الاستاتيكا

للصف الثالث الثانوي

الوحدتين الاولى والثانية

الاحتكاك والعزوم

إعداد

م/ ناصر أبوزيد

مكتبة ديناي وأمين

الوحدة الاولى : الاحتكاك

أولا : الاحتكاك على مستوى أفقى خشن

تعريف: قوة الاحتكاك السكونى (ح) هى قوة خفية تظهر عند التأثير بقوة على جسم موضوع على سطح خشن وتعمل على مقاومة الحركة وتكون فى عكس الاتجاه المحتمل للحركة

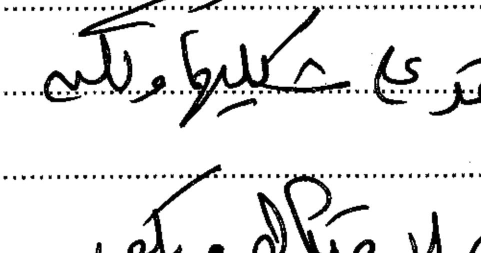
ملاحظات

١) قوة الاحتكاك بين جسمين لا تعتمد على شكليهما ولكن تعتمد على طبيعة سطحيهما

٢) السطح الاملس تنعدم فيه قوة الاحتكاك ويكون رد الفعل عمودياً عليه

٣) قوة الاحتكاك السكونى (ح) $\ngtr$ القوة المؤثرة على الجسم

٤) تتزايد قوة الاحتكاك ح إلى مقدار لا تتعداه كلما زادت القوة المؤثرة وعندئذ يكون الجسم على وشك الحركة وتسمى الاحتكاك السكونى النهائى (ح س)



٥) رد الفعل للمستوى الخشن يكون مائلاً على سطح التماس ويسمى ر̄ رد الفعل المحصل ويتحلل الى مركبتيه هما ر ، ح س

٦) معامل الاحتكاك السكونى النهائى (م س)

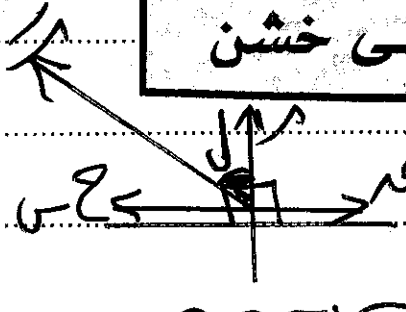
$$م_س = \frac{ح_س}{ر} \Longleftarrow \boxed{ح_س = م_س \, ر}$$

٧) * $\bar{ر} = \sqrt{ر^2 + ح^2}$ وعندما يكون الاحتكاك نهائى

* $\bar{ر} = \sqrt{ر^2 + ح_س^2} \Longleftarrow \boxed{\bar{ر} = ر\sqrt{1 + م_س^2}}$

الاحتكاك على مستوى أفقى خشن

تابع



⑧ زاوية الاحتكاك (ل)

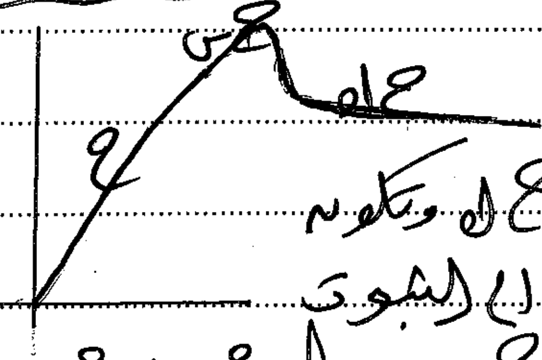
هى قياس الزاوية المحصورة بين

رد الفعل العمودى ورد الفعل المحصل

وعندما يكون الاحتكاك نهائى يكون

$\boxed{ظال = م_س}$

⑨ الاحتكاك الحركى ح ك



عندما يبدأ الجسم فى الحركة

تكون هنا القوة احتكاك حركى ح ك ويكون

أقل من ح س دائما ويظل الثبوت

بعد فترة أى أن ح س > ح ك ، م س > م ك

⑩ عندما يكون الاحتكاك نهائى

ظا ل = م س ⟵ $ر' = ر\sqrt{1 + ظا^2 ل}$ ⟵ قا ل

⟵ $\boxed{ر' = ر \, قا ل}$

مثال (١)

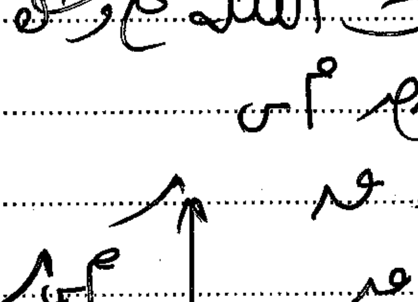
وضعت كتلة وزنها ٢٢ نيوتن على مستوى أفقى خشن

واثرت عليها قوة أفقية ق حتى اصبحت الكتلة على وشك

الحركة (أ) اذا كانت ق = ٨ نيوتن اوجد م س

(ب) اذا كان م س = ٠.٤ اوجد ق

الحل



الجسم على وشك الحركة

∴ من معادلتا الاتزان * ر = ٢٢

* ق = م س ر ⟵ ٨ = ٢٢ م س ⟵ م س = $\boxed{\frac{4}{11}}$

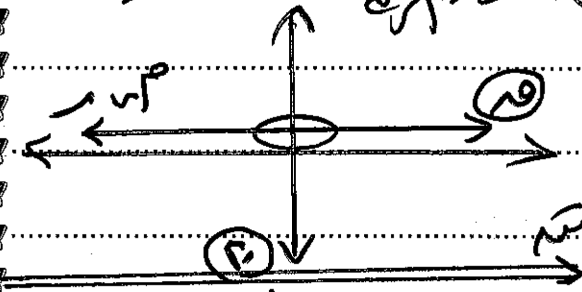
(ب) فكرة للطالب

مثال ١: وضع جسم وزنه ٢٠ نيوتن على مستوى أفقي خشن فإذا كان معامل الاحتكاك بينه وبين المستوى $\frac{1}{4}$ أوجد

(أ) مقدار القوة الأفقية التي تكفي لجعل الجسم على وشك الحركة

(ب) قوة تميل على الأفقي بزاوية ٣٠° وتجعله على وشك الحركة

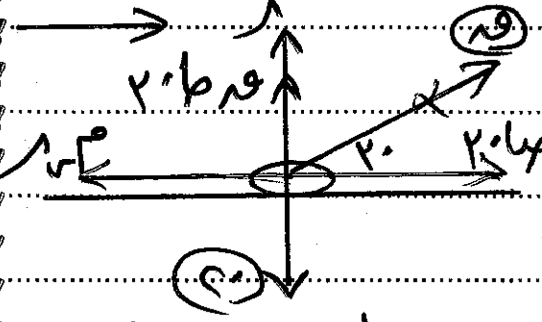
الحل



(أ) $\mu_s = \frac{1}{4}$ ★ $R = 20$

★ $F = \mu_s R$

⟸ $F = \frac{1}{4} \times 20 = 5$ نيوتن



(ب) بتحليل F

★ $R + \frac{1}{2}F = 20$

★ $\boxed{R = 20 - \frac{1}{2}F}$ (1)

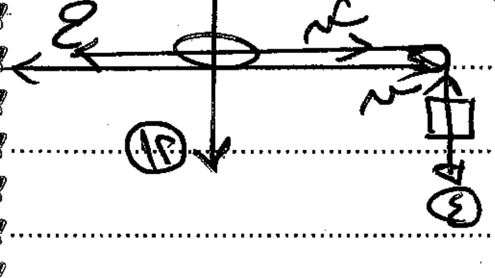
★ $\frac{\sqrt{3}}{2}F = \mu_s R$ (2)

★ $\frac{\sqrt{3}}{2}F = \frac{1}{4}\left(20 - \frac{1}{2}F\right)$

⟸ $\frac{\sqrt{3}}{2}F = 5 - \frac{1}{8}F$ ⟸ $\boxed{F = 5.05 \text{ نيوتن}}$

مثال ٢: وضع جسم وزنه ١٢ نيوتن على مستوى أفقي خشن وربط بخيط أفقي يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبتة عند حافة المستوى ويتدلى من طرفه ثقل مقداره ٤ نيوتن فإذا كان الجسم متزناً أوجد قوة الاحتكاك وإذا علم أن معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى هو $\frac{1}{2}$ هل يكون الجسم على وشك الحركة

الحل



الحالة الأولى: ★ $R = 12$

$T = 4$ ★ $T = F$

⟸ $\boxed{F = 4 \text{ نيوتن}}$

الحالة الثانية: ع س = م س ر = $\frac{1}{2}$ × ١٢ = ٤

∴ $\boxed{\text{ع} = \text{ع س}}$ ∴ الجسم على وشك الحركة

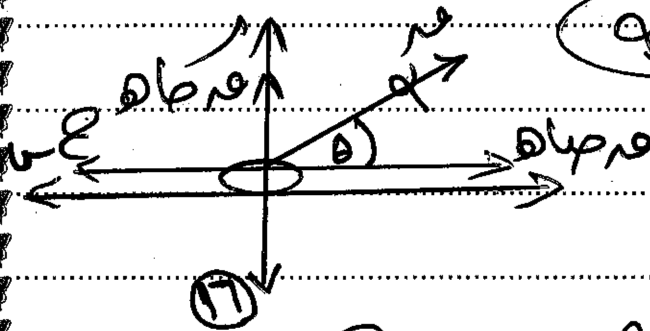
مثال (٤)

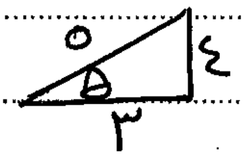
جسم وزنه ١٦ نيوتن على نضد أفقي خشن معامل الاحتكاك السكوني بينه وبين الجسم $\frac{1}{4}$ أوجد

(أ) مقدار القوة التي تؤثر على الجسم بميل على الأفقي بزاوية جيب تمامها $\frac{3}{5}$ وتكفي لجعل الجسم على وشك الحركة

(ب) مقدار واتجاه رد الفعل المحصل

الحل





★ ر + $\frac{4}{5}$ ق = ١٦

⇐ ر = ١٦ − $\frac{4}{5}$ ق ⟵ (١)

★ $\frac{3}{5}$ ق = م س ر ⟵ $\frac{3}{5}$ ق = $\frac{1}{4}$ (١٦ − $\frac{4}{5}$ ق)

⇐ $\frac{3}{5}$ ق = ٤ − $\frac{1}{5}$ ق ⟵ $\boxed{\text{ق} = ٥ \text{ نيوتن}}$

★ ر' = ر $\sqrt{1 + (\text{م س})^2}$ ⟵ ر = ١٢ نيوتن

= ١٢ $\sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}$

∴ ر' = ٣ $\sqrt{17}$ نيوتن

★ ظا هـ = ظا ل = $\frac{1}{4}$ ⟵ ل = ١٤° ٢'

∴ رد الفعل المحصل يميل على الرأسي بـ ١٤° ٢'

تقويم

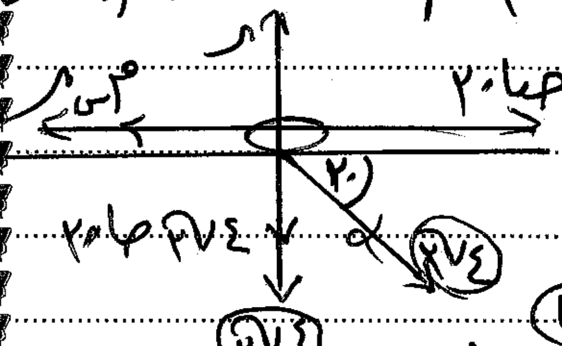
جسم وزنه ٢٤٠ نيوتن موضوع على مستوى أفقي خشن ويراد سحبه بحبل يميل على الأفقي بزاوية ٢٠ وكان معامل الاحتكاك السكوني هو $\frac{\sqrt{3}}{2}$ أوجد الشد اللازم لجعل الجسم على وشك الحركة

الجواب ١٢٠

مثال ٥: وضع جسم وزنه $٤\sqrt{٣}$ نيوتن على مستوى أفقي خشن وأثرت عليه قوة مقدارها $٤\sqrt{٣}$ نيوتن في اتجاه يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع المستوى لأسفل فجعلت الجسم في حالة اتزان نهائي أوجد

(١) معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى وزاوية الاحتكاك

(٢) رد الفعل المحصل



الحل

معادلات الاتزان

★ $٤\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = م_س ر \longleftarrow (١)$

★ $ر = ٤\sqrt{٣} + \frac{١}{٢} \times ٤\sqrt{٣} = \boxed{٦\sqrt{٣}} \longleftarrow (٢)$

من (١)، (٢) $\Longleftarrow ٦ = م_س \times ٦\sqrt{٣} \Longleftarrow \boxed{م_س = \frac{١}{\sqrt{٣}}}$

رد الفعل المحصل

$ر' = ر \sqrt{١ + (م_س)^٢} = ٦\sqrt{٣} \sqrt{١ + \frac{١}{٣}}$

★ $\therefore ر' = ١٢$ نيوتن

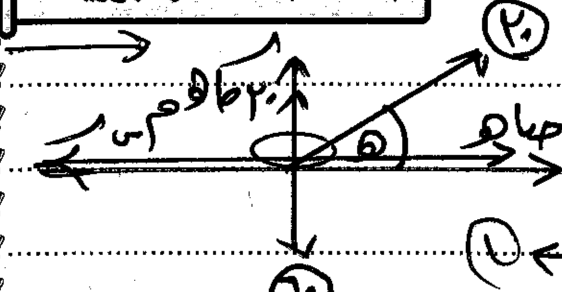
★ قياس زاوية الاحتكاك

$ظا ل = \frac{١}{\sqrt{٣}} \Longleftarrow ل = ٣٠°$

مثال ٦

جسم كتلته ٦٠ ث كجم وضع على مستوى أفقي خشن وأثرت عليه قوة مقدارها ٢٠ نيوتن في اتجاه يميل على الأفقي بزاوية هـ لأعلى فأصبح على وشك الحركة ثم أثرت عليه قوة مقدارها ٦٠ نيوتن في الاتجاه المضاد للقوة الأولى فأصبح على وشك الحركة أيضاً أوجد معامل الاحتكاك السكوني ومقدار الزاوية هـ

