# الفيزياء الاساسية

**Book** · January 2017



**1 author:**

Badis Ydri
Badji Mokhtar - Annaba University

# الفيزياء الاساسية

# Fundamental Physics


**باديس يدري**

Badis Ydri

**معهد الفيزياء، جامعة باجي مختار، عنابة، الجزائر**

BM Annaba University, Algeria


**جانفي** 2016

January 2016

**ملخص**

محاضرات و تمارين محلولة فى الميكانيك الكلاسيكى، الترموديناميك و الميكانيك الاحصائى، و الميكانيك الكمومى، لاقسام الليسانس و الماستر فيزياء فى الجامعات الجزائرية.

**Abstract**

This book includes my lectures, together with their problem sets and solutions, on 1) classical mechanics (one semester), 2) thermodynamics and statistical mechanics (one semester), and 3) quantum mechanics (one semester), which I have been giving to graduate students of theoretical physics at Annaba University since 2010 .

# اهداء

## الي روح الاب الكريم
## ساعد يدري
## 1943 – 2015

# الفهرس


## *I* الميكانيك الكلاسيكي 8

**0 السقوط الحر 9**

المعالم غير العطالية: الدوران و التسارع . . . . . . 9
قانون نيوتن الثانى فى معلم غير عطالى دوار . . . . . . 10
السقوط الحر . . . . . . 11
تمارين . . . . . . 15
حلول . . . . . . 16

**1 مبادئ التغاير و معادلات لاغرانج 18**

ميكانيك جملة جسيمات نقطية . . . . . . 18
القيود الهولونومية و مبدأ العمل الافتراضي لدالمبارت . . . . . . 20
معادلات لاغرانج . . . . . . 22
حساب التغايرات . . . . . . 24
مبدأ الفعل الاصغري لهاميلتون . . . . . . 25
تمارين . . . . . . 28
حلول . . . . . . 32

**2 الميكانيك الهاميلتوني 43**

قوانين الانحفاظ . . . . . . 43
تحويل لوجوندر و معادلات هاميلتون . . . . . . 45
معادلات هاميلتون من حساب التغاير: مبدأ هاميلتون المعدل . . . . . . 48
التحويلات القانونية . . . . . . 49
الصياغة السمبليكتية، اقواس بواسون و مبرهنة ليوفيل . . . . . . 52
معادلات هاميلتون - جاكوبي . . . . . . 58
تمارين . . . . . . 61
حلول . . . . . . 64

## *II* الترموديناميك و الميكانيك الاحصائي 87

**1 مقدمة في الترموديناميك 88**

مقدمة . . . . . . 88
تعاريف عامة . . . . . . 88
التحويلات الترموديناميكية . . . . . . 91
المبدأ الصفر للترموديناميك . . . . . . 92
الطاقة الداخلية و المبدأ الاول للترموديناميك . . . . . . 92

المبدأ الثاني للترموديناميک 94
دورة كارنو 95
مبرهنة كلوسيوس، الانتروبي و المبدأ الثاني للترموديناميک 97
المبدأ الثالث للترموديناميک 100
الدوال الترموديناميكية 101
تمارين 104
حلول 108

2 **مدخل الي الميكانيك الاحصائي الكلاسيكي: المجموعة الميكروقانونية** **119**
الحالات الميكروسكوبية 119
مثال: نموذج ايزينغ - المشاء العشوائي 120
انتروبي المعلومات و مسلمات الميكانيک الاحصائي 122
المجموعة الميكروقانونية 127
التوازن الترموديناميكي 130
الغاز المثالي الكلاسيكي 134
مسائل اضافية 138
تمارين 142
حلول 146

3 **المجموعة القانونية** **165**
المجموعة القانونية 165
دالة التقسيم 167
العلاقة بالمقادير الترموديناميكية 169
النظرية الحركية للغازات: توزيع ماكسويل 171
البارامغناطيسية 175
الغاز المثالى 176
تمارين 178
حلول 180

*III* **الميكانيك الكمومي** **187**

1 **مدخل الي الميكانيك الكمومي** **188**
**التكميم القانوني و معادلة شرودينغر** 188
علاقات التبادل القانونية 188
معادلة هايزنبرغ 189
معادلة شرودينغر 190
**فضاء هيلبرت** 191
اشعة الحالة 191
الملاحظات 193
**الاطياف المستمرة و الدوال الموجية** 194
مؤثر الموضع و الدوال الموجية 194
مؤثر كمية الحركة و الانسحابات 195
معادلة شرودينغر في فضاء المواضع 197
**القياس** 198
التفسير الاحصائي 198
انهيار الدالة الموجية 199
علاقات الارتياب 199

الصمود تحت تأثير الدورانات . . . . . 201
العزوم الحركية . . . . . 201
التوافقيات الدورانية . . . . . 203
الحلول المضبوطة لمعادلة شرودينغر . . . . . 206
الحالات المستقرة، حالات التصادم و الحالات المرتبطة . . . . . 206
الجسيم الحر . . . . . 208
الهزاز التوافقي . . . . . 210
كمون دالة دلتا . . . . . 212
الكمون المربع . . . . . 216
تمارين . . . . . 219
حلول . . . . . 223

2 نظرية الاضطرابات 231
نظرية الاضطرابات غير المتعلقة بالزمن . . . . . 231
الاضطرابات غير المنحلة . . . . . 231
حالة الاضطرابات المنحلة . . . . . 233
ذرة الهيدروجين . . . . . 235
المسألة المركزية الكمومية . . . . . 235
كمون كولومب . . . . . 236
البنية الدقيقة لذرة الهيدوجين . . . . . 239
التصحيح النسبي . . . . . 239
الاقتران بين السبين و العزم الحركي المداري . . . . . 241
نظرية الاضطرابات المتعلقة بالزمن . . . . . 244
تمثيل ديراك . . . . . 244
مسائل الجمل ذات الحالتان . . . . . 246
نشر دايزون . . . . . 248
قاعدة فيرمي الذهبية . . . . . 250
امتصاص و ارسال الاشعاع . . . . . 252
الاضطراب التوافقي . . . . . 252
الامتصاص و الارسال المحفز . . . . . 253
تمارين . . . . . 256
حلول . . . . . 263

3 نظرية التصادم 281
نظرية التصادم الكلاسيكية . . . . . 281
المسائل المركزية . . . . . 281
المقطع الفعال التفاضلي . . . . . 284
تصادم رذرفورد . . . . . 285
نظرية التصادم الكمومية . . . . . 286
معادلة ليبمان ـ شوينغر . . . . . 286
تقريب بورن . . . . . 290
مؤثر الانتقال . . . . . 291
طريقة الانسحابات الطورية . . . . . 292
معادلة شرودينغر في المنطقة $V = 0$ . . . . . 292
الامواج المستوية و الكروية . . . . . 295
سعات الامواج الجزئية و الانسحابات الجزئية . . . . . 296
تمارين . . . . . 300
حلول . . . . . 304

# الميكانيك الكلاسيكي

# Classical Mechanics

This part is based primarily on the standard treatise [1]. Only fundamental topics are discussed: 1) Variational principles and Lagrangian equations, and 2) Hamiltonian mechanics. In the second chapter we also dicuss the symplectic formalism, canonical transformations and Hamilton-Jacobi equation. See the following chapters: 2, 8, 9 and 10 of Goldstein [1]. The discussion of the action and the related principle of least action found in [2], and the discussion of non-holonomic constraints found in [3], were particularly very useful. Many exercises are taken from [3], which offers also pedagogical solutions, but also many exercises were taken from [1, 2]. The solutions to some of Goldstein's exercises, found in [4], was also consulted.

# السقوط الحر

فى هذا الفصل التحضيرى نتبع [3].

## المعالم غير العطالية: الدوران و التسارع

المعلم العطالى هو اى معلم يطبق فيه القانون الاول لنيوتن: حركة اى جملة لا تخضع لاى قوى خارجية هى حركة مستقيمة منتظمة.
اذن المعالم العطالية هى معالم تتحرك بالنسبة لبعضها البعض بسرعة ثابتة. ايضا فى المعلم العطالى قانون نيوتن الثانى يطبق دائما

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (١)$$

التسارع و الدوران يؤديان الى معالم غير عطالية. نشتق فيما يلى قانون نيوتن الثانى فى معلم غير عطالى دوار.
ليكن $L$ معلم عطالى $(x, y, z)$ مبدأه $O$ و ليكن $M$ معلم غير عطالى $(x^{'}, y^{'}, z^{'})$ يدور حول المعلم العطالى $L$ و نفترض للتبسيط ان مبدأه $O^{'}$ ينطبق دائما على المبدأ $O$. نسمى $L$ جملة المخبر laboratory system و $M$ الجملة المتحركة. لتكن اشعة وحدة الجملة المتحركة moving system تعطى ب $\vec{e}_1^{'}$، $\vec{e}_2^{'}$، و $\vec{e}_3^{'}$. لنعتبر شعاع $\vec{A}$ فى الجملة المتحركة $M$ يتعلق بالزمن بمعنى ان مركباته تتعلق بالزمن يكتب

$$\vec{A} = A_1^{'}\vec{e}_1^{'} + A_2^{'}\vec{e}_2^{'} + A_3^{'}\vec{e}_3^{'}. \quad (٢)$$

اذن مشتقة هذا الشعاع فى المعلم $M$ هى

$$\frac{d\vec{A}}{dt}|_M = \frac{dA_1^{'}}{dt}|_M\vec{e}_1^{'} + \frac{dA_2^{'}}{dt}|_M\vec{e}_2^{'} + \frac{dA_3^{'}}{dt}|_M\vec{e}_3^{'}. \quad (٣)$$

أما بالنسبة لجملة المخبر $L$ فانه بالاضافة الى تعلق المركبات $A_i^{'}$ بالزمن فان اشعة الوحدة نفسها $\vec{e}_i^{'}$ تتعلق بالزمن لانها تدور و بالتالى فان مشتقة الشعاع $\vec{A}$ بالنسبة للمعلم $L$ تعطى ب

$$\frac{d\vec{A}}{dt}|_L = \frac{d\vec{A}}{dt}|_M + A_1^{'}\dot{\vec{e}}_1^{'} + A_2^{'}\dot{\vec{e}}_2^{'} + A_3^{'}\dot{\vec{e}}_3^{'}. \quad (٤)$$

لدينا الترميز

$$\dot{\vec{e}}_i^{'} = \frac{d}{dt}\vec{e}_1^{'}|_L. \quad (٥)$$

يمكننا ان نحسب (انظر التمرينات)

$$\dot{\vec{e}}_1^{'} = a_1\vec{e}_2^{'} + a_2\vec{e}_3^{'} \ , \ \dot{\vec{e}}_2^{'} = -a_1\vec{e}_1^{'} + a_4\vec{e}_3^{'} \ , \ \dot{\vec{e}}_3^{'} = -a_2\vec{e}_1^{'} - a_4\vec{e}_2^{'}. \quad (٦)$$

اذا اعرفنا الشعاع $\vec{C}$ بالعلاقة

$$\vec{C} = (a_4, -a_2, a_1) \qquad (٧)$$

نحصل اذن على النتيجة

$$\frac{d\vec{A}}{dt}|_L = \frac{d\vec{A}}{dt}|_M + \vec{C}\text{x}\vec{A}. \qquad (٨)$$

الشعاع $\vec{C}$ هو بالضبط شعاع السرعة الزاوية للجملة الدوارة $M$ ( انظر التمرينات). اذن نكتب

$$\vec{C} = \vec{\Omega} = \Omega_1\vec{e}_1 + \Omega_2\vec{e}_2 + \Omega_3\vec{e}_3, \qquad (٩)$$

حيث $\vec{e}_1$، $\vec{e}_2$، و $\vec{e}_3$ هى اشعة وحدة المعلم العطالى $L$ و $\Omega_1$، $\Omega_2$، و $\Omega_3$ هى السرعات الزاوية حول المحاور $x$، $y$، و $z$. نحصل اذن على

$$\frac{d\vec{A}}{dt}|_L = \frac{d\vec{A}}{dt}|_M + \vec{\Omega}\text{x}\vec{A}. \qquad (١٠)$$

نكتب هذه العلاقة ايضا على الشكل

$$\hat{D}_L\vec{A} = \hat{D}_M\vec{A} + \vec{\Omega}\text{x}\vec{A}, \qquad (١١)$$

او بشكل عام

$$\hat{D}_L = \hat{D}_M + \vec{\Omega}\text{x}, \qquad (١٢)$$

حيث مؤثرات الاشتقاق $\hat{D}_L$ و $\hat{D}_M$ تعطى ب

$$\hat{D}_L = \frac{d}{dt}|_L \ , \ \hat{D}_M = \frac{d}{dt}|_M. \qquad (١٣)$$

## قانون نيوتن الثانى فى معلم غير عطالى دوار

نطبق مباشرة العلاقة اعلاه على شعاع الموضع $\vec{r}$ لنحصل على

$$\dot{\vec{r}} = \hat{D}_L\vec{r} = \hat{D}_M\vec{r} + \vec{\Omega}\text{x}\vec{r}. \qquad (١٤)$$

مرة اخرى لنحصل على

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} = \hat{D}_L(\hat{D}_L\vec{r}) &= (\hat{D}_M + \vec{\Omega}\text{x})(\hat{D}_M\vec{r} + \vec{\Omega}\text{x}\vec{r}) \\ &= \hat{D}_M^2\vec{r} + (\hat{D}_M\vec{\Omega})\text{x}\vec{r} + 2\vec{\Omega}\text{x}(\hat{D}_M\vec{r}) + \vec{\Omega}\text{x}(\vec{\Omega}\text{x}\vec{r}).\end{aligned} \qquad (١٥)$$

بعبارة اخرى

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}|_L = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}|_M + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}|_M\text{x}\vec{r} + 2\vec{\Omega}\text{x}\frac{d\vec{r}}{dt}|_M + \vec{\Omega}\text{x}(\vec{\Omega}\text{x}\vec{r}). \qquad (١٦)$$

الحد الثانى هو التسارع الخطى، الحد الثالث هو تسارع كوريوليس Coriolis، والحد الرابع هو التسارع الطارد المركزى centripetal. بالضرب ب $m$ نحصل على قانون نيوتن الثانى

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}|_L = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}|_M + m\frac{d\vec{\Omega}}{dt}|_M \mathrm{x}\vec{r} + 2m\vec{\Omega}\mathrm{x}\frac{d\vec{r}}{dt}|_M + m\vec{\Omega}\mathrm{x}(\vec{\Omega}\mathrm{x}\vec{r}). \quad (١٧)$$

نكتب هذا القانون على الشكل المكافئ

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}|_M = \vec{F} - m\frac{d\vec{\Omega}}{dt}|_M \mathrm{x}\vec{r} - 2m\vec{\Omega}\mathrm{x}\frac{d\vec{r}}{dt}|_M - m\vec{\Omega}\mathrm{x}(\vec{\Omega}\mathrm{x}\vec{r}). \quad (١٨)$$

القوى الاضافية هى قوى افتراضية ديناميكية ناجمة عن التسارع. هذه الحدود يمكن اهمالها على الارض فى اغلب الاحيان لان السرعة الزاوية للارض صغيرة جدا تعطى ب

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24h} \sim 10^{-5}s^{-1}. \quad (١٩)$$

لحد الآن افترضنا ان المعلم العطالى $L$ و المعلم غير العطالى المتحرك الدوار $M$ متطابقان فى المبدأ. نعتبر الآن الوضعية الاعم التى ينسحب فيها المبدأ $O^{'}$ بشعاع $\vec{R}$ بالنسبة للمبدأ $O$. شعاع الموضع $\vec{r}$ فى $L$ يعطى بدلالة شعاع الموضع $\vec{r}^{'}$ فى $M$ بالعبارة

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}^{'}. \quad (٢٠)$$

قانون نيوتن الثانى يصبح معطى ب

$$\vec{F} - m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}|_L = m\frac{d^2\vec{r}^{'}}{dt^2}|_L. \quad (٢١)$$

وهذا يؤدى الى القانون

$$m\frac{d^2\vec{r}^{'}}{dt^2}|_M = \vec{F} - m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}|_L - m\frac{d\vec{\Omega}}{dt}|_M \mathrm{x}\vec{r}^{'} - 2m\vec{\Omega}\mathrm{x}\frac{d\vec{r}^{'}}{dt}|_M - m\vec{\Omega}\mathrm{x}(\vec{\Omega}\mathrm{x}\vec{r}^{'}). \quad (٢٢)$$

## السقوط الحر

نعتبر الآن مسألة السقوط الحر على سطح الارض.

اولا نهمل حركة دوران الارض حول الشمس. اذن المعلم العطالى $L$ هو معلم مثبت فى مركز الارض لان هذا الاخير لا يخضع للدوران و بالتالى فان المبدأ $O$ هو مركز الارض. المعلم الدوار هو المعلم الذى يدور مع الارض بمبدأ $O^{'}$ يقع

على سطح الارض. اذن ننطلق بالضبط من المعادلة التى تحصلنا عليها فى الفقرة السابقة:

$$m\frac{d^2\vec{r}^{'}}{dt^2}|_M = \vec{F} - m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}|_L - m\frac{d\vec{\Omega}}{dt}|_M \mathrm{x}\vec{r}^{'} - 2m\vec{\Omega}\mathrm{x}\frac{d\vec{r}^{'}}{dt}|_M - m\vec{\Omega}\mathrm{x}(\vec{\Omega}\mathrm{x}\vec{r}^{'}). \quad (٢٣)$$

يمكن ان نأخذ السرعة الزاوية لدوران الارض حول مركزها ثابتة فى الزمن اى $d\vec{\Omega}/dt = 0$. المعادلة تختزل الى

$$m\frac{d^2\vec{r}^{'}}{dt^2}|_M = \vec{F} - m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}|_L - 2m\vec{\Omega}\mathrm{x}\frac{d\vec{r}^{'}}{dt}|_M - m\vec{\Omega}\mathrm{x}(\vec{\Omega}\mathrm{x}\vec{r}^{'}). \quad (٢٤)$$

باستخدام نفس الطريقة التى ادت الى هذه المعادلة نحسب

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}|_L &= \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}|_M + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}|_M \mathrm{x}\vec{R} + 2\vec{\Omega}\mathrm{x}\frac{d\vec{R}}{dt}|_M + \vec{\Omega}\mathrm{x}(\vec{\Omega}\mathrm{x}\vec{R}) \\ &= \vec{\Omega}\mathrm{x}(\vec{\Omega}\mathrm{x}\vec{R}), \end{aligned} \quad (٢٥)$$

حيث استعملنا الملاحظة ان $\vec{R}$ هو شعاع ثابت بالنسبة للمعلم $M$ فان قانون نيوتن الثانى يصبح

$$m\frac{d^2\vec{r}^{'}}{dt^2}|_M = \vec{F} - m\vec{\Omega}\mathrm{x}(\vec{\Omega}\mathrm{x}\vec{R}) - 2m\vec{\Omega}\mathrm{x}\frac{d\vec{r}^{'}}{dt}|_M - m\vec{\Omega}\mathrm{x}(\vec{\Omega}\mathrm{x}\vec{r}^{'}). \quad (٢٦)$$

لكن قوة الثقالة تعطى ب (بافتراض ان هذه هى القوة الوحيدة المؤثرة)

$$\vec{F} = -\frac{GmM\vec{r}}{r^3} \simeq \frac{GmM\vec{R}\vec{r}}{R^3}, \quad (٢٧)$$

حيث نشرنا $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}^{'}$ حول $\vec{R}$ ثم اهملنا الحدود المتناسبة مع $r^{'}$ لان $r^{'} << R$ بالقرب من سطح الارض. نحصل اذن على قانون نيوتن الثانى

$$m\frac{d^2\vec{r}^{'}}{dt^2}|_M = -\frac{GmM\vec{R}}{R^3} - m\vec{\Omega}\mathrm{x}(\vec{\Omega}\mathrm{x}\vec{R}) - 2m\vec{\Omega}\mathrm{x}\frac{d\vec{r}^{'}}{dt}|_M - m\vec{\Omega}\mathrm{x}(\vec{\Omega}\mathrm{x}\vec{r}^{'}). \quad (٢٨)$$

من الجهة الاخرى فان تسارع الجذب الثقالى الارضى يجب ان يعطى بالعلاقة (و هو مؤكد تجريبيا)

$$\vec{g} = -\frac{GM\vec{R}}{R^3} - \vec{\Omega}\mathrm{x}(\vec{\Omega}\mathrm{x}\vec{R}). \quad (٢٩)$$

الحد الثانى هو تسارع الطرد المركزى الناجم عن دوران الارض حول محورها و هو يؤدى الى تخفيض تسارع الجذب الثقالى الارضى. قانون نيوتن الثانى يصبح اذن

$$\frac{d^2\vec{r}^{'}}{dt^2}|_M = \vec{g} - 2\vec{\Omega}\mathrm{x}\frac{d\vec{r}^{'}}{dt}|_M - \vec{\Omega}\mathrm{x}(\vec{\Omega}\mathrm{x}\vec{r}^{'}). \quad (٣٠)$$

الحد الاخير يمكن ايضا اهماله لانه متناسب مع $\Omega^2$ و لان السرعة الزاوية لدوران الارض حول محورها صغيرة كما قلنا. اذن نحصل على

$$\frac{d^2\vec{r}^{'}}{dt^2}|_M = \vec{g} - 2\vec{\Omega}\mathrm{x}\frac{d\vec{r}^{'}}{dt}|_M. \quad (٣١)$$

سرعة دوران المعلم $M$ حول المعلم $L$ هى $\vec{\Omega}=\Omega\vec{e}_3$. أما الحقل الثقالى $\vec{g}$ فى المعلم $M$ فهو موجه نحو مركز الارض بحيث $\vec{g}=-g\vec{e}_3^{'}$. انظر الصورة. لتكن $\lambda$ الزاوية التى يصنعها شعاع الموضع $\vec{R}=R\vec{e}_3^{'}$ مع $\vec{e}_3$. اذن

$$\begin{aligned}\vec{e}_3 &= (\vec{e}_3\vec{e}_1^{'})\vec{e}_1^{'}+(\vec{e}_3\vec{e}_2^{'})\vec{e}_2^{'}+(\vec{e}_3\vec{e}_3^{'})\vec{e}_3^{'}\\ &= -\sin\lambda\vec{e}_1^{'}+\cos\lambda\vec{e}_3^{'}.\end{aligned} \qquad (٣٢)$$

اى

$$\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_3=-\Omega\sin\lambda\vec{e}_1^{'}+\Omega\cos\lambda\vec{e}_3^{'}. \qquad (٣٣)$$

قانون نيوتن الثانى يؤدى اذن الى معادلات الحركة

$$\begin{aligned}\ddot{x}^{'} &= 2\Omega\cos\lambda\dot{y}^{'}\\ \ddot{y}^{'} &= -2\Omega(\dot{z}^{'}\sin\lambda+\dot{x}^{'}\cos\lambda)\\ \ddot{z}^{'} &= -g+2\Omega\dot{y}^{'}\sin\lambda.\end{aligned} \qquad (٣٤)$$

هذه ثلاثة معادلات تفاضلية من الدرجة الثانية مرتبطة ببعضها البعض عبر السرعة الزاوية $\Omega$. اذا وضعنا $\Omega=0$ فاننا نحصل على معادلات السقوط الحر فى معلم عطالى. من اجل حل هذه المعادلات علينا ان نحدد الشروط الابتدائية. مثلا يسقط الجسم من ارتفاع $h$ بدون سرعة ابتدائية اى نختار الشروط الابتدائية

$$x(0)=y(0)=0\ ,\ z(0)=h\ ,\ \dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0. \qquad (٣٥)$$

مكاملة المعادلات اعلاه مرة واحدة بهذه الشروط الابتدائية نحصل مباشرة على

$$\begin{aligned}\dot{x}^{'} &= 2\Omega\cos\lambda y^{'}\\ \dot{y}^{'} &= -2\Omega(z^{'}\sin\lambda+x^{'}\cos\lambda)+2\Omega h\sin\lambda\\ \dot{z}^{'} &= -gt+2\Omega y^{'}\sin\lambda.\end{aligned} \qquad (٣٦)$$

بالتعويض ب $\dot{x}^{'}$ و $\dot{z}^{'}$ فى $\ddot{y}^{'}$ نحصل على المعادلة

$$\ddot{y}^{'}+4\Omega^2y^{'}=ct\ ,\ c=2\Omega g\sin\lambda. \qquad (٣٧)$$

الحل العام لهذه المعادلة هو الحل العام للمعادلة المتجانسة زائد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة اى

$$y^{'}=\frac{t}{4\Omega^2}+A\cos 2\Omega t+B\sin 2\Omega t. \qquad (٣٨)$$

عند $t=0$ لدينا الشرط الابتدائى $y=\dot{y}=0$ اى $B=0$ و $A=-c/8\Omega^3$. اذن

$$y^{'}=\frac{t}{4\Omega^2}-\frac{c}{8\Omega^3}\cos 2\Omega t=\frac{g\sin\lambda}{2\Omega}(t-\frac{\sin 2\Omega t}{2\Omega}). \qquad (٣٩)$$

بالتعويض فى $\dot{x}^{'}$ ثم المكاملة نحصل على

$$x^{'}=\frac{g\sin\lambda\cos\lambda}{2}(t^2-\frac{1-\cos 2\Omega t}{2\Omega^2}). \qquad (٤٠)$$

بالتعويض فى $\dot{z}'$ ثم المكاملة نحصل على

$$z' = h - \frac{g}{2}t^2 + \frac{g\sin^2\lambda}{2}(t^2 - \frac{1-\cos 2\Omega t}{2\Omega^2}). \quad (٤١)$$

مرة اخرى لان السرعة الزاوية للدوران صغيرة يمكن ان ننشر الدوال الجيبية اعلاه و نحتفظ فقط بحدودها الاولى لنحصل اخيرا على

$$x' = 0. \quad (٤٢)$$

$$y' = \frac{g\Omega t^3 \sin\lambda}{3}. \quad (٤٣)$$

$$z' = h - \frac{g}{2}t^2. \quad (٤٤)$$

اذن الكتلة لا تسقط شاقوليا تماما بسبب دوران الارض حول محورها لكن هناك انحراف صغير لمسار سقوطها الحر نحو الشرق. هذا راجع الى انه فى اللحظة الابتدائية $t = 0$ عند الارتفاع $z = h$ فان سرعة الكتلة بالنسبة للمعلم العطالى لديها مركبة اكبر نحو الشرق بسبب دوران الارض (الذى هو باتجاه الشرق) بالمقارنة مع كتلة على السطح.

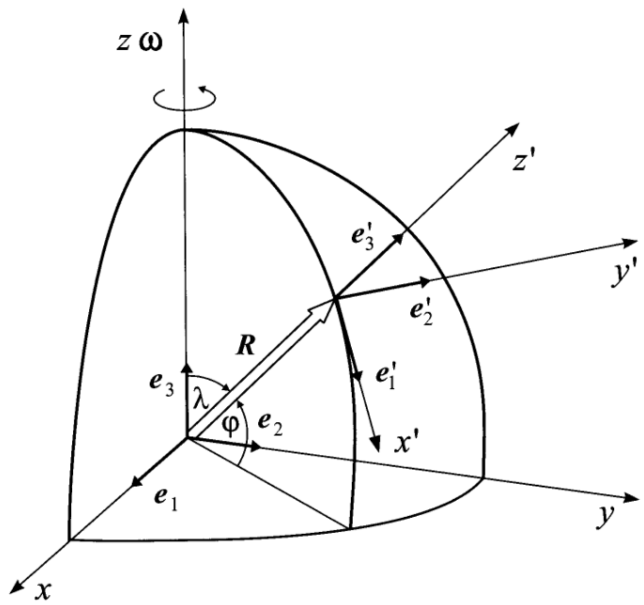


Figure 0.1: Figure taken from [3].

# تمارين

**تمرين** 1: بين ان الحدود الاضافية فى المعادلة

$$\frac{d\vec{A}}{dt}|_L = \frac{d\vec{A}}{dt}|_M + A_1^{'}\vec{e}_1^{'} + A_2^{'}\vec{e}_2^{'} + A_3^{'}\vec{e}_3^{'}$$

يمكن كتابتها على الشكل

$$\frac{d\vec{A}}{dt}|_L = \frac{d\vec{A}}{dt}|_M + \vec{C}\text{x}\vec{A}$$

وعين الشعاع $\vec{C}$.

**تمرين** 2: بين أن $\vec{C}$ هى السرعة الزاوية للدوران $\vec{\Omega}$.

**تمرين** 3:

- بين العلاقة (25).
- اشتق معادلات الحركة (34).
- اشتق الحلول (40) و (41).

# حلول

**تمرين** 1: من شرط التنظيم $\vec{e}_i^{'}\vec{e}_i^{'}=1$ نستنتج ان $\vec{\dot{e}}_i^{'}\vec{e}_i^{'}=0$ اى ان مشتقة شعاع الوحدة بالنسبة للزمن عمودية لشعاع الوحدة. يمكننا اذن ان نكتب

$$\vec{\dot{e}}_1^{'}=a_1\vec{e}_2^{'}+a_2\vec{e}_3^{'}\ ,\ \vec{\dot{e}}_2^{'}=a_3\vec{e}_1^{'}+a_4\vec{e}_3^{'}\ ,\ \vec{\dot{e}}_3^{'}=a_5\vec{e}_1^{'}+a_6\vec{e}_2^{'}.$$

من شرط التعامد $\vec{e}_1^{'}\vec{e}_2^{'}=1$ نستنتج ان $\vec{\dot{e}}_1^{'}\vec{e}_2^{'}=-\vec{\dot{e}}_2^{'}\vec{e}_1^{'}$. نحصل مباشرة على $a_3=-a_1$. بنفس الطريقة نحصل على $a_6=-a_4$، $a_5=-a_2$. اى ان ثلاثة فقط من المعاملات $a$ مستقلة خطيا. بالتعويض نحصل على

$$\frac{d\vec{A}}{dt}|_L=\frac{d\vec{A}}{dt}|_M+\vec{e}_1^{'}(-a_1A_2^{'}-a_2A_3^{'})+\vec{e}_2^{'}(a_1A_1^{'}-a_4A_3^{'})+\vec{e}_3^{'}(a_2A_1^{'}+a_4A_2^{'}).$$

الحدود الثانية و الثالثة و الرابعة هى بالضبط الجداء الشعاعى

$$\begin{aligned}\vec{C}\text{x}\vec{A} &= \begin{vmatrix}\vec{e}_1^{'} & \vec{e}_2^{'} & \vec{e}_3^{'}\\ C_1 & C_2 & C_3\\ A_1^{'} & A_2^{'} & A_3^{'}\end{vmatrix}\\ &= \vec{e}_1^{'}(C_2A_3^{'}-C_3A_2^{'})-\vec{e}_2^{'}(C_1A_3^{'}-C_3A_1^{'})+\vec{e}_3^{'}(C_1A_2^{'}-C_2A_1^{'}),\end{aligned}$$

اذا اعرفنا الشعاع $\vec{C}$ بالعلاقة

$$\vec{C}=(a_4,-a_2,a_1).$$

نحصل اذن على النتيجة

$$\frac{d\vec{A}}{dt}|_L=\frac{d\vec{A}}{dt}|_M+\vec{C}\text{x}\vec{A}.$$

**تمرين** 2: نفترض ان المعلم $M$ يدور حول المحور $z$ بسرعة زاوية $\vec{\Omega}=\Omega\vec{e}_3$. اذن $z=z^{'}$. نفترض ايضا ان الشعاع $\vec{A}$ يدور مع المعلم $M$ اى

$$\frac{d\vec{A}}{dt}|_M=0.$$

الآن من الواضح ان مركبة $\vec{A}$ الموازية ل $\vec{\Omega}$ لا تتغير. أما المركبة العمودية التى تساوى فى الطويلة $A\sin\phi$، حيث $\phi$ هى الزاوية التى يصنعها الشعاع $\vec{A}$ مع المحور $z$، فتتغير فى الاتجاه. خلال زمن $dt$ يدور الشعاع $\vec{A}$ بزاوية $\Omega dt$. اذن طويلة التغير فى الشعاع $\vec{A}$ فتعطى ب

$$dA=A\sin\phi.\Omega dt.$$

اتجاه هذا الشعاع هو بالضبط اتجاه الشعاع

$$\vec{\Omega}\text{x}\vec{A}dt.$$

اذن

$$d\vec{A}=\vec{\Omega}\text{x}\vec{A}dt.$$

اذن

$$d\vec{A}=\vec{\Omega}\text{x}\vec{A}\Rightarrow\vec{C}=\vec{\Omega}.$$

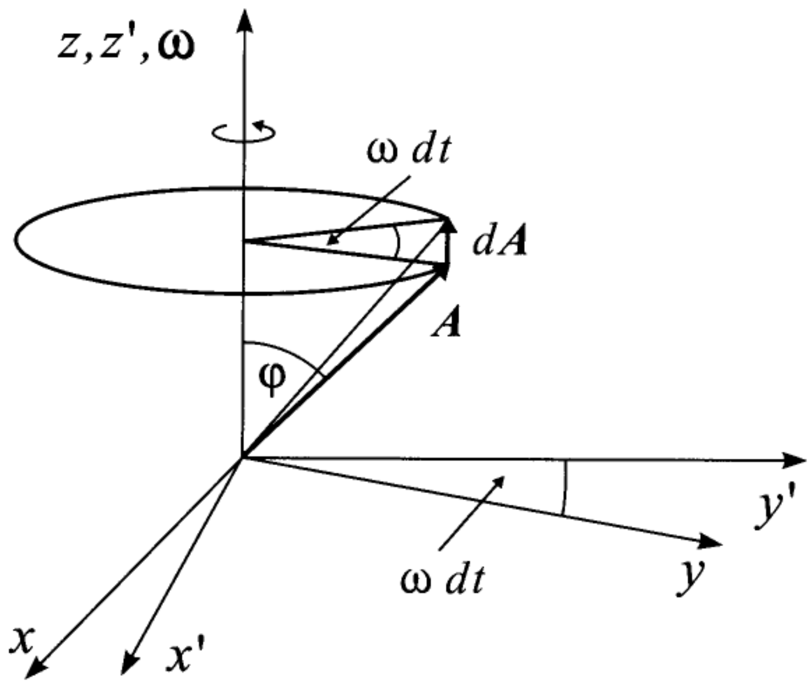


Figure 0.2: Figure taken from [3].

# مبادئ التغاير و معادلات لاغرانج

## ميكانيك جملة جسيمات نقطية

نعتبر جملة من الجسيمات النقطية ذات اشعةالموضع $\vec{r}_i$ و الكتل $m_i$. قانون نيوتن الثاني للحركة بالنسبة للجسيم رقم $i$ يعطي ب

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ji} = \frac{d\vec{p}_i}{dt}. \tag{٤٥}$$

كالعادة تعرف كمية الحركة بدلالة السرعة ب

$$\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i = m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}. \tag{٤٦}$$

القوة الخارجية المؤثرة علي الجسيم $i$ هي $\vec{F}_i^{(e)}$ و القوة الداخلية المؤثرة علي الجسيم $i$ والناجمة عن الجسيم $j$ هي $\vec{F}_{ji}$. لدينا $\vec{F}_{ii} = 0$ و $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. يمكن كتابة قانون نيوتن الثاني علي الشكل

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ji} = m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}. \tag{٤٧}$$

بالجمع علي كل الجسيمات نحصل علي

$$0 = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} = \sum_i m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}. \tag{٤٨}$$

الكتلة الكلية $M$ معرفة ب $M = \sum_i m_i$ و شعاع موضع مركز كتلة الجملة $\vec{R}$ يعرف ب

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i. \tag{٤٩}$$

اذن القوي الداخلية لانها تخضع لقانون نيوتن الثالث ليس لها اي تأثير علي جركة الجملة.القوة الخارجية الكلية تعطي بدلالة كمية الحركة الكلية ب

$$\vec{F}^{(e)} = M\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}. \tag{٥٠}$$

اذن يمكن ان نستنتج مباشرة قانون انحفاظ كمية الحركة: اذا انعدمت القوة الخارجية الكلية فان كمية الحركة الكلية تبقي منحفظة في الزمن.

لنحسب الان العمل الذي تقوم به القوي $\vec{F}_i^{(e)}$ و $\vec{F}_{ji}$ في تحريك الجملة من حالة ابتدائية $1$ الي حالة نهائية $2$. لدينا

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i d\vec{s}_i = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{(e)} d\vec{s}_i + \sum_{i,j} \int_1^2 \vec{F}_{ji} d\vec{s}_i. \quad (٥١)$$

لدينا من جهة

$$\begin{aligned} W_{12} = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i d\vec{s}_i &= \sum_i \int_1^2 m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \vec{v}_i dt \\ &= \sum_i \int_1^2 d(\frac{1}{2} m_i v_i^2) \\ &= T_2 - T_1. \end{aligned} \quad (٥٢)$$

الطاقة الحركية الكلية تعرف ب

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2. \quad (٥٣)$$

نفترض ان القوي الخارجية $\vec{F}_i^{(e)}$ محافظة اي انها مشتقة من طاقات كامنة $V_i$ بحيث

$$\vec{F}_i^{(e)} = -\vec{\nabla}_i V_i. \quad (٥٤)$$

اذن نحسب

$$\sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{(e)} d\vec{s}_i = -\sum_i \int_1^2 \vec{\nabla}_i V_i d\vec{s}_i = -\sum_i V_i|_1^2. \quad (٥٥)$$

ايضا نفترض ان القوي الداخلية $\vec{F}_{ji}$ محافظة اي مشتقة من طاقات كامنة $V_{ij}$ بحيث

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{\nabla}_i V_{ij}. \quad (٥٦)$$

لان $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$، يجب ان نأخذ $V_{ij}$ دالة في المسافة $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ فقط، اي ان $V_{ij} = V_{ji}$. يمكننا ايضا التحقق من ان القوة $\vec{F}_{ij}$ هي تقع بمحاذاة الخط الرابط بين الجسيمان $i$ و $j$. نعرف شعاع الفرق ب $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$. لدينا اذن

$$\vec{\nabla}_i V_{ij} = -\vec{\nabla}_j V_{ij} = \vec{\nabla}_{ij} V_{ij}. \quad (٥٧)$$

يمكننا الان ان نحسب

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \int_1^2 \vec{F}_{ji} d\vec{s}_i &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_1^2 (\vec{\nabla}_i V_{ij} d\vec{s}_i + \vec{\nabla}_j V_{ij} d\vec{s}_j) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_1^2 \vec{\nabla}_{ij} V_{ij} (d\vec{s}_i - d\vec{s}_j) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_1^2 \vec{\nabla}_{ij} V_{ij} d\vec{r}_{ij} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij}|_1^2. \end{aligned} \quad (٥٨)$$

اذن العمل المنجز يعطي ب

$$W_{12} = -V_2 + V_1. \tag{٥٩}$$

الطاقة الكامنة الكلية تعطي اذن ب

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} V_{ij}. \tag{٦٠}$$

من النتائج $W_{12} = T_2 - T_1$ و $W_{12} = -V_2 + V_1$ نستنتج ان الطاقة الكلية $T + V$ هي منحفظة.

كالعادة نعرف العزم الحركي الكلي ب

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \mathrm{x} \vec{p}_i. \tag{٦١}$$

الاشتقاق بالنسبة للزمن يعطي

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i \vec{r}_i \mathrm{x} \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ &= \sum_i \vec{r}_i \mathrm{x} \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i\neq j} \vec{r}_i \mathrm{x} \vec{F}_{ji} \\ &= \sum_i \vec{r}_i \mathrm{x} \vec{F}_i^{(e)} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \vec{r}_{ij} \mathrm{x} \vec{F}_{ji}. \end{aligned} \tag{٦٢}$$

بافتراض ان القوي الداخلية بين اي جسيمين، بالاضافة الي كونها متساوية في الشدة و متعاكسة في الاتجاه، تقع بمحاذاة الخط الرابط بين الجسيمين نحصل مباشرة علي $\vec{r}_{ij} \mathrm{x} \vec{F}_{ji} = 0$[١]. في هذه الحالة اشتقاق العزم الحركي الكلي بالنسبة للزمن يعطي عزم الدوران الخارجي الكلي اي

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = N_i^{(e)}. \tag{٦٣}$$

نستنتج مباشرة قانون انحفاظ العزم الحركي: اذا انعدم عزم الدوران الخارجي الكلي فان العزم الحركي الكلي يبقي منحفظا في الزمن.

## القيود الهولونومية و مبدأ العمل الافتراضي لدالمبارت

خلاصة الفقرة السابقة هو معادلات الحركة

$$\vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ji} = m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}. \tag{٦٤}$$

الهدف الان هو حل هذه المعادلات من اجل ايجاد اشعة الموضع $\vec{r}_i$ كدوال في الزمن. هذه المهمة صعبة جدا في الواقع و تتعقد اكثر اذا كانت جملة الجسيمات

[١] يعرف هذا الشرط بالقانون القوي للفعل و رد الفعل. ايضا القوي التي تحقق هذا الشرط هي قوي مركزية.

خاضعة لقيود علي الحركة. القيود علي الحركة هي قوي لا يمكن التعبير عنها مباشرة لكن فقط نعرف تأثيرها الاجمالي علي الحركة. نعتبر هنا حالة القيود الهولونومية التي يعبر عنها بمعادلات من الشكل

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, ..., t) = 0. \qquad (٦٥)$$

اذن اشعة الموضع $\vec{r}_i$ ليست كلها مستقلة خطيا وهذا الربط الخطي يمكن ان يتغير من لحظة زمنية الي اخري. نأخذ كمثال علي القيود الهولونومية حركة الجسم الصلب. حركة الجسيمات في هذه الحالة مقيدة بحيث تبقي المسافة بين الجسيمات ثابتة في الزمن. في هذا المثال نعبر عن هذا القيد الهولونومي بالمعادلة (حيث $c_{ij}$ هي ثوابت )

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0. \qquad (٦٦)$$

كمثال اخر علي القيود الهولونومية حركة جسيم بمحاذاة اي منحني او علي سطح حيث تعطي القيود في هذه الحالة بمعادلة المنحني او السطح.

القيود التي لا يمكن التعبير عنها بمعادلات من الشكل $(65)$ هي قيود غير هولونومية. مثال علي ذلك حركة جزيئات غاز في وعاء: جدران الوعاء هي قيود غير هولونومية. ايضاحركة جسيم علي سطح كرة تحت تأثير حقل ثقالي يعبر عنها بالمعادلات غير الهولونومية

$$\vec{r}^2 - a^2 \geq 0. \qquad (٦٧)$$

كما ذكرنا انفا فان وجود قيود هولونومية يعني ان اشعة الموضع $\vec{r}_i$ ليست كلها مستقلة خطيا. هذا يعني بالخصوص ان معادلات الحركة $(64)$ ليست كلها مستقلة خطيا. هذه الصعوبة سيتم حلها بادخال الاحداثيات المعممة التي تختزل درجات الحرية المستقلة خطيا للجملة. من الجهة الاخري فان وجود قيود هولونومية يعني وجود قوي مجهولة لا نعرف الا تأثيرها في تقييد حركة الجملة. من الواضح انه يجب تحديد هذه القوي بالضبط او التخلص منها نهائيا في الحل. سنتبع في الاتي الطريق الثاني عبر مبدأ دالامبارت.

نفترض ان الجملة تحتوي علي $N$ جسيم و انها خاضعة ل $k$ قيد هولونومي. اذن يوجد في الجملة $3N-k$ درجة حرية مستقلة خطيا نرمز لها ب $q_i$ و نسميها بالاحداثيات المعممة. يمكن اذن ان نعبر عن اشعة الموضع $\vec{r}_i$ بدلالة الاحداثيات المعممة $q_i$ و الزمن كالتالي

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(q_1, q_2, ...., q_{3N-k}, t)$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$\vec{r}_N = \vec{r}_N(q_1, q_2, ...., q_{3N-k}, t). \qquad (٦٨)$$

سوف نعتبر الان ازاحات افتراضية متناهية في الصغر $\delta\vec{r}_i$ التي هي ازاحات متسقة مع القيود المفروضة علي الجملة في اللحظة الزمنية $t$. عند مقارنة الازاحة الافتراضية $\delta\vec{r}_i$ مع الازاحة الحقيقية $d\vec{r}_i$، التي تحدث خلال مجال زمني $dt$ و التي يمكن ان تتغير خلالها قوي القيود المفروضة علي الجملة، فانه لدينا من جهة

$$d\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j. \qquad (٦٩)$$

اما من الجهة الاخري فانه خلال ازاحة افتراضية لدينا

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j. \quad (٧٠)$$

لاحظ اختفاء الحد الاول الناجم عن التغير في الزمن لان الازاحة الافتراضية تنشأ من تغيير مسار الحركة بمجمله بطريقة متسقة مع القيود المفروضة. انظر الي الشكل 1.

يمكن ان نكتب معادلة الحركة (64) علي الشكل $\vec{F}_i - d\vec{p}_i/dt = 0$ حيث $\vec{p}_i = m_i d\vec{r}_i/dt$. اذن الجسيم رقم $i$ هو في حالة توازن تحت تأثير القوة الكلية $\vec{F}_{i\ \text{eff}} = \vec{F}_i - d\vec{p}_i/dt$. من الواضح ايضا ان العمل الافتراضي لهذه القوة في الازاحة الافتراضية $\delta\vec{r}_i$ ينعدم. بالجمع علي جميع الجسيمات نحصل علي

$$\sum_i (\vec{F}_i - \frac{d\vec{p}_i}{dt})\delta\vec{r}_i = 0. \quad (٧١)$$

نفكك القوة $\vec{F}_i$ الي القوة المطبقة $\vec{F}_i^{(a)} \equiv \vec{F}_i^{(e)}$ و قوة القيود التي نرمز لها الان ب $\vec{f}_i$، اي ان $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i$. اذن لدينا

$$\sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \frac{d\vec{p}_i}{dt})\delta\vec{r}_i + \sum_i \vec{f}_i \delta\vec{r}_i = 0. \quad (٧٢)$$

نقتصر الان علي تلك الجمل الفيزيائية التي ينعدم فيها العمل الافتراضي المنجز من قبل قوي القيود. مثال ذلك الجسم الصلب. في هذه الحالة المسافة $r_{ij}$ بين الجسيمات تبقي ثابتة في الزمن، وبالتالي فان التفاضل $d\vec{r}_{ij}$ لا يمكن ان يكون الا عموديا علي $\vec{r}_{ij}$، اي عموديا علي القوي الداخلية $\vec{F}_{ij}$، و منه فان عمل القوي الداخلية ينعدم. من الجهة الاخري فان التفاضل الافتراضي $\delta\vec{r}_{ij}$ هو بالتعريف شعاع مماس للمشعب الذي يمثل القيود، الذي هو هي هذه الحالة الكرة (٦٦)، اي انه هو ايضا عمودي علي $\vec{r}_{ij}$، و منه فان العمل الافتراضي للقوي الداخلية ينعدم ايضا. اذن في حالة الجسم الصلب ينعدم العمل الافتراضي الذي تنجزه قوي القيود التي تعطي في هذه الحالة بالقوي الداخلية.

نحصل اذن، من اجل الجمل الفيزيائية التي ينعدم فيها العمل الافتراضي المنجز من قبل قوي القيود، علي مبدأ العمل الافتراضي لدالمبارت

$$\sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \frac{d\vec{p}_i}{dt})\delta\vec{r}_i = 0. \quad (٧٣)$$

لاحظ ان قوي القيود لا تظهر صراحة في هذه المعادلة وتأثيرهايقتصر فقط علي جعل الازاحات الافتراضية ليست كلها مستقلة خطيا.

## معادلات لاغرانج

لنحسب الان العمل الافتراضي بدلالة الاحداثيات المعممة. لدينا

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i^{(a)}\delta\vec{r}_i &= \sum_{i,j} \vec{F}_i^{(a)} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \\ &= \sum_j Q_j \delta q_j. \end{aligned} \quad (٧٤)$$

ال $Q_j$ هي مركبات القوة المعممة و هي معرفة كالتالي

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \tag{٧٥}$$

لاحظ انه كما ان الاحداثيات المعممة لا تحمل بالضرورة و حدة الطول فان القوة المعممة لا تحمل بالضرورة و حدة القوة.
نحسب ايضا

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}\delta\vec{r}_i &= \sum_{i,j} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \\ &= \sum_{i,j} m_i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - \frac{d\vec{r}_i}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\right]\delta q_j \\ &= \sum_{i,j} m_i \left[\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j. \end{aligned} \tag{٧٦}$$

بالتعويض بالنتيجة $\partial\vec{v}_i/\partial\dot{q}_j = \partial\vec{r}_i/\partial q_j$ نحصل علي

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}\delta\vec{r}_i &= \sum_{i,j} m_i \left[\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j \\ &= \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right]\delta q_j. \end{aligned} \tag{٧٧}$$

الطاقة الحركية الكلية تعطي ب $T = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$. اذن مبدأ دالمبارت يصبح

$$\sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \frac{d\vec{p}_i}{dt})\delta\vec{r}_i = -\sum_j \left[Q_j - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_j}\right]\delta q_j = 0. \tag{٧٨}$$

لان الاحداثيات المعممة $q_i$ يمكن اختيارها، من اجل القيود الهولونومية، بحيث تكون مستقلة خطيا، يمكننا ان نستخلص مباشرة من النتيجة اعلاه معادلات الحركة

$$-Q_j + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0. \tag{٧٩}$$

في المعادلة اعلاه $j = 1, ..., n$ حيث $n = 3N - k$ هو عدد الاحداثيات المعممة المستقلة خطيا اي عدد درجات الحرية. من اجل القوي المشتقة من كمون لدينا $\vec{F}_i^{(a)} = -\vec{\nabla}_i V$ و بالتالي

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}. \tag{٨٠}$$

اذن نحصل علي معادلات الحركة

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \tag{٨١}$$

هذه هي معادلات لاغرانج للحركة حيث $L$ هي اللاغرانجية المعرفة ب

$$L = T - V. \tag{٨٢}$$

## حساب التغايرات

نعتبر دالة $f$ في متغير $y$ الذي هو نفسه دالة في متغير $x$. الدالة $f$ يمكن ايضا ان تتعلق بالمشتقة $\dot{y}=dy/dx$ و ايضا ب $x$ . يلعب $x$ هنا دور الزمن و يلعب $y$ دور الموضع. نعطي الان التكامل

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(y,\dot{y},x)dx. \quad (٨٣)$$

التكامل $I$ هو مثال علي ما يسمي بالداليات التي هي دوال يكون فيها المتغير دالة و ليس عدد. التكامل $I$ هو اذن دالة، ليست في متغير واحد، لكن في طريق او مسار بمجمله $y=y(x)$ الذي يربط نقطتين $(x_1,y_1=y(x_1))$ و $(x_2,y_2=y(x_2))$. نسمي حساب تغيرات، اي حساب تفاضل، الداليات بحساب التغايرات.

السؤال هو: ماهي القيمة المستقرة لهذا التكامل؟ اي ماهو الطريق $y_s=y_s(x)$ الذي من اجله ياخذ التكامل قيمة مستقرة اي يأخذ قيمة اصغرية او اعظمية او يكون نقطة انعطاف.

نعتبر مجموعة الطرق المجاورة و القريبة جدا من الطريق المستقرة $y_s=y_s(x)$ و التي يمكن ترقيمها بوسيط $\alpha$ كالتالي

$$y(x)\equiv y(x;\alpha)=y(x;0)+\alpha\eta(x)\ ,\ y_s(x)\equiv y(x;0). \quad (٨٤)$$

لان جميع الطرق تنطلق من $(x_1,y_1=y(x_1))$ و تلتقي في $(x_2,y_2=y(x_2))$ لدينا

$$\eta(x_1)=\eta(x_2)=0. \quad (٨٥)$$

يصبح التكامل $I$ من اجل هذه المجموعة من الطرق دالة عادية في الوسيط $\alpha$ اي

$$I(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2} f(y(x;\alpha),\dot{y}(x;\alpha),x)dx. \quad (٨٦)$$

القيمة المستقرة للدالة $I$ تعطي اذن بالشرط

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}|_{\alpha=0}=0. \quad (٨٧)$$

نقوم بحساب الاشتقاق بشكل عادي كالتالي

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha}I(\alpha) &= \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{d\alpha}f(y(x;\alpha),\dot{y}(x;\alpha),x)dx\\
&= \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\alpha}+\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{d\dot{y}}{d\alpha}\right]dx\\
&= \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\alpha}+\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{d^2y}{d\alpha dt}\right]dx\\
&= \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\alpha}+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{dy}{d\alpha}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\frac{dy}{d\alpha}\right]dx.
\end{aligned} \quad (٨٨)$$

من الواضح اننا استعملنا التكامل بالتجزئة للانتقال الي الخط الاخير. ايضا ينعدم الحد الثاني بالشرط (85). نحصل اذن علي

$$\frac{d}{d\alpha}I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\right]\frac{dy}{d\alpha}dx. \quad (٨٩)$$

القيمة المستقرة للدالة $I$ تعطي اذن ب

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\right]\eta(x)dx = 0. \quad (٩٠)$$

نستخدم الان النتيجة الاساسية التالية من حساب التفاضل

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x)dx = 0 \Rightarrow M(x) = 0. \quad (٩١)$$

القيمة المستقرة للدالة $I$ تعطي اذن بمعادلة الحركة

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = 0. \quad (٩٢)$$

## مبدأ الفعل الاصغري لهاميلتون

في الفقرات السابقة قمنا باشتقاق معادلات لاغرانج انطلاقا من اعتبارات تتعلق بالازاحة الافتراضية للجملة حول حالتها اللحظية باستعمال مبدأ العمل الافتراضي لدالمبارت الذي هو مبدأتفاضلي. في هذه الفقرة سوف نعيد اشتقاق معادلات لاغرانج انطلاقا من اعتبارات تتعلق بالتغييرات الافتراضية للحركة الاجمالية للجملة حول الحركة الحقيقية بين لحظتين زمنيتين $t_1$ و $t_2$ باستعمال المبدأ التكاملي لهاميلتون المعروف بمبدأ الفعل الاصغري[٢].
الحالة اللحظية للجملة في لحظة زمنية $t$ توصف ب $n$ احداثية معممة $q_1$، $q_2$،...،$q_n$، و تسمي ايضا بتمثيلة الجملة في اللحظة $t$. هذه الحالة هي اذن نقطة في فضاء التمثيلات الذي هو فضاء ذو $n$ بعد تعطي فيه المحاور بالضبط بالاحداثيات المعممة $q_i$. مع تقدم الزمن تتغير الجملة و تتحرك النقطة $(q_1, q_2, ..., q_n)$ في فضاء التمثيلات مختطة منحني يسمي طريق حركة الجملة.
مبدأ الفعل الاصغري لهاميلتون هو مبدأ اقل عمومية من مبدأ دالمبارت لانه يطبق فقط علي الجمل التي تكون فيها كل القوي، و منها قوي القيود، مشتقة من كمون معمم $U$. الكمون المعمم هو كمون يمكن ان يتعلق، بالاضافة الي الاحداثيات المعممة، علي السرعات المعممة و ايضا علي الزمن اي $U = U(q_i, \dot{q}_i, t)$. القوي المعممة في هذه الحالة يمكن ان نحصل عليها من $U$ ب

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right). \quad (٩٣)$$

هذه الجمل تسمي مونوجينية و تبقي من اجلها معادلات لاغرانج صالحة بلاغرانجية معطاة كالعادة ب $L = T - U$. هذه الجمل تصبح محافظة اذا كان الكمون يتعلق فقط بالاحداثيات.
يمكن ان نبين، من اجل الجمل الخاضعة لقيود هولونومية، ان مبدأ الفعل الاصغري لهاميلتون هو شرط ضروري و كافي من اجل معادلات لاغرانج. في مايلي فاننا سنبين من اجل الجمل المونوجينية ان مبدأ هاميلتون هو شرط كافي لمعادلات لاغرانج. اذن مبدأ هاميلتون يمكن اخذه المسلمة الاساسية للميكانيك

[٢]اذا اردنا دقة اكثر فان مبدأ الفعل الاصغري يختلف عن مبدأ هاميلتون الذي نناقشه هنا. انظر غولدشتاين الفصل 8 الباب 6. مبدأ الفعل الاصغري يستخدم التغاير $\Delta$ عوض التغاير $\delta$ الذي يشترط فيه: (1) ابتداء كل الطرق في نفس اللحظة $t_1$ و انتهائها في نفس اللحظة $t_2$، (2) انعدام الانتقال الافتراضي $\delta q(t)$ في اللحظتين الزمنيتين $t_1$ و $t_2$. كلا الشرطين غير متحققين من اجل $\Delta$.

عوضا عن قوانين نيوتن من اجل الجمل المونوجينية اي لما تكون كل القوي، باستثناء قوي القيود، مشتقة من كمون معمم.

نعرف الفعل بين لحظتين زمنيتين $t_1$ و $t_2$ بالتكامل

$$I[q]=\int_{t_1}^{t_2}Ldt. \quad (٩٤)$$

اللاغرانجية $L$ هي دالة في الاحداثيات و السرعات المعممة $q_i$ و $\dot{q}_i$ و كذلك في الزمن $t$، اي $L=L(q_1,q_2,...,q_n,\dot{q}_1,\dot{q}_2,...,\dot{q}_n,t)$، اما الفعل فهو دالية.

من الواضح ان الفعل يبقي ثابت تحت تأثير اي تحويل للاحداثيات المعممة التي نستخدمها من اجل التعبير عن $L$ و بالتالي فان معادلات الحركة المشتقة من $I$ تبقي صامدة تحت تاثير اي تحويل نقطي للاحداثيات.

يتلخص مبدأ الفعل الاصغري لهاميلتون في الاتي: **يبلغ التكامل $I$ قيمته المستقرة، اي يبلغ قيمته الصغري او العظمي او يبلغ نقطة انعطاف، من اجل الطريق الحقيقية للحركة**.

من الناحية التقنية فاننا نعبر عن هذا المبدأ كالتالي: ان اي تغيير من الرتبة الاولي في طريق الجملة حول طريق الحركة الحقيقية ينجم عنه تغيير من الرتبة الثانية في الفعل $I$، و بالتالي فان كل الطرق المجاورة و التي تختلف عن الطريق الحقيقية بازاحة متناهية في الصغر لها نفس الفعل. هذه اذن مسألة تغايرية من اجل دالية الفعل $I$ الذي يتعلق بدالة واحدة التي هي اللاغرانجية $L$. نكتب مبدأ هاميلتون كالتالي

$$\frac{\delta}{\delta q_i}I[q]=\frac{\delta}{\delta q_i}\int_{t_1}^{t_2}L(q_1,q_2,...,q_n,\dot{q}_1,\dot{q}_2,...,\dot{q}_n,t)dt. \quad (٩٥)$$

نعتبر مجموعة الطرق $q_i(t)$ في فضاء التمثيلات الرابطة بين الحالتين اللحظتين $(q_1(t_1),...,q_n(t_1))$ و $(q_1(t_2),...,q_n(t_2))$، و التي لها نفس فعل الطريق الحقيقية $q_i^{(s)}(t)$ بين هاتين الحالتين . هذه الطرق يمكن ترقيمها بوسيط $\alpha$ كالتالي $q_i(t)\equiv q_i(t,\alpha)=q_i(t,0)+\alpha\eta_i(t)$ حيث $\alpha=0$ يرفق بالطريق الحقيقية للحركة اي $q_i(t,0)=q_i^{(s)}(t)$، و $\eta_i$ هي دوال كيفية في الزمن $t$ تنعدم في النقاط الحدية $t_1$ و $t_2$ و مستمرة، و كذلك نفترض ان مشتقاتها الاولي و الثانية مستمرة. من اجل هذه المجموعة من الطرق فان الفعل يصبح دالة في $\alpha$ معطاة ب

$$I(\alpha)=\int_{t_1}^{t_2}L(q_i(t,\alpha),\dot{q}_i(t,\alpha),t)dt. \quad (٩٦)$$

نعرف الازاحة الافتراضية $\delta q_i$ ب

$$\delta q_i=\left(\frac{\partial q_i}{\partial\alpha}\right)|_{\alpha=0}d\alpha=\eta_i d\alpha. \quad (٩٧)$$

بالمقابل التغيير المتناه في الصغر للفعل يعرف ب

$$\delta I \;=\; \left(\frac{dI}{d\alpha}\right)|_{\alpha=0}d\alpha. \quad (٩٨)$$

نحسب

$$\frac{dI}{d\alpha} \;=\; \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial\alpha}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial\alpha}\right)dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right)dt\\
&= \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right)dt\\
&= \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right)dt+\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right)_{t_1}^{t_2}. \qquad (٩٩)
\end{aligned}
$$

الحد الاخير ينعدم لان كل الطرق المعتبرة تمر بالنقاط $(t_1, y_i(t_1,0)$ و $(t_2, y_i(t_2,0))$. اذن نحصل علي

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right)\delta q_i dt. \qquad (١٠٠)$$

مبدأ هاميلتون يعطي ب

$$\frac{\delta I}{d\alpha} = \left(\frac{dI}{d\alpha}\right)|_{\alpha=0}=0. \qquad (١٠١)$$

هذه تؤدي الي معادلات الحركة

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right)\eta_i dt=0. \qquad (١٠٢)$$

هذه العلاقة صالحة من اجل كل الدوال $\eta_i$. اذن باستعمال النتيجة الاساسية لحساب التفاضل $(91)$ نحصل علي

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=0. \qquad (١٠٣)$$

نكتب مبدأ الفعل الاصغري لهاميلتون علي الشكل النهائي

$$\frac{\delta I}{\delta q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=0. \qquad (١٠٤)$$

هذه هي معادلات لاغرانج.

# تمارين

**تمرين** 1:

- بين ان $\partial\vec{v}_i/\partial\dot{q}_j = \partial\vec{r}_i/\partial q_j$.
- احسب الطاقة الحركية بدلالة الاحداثيات و السرعات المعممة.

**تمرين** 2: النواس المضاعف هو جملة مكونة من كتلتين $m_1$ و $m_2$ موصولتين بخيط صلب طوله $l_2$ و معلقة الي السقف بخيط صلب اخر طوله $l_1$ مربوط ايضا بالكتلة $m_1$. انظر الي الشكل 2. ماهي الشروط الهولونومية التي تخضع لها هاته الجملة و ماهو عدد درجات الحرية. احسب لاغرانجية هاته الجملة و اشتق معادلات لاغرنج للحركة.

**تمرين** 3: نعطي اللاغرانجية

$$L^{'} = \frac{1}{2}m(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) - \frac{1}{2}K(ax^2 + 2bxy + cy^2). \qquad (١٠٥)$$

احسب معادلات الحركة. ماهي الجملة الفيزيائية الموصوفة بهذه اللاغرانجية. استنتج اللاغرانجية $L = T - V$ المرفقة بهذه الجملة.

**تمرين** 4: نعطي اللاغرانجية

$$L = \frac{1}{12}m^2\dot{x}^4 + m\dot{x}^2V(x) - V^2(x). \qquad (١٠٦)$$

احسب معادلات لاغرانج للحركة. ما هو التفسير الفيزيائي لهذه المعادلات.

**تمرين** 5: بين ان معادلات لاغرانج صامدة تحت تأثير التحويلات النقطية

$$q_i \longrightarrow s_i : q_i = q_i(s_j, t). \qquad (١٠٧)$$

**تمرين** 6: بين انه من اجل القوي المشتقة من كمون فان القوة المعممة تعطي ب

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}. \qquad (١٠٨)$$

**تمرين** 7: اكتب لاغرانجية جسيم حر يتحرك بسرعة $\vec{v}$ بالنسبة لمعلم عطالي $K$. بين ان لاغرانجية الجسيم الحر بالنسبة لمعلم عطالي $K^{'}$ يتحرك بسرعة $\vec{V}$ بالنسبة ل $K$ يؤدي الي نفس معادلات الحركة.

**تمرين** 8: طول اي قوس متناه في الصغر في المستوي يعطي ب

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (١٠٩)$$

بين ان اقصر طريق بين نقطتين $(x_1, y_1)$ و $(x_2, y_2)$ في المستوي هو المستقيم الرابط بين هاتين النقطتين .
اعد نفس السؤال بالنسبة لسطح الكرة. طول قوس متناه في الصغر علي سطح الكرة يعطي ب

$$ds = \sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2}. \quad (١١٠)$$

**تمرين** 9: اكتب لاغرانجية هزاز توافقي و معادلات حركته. نفترض الان اننا لا نعرف كيف ان نحل معادلات الحركة و نعرف فقط ان الحركة اهتزازية بدور $T = 2\pi/\Omega$ حيث $\Omega$ هو التواتر الزاوي او النبض. موضع الهزاز كدالة في الزمن $x(t)$ يمكن اذن وصفه بسلسة فورييه من الشكل

$$x(t) = \sum_{j=0} a_j \cos j\Omega t. \quad (١١١)$$

نأخذ الطرق في فضاء التمثيلات بين اللحظتين $t_1 = 0$ و $t_2 = T$ التي تعطي بالدوال اعلاه. احسب فعل الهزاز علي هذه الطرق بدلالة الوسائط $a_j$. بين ان القيمة المستقرة للفعل تعطي ب

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \ , \ a_j = 0 \ , \ \forall j \neq 1. \quad (١١٢)$$

**تمرين** 10: النواس الكروي هو كتلة نقطية معلقة الي السقف بخيط صلب يمكنها ان تهتز في الفضاء علي سطح كرة. ماهي معادلات القيود و الاحداثيات المعممة في هذه الحالة. احسب لاغرانجية الجملة و معادلات الحركة.

**تمرين** 11: ينحدر قرص منزلقا علي مستوي مائل. عين الاحداثيات المعممة الضرورية لوصف حالة الجملة بالكامل. عين القيود علي الحركة في حالة انحدار القرص دائرا علي المستوي المائل بدون انزلاق.

**تمرين** 12: ما هي القيود علي الحركة من اجل الجمل التالية:

- جسيم يتحرك علي قطع ناقص.
- جسيم يتحرك علي كرة.
- جسم صلب مشكل من ثلاث جسيمات.
- جسم يتزحلق علي مستوي مائل بزاوية $\alpha$.
- جسم يتحرك علي مستقيم يدور بسرعة زاوية ثابتة $\Omega$.

**تمرين** 13: عجلة تتحرك دائرة علي مستوي بدون انزلاق. نفترض ان العجلة لا يمكنها ان تسقط. احسب معادلات القيود. هل القيود هولونومية ام لا.

**تمرين** 14: نعتبر جملة مشكلة من كتلتين $M_1$ و $M_2$ معلقتين الي بكرتين متراكزتين نصف قطريهما $R_1$ و $R_2$ علي التوالي. بين ان العمل الافتراضي لقوي القيود ينعدم عند حالة التوازن. استخدم مبدأ العمل الافتراضي لدالمبارت لتعيين حالة توازن الجملة.

**تمرين** 15: كتلتان $m_1$ و $m_2$ مرتبطتان بحبل وتتحركان علي مستويين مائلين بزاويتين $\alpha$ و $\beta$ علي التوالي. الحبل طوله $l$ و يتحرك بدون احتكاك عبر بكرة تفصلها عن الكتلتين المسافتين $l_1$ و $l_2$ علي التوالي. انظر الي الشكل 6. استعمل مبدأ العمل الافتراضي لدالمبارت لحساب تسارع الجملة. عين المسافة $l_1$ او المسافة $l_2$ كدالة في الزمن.

**تمرين** 16: النواس النابض هو كتلة $m$ معلقة الي السقف بنابض ثابت مرونته $k$ تحت تأثير الحقل الثقالي. ماهي الاحداثيات المعممة في هذه المسألة. احسب لاغرنجية الجملة و اشتق معادلات لاغرنج للحركة.

**تمرين** 17: يتحرك حجران مربوطان بخيط صلب طوله $l$ علي مستوي مائل بزاوية $\alpha$. ماهي الاحداثيات المعممة في هذه الحالة. احسب لاغرانجية الجملة. حل معادلات الحركة صراحة.

**تمرين** 18: جسيم كروي يتحرك داخل انبوب يدور في المستوي $xy$ حول المحور $z$ بسرعة زاوية ثابته $\Omega$. اشتق معادلات لاغرنج للحركة. حل معادلات الحركة.

**تمرين** 19: نعتبر جملة ذات درجة حرية واحدة $q$. بين انه اذا كانت لاغرانجية الجملة لا تتعلق صراحة بالزمن اي اذا كانت $L = L(q, \dot{q})$ فان معادلة لاغرانج للحركة يمكن كتابتها علي الشكل

$$\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \text{constant}.$$

ملحوظة: اشتق هذه المعادلة بالنسبة للزمن.

**تمرين** 20: نفترض ان لاغرانجية جملة تتعلق بالتسارع المعمم $\ddot{q}$ بالاضافة الي الاحداثية و السرعة المعممتين $q$ و $\dot{q}$ و الزمن اي $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$. نعتبر الطرق في فضاء التمثيلات التي تربط الحالتين $1 = (t_1, q_1, \dot{q}_1)$ و $2 = (t_2, q_2, \dot{q}_2)$. اذن نعتبر فقط التغييرات الافتراضية حول الحركة الحقيقية التي تنعدم في النقطتين 1 و 2 اي

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \ , \ \delta \dot{q}(t_1) = \delta \dot{q}(t_2) = 0.$$

اشتق معادلات لاغرانج في هذه الحالة.

ملحوظة: استعمل مبدأ الفعل الاصغري لهاميلتون $\delta I = 0$ حيث ان الفعل يعرف ب $I = \int dt L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$.

**تمرين** 21: نعتبر جسم في حالة انزلاق بدون احتكاك و تحت تأثير قوة الثقالة علي منحني $y = y(x)$ في المستوي الشاقولي. ألجسم يبدأ بالانزلاق في اللحظة $t = 0$ في النقطة $(x = 0, y = y_0)$ و يصل في اللحظة $t = T$ الي الارض عند النقطة $(x = x_0, y = 0)$.

- باستعمال قانون انحفاظ الطاقة بين النقطة $(x = 0, y = y_0)$ و نقطة كيفية $(x, y)$ علي المنحني $y = y(x)$ بين ان الزمن $T$ يعطي بالمعادلة

$$T = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(y_0 - y)}} dx \ , \ y^{'} = \frac{dy}{dx}.$$

- عين المنحني $y = y(x)$ الذي يكون من اجله الزمن $T$ اصغري. استعمل معادلة لاغرانج علي الشكل الذي وجدناه في التمرين الاول.

  ملحوظة: يمكن ان تستخدم تغيير المتغير

$$y^{'} = -\cot \frac{\theta}{2}.$$

# حلول

**تمرين** 1:

- السرعة بدلالة الاحداثيات و السرعات المعممة تعطي ب

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j. \quad (١١٣)$$

بالاشتقاق الجزئي بالنسبة ل $\dot{q}_j$ نحصل علي العلاقة المرغوب فيها.

- 

$$T = M_0 + \sum_j M_j \dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{j,k} M_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k. \quad (١١٤)$$

$$M_0 = \sum_i \frac{1}{2}m_i\Big(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\Big)^2 \ , \ M_j = \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}.\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \ , \ M_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (١١٥)$$

**تمرين** 2: احداثيات الكتلة الاولي هي

$$x_1 = l_1 \sin\theta_1 \ , \ y_1 = -l_1\cos\theta_1. \quad (١١٦)$$

احداثيات الكتلة الثانية هي

$$x_2 = x_1 + l_2\sin\theta_2 \ , \ y_2 = y_1 - l_2\cos\theta_2. \quad (١١٧)$$

نلاحظ ان

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2. \quad (١١٨)$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2. \quad (١١٩)$$

هذه هي معادلات القيود الهولونومية في هذه الحالة. اذن عدد درجات الحرية هو $4 - 2 = 2$. الاحداثيات المعممة في هذه الحالة هي الزاويتين $\theta_1$ و $\theta_2$.

من اجل حساب اللاغرانجية علينا حساب الطاقة الحركية و الطاقة الكامنة.

سرعة الكتلة الاولي هي

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2. \quad (١٢٠)$$

سرعة الكتلة الثانية هي

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2). \quad (١٢١)$$

الطاقة الحركية للجملة هي

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2). \quad (١٢٢) \end{aligned}$$

نحسب الان الطاقة الكامنة. قوي الثقالة المؤثرة علي الجسيمين الاول و الثاني هي $\vec{F}_1 = m_1\vec{g}$ و $\vec{F}_2 = m_2\vec{g}$. في هذه الحالةالطاقة الكامنة تساوي ناقص عمل قوة الثقالة. اذن

$$\begin{aligned} V &= m_1 g.y_1 + m_2 g.y_2 \\ &= -(m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1 - m_2 gl_2\cos\theta_2. \end{aligned} \quad (١٢٣)$$

اذن لاغرانجية النواس المضاعف تعطي ب

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) \\ &+ (m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1 + m_2 gl_2\cos\theta_2. \end{aligned} \quad (١٢٤)$$

معادلات الحركة هي

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\Big) - \frac{\partial L}{\partial\theta_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\Big[(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\Big] \\ &-\Big[-m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) - (m_1+m_2)gl_1\sin\theta_1\Big] = 0. \end{aligned} \quad (١٢٥)$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}\Big) - \frac{\partial L}{\partial\theta_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\Big[m_2 l_2^2\dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)\Big] \\ &-\Big[-m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) - m_2 gl_2\sin\theta_2\Big] = 0. \end{aligned} \quad (١٢٦)$$

**تمرين** 3: معادلات الحركة تعطي ب

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L'}{\partial\dot{x}}\Big) - \frac{\partial L'}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow m(a\ddot{x} + b\ddot{y}) + K(ax+by) = 0. \quad (١٢٧)$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L'}{\partial\dot{y}}\Big) - \frac{\partial L'}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow m(b\ddot{x} + c\ddot{y}) + K(bx+cy) = 0. \quad (١٢٨)$$

نعرف المتغيرات

$$u_1 = ax+by\ ,\ u_2 = bx+cy. \quad (١٢٩)$$

معادلات الحركة تأخذ اذن الشكل

$$m\ddot{u}_1 + Ku_1 = 0\ ,\ m\ddot{u}_2 + Ku_2 = 0. \quad (١٣٠)$$

هذه معادلات حركة هزازان توافقيان $u_1$ و $u_2$ حيث ان كل هزاز هو عبارة عن نابض ذو كتلة $m$ و ثابت $K$. الطاقة الحركية و الطاقة الكامنة للنابض $u$ تعطي ب

$$T = \frac{1}{2}m\dot{u}^2\ ,\ V = \frac{1}{2}Ku^2. \quad (١٣١)$$

اذن لاغرانجية الجملة $L = T - V$ تعطي ب

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) - \frac{1}{2}K(u_1^2 + u_2^2). \quad (١٣٢)$$

الجملة الفيزيائية هي اذن عبارة عن هزاز توافقي في بعدين.

**تمرين** 5: لدينا من جهة

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial s_i} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial s_i}$$
$$= \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial s_i} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial}{\partial s_i}\sum_k\left(\frac{\partial q_j}{\partial s_k}\dot{s}_k + \frac{\partial q_j}{\partial t}\right)$$
$$= \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial s_i} + \sum_{j,k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial^2 q_j}{\partial s_i \partial s_k}\dot{s}_k + \frac{\partial^2 q_j}{\partial s_i \partial t}\right). \quad (١٣٣)$$

من جهة اخري لدينا

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{s}_i}$$
$$= \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial q_j}{\partial s_i}. \quad (١٣٤)$$

اي ان

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i}\right) = \sum_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{s}_i} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_j}{\partial s_i}\right). \quad (١٣٥)$$

اذن اذا كان لدينا معادلات لاغرانج

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (١٣٦)$$

فانه يترتب عليه مباشرة معادلات لاغرانج

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial s_i} = 0. \quad (١٣٧)$$

**تمرين** 7: بالنسبة للمعلم $K$ لدينا

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2. \quad (١٣٨)$$

بالنسبة للمعلم $K^{'}$ لدينا

$$L^{'} = \frac{1}{2}m\vec{v}^{'2}$$
$$= L + \frac{1}{2}m\vec{V}^2 + m\vec{v}\vec{V}$$
$$= L + \frac{dF}{dt}. \quad (١٣٩)$$

$$F = \frac{1}{2}m\vec{V}^2 t + m\vec{r}.\vec{V}. \quad (١٤٠)$$

نحسب الان

$$\frac{\partial L^{'}}{\partial r_i}=\frac{\partial L}{\partial r_i}+\frac{\partial}{\partial r_i}(\frac{dF}{dt}). \qquad (١٤١)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L^{'}}{\partial \dot{r}_i} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}+\frac{\partial}{\partial \dot{r}_i}(\frac{dF}{dt})\\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}+\frac{\partial F}{\partial r_i}.\end{aligned} \qquad (١٤٢)$$

المعادلة الاخيرة تؤدي الي

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\frac{\partial L^{'}}{\partial \dot{r}_i}) &= \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i})+\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial r_i})\\ &= \frac{\partial L}{\partial r_i}+\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial r_i}).\end{aligned} \qquad (١٤٣)$$

اذن نحصل علي

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\frac{\partial L^{'}}{\partial \dot{r}_i})-\frac{\partial L^{'}}{\partial r_i} &= \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial r_i})-\frac{\partial}{\partial r_i}(\frac{dF}{dt})\\ &= 0.\end{aligned} \qquad (١٤٤)$$

هذه النتيجة تبقي صالحة من اجل كل الدوال $F=F(r_i,t)$ القابلة للاشتقاق و ليس فقط من اجل الدالة $(140)$ .

**تمرين** 8: طول اي منحني رابط بين النقطتين $(x_1,y_1)$ و $(x_2,y_2)$ يعطي ب

$$\begin{aligned}I &= \int_1^2 ds\\ &= \int_1^2 \sqrt{dx^2+dy^2}\\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx f(y,\dot{y}).\end{aligned} \qquad (١٤٥)$$

$$f(y,\dot{y})=\sqrt{1+\dot{y}^2} \qquad (١٤٦)$$

نحسب مباشرة

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0\ ,\ \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}=\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}. \qquad (١٤٧)$$

معادلة الحركة هي اذن

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}=c \Leftrightarrow \dot{y}=a=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}. \qquad (١٤٨)$$

$a$ و $c$ هي ثوابت تكامل. بالتكامل مرة اخري نحصل علي

$$y=ax+b. \tag{١٤٩}$$

هذه هي معادلة المستقيم. الثوابت $a$ و $c$ تعين من شرط مرور المستقيم بالنقطتين $(x_1,y_1)$ و $(x_2,y_2)$. اذن اقصر طريق رابط بين نقطتين في المستوي هو المستقيم.
بالنسبة لحالة الكرة لدينا

$$f(\phi,\dot{\phi},\theta)=\sqrt{1+\sin^2\theta\dot{\phi}^2}\ ,\ \dot{\phi}=\frac{d\phi}{d\theta}. \tag{١٥٠}$$

معادلة القيم المستقرة تعطي ب

$$\frac{\sin^2\theta\dot{\phi}}{\sqrt{1+\sin^2\theta\dot{\phi}^2}}=c. \tag{١٥١}$$

يمكن كتابة هذه المعادلة علي الشكل

$$\dot{\phi}=-\frac{\dot{\rho}}{\sqrt{1-\rho^2}}\ ,\ \rho=a\cot\theta. \tag{١٥٢}$$

اذن الحل المستقر يعطي ب (باهمال ثابت تكامل اضافي)

$$\sin\phi=-a\cot\theta. \tag{١٥٣}$$

هذه معادلات الدوائر الكبري اي دوائر علي سطح الكرة.

**تمرين** 9: الفعل يعطي ب

$$\begin{aligned} I &= \int_0^T Ldt\\ &= \int_0^T \big(\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2\big)dt\\ &= \frac{1}{2}m\int_0^T x^2(t)-\frac{1}{2}k\int_0^T \dot{x}^2(t). \end{aligned} \tag{١٥٤}$$

نحسب

$$\begin{aligned} \int_0^T x^2(t) &= \sum_{j=0}\sum_{k=0}a_ja_k\int_0^T \cos j\Omega t\cos k\Omega t dt\\ &= \sum_{j=0}\sum_{k=0}a_ja_k\frac{T}{2}\delta_{jk}\\ &= \frac{T}{2}\sum_{j=0}a_j^2. \end{aligned} \tag{١٥٥}$$

من جهة اخري لدينا

$$x(t)=\sum_{j=0}a_j\cos j\Omega t\Rightarrow\dot{x}(t)=-\Omega\sum_{j=0}ja_j\sin j\Omega t. \tag{١٥٦}$$

اذن نحسب

$$\begin{aligned}\int_0^T\dot{x}^2(t) &= \Omega^2\sum_{j=0}\sum_{k=0}jka_ja_k\int_0^T\sin j\Omega t\sin k\Omega tdt\\ &= \Omega^2\sum_{j=0}\sum_{k=0}jka_ja_k\frac{T}{2}\delta_{jk}\\ &= \frac{T\Omega^2}{2}\sum_{j=0}j^2a_j^2.\end{aligned} \tag{١٥٧}$$

الفعل يصبح

$$I=\frac{\pi}{2}\sum_{j=0}\big(m\Omega j^2-\frac{k}{\Omega}\big)a_j^2. \tag{١٥٨}$$

القيمة المستقرة تعطي بالشرط

$$\delta I=0\Rightarrow\pi\sum_{j=0}\big(m\Omega j^2-\frac{k}{\Omega}\big)a_j\delta a_j=0. \tag{١٥٩}$$

الحل يعطي ب

$$\big(m\Omega j^2-\frac{k}{\Omega}\big)a_j=0\ ,\ \forall j. \tag{١٦٠}$$

قليل من التأمل يعطي الحل النهائي

$$\Omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\ ,\ a_j=0\ ,\ \forall j\neq 1. \tag{١٦١}$$

**تمرين** 10: شعاع الموضع لانه يقع علي سطح كرة يجب ان يحقق

$$\vec{r}^2=L^2. \tag{١٦٢}$$

هذه هي معادلة القيد. عدد درجات الحرية هو اذن 2. مرة اخري لان شعاع الموضع يقع علي سطح كرةيمكننا كتابته علي الشكل

$$\vec{r}=L\big(\sin\theta\cos\phi\hat{i}+\sin\theta\sin\phi\hat{j}+\cos\theta\hat{k}\big). \tag{١٦٣}$$

يمكن اخذ الزاويتين $\theta$ و $\phi$ كاحداثيات معممة.
نحسب السرعة و الطاقة الحركية و الطاقة الكامنة

$$\vec{v}=L\dot{\theta}\big(\cos\theta\cos\phi\hat{i}+\cos\theta\sin\phi\hat{j}-\sin\theta\hat{k}\big)+L\dot{\phi}\sin\theta\big(-\sin\phi\hat{i}+\cos\phi\hat{j}\big). \tag{١٦٤}$$

$$T=\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mL^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta. \tag{١٦٥}$$

$$V = -mgL\cos\theta. \quad (١٦٦)$$

لاغرانجية النواس الكروي تعطي اذن ب

$$L = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta + mgL\cos\theta. \quad (١٦٧)$$

معادلات الحركة تعطي ب

$$\ddot{\theta} = -\frac{1}{L}(g - L\dot{\phi}^2\cos\theta)\sin\theta. \quad (١٦٨)$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\phi}\sin^2\theta) = 0. \quad (١٦٩)$$

**تمرين** 11: حالة الجملة تعين بالكامل باعطاء المسافة $l$ التي يقطعها القرص علي المستوي المائل و الزاوية $\alpha$ التي يدور بها القرص حول محور دورانه. الاحداثيات المعممة هي اذن $l$ و $\alpha$. انظر الي الشكل 3 .
عند انحدار القرص علي المستوي دائرا بدون انزلاق فان انتقال نقطة التماس $dl$ خلال زمن $dt$ يساوي ضرب نصف قطر القرص و الانتقال الزاوي $d\alpha$ خلال الزمن $dt$. اي

$$dl = Rd\alpha \Leftrightarrow v = R\dot{\alpha}. \quad (١٧٠)$$

هذا هو قيد الدوران بدون انزلاق او زحلقة. من الواضح انه قيد هولونومي.

**تمرين** 12:

- $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (١٧١)$$

- $$x = r\sin\theta\cos\phi\ ,\ y = r\sin\theta\sin\phi\ ,\ z = r\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \quad (١٧٢)$$

- $$(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 = c_{ij}^2. \quad (١٧٣)$$

- $$x = -l\cos\alpha\ ,\ y = -l\sin\alpha \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan\alpha. \quad (١٧٤)$$

- $$x = r\cos\Omega t\ ,\ y = r\sin\Omega t \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan\Omega t. \quad (١٧٥)$$

**تمرين** 13: نحتاج لتحديد حالة الجملة الي احداثيات مركز ثقل العجلة في المستوي، $x_w$ و $y_w$، الي الزاوية $\psi$ التي تحدد اتجاه العجلة، و الي زاوية دوران العجلة $\phi$. انظر الي الشكل 4.
مركبات السرعة $\vec{v}$ هي

$$\dot{x}_w = -v\sin\psi \ , \ \dot{y}_w = v\cos\psi. \tag{١٧٦}$$

من الجهة الاخري فان شرط الدوران بدون انزلاق يعطي ب

$$v = R\dot{\phi}. \tag{١٧٧}$$

بالتعويض نحصل علي معادلات القيد

$$dx_w = -R\sin\psi d\phi \ , \ dy_w = R\cos\psi d\phi. \tag{١٧٨}$$

هذه معادلات لا يمكن مكاملتها حتي نحل المسالة. اذن هذه القيود غير هولونومية.

**تمرين** 14: قوي القيود في هذه الحالة هي قوي التوتر قي الخيوط $\vec{T}_1$ و $\vec{T}_2$. انظر الي الشكل 5. دوران البكرات بزاوية $\delta\phi$ يقابل انتقال الكتل بمسافة تعطي ب

$$\delta y_1 = R_1\delta\phi_1 \ , \ \delta y_2 = -R_2\delta\phi. \tag{١٧٩}$$

العمل الافتراضي لقوي التوتر يعطي اذن ب

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{T}_1\delta\vec{r}_1 + \vec{T}_2\delta\vec{r}_2 \\ &= T_1\delta y_1 + T_2\delta y_2 \\ &= (T_1R_1 - T_2R_2)\delta\phi. \end{aligned} \tag{١٨٠}$$

لكن عند التوازن تتساوي عزوم قوي التوتر. اذن عند التوازن ينعدم العمل الافتراضي لقوي التوتر.
مبدأ العمل الافتراضي لدالمبارت عند التوازن يأخذ الشكل

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)}\delta\vec{r}_i = 0. \tag{١٨١}$$

القوي المطبقة في هذه المسألة هي قوي الثقالة. اذن المعادلة اعلاه تأخذ الشكل

$$m_1g\delta y_1 + m_2g\delta y_2 = 0. \tag{١٨٢}$$

حالة التوازن تعطي اذن ب

$$m_1R_1 = m_2R_2. \tag{١٨٣}$$

**تمرين** 15: مبدأ العمل الافتراضي لدالمبارت يأخذ الشكل

$$\sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i)\delta\vec{r}_i = 0. \tag{١٨٤}$$

نكتب هذه المعادلة علي الشكل

$$(m_1\vec{g} - m_1\ddot{\vec{l}}_1)\delta\vec{l}_1 + (m_2\vec{g} - m_2\ddot{\vec{l}}_2)\delta\vec{l}_2 = 0. \qquad (١٨٥)$$

بالاسقاط نحصل علي

$$(m_1 g\sin\alpha - m_1\ddot{l}_1)\delta l_1 + (m_2 g\sin\beta - m_2\ddot{l}_2)\delta l_2 = 0. \qquad (١٨٦)$$

القيد علي الحركة في هذه الحالة هو

$$l = l_1 + l_2 \Rightarrow \delta l_1 = -\delta l_2. \qquad (١٨٧)$$

نحصل اذن علي

$$\ddot{l}_1 = \frac{m_1\sin\alpha - m_2\sin\beta}{m_1+m_2}g. \qquad (١٨٨)$$

**تمرين** 16: احداثيات الكتلة $m$ في الشكل 7 تعطي ب

$$x = r\sin\phi\ ,\ y = r\cos\phi. \qquad (١٨٩)$$

الاحداثيات المعممة هي $r$، لان طول النابض غير ثابت في هذه المسألة، و $\phi$.
الطاقة الحركية تعطي ب

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2). \qquad (١٩٠)$$

ليكن $r_0$ طول النابض في حالة التوازن. الطاقة الكامنة تعطي ب

$$\begin{aligned} V &= -m\vec{g}\vec{r} + \frac{1}{2}k(r-r_0)^2 \\ &= -mgr\cos\phi + \frac{1}{2}k(r-r_0)^2. \end{aligned} \qquad (١٩١)$$

لاغرانجية الجملة تعطي ب

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + mgr\cos\phi - \frac{1}{2}k(r-r_0)^2. \qquad (١٩٢)$$

معادلة الحركة بالنسبة ل $\phi$:

$$mr\ddot{\phi} = -mg\sin\phi - 2m\dot{r}\dot{\phi}. \qquad (١٩٣)$$

الحد الثاني هو قوة كوريوليس الناجمة عن تعلق طول النواس بالزمن. معادلة الحركة بالنسبة ل $r$:

$$m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 + mg\cos\phi - k(r-r_0). \qquad (١٩٤)$$

الحد الاخير هو قوة هوك.

**تمرين** 17: الاحداثيات النسبية في الشكل 8 تعطي ب

$$x = l\cos\alpha \ , \ y = l\sin\alpha. \quad (١٩٥)$$

هناك قيد هولونومي واحد و بالتالي لدينا درجة حرية واحدة. الاحداثية المعممة هي الزاوية $\alpha$. لاغرانجية الجملة تعطي ب

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 + m\vec{g}\vec{r} \\ &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 - mgl\sin\alpha. \end{aligned} \quad (١٩٦)$$

معادلات لاغرانج للحركة

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\cos\alpha = 0. \quad (١٩٧)$$

بضرب طرفي هذه المعادلة ب $\dot{\alpha}$ يمكن مكاملة هذه المعادلة مرة من اجل الحصول علي

$$\dot{\alpha} = \sqrt{2(c - \frac{g}{l}\sin\alpha)}. \quad (١٩٨)$$

$c$ هو ثابت تكامل. بالمكاملة مرة ثانية باستعمال فصل المتغيرات نحصل علي

$$t - t_0 = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{2(c - \frac{g}{l}\sin\alpha)}}. \quad (١٩٩)$$

**تمرين** 18: لاغرانجية الجملة تعطي ب

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \Omega^2 r^2). \quad (٢٠٠)$$

معادلات لاغرانج للحركة تعطي ب

$$\ddot{r} - \Omega^2 r = 0. \quad (٢٠١)$$

الحل يعطي ب

$$r = A\exp(\Omega t) + B\exp(-\Omega t). \quad (٢٠٢)$$

**تمرين** 21:

1) مبدأ انحفاظ الطاقة بين النقطة $(0, y)$ و نقطة كيفية $(x, y)$ يعطي ب

$$mgy_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy \ , \ v^2 = (\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2. \quad (٢٠٣)$$

نحصل اذن علي

$$dt = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2g(y_0 - y)}} \Rightarrow T = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(y_0 - y)}}dx. \quad (٢٠٤)$$

2) الزمن $T$ هو من الشكل

$$T=\int_0^{x_0} f(y,y^{'},x)dx. \tag{٢٠٥}$$

الدالة $f$ لا تتعلق صراحة بالزمن $x$ و تعطي ب

$$f=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(y_0-y)}}. \tag{٢٠٦}$$

معادلة لاغرانج تأخذ الشكل

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=0\Rightarrow y^{'}\frac{\partial f}{\partial y'}-f=1/c. \tag{٢٠٧}$$

الحساب يعطي

$$\frac{1}{c^2}=\frac{1}{2g(y_0-y)(1+y'^2)}. \tag{٢٠٨}$$

نقوم بتغيير المتغير

$$y^{'}=-\cot\frac{\theta}{2}. \tag{٢٠٩}$$

نحصل علي

$$y=y_0-\frac{c^2}{2g}\sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{٢١٠}$$

بالاشتقاق

$$y^{'}=-\frac{c^2}{2g}\sin\theta.\theta^{'}. \tag{٢١١}$$

من (209) و (211) نحصل علي

$$x=\frac{c^2}{2g}\int\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta=\frac{c^2}{4g}(\theta-\sin\theta). \tag{٢١٢}$$

المعادلتان (210) و (212) تعرفان دويري [٣]. في اللحظة الابتدائية لدينا $\theta=0$. في اللحظة النهائية لدينا

$$0=y_0-\frac{c^2}{2g}\sin^2\frac{\theta_0}{2}\ ,\ x_0=\frac{c^2}{4g}(\theta_0-\sin\theta_0). \tag{٢١٣}$$

اي

$$\frac{x_0}{y_0}=\frac{\theta_0-\sin\theta_0}{1-\cos\theta_0}. \tag{٢١٤}$$

$\theta_0$ هي القيمة الاعظمية للزاوية $\theta$.

---

[٣] cycloid.

# الميكانيك الهاميلتوني

## قوانين الانحفاظ

نعتبر جملة مشكلة من جسيمات نقطية تتفاعل فيما بينها عبر قوي مشتقة من كمون يتعلق فقط بالموضع. نحسب

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \\ &= m_i x_i - 0 \\ &= p_{ix}.\end{aligned} \qquad (٢١٥)$$

هذه هي بالضبط كمية حركة الجسيم $i$ في الاتجاه $x$.

اذن نعرف كمية الحركة المعممة او كمية الحركة المرافقة او كمية الحركة القانونية $p_i$ المرفقة بالاحداثية المعممة $q_i$ بالعبارة

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \qquad (٢١٦)$$

مثل ما ان الاحداثيات المعممة لا تحمل بالضرورة ابعاد الطول فان كميات الحركة المعممة لا تحمل بالضرورة ابعاد كمية الحركة.

نعرف الان مفهوم الاحداثية المهملة او الاحداثية الدورية علي انها الاحداثية $q_i$ التي لا تدخل في اللاغرانجية $L$ رغم ان $L$ يمكن ان يتعلق ب $\dot{q}_i$. في هذه الحالة معادلات لاغرانج تؤدي الي

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} p_i = 0 \Rightarrow p_i = \text{constant}. \qquad (٢١٧)$$

اذن كمية الحركة المعممة المرفقة باحداثية معممة مهملة تكون منحفظة في الزمن. اي انها ثابت للحركة. هذا هو شرط الانحفاظ الاكثر عمومية في الميكانيك التحليلي.

من اجل الجمل المحافظة يكون الكمون دالة في الاحداثيات المعممة فقط. في هذه الحالة القوة المعممة $Q_i$ المرفقة بالاحداثية المعممة الدورية تنعدم لان الكمون لا يتعلق ب $q_i$،

علاوة علي ذلك، اذا كانت الاحداثية المعممة الدورية $q_i$ هي بحيث $dq_i$ يقابل انسحاب للجملة في الاتجاه $\vec{n}$، فان انعدام القوة المعممة $Q_i$ يكافئ انعدام القوة العادية في الاتجاه $\vec{n}$، و انحفاظ كمية الحركة المعممة $p_i$ يكافئ انحفاظ كمية الحركة العادية في الاتجاه $\vec{n}$ . اي انه في هذه الحالة القوة المعممة و كمية الحركة المعممة هما بالضبط القوة و كمية الحركة العاديين في الاتجاه $\vec{n}$. نحصل اذن علي قانون انحفاظ كمية الحركة لما تبقي حالة الجملة صامدة تحت تأثير الانسحابات. نقول ان الانسحابات هي تناظرات للجملة.

بالمثل اذا كانت الاحداثية المعممة الدورية $q_i$ هي بحيث $dq_i$ يقابل دوران للجملة حول محور $\vec{n}$، فان انعدام القوة المعممة $Q_i$ يكافئ انعدام عزم الدوران حول المحور $\vec{n}$، و انحفاظ كمية الحركة المعممة $p_i$ يكافئ انحفاظ العزم الحركي في الاتجاه $\vec{n}$ . نحصل اذن في هذه الحالة علي قانون انحفاظ العزم الحركي لما تبقي حالة الجملة صامدة تحت تأثير الدورانات. نقول في هذه الحالة ان الدورانات هي تناظرات للجملة.

قوانين الانحفاظ، اي وجود احداثيات دورية، تكون دائما مرتبطة بوجود تناظرات معينة تميز حالة الجملة. مثلا وجود احداثية دورية انسحابية يعني ان الجملة تبقي صامدة تحت تأثير الانسحابات في الاتجاه المقابل للاحداثية الدورية مما ينتج عنه انحفاظ كمية الحركة في هذا الاتجاة. بالمثل فان وجود احداثية دورية دورانية يعني ان الجملة تبقي صامدة تحت تأثير الدورانات في الاتجاه المقابل للاحداثية الدورية و هذا ينتج عنه انحفاظ العزم الحركي في هذا الاتجاه.

يمكن البرهان علي قانون انحفاظ الطاقة باستعمال معادلات لاغرانج كالتالي. نحسب

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_i \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_i \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned} \quad (٢١٨)$$

نستنتج اذن

$$\frac{dh}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (٢١٩)$$

$h$ هو بالضبط دالة الطاقة او الهاميلتونية و تعطي ب

$$h(q, \dot{q}, t) = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L. \quad (٢٢٠)$$

اذن اذا لم تتعلق اللاغرانجية $L$ صراحة بالزمن فان الهاميلتونية تكون منحفظة في الزمن. في هذه الحالة $h$ هو ثابت للحركة يسمي ثابت جاكوبي.

من اجل الجمل المحافظة تأخذ اللاغرانجية الشكل العام التالي

$$L = L_0(q, t) + L_1(q, \dot{q}, t) + L_2(q, \dot{q}, t). \quad (٢٢١)$$

$L_1$ و $L_2$ هي دوال متجانسة من الدرجة الاولي و الثانية علي التوالي في السرعات المعممة $\dot{q}_i$.

نقول عن دالة $f(x, y, ...)$ انها دالة متجانسة من الرتبة $q$ في المتغيرات $x$، $y$،... اذا تحقق الشرط

$$f(tx, ty, ...) = t^q f(x, y, ...). \quad (٢٢٢)$$

نعرف $x^{'} = tx$، $y^{'} = ty$،... نحسب

$$\frac{df(x^{'}, y^{'}, ...)}{dt} = \frac{dx^{'}}{dt}\frac{\partial f}{\partial x^{'}} + \frac{dy^{'}}{dt}\frac{\partial f}{\partial y^{'}} + ... \Leftrightarrow qt^{q-1}f(x, y, ...) = x\frac{\partial f}{\partial (tx)} + y\frac{\partial f}{\partial (ty)} + ...$$

(٢٢٣)

من اجل $t=1$ نحصل علي مبرهنة اولر

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = qf. \quad (٢٢٤)$$

الشكل $(221)$ تأخذه ايضا لاغرانجيات جمل اخري كثيرة ليست بالضرورة محافظة. بتطبيق مبرهنة اولر علي $h$ المعطي بالمعادلة $(220)$ نحصل علي

$$h = L_2 - L_0. \quad (٢٢٥)$$

من الجهة الاخري تأخذ الطاقة الحركية دائما الشكل

$$T = T_0(q) + T_1(q, \dot{q}) + T_2(q, \dot{q}). \quad (٢٢٦)$$

من الواضح اذن انه لدينا

$$L_0 = T_0 - V \ , \ L_1 = T_1 \ , \ L_2 = T_2. \quad (٢٢٧)$$

اذن

$$h = T_2 - T_0 + V. \quad (٢٢٨)$$

بالاضافة الي هذا، اذا كان تغيير المتغيرات $q_i \longrightarrow \vec{r}_i$ لا يتعلق بالزمن فان $T = T_2$ و بالتالي

$$h = T + V. \quad (٢٢٩)$$

هذه بالفعل هي طاقة الجملة.

## تحويل لوجوندر و معادلات هاميلتون

مرة اخري نفترض جملة فيزيائية خاضعة لقيود هولونومية $f_j(q_i, \dot{q}_i, t) = 0$ و قوي مونوجينية اي قوي مشتقة من كمون معمم يتعلق بالاضافة الي الاحداثيات المعممة علي السرعات المعممة اي $U = U(q_i, \dot{q}_i, t)$ و تعطي بالعلاقة

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right). \quad (٢٣٠)$$

من اجل جملة تحتوي علي $n$ درجة حرية لدينا $n$ معادلة للحركة تعطي بالضبط بمعادلات لاغرانج

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0. \quad (٢٣١)$$

هذه معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية حلها يتطلب تقديم $2n$ شرط ابتدائي. كمثال علي الشروط الابتدائية يمكن تقديم ال $n$ قيمة للموضع $q_i$ و ال $n$ قيمة للسرعة $\dot{q}_i$ في اللحظة الابتدائية $t_0$.

حالة او تمثيلة الجملة هي نقطة $(q_1, ..., q_2)$ في فضاء التمثيلات ذو ال $n$ بعد تختط خلال الزمن مسار يحدده بالضبط حل معادلة لاغرانج.

في الصياغة الهاميلتونية للميكانيك تعطي معادلات الحركة بمعادلات تفاضلية من الرتبة الاولي تعرف بمعادلات هاميلتون. لان عدد الشروط الابتدائية الضرورية يجب ان يبقي نفسه يساوي $2n$، كما في الصياغة اللاغرانجية، فان عدد المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولي الضرورية لوصف حالة الجملة يجب ان يعطي ب $2n$ معادلة اي انه يجب ان نعمل ب $2n$ متغير. من الطبيعي جدا ان نأخذ نصف هذه المتغيرات ال $n$ احداثية معممة $q_i$ اما من اجل النصف الاخر فنأخذ ال $n$ كمية حركة معممة $p_i$ التي تعرف ب

$$p_i = \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_i}. \quad (٢٣٢)$$

يعرف الزوج $(q_i, p_i)$ بالمتغيرات القانونية. حالة او تمثيلة الجملة في الصياغة الهاميلتونية تعطي بنقطة $(q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_n)$ في فضاء ذو $2n$ بعد يعرف بالفضاء الطوري للجملة اين تعطي المحاور بالاحداثيات و كميات الحركة المعممة $q_i$ و $p_i$. معادلات هاميلتون هي معادلات حركة النقطة $(q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_n)$ في الفضاء الطوري.

الانتقال من الصياغة اللاغرانجية الي الصياغة الهاميلتونية يتطلب تغيير متغيرات من الشكل

$$(q_i, \dot{q}_i, t) \longrightarrow (q_i, p_i, t). \quad (٢٣٣)$$

هذا مثال علي ما يعرف باسم تحويل لوجوندر.

قبل ان نواصل نذكر بتعريف تحويل لوجوندر لدالة $f(x)$ في متغير $x$. نفترض ان الدالة محدبة اي انها تحقق الشرط

$$\frac{d^2 f}{dx^2} > 0. \quad (٢٣٤)$$

هذا الشرط يمكن ايضا ان نعبر عليه كالتالي: الدالة الميل

$$s(x) = \frac{df}{dx} \quad (٢٣٥)$$

هي دالة رتيبة، لانها تتزايد فقط، في $x$. اذن هناك قيمة واحدة ل $s$ من اجل كل نقطة $x$ اي ان الدالة $s = s(x)$ هي مفردة القيمة و تقبل العكس لتعطي دالة مفردة القيمة $x = x(s)$.

