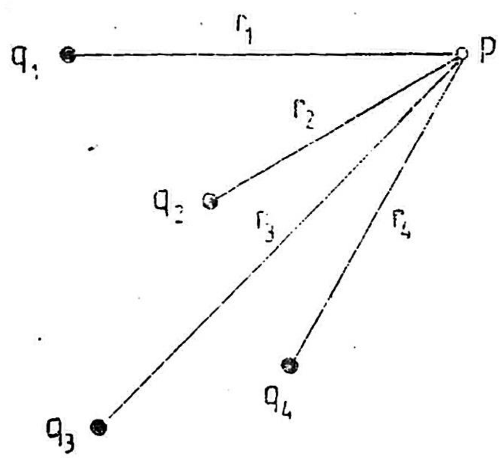
الشكل (5 – 2)

ولايجاد E الناشئ من الشحنات النقطية q_1 و q_2 و..... الخ ، التي تقع على ابعاد r_1 و r_2 و.. الخ. من النقطة P كما هو مبين في الشكل (2 - 6) . نحسب E_1 و E_2 و..... الخ لكل شحنة على حدة عند النقطة P . كما لو كانت هي الشحنة الوحيدة الموجودة ، اي :

$$\bar{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2}\hat{r}_1 \cdot \bar{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2}\hat{r}_2 \quad \dots$$

ثم نجمع هذه المجالات المحسوبة لجميع الشحنات جمعاً اتجاهياً لنحصل على المجال الكلي E عند تلك النقطة

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 + \dots = \Sigma\,\bar{E}_n \qquad \dots(2-4)$$

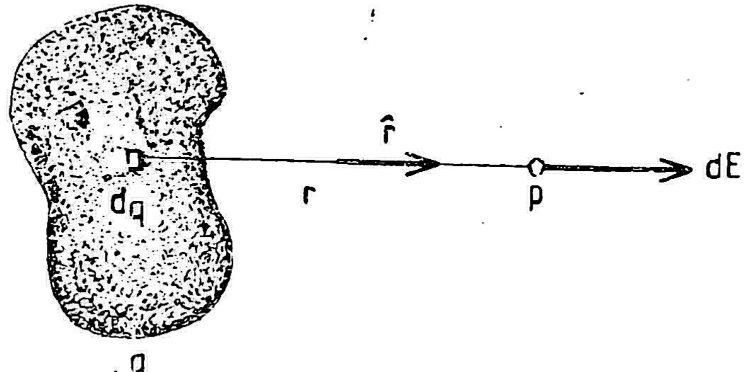


الشكل (2 - 6)
مجموعة من الشحنات النقطية

اما اذا كان توزيع الشحنة متصلا Continuous charge distribution كأن تكون الشحنة موزعة على سطح جسم موصل ، اوموزعة ضمن حجم معين بشكل متصل ، فبالامكان ايجاد شدة المجال الناشيء عنها عند النقطة P مثلا ، وذلك بتقسيم الشحنة الى عدد كبير من العناصر المتناهية في الصغر Infinitesimal elements كل منها يدعى dq . ثم يحسب المجال dE الناشيء عن كل عنصر عند النقطة P . وذلك بأن يعد كل عنصر وكأنه شحنة نقطية . أي

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\,\hat{r} \qquad (2-5)$$

حيث تمثل r البعد من dq الى النقطة P كماهو مبين في الشكل (7 – 2) . ثم يحسب المجال الكلي E بأخذ التكامل الاتجاهي Vector integral لجميع المجالات الناشئة من هذه العناصر ، اي :



الشكل (7 – 2) توزيع متصل للشحنة

$$\vec{E} = \int \vec{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\,\hat{r} \qquad \ldots(2-6)$$

وسوف نورد بعض الامثلة التطبيقية لكيفية حساب مثل هذا التكامل في بعض الحالات البسيطة في البند الآتي :

4 – 2 تطبيقات على كيفية حساب شدة المجال الكهربائي

أ – المجال الناشيء عن ثنائي قطب كهربائي

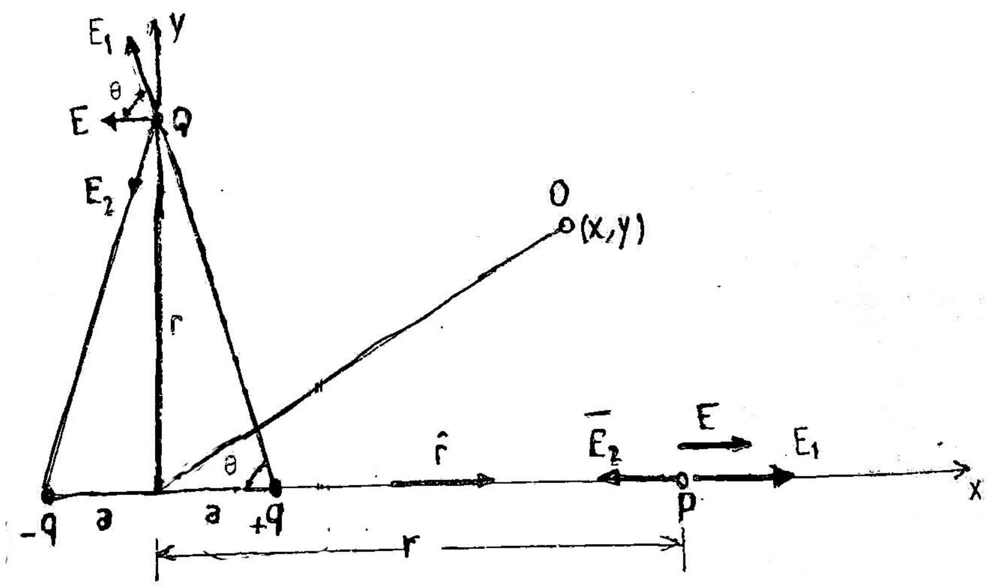
يتكون ثنائي القطب كما هو مبين في الشكل (8 – 2) من شحنتين نقطيتين متساويتين في المقدار احداهما موجبة q + والاخرى سالبة q – وتفصلهما مسافة قدرها 2a ان اهمية ثنائي القطب تتجلى بوضوح على نطاق التركيب الذري للمادة . فظاهرة استقطاب الجزيئات تنتج عن الانعزال الوضعي بين الالكترونات والبروتونات . اما نتيجة لتعرضها الى مجال كهربائي خارجي او نتيجة لطبيعة التركيب الجزيئي للمادة

(كجزيئات الماء مثلا) ، مما يؤدي الى تكوين ثنائي القطب . وسوف نأتي الى شرح ذلك بالتفصيل في فصل قادم .

وفيما يلي سنناقش المجال الناشيء عن ثنائي القطب عند ثلاث نقاط في الفضاء المحيط به :

أولاً عند النقطة P الواقعة على امتداد محور ثنائي القطب

لنفرض ان P تبعد مسافة r من مركز ثنائي القطب كما هو مبين في الشكل (8 – 2) . وباستعمال المعادلة (3 – 2) نجد المجال E الناشيء عن الشحنة الموجبة



الشكل (8 – 2) ثنائي القطب

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{(r-a)^2} \hat{i}$$

والمجال E_2 الناشيء من الشحنة السالبة

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-q}{(r+a)^2} \hat{i}$$

لاحظ أن E_2 هي بعكس اتجاه E_1

أما محصلة المجال E فتنتج من جمع E_1 و E_2 جمعاً اتجاهياً ، أي $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$
وبالتعويض عن مقدار كل من E_1 و E_2 ينتج :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(r-a)^2} - \frac{q}{(r+a)^2}\right]$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{4ra}{(r^2-a^2)^2}\right] \qquad (2-7)$$

ومن هذا يتضح أن اتجاه المجال E عند النقطة P يقع على امتداد محور ثنائي القطب ويكون باتجاه محور x . واذا كانت $r >> a$. أي أن المسافة بين الشحنتين صغيرة جداً بالمقارنة مع r . امكننا اهمال a^2 بالنسبة للمقدار r^2 . عندئذ نأخذ المعادلة (2-7) الشكل الآتي :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4aq}{r^3}$$

أو

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2p}{r^3} \qquad (2-8)$$

حيث ان (p = 2aq) وتعني العزم الكهربائي لثنائي القطب Electric dipole moment
ومن الجدير بالذكر أن عزم ثنائي القطب هو كمية متجهة . اتجاهها من الشحنة السالبة الى الشحنة الموجبة

ثانياً : عند النقطة Q الواقعة على العمود المنصف لمحور ثنائي القطب .

لنفرض أن Q تبعد مسافة r عن مركز ثنائي القطب ، عندئذ يكون مقدار المجال الناشيء عن الشحنة الموجبة (E_1) مساوياً الى مقدار المجال الناشيء عن الشحنة السالبة (E_2) . وباستخدام المعادلة (2 - 3) نحصل على :

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2 + a^2}$$

ولكي نجد المجال الناشيء عن شحنتي ثنائي القطب ، نحلل كل من E_1 و E_2 الى مركبتين الواحدة عمودية على محور ثنائي القطب والاخرى موازية له . ومن الواضح ان المركبتين العموديتين على المحور تمحو احداهما الاخرى ، أي أن مجموعهما يساوي صفراً ، وان المركبتين الموازيتين للمحور هما بنفس الاتجاه . وبهذا فان محصلة المجالين E_1 و E_2 تكون باتجاه محور ثنائي القطب ونحو اليسار كما هو مبين في الشكل (2 - 8) . اما مقدار محصلة فيصبح :

$$E = E_1 \cos\theta + E_2 \cos\theta$$

وبالتعويض عن E_1 و E_2 وعن $\cos\theta$ نجد

$$E = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2 + a^2} \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2aq}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$$

واذا كانت a صغيرة جداً بالمقارنة مع r . أمكننا اهمال المقدار a^2 في المقام ، وعندئذ تصبح هذه العلاقة :

$$E \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2aq}{r^3}$$

أو

$$E \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p}{r^3} \qquad (2-9)$$

وذلك بدلالة عزم ثنائي القطب .

ثالثاً : عند أي نقطة أخرى مثل 0 :

وكذلك يمكننا حساب المجال لثنائي القطب عند أي نقطة (لا على التعيين) في الفضاء المحيط به بنفس الطريقة المذكورة آنفا (انظر الى المسألة 8 – 2) . وهذه هي الحالة العامة التي سنأتي الى مناقشتها في الفصل الرابع بطريقة أسهل .

ب – المجال الناشيء عن شحنة موزعة على طول خط مستقيم .

لنفرض أن الشحنة تمتد على محور x بشكل منتظم بين النقطتين x = b ، x = c كما هو مبين في الشكل (2 – 9) ، وذات كثافة خطية Linear charge density مقدارها λ . أي أن مقدار الشحنة لوحدة الطول يساوي (λ C / m) . والمطلوب حساب شدة المجال E عند النقطة P الواقعة على بعد y = a كما هو مبين في الشكل .

نتصور أن الشحنة الخطية مقسمة الى عناصر (elements of length) طول كل منها dx . عندئذ يكون مقدار شحنة كل عنصر مساويا (λdx) ، ويصبح بالامكان الحصول على شدة المجال dE عند النقطة P الناشيء عن احدى هذه العناصر وذلك بالاستفادة من المعادلة (3 – 2) ، أي أن :

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

أو

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\, dx}{r^2} \hat{r}$$

وبما أن الشحنة الخطية هي موجبة فان اتجاه dE يكون بعيداً عن dq . ولحساب محصلة شدة المجال الناشيء عن جميع الشحنة الخطية لابد من تحليل dE الى مركبتين مركبة أفقية باتجاه x ونرمز لها dE_x وأخرى عمودية باتجاه y ونرمز لها dE_y ، ثم نكامل كل منهما على انفراد كما سيلي . والسؤال الذي نطرحه

هنا ونترك الاجابة عليه هو « لماذا لايجري التكامل مباشرة للمعادلة في اعلاه بدلاً من التحليل الى المركبات لحساب محصلة شدة المجال في النقطة P ؟ »

$$dE_x = dE \sin\theta, \quad dE_y = dE \cos\theta$$

وبالتعويض عن مقدار dE نجد

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\, dx}{r^2} \sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sin\theta}{x^2 + a^2} dx$$

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\, dx}{r^2} \cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos\theta}{x^2 + a^2} dx$$

وقبل أن نجري عملية التكامل لحساب كل من E_x و E_y ، نلاحظ أن x و θ هما كميتان متغيرتان ومرتبطتان واحدى بالأخرى ولابد من حذف احداهما ولتكن x ان العلاقة بين هاتين الكميتين (انظر الى الشكل) هي :

$$x = a \tan\theta$$

وبتفاضل هذه المعادلة نحصل على :

$$dx = a \sec^2\theta \, d\theta$$

وبالتعويض عن هاتين القيمتين نحصل على dE_x و dE_y بدلالة متغير واحد هو θ

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sin\theta\,(a \sec^2\theta)}{a^2 \sec^2\theta} d\theta$$

$$dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos\theta\,(a \sec^2\theta)}{a^2 \sec^2\theta} d\theta$$

حيث ان $x^2 + a^2 = a^2 \tan^2\theta + a^2 = a^2 \sec^2\theta$

والآن يصبح بامكاننا أن نجد المركبة الأفقية لمحصلة المجال E_x وكذلك المركبة العمودية E_y وذلك باجراء عملية التكامل على dE_x و dE_y على الترتيب مع ملاحظة نهايتي التكامل كما هو موضح في الشكل (2 – 9) .

$$E_x = \int dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right]$$

$$E_y = \int dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right] \qquad (\text{2-10 ب})$$

من الحالات الخاصة الجديرة بالملاحظة والتي تعطينا نتائج أبسط هي عندما تكون الشحنة ممتدة على جهتي محور x ولمسافة جد طويلة . عندئذ تصبح نهايتي التكامل $\theta_1 = -\pi/2$ و $\theta_2 = \pi/2$. وبالتعويض عن هاتين القيمتين في المعادلتين (2-10 أ) و (2-10 ب) نجد

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\frac{\pi}{2}\right] = 0$$

و

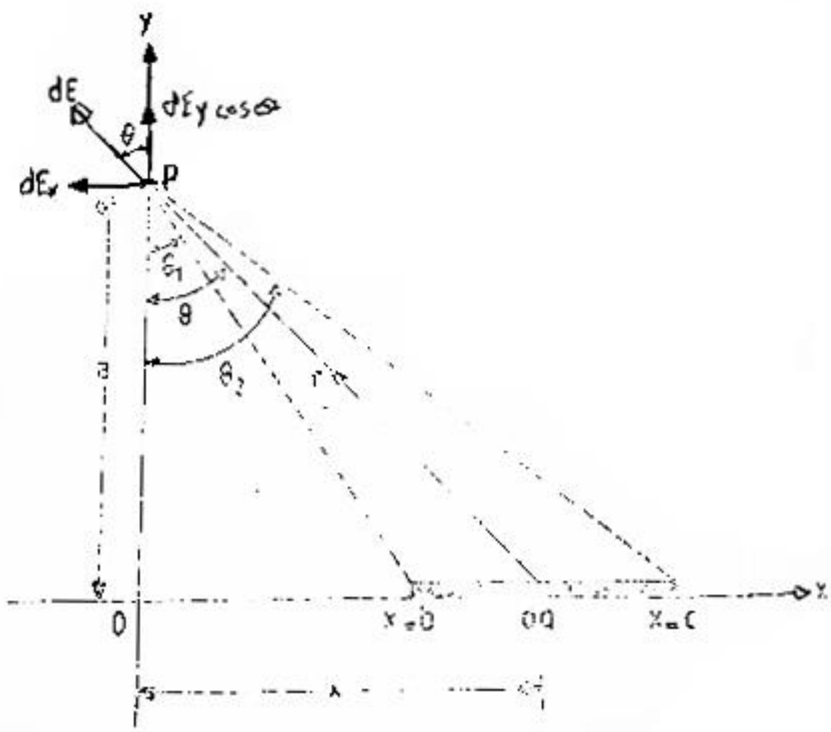
$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

ان كون $(E_x = 0)$ يمكن ملاحظته من التناظر في هذه الحالة ، حيث يتبين أن لكل عنصر من عناصر الشحنة في جهة اليمين هناك عنصرا يقابله في جهة اليسار ، وهذا مايؤدي الى تعادل مركبتي مجاليهما في اتجاه محور x على حين نرى أن dE_y دائما تكون بنفس الاتجاه سواء أكان عنصر الشحنة في الجهة اليمنى من محور x أو في الجهة اليسرى . لذلك نجد ان المركبات العمودية لجميع العناصر تضاف الى بعضها . واما محصلة المجال فيمكن ايجادها من

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a} \qquad \ldots(2-11)$$

وهي **باتجاه محور y** ... لان λ ... ومن هذه النتيجة يتضح ان شدة المجال الكهربائي ... [illegible] عكسيا مع المسافة ... [illegible] مربعها

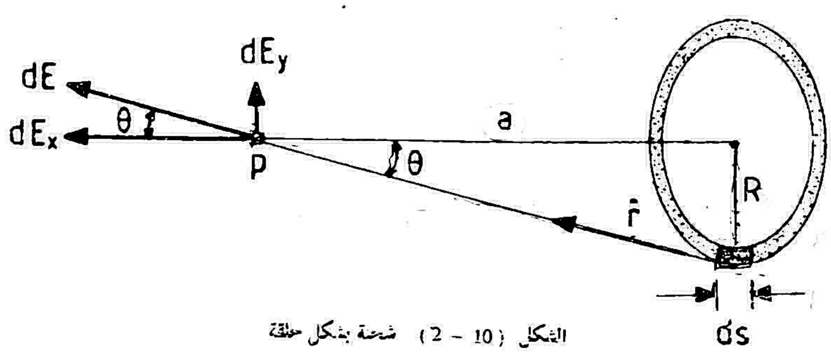
وهناك حالة خاصة أخرى جديرة بالاهتمام وهي عندما تكون النقطة P المبينة في الشكل (2 - 9) واقعة على العمود المنصف للسلك المشحون . في هذه الحالة يمكننا أيضاً وبسهولة الحصول على شدة المجال بشكل مبسط من المعادلتين (2 - 10 أ) و (2 - 10 ب) . أنظر الى المسألة (2 - 4) في نهاية الفصل



الشكل (2 - 9) [illegible]

جـ - المجال الناشيء عن حلقة مشحونة

يمثل الشكل (10 - 2) شحنة موجبة مقدارها q موزعة بانتظام على شكل حلقة نصف قطرها R والمطلوب حساب شدة المجال في النقطة P الواقعة على محور الحلقة وعلى بعد a من مركزها . نأخذ عنصراً صغيراً من هذه الحلقة طوله ds ويحتوي على شحنة dq مقدارها يساوي



الشكل (10 - 2) شحنة بشكل حلقة

$$dq = \frac{q}{2\pi R}\, ds$$

ان شدة المجال dE الناشيء عن هذا العنصر عند النقطة P يمكن ايجاده من المعادلة (3 - 2)

$$\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{dq}{r^2}\,\hat{r}$$

أو

$$\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q\,ds}{2\pi R r^2}\right)\hat{r}$$

أما شدة المجال E الناشيء عن جميع عناصر الشحنة فيمكن حسابه بتكامل المجالات الصغيرة الناشئة من كل العناصر المكونة لشحنة الحلقة ، أي :

$$\vec{E} = \int \overrightarrow{dE}$$

ولاجراء هذا التكامل الاتجاهي لابد من تحليل dE الى مركبتين أحدهما باتجاه المحور x (dE_x) والأخرى عمودية عليه (dE_y) ، ثم نكامل كل منهما على انفراد (لاحظ الشكل (2 – 10))

$$E_x = \int dE_x = \int dE \cos \theta$$

وبالتعويض عن $\cos \theta$ و dE نحصل على

$$E_x = \int \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q\, ds}{2 \pi R r^2} \frac{a}{r}$$

ومن الملاحظ أن قيمة r في هذه الحالة متساوية بالنسبة لجميع عناصر الشحنة ولهذا فبالامكان اخراجها خارج علامة التكامل مع بقية المقادير الثابتة ، وبذلك يتضح :

$$E_x = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{qa}{2 \pi R r^3} \int ds$$

لـكن

$$r^3 = (R^2 + a^2)^{3/2}$$

و

$$\int ds = 2\pi R$$

أي أن ناتج التكامل يساوي طول محيط الحلقة ، لذا

$$E_x = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{qa}{(R^2 + a^2)^{3/2}}$$

أما مركبة المجال العمودية على المحور (E_y) ، فواضح من التناظر أنها ستتلاشى ، وذلك لأن كل عنصر من الشحنة يولد مجالا له مركبة عمودية تتعادل مع مركبة أخـرى تساويها في المقدار وتعاكسها في الاتجاه ، منشأها عنصراً آخر من الشحنة على الجانـب الآخر من الحلقة ، اي ان

$$E_y = \int dE_y = 0$$

لك فان مقدار محصلة المجال E يصبح

$$E = E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qa}{(R^2 + a^2)^{3/2}}$$

اما اتجاهها فهو باتجاه المحور مبتعداً عن الشحنة لأنها موجبة .

ومن هذه النتيجة يتضح ان شدة المجال في مركز الحلقة يساوي صفراً ، وذلك لان (a=0) كما هو متوقع من التناظر .

أما اذا كانت النقطة P بعيدة جداً عن مركز الحلقة أي $(a >> R)$ ، فعندئذ يمكن اهمال (R^2) من مقام هذه المعادلة مقارنة مع a^2 وتصبح قيمة شدة المجال .

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{a^2}$$

ومعنى هذا أنه عند المسافات الكبيرة تعامل شحنة الحلقة كما لو كانت شحنة نقطية .

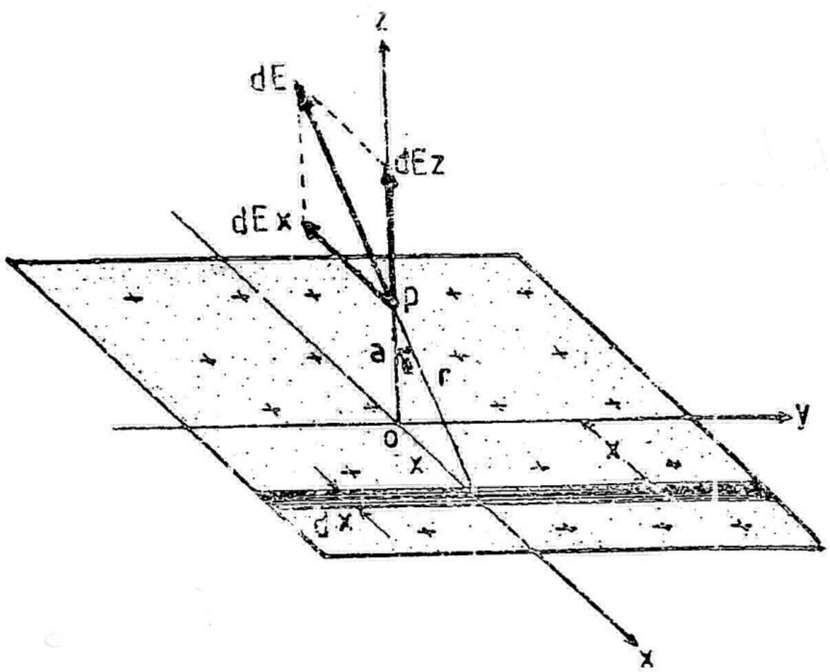
د – المجال الناشيء عن شحنة موزعة بشكل صفيحة مستوية

في الشكل (11-2) شحنة موجبة موزعة بأنتظام على مستو مساحته مالانهاية ، وبكثافة سطحية قدرها $(\sigma C/m^2)$ والمطلوب ايجاد شدة المجال عند نقطة P الواقعة على بعد قدره a من المستوي . ان الشكل (11-2) يبين جزء من هذه الصفيحة الواقعة في المستوي xy

لنتصور ان الشحنة مقسمة الى عدد كبير جداً من الاشرطة الضيقة الموازية لمحور y . يمكن عد كل شريط بمثابة شحنة خطية . واذا فرضنا ان طول كل شريط L وعرضه dx ، لأمكن حساب شحنة الشريط (dq) من حاصل ضرب مساحته في الشحنة لوحدة المساحة (اي σ) . لذا

$$dq = \sigma(L\,dx)$$

والان يمكننا ان نجد شحنة الشريط لوحدة الطول (اي λ) وذلك بقسمة شحنة الشريط على طوله ، اي



الشكل (11 – 2) شحنة موزعة بشكل صفيحة مستوية

$$d\lambda = \frac{dq}{L} = \sigma\, dx$$

اعندئذ يصبح بالإمكان حساب شدة المجال الكهربائي الناشيء عن هـذا الشريط عند نقطة P وذلك بتطبيق المعادلة (11–2) التي ستأخذ شكلا مختلفا بعض الشيء ، نظرا لأن بعد الشحنة الخطية عن نقطة P هو r بدلا من a الذي يمثل بعد النقطة عن المستوي في هذه الحالة . لذا

$$dE = \frac{d\lambda}{2\pi\varepsilon_o r} = \frac{\sigma\, dx}{2\pi\varepsilon_o r}$$

...اء عملية التكامل ينبغي تحليل dE الى مركبتين هما dE_x و dE_z ، ثم نتناول كل منهما على حدة (لماذا ؟) . بيد ان التناظر في توزيع الشحنات على جانبي محور y يشير الى ان مجموع المركبات الأفقية لشدة المجال ، الناشئة عن جميع الأشرطة التي يتكون منها مستوي الشحنات يجب ان يساوي صفراً اي

$$\int dE_x = 0$$

وهذا يعني ان محصلة شدة المجال عند نقطة P يجب ان تكون عمودية على مستوي الشحنات باتجاه محور z . لذا

$$E = \int dE_z$$

لكن

$$dE_z = dE \cos \phi$$

وبالتعويض عن dE من المعادلة في أعلاه ينتج

$$E = \int \frac{\sigma \, dx}{2\pi\varepsilon_0 r} \cos \phi$$

ومما يلاحظ ان هذه المعادلة تحتوي على ثلاث كميات متغيرة هي x و r و ϕ. ولكي ننجز عملية التكامل يجب ان نبقي متغيراً واحداً فقط وليكن ϕ . وذلك بان نتخلص من المتغيرين الاخرين x و r . ان العلاقة بين هذه المتغيرات يمكن استخراجها بسهولة من الشكل (11–2) وهي

$$x = a \tan \phi$$

والان نأخذ مشتقة طرفي هذه المعادلة فنحصل على

$$dx = a \sec^2 \phi \, d\phi$$

كما يمكننا الحصول على علاقة اخرى من الشكل هي

$$r = (x^2 + a^2)^{1/2} = (a^2 \tan^2\phi + a^2)^{1/2}$$
$$= (a^2 \sec^2 \phi)^{1/2} = a \sec \phi$$

وبالتعويض عن dx و r في معادلة التكامل في اعلاه ينتج

$$E = \int \frac{\sigma \, a \sec^2 \phi}{2\pi\varepsilon_0 a \sec \phi} \cos \phi \, d\phi$$

وهكذا تخلصنا من جميع المتغيرات عدا ϕ . وأخيراً نثبت حدود التكامل للزاوية والتي تنحصر بين $\phi = -\frac{\pi}{2}$ و $\phi = +\frac{\pi}{2}$ نظراً لأن الشحنة تمتد من $-\infty$ الى $+\infty$. وبعد اختصار العوامل المشتركة واخراج الكميات الثابتة خارج اشارة التكامل نحصل على

$$E = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\phi = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \Big[\phi \Big]_{-\pi/2}^{+\pi/2}$$

$$= \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \left[\frac{\pi}{2} - \left(- \frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \pi$$

أي أن

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad (2-13)$$

ويتضح من هذه النتيجة ان شدة المجال الكهربائي في هذه الحالة لا تعتمد على بعد النقطة عن مستوي الشحنات ، طالما ان هذا البعد اصغر بكثير من بعدي مستوي الشحنة .

مثـال 1

يبين الشكل (12 - 2) ثلاث شحنات نقطية q_1 و q_2 و q_3 جميعها واقعة في المستوي xy ومثبتة في المواقع المؤشرة في الشكل . المطلوب حساب شدة المجال عند نقطة الاصل 0 . علماً بأن :

$$q_1 = + 16 \times 10^{-9} C, \; q_2 = - 3 \times 10^{-9} C, \; q_3 = + 50 \times 10^{-9} C$$

الحـل

نحسب أولا شدة المجال الناشيء عن كل من الشحنات الثلاث على انفراد طبقا للمعادلة (3-2)

$$E_1 = 9 \times 10^9 \frac{16 \times 10^{-9}}{4^2} = 9 \text{ N/C}$$

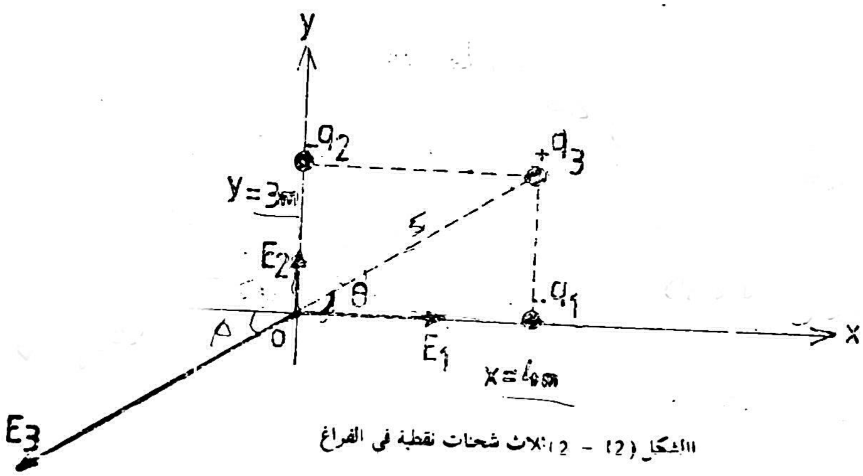
$$E_2 = 9 \times 10^9 \frac{3 \times 10^{-9}}{3^2} = 3 \text{ N/C}$$

$$E_3 = 9 \times 10^9 \frac{50 \times 10^{-9}}{5^2} = 18 \text{ N/C}$$

ومن الواضح أن E_1 باتجاه x الموجب و E_2 باتجاه y الموجب و E_3 يصنع زاوية θ مع محور x كما هو مبين بالشكل . ولايجاد محصلة المجال E نحلل كلاً من المجالات الثلاثة الى مركبة أفقية باتجاه x وأخرى عمودية باتجاه y .

$$E_{1y} = 0$$
$$E_{2y} = +3\ N/C$$
$$E_{3y} = -E_3 \sin\theta$$
$$= -18 \times \frac{3}{5}$$
$$= -10.8\ N/C$$

$$E_{1x} = +9\ N/C$$
$$E_{2x} = 0$$
$$E_{3x} = -E_3 \cos\theta$$
$$= -18 \times \frac{4}{5}$$
$$= -14.4\ N/C$$



الشكل (2 - 2) ثلاث شحنات نقطية في الفراغ

وعليه فالمجموع الجبري للمركبات الافقية يصبح

$$\Sigma E_x = +9 - 14.4 = -5.4\ N/C$$

والمجموع الجبري للمركبات العمودية يصبح

$$\Sigma E_y = +3 - 10.8 = -7.8\ N/C$$

لذا فان مقدار محصلة المجال يكون

$$E = \sqrt{(5.4)^2 + (7.8)^2} = 9.5\ N/C$$

أما الزاوية التي تصنعها المحصلة مع محور x من الجهة السالبة فيمكن ايجادها من

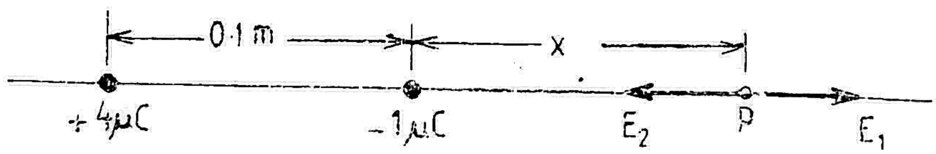
$$\tan\phi = \frac{7.8}{5.4}$$

أي أن

$$\phi = 55^{\circ}$$

مثـــال 2

شحنتان نقطيتان الاولى قدرها $+4\mu C$ والثانية $-1\mu C$ ، تفصلها مسافـــة قدرها 10 cm . عين النقطة الواقعة على الخط المستقيم المار بالشحنتين والتي عندها يكون المجال صفراً .



الشكل (2 3)

الحـــل

من الواضح ان النقطة التي يمكن ان يكون عندها المجال صفراً يجب ان لاتقع بين الشحنتين ، وذلك لان المجال الناشيء عن الشحنة الاولى يكون بنفس اتجاه المجال الناشيء عن الشحنة الثانية في هذه المنطقة المحصورة بين الشحنتين . وهذا يعني ان النقطة التي تكون عندها محصلة المجال صفراً تقع خارج هذه المنطقة ، اما على يسار الشحنتين او على يمينهما (لاحظ الشكل 13-2). هذا من ناحية ، ومن الناحية الأخرى يجب ان يكون بعد النقطة عن الشحنة الصغيرة (السالبة) اقل من بعدها عن الشحنة الكبيـــرة (الموجبة) ، لكي يتم التعادل بين المجالين حسب المعادلة (3-2) ، اذ ان شدة المجال تتناسب طرديا مع قيمة الشحنة وعكسياً مع مربع بعدها عن النقطة . والشكـــل (4-2) يبين بوضوح موقع نقطة التعادل في حالة مماثلة لهذه الحالة . يحدث التعادل عندما يكون المجالان باتجاهين متعاكسين ومتساويين في القيمة .

لنفرض ان بعد نقطة التعادل (P) هذه عن الشحنة السالبة يساوي (x) من الامتار عندئذ يكون بعدها عن الشحنة الموجبة (x + 0.1) من الامتار والان بامكاننا أن نجد شدة المجال (E_1) الناشيء عن الشحنة الاولى عند نقطة P طبقا لمعادلة (3-2) فنحصل على :

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{4 \times 10^{-6}}{(x + 0.1)^2}$$

وكذلك شدة المجال (E_2) الناشيء عن الشحنة الثانية عند النقطة نفسها :

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1 \times 10^{-6}}{x^2}$$

وبما ان هذين المجالين متعاكسان في الاتجاه فان الشرط اللازم توفره لكي تكون محصلة المجال صفراً هو :

$$E_1 = E_2$$

أي

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4 \times 10^{-6}}{(x + 0.1)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1 \times 10^{-6}}{x^2}$$

وبعد حذف العوامل المشتركة بين طرفي المعادلة وأخذ الجذر التربيعي لهما نحصل على

$$\frac{2}{x + 0.1} = \frac{1}{x}$$

ومنها نجد

$$x = 0.1\text{m}$$

مثـــال 3

لو وضع اثنان من ثنائية الأقطاب كما هو مبين في الشكل (14 - 2) ، لتكون ما يسمى رباعي القطب quadrupole . والمطلوب ايجاد شدة المجال الكهربائي في النقطة P الواقعة على محوره ، وعلى بعد قدره r عن مركزه ، بحيث ان قيمة r أكبر بكثير من قيمة a

الحـــل

لحساب شدة المجال لرباعي القطب نجزئه الى اثنين من ثنائية الأقطاب . الأول

يبعد مركزه عن نقطة P بمسافة $r - \frac{a}{2}$ والثاني يبعد مركزه بمسافة $r + \frac{a}{2}$ عن النقطة نفسها . ثم نجد شدة المجال لكل منهما طبقا للمعادلة (2-8) فنحصل على :

$$E_1 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\,\frac{aq}{(r - a/2)^3}$$

$$E_2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\,\frac{aq}{(r + a/2)^3}$$

لاحظ ان المسافة بين شحنتي ثنائي القطب في هذه الحالة هي a وليس 2a كما مر علينا في المعادلة (2-8) ، كما أن المسافة بين النقطة P ومركز ثنائي القطب هي ليست r بل $\left(r - \frac{a}{2}\right)$ و $\left(r + \frac{a}{2}\right)$ على الترتيب .

كما أنه من الواضح أن اتجاه المجال الناشيء عن ثنائي القطب الاول E_1 هو بعكس اتجاه المجال الناشيء عن الثاني E_2 . وبهذا فان شدة المجال الناشيء عن رباعي القطب $\vec{E}$ يساوي المجموع الاتجاهي لكلا المجالين ، أي :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

وبنفس اتجاه E_1 أي نحو اليمين (لماذا ؟) — أما مقدار محصلة المجال فيساوي :

$$E = E_1 - E_3$$

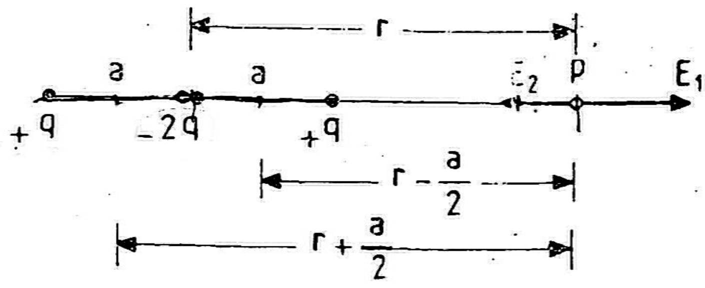
$$= \frac{aq}{2\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{(r - a/2)^3} - \frac{1}{(r + a/2)^3}\right]$$

ولما كانت المسافة a صغيرة جدا بالمقارنة مع r فانه من الممكن تبسيط هذه النتيجة وذلك باجراء بعض العمليات الجبرية كما هو آت :

$$E = \frac{aq}{2\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r^3 - (3a/2)\,r^2 + (3a^2/4)\,r - a^3/8}\right]$$

$$\left[-\frac{1}{r^3 + (3a/2)\,r^2 + (3a^2/4)\,r + a^3/8}\right]$$

وبحذف الحدود التي تحتوي على a^2 و a^3 وتوحيد المقامات ، نحصل على



الشكل (2 – 14)
رباعي القطب

$$E = \frac{aq}{2\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{[\, r^3 + (3a/2)\, r^2 \,] - [\, r^3 - (3a/2)\, r^2 \,]}{[\, r^3 - (3a/2)\, r^2 \,][\, r^3 + (3a/2)\, r^2 \,]}$$

$$= \frac{aq}{2\pi\varepsilon_o} \frac{3ar^2}{r^6 - (qa^2/4)\, r^4}$$

ومرة أخرى نحذف الحد الذي يحتوي على a^2 فنجد

$$E = \frac{aq}{2\pi\varepsilon_o} \frac{3a\, r^2}{r^6}$$

أو

$$E = \frac{3a^2 q}{2\pi\varepsilon_o\, r^4} \qquad (2\text{–}14)$$

مثــال 4

الشكل (2-15) يمثل سلكا منحنياً بشكل قوس نصف دائرة يحمل شحنة مقدارها q + موزعة بانتظام على طوله . والمطلوب حساب شدة المجال عند النقطة P في مركز الدائرة علما بأن نصف قطر الدائرة هو R

الحـــل :

نأخذ عنصراً من هذا السلك طوله ds يحتوي على عنصر من الشحنة قدره

$$dq = \frac{q}{\pi R} ds$$

أما المجال الناشيء عن هذا العنصر عند النقطة P فمقداره

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{dq}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q ds}{\pi R^3}$$

ولحساب شدة المجال الكلية عند النقطة P نحلل dE الى مركبتين احداهما افقية dE_x والأخرى عمودية dE_y . ثم نكامل كلا منهما على انفراد . ولنبدأ أولا بالمركبة الافقية فنجد انها تساوي صفرا . أي

$$E_x = \int dE_x = 0$$

وهذا واضح من التماثل . حيث ان لكل عنصر شحنة في جهة اليمين مجالاً له مركبة افقية مساوية بالمقدار ومعاكسة الاتجاه لمجال عنصر يقابله في الجهة اليسرى من السلك . بينما نجد ان المركبات العمودية لجميع العناصر تضاف الى بعضها نظرا لكونها في نفس الاتجاه . لذا

$$E_y = \int dE_y$$

$$= \int dE \sin\theta$$

$$= \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q\, ds}{\pi R^3} \sin\theta$$

وواضح من الشكل أن

$$ds = R\, d\theta$$

وبالتعويض عن هذه القيمة وباخراج المقادير الثابتة خارج علامة التكامل نحصل على

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\ \frac{q\,R}{\pi R^3} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta$$

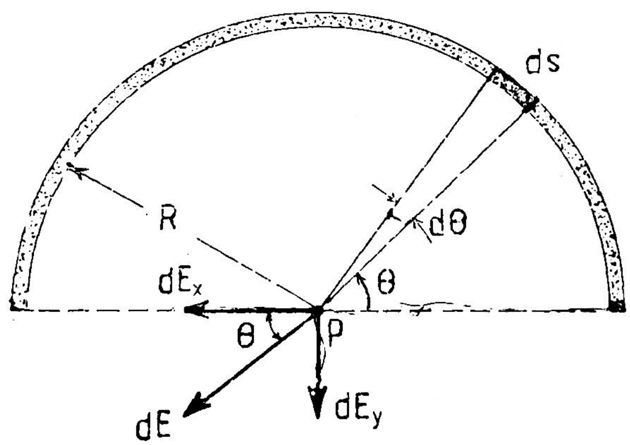
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\ \frac{q}{\pi R^2}\ \left[-\cos\theta \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\ \frac{q}{\pi R^2} \left[-(-1-1) \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\ \frac{2q}{\pi R^2}$$

لذا فان محصلة شدة المجال عند النقطة P تصبح

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\ \frac{2q}{\pi R^2} \qquad (2\text{-}15)$$



الشكل (2 – 15)

مثـــال 5

قرص دائري رقيق نصف قطره R يحمل شحنة قدرها q موزعة بصورة متجانسة على سطحه . جد شدة المجال الكهربائي عند نقطة واقعة على محور القرص تبعد عنه مسافة قدرها a كما هو موضح في الشكل (2-16) .

نأخذ عنصراً حلقياً نصف قطره r وعرضه dr كما هو مبين في الشكل . لنفرض أن الشحنة التي يحتويها هذا العنصر التفاضلي قدرها dq . ولكي نحصل على شدة المجال الناشيء عن شحنة القرص ، نجد اولاً المجال dE الناشيء عن العنصر الحلقي وذلك باستعمال المعادلة (2-12) ، ثم نجري عملية التكامل للحصول على المجال الناشيء عن الشحنة بأجمعها . لهذا

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{a\,dq}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$$

لكن شحنة العنصر التفاضلي تساوي حاصل ضرب مساحة الحلقة في الكثافة السطحية للشحنة (σ) . أي أن

$$dq = (2\pi r\, dr)\,\sigma$$

وبالتعويض عن هذه القيمة للشحنة نحصل على مقدار dE .

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{a(2\pi r \sigma)\,dr}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$$

أما اتجاه هذا العنصر التفاضلي للمجال فيكون بنفس اتجاه المحور ، وهو عين الاتجاه الذي تكون عليه كل المجالات الناشئة عن جميع العناصر الحلقية التي تتكون منها شحنة القرص . لهذا :

$$E = \int dE$$

$$= \frac{2\pi\sigma a}{4\pi\varepsilon_o} \int_0^R \frac{r\,dr}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$$

لاحظ ان حدود التكامل يجب أن تمتد من الصفر الى R لكي يغطي التكامل جميع شحنة القرص . وبأخذ التكامل • نحصل على

$$E = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_o} \left[- \frac{1}{(r^2 + a^2)^{1/2}} \right]_0^R$$

$$= \frac{\sigma a}{2\varepsilon_o} \left[- \frac{1}{(R^2 + a^2)^{1/2}} - \left(- \frac{1}{a} \right) \right]$$

• يمكن بسهولة اجراء عملية التكامل وذلك بالاستعاضة عن مقدار $R^2 + a^2$ بمتغير آخر وليكن y

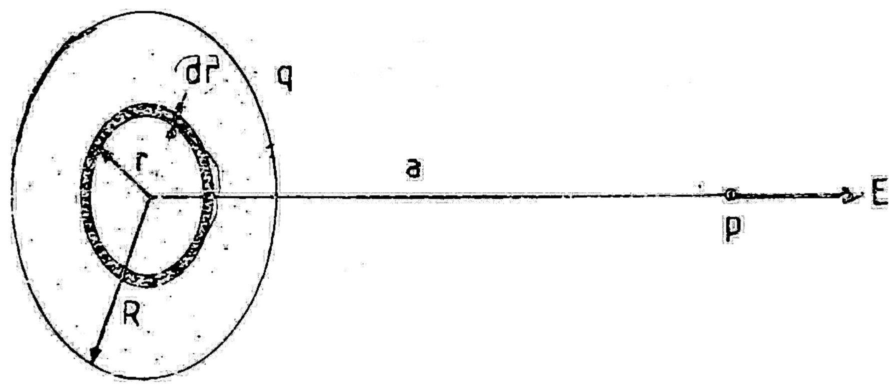
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[1 - \frac{a}{(R^2 + a^2)^{1/2}}\right]$$

وأخيراً نستعيض عن الكثافة السطحية للشحنة بما تساويه بدلالة الشحنة الكلية للقرص ، أي :

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$$

فنحصل على مقدار شدة المجال للقرص المشحون

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_o R^2}\left[1 - \frac{a}{(R^2 + a^2)^{1/2}}\right] \qquad (2\text{-}16)$$



الشكل (16 – 2) قرص دائري مشحون

5 – 2 تأثير المجال الكهربائي على الجسيمات المشحونة

لو وضع جسيم يحمل شحنة قدرها q (ولتكن موجبة) في مجال كهربائي منتظم E . لتأثر بقوة قدرها

$$F = qE$$

وذلك طبقاً لتعريف شدة المجال المتمثل في المعادلة (1-2) . وكما هو واضح من قانون نيوتن الثاني فان هذا الجسيم سيتحرك بتعجيل ثابت قدره

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} \qquad (2\text{-}17)$$

حيث m تمثل كتلة الجسيم الموجب الشحنة . ولو تأملنا هذه المعادلة لوجدنا ان تعجيل الجسيم هو بنفس اتجاه المجال . وسوف نأخذ حالتين لحركة الجسيم المشحون في مجال كهربائي منتظم :

أولاً : عندما يوضع الجسيم ساكناً في مجال كهربائي منتظم

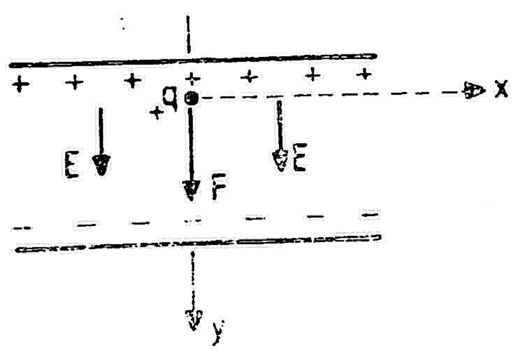
يمكننا الحصول على مجال كهربائي منتظم (كما سنرى في بند قادم)، اذا وصلنا طرفي بطارية بلوحين معدنيين متوازيين ومعزولين أحدهما عن الآخر . وكلما كانت المسافة بين اللوحين صغيرة (بالمقارنة مع أبعاد اللوحين) ، كان المجال بينهما منتظماً الى درجة كبيرة .

فلو فرضنا أن جسيم (كتلته m وشحنته q) وضع ساكناً في مثل هذا المجال ، كما هو مبين في الشكل (2-17) ، لتحرك هذا الجسيم بخط مستقيم وبتعجيل ثابت قدره :

$$a = \frac{qE}{m}$$

لاحظ أن هذه الحركة تشبه حركة الأجسام الساقطة على سطح الأرض بتأثير الجاذبية الأرضية ، وبهذا يمكننا تطبيق قوانين الحركة ذات التعجيل الثابت والتي لا بد وأن يتذكرها الطالب في دراسته السابقة في الميكانيك . لذا فان سرعة الجسيم بعد زمن قدره t تصبح

$$v = v_o + at = at = \frac{qE}{m}t$$



الشكل (2 - 17)

جسيم ترك ساكنا في مجال كهربائي منتظم

أذ أن السرعة الابتدائية للجسيم هي صفر وأما المسافة y التي يقطعها الجسيم بعد نفس الزمن فتصبح

$$y = (1/2)\, at^2 = \frac{qE}{2m} t^2$$

وكذلك نجد أن

$$v^2 = 2ay = \frac{2qE}{m} y$$

مثـــال 6

الكترون وضع ساكنا في مجال كهربائي منتظم شدته تساوي 10^4 N/C (أنظر الى الشكل (2-17)) . أحسب :

(أ) التعجيل الذي يتحرك به الالكترون .
(ب) سرعته بعد ان يقطع مسافة قدرها (1 cm)
(ج) طاقته الحركية بعد أن يقطع هذه المسافة .

الحـــل

شحنة الالكترون = $1{\cdot}6 \times 10^{-19}$ C
كتلة الالكترون = $9{\cdot}1 \times 10^{-31}$ kg

(أ) لما كانت شحنة الالكترون سالبة ، لذا فان تعجيل الالكترون يكون بعكس المجال E أي نحو الأعلى . أما مقداره فيمكن ايجاده من المعادلة

$$a = \frac{eE}{m}$$

$$= \frac{1{\cdot}6 \times 10^{-19} \times 10^4}{9{\cdot}1 \times 19^{-31}} = 1{\cdot}8 \times 10^{15} \text{ m/s}^2$$

(ب) اما سرعة الألكترون فتصبح

$$v = \sqrt{2ay}$$

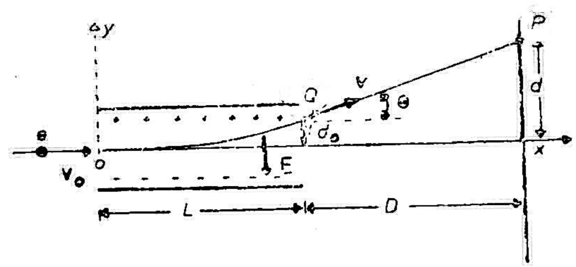
$$= \sqrt{2 \times 1{\cdot}8 \times 10^{15} \times 10^{-2}} = 6 \times 10^{6}\ \text{m/s}$$

(جـ) وبهذا فان طاقته الحركية تساوي

$$K = (1/2)\,mv^2$$
$$= (1/2) \times 9{\cdot}1 \times 10^{-31}\,(6 \times 10^{6})^2$$
$$= 1{\cdot}6 \times 10^{-17}\,J$$

ثانيـــا : عندما يقذف الجسيم بسرعة عمودية على المجال

لنفرض أن الكتروناً قذف بسرعة ابتدائية v_0 بصورة عمودية على مجال منتظم شدته E كما هو مبين في الشكل (2-18) .



الشكل (18 – 2) الـكترون قذف بسرعة عمودية على مجال كهربائـي منتظم

ان حركة الألكترون ستكون مشابهة لحركة الجسيم المقذوف افقياً في مجال الجاذبية الأرضية . وباستخدامنا المعلومات التي قد يتذكرها الطالب عن القذائف ، نجد أنه من الممكن أن نعتبر حركة الالكترون مكونة من حركتين ، افقية باتجاه محور x وهي حركة ذات سرعة ثابتة ، وعمودية باتجاه محور y وهي حركة ذات تعجيل ثابت . وبهذا فان المسافة الأفقية x التي يقطعها الألكترون بعد زمن قدره t تكون

$x = v_0 t$

بينما نجد ان المسافة العمودية y التي يقطعها بعد نفس الزمن تكون

$$y = (1/2)\,at^2 = \frac{eE}{2m}t^2$$

وبحذف t من هاتين المعادلتين نحصل على

$$y = \frac{eE}{2mv_0^2}x^2 \qquad (2-18)$$

وهي المعادلة التي تمثل مسار الالكترونات في المجال الكهربائي –وهي معادلة قطع مكافيء Parabola . وبواسطة هذه المعادلة يمكن حساب الانحراف الذي يحدث في مسار الالكترونات عند اية نقطة واقعة تحت تأثير المجال الكهربائي .

ولكن بعد خروج الالكترونات في المجال بين اللوحين فانها تنطلق في اتجاه المماس للقطع المكافيء عند نقطة خروجها (لاحظ الشكل 2-18) بسرعة ثابتة هي v . وبهذا تنحرف الالكترونات عن اتجاه مسارها الاصلي بزاوية معينة ولتكن θ ويمكن ادراك الانحراف الذي يطرأ على مسار الالكترونات بوضع شاشة متفلورة Flourescent screen على بعد مسافة معينة من اللوحين ، حيث تظهر بقعة صغيرة مضيئة على الشاشة في موضع اصطدام الالكترونات بها . فيبدو انحراف الالكترونات بسبب تأثرها بالمجال الكهربائي بينا على الشاشة . وهذه هي الفكرة الاساسية لعمل راسمة ذبذبات الأشعة المهبطية (او الكاثودية)

ولحساب مقدار الانحراف على الشاشة المتفلورة (d) نفرض ان طول اللوحين المتوازيين هو L . ثم نجد زاوية الانحراف (θ) وذلك بحساب ميل المسار عند نقطة خروج الالكترونات من المجال فنحصل على

$$\tan\theta = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L} = \left.\frac{2eEx}{2mv_0^2}\right|_{x=L} = \frac{eEL}{mv_0^2}$$

ولوكانت الشاشة تبعد مسافة D عن اللوحين المتوازيين نجد ان ظل الزاوية θ يساوي بصورة تقريبية .

$$\tan\theta \simeq \frac{d}{D}$$

ومن هاتين المعادلتين نحصل على مقدار الانحراف الذي يحدث على الشاشة . اي

$$d = \frac{eELD}{mv^2} \qquad (2\text{-}19)$$

وبقياس الكميات L, D, E, d نستطيع ان نجد السرعة الأبتدائية للالكترونات اذا علمنا النسبة بين شحنة الالكترون الى كتلته (e/m) او بالعكس, يمكننا حساب (e/m) اذا علمنا v_o

مثـــال 7

اذا كانت شدة المجال الكهربائي بين اللوحين في جهاز راسمة ذبذبات الاشعة الكاثودية (2×10^4 N/C) . فما مقدار الانحراف الذي يحدث في مســـار الالكترون, (أ) عند خروجه من المجال الكهربائي (النقطة Q) و (ب) عند سقوطه على الشاشة (النقطة P) ، اذا قذف الالكترون بشكل عمودي على المجال وبطاقة حركية قدرها (3.2×10^{-16} J) ؟ ان طول اللوحين يساوي 2 cm والمسافة بين الشاشة واللوحين تساوي 40 cm (انظر الشكل 2-18) .

الحـــل

(أ) بما أن الطاقة الحركية للالكترون

$$K = (1/2)\, mv^2$$

عندئذ يمكن كتابة المعادلة (2-18) بدلالة K بالشكل الآتي :

$$y = \frac{eE}{4K} x^2$$

ولما كانت احداثيات النقطة Q هي $x = L$ و $y = d_o$ لذا يصبح بالامكان الحصول على مقدار انحراف الالكترون (d_o) من المعادلة :

$$d_o = \frac{eE}{4K} L^2$$

$$= \frac{(1.6 \times 10^{-19})(2 \times 10^4)(2 \times 10^{-2})^2}{4(3.2 \times 10^{-16})} = 0.001 \text{ m} = 1 \text{ mm}$$

احمد عبدالجبار
قسم فيزياء / جامعة الموصل

(ب) ولحساب الانحراف الذي يحدث على الشاشة المجاورة عند النقطة P نستعين بالمعادلة (2-19) فنحصل على

$$d = \frac{eELD}{2K}$$

$$d = \frac{(1.6 \times 10^{-19})(2 \times 10^{4})(2 \times 10^{-2})(40 \times 10^{-2})}{2(3.2 \times 10^{-16})}$$

$$= 0.04 \text{ m} = 40 \text{ mm}$$

2 — 6 تأثير المجال الكهربائي على ثنائيات الاقطاب

عرفنا في البند 2-4 ثنائي القطب الكهربائي على انه يتكون من شحنتين متساويتين في المقدار احداهما موجبة والاخرى سالبة تفصلهما مسافة صغيرة. وذكرنا في حينها ان حاصل ضرب احدى الشحنتين (q) في المسافة المحصورة بينهما (2a) يدعى عزم ثنائي القطب ويرمز له بالحرف p . والآن نضيف حقيقة ان عزم ثنائي القطب يعد كمية اتجاهية يشير اتجاهها صوب الشحنة الموجبة ابتداءً من الشحنة السالبة .