الحل



الحالة الأولى

★ ر + ٢٠ جاهـ = ٦٠

⟸ ر = ٦٠ − ٢٠ جاهـ ⟵ (١)

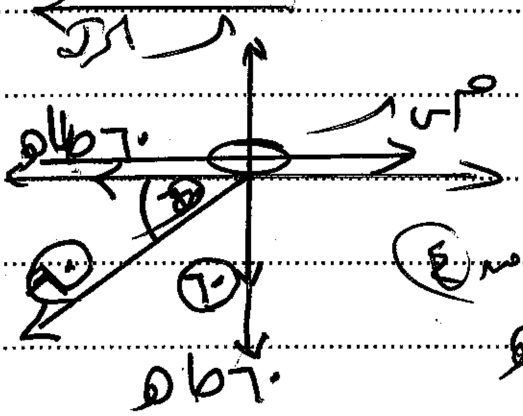
★ ٢٠ جتاهـ = م ر ⟵ (٢)

من (١)، (٢)

⟸ ٢٠ جتاهـ = م (٦٠ − ٢٠ جاهـ)

⟸ $م = \frac{٢٠ \text{ جتاهـ}}{٦٠ - ٢٠ \text{ جاهـ}} = \boxed{\frac{\text{جتاهـ}}{٣ - \text{جاهـ}}}$ ⟵ (٣)

الحالة الثانية



★ ر = ٦٠ + ٦٠ جاهـ ⟵ (٤)

★ م ر = ٦٠ جتاهـ ⟵ (٥)

من (٤)، (٥)

⟸ م (٦٠ + ٦٠ جاهـ) = ٦٠ جتاهـ

⟸ $\boxed{م = \frac{\text{جتاهـ}}{١ + \text{جاهـ}}}$ ⟵ (٦)

من (٣)، (٦)

⟸ ١ + جاهـ = ٣ − جاهـ ⟸ جاهـ = $\frac{١}{٢}$

⟸ $\boxed{ق(\hat{هـ}) = ٣٠^\circ}$ بالتعويض في (٦)

∴ $م = \frac{\text{جتا}٣٠}{١ + \text{جا}٣٠} = \boxed{\frac{\sqrt{٣}}{٣}}$

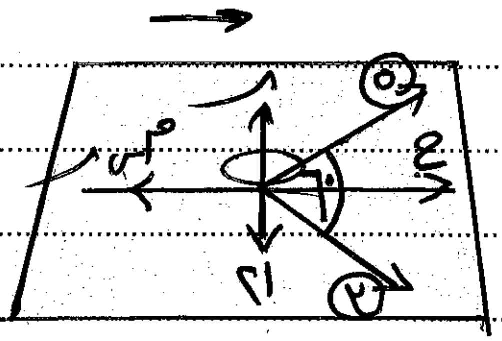
مثال (٧)

وضع جسم كتلته ٢١ جرام على مستوى أفقي خشن وأثرت
على مستوى أفقي خشن وأثرت فيه قوتان أفقيتان
من نفس المستوى مع الجسم مقدارهما ٣، ٥ ث.جم ويحصران

زاوية بينهما قياسها ٦٠° فأصبح على وشك الحركة

احسب معامل الاحتكاك السكوني

الحل



حل يا للّه   الكتلة ٢١ جرام

⟸ الوزن ٢١ ث جرام

نوجد أولاً محصلة القوتين ٥، ٣

∴ ح² = ٩ + ٢٥ + ٢ × ٣ × ٥ جتا ٦٠

⟸ ح² = ٤٩ ⟸ ح = ٧ ث جرام

الجسم متزن على وشك الحركة

* ح = م س ر   * ر = ٢١

⟸ ٧ = م س × ٢١ ⟸ $\boxed{\text{م س} = \frac{1}{3}}$

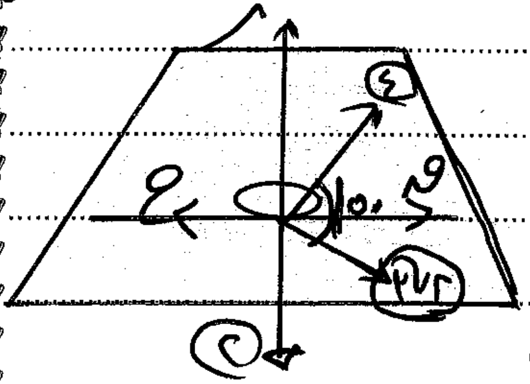
مثال ٨

وضع جسم مقدار وزنه ٢ نيوتن على مستوى أفقي خشن وأثرت على الجسم قوتان $2\sqrt{3}$ ، ٤ في نفس المستوى تحصران زاوية قياسها ١٥٠° فظل الجسم ساكناً أثبت أن قياس زاوية الاحتكاك يجب ألا يقل عن ٤٥° وإذا كان ل = ٦٠° وبقى اتجاه كل من القوتين ثابتاً كم يجب أن تكون القوة $2\sqrt{3}$ دون تغيير مقدار القوة الأخرى لكي يصبح الجسم على وشك الحركة وعين أيضاً الاتجاه الذي يوشك الجسم أن يبدأ الحركة فيه

الحل

مقدار محصلة القوتين ح

ح² = ١٦ + ١٢ + ٢ × ٤ × $2\sqrt{3}$ جتا ١٥٠ ⟸ $\boxed{\text{ح} = 2}$



★ الجسم ساكن ⟸ $\boxed{ر = ؟}$

∴ ح ≤ ح س ∴ ح ≤ م س ر

⟸ ٢ ≤ ٢ م س

⟸ م س ≥ ١ ⟸ ظا ل ≥ ١

∴ ل ≥ ٤٥° ∴ ل لا تقل عن ٤٥°

★ عندما ل = ٦٠°

⟸ م س = ظا ٦٠ = $\sqrt{3}$ ∵ القوة الحقيقية $2\sqrt{3}$

∵ القوة المطلوبة ق١ وتجعل الجسم على وشك الحركة

محصلة القوتين وهي تساوي ح س = $\sqrt{12 + ق_1^2 + 2\times 2\sqrt{3}\times ق_1 \text{ جتا } 150}$

∴ م س ر = $\sqrt{12 + ق^2 - 6ق}$

بالتربيع

$\sqrt{3}\times 2 = \sqrt{12 + ق^2 - 6ق}$

∴ ق² − ٦ق + ١٢ = ١٢ ⟸ $\boxed{ق = ٦ \text{ نيوتن}}$

واتجاه الجسم يكون في اتجاه محصلة القوتين

∴ $2\sqrt{3}$ ، ٦ ظا هـ = $\frac{ق_2 \text{ جا ى}}{ق_1 + ق_2 \text{ جتا ى}} = \frac{6 \text{ جا } 150}{2\sqrt{3} + 6 \text{ جتا } 150}$

⟸ ظا هـ = $-\sqrt{3}$

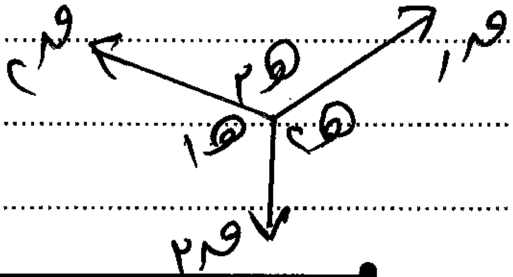
⟸ ق(هـ) = ١٢٠°

تذكر

★ جا (هـ + ل) = جا هـ جتا ل + جتا هـ جا ل

★ جتا (هـ − ل) = جتا هـ جتا ل + جا هـ جا ل

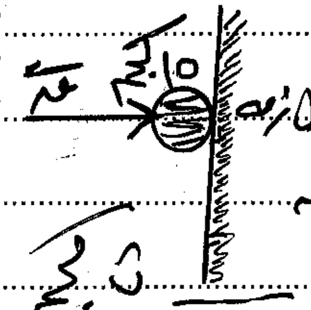
★ قاعدة لامي



$\frac{ق_1}{\text{جا هـ}_1} = \frac{ق_2}{\text{جا هـ}_2} = \frac{ق_3}{\text{جا هـ}_3}$

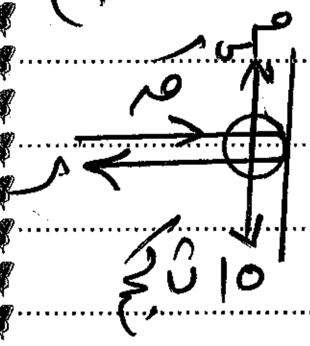
أ عمل

مثال ٩ ظريف



في الشكل المقابل: أوجد مقدار أقل قوة أفقية لازمة لاتزان جسم كتلته ١٥ كجم على حائط رأسي خشن معامل الاحتكاك السكوني بينه وبين الجسم $\frac{١}{٥}$ هو .... ث كجم

الحل



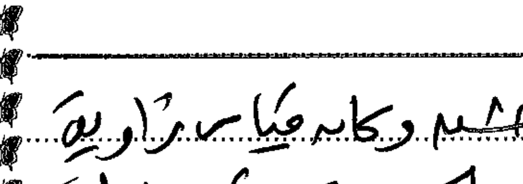
عند الاتزان ★ ق = ر

★ م ر = ١٥ ⟸ $\frac{١}{٥}$ ق = ١٥ ⟸ ق = ٧٥ ث كجم

مثال ١٠ روووعة

وضع جسم وزنه و على مستوى أفقي خشن وكانت قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى هو ل شد الجسم بقوة تميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ فأصبح الجسم على وشك الحركة. أثبت أن مقدار هذه القوة يساوي $\frac{و جا ل}{جتا(هـ - ل)}$ ثم أوجد أصغر مقدار لهذه القوة والشرط اللازم لذلك

الحل



الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى ق ، ر ، و حسب قاعدة لامي

$$★ \frac{ق}{جا(١٨٠ - ل)} = \frac{ر}{جا(٩٠ + هـ)} = \frac{و}{جا(٩٠ - (هـ - ل))}$$

$$★ \frac{ق}{جا ل} = \frac{ر}{جتا هـ} = \frac{و}{جتا(هـ - ل)} \Longleftarrow \boxed{ق = \frac{و جا ل}{جتا(هـ - ل)}}$$

★ أصغر قوة للقوة تكون عندما يكون المقام أكبر ما يمكن

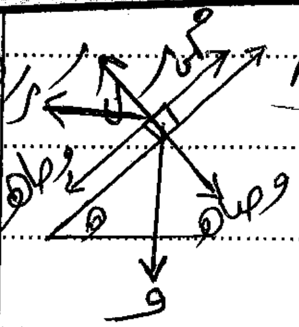
∴ جتا(هـ - ل) = ١ ⟸ هـ - ل = صفر ⟸ $\boxed{هـ = ل}$

وتكون القوة عندئذ ق = و جا ل

الشرط اللازم

الاحتكاك على مستوى مائل خشن

* الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثير الوزن يكون $هـ = ل$



ويكون

* $هـ < ل$ ⟸ الجسم ساكن
* $هـ > ل$ ⟸ الجسم متحرك لأسفل

ملاحظات

(١) إذا كانت ق تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى فإن $\boxed{م \text{ إلى أسفل}}$

(٢) ق تجعل الجسم على وشك الحركة لأسفل فإن $\boxed{م \text{ إلى أعلى}}$

(٣) ق تمنع الجسم من الانزلاق فإن $\boxed{م \text{ إلى أعلى}}$

(٤) أقل قوة تؤثر في الجسم ويبقى متزنا هي التي تمنعه من الانزلاق ⟸ $\boxed{م \text{ إلى أعلى}}$

(٥) أكبر قوة تؤثر في الجسم ويبقى متزنا هي التي تجعله على وشك الحركة لأعلى $\boxed{م \text{ إلى أسفل}}$

(٦) معامل الاحتكاك السكوني ثابت

مثال (١)

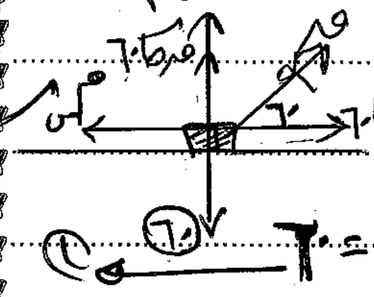
وضع جسم وزنه ٦٠ نيوتن على مستوى مائل خشن وكان على وشك الانزلاق عندما يميل المستوى بزاوية ٣٠ على الأفقي فإذا أصبح المستوى أفقيا أوجد القوة التي تعمل على الأفقي بزاوية ٦٠ لتجعل الجسم على وشك الحركة

الحل

* الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه ⟸ $هـ = ل$

∴ $م_س = ظا ٣٠ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

* المستوى الأفقي



$م_س = \frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ $ر + \frac{\sqrt{3}}{2} ق = ٦٠$ ⟵ (١)

$\frac{1}{2} ق = \frac{1}{\sqrt{3}} ر$ ⟵ (٢)

من (١) في (٢)

∴ $ق = \frac{2}{\sqrt{3}} (٦٠ - \frac{\sqrt{3}}{2} ق)$

∴ $٢ ق = \frac{١٢٠}{\sqrt{3}}$

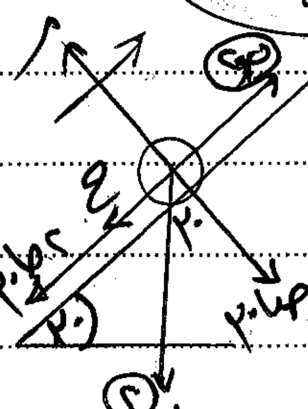
∴ $\boxed{ق = ٢٠\sqrt{3}}$ نيوتن

مثال ١

وضع جسم وزنه ٢ نيوتن على مستوى يميل على الأفقي بزاوية ٣٠° ومعامل الاحتكاك السكوني بينه وبين الجسم = ٠٫٩ اثرت على الجسم قوة مقدارها ٢٫٥ نيوتن تعمل في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى وكان الجسم متزناً.