اذن يمكن الابتداء من الميل $s$ كمتغير مستقل، نستعمل الدالة العكسية $x = x(s)$ للحصول علي القيمة الوحيدة ل $x$ المقابلة للميل $s$، ثم نعوض بهذه القيمة ل $x$ في الدالة $f$ لنحصل علي $f(x(s))$. تحويل لوجوندر $g(s)$ للدالة $f(x)$ هي نقطة تقاطع المستقيم المماس للدالة في النقطة $x = x(s)$ مع محور العينات اي

$$f(x(s)) = sx(s) - g(s) \Leftrightarrow g(s) = sx(s) - f(x(s)). \quad (٢٣٦)$$

انظر الشكل 10. تحويل لوجوندر هو تطبيق للثنائية بين النقاط و المستقيمات: الدالة $f$ يمكن اعطائها بمجموعة النقاط $(x, y)$ او بمجموعة الازواج $(s, -g)$ المشكلة من الميول $s$ و نقاط التقاطع $-g$ . يمكن تعريف تحويل لوجوندر ايضا بعملية التعظيم

$$g(s) = \max_x (sx - f(x)). \quad (٢٣٧)$$

نعتبر الان دالة $f(x, y)$ في متغيرين $x$ و $y$. التفاضل التام للدالة $f$ يعطي ب

$$df = udx + vdy \ , \ u = \frac{\partial f}{\partial x} \ , \ v = \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (٢٣٨)$$

تحويل لوجوندر من المتغيرات $(x,y)$ الي المتغيرات $(u,y)$ يحول الدالة $f(x,y)$ الي الدالة $g(u,y)$ المعرفة ب

$$g=ux-f. \quad (٢٣٩)$$

نحسب التفاضل

$$dg=xdu-vdy\equiv\frac{\partial g}{\partial u}du+\frac{\partial g}{\partial y}dy. \quad (٢٤٠)$$

نحصل اذن علي

$$x=\frac{\partial g}{\partial u}\ ,\ v=-\frac{\partial g}{\partial y}. \quad (٢٤١)$$

كما قلنا فان الانتقال من الصياغة اللاغرانجية الي الصياغة الهاميلتونية يكافئ تحويل لوجوندر من المتغيرات $(q_i,\dot{q}_i,t)$ الي المتغيرات $(q_i,p_i,t)$. اذن عوض اللاغرانجية $L=L(q_i,\dot{q}_i,t)$ التي هي دالة في $q_i$،$\dot{q}_i$ و $t$ سوف نعمل، في الصياغة الهاميلتونية، بما يسمي بالهاميلتونية $H$ التي هي دالة في $q_i$، $p_i$ و $t$ معرفة بتحويل لوجوندر

$$H(q_i,p_i,t)=\sum_i\dot{q}_ip_i-L(q_i,\dot{q}_i,t). \quad (٢٤٢)$$

نحسب من جهة

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i+\frac{\partial H}{\partial t}dt. \quad (٢٤٣)$$

من الجهة الاخري نحسب

$$\begin{aligned} dH &= \dot{q}_idp_i+p_id\dot{q}_i-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}d\dot{q}_i-\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i-\frac{\partial L}{\partial t}dt\\ &= \dot{q}_idp_i-\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i-\frac{\partial L}{\partial t}dt\\ &= \dot{q}_idp_i-\dot{p}_idq_i-\frac{\partial L}{\partial t}dt. \end{aligned} \quad (٢٤٤)$$

بالمقارنة نحصل علي معادلات هاميلتون للحركة

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}\ ,\ -\dot{p}_i=\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (٢٤٥)$$

نحصل ايضا علي

$$-\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}. \quad (٢٤٦)$$

من اجل قسم كبير من الجمل الفيزيائية و الاحداثيات المعممة لدينا الاتي متحقق:

- اللاغرانجية تكتب علي الشكل $L(q_i,\dot{q}_i,t)=L_0(q_i,t)+L_1(q_i,\dot{q}_i,t)+L_2(q_i,\dot{q}_i,t)$ حيث $L_2$ هي دالة متجانسة من الدرجة الثانية في $\dot{q}_i$ و $L_1$ هي دالة متجانسة من الدرجة الاولي في $\dot{q}_i$. في هذه الحالة نحسب

$$\dot{q}_ip_i = \dot{q}_i\frac{\partial L_1}{\partial\dot{q}_i}+\dot{q}_i\frac{\partial L_2}{\partial\dot{q}_i}=L_1+2L_2. \quad (٢٤٧)$$

اذن

$$H = L_2 - L_0. \tag{٢٤٨}$$

- عموما تأخذ الطاقة الحركية الشكل $T = T_2(q_i, \dot{q}_i, t) + T_1(q_i, \dot{q}_i, t) + T_0(q_i, t)$. اذا كانت المعادلات التي تعرف الاحداثيات المعممة لا تتعلق بالزمن صراحة اي $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_n)$ فان $\vec{v}_i = \sum_j \dot{q}_j \partial\vec{r}_i/\partial q_j$ و بالتالي $T = T_2$ حيث $T_2$ هي دالة في $q_i$ و $\dot{q}_i$ تربيعية في $\dot{q}_i$. من الجهة الاخري اذا كانت الطاقة الكامنة لا تتعلق بالسرعات المعممة $\dot{q}_i$ فان $L_2 = T$، $L_1 = 0$ و $-V$ و $L_0 = -V$. اذن نحصل علي

$$H = T + V. \tag{٢٤٩}$$

هذه هي الطاقة الكلية للجملة.

يمكن ان نبرهن بدون صعوبة باستعمال معادلات هاميلتون ان

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{٢٥٠}$$

اذن اذا كانت الطاقة الكامنة لا تتعلق بالزمن صراحة فان $L$ لا يتعلق بالزمن صراحة و بالتالي فان $H$ لا يتعلق بالزمن صراحة اي ان الهاميلتونية $H$ هي منحفظة في الزمن.

## معادلات هاميلتون من حساب التغاير: مبدأ هاميلتون المعدل

كما بينا في السابق فان معادلات لاغرانج للحركة يمكن اشتقاقها من مبدأ هاميلتون التكاملي الذي يأخذ الشكل

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i, t) = 0. \tag{٢٥١}$$

بالطبع فان حساب التغاير يتم علي طرق معرفة في فضاء التمثيلات بين النقطتين $(q_1(t_1), ..., q_n(t_1))$ و $(q_1(t_2), ..., q_n(t_2))$.

معادلات هاميلتون تخص حركة حالة الجملة في الفضاء الطوري و بالتالي فان المبدأ التغايري الذي يمكن ان يؤدي الي هاته المعادلات يجب بالضرورة صياغته في الفضاء الطوري.

بالتعويض بالمعادلة $L(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - H(q_i, p_i, t)$ في مبدأ هاميلتون اعلاه، ثم اعادة تفسير الطرق التي يحسب عليها التغاير علي انها الطرق في الفضاء الطوري التي تربط بين النقطتين $(q_1(t_1), ..., q_n(t_1), p_1(t_1), ..., p_n(t_1))$ و $(q_1(t_2), ..., q_n(t_2), p_1(t_2), ..., p_n(t_2))$، نحصل علي مبدأ هاميلتون المعدل الذي يعطي ب

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \bigg( \sum_i \dot{q}_i p_i - H(q_i, p_i, t) \bigg) = 0. \tag{٢٥٢}$$

هذا مبدأ تغايري في فضاء ذو $2n$ بعد من نفس شكل مبدأ هاميلتون $(251)$ اي من الشكل

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, p_i, \dot{p}_i, t) = 0. \tag{٢٥٣}$$

معادلات لاغرانج من اجل هذا المبدأ هي مباشرة معطاة ب

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}=0\Leftrightarrow\frac{d}{dt}(p_i)+\frac{\partial H}{\partial q_i}=0. \quad (٢٥٤)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{p}_i}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p_i}=0\Leftrightarrow\frac{d}{dt}(0)-\dot{q}_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}=0. \quad (٢٥٥)$$

كما نري نحصل مباشرة علي معادلات هاميلتون للحركة.

# التحويلات القانونية

نبدأ بالتذكير بالاحداثيات المعممة الدورية. الاحداثية المعممة $q_i$ هي احداثية دورية اذا لم تتعلق الهاميلتونية $H=H(q_i,p_i)$ بها. اذن في هذه الحالة، باستعمال معادلات هاميلتون، نجد ان كمية الحركة المعممة المقابلة $p_i$ هي منحفظة في الزمن. لدينا اذن

$$-\dot{p}_i=\frac{\partial H}{\partial q_i}=0\Rightarrow p_i=\beta_i=\text{constant}. \quad (٢٥٦)$$

الملاحظة الاساسية الاولي هنا هي كالتالي : حل معادلات هاميلتون هو عملية سهلة في حالة الاحداثيات الدورية.

من الجهة الاخري ان اختيار الاحداثيات المعممة و كميات الحركة المعممة هو عملية كيفية في مجملها لان هناك عدد غير منته من الاختيارات الممكنة. لانه دائما يهمنا حل معادلات هاميلتون فانه من مصلحتنا اختيار احداثيات معممة $Q_i$ و كميات حركة معممة $P_i$ يكون من اجلها بعض او كل الاحداثيات المعممة $Q_i$ دورية. هذه المجموعة الجديدة $(Q_i,P_i)$ يجب هي الاخري ان تحقق معادلات هاميلتون بهاميلتونية جديدة $K(Q_i,P_i)$ مغايرة عموما للهاميلتونية الاصلية $H(q_i,p_i)$. من اجل هذا السبب بالضبط فان التحويل $(q_i,p_i)\longrightarrow(Q_i,P_i)$ يسمي تحويل قانوني.

التحويل القانوني هو تعميم لتغيير المتغيرات في فضاء التمثيلات المعطي بالتحويل النقطي $q_i\longrightarrow Q_i=Q_i(q_i,t)$. التحويل القانوني هو في الحقيقة تغيير متغيرات في الفضاء الطوري من الشكل

$$q_i\longrightarrow Q_i=Q_i(q_j,p_j,t)\ ,\ p_i\longrightarrow P_i=P_i(q_j,p_j,t). \quad (٢٥٧)$$

نفترض ان الزوج $(q_i,p_i)$ يحل معادلات هاميلتون بهاميلتونية $H=H(q_i,p_i)$ اي

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}\ ,\ -\dot{p}_i=\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (٢٥٨)$$

كما بينا اعلاه فان هذه المعادلات يمكن اشتقاقها من مبدأ هاميلتون المعدل:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(p_i\dot{q}_i-H(q,p,t))=0. \quad (٢٥٩)$$

كما قلنا قبل قليل فان التحويل $q_i\longrightarrow Q_i=Q_i(q_j,p_j,t)$، $p_i\longrightarrow P_i=P_i(q_j,p_j,t)$ هو تحويل قانوني لاننا نفترض ان الزوج الجديد $(Q_i,P_i)$ يحل ايضا معادلات

هاميلتون لكن بهاميلتونية جديدة $K(Q,P,t)$ اي ان المتغيرات الجديدة $Q_i$ و $P_i$ هي متغيرات قانونية. لدينا اذن معادلات هاميلتون الجديدة

$$\dot{Q}_i=\frac{\partial K}{\partial P_i}\ ,\ -\dot{P}_i=\frac{\partial K}{\partial Q_i}. \tag{٢٦٠}$$

من الواضح انه يمكننا ان نشتق هذه المعادلات من مبدأ هاميلتون المعدل

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(P_i\dot{Q}_i-K(Q,P,t))=0. \tag{٢٦١}$$

اذن يجب ان يكون لدينا

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(p_i\dot{q}_i-H(q,p,t))=\delta\int_{t_1}^{t_2}(P_i\dot{Q}_i-K(Q,P,t))=0. \tag{٢٦٢}$$

او بالمقابل

$$\lambda(p_i\dot{q}_i-H(q,p,t))=P_i\dot{Q}_i-K(Q,P,t)+\frac{dF}{dt}. \tag{٢٦٣}$$

$\lambda$ هي ثابت و $F$ هي دالة في احداثيات الفضاء الطوري ذات مشتقة ثانية مستمرة. التحويلات القانونية التي لها $\lambda\neq 1$ نسميها التحويلات القانونية الممتدة اما التي لها $\lambda=1$ فنسميها اختصارا بالتحويلات القانونية.

الثابت $\lambda$ ناجم عن تحويل قانوني خاض جدا يسمي بالتحويل السلمي الذي يعرف كالتالي:

$$q_i\longrightarrow Q_i=\mu q_i\ ,\ p_i\longrightarrow P_i=\nu p_i. \tag{٢٦٤}$$

$\mu$ و $\nu$ هي ثوابت. معادلات هاميلتون الجديدة تؤدي الي معادلات هاميلتون القديمة مع الحل

$$K(Q_i,P_i)=\lambda H(q_i,p_i)\ ,\ \lambda=\mu\nu. \tag{٢٦٥}$$

اي

$$\lambda(p_i\dot{q}_i-H(q,p,t))=P_i\dot{Q}_i-K(Q,P,t). \tag{٢٦٦}$$

يمكننا دائما اختيار $\lambda=1$ باستعمال تحويل سلمي مناسب. نفترض مثلا انه لدينا تحويل قانوني $(q_i,p_i)\longrightarrow(Q_i^{'},P_i^{'})$ مع $\lambda\neq 1$. نعتبر التحويل السلمي $(Q_i,P_i)\longrightarrow(Q_i^{'}=\mu Q_i,P_i^{'}=\nu P_i)$ مع $\lambda=\mu\nu$. التحويل القانوني $(q_i,p_i)\longrightarrow(Q_i^{'},P_i^{'})$ هو تركيب للتحويل القانوني $(q_i,p_i)\longrightarrow(Q_i,P_i)$ و التحويل السلمي $(Q_i,P_i)\longrightarrow(Q_i^{'},P_i^{'})$. يمكننا التحقق بسهولة ان التحويل القانوني $(q_i,p_i)\longrightarrow(Q_i,P_i)$ له $\lambda=1$.

اذن يمكننا التركيز بالكامل علي التحويلات القانونية التي لها $\lambda=1$ دون فقدان اي عمومية في تناولنا للتحويلات القانونية. من اجل هذه التحويلات لدينا

$$p_i\dot{q}_i-H(q,p,t)=P_i\dot{Q}_i-K(Q,P,t)+\frac{dF}{dt}. \tag{٢٦٧}$$

التحويلات القانونية التي لا تتعلق بالزمن صراحة اي $Q_i=Q_i(q_j,p_j)$ و $P_i=P_i(q_j,p_j)$ تسمي بالتحويلات القانونية المحدودة.

الدالة $F$ هي دالة في احداثيات الفضاء الطوري $q_i$، $Q_i$، $p_i$ و $P_i$ بالاضافة الي الزمن اي انها دالة في $4n+1$ متغير. باستعمال $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ و $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ و معكوساتها نري ان $F$ هي في الواقع دالة في $2n+1$ متغير. الدالة $F$ تسمح لنا بتعيين الشكل المضبوط للتحويل القانوني فقط عندما نأخد نصف متغيراتها من الاحداثيات الطورية القديمة $(q_i, p_i)$ و النصف الاخر من الاحداثيات الطورية الجديدة $(Q_i, P_i)$ . في هذه الحالة فان $F$ تلعب دور مولد التحويل القانوني. اذن لدينا اربعة انواع فقط من التحويلات القانونية معينة بالدوال المولدة التالية

$$F = F_1(q_i, Q_i, t). \tag{٢٦٨}$$

$$F = F_2(q_i, P_i, t). \tag{٢٦٩}$$

$$F = F_3(p_i, Q_i, t). \tag{٢٧٠}$$

$$F = F_4(p_i, P_i, t). \tag{٢٧١}$$

نناقش فيما تبقي ببعض التفصيل الحالتين الاولي و الثانية.

**الحالة الاولي:** في هذه الحالة

$$F = F_1(q_i, Q_i, t). \tag{٢٧٢}$$

نحسب

$$p_i\dot{q}_i - H = P_i\dot{Q}_i - K + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i. \tag{٢٧٣}$$

لان $q_i$ و $Q_i$ مستقلان خطيا نحصل علي

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\ ,\ P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}. \tag{٢٧٤}$$

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \tag{٢٧٥}$$

**الحالة الثانية:** في هذه الحالة فان الدالة المولدة يجب ان تكون دالة في الاحداثيات المعممة القديمة $q_i$ و كميات الحركة المعممة الجديدة $P_i$. بالمقارنة بالحالة الاولي فان $P_i$ هنا يلعب دور $Q_i$ هناك. بالتالي فانه في المعادلة $(267)$ يجب تعويض $P_i\dot{Q}_i$ ب $Q_i\dot{P}_i$. يمكن تحقيق ذلك باختيار الدالة المولدة كالتالي

$$F = F_2(q_i, P_i, t) - Q_iP_i. \tag{٢٧٦}$$

نحسب الان

$$p_i\dot{q}_i - H = -Q_i\dot{P}_i - K + \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\dot{P}_i. \tag{٢٧٧}$$

مرة اخري لان $q_i$ و $P_i$ هما مستقلان خطيا نحصل علي

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\ ,\ Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}. \tag{٢٧٨}$$

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \tag{٢٧٩}$$

من اجل الحالتين الثالثة و الرابعة نكتب

$$F = F_3(p_i, Q_i, t) + q_i p_i. \tag{٢٨٠}$$

$$F = F_4(p_i, P_i, t) + q_i p_i - Q_i P_i. \tag{٢٨١}$$

التحويلات القانونية التي تكون دالتها المولدة لا تتعلق بالزمن هي بالضبط التحويلات القانونية المحدودة و من اجلها لدينا

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \Rightarrow K = H. \tag{٢٨٢}$$

# الصياغة السمبليكتية، اقواس بواسون و مبرهنة ليوفيل

**الشرط السمبليكتي** : يمكن كتابة التحويلات القانونية علي شكل اخر مختلف، لكن مكافئ للدوال المولدة، باستعمال الصياغة السمبليكتية [٤] لمعادلات هاميلتون. اولا نعرف الشعاع $\eta$ في $2n$ بعد المشكل من الاحداثيات المعممة $q_i$ و كميات الحركة المعممة $p_i$، و الشعاع $\xi$ المعرف ايضا في $2n$ بعد المشكل من الاحداثيات المعممة $Q_i$ و كميات الحركة المعممة $P_i$ اي

$$\eta = \begin{pmatrix} q_i \\ p_i \end{pmatrix}\ ,\ \xi = \begin{pmatrix} Q_i \\ P_i \end{pmatrix}. \tag{٢٨٣}$$

هذه اشعة معرفة في الفضاء الطوري. معادلات التحويل القانوني المحدود $Q_i = Q_i(q_j, p_j)$ و $P_i = P_i(q_j, p_j)$ يمكن كتابتها علي الشكل

$$\xi = \xi(\eta). \tag{٢٨٤}$$

معادلات هاميلتون في المتغيرات $\eta$ تعطي ب

$$\dot{\eta} = J\frac{\partial H}{\partial \eta}. \tag{٢٨٥}$$

المصفوفة $J$ هي $2n$x$2n$ و تعطي ب

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{٢٨٦}$$

معادلات هاميلتون في المتغيرات $\xi$ تعطي ب

$$\dot{\xi} \ = \ J\frac{\partial H}{\partial \xi}. \tag{٢٨٧}$$

[٤] symplectic formulation.

نعرف المصفوفة $M$ ب

$$M_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j}. \quad (٢٨٨)$$

لدينا

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= M_{ij}\dot{\eta}_j \\ &= M_{ij}J_{jk}\frac{\partial H}{\partial \eta_k} \\ &= M_{ij}J_{jk}M_{lk}\frac{\partial H}{\partial \xi_l} \\ &= (MJM^T)_{il}\frac{\partial H}{\partial \xi_l}. \end{aligned} \quad (٢٨٩)$$

بالمقارنة نحصل اذن علي

$$MJM^T = J. \quad (٢٩٠)$$

هذا هو الشرط السمبليكتي و المصفوفة $M$ هي مصفوفة سمبليكتية . ان الشرط السمبليكتي هو شرط ضروري و كافي من اجل كل التحويلات القانونية حتي تلك التي تتعلق بالزمن و ليس فقط من اجل التحويلات القانونية المحدودة التي اعتبرناها اعلاه. يمكن ان نبرهن ان الشرط السمبليكتي يستلزم وجود دالة مولدة. ايضا يمكن استعمال الصياغة السمبليكتية للبرهان علي ان مجموعة التحويلات القانونية تشكل زمرة.

**التحويلات القانونية المتناهية في الصغر:** يمكن ان نبرهن ان التحويلات القانونية تحقق الشرط السمبليكتي كالتالي. اولا لانه لدينا بنية زمرة فان اي تحويل قانوني يمكن تفكيكه كالاتي

$$\eta = \begin{pmatrix} q_i \\ p_i \end{pmatrix} \longrightarrow \xi(\eta, t_0) = \begin{pmatrix} Q_i(q,p,t_0) \\ P_i(q,p,t_0) \end{pmatrix} \longrightarrow \xi(\eta, t) = \begin{pmatrix} Q_i(q,p,t) \\ P_i(q,p,t) \end{pmatrix}. \quad (٢٩١)$$

الحد الاول يحقق الشرط السمبليكتي لانه تحويل قانوني محدود لا يتعلق بالزمن. مرة اخري لانه لدينا بنية زمرة فان التحويل الثاني يمكن تركيبه من تحويلات قانونية متناهية في الصغر اي نقسم المجال $t - t_0$ الي مجالات صغيرة متناهية في الصغر $dt$ و نعتبر فقط التحويل القانوني في كل مجال.

نبدأ بتعريف التحويلات القانونية المتناهية في الصغر. اولا نلاحظ ان الدالة $F_2 = q_iP_i$ تولد التحويل القانوني الذي يؤثر كالتطابق [٥]. بالفعل يمكن ان نبرهن في هذه الحالة علي ان $Q_i = q_i$، $P_i = p_i$ و $K = H$. التحويل القانوني المتناه في الصغر يقابل اذن

$$F_2 = q_iP_i + \epsilon G(q_j, P_j, t). \quad (٢٩٢)$$

نحسب

$$P_i = p_i - \epsilon\frac{\partial G}{\partial q_i}\ ,\ Q_i = q_i + \epsilon\frac{\partial G}{\partial P_i} = q_i + \epsilon\frac{\partial G}{\partial p_i}. \quad (٢٩٣)$$

[٥] identity.

اي انه يمكننا ان نفكر في $G$ علي انها دالة في $q$ و $p$، عوض $q$ و $P$، و الزمن. الدالة $G$ هي الدالة المولدة للتحويل القانوني المتناه في الصغر. لدينا

$$\delta p_i = P_i - p_i = -\epsilon\frac{\partial G}{\partial q_i}\ ,\ \delta q_i = Q_i - q_i = \epsilon\frac{\partial G}{\partial p_i}. \quad (٢٩٤)$$

يمكن ان نكتب هذه المعادلات $(294)$ علي الشكل المتراص

$$\delta\eta = \xi - \eta = \epsilon J\frac{\partial G}{\partial \eta}. \quad (٢٩٥)$$

ايضا يمكن ان نحسب من اجل التحويل القانوني المتناه في الصغر اعلاه

$$\begin{aligned} M = \frac{\partial \xi}{\partial \eta} &= 1 + \frac{\partial}{\partial\eta}\delta\eta \\ &= 1 + \epsilon J\frac{\partial^2 G}{\partial\eta\partial\eta}. \end{aligned} \quad (٢٩٦)$$

المصفوفة $\partial^2 G/\partial\eta\partial\eta$ هي مصفوفة متناظرة بمركبات معطاة ب

$$(\frac{\partial^2 G}{\partial\eta\partial\eta})_{ij} = \frac{\partial^2 G}{\partial\eta_i\partial\eta_j}. \quad (٢٩٧)$$

يمكن ان نتحقق الان مباشرة من الشرط السمبليكتي من اجل التحويلات القانونية المتناهية في الصغر كالتالي

$$\begin{aligned} MJM^T &= \left(1 + \epsilon J\frac{\partial^2 G}{\partial\eta\partial\eta}\right)J\left(1 - \epsilon\frac{\partial^2 G}{\partial\eta\partial\eta}J\right) \\ &= J. \end{aligned} \quad (٢٩٨)$$

اذا اخترنا $\epsilon = dt$ فان التحويل القانوني المتناه في الصغر اعلاه هو بالضبط التحويل $\xi(\eta, t) \longrightarrow \xi(\eta, t_0)$ مع $t = t_0 + dt$ . هذا التحويل يحقق اذن الشرط السمبليكتي و بالتالي فان التحويل القانوني الذي يظهر في الحد الثاني ل $(291)$، و الذي هو تركيب لتحويلات قانونية متناهية في الصغر من النوع $\epsilon = dt$ ، يحقق الشرط السمبليكتي و هو المراد.

**اقواس بواسون:** نعرف اقواس بواسون لدالتين $u$ و $v$ علي الفضاء الطوري بالنسبة للمتغيرات $q_i$ و $p_i$ بالعلاقة

$$\begin{aligned} [u, v]_\eta &= \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}\right) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^T J\ \frac{\partial v}{\partial\eta}. \end{aligned} \quad (٢٩٩)$$

نحسب مباشرة ما يسمي باقواس بواسون الاساسية التي تعطي ب

$$[\eta, \eta]_\eta = J. \quad (٣٠٠)$$

هذه العلاقة تأخذ بدلالة المركبات الشكل

$$[q_i, q_j]_\eta = 0 \ , \ [p_i, p_j]_\eta = 0 \ , \ [q_i, p_j]_\eta = -[p_i, q_j]_\eta = \delta_{ij}. \quad (٣٠١)$$

نحسب الان

$$\begin{aligned} [u, v]_\eta &= \frac{\partial u}{\partial \eta_i} J_{ij} \frac{\partial v}{\partial \eta_j} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial \eta_i} J_{ij} \frac{\partial \xi_l}{\partial \eta_j} \frac{\partial v}{\partial \xi_l} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \xi_k} (MJM^T)_{kl} \frac{\partial v}{\partial \xi_l} \\ &= [u, v]_\xi. \end{aligned} \quad (٣٠٢)$$

اي ان اقواس بواسون هي صامدة تحت تأثير التحويلات القانونية. هذا الشرط مكافئ تماما للشرط السمبليكتي. ايضا يمكن استعمال خاصية الصمود هذه للبرهان علي ان الشرط السمبليكتي يستلزم وجود دالة مولدة للتحويل القانوني. كما ستري هناك اشياء اخري، بالاضافة الي اقواس بواسون، تبقي صامدة تحت تأثير التحويلات القانونية.

نعتبر الان دالة $u$ في المتغيرات $q_i$، $p_i$ و الزمن اي $u = u(q_i, p_i, t)$. باستعمال معادلات هاميلتون فان المشتقة التامة في الزمن للدالة $u$ تعطي ب

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \sum_i \left( \frac{\partial u}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial u}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \sum_i \left( \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= [u, H]_\eta + \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \quad (٣٠٣)$$

هذه هي معادلة حركة الدالة $u$. يمكن الحصول علي معادلات هاميلتون كحالة خاصة كالتالي. اذا اخترنا $u = q_i, p_i$ نحصل مباشرة علي $\dot{q}_i = [q_i, H]_\eta$، $\dot{p}_i = [p_i, H]_\eta$. باستعمال الكتابة السمبليكتية نحصل اذن علي

$$\dot{\eta} = [\eta, H]_\eta = J \frac{\partial H}{\partial \eta} \quad (٣٠٤)$$

التي هي عبارة علي معادلات هاميلتون (285).

يمكن ايضا التعبير عن التحويلات القانونية المتناهية في الصغر (295) باستعمال اقواس بواسون. باختيار $u = \eta$ و $v = G$ في (299) نحصل علي

$$[\eta, G]_\eta = J \frac{\partial G}{\partial \eta}, \quad (٣٠٥)$$

التحويل القانوني المتناه في الصغر (295) يمكن اذن كتابته علي الشكل

$$\delta \eta = \epsilon [\eta, G]_\eta. \quad (٣٠٦)$$

اذا اخترنا مثلا $\epsilon = dx$ و $G = p_j$ نحصل علي $\delta q_i = dx[q_i, p_j]_\eta = \delta_{ij} dx$ و $\delta p_i = dx[p_i, p_j]_\eta = 0$ اي ان الانسحاب في الاتجاه $j$ تولده كمية الحركة $p_j$.

كمثال ثاني نعتبر الاتي. اذا اخترنا $\epsilon = dt$ و $G = H$ نحصل علي $\delta\eta = \dot{\eta}dt = d\eta$ اي

$$\epsilon = dt\ ,\ G = H \Rightarrow \delta\eta = \dot{\eta}dt = d\eta. \quad (٣٠٧)$$

اذن الهاميلتونية هي مولدة حركة الجملة اي التطور في الزمن. هذه النتيجة المهمة جدا يمكن الوصول اليها ايضا كالتالي. اذا اخترنا $G = H$ في التحويل القانوني المتناه في الصغر (294) نستنتج مباشرة ان

$$\delta p_i = \epsilon \dot{p}_i\ ,\ \delta q_i = \epsilon \dot{q}_i \Rightarrow \epsilon = dt. \quad (٣٠٨)$$

اي ان الهاميلتونية هي الدالة المولدة للحركة المتناهية في الصغر اي للانسحابات في الزمن المتناهية في الصغر. بصيغه اخري نقول ان حركة الجملة في الزمن هي تحويل قانوني تولده الهاميلتونية.

**مبرهنة ليوفيل:** كما قلنا اعلاه هناك اشياء اخري، بالاضافة الي اقواس بواسون، تبقي صامدة تحت تأثير التحويلات القانونية و منها التحويلات القانونية التي تحرك الجملة في الزمن. اهم هذه الامور الاخري هو الحجم في الفضاء الطوري.

الحجم المتناه في الصغر في الفضاء الطوري يعطي بدلالة الاحداثيات $\eta_i$ بعنصر الحجم

$$dV_\eta = d^{2n}\eta = dq_1...dq_n dp_1...dp_n. \quad (٣٠٩)$$

تحت تأثير التحويل القانوني $\eta \longrightarrow \xi$ يتحول الحجم $dV_\eta$ الي الحجم $dV_\xi$ الذي يعطي ب

$$dV_\xi = d^{2n}\xi = dQ_1...dQ_n dP_1...dP_n. \quad (٣١٠)$$

هذان الحجمان $dV_\eta$ و $dV_\xi$ مرتبطان كما هو معروف بالمحدد الجاكوبي للتحويل القانوني $\eta \longrightarrow \xi$. بالضبط لدينا

$$\begin{aligned} d^{2n}\xi &= |\det\frac{\partial\xi_i}{\partial\eta_j}|d^{2n}\eta \\ &= |\det M_{ij}|d^{2n}\eta. \end{aligned} \quad (٣١١)$$

اي

$$dV_\xi = ||M||dV_\eta. \quad (٣١٢)$$

من الجهة الاخري فان الشرط السمبليكتي $MJM^T = J$ يؤدي الي

$$\begin{aligned} \det J &= \det(MJM^T) \\ &= \det M.\det J.\det M^T \\ &= \det J.(\det M)^2. \end{aligned} \quad (٣١٣)$$

نستنتج اذن $|M|^2 = 1$ و بالتالي

$$dV_\xi = dV_\eta. \quad (٣١٤)$$

اذن الحجم المتناه في الصغر صامد تحت تأثير التحويلات القانونية. هذا يستلزم مباشرة ان حجم اي منطقة في الفضاء الطوري هو صامد تحت تأثير التحويلات القانونية. لدينا اذن التكامل الصامد

$$V_\eta = \int dV_\eta = \int d^{2n}\eta = \int dq_1...dq_n dp_1...dp_n. \quad (٣١٥)$$

يعرف هذا التكامل باسم التكامل الصامد لبوانكريه.

نعتبر الان حجم متناه في الصغر $dV_\eta$ في الفضاء الطوري يحتوي علي $dN_\eta$ نقطة $(q_1,...,q_n,p_1,...,p_n)$. كل نقطة من هذه النقاط تعرف حالة معينه للجملة الفيزيائية في لحظة ابتدائية $t_0$ تختلف فيما بينها فقط باختلاف الشروط الابتدائية. كثافة الحالات تعرف ب

$$\rho = \frac{dN_\eta}{dV_\eta}. \quad (٣١٦)$$

كما بينا اعلاه فان الحجم لا يتغير في الزمن اذا كانت النقاط تتطورتحت تأثير معادلات هاميلتون. اذن مع مرور الزمن فان الحجم $dV_\eta$ يمكن ان يتغير شكله لكن لا يمكن ان تتغير قيمته. من الواضح ان عدد الحالات $dN_\eta$ داخل الحجم $dV_\eta$ يبقي ايضا ثابت في الزمن لان كل الحركة اللاحقة للجملة تحددها بشكل فريد المواقع الابتدائية في الفضاء الطوري و بالتالي فان كل النقاط داخل الحجم $dV_\eta$ في اللحظة $t_0$ تتحرك مع بعضها البعض لتحتل الحجم الجديد $dV_\eta$ في اللحظة $t$. نستنتج اذن ان كثافة الحالات يجب ان تكون ثابته في الزمن اي

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (٣١٧)$$

هذه هي مبرهنة ليوفيل. الدالة $\rho$ هي دالة في الفضاء الطوري في الاحداثيات $q_i$، $p_i$ و الزمن. باستعمال النتيجة $(303)$ لدينا

$$\frac{d\rho}{dt} = [\rho, H]_\eta + \frac{\partial\rho}{\partial t}. \quad (٣١٨)$$

مبرهنة ليوفيل تأخذ اذن الشكل المكافئ

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -[\rho, H]_\eta. \quad (٣١٩)$$

**التفسير الايجابي و التفسير السلبي للتحويلات القانونية :** التحويلات القانونية يمكن تفسيرها اما ايجابيا او سلبيا. في التفسير السلبي للتحويل القانوني ننتقل من الفضاء الطوري $\eta$ باحداثيات $q_i$ و $p_i$ الي الفضاء الطوري $\xi$ باحداثيات $Q_i$ و $P_i$. اذن الجملة في اللحظة $t$ يمكن ان توصف بالتمثيلة $A=(q_i,p_i)$ و ايضا بالتمثيلة المحولة $A^{'}=(Q_i,P_i)$. بعبارة اخري اي دالة $u$ في متغيرات الجملة تأخذ نفس القيمة $u(A)=u(A^{'})$ في الفضائين $\eta$ و $\xi$ رغم ان التعلق الدالي ل $u$ علي $q_i$ و $p_i$ يختلف عموما عن تعلقها الدالي علي المتغيرات $Q_i$ و $P_i$.

في التفسير الايجابي للتحويل القانوني فان الاحداثيات $Q_i$ و $P_i$ هي احداثيات نقطة اخري $B$ في نفس الفضاء الطوري مغايرة للنقطة $A$. اذن التحويل القانوني

يحرك الجملة من النقطة $A=(q_i,p_i)$ الي النقطة $B=(Q_i,P_i)$ بمعني انه يسمح لنا بالتعبير عن التمثيلة $B$ بدلالة التمثيلة $A$ و العكس. اذن من هذا المنظور فان قيمة الدالة $u$ تتغير عند الانتقال من $A$ الي $B$ رغم ان تعلقها الدالي علي المتغيرات $q_i$ و $p_i$ هو نفسه علي المتغيرات $Q_i$ و $P_i$. التغير $\partial u$ في قيمة الدالة عند الانتقال من $A$ الي $B$ يعطي ب

$$\begin{aligned}
\partial u &= u(B)-u(A)\\
&= u(\eta+\delta\eta)-u(\eta)\\
&= \frac{\partial u}{\partial\eta}\delta\eta\\
&= \epsilon\frac{\partial u}{\partial\eta}J\frac{\partial G}{\partial\eta}\\
&= \epsilon[u,G]_\eta.
\end{aligned} \tag{٣٢٠}$$

من اجل الهاميلتونية فان الامور معقدة قليلا لان الهاميلتونية تتغير تحت تأثير التحويل القانوني في حالة تعلق الدالة المولدة علي الزمن كالتالي $K=H+\partial F_2/\partial t=H+\epsilon\partial G/\partial t$. اذن حتي في التفسير السلبي للتحويل القانوني فان الهاميلتونية تتغير من $H(A)$ الي $K(A^{'})$ عند الانتقال من $A$ الي $A^{'}$، اما في التفسير الايجابي فان الهاميلتونية تتغير كما في الاعلي من $H(A)$ الي $H(B)$ عند الانتقال من $A$ الي $B$. في هذه الحالة نعرف $\partial H$ علي انه الفرق في قيمة الهاميلتونية بين التفسيرين اي

$$\begin{aligned}
\partial H &= (H(B)-H(A))-(K(A^{'})-H(A))\\
&= H(B)-K(A^{'}).
\end{aligned} \tag{٣٢١}$$

هذا التعريف ينطبق علي التعريق السابق في حالة اذا لم تتغير الدالة تحت تأثير التحويلات القانونية. نحسب الان

$$\begin{aligned}
\partial H &= H(B)-H(A^{'})-\epsilon\frac{\partial G}{\partial t}\\
&= H(B)-H(A)-\epsilon\frac{\partial G}{\partial t}\\
&= \epsilon[H,G]_\eta-\epsilon\frac{\partial G}{\partial t}\\
&= -\epsilon\frac{dG}{dt}.
\end{aligned} \tag{٣٢٢}$$

الخلاصة الاساسية هنا هي كالتالي: اذا كانت الدالة المولدة $G$ هي ثابت للحركة فان التحويل القانوني المتناه في الصغر المقابل لها لا يغير من قيمة الهاميلتونية اي انه يترك الهاميلتونية صامدة. اذن ثوابت الحركة هي بالضبط مولدات التحويلات القانونية المتناهية في الصغر التي تترك الهاميلتونية صامدة.

## معادلة هاميلتون ـ جاكوبي

نعتبر تحويل قانوني من الاحداثيات $(q_i,p_i)$ الي الاحداثيات $(Q_i,P_i)$ حيث نريد ان تكون $Q_i$ و $P_i$ ثوابت في الزمن اي $Q_i=\beta_i$ و $P_i=\alpha_i$. هذا التحويل القانوني يمكن تحقيقه بافتراض انعدام الهاميلتونية المحولة $K(Q,P,t)$. لان

$K(Q,P,t)=H(q,p,t)+\partial F/\partial t$ يجب اذن ان يكون لدينا

$$H(q,p,t)+\frac{\partial F}{\partial t}=0. \quad (٣٢٣)$$

من الملائم اخذ الدالة المولدة $F$ من النوع الثاني اي $F=F_2(q_i,P_i,t)$. باستخدام معادلة التحويل $p_i=\partial F_2/\partial q_i$ يمكن ان نكتب المعادلة اعلاه علي الشكل

$$H(q_1,q_2,...,q_n,\frac{\partial F_2}{\partial q_1},\frac{\partial F_2}{\partial q_2},...,\frac{\partial F_2}{\partial q_n},t)+\frac{\partial F_2}{\partial t}=0. \quad (٣٢٤)$$

هذه هي معادلة هاميلتون - جاكوبي. هذه معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الاولي في $n+1$ متغير $q_1$، ....،$q_n$ و $t$ من اجل الدالة المولدة $F_2$. نرمز الي الحل ب $F_2=S=S(q_1,...,q_n,\alpha_1,...,\alpha_n,\alpha_{n+1},t)$ و نسميه بدالة هاميلتون الرئيسية. من الواضح ان الاعداد $\alpha_i$ هي ثوابت التكامل. من الواضح ايضا انه اذا كانت $S$ حل فان $S+\alpha$ هي ايضا حل. بعبارة اخري فان هناك ثابت تكامل ، و ليكن هو $\alpha_{n+1}$، يظهر فقط مضافا الي $S$ و بالتالي هو غير مهم تماما في الحل لانه يختفي عند اخذ الاشتقاقات الجزئية. اذن الحل $F_2=S$ يأخذ الشكل

$$F_2=S=S(q_1,...,q_n,\alpha_1,...,\alpha_n,t). \quad (٣٢٥)$$

هذا الحل يسمي بالحل التام لمعادلة هاميلتون - جاكوبي. كميات الحركة $P_i$ التي افترضنا انها ثوابت في الزمن في بداية هذه الفقرة يمكن اخذها اذن و بدون اي مشاكل مساوية للثوابت $\alpha_i$ اي

$$P_i=\alpha_i. \quad (٣٢٦)$$

نكتب المعادلة $p_i=\partial F_2/\partial q_i$ الان علي الشكل

$$p_i=\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial q_i}. \quad (٣٢٧)$$

في اللحظة الابتدائية $t_0$ تربط هذه المعادلة بين القيم الابتدائية ل $q_i$ و $p_i$ و $\alpha_i$. اذن يمكن تعيين ثوابت التكامل $\alpha_i$ بدلالة القيم الابتدائية ل $q_i$ و $p_i$ انطلاقا من هذه المعادلة.

من الجهة الاخري فان المعادلة $Q_i=\partial F_2/\partial P_i$ تكتب الان علي الشكل

$$Q_i=\beta_i=\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial \alpha_i}. \quad (٣٢٨)$$

في اللحظة الابتدائية $t_0$ هذه المعادلة تسمح لنا بتعيين $\beta_i$ بدلاله القيم الابتدائية ل $q_i$ و $\alpha_i$. هذه المعادلة يمكن قلبها للحصول علي $q_i$ بدلالة $\alpha_i$، $\beta_i$ و الزمن اي

$$q_i=q_i(\alpha,\beta,t). \quad (٣٢٩)$$

بالتعويض في المعادلة $p_i=\partial S(q,\alpha,t)/\partial q_i$ نحصل علي $p_i$ بدلالة $\alpha_i$، $\beta_i$ و الزمن اي

$$p_i=p_i(\alpha,\beta,t). \quad (٣٣٠)$$

تشكل المعادلتان (329) و (330) مع بعضهما البعض الحل التام لمعادلات هاميلتون. نستنتج اذن ان ايجاد دالة هاميلتون الرئيسية $S=S(q,\alpha,t)$، التي هي عبارة عن الدالة المولدة للتحويل القانوني الذي يأخذنا لاحداثيات ثابتة في الزمن، عبر حل

معادلة هاميلتون ـ جاكوبي هو مكافئ لايجاد حل لمعادلات هاميلتون للحركة. بعبارة اخري فان معادلات هاميلتون للحركة مكافئة تماما لمعادلة هاميلتون ـ جاكوبي.

المعني الفيزيائي لدالة هاميلتون الرئيسية يمكن توضيحه اكثر كالتالي. نحسب

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}\\ &= p_i\dot{q}_i - H\\ &= L.\end{aligned} \quad (٣٣١)$$

اي ان $S$ هو الفعل:

$$S = \int L dt + \mathrm{constant}. \quad (٣٣٢)$$

اذا كانت الهاميلتونية لا تتعلق بالزمن صراحة فان معادلة هاميلتون ـ جاكوبي تصبح من الشكل

$$H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (٣٣٣)$$

يمكن فصل الزمن بافتراض حل من الشكل

$$S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - \alpha_1 t. \quad (٣٣٤)$$

تصبح معادلة هاميلتون ـ جاكوبي من الشكل

$$H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) = \alpha_1. \quad (٣٣٥)$$

اي ان $\alpha_1$ هي ثابت للحركة يساوي الطاقة في كل الحالات التي تكون فيها الهاميلتونية هي دالة الطاقة. الدالة $W$ تسمي دالة هاميلتون المميزة. هذه الدالة تولد التحويل القانوني الذي تصبح تحت تأثيره كل الاحداثيات دورية اي انها لا تظهر في الهاميلتونية المحولة.

لنعتبر التحويل القانوني $(q_i, p_i) \longrightarrow (Q_i, P_i)$ الذي تكون فيه كميات الحركة المعممة الجديدة $P_i$ ثوابت حركة تساوي $\alpha_i$ مع دالة مولدة $W(q_i, P_i)$ لا تتعلق صراحة بالزمن و بالتالي $K(Q_i, P_i) = H(q_i, p_i)$. نفترض ان الهاميلتونية $H(q_i, p_i)$ هي ثابت حركةتساوي $\alpha_1$. كما في السابق يجب ان يكون لدينا $p_i = \partial W/\partial q_i$ و $Q_i = \partial W/\partial P_i = \partial W/\partial \alpha_i$ و بالتالي فان المطلب $H(q_i, p_i) = \alpha_1$ هو مكافئ ل $(335)$. نلاحظ انه تحت تأثير هذا التحويل القانوني $K(Q_i, P_i) = P_1$ اي ان الهاميلتونية المحولة لا تتعلق بالاحداثيات المعممة الجديدة $Q_i$ و بالتالي فهي كلها دورية. بالاضافة الي هذا يمكن ايضا ان نستخلص من معادلات هاميلتون ان $Q_1 = t + \beta_1$ و $Q_i = \beta_i$ من اجل $i \neq 1$ اي ان كل الاحداثيات المعممة الجديدة باستثناء الاولي هي ثوابت حركة.

# تمارين

**تمرين** 1: نعتبر حركة نواس بسيط ذو كتلة $m$ و طول $l$ . احسب كمية الحركة المعممة و هاميلتونية الجملة ثم اشتق معادلات هاميلتون للحركة.

**تمرين** 2: نعتبر جسيم يتحرك في المستوي تحت تأثير قوة مركزية: اي قوة مشتقة من كمون لا يتعلق الا بالمسافة $r = |\vec{r}|$.

- عين الاحداثيات المعممة و احسب لاغرانجية الجملة و معادلات لاغرنج للحركة.
- احسب كميات الحركة المعممة و هاميلتونية الجملة.
- احسب معادلات هاميلتون للحركة. هل هناك احداثيات دورية في هذه الحالة. ماذا تستنتج؟

**تمرين** 3: جسيم ذو كتلة $m$ يتحرك في ثلاث ابعاد يخضع لكمون $V(x, y, z)$.

- اكتب هاميلتونية الجسيم في الاحداثيات الديكارتية.
- اشتق هاميلتونية الجملة في الاحداثيات الاسطوانية.
- احسب لاغرانجية، كميات الحركة المعممة و هاميلتونية الجسيم في الاحداثيات الكروية.

**تمرين** 4: نعتبر جسيم في حالة سقوط حر في حقل ثقالي منتظم $\vec{g}$.

- عين هاميلتونية الجسيم و بين انها ثابت للحركة اي انها منحفظة في الزمن.
- صف الفضاء الطوري في هذه الحالة. ما هو مسار الجسيم في هذا الفضاء.
- احسب عدد الحالات في الفضاء الطوري التي لها كمية حركة $p_1 \leq p \leq p_2$ و طاقة $E_1 \leq E \leq E_2$.

  ملحوظة: عدد الحالات يجب ان يكون متناسبا مع المساحة $F$ في الفضاء الطوري المحددة ب $p_1 \leq p \leq p_2$ و $E_1 \leq E \leq E_2$.
- ماذا يحدث لعدد الحالات المحسوب في السؤال السابق تحت تأثير معادلات هاميلتون.

**تمرين** 5:

- اكتب هاميلتونية هزاز توافقي في بعد واحد كتلته $m$ و تواتره الزاوي $\Omega$.
- الدالة المولدة لتحويل قانوني $(q, p) \longrightarrow (Q, P)$ من النوع الاول تعطي ب

$$F_1(q, Q) = \frac{1}{2} m\Omega q^2 \cot Q. \quad (٣٣٦)$$

  احسب التحويل القانوني صراحة.
- احسب الهاميلتونية الجديدة $K(Q, P)$. ماذا تلاحظ.
- حل معادلات هاميلتون الجديدة. استنتج معادلات مسار الهزاز التوافقي.

**تمرين** 6: نواس طوله $l$ و كتلته $m$ يسمح له بالاهتزاز بحيث تتحرك نقطة تعليقه علي قطع مكافئ $y = ax^2$. انظر الشكل 13. احسب هاميلتونية الجملة و معادلات هاميلتون للحركة. اعد السؤال في التقريب التربيعي. حل معادلات الحركة و عين تواتر الحركة.

**تمرين** 7: لاغرانجية جملة تعطي ب

$$L = \dot{q}_1^2 + \frac{\dot{q}_2^2}{a + bq_1^2} + k_1 q_1^2 + k_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2. \quad (٣٣٧)$$

احسب هاميلتونية الجملة و معادلات هاميلتون للحركة.

**تمرين** 8: نواس كتلته $m$ و طوله $l$ يهتز في مستوي بحيث تتحرك نقطة تعليقه حركة دائرية منتظمة نصف قطرها $a$ بتواتر زاوي $\gamma$.

- احسب لاغرانجية الجملة و حاول تبسيطها.
- احسب هاميلتونية الجملة.
- اشتق معادلات هاميلتون للحركة.

**تمرين** 9:

- لاغرانجية جملة تعطي ب

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 \sin^2 \Omega t + \dot{q} q \Omega \sin 2\Omega t + q^2 \Omega^2). \quad (٣٣٨)$$

احسب الهاميلتونية المرفقة بهذه اللاغرانجية. هل هي منحفظة.

- اكتب اللاغرانجية اعلاه بدلالة المتغير

$$Q = q \sin \Omega t. \quad (٣٣٩)$$

احسب الهاميلتونية المرفقة بهذه اللاغرانجية و هل هي منحفظة.

**تمرين** 10: نعطي التحويل

$$Q = \log(\frac{1}{q} \sin p) \ , \ P = q \cot p. \quad (٣٤٠)$$

بين مباشرة ان هذا التحويل قانوني.

**تمرين** 11: نعطي التحويل التالي

$$Q_1 = q_1 \ , \ Q_2 = p_2 \ , \ P_1 = p_1 - 2p_2 \ , \ P_2 = -2q_1 - q_2. \quad (٣٤١)$$

بين ان هذا التحويل هو تحويل قانوني و عين دالته المولدة.

**تمرين** 12:

- احسب الطاقة الحركية و الطاقة الكامنة ثم استنتج لاغرانجية نواس بسيط كتلته $m$ و طوله $l$ ( الشكل 9 ) و اشتق معادلات حركته.

- نعتبر الان جملة النواس البسيط مع كتلة $m^{'}$ موضوعة في نقطة تعليقه بحيث يمكنها الحركة علي خط افقي مستقيم في المستوي الذي يهتز فيه النواس. انظر الشكل 12. احسب في هذه الحالة لاغرانجية الجملة ثم استنتج معادلات لاغرانج للحركة.

- اشتق هاميلتونية الجملة و معادلات هاميلتون للحركة.

# حلول

**تمرين** 1: موضع، سرعة و طاقة حركة النواس تعطي ب

$$\vec{r} = l(\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}). \quad (٣٤٢)$$

$$\vec{v} = l\dot{\theta}(\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j}). \quad (٣٤٣)$$

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2. \quad (٣٤٤)$$

الطاقة الكامنة للنواس معطاة بناقص عمل قوة الثقالة اي

$$V = -W = -mg\hat{j}\vec{r} = -mgl\cos\theta. \quad (٣٤٥)$$

لاغرانجية الجملة تعطي اذن ب

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta. \quad (٣٤٦)$$

نحسب الان كمية الحركة المعممة ب

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}. \quad (٣٤٧)$$

هاميلتونية الجملة تحسب كالتالي

$$\begin{aligned} H &= \dot{\theta}p_\theta - L \\ &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta \\ &= \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta. \end{aligned} \quad (٣٤٨)$$

معادلات هاميلتون تعطي ب

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} \ , \ -\dot{p}_\theta = \frac{\partial H}{\partial\theta} = mgl\sin\theta. \quad (٣٤٩)$$

**تمرين** 2: الاحداثيات المعممة هي $r$، $\phi$. شعاع الموضع يعطي ب

$$\vec{r} = r\vec{u}_r \ , \ \vec{u}_r = \cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}. \quad (٣٥٠)$$

شعاع السرعة اذن

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\phi}\vec{u}_\phi \ , \ \vec{u}_\phi = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}. \quad (٣٥١)$$

الطاقة الحركية و اللاغرانجية

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2). \quad (٣٥٢)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r). \quad (٣٥٣)$$

**معادلات لاغرانج للحركة**

$$r : m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0. \quad (٣٥٤)$$

$$\phi : \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0. \quad (٣٥٥)$$

**كميات الحركة المعممة**

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}. \quad (٣٥٦)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}. \quad (٣٥٧)$$

**الهاميلتونية تعطي اذن ب**

$$H = \dot{r}p_r + \dot{\phi}p_\phi - L = \frac{1}{2m}p_r^2 + \frac{1}{2mr^2}p_\phi^2 + V(r). \quad (٣٥٨)$$

**معادلات هاميلتون للحركة**

$$r : \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \ , \ -\dot{p}_r = \frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_\phi^2}{mr^3} + \frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0. \quad (٣٥٩)$$

$$\phi : \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} \ , \ -\dot{p}_\phi = \frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0. \quad (٣٦٠)$$

**الاحداثية المعممة $\phi$ هي احداثية دورية و بالتالي فان كمية الحركة المعممة المقابلة يجب ان تكون منحفظة و هو ما بيناه اعلاه. لان $\phi$ تصف دوران الجملة فان $p_\phi$ يجب ان يكون مرتبط بالعزم الحركي للجملة. بالفعل**

$$\vec{L} = m\vec{r}\text{x}\vec{v} = mr^2\dot{\phi}\vec{u}_r\text{x}\vec{u}_\phi = p_\phi\hat{k}. \quad (٣٦١)$$

**تمرين** 3: **هاميلتونية الجملة في الاحداثيات الديكارتية**

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + V(x, y, z). \quad (٣٦٢)$$

**هاميلتونية الجملة في الاحداثيات الاسطوانية** [٦]

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2m\rho^2} + \frac{p_z^2}{2m} + V(\rho, \phi, z). \quad (٣٦٣)$$

**هاميلتونية الجملة في الاحداثيات الكروية** [٧]

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + V(r, \theta, \phi). \quad (٣٦٤)$$

[٦] اشعة الوحدة الاسطوانية: $\vec{u}_\rho = \cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}$، $\vec{u}_\phi = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}$ و $\hat{k}$.

[٧] اشعة الوحدة الكروية: $\vec{u}_r = \sin\theta\cos\phi\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\hat{j} + \cos\theta\hat{k}$، $\vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\phi\hat{i} + \cos\theta\sin\phi\hat{j} - \sin\theta\hat{k}$ و $\hat{u}_\phi = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}$.

**تمرين 4:** هاميلتونية الجملة تعطي ب ( مع $p=m\dot{z}$)

$$H=\frac{p^2}{2m}+mgz. \tag{٣٦٥}$$

باستعمال معادلات هاميلتون يمكننا ان نبين

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}=0\Rightarrow H=E. \tag{٣٦٦}$$

ثابت حركة الجملة $E$ هو طاقة الجملة.

الفضاء الطوري ذو بعدين في هذه الحالة مع محاور تعطي بالموضع $z$ و كمية الحركة $p$. مسار الجملة في هذا الفضاء يعطي ب

$$E=\frac{p^2}{2m}+mgz\Rightarrow z=\frac{1}{mg}(E-\frac{p^2}{2m}). \tag{٣٦٧}$$

هذه معادلة قطع مكافئ.

عدد الحالات التي لها كمية حركة $p_1\leq p\leq p_2$ و طاقة $E_1\leq E\leq E_2$ هو متناسب مع المساحة $F$ في الفضاء الطوري المحددة ب $p_1\leq p\leq p_2$ و $E_1\leq E\leq E_2$. هذه المساحة تحسب عن طريق التكامل التالي

$$F=\int_{p_1}^{p_2}dp\int_{\frac{1}{mg}(E_1-\frac{p^2}{2m})}^{\frac{1}{mg}(E_2-\frac{p^2}{2m})}dz=\frac{E_2-E_1}{mg}\int_{p_1}^{p_2}dp=\frac{E_2-E_1}{mg}(p_2-p_1). \tag{٣٦٨}$$

تحت تأثير معادلات هاميلتون فان كمية الحركة تنسحب كالتالي

$$\dot{p}=-mg\Rightarrow p_i^{'}=p_i-mgt\ ,\ i=1,2. \tag{٣٦٩}$$

المساحة $F$ تتغير اذن الي

$$F^{'}=\frac{E_2-E_1}{mg}(p_2^{'}-p_1^{'}). \tag{٣٧٠}$$

انظر الي الشكل 11. بالتعويض نحصل علي $F^{'}=F$ اي ان عدد الحالات لا يتغير تحت تأثير معادلات هاميلتون. هذا مثال علي مبرهنة ليوفيل.

**تمرين 5:** هاميلتونية هزاز توافقي في بعد واحد كتلته $m$ و تواتره الزاوي $\Omega$ تعطي ب

$$H=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}m\Omega^2q^2. \tag{٣٧١}$$

لدينا من اجل الدوال المولدة من النوع الاول

$$\begin{aligned}p&=\frac{\partial F_1}{\partial q}\\&=m\Omega q\cot Q.\end{aligned} \tag{٣٧٢}$$

$$\begin{aligned}P&=-\frac{\partial F_1}{\partial Q}\\&=\frac{1}{2}m\Omega q^2\frac{1}{\sin^2Q}.\end{aligned} \tag{٣٧٣}$$

نحصل علي التحويل القانوني

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\Omega}} \sin Q \ , \ p = \sqrt{2m\Omega P} \cos Q. \tag{٣٧٤}$$

نحسب الهاميلتونية

$$\begin{aligned} K(Q,P) &= H\big(q(Q,P),p(Q,P)\big) \\ &= \Omega P. \end{aligned} \tag{٣٧٥}$$

اذن الاحداثية المعممة الجديدة $Q$ هي احداثية دورية و منه نستنتج ان كمية الحركة المعممة الجديدة $P$ هي ثابت للحركة.
حل معادلة هاميلتون الجديدة المتبقية نحصل علي

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \Omega \Rightarrow Q = \Omega t + Q_0. \tag{٣٧٦}$$

بالتعويض في (374) نحصل علي معادلات مسار الهزاز التوافقي المعروفة.

**تمرين** 6: نأخذ المبدأ مركز القطع المكافي $y=ax^2$. احداثيات نقطة التعليق هي $x$ و $y=ax^2$. احداثيات النواس هي اذن

$$x_m = x + l\sin\theta \ , \ y_m = y - l\cos\theta. \tag{٣٧٧}$$

الطاقة الحركية تعطي ب

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_m^2+\dot{y}_m^2) + \frac{1}{2}M(\dot{x}^2+\dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2}(m+M)(1+4a^2x^2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{\theta}\dot{x}(\cos\theta + 2ax\sin\theta) \\ &= \frac{1}{2}A(x)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}B\dot{\theta}^2 + C(x,\theta)\dot{\theta}\dot{x}. \end{aligned} \tag{٣٧٨}$$

الطاقة الكامنة تعطي ب

$$V = mg(-l\cos\theta + y) + Mgy. \tag{٣٧٩}$$

نشتق الان كميات الحركة المعممة

$$P_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = A\dot{x} + C\dot{\theta} \ , \ P_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = B\dot{\theta} + C\dot{x}. \tag{٣٨٠}$$

قلب هذه العلاقات يعطي

$$\dot{x} = \frac{1}{\Delta}(BP_x - CP_\theta) \ , \ \dot{\theta} = \frac{1}{\Delta}(-CP_x + AP_\theta), \tag{٣٨١}$$

المحدد يعطي ب

$$\begin{aligned} \Delta &= AB - C^2 \\ &= m^2l^2(\sin^2\theta + 4a^2x^2\cos^2\theta - 2ax\sin 2\theta) + Mml^2(1+4a^2x^2). \end{aligned} \tag{٣٨٢}$$

بالتعبير عن الطاقة الحركية بدلالة كميات الحركة المعممة نحصل علي

$$T = \frac{B}{2\Delta}P_x^2 + \frac{A}{2\Delta}P_\theta^2 - \frac{C}{\Delta}P_xP_\theta. \quad (٣٨٣)$$

هاميلتونية الجملة تعطي ب

$$H = \frac{B}{2\Delta}P_x^2 + \frac{A}{2\Delta}P_\theta^2 - \frac{C}{\Delta}P_xP_\theta + a(m+M)gx^2 - mgl\cos\theta. \quad (٣٨٤)$$

معادلات هاميلتون تعطي ب

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P_x} = \frac{B}{\Delta}P_x - \frac{C}{\Delta}P_\theta \ , \ \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = -\frac{C}{\Delta}P_x + \frac{A}{\Delta}P_\theta. \quad (٣٨٥)$$

$$-\dot{P}_x = \frac{\partial H}{\partial x} \ , \ -\dot{P}_\theta = \frac{\partial H}{\partial \theta}. \quad (٣٨٦)$$

حساب هاتين المعادلتين الاخيرتين سهل لكن طويل جدا.
في التقريب التربيعي المعادلات تتبسط الي حد كبير. نجد في الاخير معادلات الحركة

$$\ddot{x} + l\ddot{\theta} + g\theta = 0 \ , \ \ddot{x} + \frac{ml}{m+M}\ddot{\theta} + 2agx = 0. \quad (٣٨٧)$$

الحل هو دوال اهتزازية بنفس التواتر الزاوي $\gamma$ اي

$$x = A\exp(i\gamma t) \ , \ \theta = B\exp(i\gamma t). \quad (٣٨٨)$$

بالتعويض في معادلات الحركة بهذا الاقتراح نحصل علي التواتر الزاوي

$$\gamma^2 = \frac{g(1+2al) \pm \sqrt{g^2(1+2al)^2 - 8alg^2\frac{M}{M+m}}}{2\frac{M}{M+m}l}. \quad (٣٨٩)$$

**تمرين** 7: نحسب كميات الحركة المعممة

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 2\dot{q}_1 + k_2\dot{q}_2 \ , \ p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = k_2\dot{q}_1 + \frac{2}{a+bq_1^2}\dot{q}_2. \quad (٣٩٠)$$

قلب هذه المعادلات يعطي ب

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{\Delta}(\frac{2}{a+bq_1^2}p_1 - k_2p_2) \ , \ \dot{q}_2 = \frac{1}{\Delta}(-k_2p_1 + 2p_2). \quad (٣٩١)$$

المحدد يعطي ب

$$\Delta = \frac{4}{a+bq_1^2} - k_2^2. \quad (٣٩٢)$$

نحسب

$$\dot{q}_1^2 + \frac{\dot{q}_2^2}{a+bq_1^2} + k_2\dot{q}_1\dot{q}_2 = \frac{p_1^2}{\Delta(a+bq_1^2)} + \frac{p_2^2}{\Delta} - \frac{k_2p_1p_2}{\Delta}. \quad (٣٩٣)$$

الهاميلتونية تعطي ب

$$\begin{aligned} H &= p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - L \\ &= \frac{p_1^2}{\Delta(a+bq_1^2)} + \frac{p_2^2}{\Delta} - \frac{k_2p_1p_2}{\Delta} - k_1q_1^2. \end{aligned} \quad (٣٩٤)$$

معادلات هاميلتون للحركة

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{2p_1}{\Delta(a+bq_1^2)} - \frac{k_2p_2}{\Delta}. \quad (٣٩٥)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{2p_2}{\Delta} - \frac{k_2p_1}{\Delta}. \quad (٣٩٦)$$

$$-\dot{p}_1 = \frac{\partial H}{\partial q_1}. \quad (٣٩٧)$$

$$-\dot{p}_2 = \frac{\partial H}{\partial q_2} = 0. \quad (٣٩٨)$$

فقط المعادلة الثالثة تحتاج الي حساب طويل نوعا ما.

**تمرين** 8: نأخذ مبدأ الاحداثيات مركز الدائرة. احداثيات نقطة التعليق هي

$$x_s = a\cos\gamma t\ ,\ y_s = -a\sin\gamma t. \quad (٣٩٩)$$

احداثيات الكتلة $m$ هي

$$x_m = a\cos\gamma t + l\sin\theta\ ,\ y_m = -a\sin\gamma t + l\cos\theta. \quad (٤٠٠)$$

نحسب الطاقة الحركية

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2\gamma^2 + ma\gamma l\dot{\theta}\sin(\theta - \gamma t). \quad (٤٠١)$$

نحسب الطاقة الكامنة

$$V = -mga\sin\gamma t + mgl\cos\theta. \quad (٤٠٢)$$

لاغرانجية الجملة تعطي ب

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mal\gamma^2\sin(\theta - \gamma t) + mgl\cos\theta. \quad (٤٠٣)$$

في هذه المعادلة الاخيرة اهملنا الحدود الثابتة و التي تتعلق بالزمن فقط و التي هي عبارة عن مشتقة تامة.

كمية الحركة المعممةتعطي ب

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}. \quad (٤٠٤)$$

الهاميلتونية تعطي ب

$$\begin{aligned} H &= \dot{\theta}p_{\theta} - L \\ &= \frac{p_{\theta}^2}{2ml^2} - mal\gamma^2\sin(\theta-\gamma t) - mgl\cos\theta. \end{aligned} \quad (٤٠٥)$$

معادلات هاميلتون للحركة

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta}} = \frac{p_{\theta}}{ml^2}. \quad (٤٠٦)$$

$$-\dot{p}_{\theta} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = -mal\gamma^2\cos(\theta-\gamma t) + mgl\sin\theta. \quad (٤٠٧)$$

**تمرين** 9: كمية الحركة المعممة المرفقة ب $q$ تعطي ب

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{m}{2}(2\dot{q}\sin^2\Omega t + q\Omega\sin 2\Omega t). \quad (٤٠٨)$$

القلب هنا بسيط لانه لدينا متغير واحد. الهاميلتونية اذن تعطي ب

$$\begin{aligned} h &= p\dot{q} - L \\ &= \frac{m}{2}\bigg[\frac{1}{m^2\sin^2\Omega t}\big(p - \frac{m\Omega q\sin 2\Omega t}{2}\big)^2 - q^2\Omega^2\bigg]. \end{aligned} \quad (٤٠٩)$$

هذه الهاميلتونية غير منحفظة.
اللاغرانجية بدلالة المتغير $Q$ تعطي ب

$$L = \frac{m}{2}\big(\dot{Q}^2 + \Omega^2 Q^2\big). \quad (٤١٠)$$

هذه هاميلتونية هزاز توافقي. كمية الحركة المعممة المرفقة بالمتغير $Q$ تعطي ب

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = m\dot{Q} = \frac{p}{\sin\Omega t}. \quad (٤١١)$$

الهاميلتونية في هذه الحالة منحفظة تعطي ب

$$H = \frac{m}{2}\big(\frac{P^2}{m^2} - \Omega^2 Q^2\big). \quad (٤١٢)$$

**تمرين** 10: نعرف ان $q$ و $p$ تحققان معادلات هاميلتون. نحسب اذن اولا

$$\begin{aligned} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} &= \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial P} + \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial Q} \\ &= -\frac{q}{\sin^2 p}\frac{\partial H}{\partial P} + \cot p\frac{\partial H}{\partial Q}. \end{aligned} \quad (٤١٣)$$

$$-\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial P} + \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial Q} = \cot p \frac{\partial H}{\partial P} - \frac{1}{q}\frac{\partial H}{\partial Q}. \quad (٤١٤)$$

قلب هذه المعادلات نحصل علي

$$\frac{\partial H}{\partial P} = -\frac{\dot{q}}{q} + \dot{p}\cot p. \quad (٤١٥)$$

$$\frac{\partial H}{\partial Q} = -\dot{q}\cot p + \frac{q}{\sin^2 p}\dot{p}. \quad (٤١٦)$$

من الجهة الاخري فاننا نتوقع ان يكون التحويل القانوني محدود و بالتالي $K = H$.
اذن نحسب من الجهة الاخري

$$\frac{\partial H}{\partial P} = \dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial Q}{\partial p}\dot{p}. \quad (٤١٧)$$

$$\frac{\partial H}{\partial Q} = -\dot{P} = -\frac{\partial P}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial P}{\partial p}\dot{p}. \quad (٤١٨)$$

بالمقارنة نجد ان المعادلات تتطابق.

**تمرين** 11: من الواضح ان التحويل القانوني محدود اي ان الدالة المولدة لا تتعلق بالزمن و $K = H$. الدالة المولدة يجب ان تحقق

$$p_i\dot{q}_i - H = P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}. \quad (٤١٩)$$

نأخذ الدالة المولدة من النوع الاول اي $F = F_1(q_i, Q_i)$ لكن نبنيها علي شكل تحويل لوجوندر لدالة $F_{13}$ تتعلق ب $p_1$، $q_2$ و $Q_i$ اي

$$F = F_1(q_i, Q_i) = q_1p_1 + F_{13}(p_1, q_2, Q_i). \quad (٤٢٠)$$

باستعمال التحويل القانوني يمكن كتابة الشرط اعلاه كما يلي

$$p_2\dot{q}_2 = (p_1 - 2p_2)\dot{q}_1 + (-2q_1 - q_2)\dot{p}_2 + \frac{\partial F_{13}}{\partial p_1}\dot{p}_1 + \frac{\partial F_{13}}{\partial Q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial F_{13}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial F_{13}}{\partial Q_2}\dot{p}_2 + q_1\dot{p}_1. \quad (٤٢١)$$

يجب ان يكون لدينا

$$\frac{\partial F_{13}}{\partial p_1} = -q_1 = -Q_1. \quad (٤٢٢)$$

$$\frac{\partial F_{13}}{\partial q_2} = p_2 = Q_2. \quad (٤٢٣)$$

$$\frac{\partial F_{13}}{\partial Q_1} = -p_1 + 2p_2 = -p_1 + 2Q_2. \tag{٤٢٤}$$

$$\frac{\partial F_{13}}{\partial Q_2} = 2q_1 + q_2 = 2Q_1 + q_2. \tag{٤٢٥}$$

حل المعادلات التفاضلية الاربعة اعلاه يعطي ب

$$F_{13} = 2Q_1Q_2 + q_2Q_2 - p_1Q_1. \tag{٤٢٦}$$

**تمرين** 12:

- واضح.
- موضع و سرعة و طاقة حركة الكتلة $m$ تعطي ب

$$\vec{r} = (x + l\sin\theta)\vec{i} - l\cos\theta\vec{j}. \tag{٤٢٧}$$

$$\vec{v} = (\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta)\vec{i} + l\dot{\theta}\sin\theta\vec{j}. \tag{٤٢٨}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta). \tag{٤٢٩}$$

طاقة حركة الكتلة $m^{'}$ تعطي ب

$$T = \frac{1}{2}m^{'}\dot{x}^2. \tag{٤٣٠}$$

لاغرانجية الجملة

$$L = \frac{1}{2}(m + m^{'})\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) + mgl\cos\theta. \tag{٤٣١}$$

الحصول علي معادلات لاغرانج امر بسيط.

- اشتقاق هاميلتونية الجملة و معادلات هاميلتون للحركة امر طويل نسبيا لكن يبقي بسيط.

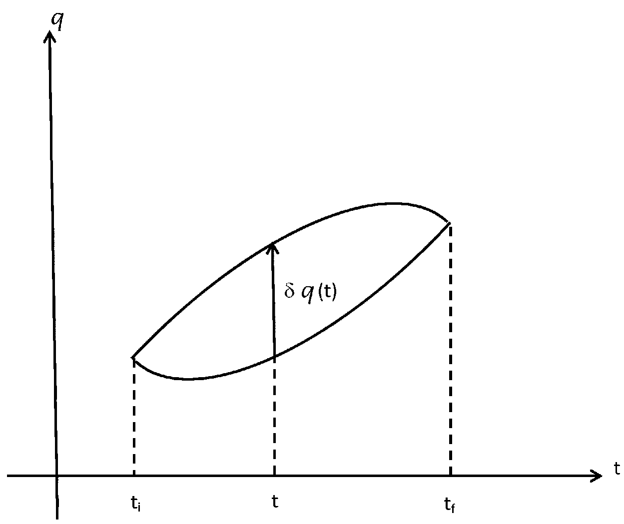


Figure .1:

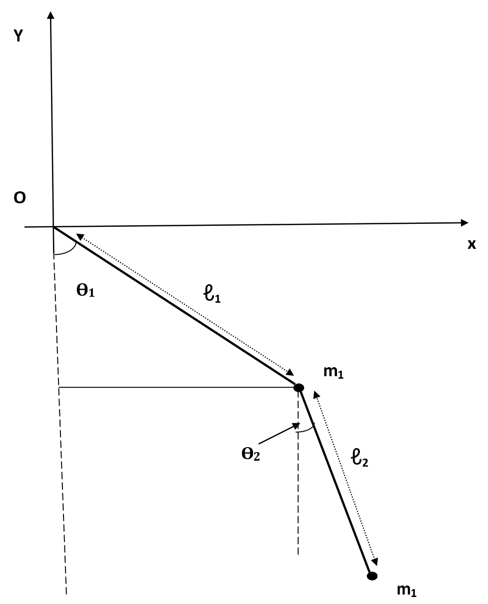


Figure .2:

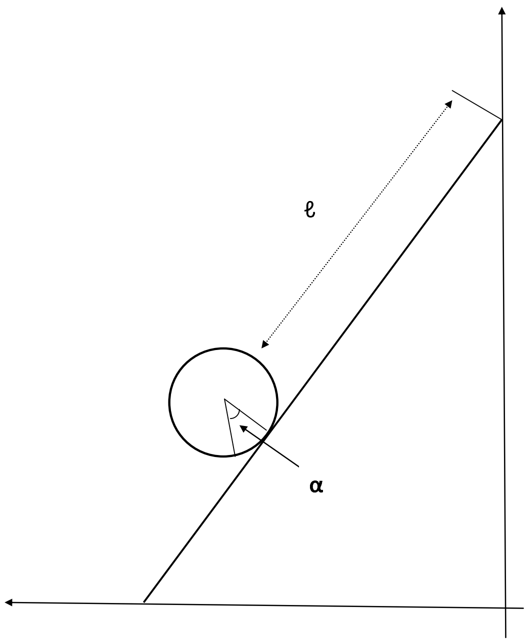


Figure .3:

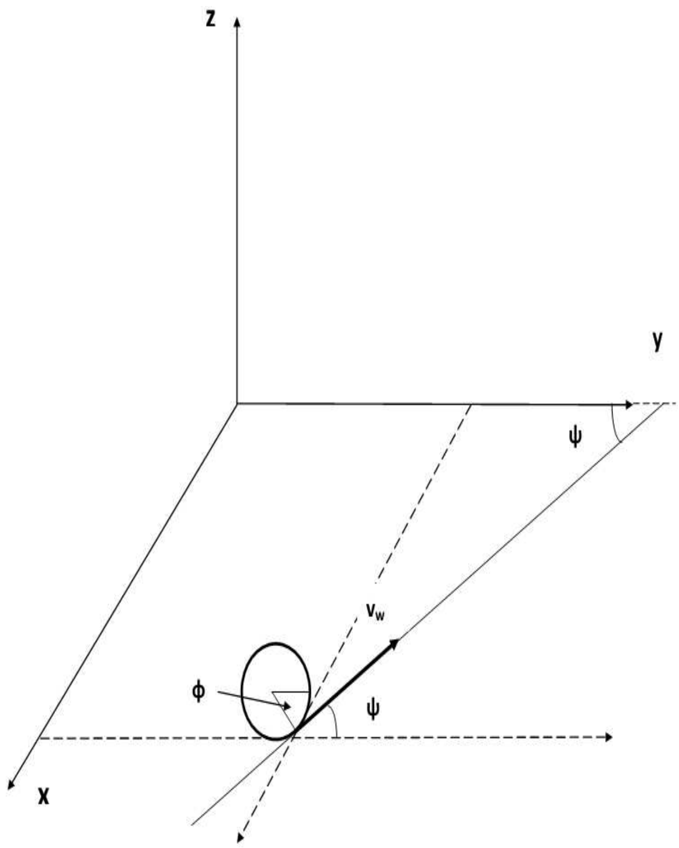


Figure .4:

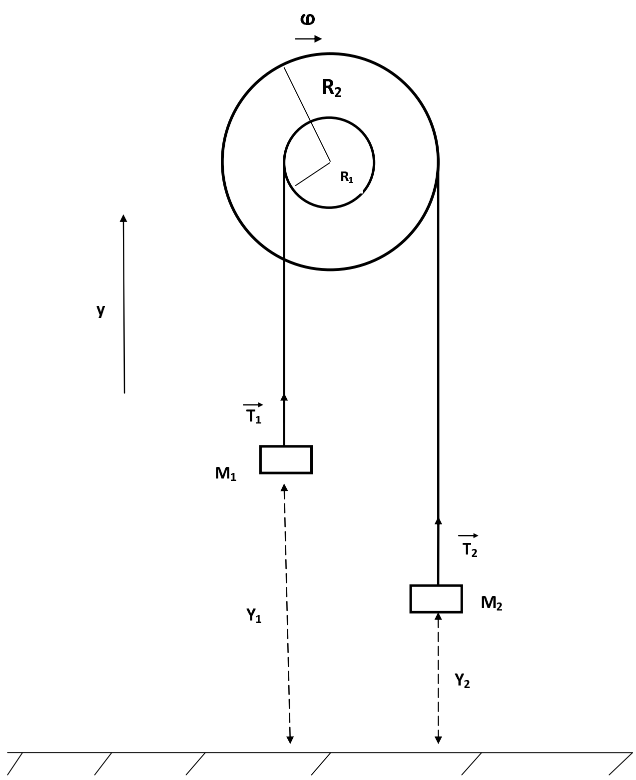


Figure .5:

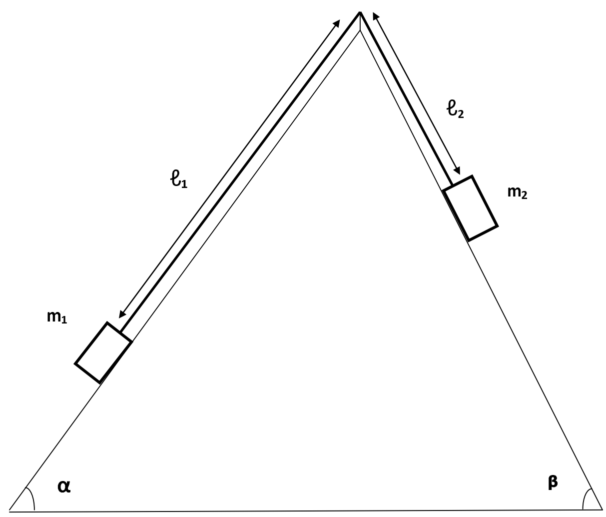


Figure .6:

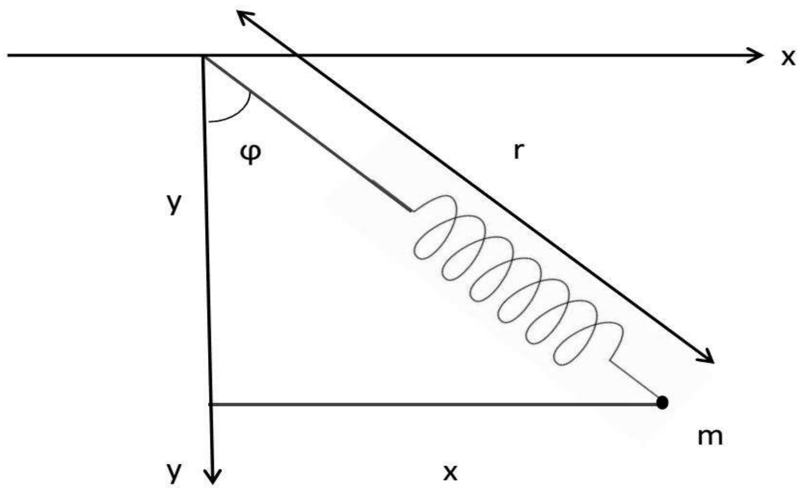


Figure .7:

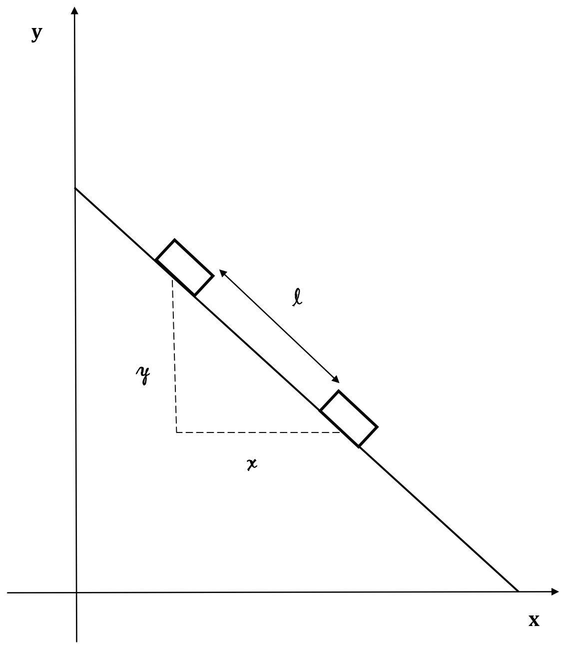


Figure .8:

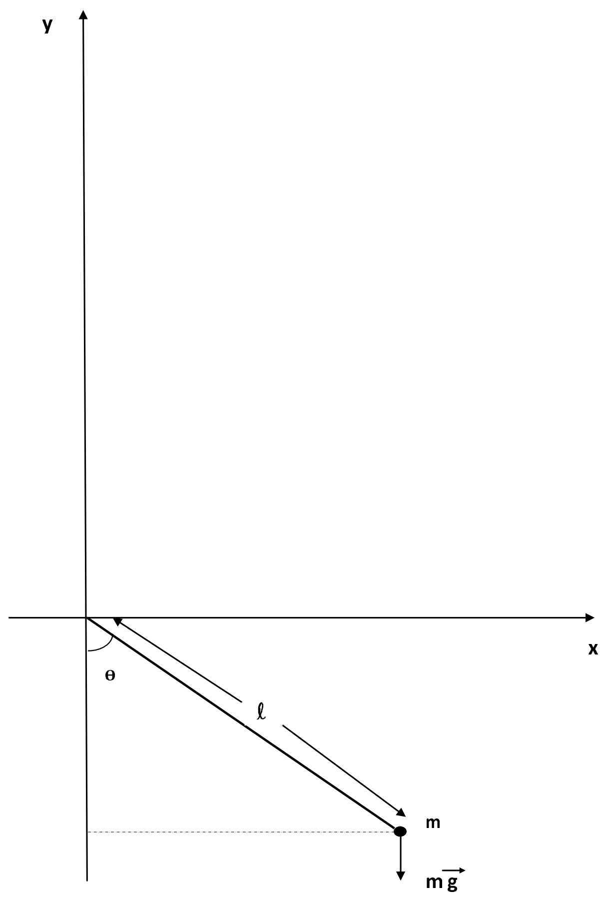


Figure .9:

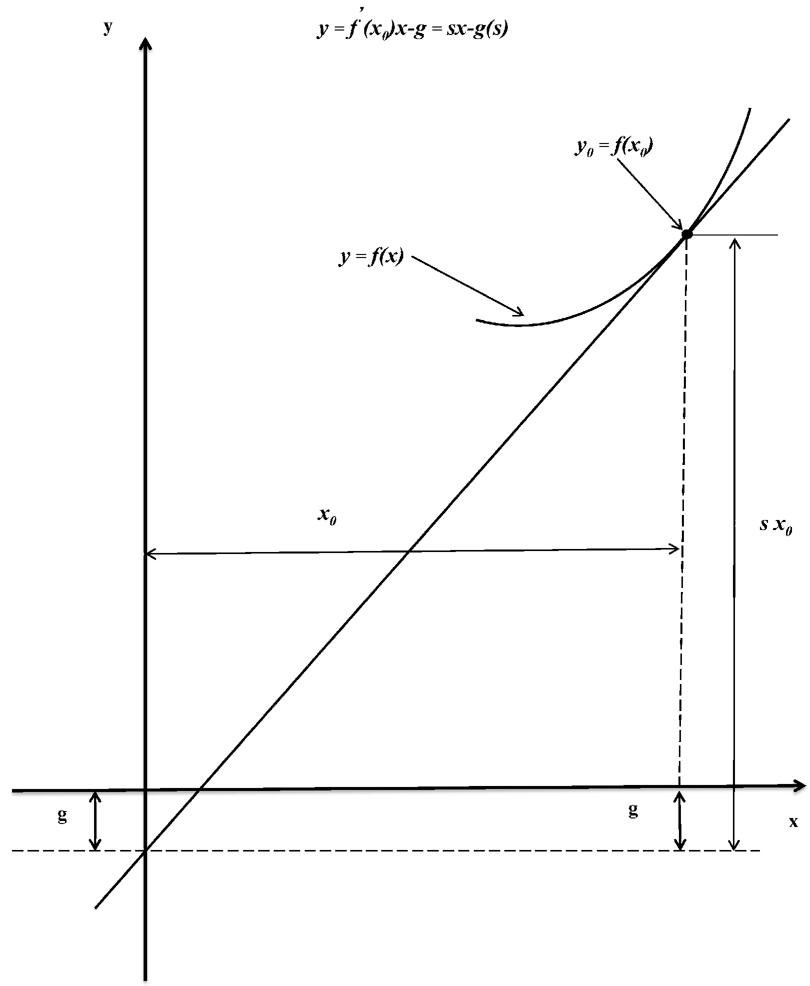


Figure .10:

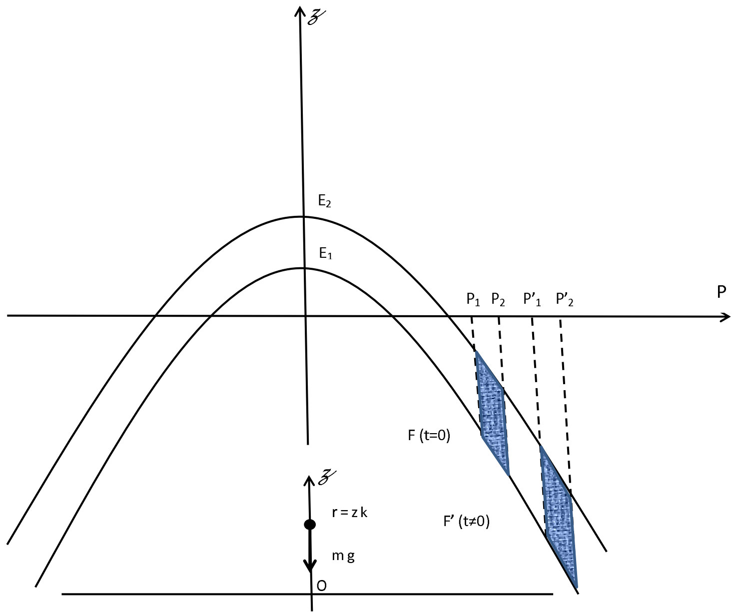


Figure .11:

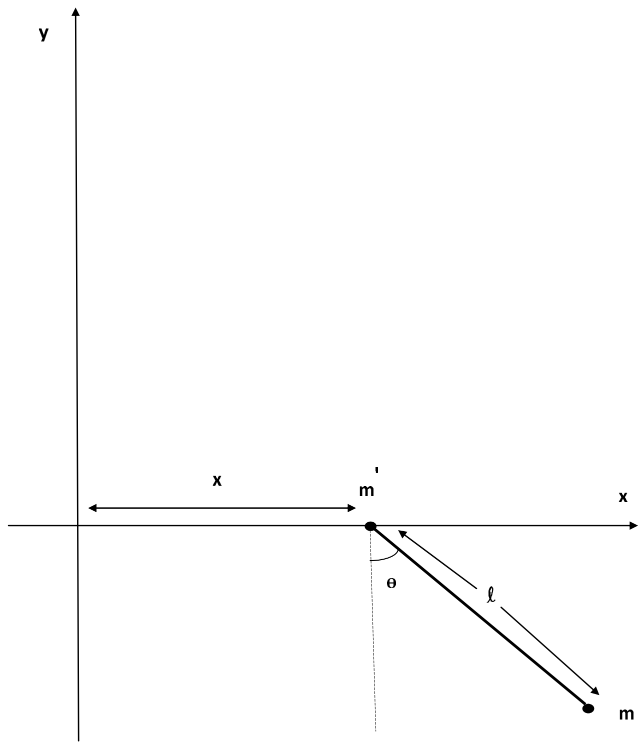


Figure .12:

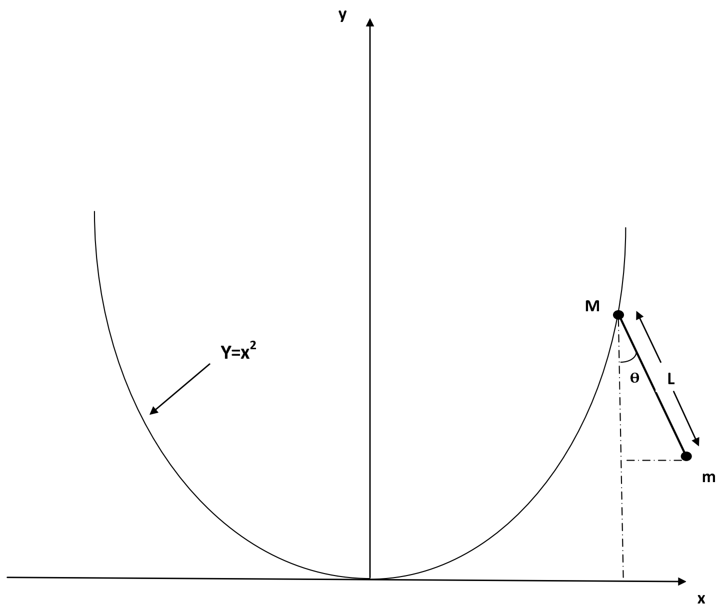


Figure .13:

# الترموديناميك و الميكانيك الاحصائي

# Thermodynamics and Statistical Mechanics

This part is based primarily on the books [5, 6]. Huang is very elegant and precise while Ngo and Ngo (in french) is very pedagogical. Again, only fundamental topics are discussed: 1) Thermodynamics, and 2) The micocanonical ensemble. In the first chapter, we have concentrated on the discussion of fundamentals of thermodynamics, like the first and second principles and the thermoynamical state functions, and avoided discussion of applications due to lack of time. In the second chapter, we have given an introduction to statistical mechanics, by providing a systematic exposition of the micocanonical ensemble, and its application to the ideal gaz. See chapters 1 and 6 of Huang, and chapters 1-5 of Ngo and Ngo. The treatise of Landau [7] was also consulted extensively. Most exercises are taken from [6], which offers also pedagogical solutions, and some exercises were taken from [5].

# مقدمة في الترموديناميك

## مقدمة

الترموديناميک هو فرع من الفيزياء يهتم بوصف المادة ظواهريا [٨] وبالخصوص يهتم بدراسة خصائص الجمل الفيزيائية الماكروسكوبية المتوازنة حراريا و دراسة التبادلات في الطاقة التي تحدث بينها اي بين شكلي الطاقة الاساسيين : كمية الحرارة و العمل الميكانيكي.

الترموديناميک ناجح جدا في وصف العالم الماكرسكوبي دون الرجوع الي المبادي الاولية [٩] للديناميک الجزيئي الاستثناء ربما هي النظرية الحركية للغازات التي يمكن اشتقاق الترموديناميک الخاص بها مباشرة من النظرية الذرية. الميكانيک الاحصائي هو النظرية الاساسية التي تحاول بناء الترموديناميک انطلاقا من الفيزياء التي تحكم العالم الجزيئي و الذري وبالتالي فهي تعتبر اصل الترموديناميک و تفسيره في ان معا.

الميكانيک الاحصائي اذن هو همزة الوصل بين العالم الميكروسكوبي و العالم الماكروسكوبي و هو بالضبط احصائي لان عدد الجسيمات الميكروسكوبية المشكلة لاي جملة فيزيائية هو عدد كبير جدا. وجود هذا العدد الكبير من الجسيمات هو الاصل الذي يسمح لنا باشتقاق القوانين البسيطة والانيقة للترموديناميک، التي تصف خصائص الجمل الفيزيائية الماكروسكوبية المتوازنة، ابتداءا من قوانين الميكانيک الاحصائي.

نبدأ في هذا الفصل دراستنا بالترموديناميک، و نؤجل الميكانيک الاحصائي للفصول القادمة، حتي نعرف عن قرب اللغة و العالم اللذان يتعامل بها و معه الميكانيک الاحصائي قبل الغوص في الرياضيات التي تحكمه و تؤسسه.

## تعاريف عامة

**الجمل الترموديناميكية** : الجملة الترموديناميكية هي جزء ماكروسكوبي من الكون محدود بسطح مغلق قد يكون اعتباري. هذه الجملة قد تكون معزولة او مغلوقة اذا لم يكن هناك اي تفاعلات لها مع الوسط الخارجي اماذا كان هناك تفاعل مع الوسط الخارجي فالجملة تسمي مفتوحة.

الجملة الماكروسكوبية [١٠] هي جملة ذات ابعاد كبيرة جدا بالمقارنة مع ابعاد مكوناتها الجزيئية، الذرية، النووية او الاولية. عموما عدد هذه المكونات

---

(٨) phenomenological.

(٩) first principles.

(١٠) macroscopic.

الميكروسكوبية [١١] هو عدد هائل مثلا من نفس رتبة عدد افوقادرو [١٢]

$$\mathcal{N} = 6.021\text{x}10^{23}. \qquad (٤٣٢)$$

كما اشرنا اليه اعلاه فان الترموديناميك علي خلاف الميكانيك الاحصائي لا يهتم بهذه المكونات الميكروسكوبية للجملة الترموديناميكية و يحاول فقط وصف الجملة الماكروسكوبية باستعمال متغيرات ماكروسكوبية مثل: الحجم $V$، الضغط $P$، درجة الحرارة $T$ و عدد الجسيمات $N$.

**الجمل المتجانسة** : الجملة الترموديناميكية تسمي متجانسة اذا كان تركيز مكوناتها لا يتغير من نقطة الي اخري في الجملة. اي ان الجملة المتجانسة تتكون من حالة طورية واحدة او حالة طورية منتظمة. في الحالة العكسية فان الجملة تسمي غير متجانسة.

**المقادير التكثيفية و المقادير التمديدية** : نعتبر جملتين ترموديناميكيتين متماثلتين $1$ و $2$. نفترض ان كل جملة هي جملة متجانسة محتواة داخل حجم $V$ و مشكلة من $r$ مركبة عدد مولاتها $n_1$، $n_2$،....،$n_r$ علي التوالي. الجملة المشكلة من اضافة الجملتين اعلاه الي بعضهما البعض هي ايضا جملة متجانسة حجمها $2V$ و مشكلة من نفس المركبات مع عدد مولات يساوي $2n_1$،$2n_2$،....،$2n_r$ علي التوالي. ليكن $X$ احد المقادير الفيزيائية الذي يأخذ القيمة $X_0$ في الجملتين $1$ و $2$ كل علي حدة.

اذا كان المتغير $X$ يأخذ في الجملة الكلية $1+2$ نفس القيمة $X_0$ فاننا نقول ان $X$ هو مقدار تكثيفي [١٣]. مثال: الضغط و درجة الحرارة هي مقادير تكثيفية. اما اذا كان المتغير $X$ يأخذ في الجملة الكلية $1+2$ القيمة $2X_0$ فاننا نقول ان $X$ هو مقدار تمديدي [١٤]. مثال: الحجم و عدد الجسيمات هي مقادير تمديدية.

اذن المقادير التمديدية هي المقادير التي تتناسب مع كمية المادة في الجملة اما المقادير التكثيفية فهي المقادير التي لا تتعلق بكمية المادة في الجملة.

**الحالات الماكروسكوبية** : تعين حالة الجملة الماكروسكوبية ترموديناميكا بالكامل باعطاء قيم محددة للمتغيرات الماكروسكوبية $V$، $P$، $T$، $N$. بالتالي فان الحالة الماكروسكوبية هي صورة معينة للجملة مرفقة بقيمة محددة للمتغيرات الماكروسكوبية.

**التوازن الترموديناميكي** : تكون الجملة الفيزيائية الماكروسكوبية في حالة توازن ترموديناميكي اذا كانت المتغيرات الماكروسكوبية الواصفة لهذه الجملة لا تتغير مع الزمن. في الحالة العكسية تكون الجملة غير متوازنة. كل جملة غير متوازنة تتطور في الزمن بصورة او باخري الي ان تبلغ حالة توازنها. الزمن الذي تستغرقه الجملة حتي تبلغ التوازن يسمي زمن الاسترخاء.

---

microscopic.[١١]
Avogadro.[١٢]
intensive.[١٣]
extensive.[١٤]

**معادلة الحالة** : معادلة حالة الجملة الترموديناميكية هي علاقة تربط بين متغيراتها الترموديناميكية في حالة توازنها. مثلا اذا كانت المتغيرات الترموديناميكية لجملة ما هي $V$، $P$، $T$ فان معادلة الحالة هي علاقة من الشكل

$$f(P,V,T)=0. \qquad (٤٣٣)$$

اذن هناك متغيران فقط مستقلان خطيا من بين الثلاثة. اذا مثلنا حالة الجملة بنقطة في الفضاء الثلاثي $P-V-T$ فان معادلة الحالة تعرف سطح في هذا الفضاء معطي بالضبط ب $f=0$ حيث كل نقطة منه هي عبارة عن حالة توازن ممكنة للجملة.

اسقاط سطح معادلة الحالة علي المستوي $P-V$ يعطي ما يعرف بالمخطط $P-V$. كل نقطة من هذا المخطط تمثل حالة توازن.

**الغاز المثالي**: نأخذ هنا مسألة الغاز المثالي كمثال. من الناحية التجريبية كل الغازات الحقيقية تتصرف بنفس الشكل عندما تكون مميهة [١٥]. هذا التصرف الكوني[١٦] يمكن وصفه بغاز مثالي. اذن الغاز المثالي هو الغاز الذي تكون جزيئاته ذات تفاعلات متبادلة مهملة. مثلا الهيليوم تحت ضغط منخفض هو غاز مثالي. حالة الغاز المثالي تحدد باعطاء 4 متغيرات $V$، $P$، $T$ و $N$. معادلة حالة الغاز المثالي هي معادلة بويل [١٧]

$$PV=nRT\ ,\ PV=NkT\ ,\ n=\frac{N}{\mathcal{N}}\ ,\ k=\mathcal{N}R. \qquad (٤٣٤)$$

$n$ هو عدد المولات، $k$ هو ثابت بولتزمان و $R$ هو ثابت الغازات المثالية اللذان يعطيان ب

$$k=1.38\text{x}10^{-23}J/K\ ,\ R=8.315J/K\text{mole}. \qquad (٤٣٥)$$

يمكن استخدام معادلة حالة الغاز المثالي لتعريف ترموماتر وبالتالي اعطاء تعريف كوني لسلم درجة الحرارة.

**العمل و كمية الحرارة** : الجمل الفيزيائية الماكروسكوبية تتبادل الطاقة مع الوسط الخارجي بطريقتين مختلفتين هما العمل و كمية الحرارة.

- العمل $W$: هو تبادل ماكروسكوبي للطاقة علي شكل ميكانيكي. اذا كان التبادل في الطاقة ينجم عنه تغير في المتغيرات الترموديناميكية ما عدا درجة الحرارة فاننا نقول ان هناك تبادل عمل.

  اذا كانت المتغيرات الترموديناميكية هي $P$ ، $V$ و $T$ فان العمل $dW$ خلال تحول ترموديناميكي متناه في الصغر يتغير خلاله الحجم ب $dV$ يعطي ب

$$dW=PdV. \qquad (٤٣٦)$$

- كمية الحرارة $Q$: هو تبادل ميكروسكوبي للطاقة علي شكل حراري. اذا كان التبادل في الطاقة ينجم عنه تغير في درجة الحرارة فقط مع ثبوت باقي المتغيرات الترموديناميكية علي قيمها فاننا نقول ان هناك تبادل لكمية حرارة.

---

[١٥] diluted.

[١٦] universal.

[١٧] Boyl.

كمية الحرارة $dQ$ الممتصة من قبل جملة متجانسة مما يؤدي الي ارتفاع درجة الحرارة ب $dT$ مع عدم القيام باي عمل تعطي ب

$$dQ = CdT, \tag{٤٣٧}$$

حيث $C$ هي ما يسمي بالسعة الحرارية.

نقيس العمل و كمية الحرارة بالجول. كمية الحرارة تقاس ايضا بالكالوري، الذي هو كمية الحرارة الضرورية لرفع درجة حرارة 1 غرام من الماء تحت 1 ضغط جوي من 14.5 درجة مئوية الي 15.5 درجة مئوية، ويعرف ب

$$1\mathrm{ca} = 4.18J. \tag{٤٣٨}$$

**الخزان الحراري** : الخزان الحراري هو جملة ترموديناميكية لا تتغير درجة حرارتها تحت تأثير اي تبادل لاي قيمة منتهية لكمية الحرارة.

## التحويلات الترموديناميكية

**التحويلات الترموديناميكية** : التحويل الترموديناميكي هو عملية تغير للحالة الماكروسكوبية لجملة ترموديناميكية. يمكن للتحويل ان يكون شبه ساكن [١٨]، عكسي [١٩]، او غير عكسي [٢٠]. خلال التحويل شبه الساكن تبقي الجملة في حالة توازن ترموديناميكي تقريبي اما التحويل العكسي فهو تحويل شبه ساكن يمكن دائما الرجوع بالجملة فيه الي حالتها الابتدائية عكس التحويل غير العكسي الذي لا يمكن الرجوع فيه بالجملة الي حالتها الابتدائية.

**المتغيرات الخارجية** : المتغيرات الترموديناميكية ما عدا درجة الحرارة تسمي المتغيرات الخارجية [٢١]، و اي تغير فيها يمكن ان يولد عمل ميكانيكي. لتكن $S$ جملة ترموديناميكية في حالة ابتدائية معينة ثم نجري عليهاتحويل ترموديناميكي عن طريق تغيير بعض المتغيرات الخارجية لهذه الجملة. اذا كان تطور الجملة بحيث انها تبقي دائما في حالة توازن ترموديناميكي فان التحويل الذي قمنا به يسمي شبه ساكن. بالاضافة الي ذلك اذا كان يمكن الرجوع بالجملة الي حالتها الابتدائية بالقيام بتحويل عكسي للجملة فان التحويل يسمي تحويل عكسي. و اذا كان لا يمكن الرجوع الي الحالة الابتدائية فان التحويل يسمي غير عكسي.
في حالة التحويلات شبه الساكنة و العكسية يجب علي المتغيرات الخارجية ان تتغير ببطء كاف بالمقارنة مع زمن الاسترخاء للجملة الترموديناميكية. انظر المثال ادناه.

**التحويلات الادياباتيكية** : كما ذكرنا سابقا فان الجملة المعزولة هي اي جملة لا تتفاعل مع العالم الخارجي. الجملة المعزولة حراريا هي الجملة التي لا تتبادل كمية حرارة مع العالم الخارجي. يمكن تحقيق هذا الامر عبر عزل الجملة بجدار

[١٨] quasi − static.
[١٩] reversible.
[٢٠] irreversible.
[٢١] external variables.

ادياباتيكي [٢٢] لا يسمح بنقل كمية الحرارة. جميع التحويلات الترموديناميكية التي تخضع لها الجملة في هذه الحالة تسمي تحويلات ادياباتيكية.
علي العكس من الجدار الادياباتيكي الذي لا يسمح بنقل كمية الحرارة هناك الجدار الدياتارم [٢٣] الذي هو ناقل مثالي لكمية الحرارة.

