McGraw-Hill Education

الرياضيات

المسار المتقدّم

نسخة الإمارات العربية المتحدة

1

11

2 3

2019 - 2020

Project: McGraw-Hill Education United Arab Emirates Edition Grade 11 Advanced Math [illegible]
FM. Front Matter, from Precalculus © 2014
. Power, Polynomial, and Rational Functions, from Precalculus Chapter 2 © 2014
. Rational Functions and Relations, from Algebra 2 Chapter 8, Lessons 1-3 and 5 © 2014
. Power, Polynomial, and Rational Functions , from Precalculus Chapter 2, Lessons 2, 4 © 2014
. Systems of Equations and Matrices , from Precalculus Chapter 6, Lesson 4 © 2014
2. Exponential and Logarithmic Functions, from Precalculus Chapter 3 © 2014
3. Trigonometric Functions, from Precalculus Chapter 4, Lessons 1-6 © 2014
4. Trigonometric Identities and Equations, from Precalculus Chapter 5 © 2014
5. Systems of Equations and Matrices, from Precalculus Chapter 6 © 2014
EM. End Matter/Glossary, from Precalculus © 2014

صورة الغلاف: K-Fractals/Alamy Stock Photo

mheducation.com/prek-12

Mc Graw Hill Education

طُبع في دولة الإمارات العربية المتحدة.

رقم النشر الدولي: 978-1-44-700207-9 (نسخة الطالب)
MHID: 1-44-700207-5 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 978-1-44-700209-3 (نسخة المعلم)
MHID: 1-44-700209-1 (نسخة المعلم)

النسخة الإلكترونية

رقم النشر الدولي: 978-1-44-700217-8 (نسخة الطالب)
MHID: 1-44-700217-2 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 978-1-44-700219-2 (نسخة المعلم)
MHID: 1-44-700219-9 (نسخة المعلم)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 XXX 22 21 20 19 18 17

ملخص المحتويات

كتيب الطالب

الوحدة 1

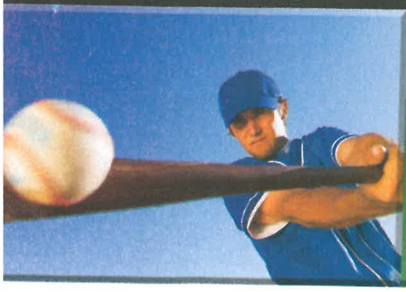
دوال القوة والدوال كثيرة الحدود والدوال النسبية

الوحدة 2 الدوال الأسيّة واللوغاريتمية

الوحدة 3 الدوال المثلثية

الوحدة 4 المتطابقات والمعادلات المثلثية

الوحدة 5 أنظمة المعادلات والمصفوفات



الوحدة 6
القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

الوحدة 7 المتجهات

الوحدة 8 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

الوحدة 9 المتتاليات والمتسلسلات

الوحدة 10

الإحصاء والاحتمالات

التقييم

الوحدة 11
الدوال من منظور حساب التفاضل والتكامل

الوحدة 12 التفاضل والتكامل

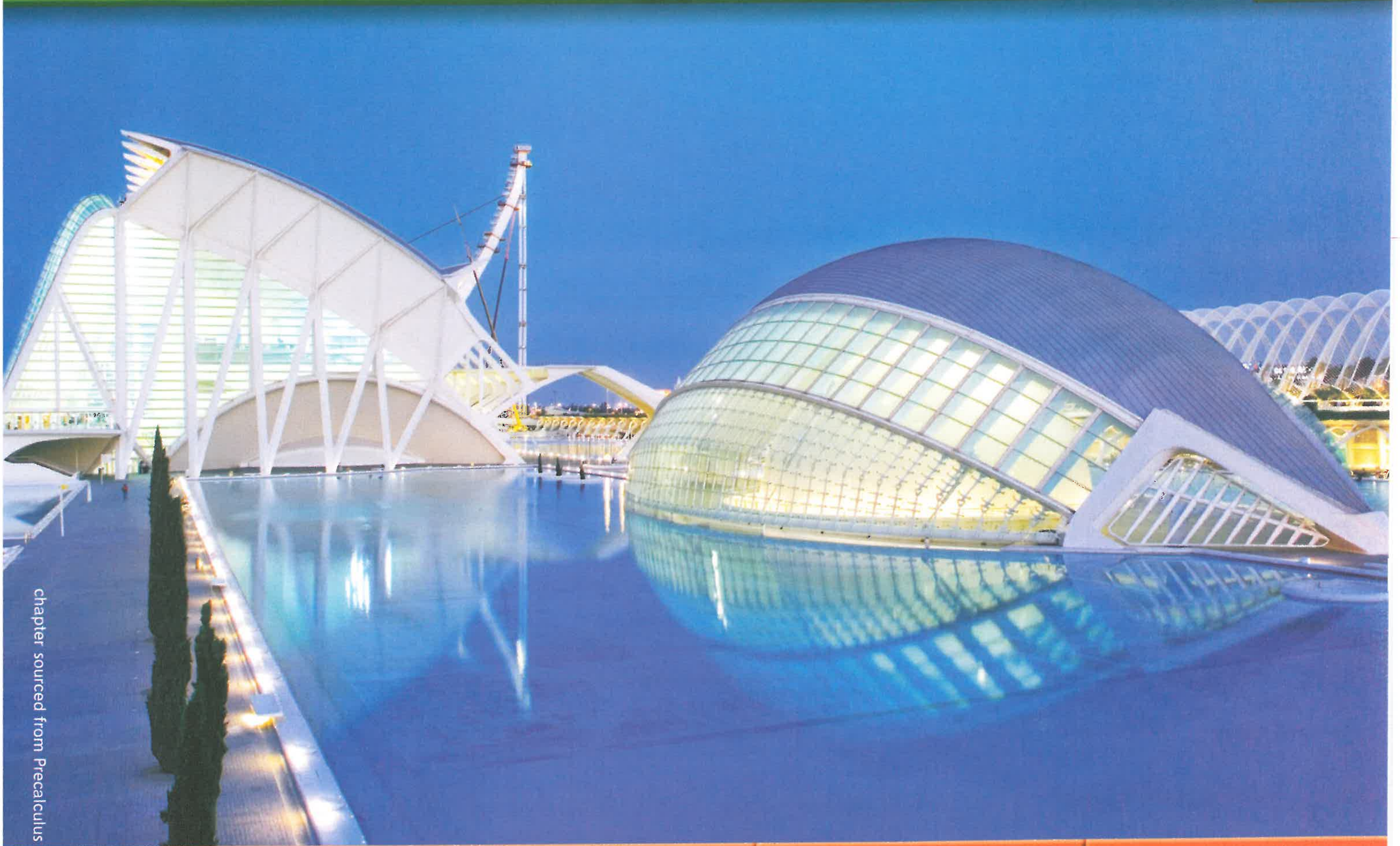
كتيب الطالب

الرموز والصيغ والمفاهيم الأساسية

قاموس المصطلحات متوفر في النسخة الإلكترونية

الوحدة 1

دوال القوة والدوال كثيرة الحدود والدوال النسبية



.. السابق

في **الوحدة السابقة**، حللت الدوال وتمثيلاتها البيانية وحددت هل كانت توجد دوال عكسية أم لا.

.. الحالي

بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادراً على:

- رسم نموذج لبيانات من الحياة اليومية باستخدام الدوال كثيرة الحدود.
- استخدام نظريتي الباقي والعامل.
- إيجاد الأصفار الحقيقية والمركبة للدوال كثيرة الحدود.
- تحليل الدوال النسبية وتمثيلها بيانيًا.
- حل المتباينات كثيرة الحدود والنسبية.

.. لماذا؟ ▲

الهندسة المعمارية تستخدم الدوال كثيرة الحدود غالبًا عند تصميم هيكل جديد أو بنائه. يستخدم المهندسون المعماريون الدوال لتحديد وزن المواد وقوتها وتحليل التكاليف وتقدير مدى تدهور المواد وتحديد القوى العاملة المطلوبة.

قراءة مسبقة اقرأ الدروس الواردة في الوحدة 1 قراءة جيدة. واستخدم ما تعرفه بالفعل عن الدوال من أجل وضع توقع للغرض المرجو من هذه الوحدة.

الاستعداد للوحدة

اكتشاف مدى الاستعداد لديك خياران للتحقق من المهارات المطلوبة.

1 خيار الكتاب المدرسي أجب على أسئلة التمرين السريع أدناه.

تمرين سريع

حلل فيما يلي الدوال كثيرة الحدود إلى العوامل.

1. $x^2 + x - 20$
2. $x^2 + 5x - 24$
3. $2x^2 - 17x + 21$
4. $3x^2 - 5x - 12$
5. $12x^2 + 13x - 35$
6. $8x^2 - 42x + 27$

7. **الهندسة** يمكن تمثيل مساحة المربع بواسطة $16x^2 + 56x + 49$. حدد التعبير الذي يُمثل عرض المربع.

استخدم جدولًا لتمثيل كل دالة فيما يلي.

8. $f(x) = \frac{1}{2}x$
9. $f(x) = -2$
10. $f(x) = x^2 + 3$
11. $f(x) = -x^2 + x - 6$
12. $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$
13. $f(x) = 3x^2 - x - 2$

14. **أجهزة التلفاز** تُقدر إحدى المجلات المهتمة بالأجهزة الإلكترونية أنه يمكن تمثيل إجمالي أجهزة تلفاز البلازما المبيعة في جميع أنحاء العالم بواسطة $f(t) = 2t + 0.5t^2$ حيث يمثل t عدد الأيام بعد تاريخ الإصدار. مثّل هذه الدالة بيانيًا للمعادلة التالية $0 \le t \le 40$

اكتب كل مجموعة من الأعداد باستخدام رمز المجموعة ورمز الفترة، إن أمكن. (الدرس 1-1)

15. $x \le 6$
16. $\{-2, -1, 0, ...\}$
17. $-2 < x < 9$
18. $1 < x \le 4$
19. $x < -4$ أو $x > 5$
20. $x < -1$ أو $x \ge 7$

21. **ألعاب** في أحد متاجر الألعاب، تتراوح أسعار كل الأقراص المدمجة بين AED 9.99 و AED 19.99 أكتب الأسعار باستخدام رمز المجموعة ورمز الفترة.

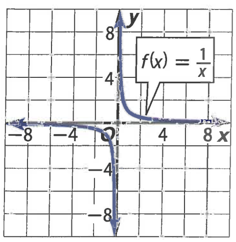
مفردات جديدة

- power function دالة القوة
- monomial function الدالة أحادية الحد
- radical function الدالة الجذرية
- extraneous solutions الحلول الدخيلة
- polynomial function الدالة كثيرة الحدود
- leading coefficient معامل الحد الأكبر
- leading-term test اختبار الحد الرئيس
- quartic function دالة من الدرجة الرابعة
- quadratic form الصورة التربيعية
- repeated zero الصفر المتكرر
- lower bound الحد الأدنى
- upper bound الحد الأعلى
- rational function الدالة النسبية
- asymptotes خطوط التقارب
- vertical asymptote خط التقارب الرأسي
- horizontal asymptote خط التقارب الأفقي
- polynomial inequality المتباينة كثيرة الحدود
- sign chart مخطط الإشارات
- rational inequality المتباينة النسبية

مراجعة المفردات

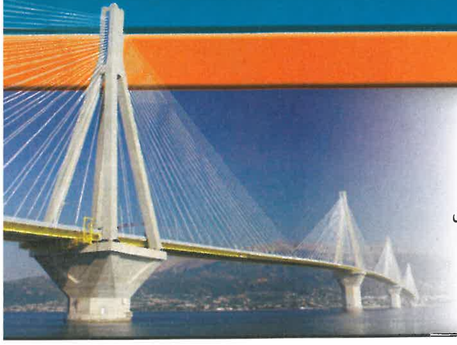
المترافقات المركبة (complex conjugates) مجموعة ثنائية من الأعداد المركبة في الصورتين $a + bi$ و $a - bi$

الدوال المقلوبة (reciprocal functions) دوال في الصورة $f(x) = \frac{a}{x}$



الدرس 1-1

دوال القوة والدوال الجذرية



..السابق

- قمت بتحليل الدوال الرئيسة ومجموعاتها من التمثيل البياني. (الدرس 5-1)

..الحالي

1. تمثيل دوال القوة بيانيًا وتحليلها.
2. تمثيل الدوال الجذرية بيانيًا وتحليلها وحل المعادلات الجذرية.

..لماذا؟

- تستخدم الجسور المعلقة لمد الجسور لمسافات طويلة من خلال تعليق السطح الرئيس للجسر باستخدام الكابلات الفولاذية. تمثل دالة قطر الكابل التي يمكن تمثيلها بدالة أسيّة مقدار الوزن الذي يمكن أن يتحمله الكابل الفولاذي.

مفردات جديدة

دالة القوة
power function
الدالة أحادية الحد
monomial function
الدالة الجذرية
radical function
الحل الدخيل
extraneous solution

1 دوال القوة

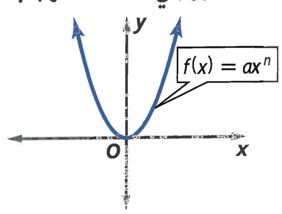
درست سابقًا العديد من الدوال الرئيسة التي يمكن تصنيفها كدوال قوة. **دالة القوة** هي أي دالة تأخذ الصورة $f(x) = ax^n$، حيث a و n عددان حقيقيان ثابتان غير الصفر.

ودالة القوة عبارة عن نوع من الدوال أحادية الحد أيضًا. **والدالة أحادية الحد** هي أي دالة يمكن كتابتها بصيغة $f(x) = a$ أو $f(x) = ax^n$، حيث a وn عددان حقيقيان ثابتان غير الصفر.

المفهوم الأساسي الدوال أحادية الحد

لنفترض أن f دالة قوة بحيث $f(x) = ax^n$. حيث n عدد صحيح موجب.

n عدد زوجي، a عدد موجب



المجال: $(-\infty, \infty)$ **المدى:** $[0, \infty)$

التقاطع مع المحورين x وy: 0

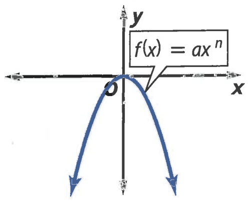
الاتصال: متصلة على $x \in \mathbb{R}$

التناظر: المحور الرأسي y **القيمة الصغرى:** 0

متناقصة: $(-\infty, 0)$ **متزايدة:** $(0, \infty)$

السلوك الطرفي: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

n عدد زوجي، a عدد سالب



المجال: $(-\infty, \infty)$ **المدى:** $(-\infty, 0]$

التقاطع مع المحورين x وy: 0

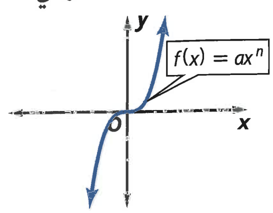
الاتصال: متصلة على $x \in \mathbb{R}$

التناظر: المحور الرأسي y **القيمة العظمى:** 0

متناقصة: $(0, \infty)$ **متزايدة:** $(-\infty, 0)$

السلوك الطرفي: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

n عدد فردي، a عدد موجب



المجال والمدى: $(-\infty, \infty)$

التقاطع مع المحورين x و y: 0

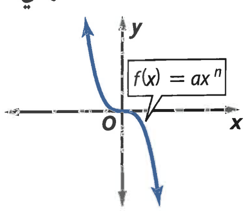
الاتصال: متصلة في $(-\infty, \infty)$

التناظر: نقطة الأصل

القيم القصوى: لا يوجد **تزايد:** $(-\infty, \infty)$

السلوك الطرفي: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

n عدد فردي، a عدد سالب



المجال والمدى: $(-\infty, \infty)$

التقاطع مع المحورين x و y: 0

الاتصال: متصلة على $x \in \mathbb{R}$

التناظر: نقطة الأصل

القيم القصوى: لا يوجد **تناقص:** $(-\infty, \infty)$

السلوك الطرفي: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

تكون الدوال أحادية الحد ذات الدرجة الزوجية زوجية أيضًا إذا كان $f(x) = f(-x)$. وبالمثل، تكون الدوال أحادية الحد ذات الدرجة الفردية فردية أيضًا، أو $f(-x) = -f(x)$

مراجعة المفردات

درجة أحادية الحد (Degree of a Monomial) هي مجموع أسس متغيرات الدالة أحادية الحد.

مثال 1 تحليل الدوال أحادية الحد

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والمدى والتناظرات والسلوك الطرفي والاتصال، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.

a. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$

جد قيمة الدالة لعدة قيم x في مجالها. ثم استخدم منحنيًا سلسًا لتوصيل كل من هذه النقاط لإكمال التمثيل البياني.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	40.5	8	0.5	0	0.5	8	40.5

المجال: $(-\infty, \infty)$ المدى: $[0, \infty)$

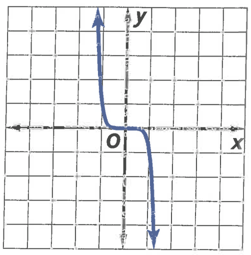
التقاطع حول المحور y : 0

السلوك الطرفي: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

الإتصال: متصلة في $(-\infty, \infty)$

تناقص: $(-\infty, 0)$ تزايد: $(0, \infty)$

b. $f(x) = -x^7$



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2,187	128	1	0	-1	-128	$-2,187$

المجال: $(-\infty, \infty)$ المدى: $(-\infty, \infty)$

التناظر حول النقطة : (0,0)

السلوك الطرفي: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

الاتصال: متصلة في $(-\infty, \infty)$

تناقص: $(-\infty, \infty)$

تمرين موجّه

1B. $f(x) = -\frac{2}{3}x^5$

1A. $f(x) = 3x^6$

مراجعة المفردات

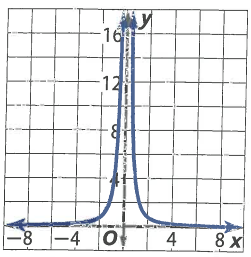
دوال المقلوب (Reciprocal Functions) تُكتب الدوال المقلوبة بالصيغة $f(x) = \frac{a}{x}$

تذكّر أن $f(x) = \frac{1}{x}$ أو x^{-1} غير معرفة عندما $x = 0$. وبالمثل، $f(x) = x^{-2}$ و $f(x) = x^{-3}$ ليس لهما تعريف عند $x = 0$ ونظرًا لأن دالة القوة يمكن أن تكون غير معرفة عندما تكون $n < 0$، فسوف تحتوي التمثيلات البيانية لهذه الدوال على انفصالات.

مثال 2 الدوال ذات الأسس السالبة

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضّح المجال والمدى والتناظرات والسلوك الطرفي والاتصال، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.

a. $f(x) = 3x^{-2}$



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$0.\overline{3}$	0.75	3	غير محدد	3	0.75	$0.\overline{3}$

المجال: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ المدى: $(0, \infty)$

نقاط التقاطع، لا توجد

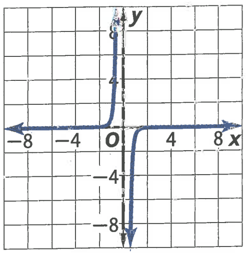
السلوك الطرفي: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

الاتصال: انفصال لانهائي عند $x = 0$

متزايدة: $(-\infty, 0)$؛ متناقصة: $(0, \infty)$

b. $f(x) = -\frac{3}{4}x^{-5}$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	0.0031	0.0234	0.75	غير محدد	−0.75	−0.0234	−0.0031



المجال: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ المدى: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

نقاط التقاطع: لا توجد

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

الاتصال: انفصال لا نهائي عند $x = 0$

متزايدة: $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$

تمرين موجّه

2A. $f(x) = -\frac{1}{2}x^{-4}$

2B. $f(x) = 4x^{-3}$

مراجعة المفردات

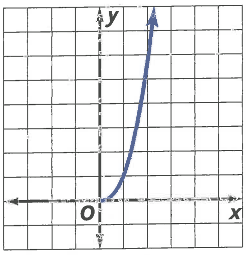
الأسس النسبية (Rational Exponents)
هي أسس تُكتب على هيئة كسور في أبسط صورة. (الدرس 0-4)

تذكر أن $x^{\frac{1}{n}}$ تشير إلى الجذر النوني للعدد x، و $x^{\frac{p}{n}}$، حيث $\frac{p}{n}$ في أبسط صورة، تشير إلى الجذر النوني n لـ x^p. بما أن n عدد صحيح زوجي، إذن، يجب قصر المجال على القيم غير السالبة.

مثال 3 الأسس النسبية

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والمدى ونقاط التقاطع والسلوك الطرفي والاتصال، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.

a. $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$



x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	1	5.657	15.588	32	55.902	88.182

المجال: $[0, \infty)$ المدى: $[0, \infty)$

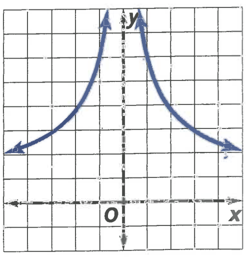
تقاطع المحورين x و y: 0

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

الاتصال: متصلة في $[0, \infty)$

متزايدة: $(0, \infty)$

b. $f(x) = 6x^{-\frac{2}{3}}$



x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	2.884	3.780	6	غير محدد	6	3.780	2.884

المجال: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ المدى: $(0, \infty)$

نقاط التقاطع: لا توجد

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

الاتصال: انفصال لانهائي عند $x = 0$

متزايدة: $(-\infty, 0)$؛ متناقصة: $(0, \infty)$

تمرين موجّه

3A. $f(x) = 2x^{\frac{3}{4}}$

3B. $f(x) = 10x^{\frac{5}{3}}$

مثال 4 الانحدار الأسي

علم الأحياء تمثل البيانات التالية معدل الأيض أثناء الراحة R بالكيلو كالوري في اليوم الواحد للكتلة m بالكيلوجرامات للعديد من الحيوانات.

m	0.3	0.4	0.7	0.8	0.85	2.4	2.6	5.5	6.4	6
R	28	35	54	66	46	135	143	331	293	292
m	7	7.9	8.41	8.5	13	29.3	29.8	39.5	83.6	
R	265	327	346	363	520	956	839	1,036	1,948	

المصدر: *مجلة الجمعية الأمريكية للأنثروبولوجي*

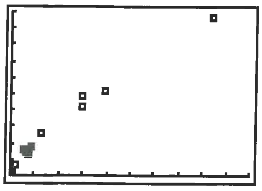
الربط بالحياة اليومية

السعر الحراري هو وحدة قياس الطاقة ويعادل مقدار الحرارة اللازم لرفع درجة حرارة كيلو جرام واحد من الماء بمقدار درجة مئوية واحدة. السعر الحراري الواحد يكافئ 4.1868 كيلوجول. تحتوي التفاحة المتوسطة على 60 سعرًا حراريًا.

المصدر: موسوعة الغذاء والتغذية

a. صمم مخطط انتشار للبيانات.

يتضح أن مخطط انتشار يتشابه مع دالة الجذر التربيعي، وهي دالة أسيّة. لذلك، اختر نموذج انحدار أسيًا.

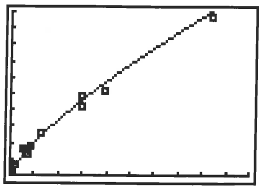


[0, 100] scl: 10 by [0, 2000] scl: 200

b. اكتب دالة كثيرة الحدود لتمثيل مجموعة البيانات. قرّب كل معامل إلى أقرب ألف واذكر معامل الارتباط.

باستخدام أداة PwrReg على حاسبة التمثيل البياني وتقريب كل معامل إلى أقرب ألف ينتج $f(x) = 69.582x^{0.759}$. معامل الارتباط r للبيانات، 0.995، يشير إلى أن الانحدار الأسي قد يُظهر البيانات بشكل دقيق.

يمكننا رسم الانحدار الكامل (الذي لم يتم تقريبه) من خلال إرساله إلى القائمة [Y=]. في القائمة [Y=] ، اختر معادلة الانحدار عن طريق إدخال [VARS] ، و الإحصاءات، و EQ. مثّل هذه الدالة بيانيًا ومخطط الانتشار في نفس نافذة العرض. ويبدو أن الدالة متناسبة مع البيانات جيدًا.



[0, 100] scl: 10 by [0, 2000] scl: 200

نصيحة دراسية

نموذج الانحدار ستنتج الدالة كثيرة الحدود ذات العوامل التي تم تقريبها تقديرات مختلفة عن القيم المحسوبة باستخدام معادلة الانحدار التي لم يتم تقريبها. من الآن فصاعدًا، يمكنك افتراض أنه عندما يُطلب منك استخدام نموذج لتقدير قيمة، فإنك ستستخدم معادلة الانحدار التي لم يتم تقريبها.

c. استخدم المعادلة للتنبؤ بمعدل الأيض في وقت الراحة لحيوان يبلغ وزنه 60 كيلوجرامًا.

استخدم ميزة CALC على الآلة الحاسبة لإيجاد $f(60)$. قيمة $f(60)$ تساوي 1,554 تقريبًا، إذًا، معدل الأيض في وقت الراحة لحيوان وزنه 60 كيلوجرامًا يساوي 1,554 كيلو كالوري تقريبًا.

تمرين موجّه

4. **السيارات** يوضح الجدول مسافة الكبح مقدرة بالأقدام، في عدة سرعات تقدر بالميل في الساعة، لسيارة محددة تسير على طريق يابس ممهد جيدًا.

السرعة	10	20	30	40	50	60	70
المسافة	4.2	16.7	37.6	66.9	104.5	150.5	204.9

A. صمم مخطط انتشار للبيانات.

B. حدد دالة أسيّة لتمثيل للبيانات.

C. تنبأ بمسافة الكبح لسيارة تسير بسرعة قدرها 80 كيلومترًا في الساعة.

2 الدوال الجذرية

تعبير ذو أسس نسبية يمكن كتابته بصيغة جذرية.

صيغة أسيّة		صيغة جذرية
$x^{\frac{p}{n}}$	=	$\sqrt[n]{x^p}$

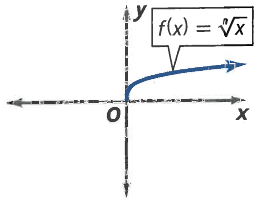
تمثل دوال القوة ذات الأسس النسبية القاعدة الأساسية للدوال الجذرية. **الدالة الجذرية** هي دالة يمكن كتابتها بالصيغة $f(x) = \sqrt[n]{x^p}$ ، حيث n وp عددان صحيحان موجبان أكبر من العدد 1 وليس لهما أي عوامل مشتركة. وفيما يلي بعض الأمثلة على الدوال الجذرية.

$$f(x) = \sqrt[4]{x+12} + \frac{1}{2}x - 7 \qquad f(x) = -5\sqrt[3]{x^4 + 3x^2 - 1} \qquad f(x) = 3\sqrt{5x^3}$$

المفهوم الأساسي الدوال الجذرية

لنفترض أن f دالة جذرية $f(x) = \sqrt[n]{x}$ حيث n عدد صحيح موجب.

n عدد زوجي



المجال والمدى: $[0, \infty)$

تقاطع المحورين x و y: 0

الاتصال: متصلة في $[0, \infty)$

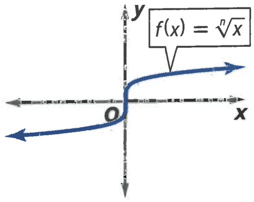
التناظر: لا يوجد

متزايدة: $(0, \infty)$

القيم القصوى: القيمة الصغرى المطلقة عند $(0, 0)$

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

n عدد فردي



المجال والمدى: $(-\infty, \infty)$

تقاطع المحورين x و y: 0

الاتصال: متصلة في $(-\infty, \infty)$

التناظر: نقطة الأصل

متزايدة: $(-\infty, \infty)$

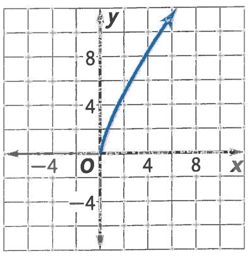
القيم القصوى: لا توجد

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

مثال 5 التمثيل البياني للدوال الجذرية

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضّح المجال والمدى والتقاطعات والسلوك الطرفي والاتصال، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.

a. $f(x) = 2\sqrt[4]{5x^3}$



x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	2.99	5.03	6.82	8.46	10

المجال والمدى: $[0, \infty)$

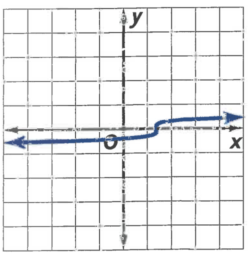
تقاطع المحورين x و y: 0

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

الاتصال: متصلة في $[0, \infty)$

متزايدة: $(0, \infty)$

b. $f(x) = \frac{1}{4}\sqrt[5]{6x - 8}$



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-0.48	-0.46	-0.42	-0.38	-0.29	0.33	0.40

المجال والمدى: $(-\infty, \infty)$

التقاطع مع المحور الأفقي x: $\frac{4}{3}$ التقاطع مع المحور الرأسي y: حوالي -0.38

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

الاتصال: متصلة في $(-\infty, \infty)$

متزايدة: $(-\infty, \infty)$

تمرين موجّه

5A. $f(x) = -\sqrt[3]{12x^2 - 5}$

5B. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{2x^3 - 16}$

انتبه!

الدوال الجذرية تذكر أنه إذا كان n عددًا زوجيًا، فستكون هناك قيود على المجال والمدى.

كما هو الحال مع الدوال الجذرية، المعادلة الجذرية هي أي معادلة يكون فيها المتغير متضمنًا في الجذور. لحل معادلة جذرية، اعزل أولاً التعبير الجذري. ثم ارفع كل طرف من طرفي المعادلة إلى أُس يساوي دليل الجذر للتخلص من الجذر.

ينتج أحيانًا عن رفع كل طرف من طرفي المعادلة إلى أس **حلولاً دخيلة**، أو حلولاً لا تحقق المعادلة الأصلية. من المهم التحقق من أن الحلول ليست دخيلة.

مثال 6 حل المعادلات الجذرية

حُلّ كل من المعادلات التالية.

a. $2x = \sqrt{100 - 12x} - 2$

$2x = \sqrt{100 - 12x} - 2$	المعادلة الأصلية
$2x + 2 = \sqrt{100 - 12x}$	اعزل الجذر.
$4x^2 + 8x + 4 = 100 - 12x$	قم بتربيع كل طرف من طرفي المعادلة للتخلص من الجذر.
$4x^2 + 20x - 96 = 0$	اطرح 100 - 12x من كل طرف.
$4(x^2 + 5x - 24) = 0$	حلل.
$4(x + 8)(x - 3) = 0$	حلل.
$x - 3 = 0 \quad = \quad x + 8 = 0$	خاصية الناتج الصفري
$x = -8 \qquad x = 3$	حل.

تحقق $x = -8$

$2x = \sqrt{100 - 12x} - 2$

$-16 \stackrel{?}{=} \sqrt{100 - 12(-8)} - 2$

$-16 \stackrel{?}{=} \sqrt{196} - 2$

$-16 \neq 12$ ✗

تحقق $x = 3$

$2x = \sqrt{100 - 12x} - 2$

$6 \stackrel{?}{=} \sqrt{100 - 12(3)} - 2$

$6 \stackrel{?}{=} \sqrt{64} - 2$

$6 = 6$ ✓

ثبت صحة أحد الحلول بينما الآخر لم تثبت صحته. إذًا، الحل هو 3.

b. $\sqrt[3]{(x - 5)^2} + 14 = 50$

$\sqrt[3]{(x - 5)^2} + 14 = 50$	المعادلة الأصلية
$\sqrt[3]{(x - 5)^2} = 36$	اعزل الجذر.
$(x - 5)^2 = 46{,}656$	ارفع طرفي المعادلة إلى الأس 3. (الدليل هو 3.)
$x - 5 = \pm 216$	خذ الجذر التربيعي لكل طرف.
$x = 211$ أو -221	اجمع 5 إلى كل طرف.

التحقق من الحلين في المعادلة الأصلية يؤكد أنهما صحيحان.

c. $\sqrt{x - 2} = 5 - \sqrt{15 - x}$

$\sqrt{x - 2} = 5 - \sqrt{15 - x}$	المعادلة الأصلية
$x - 2 = 25 - 10\sqrt{15 - x} + (15 - x)$	قم بتربيع كل طرف.
$2x - 42 = -10\sqrt{15 - x}$	اعزل الجذر.
$4x^2 - 168x + 1764 = 100(15 - x)$	قم بتربيع كل طرف.
$4x^2 - 168x + 1764 = 1500 - 100x$	استخدم خاصية التوزيع
$4x^2 - 68x + 264 = 0$	اجمع الحدود المتشابهة.
$4(x^2 - 17x + 66) = 0$	حلل.
$4(x - 6)(x - 11) = 0$	حلل.
$x - 11 = 0 \quad = \quad x - 6 = 0$	خاصية الناتج الصفري
$x = 11 \qquad x = 6$	حل.

التحقق من الحلول في المعادلة الأصلية يؤكد أن الحلين صحيحان.

تمرين موجّه

6A. $3x = 3 + \sqrt{18x - 18}$ **6B.** $\sqrt[3]{4x + 8} + 3 = 7$ **6C.** $\sqrt{x + 7} = 3 + \sqrt{2 - x}$

نصيحة دراسية

العوامل المشتركة تذكر أنه يمكنك في بعض الأحيان تحليل المضاعف المشترك قبل استخدام أي طريقة من طرق التحليل الأخرى.

انتبه!

تربيع التعابير الجذرية انتبه أكثر عند تربيع $5 - \sqrt{15 - x}$ ففي حين أنه يتشابه مع طريقة "فويل" باستخدام التعابير ذات الحدين، إلا أن هناك بعض الاختلافات بينهما. تأكد من تقدير كل الحدود.

تمارين

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والمدى ونقاط التقاطع والسلوك الطرفي والاتصال وفترات تزايد الدالة أو تناقصها. (المثالان 1 و 2)

1. $f(x) = 5x^2$
2. $g(x) = 8x^5$
3. $h(x) = -x^3$
4. $f(x) = -4x^4$
5. $g(x) = \frac{1}{3}x^9$
6. $f(x) = \frac{5}{8}x^8$
7. $f(x) = -\frac{1}{2}x^7$
8. $g(x) = -\frac{1}{4}x^6$
9. $f(x) = 2x^{-4}$
10. $h(x) = -3x^{-7}$
11. $f(x) = -8x^{-5}$
12. $g(x) = 7x^{-2}$
13. $f(x) = -\frac{2}{5}x^{-9}$
14. $h(x) = \frac{1}{6}x^{-6}$
15. $h(x) = \frac{3}{4}x^{-3}$
16. $f(x) = -\frac{7}{10}x^{-8}$

17. **الهندسة** يتم إيجاد حجم الكرة باستخدام المعادلة $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$، حيث r هو نصف القطر. (مثال 1)
a. حدد مجال الدالة ومداها.
b. مثّل الدالة بيانيًا.

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضّح المجال والمدى ونقاط التقاطع والسلوك النهائي والاتصال وفترات تزايد الدالة أو تناقصها. (مثال 3)

18. $f(x) = 8x^{\frac{1}{4}}$
19. $f(x) = -6x^{\frac{1}{5}}$
20. $g(x) = -\frac{1}{5}x^{-\frac{1}{3}}$
21. $f(x) = 10x^{-\frac{1}{6}}$
22. $g(x) = -3x^{\frac{5}{8}}$
23. $h(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{5}}$
24. $f(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}$
25. $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$
26. $h(x) = 7x^{\frac{5}{3}}$
27. $h(x) = -4x^{\frac{7}{4}}$
28. $h(x) = -5x^{-\frac{3}{2}}$
29. $h(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{8}{5}}$

أكمل كلًا من الخطوات التالية.
a. صمم مخطط انتشار للبيانات.
b. حدد دالة أسيّة لتمثيل البيانات.
c. احسب قيمة كل نموذج عند $x = 30$. (المثال 4)

30.

x	y
1	4
2	22
3	85
4	190
5	370
6	650
7	1,000
8	1,500

31.

x	y
1	1
2	32
3	360
4	2,000
5	7,800
6	25,000
7	60,000
8	130,000

32. **الغطس من المرتفعات** في رياضة الغطس من المرتفعات، يؤدي المتنافسون ثلاث غطسات من ارتفاع يبلغ 28 m. يمنح الحكام الغطاسين مجموعة نقاط تبدأ من 0 إلى 10 نقاط حسب درجة صعوبة الغطسة والقفزة والوضعيات والدخول في الماء. يوضح الجدول سرعة الغطاس في مسافات متعددة أثناء الغطس. (المثال 4)

السرعة (m/s)	المسافة (m)
8.85	4
12.52	8
15.34	12
17.71	16
19.80	20
21.69	24
23.43	28

a. صمم مخطط تشتت للبيانات.
b. حدد دالة أسيّة لتمثيل البيانات.
c. استخدم الدالة للتنبؤ بالسرعة التي سيدخل بها الغطاس إلى الماء بعد القفز من على ارتفاع يبلغ 30 m.

33. **الطقس** درجة حرارة تبريد الرياح هي درجة الحرارة الظاهرة التي نشعر بها على الجسم المكشوف مع أخذ تأثير الرياح في الاعتبار. يوضح الجدول درجة حرارة تبريد الرياح الناتجة عن انطلاق الرياح بسرعات متعددة عندما تكون درجة الحرارة الفعلية 10°C (مثال 4)

الهواء البارد (°C)	السرعة القصوى (km/h)
9.02	5
7.8	10
7.03	15
6.45	20
5.98	25
5.58	30
5.24	35
4.94	40

a. صمم مخطط تشتت للبيانات.
b. حدد دالة أسيّة لعمل نموذج للبيانات.
c. استخدم الدالة للتنبؤ بدرجة حرارة تبريد الرياح عندما تصل سرعة الهواء إلى 65 km/h.

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضّح المجال والمدى ونقاط التقاطع والسلوك الطرفي والاتصال وفترات تزايد الدالة أو تناقصها. (المثال 5)

34. $f(x) = 3\sqrt{6 + 3x}$
35. $g(x) = -2\sqrt[5]{1024 + 8x}$
36. $f(x) = -\frac{3}{8}\sqrt[6]{16x + 48} - 3$
37. $h(x) = 4 + \sqrt{7x - 12}$
38. $g(x) = \sqrt{(1 - 4x)^3} - 16$
39. $f(x) = -\sqrt[3]{(25x - 7)^2} - 49$
40. $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{27 - 2x} - 8$
41. $g(x) = \sqrt{22 - x} - \sqrt{3x - 3}$

42. **ميكانيكا الموائع** يمكن تمثيل سرعة تدفق المياه عبر خرطوم له فوهة باستخدام $V(P) = 12.1\sqrt{P}$، حيث V تمثل السرعة بالقدم في الثانية و P تمثل قوة الضغط بالرطل لكل بوصة مربعة. (المثال 5)
a. مثّل بيانيًا السرعة عبر فوهة الخرطوم في صورة دالة ضغط.
b. وضح المجال والمدى والسلوك الطرفي واتصال الدالة وحدد ما إذا كان تزايدًا أم تناقصًا.

.43 **العلوم الزراعية** يُقدر صافي الطاقة NE_m اللازمة للحفاظ على وزن جسم الماشية، بالميجا كالوري في اليوم. بهذه القاعدة $NE_m = 0.077\sqrt[4]{m^3}$، حيث m تمثل كتلة وزن الحيوان بالكيلو جرام. وكل ميجا كالوري واحد يعادل مليون سعر حراري. (المثال 6)

a. جد صافي الطاقة اللازمة في اليوم الواحد للحفاظ على وزن ثور يصل إلى 400 كيلوجرام.

b. إذا تم توفير 0.96 ميجا كالوري من الطاقة لكل 1 kg من الحبوب الكاملة، فما مقدار الحبوب التي يحتاجها ثور وزنه 400 kg يومياً للحفاظ على وزن الجسم؟

حُلّ كل من المعادلات التالية. (مثال 6)

44. $4 = \sqrt{-6-2x} + \sqrt{31-3x}$

45. $0.5x = \sqrt{4-3x} + 2$

46. $-3 = \sqrt{22-x} - \sqrt{3x-3}$

47. $\sqrt{(2x-5)^3} - 10 = 17$

48. $\sqrt[4]{(4x+164)^3} + 36 = 100$

49. $x = \sqrt{2x-4} + 2$

50. $7 + \sqrt{(-36-5x)^5} = 250$

51. $x = 5 + \sqrt{x+1}$

52. $\sqrt{6x-11} + 4 = \sqrt{12x+1}$

53. $\sqrt{4x-40} = -20$

54. $\sqrt{x+2} - 1 = \sqrt{-2-2x}$

55. $7 + \sqrt[5]{1054-3x} = 11$

حدد ما إذا كانت كل دالة أحادية الحد بشرط أن يكون a و b عددين صحيحين موجبين. اشرح استنتاجك.

56. $y = \frac{5}{b}x^{4a}$

57. $G(x) = -2ax^4$

58. $F(b) = 3ab^{5x}$

59. $y = \frac{7}{3}t^{ab}$

60. $H(t) = \frac{1}{ab}t^{\frac{4b}{2}}$

61. $y = 4abx^{-2}$

.62 **علم الكيمياء** يمكن استخدام الدالة $r = R_0(A)^{\frac{1}{3}}$ لتقريب نصف القطر النووي للعنصر بناءً على كتلته الجزيئية، حيث تمثل r طول نصف القطر بالمتر و R_0 ثابت (حوالي 1.2×10^{-15} m)، و A_g تمثل الكتلة الجزيئية.

العنصر	الكتلة الجزيئية
الكربون (C)	12.0
الهيليوم (H)	4.0
اليود (I)	126.9
الرصاص (Pb)	207.2
الصوديوم (Na)	؟
الكبريت (S)	32.1

a. إذا كان نصف القطر النووي لعنصر الصوديوم يبلغ حوالي 3.412×10^{-15} m، فما كتلته الجزيئية؟

b. نصف القطر التقريبي للعنصر يساوي 6.030×10^{-15} m. عرّف العنصر.

c. نسبة الكتلة الجزيئية لعنصرين هي 27:8. فما نسبة أنصاف القطر النووي؟

حُلّ كل من المتباينات فيما يلي.

63. $\sqrt[5]{1040+8x} \geq 4$

64. $\sqrt[13]{41-7x} \geq -1$

65. $(1-4x)^{\frac{3}{2}} \geq 125$

66. $\sqrt{6+3x} \leq 9$

67. $(19-4x)^{\frac{5}{3}} - 12 \leq -13$

68. $(2x-68)^{\frac{2}{3}} \geq 64$

.69 **الكيمياء** ينص قانون بويل على أن ضغط الغاز، عند درجة حرارة ثابتة، يتناسب عكسيًا مع حجمه. تم عرض نتائج التجربة التي أجريت لاستكشاف قانون بويل.

الحجم (L)	الضغط (ضغط جوي)
1.0	3.65
1.5	2.41
2.0	1.79
2.5	1.46
3.0	1.21
3.5	1.02
4.0	0.92

a. صمم مخطط تشتت للبيانات.

b. حدد دالة أسيّة لتمثيل الضغط P كدالة حجم v.

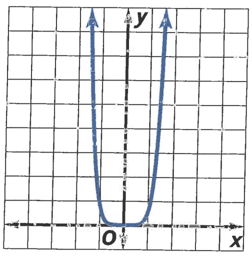
c. بناءً على المعلومات الواردة في عبارة المسألة، هل الدالة التي حددتها في الجزء b منطقية؟ اشرح.

d. استخدم النموذج للتنبؤ بضغط الغاز إذا كان حجمه 3.25 L.

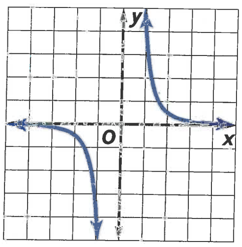
e. استخدم النموذج للتنبؤ بضغط الغاز إذا كان حجمه 6 L.

طابق التمثيل البياني بالدالة المناسبة، دون استخدام الآلة الحاسبة.

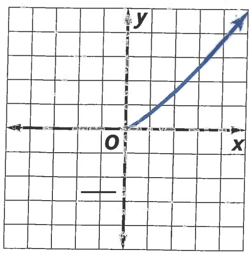
70.



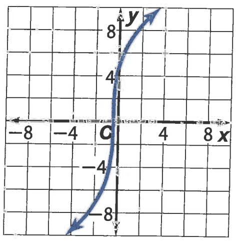
71.



72.



73.



a. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{3x^5}$

b. $g(x) = \frac{2}{3}x^6$

c. $h(x) = 4x^{-3}$

d. $p(x) = 5\sqrt[3]{2x+1}$

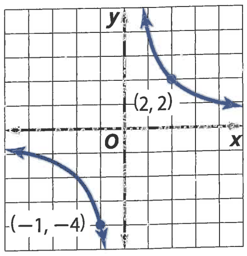
.74 **الكهرباء** يمكن حساب الجهد الذي يستهلكه أي جهاز كهربي مثل مشغل DVD، باستخدام $V = \sqrt{PR}$، حيث V تمثل الجهد ويقاس بالفولت، P تمثل القدرة الكهربائية وتقاس بالوات، و R تمثل المقاومة وتقاس بالأوم. يمكن استخدام المعادلة $I = \sqrt{\frac{P}{R}}$ لحساب التيار، حيث I تمثل التيار بالأمبير.

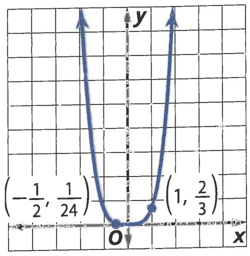
.a إذا كان المصباح يستهلك 120 فولت ولديه مقاومة مقدارها 11 أوم، فما مقدار الطاقة التي يستهلكها المصباح؟

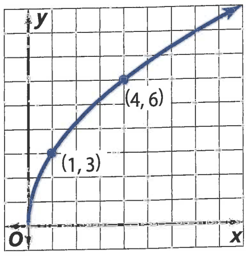
.b إذا كان مشغل DVD يعمل بتيار مقداره 10 أمبيرات ويستهلك من الطاقة 1,200 وات، فما مقدار مقاومة مشغل DVD؟

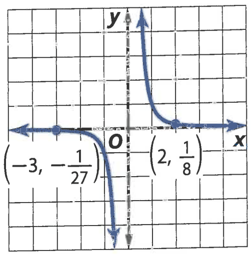
.c يعبر قانون أوم عن الجهد الكهربي بدلالة شدة التيار والمقاومة. استخدم المعادلة المعطاة أعلاه لكتابة قانون أوم باستخدام الجهد والمقاومة وشدة التيار.

استخدم النقاط المذكورة لتحديد دالة القوة الموضحة بالتمثيل البياني.

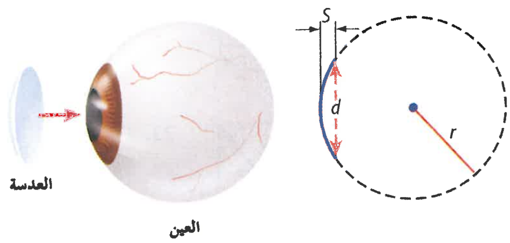
.75


.76


.77


.78


.79 **البصريات** تتيح العدسة اللاصقة ذات العمق المناسب الملاءمة الجيدة ونفاذ الأكسجين. يمكن حساب عمق العدسة باستخدام المعادلة $S = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$، حيث S يمثل العمق و r يمثل نصف قطر التكور، و d يمثل القطر، وجميع الوحدات بالمليمتر.



.a إذا كان عمق العدسة اللاصقة 1.15 mm ونصف قطر التكور 7.50 ميلليمترات، فما قطر العدسة اللاصقة؟

.b إذا زاد عمق العدسة اللاصقة بمقدار 0.1 mm وقطر العدسة يساوي 8.2 mm، فما نصف قطر التكور المطلوب؟

.c إذا كان نصف قطر التكور يبقى ثابتًا، فهل يزيد عمق العدسة اللاصقة أم ينقص إذا زاد القطر؟

.80 **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تبحث في متوسط معدلات التغير لدوال القوة.

.a **التمثيل البياني** بالنسبة إلى دوال القوة التي تُكتب بالصيغة $f(x) = x^n$، مثّل بيانيًا دالة لقيمتي n حيث إن $n = 1$ و $0 < n < 1$، وقيمتي n حيث إن $n > 1$

.b **العرض الجدولي** انسخ الجدول وأكمله، باستخدام تمثيلات بيانية من الجزء a لتحليل متوسط معدلات التغير للدوال حيث x تقترب من اللانهاية.
صف هذا المعدل بأنه *متزايد*، أو *ثابت*، أو *متناقص*.

n	$f(x)$	متوسط معدل التغيير حيث $x \to \infty$
$0 < n < 1$		
$n = 1$		
$n > 1$		

.c **العرض الكلامي** ضع فرضية حول متوسط معدل التغير لدالة القوة حيث x تقترب من اللانهاية في الفترات $0 < n < 1$ و $n = 1$ و $n > 1$

مسائل مهارات التفكير العُليا استخدام مهارات التفكير العليا

.81 **تحدٍ** وضح أن $\sqrt{\frac{8^n \cdot 2^7}{4^{-n}}} = 2^{2n+3}\sqrt{2^{n+1}}$

.82 **الاستنتاج** افرض أن $y = 2^x$

.a صف قيمة y إذا كان $x < 0$

.b صف قيمة y إذا كان $0 < x < 1$

.c صف قيمة y إذا كان $x > 1$

d اكتب فرضية حول العلاقة بين قيمة الأساس وقيمة الأس إذا كان الأس أكبر من أو أصغر من 1. برر إجابتك.

.83 **ما قبل الكتابة** مشروعك الرئيس هو أن تشرح لطالب في السنة الأولى من المرحلة الثانوية أربع جلسات حول دوال القوة والدوال الجذرية. ضع خطة للكتابة تتناول فيها الهدف والقارئ والفكرة الرئيسة والتسلسل المنطقي والإطار الزمني لإكمال العمل.

.84 **الاستنتاج** بافتراض أن $f(x) = x^{\frac{a}{b}}$، حيث a و b عددان صحيحان ليس لهما عامل مشترك، حدد ما إذا كانت كل عبارة *صواب* أم *خطأ*. اشرح.

.a بما أن قيمة b زوجية وقيمة a فردية، إذن، فالدالة غير معرفة بالنسبة إلى $x < 0$.

.b بما أن قيمة a زوجية وقيمة b فردية، إذن، فالدالة غير معرفة بالنسبة إلى $x < 0$.

.c بما أن قيمة a تساوي 1، إذن، فالدالة معرّفة لجميع x.

.85 **الاستنتاج** ضع في اعتبارك أن $f(x) = x^{\frac{1}{n}} + 5$. كيف تتوقع أن يتغير التمثيل البياني للدالة بزيادة n إذا كان n عددًا فرديًا وأكبر من أو يساوي 3؟

.86 **الكتابة في الرياضيات** استخدم الكلمات والتمثيلات البيانية والجداول والمعادلات لتوضيح العلاقة بين دوال القوة والدوال الجذرية.

مراجعة شاملة

.87 **الأمور المالية** إذا قمت بإيداع مبلغ قدره 1,000 AED بمعدل فائدة سنوية مركبة r، إذًا، يُحسب رصيد الحساب بعد 3 أعوام بالمعادلة $B(r) = 1000(1 + r)^3$، حيث تُكتب r في صورة كسر عشري.

a. جد معدل لمعدل الفائدة r اللازمة لتحقيق رصيد B في الحساب بعد 3 أعوام.

b. ما معدل الفائدة الذي يحقق رصيد 1,100 AED بعد 3 أعوام؟

جد $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ و$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل من $f(x)$ و $g(x)$. حدد مجال كل دالة جديدة.

88. $f(x) = x^2 - 2x$
$g(x) = x + 9$

89. $f(x) = \frac{x}{x + 1}$
$g(x) = x^2 - 1$

90. $f(x) = \frac{3}{x - 7}$
$g(x) = x^2 + 5x$

استخدم التمثيل البياني $f(x)$ لتمثيل $g(x) = |f(x)|$ و$h(x) = f(|x|)$ بيانيًا.

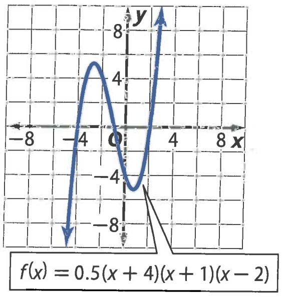
91. $f(x) = -4x + 2$

92. $f(x) = \sqrt{x + 3} - 6$

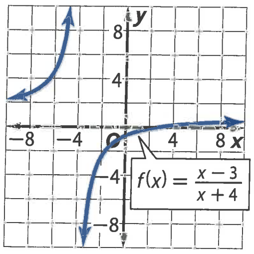
93. $f(x) = x^2 - 3x - 10$

استخدام التمثيل البياني لكل دالة لتقدير الفترات لأقرب 0.5 وحدة في الدالة المتزايدة أو المتناقصة أو الثابتة. ادعم إجابتك بالأرقام.

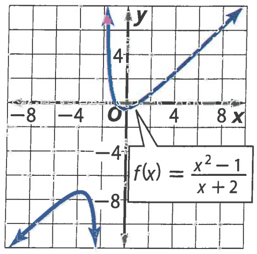
94.



95.



96.



بسّط.

97. $\frac{\frac{1}{2} + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{2}i}$

98. $\frac{2 - \sqrt{2}i}{3 + \sqrt{6}i}$

99. $\frac{(1 + i)^2}{(-3 + 2i)^2}$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

.100 **اختبار SAT/ACT** إذا كان m و n عددين موجبين، فأي مما يلي يكافئ $\frac{2m\sqrt{18n}}{m\sqrt{2}}$؟

A $3m\sqrt{n}$
B $6m\sqrt{n}$
C $4\sqrt{n}$
D $6\sqrt{n}$
E $8\sqrt{n}$

.101 **مراجعة** إذا كانت $f(x, y) = x^2y^3$ و $f(a, b) = 10$. فما قيمة $f(2a\ .\ 2b)$؟

F 50
G 100
H 160
J 320
K 640

.102 **مراجعة** يختلف عدد الدقائق m الذي يستغرقه c من الأطفال لتناول p قطع من البيتزا طرديًا حسب عدد قطع البيتزا وعكسيًا حسب عدد الأطفال. إذا كان 5 أطفال يستغرقون 30 دقيقة لتناول 10 قطع من البيتزا، فكم عدد الدقائق التي يستغرقها 15 طفلًا لتناول 50 قطعة من البيتزا؟

A 30
B 40
C 50
D 60

.103 بما أن $\sqrt[3]{5m + 2} = 3$. إذًا، $m =$؟

F 3
G 4
H 5
J 6

استكشاف 1-1 سلوك التمثيلات البيانية

الهدف

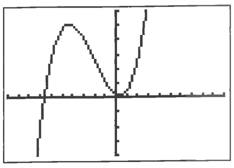
- تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا وتحليل سلوكها.

حلّلت السلوك الطرفي للدوال من خلال إنشاء جدول قيم وتمثيله بيانيًا. فيما يتعلق *بالدالة كثيرة الحدود*، يمكن تحديد سلوك التمثيل البياني من خلال تحليل حدود معينة من الدالة.

النشاط التمثيل البياني للدوال كثيرة الحدود

ارسم كل تمثيل بياني وحدد السلوك الطرفي للدالة.

a. $f(x) = x^3 + 6x^2 - 4x + 2$



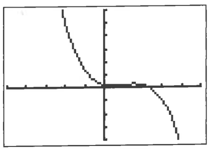
[-10, 10] scl: 1 by [-40, 60] scl: 10

استخدم جدول القيم لرسم التمثيل البياني.

x	−10	−5	−2	0	2	5	10
$f(x)$	−358	47	26	2	26	257	1,562

في التمثيل البياني لـ $f(x)$، يتضح أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

b. $g(x) = -2x^3 + 6x^2 - 4x + 2$

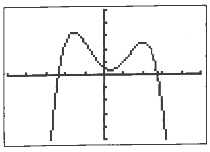


[-5, 5] scl: 1 by [-40, 60] scl: 10

x	−8	−5	−2	0	2	5	8
$g(x)$	1,442	422	50	2	2	−118	−670

في التمثيل البياني لـ $g(x)$، يتضح أن $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$

c. $h(x) = -x^4 + x^3 + 6x^2 - 4x + 2$



[-5, 5] scl: 1 by [-20, 20] scl: 4

x	−8	−5	−2	0	2	5	8
$h(x)$	−4,190	−578	10	2	10	−368	−3,230

في التمثيل البياني لـ $h(x)$، يتضح أن $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} h(x) = -\infty$

نصيحة دراسية

جدول القيم تأكد من استخدام نقاط كافية للحصول على الشكل الإجمالي للتمثيل البياني.

حلل النتائج

1. انظر إلى حدود كل دالة أعلاه. ما الاختلافات التي تلاحظها؟
2. ما مدى تأثير هذه الاختلافات على السلوك الطرفي للرسم البياني لكل دالة؟
3. ضع نمطًا لكل نوع من أنواع السلوك الطرفي المحتمل للدالة كثيرة الحدود.
4. اعرض مثالاً للدالة كثيرة الحدود بتمثيل بياني يقترب من اللانهاية الموجبة عندما تقترب x من اللانهاية الموجبة واللانهاية السالبة.

تمارين

صف السلوك الطرفي لكل دالة دون إنشاء جدول قيم أو تصميم تمثيل بياني.

5. $f(x) = -2x^3 + 4x$
6. $f(x) = 5x^4 + 3$
7. $f(x) = -x^5 + 2x - 4$
8. $g(x) = 6x^6 - 2x^2 + 10x$
9. $g(x) = 3x - 4x^4$
10. $h(x) = 6x^2 - 3x^3 - 2x^6$

الدرس 1-2 الدوال كثيرة الحدود

:: السابق

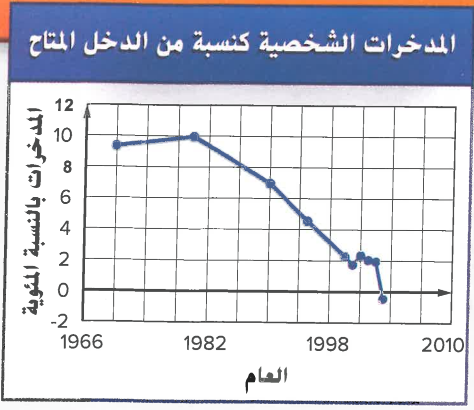
- لقد فمت بتحليل التمثيلات البيانية الخاصة بالدوال.

:: الحالي

1. تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا.
2. تمثيل بيانات من الحياة اليومية باستخدام الدوال كثيرة الحدود.

:: لماذا؟

- يوضح التمثيل البياني باستخدام مخطط التشتت إجمالي المدخرات الشخصية كنسبة من الدخل المتاح في الولايات المتحدة الأمريكية. يمكن في كثير من الأحيان تمثيل بيانات القيم القصوى النسبية المتعددة بشكل أفضل باستخدام الدالة كثيرة الحدود.



مفردات جديدة

الدالة كثيرة الحدود polynomial function
دالة كثيرة الحدود من الدرجة n polynomial function of degree n
معامل الحد الرئيس leading coefficient
اختبار الحد الرئيس leading-term test
دالة من الدرجة الرابعة quartic function
نقطة دوران turning point
صيغة تربيعية quadratic form
صفر متكرر repeated zero
التكرار multiplicity

1 التمثيل البياني للدوال كثيرة الحدود

في الدرس 1-1، تعلمت الخصائص الأساسية للدوال أحادية الحد. الدوال أحادية الحد هي أكثر دالة أساسية في الدوال كثيرة الحدود. ويشكل إيجاد قيم المجموع والفرق للدوال أحادية الحد أنواعًا أخرى من **الدوال كثيرة الحدود**.

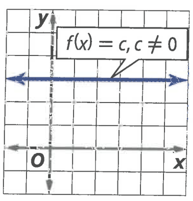
لنفرض أن n عدد صحيح غير سالب وأن $a_0, a_1, a2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ أعداد حقيقية حيث $a_n \neq 0$. إذًا الدالة التي تمثلها الصيغة التالية

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

تُسمى **دالة كثيرة الحدود من الدرجة n**. يُعد **معامل الحد الرئيس** في الدالة كثيرة الحدود معامل المتغير ذا الأس الأكبر. معامل الحد الرئيس للدالة $f(x)$ هو a_n

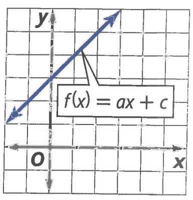
أنت بالفعل على دراية بالدوال كثيرة الحدود التالية.

الدوال الثابتة



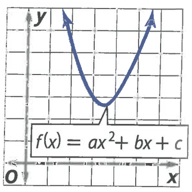
الدرجة: 0

الدوال الخطية



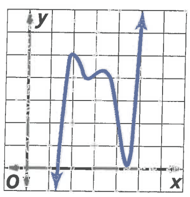
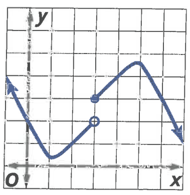
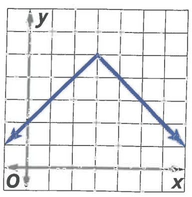
الدرجة: 1

الدوال التربيعية



الدرجة: 2

الدالة الصفرية هي دالة ثابتة بدون درجة. وتوضح التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود خصائص معينة.

التمثيل البياني للدوال كثيرة الحدود	
مثال	**أمثلة خارجة عن التعريف**
 الدوال كثيرة الحدود محددة ومتصلة لجميع الأعداد الحقيقية وبها منحنيات سلسة دورانية.	  لا يحتوي التمثيل البياني للدوال كثيرة الحدود على فواصل أو فراغات أو فجوات أو زوايا حادة.

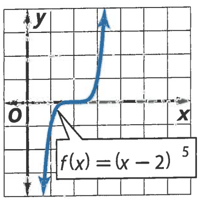
تذكر أن التمثيل البياني للدوال أحادية الحد غير الثابتة من الدرجة الزوجية يشبه التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2$. في حين يشبه التمثيل البياني للدوال أحادية الحد من الدرجة الفردية التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3$ ويمكنك استخدام الأشكال والخصائص الأساسية للدوال أحادية الحد من الدرجة الزوجية والفردية وما تعلمته عن عمليات التحويل من أجل التحويل إلى التمثيل البياني للدوال أحادية الحد.

مثال 1 التحويلات البيانية للدوال أحادية الحد

ارسم تمثيلاً بيانيًا لكل دالة فيما يلي.

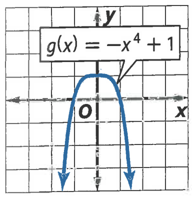
a. $f(x) = (x - 2)^5$

بما أن هذه الدالة من الدرجة الفردية، إذًا يشبه تمثيلها البياني التمثيل البياني للدالة $y = x^3$ التمثيل البياني للدالة $f(x) = (x - 2)^5$ و هو التمثيل البياني للدالة $y = x^5$ بعد إزاحتها لليمين بمقدار وحدتين.



b. $g(x) = -x^4 + 1$

بما أن هذه الدالة من الدرجة الزوجية، إذًا يشبه تمثيلها البياني التمثيل البياني للدالة $y = x^2$ ويعد التمثيل البياني للدالة $g(x) = -x^4 + 1$ و هو التمثيل البياني للدالة $y = x^4$ المنعكسة في المحور الأفقي x بعد إزاحتها لأعلى بمقدار وحدة واحدة.



تمرين موجّه

1A. $f(x) = 4 - x^3$

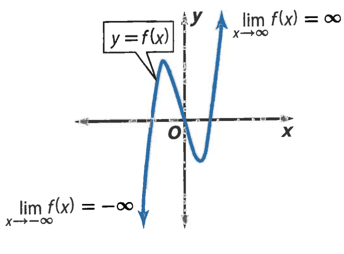
1B. $g(x) = (x + 7)^4$

تعلمت أن السلوك الطرفي للدالة يوضح كيف يكون سلوك الدالة أو كيف تتغير رأسيًا أو أفقيًا عند أي طرف في التمثيل البياني لها. بما أن $x \to -\infty$ و $x \to \infty$. إذًا السلوك الطرفي لأي دالة كثيرة الحدود يحدده الحد الرئيس لها. يستخدم **اختبار الحد الرئيس** قيمة الدرجة ومعامل هذا الحد لتحديد السلوك الطرفي للدالة كثيرة الحدود.

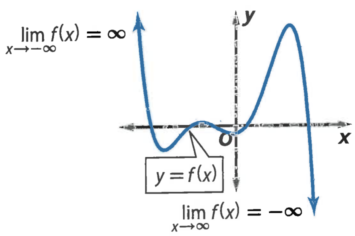
المفهوم الأساسي اختبار الحد الرئيس للسلوك الطرفي للدالة كثيرة الحدود

يمكن وصف السلوك الطرفي لأي دالة كثيرة حدود غير ثابتة $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ بإحدى الطرق الأربع التالية. كما هو محدد بالدرجة n للدالة كثيرة الحدود ومعامل الحد الرئيس لها a_n.

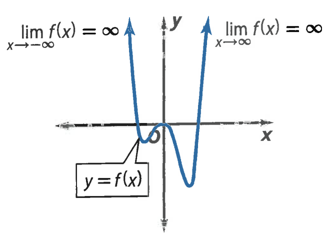
n عدد فردي، a_n عدد موجب



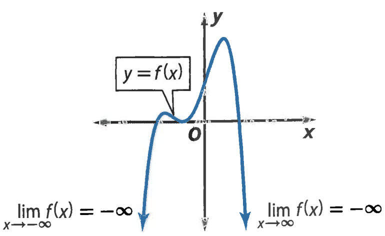
n عدد فردي، a_n عدد سالب



n عدد زوجي، a_n عدد موجب



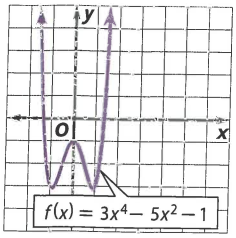
n عدد زوجي، a_n عدد سالب



مثال 2 تطبيق اختبار الحد الرئيس

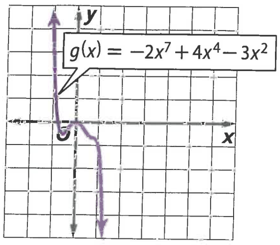
وضّح السلوك الطرفي للتمثيل البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيس.

a. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 - 1$



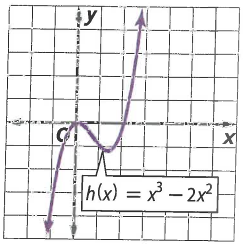
الدالة من الدرجة 4 ومعامل الحد الرئيس يساوي 3. بما أن الدرجة زوجية ومعامل الحد الرئيس موجب، إذًا $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

b. $g(x) = -3x^2 - 2x^7 + 4x^4$



اكتب بصيغة قياسية $g(x) = -2x^7 + 4x^4 - 3x^2$ والدالة هنا من الدرجة 7 ومعامل الحد الرئيس يساوي -2. بما أن الدرجة فردية ومعامل الحد الرئيس سالب، إذًا $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

c. $h(x) = x^3 - 2x^2$



الدالة من الدرجة 3 ومعامل الحد الرئيس يساوي 1. بما أن الدرجة فردية ومعامل الحد الرئيس موجب، إذًا $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

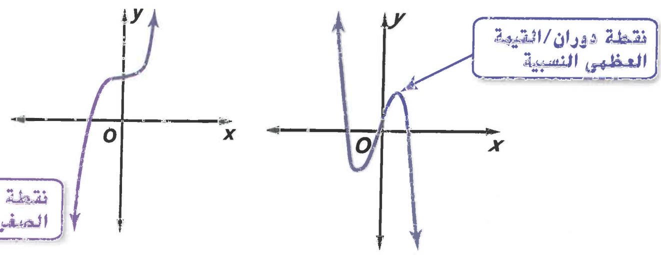
تمرين موجّه

2A. $g(x) = 4x^5 - 8x^3 + 20$

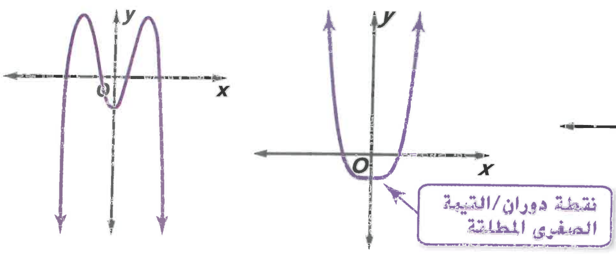
2B. $h(x) = -2x^6 + 11x^4 + 2x^2$

> **انتبه!**
> **الصيغة القياسية** ليس بالضرورة أن يكون الحد الرئيس للدالة كثيرة الحدود هو الحد الأول فيها. ومع ذلك، يكون الحد الرئيس هو الحد الأول *دائمًا* في الدالة كثيرة الحدود عند كتابة الدالة كثيرة الحدود بالصيغة القياسية. تذكّر أن الدالة كثيرة الحدود تُكتب بالصيغة القياسية إذا كانت حدودها مكتوبة بالترتيب التنازلي للأسس.

فكّر في الأشكال التالية لمجموعة صغيرة من الدوال كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة النموذجية أو الدوال التكعيبية أو الدوال كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة أو **دالة من الدرجة الرابعة** الموضحة.



الدوال التكعيبية النموذجية



دالة من الدرجة الرابعة النموذجية

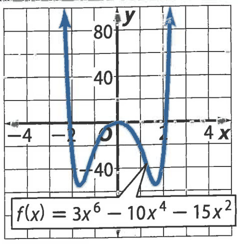
لاحظ عدد نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x في كل تمثيل بياني. بما أن التقاطع مع المحور الأفقي x يوافق صفرًا حقيقيًا من الدالة، إذًا يمكنك أن تعرف أن الدوال التكعيبية تحتوي على 3 أصفار على الأكثر وأن الدوال من الدرجة الرابعة تحتوي على 4 أصفار على الأكثر.

نقاط الدوران أو نقاط التحول توضح مكان تغير التمثيل البياني للدالة من التزايد إلى التناقص والعكس. يتم تحديد القيمتين العظمى والصغرى أيضًا على نقاط الدوران. لاحظ أن الدوال التكعيبية تحتوي على نقطتي دوران على الأكثر وأن الدوال من الدرجة الرابعة تحتوي على 3 نقاط دوران على الأكثر. يمكن تعميم هذه الملاحظات كما يلي وتوضيح أنها صحيحة لأي دالة كثيرة الحدود.

المفهوم الأساسي الأصفار ونقاط الدوران للدوال كثيرة الحدود

تحتوي الدالة كثيرة الحدود f من الدرجة $n \geq 1$ على n من الأصفار الحقيقية المختلفة على أكثر تقدير وعلى $n - 1$ من نقاط الدوران على أكثر تقدير.

مثال لنفرض أن $f(x) = 3x^6 - 10x^4 - 15x^2$، فالدالة f تحتوي على 6 أصفار **حقيقية** مختلفة على الأكثر و 5 نقاط دوران على الأكثر. يوضح التمثيل البياني للدالة f أن الدالة تحتوي على 3 أصفار حقيقية و 3 نقاط دوران.



$f(x) = 3x^6 - 10x^4 - 15x^2$

نصيحة دراسية

المراجعة تذكّر أن التقاطع مع المحور الأفقي x في التمثيل البياني للدالة يُسمى أصفار الدالة. يُطلق على حلول المعادلة المطابقة جذور المعادلة.

تذكّر أنه إذا كانت الدالة f كثيرة الحدود وأن c هي نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x للتمثيل البياني للدالة f، فيمكن أن تقول إن:

- c صفر من أصفار الدالة f.
- $x = c$ حل للمعادلة $f(x) = 0$
- $(x - c)$ عامل من عوامل الدالة كثيرة الحدود $f(x)$

يمكنك إيجاد أصفار بعض الدوال كثيرة الحدود باستخدام أساليب التحليل ذاتها التي استخدمتها لحل المعادلات التربيعية.

المثال 3 أصفار الدوال كثيرة الحدود

اذكر عدد الأصفار الحقيقية المحتملة ونقاط الدوران للدالة $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.

بما أن المعادلة من الدرجة 3، إذًا تحتوي الدالة f على 3 أصفار حقيقية مختلفة على الأكثر و 1—3 أو نقطتي دوران على أكثر تقدير. لإيجاد الأصفار الحقيقية، جد حل المعادلة ذات الصلة $f(x) = 0$ بالتحليل إلى العوامل.

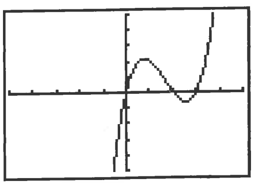
$x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ افرض أن $f(x)$ تساوي 0

$x(x^2 - 5x + 6) = 0$ أخرج x كعامل مشترك.

$x(x - 2)(x - 3) = 0$ حلل إلى العوامل.

إذًا، تحتوي الدالة f على ثلاثة أصفار مختلفة 0 و 2 و 3. يتوافق هذا مع الدالة التكعيبية التي تحتوي على 3 أصفار حقيقية مختلفة على الأكثر.

التحقق يمكنك استخدام الحاسبة البيانية لرسم $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ والتأكيد على هذه الأصفار.
بالإضافة إلى ذلك، يمكنك أن تعرف أن التمثيل البياني يحتوي على نقطتي دوران، وهذا يتوافق مع الدوال التكعيبية التي تحتوي على نقطتي دوران على الأكثر.


[−5, 5] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

تمرين موجّه

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.

3A. $f(x) = x^3 - 6x^2 - 27x$

3B. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 15$

في بعض الحالات، يمكن تحليل الدالة كثيرة الحدود إلى عواملها باستخدام الأساليب التربيعية إذا كانت لها صيغة تربيعية.

نصيحة دراسية

المراجعة لمراجعة أساليب حل المعادلات التربيعية، راجع دروس سابقة.

المفهوم الأساسي الصيغة التربيعية

الكلمات يُكتب تعبير الدالة كثيرة الحدود في x **بالصيغة التربيعية** إذا كتب بالصيغة $au^2 + bu + c$ لأي أعداد a و b و c و $a \neq 0$ بحيث يكون u تعبيرًا في x.

الرموز تُكتب $x^4 - 5x^2 - 14$ بالصيغة التربيعية لأن التعبير يمكن كتابته بالصيغة التالية $(x^2)^2 - 5(x^2) - 14$. بما أن $u = x^2$، إذًا يصبح التعبير $u^2 - 5u - 14$.

مثال 4 أصفار الدالة كثيرة الحدود بالصيغة التربيعية

اذكر عدد الأصفار الحقيقية المحتملة ونقاط الدوران للدالة $g(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.

بما أن الدالة من الدرجة 4، إذًا g تحتوي على 4 أصفار حقيقية مختلفة على الأكثر و1−4 أو 3 نقاط دوران على الأكثر. تُكتب هذه الدالة بالصيغة التربيعية لأن $x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2)^2 - 3(x^2) - 4$ لنفرض أن $u = x^2$

$(x^2)^2 - 3(x^2) - 4 = 0$ افرض أن $g(x)$ تساوي 0

$u^2 - 3u - 4 = 0$ عوّض عن u بقيمة x^2

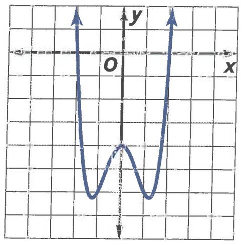
$(u + 1)(u - 4) = 0$ حلل التعبير التربيعي إلى العوامل

$(x^2 + 1)(x^2 - 4) = 0$ عوّض عن x^2 بقيمة u

$(x^2 + 1)(x + 2)(x - 2) = 0$ حلل إلى العوامل

$x^2 + 1 = 0 \quad = \quad x + 2 = 0 \quad = \quad x - 2 = 0$ خاصية الناتج الصفري

$x = \pm\sqrt{-1} \qquad x = -2 \qquad x = 2$ جد حل x



الشكل 1.2.1

بما أن ناتج $\pm\sqrt{-1}$ ليس أصفارًا حقيقية، إذًا تحتوي g على صفرين حقيقيين مختلفين، −2 و 2. يتوافق ذلك مع الدالة التربيعية. يؤكد ذلك التمثيل البياني للدالة $g(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ في الشكل 1.2.1. لاحظ أنه يوجد 3 نقاط انعطاف، وهذا يتوافق أيضًا مع مع الدالة التربيعية.

تمرين موجّه

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.

4A. $g(x) = x^4 - 9x^2 + 18$

4B. $h(x) = x^5 - 6x^3 - 16x$

إذا وُجد عامل $(x - c)$ يتكرر أكثر من مرة بالصيغة التي تم تحليلها بالكامل إلى العوامل للدالة $f(x)$، فإن الصفر المرتبط بها c يُسمى **صفرًا مُكررًا**. عندما يتكرر الصفر بعدد زوجي من المرات، سيكون التمثيل البياني مماسًا للمحور الأفقي x عند هذه النقطة. عندما يتكرر الصفر بعدد فردي من المرات، سيقطع التمثيل البياني المحور الأفقي x عند هذه النقطة. يصبح التمثيل البياني مماسًا لمحور عندما يلمس المحور عند هذه النقطة، ولكن لا يقطعه.

مثال 5 الدوال كثيرة الحدود ذات الأصفار المُكررة

اذكر عدد الأصفار الحقيقية المحتملة ونقاط الدوران للدالة $h(x) = -x^4 - x^3 + 2x^2$ ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.

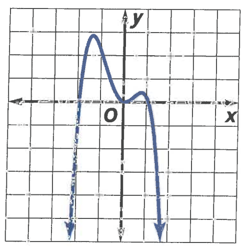
بما أن الدالة من الدرجة 4، إذًا h تحتوي على 4 أصفار حقيقية مختلفة على الأكثر و 1 − 4 أو 3 نقاط دوران على الأكثر. جد الأصفار الحقيقية.

$-x^4 - x^3 + 2x^2 = 0$ افرض أن $h(x)$ تساوي 0

$-x^2(x^2 + x - 2) = 0$ بإخراج $-x^2$ كعامل مشترك.

$-x^2(x - 1)(x + 2) = 0$ حلل إلى العوامل

يحتوي التعبير السابق على 4 عوامل، ولكن حل x ينتج عنه 3 أصفار، و 0 و 1 و −2. ومن بين الأصفار، يتكرر 0 مرتين.



الشكل 1.2.2

يؤكد التمثيل البياني للدالة $h(x) = -x^4 - x^3 + 2x^2$ الموضح في الشكل 1.2.2 على هذه الأصفار ويوضح أن h تحتوي على ثلاث نقاط دوران. لاحظ أنه عندما يكون $x = 1$ و $x = -2$، فإن التمثيل البياني يقطع المحور الأفقي x ولكن عندما $x = 0$، يصبح التمثيل البياني مماسًا للمحور الأفقي x.

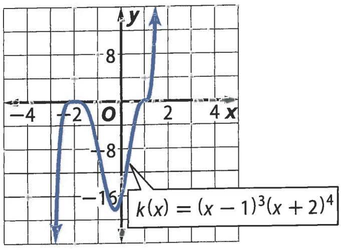
تمرين موجّه

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.

5A. $g(x) = -2x^3 - 4x^2 + 16x$

5B. $f(x) = 3x^5 - 18x^4 + 27x^3$

في $h(x) = -x^2(x-1)(x+2)$ من مثال 5، يتكرر الصفر $x = 0$ مرتين.
في $k(x) = (x-1)^3(x+2)^4$ يتكرر الصفر $x = 1$ ثلاث مرات، بينما يتكرر $x = -2$ 4 مرات. لاحظ أنه في التمثيل البياني k الموضح، يقطع المنحنى المحور الأفقي x عند $x = 1$ وليس عند $x = -2$ يمكن تعميم هذه الملاحظات كما يلي وتوضيح أنها صحيحة لكل الدوال كثيرة الحدود.



المفهوم الأساسي الأصفار المُكررة للدوال كثيرة الحدود

بما أن $(x-c)^m$ أكبر قيمة أسيّة في $(x-c)$ التي تعد عاملاً للدالة كثيرة الحدود f. إذاً c *صفراً مُكرراً* m مرة في f. بحيث يكون m عدداً طبيعيًا.

- إذا وُجد صفر c له تكرار فردي، فإن التمثيل البياني للدالة f يقطع المحور الأفقي x عند $x = c$ ويغير قيمة $f(x)$ الإشارة عند $x = c$.
- إذا وُجد صفر c له تكرار زوجي، فإن التمثيل البياني للدالة f يصبح مماسًا للمحور الأفقي x عند $x = c$ ولا تغير قيمة $f(x)$ الإشارة عند $x = c$.

نصيحة دراسية

الأصفار غير المُكررة يمكن اعتبار الصفر غير المُكرر أنه يحتوي على تكرار 1 أو تكرار فردي. يقطع التمثيل البياني المحور الأفقي x ويحتوي على إشارة تتغير عند كل صفر غير مُكرر.

لديك الآن عدة اختبارات وأدوات لمساعدتك في تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا.

مثال 6 تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا

فيما يتعلق بالدالة $f(x) = x(2x+3)(x-1)^2$، (a) طبّق اختبار الحد الرئيس، (b) حدد الأصفار واذكر تكرار أي أصفار مُكررة، (c) جد بعض النقاط الإضافية، (d) مثّل الدالة بيانيًا.

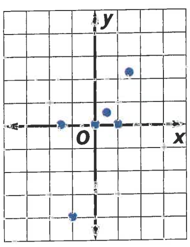
a. بما أن ناتج $x(2x+3)(x-1)^2$ يحتوي على حد رئيسي في $x(2x)(x)^2$ أو $2x^4$. إذًا f من الدرجة 4 ومعامل الحد الرئيس يساوي 2. بما أن الدرجة زوجية ومعامل الحد الرئيس موجب. إذًا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

b. الأصفار الحقيقية المختلفة هي 0 و -1.5 و 1. كما يتكرر الصفر الموجود عند 1 مرتين.

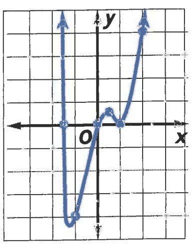
c. اختر قيم x التي تقع ضمن الفترات التي حددتها أصفار الدالة.

الفترة	قيمة x في الفترة	$f(x)$	$(x, f(x))$
$(-\infty, -1.5)$	-2	$f(-2) = 18$	$(-2, 18)$
$(-1.5, 0)$	-1	$f(-1) = -4$	$(-1, -4)$
$(0, 1)$	0.5	$f(0.5) = 0.5$	$(0.5, 0.5)$
$(1, \infty)$	1.5	$f(1.5) = 2.25$	$(1.5, 2.25)$

d. ارسم مخططًا للبيانات التي وجدتها (الشكل 1.2.3). يوضح لك السلوك الطرفي للدالة أن التمثيل البياني يتغير رأسيًا في نهاية الأمر تجاه اليمين واليسار. تعرف أيضًا أن التمثيل البياني يقطع المحور الأفقي x عند أصفار غير مُكررة -1.5 و 0. ولكن لا يقطع المحور الأفقي x عند الصفر المتكرر 1 لأن تكراره زوجي. ارسم منحنى متصلاً عبر النقاط كما هو موضح في الشكل 1.2.4.



الشكل 1.2.3



الشكل 1.2.4

تمرين موجّه

فيما يتعلق بكل دالة، (a) طبّق اختبار الحد الرئيس، (b) حدد الأصفار واذكر تكرار أي أصفار مُكررة، (c) جد بعض النقاط الإضافية، (d) مثّل الدالة بيانيًا.

6A. $f(x) = -2x(x-4)(3x-1)^3$

6B. $h(x) = -x^3 + 2x^2 + 8x$

2 تمثيل البيانات يمكنك استخدام حاسبة بيانية لتمثيل البيانات التي توضح السلوك الخطي والتربيعي والتكعيبي عن طريق التحقق من عدد نقاط الدوران الذي يوضحه مخطط تشتت البيانات.

مثال 7 من الحياة اليومية تمثيل البيانات باستخدام دوال كثيرة الحدود

المدخرات **ارجع إلى بداية الدرس. يوضح الجدول متوسط المدخرات الشخصية كنسبة من الدخل المتاح في الولايات المتحدة الأمريكية.**

العام	1970	1980	1990	1995	2000	2001	2002	2003	2004	2005
النسبة المئوية للمدخرات	9.4	10.0	7.0	4.6	2.3	1.8	2.4	2.1	2.0	-0.4

المصدر: وزارة التجارة الأمريكية

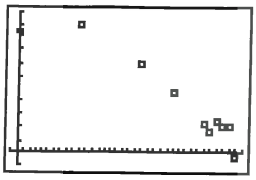
الربط بالحياة اليومية

يحتاج خريج كلية في إحدى الدول أن يتقاعد عند سن 65 إلى ادخار متوسط 10,000 AED كل عام للتقاعد.

المصدر: Monroe Bank

a. صمم مخطط تشتت للبيانات. وحدد نوع الدالة كثيرة الحدود التي يمكن استخدامها لتمثيل البيانات.

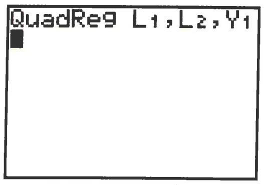
أدخل البيانات باستخدام ميزة القائمة في الحاسبة البيانية. لنفرض أن L1 عدد الأعوام منذ 1970. ثم صمم مخطط تشتت للبيانات. يشبه منحنى مخطط التشتت التمثيل البياني للمعادلة التربيعية، لذا سنستخدم الانحدار التربيعي.



[−1, 36] scl: 1 by [−1, 11] scl: 1

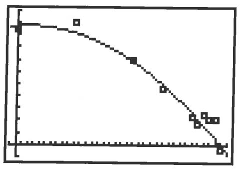
b. اكتب دالة كثيرة الحدود لتمثيل مجموعة البيانات. قرّب كل معامل إلى أقرب ألف واذكر معامل الارتباط.

باستخدام أداة QuadReg على الحاسبة البيانية وتقريب كل معامل إلى أقرب ناتج من ألف $f(x) = -0.009x^2 + 0.033x + 9.744$ بما أن معامل الارتباط r^2 للبيانات يساوي 0.96، وهذا أقرب إلى 1، إذًا النموذج ملائم جدًا.



الشكل 1.2.5

يمكننا رسم الانحدار (غير المقرب) الكامل عبر إرساله إلى قائمة Y=. إذا أدخلت L1 وL2 وY1 بعد QuadReg، كما هو موضح في الشكل 1.2.5، فسيتم إدخال معادلة الانحدار إلى Y1. مثّل هذه الدالة بيانيًا وكذلك باستخدام مخطط التشتت في نفس نافذة العرض. تتناسب الدالة مع البيانات جيدًا.



[−1, 36] scl: 1 by [−1, 11] scl: 1

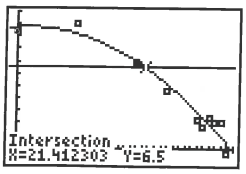
c. استخدم النموذج لتقدير نسبة المدخرات في 1993.

بما أن 1993 بعد 1970 بمقدار 23 عامًا، استخدم ميزة CALC على الحاسبة لإيجاد $f(23)$ بما أن قيمة $f(23)$ تساوي 5.94. إذًا نسبة المدخرات في 1993 كانت تقريبًا 5.94%.

d. استخدم النموذج لتحديد العام التقريبي الذي وصلت فيه نسبة المدخرات إلى 6.5%.

مثّل بيانيًا الخط $y = 6.5$ بالنسبة إلى Y2. ثم استخدم تقاطع 5: على قائمة CALC لإيجاد نقطة تقاطع $y = 6.5$ مع $f(x)$.

بما أن التقاطع يحدث عندما $x \approx 21$، إذًا العام التقريبي الذي وصلت فيه النسبة إلى 6.5% كان تقريبًا $1970 + 21$ أو 1991.



[−1, 36] scl: 1 by [−1, 11] scl: 1

تمرين موجّه

7. السكان تم توضيح متوسط عمر سكان إحدى الدول حسب التوقع في عام 2080.

العام	1900	1930	1960	1990	2020	2050	2080
متوسط العمر	22.9	26.5	29.5	33.0	40.2	42.7	43.9

a. اكتب دالة لوغاريتمية لتمثيل البيانات. بفرض أن L1 يمثل عدد الأعوام منذ 1900.

b. قدّر متوسط عمر السكان في 2005.

c. وفقًا للنموذج الخاص بك، في أي عام وصل متوسط عمر السكان إلى 30؟

تمارين

ارسم التمثيل البياني لكل دالة. (مثال 1)

1. $f(x) = (x + 5)^2$
2. $f(x) = (x - 6)^3$
3. $f(x) = x^4 - 6$
4. $f(x) = x^5 + 7$
5. $f(x) = 16x^4$
6. $f(x) = 32x^5 - 16$
7. $f(x) = (x - 3)^4 + 6$
8. $f(x) = (x + 4)^3 - 3$
9. $f(x) = \frac{1}{3}(x - 9)^5$
10. $f(x) = \frac{1}{8}x^3 + 8$

11. **الماء** إذا كان تصريف خزان بحجم 10 لترات يستغرق دقيقة واحدة، فإن حجم ما يتبقى من الماء في الخزان يمكن أن يكون $v(t) = 10(1 - t)^2$ تقريبًا، بحيث تكون t الزمن بالدقائق، $0 \leq t \leq 1$. مثِّل الدالة بيانيًا. (مثال 1)

وضح السلوك الطرفي للرسم البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيس. (مثال 2)

12. $f(x) = -5x^7 + 6x^4 + 8$
13. $f(x) = 2x^6 + 4x^5 + 9x^2$
14. $g(x) = 5x^4 + 7x^5 - 9$
15. $g(x) = -7x^3 + 8x^4 - 6x^6$
16. $h(x) = 8x^2 + 5 - 4x^3$
17. $h(x) = 4x^2 + 5x^3 - 2x^5$
18. $f(x) = x(x + 1)(x - 3)$
19. $g(x) = x^2(x + 4)(-2x + 1)$
20. $f(x) = -x(x - 4)(x + 5)$
21. $g(x) = x^3(x + 1)(x^2 - 4)$

22. **الأغذية العضوية** يمكن تمثيل عدد الكيلومترات المربعة المستخدمة في إحدى الدول لإنتاج الحاف العضوي من 2000 إلى 2005 كما يلي $a(x) = 43.77x^4 - 498.76x^3 + 1{,}310.2x^2 + 1{,}626.2x + 6{,}821.5$، بحيث $x = 0$ تساوي 2,000. (مثال 2)
    a. مثِّل كل دالة باستخدام الحاسبة البيانية.
    b. وضح السلوك الطرفي للتمثيل البياني للدالة باستخدام الحدود. اشرح باستخدام اختبار الحد الرئيس.