* عين قوة الاحتكاك وهل الجسم على وشك الحركة

الحل



الجسم متزن

* $ر = ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ $\boxed{ر = \sqrt{٣}}$

$م_س = ٠٫٩$

* $٢٫٥ = ح + ٢ \times \frac{١}{٢}$

∴ $\boxed{ح = ١٫٥}$ نيوتن

* $م_س \, ر = ٠٫٩ \times \sqrt{٣} \simeq ١٫٦$

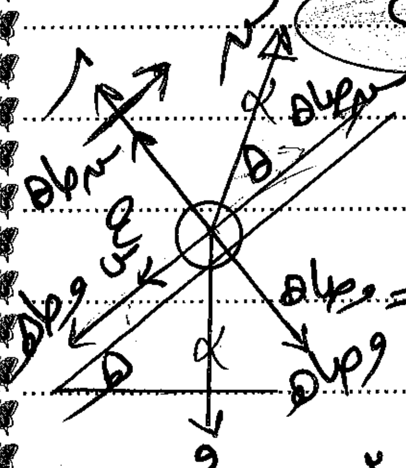
∴ $ح < ح_س$

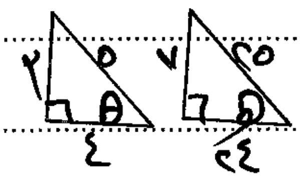
∴ الجسم ليس على وشك الحركة

مثال ٢

جسم وزنه (و) على مستوى خشن يميل على الأفقي بزاوية $ظا^{-١} \frac{٧}{٢٤}$ شد الجسم لأعلى بقوة $\frac{٣}{٥}$ و بواسطة خيط يصنع مع المستوى زاوية $ظا^{-١} \frac{٣}{٤}$ وكان الجسم على وشك الحركة لأعلى أوجد معامل الاحتكاك السكوني

الحل





* $ر + ش \, جا \theta = و \, جتا هـ$

$ش = \frac{٣}{٥} و$

* $ر + \frac{٣}{٥} و \times \frac{٣}{٥} = و \times \frac{٢٤}{٢٥}$

* $ر + \frac{٩}{٢٥} و = \frac{٢٤}{٢٥} و$

$\Leftarrow \boxed{ر = \frac{٣}{٥} و} \leftarrow (١)$

* $ش \, جتا \theta = م_س \, ر + و \, جا هـ$

$\frac{٣}{٥} \cancel{و} \times \frac{٤}{٥} = م_س \times \frac{٣}{٥} \cancel{و} + \cancel{و} \times \frac{٧}{٢٥}$

$\frac{١٢}{٢٥} و = \frac{٣}{٥} و م_س + \frac{٧}{٢٥} و$

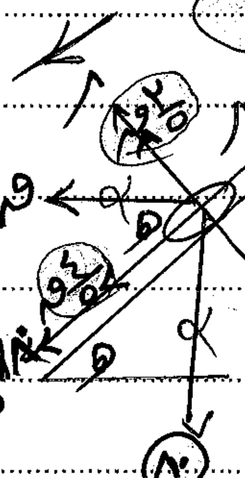
∴ $\frac{٥}{٢٥} \cancel{و} = \frac{٣}{٥} \cancel{و} م_س$

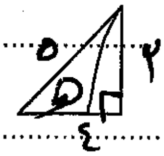
$\Leftarrow \boxed{م_س = \frac{١}{٣}}$

مثال ٤ جسم وزنه ٨٠ نيوتن موضوع على مستوى مائل خشن يميل بزاوية $ظا^{-1} \frac{٣}{٤}$ ومعامل الاحتكاك السكوني هو $\frac{٤}{٥}$ أوجد القوة الأفقية التي تجعل الجسم على وشك الحركة لأسفل ثم أوجد مقدار القوة في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى وتجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى

الحل

★ الحالة الأولى





★ $ر + \frac{٣}{٥} ق = \frac{٤}{٥} \times ٨٠$

∴ $ر = ٦٤ - \frac{٣}{٥} ق$ ← (١)

★ $م_س ر = \frac{٤}{٥} ق + \frac{٣}{٥} \times ٨٠$

$\frac{٤}{٥} ر = \frac{٤}{٥} ق + ٤٨$ ← (٢)

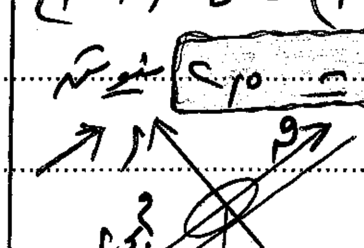
من (١) في (٢)

∴ $\frac{٤}{٥} (٦٤ - \frac{٣}{٥} ق) = \frac{٤}{٥} ق + ٤٨$

⟸ $\boxed{ق = ٢٫٥}$ نيوتن

★ الحالة الثانية

$م_س = \frac{٤}{٥}$ ثابت



★ $ر = \frac{٤}{٥} \times ٨٠ = ٦٤$

★ $ق = م_س ر + \frac{٣}{٥} \times ٨٠$

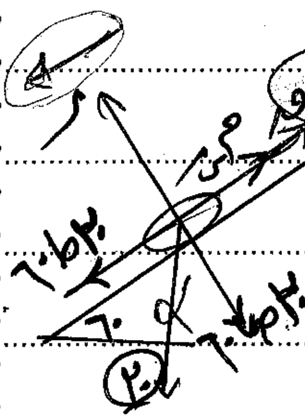
$ق = \frac{٤}{٥} \times ٦٤ + \frac{٣}{٥} \times ٨٠$

∴ $\boxed{ق = ٩٩٫٢}$ نيوتن

مثال ٥

وضع جسم وزنه ٢٠ نيوتن على مستوى مائل خشن لوحظ أن الجسم على وشك الانزلاق إذا كان المستوى يميل بزاوية ٣٠° على الأفقي فإذا ازيد زاوية ميل المستوى إلى ٦٠ فأوجد (أ) أقل قوة تمنع الانزلاق (ب) القوة التي تجعله على وشك الحركة لأعلى وموازية لخط أكبر ميل للمستوى

الحل



الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط

⟸ $ل = ٣٠$

⟸ $م_س = ظا ٣٠ = \boxed{\frac{\sqrt{٣}}{٣}}$

(أ) ر = ٢٠ جتا ٦٠

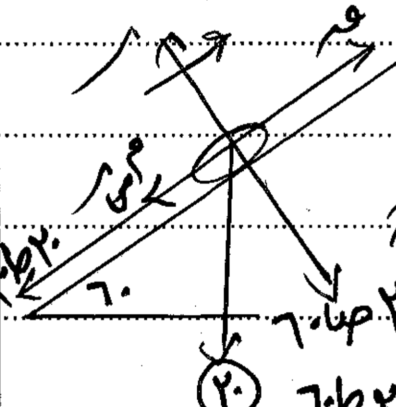
⟸ $\boxed{ر = ١٠}$ ثقل كجم

* ق + م س ر = و جا ٦٠

ق + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × ١٠ = ٢٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

⟸ $\boxed{ق = ١٠\sqrt{٣}}$ ثقل كجم

(ب) الحركة لأعلى



ر = ٢٠ جتا ٦٠

$\boxed{ر = ١٠}$ ثقل كجم

* ق = م س ر + ٢٠ جا ٦٠

* ق = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × ١٠ + ٢٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\boxed{ق = ٢٠\sqrt{٣}}$ ثقل كجم

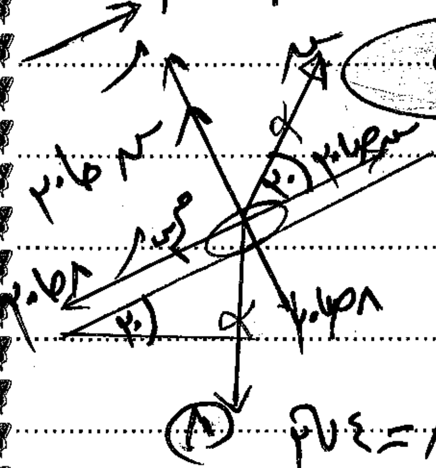
تمرين

وضع جسم وزنه ٢ ثقل كجم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية ٣٠° فلوحظ ان الجسم على وشك الحركة لأسفل فإذا ربط الجسم بخيط وشد في اتجاه يميل على الأفقي ٦٠ لأعلى فأصبح الجسم على وشك الحركة لأعلى أوجد الشد وزاوية الاحتكاك السكوني ورد الفعل العمودي $\boxed{\sqrt{٣} ، \frac{١}{٢} ، ١}$

مثال ٦

وضع جسم وزنه ٨ ثقل كجم على مستوى أفقي خشن ثم أميل المستوى تدريجيا حتى أصبح الجسم على وشك الانزلاق لأسفل عندما كانت زاوية ميل المستوى ٣٠ أوجد معامل الاحتكاك وإذا ربط الجسم بخيط ثم شد في اتجاه يميل بزاوية ٣٠ على المستوى حتى أصبح على وشك الحركة لأعلى أوجد الشد ورد الفعل العمودي

الحل



م س = ظا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

ر + $\frac{١}{٢}$ ش = ٤$\sqrt{٣}$

⟸ ر = ٤$\sqrt{٣}$ − $\frac{١}{٢}$ ش ①

* $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ش = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ر + ٤ ②

من ① في ②

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ش = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (٤$\sqrt{٣}$ − $\frac{ش}{٢}$) + ٤

⟸ $\boxed{ش = ٤\sqrt{٣}}$ ثقل كجم

بالتعويض في ① $\boxed{ر = ٢\sqrt{٣}}$ ثقل كجم

مثال (٧) وضع جسم وزنه ٣ نيوتن على مستوى خشن يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٦٠ وكان معامل الاحتكاك السكوني $\frac{\sqrt{3}}{9}$ بين ان هذا الجسم لن يبقى ساكنا ثم اوجد اكبر و اصغر قوة أفقية تؤثر في الجسم ويبقى متزنا

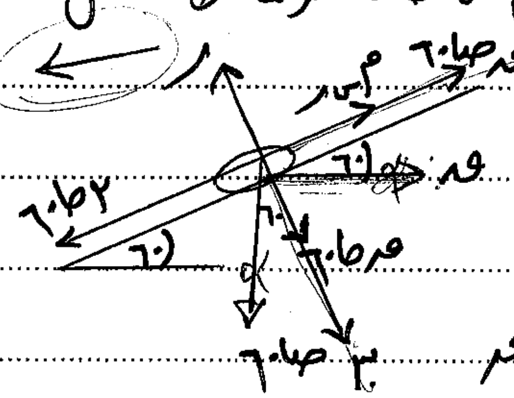
الحل

ظا هـ = ظا ٦٠ = $\sqrt{3}$

م س = $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ∴ ظا ل = $\frac{\sqrt{3}}{9}$

∴ هـ > ل

∴ الجسم في حالة حركة الى أسفل



اولاً اصغر قوة تجعل الجسم على وشك الانزلاق

* ر = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ق + $\frac{3}{2}$

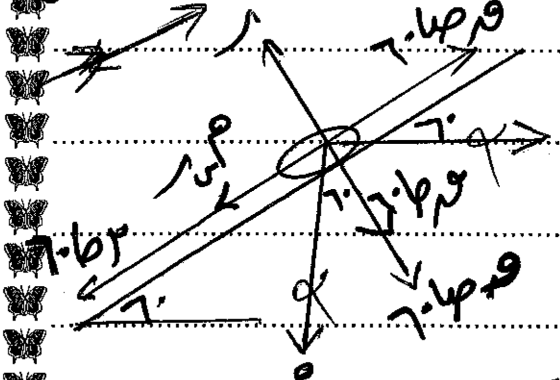
* $\frac{1}{2}$ ق + $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ر = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{2}$ ق + $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ($\frac{\sqrt{3}}{2}$ ق + $\frac{3}{2}$) = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{2}$ ق + $\frac{1}{6}$ ق + $\frac{3\sqrt{3}}{18}$ = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

⟵ $\boxed{\text{ق} = 2\sqrt{3}}$ نيوتن

ثانياً



اكبر قوة تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى

* ر = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ق + $\frac{3}{2}$ (١)

* $\frac{1}{2}$ ق = $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ر + $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (٢)

من (١) في (٢)

∴ $\frac{1}{2}$ ق = $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ($\frac{\sqrt{3}}{2}$ ق + $\frac{3}{2}$) + $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