**التحويلات الايزوحرارية** : [٢٤] هي تحويلات ترموديناميكية متساوية الحرارة اي تحدث عند نفس درجة الحرارة.

**العمل في التحويلات شبه الساكنة** : نعتبر غاز محتجز داخل اسطوانة ادياباتيكية اي كاتمة للحرارة. احدي قاعدتي الاسطوانة عبارة عن مكبس يتحرك بدون اي احتكاك مع جدران الاسطوانة. لما يتحرك المكبس فان حجم الغاز و هو متغير خارجي يتغير. انظر الي الشكل $1$. نفترض الان

- ان سرعة تحرك المكبس ضعيفة جدا.
- ان الزمن اللازم من اجل الانتقال من الوضعية $x$ الي الوضعية $x+dx$ هو اكبر بكثير من الزمن اللازم للجملة للقيام بتبادل حراري مع الوسط الخارجي للوصول الي التوازن. اذا افترضنا مثلا ان زمن استرخاء الجملة هو $1/1000$ sec فانه يكفي ان ينتقل المكبس من $x$ الي $x+dx$ في زمن قدره $1/10$ sec حتي يمكن اعتبار التحول كأنه شبه ساكن الي درجة كبيرة لانه في كل لحظة ستكون الجملة في حالة توازن ترموديناميكي.

تحت هذه الظروف فان التحول من $x$ الي $x+dx$ هو تحول شبه ساكن.
في اللحظة $t=0$ المكبس في الوضعية $x$. لان الجملة في حالة توازن فان الضغط متساو من كل الجهات. القوة الكلية التي تؤثر علي المكبس هي $PA$ حيث $A$ هي مساحة المكبس. حتي يتحرك المكبس مسافة $dx$ فان الضغط داخل الاسطوانة يجب ان يكون اكبر بقليل من الضغط الخارجي. العمل المقدم من الغاز هو $PAdx$. اذن العمل المقدم من الوسط الخارجي هو

$$dW=-PdV. \quad (٤٣٩)$$

# المبدأ الصفر للترموديناميك

اذا كانت $1$ و $2$ جملتان ترموديناميكيتان ماكروسكوبيتان متوازنتان كل علي حدة مع جملة ترموديناميكية ماكروسكوبية ثالثة $3$ فان $1$ و $2$ متوازنتان فيما بينهما. بعبارة اخري مكافئة: كل جملتين ترموديناميكيتين ماكروسكوبيتين متوازنتين لهما نفس درجة الحرارة.

# الطاقة الداخلية و المبدأ الاول للترموديناميك

**الطاقة الداخلية**: من المعروف ان الطاقة الكلية لجملة ترموديناميكية معزولة، والتي تساوي مجموع الطاقة الحركية و الطاقة الكامنة، هي ثابت للحركة اي

[٢٢] adiabatic.
[٢٣] diatherme.
[٢٤] isothermic.

انها تبقي منحفظة في الزمن. مبدأ انحفاظ الطاقة هذا هو قانون كوني يؤدي تطبيقه في الترموديناميك الي المبدأ الاول للترموديناميك. في الترموديناميك الطاقة الكلية للجملة تسمي بالطاقة الداخلية [٢٥] و نرمز اليها ب $U$. اذن من اجل جملة ترموديناميكية معزولة فان التغير في الطاقة الداخلية يكون منعدم اي

$$dU = 0. \tag{٤٤٠}$$

اذا كانت الجملة غير معزولة اي انها تتفاعل مع الوسط الخارجي فان الطاقة الكلية تتغير بمقدار $dU$. خلال هذا التحويل الترموديناميكي فان الجملة تتبادل مع الوسط الخارجي عمل $dW$ و كمية حرارة $dQ$ حيث

$$dU = dQ + dW. \tag{٤٤١}$$

اذا كان العمل $dW$ و و كمية الحرارة $dQ$ موجبين فان الوسط الخارجي هو الذي يقوم بالعمل و الجملة تمتص كمية الحرارة. اما اذا كان العمل و كمية الحرارة سالبين فان الجملة هي التي تقوم بالعمل $dW$ و الوسط الخارجي هو الذي يمتص كمية الحرارة $dQ$.

**المبدأ الاول للترموديناميك:** ينص علي ان التغير في الطاقة الداخلية للجملة هو نفسه من اجل كل التحويلات الترموديناميكية التي تربط بين نفس الحالة الابتدائية و نفس الحالة النهائية. هذا يعني بالخصوص ان $U$ هو دالة حالة [٢٦] بمعني ان $dU$ لا يتعلق بالطريق المتبع بين حالة ابتدائية و حالة نهائية و يتعلق فقط بالحالتين الابتدائية و النهائية. بعبارة اخري توجد دالة $U$ تفاضلها هو بالضبط $dU$ اي ان $dU$ هو تفاضل تام او ان

$$\int_C dU = U_f - U_i. \tag{٤٤٢}$$

من الواضح ان العمل $dW$ و كمية الحرارة $dQ$ لا يتمتعان بالخواص اعلاه لانها ليست بدوال حالة. اذن العمل و كمية الحرارة يتعلقان بالطريق المتبع. فقط في حالات خاصة يكون فيها العمل او كمية الحرارة دوال حالة و بالتالي التغير فيهما لا يتعلق بالطريق المتبع و يتعلق فقط بالحالتين الابتدائية و النهائية. مثال ذلك التحويلات الادياباتيكية الكاتمة للحرارة اي التي تحدث بدون تبادل لكمية الحرارة و بالتالي في هذه الحالة

$$dQ = 0\ ,\ dU = dW. \tag{٤٤٣}$$

اذا اعتبرنا ان المتغيرات الترموديناميكية للجملة هي $P$، $V$ و $T$ مع معادلة حالة $f(P,V,T)=0$ فان اثنين فقط من المتغيرات هي مستقلة خطيا. لنأخذ هنا $P$ و $V$ كمتغيرات ترموديناميكية مستقلة خطيا. اذن الطاقة الداخلية للجملة هي دالة في $P$ و $V$ اي

$$U = U(P,V). \tag{٤٤٤}$$

نحسب

$$dU = (\frac{\partial U}{\partial V})_P dV + (\frac{\partial U}{\partial P})_V dP. \tag{٤٤٥}$$

---

[٢٥] internal energy.

[٢٦] state function.

لان $dU$ هو تفاضل تام فانه لدينا مباشرة النتيجة

$$\frac{\partial}{\partial P}\left[(\frac{\partial U}{\partial V})_P\right]_V = \frac{\partial}{\partial V}\left[(\frac{\partial U}{\partial P})_V\right]_P. \quad (٤٤٦)$$

في الترموديناميك تعتبر الطاقة الداخلية مقدار تمديدي. هذا يعني ان طاقة جملة $1+2$ مشكلة من جملتين $1$ و $2$ طاقتيهما $U_1$ و $U_2$ علي التوالي هي

$$U_{1+2} = U_1 + U_2. \quad (٤٤٧)$$

لكن هذا الامر هو فقط تقريب صالح بالنسبة للجمل الماكروسكوبية ذات التفاعلات الضعيفة لان الطاقة $U_{1+2}$ يجب ان تعطي في الحقيقة بالمعادلة

$$U_{1+2} = U_1 + U_2 + U_{12}. \quad (٤٤٨)$$

$U_{12}$ هي طاقة التفاعل التي يمكن اهمالها من اجل الجمل الماكروسكوبية ذات التفاعلات الضعيفة.

الطاقة الداخلية هي مقدار تمديدي فقط في النهاية الترموديناميكية [٢٧] المعرفة ب

$$N \longrightarrow \infty \ , \ V \longrightarrow \infty \ : \ \frac{N}{V} = \text{constant}. \quad (٤٤٩)$$

في هذه النهاية اثار السطح تصبح مهملة امام اثار الحجم. اي ان الطاقة تصبح متناسبة طرديا مباشرة مع ابعاد الجملة $N$ او $V$.

## المبدأ الثاني للترموديناميك

هناك بعض التحويلات الترموديناميكية التي تحقق المبدأ الاول للترموديناميك لكنها لا يمكن ان تحدث بصورة تلقائية في الطبيعة.

كمثال نعتبر معدن ساخن موضوع داخل ماء بارد. المشاهد عادة ان الحرارة تنتقل من المعدن الساخن الي الماء البارد. لكن مع الاعتماد فقط علي المبدأ الاول للترموديناميك يمكن للحرارة ان تنتقل من البارد الي الساخن بحيث يزداد المعدن سخونة و يزداد الماء برودة. لكن هذا غير مشاهد في الطبيعة. المبدأ الثاني للترموديناميك يهدف الي توضيح الاتجاهات التي تنتقل فيها الحرارة.

**بيان كلوسيوس:** [٢٨] لا يوجد تحويل ترموديناميكي نتيجته الوحيدة تكون نقل كمية حرارة من جسم بارد الي جسم ساخن. يمكن نقل الحرارة من جسم بارد الي جسم ساخن ببذل عمل معين.

**بيان كلفن- بلانك:** [٢٩] لا توجد تحويلات ترموديناميكية تكو ن نتيجتها الوحيدة هو استخراج كمية حرارة من خزان حراري وحيد ذو درجة حرارة ثابته و تحويله بالكامل الي عمل.

---

[٢٧] thermodynamical limit.

[٢٨] Clausius statement.

[٢٩] Kelvin – Planck statement.

كمثال ناخذ غاز مثالي يتمدد بطريقة عكسية ايزو حرارية اي عند نفس درجة الحرارة $T$. من اجل غاز مثالي الطاقة الداخلية لا تتعلق الا بدرجة الحرارة ( انظر الي التمرينات ) و بالتالي $dU = 0$ لان $T$ ثابته في هذه الحالة. اذن في هذه الحالة $dW = -dQ$. لان الغاز يتمدد فانه يبرد و بالتالي $dQ > 0$ اي ان الغاز يمتص حرارة للحفاظ علي ثبات درجة الحرارة و منه نستنتج ان $dW < 0$ اي ان الغاز هو الذي يقوم بالعمل. نلاحظ انه في هذه الحالة كل كمية الحرارة تم تحويلها الي عمل لكن ليس هذه النتيجة الوحيدة لهذا التحويل الترموديناميكي لان الغاز في حالته النهائية يحتل حجم اكبر.

من المهم ان نقنع انفسنا ان بيان كلوسيوس هو مكافئ تماما لبيان كلفن-بلانك.

## دورة كارنو

دورة كارنو [٣٠] هي مجموعة متتابعة من التحويلات الترموديناميكية شبه الساكنة و العكسية التي يستعمل فيها خزانيين حراريين بدرجتي حرارة $T_1$ و $T_2 < T_1$ . لنعتبر غاز في اسطوانة قاعدتها عبارة عن مكبس يتحرك بدون احتكاك. الطريق الذي يتبعه الغاز في المستوي $P - V$ هو كالاتي (انظر الي الشكل 2 ):

- الحالة الابتدائية للغاز (النقطة $A$) تكون بحجم $V_1$، درجة حرارة $T_1$ و ضغط $P_1$.

  نضع الجملة علي اتصال بترموستات ذو درجة حرارة $T_1$. الترموستات هو عبارة عن خزان حراري كبير يسمح بالحفاظ علي درجة حرارة ثابته للغاز لان كل تبادل للحرارة مع الجملة المعتبرة لا يغير من درجة حرارتها.

  نقوم بتغيير حالة الغاز بطريقة عكسية ايزوحرارية حتي يصبح الضغط $P_2$ عند النقطة $B$ و ذلك عن طريق تغيير شبه ساكن للضغط المطبق علي المكبس. الحجم النهائي يصبح $V_2 > V_1$ اي ان الغاز يتمدد و بالتالي يبرد. حتي يحافظ الغاز علي درجة حرارة ثابته يمتص كمية حرارة $Q_1 > 0$ من المنبع الحار.

- نعزل الغاز بجدار ادياباتيكي كاتم للحرارة يمنع اي تبادل لكمية الحرارة. نقوم بترك الغاز يتمدد بطريقة عكسية ادياباتيكية حتي تصبح درجة الحرارة مساوية ل $T_2 < T_1$ التي هي درجة حرارة المنبع البارد عند النقطة $C$. يصبح الحجم $V_3$ و الضغط $P_3$ عند النقطة $C$.

- نضع الجملة علي اتصال بترموستات ذو درجة حرارة $T_2$ حتي نحافظ علي درجة حرارته مساوية ل $T_2$. نقوم بضغط الغاز من الحجم $V_3$ الي الحجم $V_4 < V_3$ و من الضغط $P_3$ الي الضغط $P_4 > P_3$. هذه العملية هي ايضا عكسية و ايزوحرارية اي ان درجة الحرارة تبقي ثابتة مساوية ل $T_2$. الغاز المضغوط يسخن و بالتالي حتي نحافظ علي درجة حرارة ثابته يجب علي الغاز ان يعطي كمية حرارة $Q_2 < 0$ الي الوسط الخارجي. النقطة $D$ تقع علي الخط الادياباتيكي المار ب $A$.

- نغلق الدورة بعملية ضغط ثابتة تكون ادياباتيكية و عكسية من $D$ الي $A$. خلال هذا المقطع تتغير درجة حرارة الغاز من $T_2$ الي $T_1$.

خلال دورة كارنو لدينا حسب المبدأ الاول للترموديناميك

$$\Delta U = 0. \qquad (٤٥٠)$$

[٣٠] Carnot cycle.

كمية الحرارة المنقولة خلال دورة كارنو هي

$$Q = Q_1 + Q_2. \quad (٤٥١)$$

العمل المتبادل بين الغاز و الوسط الخارجي خلال $ABC$ هو

$$W_1 = -\int_{ABC} PdV < 0. \quad (٤٥٢)$$

لان الحجم خلال هذا الجزء يتزايد باستمرار و بالتالي $dV > 0$. $W_1$ هي المساحة تحت المنحني $ABC$. لان $W_1 < 0$ فان الجملة هي التي تقوم بالعمل.
العمل المتبادل بين الغاز و الوسط الخارجي خلال $CDA$ هو

$$W_2 = -\int_{CDA} PdV > 0. \quad (٤٥٣)$$

لان الحجم خلال هذا الجزء ينكمش باستمرار و بالتالي $dV < 0$. $W_2$ هي المساحة تحت المنحني $CDA$. لان $W_2 > 0$ فان الوسط الخارجي هو الذي يقوم بالعمل.
نعتبر الحالتين التاليتين:

- الامكانية الاولي :

$$|W_1| > |W_2|. \quad (٤٥٤)$$

اذن العمل الكلي في هذه الحالة هو سالب اي

$$W = W_1 + W_2 < 0. \quad (٤٥٥)$$

اي ان الجملة هي التي تقوم بالعمل اي توفر عمل للوسط الخارجي اي انها تتصرف كمحرك حراري لانها حولت طاقة حرارية الي عمل ميكانيكي.
باستعمال المبدأ الاول للترموديناميك كالتالي ( مع $Q_2^{'} = -Q_2 > 0$، $W_1^{'} = -W_1 > 0$)

$$\Delta U = W + Q = 0 \Rightarrow -W = Q > 0. \quad (٤٥٦)$$

هذا مكافئ ل

$$W_1^{'} - W_2 = Q_1 - Q_2^{'}. \quad (٤٥٧)$$

يمكن ان نبرهن بشكل عام جدا انه اذا كان $-W > 0$ فان $Q_2^{'} > 0$ و $Q_1 > 0$.

- الامكانية الثانية: هناك ايضا الامكانية التي يكون فيها العمل الكلي $W$ موجب اي ان الوسط الخارجي هو الذي يقوم بالعمل.

يمكن ايضا ان نبرهن بشكل عام جدا انه اذا كان $-W < 0$ و $Q_2^{'} < 0$ فان $Q_1 < 0$. اذن الحرارة يمتصها الان الغاز من المنبع البارد بينما يتخلص من الحرارة باعطائها للمنبع الحار و من اجل تحقيق كل هذا يجب ان نوفر عمل للغاز من الوسط الخارجي. اي انه في هذه الحالة فان دورة كارنو تعمل في الاتجاه المخالف و تتصرف كبراد لاننا نستعمل عمل ميكانيكي لاحداث تدرج في درجة الحرارة.

من الواضح ان مردود محرك كارنو الحراري هو النسبة بين العمل الذي قامت به الجملة (الغاز) و كمية الحرارة المأخوذة من المبع الحار اي

$$\eta=\frac{W_1'-W_2}{Q_1}=1-\frac{Q_2'}{Q_1}. \quad (٤٥٨)$$

نذكر الان بعض النتائج المهمة بدون اي برهان:

- مبرهنة كارنو: لا يوجد محرك حراري يعمل بين درجتي حرارة $T_1$ و $T_2$ هو اكثر فعالية من محرك كارنو الحراري.
- لازمة كارنو: كل دورات كارنو التي تعمل بين درجتي حرارة $T_1$ و $T_2$ لها نفس المردود.
- اذا كانت الدورة تحتوي علي تحويلات غير عكسية فان المردود سيكون اقل.

دورة كارنو تسمح لنا بتعريف السلم المطلق لدرجات الحرارة عبر العلاقة التجريبية:

$$\frac{Q_1}{Q_2'}=\frac{T_1}{T_2}. \quad (٤٥٩)$$

انظر الي التمرينات.

## مبرهنة كلوسيوس، الانتروبي و المبدأ الثاني للترموديناميك

نعيد كتابة العلاقة (28) اعلاه علي الشكل

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}=0. \quad (٤٦٠)$$

يمكن تعميم هذه المعادلة لكل الدورات شبه الساكنة كالاتي

$$\oint\frac{dQ}{T}=0. \quad (٤٦١)$$

التكامل مأخوذ علي طول الدورة و $dQ$ هي كمية الحرارة المتبادلة بطريقة شبه ساكنة في نقطة الدورة اين تكون درجة الحرارة مساوية ل $T$. هذه النتيجة هي جزء من ما يسمي بمبرهنة كلوسيوس.

**مبرهنة كلوسيوس:** في اي تحويل ترموديناميكي دوري $\mathcal{O}$ فان المتراجحة التالية صحيحة:

$$\oint\frac{dQ}{T}\leq 0. \quad (٤٦٢)$$

اذا كان التحويل الترموديناميكي عكسي فان

$$\oint\frac{dQ}{T}=0. \quad (٤٦٣)$$

البرهان يجري كالاتي. نقسم التحويل $\mathcal{O}$ الي $n \longrightarrow \infty$ تحويل متناه في الصغر حيث تكون درجة الحرارة تقريبا ثابته في كل خطوة. اذن نتصور ان الجملة في كل خطوة $i$ هي علي اتصال بمخزن حراري ذو درجة حرارة $T_i$ اي انها تمتص كمية حرارة $Q_i$ في كل خطوة من اجل الحفاظ علي ثبات درجة الحرارة عند $T_i$.

نبني $n$ دورة لكارنو $\{C_1, C_2, ..., C_n\}$ حيث كل $C_i$ هي بحيث

(١). تعمل بين درجتي الحرارة $T_i$ و $T_o \geq T_i$ من اجل كل $i$.

(٢). تمتص كمية الحرارة $Q_i^o$ من $T_o$.

(٣). تتخلص من كمية الحرارة $Q_i$ ل $T_i$.

نعتبر التحويل الترموديناميكي $\mathcal{O} + \{C_1, C_2, ..., C_n\}$ حيث الخطوة $i$ مشتركة بين $\mathcal{O}$ و $C_i$ لكن في اتجاهين متعاكسين. اذن كمية الحرارة الكلية المتبادلة خلال هذا التحويل هي

$$Q_o = \sum_{i=1}^{n} Q_i^o. \quad (٤٦٤)$$

لكن السلم المطلق لدرجة الحرارة يعطي

$$\frac{Q_i^o}{Q_i} = \frac{T_o}{T_i}. \quad (٤٦٥)$$

اذن كمية الحرارة الكلية المتبادلة هي

$$Q_o = T_o \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i}. \quad (٤٦٦)$$

هذه هي كمية الحرارة الكلية الممتصة من الخزان الحراري $T_o$ و التي حولت حسب المبدا الاول للترموديناميك $(\Delta U = W_o + Q_o = 0)$ بالكامل الي عمل من دون نتائج اخري. باستعمال المبدأ الثاني للترموديناميك حسب بيان كلفن-بلانك فانه لا توجد تحويلات ترموديناميكية تكو ن نتيجتها الوحيدة هو استخراج كمية حرارة من خزان حراري وحيد ذو درجة حرارة ثابته و تحويله بالكامل الي عمل. اذن الوسط الخارجي يجب ان يوفر عمل اي ان $W_o > 0$ و بالتالي فان $Q_o \leq 0$ و هو يكافئ

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0. \quad (٤٦٧)$$

و هذا ما نريد.

اذا كان التحويل عكسي فاننا يمكننا ان نعيد نفس الخطوات من اجل التحويل العكسي $-\mathcal{O}$ الذي نعوض فيه $Q_i$ ب $-Q_i$ لنحصل علي

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0. \quad (٤٦٨)$$

من المعادلتين اعلاه نحصل من اجل التحويلات العكسية مباشرة علي

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i} = 0. \quad (٤٦٩)$$

و هذا يكمل البرهان علي مبرهنة كلوسيوس.

**لازمة كلوسيوس و تعريف الانتروبي:** التكامل

$$\oint \frac{dQ}{T}, \qquad (٤٧٠)$$

لا يتعلق بالطريق المتبع و يتعلق فقط بالحالتين الابتدائية و النهائية. البرهان سهل جدا يعتمد علي تطبيق مباشر لمبرهنة كلوسيوس. لنعتبر حالتين $A$ و $B$ و ليكن $I$ و $II$ طريقين مختلفين بين $A$ و $B$. ليكن $II^{'}$ الطريق العكسي ل $II$. باستعمال مبرهنة كلوسيوس لدينا

$$\int_I \frac{dQ}{T} + \int_{II'} \frac{dQ}{T} = 0. \qquad (٤٧١)$$

اذن مباشرة نستنتج

$$\int_I \frac{dQ}{T} = \int_{II} \frac{dQ}{T}. \qquad (٤٧٢)$$

يمكننا اذن ان نعرف دالة حالة جديدة $S$ هي الانتروبي [٣١] بالتفاضل التام

$$dS = \frac{dQ}{T}. \qquad (٤٧٣)$$

هذه العلاقة تعرف الانتروبي خلال تحويل عكسي متناه في الصغر. من التعريف اعلاه من الواضح ان انتروبي اي حالة ترموديناميكية $A$ هو الانتروبي خلال اي تحويل عكسي يربط بين حالة ابتدائية $O$ و الحالة $A$ و هو معرف فقط الي غاية ثابت تجميعي كيفي بالعلاقة

$$S(A) = \int_O^A \frac{dQ}{T}. \qquad (٤٧٤)$$

في المقابل فان الفرق في الانتروبي بين حالتين $A$ و $B$ هو معرف بدقة بالعلاقة

$$S(A) - S(B) = \int_B^A \frac{dQ}{T}. \qquad (٤٧٥)$$

الانتروبي هو مقدار تمديدي فقط في النهاية الترموديناميكية مثله مثل الطاقة الداخلية، و هو مقياس اللانظام او الفوضي في الجملة الترموديناميكية.

**المبدأ الثاني للترموديناميك (مرة اخري) :** انتروبي جملة معزولة حراريا لا يمكنه الا ان يزيد اي ان

$$\Delta S \geq 0. \qquad (٤٧٦)$$

من اجل الجمل الترموديناميكية العكسية فان $\Delta S = 0$ اما من اجل الجمل الترموديناميكية غير العكسية فان $\Delta S > 0$.

البرهان يجري كالاتي. لنعتبر حالتين ترموديناميكيتين $A$ و $B$ و ليكن $R$ طريق عكسي و $I$ طريق غير عكسي يربطان بين الحالتين $A$ و $B$. من اجل الطريق $R$ لدينا من التعريف

---
[٣١] entropy.

$$S(B)-S(A)=\int_R \frac{dQ}{T}. \quad (٤٧٧)$$

نعتبر التحويل الدوري المشكل من $I$ و عكس $R$. باستعمال مبرهنة كلوسيوس لدينا مباشرة

$$\int_I \frac{dQ}{T}-\int_R \frac{dQ}{T}\leq 0. \quad (٤٧٨)$$

اي

$$S(B)-S(A)\geq \int_I \frac{dQ}{T}. \quad (٤٧٩)$$

بصفة عامة لدينا

$$S(B)-S(A)\geq \int \frac{dQ}{T}. \quad (٤٨٠)$$

اذا اعتبرنا الان جملة معزولة حراريا اي لا تتبادل اي كمية حرارة مع الوسط الخارجي فان $dQ=0$ و بالتالي نحصل مباشرة من النتيجة اعلاه علي

$$S(B)-S(A)\geq 0. \quad (٤٨١)$$

اذن انتروبي جملة معزولة حراريا لا يتناقص ابدا.

علي الرغم من ان انتروبي جملة معزولة لا يمكنه الا ان يتزايد فان انتروبي الجمل غير المعزولة يمكنه ان يتناقص. اي ان تناقص الانتروبي لا يمكنه ان يتم الا بتبادل طاقة بين الجملة و الوسط الخارجي.

**التحويلات العكسية و غير العكسية (مرة اخري) :** الحالة الماكروسكوبية $X$ لجملة معزولة حراريا و متوازنة ترموديناميكيا تتعين بالكامل اذا علمنا الطاقة $E$، الحجم $V$ و عدد الجسيمات الميكروسكوبية $N_i$ المكونة لها. نفترض من اجل التبسيط ان كل الجسيمات الميكروسكوبية هي من نفس النوع. نكتب $X=(E,V,N)$. الانتروبي $S$ هو دالة في $X$. الفضاء الرباعي ذو الاحداثيات $E$، $V$، $N$ و $S$ هو فضاء الحالة لهذه الجملة الترموديناميكية. انظر الي الشكل 3.

اي نقطة من هذا الفضاء تمثل حالة توازن معينه للجملة الترموديناميكية. اي مسار داخل هذا الفضاء يمثل تحول ترموديناميكي شبه ساكن لانه عبارة عن توالي لحالات توازن ترموديناميكية. اذا كان التحول الترموديناميكي يتم بانتروبي ثابت فالتحول عكسي و هو يوافق خط افقي مستقيم داخل فضاء الحالة. في حالة اذا كان التحول يتم بانتروبي متزايد فانه تحول غير عكسي. كل تحول عكسي هو تحول شبه ساكن لكن العكس غير صحيح.

في الواقع توجد تحولات غير عكسية ليست شبه ساكنة. في هذه الحالة يحدث التحويل بتوالي حالات لا توازن و بالتالي فان هذه الحالات لا تنتمي الي الفضاء الرباعي $(S,X)$. حتي يتم وصف هذا التحويل ندخل متغيرات جديدة $Y$ التي تتعلق بطبيعة هذا التحويل. تطور الجملة يتم الان داخل الفضاء $(S,X,Y)$.

# المبدأ الثالث للترموديناميك

ذكرنا قبل قليل ان تعريف انتروبي حالة ترموديناميكية كيفية $A$ يعتمد علي وجود تحويلات عكسية تربط $A$ باي حالة مرجعية مختارة $O$. من اجل

معادلات الحالة التي تكافئ سطح حالة مشكل من ورقة [٣٢] واحدة فان كل الحالات الترمودناميكية تكون مرتبطة فيما بينها بتحويلات عكسية لانها تقع كلها علي هذه الورقة. بعبارة اخري فان الطريق العكسي الذي يربط $A$ و $O$ يوجد دائما في هذه الحالة.

اذا اعتبرنا من الجهة الاخري مادتين مختلفتين او مادة واحدة بطورين مختلفين فان معادلة الحالة تكافي سطح حالة قد يكون مشكل من اكثر من ورقة واحدة غير متصلة. في هذه الحالة فان الطريق العكسي الذي يربط بين $A$ و $O$ قد لا يوجد وبالتالي فان الفرق في الانتروبي لا يمكن تعريفه في هذه الحالة. اذن المبدأ الثاني للترموديناميک لا يمكن ان يعين بصورة وحيدة الفرق في الانتروبي بين حالتين $A$ و $B$ اذا كانت $A$ تخص مادة او طور و $B$ تخص مادة او طور اخر. المبدأ الثالث للانتروبي، الذي صاغه نارنست [٣٣] في 1905، يجعل تعريف الانتروبي وحيد في كل الحالات و من ضمنها الحالات المذكورة انفا. هذ المبدأ ينص علي الاتي:

انتروبي اي جملة ترموديناميكية في حالة توازن يساوي الصفر عند درجة حرارة الصفر المطلق:

$$S(0)=0. \tag{٤٨٢}$$

## الدوال الترموديناميكية

اول و اهم الدوال الترموديناميكية هي الطاقة الداخلية المعرفة ب

$$dU=dW+dQ=-PdV+TdS. \tag{٤٨٣}$$

$U$ هي مقدار تمديدي و بالتالي فهي دالة في المقادير التمديدية $S$، $V$ و $N$ اي

$$U=U(S,V,N). \tag{٤٨٤}$$

لان $U$ هي دالة حالة و باعتبار $S$ و $V$ كمتغيرات مستقلة فان

$$dU=(\frac{\partial U}{\partial S})_{V,N}dS+(\frac{\partial U}{\partial V})_{S,N}dV. \tag{٤٨٥}$$

بالمقارنه نحصل علي

$$T=(\frac{\partial U}{\partial S})_{V,N}\ ,\ -P=(\frac{\partial U}{\partial V})_{T,N}. \tag{٤٨٦}$$

اذا سمحنا ايضا لعدد الجسيمات بالتغير فاننا نحصل من الجهة الاخري علي

$$dU=(\frac{\partial U}{\partial S})_{V,N}dS+(\frac{\partial U}{\partial V})_{S,N}dV+(\frac{\partial U}{\partial N})_{V,S}dN. \tag{٤٨٧}$$

نعرف الكمون الكيميائي علي انه هو المتغير المرفق بالتغير في عدد الجسيمات اي

$$\mu=(\frac{\partial U}{\partial N})_{V,S}. \tag{٤٨٨}$$

[٣٢] sheet.
[٣٣] Nernst.

اي ان التغير في الطاقة الداخلية يعطي في العموم ب

$$dU = -PdV + TdS + \mu dN. \quad (٤٨٩)$$

الطاقة الداخلية هي دالة متجانسة ذات رتبة $1$ و بالتالي من اجل اي عدد حقيقي $\lambda$ لدينا

$$U(\lambda S, \lambda V, \lambda N) = \lambda U(S, V, N). \quad (٤٩٠)$$

بالاشتقاق بالنسبة الي $\lambda$ ثم وضع $\lambda = 1$ نحصل علي صيغة اولر [٣٤] للطاقة الداخلية:

$$U(S, V, N) = -PV + TS + \mu N. \quad (٤٩١)$$

نحصل علي الدوال الترموديناميكية الاخري عن طريق تحويلات لوجوندر للطاقة الداخلية. نعرف الطاقة الحرة لهلمولتز [٣٥] علي انها تحويل لوجوندر للطاقة الداخليةبالنسبة للمتغيرات $T \leftrightarrow S$ المعرف ب

$$F = F(T, V, N) = U(S, V, N) - TS = -PV + \mu N. \quad (٤٩٢)$$

$$dF = dU - dT.S - T.dS = -PdV + \mu dN - SdT. \quad (٤٩٣)$$

نعرف الكمون الترموديناميكي (او الطاقة الحرة) لجيبس [٣٦] علي انها تحويل لوجوندر للطاقة الحرة لهلمولتز بالنسبة للمتغيرات $P \leftrightarrow V$ المعرف ب

$$G = G(T, P, N) = F(T, V, N) + PV = \mu N. \quad (٤٩٤)$$

$$dG = -SdT + VdP + \mu dN. \quad (٤٩٥)$$

نعرف الانتالبي [٣٧] علي انه تحويل لوجوندر للطاقة الداخلية بالنسبة للمتغيرات $P \leftrightarrow V$ المعرف ب

$$H = H(S, P, N) = U(S, V, N) + PV = TS + \mu N. \quad (٤٩٦)$$

$$dH = dU + dP.V + P.dV = TdS + VdP + \mu dN. \quad (٤٩٧)$$

نختم هذا الفصل بالمبرهنات المفيدة التالية:

**مبرهنة** $1$: من اجل جملة معزولة ميكانيكيا عند درجة حرارة ثابته فان الطاقة الحرة لهلمولتز لا تتزايد ابدا. حالة التوازن هي الحالة التي تكون فيها الطاقة الحرة لهلمولتز اصغرية.

البرهان كما يلي. نعتبر تحويل ايزوحراري بين حالتين ترموديناميكيتين $A$ و $B$. من المبدأ الثاني لدينا

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} \leq S(B) - S(A). \quad (٤٩٨)$$

[٣٤] Euler.

[٣٥] Helmholtz free energy.

[٣٦] Gibbs thermodynamic potential.

[٣٧] enthalpy.

لان التحويل ايزوحراي فان $T$ ثابته و بالتالي

$$\frac{\Delta Q}{T} \leq \Delta S. \quad (٤٩٩)$$

$\Delta Q$ هي كمية الحرارة الممتصة خلال التحويل. لكن من المبدأ الاول لدينا

$$-\Delta W = -\Delta U + \Delta Q \leq -\Delta U + T\Delta S = -\Delta F. \quad (٥٠٠)$$

$\Delta W$ هو العمل الذي قامت به الجملة و $F$ هي الطاقة الحرة لهلمولتز. اذن نحصل علي

$$\Delta F \leq \Delta W. \quad (٥٠١)$$

من اجل التحويلات المعزولة ميكانيكيا لدينا $\Delta W = 0$ و بالتالي

$$\Delta F \leq 0. \quad (٥٠٢)$$

اذن الطاقة الحرة لهلمولتز لا تتزايد ابدا في هذه الحالة و في حالة التوازن (اي من اجل التحويلات العكسية) فان $\Delta F = 0$.

**مبرهنة** 2: من اجل جملة محفوظة عند درجة حرارة ثابته و ضغط ثابت فان الكمون الترموديناميكي لجيبس لا يتزايد ابدا. حالة التوازن هي الحالة التي يكون فيها الكمون الترموديناميكي لجيبس اصغري.

البرهان سهل جدا. من اجل درجة حرارة ثابته لدينا

$$\Delta F \leq \Delta W. \quad (٥٠٣)$$

من اجل ضغط ثابت نحصل مباشرة علي

$$\Delta G \leq 0. \quad (٥٠٤)$$

# تمارين

**تمرين** 1:

- في تجربة جول [٣٨] نسمح لغاز مثالي بالتمدد الحر في الفراغ من الحجم $V_1$ و درجة الحرارة $T_1$ الي الحجم $V_2 > V_1$ و درجة الحرارة $T_2$. تجريبيا نلاحظ ان $T_1 = T_2$. بين ان الطاقة الداخلية لغاز مثالي لا تتعلق الا بدرجة الحرارة.
- نعتبر الان تمدد ايزوحراري عكسي من الحالة $(T_1, V_1)$ الي الحالة $(T_2, V_2)$. احسب الفرق في الانتروبي.
- هل تمدد جول هو تحويل عكسي. احسب الفرق في الانتروبي في تجربة جول.

**تمرين** 2: الحراة النوعية تحت حجم او ضغط ثابت هي معطاة كالاتي

$$C_v = (\frac{dQ}{dT})_V \ , \ C_p = (\frac{dQ}{dT})_P. \quad (٥٠٥)$$

- باستعمال المبدأ الاول للترموديناميك استخرج معادلات ال $dQ$ ثم عبر عن $C_v$ و $C_p$ بدلالة الطاقة الداخلية $U$ و درجة الحرارة $T$.
- برهن علاقة ماير [٣٩] للغازات المثالية

$$C_p - C_v = nR. \quad (٥٠٦)$$

**تمرين** 3: دورة كارنو تمتص كمية حرارة $Q_2^{'} > 0$ عند درجة حرارة $T_2$ و تتخلص من كمية حرارة $Q_1^{'}$ عند درجة الحرارة $T_1 < T_2$. كمية الحرارة الكلية المتبادلة هي $Q = Q_2^{'} - Q_1^{'}$ و بالتالي فان العمل الكلي هو $W = -Q$ اي ان المردود هو

$$\eta = \frac{W}{Q_2^{'}} = 1 - \frac{Q_1^{'}}{Q_2^{'}}. \quad (٥٠٧)$$

تعريف درجة الحرارة المطلقة يعطي بالعلاقة التجريبية

$$\frac{Q_1^{'}}{Q_2^{'}} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (٥٠٨)$$

من الواضح انه لان $0 \leq \eta \leq 1$ فان درجة الحرارة المطلقة هي دائما اكبر او يساوي من الصفر.
بين انه باستعمال سلسلة من دورات كارنو التي تؤدي كلها نفس العمل $W$ والتي تمتص فيها كل دورة كمية الحرارة التي تتخلص منها الدورة السابقة يمكن الحصول علي سلم منتظم لدرجات الحرارة المطلقة.

---

[٣٨] Joule.
[٣٩] Mayer.

**تمرين** 4: نعتبر $1$ مول من غاز مثالي محتوي داخل اسطوانة مغلقة دياتارم، اي ذات جدران ناقلة مثالية للحرارة، احدي قاعدتيها عبارة عن مكبس متحرك. نضع الاسطوانه داخل خزان كبير مملوء بسائل درجة حرارته $T$.

- في البداية ضغط الغاز يساوي $P_1$ و حجمه يساوي $V_1$. نترك الغاز يتمدد بطريقة شبه ساكنة حتي يصبح حجمه $V_2$ و ضغطه $P_2$. احسب العمل المقدم من الغاز الي الوسط الخارجي.

- لنفترض الان ان التمدد كان بطريقة غير عكسية اين يتم تغيير ضغط الغاز من $P_1$ الي القيمة $P_2$ بغته. احسب العمل في هذه الحالة.

- لنفترض ان التمدد كان بطريقة غير عكسية اولا من الضغط $P_1$ الي الضغط $P_3 < P_1$ ثم من الضغط $P_3$ الي الضغط $P_2 < P_3$. احسب العمل في هذه الحالة. ماذا يمكنك ان تستنتج. خذ مثلا $P_1 = 3\ \mathrm{atm}$، $P_2 = 1\ \mathrm{atm}$، $P_3 = 2\ \mathrm{atm}$.

- لنفترض الان ان جدران الاسطوانة ادياباتيكية، اي عازلة مثالية للحرارة، و نفترض ان تمدد الغاز يتم عبر تحول عكسي. اوجد العلاقة بين الضغط و الحجم في هذا التحول. استخدم

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}. \qquad (٥٠٩)$$

- لنفترض ان الغاز المثالي هو غاز ثنائي الذرة [٤٠] و بالتالي فان $\gamma = 7/5$. اذا كان الحجم النهائي للغاز يساوي مرة و نصف حجمه الابتدائي، احسب درجة الحرارة النهائية $T_2$ بدلالة درجة الحرارة الابتدائية $T_1$. خذ مثلا $T_1 = 300\ \mathrm{K}$.

**تمرين** 5:

- الطاقة الداخلية لاي جملة هي دالة في $T$ و $V$. ما هو الشرط الذي يجب ان تحققه المشتقة الجزئية $(\partial U/\partial V)_T$ حتي يكون الانتروبي $S = S(T, V)$ دالة حالة.

- ماذا يمكن ان نستنتجه من اجل الغاز المثالي.

- احسب $S(T, V)$ في حالة الغاز المثالي.

**تمرين** 6:

- نضع سائل (ماء مثلا) داخل اسطوانة شاقولية ذات غطاء عبارة عن مكبس متحرك. لما نجذب علي المكبس فان الفراغ بين السائل و المكبس يمتلئ ببخار مشبع. ضغط البخار المشبع يتعلق بدرجة حرارة السائل فقط لا غير. الجملة الترموديناميكية سائل زائد مكبس تغمر في ترموستات ذو درجة حرارة $T$. صف المنحنيات ذات درجة الحرارة الثابته اي الايزوحراريات للجملة سائل زائد بخار داخل الفضاء $P - V$.

- نهتم بمجال درجات الحرارة اين يتواجد البخار و السائل في نفس الوقت. ليكن $V_1$ و $V_2$ حجمي السائل و البخار في وحدة الكتل و لتكن $U_1$ و $U_2$ طاقتي السائل و البخار في وحدة الكتل. المقادير $P$، $V_i$، $U_i$ هي دوال تابعة لدرجة الحرارة فقط. الكتلة الكلية للمادة المحتواة داخل الاسطوانة هي $m = m_1 + m_2$. نعتبر تحويل ايزوحراري متناه في الصغر في اثناءه كتلة $dm$ من السائل تتبخر.

[٤٠] diatomic.

- احسب التغير $dV$ في الحجم و التغير $dU$ في الطاقة الكلية للجملة. استنتج كمية الحرارة $\lambda = dQ/dm$ اللازمة من اجل تبخر و حدة من كتلة السائل.
- استنتج معادلة كلابيرون [٤١] التي تربط بين $P$، $T$، $\lambda$، $V_1$ و $V_2$.
- افترض ان السائل هو ماء و البخار هو غاز مثالي. باعتبار ان $V_2 >> V_1$ استخرج القانون الرابط بين $P$، $\lambda$ و $T$.

**تمرين** 7:

- بين انه اذا كانت $x$، $y$ و $z$ مرتبطة فيما بينها بمعادلة حالة فان

$$(\frac{\partial x}{\partial y})_z(\frac{\partial y}{\partial x})_z = 1\ ,\ (\frac{\partial x}{\partial y})_z(\frac{\partial y}{\partial z})_x = -(\frac{\partial x}{\partial z})_y. \quad (٥١٠)$$

- لتكن $f$ دالة في اثنين فقط من المتغيرات. بين ان

$$(\frac{\partial x}{\partial y})_f(\frac{\partial y}{\partial z})_f = (\frac{\partial x}{\partial z})_f. \quad (٥١١)$$

**تمرين** 8:

- باستعمال المبدأ الثاني للترموديناميك في معادلة ال $dQ$ الاولي استخرج العلاقة

$$(\frac{\partial P}{\partial T})_V = \frac{1}{T}\left[P + (\frac{\partial U}{\partial V})_T\right]. \quad (٥١٢)$$

اعد كتابة معادلة ال $dQ$ الاولي باستعمال هذه العلاقة.

- اعد كتابة معادلة ال $dQ$ الثانية بالمرور عبر نفس الخطوات. نحصل هكذا علي ما يسمي بمعادلات ال $TdS$.
- اعد كتابة معادلات ال $TdS$ باستعمال معاملات التمدد الحراري $\alpha$، الانضغاطية الايزوحرارية $\kappa_T$ و الانضغاطية الادياباتيكية $\kappa_S$ المعرفة ب

$$\alpha = \frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial T})_P\ ,\ \kappa_T = -\frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial P})_T\ ,\ \kappa_S = -\frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial P})_S. \quad (٥١٣)$$

هذه المعاملات هي التي تقاس تجريبيا.

- احسب $C_p - C_v$ و $\gamma = C_p/C_v$.

**تمرين** 9:

- انطلاقا من المبدأ الاول للترموديناميك $dU = -PdV + TdS$ استخرج علاقات ماكسويل

$$(\frac{\partial U}{\partial V})_S = -P\ ,\ (\frac{\partial U}{\partial S})_V = T. \quad (٥١٤)$$

- انطلاقا من تعريف التغير في الطاقة الحرة لهلمولتز $dF = -PdV - SdT$، التغير في الكمون الترموديناميكي $dG = -SdT + VdP$ و التغير في الانتالبي $dH = TdS + VdP$ استخرج علاقات ماكسويل الستة الاخري.

---
[٤١] Clapeyron.

**تمرين** 10: تتميز مادة بالخواص التالية

- العمل خلال تحويل ايزوحراري $T_0$ يعطي ب

$$W = -RT_0 \ln \frac{V}{V_0}. \quad (٥١٥)$$

- الانتروبي يعطي ب

$$S = R\frac{V}{V_0}(\frac{T}{T_0})^a. \quad (٥١٦)$$

حيث $T_0$، $V_0$ و $a$ ثوابت.

- احسب الطاقة الحرة لهلمولتز.
- احسب معادلة الحالة.
- احسب العمل من اجل تحويل ايزوحراري $T$ كيفي.

**تمرين** 11: نعتبر تحويل ترموديناميكي عكسي دوري مشكل من ستة قطع مستقيمة في المخطط $T-S$ كالاتي:

- تحويل ايزوحراري عند درجة الحرارة $T_1$ من الانتروبي $S_1$ الي الانتروبي $S_2 > S_1$.
- تحويل عند انتروبي ثابت معطي ب $S_2$ من درجة الحرارة $T_1$ الي درجة الحرارة $T_3 > T_1$.
- تحويل ايزوحراري عند درجة الحرارة $T_3$ من الانتروبي $S_2$ الي الانتروبي $S_3 < S_2$.
- تحويل عند انتروبي ثابت معطي ب $S_3$ من درجة الحرارة $T_3$ الي درجة الحرارة $T_2 > T_3$.
- تحويل ايزوحراري عند درجة الحرارة $T_2$ من الانتروبي $S_3$ الي الانتروبي $S_1 < S_3$.
- تحويل عند انتروبي ثابت معطي ب $S_1$ من درجة الحرارة $T_2$ الي درجة الحرارة $T_1 < T_2$.

احسب العمل و كمية الحرارة الممتصة ثم استنتج المردود. بين ان دورة كارنو التي تعمل بين درجتي الحرارة الاعلي و الاخفض لها مردود اعلي.

# حلول

**تمرين** 1:

- لان الغاز يتمدد بشكل حر في الفراغ فان الضغط عليه صفر منذ بداية التحول و بالتالي فان العمل ينعدم اي

$$\Delta W = 0. \tag{٥١٧}$$

لان درجة الحرارة لا تتغير فان كمية الحرارة المتبادلة مع الوسط الخارجي تنعدم اي

$$\Delta Q = 0. \tag{٥١٨}$$

اذن

$$\Delta U = 0 \leftrightarrow U_1 = U_2. \tag{٥١٩}$$

لان $U$ هي دالة حالة يمكن ان تتعلق فقط ب $T$ و $V$، و لان $U$ هي نفسها من اجل $(T_1, V_1)$ و $(T_2 = T_1, V_2 > V_1)$ فان $U$ لا تتعلق ب $V$ و تتعلق فقط ب $T$.

- لان الغاز مثالي فان $U = U(T)$ و بالتالي فانه خلال التحويل الايزوحراري لدينا $\Delta U = 0$ اي $\Delta Q = -\Delta W$. نحسب اذن

$$\Delta W = -\int PdV = -RT\ln\frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \Delta Q = RT\ln\frac{V_2}{V_1}. \tag{٥٢٠}$$

لان التحويل عكسي ايزوحراري فان الفرق في انتروبي الغاز هو يعطي ب

$$(\Delta S)_{\text{gas}} = \int\frac{dQ}{T} = \frac{\Delta Q}{T} = R\ln\frac{V_2}{V_1}. \tag{٥٢١}$$

$\Delta Q$ هي كمية الحرارة الممتصة من الغاز اي ان $-\Delta Q$ هي كمية الحرارة التي يفقدها الخزان الحراري $T$. الفرق في انتروبي الخزان الحراري هو اذن

$$(\Delta S)_{\text{reservoir}} = \int\frac{dQ}{T} = -\frac{\Delta Q}{T} = -R\ln\frac{V_2}{V_1}. \tag{٥٢٢}$$

الفرق في الانتروبي الكلي ينعدم كما يجب بالنسبة لتحويل عكسي. يمكن استخدام العمل المقدم، الذي يمكن تخزينه في نابض مثلا، لعكس التحويل.

- تمدد جول هو تحويل غير عكسي و بالتالي لا يمكن تطبيق العلاقة $dS = dQ/T$. لكن لان الانتروبي هو دالة حالة لا تتعلق الا بالحالتين الابتدائية و النهائية فان الفرق في انتروبي الغاز ما زال يعطي ب

$$(\Delta S)_{\text{gas}} = R\ln\frac{V_2}{V_1}. \tag{٥٢٣}$$

في هذه الحالة لانه لا يوجد تبادل حراري بين الغاز و الخزان فان انتروبي الخزان يتعدم اي

$$(\Delta S)_{\text{reservoir}} = 0. \tag{٥٢٤}$$

الانتروبي الكلي اكبر من الصفر يعطي ب

$$(\Delta S)_{\text{total}} = R\ln\frac{V_2}{V_1}. \tag{٥٢٥}$$

تم تضييع كمية العمل $W$ لان التحويل عكسي.

**تمرين** 2: الطاقة الداخلية هي مقدار تمديدي يتعلق بدرجة الحرارة و الحجم اي

$$U = U(T, V). \tag{٥٢٦}$$

اذن

$$dU = (\frac{\partial U}{\partial T})_V dT + (\frac{\partial U}{\partial V})_T dV. \tag{٥٢٧}$$

لدينا ايضا

$$dU = dW + dQ = -PdV + dQ. \tag{٥٢٨}$$

من هاتين المعادلتين نستنتج

$$dQ = (\frac{\partial U}{\partial T})_V dT + \left[P + (\frac{\partial U}{\partial V})_T\right] dV. \tag{٥٢٩}$$

هذه هي معادلة ال $dQ$ الاولي. تحت حجم ثابت نحصل علي

$$dQ = (\frac{\partial U}{\partial T})_V dT. \tag{٥٣٠}$$

اذن

$$C_v = (\frac{dQ}{dT})_V = (\frac{\partial U}{\partial T})_V. \tag{٥٣١}$$

اذا اخترنا $T$ و $P$ كمتغيرات مستقلة في الطاقة الداخلية عوض $T$ و $V$ فاننا نحصل علي

$$\begin{aligned} dU &= (\frac{\partial U}{\partial T})_P dT + (\frac{\partial U}{\partial P})_T dP \\ &= -PdV + dQ \\ &= -P\left[(\frac{\partial V}{\partial T})_P dT + (\frac{\partial V}{\partial P})_T dP\right] + dQ. \end{aligned} \tag{٥٣٢}$$

اذن

$$dQ = \left[(\frac{\partial U}{\partial T})_P + P(\frac{\partial V}{\partial T})_P\right] dT + \left[(\frac{\partial U}{\partial P})_T + P(\frac{\partial V}{\partial P})_T\right] dP. \tag{٥٣٣}$$

هذه هي معادلة ال $dQ$ الثانية. تحت ضغط ثابت

$$dQ = \left[(\frac{\partial U}{\partial T})_P + P(\frac{\partial V}{\partial T})_P\right] dT. \tag{٥٣٤}$$

اذن

$$C_p = (\frac{dQ}{dT})_P = (\frac{\partial U}{\partial T})_P + P(\frac{\partial V}{\partial T})_P. \tag{٥٣٥}$$

يمكن كتابة هذه المعادلة علي الشكل

$$C_p = (\frac{dQ}{dT})_P = (\frac{\partial H}{\partial T})_P. \tag{٥٣٦}$$

$H$ هو الانتالبي

$$H = U + PV. \quad (٥٣٧)$$

يمكن استخراج معادلة ال $dQ$ الاخيرة بنفس الطريقة لنجد

$$dQ = (\frac{\partial U}{\partial P})_V dP + \left[P + (\frac{\partial U}{\partial V})_P\right] dV. \quad (٥٣٨)$$

بالنسبة للغازات المثالية لدينا

$$PV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{P}. \quad (٥٣٩)$$

$$(\frac{\partial V}{\partial T})_P = \frac{nR}{P} \Rightarrow P(\frac{\partial V}{\partial T})_P = nR. \quad (٥٤٠)$$

بالتالي

$$\begin{aligned} C_p - C_v &= (\frac{\partial U}{\partial T})_P + P(\frac{\partial V}{\partial T})_P - (\frac{\partial U}{\partial T})_V \\ &= nR, \end{aligned} \quad (٥٤١)$$

لان الطاقة الطاقة الداخلية لا تتعلق الا بدرجة الحرارة بالنسبة الي غاز مثالي اي

$$(\frac{\partial U}{\partial T})_P = (\frac{\partial U}{\partial T})_V. \quad (٥٤٢)$$

**تمرين** 3: مباشرة لدينا في كل دورة $n$:

$$-W = Q'_{n+1} - Q'_n. \quad (٥٤٣)$$

ايضا

$$\frac{Q'_{n+1}}{Q'_n} = \frac{T_{n+1}}{T_n} \Rightarrow \frac{T_{n+1}}{Q'_{n+1}} = \frac{T_n}{Q'_n} = x. \quad (٥٤٤)$$

$x$ لا يتعلق ب $n$. باستخدام العلاقة الاخيرة في العلاقة الاولي نحصل علي

$$T_{n+1} = T_n - xW. \quad (٥٤٥)$$

باختيار $T_1 = 0\,\mathrm{K}$ و $xW = -1\,\mathrm{K}$ نحصل علي سلم منتظم لدرجة الحرارة المطلقة.

**تمرين** 4:

- من اجل غاز مثالي لدينا

$$PV = RT. \quad (٥٤٦)$$

العمل في الحالة الاولي التي هي عبارة عن تحويل عكسي ايزوحراري هو

$$W = -\int PdV = -RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = -RT\ln\frac{V_2}{V_1} = RT\ln\frac{P_2}{P_1}. \quad (٥٤٧)$$

- العمل في الحالة الثانية التي هي عبارة عن تحويل غير عكسي يتم تغيير الضغط فيه بغتته من $P_1$ الي $P_2$ و بالتالي فان الضغط يساوي $P_2$ خلال كل التحويل هو

$$W=-\int PdV=-P_2\int_{V_1}^{V_2}dV=RT(\frac{P_2}{P_1}-1). \quad (٥٤٨)$$

- في الحالة الثالثة نركب تحويلين شبيهين بالتحويل الثاني. اذن لدينا

$$\begin{aligned} P_1\longrightarrow P_3 &: W=RT(\frac{P_3}{P_1}-1)\\ P_3\longrightarrow P_2 &: W=RT(\frac{P_2}{P_3}-1). \end{aligned} \quad (٥٤٩)$$

اذن العمل الكلي في الحالة الثالثة هو

$$W=RT(\frac{P_3}{P_1}-1)+RT(\frac{P_2}{P_3}-1). \quad (٥٥٠)$$

العمل بالقيمة المطلقة هو اعظمي في التحويل شبه الساكن العكسي.

- الحالة الرابعة هي تحويل عكسي اديباتيكي اي

$$dQ=0\Rightarrow dU=dW=-PdV. \quad (٥٥١)$$

من اجل غاز مثالي

$$U=U(T)\ ,\ dU=C_vdT=C_v\frac{V}{R}dP+C_v\frac{P}{R}dV. \quad (٥٥٢)$$

من المعادلتين اعلاه نحصل علي

$$VdP=-P(1+\frac{R}{C_v})dV=-P\gamma dV. \quad (٥٥٣)$$

المكاملة تعطي مباشرة

$$PV^{\gamma}=\text{constant}. \quad (٥٥٤)$$

- لدينا مباشرة

$$P_1V_1^{\gamma}=P_2V_2^{\gamma}\Rightarrow T_1V_1^{\gamma-1}=T_2V_2^{\gamma-1}. \quad (٥٥٥)$$

اذن

$$T_2=T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}. \quad (٥٥٦)$$

**تمرين** 5:

- **ننطلق من**

$$dU = dW + dQ = -PdV + TdS \Rightarrow dS = \frac{1}{T}(\frac{\partial U}{\partial T})_V dT + \frac{1}{T}\big(P + (\frac{\partial U}{\partial V})_T\big)dV. \quad (٥٥٧)$$

**حتي تكون** $S$ **دالة حالة يجب ان يكون لدينا**

$$(\frac{\partial S}{\partial T})_V = \frac{1}{T}(\frac{\partial U}{\partial T})_V \Rightarrow \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T}. \quad (٥٥٨)$$

$$(\frac{\partial S}{\partial V})_T = \frac{1}{T}\big(P + (\frac{\partial U}{\partial V})_T\big) \Rightarrow \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = -\frac{1}{T^2}\big(P + (\frac{\partial U}{\partial V})_T\big) + \frac{1}{T}\big((\frac{\partial P}{\partial T})_V + \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V}\big) \quad (٥٥٩)$$

**بمقارنة المعادلتين اعلاه نحصل علي العلاقة**

$$(\frac{\partial U}{\partial V})_T = -P + T(\frac{\partial P}{\partial T})_V. \quad (٥٦٠)$$

- **من اجل الغاز المثالي لدينا معادلة الحالة**

$$P = \frac{RT}{V} \Rightarrow T(\frac{\partial P}{\partial T})_V = P. \quad (٥٦١)$$

**اذن**

$$(\frac{\partial U}{\partial V})_T = 0 \Rightarrow U = U(T). \quad (٥٦٢)$$

**الطاقة الداخلية لغاز مثالي لا تتعلق الا بدرجة حرارته.**

- **نحسب من اجل الغاز المثالي**

$$(\frac{\partial S}{\partial T})_V = \frac{1}{T}(\frac{\partial U}{\partial T})_V = \frac{C_v}{T}. \quad (٥٦٣)$$

$$(\frac{\partial S}{\partial V})_T = \frac{1}{T}\big(P + (\frac{\partial U}{\partial V})_T\big) = \frac{P}{T} = \frac{R}{V}. \quad (٥٦٤)$$

**بالتالي**

$$\begin{aligned} dS &= \frac{C_v}{T}dT + \frac{R}{V}dV \\ &= C_v d\ln T + R d\ln V. \end{aligned} \quad (٥٦٥)$$

**المكاملة هنا سهلة و نحصل مباشرة علي**

$$\begin{aligned} S &= S_0 + C_v \ln T + R \ln V \\ &= S_0 + C_v \ln T V^{\frac{R}{C_v}} \\ &= S_0 + C_v \ln T V^{\gamma - 1}. \end{aligned} \quad (٥٦٦)$$

**تمرين** 6:

- انظر الي الشكل 4. الخط المستقيم يوافق التوازن بين السائل و البخار من اجل درجة حرارة معينه. خلال هذا التوازن فان تناقص الحجم لا يؤدي الي تغير في الضغط لكن يؤدي فقط الي تغير في كتلة السائل. تحت حجم معين فانه لا يتبقي الا السائل في الاسطوانة و اي تناقص في الحجم هنا يؤدي الي تزايد في الضغط. فوق حجم معين فانه لا يوجد الا بخار في الاسطوانة و اي تزايد في الحجم هنا يؤدي الي تناقص في الضغط.

  اذا زدنا درجة الحرارة فان ضغط البخار المشبع يزداد و يضيق الخط المستقيم الموافق للتوازن. اذا تعدت درجة الحرارة $T$ درجة حرارة حرجة $T_c$ فان البخار فقط هو الذي يتبقي في الاسطوانة مهما كان الحجم.

- ○ الحجم الكلي و الطاقة الداخلية الكلية يعطيان بالمعادلات

$$V = m_1V_1 + m_2V_2. \tag{٥٦٧}$$

$$U = m_1U_1 + m_2U_2. \tag{٥٦٨}$$

اذا كانت $dm$ هي كتلة السائل التي تبخرت خلال التحويل الايزوحراري المتناه في الصغر فان التغير في الحجم و التغير في الطاقة الداخلية يعطيان ب

$$V + dV = (m_1 - dm)V_1 + (m_2 + dm)V_2 \Rightarrow dV = (V_2 - V_1)dm. \tag{٥٦٩}$$

$$U + dU = (m_1 - dm)U_1 + (m_2 + dm)U_2 \Rightarrow dU = (U_2 - U_1)dm. \tag{٥٧٠}$$

كمية الحرارة في وحدة الكتل تعطي اذن ب

$$\lambda = \frac{dQ}{dm} = \frac{dU}{dm} + P\frac{dV}{dm} = U_2 - U_1 + P(V_2 - V_1). \tag{٥٧١}$$

○ من النتائج اعلاه لدينا مباشرة

$$dU = (U_2 - U_1)dm = \frac{U_2 - U_1}{V_2 - V_1}dV \Rightarrow (\frac{\partial U}{\partial V})_T = \frac{U_2 - U_1}{V_2 - V_1}. \tag{٥٧٢}$$

لكننا نعرف ان

$$(\frac{\partial U}{\partial V})_T = T(\frac{\partial P}{\partial T})_V - P. \tag{٥٧٣}$$

اذن نحصل علي

$$\frac{U_2 - U_1}{V_2 - V_1} = T\frac{dP}{dT} - P \Rightarrow \frac{dP}{dT} = \frac{1}{T}\frac{\lambda}{V_2 - V_1}. \tag{٥٧٤}$$

هذه هي معادلة كلابيرون.

- اذا كان حجم البخار اكبر بكثير من حجم السائل اي $V_2 >> V_1$ نحصل علي

$$\frac{dP}{dT} = \frac{1}{T}\frac{\lambda}{V_2}. \tag{٥٧٥}$$

اذا افترضنا ايضا ان البخار هو غاز مثالي فان

$$V_2 = \frac{nRT}{P}. \tag{٥٧٦}$$

اذن

$$\frac{dP}{P} = \frac{\lambda}{nR}\frac{dT}{T^2} \Rightarrow P = P_0 \exp(-\frac{\lambda}{nRT}). \tag{٥٧٧}$$

**تمرين** 7:

- كمثال نعتبر $x = T$، $y = V$ و $z = P$. نأخذ $T$ و $V$ هي المتغيرات المستقلة ونعبر عن $P$ بدلالتهما. بالتالي

$$\begin{aligned} dP &= (\frac{\partial P}{\partial T})_V dT + (\frac{\partial P}{\partial V})_T dV \\ &= (\frac{\partial P}{\partial T})_V \left((\frac{\partial T}{\partial V})_P dV + (\frac{\partial T}{\partial P})_V dP\right) + (\frac{\partial P}{\partial V})_T dV. \end{aligned} \tag{٥٧٨}$$

نستنتج اذن

$$(\frac{\partial P}{\partial T})_V(\frac{\partial T}{\partial P})_V = 1\ ,\ (\frac{\partial P}{\partial T})_V(\frac{\partial T}{\partial V})_P = -(\frac{\partial P}{\partial V})_T. \tag{٥٧٩}$$

- كمثال نعتبر $f = S$. لدينا $f = f(x, y)$. نأخذ $x$ كدالة في $f$ و $y$. نحصل مباشرة علي العلاقات

$$(\frac{\partial f}{\partial x})_y(\frac{\partial x}{\partial f})_y = 1. \tag{٥٨٠}$$

$$(\frac{\partial x}{\partial f})_y(\frac{\partial f}{\partial y})_x = -(\frac{\partial x}{\partial y})_f. \tag{٥٨١}$$

من الجهة الاخري اذا اعتبرنا $f$ دالة في $x$ و $z$ فانه يجب ان نعبر عن $y$ بدلالة $x$ و $z$. نحصل علي العلاقة

$$(\frac{\partial f}{\partial y})_x(\frac{\partial y}{\partial z})_x = (\frac{\partial f}{\partial z})_x. \tag{٥٨٢}$$

نحسب الان

$$\begin{aligned} (\frac{\partial x}{\partial y})_f(\frac{\partial y}{\partial z})_f(\frac{\partial z}{\partial x})_f &= -(\frac{\partial f}{\partial y})_x(\frac{\partial z}{\partial f})_x.(\frac{\partial f}{\partial z})_y(\frac{\partial x}{\partial f})_y.(\frac{\partial f}{\partial x})_z(\frac{\partial y}{\partial f})_z \\ &= -(\frac{\partial z}{\partial y})_x.(\frac{\partial x}{\partial z})_y.(\frac{\partial y}{\partial x})_z \\ &= 1. \end{aligned} \tag{٥٨٣}$$

**تمرين** 8:

- معادلة ال $dQ$ الاولي تعطي ب

$$\begin{aligned} dQ &= (\frac{\partial U}{\partial T})_V dT + \left[P + (\frac{\partial U}{\partial V})_T\right] dV \\ TdS &= C_v dT + \left[P + (\frac{\partial U}{\partial V})_T\right] dV. \end{aligned} \quad (٥٨٤)$$

لان الانتروبي هو دالة حالة فانه لدينا مباشرة

$$\frac{\partial}{\partial V}_T \frac{C_v}{T} = \frac{\partial}{\partial T}_V \left[P + (\frac{\partial U}{\partial V})_T\right]. \quad (٥٨٥)$$

نحصل علي

$$(\frac{\partial P}{\partial T})_V = \frac{1}{T}\left[P + (\frac{\partial U}{\partial V})_T\right]. \quad (٥٨٦)$$

بالتعويض فان معادلة ال $dQ$ الاولي تصبح

$$TdS = C_v dT + T(\frac{\partial P}{\partial T})_V dV. \quad (٥٨٧)$$

- معادلة $dQ$ الثانية هي

$$\begin{aligned} dQ &= \left[(\frac{\partial U}{\partial T})_P + P(\frac{\partial V}{\partial T})_P\right] dT + \left[(\frac{\partial U}{\partial P})_T + P(\frac{\partial V}{\partial P})_T\right] dP \\ TdS &= C_p dT + \left[(\frac{\partial U}{\partial P})_T + P(\frac{\partial V}{\partial P})_T\right] dP. \end{aligned} \quad (٥٨٨)$$

بالمرور عبر نفس الخطوات يمكن ان نبين ان

$$-T(\frac{\partial V}{\partial T})_P = (\frac{\partial U}{\partial P})_T + P(\frac{\partial V}{\partial P})_T. \quad (٥٨٩)$$

اذن معادلة ال $dQ$ الثانية تأخذ الشكل

$$TdS = C_p dT - T(\frac{\partial V}{\partial T})_P dP. \quad (٥٩٠)$$

- معادلة ال $dQ$ الثانية نعبر عليها مباشرة بدلالة معامل التمدد الحراري $\alpha$ كالتالي

$$TdS = C_p dT - \alpha T V dP. \quad (٥٩١)$$

معادلة $dQ$ الاولي تحتاج الي عمل اكثر باستعمال نتائج التمرين السابق. لدينا

$$\begin{aligned} (\frac{\partial P}{\partial T})_V &= -(\frac{\partial P}{\partial V})_V (\frac{\partial V}{\partial T})_V \\ &= \frac{\alpha}{\kappa_T}. \end{aligned} \quad (٥٩٢)$$

اذن معادلة $dQ$ الاولي يمكن ان نعبر عليها بدلالة معامل التمدد الحراري $\alpha$ و معامل الانضغاطية الايزوحرارية كالتالي

$$TdS = C_v dT + \frac{\alpha}{\kappa_T} T dV. \quad (٥٩٣)$$

- بمساواة معادلتي ال $dQ$ اعلاه نحصل مباشرة علي

$$C_p dT - \alpha TV dP = C_v dT + \frac{\alpha}{\kappa_T} T dV. \quad (٥٩٤)$$

نأخذ كمتغيرات مستقلة $P$ و $V$. نصل الي المعادلة

$$\left((C_p - C_v)(\frac{\partial T}{\partial V})_P - \frac{\alpha}{\kappa_T} T\right) dV + \left((C_p - C_v)(\frac{\partial T}{\partial P})_V - \alpha TV\right) dP = 0 \quad (٥٩٥)$$

منه نستنتج ان

$$C_p - C_v = \frac{\alpha^2}{\kappa_T} TV. \quad (٥٩٦)$$

من الجهة الاخري فانه لدينا من اجل التحويلات الادياباتيكية

$$C_p = \alpha TV(\frac{\partial P}{\partial T})_S \ , \ C_v = -\frac{\alpha T}{\kappa_T}(\frac{\partial V}{\partial T})_S. \quad (٥٩٧)$$

اذن لدينا

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{C_p}{C_v} \\ &= -V\kappa_T(\frac{\partial P}{\partial T})_S(\frac{\partial T}{\partial V})_S \\ &= -V\kappa_T(\frac{\partial P}{\partial V})_S \\ &= \frac{\kappa_T}{\kappa_S}. \end{aligned} \quad (٥٩٨)$$

**تمرين** 10:

- الطاقة الحرة لهلمولتز تعطي ب

$$\begin{aligned} dF &= -PdV - SdT \\ &= dW - SdT. \end{aligned} \quad (٥٩٩)$$

خلال التحويل الايزوحراري $T_0$ لدينا

$$dF = dW \Rightarrow F(T_0, V) = W = -RT_0 \ln \frac{V}{V_0}. \quad (٦٠٠)$$

من جهة اخري خلال التحويل تحت الحجم الثابت $V_0$ لدينا

$$dF = -SdT = -R\frac{V}{V_0}(\frac{T}{T_0})^a dT \Rightarrow F(T, V) = -\frac{R}{a+1}\frac{V}{V_0} T_0 (\frac{T}{T_0})^{a+1} + f(V). \quad (٦٠١)$$

بالتعويض ب $T = T_0$ في المعادلة الاخيرة نحصل علي

$$F(T_0, V) = -\frac{R}{a+1}\frac{V}{V_0} T_0 + f(V). \quad (٦٠٢)$$

بالمقارنة بالمعادلة السابقة نحصل علي

$$f(V) = -RT_0 \ln \frac{V}{V_0} + \frac{R}{a+1}\frac{V}{V_0}T_0. \tag{٦٠٣}$$

تعطي الطاقة الحرة اذن بالمعادلة

$$F(T,V) = -RT_0 \ln \frac{V}{V_0} + \frac{R}{a+1}\frac{V}{V_0}T_0\big(1 - \frac{T^{a+1}}{T_0^{a+1}}\big). \tag{٦٠٤}$$

- معادلة الحالة يمكن ان نحصل عليها من علاقة ماكسويل

$$\begin{aligned} -P &= (\frac{\partial F}{\partial V})_T \\ &= -RT_0\frac{1}{V} + \frac{R}{a+1}\frac{T_0}{V_0}\big(1 - \frac{T^{a+1}}{T_0^{a+1}}\big). \end{aligned} \tag{٦٠٥}$$

- العمل من اجل درجة حرارة ثابتة $T$ كيفية يحسب مباشرة كالعادة بالعلاقة

$$\begin{aligned} W &= -\int PdV \\ &= \int \Big[-RT_0\frac{1}{V} + \frac{R}{a+1}\frac{T_0}{V_0}\big(1 - \frac{T^{a+1}}{T_0^{a+1}}\big)\Big]dV \\ &= -RT_0 \ln \frac{V}{V_0} + \frac{R}{a+1}\frac{T_0}{V_0}(V - V_0)\big(1 - \frac{T^{a+1}}{T_0^{a+1}}\big). \end{aligned} \tag{٦٠٦}$$

**تمرين** 11: التحويل عكسي دوري اذن

$$\Delta U = 0. \tag{٦٠٧}$$

العمل اذن

$$\Delta W = -\Delta Q. \tag{٦٠٨}$$

لان التحويل عكسي لدينا الاتي

$$dQ = TdS. \tag{٦٠٩}$$

$$\Delta Q = \Delta Q_1 + 0 + \Delta Q_3 + 0 + \Delta Q_2 + 0. \tag{٦١٠}$$

$$\Delta Q_1 = T_1(S_2 - S_1) = B. \tag{٦١١}$$

$$\Delta Q_3 = T_3(S_3 - S_2). \tag{٦١٢}$$

$$\Delta Q_2 = T_2(S_1 - S_3). \tag{٦١٣}$$

$$\Delta Q_3 + \Delta Q_2 = -A - B. \quad (٦١٤)$$

اذن نحصل علي

$$\Delta Q = -A \Rightarrow \Delta W = A. \quad (٦١٥)$$

كمية الحرارة الممتصة

$$\Delta Q = -\Delta Q_3 - \Delta Q_2 = A + B. \quad (٦١٦)$$

اذن المردود هو

$$\eta = \frac{A}{A+B}. \quad (٦١٧)$$

دورة كارنو التي تعمل بين $T_1$ و $T_2$ تعطي عمل اكبر اي $A$ يزداد لكن $B$ يبقي نفسه اذن المردود يزداد.

# مدخل الي الميكانيك الاحصائي الكلاسيكي: المجموعة الميكروقانونية

## الحالات الميكروسكوبية

نحدد علي المستوي الماكروسكوبي حالة جملة ترموديناميكية عن طريق اعطاء قيم محددة لكل المتغيرات الترموديناميكية المستقلة خطيا و هذا ما يحدد الحالة الماكروسكوبية [٤٢] للجملة. هذه الحالة الماكروسكوبية الواحدة تقابل عدد هائل من الحالات الميكروسكوبية [٤٣] للجملة التي يتم في كل واحدة منها تحديد حالة كل المكونات الجزئية او الذرية اوالنووية لهذه الجملة باستعمال درجات الحرية المعروفة باسم الاعداد الكمية، اي باستعمال الميكانيك الكمي، رغم انه في بعض الاحيان القليلة تكون درجات الحرية الكلاسيكية كافية.

لان عدد المكونات الذرية كبير جدا فان استعمال التقنيات الاحصائية لدراسة الحالات الميكروسكوبية امر لابد منه و ايضا يمكن ان نري تقريبا بوضوح لماذا يمكن لعدد كبير من الحالات الميكروسكوبية ان يقابل حالة ماكروسكوبية واحدة. مثلا فان عدد الحالات الميكروسكوبية $\Omega(E)$ التي تقابل الحالة الماكروسكوبية التي تكون فيها طاقة الجملة تساوي $E$، بافتراض ان هناك $n$ درجة حرية في الجملة، يعطي بالعلاقة التقريبية

$$\Omega(E) \sim E^n. \qquad (٦١٨)$$

من اجل جملة مشكلة من $N$ جسيم سلمي حر داخل علبة مكعبة فان $n = 3N$.

عدد الحالات الميكروسكوبية $\Omega(E)$ يتعلق ايضا و بقوة علي طبيعة الجسيمات المكونة للجملة هل هي متطابقة ام لا و ايضا علي سبين هذه الجسيمات هل هو عدد صحيح (بوزونات) او عدد نصف صحيح (فرميونات)، و هذا العدد يلعب دور مهم جدا كما سنري في الميكانيك الاحصائي، كما ان حسابه هو عملية ليست بالبسيطة عموما.

---

[٤٢] macrostate.

[٤٣] microstates.

# مثال: نموذج ايزينغ - المشاء العشوائي

نموذج ايزينغ [٤٤] في بعد واحد يتشكل من $N$ ذرة ذات سبين $1/2$ علي شبكة خطية. في غياب حقل مغناطيسي خارجي فان احتمال ان تكون المركبة $S_3$ للسبين مساوية ل $+1/2$ و $-1/2$ هو $p = 1/2$ و $q = 1/2$ علي التوالي. عدد الحالات الميكروسكوبية الكلي للجملة هو

$$\Omega(N) \sim 2^N. \qquad (٦١٩)$$

اذا كان $n_1$ هو عدد الذرات التي سبينها علوي و $n_2$ هو عدد الذرات التي سبينها سفلي فان مركبة السبين الكلية هي

$$S_3 = \sum_{i=1}^{N} S_{3,i} = \frac{1}{2}(n_1 - n_2) = \frac{1}{2}(2n_1 - N). \qquad (٦٢٠)$$

مركبة السبين الكلية هذه تلعب نفس دور الانتقال $x = (n_1 - n_2)l$ في مسألة المشاء العشوائي كما سنري لاحقا. الحالة الماكروسكوبية للجملة محددة في هذه الحالة بقيمة $S_3$. عبارة $n_1$ بدلالة $S_3$ تعطي ب

$$n_1 = \frac{2S_3 + N}{2}. \qquad (٦٢١)$$

عدد الحالات الميكروسكوبية التي لها سبين $S_3$ يساوي الي عدد الطرق التي يمكننا فيها اختيار $n_1$ سبين من بين ال $N$ سبين. هذا العدد يعطي بعدد التبديلات الكلي $N!$ مقسوم علي جداء عددي التبديلات الجزئيين $n_1!$ و $n_2!$ لان الترتيب بين السبينات العلوية او السفلية فيما بينها غير مهم. اذن

$$\Omega(n_1, N) = C_{n_1}^{N} = \frac{N!}{n_1! n_2!} = \frac{N!}{n_1!(N - n_1)!}. \qquad (٦٢٢)$$

هذا هو عدد الحالات الميكروسكوبية التي تحتوي علي $n_1$ سبين علوي و $n_2$ سبين سفلي. احتمال كل واحدة من هذه الحالات هو بالضبط $p^{n_1} q^{n_2}$ لان $p$ هو احتمال ان يكون السبين علوي و $q$ هو احتمال ان يكون السبين سفلي. اذن احتمال ان نحصل علي $n_1$ سبين علوي من بين ال $N$ سبين هو

$$W_N(n_1) = \frac{N!}{n_1!(N - n_1)!} p^{n_1} q^{N - n_1}. \qquad (٦٢٣)$$

هذا هو توزيع الاحتمال ثنائي الحد. هذه التسمية راجعة الي الخاصية

$$\sum_{n_1=0}^{N} W_N(n_1) = (p + q)^N = 1. \qquad (٦٢٤)$$

نلاحظ ان

$$\Omega(n_1, N) = \Omega(N) W_N(n_1). \qquad (٦٢٥)$$

[٤٤] Ising model.

النتائج اعلاه تطبق ايضا و بالكامل علي مسألة المشاء العشوائي في بعد واحد. نعتبر جسيم يتحرك علي خط مستقيم انطلاقا من $x=0$ اما الي اليمين خطوة واحدة تساوي $+a$ باحتمال $p$ او الي اليسار خطوة واحدة تساوي $-a$ باحتمال $q$. بعد $N$ خطوة موضع المشاء هو $x=ma$ حيث $m=n_1-n_2$ و $N=n_1+n_2$. من الواضح ان $-N\leq m\leq +N$ وان $m$ زوجي اذا كان $N$ زوجي و العكس. الحالة الماكروسكوبية تقابل $m$ ثابت اما الحالة الميكروسكوبية فتقابل اعطاء الخطوة الاولي: يمين او يسار، الخطوة الثانية: يمين او يسار وهكذا الي غاية اخر خطوة. عدد الحالات الميكروسكوبية التي فيها $n_1$ خطوة الي اليمين و $n_2$ جطوة الي اليسار هو $\Omega(n_1,N)$ و احتمال ان يقوم المشاء ب $n_1$ خطوة الي اليمين و $n_2$ خطوة الي اليسار هو $W_N(n_1)$.

نحسب الان القيمة المتوسطة $<n_1>$، التشتت او التفاوت [٤٥] في المتوسط $<\Delta n_1^2>$ و الانحراف المعياري $\sigma_{n_1}$. لدينا

$$\begin{aligned}<n_1> &= \sum_{n_1} W_N(n_1)n_1\\ &= \sum_{n_1}\frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}p^{n_1}q^{N-n_1}n_1\\ &= p\frac{\partial}{\partial p}\sum_{n_1}\frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}p^{n_1}q^{N-n_1}\\ &= p\frac{\partial}{\partial p}(p+q)^N\\ &= Np.\end{aligned} \tag{٦٢٦}$$

مباشرة نستنتج ايضا القيم المتوسطة التالية

$$<n_2> = Nq. \tag{٦٢٧}$$

$$<x> = N(p-q)a\ ,\ <S_3>=N(p-q)\frac{1}{2}. \tag{٦٢٨}$$

التشتت او التفاوت معرف ب

$$\begin{aligned}<\Delta n_1^2> &= <(n_1-<n_1>)^2>\\ &= <n_1^2>-<n_1>^2\ .\end{aligned} \tag{٦٢٩}$$

التشتت يقيس مربع عرض توزيع الاحتمال الذي تخضع له قيم المتغير $n_1$ اي $W_N(n_1)$. اذن $\sqrt{<\Delta n_1^2>}$ يقيس مدي تشتت فيم المتغير $n_1$ حول القيمة المتوسطة. الانحراف المعياري هو بالضبط هذا الجذر التربيعي للتشتت اي

$$\sigma_{n_1}=\sqrt{<\Delta n_1^2>}. \tag{٦٣٠}$$

نحسب

$$\begin{aligned}<n_1^2> &= (p\frac{\partial}{\partial p})^2\sum_{n_1}\frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}p^{n_1}q^{N-n_1}\\ &= Np(Np+q).\end{aligned} \tag{٦٣١}$$

[٤٥] dispersion or variance.

اذن

$$\sigma_{n_1}^2 = Npq. \qquad (٦٣٢)$$

العرض النسبي لتوزيع الاحتمال $W_N(n_1)$ يعطي اذن ب

$$\frac{\sigma_{n_1}}{< n_1 >} = \frac{\sqrt{Npq}}{Np} = \sqrt{\frac{q}{p}}\frac{1}{\sqrt{N}}. \qquad (٦٣٣)$$

اذن العرض النسبي يقترب من الصفر مثل $1/\sqrt{N}$. اي ان القيمة المتوسطة هي القيمة الاكثر احتمالا. يمكن رؤية هذا الامر بسهولة اكثر في النهاية $N \longrightarrow \infty$ التي يصبح فيها توزيع الاحتمال ثنائي الحدين توزيع غوس للاحتمال. يمكن ان نحسب ايضا التشتتات

$$\sigma_x^2 = 4Npqa^2 \ , \ \sigma_{S_3}^2 = Npq. \qquad (٦٣٤)$$

## انتروبي المعلومات و مسلمات الميكانيك الاحصائي

**انتروبي المعلومات:** هو انتروبي يقيس كمية المعلومات غير المتوفرة لنا او الناقصة عن حالة جملة احتمالية.

نأخذ كمثال ملموس جملة مشكلة من $N$ علبة و كرة واحدة. الكرة تعبر عن جسيم مثلا و العلب تمثل الحالات التي يمكن ان يتواجد فيها الجسيم. نفترض ان الكرة موجودة بالضرورة في احدي العلب. يمكن ان يكون صحيحا احد الامرين:

- كل العلب متساوية الاحتمال [٤٦]. اي ان احتمال وجود الكرة في احدي العلب هو $1/N$.
- العلبة التي توجد بداخلها الكرة عليها علامة تدل علي وجود الكرة بداخلها.

من الواضح جدا انه لدينا معلومات اكثر حول حالة الجملة في الحالة الثانية. اما في الحالة الاولي فان قصورنا عن معرفة يقينية بالعلبة التي توجد فيها الكرة من بين ال $N$ امكانية يعكس نقص معلوماتنا عن الجملة. انتروبي المعلومات $I$ هو دالة ارتياب تقيس بالضبط كمية المعلومات الناقصة عن الجملة. هذا الانتروبي يجب ان يحقق الاتي:

(١). اولا: $I$ يجب ان يكون دالة في $N$ اي

$$I = I(N). \qquad (٦٣٥)$$

(٢). ثانيا: اذا زاد عدد العلب فان الارتياب $I$ يزداد لان كمية المعلومات الناقصة عن الجملة يزداد. بعبارة اخري فان كمية المعلومات المعروفة عن الجملة تتناقص. اذن

$$I(M) > I(N) \ , \ M > N. \qquad (٦٣٦)$$

---

(٤٦) equiprobable.

(٣). ثالثا: اذا كانت هناك علبة واحدة فاننا نعرف كل شيء عن الجملة. اي ان كمية المعلومات الناقصة تساوي صفر في هذه الحالة اي

$$I(1) = 0. \tag{٦٣٧}$$

(٤). رابعا: اذا قسمنا كل علبة الي $M$ خانة متساوية الاحتمال فانه في الاجمال يكون لدينا $NM$ حجرة متساوية الاحتمال. في هذه الحالة كمية المعلومات الناقصة عن الجملة تعطي ب $I(NM)$.

من ناحية اخري كان بالامكان ان نجد العلبة ثم الخانة التي بها الكرة. كما قلنا سابقا فان كمية المعلومات الناقصة عند محاولتنا معرفة العلبة التي بها الكرة هي $I(N)$. بالمثل فان كمية المعلومات الناقصة عند محاولتنا معرفة الخانة التي بها الكرة يجب ان يكون $I(M)$. اذا افترضنا ان كمية المعلومات هي مقدار اضافي [٤٧] فان كمية المعلومات الناقصة الكلية هو المجموع $I(N) + I(M)$. كون كمية المعلومات هي مقدار اضافي يعني انه اذا عرفت المعلومات الخاصة بجملة شيئا فشيئا بدون تكرار فان كمية المعلومات الاجمالية تساوي الي مجموع كميات المعلومات المحصل عليها في كل مرحلة. في هذا المثال عرفنا في المرحلة الاولي ان كمية المعلومات الناقصة هي $I(N)$ ثم عرفنا ان كمية المعلومات الناقصة في المرحلة الثانية هي $I(M)$. بالتالي فان كمية المعلومات الناقصة الكلية هي المجموع $I(N) + I(M)$.

اذن من جهة وجدنا ان كمية المعلومات الناقصة هي $I(NM)$ و من الحهة الاخري وجدنا ان كمية المعلومات الناقصة هي $I(N) + I(M)$. نستنتج مباشرة ان

$$I(NM) = I(N) + I(M). \tag{٦٣٨}$$

من المعادلات الاربعة اعلاه يمكننا ان نستنتج ان انتروبي المعلومات يجب ان يعطي بالعلاقة

$$I(N) = C \ln N. \tag{٦٣٩}$$

اذا اخذنا $C = k$، حيث $k$ هو ثابت بولتزمان، فان انتروبي المعلومات $I$ يصبح بالضبط، كما سنبين لاحقا، الانتروبي الاحصائي $S$ حيث $N$ هو عدد الحالات الميكروسكوبية التي يمكن ان تكون فيها الجملة.

**حساب عدد الحالات الميكروسكوبية- توزيع $N$ جسم مختلف علي $r$ علبة مختلفة** : في المثال اعلاه افترضنا ان كل العلب متساوية الاحتمال. لنفترض الان ان العلب غير متساوية الاحتمال. ليكن $P_i$ احتمال ان تحتل الكرة العلبة $1 \leq i \leq N$. لدينا

$$P_i \geq 0 \ , \ \sum_{i=1}^{N} P_i = 1. \tag{٦٤٠}$$

تعرف الاحتمالات $P_i$ في المجموعة التالية. نعتبر انه لدينا $N$ جملة متطابقة حيث كل جملة هي عبارة عن كرة موضوعة في علبة من بين $N$ علبة. لتكن $N_i$ عدد الجمل التي تكون فيها الكرة في العلبة $i$. من الواضح انه لما $N \longrightarrow \infty$ لدينا

$$P_i = \frac{N_i}{N}. \tag{٦٤١}$$

---
[٤٧] additive.

اي $N_i = NP_i$ هو عدد الجمل التي تكون فيها الكرة في العلبة $i$. لدينا

$$\sum_{i=1}^{N} N_i = \sum_{i=1}^{N} NP_i = N. \quad (٦٤٢)$$

علينا تحديد عدد الحالات الميكروسكوبية المختلفة التي تحقق الشروط الماكروسكوبية $N =$ ثابت و $N_i =$ ثابتة . هذه المسألة مكافئة لمسألة توزيع $N$ جسم مختلف، هنا ال $N$ جملة المعتبرة اعلاه، علي $N = r$ علبة مختلفة، هنا العلبة تقابل مجموعة الجمل التي فيها الكرة في نفس الوضعية، من دون ان يكون للترتيب داخل العلبة اية اهمية.

اولا لدينا $N!$ تبديلة مختلفة لل $N$ جملة. لكن $N_i = NP_i$ جملة فيها الكرة في العلبة $i$ و بالتالي فهي جمل متطابقة اي ليس للترتيب اي اهمية . اذن ال $N_i!$ تبديلة لهذه الجمل تؤدي كلها الي نفس الحالة الميكروسكوبية. عدد الحالات الميكروسكوبية هو اذن

$$\mathcal{N} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{r} N_i!}. \quad (٦٤٣)$$

كل هذه الحالات هي متساوية الاحتمال و بالتالي كمية المعلومات الناقصة عن مجموع ال $N$ جملة هي

$$I_N = k \ln \frac{N!}{\prod_{i=1}^{N}(NP_i)!} = k\Big(\ln N! - \sum_{i=1}^{N} \ln(NP_i)!\Big). \quad (٦٤٤)$$

نستعمل علاقة ستيرلينغ [٤٨]

$$\ln n! = n \ln n - n \ , \ n \longrightarrow \infty. \quad (٦٤٥)$$

نحصل علي

$$\begin{aligned} I_N &= k\Big(N \ln N - N - \sum_{i=1}^{N} NP_i \ln NP_i + \sum_{i=1}^{N} NP_i\Big) \\ &= -kN \sum_{i=1}^{N} P_i \ln P_i. \end{aligned} \quad (٦٤٦)$$

لان كل جملة من ال $N$ جملة هي متساوية الاحتمال فان كمية المعلومات الناقصة لكل جملة هي $I_N/N$ اي

$$I = -k \sum_{i=1}^{N} P_i \ln P_i. \quad (٦٤٧)$$

**التوازن الاحصائي و الانتروبي الاحصائي:** التوازن الاحصائي يوافق الحالة اين تكون جميع الحالات الميكروسكوبية متساوية الاحتمال. في هذه الحالة

$$P_i = \frac{1}{\Omega(E)}, \quad (٦٤٨)$$

[٤٨] Stirling.

حيث $\Omega(E)$ هو عدد الحالات الميكروسكوبية التي لها طاقة $E$. نحصل اذن من اجل جملة معزولة متوازنة احصائيا علي انتروبي معلومات $I$ مساو للانتروبي الاحصائي $S$ المعرف، كما سنبين لاحقا، ب

$$S = k \ln \Omega(E). \quad (٦٤٩)$$

سنبين ايضا لاحقا ان الانتروبي الاحصائي هو نفسه الانتروبي الترموديناميكي الذي عرفناه في الفصل السابق. لان الانتروبي الاحصائي لا يعرف الا في حالة التوازن فان انتروبي المعلومات هو اذن تعميم للانتروبي الاحصائي للوضعيات الخارجة عن التوازن.

**المسلمة الاولي للميكانيك الاحصائي** : استخدمنا في الفقرة السابقة، بدون ان نذكر ذلك صراحة، المسلمة الاولي للميكانيك الاحصائي التي نناقشها الان.

**النص: من اجل جملة معزولة في حالة توازن احصائي فان كل الحالات الميكروسكوبية المسموح بها هي متساوية الاحتمال.**

اذن اذا كان $\Omega(E)$ هو عدد الحالات الميكروسكوبية التي تحقق الشرط الماكروسكوبي $E =$ ثابت حيث $E$ هي طاقة الجملة فان احتمال ان تكون الجملة في احدي هذه الحالات الميكروسكوبية هو $1/\Omega(E)$. هذا منطقي جدا لان مع معرفتنا لطاقة الجملة فقط لا يوجد اي سبب مسبق يجعلنا نفضل حالة ميكروسكوبية ما علي اخري. اذا لم يتحقق هذا الامر فان الجملة ليست في حالة توازن و سوف تتطور في الزمن الي ان تبلغ التوازن.

يمكن صياغة هذه المسلمة بدلالة كمية المعلومات الناقصة او انتروبي المعلومات $I$ كالتالي. نعتبر جملة معزولة و ليكن $P_i$ احتمال احتلال الحالة الميكروسكوبية $i$. انتروبي المعلومات لهذه الجملة معرف ب

$$I = -k\sum_i P_i \ln P_i. \quad (٦٥٠)$$

الاحتمالات $P_i$ تحقق الشرط

$$\sum_i P_i = 1. \quad (٦٥١)$$

نريد ايجاد القيمة العظمي ل $I$ مع شرط انحفاظ الاحتمال اعلاه. من اجل اجراء هذه العملية نستخدم طريقة مضروبات لاغرانج. نعرف الدالة $F$ ب

$$\begin{aligned} F &= I - \lambda(\sum_i P_i - 1) \\ &= -k\sum_i P_i \ln P_i - \lambda(\sum_i P_i - 1). \end{aligned} \quad (٦٥٢)$$

المتغير $\lambda$ هو بالضبط مضروب لاغرانج. شرط القيم القصوي، اصغرية او اعظمية، بالنسبة للمتغير $P_i$ يعطي كالعادة ب

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial P_i} &= \frac{\partial I}{\partial P_i} - \lambda \\ &= -k\ln P_i - k - \lambda \\ &= 0 \Rightarrow P_i = \exp(-1-\lambda). \end{aligned} \quad (٦٥٣)$$

باستخدام الان قانون انحفاظ الاحتمال نحصل علي قيمة مضروب لاغرانج

$$\exp(1+\lambda) = \Omega(E). \quad (٦٥٤)$$

اي ان

$$P_i = \exp(-1-\lambda) = \frac{1}{\Omega(E)}. \quad (٦٥٥)$$

نحصل اذن علي توزيع الاحتمال الخاص بالتوازن: كل الحالات الميكروسكوبية متساوية الاحتمال. نلاحظ ايضا ان

$$\frac{\partial^2 F}{\partial P_i^2} = \frac{\partial^2 I}{\partial P_i^2} < 0. \quad (٦٥٦)$$

اي عند التوازن فان انتروبي المعلومات اعظمي وبالتالي فان كمية المعلومات المتوفرة عن الجملة اصغرية. نقول ان الفوضي او اللانظام اعظمي و ان الانتروبي هو مقياس الفوضي.

**المسلمة الثانية للميكانيك الاحصائي- الفرضية الارجودية** : استخدمنا ايضا في الفقرة السابقة، و ايضا بدون ان نذكر ذلك صراحة، المسلمة الثانية للميكانيك الاحصائي التي تعرف ايضا تحت مسمي الفرضية الارجودية [٤٩] و التي نتناولها الان بالنقاش .

الحالة الميكروسكوبية التي تتواجد فيها الجملة في اي لحظة زمنية تتغير مع تطور الجملة في الزمن بسبب التفاعلات التي تخضع لها الجملة. اذا لاحظنا الجملة لزمن غير منته فان الزمن الذي تقضيه الجملة في كل حالة ميكروسكوبية هو نفسه بالنسبة لكل الحالات و هو مقتضي المسلمة الاولي اعلاه.

عوض اعتبار جملة واحدة و تتبع تطورها خلال الزمن و هو امر قد يكون صعبا لاسباب واضحة فاننا نعتبر مجموعة من الجمل المتطابقة في لحظة معينة. تشكل هذه المجموعة بحيث ان احتمال الحصول علي احد هذه الجمل المتطابقة في حالة ميكروسكوبية معينة هو نفسه مهما كانت الحالة الميكروسكوبية. اذا كانت المجموعة مشكلة من $N \longrightarrow \infty$ جملة متطابقة فان $N/\Omega(E)$ هو عدد الجمل في اي حالة ميكروسكوبية لان احتمال الحصول علي اي حالة ميكروسكوبية هو نفسه معطي ب $1/\Omega(E)$: الحالات متساوية الاحتمال. الفرضية الارجودية تنص علي الاتي.

**النص: المتوسط في الزمن لمتغير ما يساوي متوسط هذا المتغير مأخوذ علي مجموعة من الجمل المتطابقة التي لها الخواص المذكورة اعلاه.**

اذا كان $y = y(t)$ هو المتغير قيد الدراسة فان المتو سط في الزمن و المتوسط علي مجموعة مشكلة من $N$ جملة متطابقة في اللحظة $t$ يعطيان علي التوالي بالعلاقات التالية

$$< y >= \lim_{t' \longrightarrow \infty} \frac{1}{t'} \int_0^{t'} y(t')dt'. \quad (٦٥٧)$$

$$< y >_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i(t). \quad (٦٥٨)$$

حسب الفرضية الارجودية فانه يجب ان يكون لدينا

$$< y >=< y >_t . \quad (٦٥٩)$$

---

[٤٩] ergodic hypothesis.

# المجموعة الميكروقانونية

**تعريف** : المسلمة الاولي للميكانيك الاحصائي التي تنص علي تساوي احتمال الحالات الميكروسكوبية تؤدي مباشرة الي ان اي جملة معزولة في حالة توازن ترموديناميكي يجب ان تنتمي الي مجموعة احصائية مميزة باحتمال ثابت. هذه المجموعة هي ما يعرف باسم المجموعة الميكروقانونية [٥٠]. ان استعمال المجموعة الميكروقانونية في التطبيق معقد عموما و بالتالي فاننا نستعمل مكانها تقريبات مثل المجموعة القانونية و المجموعة القانونية الكبري.

من المعلوم ان طاقة جملة معزولة، و لتكن $E_0$ هذه الطاقة، ثابته بالضرورة. في العموم هناك دائما ارتياب في معرفة قيمة الطاقة معطي بالخطا $\delta E << E_0$. من الواضح ان هذا الارتياب راجع الي الاخطاء التجريبية و لكن ايضا هو راجع الي التأثيرات الفيزيائية الناجمة عن الميكانيك الكمي مثل مبدأ الارتياب لهايزنبرغ [٥١] الذي ينص في احد بنوده علي ان الارتياب في الطاقة متناسب عكسا مع المدة المحددة التي يجري فيها القياس علي الجملة. طاقة الجملة هي اذن في مجال بين $E_0$ و $E_0+\delta E$ اما الحالات الميكروسكوبية المسموح بها للجملة فهي التي لها طاقة $E$ حيث

$$E_0 \leq E \leq E_0+\delta E\ ,\ \delta E << E_0. \tag{٦٦٠}$$

كما فعلنا في السابق عوض اعتبار جملة واحدة و اتباع تطورها في الزمن نعتبر مجموعة من الجمل المتطابقة مع الجملة الاصلية من الناحية الماكروسكوبية لا يمكن التمييز بينها باجراء قياسات علي المقادير الماكروسكوبية. كل جملة من هذه المجموعة هي في حالة ميكروسكوبية تحقق الشرط اعلاه. نفترض التوازن الاحصائي و بالتالي كل الحالات الميكروسكوبية هي متساوية الاحتمال. هذه المجموعة الاحصائية تسمي المجموعة الميكروقانونية.

ليكن $\Omega(E)$ عدد الحالات الميكروسكوبية التي لها طاقة بين $E$ و $E+\delta E$. انتروبي الجملة يعطي بالمعادلة

$$S=k\ln\Omega(E). \tag{٦٦١}$$

ليكن $\Phi(E)$ عدد الحالات الميكروسكوبية التي لها طاقة اقل او تساوي من $E$. من المعروف ان الطاقة في الميكانيك الكمي هي في العموم متغير متقطع لكن الفرق في الطاقة $\Delta E$ بين مستويين هو بحيث $\Delta E << \delta E << E$. يمكننا اذن ان نفترض و هو تقريب ممتاز ان $E$ هو متغير مستمر و بالتالي فان $\Phi(E)$ هي دالة مستمرة. هذه الدالة تتزايد بسرعة شديدة مع $E$. يمكننا ايضا ان نعرف كثافة الحالات الميكروسكوبية اي عدد الحالات في و حدة الطاقة بالعلاقة

$$\rho(E)=\frac{d\Phi(E)}{dE}. \tag{٦٦٢}$$

اي ان

$$\Phi(E)=\int_0^E dE^{'}\rho(E^{'}). \tag{٦٦٣}$$

$\rho(E)$ مثل $\Omega(E)$ دالة تتزايد بشدة مع الطاقة. $\Phi(E)$ هي مساحة السطح تحت منحني الدالة $\rho(E^{'})$ بين المحور $E^{'}=0$ و المحور $E^{'}=E$. لان $\delta E << E$ فان

[٥٠] microcanonical ensemble.

[٥١] Heisenberg uncertainty principle.

عدد الحالات الميكروسكوبية $\Omega(E)$ يساوي كثافة الحالات الميكروسكوبية $\rho(E)$ مضروبة في $\delta E$ اي

$$\Omega(E)=\rho(E)\delta E. \quad (٦٦٤)$$

ليكن $n$ عدد درجات حرية الجملة و $\epsilon$ الطاقة المتوسطة من اجل درجة حرية واحدة. الطاقة $E$ تعطي اذن بالعلاقة

$$E=n\epsilon. \quad (٦٦٥)$$

لدينا اذن

$$S=k\bigg[\ln\rho(E)\epsilon+\ln\frac{\delta E}{\epsilon}\bigg]. \quad (٦٦٦)$$

في العموم يتعلق عدد الحالات الميكروسكوبية $\Omega(E)$ بالطاقة $E$ كالاتي

$$\Omega(E)\sim E^n. \quad (٦٦٧)$$

اذن $\rho(E)$ يتصرف مثل $E^n$ و بالتالي يتصرف الحد الاول في الانتروبي اعلاه مثل $n\ln E$، اما الحد الثاني فانه يتصرف مثل $\ln n$. اذن لان $n$ كبير جدا فان الحد الاول في الانتروبي يهيمن بالكامل علي قيمة الانتروبي. نحصل اذن علي العلاقة

$$S=k\ln\rho(E). \quad (٦٦٨)$$

**اشتقاق الترموديناميك** : في المجموعة الميكروقانونية كل جملة تحتوي علي $N$ جسيم و لها حجم $V$ و طاقة بين $E$ و $E+\delta E$. اذا افترضنا ان الميكانيك الكلاسيكي قابل للتطبيق فان عدد الحالات الميكروسكوبية $\Omega(E)\delta E$ التي لها طاقة بين $E$ و $E+\delta E$ هو متناسب مع الحجم الذي تحتله المجموعة الميكروقانونية في الفضاء الطوري اي

$$\Omega(E)\sim\Gamma(E)=\int_{E\leq H\leq E+\delta E}d^{3N}pd^{3N}q. \quad (٦٦٩)$$

بالمقابل فان عدد الحالات الميكروسكوبية $\Phi(E)$ التي لها طاقة اقل او تساوي من $E$ متناسب مع الحجم في الفضاء الطوري المحتوي داخل سطح الطاقة ذو الطاقة $E$ اي

$$\Phi(E)\sim\Sigma(E)=\int_{H\leq E}d^{3N}pd^{3N}q. \quad (٦٧٠)$$

من الواضح ان

$$\Gamma(E)=\Sigma(E+\delta E)-\Sigma(E). \quad (٦٧١)$$

من اجل $\delta E\longrightarrow 0$ نحصل علي $\Gamma(E)=\delta E\rho(E)$ حيث نعرف الان كثافة الحالات $\rho(E)$ بالعلاقة

$$\rho(E)=\frac{\partial\Sigma(E)}{\partial E}. \quad (٦٧٢)$$

كما بينا اعلاه يمكن ان نعرف الانتروبي باحدي العلاقات

$$S = k \ln \Gamma(E). \tag{٦٧٣}$$

$$S = k \ln \rho(E). \tag{٦٧٤}$$

هذا التعريف للانتروبي الاحصائي يؤدي، كما سنبين في التمرينات، الي الانتروبي الترموديناميكي بكل خواصه المعروفة مثل الخاصية التمديدية و المبدأ الثاني للترموديناميك.