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل على العوامل. (الأمثلة 3-5)

23. $f(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3$
24. $f(x) = x^6 - 8x^5 + 12x^4$
25. $f(x) = x^4 + 4x^2 - 21$
26. $f(x) = x^4 - 4x^3 - 32x^2$
27. $f(x) = x^6 - 6x^3 - 16$
28. $f(x) = 4x^8 + 16x^4 + 12$
29. $f(x) = 9x^6 - 36x^4$
30. $f(x) = 6x^5 - 150x^3$
31. $f(x) = 4x^4 - 4x^3 - 3x^2$
32. $f(x) = 3x^5 + 11x^4 - 20x^3$

فيما يتعلق بكل دالة، (a) طبّق اختبار الحد الرئيس، (b) حدد الأصفار واذكر تكرار أي أصفار مُكررة، (c) جد بعض النقاط الإضافية، (d) مثل الدالة بيانيًا. (مثال 6)

33. $f(x) = x(x + 4)(x - 1)^2$
34. $f(x) = x^2(x - 4)(x + 2)$
35. $f(x) = -x(x + 3)^2(x - 5)$
36. $f(x) = 2x(x + 5)^2(x - 3)$
37. $f(x) = -x(x - 3)(x + 2)^3$
38. $f(x) = -(x + 2)^2(x - 4)^2$
39. $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 36x$
40. $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 6x$
41. $f(x) = x^4 + x^3 - 20x^2$
42. $f(x) = x^5 + 3x^4 - 10x^3$

43. **خزانات المياه** فيما يلي عدد الأقدام دون الحد الأقصى لمستوى المياه في خزان مياه ريتبو بولاية ويسكونسين خلال عشرة أشهر في 2007. (مثال 7)

المستوى	الشهر	المستوى	الشهر
9	يوليو	4	يناير
11	أغسطس	5.5	فبراير
16.5	سبتمبر	10	مارس
11.5	نوفمبر	9	أبريل
8.5	ديسمبر	7.5	مايو

a. اكتب نموذجًا يوضح مستوى المياه كدالة لعدد الأشهر منذ يناير.
b. استخدم النموذج لتقدير مستوى المياه في الخزان في أكتوبر.

استخدم حاسبة بيانية لكتابة دالة كثيرة الحدود لتمثيل كل مجموعة من البيانات. (مثال 7)

44.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	8.75	7.5	6.25	5	3.75	2.5	1.25

45.

x	5	7	8	10	11	12	15	16
$f(x)$	2	5	6	4	-1	-3	5	9

46.

x	-2.53	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5
$f(x)$	23	11	7	6	6	5	3	2	4

47.

x	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
$f(x)$	52	41	32	44	61	88	72	59	66	93

48. **الكهرباء** فيما يلي متوسط أسعار الكهرباء بالتجزئة في إحدى الدول من 1,970 إلى 2,005. فيما يلي الأسعار المتوقعة أيضًا لعامي 2010 و 2020. (مثال 7)

السعر (fil/kWh)	العام	السعر (fil/kWh)	العام
7.5	1995	6.125	1970
6.625	2000	7	1974
6.25	2005	7.25	1980
6.25	2010	9.625	1982
6.375	2020	8	1990

a. اكتب نموذجًا يوضح النسبة كدالة لعدد الأعوام منذ 1970.
b. استخدم النموذج لتوقع متوسط سعر الكهرباء في 2015.
c. وفقًا للنموذج، في أي سنة تكرر السعر 7 fils للمرة الثانية؟

49. **أجهزة الحاسب الآلي** فيما يلي عدد أجهزة الحاسب الآلي المحمولة المبيعة كل ربع عام من 2005 إلى 2007. لنفترض أن الربع الأول من 2005 رقم 1 والربع الرابع من 2007 رقم 12.

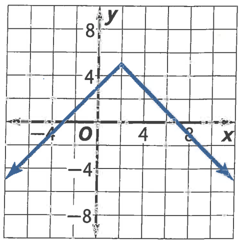
أرباع العام	المبيعات (بالألوف)
1	423
2	462
3	495
4	634
5	587
6	498
7	798
8	986
9	969
10	891
11	1,130
12	1,347

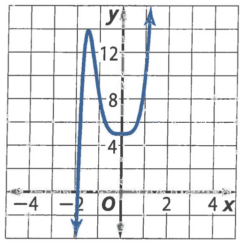
a. توقع السلوك الطرفي للبيانات حيث تقترب x من اللانهاية.

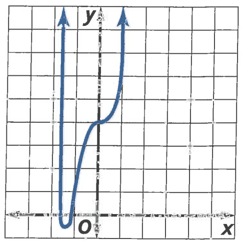
b. استخدم حاسبة بيانية لتمثيل البيانات ورسمها بيانيًا. هل النموذج ملائم تمامًا؟ اشرح استدلالك.

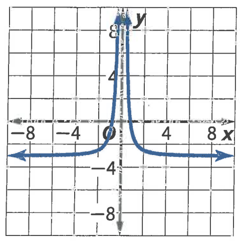
c. اشرح السلوك الطرفي للتمثيل البياني باستخدام الحدود. هل توقعك دقيق؟ اشرح استدلالك.

حدد هل يمكن أن يوضح كل تمثيل بياني دالة كثيرة الحدود. اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة هي لا، فاشرح السبب.

50. 

51. 

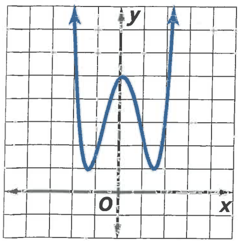
52. 

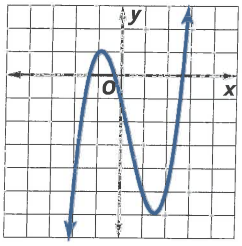
53. 

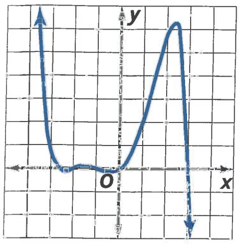
جد دالة كثيرة الحدود من الدرجة n تحتوي على الأصفار الحقيقية التالية فقط. قد تكون أكثر من إجابة.

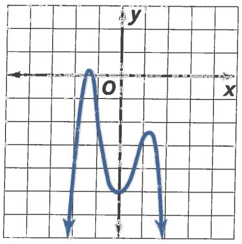
54. $-1;\ n = 3$
55. $3;\ n = 3$
56. $6,\ -3;\ n = 4$
57. $-5,\ 4;\ n = 4$
58. $7;\ n = 4$
59. $0,\ -4;\ n = 5$
60. $2,\ 1,\ 4;\ n = 5$
61. $0,\ 3,\ -2;\ n = 5$
62. $n = 4$؛ لا توجد أصفار حقيقية
63. $n = 6$؛ لا توجد أصفار حقيقية

حدد هل درجة n في الدالة كثيرة الحدود لكل تمثيل بياني زوجية أم فردية وهل معامل الحد الرئيس فيها a_n موجبًا أم سالبًا.

64. 

65. 

66. 

67. 

68. **التصنيع** تصنع شركة عبوات الألمنيوم لمشروبات الطاقة.

a. اكتب معادلة V تمثل إجمالي حجم العبوة.

b. اكتب دالة A من حيث r التي تمثل مساحة سطح حاوية بحجم $15\ cm^3$.

c. استخدم حاسبة تمثيل بياني لتحديد أدنى حد ممكن من مساحة سطح العبوة.

حدد دالة كثيرة الحدود تحتوي على كل مجموعة من الأصفار. قد تكون هناك أكثر من إجابة.

69. $5,\ -3,\ 6$
70. $4,\ -8,\ -2$
71. $3,\ 0,\ 4,\ -1,\ 3$
72. $1,\ 1,\ -4,\ 6,\ 0$
73. $\frac{3}{4},\ -3,\ -4,\ -\frac{2}{3}$
74. $-1,\ -1,\ 5,\ 0,\ \frac{5}{6}$

75. **السكان** زادت نسبة سكان للتعداد السكاني لإحدى الدول الذين يعيشون في المناطق الحضرية.

العام	النسبة المئوية للسكان
1950	56.1
1960	63
1970	68.6
1980	74.8
1990	74.8
2000	79.2

a. اكتب نموذجًا يوضح النسبة كدالة لعدد الأعوام منذ 1950.

b. استخدم النموذج لتوقع النسبة المئوية للسكان الذين سيعيشون في المناطق الحضرية في 2015.

c. استخدم النموذج لتوقع العام الذي سيعيش فيه 85% من السكان في المناطق الحضرية.

صمم دالة بالخصائص التالية. ثم مثّلها بيانيًا.

.76 الدرجة = 5، 3 أصفار حقيقية، $\lim_{x\to\infty} = \infty$

.77 الدرجة = 6، 4 أصفار حقيقية، $\lim_{x\to\infty} = -\infty$

.78 الدرجة = 5، 2 أصفار حقيقية مختلفة، يتكرر واحد منها مرتين، $\lim_{x\to\infty} = \infty$

.79 الدرجة = 6، 3 أصفار حقيقية مختلفة، يتكرر واحد منها مرتين، $\lim_{x\to\infty} = \infty$

.80 **الطقس** فيما يلي درجات الحرارة بالدرجة المئوية من 10 صباحًا إلى 7 مساءً في يوم ما في مدينة بحيث x هو عدد الساعات منذ 10 صباحًا

الزمن	درجة الحرارة	الزمن	درجة الحرارة
0	4.1	5	10
1	5.7	6	7
2	7.2	7	4.6
3	7.3	8	2.3
4	9.4	9	-0.4

a. مثّل البيانات بيانيًا.

b. استخدم الحاسبة البيانية لتمثيل البيانات باستخدام دالة كثيرة الحدود من الدرجة 3.

c. كرر الجزء b باستخدام دالة من الدرجة 4.

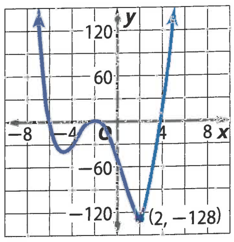
d. أي دالة تمثل نموذجًا أفضل؟ اشرح.

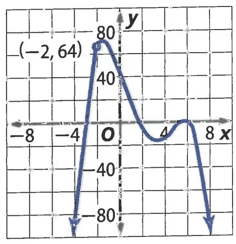
لكل من التمثيلات البيانية التالية:

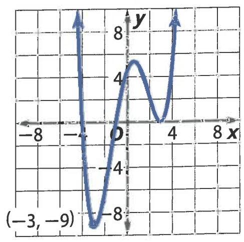
a. **حدد أقل درجة ممكنة وحدد السلوك الطرفي.**

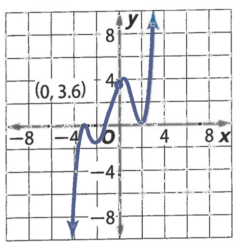
b. **حدد الأصفار وتكرارها. لنفرض جميع الأصفار قيمًا متكاملة.**

c. **صمم دالة تلائم التمثيل البياني ونقطة محددة.**

.81


.82


.83


.84


اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم جد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.

85. $f(x) = 16x^4 + 72x^2 + 80$

86. $f(x) = -12x^3 - 44x^2 - 40x$

87. $f(x) = -24x^4 + 24x^3 - 6x^2$

88. $f(x) = x^3 + 6x^2 - 4x - 24$

.89 **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستتحقق من سلوك توافيق الدوال كثيرة الحدود.

a. **العرض البياني** مثّل $f(x)$ و$g(x)$ و$h(x)$ بيانيًا في كل صف على شاشة الحاسبة البيانية نفسها. فيما يتعلق بكل تمثيل بياني، عدّل النافذة لملاحظة سلوك كل منها على مقياس أكبر وقريب جدًا من الأصل.

$f(x) =$	$g(x) =$	$h(x) =$
$x^2 + x$	x^2	x
$x^3 - x$	x^3	$-x$
$x^3 + x^2$	x^3	x^2

b. **العرض التحليلي** وضح سلوك كل تمثيل بياني للدالة $f(x)$ من حيث $g(x)$ أو $h(x)$ بالقرب من الأصل.

c. **العرض التحليلي** وضح سلوك كل تمثيل بياني للدالة $f(x)$ من حيث $g(x)$ أو $h(x)$ عند اقتراب x من ∞ و $-\infty$.

d. **العرض الكلامي** توقع سلوك الدالة التي هي عبارة عن توافيق بين دالتين a و b مثل $f(x) = a + b$ بحيث تكون a حد الدرجة الأعلى.

مسائل مهارات التفكير العُليا استخدام مهارات التفكير العُليا

.90 **تحليل الخطأ** نهلة ووفاء يرسمان نموذجًا للبيانات الموضحة. تعتقد نهلة أن النموذج ينبغي أن يكون $f(x) = 5.754x^3 + 2.912x^2 - 7.516x + 0.349$ تعتقد وفاء أنه ينبغي أن يكون $f(x) = 3.697x^2 + 11.734x - 2.476$ هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
−2	−19	0.5	−2
−1	5	1	1.5
0	0.4	2	43

.91 **الاستنتاج** هل يمكن أن تحتوي دالة كثيرة الحدود على كل من القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة؟ اشرح استنتاجك.

.92 **الاستنتاج** وضح لماذا الدالة الثابتة $f(x) = c,\ c \neq 0$ تحتوي على درجة 0. ولكن الدالة الصفرية $f(x) = 0$ ليس لها درجة.

.93 **تحدٍ** استخدم التحليل إلى العوامل بالتجميع لتحديد أصفار $f(x) = x^3 + 5x^2 - x^2 - 5x - 12x - 60$ اشرح كل خطوة.

.94 **الاستنتاج** كيف من الممكن تمثيل أكثر من دالة بنفس الدرجة والسلوك الطرفي والأصفار الحقيقية المختلفة؟ اضرب مثالًا لشرح استنتاجك.

.95 **الاستنتاج** ما أدنى درجة لدالة كثيرة الحدود تحتوي على القيمة العظمى المطلقة والقيمة العظمى النسبية والقيمة الصغرى النسبية؟ اشرح استنتاجك.

.96 **الكتابة في الرياضيات** وضح كيف تحدد أفضل دالة كثيرة حدود يمكن استخدامها عند رسم نموذج للبيانات.

مراجعة شاملة

حُلّ كل من المعادلات التالية.

97. $\sqrt{z+3} = 7$

98. $d + \sqrt{d^2 - 8} = 4$

99. $\sqrt{x-8} = \sqrt{13+x}$

100. **إعادة رسم نموذج** يستبدل عامل سجادة في غرفة المعيشة مقاس 12 ft في 15 ft .
تبلغ تكلفة السجادة الجديدة AED 13.99 لكل متر مربع. تحول الصيغة $f(x) = 9x$ الياردات المربعة إلى قدم مربع.

a. جد معكوس $f^{-1}(x)$ ما أهمية $f^{-1}(x)$ ؟

b. كم ستبلغ تكلفة السجادة الجديدة؟

توجد $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ و $g(x) = 6x + 4$، جد كل دالة.

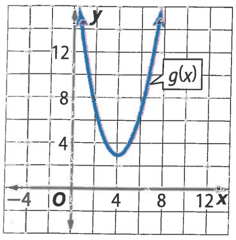
101. $(f + g)(x)$

102. $[f \circ g](x)$

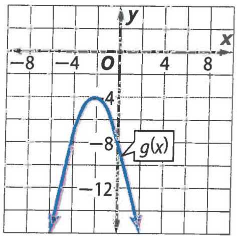
103. $[g \circ f](x)$

وضح كيف ترتبط الدالتان $f(x) = x^2$ و $g(x)$ ببعضهما. ثم اكتب معادلة لـ $g(x)$.

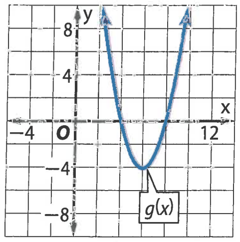
104.



105.



106.



107. **الأعمال** تنتج شركة منتجًا جديدًا بتكلفة AED 25 لكل منتج. استأجرت محلل تسويق للمساعدة على تحديد سعر البيع.
بعد جمع البيانات المرتبطة بسعر البيع s لطلب المستهلكين السنوي وتحليلها d، يقدر المحلل طلب المنتج باستخدام $d = -200s + 15{,}000$.

a. إذا كان الربح السنوي هو الفرق بين إجمالي الإيرادات وتكاليف الإنتاج. فحدد سعر البيع $s \geq 25$ الذي سيرفع أرباح الشركة السنوية P.

b. ما مخاطر تحديد سعر البيع باستخدام هذه الطريقة؟

فيما يلي نتائج أحد الاختبارات في صفوف الفيزياء. (الدرس 0-8)

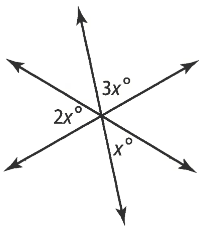
82, 77, 84, 98, 93, 71, 76, 64, 89, 95, 78, 89, 65, 88, 54,
96, 87, 92, 80, 85, 93, 89, 55, 62, 79, 90, 86, 75, 99, 62

108. ارسم مخطط صندوق ذا عارضين.

109. ما الانحراف المعياري لدرجات الامتحان؟

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

110. **SAT/ACT** يوضح الشكل تقاطع ثلاثة مستقيمات. الشكل ليس مرسومًا بمقياس رسم.



$x =$

A 16
B 20
C 30
D 60
E 90

111. على المجال $2 < x \leq 3$، أي من الدوال التالية تحتوي على أكبر قيمة لـ y؟

F $y = \dfrac{x+3}{x-2}$

G $y = \dfrac{x-5}{x+1}$

H $y = x^2 - 3$

J $y = 2x$

112. **الاختيار من متعدد** أي من المعادلات التالية يمثل نتيجة تحريك الدالة الأم $y = x^3$ لأعلى 4 وحدات ولليمين 5 وحدات؟

A $y + 4 = (x + 5)^3$

B $y - 4 = (x + 5)^3$

C $y + 4 = (x - 5)^3$

D $y - 4 = (x - 5)^3$

113. **المراجعة** أي مما يلي يوضح الأعداد في مجال $h(x) = \dfrac{\sqrt{2x-3}}{x-5}$؟

F $x \neq 5$

G $x \geq \frac{3}{2}$

H $x \geq \frac{3}{2}, x \neq 5$

J $x \neq \frac{3}{2}$

التوسع 1-2
السلوك الخفي للتمثيلات البيانية

الهدف:

- استخدام الحاسبة البيانية لاستكشاف السلوك الخفي للتمثيلات البيانية.

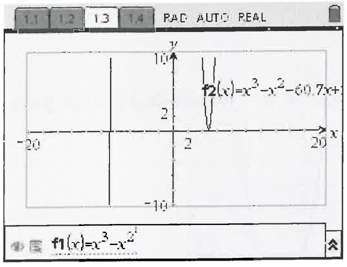
يعد استخدام تقنيات التمثيل البياني مثل الحواسب والآلات الحاسبة طريقة فعالة للقدرة على تمثيل دوال بيانيًا وإيجاد قيمتها. ومع ذلك، من المهم أن نضع في الاعتبار حدود تقنية التمثيل البياني عند تفسير التمثيلات البيانية.

النشاط السلوك الخفي للتمثيلات البيانية

حدد أصفار $f(x) = x^3 - x^2 - 60.7x + 204$ بيانيًا.

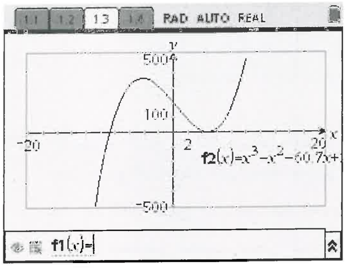
الخطوة 1 افتح صفحة جديدة للتمثيلات البيانية والهندسة، ومثِّل الدالة بيانيًا.

يبدو أن للدالة صفرين، أحدهما بين -10 و -8 والآخر بين 4 و 6.



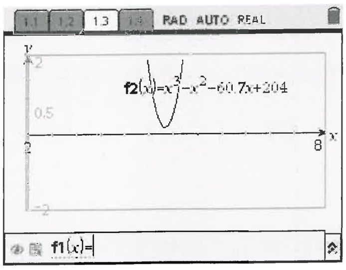
الخطوة 2 من قائمة Window/Zoom (نافذة/تكبير/تصغير)، اختر Window Settings (إعدادات النافذة). غيِّر أبعاد النافذة على النحو المبين.

يبدو سلوك التمثيل البياني أوضح كثيرًا في النافذة الأكبر. لا يزال يبدو أن الدالة لها صفرين، أحدهما بين -8 و -10 والآخر بين 4 و 6.



الخطوة 3 من قائمة Window/Zoom (نافذة/تكبير/تصغير)، اختر Window Settings (إعدادات النافذة). غيِّر النافذة إلى $[2, 8]$ على $[-2, 2]$.

من خلال تكبير التمثيل البياني في المساحة التي يوجد فيها الصفر، يتضح أنه لا يوجد صفر بين القيمتين 4 و 6. لذا، يحتوي التمثيل البياني على صفر واحد.



نصيحة دراسية

إعدادات النافذة (Window Settings) إعدادات النافذة يمكنك اختيار قيم للنافذة حسب معاينة تمثيلك البياني أو يمكنك استخدام إحدى أدوات التكبير والتصغير مثل مربع التكبير/التصغير الذي يسمح لك بتكبير مساحة معينة من التمثيل البياني.

حلل النتائج

1. بالإضافة إلى الحدود التي تم اكتشافها في الخطوات السابقة، كيف يمكن أن تقيد الحاسبة البيانية قدرتك على تفسير التمثيلات البيانية؟

2. ما الطرق الأخرى لتجنب هذه الحدود؟

تمارين

حدد أصفار كل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا. لاحظ السلوك الخفي.

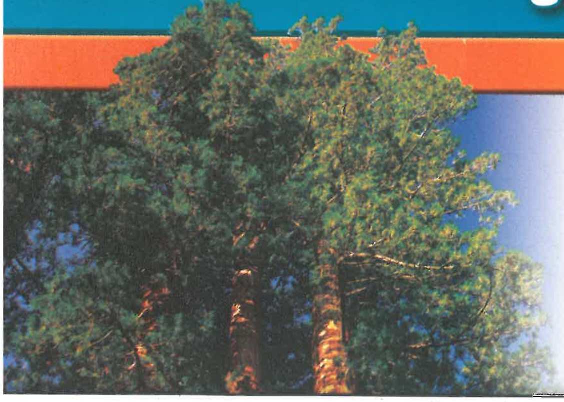
3. $x^3 + 6.5x^2 - 46.5x + 60$

4. $x^4 - 3x^3 + 12x^2 + 6x - 7$

5. $x^5 + 7x^3 + 4x^2 - x + 10.9$

6. $x^4 - 19x^3 + 107.2x^2 - 162x + 73$

الدرس 1-3 نظريتا الباقي والعامل



:: السابق

- لقد حللت التعابير التربيعية إلى العوامل لحل المعادلات.

:: الحالي

1. قسمة الدالة كثيرة الحدود باستخدام القسمة المطولة والقسمة التركيبية.
2. استخدام نظريّتي الباقي والعامل.

:: لماذا؟

- تُعد أشجار خشب السكويه بحديقة ريدوود الوطنية بولاية كاليفورنيا أقدم الأنواع الحية في العالم. ويمكن لهذه الأشجار أن تنمو حتى تصل إلى 107 أمتار ويمكن أن تعيش لما يصل إلى 2,000 عام. يمكن استخدام القسمة التركيبية لتحديد ارتفاع إحدى الأشجار خلال عام معين.

مفردات جديدة

قسمة تركيبية
synthetic division

دالة كثيرة حدود المنخفضة
depressed olynomial

تعويض تركيبي
synthetic ubstitution

1 قسمة الدوال كثيرة الحدود

فكّر في الدالة كثيرة الحدود $f(x) = 6x^3 - 25x^2 + 18x + 9$ وإذا علمت أن f تحتوي على صفر عند $x = 3$، فأنت تعلم أيضًا أن $(x - 3)$ هي عامل من عوامل $f(x)$ حيث $f(x)$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة، تعلم أن هناك دوالاً كثيرة حدود من الدرجة الثانية $q(x)$ مثل هذا

$$f(x) = (x - 3) \cdot q(x)$$

معنى هذا أن $q(x)$ يمكن إيجادها عن طريق قسمة $6x^3 - 25x^2 + 18x + 9$ by $(x - 3)$ حيث إن

$$q(x) = \frac{f(x)}{x - 3},\ \text{إذا كان}\ x \neq 3$$

لقسمة الدوال كثيرة الحدود، يمكننا استخدام خوارزمية مشابهة لتلك الموجودة بالقسمة المطولة ذات الأعداد الصحيحة.

مثال 1 استخدام القسمة المطولة لتحليل دالة كثيرة الحدود إلى العوامل

حلِّل $6x^3 - 25x^2 + 18x + 9$ بالكامل إلى العوامل باستخدام القسمة المطولة إذا كان $(x - 3)$ عاملاً.

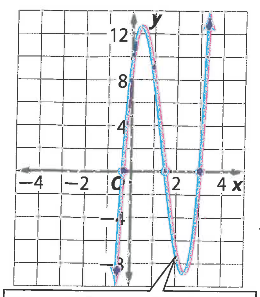
$$\begin{array}{r|l}
 & 6x^2 - 7x - 3 \\
x - 3 & 6x^3 - 25x^2 + 18x + 9
\end{array}$$

$(-)\ \underline{6x^3 - 18x^2}$	اضرب المقسوم عليه في $6x^2$ حيث إن $\frac{6x^3}{x} = 6x^2$
$-7x^2 + 18x$	اطرح وقم بإنزال الحد التالي.
$(-)\ \underline{-7x^2 + 21x}$	اضرب المقسوم عليه في $-7x$ حيث إن $\frac{-7x^2}{x} = -7x$
$-3x + 9$	اطرح وقم بإنزال الحد التالي.
$(-)\ \underline{-3x + 9}$	اضرب المقسوم عليه في -3 حيث إن $\frac{-3x}{x} = -3$
0	اطرح. لاحظ أن الباقي هو 0

من عملية القسمة هذه، يمكنك كتابة $6x^3 - 25x^2 + 18x + 9 = (x - 3)(6x^2 - 7x - 3)$

بتحليل التعابير التربيعية إلى العوامل ينتج $6x^3 - 25x^2 + 18x + 9 = (x - 3)(2x - 3)(3x + 1)$

وبالتالي أصفار الدالة كثيرة الحدود $f(x) = 6x^3 - 25x^2 + 18x + 9$ هي 3 و $\frac{3}{2}$ و $-\frac{1}{3}$ كما أن نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x الموضحة بالتمثيل البياني (x) تؤيد هذا الاستنتاج.



$f(x) = 6x^3 - 25x^2 + 18x + 9$

تمرين موجه

حلِّل كل دالة كثيرة الحدود بالكامل باستخدام العامل المُعطى والقسمة المطوَّلة.

1A. $x^3 + 7x^2 + 4x - 12;\ x + 6$

1B. $6x^3 - 2x^2 - 16x - 8;\ 2x - 4$

يمكن أن ينتج عن القسمة المطوَّلة باقي صفري، كما في المثال 1 أو باقي غير صفري، كما هو موضح في المثال أدناه. لاحظ أنه كما هو الحال مع القسمة المطوَّلة ذات الأعداد الصحيحة، يتم التعبير عن قسمة كثيرات الحدود باستخدام الناتج والباقي والمقسوم عليه.

ناتج القسمة ← $x + 3$

المقسوم عليه ← $x + 2\overline{)x^2 + 5x - 4}$ ← المقسوم

$(-)\ \underline{x^2 + 2x}$

$3x - 4$

$(-)\ \underline{3x + 6}$

الباقي ← -10

المقسوم ← المقسوم عليه ← $\dfrac{x^2 + 5x - 4}{x + 2} = x + 3 + \dfrac{-10}{x + 2},\ x \neq -2$

ناتج القسمة، الباقي، المقسوم عليه، القيمة المستبعدة

> ## نصيحة دراسية
> **الصحيح مقابل غير الصحيح** يكون التعبير النسبي غير صحيح إذا كانت درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام. لذا ففي خوارزميات القسمة، $\dfrac{f(x)}{d(x)}$ يُعد تعبيرًا نسبيًا غير صحيح، بينما $\dfrac{r(x)}{d(x)}$ يُعد تعبيرًا نسبيًا صحيحًا.

تذكّر أنه يمكن التعبير عن المقسوم بحدود المقسوم عليه والناتج والباقي.

المقسوم	=	الباقي	+	الناتج	×	المقسوم عليه
$x^2 + 5x - 4$	=	(-10)	+	$(x + 3)$	×	$(x + 2)$

ويؤدي بنا هذا إلى تعريف قسمة كثيرات الحدود.

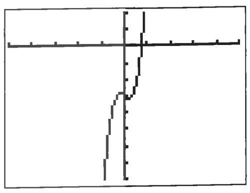
المفهوم الأساسي قسمة كثيرات الحدود

لنفترض أن $f(x)$ و$d(x)$ هما دالتان كثيرتا حدود حيث تكون درجة $d(x)$ أقل من أو تساوي درجة $f(x)$ و$d(x) \neq 0$. وهكذا يكون هناك حدود كثيرة ومتعددة $q(x)$ و $r(x)$ بحيث تكون

$$\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)} = f(x) = d(x) \times q(x) + r(x).$$

حيث $r(x) = 0$ أو درجة $r(x)$ أصغر من درجة $d(x)$. إذا كان $r(x) = 0$. إذًا $d(x)$ يقسم $f(x)$ بالتساوي.

قبل القسمة، تأكد من كتابة كل دالة كثيرة الحدود بالصيغة القياسية ومن إدراج العناصر النائبة ذات المعاملات الصفرية متى لزم الأمر لأسس المتغير الناقصة.

> ## نصيحة دراسية
> **التحقق من التمثيل البياني** كما يمكنك التحقق من النتيجة الموضحة بالمثال 2 باستخدام الحاسبة البيانية. التمثيلات البيانية $Y_1 = 9x^3 - x - 3$ و $Y_2 = (3x^2 - 2x + 1)(3x + 2) - 5$ متطابقة.
>
> 
>
> $[-5, 5]$ scl: 1 by $[-8, 2]$ scl: 1

مثال 2 القسمة المطوَّلة مع الباقي غير الصفري

اقسم $9x^3 - x - 3$ على $3x + 2$

أولاً أعد كتابة $9x^3 - x - 3$ بالشكل $9x^2 + 0x^2 - x - 3$ ثم استخدم عملية القسمة.

$3x^2 - 2x + 1$

$3x + 2\overline{)9x^3 + 0x^2 - x - 3}$

$(-)\ \underline{9x^3 + 6x^2}$

$-6x^2 - x$

$(-)\ \underline{-6x^2 - 4x}$

$3x - 3$

$(-)\ \underline{3x + 2}$

-5

يمكنك كتابة هذه النتيجة بالشكل

$$\frac{9x^3 - x - 3}{3x + 2} = 3x^2 - 2x + 1 + \frac{-5}{3x + 2},\ x \neq -\frac{2}{3}$$

$$= 3x^2 - 2x + 1 - \frac{5}{3x + 2},\ x \neq -\frac{2}{3}$$

التحقق من الحل اضرب للتحقق من هذه النتيجة.

$(3x + 2)(3x^2 - 2x + 1) + (-5) \stackrel{?}{=} 9x^3 - x - 3$

$9x^3 - 6x^2 + 3x + 6x^2 - 4x + 2 - 5 \stackrel{?}{=}$

$9x^3 - x - 3$

$9x^3 - x - 3 = \quad 9x^3 - x - 3$ ✓

تمرين موجّه

اقسم باستخدام القسمة المطولة.

2A. $(8x^3 - 18x^2 + 21x - 20) \div (2x - 3)$

2B. $(-3x^3 + x^2 + 4x - 66) \div (x - 5)$

عند قسمة الدوال كثيرة الحدود، قد يكون للمقسوم عليه درجة أعلى من 1. وقد يؤدي هذا أحيانًا إلى ناتج به حدود ناقصة.

المثال 3 القسمة على دالة كثيرة الحدود من الدرجة 2 أو أعلى

اقسم $2x^4 - 4x^3 + 13x^2 + 3x - 11$ على $x^2 - 2x + 7$

$$\begin{array}{rl} & 2x^2 - 1 \\ x^2 - 2x + 7 \,\big)\!\! & \overline{2x^4 - 4x^3 + 13x^2 + 3x - 11} \\ (-) & \underline{2x^4 - 4x^3 + 14x^2} \\ & -x^2 + 3x - 11 \\ (-) & \underline{-x^2 + 2x - 7} \\ & x - 4 \end{array}$$

يمكنك كتابة هذه النتيجة بالشكل $\dfrac{2x^4 - 4x^3 + 13x^2 + 3x - 11}{x^2 - 2x + 7} = 2x^2 - 1 + \dfrac{x - 4}{x^2 - 2x + 7}$

تمرين موجّه

اقسم باستخدام القسمة المطولة.

3A. $(2x^3 + 5x^2 - 7x + 6) \div (x^2 + 3x - 4)$

3B. $(6x^5 - x^4 + 12x^2 + 15x) \div (3x^3 - 2x^2 + x)$

نصيحة دراسية

القسمة على الصفر في المثال 3، لا يتم تحديد هذه القسمة لأن $x^2 - 2x + 7 = 0$. من هذا الدرس فصاعدًا، يمكنك افتراض أنه لا يمكن لـ x أخذ القيم التي تكون قسمتها المقام إلى غير معرّفة.

القسمة التركيبية طريقة مختصرة لقسمة كثيرة الحدود على عامل خطي بالصيغة $x - c$

ضع في اعتبارك القسمة المطوّلة من المثال 1.

القسمة المطوّلة	المتغيرات المحذوفة	الطي العمودي	القسمة التركيبية
لاحظ المعاملات التي تم تمييزها بالنص الملوّن.	احذف x وأسس x.	قم بطي القسمة المطوّلة عموديًا مع حذف التكرارات.	قم بتغيير علامات المقسوم عليه والأعداد في السطر الثاني.
$\begin{array}{rl} & 6x^2 - 7x - 3 \\ x - 3\,\big)\!\! & \overline{6x^3 - 25x^2 + 18x + 9} \\ (-) & \underline{6x^3 - 18x^2} \\ & -7x^2 + 18x \\ (-) & \underline{-7x^2 + 21x} \\ & -3x + 9 \\ (-) & \underline{-3x + 9} \\ & 0 \end{array}$	$\begin{array}{rl} & 6 \quad -7 \quad -3 \\ -3\,\big)\!\! & \overline{6 \quad -25 \quad +18 \quad +9} \\ -) & \underline{6 \quad -18} \\ & -7 \quad +18 \\ (-) & \underline{-7 \quad +21} \\ & -3 \quad +9 \\ (-) & \underline{-3 \quad +9} \\ & 0 \end{array}$	$\begin{array}{r\|rrrr} -3 & 6 & -25 & 18 & 9 \\ & & -18 & 21 & 9 \\ \hline & 6 & -7 & -3 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{r\|rrrr} 3 & 6 & -25 & 18 & 9 \\ & & 18 & -21 & -9 \\ \hline & 6 & -7 & -3 & 0 \end{array}$
			العدد الذي يمثل الآن المقسوم عليه هو الصفر المرتبط بذات الحدين $x - c$ كما أننا الآن نجمع بدلاً من الطرح عن طريق تغيير الإشارات بالسطر الثاني.

يمكننا استخدام القسمة التركيبية الموضحة في المثال أعلاه لوضع المستقيمات العريضة لإجراء القسمة التركيبية لأي دالة كثيرة الحدود عن طريق دالة ذات حدين.

المفهوم الأساسي خوارزمية القسمة التركيبية

لقسمة كثيرة الحدود على عامل $x - c$، استكمل كل خطوة.

الخطوة 1 اكتب معاملات المقسوم بالصيغة القياسية. اكتب الصفر المرتبط بالمعادلة c للمقسوم عليه $x - c$ في المربع. قم بإنزال المعامل الأول.

الخطوة 2 اضرب المعامل الأول في c. اكتب الناتج تحت المعامل الثاني.

الخطوة 3 اجمع الناتج والمعامل الثاني.

الخطوة 4 كرّر الخطوتين 2 و 3 حتى تصل إلى ناتج الجمع في العمود الأخير. الأرقام الموجودة في الصف الأسفل هي معامل الناتج. القوة للحد الأول أصغر بمقدار واحد عن المقسوم. العدد النهائي هو الباقي.

مثال

اقسم $6x^3 - 25x^2 + 18x + 9$ على $x - 3$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 6 & -25 & 18 & 9 \\ & & 18 & -21 & -9 \\ \hline & \underbrace{6 \quad -7 \quad -3}_{\text{معاملات الناتج}} & & & \underset{\text{الباقي}}{0} \end{array}$$

↖ = اضرب في c واكتب الناتج.

↓ = اجمع الحدود.

كما هو الحال مع قسمة الدوال كثيرة الحدود عن طريق القسمة المطوَّلة، تذكر استخدام الأصفار كقيمة رمزية لأي حدود ناقصة بالمقسوم. عند قسمة كثيرة الحدود على أحد عواملها ذات الحدين $x - c$، فإنه يطلق على ناتج القسمة **كثيرة الحدود المنخفضة**.

مثال 4 القسمة التركيبية

اقسم باستخدام القسمة التركيبية.

a. $(2x^4 - 5x^2 + 5x - 2) \div (x + 2)$

حيث إن $x + 2 = x - (-2),\ c = -2$. قم بإجراء القسمة التركيبية كالتالي، باستخدام القيمة الرمزية للصفر للحد المفقود x^3 في المقسوم. ثم اتبع إجراء القسمة التركيبية.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 2 & 0 & -5 & 5 & -2 \\ & & & & & \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r|rrrrr} -2 & 2 & 0 & -5 & 5 & -2 \\ & & -4 & 8 & -6 & 2 \\ \hline & 2 & -4 & 3 & -1 & 0 \end{array}$$

↓ = اجمع الحدود.

↗ = اضرب في c واكتب الناتج.

معاملات الدالة كثيرة الحدود المنخفضة

الباقي

يتضمن ناتج القسمة درجة واحدة أصغر من تلك التي يحتوي عليها المقسوم، لذا

$$\frac{2x^4 - 5x^2 + 5x - 2}{x + 2} = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$$

تحقق من هذه النتيجة.

b. $(10x^3 - 13x^2 + 5x - 14) \div (2x - 3)$

أعد كتابة تعبير القسمة بحيث يكون المقسوم عليه على هذه الصورة $x - c$.

$$\frac{(10x^3 - 13x^2 + 5x - 14) \div 2}{(2x - 3) \div 2} = \frac{10x^3 - 13x^2 + 5x - 14}{2x - 3} = \frac{5x^3 - \frac{13}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 7}{x - \frac{3}{2}}$$

إذًا، $c = \frac{3}{2}$. قم بإجراء القسمة التركيبية.

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{3}{2} & 5 & -\frac{13}{2} & \frac{5}{2} & -7 \\ & & & & \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r|rrrr} \frac{3}{2} & 5 & -\frac{13}{2} & \frac{5}{2} & -7 \\ & & \frac{15}{2} & \frac{3}{2} & 6 \\ \hline & 5 & 1 & 4 & -1 \end{array}$$

إذًا، $\frac{10x^3 - 13x^2 + 5x - 14}{2x - 3} = 5x^2 + x + 4 - \frac{1}{x - \frac{3}{2}} = 5x^2 + x + 4 - \frac{2}{2x - 3}$

تحقق من هذه النتيجة.

تمرين موجّه

4A. $(4x^3 + 3x^2 - x + 8) \div (x - 3)$

4B. $(6x^4 + 11x^3 - 15x^2 - 12x + 7) \div (3x + 1)$

نصيحة تكنولوجية

استخدام التمثيلات البيانية للتحقق من عملية القسمة، يمكنك تمثيل تعبير قسمة الدالة كثيرة الحدود والدالة كثيرة الحدود المنخفضة ذات الباقي بيانيًا. يجب أن تتطابق التمثيلات البيانية.

2 نظريتا الباقي والعامل

عندما يكون $d(x) = (x - c)$ هو المقسوم عليه من الدرجة 1 ويكون الباقي هو العدد الحقيقي r. بالتالي، يتم تبسيط خوارزمية القسمة إلى

$$f(x) = (x - c) \times q(x) + r$$

عند إيجاد قيمة $f(x)$ حيث $x = c$، نجد أن

$$r = f(c) = (c - c) \times q(c) + r = 0 \times q(c) + r$$

إذًا $f(c) = r$، الذي يمثل الباقي. وهذا يقودنا إلى النظرية التالية.

المفهوم الأساسي نظرية الباقي

إذا كانت الدالة كثيرة الحدود $f(x)$ مقسومة على $x - c$، فإن الباقي هو $r = f(c)$

تشير نظرية الباقي إلى أنه لإيجاد قيمة الدالة كثيرة الحدود $f(x)$ حيث $x = c$. يمكنك قسمة $f(x)$ على $x - c$ باستخدام القسمة التركيبية. سيكون الباقي $f(c)$ باستخدام القسمة التركيبية لإيجاد قيمة دالة تُسمى **التعويض التركيبي**.

مثال 5 من الحياة اليومية استخدام نظرية الباقي

كرة القدم يمكن تمثيل عدد التذاكر المبيعة أثناء موسم كرة القدم باستخدام $t(x) = x^3 - 12x^2 + 48x + 74$ حيث إن x هو عدد المباريات التي تم لعبها. استخدم نظرية الباقي لإيجاد عدد التذاكر المبيعة خلال المباراة الثانية عشرة بموسم كرة القدم.

لإيجاد عدد التذاكر المبيعة خلال المباراة الثانية عشرة، استخدم التعويض التركيبي لتقييم $t(x)$ حيث $x = 12$

12	1	−12	48	74
		12	0	576
	1	0	48	650

الباقي هو 650. حيث إن $t(12) = 650$ وبالتالي، تم بيع 650 تذكرة خلال المباراة الثانية عشرة بالموسم.

تحقق من الحل يمكنك التحقق من صحة إجابتك باستخدام التعويض المباشر.

$t(x) = x^3 - 12x^2 + 48x + 74$ الدالة الأصلية

$t(12) = (12)^3 - 12(12)^2 + 48(12) + 74 = 650$ ✓ استبدل 12 بـ x وبسّط.

تمرين موجّه

5. **كرة القدم** استخدم نظرية الباقي لتحديد عدد التذاكر المبيعة خلال المباراة الثالثة عشر بموسم كرة القدم بالموسم.

الربط بالحياة اليومية

إن قواعد كرة القدم بالمدرسة الثانوية مشابهة لقواعد كرة القدم بالكليات والمحترفين. يتمثل أكبر اختلافين في أن مدة الأشواط تكون 12 دقيقة في مقابل 15 دقيقة وأن نقطة الانطلاق تبدأ من خط الـ 40 ياردة بدلاً من الـ 30 ياردة.

المصدر: الاتحاد الوطني لجمعيات المدارس الثانوية بالولايات المتحدة الأمريكية

إذا كنت تستخدم نظرية الباقي لإيجاد قيمة $f(x)$ عند $x = c$ والنتيجة هي $f(c) = 0$. إذًا فأنت تعلم أن c هو صفر الدالة و $(x - c)$ هو العامل. يقودنا هذا إلى نظرية مفيدة تقدم اختبارًا لتحديد ما إذا كان $(x - c)$ هو عامل $f(x)$

المفهوم الأساسي نظرية العامل

يكون للدالة كثيرة الحدود $f(x)$ العامل $(x - c)$ فقط في حالة $f(c) = 0$

يمكنك استخدام القسمة التركيبية لإجراء هذا الاختبار.

مثال 6 استخدام نظرية العامل

استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين المقدمة عوامل لـ $f(x)$ واستخدم التعابير ذات الحدين التي تُعد عوامل لكتابة الصيغة التي تم تحليلها إلى العوامل لـ $f(x)$

a. $f(x) = 4x^4 + 21x^3 + 25x^2 - 5x + 3;\ (x - 1),\ (x + 3)$

استخدم القسمة التركيبية لاختبار كل عامل، $(x - 1)$ و $(x + 3)$.

−3	4	21	25	−5	3
		−12	−27	6	−3
	4	9	−2	1	0

1	4	21	25	−5	3
		4	25	50	45
	4	25	50	45	48

بما أن الباقي عند $f(x)$ مقسومًا على $(x + 3)$ يكون 0. إذًا $f(-3) = 0$ و $(x + 3)$ يُعد عاملاً.

لأن الباقي عند $f(x)$ مقسومًا على $(x - 1)$ يكون 48 $f(1) = 48$ و $(x - 1)$ لا يُعد عاملاً.

نظرًا لأن $(x + 3)$ يُعد عاملاً لـ $f(x)$، يمكننا استخدام ناتج القسمة $f(x) \div (x + 3)$ لكتابة صيغة المعادلة بعد تحليلها إلى العوامل $f(x)$

$f(x) = (x + 3)(4x^3 + 9x^2 - 2x + 1)$

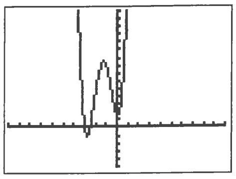
نصيحة تكنولوجية

الأصفار يمكنك التأكد من الأصفار بالتمثيل البياني لدالة ما باستخدام خاصية الصفر من قائمة CALC في الحاسبة البيانية.

التحقق من الحل إذا كان $(x + 3)$ عاملاً في المعادلة

$$f(x) = 4x^4 + 21x^3 + 25x^2 - 5x + 3$$

إذًا فإن -3 هي صفر الدالة و$(-3, 0)$ هي نقطة التقاطع مع المحور الأفقي للتمثيل البياني. مثّل $f(x)$ بيانيًا باستخدام حاسبة بيانية واثبت أن $(-3, 0)$ نقطة على التمثيل البياني. ✓



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 30] scl: 2

b. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 41x - 20;\ (x + 4),\ (x - 5)$

استخدم القسمة التركيبية لاختبار العامل $(x + 4)$.

-4	2	-1	-41	-20
		-8	36	20
	2	-9	-5	0

بما أن الباقي عندما يكون $f(x)$ مقسومًا على $(x + 4)$ هو 0، فإن $f(-4) = 0$ ويكون $(x + 4)$ عاملاً لـ $f(x)$.

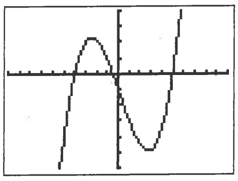
بعد ذلك، اختبر العامل الثاني، $(x - 5)$ باستخدام الدالة كثيرة الحدود المنخفضة $2x^2 - 9x - 5$

5	2	-9	-5
		10	5
	2	1	0

بما أن الباقي عندما يكون $f(x)$ مقسومًا على $(x - 5)$ هو 0، فإن $f(5) = 0$ و $(x - 5)$ هو عامل $f(x)$. بما أن $(x + 4)$ و$(x - 5)$ عاملان لـ $f(x)$. يمكننا استخدام ناتج القسمة النهائي لكتابة صيغة المعادلة $f(x)$ بعد تحليلها إلى العوامل

$$f(x) = (x + 4)(x - 5)(2x + 1)$$

تحقق من الحل يؤكد التمثيل البياني $f(x) = 2x^3 - x^2 - 41x - 20$ أن $x = -4$ و $x = 5$ و $x = -\frac{1}{2}$ أصفار للدالة. ✓



[−10, 10] scl: 1 by [−120, 80] scl: 20

تمرين موجّه

استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين الموضحة تعد عوامل لـ $f(x)$ واستخدم التعابير ذات الحدين لكتابة صيغة $f(x)$ بعد تحليلها إلى العوامل

6A. $f(x) = 3x^3 - x^2 - 22x + 24;\ (x - 2),\ (x + 5)$

6B. $f(x) = 4x^3 - 34x^2 + 54x + 36;\ (x - 6),\ (x - 3)$

يمكنك اعتبار القسمة التركيبية أداة مفيدة لتحليل أصفار الدوال كثيرة الحدود وإيجادها.

ملخص المفاهيم القسمة التركيبية والبواقي

إذا كان r هو الباقي بعد عملية قسمة تركيبية لـ $f(x)$ من $(x - c)$، فإن العبارات التالية تكون صحيحة.

- r هي قيمة $f(c)$
- إذا كان $r = 0$، فإن $(x - c)$ هو عامل $f(x)$
- إذا كان $r = 0$، فإن c هو تقاطع المحور الأفقي x للتمثيل البياني f
- إذا كان $r = 0$، فإن $x = c$ هو حل $f(x) = 0$

تمارين

حلِّل كل دالة كثيرة الحدود بالكامل باستخدام العامل المقدم والقسمة المطوَّلة. (المثال 1)

1. $x^3 + 2x^2 - 23x - 60;\ x + 4$
2. $x^3 + 2x^2 - 21x + 18;\ x - 3$
3. $x^3 + 3x^2 - 18x - 40;\ x - 4$
4. $4x^3 + 20x^2 - 8x - 96;\ x + 3$
5. $-3x^3 + 15x^2 + 108x - 540;\ x - 6$
6. $6x^3 - 7x^2 - 29x - 12;\ 3x + 4$
7. $x^4 + 12x^3 + 38x^2 + 12x - 63;\ x^2 + 6x + 9$
8. $x^4 - 3x^3 - 36x^2 + 68x + 240;\ x^2 - 4x - 12$

اقسم باستخدام القسمة المطولة. (المثالان 2 و 3)

9. $(5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - x + 12) \div (x - 4)$
10. $(x^6 - 2x^5 + x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 24) \div (x + 2)$
11. $(4x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 12) \div (2x + 4)$
12. $(2x^4 - 7x^3 - 38x^2 + 103x + 60) \div (x - 3)$
13. $(6x^6 - 3x^5 + 6x^4 - 15x^3 + 2x^2 + 10x - 6) \div (2x - 1)$
14. $(108x^5 - 36x^4 + 75x^2 + 36x + 24) \div (3x + 2)$
15. $(x^4 + x^3 + 6x^2 + 18x - 216) \div (x^3 - 3x^2 + 18x - 54)$
16. $(4x^4 - 14x^3 - 14x^2 + 110x - 84) \div (2x^2 + x - 12)$
17. $\dfrac{6x^5 - 12x^4 + 10x^3 - 2x^2 - 8x + 8}{3x^3 + 2x + 3}$
18. $\dfrac{12x^5 + 5x^4 - 15x^3 + 19x^2 - 4x - 28}{3x^3 + 2x^2 - x + 6}$

اقسم باستخدام القسمة التركيبية. (المثال 4)

19. $(x^4 - x^3 + 3x^2 - 6x - 6) \div (x - 2)$
20. $(2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 8x - 4) \div (x + 3)$
21. $(3x^4 - 9x^3 - 24x - 48) \div (x - 4)$
22. $(x^5 - 3x^3 + 6x^2 + 9x + 6) \div (x + 2)$
23. $(12x^5 + 10x^4 - 18x^3 - 12x^2 - 8) \div (2x - 3)$
24. $(36x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 30x - 12) \div (3x + 1)$
25. $(45x^5 + 6x^4 + 3x^3 + 8x + 12) \div (3x - 2)$
26. $(48x^5 + 28x^4 + 68x^3 + 11x + 6) \div (4x + 1)$
27. $(60x^6 + 78x^5 + 9x^4 - 12x^3 - 25x - 20) \div (5x + 4)$
28. $\dfrac{16x^6 - 56x^5 - 24x^4 + 96x^3 - 42x^2 - 30x + 105}{2x - 7}$

29. **التعليم** يمكن تمثيل عدد طلاب من الآلاف الحاصلين على درجة البكالوريوس ما بين عامي 1970 و 2006 كما يلي $g(x) = 0.0002x^5 - 0.016x^4 + 0.512x^3 - 7.15x^2 + 47.52x + 800.27$، حيث إن x هو عدد الأعوام منذ 1970. استخدم التعويض التركيبي لتقدير عدد الطلاب الذين تخرجوا عام 2005. قرّب إلى أقرب جزء من ألف. (المثال 5)

30. **التزلج** يمكن تمثيل المسافة التي يقطعها الشخص في التزلج بالأمتار على النحو التالي $d(t) = 0.2t^2 + 3t$، حيث إن t هو الزمن بالثواني. استخدم نظرية الباقي لإيجاد المسافة المقطوعة بعد 45 s. (المثال 5)

جد كل $f(c)$ باستخدام التعويض التركيبي. (المثال 5)

31. $f(x) = 4x^5 - 3x^4 + x^3 - 6x^2 + 8x - 15;\ c = 3$
32. $f(x) = 3x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 8x - 3;\ c = 4$
33. $f(x) = 2x^6 + 5x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 3x - 4;\ c = 5$
34. $f(x) = 4x^6 + 8x^5 - 6x^3 - 5x^2 + 6x - 4;\ c = 6$
35. $f(x) = 10x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 3x + 8;\ c = -6$
36. $f(x) = -6x^7 + 4x^5 - 8x^4 + 12x^3 - 15x^2 - 9x + 64;\ c = 2$
37. $f(x) = -2x^8 + 6x^5 - 4x^4 + 12x^3 - 6x + 24;\ c = 4$

استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين الموضحة تعد عوامل لـ $f(x)$. استخدم التعابير ذات الحدين لكتابة الصيغة المحللة لـ $f(x)$. (المثال 6)

38. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + x + 6;\ (x + 2), (x - 1)$
39. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 8x + 12;\ (x - 1), (x + 3)$
40. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 24x^2 + 18x + 135;\ (x - 5), (x + 5)$
41. $f(x) = 3x^4 - 22x^3 + 13x^2 + 118x - 40;\ (3x - 1), (x - 5)$
42. $f(x) = 4x^4 - x^3 - 36x^2 - 111x + 30;\ (4x - 1), (x - 6)$
43. $f(x) = 3x^4 - 35x^3 + 38x^2 + 56x + 64;\ (3x - 2), (x + 2)$
44. $f(x) = 5x^5 + 38x^4 - 68x^2 + 59x + 30;\ (5x - 2), (x + 8)$
45. $f(x) = 4x^5 - 9x^4 + 39x^3 + 24x^2 + 75x + 63;\ (4x + 3), (x - 1)$

46. **الأشجار** يوضح الجدول أدناه ارتفاع شجرة بالأمتار في أعمار مختلفة بالأعوام.

العمر	الارتفاع	العمر	الارتفاع
2	3.3	24	73.8
6	13.8	26	82.0
10	23.0	28	91.9
14	42.7	30	101.7
20	60.7	36	111.5

a. استخدم حاسبة رسوم بيانية لكتابة معادلة تربيعية لتمثيل نمو الشجرة.

b. استخدم القسمة التركيبية لتقييم ارتفاع الشجرة عند 15 عامًا.

47. **ركوب الدراجات الهوائية** يقود عبيد دراجته بسرعة ابتدائية v_0 من 4 أمتار في الثانية. عندما يمر بمنحدر، تزيد سرعة الدراجة بمعدل a من $0.4\ m/s^2$. المسافة الرأسية من أعلى التل إلى أسفله 25 m. استخدم $d(t) = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ لإيجاد الزمن الذي سيستغرقه عبيد حتى ينزل من التل، حيث إن $d(t)$ هي المسافة المقطوعة و t الموضح بالثواني.

حلِّل كل دالة كثيرة الحدود باستخدام العامل الموضح والقسمة المطوّلة. افترض $n > 0$.

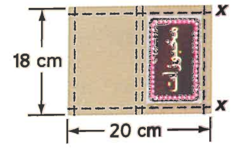
48. $x^{3n} + x^{2n} - 14x^{n} - 24;\ x^{n} + 2$

49. $x^{3n} + x^{2n} - 12x^{n} + 10;\ x^{n} - 1$

50. $4x^{3n} + 2x^{2n} - 10x^{n} + 4;\ 2x^{n} + 4$

51. $9x^{3n} + 24x^{2n} - 171x^{n} + 54;\ 3x^{n} - 1$

52. **التصنيع** يتم قص قطعة من الورق المقوى مقاس 18 cm في 20 cm من الورق المقوى وطيها داخل صندوق مخبز.



a. اكتب دالة كثيرة الحدود تمثل حجم الصندوق.

b. مثّل الدالة بيانيًا.

c. ترغب الشركة في أن يكون حجم الصندوق $196\ cm^3$. اكتب معادلة لتمثيل هذه الحالة.

d. جد عددًا صحيحًا موجبًا لـ x التي تحقق المعادلة الموجودة في الجزء c.

جد حجم k بحيث يكون كل باقي صفرًا.

53. $\dfrac{x^3 - kx^2 + 2x - 4}{x - 2}$

54. $\dfrac{x^3 + 18x^2 + kx + 4}{x + 2}$

55. $\dfrac{x^3 + 4x^2 - kx + 1}{x + 1}$

56. $\dfrac{2x^3 - x^2 + x + k}{x - 1}$

57. **النحت** سيستخدم عيسى كتلة من الطين بحجم 3 m في 4 m في 5 m في صنع تمثال. ويرغب في تقليص حجم الطين بإزالة نفس الكمية من الطول والعرض والارتفاع.

a. اكتب دالة كثيرة الحدود لتمثيل الموقف.

b. مثّل الدالة بيانيًا.

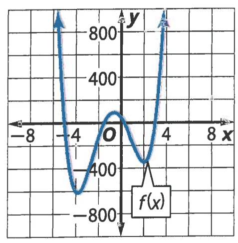
c. إنه يرغب في تقليص حجم الطين إلى $\frac{3}{5}$ من الحجم الأصلي. اكتب معادلة لتمثيل هذه الحالة.

d. كم ينبغي عليه أن يقتطع من كل بُعد؟

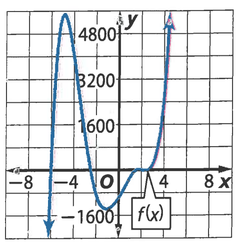
استخدم التمثيلات البيانية والقسمة التركيبية لتحليل كل دالة كثيرة الحدود بالكامل.

58. $f(x) = 8x^4 + 26x^3 - 103x^2 - 156x + 45$ (الشكل 1.3.1)

59. $f(x) = 6x^5 + 13x^4 - 153x^3 + 54x^2 + 724x - 840$ (الشكل 1.3.2)



الشكل 1.3.1



الشكل 1.3.2

60. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف القيمتين العظمى والصغرى لدالة ما.

a. **العرض البياني** مثّل كل دالة كثيرة الحدود ذات صلة بيانيًا وحدد الأصفار الأكبر والأصغر. ثم انسخ وأكمل الجدول.

الدالة كثيرة الحدود	أكبر صفر	أصغر صفر
$x^3 - 2x^2 - 11x + 12$		
$x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 10x$		
$x^5 - x^4 - 2x^3$		

b. **العرض العددي** استخدم القسمة التركيبية لإيجاد قيمة كل دالة في الجزء a لقيم الأعداد الصحيحة الثلاثة الأكبر من الصفر الأكبر.

c. **العرض الكلامي** قدّم فرضية عن خصائص الصف الأخير عندما تُستخدم القسمة التركيبية لإيجاد قيمة دالة ما لعددٍ صحيحٍ أكبر من صفره الأكبر.

d. **العرض العددي** استخدم القسمة التركيبية لإيجاد قيمة كل دالة في الجزء a لقيم الأعداد الصحيحة الثلاثة الأقل من الصفر الأصغر.

e. **العرض الكلامي** قدم فرضية عن خصائص الصف الأخير عندما تُستخدم القسمة التركيبية لإيجاد قيمة دالة عدد ما أقل من صفره الأصغر.

مسائل مهارات التفكير العُليا استخدام مهارات التفكير العُليا

61. **تحدٍ** هل $(x - 1)$ عامل $18x^{165} - 15x^{135} + 8x^{105} - 15x^{55} + 4$؟ اشرح استنتاجك.

62. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف يمكنك استخدام الحاسبة البيانية والقسمة التركيبية وتحليل العامل لتحليل الدالة كثيرة الحدود من الدرجة الخامسة ذات المعاملات النسبية والأصفار الثلاثة الصحيحة والصفرين النسبيين غير الصحيحين.

63. **الاستنتاج** حدد هل كل عبارة أدناه صحيحة أم خاطئة. اشرح.
إذا كان $h(y) = (y + 2)(3y^2 + 11y - 4) - 1$، فإن باقي $\dfrac{h(y)}{y + 2}$ هو -1

تحدٍ جد k بحيث يحتوي الناتج على باقي 0.

64. $\dfrac{x^3 + kx^2 - 34x + 56}{x + 7}$

65. $\dfrac{x^6 + kx^4 - 8x^3 + 173x^2 - 16x - 120}{x - 1}$

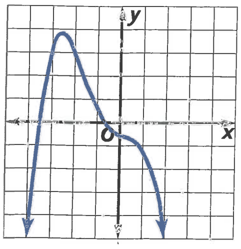
65. $\dfrac{kx^3 + 2x^2 - 22x - 4}{x - 2}$

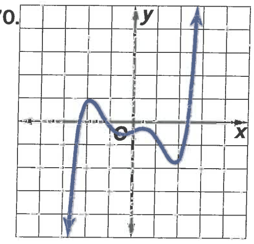
67. **تحدٍ** إذا كان $2x^2 - dx + (31 - d^2)x + 5$ يحتوي على عامل $x - d$، فما قيمة d إذا كان d عددًا صحيحًا؟

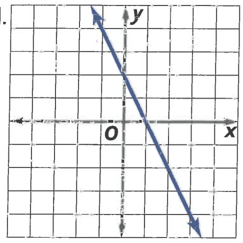
68. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبيّن الفرق في قسمة الدالة كثيرة الحدود باستخدام القسمة المطوّلة والقسمة التركيبية.

مراجعة شاملة

حدد هل درجة n في الدالة كثيرة الحدود لكل تمثيل بياني زوجية أم فردية وهل معامل الحد الأكبر فيها a_n موجبًا أم سالبًا. (الدرس 2-2)

69.


70.


71.


72. **القفز بالمظلات** يتم إيجاد الزمن التقريبي t بالثواني الذي يستغرقه سقوط جسمٍ ما من مسافة d قدم باستخدام المعادلة $t = \sqrt{\frac{d}{16}}$ لنفترض أن اللاعب سقط قبل أن يفتح المظلة بمدة 11 ثانية. فما المسافة التي يسقطها اللاعب خلال هذه المدة؟ (الدرس 1-2)

73. **مكافحة الحرائق** يتم تمثيل السرعة v وأقصى ارتفاع h للمياه التي يتم ضخها في الهواء باستخدام المعادلة $v = \sqrt{2gh}$، حيث g هو السرعة بسبب الجاذبية ($32\ ft/s^2$) (الدرس 7-1)

a. حدِّد معادلة ستنتج أقصى ارتفاع للمياه كدالة سرعتها.

b. يجب على إدارة مكافحة الحرائق شراء مضخة قوية بما يكفي لدفع المياه لمسافة 80 ft في الهواء. هل ستلبي المضخة المُعلن عنها للمشروع بسرعة 75 ft/s احتياجات إدارة مكافحة الحرائق؟ اشرح.

حُل أنظمة المعادلات التالية جبريًا.

74. $5x - y = 16$
$2x + 3y = 3$

75. $3x - 5y = -8$
$x + 2y = 1$

76. $y = 6 - x$
$x = 4.5 + y$

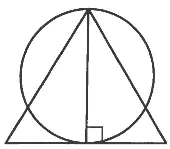
77. $2x + 5y = 4$
$3x + 6y = 5$

78. $7x + 12y = 16$
$5y - 4x = -21$

79. $4x + 5y = -8$
$3x - 7y = 10$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

80. **اختبار SAT/ACT** في الشكل الموضح، مثلث متساوي الأضلاع مرسوم أيضًا بارتفاع قطر الدائرة. إذا كان محيط المثلث 36، فما محيط الدائرة؟



A $6\sqrt{2}\pi$
B $6\sqrt{3}\pi$
C $12\sqrt{2}\pi$
D $12\sqrt{3}\pi$
E 36π

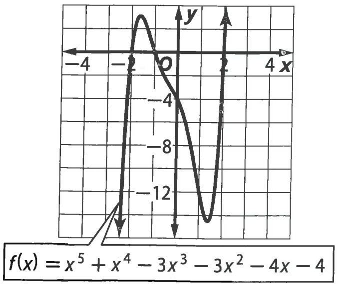
81. **مراجعة** إذا كان $(3, -7)$ هو مركز الدائرة وتقع النقطة $(8, 5)$ على الدائرة، فما محيط الدائرة؟

F 13π
G 15π
H 18π
J 25π
K 26π

82. **مراجعة** الحد الأول في المتتالية هو x. كل حد لاحق هو ثلاثة أصغر من ضعف الحد السابق. ما الحد الخامس في المتتالية؟

A $8x - 21$
B $8x - 15$
C $16x - 39$
D $16x - 45$
E $32x - 43$

83. استخدم التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود. أي مما يلي لا يُعد عامل $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$؟



F $(x - 2)$
G $(x + 2)$
H $(x - 1)$
J $(x + 1)$

اختبار منتصف الوحدة

الدروس 1-1 إلى 1-3

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والمدى والتقاطعات والسلوك الطرفي والاتصال للدالة، وفترات تزايد الدالة أو تناقصها. (الدرس 1-1)

1. $f(x) = 2x^3$

2. $f(x) = -\frac{2}{3}x^4$

3. $f(x) = 3x^{-8}$

4. $f(x) = 4x^{\frac{2}{5}}$

5. **الأشجار** فيما يلي أطوال أشجار التنوب والمساحات التي تغطيها فروعها. (الدرس 1-1)

المساحة (m^2)	الارتفاع (m)
37.95	4.2
7.44	2.1
23.54	3.4
4.75	1.7
46.48	4.6

a. صمم مخطط تشتت للبيانات.

b. حدد دالة أسية لتمثيل للبيانات.

c. توقع المساحة التي تغطيها فروع شجرة التنوب بارتفاع 7.6 m.

حُلّ كل لكل من المعادلات التالية. (الدرس 1-1)

6. $\sqrt{5x + 7} = 13$

7. $\sqrt{2x - 2} + 1 = x$

8. $\sqrt{3x + 10} + 1 = \sqrt{x + 11}$

9. $-5 = \sqrt[4]{(6x + 3)^3} - 32$

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل. (الدرس 2-1)

10. $f(x) = x^2 - 11x - 26$

11. $f(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^3$

12. $f(x) = x^4 + 9x^2 - 10$

13. **الاختيار من متعدد** أي مما يلي يوضح السلوك الطرفي الممكن لدالة أحادية الحد من الدرجة الفردية؟ (الدرس 2-1)

A $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5$

B $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

C $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

D $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

وضح السلوك الطرفي للتمثيل البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيس. (الدرس 2-1)

14. $f(x) = -7x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 23x + 7$

15. $f(x) = -5x^5 + 4x^4 + 12x^2 - 8$

16. **الطاقة** فيما يلي استهلاك خولة للكهرباء بالكيلو واط في الساعة (kWh) خلال 12 شهرًا الماضية. (الدرس 2-1)

الاستهلاك (kWh)	الشهر	الاستهلاك (kWh)	الشهر
300	يوليو	240	يناير
335	أغسطس	135	فبراير
390	سبتمبر	98	مارس
345	أكتوبر	110	أبريل
230	نوفمبر	160	مايو
100	ديسمبر	230	يونيو

a. حدد نموذجًا لعدد الكيلو واط بالساعات التي استخدمتها خولة كدالة لعدد الأشهر منذ يناير.

b. استخدم النموذج لتوقع عدد الكيلو واط بالساعات التي ستستخدمها خولة في يناير القادم. هل هذه الإجابة منطقية؟ اشرح استدلالك.

القسمة باستخدام القسمة التركيبية. (الدرس 1-3)

17. $(5x^3 - 7x^2 + 8x - 13) \div (x - 1)$

18. $(x^4 - x^3 - 9x + 18) \div (x - 2)$

19. $(2x^3 - 11x^2 + 9x - 6) \div (2x - 1)$

حدد كل $f(c)$ باستخدام التعويض التركيبي. (الدرس 1-3)

20. $f(x) = 9x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 18x^2 - 16x + 8$؛ $c = 2$

21. $f(x) = 6x^6 - 3x^5 + 8x^4 + 12x^2 - 6x + 4$؛ $c = -3$

22. $f(x) = -2x^6 + 8x^5 - 12x^4 + 9x^3 - 8x^2 + 6x - 3$؛ $c = -2$

استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين الموضحة عوامل لـ $f(x)$ استخدم التعابير ذات الحدين التي تعد عوامل لكتابة الصيغة $f(x)$ بعد تحليلها إلى العوامل (الدرس 1-3)

23. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 25x - 50$؛ $(x + 5)$

24. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8$؛ $(x - 1)$، $(x - 2)$

25. **الاختيار من متعدد** جد الباقي عند قسمة $f(x) = x^3 - 4x + 5$ على $x + 3$ (الدرس 1-3)

F -10

G 8

H 20

J 26

الدرس 1-4

أصفار الدوال كثيرة الحدود

:: السابق

- تعلمت أن الدالة كثيرة الحدود من الدرجة n يمكن أن تحتوي على n أصفار حقيقية على الأكثر. (الدرس 1-1)

:: الحالي

1. إيجاد الأصفار الحقيقية للدوال كثيرة الحدود.
2. إيجاد الأصفار المركبة للدوال كثيرة الحدود.

:: لماذا؟

- تقدّر شركة أن الأرباح P بآلاف الدراهم من نموذج معين لجهاز التحكم في ألعاب الفيديو كما يلي $P(x) = -0.0007x^2 + 2.45x$، بحيث x هو عدد الآلاف بالدراهم المستثمرة في تسويق جهاز التحكم. لمعرفة عدد الدراهم التي ينبغي أن تستثمرها الشركة لتحقيق أرباح تبلغ AED 1,500,000 ، يمكنك استخدام الأساليب الواردة في هذا الدرس لحل المعادلة كثيرة الحدود $P(x) = 1,500$

مفردات جديدة

- نظرية الصفر النسبي Rational Zero Theorem
- الحد الأدنى lower bound
- الحد الأعلى upper bound
- قاعدة ديكارت للإشارات Descartes' Rule of Signs
- نظرية الجبر الأساسية Fundamental Theorem of Algebra
- نظرية التحليل إلى العوامل الخطية Linear Factorization Theorem
- نظرية الجذر المرافق Conjugate Root Theorem
- مترافقات مركبة complex conjugates
- الجذور الحقيقية غير القابلة للاختزال irreducible over the reals

1 الأصفار الحقيقية

تذكّر أن الدالة كثيرة الحدود من الدرجة n يمكن أن تحتوي على n من الأصفار الحقيقية. ويمكن أن تكون هذه الأصفار الحقيقية نسبية أو غير نسبية.

الأصفار النسبية	الأصفار غير النسبية
$f(x) = (x + 3)(3x - 2)$ أو $f(x) = 3x^2 + 7x - 6$ يوجد صفران نسبيان، -3 أو $\frac{2}{3}$	$g(x) = (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$ أو $g(x) = x^2 - 5$ يوجد صفران غير نسبيين، $\pm\sqrt{5}$

توضح **نظرية الصفر النسبي** كيف يمكن استخدام معامل الحد الرئيس والحد الثابت لدالة كثيرة الحدود ذات معاملات أعداد صحيحة في تحديد قائمة بجميع الأصفار النسبية الممكنة.

المفهوم الأساسي نظرية الصفر النسبي

بما أن f دالة كثيرة الحدود بالصيغة التالية $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$، من الدرجة $n \geq 1$ ولها معاملات من الأعداد الصحيحة و $a_0 \neq 0$، فإن كل صفر نسبي للدالة f يُمثل بالصيغة $\frac{p}{q}$، بحيث

- p و q لا يوجد لهما أي عوامل مشتركة إلا ± 1
- p عامل عدد صحيح للحد الثابت a_0
- q عامل عدد صحيح لمعامل الحد الرئيس a_n

النتيجة إذا كان معامل الحد الرئيس a_n يساوي 1، فأي صفر نسبي للدالة f يُعد من عوامل الأعداد الصحيحة للحد الثابت a_0

بمجرد أن تعرف جميع الأصفار النسبية الممكنة لدالة كثيرة الحدود، يمكنك استخدام التعويض المباشر أو التركيبي لتحديد أي منها يُعدّ أصفارًا فعلية للدالة كثيرة الحدود.

مثال 1 معامل الحد الرئيس يساوي 1

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها يكون أصفارًا، إن وجدت.

a. $f(x) = x^3 + 2x + 1$

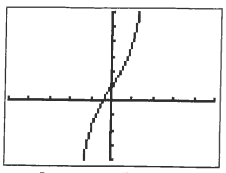
الخطوة 1 حدد الأصفار النسبية الممكنة.

بما أن معامل الحد الرئيس يساوي 1، فإن جميع الأصفار النسبية الممكنة تُعد من عوامل الأعداد الصحيحة للحد الثابت 1. لذا، الأصفار النسبية الممكنة للدالة f هي 1 و -1

الخطوة 2 استخدم التعويض المباشر لاختبار كل صفر ممكن.

$f(1) = (1)^3 + 2(1) + 1$ أو 4

$f(-1) = (-1)^3 + 2(-1) + 1$ أو -2



[-5, 5] scl: 1 by [-4, 6] scl: 1

بما أن $f(1) \neq 0$ و $f(-1) \neq 0$، يمكنك استنتاج أن f لا يحتوي على أصفار نسبية. من التمثيل البياني للدالة f، يمكنك معرفة أن f تحتوي على صفر حقيقي واحد. يوضح تطبيق نظرية الأصفار النسبية أن هذا الصفر غير نسبي.

b. $g(x) = x^4 + 4x^3 - 12x - 9$

الخطوة 1 بما أن معامل الحد الرئيس يساوي 1، فإن جميع الأصفار النسبية الممكنة تُعد من عوامل الأعداد الصحيحة للحد الثابت -9. لذا، الأصفار النسبية الممكنة للدالة g هي ±1 و ±3 و ±9

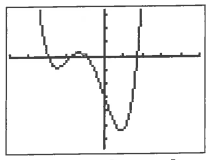
الخطوة 2 ابدأ باختبار 1 و-1 باستخدام التعويض التركيبي.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 4 & 0 & -12 & -9 \\ & & -1 & -3 & 3 & 9 \\ \hline & 1 & 3 & -3 & -9 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 4 & 0 & -12 & -9 \\ & & 1 & 5 & 5 & -7 \\ \hline & 1 & 5 & 5 & -7 & -16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 3 & -3 & -9 \\ & & -3 & 0 & 9 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}$$

بما أن $g(-1) = 0$، يمكنك استنتاج أن -1 يساوي صفرًا في g. يوضح اختبار -3 على الدالة كثيرة الحدود المنخفضة أن -3 هو صفر نسبي آخر.

لذا، $g(x) = (x + 1)(x + 3)(x^2 - 3)$ وبما أن العامل $(x^2 - 3)$ لا ينتج عنه أي أصفار نسبية، يمكننا استنتاج أن g يحتوي فقط على صفرين نسبيين -1 و-3.



[-5, 5] scl: 1 by [-20, 10] scl: 3

الشكل 1.4.1

التحقق من الحل يحتوي التمثيل البياني للدالة $g(x) = x^4 + 4x^3 - 12x - 9$ في الشكل 1.4.1 على نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x عند -1 و-3 وبالقرب من $(2, 0)$ و$(-2, 0)$. من خلال تطبيق نظرية الأصفار النسبية، نعرف أن هذين الصفرين الأخيرين يجب أن يكونا غير نسبيين.
في الحقيقة، ينتج عن العامل $(x^2 - 3)$ صفران غير نسبيين، $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ ✔

تمرين موجّه

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها يكون أصفارًا، إن وجدت.

1A. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 2$

1B. $h(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 30$

عندما لا يساوي معامل أكبر حد في الدالة كثيرة الحدود 1، يمكن أن تزيد قائمة الأصفار النسبية الممكنة بدرجة كبيرة.

مثال 2 معامل الحد الرئيس لا يساوي 1

اذكر جميع الأصفار النسبية الممكنة للدالة $h(x) = 3x^3 - 7x^2 - 22x + 8$ ثم حدد أيًا منها يكون أصفارًا، إن وجدت.

الخطوة 1 معامل الحد الرئيس هو 3 والحد الثابت هو 8.

الأصفار النسبية الممكنة: $\dfrac{\text{عوامل } 8}{\text{عوامل } 3} = \dfrac{\pm1, \pm2, \pm4, \pm8}{\pm1, \pm3} = \pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{8}{3}$

الخطوة 2 باستخدام التعويض التركيبي، يمكنك تحديد أن -2 صفر نسبي.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 3 & -7 & -22 & 8 \\ & & -6 & 26 & -8 \\ \hline & 3 & -13 & 4 & 0 \end{array}$$

بتطبيق خوارزمية القسمة، $h(x) = (x + 2)(3x^2 - 13x + 4)$ وبمجرد تحليل $3x^2 - 13x + 4$ إلى العوامل، تصبح الدالة كثيرة الحدود $h(x) = (x + 2)(3x - 1)(x - 4)$ ويمكنك استنتاج أن الأصفار النسبية للدالة h هي -2 و$\frac{1}{3}$ و 4. تحقق من هذه النتيجة بالتمثيل البياني.

تمرين موجّه

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها يكون أصفارًا، إن وجدت.

2A. $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 18x - 36$

2B. $f(x) = 3x^4 - 18x^3 + 2x - 21$

مثال 3 من الحياة اليومية حل معادلة كثيرة الحدود

الأعمال **بعد أول نصف ساعة، يمكن تمثيل عدد ألعاب الفيديو التي باعتها الشركة في تاريخ الإصدار كما يلي $g(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x$، بحيث يكون $g(x)$ هو عدد الألعاب المبيعة بالمئات و x عدد الساعات بعد الإصدار. ما الزمن المستغرق لبيع 400 لعبة؟**

بما أن $g(x)$ تمثل عدد الألعاب المبيعة بالمئات، يجب أن تحل $g(x) = 4$ لتحديد الزمن المستغرق لبيع 400 لعبة.

$g(x) = 4$ اكتب المعادلة.

$2x^3 + 4x^2 - 2x = 4$ قم بتعويض $2x^3 + 4x^2 - 2x$ بـ $g(x)$

$2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 = 0$ اطرح 4 من كل طرف.

طبّق نظرية الأصفار النسبية على هذه الدالة الجديدة كثيرة الحدود $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$

الخطوة 1 الأصفار النسبية الممكنة: $\frac{\text{عوامل } 4}{\text{عوامل } 2} = \frac{\pm1, \pm2, \pm4}{\pm1, \pm2}$

$= \pm1, \pm2, \pm4, \pm\frac{1}{2}$

الخطوة 2 باستخدام التعويض التركيبي، يمكنك تحديد أن 1 يمثل صفرًا نسبيًا.

1	2	4	−2	−4
		2	6	4
	2	6	4	0

بما أن 1 يمثل صفرًا للدالة f، إذًا $x = 1$ يعد حلاً للدالة $f(x) = 0$. يمكن كتابة الدالة كثيرة الحدود المنخفضة $2x^2 + 6x + 4$ كما يلي $2(x + 1)(x + 2)$ وأصفار هذه الدالة كثيرة الحدود -2 و-1 وبما أن الزمن لا يمكن أن يكون بالسالب، إذًا الحل $x = 1$. لذا، يستغرق الزمن ساعة واحدة لبيع 400 لعبة.

تمرين موجّه

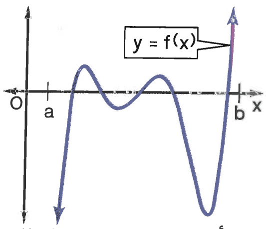
3. **الكرة الطائرة** فيما يلي التمثيل البياني لكرة طائرة عادت بعد ضربها بسرعة أولية 40 مترًا في الثانية بارتفاع 4 مترًا $f(t) = 4 + 40t - 16t^2$، بحيث $f(t)$ يمثل ارتفاع الكرة بالقدم و t يمثل الزمن بالثواني. ما الزمن الذي ستصل به الكرة إلى ارتفاع 20 مترًا؟

الربط بالحياة اليومية

أظهرت دراسة حديثة أن أعمار ما يقرب من ثلث هواة ألعاب الفيديو المعروفة بين 6 و 17 عامًا.

المصدر: NPD Group Inc

ثمة طريقة لتضييق البحث عن الأصفار الحقيقية وهي تحديد الفترة التي يتم فيها تحديد مواقع الأصفار الحقيقية للدالة. العدد الحقيقي a هو **القيمة الصغرى** للأصفار الحقيقية للدالة f إذا كانت $f(x) \neq 0$ للدالة $x < a$. وبالمثل، b هو **القيمة العظمى** للأصفار الحقيقية للدالة f إذا كانت $f(x) \neq 0$ للدالة $x > b$



الأصفار الحقيقية للدالة f توجد في الفترة [a, b]

يمكنك اختبار هل تحتوي فترة معينة على جميع الأصفار الحقيقية لدالة باستخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى التالية.

المفهوم الأساسي اختبارات القيمتين العظمى والصغرى

لنفرض أن f دالة كثيرة الحدود من الدرجة $n \geq 1$ ولها معاملات حقيقية ومعامل الحد الرئيس موجب. لنفرض أن $f(x)$ تمت قسمته على $x - c$ باستخدام القسمة التركيبية.

- إذا كان $c \leq 0$ وكل عدد في آخر سطر بالقسمة غير سالب وغير موجب، فإن c هي قيمة صغرى للأصفار الحقيقية للدالة f
- إذا كان $c \geq 0$ وكل عدد في آخر سطر بالقسمة غير سالب، فإن c هي قيمة عظمى للأصفار الحقيقية للدالة f

القراءة في الرياضيات

غير سالبة وغير موجبة تذكّر أن القيمة غير السالبة هي القيمة الموجبة أو الصفر وأن القيمة غير الموجبة هي القيمة السالبة أو الصفر.

للاستفادة من اختبارات القيمة العظمى والقيمة الصغرى، اتبع هذه الخطوات.

الخطوة 1 مثّل الدالة بيانيًا لتحديد فترة توجد فيها الأصفار.

الخطوة 2 باستخدام التعويض التركيبي، تأكد أن القيمتين العظمى والصغرى للفترة هما في الحقيقة القيمتان العظمى والصغرى للدالة بتطبيق اختبارات القيمة العظمى والقيمة الصغرى.

الخطوة 3 استخدم نظرية الصفر النسبي للمساعدة على إيجاد جميع الأصفار الحقيقية.

نصيحة دراسية

القيمتان العظمى والصغرى ليس بالضرورة أن تكون القيمتان العظمى والصغرى لدالة فريدين.

مثال 4 استخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى

حدد فترة يجب أن توجد فيها جميع الأصفار الحقيقية للدالة $h(x) = 2x^4 - 11x^3 + 2x^2 - 44x - 24$. اشرح استدلالك باستخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى. ثم جد كل الأصفار الحقيقية.

الخطوة 1 مثّل $h(x)$ بيانيًا باستخدام آلة حاسبة بيانية. من هذا التمثيل البياني، يبدو أن الأصفار الحقيقية لهذه الدالة توجد في الفترة $[-1, 7]$

الخطوة 2 اختبر القيمة الصغرى للدالة $c = -1$ والقيمة العظمى للدالة $c = 7$

-1	2	-11	2	-44	-24
		-2	13	-15	59
	2	-13	15	-59	35

تعمل القيم على تبديل الإشارات في السطر الأخير، لذا -1 هو القيمة الصغرى.

7	2	-11	2	-44	-24
		14	21	161	819
	2	3	23	117	795

جميع القيم غير سالبة في السطر الأخير، لذا 7 هو القيمة العظمى.

الخطوة 3 استخدم نظرية الصفر النسبي.

الأصفار النسبية الممكنة: $\dfrac{24 \text{ عوامل}}{4 \text{ عوامل}} = \dfrac{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24}{\pm 1, \pm 2}$

$= \pm 1, \pm 2, \pm 3\ \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$

بما أن الأصفار الحقيقية في الفترة $[-1, 7]$، يمكنك تضييق هذه القائمة إلى ± 1 أو $\pm \frac{1}{2}$ أو $\pm \frac{3}{2}$ أو 2 أو 4 أو 6 فقط. من التمثيل البياني، يبدو أن 6 و $-\frac{1}{2}$ فقط منطقيان.

ابدأ باختبار $-\frac{1}{2}$ في الدالة كثيرة الحدود

$-\frac{1}{2}$	2	1	8	4
		-1	0	-4
	2	0	8	0

الآن اختبر 6

6	2	-11	2	-44	-24
		12	6	48	24
	2	1	8	4	0

بتطبيق خوارزمية القسمة، $h(x) = 2(x - 6)(x + \frac{1}{2})(x^2 + 4)$ لاحظ أن العامل $(x^2 + 4)$ لا توجد له أصفار حقيقية مرتبطة به لأن $x^2 + 4 = 0$ لا توجد لها حلول حقيقية. لذا، f لها حلان حقيقيان نسبيان وهما، 6 و $-\frac{1}{2}$ ــويدعم التمثيل البياني للدالة $h(x) = 2x^4 - 11x^3 + 2x^2 - 44x - 24$ هذا الاستنتاج.

تمرين موجّه

حدد فترة يجب أن توجد فيها جميع الأصفار الحقيقية للدالة المحددة. اشرح استدلالك باستخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى. ثم جد كل الأصفار الحقيقية.

4A. $g(x) = 6x^4 + 70x^3 - 21x^2 + 35x - 12$

4B. $f(x) = 10x^5 - 50x^4 - 3x^3 + 22x^2 - 41x + 30$

ثمة طريقة أخرى لتضييق البحث عن الأصفار الحقيقية هي استخدام **قاعدة ديكارت للإشارات**. توفر هذه القاعدة معلومات عن عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة في دالة كثيرة الحدود عن طريق فحص التغير في إشارة الدالة كثيرة الحدود.

القراءة في الرياضيات

تغير الإشارة يحدث *تغير الإشارة* في أي دالة مكتوبة بالصيغة القياسية عندما تحتوي المعاملات التالية على إشارات معاكسة.

المفهوم الأساسي قاعدة ديكارت للإشارات

إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ دالة كثيرة الحدود ذات معاملات حقيقية، فإن

- عدد الأصفار الحقيقية *الموجبة* للدالة f يساوي عدد تغيرات الإشارة للدالة $f(x)$ أو أصغر من هذا العدد بمقدار عدد زوجي
- عدد الأصفار الحقيقية *السالبة* للدالة f هو نفسه عدد تغيرات الإشارة للدالة $f(-x)$ أو أصغر من هذا العدد بمقدار عدد زوجي محدد.

مثال 5 استخدام قاعدة ديكارت للإشارات

وضّح الأصفار الحقيقية الممكنة للدالة $g(x) = -3x^3 + 2x^2 - x - 1$

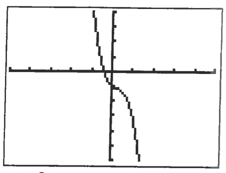
اختبر تغيرات الإشارة للدالة $g(x)$ والدالة $g(-x)$

$$g(x) = -3x^3 + 2x^2 - x - 1$$

$$g(-x) = -3(-x)^3 + 2(-x)^2 - (-x) - 1$$
$$= 3x^3 + 2x^2 + x - 1$$

تحتوي الدالة الأصلية $g(x)$ على تغيرين في الإشارة، بينما تحتوي الدالة $g(-x)$ على متغير واحد في الإشارة. بتطبيق قاعدة ديكارت للإشارات، تعرف أن الدالة $g(x)$ تحتوي على صفرين حقيقيين موجبين أو بدون أصفار وصفر حقيقي سالب واحد .

من التمثيل البياني للدالة $g(x)$ الموضحة، يمكنك معرفة أن الدالة تحتوي على صفر حقيقي سالب واحد قريب من $x = -0.5$ وبدون أصفار حقيقية موجبة.



[-5, 5] scl: 1 by [-6, 4] scl: 1

تمرين موجّه

وضح الأصفار الحقيقية الممكنة لكل دالة.

5A. $h(x) = 6x^5 + 8x^2 - 10x - 15$

5B. $f(x) = -11x^4 + 20x^3 + 3x^2 - x + 18$

عند استخدام قاعدة ديكارت للإشارات، يتضمن عدد الأصفار الحقيقية الموضح أي أصفار متكررة. لذا، ينبغي حساب صفر بالتكرار m كأصفار **m**.

2 الأصفار المركبة يمكن أن تحتوي مثل الدوال التربيعية على أصفار حقيقية أو تخيلية ويمكن أن تحتوي الدوال كثيرة الحدود ذات الدرجة الأعلى أيضًا على أصفار في نظام الأعداد المركبة. تجعلنا هذه الحقيقة بالإضافة إلى **نظرية الجبر الأساسية** نحسّن العبارة الخاصة بنا المعنية بعدد الأصفار لأي دالة كثيرة الحدود من الدرجة n.