⟵ $\boxed{\text{ق} = 5\sqrt{3}}$ نيوتن

تمرين

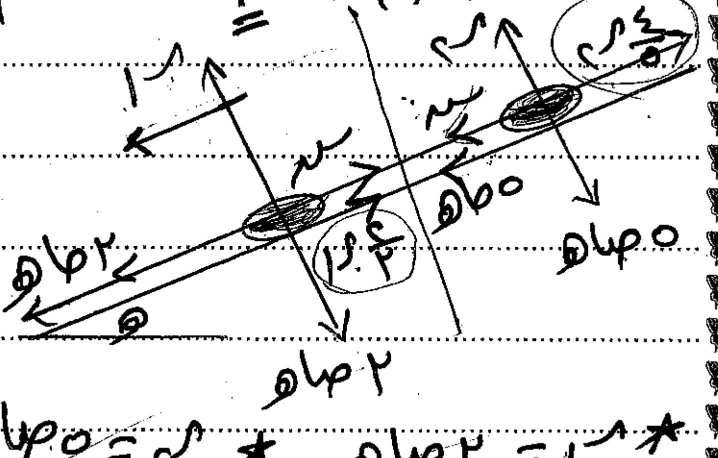
جسم وزنه ٢٠ نيوتن موضوع على مستوى مائل خشن ولوحظ ان الجسم على وشك الانزلاق اذا كان جيب زاوية ميل المستوى $\frac{1}{2}$ واذا زيد ميل المستوى بحيث كان جيب الزاوية $\frac{1}{\sqrt{2}}$ اوجد اكبر واصغر قوة موازية لخط اكبر ميل المستوى تبقيه متزنا

مثال (8) كتلتان ٣ ، ٥ كجم
متصلان بخيط خفيف وموضوعتان
على مستوى مائل خشن وكان معامل
الاحتكاك السكوني بين المستوى و
الجسمين $\frac{2}{3}$ ، $\frac{4}{5}$ على الترتيب
بين أي الجسمين يوضع أسفل
الجسم الآخر حتى يتحرك الجسمان معاً
ثم اثبت أن ظل زاوية ميل المستوى
على الأفقي عندما يكون الجسمان على وشك
الحركة $\frac{3}{4}$

الحل

الجسم الذي يوضع أسفل والذي
يبدأ الحركة أولاً هو الجسم الذي
معامل احتكاكه أصغر

* أي أن الجسم هو ٣ لأن معامله $\frac{2}{3}$



* ر١ = ٣ جتاهـ * ر٢ = ٥ جتاهـ
* الجسم الأول

سه + $\frac{2}{3}$ ر١ = ٣ جاهـ

∴ سه + $\frac{2}{3}$ × ٣ جتاهـ = ٣ جاهـ

∴ سه + ٢ جتاهـ = ٣ جاهـ ← (1)

$\frac{4}{5}$ ر٢ = سه + ٥ جاهـ

$\frac{4}{5}$ × ٥ جتاهـ = سه + ٥ جاهـ ← (2)

من (1) ، (2)

∴ ٤ جتاهـ = ٣ جاهـ − ٢ جتاهـ + ٥ جاهـ

∴ ٦ جتاهـ = ٨ جاهـ

∴ ظاهـ = $\frac{3}{4}$

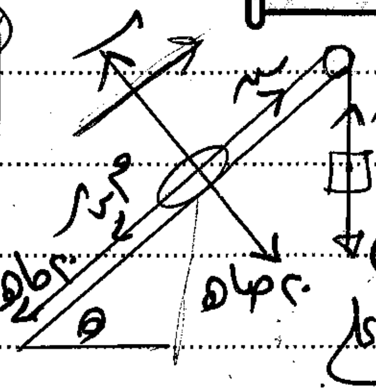
مثال (9) وضع جسم وزنه
٢٠ نيوتن على مستوى مائل خشن
وربط بخيط يمر على بكرة ملساء
عند قمة المستوى ويتدلى من الخيط
كفة ميزان وزنها ٢ نيوتن
فإذا كان أكبر ثقل يوضع في
الكفة لحفظ التوازن هو ١٢
وأصغر ثقل هو ٨ نيوتن
احسب معامل الاحتكاك السكوني
وظل زاوية ميل المستوى على الأفقي

الحل

* الحالة الأولى

الجسم يتصل بجسم (14)

الجسم على وشك الحركة لأعلى



ش = ١٤ ، ر = ٢٠ جتاهـ

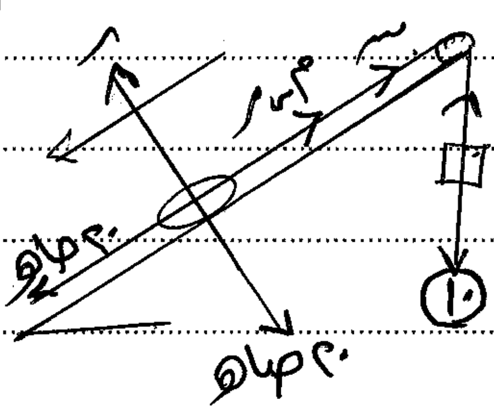
* ش = م س ر + ٢٠ جاهـ

∴ ١٤ = ٢٠ م س جتاهـ + ٢٠ جاهـ ← (١)

* الحالة الثانية

إذا كان الجسم يتصل بجسم (10)

الجسم على وشك الحركة لأسفل



ش = ١٠ ، ر = ٢٠ جتاهـ

* ش + م س ر = ٢٠ جاهـ

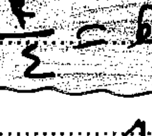
١٠ + ٢٠ م س جتاهـ = ٢٠ جاهـ

∴ ٢٠ م س جتاهـ = ٢٠ جاهـ − ١٠ ← (٢)

من (١) ، (٢)

١٤ − ٢٠ جاهـ = ٢٠ جاهـ − ١٠

← جاهـ = $\frac{3}{5}$ ← $\boxed{\text{ظاهـ} = \frac{3}{4}}$

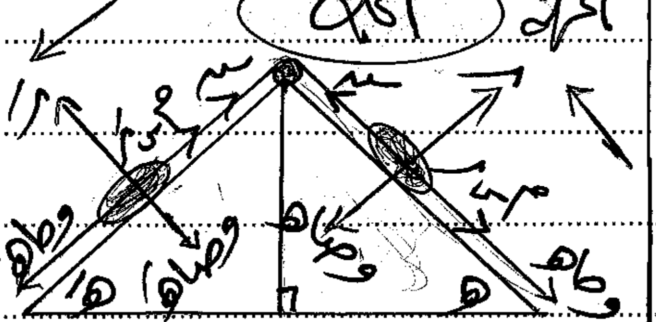


← $\boxed{\text{م س} = \frac{1}{8}}$

مثال (١١)

مستويان مائلان متساويا الارتفاع ومتحدتان فى الخشونة موضوعان ظهراً لظهر ويميل أحدهما على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{3}{5}$ والآخر يميل بزاوية ظلها $\frac{4}{3}$ وضع على كل منهما كتلتين متساويتين موصولتين بخيط يمر على بكرة ملساء مثبتة عند قمة المستويين أوجد معامل الاحتكاك إذا كانت المجموعة على وشك الحركة

الحل



م س متساوى فى الطرفين

* المجموعة على وشك الحركة لأسفل المستوى الذى قياس زاويته أكبر.

* ر = $\frac{4}{5}$ و ، رَ = $\frac{3}{5}$ و

ش = $\frac{3}{5}$ و + م س ر ← (١)

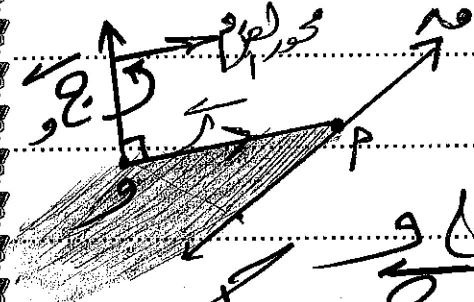
ش + م س رَ = $\frac{4}{5}$ و ← (٢)

من (١) ، (٢) ← $\boxed{\text{م س} = \frac{1}{7}}$

الوحدة الثانية العزوم

اولا : عزم قوة حول نقطة فى النظام الثنائي

هو مقدرة القوة على إحداث حركة دورانية للجسم حول هذه النقطة



فإذا كانت أ تقع على خط عمل ق

وكان ر هو متجه موضع أ بالنسبة لـ و

فإن عزم ق بالنسبة لـ و هو ج و ويكون

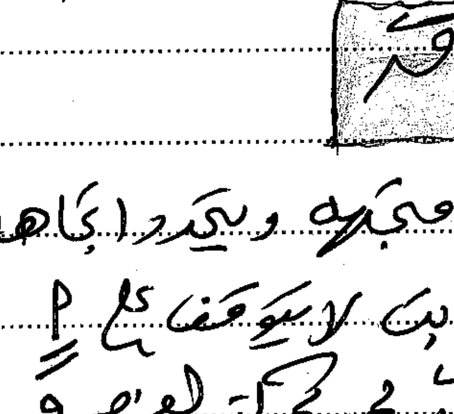
$$\overline{ج_و} = \overline{ر} \times \overline{ق}$$

ملاحظات

① عزم ق بالنسبة لـ و هو كمية متجهة ويتحدد اتجاهه بقاعدة اليد اليمنى وهو مقدار ثابت لا يتوقف على أ

② ينعدم ج و إذا كان خط عمل ق يمر بمركز العزم و

قواعد هامة

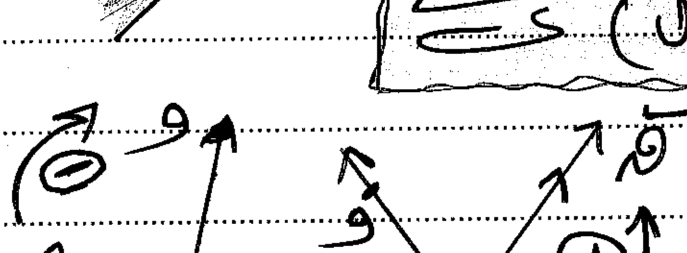


① $\overline{ج_و} = \|\overline{ق}\| \, \|\overline{ر}\| \, جا\theta \; \overline{ى}$

② من هندسة الشكل ل = ر جا θ

$$\longrightarrow \quad \overline{ج_و} = (ق \, ل) \, \overline{ى}$$

③ الاتجاه الموجب للعزم



* يكون العزم موجباً إذا كان الدوران للقوة حول و بعكس عقارب الساعة

* ويكون العزم سالباً إذا كان دوران القوة مع عقارب الساعة

④ معيار العزم $\|\vec{ج}_و\| = ق\,ل$ وهو موجب دائماً

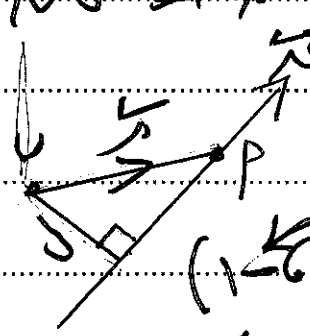
حيث ل هي ذراع القوة أو ذراع العزم

ويكون $ل = \frac{\|\vec{ج}_و\|}{ق}$

مثال ١ إذا كانت $\vec{ق} = ٤\vec{س} - \vec{ص}$ تؤثر في أ (٢، ٣) أوجد

① عزم $\vec{ق}$ بالنسبة لـ ب (١، ٢) ② بعد ب عن خط عمل ق

الحل



① $\vec{ر} = \vec{ب أ} = \vec{أ} - \vec{ب} = (٠ ، ٢)$

∴ $\vec{ج}_ب = \vec{ر} \times \vec{ق} = (٠ ، ٢) \times (٤ ، -١)$

$= (٠ \times -١ - ٢ \times ٤)\,\vec{ك}$

∴ $\vec{ج}_ب = -٨\,\vec{ك} \Longrightarrow \|\vec{ج}_ب\| = ٨$

② $\|\vec{ق}\| = \sqrt{١٦ + ١} = \sqrt{١٧}$

∴ $ل = \frac{ج_ب}{ق} = \frac{٨}{\sqrt{١٧}}$ وحدة طول

مثال ٢

تؤثر $\vec{ق} = ٢\vec{س} - ٤\vec{ص}$ في أ (١، −١)

اثبت ان خط عمل $\vec{ق}$ يمر بـ ب (−١، ٣)

الحل

$\vec{ر} = \vec{ب أ} = \vec{أ} - \vec{ب} = (١، −١) - (−١، ٣) = (٢، −٤)$

$\vec{ج}_ب = \vec{ر} \times \vec{ق} = (٢، −٤) \times (٢، −٤)$

∴ $\vec{ج}_ب = (-١٢ + ١٢)\,\vec{ك} = \vec{صفر}$ ينعدم العزم

∴ $\vec{ق}$ تمر بالنقطة ب

مثال (٢) تؤثر القوتان $\overline{ق}_1 = م\,\overline{س} + ٢\,\overline{ص}$ ، $\overline{ق}_2 = ل\,\overline{س} - \overline{ص}$ في النقطتين أ (١، ١) ، ب (−١، −٢) عيّن الثابتين م ، ل بحيث تنعدم مجموع عزوم هاتين القوتين حول نقطة الأصل ونقطة جـ (٢، ٣)

الحل

* العزم حول و (٠، ٠) $\longrightarrow$ $\overline{ر}_1 = \overline{أ} = (١، ١)$

، $\overline{ر}_2 = \overline{ب} = (-١، -٢)$ ∵ $\overline{جـ}_1 + \overline{جـ}_2 = \overline{و}$

∴ $\overline{ر}_1 \times \overline{ق}_1 + \overline{ر}_2 \times \overline{ق}_2 = \overline{و}$

∴ $(١، ١) \times (م، ٢) + (-١، -٢) \times (ل، -١) = صفر$

∴ $٢ - م + ١ + ٢ل = ٠ \longrightarrow \boxed{-م + ٢ل = -٣}$ (١)

* العزم حول جـ (٢، ٣)

$\overline{ر}_1 = \overline{جـ أ} = \overline{أ} - \overline{جـ} = (١، ١) - (٢، ٣) = (-١، -٢)$

$\overline{ر}_2 = \overline{جـ ب} = \overline{ب} - \overline{جـ} = (-١، -٢) - (٢، ٣) = (-٣، -٥)$