يمكننا الان اشتقاق كل الترموديناميك انطلاقا من المجموعة الميكرقانونية باستعمال هذا التعريف للانتروبي كالاتي. نحتاج اولا الي تعريف التحويلات الترموديناميكية شبه الساكنة في هذا الاطار. هذه التحويلات تقابل هنا التغيرات البطيئة جدا في الطاقة و الحجم الناجمة عن تفاعلات الجملة مع الوسط الخارجي. خلال هذه التحويلات فان المجموعة الميكروقانونية تمثل بمجموعة من النقاط موزعة بانتظام ( مسلمة تساوي الاحتمال) في حجم يتحرك ببطء شديد في الفضاء الطوري حيث في كل لحظة لدينا مجموعة ميكروقانونية. التغير المتناه في الصغر في الانتروبي خلال هذه التحويلات الترموديناميكية يعطي ب

$$dS(E,V) = (\frac{\partial S}{\partial E})_V dE + (\frac{\partial S}{\partial V})_E dE. \tag{٦٧٥}$$

نعرف درجة الحرارة و الضغط بالعلاقات

$$(\frac{\partial S}{\partial E})_V = \frac{1}{T} \,,\; (\frac{\partial S}{\partial V})_E = \frac{P}{T}. \tag{٦٧٦}$$

نحصل مباشرة علي المبدأ الاول للترموديناميك

$$dE = -PdV + TdS. \tag{٦٧٧}$$

اذن للحصول علي الترموديناميك انطلاقا من المجموعة الميكروقانونية نتبع الخطوات التالية:

- احسب كثافة الحالات $\rho(E)$ انطلاقا من الهاميلتونية.
- احسب الانتروبي باستعمال العلاقة

$$S = k \ln \rho(E). \tag{٦٧٨}$$

- اقلب الدالة $S = S(E,V)$ من اجل حساب $E$ بدلالة $S$ و $V$. النتيجة هي بالضبط الطاقة الداخلية اي

$$U = E(S,V). \tag{٦٧٩}$$

- احسب باقي المقادير الترموديامية باستعمال العلاقات

$$T = (\frac{\partial U}{\partial S})_V. \tag{٦٨٠}$$

$$P = -(\frac{\partial U}{\partial V})_S. \tag{٦٨١}$$

$$F = U - TS. \quad (٦٨٢)$$

$$G = U + PV - TS. \quad (٦٨٣)$$

$$C_v = (\frac{\partial U}{\partial T})_S. \quad (٦٨٤)$$

## التوازن الترموديناميكي

كل جملة معزولة تتطور في الزمن الي ان تبلغ حالة توازنها اين تصبح الحالات الميكروسكوبية متساوية الاحتمال و يصبح الانتروبي- انتروبي المعلومات- اعظمي. هذا هو ما ينص عليه المبدأ الثاني للترموديناميك في حالته الميكروسكوبية. الانتروبي الاحصائي الذي هو مقياس اللانظام في الجملة هو متناسب مع لوغاريتم عدد الحالات الميكروسكوبية. اذن اللانظام يصبح اعظمي عند التوازن و المقصود به ان عدد الحالات المسموح بها للجملة يصبح اعظمي عند التوازن.

عدد الحالات الميكروسكوبية المسموح بها لجملة ماكروسكوبية هو في العموم دالة في الطاقة و ايضا في الحجم و في عدد الجسيمات اي

$$\Omega = \Omega(E, V, N). \quad (٦٨٥)$$

بالتالي

$$S = S(E, V, N). \quad (٦٨٦)$$

نعتبر جملتين ماكروسكوبيتين $1$ و $2$. المتغيرات الترموديناميكية هي $E_1$، $V_1$، $N_1$ بالنسبة للجملة $1$ و $E_2$، $V_2$، $N_2$ بالنسبة للجملة $2$. الجملة الكلية $2+1$ هي جملة معزولة بجدران ادياباتيكية لها طاقة $E_0$، حجم $V_0$ و عدد جسيمات $N_0$ كلها متغيرات ثابتة. ليكن $\Omega_T(E_0, V_0, N_0)$ عدد الحالات الميكروسكوبية المسموح بها للجملة $2+1$ بدون اي شروط قسرية علي الجملتين $1$ و $2$ اي اننا نأخذ بعين الاعتبار كل التمثيلات الممكنة للجملتين $1$ و $2$.

**التوازن الحراري:** نفترض اولا ان الجملتين $1$ و $2$ مفصولتين بجدار دياتارم ثابت و غير نفاذ للجسيمات [٥٢]. اذن $N_1$، $N_2$، $V_1$، $V_2$ تبقي ثابتة لكن هناك تبادل للحرارة بين الجملتين $1$ و $2$. نفترض ان طاقة التفاعل بين الجملتين $1$ و $2$ هي مهملة بالمقارنة مع الطاقات الداخلية $E_1$ و $E_2$. اذن مبدأ انحفاظ الطاقة يعطي مباشرة $E_0 = E_1 + E_2$. ايضا نستنتج مباشرة ان عدد الحالات الميكروسكوبية المسموح بها للجملة الكلية هو

$$\Omega(E_0, E_1) = \Omega_1(E_1)\Omega_2(E_2) = \Omega(E_1)\Omega_2(E_0 - E_1). \quad (٦٨٧)$$

الجداء راجع الي ان كل حالة ميكروسكوبية لاي من الجملتين $1$ او $2$ يمكن ان يرفق بكل الحالات الميكروسكوبية المسموح بها للجملة الاخري. عدد الحالات الميكروسكوبية الكلي المسموح بها للجملة الكلية هو

$$\Omega_T(E_0) = \sum_{E_1} \Omega(E_0, E_1). \quad (٦٨٨)$$

[٥٢] impermeable.

اذن الاحتمال $P(E_1)$ حتي تكون طاقة الجملة 1 تساوي $E_1$ هو

$$P(E_1)=\frac{\Omega(E_0,E_1)}{\Omega_T(E_0)}. \quad (٦٨٩)$$

الانتروبي المرفق بعدد الحالات $\Omega(E_0,E_1)$ هو

$$\begin{aligned} S(E_0,E_1) &= k\ln\Omega_T(E_0) \\ &= S_1(E_1)+S_2(E_0-E_1). \end{aligned} \quad (٦٩٠)$$

اذن الانتروبي هو مقدار تمددي كما يجب و كما ينص عليه الترموديناميك. الجملتان 1 و 2 تتبادلان الحرارة عبر الجدار الدياتارم الي غاية ان يحصل توازن حراري اي لما يصبح $\Omega(E_0,E_1)$ او $S(E_0,E_1)$ اعظمي او لما يكون الاحتمال $P(E_1)$ اعظمي. لدينا

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dE_1} &= \frac{dS_1}{dE_1}+\frac{dS_2}{dE_2}\frac{dE_2}{dE_1} \\ &= \frac{dS_1}{dE_1}-\frac{dS_2}{dE_2} \\ &= 0\Rightarrow\frac{dS_1}{dE_1}=\frac{dS_2}{dE_2}. \end{aligned} \quad (٦٩١)$$

يمكن ان نبين ان هذه القيمة القصوي هي قيمة اعظمية باستعمال ايجابية السعة الحرارية. نعرف درجة الحرارة المطلقة ب $1/T=dS/dE$. بصفة عامة

$$(\frac{\partial S}{\partial E})_{V,N} = \frac{1}{T}. \quad (٦٩٢)$$

اذن عند التوازن الحراري نحصل علي تساوي درجة حرارة الجملتين 1 و 2 اي

$$T_1=T_2. \quad (٦٩٣)$$

هذا هو المبدأ الصفر للترموديناميك.

عند تطور الجملة في الزمن فان عدد الحالات الميكروسكوبية يتغير من عدد ابتدائي $\Omega_i$ الي عدد نهائي $\Omega_f$. اذا كان $\Omega_f>\Omega_i$ فان التحول غير عكسي و اذا كان $\Omega_f=\Omega_i$ فان التحول عكسي.

نعتبر تحويل شبه ساكن متناه في الصغر، اي ان الجملة الكلية تبقي دائما في حالة توازن احصائي مثلا خلال تحويل عكسي، حيث ايضا يبقي الحجم و عدد الجسيمات في كل جملة ثابتا. من الواضح انه خلال هذا التحويل لا يوجد عمل ميكانيكي و بالتالي فان $\Delta E_1=Q_1$ حيث $Q_1$ هي كمية الحرارة المتبادلة. من الجهة الاخري فان درجة الحرارة $T_1$ تبقي ثابتة لان التحول متناه في الصغر. اذن

$$\Delta S_1=\frac{\Delta E_1}{T_1}=\frac{Q_1}{T_1}. \quad (٦٩٤)$$

حسب المبدأ الثاني للترموديناميك فانه خلال التحول الذي ادي الي التوازن الترموديناميكي فان الانتروبي الكلي لا يمكن الا ان يزداد لان الجملة معزولة اي

$$\frac{dS}{dt}>0\Rightarrow(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2})\frac{dE_1}{dt}>0. \quad (٦٩٥)$$

اذا كان $T_2>T_1$ فان $dE_1/dt>0$ اي ان الحرارة تنتقل من الجملة 2 الي الجملة 1 اي من الساخن الي البارد.

**التوازن الحراري الميكانيكي:** نفترض الان ان الجملتين $1$ و $2$ مفصولتين بجدار دياتارم متحرك بدون احتكاك و غير نفاذ للجسيمات . اذن هناك تبادل للحرارة و ايضا للعمل الميكانيكي بين الجملتين $1$ و $2$. نفترض ان المقادير الاتية تبقي ثابتة خلال التبادلات التي تحدث بين الجملتين:

$$E_0 = E_1 + E_2 \ , \ V_0 = V_1 + V_2 \ , \ N_0 = N_1 + N_2. \tag{٦٩٦}$$

ايضا لان الجدار غير نفاذ فان $N_1$ و $N_2$ ثابتين. القيمة القصوي للدالة $S(E_0, E_1, V_1, N_1)$ تحقق الشرطين

$$\frac{\partial S}{\partial E_1} = 0 \ , \ \frac{\partial S}{\partial V_1} = 0. \tag{٦٩٧}$$

لكن

$$S(E_0, E_1, V_1, N_1) = S_1(E_1, V_1, N_1) + S_2(E_2, V_2, N_2). \tag{٦٩٨}$$

بالمرور عبر نفس الخطوات من الفقرة السابقة نحصل مباشرة علي

$$(\frac{\partial S_1}{\partial E_1})_{V_1,N_1} = (\frac{\partial S_2}{\partial E_2})_{V_2,N_2} \Rightarrow \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2}. \tag{٦٩٩}$$

$$(\frac{\partial S_1}{\partial V_1})_{E_1,N_1} = (\frac{\partial S_2}{\partial V_2})_{E_2,N_2} \Rightarrow \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}. \tag{٧٠٠}$$

كما في السابق يمكن ان نبين ان هذه القيمة القصوي هي قيمة اعظمية. اذن التوازن الحراري الميكانيكي يعطي بتساوي درجة الحرارة و ضغط الجملتين $1$ و $2$ اي

$$T_1 = T_2 \ , \ P_1 = P_2. \tag{٧٠١}$$

**الضغط:** يمكن ان نعبر عن الضغط بدلالة الطاقة الداخلية كالاتي. ننطلق من $dE(S, V, N) = 0$ اي من

$$(\frac{\partial E}{\partial S})_{V,N}\frac{dS}{dV} = -(\frac{\partial E}{\partial V})_{S,N}. \tag{٧٠٢}$$

بالتالي

$$P = (\frac{\partial S}{\partial V})_{E,N}(\frac{\partial E}{\partial S})_{V,N} = -(\frac{\partial E}{\partial V})_{S,N}. \tag{٧٠٣}$$

اذن المشتقة الجزئية للطاقة بالنسبة للحجم مع ثبات الانتروبي و عدد الجسيمات- تحول ادياباتيكي عكسي- هي تساوي ناقص الضغط. من المستحسن ان نري هذه النتيجة ايضا من خلال مثال.

نعتبر غاز مثالي داخل اسطوانة مغلقة بمكبس ذي سطح $A$. في اللحظة الابتدائية يكون الغاز في حالة ميكروسكوبية $i$ ذات طاقة $E = \epsilon_i$. رأينا من خلال مثال العلبة المكعبة ان طاقة اي حالة ميكروسكوبية تتعلق بالحجم الذي يحتله الغاز اي ان $\epsilon_i = \epsilon_i(V)$. من اجل انتقال $dx$ موجب للمكبس يزداد حجم الغاز بكمية $dV$. شروط الحركة هي بحيث ان التحويل الترموديناميكي هو تحويل ادياباتيكي

عكسي اي لا يوجد تبادل للحرارة و كل التبادلات الطاقوية تكون علي شكل عمل ميكانيكي. الجملة اذن تحافظ عل نفس اعداد الاحتلال و بالتالي تبقي في نفس الحالة الميكروسكوبية $i$. لكن طاقة الحالة الميكروسكوبية تصبح

$$\epsilon_i(V+dV)=\epsilon_i(V)+(\frac{\partial\epsilon_i}{\partial V})_{S,N}dV. \tag{٧٠٤}$$

التغير في الطاقة الداخلية للغاز يعطي ب

$$\begin{aligned}\Delta E &= E(V+dV)-E(V)\\ &= \epsilon_i(V+dV)-\epsilon_i(V)\\ &= (\frac{\partial\epsilon_i}{\partial V})_{S,N}dV.\end{aligned} \tag{٧٠٥}$$

هذه الطاقة تساوي العمل المقدم من المكبس اي تساوي

$$W=-P_iAdx=-P_idV. \tag{٧٠٦}$$

$P_i$ هو الضغط الذي يجب تطبيقه علي يمين المكبس حتي يكون التحويل عكسي ادياباتيكي. بمطابقة المعادلتين اعلاه نحصل مباشرة علي

$$P_i=-(\frac{\partial\epsilon_i}{\partial V})_{S,N}. \tag{٧٠٧}$$

هذه العبارة تعطي قيمة الضغط الخاصة بالحالة الميكروسكوبية $i$. للحصول علي قيمة الضغط $P$ الذي نقيسه فعليا علي المستوي الماكروسكوبي علينا ان نأخذ القيمة المتوسطة كالاتي.

كما فعلنا في السابق مرات متعددة نعتبر مجموعة $\{\mathcal{M}\}$ من الجمل المتطابقة علي المستوي الماكروسكوبي. ليكن $\mathcal{P}_i$ احتمال الحصول علي الحالة الميكروسكوبية $i$. الطاقة المتوسطة علي المجموعة $\{\mathcal{M}\}$ هي

$$<E>=\sum_{\mathcal{M}}\mathcal{P}_i\epsilon_i. \tag{٧٠٨}$$

لان الجملة ماكروسكوبية فان تقلبات [٥٣] الطاقة $E$ حول القيمة المتوسطة $<E>$ هي في الغالب مهملة. هذه القيمة المتوسطة هي ايضا القيمة الاكثر احتمالا. اذن $E\simeq<E>$ و نحصل علي

$$E=\sum_{\mathcal{M}}\mathcal{P}_i\epsilon_i. \tag{٧٠٩}$$

بالمثل فان

$$\begin{aligned}P &\simeq <P>\\ &= \sum_{\mathcal{M}}\mathcal{P}_iP_i.\end{aligned} \tag{٧١٠}$$

لكن لان التحويل ادياباتيكي اي ان اعداد الاحتلال ثابتة فان احتمال التواجد في اي حالة ميكروسكوبية $i$ هو ثابت و بالتالي

$$dE = \sum_{\mathcal{M}}d\mathcal{P}_i\epsilon_i+\sum_{\mathcal{M}}\mathcal{P}_id\epsilon_i$$

[٥٣] fluctuations.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\mathcal{M}} \mathcal{P}_i d\epsilon_i \\
&= -\sum_{\mathcal{M}} \mathcal{P}_i P_i dV \\
&= -PdV. \qquad (٧١١)
\end{aligned}
$$

و هذا هو المطلوب و المعروف.

## الغاز المثالي الكلاسيكي

عندما تكون درجة حرارة غاز مثالي بعيدة عن الصفر المطلق فان الغاز يتصرف تقريبا بطريقة كلاسيكية. اذن يمكننا في هذه الحالة تطبيق قوانين الميكانيك الكلاسيكي علي جملة الغاز المثالي المشكلة من $N$ جسيم، جزئ او ذرة، داخل حيز من الفضاء حجمه $V$. بالتعريف فان التفاعل بين جسيمات الغاز المثالي ضعيفة جدا و يمكن اهمالها وبالتالي فان طاقة الجملة تهيمن عليها الطاقة الحركية للجسيمات. الهاميلتونية تعطي في هذه الحالة ب

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^2}{2m}. \qquad (٧١٢)$$

$m$ هي كتلة ذرات الغاز ونفترض ايضا ان ذرات الغاز هي جسيمات سلمية و بالتالي فان السبين الخاص بها ينعدم. الفضاء الطوري اذن هو ذو $6N$ بعد تعطي فيه المحاور باشعة الموضع $\vec{r}_i$ و اشعة كمية الحركة $\vec{p}_i$. لتكن $\Omega(E_0)$ عدد الحالات الميكروسكوبية التي لها طاقة بين $E_0$ و $E_0+\delta E$. من المعروف من الميكانيك الكمي ان كل حالة ميكروسكوبية تمثل في الفضاء الطوري بنقطة تحتل خلية، تعرف بخلية هايزنبرغ [٥٤] ، حجمها هو

$$V_{\rm cell} = h^{n/2}, \qquad (٧١٣)$$

حيث $h$ هو ثابت بلانك [٥٥] و $n$ هو عدد درجات الحرية. هذه القيمة ترجع الي مبدأ الارتياب لهايزنبرغ $\Delta x \Delta p \sim h$. اذن عدد الحالات الميكروسكوبية $\Omega$ هو حاصل قسمة الحجم في الفضاء الطوري الذي تحتله الحالات الميكروسكوبية التي لها طاقة بين $E_0$ و $E_0+\delta E$ علي حجم خلية هايزنبرغ واحدة. نكتب اذن

$$
\begin{aligned}
\Omega(E_0) &= \frac{\nu}{h^{3N}} \\
&= \frac{1}{h^{3N}} \int_{E_0\leq H\leq E_0+\delta E} d^{3N}\vec{r} d^{3N}\vec{p}. \qquad (٧١٤)
\end{aligned}
$$

$$d^{3N}\vec{r} = \prod_{i=1}^{N} dx_i dy_i dz_i \ , \ d^{3N}\vec{p} = \prod_{i=1}^{N} dp_{xi} dp_{yi} dp_{zi}. \qquad (٧١٥)$$

[٥٤] Heisenberg cell.

[٥٥] Planck.

لان الطاقة لا تتعلق الا بكميات الحركة فان التكامل اعلاه ينقسم الي حجم في فضاء ال $\vec{r}$ و حجم في فضاء ال $\vec{p}$ اي

$$\begin{aligned}\Omega(E_0) &= \frac{1}{h^{3N}}\int d^{3N}\vec{r}\int_{E_0\leq H\leq E_0+\delta E} d^{3N}\vec{p}\\ &= \frac{V^N}{h^{3N}}\int_{E_0\leq H\leq E_0+\delta E} d^{3N}\vec{p}.\end{aligned} \quad (٧١٦)$$

نحسب اولا عدد الحالات الميكروسكوبية $\Phi(E_0)$ التي لها طاقة اقل او تساوي من $E_0$. بالمرور عبر نفس الخطوات اعلاه نجد ان هذا العدد يعطي بالتكامل

$$\begin{aligned}\Phi(E_0) &= \frac{V^N}{h^{3N}}\int_{H\leq E_0} d^{3N}\vec{p}\\ &= \frac{V^N}{h^{3N}}\int_{\sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m}\leq E_0}\prod_{i=1}^N d^3\vec{p}_i.\end{aligned} \quad (٧١٧)$$

لكن

$$\sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} = E_0 \quad (٧١٨)$$

هي معادلة كرة ذات نصف قطر $R=\sqrt{2mE_0}$ في $3N$ بعد حيث تلعب مركبات كميات الحركة دور الاحداثيات الديكارتية علي هذه الكرة. المسألة اذن هي مسألة حساب حجم كرة في $3N$ بعد. نحن نعرف ان الحجم في ثلاث ابعاد يعطي ب

$$V_3=\int_{x_1^2+x_2^2+x_3^2\leq R^2} dx_1dx_2dx_3=\frac{4}{3}\pi R^3. \quad (٧١٩)$$

في $n$ بعد يعطي الحجم ب

$$V_n=\int_{x_1^1+x_2^2+...+x_n^2\leq R^2} dx_1dx_2dx_3...dx_n. \quad (٧٢٠)$$

من الواضح ان هذا الحجم يجب ان يكون متناسب مع $R^n$ اي

$$V_n=C_nR^n. \quad (٧٢١)$$

منه نحصل علي

$$dV_n=dx_1dx_2dx_3...dx_n=nC_nr^{n-1}dr. \quad (٧٢٢)$$

علينا الان ان نحسب $C_n$. نبدأ من التكامل

$$\int e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}. \quad (٧٢٣)$$

نرفع طرفي هذه المعادلة للقوة $n$ لنحصل علي

$$\int e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2}dx_1...dx_n=\pi^{n/2}. \quad (٧٢٤)$$

اي

$$\int e^{-r^2} n C_n r^{n-1} dr = \pi^{n/2}. \quad (٧٢٥)$$

نجري تغيير المتغير $y = r^2$ لنحصل علي

$$\frac{n}{2} C_n \int y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y} dy = \pi^{n/2}. \quad (٧٢٦)$$

يمكننا الان ان نستخدم التكامل المعروف

$$\int y^{\alpha} e^{-y} dy = \Gamma(\alpha+1) = \alpha!. \quad (٧٢٧)$$

الدالة غاما هي تعميم لدالة المعاملي للمتغيرات السالبة و غير الصحيحة و المركبة. من اجل قيم صحيحة للوسيط $\alpha$ فان التكامل اعلاه يعطي بالضبط $\alpha!$ اي ان $\Gamma(\alpha+1) = \alpha!$ من اجل القيم الصحيحة ل $\alpha$. لكن التكامل اعلاه معرف من اجل جميع قيم $\alpha$: موجبة او سالبة، صحيحة او غير صحيحة، حقيقية او مركبة و ناتج التكامل هو بالتعريف الدالة غاما التي تعمم المعاملي لكل هذه المجالات.

باستخدام الدالة غاما نحصل علي الثابت $C_n$ بسهولة. بالفعل لدينا مباشرة

$$\frac{n}{2} C_n \Gamma(\frac{n}{2}) = \pi^{n/2} \Rightarrow \frac{n}{2} C_n (\frac{n}{2}-1)! = \pi^{n/2}. \quad (٧٢٨)$$

حتي من اجل القيم غير الصحيحة فان المعاملي يحقق الخاصية

$$\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)! = (\frac{n}{2})!. \quad (٧٢٩)$$

الخلاصة ان عدد درجات الحرية $n$، الثابت $C_n$، حجم الكرة في $n$ بعد، و عدد الحالات الميكروسكوبية $\Phi(E_0)$ التي لها طاقة اقل او تساوي من $E_0$ تعطي اذن ب

$$n = 3N. \quad (٧٣٠)$$

$$C_n = \frac{\pi^{n/2}}{(\frac{n}{2})!}. \quad (٧٣١)$$

$$V_n = (2mE_0)^{n/2} \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}. \quad (٧٣٢)$$

$$\Phi(E_0) = \frac{V^n}{h^{3N}} (2mE_0)^{n/2} \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}. \quad (٧٣٣)$$

جسيمات الغاز لها خاصية كمية اخري لا يمكن اهمالها وهي كونها جسيمات متطابقة. لانه لدينا $N$ جسيم متطابق فان هناك $N!$ تبديلة ممكنة لهذه الجسيمات توافق $N!$ تمثيلة متطابقة للجملة. اي ان عدد الحالات الميكروسكوبية التي حصلنا عليها هو اكبر ب $N!$ مرة من عدد الحالات الميكروسكوبية التي هي فعلا مختلفة. اذن عدد الحالات الميكروسكوبية $\Phi(E_0)$ التي لها طاقة اقل او تساوي من $E_0$ هو في الواقع معطي ب

$$\Phi(E_0) = \frac{1}{N!} \frac{V^n}{h^{3N}} (2mE_0)^{n/2} \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}. \quad (٧٣٤)$$

في المعادلة الاخيرة اعلاه المعاملات $N!$ و $h^{3N}$ هي معاملات راجعة للتأثيرات الكمية لا يمكن الحصول عليها بالاعتماد علي الميكانيك الكلاسيكي فقط. ايضا من المعروف ان تكميم جملة مشكلة من جسيم واحد حر داخل علبة مكعبة حجمها $V$ يؤدي الي قيم مكممة للطاقة بفسحة تعطي ب

$$\epsilon_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mV^{2/3}}. \quad (٧٣٥)$$

بالتعويض في عدد الحالات $\Phi(E)$ نحصل علي

$$\Phi(E_0) = \frac{1}{N!}\frac{\pi^{3N/2}}{2^{3N}(3N/2)!}(\frac{E_0}{\epsilon_0})^{3N/2}. \quad (٧٣٦)$$

بالاشتقاق نحصل علي كثافة الحالات الميكروسكوبية $\rho(E_0)$ كما يلي

$$\begin{aligned}\rho(E_0) &= \frac{d\Phi(E_0)}{dE_0}\\ &= \frac{1}{N!}\frac{\pi^{3N/2}}{2^{3N}(3N/2-1)!}(\frac{E_0}{\epsilon_0})^{3N/2}\frac{1}{E_0}.\end{aligned} \quad (٧٣٧)$$

باستخدام هذه الكثافة يمكن ان نحصل علي عدد الحالات الميكروسكوبية $\Omega(E_0)$ التي لها طاقة $E_0$ بارتياب $\delta E$ كما يلي

$$\begin{aligned}\Omega(E_0) &= \rho(E_0)\delta E\\ &= \frac{1}{N!}\frac{\pi^{3N/2}}{2^{3N}(3N/2-1)!}(\frac{E_0}{\epsilon_0})^{3N/2}\frac{\delta E}{E_0}.\end{aligned} \quad (٧٣٨)$$

نحسب الان انتروبي الغاز المثالي. لدينا

$$\begin{aligned}\frac{S}{k} &= \ln\Omega(E_0)\\ &= \ln\rho(E_0)\delta E\\ &= \ln\left(\frac{1}{N!}\frac{\pi^{3N/2}}{2^{3N}(3N/2-1)!}(\frac{E_0}{\epsilon_0})^{3N/2}\frac{\delta E}{E_0}\right)\\ &= -\ln N! - \ln(3N/2-1)! + (3N/2)\ln\pi/4 + (3N/2)\ln(E_0/\epsilon_0) + \ln\delta E/E_0.\end{aligned} \quad (٧٣٩)$$

نلاحظ ايضا ان

$$\ln\rho(E_0) = -\ln N! - \ln(3N/2-1)! + (3N/2)\ln\pi/4 + (3N/2)\ln(E_0/\epsilon_0) + \ln 1/E_0. \quad (٧٤٠)$$

$$\ln\Phi(E_0) = -\ln N! - \ln(3N/2)! + (3N/2)\ln\pi/4 + (3N/2)\ln(E_0/\epsilon_0). \quad (٧٤١)$$

لان $N$ كبير جدا فان الحدود الاخيرة في عبارتي $\ln\Omega(E_0)$ و $\ln\rho(E_0)$ يمكن اهمالها و نحصل اذن علي النتيجة التي ذكرناها سابقا الاتية

$$\frac{S}{k} = \ln\Omega(E_0) \simeq \ln\rho(E_0) \simeq \ln\Phi(E_0). \quad (٧٤٢)$$

اي ان لوغاريتم المنحني $\rho(E_0)$ يساوي الي لوغاريتم المساحة $\Phi(E_0)$ تحت هذا المنحني و هو يساوي الي لوغاريتم المساحة $\Omega(E_0)\delta E$ المرتكزة حول القيمة الاكثر احتمالا للطاقة $E_0$. نستخدم الان علاقة ستيرلينغ لتبسيط العلاقة اعلاه للانتروبي كالاتي

$$S = \frac{3Nk}{2}\ln\frac{2E_0}{3N\epsilon_0} + \alpha + NS_0 = S(E_0, V, N). \quad (٧٤٣)$$

$$S_0 = \frac{3k}{2}(1+\ln\frac{\pi}{4})\ ,\ \alpha = k(-N\ln N + N). \quad (٧٤٤)$$

الثابت $\alpha$ هو المساهمة في قيمة الانتروبي الناجمة عن تطابق الجسيمات. تعلق الانتروبي بالحجم محتوي في الفسحة الطاقوية $\epsilon_0$.

كما شرحنا في الفقرة السابقة نحصل علي الطاقة الداخلية لجملة الغاز المثالي الكلاسيكي عن طريق قلب العلاقة $S = S(E_0, V, N)$. بعد حساب بسيط نحصل علي

$$E_0 = \frac{3h^2}{4\pi m}\frac{N^{5/3}}{V^{2/3}}\exp\left(\frac{2S}{3Nk} - \frac{5}{3}\right). \quad (٧٤٥)$$

درجة حرارة الغاز المثالي تعطي ب

$$T = \left(\frac{\partial E_0}{\partial S}\right)_{V,N} = \frac{2E_0}{3NK} \Rightarrow E_0 = \frac{3}{2}NkT. \quad (٧٤٦)$$

السعة الحرارية تحت حجم ثابت تعطي ب

$$C_v = \left(\frac{\partial E_0}{\partial T}\right)_{V,N} = \frac{3Nk}{2}. \quad (٧٤٧)$$

ضغط الغاز المثالي يعطي ب

$$P = -\left(\frac{\partial E_0}{\partial V}\right)_{S,N} = \frac{2E_0}{3V} \Rightarrow PV = NkT. \quad (٧٤٨)$$

في النهاية نحصل اذن علي معادلة حالة الغاز المثالي المعروفة.

## مسائل اضافية

**توزيع غوس للاحتمال:** التوزيع ثنائي الحدين للاحتمال يعطي ب

$$W_N(n_1) = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}p^{n_1}q^{N-n_1}. \quad (٧٤٩)$$

نهتم بالنهاية $N \longrightarrow \infty$ اين نحصل علي توزيع غوس [٥٦] للاحتمال . من اجل القيم الكبيرة ل $n_1$ فان $W_N(n_1)$ يمكن اعتبارها دالة مستمرة للمتغير المستمر $n_1$ علي الرغم من ان القيم الصحيحة ل $n_1$ هي فقط التي تحمل اي معني فيزيائي.

- بين المعني الفيزيائي للاعداد $p$، $q$، $n_1$ و $N$ من اجل حركة المشاء العشوائي. بين ايضا المعني الفيزيائي ل $W_N(n_1)$.
- احسب الدالة $\ln W_N(n_1)$، المشتقة الاولي $B_1 = d\ln W_N(n_1)/dn_1$ و المشتقة الثانية $B_2 = d^2 \ln W_N(n_1)/dn_1^2$.
- احسب القيمة $n_1 = \bar{n_1}$ التي يكون عندها توزيع الاحتمال $W_N(n_1)$ اعظمي.
- احسب تحليل تايلور للدالة $\ln W_N(n_1)$ و من ثم احسب الاحتمال $W_N(n_1)$.
- احسب توزيع غوس للاحتمال $P(x)$ المعرف ب

$$P(x)dx = W_n(n_1)dn_1. \quad (٧٥٠)$$

تذكر ان $m = n_1 - n_2$، $N = n_1 + n_2$ و ان $l$ هو طول خطوة المشاء العشوائي بينما $x = ml$ هو موضع المشاء العشوائي.

**توزيع بواسون للاحتمال:** نعتبر مرة اخري التوزيع ثنائي الحدين للاحتمال المعطي ب

$$W_N(n_1) = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1}. \quad (٧٥١)$$

نعتبر الان النهاية $N \longrightarrow \infty$ و $p \longrightarrow 0$ من اجل القيم الصغيرة ل $n_1$ اين نحصل علي توزيع بواسون [٥٧] للاحتمال.

- احسب المعامل $C_N^{n_1} = N!/n_1!(N-n_1)!$ في النهاية $N \longrightarrow \infty$ و $p \longrightarrow 0$ من اجل القيم الصغيرة ل $n_1$ اي $N << n_1$.
- بين انه في هذه النهاية $q^{N-n_1} = e^{-Np}$ ثم احسب الاحتمال $W_N(n_1)$ في هذه الحالة.
- احسب القيم المتوسطة $< n_1 >$ و $< n_1^2 >$ ثم احسب التشتت في المتوسط المعرف ب $\sigma^2 = < n_1^2 > - < n_1 >^2$.

**الانتروبي الاحصائي و المبدأ الثاني للترموديناميك:** بين ان التعريف

$$S = k \ln \Gamma(E) \quad (٧٥٢)$$

للانتروبي الاحصائي يؤدي الي الانتروبي الترموديناميكي بكل خواصه المعروفة مثل $-1$ الانتروبي هو مقدار تمديدي و $-2$ الانتروبي يحقق المبدأ الثاني للترموديناميك. بين ايضا ان درجة الحرارة تعطي ب

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}. \quad (٧٥٣)$$

[٥٦] Gauss.
[٥٧] Poisson.

**مبرهنة التقسيم المتساوي للطاقة:** نأخذ جسم ذو سبين صفر و كتلة $m$ داخل علبة حجمها $V$. الجملة معزولة ذات طاقة بين $E$ و $E+\delta E$.

- عرف الفضاء الطوري في هذه الحالة. اكتب هاميلتونية الجملة. ماهو عدد الحالات $\Omega(E)$ المسموح بها للجملة. احسب $p_i\partial H/\partial p_i$.
  - بين ان القيمة المتوسطة ل $p_i\partial H/\partial p_i$ تكتب علي الشكل

$$< p_i\frac{\partial H}{\partial p_i} >= \frac{\frac{d}{dE}\int_{H\leq E} p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}d^3xd^3p}{\frac{d}{dE}\int_{H\leq E}d^3xd^3p}. \quad (٧٥٤)$$

  - بين ان

$$\int_{H\leq E} p_i\frac{\partial (H-E)}{\partial p_j} = V\delta_{ij}\int_{H\leq E}(E-H)d^3p. \quad (٧٥٥)$$

  - برهن ان

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{f(\alpha)}^{g(\alpha)} F(\alpha,x)dx = \int_{f(\alpha)}^{g(\alpha)}\frac{\partial}{\partial\alpha}F(\alpha,x)dx + \frac{\partial g(\alpha)}{\partial\alpha}F(\alpha,g(\alpha)) - \frac{\partial f(\alpha)}{\partial\alpha}F(\alpha,f(\alpha)) \quad (٧٥٦)$$

  - احسب $< p_i\partial H/\partial p_i >$ بدلالة عدد الحالات $\Phi(E)$ التي لها طاقة اقل من $E$. ماذا يمكن ان نستنتج بالنسبة للقيمة المتوسطة للطاقة $< H >$. عبر عن $< H >$ بدلالة الانتروبي ثم بدلالة درجة الحرارة.
  - ماذا يمكن ان نستنتج بالنسبة الي حالة الهزاز التوافقي.

**تناقض جيبس:**

- بالنسبة لغاز مثالي فان الانتروبي يعطي ب

$$S = \frac{3Nk}{2}\ln\frac{2E}{3N\epsilon_0} + NS_0 + \alpha. \quad (٧٥٧)$$

استخرج من هذه النتيجة المعادلة الاتية

$$S = Nk\ln V\epsilon^{3/2} + NS_0^{'} + \alpha(N), \quad (٧٥٨)$$

حيث $\epsilon$ هي طاقة جزئ واحد من الغاز. تذكر ان

$$S_0 = \frac{3k}{2}(1+\ln\frac{\pi}{4})\ ,\ \alpha = k(-N\ln N + N). \quad (٧٥٩)$$

استخرج ايضا العلاقات التي تعطي $\alpha(N)$ و $S_0^{'}$. برهن ايضا العلاقة التالية (معادلة ساكور - تترود [٥٨] )

$$S = Nk\ln\frac{V}{N}\epsilon^{3/2} + \frac{3}{2}Nk(\frac{5}{3} + \ln\frac{4\pi m}{3h^2}). \quad (٧٦٠)$$

استخدم ايضا

$$\epsilon_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mV^{2/3}}. \quad (٧٦١)$$

[٥٨] Sakur – Tetrode equation.

- نأخذ جملة معزولة عن الوسط الخارجي مشكلة من غازين مفصولين بحاجز. نفترض ان درجة الحرارة ثابتة اي $T_1 = T_2 = T$ و ان كتل جزيئات الغاز متساوية اي $m_1 = m_2 = m$. احسب الانتروبي $S_1$ و الانتروبي $S_2$ بدلالة الحجمين $V_1$ و $V_2$ و اعداد الجزيئات $N_1$ و $N_2$. نفترض ان الحاجز الفاصل يرفع بعد فترة. احسب التغير في الانتروبي. ماذا تستنتج.
- نفترض ان جزيئات الغاز الاول متطابقة مع جزيئات الغاز الثاني. احسب التغير في الانتروبي في هذه الحالة. ماذا تستنتج.

# تمارين

**تمرين** 1:

- نعتبر جسيم ذو كتلة $m$ يتحرك داخل علبة مكعبة طول ضلعها $L$. حل معادلة شرودينغر [٥٩] لايجاد قيم الطاقة المسموح بها. افترض الشروط الحدية التي تنعدم فيها دالة الموجة علي الجدران.
- احسب درجة انحلال المستويات الطاقوية ال 10 الاولي.
- نضع واحد مول من الهيليوم داخل العلبة. الضغط $P = 10^5 \ \ \mathrm{pa}$ و درجة الحرارة $T = 273 \ \ \mathrm{K}$. نفترض ان الهيليوم غاز مثالي. أحسب $L$ و كتلة ذرة واحدة من الهيليوم. احسب الفسحة الطاقوية $\epsilon_0$.

  استخدم النتيجة الاحصائية: الطاقة المتوسطة لذرة واحدة من الغاز هي $< E >= 3kT/2$ من اجل اعطاء تقدير تقريبي لرتبة عظم الاعداد الكمية $n_x, n_y$ و $n_z$.
- وضح في اطار المثال اعلاه الفرق بين العمل الميكانيكي و كمية الحرارة من الناحية الميكروسكوبية.
- نفترض الان انه لدينا ثلاث جسيمات داخل المكعب بحيث ان طاقة الجملة تساوي الي $18\epsilon_0$. ماهي التمثيلات الطاقوية المسموح بها للجملة في الحالات التالية:
  - الجسيمات متمايزة.
  - الجسيمات عبارة عن بوزونات متطابقة ذات سبين يساوي صفر.
  - الجسيمات عبارة عن بوزونات متطابقة ذات سبين يساوي واحد.
  - الجسيمات عبارة عن فرميونات متطابقة ذات سبين يساوي نصف.

  احسب في كل مرة عدد الحالات الميكروسكوبية المسموح بها.

**تمرين** 2:

- ماهي طاقة جسيم يتحرك في بعد واحد بين حائطين عاكسين واقعين في $x = 0$ و $x = L$.
- نعتبر ثلاث جسيمات غير متفاعلة فيما بينها تتحرك في بعد واحد بين حائطين عاكسين واقعين في $x = 0$ و $x = L$.
  - كيف تميز الحالة الميكروسكوبية للجملة اذا كانت الجسيمات لها سبينات $s_1$،$s_2$ و $s_3$ علي التوالي.
  - لتكن طاقة الجملة تساوي $E = 27\epsilon_0$ حيث $\epsilon_0 = \pi^2\hbar^2/2mL^2$. ماهي التمثيلات الطاقوية التي يمكن ان تكون فيها الجملة.
  - احسب عدد الحالات الميكروسكوبية اذا كانت الجسيمات متمايزة بدون سبين.
  - احسب عدد الحالات الميكروسكوبية اذا كانت الجسيمات متطابقة ذات سبين $s = 0, 1, 1/2$.

[٥٩] Schrodinger equation.

**تمرين** 3:    نعتبر جسيم متحرك في بعد واحد بين حائطين عاكسين مفصولين بمسافة $L$.

- احسب عدد الحالات $\Phi(E)$ التي لها طاقة اقل او يساوي من $E$ و عدد الحالات $\Omega(E)$ التي لها طاقة $E$ بارتياب $\delta E$ اذا كانت حركة الجسيم كمية.

- اعد السؤال السابق بافتراض ان حركة الجسيم كلاسيكية.

**تمرين** 4:    احسب عدد الحالات الميكروسكوبية المسموح بها لجملة جسيم حر متحرك داخل مكعب ذو حجم $V$. افترض ان الجسيم ذو سبين صفر يتحرك بصورة كلاسيكية. ماهو عدد الحالات اذا كان الجسيم ذو سبين نصف. ماهو عدد الحالات اذا كان الجسيم ذو سبين واحد.

**تمرين** 5:    نعتبر حركة ثلاثة جسيمات حرة بين حائطين عاكسين علي مسافة تساوي $L$. نفترض ان حركة الجسيمات هي حركة كلاسيكية و بالتالي فانه يمكننا ان نهمل تطابق الجسيمات.

- صف الفضاء الطوري للجملة و اكتب الهاميلتونية.

- احسب عدد الحالات $\Phi(E)$ التي لها طاقة اقل او تساوي من $E$.

- احسب عدد الحالات $\Omega(E)$ التي لها طاقة $E$ بارتياب $\delta E$.

- اذا افترضنا ان الجسيمات هي عبارة عن فرميونات فماذا يصبح عدد الحالات $\Omega(E)$.

- ماذا يصبح عدد الحالات اذا كانت الجسيمات ذات سبين $s$.

- ماهو عدد الحالات $\Omega(E)$ اذا افترضنا الان ان الجسيمات متطابقة.

**تمرين** 6:    تحقق من المعادلة

$$\mathcal{N} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{r} N_i!} \tag{٧٦٢}$$

صراحة من اجل $N = 2$ و $N = 3$. عين في كل مرة الحالات الميكروسكوبية.

**تمرين** 7:    نعتبر جملة عبارة عن حجر نرد. ناقش العلاقة بين المتوسط في الزمن و المتوسط علي المجموعة الاحصائية في هذه الحالة.

**تمرين** 8:    نعتبر جملة غاز مثالي كلاسيكي مشكلة من $N = 3$ جسيمات حرة تتحرك في بعد واحد علي قطعة مستقيمة طولها $L$. احسب عدد الحالات الميكروسكوبية $\Phi(E)$ و $\Omega(E)$ و اشتق عبارة الانتروبي . اشتق عبارة الطاقة الداخلية $E$ و باقي المقادير الترموديناميكية مثل درجة الحرارة و الضغط و كذا معادلة الحالة.

**تمرين** 9:

- صف حركة هزاز توافقي في بعد واحد و احسب سعة حركة الهزاز بدلالة الطاقة.
- احسب عدد الحالات الميكروسكوبية للهزاز التي لها طاقة اقل او تساوي من $E$.
- ما هو عدد الحالات الميكروسكوبية التي لها طاقة $E$ بارتياب $\delta E$.
- احسب

$$p\frac{\partial H}{\partial p}+x\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{٧٦٣}$$

ثم بين ان

$$\int_0^E Hdpdx=\int_0^E (E-H)dpdx. \tag{٧٦٤}$$

- القيمة المتوسطة لمتغير ديناميكي $f$ مأخوذة علي الحالات الميكروسكوبية التي لها طاقة $E$ بارتياب $\delta E$ يعطي بالعلاقة

$$<f>=\frac{\frac{d}{dE}\int_0^E fdpdx}{\frac{d}{dE}\int_0^E dpdx}. \tag{٧٦٥}$$

احسب القيمة المتوسطة $<H>$.

**تمرين** 10: جملة مغلقة مشكلة من مكعبين ملتصقين عبر جدار ادياباتيكي كاتم للحرارة. جملة المكعبين معزولة عن الوسط الخارجي بجدار اديباتيكي.

- في الحالة الابتدائية المكعب الاول يحتوي علي جسيمين غير متطابقين بطاقة كلية تساوي $E_I=12\epsilon_0$ و المكعب الثاني يحتوي علي جسيم واحد بطاقة كلية تساوي $E_{II}=9\epsilon_0$. احسب عدد الحالات الميكروسكوبية المسموح بها للجملة.
- في الحالة النهائية نرفع الحاجز الادياباتيكي الفاصل بين المكعبين. نحصل اذن علي ثلاث جسيمات حرة داخل متوازي اسطح بطاقة اجمالية تساوي $E=21\epsilon_0$. ما هي الطاقات المسموح بهل للجملة في هذه الحالة. احسب عدد الحالات و ماذا تستنتج.

**تمرين** 11:

- نعتبر جملة معزولة مشكلة من مكعبين متلاصقين طول ضلع كل واحد منهما هو $L$. المكعبان مفصولان بجدار كاتم للحرارة و غير نفاذ للجسيمات. المكعب الاول يحتوي علي جسيمين طاقتهما $E_I=12\epsilon_0$ و المكعب الثاني يحتوي ايضا علي جسيمين طاقتهما $E_{II}=18\epsilon_0$. نفترض ان الجسيمات متمايزة.

  احسب عدد الحالات الميكروسكوبية المسموح بها للمكعب الاول و عدد الحالات الميكروسكوبية المسوح بها للمكعب الثاني. ما هو عدد الحالات الاجمالية المسموح بها للجملة الكلية.

- نفترض الان ان الجدار الفاصل بين المكعبين هو جدار غير نفاذ للجسيمات لكنه دياتارم و بالتالي فانه يسمح بتبادل الطاقة بين المكعبين. الجملة الكلية تصبح غير متوازنة ترموديناميكيا و بالتالي فان طاقة كل مكعب يمكنها ان تتغير الي ان تبلغ الجملة الكلية التوازن من جديد. خلال كل هذا التحول فان الطاقة الكلية $E=E_I+E_{II}=30\epsilon_0$ تبقي دائما منحفظة و يمكن لها ان تتوزع علي المكعبين بطرق مختلفة.
  - ماهي التمثيلات الطاقوية الممكنة.
  - احسب عدد الحالات الميكروسكوبية المسموح بها للجملة في كل تمثيلة طاقوية. ما هو العدد الكلي للحالات.
  - ما هو احتمال ان تكون الجملة في اي من الحالات التي وجدناها. ما هو احتمال ان تكون طاقة المكعب الاول تساوي $6\epsilon_0$، $9\epsilon_0$، $12\epsilon_0$ و $15\epsilon_0$.

**تمرين** 12: دالة غاما تعرف بالتكامل

$$\Gamma(t)=\int_0^{\infty}x^{t-1}e^{-x}dx. \qquad (٧٦٦)$$

- بين انه من اجل $t$ موجب لدينا $\Gamma(t+1)=t\Gamma(t)$.
- بين انه من اجل قيم طبيعية ل $t$ اي $t=n$ فان $\Gamma(n+1)=n!$.
- احسب $(1/2)!$ باجراء التكامل اعلاه ثم استنتج قيمة $(3/2)!$، الخ.
- احسب حجم الكرة في $n$ بعد المعطي بالتكامل

$$\int_{x_1^2+...+x_n^2\leq R^2}dx_1...dx_n. \qquad (٧٦٧)$$

# حلول

## مبرهنة التقسيم المتساوي للطاقة:

- الفضاء الطوري ستة ابعاد: $\vec{r}=(x_1,x_2,x_3)$، $\vec{p}=(p_1,p_2,p_3)$. تعطي الهاميلتونية ب

$$H=\frac{p_1^2}{2m}+\frac{p_2^2}{2m}+\frac{p_3^2}{2m}. \tag{٧٦٨}$$

عدد الحالات $\Omega(E)$ المسموح بها للجملة يعطي ب

$$\begin{aligned}\Omega(E) &= \frac{1}{h^3}\int_{E\leq H\leq E+\delta E}d^3xd^3p\\ &= \frac{d\Phi(E)}{dE}.\delta E\\ &= \frac{d}{dE}\bigg(\frac{1}{h^3}\int_{H\leq E}d^3xd^3p\bigg).\delta E\\ &= \frac{V}{h^3}\frac{d}{dE}\bigg(\int_{H\leq E}d^3p\bigg).\delta E.\end{aligned} \tag{٧٦٩}$$

نحسب ايضا

$$\sum_i p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}=2H. \tag{٧٧٠}$$

- ○ القيمة المتوسطة لدالة $f$ تتعلق فقط بكمية الحركة محسوبة علي الحالات الميكروسكوبية التي لها طاقة $E$ بارتياب $\delta E$ يعطي ب

$$< f > \;=\; \frac{\int_{E\leq H\leq E+\delta E}f(p)d^3xd^3p}{\int_{E\leq H\leq E+\delta E}d^3xd^3p}. \tag{٧٧١}$$

من الواضح اذن من هذا التعريف و باستعمال نتيجة السؤال السابق ان

$$< f > \;=\; \frac{\frac{d}{dE}\int_{H\leq E}f(p)d^3p}{\frac{d}{dE}\int_{H\leq E}d^3p}. \tag{٧٧٢}$$

- ○ نحسب

$$\begin{aligned}\int_{H\leq E}p_i\frac{\partial(H-E)}{\partial p_j}d^3xd^3p &= V\int_{H\leq E}\bigg[\frac{\partial}{\partial p_j}(p_i(H-E))-(H-E)\frac{\partial p_i}{\partial p_j}\bigg]d^3p\\ &= V\delta_{ij}\int_{H\leq E}(E-H)d^3p.\end{aligned} \tag{٧٧٣}$$

- ○ نعتبر الدالة

$$G(f(\alpha),g(\alpha),\alpha) \;=\; \int_{f(\alpha)}^{g(\alpha)}F(\alpha,x)dx. \tag{٧٧٤}$$

اذن

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\alpha} &= \frac{\partial G}{\partial \alpha}+\frac{\partial G}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial \alpha}+\frac{\partial G}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial \alpha}\\ &= \int_{f(\alpha)}^{g(\alpha)}\frac{\partial}{\partial \alpha}F(\alpha,x)dx+\frac{\partial g(\alpha)}{\partial \alpha}F(\alpha,g(\alpha))-\frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha}F(\alpha,f(\alpha)).\end{aligned}$$

(٧٧٥)

- لدينا

$$\begin{aligned}< p_i\frac{\partial H}{\partial p_j} > &= \frac{\frac{d}{dE}\int_{H\leq E}p_i\frac{\partial H}{\partial p_j}d^3p}{\frac{d}{dE}\int_{H\leq E}d^3p}\\ &= \frac{\frac{d}{dE}\int_{H\leq E}p_i\frac{\partial (H-E)}{\partial p_j}d^3p}{\frac{d}{dE}\int_{H\leq E}d^3p}\\ &= \frac{-\delta_{ij}\frac{d}{dE}\int_{H\leq E}(H-E)d^3p}{\frac{d}{dE}\int_{H\leq E}d^3p}.\end{aligned}\quad (٧٧٦)$$

اذن يجب ان نحسب

$$\begin{aligned}\frac{d}{dE}\int_{H\leq E}(H-E)d^3p &= \frac{1}{2m}\frac{d}{dE}\int_{0\leq p^2\leq 2mE}(p^2-2mE)p^2dpd\Omega\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{d\alpha}\int_0^{\alpha}(x-\alpha)\sqrt{x}dxd\Omega.\end{aligned}\quad (٧٧٧)$$

باستعمال نتيجة السؤال السابق حيث $f(\alpha)=0$ و $g(\alpha)=\alpha$ نحصل علي

$$\begin{aligned}\frac{d}{dE}\int_{H\leq E}(H-E)d^3p &= \frac{1}{2}\int_0^{\alpha}(-1)\sqrt{x}dxd\Omega\\ &= -\int_{H\leq E}d^3p.\end{aligned}\quad (٧٧٨)$$

بالتعويض في المعادلة اعلاه نحصل علي

$$\begin{aligned}< p_i\frac{\partial H}{\partial p_j} > &= \frac{\delta_{ij}\frac{d}{dE}\int_{H\leq E}d^3p}{\frac{d}{dE}\int_{H\leq E}d^3p}\\ &= \frac{\delta_{ij}\Phi(E)}{d\Phi(E)/dE}.\end{aligned}\quad (٧٧٩)$$

مباشرة نستنتج

$$< 2H >= \frac{3}{d\ln\Phi(E)/dE}=\frac{3k}{2dS/dE}=\frac{3}{2}kT.\quad (٧٨٠)$$

- بالنسبة للهزاز التوافقي لدينا

$$H=\frac{1}{2m}\sum_i p_i^2+\frac{k}{2}\sum_i x_i^2.\quad (٧٨١)$$

اذن

$$< 2H > \quad = \quad \sum_i (< p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} > + < x_i \frac{\partial H}{\partial x_i} >). \qquad (٧٨٢)$$

نحصل الان علي

$$< 2H > \quad = 6kT. \qquad (٧٨٣)$$

**تناقض جيبس:**

- انتروبي غاز مثالي يعطي ب

$$S = \frac{3Nk}{2} \ln \frac{2E}{3N\epsilon_0} + NS_0 + \alpha. \qquad (٧٨٤)$$

من الجهة الاخري فان الطاقة الداخلية لغاز مثالي تعطي ب

$$E = \frac{3}{2} NkT. \qquad (٧٨٥)$$

مباشرة طاقة جزئ واحد هي

$$\epsilon = \frac{E}{N} = \frac{3}{2} kT. \qquad (٧٨٦)$$

يمكن ان نستخرج اذن بسهولة المعادلة الاتية

$$S = Nk \ln V \epsilon^{3/2} + NS_0^{'} + \alpha(N), \qquad (٧٨٧)$$

$$S_0^{'} = S_0 + \frac{3}{2} k \ln \frac{4m}{3\pi^2 \hbar^2} = \frac{3k}{2} (1 + \ln \frac{4\pi m}{3h^2}) \ , \alpha(N) = \alpha = k(-N \ln N + N) \qquad (٧٨٨)$$

يمكن ايضا ان نستخرج بسهولة معادلة ساكور ـ تترود

$$S = Nk \ln \frac{V}{N} \epsilon^{3/2} + \frac{3}{2} Nk (\frac{5}{3} + \ln \frac{4\pi m}{3h^2}). \qquad (٧٨٩)$$

- لان درجات الحرارة متساوية فان $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ و لان الكتل متساوية فان $(S_0^{'})_1 = (S_0^{'})_2 = S_0^{'}$. في الحالة الابتدائية نحصل اذن علي الانتروبيات

$$S_1 = N_1 k \ln V_1 \epsilon^{3/2} + N_1 S_0^{'} + \alpha(N_1). \qquad (٧٩٠)$$

$$S_2 = N_2 k \ln V_2 \epsilon^{3/2} + N_2 S_0^{'} + \alpha(N_2). \qquad (٧٩١)$$

في الحالة النهائية فان $V = V_1 + V_2$ و $N = N_1 + N_2$. الانتروبي يعطي ب

$$S = Nk \ln V \epsilon^{3/2} + NS_0^{'} + \alpha(N). \qquad (٧٩٢)$$

نلاحظ ان $\alpha(N)=\alpha(N_1)+\alpha(N_2)$ لان هذا المعامل ناجم عن تطابق الجسيمات (تأثير كمي) اي عن $N_1!N_2!$ (لان الجزئ الاول يختلف عن الجزئ الثاني) و ليس عن $(N_1+N_2)!$. اذن

$$S = N_1 k \ln V\epsilon^{3/2} + N_1 S_0^{'} + \alpha(N_1) + N_2 k \ln V\epsilon^{3/2} + N_2 S_0^{'} + \alpha(N_2). \quad (٧٩٣)$$

التغير في الانتروبي هو

$$\Delta S = N_1 k \ln \frac{V}{V_1} + N_2 k \ln \frac{V}{V_2} > 0. \quad (٧٩٤)$$

هذا يسمي انتروبي الخلط [٦٠] . $\Delta S > 0$ لان التفاعل غير عكسي.

هذه النتيجة مؤكدة تجريبيا من اجل الغازات المختلفة. لكن من اجل الغازات المتطابقة فانها تؤدي الي ما يسمي بتناقض جيبس: انتروبي خليط من الغاز مشكل من جسيمات متطابقة هو مختلف عن الصفر معطي بالمعادلة اعلاه و هذا من جهة مخالف للتجربة، و من جهة اخري اذا كان هذا صحيح فان هذا يعني ان انتروبي الغاز يتعلق بتاريخه و لما كان ممكنا ان يكون الانتروبي دالة تتعلق فقط بالحالة الترموديناميكية التي تتواجد فيها الجملة. في الحقيقة لا يمكن تعريف الانتروبي اصلا في هذه الحالة لانه يمكننا تصور عدد كيفي من الحواجز الفاصلة داخل الاناء الذي يحتوي الغاز و بالتالي فان انتروبي الغاز يمكن ان يكون اي عدد كبير نريده.

- نفترض الان ان الجزئ الاول و الجزئ الثاني متطابقان. في هذه الحالة عندما نلغي الحاجز الفاصل فان لا شيئ يحدث. التفاعل هو عكسي في هذه الحالة. بالفعل في هذه الحالة $\alpha(N)=\alpha(N_1+N_2)$ و بالتالي فان التغير في الانتروبي هو

$$\Delta S = N_1 k \ln \frac{V}{V_1} + N_2 k \ln \frac{V}{V_2} + N_1 k \ln \frac{N_1}{N} + N_2 k \ln \frac{N_2}{N}. \quad (٧٩٥)$$

لكن

$$\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2} = \frac{V}{N} = \frac{kT}{P}. \quad (٧٩٦)$$

اذن

$$\Delta S = 0. \quad (٧٩٧)$$

**تمرين** 1:

- معادلة شرودينغر تعطي ب

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)+V(x,y,z)\Big]\psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z). \quad (٧٩٨)$$

الجسم حر داخل المكعب اذن $V=0$. نستخدم فصل المتغيرات اي $\psi(x,y,z)=\psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z)$. نحصل مباشرة علي المعادلات و الحلول

$$E = E_x + E_y + E_z = \frac{\hbar^2}{2m}(\Omega_x^2+\Omega_y^2+\Omega_z^2). \quad (٧٩٩)$$

[٦٠] entropy of mixing.

$$\frac{d^2\psi_x}{dx^2}+\Omega_x^2\psi_x=0\Rightarrow\psi_x(x)=A\cos\Omega_x x+B\sin\Omega_x x\ ,\ \Omega_x^2=\frac{2mE_x}{\hbar^2}.\quad(٨٠٠)$$

$$\frac{d^2\psi_y}{dy^2}+\Omega_y^2\psi_y=0\Rightarrow\psi_y(y)=A\cos\Omega_y y+B\sin\Omega_y y\ ,\ \Omega_y^2=\frac{2mE_y}{\hbar^2}.\quad(٨٠١)$$

$$\frac{d^2\psi_z}{dz^2}+\Omega_z^2\psi_z=0\Rightarrow\psi_z(z)=A\cos\Omega_z z+B\sin\Omega_z z\ ,\ \Omega_z^2=\frac{2mE_z}{\hbar^2}.\quad(٨٠٢)$$

اذا افترضنا الشروط الحدية $\psi_x(0)=\psi_x(L)=0$، $\psi_y(0)=\psi_y(L)=0$، $\psi_z(0)=\psi_z(L)=0$ فاننا نحصل مباشرة علي التواترات الزاوية

$$\Omega_x=\frac{\pi n_x}{L}\ ,\ \Omega_y=\frac{\pi n_y}{L}\ ,\ \Omega_z=\frac{\pi n_z}{L}.\quad(٨٠٣)$$

قيم الطاقة المسوح بها هي اذن

$$E=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(n_x^2+n_y^2+n_z^2).\quad(٨٠٤)$$

- نعرف الفسحة الطاقوية ب

$$\epsilon_0=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}.\quad(٨٠٥)$$

المستويات الطاقوية العشرة الاولي هي كالاتي

- $E=3\epsilon_0$ يوافق الحالة $(1,1,1)$.
- $E=6\epsilon_0$ يوافق الثلاث حالات $(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)$.
- $E=9\epsilon_0$ يوافق الثلاث حالات $(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1)$.
- $E=11\epsilon_0$ يوافق الثلاث حالات $(1,1,3),(1,3,1),(3,1,1)$.
- $E=12\epsilon_0$ يوافق الحالة $(2,2,2)$.
- $E=14\epsilon_0$ يوافق الست حالات $(1,2,3)$ و تبديلاتها .
- $E=17\epsilon_0$ يوافق الثلاث حالات $(2,2,3),(2,3,2),(3,2,2)$.
- $E=18\epsilon_0$ يوافق الثلاث حالات $(1,1,4),(1,4,1),(4,1,1)$.
- $E=19\epsilon_0$ يوافق الثلاث حالات $(1,3,3),(3,1,3),(3,3,1)$.
- $E=21\epsilon_0$ يوافق الست حالات $(1,2,4)$ و تبديلاتها .

- من معادلة الحالة $PV=nRT$ نحسب

$$L=\left(\frac{RT}{P}\right)^{1/3}=\left(\frac{8.315.273}{10^5}\right)^{1/3}=0.3m.\quad(٨٠٦)$$

كتلة واحد مول من الهيليوم هو 4 غرام و بالتالي فان كتلة ذرة واحدة من الهيليوم هي

$$m=\frac{4.10^{-3}}{6.022.10^{23}}.\quad(٨٠٧)$$

الفسحة الطاقوية تعطي ب

$$\epsilon_0 = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(6.63.10^{-34})^2}{8.m.(0.3)^2} = 91.91.10^{-42}\frac{m^2kg}{s^2}. \quad (٨٠٨)$$

الطاقة المتوسطة لذرة هيليوم واحدة هي

$$< E >= \frac{3}{2}kT = 565.11J. \quad (٨٠٩)$$

رتبة عظم الاعداد الكمية $n_x, n_y$ و $n_z$ تعطي اذن ب

$$n_x, n_y, n_z \sim \sqrt{\frac{< E >}{\epsilon_0}} \sim 10^{21}. \quad (٨١٠)$$

- العمل الميكانيكي يوافق تغير في الحجم $V$ الذي يؤدي الي تغير في الفسحة الطاقوية. بالفعل اذا تناقص الحجم $V$ فان الفسحة الطاقوية تكبر و العكس. اذن التغير في الحجم يؤدي الي تغير في طاقة الجملة عبر تغير المستويات الطاقوية مع الحفاظ علي اعداد الاحتلال [٦١] ثابتة.

  من الجهة الاخري فان التغير في الانتروبي يؤدي الي تغير في طاقة الجملة، الذي هو عبارة هنا عن كمية حرارة، عبر تغير اعداد الاحتلال مع الحفاظ علي المستويات الطاقوية ثابتة.

- لدينا ثلاث امكانيات عند توزيع الجسيمات علي المستويات الطاقوية المختلفة للحصول علي الطاقة $E = 18\epsilon_0$:

  ◦ يمكن وضع الجسيم الاول علي المستوي $E = 3\epsilon_0$، الجسيم الثاني علي المستوي $E = 6\epsilon_0$ و الجسيم الثالث علي المستوي $E = 9\epsilon_0$.
  ◦ يمكن وضع الجسيم الاول علي المستوي $E = 3\epsilon_0$، الجسيم الثاني علي المستوي $E = 3\epsilon_0$ و الجسيم الثالث علي المستوي $E = 12\epsilon_0$.
  ◦ يمكن وضع الجسيم الاول علي المستوي $E = 6\epsilon_0$، الجسيم الثاني علي المستوي $E = 6\epsilon_0$ و الجسيم الثالث علي المستوي $E = 6\epsilon_0$.

الان عدد الحالات الميكروسكوبية المختلفة يتعلق علي طبيعة و سبين الجسيمات كالاتي:

### الجسيمات متمايزة :

◦ عند توزيع ثلاث جسيمات متمايزة علي $E = 3\epsilon_0$، $E = 6\epsilon_0$ و $E = 9\epsilon_0$ فانه لدينا $3!$ تبديلة ممكنة و مختلفة للجسيمات و $1.3.3$ امكانية راجعة الي انحلال المستويات الطاقوية. اذن هناك $6.9 = 54$ حالة ميكروسكوبية في هذه الحالة.

◦ عند توزيع ثلاث جسيمات متمايزة علي $E = 3\epsilon_0$، $E = 3\epsilon_0$ و $E = 12\epsilon_0$ فانه لدينا $3!/2!$ تبديلة ممكنة و مختلفة للجسيمات و $1.1.1$ امكانية راجعة الي انحلال المستويات الطاقوية. اذن هناك $3.1 = 3$ حالات ميكروسكوبية في هذه الحالة.

◦ عند توزيع ثلاث جسيمات متمايزة علي $E = 6\epsilon_0$، $E = 6\epsilon_0$ و $E = 6\epsilon_0$ فانه لدينا $3!/3!$ تبديلة ممكنة و مختلفة للجسيمات و $3.3.3$ امكانية راجعة الي انحلال المستويات الطاقوية. اذن هناك $1.27 = 27$ حالة ميكروسكوبية في هذه الحالة.

[٦١] occupation numbers.

**الجسيمات بوزونات متطابقة :**

- عند توزيع ثلاث بوزونات متطابقة علي $E=3\epsilon_0$، $E=6\epsilon_0$ و $E=9\epsilon_0$ فانه علينا ان نقسم العدد المحصل سابقا علي $3!$ لان التبديلات الان غير مهمة بسبب ان الجسيمات متطابقة. اذن نحصل علي $54/6=9$ حالة ميكروسكوبية مختلفة.
- عند توزيع ثلاث بوزونات متطابقة علي $E=3\epsilon_0$، $E=3\epsilon_0$ و $E=12\epsilon_0$ فانه علينا ان نقسم العدد المحصل سابقا علي 3 لان التبديلة الان غير مهمة بسبب ان الجسيمات متطابقة. اذن نحصل علي $1=3/3$ حالة ميكروسكوبية في هذه الحالة.
- عند توزيع ثلاث بوزونات متطابقة علي $E=6\epsilon_0$، $E=6\epsilon_0$ و $E=6\epsilon_0$ فاننا ننطلق من ال 27 حالة ميكروسكوبية التي حصلنا عليها سابقا. من بين هذه الامكانيات الحالات الميكروسكوبية التي هي فعلا مختلفة هي كما يلي. كل الجسيمات تقع علي نفس الحالة الكمية علي المستوي الطاقوي $E=6\epsilon_0$: 3 حالات. جسيمان يقعان علي نفس الحالة الكمية علي المستوي $E=6\epsilon_0$: 6 حالات. كل جسيم يقع علي حالة مختلفة علي المستوي $E=6\epsilon_0$: حالة واحدة. اذن هناك 10 حالات مختلفة.

**الجسيمات بوزونات متطابقة ذات سبين يساوي واحد :** في هذه الحالة لدينا ثلاث حالات سبين مختلفة كل مرة. اذن لدينا الاتي:

- عند توزيع ثلاث بوزونات متطابقة علي $E=3\epsilon_0$، $E=6\epsilon_0$ و $E=9\epsilon_0$ فانه لدينا 9 حالات ميكروسكوبية مختلفة. عند اضافة السبين يصبح عدد الحالات $243=9.3.3.3$ حالة ميكروسكوبية.
- عند توزيع ثلاث بوزونات متطابقة علي $E=3\epsilon_0$، $E=3\epsilon_0$ و $E=12\epsilon_0$ فانه لدينا حالة ميكروسكوبية واحدة. عند اضافة السبين فان الجسيمين علي المستوي $E=3\epsilon_0$ لهما 6 حالات سبين مختلفة اما الجسيم الاخر فان له 3 حالات سبين مختلفة. اذن يصبح لدينا $18=6.3$ حالة ميكروسكوبية.
- من اجل ثلاث بوزونات متطابقة موزعة علي $E=6\epsilon_0$، $E=6\epsilon_0$ و $E=6\epsilon_0$ كان لدينا $10=1+6+3$ امكانيات. من اجل الامكانيات الثلاث الاولي يمكن لكل الجسيمات ان يكون لها نفس السبين (ثلاث حالات)، جسيمان لهما نفس السبين (ست حالات) او كل جسيم له سبين مختلف (حالة واحدة). اذن 3 تصبح 3.10 حالة. من اجل الامكانيات الستة التالية فان الجسيمين اللذين يقعان علي نفس الحالة الكمية لهما 6 حالات سبين مختلفة اما الجسيم الثالث فله 3 حالات سبين مختلفة. اذن 6 تصبح 6.3.6. من اجل الامكانية الاخيرة لدينا 3.3.3 حالة سبين مختلفة. اذن لدينا في الاجمال $165=1.3.3.3+6.3.6+3.10$ حالة ميكروسكوبية.

**الجسيمات فرميونات متطابقة ذات سبين يساوي نصف :** في هذه الحالة لدينا حالتي سبين مختلفة كل مرة. ايضا الفرميونات لا يمكن ان تحتل نفس الحالة الكمية مبدأ الاستبعاد لباولي [٦٢] . اذن لدينا الاتي:

- عند توزيع ثلاث فرميونات متطابقة علي $E=3\epsilon_0$، $E=6\epsilon_0$ و $E=9\epsilon_0$ فانه لدينا 9 حالات ميكروسكوبية مختلفة. عند اضافة السبين يصبح عدد الحالات $72=9.2.2.2$ حالة ميكروسكوبية.

---

[٦٢] Pauli.

- ○ عند توزيع ثلاث فرميونات متطابقة علي $E=3\epsilon_0$، $E=3\epsilon_0$ و $E=12\epsilon_0$ فانه لدينا حالة ميكروسكوبية واحدة. عند اضافة السبين فان الجسيمين علي المستوي $E=3\epsilon_0$ لهما حالة سبين واحدة لان السبين يجب ان يكون مقترنا هنا حسب مبدأ الاستبعاد لباولي اما الجسيم الاخر فان له حالتي سبين مختلفتين. اذن يصبح لدينا $1.2=2$ حالة ميكروسكوبية.
- ○ من اجل ثلاث فرميونات متطابقة موزعة علي $E=6\epsilon_0$، $E=6\epsilon_0$ و $E=6\epsilon_0$ يمكن ان يكون لدينا $6+1=7$ امكانيات. من اجل الامكانيات الستة الاولي فان الجسيمين اللذين يقعان علي نفس الحالة الكمية لهما حالة سبين واحدة لان السبين لا يمكن الا ان يكون مقترنا هنا حسب مبدأ الاستبعاد لباولي اما الجسيم الثالث فله حالتي سبين مختلفتين. اذن 6 تصبح $6.2$. من اجل الامكانية الاخيرة لدينا $2.2.2$ حالة سبين مختلفة. اذن لدينا في الاجمال $6.2+1.2.2.2=20$ حالة ميكروسكوبية.

**تمرين** 2:

- 

$$E=\epsilon_0 n^2\ ,\ \epsilon_0=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}. \tag{٨١١}$$

- ○

$$|n_1s_1m_1>|n_2s_2m_2>|n_3s_3m_3>. \tag{٨١٢}$$

- ○ توجد امكانيتان: $(A)$ $|9\epsilon_0>|9\epsilon_0>|9\epsilon_0>$ ، $(B)$ $|\epsilon_0>|\epsilon_0>|25\epsilon_0>$.
- ○ اذا كانت الجسيمات متمايزة بدون سبين فان عدد الحالات هو كما يلي: $(A)$ 1 ، $(B)$ 3.
- ○ اذا كانت الجسيمات متطابقة ذات سبين $s=0$ فان عدد الحالات هو كما يلي: $(A)$ 1 ، $(B)$ 1.
  اذا كانت الجسيمات متطابقة ذات سبين $s=1$ فان عدد الحالات هو كما يلي: $(A)$ 10: كل الجسيمات لها نفس السبين (3)، جسيمان لهما نفس السبين و الاخر مختلف (6)، سبينات الجسيمات كلها مختلفة (1) ، $(B)$ 18: الجسيمان اللذان يقعان علي نفس المستوي لهما سته حالات سبين و الجسيم الاخير له ثلاث حالات سبين.
  اذا كانت الجسيمات متطابقة ذات سبين $s=1/2$ فان عدد الحالات هو كما يلي: $(A)$ 0: مبدأ الاستبعاد لباولي ، $(B)$ 2: الجسيمان اللذان يقعان علي نفس المستوي لهما حالة سبين و احدة و الجسيم الاخير له حالاتي سبين.

**تمرين** 3:

- نعرف ان الطاقة تعطي ب

$$E=\frac{\pi^2\hbar^2n^2}{2mL^2}. \tag{٨١٣}$$

مباشرة عدد الحالات يعطي ب

$$\Phi(E)=n=\frac{L}{\pi\hbar}\sqrt{2mE}. \tag{٨١٤}$$

اذن

$$\Omega(E)=\frac{d\Phi}{dE}\delta E=n=\frac{L}{2\pi\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E}}\delta E. \quad (٨١٥)$$

- في الميكانيك الكلاسيكي لدينا

$$\begin{aligned}\Phi(E) &= \frac{1}{h}\int_{H\leq E}dxdp\\ &= \frac{2L}{h}\int_0^{p\leq\sqrt{2mE}}dp\\ &= \frac{2L}{h}\sqrt{2mE}. \quad (٨١٦)\end{aligned}$$

هذه نفس العبارة التي حصلنا عليها في الميكانيك الكمي.

**تمرين** 4: نحسب

$$\begin{aligned}\Phi(E) &= \frac{1}{h^3}\int_{H\leq E}dxdydzdp_xdp_ydp_z\\ &= \frac{V}{h^3}\int_{p_x^2+p_y^2+p_z^2\leq 2mE}dp_xdp_ydp_z\\ &= \frac{V}{h^3}\frac{4}{3}\pi(2mE)^{3/2}. \quad (٨١٧)\end{aligned}$$

$$\Omega(E)=\frac{d\Phi(E)}{dE}\delta E. \quad (٨١٨)$$

عند اضافة سبين $s$ فاننا نضرب عدد الحالات ب $2s+1$.

**تمرين** 5:

- الفضاء الطوري له سته ابعاد هي $x_1,p_1,x_2,p_2,x_3,p_3$. الهاميلتونية تعطي ب

$$H=\frac{p_1^2}{2m}+\frac{p_2^2}{2m}+\frac{p_3^2}{2m}. \quad (٨١٩)$$

- 

$$\begin{aligned}\Phi(E) &= \frac{1}{h^3}\int_{H\leq E}dx_1dx_2dx_3dp_1dp_2dp_3\\ &= \frac{L^3}{h^3}\int_{p_1^2+p_2^2+p_3^2\leq 2mE}dp_1dp_2dp_3\\ &= \frac{L^3}{h^3}\frac{4}{3}\pi(2mE)^{3/2}. \quad (٨٢٠)\end{aligned}$$

- 

$$\begin{aligned}\Omega(E) &= \frac{d\Phi(E)}{dE}\delta E\\ &= \frac{4\pi L^3m}{h^3}(2mE)^{1/2}\delta E. \quad (٨٢١)\end{aligned}$$

- نضرب في اثنين.
- نضرب في $2s+1$.
- نقسم علي $3!$.

**تمرين** 8: نحصل علي

$$\Phi(E)=\frac{L^3}{h^3}\frac{4}{3}\pi\sqrt{8m^3}E^{3/2}=\frac{\pi}{6}(E/\epsilon_0)^{3/2}. \tag{٨٢٢}$$

$$\Omega(E)=4\pi\frac{L^3}{h^3}\sqrt{2m^3}E^{1/2}\delta E=\frac{\pi}{4}(E/\epsilon_0)^{1/2}\delta E/\epsilon_0. \tag{٨٢٣}$$

نتصور ان $N=3$ عدد كبير بحيث يمكننا ان نحسب الانتروبي من العبارة

$$\frac{S}{k}=\ln\Phi\Rightarrow S=k\ln\frac{\pi}{6}+\frac{3k}{2}\ln\frac{E}{\epsilon_0}. \tag{٨٢٤}$$

الطاقة الداخلية تعطي بالعبارة

$$E=\epsilon_0 e^{-\frac{2}{3}\ln\frac{\pi}{6}}e^{\frac{2S}{3k}}. \tag{٨٢٥}$$

نحسب المقادير الترموديناميكية

$$T=(\frac{\partial E}{\partial S})_{V,N}=\frac{2}{3k}E\Rightarrow E=\frac{3}{2}kT. \tag{٨٢٦}$$

$$P=-(\frac{\partial E}{\partial V})_{S,N}=-(\frac{\partial\epsilon_0}{\partial V})_{S,N}\frac{1}{\epsilon_0}.E=\frac{2}{L}E\Rightarrow PL=2E=3kT. \tag{٨٢٧}$$

**تمرين** 9:

- عدد ابعاد الفضاء الطوري هو 2 باحداثيات معطاة ب $x$ و $p$. الهاميلتونية تعطي ب

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}kx^2. \tag{٨٢٨}$$

معادلات هاميلتون

$$\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{m}=\dot{x}. \tag{٨٢٩}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}=kx=-\dot{p}. \tag{٨٣٠}$$

اذن الحركة دورية بتواتر زاوي

$$\Omega=\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{٨٣١}$$

الحركة دورية تعطي صراحة بالحلول

$$x = A\cos(\Omega t + \phi)\ ,\ p = m\dot{x} = -mA\Omega\sin(\Omega t + \phi). \quad (٨٣٢)$$

نحسب بالتالي

$$H = \frac{A^2 k}{2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2H}{m\Omega^2}}. \quad (٨٣٣)$$

•

$$\begin{aligned} \Phi(E) &= \frac{1}{h}\int_{H\leq E} dxdp \\ &= \frac{1}{h}\int_{p^2/b^2+x^2/a^2\leq 1} dxdp. \end{aligned} \quad (٨٣٤)$$

نحصل اذن علي مساحة قطع ناقص بانصاف محاور

$$a = \sqrt{\frac{2E}{k}}\ ,\ b = \sqrt{2mE}. \quad (٨٣٥)$$

مساحة القطع الناقص $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ تحسب كالاتي

$$\begin{aligned} S &= \int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} dy \\ &= 2ba\int_{-a}^{a}\frac{dx}{a}\sqrt{1-x^2/a^2} \\ &= 2ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\phi d\phi \\ &= ab\pi. \end{aligned} \quad (٨٣٦)$$

اذن عدد الحالات هو

$$\Phi(E) = \frac{E}{\hbar\Omega}. \quad (٨٣٧)$$

•

$$\Omega(E) = \frac{\delta E}{\hbar\Omega}. \quad (٨٣٨)$$

•

$$p\frac{\partial H}{\partial p} + x\frac{\partial H}{\partial x} = 2H. \quad (٨٣٩)$$

اذن

$$\begin{aligned} \int_0^E 2Hdpdx &= \int_0^E p\frac{\partial H}{\partial p}dpdx + \int_0^E x\frac{\partial H}{\partial x}dpdx \\ &= \int_0^E p\frac{\partial(H-E)}{\partial p}dpdx + \int_0^E x\frac{\partial(H-E)}{\partial x}dpdx \\ &= -2\int_0^E (H-E)dpdx. \end{aligned} \quad (٨٤٠)$$

اذن

$$
\begin{aligned}
<H> &= \frac{\frac{d}{dE}\int_0^E Hdpdx}{\frac{d}{dE}\int_0^E dpdx} \\
&= \frac{\frac{d}{dE}\int_0^E (E-H)dpdx}{\frac{d}{dE}\int_0^E dpdx} \\
&= \frac{\int_0^E dpdx}{\frac{d}{dE}\int_0^E dpdx} \\
&= \frac{\Phi}{d\Phi/dE} \\
&= \frac{1}{d\ln\Phi/dE} \\
&= \frac{k}{dS/dE} \\
&= kT. \qquad (\text{٨٤١})
\end{aligned}
$$

استخدمنا اعلاه العلاقة

$$\frac{d}{dx}\int_0^{h(x)} f(x,y)dy = \int_0^{h(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)dy + h^{'}(x)f(x,h(x)). \qquad (\text{٨٤٢})$$

**تمرين** 10:

- الطاقة داخل مكعب تعطي ب

$$E = \epsilon_0(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2). \qquad (\text{٨٤٣})$$

بالنسبة للمكعب الاول هناك تمثيلتان طاقويتان:

  - $\mathbf{A}$ : الجسيمان علي المستوي الطاقوي $E = 6\epsilon_0$. لان هذا المستوي منحل ثلاث مرات لدينا اذن $3.3 = 9$ حالة ميكروسكوبية ممكنة.
  - $\mathbf{B}$ : احد الجسيمان علي المستوي $E = 3\epsilon_0$ و الاخر علي المستوي $E = 9\epsilon_0$. لان $E = 3\epsilon_0$ غير منحل و $E = 9\epsilon_0$ منحل ثلاث مرات لدينا $3.2 = 6$ حالة ميكروسكوبية حيث 2 راجع الي تمايز الجسيمات .

عدد الحالات الميكروسكوبية في المكعب الاول هو $\Omega_I = 9 + 6 = 15$.

بالنسبة للمكعب الثاني الجسيم يغع علي المستوي $E = 9\epsilon_0$. اذن هناك ثلاث حالات ميكروسكوبية اي $\Omega_{II} = 3$.

لان الجدار الفاصل ادياباتيكي فان عدد الحالات الكلي هو $\Omega_I.\Omega_{II} = 15.3 = 45$.

- لما ننزع الجدار الفاصل فان الحجم يصبح متوازي اسطح. الطاقة تعطي الان ب

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}(n_x^2/L_x^2 + n_y^2/L_y^2 + n_z^2/L_z^2) \\
&= \epsilon_0(n_x^2/4 + n_y^2 + n_z^2). \qquad (\text{٨٤٤})
\end{aligned}
$$

هناك طاقات تساوي $\epsilon_0 p/4$ حيث $p$ عدد طبيعي لا يقبل القسمة علي 4 و لانه لدينا ثلاث جسيمات (عدد فردي) فان هذه الطاقات لا يمكن ان تجمع ل $21\epsilon_0$. يتبقي لنا الطاقات التالية:

- $E=3\epsilon_0$: $(n_x,n_y,n_z)=(2,1,1)$.
- $E=6\epsilon_0$: $(n_x,n_y,n_z)=(2,1,2),(2,2,1),(4,1,1)$.
- $E=9\epsilon_0$: $(n_x,n_y,n_z)=(2,2,2),(4,1,2),(4,2,1)$.
- $E=11\epsilon_0$: $(n_x,n_y,n_z)=(2,3,1),(2,1,3)$.
- $E=12\epsilon_0$: $(n_x,n_y,n_z)=(4,2,2)$.
- $E=14\epsilon_0$: $(n_x,n_y,n_z)=(2,3,2),(2,2,3)$.
- $E=18\epsilon_0$: $(n_x,n_y,n_z)=(2,4,1),(2,1,4)$.

**اذن هناك ثلاث تمثيلات طاقوية ممكنة:**

- **A** : **جسيمان علي المستوي الطاقوي $E=6\epsilon_0$ و الاخر علي المستوي الطاقوي $E=9\epsilon_0$. الجسيم علي المستوي $E=9\epsilon_0$ له ثلاث امكانيات، الجسيمان علي المستوي $E=6\epsilon_0$ لهما تسعة امكانيات و تمايز الجسميات يؤدي الي معامل ضرب يساوي ثلاثة. اذن هناك $81=3.9.3$ حالة ميكروسكوبية ممكنة.**
- **B** : **جسيم علي المستوي $E=3\epsilon_0$، الجسيم الثاني علي المستوي $E=6\epsilon_0$ و الثالث علي المستوي $E=12\epsilon_0$. الجسيم علي المستوي $E=3\epsilon_0$ له امكانية واحدة، الجسيم علي المستوي $E=6\epsilon_0$ له ثلاث امكانيات، الجسيم علي المستوي $E=12\epsilon_0$ له امكانية واحدة و تمايز الجسيمات يؤدي الي $3!$. اذن لدينا $18=6.1.3.1$ حالة ميكروسكوبية.**
- **C** : **جسيمان علي المستوي الطاقوي $E=9\epsilon_0$ و الاخر علي المستوي الطاقوي $E=3\epsilon_0$. الجسيمان علي المستوي $E=9\epsilon_0$ لهما تسعة امكانيات، الجسيم علي المستوي $E=3\epsilon_0$ له امكانية واحدة و تمايز الجسميات يؤدي الي معامل ضرب يساوي ثلاثة. اذن هناك $27=3.9.1$ حالة ميكروسكوبية ممكنة.**

**عدد الحالات الاجمالي هو $27+18+81$. عدد الحالات يزداد عند رفع الحاجز الادياباتيكي.**

**تمرين** 11:

- **بالنسبة للعلبة الاولي لدينا تمثيلتان طاقويتان: $(A)$ الجسيمان علي المستوي الطاقوي $E=6\epsilon_0$ المنحل ثلاث مرات. اذن هناك $9=3.3$ حالة ميكروسكوبية. $(B)$ جسيم علي المستوي الطاقوي $E=9\epsilon_0$ المنحل ثلاث مرات و جسيم علي المستوي الطاقوي $E=3\epsilon_0$ غير المنحل. اذن هناك $6=3.2$ حالة ميكروسكوبية. عدد الحالات الاجمالية بالنسبة للمكعب الاول هو $\Omega_I=9+6=15$.**

  **بالنسبة للعلبة الثانية لدينا ايضا تمثيلتان طاقويتان: $(A)$ الجسيمان علي المستوي الطاقوي $E=9\epsilon_0$ المنحل ثلاث مرات. اذن هناك $9=3.3$ حالة ميكروسكوبية. $(B)$ جسيم علي المستوي الطاقوي $E=6\epsilon_0$ المنحل ثلاث مرات و جسيم علي المستوي الطاقوي $E=12\epsilon_0$ غير المنحل. اذن هناك $6=3.2$ حالة ميكروسكوبية. عدد الحالات الاجمالية بالنسبة للمكعب الثاني هو $\Omega_{II}=9+6=15$.**

  **عدد الحالات الكلي هو $\Omega=\Omega_I.\Omega_{II}=15.15=225$ حالة ميكروسكوبية.**

- - **يمكن ان تتوزع الطاقة كما يلي: $(A)$ $E_I=6\epsilon_0$ ، $E_{II}=24\epsilon_0$ و العكس. $(B)$ $E_I=9\epsilon_0$ ، $E_{II}=21\epsilon_0$ و العكس. $(C)$ $E_I=12\epsilon_0$ ، $E_{II}=18\epsilon_0$ و العكس. $(D)$ $E_I=15\epsilon_0$ ، $E_{II}=15\epsilon_0$.**

- $(A)$: العلبة الاولي: الجسيمان علي المستوي الطاقوي $E = 3\epsilon_0$ (حالة واحدة). العلبة الثانية: الجسيمان علي المستوي الطاقوي $E = 12\epsilon_0$ (حالة واحدة)، جسيم علي المستوي الطاقوي $E = 18\epsilon_0$ المنحل ثلاث مرات و الجسيم الاخر علي المستوي الطاقوي $E = 6\epsilon_0$ المنحل ثلاث مرات (تسعة حالات)، جسيم عي المستوي الطاقوي $E = 21\epsilon_0$ المنحل ستة مرات و الجسيم الاخر علي المستوي الطاقوي $E = 3\epsilon_0$ (12 حالة). اذن هناك $\Omega_A = \Omega_1.\Omega_2.2 = 1.31.2 = 62$ حالة.
  $(B)$: العلبة الاولي: جسيم علي المستوي الطاقوي $E = 3\epsilon_0$ و جسيم علي المستوي الطاقوي $E = 6\epsilon_0$ المنحل ثلاث مرات ( ستة حالات). العلبة الثانية: جسيم علي المستوي الطاقوي $E = 3\epsilon_0$ و جسيم علي المستوي الطاقوي $E = 18\epsilon_0$ المنحل ثلاث مرات (ستة حالات)، جسيم عي المستوي الطاقوي $E = 9\epsilon_0$ المنحل ثلاثة مرات و الجسيم الاخر علي المستوي الطاقوي $E = 12\epsilon_0$ (ستة حالات). اذن هناك $\Omega_B = \Omega_1.\Omega_2.2 = 6.12.2 = 144$ حالة.
  $(C)$: العلبة الاولي: جسيم علي المستوي الطاقوي $E = 3\epsilon_0$ و جسيم علي المستوي الطاقوي $E = 9\epsilon_0$ المنحل ثلاث مرات ( ستة حالات)، الجسيمان علي المستوي الطاقوي $E = 6\epsilon_0$ المنحل ثلاث مرات (تسعة حالات). العلبة الثانية: جسيم علي المستوي الطاقوي $E = 12\epsilon_0$ و جسيم علي المستوي الطاقوي $E = 6\epsilon_0$ المنحل ثلاث مرات (ستة حالات)، الجسيمان عي المستوي الطاقوي $E = 9\epsilon_0$ المنحل ثلاثة مرات (تسعة حالات). اذن هناك $\Omega_C = \Omega_1.\Omega_2.2 = 15.15.2 = 450$ حالة.
  $(D)$: العلبة الاولي: جسيم علي المستوي الطاقوي $E = 6\epsilon_0$ المنحل ثلاث مرات و جسيم علي المستوي الطاقوي $E = 9\epsilon_0$ المنحل ثلاث مرات ( 18 حالة)، جسيم علي المستوي الطاقوي $E = 3\epsilon_0$ و جسيم علي المستوي الطاقوي $E = 12\epsilon_0$ (حالتان). العلبة الثانية: نفس التعداد. اذن هناك $\Omega_D = \Omega_1.\Omega_2 = 20.20 = 400$ حالة.
- العدد الاجمالي للحالات الميكروسكوبية هو

$$\Omega = \Omega_A + \Omega_B + \Omega_C + \Omega_D = 62 + 144 + 450 + 400 = 1056. \quad (٨٤٥)$$

حسب مسلمة تساوي الاحتمال فان احتمال الحصول علي اي حالة ميكروسكوبية هو

$$P = 1/1056. \quad (٨٤٦)$$

نحسب ايضا الاحتمالات

$$P(E_I = 6\epsilon_0) = 31/1056 \ , \ P(E_I = 9\epsilon_0) = 72/1056$$
$$P(E_I = 15\epsilon_0) = 400/1056 \ , \ P_I(E_I = 12\epsilon_0) = 225/1056. \quad (٨٤٧)$$

**تمرين** 12:

- المكاملة بالتجزئة.
- استخدم الخاصية التي برهنا عليها في السؤال السابق.

- المكاملة بالتجزئة و تغيير المتغير $x = az^2$ يؤديان الي العلاقات

$$\begin{aligned}
(1/2)! = \Gamma(3/2) &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^{-1/2}e^{-x}dx \\
&= -a^{3/2}\frac{d}{da}\int_{-\infty}^{+\infty} dze^{-az^2} \\
&= -a^{3/2}\frac{d}{da}(\sqrt{\pi}a^{-1/2}) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.
\end{aligned} \tag{٨٤٨}$$

اذن

$$(3/2)! = (1/2)\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/4. \tag{٨٤٩}$$

- انظر الي المحاضرة.

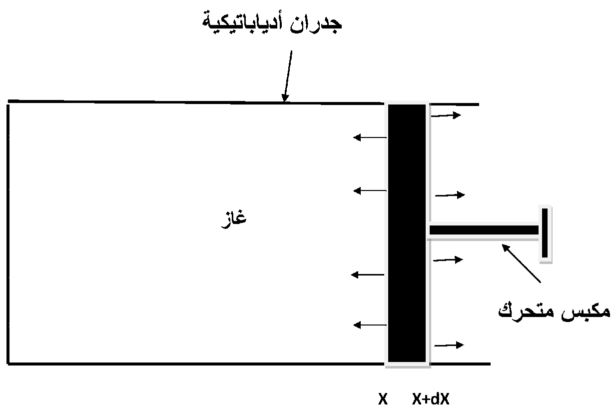


Figure .1:

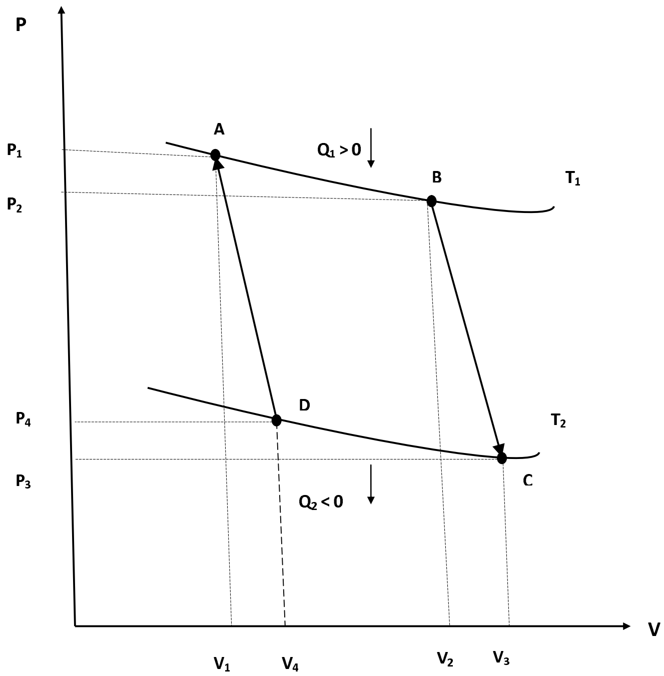


Figure .2:

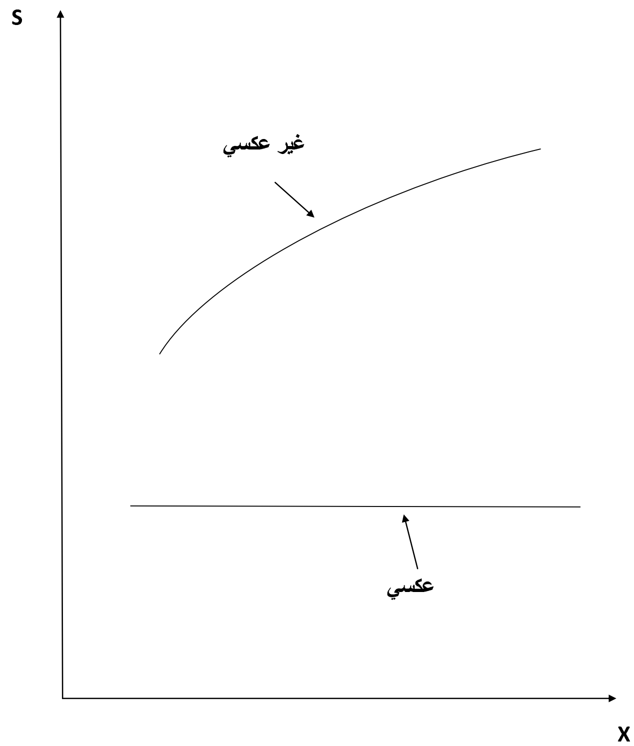


Figure .3:

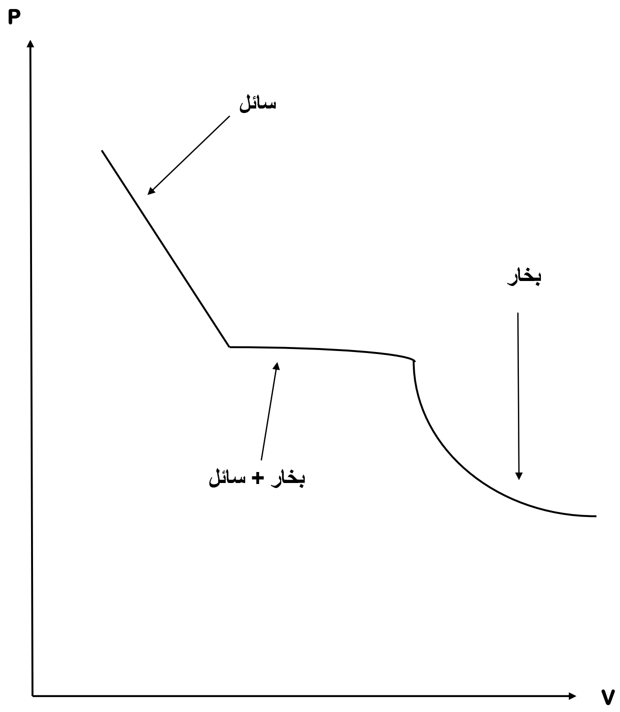


Figure .4:

# المجموعة القانونية

## المجموعة القانونية

نعتبر في هذا الفصل جملة ترموديناميكية $\mathcal{S}$ في حالة توازن حراري مع خزان حراري $\mathcal{T}$ موضوع عند درجة حرارة $T$. هذا يعني بالخصوص أن الجملة $\mathcal{S}+\mathcal{T}$ هي جملة معزولة في حالة توازن احصائي و بالتالي يمكن ان نطبق المجموعة الميكروقانونية عليها. طاقة هذه الجملة الكلية هي $E_0$ ونفترض أن الجملة $\mathcal{S}$ هي في حالة ميكروسكوبية $j$ ذات طاقة تساوي $E_r$. لدينا اذن في النهاية الترموديناميكية

$$E_0 = E_r + E_T, \tag{٨٥٠}$$

حيث $E_T$ هي طاقة الخزان الحراري. ليكن $\Omega_T(E_T)$ هو عدد الحالات الميكروسكوبية المسموح بها للخزان الحراري ذات الطاقة $E_T$. اذن احتمال أن تكون الجملة $\mathcal{S}$ في حالة ميكروسكوبية $j$ ذات طاقة $E_r$ يعطى بالضبط ب

$$P_j(E_r) = \frac{\Omega_T(E_0 - E_r)}{\Omega}, \tag{٨٥١}$$

حيث $\Omega$ هو عدد الحالات الميكروسكوبية المسموح بها للجملة الكلية $\mathcal{S}+\mathcal{T}$. من الواضح أن

$$\sum_r \sum_j P_j(E_r) = 1 \Rightarrow \Omega = \sum_r \sum_j \Omega_T(E_0 - E_r) = \frac{1}{\mathcal{N}}. \tag{٨٥٢}$$

اذن

$$P_j(E_r) = \mathcal{N}' \Omega_T(E_0 - E_r). \tag{٨٥٣}$$

لان الخزان الحراري يحتوي على عدد أكبر بكثير من درجات الحرية بالمقارنة مع الجملة $\mathcal{S}$ فإن $E_r << E_T$ وبالتالي $E_r << E_0$. نعتبر الدالة $\ln \Omega_T(E_0 - E_r)$ التي تتغير في نفس اتجاه الدالة $\Omega_T(E_0 - E_r)$ لكن ببطء شديد. اذن يمكن أن ننشر الدالة $\Omega_T(E_0 - E_r)$ نشر تايلورحول $E_0$ كالتالي

$$\ln \Omega_T(E_0 - E_r) = \ln \Omega_T(E_0) - \left(\frac{\partial \ln \Omega_T}{\partial E}\right)_{E=E_0} E_r + .... \tag{٨٥٤}$$

المشتقة الجزئية في المعادلة اعلاه تحسب عند حجم ثابت و عدد جسيمات ثابت، وهي مرتبطة بدرجة حرارة الخزان بالعلاقة

$$\left(\frac{\partial \ln \Omega_T}{\partial E}\right)_{E=E_0} = \left(\frac{\partial \ln \Omega_T}{\partial E}\right)_{V,N} = \frac{1}{kT} = \beta. \tag{٨٥٥}$$

نحصل اذن على

$$\ln \Omega_T(E_0 - E_r) = \ln \Omega_T(E_0) - \beta E_r + .... \quad (٨٥٦)$$

اى

$$\Omega_T(E_0 - E_r) = \Omega_T(E_0) e^{-\beta E_r}. \quad (٨٥٧)$$

الاحتمال ان تكون الجملة $\mathcal{S}$ فى حالة ميكروسكوبية $j$ ذات طاقة $E_r$ يصبح

$$P_j(E_r) = \mathcal{N}^{'} \Omega_T(E_0) e^{-\beta E_r} = \mathcal{N} e^{-\beta E_r}. \quad (٨٥٨)$$

شرط التنظيم يعطى الان

$$\frac{1}{\mathcal{N}} = Z = \sum_r \sum_j e^{-\beta E_r}. \quad (٨٥٩)$$

تسمى $Z$ دالة تقسيم الجملة. اذا كانت $g_r$ هى درجة انحلال المستوى الطاقوى $E_r$ نحصل على

$$Z = \sum_r g_r e^{-\beta E_r}. \quad (٨٦٠)$$

احتمال أن تكون الجملة فى حالة ميكروسكوبية $j$ ذات طاقة $E_r$، عندما تكون فى حالة توازن احصائى مع خزان حرارى عند درجة الحرارة $T$، يصبح

$$P_j(E_r) = \frac{e^{-\beta E_r}}{Z}. \quad (٨٦١)$$

هذا الاحتمال يسمى توزيع ماكسويل ويعرف ما يسمى بالمجموعة القانونية. احتمال ان نجد الجملة $\mathcal{S}$ بطاقة $E_r$ هو

$$P(E_r) = \frac{g_r e^{-\beta E_r}}{Z}. \quad (٨٦٢)$$

اذا كان طيف الطاقة مستمر نحصل فى المقابل على الاحتمال $P(E)dE$ حيث

$$P(E) = \frac{\Omega(E) e^{-\beta E}}{Z}\ ,\ Z = \int dE \Omega(E) e^{-\beta E}, \quad (٨٦٣)$$

من الواضح أن $\Omega(E)$ هى كثافة عدد الحالات اى أن $\Omega(E)dE$ هو عدد الحالات بين $E$ و $E + dE$.

المجموعة القانونية هى مجموعة من الجمل الترموديناميكية المتماثلة ماكروسكوبيا التى تكون فى حالة توازن احصائى او حرارى مع خزان حرارى عند درجة الحرارة $T$، والتى يعطى احتمال وجود اى منها فى حالة ميكروسكوبية $j$ ذات طاقة $E_r$ بتوزيع ماكسويل اعلاه. حسب الفرضية الارجودية فإن المتوسط فى الزمن المأخوذ فى جملة معينة يساوى المتوسط المأخوذ فى مجموعة الجمل فى لحظة معينة.

.

# دالة التقسيم

نعتبر مجموعة مشكلة من جمل فى حالة توازن حرارى مع خزان حرارى عند درجة حرارة $T$ ذات طاقات مختلفة $E$. لأن هذه الجمل فى حالة توازن حرارى مع الخزان الحرارى فان المتوسط فى الطاقة $<E>$ هو ثابت فى الزمن. هذه المجموعة كما سنبين تعطى بالضبط بالمجموعة القانونية. تذكر أنه فى حالة المجموعة الميكروقانونية فإن الجمل كانت معزولة و بالتالى فإن الطاقة نفسها كانت ثابتة فى الزمن. ليكن $P_i$ احتمال ان تحتل الجملة الحالة الميكروسكوبية $i$. عند التوازن الاحصائى فإن انتروبى المعلومات

$$S = -k\sum_i P_i \ln P_i, \tag{٨٦٤}$$

يجب ان يكون اعظميا حيث الجمع على $i$ هو على جميع الحالات الميكروسكوبية المسموح بها للجملة. نبحث، كما فعلنا فى السابق، عن القيمة الاعظمية لانتروبى المعلومات مع قيد انحفاظ الاحتمال، بالاضافة الى القيد الاضافى الذى ينص على ثبوت قيمة الطاقة، اى يجب ان يكون لدينا

$$\sum_i P_i = 1. \tag{٨٦٥}$$

$$\sum_i E_i P_i = <E>. \tag{٨٦٦}$$

حيث $E_i$ هى طاقة الحالة الميكروسكوبية $i$. نستخدم مرة اخرى طريقة مضروبات لاغرانج، ونعتبر الدالة

$$F = S - \lambda_1\big(\sum_i P_i - 1\big) - \lambda_2\big(\sum_i E_i P_i - <E>\big). \tag{٨٦٧}$$

$\lambda_1$ و $\lambda_2$ هى بالضبط مضروبات لاغرانج. شرط القيمة الاعظمية يعطى ب

$$\frac{\partial F}{\partial P_i} = 0\ ,\ \forall i. \tag{٨٦٨}$$

نحصل على

$$-k\ln P_i - k - \lambda_1 - \lambda_2 E_i = 0. \tag{٨٦٩}$$

نعرف مضروبات لاغرانج بصورة مختلفة كالتالى

$$\lambda_1 = \lambda k\ ,\ \lambda_2 = k\beta. \tag{٨٧٠}$$

نحصل على

$$P_i = e^{-1-\lambda} e^{-\beta E_i}. \tag{٨٧١}$$

من شرط التنظيم نحصل مباشرة على الثابت

$$e^{-1-\lambda} = \frac{1}{\sum_i e^{-\beta E_i}}. \tag{٨٧٢}$$

اذن الاحتمال عند التوازن الاحصائى يعطى ب

$$P_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}. \quad (٨٧٣)$$

هذا هو توزيع بولتزمان. الدالة $Z$ هى ما تعرف بدالة التقسيم و تعرف ب

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i}. \quad (٨٧٤)$$

نحسب مباشرة الانتروبى عند التوازن و نجد

$$S = k\big(\ln Z + \beta < E >\big). \quad (٨٧٥)$$

هذا هو الانتروبى الترموديناميكى. من الواضح ايضا أن $< E >$ هى الطاقة الداخلية $U$ للجملة اى

$$U =< E > . \quad (٨٧٦)$$

يمكننا اذن ان نعرف درجة حرارة الجملة بالعلاقة

$$(\frac{\partial S}{\partial U})_{V,N} = \frac{1}{T}. \quad (٨٧٧)$$

اذن نحصل على

$$\beta = \frac{1}{kT}. \quad (٨٧٨)$$

يمكن كتابة دالة التقسيم اعلاه على الشكل الاصرح

$$Z = \sum_r \sum_j e^{-\beta E_r}, \quad (٨٧٩)$$

حيث الجمع على $r$ هو الجمع على جميع المستويات الطاقوية و الجمع على $j$ هو الجمع على جميع الحالات الميكروسكوبية التى لها طاقة $E_r$. اذا كانت درجة انحلال المستوى الطاقوى $E_r$ هى $g_r$ فإننا يمكن أن نكتب دالة التقسيم اعلاه على الشكل

$$Z = \sum_r g_r e^{-\beta E_r}. \quad (٨٨٠)$$

فى الحالة التى تكون فيها المستويات الطاقوية مستمرة فإننا نكتب العلاقة اعلاه على الشكل

$$Z = \int \Omega(E) dE e^{-\beta E}. \quad (٨٨١)$$

$\Omega(E)$ هى كثافة الحالات عند الطاقة $E$ اى أن $\Omega(E)dE$ هو عدد الحالات المحتواة بين $E$ و $E + dE$.