الربط بتاريخ الرياضيات

رينيه ديكارت

(1596–1650) فيلسوف وعالم ورياضي فرنسي، كتب ديكارت العديد من الأعمال الفلسفية مثل نقاش *المنهج* وأعمال رياضية مثل *الهندسة*.

المفهوم الأساسي نظرية الجبر الأساسية

تحتوي أي دالة كثيرة الحدود من الدرجة n، بحيث $n > 0$، على صفر واحد على الأقل (حقيقي أو تخيلي) في نظام الأعداد المركبة.

النتيجة تحتوي أي دالة كثيرة الحدود من الدرجة n على عدد n معين من الأصفار، بما في ذلك الأصفار المُكررة، في نظام الأعداد المركبة.

بتوسيع نظرية العامل لتشمل كلاً من الأصفار الحقيقية والتخيلية وتطبيق نظرية الجبر الأساسية، نحصل على **نظرية التحليل إلى العوامل الخطية**.

المفهوم الأساسي نظرية التحليل إلى العوامل الخطية

إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة الحدود من الدرجة $n > 0$، فإن الدالة f تحتوي على عدد n معين من العوامل الخطية

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)$$

حيث a_n عدد حقيقي معين غير الصفر و $c_1, c_2, \ldots, c_n$ هي الأصفار المركبة (بما في ذلك الأصفار المتكررة) للدالة f.

وفق **نظرية الجذر المرافق** عندما تحتوي معادلة كثيرة الحدود على متغير واحد وذات معاملات حقيقية على جذر بالصيغة $a + bi$، بحيث $b \neq 0$، فإن **المرافق المركب**، $a - bi$، يُعد جذرًا أيضًا. يمكنك استخدام هذه النظرية لكتابة دالة كثيرة الحدود توجد أصفارها المركبة.

مثال 6 إيجاد دالة كثيرة الحدود أصفارها معلومة

اكتب دالة كثيرة الحدود من أقل درجة ذات معاملات حقيقية بالصيغة القياسية التي تتضمن -2 و 4 و $3 - i$ كأصفار.

بما أن $3 - i$ تساوي صفرًا ويجب أن تحتوي الدالة كثيرة الحدود على معاملات حقيقية، إذًا تعرف أن $3 + i$ يجب أن تساوي أيضًا صفرًا. باستخدام نظرية التحليل إلى العوامل الخطية والأصفار -2 و 4 و $3 - i$ و $3 + i$. يمكنك كتابة $f(x)$ كما يلي.

$$f(x) = a[x - (-2)](x - 4)[x - (3 - i)][x - (3 + i)]$$

في حين أن a يمكن أن يكون عددًا حقيقيًا غير الصفر، من الأسهل أن نفرض أن $a = 1$. ثم بسّط الدالة.

$f(x) = (1)(x + 2)(x - 4)[x - (3 - i)][x - (3 + i)]$ لنفرض أن $a = 1$

$= (x^2 - 2x - 8)(x^2 - 6x + 10)$ اضرب

$= x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 28x - 80$ اضرب

وبالتالي، تصبح الدالة ذات أقل درجة التي تحتوي على -2 و 4 و $3 - i$ و $3 + i$ كأصفار هي $f(x) = x^4 - 8x^3\ 14x^2 + 28x - 80$ أو أي مضاعف غير صفري للدالة $f(x)$.

تمرين موجّه

اكتب دالة كثيرة الحدود من أقل درجة ذات معاملات حقيقية بالصيغة القياسية مع الأصفار الموضحة.

6A. $-3, 4i, 1$ مكرر مرتين

6B. $2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 1 + i$

نصيحة دراسية

الدوال كثيرة الحدود اللانهائية بما أن a يمكن أن يكون أي عدد حقيقي غير الصفر. إذًا يوجد عدد لا نهائي من الدوال كثيرة الحدود التي يمكن كتابتها لمجموعة معينة من الأصفار.

في المثال 6، كتبت معادلة بأصفار حقيقية ومركبة. تتضمن الدالة أصفارًا مركبة عندما تحتوي صيغتها المحللة على عامل تربيعي يُعد من الجذور الحقيقية غير القابلة للتبسيط. يصبح التعبير التربيعي **الجذور الحقيقية غير القابلة للتبسيط** عندما يحتوي على معاملات حقيقية غير مرتبطة بأصفار حقيقية. يوضح هذا المثال النظرية التالية.

نصيحة دراسية

الدوال كثيرة الحدود الأولية لاحظ الفرق بين التعابير التي تُعد جذورًا تربيعية وتعابير غير قابلة للتبسيط تُعد *أولية*. التعبير $x^2 - 8$ أولي لأنه لا يمكن تحليله إلى تعابير باستخدام معاملات صحيحة. ومع ذلك، لا تُعد $x^2 - 8$ جذورًا تربيعية غير قابلة للتبسيط لأنه توجد أصفار حقيقية مرتبطة بها $\sqrt{8}$ و $-\sqrt{8}$

المفهوم الأساسي تحليل الدوال كثيرة الحدود على الأعداد الحقيقية

يمكن كتابة كل دالة كثيرة الحدود من الدرجة $n > 0$ ذات معاملات حقيقية كناتج ضرب للعوامل الخطية وعوامل الجذور التربيعية غير القابلة للتبسيط، وكل له معاملات حقيقية.

كما يتضح من نظرية التحليل إلى العوامل الخطية، عند تحليل دالة كثيرة الحدود على نظام الأعداد المركبة، يمكننا كتابة المعادلة بوصفها ناتج ضرب العوامل الخطية فقط.

مثال 7 تحليل أصفار دالة كثيرة الحدود وإيجادها

لنفرض أن $k(x) = x^5 - 18x^3 + 30x^2 - 19x + 30$

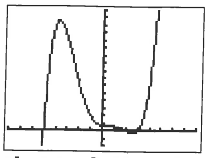
a. اكتب $k(x)$ كناتج ضرب للعوامل الخطية وعوامل الجذور التربيعية غير القابلة للاختزال.

الأصفار النسبية الممكنة هي ±1، ±2، ±3، ±5، ±6، ±10، ±15، ±30 وبذلك تحتوي الدالة الأصلية على 4 متغيرات إشارة.

$$k(-x) = (-x)^5 - 18(-x)^3 + 30(-x)^2 - 19(-x) + 30$$
$$= -x^5 + 18x^3 + 30x^2 + 19x + 30$$

بما أن $k(-x)$ تحتوي على متغير إشارة واحد، إذًا $k(x)$ تحتوي على 4 أصفار حقيقية موجبة أو 2 أو 0 وعلى صفر حقيقي سالب واحد.

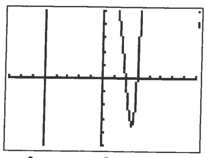
يعرض التمثيل البياني الموضح -5 كصفر حقيقي واحد للدالة $k(x)$.
استخدم التعويض التركيبي لاختبار هذه الاحتمالية.



[-8, 8] scl: 1 by [-100, 800] scl: 50

-5	1	0	-18	30	-19	30
		-5	25	-35	25	-30
	1	-5	7	-5	6	0

بما أن $k(x)$ تحتوي على صفر حقيقي سالب واحد فقط، إذًا لست بحاجة إلى اختبار أي أصفار نسبية سالبة ممكنة أخرى. قم بتكبير الأصفار الحقيقية الموجبة في التمثيل البياني الذي يظهر 2 و 3 كأصفار نسبية أخرى. اختبر هذه الاحتمالات بالتتابع في الدوال كثيرة الحدود التربيعية المنخفضة ثم التكعيبية.



[-8, 8] scl: 1 by [-20, 20] scl: 4

2	1	-5	7	-5	6
		2	-6	2	-6
	1	-3	1	-3	0

ابدأ باختبار 2.

3	1	-3	1	-3
		0	3	3
	1	0	1	0

اختبر الآن 3 على الدالة كثيرة الحدود المنخفضة.

لا ينتج عن العامل التربيعي المتبقي $(x^2 + 1)$ أي أصفار نسبية وبالتالي أي جذور حقيقية غير قابلة للاختزال. لذا، تصبح $k(x)$ المكتوبة كناتج لعوامل خطية والعوامل التربيعية غير القابلة للاختزال
$k(x) = (x + 5)(x - 2)(x - 3)(x^2 + 1)$

b. اكتب $k(x)$ كناتج للعوامل الخطية.

يمكنك تحليل $x^2 + 1$ بكتابة التعبير أولاً كفرق مربعات $x^2 - (\sqrt{-1})^2$ أو $x^2 - i^2$. ثم حلل فرق الجذور التربيعية هذا كما يلي $(x + i)(x - i)$. لذا، تُكتب $k(x)$ كناتج ضرب العوامل الخطية كما يلي:

$$k(x) = (x + 5)(x - 2)(x - 3)(x - i)(x + i)$$

c. اذكر جميع أصفار $k(x)$.

بما أن الدالة من الدرجة 5. ومن خلال استخدام نتيجة نظرية الجبر الأساسية، تحتوي $k(x)$ على خمسة أصفار بالفعل، بما في ذلك أي صفر قد يكون متكررًا. يعطينا التحليل إلى العوامل الخطية هذه الأصفار الخمسة: -5 و 2 و 3 و i و $-i$.

تمرين موجّه

اكتب كل دالة في صورة (a) ناتج ضرب العوامل الخطية والعوامل التربيعية غير القابلة للاختزال و(b) ناتج ضرب العوامل الخطية. ثم (c) اذكر جميع أصفارها.

7a. $f(x) = x^4 + x^3 - 26x^2 + 4x - 120$

7B. $f(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 99x + 108$

نصيحة دراسية

استخدام التكرار سيكون الصفر النسبي في بعض الأحيان صفرًا متكررًا في الدالة. استخدم التمثيل البياني للدالة لتحديد هل ينبغي اختبار صفر نسبي باستخدام التعويض التركيبي بالتتابع.

نصيحة دراسية

الصيغة التربيعية يمكنك أيضًا استخدام القانون العام لإيجاد أصفار $x^2 + 1$ لتحليل التعبير.

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$
$$= \pm \frac{\sqrt{-4}}{2}$$
$$= \pm \frac{2i}{2} = \pm i$$

لذا، يُعد i ,$-i$ أصفارًا ويُعد $(x - i)$ و $(x + i)$ عوامل.

يمكنك استخدام التعويض التركيبي مع الأعداد المركبة بنفس الطريقة التي تستخدمها مع الأعداد الحقيقية. يمكن أن يساعدك ذلك على تحليل الدالة كثيرة الحدود لإيجاد جميع أصفارها.

انتبه!
الأعداد المركبة تذكّر من درس سابق أن جميع الأعداد الحقيقية أعداد مركبة أيضًا.

مثال 8 إيجاد أصفار الدالة كثيرة الحدود بمعلومية واحد منها

جد جميع الأصفار المركبة للدالة $p(x) = x^4 - 6x^3 + 20x^2 - 22x - 13$ مع العلم أن $2 - 3i$ هي صفر للدالة p. ثم اكتب التحليل إلى العوامل الخطية للدالة $p(x)$.

استخدم التعويض التركيبي للتأكد أن $2 - 3i$ هي صفر للدالة $p(x)$.

$2-3i$	1	-6	20	-22	-13
		$2-3i$	$-17+6i$		
	1	$-4-3i$			

$(2-3i)(-4-3i) = -8+6i+9i^2$
$= -8+6i+9(-1)$
$= -17+6i$

$2-3i$	1	-6	20	-22	-13
		$2-3i$	$-17+6i$	$24+3i$	
	1	$-4-3i$	$3+6i$		0

$(2-3i)(3+6i) = 6+3i-18i^2$
$= 6+3i-18(-1)$
$= 24+3i$

$2-3i$	1	-6	20	-22	-13
		$2-3i$	$-17+6i$	$24+3i$	13
	1	$-4-3i$	$3+6i$	$2+3i$	0

$(2-3i)(2+3i) = 4-9i^2$
$= 4-9(-1)$
$= 4+9 = 13$

بما أن $2 - 3i$ هي للدالة p، فأنت تعرف أن $2 + 3i$ أيضًا صفر للدالة p. اقسم الدالة كثيرة الحدود المنخفضة على $2 + 3i$.

$2+3i$	1	$-4-3i$	$3+6i$	$2+3i$
		$2+3i$	$-4-6i$	$-2-3i$
	1	-2	-1	0

باستخدام هذين الصفرين والدالة كثيرة الحدود المنخفضة من هذه القسمة الأخيرة، يمكنك كتابة
$p(x) = [x - (2 - 3i)][x - (2 + 3i)](x^2 - 2x - 1)$

بما أن $p(x)$ دالة رباعية كثيرة الحدود، فأنت تعرف أن لها 4 أصفار حقيقية بالفعل. إذا وجدت صفرين اثنين، تجد الصفرين الآخرين. جد أصفار $x^2 - 2x - 1$ باستخدام القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ القانون العام

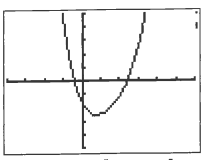
$$= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$ $c = -1$ و $b = -2$ و $a = 1$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$ بسّط

$$= 1 \pm \sqrt{2}$$ بسّط

لذا، أصفار الدالة الأربعة $p(x)$ هي $2 - 3i$ و $2 + 3i$ و $1 + \sqrt{2}$ و $1 - \sqrt{2}$ ويكون التحليل إلى العوامل الخطية للدالة $p(x)$ هو

$[x - (2 - 3i)] \times [x - (2 + 3i)][x - (1 + \sqrt{2})][x - (1 - \sqrt{2})]$


[-4, 6] scl: 1 by [-40, 40] scl: 8

باستخدام التمثيل البياني للدالة $p(x)$، يمكنك التأكد من أن الدالة تحتوي على صفرين حقيقيين عند $1 + \sqrt{2}$ أو حوالي 2.41 و $1 - \sqrt{2}$ أو حوالي -0.41

نصيحة دراسية
قسمة العوامل المشتركة قبل تطبيق أي من الطرق الواردة في هذا الدرس، تذكّر أن إخراج أي عوامل مشتركة أحادية الحد. على سبيل المثال، ينبغي أولاً تحليل $g(x) = -2x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 8x$ كما يلي $g(x) = -2x(x^3 - 3x^2 + 2x + 4)$. وهذا يعني أن 0 هو صفر للدالة g.

تمرين موجّه

لكل دالة، استخدم الصفر الموضح لإيجاد جميع الأصفار المركبة للدالة. ثم اكتب التحليل إلى العوامل الخطية للدالة.

8A. $g(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 46x + 10;\ 2 + \sqrt{3}$

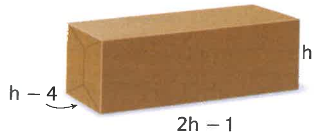
8B. $h(x) = x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 8x - 95;\ 1 - \sqrt{6}$

تمارين

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها يكون أصفارًا، إن وجدت. (المثالان 1 و 2)

1. $g(x) = x^4 - 6x^3 - 31x^2 + 216x - 180$
2. $f(x) = 4x^3 - 24x^2 - x + 6$
3. $g(x) = x^4 - x^3 - 31x^2 + x + 30$
4. $g(x) = -4x^4 + 35x^3 - 87x^2 + 56x + 20$
5. $h(x) = 6x^4 + 13x^3 - 67x^2 - 156x - 60$
6. $f(x) = 18x^4 + 12x^3 + 56x^2 + 48x - 64$
7. $h(x) = x^5 - 11x^4 + 49x^3 - 147x^2 + 360x - 432$
8. $g(x) = 8x^5 + 18x^4 - 5x^3 - 72x^2 - 162x + 45$

9. **التصنيع** فيما يلي مواصفات أبعاد العبوة الكرتونية الجديدة. إذا تم تمثيل حجم الحاوية بالصيغة $V(h) = 2h^3 - 9h^2 + 4h$ وتحتوي على $45\ in^3$ من سلعة ما، فما هي أبعاد العبوة؟ (مثال 3)



جد حلاً لكل من المعادلات التالية. (المثال 3)

10. $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 20x - 12 = 0$
11. $x^4 + 9x^3 + 23x^2 + 3x - 36 = 0$
12. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$
13. $x^4 - 3x^3 - 20x^2 + 84x - 80 = 0$
14. $x^4 + 34x = 6x^3 + 21x^2 - 48$
15. $6x^4 + 41x^3 + 42x^2 - 96x + 6 = -26$
16. $-12x^4 + 77x^3 = 136x^2 - 33x - 18$

17. **المبيعات** يمكن تمثيل المبيعات $S(x)$ بآلاف الدراهم التي يحققها متجر في الشهر تقريبًا من خلال $S(x) = 2x^3 - 2x^2 + 4x$، بحيث x هو عدد الأيام بعد أول يوم من الشهر. كم عدد الأيام الذي يستغرقها المتجر لتحقيق AED 16,000؟ (المثال 3)

حدد فترة يجب أن توجد فيها جميع الأصفار الحقيقية لكل دالة. اشرح استدلالك باستخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى. ثم جد الأصفار الحقيقية. (المثال 4)

18. $f(x) = x^4 - 9x^3 + 12x^2 + 44x - 48$
19. $f(x) = 2x^4 - x^3 - 29x^2 + 34x + 24$
20. $g(x) = 2x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 4x + 16$
21. $g(x) = 6x^4 - 33x^3 - 6x^2 + 123x - 90$
22. $f(x) = 2x^4 - 17x^3 + 39x^2 - 16x - 20$
23. $f(x) = 2x^4 - 13x^3 + 21x^2 + 9x - 27$
24. $h(x) = x^5 - x^4 - 9x^3 + 5x^2 + 16x - 12$
25. $h(x) = 4x^5 - 20x^4 + 5x^3 + 80x^2 - 75x + 18$

وضّح الأصفار الحقيقية الممكنة لكل دالة. (المثال 5)

26. $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4x + 7$
27. $f(x) = 10x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 4x - 8$
28. $f(x) = -3x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 2x - 6$
29. $f(x) = 12x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 2x + 12$
30. $g(x) = 4x^5 + 3x^4 + 9x^3 - 8x^2 + 16x - 24$
31. $h(x) = -4x^5 + x^4 - 8x^3 - 24x^2 + 64x - 124$

اكتب دالة كثيرة الحدود من أقل درجة ذات معاملات حقيقية بالصيغة القياسية التي تشتمل على الأصفار الموضحة. (المثال 6)

32. $3, -4, 6, -1$
33. $-2, -4, -3, 5$
34. $-5, 3, 4 + i$
35. $-1, 8, 6 - i$
36. $2\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, -3, 7$
37. $-5, 2, 4 - \sqrt{3}, 4 + \sqrt{3}$
38. $\sqrt{7}, -\sqrt{7}, 4i$
39. $\sqrt{6}, -\sqrt{6}, 3 - 4i$
40. $2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}, 4 + 5i$
41. $6 - \sqrt{5}, 6 + \sqrt{5}, 8 - 3i$

اكتب كل دالة في صورة (a) ناتج العوامل الخطية والعوامل التربيعية غير القابلة للاختزال و(b) ناتج العوامل الخطية. ثم (c) اذكر جميع أصفارها. (المثال 7)

42. $g(x) = x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 20x + 48$
43. $g(x) = x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 8$
44. $h(x) = x^4 + 2x^3 - 15x^2 + 18x - 216$
45. $f(x) = 4x^4 - 35x^3 + 140x^2 - 295x + 156$
46. $f(x) = 4x^4 - 15x^3 + 43x^2 + 577x + 615$
47. $h(x) = x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 4x + 30$
48. $g(x) = x^4 + 31x^2 - 180$

استخدم الصفر الموضح لإيجاد كل الأصفار المركبة لكل دالة. ثم اكتب التحليل إلى العوامل الخطية للدالة. (المثال 8)

49. $h(x) = 2x^5 + x^4 - 7x^3 + 21x^2 - 225x + 108$; $3i$
50. $h(x) = 3x^5 - 5x^4 - 13x^3 - 65x^2 - 2{,}200x + 1{,}500$; $-5i$
51. $g(x) = x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 28x^2 + 46x - 60$; $3 - i$
52. $g(x) = 4x^5 - 57x^4 + 287x^3 - 547x^2 + 83x + 510$; $4 + i$
53. $f(x) = x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 32x + 96$; $-2i$
54. $g(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 46x + 10$; $3 + i$

55. **الهندسة المعمارية** يصمم مهندس معماري نموذجًا مقياسيًا لمبنى بشكل هرمي.

a. إذا كان ارتفاع النموذج المقياسي أقل من طوله بمقدار 9 cm وكانت قاعدته مربعة، فاكتب دالة كثيرة الحدود توضح حجم النموذج من حيث طوله.

b. إذا كان حجم النموذج $6{,}300\ cm^3$، فاكتب معادلة توضح الموقف.

c. ما أبعاد النموذج المقياسي؟

56. الإنشاءات يزيد ارتفاع نفق قيد الإنشاء عن نصف عرضه بمقدار قدم واحد وطوله يزيد عن 324 مرة من عرضه بمقدار 32 ft. إذا كان حجم النفق $62.231.040\ ft^3$ وعلى شكل متوازي مستطيلات، فجد الطول والعرض والارتفاع.

اكتب دالة كثيرة الحدود من أقل درجة ذات معاملات صحيحة تحتوي على العدد الموضح كصفر.

57. $\sqrt[3]{6}$

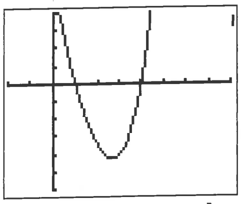
58. $\sqrt[3]{5}$

59. $-\sqrt[3]{2}$

60. $-\sqrt[3]{7}$

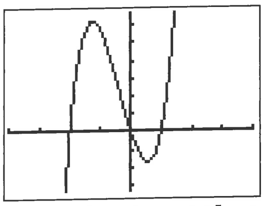
استخدم كل تمثيل بياني لكتابة g كناتج للعوامل الخطية. ثم اذكر جميع أصفارها.

61. $g(x) = 3x^4 - 15x^3 + 87x^2 - 375x + 300$



[-2, 8] scl: 1 by [-300, 200] scl: 50

62. $g(x) = 2x^5 + 2x^4 + 28x^3 + 32x^2 - 64x$



[-4, 4] scl: 1 by [-40, 80] scl: 12

حدد جميع الأصفار النسبية المحتملة للدالة.

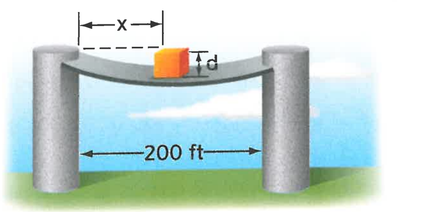
63. $h(x) = 6x^3 - 6x^2 + 12$

64. $f(y) = \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^3 - y^2 + 2y - 8$

65. $w(z) = z^4 - 10z^3 + 30z^2 - 10z + 29$

66. $b(a) = a^5 - \frac{5}{6}a^4 + \frac{2}{3}a^3 - \frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}$

67. الهندسة تدعم دعامتين بينهما مسافة 200 ft عارضة من الصلب. إذا وُضع وزن على مسافة x ft من الدعامة الموجودة على اليسار، فسيحدث انحراف رأسي تمثله الدالة التالية $d = 0.0000008x^2(200 - x)$ كم يبعد الوزن عن الدعامة إذا كان الانحراف الرأسي 0.8 m؟



اكتب كل دالة كثيرة الحدود كناتج للعوامل الخطية والعوامل التربيعية غير القابلة للاختزال.

68. $x^3 - 3$

69. $x^3 + 16$

70. $8x^3 + 9$

71. $27x^6 + 4$

72. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة سوف تستكشف الدوال كثيرة الحدود الزوجية والفردية.

a. العرض التحليلي حدد الدرجة وعدد أصفار كل دالة كثيرة الحدود.

i. $f(x) = x^3 - x^2 + 9x - 9$

ii. $g(x) = 2x^5 + x^4 - 32x - 16$

iii. $h(x) = 5x^3 + 2x^2 - 13x + 6$

iv. $f(x) = x^4 + 25x^2 + 144$

v. $h(x) = 3x^6 + 5x^5 + 46x^4 + 80x^3 - 32x^2$

vi. $g(x) = 4x^4 - 11x^3 + 10x^2 - 11x + 6$

b. العرض العددي جد أصفار كل دالة.

c. العرض الكلامي هل يجب أن تحتوي دالة من الدرجة الفردية على أقل عدد من الأصفار الحقيقية؟ اشرح.

مسائل مهارات التفكير العُليا استخدام مهارات التفكير العُليا

73. تحليل الخطأ تستخدم أيوب ومازن نظرية الأصفار النسبية لإيجاد جميع الأصفار النسبية الممكنة للدالة $f(x) = 7x^2 + 2x^3 - 5x - 3$ ويعتقد أيوب أن الأصفار الممكنة هي ± 3 و± 1 و$\pm \frac{3}{7}$ و$\pm \frac{1}{7}$ ويعتقد مازن أنها ± 3 و± 1 و$\pm \frac{3}{2}$ و$\pm \frac{1}{2}$. هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

74. الاستنتاج اشرح لماذا يجب أن تحتوي $g(x) = x^9 - x^8 + x^5 + x^3 - x^2 + 2$ على جذر بين -1 = x و $x = 0$.

75. تحدٍ استخدم $f(x) = x^2 + x - 6$ و $f(x) = x^3 + 8x^2 + 19x + 12$ و $f(x) = x^4 - 2x^3 - 21x^2 + 22x + 40$ لوضع فرضية عن العلاقة بين التمثيلات البيانية وأصفار $f(x)$ والرسوم البيانية وأصفار كل مما يلي.

a. $-f(x)$

b. $f(-x)$

76. مسألة مفتوحة اكتب دالة من الدرجة 4 ذات صفر تخيلي وصفر غير نسبي.

77. الاستنتاج حدد هل العبارة صحيحة أم خاطئة. إذا كانت خاطئة، فاضرب مثالاً مضادًا. تحتوي دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة ذات معاملات حقيقية على صفر غير حقيقي واحد فقط.

تحدٍ جد أصفار كل دالة إذا كانت $h(x)$ تحتوي على أصفار عند x_1 و x_2 و x_3.

78. $c(x) = 7h(x)$

79. $k(x) = h(3x)$

80. $g(x) = h(x - 2)$

81. $f(x) = h(-x)$

82. الاستنتاج عند وجود أول حدين للدالة كثيرة الحدود التالية $f(x) = a_1x^5 - a_2x^4 + \ldots$، إذا كانت $x - c$ عاملاً للدالة $f(x)$. فما القيمة التي يجب أن تكون c أكبر منها أو تساويها لتصبح حدًا أعلى لأصفار الدالة $f(x)$؟ لنفرض أن المعاملات المحددة غير سالبة و $a_1 \neq 0$. اشرح استنتاجك.

83. الكتابة في الرياضيات اشرح لماذا يجب أن تحتوي دالة كثيرة الحدود ذات معاملات حقيقية وصفر واحد تخيلي على صفرين تخيليين اثنين على الأقل.

مراجعة شاملة

اقسم باستخدام القسمة التركيبية. (الدرس 1-3)

84. $(x^3 - 9x^2 + 27x - 28) \div (x - 3)$

85. $(x^4 + x^3 - 1) \div (x - 2)$

86. $(3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x - 2) \div (x + 1)$

87. $(2x^3 - 2x - 3) \div (x - 1)$

وضح السلوك الطرفي للتمثيل البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيسي. (الدرس 1-2)

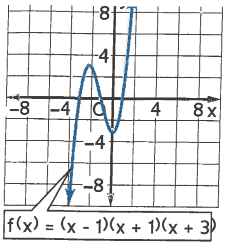
88. $f(x) = -4x^7 + 3x^4 + 6$

89. $f(x) = 4x^6 + 2x^5 + 7x^2$

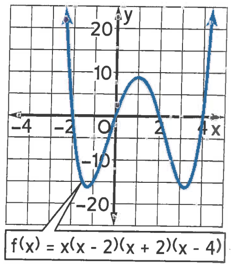
90. $g(x) = 3x^4 + 5x^5 - 11$

قدِّر لأقرب 0.5 وحدة وصنِّف القيم القصوى للتمثيل البياني لكل دالة. ادعم إجابتك بالأرقام. (الدرس 1-4)

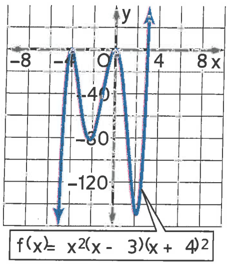
91.



92.



93.



94. **المسائل المالية** يختار المستثمرون أسهمًا مختلفة لضمان محفظة متوازنة. توضح المصفوفات أسعار سهم واحد لكل مجموعة من الأسهم المختلفة في أول يوم عمل من شهر يوليو وأغسطس وسبتمبر.

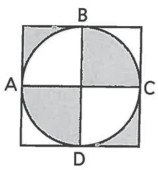
$$\begin{array}{cccc} \text{يوليو} & \text{أغسطس} & \text{سبتمبر} & \\ [33.81 & 30.94 & 27.25] & \text{A السهم} \\ [15.06 & 13.25 & 8.75] & \text{B السهم} \\ [54 & 54 & 46.44] & \text{C السهم} \\ [52.06 & 44.69 & 34.38] & \text{D السهم} \end{array}$$

a. تمتلك السيدة حورية 42 سهمًا من السهم A و 59 سهمًا من السهم B و 21 سهمًا من السهم C و 18 سهمًا من السهم D. اكتب مصفوفة صفية تمثل محفظة السيدة حورية.

b. استخدم ضرب المصفوفات لإيجاد إجمالي قيمة محفظة السيدة حورية لكل شهر إلى أقرب فلس.

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

95. **SAT/ACT** هناك دائرة محصورة في مربع وتقطع المربع في النقاط التالية A و B و C و D. إذا كان $AC = 12$، فما إجمالي مساحة المناطق المظللة؟



A 18
B 36
C 18π
D 24π
E 72

96. **مراجعة** $f(x) = x^2 - 4x + 3$ لها حد أدنى نسبي يقع على أي من قيم x التالية؟

F -2
G 2
H 3
J 4

97. جد جميع أصفار $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 20$.

A $-4, 1 + 2i, 1 - 2i$
B $1, 4 + i, 4 - i$
C $-1, 1, 4 + i, 4 - i$
D $4, 1 + i, 1 - i$

98. **مراجعة** أي تعبير يساوي $(t^2 + 3t - 9)(5 - t)^{-1}$؟

F $t + 8 - \frac{31}{5 - t}$
G $-t - 8$
H $-t - 8 + \frac{31}{5 - t}$
J $-t - 8 - \frac{31}{5 - t}$

الدرس 1-5 الدوال النسبية

:: السابق

- حددت نقاط الانفصال والسلوك الطرفي للتمثيلات البيانية للدوال باستخدام الحدود.

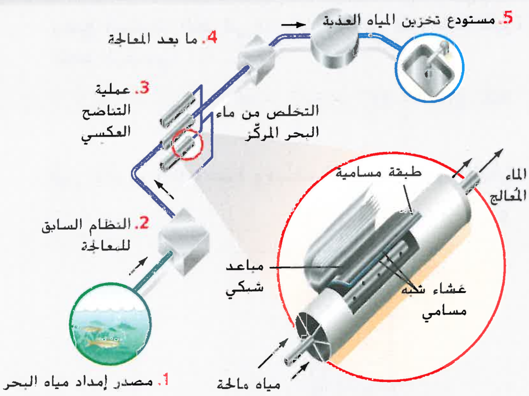
:: الحالي

1 تحليل الدوال النسبية وتمثيلها بيانيًا.

2 حل المعادلات النسبية.

:: لماذا؟

- يتم استخدام تحلية الماء أو إزالة الملح من ماء البحر حاليًا في مناطق من العالم بسبب الكمية المحدودة للماء المتوفر وفي العديد من السفن والغواصات. وتعتبر أيضًا بديلاً لتوفير الماء في المستقبل. ويمكن إنشاء نموذج لتكلفة النطاقات المتنوعة لتحلية الماء باستخدام الدوال النسبية.



مفردات جديدة

الدالة النسبية rational function
خط تقارب asymptote
خط تقارب رأسي vertical asymptote
خط تقارب أفقي horizontal asymptote
خط تقارب مائل oblique asymptote
فجوات holes

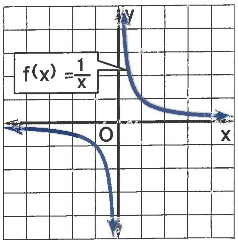
1 الدوال النسبية

الدالة النسبية $f(x)$ تساوي ناتج قسمة دالتين كثيرتي الحدود $a(x)$ و $b(x)$، حيث b لا يساوي صفرًا.

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)},\ b(x) \neq 0$$

مجال الدالة النسبية هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية باستثناء تلك القيم التي تجعل المعادلة $b(x) = 0$ أو النواتج الصفرية للمعادلة $b(x)$.

تمثل الدالة المقلوبة إحدى أبسط الدوال النسبية $f(x) = \frac{1}{x}$. كما هو الحال مع الكثير من الدوال النسبية، يتضمن التمثيل البياني للدالة المقلوبة فروعًا تقترب من قيم x وقيم y محددة. وتُسمى المستقيمات التي تمثل هذه القيم **خط التقارب**.



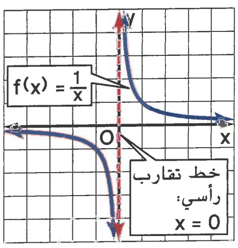
وبما أن الدالة المقلوبة غير معرفة عندما $x = 0$، إذن مجالها يساوي $(-\infty, 0)$ أو $(0, \infty)$. ويمكن وصف سلوك الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ إلى اليسار (0^-) وإلى اليمين (0^+) لقيمة $x = 0$ باستخدام الحدود.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

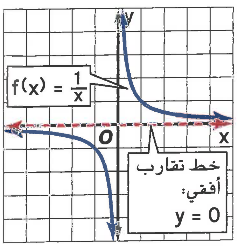
من درس سابق، ينبغي إدراك أن الصفر كنقطة للانفصال اللانهائي في مجال الدالة f. يُسمى المستقيم $x = 0$ في الشكل 1.5.2 *خط تقارب رأسيًا* للتمثيل البياني للدالة f. ويمكن، أيضًا، وصف السلوك الطرفي للدالة f باستخدام الحدود.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

يُسمى المستقيم $y = 0$ في الشكل 2.5.2 *خط تقارب أفقيًا* للتمثيل البياني للدالة f.



الشكل 1.5.2



الشكل 1.5.2

ويمكن تعميم هذه التعريفات لخطوط التقارب الرأسية والأفقية.

يمكنك استخدام معرفتك بالحدود والانفصال والسلوك الطرفي لتحديد خطوط التقارب الرأسية والأفقية، إن وُجدت، للدالة النسبية.

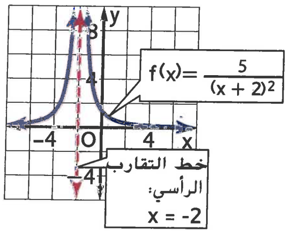
قراءة الرياضيات

رمز النهاية التعبير $\lim_{x\to c^-} f(x)$ يُقرأ بالطريقة التالية *نهاية الدالة f من x عندما تقترب x من c من اليسار* والتعبير $\lim_{x\to c^+} f(x)$ يُقرأ بالطريقة التالية *نهاية الدالة f من x عندما تقترب x من c من اليمين*.

المفهوم الأساسي خطوط التقارب الرأسية والأفقية

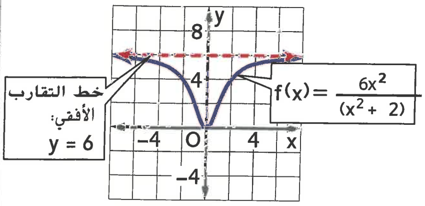
التوضيح بالكلمات $x = c$ هو خط تقارب رأسي للتمثيل البياني للدالة f إذا كان $\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$

مثال



التوضيح بالكلمات $y = c$ هو خط تقارب أفقي للتمثيل البياني للدالة f إذا كان $\lim_{x\to -\infty} f(x) = c$ أو $\lim_{x\to \infty} f(x) = c$

مثال



مثال 1 إيجاد خطوط التقارب الرأسية والأفقية

جد مجال كل دالة ومعادلات خطوط التقارب الرأسية أو الأفقية، إن وُجدت.

a. $f(x) = \dfrac{x+4}{x-3}$

الخطوة 1 **جد المجال.**

تكون الدالة غير معرّفة عند الصفر الحقيقي في المقام $b(x) = x - 3$ تساوي صفرًا. العدد الحقيقي الذي يجعل ناتج المعادلة $b(x)$ يساوي صفرًا هو 3. إذًا، مجال الدالة f هو كل الأعداد الحقيقية ما عدا $x = 3$.

الخطوة 2 **جد خطوط التقارب، إن وُجدت.**

تحقق من خطوط التقارب الرأسية.

حدّد ما إذا كانت $x = 3$ نقطة انفصال لا نهائي. جد الحد حيث x تقترب من 3 من اليسار واليمين.

x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	−69	−699	−6999	غير معرّف	7001	701	71

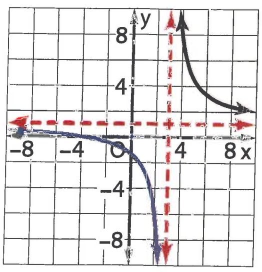
نظرًا لأن $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \infty$، فأنت تعلم أن $x = 3$ هو خط تقارب رأسي للدالة f.

تحقق من خطوط التقارب الأفقية.

استخدم جدولاً لفحص السلوك الطرفي للدالة $f(x)$.

x	−10,000	−1000	−100	0	100	1000	10,000
$f(x)$	0.9993	0.9930	0.9320	−1.33	1.0722	1.0070	1.0007

يشير الجدول إلى أن $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. وبناءً عليه، فأنت تعلم أن $y = 1$ هو خط تقارب أفقي للدالة f.



التحقق من الحل التمثيل البياني الموضح للدالة $f(x) = \dfrac{x+4}{x-3}$ يدعم كل هذه النتائج. ✔

b. $g(x)=\frac{8x^2+5}{4x^2+1}$

الخطوة 1 الأصفار في المقام $b(x)=4x^2+1$ تخيلية، لذلك، فإن مجال g هو كل الأعداد الحقيقية.

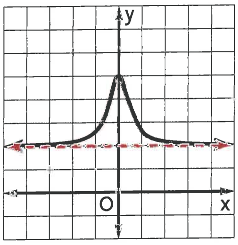
الخطوة 2 نظرًا لأن مجال g هو كل الأعداد الحقيقية، فليس للدالة خطوط تقارب رأسية. وباستخدام القسمة، يمكنك تحديد أن

$$g(x)=\frac{8x^2+5}{4x^2+1}=2+\frac{3}{4x^2+1}$$

حيث إن قيمة $|x|$ تزيد، يصبح $4x^2+1$ عددًا موجبًا كبيرًا بشكل متزايد، كما يتناقص $\frac{3}{4x^2+1}$ مقتربًا من 0. ولذلك،

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=2+0$$

التحقق من الحل يمكنك استخدام جدول القيم لدعم هذا الاستنتاج. التمثيل البياني $g(x)=\frac{8x^2+5}{4x^2+1}$ الموضح يدعم أيضًا كل هذه النتائج. ✔



تمرين موجّه

جد مجال كل دالة ومعادلات خطوط التقارب الرأسية أو الأفقية، إن وُجدت.

1A. $m(x)=\frac{15x+3}{x+5}$

1B. $h(x)=\frac{x^2-x-6}{x+4}$

يوضح التحليل في مثال 1 وجود علاقة بين السلوك الطرفي للدالة وخط التقارب الأفقي. يرد تلخيص هذه العلاقة، مع السمات الأخرى للتمثيلات البيانية للدوال النسبية فيما يلي.

المفهوم الأساسي التمثيلات البيانية للدوال النسبية

إذا كانت f هي الدالة النسبية وفقًا للمعطيات

$$f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0},$$

حيث إن $b(x)\neq 0$ و $a(x)$ و $b(x)$ ليس لها عوامل مشتركة غير ±1. إذًا التمثيل البياني للدالة f له الخصائص التالية.

خطوط التقارب الرأسية قد تحدث خطوط التقارب الرأسية عند الأصفار الحقيقية للمعادلة $b(x)$.

خط التقارب الأفقي قد يحتوي التمثيل البياني على خط تقارب أفقي واحد أو لا يحتوي على خط تقارب أفقي كما هو محدد بمقارنة الدرجة n من $a(x)$ بالدرجة m من $b(x)$.

- إذا كانت $n<m$، فإن الخط المتقارب الأفقي $y=0$
- إذا كانت $n=m$، فإن خط التقارب الأفقي $y=\frac{a_n}{b_m}$
- إذا كانت $n>m$، فلا يوجد خط تقارب أفقي.

نقاط التقاطع تقع نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x، إن وُجدت، عند الأصفار الحقيقية للمعادلة $a(x)$. يكون التقاطع مع المحور الرأسي y، إن وُجد، هو قيمة الدالة f عندما $x=0$

نصيحة دراسية

الأقطاب يُسمى خط التقارب الرأسي في التمثيل البياني للدالة النسبية قطب الدالة أيضًا.

لتمثيل دالة نسبية بيانيًا، بسّط، إن أمكن، ثم اتبع هذه الخطوات.

الخطوة 1 جد المجال.

الخطوة 2 جد خطوط التقارب وارسمها، إن وُجدت.

الخطوة 3 جد نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x ونقاط التقاطع مع المحور الرأسي y وارسمها، إن وُجدت.

الخطوة 4 جد نقطة واحدة على الأقل من *فترات الاختبار* المحددة بأي نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x وخطوط التقارب الرأسية وارسمها.

نصيحة دراسية

فترات الاختبار قد تغير الدالة النسبية الإشارة عند أصفارها وقيمها غير المعرفة. لذلك عندما تُرتب قيم x، فإنها تقسم مجال الدالة إلى فترات الاختبار التي يمكن أن تساعدك على تحديد ما إذا كان التمثيل البياني يقع فوق المحور الأفقي x أم تحته.

مثال 2 تمثيل الدوال النسبية بيانيًا: $n < m$ و $n > m$

في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية ونقاط التقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

a. $g(x) = \dfrac{6}{x+3}$

الخطوة 1 تكون الدالة غير معرفة عند $b(x) = 0$. لذلك يكون المجال $\{x \mid x \neq -3, x \in \mathbb{R}\}$.

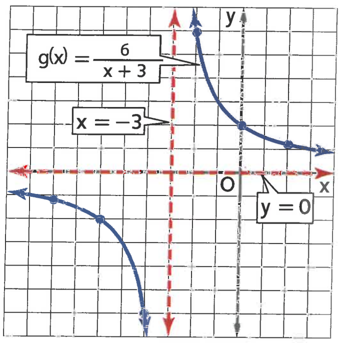
الخطوة 2 يوجد خط تقارب رأسي عند النقطة $x = -3$

تساوي درجة الدالة كثيرة الحدود في البسط صفرًا، وتساوي درجة الدالة كثيرة الحدود في المقام 1. لأن $0 < 1$، التمثيل البياني g يحتوي على خط تقارب أفقي عند النقطة $y = 0$

الخطوة 3 ليس للدالة كثيرة الحدود في البسط أصفار حقيقية، لذلك ليس لـ g نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x. لأن $g(0) = 2$، تكون نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y هي 2.

الخطوة 4 مثّل خطوط التقارب ونقاط التقاطع بيانيًا. ثم اختر قيم x التي تقع في فترات الاختبار المحددة بخط التقارب الرأسي لإيجاد نقاط إضافية لرسمها على التمثيل البياني. استخدم منحنيات سلسة لإكمال التمثيل البياني.

الفترة	x	$(x, g(x))$
$(-\infty, -3)$	-8	$(-8, -1.2)$
	-6	$(-6, -2)$
	-4	$(-4, -6)$
$(-3, \infty)$	-2	$(-2, 6)$
	2	$(2, 1.2)$



نصيحة دراسية

القطع الزائد التمثيلات البيانية للدوال المقلوبة $f(x) = \dfrac{1}{x}$ و $g(x) = \dfrac{6}{x+3}$ تُسمى *القطوع الزائدة*. ستتعلم المزيد عن القطوع الزائدة في وحدة لاحقة.

b. $k(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 3}$

ينتج عن تحليل البسط إلى عوامله $k(x) = \dfrac{(x-2)(x-5)}{x-3}$. لاحظ أنه ليس للبسط والمقام عوامل مشتركة، لذلك يكون التعبير في أبسط صورة.

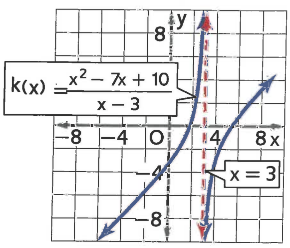
الخطوة 1 تكون الدالة غير معرفة عند $b(x) = 0$. لذلك يكون المجال $\{x \mid x \neq 3, x \in \mathbb{R}\}$.

الخطوة 2 يوجد خط تقارب رأسي عند النقطة $x = 3$.

قارن بين درجات البسط والمقام. لأن $2 > 1$، لا يوجد خط تقارب أفقي.

الخطوة 3 للبسط أصفار عند $x = 2$ و $x = 5$. لذلك نقطتا التقاطع مع المحور الأفقي x هما 2 و5. $k(0) = -\frac{10}{3}$، لذلك تكون نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y هي -3.3 تقريبًا.

الخطوة 4 مثّل خطوط التقارب ونقاط التقاطع بيانيًا. ثم جد النقاط في فترات الاختبار المحددة بنقاط التقاطع وخطوط التقارب الرأسية وارسمها: $(-\infty, 0), (0, 3), (3, \infty)$. استخدم المنحنيات السلسة لإكمال التمثيل البياني.



تمرين موجّه

2A. $h(x) = \dfrac{2}{x^2 + 2x - 3}$

2B. $n(x) = \dfrac{x}{x^2 + x - 2}$

في مثال 3، درجة البسط مساوية لدرجة المقام.

مثال 3 تمثيل الدالة النسبية بيانيًا: $n = m$

حدِّد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية ونقاط التقاطع للدالة $f(x) = \frac{3x^2 - 3}{x^2 - 9}$ ثم مثِّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

ينتج عن تحليل كل من البسط والمقام إلى عوامله $f(x) = \frac{3(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+3)}$ بدون عوامل مشتركة.

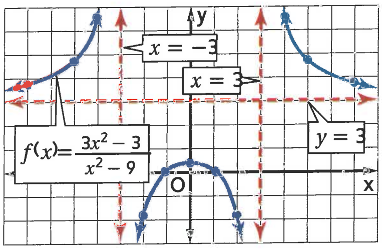
الخطوة 1 تكون الدالة غير معرفة عند $b(x) = 0$، ويكون المجال $\{x \mid x \neq -3, 3, x \in \mathbb{R}\}$

الخطوة 2 توجد خطوط تقارب رأسية عندما $x = 3$ و $x = -3$

ويوجد خط تقارب أفقي عند $y = \frac{3}{1}$ أو $y = 3$، وهي النسبة بين المعاملات المستخدمة للبسط والمقام، لأن درجات الدوال كثيرة الحدود تكون متساوية.

الخطوة 3 نقطتا التقاطع مع المحور الأفقي x هما 1 و -1، وهما النواتج الصفرية للبسط. نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y هي $\frac{1}{3}$ لأن الدالة $f(0) = \frac{1}{3}$

الخطوة 4 مثّل خطوط التقارب ونقاط التقاطع بيانيًا. ثم جد النقاط في فترات الاختبار وارسمها $(-\infty, -3)$ و $(-3, -1)$ و $(-1, 1)$ و $(1, 3)$ و $(3, \infty)$



تمرين موجّه

في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية ونقاط التقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

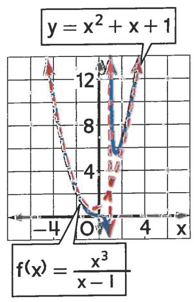
3A. $h(x) = \frac{x - 6}{x + 2}$

3B. $h(x) = \frac{x^2 - 4}{5x^2 - 5}$

نصيحة دراسية

خطوط التقارب اللاخطية

خطوط التقارب تكون كلها خطية. قد يكون للدالة النسبية خط تقارب غير خطي أيضًا. مثلًا، التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^3}{x - 1}$ له خط تقارب تربيعي.



عندما تكون درجة البسط *أكبر بمقدار واحد بالضبط* من درجة المقام، فإن التمثيل البياني يكون له *ميل* أو **خط تقارب مائل**.

المفهوم الأساسي خطوط التقارب المائلة

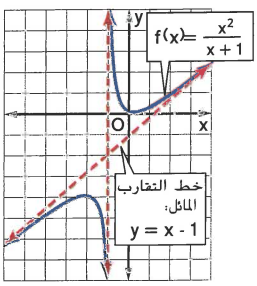
إذا كانت f هي الدالة النسبية وفقًا للمعطيات

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0},$$

حيث إن $b(x)$ لها درجة أكبر من 0 و $a(x)$ ولا توجد عوامل مشتركة للمعادلتين $b(x)$ غير 1. إذًا التمثيل البياني للدالة f يحتوي على خط تقارب مائل إذا كانت قيمة $n = m + 1$. تكون دالة خط التقارب المائل هي ناتج قسمة كثيرات الحدود $q(x)$ الناتج من قسمة $a(x)$ على $b(x)$.

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} = \underbrace{q(x)}_{\text{دالة خط التقارب المائل}} + \frac{r(x)}{b(x)}$$

مثال



مثال 4 تمثيل الدالة النسبية بيانيًا

حدّد أي خطوط تقارب ونقاط التقاطع للدالة $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + x - 12}$ ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

ينتج عن تحليل المقام إلى عوامله $f(x) = \frac{2x^3}{(x + 4)(x - 3)}$

الخطوة 1 تكون الدالة غير معرفة عند $b(x) = 0$. لذلك يكون المجال $\{x \mid x \neq -4, 3, x \in \mathbb{R}\}$

الخطوة 2 توجد خطوط تقارب رأسية عند $x = -4$ و $x = 3$

تكون درجة البسط أكبر من درجة المقام، لذلك لا يوجد خط تقارب أفقي.

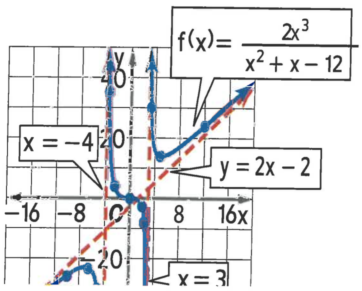
لأن درجة البسط أكبر بواحد بالضبط من درجة المقام، يوجد للدالة f خط تقارب مائل. باستخدام قسمة كثيرات الحدود، يمكنك كتابة ما يلي.

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + x - 12}$$
$$= 2x - 2 + \frac{26x - 24}{x^2 + x - 12}$$

لذلك، تكون معادلة خط التقارب المائل هي $y = 2x - 2$

الخطوة 3 تكون نقاط تقاطع المحور الأفقي x والمحور الرأسي y هي 0، لأن 0 يمثل الناتج الصفري للبسط والدالة $f(0) = 0$

الخطوة 4 مثّل خطوط التقارب ونقاط التقاطع بيانيًا. ثم جد النقاط في فترات الاختبار $(-\infty, -4)$ و $(-4, 0)$ و $(0, 3)$ و $(3, \infty)$ وارسمها.



نصيحة دراسية

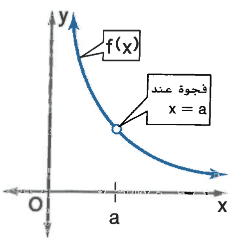
خط التقارب للسلوك الطرفي في مثال 4. التمثيل البياني للدالة f يقترب من خط التقارب المائل $y = 2x - 2$ حيث $x \to \pm\infty$. ومع ذلك، بين خطي التقارب الرأسيين $x = -4$ و$x = 3$. يمر التمثيل البياني بالمستقيم $y = 2x - 2$ ولهذا السبب، يُشار إلى خط التقارب المائل أو الأفقي بخط *التقارب للسلوك الطرفي*.

تمرين موجّه

في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب ونقاط تقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

4A. $h(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x + 4}$ **4B.** $p(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{2x - 3}$

عندما يكون لبسط الدالة النسبية ومقامها معاملات مشتركة، يكون للتمثيل البياني للدالة نقاط انفصال يمكن إزالتها تُسمى **فجوات**، عند النواتج الصفرية للعوامل المشتركة. تأكد من توضيح نقاط الانفصال هذه عندما تقوم بتمثيل الدالة بيانيًا.



اختصر العامل المشترك في البسط والمقام بالقسمة عليه. يكون الناتج الصفري لـ $x - a$ هو a.

$$f(x) = \frac{\cancel{(x - a)}(x - b)}{\cancel{(x - a)}(x - c)}$$

نصيحة دراسية

حالات الانفصال التي يمكن إزالتها والتي لا يمكن إزالتها إذا كانت الدالة غير متصلة عند $x = a$. ولكن يمكن جعلها متصلة في تلك النقطة من خلال التبسيط. إذًا لهذه الدالة *انفصال يمكن إزالته* عند $x = a$. وما عدا ذلك، يكون لهذه الدالة *انفصال لا يمكن إزالته* عند $x = a$

مثال 5 التمثيل البياني لدالة نسبية لها عوامل مشتركة

حدّد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية والفجوات ونقاط التقاطع للدالة $h(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-2x-8}$ ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

ينتج من تحليل كل من البسط والمقام $h(x) = \dfrac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{(x-4)\cancel{(x+2)}}$ $\dfrac{x-2}{x-4}, x \neq -2 , 4$

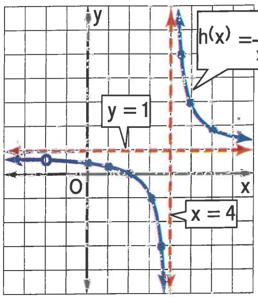
الخطوة 1 تكون الدالة غير معرفة عند $b(x) = 0$. لذلك يكون المجال $\{x \mid x \neq -2, 4, x \in \mathbb{R}\}$

الخطوة 2 يوجد خط تقارب رأسي عند $x = 4$، وهو الصفر الحقيقي للمقام بعد تبسيطه.

يوجد خط تقارب أفقي عند $y = 1$، وهو النسبة للمعاملات الرئيسة لكل من البسط والمقام.
لأن درجات الدوال كثيرة الحدود تكون متساوية والفجوة عند $x=-2$.

الخطوة 3 نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x هي 2، وهو صفر البسط بعد تبسيطه. نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y هي $\frac{1}{2}$ لأن $h(0) = \frac{1}{2}$.

الخطوة 4 مثّل خطوط التقارب ونقاط التقاطع بيانيًا.
ثم جد النقاط في فترات الاختبار $(-\infty, 2)$ و $(2, 4)$ و $(4, \infty)$ وارسمها.
توجد فجوة عند $\left(-2, \frac{2}{3}\right)$ لأن
الدالة الأصلية تكون غير معرفة عند $x = -2$



نصيحة دراسية

الفجوة في مثال 5، حُذِفت $x + 2$ من التعبير الأصلي بالقسمة عليها. عوّض بالعدد -2 في التعبير الجديد.

$h(-2) = \dfrac{(-2)-2}{(-2)-4}$
$= \dfrac{-4}{-6}$ أو $\dfrac{2}{3}$

توجد فجوة عند النقطة $\left(-2, \frac{2}{3}\right)$

تمرين موجّه

في كل دالة، حدّد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية والفجوات ونقاط التقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

5A. $g(x) = \dfrac{x^2+10x+24}{x^2+x-12}$

5B. $c(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-4x-5}$

2 المعادلات النسبية

يمكن حل المعادلات النسبية التي تتضمن كسورًا بضرب كل حد في المعادلة في المقام المشترك الأصغر لكل حدود المعادلة.

مثال 6 حل المعادلة النسبية

حُلّ المعادلة $x + \dfrac{6}{x-8} = 0$

$x + \dfrac{6}{x-8} = 0$ المعادلة الأصلية

$x(x-8) + \dfrac{6}{x-8}(x-8) = 0(x-8)$ اضرب في المقام المشترك الأصغر، $x - 8$.

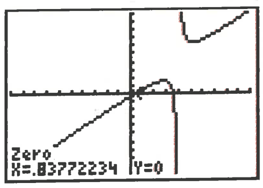
$x^2 - 8x + 6 = 0$ خاصية التوزيع

$x = \dfrac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$ القانون العام

$x = \dfrac{8 \pm 2\sqrt{10}}{2} = 4 \pm \sqrt{10}$ بسّط.

نصيحة دراسية

التحقق من صحة الحل
يمكنك أيضًا التحقق من النتيجة في مثال 6 باستخدام حاسبة بيانية لتمثيل $y = x + \dfrac{6}{x-8}$ بيانيًا. استخدم قائمة الحاسبة البيانية لتحديد مواقع الأصفار. لأن أصفار التمثيل البياني تبدو عند $x = 0.84$ و $x = 7.16$ تقريبًا، يكون الحل صحيحًا.



[-20, 20] scl: 2 على
[-20, 20] scl: 2

تمرين موجّه

حُلّ كل من المعادلات التالية.

6A. $\dfrac{20}{x+3} - 4 = 0$

6B. $\dfrac{9x}{x-2} = 6$

قد ينتج من حل المعادلة النسبية حلولاً دخيلة. تحقق من إجاباتك في المعادلة الأصلية دائمًا.

نصيحة دراسية

التقاطع يمكنك استخدام سمة التقاطع في الحاسبة البيانية في حل معادلة نسبية بالتمثيل البياني لكل من طرفي المعادلة وإيجاد كل نقاط التقاطع للتمثيلين البيانيين.

مثال 7 حل معادلة نسبية باستخدام الحلول الدخيلة

حُلّ المعادلة $\frac{4}{x^2-6x+8} = \frac{3x}{x-2} + \frac{2}{x-4}$

المقام المشترك الأصغر للتعابير هو $(x-2)(x-4)$، وهي عوامل المعادلة x^2-6x+8

$\frac{4}{x^2-6x+8} = \frac{3x}{x-2} + \frac{2}{x-4}$ المعادلة الأصلية

$(x-2)(x-4)\frac{4}{x^2-6x+8} = (x-2)(x-4)\left(\frac{3x}{x-2} + \frac{2}{x-4}\right)$ اضرب في المقام المشترك الأصغر

$4 = 3x(x-4) + 2(x-2)$ خاصية التوزيع

$4 = 3x^2 - 10x - 4$ خاصية التوزيع

$0 = 3x^2 - 10x - 8$ اطرح 4 من كل طرف.

$0 = (3x+2)(x-4)$ حلل.

$x = -\frac{2}{3}$ أو $x = 4$ جد الحل.

لأن الدالة الأصلية تكون غير معرفة عند $x = 4$، يمكنك حذف هذا الحل الدخيل. لذلك، يكون الحل الوحيد هو $-\frac{2}{3}$

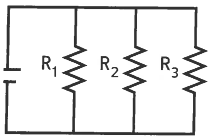
تمرين موجّه

حُـــلّ كل من المعادلات التالية.

7A. $\frac{2x}{x+3} + \frac{3}{x-6} = \frac{27}{x^2-3x-18}$

7B. $-\frac{12}{x^2+6x} = \frac{2}{x+6} + \frac{x-2}{x}$

مثال 8 من الحياة اليومية حل المعادلة النسبية



الكهرباء يوضح مخطط دائرة كهربية ثلاث مقاومات متوازية. إذا كانت R هي المقاومة المكافئة للمقاومات الثلاث،

إذًا $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$. في هذه الدائرة، R_1 تساوي ضعف مقاومة R_2، و R_3 تساوي 20 أوم. لنفترض أن المقاومة المكافئة تساوي 10 أوم. جد R_1 و R_2.

$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ المعادلة الأصلية

$\frac{1}{10} = \frac{1}{2R_2} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{20}$ $R_3 = 20$ ، $R_1 = 2R_2$ ، $R = 10$

$\frac{1}{20} = \frac{1}{2R_2} + \frac{1}{R_2}$ اطرح $\frac{1}{20}$ من كل طرف.

$(20R_2)\frac{1}{20} = (20R_2)\left(\frac{1}{2R_2} + \frac{1}{R_2}\right)$ اضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر، وهو $20R_2$.

$R_2 = 10 + 20 = 30$ بسّط.

R_2 تساوي 30 أوم و $R_1 = 2R_2$ أو 60 أوم.

مهن من الحياة اليومية

فني الكهرباء يعمل فنيو الكهرباء في تركيب مكونات كهربية متنوعة مثل توصيلات الأسلاك والمصابيح ويقومون بصيانتها. كما يجب عليهم الحفاظ على الالتزام بالقوانين العالمية والمحلية والخاصة بالدولة. يستكمل معظم فنيي الكهرباء برنامج تمرين يتضمن كلا من التعليم داخل الفصول الدراسية والتدريب العملي.

تمرين موجّه

8. الأجهزة الإلكترونية لنفترض أن التيار I، بالأمبير، في دائرة كهربية، تم تحديده بالصيغة $I = t + \frac{1}{10-t}$، حيث t هو الزمن بالثواني. في أي وقت يساوي التيار أمبير واحد؟

تمارين

جد مجال كل دالة ومعادلات خطوط التقارب الرأسية أو الأفقية، إن وُجدت. (المثال 1)

1. $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x^2-4}$
2. $h(x)=\dfrac{x^3-8}{x+4}$
3. $f(x)=\dfrac{x(x-1)(x+2)^2}{(x+3)(x-4)}$
4. $g(x)=\dfrac{x-6}{(x+3)(x+5)}$
5. $h(x)=\dfrac{2x^2-4x+1}{x^2+2x}$
6. $f(x)=\dfrac{x^2+9x+20}{x-4}$
7. $h(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-2)^2(x+4)^2}$
8. $g(x)=\dfrac{(x-4)(x+2)}{(x+1)(x-3)}$

في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب ونقاط التقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها. (الأمثلة 1-5)

9. $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-3)}{(x+4)(x-5)}$
10. $g(x)=\dfrac{(2x+3)(x-6)}{(x+2)(x-1)}$
11. $f(x)=\dfrac{8}{(x-2)(x+2)}$
12. $f(x)=\dfrac{x+2}{x(x-6)}$
13. $g(x)=\dfrac{(x+2)(x+5)}{(x+5)^2(x-6)}$
14. $h(x)=\dfrac{(x+6)(x+4)}{x(x-5)(x+2)}$
15. $h(x)=\dfrac{x^2(x-2)(x+5)}{x^2+4x+3}$
16. $f(x)=\dfrac{x(x+6)^2(x-4)}{x^2-5x-24}$
17. $f(x)=\dfrac{x-8}{x^2+4x+5}$
18. $g(x)=\dfrac{-4}{x^2+6}$

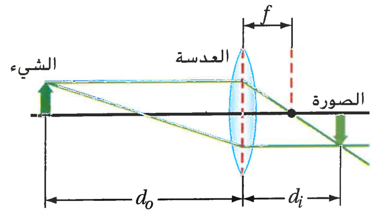
19. **المبيعات** خطة العمل لمشاريع غسل السيارات الجديدة التي سيتم فيها تمثيل الأرباح بآلاف الدراهم بالدالة $p(z)=\dfrac{3z^2-3}{2z^2+7z+5}$، حيث z تمثل أسبوع التشغيل و$z=0$ تمثل الافتتاح. (المثال 4)
   a. اذكر مجال الدالة.
   b. حدّد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية ونقاط تقاطع الدالة $p(z)$.
   c. مثّل الدالة بيانيًا.

في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب والفجوات ونقاط التقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها. (الأمثلة 2-5)

20. $h(x)=\dfrac{3x-4}{x^3}$
21. $h(x)=\dfrac{4x^2-2x+1}{3x^3+4}$
22. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+4x+3}$
23. $g(x)=\dfrac{x+7}{x-4}$
24. $h(x)=\dfrac{x^3}{x+3}$
25. $g(x)=\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x-4}$
26. $f(x)=\dfrac{x^2-4x-21}{x^3+2x^2-5x-6}$
27. $g(x)=\dfrac{x^2-4}{x^3+x^2-4x-4}$
28. $f(x)=\dfrac{(x+4)(x-1)}{(x-1)(x+3)}$
29. $g(x)=\dfrac{(2x+1)(x-5)}{(x-5)(x+4)^2}$

30. **الإحصاء** يُقال إن العدد x هو *الوسط التوافقي* للعددين y و z إذا كان $\frac{1}{x}$ هو المتوسط بين $\frac{1}{y}$ و $\frac{1}{z}$. (المثال 7)
   a. اكتب معادلة يكون حلها الوسط التوافقي بين 30 و 45.
   b. جد الوسط التوافقي بين 30 و 45.

31. **بصريات** تكون معادلة العدسة $\frac{1}{f}=\frac{1}{d_i}+\frac{1}{d_o}$، حيث تكون f هي البعد البؤري، و d_i هي المسافة من العدسة إلى الصورة، و d_o هي المسافة من العدسة إلى الشيء. لنفترض أن الشيء يبعد 32 cm عن العدسة والبعد البؤري يساوي 8 cm. (مثال 7)



   a. اكتب معادلة نسبية لتمثيل الموقف.
   b. جد المسافة بين العدسة والصورة.

حُلّ كل من المعادلات التالية. (أمثلة 6-8)

32. $y+\dfrac{6}{y}=5$
33. $\dfrac{8}{z}-z=4$
34. $\dfrac{x-1}{2x-4}+\dfrac{x+2}{3x}=1$
35. $\dfrac{2}{y+2}-\dfrac{y}{2-y}=\dfrac{y^2+4}{y^2-4}$
36. $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{23}{x^2+x}$
37. $\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{14}{x^2-2x}$
38. $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{1}{20}$
39. $\dfrac{6}{x-3}-\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{12}{x^2-x-6}$
40. $\dfrac{x-1}{x-2}+\dfrac{3x+6}{2x+1}=3$
41. $\dfrac{2}{a+3}-\dfrac{3}{4-a}=\dfrac{2a-2}{a^2-a-12}$

42. **الماء** التكلفة اليومية لإزالة النسبة المئوية x من الملح من ماء البحر في محطة التحلية هي $c(x)=\dfrac{994x}{100-x}$، حيث $0\le x<100$.
   a. مثّل كل دالة بيانيًا باستخدام الحاسبة البيانية.
   b. مثّل بيانيًا المستقيم $y=8{,}000$ وجِد التقاطع مع التمثيل البياني لـ $c(x)$ لتحديد النسبة المئوية للملح الذي يمكن إزالته مقابل AED 8,000 يوميًا.
   c. وفقًا للنموذج، هل من الممكن أن تزيل محطة التحلية 100% من الملح؟ اشرح استدلالك.

اكتب دالة نسبية لكل مجموعة من الخصائص.

43. نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x عند $x=0$ و $x=4$، خطوط تقارب رأسية عند $x=1$ و $x=6$، وخط مقارب أفقي عند $y=0$

44. نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x عند $x=2$ و $x=-3$ وخط مقارب رأسي عند $x=4$ ونقطة انفصال عند $(-5, 0)$

45. **الكهرباء** عندما تكون المقاومة الكلية لدائرة متصلة على التوازي ثابتة، يمكن تمثيل المقاومين الفرديين r_1 و r_2 بالمعادلة $r_2 = \dfrac{30r_1}{r_1 - 30}$

a. جد خطوط التقارب الرأسية والأفقية للدالة، إن وُجدت. تحقق من إجابتك بيانيًا.

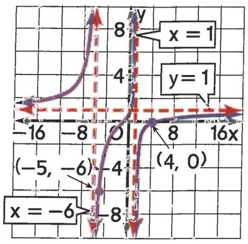
b. انسخ الجدول الموضح وأكمله.

r_1	45	50	55	60	65	70
r_2						

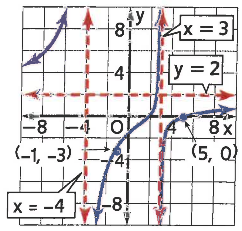
c. هل المجال $r_1 < 30$ صحيح في هذا الموقف؟ اشرح استنتاجك.

استخدم معرفتك بخطوط التقارب والنقاط المذكورة للتعبير عن الدالة الموضحة في كل تمثيل بياني.

46.



47.



استخدم سمة التقاطع في الحاسبة البيانية لحل كل معادلة.

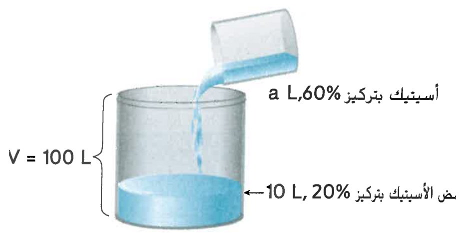
48. $\dfrac{x^4 - 2x^3 + 1}{x^3 + 6} = 8$

49. $\dfrac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^4 + 3x^2 - 4} = 1$

50. $\dfrac{3x^3 - 4x^2 + 8}{4x^4 + 2x - 1} = 2$

51. $\dfrac{2x^5 - 3x^3 + 5x}{4x^3 + 5x - 12} = 6$

52. **الكيمياء** عندما يُضاف محلول حمض الأسيتيك بتركيز 60% إلى 10 لترات من محلول حمض الأسيتيك بتركيز 20% في خزان سعته 100 لتر، يتغير تركيز المحلول الإجمالي.



a. وضّح أن تركيز المحلول يكون $f(a) = \dfrac{3a + 10}{5a + 50}$، حيث تكون a هي حجم المحلول بتركيز 60%.

b. جد المجال ذا الصلة للدالة $f(a)$ وخطوط التقارب الرأسية أو الأفقية، إن وُجدت.

c. اشرح دلالة أي قيود للمجال أو خطوط التقارب.

d. بغض النظر عن قيود المجال، هل توجد أي خطوط تقارب إضافية للدالة؟ اشرح.

53. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستتحقق من خطوط التقارب للدوال النسبية.

a. **العرض الجدولي** انسخ الجدول وأكمله. حدّد خط التقارب الأفقي لكل دالة جبريًا.

الدالة	خط التقارب الأفقي
$f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^3 + 2}$	
$h(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}{x^4 - 4}$	
$g(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^5 + 3}$	

b. **العرض البياني** مثّل كل دالة وخط التقارب الأفقي لها من الجزء a بيانيًا.

c. **العرض الجدولي** انسخ الجدول التالي وأكمله. استخدم نظرية الصفر النسبي لتساعدك على إيجاد الأصفار الحقيقية للبسط في كل دالة.

الدالة	الأصفار الحقيقية للبسط
$f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^3 + 2}$	
$h(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}{x^4 - 4}$	
$g(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^5 + 3}$	

d. **العرض الكلامي** ضع فرضية عن سلوك التمثيل البياني لدالة نسبية عندما تكون درجة المقام أكبر من درجة البسط وللبسط ناتج صفري حقيقي واحد على الأقل.

مسائل مهارات التفكير العُليا استخدام مهارات التفكير العُليا

54. **الاستنتاج** بافتراض أن $f(x) = \dfrac{ax^3 + bx^2 + c}{dx^3 + ex^2 + f}$. فهل سيكون للدالة $f(x)$ في *بعض الأحيان* أو *دائمًا* خط تقارب أفقي أم *لن يكون لها ذلك مطلقًا* عند $y = 1$ إذا كانت a و b و c و d و e و f ثوابت و $a \neq 0$ و $d \neq 0$. اشرح.

55. **ما قبل الكتابة** صمم خطة درس لتدريس موضوعات التمثيل البياني للدوال النسبية الواردة في هذا الدرس. ضع خطة تتناول فيها الهدف والطلاب والفكرة الرئيسة والتسلسل المنطقي والإطار الزمني لإكمال العمل.

56. **تحدٍ** اكتب معادلة نسبية لها خطوط تقارب رأسية عندما $x = -2$ و $x = 3$ وخط تقارب مائل $y = 3x$.

57. **الكتابة في الرياضيات** استخدم الكلمات والتمثيلات البيانية والجداول والمعادلات لتوضيح كيفية تمثيل دالة نسبية بيانيًا.

58. **تحدٍ** جد قيمة k حتى يصبح للمعادلة النسبية حل دخيل واحد وحل حقيقي واحد.

$$\frac{2}{x^2 - 4x + k} = \frac{2x}{x - 1} + \frac{1}{x - 3}$$

59. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا يجب استخدام فترات الاختبار للحصول على تمثيل بياني دقيق لدالة نسبية.

مراجعة شاملة

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أي منها يعد أصفارًا، إن وجدت. (الدرس 4-1)

60. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

61. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 18$

62. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$

استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين الموضحة عوامل لـ $f(x)$. استخدم الدوال ذات الحدين التي تعد عوامل لكتابة الصيغة المحللة إلى عوامل للدالة $f(x)$. (الدرس 1-3)

63. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24;\ x - 3, x - 2$

64. $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 11x^2 - 4x;\ x - 4, 2x - 1$

65. $f(x) = 6x^4 + 59x^3 + 138x^2 - 45x - 50;\ 3x - 2, x - 5$

66. $f(x) = 4x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 17x - 6;\ 4x - 3; x - 1$

67. $f(x) = 4x^5 + 15x^4 + 12x^3 - 4x^2;\ x + 2, 4x + 1$

68. $f(x) = 4x^5 - 8x^4 - 5x^3 + 10x^2 + x - 2;\ x + 1, x - 1$

مثّل كل دالة مما يلي بيانيًا. (الدرس 1-2)

69. $f(x) = (x + 7)^2$

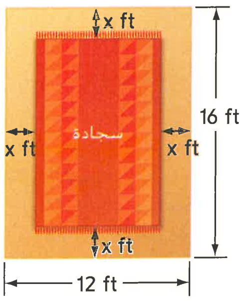
70. $f(x) = (x - 4)^3$

71. $f(x) = x^4 - 5$

72. **البيع بالتجزئة** تتسوق حمد في متجر يعرض إرجاع AED 10 للمشتري لكل AED 50 ينفقها في هذا المتجر. لنفترض أن $f(x) = \left[\!\left[\frac{x}{50}\right]\!\right]$ و $h(x) = 10x$، حيث x هي المبلغ المالي الذي أنفقته حمد. (الدرس 1-6)

a. إذا أنفقت حمد المال في المتجر، فهل يتم تمثيل المبلغ النقدي الذي يُرجعه المتجر بالدالة $f[h(x)]$ أو $h[f(x)]$؟ اشرح استنتاجك.

b. حدّد المبلغ النقدي الذي يُرجعه المتجر إذا أنفقت حمد AED 312.68 في المتجر.



73. **التصميم الداخلي** يعمل أحمد حسن في التصميم الداخلي. طُلب منه وضع سجادة شرقية في المكتب الجديد لإحدى الشركات. ينبغي أن تغطي السجادة نصف إجمالي مساحة الأرضية مع وجود عرض ثابت للمنطقة المحيطة بالسجادة. (الدرس 0-3)

a. إذا كانت أبعاد الغرفة 12 ft في 16 ft. فاكتب معادلة لتمثيل مساحة السجادة فيما يتعلق بـ x.

b. مثّل الدالة ذات الصلة بيانيًا.

c. ما أبعاد السجادة؟

حوّل إلى أبسط صورة.

74. $i^{10} + i^2$

75. $(2 + 3i) + (-6 + i)$

76. $(2.3 + 4.1i) - (-1.2 - 6.3i)$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

77. **اختبار SAT/ACT** تبيع إحدى الشركات القهوة المطحونة في حاويتين على شكل إسطوانة وبحجمين مختلفين. تسع الحاوية الأصغر 300 جرام من القهوة. إذا كانت الحاوية الأكبر لها ضعف نصف قطر الحاوية الأصغر ومرة ونصف قدر الارتفاع، فكم عدد جرامات القهوة التي تسعها الحاوية الأكبر؟ (يتم حساب حجم الإسطوانة بالقاعدة $V = \pi r^2 h$.)

A 850
B 1275
C 1700
D 2126
E 2552

78. ما حلول المعادلات $1 = \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x}$ ؟

F $x = 1, x = -2$
G $x = -2, x = 1$
H $x = 1 + \sqrt{3}, x = 1 - \sqrt{3}$
J $x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

79. **مراجعة** أراد أيمن أن يحسب متوسط درجاته في 6 اختبارات. جمع الدرجات بطريقة صحيحة ليحصل على T ولكنه قسّم على 7 بدلاً من 6. وكانت النتيجة أقل من متوسطه الفعلي بـ 12 درجة. أي معادلة يمكن استخدامها لتحدد قيمة T؟

A $6T + 12 = 7T$
B $\frac{T}{7} = \frac{T - 12}{6}$
C $\frac{T}{7} + 12 = \frac{T}{6}$
D $\frac{T}{6} = \frac{T - 12}{7}$

80. تستطيع أماني أن تجمع أجزاء الأحجية في ثلاث ساعات. وتستطيع حصة أن تجمع أجزاء الأحجية نفسها في خمس ساعات. كم ستستغرقان من الزمن إذا عملتا معًا؟

F $1\frac{3}{8}$ ساعات
G $1\frac{5}{8}$ ساعات
H $1\frac{3}{4}$ ساعات
J $1\frac{7}{8}$ ساعات

الدرس 1-6 المتباينات غير الخطية

:: السابق

- فهمت بحل المعادلات كثيرة الحدود والمعادلات النسبية. (الدرسان 1-3 و 1-4)

:: الحالي

1. حل المتباينات كثيرة الحدود
2. حل المتباينات النسبية.

:: لماذا؟

- تكون العديد من العوامل متضمنة عند بدء عمل جديد، بما في ذلك مقدار من الاستثمار المبدئي وأعمال الصيانة وتكاليف العمالة وتكلفة تصنيع المنتج المراد بيعه وسعر البيع الفعلي المحدد للمنتج. يمكن استخدام المتباينات غير الخطية لتحديد السعر المحدد لبيع أحد المنتجات لتحقيق ربح معين.

مفردات جديدة

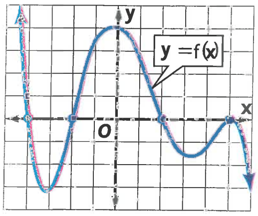
متباينة كثيرة الحدود polynomial inequality
مخطط الإشارات Sign chart
متباينة نسبية rational inequality

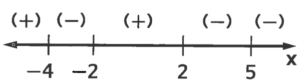
1 المتباينات كثيرة الحدود

إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة الحدود، فعندئذٍ تأخذ **المتباينة كثيرة الحدود** الصورة العامة $f(x) \neq 0$ ،$f(x) < 0$ ،$f(x) \leq 0$ أو $f(x) > 0$ أو $f(x) \geq 0$ وتكون المتباينة $f(x) < 0$ صحيحة عندما يكون $f(x)$ عددًا سالبًا، بينما تكون $f(x) > 0$ صحيحة عندما يكون $f(x)$ عددًا موجبًا.

في الدرس 1-1، تعلمت أن نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x لدالة كثيرة الحدود ما هي إلا أصفار حقيقية للدالة. عند ترتيبها، تنقسم أصفار المحور الأفقي x إلى فترات تكون قيمة $f(x)$ إما موجبة بشكل كامل (تكون أعلى المحور الأفقي x) أو سالبة بشكل كامل (تكون أسفل المحور الأفقي x).

بإيجاد إشارة $f(x)$ لقيمة واحدة فقط في كل فترة على المحور الأفقي x، يمكنك تحديد الفترات التي تكون عليها الدالة موجبة أو سالبة. بداية من فترات الاختبار الممثلة من خلال **مخطط الإشارات** الموجود في الجانب الأيسر، تعرف ما يلي:



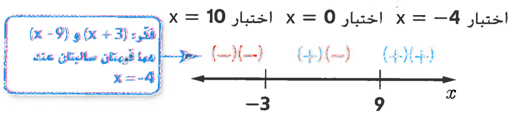


- $f(x) < 0$ بالفترة $(-4, -2) \cup (2, 5) \cup (5, \infty)$
- $f(x) \leq 0$ بالفترة $[-4, -2] \cup [2, \infty)$
- $f(x) = 0$ عند $x = -4, -2, 2, 5$
- $f(x) > 0$ بالفترة $(-\infty, -4) \cup (-2, 2)$
- $f(x) \geq 0$ بالفترة $(-\infty, -4] \cup [-2, 2] \cup [5, 5]$.

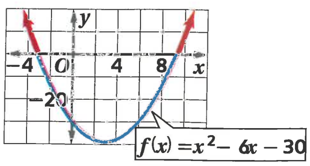
مثال 1 إيجاد حل لمتباينة كثيرة الحدود

حُلّ المتباينة: لما يلي $x^2 - 6x - 30 > -3$

بجمع العدد 3 في كل طرف، تحصل على $x^2 - 6x - 27 > 0$ بافتراض أن $f(x) = x^2 - 6x - 27$ وينتج عن التحليل إلى العوامل ما يلي $f(x) = (x + 3)(x - 9)$. إذن تحتوي $f(x)$ على أصفار حقيقية عند -3 و 9. قم بإنشاء مخطط إشارات باستخدام هذه الأصفار، وبعد ذلك بقيمة ما على المحور الأفقي x في كل فترة اختبار داخل الصورة التي تم تحليلها إلى العوامل للدالة كثيرة الحدود لتحديد هل $f(x)$ موجبة أم سالبة عند تلك النقطة.



لأن $f(x)$ موجبة على الفترات الأولى والأخيرة، فإن مجموعة الحل لـ $x^2 - 6x - 30 > -3$ هي $(-\infty, -3) \cup (9, \infty)$ ويدعم التمثيل البياني لـ $f(x)$ هذا الاستنتاج، نظرًا لوجود $f(x)$ أعلى المحور الأفقي x على هذه الفترات نفسها.



تمرين موجه

حُلّ كل من المتباينات التالية.

1A. $x^2 + 5x + 6 < 20$

1B. $(x - 4)^2 > 4$

إذا كنت تعرف الأصفار الحقيقية لدالة ما، بما في ذلك مقدار التكرار، والسلوك الطرفي للدالة، فيمكنك تصميم مخطط إشارات بدون اختبار القيم.

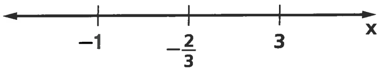
مثال 2 إيجاد حل متباينة كثيرة حدود باستخدام السلوك الطرفي

نصيحة دراسية

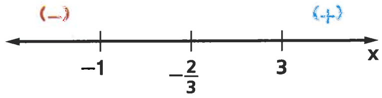
المتباينات كثيرة الحدود يمكنك التحقق من حل إحدى المتباينات كثيرة الحدود بتمثيل الدالة بيانيًا وتقدير القيمة الحقيقية للمتباينة لكل فترة في الحل.

حُلّ المتباينة: $3x^3 - 4x^2 - 13x - 6 \leq 0$

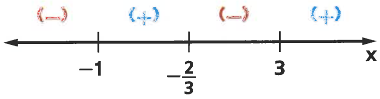
الخطوة 1 بافتراض أن $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 13x - 6$ استخدم الأساليب الواردة في الدرس 1-4 لتحديد أن f يحتوي على أصفار حقيقية عند -1 و$-\frac{2}{3}$ و 3. قم بإنشاء مخطط الإشارات.



الخطوة 2 حدد السلوك الطرفي لـ $f(x)$. لأن درجة f فردية ومعامل الحد الأكبر موجب، فأنت تعرف أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ يعني هذا أن الدالة تبدأ سالبة على اليسار وتنتهي موجبة على اليمين.

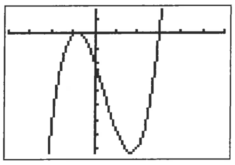


الخطوة 3 لأن كل صفر مدرج يمثل موقع تغيير الإشارة، يمكنك إكمال مخطط الإشارات.



تساوي حلول $3x^3 - 4x^2 - 13x - 6 \leq 0$ قيم المحور الأفقي x بحيث يكون $f(x)$ سالبًا أو مساويًا لـ 0. من مخطط الإشارات، يمكنك معرفة أن مجموعة الحل تساوي $\left[-\frac{2}{3}, 3\right] \cup (-\infty, -1]$.

التحقق من الحل يكون التمثيل البياني لـ $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 13x - 6$ على المحور الأفقي x على $\left[-\frac{2}{3}, 3\right] \cup (-\infty, -1]$. ✔



[-4, 6] scl: 1 by [−25, 5] scl: 3

تمرين موجّه

حُلّ كل من المتباينات التالية.

2A. $2x2 - 10x \leq 2x - 16$

2B. $2x3 + 7x2 - 12x - 45 \geq 0$

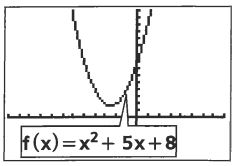
عندما لا تتقاطع دالة كثيرة الحدود مع المحور الأفقي x، يكون للمتباينات المرتبطة حلول غير عادية.

مثال 3 المتباينات كثيرة الحدود التي لها مجموعات حل غير عادية

حُـــلّ كل من المتباينات التالية.

a. $x^2 + 5x + 8 < 0$

لا تحتوي الدالة المرتبطة $f(x) = x^2 + 5x + 8$ على أصفار حقيقية. إذًا لا توجد أي تغيرات في الإشارات. تكون هذه الدالة موجبة بالنسبة لجميع القيم الحقيقية للمحور الأفقي x. لذلك، لا يوجد حل لـ $x^2 + 5x + 8 < 0$. يدعم التمثيل البياني لـ $f(x)$ هذا الاستنتاج، لعدم وجود التمثيل البياني على المحور الأفقي x أو أسفله. ومجموعة الحل هي $\varnothing$.

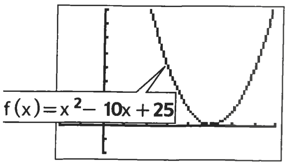


[-12, 8] scl: 1 by [−5, 10] scl: 1

b. $x^2 + 5x + 8 \geq 0$

لأن الدالة المرتبطة $f(x) = x^2 + 5x + 8$ موجبة لجميع القيم الحقيقية للمحور الأفقي x، تساوي مجموعة الحل لـ $x^2 + 5x + 8 \geq 0$ جميع الأعداد الحقيقية أو $(-\infty, \infty)$.

c. $x^2 - 10x + 25 > 0$



$[-2, 8]$ scl: 1 by $[-2, 8]$ scl: 1

تحتوي الدالة المرتبطة التالية $f(x) = x^2 - 10x + 25$ على صفر واحد حقيقي 5، مُكرر مرتين. إذًا لا تتغير إشارة قيمة $f(x)$. تكون هذه الدالة موجبة بالنسبة لجميع القيم الحقيقية للمحور الأفقي x باستثناء $x = 5$. لذلك، تكون مجموعة الحل لـ $x^2 - 10x + 25 > 0$ مساوية لـ $(5, \infty) \cup (5, -\infty)$. يدعم التمثيل البياني لـ $f(x)$ هذا الاستنتاج.

d. $x^2 - 10x + 25 \leq 0$

تحتوي الدالة المرتبطة $f(x) = x^2 - 10x + 25$ على صفر عند العدد 5. بالنسبة لجميع القيم الأخرى للمحور الأفقي x، تكون الدالة موجبة. لذلك، تكون مجموعة الحل لـ $x^2 - 10x + 25 \leq 0$ مساوية لـ $\{5\}$.

تمرين موجّه

حُلّ كل من المتباينات:

3A. $x^2 + 2x + 5 > 0$ 3B. $x^2 + 2x + 5 \leq 0$

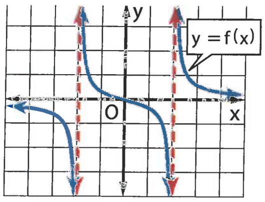
3C. $x^2 - 2x - 15 \leq -16$ 3D. $x^2 - 2x - 15 > -16$

نصيحة دراسية

المتباينات النسبية تذكر تضمين جميع الأصفار والنقاط غير المحددة في دالة نسبية عند إنشاء مخطط الإشارات.

2 المتباينات النسبية

انظر في الدالة النسبية الموضحة على الجانب الأيسر. لاحظ الفترات التي تكون عليها $f(x)$ موجبة وسالبة. في حين يمكن أن تغير الدالة كثيرة الحدود من إشاراتها فقط في أصفارها الحقيقية، يمكن أن تغير الدالة النسبية من إشاراتها في الأصفار الحقيقية أو في نقاط الانقطاع لديها. لهذا السبب، عند حل أي **متباينة نسبية**، يجب عليك تضمين أصفار البسط والمقام في مخطط الإشارات.



يمكنك البدء في حل متباينة نسبية من خلال كتابة المتباينة أولاً بالصورة العامة مع تضمين تعبير نسبي واحد على اليسار وصفر على اليمين.

مثال 4 إيجاد حل متباينة نسبية

حُلّ المتباينة: $\frac{4}{x-6} + \frac{2}{x+1} > 0$

$$\frac{4}{x-6} + \frac{2}{x+1} > 0$$ متباينة أصلية

$$\frac{4x + 4 + 2x - 12}{(x-6)(x+1)} > 0$$ استخدم المقام المشترك الأصغر، $(x-6)(x+1)$. لإعادة كتابة كل كسر. ثم اجمع.

$$\frac{6x - 8}{(x-6)(x+1)} > 0$$ بسّط.

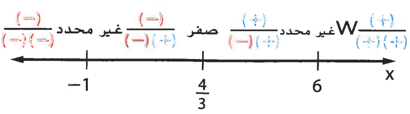
لنفترض أن $f(x) = \frac{6x-8}{(x-6)(x+1)}$. إن الأصفار والنقاط غير المحددة في المتباينة تمثل أصفار البسط، $\frac{4}{3}$، والمقام، 6 و -1 قم بإنشاء جدول إشارات

باستخدام هذه الأعداد. بعد ذلك اختر قيم المحور الأفقي x في كل فترة واختبره لتحديد هل $f(x)$ موجبة أم سالبة.