∵ $\overline{جـ}_1 + \overline{جـ}_2 = \overline{و}$

∴ $(-١، -٢) \times (م، ٢) + (-٣، -٥) \times (ل، -١) = ٠$

∴ $-٢ + ٢م + ٣ + ٥ل = ٠ \longrightarrow \boxed{٢م + ٥ل = -١}$ (٢)

بحل المعادلتين معاً

$\longrightarrow \boxed{م = \frac{١٣}{٩}}$ ، $\boxed{ل = \frac{-٧}{٩}}$

ملاحظات هامة جداً

(١) إذا كان $جـ_م = جـ_ن \Longleftrightarrow$ خط عمل $\overline{ق}$ // $\overline{من}$

(٢) " " $جـ_م = -جـ_ن \Longleftrightarrow$ خط عمل $\overline{ق}$ ينصف $\overline{من}$

مثال ٤: إذا كانت ق = ٢ س − ٤ ص تؤثر في م(٠، ٢) وكانت ب(٢، ٢)، د(−٢، ١)، هـ(−٥، ٥) نقاط في مستواها أثبت أن خط عمل ق

(١) ينصف ب د (٢) يوازي د هـ

الحل

(١) * ر₁ = م − ب = (٠، ٢) − (٣، ٣) = (−٣، −١)

∴ ح ب = ر₁ × ق = (−٣، −١) × (٢، −٤) = $\boxed{١١ ع}$

* ر₂ = م − د = (٠، ٢) − (−٢، ١) = (٢، ١)

∴ ح د = ر₂ × ق = (٢، ١) × (٢، −٤) = $\boxed{−١١ ع}$

∴ ح ب = − ح د

∴ ق تنصف ب د ⟵ أولاً

(٢) ح د = −١١ ع ثم ايجادها من قبل

* ر₃ = م − هـ = (٠، ٢) − (−٥، ٥) = (٥، −٣)

ح هـ = ر₃ × ق = (٥، −٣) × (٢، −٤)

= (−٢٠ + ٩) ع = −١١ ع

∴ ح د = ح هـ

∴ خط عمل ق // د هـ ⟵ ثانياً

تقويم

كوّنت ق = ل س + م ص تؤثر في م(٤، ٢) وكان متجه عزم ق بالنسبة لنقطة الأصل هو −٢٢ ع ومتجه عزمها بالنسبة ب(١٢، ١) هو ٢٢ ع أوجد ل، م

الجواب ٥، −٢

مثال ٥ إذا كانت $\overline{ق} = ٢\overline{س} - ٣\overline{ص}$ تؤثر في أ وكانت متجه عزم ق بالنسبة لـ ب (١، ٤) هو $١٦\overline{ع}$ أوجد معادلة خط عمل ق

الحل

نفرض أ (س، ص)

$\overline{ر} = \overline{ب أ} = \overline{أ} - \overline{ب} = (س، ص) - (١، ٤)$

$= (س - ١ ، ص - ٤)$

∵ $\overline{ح}_{ب} = ١٦\overline{ع}$ ∴ $\overline{ر} \times \overline{ق} = ١٦\overline{ع}$

∴ $(س - ١ ، ص - ٤) \times (٢ ، -٣) = ١٦\overline{ع}$

∴ $(-٣س + ٣ - ٢ص + ٨)\overline{ع} = ١٦\overline{ع}$

ومنه $-٣س - ٢ص + ١١ = ١٦$

∴ معادلة خط عمل ق هو $\boxed{٣س + ٢ص + ٥ = ٠}$

مثال ٦ إذا كانت $\|\overline{ق}\| = ١٥$ وكانت ق تعمل في $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ (-٣، ١) ، ب (١، ٤) أوجد عزم ق حول و

الحل

ق تعمل في $\overleftrightarrow{أب}$ ∴ $\overline{ق} = \|\overline{ق}\| \times \overline{ى}_{أب}$

متجه الوحدة في اتجاه أب

أي أن $\overline{ق} = \|\overline{ق}\| \times \frac{\overline{أب}}{\|\overline{أب}\|}$

★ $\overline{أب} = \overline{ب} - \overline{أ} = (١، ٤) - (-٣، ١) = (٤، ٣)$

$\overline{ى}_{أب} = \frac{(٤، ٣)}{\sqrt{١٦ + ٩}} = (\frac{٤}{٥} ، \frac{٣}{٥})$

∴ $\overline{ق} = ١٥ \times (\frac{٤}{٥} ، \frac{٣}{٥}) = (١٢، ٩)$

★ $\overline{ر} = \overline{وأ} = \overline{أ} = (-٢ ، ١)$

∴ $\overline{ج}_و = \overline{ر} \times \overline{ق} = (-٢ ، ١) \times (١٢ ، ٩)$

$= (-٢٧ - ١٢)\overline{ع} = -٣٩ \overline{ع}$

مبدأ العزوم

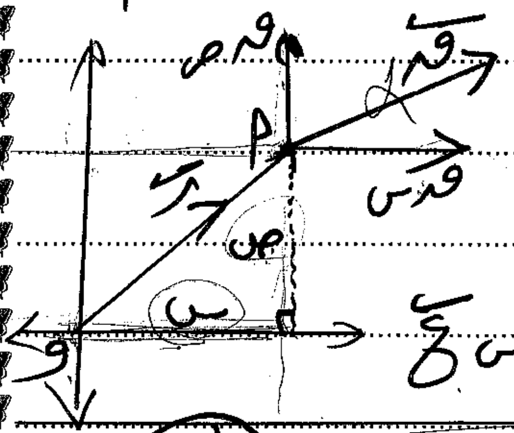
نظرية فارينون: عزم $\overline{ق}$ بالنسبة لنقطة يساوي مجموع عزوم مركبات $\overline{ق}$ بالنسبة لنفس النقطة

أي أنه

إذا كانت $\overline{ق} = ق_س \overline{س} + ق_ص \overline{ص}$

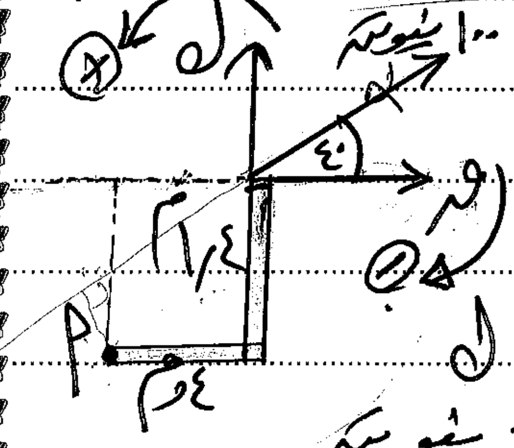
وكانت م أ (س ، ص) فإن

$\overline{ج}_و = (س \cdot ق_ص)\overline{ع} - ص \cdot ق_س \overline{ع}$



مثال (٧)

في الشكل أوجد القياس الجبري لعزم القوة ١٠٠ نيوتن بالنسبة لـ أ



الحل

نحلل القوة ١٠٠ إلى مركبتيها ق ، ل

★ ق = ١٠٠ جتا ٤٠ = ٦٧٫٦ نيوتن

★ ل = ١٠٠ جا ٤٠ = ٦٤٫٢ نيوتن

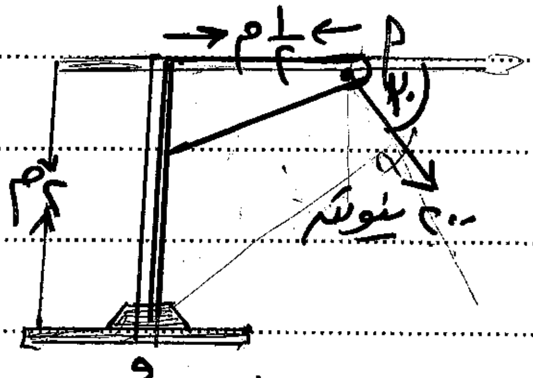
∴ $ج_أ$ = عزم ق حول أ + عزم ل حول أ

$ج_أ = -ق \times ١٫٤ + ل \times ٠٫٤$

$= -٦٧٫٦ \times ١٫٤ + ٦٤٫٢ \times ٠٫٤ = -٦٨٫٩$ نيوتن . م

علماً بأن الإشارة السالبة تعني أن القوة تعمل في اتجاه دوران عقارب الساعة

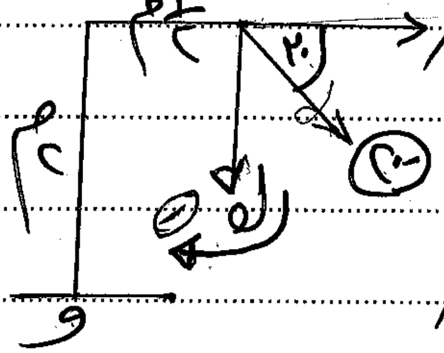
مثال ٨ : في الشكل المقابل



أوجد المقياس الجبري لعزم القوة

٢٠٠ بالنسبة لـ و

الحل



نحلل القوة ٢٠٠ إلى مركبتين

ق ، ك حيث

* ق = ٢٠٠ جتا ٣٠ = ١٠٠ √٣ نيوتن
* ك = ٢٠٠ جا ٣٠ = ١٠٠ نيوتن

من فارينون

∴ ج و = − ق × ٢ − ك × ١/٢

= − ١٠٠ √٣ × ٢ − ١٠٠ × ١/٢ = − ٣٩٦ نيوتن وحدة عزم

نظرية

مجموع عزوم عدة قوى مستوية متلاقية في نقطة بالنسبة لأي نقطة أخرى يساوي عزم محصلة القوى بالنسبة للنقطة نفسها

مثال ٩

كانت القوى ق١ = ٢ س − ٣ ص ، ق٢ = (٢ ، ٣)

، ق٣ = س − ص تؤثر في أ (٢ ، −٣) أوجد عزم

محصلة القوى بالنسبة لـ و ومن ثم أوجد طول

العمود الساقط من نقطة الأصل و على خط عمل المحصلة

الحل

$\overline{ق_ح} = (٢ ، -٢) + (٢ ، ٢) + (١ ، -١) = (٦ ، ٠)$

$\overline{ر} = \overline{أ} = (٢ ، -٣)$ بأخذ حول و

$\overline{ج_و} = \overline{ر} \times \overline{ق_ح} = (٢ ، -٣) \times (٦ ، ٠) = ١٨ \overline{ع}$

$\therefore ل = \frac{||\overline{ج_و}||}{ق} = \frac{١٨}{\sqrt{٣٦ + ٠}} = \frac{١٨}{٦} = ٣$ وحدة طول

مثال ١

القوى $\overline{ق_١} = ٢\overline{س} - \overline{ص}$ ، $\overline{ق_٢} = ٥\overline{س} + ٢\overline{ص}$

، $\overline{ق_٣} = -٢\overline{س} + ٢\overline{ص}$ تؤثر كلها في أ (١ ، ١) برهن

أن خط عمل المحصلة يوازي $\overline{ب د}$ حيث

ب (٢ ، ١) ، د (٦ ، ٤) الحل

$\overline{ح} = (٢ ، -١) + (٥ ، ٢) + (-٢ ، ٢) = (٤ ، ٣)$

★ نوجد عزم $\overline{ح}$ حول ب

$\overline{ر_١} = \overline{ب أ} = \overline{أ} - \overline{ب} = (١ ، ١) - (٢ ، ١) = (-١ ، ٠)$

$\overline{ج_ب} = \overline{ر_١} \times \overline{ح} = (-١ ، ٠) \times (٤ ، ٢) = -٢ \overline{ع}$

★ نوجد عزم $\overline{ح}$ حول د

$\overline{ر_٢} = \overline{أ} - \overline{د} = (١ ، ١) - (٦ ، ٤) = (-٥ ، -٢)$

$\overline{ج_د} = \overline{ر_٢} \times \overline{ح} = (-٥ ، -٢) \times (٤ ، ٢) = -٢ \overline{ع}$

$\therefore \overline{ج_ب} = \overline{ج_د}$ ⟵ خط عمل المحصلة // $\overline{ب د}$

تقويم

تؤثر القوى $\overline{ق_١} = (١ ، -١)$ ، $\overline{ق_٢} = (٤ ، ١)$ ،

$\overline{ق_٣} = (-٢ ، -٢)$ في أ (١ ، -٤) وكانت ب (٢ ، ٠) ، ح (-٤ ، -٢)

أثبت أن المحصلة تنصف $\overline{ب ح}$

خلي بالك: إذا كان عزم محصلة قوى حول نقطة = صفر فإن المحصلة = ٠ أو خط عمل المحصلة يمر بالنقطة

تذكر

① طول قطر المربع = $\sqrt{2}$ ل

② قطرا المعين متعامدان

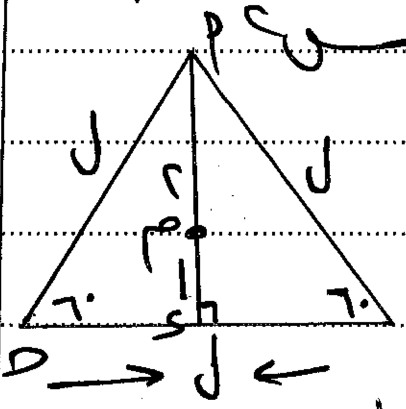
③ قطرا المستطيل متساويان

④ قطرا المربع متعامدان ومتساويان

⑤ نقطة تقاطع متوسطات △ تقسم كلاً منها بنسبة ٢ : ١ من القاعدة

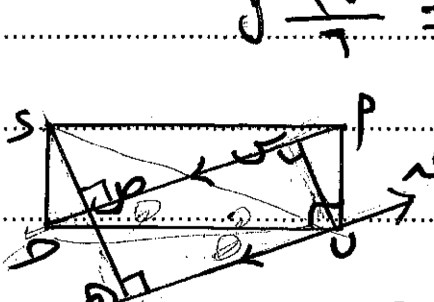
⑥ مساحة △ المتساوي الأضلاع = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ س²