الطلقة الداخلية تتعلق بدرجة الحرارة $T$، وبالمستويات الطاقوية $E_r$، أى بالحجم $V$ و عدد الجسيمات $N$ اى

$$Z = Z(T, V, N). \quad (٨٨٢)$$

## العلاقة بالمقادير الترموديناميكية

**الطاقة الداخلية**: من النقاش اعلاه يمكننا ان نكتب مباشرة احتمال ان نحصل على المستوى الطاقوى $E_r$ كالاتى

$$P(E_r) = \frac{\sum_j e^{-\beta E_r}}{Z} = \frac{g_r e^{-\beta E_r}}{Z}. \tag{٨٨٣}$$

الطاقة الداخلية هى القيمة المتوسطة للطاقة اى أنها تعطى بالعلاقة

$$\begin{aligned} U &= < E > \\ &= \sum_r E_r P(E_r) \\ &= \frac{1}{Z}\sum_r \sum_j E_r e^{-\beta E_r} \\ &= -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} \\ &= -\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\right)_{V,N}. \end{aligned} \tag{٨٨٤}$$

لكن

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = -kT^2 \frac{\partial}{\partial T}. \tag{٨٨٥}$$

اذن

$$U = < E >= kT^2\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_{V,N}. \tag{٨٨٦}$$

المجموعة القانونية تحتوى على جمل، فى حالة توازن حرارى مع خزان حرارى، ذات طاقات مختلفة $E$ بحيث أن المتوسط $< E >$ هو ثابت، عكس المجموعة الميكروقانونية التى تكون فيها كل الجمل معزولة حراريا و بالتالى لها نفس الطاقة $E$. نبرهن الان أن المجموعة القانونية هى رياضيا مكافئة للمجموعة الميكروقانونية.

الانحراف المعيارى للطاقة $\Delta E$ يحسب التقلب [٦٣] فى الطاقة $E$ حول المتوسط $< E >$ ويعطى بالعلاقة

$$\Delta E^2 =< E^2 > - < E >^2 . \tag{٨٨٧}$$

نحسب الان

$$\begin{aligned} < E^2 > &= \sum_r E_r^2 P(E_r) \\ &= \frac{1}{Z}\sum_r \sum_j E_r^2 e^{-\beta E_r} \\ &= \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\ln Z + < E >^2 . \end{aligned} \tag{٨٨٨}$$

---

[٦٣] fluctuation.

اذن

$$\begin{aligned}\Delta E^2 &= \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\ln Z\\ &= -\frac{\partial}{\partial\beta}<E>\\ &= kT^2(\frac{\partial <E>}{\partial T})_{V,N}\\ &= kT^2C_v.\end{aligned} \tag{٨٨٩}$$

حيث $C_v$ هى السعة الحرارية عند حجم ثابت. من الواضح اذن ان الطاقة الداخلية تزداد دائما مع ازدياد درجة الحرارة. اذن التقلب فى الطاقة هو تقلب عادي [٦٤].

التقلب النسبى للطاقة يعرف بأخذ النسبة بين التقلب $<\Delta E>$ و المتوسط $<E>$ أى

$$\frac{\Delta E}{<E>}=\frac{kT}{<E>}\sqrt{\frac{C_v}{k}}. \tag{٨٩٠}$$

اذا استخدمنا نتائج المجموعة الميكروقانونية بالنسبة لغاز المثالى المعطاة ب $<E>=3NkT/2$ و $C_v=3NK/2$ فإننا نحصل على

$$\frac{\Delta E}{<E>}=\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{٨٩١}$$

اذن التقلب النسبى ينعدم عندما $N\longrightarrow\infty$. اذن عندما $N\longrightarrow\infty$ فإن الاغلبية الساحقة من الجمل فى المجموعة لها طاقة تساوى $<\Delta E>$ التى هى بالضبط الطاقة الداخلية. اذن المجموعة القانونية مكافئة للمجموعة الميكروقانونية بمعنى ان اغلبية الجمل فى المجموعة القانونية لها نفس الطاقة الداخلية. هذه النتيجة تعنى ايضا أنه يمكن استخدام المجموعة القانونية عوض المجموعة الميكروقانونية لوصف التوازن الاحصائى لجملة معزولة مكونة من عدد ضخم من درجات الحرية.

**الضغط**: نقوم بتغيير الحجم بطريقة شبه ساكنة بين $V$ و $V+dV$ عند درجة حرارة ثابتة $T$ وعدد جسيمات ثابت $N$. هذا يؤدى الى تغيير فى المستويات الطاقوية $E_r$. اذا كانت جملة من المجموعة فى حالة ميكروسكوبية ذات طاقة $E_r$، فإن الضغط يعطى ب

$$P_r=-(\frac{\partial E_r}{\partial V})_{T,N}. \tag{٨٩٢}$$

قيمة الضغط التى نقيسها على المستوى الماكروسكوبى تعطى بالمتوسط

$$\begin{aligned}<P> &= \sum_r P_rP(E_r)\\ &= -\frac{1}{Z}\sum_r\sum_j\frac{\partial E_r}{\partial V}e^{-\beta E_r}\end{aligned}$$

---

[٦٤] normal fluctuation.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\beta Z}\frac{\partial}{\partial V}\sum_r\sum_j e^{-\beta E_r} \\ &= \frac{1}{\beta Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} \\ &= kT\Big(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\Big)_{T,N}. \end{aligned} \quad (٨٩٣)$$

**الانتروبى و الطاقة الحرة:** نعتبر الحالة التى يكون فيها عدد جسيمات ثابت بحيث تصبح دالة التقسيم لا تتعلق الا بدرجة الحرارة و الحجم اى $Z=Z(T,V)$. نحسب مباشرة

$$\begin{aligned} d\ln Z &= \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}d\beta + \frac{\partial \ln Z}{\partial V}dV \\ &= -<E>d\beta + \beta <P> dV. \end{aligned} \quad (٨٩٤)$$

من جهة أخرى

$$d(\beta <E>) = <E>d\beta + \beta d<E>. \quad (٨٩٥)$$

نأخذ مجموع المعادلتين اعلاه لنحصل على

$$d(\ln Z + \beta <E>) = \beta(d<E> + <P>dV). \quad (٨٩٦)$$

بعبارة اخرى

$$d<E> = -<P>dV + kTd(\ln Z + \beta <E>). \quad (٨٩٧)$$

نحصل اذن على الانتروبى

$$dS = kd(\ln Z + \beta <E>) \Rightarrow S = k(\ln Z + \beta <E>). \quad (٨٩٨)$$

عند درجة حرارة الصفر المطلق، اى لما $\beta \longrightarrow \infty$، فان $Z \longrightarrow g_0$، $<E> \longrightarrow 0$ و $S \longrightarrow k\ln g_0$، حيث $g_0$ هى درجة انحلال المستوى الطاقوى الاساسى. اى اننا نختار ثابت التكامل بحيث نحصل على المبدأ الثالث للترموديناميك.

المعادلة اعلاه يمكن كتابتها على الشكل المكافئ

$$<E> - TS = -kT\ln Z. \quad (٨٩٩)$$

هذا هو تعريف الطاقة الحرة بالضبط اى

$$F = -kT\ln Z \Rightarrow Z = e^{-\beta F}. \quad (٩٠٠)$$

# النظرية الحركية للغازات: توزيع ماكسويل

نعتبر غاز مثالى كلاسيكى متجانس اى احادى الذرة داخل علبة حجمها $V$. نفترض أن درجة الحرارة غير قريبة جدا من الصفر المطلق وبالتالى يمكن تطبيق قوانين الميكانيك الكلاسيكى على الغاز. نفترض ايضا أن الذرات غير متطابقة

وبالتالى يمكن ان نعتبر ذرة بعينها تحت تأثير الذرات الاخرى التى تتصرف اذن بالنسبة لهاكخزان حرارى. الطاقة الحركية لهذه الذرة اذا كان شعاع موضعها بين $\vec{r}$ و $\vec{r}+d\vec{r}$ وشعاع كمية حركتها بين $\vec{p}$ و $\vec{p}+d\vec{p}$ تعطى ب

$$E=\frac{\vec{p}^2}{2m}, \tag{٩٠١}$$

حيث $m$ هى كتلة الذرة. عدد الحالات الميكروسكوبية $dN(\vec{r},\vec{p})$ التى لها هذه الطاقة هو عدد الحالات المحتواة داخل الحجم فى الفضاء الطورى $d\vec{r}d\vec{p}$ ويعطى ب

$$dN(\vec{r},d\vec{p})=\frac{d\vec{r}d\vec{p}}{h^3}, \tag{٩٠٢}$$

حيث $h^3$ هو الحجم فى الفضاء الطورى الذى يحتوى على حالة ميكروسكوبية واحدة. لاحظ ان هذا العدد لا يتعلق لا ب $\vec{r}$ و لا $\vec{p}$. الاحتمال $\mathcal{P}(\vec{r},\vec{p})d\vec{r}d\vec{p}$ فى أن نجد الذرة فى الحجم $d\vec{r}d\vec{p}$ يعطى بتوزيع بولتزمان فى حالة طيف مستمر أى

$$\mathcal{P}(\vec{r},\vec{p})d\vec{r}d\vec{p}=\frac{1}{Z}\frac{d\vec{r}d\vec{p}}{h^3}e^{-\beta\frac{\vec{p}^2}{2m}}. \tag{٩٠٣}$$

دالة التقسيم $Z$ نحصل عليها من شرط التنظيم $\int\mathcal{P}(\vec{r},\vec{p})d\vec{r}d\vec{p}=1$ و بالتالى تعطى ب

$$Z=\int\frac{d\vec{r}d\vec{p}}{h^3}e^{-\beta\frac{\vec{p}^2}{2m}}. \tag{٩٠٤}$$

التكامل على الفضاء هين يعطى مباشرة حجم العلبة $V$. التكامل على كمية الحركة يعطى ب

$$\begin{aligned} Z &= \frac{V}{h^3}\bigg(\int dp_x e^{-\beta\frac{p_x^2}{2m}}\bigg)^2 \\ &= \frac{V}{h^3}\bigg(\frac{2\pi m}{\beta}\bigg)^{3/2} \\ &= \frac{V}{h^3}(2\pi mkT)^{3/2}. \end{aligned} \tag{٩٠٥}$$

الاحتمال $\mathcal{P}(\vec{p})d\vec{p}$ فى أن نجد الذرة بكمية حركة بين $\vec{p}$ و $\vec{p}+d\vec{p}$ فى أى مكان من العلبة يعطى ب

$$\mathcal{P}(\vec{p})d\vec{p}=\int_V\mathcal{P}(\vec{r},\vec{p})d\vec{r}d\vec{p}=\frac{1}{(2\pi mKT)^{3/2}}e^{-\frac{\vec{p}^2}{2kTm}}d\vec{p}. \tag{٩٠٦}$$

بالتعويض ب $\vec{p}=m\vec{v}$ نحصل على توزيع السرعات

$$\mathcal{P}(\vec{v})d\vec{v}=\big(\frac{m}{2\pi KT}\big)^{3/2}e^{-\frac{m\vec{v}^2}{2kT}}d\vec{v}. \tag{٩٠٧}$$

هذا هو توزيع ماكسويل للسرعات.

بطريقة أخرى، ليكن $f(\vec{r},\vec{v})d\vec{r}d\vec{v}$ عدد الذرات التى تقع بين $\vec{r}$ و $\vec{r}+d\vec{r}$ و التى لها سرعة بين $\vec{v}$ و $\vec{v}+d\vec{v}$. من الواضح أن

$$f(\vec{r},\vec{v})d\vec{r}d\vec{v}=Ce^{-\frac{m\vec{v}^2}{2kT}}d\vec{r}d\vec{v}. \tag{٩٠٨}$$

**شرط التنظيم يعطى ب**

$$\int f(\vec{r},\vec{v})d\vec{r}d\vec{v}=N, \quad (٩٠٩)$$

**حيث $N$ هو عدد ذرات الغاز فى الحجم $V$. اجراء التكامل على نفس منوال الحساب اعلاه نحصل على**

$$CV\big(\frac{2\pi kT}{m}\big)^{3/2}=N. \quad (٩١٠)$$

**اذن نحصل على التوزيع**

$$f(\vec{r},\vec{v})=\rho\big(\frac{m}{2\pi kT}\big)^{3/2}e^{-\frac{m\vec{v}^2}{2kT}}, \quad (٩١١)$$

**حيث $\rho=N/V$ هو عدد الذرات فى وحدة الحجم و هو ثابت. هذا هو توزيع ماكسويل بدلالة عدد الذرات فى وحدة الحجم فى وحدة السرعات.**

**توزيع ماكسويل هو توزيع متوحد المناحى (٦٥) لانه لا يتعلق الا ب $\vec{v}^2$. بالتالى فان توزيع مركبات السرعة فى أى اتجاه من الفضاء سيكون هو نفسه. لنحسب توزيع السرعات $g(v_x)$ الذى يوافق المركبة $v_x$.**

**$g(v_x)dv_x$ هو عدد الذرات فى وحدة الحجم التى لها سرعة ذات مركبة فى الاتجاه $x$ بين $v_x$ و $v_x+dv_x$. اذن مركبات السرعة فى الاتجاهين $y$ و $z$ يمكن ان تأخذ اى قيمة. لدينا اذن**

$$\begin{aligned} g(v_x) &= \int dv_y\int dv_z f(\vec{r},\vec{v})\\ &= \rho\big(\frac{m}{2\pi kT}\big)^{3/2}e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}\int dv_y e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}}\int dv_z e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}}\\ &= \rho\big(\frac{m}{2\pi kT}\big)^{1/2}e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}. \end{aligned} \quad (٩١٢)$$

**لدينا شرط التنظيم**

$$\int dv_x g(v_x) = \rho. \quad (٩١٣)$$

**توزيع السرعة $g(v_x)$ هو توزيع غوس مركز حول $v_x=0$. نحسب القيم المتوسطة**

$$<v_x>=\frac{1}{\rho}\int dv_x v_x g(v_x)=0. \quad (٩١٤)$$

$$\begin{aligned} <v_x^2>=\frac{1}{\rho}\int dv_x v_x^2 g(v_x) &= \big(\frac{m}{2\pi kT}\big)^{1/2}\int dv_x v_x^2 e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}\\ &= \big(\frac{m}{2\pi kT}\big)^{1/2}\big(-2kT\frac{\partial}{\partial m}\big)\int dv_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}\\ &= \frac{kT}{m}. \end{aligned} \quad (٩١٥)$$

---

(٦٥) isotropic.

اذن الانحراف المعيارى فى السرعة الذى يقيس التقلب $\Delta v_x$ فى قيم السرعة $v_x$ حول القيمة المتوسطة $< v_x >$ يعطى بالضبط ب

$$\Delta v_x = \sqrt{< v_x^2 > - < v_x >^2} = \sqrt{\frac{kT}{m}}. \quad (٩١٦)$$

لأن توزيع السرعات متوحد المناحى فإن القيمة المتوسطة للطاقة الحركية لذرة من ذرات الغاز تعطى ب

$$\frac{1}{2}m < v^2 >= \frac{1}{2}m(< v_x^2 > + < v_y^2 > + < v_z^2 >) = \frac{3}{2}m < v_x^2 >= \frac{3}{2}kT. \quad (٩١٧)$$

هذه النتيجة هى احدى التطبيقات الخاصة لمبرهنة تساوى الطاقة.

يمكن ان نعيد الحساب فى الاحداثيات الكروية كالتالى. ليكن $g(v)dv$ عدد الذرات فى وحدة الحجم التى لها سرعة ذات طويلة بين $v$ و $v + dv$. هذا العدد يعطى بالتكامل التالى

$$\begin{aligned} g(v)dv &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta v^2 dv f(\vec{r}, \vec{v}) \\ &= 4\pi v^2 dv f(\vec{r}, \vec{v}) \\ &= 4\pi\rho\big(\frac{m}{2\pi kT}\big)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv. \end{aligned} \quad (٩١٨)$$

شرط التنظيم مازال يعطى ب

$$\int dv g(v) = \rho. \quad (٩١٩)$$

نلاحظ ان $g(0) = g(\infty) = 0$. اذن التوزيع $g(v)$ يمر بقيمة اعظمية تعطى بالشرط $dg(v)/dv = 0$. هذه القيمة الاعظمية تسمى بالقيمة الاكثر احتمالا وتعطى ب

$$\tilde{v} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (٩٢٠)$$

هذه القيمة الاكثر احتمالا تختلف عن القيمة المتوسطة التى تعطى ب

$$\begin{aligned} < v > &= \frac{1}{\rho}\int dv v g(v) \\ &= 4\pi\big(\frac{m}{2\pi kT}\big)^{3/2}\int v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \\ &= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \end{aligned} \quad (٩٢١)$$

نحسب ايضا

$$\begin{aligned} < v^2 > &= \frac{1}{\rho}\int dv v^2 g(v) \\ &= 4\pi\big(\frac{m}{2\pi kT}\big)^{3/2}\int v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \\ &= \frac{3kT}{m}. \end{aligned} \quad (٩٢٢)$$

الطاقة المتوسطة تعطى اذن كما فى السابق ب

$$\frac{1}{2}m < v^2 > = \frac{3kT}{2}. \quad (٩٢٣)$$

# البارامغناطيسية

نعتبر جملة مكونة من $N$ ذرة متطابقة ذات سبين $1/2$ غير متفاعلة فيما بينها فى حالة سكون موزعة على شبكة خطية عمودية للمحور $z$. اذا افترضنا أن كل ذرة لديها الكترون عازب واحد فى طبقة $s$، اى ان العزم المدارى صفر، فإن العزم الثنائى المغناطيسى يعطى ب

$$\vec{M} = g\frac{e}{2m}\vec{s}, \quad (٩٢٤)$$

حيث $e$ و $m$ هما شحنة و كتلة الالكترون، $\vec{s}$ هو شعاع العزم الحركى الذاتى اى السبين، و $g$ هو معامل لاندى [٦٦] الذى يساوى $2$ بالنسبة للالكترون. لان السبين يساوى $1/2$ فإن اسقاط العزم المغناطيسى على المحور $z$ يمكن ان يعطى قيميتن فقط: $\pm M$. اذن اذا طبقنا حقل مغناطيسى $\vec{B}$ فى الاتجاه $z$ فإن الطاقة الكامنة لكل ذرة لا يمكن ان تأخذ الا قيمتين: $E_+ = -MB$ اذا كان $\vec{M}$ موازى ل $\vec{B}$ او $E_- = MB$ اذا كان $\vec{M}$ عكس $\vec{B}$.

اذا كانت درجة حرارة الشبكة ثابتة تساوى $T$، فإنه يمكننا ان نطبق على كل ذرة المجموعة القانونية لان الذرات تتصرف فعليا كذرات متمايزة بسبب الشبكة. باقى الذرات اذن تتصرف كخزان حرارى درجة حرارته $T$. احتمالات ان تكون الذرة فى المستويين $E_+$ و $E_-$ تعطى ب

$$P_+ = \frac{1}{Z}e^{-\beta E_+} \ , \ P_- = \frac{1}{Z}e^{-\beta E_-}. \quad (٩٢٥)$$

دالة التقسيم تعطى ب

$$Z = e^{-\beta E_+} + e^{-\beta E_-}. \quad (٩٢٦)$$

نكتب

$$Z = e^x + e^{-x} \ , \ P_+ = \frac{e^x}{Z} \ , \ P_- = \frac{e^{-x}}{Z} \ , \ x = \beta MB. \quad (٩٢٧)$$

العزم المغناطيسى المتوسط للذرة يعطى ب

$$< M >= \frac{MP_+ - MP_-}{Z} = M\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x} = M\tanh\frac{MB}{kT}. \quad (٩٢٨)$$

اذن من اجل درجات الحرارة العليا $kT >> MB$ اى $x \longrightarrow 0$ وبالتالى $\tanh x \longrightarrow x$ اى

$$< M >= \frac{M^2B}{kT} \longrightarrow 0. \quad (٩٢٩)$$

اذن المستويان الطاقويان $E_+$ و $E_-$ متساويان فى الطاقة. فى هذه الحالة الطاقة الحرارية تتغلب على الطاقة المغناطيسية و $\vec{M}$ يتوزع بشكل منتظم فى الاتجاهين الموجب و السالب.

لكن من اجل $kT << MB$ فإن $x \longrightarrow \infty$ اى $\tanh x \longrightarrow 1$. اذن فى هذه الحالة، حالة درجات الحرارة المنخفضة، فإن $< M > \longrightarrow M$. الجملة فى المستوى الاساسى.

---

[٦٦] Lande.

القيمة المتوسطة للعزم المغناطيسى الكلى تعطى ب

$$< \mathcal{M} >= N < M > . \quad (٩٣٠)$$

من اجل الحقول المغناطيسية الصغيرة $B \longrightarrow 0$ نحصل على

$$< \mathcal{M} >= \chi B \ , \ B \longrightarrow 0. \quad (٩٣١)$$

معامل التناسب $\chi$ يسمى الحساسية المغناطيسية [٦٧] و يعطى فى هذه الحالة ب

$$\chi = \frac{NM^2}{kT}. \quad (٩٣٢)$$

## الغاز المثالى

الغازات الحقيقية عند درجات الحرارة غير القريبة جدا من الصفر المطلق و قيم الضغط غير المرتفعة تتصرف كغاز مثالى كلاسيكى لان مكوناتها الذرية فى هذه الحالةتتصرف تقريبا كجسيمات حرة، اى بدون اى تفاعلات فيما بينها، تتبع القوانين الكلاسيكية. علينا ان نأخذ ايضا بعين الاعتبار لتأثيرات الكمومية الخاصة بانحلال المستويات الطاقوية بسبب السبين و كذلك تأثير تطابق الجسيمات.

نعتبر $N$ جسيم حر متطابق داخل علبة مكعبة طول ضلعها $L$. طاقة الجملة تساوى مجموع طاقات الجسيمات. دالة تقسيم اى جسيم تعطى ب-انظر تمرين 3-

$$Z_1 = (\frac{mkT}{2\pi\hbar^2})^{3/2}V. \quad (٩٣٣)$$

فى حالة ما اذا كانت الجسيمات متمايزة فإن دالة التقسيم الكلية تساوى $Z_1^N$ حيث $N$ هو عدد الجسيمات. فى المقابل، فى حالة ما اذا كانت الجسيمات متطابقة فإن دالة التقسيم الكلية تعطى ب

$$Z = \frac{Z_1^N}{N!}. \quad (٩٣٤)$$

هذا راجع الى كون التمثيلات المرفقة بال $N!$ تبديلة ممكنة لل $N$ جسيم يجب ان تؤدى الى نفس الحالة الميكروسكوبية.

لنرى هذا فى حالة $N=2$ مع مستويان للطاقة مختلفان $E_1$ و $E_2$. اذا كان الجسيمان متمايزان فإن الحالات الميكروسكوبية المسموح بها للجسيم هى الاربعة الحالات التالية: الجسيم الاول على $E_1$ و الجسيم الثانى على $E_2$، الجسيم الاول على $E_2$ و الجسيم الثانى على $E_1$، الجسيمان على $E_1$، الجسيمان على $E_2$. هذا يعنى ان دالة التقسيم تعطى ب $Z_1^2$.

اذا كان هناك $N$ جسيم متمايز مع $N$ مستوى طاقوى مختلف فإن عدد الحالات الميكروسكوبية هو $N!$. يكفى فقط أن نعتبر الحالات الميكروسكوبية التى تقع فيها الجسيمات على مستويات مختلفة.

حتى نرى ذلك، نعتبر مسالة توزيع جسيمان على $N$ علبة. لدينا مباشرة $N^2$ حالة ممكنة. عدد الحالات التى يقع فيها الجسيمان فى علبتين مختلفتين هو $N(N-1)$. اذن عدد الحالات التى يقع فيها الجسيمان فى علبة واحدة هو $N^2 - N(N-1) = N$. اذن احتمال ان نحصل على الجسيمين على نفس المستوى هو $N/N^2 = 1/N$ و هو مهمل فى النهاية $N \longrightarrow \infty$.

---

[٦٧] magnetic susceptibility.

هذه نتيجة عامة: لان عدد الحالات الميكروسكوبية المسموح بها اكبر بكثير من عدد الجسيمات فإن احتمال ان تقع الجسيمات على نفس المستوى الطاقوى مهمل. نعتبر فقط الحالات الميكروسكوبية التى تكون فيها الجسيمات على مستويات طاقوية مختلفة.

بالنسبة للمثال اعلاه، $N=2$ مع مستويين اثنين للطاقة، فإن الحالات الميكروسكوبية المهمة هى: الجسيم الاول على $E_1$ و الجسيم الثانى على $E_2$، الجسيم الاول على $E_2$ و الجسيم الثانى على $E_1$. عندما يكون الجسيمان متطابقان نحصل على حالة واحدة اى نقسم دالة التقسيم $Z_1^2$ على $2!$.

بالمثل فإنه فى حالة $N$ جسيم متطابق موزعة على $N$ مستوى طاقوى فإننا نقسم على $N!$ و هو المطلوب.

نحصل على دالة التقسيم الكلية

$$Z = \frac{1}{N!}(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2})^{3N/2}V^N. \quad (٩٣٥)$$

اذن

$$\ln Z = \frac{3N}{2}\ln\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} + N\ln V - \ln N!. \quad (٩٣٦)$$

بإستخدام علاقة ستيرلينغ $\ln N! = N\ln N - N$ نحصل على

$$\ln Z = N\bigg[\ln\frac{V}{N} + \frac{3}{2}\ln\frac{m}{2\pi\hbar^2} - \frac{3}{2}\ln\beta + 1\bigg]. \quad (٩٣٧)$$

نحسب الان الطاقة الداخلية، السعة الحرارية، الضغط و الانتروبى كما يلى

$$< E > = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = \frac{3}{2}NkT. \quad (٩٣٨)$$

$$C_v = (\frac{\partial < E >}{\partial T})_V = \frac{3}{2}Nk. \quad (٩٣٩)$$

$$P = kT\frac{\partial \ln Z}{\partial V} = \frac{NkT}{V}. \quad (٩٤٠)$$

$$S = k(\ln Z + \beta < E >) = Nk\bigg[\ln\frac{V}{N} + \frac{3}{2}\ln\frac{m}{2\pi\hbar^2} - \frac{3}{2}\ln\beta + \frac{5}{2}\bigg]. \quad (٩٤١)$$

نصل اذن الى نفس النتائج التى تحصلنا عليها باستعمال المجموعة الميكروقانونية لكن بطريقة اسرع. اذن المجموعة القانونية تؤدى الى نفس النتائج التى تؤدى اليها المجموعة الميكروقانونية لكن استعمالها اسهل بكثير. هذا ايضا صحيح من الناحية التجريبية لان تثبيت درجة الحرارة اسهل بكثير من تثبيت الطاقة.

# تمارين

**تمرين** 1:    فى اشتقاف المعادلة (900) افترضنا أن عدد الجسيمات ثابت. افترض فى هذا التمرين أن عدد الجسيمات متغير، ثم اعد اشتقاق عبارة الضغط، الانتروبى، و استخرج عبارة الكمون الكيميائى بدلالة دالة التقسيم. افترض أن (900) مازالت صالحة عندما يكون عدد الجسيمات متغير.

**تمرين** 2:    نعتبر جملة موضوعة عند درجة حرارة $T$ ذات مستويين طاقويين نختارهما على الشكل $E_0 = 0$ و $E = \epsilon$.

- احسب دالة التقسيم و الطاقة الداخلية.
- احسب السعة الحرارية وعين كيف تتصرف مع درجة الحرارة. احسب التقلب فى الطاقة. ماذا تستنتج من اجل درجات الحرارة العليا و الدنيا.
- احسب الانتروبى و عين كيف يتصرف مع درجات الحرارة العليا و الدينا.
- احسب الطاقة الحرة.
- نفترض الان ان المستوى الطاقوى $E_1$ هو ثنائى الانحلال أما المستوى الطاقوى $E_2$ فهو ثلاثى الانحلال. احسب احتمال ان تحتل الجملة المستوى الاول و احتمال ان تحتل المستوى الثانى.

**تمرين** 3:    نعتبر جسيم حر يتحرك داخل علبة مكعبة طول ضلعها $L$. احسب دالة تقسيم هذا الجسيم و اشتق المقادير الترموديناميكية المختلفة.

**تمرين** 4:    نعتبر جسيم حر تحرك داخل حجم $V$. احسب دالة التقسيم بافتراض ان الجسيم يتصرف بطريقة كلاسيكية و بين ان النتيجة تتفق مع الحساب الكمومى الذى اجريناه فى المحاضرة.

**تمرين** 5:    يمكن استعمال الهزاز التوافقى فى بعد واحد لوصف اهتزازات جزئ حول موضع توازنه. الطاقة الكلاسيكية للهزاز تعطى ب

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2. \qquad (٩٤٢)$$

المستويات الطاقوية الكمومية للجملة تعطى ب

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\Omega \ , \ n = 0, 1, 2, .... \qquad (٩٤٣)$$

احسب دالة تقسيم الهزاز ثم اشتق المقادير الترموديناميكية.

**تمرين** 6:    نعتبر غاز مثالى كلاسيكى متجانس داخل علبة حجمها $V$. نعتبر تأثير حقل ثقالى منتظم موجه فى الاتجاه السلبى ل $z$. هذه الجملة يمكن ان تعطى وصف تقريبى للجو الارضى اذا افترضنا ان درجة الحرارة و تسارع الثقالة الارضية لا يتعلقان بالارتفاع. نختار الاحداثيات بحيث يكون الوجه السفلى للمكعب عند $z = 0$. احسب احتمال ان تكون كمية حركة ذرة من ذرات الغاز بين $\vec{p}$ و $\vec{p} + d\vec{p}$. ثم احسب ان يكون ارتفاع ذرة من ذرات الغاز بين $z$ و $z + dz$.

**تمرين** 7: نعتبر الحركة الدورانية لجزئ ثنائى الذرة حول محور دورانه الذى يمر بمركز الثقل على أنه دوار صلب [٦٨] بعزم عطالة $\mathcal{I}$ . المستويات الطاقوية التى يمكن أن يحتلها الدوار الصلب الكمومى تأتى مكممة على الشكل

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} J(J+1), \tag{٩٤٤}$$

حيث $J$ هى القيمة الذاتية للعزم الحركى الذاتى $\vec{J}^2$ و لا يمكن ان تأخذ الا قيم صحيحة موجبة او منعدمة. المستويات الطاقوية هى اذن تتميز بالعدد الكمومى $J$ و هى منحلة بدرجة $g_J = 2J+1$ توافق ال $2J+1$ قيمة مختلفة $J, J-1, ..., -J+1, -J$ التى يأخذها العدد الكمومى $M$ الذى هو القيمة الذاتية للعزم الحركى $J_3$: اسقاط $\vec{J}$ على المحور $z$.

احسب دالة التقسيم و الطاقة الداخلية فى النهايات $T \longrightarrow 0$ و $T \longrightarrow \infty$.

**تمرين** 8: مبرهنة التقسيم المتساوى للطاقة تنص على أن: الطاقة المتوسطة لجملة طاقتها الكلية هى مجموع مربعات مركبات كمية الحركة او شعاع الموضع تساوى الى $kT/2$ فى عدد هذه الحدود التربيعية.

اعط برهان على هذه النتيجة فى حالة جسيم واحد خاضع لكمون تربيعى من الشكل

$$V = \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2). \tag{٩٤٥}$$

---

[٦٨] rigid rotator.

# حلول

**تمرين** 2:

- دالة التقسيم و الطاقة الداخلية تعطيان ب

$$Z = 1 + e^{-\beta\epsilon}. \qquad (٩٤٦)$$

$$U =< E >= -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{\epsilon}{1+e^{\beta\epsilon}}. \qquad (٩٤٧)$$

- السعة الحرارية تعطى بالعلاقة

$$C_v = \big(\frac{\partial U}{\partial T}\big)_V = \frac{\epsilon^2}{kT^2}\frac{e^{\frac{\epsilon}{kT}}}{(1+e^{\frac{\epsilon}{kT}})^2}. \qquad (٩٤٨)$$

هذه السعة الحرارية تنعدم لما $T \longrightarrow 0$ و $T \longrightarrow \infty$. اذن لان السعة الحرارية دائما موجبة يجب ان يكون لها قيمة اعظمية. هذا التصرف يسمى شذوذ شوتكى [٦٩].

نحسب الانحراف المعيارى فى الطاقة الذى يقيس التقلب فى الطاقة كالتالى

$$(\Delta E)^2 =< E^2 > - < E >^2 = kT^2 C_v =< E >^2 e^{\frac{\epsilon}{kT}}. \qquad (٩٤٩)$$

من اجل درجات الحرارة العليا اى $kT >> \epsilon$ لدينا $\Delta E \longrightarrow < E >= \epsilon/2$. اذن فى هذه الحالة التقلب فى الطاقة غير مهمل بالمرة. من الجهة الاخرى، عند درجات الحرارة الصغيرة، $T \longrightarrow 0$، فإن $< E > \longrightarrow 0$ مثل $e^{-\beta\epsilon}$، و بالتالى $\Delta E \longrightarrow 0$. الجملة اذن فى الحالة الاساسية.

- نحسب ايضا الانتروبى بالعلاقة التالية

$$S = k(\ln Z + \beta < E >) = k\ln(1+e^{-\frac{\epsilon}{kT}}) + k\frac{\frac{\epsilon}{kT}}{1+e^{\frac{\epsilon}{kT}}}. \qquad (٩٥٠)$$

من اجل درجات الحرارة العليا اى $kT >> \epsilon$ لدينا $S = k\ln 2$. المستويان الطاقويان متساويان فى الاحتمال لما يكون الفرق فى الطاقة بينهما مهملا امام $kT$. فى هذه الحالة عدد الحالات المسموح بها للجملة هو $\Omega = 2$.

من اجل درجات الحرارة الدنيا اى $T \longrightarrow 0$ فإن الحالة الاساسية فقط تكون محتلة و بالتالى $\Omega = 1$.

- أخيرا الطاقة الحرة لهلمولتز تعطى ب

$$F = -kT\ln Z = -kT\ln(1+e^{-\beta\epsilon}). \qquad (٩٥١)$$

- نجد

$$P_1 = \frac{2e^{-\beta E_1}}{Z}\ ,\ Z_2 = \frac{3e^{-\beta E_2}}{Z}. \qquad (٩٥٢)$$

دالة التقسيم تعطى ب

$$Z = 2e^{-\beta E_1} + 3e^{-\beta E_2}. \qquad (٩٥٣)$$

[٦٩] Schottky anomaly.

**تمرين** 3: نعرف أن طاقة الجسيم داخل العلبة تعطى ب

$$E_{n_xn_yn_z} = E_0(n_x^2+n_y^2+n_z^2)\ ,\ n_x,n_y,n_z>0. \quad (٩٥٤)$$

$$E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mV^{2/3}}. \quad (٩٥٥)$$

دالة التقسيم تعطى ب

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n_x=1}^{\infty}\sum_{n_y=1}^{\infty}\sum_{n_z=1}^{\infty} e^{-\beta E_0(n_x^2+n_y^2+n_z^2)} \\ &= \Big(\sum_{n_x=1}^{\infty} e^{-\beta E_0 n_x^2}\Big)^2. \end{aligned} \quad (٩٥٦)$$

من اجل درجات الحرارة المرتفعة فإن المستويات الطاقوية تكون متقاربة جدا بالمقارنة مع الطاقة الحرارية $kT$ و بالتالى فهى مستمرة و يمكن تعويض المجوع على $n_x$ بتكامل كما يلى

$$\sum_{n_x=1}^{\infty} e^{-\beta E_0 n_x^2} = \int_0^{\infty} dx e^{-\beta E_0 x^2}. \quad (٩٥٧)$$

نستعمل النتيجة

$$I = \int_0^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{4a}}. \quad (٩٥٨)$$

نحصل اذن على دالة التقسيم

$$Z = (\frac{mkT}{2\pi\hbar^2})^{3/2}V. \quad (٩٥٩)$$

نحسب المقادير الترموديناميكية التالية:

$$< E >= kT^2\frac{\partial}{\partial T}\ln Z = \frac{3}{2}kT. \quad (٩٦٠)$$

$$C_v = (\frac{\partial < E >}{\partial T})_V = \frac{3}{2}k. \quad (٩٦١)$$

$$F = -kT\ln Z = -kT\big(\ln Z + \frac{3}{2}\ln\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\big). \quad (٩٦٢)$$

$$P = -(\frac{\partial F}{\partial V})_V = \frac{kT}{V}. \quad (٩٦٣)$$

$$F = k(\ln Z + \beta < E >) = k\big(\ln V + \frac{3}{2}\ln\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} + \frac{3}{2}\big). \quad (٩٦٤)$$

**تمرين** 4: عدد الحالات الميكروسكوبية المحتواة داخل الحجم $d\vec{r}d\vec{p}$ فى الفضاء الطورى هو بالضبط $d\vec{r}d\vec{p}/h^3$ لان كل حالة ميكروسكوبية تحتل حجم $h^3$ فى الفضاء الطورى من مبدأ الارتياب لهايزنبرغ. هذا هو عدد الحالات الميكروسكوبية للجسيم الحر الكلاسيكى التى لها شعاع موضع بين $\vec{r}$ و $\vec{r}+d\vec{r}$ و كمية حركة بين $\vec{p}$ و $\vec{p}+d\vec{p}$. اذن هذه هى الحالات التى لها طاقة

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m}. \quad (٩٦٥)$$

دالة التقسيم تعطى اذن ب

$$\begin{aligned} Z &= \int \frac{d\vec{r}d\vec{p}}{h^3} \exp(-\frac{\vec{p}^2}{2mkT}) \\ &= \frac{4\pi V}{h^3} \int p^2 dp \exp(-\frac{p^2}{2mkT}) \\ &= -\frac{4\pi V}{h^3} \frac{\partial}{\partial a} \int_0^\infty dp e^{-ap^2} \\ &= -\frac{4\pi V}{h^3} \frac{\partial}{\partial a} \sqrt{\frac{\pi}{4a}} \\ &= (\frac{2\pi mkT}{h^2})^{3/2} V. \end{aligned} \quad (٩٦٦)$$

هذه هى نفس النتيجة التى تحصلنا عليها باجراء الحساب الكمومى فى المحاضرة.

**تمرين** 5: دالة التقسيم تعطى ب

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n=0}^\infty e^{-\beta(n+\frac{1}{2})\hbar\Omega} \\ &= e^{-\beta\hbar\Omega} \sum_{n=0}^\infty r^n \ , \ r = e^{-\beta\hbar\Omega} < 1. \end{aligned} \quad (٩٦٧)$$

نحصل اذن على

$$Z = \frac{1}{e^{\frac{\beta\hbar\Omega}{2}} - e^{-\frac{\beta\hbar\Omega}{2}}}. \quad (٩٦٨)$$

نحسب مباشرة الطاقة الداخلية و السعة الحرارية

$$< E >= -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z = \frac{\hbar\Omega}{2} \coth \frac{\beta\hbar\Omega}{2}. \quad (٩٦٩)$$

$$C_v = (\frac{\partial < E >}{\partial T})_V = k(\frac{\hbar\Omega}{kT})^2 \frac{1}{(e^{\frac{\beta\hbar\Omega}{2}} - e^{-\frac{\beta\hbar\Omega}{2}})^2}. \quad (٩٧٠)$$

بنفس الطريقة يمكن حساب الانتروبى و الطاقة الحرة.

**تمرين** 6:     طاقة ذرة من ذرات الغاز تعطى ب

$$E=\frac{\vec{p}^2}{2m}+mgz. \tag{٩٧١}$$

احتمال ان تكون لذرة من ذرات الغاز كمية حركة بين $\vec{p}$ و $\vec{p}+d\vec{p}$ و شعاع موضع بين $\vec{r}$ و $\vec{r}+d\vec{r}$ يعطى ب

$$\mathcal{P}(\vec{r},\vec{p})d\vec{r}d\vec{p}=\frac{1}{Z}\frac{d\vec{r}d\vec{p}}{h^3}e^{-\beta(\frac{\vec{p}^2}{2m}+mgz)}. \tag{٩٧٢}$$

شرط التنظيم يعطى دالة التقسيم

$$\begin{aligned} Z &= \int\frac{d\vec{r}d\vec{p}}{h^3}e^{-\beta(\frac{\vec{p}^2}{2m}+mgz)} \\ &= V\frac{1-e^{-\beta mgL}}{\beta mgL}\big(\frac{2\pi mkT}{h^2}\big)^{3/2}. \end{aligned} \tag{٩٧٣}$$

احتمال ان تكون لذرة من ذرات الغاز كمية حركة بين $\vec{p}$ و $\vec{p}+d\vec{p}$ يعطى ب

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\vec{p})d\vec{p} &= \frac{d\vec{p}e^{-\beta\frac{\vec{p}^2}{2m}}}{h^3Z}\int d\vec{r}e^{-\beta mgz} \\ &= \frac{d\vec{p}e^{-\beta\frac{\vec{p}^2}{2m}}}{h^3Z}.V\frac{1-e^{-\beta mgL}}{\beta mgL}. \end{aligned} \tag{٩٧٤}$$

احتمال ان تكون لذرة من ذرات الغاز ارتفاع بين $z$ و $z+dz$ يعطى ب

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(z)dz &= \frac{dze^{-\beta mgz}}{h^3Z}L^2\int d\vec{p}e^{-\beta\frac{\vec{p}^2}{2m}} \\ &= \frac{dze^{-\beta mgz}}{h^3Z}L^2\big(2\pi mkT\big)^{3/2}. \end{aligned} \tag{٩٧٥}$$

**تمرين** 7:     تعطى دالة التقسيم ب

$$Z=\sum_{J=0}^{\infty}(2J+1)\exp\big(-\frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}}J(J+1)\big). \tag{٩٧٦}$$

فى النهاية $T\longrightarrow 0$ اى $kT<<J(J+1)\hbar^2/2\mathcal{I}$ فإن الحد الاول $J=0$ يهيمن اذن نحصل على

$$Z=1+3\exp\big(-\frac{\hbar^2}{\mathcal{I}}\big)+.... \tag{٩٧٧}$$

الطاقة الداخلية تعطى ب

$$\begin{aligned} <E> &= kT^2\frac{\partial}{\partial T}\ln Z \\ &= \frac{3\hbar^2}{\mathcal{I}}\exp(-\hbar^2/\mathcal{I}kT)\longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{٩٧٨}$$

عند درجات الحرارة المنخفضة فقط المستوى الاول محتل.
فى النهاية $T \longrightarrow \infty$ اى $kT >> J(J+1)\hbar^2/2\mathcal{I}$ فإن كل الحدود تشارك اذن يمكن تعويض $J$ بتكامل لنحصل على

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{J=0}(2J+1)\exp\big(-\frac{\hbar^2 J(J+1)}{2\mathcal{I}}\big) \\ &= \int_{J=0}^{\infty} dJ(2J+1)\exp\big(-\frac{\hbar^2 J(J+1)}{2\mathcal{I}}\big) \\ &= \int_0^{\infty} dx \exp\big(-\frac{\hbar^2 x}{2\mathcal{I}}\big) \\ &= \frac{2\mathcal{I}kT}{\hbar^2}. \end{aligned} \tag{٩٧٩}$$

الطاقة الداخلية تعطى ب

$$\begin{aligned} < E > &= kT^2 \frac{\partial}{\partial T}\ln Z \\ &= kT. \end{aligned} \tag{٩٨٠}$$

**تمرين** 8: طاقة الجملة تعطى ب

$$E = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2). \tag{٩٨١}$$

احتمال ان يكون للجسيم كمية حركة بين $\vec{p}$ و $\vec{p} + d\vec{p}$ و شعاع موضع بين $\vec{r}$ و $\vec{r} + d\vec{r}$ هو متناسب مع

$$\exp(-\beta E). \tag{٩٨٢}$$

اذن المركبات $p_x$، $p_y$، $p_z$، $x$، $y$، $z$ تأتى مستقلة خطيا عن بعضها البعض. متوسط الطاقة الحركية يعطى ب

$$< K >= \frac{1}{2m}(< p_x^2 > + < p_y^2 > + < p_z^2 >). \tag{٩٨٣}$$

من الواضح أن

$$\frac{1}{2m} < p_x^2 >= \frac{1}{2m} < p_y^2 >= \frac{1}{2m} < p_z^2 >= \frac{1}{2m}\frac{\int dp_x p_x^2 \exp(-\beta p_x^2/2m)}{\int dp_x \exp(-\beta p_x^2/2m)}. \tag{٩٨٤}$$

بعد اجراء التكامل نحصل على

$$\frac{1}{2m} < p_x^2 >= \frac{1}{2m} < p_y^2 >= \frac{1}{2m} < p_z^2 >= \frac{1}{2}kT. \tag{٩٨٥}$$

بالمثل نحصل على متوسط الطاقة الكامنة

$$< V >= \frac{k}{2}(< x^2 > + < y^2 > + < z^2 >). \tag{٩٨٦}$$

من الواضح أن

$$\frac{k}{2} < x^2 >= \frac{k}{2} < y^2 >= \frac{k}{2} < z^2 >= \frac{k}{2}\frac{\int dx x^2 \exp(-\beta k x^2/2)}{\int dx \exp(-\beta k x^2/2)}. \quad (٩٨٧)$$

بعد اجراء التكامل نحصل على

$$\frac{k}{2} < x^2 >= \frac{k}{2} < y^2 >= \frac{k}{2} < z^2 >= \frac{1}{2}kT. \quad (٩٨٨)$$

# الميكانيك الكمومي

# Quantum Mechanics

This part is based primarily on the books [9, 10]. Sakurai is the historical textbook on quantum mechanics for the older generations of graduate students in the US, while Griffiths is the most pedagogical textbook on quantum mechanics out there. This course on quantum mechanics should only be taken by graduate students who have already taken a modern physics course. Again, due to lack of time, only fundamental topics are discussed: 1) An introduction to quantum mechanics, 2) Theory of perturbations and 3) Theory of scattering. In the first chapter, a quick introduction to the subject is given, which includes: Dirac quantization, Hilbert spaces, wave functions, rotational invriance, exact solutions of the Schrodinger equation, etc. In the second chapter, a systematic expostion of the theory of perturbation theory, both time-independent and time-dependent, is presented. This is a very long chapter with many applications such as the Hydrogen atom and emission and absorption of radiation. In the third chapter, the theory of quantum scattering is discussed in great detail. See in particular chapters 5 and 7 of Sakurai, and chapters 6, 9 and 11 of Griffiths. The treatise of Landau et al and Tannoudji et al [7, 11] were also consulted occasionally. Most exercises are taken from [9, 10]. The solutions Manual for Griffiths is found in [12].

# مدخل الي الميكانيك الكمومي

## التكميم القانوني و معادلة شرودينغر

### علاقات التبادل القانونية

نعتبر جسيم يتحرك في ثلاثة ابعاد تحت تأثير كمون $V$. في الميكانيك الكلاسيكي حالة الجسيم تعطي بالنقطة $(\vec{x},\vec{p})$ في الفضاء الطوري [٧٠] حيث $\vec{x}$ هو شعاع الموضع و $\vec{p}$ هو شعاع كمية الحركة اي $\vec{p}=m\dot{\vec{x}}$. نحصل علي $x_i$ و $p_i$ من معادلات هاميلتون للحركة

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\ ,\ \dot{x}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (٩٨٩)$$

الزوج $(x_i,p_i)$ يعرف بالمتغيرات القانونية [٧١] . الدالة $H$ هي دالة علي الفضاء الطوري، اي $H=H(x_i,p_i)$، تعرف بالهاميلتونية [٧٢] و تتطابق مع الطاقة الكلية للجملة. اذن

$$H = T+V=\frac{\sum_i p_ip_i}{2m}+V(x_i). \quad (٩٩٠)$$

يمكن صياغة معادلات هاميلتون بدلالة اقواس بواسون [٧٣] . قوس بواسون لاي دالتين $u$ و $v$ بالنسبة للمتغيرات القانونية $x_i$ و $p_i$ يعرف ب

$$[u,v]_{\rm P.B} = \sum_i\bigg(\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial p_i}-\frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\bigg). \quad (٩٩١)$$

اقواس بواسون الاساسية تعطي ب

$$[x_i,x_j]_{\rm P.B}=0\ ,\ [p_i,p_j]_{\rm P.B}=0\ ,\ [x_i,p_j]_{\rm P.B}=\delta_{ij}. \quad (٩٩٢)$$

لتكن $Q$ دالة في المتغيرات القانونية $x_i$، $p_i$ و الزمن اي $Q=Q(x_i,p_i,t)$. المشتقة الكلية بالنسبة للزمن للدالة $Q$ تعطي ب

$$\frac{dQ}{dt} = [Q,H]_{\rm P.B}+\frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (٩٩٣)$$

[٧٠] phase space.
[٧١] canonical variables.
[٧٢] hamiltonian.
[٧٣] Poisson brackets.

هذه هي معادلة حركة الدالة $Q$. معادلات هاميلتون يمكن الحصول عليها كحالة خاصة. بالفعل اذا اخترنا $Q=x_i,p_i$ نحصل مباشرة على $\dot{x}_i=[x_i,H]_{\rm P.B}$، $\dot{p}_i=[p_i,H]_{\rm P.B}$ و هي بالضبط معادلات هاميلتون اعلاه .

تكميم [٧٤] هذه الجملة الكلاسيكية يعطي الجملة الكمومية المقابلة. حسب ديراك [٧٥] فانه يمكننا الحصول علي الجملة الكمومية انطلاقا من الجملة الكلاسيكية عن طريق تعويض اقواس بواسون بمبدلات [٧٦] كالتالي

$$[,]_{\rm P.B}\longrightarrow\frac{1}{i\hbar}[,]. \quad (٩٩٤)$$

هذا هو مبدأ التوافق [٧٧] . بعبارة اخري فاننا نحصل علي الجملة الكمومية عن طريق تعويض الموضع $x_i$ بمؤثر الموضع $\hat{x}_i$ و كمية الحركة $p_i$ بمؤثر كمية الحركة $\hat{p}_i$ بحيث تصبح اقواس بواسون الاساسية معطاة بالمبدلات التالية

$$[\hat{x}_i,\hat{x}_j]=0~,~[\hat{p}_i,\hat{p}_j]=0~,~[\hat{x}_i,\hat{p}_j]_{\rm P.B}=i\hbar\delta_{ij}. \quad (٩٩٥)$$

هذه هي علاقات التبادل الاساسية او القانونية. من الواضح ان المبدل $[A,B]$ معرف ب $A.B-B.A$. ايضا لان $\hat{x}_i$ و $\hat{p}_i$ هي مؤثرات و ليست اعداد فانها يجب ان تؤثر علي فضاء ما $\mathcal{H}$ يعرف باسم فضاء هيلبرت [٧٨]. فضاء هيلبرت هو فضاء شعاعي مركب يمكن ان يكون، و هذا متحقق في هذه الحالة، ذو بعد لا نهائي.

## معادلة هايزنبرغ

قياسا علي الهاميلتونية الكلاسيكية التي هي دالة في $x_i$ و $p_i$ فان الهاميلتونية الكمومية هي دالة في المؤثرات $\hat{x}_i$ و $\hat{p}_i$ نحصل عليها كالاتي. لان المؤثرات $\hat{x}_i$ تتبادل فيما بينها و ايضا $\hat{p}_i$ تتبادل فيما بينها فان الهاميلتونية الكمومية هي مؤثر علي فضاء هيلبرت $\mathcal{H}$ يعطي ب

$$\hat{H}=\frac{\sum_i\hat{p}_i^2}{2m}+V(\hat{x}_i). \quad (٩٩٦)$$

بالمثل فان اي دالة كلاسيكية، اي دالة علي الفضاء الطوري $Q=Q(x_i,p_i)$، تعوض بعد التكميم بمؤثر $\hat{Q}=\hat{Q}(t)$ علي فضاء هيلبرت $\mathcal{H}$ يعطي تطوره في الزمن بالمقابل الكمومي لمعادلة الحركة (993)، الذي يحصل عليه بوصفة التكميم (994)، اي ب

$$i\hbar\frac{d\hat{Q}}{dt}~~=~~[\hat{Q},\hat{H}]. \quad (٩٩٧)$$

هذه هي معادلة هايزنبرغ للحركة [٧٩]. كما سنري هذه المعادلة مكافئة تماما لمعادلة شرودينغر [٨٠].

[٧٤] quantization.
[٧٥] Dirac.
[٧٦] commutators.
[٧٧] correspondence principle.
[٧٨] hilbert space.
[٧٩] Heisenberg.
[٨٠] Schrodinger.

نعتبر الان المؤثر الاحادي $U=U(t,t_0)$ علي فضاء هيلبرت $\mathcal{H}$، اي المؤثر الذي يحقق $UU^+=U^+U=1$، و الذي يتعلق بالزمن بحيث

$$\hat{Q}(t)=U(t,t_0)\hat{Q}(t_0)U(t,t_0)^+. \quad (٩٩٨)$$

المؤثر الاحادي $U(t,t_0)$ يعرف باسم مؤثر التطور. من الواضح ان $\hat{Q}(t_0)$ يتطابق مع المؤثر $\hat{Q}(t)$ في اللحظة الزمنية $t_0$. اذن $\hat{Q}(t_0)$ لا يتعلق بالزمن اي $d\hat{Q}(t_0)/dt=0$. ايضا يجب ان يكون لدينا $[U(t_0,t_0),\hat{Q}(t_0)]=0$ من اجل اي مؤثر $\hat{Q}(t_0)$ علي فضاء هيلبرت $\mathcal{H}$ و بالتالي $U(t_0,t_0)=1$. اذن المؤثر $U(t,t_0)$ يحمل بالكامل كيفية تبعية $\hat{Q}(t)$ للزمن. بالفعل يمكن ان نحسب من جهة

$$i\hbar\frac{d\hat{Q}}{dt} = i\hbar\frac{dU}{dt}\hat{Q}_0U^++i\hbar U\hat{Q}_0\frac{dU^+}{dt}. \quad (٩٩٩)$$

من الجهة الاخري نحسب

$$[\hat{Q},\hat{H}]=-\hat{H}U\hat{Q}_0U^++U\hat{Q}_0U^+\hat{H}. \quad (١٠٠٠)$$

اذن نحصل علي

$$i\hbar\frac{dU}{dt}=-\hat{H}U\ ,\ i\hbar\frac{dU^+}{dt}=U^+\hat{H}. \quad (١٠٠١)$$

الهاميلتونية في هذه الحالة، حالة الجسيم الحر في ثلاث ابعاد، لا تتعلق بالزمن و بالتالي نحصل مباشرة علي

$$U=U(t,t_0)=e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}. \quad (١٠٠٢)$$

## معادلة شرودينغر

هناك فرق شاسع في الميكانيك الكمومي بين الملاحظات [٨١]، التي هي عبارة عن الكميات الفيزيائية التي يمكن ان تقاس في التجربة، و اشعة حالة [٨٢] الجملة التي تحدد حالة الجملة في الزمن. كما ذكرنا انفا الملاحظات يعبر عنها بمؤثرات تؤثر علي فضاء هيلبرت $\mathcal{H}$ مثل مؤثرات الموضع $\hat{x}_i$ و مؤثرات كمية الحركة $\hat{p}_i$. هذه المؤثرات يجب ان تكون ايضا هرميتية [٨٣] اي $\hat{Q}^+=\hat{Q}$ لان الكميات الفيزيائية المقاسة يجب ان تكون بالضرورة حقيقية. اشعة الحالة يعبر عليها من الجهة الاخري بعناصر من فضاء هيلبرت $\mathcal{H}$ و بالتالي فان الملاحظات يمكن ان تؤثر عليها لتنتج اشعة حالة اخري.

في ما يسمي بترميز ديراك [٨٤] نرمز لاشعة الحالة بالكات [٨٥] $|\psi(t_0)>$ الذي يمكن ايضا ان نشترط فيه ان يكون منظم اي $<\psi(t_0)|\psi(t_0>=1$.

اذن في الملخص حصلنا علي ملاحظات يعبر عنها بمؤثرات هرميتية تتعلق بالزمن $\hat{Q}(t)$ و اشعة حالة $|\psi(t_0)>$ ثابتة في الزمن. هذه هي بالضبط وجهة نظر

---

[٨١] observables.

[٨٢] state vectors.

[٨٣] hermitian.

[٨٤] dirac notation.

[٨٥] ket.

هايزنبرغ. من وجهة نظر شرودينغر فان الملاحظات هي التي تصبح ثابتة في الزمن معطاة ب $\hat{Q}(t_0)$ اما اشعة الحالة فانها تتعلق بالزمن تعطب ب $|\psi(t)>$ الذي هو يساوي $|\psi(t_0)>$ في اللحظة الزمنية $t_0$. بعبارة اخري ادق يعطي شعاع الحالة في وجهة نظر شرودينغر بالكات

$$|\psi(t)>=U(t,t_0)^+|\psi_0>. \qquad (١٠٠٣)$$

المؤثر الاحادي $U(t,t_0)$ هو بالضبط مؤثر التطور المعرف في المعادلة (998). من الواضح مباشرة ان تطور شعاع الحالة $|\psi(t)>$ في الزمن يعطي ب

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)> &= U^+\hat{H}U|\psi(t)> \\ &= \hat{H}|\psi(t)>. \end{aligned} \qquad (١٠٠٤)$$

هذه هي معادلة شرودينغر. من الواضح ايضا ان القيم المتتظرة [٨٦] من وجهتي نظر هايزنبرغ و شرودينغر هي متساوية لانها تعبر عن قياس فيزيائي يجب ان يكون نفسه بالضرورة اي

$$<\psi(t)|\hat{Q}_0|\psi(t)>=<\psi_0|\hat{Q}(t)|\psi_0>. \qquad (١٠٠٥)$$

# فضاء هيلبرت

## اشعة الحالة

تلعب فكرة فضاء هيلبرت دورا محوريا قي الميكانيك الكمومي. في الواقع فان اهم مكونات الميكانيك الكمومي، اشعة الحالة و المؤثرات التي تؤثر عليها، كلاهما مرتبط ارتباطا وثيقا بفضاء هيلبرت خاصة الجملة. بالفعل فان مجموعة كل اشعة الحالة تشكل فضاء هيلبرت بينما يعبر عن الملاحظات بمؤثرات هرميتية تؤثر علي فضاء هيلبرت.

فضاء هيلبرت $\mathcal{H}$ هو فضاء شعاعي مركب ذو ابعاد غير متناهية في اغلب الاحيان ممنوح جداء داخلي [٨٧] . باتباع ديراك نرمز لاشعة فضاء هيلبرت ب $|\psi>$ و نسميها كاتس (مفردها كات [٨٨]). في اساس معين، نفترضه متقطع [٨٩] للتبسيط، نكتب اشعة الحالة علي شكل الاشعة العمودية

$$|\psi>=\sum_n a_n|e_n>. \qquad (١٠٠٦)$$

رمزنا لعناصر الاساس ب $|e_n>$ حيث $n$ يأخذ قيم من 0 الي $\infty$. الافادة بان فضاء هيلبرت $\mathcal{H}$ هو فضاء مركب يكافئ بالضبط المطلب بان المركبات $a_n$ هي اعداد مركبة.

ليكن $|\phi>$ شعاع حالة اخر بمركبات $b_n$ اي $|\phi>=\sum_n b_n|e_n>$. الجداء الداخلي بين $|\psi>$ و $|\phi>$ و الذي يرمز له ب $<\phi|\psi>$ يعرف ب

$$<\phi|\psi>=\sum_n b_n^* a_n. \qquad (١٠٠٧)$$

---

[٨٦] expectation values.

[٨٧] inner product.

[٨٨] ket.

[٨٩] discrete.

بالمثل فان الجداء الداخلي بين $|\phi>$ و $|\psi>$ و الذي يرمز له ب $<\phi|\psi>$ يعرف ب

$$<\psi|\phi>=\sum_n a_n^* b_n. \quad (١٠٠٨)$$

من هذه التعريفات نلاحظ مباشرة ان $<\phi|\psi>=<\psi|\phi>^*$. الجداء الداخلي يعمم الجداء السلمي في الفضاءات الشعاعية الحقيقية.

من التعريف اعلاه من الواضح ان الاساس $\{|e_n>\}$ هو متعامد و متجانس اي

$$<e_n|e_m>=\delta_{nm}. \quad (١٠٠٩)$$

الجداء الداخلي $<\phi|\psi>$ يمكن ايضا ان يفهم علي انه قيمة الدالة الخطية $<\phi|$ في النقطة (الشعاع) $|\psi>$ من فضاء هيلبرت $\mathcal{H}$. بعبارة اخري

$$\begin{aligned}<\phi| \quad &: \quad \mathcal{H}\longrightarrow \mathbf{C}\\ &|\psi>\longrightarrow <\phi|\psi>. \end{aligned}\quad (١٠١٠)$$

مجموعة كل الدوال الخطية $<\phi|$ تعرف فضاء هيلبرت اخر $\mathcal{H}^*$ الذي هو ثنوي [٩٠] ل $\mathcal{H}$. العناصر $<\phi|$ التي تعرف في ترميز ديراك بالبراس (مفرد برا [٩١] ) تعطي بالاشعة الافقية

$$<\phi|=\sum_n b_n^* <e_n|. \quad (١٠١١)$$

المجموعة $\{<e_n|\}$ هي اساس في الفضاء الثنوي $\mathcal{H}^*$ و هي بالتالي ثنوية للاساس $\{|e_n>\}$. في معني اخر مضبوط فان البرا $<\phi|$ هو المرافق الهرميتي للكات $|\phi>$ اي $<\phi|=(|\phi>)^+$.

من الواضح ان طويلة شعاع الحالة $|\psi>$ يجب ان تعرف بدلالة الجداء الداخلي $<\psi|\psi>$ الذي هو دائما عدد حقيقي موجب. بالتأكيد فان الطويلة تساوي $\sqrt{<\psi|\psi>}$. الحالتان $|\psi>$ و $a|\psi>$ من اجل اي عدد مر كب $a$ تمثل نفس الحالة الفيزيائية. بعبارة اخري يمكننا دائما ان ننظم الشعاع $|\psi>$ بحيث $<\psi|\psi>=1$. عناصر فضاء هيلبرت $\mathcal{H}$ هي اذن اشعة قابلة للتنظيم اي

$$\text{if } |\psi>\in\mathcal{H} \text{ then } <\psi|\psi><\infty. \quad (١٠١٢)$$

باستعمال الشرط $<e_n|e_m>=\delta_{nm}$ يمكن ان نحسب المركبات $a_n$ خاصة شعاع الحالة $|\psi>$. نجد

$$a_n=<e_n|\psi>. \quad (١٠١٣)$$

النشر $(1006)$ يأخذ اذن الشكل

$$|\psi>=\sum_n |e_n><e_n|\psi>. \quad (١٠١٤)$$

بعبارة اخري يجب ان يكون لدينا علاقة الاكتمال [٩٢]

$$\sum_n |e_n><e_n|=\mathbf{1}. \quad (١٠١٥)$$

الكمية $|e_n><e_n|$ هي مؤثر نحصل عليه من الجداء الخارجي [٩٣] بين الكات $|e_n>$ و البرا $<e_n|$. هذا المؤثر هو ايضا مسقط [٩٤] .

[٩٠] dual.
[٩١] bra.
[٩٢] completeness relation.
[٩٣] outer product.
[٩٤] projector.

## الملاحظات

تمثل الملاحظات خاصة الجملة بمؤثرات هرميتية علي فضاء هيلبرت $\mathcal{H}$. اي مؤثر $\hat{Q}$ يؤثر علي $\mathcal{H}$ هو تحويل خطي لانه يأخذ شعاع حالة $|\psi>$ الي شعاع حالة اخر نرمز له ب $\hat{Q}|\psi>$ اي

$$\begin{aligned} \hat{Q} \ &: \ \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \\ & |\psi> \longrightarrow \hat{Q}|\psi> . \end{aligned} \quad (١٠١٦)$$

هذه الدالة خطية لانه $\hat{Q}(a|\psi>+b|\phi>) = a\hat{Q}|\psi>+b|\hat{Q}|\psi>$ من اجل اي عددين مركبين $a$ و $b$. اذن المؤثر $\hat{Q}$ يمكن تمثيله بالمصفوفة غير المتناهية الابعاد التي تعطي مركباتها في الاساس $\{|e_n>\}$ ب $<e_n|\hat{Q}|e_m>$ اي

$$\hat{Q} = \sum_n \sum_m <e_n|\hat{Q}|e_m>|e_n><e_m|. \quad (١٠١٧)$$

المؤثر الهرميتي هو المؤثر الذي يحقق الشرط الاضافي $\hat{Q} = \hat{Q}^+$ حيث $\hat{Q}^+$ هو المرافق الهرميتي ل $\hat{Q}$ الذي يعرف ب $<\phi|\hat{Q}|\psi>=<\psi|\hat{Q}^+|\phi>^*$. بعبارة اخري مركبات اي مؤثر هرميتي تحقق $<e_n|\hat{Q}^+|e_m>=(<e_m|\hat{Q}|e_n>)^*$. القيمة المنتظرة ل $\hat{Q}$ في شعاع الحالة $|\psi>$ تعطي بالجداء الداخلي بين $|\psi>$ و $\hat{Q}|\psi>$ اي

$$<\hat{Q}>=<\psi|\hat{Q}|\psi> . \quad (١٠١٨)$$

لان $\hat{Q} = \hat{Q}^+$ فان القيمة المنتظرة $<\hat{Q}>$ يجب ان تكون حقيقية. متوسط نتائج عدة قياسات للمؤثر $\hat{Q}$ التي تجري علي جمل متطابقة، اي محضرة بنفس الطريقة، هي بالضبط القيمة المنتظرة $<\hat{Q}>$. بالمقابل لان نتيجة اي قياس هي عدد حقيقي فان القيمة المنتظرة لمؤثر يمثل ملاحظ يجب ان تكون حقيقية و بالتالي فان المؤثر يجب ان يكون هرميتي.

نقول عن شعاع حالة منظم $|\psi>$ انه شعاع ذاتي للمؤثر الهرميتي $\hat{Q}$ مرفق بالقيمة الذاتية $\lambda$ اذا كان

$$\hat{Q}|\psi>=\lambda|\psi> . \quad (١٠١٩)$$

القيمة المنتظرة ل $\hat{Q}$ في $|\psi>$ تساوي $\lambda$. علاوة علي ذلك فان الانحراف المعياري ل $\hat{Q}$ في $|\psi>$ المعرف ب $\sigma^2=<\psi|(\hat{Q}-<\hat{Q}>)^2|\psi>$ هو صفر. بعبارة اخري الشعاع الذاتي $|\psi>$ هو شعاع يقيني [٩٥] للجملة بمعني ان نتائج كل القياسات التي تجري علي مجموعة من الجمل المتطابقة المحضرة بنفس الطريقة في الحالة $|\psi>$ تعطي نفس القيمة $\lambda$.

مجموعة كل القيم الذاتية خاصة $\hat{Q}$ تسمي طيف المؤثر. الطيف يمكن ان يكون منحل اي يمكن ان توجد حالتان او اكثر مرفقة بنفس القيمة الذاتية. في حالة مؤثر هرميتي ذي طيف متقطع فان القيم الذاتية تكون حقيقية و اشعتها الذاتية متعامدة فيما بينها. اذن اذا كانت $|\lambda_n>$ هي الاشعة الذاتية ل $\hat{Q}$ المرفقة ب $\lambda_n$ فانه يجب ان يكون لدينا

$$<\lambda_m|\lambda_n>=\delta_{mn}. \quad (١٠٢٠)$$

[٩٥] determinate.

وجود الانحلال يعني ان هناك قيم ذاتية مرفقة بفضاءات جزئية منحلة. الفضاء الجزئي المنحل المرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_n$، و الذي يسمي ايضا بالفضاء الذاتي ل $\hat{Q}$ المرفق ب $\lambda_n$ ، يحتوي علي كل الاشعة الذاتية المرفقة ب $\lambda_n$. نستعمل طريقة التعميد ل غرام-شميت [٩٦] من اجل ايجاد الاشعةالذاتية المتعامدة داخل كل فضاء ذاتي.

من اجل فضاء هيلبرت منته فان مجموعة الاشعة الذاتية $|\lambda_n>$ لاي مؤثر هرميتي $\hat{Q}$ هي مجموعة مكتملة. بعبارة اخري فان اي شعاع حالة $|\psi>$ داخل فضاء هيلبرت يمكن كتابته علي شكل تركيب خطي ل $|\lambda_n>$ اي

$$|\psi>=\sum_n c_n|\lambda_n>. \qquad (١٠٢١)$$

المجموع علي $n$ هو محدود علي مجموعة منتهية من $\mathbf{N}$. الخاصية اعلاه هي مكافئة تماما لعلاقة الاكتمال

$$\sum_n|\lambda_n><\lambda_n|=\mathbf{1}. \qquad (١٠٢٢)$$

البرهان علي خاصية الاكتمال في حالة الفضاءات المنتهية لا يعمم الي حالة الفضاءات غير المنتهية. مع ذلك فاننا نأخذ خاصية الاكتمال، التي هي خاصية محورية في الميكانيك الكمومي، كمسلمة كما فعل ديراك. من الناحية التقنية هذا يعني انه يجب علينا ان نحدد اصناف المؤثرات الهرميتية التي يمكن ان تمثل الملاحظات في النظرية. اذن علاقة الاكتمال $(1015)$ هي فقط مسلمة. بالمثل فان علاقة الاكتمال $(1022)$ التي يكون فيها المجموع علي $n$ غير محدد هي ايضا مسلمة.

# الاطياف المستمرة و الدوال الموجية

## مؤثر الموضع و الدوال الموجية

في حالة المؤثرات الهرميتية ذات الاطياف المستمرة، اي المؤثرات التي تملأ قيمها الذاتية مجال مستمر، فان الاشعة الذاتية المرافقة غير قابلة للتنظيم. بعبارة اخري هذه الاشعة الذاتية المرافقة لا تقع في فضاء هيلبرت و بالتالي لا يمكن ان تمثل حالات فيزيائية. في مثل هذه الوضعية فقط التركيب الخطي لهذه الاشعة الذاتية يمكن ان يعبر عن حالات فيزيائية.

كمثال نأخذ مؤثرات الموضع و كمية الحركة $\hat{x}$ و $\hat{p}$ في بعد واحد. علاقات التبادل القانونية تكتب علي الشكل

$$[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar. \qquad (١٠٢٣)$$

الشعاع الذاتي $|x>$ لمؤثر الموضع $\hat{x}$ المرفق بالقيمة الذاتية $x$ يعرف ب

$$\hat{x}|x>=x|x>. \qquad (١٠٢٤)$$

مؤثر الموضع هو مؤثر هرميتي. اذن من الطبيعي ان نفترض ان القيم الذاتية ل $\hat{x}$ حقيقية. نحسب ايضا

$$<x^{'}|\hat{x}|x>=x<x^{'}|x>=x^{'}<x^{'}|x>. \qquad (١٠٢٥)$$

[٩٦] Gram – Schmidt.

يمكن ان نستنتج مباشرة ان

$$< x^{'}|x >= \delta(x^{'} - x). \qquad (١٠٢٦)$$

الاشعة الذاتية $< x|$ متعامدة لكنها غير قابلة للتنظيم بالمعني العادي. لكننا نقول انها قابلة للتنظيم حسب ديراك بمعني ان $< x|x >= \delta(0)$. المعادلة (1026) تسمي شرط التعامد و التجانس لديراك. يمكن اذن ان نشتق علاقة الاكتمال

$$\int dx|x >< x| = \mathbf{1}. \qquad (١٠٢٧)$$

اي شعاع حالة $< \psi|$ يمكن ان ينشر في الاساس $< x|$ علي الشكل

$$|\psi >= \int dx^{'}\psi(x^{'})|x^{'} > . \qquad (١٠٢٨)$$

نحسب

$$\psi(x) =< x|\psi > . \qquad (١٠٢٩)$$

هذه هي دالة موجة الجملة الموافقة لشعاع الحالة $< \psi|$. شرط القابلية للتنظيم $\infty >< \psi|\psi >$ يصبح شرط قابلية التكامل للمربع

$$< \psi|\psi >= \int dx|\psi(x)|^2 < \infty. \qquad (١٠٣٠)$$

مجموعة كل الدوال $\psi(x)$ علي مجال $[a,b]$ التي تحقق شرط قابلية التكامل للمربع تشكل فضاء هيلبرت يسمي $L_2(a,b)$.

نكتب ايضا الجداء الداخلي لشعاعي حالة $< \psi|$ و $< \phi|$ في اساس الموضع علي الشكل

$$< \phi|\psi >= \int dx\phi(x)^*\psi(x). \qquad (١٠٣١)$$

## مؤثر كمية الحركة و الانسحابات

قبل تقطير مؤثر كمية الحركة $\hat{p}$ نعتقد انه من المفيد ان نبدأ بتقديم مفهوم الانسحاب غير المتناه في الصغر $U(dx)$. هذا يعطي ب

$$U(dx)|x >= |x + dx > . \qquad (١٠٣٢)$$

تأثير $U(dx)$ علي شعاع الحالة $< \psi|$ هو

$$\begin{aligned} U(dx)|\psi > &= \int dx^{'}\psi(x^{'})U(dx)|x^{'} > \\ &= \int dx^{'}\psi(x^{'})|x^{'} + dx > \\ &= \int dx^{'}\psi(x^{'} - dx)|x^{'} > . \end{aligned} \qquad (١٠٣٣)$$

في المعادلة اعلاه افترضنا ان التكامل علي $x$ هو من $-\infty$ الي $\infty$. بافتراض ان شعاع الحالة المنسحب $U(x)|\psi >$ هو منظم يمكن ان نتحقق من ان المؤثر $U$

احادي اي ان $U^+U = \mathbf{1}$. هذا المؤثر يحقق ايضا $U(0) = \mathbf{1}$، $U^{-1}(dx) = U(-dx)$ و $U(dx_1)U(dx_2) = U(dx_1 + dx_2)$. المؤثر الاحادي $U(dx)$ يمكن دائما نشره حول مؤثر الوحدة كالتالي

$$U(dx) = \mathbf{1} - iKdx. \tag{١٠٣٤}$$

يعرف المؤثر الهرميتي $K$ بمولد الانسحاب و نحسبه كالتالي. نبدأ من

$$[\hat{x}, U(dx)]|x >= dx|x + dx > . \tag{١٠٣٥}$$

هذا يمكن اعادة كتابته علي الشكل

$$-i[\hat{x}, K]|x >= |x > +O(dx). \tag{١٠٣٦}$$

بعبارة اخري

$$[\hat{x}, K] = i. \tag{١٠٣٧}$$

مولد الانسحاب $K$ يمكن اذن مطابقته مع مؤثر كمية الحركة $\hat{p}$ تقسيم $\hbar$ اي

$$K = \frac{\hat{p}}{\hbar}. \tag{١٠٣٨}$$

يمكن بناء انسحاب منته $U(x)$ انطلاقا من الانسحابات غير المتناهية في الصغر علي الشكل التالي. نعتبر $N$ انسحاب متعاقب كلهاغير متناهية في الصغر $U(dx)$. الانسحاب المنته $U(x)$ هو بالضبط تركيب هذه الانسحابات غير المتناهية في الصغر اي $U(x) = U(dx)U(dx)..U(dx)$ حيث $dx = x/N$. اذن $U(x) = (\mathbf{1} - iKdx)^N = e^{-iKx}$.

المعادلة $(1033)$ يمكن وضعها علي الشكل

$$(\mathbf{1} - i\frac{\hat{p}}{\hbar}dx)|\psi >= \int dx^{'}(\psi(x^{'}) - dx\frac{\partial\psi(x^{'})}{\partial x^{'}})|x^{'} > . \tag{١٠٣٩}$$

استعملنا في هذه المعادلة الاشتقاق الجزئي عوض الاشتقاق التام لان شعاع الحالة $|\psi >$، و بالتالي دالة الموجة $\psi(x)$، يمكن ان تتعلق ايضا علي الزمن الذي حافظنا عليه مثبت هنا. بالمقابل يمكن ان نكتب

$$\hat{p}|\psi >= \int dx^{'}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi(x^{'})}{\partial x^{'}}|x^{'} > . \tag{١٠٤٠}$$

او

$$< x|\hat{p}|\psi >= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}. \tag{١٠٤١}$$

اذن في اساس الموضع يأخذ مؤثر كمية الحركة الشكل

$$< x|\hat{p}|x^{'} >= -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^{'}}\delta(x - x^{'}). \tag{١٠٤٢}$$

ليكن $|p >$ الشعاع الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية $p$ اي

$$\hat{p}|p >= p|p > . \tag{١٠٤٣}$$

في اساس الموضع تكتب هذه المعادلة علي الشكل

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} < x|p >= p < x|p > . \quad (١٠٤٤)$$

حلول هذه المعادلة تأخذ الشكل $< x|p >= Ae^{i\frac{p}{\hbar}x}$ حيث $p$ و $A$ مركبان و هي دوال لا تحقق شرط قابلية التكامل للمربع. لكن من اجل $p$ حقيقي تصبح هذه الدوال محققة لشرط قابلية التكامل للمربع خاصة ديراك بمعني

$$\begin{aligned} < p^{'}|p > &= \int_{-\infty}^{\infty} dx < x|p >^{*} < x|p > \\ &= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{i\frac{p-p^{'}}{\hbar}x} \\ &= |A|^2 2\pi\hbar\delta(p-p^{'}). \quad (١٠٤٥) \end{aligned}$$

اذن الاختيار $A = 1/\sqrt{2\pi\hbar}$ يعطي الاشعة الذاتية

$$< x|p >= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{p}{\hbar}x}. \quad (١٠٤٦)$$

هذه حالات متعامدة و متجانسة حسب ديراك اي

$$< p^{'}|p >= \delta(p-p^{'}). \quad (١٠٤٧)$$

## معادلة شرودينغر في فضاء المواضع

اي شعاع حالة $|\psi >$ يمكن نشره علي الشكل

$$|\psi >= \int dp < p|\psi > |p > . \quad (١٠٤٨)$$

او

$$|\psi >= \int dx < x|\psi > |x > . \quad (١٠٤٩)$$

دالة الموجة في فضاء الموضع هي $\psi(x) =< x|\psi >$ بينما دالة الموضع في فضاء كمية الحركة هي $\tilde{\psi}(p) =< p|\psi >$. هذه الدوال مرتبطة كما يلي

$$\psi(x) = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} \tilde{\psi}(p) e^{i\frac{px}{\hbar}}. \quad (١٠٥٠)$$

$$\tilde{\psi}(p) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} \psi(x) e^{-i\frac{px}{\hbar}}. \quad (١٠٥١)$$

اذن هذه الدوال الموجية هي تحويلات فوريي [٩٧] بالنسبة لبعضها البعض.
معادلة شرودينغر في فضاء الموضع تصبح

$$< x|i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t) >= \int dx^{'} < x|\hat{H}|x^{'} > \psi(t,x^{'}). \quad (١٠٥٢)$$

---

[٩٧] Fourier transforms.

بالمقابل لدينا

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x)=\bigg(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\bigg)\psi(t,x). \quad (١٠٥٣)$$

اعلاه استعملنا النتيجة

$$\int dx^{'} <x|\hat{p}^2|x^{'}>\psi(t,x^{'})=-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(t,x). \quad (١٠٥٤)$$

# القياس

## التفسير الاحصائي

الاصلان المحوريان للميكانيك الكمومي هما معادلة شرودينغر و التفسير الاحصائي. معادلة شرودينغر تسمح لنا بحساب تطور دالة الموجة في الزمن بينما يسمح لنا التفسير الاحصائي لبورن [٩٨] بحساب احتمالات مختلف النتائج الممكنة لاي قياس.

نحن يهمنا قياس كمية فيزيائية معينة $Q(x,p)$. المؤثر الهرميتي المرفق بهذه الكمية هو $\hat{Q}=\hat{Q}(\hat{x},\hat{p})$. نفترض ان $\hat{Q}$ لديه طيف متقطع $q_n$ مرفق بالدوال الذاتية $\psi_n(x)=<x|\psi_n>$. نفترض ايضا ان $|\psi_n>$ تحقق شرط التعامد و التجانس $<\psi_m|\psi_n>=\delta_{mn}$ و انها تشكل اساس مكتمل اي $\sum_n|\psi_n><\psi_n|=\mathbf{1}$. دالة موجة الجملة $\psi(x)=<x|\psi>$ يمكن ان تنشر حسب مبدأ التركيب الخطي في الاساس $\{\psi_n(x)\}$ كالاتي

$$|\psi>=\sum_n c_n|\psi_n>. \quad (١٠٥٥)$$

بالاضافة نفترض ان $|\psi>$ منظمة اي

$$<\psi|\psi>=1\leftrightarrow \sum_n|c_n|^2=1. \quad (١٠٥٦)$$

نذكر ايضا ان المركبات $c_n$ تعطى ب

$$c_n=<\psi_n|\psi>. \quad (١٠٥٧)$$

القيمة المنتظرة للمؤثر $\hat{Q}$ في الحالة $|\psi>$ تعطى ب

$$<\hat{Q}>=<\psi|\hat{Q}|\psi>=\sum_n|c_n|^2q_n. \quad (١٠٥٨)$$

ينص التفسير الاحصائي على ان قياس الملاحظ $Q(x,p)$ في الحالة $\psi(x)$ يعطي القيم الذاتية $q_n$ للمؤثر الهرميتي $\hat{Q}$ باحتمالات تعطى ب $|c_n|^2=|<\psi_n|\psi>|^2$ حيث $|\psi_n>$ هي الشعاع الذاتي ل $\hat{Q}$ المرفق ب $q_n$.

كمثال نأخذ $\hat{Q}=\hat{x}$. في هذه الحالة الاشعة الذاتية هي $|x>$ بحيث $<x^{'}|x>=\delta(x^{'}-x)$ و $\int dx|x><x|=\mathbf{1}$. شعاع الحالة $|\psi>$ يمكن نشره على

[٩٨] Born.

الشكل $|\psi>=\int dx\psi(x)|x>$ حيث $\psi(x)=<x|\psi>$. اذن احتمال ايجاد الجملة في النقطة $x$ بخطأ $dx$ يعطي ب $|<x|\psi>|^2dx=|\psi(x)|^2dx$.

بالمثل اذا اخذنا $\hat{Q}=\hat{p}$ فاننا نجد ان احتمال ايجاد الجملة بكمية حركة $p$ مع خطأ $dp$ يعطي ب $|<p|\psi>|^2dp=|\tilde{\psi}(p)|^2dp$.

## انهيار الدالة الموجية

قياس ملاحظ $Q(x,p)$ في الحالة $\psi(x)$ مرة واحدة يعطي حتما نتيجة مؤكدة ما مثلا القيمة الذاتية $q_n$ ل $\hat{Q}$. اي قياس ثان يجري مباشرة بعد القياس الاول يلزم عنه بدون اي شك الحصول علي نفس القيمة الذاتية $q_n$. هذا الامر يرجع الي كون الدالة الموجية $\psi(x)$ تنهار بعد القياس الاول علي الحالة الذاتية $\psi_n(x)$ المرفقة بالقيمة الذاتية $q_n$ و تكرار القياس مباشرة بعد القياس الاولي سوف يؤدي حتما الي نفس النتيجة. الخلاصة هي ان عملية القياس و انهيار دالة الموجة في اعقاب عملية القياس يختلف اختلافا جدريا عن التطورالاحادي لدالة الموجة الذي توفره معادلة شرودينغر.

## علاقات الارتياب

الانحراف المعياري في قياسات اي مؤثر هرميتي $\hat{A}$ في شعاع الحالة $|\psi>$ يعطي ب

$$\begin{aligned}\sigma_A^2 &= <\psi|(\hat{A}-<\hat{A}>)^2|\psi> \\ &= <\psi_A|\psi_A>\ ,\ |\psi_A>=(\hat{A}-<\hat{A}>)|\psi>\ . \end{aligned} \quad (١٠٥٩)$$

بالمثل فان الانحراف المعياري في قياسات اي مؤثر هرميتي $\hat{B}$ في شعاع الحالة $|\psi>$ يعطي ب

$$\begin{aligned}\sigma_B^2 &= <\psi|(\hat{B}-<\hat{B}>)^2|\psi> \\ &= <\psi_B|\psi_B>\ ,\ |\psi_B>=(\hat{B}-<\hat{B}>)|\psi>\ . \end{aligned} \quad (١٠٦٠)$$

باستعمال متراجحة شوارز [٩٩] نحصل علي

$$\sigma_A^2\sigma_B^2=<\psi_A|\psi_A><\psi_B|\psi_B>\geq|<\psi_A|\psi_B>|^2. \quad (١٠٦١)$$

نحسب

$$<\psi_A|\psi_B>=\frac{1}{2}<\psi|[\hat{A},\hat{B}]|\psi>+\frac{1}{2}<\psi|[\hat{A}-<\hat{A}>,\hat{B}-<\hat{B}>]_+|\psi> \quad (١٠٦٢)$$

حد المبدل هو عدد مركب تخيلي بينما حد المبدل المضاد هو عدد حقيقي. اذن

$$\begin{aligned}|<\psi_A|\psi_B>|^2 &= \frac{1}{4}|<\psi|[\hat{A},\hat{B}]|\psi>|^2+\frac{1}{4}|<\psi|[\hat{A}-<\hat{A}>,\hat{B}-<\hat{B}>]|\psi>|^2 \\ &\geq \frac{1}{4}|<\psi|[\hat{A},\hat{B}]|\psi>|^2. \end{aligned} \quad (١٠٦٣)$$

[٩٩] Schwarz.

نحصل علي علاقة الارتياب

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \frac{1}{4}|<\psi|[\hat{A},\hat{B}]|\psi>|^2. \quad (١٠٦٤)$$

من اجل $\hat{A}=\hat{x}$ و $\hat{B}=\hat{p}$ نحصل علي $\sigma_x^2\sigma_p^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$ اي

$$\sigma_x\sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (١٠٦٥)$$

في العموم لدينا علاقة ارتياب من اجل كل زوج من المؤثرات غير المتلائمة [١٠٠] اي من اجل كل زوج من الملاحظات التي لا تتبادل [١٠١]. المؤثرات الهرميتية غير المتلائمة لا يمكن تقطيرها في ان معا و بالتالي لا توجد مجموعة مكتملة [١٠٢] مشتركة من الاشعة الذاتية. في المقابل المؤثرات الهرميتية المتلائمة، اي التي تتبادل، لها مجموعة مكتملة مشتركة من الاشعة الذاتية.

لنعتبر الان سعاع حالة متعلق بالزمن $|\psi(t)>$ يتطور في الزمن حسب معادلة شرودينغر. القيمة المنتظرة لمؤثر هرميتي $\hat{Q}$ في $|\psi(t)>$، اي $<\hat{Q}>=<\psi(t)|\hat{Q}|\psi(t)>$، تتطور في الزمن حسب

$$i\hbar\frac{d}{dt}<\hat{Q}>=<[\hat{Q},\hat{H}]>. \quad (١٠٦٦)$$

الان نختار في علاقة الارتياب $(1064)$ المؤثرات $\hat{A}=\hat{Q}$ و $\hat{B}=\hat{H}$. نحصل اذن علي

$$\sigma_Q^2\sigma_H^2 \geq \frac{1}{4}|<[\hat{Q},\hat{H}]>|^2. \quad (١٠٦٧)$$

بعبارة اخري

$$\sigma_Q\sigma_H \geq \frac{\hbar}{2}|\frac{d<\hat{Q}>}{dt}|. \quad (١٠٦٨)$$

نعرف

$$\sigma_t = \frac{\sigma_Q}{|\frac{d<\hat{Q}>}{dt}|}. \quad (١٠٦٩)$$

اذن نجد

$$\sigma_t\sigma_H \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (١٠٧٠)$$

هذه هي علاقة الارتياب زمن - طاقة. الكمية $\sigma_t$ هي كمية الزمن التي في خلالها تتغير القيمة المنتظرة ل $\hat{Q}$ بوحدة انحراف معياري. اذن اذا جعلنا الارتياب في الطاقة صغير جدا فان كمية الزمن اللازمة من اجل ان يتغير الملاحظ بصورة محسوسة تكون كبيرة جدا.

---

[١٠٠] incompatible observables.

[١٠١] do not commute.

[١٠٢] complete set.

# الصمود تحت تأثير الدورانات

## العزوم الحركية

يعرف العزم الحركي الزاوي ب

$$\vec{L}=\vec{r}x\vec{p}. \quad (١٠٧١)$$

بدلالة المركبات لدينا

$$L_1=x_2p_3-x_3p_2\ ,\ L_2=x_3p_1-x_1p_3\ ,\ L_3=x_1p_2-x_2p_1. \quad (١٠٧٢)$$

في الميكانيك الكمومي نقوم بالتعويضات التالية

$$x_i\longrightarrow\hat{x}_i\ ,\ p_i\longrightarrow\hat{p}_i\ :\ [\hat{x}_i,\hat{p}_j]=i\hbar\delta_{ij}. \quad (١٠٧٣)$$

اذن مؤثرات العزم الحركي الزاوي تعطي ب

$$\hat{L}_1=\hat{x}_2\hat{p}_3-\hat{x}_3\hat{p}_2\ ,\ \hat{L}_2=\hat{x}_3\hat{p}_1-\hat{x}_1\hat{p}_3\ ,\ \hat{L}_3=\hat{x}_1\hat{p}_2-\hat{x}_2\hat{p}_1. \quad (١٠٧٤)$$

نحسب

$$\begin{aligned}[\hat{L}_1,\hat{L}_2] &= \hat{x}_2[\hat{p}_3,\hat{x}_3]\hat{p}_1+\hat{x}_1[\hat{x}_3,\hat{p}_3]\hat{p}_2\\ &= i\hbar\hat{L}_3.\end{aligned} \quad (١٠٧٥)$$

بالمثل نحسب

$$[\hat{L}_3,\hat{L}_1]=i\hbar\hat{L}_2\ ,\ [\hat{L}_2,\hat{L}_3]=i\hbar\hat{L}_1. \quad (١٠٧٦)$$

يمكن كتابة علاقات التبادل هذه علي الشكل الموجز

$$[\hat{L}_i,\hat{L}_j]=i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k \quad (١٠٧٧)$$

هذه المعادلة تعرف جبرية (١٠٣) العزم الحركي التي هي جبرية من جبريات لي (١٠٤) تعرف رياضيا بجبرية $su(2)$. الرمز $\epsilon_{ijk}$ هو رمز ضد-تناظري بالكلية يعرف باسم تنسور (١٠٥) لفي- سيفيتا (١٠٦) معرف ب $\epsilon_{123}=\epsilon_{312}=\epsilon_{231}=1$، $\epsilon_{213}=\epsilon_{132}=\epsilon_{321}=-1$ و $\epsilon_{ijk}=0$ اذا كان $i=j$ او $i=k$ او $j=k$.

تعني علاقات التبادل اعلاه ان المؤثرات $\hat{L}_i$ هي مؤثرات غير متلائمة وبالتالي، باستعمال مبدأ الارتياب، لا يمكن تقطيرها (١٠٧) في وقت واحد. اذن لا يوجد شعاع عزم حركي يقيني (١٠٨). لنعرف مربع العزم الحركي ب

$$\hat{L}^2=\hat{L}_1^2+\hat{L}_2^2+\hat{L}_3^2. \quad (١٠٧٨)$$

(١٠٣) algebra.
(١٠٤) Lie.
(١٠٥) tensor.
(١٠٦) Levi − Civita.
(١٠٧) diagonalized.
(١٠٨) determinate.

هذا المؤثر يتبادل مع المركبات $\hat{L}_i$. بالفعل نحسب

$$\begin{aligned}[\hat{L}^2,\hat{L}_3] &= [\hat{L}_1^2,\hat{L}_3]+[\hat{L}_2^2,\hat{L}_3]\\ &= \hat{L}_1[\hat{L}_1,\hat{L}_3]+[\hat{L}_1,\hat{L}_3]\hat{L}_1+\hat{L}_2[\hat{L}_2,\hat{L}_3]+[\hat{L}_2,\hat{L}_3]\hat{L}_2\\ &= 0.\end{aligned} \tag{١٠٧٩}$$

بالمثل نحسب

$$[\hat{L}^2,\hat{L}_2]=0\ ,\ [\hat{L}^2,\hat{L}_1]=0. \tag{١٠٨٠}$$

اذن يمكن تقطير $\hat{L}^2$ و واحد من مركبات العزم الحركي مثلا $\hat{L}_3$ في نفس الوقت. نكتب

$$\hat{L}_3|f>=\mu|f>\ ,\ \hat{L}^2|f>=\lambda|f>. \tag{١٠٨١}$$

نعرف مؤثرات الرفع و الخفض ب

$$\hat{L}_{\pm}=\hat{L}_1\pm i\hat{L}_2. \tag{١٠٨٢}$$

نحسب علاقات التبادل

$$[\hat{L}_+,\hat{L}_-]=2\hbar\hat{L}_3\ ,\ [\hat{L}_3,\hat{L}_{\pm}]=\pm\hbar\hat{L}_{\pm}\ ,\ [\hat{L}^2,\hat{L}_{\pm}]=0. \tag{١٠٨٣}$$

اذن

$$\hat{L}_3(\hat{L}_{\pm}|f>)=(\mu\pm\hbar)(\hat{L}_{\pm}|f>)\ ,\ \hat{L}^2(\hat{L}_{\pm}|f>)=\lambda(\hat{L}_{\pm}|f>). \tag{١٠٨٤}$$

من الواضح ان $\hat{L}_{\pm}|f>$ هو شعاع ذاتي ل $\hat{L}_3$ مقابل للقيمة الذاتية $\mu\pm\hbar$. بعبارة اخري $\hat{L}_+$ يرفع القيمة الذاتية ل $\hat{L}_3$ ب $\hbar$ بينما $\hat{L}_-$ يخفض القيمة الذاتية ل $\hat{L}_3$ ب $\hbar$.

من العلاقة $<\hat{L}^2>=<\hat{L}_1^2>+<\hat{L}_2^2>+<\hat{L}_3^2>$ نستنتج ان $\mu^2\leq\lambda$. اذن انطلاقا من شعاع ذاتي $|f>$ ل $\hat{L}_3$ بقيمة ذاتية $\mu$ نحصل عن طريق التطبيق المتتالي ل $\hat{L}_+$ علي الاشعة الذاتية بالقيم الذاتية $\mu+n\hbar$ حيث $n$ هو عدد صحيح موجب. يجب دائما ان يكون لدينا $(\mu+n\hbar)^2\leq\lambda$ و بالتالي توجد قيمة اعظمية ل $n$. الشعاع الذاتي المقابل هو الشعاع الذاتي الاعلي و يرمز له ب $|f_h>=|l>$ و يجب ان يحقق

$$\hat{L}_+|l>=0. \tag{١٠٨٥}$$

لنرمز ايضا للقيمة الذاتية ل $\hat{L}_3$ المقابلة ل $|l>$ ب $\hbar l$ اي

$$\hat{L}_3|l>=\hbar l|l>. \tag{١٠٨٦}$$

باستعمال العلاقة $\hat{L}^2=\hat{L}_-\hat{L}_++\hbar\hat{L}_3+\hat{L}_3^2$ نحصل علي

$$\hat{L}^2|l>=\hbar^2 l(l+1)|l>. \tag{١٠٨٧}$$

اذن $\lambda=\hbar^2 l(l+1)$.

بالمثل انطلاقا من شعاع ذاتي $|f>$ ل $\hat{L}_3$ بقيمة ذاتية $\mu$ نحصل عن طريق التطبيق المتتالي ل $\hat{L}_-$ علي الاشعة الذاتية بالقيم الذاتية $\mu-n\hbar$ حيث $n$ هو عدد صحيح موجب. مرة اخري يجب ان يكون لدينا $(\mu-n\hbar)^2\leq\lambda$ و بالتالي يوجد

قيمة اعظمية ل $n$. الشعاع الذاتي المقابل هو الان الشعاع الادني و يرمز له ب $|k>=|f_l>$ و يجب ان يحقق

$$\hat{L}_-|k>=0. \quad (١٠٨٨)$$

لنرمز للقيمة الذاتية ل $\hat{L}_3$ المرفقة ب $|k>$ ب $\hbar k$ اي

$$\hat{L}_3|k>=\hbar k|k>. \quad (١٠٨٩)$$

باستعمال العلاقة $\hat{L}^2=\hat{L}_+\hat{L}_- - \hbar\hat{L}_3+\hat{L}_3^2$ نحصل علي

$$\hat{L}^2|k>=\hbar^2 k(k-1)|k>. \quad (١٠٩٠)$$

اذن $\lambda=\hbar^2k(k-1)$ و بالتالي $l(l+1)=k(k-1)$ اي $k=-l$. اذن شعاع الحالة الادني ل $\hat{L}_3$ هو $|f_l>=|-l>$ بالقيمة الذاتية $-\hbar l$.

نرمز للقيم الذاتية ل $\hat{L}_3$ ب $\hbar m$ حيث $m$ تأخذ $N$ قيمة بين $-l$ و $+l$ كل قيمتين متتاليتين مفصولتين بوحدة. اذن $l=-l+N$ اي $l=N/2$. بعبارة اخري $l$ يمكنه ان يكون عدد صحيح، مرفق بالعزم الحركي الزاوي مثل الذي عرفناه اعلاه، او ان يكون عدد نصف صحيح و هذا ما يقابل السبين [١٠٩]. نرمز للاشعة الذاتية المقابلة ب $|lm>$ حيث

$$\hat{L}^2|lm>=\hbar^2 l(l+1)|lm>\ ,\ L_3|lm>=\hbar m|lm>. \quad (١٠٩١)$$

$$l=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},...\ ,\ m=-l,-l+1,...,l-1,l. \quad (١٠٩٢)$$

من اجل كل قيمة ل $l$ لدينا $2l+1$ حالة ذاتية اجمالا في فضاء هيلبرت. من الواضح ان $|l>=|ll>$ و $|-l>=|l-l>$. المعادلة $(1084)$ تصبح

$$\hat{L}_3(\hat{L}_\pm|lm>)=\hbar(m\pm 1)(\hat{L}_\pm|lm>)\ ,\ \hat{L}^2(\hat{L}_\pm|lm>)=\hbar l(l+1)(\hat{L}_\pm|lm>). \quad (١٠٩٣)$$

بعبارة اخري

$$\hat{L}_\pm|lm>=A_l^m|lm\pm 1>. \quad (١٠٩٤)$$

نحسب

$$\begin{aligned} |A_l^m|^2 &= <lm|\hat{L}_\mp\hat{L}_\pm|lm> \\ &= <lm|(\hat{L}^2\mp\hbar\hat{L}_3-\hat{L}_3^2)|lm> \\ &= \hbar^2(l(l+1)-m(m\pm 1)). \end{aligned} \quad (١٠٩٥)$$

## التوافقيات الدورانية

مؤثرات العزم الحركي في اساس الموضع تأخذ الشكل

$$\vec{\hat{L}}=\frac{\hbar}{i}\vec{r}x\vec{\nabla}. \quad (١٠٩٦)$$

---

(١٠٩) spin.

مؤثر التدرج يعطي ب

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial\hat{x}_1}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial\hat{x}_2}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial\hat{x}_3}. \quad (١٠٩٧)$$

نعرف الاحداثيات الكروية بالمعادلات

$$\hat{x}_1 = r\sin\theta\cos\phi\ ,\ \hat{x}_2 = r\sin\theta\sin\phi\ ,\ \hat{x}_3 = r\cos\theta. \quad (١٠٩٨)$$

اشعة وحدة الاحداثيات الكروية $r$، $\theta$ و $\phi$ هي

$$\begin{aligned}
\vec{u}_r &= \sin\theta\cos\phi\ \vec{i}+\sin\theta\sin\phi\ \vec{j}+\cos\theta\ \vec{k}\\
\vec{u}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\ \vec{i}+\cos\theta\sin\phi\ \vec{j}-\sin\theta\ \vec{k}\\
\vec{u}_\phi &= -\sin\phi\ \vec{i}+\cos\phi\ \vec{j}.
\end{aligned} \quad (١٠٩٩)$$

في الاحداثيات الكروية يصبح مؤثر التدرج معطي ب

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_r\frac{\partial}{\partial r}+\vec{u}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\vec{u}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}. \quad (١١٠٠)$$

نلاحظ ان $\vec{u}_r x\vec{u}_r = 0$، $\vec{u}_r x\vec{u}_\theta = \vec{u}_\phi$ و $\vec{u}_r x\vec{u}_\phi = -\vec{u}_\theta$. اذن

$$\hat{\vec{L}} = \frac{\hbar}{i}\big(\vec{u}_\phi\frac{\partial}{\partial\theta}-\vec{u}_\theta\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\big). \quad (١١٠١)$$

اي

$$\begin{aligned}
\hat{L}_1 &= \frac{\hbar}{i}\big(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\big)\\
\hat{L}_2 &= \frac{\hbar}{i}\big(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\big)\\
\hat{L}_3 &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}.
\end{aligned} \quad (١١٠٢)$$

يمكن ان نحسب مباشرة

$$\hat{L}_\pm = \pm\hbar e^{\pm i\phi}\big(\frac{\partial}{\partial\theta}\pm i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\big). \quad (١١٠٣)$$

ايضا

$$\hat{L}_+\hat{L}_- = -\hbar^2\bigg(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+i\frac{\partial}{\partial\phi}+(\cot\theta)^2\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\bigg). \quad (١١٠٤)$$

اذن

$$\begin{aligned}
\hat{L}^2 &= \hat{L}_+\hat{L}_- -\hbar\hat{L}_3+\hat{L}_3^2\\
&= -\hbar^2\bigg(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\bigg)\\
&= -\hbar^2\bigg(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\bigg).
\end{aligned} \quad (١١٠٥)$$

**الدوال الذاتية ل $\hat{L}^2$ هي $Y_l^m(\theta,\phi) =< \theta| < \phi|lm >$ و هي تحقق**

$$-\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)Y_l^m = \hbar^2 l(l+1)Y_l^m. \qquad (١١٠٦)$$

**الدوال $Y_l^m(\theta,\phi)$ هي ايضا دوال ذاتية ل $\hat{L}_3$ اي**

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}Y_l^m = \hbar m Y_l^m. \qquad (١١٠٧)$$

**يمكن الحصول علي الحل الصريح باستعمال طريقة فصل المتغيرات. نكتب**

$$Y_l^m(\theta,\phi) = \Theta_l^m(\theta)\Phi_m(\phi). \qquad (١١٠٨)$$

**نحصل علي المعادلات التفاضلية**

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta_l^m}{d\theta}) + \frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta_l^m = l(l+1)\Theta_l^m. \qquad (١١٠٩)$$

$$\frac{d}{d\phi}\Phi_m = im\Phi_m \Leftrightarrow \Phi_m(\phi) = e^{im\phi}. \qquad (١١١٠)$$

**من الواضح انه يجب ان يتحقق الشرط $\Phi_m(\phi+2\pi) = \Phi_m(\phi)$ و بالتالي فان $m$ هو عدد صحيح اي**

$$m = 0, \pm1, \pm2, .... \qquad (١١١١)$$

**يمكن وضع المعادلة التفاضلية الاخري علي الشكل (مع $x = \cos\theta$ )**

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta_l^m}{dx}\right] + [l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}]\Theta_l^m = 0. \qquad (١١١٢)$$

**هذه معادلة لوجوندر** [١١٠]**. يعطي الحل القانوني بكثيرات حدود لوجوندر المرفقة** [١١١] **$P_l^m(x)$ اي**

$$\Theta_l^m(\theta) = AP_l^m(x)\ ,\ x = \cos\theta. \qquad (١١١٣)$$

**يمكن اعطاء كثيرات حدود لوجوندر المرفقة بدلالة كثيرات حدود لوجوندر $P_l(x)$ بالعلاقة**

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{|m|}P_l(x). \qquad (١١١٤)$$

**كثيرات حدود لوجوندر $P_l(x)$ تعطي بعلاقة رودريغاز** [١١٢] **كالاتي**

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l(x^2-1)^l. \qquad (١١١٥)$$

---

[١١٠] Legendre.