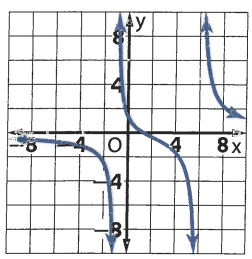
$f(x) = \frac{6x-8}{(x-6)(x+1)}$

$f(x) = \frac{6x-8}{(x-6)(x+1)}$

اختبار x=-2 اختبار x=0 اختبار x= . اختبار x=7



تساوي مجموعة حل المتباينة الأصلية اتحاد تلك الفترات التي تكون لها $f(x)$ موجبة، $\left(-1, \frac{4}{3}\right) \cup (6, \infty)$ ويدعم التمثيل البياني لـ $f(x) = \frac{4}{x-6} + \frac{2}{x+1}$ في الشكل 1.6.1 هذا الاستنتاج.



الشكل 1.6.1

تمرين موجّه

جد حلًا للمتباينات التالية.

4A. $\frac{x+6}{4x-3} \geq 1$ 4B. $\frac{x^2-x-11}{x-2} \leq 3$ 4C. $\frac{1}{x} > \frac{1}{x+5}$

يمكنك استخدام المتباينات غير الخطية لحل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 5 من الحياة اليومية إيجاد حل متباينة نسبية

المتنزهات الترفيهية تقوم مجموعة من طلاب المدرسة الثانوية بتأجير حافلة نظير دفع AED 600 لأخذهم إلى أحد المتنزهات الترفيهية في اليوم التالي لحفل التخرج. تبلغ تكلفة تذاكر المتنزه الترفيهي AED 60 وتقل بمقدار AED 0.50 في صورة خصم لكل فرد في المجموعة. اكتب متباينة يمكن استخدامها وإيجاد حل لها لتحديد كم عدد الطلاب الذين يجب عليهم الذهاب في رحلة نظير تكلفة إجمالية تكون أصغر من AED 40 لكل طالب.

لنفترض أن x يمثل عدد الطلاب.

تكلفة التذكرة لكل طالب	+	تكلفة الحافلة لكل طالب	يجب أن تكون أصغر من	AED 40.
$60 - 0.5x$	$+$	$\frac{600}{x}$	$<$	40

$$60 - 0.5x + \frac{600}{x} < 40$$ اكتب المتباينة.

$$60 - 0.5x + \frac{600}{x} - 40 < 0$$ اطرح 40 من كل طرف.

$$\frac{60x - 0.5x^2 + 600 - 40x}{x} < 0$$ استخدم العامل المشترك الأصغر، x، لإعادة كتابة كل كسر، ثم اجمع.

$$\frac{-0.5x^2 + 20x + 600}{x} < 0$$ بسّط.

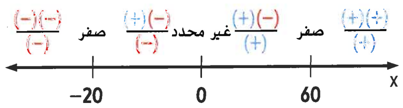
$$\frac{x^2 - 40x - 1{,}200}{x} > 0$$ اضرب كل طرف في -2. اعكس إشارة المتباينة.

$$\frac{(x+20)(x-60)}{x} > 0$$ حلل إلى العوامل.

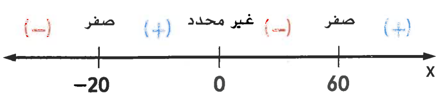
لنفترض أن $f(x) = \frac{(x+20)(x-60)}{x}$. أصفار هذه المتباينة هي -20 و 60 و 0. استخدم هذه الأعداد لإنشاء مخطط الإشارات لهذه الدالة وإكماله.

$f(x) = \frac{(x+20)(x-60)}{x}$

اختبار $x = -30$ اختبار $x = -10$ اختبار $x = 10$ اختبار $x = 70$



$f(x) = \frac{(x+20)(x-60)}{x}$



إذًا، مجموعة الحل لـ $60 - 0.5x + \frac{600}{x} < 40$ هي $(-20, 0) \cup (60, \infty)$

نظرًا لاستحالة وجود عدد سالب من الطلاب، يجب أن يذهب أكثر من 60 طالبًا إلى المتنزه الترفيهي نظير تكلفة إجمالية تبلغ أصغر من **AED 40** لكل طالب.

تمرين موجّه

5. **تنسيق الحدائق** يعمل مهندس تصميم الحدائق على تصميم سور يحيط بحديقة مستطيلة الشكل يبلغ محيطها 250 m. إذا كانت مساحة الحديقة تبلغ $1{,}000\ m^2$ على أقل تقدير، فاكتب متباينة وجد حلاً لها لإيجاد الأطوال المحتملة للسور.

الربط بالحياة اليومية

يعد القطار الأفعواني كينجدا كا رولر الموجود في متنزه سيكس فلاجز أدفانتشر أطول قطار أفعواني في العالم. يصل القطار إلى أقصى ارتفاع له في الهواء ويبلغ 139 m وبعد ذلك يهبط رأسيًا بمعدل 270 في حركة حلزونية، في حين تصل سرعته إلى 206 km/h.

المصدر: Six Flags

تمارين

حُلّ كل من المتباينات التالية. (الأمثلة 1-3)

1. $(x+4)(x-2) \leq 0$
2. $(x-6)(x+1) > 0$
3. $(3x+1)(x-8) \geq 0$
4. $(x-4)(-2x+5) < 0$
5. $(4-6y)(2y+1) < 0$
6. $2x^3 - 9x^2 - 20x + 12 \leq 0$
7. $-8x^3 - 30x^2 - 18x < 0$
8. $5x^3 - 43x^2 + 72x + 36 > 0$
9. $x^2 + 6x > -10$
10. $2x^2 \leq -x - 4$
11. $4x^2 + 8 \leq 5 - 2x$
12. $2x^2 + 12x \geq 4x - 8$
13. $2b^2 + 16 \leq b^2 + 8b$
14. $c^2 + 12 \leq 3 - 6c$
15. $-a^2 \geq 4a + 4$
16. $3d^2 + 16 \geq -d^2 + 16d$

17. **أعمال تجارية** هناك مشروعات جديدة تقوم بها الشركة وستكون إيراداتها في العام الأول $r(x) = 120x - 0.0004x^2$ وستكون تكلفة بدء التشغيل $c(x) = 40x + 1{,}000{,}000$، حيث يمثل x عدد المنتجات المباعة. الربح الصافي p الذي سيتحقق في العام الأول يساوي $p = r - c$ اكتب متباينة وأوجد حلها لتحديد كم عدد المنتجات التي يجب على الشركة بيعها لتحقيق ربح يصل إلى AED 2,000,000 على أقل تقدير. (مثال 1)

حُلّ كل من المتباينات التالية. (المثال 4)

18. $\dfrac{x-3}{x+4} > 3$
19. $\dfrac{x+6}{x-5} \leq 1$
20. $\dfrac{2x+1}{x-6} \geq 4$
21. $\dfrac{3x-2}{x+3} < 6$
22. $\dfrac{3-2x}{5x+2} < 5$
23. $\dfrac{4x+1}{3x-5} \geq -3$
24. $\dfrac{(x+2)(2x-3)}{(x-3)(x+1)} \leq 6$
25. $\dfrac{(4x+1)(x-2)}{(x+3)(x-1)} \leq 4$
26. $\dfrac{12x+65}{(x+4)^2} \geq 5$
27. $\dfrac{2x+4}{(x-3)^2} < 12$

28. **أعمال خيرية** ينظم برنامج الخدمات في إحدى المدارس الثانوية حفل عشاء لجمع أموال توجه إلى الأعمال الخيرية. ستبلغ تكلفة استئجار قاعة الطعام التي يمكن أن تستوعب 80 شخصًا AED 1,000. إذا بلغت تكلفة كل تذكرة AED 20 تُدفَع بشكل مسبق أو AED 22 تُدفَع في يوم حفل العشاء، وكان عدد الأشخاص الذين اشتروا التذاكر بشكل مسبق هو نفسه عدد الأشخاص الذين اشتروا التذاكر في يوم حفل العشاء، فاكتب متباينة لإيجاد أدنى عدد من الأشخاص الذين يجب عليهم حضور الحفل لتحقيق ربح يصل إلى AED 500 على أقل تقدير وإيجاد حل لها. (المثال 5)

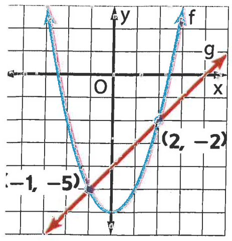
29. **التخرج** يقرر مجموعة من الأصدقاء تخصيص سيارة ليموزين لحضور حفل التخرج. تبلغ تكلفة استئجارها AED 750 بالإضافة إلى AED 25 لكل راكب. يوجد حد أدنى يبلغ راكبين، ويمكن أن تستوعب السيارة الليموزين حتى 14 شخصًا. اكتب متباينة لإيجاد كم عدد الأشخاص الذين يجب عليهم المشاركة في استئجار سيارة الليموزين علمًا بأن كل شخص سيدفع AED 120 على أقل تقدير وأوجد حل للمتباينة. (المثال 5)

جد المجال لكل تعبير مما يلي.

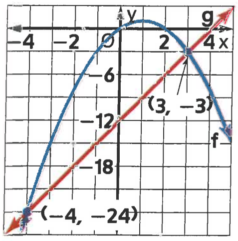
30. $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$
31. $\sqrt{x^2 - 3x - 40}$
32. $\sqrt{16 - x^2}$
33. $\sqrt{x^2 - 9}$
34. $\sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 25}}$
35. $\sqrt[3]{\dfrac{x}{36 - x^2}}$

جد مجموعة الحل للمتباينة: $f(x) - g(x) \geq 0$.

36.



37.



38. **مبيعات** يبيع البائع الشطائر في كل حدث رياضي تنظمه المدرسة. تبلغ تكلفة كل شطيرة AED 0.38 وتكلفة كل كعكة AED 0.12. يستأجر البائع عربة الشطائر التي يستخدمها نظير AED 1,000. إذا كان البائع يرغب في أن تكون التكاليف التي يتكبدها أقل من الإيرادات التي يحققها بعد بيع 400 شطيرة، فكم تبلغ التكلفة التي ينبغي عليه تخصيصها لكل شطيرة؟

39. **الحدائق والمراكز الترفيهية** يبلغ محيط ملعب الحديقة المجتمعية مستطيل الشكل 112 m وتساوي مساحته على الأقل 588 m مربعًا.

a. اكتب متباينة يمكن استخدامها لإيجاد الأطوال الممكنة التي يمكن بها بناء الملعب وإيجاد حل لها.

b. أوجد حل للمتباينة التي كتبتها في الجزء a وفسره.

c. كيف تتغير المتباينة والحل إذا كانت مساحة الملعب لا تتجاوز أكثر من $588\ m^2$؟ فسر الحل في سياق الحالة.

حُلّ كل من المتباينات التالية. (إرشاد: تحقق من أن كل فترة حل محتملة تقع ضمن المجال باستخدام المتباينة الأصلية.)

40. $\sqrt{9y + 19} - \sqrt{6y - 5} > 3$

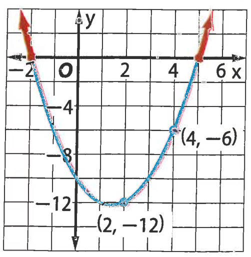
41. $\sqrt{4x + 4} - \sqrt{x - 4} \leq 4$

42. $\sqrt{12y + 72} - \sqrt{6y - 11} \geq 7$

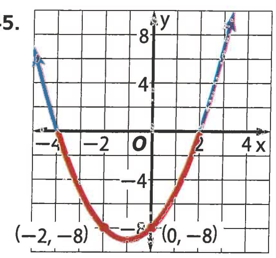
43. $\sqrt{25 - 12x} - \sqrt{16 - 4x} < 5$

جد المعادلة التي يعبر عنها كل تمثيل بياني.

44.



45.



حُلّ كل من المتباينات التالية.

46. $2y^4 - 9y^3 - 29y^2 + 60y + 36 > 0$

47. $3a^4 + 7a^3 - 56a^2 - 80a < 0$

48. $c^5 + 6c^4 - 12c^3 - 56c^2 + 96c \geq 0$

49. $3x^5 + 13x^4 - 137x^3 - 353x^2 + 330x + 144 \leq 0$

50. التعبئة تبيع الشركة أوعية الزيت إسطوانية الشكل كهذا الوعاء المشار إليه.

a. استخدم حجم الوعاء للتعبير عن مساحة سطحه في صورة دالة ويكون نصف قطر المساحة بالسنتيمترات. (إرشاد: لتر واحد = 1,000 سنتيمتر مكعب)

b. تريد الشركة أن تكون مساحة سطح الوعاء أقل من $2,400\ \text{cm}^2$. اكتب متباينة يمكن استخدامها لإيجاد أنصاف الأقطار للوفاء بهذا البند من المتطلبات.

c. استخدم الحاسبة البيانية لإيجاد حل للمتباينة التي كتبتها في الجزء **b** وفسر الحل.

حُلّ كل من المتباينات التالية.

51. $(x+3)^2(x-4)^3(2x+1)^2 < 0$

52. $(y-5)^2(y+1)(4y-3)^4 \geq 0$

53. $(a-3)^3(a+2)^3(a-6)^2 > 0$

54. $c^2(c+6)^3(3c-4)^5(c-3) \leq 0$

55. وقت الدراسة يحدد جمال أنه بمساعدة المعلومات التي يعرفها في الوقت الحالي، يستطيع تحقيق مجموع درجات يصل إلى نسبة 75% من الاختبار الذي يخضع له. يعتقد جمال أن كل 5 دقائق كاملة يقضيها في الدراسة، سيرفع من مجموع درجاته بنسبة 1%.

a. إذا كان جمال يرغب في الحصول على مجموع درجات يصل إلى 89.5% على أقل تقدير، فاكتب متباينة يمكن استخدامها لإيجاد الزمن t الذي سيقضيه في الدراسة.

b. أوجِد حلًا للمتباينة التي كتبتها في الجزء **a** وفسر الحل.

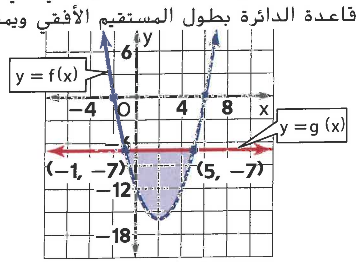
56. ألعاب تصرف آلة كرة السكي 3 بطاقات في كل مرة يلعب فيها أحد الأشخاص ثم بطاقتين إضافيتين لكل 80 نقطة يسجلها اللاعب.

a. اكتب دالة غير خطية لرسم نموذج لكمية البطاقات المستلمة لمجموع نقاط المحور الأفقي x.

b. اكتب متباينة يمكن استخدامها لإيجاد مجموع النقاط الذي سيحتاج إليه اللاعب للحصول على 11 بطاقة على أقل تقدير.

c. أوجِد حلاً للمتباينة الموجودة في الجزء **b** وفسر الحل الذي تتوصل إليه.

57. مساحة دائرة محاطة بقطع مكافئ ومستقيم أفقي هي $A = \frac{2}{3}bh$، حيث يمثل b قاعدة الدائرة بطول المستقيم الأفقي ويمثل h ارتفاع الدائرة. جد المساحة المحاطة بـ f وg.



إذا كان k غير سالب، فجد الفترة لـ x الذي تكون له كل متباينة صحيحة.

58. $x^2 + kx + c \geq c$

59. $(x+k)(x-k) < 0$

60. $x^3 - kx^2 - k^2x + k^3 > 0$

61. $x^4 - 8k^2x^2 + 16k^4 \geq 0$

62. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستتحقق من المتباينات غير الخطية ذات القيم المطلقة.

a. العرض الجدولي انسخ الجدول الوارد أدناه وأكمله.

الدالة	الأصفار	النقاط غير المحددة
$f(x) = \frac{x-1}{\lvert x+2\rvert}$		
$g(x) = \frac{\lvert 2x-5\rvert}{x-3}$		
$h(x) = \frac{\lvert x+4\rvert}{\lvert 3x-1\rvert}$		

b. العرض البياني مثّل كل دالة بيانيًا في الجزء **a**.

c. العرض الرمزي قم بإنشاء مخطط إشارات لكل متباينة. ضمّن الأصفار والنقاط غير المحددة وقدّر إشارة البسوط والمقامات كل على حدة.

i. $\frac{x-1}{\lvert x+2\rvert} < 0$

ii. $\frac{\lvert 2x-5\rvert}{x-3} \geq 0$

iii. $\frac{\lvert x+4\rvert}{\lvert 3x-1\rvert} > 0$

d. العرض العددي اكتب حلاً لكل متباينة موجودة في الجزء **c**.

مسائل مهارات التفكير العُليا استخدام مهارات التفكير العُليا

63. تحليل الخطأ يقوم حارب وخالد بحل $\frac{x^2}{(3-x)^2} \geq 0$. يعتقد حارب أن الحل هو $(-\infty, 0]$ أو $[0, \infty)$، ويعتقد خالد أن الحل هو $(-\infty, \infty)$. هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

64. الاستنتاج إذا كانت مجموعة الحل لمتباينة كثيرة الحدود هي $(-3, 3)$. فكم ستساوي مجموعة الحل إذا كان رمز المتباينة معكوسًا؟ اشرح استنتاجك.

65. تحدٍ جد القيم التي يكون لها $(a+b)^2 > (c+d)^2$ إذا كان $a < b < c < d$

66. الاستنتاج إذا كان $0 < d < c$، فجد الفترة التي يكون عليها $(x-c)(x-d) \leq 0$ صحيحًا. اشرح استنتاجك.

67. تحدٍ ما مجموعة الحل لـ $(x-a)^{2n} > 0$ إذا كان n عددًا طبيعيًا؟

68. الاستنتاج ماذا يحدث لمجموعة الحل لـ $(x+a)(x-b) < 0)$ إذا تغير التعبير إلى $-(x+a)(x-b) < 0$، حيث a و$b > 0$؟ اشرح استنتاجك.

69. الكتابة في الرياضيات اشرح لماذا لا يمكنك حل $\frac{3x+1}{x-2} < 6$ بضرب كل طرف في $x - 2$.

مراجعة شاملة

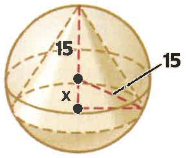
جد مجال كل دالة ومعادلات خطوط التقارب الرأسية أو الأفقية، إن وجدت. (الدرس 1-5)

70. $f(x) = \frac{2x}{x+4}$

71. $h(x) = \frac{x^2}{x+6}$

72. $f(x) = \frac{x-1}{(2x+1)(x-5)}$

73. **الهندسة** ينحصر مخروط بداخل كرة يساوي نصف قطرها 15 سنتيمترًا. إذا كان حجم المخروط يساوي $1{,}152\pi$ سنتيمترًا مكعبًا، فجد الطول الذي يمثله الرمز x. (الدرس 1-4)



اقسم باستخدام القسمة المطولة. (الدرس 1-3)

74. $(x^2 - 10x - 24) \div (x + 2)$

75. $(3a^4 - 6a^3 - 2a^2 + a - 6) \div (a + 1)$

76. $(z^5 - 3z^2 - 20) \div (z - 2)$

77. $(x^3 + y^3) \div (x + y)$

78. **الموارد المالية** تظهر أسعار الإقفال بالدراهم للسهم خلال فترة زمنية ممتدة إلى شهر واحد. (الدرس 1-2)

a. مثّل البيانات بيانيًا.

b. استخدم الحاسبة البيانية لتمثيل البيانات باستخدام دالة كثيرة الحدود من الدرجة 3.

c. استخدم النموذج لتقدير سعر الإقفال في البورصة في اليوم 25.

اليوم	السعر (الأسعار)	اليوم	السعر (الأسعار)
1	30.15	15	15.64
5	27.91	20	10.38
7	26.10	21	9.56
10	22.37	28	9.95
12	19.61	30	12.25

79. **أمان المنازل** توفر الشركة نظام أمان للمنازل يستخدم الأعداد من 0 إلى 9، شاملة كلاً منهما، لرمز أمان مكون من 5 أرقام. (الدرس 0-7)

a. كم عدد رموز الأمان المختلفة المحتملة؟

b. في حالة عدم التمكن من تكرار الأعداد، فكم عدد رموز الأمان المتوفرة؟

c. بافتراض أن صاحب المنزل لا يريد استخدام 0 أو 9 كعدد في البداية ويريد أن يكون العدد 1 هو العدد الأخير. كم عدد الرموز التي يمكن تكوينها إذا أمكن تكرار الأعداد؟ في حالة عدم وجود تكرارات، فكم عدد الرموز المتوفرة؟

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

80. **اختبار SAT/ACT** تقع الدائرتان، A وB، في المستوى نفسه. إذا كان مركز الدائرة B يقع على الدائرة A، فعندئذٍ كم عدد النقاط التي يمكن أن تتقاطع فيها الدائرة A والدائرة B؟

I. 0 II. 1 III. 2

A I فقط

B III فقط

C I وIII فقط

D II وIII فقط

E I، II، وIII

81. يكون طول المستطيل أكبر من عرضه بمقدار 6 سنتيمترات. جد قيم العرض المحتملة إذا كانت مساحة المستطيل تزيد عن 216 سنتيمترًا مربعًا.

F $w > 12$

G $w < 12$

H $w > 18$

J $w < 18$

82. **إجابة حرة** يتم تمثيل كمية احتياطات مياه الشرب التي تقدر بملايين اللترات المتوفرة لإحدى المدن بواسطة $f(t) = 80 + 10t - 4t^2$. يتم تمثيل الحد الأدنى لكمية المياه التي يحتاج إليها قاطنو المدينة بواسطة $g(t) = (2t)^{\frac{4}{3}}$، حيث يمثل t الزمن بالأعوام.

a. حدد أنواع الدوال الممثلة بواسطة $f(t)$ و$g(t)$.

b. ما المجال والمدى المرتبطان بـ $f(t)$ و$g(t)$؟ اشرح.

c. ما السلوك الطرفي لـ $f(t)$ و$g(t)$؟

d. مثّل $f(t)$ و$g(t)$ بيانيًا لـ $0 \le t \le 6$ على التمثيل البياني نفسه.

e. اشرح لماذا يجب أن تتوفر قيمة c لـ $[0, 6]$ بحيث $f(c) = 50$

f. لأي قيمة في المجال ذي الصلة يحتوي f على صفر؟ ما أهمية الصفر في هذه الحالة؟

g. إذا كانت هذه الحالة صحيحة وهذه التوقعات دقيقة، فمتى يتوقع حاجة القاطنين بالمدينة إلى مياه أكثر من احتياطاتهم؟

الوحدة 1

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الوحدة

المفاهيم الأساسية

دوال القوة والدوال الجذرية (الدرس 1-1)

- *دالة القوة* هي أي دالة تكتب بالصيغة $f(x) = ax^n$. حيث a و n أعداد حقيقية غير صفرية.
- *دالة أحادية الحد* هي أي دالة يمكن كتابتها بالصيغة $f(x) = a$ أو $f(x) =$ ax^n. حيث a و n أعداد حقيقية ثابتة **غير صفرية**.
- *دالة جذرية* هي أي دالة يمكن كتابتها بالصيغة $f(x) = \sqrt[n]{x^p}$. حيث n و p أعداد صحيحة موجبة أكبر من 1 الذي ليس لديه عوامل مشتركة.

الدوال كثيرة الحدود (الدرس 1-2)

- دالة كثيرة الحدود هي أي دالة تكتب بالصيغة $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}$ $x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$. حيث $a_n \neq 0$. الدرجة تساوي n.
- يوجد في التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود n أصفار حقيقية مميزة على الأكثر و $n - 1$ نقاط دوران على الأكثر.
- يعتمد سلوك التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود عند c الصفرية الخاصة به على عدد مرات تكرار العامل $(x - c)$.

نظريتا الباقي والعامل (الدرس 1-3)

- القسمة التركيبية: طريقة مختصرة لقسمة كثيرة الحدود على عامل خطي بالصيغة $x - c$.
- في حالة قسمة f على $x - c$. فإن الباقي يساوي $f(c)$.
- $x - c$ هي عامل لدالة كثيرة الحدود f إذا وفقط إذا كان $f(c) = 0$.

أصفار الدوال كثيرة الحدود (الدرس 1-4)

- إذا كانت $f(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ ذات معاملات أعداد صحيحة. فإن أي صفر نسبي لـ $f(x)$ يكتب بالصيغة $\frac{p}{q}$. حيث p و q ليس لديهما عوامل مشتركة. و p هي عامل a_0 و q هي عامل a_n.
- في الدالة كثيرة الحدود من الدرجة n. يوجد n أصفار. بما في ذلك الأصفار المتكررة في نظام الأعداد المركبة. يوجد في هذه الدالة n عوامل:

$$f(x) = a_n(x - c_1)\,(x - c_2)\ \ldots\ (x - c_n)$$

الدوال النسبية (الدرس 1-5)

- يتضمن التمثيل البياني لـ f خطًا تقاربيًا رأسيًا $x = c$ إذا كانت $\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$
- يتضمن التمثيل البياني لـ f خط تقارب أفقي $y = c$ إذا كانت $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$ أو $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$

الدالة النسبية $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ قد يوجد بها خطوط تقارب رأسيّة أو خطوط تقارب أفقية أو خطوط تقارب مائلة أو نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x ونقاط تقاطع مع المحور الرأسي y. يمكن تحديدهم جميعًا جبريًا.

المتباينات غير الخطية (الدرس 6 - 2)

- يجب أن يشمل مخطط إشارات المتباينة النسبية أصفارًا ونقاطًا غير محددة.

المفردات الأساسية

المترافقات المركبة complex conjugates	الدالة كثيرة الحدود polynomial function
الحل الدخيل extraneous solution	دالة القوة power function
خط التقارب الأفقي horizontal asymptote	الدالة التربيعية quartic function
الجذور الحقيقية غير القابلة للاختزال irreducible over the reals	الدالة النسبية rational function
معامل الحد الأكبر leading coefficientes	الصفر المتكرر repeated zero
اختبار الحد الرئيس leading-term test	مخطط-جدول- الإشارات sign chart
الحد الأدنى lower bound	القسمة التركيبية synthetic division
التكرار multiplicity	التعويض التركيبي synthetic substitution
خط التقارب المائل oblique asymptote	نقطة دوران turning point
	الحد الأعلى upper bound
	خط التقارب الرأسي vertical asymptote

مراجعة المفردات

حدد الكلمة أو العبارة التي تُكمل كل جملة أفضل ما يمكن.

1. معامل الحد ذي أكبر أس للمتغير هو (معامل القيمة العظمى. الدرجة) لدالة الحدود.
2. (دالة كثيرة الحدود. دالة أسيّة) هي أي دالة تكتب بالصيغة $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$. حيث $a_1, a_2, \ldots$ a_n أعداد حقيقية و n عدد طبيعي.
3. يوجد في الدالة التي لديها عدة عوامل لـ $(x - c)$ (أصفار متكررة. نقاط دوران).
4. (قسمة كثيرات الحدود. القسمة التركيبية) هي أقصر طريقة لقسمة الدوال كثيرة الحدود على عوامل خطية.
5. ترتبط (نظرية الباقي. نظرية العامل) بالعوامل الخطية لكثيرة الحدود ذات أصفار لدالتها المرتبطة.
6. يمكن ذكر بعض الأصفار الممكنة لدالة كثيرة الحدود في قائمة باستخدام نظرية (العامل. الأصفار النسبية).
7. يتم تحديد خطوط التقارب (الرأسيّة. الأفقية) عن طريق أصفار مقام دالة نسبية.
8. تحدد أصفار (المقام. البسط) نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x لتمثيل بياني لدالة نسبية.
9. تحدث خطوط التقارب (الأفقية. المائلة) عندما تمتلك دالة نسبية مقامًا بدرجة أكبر من 0 وبسطًا بدرجة أكبر من درجة مقامها.
10. (الدالة التربيعية. دالة القوة) هي دالة تكتب بالصيغة $f(x) = ax^n$. حيث a و n أعداد حقيقية ثابتة غير صفرية.

مراجعة درس بدرس

1-1 الدوال الأسيّة والجذرية

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والمدى ونقاط التقاطع والسلوك الطرفي والاتصال وفترات تزايد الدالة أو تناقصها.

11. $f(x) = 5x^6$
12. $f(x) = -8x^3$
13. $f(x) = x^{-9}$
14. $f(x) = \frac{1}{3}x^{-4}$
15. $f(x) = \sqrt{5x - 6} - 11$
16. $f(x) = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{6x^2 - 1} + 2$

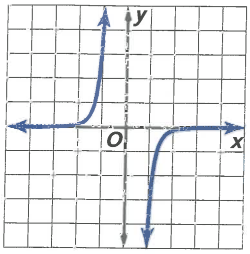
جد حلاً لكل من المعادلات التالية.

17. $2x = 4 + \sqrt{7x - 12}$
18. $\sqrt{4x + 5} + 1 = 4x$
19. $4 = \sqrt{6x + 1} - \sqrt{17 - 4x}$
20. $\sqrt[4]{x^2 + 31} - 1 = 3$

مثال 1

مثِّل بيانيًا $f(x) = -4x^{-5}$ وقم بتحليلها. وضح المجال والمدى والتقاطعات والسلوك الطرفي والاتصال، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.

x	$f(x)$
-3	0.016
-2	0.125
-1	4
0	غير محدد
1	-4
2	-0.125
3	-0.016



المجال: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ المدى: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

نقاط التقاطع. لا توجد

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

الاتصال: انفصال لانهائي عند $x = 0$

التزايد: $(-\infty, 0)$ تزايد: $(0, \infty)$

1-2 الدوال كثيرة الحدود

وضّح السلوك الطرفي للتمثيل البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيسي.

21. $f(x) = -4x^4 + 7x^3 - 8x^2 + 12x - 6$
22. $f(x) = -3x^5 + 7x^4 + 3x^3 - 11x - 5$
23. $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 8x - 3$
24. $f(x) = x^3(x - 5)(x + 7)$

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.

25. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$
26. $f(x) = x^5 + 8x^4 - 20x^3$
27. $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$
28. $f(x) = x^4 - 25$

لكل دالة. (a) طبّق اختبار الحد الرئيسي (b) حدد الأصفار وعدد مرات تكرار أي أصفار متكررة (c) جد بعض النقاط الإضافية (d) مثّل الدالة بيانيًا.

29. $f(x) = x^3(x - 3)(x + 4)^2$
30. $f(x) = (x - 5)^2(x - 1)^2$

مثال 2

وضح السلوك الطرفي للتمثيل البياني لـ $f(x) = -2x^5 + 3x^3 - 8x^2 - 6$ باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيسي.

الدرجة تساوي 5 ومعامل القيمة العظمى يساوي -2. لأن الدرجة فردية ومعامل القيمة العظمى سالب.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ أو $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

مثال 3

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الانعطاف للدالة $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ ونقاط الدوران لها. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.

درجة f تساوي 3. لذلك فإن 3 تتضمن أصفارًا حقيقية مميزة على الأكثر و 3 – نقطة دوران واحدة أو نقطتي دوران على الأكثر. لإيجاد أصفار حقيقية، حل المعادلة المرتبطة $f(x) = 0$ عن طريق التحليل إلى العوامل.

$$x^3 + 6x^2 + 9x = x(x^2 + 6x + 9)$$
$$= x(x + 3)(x + 3) \text{ أو } x(x + 3)^2$$

يتضمن التعبير 3 عوامل وصفرين حقيقيين مميزين و 0 و-3

الوحدة 1 دليل الدراسة والمراجعة تابع

1-3 نظريتا الباقي والعامل

اقسم باستخدام القسمة المطولة.

31. $(x^3 + 8x^2 - 5) \div (x - 2)$
32. $(-3x^3 + 5x^2 - 22x + 5) \div (x^2 + 4)$
33. $(2x^5 + 5x^4 - 5x^3 + x^2 - 18x + 10) \div (2x - 1)$

اقسم باستخدام القسمة التركيبية.

34. $(x^3 - 8x^2 + 7x - 15) \div (x - 1)$
35. $(x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18) \div (x - 2)$
36. $(2x^4 + 3x^3 - 10x^2 + 16x - 6) \div (2x - 1)$

استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين الموضحة هي عوامل لـ $f(x)$ أم لا. استخدم التعابير ذات الحدين التي تعتبر عوامل لكتابة الصيغة المحللة لـ $f(x)$

37. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 8x - 24$, $(x + 3)$
38. $f(x) = 2x^4 - 9x^3 + 2x^2 + 9x - 4$, $(x - 1)$, $(x + 1)$
39. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$, $(x + 1)$, $(x - 2)$

مثال 4

اقسم $(2x^3 - 3x^2 + 5x - 4) \div (2x - 1)$ باستخدام القسمة التركيبية.

أعد كتابة تعبير القسمة $\frac{2x^3 - 3x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$ بحيث يكون المقام بالصيغة $x - c$

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 5x - 4}{2x - 1} = \frac{(2x^3 - 3x^2 + 5x - 4) \div 2}{(2x - 1) \div 2}$$

$$= \frac{x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 2}{x - \frac{1}{2}}$$

لذا، $c = \frac{1}{2}$ وقم بإجراء القسمة التركيبية.

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -2 \\ & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}$$

$$\frac{(2x^3 - 3x^2 + 5x - 4)}{(2x - 1)} = x^2 - x + 2 - \frac{2}{(2x - 1)}$$

1-4 أصفار الدوال كثيرة الحدود

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أي منها أصفار، إن وجدت.

40. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$
41. $f(x) = x^3 - 14x - 15$
42. $f(x) = x^4 + 5x^2 + 4$
43. $f(x) = 3x^4 - 14x^3 - 2x^2 + 31x + 10$

جد حلاً لكل من المعادلات التالية.

44. $x^4 - 9x^3 + 29x^2 - 39x + 18 = 0$
45. $6x^3 - 23x^2 + 26x - 8 = 0$
46. $x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 28x = 48$
47. $2x^4 - 11x^3 + 44x = -4x^2 + 48$

استخدم الصفر الموضح لإيجاد كل الأصفار المركبة لكل دالة. ثم اكتب التحليل الى العوامل الخطية للدالة.

48. $f(x) = x^4 + x^3 - 41x^2 + x - 42$, i
49. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 16x + 12$. $-2i$

مثال 5

حُـلّ المعادلة $x^3 + 2x^2 - 16x - 32 = 0$

لأن معامل القيمة العظمى يساوي 1. فإن جميع الأصفار النسبية الممكنة تكون عوامل لــ -32. لذا تساوي جميع الأصفار النسبية الممكنة ±1 و±2 و±4 و±8 و±16 و±32. باستخدام التعويض التركيبي، يمكنك تحديد أن -2 تساوي صفرًا نسبيًا.

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 1 & 2 & -16 & -32 \\ & & -2 & 0 & 32 \\ \hline & 1 & 0 & -16 & 0 \end{array}$$

لذا، $f(x) = (x + 2)(x^2 - 16)$ ويمكن كتابة الدالة كثيرة الحدود هذه بالصيغة $f(x) = (x + 2)(x - 4)(x + 4)$ والأصفار النسبية لـ f تساوي -2 و 4 و-4

1-5 الدوال النسبية

ابحث عن مجال كل دالة وكل معادلات خطوط التقارب الرأسيّة أو الأفقية، إن وُجدت.

50. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 4}$

51. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 25}$

52. $f(x) = \dfrac{x(x - 3)}{(x - 5)^2(x + 3)^2}$

53. $f(x) = \dfrac{(x - 5)(x - 2)}{(x + 3)(x + 9)}$

في كل دالة، حدد أي خطوط التقارب ونقاط تقاطع. ثم مثِّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

54. $f(x) = \dfrac{x}{x - 5}$

55. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 4}$

56. $f(x) = \dfrac{(x + 3)(x - 4)}{(x + 5)(x - 6)}$

57. $f(x) = \dfrac{x(x + 7)}{(x + 6)(x - 3)}$

58. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 1}$

59. $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^3 - 6x^2 + 5x}$

حُلّ كل من المعادلات التالية.

60. $\dfrac{12}{x} + x - 8 = 1$

61. $\dfrac{2}{x + 2} + \dfrac{3}{x} = -\dfrac{x}{x + 2}$

62. $\dfrac{1}{d + 4} = \dfrac{2}{d^2 + 3d - 4} - \dfrac{1}{1 - d}$

63. $\dfrac{1}{n - 2} = \dfrac{2n + 1}{n^2 + 2n - 8} + \dfrac{2}{n + 4}$

مثال 6

ابحث عن مجال $f(x) = \dfrac{x + 7}{x + 1}$ وأي خطوط التقارب رأسيّة وأفقية.

الخطوة 1 جد المجال.

الدالة غير محددة عند الصفر الموجود في المقام $h(x) = x + 1$، الذي يساوي -1. مجال f هو كل الأعداد الحقيقية باستثناء $x = -1$.

الخطوة 2 ابحث عن خطوط التقارب، إن وجدت.

تحقق من خطوط التقارب الرأسيّة.

صفر المقام يساوي -1. لذا يوجد خط تقارب رأسي عند $x = -1$.

تحقق من خطوط التقارب الأفقية.

درجة البسط تساوي درجة المقام. نسبة معامل الحد الأكبر تساوي $\frac{1}{1} = 1$. لذا، $y = 1$ هي خط تقارب أفقي.

1-6 المتباينات غير الخطية

حُلّ كل من المتباينات التالية.

64. $(x + 5)(x - 3) \le 0$

65. $x^2 - 6x - 16 > 0$

66. $x^3 + 5x^2 \le 0$

67. $2x^2 + 13x + 15 < 0$

68. $x^2 + 12x + 36 \le 0$

69. $x^2 + 4 < 0$

70. $x^2 + 4x + 4 > 0$

71. $\dfrac{x - 5}{x} < 0$

72. $\dfrac{x + 1}{(12x + 6)(3x + 4)} \ge 0$

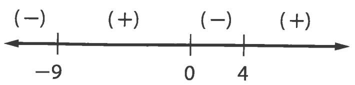
73. $\dfrac{5}{x - 3} + \dfrac{2}{x - 4} > 0$

مثال 7

حُـلّ المتباينة: $x^3 + 5x^2 - 36x \le 0$

ينتج عن تحليل دالة كثيرة الحدود إلى العوامل $f(x) = x^3 + 5x^2 - 36x$ تساوي $f(x) = x(x + 9)(x - 4)$. لذا تتضمن $f(x)$ أصفارًا حقيقية عند 0 و-9 و 4

أنشئ مخطط إشارات باستخدام هذه الأصفار. ثم عوّض عن قيمة x من كل فاصل زمني للاختبار في الدالة لتحديد ما إذا كان $f(x)$ موجبة أم سالبة عند هذه النقطة.



لأن $f(x)$ سالبة في الفترتين الزمنيتين الأول والثالث، فإن حل المعادلة $x^3 + 5x^2 - 36x \le 0$ يساوي $(-\infty, -9] \cup [0, 4]$

دليل الدراسة والمراجعة تابع

التطبيقات وحل المسائل

74. الفيزياء ينص قانون كبلر الثالث، في الفيزياء، الذي يتعلق بحركة الكواكب على أنه يتم تحديد الزمن الذي تستغرقه T للوصول إلى كوكب ما لإكمال دورة واحدة في مدارها حول الشمس عن طريق $T = R^{\frac{3}{2}}$، حيث R هي المتوسط الحسابي لمسافة بُعد الكوكب عن الشمس. يتم قياس الزمن بالسنوات الأرضية، ويتم قياس المسافة بوحدات فلكية. (الدرس 1-1)

a. حدد مجال الدالة ذات الصلة ومداها.

b. مثّل الدالة بيانيًا.

c. يتم رصد الزمن الذي يستغرقه كوكب المريخ ليدور حول الشمس بـ1.88 سنة أرضية. حدد متوسط بُعد كوكب المريخ عن الشمس بالأميال، علمًا بأن الوحدة الفلكية الواحدة تساوي 93 مليون ميل.

75. سباق الخيول أقام فصل الرياضة التابع للأستاذ حمدي سباقًا سنويًا للخيول في الريف للتنافس بين الطلاب. تم تحديد سرعة v بالأميال لكل ساعة منذ إطلاق السباق بعد t ثوانٍ. (الدرس 2-1)

t	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
v	85	50	30	20	15	12

a. صمم مخطط تشتت للبيانات.

b. حدد دالة أسيّة لتمثيل البيانات.

c. استخدم الدالة للتنبؤ بالسرعة التي يسير عندها الخيل بعد 1.2 ثانية.

d. استخدم الدالة للتنبؤ بالوقت الذي تكون فيه سرعة الخيل هي 47 mi/h.

76. المتنزهات يتم تحديد مستوى الارتفاع عن سطح الأرض لراكب الأفطار الأفعواني "بيج مونستر" في الجدول. (الدرس 2-2)

الزمن (بالثواني)	5	10	15	20	25
الارتفاع (بالقدم)	85	62	22	4	17

a. صمم مخطط تشتت للبيانات وحدد نوع الدالة كثيرة الحدود التي يمكن استخدامها لتمثيل البيانات.

b. اكتب دالة كثيرة الحدود لتمثيل مجموعة البيانات. قرّب كل معامل إلى أقرب جزء من ألف واذكر معامل الارتباط.

c. استخدم النموذج لتقدير ارتفاع الراكب عند 17 ثانية.

d. استخدم النموذج لتحدد بصورة تقريبية أول وقت يرتفع فيه الراكب 50 قدمًا فوق سطح الأرض.

77. زراعة الحدائق زرع والدا أيمن بستانهما الجديد في عام 2001. ومنذ عام 2001 إلى عام 2011، زادت كمية العشب الزاحف على النحو التالي $f(x) = 0.021x^3 - 0.336x^2 + 1.945x - 0.720$. حيث x تساوي عدد الأعوام منذ عام 2001 و $f(x)$ عدد الأقدام المربعة لكل عام. استخدم القسمة التركيبية لإيجاد عدد الأقدام المربعة للعشب الزاحف في البستان في عام 2011. قرّب إلى أقرب جزء من ألف. (الدرس 3-1)

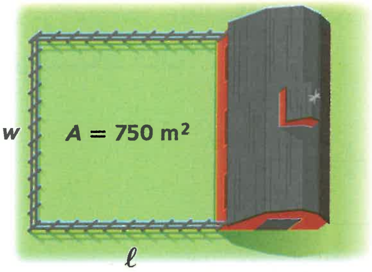
78. التجارة يبيع محل كتب مستعملة 1,000 كتاب، في المتوسط، شهريًا بمتوسط سعر يبلغ AED 10 لكل كتاب. ونظرًا لارتفاع التكاليف، ترغب صاحبة المحل في رفع أسعار جميع الكتب. وحسبت أن حجم مبيعاتها سيقل 50 كتابًا من الكتب التي رفعت سعرها AED 1. (الدرس 4-1)

a. اكتب دالة تمثل إجمالي حجم مبيعاتها بعد رفع أسعار كتبها بمقدار x درهم إماراتي.

b. كم عدد الدراهم الإماراتية التي تحتاجها لرفع أسعار كتبها بحيث يصل إجمالي قيمة مبيعاتها AED 11.250؟

c. ما أقصى مبلغ يمكن أن ترفع به الأسعار وأن تحقق AED 10,000 من إجمالي المبيعات؟ اشرح.

79. الزراعة ترغب إحدى الفلاحات في تطويق مساحة مستطيلة باستخدام جانب واحد من حظيرتها و 80 m من مادة السياج. حدد أبعاد مساحة التطويق. افترض أن عرض مساحة التطويق w لن يكون أكبر من جانب الحظيرة. (الدرس 4-1)



80. البيئة تشتهر إحدى البرك باحتوائها على 0.40 % من الحمض. تحتوي البركة على 50,000 gal من الماء. (الدرس 5-1)

a. كم عدد جالونات الحمض في البركة؟

b. افترض أنه تمت إضافة x جالونات من الماء النقي إلى البركة. اكتب $p(x)$، وهي النسبة المئوية للحمض في البركة بعد إضافة x جالونات من الماء.

c. جد خط التقارب الأفقي لـ $p(x)$.

d. هل تشتمل الدالة على أي خطوط التقارب رأسيّة؟ اشرح.

81. الأعمال التجارية يقوم أحد الخبازين ببيع x كعكات، ونتيجة لذلك فإنه سيحقق معدل إيرادات يصل إلى $b(x) = x^2 - 5x - 150$ مئة درهم إماراتي. حدد أدنى عدد من الكعكات التي يحتاج الخباز أن يبيعها لتحقيق ربح. (الدرس 6-1)

82. حفلة دينية يرغب أحد الفصول الأولية في تنظيم حفلة دينية لجمع تبرعات. وتبلغ تكلفة القاعة التي يرغب الفصل في استئجارها AED 3,000 فضلًا عن رسم إضافي يقدر بـ AED 5 لكل فرد. (الدرس 6-1)

a. اكتب متباينة لتحديد كم عدد الأفراد الذين يجب أن يحضروا الحفلة إذا أراد الفصل أن يجعل تكلفة الرسوم أصغر من AED 10 لكل فرد ثم جد حلاً لها.

b. ستوفر الصالة مؤثرات DJ مقابل AED 1,000 إضافي. كم عدد الأفراد الذين يجب أن يحضروا الحفلة لتصبح تكلفة الرسوم أصغر من AED 10 لكل فرد؟

الوحدة 1

تدريب على الاختبار

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والمدى ونقاط التقاطع والسلوك الطرفي والاتصال وفترات تزايد الدالة أو تناقصها.

1. $f(x) = 0.25x^{-3}$
2. $f(x) = 8x^{\frac{4}{3}}$

جد حلاً لكل من المعادلات التالية.

3. $x = \sqrt{4-x} - 8$
4. $\sqrt{5x+4} = \sqrt{9-x} + 7$
5. $-2 + \sqrt{3x+2} = x$
6. $56 - \sqrt[8]{7x^2+4} = 54$
7. $x^4 - 5x^3 - 14x^2 = 0$
8. $x^3 - 3x^2 - 10x = -24$

وضح السلوك الطرفي للتمثيل البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيسي.

9. $f(x) = 5x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 11x - 8$
10. $f(x) = -3x^5 - 8x^4 + 7x^2 + 5$

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.

11. $f(x) = 4x^3 + 8x^2 - 60x$
12. $f(x) = x^5 - 16x$

13. **الاختيار من متعدد** أي من الدوال يوجد بها 3 نقاط دوران؟

A $f(x) = x^4 - 4$
B $f(x) = x^4 - 11x^3$
C $f(x) = x^3 + 9x^2 + 20x$
D $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

14. **كرة البيسبول** يتم تحديد الارتفاع h بالقدم في كرة البيسبول. بعد ضرب الكرة من قبل أحد اللاعبين، عن طريق $h(t) = -32t^2 + 128t + 4$. حيث t هي الزمن بالثواني بعد ضرب الكرة. وضح السلوك الطرفي للتمثيل البياني للدالة باستخدام الحدود. اشرح باستخدام اختبار الحد الرئيسي.

لكل دالة، (a) طبّق اختبار الحد الرئيسي (b) حدد الأصفار وعدد مرات تكرار أي أصفار متكررة (c) جد بعض النقاط الإضافية (d) مثّل الدالة بيانيًا.

15. $f(x) = x(x-1)(x+3)$
16. $f(x) = x^4 - 9x^2$

استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين المقدمة هي عوامل لـ $f(x)$ أم لا. استخدم التعابير ذات الحدين التي تُعتبر عوامل لكتابة الصيغة المحللة لـ $f(x)$.

17. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15,\ (x+3)$
18. $f(x) = x^4 - x^3 - 34x^2 + 4x + 120,\ (x+5),\ (x-2)$

19. **الطقس** يبين الجدول متوسط درجة الحرارة العالية في مدينة باي شهريًا.

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو
62.3°	66.5°	73.3°	79.1°	85.5°	90.7°
يوليو	**أغسطس**	**سبتمبر**	**أكتوبر**	**نوفمبر**	**ديسمبر**
93.6°	93.5°	89.3°	82.0°	72.0°	64.6°

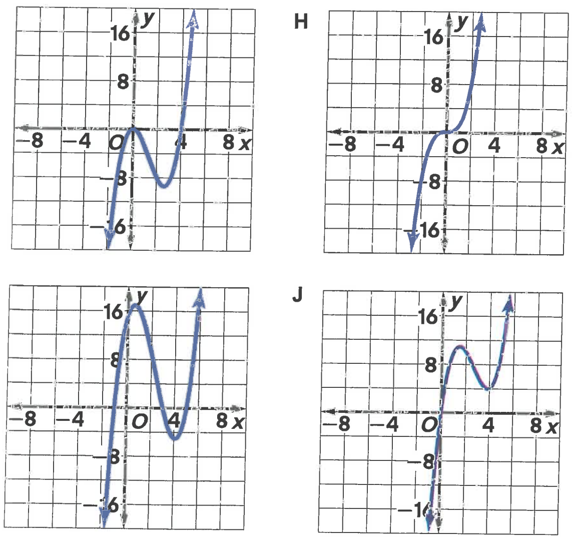
a. صمم مخطط تشتت للبيانات.
b. استخدم الحاسبة البيانية لتمثيل البيانات باستخدام دالة كثيرة الحدود درجتها 3.
استخدم $x = 1$ لشهر يناير وقرّب كل معامل إلى أقرب جزء من ألف.
c. استخدم النموذج للتنبؤ بمتوسط درجة الحرارة الكبرى ليناير القادم. افترض أن $x = 13$

اكتب دالة كثيرة الحدود لأقل درجة ذات معاملات حقيقية بالصيغة القياسية التي تشتمل على الأصفار الموضحة.

20. $-1, 4, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$
21. $5, -5, 1-i$

22. **الاختيار من متعدد** أي من الدوال التي يتم تمثيلها بيانيًا أدناه يجب أن يكون لديها أصفار تخيلية؟

F H G J



اقسم باستخدام القسمة التركيبية.

23. $f(x) = (x^3 - 7x^2 + 13) \div (x-2)$
24. $f(x) = (x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x + 8) \div (x+3)$

حدد أي خطوط تقارب ونقاط تقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

25. $f(x) = \dfrac{2x-6}{x+5}$
26. $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x-4}$

جد حلاً للمتباينات التالية.

27. $x^2 - 5x - 14 < 0$
28. $\dfrac{x^2}{x-6} \geq 0$

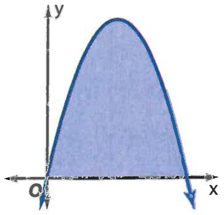
الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم

المساحة الواقعة أسفل أحد المنحنيات

الهدف

- تقريب المساحة الواقعة بين المنحنى والمحور الأفقي x.

يُعد حساب *التفاضل* والتكامل أحد فروع التفاضل والتكامل الذي يركز على عمليات إيجاد المساحات والأحجام والأطوال. في الهندسة، تعلمت كيفية حساب محيطات ومساحات وأحجام المضلعات والمجسمات والأشكال المركبة عبر الاستعانة بمعرفتك المتعلقة بالأشكال الأساسية، مثل المثلثات والأهرامات والمخاريط. يمكن إيجاد محيطات ومساحات وأحجام الأشكال والأجسام غير المنتظمة التي لا تعد من ضمن مجموعة الأشكال الأساسية بطريقة متشابهة. يعد حساب المساحة بين المنحنى والمحور الأفقي x. كما هو موضح على الجانب الأيسر، من تطبيقات حساب التفاضل والتكامل.



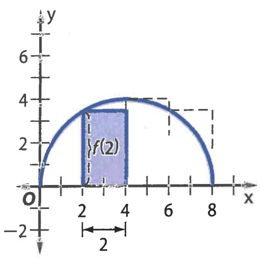
نشاط 1 تقريب المساحة الواقعة تحت أحد المنحنيات

قرّب المساحة الواقعة بين المنحنى $f(x) = \sqrt{-x^2 + 8x}$ والمحور الأفقي x باستخدام المستطيلات.

الخطوة 1 ارسم 4 مستطيلات تكون بعرض وحدتين بين $f(x)$ والمحور الأفقي x. ينبغي إيجاد ارتفاع المستطيل عندما تتقاطع **النقطة الطرفية** عندالجانب الأيسر مع $f(x)$ كما هو موضح في الشكل. لاحظ أن ارتفاع المستطيل الأول سوف يساوي $f(0)$ أو 0

الخطوة 2 احسب مساحة كل مستطيل.

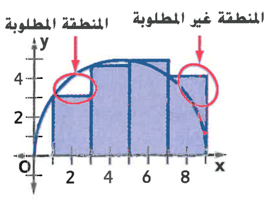
الخطوة 3 قرّب مساحة المنطقة باستخدام ناتج جمع مساحات المستطيلات.



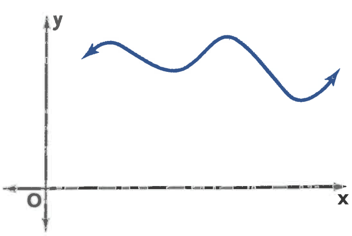
حلل النتائج

1. ما التقدير التقريبي للمساحة؟
2. كيف تؤثر مساحة أحد المستطيلات الواقعة خارج التمثيل البياني على التقدير التقريبي؟
3. احسب المساحة الفعلية لنصف الدائرة. كيف تم مقارنة التقدير التقريبي مع المساحة الفعلية؟
4. كيف يمكن استخدام المستطيلات لإيجاد عملية التقدير الأكثر دقة؟ اشرح استنتاجك.

قد لا يؤدي استخدام المستطيلات الكبيرة نسبيًا في حساب المساحة الواقعة أسفل المنحنى إلى الحصول على تقدير تقريبي يتسم بالدقة مثل العدد 3 المطلوب. قد تكون قطاعات المساحة الملحوظة أسفل المنحنى غير محسوبة. وبالمثل، إذا تجاوزت المستطيلات المنحنى، فقد يتم تضمين كميات كبيرة من المساحات التي تقع أسفل أحد المنحنيات في التقريب.

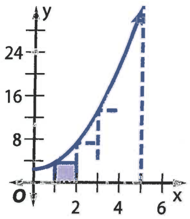


بالإضافة إلى ذلك، لا تكون المناطق محاطة دائمًا بمنحنى يتقاطع مع المحور الأفقي x. لقد تناولت بالدراسة العديد من الدوال التي لها تمثيلات بيانية تتضمن سلوكيات طرفية مختلفة. لا يلزم أن تكون لهذه التمثيلات البيانية نقطتا تقاطع مع المحور الأفقي x تسمح بوجود نقاط بداية ونهاية واضحة. في تلك الحالات، نحسب غالبًا المساحة الواقعة أسفل المنحنى للفترة الموجودة على المحور الأفقي x.



نشاط 2 تقريب المساحة الواقعة تحت أحد المنحنيات

قرّب المساحة بين المنحنى $f(x) = x^2 + 2$ والمحور الأفقي x على الفترة $[1, 5]$ باستخدام المستطيلات.



الخطوة 1 ارسم 4 مستطيلات بعرض وحدة واحدة بين $f(x)$ و المحور الأفقي x على الفترة $[1, 5]$ كما هو موضح في الشكل. استخدم **النقطة الطرفية** عند الجانب الأيسر لكل فترة فرعية لإيجاد ارتفاع كل مستطيل.

الخطوة 2 احسب مساحة كل مستطيل.

الخطوة 3 قرّب مساحة المنطقة عن طريق إيجاد ناتج جمع مساحات المستطيلات.

الخطوة 4 كرر الخطوات من 1 إلى 3 باستخدام 8 مستطيلات، يساوي عرض كل منها 0.5 وحدة، و 16 مستطيلاً، يساوي عرض كل منها 0.25 وحدة.

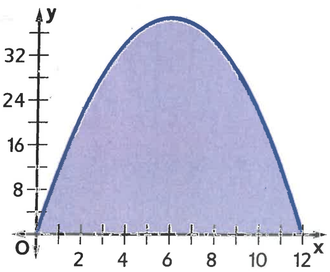
نصيحة دراسية

نقاط طرفية قد تستخدم أي نقطة داخل فترة فرعية لإيجاد ارتفاع المستطيلات المستخدمة لتقريب المساحة. النقاط المستخدمة بشكل شائع أكثر هي النقاط الطرفية عند الجانب الأيسر والنقاط الطرفية عند الجانب الأيمن والنقاط الموجودة في المنتصف.

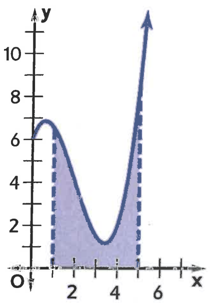
حلل النتائج

5. ما قيمة المساحة الكلية التي تقترب منها التقديرات التقريبية؟
6. باستخدام نقاط طرفية عند الجانب الأيسر، تقع جميع المستطيلات بالكامل أسفل المنحنى. كيف يؤثر هذا على التقدير التقريبي لمساحة المنطقة؟
7. هل تختلف التقديرات التقريبية إذا تم إيجاد كل ارتفاع محدد للمستطيل باستخدام النقطة النهائية له عند الجانب الأيمن؟ هل هذا حقيقي دومًا؟ اشرح استنتاجك.
8. ما الذي سيحدث للتقديرات التقريبية إذا قمنا بالاستمرار في زيادة عدد المستطيلات المراد استخدامها؟ اشرح استنتاجك.
9. قدم فرضية تمثل العلاقة بين المساحة الواقعة أسفل أحد المنحنيات وعدد المستطيلات المستخدمة لإيجاد التقدير التقريبي. اشرح إجابتك.

التمثيل والتطبيق



10. في هذه المسألة، ستقوم بتقريب المساحة الواقعة بين المنحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور الأفقي x.
    a. قرّب المساحة باستخدام 6 مستطيلات و 12 مستطيلاً و 24 مستطيلاً. جد ارتفاع كل مستطيل باستخدام نقاط طرفية الموجودة عند الجانب الأيسر.
    b. ما قيمة المساحة الكلية التي تقترب منها التقديرات التقريبية؟
    c. هل يؤدي استخدام نقاط طرفية الموجودة عند الجانب الأيمن والمقابلة للنقاط النهائية الموجودة عند الجانب الأيسر لارتفاعات المستطيلات إلى وجود تقديرات تقريبية مختلفة؟ اشرح استنتاجك.



11. في هذه المسألة، ستقوم بتقريب المساحة الواقعة بين المنحنى $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 3x + 6$ والمحور الأفقي x عند الفترة $[1, 5]$.
    a. قرّب المساحة باستخدام 4 مستطيلات أولاً ومن ثمّ استخدام 8 مستطيلات. جد ارتفاع كل مستطيل باستخدام نقاط طرفية الموجودة عند الجانب الأيسر.
    b. هل يكون ناتج حساب المساحة باستخدام 4 مستطيلات أو 8 مستطيلات مساويًا لتقديرات تقريبية كافية؟ اشرح استنتاجك.
    c. هل يؤدي استخدام نقاط النقاط الطرفية عند الجانب الأيمن والمقابلة للنقاط النهائية الموجودة عند الجانب الأيسر لارتفاعات المستطيلات إلى وجود تقديرات تقريبية مختلفة؟ اشرح استنتاجك.

الوحدة 2
الدوال الأسيّة واللوغاريتمية

السابق

في **الوحدة السابقة**.
قمت بتمثيل دوال القوة والدوال النسبية وكثيرات الحدود بيانيًا. كما قمت بتحليلها.

الحالي

بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادراً على:

- إيجاد قيم وتحليل الدوال الأسيّة واللوغاريتمية وتمثيلها بيانيًا.
- تطبيق خصائص اللوغاريتمات.
- حل المعادلات الأسيّة واللوغاريتمية.
- وضع نماذج بيانات باستخدام الدوال الأسيّة واللوغاريتمية واللوجستية.

لماذا؟ ▲

الأنواع المهددة بالانقراض تُستخدم الدوال الأسيّة كثيرًا لوضع نماذج لتزايد وتراجع أعداد الأنواع المهددة بالانقراض. على سبيل المثال، يمكن استخدام الدالة الأسيّة لتمثيل أعداد المجتمع الإحصائي لسلحفاة الغالاباغوس الخضراء، حيث أصبحت من الأنواع المهددة بالانقراض.

قراءة مسبقة استخدم مربعات المفاهيم الموجزة في الوحدة لأخذ فكرة عن تنظيم فقرات الوحدة 2.

الاستعداد للوحدة

تحديد مدى الاستعداد لديك خياران للتحقق من المهارات المطلوبة.

1 خيار الكتاب المدرسي أجب على أسئلة التمرين السريع التالية.

تمرين سريع

بسّط ما يلي.

1. $(3x^2)^4 \times 2x^3$
2. $(3b^3)(2b^4)$
3. $\dfrac{y^7}{y^4}$
4. $\left(\dfrac{1}{2a}\right)^3$
5. $\dfrac{c^4d}{cd}$
6. $\dfrac{(2n^2)^4}{4n}$

7. **السجادة** يمكن تمثيل طول سجادة غرفة نوم بـ $2a^2$ ft وعرضها بـ $5a^3$ ft. احسب مساحة السجادة.

استخدم حاسبة التمثيل البياني لرسم كل دالة. حدد ما إذا كان معكوس الدالة يمثّل دالة. (الدرس 7-1)

8. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
9. $f(x) = \sqrt{x + 2}$
10. $f(x) = \dfrac{8 - x}{x}$
11. $g(x) = \dfrac{x - 3}{x}$
12. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1 - x}}$
13. $g(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x + 7}}$

14. **الطوابع** يمكن استخدام الدالة $v(t) = 200(1.6)^t$ لتوقع قيمة v لطابع نادر بعد t من الأعوام. مثّل الدالة بيانيًا، وحدد ما إذا كان معكوس الدالة يمثّل دالة.

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضّح المجال والمدى والتقاطعات والسلوك الطرفي والاتصال، وفترات تزايد أو تناقص الدالة. (الدرس 1-2)

15. $f(x) = 2x^2$
16. $g(x) = 4x^3$
17. $h(x) = -3x^3$
18. $f(x) = -x^5$

مفردات جديدة

الدوال الجبرية algebraic functions

الدوال المتسامية transcendental functions

الدوال الأسية exponential functions

الأساس الطبيعي natural base

المرابحة المركبة المتصلة continuous compound interest

الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس b logarithmic function with base b

لوغاريتم logarithm

لوغاريتم عادي common logarithm

لوغاريتم طبيعي natural logarithm

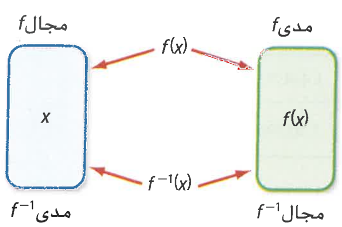
دالة النمو اللوجستية logistic growth function

التقريب الخطي linearize

مراجعة المفردات

واحد لواحد هي دالة تجتاز اختبار الخط الأفقي، بمعنى لا توجد قيمة لـ y ترتبط مع أكثر من قيمة لـ x واحدة

الدوال المتعاكسة تكون الدالتان f و f^{-1} عكسيتين فقط إذا كانت $f^{-1}[f(x)] = x$ و $f[f^{-1}(x)] = x$



السلوك الطرفي يصف سلوك $f(x)$ حيث x تزيد أو تنقص بلا حدود: فتصبح أكبر وأكبر أو سالبة أكبر وأكثر

الدالة المتصلة دالة يمكن تمثيلها بيانيًا بدون فواصل أو فجوات أو فراغات

2-1 الدوال الأسيّة

السابق:

- عرَفت مجموعة من الدوال الأم ومثّلتها بيانيًا ووصفتها.
(الدرس 5-1)

الحالي:

1 إيجاد قيم الدوال الأسيّة وتحليلها وتمثيلها بيانيًا

2 حل مسائل تتضمن نموًا وتضاؤلاً أسيًا.

لماذا؟:

- لقد زاد استهلاك الماء في العالم بشكل سريع على مدار عدة عقود ماضية، ويذهب معظم استهلاك الماء في العالم إلى الزراعة. وقد تسبب تزايد السكان في زيادة الطلب على الإنتاج الزراعي. ويمكن وضع نموذج للزيادة في استهلاك الماء باستخدام دالة أسية

مفردات جديدة

الدالة الجبرية
algebraic function

الدالة المتسامية
transcendental function

الدالة الأسيّة
exponential function

الأساس الطبيعي
natural base

نسبة المرابحة المركبة المستمرة
continuous compound interest

1 الدوال الأسيّة

درستَ في الوحدة 1 دوال القوة والدوال الجذرية والدوال كثيرة الحدود والدوال النسبية. وهذه أمثلة على **الدوال الجبرية**، وهي دوال تحتوي على قيم ناتجة عن عملية جمع الثوابت والمتغير المستقل أو طرحها أو ضربها أو قسمتها أو رفع المتغير المستقل إلى قوة نسبية. وسوف تتعرف في هذه الوحدة على الدوال الأسيّة واللوغاريتمية. وهي تُعتبر من **الدوال المتسامية** لأنها لا يمكن التعبير عنها في صورة عمليات جبرية. فهي فعليًا تتسامى على الجبر.

فلنأخذ في الاعتبار الدالة $g(x) = 3^x$ و $f(x) = x^3$ كلتاهما تتضمنان أساسًا مرفوعًا إلى أس أو قوة جبرية؛ إلا أنه في دالة القوة $f(x)$، يكون الأساس متغيرًا والأس ثابتًا. و في الدالة $g(x)$، الأساس ثابت والأس متغير. و تُسمى الدوال التي لها صيغة تشبه $g(x)$ **بالدوال الأسيّة**.

المفهوم الأساسي الدالة الأسيّة

الدالة الأسيّة ذات الأساس b لها الصيغة $f(x) = ab^x$، حيث x أي عدد حقيقي وa وb ثابتان حقيقيان بحيث $a \neq 0$، وb موجبة و$b \neq 1$.

أمثلة	أمثلة خارجة عن التعريف
$f(x) = 4^x, f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x, f(x) = 7^{-x}$	$f(x) = 2x^{-3}, f(x) = 5^{\pi}, f(x) = 1^x$

وعندما تكون المدخلات أعدادًا نسبية، يمكن حساب قيم الدوال الأسيّة باستخدام خصائص الأسس. مثلاً، إذا كانت $f(x) = 4^x$، فإن

$$f(-3) = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

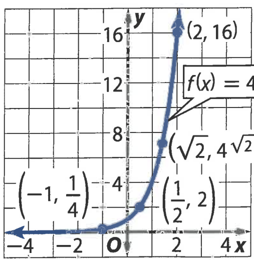
$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

$$f(2) = 4^2 = 16$$

بما أنه يتم تعريف الدوال الأسيّة لكل الأعداد الحقيقية، يجب أن تتمكن أيضًا من حساب قيم الدالة الأسيّة بالنسبة إلى القيم غير النسبية لـــ x، مثل $\sqrt{2}$. ولكن ما الذي يعنيه التعبير $4^{\sqrt{2}}$؟

يمكن تقريب قيمة هذا التعبير باستخدام عمليات تقريب نسبية متوالية القرب من $\sqrt{2}$ كما يظهر أدناه.

x	1	1.4	1.41	1.414	1.4142	1.41421	…
$f(x) = 4^x$	4	7.0	7.06	7.101	7.1029	7.10296	…

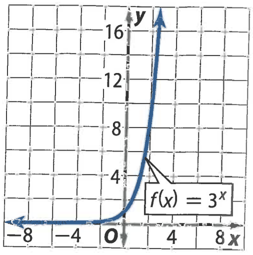


من الجدول السابق يمكننا أن نستنتج أن $4^{\sqrt{2}}$ عدد حقيقي يساوي تقريبًا 7.10 وبما أن $f(x) = 4^x$ تحتوي على قيم عددية حقيقية لكل قيمة x في مجالها، تكون هذه الدالة متصلة ويمكن تمثيلها بيانيًا على شكل منحنى أملس على النحو الموضح.

مثال 1 رسم التمثيلات البيانية للدوال الأسية وتحليلها

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. ووضح المجال والمدى ونقاط التقاطع وخطوط التقارب والسلوك الطرفي، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.

a. $f(x) = 3^x$



قم بإيجاد قيمة الدالة لعدة قيم x في مجالها. ثم استخدم منحنًى أملسًا لتوصيل كل من هذه الأزواج المرتبة.

x	−4	−2	−1	0	2	4	6
F(X)	0.01	0.11	0.33	1	9	81	729

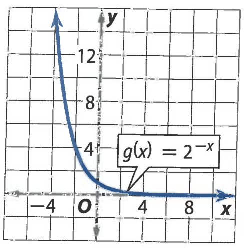
المجال: $(-\infty, \infty)$ المدى: $(0, \infty)$

المقطع من المحور الرأسي y: 1 خط التقارب: المحور الأفقي x

السلوك الطرفي: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

التزايد: $(-\infty, \infty)$

b. $g(x) = 2^{-x}$



x	−6	−4	−2	0	2	4	6
F(X)	64	16	4	1	0.25	0.06	0.02

المجال: $(-\infty, \infty)$ المدى: $(0, \infty)$

المقطع من المحور الرأسي y: 1 خط التقارب: المحور الأفقي x

السلوك الطرفي: $\lim_{x\to -\infty} g(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$

التناقص: $(-\infty, \infty)$

نصيحة دراسية

الأسس السالبة لاحظ أن $g(x) = b^{-x}$ و $f(x) = \left(\frac{1}{b}\right)^x$ متساويتان لأن $b^{-x} = \frac{1}{b^x} = (b^{-1})^x$

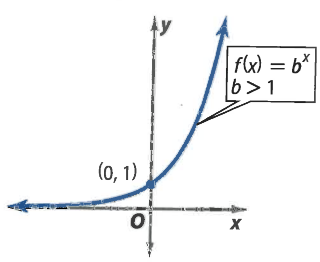
تمرين موجّه

1A. $f(x) = 6^{-x}$ **1B.** $g(x) = 5^x$ **1C.** $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x + 1$

تعبّر التمثيلات البيانية للتزايد والتناقص في المثال 1 عن النوعين الأساسيين التقليديين للدوال الأسيّة: وهما النمو الأسي والتضاؤل الأسي.

المفهوم الأساسي خصائص الدوال الأسيّة

النمو الأسي



المجال: $(-\infty, \infty)$ **المدى:** $(0, \infty)$

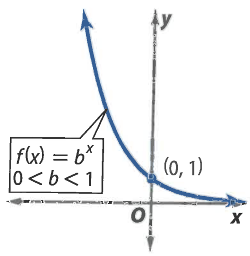
المقطع من المحور الرأسي y: 1 **التقاطع مع المحور الأفقي x:** لا يوجد

القيم القصوى: لا توجد **خط التقارب:** المحور الأفقي x

السلوك الطرفي: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

الاتصال: متصلة على الفترة $(-\infty, \infty)$

التضاؤل الأسي



المجال: $(-\infty, \infty)$ **المدى:** $(0, \infty)$

المقطع من المحور الرأسي y: 1 **التقاطع مع المحور الأفقي x:** لا يوجد

القيم القصوى: لا توجد **خط التقارب:** المحور الأفقي x

السلوك الطرفي: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

الاتصال: متصلة على الفترة $(-\infty, \infty)$

نصيحة دراسية

المعامل a الدالة الأسيّة بالصيغة $f(x) = ab^x$ تتقاطع مع المحور الرأسي y عند $(0, a)$.

يمكن اتباع نفس الأساليب التي استخدمتها لتحويل التمثيلات البيانية للدوال الجبرية على التمثيلات البيانية للدوال الأسيّة.

مثال 2 التمثيل البياني لتحولات الدوال الأسيّة

استخدم التمثيل البياني لـ $f(x) = 2^x$ لتصف التحول الذي ينتج عن كل دالة. ثم ارسم الدّوال بيانيًا.

a. $g(x) = 2^{x+1}$

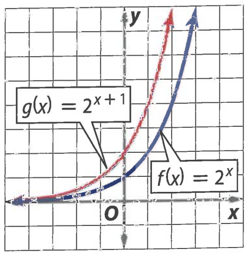
تأخذ هذه الدالة الصيغة $g(x) = f(x + 1)$. لذلك فإن التمثيل البياني لـ $g(x)$ يساوي التمثيل البياني لـ $f(x) = 2^x$ بعد إزاحته إلى اليسار وحدة واحدة (الشكل 2.1.1).

b. $h(x) = 2^{-x}$

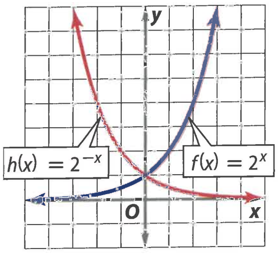
تأخذ هذه الدالة الصيغة $h(x) = f(-x)$. لذلك فإن التمثيل البياني لـ $h(x)$ يساوي التمثيل البياني لـ $f(x) = 2^x$ معكوسًا حول المحور الأفقي y (الشكل 2.1.2).

c. $j(x) = -3(2^x)$

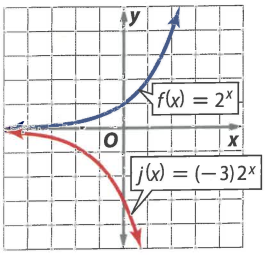
تأخذ هذه الدالة الصيغة $j(x) = -3f(x)$. لذلك فإن التمثيل البياني لـ $j(x)$ يساوي التمثيل البياني لـ $f(x) = 2^x$ معكوسًا حول المحور الأفقي x ومتمددًا رأسيًا بمعامل قدره 3 (الشكل 2.1.3).



الشكل 2.1.1



الشكل 2.1.2



الشكل 2.1.3

نصيحة دراسية

تحليل التمثيلات البيانية لاحظ أن تحولات $f(x)$ الناتجة عن $g(x)$ و$h(x)$ و$j(x)$ لا تؤثر على موقع خط التقارب الأفقي، أي المحور الأفقي x. إلا أن التحولات الناتجة عن $h(x)$ و$g(x)$ تؤثر على التقاطع مع المحور الرأسي y في التمثيل البياني.

تمرين موجّه

استخدم التمثيل البياني لـ $f(x) = 4^x$ لتصف التحول الذي ينتج عن كل دالة. ثم مثّل الدّوال بيانيًا.

2A. $k(x) = 4^x - 2$ **2B.** $m(x) = -4^{x+2}$ **2C.** $p(x) = 2(4^{-x})$

قد يكون من المثير للدهشة أن تعلم أنه في معظم استخدامات الحياة اليومية التي تتضمن دوالاً أسية، لا يتمثل الأساس الأكثر شيوعًا في 2 أو 10، وإنما عدد غير نسبي e يُسمى **الأساس الطبيعي**، حيث

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

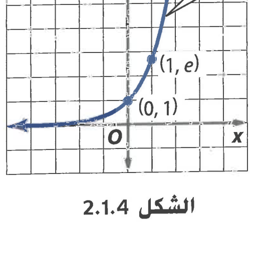
بحساب قيمة $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ للقيم الأكبر والأكبر من x، يمكننا تقدير أن قيمة هذا التعبير تقترب من عدد قريب من 2.7183. وفي واقع الأمر، فإنه باستخدام حساب التفاضل والتكامل، يتضح أن هذه القيمة تقترب من العدد غير النسبي e المسمى باسم عالم الرياضيات السويسري ليونهارد يولير الذي حسب قيمة e حتى 23 منزلة عشرية.

$$e = 2.718281828...$$

x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
1	2
10	2.59374...
100	2.70481...
1000	2.71692...
10,000	2.71814...
100,000	2.71827...
1,000,000	2.71828...

يمكن أيضًا تعريف الرقم e بأنه $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}}$. وبما أن قيم x الكسرية أقرب أكثر وأكثر من 0، فإن $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828... = e$.

الدالة التي تأخذ الصيغة $f(x) = e^x$، تُسمى الدالة الأسيّة **طبيعية** الأساس (الشكل 2.1.4) ولها نفس خصائص الدوال الأسيّة الأخرى.



الشكل 2.1.4

مثال 3 التمثيل البياني للدوال الأسية الأساسية

استخدم التمثيل البياني لـ $f(x) = e^x$ لتصف التحول الذي ينتج في التمثيل البياني لكل دالة. ثم مثّل الدّوال بيانيًا.

a. $a(x) = e^{4x}$

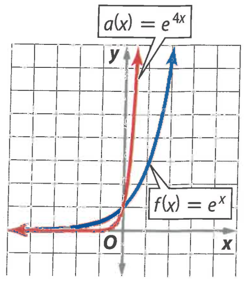
تأخذ هذه الدالة الصيغة $a(x) = f(4x)$. لذلك فإن التمثيل البياني لـ $a(x)$ يساوي التمثيل البياني لـ $f(x) = e^x$ المضغوط أفقيًا بمعامل قدره $\frac{1}{4}$ (الشكل 2.1.5)

b. $b(x) = e^{-x} + 3$

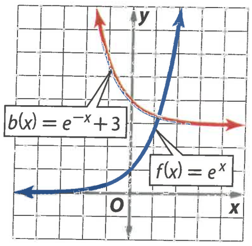
تأخذ هذه الدالة الصيغة $b(x) = f(-x) + 3$ لذلك فإن التمثيل البياني لـ $b(x)$ يساوي التمثيل البياني لـ $f(x) = e^x$ معكوسا حول المحور الرأسي y ومُزاحًا للأعلى بمقدار 3 وحدات (الشكل 2.1.6).

c. $c(x) = \frac{1}{2}e^x$

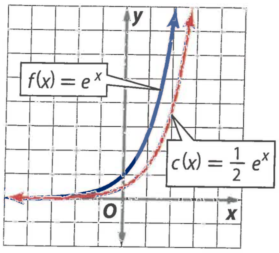
تأخذ هذه الدالة الصيغة $c(x) = \frac{1}{2} f(x)$ لذلك فإن التمثيل البياني لـ $c(x)$ يساوي التمثيل البياني لـ $f(x) = e^x$ مضغوطًا رأسيًا بمعامل قدره $\frac{1}{2}$ (الشكل 2.1.7)



الشكل 2.1.5



الشكل 2.1.6



الشكل 2.1.7

تمرين موجّه

3A. $q(x) = e^{-x}$ 3B. $r(x) = e^x - 5$ 3C. $t(x) = 3e^x$

2 النمو والتضاؤل الأسيان

النمو والتضاؤل الأسيان من الاستخدامات الشائعة للنمو الأسي نسبة المرابحة المركبة. افترض أنه تم استثمار رأس المال الأولي P في حساب بمعدل المرابحة الثانوي r، والمرابحة مركبة أو تتم إعادة استثمارها سنويًا. ففي نهاية كل عام، تتم إضافة نسبة المرابحة المكتسبة إلى رصيد الحساب. ويصبح هذا المبلغ هو رأس المال الجديد للعام التالي.

العام	رصيد الحساب بعد كل إضافة مركبة	
0	$A_0 = P$	الاستثمار أو رأس المال الأصلي = P
1	$A_1 = A_0 + A_0 r$	إضافة نسبة المرابحة من العام 0، وهي $A_0 r$.
	$= A_0(1 + r)$	خاصية التوزيع
	$= P(1 + r)$	$A_0 = P$
2	$A_2 = A_1(1 + r)$	إضافة نسبة المرابحة من العام 1.
	$= P(1 + r)(1 + r)$	$A_1 = P(1 + r)$
	$= P(1 + r)^2$	بسّط.
3	$A_3 = A_2(1 + r)$	إضافة نسبة المرابحة من العام 2.
	$= P(1 + r)^2(1 + r)$	$A_2 = P(1 + r)^2$
	$= P(1 + r)^3$	بسّط.
4	$A_4 = A_3(1 + r)$	إضافة نسبة المرابحة من العام 3.
	$= P(1 + r)^3(1 + r)$	$A_3 = P(1 + r)^3$
	$= P(1 + r)^3$	بسّط.

يؤدي النمط الذي ينشأ إلى الدالة الأسيّة التالية بالأساس $(1 + r)$.

$A(t) = P(1 + r)^t$ رصيد الحساب بعد t من الأعوام

القراءة في الرياضيات

الأساس e تتم قراءة التعبيرات مع الأساس e على نفس منوال التعبيرات الأسيّة مع أي أساس آخر. على سبيل المثال، يُقرأ التعبير e^{4x} على أنه e مرفوعة للقوة أربعة x.

المسائل بإضافات نسبة المرابحة المركبة كل ربع عام أو شهريًا أو حتى يوميًا. نفترض أن n هي عدد مرات إضافة نسبة المرابحة المركبة كل عام. وبذلك

- يمثل معدل كل إضافة لنسبة المرابحة المركبة $\frac{r}{n}$ نسبة من المعدل السنوي r.
- عدد مرات إضافة نسبة المرابحة المركبة بعد t من الأعوام هو nt.

إذا استبدلنا r بـ $\frac{r}{n}$ وt بـ nt في الصيغة $A(t) = P(1 + r)^t$، نحصل على قاعدة عامة لنسبة المرابحة المركبة.

المفهوم الأساسي قاعدة نسبة المرابحة المركبة

إذا تم استثمار رأس مال P بنسبة مرابحة سنوية r مركبة (بصيغة عشرية) تتم إضافتها n مرات في العام، يكون الرصيد A في الحساب بعد t من السنوات كالتالي

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

مثال 4 استخدام نسبة المرابحة المركبة

المعرفة المالية تستثمر حليمة AED 300 في حساب بنسبة مرابحة تبلغ 6% بدون إجراء أي إيداعات أو سحوبات أخرى. ماذا سيكون رصيد حساب حليمة بعد 20 عامًا إذا كانت نسبة المرابحة مركبة:

a. كل نصف عام؟

لإضافة نسبة المرابحة المركبة كل نصف عام، $n = 2$.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \quad \text{قاعدة نسبة المرابحة المركبة}$$

$$= 300\left(1 + \frac{0.06}{2}\right)^{2(20)} \quad P = 300,\ r = 0.06,\ n = 2,\ t = 20$$

$$\approx 978.61 \quad \text{بسّط.}$$

عند إضافة نسبة المرابحة المركبة كل نصف عام، سيبلغ رصيد حساب مريم بعد 20 عامًا AED 978.61.

b. شهريًا؟

لإضافة نسبة المرابحة المركبة شهريًا، $n = 12$. بما أن هناك 12 شهرًا في العام.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \quad \text{قاعدة نسبة المرابحة المركبة}$$

$$= 300\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{12(20)} \quad P = 300,\ r = 0.06,\ n = 12,\ t = 20$$

$$\approx 993.06 \quad \text{بسّط.}$$

مع إضافة نسبة المرابحة المركبة شهريًا، سيبلغ رصيد حساب مريم بعد 20 عامًا AED 993.06.

c. يوميًا؟

لإضافة نسبة المرابحة المركبة يوميًا، $n = 365$.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \quad \text{قاعدة نسبة المرابحة المركبة}$$

$$= 300\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365(20)} \quad P = 300,\ r = 0.06,\ t = 20,\ n = 365$$

$$\approx 995.94 \quad \text{بسّط.}$$

عند إضافة نسبة المرابحة المركبة يوميًا، سيبلغ رصيد حساب مريم بعد 20 عامًا AED 995.94.

نصيحة دراسية
إضافة المرابحة المركبة يوميًا في هذا النص، سنفترض أن العام يتألف من 365 يومًا في المسائل التي تتضمن إضافة المرابحة المركبة يوميًا.

تمرين موجّه

4. **المعرفة المالية** إذا تم استثمار AED 1000 في حساب استثماري عبر الإنترنت يحقق مكسبًا يبلغ 8% في العام، فكم سيبلغ الحساب في نهاية مدة 10 أعوام إذا لم تكن هناك أي إيداعات أو سحوبات أخرى وكانت المرابحة مركبة:

a. كل نصف عام؟ b. كل ربع عام؟ c. يوميًا؟

لاحظ أنه مع زيادة عدد مرات إضافة نسبة المرابحة المركبة في المثال 4، يزيد رصيد الحساب أيضًا. إلا أن الزيادة صغيرة نسبيًا، حيث تبلغ فقط AED 995.94 − AED 993.06 = AED 2.88.

يوضح الجدول أدناه مقدار A محسوبًا لعدة قيم من n. لاحظ أنه بينما يزيد رصيد الحساب، يقل مقدار الزيادة مع زيادة n. وفي الواقع، يبدو أن المبلغ يميل إلى أن يكون قيمة قريبة من AED 996.03.

$A = 300\left(1 + \frac{0.06}{n}\right)^{20n}$	n	مركبة
962.14 AED	1	سنويًا
978.61 AED	2	كل نصف عام
987.20 AED	4	كل ربع عام
993.06 AED	12	شهريًا
995.94 AED	365	يوميًا
996.03 AED	8760	كل ساعة

افترض أن المرابحة كانت مركبة باستمرار بحيث لا تكون هناك فترة انتظار بين مدفوعات المرابحة. يمكننا استنتاج قاعدة **لنسبة المرابحة المركبة المستمرة** عن طريق استخدام الجبر أولاً لتعديل قاعدة المرابحة المركبة العادية.

$$A = P\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{nt}$$ قاعدة نسبة المرابحة المركبة حيث $\frac{r}{n}$ مكتوبة بالشكل $\frac{1}{\frac{n}{r}}$

$$= P\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{xrt}$$ لنفترض بأن $x = \frac{n}{r}$ و $n = rx$.

$$= P\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{rt}$$ خاصية الأس الثابت في الأسس

ينبغي أن يكون التعبير بين القوسين مألوفًا. تذكر أن $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$

بما أن r قيمة ثابتة و $x = \frac{n}{r}, x \to \infty$ إذًا، $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = \lim_{x\to\infty} P\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{rt} = Pe^{rt}$$

يقودنا هذا إلى قاعدة حساب نسبة المرابحة المركبة المستمرة الموضحة أدناه.

المفهوم الأساسي قاعدة نسبة المرابحة المركبة المستمرة

إذا تم استثمار رأس مال P بنسبة مرابحة سنوية r مركبة (بصيغة عشرية) تتم إضافتها باستمرار، فحينها يتم احتساب الرصيد A في الحساب بعد t من الأعوام كالتالي

$A = Pe^{rt}$.

مثال 5 استخدم نسبة المرابحة المركبة المستمرة

المعرفة المالية افترض أن حليمة وجدت حسابًا سيسمح لها باستثمار مبلغ AED 300 الخاص بها بنسبة مرابحة 6% تتم إضافتها باستمرار. وإذا لم تكن هناك إيداعات أو سحوبات أخرى، فكم سيبلغ رصيد حساب حليمة بعد 20 عامًا؟

$A = Pe^{rt}$ قاعدة نسبة المرابحة المركبة المستمرة

$= 300e^{(0.06)(20)}$ $P = 300 = r = 0.06,\ t = 20$

≈ 996.04 بسّط.

عند إضافة نسبة المرابحة المركبة باستمرار، سيبلغ رصيد حساب مريم بعد 20 عامًا AED 996.04.

الربط بالحياة اليومية

النسبة الأولية هي نسبة المرابحة التي تفرضها البنوك على المقترضين الأكثر استحقاقًا للائتمان. يمكن أن تؤثر التغيرات في هذه النسبة على نسب أخرى، بما في ذلك نسب مرابحة الرهن العقاري.

المصدر: Federal Reserve System

تمرين موجّه

5. المعاملات البنكية عبر الإنترنت إذا تم استثمار AED 1000 في حساب استثماري يحقق مكسبًا يبلغ 8% في العام و تتم إضافته كمرابحة مركبة باستمرار، فكم سيبلغ الحساب في نهاية مدة 10 أعوام إذا لم تكن هناك أي إيداعات أو سحوبات أخرى؟

بالإضافة إلى الاستثمارات، يمكن أيضًا أن يتغير عدد سكان والحيوانات والبكتيريا ومقادير المواد الإشعاعية بمعدل أسي. تسري نماذج النمو والتضاؤل الأسيين على أي وضع يتناسب فيه النمو مع الحجم الأولي للكمية المعنية.

المفهوم الأساسي المعادلات الأسيّة للنمو أو التضاؤل

إذا علمت أن المبلغ الأولي N_0 ينمو أو يتضاءل بمعدل أسي r أو k (في صورة كسر عشري). فحينها يمكن تمثيل المبلغ النهائي N بعد مدة t بالمعادلات التالية.

نمو أو تضاؤل أسي

$N = N_0(1 + r)^t$

إذا كان r يمثل معدل نمو. فإن $r > 0$.

إذا كان r يمثل معدل تضاؤل. فإن $r < 0$.

نمو أو تضاؤل أسي مستمر

$N = N_0 e^{kt}$

إذا كان k يمثل معدل نمو مستمر. فإن $k > 0$.

إذا كان k يمثل معدل تضاؤل مستمر. فإن $k < 0$.

يتشابه النمو والتضاؤل المستمران مع المرابحة المركبة المستمرة. تتم إضافة النمو أو التضاؤل المركبين باستمرار وليس سنويًا أو شهريًا أو كل ساعة أو وفق فترة زمنية معينة أخرى. يمكن وضع نماذج لنمو السكان أسيًا وباستمرار ووفق نماذج أخرى.