⑦ إذا كان △ متساوي الأضلاع



* أ ى = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل
* أ م = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ل
* م ى = $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ل

⑧ في المستطيل أ ب ج د

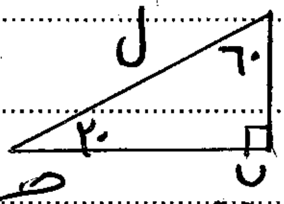


ب س = د ص = $\frac{أب \cdot بج}{أج}$ مساحة المستطيل

وأيضاً د هـ = ٢ د ص

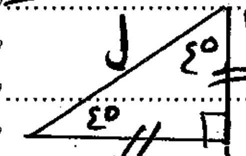
⑨ أ ب = $\frac{1}{2}$ ل

ب ج = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل



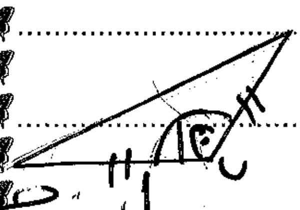
⑩ △ قائم متساوي الساقين

أ ب = ب ج = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ل

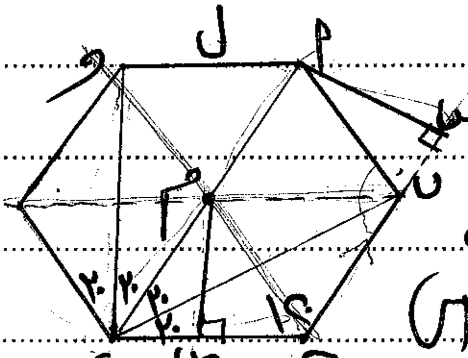


⑪ أ ب = ب ج

∴ أ ج = $\sqrt{3}$ ل



⑫ حالة السداسي



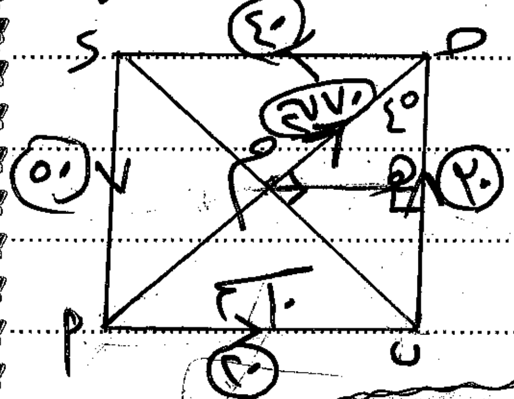
* أ د = ب هـ = ٢ ل
* و د = $\sqrt{3}$ ل
* م س = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل
* م ص = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل

٨ / ١٢ / ٢٠١٨

مثال ١١

أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٠ سم أثرت القوى ٢٠، ٢٠، ٤٠، ٥٠، $٧٠\sqrt{٢}$ نيوتن في $\overrightarrow{أب}$، $\overrightarrow{ب جـ}$، $\overrightarrow{جـ د}$، $\overrightarrow{د أ}$، $\overrightarrow{أ جـ}$ احسب عزوم القوى حول ب ومركز المربع

الحل



* أولاً حول ب

القوى التي تمر بـ ب عزمها = ٠

∴ $جـ_ب = ١٠ \times ٥٠ + ١٠ \times ٤٠ - ٧٠\sqrt{٢} \times ٥\sqrt{٢}$

∴ $جـ_ب = ٢٠٠$ نيوتن . سم

ب م = ١٠ جا ٤٥ = $٥\sqrt{٢}$

* العزوم حول م

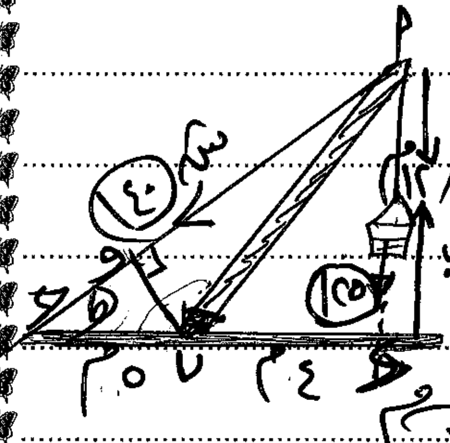
الأبعاد العمودية متساوية م هـ = $\frac{١}{٢}$ ل = ٥ سم

∴ $جـ_م = ٥ \times ٥٠ + ٥ \times ٤٠ + ٥ \times ٢٠ + ٥ \times ٢٠$

∴ $جـ_م = ٧٠٠$ نيوتن . سم

مثال ١٢

في الشكل أب رافعة لرفع البضائع إذا كان الشد في الخيط = ٤٠ نيوتن ووزن الصندوق ١٢٥ نيوتن أوجد مجموع عزوم القوتين بالنسبة ب



الحل

* $(أب)^٢ = ١٦ + ١٤٤ \Leftarrow أب = ٤\sqrt{١٠}$ سم

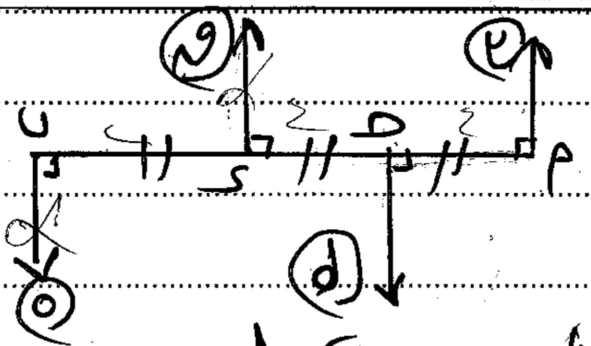
* $(أ هـ)^٢ = ٨١ + ١٤٤ \Leftarrow أ هـ = ١٥$ سم

* جا هـ = $\frac{١٢}{١٥} = \frac{٤}{٥}$ ∴ ب و = $٥ \times \frac{٤}{٥} = ٤$ سم

∴ مجموع العزوم حول ب

$= -١٢٥ \times ٤ + ١٤٠ \times ٤ = ٦٠$ نيوتن . سم

مثال ١٣



في الشكل المقابل

في الشكل أ هـ = هـ د = د ب = ٤ سم

ومجموع العزوم حول د = ٥٠

وخط عمل المحصلة يمر بـ هـ أوجد ق ، ل

الحل

★ ∴ جـ$_{هـ}$ = صفر ∴ $٣ \times ٤ - ق \times ٤ + ٥ \times ٨ =$ صفر

∴ $٤٠ + ١٢ = ٤$ ق ⟵ ق = ١٣ نيوتن

★ ∴ جـ$_{د}$ = ٥٠ ∴ $٣ \times ٨ + ٥ \times ٤ - ل \times ٤ = ٥٠$

∴ $٢٤ + ٢٠ - ٥٠ = ٤$ ل ⟸ ل = ١,٥ نيوتن

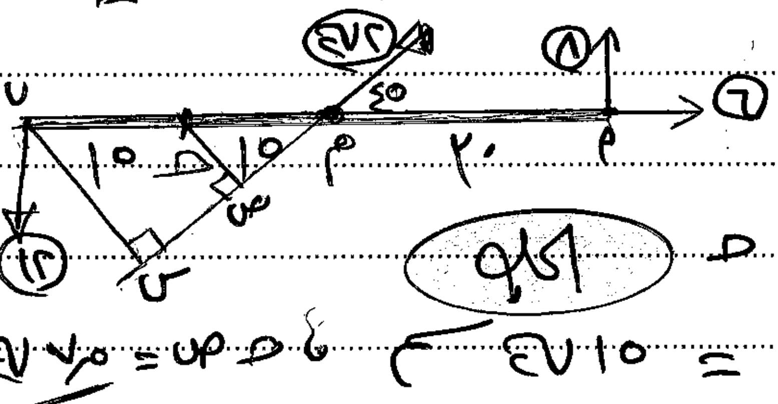
مثال ١٤

أثرت القوى ٦ ، ٨ ، ٢√٢ ، ١٢ نيوتن في قضيب أب

طوله ٦٠ سم كما بالشكل

حيث م منتصف القضيب

أوجد عزوم القوى حول م



الحل

★ ب س = ٣٠ جا ٤٥ = ١٥√٢ سم ، ن ص = م ص = ٧,٥√٢

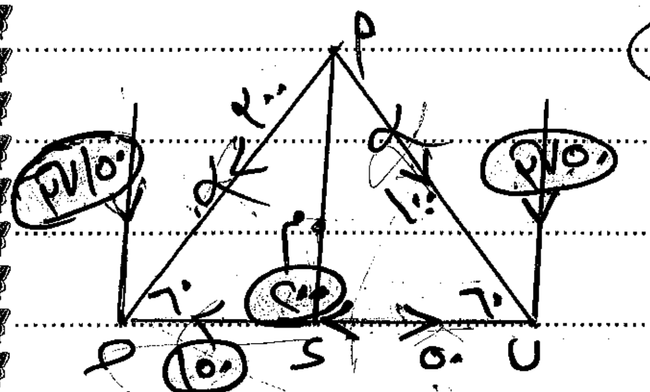
★ العزوم حول م = $٨ \times ٤٥ + ٢\sqrt{٢} \times ٧,٥\sqrt{٢}$

$+ ١٢ \times ١٥ = ٥٧٠$ نيوتن . سم

∵ خط عمل عزم القوة ٦ = صفر

مثال ١٥ : أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٢٠ سم
أثرت القوى ١٠٠ ، ٢٠٠ ، ٢٠٠ ث كجم تؤثر في أب ،
ب جـ ، جـ أ أوجد المجموع الجبري لعزوم القوى
حول (أ) نقطة ارتفاعات المثلث (ب) منتصف ب جـ

الحل



تحلل القوتين ١٠٠ ، ٢٠٠
راج ١٠٠ جتا ٦٠ = ٥٠ ، ١٠٠ جا ٦٠
٢٠٠ جتا ٦٠ = ١٥٠ ، ٢٠٠ جا ٦٠

* العزوم حول م

أ ء = أ ب جا ٦٠ = ٢٠ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ١٠ $\sqrt{3}$ سم
∵ م ء = $\frac{1}{3}$ أ ء ⇐ م ء = $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ ، ب ء = ء جـ = ١٠ سم

∴ جـ$_{م}$ = (٥٠ − ٢٠٠ − ١٥٠) × $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ + ($150\sqrt{3} - 50\sqrt{3}$) × ١٠
= $-1000\sqrt{3} + 1000\sqrt{3}$ = صفر ث كجم . سم

* العزوم حول ء

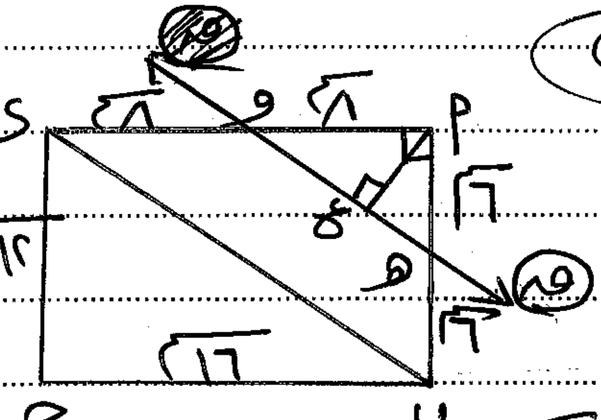
جـ$_{ء}$ = $150\sqrt{3}$ × ١٠ − $50\sqrt{3}$ × ١٠ = $1000\sqrt{3}$
لاحظ أن القوى ٥٠ ، ٢٠٠ ، ١٥٠ تشكل ... عزم

تقويم

أ ب جـ ء هـ و سداسي منتظم طول ضلعه ١٠ سم
أثرت القوى ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ث كجم تؤثر في أب ،
ب جـ ، جـ ء ، ء هـ ، هـ و ، و أ على الترتيب أوجد
عزوم القوى حول أ وحول مركز السداسي

الحل
$-75\sqrt{3}$ ، $-25\sqrt{3}$

مثال (١٦) أ ب جـ د مستطيل فيه أب = ١٢ سم ، ب جـ = ١٦ سم أثرت قوة ق في مستوى المستطيل فإذا كان عزم ق حول ب = عزم ق حول د = -٢٤٠ نيوتن.سم ، عزم ق حول أ = -٢٤٠ نيوتن.سم عين مقدار واتجاه ق



الحل

* جـب = جـد = -٢٤٠

∴ خط عمل ق // ب د

* جـأ = ٢٤٠

∴ جـأ = - جـب

∴ خط عمل ق ينصف أب

من تشابه الشكل هـ و = ١٠ سم ، أع = $\frac{٦ \times ٨}{١٠}$ = ٤٫٨

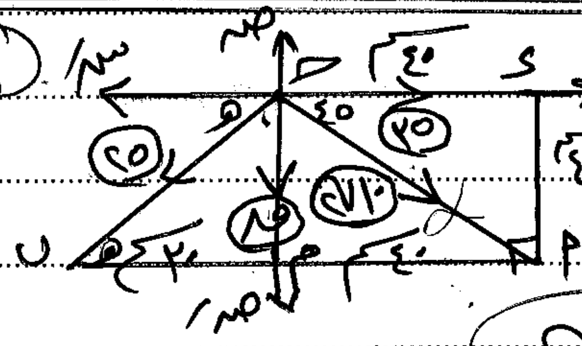
* جـأ = ٢٤٠ ⟵ ق × ٤٫٨ = ٢٤٠

⟵ ق = ٥٠ نيوتن وتعمل في اتجاه وهـ

مثال (١٧) في الشكل مستطيل محصلة القوى ٥٠ نيوتن أوجد ق وعزم المحصلة حول أ

مصر ٩٢

فكرة ٢ ب ٢



الحل

* س = ٢٥ جا ٠ + ١٠√٢ جا ٢١٥ + ق جا ٢٧٠ - ٢٥ جا هـ

ومنها س = ٣٠ بالمثل $\boxed{ص = -٢٠ - ق}$ ⟵ (١)