لو وضع ثنائي القطب في مجال كهربائي خارجي منتظم بحيث يصنع عزمه $\vec{p}$ زاوية قدرها θ مع المجال ، كما هو موضح في الشكل (2-19) ، لتأثرت شحنتاه بقوتين متعاكستين مقدار كل منهما يساوي qE استناداً الى المعادلة (2-1) ، القوة المؤثرة على الشحنة الموجبة ($\vec{F}$) تكون بنفس اتجاه المجال ، والقوة المؤثرة على الشحنة السالبة ($-\vec{F}$) تكون عكس اتجاه المجال . هاتان القوتان تولدان عزماً دورانياً torque حول محور خلال نقطة 0 مقداره يساوي

$$\tau = 2F(a \sin\theta)$$

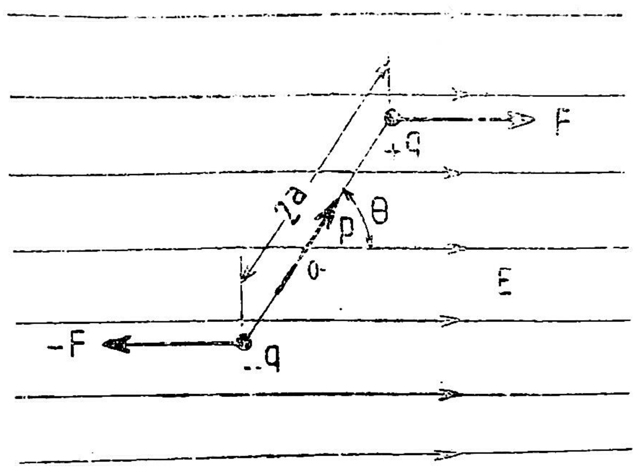
وبالتعويض عن قيمة F بما تساويه ينتج

$$\tau = 2a\, qE \sin\theta$$

لكن الكمية 2aq تساوي عزم ثنائي القطب p ، لذا

$$\tau = pE \sin\theta \qquad (2\text{-}20)$$

تشير هذه المعادلة بشكل واضح على ان المجال الكهربائي المسلط على ثنائي القطب يولد عزماً دورانياً يعمل على تراصف الثنائي مع المجال . لكن العزم الدوراني هو كمية



الشكل (19 – 2)
ثنائي قطب موضوع
في مجال كهربائي منتظم

ستجهد شانه في ذلك شأن شدة المجال وعزم ثنائي القطب . لذلك قد يكون من الافضل في بعض الأحيان ان تكتب المعادلة (20–2) بالصيغة الاتجاهية الآتية :

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \tag{2-21}$$

اذ تعبر هذه المعادلة عن اتجاه الكميات الثلاث فضلا عن مقاديرها ، ويمكن بواسطتها تحديد اتجاه أي من الكميات الثلاث فيما اذا عرف اتجاه الكميتين الاخريين طبقا لخصائص الضرب الاتجاهي .

على ان تدوير ثنائي القطب داخل المجال يتطلب بذل شغل (سالب أو موجب) قيمته تساوي

$$W = \int \tau \, d\theta$$

وبالتعويض عن مقدار العزم الدوراني من المعادلة (20–2) ينتج

$$W = \int pE \sin\theta \, d\theta$$

لنفرض ان الزاوية الابتدائية التي يعملها ثنائي القطب مع المجال تساوي تسعون درجة ، وأن الزاوية النهائية قدرها θ . عندئذ يصبح الشغل المبذول لتدوير ثنائي القطب من الموضع الاول الى الموضع الثاني كما هو آت

$$W = pE \int_{\pi/2}^{\phi} \sin\phi$$

$$= pE\,[\,-\cos\theta\,]_{\pi/2}^{\theta}$$

أي

$$W = -\,pE\cos\theta$$

وذلك لان $\cos \pi/2 = 0$

لكن الشغل المنجز يساوي التغير في طاقة الوضع الكهربائية (أو الطاقة الكامنة) لثنائي القطب لذا

$$U = -\,pE\cos\theta \qquad (2-22)$$

كما يمكن كتابة هذه المعادلة بالصيغة الاتجاهية الآتية

$$U = -\,\vec{p}\cdot\vec{E} \qquad (2-23)$$

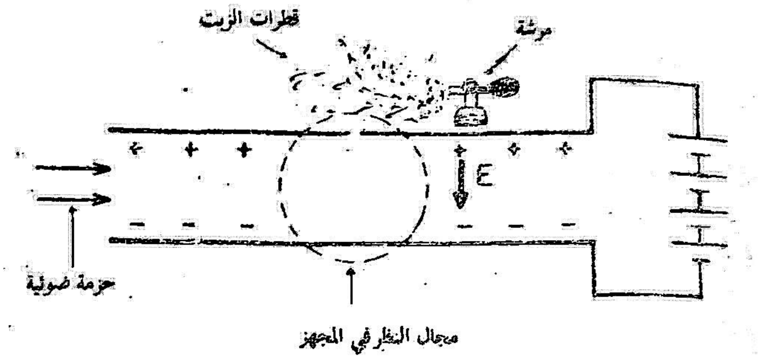
7 – 2 شحنة الألكترون The charge of the electron

الشحنة الكهربائية، كما أثبتت التجارب، ليست متصلة ولكنها مكونة من مضاعفات صحيحة لكمية معينة، هي شحنة الألكترون والتي يرمز لها بالحرف e وبذلك تكون أية شحنة موجودة في الطبيعة مهما كان أصلها مساوية الى

$$q = ne \qquad \ldots (2-24)$$

حيث n تمثل أي عدد صحيح، وبهذا نقول ان الشحنة تتصف بالكم "Charge is quantized".

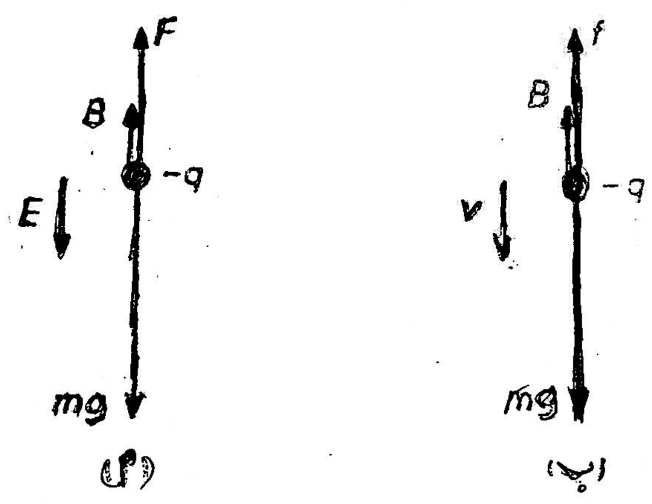
لقد قيست شحنة الألكترون لأول مرة بدقة من قبل العالم مليكان ومساعديه بين عامي 1909 و 1913. بعد أكثر من عشر سنوات من أكتشافه من قبل تومسون. والشكل (20 – 2) يبين رسما تخطيطيا للجهاز الذي استعمله مليكان. فهو يتكون من لوحين معدنيين متوازيين ومعزولين عن بعضهما ويفصلهما الهواء، ويولد بينهما مجال كهربائي منتظم وذلك بربطهما الى بطارية كهربائية ذات فولتية عالية. ويتطاير رذاذ من الزيت من مرشة (Spray) بشكل قطرات صغيرة جداً فوق اللوح العلوي. ثم يسمح لقسم من هذه القطرات بالدخول من خلال ثقب في اللوح العلوي الى المنطقة بين اللوحين حيث تسلط حزمة ضوئية أفقياً. عندئذ يمكن مشاهدة هذه القطرات المضاءة وتتبع حركتها بواسطة مجهر Microscope



الشكل (20 – 2) تجربة قطرة الزيت لمليكان

لقد لوحظ أن قطرات الزيت تكتسب شحنات كهربائية ، غالباً ما تكون سالبة، نتيجة لأحتكاكها بالهواء أثناء عملية الرش (ويمكنها قد تشحن أيضاً نتيجة لتأيين الهواء بين اللوحين وذلك بتسليط أشعة اكس مثلا).

لو فرضنا ان احدى هذه القطرات قد أكتسبت شحنة كهربائية سالبة قدرها q . وان المجال الكهربائي المنتظم بين اللوحين كان متجهاً نحو الأسفل ، لوجدنا أن هناك ثلاث قوى تؤثر على هذه القطره كما هو مبين في الشكل (21 – 2 أ) وهي :



الشكل (21 – 2)
(أ) قطرة الزيت وهي ساكنة
(ب) قطرة الزيت تسقط بسرعة

1 - القوة الكهربائية F نحو الأعلى .

2 - وزن القطرة mg نحو الأسفل .

3 - قوة الطفو للهواء buoyant force (B) نحو الأعلى .

وبتغيير شدة المجال الكهربائي يمكننا موازنة القطرة وابقائها معلقة في المجال بين اللوحين عند نقطة معينة . عندئذ يكون :

$$qE + B = mg$$

وبالتعويض عن m التي تساوي حجم القطرة مضروباً في كثافتها ، وعن B التي تساوي حجم الهواء المزاح (الذي حجمه بقدر حجم القطرة) مضروباً في كثافة الهواء وفي التعجيل الأرضي g ينتج :

$$qE + (4/3)\pi R^3 dg = (4/3)\pi R^3 Dg$$

حيث R تمثل نصف قطر القطرة و D كثافة الزيت و d كثافة الهواء . وبتبسيط هذه المعادلة نحصل على :

$$qE = (4/3)\pi R^3 g(D - d) \qquad \dots (2-25)$$

ولحساب مقدار الشحنة q التي تحملها القطرة ، نجد ان جميع الكميات في هذه المعادلة يمكن قياسها بسهولة . عدا R التي تمثل نصف قطر هذه القطرة الصغيرة جداً ، والتي لايمكن قياسها بصورة مباشرة . وقد استخدم مليكان قانون ستوكس Stoke s law في اللزوجة لحساب R . ينص هذا القانون على ان قوة الاحتكاك التي تؤثر على كرة نصف قطرها R ، تسقط في مائع fluid معامل لزوجته η بسرعة مقدارها v هي

$$f = 6\pi\eta Rv$$

فاذا ازيل المجال الكهربائي وتركت القطرة تسقط بفعل الجاذبية الأرضية لوجدنا ان سرعتها تزداد حتى تصل قيمة ثابتة هي v عندها يحدث التوازن ويصبح مجموع القوى المؤثرة عليها صفراً ، (أنظر الى الشكل 2 - 21 ب) . هذه القوى هي :

1 - وزن القطرة mg نحو الأسفل .

2 - قوة الطفو للهواء B نحو الأعلى .

3 - قوة اللزوجة f نحو الأعلى .

وبهذا نجد أن

$$f = mg$$

وبالتعويض عن كل قوة بما تساويه ينتج

$$6\pi\eta R v + \frac{4}{3}\pi R^3 dg = \frac{4}{3}\pi R^3 Dg$$

وبتبسيط هذه المعادلة نحصل على

$$2R^2 g(D - d) = 9\eta v \qquad \ldots(2 \cdot 26)$$

وبقياس سرعة سقوط القطرة يمكن حساب نصف قطرها R . حيث أن كل من D و d و g و η هي كميات معلومة. وعندئذ يصبح بالإمكان حساب الشحنة q التي تحملها القطرة من المعادلة (2 - 25)

لقد قام مليكان ومساعدوه بفحص آلاف من قطرات الزيت، ووجدوا أن شحنة أي قطرة لايمكن أبداً أن تكون أقل من كمية معينة، كما أن شحنة كل قطرة دائماً تساوي مضاعفات صحيحة لهذه الكمية الأساسية. وبذلك استنتجوا أنه لايمكن الحصول على شحنة أقل من هذه الشحنة الأساسية التي يجب أن تكون شحنة الألكترون (e) وقدرها

$$e = 1.6021 \times 10^{-19}\ C$$

مثـــال 8

في تجربة مليكان، لوحظ ان قطرة زيت تسقط مسافة قدرها 2.00 mm في زمن قدره 54.3 s في حالة غياب المجال الكهربائي بين اللوحين. كما لوحظ أنه يمكن توازن القطرة نفسها في مجال شدته $2.37 \times 10^4\ N/C$ بحيث تبقى ساكنة فيه. فاذا علم أن معامل اللزوجة للهواء يساوي $1.8 \times 10^{-5}\ Ns/m^2$ وكثافة الزيت $824\ kg/m^3$ وكثافة الهواء $1.30\ kg/m^3$. احسب قيمة الشحنة التي تحملها هذه القطرة.

الحـــل :

باستخدام المعادلة (2 - 26) يمكننا أن نحسب نصف قطر قطرة الزيت (R) وذلك في حالة غياب المجال الكهربائي حيث تسقط القطرة بسرعة ثابتة (v)

$$2R^2 g(D-d) = 9\eta v$$

$$2R^2 \times 9.8(824 - 1.30) = 9 \times 1.8 \times 10^{-5} \times 3.68 \times 10^{-5}$$

اذ استعضنا عن :

$$v = \frac{l}{t} = \frac{2 \times 10^{-3}}{54.3} = 3.68 \times 10^{-5}\ m/s$$

و $D = 824\ kg/m^3$

و $d = 1.30\ kg/m^3$

و $\eta = 1.8 \times 10^{-5}\ Ns/m^2$

ومن تلك المعادلة نحصل على نصف قطر قطرة الزيت

$$R = 6.08 \times 10^{-7}\ m$$

بيد ان القطرة تبقى ساكنة عند تسليط المجال الكهربائي نتيجة لتعادل القوة الكهربائية المسلطة عليها مع وزن القطرة ، أي

$$qE = mg$$

أو

$$qE = \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho\right) g$$

$$q \times 2.37 \times 10^4 = \frac{4}{3}\pi(6.08 \times 10^{-7})^3 \times 824 \times 9.8$$

ومن هذه المعادلة نجد قيمة الشحنة التي تحملها قطرة الزيت وتساوي :

$$q = 3.2 \times 10^{-19}\ C$$

1 - 2 شحنتان نقطيتان مقدارهما $(+10 \times 10^{-8}\,C)$ و $(-5 \times 10^{-8}\,C)$ تفصلهما مسافة قدرها (20 cm). (أ) أوجد مقدار واتجاه شدة المجال الكهربائي عند منتصف المسافة بينهما. (ب) لو وضع الكترون في هذه النقطة فما مقدار وما اتجاه القوة الكهربائية المؤثرة عليه؟

2 - 2 مامقدار وما اتجاه المجال الكهربائي E اللازم لكي تتعادل القوة الكهربائية المؤثرة على دقيقة ألفا مع وزنها، علماً بأن كتلة دقيقة ألفا هي $(6.68 \times 10^{-27}\,kg)$ وشحنتها تساوي $+2e$ ؟

3 - 2 اذا كانت كتلة الشحنتين موجبتان في الشكل (8 - 2)، فما مقدار وما اتجاه شدة المجال الكهربائي عند النقطة Q ؟ أفرض ان $r >> a$

$$\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2q}{r^2} \right)$$

4 - 2 شحنة موجبة مقدارها q موزعة بانتظام على طول سلك عازل طوله L. اوجد شدة المجال الكهربائي في نقطة تقع على العمود المنصف لهذا السلك وتبعد عنه مسافة قدرها a.

$$\left(E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a \sqrt{L^2 + 4a^2}} \right)$$

5 - 2 شحنة موجبة موزعة بانتظام على سطح قرص نصف قطره R بكثافة سطحية قدرها σ اوجد مقدار واتجاه شدة المجال الكهربائي في نقطة تقع على محور القرص وعلى بعد مسافة قدرها a منه.

$$\left[E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right) \right]$$

6 - 2 سلك رفيع عازل بشكل قوس نصف دائرة، يحمل شحنة موجبة موزعة بحيث أن كثافتها الخطية λ تعتمد على الزاوية θ كما مبين في الشكل (22 - 2) بموجب المعادلة الآتية:

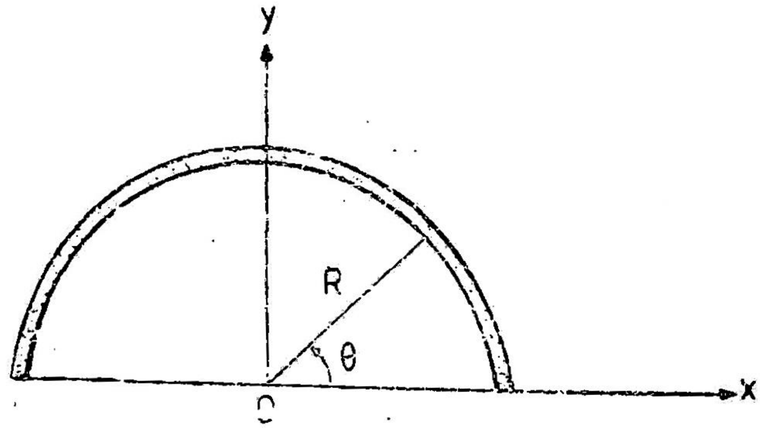
$$\lambda = A\cos\theta$$

حيث أن A تمثل مقداراً ثابتاً. والمطلوب:

(أ) رسم منحني بياني يمثل كيفية تغير λ مع θ

(ب) ايجاد مقدار واتجاه شدة المجال الكهربائي في مركز الدائرة (النقطة O)

($E = \dfrac{A}{8\varepsilon_0 R}$ باتجاه محور x)



الشكل (22 - 2)

2 - 7 ثلاثة أجسام صغيرة كل منها يحمل شحنة مقدارها (2×10^{-6} C) وضعت على رؤوس مثلث متساوي الأضلاع ، طول ضلعه 3 cm . جد شدة المجال الكهربائي في مركز المثلث .

2 - 8 أثبت ان مركبتي المجال E الناشيء عن ثنائي القطب عند النقطة O البعيدة عنه (أنظر الى الشكل 8 - 2) هما :

$$E_y = \frac{p}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

$$E_x = \frac{p}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

حيث ان x و y هما احداثيات النقطة O .

هل تستطيع ان تستنتج المعادلتين (8 – 2) و (9 – 2) من هذه النتيجة العامة؟ وكيف ؟

2 - 9 كرة صغيرة كتلتها (0.01 gm) تحمل شحنة موجبة قدرها (2×10^{-9} C) . معلقة بطرف خيط من الحرير . ثبت الطرف الآخر منه بصفيحة عازلة شاقولية كبيرة تحمل شحنة موجبة موزعة بانتظام على السطح المقابل للكرة . فاذا اتزنت الكرة في موضع عنده يصنع الخيط زاوية 30° مع الصفيحة . احسب مقدار الكثافة السطحية للشحنة (σ) .

2 - 10 شحنتان نقطيتان مقدارهما (9q -) و(4 q +) والمسافة بينهما تساوي (10 cm) . عين موضع النقطة (أو النقاط) – الواقعة على الخط المار بالشحنتين والتي عندها يكون المجال الكهربائي صفراً .

2 - 11 اطلق الكترون بسرعة قدرها (5.0×10^6 m / s) بصورة موازية لمجال كهربائي شدته (1000 N / C) وبنفس اتجاهه .

(أ) أحسب طول المسافة التي يقطعها الألكترون في المجال حتى يصل (وقتياً) الى السكون.
(ب) ما مقدار الزمن اللازم لذلك ؟

$(7{\cdot}1 \times 10^{-2}$ m, $2{\cdot}9 \times 10^{-8}$ s)

12 – 2 قذف الكترون في مجال كهربائي منتظم شدته (5×10^{4} N / C) فاذا كانت السرعة الأبتدائية للألكترون (10^{8} cm / s). وباتجاه يصنع زاوية قدرها 30° مع الأفق وكان أتجاه المجال شاقوليا نحو الأعلى ، احسب :
(أ) تعجيل الألكترون و(ب) أقصى ارتفاع يصله الألكترون و(ج) أقصى مسافة أفقية range يقطعها الألكترون

13 – 2 قذف الكترون في مجال كهربائي منتظم شدته (25×10^{3} N / C) . فاذا كان المجال باتجاه محور y (الموجب) ، وسرعة الألكترون (2×10^{4} m / s) باتجاه محور x (الموجب) ، عين الاحداثيات x و y لموضع الألكترون بعد زمن قدره (10^{-7} s)

(x = 0·002 m / y = 22 m)

14 – 2 سلك عازل بشكل قوس دائرة نصف قطرها R ويحصر زاوية قدرها θ_0 عند مركز الدائرة ، وزعت على طوله بانتظام شحنة قدرها q . اوجد شدة المجال عند مركز الدائرة .

$$\left(E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 \theta_0 R^2} \sin \frac{\theta_0}{2} \right)$$

15 نصف سطح كروي رقيق وعازل ، نصف قطره R . يحمل شحنة موزعة بانتظام على سطحه مقدارها Q . جد شدة المجال الكهربائي في مركز التكور

$$\left(E = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2} \right)$$

16 – 2 قطرة ماء تحمل شحنة تعادل شحنة خمسين الكترونا . فاذا بقيت هذه القطرة ساكنة قرب سطح الارض ، حيث يكون المجال الكهربائي عمودياً ومقداره 100 N / C ، جد نصف قطر القطرة .

($2{\cdot}69 \times 10^{-7}$ m)

احمد عبدالجبار

الفصل الثالث

قانون كاوس

Gauss's Law

3 – 1 فيض المجال الكهربائي Flux of the electric field

أشرنا في البند الثاني من الفصل السابق عند شرح خطوط القوة الكهربائية الى أن عدد هذه الخطوط ، لوحدة المساحة ، التي تقطع سطحاً عمودياً على المجال الكهربائي يساوي شدة المجال في تلك المنطقة التي رسم فيها السطح . أما العدد الكلي لخطوط القوة التي تقطع السطح فيدعى بفيض المجال.

الكهربائي ويرمز له عادة بالحرف الاغريقي Φ واستناداً الى ذلك يمكننا بسهولة

استنتاج العلاقة بين الفيض وشدة المجال . فاذا افترضنا وجود سطح عمودي على مجال كهربائي شدته E لأصبح الفيض

$$\Phi = ES \qquad \ldots(3-1)$$

اذ أن S تمثل مساحة السطح .

هذه العلاقة يصح استعمالها في جميع الحالات التي يكون فيها مقدار شدة المجال متساوياً لجميع نقاط السطح ، واتجاه المجال عمودياً على السطح . لنأخذ الآن واحدة من هذه الحالات الخاصة ونحسب فيض المجال الكهربائي الناشيء عن شحنة نقطية .

لو تأملنا المجال الناشيء عن الشحنة النقطية الموجبة q المبينة في الشكل (1 - 3) لوجدنا خطوط القوة منبعثة من الشحنة بشكل شعاعي كما هو مبين في الشكل (2 - 2 أ) في الفصل السابق. والآن نفترض وجود سطح كروي خيالي يحيط بالشحنة النقطية بحيث ينطبق مركزه مع الشحنة. وطبقاً للمعادلة (3 - 2) نجد ان مقدار شدة المجال يكون متساوياً لجميع نقاط السطح المفترض ويساوي.

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

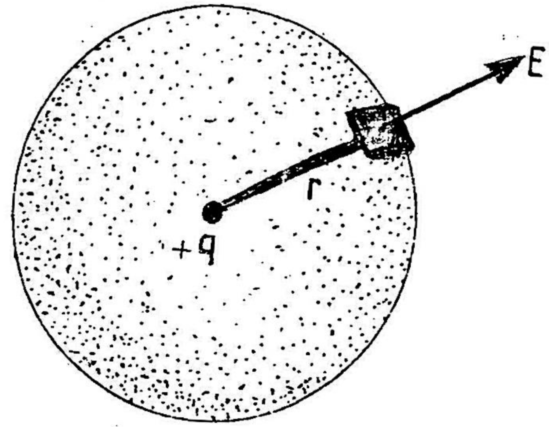
اذ ان r تمثل نصف قطر هذا السطح الخيالي.

وبما ان المجال في هذه الحالة هو بالاتجاه الشعاعي فعندئذ يكون السطح الكروي عمودياً عليه، وبذلك يصبح بالأمكان استعمال المعادلة (1 - 3) لحساب الفيض. وبالتعويض في هذه المعادلة عن مقدار E ومساحة السطح الكروي S ينتج

$$= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) (4\pi r^2)$$

أي :—

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \ldots (3-2)$$



الشكل (1 — 3) شحنة نقطية محاطة بسطح كروي خيالي نصف قطره r

وبملاحظة هذه النتيجة نرى ان فيض المجال الكهربائي خلال هذا السطح الكروي المفترض المحيط بالشحنة q لايعتمد على نصف قطره . فأن اي سطح كروي آخر بنفس المركز سوف يتخلله نفس العدد من خطوط القوة الكهربائية . وبمعنى آخر ان هذه الخطوط لاتنبع من الفضاء المحيط بالسطح الكروي او تنتهي فيه بل تنبع من الشحنة ذاتها . الفيض اذن يساوي $q\,\varepsilon_0$. ان المعادلة (2 - 3) توحي بامكانية استخدام مفهوم الفيض الذي يبدو مجرداً لأول وهلة في حساب مقدار شدة المجال كما سنرى في بند آت .

ولكنه على الاغلب لايكون السطح المرسوم في المجال الكهربائي عمودياً على المجال . كما ان مقدار شدة المجال غالباً مايتغير من نقطة لأخرى . وفي هذه الحالة العامة لابد من ايجاد تعبير رياضي آخر للفيض يحوي ذلك التعبير المشار اليه في المعادلة (1 - 3) . فالشكل (2 - 3) يبين عنصراً تفاضلياً من السطح مساحته dS . بحيث ان العمود المقام عليه يصنع زاوية مع شدة المجال قدرها θ . ومن الواضح ان عنصر الفيض $d\Phi$ خلال هذا السطح يكون

$$d\Phi = E\,(\cos\theta\, dS) \qquad \ldots (3 - 3)$$

حيث أن $(dS\cos\theta)$ تمثل مسقط المساحة dS العمودية على المجال الكهربائي . لاحظ ان المتجه dS يمكن ان يكتب بالصيغة الآتية

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}}\, dS$$

اذ ان $\hat{n}$ تمثل وحدة المتجه باتجاه العمود المقام على عنصر المساحة dS . لذا فبالامكان كتابة المعادلة (3 - 3) بصيغة المتجهات كما هو آت

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \qquad \ldots (3 - 4)$$

أو بالشكل الآتي

$$d\Phi = (E\cos\theta)\, dS = E_n\, dS$$

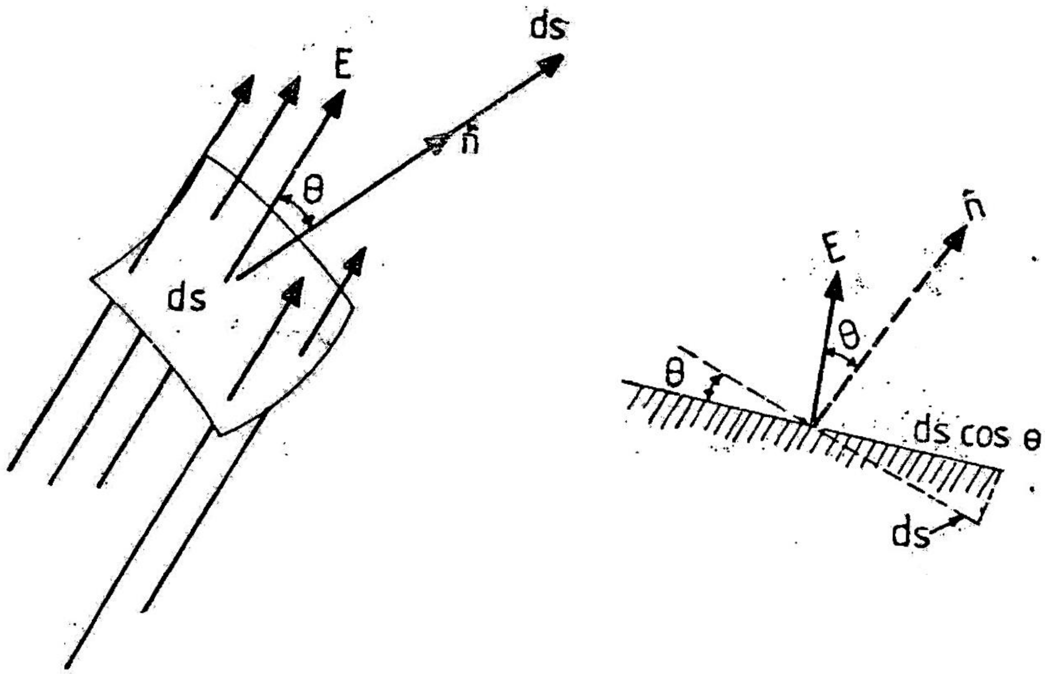
اذ أن E_n تمثل مركبة E العمودية على عنصر المساحة dS .

أما فيض المجال خلال سطح معين فيمكن الحصول عليه من التكامل السطحي للمعادلة (4-3) اي

$$\Phi \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_S F \cos\theta \, dS = \int_S E_n \, dS \qquad \dots(3-5)$$

وتوضع حدود التكامل لكي تشمل السطح بأجمعه . أما اذا كان السطح مغلقاً . فتوضع دائرة في وسط علامة التكامل للدلالة على ذلك . أي

$$\Phi = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_s E \cos\theta \, ds \qquad \dots(3-6)$$

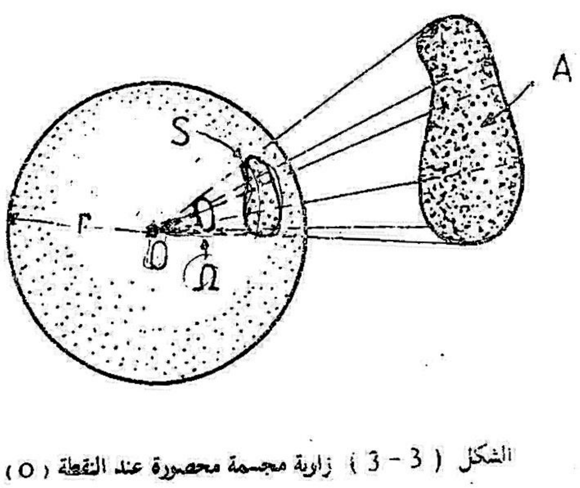


الشكل (2 - 3) المجال الكهربائي يصنع زاوية مع عنصر المساحة

2 ـ 3 قانون كاوس Gauss's law

يعبر هذا القانون الذي يعرف باسم العالم الالماني كاوس* عن العلاقة بين فيض المجال الكهربائي خلال سطح افتراضي وقيمة الشحنة الكلية التي يحتويها هذا السطح داخله. تتجلى فائدة هذه العلاقة في أنها تمثل خاصية مهمة للمجالات الكهروستاتيكية، وفي كونها وسيلة سهلة يمكن تطبيقها على اي سطح مغلق لحل المسائل التي تتعلق بالمجالات الكهربائية التي تتوفر فيها صفة التناظر عادة .

قبل أن نشتق هذه العلاقة يتحتم علينا أن نناقش مفهوم الزاوية المجسمة Solid angle . فالشكل 3 ـ 3 يبين زاوية مجسمة محصورة عند النقطة O من قبل السطح A . لنتصور الآن سطحا كرويا قد رسم بنصف قطر قدره r ومركزه في النقطة O . ان الخطوط المبينة في الشكل والمرسومة بين النقطة O واطراف المساحة A تكون مخروطا يقطع مساحة قدرها S على هذا السطح الكروي . تعرف الزاوية المجسمة المحصورة من قبل السطح A بحاصل قسمة المساحة S على مربع نصف قطر الكرة التي تتكون عليها هذه المساحة . أي



الشكل (3 ـ 3) زاوية مجسمة محصورة عند النقطة (O)

---

* كاوس عالم رياضي بارع ، اسمه الكامل karl Friedrich Gauss عاش بين عامي 1777 و 1855
اضاف الشيء الكثير في حقلي الفيزياء النظرية والفيزياء التجريبية .

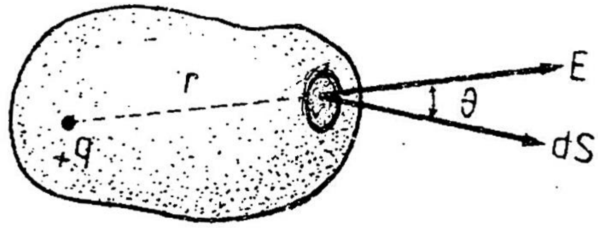
$$\Omega = \frac{S}{r^2}$$

... (3 - 7)

ومن هذا يتضح ان قيمة الزاوية المجسمة تعتمد على مقدار المساحة المقطوعة على السطح الكروي ، مهما كان شكل هذه المساحة . أما وحدة الزاوية المجسمة فتدعى زاوية نصف قطرية مجسمة Steradian ومختصرها (sr) . ولما كانت مساحة السطح الكروي تساوي $4\pi r^2$. فان قيمة الزاوية المجسمة الكلية المحصورة من قبل أي سطح مغلق مهما كان شكله عند نقطة معينة تســاوي

$$\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ sr} \qquad \ldots (3-8)$$

ولكي نشتق قانون كاوس نتأمل اولاً المجال الناشيء عن شحنة نقطية موجبة (q) . ونفترض وجود سطح مغلق وبأي شكل كان يحيط بالشحنة كما هو مبين في الشكل (4 - 3) . لنأخذ عنصراً تفاضلياً مساحته dS من هذا السطح يبعد مسافة قدرها r عن الشحنة q . ان مساحة هذا العنصر صغيرة الى درجة يمكن اعتبار مقدار شدة المجال E الناشيء عن الشحنة متساوياً لجميع نقاطه ويساوي



الشكل (4 - 3) سطح افتراضي مغلق يحيط بشحنة نقطية موجبة

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

أما اتجاه المجال فيكون شعاعياً مبتعداً عن الشحنة ويصنع زاوية قدرها θ مع متجه المساحة dS كما هو مبين بالشكــل .

ان عنصر الفيض الكهربائي $d\Phi$ خلال المساحة dS يمكن حسابه من المعادلة (4 - 3) .

$$d\Phi = \vec{E}.d\vec{S} = E \cos\theta \, dS$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{dS \cos\theta}{r^2} \qquad (3\text{-}9)$$

وبملاحظة الشكل (5-3) الذي يمثل جزءا مكبرا من الشكل (4-3) . نجد ان ($dS \cos\theta$) تساوي تقريباً مسقط عنصر المساحة على سطح كروي نصف قطره r . وطبقا لتعريف الزاوية المجسمة نجد عنصر الزاوية المجسمة المتكون عند الشحنة q وقدره :

$$d\Omega = \frac{dS \cos\theta}{r^2} \qquad (3-10)$$

وبالتعويض عن هذه القيمة في المعادلة (9-3) ينتج :

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} d\Omega \qquad (3\text{-}11)$$

وللحصول على الفيض خلال السطح المغلق المحيط بالشحنة q نجري التكامل السطحي الكلي فينتج :

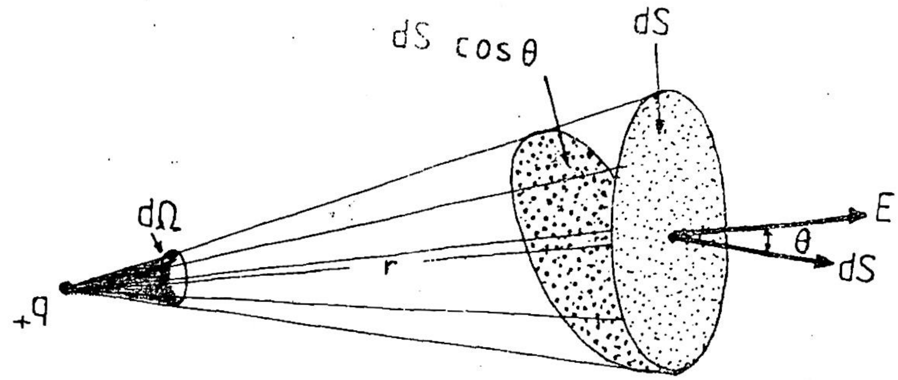
$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \oint_s d\Omega \qquad (3\text{-}12)$$

ولكن

$$\oint_s d\Omega = 4\pi \text{ sr}$$

حيث ان هذا التكامل يمثل الزاوية الكلية المجسمة عند q . وبالتعويض عن قيمته في المعادلة (12-3) نحصل على الفيض الكلي خلال السطح المغلق

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_o} \qquad (3\text{-}13)$$



الشكل (5 – 3) عنصر الزاوية المجسمة

تعني هذه العلاقة ان الفيض خلال السطح المغلق المحيط بالشحنة q يساوي حاصل قسمة الشحنة على سماحية الفراغ (ε_o) .

وعلى الرغم من ان اشتقاق هذه العلاقة قد استند أساساً على مجال الشحنة النقطية ، الا أنه يمكن تعميم هذه النتيجة لتشمل كل الشحنات الواقعة ضمن السطح المفترض . فاذا كان السطح المغلق يحتوي على مجموعة من الشحنات النقطية بدلاً من شحنة نقطية واحدة ، أصبح من الضروري أن نأخذ المجموع الجبري لكل الشحنات المنفصلة الواقعة ضمن السطح المغلق سواء أكانت موجبة أم سالبة عند استخدام تلك العلاقة وبهذا فان q في هذه الحالة تساوي

$$q = q_1 + q_2 + \dots = \Sigma q_i$$

أما اذا كانت الشحنة ذات توزيع متصل فينبغي أن يؤخذ ذلك الجزء من الشحنة الواقع ضمن السطح المغلق فقط ، ويهمل الجزء الآخر الواقع خارج السطح لانه لايؤثر مطلقا على قيمة الفيض الكلي خلال السطح كما سنرى فيما بعد وخلاصة القول هو أن الشحنة q . حسب العلاقة (13 – 3) تمثل الشحنة الكلية الموجودة ضمن السطح المفترض المغلق (المسمى سطح كاوس) .

ان العلاقة (13 – 3) تشير الى أن الفيض خلال السطح المغلق يصبح صفراً عندما تكون قيمة الشحنة الكلية الموجودة ضمن السطح تساوي صفراً ، سواءً أكان السطح لايحتوي على شحنة في داخله أوكان المجموع الكلي للشحنات يساوي صفراً . كأن يحتوي على شحنات سالبة واخرى موجبة .

ويمكن كتابة العلاقة (13 - 3) بشكل آخر، وذلك بالتعويض عن قيمة الفيض من المعادلة (6 - 3) فنحصل على

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o} \qquad (3\text{–}14)$$

تدعى هذه العلاقة (وكذلك العلاقة 13–3) باسم قانون كاوس . ينص قانون كاوس على أن التكامل السطحي للمركبة العمودية لشدة المجال الكهربائي على اي سطح مغلق يساوي المجموع الكلي للشحنات الموجودة ضمن السطح المغلق مقسوماً على سماحية الفرغ (ε_0) .

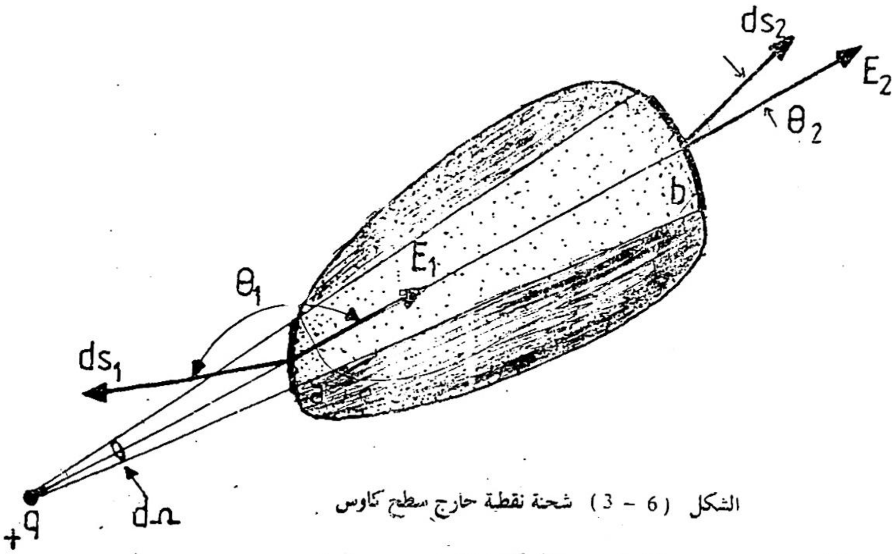
والآن دعنا نبرهن على أن الشحنة الواقعة خارج السطح المغلق المفترض لاتؤثر على قيمة الفيض الكلي خلال السطح . لنفرض ان الشحنة q تقع خارج سطح كاوس كما هو مبين في الشكل (6–3) . عندئذ يكون عنصر الزاوية المجسمة $d\Omega$ مخروطاً رأسه عند الشحنة q ويقطع مساحة قدرها dS_1 عند النقطة a على السطح المغلق ومساحة أخرى قدرها dS_2 عند النقطة b على الجهة المقابلة من السطح (أنظر الى الشكل) .

ومن المعادلة (4–3) يتضح أن الفيض خلال السطح dS_1 يعد سالبا (نحو الداخل)، وذلك لان الزاوية θ_1 بين شدة المجال ومتجه المساحة هي زاوية منفرجة . ويمكننا ايجاد مقدار هذا الفيض بدلالة $d\Omega$ من المعادلة (11–3) فنحصل على

$$d\Phi_1 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\, d\Omega$$

وأما الفيض $d\Phi_2$ خلال المساحه dS_2 فيعد موجبا (خارجا من السطح) وذلك لان الزاوية θ_2 كما هو مبين في الشكل هي زاوية حادة . ومقدار هذا الفيض يساوي

$$d\Phi_2 = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\, d\Omega$$



الشكل (6 – 3) شحنة نقطية خارج سطح كاوس .

وبهذا يصبح مجموع الفيض خلال كلا المساحتين صفرا

$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 = 0$$

وعلى هذا الاساس لو أخذنا السطح باجمعه لوجدنا ان الفيض الداخل الى السطح يكون معادلاً للفيض الخارج منه . وعليه فان الفيض الكلي خلال السطح المغلق يساوي صفراً في هذه الحالة .

(3 – 3) العلاقة بين قانون كاوس وقانون كولوم

صحيح انناعتمدنا اساساً على قانون كولوم في اشتقاق قانون كاوس ، الا انه بوسعنا الان ان نفعل العكس ونستنتج قانون كولوم من قانون كاوس . لنأخذ شحنة نقطية موجبة q ونستخدم قانون كاوس لحساب شدة المجال الكهربائي الناشيء عنها عند نقطة تبعد r عن الشحنة . وعلى الرغم من ان قانون كاوس يصح تطبيقه على اي سطح مغلق مهما كان شكله ، الا انه من الضروري ان نختار سطحاً يتلاءم مع التناظر الشعاعي للمجال الكهربائية الناشيء عن الشحنة النقطية وعليه فان افضل شكل لسطح كاوس في هذه الحالة هو سطح كروي نصف قطره r ومركزه ينطبق مع الشحنة كما هو مبين في الشكل (3-9) ، وذلك لان اتجاه المجال يكون عمودياً على هذا السطح ومقدار شدة المجال يكون متساوياً لجميع نقاط السطح .

وبتطبيق قانون كاوس المتمثل بالمعادلة (14 – 3) :

$$\oint_s E \cos\theta \, dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

نجد ان الزاوية θ تساوي صفراً وذلك لان كل من شدة المجال $\bar{E}$ ومتجه عنصر السطح dS يكون بالاتجاه الشعاعي ونحو الخارج لجميع نقاط سطح كاوس . لذا

$$\oint_s E \cos \theta \, dS = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

لكن $\cos 0 = 1$. كما ان قيمة E ثابتة لجميع نقاط السطح ، لذا يمكن اخراجها خارج علامة التكامل ، وبهذا نحصل على

$$E \oint_s dS = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

وبالتعويض عن قيمة التكامل الذي يساوي مساحة سطح كاوس الكروي $(4\pi r^2)$ ينتج

$$E\,(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

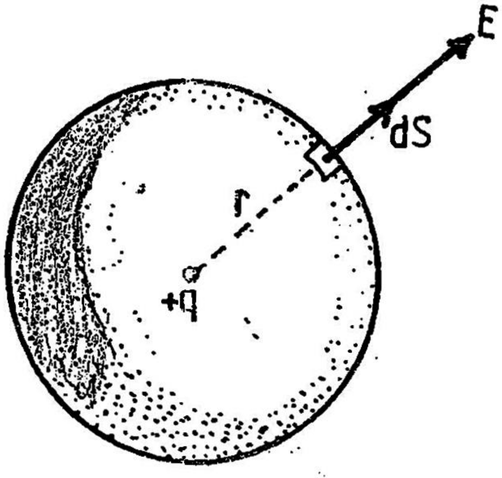
ومنها نحصل على مقدار شدة المجال عند أية نقطة تبعد r عن الشحنة النقطية q ، اي

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{r^2} \qquad (3\text{-}15)$$

والان لو وضعنا شحنة اختبارية موجبة q_o على بعد r من الشحنة q لاصبحت القوة المؤثرة على q_o طبقاً للمعادلة (2–1) تساوي q_oE . أو

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{qq_o}{r^2}$$

وهي العلاقة التي تمثل قانون كولوم .



الشكل (3 – 9)

سطح كاوس كروي يحيط بشحنة نقطية موجبة

3 – 4 حساب شدة المجال الكهربائي باستخدام قانون كاوس

يمكن استخدام قانون كاوس لايجاد شدة المجال الكهربائي في الحالات التي تكون فيها الشحنة موزعة بشكل متناظر وبطريقة أسهل بكثير من الطريقة التي ذكرناها آنفاً في الفصل الثاني. وقد رأينا في البند السابق مثالاً على ذلك وهو حساب شدة المجال لشحنة نقطية. ان نجاح هذه الطريقة يعتمد على الاختيار الملائم لسطح كاوس بحيث يكون منسجماً مع تناظر المجال الكهربائي، لكي تكون لشدة المجال قيمة ثابتة لجميع نقاط السطح. عند ذلك يصبح بالامكان اخراج E خارج علامة التكامل السطحي لقانون كاوس المتمثل بالمعادلة

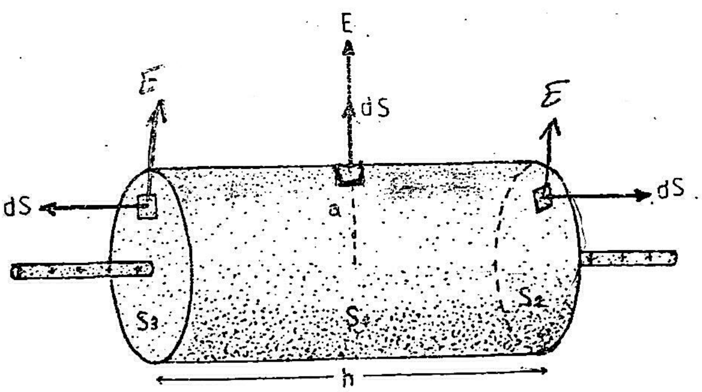
$$\oint_S E \cos\theta \, dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

على ان حساب التكامل السطحي للمركبة العمودية لشدة المجال على السطح كثيراً مايتطلب تجزئة سطح كاوس المغلق الى عدد من السطوح. فاذا كان المجال عمودياً على جزء من السطح، أصبحت قيمة الزاوية θ المحصورة بين المجال ومتجه ذلك السطح صفرا. لكن $\cos 0 = 1$ لذلك يختصر التكامل السطحي ويأخذ الصيغة المبسطة $E\int dS$ وبهذا يكون ناتج التكامل مساوياً لحاصل ضرب شدة المجال في مساحة السطح S (أي ES). اما اذا كان المجال موازياً لجزء آخر من السطح، فان قيمة الزاوية θ تصبح

صفراً. اي ان ناتج التكامل السطحي يؤول الى الصفر ($\int_s E \cos 90^\circ = 0$)وذلك لان $\cos 90^\circ = 0$.وبهذه الوسيلة يمكن تجنب عمليات التكامل السطحي المعقدة ، كما سيتضح عند حساب شدة المجال الكهربائي في عدد من الحالات ، حيث يكون توزيع الشحنات الكهربائية باشكال مختلفة ، وكذلك يكون شكل المجال مختلفاً بطبيعة الحال من حالة لاخرى .

– المجال الناشيء عن خط لانهائي الطول من الشحنات

يبين الشكل (10 – 3) جزءاً من خط مستقيم طوله غير محدود يحمل شحنة موجبة موزعة بصورة متجانسة على طول الخط بكثافة خطية قدرها λ (وهي قيمة الشحنة التي يحملها الخط لوحدة الطول منه مقاسة بوحدة الكولوم لكل متر). والمطلوب حساب شدة المجال عند نقطة تبعد مسافة قدرها a عن الشحنة .



الشكل (10 -- 3)

خط مشحون لانهائي الطول

ان التوزيع المنتظم للشحنة على طول الخط المستقيم اللانهائي الطول يشير الى حقيقة ان المجال الناشيء عن الخط يكون باتجاه شعاعي منبثق من الخط ، وان مقدار شدة المجال مساوياً لجميع النقاط التي تبعد عن الخط مسافة قدرها a . وبهذا نجد

أن أفضل سطح كاوسي ملائم لهذا التناسق الشعاعي للمجال المحيط بالخط المشحون، هو سطح أسطواني دائري مغلق نصف قطره a وطوله h ومحوره منطبق على الخط كما هو موضح في الشكل (3 - 10)

ولكي نحسب التكامل السطحي للمركبة العمودية لشدة المجال خلال سطح كاوس نقسمه الى ثلاث أقسام، الجزء الأسطواني (S_1) والقاعدة المستوية اليمنى (S_2) والقاعدة المستوية اليسرى (S_3). وبهذا ينتج

$$\oint_s E\cos\theta\, dS = \int_{S_1} E\cos\theta\, dS + \int_{S_2} E\cos\theta\, dS + \int_{S_3} E\cos\theta\, dS$$

ثم نجد التكامل لكل سطح من السطوح الثلاثة. لنبدأ بالسطح S_1 حيث ينطبق متجه المجال مع متجه عنصر السطح (كما هو مبين في الشكل)، أي أن الزاوية θ تساوي صفراً. لذا

$$\int_{S_1} E\cos\theta\, dS = \int_{S_1} E\cos 0\, dS = E\int_{S_1} dS$$

أخرجت E خارج علامة التكامل لأن قيمتها ثابتة لجميع نقاط هذا السطح الذي يقع على بعد ثابت قدره a من الشحنة الخطية. لكن الكمية $\int_{S_1} dS$ تساوي مساحة السطح (S_1) وتساوي $2\pi rh$. لذا ينتج

$$\int_{S_1} E\cos\theta\, dS = E(2\pi r h)$$

والآن نأخذ السطح S_2 فنجد أن العمود المقام عليه يصنع زاوية قدرها تسعين درجة مع المجال، وهذا يعني ان $\theta = 90$ لذا،

$$\int_{S_2} E\cos\theta\, dS = \int_{S_2} E\cos 90^\circ\, dS = 0$$

كما نحصل على النتيجة ذاتها للتكامل السطحي للسطح S_3 الذي يوازي المجال كذلك

$$\int_{S_3} E\cos\theta\, dS = \int_{S_3} E\cos 90^\circ\, dS = 0$$

وبهذا نحصل على

$$\oint_s E\cos\theta\, dS = 2\pi ahE$$

والآن لم يبق سوى حساب قيمة الشحنة الواقعة ضمن سطح كاوس ، لكي نتمكن من تطبيق قانون كاوس ونحسب شدة المجال E . ولما كان طول ذلك الجزء من الشحنة الذي يقع داخل سطح كاوس يساوي h . وكثافة الشحنة الخطية λ . لذا ينتج

$$q = \lambda h$$

وأخيرا نطبق قانون كاوس

$$\oint_s E\cos\theta\, dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

فنحصل على

$$2\pi ahE = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

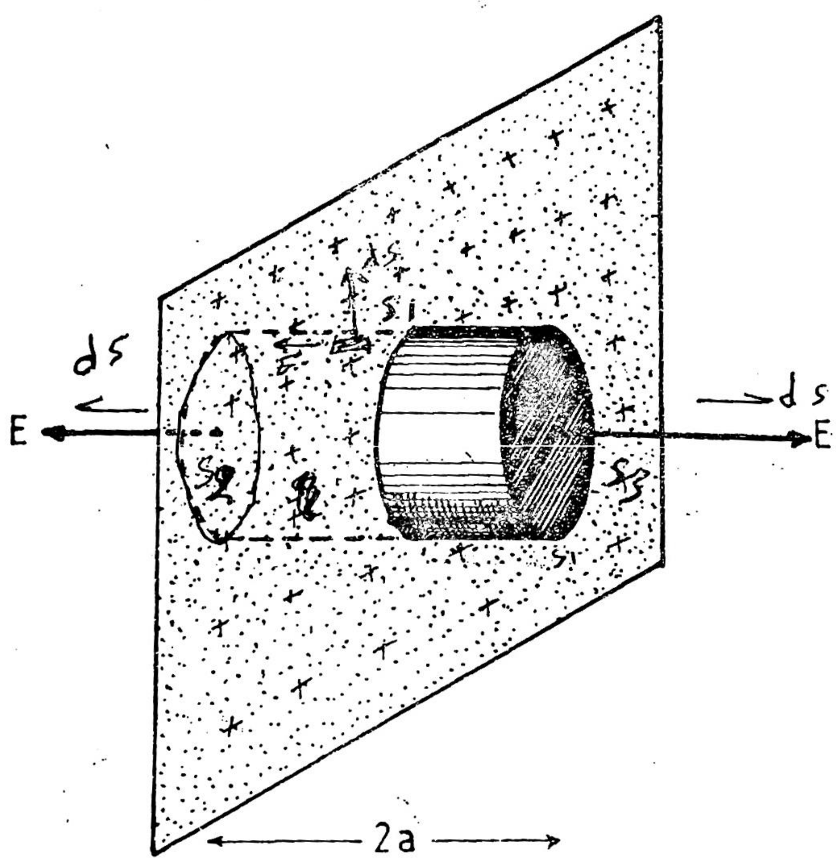
ومن هذه المعادلة نجد مقدار شدة المجال

$$E = \frac{\lambda}{2\pi a\varepsilon_0} \qquad (3-16)$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها (المعادلة (2 – 11) بطريقة التكامل . ويلاحظ أن حل هذه المسألة بتطبيق قانون كاوس هو أبسط بكثير من طريقة التكامل .

ب – المجال الناشيء عن شحنة موزعة بشكل صفيحة مستوية

يبين الشكل (11 – 3) جزء من صفيحة رقيقة ومستوية ولانهائية من الشحنات الموجبة موزعة بانتظام بكثافة سطحية قدرها σ (وهي الشحنة لوحدة المساحة مقاسة بالكولوم لكل متر مربع) . والمطلوب ايجاد شدة المجال عند نقطة تبعد مسافة صغيرة قدرها a عن مستوى الشحنة .



الشكل (11 – 3) صفيحة مستوية مشحونة مساحتها غير محدودة

نختار سطحاً كاوسياً مناسباً لهذه الحالة وهو عبارة عن اسطوانة (تسمى Pill box ومعناها علبة اقراص) مساحة مقطعها S وارتفاعها 2a . وتوضع كما هو مبين في الشكل بحيث يكون محور الاسطوانة عمودياً على مستوى الشحنة . ومن التناظر يتضح أن اتجاه المجال يكون عمودياً على مستوى الشحنة ومتبعداً عنه . كما أن مقداره متساوياً على جهتي المستوي .