مثال 6 من الحياة اليومية التمثيل باستخدام النمو أو التضاؤل الأسي

السكان يبلغ عدد سكان المكسيك 110 ملايين نسمة تقريبًا. إذا استمر التعداد السكاني في المكسيك بالنمو بالمعدل المذكور، فتوقع التعداد السّكاني في المكسيك بعد 10 أعوام و20 عامًا.

a. 1.42% سنويًا

استخدم قاعدة النمو الأسي لكتابة معادلة تضع نموذجًا لهذا الموقف.

$$N = N_0(1 + r)^t \quad \text{قاعدة النمو الأسي}$$
$$= 110{,}000{,}000(1 + 0.0142)^t \quad N_0 = 110{,}000{,}000,\ r = 0.0142$$
$$= 110{,}000{,}000(1.0142)^t \quad \text{بسّط}$$

استخدم هذه المعادلة لإيجاد قيمة N عندما تكون $t = 10$ و$t = 20$.

$$N = 110{,}000{,}000(1.0142)^t \quad \text{صياغة المعادلة}$$
$$= 110{,}000{,}000(1.0142)^{10} \quad t = 10 \text{ أو } t = 20$$
$$\approx 126{,}656{,}869 \quad \text{بسّط}$$

$$N = 110{,}000{,}000(1.0142)^t$$
$$= 110{,}000{,}000(1.0142)^{20}$$
$$= 145{,}836{,}022$$

إذا استمر عدد سكان المكسيك في النمو بمعدل سنوي يبلغ 1.42%. فسيبلغ عدد السكان خلال 10 أعوام نحو 126,656,869 تقريبًا وسيبلغ عددهم 145,836,022 تقريبًا خلال 20 عامًا.

b. 1.42% باستمرار

استخدم قاعدة النمو الأسي المستمر لكتابة معادلة نموذج.

$$N = N_0 e^{kt} \quad \text{صيغة النمو الأسي المستمر}$$
$$= 110{,}000{,}000\, e^{0.0142t} \quad N_0 = 110{,}000{,}000,\ k = 0.0142$$

استخدم هذه المعادلة لإيجاد قيمة N عندما تكون $t = 10$ و$t = 20$.

$$N = 110{,}000{,}000\, e^{0.0142t} \quad \text{صياغة المعادلة}$$
$$= 110{,}000{,}000 e^{0.0142(10)} \quad t = 10 \text{ و } t = 20$$
$$\approx 126{,}783{,}431 \quad \text{بسّط}$$

$$N = 110{,}000{,}000\, e^{1.0142t}$$
$$= 110{,}000{,}000\, e^{0.0142(20)}$$
$$\approx 146{,}127{,}622$$

إذا استمر عدد سكان المكسيك في النمو بمعدل مستمر يبلغ 1.42%. فسيبلغ عدد السكان خلال 10 أعوام 126,783,431 تقريبًا وسيبلغ عددهم 146,127,622 تقريبًا خلال 20 عامًا.

الربط مع الحياة اليومية

في عام 2008. تم تقدير معدل نمو عدد سكان المكسيك بأنه 1.42% تقريبًا سنويًا.

المصدر: CIA-The World Fact Book

انتبه! **استخدام معدلات التضاؤل** تذكر أن تكتب معدلات التضاؤل بقيم سالبة.

تمرين موجّه

6. **السكان** ينخفض عدد سكان إحدى المدن بمعدل 6%. فإذا كان عدد السكان حاليًا يبلغ 12,426 نسمة، فتوقع عدد السكان خلال 5 و10 أعوام باستخدام كل نموذج.

A. سنويًا **B.** باستمرار

بعد العثور على نموذج لموقف ما، يمكنك استخدام التمثيل البياني للنموذج في حل المسائل.

مثال 7 من الحياة اليومية التمثيل باستخدام النمو أو التضاؤل الأسي

المرض يوضح الجدول عدد الحالات التي تم الإبلاغ عنها للإصابة بمرض الجدري في الولايات المتحدة عام 1980 و2005.

حالات الإصابة بالجدري التي تم الإبلاغ عنها في الولايات المتحدة	
العام	**الحالات (بالآلاف)**
1980	190.9
2005	32.2

المصدر: المراكز الأمريكية لمكافحة الأمراض والوقاية منها

a. إذا كان عدد الحالات التي تم الإبلاغ عنها للإصابة بمرض الجدري ينخفض بمعدلٍ أسّي، فحدّد معدّل الانخفاض واكتب معادلةً أسيةً لنمذجة هذه الحالة.

إذا افترضنا أن $N(t)$ يمثل عدد الحالات على مدار t من الأعوام بعد 1980 وافترضنا حدوث تضاؤل أسي، فإن العدد الأولي للحالات هو $N_0 = 190.9$ في الوقت $t = 2005 - 1980$ أو 25. عدد الحالات التي تم الإبلاغ عنها $N(25) = 32.2$. استخدم هذه المعلومات لإيجاد معدل التضاؤل r.

$$N(t) = N_0(1 + r)^t$$ قاعدة النمو الأسي

$$32.2 = 190.9(1 + r)^{25}$$ $N(25) = 32.2,\ N_0 = 190.9,\ t = 25$

$$\frac{32.2}{190.9} = (1 + r)^{25}$$ اقسم كل طرف على 190.9.

$$\sqrt[25]{\frac{32.2}{190.9}} = 1 + r$$ خذ الجذر الموجب الخامس والعشرين لكل طرف.

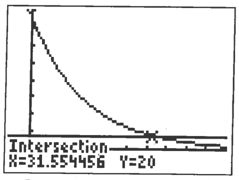
$$\sqrt[25]{\frac{32.2}{190.9}} - 1 = r$$ اطرح 1 من كل طرف.

$$-0.069 \approx r$$ بسّط.

يقل عدد الحالات التي يتم الإبلاغ عنها بمعدل 6.9% تقريبًا كل عام. ولذلك، فالمعادلة التي تمثل هذه الحالة هي $N(t) = 190.9[1 + (-0.069)]^t$ أو $N(t) = 190.9(0.931)^t$

b. استخدم نموذجك لتوقع وقت انخفاض عدد الحالات إلى أقل من 20,000.

لإيجاد الوقت الذي سيحدث فيه انخفاض في عدد الحالات إلى أقل من 20000، ابحث عن تقاطع التمثيل البياني لـ $N(t) = 190.9(0.931)^t$ والخط $N(t) = 20$
توضح حاسبة التمثيلات البيانية أن قيمة t حيث $190.9(0.931)^t = 20$ تبلغ تقريبًا 32.



[..., 50] scl: 5 by [−25, 200] scl: 25

وبما أن t هو عدد الأعوام بعد عام 1980، فإن هذا النموذج يشير إلى أنه بعد عام 32 + 1980 أو عام 2012، سينخفض عدد الحالات إلى أقل من 20000 إذا استمر الانخفاض بهذا المعدل.

تمرين موجّه

7. **السكان** استخدم البيانات الموجودة في الجدول وافترض أن عدد سكان مقاطعة ديد في ميامي ينمو أسيًا.

عدد السكان التقديري لمقاطعة ديد في مدينة ميامي في ولاية فلوريدا	
العام	**السكان (بالمليون)**
1990	1.94
2000	2.25

المصدر: مكتب إحصاءات السكان في الولايات المتحدة

A. حدد معدل النمو واكتب معادلة أسية لتضع نموذجًا لهذا النمو.

B. استخدم نموذجك لتوقع العام الذي سيتجاوز فيه عدد سكان مقاطعة ديد في ميامي 2.7 مليون نسمة.

التمارين

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضّح المجال والمدى والتقاطعات وخطوط التقارب والسلوك الطرفي، وفترات تزايد أو تناقص الدالة. (المثال 1)

1. $f(x) = 2^{-x}$
2. $r(x) = 5^{x}$
3. $h(x) = 0.2^{x+2}$
4. $k(x) = 6^{x}$
5. $m(x) = -(0.25)^{x}$
6. $p(x) = 0.1^{-x}$
7. $q(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^{x}$
8. $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$
9. $c(x) = 2^{x} - 3$
10. $d(x) = 5^{-x} + 2$

استخدم التمثيل البياني لـ f(x) لوصف التحويل الذي يؤدي إلى رسم g(x). ثم ارسم تمثيلي f(x) وg(x) البيانيين. (المثالان 2 و3)

11. $f(x) = 4^x; g(x) = 4^x - 3$
12. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x; g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4}$
13. $f(x) = 3^x; g(x) = -2(3^x)$
14. $f(x) = 2^x; g(x) = 2^{x-2} + 5$
15. $f(x) = 10^x; g(x) = 10^{-x+3}$
16. $f(x) = e^x; g(x) = e^{2x}$
17. $f(x) = e^x; g(x) = e^{x+2} - 1$
18. $f(x) = e^x; g(x) = e^{-x+1}$
19. $f(x) = e^x; g(x) = 3e^x$
20. $f(x) = e^x; g(x) = -(e^x) + 4$

المعرفة المالية انسخ الجدول أدناه وأكمله لإيجاد قيمة الاستثمار A لرأس المال P والمعدل r والزمن t إذا تمت إضافة المرابحة المركبة n مرات سنويًا. (المثالان 4 و5)

n	1	4	12	365	مستمرة
A					

21. $P =$ AED 500, $r = 3\%$, $t = 5$ أعوام
22. $P =$ AED 1000, $r = 4.5\%$, $t = 10$ أعوام
23. $P =$ AED 1000, $r = 5\%$, $t = 20$ عامًا
24. $P =$ AED 5000, $r = 6\%$, $t = 30$ عامًا

25. **المعرفة المالية** حصل أحمد على ميراث بقيمة AED 20000 في عمر 8 أعوام، لكنه لن يتمكن من إجراء المعاملات عليه قبل أن يبلغ 18 عامًا. (المثالان 4 و5)

a. إذا تم وضع ميراثه في حساب ادخاري يحقق 4.6% كمرابحة مركبة شهريًا، فكم ستبلغ قيمة ميراث أحمد في يوم عيد ميلاده الثامن عشر؟

b. كم ستبلغ قيمة ميراث أحمد إذا تم وضعه في حساب يحقق مرابحة مركبة بنسبة 4.2% باستمرار؟

26. **المعرفة المالية** تستثمر خولة مبلغ AED 1200 في شهادة إيداع. يوضح الجدول معدلات المرابحة التي يقدمها البنك على شهادات الإيداع لمدة 3 و5 أعوام. (المثالان 4 و5)

عروض شهادات الإيداع		
الأعوام	3	5
المرابحة	3.45%	4.75%
مركبة	مستمرة	شهريًا

a. كم ستبلغ قيمة استثمارها مع كل خيار؟

b. كم ستبلغ قيمة استثمارها إذا تمت إضافة المرابحة المركبة باستمرار لشهادة الإيداع لمدة 5 أعوام؟

التعداد انسخ الجدول وأكمله لإيجاد العدد N لنوع مهدد بالانقراض بعد المدة t إذا كان تعداده المبدئي N_0 ومعدله السنوي r أو معدله المستمر k في الزيادة أو الانخفاض. (مثال 6)

t	5	10	15	20	50
N					

27. $N_0 = 15831,\ r = -4.2\%$
28. $N_0 = 23112,\ r = 0.8\%$
29. $N_0 = 17692,\ k = 2.02\%$
30. $N_0 = 9689,\ k = -3.7\%$

31. **الماء** كان استهلاك الماء على مستوى العالم حوالي 294.2 مليون جالون في عام 1950. إذا ارتفع استهلاك الماء بالمعدل المذكور، فضع تقديرًا لمقدار الماء المستخدم في عام 2000 وتوقع المقدار في عام 2050. (مثال 6)

a. 3% سنويًا
b. 3.05% باستمرار

32. **الأجور** تحصل ياسمين على زيادة تبلغ 3.5% في نهاية كل عام من جهة عملها تعويضًا لها عن التضخم. عندما بدأت العمل في الشركة عام 1994، كانت تحصل على مرتب يبلغ AED 31,000. (المثال 6)

a. كم كان مرتب ياسمين في عامي 2000 و2004؟

b. إذا ظلت ياسمين تتلقى زيادة في نهاية كل عام، فما المبلغ الذي ستحصل عليه في عامها الأخير إذا كانت تخطط للتقاعد في عام 2024؟

33. **مكافحة الحشرات** فكّر في ضمان منع النمل الأبيض الذي تقدمه شركة إكستريم في إعلانها بالأسفل.

إذا كانت العبارة الأولى في هذا الزعم صحيحة، فضع تقييمًا لمصداقية العبارة الثانية. اشرح استدلالك. (مثال 6)

34. **التضخم** مؤشر أسعار المستهلكين (CPI) هو رقم دلالي يقيس متوسط سعر السلع والخدمات للمستهلكين. يشير التغير في مؤشر أسعار المستهلكين إلى معدل النمو في التضخم. في عام 1958، كان مؤشر أسعار المستهلكين 28.6 وفي عام 2008 بلغ مؤشر أسعار المستهلكين 211.08. (المثال 7)

a. حدد معدل نمو التضخم بين عامي 1958 و2008. استخدم هذا المعدل في كتابة معادلة أسية لتمثيل هذا الموقف.

b. ماذا ستكون قراءة مؤشر أسعار المستهلكين في عام 2015؟ بهذا المعدل، متى سيتجاوز مؤشر أسعار المستهلكين 350؟

35. **البنزين** كتب جمال معادلة أسية لتمثيل تكلفة البنزين. وقد توصل إلى متوسط تكلفة لتر البنزين على مدار عامين واستخدم هذه البيانات في نموذجه التمثيلي. (المثال 7)

متوسط التكلفة لكل لتر من البنزين

العام	التكلفة (AED)
1990	1.19
2011	3.91

a. إذا كان متوسط تكلفة البنزين يتزايد بمعدل أسي، فحدد معدل الزيادة. اكتب معادلة أسية لتمثيل هذا الموقف.

b. استخدم نموذجك التمثيلي في توقع تكلفة تكلفة لتر البنزين في عامي 2015 و 2017.

c. متى سيتجاوز متوسط تكلفة لتر البنزين AED 7؟

d. لماذا من المحتمل ألّا يقدم النموذج الأسي تمثيلاً صحيحًا لمتوسط أسعار البنزين؟

36. **الفيزياء** يبلغ الضغط الجوي عند مستوى البحر 15.191 رطلاً في البوصة المربعة (psi). وينخفض باستمرار بمعدل 0.004% مع زيادة الارتفاع بمقدار x قدم.

a. اكتب دالة تمثيلية للتضاؤل الأسي المستمر تمثل الضغط الجوي $a(x)$.

b. استخدم النموذج لإيجاد المعدل التقريبي للضغط الجوي عند قمة جبل إيفرست.

c. إذا كانت طائرة إنقاذ مروحية معينة لا تستطيع الطيران إلا في ضغط جوي يزيد عن 5.5 أرطال في البوصة المربعة، فما الارتفاع الذي تستطيع الطيران عنده فوق جبل إيفرست؟

37. **النشاط الإشعاعي** عمر النصف للمادة المشعة هو مقدار الوقت اللازم لكي يتحلل نصف عدد ذرات المادة. يُستخدم اليورانيوم-235 كوقود لمحطة توليد كهرباء تجارية. يبلغ عمر النصف 704 مليون سنة.

a. كم عدد جرامات اليورانيوم -235 التي ستتبقى بعد مليون سنة إذا بدأت بمقدار 200 جرام؟

b. كم عدد جرامات اليورانيوم -235 التي ستتبقى بعد 4540 مليون سنة إذا بدأت بمقدار 200 جرام؟

38. **علم النبات** في ظل ظروف النمو الملائمة، يتضاعف عدد نوع معين من النباتات خلال 12 سنة. افترض أن أحد المراعي يحتوي على 46 نباتًا من هذا النوع. كم عدد النباتات التي ستكون موجودة بعد 20 و65 و x يوم؟

39. **النشاط الإشعاعي** تعتمد طريقة تحديد العمر بالكربون المشع على استخدام الكربون 14 في تقدير عمر المواد العضوية التي يشيع وجودها في المواقع الأثرية. يبلغ عمر النصف للكربون 14 نحو 5.73 آلاف سنة تقريبًا.

a. اكتب معادلة تمثيلية للتضاؤل الأسي.

b. كم عدد جرامات الكربون 14 التي ستتبقى بعد 12.82 ألف سنة إذا بدأت بمقدار 7 جرامات؟

c. استخدم نموذجك في تقدير الوقت الذي سيتبقى فيه جرام واحد فقط من الكمية الأصلية التي تبلغ 7 جرامات من الكربون 14.

40. **الميكروبيولوجيا** يتسم نوع معين من البكتيريا يُستخدم في معالجة تسريبات النفط بزمن تضاعف يبلغ 15 دقيقة. افترض أن مستعمرة بدأت بعدد من البكتيريا يبلغ 1.

a. **اكتب معادلة تمثيلية لهذا النمو الأسي.**

b. كم عدد البكتيريا التي ستكون موجودة تقريبًا بعد 55 دقيقة؟

c. عدد البكتيريا الذي يبلغ 8192 يكفي لتنظيف تسريب بسيط من النفط. استخدم نموذج في توقع الوقت الذي ستستغرقه المستعمرة لتصل إلى هذا الحجم.

41. **الموسوعة** زاد عدد المقالات الذي يشكل محتوى مفتوحًا عبر الإنترنت أسيًا خلال أعوامه القليلة الأولى. ويمكن تمثيل عدد المقالات، $A(t)$، بعد t عام من عام 2001 بالمعادلة $A(t) = 16198 \times 2.1.3^{t}$

a. وفقًا لهذا النموذج، كم عدد المقالات التي كانت تشكل الموسوعة في عام 2001؟ ما معدل تزايد عدد المقالات؟

b. ما العام الذي وصلت فيه الموسوعة إلى مليون مقال؟

c. توقع عدد المقالات التي ستكون موجودة في بداية عام 2018.

42. **المخاطرة** يتزايد احتمال وقوع حادث سيارة أسيًا إذا تعاطى السائق نوعًا من الأدوية. يمكن تمثيل العلاقة بالمعادلة $A(c) = 6e^{12.8c}$، حيث A تمثل النسبة المئوية لاحتمال وقوع حادث وc هي تركيز الدواء في دم السائق.

a. النسبة المقبولة لتركيز الدواء في الدم 0.08. ما هي النسبة المئوية لاحتمال وقوع حادث سيارة عند هذا التركيز؟

b. ما تركيز الدواء في الدم الذي يحقق احتمالاً بنسبة 50% لوقوع حادث سيارة؟

43. حاسبة التمثيل البياني يوضح الجدول عدد المدونات الموجودة بالمليون كل 6 أشهر.

الأشهر	1	7	13	19	25	31
المدونات	0.7	2	4	8	16	31

a. باستخدام أداة الانحدار الأسي في الحاسبة، توصل إلى دالة تمثل البيانات.

b. بعد كم شهر وصل عدد المدونات إلى 20 مليونًا؟

c. توقع عدد المدونات بعد 48 شهرًا.

44. اللغات علم مقارنة اللغة والتاريخ هو تخصص في اللغويات يدرس التغير في اللغات. تمثل المعادلة $c = e^{-Lt}$ هذا التغير، حيث c هي نسبة الكلمات التي تظل بدون تغيير وt هي الزمن الذي مر منذ تغيرت لغتان وL هو معدل الاستبدال.

a. إذا تغيرت لغتان منذ 5 أعوام ومعدل الاستبدال يبلغ 43.13%، فما نسبة الكلمات التي تظل بدون تغيير؟

b. بعد كم عام ستظل نسبة 1% من الكلمات بدون تغير؟

45. المعرفة المالية رُزق زوجان للتو بطفل ويريدان إيداع وديعة لتعليمه الجامعي فورًا. استخدم المعلومات الواردة أدناه لتحدد مقدار المال الذي ينبغي أن يستثمراه.

حاسبة التمثيل البياني جد قيمة x التي تؤدي إلى صحة كل معادلة أو متباينة أدناه. قرِّب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.

46. $2^x < 4$

47. $e^{2^x} = 3$

48. $-e^x > -2$

49. $2^{-4^x} \le 8$

اذكر المجال والمدى والاتصال وسلوك التزايد/التناقص لدالة أسية بالتقاطع المذكور والسلوك الطرفي. ثم مثِّل الدالة بيانيًا.

50. $f(0) = -1, \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

51. $f(0) = 4, \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \lim_{x\to\infty} f(x) = 3$

52. $f(0) = 3, \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2, \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

حدد معادلة كل دالة بعد التحول المذكور للدالة الأم.

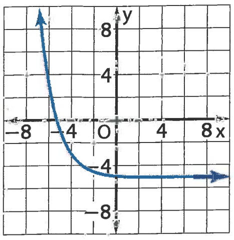
53. $f(x) = 5^x$ مزاحة بمقدار 3 وحدات نحو اليسار و4 وحدات إلى الأسفل

54. $f(x) = 0.25^x$ مضغوطة رأسيًا بمعامل مقداره 3 ومزاحة 9 وحدات إلى اليسار و12 وحدة لأعلى

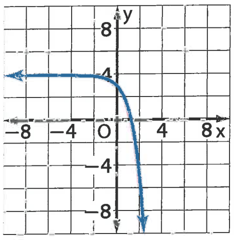
55. $f(x) = 4^x$ معكوسة حول المحور الأفقي x ومزاحة بمقدار وحدة إلى اليسار و6 وحدات إلى أعلى

حدد التحولات في الدالة الأم المذكورة التي تؤدي إلى كل تمثيل بياني.

56. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



57. $f(x) = 3^x$



58. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تبحث في متوسط معدل التغير للدوال الأسيّة.

a. **العرض البياني** مثِّل $f(x) = b^x$ عند $b = 2, 3, 4, 5$.

b. **العرض التحليلي** جد متوسط معدل التغير لكل دالة في الفترة [0, 2].

c. **العرض الكلامي** ما الذي يمكن أن تتوصل إليه بخصوص متوسط معدل التغير في $f(x) = b^x$ عندما تتزايد b؟ كيف يظهر هذا في التمثيلات البيانية في الجزء a؟

d. **العرض البياني** مثِّل $f(x) = b^{-x}$ عندما تكون $b = 2, 3, 4, 5$.

e. **العرض التحليلي** جد متوسط معدل التغير في كل دالة في الفترة [0, 2].

f. **العرض الكلامي** ما الذي يمكن أن تتوصل إليه بخصوص متوسط معدل التغير في $f(x) = b^{-x}$ عندما تتزايد b؟ كيف يظهر هذا في التمثيلات البيانية في الجزء d؟

مسائل مهارات التفكير العُليا استخدام مهارات التفكير العُليا

59. تحليل الخطأ يحدد رشيد وحميد قيمة استثمار بمبلغ AED 550 بعد 12 عامًا في حساب ادخاري يحقق مرابحة مركبة بنسبة 3.5% شهريًا. يعتقد رشيد أن قيمة الاستثمار تبلغ AED 837.08 ويعتقد حميد أن قيمته تبلغ AED 836.57. فأيهما على صواب؟ اشرح.

الاستنتاج اذكر ما إذا كانت كل عبارة صواب أم خطأ. اشرح استدلالك.

60. لا يمكن أن تكون للدوال الأسيّة قيود أبدًا على المجال.

61. للدوال الأسيّة قيود دائمًا على المدى.

62. للتمثيلات البيانية للدوال الأسيّة خط تقارب دائمًا.

63. مسألة غير محددة الإجابة اكتب مثالاً على دالة أسية متزايدة بتقاطع سالب مع المحور الرأسي y.

64. تحدٍّ تستثمر فتحية AED 1275 في حساب يضيف مرابحة مركبة ربع سنوية تبلغ 8%، لكنها تسحب 100 في نهاية كل عام. كم تبلغ قيمة الحساب في نهاية العام الخامس؟

65. الاستنتاج دالتان بالصيغة $f(x) = b^x$ يكون بينهما أحيانًا أو دائمًا أو لا يكون بينهما أبدًا زوج مرتب مشترك واحد على الأقل.

66. الكتابة في الرياضيات قارن وبيّن الفرق بين المجال والمدى والتقاطعات والتناظر والاتصال وسلوك التزايد/التناقص والسلوك الطرفي بين الدوال الأصلية الأسيّة ودوال القوة.

مراجعة شاملة

جد حل كل من المتباينات التالية. (الدرس 1-6)

69. $3x^2 + 15 \geq x^2 + 15x$

68. $x^2 + 6x \leq -x - 4$

67. $(x-3)(x+2) \leq 0$

ابحث عن مجال كل دالة ومعادلات أي خط تقارب رأسي أو أفقي، مع ملاحظة أية فجوات. (الدرس 1-5)

72. $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 16}{x - 4}$

71. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 4x - 5}$

70. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4x + 4}$

.73 **درجة الحرارة** قاعدة تحويل درجات الحرارة المئوية إلى فهرنهايت هي $F(x) = \frac{9}{5}x + 32$. (الدرس 1-7)

a. جد الدالة العكسية $F^{-1}(x)$ وبرهن على أن $F(x)$ و $F^{-1}(x)$ دالتان متعاكستان.

b. اشرح الغرض الذي تحققه $F^{-1}(x)$

.74 **التسوق** تريد عائشة شراء حذاء تزلج معروض للبيع بخصم 30% من السعر الأصلي البالغ AED 149. وكانت رسوم الخدمة 5.75%. (الدرس 1-6)

a. مثّل سعر حذاء التزلج بعد الخصم وسعر حذاء التزلج بعد رسوم الخدمة باستخدام ترميز الدالة. افترض أن x يمثل سعر حذاء التزلج و$p(x)$ يمثل السعر بعد خصم 30% و$s(x)$ يمثل السعر بعد رسوم الخدمة.

b. ما تركيبة الدوال التي تمثل سعر حذاء التزلج، $s[p(x)]$ أم $p[s(x)]$؟ اشرح استنتاجك.

c. كم ستدفع عائشة مقابل حذاء التزلج؟

.75 **التعليم** يوضح الجدول عدد المتقدمين حديثًا لجامعات محددة في عام معين وعدد المنضمين حديثًا. (الدرس 1-1)

a. اذكر العلاقة كمجموعة من الأزواج المرتبة.

b. حدد المجال والمدى للعلاقة.

c. حدد ما إذا كانت العلاقة تمثل دالة. اشرح.

d. بافتراض أن العلاقة تمثل دالة، فهل من المنطقي تحديد معادلة توقع لهذه الحالة؟ اشرح.

الجامعة	المتقدمون	المنضمون
جامعة أوبيرن	13,264	4,184
جامعة كاليفورنيا ديفيز	2,7954	4,412
جامعة إلينوي إربانا تشامبين	21,484	6,366
جامعة ولاية فلوريدا	13,423	4,851
جامعة نيويورك ستوني بروك الحكومية	16,849	2,415
جامعة ولاية أوهايو	19,563	5,982
جامعة تكساس إيه آند إم	17,284	6,949

المصدر: How to Get Into College

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

.76 SAT/ACT مجموعة من أعداد n لها متوسط (حسابي) يبلغ $3k$ ومجموع يبلغ $12m$. حيث k وm موجبان. ما قيمة n بالصلة بكل من k وm؟

A $\dfrac{4m}{k}$

B $36km$

C $\dfrac{4k}{m}$

D $\dfrac{m}{4k}$

E $\dfrac{k}{4m}$

.77 كان عدد البكتيريا في مستعمرة ينمو أسيًا. كم بلغ عدد البكتيريا التقريبي في الساعة 7 مساء؟

الوقت	عدد البكتيريا
2 مساء	100
4 مساء	4000

F 15,700

G 159,540

H 1,011,929

J 6,37,2392

.78 **مراجعة** إذا كان $4^{x+2} = 48$. فإن $4^x =$ ؟

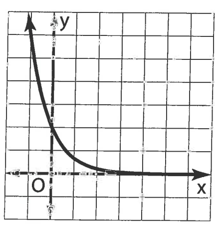
A 3.0

B 6.4

C 6.9

D 12.0

.79 **مراجعة** ما معادلة الدالة؟



F $y = 2(3)^x$

G $y = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x$

H $y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x$

J $y = 3(2)^x$

التوسع 2-1

مختبر تقنية التمثيل البياني
المعرفة المالية: الدوال الأسيّة

الهدف

- حساب القيم المستقبلية للمعاشات والمدفوعات الشهرية.

في الدرس 2-1، استخدمتَ دوالاً أسية لحساب المرابحة المركبة. وفي قاعدة إضافة المرابحة المركبة، تفترض أن الإيداع المبدئي تم وأن المستثمر لا يودع أو يسحب مطلقًا أي أموال. ولا تتبع أنواع أخرى من الاستثمارات هذه القاعدة البسيطة لإضافة المرابحة المركبة.

عندما يسحب المستثمر معاشًا، فإنه يودع مبالغ متماثلة في الحساب على فترات أو مدد زمنية منتظمة. ويتم احتساب المرابحة المركبة في وقت كل إيداع. ويمكننا تحديد القيمة المستقبلية لمعاش أو قيمته في نهاية فترة ما باستخدام القاعدة أدناه.

$$FV = \frac{PMT \cdot \left(1 + \frac{I}{C/Y}\right)^{n} - 1}{\frac{I}{C/Y}}$$

- القيمة المستقبلية ← FV
- مبلغ الإيداع ← PMT
- معدل المرابحة ← I
- إجمالي فترات إضافة المرابحة المركبة ← n
- عدد فترات إضافة المرابحة المركبة في العام ← C/Y

نصيحة دراسية

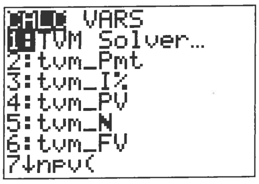
قاعدة القيمة المستقبلية يجب أن تكون الأقساط دورية وبقيمة متساوية لكي تكون القاعدة دقيقة.

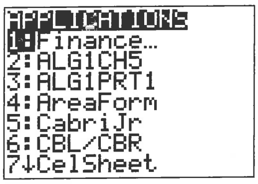
بما أن حل هذه المعادلة يدويًا قد يكون متعبًا، فيمكنك استخدام التطبيق المالي في TI-84. يمكن استخدام أداة حل القيمة الزمنية للمال للتوصل إلى أية قيمة غير معروفة في هذه القاعدة. يتم إدخال كل المتغيرات المعروفة ويتم إدخال أصفار للمتغيرات غير المعروفة.

نشاط 1 التوصل إلى قيمة مستقبلية لمعاش سنوي

يدفع أحد المستثمرين AED 600 كل ربع سنة كمعاش. ويحقق هذا المعاش مرابحة سنوية تبلغ 7.24%. ماذا ستكون قيمة المعاش بعد 15 عامًا؟

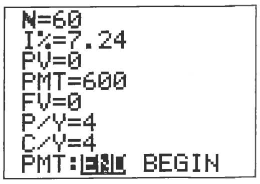
الخطوة 1 **حدد** Finance (الأمور المالية) **في قائمة التطبيقات** (APPS)**. ثم حدد** CALC, TVM Solver (أداة إيجاد القيمة الزمنية للنقود).





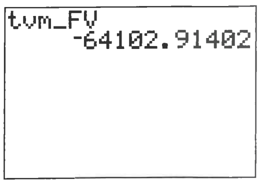
الخطوة 2 **أدخل البيانات.**

تتم المدفوعات كل ربع عام على مدار 15 عامًا، ولذلك هناك 15 x 4 أو 60 دفعة. وتكون القيمة أو المبلغ الحالي في البداية AED 0. وتكون القيمة المستقبلية غير معروفة، لذا يتم استخدام 0 كقيمة رمزية. تتم إضافة المرابحة المركبة كل ربع عام، وبذلك تبلغ قيمة P/Y وC/Y ما مقداره 4 (C/Y وP/Y متماثلان.) ويتم الدفع في نهاية كل شهر، ولذلك اختر END.



الخطوة 3 **احسب.**

اخرج من الشاشة ثم عد إلى تطبيق Finance (الأمور المالية). حدد tvm_FV لحساب القيمة المستقبلية. ثم اضغط على ENTER. وتكون النتيجة هي القيمة المستقبلية مخصوصة من القيمة الحالية، ولذلك يتم تجاهل إشارة السالب.



وبعد 15 عامًا، ستبلغ قيمة المعاش السنوي حوالي AED 64,103.

نصيحة دراسية

المبالغ المقدمة عندما يدفع المستهلك مبلغًا مقدمًا، يتم خصم ذلك المبلغ من القيمة الحالية للقرض قبل حساب أي شيء آخر.

عند سحب قرض لشراء شيء كبير مثل منزل أو سيارة، يهتم المستهلكون عادة بالمبلغ الشهري الذي سيدفعونه. بينما يمكن استخدام الدالة الأسيّة أدناه لتحديد الدفعة الشهرية، والتي يمكن أيضًا احتسابها باستخدام تطبيق الموارد المالية في TI-84.

القيمة الحالية

$$PMT = \frac{PV \times \frac{I}{C/Y}}{1 - \left(1 + \frac{I}{C/Y}\right)^{-n}}$$

نشاط 2 حساب القسط الشهري

اقترضتَ AED 170,000 من البنك لشراء منزل. ويبلغ معدل المرابحة لهذا القرض الذي مدته 30 عامًا 4.5%. احسب قسطك الشهري والمبلغ المدفوع بعد 30 عامًا.

```
N=360
I%=4.5
PV=170000
PMT=0
FV=0
P/Y=12
C/Y=12
PMT:END BEGIN
```

الخطوة 1 حدد Finance (الأمور المالية) من قائمة التطبيقات (APPS). ثم حدد CALC. TVM Solver.

الخطوة 2 أدخل البيانات.

يبلغ عدد الأقساط $N = 30 \times 12$ أو 360.
معدل المرابحة I يبلغ 4.5%.
القيمة الحالية للقرض PV تبلغ AED 170000.
القسط الشهري والقيمة المستقبلية غير معروفين.
عدد المدفوعات في العام P/Y وC/Y يبلغ 12.
ويتم الدفع في نهاية الشهر، ولذلك اختر نهاية.

```
tvm_Pmt
        -861.3650267
Ans*360
        -310091.4096
```

الخطوة 3 احسب.

تحديد vm_Pmt لحساب القسط الشهري.
ثم اضغط على ENTER. اضرب القسط الشهري في 360.

سيبلغ قسطك الشهري AED 861.37 والمبلغ الإجمالي الذي سيتم رده AED 310,091.41.

تمارين

احسب القيمة المستقبلية لكل معاش مما يلي.

1. AED 800 كل نصف عام، 12 عامًا، 4%
2. AED 400 شهريًا، 6 أعوام، 5.5%
3. AED 200 شهريًا، 3 أعوام، 7%
4. AED 1000 سنويًا، 14 عامًا، 6.25%
5. AED 450، كل ربع عام، 8 أعوام، 5.5%
6. AED 300 كل نصف شهر، 18 عامًا، 4.35%

احسب المبلغ الشهري والمبلغ الإجمالي الذي سيتم رده عن كل قرض فيما يلي.

7. AED 220,000، 30 عامًا، 5.5%
8. AED 140,000، 20 عامًا، 6.75%
9. AED 20,000، 5 أعوام، 8.5%
10. AED 5000، 5 أعوام، 4.25%
11. AED 45,000، 10 أعوام، 3.5%
12. AED 180,000، 30 عامًا، 6.5%

13. **تغيير القيم** قديؤثر تغيير قيمة أي من المتغيرات بشدة على أقساط القرض. ويبلغ القسط الشهري لقرض مدته 30 عامًا بمبلغ AED 150,000 بنسبة مرابحة 6% 899.33 AED إجمالي مبلغ دفع AED 323,757,28. احسب المبلغ الشهري والمبلغ الإجمالي للقرض في كل سيناريو.

a. عند دفع AED 20,000 عند الشراء.

b. عند دفع 4% كنسبة مرابحة بدلًا من 6%.

c. عند رد القرض خلال 20 عامًا بدلًا من 30.

d. دفع 13 قسطًا في العام.

e. أيها أكثر توفيرًا في المال؟ أيها الأقل في القسط الشهري؟

2-2 الدوال اللوغاريتمية

:: السابق
- مثّلت الدوال اللوغاريتمية بيانيًا وحللتّها. (الدرس 2-1)

:: الحالي
1 إيجاد قيم التعابير التي تتضمن لوغاريتمات.
2 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا وتحليلها.

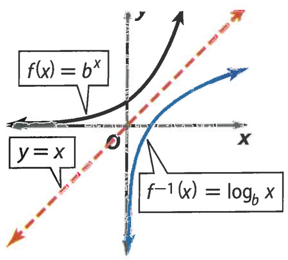
:: لماذا؟
- يتم قياس مستوى كثافة الصوت بوحدة الديسيبل. ويبلغ قياس الهمسة 20 ديسيبلاً والمحادثة العادية 60 ديسيبلاً والمكنسة الكهربائية 80 ديسيبلاً. ويبلغ أقصى حد لصوت الموسيقى التي يتم تشغيلها من خلال سماعة 100 ديسيبل. ويعطي مقياس الديسيبل مثالاً على المقياس اللوغاريتمي.

مفردات جديدة
الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس b logarithmic function with base b
اللوغاريتم logarithm
اللوغاريتم العادي common logarithm
اللوغاريتم الطبيعي natural logarithm

1 الدوال والتعابير اللوغاريتمية

تذكر أن التمثيلات البيانية التي تمثل بيانيًا الدوال التي تنجح في اختبار الخط الأفقي من النوع "واحد لواحد" ولها معكوسات تعد دوالاً أيضًا. بالعودة إلى التمثيلات في الصفحة 159، يمكنك أن ترى أن الدوال الأسيّة بالصيغة $f(x) = b^x$ تنجح في اختبار الخط الأفقي ولهذا فهي "واحد لواحد" بمعكوسات تمثل دوالاً.

يطلق على معكوس $f(x) = b^x$ **دالة لوغاريتمية ذات الأساس b**، ويُرمز لها بـ $\log_b x$ وتُقرأ أساس $\log b$ لـ x. هذا يعني أنه إذا كانت $b > 0$ و $f(x) = b^x$ و $b \neq 1$، فإن $f^{-1}(x) = \log_b x$. كما يظهر في التمثيل البياني لهاتين الدالتين. لاحظ أن التمثيلات البيانية تمثل انعكاسًا لبعضها البعض حول المستقيم $y = x$.



يقدم تعريف المعكوس هذا ربطًا مفيدًا بين المعادلات الأسيّة واللوغاريتمية.

المفهوم الأساسي الربط بين التعبيرين اللوغاريتمي والأسي

إذا كان $b \neq 1$ و $b > 0$، و $x > 0$، فإن

الشكل اللوغاريتمي		الشكل الأسي
$\log_b x = y$	فقط في حالة أن	$b^y = x$
أساس، أس		أساس، أس

توضح العبارة الواردة أعلاه أن $\log_b x$ هو الأس الذي يجب رفع b إليه للحصول على x. ولهذا، فعند حساب قيم **اللوغاريتمات**، تذكر أن اللوغاريتم هي أس.

مثال 1 إيجاد قيمة اللوغاريتمات

جد قيمة كل لوغاريتم مما يلي.

a. $\log_3 81$

$\log_3 81 = y$ — افترض أن $\log_3 81 = y$

$3^y = 81$ — اكتب بصيغة أسيّة

$3^y = 3^4$ — $81 = 3^4$

$y = 4$ — خاصية المساواة في الأسس

ولهذا، فإن $\log_3 81 = 4$، لأن $3^4 = 81$.

b. $\log_5 \sqrt{5}$

$\log_5 \sqrt{5} = y$ — افترض أن $\log_5 \sqrt{5} = y$

$5^y = \sqrt{5}$ — اكتب بصيغة أسيّة

$5^y = 5^{\frac{1}{2}}$ — $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

$y = \frac{1}{2}$ — خاصية المساواة في الأسس

لأن $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$. لهذا، فإن $\sqrt{5} = \frac{1}{2}$.

c. $\log_7 \frac{1}{49}$

$\log_7 \frac{1}{49} = -2$ لأن $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

d. $\log_2 2$

$\log_2 2 = 1$ لأن $2^1 = 2$.

تمرين موجّه

1A. $\log_8 512$ **1B.** $\log_4 4^{3.2}$ **1C.** $\log_2 \frac{1}{32}$ **1D.** $\log_{16} \sqrt{2}$

يوضح المثال 1 وأمثلة أخرى الخصائص الأساسية التالية للوغاريتمات.

المفهوم الأساسي الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كانت $b > 0$ و $b \neq 1$ و x هو عدد حقيقي، فإن العبارات التالية صحيحة.

- $\log_b 1 = 0$
- $\log_b b = 1$
- $\log_b b^x = x$
- $b^{\log_b x} = x, x > 0$

خصائص المعكوس

تنبع هذه الخصائص بشكل مباشر من العبارة التي تربط الصيغتين اللوغاريتمية والأسيّة للمعادلات.

$\log_b 1 = 0$، لأن $b^0 = 1$. $\log_b b^y = y$، لأن $b^y = b^y$.

$\log_b b = 1$، لأن $b^1 = b$. $b^{\log_b x} = x$، لأن $\log_b x = \log_b x$.

يمكنك استخدام هذه الخصائص الأساسية في حساب قيم التعابير اللوغاريتمية والأسيّة.

نصيحة دراسية

الدوال المعكوسة تنبع الخصائص المعكوسة للوغاريتمات أيضًا من العلاقة المعكوسة بين الدوال اللوغاريتمية والأسيّة وتعريف الدوال المعكوسة. إذا كانت $f(x) = b^x$ و $f^{-1}(x) = \log_b x$، فإن تكون العبارات التالية صحيحة.

$f^{-1}[f(x)] = \log_b b^x = x$

$f[f^{-1}(x)] = b^{\log_b x} = x$

مثال 2 تطبيق خصائص اللوغاريتمات

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

a. $\log_5 125$

$\log_5 125 = \log_5 5^3$ $\quad 5^3 = 125$

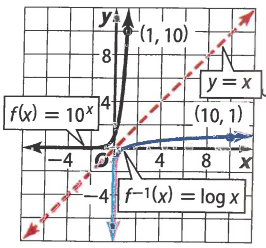
$= 3$ $\quad \log_b b^x = x$

b. $12^{\log_{12} 4.7}$

$12^{\log_{12} 4.7} = 4.7$ $\quad b^{\log_b x} = x$

تمرين موجّه

2A. $\log_9 81$ **2B.** $3^{\log_3 1}$



يُسمى اللوغاريتم للأساس 10 أو $\log_{10}$ **اللوغاريتم العادي** وغالبًا ما يكون مكتوبًا بدون الأساس. دالة اللوغاريتم العادي $y = \log x$ هي معكوس الدالة الأسيّة $y = 10^x$ ولذلك،

$y = \log x$ فقط في حالة $10^y = x$، لكل $x > 0$.

تنطبق خصائص اللوغاريتمات أيضًا على اللوغاريتمات العادية.

المفهوم الأساسي الخصائص الأساسية للوغاريتمات العادية

إذا كان x عددًا حقيقيًا، فإن العبارات التالية صحيحة.

- $\log 1 = 0$
- $\log 10 = 1$
- $\log 10^x = x$
- $10^{\log x} = x, x > 0$

خصائص المعكوس

يمكن حساب قيم اللوغاريتمات العادية باستخدام خصائص الأساسية المذكورة بالأعلى. ويمكن التوصل إلى قيم تقريبية للوغاريتمات العادية للأعداد الحقيقية الموجبة باستخدام LOG في الحاسبة.

مثال 3 اللوغاريتمات العادية

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

a. $\log 0.001$

$\log 0.001 = \log 10^{-3}$ $0.001 = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$

$= -3$ $\log 10^x = x$

b. $10^{\log 5}$

$10^{\log 5} = 5$ $10^{\log x} = x$

c. $\log 26$

$\log 26 \approx 1.42$ استخدم حاسبة.

تحقق بما أن 26 تقع بين 10 و 100، تقع $\log 26$ بين $\log 10$ و $\log 100$. وبما أن $\log 10 = 1$ و $\log 100 = 2$، تتراوح قيمة $\log 26$ بين 1 و 2. ✓

d. $\log(-5)$

بما أن $f(x) = \log_b x$ لا تكون محددة إلا عندما تكون $x > 0$، فإن $\log(-5)$ تكون غير محددة في مجموعة الأعداد الحقيقية.

نصيحة تقنية

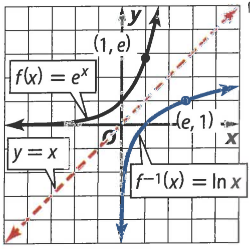
رسالة خطأ إذا حاولت أن تستخدم اللوغاريتم العادي لعدد سالب، فإن حاستك ستعرض إما رسالة الخطأ ERR: NONREAL ANS أو عددًا تخيليًا.

تمرين موجّه

3A. $\log 10{,}000$ **3B.** $\log 0.081$ **3C.** $\log -0$ **3D.** $10^{\log 3}$

يُسمى اللوغاريتم للأساس e أو $\log_e$ **الوغاريتم الطبيعي** ويُشار إليه بالرمز ln. دالة اللوغاريتم الطبيعي $y = \ln x$ هي معكوس الدالة الأسيّة $y = e^x$. ولذلك.

$y = \ln x$ فقط في حالة $e^y = x$، لكل $x > 0$.



تنطبق خصائص اللوغاريتمات أيضًا على اللوغاريتمات الطبيعية.

المفهوم الأساسي الخصائص الأساسية للوغاريتم الطبيعي

إذا كان x عددًا حقيقيًا، فحينها تكون العبارات التالية صحيحة.

- $\ln 1 = 0$
- $\ln e = 1$
- $\ln e^x = x$
- $e^{\ln x} = x, x > 0$

خصائص المعكوس

ويمكن حساب قيم اللوغاريتمات الطبيعية باستخدام الخصائص الأساسية المذكورة بالأعلى. ويمكن التوصل إلى قيم تقريبية للوغاريتمات الطبيعية للأعداد الحقيقية الموجبة باستخدام LN في الحاسبة.

مثال 4 اللوغاريتمات الطبيعية

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

a. $\ln e^{0.73}$

$\ln e^{0.73} = 0.73$ $\ln e^x = x$

b. $\ln(-5)$

$\ln(-5)$ غير محددة.

c. $e^{\ln 6}$

$e^{\ln 6} = 6$ $e^{\ln x} = x$

d. $\ln 4$

$\ln 4 \approx 1.39$ استخدم حاسبة.

تمرين موجّه

4A. $\ln 32$ **4B.** $e^{\ln 4}$ **4C.** $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$ **4D.** $-\ln 9$

2 التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية

يمكنك استخدام العلاقة المعكوسة بين الدالتين الأسيّة واللوغاريتمية للتمثيل البياني للدوال بصيغة $y = \log_b x$

مثال 5 التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والمدى ونقاط التقاطع وخطوط التقارب والسلوك الطرفي، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.

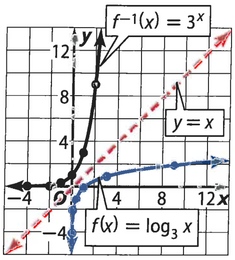
a. $f(x) = \log_3 x$

ضع جدولاً بالقيم ومثّل معكوس هذه الدالة اللوغاريتمية بيانيًا، وهو الدالة الأسيّة $f^{-1}(x) = 3^x$

x	−4	−2	−1	0	1	2
$f^{-1}(x)$	0.01	0.11	0.33	1	3	9

بما أن $f^{-1}(x) = 3^x$ و $f(x) = \log_3 x$ معكوسان، فيمكنك الحصول على التمثيل البياني لـ $f(x)$ عن طريق تعيين مواقع النقاط $(f^{-1}(x), x)$

$f^{-1}(x)$	0.01	0.11	0.33	1	3	9
x	−4	−2	−1	0	1	2



التمثيل البياني لـ $f(x) = \log_3 x$ يتمتع بالخصائص التالية.

المجال: $(0, \infty)$ المدى: $(-\infty, \infty)$

التقاطع مع المحور الأفقي x: 1 خط التقارب: المحور الرأسي y

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$، $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

تزايد: $(0, \infty)$

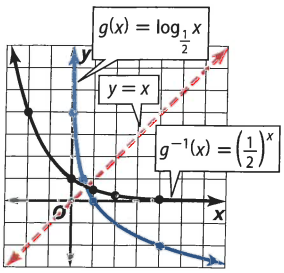
b. $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

ضع جدولاً بالقيم ومثّل بيانيًا معكوس هذه الدالة اللوغاريتمية، وهي الدالة الأسيّة $g^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	−4	−2	0	1	2	4
$g^{-1}(x)$	16	4	1	0.5	0.25	0.06

مثّل $g(x)$ بيانيًا بتحديد مواقع النقاط

$g^{-1}(x)$	16	4	1	0.5	0.25	0.06
x	−4	−2	0	1	2	4



يتميز التمثيل البياني لـ $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ بالخصائص التالية.

المجال: $(0, \infty)$ المدى: $(-\infty, \infty)$

التقاطع مع المحور الأفقي x: 1 خط التقارب: المحور الرأسي y

السلوك الطرفي: السلوك الطرفي: $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \infty$، $\lim_{x \to \infty} g(x) = -\infty$

تناقص: $(0, \infty)$

نصيحة دراسية

التمثيلات البيانية لتمثيل دالة لوغاريتمية بيانيًا، ارسم المعكوس بيانيًا أولاً باستخدام حاسبة التمثيلات البيانية لديك، ثم استخدم الدالة TABLE لتحصل على عدة إحداثيات للمعكوس. استخدم هذه النقاط لإعداد التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية.

تمرين موجّه

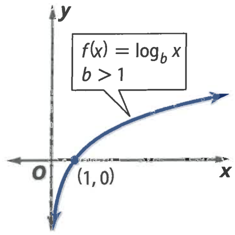
5A. $h(x) = \log_2 x$

5B. $j(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

يتم تناول خصائص النمو اللوغاريتمي المعتاد أو الحل اللوغاريتمية المتزايدة والتضاؤل اللوغاريتمي أو الدوال اللوغاريتمية المتناقصة بإيجاز فيما يلي.

المفهوم الأساسي خصائص الدوال اللوغاريتمية

النمو اللوغاريتمي



المجال: $(0, \infty)$ **المدى:** $(-\infty, \infty)$

التقاطع مع المحور الرأسي y: لا يوجد **التقاطع مع المحور الأفقي x:** 1

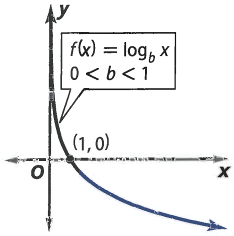
القيم القصوى: لا توجد **خط التقارب:** المحور الرأسي y

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

الاتصال: متصلة على الفترة $(0, \infty)$

التضاؤل اللوغاريتمي



المجال: $(0, \infty)$ **المدى:** $(-\infty, \infty)$

التقاطع مع المحور الرأسي y: لا يوجد **التقاطع مع المحور الأفقي x:** 1

القيم القصوى: لا توجد **خط التقارب:** المحور الرأسي y

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

الاتصال: متصلة على الفترة $(0, \infty)$

يمكن تطبيق نفس الأساليب المستخدمة في تحويل التمثيلات البيانية للدوال الأسيّة على التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية.

مثال 6 التحولات البيانية للدوال اللوغاريتمية

استخدم التمثيل البياني للدالة $f(x) = \log x$ لوصف التحويل الذي ينتج عنه كلّ دالة. ثم مثّل الدّوال بيانيًا.

a. $k(x) = \log(x + 4)$

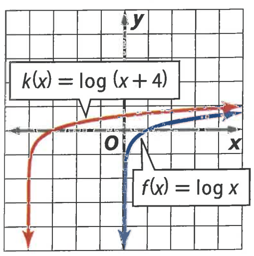
تأخذ هذه الدالة الصيغة $k(x) = f(x + 4)$ لذلك فإن التمثيل البياني لـ $k(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مع إزاحة بمقدار 4 وحدات إلى اليسار (الشكل 2.2.1).

b. $m(x) = -\log x - 5$

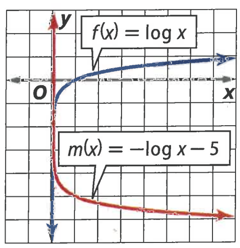
تأخذ الدالة الصيغة $m(x) = -f(x) - 5$ لهذا، فإن التمثيل البياني للدالة $m(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$ معكوسًا في المحور الأفقي x ومزاحًا بعد ذلك بمقدار 5 وحدات نحو الأسفل (الشكل 2.2.2).

c. $p(x) = 3\log(x + 2)$

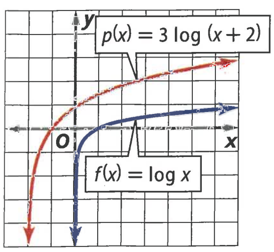
تأخذ الدالة الصيغة $p(x) = 3f(x + 2)$ لهذا، فإن التمثيل البياني للدالة $p(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$ متمددًا رأسيًا بمعامل قدره 3 ومزاحًا بعد ذلك بمقدار وحدتين إلى اليسار (الشكل 2.2.3).



الشكل 2.2.1



الشكل 2.2.2



الشكل 2.2.3

تمرين موجّه

استخدم التمثيل البياني للدالة $f(x) = x$ لتصف التحول الذي ينتج عن كل دالة. ثم مثّل الدّوال بيانيًا.

6A. $a(x) = \log(x - 6)$

6B. $b(x) = 0.5\log x - 2$

6C. $c(x) = \log(x + 4) + 3$

انتبه!

التحولات تذكر أن الإزاحات الأفقية تعتمد على القيمة الثابتة داخل الأقواس والإزاحات الرأسيّة تعتمد على القيمة الثابتة خارج الأقواس.

يمكن استخدام اللوغاريتمات في الحسابات العلمية، مثل درجة الحموضة (الرقم الهيدروجيني) ومستوى كثافة الصوت.

مهنة من الحياة اليومية

مهندس صوت يتولى مهندسو الصوت مسؤولية تشغيل معدات التسجيل الصوتي وصيانتها. كما أنهم ينظمون قوة الإشارة والوضوح ونطاق أصوات التسجيلات أو البث. لتصبح مهندس صوت، ينبغي أن تحصل على دورات من كليات متخصصة في الرياضيات والفيزياء والإلكترونيات.

مثال 7 من الحياة اليومية استخدام دوال لوغاريتمية

الصوت يمكن تمثيل مستوى كثافة الصوت، والذي يتم قياسه بوحدة الديسيبل، بالدالة $d(w) = 10 \log \frac{w}{w_0}$، حيث w يمثل كثافة الصوت بالوات في المتر المربع و w_0 هو القيمة الثابتة 1.0×10^{-12} وات في المتر المربع.

a. إذا كانت كثافة الصوت لشخص يتحدث بصوت مرتفع تبلغ 3.16×10^{-8} وات في المتر المربع، فما مستوى كثافة الصوت بوحدة الديسيبل؟

جد قيمة d(w) عندما تكون $w = 3.16 \times 10^{-8}$

$d(w) = 10 \log \frac{w}{w_0}$ الدالة الأصلية

$= 10 \log \frac{3.16 \times 10^{-8}}{1.0 \times 10^{-12}}$ $w = 3.16 \times 10^{-8}$ و $w_0 = 1.0 \times 10^{-12}$

≈ 45 استخدم حاسبة.

يبلغ مستوى كثافة الصوت 45 ديسيبل.

b. إذا كانت عتبة السماع لشخص معين يعاني من إعاقة في السمع هي 5 ديسيبلات، فهل الصوت الذي يبلغ مستوى كثافته 2.1×10^{-12} وات في المتر المربع سيكون مسموعًا لذلك الشخص؟

جد قيمة $d(w)$ عندما تكون $w = 2.1 \times 10^{-12}$.

$d(w) = 10 \log \frac{w}{w_0}$ الدالة الأصلية

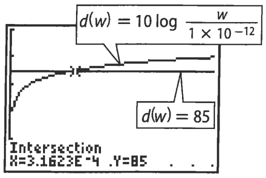
$= 10 \log \frac{2.1 \times 10^{-12}}{1.0 \times 10^{-12}}$ $w = 2.1 \times 10^{-12}$ و $w_0 = 1.0 \times 10^{-12}$

≈ 3.22 استخدم حاسبة.

بما أن الشخص يستطيع فقط سماع الأصوات التي تبلغ كثافتها 5 ديسيبلات أو أعلى، فلن يتمكن من سماع صوت بمستوى كثافة يبلغ 3.22 ديسيبلات.

c. يمكن أن تؤدي الأصوات التي تزيد عن 85 ديسيبلاً إلى ضرر للسمع. حدد كثافة الصوت الذي يبلغ مستوى كثافته 85 ديسيبلاً.

استخدم حاسبة تمثيلات بيانية لتمثل بيانيًا $d(w) = 85$ و $d(w) = 10 \log \frac{w}{1 \times 10^{-12}}$ على نفس الشاشة وتتوصل إلى نقطة التقاطع.



[0, 0.001] scl: 0.0001 by [50, 100] scl: 10

عندما يبلغ مستوى كثافة الصوت 85 ديسيبلاً، تبلغ كثافة الصوت 3.1623×10^{-4} وات في المتر المربع.

تمرين موجّه

7. **التقنية** يمكن تمثيل عدد الأجهزة المصابة بفيروس حاسب آلي معين من خلال $c(d) = 6.8 + 20.1 \log d$، حيث d هو عدد الأيام التي مرت منذ تعرض الجهاز الأول للإصابة.

A. كم عدد الأجهزة المصابة تقريبًا في اليوم 12؟

B. كم عدد الأجهزة الإضافية التي تعرضت للإصابة في اليوم 30 بالمقارنة باليوم 12؟

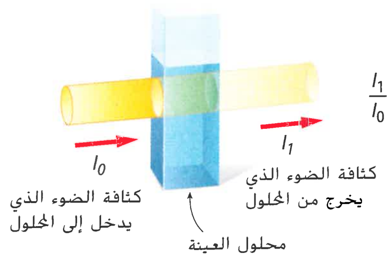
C. في أي يوم تقريبًا سيبلغ عدد الأجهزة المصابة 75؟

تمارين

جد قيمة كل تعبير مما يلي. (الأمثلة من 1 إلى 4)

1. $\log_2 8$
2. $\log_{10} 10$
3. $\log_6 \frac{1}{36}$
4. $4^{\log_4 1}$
5. $\log_{11} 121$
6. $\log_2 2^3$
7. $\log_{\sqrt{9}} 81$
8. $\log 0.01$
9. $\log 42$
10. $\log_x x^2$
11. $\log 5275$
12. $\ln e^{-14}$
13. $3 \ln e^4$
14. $\ln (5 - \sqrt{6})$
15. $\log_{36} \sqrt[5]{6}$
16. $4 \ln (7 - \sqrt{2})$
17. $\log 635$
18. $\frac{\ln 2}{\ln 7}$
19. $\ln (-6)$
20. $\ln \left(\frac{1}{e^{12}}\right)$
21. $\ln 8$
22. $\log_{\sqrt[7]{4}} 64$
23. $\frac{7}{\ln e}$
24. $\log 1000$

25. **الضوء** مقدار الضوء A الذي تمتصه عينة محلول يتحدد على أساس الدالة $A = 2 - \log 100T$، حيث T تمثل جزءًا من الضوء المنقول عبر المحلول كما يظهر في المخطط البياني أدناه. (المثال 3)



في إحدى التجارب، يوجه أحد الطلاب ضوءًا عبر عينتي محلول تحتويان على تركيزين مختلفين من صبغة معينة.

a. إذا كانت النسبة المئوية للضوء المنقول عبر عينة المحلول الأولى تبلغ 72%، فما مقدار الضوء الذي تمتصه عينة المحلول مقربًا لأقرب جزء من مئة؟

b. إذا كان امتصاص عينة المحلول الثانية يبلغ 0.174، فما النسبة المئوية للضوء المنقول من الضوء الذي يدخل المحلول؟

26. **الصوت** أثناء اختبار السماعات لإحدى الحفلات الموسيقية، لاحظ مهندس صوت أن مستوى الصوت وصل إلى كثافة نسبية تبلغ 2.1×10^8 واط في المتر المربع. تمثل المعادلة $D = \log I$ ارتفاع الصوت D ديسيبل عند تحديد الكثافة النسبية I. فما مستوى ارتفاع هذا الصوت بوحدة الديسيبل؟ قرّب إلى أقرب جزء من ألف إذا لزم الأمر. (مثال 3)

27. **الذاكرة** خضع الطلاب في فصل السيدة خديجة لاختبار في الدوال الأسيّة في نهاية الفصل ثم خضعوا للاختبار مرة أخرى كل شهر لتحديد مقدار المعلومات الذي احتفظوا به. يمكن تمثيل متوسط درجات الاختبار بالدالة $f(x) = 85.9 - 9 \log x$، حيث x عدد الأشهر منذ أول اختبار. ماذا كان متوسط درجة الاختبار بعد 3 أشهر؟ (مثال 4)

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والمدى ونقاط التقاطع خطوط التقارب والسلوك الطرفي، وفترات تزايد أو تناقص الدالة. (مثال 5)

28. $f(x) = \log_4 x$
29. $g(x) = \log_5 x$
30. $h(x) = \log_8 x$
31. $j(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$
32. $m(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$
33. $n(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

استخدم التمثيل البياني لـ $f(x)$ لوصف التحول الذي يؤدي إلى تمثيل $g(x)$ البياني. ثم ارسم تمثيلي $f(x)$ و $g(x)$ البيانيين. (مثال 6)

34. $f(x) = \log_2 x;\ g(x) = \log_2 (x + 4)$
35. $f(x) = \log_3 x;\ g(x) = \log_3 (x - 1)$
36. $f(x) = \log x;\ g(x) = \log 2x$
37. $f(x) = \ln x;\ g(x) = 0.5 \ln x$
38. $f(x) = \log x;\ g(x) = -\log (x - 2)$
39. $f(x) = \ln x;\ g(x) = 3 \ln (x) + 1$
40. $f(x) = \log x;\ g(x) = -2 \log x + 5$
41. $f(x) = \ln x;\ g(x) = \ln (-x)$

42. **الاستثمار** يمكن التوصل إلى معدل النمو السنوي لاستثمار ما باستخدام $r = \frac{1}{t} \ln \frac{P}{P_0}$، حيث r معدل النمو السنوي، و t الوقت بالسنوات، و P القيمة الحالية، و P_0 الاستثمار الأصلي. بدأ استثمار بمبلغ AED 10,000 في عام 2002 وبلغت قيمته AED 15,000 في 2009. ماذا كان متوسط معدل النمو السنوي لهذا الاستثمار؟ (مثال 7)

حدد المجال والمدى والتقاطع مع المحور الأفقي x و خط التقارب الرأسي لكل دالة.

43. $y = \log (x + 7)$
44. $y = \log x - 1$
45. $y = \ln (x - 3)$
46. $y = \ln \left(x + \frac{1}{4}\right) - 3$
47. $y = e^{3x}$
48. $y = \log 2x$
49. $y = 4e^{2x}$
50. $y = 6 \log 0.5$
51. $y = 20^x$
52. $y = 4(2^x)$

جد معكوس كل معادلة.

53. $y = \log x - 6$
54. $y = 0.25e^{x+2}$

حدد مجال الاستثمار ومداه لكل دالة.

.55 الحواسيب تنبأ جوردون مور المشارك في تأسيس شركة إنتل في عام 1975 بما يُعرف الآن باسم قانون مور. لقد تنبأ بأن عدد وحدات الترانزستور على معالج كمبيوتر بسعر معين سيتضاعف كل عامين.

.a اكتب قانون مور للعدد الذي توقعه من وحدات الترانزستور P باستخدام الزمن بالأعوام t والعدد المبدئي لوحدات الترانزستور.

.b في شهر أكتوبر 1985، كان أحد المعالجات يحتوي على 275000 وحدة ترانزستور. كم عدد السنين التقريبي الذي تتوقع خلاله أن يحتوي معالج بنفس السعر على 4.4 مليون ترانزستور تقريبًا؟

اذكر المجال والمدى والتناظر والاتصال وفترات التزايد/التناقص لكل دالة لوغاريتمية بالتقاطع المذكور والسلوك الطرفي. ثم مثّل الدّالة بيانيًا.

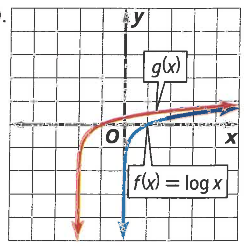
56. $f(1) = 0;\ \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty;\ \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

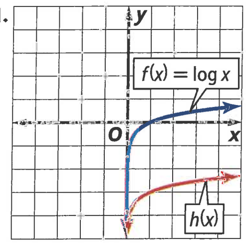
57. $g(-2) = 0;\ \lim_{x \to -3} g(x) = -\infty;\ \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$

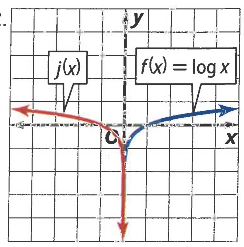
58. $h(-1) = 0;\ \lim_{x \to -\infty} h(x) = \infty;\ \lim_{x \to 0} h(x) = -\infty$

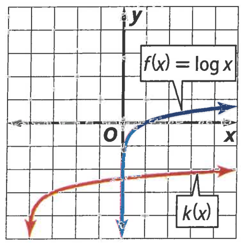
59. $j(1) = 0;\ \lim_{x \to 0} j(x) = \infty;\ \lim_{x \to \infty} j(x) = -\infty$

استخدم التمثيل البياني الأصلي $f(x) = \log x$ للتوصل إلى المعادلة الخاصة بكلّ دالة.

60.


61.


62.


63.


حاسبة التمثيلات البيانية أنشئ مخطط تشتت بيانيًا للقيم الظاهرة في الجدول. ثم استخدم التمثيل البياني لتحديد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة.

x	1	3	9	27
y	0	1	2	3

.64 y هي دالة أسيّة لـ x.

.65 x هي دالة أسيّة لـ y.

.66 y هي دالة لوغاريتمية لـ x.

.67 y تتناسب عكسيًا مع x.

.68 البكتيريا تمثل الدالة $t = \frac{\ln B - \ln A}{2}$ مقدار الزمن t بالساعات لنوع معين من البكتيريا للوصول إلى المقدار B من المقدار الأولي A.

.a إذا كان العدد الأولي للبكتيريا الموجودة يبلغ 750، فكم عدد الساعات التي سيستغرقها عدد البكتيريا ليصل إلى 300,000؟ قرّب لأقرب ساعة.

.b حدد متوسط معدل التغير في البكتيريا في الساعة للكميات الموجودة في الجزء a.

.69 التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تقارن متوسط معدلات التغير لدالة أسيّة وثابتة الأس وجذرية.

.a بيانيًا مثّل بيانيًا $f(x) = 2^x$ و $g(x) = x^2$ للدالة $0 \leq 8 \leq x$

.b تحليليًا ابحث عن متوسط معدل التغير لكل دالة في الجزء a في الفترة الزمنية [4، 6].

.c لفظيًا قارن معدلات نمو الدوال من الجزء a مع زيادة x.

.d بيانيًا مثّل بيانيًا $g(x) = \sqrt{x}$ و $f(x) = \ln x$

.e تحليليًا ابحث عن متوسط معدل التغير لكل دالة من الجزء d في الفترة [4، 6].

.f لفظيًا قارن معدلات نمو الدوال من الجزء d مع زيادة x.

مسائل مهارات التفكير العُليا استخدام مهارات التفكير العُليا

.70 الكتابة في الرياضيات قارن وبيّن الفرق بين المجال والمدى والتقاطعات والتناظر والاتصال وسلوك التزايد/التناقص والسلوك الطرفي للدوال اللوغاريتمية حيث $b(x) = x^{-1}$ و $a(x) = x^n$ و $d(x) = e^x$ و $c(x) = a^x$.

.71 الاستنتاج اشرح السبب في أن قيمة b لا يمكن أن تكون سالبة في الدالة $f(x) = log_b x$

.72 تحدٍّ بالنسبة للدالة $f(x) = \log_{10}(x - k)$، حيث k قيمة ثابتة، ما هي إحداثيات التقاطع مع المحور الأفقي x؟

.73 الكتابة في الرياضيات قارن السلوك كبير المدى للدوال الأسيّة واللوغاريتمية ذات الأساس b للدالة $b = 2$ و 6 و 10.

الاستنتاج حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة.

.74 سيظل هناك دائمًا قيد على الدوال اللوغاريتمية في المجال.

.75 لن يكون هناك قيد أبدًا على الدوال اللوغاريتمية في المدى.

.76 للتمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية خط التقارب دائمًا.

.77 الكتابة في الرياضيات استخدم الكلمات والتمثيلات البيانية والجداول والمعادلات لمقارنة الدوال اللوغاريتمية والأسيّة.

مراجعة شاملة

78. **الطيران** عند تنقية الكيروسين لصناعة وقود الطائرات، يتم التخلص من الملوثات عن طريق تمرير الكيروسين عبر مرشح طيني خاص. افترض أنه تم تركيب مرشح في أنبوب لكي يتم التخلص من 15% من الملوثات في كل قدم يقطعه الكيروسين. (الدرس 2-1)

a. **اكتب دالة أسيّة لتمثيل النسبة المئوية للتلوث المتبقي بعد أن قطع الكيروسين x قدم.**

b. **مثّل الدالة بيانيًا.**

c. **ما النسبة المئوية التقريبية للتلوث المتبقي بعد أن يقطع الكيروسين 12 قدمًا؟**

d. **هل سيتم التخلص من الملوثات بالكامل على الإطلاق؟ اشرح.**

حُل كل من المتباينات التالية. (الدرس 1-6)

79. $x^2 - 3x - 2 > 8$

80. $4 \geq -(x-2)^3 + 3$

81. $\frac{2}{x} + 3 > \frac{29}{x}$

82. $\frac{(x-3)(x-4)}{(x-5)(x-6)^2} \leq 0$

83. $\sqrt{2x+3} - 4 \leq 5$

84. $\sqrt{x-5} + \sqrt{x+7} \leq 4$

حُل كل من المعادلات التالية. (الدرس 1-5)

85. $\frac{2a-5}{a-9} + \frac{a}{a+9} = \frac{-6}{a^2-81}$

86. $\frac{2q}{2q+3} - \frac{2q}{2q-3} = 1$

87. $\frac{4}{z-2} - \frac{z+6}{z+1} = 1$

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضّح المجال والمدى والتقاطعات والسلوك الطرفي والاتصال وفترات تزايد الدالة أو تناقصها. (الدرس 1-1)

88. $f(x) = -\frac{1}{2}x^7$

89. $g(x) = 3x^{-6}$

90. $h(x) = 2x^{-\frac{3}{4}}$

91. **الميكروبيولوجيا** يتم التوصل إلى عدد البكتيريا P في نموذج لعينة بعد t أيام من خلال الدالة $P(t) = 1000 - 19.75t + 20t^2 - \frac{1}{3}t^3$. (الدرس 1-2)

a. ما نوع الدالة P(t)؟

b. متى يتزايد عدد البكتيريا؟

c. متى يقل؟

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

92. **SAT/ACT** يوضح الجدول أدناه العائد والتكلفة لكل عنصر من ثلاثة منتجات في مصنع معدات رياضية.

المنتج	العائد لكل وحدة (AED)	تكلفة الوحدة (AED)
كرة القدم	f	4
كرة البيسبول	b	3
كرة قدم أمريكية	6	y

إذا كان الربح يساوي العائد مطروحًا منه التكلفة، فما مقدار الربح الذي يحققونه إذا أنتجوا وباعوا وحدتين من كل عنصر؟

A $2f + 2b - 2y - 2$

B $2y - 2b - 2f - 2$

C $f + b - y - 1$

D $b + 2f + y - 7$

E $2f + 2b - 2y - 26$

93. ما قيمة n إذا كان $\log_3 3^{4n-1} = 11$؟

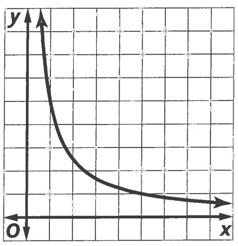
F 3

G 4

H 6

J 12

94. **مراجعة** يمثل المنحنى جزءًا من التمثيل البياني لأية دالة؟



A $y = 50 - x$

B $y = \log x$

C $y = e^{-x}$

D $y = \frac{5}{x}$

95. **مراجعة** يتحلل عنصر مشع مع مرور الزمن وفقًا لـ

$$y = x\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{t}{200}},$$

حيث x = عدد الجرامات الموجودة من البداية و t = الزمن بالأعوام. إذا كان هناك 500 جرام من البداية، فكم عدد الجرامات الذي سيتبقى بعد 400 عام؟

F 12.5 جرامًا

G 31.25 جرامًا

H 62.5 جرامًا

J 125 جرامًا

الدرس 2-3 خصائص اللوغاريتمات

السابق

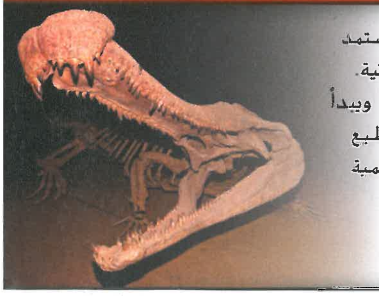
- وجدت قيم للتعابير اللوغاريتمية ذات الأساسات المختلفة.
(الدرس 2-2)

الحالي

1. تطبيق خصائص اللوغاريتمات.
2. إجراء تغيير على قاعدة الأساس.

لماذا؟

- تمتص النباتات الكربون 14 عن طريق التمثيل الضوئي، وتستمد الحيوانات والبشر الكربون 14 عن طريق هضم المادة النباتية. وعندما يموت كائن حي، يتوقف عن ابتلاع الكربون الجديد ويبدأ الكربون 14 الموجود في أجهزته بالفعل في التحلل. ويستطيع العلماء حساب عمر المواد العضوية باستخدام دالة لوغاريتمية تضع تقديرًا لتحلل الكربون 14. ويمكن استخدام خصائص اللوغاريتمات في تحليل هذه الدالة



1 خصائص اللوغاريتمات

تذكر الخصائص التالية للأسس، حيث b وx وy أعداد حقيقية موجبة.

خاصية ناتج الضرب	خاصية خارج القسمة	خاصية الأس الثابت
$b^x \times b^y = b^{x+y}$	$\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$	$(b^x)^y = b^{xy}$

بما أن العلاقة بين اللوغاريتمات والأسس علاقة عكسية، فإن هذه الخصائص للأسس تدل على هذه الخصائص المقابلة للوغاريتمات.

المفهوم الأساسي خصائص اللوغاريتمات

إذا كان b وx وy أعدادًا حقيقية موجبة، و$b \neq 1$ وp رقم حقيقي، فإن العبارات التالية صحيحة.

خاصية ناتج الضرب $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$

خاصية ناتج القسمة $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

خاصية الأس الثابت $\log_b x^p = p \log_b x$

وستثبت خاصيتي خارج القسمة والأس الثابت في التمرينين 113 و114.

لتوضيح أن خاصية ناتج الضرب في اللوغاريتمات حقيقية، افترض أن $m = \log_b x$ و$n = \log_b y$ ثم باستخدام تعريف اللوغاريتم، فإن $b^m = x$ و$b^n = y$

$\log_b xy = \log_b b^m b^n$ — $x = b^m$ و $y = b^n$

$= \log_b b^{m+n}$ — خاصية ناتج الأسس

$= m + n$ — خاصية المعكوس في اللوغاريتمات

$= \log_b x + \log_b y$ — $m = \log_b x$ و $n = \log_b y$

يمكن استخدام هذه الخصائص للتعبير عن اللوغاريتمات من حيث الصلة بلوغاريتمات أخرى.

مثال 1 استخدام خصائص اللوغاريتمات

عبّر عن كل لوغاريتم باستخدام ln 2 وln 3.

a. ln 54

$\ln 54 = \ln (2 \times 3)^3$ — $54 = 2 \times 3^3$

$= \ln 2 + \ln 3^3$ — خاصية ناتج الضرب

$= \ln 2 + 3 \ln 3$ — خاصية الأس الثابت

b. $\ln \frac{9}{8}$

$\ln \frac{9}{8} = \ln 9 - \ln 8$ — خاصية خارج القسمة

$= \ln 3^2 - \ln 2^3$ — $3^2 = 9$ و $2^3 = 8$

$= 2 \ln 3 - 3 \ln 2$ — خاصية الأس الثابت

تمرين موجّه

عبّر عن كل لوغاريتم باستخدام log 5 وlog 3.

1A. log 75

1B. log 5.4

يمكن أيضا استخدام خصائص ناتج الضرب وخارج القسمة والأس الثابت في تبسيط اللوغاريتمات.

مثال 2 تحويل اللوغاريتمات إلى أبسط صورة

جد قيمة كل لوغاريتم مما يلي.

a. $\log_4 \sqrt[5]{64}$

بما أن أساس اللوغاريتم هو 4، عبّر عن $\sqrt[5]{64}$ كأس ثابت للعدد 4.

$\log_4 \sqrt[5]{64} = \log_4 64^{\frac{1}{5}}$ — أعد الكتابة باستخدام أسس نسبية.

$= \log_4 (4^3)^{\frac{1}{5}}$ — $4^3 = 64$

$= \log_4 4^{\frac{3}{5}}$ — خاصية الأس الثابت للأسس

$= \frac{3}{5} \log_4 4$ — خاصية الأس الثابت للوغاريتمات

$= \frac{3}{5}(1) = \frac{3}{5}$ — log = 1

b. $5 \ln e^2 - \ln e^3$

$5 \ln e^2 - \ln e^3 = 5(2 \ln e) - 3 \ln e$ — خاصية الأس الثابت للوغاريتمات

$= 10 \ln e - 3 \ln e$ — اضرب.

$= 10(1) - 3(1) = 7$ — ln = 1

تمرين موجّه

2A. $\log_6 \sqrt[3]{36}$

2B. $\ln e^9 + 4 \ln e^3$

توفر خصائص اللوغاريتمات طريقة للتعبير عن التعابير اللوغاريتمية بصيغ تستخدم عمليات أبسط لتحويل الضرب إلى جمع والقسمة إلى طرح والأسس والجذور إلى ضرب.

مثال 3 توسيع التعابير اللوغاريتمية

قم بتوسيع كل تعبير.

a. $\log 12x^5y^{-2}$

التعبير هو لوغاريتم ناتج ضرب 12 وx^5 وy^2.

$\log 12x^5y^{-2} = \log 12 + \log x^5 + \log y^{-2}$ — خاصية ناتج الضرب

$= \log 12 + 5 \log x - 2 \log$ — خاصية الأس الثابت

b. $\ln \frac{x^2}{\sqrt{4x+1}}$

التعبير هو لوغاريتم خارج قسمة x^2 و $\sqrt{4x+1}$

$\ln \frac{x^2}{\sqrt{4x+1}} = \ln x^2 - \ln \sqrt{4x+1}$ — خاصية خارج القسمة

$= \ln x^2 - \ln (4x+1)^{\frac{1}{2}}$ — $\sqrt{4x+1} = (4x+1)^{\frac{1}{2}}$

$= 2 \ln x - \frac{1}{2} \ln (4x+1)$ — خاصية الأس الثابت

تمرين موجّه

3A. $\log_{13} 6a^3bc^4$

3B. $\ln \frac{3y+2}{4\sqrt[3]{y}}$

الربط بتاريخ الرياضيات

جوست بورجي

(1550–1617) كان عالم الرياضيات السويسري بورجي صانع ساعات شهيرًا وابتكر أيضا أدوات فلكية ووضع تصميمها. وظهرت أهم أعماله في الرياضيات عندما اكتشف اللوغاريتمات بشكل مستقل عن جون نابير.

يمكن استخدام نفس الأساليب المستخدمة في توسيع التعابير اللوغاريتمية لكتابتها في أبسط صورة.

مثال 4 تبسيط التعابير اللوغاريتمية

قم بتبسيط كل تعبير مما يلي.

a. $4 \log_3 x - \frac{1}{3} \log_3 (x+6)$

$$4 \log_3 x - \frac{1}{3} \log_3 (x+6) = \log_3 x^4 - \log_3 (x+6)^{\frac{1}{3}}$$ خاصية الأس الثابت

$$= \log_3 x^4 - \log_3 \sqrt[3]{x+6}$$ $(x+6)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x+6}$

$$= \log_3 \frac{x^4}{\sqrt[3]{x+6}}$$ خاصية ناتج القسمة

$$= \log_3 \frac{x^4\sqrt[3]{(x+6)^2}}{x+6}$$ اجعل المقام نسبيًا.

b. $6 \ln (x-4) + 3 \ln x$

$$6 \ln (x-4) + 3 \ln x = \ln (x-4)^6 + \ln x^3$$ خاصية الأس الثابت

$$= \ln x^3(x-4)^6$$ خاصية ناتج الضرب

انتبه!

لوغاريتم مجموع لوغاريتم المجموع أو الفارق لا يساوي مجموع اللوغاريتمات أو فارقها. على سبيل المثال، $\ln (x \pm 4) \neq \ln x \pm \ln 4$

تمرين موجّه

4A. $-5 \log_2 (x+1) + 3 \log_2 (6x)$

2 تغيير صيغة الأساس

قد تحتاج أحيانًا إلى التعامل مع لوغاريتم له أساس غير مناسب. من أمثلة ذلك، يمثل تقييم $\log_3 5$ تحديًا لأن بعض الحاسبات ليس بها مفتاح لتقييم لوغاريتمات الأساس 3. يوفر تغيير قاعدة الأساس طريقة لتغيير هذا التعبير إلى لوغاريتمات ناتج قسمة بأساس مختلف.

المفهوم الأساسي تغيير صيغة الأساس

بالنسبة لأي أعداد حقيقية موجبة a و b و x و $a \neq 1$ و $b \neq 1$، و

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

ستثبت قاعدة تغيير الأساس في التمرين 115.

تحتوي معظم الحاسبات على مفتاحين فقط للوغاريتمات. LOG للوغاريتمات الأساس 10 و LN للوغاريتمات الأساس e. ولهذا ستستخدم في الغالب قاعدة تغيير الأساس بإحدى الصيغتين التاليتين. وسيعطي كلا الأسلوبين الإجابة الصحيحة.

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b} \qquad \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

مثال 5 استخدم تغيير قاعدة الأساس

قم بإيجاد قيمة كل لوغاريتم مما يلي.

a. $\log_3 5$

$$\log_3 5 = \frac{\ln 5}{\ln 3}$$ تغيير قاعدة الأساس

$$\approx 1.47$$ استخدم حاسبة.

b. $\log_{\frac{1}{2}} 6$

$$\log_{\frac{1}{2}} 6 = \frac{\log 6}{\log \frac{1}{2}}$$ تغيير قاعدة الأساس

$$\approx -2.58$$ استخدم حاسبة.

نصيحة دراسية

التحقق من مدى صحة الحل يمكنك التحقق من إجاباتك في المثال 5a عن طريق تقييم $3^{1.47}$. بما أن $3^{1.47} \approx 5$، فإن الإجابة صحيحة.

تمرين موجّه

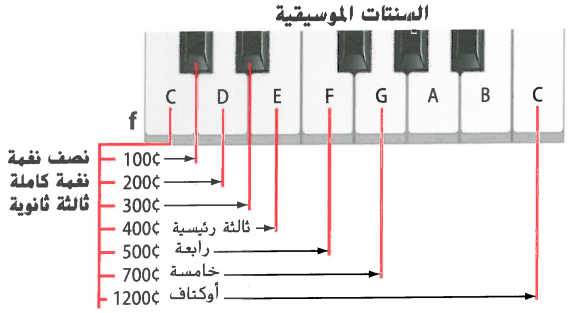
5A. $\log_{78} 4212$ **5B.** $\log_{15} 33$ **5C.** $\log_{\frac{1}{3}} 10$

يمكنك استخدام خصائص اللوغاريتمات لحل مسائل من الحياة اليومية. على سبيل المثال، يبلغ معدل ترددات صوت في جواب موسيقي ومعدل تردداته في الجواب الموسيقي التالي 2:1. ولهذا سوف تقع الأجوبة الموسيقية التالية بمعدل يبلغ 2^n ضعف معدل تردد ذلك الصوت، حيث n عدد صحيح. يمكن استخدام هذه العلاقة في التوصل إلى الاختلاف في النغمة بين أي صوتين.

مثال 6 استخدام تغيير قاعدة الأساس

الموسيقى السنت (¢) الموسيقي هو وحدة النغمة النسبية. ويتألف الجواب الموسيقي واحد من 1200 سنت.

السنتات الموسيقية



1 قاعدة تحديد الفارق في السنتات بين صوتين بالتردد المبدئي a والتردد النهائي b هي $n = 1200\left(\log_2 \frac{a}{b}\right)$. جد الفارق في النغمة بين كل من أزواج الأصوات التالية.

a. 493.9 هرتز، 293.7 هرتز

افترض أن $a = 493.9$ و$b = 293.7$. ضع قيمًا مكان a وb وجد حلاً للمسألة.

$$n = 1200\left(\log_2 \frac{a}{b}\right) \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$= 1200\left(\log_2 \frac{493.9}{293.7}\right) \quad a = 493.9 \text{ و } b = 293.7$$

$$= 1200\left(\frac{\log \frac{493.9}{293.7}}{\log 2}\right) \quad \text{غيّر صيغة الأساس}$$

$$\approx 899.85 \quad \text{بسّط.}$$

يبلغ الاختلاف في النغمة بين الصوتين حوالي 899.85 سنتًا.

b. 3135.9 هرتز، 2637 هرتز

افترض أن $a = 3135.9$ و$b = 2637$. ضع قيمًا مكان a وb وجد حلاً للمسألة.

$$n = 1200\left(\log_2 \frac{a}{b}\right) \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$= 1200\left(\log_2 \frac{3135.9}{2637}\right) \quad a = 3135.9 \text{ و } b = 2637$$

$$= 1200\left(\frac{\log \frac{3135.9}{2637}}{\log 2}\right) \quad \text{غيّر صيغة الأساس}$$

$$\approx 299.98 \quad \text{بسّط.}$$

يبلغ الاختلاف في النغمة بين الصوتين حوالي 299.98 سنتًا.

تمرين موجّه

6. **التصوير الفوتوغرافي** في التصوير الفوتوغرافي، يكون التعرض الضوئي هو مقدار الضوء المسموح له بالسقوط على فيلم. ويمكن تعديل التعرض الضوئي بعدد مرات التوقف المستخدمة لالتقاط صورة. التغير في عدد مرات التوقف n المطلوبة يرتبط بالتغير في التعرض الضوئي c في $n = \log_2 c$

A. كم عدد مرات التوقف التي يستخدمها المصور لمضاعفة التعرض الضوئي؟

b. كم عدد مرات التوقف التي يستخدمها مصور للحصول على $\frac{1}{5}$ التعرض الضوئي؟

الربط بالحياة اليومية

النغمة القياسية، وتُسمى أيضًا نغمة الحفلة، هي النغمة التي يستخدمها أفراد الأوركسترا لضبط أدواتهم. ويبلغ تردد النغمة القياسية 440 هرتز، وهو ما يعادل الصوت A في الجواب الموسيقي الرابع.

المصدر: Encyclopaedia Britannica

تمارين

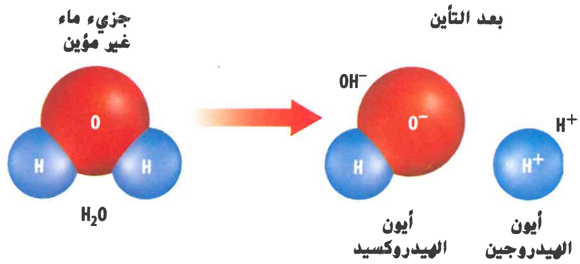
عبّر عن كل لوغاريتم باستخدام ln 2 وln 5. (مثال 1)

1. $\ln \frac{4}{5}$
2. $\ln 200$
3. $\ln 80$
4. $\ln 12.5$
5. $\ln \frac{0.8}{2}$
6. $\ln \frac{2}{5}$
7. $\ln 2000$
8. $\ln 1.6$

عبّر عن كل لوغاريتم باستخدام ln 3 وln 7. (مثال 1)

9. $\ln 63$
10. $\ln \frac{49}{81}$
11. $\ln \frac{7}{9}$
12. $\ln 147$
13. $\ln 1323$
14. $\ln \frac{343}{729}$
15. $\ln \frac{2401}{81}$
16. $\ln 1701$

17. **الكيمياء** القيمة الثابتة للتأين في الماء K_w هي ناتج تركيزات أيونات الهيدروجين (H^+) والهيدروكسيد (OH^-).



قاعدة القيمة الثابتة لتأين الماء هي $K_w = [H^+][OH^-]$، حيث يشير القوسان إلى التركيز بالمول في اللتر. (مثال 1)

a. عبّر عن $\log K_w$ بدلالة $\log [H^+]$ و $\log [OH^-]$.

b. القيمة الثابتة K_w هي 1×10^{-14}. بسّط معادلتك من الجزء a لتعكس القيمة الرقمية لـ K_w.

c. إذا كان تركيز أيونات الهيدروجين في عينة ماء يبلغ 1×10^{-9} مول في اللتر، فما تركيز أيونات الهيدروكسيد؟

18. **الأعاصير** المسافة d بالأميال التي يقطعها إعصار تبلغ $d = 10^{\frac{w-65}{93}}$، حيث w هي سرعة الرياح بالأميال في الساعة في الإعصار. (مثال 1)

a. عبّر عن w بدلالة $\log d$.

b. إذا كان الإعصار يقطع 100 ميل، فضع تقديرًا لسرعة الرياح.