* ح² = س² + ص² ⟵ ٢٥٠٠ = ٩٠٠ + ص²

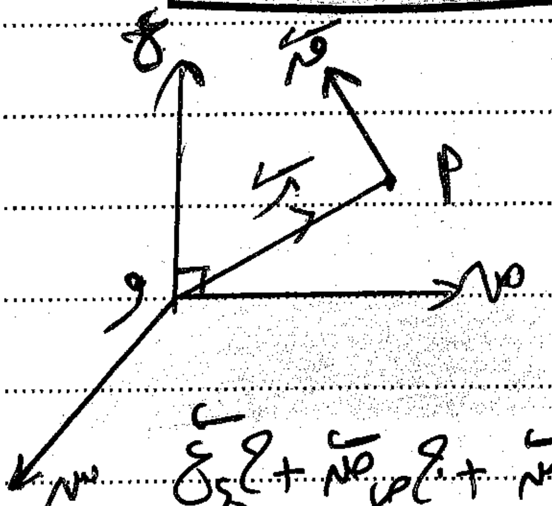
⟵ ص² = ١٦٠٠ ⟵ ص = -٤٠ بالتعويض في (١) ∴ $\boxed{ق = ١٠}$

جـأ = -٢٥ × ٤٠ + ١٠ × ٤٠ + ٢٥ × ٧٠ × $\frac{٤}{٥}$ = ٤٠٠ نيوتن.سم

جا هـ = $\frac{٤}{٥}$

العزوم فى النظام ثلاثى الأبعاد

عزم قوة حول نقطة من الفراغ

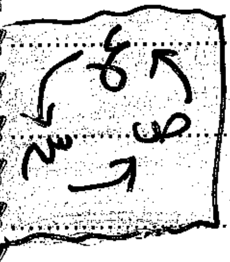


إذا كانت $\vec{\text{ق}} = (\text{ق}_\text{س} ، \text{ق}_\text{ص} ، \text{ق}_\text{ع})$

، $\vec{\text{ر}} = (\text{س} ، \text{ص} ، \text{ع})$ فإن

$$\vec{\text{ج}}_\text{و} = \vec{\text{ر}} \times \vec{\text{ق}}$$

$$\therefore \vec{\text{ج}}_\text{و} = \begin{vmatrix} \hat{\text{س}} & \hat{\text{ص}} & \hat{\text{ع}} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ق}_\text{س} & \text{ق}_\text{ص} & \text{ق}_\text{ع} \end{vmatrix} = \text{ج}_\text{س}\hat{\text{س}} + \text{ج}_\text{ص}\hat{\text{ص}} + \text{ج}_\text{ع}\hat{\text{ع}}$$



$$= (\text{ص}\,\text{ق}_\text{ع} - \text{ع}\,\text{ق}_\text{ص})\,\hat{\text{س}} + (\text{ع}\,\text{ق}_\text{س} - \text{س}\,\text{ق}_\text{ع})\,\hat{\text{ص}} + (\text{س}\,\text{ق}_\text{ص} - \text{ص}\,\text{ق}_\text{س})\,\hat{\text{ع}}$$

أى أن $\text{ج}_\text{س} = \text{ص}\,\text{ق}_\text{ع} - \text{ع}\,\text{ق}_\text{ص}$ (مركبة ج فى اتجاه س)

وبالمثل $\text{ج}_\text{ص} = \text{ع}\,\text{ق}_\text{س} - \text{س}\,\text{ق}_\text{ع}$ (// // // ص)

$\text{ج}_\text{ع} = \text{س}\,\text{ق}_\text{ص} - \text{ص}\,\text{ق}_\text{س}$ (// // // ع)

ملاحظات

* ينعدم عزم قوة حول محور ما فى الحالتين:

١) إذا اشترك خط عمل القوة مع المحور فى نقطة على الأقل

٢) إذا كانت القوة توازى المحور

مثال

إذا كانت $\vec{\text{ق}} = 3\hat{\text{س}} + 2\hat{\text{ص}} - \hat{\text{ع}}$ تؤثر فى أ (٢، ١، -٢)

أوجد عزم $\vec{\text{ق}}$ حول ب (-١، ٤، ٢) ثم أوجد طول العمود المرسوم من ب على خط عمل القوة $\vec{\text{ق}}$

الحل

$\vec{ر} = \vec{بم} = \vec{أ} - \vec{ب} = (٢ ، -٢ ، -٥)$

$\vec{ج}_{ب} = \vec{ر} \times \vec{ق} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٣ & -٣ & -٥ \\ ٣ & ٢ & -١ \end{vmatrix}$ ارجع إلى القواعد

$= ١٢ \vec{س} - ١٢ \vec{ص} + ١٥ \vec{ع}$

$\|\vec{ج}_{ب}\| = \sqrt{١٦٩ + ١٤٤ + ٢٢٥} \simeq ٢٣$ وحدة عزم

$\|\vec{ق}\| = \sqrt{٩ + ٤ + ١} = \sqrt{١٤}$

$\therefore ل = \frac{\|\vec{ج}_{ب}\|}{\|\vec{ق}\|} = \frac{٢٣}{\sqrt{١٤}} = ٦٫٢$ وحدة طول

مثال ٢

قوة مقدارها $٥\sqrt{٢}$ تؤثر في $\vec{أب}$ حيث أ(٢ ، ٤ ، -١) ، ب(٨ ، ١ ، -٥) أوجد عزم $\vec{ق}$ بالنسبة لنقطة الأصل

الحل

$\vec{أب} = \vec{ب} - \vec{أ} = (٨ ، ١ ، -٥) - (٢ ، ٤ ، -١) = (٥ ، -٣ ، -٤)$

$\|\vec{أب}\| = \sqrt{٢٥ + ٩ + ١٦} = ٥\sqrt{٢}$ وحدة

$\boxed{\vec{ق} = \|\vec{ق}\| \times \vec{ى}_{أب}}$ ← متجه الوحدة في اتجاه $\vec{أب}$

$\therefore \vec{ق} = \cancel{٥\sqrt{٢}} \times \frac{(٥ ، -٣ ، -٤)}{\cancel{٥\sqrt{٢}}} = (٥ ، -٣ ، -٤)$

$\vec{ج}_{و} = \vec{ر} \times \vec{ق} = (٢ ، ٤ ، -١) \times (٥ ، -٣ ، -٤)$

$= \vec{س}(-١٦ - ٣) + \vec{ص}(-٥ + ١٢) + \vec{ع}(-٦ - ٢٠)$

$= -١٩ \vec{س} + ٧ \vec{ص} - ٢٩ \vec{ع}$

مثال ٣

اذا كانت $\overrightarrow{ق} = م\,\overrightarrow{س} + ل\,\overrightarrow{ص} + ٢\,\overrightarrow{ع}$ تؤثر في م و $\overrightarrow{ر}_و = (٣ ، -٢ ، ٥)$ فإذا كانت مركبتا عزم ق حول المحورين س ، ص هما -١٩ ، ٩ اوجد م ، ل ثم اوجد طول العمود المرسوم من و على خط عمل القوة

الحل

$\overrightarrow{ق} = (م ، ل ، ٢)$ ، $ج_س = -١٩$ ، $ج_ص = ٩$

* $ص\,ق_ع - ع\,ق_ص = -١٩$

$\therefore -٢ \times ٢ - ٥\,ل = -١٩ \longleftarrow \boxed{ل = ٣}$

* $٩ = ع\,ق_س - س\,ق_ع$

$\therefore ٩ = ٥\,م - ٦ \longleftarrow \boxed{م = ٣}$

* لنوجد $ج_ع = س\,ق_ص - ص\,ق_س$

$= ٣ \times ٣ + ٢ \times ٢ = ١٣$

$\therefore \|\overrightarrow{ج}\| = \sqrt{(١٩)^2 + (٩)^2 + (١٣)^2} = \sqrt{٦١١}$

$\|\overrightarrow{ق}\| = \sqrt{٩ + ٤ + ٩} = \sqrt{٢٢}$

$\therefore ل = \dfrac{\sqrt{٦١١}}{\sqrt{٢٢}} \simeq ٥,٢$ وحدة طول

مثال ٤

اذا كان عزم $\overrightarrow{ق} = ٢\,\overrightarrow{س} + ٢\,\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$ حول و هو $\overrightarrow{ج}_و = -٥\,\overrightarrow{س} + ٢\,\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$ وكانت ق تمر بنقطة الاحداثي الصادي لها ٢ اوجد الاحداثي س ، ع للنقطة وكذلك طول العمود المرسوم من نقطة الاصل و على خط عمل القوة

الحل

نفرض ان النقطة ه (س ، ٢ ، ع) ، $\overrightarrow{ر}_و = (س ، ٢ ، ع)$

$$\overrightarrow{ج} = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق} = \begin{vmatrix} \hat{س} & \hat{ص} & \hat{ع} \\ س & ٢ & ع \\ ٢ & ٣ & -١ \end{vmatrix} = (-٢-٣ع)\hat{س} + (س+٢ع)\hat{ص} + (٣س-٤)\hat{ع}$$

$= (-٥ ، ٢ ، -١)$

$\therefore -٢ - ٣ع = -٥ \Longleftarrow \boxed{ع = ١}$

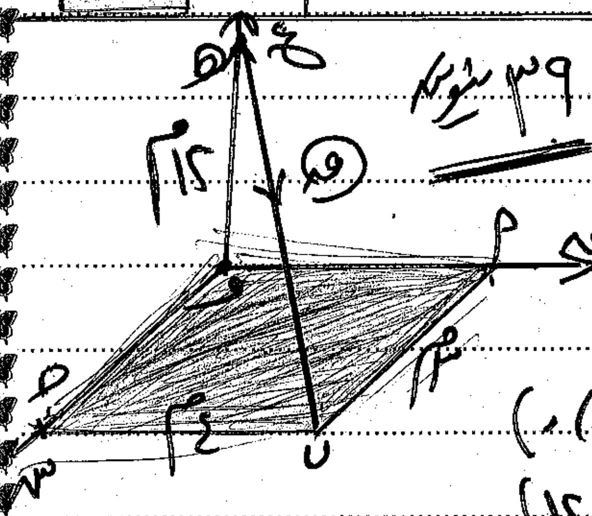
★ $س + ٢ع = ٣ \Longleftarrow س + ٢ = ٣ \Longleftarrow \boxed{س = ١}$

∴ إحداثيات النقطة هي $(١ ، ٢ ، ١)$

★ طول العمود $= \dfrac{\sqrt{٢٥+٩+١}}{\sqrt{٤+٩+١}} = \dfrac{\sqrt{٣٥}}{\sqrt{١٤}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{١٠}}{٢}}$

مثال ⑤

في الشكل المقابل ق قوة مقدارها ٣٩ نيوتن تعمل في $\overrightarrow{هـ ب}$ أوجد معيار عزم ق حول و



الحل

$\overrightarrow{هـ} = (٠ ، ٠ ، ١٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٣ ، ٤ ، ٠)$

$\overrightarrow{هـ ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{هـ} = (٣ ، ٤ ، -١٢)$

★ $\overrightarrow{ق} = \|\overrightarrow{ق}\| \times \overrightarrow{ى}_{هـب} = ٣٩ \times \dfrac{(٣ ، ٤ ، -١٢)}{\sqrt{١٤٤+١٦+٩}}$

$\therefore \boxed{\overrightarrow{ق} = (٩ ، ١٢ ، -٣٦)}$

★ $\overrightarrow{ج}_و = \overrightarrow{و هـ} \times \overrightarrow{ق} = \begin{vmatrix} \hat{س} & \hat{ص} & \hat{ع} \\ ٠ & ٠ & ١٢ \\ ٩ & ١٢ & -٣٦ \end{vmatrix}$

$\therefore \overrightarrow{ج}_و = -١٤٤\hat{س} + ١٠٨\hat{ص}$

$\therefore \boxed{\|\overrightarrow{ج}_و\| = ١٨٠ \text{ نيوتن.م}}$

القدس إسلامية

وعد الله

تذكر أن

① مجموع عزوم القوى حول نقطة يساوي عزم المحصلة حول هذه النقطة

② $م_س = \|\vec{م}\| \text{ جتا } \theta_س$ ، $م_ص = \|\vec{م}\| \text{ جتا } \theta_ص$

* $م_ع = \|\vec{م}\| \text{ جتا } \theta_ع$

مثال

$\vec{ق}$ تؤثر في النقطة أ (٢ ، -١ ، ٣) فإذا كان $ق_ع = ٥$ ، عزم $\vec{ق}$ بالنسبة لنقطة الأصل هو $٢١ \hat{س} + ٧ \hat{ع}$ أوجد $\vec{ق}$