[١١١] associated Legendre polynomials.

[١١٢] Rodrigues.

من الواضح من هذه العلاقة ان $l$ يجب ان يكون عدد صحيح موجب و ان $P_l(x)$ هو كثير حدود من الدرجة $l$ في $x=\cos\theta$. كثيرات حدود لوجوندر المرفقة $P_l^m(x)$ هي كثيرات حدود في $x=\cos\theta$ فقط من اجل $m$ زوجي. من اجل $m$ فردي فان كثيرات الحدود هذه تكون مضروبة في قوة ل $\sin\theta$. ايضا اذا كان $|m|>l$ فان $P_l^m(x)=0$ و بالتالي فان القيم المسموح بها ل $l$ و $m$ هي

$$l=0,1,2,...\ ,\ m=-l,-l+1,...,0,....,l-1,l. \quad (١١١٦)$$

كما في السابق لدينا $2l+1$ حالة من اجل كل قيمة ل $l$. لكن $l$ الان هو دائما صحيح.

الحل المكتمل يعطي اذن ب

$$Y_l^m(\theta,\phi)=AP_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}. \quad (١١١٧)$$

نفرض شرط التنظيم

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta d\phi\ |Y_l^m(\theta,\phi)|^2=1. \quad (١١١٨)$$

نجد

$$A=\epsilon\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}. \quad (١١١٩)$$

$$\epsilon=(-1)^m\ ,\ m\geq 0\ ,\ \epsilon=1\ ,\ m\leq 0. \quad (١١٢٠)$$

يمكن ايضا ان نتحقق من شرط التعامد و التجانس

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta d\phi\ [Y_l^m(\theta,\phi)]^*Y_t^s(\theta,\phi)=\delta_{lt}\delta_{ms}. \quad (١١٢١)$$

# الحلول المضبوطة لمعادلة شرودينغر

## الحالات المستقرة، حالات التصادم و الحالات المرتبطة

**الحالات المستقرة:** تكتب معادلة شرودينغر علي الشكل

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x)=\bigg(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\bigg)\Psi(t,x). \quad (١١٢٢)$$

ماهي الحلول $\psi(t,x)$ من اجل كمون معين $V$. نريد حل هذه المسألة بشكل عام. نبدا من فصل المتغيرات

$$\Psi(t,x)=\psi(x)\phi(t). \quad (١١٢٣)$$

نحصل علي

$$\frac{i\hbar}{\phi}\frac{d\phi}{dt}=\frac{1}{\psi}\bigg(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\bigg)\psi. \quad (١١٢٤)$$

الطرف الايسر لهذه المعادلة هو دالة في الزمن $t$ فقط اما الطرف الايمن فهو دالة في $x$ فقط. اذن كلا الطرفين يجب ان يكونا مساويين لثابت $E$ لا يتعلق ب $t$ و $x$. لدينا اذن

$$\frac{d\phi}{dt} = -i\frac{E}{\hbar}\phi \longrightarrow \phi(t) = e^{-i\frac{Et}{\hbar}}. \tag{١١٢٥}$$

المعادلة الاخري تكتب علي الشكل

$$\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\Big)\psi = E\psi. \tag{١١٢٦}$$

الثابت $E$ يجب ان يكون حقيقي لانه لا شيئ سوي القيمة الذاتية للهاميلتونية $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ مرفق بالدالة الذاتية $\psi(x)$. بعبارة اخري الحل المفصول $\Psi(t,x) = e^{-i\frac{Et}{\hbar}}\psi(x)$ هو حل يقيني ذو طاقة متعينة تساوي $E$.

علاوة علي ذلك فان الحل اعلاه هو حل مستقر لان كثافة الاحتمال لا تتعلق بالزمن اي $\rho = \Psi^*(t,x)\Psi(t,x) = \psi^*(x)\psi(x)$. في الحقيقة فان القيمة المنتظرة لاي ملاحظ $Q(x,p)$ لا تتعلق ايضا بالزمن. بالفعل

$$\begin{aligned} <\hat{Q}> = <\Psi|\hat{Q}|\Psi> &= \int dx\Psi^*(t,x)Q(x,\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x})\Psi(t,x) \\ &= \int dx\psi(x)Q(x,\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx})\psi(x). \end{aligned} \tag{١١٢٧}$$

لتكن $\psi_n(x)$ الدالة الذاتية للهاميلتونية $H$ بالقيمة الذاتية $E_n$. الحل العام لمعادلة شرودينغر هو تركيب خطي للحلول المفصولة $\Psi_n(t,x) = e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}\psi_n(x)$. هذا يعطي ب

$$\Psi(t,x) = \sum_n c_n\psi_n(x)e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}. \tag{١١٢٨}$$

هذا هو مبدأ التركيب الخطي الكمومي. المعاملات $c_n$ يجب تعيينها من الشرط الابتدائي

$$\Psi(0,x) = \sum_n c_n\psi_n(x). \tag{١١٢٩}$$

**حالات التصادم و حالات الارتباط:** نعتبر جسيم ذو طاقة $E$ يتحرك في بعد واحد في كمون $V(x)$. في الميكانيك الكلاسيكي اذا كانت الطاقة $E$ هي اصغر من قيم الكمون $V(\infty)$ و $V(-\infty)$ فانه لدينا حالة مرتبطة اي ان الجسيم لا يمكن ان يهرب من الكمون الي اللانهاية. اذا كانت الطاقة $E$ اكبر من $V(\infty)$ و $V(-\infty)$ فانه لدينا حالة تصادم اي ان الجسيم يأتي من اللانهاية، يتفاعل مع الكمون، ثم يرجع مرة اخري الي اللانهاية. حتي نحصل علي حالة تصادم يكفي ان تكون $E$ اكبر من $V(\infty)$ او $V(-\infty)$.

بالمثل فانه في الميكانيك الكمومي هناك نوعان من الحلول الممكنة لمعادلة شرودينغر. الحالات المرتبطة [١١٣] و حالات التصادم [١١٤] . تعرف هذه الحالات ب

$$\begin{aligned} &E < V(-\infty) \text{ and } E < V(+\infty) \ : \ \text{bound state} \\ &E > V(-\infty) \text{ or } E > V(+\infty) \ : \ \text{scattering state.} \end{aligned} \tag{١١٣٠}$$

[١١٣] bound states.

[١١٤] scattering states.

من اجل الهزاز التوافقي لدينا فقط حالات مرتبطة اما من اجل الجسيم الحر فلدينا حالات تصادم فقط. في اغلب الحالات فان الكمون ينعدم في اللانهاية و بالتالي نحصل علي الشرط المبسط

$$\begin{aligned} E < 0 &: \text{ bound state} \\ E > 0 &: \text{ scattering state.} \end{aligned} \qquad (١١٣١)$$

## الجسيم الحر

في هذه الحالة ينعدم الكمون في كل مكان. معادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن تصبح

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi. \qquad (١١٣٢)$$

نعيد كتابة هذه المعادلة علي الشكل

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi \ , \ k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \qquad (١١٣٣)$$

من الواضح ان $E$ هي الطاقة الحركية للجسيم $T = \frac{1}{2}mv^2 = p^2/2m$ و بالتالي $E \geq 0$. سرعة و كمية حركة الجسيم تعطي اذن ب

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{p}{m} \ , \ p = \hbar k. \qquad (١١٣٤)$$

الحل العام لمعادلة شرودينغر غير المتعلقة بالزمن يعطي ب

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}. \qquad (١١٣٥)$$

بالضرب بالمعامل الطوري المتعلق بالزمن $e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$ نحصل علي

$$\Psi(t,x) = Ae^{i\frac{k}{\hbar}(x - v_{\rm phase}t)} + Be^{-i\frac{k}{\hbar}(x + v_{\rm phase}t)}. \qquad (١١٣٦)$$

الحد الاول يمثل موجة منتشرة الي اليمين بسرعة $v_{\rm phase}$ بينما يعبر الحد الثاني عن موجة منتشرة الي اليسار بسرعة $v_{\rm phase}$. السرعة الطورية تعطي ب

$$v_{\rm phase} = \frac{E}{\hbar k} = \frac{p}{2m} = \frac{1}{2}v. \qquad (١١٣٧)$$

يمكن كتابة الحل اعلاه علي الشكل المكافئ

$$\Psi_k(t,x) = Ae^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t)}. \qquad (١١٣٨)$$

$$k = \pm\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \qquad (١١٣٩)$$

$$\begin{aligned} &k > 0 \ , \ \text{wave traveling to the right} \\ &k < 0 \ , \ \text{wave traveling to the left.} \end{aligned} \qquad (١١٤٠)$$

المشكل الاول الذي لدينا مع هذه الحلول المنتشرة هو انها عبارة عن امواج تنتشر بنصف سرعة الجسيم. المشكل الثاني هو ان هذه الحلول غير قابلة للتنظيم. اذن ليس لدينا جسيم حر بكمية حركة متعينة.

نحصل علي الحل العام لمعادلة شرودينغر عن طريق اخذ تركيب خطي للحلول المفصولة اعلاه كما يلي

$$\begin{aligned} \Psi(t,x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\frac{\phi(k)}{A}\Psi_k(t,x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\phi(k)e^{i(kx-\frac{\hbar k^2}{2m}t)}. \end{aligned} \quad (١١٤١)$$

يمكن تنظيم هذه الدالة الموجية من اجل اختيارات مناسبة للدوال $\phi(k)$. تسمي هذه الدالة الموجية بالحزمة الموجية [١١٥] . يمكن تعيين الدوال $\phi(k)$ من الشروط الابتدائية

$$\Psi(0,x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\phi(k)e^{ikx}. \quad (١١٤٢)$$

حل هذه الشروط الابتدائية يعطي بمبرهنة بلانشارل [١١٦] اي ان $\phi(k)$ هو تحويل فوريي [١١٧] ل $\Psi(0,x)$ يعطي ب

$$\phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\Psi(0,x)e^{-ikx}. \quad (١١٤٣)$$

لنلاحظ ان

$$\int dx\Psi^*(t,x)\Psi(t,x) = \int dx\Psi^*(0,x)\Psi(0,x) = \int dk\phi^*(k)\phi(k). \quad (١١٤٤)$$

يبقي ان نتحقق ان سرعة الحزمة الموجية تساوي سرعة الجسيم $v$. سرعة الحزمة الموجية تعرف باسم سرعة المجموعة [١١٨] و يمكن ان تكون اكبر من، تساوي او اصغر من السرعة الطورية. نعتبر حزمة موجية عامة تعطي ب

$$\Psi(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\phi(k)e^{i(kx-\Omega t)}. \quad (١١٤٥)$$

نفترض علاقة تشتت [١١٩] عامة. اي اننا نفترض ان التواتر الزاوي $\Omega$ هو دالة كيفية في $k$ بمعني $\Omega=\Omega(k)$. بالاضافة الي هذا نفترض ان $\phi(k)$ هو متمركز حول القيمة $k=k_0$ اي ان المركبات المختلفة للحزمة الموجية تنتشر تقريبا بنفس السرعة الطورية $v_{\rm phase}=\Omega/k$ و بالتالي فان شكل الحزمة الموجية يتغير ببطء. في الحقيقة فانه فقط في هذه الحالة يكون لمفهوم سرعة المجموعة معني واضح. اذن ننشر $\Omega$ كسلسلة تايلور [١٢٠] حول $k=k_0$ كما يلي

$$\Omega(k) = \Omega(k_0)+\Omega^{'}(k_0)(k-k_0)+... \quad (١١٤٦)$$

[١١٥] wave packet.
[١١٦] Plancherel's theorem.
[١١٧] Fourier transform.
[١١٨] group velocity.
[١١٩] dispersion relation.
[١٢٠] Taylor series.

نحسب (مع $k^{'}=k-k_0$، $\Omega_0=\Omega(k_0)$ و $\Omega_0^{'}=d\Omega(k)/dk|_{k=k_0}$ )

$$\begin{aligned}\Psi(t,x) &= e^{-i\Omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk^{'}}{\sqrt{2\pi}}\phi(k^{'}+k_0)e^{i((k^{'}+k_0)x-\Omega_0^{'}k^{'}t)}\\ &= e^{i(-\Omega_0+k_0\Omega_0^{'})t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk^{'}}{\sqrt{2\pi}}\phi(k^{'}+k_0)e^{i(k^{'}+k_0)(x-\Omega_0^{'}t)}.\end{aligned} \quad (١١٤٧)$$

في اللحظة $t=0$ نحصل علي

$$\Psi(0,x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk^{'}}{\sqrt{2\pi}}\phi(k^{'}+k_0)e^{i(k^{'}+k_0)x}. \quad (١١٤٨)$$

اذن

$$\Psi(t,x) = e^{i(-\Omega_0+k_0\Omega_0^{'})t}\Psi(0,x-\Omega_0^{'}t). \quad (١١٤٩)$$

كما نريد بالضبط فان شكل الحزمة الموجية لا يتغير و تتحرك الحزمة بسرعة المجموعة

$$v_{\rm group}=\Omega_0^{'}=\frac{d\Omega}{dk}|_{k=k_0}. \quad (١١٥٠)$$

في حالتنا هذه $\Omega=\hbar k^2/2m$ و بالتالي تصبح سرعة المجموعة معطاة ب

$$v_{\rm group}=\frac{\hbar k_0}{m}=\frac{p_0}{m}=v_0. \quad (١١٥١)$$

## الهزاز التوافقي

لتكن $x_0$ قيمة اصغرية محلية للكمون $V$ اي

$$V^{'}(x_0)=0. \quad (١١٥٢)$$

بالاضافة يمكن دائما ان نختار، من دون اي فقدان للعمومية، الكمون بحيث $V(x_0)=0$. ننشر الان $V(x)$ كسلسلة تايلور حول $x_0$ كما يلي

$$\begin{aligned}V(x) &= V(x_0)+(x-x_0)V^{'}(x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2V^{''}(x_0)+...\\ &= \frac{1}{2}V^{''}(x_0)(x-x_0)^2+...\end{aligned} \quad (١١٥٣)$$

هذه هي الطاقة الكامنة لهزاز توافقي بسيط بثابت مرونة $k=V^{''}(x_0)=m\Omega^2$.

معادلة شرودينغر غير المتعلقة بالزمن التي تصف الحركة حول القيمة الاصغرية المحلية $x_0$ تعطي اذن ب

$$\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\Omega^2x^2\Big)\psi=E\psi. \quad (١١٥٤)$$

يمكن كتابة هذه المعادلة ايضا علي الشكل

$$\Big(\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\Omega^2\hat{x}^2\Big)|\psi>=E|\psi>. \quad (١١٥٥)$$

لنذكر ان $\psi(x) =< x|\psi >$. نعرف مؤثرات الرفع و الخفض $a^+$ و $a$ ب

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\Omega}}(m\Omega\hat{x} - i\hat{p}) \ , \ a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\Omega}}(m\Omega\hat{x} + i\hat{p}). \quad (١١٥٦)$$

لان $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ نحسب علاقات التبادل

$$[a, a^+] = 1. \quad (١١٥٧)$$

يمكننا ان نتحقق الان مباشرة من ان هاميلتونية الهزاز التوافقي البسيط المعطاة ب $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2\hat{x}^2$ يمكن كتابتها على الشكل

$$\hat{H} = \hbar\Omega(a^+a + \frac{1}{2}). \quad (١١٥٨)$$

نحسب

$$[\hat{H}, a] = -\hbar\Omega a \ , \ [\hat{H}, a^+] = \hbar\Omega a^+. \quad (١١٥٩)$$

باستخدام هذه المعادلات و معادلة شرودينغر غير متعلقة بالزمن $\hat{H}|\psi >= E|\psi >$ نحصل على

$$\hat{H}a|\psi >= (E - \hbar\Omega)a|\psi > \ , \ \hat{H}a^+|\psi >= (E + \hbar\Omega)a^+|\psi > . \quad (١١٦٠)$$

بعبارة اخرى $a|\psi >$ هو شعاع ذاتي ل $\hat{H}$ بالقيمة الذاتية $E - \hbar\Omega$ بينما $a^+|\psi >$ هو شعاع ذاتي بالقيمة الذاتية $E + \hbar\Omega$. اذن $a$ ينقص الطاقة و لهذا نسمية بمؤثر الخفض بينما $a^+$ يزيد الطاقة و لهذا الاسم مؤثر الرفع. نعرف مؤثر العدد ب

$$N = a^+a. \quad (١١٦١)$$

ليكن $|n >$ الشعاع الذاتي ل $N$ المرفق بالقيمة الذاتية $n$ اي

$$N|n >= n|n > . \quad (١١٦٢)$$

لان $N$ مؤثر هرميتي فان القيم الذاتية $n$ حقيقية و الاشعة الذاتية $|n >$ متعامدة. في الحقيقة $n$ يجب ان يكون موجب لان $n = |a|n > |^2$. علاوة على ذلك فانه باستخدام علاقات التبادل $[N, a] = -a$ و $[N, a^+] = a^+$ نحسب $Na|n >= (n-1)a|n >$ و $Na^+|n >= (n+1)a^+|n >$. بعبارة اخرى

$$a|n >= c_n|n - 1 > \ , \ a^+|n >= d_n|n + 1 > . \quad (١١٦٣)$$

باشتراط ان الاشعة الذاتية $|n >$ منظمة اي $< n|n >= 1$ نحصل على $|c_n|^2 = n$ و $|d_n|^2 = n + 1$. اذن باخذ $c_n$ و $d_n$ اعداد حقيقية موجبة، من اجل التبسيط، لدينا

$$a|n >= \sqrt{n}|n - 1 > \ , \ a^+|n >= \sqrt{n+1}|n + 1 > . \quad (١١٦٤)$$

القيم المسموح بها للطاقة هي بالتالي معطاة ب

$$E_n = \hbar\Omega(n + \frac{1}{2}). \quad (١١٦٥)$$

من الواضح ان الاشعة الذاتية المرفقة هي بالضبط $|n >$.

نستعمل الان النتيجة العامة التالية: **طاقة اي حل قابل للتنظيم لمعادلة شرودينغر غير المتعلقة بالزمن يجب ان تكون اكبر او تساوي من القيمة الاصغرية للكمون $V$**. من اجل حالتنا قيد الدراسة فان القيمة الاصغرية ل $V$ هي صفر ووجدنا ان القيم $E_n$ للطاقة هي دائما اكبر من الصفر لان $n \geq 0$. بالفعل فان طاقة الحالة الاساسية $E_0$ للهزاز التوافقي البسيط هي

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\Omega. \quad (١١٦٦)$$

من الواضح انه انطلاقا من اي شعاع حالة $|n>$ يمكن الوصول الي شعاع الحالة الاساسية $|0>$ عن طريق التطبيق المتكرر لمؤثر الخفض $a$. هذا يعني بالخصوص ان $n$ يجب ان يكون عدد طبيعي لانه يساوي عدد المرات التي يجب التأثير فيها ب $a$ للذهاب من $|n>$ الي $|0>$. نحصل علي شرط التكميم

$$n \in \mathbf{N}. \quad (١١٦٧)$$

شعاع الحالة الاساسية $|0>$ يجب ان يحقق الشرط $a|0> = 0$. يكتب هذا الشرط في فضاء الموضع كالتالي ( مع $\psi_0(x) = <x|0>$ )

$$(\frac{d}{dx} + \frac{m\Omega}{\hbar}x)\psi_0(x) = 0. \quad (١١٦٨)$$

الحل المنظم يعطي ب

$$\psi_0(x) = (\frac{m\Omega}{\pi\hbar})^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{m\Omega}{2\hbar}x^2}. \quad (١١٦٩)$$

يمكن حساب اشعة الحالة $|n>$ بدلالة $|0>$ كالتالي

$$\begin{aligned}
&|1> = a^+|0> \\
&|2> = \frac{a^+}{\sqrt{2}}|1> = \frac{(a^+)^2}{\sqrt{2!}}|0> \\
&|3> = \frac{a^+}{\sqrt{3}}|2> = \frac{(a^+)^3}{\sqrt{3!}}|0> \\
&. \\
&. \\
&|n> = \frac{a^+}{\sqrt{n}}|n-1> = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0> .
\end{aligned} \quad (١١٧٠)$$

## كمون دالة دلتا

يعطي الكمون في هذه الحالة ب

$$V(x) = -\alpha\delta(x). \quad (١١٧١)$$

الثابت $\alpha$ موجب. معادلة شرودينغر غير المتعلقة بالزمن تكتب علي الشكل

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha\delta(x)\psi = E\psi. \quad (١١٧٢)$$

**الحالات المرتبطة** $(E \leq 0)$:     نعرف

$$\kappa = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}. \quad (١١٧٣)$$

معادلة شرودينغر غير المتعلقة بالزمن تصبح

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\delta(x)\psi = \kappa^2\psi. \quad (١١٧٤)$$

من اجل $x < 0$ او $x > 0$ لدينا

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \kappa^2\psi. \quad (١١٧٥)$$

الحل من اجل $x < 0$ يأخذ الشكل

$$\psi(x) = Ae^{-\kappa x} + Be^{\kappa x}. \quad (١١٧٦)$$

في النهاية $x \longrightarrow -\infty$ الحل اعلاه ينفجر ما لم ينعدم $A$. اذن يجب ان يكون لدينا

$$\psi(x) = Be^{\kappa x} \ , \ x < 0. \quad (١١٧٧)$$

بالمثل فان الحل من اجل $x > 0$ يأخذ الشكل

$$\psi(x) = Fe^{-\kappa x} + Ge^{\kappa x}. \quad (١١٧٨)$$

الان في النهاية $x \longrightarrow \infty$ الحل ينفجر مالم ينعدم $G$. اذن يجب ان يكون لدينا

$$\psi(x) = Fe^{-\kappa x} \ , \ x > 0. \quad (١١٧٩)$$

الدالة الموجية هي دائما مستمرة بينما مشتقتها الاولي $d\psi(x)/dx$ هي دائما مستمرة باستثناء في النقاط التي يتباعد فيها الكمون. اذن من الشرط الحدي الاول نحصل علي

$$F = B. \quad (١١٨٠)$$

لدينا اذن النتيجة

$$\begin{aligned} \psi(x) &= Be^{+\kappa x} \ , \ x \leq 0 \\ \psi(x) &= Be^{-\kappa x} \ , \ x \geq 0. \end{aligned} \quad (١١٨١)$$

نكامل الان طرفي معادلة شرودينغر بين $-\epsilon$ و $+\epsilon$. لدينا

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx\delta(x)\psi + \kappa^2\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx\psi. \quad (١١٨٢)$$

نحصل في النهاية $\epsilon \longrightarrow 0$ علي النتيجة

$$\frac{d\psi}{dx}|_{+\epsilon} - \frac{d\psi}{dx}|_{-\epsilon} = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(0). \quad (١١٨٣)$$

بعبارة اخري فان المشتقة الاولي للدالة الموجية غير مستمرة في النقطة $x = 0$ حيث يتباعد الكمون. المعادلة اعلاه تعطي النتيجة

$$-2B\kappa = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}B. \quad (١١٨٤)$$

اذن

$$\kappa = \frac{m\alpha}{\hbar^2}. \quad (١١٨٥)$$

طاقة الحالة المرتبطة هي اذن معطاة ب

$$E = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}. \quad (١١٨٦)$$

تنظيم الدالة الموجية $\psi(x)$ يعطي $B = \sqrt{\kappa}$. الدالة الموجية للحالة المرتبطة تعطي اذن ب

$$\psi(x) = \sqrt{\kappa}e^{-\kappa|x|}. \quad (١١٨٧)$$

**حالات التصادم** ($E \geq 0$): نعرف

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \quad (١١٨٨)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\delta(x)\psi = -k^2\psi. \quad (١١٨٩)$$

الحل من اجل $x < 0$ هو من الشكل

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}. \quad (١١٩٠)$$

الحل من اجل $x > 0$ هو من الشكل

$$\psi(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}. \quad (١١٩١)$$

من شرط استمرارية دالة الموجة نحصل علي

$$A + B = F + G. \quad (١١٩٢)$$

نحسب المشتقات الاولي

$$\frac{d\psi}{dx}|_{+\epsilon} = ik(F - G)\ ,\ \frac{d\psi}{dx}|_{-\epsilon} = ik(A - B). \quad (١١٩٣)$$

من الشرط (1183) نحصل علي

$$ik(F - G - A + B) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}(A + B). \quad (١١٩٤)$$

بالمقابل

$$F - G = (1 + 2i\beta)A - (1 - 2i\beta)B\ ,\ \beta = \frac{m\alpha}{\hbar^2 k}. \quad (١١٩٥)$$

الثوابت $A$ و $F$ هي سعات الامواج المنتشرة الي اليمين بينما $B$ و $G$ هي سعات الامواج المنتشرة الي اليسار. في تجربة تصادم معينة فان الجسيمات تأتي من جهة

واحدة مثلا من اليسار. في هذه الحالة $A$ يقابل الموجة الواردة، $B$ يقابل الموجة المنعكسة و $F$ يقابل الموجة المرسلة اي المنكسرة بينما $G=0$. نعتبر اذن

$$G=0 \ , \ \text{scattering from left.} \qquad (١١٩٦)$$

نحصل علي المعاملات

$$B=\frac{i\beta}{1-i\beta}A \ , \ F=\frac{1}{1-i\beta}A. \qquad (١١٩٧)$$

اذن نحصل علي الدوال الموجية

$$\begin{aligned}\psi_{\rm incid}&=Ae^{ikx}\\ \psi_{\rm refle}&=\frac{i\beta}{1-i\beta}Ae^{-ikx}\\ \psi_{\rm trans}&=\frac{1}{1-i\beta}Ae^{ikx}.\end{aligned} \qquad (١١٩٨)$$

الدوال الموجية الكلية تعطي اذن ب

$$\psi(x)=\psi_{\rm incid}(x)+\psi_{\rm refle}(x) \ , \ x<0. \qquad (١١٩٩)$$

$$\psi(x)=\psi_{\rm trans}(x) \ , \ x>0. \qquad (١٢٠٠)$$

نذكر ان $|\psi(x)|^2$ هو احتمال ايجاد الجسيم في النقطة $x$. بعبارة اخري اذا كان لدينا عدد ضخم من الجسيمات كلها في نفس الحالة $\psi(x)$ فان الكمية $|\psi(x)|^2$ تقيس عدد الجسيمات التي توجد في النقطة $x$. بالتالي $\int dx|\psi_{\rm incid}|^2=|A|^2\int dx$، $\int dx|\psi_{\rm refle}|^2=|B|^2\int dx$ و $\int dx|\psi_{\rm trans}|^2=|F|^2\int dx$ هي اعداد الجسيمات الواردة، المنعكسة و المنكسرة علي التوالي التي لها طاقة $E$. رغم ان هذه الاعداد غير منتهية، لان الدوال الموجية $\psi_{\rm incid}$، $\psi_{\rm refle}$ و $\psi_{\rm trans}$ غير قابلة للتنظيم، فان نسبها منتهية.

اذن الاحتمال النسبي لجسيم وارد ان ينعكس يعطي بأخذ نسبة عددالجسيمات الواردة لعدد الجسيمات المنعكسة اي

$$R=\frac{|B|^2}{|A|^2}=\frac{\beta^2}{1+\beta^2}=\frac{1}{1+\frac{2\hbar^2E}{m\alpha^2}}. \qquad (١٢٠١)$$

هذا يسمي معامل الانعكاس. بالمثل فان الاحتمال النسبي لجسيم وارد ان ينكسر يعطي بأخذ نسبة عدد الجسيمات الواردة لعدد الجسيمات المنكسرة اي

$$T=\frac{|F|^2}{|A|^2}=\frac{1}{1+\beta^2}=\frac{1}{1+\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2E}}. \qquad (١٢٠٢)$$

هذا يسمي معامل الانكسار او الارسال. لدينا

$$R+T=1. \qquad (١٢٠٣)$$

لنلاحظ انه لما $E\longrightarrow\infty$ فان $R\longrightarrow 0$ و $T\longrightarrow 1$. اي ان الجسيم الذي له طاقة كافية احتمال مروره عبر الكمون اكبر من احتمال انعكاسه.

الدوال الموجية $\psi_{\rm incid}$، $\psi_{\rm refle}$ و $\psi_{\rm trans}$ ليست فيزيائية لانها دوال غير قابلة للتنظيم. يجب تعويض هذه الدوال بدوال قابلة للتنظيم، عبارة عن حزم موجية مثل ما فعلنا في حالة الجسيم الحر، و هذا يؤدي بالضرورة الي تعويض الطاقة $E$ بمجال من القيم المسموحة للطاقة. نعتبر اذن حزم موجية مركزة حول القيمة $k$ للعدد الموجي كي تكون الطاقة مركزة حول القيمة $E$. الحزم الموجية الواردة، المنعكسة و المنكسرة يجب ان تحقق نفس الشروط الحدية التي تحققها $\psi_{\rm incid}$، $\psi_{\rm refle}$ و $\psi_{\rm trans}$ علي التوالي. التحليل الذي قمنا به اعلاه بالنسبة ل $\psi_{\rm incid}$، $\psi_{\rm refle}$ و $\psi_{\rm trans}$ يبقي صالحا بالكامل بالنسبة لهذه الحزم الموجية اما $R$ و $T$ فيصبح لهما تفسير معاملي الانعكاس والانكسار للجسيمات ذات الطاقة $E$.

## الكمون المربع

نعتبر الان الكمون

$$V=-V_0\ ,\ -a<x<a$$
$$V=0\ ,\ |x|>0. \tag{١٢٠٤}$$

**الحالات المرتبطة** ($E<0$): نعرف

$$\kappa=\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}. \tag{١٢٠٥}$$

لدينا ثلاث مناطق. المنطقة الاولي توافق $x<-a$ بينما توافق المنطقة الثالثة $x>a$. في هاته المنطقتين تكتب معادلة شرودينغر علي الشكل

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=\kappa^2\psi. \tag{١٢٠٦}$$

الحل العام هو

$$\psi(x)=Ae^{-\kappa x}+Be^{\kappa x}. \tag{١٢٠٧}$$

من الواضح ان الحل في المنطقة الاولي هو

$$\psi_I(x)=Be^{\kappa x}\ ,\ x<-a. \tag{١٢٠٨}$$

بالمثل الحل في المنطقة الثالثة هو

$$\psi_{III}(x)=Fe^{-\kappa x}\ ,\ x>a. \tag{١٢٠٩}$$

طاقة اي حل قابل للتنظيم لمعادلة شرودينغر يجب ان تكون اكبر او تساوي من القيمة الاصغرية للكمون. في هذه الحالة هذا يعني ان $E>-V_0$. اذن في المنطقة الثانية اي من اجل $-a<x<a$ تكتب معادلة شرودينغر علي الشكل

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=-l^2\psi\ ,\ l=\frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}. \tag{١٢١٠}$$

الحل يعطي ب

$$\psi_{II}(x)=C\sin lx+D\cos lx. \tag{١٢١١}$$

لان الكمون زوجي يمكن ان نفترض ان الدالة الموجية اما زوجية او فردية. بافتراض انها زوجية لدينا مباشرة $C=0$. نحصل علي

$$\psi_{II}(x) = D\cos lx. \quad (١٢١٢)$$

الشروط الحدية $\psi_I(-a)=\psi_{II}(-a)$ ،$\psi_{II}(a)=\psi_{III}(a)$ تؤدي الي المعادلات

$$B = F. \quad (١٢١٣)$$

$$Be^{-\kappa a} = D\cos la. \quad (١٢١٤)$$

الشروط الحدية $\psi'_I(-a)=\psi'_{II}(-a)$ ،$\psi'_{II}(a)=\psi'_{III}(a)$ تؤدي الي المعادلات

$$\kappa Be^{-\kappa a} = Dl\sin la. \quad (١٢١٥)$$

اذن الطاقات المسموح بها يجب ان تحقق الشرط

$$\tan la = \frac{\kappa}{l}. \quad (١٢١٦)$$

نعرف

$$z = la\ ,\ z_0 = \frac{a}{\hbar}\sqrt{2mV_0}. \quad (١٢١٧)$$

نلاحظ ان $\kappa^2+l^2=2mV_0/\hbar^2$ و بالتالي $a^2\kappa^2=z_0^2-z^2$. اذن

$$\tan z = \sqrt{\frac{z_0^2}{z^2}-1}. \quad (١٢١٨)$$

يجب حل هذه المعادلة المتسامية من اجل المجهول $z$ المكافئ للطاقة $E$ بدلالة $z_0$ الذي يقيس حجم البئر.

من اجل بئر عميقة اي $z_0\longrightarrow\infty$ لدينا $\tan z\longrightarrow\infty$. بالتالي $z=n\pi/2$ حيث $n$ فردي. اذن في هذه الحالة نقاط تقاطع الدالتين $\tan z$ و $\sqrt{\frac{z_0^2}{z^2}-1}$ تقع في

$$z_n = n\frac{\pi}{2} \leftrightarrow E'_n = E_n + V_0 = \frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2m(2a)^2}. \quad (١٢١٩)$$

من اجل $V_0$ منته فان هناك عدد منته من الحلول. في النهاية $V_0\longrightarrow\infty$ القيم $E'_n$ تصبح طاقات الكمون المربع اللانهائي.

من اجل كمون ضحل و ضيق فانه يكون لدينا عدد اقل من الحالات المرتبطة. بالفعل من اجل كل القيم $z_0$ التي هي اقل من $\pi/2$ مهما كانت صغيرة فانه يكون لدينا حالة مرتبطة وحيدة.

**حالات التصادم** ($E>0$): نعرف

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \quad (١٢٢٠)$$

لدينا الحلول

$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}\ ,\ x < -a$$
$$\psi_{II}(x) = C\sin lx + D\cos lx\ ,\ -a < x < a$$
$$\psi_{III}(x) = Fe^{ikx}\ ,\ x > a. \quad (١٢٢١)$$

في المناطق الاولي و الثالثة الجسيم حر. الموجة الواردة متناسبة مع $A$، الموجة المنعكسة متناسبة مع $B$ و الموجة المنكسرة (المرسلة) متناسبة مع $F$. استمرارية الدالة الموجية في النقاط $x = \pm a$ يعطي المعادلات

$$Ae^{-ika} + Be^{ika} = -C\sin la + D\cos la$$
$$Fe^{ika} = C\sin la + D\cos la. \quad (١٢٢٢)$$

استمرارية المشتقة الاولي للدالة الموجية في $x = \pm a$ تؤدي الي المعادلات

$$ik(Ae^{-ika} - Be^{ika}) = l(C\cos la + D\sin la)$$
$$ik(Fe^{ika}) = l(C\cos la - D\sin la). \quad (١٢٢٣)$$

نستعمل المعادلة الثانية من (1222) و المعادلة الثانية من (1223) لايجاد

$$C = (\sin la + \frac{ik}{l}\cos la)e^{ika}F\ ,\ D = (\cos la - \frac{ik}{l}\sin la)e^{ika}F. \quad (١٢٢٤)$$

نعوض هذه العبارات في المعادلة الاولي من (1222) و المعادلة الاولي من (1223) لايجاد

$$Ae^{-ika} + Be^{ika} = (\cos 2la - \frac{ik}{l}\sin 2la)e^{ika}F$$
$$Ae^{-ika} - Be^{ika} = (\cos 2la - \frac{il}{k}\sin 2la)e^{ika}F. \quad (١٢٢٥)$$

اذن

$$F = \frac{e^{-2ika}}{\cos 2la - i\frac{k^2+l^2}{2kl}\sin 2l}A. \quad (١٢٢٦)$$

$$B = i\frac{l^2 - k^2}{2kl}\sin 2laF. \quad (١٢٢٧)$$

معامل الانكسار او الارسال هو

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{1}{\cos^2 2la + (\frac{k^2+l^2}{2kl})^2\sin^2 2la}. \quad (١٢٢٨)$$

معامل الانعكاس هو

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{(\frac{k^2-l^2}{2kl})^2\sin^2 2la}{\cos^2 2la + (\frac{k^2+l^2}{2kl})^2\sin^2 2la}. \quad (١٢٢٩)$$

نتحقق من ان

$$R + T = 1. \quad (١٢٣٠)$$

# تمارين

**تمرين** 1:

1) ليكن $|f>$ و $|g>$ شعاعي حالة في فضاء هيلبرت $\mathcal{H}$. برهن على صحة متراجحة شوارز

$$| < f|g > |^2 \leq < f|f >< g|g > .$$

2) بين باستعمال متراجحة شوارز ان الجداء الداخلي $< f|g >$ موجود.

3) فضاء هيلبرت هو فضاء مركب. بالتعريف الفضاء الشعاعي هو فضاء مغلق تحت تأثير الجمع الشعاعي و الضرب السلمي. اذن اذا كان $|f>$ و $|g>$ اي شعاعي حالة في فضاء هيلبرت فان المجموع $|h>=|f>+|g>$ هو ايضا شعاع حالة في فضاء هيلبرت. بين انه اذا كانت الدالتين الموجيتين $f(x)$ و $g(x)$ قابلتين للتنظيم فان $h(x)$ هي ايضا دالة موجية قابل للتنظيم.

**تمرين** 2:

1) مبدأ الارتياب يعطي ب

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \frac{1}{4}| < [\hat{A},\hat{B}]| > |^2.$$

بين ان الشرط الضروري و الكافي من اجل صحة المتراجحة اعلاه يعطي ب

$$(\hat{B}- < \hat{B} >)|\psi >= ia(\hat{A}- < \hat{A} >)|\psi > .$$

الحالة الموصوفة بالشعاع $|\psi>$ هي اذن حالة ذات ارتياب اصغري.

2) جد حل للشرط اعلاه من اجل $\hat{A}=\hat{x}$ و $\hat{B}=\hat{p}$. نظم الدالة الموجية المحصل عليها لواحد. استعمل

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}.$$

3) جد الدالة الموجية المقابلة في فضاء كميات الحركة.

4) من اجل التبسيط نعتبر $<\hat{x}>=0$. عين متي تكون كمية حركة الجسيم معرفة جيدا و متي يكون الجسيم متموضعا جيدا في فضاء المواضع.

**تمرين** 3:

1) علم الدالة الموجية $\psi(t,x)$ ب $\psi(t,x)=\sqrt{\rho}e^{\frac{iS}{\hbar}}$. بالتعويض بهذا الاقتراح في معادلة شرودينغر نحصل على معادلة الاستمرارية

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial j}{\partial x}=0.$$

اكتب تيار الاحتمال $j$ بدلالة $\rho$ و $S$ و ايضا $\psi$ و $\psi^*$.

2) باستعمال معادلة الاستمرارية تحقق من قانون انحفاظ الاحتمال المعطي ب

$$\frac{dP}{dt}=0\ ,\ P=\int_{-\infty}^{\infty}\rho(t,x)dx.$$

3) اربط بين $<\hat{p}>$ و $\frac{d<\hat{x}>}{dt}$. ما هو معني تيار الاحتمال $j$.

4) نفترض ان الكمون $V$ مركب اي $V=V_0-i\Gamma$. عين في هذه الحالة معدل تغير الاحتمال الكلي $\frac{dP}{dt}$. ماذا يصف $P$.

5) ما هي المعادلة التي يحققها $S$ و ما هي نهايتها الكلاسيكية $\hbar\longrightarrow 0$. ما هو معني $S$.

**تمرين** 4:

1) نعتبر جسيم ذو سبين $1/2$. الحالة الذاتية العليا للمؤثرات $\hat{S}^2$ و $\hat{S}_3$ يرمز لها ب $|\frac{1}{2}\frac{1}{2}>\equiv|+>$ اما الحالة الذاتية الدنيا فيرمز لها ب $|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}>\equiv|->$. اكتب المؤثرات $\hat{S}^2$، $\hat{S}_3$ و $\hat{S}_{\pm}$ في هذا الاساس. عبر عن $\hat{S}_i$ بدلالة مصفوفات باولي

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

2) ما هي القيم التي نحصل عليها و ما هي احتمالاتها اذا قسنا السبين $\hat{S}_3$ في حالة عامة للجسيم.

3) ما هي القيم التي نحصل عليها و ما هي احتمالاتها اذا قسنا السبين $\hat{S}_1$ في حالة عامة للجسيم.

4) اذا افترضنا ان الجسيم في اللحظة الابتدائية موجود في الحالة $|+>$. ماهي نتائج قياس السبين $\hat{S}_1$ و ماهي احتمالاتها. اذا ادي القياس للنتيجة $+\hbar/2$ ما هي حالة الجسيم بعد القياس. ما هي نتائج قياس السبين $\hat{S}_3$ الذي نجريه مباشرة بعد القياس السابق و ماهي احتمالاتها.

**تمرين** 5: نعتبر جملة مشكلة من جسيمين سبينهما $1/2$ مثل الالكترون و البروتون في الحالة الاساسية لذرة الهيدروجين. ما هو العزم الحركي الكلي للجملة. انشئ فضاء هيلبرت هذه الجملة.

**تمرين** 6: نعتبر هزازان توافقيان مستقلان بمؤثرات احداث و تدمير $a_+,a_+^+$ و $a_-,a_-^+$، اي $[a_+,a_+^+]=1$، $[a_-,a_-^+]=1$ و $[a_+,a_-^+]=0$. مؤثرات العدد الفردية تعطي ب $N_+=a_+^+a_+$، $N_-=a_-^+a_-$ اما مؤثر العدد الكلي فيعطي ب $N=N_++N_-$. فضاء هيلبرت الكلي هو الجداء التنسوري للفضاءات الهيلبرتية الفردية. اذن اذا كان $\{|n_+>\}$ هو اساس فضاء هيلبرت للهزاز التوافقي الاول و $\{|n_->\}$ هو اساس فضاء هيلبرت للهزاز التوافقي الثاني فان $\{|n_+>|n_->\}$ هو اساس فضاء هيلبرت الكلي. نعرف

$$J_+=\hbar a_+^+a_-\ ,\ J_-=\hbar a_-^+a_+\ ,\ J_3=\frac{\hbar}{2}(a_+^+a_+-a_-^+a_-).$$

نحقق من ان $J_\pm$ و $J_3$ تحقق علاقات العزم الحركي. احسب مربع العزم الحركي $J^2$ بدلالة مؤثر العدد الكلي $N = N_+ + N_-$. كيف تؤثر $J_\pm$، $J_3$ و $J^2$ على الاساس $|n_1, n_2>$. جد العلاقة بين الاعداد الكمية $n_+$ و $n_-$ من جهة و الاعداد الكمية $j$ و $m$ من جهة اخري. ماذا تلاحظ بالنسبة للمجموع $n_+ + n_-$. اكتب $|j, m>$ بدلالة مؤثرات الانشاء $a_+^+$ و $a_-^+$.

**تمرين** 7:

1) نقول عن العبارتين $D_1(x)$ و $D_2(x)$، اللتان تتعلقان بدالة ديراك دلتا، انهما متساويتان اذا تحقق الشرط

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) D_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) D_2(x).$$

بين ان

$$\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x).$$

2) الدالة الخطوة $\theta(x)$ تعرف ب

$$\theta(x) = 1 \ , \ x > 0$$
$$\theta(x) = 0 \ , \ x < 0.$$

بين ان

$$\frac{d\theta}{dx} = \delta(x).$$

**تمرين** 8: مبرهنة بلانشارل [١٢١] تعطي ب

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \leftrightarrow F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx.$$

بين ان

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk.$$

**تمرين** 9: نعتبر كمون دالة ديراك. في المنطقتين $I$ $(0 < x)$ و $II$ $(x > 0)$ تعطي الدوال الموجية ب

$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \ , \ x < 0$$
$$\psi_{II}(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx} \ , \ x > 0.$$

الشروط الحدية عند $x = 0$ تعطي ب

$$F + G = A + B$$
$$F - G = A(1 + 2i\beta) - B(1 - 2i\beta).$$

[١٢١] Plancherl.

اذن يمكن ان نجد ثابتين بدلالة الثابتين الاخرين. لدينا

$$\beta = \frac{m\alpha}{\hbar^2 k} \ , \ k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

1) احسب مصفوفة التصادم $S$ المعرفة ب

$$\begin{pmatrix} B \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ G \end{pmatrix}.$$

هذا يعطي السعات الصادرة $B$ و $F$، اي التي تتحرك بعيدا عن الكمون، بدلالة السعات الواردة $A$ و $G$، اي التي تتحرك نحو الكمون.

2) احسب مصفوفة التحويل $T$ المعرفة ي

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

هذا يعطي السعات علي يمين الكمون $F$ و $G$ بدلالة السعات علي يساره $A$ و $B$.

3) ناقش مصفوفة التصادم و مصفوفة التحويل من اجل كمون كيفي ينعدم لما $x \longrightarrow \pm\infty$.

4) من اجل التصادم من اليسار اكتب معاملات الانكسار و الانعكاس بدلالة $S_{ij}$ و $T_{ij}$.

5) بين انه من اجل كمون مشكل من قطعتين غير متصلتين فان مصفوفة التحويل تحقق

$$T = T_2 T_1.$$

$T_i$ هي مصفوفة التحويل من اجل القطعة $i$ علي حدة.

# حلول

**تمرين** 1:

1) **نعتبر طويلة الشعاع** $|\psi>=|f>+a|g>$ **مع** $a=-<g|f>/<g|g>$.

2) **باستعمال متراجحة شوارز لدينا** $|<f|g>|\leq\sqrt{<f|f><g|g>}$. **التكاملات** $<f|f>=\int dxf^*(x)f(x)$ **و** $<g|g>=\int dxg^*(x)g(x)$ **تقترب من اعداد منتهية لان كل من** $f(x)$ **و** $g(x)$ **يحقق شرط قابلية التكامل للمربع. اذن الجداء الداخلي** $<f|g>=\int dxf^*(x)g(x)$ **يقترب من عدد منته.**

3) **يجب ان نبين ان** $<h|h>=\int dxh^*(x)h(x)$ **يقترب من عدد منته. مرة اخري نستعمل متراجحة شوارز.**

**تمرين** 2:

1) **لدينا**

$$\sigma_A^2\sigma_B^2=<\psi_A|\psi_A><\psi_B|\psi_B>\geq|<\psi_A|\psi_B>|^2. \quad (١٢٣١)$$

**تتحقق المساواة اذا كان** $|\psi_B>=c|\psi_A>$. **بالاضافة لدينا**

$$\begin{aligned}|<\psi_A|\psi_B>|^2 &= \frac{1}{4}|<\psi|[\hat{A},\hat{B}]|\psi>|^2+\frac{1}{4}|<\psi|[\hat{A}-<\hat{A}>,\hat{B}-<\hat{B}>]|\psi>|^2\\ &\geq \frac{1}{4}|<\psi|[\hat{A},\hat{B}]|\psi>|^2.\end{aligned} \quad (١٢٣٢)$$

**تتحقق المتراجحة اذا كان** $<\psi|[\hat{A}-<\hat{A}>,\hat{B}-<\hat{B}>]|\psi>=0$. **هذا يؤدي الي الشرط** $(c+c^*)<\psi_A|\psi_B>=0$ **اي ان** $c$ **هو عدد تخيلي. نكتب** $c=ia$. **الشرط الضروري و الكافي هو اذن**

$$(\hat{B}-<\hat{B}>)|\psi>=ia(\hat{A}-<\hat{A}>)|\psi>. \quad (١٢٣٣)$$

2) **من اجل** $\hat{A}=\hat{x}$ **و** $\hat{B}=\hat{p}$ **نحصل في اساس الموضع علي المعادلة**

$$(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}-<\hat{p}>)\psi(x)=ia(x-<\hat{x}>)\psi(x). \quad (١٢٣٤)$$

**ننزع من** $\psi(x)$ **التصرف كموجة مستوية بكتابة**

$$\psi(x)=e^{\frac{i<\hat{p}>x}{\hbar}}\phi(x). \quad (١٢٣٥)$$

**نحصل علي معادلة تفاضلية ل** $\phi(x)$ **معطاة ب**

$$\frac{d\ln\phi}{dx}=-\frac{a}{\hbar}(x-<\hat{x}>) \quad (١٢٣٦)$$

**اذن** $\phi$ **تعطي ب**

$$\phi(x)=Ae^{-\frac{a}{2\hbar}(x-<\hat{x}>)^2}. \quad (١٢٣٧)$$

الحل العام الذي يتميز بارتياب اصغري يعطي ب

$$\psi(x) = Ae^{-\frac{a}{2\hbar}(x-<\hat{x}>)^2} e^{\frac{i<\hat{p}>x}{\hbar}}. \qquad (١٢٣٨)$$

التنظيم يعطي القيمة

$$A = (\frac{a}{\hbar\pi})^{\frac{1}{4}}. \qquad (١٢٣٩)$$

3) نحسب

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(k) &= \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{ikx}{\hbar}} \psi(x) \\ &= A\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{a}{2\hbar}[x-\frac{i}{a}(<\hat{p}>-k-ia<\hat{x}>)]^2} e^{-\frac{1}{2a\hbar}(<\hat{p}>-k-ia<\hat{x}>)^2-\frac{a}{2\hbar}<\hat{x}>^2} \\ &= (\frac{1}{\pi a\hbar})^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2a\hbar}(<\hat{p}>-k-ia<\hat{x}>)^2-\frac{a}{2\hbar}<\hat{x}>^2}. \qquad (١٢٤٠)\end{aligned}$$

4) نعتبر $0 =< \hat{x} >$ من اجل التبسيط. كثافة احتمال ايجاد الجسيم بكمية حركة $k$ بارتياب $< \hat{p} >$ هي غوسية [١٢٢] متمركزة في فضاء كمية الحركة حول $k$ تساوي $|\tilde{\psi}(k)|^2$. عرض هاته الغوسية هو $d_k^2 = a\hbar$ الذي هو متناسب عكسا مع العرض $d_x^2 = \hbar/a$ خاصة الغوسية $\psi(x)$.

في النهاية $a \longrightarrow 0$ لدينا $d_k \longrightarrow 0$ اي ان دالة الموجة $\tilde{\psi}(k)$ تصبح دالة دلتا مركزة علي $k$. في هذه الحالة $d_x \longrightarrow \infty$ و بالتالي فان دالة الموجة $\psi(x)$ هي موجة مستوية ذات كمية حركة $k$.

في النهاية $a \longrightarrow \infty$ لدينا $d_x \longrightarrow 0$ و بالتالي دالة موجة الجسيم $\psi(x)$ تصبح دالة دلتا مركزة حول $0$ اي ان الجسيم متموضع بشكل جيد حول النقطة $0$. من الجهة الاخري تصبح دالة الموجة في فضاء كمية الحركة $\tilde{\psi}(k)$ ثابت مستقل عن $k$.

### تمرين 3:

1) نحدد دالة الموجة $\psi(t,x)$ كالتالي

$$\psi(t,x) = \sqrt{\rho}e^{\frac{iS}{\hbar}}. \qquad (١٢٤١)$$

سعة الاحتمال المقابل هي $\rho = \rho(t,x)$ معرفة ب

$$\rho = \psi^*(t,x)\psi(t,x). \qquad (١٢٤٢)$$

بالتعويض في معادلة شرودينغر نحصل علي

$$\begin{aligned}\sqrt{\rho}\bigg[\frac{1}{2m}(\frac{\partial S}{\partial x})^2 + V + \frac{\partial S}{\partial t}\bigg] - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial x^2} &= i\hbar\bigg[\frac{\partial\sqrt{\rho}}{\partial t} + \frac{1}{m}\frac{\partial\sqrt{\rho}}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{2m}\sqrt{\rho}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\bigg] \\ &= \frac{i\hbar}{2\sqrt{\rho}}\bigg[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x}\bigg]. \qquad (١٢٤٣)\end{aligned}$$

[١٢٢] Gaussian.

تيار الاحتمال يعرف ب

$$j = \frac{1}{m}\rho\frac{\partial S}{\partial x}. \quad (١٢٤٤)$$

يمكن ان نتحقق من ان

$$j = \frac{\hbar}{2im}[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}]. \quad (١٢٤٥)$$

من الواضح ان الطرف الايمن للمعادلة $(1243)$ هو عدد تخيلي بينما الطرف الايسر هو عدد حقيقي. اذن يجب ان ينعدم كل من طرفي هذه المعادلة كل علي حدة. نتحصل بالتالي علي معادلة الاستمرارية

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0. \quad (١٢٤٦)$$

2) هذا يعبر عن انحفاظ الاحتمال. بالفعل نحسب

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= \int dx\frac{\partial\rho}{\partial t}\\ &= -\int dx\frac{\partial j}{\partial x}\\ &= j(t,-\infty) - j(t,+\infty).\end{aligned} \quad (١٢٤٧)$$

لان دالة الموجة $\psi(t,x)$ هي دالة تحقق شرط قابلية التكامل للمربع يجب ان يكون لدينا $\psi \longrightarrow 0$ و $\frac{\partial\psi}{\partial x} \longrightarrow 0$ لما $x \longrightarrow \pm\infty$. اذن $j(t,x) \longrightarrow 0$ لما $x \longrightarrow \pm\infty$ اي $\frac{dP}{dt} = 0$.

3) تيار الاحتمال $j$ هو، في معني معين، سرعة الجسيم. بالفعل نحسب من جهة

$$\int j(t,x)dx = \frac{<\hat{p}>}{m}. \quad (١٢٤٨)$$

نحسب من الجهة الاخري

$$\frac{<\hat{p}>}{m} = \frac{d<\hat{x}>}{dt}. \quad (١٢٤٩)$$

هذه المعادلة الاخيرة مثال علي مبرهنة ايرنفاست [١٢٣] التي تنص علي ان القيم المنتظرة للمؤثرات الكمومية تتبع القوانين الكلاسيكية.

4) في حالة الكمون المركب $V = V_0 - i\Gamma$ نحسب

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{dP}{dt} &= i\hbar\int\bigg(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}.\psi + \psi^*.\frac{\partial\psi}{\partial t}\bigg)dx\\ &= \int\bigg((-V^*\psi^*).\psi + \psi^*.(V\psi)\bigg)dx\\ &= -2i\Gamma P.\end{aligned} \quad (١٢٥٠)$$

[١٢٣] Ehrenfest's theorem.

اذن

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{2\Gamma}{\hbar}P\ ,\ P = P_0 e^{-\frac{2\Gamma}{\hbar}t}. \qquad (١٢٥١)$$

هذه المعادلة تصف التهافت التلقائي [١٢٤] لجسيم غير مستقر بعمر $\tau = \frac{\hbar}{2\Gamma}$.

5) من خلال وضع الطرف الايسر للمعادلة (1243) يساوي صفر نحصل علي معادلة هاميلتون ـ جاكوبي [١٢٥] الكمومية. هذه تعطي ب

$$\left[\frac{1}{2m}(\frac{\partial S}{\partial x})^2 + V + \frac{\partial S}{\partial t}\right] - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial x^2} = 0. \qquad (١٢٥٢)$$

في النهاية $\hbar \longrightarrow 0$ تصبح هذه المعادلة بالضبط معادلة هاميلتون ـ جاكوبي. من الميكانيك التحليلي نعرف ان $S$ هو الفعل خاصة الجملة و بالتالي $\frac{\partial S}{\partial x}$ هو بالفعل كمية الحركة.

**تمرين** 4:

1) في هذا الاساس

$$|+>= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ |->= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (١٢٥٣)$$

نجد

$$\hat{S}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ \hat{S}_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (١٢٥٤)$$

$$\hat{S}_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \hat{S}_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (١٢٥٥)$$

$$\hat{S}_1 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \hat{S}_2 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \qquad (١٢٥٦)$$

بالتالي

$$\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i. \qquad (١٢٥٧)$$

2) الحالة العامة لجسيم ذو سبين نصف هي من الشكل

$$|\chi>= a|+> +b|->= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \qquad (١٢٥٨)$$

شرط التنظيم يكافئي

$$1 = |a|^2 + |b|^2. \qquad (١٢٥٩)$$

اذن بقياس $\hat{S}_3$ سوف نحصل علي $+\frac{\hbar}{2}$ باحتمال $|a|^2$ و $-\frac{\hbar}{2}$ باحتمال $|b|^2$.

---

[١٢٤] spontaneous decay.

[١٢٥] Hamilton − Jacobi equation.

3) يجب ان نعين الاشعة الذاتية ل $\hat{S}_1$. نجد القيم الذاتية

$$+\frac{\hbar}{2}\ ,\ -\frac{\hbar}{2}. \quad (١٢٦٠)$$

الاشعة الذاتية المقابلة هي

$$|+>_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+>+|->)\ ,\ |->_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+>-|->). \quad (١٢٦١)$$

الحالة العامة $|\chi>$ لجسيم ذو سبين نصف تكتب في الاساس $\{|+>_1, |->_1\}$ علي الشكل

$$|\chi>=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)|+>_1+\frac{1}{\sqrt{2}}(a-b)|->_1\ . \quad (١٢٦٢)$$

اذن بقياس $\hat{S}_1$ سوف نحصل علي $+\frac{\hbar}{2}$ باحتمال $|a+b|^2/2$ و $-\frac{\hbar}{2}$ باحتمال $|a-b|^2/2$.

4) نطبق النتائج السابقة و مبدأ الارتياب.

**تمرين** 5: العزم الحركي المداري لذرة الهيدروجين هو صفر في الحالة الاساسية. العزم الحركي الكلي هو اذن مجموع عزوم السبينات. ليكن

$$\vec{\hat{S}}=\vec{\hat{S}_a}+\vec{\hat{S}_b}. \quad (١٢٦٣)$$

كل سبين لديه امكانيتان اما حالة السبين العلوي $|+>$ او حالة السبين السفلي. لدينا اذن اربع امكانيتان في المجموع هي

$$|+>|+>, |+>|->, |->|+>, |->|->\ . \quad (١٢٦٤)$$

نرمز لهاته الحالات ب

$$|m_1>|m_2>\ . \quad (١٢٦٥)$$

اعلاه $m_1, m_2=+1/2, -1/2$. نلاحظ ان هذه الحالات هي اشعة ذاتية ل $\hat{S}_3=(\hat{S}_a)_3+(\hat{S}_b)_3$، اي

$$\hat{S}_3|m_1>|m_2>=\hbar(m_1+m_2)|m_1>|m_2>\ . \quad (١٢٦٦)$$

بعبارة اخري

$$\begin{aligned}
&\hat{S}_3|+>|+>=\hbar|+>|+> \\
&\hat{S}_3|+>|->=0 \\
&\hat{S}_3|->|+>=0 \\
&\hat{S}_3|->|->=-\hbar|->|->\ .
\end{aligned} \quad (١٢٦٧)$$

لدينا حالتان تنعدم فيهما المركبة الثالثة لعزم السبين الكلي. من الواضح انه لا يمكن لهاته الحالتين ان يكون لديهما نفس قيمة عزم السبين الكلي. حتي نميز بينهما نطبق مؤثر الخفض $\hat{S}_-=(\hat{S}_a)_-+(\hat{S}_b)_-$. نجد

$$\hat{S}_-|+>|+>=\hbar(|->|+>+|+>|->). \quad (١٢٦٨)$$

$$\hat{S}_-(|->|+>+|+>|->)=2|->|->\,. \qquad (١٢٦٩)$$

$$\hat{S}_-|->|->=0. \qquad (١٢٧٠)$$

**هذا يعني ان الحالات** $|+>|+>$، $(|->|+>+|+>|->)/\sqrt{2}$ **و** $|->|->$ **هي في نفس الحالة المتعددة** (١٢٦) **بسبين يساوي** $s=1$. **بعبارة اخري**

$$|11>=|+>|+>$$
$$|10>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+>|->+|->|+>)$$
$$|1-1>=|->|->\,. \qquad (١٢٧١)$$

**هذه الحالة المتعددة تسمي بالحالة الثلاثية** (١٢٧) $s=1$. **الحالة الاخيرة** $(|->|+>-|+>|->)/\sqrt{2}$ **توافق سبين** 0، **اي**

$$|00>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+>|->-|->|+>). \qquad (١٢٧٢)$$

**هذه تسمي بالحالة العازبة** (١٢٨) $s=0$.
**اخيرا نحسب**

$$\hat{S}^2=\hat{S}_a^2+\hat{S}_b^2+2(\hat{S}_a)_3(\hat{S}_b)_3+(\hat{S}_a)_+(\hat{S}_b)_-+(\hat{S}_a)_-(\hat{S}_b)_+. \qquad (١٢٧٣)$$

**ايضا نحسب**

$$\hat{S}^2|+>|->=\hat{S}^2|->|+>=\hbar^2(|+>|->+|->|+>) \qquad (١٢٧٤)$$

**اذن**

$$\hat{S}^2|10>=2\hbar^2|10>\,,\ \hat{S}^2|00>=0. \qquad (١٢٧٥)$$

**هذا يؤكد ان** $|10>$ **لديه سبين** $s=1$ **و** $|00>$ **لديه سبين** $s=0$.

**تمرين** 6: **نجد**

$$[J_3,J_\pm]=\pm\hbar J_\pm\,,\ [J_+,J_-]=2\hbar J_3. \qquad (١٢٧٦)$$

$$J^2=\frac{\hbar^2}{2}N(\frac{N}{2}+1). \qquad (١٢٧٧)$$

**التالي نحسب**

$$J_+|n_+,n_->=\hbar\sqrt{n_-(n_++1)}|n_++1,n_--1>$$
$$J_-|n_+,n_->=\hbar\sqrt{n_+(n_-+1)}|n_+-1,n_-+1>$$
$$J_3|n_+,n_->=\hbar\frac{n_+-n_-}{2}|n_+,n_->\,. \qquad (١٢٧٨)$$

---

(١٢٦) multiplet.
(١٢٧) triplet.
(١٢٨) singlet.

لدينا العلاقات

$$j=\frac{n_+ + n_-}{2}\ ,\ m=\frac{n_+ - n_-}{2}. \qquad (١٢٧٩)$$

المجموع $n_+ + n_-$ دائما مثبت.
لدينا

$$\begin{aligned}|n_+,n_- >\equiv |j,m> &= \frac{(a_+^+)^{n_+}}{\sqrt{n_+!}}\frac{(a_-^+)^{n_-}}{\sqrt{n_-!}}|0>|0> \\ &= \frac{(a_+^+)^{j+m}}{\sqrt{(j+m)!}}\frac{(a_-^+)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!}}|0>|0>. \qquad (١٢٨٠)\end{aligned}$$

القيمة الذاتية $n_+$ يمكن فهمها علي انها عدد الجسيمات ذات السبين $1/2$ التي هي في حالة السبين العلوي بينما $n_-$ هي عدد الجسيمات ذات السبين $1/2$ التي هي في حالة السبين السفلي التي تشكل مع بعضها البعض الحالة ذات السبين $j$ المعطاة ب $|n_+,n_- >\equiv |j,m>$.

**تمرين** 7:

1) نحسب

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(cx)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\frac{y}{c})\delta(y)\frac{dy}{|c|} \\ &= \frac{f(0)}{|c|} \\ &= \frac{1}{|c|}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx. \qquad (١٢٨١)\end{aligned}$$

القيمة المطلقة تأتي من اشارة التكامل. نستنتج مباشرة ان $\delta(cx)=\frac{1}{|c|}\delta(x)$.

2) نحسب

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d\theta}{dx}dx &= [f(x)\theta(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} df(x)\theta(x) \\ &= [f(x)\theta(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} df(x) \\ &= f(0). \qquad (١٢٨٢)\end{aligned}$$

بالتالي $\frac{d\theta}{dx}=\delta(x)$.

**تمرين** 8: نختار $f(x)=\delta(x)$. نجد $F(k)=1/\sqrt{2\pi}$. بالتعويض نحصل علي النتيجة المرادة:

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk. \qquad (١٢٨٣)$$

**تمرين** 9:

1) **نجد**

$$S = \frac{1}{1-i\beta}\left(\begin{array}{cc} i\beta & 1 \\ 1 & i\beta \end{array}\right). \quad (١٢٨٤)$$

2) **نجد**

$$T = \left(\begin{array}{cc} 1+i\beta & 1+i\beta \\ -i\beta & -i\beta \end{array}\right). \quad (١٢٨٥)$$

3) **مازال لدينا الدوال الموجية**

$$\begin{array}{l} \psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \ , \ x \longrightarrow -\infty \\ \psi_{II}(x) = Fe^{ix} + Ge^{-ikx} \ , \ x \longrightarrow +\infty. \end{array} \quad (١٢٨٦)$$

**في المنطقة** $III$ **اين لا ينعدم الكمون تأخذ الدالة الموجية الشكل العام**

$$\psi_{III} = Cf(x) + Dg(x). \quad (١٢٨٧)$$

**الدالتان** $f$ **و** $g$ **هما حلان خاصان مستقلان خطيا لمعادلة شرودينغر. لدينا ثابتا تكامل** $C$ **و** $D$ **لان معادلة شرودينغر هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية.**

**لدينا اربعة شروط حدية. شرطان يربطان المنطقتين** $I$ **و** $III$ **و شرطان يربطان المنطقتين** $II$ **و** $III$**. يمكن استعمال شرطان حديان للتخلص من** $C$ **و** $D$**. يتبقي لدينا الثوابت الاربعة** $A$**،** $B$**،** $F$ **و** $G$**. الشرطان الحديان المتبقيان يمكن استعمالهما لتعيين ثابتين بدلالة الثابتين الاخرين. يمكننا اذن تعريف المصفوفة** $S$ **و المصفوفة** $T$ **بنفس الطريقة كما فعلنا في السابق.**

4) **اولا نحسب**

$$S_{11} = -\frac{T_{21}}{T_{22}} \ , \ S_{12} = \frac{1}{T_{22}} \ , \ S_{21} = T_{11} - \frac{T_{12}T_{21}}{T_{22}} \ , \ S_{22} = \frac{T_{12}}{T_{22}}. \quad (١٢٨٨)$$

**نجد من اجل** $G = 0$ **المعاملات**

$$R_l = \frac{|B|^2}{|A|^2} = |S_{11}|^2 = |\frac{T_{21}}{T_{22}}|^2. \quad (١٢٨٩)$$

$$T_l = \frac{|F|^2}{|A|^2} = |S_{21}|^2 = |T_{11} - \frac{T_{21}T_{12}}{T_{22}}|^2. \quad (١٢٩٠)$$

5) **البرهان بائن تقريبا.**

# نظرية الاضطرابات

## نظرية الاضطرابات غير المتعلقة بالزمن

### الاضطرابات غير المنحلة

نفترض انه يمكننا ان نحل بالضبط من اجل القيم الذاتية $E_n^0$ و الدوال الذاتية $\psi_n^0$ لكمون $V^0$. نسمي الهاميلتونية في هذه الحالة $H^0$. لدينا اذن

$$H^0|\psi_n^0>=E_n^0|\psi_n^0>. \quad (١٢٩١)$$

$$<\psi_n^0|\psi_m^0>=\delta_{nm}. \quad (١٢٩٢)$$

هذه هي المسألة غير المضطربة.
الان لتكن $H$ هاميلتونية اخري يمكن كتابتها علي الشكل

$$H=H^0+\lambda H^1. \quad (١٢٩٣)$$

الهاميلتونية $\lambda H^1$ تسمي الاضطراب حيث $\lambda$ هو وسيط تحكم يأخذ قيم صغيرة. المسألة المضطربة تعرف ب

$$H|\psi_n>=E_n|\psi_n>. \quad (١٢٩٤)$$

هدف نظرية الاضطرابات هو ايجاد الحلول التقريبية لمعادلة القيم الذاتية بدلالة الحلول المضبوطة. بعبارة اخري نود الحصول علي عبارات تقريبية للقيم الذاتية $E_n$ و الدوال الذاتية $\psi_n$ بدلالة القيم الذاتية غير المضطربة $E_n^0$ و الدوال الذاتية غير المضطربة $\psi_n^0$. نكتب $E_n$ و $\psi_n$ بدلالة $E_n^0$ و $\psi_n^0$ علي الشكل

$$|\psi_n>=|\psi_n^0>+\lambda|\psi_n^1>+\lambda^2|\psi_n^2>+... \quad (١٢٩٥)$$

$$E_n=E_n^0+\lambda E_n^1+\lambda^2E_n^2+... \quad (١٢٩٦)$$

ال $E_n^1$ و $|\psi_n^1>$ هي التصحيحات من الرتبة الاولي للقيمة الذاتية $E_n$ و الدالة الذاتية $|\psi_n>$ علي التوالي بينما $E_n^2$ و $|\psi_n^2>$ هي التصحيحات من الرتبة الثانية. بالتعويض ب $(1295)$ و $(1296)$ في $(1294)$ نجد

$$\begin{aligned}\lambda(H^0|\psi_n^1>+H^1|\psi_n^0>)+\lambda^2(H^0|\psi_n^2>+H^1|\psi_n^1>)+O(\lambda^3) &= \\ \lambda(E_n^0|\psi_n^1>+E_n^1|\psi_n^0>)+\lambda^2(E_n^0|\psi_n^2>+E_n^1|\psi_n^1>+E_n^2|\psi_n^0>)+O(\lambda^3). & \quad (١٢٩٧)\end{aligned}$$

نظرية الاضطرابات من الرتبة الاولي تعطي ب

$$H^0|\psi_n^1> + H^1|\psi_n^0> \;=\; E_n^0|\psi_n^1> + E_n^1|\psi_n^0>. \qquad (١٢٩٨)$$

اذن

$$<\psi_n^0|H^0|\psi_n^1> + <\psi_n^0|H^1|\psi_n^0> \;=\; E_n^0<\psi_n^0|\psi_n^1> + E_n^1<\psi_n^0|\psi_n^0>. \qquad (١٢٩٩)$$

$$E_n^1 = <\psi_n^0|H^1|\psi_n^0>. \qquad (١٣٠٠)$$

نعيد كتابة (1298) علي الشكل

$$(H^0 - E_n^0)|\psi_n^1> \;=\; -(H^1 - E_n^1)|\psi_n^0>. \qquad (١٣٠١)$$

هذه معادلة تفاضلية غير متجانسة من اجل $\psi_n^1$. ننشر $\psi_n^1$ كما يلي

$$|\psi_n^1> = \sum_{m\neq n} c_m^{(n)}|\psi_m^0>. \qquad (١٣٠٢)$$

الحد الذي يتعلق ب $|\psi_n^0>$ غائب لان $(H^0 - E_n^0)|\psi_n^0> = 0$. بالتعويض نحصل علي

$$\sum_{m\neq n} c_m^{(n)}(E_m^0 - E_n^0)|\psi_m^0> \;=\; -(H^1 - E_n^1)|\psi_n^0>. \qquad (١٣٠٣)$$

بعبارة اخري

$$c_m^{(n)}(E_m^0 - E_n^0) \;=\; -<\psi_m^0|H^1|\psi_n^0>. \qquad (١٣٠٤)$$

بالمقابل

$$c_m^{(n)} \;=\; -\frac{<\psi_m^0|H^1|\psi_n^0>}{E_m^0 - E_n^0}. \qquad (١٣٠٥)$$

بالتالي

$$|\psi_n^1> \;=\; -\sum_{m\neq n}\frac{<\psi_m^0|H^1|\psi_n^0>}{E_m^0 - E_n^0}|\psi_m^0>. \qquad (١٣٠٦)$$

نظرية الاضطرابات من الرتبة الثانية تعرف اذن بالمعادلة

$$H^0|\psi_n^2> + H^1|\psi_n^1> \;=\; E_n^0|\psi_n^2> + E_n^1|\psi_n^1> + E_n^2|\psi_n^0>. \qquad (١٣٠٧)$$

$$<\psi_n^0|H^0|\psi_n^2> + <\psi_n^0|H^1|\psi_n^1> \;=\; E_n^0<\psi_n^0|\psi_n^2> + E_n^1<\psi_n^0|\psi_n^1> + E_n^2. \qquad (١٣٠٨)$$

نحصل باستعمال النتيجة $<\psi_n^0|\psi_n^1> = 0$ علي

$$\begin{aligned} E_n^2 &= <\psi_n^0|H^1|\psi_n^1> \\ &= \sum_{m\neq n}\frac{|<\psi_m^0|H^1|\psi_n^0>|^2}{E_n^0 - E_m^0}. \end{aligned} \qquad (١٣٠٩)$$

نعيد كتابة (1307) علي الشكل

$$(H^0-E_n^0)|\psi_n^2> \;=\; -(H^1-E_n^1)|\psi_n^1>+E_n^2|\psi_n^0>. \qquad (١٣١٠)$$

هذه معادلة تفاضلية غير متجانسة من اجل $\psi_n^2$. ننشر $\psi_n^2$ علي الشكل

$$|\psi_n^2>=\sum_{m\neq n}d_m^{(n)}|\psi_m^0>. \qquad (١٣١١)$$

نحسب

$$\sum_{m\neq n}d_m^{(n)}(E_m^0-E_n^0)|\psi_m^0> \;=\; -(H^1-E_n^1)|\psi_n^1>+E_n^2|\psi_n^0>. \qquad (١٣١٢)$$

اذن

$$d_k^{(n)}(E_k^0-E_n^0) \;=\; -<\psi_k^0|(H^1-E_n^1)|\psi_n^1>. \qquad (١٣١٣)$$

بعبارة اخري

$$\begin{aligned} d_k^{(n)} &= -\frac{<\psi_k^0|(H^1-E_n^1)|\psi_n^1>}{E_k^0-E_n^0}\\ &= \sum_{m\neq n}\frac{<\psi_k^0|H^1|\psi_m^0><\psi_m^0|H^1|\psi_n^0>}{(E_n^0-E_k^0)(E_n^0-E_m^0)}-\frac{<\psi_k^0|H^1|\psi_n^0><\psi_n^0|H^1|\psi_n^0>}{(E_n^0-E_k^0)^2}. \end{aligned} \qquad (١٣١٤)$$

## حالة الاضطرابات المنحلة

لنفترض الان انه لدينا حالتان غير مضطربتان $|\psi_a^0>$ و $|\psi_b^0>$ التي لها نفس القيمة غير المضطربة للطاقة $E^0$. اذن لدينا

$$H^0|\psi_a^0>=E^0|\psi_a^0>\,,\;H^0|\psi_b^0>=E^0|\psi_b^0>\,,\;<\psi_a|\psi_b>=0. \qquad (١٣١٥)$$

اي تركيب خطي ل $|\psi_a^0>$ و $|\psi_b^0>$ هو ايضا حالة ذاتية ل $H^0$ بنفس قيمة الطاقة $E^0$. في العموم يرفع الاضطراب $\lambda H^1$ هذا الانحلال بين الحالتين. بعبارة اخري اذا زدنا في قيمة الوسيط $\lambda$ فان المستوي الطاقوي $E^0$ سوف ينقسم الي مستوي علوي و مستوي سفلي. بالمقابل اذا خفضنا في قيمة الوسيط $\lambda$ فان المستوي العلوي يختزل الي تركيب خطي للحالتين $|\psi_a^0>$ و $|\psi_b^0>$ بينما يختزل المستوي السفلي الي تركيب خطي اخر متعامد مع التركيب الخطي الاول. هذه هي التركيبات الخطية التي يجب استعمالها في المعادلة (1300) لحساب التصحيح من الرتبة الاولي للطاقة. المشكل هو ان هذه التركيبات الخطية غير معلومة لنا. اذن نكتب هذه التركيبات الخطية علي الشكل العام

$$|\psi^0>=\alpha|\psi_a^0>+\beta|\psi_b^0>. \qquad (١٣١٦)$$

ننطلق من معادلة شرودينغر

$$H|\psi>=E|\psi>. \qquad (١٣١٧)$$

ننشر

$$E=E^0+\lambda E^1+\lambda^2E^2+... \qquad (١٣١٨)$$

$$|\psi>=|\psi^0>+\lambda|\psi^1>+\lambda^2|\psi^2>+.... \quad (١٣١٩)$$

نظرية الاضطرابات من الرتبة الاولي هي مرة اخري معرفة بالمعادلة

$$H^0|\psi^1>+H^1|\psi^0> \quad = \quad E^0|\psi^1>+E^1|\psi^0>. \quad (١٣٢٠)$$

اذن بضرب كلا طرفي هذه المعادلة ب $<\psi_a^0|$ نحصل علي

$$\begin{aligned}&<\psi_a^0|H^1|\psi^0>=E^1<\psi_a^0|\psi^0>\\ &\alpha<\psi_a^0|H^1|\psi_a^0>+\beta<\psi_a^0|H^1|\psi_b^0>=E^1\alpha.\end{aligned} \quad (١٣٢١)$$

نعرف

$$W_{ij}=<\psi_i^0|H^1|\psi_j^0>\ ,\ i,j=a,b. \quad (١٣٢٢)$$

لدينا

$$\alpha W_{aa}+\beta W_{ab}=\alpha E^1. \quad (١٣٢٣)$$

بالمثل بالضرب ب $<\psi_b^0|$ نحصل علي

$$\alpha W_{ba}+\beta W_{bb}=\beta E^1. \quad (١٣٢٤)$$

بضرب هذه المعادلة ب $W_{ab}$ نحصل علي

$$\alpha|W_{ab}|^2+\beta W_{ab}W_{bb}=\beta W_{ab}E^1. \quad (١٣٢٥)$$

بالتعويض ب $\beta W_{ab}=\alpha E^1-\alpha W_{aa}$ نحصل من اجل $\alpha\neq 0$ علي المعادلة التربيعية

$$(E^1)^2-(W_{aa}+W_{bb})E^1+W_{aa}W_{bb}-|W_{ab}|^2=0. \quad (١٣٢٦)$$

الحلان هما

$$E^1_{\pm}=\frac{1}{2}\bigg[W_{aa}+W_{bb}\pm\sqrt{(W_{aa}-W_{bb})^2+4|W_{ab}|^2}\bigg]. \quad (١٣٢٧)$$

التركيبات الخطية المرفقة بهذين الحلين يمكن ايجادهما بالعودة الي المعادلتين (1323) و (1324) و ايجاد المعاملات $\alpha$ و $\beta$.

ليكن $A$ مؤثر هرميتي يتبادل مع $H^0$ و $H^1$. نفترض ان $|\psi_a^0>$ و $|\psi_b^0>$ هي ايضا اشعة ذاتية ل $A$ بقيم ذاتية مختلفة اي

$$A|\psi_a^0>=\mu|\psi_a^0>\ ,\ A|\psi_b^0>=\nu|\psi_b^0>\ ,\ \mu\neq\nu. \quad (١٣٢٨)$$

لان $[A,H^1]=0$ نحسب

$$\begin{aligned}0 &= <\psi_a^0|[A,H^1]|\psi_b^0>\\ &= <\psi_a^0|AH^1|\psi_b^0>-<\psi_a^0|H^1A|\psi_b^0>\\ &= (\mu-\nu)W_{ab}.\end{aligned} \quad (١٣٢٩)$$

لان $\nu\neq\mu$ نستنتج ان $W_{ab}=0$. بعبارة اخري

$$E^1_+=W_{aa}\ ,\ E^1_-=W_{bb}. \quad (١٣٣٠)$$

هذه هي النتيجة التي كنا سوف نحصل عليها لو استعملنا نظرية الاضطرابات غير المنحلة من الرتبة الاولي. الاشارة زائد تقابل $\alpha=1$ و $\beta=0$ اي $|\psi^0>=|\psi^0_a>$ بينما تقابل الاشارة ناقص $\alpha=0$ و $\beta=1$ اي $|\psi^0>=|\psi^0_b>$.

الخلاصة انه اذا وجدنا مؤثر هرميتي $A$ يتبادل مع $H$ فانه يمكننا ان نستخدم الاشعة الذاتية المشتركة كاشعة غير مضطربة و نطبق مباشرة نظرية الاضطرابات غير المنحلة من الرتبة الاولي.

في الاخير من اجل مستوي طاقوي $E^0$ منحل $n$ مرة فان التصحيحات من الرتبة الاولي $E^1$ تعطي بالقيم الذاتية للمصفوفة $W_{ij}=<\psi^0_i|H^1|\psi^0_j>$. الاشعة الذاتية المرفقة بهذه القيم الذاتية هي بالضبط التركيبات الخطية التي يمكن ان نستعملها كاشعة حالة غير مضطربة.

# ذرة الهيدروجين

## المسألة المركزية الكمومية

معادلة شرودينغر في ثلاث ابعاد في اساس الموضع تكتب علي الشكل

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi &= H\psi \\ &= \bigg(\frac{\vec{\hat{p}}^2}{2m}+V(\vec{\hat{r}})\bigg)\Psi \\ &= \bigg(-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2+V(\vec{r})\bigg)\Psi. \end{aligned} \quad (١٣٣١)$$

الكمون المركزي يعرف ب

$$V(\vec{r})=V(r). \quad (١٣٣٢)$$

في هذه الحالة من الافضل ان نعمل في الاحداثيات الكروية. اللابلاسية [١٢٩] $\vec{\nabla}^2$ في الاحداثيات الكروية تعطي ب

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})-\frac{\hat{L}^2}{\hbar^2r^2}. \end{aligned} \quad (١٣٣٣)$$

معادلة شرودينغر تصبح

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \bigg(-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})+\frac{\hat{L}^2}{2mr^2}+V(r)\bigg)\Psi. \quad (١٣٣٤)$$

نحل هذه المعادلة عن طريق فصل المنغيرات اي

$$\Psi=\Psi(t,\vec{r})=\psi_{nlm}(\vec{r})e^{-\frac{iE_nt}{\hbar}}. \quad (١٣٣٥)$$

[١٢٩] Laplacian.

الدالة الموجية $\psi_{nlm}(\vec{r})$ تحل المعادلة التفاضلية

$$E_n\psi_{nlm} = \bigg(-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})+\frac{\hat{L}^2}{2mr^2}+V(r)\bigg)\psi_{nlm}. \quad (١٣٣٦)$$

فصل المتغيرات الثاني يجري كالاتي

$$\psi_{nlm}=\psi_{nlm}(\vec{r})=R_{nl}(r)F_l^m(\theta,\phi). \quad (١٣٣٧)$$

نحصل علي

$$\frac{1}{R_{nl}}\frac{d}{dr}\bigg(r^2\frac{dR_{nl}}{dr}\bigg)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}(V(r)-E_n)=\frac{1}{\hbar^2}\frac{1}{F_l^m}\hat{L}^2F_l^m. \quad (١٣٣٨)$$

الطرف الايمن لهذه المعادلة يتعلق ب $r$ فقط بينما يتعلق الطرف الايسر ب $\theta$ و $\phi$ فقط. اذن كلا الطرفين يجب ان يكون مساو لثابت نرمز له ب $l(l+1)$. الدالة $F_l^m$ يجب ان تحقق المعادلة

$$\hat{L}^2F_l^m=\hbar^2l(l+1)F_l^m. \quad (١٣٣٩)$$

نستنتج مباشرة ان $F_l^m$ هي بالضبط التوفيقة الكروية $Y_l^m$ اي

$$F_l^m=Y_l^m(\theta,\phi). \quad (١٣٤٠)$$

المعادلة التفاضلية المتبقية تعطي ب

$$\frac{1}{R_{nl}}\frac{d}{dr}\bigg(r^2\frac{dR_{nl}}{dr}\bigg)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}(V(r)-E_n)=l(l+1). \quad (١٣٤١)$$

عن طريق تعريف $u_{nl}(r)=rR_{nl}(r)$ يمكن ان نبين ان المعادلة اعلاه هي مكافئة ل

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u_{nl}}{dr^2}+\bigg[V(r)+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\bigg]u_{nl}=E_nu_{nl}. \quad (١٣٤٢)$$

هذه معادلة شرودينغر في بعد واحد بكمون فعلي معطي ب

$$V_{\rm eff}(r)=V(r)+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}. \quad (١٣٤٣)$$

الحد الثاني يسمي حد الطرد المركزي وتأثيره العام هو دفع الجسيم بعيدا عن المركز. شرط التنظيم هو

$$\int_0^\infty r^2dr|R_{nl}(r)|^2=\int_0^\infty dr|u_{nl}(r)|^2=1. \quad (١٣٤٤)$$

## كمون كولومب

نعتبر الان الكمون الخاص بذرة الهيدروجين المعطي بكمون كولومب

$$V(r)=-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}. \quad (١٣٤٥)$$

معادلة شرودينغر تصبح

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u_{nl}}{dr^2}+\Big[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\Big]u_{nl}=E_nu_{nl}. \quad (١٣٤٦)$$

نحن نبحث عن حالات مرتبطة و بالتالي $E<0$. نعرف

$$\kappa_n=\frac{\sqrt{-2mE_n}}{\hbar}. \quad (١٣٤٧)$$

ايضا نستعمل

$$\rho=\kappa_nr\ ,\ \rho_{0n}=\frac{me^2}{2\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa_n}. \quad (١٣٤٨)$$

معادلة شرودينغر يمكن اذن وضعها علي الشكل التالي

$$\frac{d^2u_{nl}}{d\rho^2}=\Big[1-\frac{\rho_{0n}}{\rho}+\frac{l(l+1)}{\rho^2}\Big]u_{nl}. \quad (١٣٤٩)$$

نستعمل طريقة فروبينيوس [١٣٠] من اجل حل هذه المعادلة التفاضلية. في النهاية $\rho\longrightarrow\infty$ المعادلة التفاضلية اعلاه تختزل ل

$$\frac{d^2u_{nl}}{d\rho^2}=u_{nl}. \quad (١٣٥٠)$$

الحل هو

$$u_{nl}(r)=Ae^{-\rho}+Be^{\rho}. \quad (١٣٥١)$$

لما $\rho\longrightarrow\infty$ الحد الثاني ينفجر و بالتالي يجب ان نختار $B=0$. نحصل علي

$$u_{nl}(r)=Ae^{-\rho}\ ,\ \rho\longrightarrow\infty. \quad (١٣٥٢)$$

من الجهة الاخري في النهاية $\rho\longrightarrow 0$ المعادلة التفاضلية اعلاه تصبح

$$\frac{d^2u_{nl}}{d\rho^2}=\frac{l(l+1)}{\rho^2}u_{nl}. \quad (١٣٥٣)$$

الحل هو

$$u_{nl}(r)=C\rho^{l+1}+D\rho^{-l}. \quad (١٣٥٤)$$

من جديد لما $\rho\longrightarrow 0$ الحد الثاني ينفجر و بالتالي يجب ان نختار $D=0$. نحصل علي

$$u_{nl}(r)=C\rho^{l+1}\ ,\ \rho\longrightarrow 0. \quad (١٣٥٥)$$

نزيل التصرف المقارب [١٣١] عند $\rho\longrightarrow\infty$ و عند $\rho\longrightarrow 0$ باعتبار الاقتراح التالي

$$u_{nl}(r)=\rho^{l+1}e^{-\rho}v_{nl}(\rho). \quad (١٣٥٦)$$

[١٣٠] Frobenius.
[١٣١] asymptotic behavior.

نجد ان الدالة $v_{nl}(\rho)$ يجب ان تحقق المعادلة التفاضلية

$$\rho\frac{d^2v_{nl}(\rho)}{d\rho^2}+2(l+1-\rho)\frac{dv_{nl}}{d\rho}+\bigg(\rho_{0n}-2(l+1)\bigg)v_{nl}=0. \quad (١٣٥٧)$$

نعتبر الان السلسلة

$$v_{nl}(\rho)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j\rho^j. \quad (١٣٥٨)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نصل الي النتيجة

$$\sum_{j=0}\bigg[(j+1)(j+2l+2)c_{j+1}+(\rho_{0n}-2(j+l+1))c_j\bigg]\rho^j=0. \quad (١٣٥٩)$$

بعبارة اخري

$$c_{j+1}=\frac{2(j+l+1)-\rho_{0n}}{(j+1)(j+2l+2)}c_j. \quad (١٣٦٠)$$

من اجل القيم الكبيرة ل $j$ لدينا

$$c_{j+1}\simeq\frac{2}{j+1}c_j. \quad (١٣٦١)$$

بافتراض ان هذه النتيجة مضبوطة نحصل علي

$$c_j=\frac{2^j}{j!}c_0. \quad (١٣٦٢)$$

اذن

$$v_{nl}(\rho)=c_0e^{2\rho}\Leftrightarrow v_n(\rho)=c_0\rho^{l+1}e^{\rho}. \quad (١٣٦٣)$$

من الواضح ان هذا لديه التصرف المقارب الخاطئ من اجل $\rho\longrightarrow\infty$. هذا يعني ان السلسلة يجب ان تنقطع و بالتالي توجد قيمة اعظمية $j_{\rm max}$ ل $j$ بحيث

$$c_{j_{\rm max}+1}=0. \quad (١٣٦٤)$$

بعبارة اخري $j_{\rm max}$ يجب ان يحقق

$$2(j_{\rm max}+l+1)-\rho_{0n}=0. \quad (١٣٦٥)$$

عوض العمل ب $j_{\rm max}$ نعمل ب $n$ المعرف ب

$$n=j_{\rm max}+l+1. \quad (١٣٦٦)$$

اذن

$$\rho_{0n}=2n. \quad (١٣٦٧)$$

من هذا القيد نشتق ان الطاقة يجب ان تكون مكممة كالتالي

$$E_n=-\frac{m}{2\hbar^2}\bigg(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\bigg)^2\frac{1}{n^2}. \quad (١٣٦٨)$$

الدالة الموجية الفضائية المكتملة هي

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\phi). \qquad (١٣٦٩)$$

$$R_{nl}(r) = \frac{u_{nl}(r)}{r} = \frac{\rho^{l+1}}{r}e^{-\rho}v_{nl}(\rho). \qquad (١٣٧٠)$$

الحالة الاساسية توافق $n=1$ بطاقة $E_1 = -13.6\ eV$. من الواضح انه في هذه الحالة $j_{\max}=0$ و بالتالي $l=0$، $v_{nl}(\rho)=c_0$ و $R_{10}=c_0\kappa_1 e^{-\kappa_1 r}$. الثابت $\kappa_1$ هو مقلوب ما يسمي بنصف قطر بور اي $\kappa_1=\sqrt{-2mE_1}/\hbar = 1/a$. شرط التنظيم يسمح لنا بتثبيت $c_0$.

الحالة المثارة الاولي توافق $n=2$ بطاقة $E_2=E_1/4$ و $\kappa_2=\kappa_1/2=\frac{1}{2a}$. في هذه الحالة $j_{\max}=1-l$ و بالتالي لدينا الامكانيات $l=1$ و $l=0$. من اجل $l=1$ لدينا $j_{\max}=0$، $v_{nl}(\rho)=c_0$ و بالتالي $R_{21}=\frac{c_0}{4a^2}re^{-r/2a}$ بينما من اجل $l=0$ لدينا $j_{\max}=1$، $v_{nl}(\rho)=c_0+c_1\rho=c_0(1-\rho)$ و بالتالي $R_{20}=\frac{c_0}{2a}(1-\frac{r}{2a})e^{-r/2a}$. من جديد الثابت $c_0$ يعين من شرط التنظيم.

في الحالة العامة الدالة $v_{nl}(\rho)$ هي كثير حدود من الدرجة $j_{\max}=n-l-1$ في $\rho$. من الواضح انه من اجل كل قيمة معينة ل $n$ العدد الكمومي $l$ يمكن ان يأخذ فقط القيم $0$، $1$،...،$n-1$. من اجل كل قيمة ل $l$ العدد الكمومي $m$ يمكن ان يأخذ ال $2l+1$ قيمة $-l$،$-l+1$،....،$l-1$،$l$. اذن من اجل كل قيمة ل $n$ لدينا $\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1)=n^2$ حالة. بعبارة اخري درجة انحلال المستوي الطاقوي $E_n$ هو $n^2$.
لنلاحظ ايضا ان كثير الحدود $v_{nl}(\rho)$ هو كثير حدود لاغار المرافق $L_{n-l-1}^{2l+1}(2\rho)$ [١٣٢]. يعرف كثير حدود لاغار المرافق $L_{q-p}^p(x)$ بدلالة كثيرات حدود لاغار $L_q(x)$ [١٣٣] كالتالي

$$L_{q-p}^p(x) = (-1)^p\left(\frac{d}{dx}\right)^p L_q(x)\ ,\ L_q(x) = e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^q(e^{-x}x^q). \qquad (١٣٧١)$$

# البنية الدقيقة لذرة الهيدوجين

## التصحيح النسبي

الهاميلتونية الكلاسيكية لذرة الهيدروجين هي

$$H^0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}. \qquad (١٣٧٢)$$

طاقات بور تعطي ب

$$E_n^0 = -\frac{\alpha^2}{2n^2}mc^2. \qquad (١٣٧٣)$$

الاشعة الذاتية المرافقة هي $|\psi_{nlm}^0>$. الثابت $\alpha$ يعرف باسم ثابت البنية الدقيقة و يعطي ب

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.036}. \qquad (١٣٧٤)$$

---

[١٣٢] associated Laguerre polynomial.
[١٣٣] Laguerre polynomials.

هذا هو ثابت الاقتران للتفاعلات الكهرومغناطيسية. هذه هي المسألة غير مضطربة في هذه الحالة.

التصحيح الاول ل $E_n$ ياتي من الاخذ بعين الاعتبار لحركة النواة و هذا عن طريق تعويض $m$ بالكتلة المختزلة $mm_p/(m+m_p)$. البنية الدقيقة لذرة الهيدروجين تتكون من التصحيح النسبي و التصحيح الناجم عن الاقتران بين عزم السبين و العزم المداري. هذه التصحيحات تكون من الرتبة $\alpha^4 mc^2$. التصحيح التالي هو سحب لامب [١٣٤] و هو من الرتبة $\alpha^5 mc^2$ و ينجم عن تكميم الحقل المغناطيسي. بعد ذلك يأتي تصحيح البنية فائقة الدقة الذي هو من الرتبة $(m/m_p)\alpha^4 mc^2$ و الذي ينجر عن التفاعل المغناطيسي بين العزوم المغناطيسية [١٣٥] للالكترون و البروتون. فيمايلي سنحسب فقط البنية الدقيقة لذرة الهيدروجين.

الطاقة و كمية الحركة النسبيان يعطيان ب

$$E=\gamma mv. \quad (١٣٧٥)$$

$$p=\gamma mv. \quad (١٣٧٦)$$

المعامل $\gamma$ يسمي معامل لورنز [١٣٦] و يعطي ب

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \quad (١٣٧٧)$$

نحسب

$$E^2=p^2c^2+m^2c^4. \quad (١٣٧٨)$$

طاقة السكون [١٣٧] تعطي ب

$$E_0=mc^2. \quad (١٣٧٩)$$

اذن الطاقة الحركية تعطي ب

$$\begin{aligned}T=E-E_0 &= \sqrt{p^2c^2+m^2c^4}-mc^2\\ &= mc^2\left[\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}}-1\right]\\ &= mc^2\left[\frac{1}{2}\frac{p^2}{m^2c^2}-\frac{1}{8}\frac{p^4}{m^4c^4}+..\right]\\ &= \frac{p^2}{2m}-\frac{p^4}{8m^3c^2}+...\end{aligned} \quad (١٣٨٠)$$

الاضطراب يعطي بالتالي بالمؤثر

$$\lambda H_r^1=-\frac{\hat{p}^4}{8m^3c^2}. \quad (١٣٨١)$$

---

[١٣٤] Lamb shift.

[١٣٥] dipole moments.

[١٣٦] Lorentz.

[١٣٧] rest energy.

من الواضح ان الاضطراب المكتوب في المعادلة اعلاه متناظر كرويا و بالتالي فانه يتبادل مع مربع العزم الحركي $\hat{L}^2$ و مع المركبة الثالثة للعزم الحركي $\hat{L}_3$. ترفق الاشعة الذاتية المشتركة $|\psi^0_{nlm}>$، ل $H^0$ (الهاميلتونية غير المضطربة) و $\hat{L}^2$ و $\hat{L}_3$، بقيم ذاتية مختلفة ل $\hat{L}^2$ و $\hat{L}_3$ تعطي ب $\hbar^2 l(l+1)$ و $\hbar m$ من اجل الحالات ال $n^2$ التي لها نفس الطاقة $E_n$. اذن $n$، $l$ و $m$ هي اعداد كمومية جيدة و بالتالي يمكن استخدام نظرية الاضطراب غير المنحلة من الرتبة الاولي. التصحيح يعطي ب

$$\begin{aligned}\lambda E^1_r &= \lambda < \psi^0_{nlm}|H^1_r|\psi^0_{nlm}> \\ &= -\frac{1}{8m^3c^2} < \psi^0_{nlm}|\hat{p}^4|\psi^0_{nlm}> \\ &= -\frac{1}{8m^3c^2}(\hat{p}^2|\psi^0_{nlm}>)^+(\hat{p}^2|\psi^0_{nlm}>).\end{aligned} \quad (١٣٨٢)$$

في المعادلة اعلاه استعملنا الخاصية الهرميتية للمؤثر $\hat{p}^2$. معادلة شرودينغر بالنسبة للحالات غير المضطربة تعطي ب

$$\hat{p}^2|\psi^0_{nlm}>= 2m(E^0_n - V)|\psi^0_{nlm}> . \quad (١٣٨٣)$$

اذن

$$\begin{aligned}\lambda E^1_r &= -\frac{1}{2mc^2} < \psi^0_{nlm}|(E^0_n - V)^2|\psi^0_{nlm}> \\ &= -\frac{1}{2mc^2}\bigg[(E^0_n)^2 + 2\hbar c\alpha E^0_n < \frac{1}{r} > + \hbar^2c^2\alpha^2 < \frac{1}{r^2} > \bigg].\end{aligned} \quad (١٣٨٤)$$

نستعمل النتائج

$$< \frac{1}{r} >= \frac{\alpha}{n^2}\frac{mc}{\hbar}. \quad (١٣٨٥)$$

$$< \frac{1}{r^2} >= \frac{\alpha^2m^2c^2}{\hbar^2}\frac{1}{n^3(l+\frac{1}{2})}. \quad (١٣٨٦)$$

بالتعويض بهذه العبارات نحصل علي

$$\lambda E^1_r = -\frac{(E^0_n)^2}{2mc^2}\bigg[\frac{4n}{l+\frac{1}{2}} - 3\bigg]. \quad (١٣٨٧)$$

## الاقتران بين السبين و العزم الحركي المداري

في معلم السكون خاصة الالكترون يدور البروتون حول الالكترون ويتولد عن ذلك حقل مغناطيسي $\vec{B}$. التيار المتولد عن البروتون هو $I = e/T$ حيث $T$ هو دور المدار. قانون بيو- ساقار [١٣٨] ينص علي ان الحقل المغناطيسي المتولد عن هذا التيار متناسب طردا مع $I$ و متناسب عكسا مع نصف قطر المدار. لدينا بالضبط

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0 e}{2rT} = \frac{e}{2\epsilon_0 rc^2T}. \quad (١٣٨٨)$$

[١٣٨] Biot – Savart law.

هذا الحقل المغناطيسي عمودي علي مستوي المدار. اذا كان $\vec{r}$ هو الشعاع من الالكترون الي البروتون و $\vec{v}$ هي سرعة البروتون فان $\vec{B}$ هو في اتجاه $\vec{r}x\vec{v}$. بعبارة اخري $\vec{B}$ هو في اتجاه العزم الحركي المداري $\vec{L}=m\vec{r}x\vec{v}$ اي

$$\vec{B}=\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^3 mc^2}\vec{L}. \quad (١٣٨٩)$$

من الجهة الاخري الالكترون له سبين $\vec{S}$ و بالتالي له عزم مغناطيسي $\vec{\mu}$. في الحقيقة العزم المغناطيسي متناسب طردا مع السبين و معامل التناسب يسمي النسبة المغناطيسية [١٣٩].

كمثال نحسب النسبة المغناطيسية من اجل شحنة خطية $q$ موزعة بانتظام حول دائرة ذات نصف قطر $r$. الدائرة تدور حول محورها بدور $T$. العزم المغناطيسي هوالتيار $q/T$ ضرب المساحة $\pi r^2$ اي

$$\mu=\frac{q\pi r^2}{T}. \quad (١٣٩٠)$$

كتلة الشحنة $q$ تساوي $m$ و هي ايضا موزعة بانتظام. العزم المداري (السبين) يساوي عزم العطالة $mr^2$ ضرب التواتر الزاوي $2\pi/T$ اي

$$S=\frac{2\pi mr^2}{T}. \quad (١٣٩١)$$

النسبة المغناطيسية تعطي اذن ب

$$\frac{\mu}{S}=\frac{q}{2m}. \quad (١٣٩٢)$$

العزم المغناطيسي و السبين هما في نفس الجهة. اذن

$$\vec{\mu}=\frac{q}{2m}\vec{S}. \quad (١٣٩٣)$$

في حالة الالكترون فان العزم المغناطيسي يعطي بضعف هذه القيمة اي

$$\vec{\mu}_e=-\frac{e}{m}\vec{S}. \quad (١٣٩٤)$$

الحقل المغناطيسي المتولد عن حركة البروتون يؤثر علي العزم المغناطيسي للالكترون بحيث يحاول ان يجعل اتجاه $\vec{\mu}_e$ محاذي لاتجاه $\vec{B}$. الهاميلتونية المرافقة تعطي ب

$$\begin{aligned}\lambda H^1_{so} &= -\vec{\mu}_e.\vec{B}\\ &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{m^2c^2r^3}\vec{S}.\vec{L}. \quad (١٣٩٥)\end{aligned}$$

معلم السكون خاصة الالكترون ليس بمعلم عطالي لانه متسارع. التصحيح الكينيماتي [١٤٠] الراجع لهذا التأثير يتلخص في ضرب $\lambda H^1_{so}$ بمعامل يساوي $1/2$. هذا يسمي بمداورة توماس [١٤١]. نحصل علي

$$\lambda H^1_{so} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{m^2c^2r^3}\vec{S}.\vec{L}. \quad (١٣٩٦)$$

[١٣٩] gyromagnetic ratio.
[١٤٠] kinematic.
[١٤١] Thomas precession.