جد قيمة كل لوغاريتم مما يلي. (مثال 2)

19. $\log_5 \sqrt[4]{25}$
20. $8 \ln e^2 - \ln e^{12}$
21. $9 \ln e^3 + 4 \ln e^5$
22. $\log_2 \sqrt[5]{32}$
23. $2 \log_3 \sqrt{27}$
24. $3 \log_7 \sqrt[6]{49}$
25. $4 \log_2 \sqrt{8}$
26. $50 \log_5 \sqrt{125}$
27. $\log_3 \sqrt[6]{243}$
28. $36 \ln e^{0.5} - 4 \ln e^5$

قم بتوسيع كل تعبير. (مثال 3)

29. $\log_9 6x^3y^5z$
30. $\ln \frac{x^7}{\sqrt[3]{x+2}}$
31. $\log_3 \frac{p^2q}{\sqrt[5]{3q-1}}$
32. $\ln \frac{4df^5}{\sqrt[8]{1-3d}}$
33. $\log_{11} ab^{-4}c^{12}d^7$
34. $\log_7 h^2j^{11}k^{-5}$
35. $\log_4 10t^2uv^{-3}$
36. $\log_5 a^6b^{-3}c^4$
37. $\ln \frac{3a^4b^7c}{\sqrt[4]{b-9}}$
38. $\log_2 \frac{3x+2}{\sqrt[7]{1-5x}}$

بسّط كل تعبير مما يلي. (مثال 4)

39. $3 \log_5 x - \frac{1}{2} \log_5 (6-x)$
40. $5 \log_7 (2x) - \frac{1}{3} \log_7 (5x+1)$
41. $7 \log_3 a + \log_3 b - 2 \log_3 (8c)$
42. $4 \ln (x+3) - \frac{1}{5} \ln (4x+7)$
43. $2 \log_8 (9x) - \log_8 (2x-5)$
44. $\ln 13 + 7 \ln a - 11 \ln b + \ln c$
45. $2 \log_6 (5a) + \log_6 b + 7 \log_6 c$
46. $\log_2 x - \log_2 y - 3 \log_2 z$
47. $\frac{1}{4} \ln (2a-b) - \frac{1}{5} \ln (3b+c)$
48. $\log_3 4 - \frac{1}{2} \log_3 (6x-5)$

جد قيمة كل لوغاريتم مما يلي. (مثال 5)

49. $\log_6 14$
50. $\log_3 10$
51. $\log_7 5$
52. $\log_{128} 2$
53. $\log_{12} 145$
54. $\log_{22} 400$
55. $\log_{100} 101$
56. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$
57. $\log_{-2} 8$
58. $\log_{13000} 13$

59. **الحواسيب** تتم كتابة برامج الحواسيب في مجموعات من التعليمات تُسمى لوغاريتمات. لتنفيذ مهمة في برنامج كمبيوتر، يجب تحليل تشغيل اللوغاريتم (الخوارزم) في البرنامج. ويمكن تمثيل وقت التشغيل بالثواني R المطلوب لتحليل اللوغاريتم من n خطوات بالدالة $R = \log_2 n$. (مثال 6)

a. حدد وقت التشغيل اللازم لتحليل لوغاريتم من 240 خطوة.

b. حتى الوصول إلى أقرب خطوة، كم عدد الخطوات في لوغاريتم بوقت تشغيل يبلغ 8.45 ثوانٍ؟

60. **النقل** اشترت شركة نقل شاحنة نقل جديدة مقابل AED 56,000 . افترض أن الدالة $t = \log_{(1-r)} \frac{V}{P}$ تمثل الزمن t بالسنوات التي مرت على الشراء، وحدد على أساس السعر المبدئي P، القيمة الحالية V، والمعدل السنوي للاستهلاك r. (مثال 6)

a. إذا كانت القيمة الحالية للشاحنة تبلغ AED 40,000 وتم استهلاكها بمعدل 15% في العام، فما مقدار الوقت الذي مر منذ شرائها مع التقريب إلى أقرب عام؟

b. إذا كانت القيمة الحالية للشاحنة تبلغ AED 34,000 وتم استهلاكها بمعدل 10% في العام، فما مقدار الوقت الذي مر منذ شرائها مع التقريب إلى أقرب عام؟

قدّر كل لوغاريتم إلى أقرب عدد كلي.

61. $\log_4 5$

62. $\log_2 13$

63. $\log_3 10$

64. $\log_7 400$

65. $\log_5 \frac{1}{124}$

66. $\log_{12} 177$

67. $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{6}$

68. $\log_4 \frac{1}{165}$

قم بتوسيع كل تعبير مما يلي.

69. $\ln \sqrt[5]{x^3(x+3)}$

70. $\log_5 \frac{x^2y^5}{\sqrt[3]{4x-y}}$

71. $\log_{14} \frac{11}{\sqrt[4]{x^5(8x-1)}}$

72. $\ln \frac{9x^2yz^3}{(y-5)^4}$

73. $\log_8 \sqrt[7]{x^3y^2(z-1)}$

74. $\log_{12} \frac{5x}{\sqrt[6]{x^7(x+13)}}$

75. **الزلازل** يقيس مقياس ريختر شدة الزلازل. يمكن حساب مقدار M للطاقة الزلزالية بالجول E والناتجة عن زلزال باستخدام الدالة

$$M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{10^{4.4}}$$

a. استخدم خصائص اللوغاريتمات لتوسيع المعادلة.

b. ما مقدار الطاقة في زلزال يطلق 7.94×10^{11} جول؟

c. أطلق زلزال ألوم روك في عام 2007 في كاليفورنيا 4.47×10^{12} جول من الطاقة. وأطلق زلزال أنكوراج في عام 1964 في ألاسكا 1.58×10^{18} جول من الطاقة. فكم بلغ عدد أضعاف مقدار الطاقة لزلزال أنكوراج بالمقارنة بمقدار الطاقة لزلزال ألوم روك؟

d. لا يمكن الإحساس بالزلازل بشكل عام قبل أن تصل إلى مقدار طاقة يبلغ 3 على مقياس ريختر. كم عدد وحدات الطاقة بالجول التي يطلقها زلزال بهذا المقدار؟

بسّط كل تعبير.

76. $\frac{3}{4} \ln x + \frac{7}{4} \ln y + \frac{5}{4} \ln z$

77. $\log_2 15 + 6 \log_2 x - \frac{4}{3} \log_2 x - \frac{1}{3} \log_2 (x+3)$

78. $\ln 14 - \frac{2}{3} \ln 3x - \frac{4}{3} \ln (4-3x)$

79. $3 \log_6 2x + 9 \log_6 y - \frac{4}{5} \log_6 x - \frac{8}{5} \log_6 y - \frac{1}{5} \log_6 z$

80. $\log_4 25 - \frac{5}{2} \log_4 x - \frac{7}{2} \log_4 y - \frac{3}{2} \log_4 (z+9)$

81. $\frac{5}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln (y+8) - 3 \ln y - \ln (10-x)$

استخدم خصائص اللوغاريتمات لإعادة كتابة كل لوغاريتم أدناه بصيغة $a \ln 2 + b \ln 3$، حيث a وb قيمتان ثابتتان. ثم حدد بشكل تقريبي قيمة كل لوغاريتم بالنظر إلى أن $\ln 2 \approx 0.69$ و$\ln 3 \approx 1.10$.

82. $\ln 4$

83. $\ln 48$

84. $\ln 162$

85. $\ln 216$

86. $\ln \frac{3}{2}$

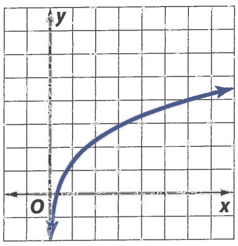
87. $\ln \frac{4}{9}$

88. $\ln \frac{4}{27}$

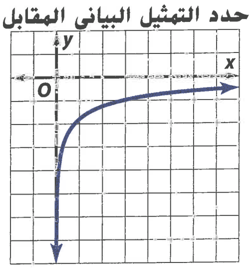
89. $\ln \frac{32}{9}$

حدد التمثيل البياني المقابل لكل معادلة.

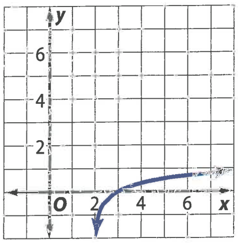
a.



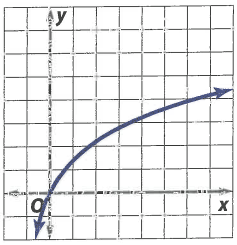
b.



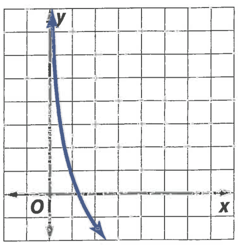
c.



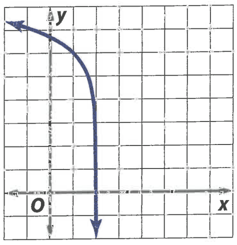
d.



e.



f.



90. $f(x) = \ln x + \ln (x+3)$

91. $f(x) = \ln x - \ln (x+5)$

92. $f(x) = 2 \ln (x+1)$

93. $f(x) = 0.5 \ln (x-2)$

94. $f(x) = \ln (2-x) + 6$

95. $f(x) = \ln 2x - 4 \ln x$

اكتب كل مجموعة من التعابير اللوغاريتمية بترتيب تصاعدي.

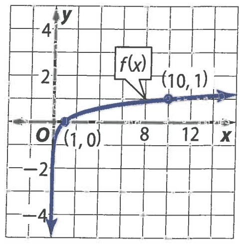
96. $\log_3 \frac{12}{4}, \log_3 \frac{36}{3} + \log_3 4, \log_3 12 - 2 \log_3 4$

97. $\log_5 55, \log_5 \sqrt{100}, 3 \log_5 \sqrt[3]{75}$

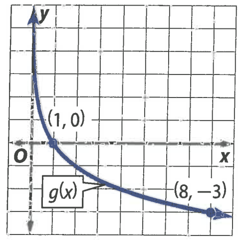
.98 **البيولوجيا** مدة التكاثر للبكتيريا هي الزمن الذي تستغرقه البكتيريا لتضاعف عددها. يمكن التوصل إلى مدة التكاثر G باستخدام $G = \frac{t}{3.3 \log_b f}$ ، حيث t هي المدة الزمنية وb هي عدد البكتيريا في بداية التجربة وf هو عدد البكتيريا في نهاية التجربة. تبلغ مدة تكاثر بكتيريا المتفطرة السلية 16 ساعة. ما الوقت الذي يستغرقه 4 من البكتيريا للتكاثر إلى 1024 بكتيريا؟

اكتب معادلة لكل تمثيل بياني.

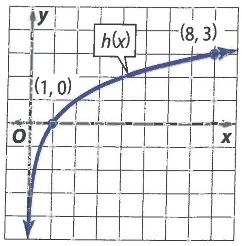
99.



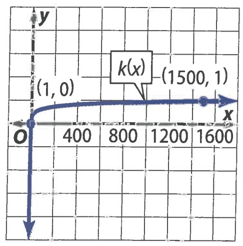
100.



101.



102.



.103 **الكيمياء** pK_a هي القيمة اللوغاريتمية الثابتة لتحلل الحمض HF، والذي يتألف من أيونات F^- وH^+. يمكن حساب pK_a بالدالة، $pK_a = -\log \frac{[H^+][F^-]}{[HF]}$ ، حيث $[H^+]$ هو تركيز الأيونات H^+ و$[F^-]$ هو تركيز الأيونات F^- و$[HF]$ هو تركيز المحلول الحمضي. يتم قياس كل التركيزات بالمول في اللتر.

a. استخدم خصائص logs لتوسيع معادلة pK_a.

b. ما هو pK_a لتفاعل يكون فيه $[H^+] = 0.01$ مول في اللتر، $[F^-] = 0.01$ مول في اللتر و$[HF] = 2$ مول في اللتر؟

c. يمكن حساب القيمة الثابتة لتحلل الحمض K_a في مادة باستخدام $K_a = \frac{[H^+][F^-]}{[HF]}$. إذا كان في المادة $pK_a = 25$، فما هو K_a فيها؟

d. الألدهايد عبارة عن مجموعة وظيفية مشتركة في الجزيئات العضوية. يبلغ pK_a في الألدهايد حوالي 17. ما هو K_a المقابل لهذا؟

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

104. $\ln\left[\ln\left(e^{e^6}\right)\right]$

105. $10^{\log e^{\ln 4}}$

106. $4 \log_{17} 17^{\log_{10} 100}$

107. $e^{\log_4 4^{\ln 2}}$

بسّط كل تعبير مما يلي:

108. $(\log_3 6)(\log_6 13)$

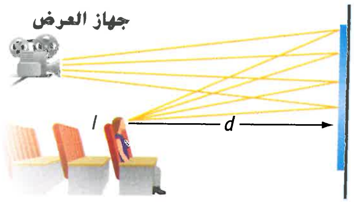
109. $(\log_2 7)(\log_5 2)$

110. $(\log_4 9) \div (\log_4 2)$

111. $(\log_5 12) \div (\log_8 12)$

.112 **الأفلام** الأفلام التقليدية عبارة عن سلسلة من الصور الثابتة التي إذا تم عرضها بالسرعة الكافية تعطي للمشاهد إحساسًا بوجود حركة. إذا كان تردد الصور الثابتة المعروضة بطيئًا جدًا، يلاحظ المشاهد اهتزازًا بين كل صورة. افترض أن الحد الأدنى للتردد f الذي يختفي عنده الاهتزاز لأول مرة يتحدد بالدالة $f = K \log I$، حيث I كثافة الضوء الذي يصل إلى المشاهد من الشاشة وK ثابت التناسب.

a. كثافة الضوء الذي يراه المشاهد الجالس على مسافة d من الشاشة يتحدد بالدالة $I = \frac{k}{d^2}$ ، حيث k ثابت التناسب. وضّح أن $f = K(\log k - 2 \log d)$.



b. افترض أنك لاحظت الاهتزاز في عرض فيلم وانتقلت إلى ضعف المسافة من الشاشة. بدلالة K، كيف تؤثر هذه الحركة على قيمة f؟ اشرح استدلالك.

مسائل مهارات التفكير العُليا استخدام مهارات التفكير العُليا

الإثبات ضع تمثيلًا بيانيًا لكل من الخصائص التالية للوغاريتمات ثم أثبتها.

.113 **خاصية ناتج القسمة**

.114 خاصية الأس الثابت

.115 **الإثبات** أثبت أن $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

.116 **الاستنتاج** كيف يمكن التوصل إلى التمثيل البياني للدالة $g(x) = \log_4 x$ باستخدام تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \ln x$؟

.117 **تحدٍّ** إذا $x \in \mathbb{N}$. فما هي قيم x التي لا يمكن معها تبسيط $\ln x$؟

.118 **تحليل الخطأ** قام عمر وخالد بتوسيع $\log_2 \left(\frac{xy}{z}\right)^4$ باستخدام خصائص اللوغاريتمات. هل كلاهما على صواب؟ اشرح.

عمر: $4 \log_2 x + 4 \log_2 y - 4 \log_2 z$

خالد: $2 \log_4 x + 2 \log_4 y - 2 \log_4 z$

.119 **الإثبات** استخدم الخصائص اللوغاريتمية لإثبات $\frac{\log_5 (nt)^2}{\log_4 \frac{t}{r}} = \frac{2 \log n \log 4 + 2 \log t \log 4}{\log 5 \log t - \log 5 \log r}$.

120 **الكتابة في الرياضيات** التمثيل البياني للدالة $g(x) = \log_b x$ يمثل في الواقع تحولاً للدالة $f(x) = \log x$. استخدم التغيير في قاعدة الأساس للتوصل إلى التحول الذي يربط هذين التمثيلين البيانيين. ثم اشرح أثر قيم b المختلفة على التمثيل البياني للوغاريتم العادي.

مراجعة شاملة

ارسم كل دالة وحللها. وضّح المجال والمدى والتقاطعات وخطوط اقتراب والسلوك الطرفي وفترات تزايد أو تناقص الدالة. (الدرس 2-2)

121 $f(x) = \log_6 x$

122. $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

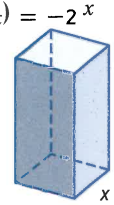
123. $h(x) = \log_5 x - 2$

استخدم تمثيل $f(x)$ البياني لوصف التحول الذي يؤدي إلى تمثيل $g(x)$ البياني. ثم ارسم $f(x)$ و$g(x)$ بيانيًا. (الدرس 1-2)

124. $f(x) = 2^x;\ g(x) = -2^x$

125. $f(x) = 5^x;\ g(x) = 5^{x+3}$

126. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x;\ g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 2$



127. **علم الهندسة** يكون حجم المنشور الزجاجي المستطيل بقاعدة مربعة ثابتًا عند $120\ m^3$. (الدرس 5-1)

a. اكتب مساحة سطح المنشور الزجاجي كدالة $A(x)$ من طول ضلع المربع x.

b. ارسم دالة مساحة السطح بيانيًا.

c. ما الذي يحدث لمساحة سطح المنشور الزجاجي مع اقتراب طول ضلع المربع من 0؟

القسمة باستخدام القسمة التركيبية. (الدرس 1-3)

128. $(x^2 - x + 4) \div (x - 2)$

129. $(x^3 + x^2 - 17x + 15) \div (x + 5)$

130. $(x^3 - x^2 + 2) \div (x + 1)$

وضّح أن f وg دالتان متعاكستان. c. ثم مثّل بيانيًا كلتا الدالتين على نفس شاشة حاسبة التمثيلات البيانية. (الدرس 1-7)

131. $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$

$g(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$

132. $f(x) = \frac{1}{x+2}$

$g(x) = \frac{1}{x} - 2$

133. $f(x) = (x-3)^3 + 4$

$g(x) = \sqrt[3]{x-4} + 3$

134. **العلوم** الحرارة النوعية هي مقدار الطاقة المطلوبة لكل وحدة من الكتلة لرفع درجة حرارة مادة ما بمقدار درجة واحدة مئوية. يعرض الجدول الحرارة النوعية بالجول في الجرام لمواد معينة. يتحدد مقدار الطاقة المنقول على أساس $Q = cmT$، حيث c هي الحرارة النوعية للمادة وm كتلتها وT التغير في درجة الحرارة. (الدرس 1-5)

a. توصل إلى دالة التغير في درجة الحرارة.

b. ما التمثيل البياني الأصلي لهذه الدالة؟

c. ما المجال الملائم لهذه الدالة؟

المادة	الحرارة النوعية (j/g)
الألومنيوم	0.902
الذهب	0.129
الزئبق	0.140
الحديد	0.45
الثلج	2.03
الماء	4.179
الهواء	1.01

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

135. **SAT/ACT** إذا $b \neq 0$، فافترض أن $a \triangle b = \frac{a^2}{b^2}$. إذًا $x \triangle y = 1$، فما هي إذًا العبارة التي يجب أن تكون صحيحة؟

A $x = y$

B $x = -y$

C $x^2 - y^2 = 0$

D $x > 0$ و $y > 0$

E $x = |y|$

136. **مراجعة** جد قيمة x للدالة $\log_2 (9x + 5) = 2 + \log_2 (x^2 - 1)$.

F -0.4

G 0

H 1

J 3

137. **ما القيمة التي تساوي** $2 \log_5 12 - \log_5 8 - 2 \log_5 3$؟

A $\log_5 2$

B $\log_5 3$

C $\log_5 0.5$

D 1

138. **مراجعة** يقل وزن قطعة صابون بمعدل 2.5% مع كل مرة استخدام. فإذا كان وزن قطعة صابون تبلغ 95 جرامًا عندما تكون جديدة، فما وزنها مع التقريب لأقرب جرام بعد 15 استعمالاً؟

F 58 g

G 59 g

H 65 g

J 93 g

الوحدة 2

اختبار منتصف الوحدة

الدروس 2-1 إلى 2-3

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. ووضح المجال والمدى ونقاط التقاطع وخطوط التقارب والسلوك الطرفي، وفترات تزايد أو تناقص الدالة. (الدرس 2-1)

1. $f(x) = 5^{-x}$

2. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x} + 3$

استخدم تمثيل $f(x)$ البياني لتوضيح التحويل الناتج في التمثيل البياني لـ $g(x)$. ثم ارسم التمثيل البياني لكل من $f(x)$ و $g(x)$. (الدرس 2-1)

3. $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{x};\ g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$

4. $f(x) = 3^{x};\ g(x) = 2 \times 3^{x-2}$

5. $f(x) = e^{x};\ g(x) = -e^{x} - 6$

6. $f(x) = 10^{x};\ g(x) = 10^{2x}$

7. **الاختيار من متعدد** في قاعدة المرابحة المركبة $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$؛ أي المتغيرات "لا" يؤثر على الوقت المستغرق لمضاعفة استثمار؟ (الدرس 2-1)

A P C n

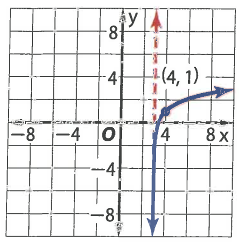
B r D t

8. **المعرفة المالية** ادخرت هند AED 1200 من عملها بالوظائف الصيفية وتريد استثمار المبلغ ليكون لديها بعض المال الإضافي عند التخرج من الجامعة بعد 5 سنوات. (الدرس 2-1)

a. **كم سيتوفر لدى هند إذا استثمرت المال بمعدل مرابحة سنوي 7.2% مركب شهريًا؟**

b. **كم سيتوفر لدى هند إذا استثمرت المال بمعدل مرابحة سنوي 7.2% مركب بصفة مستمرة؟**

9. **الاختيار من متعدد** الدالة الأصلية للتمثيل البياني الموضح هي $f(x) = \log_2 x$.



يحتوي التمثيل البياني على النقطة المعلومة وخط التقارب الرأسي الموضح. أي مما يلي هي الدالة التمثيل البياني؟ (الدرس 2-3)

F $f(x) = \log_2 (x + 3) + 1$

G $f(x) = \log_2 (x - 4) + 1$

H $f(x) = -\log_2 (x - 3) + 1$

J $f(x) = \log_2 (x - 3) + 1$

جد قيمة كل تعبير مما يلي. (الدرس 2-2)

10. $\log_2 64$

11. $\log_5 \frac{1}{125}$

12. $\ln e^{23}$

13. $\log 0.001$

14. **مرض** يمكن تمثيل عدد الأطفال المصابين بفيروس من خلال $c(d) = 4.9 + 11.2 \ln d$؛ حيث يمثل d عدد الأيام التي مرت منذ إصابة أول طفل. كم عدد الأطفال المصابين تقريبًا في اليوم الثامن؟ (الدرس 2-2)

جد قيمة كل دالة للقيمة المعطاة. (الدرس 2-2)

15. $T(x) = 2 \ln (x + 3);\ x = 18$

16. $H(a) = 4 \log \frac{2a}{5} - 8;\ a = 25$

عبّر عن كل لوغاريتم بدلالة ln 3 و ln 4: (الدرس 2-3)

17. $\ln 48$

18. $\ln 2.25$

19. $\ln \frac{64}{27}$

20. $\ln \frac{9}{16}$

21. **كيمياء** عمر النصف لنظير مشع هو 7 أعوام. (الدرس 2-3)

a. **إذا كان هناك في البداية 75 g من المادة، فما الكمية المتبقية بعد 14 عامًا؟**

b. **بعد كم عام سيتبقى $\frac{1}{16}$ من الكمية الأصلية؟**

c. **يمكن تمثيل الزمن المستغرق لتحلّل مادة من N_0 إلى N بواسطة $t = 7 \log_{0.5} \frac{N}{N_0}$. كم تقريبًا عدد السنوات التي يستغرقها تحلّل أي كمية من المادة المشعة إلى $\frac{1}{3}$ من الكمية الأصلية؟**

قم بتوسيع كل تعبير مما يلي. (الدرس 2-3)

22. $\log_3 \sqrt[4]{x^2 y^3 z^5}$

23. $\log_9 \frac{3x^3}{y}$

بسّط كل تعبير مما يلي. (الدرس 2-3)

24. $5 \log_4 a + 6 \log_4 b - \frac{1}{3} \log_4 7c$

25. $2 \log (x + 1) - \log (x^2 - 1)$

الدرس 2-4

المعادلات الأسيّة واللوغاريتمية

..السابق

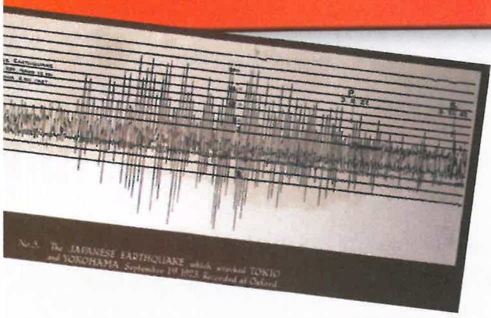
- قمتَ بتطبيق الخصائص العكسية للأسس واللوغاريتمات لتبسيط التعابير. (الدرس 2-2)

..الحالي

1. تطبيق خاصية "واحد لواحد" للدوال الأسيّة لحل المعادلات.
2. تطبيق خاصية "واحد لواحد" للدوال اللوغاريتمية لحل المعادلات.

..لماذا؟

- يمكن حساب شدة زلزال باستخدام $R = \log \frac{a}{T} + B$، حيث تمثل R الرقم على مقياس ريختر، و a سعة حركة الأرض الرأسيّة، و T مدة الموجة الزلزالية بالثواني، و B عامل إضعاف الموجات الزلزالية.



1 خاصية "واحد لواحد" للدوال الأسيّة

تم إثبات خاصية "واحد لواحد" للدوال الأسيّة. تذكر أنه إذا كانت الدالة f تتمتع بخاصية "واحد لواحد"، فإن قيمة y لا تناظرها أكثر من قيمة x واحدة. بمعنى، $f(a) = f(b)$ فقط في حالة $a = b$. ويؤدي بنا هذا إلى خاصية "واحد لواحد" التالية للدوال الأسيّة.

المفهوم الأساسي خاصية "واحد لواحد" للدوال الأسيّة

الشرح تكون $b > 0$ و $b \neq 1$، $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كانت $x = y$.

الأمثلة بما أن $3^x = 3^5$، فإن $x = 5$. بما أن $\log x = 3$، فإن $10^{\log x} = 10^3$

ويطلق عليها أيضًا خاصية "المساواة" للدوال الأسيّة.

تتضمن الكلمات فقط إذا كان في هذه الخاصية عبارتين منفصلتين. يمكن استخدام إحداهما، $b^x = b^y$ إذا كانت $x = y$ لحل بعض المعادلات الأسيّة البسيطة من خلال التعبير عن طرفي المعادلة في ضوء أساس مشترك.

مثال 1 حل المعادلات الأسيّة باستخدام خاصية واحد لواحد

حُل كل من المعادلات التالية.

a. $36^{x+1} = 6^{x+6}$

$36^{x+1} = 6^{x+6}$	المعادلة الأصلية
$(6^2)^{x+1} = 6^{x+6}$	$6^2 = 36$
$6^{2x+2} = 6^{x+6}$	قوة أسيّة
$2x + 2 = x + 6$	خاصية واحد لواحد
$x + 2 = 6$	اطرح x من كل طرف.
$x = 4$	اطرح 2 من كل طرف. تحقق من هذا الحل في المعادلة الأصلية.

b. $\left(\frac{1}{2}\right)^c = 64^{\frac{1}{2}}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^c = 64^{\frac{1}{2}}$	المعادلة الأصلية
$2^{-c} = (2^6)^{\frac{1}{2}}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$, $2^6 = 64$
$2^{-c} = 2^3$	قوة أسيّة
$-c = 3$	خاصية واحد لواحد
$c = -3$	جد قيمة c. تحقق من هذا الحل في المعادلة الأصلية.

تمرين موجّه

1A. $16^{x+3} = 4^{4x+7}$

1B. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-5} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3x}{4}}$

تترتب عبارة أخرى على خاصية "واحد لواحد" للدوال الأسية وهي: بما أن $x = y$، إذًا $b^x = b^y$؛ ويمكن استخدامها لحل المعادلات اللوغاريتمية مثل $\log_2 x = 3$

$\log_2 x = 3$	المعادلة الأصلية
$2^{\log_2 x} = 2^3$	خاصية واحد لواحد
$x = 2^3$	خاصية المعكوس

يُطلق على تطبيق خاصية "واحد لواحد" رفع أس كل طرف من المعادلة. لاحظ أن تأثير رفع أس كل طرف من المعادلة $\log_2 x = 3$ هو تحويل المعادلة من الشكل اللوغاريتمي إلى الشكل الأسي.

مثال 2 حل المعادلات اللوغاريتمية باستخدام خاصية واحد لواحد

حُل كل من المعادلات اللوغاريتمية التالية. قرِّب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.

a. $\ln x = 6$

الطريقة 1 استخدم رفع الأس.

$\ln x = 6$	المعادلة الأصلية
$e^{\ln x} = e^6$	ارفع أس كل طرف.
$x = e^6$	خاصية المعكوس
$x \approx 403.43$	استخدم حاسبة.

الطريقة 2 اكتب بالصورة الأسية.

$\ln x = 6$	المعادلة الأصلية
$x = e^6$	اكتب بالصورة الأسية.
$x \approx 403.43$	استخدم حاسبة.

تحقق $\ln 403.43 \approx 6$ ✔

b. $6 + 2 \log 5x = 18$

$6 + 2 \log 5x = 18$	المعادلة الأصلية
$2 \log 5x = 12$	اطرح 6 من كل طرف.
$\log 5x = 6$	اقسم كل طرف على 2.
$5x = 10^6$	اكتب بالصورة الأسية.
$x = \frac{10^6}{5}$	اقسم كل طرف على 5.
$x = 200000$	بسّط. تحقق من هذا الحل في المعادلة الأصلية.

c. $\log_8 x^3 = 12$

$\log_8 x^3 = 12$	المعادلة الأصلية
$3 \log_8 x = 12$	خاصية الأس الثابت
$\log_8 x = 4$	اقسم كل طرف على 3.
$x = 8^4,\ 4096$	اكتب بالصورة الأسيّة وبسّط. تحقق من هذا الحل.

تمرين موجّه

2A. $-3 \ln x = -24$ **2B.** $4 - 3 \log (5x) = 16$ **2C.** $\log_3 (x^2 - 1) = 4$

نصيحة دراسية

حلول المعادلات اللوغاريتمية بينما يُفضّل دائمًا التحقق من حلول المعادلات، يصدق هذا بشكل خاص على المعادلات اللوغاريتمية لأن الدوال اللوغاريتمية يتم تعريفها فقط بمجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

2 خاصية "واحد لواحد" للدوال اللوغاريتمية

تتمتع الدوال اللوغاريتمية كذلك بخاصية "واحد لواحد". وعليه، يمكننا إثبات خاصية "واحد لواحد" للدوال اللوغاريتمية.

المفهوم الأساسي خاصية "واحد لواحد" للدوال اللوغاريتمية

الشرح تكون $b > 0$ و $\log_b x = \log_b y$ و $b \neq 1$ إذا وفقط إذا كانت $x = y$

الأمثلة بما أن $\log_2 x = \log_2 6$، فإن $x = 6$ وبما أن $e^y = 2$، فإن $\ln e^y = \ln 2$

نصيحة دراسية

خاصية المساواة خاصية "واحد لواحد" للدوال اللوغاريتمية يُطلق عليها أيضًا خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية.

تتضمن هذه الخاصية عبارة $\log_b x = \log_b y$ إذا كانت $x = y$ ويمكنك استخدام هذه العبارة لحل بعض المعادلات اللوغاريتمية البسيطة من خلال تبسيط كل طرف من المعادلة أولاً في صورة لوغاريتمات بالأساس ذاته.

مثال 3 حل المعادلات اللوغاريتمية باستخدام خاصية واحد لواحد

حُل كل من المعادلات التالية.

a. $\log_4 x = \log_4 3 + \log_4 (x - 2)$

$\log_4 x = \log_4 3 + \log_4 (x - 2)$ المعادلة الأصلية

$\log_4 x = \log_4 3(x - 2)$ خاصية ناتج الضرب

$\log_4 x = \log_4 (3x - 6)$ خاصية التوزيع

$x = 3x - 6$ خاصية واحد لواحد

$-2x = -6$ اطرح 3x من كل طرف.

$x = 3$ اقسم كل طرف على 2−. تحقق من هذا الحل.

b. $\log_3 (x^2 + 3) = \log_3 52$

$\log_3 (x^2 + 3) = \log_3 52$ المعادلة الأصلية

$x^2 + 3 = 52$ خاصية واحد لواحد

$x^2 = 49$ اطرح 3 من كل طرف.

$x = \pm 7$ خذ الجذر التربيعي لكل طرف. تحقق من هذا الحل.

تمرين موجّه

3A. $\log_6 2x = \log_6 (x^2 - x + 2)$

3B. $\log_{12} (x + 3) = \log_{12} x + \log_{12} 4$

تترتب عبارة أخرى على خاصية "واحد لواحد" للدوال اللوغاريتمية وهي، بما أن $x = y$، إذًا $\log_b x = \log_b y$، ويمكن استخدامها لحل المعادلات الأسيّة مثل $e^x = 3$

$e^x = 3$ المعادلة الأصلية

$\ln e^x = \ln 3$ خاصية واحد لواحد

$x = \ln 3$ خاصية المعكوس

يُطلق على تطبيق خاصية "واحد لواحد" أخذ لوغاريتم طرفي المعادلة. بينما اللوغاريتمات الطبيعية أسهل في الاستخدام عندما يكون أساس التعبير الأسي هو e، يمكنك استخدام اللوغاريتمات على أي أساس للمساعدة في حل المعادلات الأسيّة.

مثال 4 حل المعادلات الأسيّة

حُل كل من المعادلات التالية. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

a. $4^x = 13$

$4^x = 13$ المعادلة الأصلية

$\log 4^x = \log 13$ خذ اللوغاريتم العادي لكل طرف.

$x \log 4 = \log 13$ خاصية الأس الثابت

$x = \dfrac{\log 13}{\log 4}$ تقريبًا $= 1.85$ اقسم كل طرف على log 4 واستخدم حاسبة.

b. $e^{4-3x} = 6$

$e^{4-3x} = 6$ المعادلة الأصلية

$\ln e^{4-3x} = \ln 6$ خذ اللوغاريتم الطبيعي لكل طرف.

$4 - 3x = \ln 6$ خاصية المعكوس

$x = \dfrac{\ln 6 - 4}{-3}$ تقريبًا $= 0.74$ حل x واستخدم حاسبة.

تمرين موجّه

4A. $8^y = 0.165$

4B. $1.43^a + 3.1 = 8.48$

4C. $e^{2+5w} = 12$

نصيحة دراسية

حل بديل يمكن أيضًا حل مسألة المثال 4a من خلال أخذ $\log_4$ لكل طرف. ستكون النتيجة $x = \log_4 13$. لاحظ أنه عند تطبيق تغيير قاعدة الأساس، يكون هذا مكافئًا للحل $x = \dfrac{\log 13}{\log 4}$.

مثال 5 حل بصورة لوغاريتمية

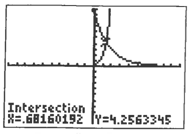
حُـلّ المعادلة: $4^{3x-1} = 3^{2-x}$ وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة.

جد الحل جبريًا

$4^{3x-1} = 3^{2-x}$	المعادلة الأصلية
$\ln 4^{3x-1} = \ln 3^{2-x}$	احسب اللوغاريتم الطبيعي لكل طرف
$(3x - 1)\ln 4 = (2 - x)\ln 3$	خاصية الأس الثابت
$3x\ln 4 - \ln 4 = 2\ln 3 - x\ln 3$	خاصية التوزيع
$3x\ln 4 + x\ln 3 = 2\ln 3 + \ln 4$	افصل المتغيرات بالطرف الأيسر من المعادلة.
$x(3\ln 4 + \ln 3) = 2\ln 3 + \ln 4$	خاصية التوزيع
$x(\ln 4^3 + \ln 3) = \ln 3^2 + \ln 4$	خاصية الأس الثابت
$x\ln[3(4^3)] = \ln 36$	خاصية ناتج الضرب
$x\ln 192 = \ln 36$	$3(4^3) = 192$
$x = \dfrac{\ln 36}{\ln 192}$ أو تقريبًا 0.68	اقسم كل طرف على $\ln 192$

أثبت بيانيًا

ارسم $y = 4^{3x-1}$ و $y = 3^{2-x}$. نقطة تقاطع هذين التمثيلين الناتجين عن الحاسبة هي 0.68 تقريبًا، وتتوافق مع الحل الجبري.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

انتبه!

التحويل لأبسط صورة لاحظ أنه لا يمكن استخدام خاصية ناتج القسمة لتبسيط $\dfrac{\ln 36}{\ln 192}$

تمرين موجّه

حُـلّ كل من المعادلات التالية. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

5A. $6^{2x+4} = 5^{-x+1}$

5B. $4^{3x+2} = 6^{2x-1}$

يمكن حل المعادلات التي تتضمن تعابير أسيّة متعددة من خلال تطبيق الأساليب التربيعية مثل تحليل العوامل أو الصيغة التربيعية. تحقق أن الحلول ليست دخيلة.

مثال 6 حل المعادلات الأسيّة بالشكل التربيعي

حُـلّ المعادلة: $e^{2x} + 6e^x - 16 = 0$

$e^{2x} + 6e^x - 16 = 0$		المعادلة الأصلية
$u^2 + 6u - 16 = 0$		اكتب بالصورة التربيعية بفرض أن $u = e^x$
$(u + 8)(u - 2) = 0$		عامل.
$u = -8$ أو	$u = 2$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$e^x = -8$	$e^x = 2$	استبدل u بـ e^x.
$\ln e^x = \ln(-8)$	$\ln e^x = \ln 2$	احسب اللوغاريتم الطبيعي لكل طرف.
$x = \ln(-8)$	$x = \ln 2$ تقريبًا $= 0.69$	خاصية المعكوس

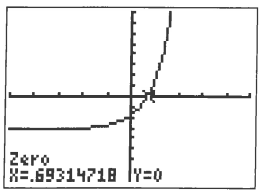
الحل الوحيد هو $x = \ln 2$ لأن $\ln(-8)$ حل دخيل. تحقق من هذا الحل.

تحقق

$e^{2x} + 6e^x - 16 = 0$	المعادلة الأصلية
$e^{2(\ln 2)} + 6e^{\ln 2} - 16 \stackrel{?}{=} 0$	استبدل x بـ $\ln 2$.
$e^{\ln 2^2} + 6e^{\ln 2} - 16 \stackrel{?}{=} 0$	خاصية الأس الثابت
$2^2 + 6(2) - 16 = 0$ ✔	خاصية المعكوس

نصيحة تقنية

إيجاد الأصفار يمكنك إثبات حل $e^{2x} + 6e^x - 16 = 0$ بيانيًا باستخدام حاسبة التمثيلات البيانية لإيجاد صفر $y = e^{2x} + 6e^x - 16$ الحل البياني 0.69 تقريبًا متوافق مع الحل الجبري $\ln 2 \approx 0.69$.



[−5, 5] scl: 1 by [−40, 40] scl: 5

تمرين موجّه

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

6A. $e^{2x} + 2e^x = 8$

6B. $4e^{4x} + 8e^{2x} = 5$

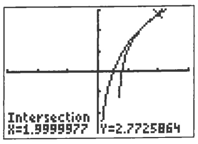
يمكن حل المعادلات التي تحتوي على تعابير لوغاريتمية متعددة من خلال تبسيط التعابير أولاً باستخدام خصائص الأس الثابت (القوة) وناتج الضرب وخارج القسمة ثم تطبيق خاصية واحد لواحد.

مثال 7 حل المعادلات اللوغاريتمية

حُـلّ المعادلة: $\ln(x+2) + \ln(3x-2) = 2\ln 2x$

$\ln(x+2) + \ln(3x-2) = 2\ln 2x$	المعادلة الأصلية
$\ln(x+2)(3x-2) = \ln(2x)^2$	خاصية الأس الثابت وناتج الضرب
$\ln(3x^2+4x-4) = \ln 4x^2$	بسّط.
$3x^2+4x-4 = 4x^2$	خاصية واحد لواحد
$0 = x^2-4x+4$	بسّط.
$0 = (x-2)(x-2)$	حلل العوامل.
$x = 2$	خاصية ناتج الضرب الصفري

تحقق يمكنك التحقق من هذا الحل في المعادلة الأصلية، أو إثباته بيانيًا من خلال إيجاد نقطة تقاطع التمثيل البياني لكل من $y = \ln(x+2) + \ln(3x-2)$ و $y = 2\ln 2x$



[−3, 3] scl: 1 by [−3, 3] scl: 1

تحقق من تقدمك

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

7A. $\ln(7x+3) - \ln(x+1) = \ln(2x)$

7B. $\ln(2x+1) + \ln(2x-3) = 2\ln(2x-2)$

قد لا يكون من الواضح أن حل معادلة لوغاريتمية ما دخيل حتى يتم التحقق منه في المعادلة الأصلية.

مثال 8 التحقق من أن الحلول ليست دخيلة

حُـلّ المعادلة: $\log_{12} 12x + \log_{12}(x-1) = 2$

$\log_{12} 12x + \log_{12}(x-1) = 2$	المعادلة الأصلية
$\log_{12} 12x(x-1) = 2$	خاصية ناتج الضرب
$\log_{12}(12x^2-12x) = 2$	خاصية التوزيع
$\log_{12}(12x^2-12x) = \log_{12} 12^2$	خاصية المعكوس
$\log_{12}(12x^2-12x) = \log_{12} 144$	$12^2 = 144$
$12x^2-12x = 144$	خاصية واحد لواحد
$12x^2-12x-144 = 0$	اطرح 144 من كل طرف
$12(x-4)(x+3) = 0$	حلل العوامل.
$x = 4 = x = -3$	خاصية ناتج الضرب الصفري

تحقق

$$\log_{12} 12x + \log_{12}(x-1) = 2$$
$$\log_{12} 12(-3) + \log_{12}(-3-1) \stackrel{?}{=} 2$$
$$\log_{12}(-36) + \log_{12}(-4) \stackrel{?}{=} 2$$

حيث لم يتم تعريف $\log_{12}(-36)$ ولا $\log_{12}(-4)$. إذًا $x = -3$ حل دخيل.

$$\log_{12} 12x + \log_{12}(x-1) = 2$$
$$\log_{12} 12(4) + \log_{12}(4-1) \stackrel{?}{=} 2$$
$$\log_{12} 48 + \log_{12} 3 \stackrel{?}{=} 2$$
$$\log_{12} 48 \cdot 3 \stackrel{?}{=} 2$$
$$\log_{12} 144 = 2 \checkmark$$

نصيحة دراسية

تحديد مجال معادلة يعد تحديد مجال المعادلة طريقة أخرى للتحقق من أن الحلول ليست دخيلة. في المثال 8، يكون مجال $\log_{12} 12x$ هو $x > 0$ بينما مجال $\log_{12}(x-1)$ هو $x > 1$. وبالتالي، مجال المعادلة هو $x > 1$. بما أن $-3 \not> 1$. إذن -3 لا يمكن أن يكون حلاً للمعادلة.

تمرين موجّه

حُل كل من المعادلات التالية.

8A. $\ln(6y+2) - \ln(y+1) = \ln(2y-1)$

8B. $\log(x-12) = 2 + \log(x-2)$

يمكنك استخدام معلومات بشكل النمو أو التضاؤل لكتابة معادلة أساسية.

مثال 9 من الحياة اليومية نموذج النمو الأسي

الإنترنت يوضح الجدول عدد الزيارات لموقع إنترنت جديد بنهاية يناير ونهاية أبريل من العام ذاته.

الإقبال على موقع الانترنت	
الشهر	**عدد الزيارات**
يناير	125
أبريل	2000

a. إذا علمت أن عدد الزيارات يتزايد بمعدل أسي، فحدد معدل النمو المستمر. ثم اكتب معادلة أسيّة لتمثيل هذه الحالة.

افترض أن $N(t)$ تمثل عدد الزيارات بنهاية t أشهر وافترض حدوث نمو أسي مستمر. بذلك يكون العدد الأولي N_0 هو 125 زيارة وعدد الزيارات N بعد مدة 3 أشهر، من يناير إلى أبريل، هو 2000. استخدم هذه المعلومات لإيجاد معدل النمو المستمر k.

$N(t) = N_0 e^{kt}$ صيغة النمو الأسي

$2000 = 125 e^{k(3)}$ $N(3) = 2000, N_0 = 125$ و $t = 3$

$16 = e^{3k}$ اقسم كل طرف على 125

$\ln 16 = \ln e^{3k}$ احسب اللوغاريتم الطبيعي لكل طرف

$\ln 16 = 3k$ خاصية المعكوس

$\frac{\ln 16}{3} = k$ اقسم كل طرف على 3

$0.924 \approx k$ استخدم حاسبة

يتزايد عدد الزيارات بمعدل مستمر يبلغ 92.4% تقريبًا كل شهر. ولذلك، فالمعادلة التي تمثل هذه الحالة هي $N(t) = 125e^{0.924t}$.

b. استخدم نموذجك لتوقع عدد الأشهر التي يستغرقها موقع الانترنت للوصول إلى 2 مليون زيارة.

$N(t) = 125e^{0.924t}$ نموذج النمو الأسي

$2{,}000{,}000 = 125e^{0.924t}$ $N(t) = 2{,}000{,}000$

$16{,}000 = e^{0.924t}$ اقسم كل طرف على 125

$\ln 16{,}000 = \ln e^{0.924t}$ احسب اللوغاريتم الطبيعي لكل طرف

$\ln 16{,}000 = 0.924t$ خاصية المعكوس

$\frac{\ln 16{,}000}{0.924} = t$ اقسم كل طرف على 0.924

$10.48 \approx t$ استخدم حاسبة

وفقًا لهذا النموذج، سوف يصل موقع الانترنت إلى 2 مليون زيارة في غضون 10.48 أشهر تقريبًا.

تمرين موجّه

9. **التذكارات** يوضح الجدول إيرادات بيع قمصان وغيرها من التذكارات التي باعها اثنان من الموردين أثناء كأس العالم وبعده بأسبوع.

مبيعات تذكارات كأس العالم		
الأيام بعد الكأس	**المورّد A المبيعات (AED)**	**المورّد B المبيعات (AED)**
0	300,000	200,000
7	37,000	49,000

A. إذا علمت أن المبيعات تنخفض بمعدل أسي، فحدد معدل الانخفاض المستمر لمبيعات كل مورّد. ثم اكتب معادلة أسيّة لتمثيل كل حالة.

B. استخدم نماذجك لتوقع مبيعات كل مورّد من تذكارات كأس العالم بعد 4 أسابيع من انتهاء الفعاليات.

C. هل ستتماثل مبيعات الموردين يومًا؟ وإن حدث ذلك، فمتى؟

الربط بالحياة اليومية

تتم طباعة قبعات وقمصان البطولة للفريقين قبل المنافسات الرياضية الرئيسة مثل بطولة كرة القدم الأمريكية. وكثيرًا ما يتم التبرع بتذكارات الفريق الخاسر للمنظمات غير الربحية لتوزيعها على العائلات المحتاجة في دول أخرى. في 2007، تم التبرع بملابس رياضية تبلغ قيمتها التقديرية 2.5 مليون دولار أمريكي.

المصدر: مجلة وورلد فيجن

حُــل كل من المعادلات التالية. (مثال 1)

1. $4^{x+7} = 8^{x+3}$
2. $8^{x+4} = 32^{3x}$
3. $49^{x+4} = 7^{18-x}$
4. $32^{x-1} = 4^{x+5}$
5. $\left(\frac{9}{16}\right)^{3x-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{5x+4}$
6. $12^{3x+11} = 144^{2x+7}$
7. $25^{\frac{x}{3}} = 5^{x-4}$
8. $\left(\frac{5}{6}\right)^{4x} = \left(\frac{36}{25}\right)^{9-x}$

.9 **الإنترنت** يمكن تمثيل عدد الأشخاص P بالمليون والذين يستخدمون محركين للبحث في الإنترنت بعد t من الأسابيع على إنشاء محرك البحث بواسطة المعادلتين $P_1(t) = 1.5^{t+4}$ و $P_2(t) = 2.25^{t-3.5}$ على التوالي. خلال أي أسبوع تم استخدام كل محرك بواسطة نفس العدد من الأشخاص؟ (مثال 1)

.10 **المعرفة المالية** يخطط خلف لاستثمار AED 5000 ويدرس فتح حسابين للاستثمار. الحساب الأول مركب بشكل مستمر ويقدم معدل مرابحة 3%. والحساب الثاني مركب سنويًا ويقدم كذلك معدل مرابحة 3%. لكن المصرف سوف يكافئ 4% من الاستثمار الأولي. (مثال 1)

a. اكتب معادلة لرصيد كل حساب مدخرات بعد t من الأعوام.

b. كم عدد الأعوام التي يستغرقها الحساب المركب بشكل مستمر للحاق بحساب الاستثمار المركب سنويًا؟

c. إذا خطط خلف لإيداع المال في الحساب لمدة 30 عامًا، فما الحساب الذي ينبغي عليه اختياره؟

حُــل كل من المعادلات اللوغاريتمية التالية. (مثال 2)

11. $\ln a = 4$
12. $-8 \log b = -64$
13. $\ln(-2) = c$
14. $2 + 3 \log 3d = 5$
15. $14 + 20 \ln 7x = 54$
16. $100 + 500 \log_4 g = 1100$
17. $7000 \ln h = -21{,}000$
18. $-18 \log_0 j = -126$
19. $12{,}000 \log_2 k = 192{,}000$
20. $\log_2 m^4 = 32$

.21 **السيارات** إذا كانت جميع العوامل الأخرى متساوية، فكلما زادت الإزاحة D باللتر لمزيج الهواء والوقود في محرك ما، زادت القدرة الحصانية H التي ينتجها. يمكن تمثيل القدرة الحصانية لمحرك طبيعي التهوية بالمعادلة $H = \log_{1.003} \frac{D}{1.394}$. جد الإزاحة إذا علمت أن القدرة الحصانية 200. (مثال 2)

حُــل كل من المعادلات التالية. (مثال 3)

22. $\log_6 (x^2 + 5) = \log_6 41$
23. $\log_8 (x^2 + 11) = \log_8 92$
24. $\log_9 (x^4 - 3) = \log_9 13$
25. $\log_7 6x = \log_7 9 + \log_7 (x - 4)$
26. $\log_5 x = \log_5 (x + 6) - \log_5 4$
27. $\log_{11} 3x = \log_{11} (x + 5) - \log_{11} 2$

حُــل كل من المعادلات التالية. قرّب إلى أقرب جزء من مئة. (مثال 4)

28. $6^x = 28$
29. $1.8^x = 9.6$
30. $3e^{4x} = 45$
31. $e^{3x+1} = 51$
32. $8^x - 1 = 3.4$
33. $2e^{7x} = 84$
34. $8.3e^{9x} = 24.9$
35. $e^{2x} + 5 = 16$
36. $2.5e^{x+4} = 14$
37. $0.75e^{3.4x} - 0.3 = 80.1$

.38 **علم الوراثة** تفاعل البلمرة التسلسلي هو تقنية شائعة الاستخدام في مختبرات الطب الشرعي لتضخيم الحمض النووي. في تفاعل البلمرة التسلسلي، يتم استخدام إنزيم لاقتصاص متتالية نيوكليوتيدات محددة من الحمض النووي ثم إجراء تناسخ للمتتالية. يمكن تمثيل عدد متتاليات النيوكليوتيدات المتماثلة N بعد t من الدقائق بالمعادلة $N(t) = 100 \times 1.17^t$. (مثال 4)

a. ما الوقت اللازم لوجود 1×10^4 من المتتاليات؟

b. ما الوقت اللازم لتضخيم الحمض النووي إلى مليون متتالية؟

حُــل كل من المعادلات التالية. قرّب إلى أقرب جزء من مئة. (مثال 5)

39. $7^{2x+1} = 3^{x+3}$
40. $11^{x+1} = 7^{x-1}$
41. $9^{x+2} = 2^{5x-4}$
42. $4^{x-3} = 6^{2x-1}$
43. $3^{4x+3} = 8^{-x+2}$
44. $5^{3x-1} = 4^{x+1}$
45. $6^{x-2} = 5^{2x+3}$
46. $8^{-2x-1} = 5^{-x+2}$
47. $2^{5x+6} = 4^{2x+1}$
48. $6^{-x-2} = 9^{-x-1}$

.49 **علم الفلك** يمكن مقارنة سطوع جسمين فضائيين كما نراه من الأرض من خلال تحديد التباين في السطوع بين الجسمين. ويمكن حساب التباين في السطوع V بواسطة المعادلة $V = 2.512^{m_f - m_b}$، حيث تمثل m_f مقدار سطوع الجسم الأكثر خفوتًا و m_b مقدار سطوع الجسم الأكثر سطوعًا. (مثال 5)

a. بالنسبة إلى الشمس، $m = -26.73$، وأما القمر المكتمل، $m = -12.6$. حدد التباين في السطوع بين الشمس والقمر المكتمل.

b. التباين في السطوع بين عطارد والزهرة مقداره 5.25 ومقدار سطوع الزهرة -3.7. حدد مقدار سطوع عطارد.

c. مقدار سطوع نبتون 7.7، والتباين في السطوع بين نبتون والمشترى 15856. ما مقدار سطوع نبتون؟

حُـلّ كل من المعادلات التالية. (مثال 5)

50. $e^{2x} + 3e^{x} - 130 = 0$

51. $e^{2x} - 15e^{x} + 56 = 0$

52. $e^{2x} + 3e^{x} = -2$

53. $6e^{2x} - 5e^{x} = 6$

54. $9e^{2x} - 3e^{x} = 6$

55. $8e^{4x} - 15e^{2x} + 7 = 0$

56. $2e^{8x} + e^{4x} - 1 = 0$

57. $2e^{5x} - 7e^{2x} - 15e^{-x} = 0$

58. $10e^{x} - 15 - 45e^{-x} = 0$

59. $11e^{x} - 51 - 20e^{-x} = 0$

حُـلّ كل من المعادلات اللوغاريتمية التالية. (مثال 7)

60. $\ln x + \ln (x + 2) = \ln 63$

61. $\ln x + \ln (x + 7) = \ln 18$

62. $\ln (3x + 1) + \ln (2x - 3) = \ln 10$

63. $\ln (x - 3) + \ln (2x + 3) = \ln (-4x^2)$

64. $\log (5x^2 + 4) = 2 \log 3x^2 - \log (2x^2 - 1)$

65. $\log (x + 6) = \log (8x) - \log (3x + 2)$

66. $\ln (4x^2 - 3x) = \ln (16x - 12) - \ln x$

67. $\ln (3x^2 - 4) + \ln (x^2 + 1) = \ln (2 - x^2)$

.68 **الصوت** إن فقد السمع بفعل الضوضاء (NIHL) مسؤول عن 25% من حالات فقد السمع في الولايات المتحدة. ويمكن أن يحدث فقد السمع بفعل الضوضاء نتيجة التعرض لأصوات تبلغ شدتها 85 ديسيبلاً أو أكثر لفترة طويلة. تذكر أنه يمكن حساب الديسيبلات (dB) الناتجة عن صوت شدته I بواسطة المعادلة $dB = 10 \log \left(\frac{I}{1 \times 10^{-12}}\right)$. (مثال 7)

الصوت	الشدة (W/m^3)
الألعاب النارية	316.227
الطائرة النفاثة	31.623
سيارة الإسعاف	3.162
حفل موسيقى الروك	0.316
سماعات الرأس	0.032
مجفف الشعر	0.003

المصدر: موقع Dangerous Decibels

a. أي الأصوات الواردة بالجدول تُنتج وحدات ديسيبلاً كافية للتسبب في فقد السمع بفعل الضوضاء؟

b. حدد عدد مجففات الشعر التي يمكنها إنتاج نفس عدد وحدات ديسيبلاً الناتجة عن حفل لموسيقى الروك. قرّب إلى أقرب عدد كلي.

c. كم عدد الطائرات النفاثة اللازمة لإنتاج نفس عدد وحدات ديسيبلاً الناتجة عن عرض للألعاب النارية؟ قرّب إلى أقرب عدد كلي.

حُـلّ كل من المعادلات اللوغاريتمية التالية. (مثال 8)

69. $\log_2 (2x - 6) = 3 + \log_2 x$

70. $\log (3x + 2) = 1 + \log 2x$

71. $\log x = 1 - \log (x - 3)$

72. $\log 50x = 2 + \log (2x - 3)$

73. $\log_9 9x - 2 = -\log_9 x$

74. $\log (x - 10) = 3 + \log (x - 3)$

حُـلّ كل من المعادلات اللوغاريتمية التالية. (مثال 8)

75. $\log (29{,}995x + 40{,}225) = 4 + \log (3x + 4)$

76. $\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}x\right) = -\log_{\frac{1}{4}} (x + 8) - \frac{5}{2}$

77. $\log x = 3 - \log (100x + 900)$

78. $\log_5 \frac{x^2}{8} - 3 = \log_5 \frac{x}{40}$

79. $\log 2x + \log \left(4 - \frac{16}{x}\right) = 2 \log (x - 2)$

.80 **الأعمال** قامت سلسلة متاجر تجزئة لأجهزة الحاسب الآلي بافتتاح متجرين في العام الأول من تشغيلها. بعد 8 أعوام من التشغيل، أصبحت السلسلة تتكون من 206 متاجر. (مثال 9)

a. اكتب معادلة أسيّة لتمثيل عدد المتاجر N كدالة لعام التشغيل t. قرّب k إلى أقرب جزء من مئة.

b. استخدم النموذج الذي وضعته في الجزء a لتوقع عدد المتاجر في العام 12 من التشغيل.

.81 **الأوراق المالية** كان سعر السهم في الأوراق المالية لسلسلة مقاهٍ AED 0.93 في شهر ما خلال عامها الأول. وأصبح سعر السهم في الأوراق المالية AED 3.52 خلال الشهر ذاته من عامها الخامس. (مثال 9)

a. اكتب معادلة أسيّة لتمثيل سعر الأوراق المالية P كدالة لعام التداول t. قرّب k إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

b. استخدم النموذج الذي وضعته في الجزء a لتوقع سعر الأوراق المالية في العام التاسع من التداول.

حُـلّ كل من المعادلات اللوغاريتمية التالية.

82. $5 + 5 \log_{100} x = 20$

83. $6 + 2 \log_{e^2} x = 30$

84. $5 - 4 \log_{\frac{1}{2}} x = -19$

85. $36 + 3 \log_3 x = 60$

.86 **الحموضة** يتم تحديد حموضة مادة بواسطة تركيز أيونات $H+$ بها. ونظرًا لأن تركيز $H+$ يمكن أن يختلف بعدة قيم أسيّة، يتم استخدام مقياس الحموضة اللوغاريتمي للإشارة إلى الحموضة والتي يمكن حسابها بالمعادلة $pH = -\log [H+]$، حيث تمثل $[H+]$ تركيز أيونات $H+$ بالمول لكل لتر.

العنصر	درجة الحموضة
غاز النشادر	11.0
صودا الخبز	8.3
دم الإنسان	7.4
الماء	7.0
اللبن	6.6
التفاح	3.0
عصير الليمون	2.0

a. حدد تركيز $H+$ في صودا الخبز.

b. ما نسبة حموضة اللبن إلى دم الإنسان؟

c. بكم قيمة أسيّة يزيد تركيز $[H+]$ في عصير الليمون عن تركيز $[H+]$ في غاز النشادر؟

d. كم عدد مولات أيونات H + في 1500 لتر من دم الإنسان؟

حاسبة التمثيلات البيانية جِد حل كل من المعادلات التالية جبريًا، إن أمكن. وإن تعذر ذلك، فقرّب الحل إلى أقرب جزء من مئة باستخدام حاسبة التمثيلات البيانية.

87. $x^3 = 2^x$

88. $\log_2 x = \log_8 x$

89. $3^x = x(5^x)$

90. $\log_x 5 = \log_5 x$

91. **النشاط الإشعاعي** يُظهر النظيران المشعان الفسفور 32 والكبريت 35 خاصية التحلل الإشعاعي. وعمر النصف للفسفور 32 هو 14.282 يومًا. أما عمر النصف للكبريت 35 فهو 87.51 يومًا.

a. اكتب معادلات للتعبير عن التحلل الإشعاعي للفسفور 32 والكبريت 35 في ضوء الوقت t باليوم ونسبة R للكمية المتبقية من النظير المشع باستخدام المعادلة العامة للتحلل الإشعاعي، $A = t \times \frac{\ln R}{-0.693}$؛ حيث يمثل A عدد أيام تحلل النظير المشع و t عمر النصف بالأيام.

b. عند أي من قيم R يكون الكبريت 35 قد تحلل لمدة 5 أيام أكثر من الفسفور 32؟

حُل كل من المتباينات الأسيّة التالية.

92. $2 \le 2^x \le 32$

93. $9 < 3^y < 27$

94. $\frac{1}{4096} \le 8^p \le \frac{1}{64}$

95. $\frac{1}{2197} < 13^f \le \frac{1}{13}$

96. $10 < 10^d < 100{,}000$

97. $4000 > 5^q > 125$

98. $49 < 7^z < 1000$

99. $10{,}000 < 10^a < 275{,}000$

100. $\frac{1}{15} \ge 4^b \ge \frac{1}{64}$

101. $\frac{1}{2} \ge e^c \ge \frac{1}{100}$

102. **الطب الشرعي** يقوم خبراء الطب الشرعي بعمليات التشريح لتحديد وقت وسبب الوفاة. يمكن حساب الوقت t بالساعات منذ الوفاة بواسطة المعادلة $t = -10 \ln\left(\frac{T - R_t}{98.6 - R_t}\right)$، حيث يمثل T درجة حرارة الجسم و R_t درجة حرارة الغرفة.

a. إذا قام خبير الطب الشرعي بقياس درجة حرارة الجسم ووجد أنها 93°F في غرفة درجة حرارتها 72°F. فما وقت الوفاة؟

b. توفي مريض في مستشفى منذ 4 ساعات. فإذا علمت أن متوسط درجة حرارة الغرفة في المستشفى 75°F. فما درجة حرارة الجسم؟

c. كانت درجة حرارة مريض 89°F بعد 3.5 ساعات من وفاته. حدد درجة حرارة الغرفة.

103. **الطب** تم إخضاع 50 شخصًا للعلاج من فيروس في اليوم ذاته. ويتسم الفيروس بأنه شديد العدوى، ويجب على هؤلاء الأشخاص المكوث في المستشفى حتى زوال الأعراض. يمكن تمثيل عدد الأشخاص p الذين تظهر عليهم الأعراض بعد t من الأيام بواسطة المعادلة $p = \frac{52.76}{1 + 0.03e^{0.75t}}$

a. كم عدد من تظهر عليهم الأعراض بعد 5 أيام؟

b. حل المعادلة بالنسبة إلى t.

c. بعد كم يوم تظهر الأعراض على شخص واحد فقط؟

حُل كل من المعادلات التالية.

104. $27 = \frac{12}{1 - \frac{1}{2}e^{-x}}$

105. $22 = \frac{L}{1 + \frac{L-3}{3}e^{-15}}$

106. $1000 = \frac{10{,}000}{1 + 19e^{-t}}$

107. $300 = \frac{400}{1 + 3e^{-2k}}$

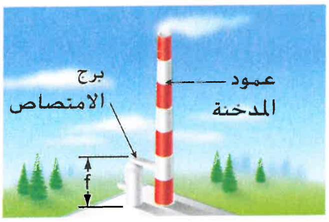
108. $16^x + 4^x - 6 = 0$

109. $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 6$

110. $\frac{\ln(4x+2)}{\ln(4x-2)} = 3$

111. $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2}$

112. **التلوث** أضافت بعض المصانع أنظمة ترشيح يُطلق عليها أبراج الامتصاص إلى المداخن لتقليل الانبعاثات الملوثة للبيئة. يمكن تمثيل النسبة المئوية للتلوث P الذي يتم التخلص منه بعد f من الأقدام من طول برج امتصاص بواسطة المعادلة $P = \frac{0.9}{1 + 70e^{-0.28f}}$



a. مثّل بيانيًا النسبة المئوية للتلوث الذي يتم التخلص منه كدالة لطول برج الامتصاص.

b. حدد أقصى نسبة مئوية للتلوث الذي يمكن التخلص منه بواسطة برج الامتصاص. اشرح استدلالك.

c. اذكر بالتقريب أقصى طول لبرج الامتصاص الذي ينبغي على المصنع استخدامه. اشرح.

مسائل مهارات التفكير العُليا استخدام مهارات التفكير العُليا

113. **التبرير** ما أقصى عدد الحلول الدخيلة التي يمكن أن تتوفر لمعادلة لوغاريتمية؟ اشرح استنتاجك.

114. **مسألة غير محددة الإجابة** اذكر مثالًا لمعادلة لوغاريتمية لها عدد لا نهائي من الحلول.

115. **تحدٍّ** إذا تم استثمار مبلغ بمعدل مرابحة r مركبة شهريًا، فما الوقت اللازم لمضاعفة المبلغ ثلاثة أضعاف؟

116. **الاستنتاج** كيف يمكن حل معادلة تتضمن تعابير لوغاريتمية بثلاثة أساسات مختلفة؟

117. **تحدٍّ** لأي من قيم x تختلف مجالات $f(x) = \log(x^4 - x^2)$ و $g(x) = \log x + \log x + \log(x-1) + \log(x+1)$؟

118. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف يمكن حل ما يلي جبريًا t in $P = \frac{L}{1 + \left(\frac{L-I}{I}\right)e^{-kt}}$

مراجعة شاملة

جد قيمة كل لوغاريتم مما يلي. (الدرس 3-2)

121. $\log_5 625$ 120. $\log_2 8$ 119. $\log_8 15$

122. **الصوت** تتمثل إحدى معادلات شدة الصوت L، بوحدة الديسيبل، في $L = 10 \log_{10} R$، حيث يمثل R الشدة النسبية للصوت. (الدرس 2-2)

a. حل $130 = 10 \log_{10} R$ لإيجاد الشدة النسبية لعرض ألعاب نارية تبلغ شدة صوته 130 ديسيبلًا.

b. حل $75 = 10 \log_{10} R$ لإيجاد الشدة النسبية لحفل تبلغ شدة صوته 75 ديسيبلًا.

c. بكم ضعف تفوق شدة صوت عرض الألعاب النارية شدة صوت الحفل الموسيقي؟ بعبارة أخرى، جد النسبة بين شدة صوت كل منهما.

الصوت	وحدات الديسيبل
الألعاب النارية	130-190
سباق السيارات	100-130
المسيرات	80-120
أعمال الفناء	95-115
السينما	90-110
الحفلات	75-110

لكل دالة، (a) طبّق اختبار الحد الرئيس، (b) حدد الأصفار واذكر تكرار أي أصفار مكررة، (c) جد بعض النقاط الإضافية، (d) مثّل الدالة بيانيًا. (الدرس 2-1)

125. $f(x) = -x^4 + 6x^3 - 32x$ 124. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 8x$ 123. $f(x) = x^3 - 8x^2 + 7x$

حُلّ كل من المعادلات التالية. (الدرس 1-1)

128. $(3y)^{\frac{1}{3}} + 2 = 5$ 127. $\sqrt[3]{x-4} = 3$ 126. $\frac{1}{6}(12a)^{\frac{1}{3}} = 1$

استخدم الاستدلال المنطقي لتحديد السلوك الطرفي أو نهاية الدالة عندما تقترب x من اللانهاية. اشرح استدلالك. (الدرس 3-1)

131. $h(x) = |(x-3)^2 - 1|$ 130. $g(x) = \frac{x^2+5}{7-2x^2}$ 129. $f(x) = x^{10} - x^9 + 5x^8$

جد التباين والانحراف المعياري لكل مجتمع إحصائي إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 0-8)

132. {48, 36, 40, 29, 45, 51, 38, 47, 39, 37}

133. {321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330}

134. {43, 56, 78, 81, 47, 42, 34, 22, 78, 98, 38, 46, 54, 67, 58, 92, 55}

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

135. **SAT/ACT** في إحدى دور السينما، جلس أخوان و 3 أخوات في صف واحد عشوائيًا. ما احتمالية جلوس الأخوان بجوار بعضهما؟

A $\frac{1}{5}$ C $\frac{1}{2}$ E $\frac{2}{5}$

B $\frac{3}{5}$ D $\frac{2}{3}$

136. **مراجعة** ما المعادلة التي تكافئ $\log_4 \frac{1}{16} = x$؟

F $\frac{1^4}{16} = x^4$

G $\left(\frac{1}{16}\right)^4 = x$

H $4^x = \frac{1}{16}$

J $4^{\frac{1}{16}} = x$

137. إذا كان $2^4 = 3^x$، فما القيمة التقريبية لـ x؟

A 0.63 C 2.52

B 2.34 D 2.84

138. **مراجعة** تتحدد درجة حموضة دم أحد الأشخاص بالمعادلة $\text{pH} = 6.1 + \log_{10} B - \log_{10} C$؛ حيث يمثل B أساس تركيز البيكربونات في الدم ويمثل C تركيز حمض الكربونيك في الدم. حدد المادة ذات درجة الحموضة الأقرب إلى دم شخص ما إذا كانت نسبة البيكربونات إلى حمض الكربونيك لديه 17.5:2.25.

F عصير الليمون

G صودا الخبز

H اللبن

J غاز النشادر

المادة	درجة الحموضة
عصير الليمون	2.3
اللبن	6.4
صودا الخبز	8.4
غاز النشادر	11.9

التوسع 2-4

مختبر تقنية التمثيل البياني

حل المتباينات الأسيّة واللوغاريتمية

الهدف

- حل المتباينات الأسيّة واللوغاريتمية جبريًا وبيانيًا

في الدرس 4-2، قمت بحل المعادلات الأسيّة جبريًا وأكدت الحلول بيانيًا. يمكنك استخدام أساليب مشابهة والخصائص التالية لحل المتباينات التي تتضمن دوالاً أسيّة.

المفهوم الأساسي خصائص التباين في الدوال الأسيّة

الشرح إذا كان $b > 1$. فإن $b^x > b^y$ وذلك إذا وفقط إذا كان $x > y$. و $b^x < b^y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$

مثال إذا كان $5^x < 5^4$. فإن $x < 4$

تنطبق هذه الخاصية أيضًا على ≥ و ≤.

نشاط 1 المتباينات الأسيّة

جد حلاً لـ $5^{2x-6} > 0.04^{x-3}$

جد الحل جبريًا

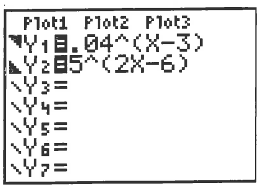
$5^{2x-6} > 0.04^{x-3}$	المتباينة الأصلية
$5^{2x-6} > \left(\frac{1}{25}\right)^{x-3}$	أعد كتابة 0.04 بصيغة $\frac{1}{25}$
$5^{2x-6} > (5^{-2})^{x-3}$	أعد كتابة $\frac{1}{25}$ بصيغة $\frac{1}{5^2}$ أو 5^{-2} بحيث يكون لكل طرف نفس الأساس
$5^{2x-6} > 5^{-2x+6}$	قوة الأس
$2x - 6 > -2x + 6$	خاصية التباين في الدوال الأسيّة
$4x > 12$	خاصية الجمع في المتباينات
$x > 3$	خاصية القسمة في المتباينات

مجموعة الحل هي $\{x \mid x > 3, x \in \mathbb{R}\}$ أو $(3, \infty)$

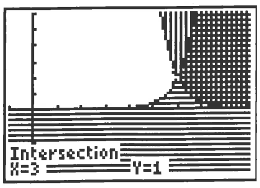
الإثبات بيانيًا

الخطوة 1 يؤدي استبدال كل طرف في المتباينة بـ y إلى نظام المتباينات $y < 5^{2x-6}$ و $y > 0.04^{x-3}$

أدخل كل معادلة حدية وحدد خيار الظل الملائم.



الخطوة 2 مثِّل النظام بيانيًا. تُعتبر قيم x للنقاط في المنطقة التي تتداخل فيها الظلال هي مجموعة الحلول للمتباينة الأصلية. باستخدام خاصية التقاطع، يمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي $(3, \infty)$. وهذا يتسق مع مجموعة الحل الجبري لدينا.



[−0.5, 4.5] scl: 0.5 by [−2, 3] scl: 0.5

تمارين

حُـلّ كل من المتباينات التالية.

1. $16^x < 8^{x+1}$
2. $32^{5x+2} \geq 16^{5x}$
3. $2^{4x-5} > 0.5^{x-5}$
4. $9^{2x-1} \geq 3^{2x+8}$
5. $343^{x-2} \leq 49$
6. $100^x < 0.01^{3x-4}$

لحل المتباينات التي تتضمن لوغاريتمات، استخدم الخاصية التالية.

المفهوم الأساسي تحويل المتباينة اللوغاريتمية إلى أسيّة

الشرح إذا كان $b > 1$ و $x > 0$ و $\log_b x > y$ فإن $x > b^y$

إذا كان $b > 1$ و $x > 0$ و $\log_b x < y$ فإن $0 < x < b^y$

المثال $\log_3 x < 5$ $\log_2 x > 3$

$0 < x < 3^5$ $x > 2^3$

تنطبق هذه الخاصية أيضًا على ≥ و ≤.

نشاط 2

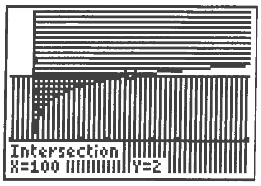
جد حلاً لـ $\log x \le 2$.

جد حلاً جبريًا لـ

المتباينة الأصلية	$\log x \le 2$
المتباينة اللوغاريتمية إلى أسيّة	$0 < x \le 10^2$
بسّط	$0 < x \le 100$

مجموعة الحل هي $\{x \mid 0 < x \le 100, x \in \mathbb{R}\}$ أو $(0, 100]$.

أثبت بيانيًا مثّل بيانيًا نظام المتباينات $y \le 2$ و $y > \log x$ (الشكل 2.4.1).
باستخدام خاصيتي التعقب والتقاطع، يمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي $(0, 100]$. ✓



[−25, 225] scl: 25 by [−1, 4] scl: 0.5

الشكل 2.4.1

لحل المتباينات التي تتضمن لوغاريتمات لها نفس الأساس على كل طرف، استخدم الخاصية التالية.

المفهوم الأساسي خصائص المتباينات في الدوال اللوغاريتمية

الشرح إذا كان $b > 1$. فإن $\log_b x > \log_b y$ وذلك فقط في حالة $x > y$. و $\log_b x < \log_b y$ و فقط في حالة $x < y$

المثال إذا كان $\log_2 x > \log_2 9$. فإن $x > 9$

تنطبق هذه الخاصية أيضًا على ≥ و ≤.

نشاط 3 المتباينات ذات اللوغاريتمات في كل طرف

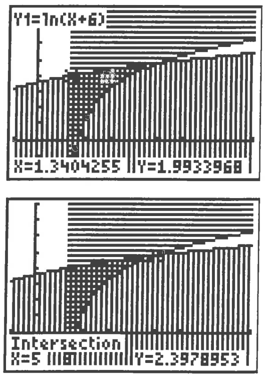
جد حلاً لـ $(3x - 4) < \ln (x + 6)$.

جد حلاً جبريًا لـ

المتباينة الأصلية	$(3x - 4) < \ln (x + 6)$
خاصية المتباينات في الدوال اللوغاريتمية	$3x - 4 < x + 6$
خاصية القسمة في المتباينات	$x < 5$

استبعد كل قيم x بحيث تكون $3x - 4 \le 0$ أو $x + 6 \le 0$. وبهذا تكون مجموعة الحل هي $x > 1\frac{1}{3}$ و $x > -6$ و $x < 5$. يتم تبسيط هذه المتباينة المركبة إلى $\left\{x \mid 1\frac{1}{3} < x < 5, x \in \mathbb{R}\right\}$ أو $\left(1\frac{1}{3}, 5\right)$.

أثبت بيانيًا مثّل بيانيًا نظام المتباينات $y < \ln (x + 6)$ و $y > \ln (3x - 4)$ (الشكل 2.4.2). باستخدام خاصيتي التعقب والتقاطع، يمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي $\left(1\frac{1}{3}, 5\right)$. ✓



[−1, 9] scl: 1 by [−1, 4] scl: 0.5

الشكل 2.4.2

تمارين

جد حل كل من المتباينات التالية.

7. $\ln (2x - 1) < 0$
8. $\log (3x - 8) > 2$
9. $\log 2x < -1$
10. $\log (5x + 2) \le \log (x - 4)$
11. $\ln (3x - 5) > \ln (x + 7)$
12. $\log (x^2 - 6) \ge \log x$

الدرس 2-5 النمذجة باستخدام الانحدار اللاخطي

.. السابق

- لقد مثّلت البيانات باستخدام الدوال كثيرة الحدود.
(الدرس 1-1)

.. الحالي

- 1 نمذجة البيانات باستخدام الدوال الأسيّة واللوغاريتمية واللوجستية
- 2 تقريب البيانات خطيًا وتحليلها.

.. لماذا؟

- على الرغم من أن النمو الأسي ليس نموذجًا مثاليًا للتعبير عن نمو السكان. إلا أن الهيئات الحكومية تستطيع استخدام التقديرات المستمدة من هذه النماذج لوضع خطط إستراتيجية تضمن أن يكونوا مستعدين لتلبية الاحتياجات المستقبلية لشعوبهم.

مفردات جديدة

دالة النمو اللوجستي
logistic growth function
التمثيل الخطي linearize

1 النمذجة الأسيّة واللوغاريتمية واللوجستية

في هذا الدرس، سوف نستخدم ميزات الانحدار الأسي على حاسبة تمثيلات بيانية بدلاً من الأساليب الجبرية لتمثيل بيانات توضح النمو أو التضاؤل الأسي أو اللوغاريتمي.

مثال 1 الانحدار الأسي

السكان **تُعتبر مدينة ميسا في ولاية أريزونا من بين أسرع المدن نموًا في الولايات المتحدة. استخدم الانحدار الأسي لتمثيل بيانات سكان ميسا. ثم استخدم نموذجك لتقدير سكان ميسا في عام 2020.**

سكان مدينة ميسا في أريزونا (بالآلاف)

العام	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
تعداد السكان	0.7	1.6	3.0	3.7	7.2	16.8	33.8	63	152	288	396

الخطوة 1 أنشئ مخطط التشتت.

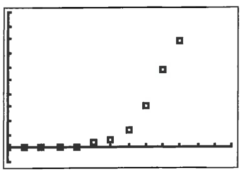
افترض أن $P(t)$ تمثل عدد سكان ميسا بالآلاف بعد t من السنوات من عام 1900. أدخل البيانات ومثّلها بيانيًا إلى حاسبة تمثيلات بيانية لإنشاء مخطط التشتت (تمثيل بياني بالنقاط المبعثرة) (الشكل 2.5.1). لاحظ أن المخطط يتشابه بشدة مع التمثيل البياني لدالة النمو الأسي.

الخطوة 2 جد دالة أسيّة لتمثيل البيانات.

أثناء تشغيل خاصية التشخيص واستخدام ExpReg من قائمة نماذج الانحدار، نحصل على القيم الظاهرة في الشكل 2.5.2. يتم تمثيل عدد السكان في عام 1900 بـ a ويتم تمثيل معدل النمو الذي يبلغ 6.7% في السنة بـ b. لاحظ أن معامل الترابط $r \approx 0.9968$ قريب من 1، مما يشير إلى التقارب مع البيانات. من قائمة $\boxed{Y=}$، اختر معادلة الانحدار هذه عن طريق إدخال $\boxed{\text{VARS}}$، Statistics (الإحصاءات)، EQ. RegEQ.

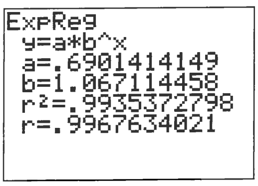
الخطوة 3 مثل بيانياً معادلة الانحدار وأنشئ مخطط التشتت على الشاشة نفسها.

لاحظ أن التمثيل البياني للانحدار يتناسب مع البيانات بشكل جيد نوعًا ما. (الشكل 2.5.3).

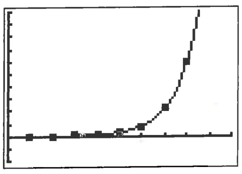


[0, 130] scl: 10 by [−50, 500] scl: 50

الشكل 2.5.1



الشكل 2.5.2

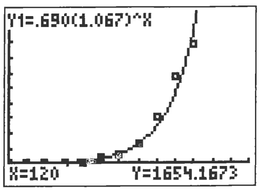


[0, 130] scl: 10 by [−50, 500] scl: 50

الشكل 2.5.3

الخطوة 4 استخدم النموذج في التوقع.

لتوقع عدد سكان ميسا في عام 2020، أي بعد 120 سنة من عام 1900. استخدم ميزة CALC لتقييم دالة $P(120)$ كما هو موضح. بناء على النموذج، سيبلغ عدد سكان ميسا 1,675 ألفًا تقريبًا أو 1.675 مليون نسمة في عام 2020.



تمرين موجّه

1. **الإنترنت** شهدت شبكة الإنترنت نموًا سريعًا في تسعينيات القرن الماضي. ويوضح الجدول التالي عدد المستخدمين بالملايين خلال هذا العقد من الزمان. استخدم الانحدار الأسي لتمثيل البيانات. ثم استخدم نموذجك لتوقع عدد المستخدمين في عام 2008. افترض أن x هو عدد السنوات بعد عام 1990.

العام	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
مستخدمو الإنترنت	1	1.142	1.429	4.286	5.714	10	21.429	34.286	59.143	70.314

بينما تشير بيانات النمو أو التضاؤل السريع إلى نموذج أسي، تميل البيانات التي تنمو أو تتضاءل بشكل سريع في البداية ثم تتباطأ مع الوقت إلى نموذج لوغاريتمي يتم حسابه باستخدام انحدار لوغاريتمي طبيعي.

مثال 2 الانحدار اللوغاريتمي

المواليد استخدم الانحدار اللوغاريتمي لتمثيل البيانات في الجدول والخاصة بالمواليد التوائم في الولايات المتحدة. ثم استخدم نموذجك في توقع الوقت الذي سيصل فيه عدد المواليد التوائم في الولايات المتحدة إلى 150,000.

عدد المواليد التوائم في الولايات المتحدة							
العام	1995	1997	1998	2000	2002	2004	2005
المواليد	96,736	104,137	110,670	118,916	125,134	132,219	133,122

الخطوة 1 افترض أن $B(t)$ تمثل عدد المواليد التوائم بعد t من السنوات من عام 1990. ثم أنشئ مخطط التشتت (الشكل 2.5.5). يتشابه هذا المخطط مع التمثيل البياني لدالة النمو اللوغاريتمي.

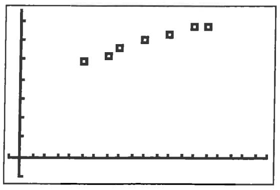
الخطوة 2 احسب معادلة الانحدار باستخدام LnReg. يشير معامل الارتباط $r \approx 0.9949$ إلى ملاءمة قريبة للبيانات. عند تقريب كل قيمة إلى ثلاث خانات عشرية، تتمثل إحدى الدوال اللوغاريتمية الطبيعية التي تمثل البيانات في $B(t) = 38{,}428.963 + 35{,}000.168 \ln x$.

الخطوة 3 من القائمة Y= اختر معادلة الانحدار هذه. يوضح الشكل 2.5.4 نتائج الانحدار $B(t)$. ويتم تمثيل عدد المواليد التوائم في عام 1990 من خلال a. ويتلاءم تمثيل $B(t)$ البياني بشكل جيد نوعًا ما مع البيانات (الشكل 2.5.6).

الخطوة 4 للتوصل إلى الوقت الذي سيصل فيه عدد المواليد التوائم إلى 150,000. مثّل بيانيًا الخط $y = 150{,}000$ ومعادلة التمثيل على الشاشة نفسها. عند حساب نقطة التقاطع (الشكل 2.5.7)، نجد أنه وفقًا لهذا النموذج، سيصل عدد المواليد التوائم إلى 150,000 عندما $t \approx 24$. ويكون ذلك في عام $1990 + 24$ أو 2014.

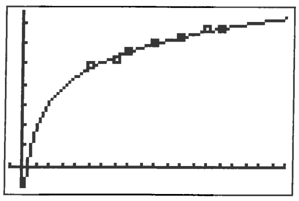
```
LnReg
 y=a+blnx
 a=38428.96308
 b=35000.1679
 r²=.9897472487
 r=.9948604167
```

الشكل 2.5.4



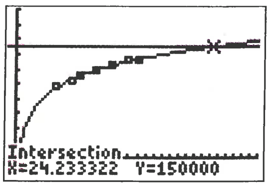
[-1, 20] scl: 1 by [-20,000; 150,000] scl: 20,000

الشكل 2.5.5



[-1, 20] scl: 1 by [-20,000; 150,000] scl: 20,000

الشكل 2.5.6



[-1, 30] scl: 2 by [-20,000; 200,000] scl: 20,000

الشكل 2.5.7

نصيحة دراسية

التقريب تذكر أن معادلة الانحدار التي تم تقريبها لا تُستخدم في التوصل لتنبؤات. ويمكن التوصل إلى تنبؤ أدق باستخدام المعادلة بالكامل.

تمرين موجّه

2. **العمر المتوقع** يوضح الجدول متوسط الأعمال المتوقعة في دولة ما وفقًا لعام الميلاد. استخدم الانحدار اللوغاريتمي لنمذجة البيانات. ثم استخدم الدالة لتوقع العمر المتوقع لشخص مولود في عام 2020. افترض أن x هو عدد الأعوام بعد عام 1900.

عام الميلاد	2005	2000	1995	1990	1980	1970	1960	1950
العمر المتوقع	77.8	77.0	75.8	75.4	73.7	70.8	69.7	68.2

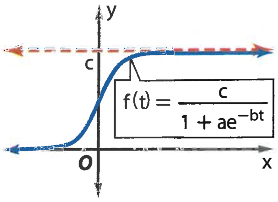
يكون النمو الأسي واللوغاريتمي غير مقيد، حيث يزيد بمعدل دائم التزايد بدون حد أقصى. إلا أنه في الكثير من حالات النمو، يتحدد مقدار النمو بالعوامل التي تعمل على تعزيز السكان، مثل المساحة والطعام والماء. وتتسبب هذه العوامل في اتجاه النمو، الذي كان أسيًا في البداية، إلى التباطؤ والثبات، ليقترب من خط تقاربه أفقي. تمثل **دالة النمو اللوجستي** هذا النمو الأسي محدود الموارد.

المفهوم الأساسي دالة النمو اللوجستي

وتأخذ دالة النمو اللوجستي الصيغة

$$f(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}},$$

حيث t يمثل أي عدد حقيقي، في حين تمثل a و b و c أعداد ثابتة موجبة، و c هو حد النمو.



نصيحة دراسية

التضاؤل اللوجستي إذا كان $b < 0$، فإن $f(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}}$ ستمثل التضاؤل اللوجستي. وما لم يُذكر خلاف ذلك، ستمثل كل النماذج اللوجستية في هذا النص النمو اللوجستي.

وترتبط دوال النمو اللوجستي بخطي تقارب أفقيين هما $y = 0$ و $y = c$. يُطلق على حد النمو c أيضًا سعة حمل الدالة.

مثال 3 من الحياة اليومية الانحدار اللوجستي

البيولوجيا استخدم الانحدار اللوجستي لتصل إلى دالة نمو لوجستي لتمثيل البيانات في الجدول الخاص بعدد بكتيريا الخميرة التي تنمو في مزرعة. ثم استخدم نموذجك في توقع حد نمو بكتيريا الخميرة في المزرعة.

عدد بكتيريا الخميرة في مزرعة

الزمن (h)	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
الخميرة	658	654	653	641	629	597	561	512	445	353	255	172	120	68	45	31	19	10

الخطوة 1 افترض أن $Y(t)$ تمثل عدد بكتيريا الخميرة في المزرعة بعد t من الساعات. ثم أنشئ مخطط التشتت (الشكل 2.5.8). يتشابه هذا المخطط مع التمثيل البياني لدالة النمو اللوجستي.

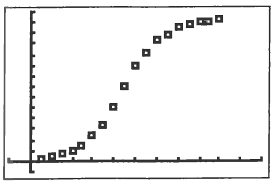
الخطوة 2 احسب معادلة الانحدار باستخدام دالة لوجستية (الشكل 2.5.9). عند تقريب كل قيمة إلى ثلاث منازل عشرية، فإن الدالة اللوجستية التي تمثل البيانات تكون $Y(t) = \frac{661.565}{1 + 131.178e^{-0.555t}}$.

الخطوة 3 يلائم التمثيل البياني لـ $Y(t) = \frac{661.565}{1 + 131.178e^{-0.555t}}$ البيانات بشكل جيد جدًا (الشكل 2.5.10).

الخطوة 4 يمثل حد النمو في معادلة التمثيل البسط في الكسر أو 661.565. لهذا، فوفقًا لهذا النموذج، سيقترب عدد بكتيريا الخميرة في المزرعة من 662 لكنه لن يصل إلى هذا الرقم أبدًا.

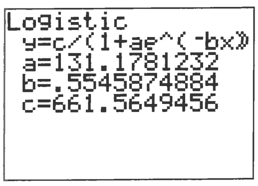
نصيحة دراسية

معاملات الارتباط ليس للانحدارات اللوجستية معامل ارتباط مقابل بسبب طبيعة النماذج.

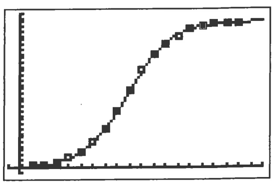


[−2, 22] scl: 2 by [−50, 700] scl: 50

الشكل 2.5.8



الشكل 2.5.9



[−2, 22] scl: 2 by [−50, 700] scl: 50

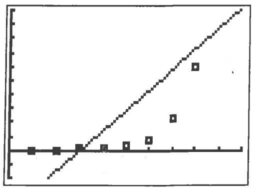
الشكل 2.5.10

تمرين موجّه

3. **السمك** استخدم الانحدار اللوجستي لتمثيل البيانات التي في الجدول عن عدد السمك في بحيرة. ثم استخدم نموذجك في توقع حد نمو عدد السمك.