ولحساب الفيض خلال سطح كاوس نقسمة الى ثلاثة اقسام : السطح الأسطواني S_1 والقاعدة اليمنى S_2 ، القاعدة اليسرى S_3 . ثم نحسب الفيض خلال كل من هذه السطوح على انفراد فينتج :

$$\int_{s_1} \vec{E}.d\vec{S} = \int_{s_1} E \cos 90° \, dS = 0 ،$$

حيث تكون E موازية للسطح الاسطواني (أنظر الى الشكل) . ثم

$$\int_{s_2} \vec{E}.d\vec{S} = \int_{s_2} E \cos 0 \, dS = ES$$

وكذلك

$$\int_{s_3} \vec{E}.d\vec{S} = \int_{s_3} E \cos 0 \, dS = ES$$

وبهذا يصبح الفيض الكلي خلال سطح كاوس :

$$\oint_{s} \vec{E}.d\vec{S} = \int_{s_1} \vec{E}.d\vec{S} + \int_{s_2} \vec{E}.d\vec{S} + \int_{s_3} \vec{E}.d\vec{S}$$

$$= O + ES + ES = 2ES$$

وبتطبيق قانون كاوس

$$\oint_{s} \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

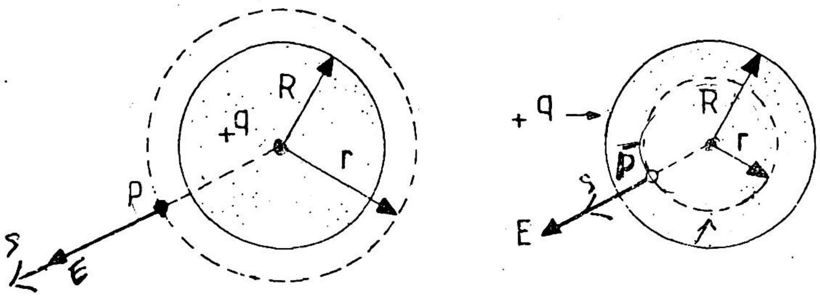
نجد أن :

$$2E\cancel{S} = \frac{\sigma \cancel{S}}{\varepsilon_0}$$

حيث ان σS هي مقدار الشحنة الكلية الموجودة ضمن سطح كاوس . وبهذا نحصل على مقدار شدة المجال

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad (3 - 17)$$

وهذه هـي نفس النتيجة التي حصلنا عليها سابقاً (المعادلة 13 – 2) بطريقة التكامل. ولـكن بطريقة أسهل في هذه المرة .



(آ) (ب)

الشكل (12– 3) التوزيع الـكروي للشحنة

ج – المجال الناشـيء عن شحنه كروية الشكل

الشكل (12 – 3) يبين شحنة موجبة مقدارها q موزعة بانتظام بشكل كرة نصف قطرها R والمطلوب ايجاد تعبير رياضـي لشدة المجال الناشـيء عن هذا التوزيع الـكروي لنقط تقع (أ) خارج الـكرة و (ب) داخلها .

ان الجسم الـكروي المبين في الشكل هو بالتأكيد غير موصل والا استقرت الشحنة الاضافية على سطحه الخارجـي كما سنرى .

التوزيع المتجانس للشحنة الـكروية يشير بشكـل واضح الى ان المجال الـكهربائي الناشـيء عنها باتجاه شعاعـي منبثق من مركز الـكرة ، وأن مقدار شدة المجال يكون مساوياً لجميع النقاط التي تبعد عن مركز الشحنة بمسافة متساوية . وعليه نجد أن أفضل سطح كاوسي ملائم لهذا التناسق الشعاعي للمجال هو السطح الكروي المتحد مركـزه مع مركز الشحنة .

(أ) لايجاد شدة المجال الـكهربائـي خارج الشحنة ، عند نقطة P مثلاً التـي تبعـد مسافة قدرها r عن مركز الشحنة ، نرسم أولاً سطح كاوس الـكروي بنصف قطـر r كما هو مبين في الشكل (12 – 3 أ) . ثم نطبق قانون كاوس المتمثل بالمعادلـة

$$\oint_s \vec{E}.d\vec{S} = \oint_s E\cos\theta\, dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

وهنا نلاحظ ان اتجاه شدة المجال ينطبق على اتجاه عنصر المساحة لجميع نقاط السطح الكروي . مما يجعل قيمة الزاوية θ صفراً. هذا فضلاً عن ان مقدار E ثابت لجميع نقاط سطح كاوس التي تبعد مسافة قدرها r عن المركز، مما يسمح باخراج E خارج علامة التكامل. وبهذا يأخذ قانون كاوس الصيغة الآتية

$$E \oint dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

ومما يلاحظ ان الشحنة الكروية باجمعها واقعة داخل سطح كاوس، ولهذا السبب أنزلنا قيمة الشحنة نفسها (q) عند تطبيق قانون كاوس على هذه الحالة. لكن التكامل السطحي لـ dS يعني مساحة السطح الكروي لكاوس ، أي

$$\oint_s dS = 4\pi r^2$$

وبالتعويض عن هذه القيمة نحصل على شدة المجال الكهربائي عند نقطة P

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{q}{r^2} \qquad \dots (3-18)$$

وهي نفس النتيجة التي سبق ان حصلنا عليها لشدة المجال الناشيء من شحنة نقطية (لاحظ المعادلة 15 – 3) .

لأيجاد شدة المجال داخل الشحنة. في النقطة p' مثلاً ، نرسم أيضاً سطح كاوس بشكل سطح كروي بنصف قطر r داخل الشحنة كما هومبين في الشكل (12 – 3 ب) . وبتطبيق قانون كاوس نجد

$$\oint_s \vec{E}.d\vec{S} = E(4\pi r^2) = \frac{q'}{\varepsilon_0}$$

حيث q' تمثل ذلك الجزء من الشحنة الموجود ضمن سطح كاوس . أي داخل الكرة التي نصف قطرها r لاحظ ان باقي الشحنة q الواقع خارج سطح كاوس لايؤثر على شدة المجال عند نقاط هذا السطح .

وعليه فان :

$$q' = \left(\frac{q}{(4/3)\pi R^3} \right) \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = q \left(\frac{r^3}{R^3} \right)$$

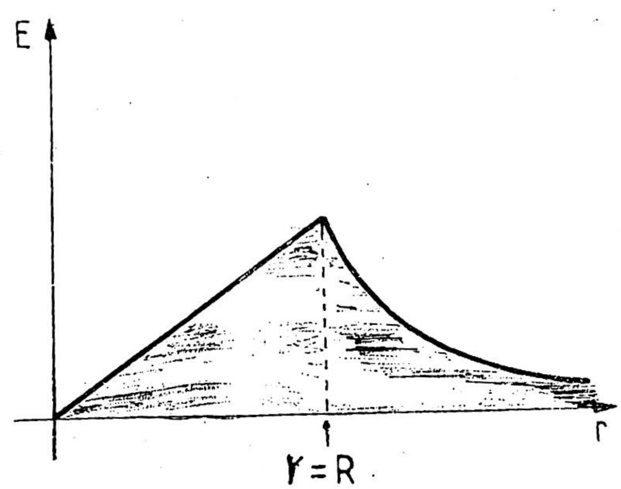
حيث ان المقدار $\left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)$ هو حجم الشحنة الكروية . وبالتعويض عن q' نحصل على التعبير الرياضي التالي لشدة المجال .

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qr}{R^3} \qquad \ldots (3-19)$$

يتضح من هذا التعبير ان مقدار شدة المجال يساوي صفراً في مركز الشحنة الكروية ويزداد خطيا بازدياد البعد r عن المركز في داخل الشحنة حتى يصل الى قيمته القصوى على سطح الشحنة وهي

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2} \qquad \ldots (3-20)$$

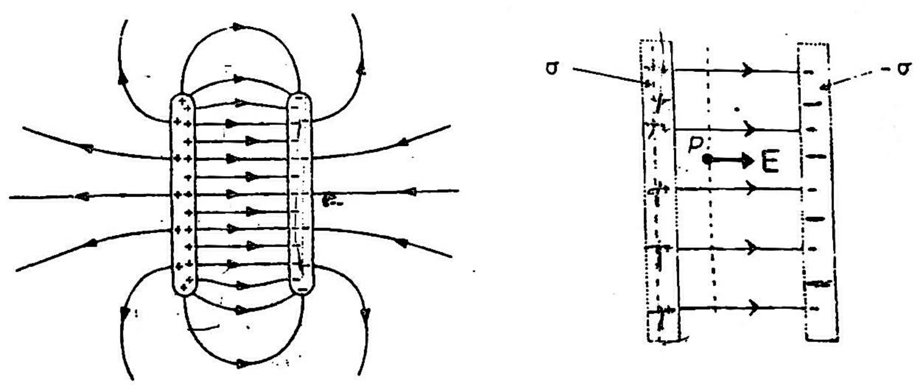
أما خارج الشحنة فتتناقص شدة المجال متناسبة تناسباً عكسياً مع مربع المسافة (أنظر المعادلة 18 – 3) . ويبين الشكل (13 – 3) منحنياً بيانياً للعلاقة بين E والبعد r من مركز الشحنة .



الشكل (13 – 3) العلاقة بين E و r لشحنة كروية

د- المجال الكهربائي بين لوحين موصلين متوازيين

يبين الشكل (14 - 3) لوحين موصلين متوازيين مشحونين بنفس المقدار ، احدهما موجب والآخر سالب . ان المجال الكهربائي الناشيء عنهما يكون (كما هو مبين في الشكل 14 - 3 أ) ، بصورة عامة منتظماً ، عدا المنطقة قرب حافتي اللوحين حيث يكون غير منتظم هناك (لاحظ التقوس في خطوط القوة الكهربائية عند الحافتين) . ولكنه اذا كانت المسافة بين اللوحين صغيرة بالمقارنة مع بعديهما ، امكننا أهمال تأثير الحافتين واعتبار المجال كليا منتظماً . كما هي الحالة في المتسعات (انظر الى الشكل 14 - 3 ب) . عندئذ تكون الشحنة موزعة بانتظام على وجهي اللوحين المتقابلين .



(ب) الشكل (14 - 3) المجال الكهربائي بين لوحين متوازيين. (أ)

ولايجاد شدة المجال باستخدام قانون كاوس . نختار سطح كاوس بشكل متوازي المستطيلات بحيث تكون أحدى قاعدتيه داخل اللوح الموجب والاخرى في الفراغ بين اللوحين كما هو مبين في الشكل (14 - 3 ب) .

وبما ان شدة المجال داخل الموصل تساوي صفراً ، فان الفيض خلال قاعدة سطح كاوس التي تقع داخل اللوح ، وكذلك الفيض خلال السطوح الجانبية لسطح كاوس ، يصبح صفرا كذلك . وبهذا فان الفيض الكلي خلال سطح كاوس يكون

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

حيث أن σA تمثل الشحنة الكلية داخل سطح كاوس . ومن هذه المعادلة نجد أن شدة المجال الكهربائي في الفضاء بين اللوحين تصبح

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \dots(3-21)$$

ولاغرابة فيما يبدو من عدم اعتبار الشحنات السالبة على اللوح الاخر عند ايجاد شدة المجال بتطبيق قانون كاوس . ذلك ان هذه الشحنات سوف تؤثر على الشحنات الموجبة في اللوح الآخر وتجعلها تتجمع على سطح واحد فقط وهو السطح المقابل . ولو اخترنا سطح كاوس بحيث يقطع اللوح السالب بدل اللوح الموجب لحصلنا بالطبع على النتائج نفسها .

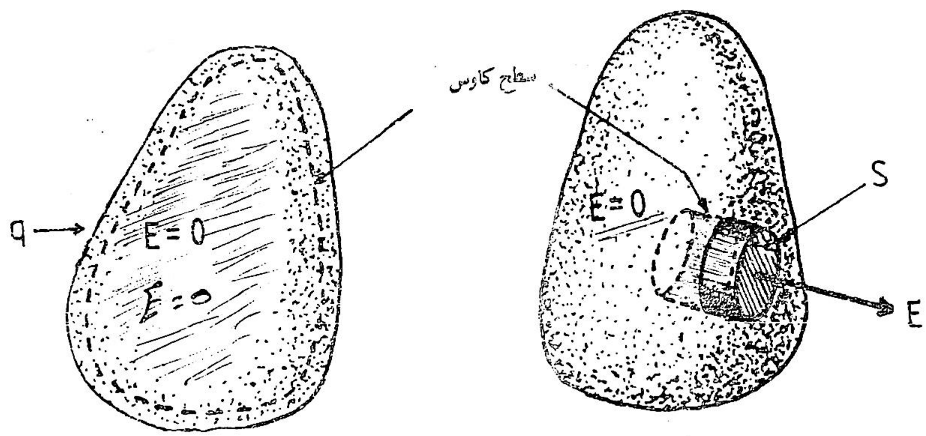
5 - 3 مجال الجسم الموصل المشحون عندما يكون في حالة اتزان كهروستاتيكي

من المعلوم ان الجسم الموصل يحتوي على شحنات طليقة ، لها حرية تامة في الحركة عند تأثرها بالمجال الكهربائي . فاذا وضعت شحنة اضافية (سالبة كانت أم موجبة) على جسم موصل فانها تولد مجالات كهربائية في داخله . ونتيجة لذلك تتحرك الشحنات الطليقة مكونة تيارات موضعية تعمل على اعادة توزيع الشحنة مما يؤدي الى تناقص شدة المجالات الكهربائية داخل الموصل ثم تلاشيها . عندئذ تتوقف هذه التيارات الكهربائية تلقائياً ويصبح الجسم الموصل في حالة اتزان كهروستاتيكي electrostatic equilibrium ، أي تصبح الشحنات مستقرة في مواضعها . أما عملية اعادة توزيع الشحنة فيستغرق زمناً قصيراً عادة ويمكن اهماله في أغلب الأحيان . وتحت الظروف الكهروستاتيكية electrostatic conditions نستنتج ان المجال الكهربائي داخل الجسم الموصل يجب ان يكون صفراً .

الآن وبالاستعانة بقانون كاوس سوف نثبت بأنه : اذا وضعت شحنة اضافية على جسم موصل معزول ، استقرت جميعها على سطحه الخارجي .

يبين الشكل(١٥ - 3) جسما موصلا غير منتظم الشكل ومعزول . قد اعطي شحنة أضافية قدرها q + . والآن لنتخيل سطح كاوس مرسوما داخل الموصل وعلى بعد قليل من سطحه الحقيقي (كما هو مبين في الشكل 15—3 أ) . وبناء على ما سبق فان شدة المجال الكهربائي عند جميع سطح كاوس تساوي صفراً . وهذا يعني أن الفيض الكهربائي خلال سطح كاوس يجب ان يكون صفراً ايضا .

$$\Phi = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$



(أ)

(ب)

الشكل(15— 3) جسم موصل مشحون في حالة اتزان كهروستاتيكي

واستنادا الى قانون كاوس فان الشحنة الكلية الموجودة ضمن سطح كاوس هي أيضا صفر . معنى ذلك أن الشحنة الاضافية q يجب أن تكون بأجمعها خارج سطح كاوس . ولما كان سطح كاوس مرسوما تحت السطح الحقيقي للموصل بمسافة جدا صغيرة ، نستنتج من ذلك أن الشحنة الاضافية q يجب أن تستقر على السطح الحقيقي للموصل .

أشرنا الى أن المجال داخل الجسم الموصل المشحون تساوي صفرا . والآن . ما مقدار وما اتجاه شدة المجال الكهربائي خارج الجسم الموصل عند النقاط التي تبعد مسافات صغيرة عن سطحه ؟

ان أتجاه المجال يجب أن يكون عموديا على السطح ونحو الخارج ، فلو كان

المجال غير عمودي على السطح لـكانت له مركبة موازية للسطح ، ولتأثرت الشحنات الموجودة على السطح بهذه المركبة وكونت تيارات سطحية . وهذا مخالف لما افترضناه من أن الموصل في حالة اتزان كهروستاتيكـي وان الشحنات هـي ثابتة فـي مواضعها علـى سطحـه . لـذا يجـب أن يكون المجال عموديـا علـى سطـح الموصــل المشحون .

أما مقدار شدة المجال فيمكن حسابه من قانون كاوس . لذا نختار سطحا كاوسياً بشكل اسطوانة (Pill box) صغيرة عمودية على سطح الموصل (كما هو مبين في الشكل 15 – 3، ب) ومساحة مقطعها S ، بحيث أن أحدى قاعدتيها تقـع داخل الموصل والاخرى خارجه مباشرة . وبما ان الفيض خلال كل من القاعدة التي تقع في الموصل والسطح الأسطوانـي تساوي صفراً (لماذا ؟) ، فان قانـون كاوس

$$\oint_{s} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

يصبح بالشكل الآتي

$$ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

حيث أن σ تمثل الـكثافة السطحية للشحنة الموجودة على سطح الموصل وهي غالبا ما تتغير من نقطة الى أخرى على سطحه الا في بعض الحالات الخاصة (كأن يكون الموصل بشكل كرة مثلا) . ومن هذه المعادلة الاخيرة نجد ان

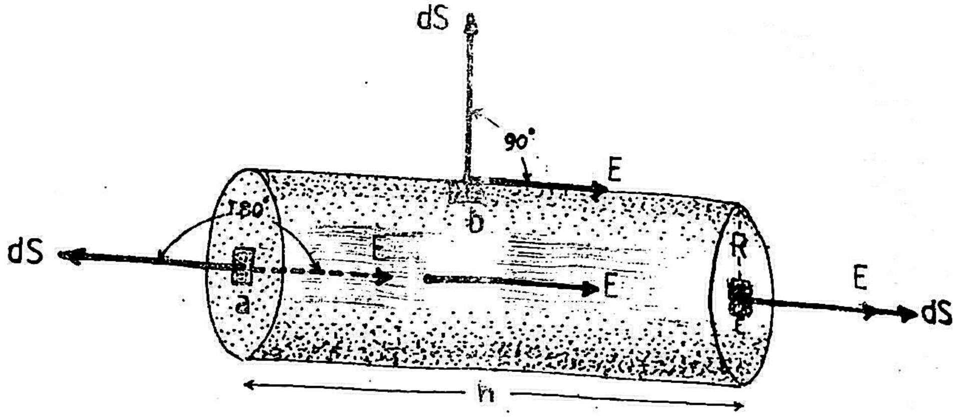
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \ldots (3-22)$$

مثـــال 1

جد الفيض الـكلـي خلال السطح الاسطوانـي المغلق المفترض وجوده في مجال كهربائي منتظم شدته E المبين في الشكل (16 – 3) بحيث يكون محور السطح الاسطوانـي موازياً للمجال ، علماً بان نصف قطر السطح الاسطواني R وطوله h

الحـــل

لايجاد فيض المجال الـكهربائـي خلال السطح المغلق نستعمل المعادلة (6 – 3)



الشكل (16 - 3) سطح أسطواني مغلق

$$\Phi = \oint_s \vec{E}.d\vec{S}$$

على أن حساب التكامل السطحي للمركبة العمودية لشدة المجال على السطح المغلق يمكن أن يتم بسهولة في هذه الحالة بتجزئة السطح المغلق الى ثلاثة أجزاء، السطح المستوي (a) والسطح الاسطواني (b) والسطح المستوي الآخر (c) . لذا

$$\Phi = \int_a \vec{E}.d\vec{S} + \int_b \vec{E}.d\vec{S} + \int_c \vec{E}.d\vec{S}$$

ثم نجد التكامل لكل سطح على حدة .

لنبدأ أولاً بالسطح a حيث يكون المجال باتجاه معاكس لمتجه السطح ويعمل معه زاوية قدرها 180° . لذا ينتج

$$\int_a \vec{E}.d\vec{S} = \int E\cos 180°\, dS = -E\int dS = -E(\pi R^2)$$

اذ ان πR^2 تساوي مساحة السطح المستوي . كما ان لشدة المجال قيمة ثابتة ولهذا اخرجت E خارج علامة التكامل . وبالطريقة نفسها نجد التكامل للسطح المستوي الاخر (c) حيث ينطبق متجه المجال مع متجه عنصر السطح (dS) كما هو مبين في الشكل . وبهذا تصبح الزاوية صفراً لجميع نقاط هذا السطح ، لذا

$$\int_c \vec{E}.\, d\vec{S} = \int E \cos 0\, dS = +E(\pi R^2)$$

وأخيراً نجد التكامل للسطح (b) . هنا تكون الزاوية بين شدة المجال وقيمة عنصر السطح تسعين درجة لجميع نقاط هذا السطح ، لذا

$$\int_b E\,.\, d\vec{S} = \int E \cos 90\, dS = 0$$

أي أن

$$\Phi = -\pi R^2 E + 0 + \pi R^2 E = 0$$

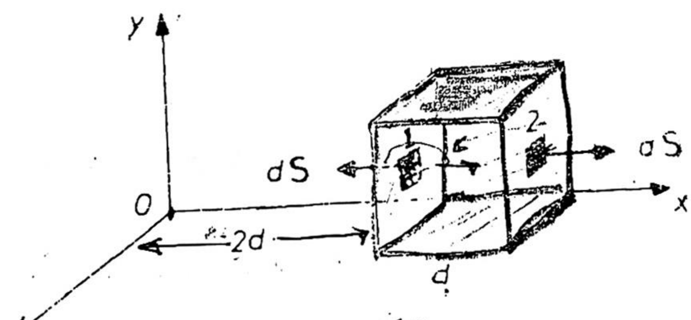
وهذا يعني ان الفيض الكلي خلال السطح المفترض يساوي صفراً . وان هذه النتيجة متوقعة وذلك لأن عدد خطوط القوة التي تدخل السطح يجب أن يساوي عدد خطوط القوة التي تخرج منه نظراً لأن المجال منتظم ، هذا فضلا عن ان السطح لا يحتوي على أية شحنة في داخلة . والآن ماذا نتوقع أن تكون النتيجة فيما لو وضع السطح الأسطواني المغلق بوضع مختلف بحيث يكون المجال عمودياً على محور الأسطوانة مثلاً ؟

مثال 2

اذا كانت المركبات الثلاثة المتعامدة لشدة المجال الكهربائي هي

$$E_x = 10^4 x^{1/2},\ E_y = 0, E_z = 0$$

احسب (أ) الفيض الكلي خلال سطوح المكعب المبين في الشكل (3-17) ، و(ب) مقدار الشحنة الموجودة في داخل المكعب ، علماً بأن طول ضلع المكعب $d = 9cm$



الشكل (3-17)

الحـــل

(أ) . نعتبر اولا وجه المكعب S_1 المؤشر بالرقم 1 (المبين في الشكل) . ان هذا السطح عمودي على مركبة المجال E_x ويبعد مسافة 2d عن نقطة الاصل . لذا فأن مركبة المجال عند هذا السطح تساوي

$$E_x = 10^4 x^{1/2} = 10^4 (2d)^{1/2}$$

وبالتعويض عن d التي تساوي 0.09 m نجد

$$E_x = 10^4 (2 \times 0.09)^{1/2} = 4.2 \times 10^3 \ N/C$$

وواضح ان مقدارها ثابت لجميع نقاط السطح S_1 أما الفيض خلال هذا السطح فيمكن ايجاده باستخدام المعادلة (3-5) فنحصل على

$$\Phi_1 = \int_{s_1} E_x \cos\theta \, dS = 4.2 \times 10^3 (\cos 180°) \int_{s_1} dS$$

حيث ان الزاوية θ بين E_x والعمود على هذا السطح في هذه الحالة تساوي 180° . وبالتعويض عن ناتج التكامل السطحي الذي يساوي (d^2) نجد قيمة الفيض

$$\Phi_1 = - 4.2 \times 10^3 \times (0.09)^2 = - 34 \ Nm^2 / C$$

والآن نعتبر سطح المكعب الاخر S_2 المؤشر بالرقم 2 (كما هو مبين في الشكل) والذي يبعد مسافة قدرها 3d عن نقطة الاصل . لذا فأن مركبة المجال عند هذا السطح في هذه الحالة تساوي

$$E_x = 10^4 x^{1/2} = 10^4 (3d)^{1/2}$$
$$= 10^4 (3 \times 0.09)^{1/2} = 5.2 \times 10^3 \ N/C$$

وبنفس الطريقة نجد الفيض خلال السطح S_2

$$\Phi_2 = \int_{s_2} E_x \cos\theta \, dS = \int_{s_2} 5.2 \times 10^3 (\cos 0°) \, dS$$

حيث ان الزاوية θ في هذه الحالة تساوي صفراً، كما ان التكامل السطحي ايضا يساوي d^2 لذا

$$\Phi_2 = 5.2 \times 10^3 (0.09)^2 = 42 \ N m^2 / C$$

اما مقدار الفيض خلال السطوح الاخرى فواضح انه صفر. نظرا لان مركبات المجال E_y و E_z العمودية على هذه السطوح تساوي صفراً . لذلك فأن الفيض الكلي خلال سطوح المكعب يصبح

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 42 - 34 = 8 \text{ N m}^2 / \text{C}$$

لماذا لايكون عدد خطوط القوة التي تدخل السطح المغلق مساوية لعدد الخطوط التي تخرج منه في هذا المثال ؟

لاحظ ان وحدة الفيض الكهربائي تنتج من حاصل ضرب وحدة شدة المجال الكهربائي ; (N / C) في وحدة المساحة (m^2).

(ب) ولحساب مقدار الشحنة التي يجب ان يحتويها هذا المكعب نستخدم قانون كاوس (المعادلة 13 - 3) ، فينتج

$$q = \varepsilon_0 \Phi$$

$$= \left(8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \right) \left(8 \frac{Nm^2}{C} \right)$$

$$= 70.8 \times 10^{-12} \text{ C}$$

هل هي شحنة موجبة أم سالبة ؟

مثال 3

وضعت شحنة نقطية موجبة قدرها $10 \ \mu C$ في مركز سطح كاوسي مكعب الشكل طول ضلعه عشرين سنتيمتراً . أحسب فيض المجال الكهربائي خلال هـذا السطح المغلق.

الحـــل :

يمكن بسهولة حساب الفيض باستخدام قانون كاوس المتمثل بالمعادلة (13 - 3) وهي

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{10 \times 10^{-6} \text{ C}}{8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}}$$

$$= 1.13 \times 10^6 \text{ N m}^2 / \text{C}$$

هل يعتمد الفيض اذاً على طول ضلع السطح ، وكيف تعلل ذلك ؟

مثـــال 4

لوحان معدنيان يحملان شحنتين متساويتين بالمقدار ومتعاكستين بالاشارة ، المسافة بينهما 1·0cm . فاذا علم ان شدة المجال الكهربائي المتكون في المنطقة بين اللوحين 50 N / C ومساحة كل من اللوحين تساوي 100 cm² . جد شحنة كل من اللوحين .

الحـــل

ان شدة المجال الكهربائي المتكون في الفضاء بين اللوحين حسب المعادلة (21 – 3) ، تساوي

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}.$$

لكن كثافة الشحنة السطحية تساوي حاصل قسمة الشحنة التي يحملها اللوح على مساحته أي

$$\sigma = \frac{q}{A}$$

لذا

$$q = \sigma A = \varepsilon_o E A$$

ومنها نحصل على قيمة الشحنة التي يحملها اي من اللوحين بعد التعويض بقيم كل من ε_o و E و A فينتج

$$q = 8{\cdot}85 \times 10^{-12} \times 50 \times 100 \times 10^{-4}$$
$$= 4{\cdot}4 \times 10^{-12}\ C$$

مثـــال 5

يبين الشكل (18 – 3) جسماً عازلاً بشكل كرة مجوفة نصف قطرها b ونصف قطر التجويف في داخلها a . وقد وزعت شحنة موجبة بشكل منتظم في جميع نقاطها بكثافة قدرها ρ بوحدة (كولوم / متر³) . والمطلوب ايجاد شدة المجال الكهربائي بدلالة ρ عند النقاط التي تبعد مسافة قدرها r عن مركز الكرة ، حيث ان (أ) r > b ، و (ب a < r < b .

الحـــــل :

(أ) لأيجاد شدة المجال باستخدام قانون كاوس نختار سطحاً كروياً بنصف قطر r ($r > b$) كما هومبين في الشكل. ومن التناظر يتضح ان المجال يكون بالأتجاه الشعاعي وعمودياً على هذا السطح (سطح كاوس) ، كما ان مقداره يكون متساوياً عند جميع نقاط السطح. عندئذ يصبح قانون كاوس

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cos 0^\circ \, dS = E 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

حيث ان ($4\pi r^2$) تمثل مساحة سطح كاوس. ولما كانت الشحنة باجمعها واقعة ضمن سطح كاوس. فانه يمكن حساب قيمتها من حاصل ضرب الحجم الذي تشغله الشحنة (حجم الكرة عدا التجويف) في كثافتها الحجمية ρ . أي

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_o} \rho \left(\frac{4}{3} \pi b^3 - \frac{4}{3} \pi a^3 \right)$$

وبالتعويض عن هذه القيمة في قانون كاوس ينتج

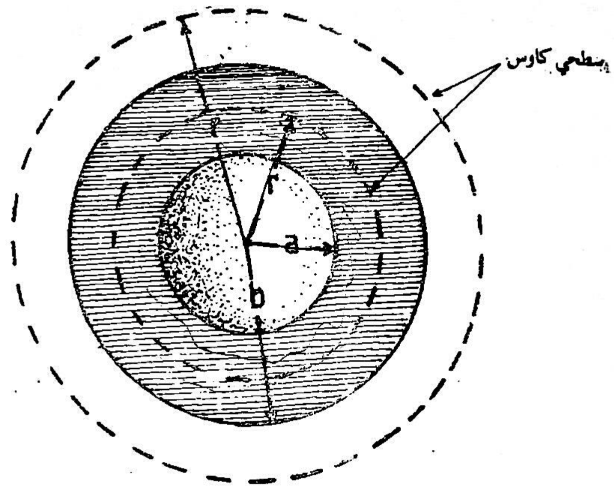
$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_o} \rho \left(\frac{4}{3} \pi b^3 - \frac{4}{3} \pi a^3 \right)$$

وبتبسيط هذه المعادلة نحصل على شدة المجال عند أي نقطة خارج الكرة .

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_o} \frac{b^3 - a^3}{r^2} \qquad (3 - 23)$$

(ب) ولأيجاد شدة المجال عند نقطة داخل الشحنة ($a < r < b$). نرسم سطح كاوس كما هومبين في الشكل. هناكذلك يكون المجال عمودياً على هذا السطح ويكون مقداره متساوياً عند جميع نقاط السطح. ولكن الشحنة q ليست جميعها واقعة داخل سطح كاوس في هذه الحالة. والذي يهمنا فقط ذلك الجزء من الشحنة الواقع ضمن سطح كاوس ، وقيمته تساوي

$$q' = \rho \left(4/3 \, \pi r^3 - 4/3 \, \pi a^3 \right)$$



الشكل (18 - 3) شحنة بشكل كرة مجوفة

بتطبيق قانون كاوس نجد :

$$E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_o}\,\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi a^3\right)$$

ومن هذه المعادلة نحصل على شدة المجال

$$E = \frac{\rho}{3\,\varepsilon_o}\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right) \qquad (3-24)$$

مثـــال 6

يبين الشكل (19 - 3) مقطعاً لأسطوانتين مجوفتين معدنيتين طويلتين ، طولهما L الأسطوانة الداخلية مشحونة بشحنة سالبة قدرها q - والخارجية بشحنة موجبة قدرها 3q + والمطلوب استخدام قانون كاوس لأيجاد .

(أ) شدة المجال خارج الأسطوانة الخارجية .
(ب) شدة المجال في المنطقة بين الأسطوانتين .
(ج) كيفية توزيع الشحنة على الأسطوانة الخارجية .

الحـــل

لحساب شدة المجال خارج الاسطوانة الخارجية ، عند النقطة P مثلا ، التي تبعد مسافة r عن محور الاسطوانة ، نرسم سطح كاوس بشكل اسطوانة نصف قطرها r وطولها h (مبين مقطعها في الشكل) ، ومن التناظر يتبين ان مقدار شدة المجال متساوٍ لجميع نقاط السطح الاسطواني ، كما ان اتجاه المجال يكون عموديا عليه . أما مقدار الشحنة الواقعة ضمن سطح كاوس q' فتصبح :

$$q' = \frac{3q - q}{L} h = \frac{2q}{L} h$$

وطبقا للمناقشة الواردة في البند (4 - 3 أ) نجد ان الفيض خلال سطح كاوس يساوي

$$\oint_s E . dS = E (2 \pi rh)$$

وبتطبيق قانون كاوس نحصل على

$$E (2\pi rh) = \frac{1}{\varepsilon_o} \frac{2q}{L} h$$

وبهذا فان مقدار شدة المجال يكون

$$E = \frac{q}{\pi \varepsilon_o rL} \qquad (3 - 25)$$

أما اتجاه المجال فيكون بالاتجاه الشعاعي ونحو الخارج .

(ب) ولحساب شدة المجال بين الاسطوانتين (عند النقطة Q مثلا) ، ايضا نختار سطح كاوس بشكل اسطوانة طولها h ونصف قطرها r بحيث تمر في النقطة Q وعندئذ تصبح قيمة الشحنة الموجودة ضمن سطح كاوس في هذه الحالة

$$q' = \frac{- q}{L} h$$

وبتطبيق قانون كاوس نحصل على

$$\oint_s \vec{E}.d\vec{S} = E(2\pi rh) = \frac{1}{\varepsilon_o}\left(\frac{-q}{L}h\right),$$

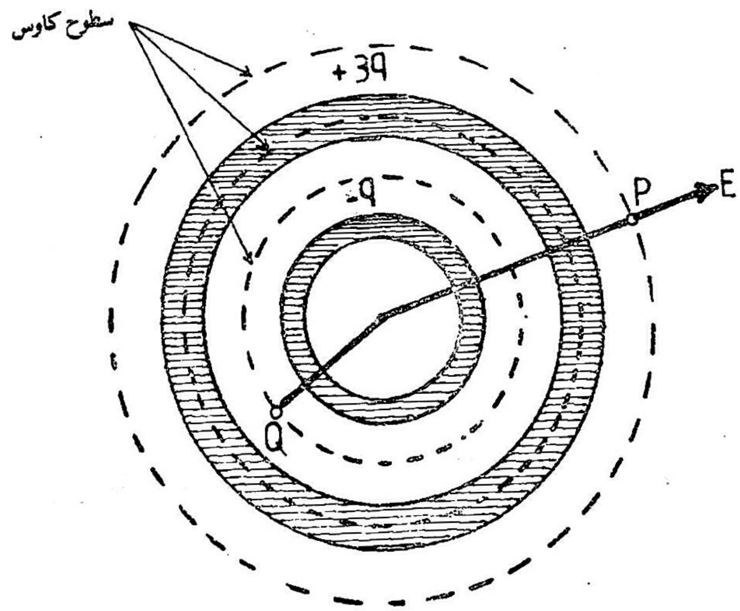
وبذلك نجد ان

$$E = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_o rL} \qquad (3-26)$$

وتدل اشارة الناقص على ان الشحنة سالبة وان اتجاه المجال نحو الداخل .

(ج) نتخيل سطح كاوس بشكل اسطوانة موجودة داخل الأسطوانة المجوفة الخارجية كما هو مبين في الشكل . ولما كانت الأسطوانة الخارجية موصلة فان شدة المجال داخلها يجب ان تكون صفرا ($E = O$) . وهذا يعني ان الفيض خلال سطح كاوس يساوي صفرا في هذه الحالة . اي

$$\oint_s \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o} = 0$$



الشكل (3-19)

ومن ذلك نستنتج ان الشحنة الكلية داخل سطح كاوس q في هذه الحالة (الناتج من جمع الشحنة على الاسطوانة الداخلية مع الشحنة على السطح الداخلي للاسطوانة الخارجية) يجب ان يكون صفرا . وبما ان مقدار الشحنة على الاسطوانة الداخلية هي (q –) . اذن يجب ان يكون مقدار الشحنة على السطح الداخلي للاسطوانة الخارجية (q +) لكي يكون مجموعهما الجبري صفرا كما ذكرنا . وما تبقى من شحنة الاسطوانة الخارجية ومقداره (2q +) يجب ان يكون على سطحها الخارجي .

تمارين

3 – 1 شحنة موجبة قدرها 20×10^{-6} C وضعت في مركز سطح كروي نصف قطره 10 cm احسب عدد خطوط القوة التي تنفذ خلال هذا السطح .

3 – 2 اذا علمت إن ثلاثة آلاف من خطوط القوه تدخل سطحا مغلقا ويخرج منه ألف خط . فما مقدار الشحنة الكلية التي يجب ان يحتضنها هذا السطح ؟ وهل هي موجبة أم سالبة ؟

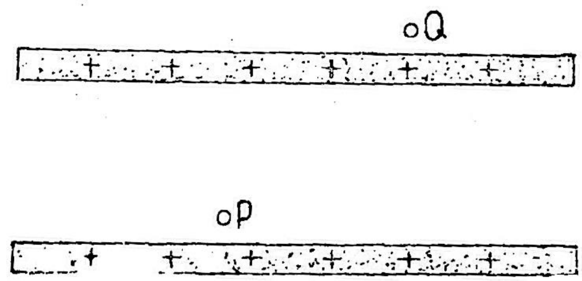
$(1.77 \times 10^{-8}$ C$)$

3 – 3 سطح كروي موصل نصف قطره R يحمل شحنة موجبة كثافتها السطحية σ اوجد بواسطة قانون كاوس شدة المجال الكهربائي عند اي نقطة (أ) خارج السطح الكروي و (ب) داخل السطح

3 – 4 برهن ، بالاستعانة بقانون كاوس ، على ان شدة المجال الكهربائي عند أية نقطة خارج اسطوانة طويلة موصلة وتحمل شحنة كثافتها السطحية منتظمة ، هي نفسها كما لو كانت الشحنة موزعة على محور الاسطوانة بصورة منتظمة .

3 – 5 يمثل الشكل (20 – 3) جزءاً من صفيحتين كبيرتين متوازيتين من الشحنات الموجبة الموزعة بشكل منتظم عليهما بكثافة سطحية قدرها σ C / m^2 . استخدم قانون كاوس لايجاد شدة المجال عند النقطتين P و Q .

$(0 ' \sigma / \varepsilon_o)$



الشكل (20 3)

3 – 6 جد فيض المجال الكهربائي خلال السطح الاسطواني المشار اليه في المثال (1) فيما اذا كان محوره عمودياً على المجال

3 - 7 اذا وضع سطح خيالي بشكل نصف كرة في مجال كهربائي منتظم بحيث كان محوره موازياً للمجال . أوجد الفيض الكهربائي خلال هذا السطح ، اذا علم ان نصف قطره R وان شدة المجال E .

3 - 8 اذا علمت ان شدة المجال الكهربائي الناشىء عن كرة موصلة مشحونة عند نقطة قريبة من السطح تساوي 10^4 N / C ، احسب الكثافة السطحية لشحنة الكرة (8.85×10^{-8} C / m^2)

3 - 9 وضعت شحنة نقطية موجبة قدرها q عند مركز قشرة كروية رقيقة موصلة نصف قطرها R . اوجد شدة المجال الكهربائي (أ) داخل القشرة و(ب) خارج القشرة عند بعد قدره r ($r > R$) مستخدماً قانون كاوس . (ج) هل تؤثر القشرة على قيمة شدة المجال المتكون خارجها ؟

3 - 10 برهن مستعيناً بقانون كاوس ، على ان شدة المجال الكهربائي عند أية نقطة خارج كرة معدنية تحمل شحنة ذات كثافة سطحية منتظمة (σ) . هي نفسها كما لو كانت الشحنة باجمعها موضوعة في مركز الكرة .

3 - 11 كرة معدنية موصلة معزولة نصف قطرها 3 cm تحمل شحنة موجبة قدرها 10^{-9} C . تحيط بها كرة مجوفة موصلة معزولة نصف قطرها الداخلي 6 cm والخارجي 9 cm . تحمل شحنة سالبة قدرها 5×10^{-9} C .

استخدم قانون كاوس لحساب :

(أ) مقدار الشحنة المستقرة على السطح الداخلي للكرة المجوفة وكذلك على سطحها الخارجي .

(ب) شدة المجال الكهربائي عند النقاط التي تبعد مسافات قدرها 12 cm و 4.5 cm و 7 cm من المركز .

3 - 12 اسطوانتان طويلتان متحدتا المحور . الاسطوانة الداخلية نصف قطرها a وتحمل شحنة سالبة قدرها λ C / m . اما الأسطوانة الخارجية فنصف قطرها b وتحمل شحنة موجبة بنفس المقدار . استخدم قانون كاوس لايجاد شدة المجال الكهربائي عند النقاط

$a < r < b , r > b , r < a$

$$\left(E = 0, \quad 0, \quad \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \right)$$

3 - 13 في المسألة السابقة ، ما مقدار السرعة التي يجب ان يطلق بها بروتون لكي يستمر في الدوران في الحيز الموجود بين الاسطوانتين في مسار دائري نصف قطره r . اذا علمت ان:

$\lambda = 3 \times 10^{-8}\ C/m$ $(v = 2 \times 10^{5}\ m/s)$

3 - 14 شحنة موجبة موزعة بشكل كرة نصف قطرها 3m بحيث ان كثافتها الحجمية عند اية نقطة داخل الكرة تعتمد على البعد r من مركزها حسب العلاقة :

$$\rho = (10^{-7})\, r \quad C/m^3$$

(أ) ماقيمة هذه الشحنة ؟

(ب) ماقيمة شدة المجال الكهربائي عند نقطة تبعد 4m عن المركز ؟

(ج) مامقدار شدة المجال الكهربائي عند نقطة تبعد 2m عن المركز ؟

$(2.54 \times 10^{-5}\ C,\ 1.43 \times 10^{4}\ N/C,\ 1.13 \times 10^{4}\ N/C)$

3 - 15 اذا خضعت الكثافة الحجمية لشحنة كروية للعلاقة

$$\rho = K(R - r)$$

فاحسب قيمة الثابت K . علما بان قيمة الشحنة الكروية تساوي $1\mu C$ ونصف قطرها R يساوي مترا واحداً .

$(9.5 \times 10^{-7}\ C/m^4)$

3 - 16 شحنة موجبة موزعة خلال حجم كروي نصف قطره R فاذا علم ان الكثافة الحجمية للشحنة عند أية نقطة داخل الكرة تعتمد على البعد r عن مركزها حسب العلاقة :

$$\rho = \frac{r^2}{4\pi}\ C/m^3$$

احسب نصف قطر الشحنة الكروية التي قيمتها تساوي 6.4 كولوما .

احمد عبدالجبار

الفصل الرابع

الجهد الكهربائي

The Electric Potential

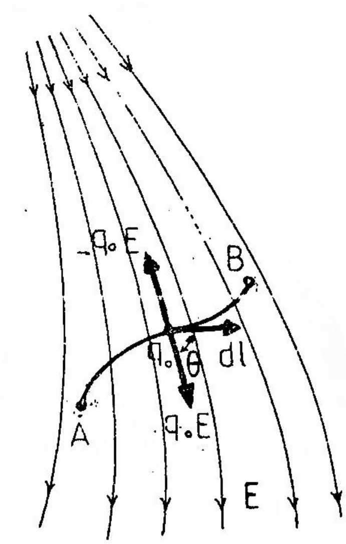
4 . 1 الجهد الكهربائي

من المعلوم انه لو وضعت شحنة كهربائية في مجال كهربائي لأثرت عليها قوة . وهذا يعني ان تحريك هذه الشحنة من نقطة الى اخرى يتطلب انجاز شغل . وبدلالة هذا الشغل سنعرف الجهد الكهربائي (ونرمز له بالحرف V) ليساعدنا في وصف ودراسة المجالات الكهربائية جنبا الى جنب مع شدة المجال الكهربائي E . والجهد هو كمية عددية Scalar (كما سنرى) ، وهذا يجعل التعامل معه رياضيا أسهل بكثير من التعامل مع الكمية الاتجاهية E .

ولايجاد فرق الجهد بين النقطتين A و B الواقعتين في مجال كهربائي (انظر الى الشكل 4 - 1) ، لا بد من حساب الشغل الذي يلزم انجازه من قبل عامل خارجي لتحريك الشحنة الاختبارية الموجبة q_o من النقطة A الى B بحيث تبقى دائما في حالة اتزان . ويعرف فرق الجهد بين النقطتين A و B بأنه الشغل المنجز (W_{AB}) لوحدة الشحنة ، اي

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_o} \qquad \dots (4-1)$$

وقد اصطلح ان يكون الجهد عند نقطة بعيدة بعداً كبيراً (لانهائيا) عن كل الشحنات صفرا . وعلى هذا الاساس لو اخترنا النقطة A في اللانهاية لأصبح الجهد V_A صفـراً . وبالتعويض عن هذه القيمة بالمعادلة (4 - 1) نحصل على الجهد الكهربائي عند نقطة B . وبصورة عامة نعرف الجهد عند اية نقطة واقعة في المجال الكهربائي حسب المعادلة



الشكل (1 - 4)

$$V = \frac{W}{q_0} \qquad \dots(4-2)$$

اي ان الجهد الكهربائي عند أية نقطة هو الشغل لوحدة الشحنة الواجب انجازه لنقل شحنة موجبة اختبارية صغيرة من المالانهاية الى تلك النقطة

ولابد هنا من الاشارة الى نقطتين تتعلقان بتعريف الجهد :
اولاً / ان الشحنة الاختبارية q_0 يجب ان تكون صغيرة بحيث ان تحريكها من نقطة الى اخرى لايغير من المجال الكهربائي الاصلي . لاحظ ان مثل هذا الشرط كان متوفراً في تعريف شدة المجال E ايضاً .

وثانيا /لقياس الجهد عند اية نقطة يجب اختيار نقطة مرجع reference point يتفق على قيمة الجهد عندها مسبقا . وفي تعريفنا للجهد اخترنا النقطة في المالانهاية واعتبرنا الجهد عندها صفراً . ولو انه بالامكان الاتفاق على اية قيمة اخرى غير الصفر وعدّها مرجعاً لقياس الجهد . لاحظ انه في كثير من مسائل الدوائر الكهربائية يتخذ جهد الأرض مرجعا لقياس الجهد ويعتبر جهدها مساويا للصفر .

ومن المعادلة (2 – 4) يتضح ان الجهد بالقرب من شحنة موجبة معزولة يكـون موجباً . ذلك لانه يجب ان يؤثر عامل خارجي بقوة لنقل الشحنة الاختبارية الموجبة باتجاه معاكس للمجال من اللانهاية الى تلك النقطة اي ان الشغل الذي يبذله العامل الخارجي لنقل الشحنة الاختبارية يكون موجبا وكذلك نلاحظ ان الجهد بالقرب من شحنة سالبة معزولة يكـون سالباً . وذلك لأنه يجب ان يؤثر عامل خارجي بقـوة معوقـة restraining Force على الشحنة الاختبارية الموجبة (التي تنجذب نحو الشحنة السالبة) اثناء مجيئها من مالانهاية وتحركها باتجاه المجال ، ولهذا يكون الشغل المنجز سالبا في هـذه المرة .

كذلك يتضح من المعادلة (2 – 4) أن الجهد هو كمية عددية (غير متجهة) وذلك لان الشغل والشحنة هما كميتان عدديتان . ان وحدة الجهد حسب النظام العالمـي للوحدات هي جول / كولوم وتدعى فولت اي ان 1 Volt = 1 joule / coulomb

2 – 4 علاقة الجهد بشدة المجال

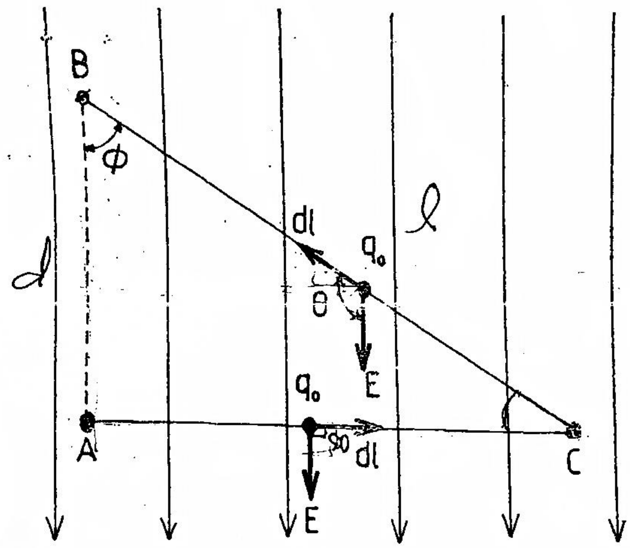
لحساب الشغل الذي ينجزه عامل خارجي لنقل الشحنة الاختبارية الموجبة q_0 من A الى B في مجال كهربائي غير منتظم كما هو مبين في الشكل (1 – 4) . نفرض ان الشحنة q_0 سلكت المسار المبين في الشكل نحسب اولا الشغل المنجز لتحريك الشحنة ازاحة تفاضلية قدرها dl . ثم نجري عملية التكامل على طول المسار من A الى B . فلو كـان مقدار شدة المجال الـكهربائي عند عنصر المسار ($\vec{dl}$) هو E ويصنع زاوية قدرها θ معه . لتأثرت الشحنة الاختبارية بقوة مقدارها $q_0 E$ باتجاه المجال . لذلك فأن القوة التي يجب ان يسلطها العامل الخارجي لتحريك الشحنة بدون تعجيل هي $q_0 E$ – وبهذا يصبح الشغل المنجز

$$W_{AB} = -\int_A^B \vec{F}.\vec{dl} = -q_0 \int_A^B \vec{E}.\vec{dl}$$

وبالتعويض عن الشغل W_{AB} في المعادلة (1 – 4) ينتج

$$V_B - V_A = -\int_A^B E.\vec{dl} \qquad \ldots(4 \quad 3)$$

وبذلك نحصل على تعريف آخر لفرق الجهد يتمثل في التكامل الخطي لشدة المجال على طول المسار بين النقطتين A و B .



الشكل (2 - 4)

واذا فرضنا ان النقطة A تقع في اللانهاية وان الجهد V_A عند هذه النقطة يساوي صفراً ، لأصبحت المعادلة (3 - 4) بالشكل الآتي

$$V_B = - \int_{\infty}^{B} \vec{E} . \vec{dl} \qquad \dots (4-4)$$

وبهذا نحصل على تعريف الجهد عند اية نقطة بدلالة شدة المجال . ومن هاتين المعادلتين (3 - 4) و (4 - 4) نستطيع ان نحسب فرق الجهد بين اي نقطتين ، اوالجهد عند اية نقطة ، اذا علمنا شدة المجال .

ومن الحالات الخاصة الجديرة بالاهتمام والتي يمكن فيها كتابة المعادلة (3 - 4) بشكل ابسط بدون الحاجة الى اجراء التكامل الخطي لشدة المجال هي عندما يكون المجال منتظماً وموازيا لمسار الشحنة وله نفس المقدار لجميع نقاط المسار . فلوكانت حركة الشحنه باتجاه معاكس لشدة المجال لاصبحت الزاوية بين E و dl تساوي 180° لذا فان

او

$$V_B - V_A = - \int_{A}^{B} E \cos 180^\circ \, dl = E \int_{A}^{B} dl$$

$$V_B - V_A = Ed \qquad \dots (4-5)$$

اذ ان d تمثل المسافة بين النقطتين A و B.

ومن هذه المعادلة يتضح ان هناك وحدة اخرى لشدة المجال وهي فولت /متر ورمزها (V/m) وسنترك للطالب اثبات التطابق بين هذه الوحدة والوحدة التي مر علينا ذكرها في الفصل الثاني وهي نيوتن / كولوم

مثـال 1

أفرض ان شحنة اختبارية q_0 نقلت بدون تعجيل من النقطة A الى النقطة B في مجال كهربائي منتظم وعلى المسار ACB كما هو مبين في الشكل (4-2) . أحسب فرق الجهد بين النقطتين A و B

الحـل

نأخذ اولاً المسار AC ونجد فرق الجهد بين النقطتين A و C من المعادلة (4 - 3) فنحصل على

$$V_C - V_A = -\int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_A^C E \cos 90° \, dl = 0$$

لاحظ ان شدة المجال تكون عمودية على هذا المسار، لذا لاينجز شغل لنقل الشحنة من النقطة A الى C . وبذلك فان الجهد عند النقطتين A و C يكون متساويا ($V_A = V_C$) . اما فرق الجهد بين النقطتين C و B فيكون

$$V_B - V_C = -\int_C^B E \cos\theta \, dl = -E\cos\theta \int_C^B dl = -E\cos\theta \; l$$

حيث ان l تمثل طول المسافة بين النقطتين B و C . واذا فرضنا ان المسافة بين A و B هي d . نجد ان

$$d = l\cos\phi = -l\cos\theta$$

وبذلك يصبح فرق الجهد

$$V_B - V_C = Ed$$

وبما ان النقطتين A و C لهما نفس الجهد ، نجد ان

$$V_B - V_A = Ed$$

ومن الجدير بالملاحظة انه يمكننا الحصول على نفس النتيجة مباشرة من المعادلــة (4-5) وذلك لو سلكنا المسار المباشر بين النقطتين A و B (المبين فـي الشكل بصورة خط متقطع) . وهذه النتيجة متوقعة ، ذلك ان فرق الجهد لا يعتمد على المســار الذي يربط النقطتين .

4 - 3 التكامل الخطي لشدة المجال الكهربائي

يمثل قانون كاوس احدى الخواص الاساسية للمجالات الـكهروستاتيكية ، وينص على ان التكامل السطحي لشدة المجال الـكهربائي على اي سطح مغلق يتناسب طردياً مع كمية الشحنة الموجودة ضمن هذا السطح . وسنتاول الان خاصية اساسية اخرى مرتبطة بالتكامل الخطي لشدة المجال ، وسنعتمد اساسا على قانون كولوم لاشتقاق العلاقة التي تمثل هذه الخاصية كما فعلنا عند اشتقاق قانون كاوس .

يبين الشكل (4-3) مجالاً شعاعيا ناشئاً عن شحنة نقطية موجبة ($+q$) . وقد رسم فيه مسار بين النقطتين B. A . لايجاد التكامل الخطي لشدة المجال على هذا المسار ، نعين اولاً اتجاه المجال E عند نقطة P الواقعة على المسار ، ثم نحدد المتجه الذي يمثل عنصر المسار dl عند هذه النقطة كما هو موضح في الشكل . عندئذ يصبح التكامل الخطي لشدة المجال بالصيغة الآتية

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_A^B E \cos\theta \, dl$$

اذ ان θ تمثل الزاوية المتكونة عند نقطة P التي تبعد r عن الشحنة النقطية . وبملاحظة الشكل يتبين ان

$$dl \cos\theta = dr$$

وان شدة المجال عند نقطة P التي تبعد r عن الشحنة

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

وبهذا يأخذ التكامل الخطي لشدة المجال الصيغة الآتية

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \, dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B}$$

اي ان

$$\int_A^B \vec{E}.\, \vec{dl} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \qquad ...(4-6)$$

من هذه المعادلة يتضح ان التكامل الخطي لشدة المجال (وكذلك فرق الجهد بين النقطتين A و B) لايعتمد على شكل المسار الواصل بين النقطتين بل يعتمد على بعدهما عن الشحنة النقطية q . وعلى الرغم من ان هذا الاستنتاج مبني على الحالة الخاصة المتمثلة في المجال الناشيء عن الشحنة النقطية ، الا انه يصح لكل المجالات الكهروستاتيكية مهما كان شكلها .

والآن لو وصلنا النقطتين B, A بالمسار المبين في الشكل (3 − 4) بهيئة خط متقطع ، وأخذنا التكامل الخطي لشدة المجال على هذا المسار باتجاه معاكس اي من نقطة B الى نقطة A لحصلنا ، بالطريقة نفسها ، على

$$\int_B^A \vec{E}.\, \vec{dl} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \qquad ...(4-7)$$

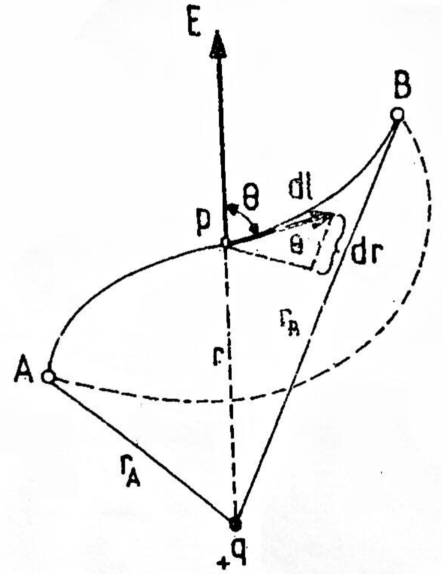
لكن التكامل الخطي لشدة المجال على المسار المغلق الممتد من نقطة A الى B ثم الى A يساوي

$$\oint \vec{E}.\, \vec{dl} = \int_A^B \vec{E}.\, \vec{dl} + \int_B^A \vec{E}.\, \vec{dl}$$

ان الدائرة التي في وسط علامة التكامل تشير الى ان التكامل الخطي يمتد حول مسار مغلق . وبجمع المعادلتين (6 − 4) و (7 − 4) ينتج

$$\oint \vec{E}.\, \vec{dl} = 0 \qquad ...(4-8)$$

هذه هي العلاقة التي تعبر عن الخاصية الأساسية الثانية للمجالات الكهروستاتيكية والتي تنص على ان التكامل الخطي لشدة المجال الكهربائي حول اي مسار مغلق في مجال كهروستاتيكي يساوي صفرا .