نلاحظ ان تصحيح النسبة المغناطيسية للالكترون و مداورة توماس يلغيان بعضهما البعض تماما.

الهاميلتونية $\lambda H^1_{so}$ تصف التفاعل بين عزم السبين و العزم الحركي المداري لذرة الهيدوجين. في الميكانيك الكمومي يتم تعويض $\vec{S}$ و $\vec{L}$ بالمؤثرات $\hat{\vec{S}}$ و $\hat{\vec{L}}$. مؤثر الهاميلتونية في هذه الحالة لا يتبادل مع $\hat{\vec{L}}$ و $\hat{\vec{S}}$. مع ذلك $\lambda H^1_{so}$ يتبادل مع $\hat{L}^2$، $\hat{S}^2$، $\hat{J}^2$ و $\hat{J}_3$ حيث $\hat{\vec{J}}$ هو العزم الحركي الكلي الذي يعطي ب

$$\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}. \quad (١٣٩٧)$$

لان $s=\frac{1}{2}$ فان القيم الذاتية الممكنة ل $\hat{J}^2$ هي $\hbar^2 j(j+1)$ حيث

$$j = l + \frac{1}{2}\ ,\ j = l - \frac{1}{2}. \quad (١٣٩٨)$$

الاشعة الذاتية المقابلة هي

$$\begin{aligned} |jj_3> &= \sum_{m,\sigma} C^{lms\sigma}_{jj_3}|lm>|s\sigma> \\ &= C^{lj_3-\frac{1}{2}s\frac{1}{2}}_{jj_3}|lj_3-\frac{1}{2}>|s\frac{1}{2}> + C^{lj_3+\frac{1}{2}s\frac{1}{2}}_{jj_3}|lj_3+\frac{1}{2}>|s-\frac{1}{2}> \end{aligned} \quad (١٣٩٩)$$

المعاملات $C^{lms\sigma}_{jj_3}$ هي معاملات كلابش - غوردون [١٤٢] التي تحقق، ضمن امور اخري، العلاقة $C^{lms\sigma}_{jj_3}=0$ باستثناء لما $j_3 = m+\sigma$.

الاشعة الذاتية غير المضطربة يمكن اخذها الاشعة الذاتية المشتركة ل $H^0$، $\hat{L}^2$، $\hat{S}^2$، $\hat{J}^2$ و $\hat{J}_3$. هذه تعطي ب

$$|\psi_{njj3}>=|R_{nl}>|jj_3>. \quad (١٤٠٠)$$

هذا يجب ان يقارن ب $|\psi_{nlm}>|s\sigma>=|R_{nl}>|lm>|s\sigma>$ التي هي عبارة عن الاشعة الذاتية المشتركة ل $H^0$، $\hat{L}^2$، $\hat{L}_3$، $\hat{S}^2$، $\hat{S}_3$. الطاقات غير المضطربة المقابلة ل $|\psi_{njj3}>$ او $|\psi_{nlm}>|s\sigma>$ ما زالت تعطي بطاقات بور.

نحسب

$$\hat{S}.\hat{L} = \frac{1}{2}(\hat{J}^2 - \hat{S}^2 - \hat{L}^2). \quad (١٤٠١)$$

القيم الذاتية ل $\vec{S}.\vec{L}$ المقابلة ل $|\psi_{njj3}>$ تعطي ب

$$\frac{\hbar^2}{2}(j(j+1)-s(s+1)-l(l+1)) = \frac{\hbar^2}{2}(j(j+1)-\frac{3}{4}-l(l+1)). \quad (١٤٠٢)$$

التصحيح من الرتبة الاولي يعطي ب

$$\begin{aligned} \lambda E^1_{so} &= <\psi_{njj_3}|\lambda H^1_{so}|\psi_{njj_3}> \\ &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{m^2c^2}\frac{\hbar^2}{2}(j(j+1)-\frac{3}{4}-l(l+1))<\psi_{njj_3}|\frac{1}{r^3}|\psi_{njj_3}> \\ &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{m^2c^2}\frac{\hbar^2}{2}(j(j+1)-\frac{3}{4}-l(l+1))<R_{nl}|\frac{1}{r^3}|R_{nl}> \\ &= \frac{\alpha\hbar^3}{4m^2c}(j(j+1)-\frac{3}{4}-l(l+1))<\frac{1}{r^3}>. \end{aligned} \quad (١٤٠٣)$$

[١٤٢] Clebsch – Gordon coefficients.

نستعمل النتيجة

$$< \frac{1}{r^3} >= \frac{\alpha^3 m^3 c^3}{\hbar^3 n^3 l(l+1)(l+\frac{1}{2})}. \quad (١٤٠٤)$$

اذن

$$\lambda E^1_{so} = \frac{(E^0_n)^2}{mc^2}\frac{n}{l(l+1)(l+\frac{1}{2})}\bigg(j(j+1)-\frac{3}{4}-l(l+1)\bigg). \quad (١٤٠٥)$$

نحسب بصراحة

$$\lambda E^1_{so} = \frac{(E^0_n)^2}{2mc^2}\frac{2n}{l+\frac{1}{2}}\frac{1}{l+1}\ ,\ j=l+\frac{1}{2}. \quad (١٤٠٦)$$

$$\lambda E^1_{so} = -\frac{(E^0_n)^2}{2mc^2}\frac{2n}{l+\frac{1}{2}}\frac{1}{l}\ ,\ j=l-\frac{1}{2}. \quad (١٤٠٧)$$

في الخلاصة تصحيح البنية الدقيقة يعطي ب

$$\lambda E^1_r + \lambda E^1_{so} = \frac{(E^0_n)^2}{2mc^2}(3-\frac{4n}{l+1})\ ,\ j=l+\frac{1}{2}. \quad (١٤٠٨)$$

$$\lambda E^1_r + \lambda E^1_{so} = \frac{(E^0_n)^2}{2mc^2}(3-\frac{4n}{l})\ ,\ j=l-\frac{1}{2}. \quad (١٤٠٩)$$

يمكن كتابة هاتين العبارتين علي الشكل

$$\lambda E^1_r + \lambda E^1_{so} = \frac{(E^0_n)^2}{2mc^2}(3-\frac{4n}{j+\frac{1}{2}}). \quad (١٤١٠)$$

المستويات الطاقوية لذرة الهيدروجين تصبح

$$\begin{aligned} E_n &= E^0_n + \lambda E^1_r + \lambda E^1_{so} \\ &= E^0_n\bigg[1+\frac{\alpha^2}{n^2}(\frac{n}{j+\frac{1}{2}}-\frac{3}{4})\bigg]. \end{aligned} \quad (١٤١١)$$

الانحلال في $l$ انكسر لكن الانحلال في $j$ مازال موجودا.

# نظرية الاضطرابات المتعلقة بالزمن

## تمثيل ديراك

نعتبر هاميلتونية متعلقة بالزمن $H$ يمكن كتابتها علي الشكل

$$H = H_0 + V(t). \quad (١٤١٢)$$

الهاميلتونية غير المتعلقة بالزمن $H_0$ تقابل مسألة تقبل الحل المضبوط اي

$$H_0|n>=E_n|n>\,. \tag{١٤١٣}$$

الكمون المتعلق بالزمن $V(t)$ نفترض انه صغير بالمقارنة مع $H_0$. اما شعاع الحالة الابتدائي في اللحظة $t=0$ فاننا نفترض انه من الشكل

$$|\psi(0)>=\sum_n c_n(0)|n>\,. \tag{١٤١٤}$$

من اجل $t>0$ شعاع الحالة يأخذ الشكل العام

$$|\psi(t)>=\sum_n c_n(t)e^{-\frac{iE_nt}{\hbar}}|n>\,. \tag{١٤١٥}$$

الطور $e^{-iE_nt/\hbar}$ هو الجزء المعتاد المتعلق بالزمن لدالة الموجة الذي نحصل عليه حتي لو كان الكمون $V$ غير متعلق بالزمن. المجهول هو سعات الاحتمال $c_n(t)$ التي تتعلق بالزمن فقط لان الكمون $V$ غير متعلق بالزمن. هذه مسألة غير مستقرة لان الاضطراب $V(t)$ يمكن ان يؤدي الي الانتقال بين الحالات الكمومية $|n>$. كمثال علي ذلك، اذا انطلقنا في اللحظة $t=0$ من الحالة $|\psi(0)>=|i>$، اي من حالة ذاتية للهاميلتونية $H_0$، فانه في اي لحظة زمنية لاحقة $t>0$ يمكن ان نجد الجملة في حالة اخري $|j>$، $j\neq i$. من اجل $V=0$ لدينا $c_j(t)=c_i(0)\delta_{ij}$ و بالتالي الجملة تبقي دائما في الحالة $|i>$ بينما من اجل $V\neq 0$ نجد ان $c_j(t)\neq 0$ في العموم و بالتالي يوجد احتمال انتقال من الحالة $|i>$ الي الحالة $|j>$.

من المفيد جدا ان نتخلص من الطور $e^{-iE_nt/\hbar}$ الذي هو دائما موجود باية حال سواء كان الاضطراب متعلق بالزمن او لا. من اجل هذه الغاية ندخل تمثيل او تصور ديراك. نذكر اولا ان شعاع الحالة $|\psi(t)>$ هو شعاع الحالة في تمثيل او تصور شرودينغر. شعاع الحالة في تمثيل او تصور هايزنبرغ يعطي ب

$$|\psi>=e^{\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi(t)>\,. \tag{١٤١٦}$$

كل مؤثر $O$ في تمثيل او تصور شرودينغر يعطي في تمثيل او تصور هايزنبرغ بالمؤثر

$$O(t)=e^{\frac{i}{\hbar}Ht}Oe^{-\frac{i}{\hbar}Ht}. \tag{١٤١٧}$$

ما يسمي بتمثيل او تصور ديراك يعرف بشعاع الحالة و المؤثر اللذان يعطيان ب

$$|\psi(t)>_I=e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}|\psi(t)>\,. \tag{١٤١٨}$$

$$O_I(t)=e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}Oe^{-\frac{i}{\hbar}H_0t}. \tag{١٤١٩}$$

نحسب مباشرة

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)>_I &= -H_0|\psi(t)>+e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}(H_0+V)|\psi(t)> \\ &= V_I(t)|\psi(t)>_I\,. \end{aligned} \tag{١٤٢٠}$$

النشر $(1415)$ يصبح

$$|\psi(t)>_I=\sum_n c_n(t)|n>\,. \tag{١٤٢١}$$

اذن نحصل مباشرة علي

$$i\hbar\frac{dc_m(t)}{dt} = \sum_n c_n(t)e^{i\Omega_{mn}t}V_{mn}. \quad (١٤٢٢)$$

$$\Omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}\ ,\ V_{mn} =< m|V|n > . \quad (١٤٢٣)$$

## مسائل الجمل ذات الحالتان

في هذه الحالة لدينا

$$i\hbar\frac{dc_1(t)}{dt} = \sum_n c_n(t)e^{i\Omega_{1n}t}V_{1n} = c_1(t)V_{11} + c_2(t)e^{-i\Omega_0 t}V_{12}. \quad (١٤٢٤)$$

$$i\hbar\frac{dc_2(t)}{dt} = \sum_n c_n(t)e^{i\Omega_{2n}t}V_{2n} = c_1(t)e^{i\Omega_0 t}V_{21} + c_2(t)V_{22}. \quad (١٤٢٥)$$

$$\Omega_0 = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}\ ,\ E_2 > E_1. \quad (١٤٢٦)$$

نفترض ان

$$V_{11} = V_{22} = 0. \quad (١٤٢٧)$$

في هذه الحالة نحصل علي

$$\frac{dc_1(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}c_2(t)e^{-i\Omega_0 t}V_{12}. \quad (١٤٢٨)$$

$$\frac{dc_2(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}c_1(t)e^{i\Omega_0 t}V_{21}. \quad (١٤٢٩)$$

نعتبر اضطراب جيبي من الشكل

$$V_{12} = V_{21}^* = \gamma e^{i\Omega t}. \quad (١٤٣٠)$$

المعادلات التفاضلية المقترنة المكتوبة اعلاه تصبح

$$\frac{dc_1(t)}{dt} = -\frac{i\gamma}{\hbar}c_2(t)e^{-i(\Omega_0-\Omega)t}. \quad (١٤٣١)$$

$$\frac{dc_2(t)}{dt} = -\frac{i\gamma}{\hbar}c_1(t)e^{i(\Omega_0-\Omega)t}. \quad (١٤٣٢)$$

انطلاقا من هاتين المعادلتين نحصل علي المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية

$$\frac{d^2c_1(t)}{dt} + i(\Omega - \Omega_0)\frac{dc_1}{dt} + \frac{\gamma^2}{\hbar^2}c_1(t) = 0. \quad (١٤٣٣)$$

نأخذ الاقتراح

$$c_1 = e^{i\frac{\Omega-\Omega_0}{2}t}\hat{c}_1. \quad (١٤٣٤)$$

نجد

$$\frac{d^2\hat{c}_1(t)}{dt} + \left[\frac{(\Omega-\Omega_0)^2}{4} + \frac{\gamma^2}{\hbar^2}\right]\hat{c}_1(t) = 0. \quad (١٤٣٥)$$

بعبارة اخري

$$c_1 = e^{i\frac{\Omega-\Omega_0}{2}t}\left[A\cos\Omega_r t + B\sin\Omega_r t\right]. \quad (١٤٣٦)$$

التواتر $\Omega_r$ يسمي بتواتر رابي [١٤٣] ويعطي ب

$$\Omega_r^2 = \frac{(\Omega-\Omega_0)^2}{4} + \frac{\gamma^2}{\hbar^2}. \quad (١٤٣٧)$$

المعادلة التفاضلية $(1431)$ يمكن كتابتها علي الشكل

$$-\frac{i\gamma}{\hbar}c_2 = i\frac{\Omega-\Omega_0}{2}e^{-i\frac{\Omega-\Omega_0}{2}t}\left[A\cos\Omega_r t + B\sin\Omega_r t\right] + \Omega_r e^{-i\frac{\Omega-\Omega_0}{2}t}\left[-A\sin\Omega_r t + B\cos\Omega_r t\right] \quad (١٤٣٨)$$

نستعمل الشروط الابتدائية

$$c_1(0) = 1\ ,\ c_2(0) = 0. \quad (١٤٣٩)$$

نجد

$$A = 1\ ,\ B = -i\frac{\Omega-\Omega_0}{2\Omega_r}. \quad (١٤٤٠)$$

بالتالي

$$c_1 = e^{i\frac{\Omega-\Omega_0}{2}t}\left[\cos\Omega_r t - i\frac{\Omega-\Omega_0}{2\Omega_r}\sin\Omega_r t\right]. \quad (١٤٤١)$$

$$c_2 = -\frac{i}{\Omega_r}\frac{\gamma}{\hbar}e^{-i\frac{\Omega-\Omega_0}{2}t}\sin\Omega_r t. \quad (١٤٤٢)$$

الحالة الابتدائية للجملة هي $|1>$. احتمال ايجاد الجملة في اللحظة $t$ في الحالة $|2>$ يعطي ب

$$|c_2|^2 = \frac{1}{\Omega_r^2}\frac{\gamma^2}{\hbar^2}\sin^2\Omega_r t = \frac{1}{\Omega_r^2}\frac{\gamma^2}{\hbar^2}\frac{1}{2}(1-\cos 2\Omega_r t). \quad (١٤٤٣)$$

هذه العلاقة تسمي علاقة رابي. احتمال ايجاد الجملة في الحالة $|2>$ يهتز في الزمن بتواتر $2\Omega_r$. سعة الاهتزاز تبلغ فيمتها الاعظمية عند $\Omega=\Omega_0$. هذا سلوك او تصرف رنيني.

---

[١٤٣] Rabi.

الرنين يعرف ب

$$\Omega = \Omega_0 \ , \ \Omega_r = \frac{\gamma}{\hbar}. \qquad (١٤٤٤)$$

احتمال الانتقال عند الرنين يصبح

$$|c_2|^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\Omega_r t). \qquad (١٤٤٥)$$

من اللحظة $t = 0$ الي اللحظة $t = \pi\hbar/2\gamma$ يزداد احتمال ايجاد الجملة في الحالة $|2>$ حتي يصبح يساوي $1$. نذكر ان الطاقة $E_2$ اكبر من الطاقة $E_1$. اذن خلال هذا الزمن الجملة تمتص الطاقة من الاضطراب حتي تصبح الحالة $|2>$ مسكونة كليا في اللحظة $t = \pi\hbar/2\gamma$ بينما تفرغ الحالة $|1>$ كليا. من اللحظة $t = \pi\hbar/2\gamma$ الي اللحظة $t = \pi\hbar/\gamma$ الاحتمال $|c_2|^2$ يتناقص و بالتالي تفقد الجملة الطاقة للاضطراب حتي تصبح الحالة $|1>$ في اللحظة $t = \pi\hbar/\gamma$ مسكونة كليا بينما تفرغ الحالة $|2>$ كليا. هذه الدورة بين الامتصاص و الارسال تستمر بدون توقف.

بعيدا عن الرنين القيمة الاعظمية لاحتمال الانتقال $|c_2|^2$ تعطي ب

$$|c_2|^2 = \frac{1}{\Omega_r^2}\frac{\gamma^2}{\hbar^2}\sin^2\Omega_r t \leq |c_2|^2_{\rm max} = \frac{\frac{\gamma^2}{\hbar^2}}{\frac{(\Omega-\Omega_0)^2}{4} + \frac{\gamma^2}{\hbar^2}}. \qquad (١٤٤٦)$$

هذا منحني رنين بقمة عند $\Omega = \Omega_0$. التواترت التي توافق الاحتمال $|c_2|^2_{\rm max} = 1/2$ هي $\Omega = \Omega_0 \pm 2\gamma/\hbar$. اذن عرض منحني الرنين المأخوذ عند نصف القيمة الاعظمية هو $4\gamma/\hbar$. من الواضح ان العرض يصبح اصغر، اي نحصل علي قمم رنين اضيق، من اجل الكمونات الضعيفة.

من بين تطبيقات الجمل ذات الحالتان نذكر الرنين المغناطيسي النووي [١٤٤] و المايزر [١٤٥].

## نشر دايزون

في تمثيل ديراك الذي يسمي ايضا بتمثيل التفاعل تأخذ معادلة شرودينغر الشكل

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)>_I \quad = \quad V_I(t)|\psi(t)>_I \ . \qquad (١٤٤٧)$$

مؤثر التطور في الزمن في تمثيل التفاعل يعرف ب

$$|\psi(t)>_I = U_I(t,t_0)|\psi(t_0)>_I \ . \qquad (١٤٤٨)$$

من الجهة الاخري

$$\begin{aligned} |\psi(t)>_I &= e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t}|\psi(t)> \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t}U(t,t_0)e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t_0}|\psi(t_0)>_I \ . \end{aligned} \qquad (١٤٤٩)$$

اذن

$$U_I(t,t_0) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t}U(t,t_0)e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t_0}. \qquad (١٤٥٠)$$

[١٤٤] nuclear magnetic resonance.

[١٤٥] MASERS : microwave amplification by stimulated emission of radiation.

هذا المؤثر يخضع للمعادلة التفاضلية

$$i\hbar\frac{d}{dt}U_I(t,t_0) = V_I(t)U_I(t,t_0). \quad (١٤٥١)$$

الشرط الابتدائي يعطي ب

$$U_I(t_0,t_0)=\mathbf{1}. \quad (١٤٥٢)$$

الحل يعطي بالمعادلة التكاملية

$$U_I(t,t_0)=\mathbf{1}-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt_1V_I(t_1)U_I(t_1,t_0). \quad (١٤٥٣)$$

يمكن تكرير هذه المعادلة كما يلي

$$\begin{aligned} U_I(t,t_0) &= \mathbf{1}-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt_1V_I(t_1)\Big[\mathbf{1}-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_1}V_I(t_2)U_I(t_2,t_0)dt_2\Big]\\ &= \mathbf{1}+\Big(\frac{-i}{\hbar}\Big)\int_{t_0}^{t}dt_1V_I(t_1)+\Big(\frac{-i}{\hbar}\Big)^2\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2V_I(t_1)V_I(t_2)U(t_2,t_0). \end{aligned} \quad (١٤٥٤)$$

بالتكرير الي رتبة كيفية نحصل علي

$$\begin{aligned} U_I(t,t_0)=\mathbf{1} &+ \Big(\frac{-i}{\hbar}\Big)\int_{t_0}^{t}dt_1V_I(t_1)+\Big(\frac{-i}{\hbar}\Big)^2\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2V_I(t_1)V_I(t_2)+...\\ &+ \Big(\frac{-i}{\hbar}\Big)^n\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2...\int_{t_0}^{t_{n-1}}dt_nV_I(t_1)V_I(t_2)...V_I(t_n). \end{aligned} \quad (١٤٥٥)$$

هذا الحل يعرف بنشر دايزون [١٤٦].
نذكر ان

$$|\psi(t)>_I=\sum_n c_n(t)|n>. \quad (١٤٥٦)$$

نحسب مباشرة

$$c_n(t)=<n|U_I(t,t_0)|\psi(t_0)>_I. \quad (١٤٥٧)$$

نحتار الحالة الابتدائية بحيث

$$|\psi(t_0)>_I=|i>\Leftrightarrow|\psi(t_0)>=e^{-\frac{i}{\hbar}E_it_0}|i>. \quad (١٤٥٨)$$

سعة احتمال الانتقال تصبح

$$c_n(t)=<n|U_I(t,t_0)|i>=e^{\frac{i}{\hbar}(E_nt-E_it_0)}<n|U(t,t_0)|i>. \quad (١٤٥٩)$$

احتمال الانتقال يعطي اذن ب

$$P_{i\longrightarrow n}(t)=|c_n(t)|^2=|<n|U_I(t,t_0)|i>|^2=|<n|U(t,t_0)|i>|^2. \quad (١٤٦٠)$$

[١٤٦] Dyson.

هذا يعطي ب

$$P_{i\longrightarrow n}(t)=|c_n^{(0)}(t)+c_n^{(1)}(t)+c_n^{(2)}(t)+...|^2. \quad (١٤٦١)$$

$$c_n^{(0)}(t)=\delta_{ni}. \quad (١٤٦٢)$$

$$\begin{aligned} c_n^{(1)}(t) &= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)\int_{t_0}^t dt_1 < n|V_I(t_1)|i > \\ &= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)\int_{t_0}^t dt_1 e^{i\Omega_{ni}t_1}V_{ni}(t_1). \end{aligned} \quad (١٤٦٣)$$

$$\begin{aligned} c_n^{(2)}(t) &= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2\int_{t_0}^t dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2 < n|V_I(t_1)V_I(t_2)|i > \\ &= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2\int_{t_0}^t dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2\sum_m e^{i\Omega_{nm}t_1}e^{i\Omega_{mi}t_2}V_{nm}(t_1)V_{mi}(t_2). \end{aligned} \quad (١٤٦٤)$$

$$\Omega_{ij}=\frac{E_i-E_j}{\hbar}\ ,\ V_{ij}(t)=< i|V(t)|j > . \quad (١٤٦٥)$$

## قاعدة فيرمي الذهبية

نعتبر اضطراب ثابت في الزمن معطي ب

$$\begin{aligned} V(t) &= 0\ ,\ t<0 \\ &= V\ ,\ t\geq 0. \end{aligned} \quad (١٤٦٦)$$

المؤثر $V$ يتعلق بالزمن فقط ضمنيا. نحسب (مع $t_0=0$ )

$$\begin{aligned} c_n^{(1)}(t) &= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)\int_0^t dt_1 e^{i\Omega_{ni}t}V_{ni}(t) \\ &= V_{ni}\frac{1-e^{i\Omega_{ni}t}}{E_n-E_i}. \end{aligned} \quad (١٤٦٧)$$

اذن

$$|c_n^{(1)}(t)|^2 = \frac{2|V_{ni}|^2}{(E_n-E_i)^2}(1-\cos\Omega_{ni}t). \quad (١٤٦٨)$$

اذن من اجل $n\neq i$ احتمال الانتقال من الرتبة الاولي في اللحظة $t$ يعطي ب

$$P_{i\longrightarrow n}(t)=\frac{4|V_{ni}|^2}{(E_n-E_i)^2}\sin^2\frac{(E_n-E_i)t}{2\hbar}. \quad (١٤٦٩)$$

هذا يتعلق ب 1) المركبة المصفوفية $V_{ni}$ بين الحالة الابتدائية $|i>$ و الحالة النهائية $|n>$ و علي 2) الفرق في الطاقة $E_n-E_i=\hbar\Omega_{ni}$ بين الحالتين. الزمن $t$ هو المجال الزمني الذي يكون خلاله الاضطراب مشتغل. من اجل قيمة معينة ل $t$

ندرس الاحتمال $P_{i\longrightarrow n}(t)$ كدالة في $\Omega_{ni}$ اي $P_{i\longrightarrow n}(t)=P(\Omega_{ni})$. القيمة الاعظمية لهذا الاحتمال تقع عند $\Omega_{ni}=0$ اين يصبح الاحتمال متناسب مع $t^2$ و ينعدم عند $\Omega_{ni}=2n\pi/t$، $n=1,2...$. هناك قمم اخري اصغر تظهر عند $\Omega_{ni}=(2n+1)\pi/t$، $n=1,2...$. اذن عرض الاحتمال $P(\Omega_{ni})$ هو $1/t$. بعبارة اخري $|c_n^{(1)}|^2$ من اجل القيم الكبيرة للزمن هو غير مهمل فقط من اجل الحالات $|n>$ التي لها طاقة حول $E_n$ اي

$$|E_n-E_i|t\sim 2\pi\hbar. \qquad (١٤٧٠)$$

علاقة الارتياب هذه تعني بالخصوص انه في النهاية $t\longrightarrow 0$ نحصل علي قمة عريضة جدا و بالتالي الانتقالات التي لا تحفظ الطاقة تصبح اكثر احتمالا بينما في النهاية $t\longrightarrow\infty$ نحصل علي قمة ضيقة جدا و بالتالي الانتقالات التي تحقق $E_n\simeq E_i$ هي الاكثر احتمالا في هذه الحالة.

المساحة تحت المنحني $P(\Omega_{ni})$ هي اذن متناسبة مع $t^2x1/t=t$ و التي تساوي الاحتمال الكلي للانتقال من الحالة الابتدائية $|i>$ الي الحالات النهائية $|n>$ التي لها طاقة متمركزة حول $E_n$. يمكن جعل هذه الفكرة اكثر دقة كالاتي. الاحتمال الكلي هو مجموع احتمالات الانتقال الي الحالات النهائية التي لها طاقة $E_n\simeq E_i$. هذا يعطي ب

$$\sum_{n:E_n\simeq E_i}|c_n^{(1)}|^2. \qquad (١٤٧١)$$

نفترض ان الحالات النهائية مستمرة. ندخل كثافة الحالات النهائية $\rho(E)$. بعبارة اخري $\rho(E)dE$ هو عدد الحالات التي لها طاقة بين $E$ و $E+dE$. يمكن اذن تعويض الاحتمال الكلي اعلاه بالتكامل

$$\int dE_n\rho(E_n)|c_n^{(1)}|^2=\int dE_n\rho(E_n)\frac{4|V_{ni}|^2}{(E_n-E_i)^2}\sin^2\frac{(E_n-E_i)t}{2\hbar}. \qquad (١٤٧٢)$$

من اجل الازمان الكبيرة يمكن ان نستعمل العلاقة

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\frac{\sin^2 tx}{tx^2}=\pi\delta(x). \qquad (١٤٧٣)$$

نحصل علي

$$\begin{aligned}\sum_{n:E_n\simeq E_i}|c_n^{(1)}|^2=\int dE_n\rho(E_n)|c_n^{(1)}|^2 &= \int dE_n\rho(E_n)\frac{2\pi t}{\hbar}|V_{ni}|^2\delta(E_n-E_i)\\ &= \Big[\rho(E_n)\frac{2\pi t}{\hbar}\overline{|V_{ni}|}^2\Big]_{E_n=E_i}. \qquad (١٤٧٤)\end{aligned}$$

الخط علي $|V_{ni}|^2$ يدل علي انه يجب ان نأخذ الحالات $|n>$ التي لها تقريبا نفس الطاقة $E_n$ و لكن لها ايضا تقريبا نفس عناصر المصفوفة $V_{ni}$ لانه يمكن للحالات التي لها نفس الطاقة ان تكون لها عناصر مصفوفية $V_{ni}$ مختلفة . خذ مثلا $|n>=|\vec{p}>$ في حالة الفعل الكهروضوئي.

معدل الانتقال هو بالضبط احتمال الانتقال في وحدة الزمن. هذا يعرف ب

$$w_{i\longrightarrow[n]}=\frac{d}{dt}\sum_{n:E_n\simeq E_i}|c_n^{(1)}|^2 = \frac{2\pi}{\hbar}\Big[\overline{|V_{ni}|}^2\rho(E_n)\Big]_{E_n=E_i}. \qquad (١٤٧٥)$$

هذه هي قاعدة فيرمي الذهبية [١٤٧]. هذه العلاقة يمكن ايضا كتابتها علي الشكل

$$w_{i\longrightarrow n} = \frac{2\pi}{\hbar}|V_{ni}|^2\rho(E_n)\delta(E_n-E_i)dE_n. \quad (١٤٧٦)$$

التصحيح من الرتبة الثانية لسعة الاحتمال هو

$$\begin{aligned} c_n^{(2)}(t) &= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\sum_m e^{i\Omega_{nm}t_1}e^{i\Omega_{mi}t_2}V_{nm}V_{mi} \\ &= \frac{i}{\hbar}\sum_m\frac{V_{nm}V_{mi}}{E_m-E_i}\int_0^t dt_1(e^{i\Omega_{ni}t_1}-e^{i\Omega_{nm}t_1}) \\ &= \sum_m\frac{V_{nm}V_{mi}}{E_i-E_m}\left[\frac{1-e^{i\Omega_{ni}t}}{E_n-E_i}-\frac{1-e^{i\Omega_{nm}t}}{E_n-E_m}\right]. \end{aligned} \quad (١٤٧٧)$$

تصرف الحد الاول في هذه العبارة من اجل الازمان الكبيرة $t$ يشبه تصرف $c_n^{(1)}$ مع التعويض $V_{ni}\longrightarrow\sum_m V_{nm}V_{mi}/(E_i-E_m)$. اذن فقط الحالات التي لها $E_n\simeq E_i$ سيكون لها مشاركة معتبرة. الحد الثاني لما $E_m\neq E_n$ و $E_m\neq E_i$ يؤدي الي اهتزاز سريع لا يتزايد مع الزمن $t$ و بالتالي لا يشارك في احتمال الانتقال. في المحصلة معدل الانتقال باضافة التصحيح من الرتبة الثانية يعطي ب

$$w_{i\longrightarrow[n]} = \frac{d}{dt}\sum_{n:E_n\simeq E_i}|c_n^{(1)}+c_n^{(2)}|^2 = \frac{2\pi}{\hbar}\left[\overline{|V_{ni}+\sum_m\frac{V_{nm}V_{mi}}{E_i-E_m}|}^2\rho(E_n)\right]_{E_n=E_i} \quad (١٤٧٨)$$

الحالة لما $V_{nm}V_{mi}\neq 0$ مع $E_m\simeq E_i$ هي حالة خاصة تؤدي الي نفس العبارة مع التعويض $E_i-E_m\longrightarrow E_i-E_m+i\epsilon$ حيث $\epsilon$ هو عدد حقيقي متناه في الصغر.

كما ذكرنا قبل قليل حد الرتبة الاولي في المعادلة اعلاه يقابل انتقالات تحفظ الطاقة. من الجهة الاخري حد الرتبة الثانية يمكن فهمه علي انه تركيب انتقالين غير حافظين للطاقة من $|i>$ الي $|m>$ ثم من $|m>$ الي $|n>$. هذه الانتقالات تسمي افتراضية لانها لا تحفظ الطاقة علي الرغم انه لدينا انحفاظ للطاقة اجمالي بين $|i>$ و $|n>$.

# امتصاص و ارسال الاشعاع

## الاضطراب التوافقي

نعتبر الان الاضطراب التوافقي

$$V(t) = Ve^{i\Omega t}+V^+e^{-i\Omega t}. \quad (١٤٧٩)$$

مرة اخري $V$ و $V^+$ يتعلقان ضمنيا بالزمن. في اللحظة الابتدائية $t=0$ فقط الحالة الذاتية $|i>$ ل $H_0$ تكون مسكونة او مأهولة. نحسب التصحيح من الرتبة الاولي لسعة الاحتمال كما يلي

$$\begin{aligned} c_n^{(1)}(t) &= \frac{-i}{\hbar}\int_0^t dt_1 e^{i\Omega_{ni}t}V_{ni}(t) \\ &= \frac{1}{\hbar}\left[V_{ni}\frac{1-e^{i(\Omega_{ni}+\Omega)t}}{\Omega_{ni}+\Omega}+V_{ni}^+\frac{1-e^{i(\Omega_{ni}-\Omega)t}}{\Omega_{ni}-\Omega}\right]. \end{aligned} \quad (١٤٨٠)$$

---

[١٤٧] Fermi's golden rule.

نذكر انه من اجل الاضطراب الثابت تحصلنا علي

$$c_n^{(1)}(t) \quad = \quad \frac{1}{\hbar}\left[V_{ni}\frac{1-e^{i\Omega_{ni}t}}{\Omega_{ni}}\right]. \qquad (١٤٨١)$$

بعبارة اخري التغيير الوحيد هو

$$\Omega_{ni} \longrightarrow \Omega_{ni} \pm \Omega. \qquad (١٤٨٢)$$

اذن من اجل الازمان الكبري $t$ فان الاحتمال $|c_n^{(1)}|^2$ يكون ذو قيمة معتبرة فقط في الحالتين المستبعدتين لبعضهما البعض

$$\Omega_{ni} + \Omega = 0 \Leftrightarrow E_n = E_i - \hbar\Omega. \qquad (١٤٨٣)$$

$$\Omega_{ni} - \Omega = 0 \Leftrightarrow E_n = E_i + \hbar\Omega. \qquad (١٤٨٤)$$

من الواضح ان الجملة غير منحفظة. لكن اذا اخذنا الجملة الكلية المشكلة من الجملة و الاضطراب الخارجي $V(t)$ نجد انها جملة منحفظة كما يجب ان تكون. الحالة الثانية $(1484)$ هي ممكنة فقط لما $E_n > E_i$ اي لما تكون $E_n$ عبارة عن حالة مثارة. هذا يوافق الامتصاص لان الجملة تتلقي طاقة $\hbar\Omega$ من الاضطراب $V(t)$. الحالة الاولي $(1483)$ هي ممكنة فقط لما $E_n < E_i$ اي لما تكون $E_i$ هي الحالة المثارة. هذا يوافق الارسال المحفز لان الجملة تفقد طاقة $\hbar\Omega$ للاضطراب. هذا الارسال يسمي محفز لان الاضطراب هو الذي تسبب فيه و لم يكن تلقائي. كمثال علي ذلك عندما نشع ضوء علي ذرة في الحالة المثارة $E_i$ هذه الذرة يمكنها ان تقفز الي الحالة الادني $E_n$. بعبارة اخري الفوتون الوحيد الوارد علي الذرة يصبح فوتونين صادرين بنفس التواتر. هذا هو بالضبط مبدأ التضخيم الذي يتحكم في اللايزر [١٤٨]. نذكر هنا ان الارسال المحفز بالتفاعل الكهرومغناطيسي تنبأ به اولا اينشتاين.

قاعدة فيرمي الذهبية تكتب علي الشكل

$$w_{i\longrightarrow[n]}^{\rm stim-emis} = \frac{2\pi}{\hbar}\left[\overline{|V_{ni}|}^2\rho(E_n)\right]_{E_n=E_i-\hbar\Omega}. \qquad (١٤٨٥)$$

$$w_{i\longrightarrow[n]}^{\rm abso} = \frac{2\pi}{\hbar}\left[\overline{|V_{ni}^+|}^2\rho(E_n)\right]_{E_n=E_i+\hbar\Omega}. \qquad (١٤٨٦)$$

من النتيجة $|V_{ni}|^2 = |V_{in}^+|^2$ نحصل علي التوازن التفصيلي [١٤٩] الذي يعبر عن التناظر بين الامتصاص و الارسال المحفز. نكتب هذا التوازن التفصيلي علي الشكل

$$\frac{w_{i\longrightarrow[n]}^{\rm stim-emis}}{\rho(E_n)} = \frac{w_{n\longrightarrow[i]}^{\rm abso}}{\rho(E_i)}. \qquad (١٤٨٧)$$

## الامتصاص و الارسال المحفز

هاميلتونية شحنة $q$ تتحرك تحت تأثير حقل كهربائي $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial\vec{A}/\partial t$ و حقل مغناطيسي $\vec{B} = \vec{\nabla}x\vec{A}$ تعطي ب

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi. \qquad (١٤٨٨)$$

[١٤٨] LASER : light amplification by stimulated emission of radiation.

[١٤٩] detailed balance.

ال $\phi$ و $\vec{A}$ هما الكمون السلمي و الكمون الشعاعي علي التوالي. نفرض الشرط المعياري لكولومب (١٥٠) الذي يعطي ب

$$\vec{\nabla}\vec{A} = 0. \qquad (١٤٨٩)$$

يمكن كتابة الهاميلتونية علي الشكل

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{q}{m}\vec{A}\vec{p} + \frac{q^2\vec{A}^2}{2m} + q\phi. \qquad (١٤٩٠)$$

نعتبر حقل موجة مستوية وحيدة اللون (١٥١) الذي يعطي ب

$$\phi = 0 \ , \ \vec{A} = 2\hat{\epsilon}A_0\cos(k\hat{n}\vec{x} - \Omega t). \qquad (١٤٩١)$$

اتجاه الانتشار هو $\hat{n}$ و اتجاه الاستقطاب هو $\hat{\epsilon}$. العدد الموجي هو $k = \Omega/c$. الشرط المعياري $\vec{\nabla}\vec{A} = 0$ يعني ان الموجة هي عرضية اي ان $\hat{\epsilon}\hat{n} = 0$. الهاميلتونية تصبح

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + Ve^{i\Omega t} + V^+e^{-i\Omega t}. \qquad (١٤٩٢)$$

$$V = -\frac{qA_0}{m}\hat{\epsilon}\vec{p}e^{-ik\hat{n}\vec{x}}. \qquad (١٤٩٣)$$

في المعادلة اعلاه اهملنا الحد الديامغناطيسي (١٥٢) $q^2\vec{A}^2/2m$ و استعملنا النتيجة $\hat{\epsilon}\vec{p}\exp(ik\hat{n}\vec{x}) = \exp(ik\hat{n}\vec{x})\hat{\epsilon}\vec{p}$.

الحد $e^{i\Omega t}V$ يوافق الارسال المحفز بينما يوافق الحد $e^{-i\Omega t}V^+$ الامتصاص. فيما يلي سندرس الامتصاص بتفصيل اكبر. نحسب ( مع $q = e$)

$$|V^+_{ni}| = \frac{e^2A_0^2}{m^2}|\hat{\epsilon} < n|\vec{p}e^{ik\hat{n}\vec{x}}|i > |^2. \qquad (١٤٩٤)$$

نقوم بالتقريب التالي: طول موجة الاشعاع هو اكبر بكثير من بعد الذرات اي $|k\hat{n}\vec{x}| = 2\pi|\hat{n}\vec{x}/\lambda| << 1$. اذن يمكن ان نقرب الدالة الاسية ب 1. هذا هو تقريب العزم الكهريبائي ثنائي القطبية (١٥٣) . نحصل علي

$$|V^+_{ni}| = \frac{e^2A_0^2}{m^2}|\hat{\epsilon} < n|\vec{p}|i > |^2. \qquad (١٤٩٥)$$

من العلاقة $[x, H_0] = i\hbar p_x/m$ نحسب $< n|\vec{p}|i >= im\Omega_{ni} < n|\vec{x}|i >$. اذن نحصل علي

$$|V^+_{ni}| = A_0^2\Omega_{ni}^2|\hat{\epsilon} < n|\vec{P}|i > |^2. \qquad (١٤٩٦)$$

الشعاع $\vec{P}$ هو العزم الكهربائي ثنائي القطبية المعرف ب

$$\vec{P} = e\vec{x}. \qquad (١٤٩٧)$$

---

Coulomb gauge condition.(١٥٠)

monochromatic.(١٥١)

diamagnetic.(١٥٢)

elecrtic dipole approximation.(١٥٣)

الحقل الكهربائي $\vec{E}$ خاصة الموجة المستوية وحيدة اللون اعلاه يعطي ب $\vec{E}=-\hat{\epsilon}(2\Omega A_0)\sin(k\hat{n}\vec{x}-\Omega t)$. كثافة الطاقة (الطاقة في وحدة الحجم) في موجة كهرومغناطيسية هي $u=(\epsilon_0 E^2+B^2/\mu_0)/2=\epsilon_0 E^2$. اذن المتوسط خلال دورة كاملة هو $u=2\epsilon_0\Omega^2A_0^2$. بالتالي نحصل باستعمال ايضا النتيجة $\Omega_{ni}=\Omega$ علي

$$|V_{ni}^{+}|=\frac{u}{2\epsilon_0}|\hat{\epsilon}<n|\vec{P}|i>|^2. \quad (١٤٩٨)$$

نأخذ متوسط هذه العبارة علي جميع اتجاهات الورود $\hat{n}$ و علي جميع اتجاهات الاستقطاب $\hat{\epsilon}$. نعمل في الاحداثيات الكروية. الشعاعان $\hat{n}$ و $\hat{\epsilon}$ متعامدان. نختار المحور $z$ علي طول محور الانتشار $\hat{n}$. نختار المحور $y$ بحيث يكون الشعاع $<n|\vec{P}|i>$ في المستوي $zy$. المحور $x$ يصبح اذن مثبت. الزاوية بين $\hat{n}$ و $<n|\vec{P}|i>$ هي $\theta$ و الزاوية بين المحور $x$ و $\hat{\epsilon}$ هي $\phi$. نحصل اذن علي

$$\hat{\epsilon}=\cos\phi\hat{i}+\sin\phi\hat{j}\ ,\ <n|\vec{P}|i>=|<n|\vec{P}|i>|(\cos\theta\hat{k}+\sin\theta\hat{j}). \quad (١٤٩٩)$$

المتوسط يعطي اذن بالتكامل

$$\begin{aligned}|V_{ni}^{+}| &= \frac{u}{2\epsilon_0}|<n|\vec{P}|i>|^2\frac{1}{4\pi}\int\sin^2\phi\sin^2\theta\sin\theta d\theta d\phi\\ &= \frac{u}{6\epsilon_0}|<n|\vec{P}|i>|^2. \quad (١٥٠٠)\end{aligned}$$

من الواضح ان

$$<n|\vec{P}|i>|^2=<n|P_x|i>^2+<n|P_y|i>^2+<n|P_z|i>^2\ . \quad (١٥٠١)$$

نكتب معدل الامتصاص $(1486)$ كالاتي

$$\begin{aligned}w_{i\longrightarrow n}^{\rm abso} &= \frac{2\pi}{\hbar}\overline{|V_{ni}^{+}|}^2\delta(E_n-E_i-\hbar\Omega)\rho(E_n)dE_n\\ &= \frac{\pi}{3\epsilon_0\hbar^2}|<n|\vec{P}|i>|^2\delta(\Omega_{ni}-\Omega)u\rho(E_n)dE_n. \quad (١٥٠٢)\end{aligned}$$

الموجة الكهرومغناطيسية ليست وحيدة اللون علي نحو كامل و بالتالي تأتي بعرض تواترات او ترددات محدود. نذكر ان $\rho(E_n)dE_n$ هو عدد الحالات النهائية بطاقة بين $E_n=\hbar(\Omega+E_i/\hbar)$ و $E_n+dE_n=\hbar(\Omega+d\Omega+E_i/\hbar)$ حيث $E_i$ نبقيه مثبت. اذن نري ان $\rho(E_n)dE_n$ هو عدد الانساق الكهرومغناطيسية [١٥٤] التي لها تردد بين $\Omega$ و $\Omega+d\Omega$. كثافة الطاقة في النسق الكهرومغناطيسي ذو التردد $\Omega$ هي $u$. اذن $u\rho(E_n)dE_n$ هي كثافة الطاقة في الانساق الكهرومغناطيسية التي لها تردد بين $\Omega$ و $\Omega+d\Omega$. نكتب هذا علي الشكل

$$u\rho(E_n)dE_n=\rho_u(\Omega)d\Omega \quad (١٥٠٣)$$

نحصل علي النتيجة النهائية

$$w_{i\longrightarrow n}^{\rm abso} = \frac{\pi}{3\epsilon_0\hbar^2}|<n|\vec{P}|i>|^2\delta(\Omega_{ni}-\Omega)\rho_u(\Omega)d\Omega. \quad (١٥٠٤)$$

هذا يمكن كتابته علي الشكل

$$w_{i\longrightarrow[n]}^{\rm abso} = \frac{\pi}{3\epsilon_0\hbar^2}\bigg[|<n|\vec{P}|i>|^2\rho_u(\Omega)\bigg]_{\Omega=\Omega_{ni}}. \quad (١٥٠٥)$$

[١٥٤] electromagnetic modes.

# تمارين

**تمرين** 1

1) **نذكر بمعادلة تطور القيم المتوسطة التي تعطي ب**

$$i\hbar\frac{d}{dt} < \hat{Q} >=< [\hat{Q},\hat{H}] > .$$

**استعمل هذه المعادلة لتبرهن علي**

$$\frac{d}{dt} < \hat{x}\hat{p} >= 2 < \hat{T} > - < \hat{x}\frac{\partial\hat{V}}{\partial x}(\hat{x}) > .$$

2) **برهن علي النظرية الفيريالية** (١٥٥)

$$2 < \hat{T} >=< \hat{x}\frac{\partial\hat{V}}{\partial\hat{x}}(\hat{x}) > .$$

3) **من اجل ذرة الهيدروجين استعمل النظرية الفيريالية لتبين ان**

$$< \hat{T} >= -\frac{< \hat{V} >}{2} = -E_n.$$

**تمرين** 2

1) **لتكن** $H$ **هاميلتونية ماتتعلق بوسيط** $\lambda$ **اي** $H = H(\lambda)$. **القيم الذاتية و الاشعة الذاتية تتعلق بالتالي بالوسيط** $\lambda$ **اي ان** $E_n = E_n(\lambda)$ **و** $|\psi_n >= |\psi_n(\lambda) >$. **برهن علي نظرية فايمان ـ هالمان**

$$\frac{\partial E_n}{\partial\lambda} =< \psi_n(\lambda)|\frac{\partial H}{\partial\lambda}|\psi_n(\lambda) > .$$

2) **الهاميلتونية الفعلية لدالة الموجة المدارية لذرة الهيدروجين تعطي ب**

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}.$$

**طاقات بور تعطي ب**

$$E_n = -\frac{\alpha^2 mc^2}{2(j_{\rm max} + l + 1)^2}.$$

**استعمل نظرية فايمان ـ هالمان من اجل** $\lambda = l$ **لحساب القيمة المتوسطة** $< 1/r^2 >$.

---

(١٥٥) virial theorem.

**تمرين** 3 بين ان المعادلة المدارية لذرة الهيدروجين يمكن ان تكتب علي الشكل

$$\frac{d^2u}{dr^2}=\left[\frac{l(l+1)}{r^2}-\frac{2}{ar}+\frac{1}{n^2a^2}\right]u.$$

نصف قطر بور معرف ب

$$a=\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}.$$

استعمل المعادلة المدارية اعلاه من اجل ان تشتق علاقة كريمر

$$\frac{s}{4}[(2l+1)^2-s^2]<r^{s-2}>-\frac{2s+1}{a}<r^{s-1}>+\frac{s+1}{n^2a^2}<r^s>=0.$$

احسب القيمة المتوسطة $<r^{-3}>$.

**تمرين** 4 جملة كمومية يمكن ان تتواجد في ثلاث حالات مستقلة خطيا. الهاميلتونية تعطي ب

$$H^{\epsilon}=V_0\left(\begin{array}{ccc}1-\epsilon & 0 & 0\\ 0 & 1 & \epsilon\\ 0 & \epsilon & 2\end{array}\right)\ ,\ \epsilon<<1.$$

1) حل مسالة القيم الذاتية للجملة غير المضطربة المعرفة ب $\epsilon=0$.

2) حل مسألة القيم الذاتية للجملة المضطربة من اجل اي قيمة ل $\epsilon$.

3) استعمل نظرية الاضطراب غير المنحلة من الرتبة الاولي و من الرتبة الثانية لايجاد التصحيح للقيمة الذاتية غير المنحلة ل $H^0$. قارن بالحل المضبوط.

4) استعمل نظرية الاضطراب المنحلة من الرتبة الاولي لايجاد التصحيحات للقيمة الذاتية المضعفة الانحلال ل $H^0$. قارن بالنتيجة المضبوطة.

**تمرين** 5

1) من اجل هزاز توافقي احادي البعد مؤثرات الموضع و كمية الحركة تعطي ب

$$\hat{x}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\Omega}}(a^++a)\ ,\ \hat{p}=i\sqrt{\frac{\hbar m\Omega}{2}}(a^+-a).$$

نعطي ايضا

$$a|n>=\sqrt{n}|n-1>\ ,\ a^+|n>=\sqrt{n+1}|n+1>.$$

احسب $<n^{'}|\hat{x}|n>$ و $<n^{'}|\hat{x}^2|n>$.

2) الهزاز التوافقي ثلاثي الابعاد معطي بالكمون

$$V(r)=\frac{1}{2}m\Omega^2(x^2+y^2+z^2).$$

استعمل طريقة فصل المتغيرات من اجل حل معادلة شرودينغر المرافقة و عين الطاقات المسموح بها. عين انحلال كل مستوي طاقوي.

3) ندخل الاضطراب

$$\lambda H^1 = \lambda x^2 yz.$$

استعمل نظرية الاضطراب غير المنحلة من الرتبة الاولي من اجل حساب تصحيح الحالة الاساسية.

4) استعمل نظرية الاضطراب المنحلة من الرتبة الاولي من اجل ايجاد تصحيح الحالة المثارة الاولي.

## تمرين 6

1) نعتبر جملة مشكلة من ذرتين مستقطبتين تبعدان عن بعضهما البعض مسافة $R$. نأخذ كنموذج لهذه الجملة هزازان توافقيان مستقلان عن بعضهما البعض عبارة عن نوابض بثابت صلابة $k$. نتصور الالكترونات ككتل نقطية $m$ مرتبطة بهذه النوابض لكن الانوية ثقيلة الي الحد الذي يمكن ان نفترض معه انها ساكنة لا تتحرك في مراكز توازن النوابض. ازاحة الالكترونات تعطي ب $x_1$ و $x_2$. هاميلتونية الجملة تعطي ب

$$H^0 = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2m}p_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2.$$

تفاعل كولومب بين الانوية يعطي بالكمون $e^2/R$، تفاعل كولومب بين النواة الاولي و الالكترون الثاني هو $-e^2/(R + x_2)$، تفاعل كولومب بين النواة الثانية و الالكترون الاول هو $-e^2/(R - x_1)$ بينما تفاعل كولومب بين الالكترونات هو $e^2/(R - x_1 + x_2)$. التفاعل الكلي لكولومب يعطي ب

$$H^1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{e^2}{R} - \frac{e^2}{R - x_1} - \frac{e^2}{R + x_2} + \frac{e^2}{R - x_1 + x_2}\right].$$

بين انه من اجل $|x_1| << R$ و $|x_2| << R$ فان

$$H^1 = -\frac{e^2 x_1 x_2}{2\pi\epsilon_0 R^3}.$$

2) نقترح تغيير المتغيرات

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_+ + x_-)\ ,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_+ - x_-).$$

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_+ + p_-)\ ,\ p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_+ - p_-).$$

احسب الطاقات المسموح بها و الحالات الذاتية المرافقة.

3) احسب الفرق $\Delta V = E - E_0$ حيث $E$ و $E_0$ هي طاقات الحالة الاساسية ب و بدون تفاعل كولومب.

4) باعتبار $H^0$ هي الهاميلتونية غير المضطربة و $H^1$ هي الاضطراب احسب التصحيحات من الرتبة الاولي و الرتبة الثانية لطاقة الحالة الاساسية. ماذا تستنتج.

**تمرين** 7 ليكن $\vec{J}$ العزم الحركي الكلي $\vec{J}=\vec{L}+\vec{S}$. الاشعة الذاتية $|jj_3>$ ل $J^2$، $J_3$، $L^2$ و $S^2$ هي عبارة عن تركيب خطي للاشعة الذاتية $|s\sigma>|lm>$ ل $L^2$، $L_3$، $S^2$ و $S_3$ بمعاملات $C_{jj_3}^{lms\sigma}$ تعرف باسم معاملات كلابش - جوردون. احسب هذه المعاملات من اجل $s=\frac{1}{2}$.

**تمرين** 8

1) اضطراب البنية الدقيقة لذرة الهيدروجين يعطي بالهاميلتونية

$$\begin{aligned} H_{fs}^1 &= H_r^1+H_{so}^1 \\ &= -\frac{p^4}{8m^3c^2}+(\frac{1}{2})(-\vec{\mu}_s.\vec{B}_{\rm int}). \end{aligned}$$

المعامل $1/2$ بين قوسين هو راجع لمداورة توماس. العزم المغناطيسي المرفق بسبين الالكترون و الحقل المغناطيسي الداخلي الذي تولده الحركة المدارية يعطيان ب

$$\vec{\mu}_s=-\frac{e}{m}\vec{S}\ ,\ \vec{B}_{\rm int}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{mc^2r^3}\vec{L}.$$

احسب التصحيحات الناجمة عن هذا الاطظراب لطاقات بور.

2) نعتبر اضطراب اخر ناجم عن وجود حقل مغناطيسي خارجي غير منعدم. الهاميلتونية المرافقة

$$H_Z^1=-(\vec{\mu}_s+\vec{\mu}_l).\vec{B}_{\rm ext}.$$

العزم المغناطيسي المرتبط بالعزم الحركي للالكترون هو

$$\vec{\mu}_l=-\frac{e}{2m}\vec{L}.$$

هذا الاضطراب يؤدي الي تأثير زيمان.

نعتبر اولا الجملة غير المضطربة المعرفة بهاميلتونية بور. حدد درجة انحلال المستوي الطاقوي $E_2$ و اكتب الحالات الذاتية المقابلة. عبر عن الاشعة الذاتية $|lsjj_3>$ بدلالة الاشعة الذاتية $|s\sigma>|lm>$ باستعمال نتيجة المسألة السابقة.

3) احسب عناصر المصفوفة $<\psi_{njj_3}|H_Z^1|\psi_{njj_3}>$.

4) احسب عناصر المصفوفة $<\psi_{njj_3}|H_{fs}^1|\psi_{njj_3}>$.

5) عين مصفوفة الاضطراب الكلية $W=H_{fs}^1+H_Z^1$ في الحالات التي لها $n=2$. استعمل نظرية الاضطراب المنحلة لحساب التصحيحات من الرتبة الاولي للمستوي الطاقوي $E_2$.

**تمرين** 9 قيم الطاقة و دوال الموجة لبئر كمون لا نهائي في بعد واحد تعطي ب

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\ ,\ \psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}\ ,\ n=1,2,3,...$$

نؤثر باضطراب متعلق بالزمن خلال زمن $T$ بحيث ان الكمون يصبح

$$V(x) = V_0 \ , \ 0 \leq x \leq \frac{a}{2}$$
$$V(x) = 0 \ , \ \frac{a}{2} \leq x \leq 0$$
$$V(x) = \infty \ , \ \text{otherwise.}$$

توجد الجملة في اللحظة $t = 0$ في الحالة الاساسية $n = 1$. ماهو الاحتمال ان تكون الجملة في اللحظة $t = T$ قد قفزت الي الحالة المثارة الاولي $n = 2$.

**تمرين** 10 نضع هزاز توافقي احادي البعد تحت تأثير قوة منتظمة تتعلق بالزمن كالاتي

$$F(t) = \frac{F_0 \tau}{2\pi\nu(\tau^2 + t^2)}.$$

يوجد الهزاز في الحالة الاساسية في اللحظة $t = -\infty$. احسب الاحتمال ان يكون الهزاز في اللحظة $t = +\infty$ قد قفز الي الحالة المثارة الاولي.

**تمرين** 11 نعتبر جملة مشكلة من جسيمين سبينهما يساوي $1/2$. هاميلتونية الجملة من اجل $t < 0$ تنعدم. من اجل $t > 0$ هاميلتونية الجملة تعطي ب

$$H = \frac{4\Delta}{\hbar^2} \vec{S}_1 \vec{S}_2.$$

توجد الجملة في اللحظة $t < 0$ في الحالة $|+->$.

1) احسب الاحتمال كدالة في الزمن ان نجد الجملة في الحالات $|++>$، $|+->$، $|-+>$ و $|-->$ عن طريق حل المسألة بالضبط.

2) احسب الاحتمال كدالة في الزمن ان نجد الجملة في الحالات $|++>$، $|+->$، $|-+>$ و $|-->$ عن طريق حل المسألة باستعمال نظرية الاضطرابات المتعلقة بالزمن من الرتبة الاولي. قارن مع الحل المضبوط.

**تمرين** 12 نضع ذرة الهيدروجين في حقل كهربائي منتظم يتعلق بالزمن كالتالي

$$\vec{E} = 0 \ , \ t < 0$$
$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-t/\tau} \ , \ \vec{E}_0 = E_0 \vec{k} \ , \ t \geq 0.$$

توجد الجملة من اجل $t \leq 0$ في الحالة الاساسية $|\psi_{100}>$. استعمل نظرية الاضطرابات المتعلقة بالزمن من الرتبة الاولي لحساب الاحتمال كدالة في الزمن ان نجد ذرة الهيدروجين في الحالات $|\psi_{200}>$ و $|\psi_{210}>$. نعطي دوال الموجة

$$\psi_{100} = \frac{1}{a^{1.5}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-r/a}.$$

$$\psi_{200} = \frac{1}{a^{1.5}} \frac{1}{\sqrt{32}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-r/2a} (-2r/a + 4).$$

$$\psi_{210} = \frac{1}{a^{1.5}} \frac{1}{\sqrt{24.12}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cos\theta e^{-r/2a} (6r/a).$$

**تمرين** 13

1) نعتبر جملة غير مضطربة معطاة بذرة بور. اكتب القيم الذاتية للطاقة و الاشعة الذاتية المرافقة لها. ما هي درجة الانحلال.

2) نأخذ بعين الاعتبار سبينات الالكترون و البروتون. ماهي في هذه الحالة اشعة الحالات الذاتية للطاقة و درجة انحلالها.

3) يولد سبين الالكترون عزم مغناطيسي ثنائي. اكتب هاميلتونية الالكترون في حقل مغناطيسي $\vec{B}$.

4) سبين البروتون يوافق ايضا عزم مغناطيسي ثنائي معطي ب

$$\vec{\mu}_p=\frac{eg_p}{2m_p}\vec{S}_p\ ,\ g_p=5.59.$$

هذا العزم يولد في اي نقطة $\vec{r}$ حقل مغناطيسي $\vec{B}_p$ معطي ب

$$\vec{B}_p=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\bigg[3(\vec{\mu}_p.\hat{r})\hat{r}-\vec{\mu}_p\bigg]+\frac{2\mu_0}{3}\vec{\mu}_p\delta^3(\vec{r}).$$

اكتب هاميلتونية الالكترون في هذا الحقل. تسمي هذه الهاميلتونية هاميلتونية البنية فائقة الدقة لذرة بور.

5) احسب التصحيح الكمي من الرتبة الاولي للطاقة الناجم عن الحد الاول في الحقل المغناطيسي $\vec{B}_p$.

6) بين ان التصحيح الكمي من الرتبة الاولي للطاقة الناجم عن الحد الثاني في الحقل المغناطيسي $\vec{B}_p$ المتناسب مع دالة ديراك يأخذ الشكل

$$E^1_{hf}=\frac{\mu_0e^2g_p}{3m_em_p}<\sigma^{'}|<\sigma|\vec{S}_e\vec{S}_p|\sigma>|\sigma^{'}>|\psi_{nlm}(0)|^2.$$

7) ماهو التصحيح الكمي من الرتبة الاولي لطاقة المستوي الاساسي لذرة بور.

8) اكتب الحالات الذاتية الجيدة لذرة بور في هذه الحالة.

استعمل:

$$\int d\Omega(\vec{a}.\hat{r})(\vec{b}.\hat{r})=\frac{4\pi}{3}\vec{a}.\vec{b}.$$

$$|\psi_{nlm}(0)|^2=\frac{1}{\pi a^3}.$$

**تمرين** 14 هاميلتونية ذرة الهيليوم تعطي ب

$$H=\frac{\vec{p}_1^2}{2m}-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2e^2}{r_1}+\frac{\vec{p}_2^2}{2m}-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2e^2}{r_2}+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}.\qquad (١٥٠٦)$$

القيمة التجريبية لطاقة الحالة الاساسية لذرة الهيليوم تعطي ب $E=-78.975eV$. استعمل نظرية الاضطرابات في الرتبة الاولي لحساب القيمة النظرية لطاقة الحالة الاساسية لذرة الهيليوم.

**تمرين** 15 يوجد هزاز توافقي احادي البعد في حالته الاساسية $|0>$ من اجل $t < 0$. نؤثر على الهزاز بقوة منتظمة في الاتجاه $x$ متعلقة بالزمن معطاة ب

$$F = F_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \ , \ t \geq 0.$$

احسب احتمال ايجاد الهزاز في اللحظة الزمنية $t > 0$ في الحالات المثارة $|n>$ باستعمال نظرية الاضطرابات المتعلقة بالزمن من الرتبة الاولي. احسب النهاية $\tau \longrightarrow \infty$. ماذا تلاحظ. استعمل

$$< n^{'}|x|n >= \sqrt{\frac{\hbar}{4m\pi\nu}}(\sqrt{n}\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}).$$

**تمرين** 16

1) نعتبر الكمون اللانهائي في ثلاث ابعاد المعطي ب

$$V(x,y,z) = 0 \ , \ \text{if } 0 < x < a \ , \ 0 < y < a \ , \ 0 < z < a$$
$$V(x,y,z) = \infty \ , \ \text{otherwise.}$$

اشتق قيم الطاقة المسموح بها و الدوال الموجية الذاتية المرافقة لها.

ملحوظة: قيم الطاقة المسموح بها و الدوال الموجية الذاتية المرافقة لها من اجل الكمون اللانهائي في بعد واحد تعطي ب

$$E_n = En^2 \ , \ E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}.$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x \ , \ \int_0^a dx \ \psi_n^*(x)\psi_m(x) = \delta_{nm}.$$

2) ندخل الاضطراب

$$H^1 = V_0 \ , \ \text{if } 0 < x < \frac{a}{2} \ , \ 0 < y < \frac{a}{2}$$
$$H^1 = 0 \ , \ \text{otherwise.}$$

احسب التصحيح من الرتبة الاولي لطاقة الحالة الاساسية.

3) احسب التصحيح من الرتبة الاولي للمستوي المثار الاول ثلاثي الانحلال.

# حلول

**تمرين** 1:

1) **نحتار** $\hat{Q} = (\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})/2$ **و نستعمل** $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ **و** $[\hat{p}, \hat{V}(\hat{x})] = -i\hbar \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{x}}(\hat{x})$.
2) **القيم المنتظرة في الحالات المستقرة لا تتعلق بالزمن.**
3) **اولا نعمم المبرهنة الفيريالية لثلاث ابعاد. ثم نستعمل** $\vec{r}.\vec{\nabla}V = r\partial V/\partial r$، $V = -Ke^2/r$ **و** $< H >= E_n$ **لنبين ان المبرهنة الفيريالية تصبح** $2 < \hat{T} >= - < \hat{V} >$. **القيم المنتظرة تحسب في الحالات** $|\psi_{nlm} >$.

**تمرين** 2:

1) **نقوم بالنشر**

$$H(\lambda) = H(0) + \lambda \frac{\partial H}{\partial \lambda}|_{\lambda=0} + O(\lambda^2). \quad (١٥٠٧)$$

**نعتبر الحد الاول الهاميلتونية غير المضطربة بينما نعتبر الحدود الاخري كاضطراب. مسألة القيم الذاتية غير المضطربة تعطي اذن ب**

$$H(0)|\psi_n(0) >= E_n(0)|\psi_n(0) > . \quad (١٥٠٨)$$

**التصحيح من الرتبة الاولي يعطي اذن ب**

$$E_n^1 =< \psi_n(0)|\left[\frac{\partial H}{\partial \lambda}|_{\lambda=0} + O(\lambda)\right]|\psi_n(0) > . \quad (١٥٠٩)$$

**الطاقة** $E_n(\lambda)$ **تعطي اذن ب**

$$E_n(\lambda) = E_n(0) + \lambda < \psi_n(0)|\left[\frac{\partial H}{\partial \lambda}|_{\lambda=0} + O(\lambda)\right]|\psi_n(0) > . \quad (١٥١٠)$$

**نستنتج ان**

$$\frac{\partial E_n(\lambda)}{\partial \lambda}|_{\lambda=0} =< \psi_n(0)|\frac{\partial H}{\partial \lambda}|_{\lambda=0}|\psi_n(0) > . \quad (١٥١١)$$

2) **نحسب** $\partial H/\partial l$ **و** $\partial E_n/\partial l$. **نجد**

$$< \frac{1}{r^2} >= \frac{\alpha^2 m^2 c^2}{\hbar^2} \frac{1}{n^3(l + \frac{1}{2})}. \quad (١٥١٢)$$

**تمرين** 3: **المعادلة المدارية لذرة الهيدروجين يمكن ان تكتب علي الشكل**

$$\frac{d^2u}{dr^2} = \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{ar} + \frac{1}{n^2a^2}\right]u. \quad (١٥١٣)$$

باستعمال هذه المعادلة يمكن ان نحسب مباشرة

$$\int ur^s\frac{d^2u}{dr^2}dr = \int ur^s\Big[\frac{l(l+1)}{r^2}-\frac{2}{ar}+\frac{1}{n^2a^2}\Big]udr$$
$$= l(l+1)<r^{s-2}>-\frac{2}{a}<r^{s-1}>+\frac{1}{n^2a^2}<r^s>. \quad (١٥١٤)$$

بالتكامل بالتجزئة نحصل علي

$$\int ur^s\frac{d^2u}{dr^2}dr = -\int r^s(\frac{du}{dr})^2dr - s\int ur^{s-1}\frac{du}{dr}dr$$
$$= \frac{2}{s+1}\int\frac{du}{dr}\frac{d^2u}{dr^2}r^{s+1}dr+\frac{s(s-1)}{2}<r^{s-2}>. \quad (١٥١٥)$$

نحسب ايضا

$$\int\frac{du}{dr}\frac{d^2u}{dr^2}r^{s+1}dr = -\frac{l(l+1)(s-1)}{2}<r^{s-2}>+\frac{s}{a}<r^{s-1}>-\frac{s+1}{2n^2a^2}<r^s>. \quad (١٥١٦)$$

نضع كل شيئ معا نحصل

$$\frac{s}{4}[(2l+1)^2-s^2]<r^{s-2}>-\frac{2s+1}{a}<r^{s-1}>+\frac{s+1}{n^2a^2}<r^s>=0. \quad (١٥١٧)$$

من اجل $s=-1$ نحصل علي

$$-\frac{1}{4}[(2l+1)^2-1]<r^{-3}>+\frac{1}{a}<r^{-2}>=0. \quad (١٥١٨)$$

بالتالي

$$<r^{-3}>=\frac{1}{al(l+1)}<r^{-2}>=\frac{\alpha^3m^3c^3}{\hbar^3n^3l(l+1)(l+\frac{1}{2})}. \quad (١٥١٩)$$

**تمرين** 4: الحل مباشر.

**تمرين** 5:

1) نجد

$$<n^{'}|\hat{x}|n>=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\Omega}}\Big(\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}+\sqrt{n}\delta_{n',n-1}\Big). \quad (١٥٢٠)$$

$$<n^{'}|\hat{x}^2|n>=\frac{\hbar}{2m\Omega}\Big(\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{n',n+2}+\sqrt{n(n-1)}\delta_{n',n-2}+(2n+1)\delta_{n',n}\Big) \quad (١٥٢١)$$

2) في هذه الحالة تعطي معادلة شرودينغر ب

$$\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{2}m\Omega^2(x^2+y^2+z^2)\Big)\Psi(x,y,z)=E\Psi(x,y,z) \quad (١٥٢٢)$$

فصل المتغيرات يعطي مباشرة الطاقات المسموح بها

$$E_n = \hbar\Omega(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}) \ , \ n = n_x + n_y + n_z. \qquad (١٥٢٣)$$

الحالات المقابلة تعطي ب

$$\Psi(x, y, z) =< x|n_x >< y|n_y >< z|n_z > . \qquad (١٥٢٤)$$

انحلال المستوي الطاقوي $E_n$ حيث $n = n_x + n_y + n_z$ يبقي مثبت يحسب كالتالي. اولا نثبت $n_x$ اي $n_y + n_z = n - n_x$. من الواضح انه لدينا $n - n_x + 1$ امكانية من اجل الزوج $(n_y, n_z)$. اذن انحلال $E_n$ يعطي بالعلاقة

$$d(n) = \sum_{n_x=0}^{n}(n - n_x + 1) = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (١٥٢٥)$$

3) التصحيح من الرتبة الاولي لطاقة الحالة الاساسية $E_{000} = (3\hbar\Omega)/2$ التي هي حالة غير منحلة يأخذ الشكل

$$\begin{aligned} \lambda E^1 &= < 0| < 0| < 0|\lambda x^2 yz|0 > |0 > |0 > \\ &= \lambda < 0|x^2|0 >< 0|y|0 >< 0|z|0 > \\ &= 0. \end{aligned} \qquad (١٥٢٦)$$

4) المستوي الطاقوي المثار الاول $E_1 = (5\hbar\Omega)/2$ هو ثلاثي الانحلال. الحالات المقابلة هي $|100>$، $|010>$ و $|001>$. حتي نحسب التصحيح من الرتبة الاولي نستعمل نظرية الاضطراب المنحلة من الرتبة الاولي. اذن يجب ان نجد القيم الذاتية لمصفوفة الاضطراب $W_{ij} =< i|\lambda H^1|j >$ حيث $i, j = 100, 010, 001$. نحسب

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 0 \end{pmatrix} \ , \ \epsilon = \lambda\sqrt{2}(\frac{\hbar}{2m\Omega})^2. \qquad (١٥٢٧)$$

القيم الذاتية هي 0، $+\epsilon$ و $-\epsilon$ مع الاشعة الذاتية $|100>$، $(|010> + |001>)/\sqrt{2}$ و $(|010> - |001>)/\sqrt{2}$ علي التوالي.

**تمرين 6:**

1) استعمل نشر تايلور.

2) نجد

$$E_{n_+,n_-} = \hbar\Omega_+(n_+ + \frac{1}{2}) + \hbar\Omega_-(n_- + \frac{1}{2}). \qquad (١٥٢٨)$$

$$\Omega_\pm = \sqrt{\frac{k \mp \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 R^3}}{m}}. \qquad (١٥٢٩)$$

3) نجد

$$E = E_{0,0} = \hbar\frac{\Omega_+ + \Omega_+}{2}. \quad (١٥٣٠)$$

$$E_0 = \hbar\Omega_0. \quad (١٥٣١)$$

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (١٥٣٢)$$

نحصل علي

$$\Delta V = E - E_0 = -\frac{\hbar}{8m^2\Omega_0^3}\bigg(\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 R^3}\bigg)^2. \quad (١٥٣٣)$$

4) التصحيح من الرتبة الاولي هو

$$E^1 =< 0| < 0|H^1|0 > |0 >= 0. \quad (١٥٣٤)$$

التصحيح من الرتبة الثانية

$$E^2 = \sum_{m_1 \neq 0}\sum_{m_2\neq 0}\frac{| < m_1| < m_2|H^1|0 > |0 > |^2}{E_0^0 - E_m^0}. \quad (١٥٣٥)$$

نستعمل النتيجة

$$H^1|0 > |0 >= -\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 R^3}\hat{x}_1|0 > \hat{x}_2|0 >= -\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 R^3}\frac{\hbar}{2m\Omega_0}|1 > |1 > \quad (١٥٣٦)$$

اذن ( مع $E_0^0 = \hbar\Omega_0$ و $E_1^0 = 3\hbar\Omega_0$ )

$$E^2 = \bigg(\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 R^3}\bigg)^2\bigg(\frac{\hbar}{2m\Omega_0}\bigg)^2\frac{1}{E_0^0 - E_1^0} = -\bigg(\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 R^3}\bigg)^2\frac{\hbar}{8m^2\Omega_0^3}. \quad (١٥٣٧)$$

**تمرين** 7: لدينا

$$\begin{aligned} |jj_3 > &= C_{jj_3}^{lj_3-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}|lj_3 - \frac{1}{2} > |\frac{1}{2}\frac{1}{2} > +C_{jj_3}^{lj_3+\frac{1}{2}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}|lj_3 + \frac{1}{2} > |\frac{1}{2} - \frac{1}{2} > \\ &= A|lj_3 - \frac{1}{2} > |\frac{1}{2}\frac{1}{2} > +B|lj_3 + \frac{1}{2} > |\frac{1}{2} - \frac{1}{2} > \quad (١٥٣٨) \end{aligned}$$

يجب ان يكون لدينا $|A|^2 + |B|^2 = 1$. ايضا لدينا

$$J^2 = L^2 + S^2 + 2L_3S_3 + L_+S_- + L_-S_+. \quad (١٥٣٩)$$

نحسب

$$\begin{aligned} J^2|lj_3 - \frac{1}{2} > |\frac{1}{2}\frac{1}{2} > &= \bigg[l(l+1) + j_3 + \frac{1}{4}\bigg]|lj_3 - \frac{1}{2} > |\frac{1}{2}\frac{1}{2} > \\ &+ \sqrt{l(l+1) - j_3^2 + \frac{1}{4}}|lj_3 + \frac{1}{2} > |\frac{1}{2} - \frac{1}{2} >. \quad (١٥٤٠) \end{aligned}$$

$$J^2|lj_3+\frac{1}{2}>|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}> \;=\; \left[l(l+1)-j_3+\frac{1}{4}\right]|lj_3+\frac{1}{2}>|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}>$$
$$+\;\sqrt{l(l+1)-j_3^2+\frac{1}{4}}|lj_3-\frac{1}{2}>|\frac{1}{2}\frac{1}{2}> . \quad (١٥٤١)$$

الشرط $J_3^2|jj_3>=j(j+1)|jj_3>$ يؤدي الي معادلتين متكافئتين في المجهولين $A$ و $B$. المعادلة الاولي تأخذ الشكل

$$A\left[l(l+1)+j_3+\frac{1}{4}\right]+B\sqrt{l(l+1)-j_3^2+\frac{1}{4}}=j(j+1)A. \quad (١٥٤٢)$$

من اجل $j=l+\frac{1}{2}$ لدينا

$$A=\sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+j_3}{2l+1}}\;,\;B=\sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-j_3}{2l+1}}. \quad (١٥٤٣)$$

من اجل $j=l-\frac{1}{2}$ لدينا

$$A=\sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-j_3}{2l+1}}\;,\;B=-\sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+j_3}{2l+1}}. \quad (١٥٤٤)$$

**تمرين** 8:

1) انظر المحاضرة.

2) من اجل $n=2$ لدينا $l=0$ و $l=1$. لما نجمع $l=0$ و $s=\frac{1}{2}$ نحصل علي $j=\frac{1}{2}$ و لما نجمع $l=1$ و $s=\frac{1}{2}$ نحصل علي $j=\frac{1}{2}$ و $j=\frac{3}{2}$. مستوي بور الطاقوي $E_2$ هو ثماني الانحلال و هو يعطي ب

$$E_2=-13.6eV/4\;,\;-(\frac{\alpha}{4})^2E_2=(\frac{\alpha}{8})^2 13.6eV=\gamma. \quad (١٥٤٥)$$

الحالات الذاتية الثمانية المقابلة هي $|\psi_{njj_3}>=|R_{nl}>|lsjj_3>$ حيث $n=2$، $s=\frac{1}{2}$، $l=0,1$ و $j=l+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}$. يجب ان نعبر عن الاشعة الذاتية $|lsjj_3>$ بدلالة الاشعة الذاتية $|lms\sigma>$. نستعمل نتيجة التمرين السابق لايجاد

$$|\psi_1>=|0\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}>=|00>|\frac{1}{2}\frac{1}{2}>$$
$$|\psi_2>=|0\frac{1}{2}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}>=|00>|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}> . \quad (١٥٤٦)$$

$$|\psi_6>=|1\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}>=\frac{1}{\sqrt{3}}|10>|\frac{1}{2}\frac{1}{2}>-\sqrt{\frac{2}{3}}|11>|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}>$$
$$|\psi_8>=|1\frac{1}{2}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}>=\sqrt{\frac{2}{3}}|1-1>|\frac{1}{2}\frac{1}{2}>-\frac{1}{\sqrt{3}}|10>|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}> .$$
(١٥٤٧)

$$|\psi_3>=|1\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{3}{2}>=|11>|\frac{1}{2}\frac{1}{2}>$$
$$|\psi_5>=|1\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}>=\sqrt{\frac{2}{3}}|10>|\frac{1}{2}\frac{1}{2}>+\frac{1}{\sqrt{3}}|11>|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}>$$
$$|\psi_7>=|1\frac{1}{2}\frac{3}{2}-\frac{1}{2}>=\frac{1}{\sqrt{3}}|1-1>|\frac{1}{2}\frac{1}{2}>+\sqrt{\frac{2}{3}}|10>|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}>$$
$$|\psi_4>=|1\frac{1}{2}\frac{3}{2}-\frac{3}{2}>=|1-1>|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}>. \quad (١٥٤٨)$$

3) **اضطراب الحقل المغناطيسي الخارجي يعطي ب**

$$\begin{aligned} H_Z^1 &= -\vec{B}_{\rm ext}.(\vec{\mu}_l+\vec{\mu}_s) \\ &= \frac{e}{2m}B_{\rm ext}(L_3+2S_3) \\ &= \frac{\mu_B B_{\rm ext}}{\hbar}(L_3+2S_3) \\ &= \frac{\beta}{\hbar}(L_3+2S_3). \end{aligned} \quad (١٥٤٩)$$

**في المعادلة اعلاه افترضنا ان الحقل المعناطيسي هو في الاتجاه الثالث و ان $\mu_B$ و $\beta$ معرفان ب**

$$\mu_B=\frac{e\hbar}{2m}\ ,\ \beta=\mu_B B_{\rm ext}. \quad (١٥٥٠)$$

**نحسب**

$$\begin{aligned} (L_3+2S_3)|\psi_1> &= \hbar|\psi_1> \\ (L_3+2S_3)|\psi_2> &= -\hbar|\psi_2> \\ (L_3+2S_3)|\psi_3> &= 2\hbar|\psi_3> \\ (L_3+2S_3)|\psi_4> &= -2\hbar|\psi_4> \\ (L_3+2S_3)|\psi_5> &= \frac{2\hbar}{3}|\psi_5>+\frac{\sqrt{2}\hbar}{3}|\psi_6> \\ (L_3+2S_3)|\psi_6> &= \frac{\hbar}{3}|\psi_6>+\frac{\sqrt{2}\hbar}{3}|\psi_5> \\ (L_3+2S_3)|\psi_7> &= -\frac{2\hbar}{3}|\psi_7>+\frac{\sqrt{2}\hbar}{3}|\psi_8> \\ (L_3+2S_3)|\psi_8> &= -\frac{\hbar}{3}|\psi_8>+\frac{\sqrt{2}\hbar}{3}|\psi_7>. \end{aligned} \quad (١٥٥١)$$

**اذن المركبات المصفوفية $<\psi_{njj_3}|H_Z^1|\psi_{nj'j_3'}>$ يمكن تنظيمها في المصفوفة**

$$H_Z^1=\begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\beta & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta & \frac{1}{3}\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}\beta & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta & -\frac{1}{3}\beta \end{pmatrix}. \quad (١٥٥٢)$$

4) المركبات المصفوفية $<\psi_{njj_3}|H^1_{fs}|\psi_{nj'j'_3}>$ تعطي ب

$$<\psi_{njj_3}|H^1_{fs}|\psi_{njj_3}> = E^1_{fs}\delta_{j_3j'_3}\delta_{jj'}$$
$$= \frac{E_n^2}{2mc^2}\left(3-\frac{4n}{j+\frac{1}{2}}\right)\delta_{j_3j'_3}\delta_{jj'}. \quad (١٥٥٣)$$

من اجل $n=2$ لدينا صراحة

$$H^1_{fs} = \begin{pmatrix} -5\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5\gamma \end{pmatrix}. \quad (١٥٥٤)$$

5) مصفوفة الاضطراب الكلية $W=H^1_{fs}+H^1_Z$ تعطي ب

$$W = \begin{pmatrix} \beta-5\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta-5\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta-\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\beta-\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\beta-\gamma & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta & \frac{1}{3}\beta-5\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}\beta-\gamma & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3}\beta & -\frac{1}{3}\beta-5\gamma \end{pmatrix}. \quad (١٥٥٥)$$

نلاحظ مباشرة القيم الذاتية $\pm\beta-5\gamma$ و $\pm2\beta-\gamma$. القيم الذاتية الاربعة الاخري تحل المعادلات المميزة [١٥٦]

$$x^2+(\beta-6\gamma)x+5\gamma^2-\frac{11}{3}\gamma\beta=0. \quad (١٥٥٦)$$

$$y^2+(-\beta-6\gamma)y+5\gamma^2+\frac{11}{3}\gamma\beta=0. \quad (١٥٥٧)$$

نحصل علي الحلول

$$x_\pm = 3\gamma-\frac{\beta}{2}\pm\sqrt{4\gamma^2+\frac{\beta^2}{4}+\frac{2}{3}\beta\gamma}. \quad (١٥٥٨)$$

$$y_\pm = 3\gamma+\frac{\beta}{2}\pm\sqrt{4\gamma^2+\frac{\beta^2}{4}-\frac{2}{3}\beta\gamma}. \quad (١٥٥٩)$$

هذه القيم الذاتية هي التصحيحات من الرتبة الاولي للمستوي الطاقوي $E_2$ الراجعة الي تأثيرات البنية الدقيقة و تأثير حقل مغناطيسي خارجي غير معدوم.

---

[١٥٦] characteristic equations.

**تمرين** 9: احتمال الانتقال يعطي ب

$$P_{1\longrightarrow 2}(T)=|c_2^{(0)}(T)+c_2^{(1)}(T)+...|^2. \quad (١٥٦٠)$$

نحسب

$$c_2^{(0)}(T)=\delta_{21}=0. \quad (١٥٦١)$$

التصحيح من الرتبة الاولي يعطي ب

$$c_2^{(1)}(T) = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)\int_0^T dte^{i\Omega_{21}t}V_{21}(t). \quad (١٥٦٢)$$

$$\Omega_{12}=\frac{E_1-E_2}{\hbar}\ ,\ V_{21}(t)=<2|V(t)|1>. \quad (١٥٦٣)$$

لان $V$ ثابت خلال المجال الزمني $T$ نحصل مباشرة علي

$$c_2^{(1)}(T) = V_{21}\frac{1-e^{i\Omega_{21}T}}{E_2-E_1}. \quad (١٥٦٤)$$

احتمال الانتقال من الرتبة الاولي يعطي اذن ب

$$\begin{aligned} P_{1\longrightarrow 2}(T) &= \frac{4|V_{21}|^2}{(E_2-E_1)^2}\sin^2\frac{(E_2-E_1)T}{2\hbar} \\ &= \left(\frac{4ma^2|V_{21}|}{3\pi^2\hbar^2}\sin\frac{3\pi^2\hbar T}{4ma^2}\right)^2. \end{aligned} \quad (١٥٦٥)$$

يبقي ان نعين $V_{21}$. لدينا

$$\begin{aligned} V_{21} &= <2|V|1> \\ &= \int_0^a dx\psi_2^*(x)\psi_1(x)V(x) \\ &= V_0\int_0^{\frac{a}{2}} dx\psi_2^*(x)\psi_1(x) \\ &= \frac{V_0}{a}\int_0^{\frac{a}{2}} dx\bigg(\cos\frac{\pi x}{a}-\cos\frac{3\pi x}{a}\bigg) \\ &= \frac{4V_0}{3\pi}. \end{aligned} \quad (١٥٦٦)$$

**تمرين** 10: الحالة الاساسية و الحالة المثارة الاولي للهزاز التوافقي في بعد واحد تعطي بالدوال الموجية

$$\psi_0(x)=\left(\frac{m\Omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\ e^{-\frac{m\Omega}{2\hbar}x^2}. \quad (١٥٦٧)$$

$$\psi_1(x)=a^+\psi_0(x)=\left(\frac{m\Omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{2m\Omega}{\hbar}}\ x\ e^{-\frac{m\Omega}{2\hbar}x^2}. \quad (١٥٦٨)$$

الطاقات المقابلة تعطي ب

$$E_0 = \frac{\hbar\Omega}{2}\ ,\ E_1 = \frac{3\hbar\Omega}{2}. \quad (١٥٦٩)$$

سعة احتمال الانتقال من الرتبة الصفر تعطي ب

$$c_1^{(0)}(+\infty) = \delta_{10} = 0. \quad (١٥٧٠)$$

سعة احتمال الانتقال من الرتبة واحد تعطي ب

$$\begin{aligned} c_1^{(1)}(+\infty) &= -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{i\Omega_{10}t}V_{10}(t) \\ &= -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{i\Omega t} < 1|V(t)|0 > . \end{aligned} \quad (١٥٧١)$$

القوة منتظمة في الفضاء و بالتالي فان الكمون يعطي ب $V = -Fx$. نحسب

$$< 1|V(t)|0 >=< 1|(-Fx)|0 >= -F\sqrt{\frac{\hbar}{2m\Omega}} < 1|(a+a^+)|0 >= -F\sqrt{\frac{\hbar}{2m\Omega}} \quad (١٥٧٢)$$

اذن

$$\begin{aligned} c_1^{(1)}(+\infty) &= \frac{i}{\sqrt{2m\Omega\hbar}}F_0\frac{\tau}{\Omega}\int_{-\infty}^{\infty} dt\ \frac{e^{i\Omega t}}{\tau^2+t^2} \\ &= \frac{iF_0}{\Omega\sqrt{2m\Omega\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\ \frac{e^{i\Omega\tau t}}{1+t^2}. \end{aligned} \quad (١٥٧٣)$$

ندخل تحويل لابلاس كالتالي

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt\frac{e^{i\Omega\tau t}}{1+t^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\int_0^{\infty} d\alpha e^{-\alpha(1+t^2)+i\Omega\tau t} \\ &= \int d\alpha e^{-\alpha-\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)^2\frac{1}{\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\alpha\left(t-\frac{i\Omega\tau}{2\alpha}\right)^2} \\ &= \int d\alpha e^{-\alpha-\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)^2\frac{1}{\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\alpha t^2} \\ &= \int d\alpha e^{-\alpha-\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)^2\frac{1}{\alpha}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi\Omega\tau}{2}}\int\frac{d\alpha}{\alpha^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{\Omega\tau}{2}(\alpha+\frac{1}{\alpha})} \\ &= \sqrt{\frac{\pi\Omega\tau}{2}}2K_{-\frac{1}{2}}(\Omega\tau) \\ &= \sqrt{\frac{\pi\Omega\tau}{2}}2\sqrt{\frac{\pi}{2\Omega\tau}}e^{-\Omega\tau} \\ &= \pi e^{-\Omega\tau}. \end{aligned} \quad (١٥٧٤)$$

اذن

$$c_1^{(1)}(+\infty) = \frac{iF_0}{\Omega\sqrt{2m\Omega\hbar}}\pi e^{-\Omega\tau}. \quad (١٥٧٥)$$

احتمال الانتقال يعطي اذن ب

$$|c_1^{(1)}(+\infty)|^2 = \frac{F_0^2\pi^2}{2m\Omega^3\hbar}e^{-2\Omega\tau}. \quad (١٥٧٦)$$

**تمرين** 11:

- 1) علينا حل معادلة شرودينغر

$$H|\psi(t)>= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)> . \quad (١٥٧٧)$$

نكتب الحل على الشكل

$$|\psi(t)>=\sum_n c_n\exp(-iE_nt/\hbar)|n> . \quad (١٥٧٨)$$

لدينا

$$H=\frac{4\Delta}{\hbar^2}\vec{S}_1\vec{S}_2=2\Delta(s(s+1)-3/2), \quad (١٥٧٩)$$

حيث $s$ هو السبين الكلي. اذن

$$H|00>=E_0|00> \ , \ E_0=-3\Delta \ , \ |00>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+>|->-|->|+>) \quad (١٥٨٠)$$

$$H|1m>=E_1|1m> \ , \ E_1=\Delta \ ,$$
$$|11>=|+>|+> \ , \ |10>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+>|->+|->|+>) \ , \ |1-1>=|->|-> . \quad (١٥٨١)$$

دالة الموجة في اللحظة $t$ تعطي اذن ب

$$\begin{aligned}|\psi(t)> &= c_{00}\exp(-iE_0t/\hbar)|00>+c_{11}\exp(-iE_1t/\hbar)|11>+c_{10}\exp(-iE_1t/\hbar)|10>\\ &+ c_{1-1}\exp(-iE_1t/\hbar)|1-1> .\end{aligned} \quad (١٥٨٢)$$

دالة الموجة الابتدائية هي

$$|\psi(0)>=|+>|->=\frac{1}{\sqrt{2}}|00>+\frac{1}{\sqrt{2}}|10> . \quad (١٥٨٣)$$

اذن بالمقارنة

$$c_{00}=c_{10}=\frac{1}{\sqrt{2}} \ , \ c_{11}=c_{1-1}=0. \quad (١٥٨٤)$$

دالة الموجة في اللحظة $t$ تصبح اذن

$$\begin{aligned}|\psi(t)> &= \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(-iE_0t/\hbar)|00>+\frac{1}{\sqrt{2}}\exp(-iE_1t/\hbar)|10>\\ &= \frac{1}{2}\big(\exp(-iE_0t/\hbar)+\exp(-iE_1t/\hbar)\big)|+>|->-\frac{1}{2}\big(\exp(-iE_0t/\hbar)-\exp(-iE_1t/\hbar)\big)|->|+> .\end{aligned} \quad (١٥٨٥)$$

نحصل علي الاحتمالات

$$P(|+>|->\longrightarrow|+>|+>)=0$$
$$P(|+>|->\longrightarrow|->|->)=0$$
$$P(|+>|->\longrightarrow|+>|->)=\frac{1}{4}|\exp(-iE_0t/\hbar)+\exp(-iE_1t/\hbar)|^2$$
$$P(|+>|->\longrightarrow|->|+>)=\frac{1}{4}|\exp(-iE_0t/\hbar)-\exp(-iE_1t/\hbar)|^2. \quad (١٥٨٦)$$

- 2) الهاميلتونية غير المضطربة

$$H_0=0. \quad (١٥٨٧)$$

الاضطراب يعطي ب

$$V=H=\frac{4\Delta}{\hbar^2}\vec{S}_1\vec{S}_2. \quad (١٥٨٨)$$

الحالة الابتدائية

$$|i>=|+>|->. \quad (١٥٨٩)$$

نحسب عنصر المصفوفة

$$\begin{aligned} V_{ni}=<n|V|i> &= \frac{4\Delta}{\hbar^2}<n|\vec{S}_1\vec{S}_2|+>|-> \\ &= -\frac{3}{\sqrt{2}}\Delta<n|00>+\frac{\Delta}{\sqrt{2}}<n|10>. \end{aligned} \quad (١٥٩٠)$$

من اجل

$$|n>=|->|+>=\frac{1}{\sqrt{2}}|10>-\frac{1}{\sqrt{2}}|00>, \quad (١٥٩١)$$

نحصل علي

$$V_{ni}=2\Delta. \quad (١٥٩٢)$$

نحسب الان الاحتمال

$$\begin{aligned} P(|+>|->\longrightarrow|->|+>) &= |c_n^{(0)}+c_n^{(1)}+...|^2 \\ &= |0-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt_1\exp(i\Omega_{ni}t_1)V_{ni}(t_1)+...|^2 \\ &= |-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt_1V_{ni}(t_1)+...|^2 \\ &= \frac{4\Delta^2t^2}{\hbar^2}. \end{aligned} \quad (١٥٩٣)$$

من اجل

$$|n>=|+>|->=\frac{1}{\sqrt{2}}|10>+\frac{1}{\sqrt{2}}|00>, \quad (١٥٩٤)$$

نحصل علي

$$V_{ni}=-\Delta. \tag{١٥٩٥}$$

نحسب الان الاحتمال

$$\begin{aligned} P(|+>|->\longrightarrow|+>|->) &= |c_n^{(0)}+c_n^{(1)}+...|^2 \\ &= |1-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt_1\exp(i\Omega_{ni}t_1)V_{ni}(t_1)+...|^2 \\ &= |1-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt_1V_{ni}(t_1)+...|^2 \\ &= |1+\frac{i}{\hbar}\Delta t|^2 \\ &= 1+\frac{\Delta^2t^2}{\hbar^2}. \end{aligned} \tag{١٥٩٦}$$

بنفس الطريقة نحسب

$$P(|+>|->\longrightarrow|+>|+>) = 0. \tag{١٥٩٧}$$

$$P(|+>|->\longrightarrow|->|->) = 0. \tag{١٥٩٨}$$

**تمرين** 12: **الحالة الابتدائية**

$$|i>=|\psi_{100}>. \tag{١٥٩٩}$$

الحالة النهائية

$$|n>=|\psi_{2lm}>. \tag{١٦٠٠}$$

احتمال الانتقال او القفز يعطي ب

$$P(|100>\longrightarrow|2lm>)=|c_2^{(0)}+c_2^{(1)}+...|^2. \tag{١٦٠١}$$

لدينا

$$c_2^{(0)}=0. \tag{١٦٠٢}$$

$$c_2^{(1)}=-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt_1\exp(i\Omega_{20}t_1)V_{20}(t_1). \tag{١٦٠٣}$$

نحسب ( باستعمال $E_n=E_1/n^2$ )

$$\Omega_{20}=\frac{E_2-E_1}{\hbar}=-\frac{3E_1}{4\hbar}. \tag{١٦٠٤}$$

لدينا الكمون الكهربائي ( $E=-\partial V/\partial z$ )

$$V=-Ez=-Er\cos\theta. \tag{١٦٠٥}$$

نحسب عنصر المصفوفة

$$\begin{aligned} V_{20} &= -E < 2|r\cos\theta|0 > \\ &= -E\int d^3x\psi^*_{2lm} r\cos\theta\psi_{100} \end{aligned} \tag{١٦٠٦}$$

لدينا

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{a^{3/2}}\exp(-r/a). \tag{١٦٠٧}$$

لدينا حالتان. في الحالة الاولي نأخذ

$$\psi_{200} = \frac{1}{\sqrt{128\pi}}\frac{1}{a^{3/2}}\exp(-r/2a)(-2r/a+4). \tag{١٦٠٨}$$

هذه الدالة لا تتعلق ب $\theta$. اذن التكامل علي $\theta$ هو صفر. اذن احتمال الانتقال ينعدم في هذه الحالة.

في الحالة الثانية نأخذ

$$\psi_{210} = \frac{1}{\sqrt{8.36}\sqrt{4\pi}}\frac{1}{a^{3/2}}\cos\theta\exp(-r/2a)(6r/a). \tag{١٦٠٩}$$

التكامل علي $\theta$ في هذه الحالة يعطي ب

$$\int \sin\theta d\theta.\cos\theta.\cos\theta = \frac{2}{3}. \tag{١٦١٠}$$

التكامل علي $\phi$ يعطي ب

$$\int d\phi = 2\pi. \tag{١٦١١}$$

التكامل علي $r$ يعطي ب

$$\int r^2 dr.\exp(-r/2a)r.r.\exp(-r/a) = 4!(2a/3)^5. \tag{١٦١٢}$$

نحصل علي عنصر المصفوفة

$$V_{20} = -\frac{Ea}{\sqrt{8}}4!(\frac{2}{3})^6. \tag{١٦١٣}$$

سعة الاحتمال تصبح

$$\begin{aligned} c_2^{(1)} &= -\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt_1\exp(i\Omega_{20}t_1)V_{20}(t_1) \\ &= \frac{i}{\hbar}E_0\frac{e^{(i\Omega_{20}-\frac{1}{\tau})t}-1}{i\Omega_{20}-\frac{1}{\tau}}\frac{a}{\sqrt{8}}4!(\frac{2}{3})^6. \end{aligned} \tag{١٦١٤}$$

احتمال الانتقال يعطي اذن ب

$$\begin{aligned} P(|100>\longrightarrow|210>) &= \frac{E_0^2}{\hbar^2}|\frac{e^{(i\Omega_{20}-\frac{1}{\tau})t}-1}{i\Omega_{20}-\frac{1}{\tau}}|^2\frac{a^2}{8}(4!)^2(\frac{2}{3})^{12} \\ &= \frac{E_0^2a^2}{\hbar^2}\frac{2^{15}}{3^{10}}\frac{1}{\Omega_{20}^2+\frac{1}{\tau^2}}\big[1+\exp(-2t/\tau)-2\cos\Omega_{20}t\exp(-t/\tau)\big]. \end{aligned} \tag{١٦١٥}$$

**تمرين** 13

1) واضح.

2) الحالات تصبح $|R_{nl}>|Y_{lm}>|s>|s^{'}>$ بدرجة انحلال $4n^2$.

3) واضح.

4)

$$\begin{aligned} H_{\rm hf} &= -\vec{m u}_p.\vec{B}_p \\ &= \frac{\mu_0 e^2 g_p}{8\pi m_p m_e}\frac{1}{r^3}\big[3(\vec{S}_p\hat{r})(\vec{S}_e\hat{r})-\vec{S}_p\vec{S}_e\big]+\frac{\mu_0 e^2 g_p}{3m_p m_e}\vec{S}_p\vec{S}_e\delta^3(\vec{r}). \end{aligned} \quad (١٦١٦)$$

5) التصحيح من الرتبة الاولي

$$\begin{aligned} E^{(1)}_{\rm hf} &= <R_{nl}|<Y_{lm}|<s|<s^{'}|H_{\rm hf}|R_{nl}>|Y_{lm}>|s>|s^{'}> \\ &= \int d^3\vec{r}R^*_{nl}(r)Y^*_{lm}(\theta,\phi)<s|<s^{'}|H_{\rm hf}|s>|s^{'}>Y_{lm}(\theta,\phi)R_{nl}(r). \end{aligned} \quad (١٦١٧)$$

التكامل علي الزوايا من اجل $l=m=0$ هو

$$\int \sin\theta d\theta d\phi Y^*_{lm}(\theta,\phi)<s|<s^{'}|H_{\rm hf}|s>|s^{'}>Y_{lm}(\theta,\phi) \quad = \quad \frac{1}{4\pi}\int\sin\theta d\theta d\phi<s|<s^{'}|H_{\rm hf}|s>|s^{'}>. \quad (١٦١٨)$$

الحد الاول

$$\begin{aligned} &<s|<s^{'}|\frac{1}{4\pi}\int\sin\theta d\theta d\phi\big(3(\vec{S}_p\hat{r})(\vec{S}_e\hat{r})-\vec{S}_p\vec{S}_e\big)|s>|s^{'}>\frac{\mu_0 e^2 g_p}{8\pi m_p m_e} = \\ &<s|<s^{'}|\frac{1}{4\pi}\int\sin\theta d\theta d\phi\big(3\frac{4\pi}{3}\vec{S}_p\vec{S}_e-4\pi\vec{S}_p\vec{S}_e\big)|s>|s^{'}>\frac{\mu_0 e^2 g_p}{8\pi m_p m_e} = \\ &0. \end{aligned} \quad (١٦١٩)$$

6) اذن التصحيح يصبح

$$\begin{aligned} E^{(1)}_{\rm hf} &= \int d^3\vec{r}\psi^*_{nl}(\vec{r})<s|<s^{'}|\frac{\mu_0 e^2 g_p}{3m_p m_e}\vec{S}_e\vec{S}_p\delta^3(\vec{r})|s>|s^{'}>\psi_{nlm}(\vec{r}) \\ &= |\psi_{nl}(0)|^2\frac{\mu_0 e^2 g_p}{3m_p m_e}<s|<s^{'}|\vec{S}_e\vec{S}_p|s>|s^{'}>. \end{aligned} \quad (١٦٢٠)$$

7) لدينا

$$\vec{S}_e\vec{S}_p=\frac{1}{2}((\vec{S}_e+\vec{S}_p)^2-\frac{3\hbar^2}{2}). \quad (١٦٢١)$$

اذن

$$\vec{S}_e\vec{S}_p=\frac{\hbar^2}{2}(-\frac{3}{2})\ ,\ s=0. \quad (١٦٢٢)$$

$$\vec{S}_e\vec{S}_p = \frac{\hbar^2}{2}(\frac{1}{2}) \ , \ s=1. \tag{١٦٢٣}$$

اي

$$E^{(1)}_{\rm hf} = \frac{1}{\pi a^3}\frac{\mu_0 e^2 g_p}{3m_p m_e}\hbar^2(-\frac{3}{4}) \ , \ s=0. \tag{١٦٢٤}$$

$$E^{(1)}_{\rm hf} = \frac{1}{\pi a^3}\frac{\mu_0 e^2 g_p}{3m_p m_e}\hbar^2(\frac{1}{4}) \ , \ s=1. \tag{١٦٢٥}$$

8) **الحالات الذاتية تصبح** $|SM>|Y_{lm}>|R_{nl}>$ **مع** $S=0,1$.