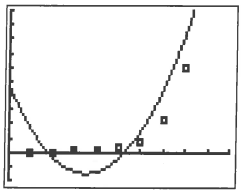
الزمن (بالأشهر)	24	20	16	12	8	4	0
السمك	125	580	2200	5300	7540	8280	8450

الانحدار الخطي
r = 0.74



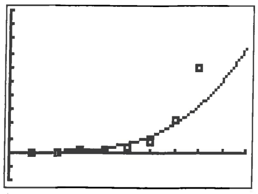
[0, 10] scl: 1 by [-2, 10] scl: 1

الانحدار التربيعي
r = 0.94



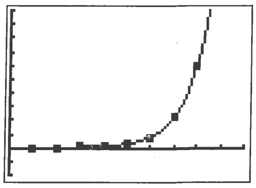
[0, 10] scl: 1 by [−2, 10] scl: 1

انحدار القوة
r = 0.94



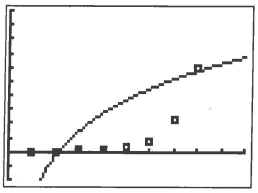
[0, 10] scl: 1 by [-2, 10] scl: 1

الانحدار الأسي
S



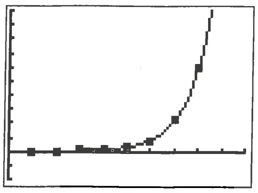
[0, 10] scl: 1 by [-2, 10] scl: 1

الانحدار اللوغاريتمي
r = 0.58



[0, 10] scl: 1 by [-2, 10] scl: 1

الانحدار اللوجستي



[0, 10] scl: 1 by [-2, 10] scl: 1

على مستوى المجال المعروض، يبدو أن نموذجي الانحدار الأسي واللوجيستي هما الأكثر دقة في ملاءمة البيانات، بينما **يتمتع النموذج الأسي بمعامل الارتباط الأقوى.**

مثال 4 اختيار انحدار

الزلازل استخدم البيانات أدناه لتحديد معادلة انحدار تربط بالشكل الأمثل المسافة التي تستطيع موجة زلزالية قطعها من مركز زلزال بالوقت الذي مر على وقوع الزلزال. ثم حدد مسافة الإحساس بالموجة من مركز الزلزال بعد **8.5 دقائق من وقوع الزلزال.**

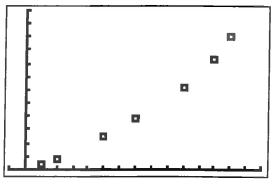
زمن الانتقال (min)	13	12	10	7	5	2	1
المسافة (km)	10,000	8,400	6,250	3,900	2,500	800	400

الخطوة 1 من شكل مخطط التشتت، يبدو أنه يمكن تمثيل هذه البيانات بالشكل الأفضل بواسطة أي نماذج انحدار مذكورة أعلاه باستثناء النموذج اللوغاريتمي. (الشكل 2.5.10)

الخطوة 2 استخدم ميزات الانحدار LinReg(ax+b) و QuadReg و CubicReg و QuartReg و LnReg و ExpReg و PwrReg و Logistic لتتوصل إلى ميزات الانحدار التي تلائم البيانات، مع ملاحظة معاملات الارتباط المقابلة. وتعد معادلة الانحدار ذات معامل الارتباط الأقرب إلى 1 هي الانحدار التربيعي مع تقريب المعادلة إلى $y = 0.702x^4 - 16.961x^3 + 160.826x^2 - 21.045x + 293.022$. تذكر أن تستخدم VARS لتحول المعادلة بالكامل إلى التمثيل البياني.

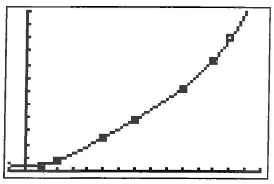
الخطوة 3 إن معادلة الانحدار من الدرجة الرابعة تلائم البيانات بشكل جيد جدًا بالفعل. (الشكل 2.5.11)

الخطوة 4 استخدم ميزة CALC لتقييم معادلة الانحدار هذه لـ $x = 8.5$. (الشكل 2.5.12) بما أن $y \approx 4{,}981$ عندما تكون $x = 8.5$. يمكنك أن تتوقع الإحساس بالموجة على بعد 4,981 كيلومترًا تقريبًا بعد 8.5 دقائق.



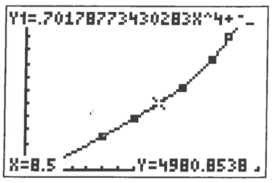
[−1, 15] scl: 1 by [0, 12,000] scl: 1000

الشكل 2.5.10



[−1, 15] scl: 1 by [0, 12,000] scl: 1000

الشكل 2.5.11

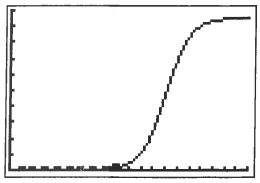


[−1, 15] scl: 1 by [0, 12,000] scl: 1000

الشكل 2.5.12

نصيحة دراسية

الانحدار اللوجستي لاحظ كيف يعبّر التمثيل البياني اللوجستي على اليسار عن الجزء الأولي فقط من التمثيل البياني. ولهذا فمن الأصعب قليلاً تقييم دقة هذا الانحدار بدون توسيع المجال. يظهر التمثيل البياني الكامل للانحدار اللوجستي أدناه.



نصيحة دراسية

استخدام معادلة انحدار تعتبر بعض النماذج أفضل من أخرى في توقع السلوك على المدى الطويل، بينما هناك نماذج أخرى أكثر ملاءمة لبحث السلوك أو استيفاء البيانات على المدى القصير.

تمرين موجّه

4. **الإنترنت** استخدم البيانات الموجودة في الجدول لتحديد معادلة انحدار **تعرض** بالشكل الأفضل العدد التراكمي لأسماء النطاقات التي يتم شراؤها من موفر إنترنت كل شهر. ثم تنبأ بعدد أسماء النطاقات التي سيتم شراؤها أثناء الشهر 18.

الزمن (بالأشهر)	1	2	3	4	5	6	7	8
أسماء النطاقات	211	346	422	468	491	506	522	531

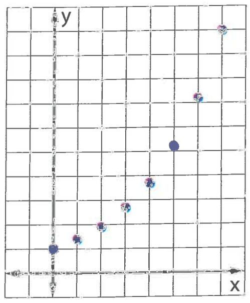
الزمن (بالأشهر)	9	10	11	12	13	14	15	16
أسماء النطاقات	540	538	551	542	565	571	588	593

2 تقريب البيانات خطيًا

يُعتبر معامل الارتباط مقياسًا يتم حسابه من انحدار خطي. كيف إذًا تقوم حاسبات التمثيلات البيانية بتوفير معاملات ارتباط للانحدار *غير الخطي*؟ الإجابة تكمن في أن الحاسبات تكون قد **قربت البيانات خطيًا** ثم تحويلها بحيث تبدو وكأنها تتجمع حول خط. وتسمى عملية تحويل البيانات غير الخطية بحيث تبدو خطية *التقريب الخطي*.

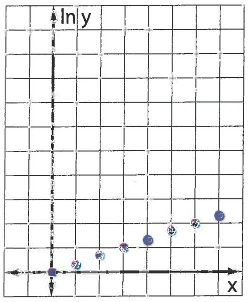
للتقريب الخطي للبيانات، يتم تطبيق دالة على أحد المتغيرين أو كليهما في البيانات المعنية كما يظهر في المثال أدناه.

البيانات الأصلية



x	y
0	1
1	1.4
2	1.9
3	2.7
4	3.7
5	5.2
6	7.2
7	10.0

البيانات بعد التقريب الخطي



x	ln y
0	0
1	0.3
2	0.6
3	1.0
4	1.3
5	1.6
6	2.0
7	2.3

عن طريق حساب معادلة الخط التي تلائم بالشكل الأمثل البيانات بعد التقريب الخطي ثم تطبيق الدوال العكسية، تستطيع الحاسبة أن توفر لك معادلة تمثل البيانات الأصلية. إن معامل الارتباط لهذا الانحدار غير الخطي يمثل في الواقع قياسًا لمدى قدرة الحاسبة على ملاءمة *البيانات بعد التقريب الخطي*.

يتم تقريب البيانات التي تمثلها دالة تربيعية بيانيًا عن طريق تطبيق دالة جذر تربيعي على المتغير y، بينما البيانات التي تمثلها الدوال الأسيّة أو ذات الأس الثابت أو اللوغاريتمية يتم تقريبها خطيًا عن طريق تطبيق دالة لوغاريتمية على أحد المتغيرين أو كليهما.

المفهوم الأساسي التحولات للتقريب الخطي للبيانات

التقريب الخطي للبيانات الممثلة بواسطة:

- دالة تربيعية $y = ax^2 + bx + c$. تمثيل بياني $(x, \sqrt{y})$.
- دالة أسيّة $y = ab^x$. تمثيل بياني $(x, \ln y)$.
- دالة لوغاريتمية $y = a \ln x + b$: تمثيل بياني $(\ln x, y)$.
- دالة أس ثابت $y = ax^b$. تمثيل بياني $(\ln x, \ln y)$.

سوف تفسر اثنين من هذه التحولات الخطية جبريًا في التمرينين 34 و 35.

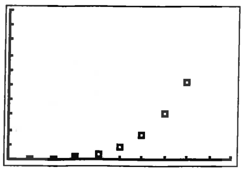
نصيحة دراسية

التقريب الخطي للبيانات التي تمثلها دوال أخرى كثيرة الحدود للتقريب الخطي لدالة تكعيبية $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$، التمثيل البياني $(x, \sqrt[3]{y})$. للتقريب الخطي لدالة تربيعية $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$، التمثيل البياني $(x, \sqrt[4]{y})$.

مثال 5 تقريب البيانات خطيًا

يظهر على اليمين بالأدنى تمثيل بياني للبيانات. احسب التقريب الخطي للبيانات بافتراض نموذج أس ثابت. مثّل البيانات التي تم تقريبها خطيًا بشكل بياني، وجد معادلة الانحدار الخطي. ثم استخدم النموذج الخطي لإيجاد نموذج البيانات الأصلية.

x	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
y	0.13	2	10.1	32	78.1	162	300.1	512

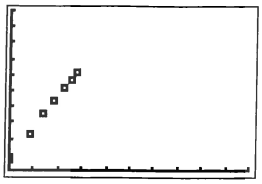


[0, 5] scl: 0.5 by [0, 1000] scl: 100

الخطوة 1 قرّب البيانات خطيًا.

حتى تتمكن من التقريب الخطي للبيانات التي يمكن تمثيلها بدالة ثابتة الأس، احسب اللوغاريتم الطبيعي لكل من قيمتي x و y.

ln x	−0.7	0	0.4	0.7	0.9	1.1	1.3	1.4
ln y	−2	0.7	2.3	3.5	4.4	5.1	5.7	6.2



[0, 5] scl: 0.5 by [0, 10] scl: 1

الخطوة 2 مثّل بيانيًا البيانات التي تم تقريبها خطيًا، وجد معادلة الانحدار الخطي.

يظهر التمثيل البياني للدالة $(\ln x, \ln y)$ وكأنه يتجمع حول مستقيم. افترض أن $\hat{x} = \ln x$ و $\hat{y} = \ln y$. باستخدام الانحدار الخطي، تكون المعادلة التقريبية التي تمثل البيانات بعد تقريبها خطيًا هي $\hat{y} = 4\hat{x} + 0.7$.

الخطوة 3 استخدم نموذج البيانات بعد تقريبها خطيًا لتصل إلى نموذج للبيانات الأصلية.

استبدل $\hat{x}$ بـ $\ln x$ و $\hat{y}$ بـ $\ln y$ وجد حلاً لـ y.

$\hat{y} = 4\hat{x} + 0.7$ معادلة للبيانات بعد تقريبها خطياً

$\ln y = 4\ln x + 0.7$ $\hat{x} = \ln x$ و $\hat{y} = \ln y$

$e^{\ln y} = e^{4\ln x + 0.7}$ رفع الأس لكل طرف

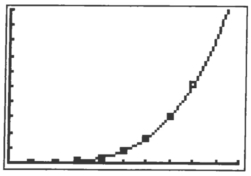
$y = e^{4\ln x + 0.7}$ خاصية المعكوس في اللوغاريتمات

$y = e^{4\ln x}\, e^{0.7}$ خاصية ناتج الضرب في الأس

$y = e^{\ln x^4}\, e^{0.7}$ خاصية الأس الثابت للأسس

$y = x^4 e^{0.7}$ خاصية المعكوس في اللوغاريتمات

$y = 2x^4$ $e^{0.7} \approx 2$



[0, 5] scl: 1 by [0, 1000] scl: 100

ولهذا فإن دالة الأس الثابت التي تمثل هذه البيانات هي $y = 2x^4$. يوضح التمثيل البياني لهذه الدالة إلى جانب مخطط التشتت للبيانات الأصلية أن هذا النموذج يلائم البيانات جيدًا.

نصيحة دراسية

البيانات شبه اللوغاريتمية وبيانات لوغاريتم log عند تطبيق دالة لوغاريتمية على قيم x أو y في مجموعة بيانات، يُشار إلى مجموعة البيانات الجديدة أحيانًا باسم شبه لوغاريتم البيانات $(x, \ln y)$ أو $(\ln x, y)$. تشير بيانات لوغاريتم log إلى البيانات التي تم تحويلها عن طريق أخذ دالة لوغاريتمية لكل من قيمتي x و y $(\ln x, \ln y)$.

نصيحة دراسية

المقارنة بين الأساليب استخدم ميزة الانحدار ثابت الأس في حاسبة لتصل إلى معادلة تمثل البيانات في المثال 5. كيف يمكن المقارنة بين الاثنين؟ كيف يمكن مقارنة معامل الارتباط في الانحدار الخطي في الخطوة 2 مع معامل الارتباط الوارد من الانحدار ثابت الأس؟

تمرين موجّه

أنشئ مخطط تشتت لكل مجموعة بيانات وقرّب البيانات خطيًا وفقًا للنموذج المذكور. c. مثّل بيانيًا البيانات التي تم تقريبها خطيًا، وجد معادلة الانحدار الخطي. ثم استخدم هذا النموذج الخطي للبيانات المتحولة لتصل إلى نموذج للبيانات الأصلية.

5A. نموذج تربيعي

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	0	1	2	9	20	35	54	77

5B. نموذج لوغاريتمي

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5	7.1	8.3	9.5	9.8	10.4	10.8	11.2

يمكنك تقريب البيانات خطيًا لتصل إلى نماذج لبيانات من الحياة اليومية بدون استخدام حاسبة.

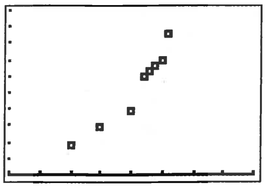
مثال 6 من الحياة اليومية استخدام التقريب الخطي

الرياضة يوضح الجدول متوسط مرتبات لاعبي كرة القدم المحترفين لعدة سنوات. جد نموذجًا أسيًا يربط هذه البيانات عبر التقريب الخطي للبيانات وإيجاد معادلة الانحدار الخطي. ثم استخدم نموذجك لتوقع متوسط المرتبات في عام 2012.

العام	2006	2005	2004	2003	2002	2000	1995	1990
متوسط المرتبات (AED 1,000)	1,700	1,400	1,331	1,259	1,180	787	584	354

المصدر: اتحاد كرة القدم

الخطوة 1 ضع مخطط تشتت (تمثيل بياني بالنقاط المبعثرة) وقرّب البيانات خطيًا.



[80, 120] scl: 5 by [0, 2000] scl: 200

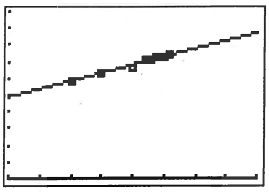
افترض أن x تمثل عدد السنوات بعد عام 1900 و y متوسط المرتبات بالآلاف.

x	90	95	100	102	103	104	105	106
y	354	584	787	1,180	1,259	1,331	1,400	1,700

المخطط غير خطي ويشير شكله إلى أنه يمكن تمثيل البيانات بدالة أسيّة.
احسب تقريب البيانات خطيًا عن طريق إيجاد $(x, \ln y)$.

x	90	95	100	102	103	104	105	106
ln y	5.9	6.4	6.7	7.1	7.1	7.2	7.2	7.4

الخطوة 2 مثّل بيانيًا البيانات التي تم تقريبها خطيًا، وجد معادلة انحدار خطي.



[80, 120] scl: 5 by [0, 10] scl: 1

يبدو التمثيل البياني للبيانات بعد تقريبها خطيًا وكأنه يشكل خطًا مستقيمًا. بافتراض أن $y = \ln y$. فإن معادلة الانحدار بعد تقريبها تبلغ حوالي $y = 0.096x - 2.754$.

الخطوة 3 استخدم نموذج البيانات بعد تقريبها خطيًا لتصل إلى نموذج للبيانات الأصلية.

استبدل y بــ $\ln y$ وجد حلاً لـ y.

$y = 0.096x - 2.754$ معادلة للبيانات بعد تقريبها خطيًا

$\ln y = 0.096x - 2.754$ $y = \ln y$

$e^{\ln y} = e^{0.096x - 2.754}$ احسب التحويل الأسي لكل طرف

$y = e^{0.096x - 2.754}$ خاصية المعكوس في اللوغاريتمات

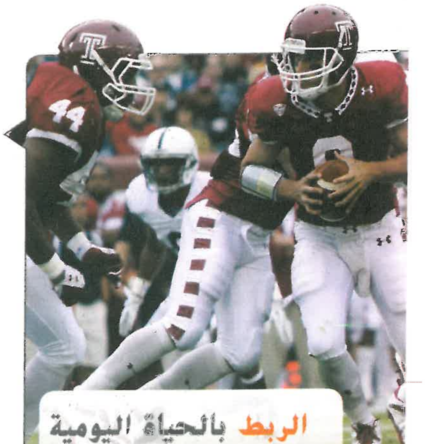
$y = e^{0.096x}\, e^{-2.754}$ خاصية ناتج الضرب في الأسس

$y = 0.06e^{0.096x}$ $e^{-2.754} \approx 0.06$

لهذا فإن المعادلة الأسيّة التي تمثل هذه البيانات هي $y = 0.06e^{0.096x}$

الخطوة 4 استخدم المعادلة التي تمثل البيانات الأصلية لحل المسألة.

للتوصل إلى متوسط المرتبات في عام 2012، جد قيمة y عندما تكون $x = 2012 - 1900$ أو 112. وفقًا لهذا النموذج، سيكون متوسط مرتب لاعب كرة القدم المحترف في عام 2012 ألف $0.06e^{0.096(112)} \approx$ AED 2,803 أو حوالي 2.8 مليون AED.



الربط بالحياة اليومية

تخضع مرتبات لاعبي دوري كرة القدم لحد أقصى مسموح لكل نادٍ بإضافه على إجمالي جدول الرواتب كل موسم. وفي عام 2008، كان الحد الأقصى لمرتبات كل فريق 116 مليون AED.

المصدر: اتحاد كرة القدم

انتبه!

استخدام المعادلة الخاطئة انتبه لكي لا تخلط بين المعادلة التي تمثل بيانات بعد تقريبها خطيًا والمعادلة التي تمثل البيانات الأصلية.

تمرين موجّه

6. **إسقاط أحد الأشياء** ألقى عيسى بأحد أحذيته من طائرة مروحية محلقة. تظهر المسافة d التي قطعها الحذاء بالأمتار بعد t ثانية من إلقائه في الجدول.

t	0	1	1.5	2	2.5	3	4	5
d	0	15.7	35.4	63.8	101.4	144.5	258.1	404.8

جد نموذجًا تربيعيًا يربط هذه البيانات عبر تقريب البيانات خطيًا وإيجاد معادلة الانحدار الخطي. ثم استخدم نموذجك لتوقع المسافة التي قطعها الحذاء بعد7 ثوانٍ.

تمارين

بالنسبة إلى التمارين 3-1، أكمل كل خطوة.
a. جد دالة أسيّة لتمثيل البيانات.
b. جد قيمة كل نموذج عند $x = 20$ (مثال 1)

1.

x	y
1	7
2	11
3	25
4	47
5	96
6	193
7	380

2.

x	y
0	1
1	6
2	23
3	124
4	620
5	3130
6	15,600

3.

x	y
0	25
1	6
2	1.6
3	0.4
4	0.09
5	0.023
6	0.006

.4 **علم الوراثة** دروسوفيلا *ميلانوجاستر* هو نوع من ذبابة الفاكهة يشيع استخدامه في معامل علم الوراثة لأنها تتكاثر كل 8.5 أيام تقريبًا مما يسمح للباحثين بأن يدرسوا أجيالًا عديدة. يوضح هذا الجدول عدد *الدروسوفيلا* على مدار عدة أيام. (مثال 1)

الجيل	عدد الدروسوفيلا	الجيل	عدد الدروسوفيلا
1	80	5	1,180
2	156	6	2,314
3	307	7	4,512
4	593	8	8,843

a. جد دالة أسيّة لتمثيل البيانات.

b. استخدم الدالة في توقع عدد *الدروسوفيلا* بعد 93.5 يومًا.

.5 **أسماك القرش** توجد لدى أسماك القرش الكثير من صفوف الأسنان المضمنة في لثتها مباشرة وليست متصلة بفكها. وعندما يفقد القرش أسنانه، تتحرك أسنان الصف التالي للأمام. ويزيد معدل استبدال صف الأسنان بالأيام لكل صف مع درجة حرارة الماء. (مثال 1)

درجة الحرارة (C°)	20	21	22	23	24	25	26	27
الأيام لكل صف	66	54	44	35	28	22	18	16

a. جد دالة أسيّة لتمثيل البيانات.

b. استخدم الدالة لتوقع درجة الحرارة التي تفقد عندها أسماك القرش صفًا من الأسنان خلال 12 يومًا.

.6 **الكلمات** تتألف عائلة الكلمة من كلمة أساسية وكل مشتقاتها. يوضح الجدول النسبة المئوية للكلمات في نص إنجليزي عادي يتألف من عائلات الكلمات الأكثر شيوعًا. (مثال 2)

عائلات الكلمات	5,000	4,000	3,000	2,000	1,000
النسبة المئوية للكلمات	88.6	86.7	84.0	79.7	73.1

a. جد دالة لوغاريتمية لتمثيل البيانات.

b. توقع عدد عائلات الكلمات التي تشكل نسبة تصل إلى 95% من الكلمات في نص إنجليزي عادي.

بالنسبة إلى التمارين 9-7، أكمل كل خطوة.
a. جد دالة لوغاريتمية لتمثيل البيانات.
b. جد قيمة كل نموذج عند $x = 15$ (مثال 2)

7.

x	y
1	50
2	42
3	37
4	33
5	31
6	28
7	27

8.

x	y
2	8.6
4	7.2
6	6.4
8	5.8
10	5.4
12	5.0
14	4.7

9.

x	y
1	40
2	49.9
3	55.8
4	59.9
5	63.2
6	65.8
7	68.1

.10 **الكيمياء** ألقت أحد المعامل عينة من نظائر الكوبالت عام 1999. ويظهر المقدار المتبقي من الكوبالت بالجرام في العام في الجدول أدناه. (مثال 2)

العام	2007	2006	2005	2004	2003	2002	2001	2000
الكوبالت (بالجرام)	349	398	454	518	591	674	769	877

a. جد دالة لوغاريتمية لتمثيل البيانات. افترض أن $x = 1$ تمثل 2,000.

b. تنبأ بمقدار الكوبالت المتبقي في عام 2020.

بالنسبة إلى التمارين 13-11، أكمل كل خطوة.
a. جد دالة لوجستية لتمثيل البيانات.
b. جد قيمة كل نموذج عند $x = 25$. (مثال 3)

11.

x	y
0	50
2	67
4	80
6	89
8	94
10	97
12	98
14	99

12.

x	y
1	3
2	5
3	7
4	8
5	13
6	16
7	19
8	20

13.

x	y
3	21
6	25
9	28
12	31
15	33
18	34
21	35
24	35

.14 **الكيمياء** تقوم إحدى الطالبات بمعايرة بالتحليل الحجمي في المعمل. ولإجراء المعايرة، فإنها تستخدم قطارة لإضافة محلول أساسي لهيدروكسيد الصوديوم إلى محلول محايد. يوضح الجدول درجة حموضة المحلول مع إضافة هيدروكسيد الصوديوم. (المثال 3)

هيدروكسيد الصوديوم (mL)	10	7.5	5	3	2	1	0
درجة الحموضة	11.5	11.5	11.3	11.0	10.6	10.4	10

a. جد دالة لوجستية لتمثيل البيانات.

b. استخدم النموذج لتوقع حموضة المحلول بعد إضافة 12 مليلترًا من هيدروكسيد الصوديوم.

15. **الإحصاء السكاني** يوضح الجدول عدد السكان المتوقع في ولاية مين من إحصاء السكان في عام 2000. افترض أن x هو عدد السنوات بعد عام 2000. (مثال 3)

العام	السكان (بالملايين)
2000	1.275
2005	1.319
2010	1.357
2015	1.389
2020	1.409
2025	1.414
2030	1.411

a. جد دالة لوجستية لتمثيل البيانات.

b. بناءً على النموذج، ما عدد السكان الذي يتوقع إحصاء عام 2000 بأن يتوقف نمو السكان عنده في ولاية مين؟

c. ناقش فاعلية نموذج توقع عدد السكان مع زيادة الوقت بدرجة كبيرة خارج مجال البيانات.

16. **الغوص** يبحث الغواصون بجهاز تنفس عن مواقع تحقق رؤية واضحة، وقد يتأثر وضوح الرؤية بدرجة إعتام الماء واختراق الضوء السطحي. يوضح الجدول النسبة المئوية لضوء السطح الواصل إلى الغواص عند أعماق مختلفة مع هبوط الغواص. (مثال 4)

العمق (m)	الضوء (%)
4.6	89.2
9.1	79.6
13.7	71.0
18.3	63.3
22.9	56.5
27.4	50.4
32	44.9
36.6	40.1

a. استخدم ميزات الانحدار في الحاسبة لتحدد معادلة الانحدار التي تمثل البيانات بالشكل الأفضل.

b. استخدم التمثيل البياني لمعادلة الانحدار الخاصة بك لتقريب النسبة المئوية لضوء السطح الذي يصل إلى الغواص على عمق 83 مترًا.

17. **ثعبان الماء** يوضح الجدول متوسط طول أنثى ثعبان الملك في أعمار متعددة. (المثال 4)

العمر (بالعام)	الطول (cm.)	العمر (بالعام)	الطول (cm.)
4	8	14	17
6	11	16	18
8	13	18	18
10	15	20	19
12	16		

a. استخدم ميزات الانحدار في الحاسبة لتحديد ما إذا كان الانحدار اللوغاريتمي أفضل من الانحدار اللوجستي. اشرح.

b. استخدم التمثيل البياني لمعادلة انحدارك لتقريب طول ثعبان ماء عمره 19 عامًا.

بالنسبة إلى التمارين 21-18، أكمل كل خطوة.

a. احسب التقريب الخطي للبيانات حسب النموذج المحدد.

b. مثّل بيانيًا البيانات التي تم تقريبها خطيًا، وجد معادلة الانحدار الخطي.

c. استخدم النموذج الخطي لإيجاد نموذج البيانات الأصلية. تحقق من دقته بالتمثيل البياني. (المثالان 5 و 6)

18. **الدالة الأسيّة**

x	y
0	11
1	32
2	91
3	268
4	808
5	2,400
6	7,000
7	22,000

19. **الدالة التربيعية**

x	y
0	1.0
1	6.6
2	17.0
3	32.2
4	52.2
5	77.0
6	106.6
7	141.0

20. **الدالة اللوغاريتمية**

x	y
2	80.0
4	83.5
6	85.5
8	87.0
10	88.1
12	89.0
14	90.0
16	90.5

21. **دالة الأس الثابت**

x	y
1	5
2	21
3	44
4	79
5	120
6	180
7	250
8	320

22. **الأعاصير** يستطيع الإعصار الذي تزيد سرعة رياحه بالقرب من مركزه أن يقطع مسافات أكبر. يوضح الجدول سرعات الرياح بالقرب من مراكز الأعاصير التي قطعت مسافات مختلفة. (مثال 6)

المسافة (mi)	السرعة القصوى (km/h)
0.50	37
0.75	53
1.00	65
1.25	74
1.50	81
1.75	88
2.00	93
2.25	98
2.50	102
2.75	106

a. احسب التقريب الخطي للبيانات بافتراض نموذج لوغاريتمي.

b. مثّل بيانيًا البيانات التي تم تقريبها خطيًا، وجد معادلة الانحدار الخطي.

c. استخدم النموذج الخطي لتتوصل إلى نموذج للبيانات الأصلية وتقريب سرعة الرياح لمركز قطع 3.7 كيلومترات.

23. الإسكان يوضح الجدول تقديرات قيمة منزل كل 3 سنوات منذ شرائه. (مثال 6)

الأعوام	0	3	6	9	12	15
القيمة (AED)	78,000	81,576	85,992	90,791	95,859	101,135

a. احسب التقريب الخطي للبيانات بافتراض نموذج أسي.

b. مثّل بيانيًا البيانات التي تم تقريبها خطيًا، وجد معادلة الانحدار الخطي.

c. استخدم النموذج الخطي للتوصل إلى نموذج للبيانات الأصلية وحدد القيمة التقريبية للمنزل بعد 24 سنة من شرائه.

24. الطهو أوقات الطهو ودرجات الحرارة والوصفات غالبًا ما تختلف على الارتفاعات الكبيرة عن مستوى البحر. وهذا يعود إلى الاختلاف في الضغط الجوي، مما يؤدي إلى انخفاض درجات غليان مواد مختلفة مثل الماء عند الارتفاعات الكبيرة. يوضح الجدول نقطة غليان الماء عند الارتفاعات المختلفة فوق مستوى سطح البحر.

الارتفاع (m)	نقطة الغليان (°C)
0	100
1,000	99.29
2,000	98.81
3,000	98.43
4,000	98.10
5,000	97.80
6,000	97.53
7,000	97.28
8,000	97.05
9,000	96.83
10,000	96.62

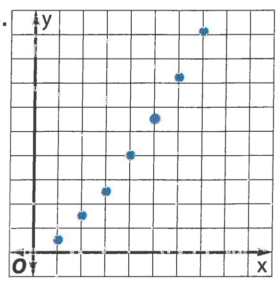
a. احسب التقريب الخطي للبيانات في النماذج الأسيّة وثابتة الأس واللوغاريتمية.

b. مثّل البيانات بيانيًا بعد تقريبها خطيًا وحدد النموذج الأفضل في تمثيل البيانات.

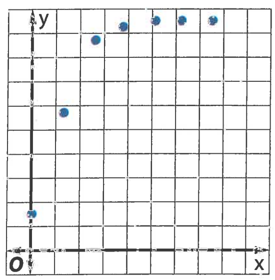
c. اكتب معادلة لتمثيل البيانات بناءً على تحليلك لحسابات التقريب الخطي.

حدد النموذج الأكثر ملاءمة لكل مخطط تشتت. اشرح استنتاجك.

25.



26.



احسب التقريب الخطي للبيانات في كل جدول. ثم حدد النموذج الأكثر ملاءمة.

27.

x	y
2	2.5
4	7.3
6	13.7
8	21.3
10	30.2
12	40.0
14	50.8
16	62.5

28.

x	y
1	6
2	29
3	42
4	52
5	59
6	65
7	70
8	75

29.

x	y
1	37.8
2	17.0
3	7.7
4	3.4
5	1.6
6	0.7
7	0.3
8	0.1

30. السمك يدرس العديد من علماء البحار أعداد القاروس صغير الفم في بحيرة. ويوضح الجدول أعداد القاروس صغير الفم في البحيرة مع الوقت.

العام	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
القاروس	673	891	1,453	1,889	2,542	2,967	3,018	3,011

a. حدد النموذج الأكثر ملاءمة للبيانات. اشرح استنتاجك.

b. جد دالة لتمثيل البيانات.

c. استخدم الدالة في توقع أعداد القاروس صغير الفم في عام 2012

d. ناقش فاعلية نموذج التنبؤ بأعداد القاروس مع زيادة الوقت بدرجة كبيرة خارج مجال البيانات.

مسائل مهارات التفكير العُليا استخدام مهارات التفكير العُليا

31. الاستنتاج لماذا تُعتبر الانحدارات اللوغاريتمية غير صالحة عندما يساوي المجال 0؟

32. تحدٍّ أوضح أن $y = ab^x$ يمكن تحويلها إلى $y = ae^{kx}$.

33. التبرير هل يمكن أن يكون التمثيل البياني لدالة لوجستية له أي تقاطعات؟ اشرح استنتاجك.

الإثبات استخدم الجبر للتحقق من أن البيانات التي تم تمثيلها بكل نوع من الدوال يمكن تقريبها خطيًا أو التعبير عنها كدالة $y = mx + b$ بالنسبة لبعض القيم m و b، عن طريق استبدال (x, y) بالإحداثيات المشار إليها.

34. الدالة الأسيّة، $(x, \ln y)$

35. الدالة ثابتة الأس، $(\ln x, \ln y)$

36. التبرير كيف يرتبط التمثيل البياني للدالة $g(x) = \frac{5}{1+e^{-x}} + a$ بالتمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{5}{1+e^{-x}}$؟ اشرح.

37. الكتابة في الرياضيات اشرح كيفية ارتباط معاملات نموذج أسي أو لوغاريتمي بمجموعة البيانات أو الحالة التي يجري تمثيلها.

مراجعة شاملة

حُلّ كل من المعادلات التالية. (الدرس 4-2)

38. $3^{4x} = 3^{3-x}$
39. $3^{5x} \times 81^{1-x} = 9^{x-3}$
40. $49^{x} = 7^{x^2-15}$
41. $\log_5 (4x-1) = \log_5 (3x+2)$
42. $\log_{10} z + \log_{10} (z+3) = 1$
43. $\log_6 (a^2+2) + \log_6 2 = 2$

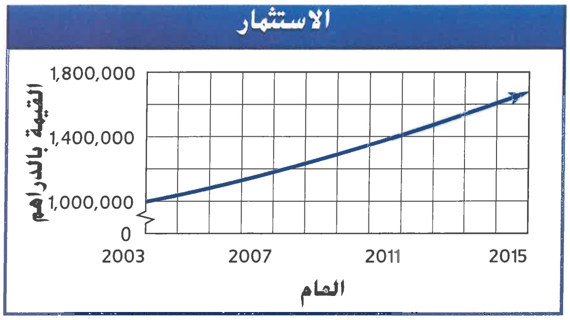
44. **الطاقة** الطاقة E، بالكيلو كالوري لكل جرام من الجزيء، المطلوبة لنقل مادة من خارج خلية حية إلى داخلها تتحدد على أساس $E = 1.4(\log_{10} C_2 - \log_{10} C_1)$، حيث C_1 و C_2 هما تركيزا المادة داخل الخلية وخارجها على التوالي. (الدرس 3-2)

a. عبّر عن قيمة E بصيغة لوغاريتم واحد.

b. افترض أن تركيز المادة داخل الخلية يبلغ ضعف التركيز خارجها. ما مقدار الطاقة المطلوبة لنقل المادة الموجودة خارج الخلية إلى داخلها؟ (استخدم $\log_{10} 2 \approx 0.3010$.)

c. افترض أن تركيز المادة داخل الخلية يبلغ أربعة أضعاف التركيز خارجها. ما مقدار الطاقة المطلوبة لنقل المادة من خارج الخلية إلى داخلها؟

45. **المعرفة المالية** في عام 2003، ورثت ميسون AED 1,000,000 من جدتها. وقد استثمرت كل المبلغ، وكان من المتوقع أن ينمو المبلغ بحلول عام 2015 إلى AED 1,678,000. (الدرس 1-2)



a. اكتب دالة أسيّة يمكن استخدامها في تمثيل المبلغ المالي y. اكتب الدالة باستخدام x، والذي يشير إلى عدد السنوات منذ عام 2003.

b. افترض أن المبلغ المالي ظل ينمو بنفس المعدل. جد قيمة المبلغ المالي في عام 2025. هل هذا التقدير صحيح؟ اشرح استنتاجك.

بسّط. (الدرس 2-0)

46. $(-2i)(-6i)(4i)$
47. $3i(-5i)^2$
48. i^{13}
49. $(1-4i)(2+i)$
50. $\frac{4i}{3+i}$
51. $\frac{4}{5+3i}$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

52. **SAT/ACT** أظهرت دراسة حديثة أن عدد المنازل الأسترالية التي بها حاسوب يتضاعف كل 8 أشهر. بافتراض أن العدد يتزايد باستمرار، فما هو المعدل الشهري التقريبي الذي يجب أن يزيد به مالكو أجهزة الحاسب الآلي الأستراليون لكي يتحقق هذا؟

A 6.8%
B 8.66%
C 12.5%
D 8.0%
E 2%

53. تبين البيانات أدناه عدد البكتيريا الموجودة في مزرعة معينة. تنمو البكتيريا أسيًا.

الساعات	4	3	2	1	1
عدد البكتيريا	5	8	15	26	48

ما الزمن المطلوب تقريبًا لكي يتضاعف حجم مزرعة البكتيريا بعد الساعة 4؟

F 1.26 ساعة
G 1.35 ساعة
H 1.68 ساعة
J 1.76 ساعة

54. **الاستجابة الحرة** تتمثل السرعة التي تتحرك بها سيارة بالميل في الساعة في الدالة $v(t) = 60\left(1 - e^{-t^2}\right)$ حيث t هو الوقت بالثواني. افترض أن السيارة لن تحتاج إلى التوقف أبدًا.

a. مثّل بيانيًا $v(t)$ لـ $0 \leq t \leq 10$.

b. وضح مجال ومدى $v(t)$. اشرح استنتاجك.

c. ما نوع الدالة $v(t)$؟

d. ما السلوك الطرفي لـ $v(t)$؟ ما معنى هذا في سياق الحالة؟

e. افترض أن $d(t)$ تمثل إجمالي المسافة التي قطعتها السيارة. ما نوع الدالة التي تمثلها $d(t)$ مع اقتراب t من اللانهاية؟ اشرح.

f. افترض أن $a(t)$ تمثل تسارع السيارة. فما السلوك الطرفي لـ $a(t)$؟ اشرح.

دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

الدوال الأسيّة (الدرس 1-2)

- الدوال الأسيّة تتخذ الشكل $f(x) = ab^x$، حيث $a \neq 0, b$ و $b \neq 1$. بالنسبة إلى الدوال الأسيّة طبيعية الأساس، يكون الأساس هو الثابت e.
- إذا تم استثمار رأس مال P بمعدل مرابحة سنوية r (بصيغة عشرية)، يتم احتساب الرصيد A في الحساب بعد t من السنوات من خلال $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$؛ إذا تم تركيبه n من المرات كل عام أو $A = Pe^{rt}$؛ إذا تم تركيبه بصفة مستمرة.
- إذا علمت أن المبلغ الأولي N_0 ينمو أو يتضاءل بمعدل أسي r أو k (في صورة كسر عشري)، فإن المبلغ النهائي N بعد الفترة t يتم تمثيله بواسطة $N = N_0 e^{kt}$ أو $N = N_0(1 + r)^t$؛ حيث يمثل r معدل النمو لكل فترة t ويمثل k معدل النمو المستمر في أي وقت t.

الدوال اللوغاريتمية (الدرس 2-2)

- معكوس $f(x) = b^x$؛ حيث $b > 0$ و $b \neq 1$. هي الدالة اللوغاريتمية بالأساس b؛ ويُرمز لها $\log_b x$ = $f^{-1}(x)$.
- إذا كانت $b > 0$ و $b \neq 1$ و $x > 0$. فإن الصيغة الأسيّة لـ $\log_b x = y$ هي $b^y = x$ والصيغة اللوغاريتمية لـ $b^y = x$ هي $\log_b x = y$. اللوغاريتم هو أس.
- لوغاريتمات عادية: $\log_{10} x$ أو $\log x$
- لوغاريتمات طبيعية: $\log_e x$ أو $\ln x$

خصائص اللوغاريتمات (الدرس 3-2)

- خاصية ناتج الضرب: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
- خاصية خارج القسمة: $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- خاصية الأس الثابت: $\log_b x^p = p \times \log_b x$
- تغيير قاعدة الأساس: $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

المعادلات الأسيّة واللوغاريتمية (الدرس 4-2)

- خاصية واحد لواحد للأسس: بالنسبة إلى $b > 0$ و $b \neq 1$. فإن $b^x = b^y$ فقط إذا كانت $x = y$.
- خاصية واحد لواحد للوغاريتمات: بالنسبة إلى $b > 0$ و $b \neq 1$. فإن $\log_b x = \log_b y$ فقط إذا كانت $x = y$.

النمذجة باستخدام الانحدار غير الخطي (الدرس 5-2)

التقريب الخطي للبيانات الممثلة بواسطة:

- دالة تربيعية $y = ax^2 + bx + c$: تمثيل بياني $(x, \sqrt{y})$.
- دالة أسيّة $y = ab^x$: تمثيل بياني $(x, \ln y)$.
- دالة لوغاريتمية $y = a \ln x + b$: تمثيل بياني $(\ln x, y)$.
- دالة ثابتة الأس $y = ax^b$: تمثيل بياني $(\ln x, \ln y)$.

المفردات الأساسية

الدالة الجبرية algebraic function	**الدالة اللوغاريتمية التي تحتوي على الأساس** b *b logarithmic function with base b*
اللوغاريتم العادي common logarithm	**دالة النمو اللوجستي** logistic growth function
المرابحة المركبة المتصلة continuous compound	**الأساس الطبيعي** natural base
الدالة الأسيّة interest	**اللوغاريتم الطبيعي** natural logarithm
التقريب الخطي linearize exponential function	**الدالة المتسامية** transcendental function
اللوغاريتم logarithm	

مراجعة المفردات

أكمل كل عبارة باستخدام المصطلح المناسب من القائمة أعلاه.

1. التعبير اللوغاريتمي الذي لا يُشار فيه إلى أساس يستخدم ________.
2. ________ هي دوال يكون المتغير فيها هو الأس.
3. الدوال الأسيّة واللوغاريتمية مثالان على ________.
4. معكوس $f(x) = b^x$ يُسمى ________.
5. يحتوي التمثيل البياني لـ ________ على خطي تقارب أسيين. تُستخدم مثل هذه الدالة للنمو بعامل محدد.
6. يتم في العديد من التطبيقات من الحياة اليومية استخدام ________ e. وهو، مثل i ،$\sqrt{5}$ أو باي (π) عدد غير نسبي يتطلب التقريب العشري.
7. من أجل بيانات ________، يتم تطبيق الدالة على أحد المتغيرين أو كلاهما في مجموعة البيانات، لتحويل البيانات بحيث تظهر متجمعة حول مستقيم.
8. الدوال ثابتة الأساس والجذرية وكثيرة الحدود والنسبية هي أمثلة على ________.
9. ________ تحدث عندما لا يكون هناك أي فترة انتظار بين دفعات المرابحة.
10. ________ يُرمز له بـ ln.

2 دليل الدراسة والمراجعة تابع

مراجعة درس بدرس

2-1 الدوال الأسية

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. ووضح المجال والمدى ونقاط التقاطع وخطوط التقارب والسلوك الطرفي، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.

11. $f(x) = 3^x$

12. $f(x) = 0.4^x$

13. $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

14. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

استخدم رسم $f(x)$ البياني لتوضيح التحويل الناتج في التمثيل البياني لـ $g(x)$. ثم مثّل التمثيلين البيانيين لكل من $f(x)$ و$g(x)$.

15. $f(x) = 4^x;\ g(x) = 4^x + 2$

16. $f(x) = 0.1^x;\ g(x) = 0.1^{x-3}$

17. $f(x) = 3^x;\ g(x) = 2 \times 3^x - 5$

18. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x;\ g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2$

انسخ الجدول أدناه واستكمله لتصل إلى قيمة الاستثمار A لرأس المال P والمعدل r والزمن t إذا تمت إضافة المرابحة المركبة n مرات سنويًا.

n	1	4	12	365	باستمرار
A					

19. $P =$ AED 250, $r = 7\%$, $t = 6$ أعوام

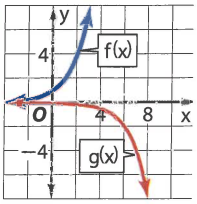
20. $P =$ AED 1000, $r = 4.5\%$, $t = 3$ أعوام

مثال 1

استخدم رسم $f(x) = 2^x$ البياني لوصف التحول الذي ينتج عن التمثيل البياني لـ $g(x) = -2^{x-5}$. ثم مثّل بيانيًا g و f.

تأخذ هذه الدالة الصيغة $g(x) = -f(x-5)$.

وهكذا، فإن $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x) = 2^x$ مزاحًا 5 وحدات إلى اليمين وينعكس على المحور الأفقي x.



مثال 2

ما قيمة AED 2000 بعد استثمارها بمعدل 6.5% لمدة 12 عامًا إذا كانت المرابحة مركبة بمعدل ربع سنوي؟ أو بشكل مستمر؟

$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ قاعدة المرابحة المركبة

$= 2000\left(1 + \frac{0.065}{4}\right)^{4(12)}$ $P = 2000,\ r = 0.065,\ n = 4,\ t = 12$

$=$ AED 4335.68 بسّط

$A = Pe^{rt}$ قاعدة المرابحة المستمرة

$= 2000e^{0.065(12)}$ $P = 2000,\ r = 0.065,\ t = 12$

$=$ AED 4362.94 بسّط

2-2 الدوال اللوغاريتمية

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

21. $\log_2 32$

22. $\log_3 \frac{1}{81}$

23. $\log_{25} 5$

24. $\log_{13} 1$

25. $\ln e^{11}$

26. $3^{\log_3 9}$

27. $\log 80$

28. $e^{\ln 12}$

استخدم تمثيل $f(x)$ البياني لوصف التحول الناتج في تمثيل $g(x)$ البياني. ثم ارسم $f(x)$و$g(x)$ بيانيًا.

29. $f(x) = \log x;\ g(x) = -\log(x + 4)$

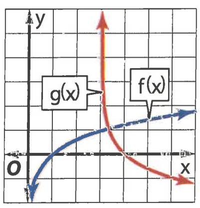
30. $f(x) = \log_2 x;\ g(x) = \log_2 x + 3$

31. $f(x) = \ln x;\ g(x) = \frac{1}{4}\ln x - 2$

مثال 3

استخدم تمثيل $f(x) = \ln x$ البياني لوصف التحول الناتج في التمثيل البياني لـ $g(x) = -\ln(x-3)$. ثمّ ارسم $f(x)$ و $g(x)$ بيانيًا.

تأخذ هذه الدالة الصيغة $g(x) = -f(x-3)$. وهكذا، فإن $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ منعكسًا على المحور الأفقي x ومزاحًا 3 وحدات إلى اليمين.



2-3 خصائص اللوغاريتمات

قم بتوسيع كل تعبير.

32. $\log_3 9x^3y^3z^6$

33. $\log_5 x^2a^7\sqrt{b}$

34. $\ln \frac{e}{x^2y^3z}$

35. $\log \frac{\sqrt{gj^5k}}{100}$

بسّط كل تعبير.

36. $3\log_3 x - 2\log_3 y$

37. $\frac{1}{3}\log_2 a + \log_2 (b+1)$

38. $5\ln(x+3) + 3\ln 2x - 4\ln(x-1)$

مثال 4

بسّط $3\log_3 x + \log_3 7 - \frac{1}{2}\log_3 x$

$3\log_3 x + \log_3 7 - \frac{1}{2}\log_3 x$ خاصية الأس الثابت

$= \log_3 x^3 + \log_3 7 - \log_3\sqrt{x}$ خاصية ناتج الضرب

$= \log_3 7x^3 - \log_3\sqrt{x}$ خاصية ناتج القسمة

$= \log_3 \frac{7x^3}{\sqrt{x}}$

2-4 المعادلات الأسيّة واللوغاريتمية

حُل كل من المعادلات التالية.

39. $3^{x+3} = 27^{x-2}$

40. $25^{3x+2} = 125$

41. $e^{2x} - 8e^x + 15 = 0$

42. $e^x - 4e^{-x} = 0$

43. $\log_2 x + \log_2 3 = \log_2 18$

44. $\log_6 x + \log_6 (x-5) = 2$

مثال 5

حل $7\ln 2x = 28$

$7\ln 2x = 28$ المعادلة الأصلية

$\ln 2x = 4$ اقسم كل طرف على 7

$e^{\ln 2x} = e^4$ ارفع كل طرف لأس e

$2x = e^4$ خاصية المعكوس

$x = 0.5e^4 = 27.299$ تقريبًا حل وبسّط

2-5 النمذجة باستخدام الانحدار اللا خطي

أكمل كلاً من الخطوات التالية.

a. احسب التقريب الخطي للبيانات حسب النموذج المحدد.

b. مثّل بيانيًا البيانات التي تم تقريبها خطيًا، وجد معادلة الانحدار الخطي.

c. استخدم النموذج الخطي لإيجاد نموذج البيانات الأصلية ومثّله بيانيًا.

45. أسي

x	0	1	2	3	4	5	6
y	2	5	17	53	166	517	1614

46. لوغاريتمي

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3−	4	8	10	12	14	15

مثال 6

احسب التقريب الخطي للبيانات الموضحة بافتراض نموذج لوغاريتمي، واحسب معادلة الخط الأفضل تمثيلاً. استخدم هذه المعادلة لإيجاد نموذج لوغاريتمي للبيانات الأصلية.

x	1	3	5	7	9	10
y	12	−7	−15	−21	−25	−27

الخطوة 2 لحساب التقريب الخطي لـ $y = a\ln x + b$؛ ومثّل بيانيًا $(\ln x, y)$.

$\ln x$	0	1.1	1.6	1.9	2.2	2.3
y	12	−7	−15	−21	−25	−27

الخطوة 2 الخط الأفضل تمثيلاً هو $y = -16.94x + 11.86$

الخطوة 3 $y = -16.94\ln x + 11.86$ $x = \ln x$

التطبيقات وحل المسائل

.47 **التضخم** تزداد أسعار السلع الاستهلاكية عامة كل عام نتيجة التضخم. من عام 2000 إلى 2008، كان متوسط معدل التضخم في الولايات المتحدة 5.4%. في ظل هذا المعدل، يمكن تمثيل سعر اللبن بعد t من الأعوام من يناير 2000 بواسطة $M(t) = 2.75(1.045)^t$. (الدرس 2-1)

a. كم كان سعر اللبن في عام 2005؟ 2000؟

b. إذا استمر التضخم بمعدل 4.5%، فكم سيكون سعر اللبن تقريباً في 2015؟

c. في أي عام بلغ سعر اللبن AED 4؟

.48 **السيارات** تنخفض قيمة السيارة الجديدة من لحظة قيادتها خارج معرض التاجر. وتستمر قيمة السيارة في الانخفاض كل عام. قيمة إحدى السيارات بعد t أعوام من شرائها هو $f(x) = 18{,}000(0.8)^t$ (الدرس 2-1)

a. ما معدل استهلاك السيارة؟

b. بعد كم عام من شراء السيارة تنخفض قيمتها الأصلية إلى النصف؟

.49 **الكيمياء** عمر النصف لإحدى المواد المشعة هو 16 عامًا. يمكن تحديد عدد الأعوام t التي يستغرقها انحلال الكمية المبدئية N_0 إلى N بواسطة $t = \dfrac{16 \log \frac{N}{N_0}}{\log \frac{1}{2}}$ (الدرس 2-2)

a. كم تقريبًا عدد الأعوام التي يستغرقها انحلال 100 جرام إلى 30 جرامًا؟

b. ما النسبة المئوية تقريبًا لما سيتبقى من 100 جرام بعد 40 عامًا؟

.50 **الزلازل** مقياس ريختر هو نظام عددي لتحديد قوة الزلازل. يعتمد العدد R على كمية الطاقة E التي يطلقها الزلزال بالكيلو وات في الساعة. ويتم تحديد قيمة R بواسطة $R = 0.67 \times \log(0.37E) + 1.46$ (الدرس 2-2)

a. جد R لزلزال يطلق 1,000,000 كيلو وات في الساعة.

b. قم بتقدير كمية الطاقة التي يطلقها زلزال يسجل 7.5 على مقياس ريختر.

.51 **علم الأحياء** الوقت الذي يستغرقه تضاعف نوع من الحيوانات يُعرف بأنه مدة الجيل ويتم تمثيله بالمعادلة $G = \dfrac{t}{2.5 \log_b d}$، حيث يمثل b العدد الأولي للحيوانات ويمثل d العدد النهائي للحيوانات ويمثل t الفترة ويمثل G مدة الجيل. إذا علمت أن مدة الجيل G لأحد الأنواع 6 أعوام، فما الفترة t التي يستغرقها 5 حيوانات للتضاعف إلى 3125 حيوانًا؟ (الدرس 2-3)

.52 **الصوت** يمكن تمثيل مستوى شدة الصوت بالديسيبل بالمعادلة $d(w) = 10 \log \frac{w}{w_0}$، حيث يمثل w شدة الصوت بالوات لكل متر مربع، ويمثل w_0 الثابت 1×10^{-12} وات لكل متر مربع. (الدرس 2-4)

a. حدد شدة الصوت لحفلة موسيقية يصل شدة الصوت بها إلى 100 ديسيبل.

b. تقارن أماني بين الحفلة وبين الموسيقى التي تعزفها في بيتها. وهي تعزف الموسيقى بمستوى 50 ديسيبلا، وهكذا فإن شدة صوت الموسيقى نصف شدة صوت الحفلة. فهل استدلالها صحيح؟ علل إجابتك رياضيًا.

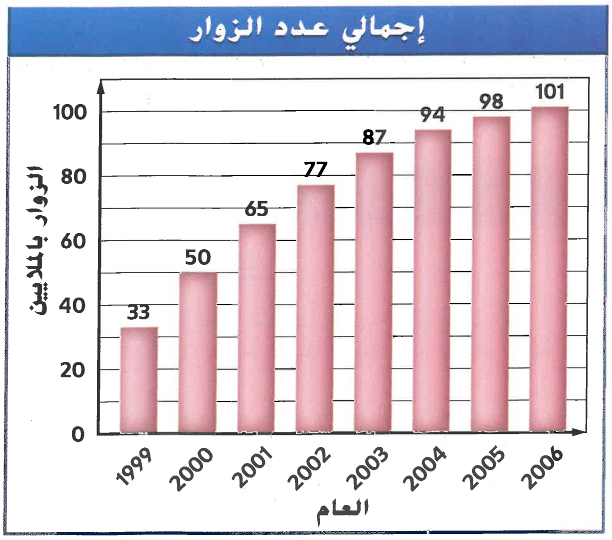
c. يتم عزف الموسيقى الهادئة بشدة 1×10^{-8} وات لكل متر مربع. ما مقدار زيادة الأعداد العشرية إذا تضاعفت الشدة؟

.53 **المعرفة المالية** لدى سالم AED 8000 ويريد إيداعها في حساب بمرابحة مركبة مستمرة. هدفه هو امتلاك AED 12,000 خلال 5 أعوام. (الدرس 2-4)

a. وجد علي بنكًا يقدم 6% على الاستثمارات. فكم يستغرق وصول استثماره إلى AED 12,000 بمعدل 6%؟

b. ما المعدل اللازم لوصول سالم إلى AED 12,000 بعد 5 أعوام؟

.54 **الإنترنت** عدد زوار موقع إنترنت رائج موضح أدناه. (الدرس 2-5)



a. قم بعمل تمثيل بياني باستخدام مخطط تشتت للبيانات. افترض أن $1990 = 0$

b. احسب التقريب الخطي للبيانات باستخدام نموذج لوغاريتمي.

c. مثّل بيانيًا البيانات التي تم تقريبها خطيًا، وجد معادلة الانحدار الخطي.

d. استخدم النموذج الخطي لإيجاد نموذج البيانات الأصلية ومثّله بيانيًا.

تدريب على الاختبار

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. ووضح المجال والمدى ونقاط التقاطع وخطوط التقارب والسلوك الطرفي، ومواضع تزايد أو تناقص الدالة.

1. $f(x) = -e^{x+7}$

2. $f(x) = 2\left(\frac{3}{5}\right)^{-x} - 4$

استخدم تمثيل $f(x)$ البياني لتوضيح التحويل الناتج في التمثيل البياني لـ $g(x)$. ثم مثّل التمثيل البياني لكل من $f(x)$ و $g(x)$.

3. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + 4$

4. $f(x) = 5^{x}$ $g(x) = -5^{-x} - 2$

5. **اختيار من متعدد** لأي دالة تنتمي $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ ؟

A $f(x) = -2 \cdot 3^{-x}$

B $f(x) = -\left(\frac{1}{10}\right)^{x}$

C $f(x) = -\log_8 (x - 5)$

D $f(x) = \log_3 (-x) - 6$

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

6. $\log_3 \frac{1}{81}$

7. $\log_{32} 2$

8. $\log 10^{12}$

9. $9^{\log_9 5.3}$

مثّل كل دالة بيانيًا.

10. $f(x) = -\log_4 (x + 3)$

11. $g(x) = \log (-x) + 5$

12. **المعرفة المالية** تستثمر AED 1500 في حساب استثماري بمعدل مرابحة 8% لمدة 12 عامًا دون إجراء أية عمليات إيداع أو سحب أخرى.

a. كم سيكون رصيد حسابك إذا كانت المرابحة مركبة شهريًا؟

b. كم سيكون رصيد حسابك إذا كانت المرابحة مركبة مستمرة؟

c. إذا كان الاستثمار مركبًا يوميًا، فكم تقريبًا يستغرق تضاعف المبلغ المبدئي؟

قم بتوسيع كل تعبير.

13. $\log_6 36xy^2$

14. $\log_3 \frac{a\sqrt{b}}{12}$

15. **جيولوجيا** يمكن حساب قوة زلزال على مقياس ريختر بواسطة المعادلة $R = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$، حيث يمثل E الطاقة الناتجة و E_0 الثابت.

a. ضرب زلزال بقوة 7.1 سان فرانسيسكو عام 1989. جد مقياس زلزال ينتج 10 أضعاف طاقة زلزال 1989.

b. في عام 1906، ضرب سان فرانسيسكو زلزال سجل 8.25. كم ضعفًا من الطاقة أنتجها زلزال 1906 بالنسبة إلى زلزال 1989؟

بسّط كل تعبير.

16. $2 \log_4 m + 6 \log_4 n - 3(\log_4 3 + \log_4 j)$

17. $1 + \ln 3 - 4 \ln x$

جد حل كل من المعادلات التالية.

18. $3^{x+8} = 9^{2x}$

19. $e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$

20. $\log x + \log (x - 3) = 1$

21. $\log_2 (x - 1) + 1 = \log_2 (x + 3)$

22. **اختيار من متعدد** أي المعادلات ليس لها حلول؟

F $e^{x} = e^{-x}$

G $2^{x-1} = 3^{x+1}$

H $\log_5 x = \log_9 x$

J $\log_2 (x + 1) = \log_2 x$

بالنسبة إلى التمرينين 23 و 24، أكمل كل خطوة.

a. جد دالة أسيّة أو لوغاريتمية لتمثيل البيانات.

b. جد قيمة كل نموذج عند $x = 20$.

23.

x	1	3	5	7	9	11	13
y	8	3	0	−2	−3	−4	−5

24.

x	1	3	5	7	9	11	13
y	3	4	5	6	7	9	10

25. **التعداد السكاني** يوضح الجدول تعداد سكان الولايات المتحدة بين عامي 1790 و 1940. افترض أن 1780 = 0.

العام	السكان (بالمليون)
1790	4
1820	10
1850	23
1880	50
1910	92
1940	132

a. احسب التقريب الخطي للبيانات بافتراض نموذج تربيعي. مثّل البيانات بيانيًا، واكتب معادلة للخط الأفضل تمثيلًا.

b. استخدم النموذج الخطي لإيجاد نموذج البيانات الأصلية. هل النموذج التربيعي جيد التمثيل للنمو السكاني؟ اشرح.

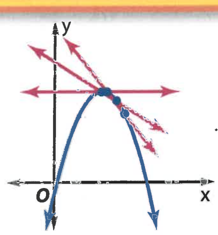
الوحدة 2

الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم
الحساب التقريبي لمعدلات التغير

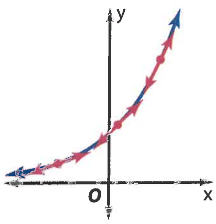
الهدف

- استخدام المستقيمات القاطعة والاشتقاق من أجل الحساب التقريبي لمعدلات التغير.

استكشفنا معدل تغير دالة عند نقطة معينة باستخدام المستقيمات القاطعة والاشتقاق. لقد تعلمت أنه يمكن تمثيل معدل تغير دالة عند نقطة معينة بواسطة ميل مستقيم المماس بالدالة عند تلك النقطة. ويُطلق على هذا معدل التغيراللحظي عند تلك النقطة.

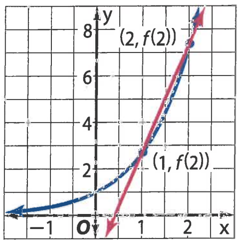


يتم استخدام الثابت e في استخدامات النمو والتضاؤل المستمرين. ولهذا الثابت كذلك العديد من الاستخدامات في حساب التفاضل والتكامل. معدل تغير $f(x) = e^x$ عند أي من نقاطها يكون فريدًا، مما يجعلها دالة مفيدة للاستكشاف والتطبيق في حساب التفاضل والتكامل.



نشاط 1 معدل التغير التقريبي

تقريب معدل تغير $f(x) = e^x$ عند $x = 1$.



الخطوة 1 مثّل $f(x) = e^x$ بيانيًا؛ وارسم مخططًا للنقطتين $P(1, f(1))$ و$Q(2, f(2))$.

الخطوة 2 ارسم خطًا قاطعًا للدالة $f(x)$ عبر P و Q.

الخطوة 3 استخدم $m = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ لحساب متوسط معدل التغير m لـ $f(x)$ باستخدام P و Q.

الخطوة 4 كرر الخطوات 1-3 مرتين إضافيتين. أولاً استخدم $P(1, f(1))$ و$Q(1.5, f(1.5))$ ثم استخدم $P(1, f(1))$ و$Q(1.25, f(1.25))$.

تحليل النتائج

1. بينما يقترب الإحداثي x لـ Q من 1، مما يقترب متوسط معدل التغير m؟
2. قم بتقييم ووصف الكفاءة الإجمالية والفاعلية الإجمالية لاستخدام المستقيمات القاطعة لتقريب معدل التغير اللحظي لدالة عند نقطة معلومة.

قمت بتطوير تعبير الاشتقاق لحساب ميل المستقيمات القاطعة لقيم مختلفة من h.

ناتج قسمة الفرق

$$m = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

بينما تنخفض قيمة h، يقترب الخط القاطع أكثر فأكثر من مستقيم المماس بالدالة. ويعمل استبدال قيم h المتناقصة في الاشتقاق على إنتاج ميول خطية قاطعة تقترب من حد ما. ويمثل هذا الحد ميل مستقيم المماس ومعدل التغير اللحظي للدالة عند تلك النقطة.

نشاط 2 معدل التغير التقريبي

تقريب معدل تغير $f(x) = e^x$ عند نقاط متعددة.

الخطوة 1 استبدل $f(x) = e^x$ في الاشتقاق.

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

الخطوة 2 قرّب معدل تغير $f(x)$ عند $x = 1$ باستخدام قيم h التي تقترب من 0. افترض أن $h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$.

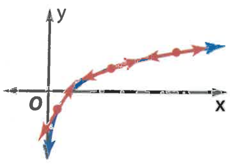
$$m = \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

الخطوة 3 كرر الخطوتين 1 و 2 بالنسبة إلى $x = 2$ و $x = 3$.

تحليل النتائج

3. حيث $h \to 0$، مما يقترب متوسط معدل التغير لكل قيمة من x؟
4. اكتب تعبيرًا لمعدل تغير $f(x) = e^x$ عند أي نقطة x.
5. جد معدل تغير $g(x) = 3e^x$ عند $x = 1$. كيف كان تأثير ضرب e^x في ثابت على معدل التغير عند $x = 1$؟
6. اكتب تعبيرًا لمعدل تغير $g(x) = ae^x$ عند أي نقطة x.

في هذا الفصل، تعلمت أن $f(x) = \ln x$ هي معكوس $g(x) = e^x$، وتعلمت كذلك بعض استخداماتها في تطبيقات النمو والتضاؤل الأسيين. كما هو الحال مع e؛ فإن معدل تغير $f(x) = \ln x$ عند أي من نقاطها فريد، مما يجعلها كذلك دالة مفيدة أخرى في تطبيقات حساب التفاضل والتكامل.



نشاط 3 معدل التغير التقريبي

قرّب معدل تغير $f(x) = \ln x$ عند نقاط متعددة.

الخطوة 1 استبدل $f(x) = \ln x$ في الاشتقاق.

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

الخطوة 2 قرّب معدل تغير $f(x)$ عند $x = 2$ باستخدام قيم h التي تقترب من 0. افترض أن $h = 0.1$ ،0.01 ،0.001 ،0.0001.

$$m = \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

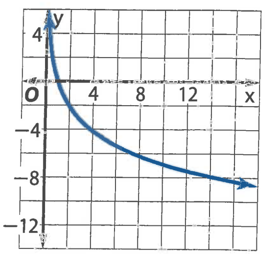
الخطوة 3 كرر الخطوتين 1 و 2 بالنسبة إلى $x = 3$ و $x = 4$.

تحليل النتائج

7. حيث $h \to 0$، مم يقترب متوسط معدل التغير لكل قيمة من x؟
8. اكتب تعبيرًا لمعدل تغير الدالة $f(x) = \ln x$ عند أي نقطة x.

النموذج والتطبيق

9. في هذه المسألة، سوف تقوم باستقصاء معدل تغير الدالة $g(x) = -3 \ln x$ عند أي نقطة x.
   a. قرّب معدلات تغير $g(x)$ عند $x = 2$ ثم عند $x = 3$.
   b. ما وجه المقارنة بين معدلات التغير هذه ومعدلات تغير $f(x) = \ln x$ عند هاتين النقطتين؟
   c. اكتب تعبيرًا لمعدل تغير الدالة $g(x) = a \ln x$ لأي نقطة x.



الوحدة

3 الدوال المثلثية

السابق

لقد درست الدوال الأسية واللوغاريتمية، وهما نوعان من الدوال المتسامية.

الحالي

بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادراً على:

- استخدام الدوال المثلثية لحل المثلثات قائمة الزاوية.
- إيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية.
- تمثيل الدوال المثلثية والدوال المثلثية العكسية بيانيًا

لماذا؟ ▲

تحديد المواقع عبر الأقمار الصناعية يعمل نظام الملاحة عبر الأقمار الصناعية من خلال استقبال إشارات من الأقمار الصناعية الموجودة في المدار، وتحديد المسافة لكل من الأقمار الصناعية. ومن ثمّ استخدام حساب المثلثات لتحديد الموقع على سطح الأرض. تُستخدم هذه التقنيات أيضًا في أثناء تحديد مواقع السيارات والطائرات، والسفن والمركبات الفضائية.

القراءة المسبقة استخدم إستراتيجية القراءة المسبقة للمراجعة لتوقع هدفين أو ثلاثة من أهداف الوحدة 3.

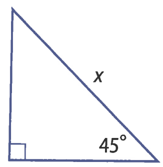
الاستعداد للوحدة

أجب عن أسئلة التدريب السريع أدناه

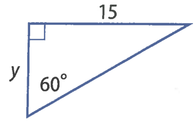
تحقق سريع

جد القيمة المجهولة في كل شكل مما يلي. (المهارات المطلوبة)

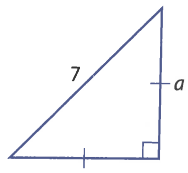
1.



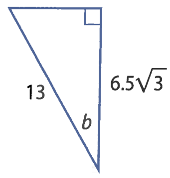
2.



3.



4.



حدد ما إذا كان كل مما يلي يمكن أن يمثل قياس زوايا المثلث الثلاث. اكتب نعم أو لا. (المهارات المطلوبة)

5. 4, 8, 12

6. 12, 15, 18

7. **الجبر** طول ضلع زاوية المثلث 25 ,17 + x, x. إذا كان طول الضلع الأطول 25، فما قيمة x التي تجعل المثلث قائم الزاوية؟ (المهارات المطلوبة)

جد للمعادلة أي خط تقارب رأسي أو أفقي. (الدرس 5-2)

8. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 8}$

9. $h(x) = \dfrac{x^3 - 27}{x + 5}$

10. $f(x) = \dfrac{x(x-1)^2}{(x-2)(x+4)}$

11. $g(x) = \dfrac{x + 5}{(x-3)(x-5)}$

12. $h(x) = \dfrac{x^2 + x - 20}{x + 5}$

13. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 12}{2x - 3}$

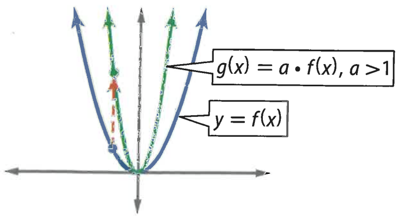
المفردات الجديدة

الدوال المثلثية	trigonometric functions
جيب الزاوية	sine
جيب التمام	cosine
ظل الزاوية	tangent
قاطع التمام	cosecant
القاطع	secant
ظل التمام	cotangent
دالة المقلوب	reciprocal function
معكوس الجيب	inverse sine
معكوس جيب التمام	inverse cosine
معكوس ظل الزاوية	inverse tangent
راديان	radian
زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء	coterminal angles
زاوية المرجع	reference angle
دائرة الوحدة	unit circle
دالة دائرية	circular function
دورة	period
منحنى الجيب	sinusoid
السعة	amplitude
التكرار	frequency
إزاحة الطور	phase shift
قانون الجيوب	Law of Sines
قانون جيوب التمام	Law of Cosines

مراجعة المفردات

الانعكاس (reflection) الصفحة 48 صورة طبق الأصل من التمثيل البياني لدالة بالنسبة لأحد الخطوط المحددة

تغيير الأبعاد (التمدّد) (dilation) الصفحة 49 تحوُّل غير مُتصلِّب له تأثير ضغط (تصغير) أو توسيع (تكبير) التمثيل البياني لإحدى الدوال أفقيًّا أو رأسيًّا



Vertical dilation

3-1 حساب المثلّثات قائمة الزوايا

السابق..
- تم إيجاد قيمة النسب.

الحالي..
1. إيجاد قيم النسب المثلثية للزوايا الحادة للمثلثات القائمة الزاوية.
2. حل المثلثات القائمة الزاوية.

لماذا؟..
- تعد البالونات الكبيرة المملوءة بغاز الهليوم إحدى تقاليد العديد من العروض التي تجري في الأعياد. حيث يستخدم المتطوعون خيوطاً طويلة متصلة بالبالون لتوجيه البالون على طول مسار العرض.

لنفترض أن اثنين من هذه الخيوط متصلان بأحد البالونات من عقدة واحدة، وأن المتطوعين اللذين يمسكان هذه الوصلات يقفان بحيث تكون نهايات الخيوط واقفة على المستوى الرأسي نفسه. إذا كنت تعرف قياس الزاوية التي يصنعها كل خيط مع الأرض والمسافة بين المتطوعين يمكنك استخدام حساب المثلث القائم الزاوية لإيجاد ارتفاع البالون عن الأرض.

المفردات الجديدة

النسب المثلثية trigonometric ratios

دوال حساب المثلثات trigonometric functions

جيب الزاوية sine

جيب التمام cosine

ظل الزاوية tangent

قاطع التمام cosecant

القاطع secant

ظل التمام cotangent

نسبة المقلوب reciprocal function

نسبة مثلثية عكسية inverse trigonometric function

معكوس الجيب inverse sine

معكوس جيب التمام inverse cosine

معكوس ظل الزاوية inverse tangent

زاوية الارتفاع angle of elevation

زاوية الانخفاض angle of depression

حل مثلث قائم الزاوية solve a right triangle

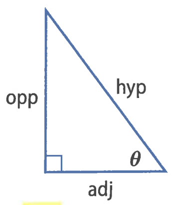
1 قيم النسب المثلثية

تشير كلمة حساب المثلثات *حساب المثلثات إلى قياس المثلث*. وسوف تدرس في هذه الوحدة حساب المثلثات من حيث أنها علاقات بين أضلاع وزوايا المثلثات ومن حيث أنها مجموعة من النسب المحددة في نظام الأعداد الحقيقي. وسوف تدرس في هذا الدرس *حساب المثلثات قائمة الزاوية*

باستخدام قياسي الضلعين الجانبين لمثلث قائم الزاوية وزاوية المرجع θ، يمكننا تشكيل **النسب المثلثية** التي تحدد ست **نسب مثلثية**.

المفهوم الأساسي النسب المثلثية

افترض أن θ زاوية حادة في مثلث قائم والاختصارات opp, adj, hyp تشير إلى طول الضلع المقابل لـ θ. وطول الضلع المجاور لـ θ. وطول الوتر. على الترتيب.



وبالتالي تكون النسب المثلثية الست لـ θ محددة على النحو الآتي:

sine $(\theta) = \sin\theta = \dfrac{\text{opp}}{\text{hyp}}$ **cosecant** $(\theta) = \csc\theta = \dfrac{\text{hyp}}{\text{opp}}$

cosine $(\theta) = \cos\theta = \dfrac{\text{adj}}{\text{hyp}}$ **secant** $(\theta) = \sec\theta = \dfrac{\text{hyp}}{\text{adj}}$

tangent $(\theta) = \tan\theta = \dfrac{\text{opp}}{\text{adj}}$ **cotangent** $(\theta) = \cot\theta = \dfrac{\text{adj}}{\text{opp}}$

يطلق على نسب **cosecant**، ونسب **secant**، ونسبة **cotangent** **مقلوب النسب المثلثية** وذلك لأن النسب الخاصة بها تكون مقلوبًا لنسب **sine** و **cosine** و **tangent** على الترتيب. ولذلك، تعد العبارات التالية صحيحة.

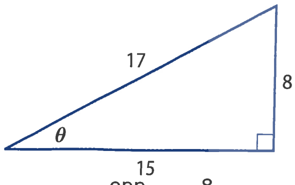
$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

من تعاريف نسبة **sine** ونسبة **cosine** ونسبة **tangent** ونسبة **cotangent**، يمكنك أيضًا اشتقاق العلاقات الآتية:

ستثبت هذه العلاقات في التمرين 83

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

المثال 1 إيجاد قيم النسب المثلثية



جد قيم النسب المثلثية الست لـ θ.

طول الضلع المقابل لـ θ هو 8، وطول الضلع المجاور لـ θ هو 15، وطول الوتر 17.

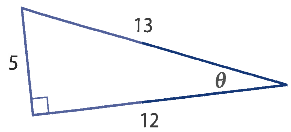
$\sin\theta = \dfrac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \dfrac{8}{17}$ opp = 8 و hyp = 17 $\csc\theta = \dfrac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \dfrac{17}{8}$

$\cos\theta = \dfrac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \dfrac{15}{17}$ adj = 15 و hyp = 17 $\sec\theta = \dfrac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \dfrac{17}{15}$

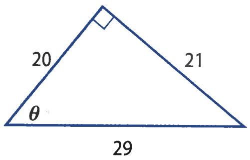
$\tan\theta = \dfrac{\text{opp}}{\text{adj}} = \dfrac{8}{15}$ jda = 5 و ppo = 8 $\cot\theta = \dfrac{\text{adj}}{\text{opp}} = \dfrac{15}{8}$

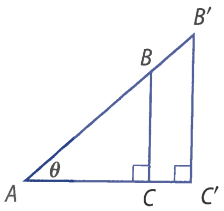
تمرين موجّه

1A.



1B.





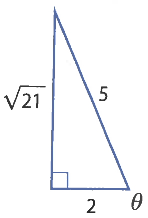
ضع في الحسبان أن قيمة $\sin\theta$ تساوي:

باستخدام $\triangle ABC$: $\sin\theta = \dfrac{BC}{AB}$ باستخدام $\triangle AB'C'$: $\sin\theta = \dfrac{B'C'}{AB'}$

لاحظ أن المثلثين متشابهان لأنهما مثلثان قائما الزاوية ويشتركان في زاوية واحدة، θ.
ولأن المثلثين متشابهان، فإن نسب الأضلاع المتناظرة متساوية، لذا فإنّ $\dfrac{B'C'}{AB'} = \dfrac{BC}{AB}$.

ومن ثم تكون $\sin\theta$ لها القيمة نفسها بغض النظر عن المثلث المستخدم. تعد قيم النسب ثابتة لقياس زاوية معينة. إذ إنها لا تعتمد على قياسات المثلث قائم الزاوية.

المثال 2 استخدام قيمة نسبة مثلثية ما لإيجاد قيم النسب المثلثية الأخرى



إذا كان $\cos\theta = \dfrac{2}{5}$، فجد قيم النسب المثلثية للزاوية الحادة θ.

ابدأ برسم المثلث القائم الزاوية وتسمية الزاوية الحادة θ.

لأن $\dfrac{2}{5} = \dfrac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \cos\theta$، سمّ الضلع المجاور 2 والوتر 5.

من خلال نظرية فيثاغورس، يكون طول الضلع المقابل لـ θ هو $\sqrt{21} = \sqrt{5^2 - 2^2}$.

$\sin\theta = \dfrac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$ $\tan\theta = \dfrac{\text{opp}}{\text{adj}} = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$ $\sec\theta = \dfrac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \dfrac{5}{2}$

$\csc\theta = \dfrac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \dfrac{5}{\sqrt{21}} = \dfrac{5\sqrt{21}}{21}$ $\cot\theta = \dfrac{\text{adj}}{\text{opp}} = \dfrac{2}{\sqrt{21}} = \dfrac{2\sqrt{21}}{21}$

تمرين موجّه

2. إذا كان $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$، فجد قيم النسب المثلثية للزاوية الحادة θ.

نصيحة دراسية

تذكّر النسب المثلثية

طريقة التذكّر
SOH-CAH-TOA هي الأكثر استخدامًا لتذكّر نسب sine، cosine و tangent.

$\sin\theta = \dfrac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

$\cos\theta = \dfrac{\text{adj}}{\text{hyp}}$

$\tan\theta = \dfrac{\text{opp}}{\text{adj}}$

انتبه!

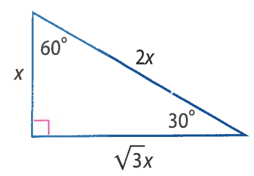
مفهوم خاطئ شائع
في المثال 2، قد تكون تسمية الضلع المجاور للمثلث 4 والوتر 10. وذلك لأن $\cos\theta = \dfrac{2}{5}$ تعطي نسبة الضلع المجاور والوتر، ولا تعطي قياسات محددة.

سيُطلب منك على نحو متكرر إيجاد النسب المثلثية لقياسات زاوية محددة. ويبيّن لك الجدول التالي قيم النسب المثلثية الست لمقاييس ثلاث زوايا شائعة: 30°، 45°، 60°. ولتتذكّر هذه القيم، يمكنك استخدام خواصّ المثلثات 30°–60°–90° و 45°–45°–90°.

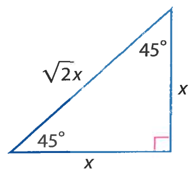
المفهوم الأساسي القيم المثلثية للزوايا الخاصة

θ	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\csc\theta$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\sec\theta$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
$\cot\theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

مثلّث 30°-60°-90°



مثلّث 45°-45°-90°



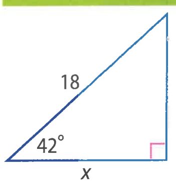
سوف تثبت بعض هذه القيم في التمرينات 57-62.

2 حل المثلثات قائمة الزاوية

يمكن استخدام النسب المثلثية لإيجاد أطوال الأضلاع وقياسات زوايا المثلثات القائمة المجهولة.

المثال 3 إيجاد طول الضلع المجهول

جد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



ما دم قد حصلت على قياس زاوية حادة وطول وتر المثلث، استخدم نسبة **cosine** لإيجاد طول الضلع المجاور للزاوية المعطاة.

$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$ نسبة cosine

$\cos 42° = \frac{x}{18}$ $\theta = 42°$, adj $= x$, hyp $= 18$

$18\cos 42° = x$ بضرب كل طرف في 18.

$13.4 \approx x$ استخدم حاسبة.

لذا فإن قيمة x تبلغ نحو 13.4

التحقق يمكنك التحقق من إجابتك عن طريق تعويض $x = 13.4$ في $\cos 42° = \frac{x}{18}$.

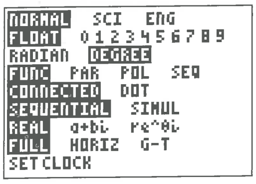
$\cos 42° = \frac{x}{18}$

$\cos 42° = \frac{13.4}{18}$ $x = 13.4$

$0.74 = 0.74$ ✓ بسّط.

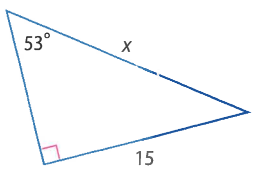
نصيحة تقنية

منوال الدرجة لتتمكن من إيجاد قيمة النسبة المثلثية لزاوية مقاسة بالدرجات، عليك أولاً إعداد الحاسبة على *منوال الدرجة* باختيار DEGREE في خاصية MODE من الحاسبة البيانية.

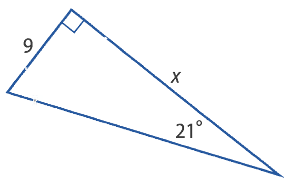


تمرين موجّه

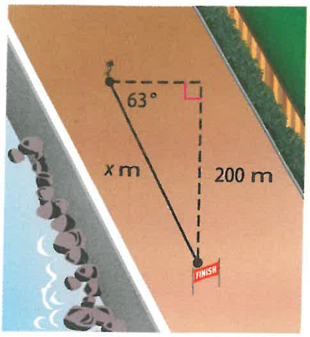
3A.



3B.



مثال 4 من الحياة اليومية - إيجاد طول الضلع المجهول



الألعاب الرياضية الثلاثية يعدو متسابق في الألعاب الثلاثية ضمن المسار المبين. حدد المسافة التي يجب أن يقطعها العدّاء ليصل إلى خط النهاية بالأقدام.

لديك قياس زاوية حادة وطول الضلع المقابل. يمكنك إذًا استخدام نسبة sine لإيجاد الوتر.

$\sin\theta = \frac{opp}{hyp}$ نسبة sine

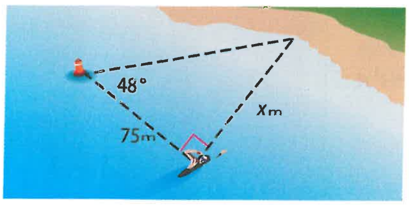
$\sin 63° = \frac{200}{x}$ $\theta = 63°, opp = 200, hyp = x$

$x \sin 63° = 200$ بضرب كل طرف في x.

$x = \frac{200}{\sin 63°}$ أو حوالي 224.47 بقسمة كل طرف على $\sin 63°$.

إذًا، يجب أن يعدو المتسابق حوالي 224.5 m لينهي الثلاثي.

تمرين موجه



4. **الألعاب الرياضية الثلاثية** افترض أن متسابقًا في الجزء الخاص بالسباحة من السباق عليه أن يسبح خلال المسار المُبيَّن. جد المسافة التي يجب أن يسبحها المتسابق ليصل إلى الشاطئ.

الربط بالحياة اليومية

يقام سباق الرجل الحديدي الرياضي الثلاثي في هاواي، ويتكون من ثلاثة أحداث ثابتة. تتضمن سباحة 3.9 km، وركوب دراجات 180 km، وسباق عدو 42.2 km.

المصدر: مؤسسة الألعاب الرياضية الثلاثية العالمية

عندما تكون القيمة المثلثية لزاوية حادة معروفة، فإن **النسب المثلثية العكسية** المماثلة يمكن أن تستخدم لإيجاد قياس الزاوية.

المفهوم الأساسي النسب المثلثية العكسية

معكوس sine إذا كانت θ زاوية حادة و $\sin\theta$ هو x، فإن **معكوس sine** لـ x هو قياس الزاوية θ. هذا يعني. إذا كانت $\sin\theta = x$، فإن $\theta = \sin^{-1} x$.

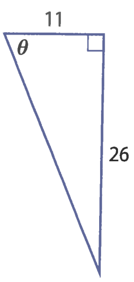
معكوس cosine إذا كانت θ زاوية حادة $\cos\theta$ هو x، فإن **معكوس cosine** لـ x هو قياس الزاوية θ. هذا يعني. إذا كانت $\cos\theta = x$، فإن $\theta = \cos^{-1} x$.

معكوس tangent إذا كانت θ زاوية حادة وظل θ $\tan$ هو x، فإن **معكوس tangent** لـ x هو قياس الزاوية θ. هذا يعني. إذا كانت $\tan\theta = x$، فإن $\theta = \tan^{-1} x$.

قراءة في الرياضيات

النسب المثلثية العكسية التعبير $\sin^{-1} x$ تتم قراءته كمعكوس $\sin x$. احرص ألا تخلط هذا الرمز بالرمز الخاص بالأسس السالبة: $\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$. بدلًا من ذلك، هذا الرمز يشبه الرمز الخاص بمعكوس الدالة $f^{-1}(x)$.

المثال 5 إيجاد قياس الزاوية المجهولة



استخدم النسب المثلثية لإيجاد قياس θ. قرّب إلى أقرب درجة إن تطلب الأمر.

بما أن قياسات الأضلاع المقابلة والمجاورة لـ θ معطاة. استخدم نسبة tan.

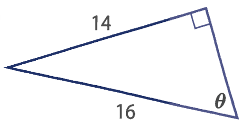
$\tan\theta = \frac{opp}{adj}$ نسبة tan

$\tan\theta = \frac{26}{11}$ $opp = 26, adj = 11$

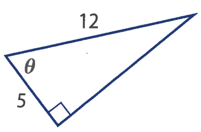
$\theta = \tan^{-1}\frac{26}{11}$ أو حوالي 67° تعريف معكوس tan

تمرين موجه

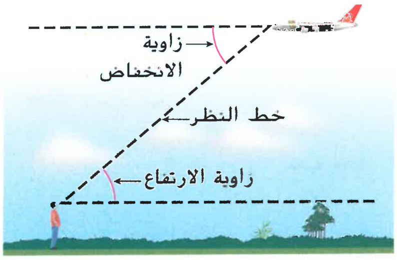
5A.



5B.



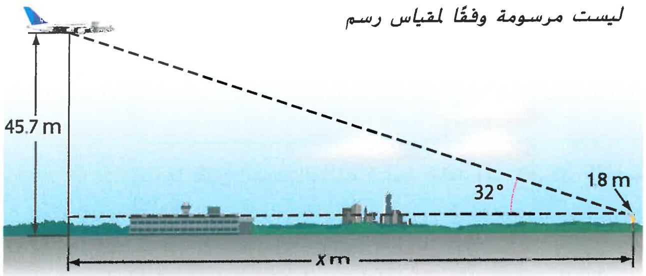
تستخدم بعض تطبيقات حساب المثلثات زاوية ارتفاع أو انخفاض. إن **زاوية الارتفاع** زاوية يكوّنها خط أفقي وخط نظر المراقب تجاه هدف أعلى منه. إن **زاوية الانخفاض** زاوية يكوّنها خط أفقي وخط نظر المراقب تجاه هدف أدنى منه.



في الشكل، تتطابق زاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض لأنهما زاويتان داخليتان متبادلتان بين خطين متوازيين.

مثال 6 من الحياة اليومية استخدام زاوية الارتفاع

طائرات عامل من الطاقم الأرضي يبلغ طوله 1.8 m يوجّه طائرة على مدرج المطار. إذا نظر العامل إلى الطائرة بزاوية ارتفاع قدرها 32°، فما المسافة الأفقية بين العامل والطائرة؟



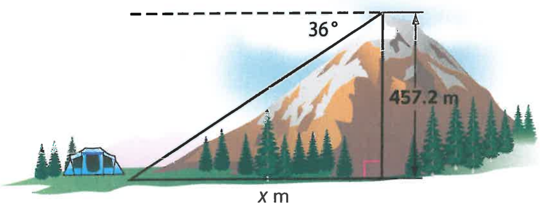
لأن العامل يبلغ من الطول 1.8 m، فالمسافة الرأسية بين العامل والطائرة 45.7-1.8، أو 43.9 متر. نظرًا لأن قياس الزاوية والضلع المقابل لها معلومان في المسألة، فيمكنك استخدام نسبة الظل لإيجاد x.

$\tan\theta = \frac{opp}{adj}$	نسبة tan
$\tan 32° = \frac{43.9}{x}$	$\theta = 32°$, opp = 43.9, adj = x
$x \tan 32° = 43.9$	بضرب كل طرف في x.
$x = \frac{43.9}{\tan 32°}$	بقسمة كل من الطرفين على tan 32°.
$x \approx 70.2$	باستخدام حاسبة.

إذًا، فالمسافة الأفقية بين العامل والطائرة تبلغ تقريبًا 70.2 m.

تمرين موجّه

6. **التخييم** تسلقت مجموعة من المتسلقين قمة جبل تبلغ **457.2 m** خلال رحلتهم. عندما ينظر المتسلقون للأسفل بزاوية انخفاض قدرها **36°**، يمكنهم رؤية مخيمهم عن بعد. ما المسافة بين المخيم والمجموعة مُقرّبًا الناتج لأقرب متر؟



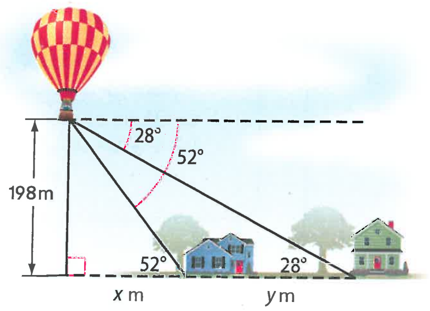
مهن من الحياة اليومية

طاقم المطار الأرضي يشغل أفراد طاقم المطار الأرضي مركبات خدمة التعلية. ويتولون أمر الحمولات/الأمتعة وإرشاد أو سحب الطائرة. يجب أن يكون أفراد الطاقم حاصلين على شهادة الثانوية ورخصة قيادة سارية وسجل قيادة جيد.