الشكل (3 – 4)

ومما تجدر الاشارة اليه هو امكانية الاستفادة من هذه العلاقة بسهولة لاثبات ان الشغل المنجز لنقل شحنة اختبارية q_o بدون تعجيل حول اي مسار مغلق يجب ان يكون صفراً .

4 – 4 حساب الجهد الكهربائي

أشرنا في البند الثاني من هذا الفصل الى امكانية حساب فرق الجهد بين أية نقطتين واقعتين في مجال كهربائي اذا علمنا شدة المجال ، وذلك باستخدام العلاقة (3 – 4) وهي

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

ويمكننا الرجوع الى المناقشة التي وردت في البند السابق ، للتعرف على كيفية حساب التكامل الخطي لشدة المجال على طول المسار بين النقطتين A ، B الواقعتين في المجال الناشيء عن الشحنة النقطية (q +) . وايجاد ناتج التكامل المتمثل بالمعادلة (6 – 4) وهي

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

اذ أن r_B, r_A يمثلان بعد كل من النقطتين A و B عن الشحنة النقطية على الترتيب . وبالتعويض عن ناتج التكامل في المعادلة (3 - 4) نحصل على فرق الجهد بين النقطتين A و B

$$V_B - V_A = - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

أو

$$V_B - V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \quad ...(4-9)$$

ولكي نجد قيمة الجهد عند نقطة B ينبغي اختيار نقطة مرجع . فاذا فرضنا. أن نقطة A تقع في اللانهاية . أي $r_A = \infty$. وأن الجهد عند هذه النقطة يساوي صفراً ($V_A = 0$) . لحصلنا على

$$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r_B} \quad ...(4-10)$$

وبصورة عامة نحذف الحرف B من هذه العلاقة فنحصل على الجهد الناشيء عن الشحنة النقطية q عند أية نقطة واقعة على بعد قدره r عنها ، أي

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r} \quad ...(4-11)$$

ان الجهد يكون موجباً في هذه الحالة لان الشحنة q موجبة . أما اذا كانت الشحنة سالبة فان الجهد يكون سالباً أيضاً .

اطلعنا فيما سبق على كيفية حساب الجهد لشحنة نقطية باستخدام العلاقة (3 - 4). وعلى الرغم من امكانية استعمال تلك الطريقة لجميع الحالات التي تكون فيها شدة المجال الكهربائي معلومة ، الا أنه قد يكون من الملائم أن نستفيد من العلاقة (11 - 4) التي تمثل الجهد الكهربائي للشحنة النقطية لحساب الجهد لجميع الحالات التي يكون فيها مصدر نشوء المجال معلوماً . ونعني بذلك هيئة وطريقة توزيع الشحنة التي ينشأ عنها المجال

فاذا كانت لدينا مجموعة من الشحنات النقطية ($q_1, q_2, \ldots, q_n$) . التي تقع على ابعاد قدرها ($r_1, r_2, \ldots, r_n$) من النقطة المطلوب ايجاد الجهد عندها ، يحسب الجهد ($V_1, V_2, \ldots, V_n$) لكل شحنة على حدة كما لو كانت هي الشحنة الوحيدة الموجودة فينتج

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} \;,\; V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2} \;, \ldots$$

ثم يحسب المجموع الجبري لجميع قيم الجهد الناشئة عن جميع الشحنات عند النقطة المعينة ، أي

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n = \sum_n V_n$$

وهذا يعني أن قيمة الجهد الكلي لجميع الشحنات النقطية ستصبح

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_n \frac{q_n}{r_n} \qquad (4\text{–}12)$$

أما اذا كان لدينا شحنة موزعة توزيعا متصلا فيمكن حساب الجهد الناشيء عن هذه الشحنة بطريقة مختلفة بعض الشيء ، وذلك بأن نتصور هذه الشحنة مقسمة الى عدد كبير من الأجزاء المتناهية في الصغر (أوكما تسمى عناصر تفاضلية) بحيث يمكن عدّ كل جزء منها بمثابة شحنة نقطية . عندئذ يمكن حساب الجهد dV الناشيء عن احد العناصر التفاضلية الذي تبلغ قيمة شحنته dq عند نقطة تقع على بعد قدره r عن العنصر التفاضلي ، وذلك بتطبيق المعادلة (11 – 4) فنحصل على

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

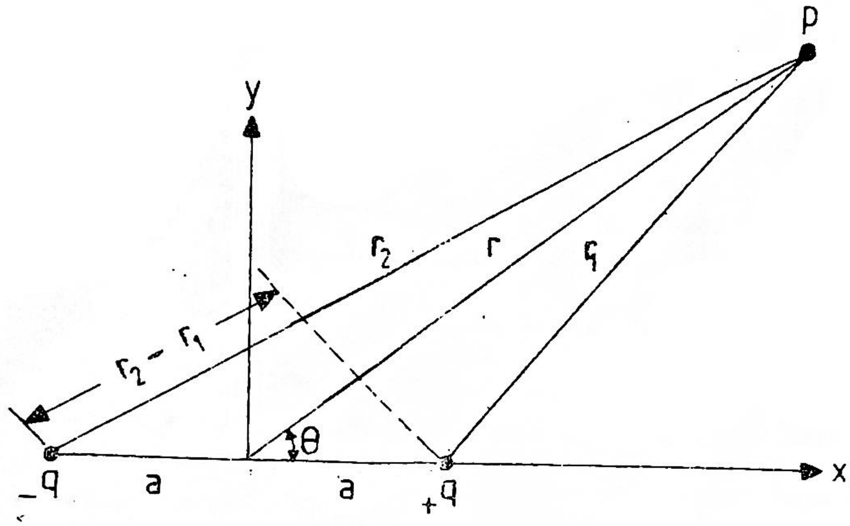
ولايجاد الجهد الكلي الناشيء عن الشحنة باكملها نستعيض عن علامة الجمع الجبري في المعادلة (12 – 4) في حالة الشحنات النقطية بعلاقة التكامل حيث يكون توزيع الشحنة متصلاً في هذه الحالة ، فينتج

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} \qquad \ldots (4-13)$$

وسنتناول عددا من الأمثلة التطبيقية على كيفية استخدام المعادلتين (12 – 4) و (13 – 4) لحساب الجهد .

4 - 5 تطبيقات على كيفية حساب الجهد :

أ – الجهد الناشيء عن ثنائي القطب



الشكل (4 – 4) ثنائي قطب كهربائي

سنجد قيمة الجهد الكهربائي عند اية نقطة في مجال ثنائي القطب مثل النقطة P (أنظر الى الشكل 4 – 4) التي حدد موقعها بالاحداثيات القطبية r و θ وكما هو معلوم أن ثنائي القطب يتكون من شحنتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاشارة وتفصلهما مسافة قدرها 2 a .

طبقا للمعادلة (11 – 4) نجد ان الجهد عند النقطة P للشحنة q + يكون

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1}$$

وأما الجهد عند نفس النقطة للشحنة الاخرى q- فقيمته

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{r_2}$$

لذلك فان الجهد الكلي V لتلكما الشحنتين يساوي المجموع الجبري لجهديهما ، أي

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

وبامكننا أن نجد تعبيراً آخراً مقرباً للجهد بدلالة r و θ وذلك عندما يكون بعد النقطة P كبيرا بالنسبة الى $2a$ اي $(r >> 2a)$. وبملاحظة الشكل نستنتج العلاقات المقربة الآتية :

$$r_1 r_2 \simeq r^2$$

$$r_2 - r_1 \simeq 2a \cos\theta$$

وبذلك يصبح الجهد

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2a\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{p\cos\theta}{r^2} \qquad \dots(4-14)$$

اذ ان p ترمز لعزم ثنائي القطب الذي يساوي $2aq$

ويلاحظ من هذه المعادلة ان الجهد يساوي صفرا عند جميع النقاط الواقعة على الخط العمودي المقام من منتصف المسافة بين شحنتي ثنائي القطب . اي عندما تكون الزاوية $(\theta = 90°)$.

ب – الجهد الناشيء عن حلقة مشحونة

نفرض ان شحنة مقدارها q موزعة بانتظام على شكل حلقة نصف قطرها R والمطلوب ايجاد الجهد عند النقطة P الواقعة على محور الحلقة وعلى بعد مقداره a من مركزها . نأخذ عنصراً تفاضلياً من الحلقة شحنته dq والذي يمكن اعتباره بمثابة شحنة نقطية تبعد مسافة قدرها r عن النقطة P . ومن المعادلة $(4-11)$ نستطيع ان نجد مقدار الجهد الناشيء عن هذا العنصر .

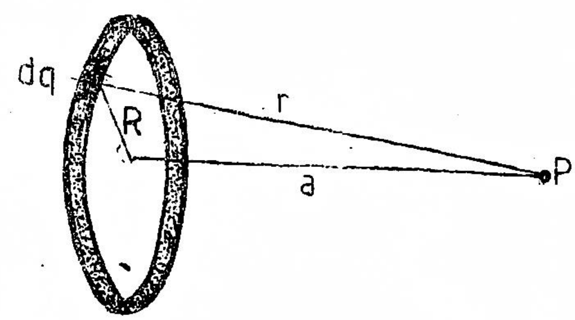
$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{dq}{\sqrt{R^2 + a^2}}$$

اما الجهد الناشيء عن الحلقة باكملها فيكون

$$V = \int dV = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{R^2 + a^2}} \int dq$$

لـكن $\int dq = q$

وبذلك يصبح الجهد عند النقطة P

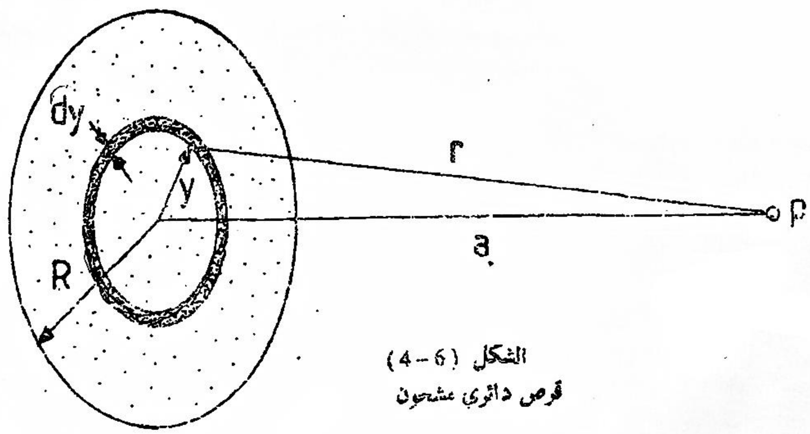


الشكل (5 – 4) حلقة مشحونة

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + a^2}} \qquad \ldots (4-15)$$

جـ – الجهد الناشيء عن قرص مشحون

يبين الشكل (6 – 4) قرصا دائريا نصف قطره R مشحون بشحنة منتظمة كثافتها السطحية σ والمطلوب ايجاد الجهد عند النقطة P الواقعة على محور هذا القرص والتي تبعد عنه مسافة قدرها a .



الشكل (6 – 4)
قرص دائري مشحون

نأخذ عنصراً تفاضليا من الشحنة بشكل حلقة دائرية نصف قطرها y وعرضها dy وتحتوي على شحنة قدرها dq . وطبقا للمعادلة (15 - 4) يكون الجهد الناشيء عن هذا العنصر عند النقطة P مساويا

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{y^2 + a^2}}$$

اما الشحنة dq فيمكن حسابهامن حاصل ضرب مساحة الحلقة في كثافة الشحنة السطحية. اي

$$dq = \sigma(2\pi y)(dy)$$

وبالتعويض عن هذه القيمة ينتج

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(2\pi y)\,dy}{\sqrt{y^2 + a^2}}$$

ولايجاد الجهد الكلي V نجري التكامل لتغطية كل الحلقات المكونة للقرص فنحصل على

$$V = \int dV = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2 + a^2}}$$

ويمكن اجراء عملية التكامل بسهولة فيما لو استبدل المتغير y بمتغير آخر وليكن x حسبما هو آت

$$x = \sqrt{y^2 + a^2}$$

وبأخذ مشتقة الطرفين ينتج

$$dx = \frac{2y\,dy}{2\sqrt{y^2 + a^2}}$$

وبالتعويض عن هذه القيمة تأخذ معادلة الجهد الصيغة الآتية

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[x]$$

ثم يعاد المتغير y للمعادلة فنحصل على

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{y^2 + a^2}\right]_0^R$$

أو

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2 + a^2} - a\right] \qquad (4-16)$$

د- الجهد الناشىء عن خط لانهائي الطول من الشحنات

لنفرض ان شحنة موزعة بصورة متجانسة على امتداد خط طويل بكثافة خطية قدرها $\lambda C/m$. لحساب فرق الجهد بين النقطتين A و B الواقعتين على بعدين شعاعيين قدرهما r_A و r_B عن الشحنة على الترتيب ، يجب ان نعود الى العلاقة (3 - 4) ونستعين بها لحساب التكامل الخطي لشدة المجال طبقا للمناقشة التي وردت في البند 3-4

ان فرق الجهد بين النقطتين A و B حسبما جاء في المعادلة (3 - 4) يساوي .

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int_A^B E\cos\theta \, dl$$

وكما هو معروف فأن اتجاه المجال الناشيء عن الشحنة الخطية يكون شعاعيا وشدته تساوي

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

لذا فمن الاسهل ان نختار مساراً شعاعياً بين النقطتين A و B بحيث ينطبق على اتجاه المجال . وبذلك تصبح الزاوية θ صفراً . هذا من ناحية . ومن الناحية الاخرى ينبغي إستبدال عنصر المسار (dl) بعنصر المسار (dr) بالاتجاه الشعاعي فينتج

$$V_B - V_A = -\int_{r_A}^{R_B} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_B}{r_A}$$

أو

$$V_A - V_B = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_B}{r_A} \qquad \ldots(4-17a)$$

ان هذه المعادلة لاتعبر عن فرق الجهد بين النقطتين A و B في المجال الناشيء عن خط لانهائي الطول من الشحنات فحسب . بل تعبر كذلك عن فرق الجهد بين اسطوانتين

طويلتيـــن متحدتي المركز، أنصاف أقطارها r_A و r_B. ويحمـلان شحنتين متساويتين ومتعاكستين في الاشارة بكثافة خطية قدرها λ (لاحـظ التـمـريـن 18 – 4).

لايجاد الجهد عند نقطة A لابد من اختيار نقطة مرجع . يبـد انه من غير الملائم في هذه الحالة ان تؤخذ نقطة المرجع في اللانهاية (لماذا ؟) كما جرت العادة . وبدلا مـن ذلك سنفترض ان الجهد يساوي صفراً عند نقطة ما على بعد شعاعي قدره r_0. وبالتعويض عن $r_B = r_0$ و $V_B = 0$ في المعادلة في اعلاه نحصل على العلاقة المعبرة عن الجهـد الناشيء عن الشحنة الخطية عند اية نقطة على بعد شعاعي قدره r عن الشحنة بالشكـل الآتي

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_0}{r} \qquad \ldots(4-17\,b)$$

هـ – الجهد الناشيء عن توزيع كروي من الشحنة

لنفرض ان شحنة موجبة قدرها q موزعة بانتظام على شكل كرة نصف قطرهـا R لاحظ الشكل (12 – 3) المطلوب ايجاد الجهد عند نقطة داخل الـكرة .

الحـــــل

لنأخذ النقطة P الواقعة على بعد قدره r عن مركز الشحنة الـكروية بحيث ان $r < R$. ونستخدم تعريف الجهد المتمثل بالمعادلة (4 – 4) لحساب الجهد عند هذه النقطة .

$$V_r = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^{r} E\cos\theta\, dl$$

اي ان الجهد يساوي التكامل الخطي لشدة المجال على طول المسار الممتد مـن اللانهاية الى نقطة P وللسهولة نفرض ان هذا المسار منطبقاً على الخط الشعاعي المار في مركز الشحنة . الا انه يتضح من تناظر الشحنة الـكروية ان المجال هو الاخر بالاتجاه الشعاعي ولـكن عكس اتجاه المسار ، ولهذا $\theta = 180^\circ$. كما ينبغي ان يستبدل عنصر المسار dl بالعنصر الشعاعي للمسار dr ، لذا ينتج

$$V_r = -\int_{\infty}^{r} E\cos 180^\circ\, dl = +\int_{\infty}^{r} E\, dl$$

لكن /
$$dr = -dl$$

وذلك لان r تقاس ابتداءً من مركز الشحنة باعتبارها نقطة أصل ، على حين تقاس l بالاتجاه المعاكس من اللاانهاية صوب مركز الشحنة . لذا

$$V_r = -\int_{\infty}^{r} E\,dr$$

ولحساب التكامل الخطي ينبغي تجزئة المسار الى جزءين – الجزء الاول يمتد خارج الشحنة الكروية من اللاانهاية الى سطح الكرة ، والجزء الثاني يمتد داخل الشحنة من السطح الى نقطة p . أي

$$V_r = \int^{R} E_1\,dr - \int_{R}^{r} E_2\,dr$$

اذ ان E_1 تمثل شدة المجال خارج الشحنة وقيمتها حسب المعادلة (18 – 3) تساوي

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}$$

اما E_2 فتمثل شدة المجال داخل الشحنة الكروية وقيمتها طبقاً للمعادلة (19 – 3) تساوي

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{qr}{R^3}$$

وبالتعويض عن هاتين القيمتين يمكن بسهولة حساب التكامل الخطي للمجال ومن ثم الجهد كما هو آت .

$$V_r = -\int_{\infty}^{R} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{dr}{r^2} - \int_{R}^{r} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{r\,dr}{R^3}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\int_{\infty}^{R} \frac{dr}{r^2} + \frac{1}{R^3}\int_{R}^{r} r\,dr\right\}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{R} + \frac{1}{R^3}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{R}^{r}\right\}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\left[-\frac{1}{R}+\frac{1}{\infty}\right]+\frac{1}{2R^3}\left[r^2-R^2\right]\right\}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left\{-\frac{1}{R}+\frac{r^2}{2R^3}-\frac{1}{2R}\right\}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left\{-\frac{3}{2R}+\frac{r^2}{2R^3}\right\}$$

$$= -\frac{q}{8\pi\varepsilon_o R}\left\{\frac{r^2}{R^2}-3\right\} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_o R}\left\{3-\frac{r^2}{R^2}\right\}$$

ان شدة المجال الكهربائي عند مركز الشحنة الكروية هذه ، كما جاء في البند 3-4 ج ، الفصل الثالث ، تساوي صفراً . والسؤال الذي يتبادر الى الذهن الآن هو ، ماقيمة الجهد عند مركز الشحنة الكروية ؟ علماً بان شدة المجال الكهربائي تبلغ ذروتها على سطح الشحنة الكروية (لاحظ الشكل 3-13) ، فهل يبلغ الجهد ذروته على سطح هذه الشحنة ؟ وماقيمة الجهد على سطح الكرة ؟

واخيرا ينبغي ان نشير الى ان الجهد خارج الشحنة الكروية يساوي

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{q}{r}$$

ويمكن للطالب الآن بكل سهولة اثبات ذلك على ضوء ماذكرناه .

مثال 2

أحسب الجهد الكهربائي الناتج عن نواة ذرة الهايدروجين عند نقطة تقع على بعد قدره $r = 5.3 \times 10^{-11}m$ (وهو معدل نصف قطر دورة الالكترون في ذرة الهايدروجين)

الحل

تحتوي نواة ذرة الهايدروجين على بروتون واحد . واذا تذكرنا ان شحنة البروتون تساوي 1.6×10^{-19} أمكننا حساب الجهد بتطبيق المعادلة (4-11) . اي

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$$

$$= \frac{9 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-19}}{5.3 \times 10^{-11}} = 27 \text{ V}$$

مثـــال 3

أحسب الجهد الـكهربائـي الناتج عن رباعـي القطب عند النقطة P الواقعة علـى محوره انظر الى الشكل (14-2) .

الحـــل

يمكن حساب الجهد الـكلـي V الناتج من الشحنات النقطية الاربع التـي يتكون منهـا رباعـي القطـب وذلك بحساب الجهد الناتج عن كـل شحنة بصورة منفردة باستخدام المعادلة (11– 4) . ثم ايجاد المجموع الجبري للـكميات الناتجة، أي

$$V = V_n = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r+a} - \frac{q}{r} - \frac{q}{r} + \frac{q}{r-a}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r^2 - ra - r^2 + a^2 - r^2 + a^2 + r^2 + ra}{(r+a)(r-a)r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2a^2}{(r^2 - a^2)r}$$

واذا افترضنا أن $r >> a$ ، لاصبح بالامكان اهمال a^2 من مقام الـكسر ، لذا

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2a^2}{r^3}$$

مثال 4

وضعت ثلاثة اجسام صغيرة على رؤوس مثلث منتظم طول ضلعه 10 cm فاذا علمت ان هذه الاجسام تحمل شحنات قدرها $+ 2 \times 10^{-8}$ C و $+ 3 \times 10^{-8}$ C و $- 4 \times 10^{-8}$ C ، جد الجهد عند مركز المثلث .

الحل

نجد أولاً بعد مركز المثلث عن كل من رؤوسه الثلاثة (r) فنحصل على

$$r = \frac{2}{3} \times \sqrt{10^2 - 5^2} = \frac{2 \times 5\sqrt{3}}{3} = 5{\cdot}77 \text{ cm}$$

ثم نطبق العلاقة (12 – 4) للحصول على الجهد

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_n \frac{q_n}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 + q_2 + q_3}{r}$$

$$= \frac{9 \times 10^9}{5{\cdot}77 \times 10^{-2}} (+2 + 3 - 4) \times 10^{-8}$$

$$= 1{\cdot}56 \times 10^3 \text{ V}$$

مثـــال 5

شحنتان نقطتان قدرهما $+2\,\mu C$; $-3\,\mu C$ تفصلهما مسافة قدرها متراً واحداً في الهواء . حدد موقع النقطة (او النقاط) الواقعة على امتداد الخط المار خلالهما التي عندها يكون الجهد صفرا .

الحـــــل

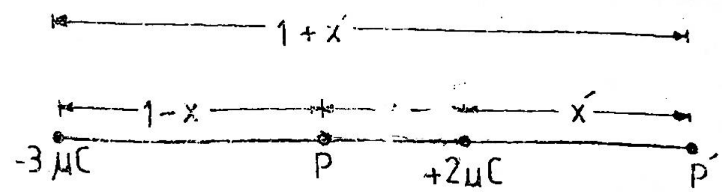
مـــن الواضـــح ان المجموع الجبري لجهد الشحنة الموجبة وجهد الشحنة السالبة يجب أن يساوي صفـــراً فـــي نقطة ما واقعـــة بين الشحنتين مثل نقطة P . لنفرض أن بعد هـــذه النقطـــة عـــن الشحنة الموجبـــة يساوي x . لذا فان بعدها عن الشحنـــة السالبة يصبح $1 - x$. وبتطبيق العلاقة (12 – 4) نحصل على

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2 \times 10^{-6}}{x} + \frac{-3 \times 10^{-6}}{1 - x}\right) = 0$$

أي أن

$$\frac{2}{x} = \frac{3}{1 - x}$$



الشكل (7 – 4).

وبحل هذه المعادلة نجد قيمة x

$$x = 0.4m$$

ولما كان الجهد يتناسب طردياً مع الشحنة وعكسياً مع بعدها عن النقطة يتضح أن هناك نقطة أخرى مثل p' يكون عندها مجموع جهد الشحنتين صفراً. هذه النقطة يجب أن تكون على بعد من الشحنة الصغيرة أقل من البعد عن الشحنة الكبيرة ، ولنفرض أن هذا البعد يساوي x'. عندئذ يكون بعد الشحنة الأخرى $1 + x'$. واستناداً الى ماذكر في أعلاه نستنتج .

$$\frac{2}{x'} = \frac{3}{1 + x'}$$

ومنها نجد قيمة x'

$$= 2m$$

مثال 6

يحتوي عداد كايكر Geiger counter على اسطوانة معدنية نصف قطرها 1.0 cm وعلى سلك معدني دقيق ممتد على محور الاسطوانة نصف قطره 6.25×10^{-3} cm . فاذا سلط فرق جهد قدره 850 V بين هذين القطبين أحسب شدة المجال الكهربائي عند (أ) سطح السلك و (ب) سطح الاسطوانة .

الحل

عند تسليط الفولتية على العداد ينشحن كل من المحور والسطح الاسطواني بشحنتين متساويتين ومتعاكستين . لنفرض ان كثافة الشحنة الخطية لأي منهما $\lambda C/m$. عندئذ يمكن ايجاد λ من العلاقة (17a – 4) وهي

$$V = V_B - V_A = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_B}{r_A}$$

$$\lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0 V}{\ln r_B / r_A}$$

لـكن شدة المجال الـكهربائي المتكون بين المحور والاسطوانة طبقاً للعلاقة (16 – 3) في الفصل الثالث تساوي

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

وبالتعويض عن λ بما تساويه بدلالة الجهد ينتج

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r} \times \frac{2\pi\varepsilon_0 V}{\ln r_B / r_A} = \frac{V}{r \ln r_B / r_A}$$

(أ) لحساب شدة المجال الـكهربائي على سطح المحور (E_A) نعوض عن r بـ r_A في هذه المعادلة ، وكذلك نعوض عن قيمة $r_A = 6{\cdot}25 \times 10^{-5}$ m و $r_B = 1 \times 10^{-2}$ m و $V = 850$ v فينتج

$$E_A = \frac{850}{6{\cdot}25 \times 10^{-5} \ln(1 \times 10^{-2} / 6{\cdot}25 \times 10^{-5}}$$

$$= 2{\cdot}7 \times 0^{6} \text{ v/m}$$

(ب) ثم نحسب شدة المجال على سطح الأسطوانة وذلك بالتعويض عن r بـ r_B فينتج

$$E_B = \frac{850}{1 \times 10^{-2} \ln(1 \times 10^{-2} / 6{\cdot}25 \times 10 \quad)}$$

$$= 1{\cdot}7 \times 10^{4} \text{ v/m}$$

6، 4 جهد الجسم الكروي المشحون عندما يكون في حالة اتزان كهروستاتيكي

سبق ان وجدنا ان شدة المجال الكهربائي خارج جسم موصل كروي يحمل شحنة مقدارها q هي

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

وهي نفس النتيجة كما لوكانت الشحنة متركزةفي مركز الكرة . ولذلك يكون الجهد عند اية نقطة خارج الموصل الكروي وعلى بعد r من مركزه هو

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \qquad (4-18)$$

ويساوي الجهد الذي تولده شحنة نقطيةq عند تلك النقطة (المعادلة11 — 4) . ويمكن الحصول على هذه النتيجة بنفس الطريقة التي تم فيها اشتقاق المعادلة (11 — 4) .

ولايجاد الجهد الكهربائي عند أية نقطة في داخل الكرة نأخذ احدى النقطتين A او B في داخل الموصل ، والأخرى على سطحه . وطبقا للمعادلة (3 — 4) نجد ان فرق الجهد بين هاتين النقطتين يصبح

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} = 0$$

وذلك لأن مقدارشدة المجال E داخل الموصل يجب ان يكون صفرا . ومن ذلك نستنتج ان الجهد عند النقطة A يساوي الجهد عند النقطة B .وبصورة عامة فأن قيمة الجهد عند جميع النقاط الواقعة داخل الموصل تكون متساوية وتساوي قيمة الجهد على سطحه ، اي ان

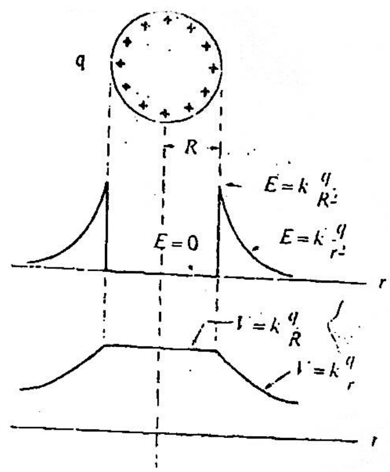
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \qquad (4-19)$$

حيث أن R تمثل نصف قطر الموصل الكروي .

لاحظ أنه لولم تكن جميع النقاط الداخلية متساوية الجهد لانتقلت الشحنات (الالكترونات الحرة) من النقاط الأقل جهدا الى النقاط الأعلى جهدا في الموصل . ولكن

هذا لايحدث نظرا لأن الشحنات مستقرة على سطح الموصل الخارجي كما بينا في الفصل

والشكل (8 - 4) يبين كرة موصلة نصف قطرها R مشحونة بشحنة قدرها مع الرسم البياني لكل من مقدار شدة المجال والجهد داخل وخارج الكرة .



الشكل (8 – 4) كرة معدنية موصلة

ان قيمة الجهد ثابتة لجميع النقاط داخل الكرة (المعادلة 19 – 4) بينما نجد أنها تتناقص مع $1 / r$ عند النقاط خارج الكرة (المعادلة 18 – 4) اما شدة المجال E . فتساوي صفراً داخل الكرة وتتناقص مع $1 / r^2$ خارجها . لاحظ ان هذه النتيجة هي نفسها سواء اكانت الكرة صلدة ام مجوفة . ان مقدار شدة المجال على سطح الكرة الموصلة يساوي

$$E = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

ومن المعادلة (19 – 4) نجد العلاقة التالية بين الجهد وشدة المجال على سطح الكرة .

$$V = RE \qquad (4-20)$$

من المعلوم أنه لو وضع جسم عازل في مجال كهربائي قوي ، فأن جزيئات العازل قد تتأين وعندئذ يفقد الجسم خاصيته كمادة عازلة ويصبح موصلا . ويسمى الحد الاعلى لشدة المجال الكهربائي الذي بعده يصبح العازل موصلا بشدة العزل (dielectric strength) . وعلى سبيل المثال فأن شدة عزل الهواء حوالي $3 \times 10^6\ V/m$ ومعنى هذا انه اذا تجاوز مقدار شدة المجال هذه القيمة فأن جزيئات الهواء المتأثرة بهذا المجال تتأين وتفقد خاصية العزل الكهربائي .

وعلى هذا الاساس اذا كانت E_m هي شدة العزل للمادة الموضوعة فيها الكرة الموصلة . فأن اقصى جهد V_m للكرة الموصلة يكون

$$V_m = RE_m \qquad (4-21)$$

وبذلك فأن أقصى جهد يمكن الحصول عليه لكرة نصف قطرها 10 cm موضوعة في الهواء هو

$$V_m = (0{\cdot}1m)(3 \times 10^6\ V)$$

$$= 3 \times 10^5\ V$$

ولهذا السبب تجعل الكرة كبيرة في مولد فان دي كراف وذلك لزيادة الجهد الاقصى الذي يمكن الحصول عليه من هذا المولد . فلو كان نصف قطر الكرة خمسة أمتار لأصبح أقصى جهد

$$V_m = 1{\cdot}5 \times 10^7\ V$$

واستنادا الى ماتقدم يمكن تفسير ظاهرة تأيين الهواء وحدوث التفريغ الكهربائي عند الرؤوس المدببة للموصل المشحون . فاذا شحن جسم موصل ذو رأس مدبب (انظر الى الشكل 9 - 4) ، فأن المجال الكهربائي المحيط بالرأس المدبب يكون أعلى بكثير من المجال المحيط بالمناطق الأخرى من الموصل . ان هذه الحقيقة تتجلى بوضوح اذا اعتبرنا هذا الجسم مكافئا لكرة موصلة كبيرة متصلة بسلك دقيق وطويل مع كرة أخرى صغيرة (كما هو مبين في الشكل 10 - 4) ، حيث أن الرأس المدبب هو في الواقع جزء من سطح نصف قطر تكوره صغير . فأذا كان نصف قطر الكرة الصغيرة R_1 والشحنة التي تحملها q_1 . فأن جهدها طبقا للمعادلة (19 - 4) يصبح

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R_1}$$

وإذا كان نصف قطر الكرة الكبيرة R_2 والشحنة التي تحملها q_2 . فأن جهدها يصبح

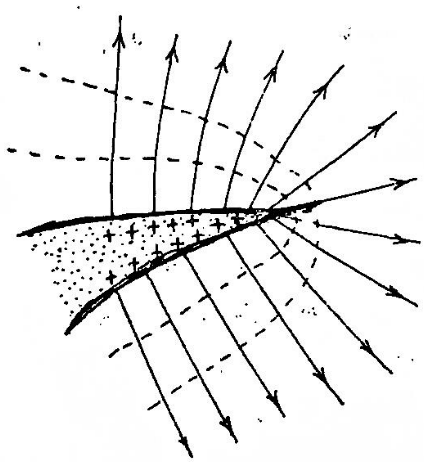
$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2}$$

وبما أن الكرتين متصلتين بسلك موصل فأن جهديهما يجب ان يكون متساويا أي $(V_1 = V_2)$

$$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}$$

ولكننا نعلم ان شدة المجال بالقرب من سطح الموصل تتناسب طرديا مع كثافة الشحنة السطحية عليه (أنظر الى المعادلة 22 - 3) . لذا نستنتج أن

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1/4\pi R_1^2}{q_2/4\pi R_2^2} = \frac{q_1}{q_2}\frac{R_2^2}{R_1^2}$$



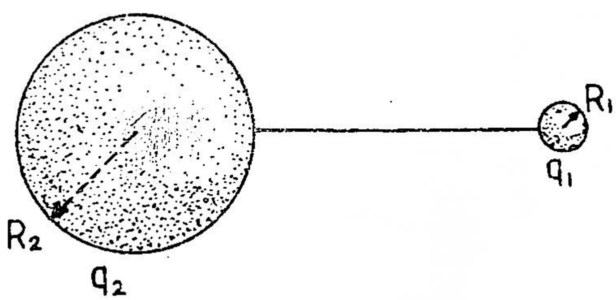
الشكل (9-4)

وبالتعويض عن q_2 و q_1 من المعادلة السابقة نجد أن

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1} \qquad (4-22)$$

ومن هذه المعادلة يتضح أن :

مقدار شدة المجال بالقرب من سطح الموصل يتناسب عكسيا مع نصف قطر التكور لذلك الحرف من سطح موصل مشحون . لذلك تكون شدة المجال خارج الرأس المدبب مباشرة عالية جدا . وهذا المجال يؤثر على الأيونات القليلة الموجودة في الهواء ويجعلها تنجذب (او تتنافر) نحو الرأس المدبب بتعجيل كبير. ونتيجة لاصطدام هذه الأيونات السريعة بجزيئات الهواء ينتج المزيد من الايونات الجديدة ، وبهذا يصبح الهواء اكثر توصيلا للكهربائية وعندئذ تتسرب شحنة الموصل عن طريق الرأس المدبب بمعدل عال . وربما يصحب عملية التفريغ توهج الهواء المحيط بالرؤوس المدببة بسبب الضوء المنبعث من جزيئات الهواء أثناء اصطدام الايونات بها .



الشكل (10 4)

مثـــال 7

كرتان موصلتان نصف قطر الأولى $R_1 = 1\cdot0$ cm ونصف قطر الثانية $R_2 = 2\cdot0$ cm وضعت شحنة قدرها $0\cdot20\mu C$ على الكرة الصغيرة ، وتركت الكرة الكبيرة بدون شحنة . فاذا وصلت الكرتان بسلك موصل دقيق وطويل ، احسب (أ) الشحنة و(ب) الجهد و(ج) الكثافة السطحية للشحنة لكل من الكرتين . لاحظ الشكل (10 – 4)

الحـــل

نحسب اولا جهد كل من الكرتين الموصلتين وفقاً للمعادلة (19 – 4)

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{R_1}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{R_2}$$

q_1 تمثل الشحنة التي استقرت على الكرة الصغيرة و q_2 الشحنة التي حصلت عليها الكرة الكبيرة بعد ان وصلتا بالسلك الدقيق . وقد أهملت الشحنة التي استقرت على السلك الموصل لضآلتها .

لكن جهد الكرتين يجب ان يتساوى بعد ان تتصلان . لذا

$$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}$$

$$\frac{q_1}{1 \times 10^{-2}} = \frac{q_2}{2 \times 10^{-2}}$$

اي ان

$$2q_1 = q_2$$

لكن

$$q_1 + q_2 = 0{\cdot}20 \times 10^{-6}$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على قيمة كل من الشحنتين

$$q_1 = 6{\cdot}7 \times 10^{-8}\ C \text{ ، } q_2 = 13{\cdot}4 \times 10^{-8}\ C$$

ثم نعود للمعادلة (19 - 4) ونحسب جهد كل من الكرتين

$$V_2 = V_1 = 9 \times 10^9 \times \frac{6{\cdot}7 \times 10^{-8}}{1 \times 10^{-2}} = 60 \times 10^3\ V$$

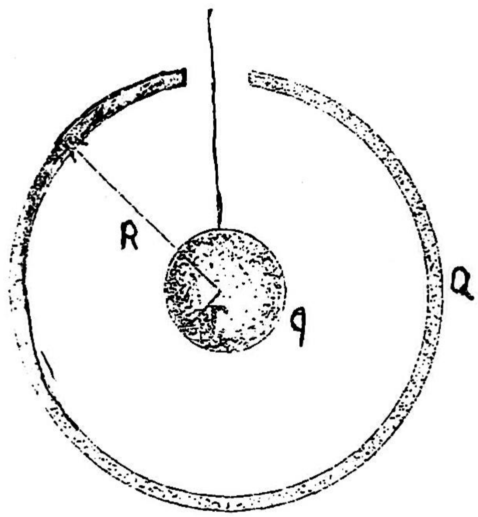
واخيرا نحسب كثافة الشحنة السطحية على كل من الكرتين

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} = \frac{6{\cdot}7 \times 10^{-8}}{4\pi \times (1 \times 10^{-2})^2} = 5{\cdot}3 \times 10^{-5}\ C \cdot m^2$$

$$\sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2} = \frac{13.4\times10^{-8}}{4\pi\times(2\times10^{-2})^2} = 2.7\times10^{-5}\,C$$

مثال 8

يبين الشكال (١١ - ١) كرة صغيرة نصف قطرها r تحمل شحنة موجبة قدرها q موضوعة عند مركز كرة موصلة كبيرة نصف قطرها R مشحونة بشحنة موجبة مقدارها Q احسب فرق الجهد بين الكرتين.



الحل

إذا اهملنا تاثير الفتحة الصغيرة الموجودة في الكرة الكبيرة. نجد ان جهد هذه الكرة يساوي الجهد الناشيء عن شحنة الكرة الكبيرة ذاتها زائداً الجهد الناشيء عن شحنة الكرة الصغيرة عند بعد قدره R عنها (اي عند موقع الكرة الكبيرة).

لذا

$$V_R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R}+\frac{q}{R}\right)$$

اما جهد الكرة الصغيرة فيساوي الجهد الناشيء عن شحنة الكرة ذاتها زائداً الجهد الناشيء عن شحنة الكرة الكبيرة . اي

$$V_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r}+\frac{Q}{R}\right)$$

عند ئذ يصبح فرق الجهد بين الكرتين

$$V_r - V_R = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

ومن هذه المعادلة يتبين ان جهد الكرة الصغيرة دائما اكبر من جهد الكرة الكبيرة طالما ان الشحنة q موجبة . فاذا ربطنا الكرتين بسلك رفيع نجد ان الشحنة q سوف تنساب باجمعها الى الكرة الخارجية مهما كانت قيمة الشحنة Q . وهذا هو أساس عمل مولد فان دي كراف كما سنرى .

4 – 7 انحدار الجهد Potential gradient

نعود الآن الى العلاقة بين فرق الجهد وشدة المجال الكهربائي لمناقشتها بتفصيل أكثر . هذه العلاقة المتمثلة في المعادلة (3 - 4) وهـي

$$V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}.\vec{dl}$$

وباخذ مشتقة كل من طرفـي المعادلة نجد

$$dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -E\cos\theta\, dl$$

او

$$\frac{dV}{dl} = -E\cos\theta$$

ان الكمية dV/dl تمثل معدل تغير الجهد مع المسافة باتجاه dl . ولما كانت θ هي الزاوية بين شدة المجال الكهربائي E وعنصر المسافة dl . فان الكمية $E\cos\theta$ هي مركبة شدة المجال باتجاه dl ويرمز لها E_l . وبهذا يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكـل الآتـي

$$E_l = -\frac{dV}{dl} \qquad \dots (4-23)$$

وتعني ان مركبة شدة المجال الكهربائي في اتجاه معين (dl مثلاً) تساوي معدل تغير الجهد مع المسافة بذلك الاتجاه باشارة سالبة . اما الاشارة السالبة فتدل على ان اتجاه E هي باتجاه تناقـص الجهـد .

اذا اخترنا dl باتجاه شدة المجال عندئذ تكون $\cos\theta = 1$ وبهذا يتضح لنا من المعادلة (23 – 4) ان E_l ستكون لها أقصى قيمة وهي قيمة شدة المجال الكهربائي E نفسها وتساوي قيمة dV/dl التي بالطبع ستكون لها اقصى قيمة ايضاً . أي

$$E = -\left(\frac{dV}{dl}\right)_{max} \qquad \ldots(4-24)$$

وتسمى هذه القيمة القصوى لمعدل تغير الجهد مع المسافة عند نقطة معينة بانحدار الجهد عند تلك النقطة . وبصورة عامة يكون الجهد $V(x, y, z)$ عند أية نقطة دالة لأحداثيات النقطة z, y, x فاذا أخذنا اولاً اتجاه dl موازيا لمحور x. ثم موازياً لمحور y واخيراً موازياً لمحور z ، يصبح بالامكان الاستفادة من المعادلة (23 – 4) لايجاد المركبات الثلاثة لشدة المجال الكهربائي باتجاهات x و y و z

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (4-25)$$

وعلى هذا الأساس يصبح بالأمكان حساب مركبات E الثلاث وذلك بأخذ مشتقة الجهد بالنسبة للاحداثيات z, y, x على الترتيب . وفي معظم الحالات تكون هذه الطريقة لحساب شدة المجال الكهربائي أسهل من طريقة التكامل باستخدام المعادلة (6 – 2) . وهذا ناتج عن كون الجهد كمية غير متجهة ، مما يجعل حسابه بطريقة التكامل ومن ثم أخذ مشتقته أسهل من حساب شدة المجال بطريقة التكامل مباشرة ذلك ان شدة المجال هي كمية اتجاهيـــة .

مثـــــال 9

شحنة مقدارها q موزعة بانتظام على شكل حلقة نصف قطرها R . أحسب شدة المجال الكهربائي عند النقطة P الواقعة على محور هذه الحلقة باستخدام المعادلة (24 – 4). انظـــر الى الشكــــل (5 – 4) .

الحــــــل :

ان الجهد الناشيء عن هذه الحلقة المشحونة عند أية نقطة واقعة على محورها وعلى بعد x من مركزها هـــو

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + y^2}}$$

وذلك طبقا للمعادلة (15 - 4) . ومن التناظر يتضح أن المجال يكون باتجاه محور الحلقة اي باتجاه y لذا فانحدار الجهد dV/dy عند اي نقطة على المحور (باشارة سالبة) يعطينا مقدار شدة المجال الكهربائي عند تلك النقطة استناداً الى المعادلة (23 - 4) . أي

$$E = E_y = -\frac{dV}{dy} = -\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + y^2}}\right)$$

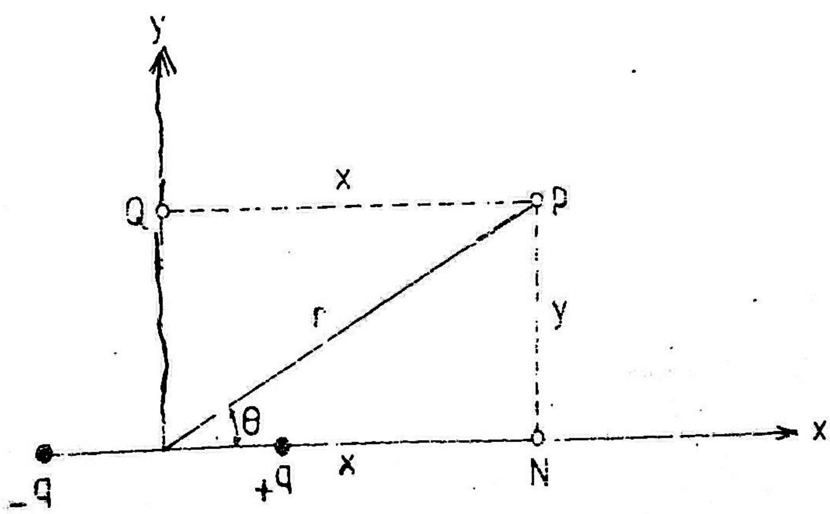
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qy}{(R^2 + y^2)^{3/2}}$$

وهذه نفس النتيجة التي حصلنا عليها بطريقة التكامل بصورة مباشرة في البند (4 - 2 ج) أنظر الى المعادلة (12 - 2) مع ملاحظة الاختلاف في رمز البعد (y) الذي حل محل (a) في تلك المعادلـــة .

مثـــال 10

حساب المجال الناشيء عن ثنائي القطـــب

يمكننا حساب شدة المجال الكهربائي الناشيء عن ثنائي القطب عند أية نقطة في مستوى الثنائي (أنظر الى الشكل (12 - 4)) . وذلك بالاستفادة من العلاقة بين انحدار الجهد



الشكل (4-12)

... المجال . فقد وجدنا ان الجهد عند نقطة بعيدة (مثل النقطة P المبينة في الشكل)
بدلالة الاحداثيات القطبية r و θ لهذه النقطة هــو

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \; \frac{p\cos\theta}{r^2}$$

وللتعبير عن الجهد بدلالة الاحداثيات x و y بدلاً من r و θ يمكننا الاستفادة من
العلاقـات الاتيــة

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

وبذلك يصبح الجهــد

$$V = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \; \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

ومن هذه المعادلة نستطيع ان نحسب مركبتي شدة المجال E_y ، E_x وذلك بتطبيق
معادلة (4-25) فينتج

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$= -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(x^2 + y^2)^{3/2} - x(3/2)(x^2 + y^2)^{1/2}(2y)}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$= -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \; \frac{y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

هذه هي المركبة الافقية لشدة المجال عند نقطة P . كما يمكن كذلك استخراج المركبة
الافقية للمجال عند جميع النقاط الواقعة على محور y كنقطة Q مثلا وذلك بان نجعل
... في هذه المعادلة فنحصل على

$$E_y = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \; \frac{1}{y^3}$$

وتدل الاشارة السالبة هنا على ان اتجاه المجال هو بالاتجاه السالب لمحور x . أما عند النقاط الواقعة على محور التنائي (محور x) فيمكن أيضاً ايجاد المركبة الأفقية للمجال وذلك بأن نجعل y = 0 في المعادلة نفسها فينتج لدينا

$$E_x = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2}{x^3}$$

والان نعود الى حساب المركبة العمودية لشدة المجال عند النقطة p بالاعتماد على المعادلة (4 - 25) فينتج

$$E_y = - \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$= - \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} (-3/2)(x^2 + y^2)^{-5/2}(2y)$$

$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

ومن هذه المعادلة يتضح ان مقدار المركبة العمودية للمجال يكون صفراً لجميع النقاط الواقعة على محور y (x = 0) وكذلك على جميع النقاط الواقعة على محور التنائي (y = 0) . وهذه النتيجه متوقعة نظرا لان شدة المجال E تكون موازية لمحور x في كلتا الحالتين .

ويبدو جليا ان جميع هذه النتائج (بغض النظر عن بعض الاختلاف في الرموز) تتفق تمام الاتفاق مع النتائج التي حصلنا عليها في الفصل الثاني – البند 4 - 2 . لاحظ المعادلتين (2 - 8) , (2 - 9)

4 – 8 سطوح تساوي الجهد Equipotential surfaces

اذا تاملنا العلاقة (23 - 4) جيدا نلاحظ انه لوكان المسار عموديا على E لكانت قيمة مركبة شدة المجال باتجاه المسار (E_l) تساوي صفراً . وعليه فان

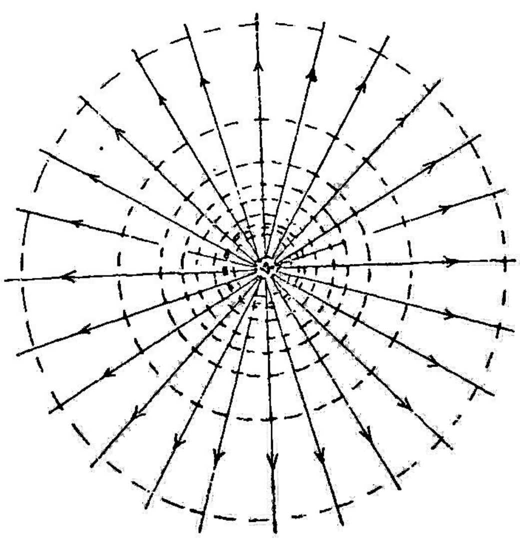
$$dV / dl = 0$$

$$V = \text{const.}$$

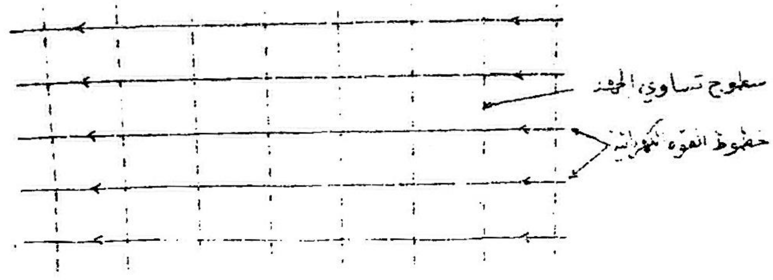
اي ان V تساوي مقدارا ثابتا .
وهذا يعني ان جميع نقاط هذا المسار متساوية الجهد والسطح الذي تكون جميع نقاطه متساوية الجهد يسمى سطح تساوي الجهد .

ان سطوح تساوي الجهد تكون عمودية على شدة المجال E . فلو لم تكن كذلك لكان هناك مركبة لشدة المجال موازية للسطح ، ولوجب عندئذ انجاز شغل عند نقل شحنة اختبارية على السطح وهذا خلاف الواقع . اذ ان الشغل اللازم لنقل شحنة اختبارية بين أية نقطتين على سطح تساوي الجهد يجب ان يكون صفراً وذلك استناداً الى المعادلة (1 - 4) التي سبق ذكرها في مطلع هذا الفصل .

مما سبق نستنتج ان سطوح تساوي الجهد يجب ان تكون عمودية على خطوط القوة الكهربائية ، ذلك لان خط القوة يمثل اتجاه المجال كما اسلفنا . فالشكل (13 - 4) يبين سطوح تساوي الجهد (وقد رسمت بشكل خطوط متقطعة) وخطوط القوة الكهربائية المرسومة بشكل خطوط مستمرة) لثلاثة اشكال مختلفة من المجالات الكهربائية . فعندما يكون المجال ناشئا عن شحنة نقطية كما في (أ) تكون سطوح تساوي الجهد كروية



الشكل (13 - 4) (أ)



الشكل (13 - 4 ب)

الشكل ومتحدة المركز. أما في حالة المجال المنتظم (كالذي ينشأ بين لوحين متوازيين) كما في (ب) فتكون سطوح تساوي الجهد مستوية ومتوازية وأما بالنسبة للمجال الناشىء عن ثنائي القطب كما في (جـ) فيكون لها شكل آخر كما هو مبين في الشكل.

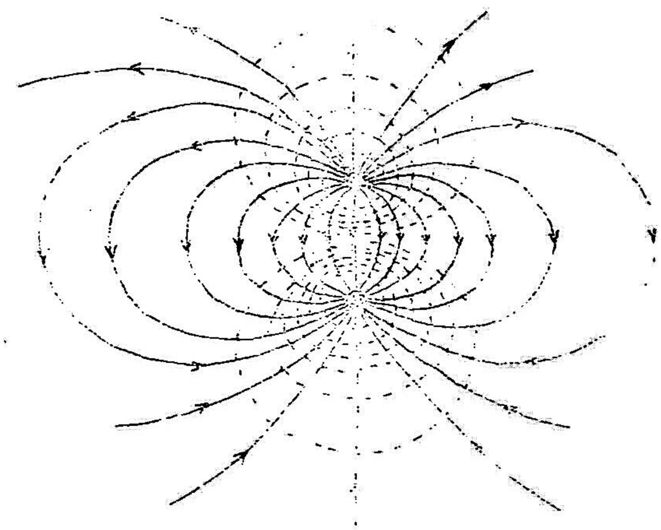
وبتأمل الشكل (13 - 4 جـ) حيث يكون فرق الجهد بين سطوح تساوي الجهد متساويا – نجد ان سطوح تساوي الجهد تكون مزدحمة وقريبة من بعضها عندما يكون المجال قويا. بينما تكون متباعدة عن بعضها عندما يكون المجال ضعيفا. هذه الحقيقة يمكن استنتاجها بسهولة من المعادلة (23 - 4). فلو اعتبرنا ان فرق الجهد متساويا بين سطحين متجاورين من سطوح تساوي الجهد المبينة في الشكل ومقداره ΔV لأصبحت المسافة (باتجاه المجال) بين السطحين المتجاورين

$$\Delta l = \frac{\Delta V}{E}$$

ومن هذه المعادلة يتبين أن Δl تتناسب عكسيا مع شدة المجال E. وكذلك خطوط القوة الكهربائية نجدها مزدحمة ومتقاربة عندما يكون المجال قويا ومتباعدة عندما يكون المجال ضعيفا (لاحظ البند 2 - 2).

9 - 4 طاقة الوضع الكهربائية Electric potential energy

نفترض وجود شحنتين q_1 و q_2 على بعد مسافة قدرها r كما هو مبين في الشكل (14 - 4). فمن المعلوم ان احدى هاتين الشحنتين تؤثر على الأخرى بقوة كولوم وهي قوة تجاذب ان اختلفت الشحنتان وقوة تنافر ان تشابهت. وبذلك



الشكل [illegible] .

يتوجب على العامل الخارجي ان ينجز شغلاً اذا اردنا زيادة البعد بينهما . ويعتبر هذا الشغل موجباً اذا كانت الشحنتان مختلفتين بالاشارة وسالباً اذا كانت الشحنتان متشابهتين . ان الشغل المنجز يعتبر بمثابة طاقة مخزونة في هذه المجموعة المكونة من شحنتين وتسمى طاقة الوضع الكهربائية (او الطاقة الكهربائية الكامنة) ولو تركنا الشحنتين طليقتين لوجدنا ان احداهما تتسارع نحو الاخرى (ان كانتا مختلفتين في الاشارة) . وبذلك تتحول الطاقة الكامنة المخزونة الى طاقة حركية تمتلكها كتل الشحنات المتسارعة .

تعرف الطاقة الكهربائية الكامنة لمجموعة من الشحنات النقطية بالشغل اللازم انجازه لتجميع هذه الشحنات . وبذلك بجلب كل شحنة على حدة من اللانهاية . نفترض وجود هذه الشحنات في حالة السكون عندما تكون على ابعاد لانهائية بعضها من بعضها الآخر.

وعلى هذا الأساس يمكننا حساب الطاقة لمجموعة مكونة من شحنتين q_1 , q_2 (نظر الشكل) . فنجد أن نقل الشحنة q_1 من اللانهاية ووضعها في مكانها لايتطلب انجاز شغل $(W_1 = 0)$. ولكن نقل الشحنة q_2 من اللانهاية ووضعها على بعد r من q_1 يتطلب انجاز شغل قدره

الشكل (4-14)

$$W_2 = q_2 V_1$$

حيث أن V_1 تمثل الجهد الكهربائي للشحنة q_1 على بعد r وقدره

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r}$$

وبالتعويض عن V_1 نحصل على

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

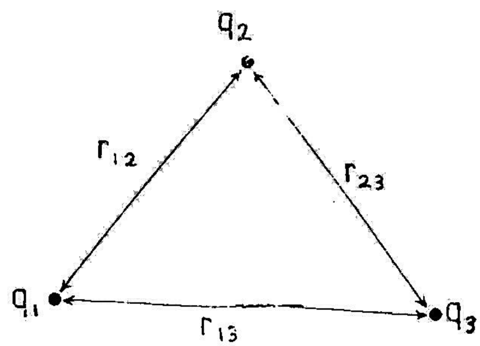
وبذلك يصبح الشغل اللازم لتجميع الشحنتين ووضعهما على بعد قدره r

$$W = W_1 + W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

وهو نفس الطاقة الكهربائية الكامنة لهذه المجموعة ، أي

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \qquad \ldots(4-26)$$

وبالطريقة نفسها يمكننا حساب الطاقة الكهربائية الكامنة لمجموعة تتكون من ثلاث شحنات كما هو مبين في الشكل (4-15) .