**تمرين** 14 **الهاميلتونية غير المضطربة تعطي ب**

$$H_0 = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2e^2}{r_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2e^2}{r_2}. \tag{١٦٢٦}$$

**الاضطراب يعطي ب**

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}. \tag{١٦٢٧}$$

**الطاقة غير المضطربة للحالة الاساسية لذرة الهيليوم تاخذ الشكل**

$$E_1 = E_1^{(1)} + E_1^{(2)}. \tag{١٦٢٨}$$

**من اجل ذرة الهيدروجين** $E_1^{(1)} \propto (e^2)^2$. **اذن من اجل ذرة الهيليوم غير المضطربة يجب ان يكون لدينا** $E_1^{(1)} \propto (Ze^2)^2$. **بالتالي فان طاقات بور لذرة الهيليوم هي**

$$\mathcal{E}_n = \frac{Z^2E_1}{n^2} \ , \ E_1 = -\frac{m}{2\hbar^2}(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0})^2. \tag{١٦٢٩}$$

**اي ان المستوي الاساسي لذرة الهيليوم له طاقة**

$$\mathcal{E}_1 = Z^2E_1 + Z^2E_1 = 8E_1. \tag{١٦٣٠}$$

**الحالة الاساسية لذرة الهيدروجين**

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{a^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-r/a) \ , \ a = \frac{\hbar}{\sqrt{-2mE_1}}. \tag{١٦٣١}$$

**اذن الحالة الاساسية لذرة الهيليوم نحصل عليها بالتعويض** $E_1 \longrightarrow Z^2E_1$ **او** $a \longrightarrow a/Z$ **و بالتالي نحصل علي**

$$\psi_{100}(r) = \frac{Z^{3/2}}{a^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-Zr/a). \tag{١٦٣٢}$$

**الحالة الاساسية الكلية لذرة الهيليوم هي اذن**

$$\psi_{100}(r_1,r_2) = \frac{8}{\pi a^3}\exp(-2(r_1+r_2)/a). \tag{١٦٣٣}$$

**التصحيح من الرتبة الاولي**

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1^{(1)} &= <100|V|100> \\ &= \int d^3\vec{r}_1 \int d^3\vec{r}_2 \psi^*_{100}(r_1,r_2)\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\psi_{100}(r_1,r_2) \\ &= (\frac{8}{\pi a^3})^2\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\int \exp(-4r_1/a)I_2(r_1)d^3\vec{r}_1. \quad (١٦٣٤)\end{aligned}$$

**التكامل علي $\vec{r}_2$ يعطي ب**

$$I_2(r_1) = \int d^3\vec{r}_2 \frac{\exp(-4r_2/a)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}. \quad (١٦٣٥)$$

**نختار المحور $z$ في اتجاه الشعاع $\vec{r}_1$. نحصل علي**

$$\begin{aligned}I_2(r_1) &= -\int r_2^2 dr_2 d\cos\theta_2 d\phi_2 \frac{\exp(-4r_2/a)}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta_2}} \\ &= \frac{2\pi}{r_1}\int_0^\infty \exp(-4r_2/a)r_2dr_2\big(r_1+r_2-|r_1-r_2|\big) \\ &= \frac{\pi a^3}{8r_1}\big(1-(1+2r_1/a)\exp(-4r_1/a)\big). \quad (١٦٣٦)\end{aligned}$$

**اذن التصحيح الطاقوي يصبح**

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1^{(1)} &= (\frac{8}{\pi a^3})\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\int \exp(-4r_1/a)\frac{1}{r_1}\big(1-(1+2r_1/a)\exp(-4r_1/a)\big)d^3\vec{r}_1 \\ &= \frac{5e^2}{16\pi\epsilon_0 a} \\ &= -\frac{5E_1}{2}. \quad (١٦٣٧)\end{aligned}$$

**طاقة الحالة الاساسية لذرة الهيليوم تصبح**

$$\mathcal{E}_1 = 8E_1 - \frac{5E_1}{2} = \frac{11}{2}E_1 = -74.8eV. \quad (١٦٣٨)$$

**تمرين** 15 **القوة منتظمة و بالتالي فان الكمون يعطي ب**

$$V = -F_0\exp(-t/\tau)x. \quad (١٦٣٩)$$

**الحالة الابتدائية**

$$|i>=|0>. \quad (١٦٤٠)$$

**احتمال الانتقال**

$$P_{0\longrightarrow n} = |c_n^{(0)}+c_n^{(1)}+...|^2. \quad (١٦٤١)$$

$$c_n^{(0)} = \delta_{n0} = 0. \quad (١٦٤٢)$$

$$c_n^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt_1 \exp(i\Omega_{n0}t_1)V_{n0}(t_1). \quad (١٦٤٣)$$

نحسب

$$V_{n0} =< n|V|0 >= -F_0 \exp(-t/\tau)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\Omega}}\delta_{n1}. \quad (١٦٤٤)$$

اذن

$$c_n^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}(-F_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\Omega}}\delta_{n1})\frac{\exp(i\Omega_{n0} - 1/\tau)t - 1}{i\Omega_{n0} - 1/\tau}. \quad (١٦٤٥)$$

من اجل $n \neq 1$ الاحتمال ينعدم. من اجل $n = 1$ الاحتمال يعطي ب (مع $\Omega_{10} = \Omega$ )

$$P_{0\longrightarrow n} = \frac{F_0^2}{2m\hbar\Omega}\frac{1}{\Omega^2 + 1/\tau^2}\big[1 + \exp(-2t/\tau) - 2\cos\Omega t \exp(-t/\tau)\big]. \quad (١٦٤٦)$$

من اجل $\tau \longrightarrow \infty$ لدينا

$$P_{0\longrightarrow n} = \frac{F_0^2}{2m\hbar\Omega}\frac{1}{\Omega^2}. \quad (١٦٤٧)$$

### تمرين 16

1) المستويات الطاقوية و دوالها الموجية

$$E_{n_xn_yn_z} = E(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)\ ,\ \psi_{n_xn_yn_z} = (2/a)^{3/2}\sin n_x\pi x/a \sin n_y\pi y/a \sin n_z\pi z/a. \quad (١٦٤٨)$$

2) الحالة الاساسية

$$E_{111} = 3E\ ,\ \psi_{111} = (2/a)^{3/2}\sin \pi x/a \sin \pi y/a \sin \pi z/a. \quad (١٦٤٩)$$

التصحيح من الرتبة الاولي للحالة الاساسية

$$\begin{aligned} E_{111}^{(1)} &= < \psi_{111}|H^1|\psi_{111} > \\ &= V_0(2/a)^{3/2}\int_0^{a/2} dx(\sin\pi x/a)^2 \int_0^{a/2} dy(\sin\pi y/a)^2 \int_0^{a/2} dz(\sin\pi z/a)^2 \\ &= \frac{V_0}{4} \quad (١٦٥٠) \end{aligned}$$

3) الحالات المثارة الاولي

$$E_{211} = E_{121} = E_{112} = 6E\ ,\ \psi_{211} = \psi_1\ ,\ \psi_{121} = \psi_2\ ,\ \psi_{112} = \psi. \quad (١٦٥١)$$

مصفوفة التصادم

$$W_{ab} =< \psi_a|H^1|\psi_b > . \quad (١٦٥٢)$$

نحسب

$$W_{11} = W_{22} = W_{33} = V_0/4\ ,\ W_{13} = W_{23} = W_{31} = W_{32} = 0. \quad (١٦٥٣)$$

$$W_{12} = W_{21} = V_0 K/4 \ , \ K = (8/3\pi)^2. \quad (١٦٥٤)$$

مصفوفة التصادم تعطي صراحة ب

$$W = \frac{V_0}{4} \begin{pmatrix} 1 & K & 0 \\ K & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (١٦٥٥)$$

القيم الذاتية نحصل عليها من المعادلة المميزة

$$(1-\lambda)((1-\lambda)^2 - K^2) = 0. \quad (١٦٥٦)$$

نحصل علي

$$\lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = 1 + K \ , \ \lambda_3 = 1 - K. \quad (١٦٥٧)$$

# نظرية التصادم

## نظرية التصادم الكلاسيكية

### المسائل المركزية

ليكن $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ شعاعي الموضع لكتلتين نقطتين $m_1$ و $m_2$ تتفاعلان فيما بينهما عبر قوة ناجمة عن الطاقة الكامنة $U = U(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ حيث $\vec{r}$ هو شعاع الموضع النسبي المعرف ب $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. يمكن ان نبين ان حركة هذين الجسمين حول مركز ثقلهما يمكن اختزالها الي حركة جسيم واحد كتلته $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ حول مركز الثقل الذي يتواجد عند النقطة ذات شعاع الموضع $\vec{R} = (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)/(m_1 + m_2)$. الكتلة $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ تسمي بالكتلة المختزلة. هذه النتائج تترتب من المعادلة

$$\frac{1}{2}(m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2}) = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{\vec{R}} + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^{2}. \quad (١٦٥٨)$$

نعتبر اذن حركة جسيم واحد كتلته $m$ تحت تأثير قوة منحفظة اي مشتقة من كمون $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ حيث ان الكمون $V$ لا يتعلق الا بالمسافة القطرية $r$. هذه مسألة مركزية [١٥٧] لان القوة تقع بمحاذاة الشعاع $\vec{r}$ و لا تتعلق الا بطويلة هذا الشعاع. من الواضح ان هذه المسألة متناظرة كروية وبالتالي فان العزم الحركي $\vec{L} = \vec{r}x\vec{p}$ يجب ان يكون منحفظا و هذا الامر يمكن التحقق منه مباشرة عن طريق حساب المشتقة بالنسبة للزمن $d\vec{L}/dt$. هذا يعني ايضا ان $\vec{r}$ هو شعاع عمودي علي اتجاه $\vec{L}$ الذي هو اتجاه ثابت في الفضاء و بالتالي فان الحركة تقع في المستوي. الطاقة الحركية تعطي ب

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{2} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2). \quad (١٦٥٩)$$

اللاغرانجية تعطي اذن ب

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r). \quad (١٦٦٠)$$

معادلة لاغرانج الاولي

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0. \quad (١٦٦١)$$

[١٥٧] central problem.

بعبارة اخري

$$mr^2\dot{\theta} = l. \quad (١٦٦٢)$$

العدد $l$ هو طويلة العزم الحركي. ليس من الصعب ان نري ان $r^2\dot{\theta}/2$ هي السرعة السطحية اي المساحة التي يمسحها الشعاع $\vec{r}$ في وحدة الزمن. اذن انحفاظ العزم الحركي هو مكافئ لقانون كيبلر [١٥٨] الثاني الذي ينص علي ان الشعاع $\vec{r}$ يمسح مساحات متساوية في ازمنة متساوية.

معادلة لاغرانج الثانية

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0 \Leftrightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -\frac{\partial V}{\partial r} = f(r). \quad (١٦٦٣)$$

لان القوة منحفظة فان الطاقة الكلية يجب ان تكون محفوظة. هذا يمكن رؤيته كالتالي. اولا نكتب معادلة الحركة اعلاه كالتالي

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \\ &= \frac{l^2}{mr^3} - \frac{dV}{dr} \\ &= -\frac{d}{dr}(\frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V). \end{aligned} \quad (١٦٦٤)$$

بالضرب في $\dot{r}$ نحصل علي

$$m\dot{r}\ddot{r} = -\frac{dr}{dt}\frac{d}{dr}(\frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V). \quad (١٦٦٥)$$

مكافئ لهذه المعادلة المعادلة

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V\right) = 0. \quad (١٦٦٦)$$

المقدار بين القوسين هو بالضبط الطاقة الكلية للجملة و واضح تماما انها محفوظة. نكتب

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V. \quad (١٦٦٧)$$

الحل من اجل $\dot{r}$ يعطي

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}. \quad (١٦٦٨)$$

اذن

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}. \quad (١٦٦٩)$$

[١٥٨] Kepler.

بمكاملة كلا الطرفين من $t=0$ حيث $r(0)=r_0$ الي $t$ حيث $r(t)=r$ نحصل علي

$$t=\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\Big(E-V-\frac{l^2}{2mr^2}\Big)}}. \tag{١٦٧٠}$$

هذا يعطي $t=t(r)$. عن طريق قلب هذه المعادلة نحصل علي $r=r(t)$. الزاوية $\theta$ يمكن اذن الحصول عليها من

$$d\theta=\frac{ldt}{mr^2(t)}. \tag{١٦٧١}$$

بالمكاملة من $t=0$ حيث $\theta(0)=\theta_0$ الي $t$ حيث $\theta(t)=\theta$ نحصل علي

$$\theta=\int_0^t\frac{ldt}{mr^2(t)}+\theta_0. \tag{١٦٧٢}$$

معادلة المدار $r=r(\theta)$ يمكن الحصول عليها كالتالي. انطلاقا من معادلة الحركة $(1662)$ لدينا

$$mr^2d\theta=ldt. \tag{١٦٧٣}$$

بوضع هذه المعادلة في $(1669)$ نحصل علي

$$d\theta=\frac{ldr}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}\Big(E-V-\frac{l^2}{2mr^2}\Big)}}. \tag{١٦٧٤}$$

بالمكاملة من $r_0$ حيث $\theta(r_0)=\theta_0$ الي $r$ حيث $\theta(r)=\theta$ نحصل علي

$$\begin{aligned}\theta &= \int_{r_0}^{r}\frac{ldr}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}\Big(E-V-\frac{l^2}{2mr^2}\Big)}}+\theta_0\\ &= \int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2m(E-V)}{l^2}-\frac{1}{r^2}}}+\theta_0.\end{aligned} \tag{١٦٧٥}$$

من اجل قانون التربيع العكسي

$$V=-\frac{k}{r}\ ,\ f=-\frac{k}{r^2}. \tag{١٦٧٦}$$

نعتبر ايضا التكامل غير المحدد (مع $u=1/r$ )

$$\begin{aligned}\theta &= \int\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2m(E-V)}{l^2}-\frac{1}{r^2}}}\\ &= -\int\frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2}+\frac{2mku}{l^2}-u^2}}.\end{aligned} \tag{١٦٧٧}$$

نستعمل العلاقة

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos - \frac{\beta+2\gamma x}{\sqrt{q}} \ , \ q=\beta^2-4\alpha\gamma. \qquad (١٦٧٨)$$

اذن نحصل ( مع ثابت تكامل $\theta^{'}$ ) علي

$$\theta \ = \ -\arccos \frac{\frac{l^2 u}{mk}-1}{\sqrt{1+\frac{2l^2E}{mk^2}}} + \theta^{'}. \qquad (١٦٧٩)$$

اي اننا نحصل علي

$$\frac{1}{r} = C(1+e\cos(\theta-\theta^{'})) \ , \ C=\frac{mk}{l^2} \ , \ e=\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}. \qquad (١٦٨٠)$$

المدار هو اذن مقطع مخروطي حيث ان احد المحرقين او البؤرتين تقع في نقطة المبدأ و $e$ هي الاختلاف المركزي [١٥٩] . طبيعة المدار هي كالتالي

$$\begin{aligned} e>1 \Leftrightarrow E>0 &\ : \ \text{hyperbola} \\ e=1 \Leftrightarrow E=0 &\ : \ \text{parabola} \\ e<1 \Leftrightarrow E<0 &\ : \ \text{ellipse} \\ e=0 \Leftrightarrow E=-\frac{mk^2}{2l^2} &\ : \ \text{circle}. \end{aligned} \qquad (١٦٨١)$$

## المقطع الفعال التفاضلي

نعتبر شعاع منتظم من الجسيمات التي لها نفس الكتلة و نفس الطاقة واردة علي مركز قوة. نفترض ان القوة تنعدم في اللانهاية و بالتالي فان مسار الجسيمات الواردة لما تكون بعيدة عن مركز القوة هو خط مستقيم. هذا المسار ينحرف عن مسار الورود المستقيم لما تقترب الجسيمات من مركز القوة و بعد المرور علي مركز القوة يستقيم المسار شيئا فشيئا الي ان يصبح خط مستقيم في اللانهاية معطي بالضبط بمسار الجسيمات الواردة. زاوية التصادم [١٦٠] هي الزاوية بين محور الورود و محور الصدور.

نعرف محور الحضيض [١٦١] علي انه المحور الذي يمر عبر مركز القوة و عبر النقطة علي المسار الاقرب مسافة من مركز القوة. لتكن $\Psi$ الزاوية بين محور الورود و محور الحضيض. لان المسار متناظر حول محور الحضيض يجب ان يكون لدينا

$$\Theta = \pi - 2\Psi. \qquad (١٦٨٢)$$

المسافة العمودية $b$ بين محور الورود و مركز القوة تسمي وسيط الصدمة [١٦٢] . هذا الوسيط يعوض العزم الحركي $l$ للجسيمات الواردة لان

$$l = mv_0 b = b\sqrt{2mE}. \qquad (١٦٨٣)$$

[١٥٩] eccentricity.
[١٦٠] scattering angle.
[١٦١] periapsis.
[١٦٢] impact parameter.

من الواضح ان الجسيمات الواردة ضمن مقطع مساحي متناه في الصغر $d\sigma$ سوف تنتثر [١٦٣] داخل زاوية صلبة $d\Omega$.
معامل التناسب يسمي المقطع الفعال التفاضلي [١٦٤] و يعرف ب

$$D(\Omega)=\frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (١٦٨٤)$$

المعني الفيزيائي ل $D(\Omega)$ هو كالتالي. ليكن $I$ شدة او اضاءة الشعاع الوارد اي عدد الجسيمات الواردة في وحدة المساحة العمودية للشعاع في وحدة الزمن. عدد الجسيمات التي تعبر المساحة $d\sigma$ في وحدة الزمن هي بالتالي $dN=Id\sigma=ID(\Omega)d\Omega$. بعبارة اخري

$$D(\Omega)=\frac{1}{I}\frac{dN}{d\Omega}. \quad (١٦٨٥)$$

هذا يعني ان $ID(\Omega)d\Omega$ هو عدد الجسيمات المنتثرة داخل الزاوية الصلبة $d\Omega$ في وحدة الزمن. هذا يجب ان يكون مقدارا موجبا. من اجل الكمونات المركزية لدينا تناظر كامل حول محور الورود. اذن يمكن ان نكتب $d\sigma=2\pi bdb$ و $d\Omega=2\pi\sin\Theta d\Theta$. نحصل علي المقطع الفعال التفاضلي

$$D(\Theta)=\frac{b}{\sin\Theta}|\frac{db}{d\Theta}|. \quad (١٦٨٦)$$

لان $\Theta$ تتناقص لما يتزايد $b$ فان المشتقة $db/d\Theta$ هي سالبة و بالتالي اخذنا القيمة المطلقة للحفاظ علي ايجابية $D(\Theta)$. المقطع الفعال الكلي هو اذن

$$\sigma=\int D(\Theta)d\Omega. \quad (١٦٨٧)$$

## تصادم رذرفورد

كمثال علي تصادم الجسيمات بواسطة مركز قوة نأخذ حالة قوة كولون المتنافرة بين شحنة مثبتة $q_1=-Ze$ و شحنة $q_2=-Z'e$. اذن

$$k=-\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (١٦٨٨)$$

من اجل مسائل التصادم الطاقة $E$ تكون موجبة و بالتالي $e>1$. باختيار $\theta'=\pi$ في (1680) فان محور الحضيض يصبح موافق ل $\theta=0$ لان ذلك يعطي اصغر قيمة ل $r$. المدار يصبح

$$\frac{1}{r}=\frac{mq_1q_2}{4\pi\epsilon_0 l^2}(e\cos\theta-1). \quad (١٦٨٩)$$

معامل الاختلاف المركزي يصبح

$$e=\sqrt{1+\left(\frac{8\pi\epsilon_0 Eb}{q_1q_2}\right)^2}. \quad (١٦٩٠)$$

---

[١٦٣] scatter.
[١٦٤] differential cross section.

اتجاه الجسيمات الواردة يقابل $\Psi = \theta$ لما $r \longrightarrow \infty$. بعبارة اخري

$$\cos\Psi = \frac{1}{e}. \quad (١٦٩١)$$

او بالمقابل

$$\sin\frac{\Theta}{2} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow \cot\frac{\Theta}{2} = \sqrt{e^2-1} = \frac{8\pi\epsilon_0 Eb}{q_1q_2}. \quad (١٦٩٢)$$

بعبارة اخري

$$b = \frac{q_1q_2}{8\pi\epsilon_0 E}\cot\frac{\Theta}{2}. \quad (١٦٩٣)$$

المقطع الفعال التفاضلي هو اذن

$$D(\Omega) = \frac{1}{4}\left(\frac{q_1q_2}{8\pi\epsilon_0 E}\right)^2\frac{1}{\sin^4\frac{\Theta}{2}}. \quad (١٦٩٤)$$

المقطع الفعال الكلي $\sigma = \int d\Omega D(\Omega)$ هو غير متناه. هذا راجع الي كون مدي التفاعلات الكهرومغناكيسية غير منته.

# نظرية التصادم الكمومية

## معادلة ليبمان - شوينغر

نعتبر معادلة شرودينغر غير المتعلقة بالزمن المعطاة ب

$$(H_0+V)|\psi>=E|\psi>. \quad (١٦٩٥)$$

الهاميلتونية $H_0$ هي مؤثر الطاقة الحركية اي

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m}. \quad (١٦٩٦)$$

نفترض ان اطياف $H_0$ و $H_0+V$ هي اطياف مستمرة. ليكن $|\phi>$ الشعاع الذاتي ل $H_0$ المرفق بالطاقة الذاتية $E$ اي

$$H_0|\phi>=E|\phi>. \quad (١٦٩٧)$$

الهدف هو ايجاد حل $|\psi>$ ل $(1695)$ مرفق بنفس قيمة الطاقة $E$ بحيث $|\psi>\longrightarrow|\phi>$ لما $V\longrightarrow 0$. هذا يوافق التصادم المرن لانه لا يقع اي تغيير لقيمة الطاقة. معادلة شرودينغر $(1695)$ تأخذ الشكل

$$(E-H_0)|\psi>=(E-H_0)|\phi>+V|\psi>. \quad (١٦٩٨)$$

لدينا اذن الحل المنهجي

$$|\psi>=|\phi>+\frac{1}{E-H_0}V|\psi>. \quad (١٦٩٩)$$

حتي نحصل علي حل ذي معني يجب ان نتبني وصفة فايمان. نجعل $E$ مركب قليلا. نحصل علي

$$|\psi^{\pm}>=|\phi>+\frac{1}{E-H_0\pm i\epsilon}V|\psi^{\pm}>. \quad (١٧٠٠)$$

هذه هي معادلة ليبمان ـ شوينغر [١٦٥]. في اساس الموضع لدينا

$$\begin{aligned}<\vec{x}|\psi^{\pm}> &= <\vec{x}|\phi>+<\vec{x}|\frac{1}{E-H_0\pm i\epsilon}V|\psi^{\pm}> \\ &= <\vec{x}|\phi>+\int d^3x^{'}<\vec{x}|\frac{1}{E-H_0\pm i\epsilon}|\vec{x}^{'}><\vec{x}^{'}|V|\psi^{\pm}>. \quad (١٧٠١)\end{aligned}$$

اذن يجب حساب نواة هذا التكامل المعطاة ب

$$\begin{aligned}G_{\pm}(\vec{x},\vec{x}^{'}) &= \frac{\hbar^2}{2m}<\vec{x}|\frac{1}{E-H_0\pm i\epsilon}|\vec{x}^{'}> \\ &= \frac{\hbar^2}{2m}\int d^3\vec{p}^{'}\int d^3\vec{p}^{''}<\vec{x}|\vec{p}^{'}><\vec{p}^{'}|\frac{1}{E-H_0\pm i\epsilon}|\vec{p}^{''}><\vec{p}^{''}|\vec{x}^{'}>. \quad (١٧٠٢)\end{aligned}$$

نستعمل النتائج

$$<\vec{x}|\vec{p}^{'}>=\frac{e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}^{'}\vec{x}}}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\ ,\ <\vec{p}^{''}|\vec{x}^{'}>=\frac{e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}^{''}\vec{x}^{'}}}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}. \quad (١٧٠٣)$$

$$<\vec{p}^{'}|\frac{1}{E-H_0\pm i\epsilon}|\vec{p}^{''}>=\frac{\delta^3(\vec{p}^{'}-\vec{p}^{''})}{E-\frac{\vec{p}^{'2}}{2m}\pm i\epsilon}. \quad (١٧٠٤)$$

اذن ( مع $E=\hbar^2k^2/(2m)$، $\vec{p}^{'}=\hbar\vec{q}$ و $\vec{R}=\vec{x}-\vec{x}^{'}$ )

$$\begin{aligned}G_{\pm}(\vec{x},\vec{x}^{'}) &= \frac{\hbar^2}{2m}\int\frac{d^3\vec{p}^{'}}{(2\pi\hbar)^3}\frac{e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}^{'}(\vec{x}-\vec{x}^{'})}}{E-\frac{\vec{p}^{'2}}{2m}\pm i\epsilon} \\ &= \int\frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\vec{q}\vec{R}}}{k^2-q^2\pm i\epsilon}. \quad (١٧٠٥)\end{aligned}$$

من هذه المعادلة من الواضح ان $G_{\pm}(\vec{x},\vec{x}^{'})$ يحل معادلة هلمولتز [١٦٦] بمنبع معطي بدالة دلتا [١٦٧] اي

$$(\vec{\nabla}^2+k^2)G_{\pm}(\vec{x},\vec{x}^{'}) = \delta^3(\vec{x}-\vec{x}^{'}). \quad (١٧٠٦)$$

الدالة $G_{\pm}(\vec{x},\vec{x}^{'})$ هي دالة غرين [١٦٨] خاصة معادلة هلمولتز. هذه الدالة تقيس التجاوب مع المنبع المعطي بدالة دلتا.

---

[١٦٥] Lippmann – Schwinger equation.

[١٦٦] Helmoltz equation.

[١٦٧] delta function.

[١٦٨] Green's function.

الشعاع $\vec{R}$ ثابت. يمكن ان نختار المحور $z$ بمحاذاة الشعاع $\vec{R}$. اذن نحصل علي

$$\begin{aligned} G_{\pm}(\vec{x},\vec{x}^{'}) &= \int \frac{q^2\sin\theta dq d\theta d\phi}{(2\pi)^3}\frac{e^{iqR\cos\theta}}{k^2-q^2\pm i\epsilon} \\ &= \frac{i}{8\pi^2 R}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{qe^{-iqR}dq}{k^2-q^2\pm i\epsilon}-\frac{qe^{iqR}dq}{k^2-q^2\pm i\epsilon}\right] \\ &= \frac{i}{8\pi^2 R}(-I_2+I_1). \end{aligned} \quad (١٧٠٧)$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{qe^{iqR}dq}{-k^2+q^2\mp i\epsilon}. \quad (١٧٠٨)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{qe^{-iqR}dq}{-k^2+q^2\mp i\epsilon}. \quad (١٧٠٩)$$

يعطي القطبين بالشرط $q_{\pm}^2=k^2\pm i\epsilon$. من اجل $G_+$ يقع القطبين عند $q_{\pm}=\pm(k+i\epsilon^{'})$ بينما من اجل $G_-$ يقع القطبين عند $q_{\pm}=\pm(k-i\epsilon^{'})$.

سوف نحسب هذين التكاملين باستعمال صيغة كوشي التكاملية [١٦٩] المعطاة بالمعادلة

$$\oint\frac{f(z)dz}{z-z_0}=2\pi i f(z_0). \quad (١٧١٠)$$

اذن نحتاج ان نغلق محيط التكامل [١٧٠] بدون تغيير قيمة التكامل. المعامل الاسي $e^{iqR}$ الذي يظهر في $I_1$ يقترب من الصفر اذا كانت $q$ علي نصف دائرة ذات نصف قطر غير منته في النصف الاعلي من المستوي المركب. اذن نغلق محيط التكامل خاصة $I_1$ باضافة نصف دائرة في اللانهاية في النصف الاعلي من المستوي المركب. من اجل $G_+$ فان القطب $(k+i\epsilon^{'})$ هو الذي يقع داخل محيط التكامل بينما من اجل $G_-$ فان القطب $-(k-i\epsilon^{'})$ هو الذي يقع داخل محيط التكامل. اذن نحصل (مع $f(z)=ze^{izR}/(z+z_0)$ و $z_0=\pm(k\pm i\epsilon^{'})$) علي

$$I_1 = 2\pi i f(z_0)=2\pi i(\frac{1}{2}e^{iz_0R})=\pi i e^{\pm ikR}. \quad (١٧١١)$$

بالمثل نغلق محيط التكامل خاصة $I_2$ باضافة نصف دائرة في اللانهاية في النصف الاسفل من المستوي المركب. من اجل $G_+$ فان القطب $-(k+i\epsilon^{'})$ هو الذي يقع داخل محيط التكامل بينما من اجل $G_-$ فان القطب $(k-i\epsilon^{'})$ هو الذي يقع داخل محيط التكامل. اذن نحصل علي (مع $f(z)=ze^{-izR}/(z+z_0)$ و $z_0=\mp(k\pm i\epsilon^{'})$ )

$$I_2 = -2\pi i f(z_0)=-2\pi i(\frac{1}{2}e^{-iz_0R})=-\pi i e^{\pm ikR}. \quad (١٧١٢)$$

اشارة الناقص تنجم عن اتجاهنا في اتجاه عقارب الساعة. نحصل اخيرا علي دالة غرين

$$G_{\pm}(\vec{x},\vec{x}^{'}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm ikR}}{R}. \quad (١٧١٣)$$

[١٦٩] Cauchy′sintegral formula.
[١٧٠] contour of integration.

تصبح معادلة ليبمان ـ شوينغر في اساس الموضع معطاة ب

$$< \vec{x}|\psi^{\pm} > \;=\; < \vec{x}|\phi > -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\int d^3x^{'}\frac{e^{\pm ik|\vec{x}-\vec{x}^{'}|}}{|\vec{x}-\vec{x}^{'}|} < \vec{x}^{'}|V|\psi^{\pm} > . \qquad (١٧١٤)$$

من اجل الكمونات الموضعية [١٧١] لدينا $< \vec{x}^{'}|V|\psi^{\pm} >= V(\vec{x}^{'}) < \vec{x}^{'}|\psi^{\pm} >$ و بالتالي

$$< \vec{x}|\psi^{\pm} > \;=\; < \vec{x}|\phi > -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3x^{'}\frac{e^{\pm ik|\vec{x}-\vec{x}^{'}|}}{|\vec{x}-\vec{x}^{'}|}V(\vec{x}^{'}) < \vec{x}^{'}|\psi^{\pm} > \qquad (١٧١٥)$$

الشعاع $\vec{x}$ يعرف نقطة الملاحظة $P$ اين نضع الكاشف [١٧٢]. من اجل كمون ذو مدي منته فان جزء صغير فقط من الفضاء يعطي مشاركة غير منعدمة في التكامل علي $\vec{x}^{'}$. في مسائل التصادم نقطة الملاحظة $P$ تكون عموما بعيدة خارج مدي الكمون لانه لا يمكننا وضع الكاشف بالقرب من مركز التصادم. اذن يجب ان يكون لدينا $|\vec{x}| >> |\vec{x}^{'}|$. بالتالي (مع $|\vec{x}| = r$، $|\vec{x}^{'}| = r^{'}$، $\hat{r} = \vec{x}/|\vec{x}|$ و $\alpha$ هي الزاوية بين $\vec{x}$ و $\vec{x}^{'}$)

$$\begin{aligned} |\vec{x}-\vec{x}^{'}| &= \sqrt{r^2+r^{'2}-2rr^{'}\cos\alpha} \\ &= r\sqrt{1+\frac{r^{'2}}{r^2}-2\frac{\vec{x}^{'}\hat{r}}{r}} \\ &= r-\vec{x}^{'}\hat{r}+O(\frac{1}{r}). \qquad (١٧١٦) \end{aligned}$$

اذن

$$\frac{e^{\pm ik|\vec{x}-\vec{x}^{'}|}}{|\vec{x}-\vec{x}^{'}|} \simeq \frac{e^{\pm ikr}e^{\mp i\vec{k}^{'}\vec{x}^{'}}}{r} \;,\; \vec{k}^{'} = k\hat{r}. \qquad (١٧١٧)$$

الشعاع $\hbar\vec{k}^{'}$ هو كمية حركة الجسيمات المنتشرة التي تصل الي نقطة الملاحظة $P$. كمية حركة الجسيمات الواردة هي $\vec{p}_i = \hbar\vec{k}$ و شعاع الحالة المرافق هو $|\phi >= |\vec{k} >$. يجب اذن ان يكون لدينا

$$< \vec{x}|\phi >=< \vec{x}|\vec{k} >= \frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (١٧١٨)$$

اذن من اجل المسافات الكبيرة $r$ معادلة ليبمان ـ شوينغر تصبح

$$< \vec{x}|\psi_{\pm} >= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\Big[e^{i\vec{k}\vec{x}}+\frac{e^{\pm ikr}}{r}f(\vec{k}^{'},\vec{k})\Big]. \qquad (١٧١٩)$$

$$f(\vec{k}^{'},\vec{k}) = -\frac{m}{\hbar^2}\sqrt{2\pi}\int d^3x^{'}e^{\mp i\vec{k}^{'}\vec{x}^{'}}V(\vec{x}^{'}) < \vec{x}^{'}|\psi^{\pm} > . \qquad (١٧٢٠)$$

اذن التعلق الفضائي للحل الموجب (السالب) من اجل $r$ كبير يعطي بمجموع الموجة المستوية الواردة و الموجة الكروية الصادرة (الواردة) التي يتسبب فيها

[١٧١] local potentials.
[١٧٢] detector.

مركز التصادم. في اغلب تجارب التصادم فان الحل الموجب هو المحقق في الواقع. في ما تبقي لنا سنعتبر فقط الحل الموجب.

لتكن $v_0$ سرعة الشعاع الوارد. احتمال ان يعبر جسيم مقطع مساحي متناه في الصغر $d\sigma$ عمودي لاتجاه الشعاع الوارد خلال زمن $dt$ يعطي ب

$$dP_{\rm incident}=|A|^2(v_0dtd\sigma). \quad (١٧٢١)$$

هذا الاحتمال يجب ان يكون مساو للاحتمال $dP_{\rm scattered}$ في ان ينتثر الجسيم داخل الزاوية الصلبة $d\Omega$ خلال الزمن $dt$. بعبارة اخري $dP_{\rm scattered}$ هو احتمال ان يعبر الجسيم السطح $r^2d\Omega$ خلال زمن $dt$ اي

$$dP_{\rm scattered}=\frac{|A|^2|f|^2}{r^2}(v_0dt\ r^2d\Omega). \quad (١٧٢٢)$$

اذن المقطع الفعال التفاضلي يعطي ب

$$D(\Omega)=\frac{d\sigma}{d\Omega}=|f(\vec{k}^{'},\vec{k})|^2. \quad (١٧٢٣)$$

المعامل $f(\vec{k}^{'},\vec{k})$ الذي يسمي سعة التصادم هو سعة احتمال التصادم في الاتجاه $\Theta$ الذي هو الزاوية بين $\vec{k}$ و $\vec{k}^{'}$.

## تقريب بورن

نعيد كتابة معادلة ليبمان - شوينغر و كذا سعة التصادم علي الشكل

$$<\vec{x}|\psi_+>=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\bigg[e^{i\vec{k}\vec{x}}+\frac{e^{+ikr}}{r}f(k\hat{r},\vec{k})\bigg]. \quad (١٧٢٤)$$

$$f(k\hat{r},\vec{k})=-\frac{m}{\hbar^2}\sqrt{2\pi}\int d^3x^{'}e^{-ik\hat{r}\vec{x}^{'}}V(\vec{x}^{'})<\vec{x}^{'}|\psi^+>. \quad (١٧٢٥)$$

باستعمال معادلة ليبمان - شوينغر تأخذ سعة الاحتمال الشكل

$$f(k\hat{r},\vec{k})=-\frac{m}{\hbar^2}\sqrt{2\pi}\int d^3x^{'}e^{-ik\hat{r}\vec{x}^{'}}V(\vec{x}^{'})\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\bigg(e^{i\vec{k}\vec{x}^{'}}+\frac{e^{+ikr^{'}}}{r^{'}}f(k\hat{r}^{'},\vec{k})\bigg) \quad (١٧٢٦)$$

يتلخص تقريب بورن الاول [١٧٣] في التخلص من الحد الاول بين القوسين اي

$$\begin{aligned} f^{(1)}(k\hat{r},\vec{k}) &= -\frac{m}{\hbar^2}\sqrt{2\pi}\int d^3x^{'}e^{-ik\hat{r}\vec{x}^{'}}V(\vec{x}^{'})\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}e^{i\vec{k}\vec{x}^{'}}\\ &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3x^{'}e^{i(\vec{k}-k\hat{r})\vec{x}^{'}}V(\vec{x}^{'}). \end{aligned} \quad (١٧٢٧)$$

هذا هو تحويل فورييه لكمون التفاعل. كمية الحركة المحولة خلال العملية هي $\hbar\vec{q}$ حيث $\vec{q}=\vec{k}-k\hat{r}$. بدلالة زاوية التصادم $\Theta$ نحسب

$$q=2k\sin\frac{\Theta}{2}. \quad (١٧٢٨)$$

[١٧٣] first Born approximation.

نختار المحور $z$ في اتجاه $\vec{q}$. اذن

$$f^{(1)}(k\hat{r},\vec{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int r^{'2}\sin\theta dr^{'}d\theta d\phi e^{iqr^{'}\cos\theta}V(\vec{x}^{'}). \quad (١٧٢٩)$$

من اجل كمون متناظر كرويا $V(\vec{x}^{'})=V(r^{'})$ لدينا

$$\begin{aligned} f^{(1)}(k\hat{r},\vec{k}) &= \frac{m}{\hbar^2}\int r^{'2}dr^{'}d\cos\theta e^{iqr^{'}\cos\theta}V(r^{'}) \\ &= -\frac{2m}{q\hbar^2}\int r\sin qrV(r)dr. \end{aligned} \quad (١٧٣٠)$$

حتي نفهم طبيعة تصحيحات بورن من الرتبة العليا نعود الي معادلة ليبمان - شوينغر في الشكل (1715). ندخل الترميز $\psi_+(\vec{x})=<\vec{x}|\psi_+>$، $\phi(\vec{x})=<\vec{x}|\phi>$ و

$$G(\vec{x}-\vec{x}^{'}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{+ik|\vec{x}-\vec{x}^{'}|}}{|\vec{x}-\vec{x}^{'}|}. \quad (١٧٣١)$$

معادلة ليبمان - شوينغر تصبح

$$\psi^+(\vec{x}) = \phi(\vec{x})+\int G(\vec{x}-\vec{x}_1)V(\vec{x}_1)\psi^+(\vec{x}_1)d^3x_1. \quad (١٧٣٢)$$

نحصل مباشرة علي السلسلة

$$\begin{aligned} \psi^+ &= \phi(\vec{x})+\int G(\vec{x}-\vec{x}_1)V(\vec{x}_1)\phi(\vec{x}_1)d^3x_1 \\ &+ \int G(\vec{x}-\vec{x}_1)V(\vec{x}_1)G(\vec{x}_1-\vec{x}_2)V(\vec{x}_2)\phi(\vec{x}_2)d^3x_1d^3x_2 \\ &+ \int G(\vec{x}-\vec{x}_1)V(\vec{x}_1)G(\vec{x}_1-\vec{x}_2)V(\vec{x}_2)G(\vec{x}_2-\vec{x}_3)V(\vec{x}_3)\phi(\vec{x}_3)d^3x_1d^3x_2d^3x_3+... \end{aligned} \quad (١٧٣٣)$$

هذا يعرف باسم سلسلة بورن [١٧٤] . في الحد رقم $n$ دالة الموجة الواردة $\phi$ تتفاعل $n$ مرة مع الكمون قبل ان تواصل انتشارها الي اللانهاية عبر دالة غرين $G$. نعبر علي كل تفاعل بدلالة معامل عقدة [١٧٥] يساوي الي الكمون و بين كل تفاعلين متتاليين تنتشر دالة الموجة عن طريق دالة غرين $G$. تعرف اذن دالة غرين بالمنتشر [١٧٦] . اذن يمكن فهم نشر بورن علي انه عبارة عن معاملات عقد $V$ و منتشرات $G$ موصولة فيما بينها لتشكل مخططات تعرف باسم مخططات فايمان [١٧٧].

## مؤثر الانتقال

سعة التصادم هي

$$\begin{aligned} f(k\hat{r},\vec{k}) &= -\frac{m}{\hbar^2}\sqrt{2\pi}\int d^3x^{'}e^{-ik\hat{r}\vec{x}^{'}}V(\vec{x}^{'})<\vec{x}^{'}|\psi^+> \\ &= -\frac{m}{\hbar^2}(2\pi)^2<k\hat{r}|V|\psi^+>. \end{aligned} \quad (١٧٣٤)$$

---

[١٧٤] Born series.
[١٧٥] vertex factor.
[١٧٦] propagator.
[١٧٧] Feynman diagrams.

نعرف مؤثر الانتقال $T$ ب

$$V|\psi^+ >= T|\phi > \; , \; |\phi >= |\vec{k} > . \tag{١٧٣٥}$$

اذن

$$\begin{aligned} f(k\hat{r},\vec{k}) &= -\frac{m}{\hbar^2}\sqrt{2\pi}\int d^3x^{'} e^{-ik\hat{r}\vec{x}^{'}} V(\vec{x}^{'}) < \vec{x}^{'}|\psi^+ > \\ &= -\frac{m}{\hbar^2}(2\pi)^2 < k\hat{r}|T|\vec{k} > . \end{aligned} \tag{١٧٣٦}$$

بضرب معادلة ليبمان - شوينغر ب $V$ نحصل علي

$$V|\psi^+ > \;=\; V|\phi > + V\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}V|\psi^+ > . \tag{١٧٣٧}$$

بعبارة اخري

$$T|\phi > \;=\; V|\phi > + V\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}T|\phi > . \tag{١٧٣٨}$$

لان الاشعة الذاتية لمؤثر كمية الحركة $|\phi >= |\vec{k} >$ هي مكتملة نحصل علي

$$\begin{aligned} T &= V + V\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}T \\ &= V + V\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}V + V\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}V\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}V + ... \end{aligned} \tag{١٧٣٩}$$

# طريقة الانسحابات الطورية

## معادلة شرودينغر في المنطقة $V=0$

نعتبر معادلة شرودينغر في كمون مركزي $V(r)$ ذي مدي منته. الدوال الموجية تأخذ الشكل

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y_l^m(\theta,\phi). \tag{١٧٤٠}$$

المعادلة القطرية بالنسبة ل $u=rR$ تعطي ب

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u = Eu. \tag{١٧٤١}$$

من اجل $r$ كبير، فيما يسمي بمنطقة الاشعاع، يمكن ان نهمل الكمون المركزي و كمون القوة الطاردة المركزية لنحصل علي

$$\frac{d^2u}{dr^2} = -k^2u \; , \; k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \tag{١٧٤٢}$$

اذن

$$u = Ae^{ikr} + Be^{-ikr}. \tag{١٧٤٣}$$

من اجل موجة منتشرة يجب ان يكون لدينا $B=0$. اذن نحصل علي

$$R = A\frac{e^{ikr}}{r}. \quad (١٧٤٤)$$

في المنطقة الوسطي يمكن ان نهمل الكمون المركزي لنحصل علي

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} = -k^2u. \quad (١٧٤٥)$$

الحل العام هو تركيب خطي لدوال بسال [١٧٨] الكروية اي

$$R = Aj_l(kr) + Bn_l(kr). \quad (١٧٤٦)$$

دوال بسال الكروية من الرتبة $l$ هي تعميم للدوال المثلثية جب. هذه الدوال معرفة ب

$$j_l(x) = (-x)^l\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l\frac{\sin x}{x} \;\longrightarrow\; \frac{2^l l!}{(2l+1)!}x^l \;,\; x\longrightarrow 0. \quad (١٧٤٧)$$

دوال نيومن الكروية [١٧٩] من الرتبة $l$ هي تعميم للدوال المثلثية تجب. هذه الدوال تعرف ايضا تحت مسمي دوال بسال من النوع الثاني و هي معرفة ب

$$n_l(x) = -(-x)^l\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l\frac{\cos x}{x} \;\longrightarrow -\frac{(2l)!}{2^l l!}\frac{1}{x^{l+1}} \;,\; x\longrightarrow 0. \quad (١٧٤٨)$$

تعميم الدوال الاسية $e^{\pm ix}$ يعطي بما يسمي دوال هنكل [١٨٠] . دوال هنكل الكروية تعرف ب

$$h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + in_l(x) \longrightarrow \frac{(-i)^{l+1}}{x}e^{ix} \;,\; x\longrightarrow\infty. \quad (١٧٤٩)$$

$$h_l^{(2)}(x) = j_l(x) - in_l(x) \longrightarrow \frac{(i)^{l+1}}{x}e^{-ix} \;,\; x\longrightarrow\infty. \quad (١٧٥٠)$$

الحل العام $R$ يمكن اذن ان يكتب علي شكل تركيب خطي لدوال هنكل الكروية اي

$$R = Ch_l^{(1)}(kr) + Dh_l^{(2)}(kr). \quad (١٧٥١)$$

من التصرف الذي وجدناه من اجل $r$ كبير نري ان $h_l^{(1)}$ يوافق الموجة الكروية الخارجة بينما $h_l^{(2)}$ يوافق الموجة الكروية الداخلة. بعبارة اخري يجب ان يكون لدينا $D=0$. نحصل علي

$$R = Ch_l^{(1)}(kr). \quad (١٧٥٢)$$

دالة الموجة خارج منطقة التصادم اين $V=0$ هي من الشكل

$$\psi(r,\theta,\phi) = A\left[e^{ikz} + \sum_{l,m} C_{lm}h_l^{(1)}(kr)Y_l^m(\theta,\phi)\right]. \quad (١٧٥٣)$$

---

[١٧٨] spherical Bessel functions.

[١٧٩] spherical Neumann functions.

[١٨٠] Hankel functions.

نختار المحور $z$ في اتجاه الشعاع الوارد. الكمون المركزي هو كمون متناظر كرويا و بالتالي فان دالة الموجة لا يمكن ان تتعلق ب $\phi$. بعبارة اخري فقط الحدود $m=0$ تشارك. نذكر

$$Y_l^0(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta). \quad (١٧٥٤)$$

ندخل سعة الموجة الجزئية $a_l$ من الرتبة $l$ بالمعادلة $C_{l0}=i^{l+1}k\sqrt{4\pi(2l+1)}a_l$. نحصل علي

$$\psi(r,\theta) \;=\; A\bigg[e^{ikz}+k\sum_l i^{l+1}(2l+1)a_lh_l^{(1)}(kr)P_l(\cos\theta)\bigg]. \quad (١٧٥٥)$$

من اجل $r$ كبير نحصل علي

$$\psi(r,\theta) \;\longrightarrow\; A\bigg[e^{ikz}+f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\bigg]\;,\; r\longrightarrow\infty. \quad (١٧٥٦)$$

سعة التصادم تعطي بدلالة سعات الامواج الجزئية ب

$$f(\theta)=\sum_l(2l+1)a_lP_l(\cos\theta). \quad (١٧٥٧)$$

يبقي ان نعين سعات الامواج الجزئية عن طريق حل معادلة شرودينغر في منطقة التصادم او التناثر اين $V\neq 0$.

من النقاش اعلاه من الواضح انه لان الموجة الواردة $e^{ikz}$ تحل معادلة شرودينغر من اجل $V=0$ فانها يمكن كتابتها بدلالة دوال بسال الكروية و التوافقيات الكروية. النشر يأخذ الشكل

$$e^{ikz}=\sum_{lm}\bigg(A_{lm}j_l(kr)+B_{lm}n_l(kr)\bigg)Y_l^m(\theta,\phi). \quad (١٧٥٨)$$

دوال نيومان تنفجر عند المبدأ و بالتالي يجب ان يكون لدينا $B_{lm}=0$. بالاضافة الي هذا لان $z=r\cos\theta$ فقط الحدود $m=0$ تشارك. اذن نحصل علي

$$e^{ikz}=\sum_l i^lC_l(2l+1)j_l(kr)P_l(\cos\theta). \quad (١٧٥٩)$$

التعبير التكاملي لدوال بسال يعطي ب

$$j_l(q)=\frac{1}{2i^l}\int_{-1}^{+1}e^{iqx}P_l(x)dx. \quad (١٧٦٠)$$

يمكن استعمال هذه العلاقة لنبين ان $C_l=1$ و بالتالي

$$e^{ikz}=\sum_l i^l(2l+1)j_l(kr)P_l(\cos\theta). \quad (١٧٦١)$$

هذه العلاقة تعرف باسم علاقة رايلي [١٨١].

[١٨١] Rayleigh's formula.

## الامواج المستوية و الكروية

الاشعة الذاتية لهاميلتونية الجسيم الحر $H_0$ هي اشعة حالة الامواج المستوية $|\vec{k}>$ التي تحقق علاقة التعامد و التجانس

$$<\vec{k}^{'}|\vec{k}>=\delta^3(\vec{k}-\vec{k}^{'}). \quad (١٧٦٢)$$

الهاميلتونية $H_0$ تتبادل مع مؤثرات العزم الحركي $L^2$ و $L_3$. اذن الاشعة الذاتية ل $H_0$ يمكن ايضا اخذها الاشعة الذاتية المشتركة ل $H_0$، $L^2$ و $L_3$ التي نرمز لها ب $|Elm>$. هذه هي بالضبط اشعة حالة الامواج الكروية التي تحقق علاقة التعامد و التجانس

$$<E^{'}l^{'}m^{'}|Elm>=\delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta(E-E^{'}). \quad (١٧٦٣)$$

من الواضح ان الدوال الموجية الكروية في فضاء كمية الحركة $<\vec{k}|Elm>$ هي متناسبة مع $\delta(E-\frac{\hbar^2k^2}{2m})$. نكتب

$$<\vec{k}|Elm>=\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\delta(E-\frac{\hbar^2k^2}{2m})X_l^m(k,\hat{k}). \quad (١٧٦٤)$$

نحسب

$$\int d^3\vec{k}<E^{'}l^{'}m^{'}|\vec{k}><\vec{k}|Elm>=\delta(E-E^{'})\int d\Omega X_{l^{'}}^{m^{'}}(k,\hat{k})(X_l^m(k,\hat{k}))^* \quad (١٧٦٥)$$

في المعادلة اعلاه $d\Omega$ هي الزاوية الصلبة الموافقة لشعاع الوحدة $\hat{k}$ و $k$ هو بحيث $k=\sqrt{2mE/\hbar^2}$. يجب ان يكون لدينا

$$\int d\Omega X_{l^{'}}^{m^{'}}(k,\hat{k})(X_l^m(k,\hat{k}))^*=\delta_{l^{'}l}\delta_{m^{'}m}. \quad (١٧٦٦)$$

يعطي الحل مباشرة بالتوافقيات الكروية اي

$$X_l^m(k,\hat{k})=X_l^m(\hat{k})=Y_l^m(\hat{k}). \quad (١٧٦٧)$$

يمكن نشر اشعة حالة الامواج المستوية $|\vec{k}>$ بدلالة اشعة حالة الامواج الكروية $|Elm>$ كالاتي

$$\begin{aligned}|\vec{k}> &= \sum_l\sum_m\int dE|Elm><Elm|\vec{k}>\\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\sum_l\sum_m|Elm>(Y_l^m(\hat{k}))^*\ ,\ E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}.\end{aligned} \quad (١٧٦٨)$$

نحتاج الان ان نحسب

$$<\vec{x}|\vec{k}> = \frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\sum_l\sum_m<\vec{x}|Elm>(Y_l^m(\hat{k}))^*\ ,\ E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}. \quad (١٧٦٩)$$

الدوال الموجية الكروية في فضاء الموضع هي $<\vec{x}|Elm>$. من الفقرة السابقة نعرف ان الامواج الكروية تعطي ب

$$<\vec{x}|Elm>=c_lj_l(kr)Y_l^m(\hat{r}). \quad (١٧٧٠)$$

اذن

$$\frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\sum_l\sum_m c_l j_l(kr)Y_l^m(\hat{r})(Y_l^m(\hat{k}))^* = \frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\frac{1}{4\pi}\sum_l(2l+1)c_l j_l(kr)P_l(\hat{k}\hat{r}). \quad (١٧٧١)$$

استعملنا اعلاه النتيجة

$$\sum_m Y_l^m(\hat{r})(Y_l^m(\hat{k}))^* = \frac{2l+1}{4\pi}P_l(\hat{k}\hat{r}). \quad (١٧٧٢)$$

اذن

$$e^{i\vec{k}\vec{x}} = \frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\sum_l\sum_m c_l j_l(kr)Y_l^m(\hat{r})(Y_l^m(\hat{k}))^* = \hbar\sqrt{\frac{\pi}{2mk}}\sum_l(2l+1)c_l j_l(kr)P_l(\hat{k}\hat{r}). \quad (١٧٧٣)$$

بمقارنة هذه العلاقة مع (1761) نحصل علي

$$c_l = \frac{i^l}{\hbar}\sqrt{\frac{2mk}{\pi}}. \quad (١٧٧٤)$$

في الخلاصة الامواج الكروية في فضاء الموضع و فضاء كمية الحركة تعطي ب

$$<\vec{k}|Elm> = \frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\delta(E-\frac{\hbar^2k^2}{2m})Y_l^m(\hat{k}). \quad (١٧٧٥)$$

$$<\vec{x}|Elm> = \frac{i^l}{\hbar}\sqrt{\frac{2mk}{\pi}}j_l(kr)Y_l^m(\hat{r}). \quad (١٧٧٦)$$

## سعات الامواج الجزئية و الانسحابات الجزئية

نسطلق من سعة التصادم بدلالة مؤثر الانتقال التي تعطي ب

$$f(k\hat{r},\vec{k}) = -\frac{m}{\hbar^2}(2\pi)^2<k\hat{r}|T|\vec{k}> = -\frac{4\pi^2}{k}\sum_{ml}\sum_{m'l'}Y_{l'}^{m'}(\hat{r})(Y_l^m(\hat{k}))^*<El'm'|T|Elm>\ ,\ E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}. \quad (١٧٧٧)$$

المؤثر $T$ يتبادل مع $L^2$ و $L_3$ بسبب التناظر تحت تأثير الدورانات. اذن $T$ هو مؤثر سلمي و منه باستعمال مبرهنة فيجنر - ايكارت [١٨٢] لدينا

$$<El'm'|T|Elm> = T_l(E)\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \quad (١٧٧٨)$$

[١٨٢] Wigner – Eckart theorem.

بالتالي

$$f(k\hat{r},\vec{k}) = -\frac{4\pi^2}{k}\sum_{ml} Y_l^m(\hat{r})(Y_l^m(\hat{k}))^* T_l(E)$$
$$= -\frac{\pi}{k}\sum_l (2l+1)T_l(E)P_l(\hat{k}\hat{r})$$
$$= \sum_l (2l+1)a_l P_l(\hat{k}\hat{r}). \qquad (١٧٧٩)$$

سعة الموجة الجزئية من الرتبة $l$ تعطي ب $a_l$ و هي معرفة ب

$$a_l = -\frac{\pi}{k}T_l(E). \qquad (١٧٨٠)$$

نكتب المعادلة اعلاه علي الشكل

$$f(k\hat{r},\vec{k}) = \sum_l (2l+1)a_l P_l(\cos\theta). \qquad (١٧٨١)$$

نرجع الان الي معادلة ليبمان - شوينغر من اجل $r$ كبير التي تعطي ب

$$<\vec{x}|\psi_+>= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\bigg[e^{i\vec{k}\vec{x}} + \frac{e^{+ikr}}{r}f(k\hat{r},\vec{k})\bigg]. \qquad (١٧٨٢)$$

لقد وجدنا ان

$$e^{i\vec{k}\vec{x}} = \sum_l i^l(2l+1)j_l(kr)P_l(\cos\theta). \qquad (١٧٨٣)$$

ايضا لدينا التصرف

$$j_l(kr) = \frac{1}{2kr}(-i)^{l+1}e^{ikr} + \frac{1}{2kr}i^{l+1}e^{-ikr}\ ,\ r\longrightarrow\infty. \qquad (١٧٨٤)$$

اذن

$$<\vec{x}|\psi_+>= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sum_l (2l+1)\frac{P_l(\cos\theta)}{2ik}\bigg[\frac{e^{ikr}}{r}S_l - \frac{e^{-i(kr-l\pi)}}{r}\bigg]. \qquad (١٧٨٥)$$

$$S_l = 1+2ika_l. \qquad (١٧٨٦)$$

عندما يكون المشتت اي مركز التصادم غائب اي لما $V=0$ فان سعة الموجة الجزئية $a_l$ تنعدم و نحصل علي جمع موجة كروية خارجة و موجة كروية داخلة من اجل كل $l$. تأثير المشتت اذن هو ان يسحب معاملات الموجة الكروية الخارجة كالاتي $1+2ika_l \longrightarrow 1$.

من قانون انحفاظ الاحتمال نعرف ان تدفق الجسيمات الواردة يجب ان يكون مساو لتدفق الجسيمات الخارجة. باستعمال قانون انحفاظ العزم الحركي يجب ان يحدث هذا من اجل كل موجة جزئية علي حدة. هذا يعني ان سعات الامواج الواردة و الامواج الخارجة بنفس قيمة العزم الحركي $l$ يجب ان تكون متساوية اي

$$|S_l| = 1. \qquad (١٧٨٧)$$

هذه العلاقة تعرف باسم علاقة الاحادية [١٨٣] . بعبارة اخري فان الانسحاب في طور الموجة الخارجة ينجم بالضبط من عملية التصادم. الطور $S_l$ هو العنصر القطري رقم $l$ لمصفوفة التصادم $S$ التي يجب ان تكون احادية بسبب قانون انحفاظ الاحتمال. نعرف الانسحاب الطوري $\delta_l$ ب

$$S_l = e^{2i\delta_l}. \quad (١٧٨٨)$$

اذن

$$a_l = e^{i\delta_l}\frac{\sin\delta_l}{k}. \quad (١٧٨٩)$$

انطلاقا من هذه المعادلة نري ان $\mathrm{Re}(ka_l)=\sin 2\delta_l/2$ و $\mathrm{Im}(ka_l)-1/2=-\cos 2\delta_l/2$. اذن $(\mathrm{Re}(ka_l))^2+(\mathrm{Im}(ka_l)-1/2)^2=1/4$. بعبارة اخري $ka_l$ يقع علي دائرة نصف قطرها $1/2$ و مركز $(0,1/2)$ تعرف بالدائرة الاحادية.

اذن نحصل علي

$$f(\theta) = \frac{1}{k}\sum_l(2l+1)e^{i\delta_l}\sin\delta_l P_l(\cos\theta). \quad (١٧٩٠)$$

المقطع الفعال الكلي هو

$$\begin{aligned}\sigma &= \int d\Omega\frac{d\sigma}{d\Omega}\\ &= \int d\Omega|f(\theta)|^2\\ &= \frac{1}{k^2}\sum_{l,l'}(2l+1)(2l^{'}+1)e^{i\delta_l-i\delta_{l'}}\sin\delta_l\sin\delta_{l'}\int d\Omega P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta).\end{aligned} \quad (١٧٩١)$$

نستعمل العلاقة

$$\int d\Omega P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)=\frac{4\pi}{2l+1}\delta_{ll'}. \quad (١٧٩٢)$$

اذن

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_l(2l+1)(\sin\delta_l)^2. \quad (١٧٩٣)$$

نلاحظ ان

$$\mathrm{Im}f(0) = \frac{k}{4\pi}\sigma. \quad (١٧٩٤)$$

هذا يسمي بالمبرهنة الضوئية [١٨٤]

يبقي ان نعين الانسحابات الطورية من اجل كمون معين $V$. مرة اخري نعتبر حالة كمون مركزي ذي مدي منته. هذه المرة نفترض ان الكمون ينعدم من اجل $r>R$ حيث $R$ هو مدي الكمون. من اجل $r>R$ يجب ان يكون لدينا موجة

[١٨٣] unitarity relation.

[١٨٤] optical theorem.

كروية حرة. هذه يجب ان تكتب علي شكل تركيب خطي ل $j_l(kr)P_l(\cos\theta)$ و $n_l(kr)P_l(\cos\theta)$ حيث ان $n_l$ هي الان مشمولة لان المبدأ $r=0$ مستبعد. بالمقابل الموجة الكروية الحرة من اجل $r>R$ يمكن كتابتها علي شكل تركيب خطي ل $h_l^{(1)}(kr)P_l(\cos\theta)$ و $h_l^{(2)}(kr)P_l(\cos\theta)$. بعبارة اخري من اجل $r>R$ يمكن ان نكتب

$$< \vec{x}|\psi_+ > \quad = \quad \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sum_l i^l(2l+1)A_l(kr)P_l(\cos\theta). \qquad (١٧٩٥)$$

$$A_l(kr)=c_l^{(1)}h_l^{(1)}(kr)+c_l^{(2)}h_l^{(2)}(kr). \qquad (١٧٩٦)$$

من اجل $V=0$ هذا يختزل ل (1783). هذه المعادلة مكافئة ل (1755). هذا يمكن تبيانه كالاتي. من اجل $r$ كبير نحصل علي

$$< \vec{x}|\psi_+ >=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sum_l(2l+1)\frac{P_l(\cos\theta)}{2ik}\bigg[\frac{e^{ikr}}{r}2c_l^{(1)}-2c_l^{(2)}\frac{e^{-i(kr-l\pi)}}{r}\bigg]. \qquad (١٧٩٧)$$

بالمقارنة مع (1785) نحصل علي

$$c_l^{(1)}=\frac{1}{2}e^{2i\delta_l}\ ,\ c_l^{(2)}=\frac{1}{2}. \qquad (١٧٩٨)$$

اذن

$$A_l(kr)=j_l(kr)+ika_lh_l^{(1)}(kr). \qquad (١٧٩٩)$$

هذا يمكن ايضا كتابته علي الشكل

$$A_l(kr)=e^{i\delta_l}\bigg[\cos\delta_lj_l(kr)-\sin\delta_ln_l(kr)\bigg]. \qquad (١٨٠٠)$$

نحسب

$$\begin{aligned}\beta_l &= \bigg(\frac{r}{A_l}\frac{dA_l}{dr}\bigg)_{r=R}\\ &= kR\frac{\cos\delta_lj_l^{'}(kR)-\sin\delta_ln_l^{'}(kR)}{\cos\delta_lj_l(kR)-\sin\delta_ln_l(kR)}.\end{aligned} \qquad (١٨٠١)$$

من هذه المعادلة نستنتج

$$\tan\delta_l=\frac{kRj_l^{'}(kR)-\beta_lj_l(kR)}{kRn_l^{'}(kR)-\beta_ln_l(kR)}. \qquad (١٨٠٢)$$

اذن من اجل ايجاد $\delta_l$ نحتاج ان نجد $\beta_l$. هذا الامر يمكن انجازه فقط عن طريق حل معادلة شرودينغر من اجل $r<R$. بعبارة اخري نحتاج ان نعين $A_l^{\rm inside}(r)=u_l(r)/r$ حيث $u$ تحقق المعادلة التفاضلية القطرية و الشرط الحدي المعطيان ب

$$\frac{d^2u_l}{dr^2}+(k^2-\frac{2m}{\hbar^2}V-\frac{l(l+1)}{r^2})u_l=0. \qquad (١٨٠٣)$$

$$u_l(0)=0. \qquad (١٨٠٤)$$

المشتقة الاولي لدالة الموجة يجب ان تكون مستمرة عند $r=R$. اذن يجب ان يكون لدينا

$$\beta_l^{\rm inside}\equiv\bigg(\frac{r}{A_l^{\rm inside}}\frac{dA_l^{\rm inside}}{dr}\bigg)_{r=R}=\beta_l. \qquad (١٨٠٥)$$

# تمارين

**تمرين** 1 تصادم جسيم مع كرة صلبة يعطي بالكمون

$$\begin{aligned} V &= 0\ ,\ r > R \\ &= \infty\ ,\ r < R. \end{aligned}$$

1) عين زاوية التصادم، المقطع الفعال التفاضلي و المقطع الفعال الكلي من اجل تصادم كلاسيكي لجسيم عبر الكمون $V$.

2) احسب التغير في الطور $\delta_l$ من اجل تصادم كمي لجسيم عبر الكمون $V$. تذكر ان دالة الموجة من اجل $r > R$ تعطي ب

$$< \vec{x}|\psi_+ > \quad = \quad \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_l i^l (2l+1) A_l(kr) P_l(\cos\theta).$$

$$A_l(kr) = e^{i\delta_l}\bigg[\cos\delta_l j_l(kr) - \sin\delta_l n_l(kr)\bigg].$$

3) عين التغير في الطور، المقطع الفعال التفاضلي و المقطع الفعال الكلي من اجل الطاقات الصغيرة $kR << 1$. ماذا تستنتج.

4) احسب المقطع الفعال الكلي من اجل الطاقات العليا $kR >> 1$. ماذا تستنتج.

نعطي

$$j_l(x) \longrightarrow \frac{2^l l!}{(2l+1)!} x^l\ ,\ n_l(x) \longrightarrow -\frac{(2l)!}{2^l l!} \frac{1}{x^{l+1}}\ ,\ x \longrightarrow 0.$$

$$j_l(x) \longrightarrow \frac{1}{x}\sin(x - \frac{l\pi}{2})\ ,\ n_l(x) \longrightarrow -\frac{1}{x}\cos(x - \frac{l\pi}{2})\ ,\ x \longrightarrow \infty.$$

**تمرين** 2 نعطي كمون يوكاوا

$$V(r) = \beta\frac{e^{-r}}{r}.$$

1) احسب سعة بورن من الرتبة الاولي.

2) احسب المقطع الفعال التفاضلي.

3) عين من النتيجة السابقة المقطع الفعال التفاضلي من اجل تصادمات كولومب. قارن مع نتيجة رذرفورد الكلاسيكية.

**تمرين** 3 نعتبر تصادم الالكترونات مع ذرات الهيدروجين ( الذي قد يكون مرن او غير مرن) كالاتي:

$$e^- + H(\text{ ground state}) \longrightarrow e^- + H(\text{ excited state}).$$

1) اكتب الحالة الابتدائية $|i>$ قبل التصادم، الحالة النهائية $|f>$ بعد التصادم، سعة بورن من الرتبة الاولي $f^{(1)}$ و كمون التفاعل $V$. اذكر الشروط التي يكون فيها التصادم مرنا و الشروط التي يكون فيها غير مرن.

2) احسب تحويل فورييه لكمون كولومب.

3) احسب عنصر المصفوفة $<\vec{k}' <n|V|\vec{k}> |1>$.

4) احسب سعة بورن من الرتبة الاولي، المقطع الفعال التفاضلي و معامل الشكل من اجل تصادم مرن. نذكر ان دالة موجة ذرة الهيدروجين في الحالة الاساسية هي

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}}.$$

5) احسب المقطع الفعال التفاضلي من اجل تصادم غير مرن انطلاقا من العلاقة

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k'}{k} |f^{(1)}(\vec{k}', n, \vec{k}, 1)|^2.$$

**تمرين** 4 نعتبر تصادم جسيمات عبر كمون دالة ديراك الذي يعطي ب

$$V(r) = \alpha\delta(r-a).$$

سوف نعتبر هنا التصادمات ذات الطاقات المنخفضة اي $ka << 1$ و بالتالي فان الامواج $s$ هي التي تطغي علي التصادم. معادلة شرودينغر المدارية تعطي ب

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u = Eu.$$

دالة الموجة تعطي ب

$$\psi(r,\theta,\phi) = \frac{u(r)}{r} Y_l^m(\theta,\phi).$$

نعتبر فقط التقريب الذي يمكننا فيه وضع $l = 0$ من البدأ.

1) أكتب حل معادلة شرودينغر المدارية من اجل $r < a$.

2) اكتب الحل العام من اجل $r > a$. قارن مع تصرف الحل من اجل اي كمون كروي لما $r \longrightarrow \infty$ الذي يعطي ب

$$\frac{1}{(2\pi)^{1.5}} \sum_l (2l+1) \frac{1}{2ik} \left( \frac{e^{ikr}}{r} S_l + e^{-ikr} r(-1)^{l+1} \right) P_l(\cos\theta).$$

$$S_l = e^{2i\delta_l} = 1 + 2ika_l.$$

أستخرج عبارة للموجة الجزئية $a_0$ بدلالة معاملات الامواج الواردة و المتصادمة. اكتب دالة الموجة في هذه المنطقة بدلالة التغير في الطور $\delta_0$.

3) دالة الموجة يجب ان تكون مستمرة في $r = a$. اكتب الشرط الحدي المقابل. المشتقة الاولي لدالة الموجة يجب ان تكون مستمرة الا في النقاط التي يتباعد فيها الكمون. الشرط المقابل يكتب علي الشكل

$$\Delta(\frac{du}{dr}) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}u(a).$$

استخدم هذين الشرطين الحديين من اجل تعيين الموجة الجزئية $a_0$.

4) احسب $f(\theta)$، $d\sigma/d\Omega$ و $\sigma$. ماهو الجواب من اجل $ka << 1$. عرف

$$\beta = \frac{2ma\alpha}{\hbar^2}.$$

5) احسب التغير في الطور $\delta_0$.

## تمرين 5

1) في الفعل الكهروضوئي الحالة الابتدائية للالكترون هي حالة ذرية مرتبطة ذات طاقة $E_i < 0$ في حين ان الحالة النهائية هي حالة حرة ذات طاقة مستمرة حول $E_n > 0$. اكتب قاعدة فيرمي الذهبية للفعل الكهروضوئي .

2) احسب كثافة الحالات النهائية $\rho(E_n)$. استعمل تنظيم العلبة للامواج المستوية الذي يعطي ب

$$< \vec{x}|\vec{k} >= \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}}e^{i\vec{k}\vec{x}}.$$

في هذه الحالة القيم المسموح بها ل $k_x$، $k_y$ و $k_z$ هي

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}\ ,\ k_y = \frac{2\pi n_y}{L}\ ,\ k_z = \frac{2\pi n_z}{L}.$$

علاقة التعامد و التجانس و علاقة الانغلاق تعطي ب

$$< \vec{k}'|\vec{k} >= \delta_{\vec{k}',\vec{k}}.$$

$$\sum_{\vec{k}}|\vec{k} >< \vec{k}| = 1.$$

3) استخرج المقطع الفعال التفاضلي للتفاعل المعرف ب

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{h\nu}{u}w^{\rm abso}_{i\longrightarrow n}.$$

**تمرين** 6 يمكن تصور التصادم علي انه عملية انتقال من الحالة الحرة الابتدائية $|\vec{k}>$ في اللحظة $t=-\infty$ (الماضي البعيد) الي مجموعة من الحالات الحرة النهائية $|\vec{k}^{'}>$ في اللحظة $t$ التي لها كمية حركة محتواة في الزاوية الصلبة $d\Omega=d^3k^{'}/(k^{'2}dk^{'})$ . سوف نعتبر التصادمات المرنة فقط التي من اجلها $k^{'}=k$. في عملية الانتقال هذه التفاعل منعدم في اللحظة $t=-\infty$ ثم يبدأ في التزايد ببطء (اي ادياباتيكلي) مع الزمن. الكمون المتعلق بالزمن يأخذ بالتالي الشكل

$$V(t)=Ve^{\eta t}.$$

في هذه المعادلة $\eta$ هو عدد حقيقي موجب يجب ارساله الي الصفر عند نهاية الحساب.

1) برهن ان احتمال الانتقال مازال يعطي بقاعدة فيرمي الذهبية.

2) احسب معدل الانتقال الي مجموعة الحالات النهائية $|\vec{k}^{'}>$ التي لها طاقة بين $E_{k'}$ و $E_{k'}+dE_{k'}$. استعمل كثافة الحالات النهائية التي تحصلنا عليها في المسألة الثانية.

3) احسب التدفق الوارد الذي يعرف ب

$$|\vec{j}|=\frac{\hbar}{m}|\mathrm{Im}(\psi^*\vec{\nabla}\psi)|\ ,\ \psi=<\vec{x}|\vec{k}>\ .$$

4) استخرج المقطع الفعال التفاضلي. قارن النتيجة مع تقريب بورن من الرتبة الاولي.

# حلول

**تمرين** 1:

1) **جسيم كلاسيكي وارد بمعامل صدمة $b$ اكبر من نصف قطر الكرة يخطئ الكمون بالكامل. في هذه الحالة اذن $\theta = 0$. في الحالة $b \leq R$ ينعكس الجسيم علي سطح الكرة بزاوية $\alpha$ حيث $2\alpha + \theta = \pi$. لدينا**

$$\frac{b}{R} = \sin\alpha = \cos\frac{\theta}{2}. \quad (١٨٠٦)$$

**لدينا اذن**

$$\begin{aligned} \theta &= 0\ ,\ b > R \\ &= 2\cos^{-1}\frac{b}{R}\ ,\ b < R. \end{aligned} \quad (١٨٠٧)$$

**المقطع الفعال التفاضلي هو اذن**

$$D(\theta) = \frac{b}{\sin\theta}|\frac{db}{d\theta}| = \frac{R^2}{4}. \quad (١٨٠٨)$$

**المقطع الفعال الكلي هو**

$$\sigma = \int D(\theta)d\Omega = \pi R^2. \quad (١٨٠٩)$$

**هذا هو المقطع الفعال الهندسي.**

2) **يجب ان تنعدم دالة الموجة عند $r = R$. بالتالي يجب ان يكون لدينا $A_l(kR) = 0$ و بالتالي**

$$\tan\delta_l = \frac{j_l(kR)}{n_l(kR)}. \quad (١٨١٠)$$

3) **من اجل الطاقات المنخفضة لدينا $kR << 1$. اذن نحصل علي**

$$\tan\delta_l = -\left(\frac{2^l l!}{(2l)!}\right)^2 \frac{(kR)^{2l+1}}{2l+1}. \quad (١٨١١)$$

**لان $kR << 1$ فان $l = 0$ هو فقط المهم. لدينا تصادم للامواج $s$. الانسحاب الطوري يعطي ب**

$$\delta_0 = -kR. \quad (١٨١٢)$$

**المقطع الفعال التفاضلي يعطي ب**

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 &= |\frac{1}{k}\sum_l (2l+1)e^{i\delta_l}\sin\delta_l P_l(\cos\theta)|^2 \\ &= \frac{1}{k^2}\sin^2\delta_0 \\ &= R^2. \end{aligned} \quad (١٨١٣)$$

المقطع الفعال الكلي يعطي ب

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = 4\pi R^2. \quad (١٨١٤)$$

هذا اكبر باربع مرات من المقطع الفعال الهندسي و يساوي مساحة كرة نصف قطرها $R$. اذن الجسيم الكمومي يحس بالكرة باكملها.

في هذه الحالة لدينا

$$<\vec{x}|\psi_+> = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} A_0(kr) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-ikR} \frac{\sin k(r-R)}{kr}. \quad (١٨١٥)$$

4) من اجل التصادمات ذات الطاقات العليا لدينا $kR >> 1$. نحسب

$$\sin^2 \delta_l = \frac{\tan^2 \delta_l}{1+\tan^2 \delta_l} = \frac{j_l^2(kR)}{j_l^2(kR) + n_l^2(kR)}. \quad (١٨١٦)$$

من الواضح ان

$$\sin^2 \delta_l = \sin^2(kR - \frac{l\pi}{2}) \quad (١٨١٧)$$

المقطع الفعال الكلي يعطي بالمعادلة

$$\frac{k^2}{4\pi}\sigma = \sum_l (2l+1)(\sin \delta_l)^2. \quad (١٨١٨)$$

نلاحظ العلاقة $\sin^2 \delta_{l+1} = 1 - \sin^2 \delta_l$. اذن من اجل القيم الزوجية ل $l$ انطلاقا من $l=0$ لدينا $\sin^2 \delta_l = \sin^2 kR$ بينما من اجل القيم الفردية ل $l$ انطلاقا من $l=1$ لدينا $\sin^2 \delta_l = \cos^2 kR$. اذن نحصل علي

$$\frac{k^2}{4\pi}\sigma = \frac{1}{2}\sum_l (2l+1) - \frac{1}{2}\cos 2kR \bigg( \sum_{l \text{ even}} (2l+1) - \sum_{l \text{ odd}} (2l+1) \bigg). \quad (١٨١٩)$$

نفترض الان ان العزوم الزاوية حتي $l_{\max} = N-1$ حيث $N = kR$ هي فقط التي تشارك. نحصل علي

$$\frac{1}{4\pi R^2}\sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2N}\cos 2kR. \quad (١٨٢٠)$$

الحد الثاني مهمل في نهاية الطاقات العليا اي لما $N \longrightarrow \infty$. نحصل بالتالي علي

$$\sigma = 2\pi R^2. \quad (١٨٢١)$$

هذا يساوي ضعف المقطع الفعال الهندسي.

**تمرين** 2:

1) من اجل كمون مركزي سعة بورن من الرتبة الولي تعطي ب

$$\begin{aligned} f^{(1)}(k\hat{r},\vec{k}) &= -\frac{2m}{q\hbar^2}\int r\sin qrV(r)dr \\ &= \frac{im\beta}{q\hbar^2}\int_0^\infty\left[e^{(iq-\mu)r}-e^{-(iq+\mu)r}\right]dr \\ &= \frac{im\beta}{q\hbar^2}\frac{2iq}{\mu^2+q^2} \\ &= -\frac{2m\beta}{\hbar^2}\frac{1}{\mu^2+q^2}. \end{aligned} \quad (١٨٢٢)$$

2) المقطع الفعال التفاضلي يعطي ب

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=|f^{(1)}(k\hat{r},\vec{k})|^2 = \left(\frac{2m\beta}{\hbar^2}\right)^2\frac{1}{\left(\mu^2+4k^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2}. \quad (١٨٢٣)$$

استخدمنا النتيجة

$$q=|\vec{k}-k\hat{r}|=2k\sin\frac{\theta}{2}. \quad (١٨٢٤)$$

3) في النهاية $\mu\longrightarrow 0$ نحصل علي كمون كولون مع المطابقة

$$\beta=\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (١٨٢٥)$$

نحصل اذن علي

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4}\left(\frac{q_1q_2}{8\pi\epsilon_0E}\right)^2\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}. \quad (١٨٢٦)$$

هذه هي علاقة رذرفورد.

**تمرين** 3:

1) ليكن $\vec{x}$ شعاع موضع الالكترون الوارد و $\vec{x}_1$ شعاع موضع الالكترون المرتبط. الحالة الابتدائية هي

$$|i>=|\vec{k}>|1>\Leftrightarrow<\vec{x}|<\vec{x}_1|\vec{k}>|1>=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}e^{i\vec{k}\vec{x}}\psi_1(\vec{x_1}). \quad (١٨٢٧)$$

الموجة المستوية تصف الالكترون الوارد بينما $\psi_1(\vec{x}_1)$ هي دالة موجة الهيدروجين في الحالة الاساسية. الحالة النهائية هي

$$|f>=|\vec{k}^{'}>|n>\Leftrightarrow<\vec{x}|<\vec{x}_1|\vec{k}^{'}>|n>=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}e^{i\vec{k}\vec{x}}\psi_n(\vec{x_1}). \quad (١٨٢٨)$$

ال $\psi_n(\vec{x}_1)$ هي دالة موجة الهيدروجين في المستوي الطاقوي $n$. من اجل التصادمات المرنة يجب ان يكون لدينا $n=1$ و $\vec{k}^{'}=k\hat{r}$.

سعة بورن من الرتبة الاولي في هذه الحالة هي

$$f^{(1)}(\hat{k}^{'},n,\vec{k},1)=-\frac{m}{\hbar^2}(2\pi)^2<\vec{k}^{'}<n|V|\vec{k}>|1>. \quad (١٨٢٩)$$

الكمون هو ( مع $r=|\vec{x}|$ )

$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\bigg(-\frac{e^2}{r}+\frac{e^2}{|\vec{x}-\vec{x}_1|}\bigg). \quad (١٨٣٠)$$

2) تحويل فورييه لكمون كولون هو

$$\begin{aligned}\int d^3xe^{i\vec{q}\vec{x}}\frac{1}{r} &= -\frac{2\pi i}{q}\mathrm{Lim}_{\mu\longrightarrow 0}\int dr\bigg[e^{(iq-\mu)r}-e^{-(iq+\mu)r}\bigg]\\ &= -\frac{2\pi i}{q}.\frac{2iq}{q^2}\\ &= \frac{4\pi}{q^2}. \quad (١٨٣١)\end{aligned}$$

3) نحسب (مع $\vec{q}=\vec{k}-\vec{k}^{'}$ )

$$<\vec{k}^{'}<n|V|\vec{k}>|1>=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3xd^3x_1e^{i\vec{q}\vec{x}}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\bigg(-\frac{e^2}{r}+\frac{e^2}{|\vec{x}-\vec{x}_1|}\bigg)\psi_n^*(\vec{x}_1)\psi_1(\vec{x}_1) \quad (١٨٣٢)$$

الحد الاول هو

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3xd^3x_1e^{i\vec{q}\vec{x}}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\bigg(-\frac{e^2}{r}\bigg)\psi_n^*(\vec{x}_1)\psi_1(\vec{x}_1) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\delta_{n1}\frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0}\int d^3xe^{i\vec{q}\vec{x}}\frac{1}{r}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\delta_{n1}\frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\pi}{q^2}. \quad (١٨٣٣)\end{aligned}$$

الحد الثاني هو

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3xd^3x_1e^{i\vec{q}\vec{x}}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\bigg(\frac{e^2}{|\vec{x}-\vec{x}_1|}\bigg)\psi_n^*(\vec{x}_1)\psi_1(\vec{x}_1) &=\\ \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x_1\psi_n^*(\vec{x}_1)\psi_1(\vec{x}_1)\int d^3xe^{i\vec{q}\vec{x}}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|} &=\\ \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x_1\psi_n^*(\vec{x}_1)\psi_1(\vec{x}_1)\int d^3xe^{i\vec{q}(\vec{x}+\vec{x}_1)}\frac{1}{r} &=\\ \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}F_n(\vec{q})\frac{4\pi}{q^2}. \quad (١٨٣٤)\end{aligned}$$

الدالة $F_n(\vec{q})$ تعرف بمعامل الشكل من اجل الاثارة من $|1>$ الي $|n>$:

$$\begin{aligned}F_n(\vec{q}) &= \int d^3x_1\psi_n^*(\vec{x}_1)\psi_1(\vec{x}_1)e^{i\vec{q}\vec{x}_1}\\ &= <n|e^{i\vec{q}\vec{x}_1}|1>. \quad (١٨٣٥)\end{aligned}$$

نلاحظ ان $e^{i\vec{q}\vec{x}_1}$ هو تحويل فورييه لكثافة الالكترونات الموافقة للالكترون المرتبط الذي يوجد عند $\vec{x}_1$ والمعطاة ب

$$\rho(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_1). \quad (١٨٣٦)$$

نحصل اذن علي

$$< \vec{k}^{'} < n|V|\vec{k} > |1 >= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\pi}{q^2}(-\delta_{n1} + F_n(\vec{q})). \quad (١٨٣٧)$$

4) اذن من اجل التصادم المرن نحصل علي

$$f^{(1)}(k\hat{r}, n, \vec{k}, 1) = -\frac{2me^2}{\hbar^2 q^2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}(-1 + F_1(\vec{q})). \quad (١٨٣٨)$$

المقطع الفعال التفاضلي هو

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f^{(1)}(k\hat{r}, 1, \vec{k}, 1)|^2 = \left(\frac{2me^2}{\hbar^2 q^2}\right)^2\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2(-1 + F_1(\vec{q})). \quad (١٨٣٩)$$

معامل الشكل في هذه الحالة يعطي ب

$$\begin{aligned}
F_1(\vec{q}) &= \int d^3x_1 \psi_1^*(\vec{x}_1)\psi_1(\vec{x}_1)e^{i\vec{q}\vec{x}_1} \\
&= \int r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi e^{-\frac{2r}{a}} e^{iqr\cos\theta} \\
&= -\frac{2i}{a^3 q}\int r dr\left[e^{(iq-\frac{2}{a})r} - e^{-(iq+\frac{2}{a})r}\right] \\
&= -\frac{2i}{a^3 q}\frac{\frac{8iq}{a}}{(q^2 + \frac{4}{a^2})^2} \\
&= \frac{16}{(4 + a^2 q^2)^2}. \quad (١٨٤٠)
\end{aligned}$$

5) من اجل التصادم غير المرن علاقة المقطع الفعال التفاضلي تتعدل الي

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^{'}}{k}|f^{(1)}(\vec{k}^{'}, n, \vec{k}, 1)|^2 = \frac{k^{'}}{k}\left(\frac{2me^2}{\hbar^2 q^2}\right)^2\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2(F_n(\vec{q})). \quad (١٨٤١)$$

**تمرين** 4:

1) من اجل $r < a$ الكمون ينعدم. معادلة شرودينغر القطرية او المدارية تصبح

$$\frac{d^2u}{dr^2} = (\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2mE}{\hbar^2})u. \quad (١٨٤٢)$$

نضع $l = 0$. نحصل علي

$$\frac{d^2u}{dr^2} = -k^2 u \ , \ k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (١٨٤٣)$$

الحل

$$u=A\sin kr+B\cos kr. \quad (١٨٤٤)$$

تذكر ان دالة الموجة تعطي ب

$$\psi=\frac{u}{r}Y_l^m. \quad (١٨٤٥)$$

اذن يجب ان نضع $B=0$ لان $\cos kr/r$ تنفجر عند $r=0$ نحصل علي

$$u=A\sin kr. \quad (١٨٤٦)$$

2) من اجل منطقة الاشعاع $r>a$ لدينا $V(r)=0$ و بالتالي فان الحل هو ايضا من الشكل

$$u=C\sin kr+D\cos kr. \quad (١٨٤٧)$$

نكتب هذا الحل ايضا علي الشكل

$$u=C_1\exp(ikr)+D_1\exp(-ikr)\ ,\ C_1=\frac{D-iC}{2}\ ,\ D_1=\frac{D+iC}{2}. \quad (١٨٤٨)$$

الحل العام

$$\sum_{lm}c_{lm}\bigg(\frac{C_1}{r}\exp(ikr)+\frac{D_1}{r}\exp(-ikr)\bigg)Y_{lm}(\theta,\phi). \quad (١٨٤٩)$$

التناظر الكروي يعني ان $c_{lm}=c_{l0}\delta_{m0}$ نحصل اذن علي

$$\sum_{l}c_{l0}\bigg(\frac{C_1}{r}\exp(ikr)+\frac{D_1}{r}\exp(-ikr)\bigg)Y_{l0}(\theta,\phi)=$$
$$\sum_{l}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}c_{l0}\bigg(\frac{C_1}{r}\exp(ikr)+\frac{D_1}{r}\exp(-ikr)\bigg)P_l(\cos\theta). \quad (١٨٥٠)$$

بالمقارنة مع الحل العام من اجل اي كمون كروي لما $r\longrightarrow\infty$ الذي يعطي ب

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_l\frac{2l+1}{2ik}\bigg(\frac{S_l}{r}\exp(ikr)+\frac{(-1)^{l+1}}{r}\exp(-ikr)\bigg)P_l(\cos\theta). \quad (١٨٥١)$$

نحصل علي

$$\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}c_{l0}C_1=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{2l+1}{2ik}S_l. \quad (١٨٥٢)$$

$$\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}c_{l0}D_1=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{2l+1}{2ik}(-1)^{l+1}. \quad (١٨٥٣)$$

اذن مباشرة

$$\frac{C_1}{D_1} = \frac{S_l}{(-1)^{l+1}}. \quad (١٨٥٤)$$

من اجل $l = 0$ لدينا $C_1/D_1 = -S_0$ اي

$$S_0 = \frac{C + iD}{C - iD}. \quad (١٨٥٥)$$

لكن $S_l = 1 + 2ika_l$ اذن

$$ika_0 = \frac{-1}{1 + i\frac{C}{D}}. \quad (١٨٥٦)$$

من جهة اخري الحل في المنطقة $r > a$ يمكن ان يكتب علي الشكل

$$u = C_1 \exp(ikr) - \frac{C_1}{S_0} \exp(-ikr). \quad (١٨٥٧)$$

نستخدم $S_0 = \exp(2i\delta_0)$. اذن

$$u = 2iC_1 \exp(-i\delta_0) \sin(kr + \delta_0). \quad (١٨٥٨)$$

3) دالة الموجة يجب ان تكون مستمرة عند $r = a$:

$$\frac{A}{D} \sin ka = \frac{C}{D} \sin ka + \cos ka \quad (١٨٥٩)$$

المشتقة الاولي لدالة الموجة يجب ان تكون مستمرة الا في النقاط التي يتباعد فيها الكمون. الشرط المقابل يكتب علي الشكل

$$\Delta(\frac{du}{dr}) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2} u(a). \quad (١٨٦٠)$$

$$k\frac{C}{D} \cos ka - k \sin ka - k\frac{A}{D} \cos ka = \frac{2m\alpha}{\hbar^2} \frac{A}{D} \sin ka. \quad (١٨٦١)$$

من المعادلتين اعلاه نجد

$$\frac{C}{D} \frac{2m\alpha}{k\hbar^2} \sin^2 ka = -1 - \frac{2m\alpha}{k\hbar^2} \cos ka \sin ka. \quad (١٨٦٢)$$

لكن $ika_0 = -1/(1 + iC/D)$. اذن

$$a_0 k = \frac{\frac{2m\alpha}{k\hbar^2} i \sin^2 ka}{\frac{2m\alpha}{k\hbar^2} \sin^2 ka - i - i\frac{m\alpha}{k\hbar^2} \sin 2ka} \quad (١٨٦٣)$$

(4

$$f(\theta) = \sum_l (2l + 1) a_l P_l(\cos\theta) \simeq a_0 + ... \quad (١٨٦٤)$$

**المقطع الفعال التفاضلي**

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = |f(\theta)|^2 = |a_0|^2 = \frac{1}{k^2} = \frac{\left(\frac{2m\alpha}{k\hbar^2}\sin^2 ka\right)^2}{\left(\frac{2m\alpha}{k\hbar^2}\sin^2 ka\right)^2 + \left(1+\frac{m\alpha}{k\hbar^2}\sin 2ka\right)^2}. \quad (١٨٦٥)$$

**المقطع الفعال الكلي**

$$\sigma = 4\pi|a_0|^2. \quad (١٨٦٦)$$

**من اجل** $ka << 1$ **نجد**

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{\beta^2 a^2}{(1+\beta)^2}\ ,\ \beta = \frac{2ma\alpha}{\hbar^2}. \quad (١٨٦٧)$$

$$\sigma = 4\pi\frac{\beta^2 a^2}{(1+\beta)^2}. \quad (١٨٦٨)$$

5) **لدينا**

$$a_l = \exp(i\delta_l)\frac{\sin\delta_l}{k}. \quad (١٨٦٩)$$

**اذن**

$$ka_0 = \cos\delta_0\sin\delta_0 + i\sin^2\delta_0. \quad (١٨٧٠)$$

**هذا من جهة. من جهة اخري**

$$ka_0 = \frac{iv}{v-iw} = \frac{iv(v+iw)}{v^2+w^2}. \quad (١٨٧١)$$

**اي**

$$\frac{v^2}{v^2+w^2} = \sin^2\delta_0\ ,\ -\frac{vw}{v^2+w^2} = \cos\delta_0\sin\delta_0 \Rightarrow \cot\delta_0 = -\frac{w}{v}. \quad (١٨٧٢)$$

**اذن**

$$\delta_0 = -\cot^{-1}\frac{w}{v}. \quad (١٨٧٣)$$

**لكن نعرف ان**

$$v = \frac{2m\alpha}{k\hbar^2}\sin^2 ka \simeq ka\beta. \quad (١٨٧٤)$$

$$w = 1 + \frac{m\alpha}{k\hbar^2}\sin 2ka \simeq 1+\beta. \quad (١٨٧٥)$$

**اذن**

$$\delta_0 = -\cot^{-1}\left(\frac{ka}{\beta\sin^2 ka} + \cot ka\right). \quad (١٨٧٦)$$

**تمرين** 5:

1) **معدل الامتصاص بدون** 1) **تقريب العزم الكهربائي و بدون** 2) **اخذ المتوسط علي جميع اتجاهات الورود** $\hat{n}$ **و جميع اتجاهات الاستقطاب** $\hat{\epsilon}$ **يعطي ب**

$$w_{i\longrightarrow n}^{\text{abso}} = \frac{\pi e^2}{\hbar\epsilon_0 m^2(2\pi\nu)^2}|\hat{\epsilon}<n|\vec{p}e^{i\frac{2\pi\nu}{c}\hat{n}\vec{x}}|i>|^2\delta(E_n-E_i-2\pi\hbar\nu)u\rho(E_n)dE_n. \quad (١٨٧٧)$$

**هذا هو الاحتمال في وحدة الزمن لشحنة** $e$ **تبدأ في الحالة الابتدائية** $|i>$ **بطاقة** $E_i=2\pi\hbar\nu_i$ **ان تقفز في اللحظة** $t$ **نحو الحالة** $|n>$ **بطاقة** $E_n=2\pi\hbar\nu_n$ **تحت تأثير حقل كهرومغناطيسي (اضطراب متعلق بلزمن) ذي تواتر** $2\pi\nu$. **اعلاه** $\vec{p}$ **هو كمية حركة الشحنة،** $u$ **هو كثافة الطاقة (الطاقة في وحدة الحجم) في الحقل و** $\rho(E_n)dE_n$ **هو عدد الحالات النهائية بطاقة بين** $E_n$ **و** $E_n+dE_n$.

2) **في الفعل الكهروضوئي الحالة الابتدائية للالكترون هي حالة مرتبطة ذرية بطاقة** $E_i<0$ **بينما الحالة النهائية هي حالة مستمرة حرة بطاقة** $E_n>0$. **اذن**

$$E_n=\frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2m}\ ,\ |n>=|\vec{k}>. \quad (١٨٧٨)$$

**عدد الحالات بكمية حركة بين** $\hbar\vec{k}$ **و** $\hbar(\vec{k}+d\vec{k})$ **يساوي عدد الحالات بطاقة بين** $E_n$ **و** $E_n+dE_n$ **بكمية حركة في الاتجاه المعرف بالزاوية الصلبة** $d\Omega=d^3k/(k^2dk)$. **باستعمال تنظيم العلبة لحالات الامواج المستمرة لدينا**

$$<\vec{x}|\vec{k}>=\frac{1}{L^{\frac{3}{2}}}e^{i\vec{k}\vec{x}}. \quad (١٨٧٩)$$

**في هذه الحالة القيم المسموح بها ل** $k_x$، $k_y$ **و** $k_z$ **هي**

$$k_x=\frac{2\pi n_x}{L}\ ,\ k_y=\frac{2\pi n_y}{L}\ ,\ k_z=\frac{2\pi n_z}{L}. \quad (١٨٨٠)$$

**من الواضح انه لدينا حالة واحدة في مكعب حجمه** $(2\pi/L)^3$ **في فضاء كمية الحركة. اذن عدد الحالات بطاقة بين** $E_n$ **و** $E_n+dE_n$ **حيث تعطي اتجاهات كمية الحركة بالزاوية الصلبة** $d\Omega=d^3k/(k^2dk)$ **هو**

$$\rho(E_n)dE_n=\frac{k^2dkd\Omega}{(\frac{2\pi}{L})^3}=(\frac{L}{2\pi})^3\frac{km}{\hbar^2}dE_nd\Omega. \quad (١٨٨١)$$

3) **نحصل اذن**

$$w_{i\longrightarrow n}^{\text{abso}} = \frac{\pi e^2}{\hbar\epsilon_0 m^2(2\pi\nu)^2}|\hat{\epsilon}<\vec{k}|\vec{p}e^{i\frac{2\pi\nu}{c}\hat{n}\vec{x}}|i>|^2\delta(E_n-E_i-2\pi\hbar\nu)u(\frac{L}{2\pi})^3\frac{km}{\hbar^2}dE_nd\Omega. \quad (١٨٨٢)$$

**بالمكاملة علي** $E_n$ **نحصل علي ( الان** $k=\sqrt{2m(E_i+2\pi\hbar\nu)/\hbar^2}$ )

$$w_{i\longrightarrow n}^{\rm abso} = \frac{\pi e^2}{\hbar\epsilon_0 m^2(2\pi\nu)^2}|\hat{\epsilon}<\vec{k}|\vec{p}e^{i\frac{2\pi\nu}{c}\hat{n}\vec{x}}|i>|^2 u(\frac{L}{2\pi})^3\frac{km}{\hbar^2}d\Omega \quad (١٨٨٣)$$

نحسب

$$\begin{aligned}\hat{\epsilon}<\vec{k}|\vec{p}e^{i\frac{2\pi\nu}{c}\hat{n}\vec{x}}|i> &= \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}}\hat{\epsilon}\int d^3x e^{-i\vec{k}\vec{x}+i\frac{2\pi\nu}{c}\hat{n}\vec{x}}\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\psi_i(\vec{x})\\ &= \frac{\hbar}{L^{\frac{3}{2}}}\hat{\epsilon}\vec{k}\int d^3x e^{-i\vec{q}\vec{x}}\psi_i(\vec{x})\ ,\ \vec{q}=\vec{k}-\frac{2\pi\nu}{c}\hat{n}.\end{aligned}$$

(١٨٨٤)

نذكر ان $\psi_i(\vec{x})$ هي دالة موجة الالكترون المرتبط. اذن في حالة ذرة الهيدروجين $\psi_i(\vec{x})$ هي دالة موجة الحالة الاساسية المعطاة ب

$$\psi_i(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-\frac{r}{a}}. \quad (١٨٨٥)$$

نحصل علي

$$\hat{\epsilon}<\vec{k}|\vec{p}e^{i\frac{2\pi\nu}{c}\hat{n}\vec{x}}|i> = \frac{\hbar}{L^{\frac{3}{2}}}\hat{\epsilon}\vec{k}\frac{8\pi}{a\sqrt{\pi a^3}}\frac{1}{(q^2+\frac{1}{a^2})^2}. \quad (١٨٨٦)$$

نحصل في النهاية علي

$$w_{i\longrightarrow n}^{\rm abso} = \frac{u}{2\pi\hbar\nu}d\Omega\bigg(\frac{8e^2k}{\pi\epsilon_0 m(2\pi\nu)}(\hat{\epsilon}\vec{k})^2\frac{1}{a^5}\frac{1}{(q^2+\frac{1}{a^2})^4}\bigg). \quad (١٨٨٧)$$

نختار $\hat{n}$ في الاتجاه $z$ و $\hat{\epsilon}$ في الاتجاه $x$. الشعاع $\vec{k}$ يعرف بالزاويتين $\theta$ و $\phi$. اذن

$$\begin{aligned}&(\hat{\epsilon}\vec{k})^2 = k_x^2 = k^2\sin^2\theta\cos^2\phi,\\ &q^2 = k^2+\frac{(2\pi\nu)^2}{c^2}-2\frac{2\pi\nu}{c}k_z = k^2+\frac{(2\pi\nu)^2}{c^2}-2\frac{2\pi\nu}{c}k\cos\theta.\end{aligned} \quad (١٨٨٨)$$

**تمرين** 6:

1) احتمال الانتقال هو

$$\begin{aligned}|<\vec{k}'|U_I^{(1)}(t,-\infty)|\vec{k}>|^2 &= |\bigg(\frac{-i}{\hbar}\bigg)\int_{-\infty}^t dt_1<\vec{k}'|V_I(t_1)|\vec{k}>|^2\\ &= |\bigg(\frac{-i}{\hbar}\bigg)\int_{-\infty}^t dt_1<\vec{k}'|e^{\frac{i}{\hbar}H_0t_1}V(t_1)e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t_1}|\vec{k}>|^2\\ &= |\bigg(\frac{-i}{\hbar}\bigg)\int_{-\infty}^t dt_1<\vec{k}'|e^{\frac{i}{\hbar}H_0t_1}Ve^{\eta t_1}e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t_1}|\vec{k}>|^2\\ &= \frac{1}{\hbar^2}|<\vec{k}'|V|\vec{k}>|^2\frac{e^{2\eta t}}{\frac{1}{\hbar^2}(E_{k'}-E_k)^2\frac{1}{\hbar^2}+\eta^2}.\end{aligned} \quad (١٨٨٩)$$

معدل الانتقال هو

$$\frac{d}{dt}|<\vec{k}^{'}|U_I^{(1)}(t,-\infty)|\vec{k}>|^2 = \frac{1}{\hbar^2}|<\vec{k}^{'}|V|\vec{k}>|^2\frac{2\eta e^{2\eta t}}{\frac{1}{\hbar^2}(E_{k'}-E_k)^2\frac{1}{\hbar^2}+\eta^2}. \quad (١٨٩٠)$$

في النهاية $\eta\longrightarrow 0$ يمكن ان نستعمل النتيجة

$$\mathrm{Lim}_{\eta\longrightarrow 0}\frac{\eta}{\eta^2+x^2}=\pi\delta(x). \quad (١٨٩١)$$

نحصل علي

$$\frac{d}{dt}|<\vec{k}^{'}|U_I^{(1)}(t,-\infty)|\vec{k}>|^2 = \frac{2\pi}{\hbar}|<\vec{k}^{'}|V|\vec{k}>|^2\delta(E_{k'}-E_k). \quad (١٨٩٢)$$

هذه هي بالضبط قاعدة فيرمي الذهبية.

2) معدل الانتقال من مجموعة الحالات النهائية $|\vec{k}^{'}>$ التي لها طاقة بين $E_{k'}$ و $E_{k'}+dE_{k'}$ هو

$$w = \frac{2\pi}{\hbar}|<\vec{k}^{'}|V|\vec{k}>|^2\delta(E_{k'}-E_k)\rho(E_{k'})dE_{k'}. \quad (١٨٩٣)$$

لقد حسبنا سابقا ان

$$\rho(E_{k'})dE_{k'}=(\frac{L}{2\pi})^3\frac{k^{'}m}{\hbar^2}dE_{k'}d\Omega. \quad (١٨٩٤)$$

اذن ( مع $k^{'}=k$ )

$$w = \frac{2\pi}{\hbar}|<\vec{k}^{'}|V|\vec{k}>|^2(\frac{L}{2\pi})^3\frac{km}{\hbar^2}d\Omega. \quad (١٨٩٥)$$

3) التدفق الوارد

$$|\vec{j}|=\frac{\hbar}{m}|\mathrm{Im}(\psi^*\vec{\nabla}\psi)|=\frac{\hbar}{m}|\mathrm{Im}\frac{e^{-i\vec{k}\vec{x}}}{L^{\frac{3}{2}}}\vec{\nabla}\frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{L^{\frac{3}{2}}}|=\frac{\hbar k}{mL^3}. \quad (١٨٩٦)$$

4) معدل الانتقال يجب ان يكون مساو للتدفق الوارد مضروب في المقطع الفعال المتناه في الصغر $d\sigma$. اذن

$$w = |\vec{j}|d\sigma. \quad (١٨٩٧)$$

بالتالي

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{m^2L^6}{4\pi^2\hbar 4}|<\vec{k}^{'}|V|\vec{k}>|^2\\ &= |\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\int d^3xV(\vec{x})e^{i(\vec{k}-\vec{k}^{'})\vec{x}}|^2. \quad (١٨٩٨)\end{aligned}$$

هذا هو تقريب بورن من الرتبة الاولي.

# Bibliography


[1] G. Goldstein, “Classical Mechanics,” second edition, Addison-Wesley, 1980.

[2] L. Landau, E.Lifshitz, “Classical Mechanics,” second edition, Pergamon Press, 1969.

[3] W. Greiner, “Classical Mechanics: System of Particles and Hamiltonian Dynamics,” second edition, Springer, 2010.

[4] H. Reid, “Solutions to problems in Goldstein, Classical Mechanics, Second Edition,” 2000.

[5] K. Huang, “Statistical Mechanics,” second edition, John Wiley and Sons, 1987.

[6] C. Ngo, H. Ngo, “Physique Statistique,” third edition, Dunode, 2008.

[7] L. Landau, E.Lifshitz, “Statistical Physics,” second edition, Pergamon Press, 1969.

[8] L. Landau, E.Lifshitz, “Quantum Mechanics,” third edition, Pergamon Press, 1965.

[9] J. Sakurai, “Modern Quantum Mechanics,” second edition, Addison-Wesley, 1993.

[10] D. Griffiths, “Introduction to Quantum Mechanics,” second edition, Prentice Hall, 2004.

[11] C. Tannoudji, B.Diu, F. Laloe, “Quantum Mechanics,” first edition, Hermann and Wiley and Sons, 1977.

[12] D. Griffiths, “Solutions Manual for Introduction to Quantum Mechanics,” Pearson, 2005.