الحل

* $\vec{و أ} = \vec{ر} = (٢ ، -١ ، ٣)$ * $\vec{ق} = (س ، ص ، ٥)$

$$\vec{ج}_و = \vec{ر} \times \vec{ق} = \begin{vmatrix} \hat{س} & \hat{ص} & \hat{ع} \\ ٢ & -١ & ٣ \\ س & ص & ٥ \end{vmatrix}$$

$$= \hat{س}(-٥ - ٢ص) + \hat{ص}(٢س - ١٠) + \hat{ع}(س + ٢ص)$$

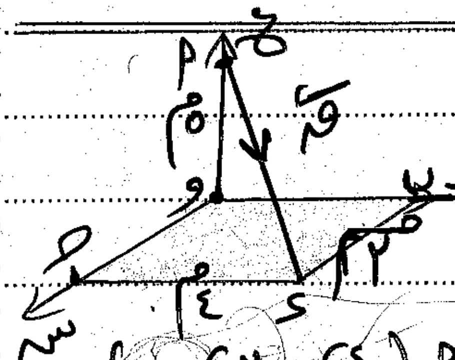
∵ $\vec{ج}_و = (٢١ ، صفر ، ٧)$

$-٥ - ٢ص = صفر \Longrightarrow \boxed{ص = \frac{-٥}{٢}}$

$-١٠ + ٢س = ٢١ \Longrightarrow \boxed{س = \frac{٢١}{٢}}$

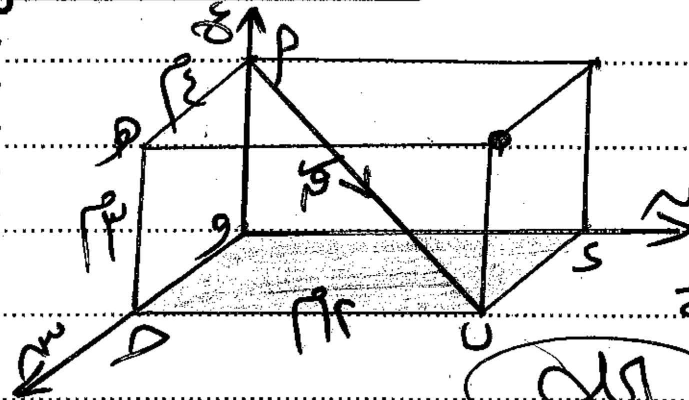
∴ $\vec{ق} = \left(\frac{٢١}{٢} ، \frac{-٥}{٢} ، ٥\right)$

تقويم



① في الشكل $\vec{ق}$ مقدارها ١٥ نيوتن تؤثر في $\vec{أء}$ أوجد عزم $\vec{ق}$ بالنسبة لـ و

② إذا كانت $\vec{ق} = (ل ، ٧ ، ن)$ تؤثر في أ (٤ ، -٢ ، -٥) وكانت $ج_س = -٥$ ، $ج_ص = ١٠$ أوجد $\vec{ج}$



مثال (٧) في الشكل المقابل متوازي مستطيلات أثرت قوة مقدارها ١٢٠ نيوتن في $\overrightarrow{أب}$ أوجد عزم ق بالنسبة لنقطة د

الحل

★ أ = (٠ ، ٠ ، ٣) ، ب = (٤ ، ١٢ ، ٠)

د = (٠ ، ١٢ ، ٠)

$\overrightarrow{أب}$ = $\overline{ب}$ − $\overline{أ}$ = (٤ ، ١٢ ، −٣)

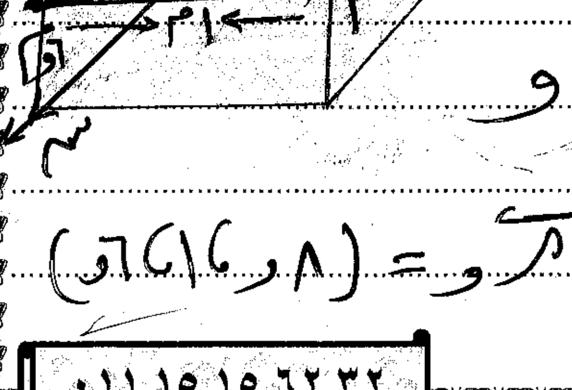
★ $\overline{ق}$ = ١٢٠ × $\dfrac{\overrightarrow{أب}}{\|\overrightarrow{أب}\|}$ = ١٢٠ × $\dfrac{(٤ ، ١٢ ، −٣)}{\sqrt{١٦+١٤٤+٩}}$

∴ $\overline{ق}$ = (٤٠ ، ١٢٠ ، −٣٠)

★ $\overline{ر}_د$ = $\overline{أ}$ − $\overline{د}$ = (٠ ، ٠ ، ٣) − (٠ ، ١٢ ، ٠) = (٠ ، −١٢ ، ٣)

∴ $\overline{ج}_د$ = $\begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ ٠ & −١٢ & ٣ \\ ٤٠ & ١٢٠ & −٣٠ \end{vmatrix}$ = $\boxed{١٢٠\,\overline{ص} + ٤٨٠\,\overline{ع}}$

مثال (٨)



في الشكل المقابل

$\overline{ق}_١$ = ١٠٠ $\overline{س}$ − ١٢٠ $\overline{ص}$ + ٧٥ $\overline{ع}$

، $\overline{ق}_٢$ = −١٠٠ $\overline{س}$ + ٢٥٠ $\overline{ص}$ + ١٠٠ $\overline{ع}$

تؤثران من النقطة أ

أوجد عزم المحصلة حول النقطة و

الحل

أ = (٠و٨ ، ١ ، ٠و٦) ⟵ $\overline{ر}_و$ = (٠و٨ ، ١ ، ٠و٦)

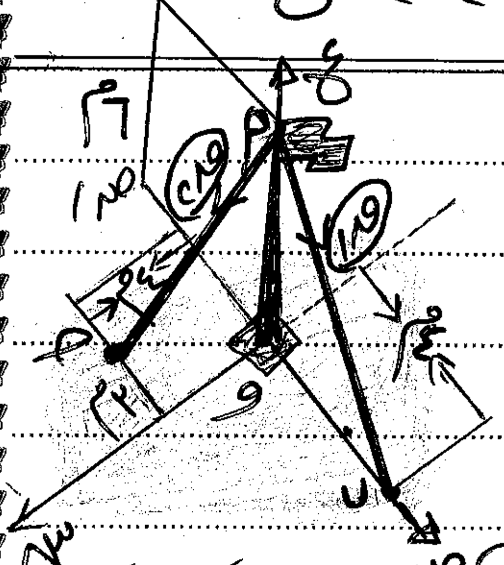
محصلة القوى $\overline{ع} = -١٠٠\overline{س} + ١٢٠\overline{ص} + ١٧٥\overline{ع}$

∴ عزم المحصلة حول و $\overline{جـ}_و = \overline{ر} \times \overline{ع}$

$$\overline{جـ}_و = \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ ٨و & ١ & ٦و \\ -١٠٠ & ١٢٠ & ١٧٥ \end{vmatrix}$$

$= ٧٩\overline{س} - ٢٠٠\overline{ص} + ٢٠٤\overline{ع}$

مثال (٩)



كونه تدبر القوة $ق_١ = ٦\sqrt{١٢}$ نيوتن ،

$ق_٢ = ٦\sqrt{٦١}$ نيوتن على $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$

أوجد (١) مجموع عزوم القوى حول و

(٢) عزم المحصلة حول و ماذا تستنتج

الحل

★ $أ = (٠، ٠، ٦)$ ، $ب (٠، ٤، ٠)$ ، $جـ (٤، -٢، ٠)$ ظل بالك

★ $\overline{أب} = \overline{ب} - \overline{أ} = (٠، ٤، -٦)$

★ $\overline{أجـ} = \overline{جـ} - \overline{أ} = (٤، -٢، -٦)$

★ $\overline{ق_١} = ٦\sqrt{١٢} \times \frac{\overline{أب}}{\|\overline{أب}\|} = ٦\sqrt{١٢}^{٢} \times \frac{(٠، ٤، -٦)}{\sqrt{١٦+٣٦}}$

★ $\overline{ق_١} = (٠، ١٢، -١٨)$

★ $\overline{ق_٢} = \sqrt{٦١} \times \frac{(٤، -٢، -٦)}{\sqrt{١٦+٩+٣٦}} = (٤، -٢، -٦)$

★ $\overline{جـ}_و = \overline{و أ} \times ق_١ + \overline{و أ} \times ق_٢$

$\overline{جـ}_و = (٠، ٠، ٦) \times (٠، ١٢، -١٨) + (٠، ٠، ٦) \times (٤، -٢، -٦)$

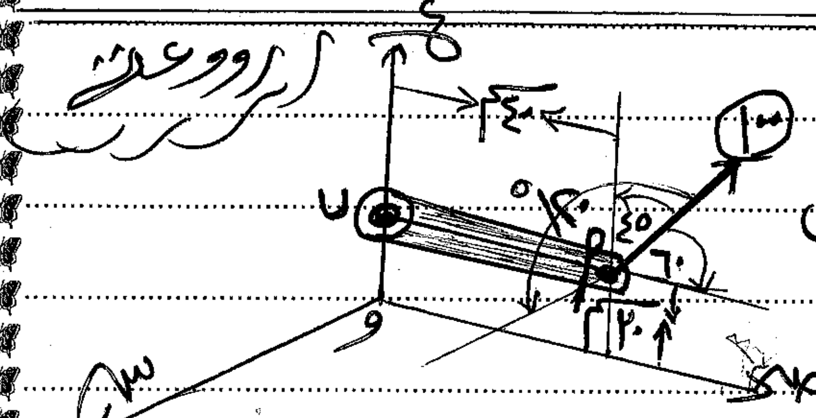
∴ $\overline{ج}_م$ = (٦٠ ، ٠ ، ٦) × (٤ ، ٩ ، -٢٤)

= -٦٠ × ٩ $\overline{س}$ + ٦ × ٤ $\overline{ص}$ + صفر

= -٥٤٠ $\overline{س}$ + ٢٤ $\overline{ص}$

(٢) عزم المحصلة حول النقطة = -٥٤٠ $\overline{س}$ + ٢٤ $\overline{ص}$

مثال ١٠



في الشكل المقابل أوجد عزم ق حول كل من س ، ص ، ع

الحل

∵ $\theta_س$ = ١٢٠ ، $\theta_ص$ = ٦٠ ، $\theta_ع$ = ٤٥

∴ مركبات ق هي: $ق_س$ = ١٠٠ جتا ١٢٠ = -٥٠

$ق_ص$ = ١٠٠ جتا ٦٠ = ٥٠ ، $ق_ع$ = ١٠٠ جتا ٤٥ = ٥٠$\sqrt{2}$

∴ $\overline{ق}$ = (-٥٠ ، ٥٠ ، ٥٠$\sqrt{2}$)

* أ = (٠ ، ٤و٠ ، ٢و٠) العزم نيوتن.م

* عزم ق حول س = ٤و٠ × ٥٠$\sqrt{2}$ - ٢و٠ × ٥٠

= (-١٠ + ٢٠$\sqrt{2}$) نيوتن.م

* عزم ق حول ص = ٢و٠ × -٥٠ - صفر × ٥٠$\sqrt{2}$

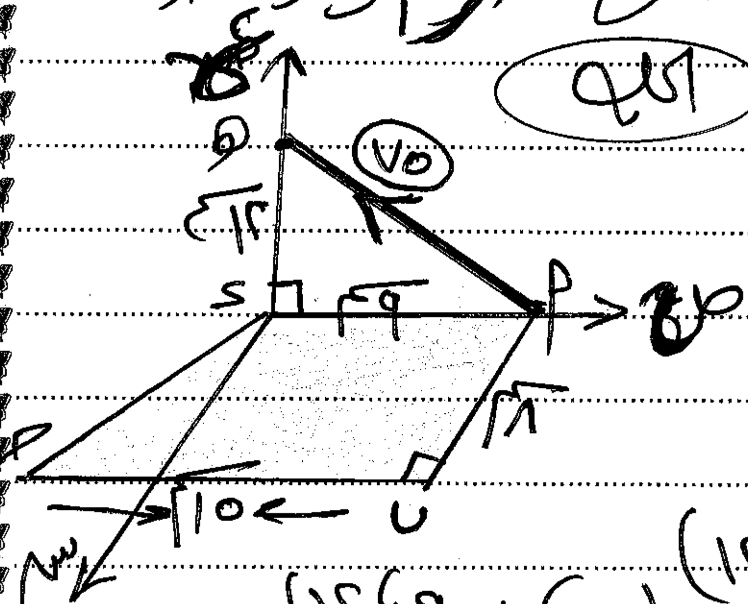
= (-١٠) نيوتن.م

* عزم ق حول ع = ٠ × ٥٠ - ٤و٠ × -٥٠

= ٢٠ نيوتن.م

سبحان الله وبحمده سبحان الله العظيم

مثال (١١) أ ب جـ د سطح منحرف قائم في ب بحيث
أد // ب جـ ، أ ب = ٨ سم ، ب جـ = ١٥ سم
، أ د = ٩ سم رسم د هـ ⊥ مستوى سطح
المنحرف بحيث د هـ = ١٢ سم أثرت قوة مقدارها
٧٥ نيوتن في أ هـ أوجد مقدار عزم القوة حول ب



الحل

* أ = (٠ ، ٩ ، ٠)
هـ = (٠ ، ٠ ، ١٢)
ب = (٨ ، ٩ ، ٠)

* $\overline{\text{أهـ}}$ = هـ − أ
= (٠ ، −٩ ، ١٢)

* $\overline{\text{ق}}$ = ٧٥ × $\dfrac{(٠ ، −٩ ، ١٢)}{\sqrt{١٤٤ + ٨١}}$

∴ $\overline{\text{ق}}$ = (٠ ، −٤٥ ، ٦٠)

* $\overline{\text{جـ}}_{\text{ب}}$ = $\overline{\text{ب أ}}$ × $\overline{\text{ق}}$ = (−٨ ، ٠ ، ٠) × (٠ ، −٤٥ ، ٦٠)

$$= \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ ٨- & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٤٥- & ٦٠ \end{vmatrix}$$

∴ $\overline{\text{جـ}}_{\text{ب}}$ = ٠ $\overline{\text{س}}$ + ٤٨٠ $\overline{\text{ص}}$ + ٣٦٠ $\overline{\text{ع}}$

∴ مقدار العزم = $\|\overline{\text{جـ}}_{\text{ب}}\|$ = $\sqrt{(٤٨٠)^2 + (٣٦٠)^2}$

∴ جـ ب = ٦٠٠ نيوتن . سم   إنتهت