الشكل (15 – 4)

فالشغل اللازم لنقل الشحنة q_1 من اللانهاية ووضعها في مكانها المبين في الشكل هو

$$W_1 = 0$$

أما الشغل اللازم لنقل q_2 من اللانهاية ووضعها على بعد r_{12} من q_1 فيكون

$$W_2 = q_2 V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

وكذلك فان الشغل اللازم لنقل q_3 من اللانهاية ووضعها على بعد r_{13} من q_1 وعلى بعد r_{23} من q_2 يكون

$$W_3 = q_3 V_1 + q_3 V_2$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

وبايجاد المجموع الجبري للكميات الثلاث نحصل على الطاقة الكهربائية الكامنة للمجموعة وقدرها

$$U = W_1 + W_2 + W_3$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) \quad \ldots (4-27)$$

مثـــال 11

ثلاث شحنات نقطية مثبتة على رؤوس مثلث منتظم طول ضلعه 0.10 m أحسب الطاقة الـكامنة لهذه المجموعة علما بأن

$$q_1 = +10 \times 10^{-6}\,C$$
$$q_2 = +20 \times 10^{-6}\,C$$
$$q_3 = -30 \times 10^{-6}\,C$$

الــحــل

بالتعويض في المعادلـــة (27 – 4) نحصل على الطاقة الـكامنة للمجموعة بالجولات

$$U = 9 \times 10^{9}\left[\frac{(10 \times 10^{-6})(20 \times 10^{-6})}{0.1} + \frac{(10 \times 10^{-6})(-30 \times 10^{-6})}{0.1} + \frac{(20 \times 10^{-6})(-30 \times 10^{-6})}{0.1}\right]$$

$$= 9 \times 10^{9}\left[\frac{(20 - 30 - 60) \times 10^{-11}}{0.1}\right]$$

$$= -6.3\,J$$

ان الاشارة السالبة تعني ان الشغل الواجب انجازه لتجميع هذه الشحنات يجب أن يكون سالباً . فلو تركت هذه الشحنات طليقة لوجدنا أنها تتحرك متجهة احداهما نحو الأخرى في هذه الحالـــة .

10 – 4 مولد فان دي كراف The Van de Graff generator

تمكن فان دي كراف في عام 1931 من بناء مولد كهروستاتيكي ضخم لتوليا فرق جهد عال جداً قد يصل الى عشرة ملايين فولت . ومن الاستخدامات الرئيسية لهذا المولد هي الاستفادة من فرق الجهد العالي لتوليد أشعة اكس وكذلك لتعجيل الجسيمات المشحونة واعطائها طاقة عالية .فاذا تحرك جسيم شحنته q في الفراغ تحت تاثير فرق جهد قيمته V فانه يكتسب طاقة حركية قدرها

$$W = K = qV \qquad \ldots (4-28)$$

وتكون وحدتها الجول عندما تقاس الشحنة بالكولوم وفرق الجهد بالفولت .

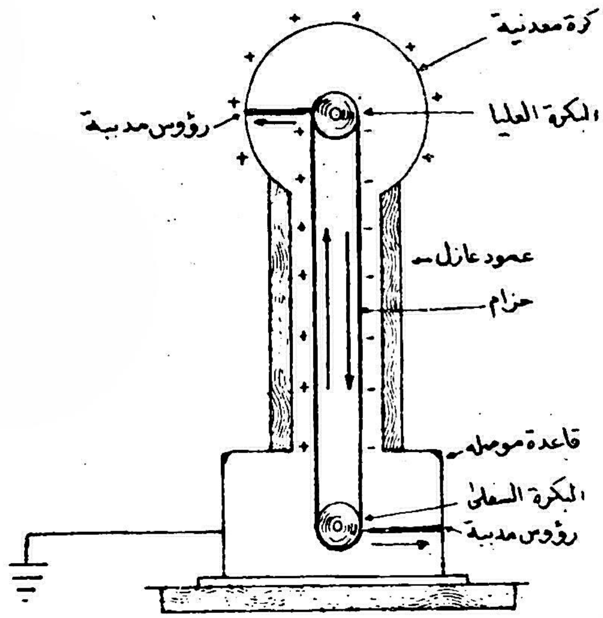
وهناك وحدة اخرى للطاقة لها استعمال واسع في حقل الفيزياء الذرية والنووية . تدعى بالالكترون فولت واختصارها (ev) وهي مقدار الطاقة التي يكتسبها جسيم يحمل شحنة الكترون واحد . عندما يتسارع خلال فرق جهد مقداره فولت واحد . وبالتعويض عن قيمة شحنة الالكترون في المعادلة (28 - 4) نحصل على قيمة الالكترون فولت بالجولات .

$$1\ ev = (1.6 \times 10^{-19}\ coulomb)(1\ volt)$$
$$= 1.6 \times 10^{-19}\ joule$$

وتعتبر المولدات الكهروستاتيكية أجهزة هامة للحصول على جسيمات ذات طاقة عالية . فبواسطتها يمكن الحصول على بروتونات ذات طاقة قد تصل الى عشرة ملايين الكترون فولت (10 Mev) ان أساس عمل مولد فان دي كراف هو انه لو ادخل موصل مشحون داخل موصل مجوف ولامسه من الداخل . فان جميع الشحنة التي يحملها الموصل الاول سوف تنتقل الى الموصل الثاني . مهما كانت الشحنة التي يحملها هذا الموصل الأخير (انظر الى المثال 7) . ولكن بدلا من ادخال الاجسام المشحونة في داخل الموصل المجوف لجهاز فان دي كراف بصورة متكررة . فان الشحنات تنقل بشكل مستمر بواسطة حزام دوار .

يبين الشكل (16 - 4) رسماً تخطيطياً لنموذج بسيط لمولد فان دي كراف يستخدم لايضاح الفكرة الاساسية التي يعمل عليها هذا الجهاز . ويتركب من كرة مجوفة موصلة محمولة على عمود عازل يرتكز على قاعدة موصلة متصلة بالأرض . وهناك حزام من مادة عازلة يمر فوق بكرتين عازلتين . البكرة السفلى يمكن تدويرها بواسطة محرك كهربائي . وتطلى هاتان البكرتان بمادتين مختلفتين بحيث ان الحزام عندما يلامس البكرة السفلى يكتسب شحنة موجبة . بينما يكتسب شحنة سالبة عندما يلامس البكرة العليا وبهذا فان الجهة اليسرى من الحزام تنقل الشحنة الموجبة بصورة مستمرة اثناء حركتها نحو الاعلى الى الكرة المعدنية عبر رؤوس مدببة متصلة بهذه الكرة . وعندما يترك الحزام البكرة العلوية يكون حاملاً شحنة سالبة . تنقل بواسطة الجهة اليمنى من الحزام الى أسفل . ثم تنقل هذه الشحنة السالبة عبر الرؤوس المدببة السفلية الى القاعدة ومن ثم تتسرب الى الارض وبذلك فان جهتي الحزام تعمل على زيادة الشحنة الموجبة المتجمعة على الكرة المعدنيـــة .

مما تقدم يتضح انه لولا وجود صعوبات في عزل الكرة المعدنية كهربائياً لأمكن زيادة الشحنة عليها وبالتالي زيادة جهدها الكهربائي الى أي مقدار نشاء . وبهذا فان أعلى جهد يمكن الحصول عليه يتحدد بالقيمة التي عندها يحدث اتزان بين معدل تسرب الشحنات من الكرة المعدنية خلال العمود العازل وخلال الهواء المحيط بها وبين معدل الشحنات التي تكتسبها الكرة .



الشكل (16 - 4) نموذج بسيط لمولد فان دي كراف

تمرينات

4 - 1 شحنتان نقطيتان مقدارهما $(+10 \times 10^{-8}\,C)$ و $(-5 \times 10^{-8}\,C)$ تفصلهما مسافة قدرها $(20\ cm)$. جد مقدار الجهد الكهربائي عند منتصف المسافة بينهما.

4 - 2 كرة معدنية موصلة نصف قطرها $(3\ cm)$ تحمل شحنة موجبة قدرها $(1 \times 10^{-9}\,C)$ احسب الجهد عند النقاط التي تبعد مسافات قدرها $(2\ cm)$ و $(3\ cm)$ و $(4\ cm)$ من المركز.

4 - 3 ثلاثة اجسام صغيرة، كل منها تحمل شحنة موجبة قدرها $(2 \times 10^{-6}\,C)$ وضعت على رؤوس مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه $(3\ cm)$. جد مقدار الجهد الكهربائي في مركز المثلث.

4 - 4 في تجربة مليكان. امكن موازنة قطرة الزيت بين اللوحين عندما كان مقدار شدة المجال الكهربائي $(2.32 \times 10^{5}\ N/C)$ احسب فرق الجهد بين اللوحين، علما بان المسافة بينهما تساوي $(1.6\ cm)$

4 - 5 شحنتان نقطيتان مقدارهما $(+5 \times 10^{-6}\,C)$ و $(-15 \times 10^{-6}\,C)$ والمسافة بينهما تساوي $(100\ cm)$. عين موضع النقطة (او النقاط) التي تقع على امتداد المسافة بينهما والتي يكون عندها الجهد الكهربائي صفرا.
$(25\ cm, 50\ cm)$ عن الشحنة الصغيرة)

4 - 6 اذا علم ان فرق الجهد بين قطبي بطارية هو $(6\ v)$ فما هو مقدار الشغل الواجب بذله لنقل شحنة كهربائية قدرها $(9\ C)$ من احد القطبين الى الاخر؟

4 - 7 اذا علم ان فرق الجهد بين لوحين متوازيين المسافة بينهما $(1\ cm)$ هو $(100\ V)$ احسب

(أ) مقدار شدة المجال الكهربائي بينهما.

(ب) مقدار التعجيل الذي يتحرك به أيون الهايدروجين (كتلته 3.32×10^{-27} Kg) وشحنته $(1.6 \times 10^{-19}\,C)$ اذا وضع في هذا المجال.

$(10^{4}\ N/C; 4.82 \times 10^{11}\ m/s^{2})$

4 - 8 قذف الكترون طاقته الحركية $(3.2 \times 10^{-17}\ J)$ في مجال كهربائي شدته $(1000\ N/C)$ باتجاه المجال. أحسب المسافة التي يقطعها الالكترون حتى يتوقف عن الحركة. $(0.2\ m)$

9 – 4 ماالشغل اللازم بذله لنقل شحنة قدرها 20×10^{-8} C من نقطة في الفراغ تبعد 0.3 m عن شحنة قدرها 30×10^{-6} C الى نقطه تبعد 0.12 m عنها ؟

(2.7×10^{-2} J)

10 – 4 لوحان افقيان متوازيان تفصلهما مسافة 1.8 cm سلط عليهما فرق في الجهد قدره 2.4×10^{4} V . وبذلك نشأ مجال كهربائي متجه الى أسفل . اوجد الشحنة التي تحملها قطرة زيت كتلتها 2.2×10^{-13} kg بحيث تظل معلقة في المجال بين اللوحين . مانوع الشحنة التي تحملها القطرة ؟

(1.6×10^{-18} C)

11 – 4 اذا علم ان المسافة الفاصلة بين الانود والكاثود في صمام مفرغ تساوي 4 cm ، وفرق الجهد بينهما 300V ، احسب

(أ) شدة المجال الكهربائي بين القطبين .

(ب) الطاقة التي يكتسبها الكترون عند وصوله الانود .

(ج) سرعة الالكترون عند اصطدامه بالانود .

افرض ان سرعة الالكترون عند انطلاقه من الكاثود تساوي صفرا .

(7.5×10^{3} V/m , 4.8×10^{-17}J , 1.05×10^{7} m/s)

12 – 4 اذا علمت ان نصف قطر نواة ذرة الذهب 6.6×10^{-15} m ، وان العدد الذري للذهب ($z = 79$)، جد قيمة الجهد على سطح النواة .

(1.7×10^{7} V)

13 – 4 مربع طول ضلعه عشرة سنتمترات وضعت على اركانه اربع شحنات قيمها $+10 \times 10^{-9}$ C و -20×10^{-9}C و $+30 \times 10^{-9}$C و $+20 \times 10^{-9}$C . احسب قيمة الجهد عند مركز المربع .

(5×10^{3} V)

14 – 4 برهن على ان الجهد الناشيء عن قرص مشحون حسبما جاء في المعادلة (4 – 16) :

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2 + a^2} - a\right)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{a}$$

يؤول الى القيمة

وذلك في الحالة الخاصة التي يكون فيها البعد a أكبر بكثير من نصف قطر القرص R. q تمثل الشحنة الكلية التي يحملها القرص. لاحظ البند (5 - 4 ج).

ملاحظة: عندما يكون $R << a$ يصبح بالامكان تقريب الكمية تحت الجذر كما هو آتٍ:

$$\sqrt{R^2 + a^2} = a\left(1 + \frac{R^2}{a^2}\right)^{1/2}$$

$$= a\left(1 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{a^2} + \dots\right) \simeq a + \frac{R^2}{2a}$$

15 - 4 كرة موصلة نصف قطرها 10 cm موضوعة في الهواء. هل بالامكان وضع شحنة قدرها $4\mu c$ على هذه الكرة اذا علم ان شدة عزل الهواء تساوي 3×10^6 V / m ؟

16 - 4 كرتان معدنيتان متماثلتان نصف قطر كل منهما 3.0 cm يحملان شحنتين قدرهما $+10 \times 10^{-9}$C ؛ -30×10^{-9}C على الترتيب. فاذا علمت ان المسافة بين مركزي الكرتين تساوي مترين، احسب

(أ) الجهد عند منتصف المسافة بين الكرتين.

(ب) جهد كل من الكرتين

(ملاحظة: ان جهد كل كرة ينشأ عن شحنة الكرة ذاتها وعن شحنة الكرة الاخرى التي تبعد عنها بمسافة قدرها مترين)

(- 180 v; + 2860 v, - 8960 v)

17 - 4 كرتان موصلتان نصف قطريهما 10mm ؛ 10cm على الترتيب، شحنت الكرة الصغيرة بشحنة قدرها $+10 \times 10^{-9}$ C ، وبعد ذلك وصلت بالكرة الكبيرة بسلك موصل دقيق. فاذا علمت ان المسافة بين مراكز الكرتين تساوي 50 cm احسب

(أ) الشحنة التي تحصل عليها كل من الكرتين.

(ب) جهد كل من الكرتين .

(ملاحظة : ان جهد كل كرة ينشأ عن شحنة الكرة ذاتها وعن شحنة الكرة الاخرى التي تبعد بمسافة قدرها 50 cm)

$(q_1 = 7.5 \times 10^{-1}\ C\ .\ q_2 = 92.5 \times 10^{-11} C\ \ V = 845 V)$

18 – 4 اسطوانة معدنية طويلة ، نصف قطرها a ، تحمل شحنة موجبة كثافتها الخطية λ ، موضوعة على محور اسطوانة معدنية مجوفة نصف قطرها الداخلي b . وتحمل شحنة سالبة مساوية للشحنة الموجبة . بين أن فرق الجهد بين الاسطوانتين يساوي

$$V_a - V_b = \frac{\lambda}{2 \pi \varepsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

19 – 4 شحنة موزعة بانتظام خلال كرة عازلة نصف قطرها R وبكثافة حجمية قدرها $\rho C/m^3$. اوجد الجهد الكهربائي عند النقاط التي تبعد r عن مركز الكرة عندما تكون (أ) $r > R$ و(ب) $r < R$

$$\left(\frac{\rho}{3 \varepsilon_0} \frac{R^3}{r} ; \frac{\rho}{2 \varepsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right) \right)$$

20 – 4 احسب الجهد الكهربائي الناشيء عن الشحنة الكروية المبينة في المسألة (14 – 3) عند نقطة تبعد ، (أ 400 cm عن المركز (ب) 200 cm عن المركز .

$(5.72 \times 10^4\ V : 8.37 \times 10^4 V)$

21 – 4 اذا علم ان شدة عزل الهواء (3×10^6 V/m) . فما مقدار اقصى شحنة يمكن وضعها على كرة موصلة نصف قطرها (30 cm) موضوعة في الهواء ؟ مامقدار الجهد الكهربائي لهذه الكرة ؟

$(3 \times 10^{-5}\ (\ ; 9 \times 10^5\ V)$

22 – 4 اذا علم ان هناك مجالا كهربائيا يحيط بالكرة الأرضية وان اتجاهه عمودي نحو الاسفل ومقداره (ضمن مدى معين) هو $E_y = 300 - 0.01\ y$ حيث تمثل y الارتفاع عن سطح الأرض بالامتار . اوجد الجهد الكهربائي على ارتفاع h من الامتار عن السطح . اعتبر الجهد على سطح الارض مساويا الى صفر .

$(V = 300h - 0.005h^2)$

23 – 4 مامقدار الطاقة الحركية التي يكتسبها بروتون اذا تسارع خلال فرق جهد قدره (100 V) في الفراغ ، (أ) بوحدات الجول و (ب) بوحدات الالـكترون فولت ؟

$(1.6 \times 10^{-17} J ; 100\, eV)$

24 – 4 اسطوانة طويلة نصف قطرها R تحمل شحنة ذات كثافة خطية قدرها C/m اوجد فرق الجهد بين نقطتين تبعدان r_1 و r_2 عن محور الأسطوانة علما بان كل من r_1 و r_2 اكبر من R .

25 – 4 عين سطح تساوي الجهد (الذي يكون بشكل مستوٍ) لثنائي القطب المبين في الشكل (4 – 4). مامقدار الجهد عند هذا المستوى ؟

26 – 4 اربع شحنات متساوية مقدار كل منها يساوي $(10^{-6}\, C)$ جلبت من مسافات بعيدة ووضعت على رؤوس مربع طول ضلعه (1m) ثلاث من هذه الشحنات موجبة والاخرى سالبة . احسب الطاقة الـكامنة لهذه المجموعة من الشحنات .

$(U = 0)$

27 – 4 اذا علمت ان الجهد الـكهربائي في منطقة معينة يساوي

$$V = \frac{k}{x^2 + y^2 + x^2}$$

اوجد المركبات الثلاثة لشدة المجال الـكهربائي بالاتجاهات z, y, x

احمد عبدالجبار

الفصل الخامس

المتسعات

Capacitors

5 - 1 السعة الكهربائية : Capacitance

بينا في البند 2 - 4 ان الجهد الكهربائي لموصل كروي معزول في الفراغ

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R} \qquad (5-1)$$

اذ ان q تمثل الشحنة الموضوعة على الجسم الكروي الذي نصف قطره R . ويمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل الاتي

$$q = (4\pi\varepsilon_0 R) V$$

اذ يتضح ان الشحنة التي يحملها الموصل الكروي تتناسب طرديا مع جهده الكهربائي . وقد أثبتت التجارب أن هذه النتيجة تنطبق على كافة الموصلات المشحونة مهما كانت ، اشكالها .

من ذلك يتبين انه يمكن زيادة الشحنة الموضوعة على اي موصل فيرتفع بذلك جهده . ولكن هذه الزيادة ان استمرت فأنها ستؤدي الى ارتفاع الجهد الى الحد الذي يحدث عنده التفريغ الكهربائي . ويمكن تشبيه ذلك بضخ الغاز في اناء ذو حجم معين ، فكلما زادت كمية الغاز التي تضخ في الاناء كلما زاد ضغط الغاز حتى يصل الى درجة من الارتفاع يؤدي الى انفجار الاناء .

اما مقدار الزيادة في الشحنة التي توضع على الموصل والتي تسبب زيادة معينة في جهده أو بمعنى آخر نسبة الشحنة الى الفولتية ، فأنها تعتمد على شكل الموصل وحجمه كما تعتمد على الموصلات المشحونة الاخرى المتواجدة في المنطقة المجاورة . فكما ان عدد جزيئات الغاز التي يمكن ضخها في الاناء تعتمد على كل من ضغط الغاز وعلى حجم الاناء ، كذلك نجد ان الشحنة التي توضع على الموصل تعتمد على كل من جهده وسعته الكهربائية .

تعرف سعة الموصل بأنها نسبة كمية الشحنة التي يحملها الموصل الى جهده الكهربائي . اي

$$C = \frac{q}{V} \qquad (5-2)$$

ومن المعادلتين (1 - 5) ، (2 - 5) نجد ان السعة لكرة موصلة معزولة في الفراغ تساوي

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \qquad (5-3)$$

ويظهر من تعريف السعة ان وحدتها حسب النظام الدولي (SI) هي (كولوم /فولت) وتسمى فاراد (Farad) نسبة الى العالم المعروف Michael Farad الذي ساهم في تطوير مفهوم السعة الكهربائية . لذا

$$1F = \frac{1\,C}{1\,V}$$

وهذا يعني ان السعة تساوي فاراد واحد اذا احتاجت المتسعة الى شحنة قدرها كولوم واحد لرفع فرق الجهد بين طرفيها بمقدار فولت واحد .

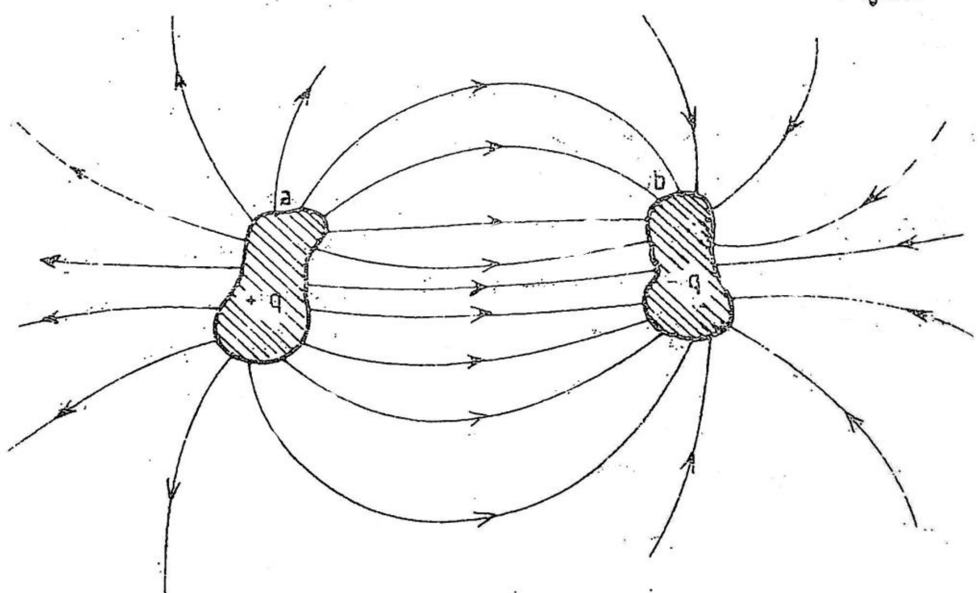
وبما ان الفاراد وحدة كبيرة نسبيا من الناحية العملية فهناك اجزاء لهذه الوحدة اكثر ملائمة وهي المايكروفاراد ($1\ \mu F = 10^{-6}$ farad) ويمثل واحد من مليون من الفاراد ، وكذلك البيكوفاراد ($1\ pF = 10^{-12}$ farad) ويمثل واحد من مليون من الفاراد .

5 - 2 المتسعات الكهربائية Capacitors

اذا وضعت عدداً من الموصلات المشحونة والمعزولة بالقرب من بعضها ، فأنه يحدث تأثيرات متبادلة بينها ، مما يجعل جهد كل موصل لايعتمد على الشحنة التي يحملها ذلك الموصل فقط ، بل يعتمد ايضا على شحنات الموصلات الاخرى المجاورة لها وكذلك على اشكالها وابعادها ومواقعها .

فعند تقريب كرتين موصلتين مشحونتين من بعضهما فأن التناظر الشعاعي للمجال الكهربائي الناشيء عن كل من هاتين الكرتين سوف يضطرب وعلى الرغم من عدم حدوث اي تغيير في شحنة اي من الكرتين فانه لم يعد بالامكان استخدام المعادلة (1 — 5) لحساب الجهد الكهربائي لأي من الكرتين ، ذلك أن اشتقاق هذه المعادلة يستند بالاساس على تناظر المجال الكهربائي للكرة الموصلة الناشيء عن التوزيع المتجانس للشحنة . وعلى سبيل المثال فأن جهد الكرة الموجبة الشحنة ينخفض اذا جلبت كرة أخرى سالبة الشحنة ووضعت على مقربة منها . وبالمثل يرتفع جهد الكرة السالبة الشحنة . وبذلك نستنتج ان فرق الجهد بين الكرتين سوف ينقص نتيجة لتقريب احدى الكرتين من الاخرى . وبمعنى آخر ان سعة هذه المجموعة المكونة من كرتين موصلتين قد إزدادت ذلك طبقا الى المعادلة (2 — 5) .

الشكل (1 — 5) يبين حالة عامة لموصلين متجاورين ومعزولين عن بعضهما ويحملان شحنتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاشارة . ان تركيبا مثل هذا يدعى بالمتسعة الكهربائية (او المكثف الكهربائي) . ويدعى الموصلان باسم اللوحين ، ويصنعان باشكال هندسية مختلفة كما سيتبين فيما بعد . أما وضع شحنتين متساويتين ومتعاكستين على لوحي المتسعة فيمكن ان يتم بسهولة ، وذلك بربطهما بقطبي بطارية لفترة وجيزة . وسنأتي في بند قادم على شرح أهم أنواع المتسعات المستعملة في الاغراض العملية وعلى طريقة صنعها



الشكل (1 — 5) المتسعة الكهربائية

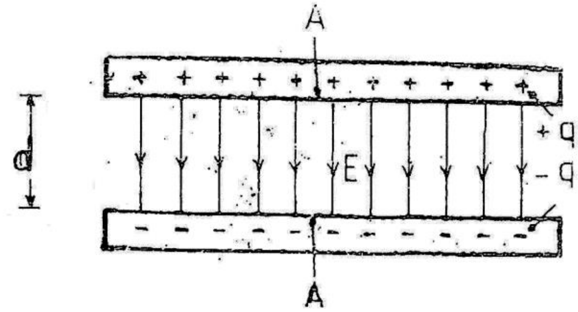
وتعد المتسعات من العناصر الاساسية في الدوائر الكهربائية وذات اهمية كبيرة في التقنية الحديثة. فهي تستخدم لتقويم تموجات التيار المتناوب، وفي توليد الموجات الكهرومغناطيسية او الكشف عنها، وفي خزن الطاقة الكهرومغناطيسية وتصريفها عند الحاجة، والى غير ذلك من الاستخدامات الكثيرة التي تدخل في تكوين الأجهزة الالكترونية. وعموماً يمكن القول بأن العصر الالكتروني الذي نشهده لايمكن ان يبقى بلامتسعات.

3 – 5 كيفية حساب السعة

تعرف السعة الكهربائية (C) لأي متسعة بأنها النسبة بين شحنة المتسعة (q) وفرق الجهد (V) بين الموصلين المكونين لها. ويقصد بشحنة المتسعة مقدار الشحنة التي يحملها أي لوح من الموصلين. ذلك أن المجموع الكلي لشحنة المتسعة على كلا اللوحين يساوي صفراً. وتعتمد قيمة السعة على الشكل الهندسي للوحين على المسافة الفاصلة بينهما وعلى الوسط العازل. الا اننا سنأخذ اولا الحالة الخاصة التي يكون فيها الوسط الفاصل بين اللوحين فراغاً (او هواء)، ثم نتجاوزه الى المواد العازلة بصورة عامة. والآن سنعتمد على التعريف ($C = q / V$) لحساب السعة لعدد من المتسعات التي تكون الواحها الموصلة باشكال هندسية مختلفة.

(أ) سعة المتسعة ذات اللوحين المتوازيين

من أشهر المتسعات تلك التي تعرف باسم المتسعة ذات اللوحين المتوازيين (The parallel plate capacitor). وتتكون هذه المتسعة (كما يستدل من اسمها) من لوحين موصلين متوازيين تفصل بينهما طبقة رقيقة من مادة عازلة (اوفراغ). ويتم شحن المتسعة بان يربط اللوحين الى قطبي بطارية كهربائية فيكتسب اللوح المتصل بالقطب الموجب شحنة موجبة. أما اللوح الآخر فيكتسب شحنة سالبة مساوية في مقدارها الشحنة الموجبة والشكل (2 – 5) يبين متسعة من هذا النوع احد لوحيها يحمل شحنة قدرها $q+$ والاخر $q-$ ومساحة كل منهما A ويفصلهما فراغ. واذا كانت المسافة بين اللوحين d صغيرة مقارنة مع ابعاد اللوحين، فان المجال الكهربائي بين اللوحين يمكن اعتباره منتظماً. وبذلك تكون خطوط القوة الكهربائية متوازية ومتساوية البعد عن عن بعضها البعض (عدا المنطقة المحيطة بحافات اللوحين حيث تكون الخطوط منحنية والمجال غير منتظم).



الشكل (2 - 5)
متسعة ذات لوحين متوازيين — 2

بينا في الفصل الثالث ان مقدار شدة المجال الكهربائي بين لوحين متوازيين (أنظر الى المعادلة (21 - 3) يساوي

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

وبما ان المجال بين اللوحين منتظم فان فرق الجهد بينهما (انظر الى المعادلة 5 - 4 في الفصل السابق) هـو

$$V = Ed = \frac{qd}{\varepsilon_0 A}$$

لذا فان سعة المتسعة ذات اللوحين المتوازيين تصبح

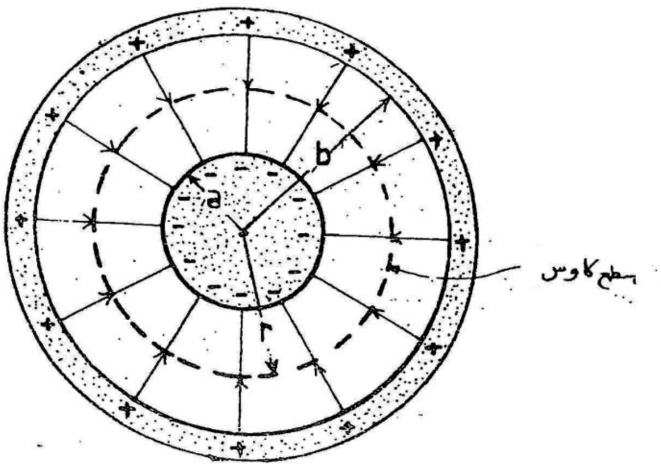
$$C = \frac{q}{V} = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \qquad (5-4)$$

ومن هذه المعادلة نرى ان السعة مقدار ثابت لمتسعة معينة لاتعتمد على شحنة المتسعة بل تتناسب طردياً مع مساحة اللوحين وعكسياً مع المسافة بينهما .

(ب) سعة المتسعة الاسطوانية :

تتكون المتسعة الاسطوانية cylindrical capacitor من اسطوانتين متحدتي المحور طولهما l . نصف قطر الاسطوانة الداخلية a ونصف قطر السطح الداخلي للاسطوانة الخارجية b . ويفترض ان يكون طول المتسعة كبيراً لكي يمكن اهمال التشويه الحاصل في المجال الشعاعي عند نهايتي المتسعة عند حساب السعة . يبين الشكل (3 - 5) مقطعاً لهذه المتسعة الاسطوانية .

لحساب السعة نفرض أن شحنة قدرها q - وضعت على الاسطوانة الداخلية وشحنة أخرى q + وضعت على الاسطوانة الخارجية ، عندئذ ينشأ بينهما مجال كهربائي شعاعي . ويمكن ايجاد شدة المجال باستخدام قانون كاوس المتمثل بالمعادلة



الشكل (3 - 5) مقطع عرضي لمتسعة أسطوانية

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

نختار سطحاً كاوسياً بشكل اسطوانة متحدة المحور نصف قطرها r وطولها l . وهنا نلاحظ عند تطبيق قانون كاوس ان المجال يكون موازياً للنهايتين المستويتين للاسطوانة وعمودياً على الجزء الاسطواني من سطح كاوس . لذا ينتج

$$E (2 \pi r l) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

او

$$E = \frac{q}{2 \pi \varepsilon_0 r l}$$

أما المجال فيكون شعاعياً ومتجهاً من الاسطوانة الخارجية الموجبة الشحنة نحو الاسطوانة الداخلية السالبة .

ولايجاد فرق الجهد بين اللوحين الاسطوانيين للمتسعة نستخدم المعادلة (3 - 4) فنحصل على

$$V = V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_a^b E \cos 180^\circ \, dl = \int_a^b E dl$$

اذ ان المسار يمتد من الاسطوانة الداخلية الى الاسطوانة الخارجية وبالاتجاه الشعاعي أي عكس اتجاه المجال . لذا تصبح الزاوية بينهما $180°$. وباستبدال عنصر المسار dl بالعنصر الشعاعي للمسار dr وبالتعويض عن قيمة E نحصل على فرق الجهد

$$V = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln \frac{b}{a}$$

كما يلاحظ أن $dr = dl$ في هذه الحالة وذلك لأن كلاهما يمتد بالاتجاه نفسه . وأخيراً يمكن حساب السعة من قسمة الشحنة على فرق الجهد . أي

$$C = \frac{q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(b/a)} \qquad (5-5)$$

وهنا نلاحظ ، كما في حالة المتسعة ذات اللوحين المتوازيين ، ان السعة تعتمد على الشكل الهندسي للمتسعة وعلى أبعادها الهندسية المتمثلة في l, b, a . وكذلك تعتمد على طبيعة المادة العازلة التي تفصل أحد اللوحين الموصلين للمتسعة عن الآخر كما سيتضح فيما بعد

أن أحسن نموذج عملي للمتسعة الاسطوانية يتمثل في القابلو المحوري وكذلك في القابلو المسمى submarine cable المستعمل لاغراض التوصيل الكهربائي تحت سطح البحر . يتكون هذا القابلو من سلك اسطواني غليظ من النحاس محاط بمادة عازلة . ويعد ماء البحر بمثابة اللوح الموصل الثاني للمتسعة .

ج - سعة المتسعة الكروية

تتكون المتسعة الكروية spherical capacitor من سطحين كرويين موصلين متحدي المركز (انظر الى الشكل 4 - 5) . نصف قطر الكرة الداخلية a ونصف قطر الكرة الخارجية b ولنفرض ان الفراغ (أو الهواء) يفصل أحد السطحين عن الاخر كما هو الحال في المتسعتين اللتين ذكرناهما آنفاً .

لحساب السعة نفرض أن شحنة قدرها $q-$ وضعت على السطح الكروي الداخلي وشحنة قدرها $q+$ وضعت على السطح الخارجي ثم نحتذي بالاسلوب نفسه المتبع في الحالتين (أ) و(ب) ونجد اولاً شدة المجال الكهربائي في المنطقة بين السطحين

وذلك بأن نختار سطح كاوس بشكل سطح كروي نصف قطره r بحيث ان $(a < r < b)$
وبتطبيق قانون كاوس المتمثل بالمعادلـــة .

$$\oint \bar{E}\, d\bar{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

نحصل على

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

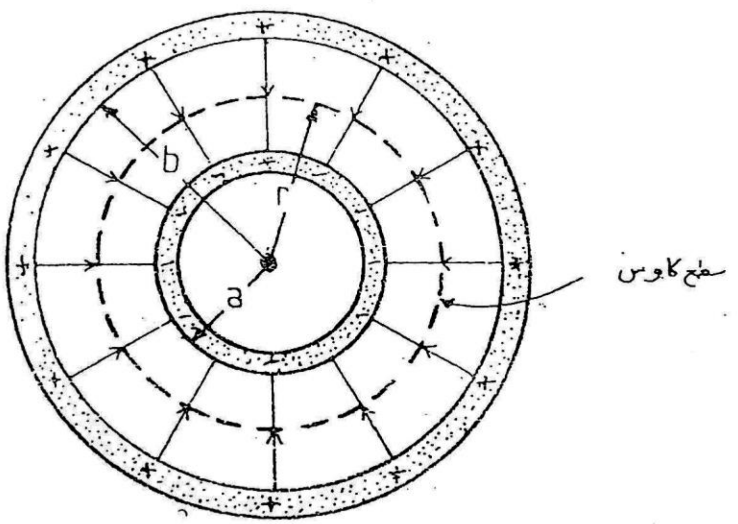
او

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}$$

ثم نجد فرق الجهد بين السطحين وذلك باستخدام المعادلة فنحصل على

$$V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b E dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-1/r\right]_a^b = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$



الشكل (4- 5) متسعة كروية

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \quad \frac{b-a}{ab}$$

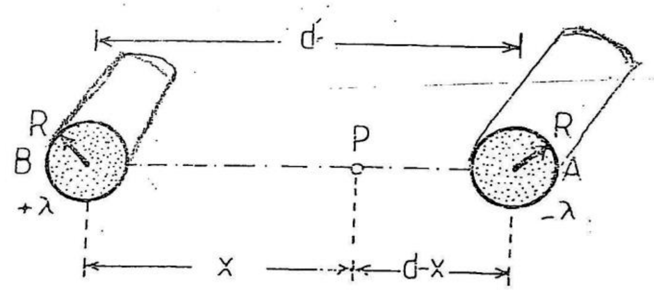
هذه المعادلة نجد السعة

$$C = \frac{q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 \quad \frac{ab}{b-a} \qquad (5-6)$$

د – سعة سلكين طويلين متوازيين :

للمتسعة المتكونة من سلكين طويلين متوازيين أهمية عملية تتجلى بوضوح في أسلاك نقل القدرة الكهربائية التي نشاهدها ممتدة في الهواء بين الاعمدة الكهربائية . وعلى الرغم من ضآلة سعة هذه المتسعة ، الا ان امتداد الأسلاك لمسافات طويلة يجعل لقيمة السعة شأن لايمكن اغفال تأثيره على عملية نقل القدرة .

يبين الشكل (5 – 5) مقطعاً لسلكين طويلين متوازيين نصف قطرهما R وتفصلهما مسافة قدرها d . على ان يكون ($d >> R$) .
لنفرض ان السلك A يحمل شحنة ذات كثافة خطية قدرها $-\lambda\ C/m$. وان السلك B يحمل شحنة لوحدة الطول قدرها $+\lambda\ C/m$. عندئذ يمكن ايجاد شدة المجال الكهربائي في المنطقة الكائنة بين السلكين (عند نقطة P مثلاً) بتطبيق المعادلة (16 – 3) لنحصل على شدة المجال الناشيء عن كل من السلكين A و B .



الشكل (5 - 5) متسعة مكونة من سلكين متوازيين .

$$E_B = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

$$E_A = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (d-x)}$$

اذ ان x تساوي بعد نقطة P عن محور السلك B و d − x تساوي بعد النقطة ذاتها عن محور السلـــك A .

وبجمع هذين المجالين نحصل على محصلة شدة المجال عند نقطة P وذلك لأن كليهما باتجاه واحد (نحو السلك A) . لذا

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d - x}\right)$$

أما فرق الجهد بين السلكين فيمكن حسابه من العلاقة (3 − 4) التي ستؤول الى الشكل الآتي عند استخدامها في هذه الحالــة

$$V = \int_{R}^{d-R} E dx = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{R}^{d-R}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d - x}\right)dx$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\ln x - \ln(d - x)\Big]_{R}^{d-R}$$

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln(d - R) - \ln(d - \cancel{d} + R) - \ln R + \ln(d - R)\right]$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[2\ln(d - R) - 2\ln R\right]$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d - R}{R}$$

لكن

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\lambda l}{V}$$

وذلك بفرض ان طول كل من سلكي المتسعة يساوي l . لذا

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{d - R}{R}} \qquad (5 - 7a)$$

أهملنا R في بسط اللوغارتم نظراً لصغرها مقارنة مع d ينتج

$$C = \frac{\pi \varepsilon_0 l}{\ln d/R} \qquad (5 - b$$

مثال 1

كم متراً مربعاً تحتاج من الصفائح المعدنية لصنع متسعة ذات لوحين متوازيين سعتها فاراد واحد بحيث يكون سمك الطبقة الهوائية الفاصلة بين لوحيها مليمتراً واحداً ؟

الحل

يمكن حساب مساحة كل لوح من المعادلة (4 – 5) فينتج

$$A = \frac{Cd}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{(1F)(1 \times 10^{-3}\ m)}{8{\cdot}85 \times 10^{-12}\ C^2\ N^{-1}\ m^{-2}} = 1{\cdot}13 \times 10^8\ m^2$$

$$= 113\ km^2$$

ومن الطبيعي أن نحتاج ضعف هذه المساحة لعمل لوحي المتسعة .

أن هذا العدد الكبير لمساحة اللوح ان دل على شيء فانما يدل على أن الفاراد وحدة كبيرة جداً للاغراض العملية ، ولهذا يفضل استخدام المايكروفاراد والبيكوفاراد كما أشرنا في بداية الفصل .

مثال 2

احسب سعة متسعة اسطوانية طولها متراً واحداً ، اذا علمت ان قطري الاسطوانيتين الداخلية والخارجية هما 3.0 cm , 10 cm على الترتيب ، ويعزل الهواء احدى الاسطوانتين عن الأخرى .

الحل

بالتعويض عن القيم $a = 1{\cdot}5\ cm$ و $b = 5\ cm$ ، $l = 1m$ في المعادلة (5 – 5) نحصل على السعة

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln b / a}$$

$$= \frac{2\pi \times 8.85 \times 10^{-12}}{\ln (5/1.5)} = 46 \times 10^{-12} \text{ F}$$

$$= 46 \text{ pF}$$

مثــــال 3

احسب سعة خط كهربائـي مكون من سلكين طوله عشرة كيلومترات . اذا علمت أن نصف قطركل من السلـكين يساوي 7.5 mm . وأن المسافة الفاصلة بين السلكين تساوي 40 cm

الـــحـــل

يمكن الاستعانة بالمعادلة (7b – 5) لحساب السعة

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln d / R}$$

وذلك بالتعويض عن القيم $d = 400 \text{ mm}, R = 7.5 \text{ mm}, l = 10 \times 10^3 \text{ m}$ فينتج

$$C = \frac{\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 10 \times 10^3}{\ln \dfrac{400}{7.5}}$$

$$= 7 \times 10^{-8} \text{ F}$$

$$= 7 \times 10^{-2} \mu\text{F}$$

مثــــال 4

متسعة ذات لوحين متوازين مساحتها A والمسافة بين لوحيها d أدخل بيـــن لوحيهالوح موصل معزول وغيـــر مشحون سمكه t . فـكم تصبح السعة بعد ادخال هذا اللوح ؟

الحل

نفرض أن شحنة موجبة قدرها q + وضعت على اللوح العلوي واخرى q - وضعت على اللوح السفلي قبل ادخال اللوح الموصل كان المجال الكهربائي محصوراً في جميع المنطقة بين لوحي المتسعة . لكن بعد وضع اللوح الموصل اصبح المجال يغطي مسافة قدرها (d – t) فقط ، وذلك لان شدة المجال داخل هذا اللوح يجب أن تكون صفراً .

ان شدة المجال الكهربائي طبقاً للعلاقة (21 – 3) تساوي

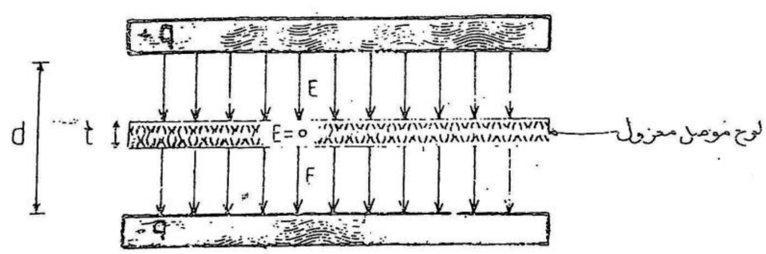
$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

لذا يصبح فرق الجهد بعد ادخال اللوح

$$V = E(d - t) = \frac{q}{\varepsilon_0 A}(d - t)$$

وعندئذ تؤول السعة الى القيمة الآتية :

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d - t}$$



الشكل (5 - 6)

4 – 5 أهمية أستخدام العوازل في المتسعات

ان العلاقات المستخرجة في البند السابق لحساب السعة تصح فقط عندما يكون لوحا المتسعة في الفراغ . وتصح كذلك ، لدرجة مقبولة من الدقة ، عندما يفصل الهواء

وهومادة عازلة – احد اللوحين عن الآخر. بيد ان غالبية المتسعات المستخدمة في الاغراض العملية تحتوي على مادة عازلة صلبة بين لوحيها بدلا من الهواء أوالفراغ . ومن العوازل dielectrics المستخدمة في صنع المتسعات ، الورق المشرب بالشمع والمايكا وشمع البارافين وغيرها من المواد العازلة الاخرى .

ويمكن تلخيص الفوائد المتوخاة من استخدام العوازل الصلبة للفصل بين الالواح الموصلة للمتسعات بثلاث نقاط هي :

(أ) ان وضع احد اللوحين الموصلين الرقيقين للمتسعة على بعد قليل من الاخر في الفراغ (او الهواء) دون ان يتلامسا أمر في غاية الصعوبة من الناحية الانتاجية والعملية أليس الافضل اذن ان يستعمل لوح صلب من مادة عازلة لكي يرتكز على وجهيه اللوحان موصلان للمتسعة ؟ ألا يكسب اللوح العازل المتسعة متانة ويجعلها اقل عرضة للتلف ؟

(ب) ان شدة عزل dielactric strength المواد العازلة تكون عادة اكبر من الهواء ، مما يؤدي الى زيادة قدرة المتسعة على تحمل الفولتية ويجعلها أعلى مما هوعليه في الهواء . وبهذا تكون المتسعة اقل عرضة لحدوث مايسمى بالانهيار الكهربائي ومن ثم اصابتها بالتلف . وعلى سبيل المثال تبلغ شدة العزل للهواء 800V/mm وللورق 14000 V/ mm وللمايكا 160000 V / mm

(ج) ان وضع لوح عازل بين لوحي متسعة سيجعل سعتها تزداد K من المرات عما هو الحال في الفراغ . ويطلق على العامل K اسم ثابت العزل dielectric constant او السماحية النسبية للعازل relative permittivity . ويبين الجدول في ادناه قيم ثابت العزل لعدد من العوازل .

الجدول (1 - 5)

ثابت العزل لعدد من العوازل Dielectric Constants

المادة العازلة	فراغ	هواء	ورق	شمع البارافين	زجاج	مايكا
ثابت العزل K	1	1.0006	2 الى 3	~ 2	4 الى 10	4 الى 8

يعرف ثابت العزل بانه النسبة بين سعة المتسعة عندما يكون العازل بين لوحيها الى سعة المتسعة ذاتها عندما يكون اللوحان في الفراغ . اي

$$K = \frac{C}{C_0} \qquad \dots (5-8)$$

وعلى هذا الاساس يمكن بسهولة ايجاد سعة المتسعة ذات اللوحين المتوازيين بعد ادخال عازل ذو ثابت قدره K . بين لوحيها وذلك بان نعوض في هذه العلاقة عن C_0 التي تمثل السعة عندما يكون اللوحان في الفراغ من المعادلة (4 - 5) فنحصل على

$$C = KC_o = \frac{K\varepsilon_o A}{d} \qquad (5-9)$$

كما يمكن ايجاد سعة المتسعة الاسطوانية عندما تحتوي على لوح عازل بين لوحيها بالطريقة نفسها فنحصل على

$$C = KC_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0 K l}{\ln b/a} \qquad \dots (5-10)$$

وبهذا نجد ان كل انواع المتسعات مهما كان شكلها تتضاعف سعتها K من المرات عندما تحتوي على لوح عازل بين لوحيها الموصلين بدلا من الفراغ .

ومما تجدر الاشارة اليه هو ان ثابت العزل قد يستبدل بثابت اخر يدعى سماحية العازل permittivity of a dielectric ويرمز له بالحرف الاغريقي ε وذلك طبقا للعلاقة

$$\varepsilon = K\varepsilon_0 \qquad \dots (5-11)$$

وفي حالة الفراغ ، حيث $K = 1$. تكون ε مساوية للكمية ε_0 . لذا يدعى الثابت ε_0 بسماحية الفراغ .

مثـــال 5

متسعة مكونة من لوحين متوازيين مساحة كل منها $80\ cm^2$ تفصلهما طبقة من شمع البارافين سمكها $5\ mm$ (أ) احسب السعة اذا علمت ان السماحية النسبية للعازل تساوي 2 . (ب) احسب شحنة المتسعة عند تسليط فرق جهد قدره $200\ v$ عليها .

الحــــل

(أ) بالتعويض عن القيم $K = 2$ و $d = 5 \times 10^{-3} m$ و $A = 80 \times 10^{-4} m^2$

في المعادلة (9 - 5) نحصل على السعة

$$C = \frac{K \varepsilon_0 A}{d}$$

$$= \frac{2 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 80 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{-3}}$$

$$= 28.3 \times 10^{-12} F = 28.3\ pF$$

(ب) أما شحنة المتسعة فتساوي

$$Q = CV$$

$$= 28.3 \times 10^{-12} \times 200$$

$$= 56.6 \times 10^{-10} C = 5.66 \times 10^{-3}\ \mu C$$

مثـــال 6

احسب سعة قابلو محوري طوله 50 m . اذا علمت ان قطر اسطوانته الداخلية تساوي 3mm وقطر اسطوانته الخارجية 10mm وان السماحية النسبية للعازل تســاوي 3 .

الحــــل

بالاستعاضة في القيم الآتية

$$b = 5 \times 10^{-3} m\ ,\ a = 1.5 \times 10^{-3} m$$

$$K = 3 \qquad ,l = 50\ m$$

في المعادلة (10 - 5) نحصل على السعة

$$C = \frac{2 \pi \varepsilon_0 KL}{\ln b / a}$$

$$= \frac{2 \pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 3 \times 50}{\ln \frac{5 \times 10^{-3}}{1.5 \times 10^{-3}}}$$

$$= 6930 \times 10^{-12}\ F$$

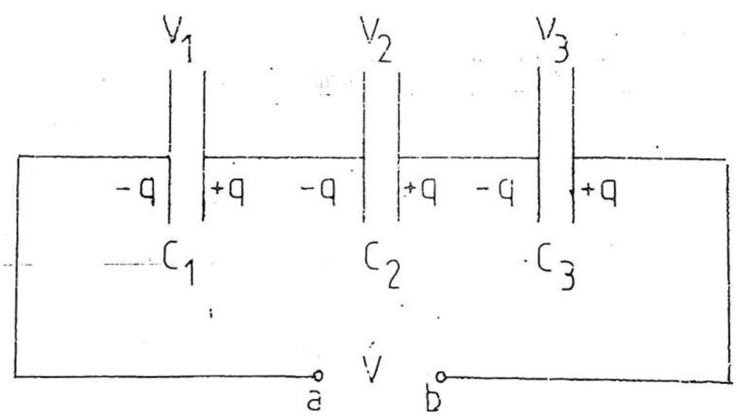
$$= 6.93 \times 10^{-3}\ \mu F$$

توصيل المتسعات

كثيراً ماتتطلب الدوائر الكهربائية العملية توصيل عدد من المتسعات بشكل من الاشكال لتحقيق غرض معين . فاما ان توصل توصيلاً يقوم على التوالي او على التوازي . وأحياناً توصل بكلتا الطريقتين معاً . وسنناقش الآن ماتؤول اليه سعة مجموعة من المتسعات عندما تربط على التوالي ثم على التوازي .

أ — توصيل المتسعات على التوالي capacitors in series

لنفرض ان ثلاث متسعات ، سعتها C_1 . C_2 . C_3 على الترتيب ، متصلة على التوالي كما هو مبين في الشكل (7 - 5) .



الشكل (7 - 5) الربط على التوالي

لحساب السعة المكافئة (C) لهذه المجموعة من المتسعات ، نفرض ان طرفي المجموعة قد ربطا الى بطارية ، فتنتج فرق جهد بين النقطتين a و b قدره V . عندئذ تكتسب كافة ألواح المتسعات المتصلة بهذه الطريقة (كما هو مبين بالرسم) نفس المقدار من الشحنات q (لماذا ؟) . وباستخدام المعادلة (2–5) نستطيع ان نجد فرق الجهد بين طرفي كل من المتسعات الثلاثة .

$$V_1 = \frac{q}{C_1},\ V_2 = \frac{q}{C_2}\ .\ V_3 = \frac{q}{C_3}$$

وبذلك يصبح فرق الجهد الكلي للمجموعة (V) :

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$= q/C_1 + q/C_2 + q/C_3$$

أي أن

$$\frac{V}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

بيد أن السعة المكافئة (C) لمجموعة المتسعات هذه تعرف بانها سعة تلك المتسعة التي تحمل شحنة المجموعة نفسها (اي q) عندما يكون فرق الجهد نفسه (V) مسلطاً عليها . أي

$$C = \frac{q}{V}$$

لذا

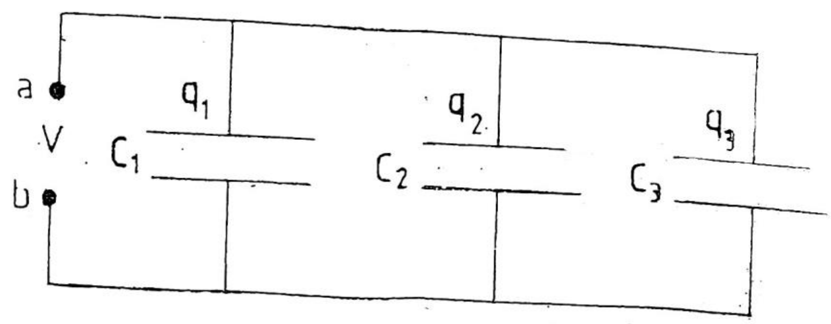
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \qquad \dots (5-12)$$

وبصورة عامة يمكننا حساب السعة المكافئة لأي عدد من المتسعات المتصلة على التوالي من العلاقة

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i} \qquad \dots (5-13)$$

(ب) توصيل المتسعات على التوازي Capacitors in parallel

لحساب السعة المكافئة للمجموعة المكونة من المتسعات C_1، C_2، C_3 المتصلة على التوازي كما هو مبين في الشكل نفرض ان طرفي المجموعة قد ربطا الى بطارية فنتج فرق جهد بين النقطتين a و b قدره V . عندئذ يكون فرق الجهد عبر كل من المتسعات الثلاثة نفسه . وباستخدام العلاقة $q = CV$ نستطيع أن نجد شحنة كل من المتسعات الثلاث .



الشكل   الربط على التوازي.

$$q_1 = C_1 V , q_2 = C_2 V , q_3 = C_3 V$$

وبذلك تصبح الشحنة الكلية q للمجموعة

$$q = q_1 + q_2 + q_3$$

$$= C_1 V + C_2 V + C_3 V$$

أي أن

$$q / V = [C_1 + C_2 + C_3]$$

لكن السعة المكافئة لمجموعة المتسعات تساوي

$$C = \frac{q}{V}$$

لذا

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \qquad \ldots (5-14)$$

وبامكاننا تعميم هذه النتيجة لتشمل اي عدد من المتسعات ، وعندئذ تحسب السعة المكافئة من العلاقة

$$C = \sum_i C_i \qquad (5-15)$$

مثـــال 7

متسعتان مجهولتا السعة يفصل الهواء بين لوحيهما وصلتا على التوالي فاصبحت السعة المكافئة لهما 150 pF . وعند ادخال لوح عازل ذو سماحية نسبية قدرها 6 في احدى المتسعتين تصبح السعة المكافئة 400 pF . احسب سعة كل من المتسعتين .

الحـــل

لنفرض ان سعة المتسعة الاولى C_1 والثانية C_2 قبل وضع اللوح العازل . عندئذ تصبح السعة المكافئة حسب المعادلة (13 - 5) ممثلة بالعلاقة الآتية :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$$

وبالتعويض عن القيمة المكافئة لسعة المجموعة ينتج

$$\frac{1}{150} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$$

وبعد ادخال اللوح العازل في المتسعة الثانية تزداد سعتها فتصبح $6 C_2$. وبهذا تصبح السعة المكافئة للمجموعة C' ، طبقاً للعلاقة نفسها ممثلة بالمعادلة الآتيـــة .

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{6 C_2} = \frac{C_1 + 6C_2}{6 C_1 C_2}$$

وبالتعويض عن قيمة C' ينتج

$$\frac{1}{400} = \frac{C_1 + 6 C_2}{6 C_1 C_2}$$

وبهذا نحصل على معادلتين فيهما مجهولان هما C_1 ، C_2 وبحل هاتين المعادلتين ينتج

$$C_2 = 200 \text{ pF} \quad C_1 = 600 \text{ pF}$$

مثـــال 8

متسعتان مربوطتان على التوازي سعة كل منها C شحنتا بفرق جهد قدره V . ثم عزلتا عن مصدر الشحن وادخل لوح عازل في احدى المتسعتين بحيث ملأ الفراغ بين لوحيها . فاذا علم أن السماحية النسبية للعازل K أحسب

(أ) فرق الجهد الجديد (V') .
ب) مقدار الشحنة التي تنتقل من متسعة لأخرى (ΔQ) نتيجة لوضع العازل .

السعة المكافئة للمتسعتين المتصلتين على التوازي طبقاً للعلاقة (5-15)

$$C + C = 2C$$

والآن لنفرض ان الشحنة الكلية التي ستكتسبها المتسعتان عند تسليط فرق الجهد V عليهما تساوي q . عندئذ

$$2C = \frac{q}{V}$$

$$q = 2CV$$

لكن السعة المكافئة بعد وضع العازل في احدى المتسعتين ستصبح

$$C' = C + KC = C(1 + K)$$

وعند ذلك يصبح بالامكان حساب فرق الجهد الجديد عبر المتسعتين من العلاقة (5 - 2)

$$C' = \frac{q}{V'}$$

، ينتج

$$V' = \frac{q}{C'} = \frac{2CV}{C(1+K)} = \frac{2V}{1+K}$$

(ب) لحساب الشحنة التي تنتقل من متسعة لأخرى نتيجة لوضع العازل نحسب الفرق بين شحنة اي من المتسعتين قبل وضع العازل وبعده .

لنفرض ان شحنة المتسعة الاولى قبل وضع العازل q_1 وبعد وضع العازل q'_1 . عندئذ

$$q_1 = CV$$

$$q_1' = C\ V'$$

$$= \frac{2\,V}{1 + k}\,C$$

لذا

$$\Delta q = q_1 - q_1'$$

$$= CV - \frac{2\,CV}{1 + k}$$

$$= \frac{CV\,(k - 1)}{k + 1}$$

مثـــال 9

متسعتان متصلتان على التوالي سعتهما $2{\cdot}00\ \mu F$ و $4{\cdot}00\ \mu F$. سلط عليهما فرق جهد قدره $150\ V$:

(أ) احسب شحنة وفرق جهد كل من المستعتين .

(ب) اذا عزلت المتسعتان عن بعضها وعن مصدر الفولتية المسلطة ووصل لوحاهما الموجبان معاً وكذلك لوحاهما السالبان . ما مقدار الشحنة وفرق جهد كل من المتسعتين ؟

الـــحل

(أ) ان السعة المكافئة لمجموعة المتسعتين على التوالي تساوي

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$$

$$C = \frac{2 \times 4}{2 + 4} = \frac{4}{3} = 1{\cdot}33\ \mu F$$

ومنها نجد الشحنة الكلية للمتسعتين

$$q = CV$$
$$= 1{\cdot}33 \times 150 = 200\ \mu C$$

وهذا يعني أن

$$q_1 = q_2 = 200\ \mu C$$

والآن يصبح بالامكان حساب الفولتية عبر كل من المتسعتين

$$V = \frac{q_1}{C_1} = \frac{200}{2} = 100\ V$$

$$V_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{200}{4} = 50\ V$$

(ب) ان السعة المكافئة لمجموعة المتسعتين ستصبح

$$C' = C_1 + C_2 = 2 + 4 = 6\ \mu F$$

وذلك لأن التوصيل أصبح قائماً على التوازي في هذه الحالة . كما أن الشحنة الكلية التي تحملها المتسعتان ستساوي

$$q' = q_1 + q_2 = 200 + 200 = 400\ \mu C$$

وعليه تصبح الفولتية عبر كل من المتسعتين

$$V' = \frac{q'}{C'} = \frac{400}{6} = 66.7\ V$$

أي أن

$$V_1' = V_2' = 66.7\ V$$

أما الشحنة التي ستستقر على كل من المتسعين فتساوي

$$q_1' = C_1 V_1'$$
$$= 2 \times 66.7 = 133\ \mu C$$

و

$$q_2' = C_2 V_2'$$
$$= 4 \times 66.7 = 267\ \mu C$$

5 – 6 الطاقة المخزونة في المتسعات Stored energy in capacitors

من المعلوم أن عملية شحن المتسعة تتطلب شغل W وهذا الشغل المبذول يخزن بشكل طاقة كامنة U في المتسعة ، يمكن استعادتها عند تفريغ شحنه المتسعة . هذه الحقيقة تتجلى بوضوح اذا تصورنا ان هناك عاملاً خارجياً يقوم بسحب الالكترونات من اللوح الموجب ثم يدفعها الى اللوح السالب فتزداد بذلك شحنة المتسعة . وواضح أن تجميع الشحنات بهذا الشكل يتطلب من العامل الخارجي أن يبذل شغلاً . وكثيرا ماينجز هذا الشغل اللازم لشحن المتسعة من قبل بطارية (أو أي مصدر للشحن) على حساب طاقتها الكيميائية المخزونة .

ولايجاد الشغل المبذول لشحن متسعة سعتها C نفرض أن مقدار شحنة المتسعة في لحظة معينة أثناء عملية الشحن قد أصبحت q' عندئذ يكون فرق الجهد بين لوحي المتسعة في تلك اللحظة

$$V' = \frac{q'}{C}$$

والآن لو نقلت كمية صغيرة أخرى من الشحنة قدرها dq' من لوح لآخر فان الشغل اللازم بذلـه لنقل هـذه الشحنـة الصغيرة سيكـون

$$dW = V'\,dq'$$

من ذلك نستطيع ان نجد الشغل الكلي اللازم لنقل شحنة كلية قدرها q

$$W = \int dW = \int V'\,dq' = \int_0^q \frac{1}{C} q'\,dq' = \frac{1}{2}\ \frac{q^2}{C}$$

وبالاستفادة من العلاقة $(q = CV)$ نجد أن

$$U = \frac{1}{2}\ \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} qV \qquad (5-16)$$

حيث الشغل المنجز يساوي الطاقة المخزونة في المتسعة U .

اين تخزن هذه الطاقة ؟ من الواضح أن عملية شحن المتسعة يصاحبها توليد مجال كهربائي في المنطقة بين لوحي المتسعة . وأن مقدار هذا المجال يزداد بزيادة شحنة المتسعة ويزول بزوال الشحنة . لذلك فمن المعقول جداً أن نعتبر طاقة المتسعة مخزونة في المجال الكهربائي بين لوحيها .

مثال 10

احسب الطاقة المخزنة في المتسعتين المذكورتين في المثال 9 (أ) عندما تكونان متصلتين على التوالي و (ب) بعد فكهما واعادة ربطهما على التوازي .

الحل

(أ) لما كانت السعة المكافئة للمتسعتين المتصلتين على التوالي $1{\cdot}33\ \mu F$ والفولتية الكلية المسلطة عليهما $150\ v$. لذا يمكن حساب الطاقة المخزنة فيهما طبقا للعلاقة (16 – 5) وبهذا ينتج

$$U = \frac{1}{2}\ CV^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 1{\cdot}33 \times 10^{-6} \times (150)^2$$

$$= 15{\cdot}0 \times 10^{-3}\ J$$

(ب) بعد عزل المتسعتين واعادة ربطهما على التوازي تصبح السعة المكافئة للمجموعة $6\mu F$. أما الفولتية عبر المتسعتين فتصبح $66{\cdot}7\ v$. وبهذا يمكننا ان نجد الطاقة المخزنة في المتسعتين وفقاً للعلاقة نفسها فينتج

$$U' = \frac{1}{2}\ C'V'^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 10^{-6} \times (66{\cdot}7)^2$$

$$= 13{\cdot}3 \times 10^{-3}\ J$$

ونلاحظ من هذه النتيجة أن الطاقة المختزنة في المتسعتين قد نقصت عما كانت عليه قبل اعادة ربطهما. ان سبب ذلك يعود الى الطاقة الحرارية المتولدة في اسلاك التوصيل [illegible] الشحنات واعادة توزيعها على المتسعتين.

مثال 11.

سلط فرق جهد قدره 120 V على متسعة سعتها $8.0\ \mu F$. وبعد أن شحنت المتسعة عزلت عن مصدر الشحن، وربطت على التوازي بمتسعة اخرى غير مشحونة سعتها $4.0\ \mu F$ أحسب:

(أ) فرق الجهد وشحنة كل من المتسعتين بعد ربطهما.
(ب) الطاقة المختزنة في المتسعة الاولى قبل ربطها بالمتسعة الثانية.
(جـ) الطاقة المختزنة في المتسعتين بعد ربطهما.

الحـــل

(أ) نحسب اولاً الشحنة التي اكتسبتها المتسعة الاولى عند شحنها فنحصل على

$$q = C_1 V = 8 \times 120 = 960\ \mu C$$

وهي الشحنة نفسها التي ستتوزع على كلا المتسعتين بعد ربطهما على التوازي. لكن السعة المكافئة لهتين المتسعتين تساوي

$$C = C_1 + C_2 = 8 + 4 = 12\ \mu F$$

عندئذ يصبح فرق الجهد عبر المجموعة

$$V' = \frac{q}{C} = \frac{960}{12} = 80\ V$$

وهذا يساوي فرق الجهد عبر أي من المتسعتين

والآن يمكن بسهولة حساب الشحنة التي تكتسبها كل متسعة من

$$q_1 = C_1 V' = 8 \times 80 = 640\ \mu C$$

$$q_2 = C_2 V' = 4 \times 80 = 320\ \mu C$$

(ب) أما الطاقة المختزنة في المتسعة الأولى فيمكن حسابها من العلاقة (16-5) فينتج

$$U = \frac{1}{2} C_1 V_1^2$$
$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 10^{-6} \times (120)^2 = 57.7 \times 10^{-3}\ J$$

(ج) كما يمكن حساب الطاقة المختزنة في المجموعة المكونة من المتسعتين بعد توصيلهما من العلاقة نفسها فينتج

$$U = \frac{1}{2} \times 12 \times 10^{-6} \times (80)^2 = 38.4 \times 10^{-3}\ J$$

كيف تعلل اذن هذا النقص في الطاقة المختزنة

مثال 12

متسعة ذات لوحين متوازيين مساحتها A والمسافة الفاصلة بين لوحيها d . شحنت ببطارية فاكتسبت فرق جهد قدره V . ثم عزلت من البطارية وأدخل فيها لوح عازل سمكه d وسماحيته النسبية K . اوجد الطاقة المختزنة في المتسعة قبل ادخال اللوح العازل وبعده .

الحـــل

بأستخدام المعادلة (16 – 5) يمكننا أن نجد الطاقة المختزنة قبل ادخال اللوح العازل .

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

لـكن

$$C = \frac{\varepsilon_o A}{d}$$

لذا

$$U = \frac{\varepsilon_o A V^2}{2 d}$$

ان شحن المتسعة يجعلها تكتسب شحنة قدرها

$$q = CV = \frac{\varepsilon_o A V}{d}$$

والواقع ان أدخال اللوح العازل في المتسعة سوف لن يؤثر على قيمة هذه الشحنة حيث تبقى ثابتة مادامت المتسعة معزولة عن البطارية .

أما سعة المتسعة فمن الطبيعي ان تزداد K من المرات فتصبح

$$C' = \frac{\varepsilon_o A}{d}$$

والآن يصبح بالأمكان ايجاد الطاقة المخزنة في المتسعة بعد ادخال اللوح العازل وذلك بالتعويض عن q وC' في العلاقة

$$U' = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\cancel{\varepsilon_o} \cancel{A} V}{d} \right)^2 \times \frac{d}{\cancel{\varepsilon_o} K \cancel{A}}$$

$$= \frac{\varepsilon_o A V^2}{2dK}$$

وبملاحظة هذه النتيجة يتضح ان ادخال اللوح العازل قد أدى الى حدوث نقصان في الطاقة المختزنة بعامل قدره $\left(\frac{1}{K} \right)$ فكيف حدث هذا ياترى ؟

ان الشغل اللازم لأدخال اللوح العازل قد بذل على حساب الطاقة المخزونة في المتسعة . وهذا يعني أن ألشغل المبذول يعد شغلاً سالباً اذ يندفع اللوح من تلقاء نفسه داخل المتسعة بفعل التجاذب بين الشحنات على لوحي المتسعة والشحنات المحتثة على وجهي العازل كما سيتبين في الفصل القادم .

5 – 7 قوة التجاذب بين لوحي المتسعة

من الممكن حساب قوة التجاذب بين لوحي متسعة تحمل شحنة قدرها q بسهولة من الأعتبارات المتعلقة بالطاقة المخزونة فيها . لنفرض ان مساحة لوح المتسعة A والمسافة

الفاصلة بين لوحيها x ومقدار القوة F . وبهذا نجد ان الشغل المنجز لأبعاد احد اللوحين خو مسافة قدرها dx يتطلب بذل شغل قدره

$$dW = F\,dx$$

وهذا يؤدي الى زيادة الطاقة المخزونة في المتسعة بمقدار dU . ولحساب هذا القدر التفاضلي من الطاقة المخزونة نحسب اولاً الطاقة الكلية المخزونة من العلاقة

$$U = \frac{1}{2}\,\frac{q^2}{C}$$

لكن

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{x}$$

لذا

$$U = \frac{1}{2}\,\frac{q^2}{\varepsilon_0 A}\,x$$

وبأخذ المشتقة نحصل على ذلك القدر التفاضلي من الزيادة في الطاقة

$$dU = \frac{1}{2}\,\frac{q^2}{\varepsilon_0 A}\,dx$$

لكن

$$dU = dW = F\,dx$$

لذا

$$F\,dx = \frac{q^2}{2\,\varepsilon_0 A}\,dx$$

أي أن

$$F = \frac{q^2}{2\,\varepsilon_0 A} \qquad \dots (5-17)$$

أما اذا ملأ الفراغ بين لوحي المتسعة عازل سماحيته النسبية K لأصبحت قوة التجاذب بين اللوحين

$$F = \frac{q^2}{2\,\varepsilon_0 K A} \qquad (5-18)$$

مثـــال 13 .

متسعة ذات لوحين متوازيين دائريّين يفصل لوحيها زيت ذو سماحية نسبية قدرها 6 . سلط عليها فرق جهد قدره 300 v . أحسب قوة التجاذب بين اللوحين اذا علم ان المسافة الفاصلة بينهما 1 mm . وان نصف قطرهما 10 cm .

الحل

لحساب قوة التجاذب بين لوحي المتسعة ، نجد شحنة المتسعة (q) أولاً ، ثم نعوض عنها في المعادلة (18 - 5)

$$q = CV = \left(\frac{K\varepsilon_0 A}{d} \right) V$$

لذا

$$F = \frac{q^2}{2\,\varepsilon_0 K\,A}$$

$$= \left(\frac{\varepsilon_0 KA}{d} \right) V^2 \left(\frac{1}{2\varepsilon_0 KA} \right)$$

$$= \frac{\varepsilon_0 KAV^2}{2\,d^2}$$

وبالتعويض عن القيم العددية لهذه الكميات ينتج

$$F = \frac{8{\cdot}85 \times 10^{-12} \times 6 \times \pi\,(0{\cdot}1)^2 \times (300)^2}{2 \times (1 \times 10^{-3})^2}$$

$$= 7{\cdot}5 \times 10^{-2}\ \mathrm{N}$$

8 - 5 المتسعات المستخدمة في الاغراض العملية

اشرنا في البند الثالث من هذا الفصل الى حقيقة أن سعة المتسعة ذات اللوحين المتوازيين تتناسب طردياً مع مساحة اللوحين وعكسياً مع مربع المسافة بينهما . وهذا

يعني أنه اذا كان مطلوباً صنع متسعة ذات سعة كبيرة فينبغي ان يكون لوحا المتسعة كبيرين والمسافة الفاصلة بينهما صغيرة حتى ولوكانت قيمة السماحية النسبية للعازل عالية . ولهذا يتعذر عملياً استعمال متسعة من هذا النوع ، ذات سعة كبيرة . في الأجهزة الكهربائية والألكترونية نظراً لكبر حجمها .

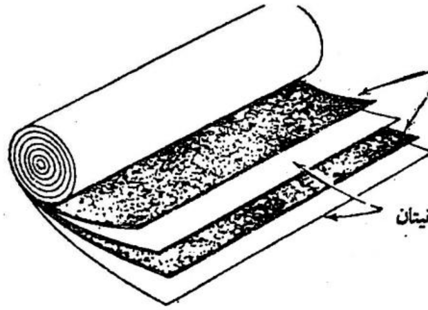
ان واقع الأستعمالات التقنية والمختبرية للمتسعات قد جعل الحاجة ماسة لصنع متسعات ذات حجم صغيروسعة كبيرة . والآن سنشير الى كيفية جعل مساحة اللوح كبيرة والمسافة الفاصلة صغيرة والسماحية النسبية عالية مع الحرص على أن يكون حجم المتسعة أصغر مايمكن . وسنلخص تكوين عدد من المتسعات الشائعة التي تتوفر فيها تلك المزايا سواء المتسعات ذات القيم الثابتة أو المتسعات التي يمكن تغيير سعتها

(أ) المتسعة الورقية

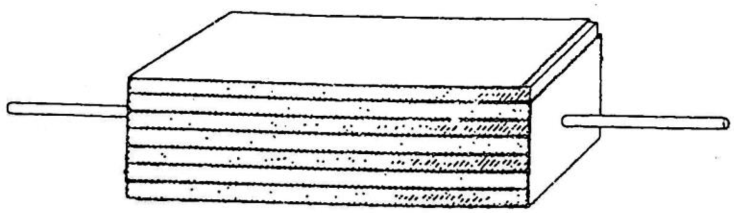
تعد المتسعات الورقية من أكثر المتسعات ذات السعة الثابتة شيوعاً في الاستخدامات العملية . يصنع هذا النوع من المتسعات من تركيب طبقة رقيقة من المعدن على وجه شريط طويل من الورق المشرب بالشمع . ثم يؤخذ شريطان مركبان بهذه الطريقة ويوضع أحدهما فوق الآخرويلفان على نفسهما كما هومبين في الشكل (5 - 9 a) وبذلك تكتسب المتسعة شكلا اسطوانياً صغيراً . وبعد ذلك تكسى بطبقة عازلة من لبلاستيك أو الشمع أو توضع داخل علبة معدنية لوقايتها من المؤثرات الخارجية وحفظها من التلف . ويترك فيها نهايتان للتوصيل الكهربائي .

ومما تجدر الاشارة اليه هو ان قيمة السعة ستبلغ ضعف ما هو عليه في حالة المتسعة ذات اللوحين المتوازيين . وذلك لان الشحنة تستقر على وجهي كل لوح معدني . ولهذ تكون المساحة الفعالة للمتسعة ضعف مساحة وجه اللوح المعدني ، أي $2A$.
فاذ فرضنا ان سمك الشريط العازل d وسماحيته النسبية K لأصبحت سعة المتسعة الورقية :

$$C = \frac{2\varepsilon_0 K A}{d} \qquad \dots (5-19)$$



(أ) متسعة ورقية



(ب) متسعة المايكا

الشكل (9 – 5)

(ب) متسعـــــة المـايكـــا

تمتاز متسعة المايكا في كونها احسن صنعا وأعقد تركيبا من المتسعة الورقية . ففي هذه المتسعة تتشابك مجموعتان من الصفائح المعدنية الرقيقة (ولنفرض ان عددها يساوي (n + 1) بصورة متبادلة ، وتربط كل مجموعة بنهاية للتوصيل كما هو مبين في الشكل (5 – 9 b) . وتتخلل الصفائح المعدنية المتشابكة ألواحا رقيقة من مادة المايكا العازلة . والتي سيبلغ عددها اقل من عدد الصفائح المعدنية بواحد اي n . ولهذا تعد هذه المتسعة بمثابة n من المتسعات المتصلة على التوازي . وبذلك تصبح سعة متسعة المايكا

$$C = \frac{nK\,\varepsilon_0\,A}{d} \qquad \dots (5-20)$$

اذ ان K ثابت العزل . وd سمك كل لوح عازل . و A مساحة وجه اللوح المعدني .

كما تمتاز متسعة المايكا بقدرتها على تحمل فولتية اعلى مما تتحمله المتسعة الورقية (في حالة تساوي سمك العازلين) وذلك لان شدة العزل للمايكا يعادل حوالي احدى عشر مرة اكثر من شدة عزل الورق .

(ج) المتسعـــة الالـــكتروليتيـــة

تمتاز المتسعات الالـكتروليتية بسعتها العالية وحجمها الصغير ، لذا تستعمل عادة في الاجهزة الالـكترونية كالراديو والتلفزيون لتسوية تموجات التيار عادة وغالبا ماتصنع هذه المتسعة بطريقة مماثلة للمتسعة الورقية اي من شريطين رقيقين طويلين من الالمنيوم .

يوضع بينهما شريط من الشاش القطنـــي المشرب بمحلـول بـورات الامـونيـوم ammonium borate ، وتلف الاشرطة على نفسها كما في المتسعة الورقية فتصبح بشكل اسطوانة صغيرة .

وعندما يربط اللوحان الموصلان بمصدر للتيار المستمر مثل البطارية تترسب طبقة مجهرية من اوكسيد الالمنيوم على اللوح الموجب . ويبلغ سمك هذه الطبقة الرقيقة جداً $10^{-7}m$. وبهذا تكون المتسعة متميزة بعازل ذي سمك مجهري وسماحية نسبية عالية تتراوح بين 8 و 10 . مما يجعل السعة عالية جدا رغم صغر حجم المتسعة .

بيد أن الغشاء العازل المتكون من اوكسيد الالمنيوم يمتاز بكونه يمتلك مقاومة عالية جدا لمرور التيار في اتجاه معين ، على حين يمتلك مقاومة واطئة في الاتجاه الاخر . ولهذا السبب يجب استخدام المتسعة الالـكتروليتية في دوائر التيار المستمر فقط بحيث يكون جهد اللوح المؤكسد دائماً أعلى من جهد اللوح الآخر . أما اذا حدث العكس ،تعرض الغشاء العازل للتلف واصبحت المتسعة غير صالحـــة للاستعمال . لهذا نجد ان المتسعـــة الالـكتروليتية تختلف عن غيرها من المتسعات بانها تحتوي على قطب موجب وآخـــر سالب .

وفضلا عما ذكر من مزايا فان المتسعة الالـكتروليتية تمتلك ميزة فريدة من نوعها تتمثل في قدرتها على اصلاح العطب بنفسها عند حدوث انهيار كهربائي للعازل نتيجة لتعرض المتسعة لفولتية اعلى من الحد المقرر لها . ويتم ذلك حال مرور التيار مرة اخرى في المتسعة حيث تترسب طبقة من الأوكسيد في المنطقة لتي اصابها التلف ، وعندئذ تصبح صالحة للاستعمال من جديد .

(د) المتسعـــة المتغيرة

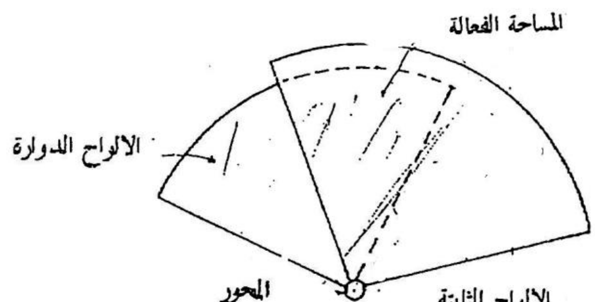
قد تدعو الحاجة في كثير من الدوائر الـكهربائية الى تغيير سعة المتسعة كما هو الحال في دائرة التنظيم في جهاز الراديو . ومن هنا برزت الأهمية لصنع متسعات من نوع خاص بحيث يمكن بسهولة تغيير سعتها .

تتكون المتسعة المتغيرة من مجموعتين متشابكتين من الالواح المعدنية . تحتـــوي المجموعة الاولى على عدد من الالواح المتماثلة المثبتة في جسم المتسعة .
واما المجموعة الثانية فتحتوي كذلك على عدد من الالواح المعدنية المتماثلة والتي ترتكز جميعها على محور عمودي عليها بحيث يمكن تدويرها حول هذا المحور بواسطة زر خاص متصل بالمحور . ولهذا تسمى الالواح الدوارة . ويستفاد من الهواء في هذه المتسعة بكونه مادة عازلة للفصل بين الالواح وبتدوير الالواح الدوارة تتداخل الواح المجموعتين بصورة متبادلة ، مما يؤدي الى تغيير المساحة التي تشتبك بها الالواح الدوارة مع الالواح الثابتة (لاحظ الشكل (10 - 5) . ونتيجة لذلك تتغير المساحة الفعالة للمتسعة ومن ثم تتغير سعتها .

واذا فرضنا ان العدد الكلي للالواح المعدنية n . فان ذلك يعني ان المتسعة متكونة من (n - 1) من المتسعات المتصلة على التوازي . وعندئذ تصبح القيمة القصوى لسعة المتسعة

$$C = \frac{(n-1)\,\varepsilon_0 A}{d} \qquad \ldots (5-21)$$

اذ ان A تمثل مساحة اي من الواح المتسعة و d المسافة الفاصلـــة بين كل لوحين متجاورين .



الشكل (10 - 5)

ومما تحدر الأشارة اليه في هذا الصدد هو ان الهواء لايعد عازلاً جيداً لهذا الغرض ، فهو تملك سماحية نسبية أقل من المواد العازلة الأخرى ($k = 1{\cdot}0006$) . هذا فضلاً عن ان فولتية الانهيار الكهربائي للهواء واطئة ، لذا ينبغي ان يكون سمك الطبقة الهوائية التي تفصل بين الألواح كبيرة في هذه المتسعة مقارنة مع سمك العازل في المتسعات الآنفة الذكر . ولهذا السبب يجعل عدد الألواح كبيراً عادة وقد يصل الى خمس وستين لوحاً . ومع ذلك تكون سعة المتسعة قليلة لاتتجاوز بضع مئات من البيكوفارادات .

مثـــال 14

متسعة ورقية سعتها $2{\cdot}0\ \mu F$ وعرض شريطها المعدني $10\ cm$ وسمك عازلها الورقي $0{\cdot}03\ mm$ ، أحسب طول كل من الشريطين الذين تتكون منهما المتسعة اذا علمت ان السماحية النسبية للورق $2{\cdot}5$

الحـــل

لحساب طول الشريط المعدني l نستخدم المعادلة ($5 - 19$) فنحصل على

$$C = \frac{2\,\varepsilon_0 k l b}{d}$$

. اذ أن مساحة وجه الشريط تساوي lb . أي حاصل ضرب طول الشريط في عرضه .

لذا

$$l = \frac{C d}{2\varepsilon_0 k b}$$

وبالتعويض عن $k = 2{\cdot}5 ,\ b = 0{\cdot}1\ m ,\ d = 3 \times 10^{-5}\ m$ ينتج

$$l = \frac{2 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^{-5}}{2 \times 8{\cdot}85 \times 10^{-12} \times 2{\cdot}5 \times 0{\cdot}1}$$

$$= 13{\cdot}6\ m$$

مثـــال 15

متسعة متغيرة تتكون من أحدى وعشرون لوحاً معدنياً ، مساحة كل لوح تساوي $15\ cm^2$ أحسب السعة القصوى لهذه المتسعة اذا علمت ان المسافة الفاصلة بين كـــل لوحين متجاورين تساوي $1{\cdot}0\ mm$

الحل

بالتعويض عن $n = 21$ و $A = 15 \times 10^{-4}\ m^2$ و $d = 1 \times 10^{-3}\ m$ فـــي المعادلة (21–5) نحصل على السعة القصوى

$$C = \frac{(n-1)\,\varepsilon_0 A}{d}$$

$$= \frac{20 \times 8{\cdot}85 \times 10^{-12} \times 15 \times 10^{-4}}{1 \times 10^{-3}}$$

$$= 266 \times 10^{-12}\ F$$

$$= 266\ \ pF$$

تمرينات

5 - 1 احسب السعة الكهربائية للكرة الارضية باعتبارها كرة موصلة نصف قطرها 6400 km

(712 μF)

5 - 2 متسعة ذات لوحين متوازيين مساحة كل لوح $100\ cm^2$ والمسافة الفاصلة بين لوحيها 1.0 mm شحنت بشحنة قدرها $5.0 \times 10^{-10} C$. أحسب

(أ) سعة المتسعة اذا كان العازل هواءً .

(ب) فرق الجهد بين لوحي المتسعة .

(88.5 pF , 5.65V)

5 - 3 اذا وضع شمع ذو سماحية نسبية قدرها 4 بين لوحي المتسعة في المسألة السابقة ، فكم تصبح (أ) قيمة السعة و (ب) قيمة فرق الجهد ؟

(354 pF , 1.41 V)

5 - 4 متسعة اسطوانية مكونة من اسطوانتين يفصلهما الهواء ، أحسب سعة المتسعة اذا علمت ان قطر الاسطوانة الداخلية 5.0 mm وقطر الأسطوانة الخارجية 12 mm وطول المتسعة 75 cm

(48 pF)

5 - 5 احسب سعة متسعة كروية مكونة من كرة نصف قطرها 9cm وقشرة كروية نصف قطرها 10 cm يفصلها الهوا

5 - 6 قابلو بحري طوله 3500 km مكون من سلك قطره 0.50 cm محاط بعازل سمكه 0.50 cm وسماحيته النسبية 4.0 أحسب سعة القابلو .

(708 μF)

5 - 7 أحسب سعة متسعة مكونة من قابلو محوري طوله 5.0 km اذا علمت ان قطر الموصل الداخلي 1.0 cm وقطر الموصل الخارجي 2.4 cm وأن السماحية النسبية للعازل الفاصل بينهما 4.0 .

(1.27 μF)

5 - 8 لوحان متوازيان يفصلهما لوح عازل من المايكا سمكه 0.05 mm فاذا سلط عليها فرق جهد قدره 100 V . احسب الشحنة التي يكتسبها كل لوح علماً بان السماحية النسبية للمايكا 6 ومساحة اللوح تساوي $200\ mm^2$

(4.25 μC)

5 - 9 لوحان متوازيان مساحة كل منهما متراً مربعاً واحداً يفصل أحدهما عن

الآخر لوح من المايكا سماحيته النسبية 6 . فاذا شحن اللوحان بشحنتين متساويين ومتعاكستين فما اقصى شحنة يمكن أن يكتسبها كل لوح؟ علما ان شدة عزل المايكا تساوي 40 kV / mm .

(2.12×10^{-3} C)

5 – 10 متسعة ذات لوحين متوازيين المسافة بين لوحيها d وسعتها C . ادخل لوح موصل معزول بين لوحيها سمكه t . أحسب مقدار ماتؤول اليه سعة هذه المتسعة .

5 – 11 تكتسب متسعة شحنة قدرها 6×10^{-3} C عندماترتبط بمصدر شحن . أما اذا وصلت على التوالي بمتسعة اخرى سعتها 3 μF فانها تكتسب شحنة قدرها 1×10^{-3} C عندما تربط المتسعتان بالمصدر نفسه . أحسب

(أ) سعة المتسعة

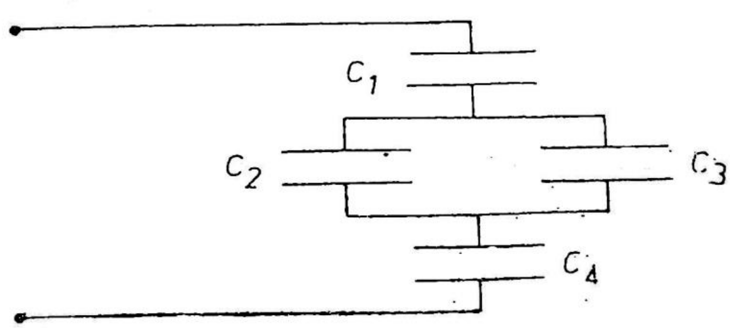
(ب) فولتية مصدر الشحن .

(15 μF , 400 V)

5 – 12 شحنت متسعة سعتها 10 μF وذلك بتسليط فرق جهد قدره 45 V عليها . ثم عزلت عن مصدر الشحن وربطت على التوازي بمتسعة اخرى غير مشحونة سعتها 5 μF احسب فرق جهد وشحنة كل من المتسعتين .

(30 V , 150 μC , 300 μC)

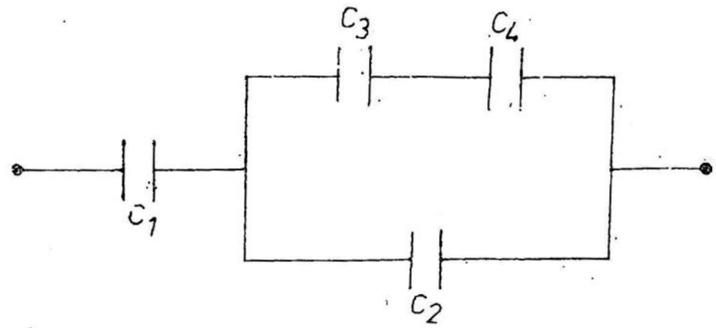
5 13 احسب السعة المكافئة لمجموعة المتسعات المبينة في الشكل (5 – 11) . علما بأن $C_3 = 10\ \mu F$, $C_2 = 2\ \mu F$, $C_1 = 8\ \mu F$, $C_4 = 5\ \mu F$



الشكل (5 - 11)

5 - 14 احسب السعة المكافئة لمجموعة المتسعات المبينة في الشكل (5 - 12) . علما بان $C_3 = 3\ \mu F, C_2 = 2\ \mu F, C_1 = 1\ \mu F, C_4 = 4\ \mu F$

($0{\cdot}8\ \mu F$)



الشكل (5 - 12)

5 - 15 أحسب الطاقة المخزونة في مجموعة المتسعات في المسألة السابقة ، اذا علمت أن فرق الجهد بين طرفي هذه المجموعة هو $200\ V$.

($1{\cdot}6 \times 10^{-2}\ J$)

5 - 16 أحسب (أ) الشحنة ، (ب) فرق الجهد ، (جـ) الطاقة المخزونة ، لكل من المتسعات الأربع في المسألة (5 - 13) ، اذا علم ان فرق الجهد بين طرفي مجموعة المتسعات هو $100\ V$

5 - 17 متسعة مشحونة سعتها $2\ \mu F$ وفرق جهدها $4V$ ، ربطت على التوازي مع متسعة أخرى سعتها $4\ \mu F$ وفرق جهدها $2\ V$.

(أ) أحسب مقدار مايؤول اليه فرق جهد كل من المتسعتين بعد ربطهما .
(ب) أحسب الطاقة الكلية قبل ربط المتسعتين وبعده .
(جـ) كيف تعلل قانون حفظ الطاقة في هذه الحالة ؟

5 - 18 متسعة ذات لوحين متوازيين . سعتها C_0 ، شحنت بواسطة بطارية حتى أصبح فرق جهدها V_0 ، ثم عزلت عن البطارية وأدخل لوح عازل سمكه مساو للمسافة بين لوحيها . (أ) أحسب الفرق في الطاقة المخزونة في المتسعة قبل وبعد ادخال العازل . (ب) كيف تفسر هذا الفرق على ضوء قانون حفظ الطاقة ؟

$$\left(C_0 V_0^2 \ \frac{k-1}{2k} \right)$$

5 - 19 متسعة مشحونة ذات لوحين متوازيين مساحتها $100\ cm^2$ والمسافة بين لوحيها $2\ mm$ وفرق الجهد بين طرفيها $200\ V$. ادخل لوح موصل معزول بين لوحي المتسعة سمكه $1\ mm$. أحسب

(أ) سعة المتسعة قبل وبعد ادخال اللوح الموصل .
(ب) المخزونة قبل وبعد ادخال اللوح الموصل .
(ج) الشغل الذي يبذله عامل خارجي لادخال اللوح الموصل .

($4{\cdot}42 \times 10^{-11}$ F, $8{\cdot}85 \times 10^{-11}$ F ; $8{\cdot}85 \times 10^{-7}$ J, $4{\cdot}42 \times 10^{-7}$ J ;
$- 4{\cdot}43 \times 10^{-7}$ J)

5 - 20 ربطت متسعتان سعتهما $0{\cdot}3\ \mu F$ و $0{\cdot}5\ \mu F$ على التوازي ثم شحنتا حتى صارت الشحنة الكلية $200\ \mu C$. احسب
(أ) سعة وجهد المجموعة
(ب) شحنة كل متسعة

($0.8\ \mu F$, $250 V$; $125\ \mu C$, $75\ \mu C$)

5 - 21 متسعة سعتها $2\ \mu F$ شحنت حتى صار فرق الجهد بين طرفيها $50\ V$. ثم شحنت متسعة اخرى سعتها $4\ \mu F$ حتى أصبح فرق الجهد بين طرفيها $100\ V$. فاذا وصلت المتسعتان على التوازي أحسب
(أ) الشحنة الكلية وفرق جهد المجموعة .
(ب) الشحنة التي تكتسبها كل متسعة .
(ج) الطاقة الكلية المختزنة في المتسعتين بعد توصيلهما .
(د) الطاقة الكلية المختزنة في المتسعتين قبل توصيلهما .

($500\ \mu C$, 83.3 V ; $167\ \mu C$, $333\ \mu C$ $2{\cdot}08 \times 10^{-2}$ J ;
$2{\cdot}25 \times 10^{-2}$ J)

5 - 22 ثلاث متسعات متماثلة سعة كل منها $120\ pF$. شحنت حتى صار فرق جهد كل منها $500\ V$. ثم وصلت على التوالي . احسب
(أ) السعة المكافئة للمجموعة .
(ب) فرق الجهد بين طرفي المجموعة .
(ج) شحنة كل متسعة .

(د) الطاقة المختزنة في المجموعة

ب ($40\ pF$ ، $1.5\ kV$ ، $6 \times 10^{-7}\ C$ ؛ $4.5 \times 10^{-4}\ J$)

كرة موصلة نصف قطرها R موضوعة في الفراغ تحمل شحنة قدرها Q احسب الطاقة الكهروستاتيكية الكلية المختزنة في الفضاء المحيط بها . ملاحظة : استعمل المعادلة (16 - 5) .

تتكون متسعة مايكا من خمسة عشر لوحاً معدنياً مساحة كل لوح تساوي $24\ cm^2$ تفصلهما الواح من المايكا سمك كل لوح $0.15\ mm$ احسب سعة المتسعة اذا علمت ان السماحية النسبية للمايكا 6 .

($11.9 \times 10^{-9}\ F$)

5 - 25 تحتوي متسعة مايكا على ثلاثين لوحاً متساوي السمك من المايكا . فاذا علم ان سعة المتسعة $0.05\ \mu F$ ومساحة لوحها المعدني $10\ cm^2$ والسماحية النسبية لعازلها 6.5 . احسب سمك كل لوح من المايكا .

($0.035\ mm$)

5 - 26 متسعة ورقية مكونة من شريطين معدنيين طول كل منهما $30\ m$ وعرضه $2\ cm$ وشريط عازل سمكه $0.1\ mm$ وسماحيته النسبية 2.2 . (أ) احسب سعة المتسعة . (ب) ما أقصى فرق جهد يمكن تسليطه على هذه المتسعة اذا علم ان شدة العزل تساوي $50 \times 10^6\ V/m$ ؟

($0.234\ \mu F$ ؛ $5000\ V$)

5 - 27 احسب عدد الالواح المعدنية وعدد الواح المايكا التي تحتويها متسعة مايكا سعتها $0.331\ \mu F$ اذا علم ان مساحة اللوح المعدني $100\ cm^2$ وسمك اللوح العازل $0.318\ mm$ وسماحيته النسبية 6 ما قيمة الطاقة المختزنة في هذه المتسعة عندما يسلط عليها فرق جهد قدره $500\ V$ ؟

(199 ، 198 ؛ $41.4 \times 10^{-3}\ J$)

5 - 28 متسعة ذات لوحين متوازيين المسافة بين لوحيها $1.5\ cm$ غمرت في كحول سماحيته النسبية 26 . تم سلط عليها فرق جهد قدره $2 \times 10^4\ V$ احسب قوة التجاذب لوحدة المساحة بين لوحي المتسعة .

($204.5\ N/m^2$)

5 - 29 احسب عدد الالواح المعدنية التي تتكون منها متسعة متغيرة سعتها القصوى $663.8\ pF$. اذا علم ان مساحة اللوح $25\ cm^2$ والمسافة الفاصلة بين كل لوحين متجاورين تساوي $1\ mm$.

(31)

احمد عبد الجبار

الفصل السادس

خواص العوازل

Properties of Dielectrics

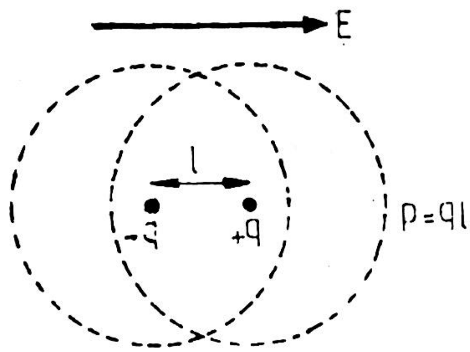
6 – 1 تأثير المجال الكهربائي على المواد العازلة

اذا وضع موصل في مجال كهربائي ، فان الالكترونات الطليقة سوف تتحرك باتجاه معاكس للمجال بفعل القوة التي يولدها المجال على هذه الالكترونات . وتستمر حركة الالكترونات هذه بتأثير المجال الخارجي ، فتتجمع عند احد طرفي الموصل تاركة فائضا من الشحنات الموجبة عند الطرف الاخر . بعد ذلك يصل الموصل الى حالة من الاتزان الكهروستاتيكي ، بحيث ان المجال الناشيء عن هذه الشحنات المحتثة المتجمعة على طرفي سطح الموصل يعاكس تماما المجال الخارجي . وبذلك تصبح محصلة المجال الكهربائي داخل الموصل صفرا .

واما المواد العازلة فكما هو معلوم لاتحتوي على الكترونات طليقة . فالسؤال اذن . ماذا يحدث عند وضع مادة عازلة في مجال كهربائي منتظم كالمجال بين لوحي المتسعة ذات اللوحين المتوازيين؟

تتكون جزيئات العازل كما هو معروف من شحنات موجبة واخرى سالبة . وكثيرا ما يكون مركز الشحنات السالبة منطبقا على مركز الشحنات الموجبة لهذه الجزيئات. ولكنه عندما تقع هذه الجزيئات تحت تأثير مجال كهربائي خارجي ، تزاح الشحنات الموجبة باتجاه المجال . بينما يحدث العكس بالنسبة للشحنات السالبة لهذه الجزيئات (لاحظ الشكل 1 – 6) ونتيجة لذلك فان مركز الشحنات الموجبة لم يعد منطبقا على مركز الشحنات السالبة بل تفصلهما مسافة صغيرة . عندئذ نقول ان الجزيئة اصبحت مستقطبة بالحث

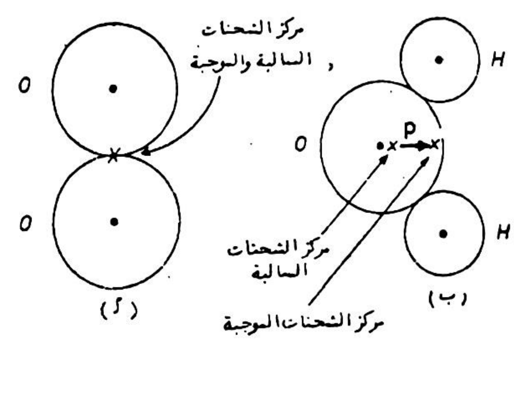
واكتسبت عزم ثنائي قطب محتث Polarized by induction . نرمز له بالحرف p ان هذا العزم المحتث يزول بزوال Induced dipole moment المجال الكهربائي الخارجي . وعند ذلك يعود مركز الشحنة السالبة لينطبق من جديد مع مركز الشحنة الموجبة .



الشكل (6-1)

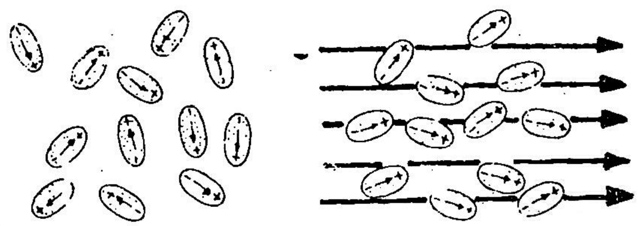
ان جزيئات العازل التي تمتاز بهذه الصفة ، هي تلك الجزيئات التي تكون بشكل متناظر بحيث ينطبق فيها مركز الشحنات السالبة مع مركز الشحنات الموجبة وهي بحالتها الطبيعية (عند عدم وجود مجال كهربائي خارجي يؤثر عليها) . وتدعى هذه الجزيئات غير قطبية Nonpolar molecules وأمثلتها كثيرة ، نذكر منها جزيئات الهايدروجين والاوكسجين (أنظر الى الشكل 2-6 أ) .

وهناك جزيئات لمواد عازلة أخرى ، يكون فيها مركز الشحنات السالبة منفصلا بصورة دائمية عن مركز الشحنات الموجبة ، فهي دائما مستقطبة وتمتلك عزم ثنائي قطب دائمي Permanent dipole moment . وتدعى هذه الجزيئات قطبية Polar . ومن امثلتها جزيئة الماء (انظر الى الشكل 2-6 ب) .



الشكل (6-2)
أ- جزيئة غير قطبية (O_2)
ب- جزيئة قطبية (H_2O)

ان عزوم هذه الجزيئات القطبية . عند عدم وقوعها تحت تأثير مجال كهربائي خارجي . تكون باتجاهات عشوائية مختلفة (أنظر الى الشكل 3 - 6 أ) . ولكنها لو تأثرت بمجال كهربائي خارجي فان العزوم سوف تحاول أن تتراصف باتجاه المجال الخارجي(الشكل 3 - 6 ب) . أما درجة هذا التراصف فتزداد بزيادة شدة المجال الكهربائي المؤثر ، كما تزداد أيضا بنقصان درجة الحرارة.وبزوال المجال الكهربائي الخارجي تعود هذه الجزيئات الى اتجاهاتها العشوائية .

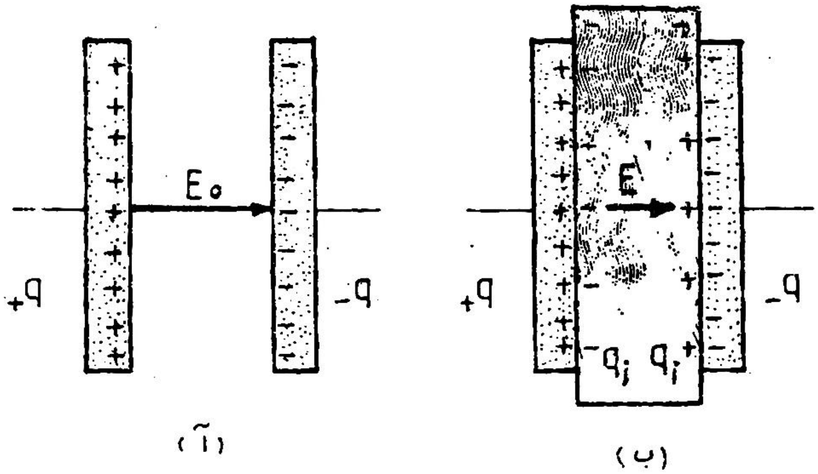


(أ) (ب)

الشكل (3 - 6)

لنستعمل المتسعة ذات اللوحين المتوازيين لتوليد مجال كهربائي منتظم . ولنفرض ان هذه المتسعة تحمل شحنة معينة قدرها q . وأن شدة المجال بين اللوحين مقداره E_0 (الشكل 4 - 6 أ) . فاذا ادخلنا لوحا عازلاً في هذا المجال ، فان جزيئات هذا العازل . سواء أكانت قطبية أم غير قطبية . سوف تتاثر بالمجال وتتراصف كما هو مبين في الشكل (3 - 6ب) . عند ذلك نقول أن العازل قد أصبح مستقطبا .

وعلى الرغم من أن شحنة العازل تبقى متعادلة كهربائيا الا أن عملية الاستقطاب هذه تسبب ظهور شحنة محتثة موجبة على سطح العازل المقابل للوح السالب وشحنة محتثة سالبة على السطح الآخر للعازل المقابل للوح الموجب (الشكل 4 - 6 ب) . ان هذه الشحنات المحتثة (Induced charges) على سطحي العازل يجب أن تكون متساوية بالمقدار ، ذلك لان شحنة العازل ككل تبقى متعادلة كما اسلفنا ، كما أنها ليست طليقة بل على العكس فهي شحنات مقيدة (Bound charges) بالجزيئات القريبة من سطح العازل . ولذلك رمزنا لها q_i تمييزا عن الشحنات الطليقة على سطح الموصل .



الشكل (4-6)

تولد الشحنات المحتثة (أو المقيدة) مجالاً كهربائياً E_i باتجاه معاكس للمجال الاصلي الناتج عن الشحنات على لوحي المتسعة . وبذلك تصبح محصلة شدة المجال داخل العازل مساوية المجموع الاتجاهي للمجالين . أي

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}_i \qquad \dots(6-1)$$

وواضح أن مقدار محصلة شدة المجال E سيكون بالتأكيد أقل من المجال الاصلي E_0 كما انها (أي المحصلة) بنفس اتجاهه ، وبذلك نستنتج انه عندما يوضع عازل في مجال كهربائي تظهر شحنات محتثة على سطحي العازل . فتعمل على اضعاف المجال الاصلي داخله .

لقد دلت التجارب على أن ادخال لوح عازل بين لوحي المتسعة يسبب تناقص فرق الجهد على الرغم من بقاء الشحنة على سطحي المتسعة ثابتة لاتتغير . وهذه النتيجة تتفق مع التفسيرات النظرية ، حيث ان ضعف المجال داخل العازل يؤدي بالتأكيد الى نقص فرق الجهد بين لوحي المتسعة المشحونة ، وذلك استنادا الى العلاقة ($V = Ed$) فلو فرضنا أن فرق الجهد بين اللوحين عندما يفصلهما الفراغ هو V_0 فان فرق الجهد بعد وضع العازل بين اللوحين سيصبح V بحيث أن

$$\frac{V_0}{V} = \frac{E_0}{E} = K \qquad \dots\dots(6-2)$$

اذ أن K تمثل السماحية النسبية للعازل (أو مايسمى ثابت العزل) ومقداره للفراغ يساوي واحد بينما للمواد العازلة يكون دائماً أكبر من واحد (للهواء $K = 1{\cdot}0006$).

ومن ذلك يتبين ان V اصغر من V_0 بمقدار K من المرات

مثــــال 1

متسعة ذات لوحين متوازيين . المسافة بين لوحيها (5 mm) ومساحة كل منهما ($1m^2$) فاذا وضع اللوحان بالفراغ وشحنا حتى أصبح فرق الجهد بينهما (2×10^4 V). أحسب (أ) السعة و(ب) شحنة كل من اللوحين و(ج) شدة المجال الكهربائي بينهما .

الحل

(أ)

$$C_0 = \varepsilon_0 A/d$$

$$= 8{\cdot}85 \times 10^{-12} \times \frac{1}{5 \times 10^{-3}}$$

$$= 1{\cdot}77 \times 10^{-9}\ F$$

$$= 1770\ pF$$

(ب)

$$q = C_0 V_0$$

$$= 1{\cdot}77 \times 10^{-9} \times 2 \times 10^4$$

$$= 3{\cdot}54 \times 10^{-5}\ C$$

(ج)

$$E_0 = \frac{V_0}{d}$$

$$= \frac{2 \times 10^4}{5 \times 10^{-3}} = 4 \times 10^6\ N/C$$

مثــــال 2

اذا عزلت المتسعة في المثال السابق عن المصدر الشاحن ووضع لوح عازل سمكه (5 mm) بين اللوحين . احسب (أ) السعة و(ب) فرق الجهد و(ج) شدة المجال داخل العازل و(د) شدة المجال الناتج عن الشحنات المحتثة . أفرض أن ثابت العزل ($K = 5$)

الحل

(أ)

$$C = K\,\varepsilon_0 \frac{A}{d} = K\,C_0$$

$$= 5 \times 1.77 \times 10^{-9} = 8.85 \times 10^{-9}\ \text{F}$$
$$= 8850\ \text{pF}$$

(ب) بما ان شحنة المتسعة q لاتتغير بوضع العازل . لذا نجد أن فرق الجهد يصبح

$$V = q / C$$

$$= \frac{3.54 \times 10^{-5}}{8.85 \times 10^{-9}} = 4 \times 10^{3}\ \text{V}$$

(جـ)

$$E = V/d$$
$$= \frac{4 \times 10^{3}}{5 \times 10^{-3}} = 8 \times 10^{5}\ \text{N/C}$$

كذلك يمكن حساب كل من V و E من المعادلة (2- 6) مباشرة .

(د) من المعادلة (1 – 6) نجد مقدار شدة المجال الكهربائي E_i الناتج عن الشحنات المحتثة عن سطحي العازل

$$E_i = E_0 - E$$
$$= 4 \times 10^{6} - 8 \times 10^{5} = 32 \times 10^{5}\ \text{N/C}$$

2 – 6 تعميم قانون كاوس لوسط عازل

سبق أن استخدمنا قانون كاوس في حالات لم تتضمن وجود مادة عازلة والآن سوف نرى كيفية تطبيق هذا القانون عندما توجد مادة عازلة . ونأخذ مثلا سهلا على ذلك وهي المتسعة ذات اللوحين المتوازيين وقد امتلأ الفراغ بين لوحيها بلوح عازل سماحيته النسبية K (انظر الى الشكل (5 – 6)

نختار سطح كاوس بشكل المستطيلات بحيث تكون قاعدتاه بنفس مساحة لـوحي لمتسعة . على أن تكون احدى قاعدتيه داخل اللوح الموصل والاخرى في في لوسط العازل كما هو مبين في الشكل . وبتطبيق قانون كاوس نجـــــــد

$$\oint \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} (q - q_i) \qquad (6 - 3)$$

حيث ان q هي الشحنة الطليقة على سطح اللوح الموصل . و q_i هي الشحنة المقيدة على سطح العازل . وبهذا فان الكمية $(q - q_i)$ تمثل مقدار لشحنة الكلية داخل سطح كاوس .

لكن التكامل السطحي لشدة المجال على سطح كاوس يساوي

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = EA$$

ومن هاتين المعادلتين نجد مقدار شدة المجال الكهربائي E داخل الوسط العازل . فينتج

$$E = \frac{q - q_i}{\varepsilon_0 A} \qquad (6-4)$$

لكن مقدار شدة المجال في الفراغ قبل وضع العازل بين لوحي المتسعة يساوي

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A} \qquad (6-5)$$

وبعد وضع العازل يصبح مقدار شدة المجال داخل العازل طبقا للمعادلة $(6-2)$

$$E = \frac{E_0}{K} = \frac{q}{K\varepsilon_0 A} \qquad (6-6)$$

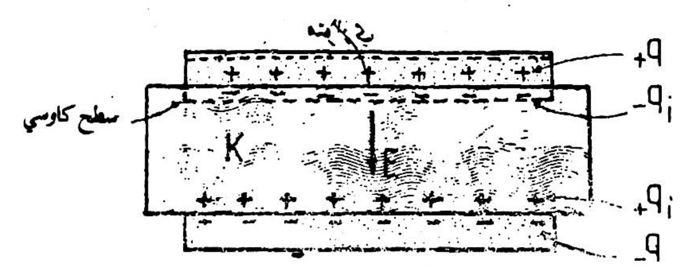
وبالتعويض عن قيمة E في المعادلة $(6-4)$ ينتج

$$\frac{q}{K\varepsilon_0 A} = \frac{q - q_i}{\varepsilon_0 A}$$

أي أن الشحنة الكلية داخل سطح كاوس تصبح

$$q - q_i = q/K \qquad (6-7)$$

وبالتعويض عن الكمية $(q - q_i)$ في المعادلة $(6-3)$ يصبح قانون كاوس



الشكل (6-5)

$$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0 K} = \frac{q}{\varepsilon} \qquad (6-8a)$$

أو

$$\oint_s K\vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (6\cdot 8b)$$

اذ ان q تمثل الشحنة الكلية الطليقة فقط ، داخل سطح كاوس. وعلى الرغم من ان اشتقاق هذا القانون كان بالاعتماد على المجال الناشيء عن لوحي متسعة مشحونة ، الا انه يمكن تعميمه ليمثل قانون كاوس الذي يطبق في حالة وجود مواد عازلة في المجـــال الـكهربائي مهما كان شكل المجال .

مثـــال 3

وضع لوحان عازلان بين لوحي متسعة ، سمك اللوح العازل الاول d_1 وسماحيته النسبية K_1 وسمك اللوح الثاني d_2 وسماحيته النسبية K_2 . المطلوب ايجاد سعة هذه المتسعة .

الحـــل

لنفرض ان مساحة لوح المتسعة A وأنها تحمل شحنة قدرها q . فان المجـــال الـكهربائي سيكون مستمراً بين اللوحين المعدنيين للمتسعة . بيد ان شدة المجال داخل اللوحين العازلين ستكون مختلفة وذلك لاختلاف سماحيتها النسبية .

ان استخدام قانون كاوس بصيغته المتمثلة في المعادلة 8a - 6 وبالطريقة ذاتها حسبما جاء في الفصل الثالث (البند الرابع د) ، وتطبيقه على السطح المغلق المبين في الشكل(6 - 6)بصورة خط متقطع سيؤدي الى الآتي

$$\oint \vec{E}_1\cdot d\vec{S} = E_1 A = \frac{q}{\varepsilon_0 K_1}$$

ومنها نحصل على شدة المجال داخل العازل الاول . اي

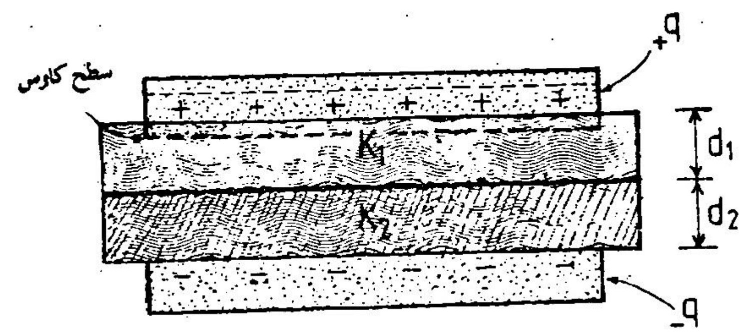
$$E_1 = \frac{q}{\varepsilon_0 K_1 A}$$

وبالطريقة نفسها يمكننا ان نحصل على شدة المجال داخل العازل الثاني

$$E_2 = \frac{q}{\varepsilon_0 K_2 A}$$

ولحساب فرق الجهد بين طرفي المتسعة نستخدم العلاقة

$$V = -\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}$$



الشكل (6 - 61)

ونجد التكامل الخطي لشدة المجال على مسار مستقيم عمودي على اللوح (اي باتجاه المجال نفسه) . وممتد من احد طرفي المتسعة الى الطرف الآخر فنحصل على

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

وبالتعويض عن قيمتي E_1 و E_2 في هذه المعادلة ينتج

$$V = \frac{qd_1}{\varepsilon_0 K_1 A} + \frac{qd_2}{\varepsilon_0 K_2 A}$$

$$= \frac{q}{\varepsilon A}\left(\frac{d_1}{K_1} + \frac{d_2}{K_2}\right)$$

لـــكن

$$C = \frac{q}{V}$$

لـذا

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{\frac{d_1}{K_1} + \frac{d_2}{K_2}} \qquad (6-9)$$

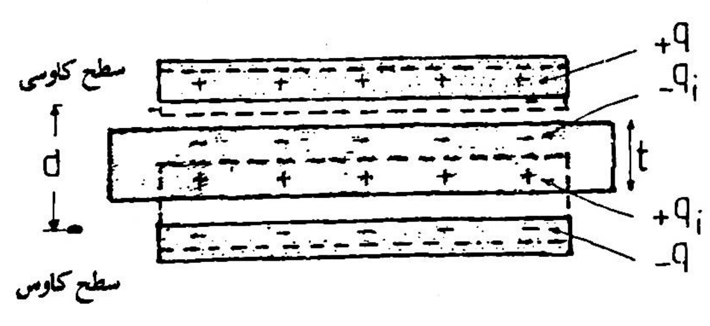
مثـــال 4

شحنت متسعة ذات لوحين متوازيين مساحتها $A = 0{\cdot}2\,m^2$ والمسافة الفاصلة بين لوحيها $d = 1{\cdot}0\,cm$ حتى صار فرق الجهد بين طرفيها $V_0 = 500V$. ثم عزلت عن مصدر الشحن ووضع في داخلها لوح عازل (كما هو مبين في الشكل) سمكه $t = 0{\cdot}5\,cm$ وسماحيته النسبية $K = 5$ احســب

(أ) شدة المجال الكهربائي في فجوة الهواء بين اللوحين .
(ب) شدة المجال الكهربائي داخل اللوح العازل .
(جـ) فرق الجهد بين طرفي المتسعة .
(د) سعة المتسعة بعد ادخال اللوح العازل .

الحـــل

(أ) لنجد أولاً قيمة الشحنة الطليقة على لوح المتسعة من العلاقة



الشكل (6 - 7)

$$q = C_0 V_0 = \frac{\varepsilon_0 A V_0}{d}$$

$$= \frac{8{\cdot}85 \times 10^{-12} \times 0{\cdot}2 \times 500}{1 \times 10^{-2}} = 8{\cdot}85 \times 10^{-8} C$$

بعد ذلك نطبق قانون كاوس بصيغته العامة المتمثلة في المعادلة (6 – 8a)

$$\oint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q}{K\varepsilon_0}$$

على السطح المغلق المبين في الجزء العلوي من الشكل (7 – 6) ، وبالطريقة ذاتها حسبما جاء في الفصل الثالث (البند الرابع د) . لكي نجد شدة المجال الكهربائي في فجوة الهواء فينتج

$$E_0 A = \frac{q}{K\varepsilon_0}$$

لكن ($K \simeq 1$) للهواء . لذا

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

$$= \frac{8{\cdot}85 \times 10^{-8}}{8{\cdot}85 \times 10^{-12} \times 0{\cdot}2} = 5 \times 10^4 \text{ N/C}$$

(ب) ولحساب شدة المجال الكهربائي داخل العازل (E) نطبق قانون كاوس نفسه على سطح كاوس (السطح السفلي في الشكل 7 – 6) فينتج

$$EA = \frac{q}{K\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 K A}$$

$$E = \frac{8.85 \times 10^{-8}}{8.85 \times 10^{-12} \times 5 \times 0.2} = 1 \times 10^{4}\ N/C$$

(جـ) يمكن حساب فرق الجهد بين طرفي المتسعة بتطبيق العلاقة

$$V = -\int \vec{E}.d\vec{l}$$

على مسار مستقيم عمودي على لوحي المتسعة وممتد من طرف لاخر . فنحصل على

$$V = E_0 (d - t) + Et$$
$$= 5 \times 10^{4} (1 - 0.5) \times 10^{-2} + 1 \times 10^{4} \times 0.5 \times 10^{-2}$$
$$= 300\ v$$

(د) وأخيراً يمكننا حساب سعة متسعة من

$$C = \frac{q}{V}$$
$$= \frac{8.85 \times 10^{-8}}{300} = 2.95 \times 10^{-10} F$$
$$= 295\ pF$$

مثـــال 5

متسعة ذات لوحين متوازيين مساحة لوحها $2m^2$ والمسافة الفاصلة بين لوحيها $2mm$. وضع بين لوحيها المعدنيين ثلاثة الواح عازلة سمكها $0.4mm$ و $0.6mm$ و $1.2mm$ ذات سماحية نسبية قدرها 6 , 3 , 2 على الترتيب . فاذا علم ان الفولتية المسلطة على المتسعة تساوي ألف فولت احسب

(أ) سعة المتسعة .

(ب) شدة المجال الكهربائي داخل كل عازل

الحـــل

(أ) طبقاً لما جاء في المعادلة (9 - 6) يمكننا أن نستنتج أن السعة في هذه الحالة ستصبح

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{\frac{d_1}{K_1} + \frac{d_2}{K_2} + \frac{d_3}{K_3}}$$

$$= \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 2}{\dfrac{0.4 \times 10^{-3}}{2} + \dfrac{0.6 \times 10^{-3}}{3} + \dfrac{1.2 \times 10^{-3}}{6}}$$

$$= 2.95 \times 10^{-8} F$$

(ب) والان نجد شحنة المتسعة

$$q = CV = 2.95 \times 10^{-8} \times 1000 = 2.95 \times 10^{-5} C$$

ثم نحسب شدة المجال داخل الالواح الثلاثة كما هو ات

$$E_1 = \frac{q}{\varepsilon_0 K_1 A}$$

$$= \frac{2.95 \times 10^{-5}}{8.85 \times 10^{-12} \times 2 \times 2} = 8.33 \times 10^5 N/m$$

$$E_2 = \frac{2.95 \times 10^{-5}}{8.85 \times 10^{-12} \times 3 \times 2} = 5.55 \times 10^5 N/m$$

$$E_3 = \frac{2.95 \times 10^{-5}}{8.85 \times 10^{-12} \times 6 \times 2} = 2.78 \times 10^5 N/m$$

مثـــال 6:

متسعة ذات لوحين متوازيين مساحة كل من لوحيها A والمسافة الفاصلة بينهما d . تحتوي على لوح عازل سماحيته لنسبية K وسمكه t (لاحظ الشكل 7 – 6) جد تعبيراً رياضياً لسعة المتسعة .

الحـــل

لنفرض ان المتسعة تحمل شحنة قدرها q . عندئذ يمكنتنا ان نجد شدة المجال الكهربائي داخل فجوة الهواء (E_0) وداخل العازل (E) بتطبيق قانون كاوس بصيغته العامة وبالطريقة نفسها المذكورة في المثال الثالث فنحصل على

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 K A}, \quad E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

ثم نجد فرق الجهد بين طرفي المتسعة من المعادلة (3 - 4) لتي ستؤول الى الآتي

$$V = E_0 (d - t) + Et$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_0 A} (d - t) + \frac{q}{\varepsilon_0 AK} t$$

$$= \frac{q}{K \varepsilon_0 A} \left[K (d - t) + t \right]$$

لذ تصبح السعة

$$C = \frac{q}{V} = \frac{K \varepsilon_0 A}{K (d - t) + t} \qquad \ldots (6 - 10)$$

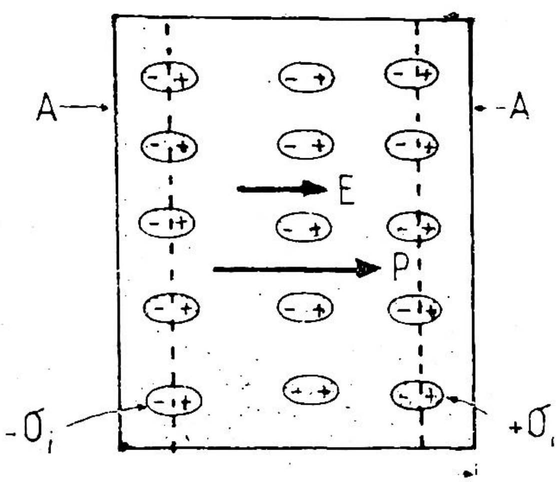
3 - 6 متجه الاستقطاب The polarization vector

بينا في البند (1 - 6) نه اذا تعرض وسط عازل الى مجال كهربائي خارجي فان جزيئاته تصبح مستقطبة وتمتلك عزماً كهربائياً . كما تظهر شحنات محتثة على سطح العازل تسمى أحياناً شحنات الأستقطاب (Polarization charges) . ولمعرفة مدى ستقطاب جزيئات العازل تستخدم كمية متجهة ندعوها بالاستقطاب (Polarization) ونرمز لها بالحرف P ويعرف الأستقطاب بدلالة العزم الكهربائي للجزيئات الثنائية القطب المحتثة ، فهو عزم ثنائي القطب المحتث لوحدة الحجوم من العازل . فلو فرضنا ان عدد لجزيئات القطبية لوحدة الحجوم من لوسط العازل هو (m) . وان لعزم الكهربائي لكل ثنائي قطب هو p ، وهو كمية متجهة). فان متجه لاستقطاب يصبح حسب هذا التعريف

$$\vec{P} = m \vec{p} \qquad \ldots (6 - 11)$$

وقد تختلف قيم متجه لأستقطاب من نقطة الى اخرى في الوسط العازل. ولكنه في الحالة الخاصة للوح العازل الموضوع في مجال منتظم . ولمعظم المواد العازلة. تكون قيم الأستقطاب متساوية في جميع نقاط الوسط العازل (لاحظ الشكل 8 - 6)

ولما كان عزم ثنائي القطب p يعرف بحاصل ضرب أحدى شحنتيه في المسافة بينهما . فأن اللوح العازل المبين في الشكل يمكن أعتباره كثنائي قطب كبير . وأن العزم الكهربائي لهذا الثنائي يصبح $(\sigma_i A l)$. حيث أن σ_i هي الكثافة السطحية للشحنة المحتثة (شحنة الأستقطاب) . و A مساحة سطح اللوح و l هي سمك العازل ، أو المسافة التي التي تفصل الشحنات المحتثة على سطحي اللوح) . ولما كان حجم اللوح هو $(A l)$ نجد ان مقدار متجه الأستقطاب في هذه الحالة يكون



الشكل (8 – 6) لوح عازل مستقطب

$$P = \frac{\sigma_i A l}{A l} = \sigma_i \qquad \ldots (6-12)$$

أي أن مقدار متجه الأستقطاب يساوي في هذه الحالة الخاصة الكثافة السطحية للشحنة المحتثة على سطح العازل وبصورة أعم فأن الكثافة السطحية للشحنة المحتثة عند أي نقطة على سطح وسط عازل مستقطب تساوي مركبة العمودية لمتجه الاستقطاب على ذلك السطح . أي أن

$$\sigma_i = \vec{P} \cdot \hat{n} \qquad \ldots (6-13)$$

حيث تمثل $\hat{n}$ وحدة المتجه (Unit vector) العمودي على سطح العازل .

لاحظ ان اتجاه $\underline{P}$ هو من الشحنات المحتثة السالبة الى الشحنات المحتثة الموجبة وبنفس اتجاه عزم ثنائي القطب $\bar{p}$. وان وحدة الأستقطاب حسب النظام العالمي للوحدات هي كولوم / متر^2 ورمزها (C/m^2)

4 – 6 متجه الازاحة الكهربائية The displacement vector

وضحنا في لبند (1 – 6) ان الشحنات المحتثة q_i على سطحي اللوح العازل الموضوع داخل المتيبعة تولد مجالاً كهربائيا E_i بأتجاه معاكس للمجال الأصلي $\bar{E}_0$ الناتج عن الشحنات الطليقة على لوحي المتسعة ، ونتيجة لذلك يصبح مقدار شدة المجال داخل العازل وفق المعادلة (4 – 6) الآتي

$$E = \frac{q - q_i}{\varepsilon_0 A} = \frac{\sigma - \sigma_i}{\varepsilon_0} \qquad \ldots (6-14)$$

حيث σ_i هي الكثافة السطحية للشحنات المحتثة و σ هي الكثافة السطحية للشحنات الطليقة . وبالتعويض عن σ_i بما تساويه من المعادلة (12 – 6) نجد انه يصبح بالأمكان كتابة المعادلة (14 – 6) بالشكل الآتي

$$\sigma = \varepsilon_0 E + P \qquad \ldots (6-15)$$

ولو تأملنا الجهة اليمنى من هذه المعادلة لتبين ان الحد الأول يحتوي على مقدار محصلة شدة المجال داخل العازل الناشيء عن الشحنات الطليقة والمقيدة معاً اما الحد الثاني فيمثل مقدار متجه الاستقطاب الناتج عن الشحنات المقيدة فقط . ومن هنا تتضح اهمية ادخال متجه جديد يرتبط مقداره بالشحنات الطليقة على لوحي المتسعة (ويرمز له بالحرف $\underline{D}$) بحيث أن

$$D = \varepsilon_0 E + P \qquad \ldots (6-16)$$

ويدعى هذا المتجه بالازاحة Displacement ويختلف كل الاختلاف عن مفهوم الازاحة في الميكانيك ومقداره يساوي الكثافة السطحية للشحنات الطليقة . اي

$$D = \sigma \quad \ldots (6-17)$$

وواضح من هذه المعادلة ان وحدة الازاحة هي نفس وحدة الكثافة السطحية للشحنات (كولوم متر^2) ولما كانت الكميات E و P و D هي كميات اتجاهية . يمكننا كتابة المعادلة (6 - 16) بشكل اتجاهي أعم

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \ldots (6-18)$$

اذ ليس من الضروري ان يكون متجه الأستقطاب بنفس اتجاه المجال. الا أنه سنتناول فقط العوازل الاعتيادية * (Ordinary Dielectrics) التي تكون فيها الكميات الثلاثة باتجاه واحد .

وهناك علاقة أخرى بين D و E يمكن استنتاجها من المعادلة

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 KA} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 K} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

فبالتعويض عن σ من المعادلة (6 - 17) تصبح هذه العلاقة بالشكل الأتجاهي الآتي :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 K\vec{E} = \varepsilon \vec{E} \quad \ldots (6-19)$$

والآن يصبح بوسعنا الأستفادة من هذه المعادلة بكتابة قانون كاوس عند تطبيقه على وسط عازل (المتمثل في المعادلة 6 - 8 b) بدلالة الازاحة كما هو آت

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \quad \ldots (6-20)$$

حيث تمثل q الشحنات الطليقة فقط . أما الشحنات المحتثة (المقيدة) فلن تؤخذ بالأعتبار عند أستخدام هذا القانون

ومن السهل أيضاً أستنتاج علاقة اتجاهية اخرى بين P و E وذلك بحذف D من المعادلتين (6 - 18) و (6 - 19) فنحصل على

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (K - 1)\vec{E} \quad (6-21)$$

* وهي العوازل التي تمتاز بكونها [Homogeneous, isotropic, and linear]

ومن هذه العلاقة يتبين بوضوح ان مقدار متجه الأستقطاب في الفراغ (حيث $K = 1$) هو صفر .

ان الأستقطاب يعتمد على كل من شدة المجال الكهربائي وعلى طبيعة العازل. ففي العوازل الأعتيادية يكون متجه الأستقطاب بنفس اتجاه شدة المجال (كما هو واضح من المعادلة (6 – 21) . واما مقداره فيتناسب طردياً مع مقدار شدة المجال . وعليه يمكننا كتابة المعادلة (6 – 21) بصيغة أخرى هي

$$\vec{P} = \chi \vec{E} \qquad \ldots (6-22)$$

حيث يعبر الحرف الأغريقي χ عن خاصية أخرى للعازل يطلق عليها أسم قابلية التكهرب (susceptibility) للعازل . ومقدارها يساوي

$$\chi = \varepsilon_0 (K - 1) = \varepsilon - \varepsilon_0 \qquad \ldots (6-23)$$

ووحدتها هي نفس وحدة السماحية . ويتبين من هذه العلاقة ان قابلية التكهرب تساوي صفراً للفراغ ، على حين تتراوح قيمتها بين الصفر والواحد للغازات بشكل عام (تحت الظروف القياسية) . واما للمواد الصلبة والسائلة فتكون قيمتها أكبر من الواحد (لاحظ الجدول 6 – 1) .

مثـــال 7 :

في المثال الرابع أحسب قيمة كل من P ، D (أ) في العازل و (ب) في فجـوة الهواء بين العازل واللوحين ، مستخدما القيم نفسها التي وردت في ذلك المثال وهي

$$q = 8{\cdot}85 \times 10^{-8}\,C,\ K = 5,\ t = 0{\cdot}5\,cm,\ d = 1\,cm,\ A = 0{\cdot}2\,m^2$$
$$E = 1 \times 10^4\,V/m,\ E_0 = 5 \times 10^4\,V/m$$

(انظر الى الشكل 6 – 7) .

الحـــل

(أ) نحسب قيمة D داخل العازل من المعادلة (6 – 19) فنحصل على

$$D = \varepsilon_0 K E$$
$$= 8{\cdot}85 \times 10^{-12} \times 5 \times 10^4$$
$$= 44{\cdot}25 \times 10^{-8}\,C/m^2$$

كما يمكن كذلك حسابها من المعادلة $(6-17)$
ولحساب قيمة P نستخدم معدلة $(6-21)$

$$P = \varepsilon_0 (K-1)E$$
$$= 8.85 \times 10^{-12}(5-1) \times 10^4$$
$$= 35.4 \times 10^{-8}\ C/m^2$$

(ب) كما نستخدم المعادلة $(6-19)$ لحساب الازاحة في الهواء . علماً بأن ثابت العازل للهواء يساوي وحد تقريب .

$$D_0 = K\varepsilon_0 E_0$$

$$= 1 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 5 \times 10^4$$
$$= 44.25 \times 10^{-8}\ C/m^2$$

وكذلك نستعمل المعادلة $(6-21)$ لحساب الأستقطاب

$$P_0 = \varepsilon_0 (K-1)E_0 = 0$$

اذن $K = 1$

ويلاحظ من هذه النتائج ان قيمة الازاحة متساوية في داخل العازل وخارجه . وأما قيمة الأستقطاب فتكون صفراً خارج العازل وكذلك يتبين من هذه النتائج ان تحقيق المعادلة $(6-16)$ لكلا الوسطين . الوسط العازل وفجوة الهواء . قد اصبح سراً جلياً. نتركه للطالب ليقوم به بنفسه .

مثـــال 8

في المثال الخامس أحسب قيم كل من الازاحة والأستقطاب داخل الألواح العازلة لثلاثة ، وكذلك فرق الجهد عبر كل لوح . مستخدما القيم نفسها التي وردت في ذلك المثال ، أي :

$$K_3 = 6, K_2 = 3, K_1 = 2\ \ d_3 = 1.2\ mm, d_2 = 0.6\ mm, d_1 = 0.4\ mm$$
$$E_2 = 5.55 \times 10^5\ v/m, E_1 = 8.33 \times 10^5\ v/m, q = 2.95 \times 10^{-5}\ C,$$
$$A = 2\ m^2\ E_3 = 2.78 \times 10^5\ v/m$$

الجدول (6-1)

قابلية التكهرب في درجة حرارة الغرفة

Electric Susceptibility at Room Temperature

Substance	χ_e	Substance	χ_e
Solids		*Gases**	
Mica	5	Hydrogen	5.0×10^{-4}
Porcelain	6	Helium	0.6×10^{-4}
Glass	8	Nitrogen	5.5×10^{-4}
Bakelite	4.7	Oxygen	5.0×10^{-4}
Liquids		Argon	5.2×10^{-4}
Oil	1.1	Carbon dioxide	9.2×10^{-4}
Turpentine	1.2	Water vapor	7.0×10^{-3}
Benzene	1.84	Air	5.4×10^{-4}
Alcohol (ethyl)	24	Air (100 atm)	5.5×10^{-2}
Water	78		

* At 1 atm and 20°C.

الحـــل

ان أسهل طريقة لحساب الازاحة في هذه الحالة هي باستخدام المعادلة (17 - 6)

حيث نجد ان

$$D_1 = D_2 = D_3 = \sigma = \frac{q}{A}$$

$$= \frac{2{\cdot}95 \times 10^{-5}}{2}$$

$$= 1{\cdot}48 \times 10^{-5}\ C/m^2$$

ويمكن كذلك حساب الازاحة من المعادلة (19 – 6) التي ستعطي النتائج نفسهـا بطبيعة الحال . وسنترك للطالب تحقيق ذلك بنفسه .
ولحساب الأستقطاب نستعمل المعادلة (21 – 6) فنحصل على

$$P_1 = \varepsilon_0 (K_1 - 1) E_1$$

$$= 8.85 \times 10^{-12} (2 - 1) \times 8.33 \times 10^{5}$$

$$= 73.8 \times 10^{-7}\ C/m^2$$

$$P_2 = 8.85 \times 10^{-12} (3 - 1) \times 5.55 \times 10^{5}$$

$$= 98.2 \times 10^{-7}\ C/m^2$$

$$P = 8.85 \times 10^{-12} (6 - 1) \times 2.78 \times 10^{5}$$

$$= 123 \times 10^{-7}\ C/m^2$$

كما يمكن حساب الأستقطاب من المعادلة(16 – 6) كذلك .
وأخيراً يحسب فرق الجهد عبر كل من الألواح العازلة لثلاثة من العلاقة

$$V = E\,d$$

فينتج لدينا

$$V_1 = E_1 d_1 = 8.33 \times 10^{5} \times 0.4 \times 10^{-3} = 333\ V$$

و

$$V_2 = E_2 d_2 = 5.55 \times 10^{5} \times 0.6 \times 10^{-3} = 333\ V$$

و

$$V_3 = E_3 d_3 = 2.78 \times 10^{5} \times 1.2 \times 10^{-3} = 334\ V$$

مثال 9

لوحان معدنيان متوازيان مساحة كل منهما متراً مربعاً واحداً ، وضعت عليهما شحنتان متعاكسـان مقدار كـل منهمـا $30\ \mu C$. فاذا ادخـل لوح عـازل سماحيتـه $15 \times 10^{-12}\ C^2 N^{-1} m^{-2}$ بين اللوحين المعدنين بحيث ملأ الفراغ بينهما ، احسب (أ) الازاحة و(ب) شدة المجال الكهربائي في العازل و(ج) الكثافة السطحية للشحنة المحتثة على وجه العازل و(د) شدة المجال داخل العازل الناشيء عن الشحنات الطليقة فقط و (هـ) شدة المجال الناشيء عن الشحنات المقيدة فقط .

الحـــل

(أ) لحساب الازاحة نستعمل المعادلة (17 – 6) فينتج

$$D = \sigma = \frac{q}{A} = 30 \times 10^{-7}\,C/m^2$$

(ب) وتستعمل المعادلة (19 – 6) لحساب محصلة شدة المجال داخل اللوح العازل

$$E = \frac{D}{K\,\varepsilon_0} = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{30 \times 10^{-6}}{15 \times 10^{-12}} = 2 \times 10^{6}\,N/C$$

(جـ) اما الكثافة السطحية للشحنة المحتثة فيمكن حسابها من المعادلتين (12 – 6) و (21 – 6) كماياتي

$$\sigma_i = P = \varepsilon_0 (K - 1) E = (\varepsilon - \varepsilon_0) E$$

$$= (15 \times 10^{-12} - 8.85 \times 10^{-12}) \times 2 \times 10^{6}$$

$$= 12.3 \times 10^{-6}\,C/m^2$$

(د) ويمكن حساب شدة المجال الناشيء عن الشحنات الطليقة على اللوحيين المعدنيين من العلاقة

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{30 \times 10^{-6}}{8.85 \times 10^{-12}} = 3.39 \times 10^{6}\,N/C$$

(هـ) كما يمكن حساب شدة المجال الناشيء عن الشحنات المحتثة على اللوح العازل من العلاقة

$$E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_0} = \frac{12.3 \times 10^{-6}}{8.85 \times 10^{-12}} = 1.39 \times 10^{6}\,N/C$$

فهل تتحقق المعادلة (1 – 6) اذن ؟

6 – 5 كثافة الطاقة في المجال الكهربائي

أوضحنا في البند (6 – 5) في الفصل السابق أن المتسعة تختزن طاقة في المجال الكهربائي بين لوحيها . وان كمية هذه الطاقة حسب المعادلة (16 – 5) تساوي

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

والآن سنحاول ايجاد صيغة رياضية عامة تعبر عن الطاقة المخزونة د الة لشدة المجال الكهربائي مهما كان شكل المجال وأينما وجد. ولتحقيق ذلك نأخذ حالة خاصة للمجال المتكون في اللوح العازل بين لوحي المتسعة ، ثم نجد كثافة الطاقة لهذا المجال .

تعرف كثافة الطاقة (ورمزها u) بانها مقدار الطاقة المخزونة في وحدة الحجوم من المجال الكهربائي ويمكن ايجاد كثافة الطاقة بسهولة في حالة المتسعة . حيث يكون المجال منتظما . وذلك بقسمة الطاقة المخزونة في المتسعة على حجم المنطقة التي يشغلها المجال فينتج

$$u = \frac{1}{2} \frac{CV^2}{Ad}$$

اذ ان A تمثل مساحة لوح المتسعة و d المسافة الفاصلة بين لوحيها . وبالتعويض عن السعة $(C = K\varepsilon_0 A / d)$ وفرق الجهد $(V = Ed)$ في المعادلة في أعلاه نحصل على

$$u = \frac{1}{2} K\varepsilon_0 E^2$$

لكن الكمية $(K\varepsilon_0)$ تساوي سماحية العازل (ε) طبقا للعلاقة (11 – 5). لذا

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \qquad \dots (6-24)$$

وعلى الرغم من أن اشتقاق المعادلة (24 – 6) كان مبني على حالة خاصة متمثلة بالمجال الكهربائي المنتظم المتكون بين لوحي المتسعة ، الا أنها تصح لكل المجالات المنتظمة منها والمتغيرة على حد سواء . فاذا كان المجال غيرمنتظم وكانت شدته تتغير من منطقـــة لأخرى في الحيز الذي يشغله . لتغيرت كثافة الطاقة المحسوبة من تلك المعادلة تبعا لتغيرشدة المجال .

ويمكن التعبيرعن كثافة طاقة المجال الكهربائي المتكون في العوازل بدلالة الازاحة الكهربائية ، وذلك باستخدام العلاقة $(D = \varepsilon E)$ عندئذ تأخذ المعادلة (24 – 6) الصيغتين الآتيتين

$$u = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\varepsilon} \quad \dots (6-25)$$

$$u = \frac{1}{2} DE \quad \dots (6-26)$$

وعندما يكون المجال الكهربائي متكوناً في الفراغ . فمن البديهي أن تحل نفوذية الفراغ ε_0 بدل نفوذية العازل ε . وذلك لأن ($K = 1$) للفراغ . عندئذ تؤول المعادلة ($6-24$) الى الشكل الآتي

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad \dots (6-27)$$

هذه هي الصيغة المألوفة للتعبير عن كثافة الطاقة في الفراغ .

6 - 6 شروط الحد (الفاصل بين وسطين عازلين)
Boundary conditions

لقد تبين في المثال الثامن أنه عندما يوضع عازلان مختلفان (أو أكثر) بين لوحين معدنيين مشحونين بشحنتين متساويتين ومتعاكستين . فان الازاحة ستكون متساوية في اللوحين العازلين رغم اختلاف سماحيتهما النسبية ، أي

$$D_1 = D_2$$

أما شدة المجال الكهربائي داخل العازلين فستكون مختلفة . ويمكن بسهولة ايجاد العلاقة بين شدة المجال في العازلين وفقا للعلاقة ($6-19$) اذ ينتج

$$K_1 \varepsilon_0 E_1 = K_2 \varepsilon_0 E_2$$

عندئذ يمكن القول بان شدة المجال الكهربائي (وكذلك الازاحة) تعد متصلة عبر الحد الفاصل بين العازلين

بيد أن هذه النتيجة لا تعد عامة لأنها تنطبق فقط على الحالة الخاصة التي يكون فيها متجه المجال (وكذلك متجه الازاحة) عمودياً على المستوي الفاصل بين اللوحين العازلين كما هي الحال في المثال الثامن . وبصورة عامة لا يكون وضع العوازل في المجال

الكهربائي دائماً بهذا الشكل . فقد لا يكون المجال عمودياً على الحد الفاصل بين العازلين . فضلاً عن أن الحد الفاصل قد لا يكون مستوياً . عندئذ لا تعد شدة المجال ولا الازاحة متصلة حيث يحدث تغير منقطع discontinouous في قيمة واتجاه شدة المجال والازاحة عند اجتياز الحد الفاصل بين العازلين وستتناول هذه الحالة العامة بشيء من التفصيل .

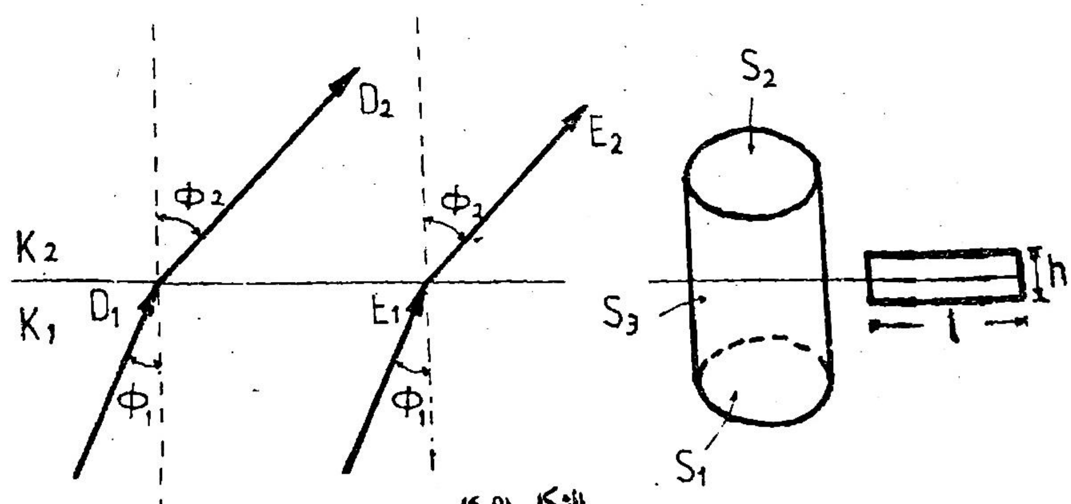
يبين الشكل (9 – 6) جزء من مستوٍ فاصل بين عازلين مختلفين سماحيتهما النسبية K_1 ، K_2 المجال في العازل لاول يعمل زاوية لتكن ϕ_1 مع العمود المقام على السطح الفاصل . وأما المجال في العازل الثاني فيصنع زاوية ϕ_2 مع العمود . لنأخذ سطحاً اسطوانياً مغلقاً بشكل قرص صغير عمودي على السطح الفاصل كما هو مبين في الشكل ، ونطبق قانون كاوس بصيغته العامة المتمثلة في المعادلة (20 – 6) على هذا السطح ، أي

$$\oint_s \vec{D}.\vec{ds} = q$$

لحساب التكامل السطحي للازاحة على السطح الاسطواني المغلق ينبغي تجزئة السطح المغلق الى ثلاثة أجزاء . الوجه لمستوي السفلي (S_1) ومساحته A والوجه المستوي العلوي (S_2) ومساحته A كذلك . ثم السطح الجانبي العمودي على الحد الفاصل (S_3) لذا ينتج

$$\oint_s \vec{D}.\vec{ds} = \int_{s_1} \vec{D}.\vec{ds} + \int_{s_2} \vec{D}.\vec{ds} + \int_{s_3} \vec{D}.\vec{ds}$$

$$= -D_1 \cos\phi_1 A + D_2 \cos\phi_2 A + 0$$



الشكل (6-9)

q = تمثل الشحنات الطليقة الواقعة ضمن سطح كاوس والتي تساوي صفراً في هذه الحالة لعدم احتواء السطح الاسطواني على أية شحنات طليقة. وبالتعويض عن $q = 0$ في قانون كاوس ينتج

$$- D_1 \cos\phi_1 A + D_2 \cos\phi_2 A = 0$$

لذا

$$D_1 \cos\phi_1 = D_2 \cos\phi_2 \qquad (6 - 28)$$

وهذا يعني ان المركبة العمودية للازاحة الكهربائية على السطح الفاصل بين وسطين عازلين تكون متساوية في كلا الوسطين كما يمكن التعبير عن هذه النتيجة بكلمات اخرى هي ان المركبة العمودية للازاحة تكون متصلة عبر السطح الفاصل بين الوسطين العازلين

والآن نستخرج الشرط الثاني المتعلق بشدة المجال الكهربائي وذلك بتطبيق العلاقة (8 - 4) لنأخذ مساراً مغلقاً بشكل مستطيل طوله l وعرضه h بحيث أن ($l >> h$)

كما هو مبين في الشكل (9 - 6). ونستخدم تلك العلاقة المتضمنة التكامل الخطي لشدة المجال حول هذا المسار فينتج

$$\oint \vec{E} . d\vec{l} = 0$$

$$E_1 \sin\phi_1 \, l - E_2 \sin\phi_2 \, l = 0$$

اذ أهملنا التكامل الخطي لشدة المجال على طول الضلعين h وذلك لان طول الضلع h صغير جداً بالمقارنة مع طول الضلع l. لذا

$$E_1 \sin\phi_1 = E_2 \sin\phi_2 \qquad (6 - 29)$$

وهذا يعني ان المركبة المماسة لشدة المجال الكهربائي تكون متصلة continuous عبر الحد الفاصل بين وسطين عازلين

وهكذا نرى انه بالامكان استخدام هذين الشرطين للتعرف على تأثير الحد الفاصل بين وسطين عازلين على اتجاه المجال عند اجتيازه هذا الحد ، ولكن بشرط أن تكون المواد العازلة من النوع الاعتيادي - وهي المواد التي تمتاز بان تكون فيها الكميات الثلاث E ، P ، D باتجاه واحد .

ومما تجدر الاشارة اليه هو أنه يمكن دمج الشرطين المتمثلين بالمعادلتين (28 − 6) و (29 − 6) للحصول على شرط جديد . وذلك بقسمة المعادلة الثانية على المعادلة الاولى فينتج

$$\frac{E_1 \sin\phi_1}{D_1 \cos\phi_1} = \frac{E_2 \sin\phi_2}{D_2 \cos\phi_2}$$

لـكن

$$D_2 = K_2\varepsilon_0 E_2 \, , D_1 = K_1\varepsilon_0 E_1$$

وبالتعويض عن D_1 و D_2 في المعادلة في أعلاه ينتج

$$\frac{\tan\phi_1}{K_1} = \frac{\tan\phi_2}{K_2}$$

أو

$$\frac{\tan\phi_1}{\tan\phi_2} = \frac{K_1}{K_2} \qquad (6-30)$$

وهذا هو الشرط الجديد الذي يجب أن يتحقق عند اجتياز السطح الفاصل بين وسطين عازلين (لاحظ الشكل 9 − 6). ومما يلاحظ ان هذه العلاقة تشبه قانون سنيل* في البصريات ، ذلك القانون الذي يتضمن تحديد زاوية انكسار الشعاع الضوئي عند انتقاله من وسط لآخر .

مثال 10

لوح من الكبريت ذو سماحية نسبية قدرها 4.0 موضوع في الهواء . (أ) اذا كان المجال الكهربائي في الهواء يصنع زاوية قدرها °15 مع العمود المقام على سطح اللوح ، فما قيمة الزاوية التي يصنعها المجال الكهربائي داخل الكبريت مع العمود ؟ (ب) واذا كانت قيمة الازاحة الكهربائية في الهواء $5.00 \times 10^{-7}\ C/m^2$. فما قيمة كل من الازاحة وشدة المجال داخل لوح الكبريت ؟

---

* يحدد قانون سنيل Snell's العلاقة بين زاويتي السقوط والانكسار لموجة ضوئية عند اجتيازها السطح الفاصل بين وسطين مختلفين بدلالة معامل الانكسار لهذين الوسطين حسب العلاقة

الحل

للهواء : $D_1 = 5{\cdot}00 \times 10^{-}\ C\,m^2 , \phi_1 = 15^\circ , K_1 = 1$

وللكبريت : $K_2 = 4$ أما E_2, D_2, ϕ_2 فهي كميات مجهولة القيم

(أ) لحساب الزاوية التي يصنعها المجال مع العمود داخل الكبريت تستعمل المعادلة

$$\frac{\tan \phi_1}{\tan \phi_2} = \frac{K_1}{K_2}$$

فنحصل على

$$\frac{\tan 15}{\tan \phi_2} = \frac{1}{4}$$

$$\tan \phi_2 = 4 \tan 15$$

$$\therefore \phi_2 = 47^\circ$$

(ب) أما الازاحة فتحسب من العلاقة (28 – 6)

$$D_1 \cos \phi_1 = D_2 \cos \phi_2$$

$$5 \times 10^{-7} \cos 15^\circ = D_2 \cos 47^\circ$$

$$\therefore D_2 = 7{\cdot}08 \times 10^{-}\ C\,m^2$$

وأخيراً يمكن حساب شدة المجال داخل لوح الكبريت من العلاقة

$$D_2 = K_2 \varepsilon_0 E_2$$

لذا

$$E_2 = \frac{7{\cdot}08 \times 10^{-7}}{4 \times 8{\cdot}85 \times 10^{-12}}$$

$$= 2 \times 10^4\ N/C$$

تمرينــات

6 - 1 لوحان معدنيان متوازيان مساحة كل منهما $100\ cm^2$ شحنا بشحنتيـــن متعاكستيـــن قيمـــة كـــل منهمـــا $8.92 \times 10^{-7}\ C$ فـاذا علـم ان شـدة المجـــال الـكهربائـــي داخـــل العازل الفاصـــل بيـــن اللوحيـــن المعـدنين $1.4 \times 10^6\ N/C$. أحسب (أ) السماحية النسبية للعازل (K) و (ب) قيمة الشحنة المحتثة على سطح العازل .

$(7.2 , 7.68 \times 10^{-7}\ C)$

6 - 2 متسعة ذات لوحين متوازيين سعتها $100\ pF$ ومساحتها $100\ cm^2$. يفصل لوحيها المعدنيين لوح من المايكا سماحيته النسبية 5.4 . فاذا سلط عـلى المتسعة فولتية قدرها $50\ V$ احسب (أ) شدة المجال داخل المايكا و (ب) الشحنة الطليقة على لوحي المتسعة و (جـ) الشحنة المحتثة على سطح لوح المايكا .

$(10.5 \times 10^3\ N/C , 5 \times 10^{-9}\ C , 4.1 \times 10^{-9}\ C)$

6 - 3 متسعة ذات لوحين متوازيين مساحتها $200\ cm^2$ وسعتها $4 \times 10^{-4}\ \mu F$. يفصل لوحيها عازل سمكه $4\ mm$. سلط عليها فرق في الجهد قدره $2 \times 10^4 v$. أحسب (أ) ثابت السماحية للعازل (ε) و (ب) شـدة المجال الـكهربائي داخل العازل و (جـ) الازاحة (D) و (د) الاستقطاب (P) .

$(8 \times 10^{-11}\ F/m , 5 \times 10^6\ V/m , 4 \times 10^{-4}\ C/m^2 , 3.5 \times 10\ \ C/m^2$

6 - 4 اذا علم أن قابلية التكهرب لمادة تساوي $3.54 \times 10^{-11}\ C^2 N^{-1} m^{-2}$ فما قيمة سماحية العازل (ε) وماقيمة سماحيته لنسبية (K) ؟

$(4.43 \times 10^{-11}\ C^2 N^{-1} m^{-2} , 5)$.

6 - 5 لوحان معدنيان مساحة كل منهما متراً مربعاً واحداً مشحونان بشحنتين متساويتين ومتعاكستين . يفصلهما لوح عازل سماحيته النسبية 3 فاذا علم ان شدة المجال الكهربائي داخل العازل $10^5\ v/m$. أحسب (أ) الازاحة و (ب) الشحنة الطليقة التي يحملها كل من اللوحين المعدنيين و (جـ) الأستقطاب و (د)

الشحنة المحتثة على سطح العازل و (هـ) شدة المجال الناشيء عن لشحنات الطليقةفقط و (و) شدة المجال الناشيء عن الشحنات المحتثة فقط .

$(2.66 \times 10^{-5} c/m^2 , 2.66 \times 10^{-5} C , 1.77 \times 10^{-5} c/m^2 , 1.77 \times 10^{-5} C , 3 \times 10^6 v/m , 2 \times 10^6 v/m)$

6 – 6 متسعة ذات لوحين متوازيين تحمل شحنة ذات كثافة سطحية قدرها σ ومساحتها A وضع داخلها لوحان عازلان متساويان في السمك بحيث امتلأ الفراغ بين لوحي المتسعة كماهبين في الشكل (10 – 6) . أحسب .

(أ) مقدار الازاحة D داخل كل من العازلين مستخدماً قانون كاوس في العوازل

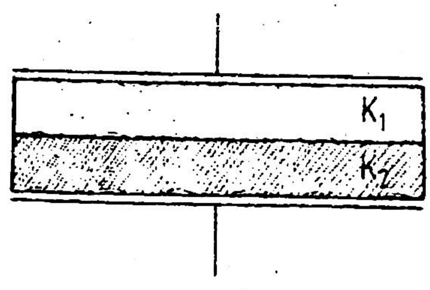
(ب) شدة المجال الكهربائي E داخل العازلين

(جـ) فرق الجهد V بين لوحي المتسعة

(د) سعة المتسعة . افرض أن المسافة بين لوحي المتسعة هي d

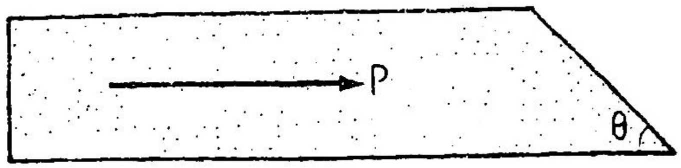
$(D_1 \quad D_2 = \sigma ; E_1 = \sigma \quad \varepsilon_0 K_1 , E_2 = \sigma \quad \varepsilon_0 K_2 ;$

$$V = \frac{\sigma d}{2 \varepsilon_0} \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} , C = \frac{2 \varepsilon_0 A}{d} \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2})$$



الشكل (6–10)

7 – 6 قضيب عازل مستقطب بصورة منتظمة (أنظر الى الشكل 11 – 6) . اوجد مقدار الكثافة السطحية للشحنات المحتثة (شحنات الأستقطاب) σ_i على كل من (أ) السطح الجانبي و (ب) النهاية اليسرى للقضيب و (جـ) النهايـة



لشكل (11 6)

اليمنى ، علماً بأن مقدار متجه الأستقطاب هو p وبجاهه كما هو مبين في الشكل
$(0 ; P \sin\theta : -P)$

6 – 8 اذا علم أن قيمةشدة المجال الكهربائي بين لوحي متسعة ذات لوحين متوازيين $2 \times 10^5\ V/m$ عندما تكون المنطقة بين اللوحين فارغة ، وأن قيمة شدة المجال تصبح $1{\cdot}2 \times 10^5\ V/m$ عندما تملأ بمادة عازلة ، فما مقدار (أ) ثابت العازل (K) و (ب) سماحية العازل (ε) و (جـ) مقدار متجه الازاحة D و (د) مقدار متجه الأستقطاب P و (هـ) الكثافة السطحية للشحنات المحتثة على سطح العازل (σ_i) و (و) الكثافة السطحية للشحنات الطليقة على لوحي المتسعة (σ) ؟

$(1{\cdot}67 ; 14{\cdot}75 \times 10^{-12}\ C^2 N^{-1} m^{-2} : 17{\cdot}7 \times 10^{-7}\ C/m^2$
$7{\cdot}1 \times 10^{-7}\ C/m^2 ; 7{\cdot}1 \times 10^{-7}\ C/m^2 : 17{\cdot}7 \times 10^{-7}\ C/m^2)$

6 – 9 متسعة ذات لوحين متوازيين مساحتها $25\ cm^2$ والمسافة بين لوحيها 2 mm وبداخلها عازل ذو ثابت قدره (K = 5) سلط عليها فرق جهد قدره 300 V أحسب (أ) سعة هذه المتسعة و (ب) شحنة المتسعة و (جـ) مقدار الأزاحة الكهربائية و (د) مقدار متجه الأستقطاب .

$(5{\cdot}53 \times 10^{-11} F ; 1{\cdot}66 \times 10^{-8} C ; 6{\cdot}64 \times 10^{-6}\ C/m^2 : 5{\cdot}3 \times 10^{-6}$
$C/m^2)$

6 – 10 لوحان موصلان متوازيان يحملان شحنتين متساويتين ومتعاكستين ذات كثافة سطحية قدرها $2 \times 10^{-5}\ C/m^2$ ، وضع بينهما لوحان عازلان مختلفان بحيث امتلا الفراغ بينهما . فاذا كان سمك العازل الأول 2mm وسماحيته النسبية 3 . وسمك العازل الثاني 3mm وسماحيته النسبية 4 . أحسب (أ) شدة المجال الكهربائي داخل كل عازل و (ب) الازاحة الكهربائية و (جـ)

الكثافة السطحية للشحنات المحتثة على سطح كل عازل و (د) فرق الجهد بين طرفي كل عازل

($E_1 = 7{\cdot}53 \times 10^5\ v/m, E_2 = 5{\cdot}65 \times 10^5\ v/m ; D_1 = D_2 = 20 \times 10^{-6}\ c/m^2 ,$
$\sigma_1 = 13{\cdot}3 \times 10^{-6} c/m^2 , \sigma_2 = 15 \times 10^{-6}\ c/m^2 ; V_1 = 1500v , V_2 = 1700v$)

11 - 6 وضع لوحان عازلان . سمك الأول 4mm وسماحيته النسبية 3 وسمك الثاني 5mm وسماحيته النسبية 6 . بين لوحين موصلين . فاذا كانت شدة المجال في في العازل الأول $1 \times 10^4\ v/m$ وفي العازل الثاني $2 \times 10^4\ v/m$. جد

(أ) فرق الجهد بين اللوحين الموصلين

(ب) كثافة الشحنة الطليقة على اللوحين الموصلين

12 - 6 متسعة ذات لوحين متوازيين لمسافة الفاصلة بينهما 5mm . شحنت حتى صار فرق الجهد بين طرفيها 2250v . عزلت عن مصدر الشحن وأدخل فيها لوح عازل سمكه 2mm وسماحيته النسبية 3 (لاحظ الشكل 7 - 6) . أحسب

(أ) كثافة الشحنة الطليقة التي أكتسبتها المتسعة .

(ب) فرق الجهد بين طرفي المتسعة بعد ادخال اللوح العازل فيها .

13 - 6 متسعة ذات لوحين متوازيين مساحتها $100\ cm^2$ تحتوي على ثلاثة الواح عازلة سمك كل منها 1mm . من مواد مختلفة ذات سماحية نسبية 5,4,3 . علـــى الترتيب . فاذا سلط عليها فولتية قدرها 2000v . أحسب

(أ) شدة المجال الكهربائي و (ب) الازاحة و (ج) الأستقطاب، داخل كل عازل

($E_1 = 8{\cdot}85 \times 10^5\ N/C , E_2 = 6{\cdot}67 \times 10^5\ N/C , E_3 = 4{\cdot}45 \times 10^5\ N/C ;$
$D_1 = D_2 = D_3 = 23{\cdot}6 \times 10^{-6}\ c/m^2 , P_1 = 15{\cdot}7 \times 10^{-6}\ c/m^2 , P_2 = 17{\cdot}7 \times 10^{-6}\ c/m^2 , P_3 = 19{\cdot}7 \times 10^{-6}\ c/m^2$)

14 - 6 لوح عازل ذو سماحية نسبية قدرها 1·25 موضوع في الهواء . سلط عليـــه مجال كهربائي فكانت زاوية سقوط المجال (أي الزاوية التي يعملها المجال مع العمود المقام على السطح الفاصل بين الوسطين في الهواء) تساوي 20° . أحسب زاوية انكسار المجال داخل اللوح (أي الزاوية التي يعملها المجال داخل اللوح مع العمود) .

($24{\cdot}5^\circ$)

15 - 6 سلط مجال كهربائي منتظم على قطعة كبيرة من مادة عازلة ذات سماحية نسبية

قدرها . تحتوي القطعة على فجوة اسطوانية قصيرة محورها موازٍ للمجال. فاذا كانت شدة المجال داخل العازل تساوي 2×10^6 v/m . أحسب

(أ) شدة المجال الكهربائي داخل الفجوة الهوائية .

(ب) الكثافة السطحية للشحنة المحتثة على نهايتي الفجوة الاسطوانية

16 – 6 احسب كثافة الطاقة عند سطح كرة موصلة معزولة نصف قطرها عشرة سنتيمترات اذا علم ان جهدها الكهربائي يساوي ألف فولت .

$(4.42 \times 10^{-4} J\ m^3)$

17 – 6 أعد حل المسألة (23 – 5) من الفصل السابق مستفيدا من العلاقة (27 – 6).

(ملاحظة : استخدم الصيغة لتكاملية لتعريف كثافة الطاقة . أي $U = \int u\, dV$ وتذكر ان شدة المجال الكهربائي هي كمية متغيرة في هذه الحالة) .

احمد عبدالجبار

الفصل السابع

التيار والمقاومة

Current & Resistance

1 - 7 التيار الكهربائي Electric current

تناولنا في دراستنا السابقة الحديث عن الشحنات المستقرة فقط . والآن ولغرض دراسة انتقال الشحنات الكهربائية نأتي بمفهوم جديد وهو التيار الكهربائي ونرمز له بالحرف (I) . فلو وضعنا موصلا معدنيا بشكل سلك في مجال كهروستاتيكي كما هو مبين في الشكل (1 - 7) لتأثرت الكتروناته الطليقة وتحركت مكونة تياراً عابراً transient current سرعان مايزول بزوال المجال الكهربائي في داخل الموصل ثم عادة الشحنات ترتيب نفسها . اما اذا اردنا الحصول على تيار متواصل continuous current فلا بد من استخدام وسيلة ما لادامة المجال الكهربائي داخل الموصل وبالتالي استمرار انسياب شحناته الطليقة . هذه الوسيلة (كما سنرى في الفصل القادم) تسمى مصدر القوة الدافعة الكهربائية Source of emf . ومن امثلتها البطارية الجافة والبطارية السائلة والمولد الكهربائي (الداينمو) .

يعرف التيار الذي يمر بمساحة مقطع من الموصل بأنه الشحنة الكلية التي تعبر هذا المقطع في وحدة الزمن فاذا كان انسياب الشحنات منتظما خلال مقطع الموصل يصبح من السهولة ايجاد قيمة التيار وذلك بقسمة الشحنة الكلية التي تعبر المقطع على الزمن . أي

$$I = q/t \qquad (7-1)$$

ان وحدة التيار حسب النظام العالمي للوحدات هي الأمبير ampere ويختصره (A). وهناك اجزاء لهذه الوحدة تستخدم لقياس التيارات الضعيفة كالملي امبير (mA) الذي يعادل واحد من الف من الامبير والمايكروامبير (μA) وقدره واحد من مليون من الامبير.

تتضح من المعادلة (1 – 7) العلاقة بين وحدات التيار والشحنة والزمن وهي أن الكولوم الواحد يساوي حاصل ضرب الامبير في الثانية . ولكنه يلاحظ ان هذه المعادلة لاتستخدم لتعريف الامبير الذي سنأتي الى تعريفه في فصل لاحق بل لتعريف وحدة الشحنة الكولوم . فالكولوم هو كمية الشحنة التي تنساب خلال مقطع سلك في ثانية واحدة اذا كان السلك يحمل تياراً منتظماً قدره أمبير واحد .

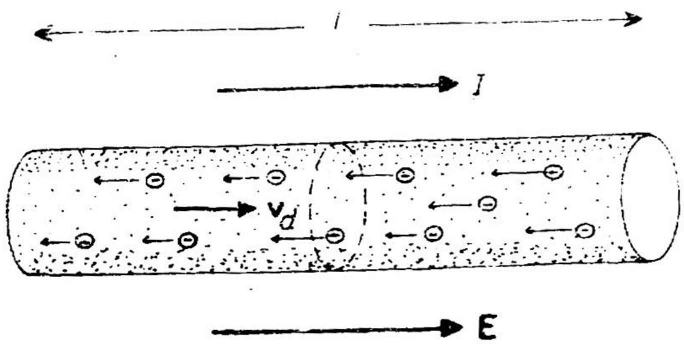
اما اذا كان انسياب الشحنة غير منتظم فان قيمة التيار ستتغير من لحظة الى اخرى وعندئذ يصبح من الضروري التعبير عن التيار رياضيا بالشكل الآتـــــــــي

$$I = dq/dt \qquad (7 - 2)$$

من المعروف جيداً ان الالكترونات الطليقة هي المسؤولة عن تكوين التيارات الكهربائية في الموصلات المعدنية . ولكنه يجب ان نتذكر ان التيارات قد تنتج أيضا عن حركة الايونات الموجبة او السالبة اوكليهما معا كما في حالة المحاليل الالكترولبتية والموصلات الغازية

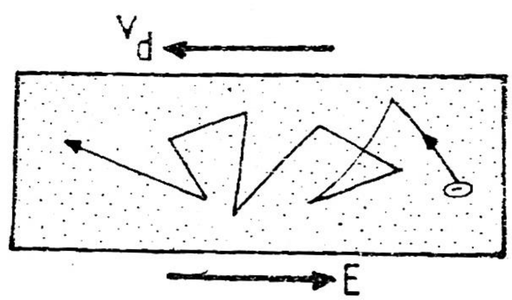
ولتجنب الارباك الذي قد يحدث في تعيين وضع الاسهم (في الدوائر الكهربائية) التي تشير الى اتجاه التيارات . ذلك ان الشحنات المتعاكسة تسير باتجاهين متعاكسين في المجال الكهربائي . فقد اصطلح أن يكون اتجاه التيار بنفس اتجاه انسياب الشحنات موجبة ، ان وجدت في الموصل . ويجب ان لايغيب عن الاذهان انه في المعادن حيث يكون التيار ناتجاً عن سير الالكترونات . فان انسياب الالكترونات يكون بعكس اتجاه السهم الذي يشير الى اتجاه التيار (انظر الى الشكل 1 – 7) .

كما يجب ان نتذكر ان الالكترونات الطليقة الواقعة تحت تأثير المجال داخل الموصل لاتتحرك بتعجيل ثابت دائماً وذلك بسبب اصطداماتها المتكرر مع ذرات المادة التي يتكون منها الموصل . فبعد كل تصادم يفقد الالكترون جزءاً من طاقته او جميعها



الشكل (7-1) التيار الكهربائي

كما يتغير اتجاه حركته . ولكن سرعان مايلبث ان يتعجل مرة أخرى باتجاه القوة المسلطة عليه من قبل المجال . ولكن النتيجة الحتمية بعد كل هذه الاصطدامات هي اندفاع الالكترونات وانجرافها باتجاه معاكس للمجال بسرعة وسطية بطيئة نسبيا تسمى سرعة الانجراف , او الانسياق drift velocity انظر الى الشكل (2 – 7) .



الشكل (7-2) سرعة الانجراف

ومن الملاحظ ان لالكترونات الحرة . حتى في حالة غياب المجال الكهربائي تستمر في حركة عشوائية وبسرع عالية جداً . ولكنه لاينتج عن ذلك انجراف او اندفاع لهذه الالكترونات بأي من الاتجاهات . انما ينتج انجراف في الالكترونات فقط نتيجة لوجود مجال كهربائي داخل الموصل . ان سرعة الانجراف هذه هي جدا ضئيلة بالنسبة للسرعة العشوائية للالكترونات الحرة (لاحظ المسألة 2 – 7) .

ويمكن حساب سرعة الانجراف للالكترونات (v_d) من معرفة التيار المار في السلك فلو فرضنا أن طول السلك الموصل المبين في الشكل (1 – 7) هو l ومساحة مقطعه هي A فان مجموع الالكترونات الطليقة التي يحتويها هذا الجزء من السلك ستكون

حيث ان n نرمز الى عدد الالكترونات الطليقة لوحدة الحجوم من السلك . nAl مد لشحنة الكلية التي تغادر هذا الجزء من السلك خلال فترة زمنيه (t) فقدرها

$$q = nAle$$

ومن المعادلة (1 − 7) نجد ان قيمة التيار تصبح

$$I = \frac{nAle}{t}$$

عدئذ يصبح بالامكان ايجاد سرعة الانجراف كما هو آت

لذا ينتج

$$v_d = \frac{l}{t} = \frac{l}{[nAle]/I}$$

$$v_d = \frac{I}{nAe} \qquad (7-3)$$

عندما يكون معدل انسياب الشحنات عبر سطح موصل متغيراً من نقطة لاخرى خلال هذ السطح . عندئذ يصبح من الافضل الاستعاضة عن التيار (وهو كمية عددية (Scalar) بمفهوم آخر هو كثافة التيار current density (وهو كمية متجهة Vector) نرمز لها بالحرف J ان العلاقة بين هاتين لكميتين تمثل بالمعادلة الاتية (R.)

$$I = \int J\, d\vec{S} \qquad (7-4)$$

حيث تمثل dS عنصراً تفاضليا من مساحة السطح . كما ان التكامل يغطي جميع السطح الذي يمر فيه التيار .

اما اذا كان التيار يسري خلال جميع مقطع الموصل بشكل متجانس . أي أن J ثابتة فعندئذ تصبح المعادلة (4 − 7) بعد اجراء التكامل :

$$I = \vec{J}.\vec{A}$$

وفي كثير من الحالات يكون السطح عمودياً على كثافة التيار . عندئذ تأخذ هذه العلاقة شكلها المبسط الآتـي

$$I = JA \qquad (7-5)$$

حيث ان A تمثل مساحة مقطع الموصل . ومن هذه العلاقة تتضح وحدة كثافة التيار وهي مبير لكل متر مربع . أما اتجاه المتجه J فهو بنفس اتجاه انسياب الشحنات الموجبة ان تواجدت في تلك النقطة .

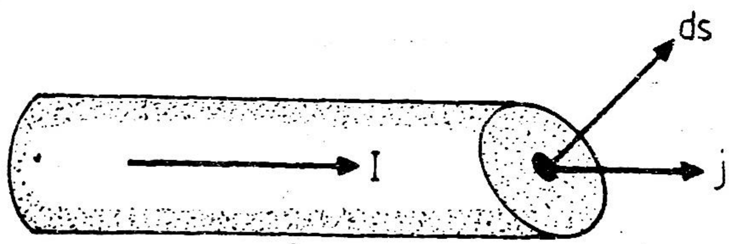
مثـــال 1

سلط مجال كهربائي منتظم على جسم موصل يحتوي على 10^{24} × الالكترون طليق لكل متر مكعب ، فبلغت سرعة انجراف لالكترونات فيه 1.5×10^{-2} m/s احسب قيمة التيار المتكون اذا علم ان مساحة مقطع لجسم الموصل تساوي سنتمترا مربعا واحداً .

الحـــل

بالتعويض عن $v_d = 1.5 \times 10^{-2}$ m/s, $A = 10^{-4}$ m^2, $n = 10^{24}$ m^{-3} و $e = 1.6 \times 10^{-19}$C في المعادلة (7 − 3) نحصل على قيمة التيار

$$I = nAev_d$$
$$= 10^{24} \times 10^{-4} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 1.5 \times 10^{-2} = 0.24 A$$



الشكل (7-3) العلاقة بين التيار وكثافة التيار

7 − 2 المقاومة والمقاومة النوعية Resistance & Resistivity

تختلف المواد بقابليتها على توصيل الكهربائية خلالها . فالفضة تعتبر من أجود المعادن توصيلاً للكهربائية يليها النحاس والألمنيوم . ان انتقال الالكترونات الطليقة التي تحتويها ذرات هذه المواد ، كما بينا في الفصل الأول ، هو الذي يجعلها موصلة جيدة . بيد أن

انسياب الالكترونات هذه بين ذرات وجزيئات المادة يلاقي مقاومة ناتجة عن تصادمها بذرات والكترونات المادة . ومن ذلك يتضح ان عاقة انسياب الشحنات في المادة يرتبط ارتباطاً وثيقاً بطبيعة المادة وتركيبها الذري والبلوري . فكلما زادت لاعاقة لمرور الشحنات خلال المادة . كلما زادت مقاومتها للتيار الكهربائي المار فيها . وعلى هذا الاساس يمكن تعريف المقاومه بانها تلك الخاصية التي يتجم عنها اعاقة مرور الشحنات الكهربائية خلال مادة

والآن لو سلط المجال الكهربائي نفسه على قضيبين متناظرين من مادتين مختلفتين وذلك بتعريض نهايتيهما لفرق الجهد نفسه لنتج تياران مختلفان في القضيبين . وبهذا تعرف مقاومة الموصل بانها حاصل قسمة فرق الجهد بين نهايتي الموصل على التيار المار فيه . اي

$$R = \frac{V}{I} \qquad (7-6)$$

ومن هذه العلاقة يتبين أن وحدة المقاومة هي فولت على أمبيروتسمى أوم ويرمز لها بالحرف الاغريقي (Ω) وهناك مضاعفات لتلك الوحدة تستعمل لقياس المقاومات العالية مثل الكيلو اوم ($k\Omega$) ويساوي ألف أوم والميكا أوم ($M\Omega$) الذي يساوي مليون أوم .

ان مقاومة أي موصل لا تعتمد على طبيعة المادة فحسب بل على شكل الجسم الموصل وعلى ابعاده أيضاً . لذلك قد يكون من المستحسن استخدام خاصية أخرى ترتبط بالمقاومة ارتباطاً وثيقاً ولكنها لا تعتمد على شكل الجسم أوأبعاده . هذه الخاصية تدعى المقاومة النوعية resistivity ويرمز لها بالحرف الأغريقي (ρ) . وتعرف بانها النسبة بين شدة المجال الكهربائي وكثافة التيار . اي

$$\rho = \frac{E}{J} \qquad (7-7)$$

وعليه تكون وحدة المقاومة النوعية هي الاوم – متر (Ωm) .

ان قيمة المقاومة النوعية تكون قليلة جداً للمواد جيدة التوصيل ، فمثلاً قيمتها تساوي $1.72 \times 10^{-8}\ \Omega m$ للنحاس في درجة حرارة الغرفة . على حين نجد أن قيمتها تكون عالية جداً للمواد العازلة . فاذا أخذنا الكبريت على سبيل المثال لوجدنا أن قيمة

الجـدول (1 − 7)

المقاومة النوعية في درجة حرارة الغرفة

Resistivity at Room Temperature

المـادة			ρ (Ωm)
الموصـــلات			
فضة	silver	معادن	1.47×10^{-8}
نحاس	copper	معادن	1.72×10^{-8}
المنيوم	aluminum	معادن	2.63×10^{-8}
تنكستن	tungesten	معادن	5.51×10^{-8}
منغانين	manganin	سبائك	44×10^{-8}
كونستانتان	constantan	سبائك	49×10^{-8}
نكروم	nichrom	سبائك	100×10^{-8}
اشباه الموصلات (النقية)			
كاربون	carbon		3.5×10^{-5}
جيرمانيوم	germanium		0.6
سيلـكون	silicon		2300
العوازل			
أمبـر	amber		5×10^{14}
زجاج	glass		$10^{10} - 10^{14}$
لوسايت	lucite		$10^{13} <$
مايكا	mica		$10^{11} - 10^{15}$
كوارتز	quartz		75×10^{16}
كبريت	sulpher		10^{15}
تفلون	teflon		$10^{13} <$
خشب	wood		$10^{8} - 10^{11}$

المقاومة النوعية تساوي $1 \times 10^{15}\,\Omega m$. لاحظ الجدول (1 − 7) .

تصور أن موصلا اسطواني الشكل طوله L ومساحة مقطعه A . سلط على نهايتيه فرق جهد قدره V فنتج تيار منتظم قدره I وإذا كان المجال الكهربائي داخل الموصل منتظما فان مقداره سيكون

$$E = V / L$$

وكذلك فان كثافة التيار ستكون متساوية لجميع نقاط الموصل ومقدارها يصبح

$$J = I / A$$

وبهذا يصبح بالامكان ايجاد المقاومة النوعية ρ كما يأتي .

$$\rho = \frac{E}{J} = \frac{VA}{LI} = \frac{RA}{L}$$

حيث أن R تمثل مقاومة الموصل .

ومن هذه النتيجة نستطيع أن نجد بسهولة مقاومة السلك الموصل اذا عرف طوله ومساحة مقطعه A والمقاومة النوعية للمادة المعمول منها وذلك من العلاقة

$$R = \frac{\rho L}{A} \qquad (7-8)$$

اذ يتضح أن مقاومة السلك تزداد بزيادة طوله وبنقصان مساحة مقطعه .

ان مقلوب المقاومة النوعية (ρ) يدعى الموصلية الكهربائية conductivity ورمزها σ . أي أن

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \qquad (7-9)$$

مثـــال 2

اذا علم ان مقاومة سلك من النحاس طوله 200m تساوي 21Ω . وأن قطر السلك 0·4mm أوجد المقاومة النوعية للنحاس .

الحـل

لنجد أولاً مساحة مقطع السلك بالامتار المربعة فنحصل على

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$= \frac{\pi \times (0.44 \times 10^{-3})^2}{4} = 1.52 \times 10^{-7} m^2$$

وبالتعويض عن هذه القيمة وعن طول السلك ومقاومته في المعادلة (8 - 7) نحصل على المقاومة النوعية للنحاس .

$$\rho = \frac{RA}{L}$$

$$= \frac{21 \times 1.52 \times 10^{-7}}{200} = 1.596 \times 10^{-8}\ \Omega m$$

مثـال 3

تبلغ مقاومة سلك من النوع المستعمل في خطوط الهاتف 35 أوماً لكل كيلومتر منه . وكتلته تبلغ 5 كيلو غرامات للكيلو متر الواحد . والمقاومة النوعية لمادة السلك $1.95 \times 10^{-8}\ \Omega m$ ما مساحة مقطع السلك ؟ وما مقاومة بكرة تحتوي على 8km من سلك آخر مصنوع من المادة نفسها . الا أن كتلته تبلغ 20 كيلو غراماً للكيلو متر الواحد ؟

الحـل

بالتعويض عن $R = 35\ \Omega$ ، $L = 1000m$ ، $\rho = 1.95 \times 10^{-8}\ \Omega m$ في المعادلة (8-7) نحصل على مساحة مقطع السلك بالامتار المربعة .

$$A = \frac{\rho L}{R}$$

$$= \frac{1.95 \times 10^{-8} \times 1000}{35} = 55.7 \times 10^{-8} m^2$$

لكن كتلة الكيلومتر الواحد من السلك تتناسب طرديا مع مساحة مقطعه . لذا يمكن حساب مساحة مقطع السلك في الحالة الثانية من

$$A' = \frac{M'}{M} A$$

$$= \frac{20}{5} \times 55{\cdot}7 \times 10^{-8} = 22{\cdot}3 \times 10^{-7} m^2$$

وبالتعويض عن هذه القيمة وعن $L' = 8000m$ في المعادلة (8 - 7) نحصل على مقاومة البكرة

$$R' = \frac{\rho L'}{A'}$$

$$= \frac{1{\cdot}95 \times 10^{-8} \times 8000}{22{\cdot}3 \times 10^{-7}} = 70\Omega$$

3 - 7 المعامل الحراري للمقاومة النوعية

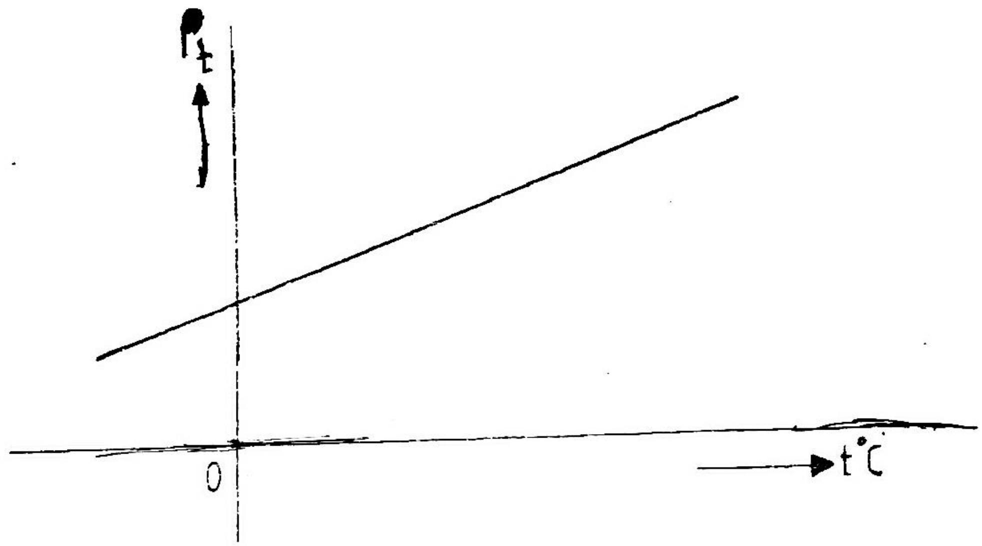
Temperature coefficient of resistivity

من المعروف ان المقاومة النوعية للمادة تتاثر عند تغيير درجة حرارتها . ويمكن دراسة التغير الحاصل في قيمة المقاومة لسلك مقاوم تجريبياً وذلك بغمس السلك المقاوم في زيت عازل موضوع في أنبوبة . ثم تغمر الانبوبة بدورها في حمام مائي . وبهذه الوسيلة يكتسب المقاوم درجة حرارة الحمام المائي نفسها عند حدوث الاتزان الحراري للمنظومة . وعند تغيير درجة حرارة الحمام المائي يتبين الاختلاف الحاصل في قيمة التيار المار في السلك المقاوم . مما يدل على اختلاف قيمة المقاومة ذاتها .

ان تجارباً من هذا النوع أشارت بصورة واضحة على ان المقاومة النوعية لمعظم المواد الموصلة . كالمعادن مثلاً . تتناسب تناسباً طردياً مع التغير الحاصل في درجة الحرارة . ولمدى محدود من درجات الحرارة ينحصر بين الصفر والمائة . أو المائتين درجة مئوية مثلاً . أي أن الزيادة في المقاومة النوعية للمعادن . لهذا المدى المحدود من درجات الحرارة . يخضع للعلاقة الآتية

$$\rho_t = \rho_{20}[1 + \alpha(t - 20°C)] \qquad \ldots(7-10)$$

اذ ان ρ_{20} و ρ_t تمثلان المقاومة النوعية عند درجة حرارة الغرفة (20°C) وعند درجة حرارة t°C على الترتيب . أما α فيمثل مقداراً ثابتاً يدعى المعامل الحراري للمقاومة النوعية للمادة . ويعرف بانه مقدار التغير الحاصل في المقاومة النوعية لوحدة المقاومة النوعية ولوحدة الارتفاع في درجة الحرارة . وحدته هي (°C⁻¹) اي مقلوب الدرجة المئوية وطبقا لهذه العلاقة فان الخط البياني المرسوم بين ρ_t على محور y و t°C على محور x سيكون خطاً مستقيماً كما هو مبين في الشكل (7-4)



الشكل (7-4)

ان العلاقة المبينة في أعلاه تعد صحيحة . كما أشرنا . لمدى محدود من درجات الحرارة . أما اذا كان مدى التغير في درجات الحرارة واسعاً فان الزيادة في المقاومة النوعية للمعادن تخضع للعلاقة الآتية

$$\rho_t = \rho_{20}[1 + \alpha(t - 20°C) + \beta(t - 20°C)^2] \qquad \ldots(7-11)$$

وعليه فان الدالة المرسومة بين ρ_t و t لن تكون خطا مستقيما عند الدرجات العالية .

ومما تجدر الاشارة اليه هو أن العلاقة (10 - 7) تبقى صحيحة حتى في حالة انخفاض درجة الحرارة عن الصفر المئوي . وهذا يعني أن الانخفاض في المقاومة النوعية يبقى خاضعاً لتلك العلاقة الخطية (لاحظ الشكل 4 - 7)

بيد أن هذه العلاقة الخطية لا تستمر لدرجات الحرارة المنخفضة جداً . فقد دلت الدراسات التجريبية على أن المقاومة النوعية لعدد غير قليل من المعادن تهبط بصورة فجائية وتصبح صفراً عند الدرجات المنخفضة كثيراً (من 0.1°K الى 10°K) كما هو مبين في الشكل (5 - 7) . هذه الظاهرة تسمى فرط التوصيل superconductivity

ان ذلك يعني أنه في حالة تكوين تيار في دائرة مغلقة مفرطة التوصيل يستمر التيار في تلك الدائرة لزمن قد يدوم عدداً من الاسابيع دون الحاجة الى مصدر للقوة الدافعة الكهربائية في الدائرة .

الشكل (5-7)
فرط التوصيل

صحيح ان المقاومة النوعية لعدد غير قليل من الموصلات (كالمعادن مثلاً) تزداد بزيادة درجة الحرارة كما أشرنا . الا أنه علينا أن نتذكر ان هناك مواد موصلة أخرى مثل أشباه الموصلات والمحاليل الالكتروليتية تشذ عن تلك القاعدة . أي تقل مقاومتها النوعية بزيادة درجة الحرارة . وهذا يعني أن قيمة المعامل الحراري للمقاومة النوعية لهذه المواد تكون سالبة (لاحظ الجدول 2 - 7) . كما يوجد عدد من السبائك التي تمتاز بضآلة

التغير الحاصل في مقاومتها النوعية لمدى غير قليل من درجات الحرارة . ومثال ذلك سبيكة المنغانين (84% Cu , 12% Mn, 4% Ni) وسبيكة الكونستانتان (60% Cu, 40% Ni)

وأخيراً لابد أن نشير الى أن مقاومة الجسم الموصل هي الاخرى تتغير مع تغير درجة حرارته وفقاً لنفس نمط تغير المقاومة النوعية لمادة الموصل . ويمكننا اثبات ذلك بسهولة بالرجوع الى العلاقة (8 – 7) وهي ($\rho = RA / L$) . فاذا أهملنا التغير الحاصل في طول الجسم ومساحة مقطعه عندما تتغير درجة حرارته . وعوضنا عن ρ بدلالة المقاومة R في معادلة (10 – 7) نحصلنا على

$$R_t = R_{20} [1 + \alpha (t - 20°C)] \qquad \ldots (7-12)$$

الجدول (2 – 7)

معامل المقاومة النوعية الحراري في درجة حرارة الغرفة

Temperature Coefficient of Resistivity at Room Temperatur

α (°C^{-1})	Material	
0·0039	Aluminum	المنيوم
0·0020	Brass	براص
0·0005	Carbon	كاربون
0·000002	Constantan	كونستانتان
0·00393	Copper	نحاس
0·0050	Iron	حديد
0·0043	Lead	رصاص
0·000000	Manganin	منغانين
0·00088	Mercury	زئبق
0·0004	Nichrome	نكروم
0·0038	Silver	فضة
0·0045	Tungsten	تنكستن

مثـــال 4

سلك نحاسي طوله $20\ m$ ومساحة مقطعه $4\ mm^2$

(أ) أحسب مقاومة هذا السلك في درجة حرارة قدرها $20^\circ C$ اذا علمت أن المقاومة النوعية للنحاس في هذه الدرجة تساوي $1.72 \times 10^{-8}\ \Omega m$

(ب) كم تصبح مقاومة السلك اذا سخن الى درجة $80^\circ C$ علماً بان معامل المقاومة النوعية الحراري للنحاس هو $0.00393\ C^{-1}$

الحـــل

(أ) من المعادلة (8 - 7) نجد أن مقاومة السلك تساوي

$$R = \frac{(1.72 \times 10^{-8}\ \Omega m)(20\ m)}{4 \times 10^{-6}\ m^2}$$

$$= 0.086\ \Omega$$

(ب) طبقاً للمعادلة (10 - 7) نجد أن

$$\rho_{80} = 1.72 \times 10^{-8} [1 + 0.00393 (80 - 20)] = 2.13 \times 10^{-8}\ \Omega m$$

ومن المعادلة (8 - 7) نجد المقاومة في درجة $80^\circ C$

$$R = \frac{2.13 \times 10^{-8} \times 20}{4 \times 10^{-6}} = 0.106\ \Omega$$

مثال 5

ملف من النحاس وآخر من الكاربون مقاومتهما 20 و 22 أوماً على الترتيب في درجة حرارة الغرفة . فاذا علمت أن المعامل الحراري للمقاومة النوعية للنحاس $0.004\ C^{-1}$ وللكاربون $0.0005^\circ C^{-1}$ - جد درجة الحرارة التي عندها تتساوى مقاومة الملفان .

الحـــل

من الملاحظ ان مقاومة النحاس تزداد بارتفاع درجة الحرارة ، على حين يحدث

العكس لمقاومة الكاربون اذ تنقص كلما ارتفعت درجة الحرارة . لنفرض ان درجة الحرارة التي عندها تتساوى المقاومتان هي $t°C$. بعد ذلك نجد قيمة كل من المقاومتين عند هذه الدرجة باستخدام المعادلة (12 - 7) فنحصل على

$$R_{Cu} = 20 [1 + 0{\cdot}004 (t - 20)]$$

و

$$R_C = 22 [1 - 0{\cdot}0005 (t - 20)]$$

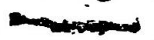
لكن مقاومة ملف النحاس (R_{Cu}) تساوي مقاومة ملف الكاربون (R_C) ، لذا ينتج

$$20 [1 + 0{\cdot}004 (t - 20)] = 22 [1 - 0{\cdot}0005 (t - 20)]$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على درجة الحرارة

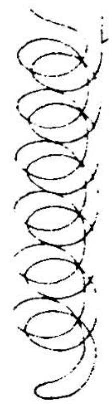
$$t = 42°C$$

4 - 7 المقاومات المستخدمة عملياً

يستفاد من خاصية المقاومة في تنظيم مرور التيار في فروع الدوائر الكهربائية المختلفة وتحديد قيمته . ولتحقيق هذا الغرض تستخدم عناصر كهربائية تدعى المقاومات (جمع مقاوم resistor) ، وتمثل في الدوائر الكهربائية بالشكل  . تصنع المقاومات بطرق وأشكال مختلفة حسب الغاية المتوخاة من استعمالها . من هذه المقاومات ماهو ثابت القيمة ، ومنها مايمكن تغيير قيمتها . ومن هذه المقاومات مايمتاز بدقة قيمته . ومنها ما يمتاز بصفات أخرى غير تلك الصفات . وسنشرح فيما هوآت عدداً من الانواع الشائعة الاستعمال .

(أ) المقاومات القياسية Standard resistors

تتصف المقاومات القياسية بالمحافظة على قيمتها المحددة لزمن طويل ، رغم تغير الظروف الجوية المحيطة بها . وتصنع عادة من سلك من مادة تمتاز بمقاومتها النوعية العالية ومعاملها الحراري المنخفض جداً مثل سبيكة المنغانين لكي لايحدث تغير يذكر في قيمتها عند ارتفاع درجة حرارة السلك اثناء مرور التيار فيه . ولتجنب نشوء حث ذاتي بلف السلك كما هومبين في الشكل (7 - 7) فبهذه الطريقة تتساوى التأثيرات الحثية في



الشكل (7-7) مقاومة سلكية خالية من الحث

النصف الاول من لفات السلك مع التأثير المماثلة الناتجة عن لفات النصف الآخر منـــه وتعاكسهـــا وبذلك يصبح التأثير الحثي الـكلي صفراً . ان هذا الاسلوب من لف الاسلاك يدعى لف غيرحثي non - inductive .ويثبت الملف المقاوم داخل وعاء مقفل مملوء بالزيت للتخلص من تأثير الرطوبة في الجوعلى قيمة المقاومة . وللمقاومات القياسية أهمية كبيرة في مختبرات التقييس والمعايرة والسيطرة النوعية .

(ب) المقاومـــات السلـــكية Wire – wound resistors

تصنع المقاومات السلـكية من سلك من المنغانين او الـكونستانتان او النكروم ، ملفوف بالطريقة المذكورة آنفاً للتخلص من التيارات المحتثة ، لاجل ان يكون المقاوم صالحا للاستعمال في دوائر التيار المتناوب (لاحظ الشكل 7 – 7) . ويمكن بسهولة الحصول على القيمة المطلوبة للمقاومة ، وبدرجة كافية من الدقة لـكثير من الاغراض العملية ، وذلك بقطع الطول الملائم من السلك ، اذ ان مقاومة السلك تتناسب تناسباً طردياً مع طوله كما هومعروف . يستعمل هذا النوع من المقاومات عادة في اجهزة القياس الـكهربائية مثل الاميترات والفولتميترات . وما صندوق المقاومة resistance box سوى مجموعة من تلك الملفات المقاومة المثبتة داخل جسم الصندوق والمتصلة بعضها مع البعض الاخر بطريقة تجعل اختيار القيمة المرغوبة للمقاومة أمرا في غاية السهولة . ومما يساعد على ذلك هوتأشير القيم المختلفة لمقاومات الملفات على نهايات وأزرار مثبتة علـى وجه الصندوق .

كما تصنع كذلك مقاومات منفردة من لف السلك على اسطوانة من مادة صلبـــة وعازلة للـكهربائية مثل الخزف الصيني او السيراميك . ثم تطلى من الخارج بمادة عازلة لحمايتها من المؤثرات الخارجية واكسابها قوة ومتانة . وتترك نهايتان للتوصيل الكهربائي لربط المقاوم بالدائرة الـكهربائية عند الاستعمال .

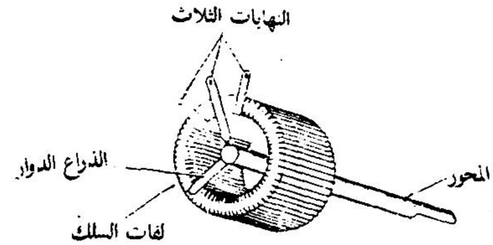
(ج) المقاومـــــات الـــكاربونيـــه Carbon resistors

تصنع هذه المقاومات من خلط مسحوق الـكاربون مع عجينة من السيراميك بنسبة معينة وجعلها بشكل قضبان صغيرة . ويربط سلـكان قرب نهايتي القضيب عند نقطتين يحدد موضعهما بدقة على ضوء القيمة المطلوبة للمقاومة . ثم تغلف بمادة الباكليت أو السيراميك لاكسابها قدراً ملائماً من المتانة . تكون القيم المعطاة لهذه المقاومات اقل دقة من المقاومات السلـكية ، ولهذا تستعمل عادة في الدوائر الالـكترونية التي تحمل عادة في فروعها تيارات ضعيفة والتي لاتحتاج الى دقة عالية لقيم المقاومات مثل اجهزة الراديو. تحدد قيمة المقاومة مع نسبة التفاوت في القيمة المعطاة بواسطة منظومة من الالوان التي تطلى على غلاف المقاوم وتدعى دليل الالوان Color code

(د) المقاومـــــات المتغيـــرة Rheostat

تمتاز المقاومات المتغيرة كما يستدل من اسمها بامكانية تغيير قيمتها بالتدريج لـكي يتسنى بواسطتها تغيير التيار المار فيها حسبما يراد . تتكون المقاومة المتغيرة عادة من سلك من النكروم المؤكسد oxidized nichrome ملفوف على جسم اسطواني معزول بحيث تلاصق كل لفة للتي تجاورها . ان الاوكسيد يعد بمثابة مادة عازلة تفصل اللفات المتلاصقة عن بعضها . تمتلك المقاومة المتغيرة ثلاثة اطراف لتوصيلها بالدائرة الخارجية . فبالاضافة الى الطرفين المتصلين بنهايتي السلك المقاوم . هناك طرف ثالث منزلق على الجزء العلوي من اللفات وملامس لها . ان تحريك الطرف الثالث المنزلق يؤدي بطبيعة الحال الى تغيير قيمة المقاومة المتصلة بالدائرة ومن ثم التيار المار فيها . ويرمز للمقاومة المتغيرة بالشكـــل في الدوائر الـكهربائية . ومما تجدر الاشارة اليه هو ان المقاومات المتغيرة قد

تصنع كذلك من سلك يلف على لب عازل بهيئة كعكة كما هو مبين في الشكل (8 - 7) ويوضع في مركز الـكعكة محور يرتكز عليه ذراع يلامس لفات السلك . بحيث ان تدوير المحور يؤدي الى تغيير موضع التلامس بين الذراع واللفات . ومن ثم تغيير قيمة المقاومة . وبصورة عامة يمكن استعمال المقاومات المتغيرة كمجزئات للجهد Potenial devider

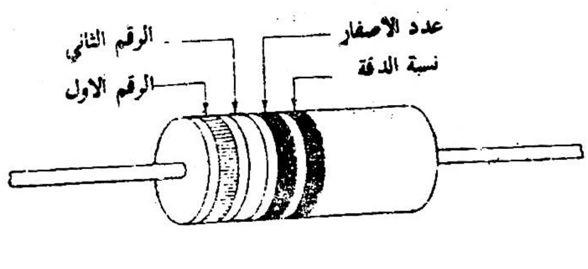


الشكل (7-8)
مقاومه متغيره

7 - 5 دليل الوان المقاومات Resistor color code

للتعبير عن قيمة المقاومات الكاربونية جرت العادة ان تقوم الجهة المنتجة لهذه المقاومات بطلي جسم المقاوم عند احد طرفيه بثلاثة احزمة من الالوان المختلفة . كما هو مبين في الشكل (9 - 7) . بدلا من كتابة قيمة المقاومة عليه . وبذلك يمكن قراءة قيمة المقاومة على ضوء تسلسل هذه الالوان ابتداءً من طرف المقاوم وكذلك الرقم الذي يرمز له كل لون حسبما هو مبين في الجدول الآتي

اللون	اسود	بني	احمر	برتقالي	اصفر	اخضر	ازرق	بنفسجي	رمادي	ابيض
الرقم	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9



الشكل (9-7) دليل الالوان للمقاومات

يدل لون الحزام الاول على الرقم الاول من قيمة المقاومة من جهة اليسار . ولون الحزام الثاني يمثل الرقم الثاني للقيمة . أما لون الحزام الثالث فانه يعبرعن عدد الأصفار التي تلي هذين الرقمين ، وبهذا يكتمل العدد المعبر عن قيمة المقاومة بالاومات . لقد بينا فيما مضى من الصفحات ان القيم المعطاة للمقاومات الكاربونية ليست دقيقة . إذ قد تصل نسبة الدقة $\pm 20\%$ من قيمتها المعطاة . لذا يقوم المنتج باضافة حزمة رابعة للتعبير عن نسبة الدقة في قيمة المقاومة . فاذا كان لون هذه الحزمة ذهبيا كانت الدقة (أوكما تسمى في كثيرمن الاحيان التفاوت المسموح tolerance) $\pm 5\%$ من القيمة المستخرجة من الالوان . واذا كان اللون فضيا كانت الدقة $\pm 10\%$ اما اذا كانت الحزمة بدون لون لاصبح التفاوت المسموح في قيمة المقاومة $\pm 20\%$.

لنأخذ عددا من الامثلة على كيفية استخراج قيمة المقاومة حسب الالوان المطلية على كل من المقاومات التالية وذلك بالاستفادة من الجدول المبين في أعلاه :

(أ) ازرق واسود وبني ثم ذهبي

$$R = 600 \pm 5\% = 600 \pm 30\,\Omega$$

(ب) اخضر واخضر وبرتقالي ثم فضي

$$R = 55000 \pm 10\% = 55000 \pm 5500\,\Omega$$

(جـ) بني واسود واخضر ثم ذهبي

$$R = 1000000 \pm 50000\,\Omega$$

ولابد من الاشارة الى ان هنالك نمطاً آخراً لتلوين المقاومة بدلا من الاحزمة الثلاثة . في هذه الحالة يطلى جسم المقاومة كله بلون معبر عن الرقم الاول للقيمة حسبما جاء في الجدول في اعلاه ، ويرسم حزام في طرف المقاومة ليعبر عن الرقم الثاني . ثم ترسم نقطة بلون آخر للتعبير عن عدد الاصفار التي تلي هذين الرقمين .

6 – 7 قانون أوم Ohm's Law

عند دراستنا للكهربائية المستقرة وجدنا ان المجال الكهربائي في داخل الموصل يكون صفرا . بينما هنا نرى ان الحالة مختلفة حيث يوجد مجال كهربائي دائمي في داخل الموصل ناتج عن فرق الجهد المسلط بين نهايتيه . مما يجعل الشحنات (وهي الكترونات في حالة المعادن) تنساب بشكل مستمر داخل الموصل .

انَ العلاقة بين شدة المجال الكهربائي داخل الموصل وكثافة التيار كما يتبين من تعريف المقاومة النوعية (المعادلة 7 - 7) هي

$$E = \rho J \qquad \ldots (7-13)$$

ولو دققنا النظر مليا في هذه المعادلة لرأينا انه ليس من الضروري ان تتناسب E طرديا مع J أو ان تكون E دالة خطية linear function لكثافة التيار ، الا اذا كانت المقاومة النوعية للموصل هي مقدار ثابت . وفعلا وجد ان المقاومة النوعية لكثير من الموصلات كالمعادن مثلا هي كمية ثابتة لاتعتمد على شدة المجال ولا على التيار (عند درجة حرارة معينة) ، فاذا تضاعف المجال تضاعفت كذلك كثافة التيار وبقيت المقاومة النوعية ثابتة على قيمتها . لقد كان العالم الالماني أوم G. S. Ohm (1789 - 1854) هو أول من اكتشف ثبوت المقاومة النوعية للمعادن عند درجة حرارة معينة . وهذا مايعرف بقانون اوم .

اما الصيغة الاكثر شيوعا لقانون أوم فتكمن في الحالات الاعتيادية عندما يكون الموصل بشكل سلك منتظم المقطع . فلو ربطت نهايتا السلك (طوله L ومساحة مقطعه A) بفرق جهد قدره V لنتج مجال كهربائي منتظم في داخله شدته تساوي

$$E = V/L$$

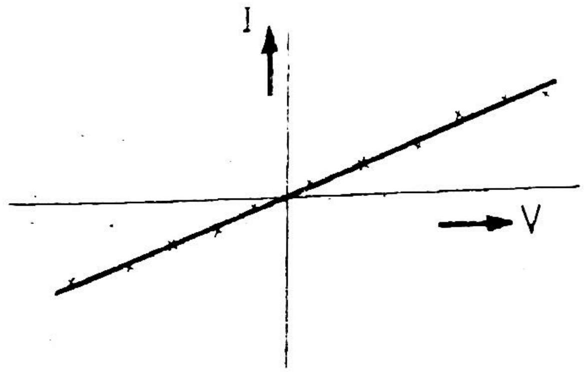
ولتكون تيارا كهربائيا كثافته

$$J = I/A$$

وبالتعويض عن هاتين النتيجتين في المعادلة (13 - 7) نجد ان

$$V = \left(\frac{\rho L}{A} \right) I = RI \qquad \ldots (7-14)$$

ومن هذه المعادلة نرى أن قانون اوم يأخذ صيغة جديدة وهي ان فرق الجهد بين طرفي السلك يتناسب طرديا مع التيار المار فيه عند ثبوت درجة حرارة السلك . او ان مقاومة السلك هي كمية ثابتة لاتتغير بتغير فرق الجهد او التيار . فلو رسمنا خطا بيانيا بين فرق الجهد (بين طرفي سلك موصل) وبين التيار المار فيه لحصلنا على خط مستقيم . واذا عكسنا اتجاه الفولتية المسلطة على السلك انعكس اتجاه التيار كذلك مع بقاء العلاقة الخطية بين الفولتية والتيار (لاحظ الشكل 10 - 7) . ان المقاومة التي تخضع الى قانون أوم تسمى مقاومة خطية Linear resistance او مقاومة أومية .



الشكل (10-7)

العلاقة بين الفولتية والتيار لمقاومة أومية

ومما تجدر الاشارة اليه هو ان الزيادة الكبيرة في الفولتية المسلطة على الموصل الاعتيادي تؤدي بطبيعة الحال الى حدوث زيادة كبيرة في التيار المار فيه ومن ثم الى حدوث ارتفاع لايستهان به في درجة حرارة الموصل . وعند ذلك تفقد المقاومة خاصيتها الخطية .

ويجب ان لايغيب عن الاذهان على ان هناك الكثير من الموصلات التي لاتخضع لقانون اوم . فالعصر الالكتروني الذي نعيشه غني بمثل هذه النماذج . فلو أبدلنا الموصل البسيط المذكور اعلاه بمقوم* معدني (مكون من طبقات من النحاس ومن اوكسيد النحاس) او بمقوم بلوري ، لرأينا ان الخط البياني المرسوم بين التيار والفولتية لايكون خطا مستقيما . وهنا نجد ان التيار يزداد زيادة غير خطية مع زيادة الفولتية . كما ان عكس الفولتية يؤدي الى عدم مرور التيار خلال المقوم عمليا . وبتعبير ادق نقول ان التيار يصبح ضئيلا جدا بالاتجاه المعاكس . وان مقاومة المقوم تصبح عالية جدا بهذا الاتجاه . (لاحظ الشكل 11 – 7) . ويحدث الشيء نفسه فيما اذا ابدل المقوم المعدني بثنائي بلوري crystal diode او صمام ثنائي مفرغ vacuum tube diode .

---

* المقوم هو الاداة التي تسمح بمرور التيار باتجاه واحد هو الاتجاه الامامي ولايسمح بمرور التيار بالاتجاه المعاكس

احمد عبدالجبار

7 – 7 القدرة الحرارية في المقاومات – قانون جول

اذا كان فرق الجهد المسلط بين نقطتين قدرة V . فان ذلك يعني ان انسياب شحنة اختبارية موجبة q_0 من نقطة عالية الجهد الى نقطة منخفضة الجهد سينجز شغلاً قدره q_0V . ان هذا الشغل المنجز يساوي الفرق في الطاقة الكامنة بين الموضعين. فعند شحن البطارية مثلاً يسري التيار من الطرف الموجب للبطارية الى طرفها السالب داخل البطارية ، وبذلك يصرف الشغل على احداث تغيير في التركيب الكيميائي لمحلول البطارية وعندما يسري التيار خلال محرك كهربائي . فان جزء كبيراً من هذا الشغل يتحول الى طاقة حركية تعمل على تدوير المنظومة المرتبطة بالمحرك . غير أن سريان التيار خلال مقاومة يؤدي الى زيادة الطاقة الحرارية للجسم الموصل .

ولحساب الطاقة الحرارية المتولدة في المقاومة R نتصور أن تياراً I يسري فيها وان فرق الجهد بين طرفي المقاومة هو V ومن تعريف فرق الجهد نجد ان الشغل الذي يبذل لامرار شحنة قدرها dq خلال المقاومة يساوي

$$dW = V dq$$

اما المعدل الزمني للشغل المنجز

$$\frac{dW}{dt} = V \frac{dq}{dt} = VI$$

أي أن القدرة

$$\therefore P = VI \qquad \ldots (7-15)$$

ولو كانت المقاومة R تخضع لقانون أوم . لأصبح بالامكان الاستفادة من العلاقة (V = IR) وكتابة هذه المعادلة بأحد الشكلين

$$P = I^2R \qquad \ldots (7-16)$$

أو

$$P = V^2 / R \qquad \ldots (7-17)$$

وللتعبير عن الحرارة المتولدة في المقاومات يفضل كتابة المعادلة (16 – 7) بالشكل الآتي

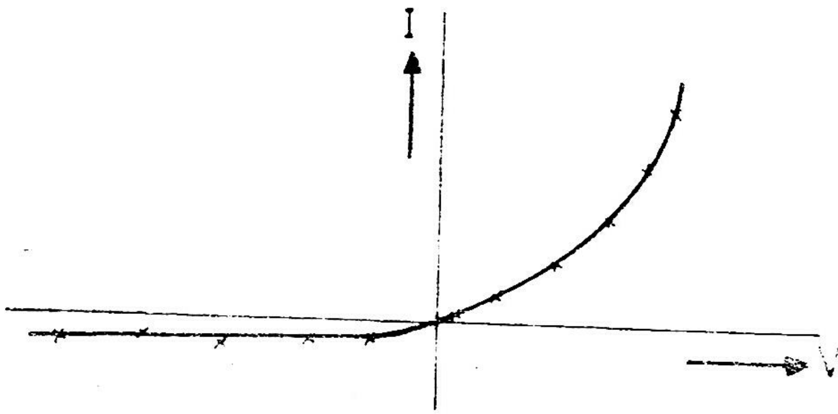
$$\frac{dH}{dt} = I^2R \qquad (7-18)$$

أي

$$H = \int I^2 R\, dt \qquad ...(7-19)$$

اذا فرضنا أن مقاومة الموصل R لاتتغير بتغير التيار المار فيها (أي مقاومة أومية) ، لنصت المعادلة (18 - 7) على أن لمعدل الزمني للحرارة المتولدة في المقاومة تتناسب ا طردياً مع مربع التيار المار فيها ن هذه الحقيقة التي كشفها العالم جول اثناء قيامه باجراء قياسات تجريبية للمكافيء الميكانيكي للحرارة تدعى بقانون جول .

ويتبين من المعادلة (18 - 7) ن وحدة المعدل الزمني للحرارة (اوالقدرة الحراوية) هي جول / ثانية أي واط (ورمزه W) وهناك مضاعفات لهذه الوحدة ذات استخدام واسع في الأغراض الصناعية مثل الكيلوواط (KW) والميكاواط (MW) اما الكيلو واط - ساعة فهي وحدة لقياس الطاقة الكهربائية ، ونعرف بانها كمية الطاقة التي ينتج عنها قدرة قدرها كيلو واط لفترة زمنية مدها ساعة كاملة . وتساوي بالجولات



الشكل (11-7)

العلاقة بين الفولتية والتيار لمقوم

$$1kW - hr = 10^3 \times 60 \times 60 = 3{\cdot}6 \times 10^6 \ J$$

مثـــال 6

مدفأة كهربائية قدرتها $2000 \ W$ عندما تستخدم فولتية قدرها $220 \ V$ كم من الدنانير يكلف استعمال هذه المدفاة اذا استعملت ثلاثون يوماً بمعدل ثمان ساعات في اليوم الواحد . علما بأن سعر الطاقة الكهربائية هو ثمانية فلوس لكل كيلوواط ساعة ($kW - hr$) ؟

الحـــل

ان مقدار الطاقة الكهربائية المستهلكة خلال ثلاثون يوما يمكن حسابها من العلاقة .

$$\begin{aligned} W &= Pt \\ &= 2000 \ W \times (30 \times 8) \ hr \\ &= 480000 \ (W - hr) \\ &= 480 \ (kW - hr) \end{aligned}$$

وبهذا نجد أن ثمن هذا المقدار من الطاقة المستهلكة يصبح

$$480 \times 0{\cdot}008 = 3{\cdot}840 \ I \ D$$

مثـــال 7

معمل صغير يستهلك قدرة كهربائية قيمتها $10 \ kW$. يتم تجهيزها خلال خطوط مقاومتها 5Ω . كم من القدرة الحرارية الضائعة في الخطوط يمكن توفيرها فيما لو يتم تجهيز الطاقة الحرارية للمعمل بفولتية قدرها $5000 \ V$ بدلاً من $1000 \ V$ ؟ وماكفاءة نقل الطاقة الكهربائية في كل حالة ؟

الحـــل

نحسب التيار المار في خطوط النقل عندما تكون القدرة الكهربائية مجهزة بادىء الأمر بفولتية قدرها ألف فولت من العلاقة ($P = VI$) فنحصل على

$$I = \frac{P}{V} = \frac{10000}{1000} = 10\ A$$

ثم نجد التيار عند تجهيز القدرة الكهربائية بفولتية قدرها خمسة آلاف فولت

$$I' = \frac{P}{V} = \frac{10000}{5000} = 2\ A$$

بعد ذلك نحسب القدرة الحرارية الضائعة في اسلاك النقل في كلتا الحالتين

$$\frac{dH}{dt} = I^2R = (10)^2 \times 5 = 500\ W$$

$$\frac{dH'}{dt} = I'^2R = (2)^2 \times 5 = 20\ W$$

اي ان مقدار التوفير في القدرة الضائعة في الاسلاك سيصبح

$$500 - 20 = 480\ W$$

اما كفاءة نقل القدرة الكهربائية في كلتا الحالتين فحسب من العلاقة

$$\text{الكفاءة} = \frac{\text{القدرة المستهلكة في المعمل}}{\text{القدرة المستهلكة في المعمل + القدرة المبددة في خطوط النقل}} \times 100\%$$

$$Eff = \frac{10000}{10000 + 500} \times 100\% = 95.2\%$$

$$Eff' = \frac{10000}{10000 + 200} \times 100\% = 99.8\%$$

تمرينات

1 - 7 اذا علم أن مصباحاً كهربائيا يسحب تيارا قدره ربع أمبير . فما مقدار الشحنة بالكولومات التي تمر خلاله في خمس دقائق ؟ ما مقدار الزمن اللازم لمرور مائة وخمسين كولوماً ؟

(75 C: 10min)

2 - 7 سلك نحاسي مساحة مقطعه اربعة مليمترات مربعة . فاذا مر فيه تيار قدره عشرون أمبيرا . احسب عدد الالكترونات التي تعبر مقطعا فيه في وحدة الزمن . ثم احسب سرعة انجراف الالكترونات ، علما بانه يوجد حوالي 10^{-9} الكترون طليق في المتر المكعب الواحد من النحاس .

(12.5×10^{19} : 3.1×10^{-4} m/s)

3 - 7 سلك مصنوع من الفضة ذو مقطع مربع الشكل طول ضلعه مليمترا واحدا ينقل شحنة قدرها مائة كولوم في زمن مقداره خمس واربعون دقيقة . أحسب

(أ) التيار الذي يحمله السلك .

(ب) سرعة انجراف الالكترونات في السلك . علما بان عدد الالكترونات الحرة في المتر المكعب الواحد من الفضة يساوي (5.8×10^{28})

(37 mA . 4×10^{-6} m/s)

4 - 7 في نموذج بور لذرة الهايدروجين يعمل الالكترون حوالي (6×10^{15}) دورة النواة في الثانية الواحدة . أحسب مقدار التيار الناتج عن دوران الالكترون

(0.96 mA)

5 - 7 سلك من التنكستون مقاومته 5.56Ω عندما تكون درجة حرارته 20 C فاذا سخن الى درجة حرارة 100°C تصبح مقاومته 7.57Ω أحسب معامل المقاومة الحراري للتنكستون في درجة حرارة 20°C

($0.0045\,°C^{-1}$)

6 - 7 سلك نحاسي يحمل تياراً قدره خمسة أمبيرات فاذا علم ان نصف قطر السلك هو مليمتر واحد . احسب مامقدار كثافة التيار J ، مامقدار سرعة انجراف الالكترونات drift velocity في السلك ؟

(1.59×10^{6} A/m² : 10^{-4} m/s)

7 - 7 عندما يستخدم فرق جهد عال بين قطبي انبوبة تفريغ discharge tube يتأين الهايدروجين فتتجه الالكترونات نحو القطب الموجب والبروتونات نحو

القطب السالب . مامقدار وما اتجاه التيار الذي ينشأ في هذه الانبوبة اذا علم ان 3.6×10^{18} الكترونا و 1.4×10^{18} بروتونا يقطع مقطع الانبوبة في كل ثانية ؟

(0.8A)

7 – 8 اذا كانت فحمة محرك كهربائي Carbon brush طولها 30mm وذات مقطع مستطيل ابعاده (12mm × 8mm) . احسب مقدار الهبوط في الفولتية Voltage drop حول هذه الفحمة عندما يمر فيها تيار قدره اربعون أمبير . علما بان المقاومة النوعية للكاربون هي $3.5 \times 10^{-5} \Omega m$

(0.436V)

7 – 9 اذا كانت مقاومة سلك نحاسي هي 5.7Ω . أحسب مقاومة سلك من الالمنيوم (طوله ضعف السلك النحاسي وقطره ثلاث مرات اكثر منه , علما بان النسبة بين المقاومة النوعية للالمنيوم والمقاومة النوعية للنحاس هي 1.7 .

(2.15Ω)

7 – 10 قطعة من النحاس حجمها $2cm^3$. فاذا جعل منها سلك ذو مقطع دائري منتظم مقاومته 2Ω أحسب أبعاد هذا السلك . علماً بان المقاومة النوعية للنحاس هي $1.7 \times 10^{-8} \Omega m$

($L = 15.3m, A = 13 \times 10^{-8} m^2$)

7 – 11 اذا اريد صنع ملف مكون من سلك من الالمنيوم طوله مائة متر بحيث يحمل تياراً قدره خمسة امبيرات عندما يكون فرق الجهد بين طرفيه 220V فما قيمة

(أ) مقاومة السلك ؟

(ب) مساحة مقطع السلك ؟

(ج) القدرة الضائعة في السلك عندما يسري فيه التيار ؟ علما بأن المقاومة النوعية للالمنيوم تساوي $2.8 \times 10^{-8} \Omega m$

(44Ω ; $6.36 \times 10^{-8} m^2$; 1100W)

7 – 12 محرك كهربائي تسحب ملفاته المكونة من النحاس تيارا قدره 2.57 A عند بدء تشغيله في درجة حرارة الغرفة (20°C) . وقد لوحظ أنه بعد مرور عدة ساعات على تشغيله يهبط التيار الى 2.25 A على الرغم من ان الفولتية التي تزود المحرك بالطاقة تبقى ثابتة . احسب درجة الحرارة التي تؤول اليها ملفات المحرك . علما بأن معامل المقاومة الحراري للنحاس هو 0.0039 لكل درجة مئوية .

(56.5 °C)

7 - 13 اذا علم ان التيار المار في سلك موصل يتغير مع الزمن حسب المعادلة
$i = \sin 120\, t$
أحسب مقدار الشحنة التي تعبر مقطعاً في السلك خلال الفترة الزمنية بين
$t = 0{\cdot}25s, t = 0$
$(1{\cdot}12 \times 10^{-3} C)$

7 - 14 سلكان احدهما من النحاس والآخر من النيكل ، فاذا كانت مقاومة الاول $12{\cdot}7\Omega$ والثاني $11{\cdot}6\Omega$ في درجة حرارة الغرفة ، فعند أية درجة تتساوى مقاومتاهما ؟ علما بأن معامل المقاومة الحراري للنحاس يساوي $0{\cdot}0039$ لكل درجة مئوية وللنيكل يساوي $0{\cdot}006$ لكل درجة مئوية .
(75°C)

7 - 15 أحسب طول السلك اللازم لعمل مقاومة قدرها عشرة أومات من سبيكة المنغانين manganin اذا علم ان قطر السلك هو مليمتر واحد والمقاومة النوعية لهذه السبيكة هي $44 \times 10^{-8}\ \Omega m$
(17·85m)

7 - 16 مدفأة كهربائية قدرتها 2000 W عندما يكون فرق الجهد بين طرفيها 220 V فاذا انخفض فرق الجهد الى 180 V فما مقدار قدرتها الجديدة ؟ افرض ان درجة الحرارة تبقى ثابتة .
(1340 W)

7 - 17 مكواة كهربائية تسحب تياراً قدره 13 A عندما تكون الفولتية المستخدمة 220 V ما قدرتها ؟ احسب كلفة تشغيلها للساعة الواحدة اذا علمت ان سعر الطاقة الكهربائية هو ثمانية فلوس لكل كيلوواط – ساعة .
(2860W ; 22·9 fils)

7 - 18 محرك كهربائي قدرته 10 kW عندما تكون الفولتية المستخدمة 220 V أحسب (أ) قيمة التيار الذي يسحبه المحرك ، (ب) القدرة الضائعة في الاسلاك اذا كانت مقاومتها $0{\cdot}3\ \Omega$.
(45·5 A ; 620 W)

7 - 19 برهن على أن 1 فولت ×1 أمبير =1 واط

7 - 20 قضيب معدني طوله 25 cm ومساحة مقطعه $15\ cm^2$. أحسب الموصلية Conductivity لهذا القضيب اذا علم أن مقاومته تساوي $28{\cdot}7 \times 10^{-6}\Omega$
$(0{\cdot}58 \times 10^{7}\Omega^{-1} m^{-1})$

7 – 21 أحسب النسبة المئوية للزيادة الحاصلة في كل من (أ) المقاومة النوعية و(ب) الطول و(ج) مساحة المقطع لسلك نحاسي عند ارتفاع درجة حرارته بمقدار درجة مئوية واحدة . اذا علمت ان معامل التمدد الطولي للنحاس يساوي ($1.7 \times 10^{-5}\ C^{\circ -1}$) . ماذا تستخلص من النتائج التي تحصل عليها ؟ وهل ترى انه ضروري من الناحية العملية الآخذ بالتغير الحاصل في طول ومساحة مقطعه عند استخدام المعادلة (7 – 12) لحساب مقاومة السلك في درجات الحرارة المختلفة ؟

(0.39 %، 0.0017 %، 0.0034 %)

7 – 22 غلاية شاي كهربائية ذات مقاومة قدرها $50\ \Omega$ وتتسع للترين من الماء . فإذا كانت كتلة الغلاية كيلوغراما واحداً وحرارتها النوعية 0.1 . احسب الزمن اللازم لغليان الماء علما بأن 25 % من الحرارة المجهزة تضيع بالاشعاع . أفرض ان درجة حرارة الماء الابتدائية $10^{\circ}C$ وأن الفولتية 200 V .

(22min)

7 – 23 غلاية شاي كهربائية تعمل بفولتية قدرها 240 V وذات مسخن مقاومته $80\ \Omega$ فاذا علم ان غليان 1.5 لتر من الماء يتطلب زمنا قدره 14 دقيقة ، جد نسبة الحرارة اللازمة لغليان الماء الى الحرارة التي يولدها المسخن . افرض ان درجة حرارة الماء الابتدائية $20^{\circ}C$.