يمكن استخدام زوايا الارتفاع والانخفاض لمعرفة المسافات بين موقعين، كما يمكن تعيين ارتفاع موضع ما إذا توفرت زاويتان معطاتان من موضعي مراقبة مختلفين.

مثال 7 من الحياة اليومية استخدام زاويتي الارتفاع أو الانخفاض

ركوب المنطاد منطاد هواء ساخن يتحرك فوق حي بزاوية انخفاض قدرها 28° بالنسبة لمنزل و 52° بالنسبة لمنزل آخر في آخر الشارع. إذا كان ارتفاع المنطاد هو 198 m، فاستنتج المسافة بين المنزلين.



ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة. لأن زاوية الارتفاع من المنزل للمنطاد تتطابق مع زاوية الانخفاض من المنطاد للمنزل، يمكنك تسمية زوايا الارتفاع كما هو مبين. سَمِّ المسافة الأفقية من المنطاد للمنزل الأول x والمسافة بين المنزلين y.

من المثلث الأصغر القائم الزاوية، يمكنك استخدام نسبة tan لإيجاد x.

$\tan \theta = \frac{opp}{adj}$ نسبة tan

$\tan 52° = \frac{198}{x}$ $\theta = 52°$, opp = 198, adj = x

$x \tan 52° = 198$ مع ضرب كل طرف في x.

$x = \frac{198}{\tan 52°}$ بقسمة كل من الطرفين على $\tan 52°$.

من المثلث الأكبر يمكنك استخدام نسبة الظل لإيجاد y.

$\tan \theta = \frac{opp}{adj}$ نسبة tan

$\tan 28° = \frac{198}{x + y}$ $\theta = 28°x + y$, opp = 198, adj = $x + y$

$(x + y) \tan 28° = 198$ مع ضرب كل طرف في $x + y$.

$x + y = \frac{198}{\tan 28°}$ بقسمة كل من الطرفين على $\tan 28°$.

$\frac{198}{\tan 52°} + y = \frac{198}{\tan 28°}$ استبدل $x = \frac{198}{\tan 52°}$

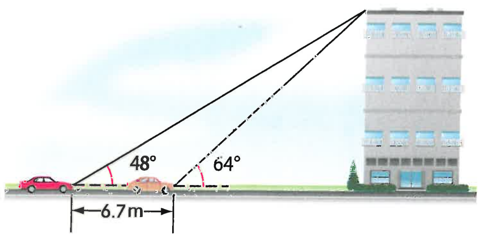
$y = \frac{198}{\tan 28°} - \frac{198}{\tan 52°}$ اطرح $\frac{198}{\tan 52°}$ من كل طرف.

$y \approx 217.8$ m استخدام الحاسبة.

ومن ثم، فالمنزلان بينها مسافة قدرها تقريبًا 217.8 m.

تمرين موجّه

7. مبان زاوية الارتفاع من السيارة لأعلى شقة بالمبنى هي 48°. إذا كانت زاوية الارتفاع من سيارة أخرى أمام السيارة الأولى مباشرة بمسافة 6.7 m هي 64°، فكم يبلغ ارتفاع المبنى؟



نصيحة دراسية

قياس غير مباشر عندما تحسب المسافة بين موضعين مستخدمين زوايا الانخفاض، من المهم أن تتذكر أن الموضع يجب أن يقع على المستوى الأفقي نفسه.

نصيحة تقنية

استخدام الأقواس في أثناء إيجاد قيمة تعبير مثلثي باستخدام الحاسبة البيانية، انتبه إلى غلق الأقواس. بينما تقوم الحاسبة بإعادة القيمة نفسها للتعبيرين tan(26 و tan(26)، فإنها لا تفعل الشيء نفسه مع التعبيرين tan(26 + 50 و tan(26) + 50.

يمكن استخدام النسب المثلثية ومعكوساتها من أجل **حل مثلث قائم الزاوية**، ما يعني إيجاد قياسات جميع أضلاع وزوايا المثلث.

قراءة في الرياضيات

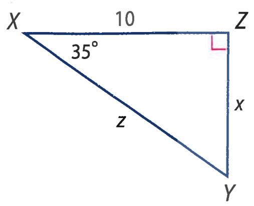
تسمية المثلثات

خلال هذه الوحدة، ستُستخدَم الحروف الكبيرة للتعبير عن كل من رأس مثلث أو قياس الزاوية عند هذا الرأس. ستُستخدَم الحروف نفسها في الحالة الصغيرة للتعبير عن كل من الضلع المقابل للزاوية ولطول هذا الضلع.

المثال 8 حل مثلث قائم الزاوية

حُلّ كل مثلث. حوّل طول الضلع لأقرب جزء من عشرة، وحوّل قياس الزاوية إلى أقرب درجة.

a.



جد x و z باستخدام النسب مثلثية.

$\tan °35 = \frac{x}{10}$ بالتعويض.

$10 \tan 35° = x$ باستخدام الحاسبة.

$7.0 \approx x$ بالضرب.

$\cos 35° = \frac{10}{z}$ بالتعويض.

$z \cos 35° = 10$ بالضرب.

$z = \frac{10}{\cos °35}$ بالقسمة.

$z \approx 12.2$ باستخدام الحاسبة.

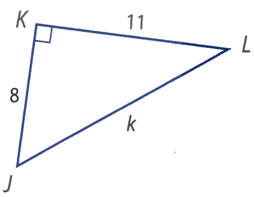
بما أن مقياس الزاويتين معطى، فإن Y يمكن إيجادها بطرح X من 90°.

$Y = 90° + 35°$ زوايتا X و Y متتامتان.

$Y = 55°$ بالطرح.

لذا فإن، $7.0 \approx x$، $Y = 55°$، و $z \approx 12.2$.

b.



لأن طول الضلعين معطى، يمكنك استخدام نظرية فيثاغورس لتجد أنّ $k = \sqrt{185}$ أو حوالي 13.6. ويمكنك إيجاد J باستخدام أي من النسب المثلثية.

$\tan J = \frac{11}{8}$ بالتعويض.

$J = \tan^{-1} \frac{11}{8}$ تعريف معكوس tan

$J \approx 53.97°$ استخدام الحاسبة.

بما أن J معروفة الآن، يمكنك إيجاد L بطرح J من 90°.

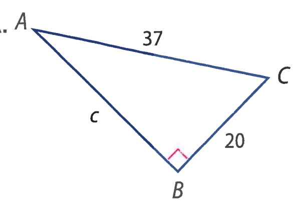
$53.97° + L \approx 90°$ زاويتا J و L متتامتان.

$L \approx 36.03°$ بالطرح.

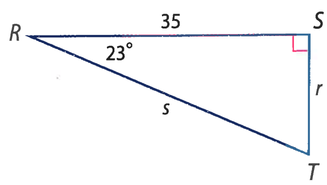
لذا فإن: $L \approx 36°$، $J \approx 54°$، و $k \approx 13.6$.

تمرين موجّه

8A.

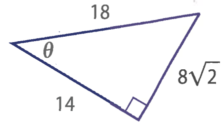


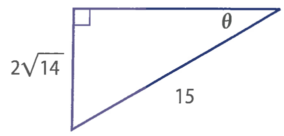
8B.

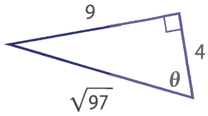


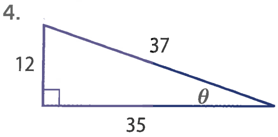
تمارين

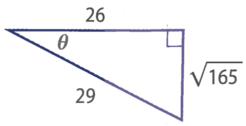
جد قيم النسب المثلثية الست لـ θ. (المثال 1)

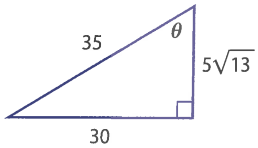
1. 

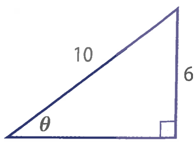
2. 

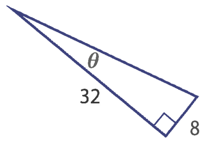
3. 

4. 

5. 

6. 

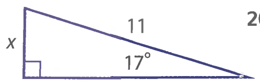
7. 

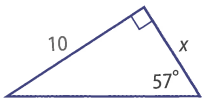
8. 

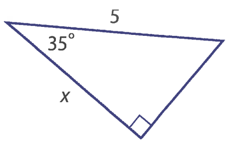
استخدم قيمة النسبة المثلثية المعطاة للزاوية الحادة θ لإيجاد القيم الدقيقة لقيم النسب المثلثية الخمس المتبقية لـ θ. (المثال 2)

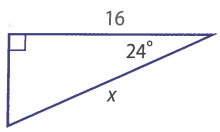
9. $\sin\theta = \frac{4}{5}$
10. $\cos\theta = \frac{6}{7}$
11. $\tan\theta = 3$
12. $\sec\theta = 8$
13. $\cos\theta = \frac{5}{9}$
14. $\tan\theta = \frac{1}{4}$
15. $\cot\theta = 5$
16. $\csc\theta = 6$
17. $\sec\theta = \frac{9}{2}$
18. $\sin\theta = \frac{8}{13}$

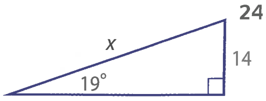
جد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. (المثال 3)

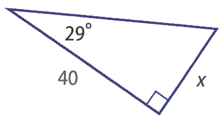
19. 

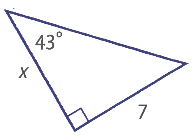
20. 

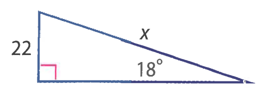
21. 

22. 

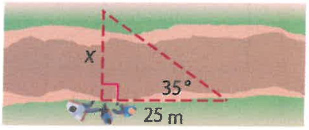
23. 

24. 

25. 

26. 

27. **تسلق الجبال** يجب أن يحدد فريق من المتسلقين عرض الوادي لتجهيز الأدوات اللازمة لعبوره. إذا سار المتسلقون 25 m خلال الوادي من نقطة عبورهم، ونظروا إلى نقطة العبور من الجهة البعيدة للوادي بزاوية قدرها 35°، فكم يكون عرض الوادي؟ (المثال 4)



28. **التزلج** بنى أحمد منحدرًا للتزلج بارتفاع 3.5 ft ويميل على الأرض بزاوية 18°. (المثال 4)

a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة.

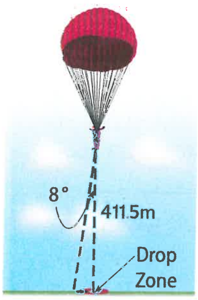
b. حدد طول المنحدر.

29. **المنعطف** يتحول المرور من نقطة A على شارع النصر يسارًا 0.8 mi على شارع الاتحاد، ثم يمينًا على شارع حصة، الذي يتقاطع مع شارع النصر بزاوية 32°. (المثال 4)

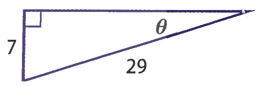
a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة.

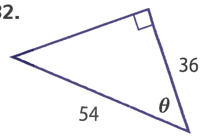
b. حدد المسافة التقريبية من النقطة A الى نقطة الإلتقاء .

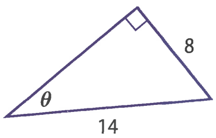
30. **الإسقاط** يواجه مِظلي ريحًا أقوى من المتوقع في أثناء سقوطه من ارتفاع 411.5 مترا، مما يتسبب في انحرافه بزاوية قدرها 8°. كم يبعد المظلي عن منطقة الإنزال عند هبوطه؟ (المثال 4)

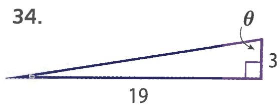


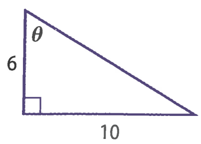
جد قياس زاوية θ. قرّب إلى أقرب درجة إذا تتطلب الأمر. (المثال 5)

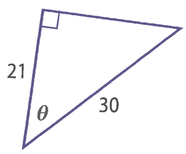
31. 

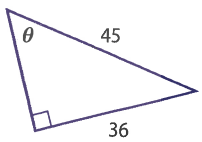
32. 

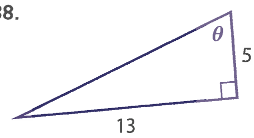
33. 

34. 

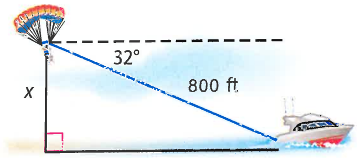
35. 

36. 

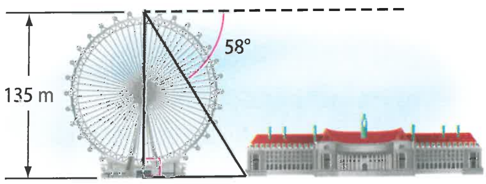
37. 

38. 

39. التزلّج الهوائي قررت إيمان أن تجرب التزلج الهوائي. فتم ربطها بمظلة يجرها يخت. يربط مظلتها بالقارب حبل طوله 800 ft، يتخذ أسفلها زاوية انخفاض قدرها 32°. فكم كان ارتفاع إيمان فوق المياه؟ (مثال 6)



40. عجلة المشاهدة عين لندن عبارة عن عجلة مشاهدة طولها 135 m. إذا نظر أحد المسافرين من أعلى العجلة إلى حوض أسماك لندن بزاوية انخفاض قدرها 58°، فما المسافة بين حوض أسماك لندن وعين لندن؟ (المثال 6)



41. قطار الملاهي على قطار ملاهي، يصعد المسار الذي يبلغ 114.3 ft بزاوية ارتفاع قدرها 55° للقمة قبل أول وأعلى هبوط. (مثال 6)

a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة.

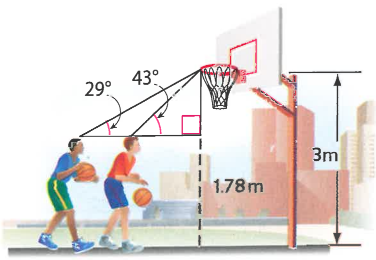
b. حدد طول قطار الملاهي.

42. مصعد التزلج تقوم إحدى الشركات بتركيب مصعد جديد للتزلج على ارتفاع 225 m أعلى جبل. ليصعد إليه بزاوية ارتفاع قدرها 48°. (المثال 6)

a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة.

b. حدد طول الجبل الذي يتطلبه المصعد ليمتد من القاعدة لقمة الجبل.

43. كرة السلة يبلغ طول كل من أحمد وعلي 1.78 m. ينظر أحمد إلى مرمى كرة سلة ترتفع 3 m بزاوية ارتفاع قدرها 29°. وينظر علي إلى المرمى بزاوية ارتفاع قدرها 43°. إذا كان علي يقف مباشرة أمام أحمد، فكم يبعد كلاهما عن الآخر؟ (مثال 7)



44. باريس ينظر سائح في درجة المشاهدة الأولى من برج إيفل إلى متحف أورسيه بزاوية انخفاض قدرها 1.4°. ينظر سائح في درجة المشاهدة الثالثة، فوق الأول مباشرة بمقدار 219 m، إلى متحف دورساي بزاوية انخفاض قدرها 6.8°. (المثال 7)

a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة.

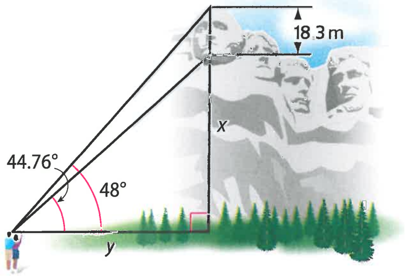
1b. حدد المسافة بين برج إيفل ومتحف أورسيه.

45. منارة تم رصد سفينتين من أعلى منارة طولها 47.5 m. تقع السفينة الأولى في زاوية انخفاض قدرها 27°. والسفينة الثانية خلفها مباشرة في زاوية انخفاض قدرها 7°. (المثال 7)

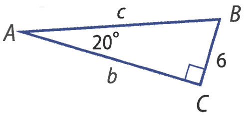
a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة.

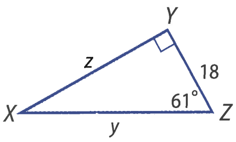
b. حدد المسافة بين السفينتين.

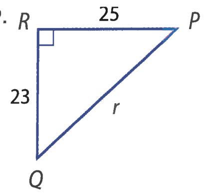
46. جبل راشمور طول وجوه الرؤساء على جبل راشمور يبلغ 18.3 متراً. يرى الزائر قمة رأس جورج واشنطن بزاوية ارتفاع قدرها 48° ويرى ذقنه بزاوية ارتفاع قدرها 44.76°. جد ارتفاع جبل راشمور. (المثال 7)

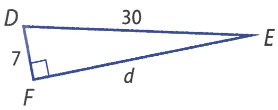


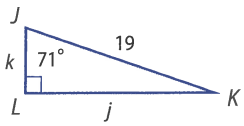
حُـلّ كل مثلث. حوّل أطوال الأضلاع لأقرب عدد عشري، وحوّل قياس الزاوية إلى أقرب درجة. (المثال 8)

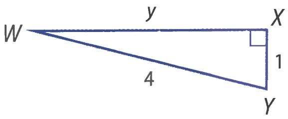
47.


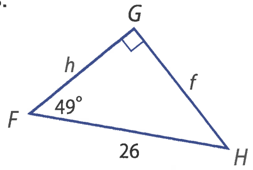
48.


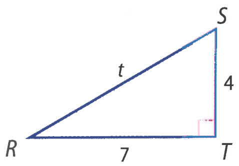
49.


50.


51.


52.


53.


54.


55. بيسبول يقع ارتكاز أحمد في اللعبة 19.8 m خلف أرضية الملعب. خط رؤيته 3 m فوق الملعب.

a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة.

b. ما زاوية الانخفاض بالنسبة لأرضية الملعب؟

56. التنزه تقف رنا على بعد 2 km من مركز قاعدة بايكس بيك وتنظر إلى قمة الجبل، الذي يبلغ ارتفاعه 1.4 km

a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة.

b. بأي زاوية ارتفاع تنظر رنا إلى قمة الجبل؟

جد القيمة الدقيقة لكل تعبير، بدون استخدام الحاسبة.

57. $\sin 60°$ **58.** $\cot 30°$ **59.** $\sec 30°$

60. $\cos 45°$ **61.** $\tan 60°$ **62.** $\csc 45°$

بدون استخدام الحاسبة جد مقياس الزاوية الحادة θ في مثلث قائم الزاوية بحيث يناسب كل معادلة.

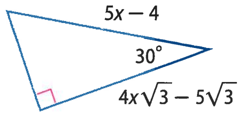
63. $\tan \theta = 1$ **64.** $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

65. $\cot \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **66.** $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

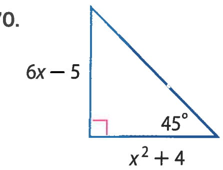
67. $\csc \theta = 2$ **68.** $\sec \theta = 2$

بدون استخدام الحاسبة، حدد قيمة x.

69.



70.

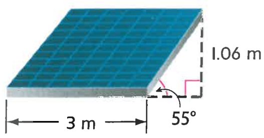


71. الغوص رأى أحد الغواصين في عمق 6.1 متراً تحت سطح الماء حطام سفينة بزاوية انخفاض قدرها °70. بعد الانخفاض إلى نقطة 13.7 متراً فوق قاع المحيط، يرى الغواص حطام السفينة بزاوية انخفاض قدرها °57. ارسم مخططًا يبين الوضع، وحدد عمق حطام السفينة.

جد قيمة $\cos \theta$ إذا كانت θ هي قياس أصغر زاوية في كل نوع من أنواع المثلث قائم الزاوية.

72. 3-4-5 **73.** 5-12-13

74. الطاقة الشمسية جد مساحة سطح اللوحة الشمسية المبينة أمامك كاملاً.



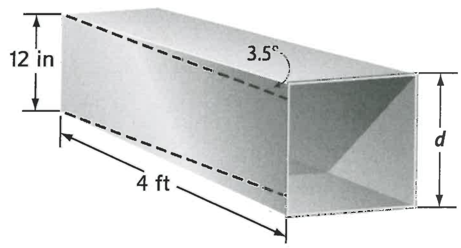
بدون استخدام الحاسبة، أدخل الرمز المناسب >، <، = لإكمال كل معادلة.

75. $\sin 45°$ ○ $\cot 60°$ **76.** $\tan 60°$ ○ $\cot 30°$

77. $\cos 30°$ ○ $\csc 45°$ **78.** $\cos 30°$ ○ $\sin 60°$

79. $\sec 45°$ ○ $\csc 60°$ **80.** $\tan 45°$ ○ $\sec 30°$

81. الهندسة حدد عمق الأسطوانة في النهاية العريضة d لأنبوب الهواء المبين أمامك إذا كان يضيق تدريجيًا بزاوية °3.5.



82. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة ستستكشف النسب المثلثية للزوايا الحادة وعلاقتها بالنقاط على المستوى الإحداثي.

a. بيانيًا افترض أن $P(x, y)$ هي نقطة في الربع الأول. ارسم خطًا بيانيًا من خلال النقطة P ونقطة الأصل. كوّن مثلثًا قائم الزاوية من خلال توصيل النقاط P، $(x, 0)$، ونقطة الأصل. ضع اسمًا لأطوال أضلاع المثلث القائمة بالرموز x أو y. ضع اسمًا لطول الوتر مثل r والزاوية التي يكوّنها الخط مع المحور x θ.

b. بالتحليل عبّر عن قيمة r بالرموز x و y.

c. بالتحليل عبّر عن $\sin \theta$، $\cos \theta$، و $\tan \theta$ بلغة x, y، و/أو r.

d. لفظيًا تحت أي شرط يمكن التعبير عن إحداثيات النقطة P بالنسب المثلثية $(\cos \theta, \sin \theta)$؟

e. بالتحليل أي نسبة مثلثية تتضمن θ تناظر ميل الخط؟

f. بالتحليل جد تعبيرًا لميل الخط العمودي على الخط الواقع في الجزء a بدلالة θ.

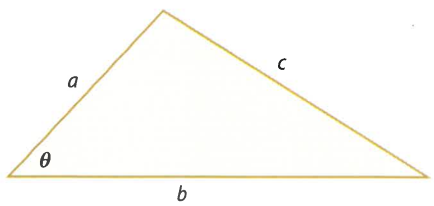
مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

83. الإثبات أثبت أنه إذا كانت θ زاوية حادة بمثلث قائم فإن $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ و $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$.

84. تحليل الخطأ يعرف خالد ومحمد قيمة $\sin \theta = a$ وقد طلب منهما إيجاد قيمة $\csc \theta$. يقول خالد إن هذا غير ممكن، لكن محمد يخالفه الرأي. فهل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

85. الكتابة في الرياضيات اشرح سبب كون الدوال المثلثية الست دوالّ متسامية.

86. التحدي اكتب تعبيرًا بالرموز θ عن محيط المثلث مختلف الأضلاع المبين. اشرح.



88. الإثبات أثبت أنه إذا كانت θ زاوية حادة في مثلث قائم، فإن $(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$.

الاستنتاج إذا كانت A و B زاويتان حادتان لمثلث قائم $m\angle A < m\angle B$ معلومتان، فحدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة، فاضرب مثالاً مضادًا.

88. $\sin A < \sin B$

89. $\cos A < \cos B$

90. $\tan A < \tan B$

91. الكتابة في الرياضيات لاحظ على الحاسبة البيانية أنه لا يوجد مفتاح لإيجاد القاطع Sec, Csc, Cot لقياس زاوية ما. وضّح لماذا تعتقد أن الأمر كذلك.

92. الاقتصاد مؤشر أسعار المستهلك (CPI) يقيس التضخم. وهو مبني على متوسط أسعار السلع والخدمات في الولايات المتحدة، بالمتوسط السنوي للأعوام 1982-1984 المنظمة في مؤشّر من 100. يبين الجدول بعض قيم (CPI) السنوية المتوسطة من 1955 إلى 2005. جد النموذج الأسي المتعلق بهذه البيانات (السنة، CPI) عن طريق تحويل البيانات لصورة خطية. افرض أن $x = 0$ تمثل 1955. ثم استخدم النموذج لتتنبأ بقيمة CPI في 2025.

العام	CPI
1955	26.8
1965	31.5
1975	53.8
1985	107.6
1995	152.4
2005	195.3

جد حل كل من المعادلات الآتية: قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

93. $e^{5x} = 24$

94. $2e^{x-7} - 6 = 0$

ارسم تمثيلاً بيانيًا لكل نسبة وحللها. ووضح المجال والمدى ونقاط التقاطع وخطوط التقارب وسلوك النهاية، وفترات تزايد أو تناقص النسبة.

95. $f(x) = -3^{x-2}$

96. $f(x) = 2^{3x-4} + 1$

97. $f(x) = -4^{-x+6}$

جد حل كل من المعادلات الآتية:

98. $\dfrac{x^2 - 16}{(x+4)(2x-1)} = \dfrac{4}{x+4} - \dfrac{1}{2x-1}$

99. $\dfrac{x^2 - 7}{(x+1)(x-5)} = \dfrac{6}{x+1} + \dfrac{3}{x-5}$

100. $\dfrac{2x^2 + 3}{3x^2 + 5x + 2} = \dfrac{5}{3x+2} - \dfrac{1}{x+1}$

101. الصحف موضح أدناه تداول آلاف صفحات الجرائد الوطنية تداول.

العام	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
التداول (بالآلاف)	904.3	814.7	773.9	725.5	716.2	699.1	673.0

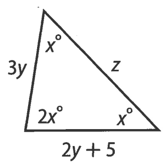
a. افترض أن x تساوي عدد السنوات بعد 2001. ارسم مخطط انتشار للبيانات.

b. حدد نسبة قوة لتمثيل للبيانات.

c. استخدم النسبة لتتنبأ بتداول الصحف في 2015.

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

102. SAT/ACT في الشكل، ما قيمة z؟



A 15

B $15\sqrt{2}$

C $15\sqrt{3}$

D $30\sqrt{2}$

E $30\sqrt{3}$

103. مراجعة يستخدم محمد سلمًا للوصول إلى نافذة أعلى من الأرض بمقدار 3 متر. إذا كان السلم يبعد 0.9 m عن الجدار، فكم ينبغي أن يكون طول السلم؟

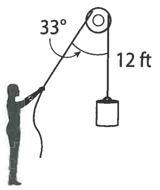
F 2.86 m

G 3.2 m

H 3.4 m

J 3.7 m

104. يمسك شخص بطرف حبل يمر حول بكرة وبالطرف الآخر يتعلق ثقل. افترض أن الثقل على ارتفاع يد الشخص. ما المسافة بين يد الشخص والثقل؟



A 7.8 ft

B 10.5 ft

C 12.9 ft

D 14.3 ft

105. مراجعة طائرة ورقية تحلق بزاوية 45°. طول خيط الطائرة الورقية يبلغ 120 ft. ما ارتفاع الطائرة الورقية من النقطة التي يُمسك الحبل عندها؟

F 60 ft

G $60\sqrt{2}$ ft

H $60\sqrt{3}$ ft

J 120 ft

الدرس 3-2 الدرجات والراديان

:: السابق	:: الحالي	:: لماذا؟
• لقد استخدمت قياسات الزوايا الحادة في المثلثات المعطاة درجاتها	1 تحويل قياسات الزوايا بالدرجات إلى قياسات راديان، والعكس بالعكس. 2 استخدام قياسات الزاوية لحل مسائل من الحياة اليومية.	• في الدرس 3-1، قمت بالعمل فقط على الزوايا الحادة، لكن يمكن أن نكون للزوايا أي قياس من عدد حقيقي على سبيل المثال، في التزلج، 540 هي حيلة جوية يقوم المتزلج فيها بالدوران مع لوح التزلج بزاوية 540°، أو دورة كاملة ونصف في الهواء.

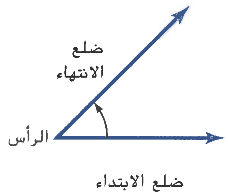
المفردات الجديدة

vertex رأس
initial side ضلع الابتداء
terminal side ضلع الانتهاء
الوضع القياسي standard position
radian راديان
زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء coterminal angles
linear speed سرعة خطية
angular speed سرعة الزاوية
sector القطاع

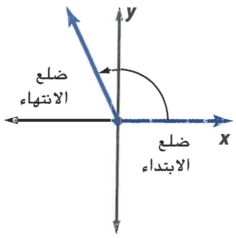
1 الزوايا وقياساتها

من الهندسة، ربما تتذكر أن الزاوية كانت تُعرّف بشعاعين غير متداخلين يشتركان في نقطة تعرف بـ **الرأس**. يمكن أن نفكر في الزاوية أيضًا باعتبارها تكونت من حركة دوران الشعاع حول نقطة الرأس. من وجهة النظر الديناميكية هذه، يكوّن موقع بداية الشعاع **ضلع الابتداء** للزاوية، بينما يكوّن موقع الشعاع بعد الدوران **ضلع الانتهاء** للزاوية. في المستوى الإحداثي، الزاوية التي يقع رأسها عند نقطة الأصل وضلع الابتداء على المحور الأفقي x يقال إنها في **وضع قياسي**.

زاوية

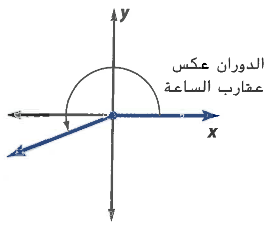


زاوية في الوضع القياسي

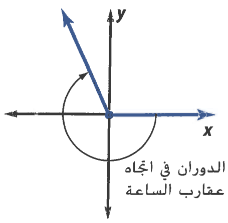


يبين قياس الزاوية كمية واتجاه الدوران الضروري للتحرك من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء للزاوية. تنشأ *الزاوية الموجبة* عن الدوران عكس عقارب الساعة وتنشأ الزاوية السالبة عن الدوران في اتجاه عقارب الساعة.

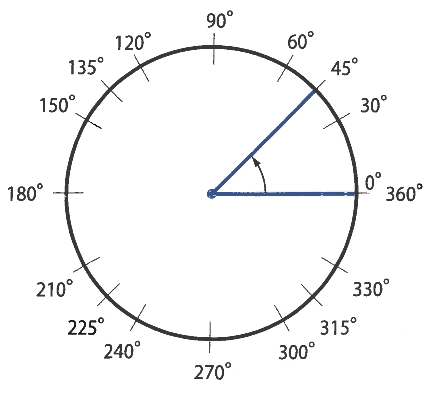
زاوية موجبة



زاوية سلبية



أكثر وحدات قياس الزاوية شيوعًا هي *الدرجة* (°)، التي تساوي $\frac{1}{360}$ دورة كاملة (عكس عقارب الساعة) حول الرأس. من الرسم التخطيطي الموضّح، يمكنك أن ترى أن 360° تمثل 1 دورة كاملة، 180° تمثل $\frac{1}{2}$ دورة، 90° تمثل $\frac{1}{4}$ دورة، وهكذا، كما هو موضّح على محيط الدائرة.



يمكن أيضًا التعبير عن قياس الدرجة باستخدام صيغة الدرجة العشرية أو الدرجة والدقيقة والثانية (DMS) حيث تنقسم فيها كل درجة إلى 60 دقيقة (′) وكل دقيقة تقسم إلى 60 ثانية (″).

نصيحة دراسية

القاعدة 60 يرجع مفهوم قياس الدرجة إلى البابليين القدماء، الذين قاموا بحسابات فلكية مبكرة باستخدام نظامهم الرقمي، والذي بني على نظام ستيني (60) بدلاً من النظام العشري (10) الذي نستخدمه اليوم.

مثال 1 التحويل بين صيغة DMS والدرجة العشرية

اكتب كل قياس درجة عشرية في صيغة DMS (درجة، دقيقة وثانية) وكل قياس DMS في صيغة درجة عشرية لأقرب جزء من المئة.

a. $56.735°$

أولاً، حوّل $0.735°$ إلى دقائق وثوان.

$$56.735° = 56° + 0.735°\left(\frac{60'}{1°}\right) \quad 1° = 60'$$
$$= 56° + 44.1' \quad \text{بسّط}$$

ثم، حوّل $0.1'$ إلى ثوانٍ

$$56.735° = 56° + 44' + 0.1'\left(\frac{60''}{1'}\right) \quad 1' = 60''$$
$$= 56° + 44' + 6'' \quad \text{بسّط}$$

إذًا، $56.735°$ يمكن كتابتها في صورة $56°\ 44'\ 6''$.

b. $32°\ 5'\ 28''$

كل دقيقة عبارة عن $\frac{1}{60}$ من الدرجة وكل ثانية عبارة عن $\frac{1}{60}$ من الدقيقة. إذًا كل ثانية تمثل $\frac{1}{3600}$ من الدرجة.

$$32°\ 5'\ 28'' = 32° + 5'\left(\frac{1°}{60'}\right) + 28''\left(\frac{1°}{3600''}\right) \quad 1' = \frac{1}{60}(1°) \text{ و } 1'' = \frac{1}{3600}(1°)$$
$$\approx 32° + 0.083 + 0.008 \quad \text{بسّط}$$
$$\approx 32.091° \quad \text{اجمع}$$

إذًا، $32°\ 5'\ 28''$ يمكن أن تكتب $32.091°$ تقريبًا.

تمرين موجّه

1A. $213.875°$

1B. $89°\ 56'\ 7''$

تلميح تقني

صيغة DMS يمكنك استخدام بعض الحاسبات لتحويل قيم الدرجة العشرية إلى درجات ودقائق وثوانٍ باستخدام دالة DMS أسفل قائمة Angle.

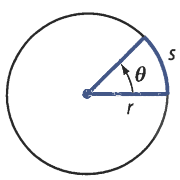
قياس الزوايا بالدرجات يكون ملائمًا عندما تطبق حساب المثلثات لتحل العديد من المسائل من الحياة اليومية، مثل تلك الخاصة بالمسح والملاحة. ولغيرها من التطبيقات على الدوال المثلثية، يتسبب استخدام زاوية مقاسة بالدرجات في مشكلة كبيرة. لا توجد للدرجة علاقة بأي قياس خطي؛ أي أن درجات بوصية أو $\frac{\text{بوصة}}{\text{درجة}}$ ليس لها معنى. قياس الزوايا بواسطة **الراديان** يوفر حلاً لهذه المشكلة.

المفهوم الأساسي قياس الراديان

الشرح القياس θ بقياس الراديان للزاوية المركزية للدائرة يساوي نسبة طول القوس المحصور s لنصف القطر r للدائرة.

الرموز $\theta = \frac{s}{r}$، حيث إن θ قيست بالراديان

مثال يساوي قياس الزاوية المركزية 1 راديان إذا تقاطعت مع قوس بطول نصف قطر الدائرة.



$\theta = 1\ rad$ عندما تكون $s = r$.

لاحظ أنه طالما كان طول القوس s ونصف القطر r معروف قياسهما باستخدام الوحدات الخطية نفسها، فالنسبة $\frac{s}{r}$ كمية لابعدية. لهذا السبب فإن كلمة *راديان* أو اختصارها *rad* تحذف غالبًا عند كتابة قياس الراديان لزاوية.

تمثل الزاوية المركزية دورة كاملة مقدرة عكس عقارب الساعة طول قوس يتماثل مع طول القوس المساوي لمحيط الدائرة، $2\pi r$. لهذا، يمكنك الحصول على قياسات راديان الآتية:

نصيحة دراسية

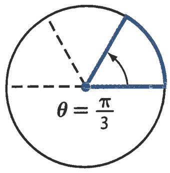
العلاقة بين الدرجة و الراديان من المسألة الكلامية المعروضة. يمكنك أن تتبين أن $1° \approx 0.017$ rad و $1 \text{ rad} \approx 57.296°$.

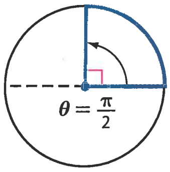
$\frac{1}{6}$ دوران $= \frac{1}{6} \times 2\pi = \frac{\pi}{3}$ rad

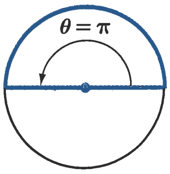
$\frac{1}{4}$ دوران $= \frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{2}$ rad

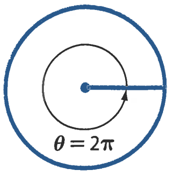
$\frac{1}{2}$ دوران $= \frac{1}{2} \times 2\pi = \pi$ rad

1 دوران $= \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ rad









بما أن 2π راديان و$360°$ كلاهما يماثل دورة واحدة كاملة، يمكنك كتابة $360° = 2\pi$ راديان أو $180° = \pi$ راديان. تقود المعادلة الأخيرة إلى التعابير المكافئة الآتية:

1 راديان $= \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$ و $1° = \frac{\pi}{180}$ راديان

قراءة في الرياضيات

قياس الزاوية إذا لم يتم تحديد وحدة قياس الزاوية، يتم استخدام قياس الراديان. إذا استُخدم قياس الدرجة، فلا بد من استخدام رمز الدرجة (°).

باستخدام هذه العبارات، يمكننا الحصول على قواعد التحويل التالية:

المفهوم الأساسي قواعد التحويل بين قياس الدرجة والراديان

1. للتحويل من الدرجات إلى الراديان، اضرب في $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$.
2. للتحويل من راديان إلى درجة، اضرب في $\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}$.

مثال 2 التحويل بين قياسي الدرجة والراديان

حول كل قياس من الدرجات إلى الراديان كمضاعف لـ π وبالعكس.

a. $120°$

$120° = 120°\left(\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}\right)$ اضرب في $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$

$= \frac{2\pi}{3}$ راديان $= \frac{2\pi}{3}$ بسّط

b. $-45°$

$-45° = -45°\left(\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}\right)$ اضرب في $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$

$= -\frac{\pi}{4}$ راديان $= -\frac{\pi}{4}$ بسّط

c. $\frac{5\pi}{6}$

$\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ راديان اضرب في $\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}$

$= \frac{5\pi}{6}$ راديان $\left(\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}\right) = 150°$ بسّط

d. $-\frac{3\pi}{2}$

$-\frac{3\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$ راديان اضرب في $\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}$

$= -\frac{3\pi}{2}$ راديان $\left(\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}\right) = -270°$ بسّط

تمرين موجّه

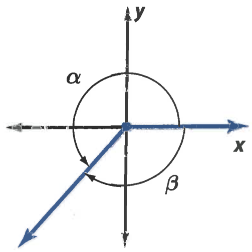
2A. $210°$ **2B.** $-60°$ **2C.** $\frac{4\pi}{3}$ **2D.** $-\frac{\pi}{6}$

قراءة في الرياضيات

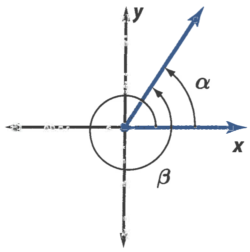
تسمية الزوايا في علم حساب المثلثات، عادة ما تسمى الزوايا بحروف يونانية، مثل α (آلفا)، β (بيتا)، و θ (ثيتا).

بتعريف الزوايا من حيث الدوران حول الرأس، يصبح بإمكان زاويتين أن يكون لهما نفس ضلعي الابتداء والانتهاء ولكن تختلف قياساتهم. تلك الزوايا تدعى **الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء**. في الأشكال بالأسفل، الزاويتان α و β مشتركتان في ضلع الانتهاء

زوايا موجبة وسلبية مشتركة في ضلع الانتهاء



زوايا موجبة مشتركة في ضلع الانتهاء



الزاويتان الموجبتان المشتركتان في ضلع الانتهاء الموضحتان تختلفان في استدارة كاملة واحدة. أي زاوية تحتوي على عدد لا نهائي من الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء التي يمكن إيجادها بجمع أو طرح المضاعفات الصحيحة العدد لـ $360°$ أو 2π راديان.

المفهوم الأساسي الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء

الدرجات	الراديان
إذا كان α هو قياس الزاوية بالدرجات، إذًا فكل الزوايا التي قياسها $\alpha + 360n°$، حيث n هو عدد صحيح، تشترك في ضلع الانتهاء مع α.	إذا كانت α هي قياس الزاوية بالراديان، إذًا فكل الزوايا التي قياسها $\alpha + 2n\pi$، حيث n هو عدد صحيح، تشترك في ضلع الانتهاء مع α.

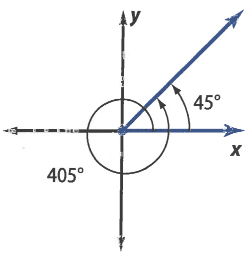
مثال 3 إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء ورسمها

حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة. ثم جد مع رسم زاوية موجبة وزاوية سلبية مشتركة مع ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة.

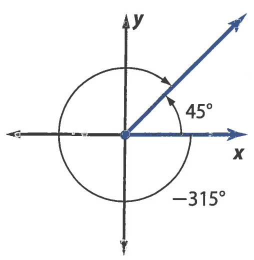
a. $45°$

كل الزوايا ذات القياس $45° + 360n°$ مشتركتان في ضلع الانتهاء مع زاوية ذات قياس $45°$. افترض أن $n = 1, -1$.

$45° + 360(1)° = 45° + 360° = 405°$



$45° + 360(-1)° = 45° - 360° = -315°$

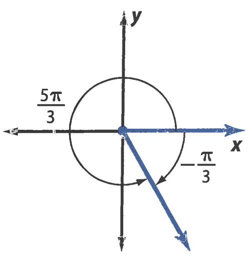


b. $-\frac{\pi}{3}$

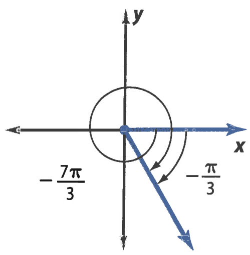
كل الزوايا ذات القياس $-\frac{\pi}{3} + 2n\pi$ مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية $-\frac{\pi}{3}$.

افترض أن $n = 1, -1$.

$-\frac{\pi}{3} + 2(1)\pi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$



$-\frac{\pi}{3} + 2(-1)\pi = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3}$



تمرين موجه

3A. $-30°$

3B. $\frac{3\pi}{4}$

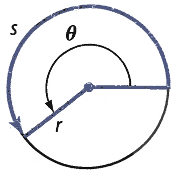
2 تطبيقات باستخدام قياس الزاوية حل $\theta = \frac{s}{r}$ لطول القوس s يعطينا صيغة معادلة لإيجاد طول قوس في دائرة.

المفهوم الأساسي طول القوس

إذا كانت θ هي الزاوية المركزية في دائرة نصف قطرها r إذًا فطول القوس المحصور s يمكن الحصول عليه كالآتي:

$$s = r\theta$$

حيث إن θ قياسها بالراديان.

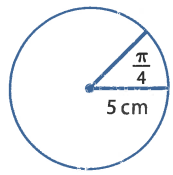


عند قياس θ بالدرجات، يمكنك أيضًا استخدام المعادلة $s = \frac{\pi r \theta}{180}$ والتي تحتوي بالفعل على تحويل الدرجة-الراديان.

مثال 4 إيجاد طول القوس

جد طول القوس المحصور في كل دائرة باستخدام القياسات المعطاة لكل من الزاوية المركزية ونصف القطر. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

a. $\frac{\pi}{4}$, $r = 5$ cm



$s = r\theta$ طول القوس

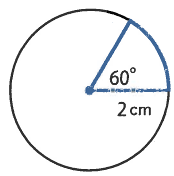
$= 5\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $\theta = \frac{\pi}{4}$ و $r = 5$

$= \frac{5\pi}{4}$ بسّط

طول القوس المحصور يساوي $\frac{5\pi}{4}$ أو حوالي 3.9 سنتيمتر.

b. $60°$, $r = 2$ cm

الطريقة 1 حوّل $60°$ إلى قياس الراديان، ثم استخدم $s = r\theta$ لإيجاد طول القوس.



$60° = 60°\left(\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}\right)$ اضرب $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$

$= \frac{\pi}{3}$ بسّط

باستخدام التعويض $r = 2$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$.

$s = r\theta$ طول القوس

$= 2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ $\theta = \frac{\pi}{3}$ و $r = 2$

$= \frac{2\pi}{3}$ بسّط

الطريقة 2 استخدم $s = \frac{\pi r \theta}{180°}$ لإيجاد طول القوس.

$s = \frac{\pi r \theta}{180°}$ طول القوس

$= \frac{\pi(2)(60°)}{180°}$ $\theta = 60°$ و $r = 2$

$= \frac{2\pi}{3}$ بسّط

طول القوس المحصور يساوي $\frac{2\pi}{3}$ أو حوالي 2.1 cm.

تمرين موجّه

4A. $\frac{2\pi}{3}$, $r = 2$ m

4B. $135°$, $r = 0.5$ m

نصيحة دراسية

استخدام الراديان

لاحظ في المثال 4a أنه عندما تكون $r = 5$ سنتيمترات وراديان $\theta = \frac{\pi}{4}$، $s = \frac{5\pi}{4}$ سنتيمتر، وليس سنتيمتر-راديان $\frac{5\pi}{4}$. هذا لأن الراديان نسبة لابُعدية.

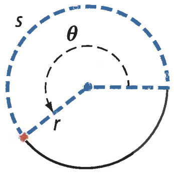
يمكن استخدام قاعدة طول القوس لتحليل حركة دائرية. معدل تحرك الجسم على طول مسار دائري يسمى **السرعة الخطية**. معدل دوران الجسم حول نقطة ثابتة يسمى **السرعة الزاويّة**. السرعة الخطية تقاس بوحدات كالأميال لكل ساعة، بينما تقاس السرعة الزاوية بوحدات كالدورات لكل دقيقة.

المفهوم الأساسي السرعة الخطية والسرعة الزاوية

لنفترض أن جسمًا تحرك بسرعة ثابتة على ممر دائري نصف قطره r.

إذا كانت s هي طول القوس الذي يقطعه الجسم في حركته خلال الزمن t،
إذًا فسرعة الجسم *الخطية* v يتم إيجادها بالمعادلة $v = \frac{s}{t}$.

إذا كانت θ هي سرعة الدوران (بالراديان) التي يتحرك الجسم فيها خلال الزمن t،
فإن *السرعة الزاوية* ω للجسم يتم إيجادها بالمعادلة $\omega = \frac{\theta}{t}$.

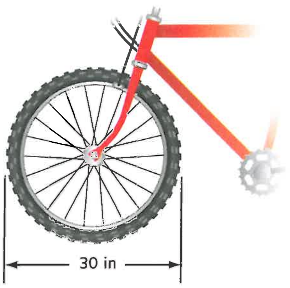


قراءة في الرياضيات

أوميجا الحرف اليوناني الصغير أوميجا ω يستخدم عادة للدلالة على السرعة الزاوية.

مثال 5 من الحياة اليومية إيجاد السرعة الزاوية والخطية

ركوب الدراجة يقود الساعي دراجة كما هو مبين.



a. خلال عملية توصيل واحدة، تدور الإطارات بمعدل 140 دورة في الدقيقة. جد السرعة الزاوية للإطارات في الدقيقة بقياس راديان.

بما أن قياس كل دورة 2π راديان، فإن 140 دورة تماثل زاوية الدوران θ هي $140 \times 2\pi$ أو 280π راديان.

$$\omega = \frac{\theta}{t} \qquad \text{سرعة زاوية}$$

$$= \frac{280\pi \text{ راديان}}{1 \text{دقيقة}} \qquad t = 1 \text{ دقيقة} \text{ و } \theta = 280\pi \text{ راديان}$$

ومن ثم، تكون السرعة الزاوية للإطار 280π أو حوالي 879.6 راديان لكل دقيقة.

b. في جزء من الطريق خلال مهمة التوصيل التالية، يدور الإطار بمعدل ثابت بمقدار 2.5 دورة لكل ثانية. جد السرعة الخطية للإطار بمعدل كيلومتر لكل ساعة.

الدوران 2.5 دورة يماثل زاوية دوران θ لـ $2\pi \times 2.5$ أو 5π.

$$v = \frac{s}{t} \qquad \text{سرعة خطية}$$

$$= \frac{r\theta}{t} \qquad s = r\theta$$

$$= \frac{38.1(5\pi) \text{ سنتيمتر}}{1 \text{ ثانية}} = \frac{190.5\pi \text{ سنتيمتر}}{1 \text{ ثانية}} \qquad r = 38.1 \text{ سنتيمتر} \text{ و } \theta = 5\pi \text{ راديان} \text{ و } t = 1 \text{ ثانية}$$

استخدم التحليل البعُدي لتحويل هذه السرعة من سنتيمتر لكل ثانية إلى كيلومتر لكل ساعة.

$$\frac{190.5\pi \cancel{\text{ سنتيمتر}}}{1 \cancel{\text{ ثانية}}} \times \frac{60 \cancel{\text{ ثانية}}}{1 \cancel{\text{ دقيقة}}} \times \frac{60 \cancel{\text{ دقيقة}}}{1 \text{ ساعة}} \times \frac{1 \cancel{\text{ متر}}}{100 \cancel{\text{ سنتيمتر}}} \times \frac{1 \text{ كيلومتر}}{1000 \cancel{\text{ متر}}} \approx \frac{21.6 \text{ كيلومتر}}{\text{ساعة}}$$

ومن ثم، فالسرعة الخطية للإطار حوالي 21.6 km/h.

الربط بالحياة اليومية

في بعض مدن الولايات المتحدة، يمكن للساعي أن يقود بمعدل 48 إلى 56 كيلومتر في اليوم، بينما يقوم بتوصيل 30 إلى 45 طردًا.

المصدر: جمعية سعاة الدراجات بنيويورك

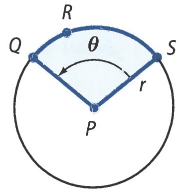
تمرين موجّه

الوسائط لاحظ قرص DVD المبين.

5A. جد السرعة الزاوية لقرص DVD بالراديان لكل ثانية إذا كان يدور بمعدل 3.5 دورة في الثانية.

5B. إذا كان مشغل DVD قد سخن بشدة وبدأ دوران القرص يبطئ بمعدل 3 دورة في الثانية، فجد السرعة الخطية للقرص بالمتر لكل دقيقة.

تذكّر من مادة الهندسة أن قطاع الدائرة هو منطقة محاطة بزاوية مركزية وقوسها المحصور. على سبيل المثال، المنطقة المظللة في الشكل هي قطاع الدائرة P. ونسبة مساحة القطاع إلى مساحة الدائرة بالكامل يساوي نسبة طول القوس المقابل إلى محيط الدائرة. افترض أن A تمثل مساحة القطاع.



$$\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} \qquad \frac{A}{\pi r^2} = \frac{\text{طول } \widehat{QRS}}{2\pi r}$$

طول $\widehat{QRS}$ هو $r\theta$.

$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{r\theta}{2\pi r}$$

حل A.

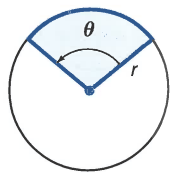
$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

المفهوم الأساسي مساحة القطاع

المساحة A من قطاع دائري لها نصف قطر r وزاوية مركزية θ

$A = \frac{1}{2}r^2\theta$.

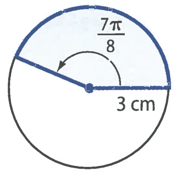
حيث إن θ قياسها بالراديان.



المثال 6 إيجاد مساحة القطاع الدائري

a. جِد مساحة قطاع الدائرة.

قياس الزاوية المركزية للقطاع θ هو $\frac{7\pi}{8}$، ونصف قطره 3 سم.

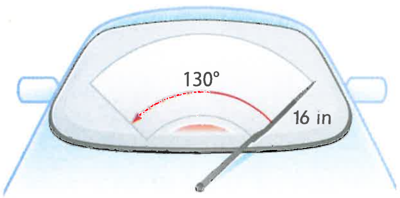


$A = \frac{1}{2}r^2\theta$ — مساحة القطاع

$= \frac{1}{2}(3)^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{63\pi}{16}$ — $\theta = \frac{7\pi}{8}$ و $r = 3$

ومن ثم، مساحة القطاع $\frac{63\pi}{16}$ أو حوالي 12.4 سنتيمتر مربع.

b. الماسحات جد المساحة التقريبية التي مسحتها شفرة المسّاحة المبينة، إذا كان طول مسّاحة الزجاج الأمامي كله 26 بوصة.



المساحة الممسوحة بشفرة المسّاحة هي الفرق بين مساحات القطاعات ونصف قطر 26 بوصة و 16 – 26 أو 10 بوصة.

حوّل قياس الزاوية المركزية إلى الراديان.

$$130° = 130°\left(\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}\right) = \frac{13\pi}{18}$$

ثم استخدم نصف قطر كل قطاع لإيجاد المساحة الممسوحة. افترض أن A_1 = مساحة القطاع بنصف قطر 26 in. وافترض أن A_2 = مساحة القطاع بنصف قطر 10 in.

$A = A_1 - A_2$ — المساحة الممسوحة

$= \frac{1}{2}(26)^2\left(\frac{13\pi}{18}\right) - \frac{1}{2}(10)^2\left(\frac{13\pi}{18}\right)$ — مساحة القطاع

$= \frac{2197\pi}{9} - \frac{325\pi}{9}$ — بسّط.

$= 208\pi = 653.5$ تقريبًا — بسّط.

ومن ثم، فالمنطقة الممسوحة حوالي 653.5 in^2.

الربط بالحياة اليومية

تبلغ زاوية المسح القياسية لمساحة الزجاج الأمامي في السيارة حوالي 67°. وبشكل عام، فإن طول شفرات مساحات الزجاج الأمامي يتراوح بين 30 cm إلى 76 cm.

المصدر: مجلة Car and Driver

تمرين موجّه

جد مساحة القطاع الدائري بواسطة الزاوية المركزية المعطاة θ ونصف القطر r.

6A. $\theta = \frac{3\pi}{4}, r = 1.5$ ft

6B. $\theta = 50°, r = 6$ m

تمارين

اكتب كل قياس درجة عشرية في صيغة DMS (درجة، دقيقة وثانية) وكل قياس DMS في صيغة درجة عشرية لأقرب جزء من المئة. (المثال 1)

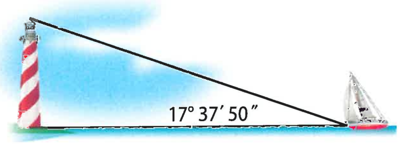
1. $11.773°$ **2.** $58.244°$

3. $141.549°$ **4.** $273.396°$

5. $87°\ 53'\ 10''$ **6.** $126°\ 6'\ 34''$

7. $45°\ 21'\ 25''$ **8.** $301°\ 42'\ 8''$

.9 الملاحة يستخدم عاشق للإبحار آلة السدس، وهي آلة يمكنها قياس الزاوية بين جسمين بدقة تصل إلى أقرب 10 ثوان، لقياس الزاوية بين مركب الصيد خاصته والفنار. فإذا كانت قراءته $17°\ 37'\ 50''$. فما القياس بصيغة الدرجة العشرية مقرّبة إلى أقرب جزء من مئة. (المثال 1)



اكتب كل قياس درجة بالراديان كمضاعف لـ π وكل قياس راديان بالدرجات. (المثال 2)

10. $30°$ **11.** $225°$

12. $-165°$ **13.** $-45°$

14. $\frac{2\pi}{3}$ **15.** $\frac{5\pi}{2}$

16. $-\frac{\pi}{4}$ **17.** $-\frac{7\pi}{6}$

حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة. ثم جد مع الرسم زاوية موجبة وزاوية سلبية مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة. (المثال 3)

18. $120°$ **19.** $-75°$

20. $225°$ **21.** $-150°$

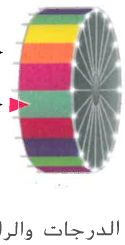
22. $\frac{\pi}{3}$ **23.** $-\frac{3\pi}{4}$

24. $-\frac{\pi}{12}$ **25.** $\frac{3\pi}{2}$

.26 برنامج اللعب تدير خديجة عجلة في برنامج اللعب. توجد 20 قيمة في فراغات متساوية الحجم على محيط العجلة. القيمة التي تحتاج إليها خديجة لتفوز تقع على بعد فراغين أعلى الفراغ الذي تبدأ عنده دورتها، ويجب أن تقوم العجلة بدورة كاملة واحدة على الأقل ليتم احتسابها. صِف الدورة التي ستكفل لخديجة نتيجة الفوز بالدرجات. (المثال 3)

الفراغ الذي تحتاج خديجة الوقوف عنده

نقطة بدء دورة عجلة خديجة



جد طول القوس المحصور بقياس الزاوية المركزية المعطاة في دائرة وبنصف القطر المعطى. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. (المثال 4)

27. $\frac{\pi}{6}, r = 2.5$ m   **28.** $\frac{2\pi}{3}, r = 3$ cm

29. $\frac{5\pi}{12}, r = 4$ m   **30.** $105°, r = 18.2$ cm

31. $45°, r = 5$ km   **32.** $150°, r = 79$ mm

.33 حديقة الملاهي تدور لعبة دوامة الخيل في حديقة ملاهي °3024 في الجولة. (المثال 4)

a. كم سيدور راكب يجلس على بعد 4 m من مركز اللعبة في خلال الجولة؟

b. كم سيدور راكب آخر جالس على بعد 5.5 m من مركز العجلة أكثر من الراكب الأول في الجزء **a** خلال الجولة؟

جد عدد اللفات في كل دورة لكل دقيقة بمعلومية سرعة الزاوية وجد نصف القطر بمعلومية السرعة الخطية ومعدل الدوران. (المثال 5)

34. $\omega = \frac{2}{3}\pi$ rad/s   **35.** $\omega = 135\pi$ rad/h

36. $\omega = 104\pi$ rad/min   **37.** $v = 82.3$ m/s, 131 rev/min

38. $v = 144.2$m/min, 10.9 rev/min

39. $v = 553$cm /h, 0.09 rev/min

.40 التصنيع تصنع شركة العديد من المناشير الدائرية. حيث أقطار النصول وسرعات المحرك موضحة بالأسفل. (المثال 5)

قطر النصل (cm)	سرعة الموتور (rps)
3	2800
5	5500
$5\frac{1}{2}$	4500
$6\frac{1}{8}$	5500
$7\frac{1}{4}$	5000

a. جد سرعة الزاوية والسرعة الخطية للنصول في كل منشار. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

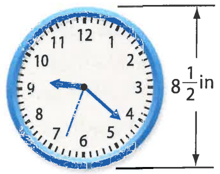
b. ما معدل السرعة الخطية للمنشار ذي النصل البالغ $6\frac{1}{8}$ cm عن المنشار ذي النصل البالغ 3 cm؟

.41 سيارات على امتداد الطريق السريع، تدور إطارات إحدى المركبات بمدى 646 و840 دورة في الدقيقة. قطر كل إطار 66 cm. (المثال 5)

a. جد مدى قيم السرعات الزاوية للإطارات بالراديان لكل دقيقة.

b. جد مدى قيم السرعات الخطية للإطارات بالكيلومتر لكل ساعة.

42. الوقت محيط قطر ساعة حائط يساوي $8\frac{1}{2}$ in. طول عقرب الساعات يساوي 2.4 in، بينما طول عقرب الدقائق يساوي 3.2 in، وطول عقرب الثواني يساوي 3.4 in. (المثال 5)

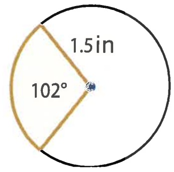


a. جد سرعة الزاوية بالراديان في الساعة والسرعة الخطية بالسنتيمتر في الساعة لكل عقرب.

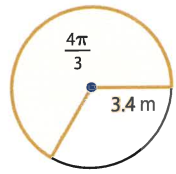
b. إذا كانت السرعة الخطية لعقرب الثواني تساوي 20 in في الدقيقة، فهل تعمل الساعة بسرعة أم ببطء؟ كم من الزمن سيزيد أو ينقص في اليوم؟

هندسة جد مساحة كل قطاع. (مثال 6)

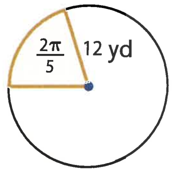
43.



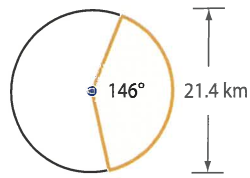
44.



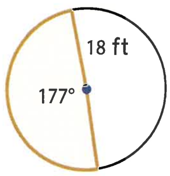
45.



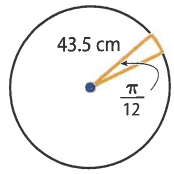
46.



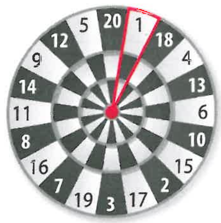
47.



48.



49. ألعاب لوحة الأسهم المبينة مقسمة إلى عشرين قطاعًا متساويًا. إذا كان قطر اللوحة 18 in، فما المساحة التي يغطيها كل قطاع على اللوحة؟ (المثال 6)



50. رعاية الحديقة تروي مرشة مساحة تشكّل ثلث دائرة. إذا كان التيار المتدفق من المرش يصل إلى 6 ft، فما مساحة العشب التي يرويها المرش؟ (المثال 6)

مساحة قطاع دائري وقياس زاوية مركزها معطيان. جد نصف قطر الدائرة.

51. $A = 29\text{ ft}^2, \theta = 68°$

52. $A = 808\text{ cm}^2, \theta = 210°$

53. $A = 377\text{ in}^2, \theta = \frac{5\pi}{3}$

54. $A = 75\text{ m}^2, \theta = \frac{3\pi}{4}$

55. صف قياس الراديان بين 0 و 2π لزاوية θ تقع في وضع قياسي ويقع ضلعها الطرفي في:

a. الربع I

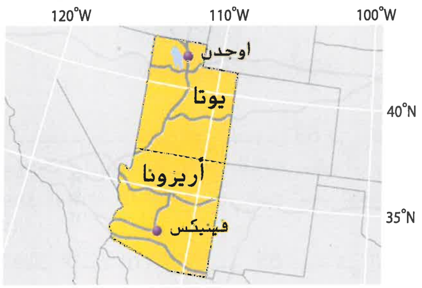
b. الربع II

c. الربع III

d. الربع IV

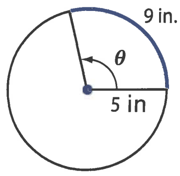
56. عندما يكون ضلع الانتهاء لزاوية تتخذ الوضع القياسي واقعًا على أحد المحاور الإحداثية، فإن الزاوية تسمى *زاوية ربعية*. قدّم قياسات الراديان لأربع زوايا ربعية.

57. الجغرافيا
تقع فينيكس وأريزونا واوجدن ويوتا جغرافيًا على خط الطول نفسه، وهو ما يعني أن اوجدن تقع مباشرة شمال فينيكس. خط طول فينيكس هو 33° 26′ N، وخط طول اوجدن هو 41° 12′ N. إذا كان نصف قطر الأرض تقريبًا 6378 km، فكم تبعد المدينتين عن بعضهما؟

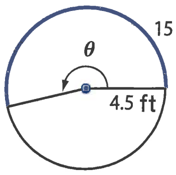


جد قياس زاوية θ بالراديان والدرجات.

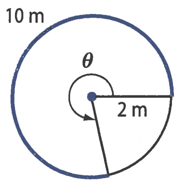
58.



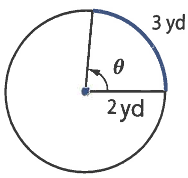
59.



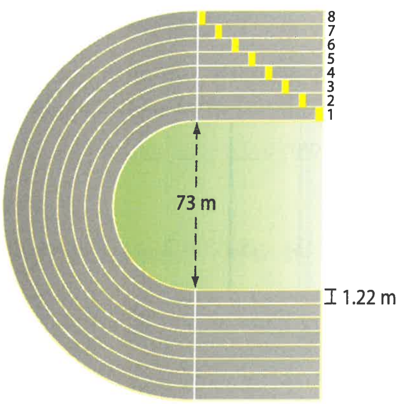
60.



61.



62. طريق منحنى طريق قياسي له 8 حارات هو طريق دائري كما هو موضح.



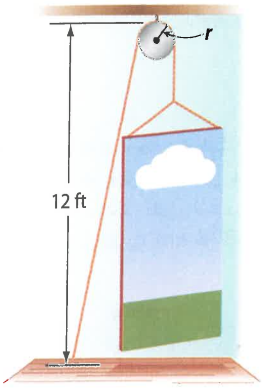
a. ما طول الحافة الخارجية للحارة 4 في المنحنى؟

b. كم يكون فرق الطول بين الحافة الداخلية للحارة 7 والحافة الداخلية للحارة 3 في المنحنى؟

.63 **دراما** بكرة قطرها r تستخدم في رفع جزء من ديكور المسرح في أثناء الاستراحة. ارتفاع البكرة 12 ft.

.a إذا كان نصف قطر البكرة 6 in وتدور °180، فكم سيكون ارتفاع الجسم؟

.b إذا كان نصف قطر البكرة 4 in وتدور °900، فكم سيكون ارتفاع الجسم؟



.64 **الهندسة** تُستخدم بكرة كالتي في التمرين 63 في رفع صندوق في مستودع. حدد أي السيناريوهات التالية يمكن أن يستخدم في رفع الصندوق لمسافة 4.6 m أسرع. اشرح كيف توصلت لاستنتاجك.

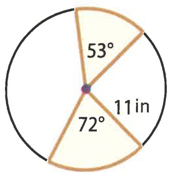
.I نصف قطر البكرة 12.7 cm يدور 65 دورة في الدقيقة.

.II نصف قطر البكرة 11.4 cm يدور 70 دورة في الدقيقة.

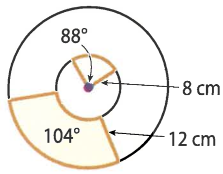
.III نصف قطر البكرة 15.3 cm يدور 60 دورة في الدقيقة.

الهندسة الرياضية **جد مساحة كل منطقة مظللة.**

.65



.66



.67 **سيارات** عداد السرعة المبين يقيس سرعة سيارة بالميل في الساعة.

.a إذا كانت الزاوية بين 25 mi/h و 60 mi/h هي°81.1، فنحو كم ميلًا في الساعة تمثله كل درجة؟

.b إذا كانت زاوية عداد السرعة تتغير بمقدار °95، فكم زادت سرعة السيارة؟

جد المتممة والمكملة لكل زاوية إذا أمكن. إذا لم يمكن، فاشرح استنتاجك.

68. $\frac{2\pi}{5}$ 69. $\frac{5\pi}{6}$ 70. $\frac{3\pi}{8}$ 71. $-\frac{\pi}{3}$

.72 **تزلج** يقوم فصل يدرس الفيزياء بتجربة لاختبار ثلاثة أحجام مختلفة من العجلات على لوحة تزلج بسرعة زاوية ثابتة.

.a اكتب معادلة السرعة الخطية للوح التزلج بما يتضمن نصف القطر والسرعة الزاوية. اشرح استنتاجك.

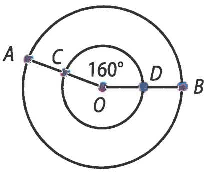
.b باستخدام المعادلة التي كتبتها في الجزء a، توقع السرعة الخطية بالمتر في الثانية للوح التزلج بسرعة زاوية قدرها 3 دورات في الثانية لكل قطر من أقطار العجلات 52, 56, 60 mm.

.c بناء على نتائجك في الجزء b، كيف تظن أن حجم العجلة يؤثر على السرعة الخطية؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

.73 **تحليل الأخطاء** قيل لرنا وخديجة أن محيط القطاع في دائرة يساوي 10 أضعاف طول نصف قطرها. تظن رنا أن قياس قطاع الزاوية المركزية بالراديان هو 8 راديان. تظن خديجة أنه لا توجد معلومات كافية لحل المسألة. فهل إجابة أي منهما صواب؟ اشرح استنتاجك.

.74 **تحدٍ** الدائرتان المبينتان متحدتي المركز. إذا كان طول القوس من A إلى B قياسه 8π in و $DB = 2$ in، فجد طول القوس من C إلى D بدلالة π.



الاستنتاج **صف كيف يمكن للسرعة الخطية أن تتغير بالنسبة لكل معامل مما يلي. اشرح.**

.75 نقص نصف القطر

.76 نقص وحدة الزمن

.77 زيادة السرعة الزاوية

.78 **البرهان** إذا كانت $\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2}$، فأثبت أن $\theta_1 = \theta_2$.

.79 **التبرير** أي أثر تسببه مضاعفة نصف قطر الدائرة على القياسات الآتية؟ اشرح استنتاجك.

.a محيط قطاع الدائرة وزاوية مركزية قدرها θ راديان.

.b مساحة قطاع الدائرة وزاوية مركزية قدرها θ راديان.

.80 **الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل بين قياس الدرجة والراديان. ثم ابتكر رسمًا تخطيطيًا. وضّح الرسم التخطيطي باستخدام قياس الدرجات داخل الدائرة وقياس الراديان خارجها.

مراجعة شاملة

استخدم قيمة النسبة المثلثية المعطاة للزاوية الحادة θ لإيجاد قيم النسب الخمس المثلثية المتبقية لـ θ.

81. $\sin \theta = \frac{8}{15}$

82. $\sec \theta = \frac{4\sqrt{7}}{10}$

83. $\cot \theta = \frac{17}{19}$

84. المعاملات البنكية ربح الحساب الذي فتحته جدة وفاء في 1955 الفائدة المركبة بشكل مستمر. يوضح الجدول أرصدة الحساب من 1955 إلى 1959.

a. استخدم خط الانحدار لإيجاد الدالة التي تمثل المبلغ الموجود في الحساب. استخدم عدد الأعوام بعد 1 يناير 1955 كمتغير مستقل.

b. اكتب المعادلة من الجزء a بدلالة قاعدة e.

c. ما معدل الفائدة المتوقع في الحساب لو لم توجد أي ودائع أو سحوبات خلال الفترة المذكورة في السؤال؟

	التاريخ	الرصيد
1	1 يناير 1955	AED 2137.52
2	1 يناير 1956	AED 2251.61
3	1 يناير 1957	AED 2371.79
4	1 يناير 1985	AED 2498.39
5	1 يناير 1959	AED 2631.74

عبّر عن كل لوغاريتم بدلالة ln 2 و ln 5.

85. $\ln \frac{25}{16}$

86. $\ln 250$

87. $\ln \frac{10}{25}$

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيها أصفار، إن وجدت.

88. $f(x) = x^4 - x^3 - 12x - 144$

89. $g(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$

90. $g(x) = 6x^4 + 35x^3 - x^2 - 7x - 1$

صِف السلوك الطرفي لكل دالة.

91. $f(x) = 4x^5 + 2x^4 - 3x - 1$

92. $g(x) = -x^6 + x^4 - 5x^2 + 4$

93. $h(x) = -\frac{1}{x^3} + 2$

اكتب كل مجموعة باستخدام رمز بناء المجموعة ورمز الفترة، إن أمكن.

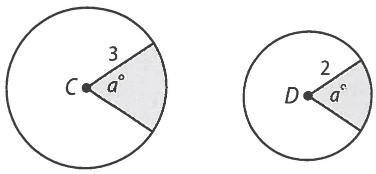
94. $n > -7$

95. $-4 \le x < 10$

96. $y < 1$ or $y \ge 11$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

97. SAT/ACT في الشكل، C و D مركزي الدائرتين لهما نصف القطر 3 و 2 على التوالي. إذا كانت للمنطقة المظللة الأكبر مساحة 9، فما مساحة المنطقة المظللة الأصغر؟



ملاحظة: الشكل ليس مرسومًا لأخذ قياساته.

A 3
B 4
C 5
D 7
E 8

98. مراجعة إذا كانت $\cot \theta = 1$، فجد $\tan \theta =$

F -1
G 0
H 1
J 3

99. مراجعة إذا كانت $\sec \theta = \frac{25}{7}$ و θ حادة، فإن $\sin \theta =$

A $\frac{7}{25}$

B $\frac{24}{25}$

C $-\frac{24}{25}$

D $\frac{25}{7}$

100. أي من قياسات الراديان التالية يساوي $56°$؟

F $\frac{\pi}{15}$

G $\frac{7\pi}{45}$

H $\frac{14\pi}{45}$

J $\frac{\pi}{3}$

3-3 النسب المثلثية على دائرة الوحدة

:: السابق

- تجد قيم النسب المثلثية للزوايا الحادة باستخدام النسب في المثلثات القائمة الزاوية.

:: الحالي

1. إيجاد قيم النسب المثلثية لأي زاوية.
2. إيجاد قيم النسب المثلثية باستخدام دائرة الوحدة.

:: لماذا؟

- ضغط الدم 120 على 80. يتم قياسه بملّيمترات من الزئبق، يعني أن ضغط دم الشخص يتذبذب أو يدور بين 20 ملّيمتر فوق وتحت ضغط 100 ملّيمتر من الزئبق؛ لوقت محدد t بالثواني. تستغرق الدائرة الكاملة لهذا التذبذب حوالي ثانية واحدة.

إذا كان ضغط الدم عندما كان الزمن $t = 0.25$ ثانية هو 120 ملّيمترًا من الزئبق، ثم عندما كان الزمن $t = 1.25$ ثانية كان الضغط أيضا 120 ملّيمترًا من الزئبق.

المفردات الجديدة

زاوية ربعية quadrantal angle
زاوية مرجع reference angle
دائرة الوحدة unit circle
دالة دائرية circular function
دالة دورية periodic function
دورة period

1 النسب المثلثية لأي زاوية

في الدرس 3-1، كانت تعريفات النسب المثلثية الست مقيدة بالزوايا الحادة الموجبة. في هذا الدرس، تتسع هذه التعريفات لتشمل أي زاوية.

المفهوم الأساسي النسب المثلثية لأي زاوية

افترض أن θ هي أي زاوية في وضع قياسي وأن النقطة $P(x, y)$ هي نقطة على ضلع الانتهاء لـ θ.

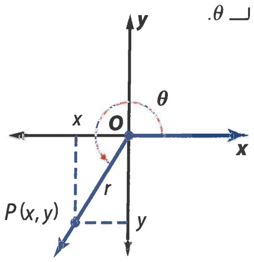
افترض أن r يمثل البعد غير الصفري عن P بالنسبة لنقطة الأصل.

هذا معناه، افترض أن $r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$. من ثم تكون النسب المثلثية لـ θ كالتالي:

$\sin \theta = \frac{y}{r}$, $\csc \theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$

$\cos \theta = \frac{x}{r}$, $\sec \theta = \frac{r}{x}, x \neq 0$

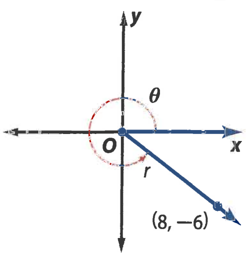
$\tan \theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$, $\cot \theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$



مثال 1 إيجاد قيمة المعادلات المثلثية بنقطة معطاة

افترض أن $(8, -6)$ هي نقطة على ضلع الإنتهاء للزاوية θ في الضع القياسي. جد قيم النسب المثلثية الست لـ θ.

استخدم قيم x و y لإيجاد r.



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$ نظرية فيثاغورس

$$= \sqrt{8^2 + (-6)^2}$$ $x = 8$ و $y = -6$

$$= \sqrt{100} = 10$$ أخذ الجذر التربيعي الموجب.

استخدم $x = 8$، $y = -6$، و $r = 10$ لكتابة النسب المثلثية الست.

$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5}$, $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, $\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$

$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{10}{-6} = -\frac{5}{3}$, $\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$, $\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}$

تمرين موجّه

النقطة المعطاة تقع على ضلع الإنتهاء للزاوية θ في وضع قياسي. جد قيم النسب المثلثية الست لـ θ.

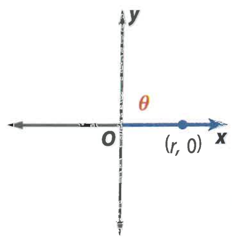
1A. $(4, 3)$ **1B.** $(-2, -1)$

في المثال 1، وجدت قيم النسب المثلثية لزاوية دون معرفة قياسها. سنناقش حاليًا طرق إيجاد قيم هذه النسبة عندما تكون θ وحدها معروفة. لاحظ النسب المثلثية للزوايا الربعية. عندما يكون ضلع الإنتهاء لزاوية θ تتَّخِذ الوضع القياسي واقعًا على أحد محاور الإحداثي، فإن الزاوية تسمى **زاوية ربعية**.

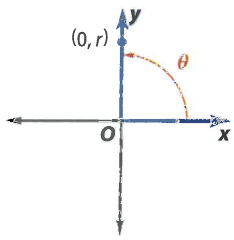
نصيحة دراسية

الزوايا الربعية يوجد عدد لا نهائي من الزوايا الربعية التي تشترك في ضلع الانتهاء مع الزوايا الربعية المبينة على اليسار. قياس زاوية ربعية هو من مضاعفات 90° أو $\frac{\pi}{2}$.

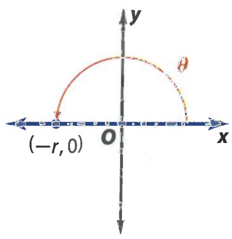
المفهوم الأساسي الزوايا الربعية المشتركة



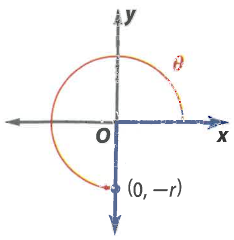
$\theta = 0° = 0$ راديان



$\theta = 90° = \frac{\pi}{2}$ راديان



$\theta = 180° = \pi$ راديان



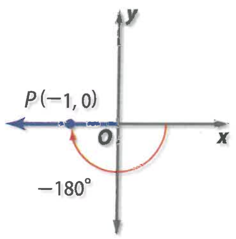
$\theta = 270°$ أو $\frac{3\pi}{2}$ راديان

يمكنك الوصول لقيم النسب المثلثية للزوايا الربعية عن طريق اختيار نقطة على ضلع الانتهاء للزاوية، وإيجاد قيمة النسبة عند هذه النقطة. يمكنك اختيار أي نقطة. رغم ذلك، من أجل التحويل لأبسط صورة، اختر النقطة التي يكون r فيها يساوي 1.

مثال 2 إيجاد قيمة النسب المثلثية للزوايا الربعية

جد قيمة كل نسبة مثلثية، إذا كانت معرّفة.إذا لم تكن معرّفة فاكتب *غير معرّفة*.

a. $\sin(-180°)$

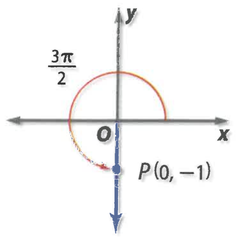


ضلع الإنتهاء للزاوية **−180°** في الوضع القياسي يقع على المحور الأفقي السالب x. اختر نقطة P على ضلع الإنتهاء للزاوية. النقطة المناسبة هي $(-1, 0)$ لأن $r = 1$.

$\sin(-180°) = \frac{y}{r}$ نسبة الـ Sine

$= \frac{0}{1} = 0$ $y = 0$ و $r = 1$

b. $\tan \frac{3\pi}{2}$

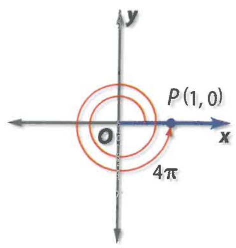


ضلع الإنتهاء للزاوية $\frac{3\pi}{2}$ في الوضع القياسي يقع على المحور الرأسي السالب y. اختر نقطة $P(0, -1)$ على ضلع الإنتهاء للزاوية لأن $r = 1$.

$\tan \frac{3\pi}{2} = \frac{y}{x}$ نسبة الـ tan

$= \frac{-1}{0} =$ غير معرفة $y = -1$ و $x = 0$

c. $\sec 4\pi$



ضلع الإنتهاء للزاوية 4π في الوضع القياسي يقع على المحور الأفقي الموجب x. النقطة $(1, 0)$ مناسبة لأن $r = 1$.

$\sec 4\pi = \frac{r}{x}$ نسبة الـ Sec

$= \frac{1}{1} = 1$ $r = 1$ و $x = 1$

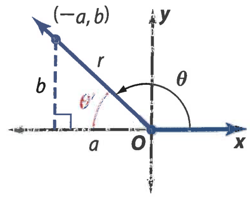
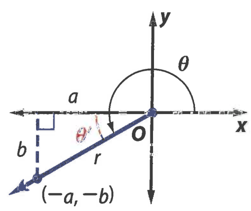
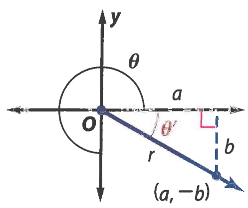
تمرين موجّه

2A. $\cos 270°$

2B. $\csc \frac{\pi}{2}$

2C. $\cot(-90°)$

لإيجاد قيم النسب المثلثية للزوايا غير الحادة أو الربعية، لاحظ الحالات الثلاث التالية، التي بها a و b أعداد حقيقية موجبة.
قارن قيم: sin و Cosine و tan للزوايا θ و θ'.

الربع II	الربع III	الربع IV
		
$\sin\theta = \frac{b}{r}$ $\sin\theta' = \frac{b}{r}$	$\sin\theta = -\frac{b}{r}$ $\sin\theta' = \frac{b}{r}$	$\sin\theta = -\frac{b}{r}$ $\sin\theta' = \frac{b}{r}$
$\cos\theta = -\frac{a}{r}$ $\cos\theta' = \frac{a}{r}$	$\cos\theta = -\frac{a}{r}$ $\cos\theta' = \frac{a}{r}$	$\cos\theta = \frac{a}{r}$ $\cos\theta' = \frac{a}{r}$
$\tan\theta = -\frac{b}{a}$ $\tan\theta' = \frac{b}{a}$	$\tan\theta = \frac{b}{a}$ $\tan\theta' = \frac{b}{a}$	$\tan\theta = -\frac{b}{a}$ $\tan\theta' = \frac{b}{a}$

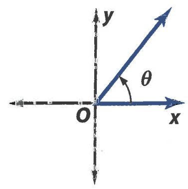
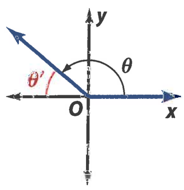
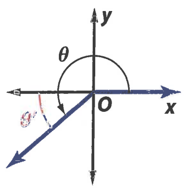
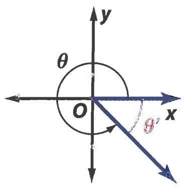
نصيحة دراسية

زوايا المرجع لاحظ أنه في بعض الحالات، القيم الثلاث المثلثية للزوايا θ و θ' (اقرأ عوامل ثيتا الأولية) تكون متطابقة. في حالات أخرى، تختلف في الإشارة فقط.

هذه الزاوية θ'، تسمى **زاوية المرجع**، يمكن استخدامها لإيجاد القيم المثلثية لأي زاوية θ.

المفهوم الأساسي قواعد زاوية المرجع

إذا كانت θ هي زاوية في الوضع القياسي، وزاوية المرجع لها θ' هي زاوية حادة شكّلها ضلع الإنتهاء لــ θ والمحور الأفقي x. زاوية المرجع θ' لأي زاوية $0° < \theta < 360°$,θ أو $0 < \theta < 2\pi$. يتم تعريفها كما يلي.

الربع I	الربع II	الربع III	الربع IV
			
$\theta' = \theta$	$\theta' = 180° - \theta$	$\theta' = \theta - 180°$	$\theta' = 360° - \theta$
	$\theta' = \pi - \theta$	$\theta' = \theta - \pi$	$\theta' = 2\pi - \theta$

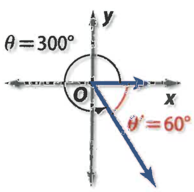
لإيجاد زاوية المرجع للزوايا خارج الفترة $0° < \theta < 360°$ أو $0 < \theta < 2\pi$. جد أولاً زاوية متناظرة مشتركة في ضلع الانتهاء داخل هذه الفترة.

مثال 3 إيجاد زوايا المرجع

ارسم كل زاوية. ثم جد زاوية المرجع.

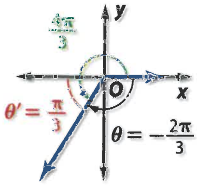
a. $300°$

ضلع الإنتهاء للزاوية $300°$ يقع في الربع IV. ومن ثم، فزاوية المرجع $\theta' = 360° - 300°$ أو $60°$.



b. $-\frac{2\pi}{3}$

الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء هي $2\pi - \frac{2\pi}{3}$ أو $\frac{4\pi}{3}$. ضلع الإنتهاء للزاوية $\frac{4\pi}{3}$ يقع في الربع III، ومن ثم، فزاوية مرجعه هي $\frac{4\pi}{3} - \pi$ أو $\frac{\pi}{3}$.



تمرين موجّه

3A. $\frac{5\pi}{4}$ 3B. $-240°$ 3C. $390°$

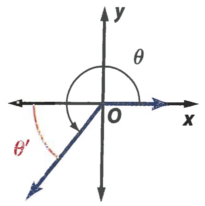
بما أن القيم المثلثية لزاوية تتساوى مع زاوية المرجع لها أو تختلف عنها فقط في الإشارة، يمكنك استخدام الخطوات

المفهوم الأساسي إيجاد قيم النسب المثلثية لأي زاوية

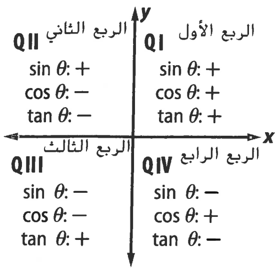
الخطوة 1 جد قياس زاوية المرجع θ'.

الخطوة 2 جد قيمة النسبة المثلثية لـ θ'.

الخطوة 3 استخدم الربع حيث يقع ضلع الإنتهاء لـ θ في تحديد إشارة قيمة النسبة المثلثية θ.



يمكنك تحديد الإشارات الخاصة بالنسب المثلثية في كل ربع باستخدام تعريفات النسب المقدّمة في صفحة 242.
على سبيل المثال، بما أن $\sin\theta = \frac{y}{r}$ ، فمن ثم تكون $\sin\theta$ سالبة عندما تكون $y < 0$، والتي تقع في الربعين III و IV.
باستخدام هذا المنطق نفسه، يمكنك التأكد من كل إشارة من إشارات $\sin\theta$ و $\cos\theta$ و $\tan\theta$ المبينتين في الرسم التخطيطي.
لاحظ أن هذه القيم تعتمد فقط على x و y لأن r دائما سالب.



بما أنك تعرف قيم النسب المثلثية الدقيقة للزوايا 30° و 45° و 60°. فبإمكانك إيجاد قيم النسب المثلثية الدقيقة لكل الزوايا والتي تمثل لها هذه الزوايا زوايا مرجعية. تتضمن هذه القائمة القيم الخاصة بـ θ بكل من الدرجات الراديان.

θ	$30°\ \frac{\pi}{6}$	$45°\ \frac{\pi}{4}$	$60°\ \frac{\pi}{3}$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

نصيحة دراسية

تذكر القيم المثلثية لتذكر القيم الدقيقة لـ Sine بالنسبة للزوايا 0° و 30° و 45° و 60° و 90°، لاحظ النمط التالي.

$\sin 0° = \frac{\sqrt{0}}{2}, = 0$

$\sin 30° = \frac{\sqrt{1}}{2}, = \frac{1}{2}$

$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

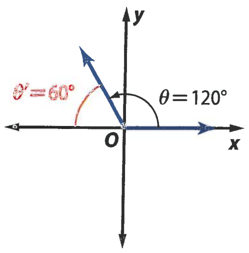
$\sin 90° = \frac{\sqrt{4}}{2}, = 1$

يوجد نمط مشابه لنسبة لـ Cosine، ما عدا القيم التي لها ترتيب عكسي.

مثال 4 استخدام زوايا المرجع لإيجاد القيم المثلثية

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

a. $\cos 120°$

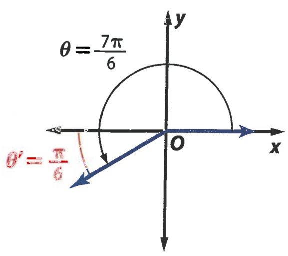


بما أن ضلع الإنتهاء للزاوية θ يقع في الربع II.
زاوية المرجع θ' هي $180° - 120°$ أو $60°$.

$\cos 120° = -\cos 60°$ في الربع II. $\cos\theta$ سالبة.

$= -\frac{1}{2}$ $\quad \cos 60° = \frac{1}{2}$

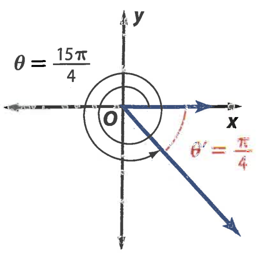
b. $\tan \frac{7\pi}{6}$



بما أن ضلع الإنتهاء للزاوية θ يقع في الربع III.
فزاوية المرجع θ' هي $\frac{7\pi}{6} - \pi$ أو $\frac{\pi}{6}$.

$\tan \frac{7\pi}{6} = \tan \frac{\pi}{6}$ في الربع III. $\tan\theta$ موجبة.

$= \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$



c. $\csc \frac{15\pi}{4}$

الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء لــ θ هي $\frac{15\pi}{4} - 2\pi$ أو $\frac{7\pi}{4}$،
والتي تقع في الربع IV. إذًا، فزاوية المرجع θ' هي $2\pi - \frac{7\pi}{4}$ أو $\frac{\pi}{4}$.
لأن sine الزاوية و Sec عبارة عن نسب مقلوبة و $\sin \theta$
سالبة تقع في الربع IV. فهذا يجعل $\csc \theta$ سالبة أيضًا في الربع IV.

$$\csc \frac{15\pi}{4} = -\csc \frac{\pi}{4}$$ في الربع IV. $\csc \theta$ سالبة.

$$= -\frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}}$$ $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$

$$= -\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad -\sqrt{2}$$ $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

التحقق يمكنك التحقق من إجابتك باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

$$\csc \frac{15\pi}{4} \approx -1.414 \checkmark$$

$$-\sqrt{2} \approx -1.414 \checkmark$$

تمرين موجّه

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

4A. $\tan \frac{5\pi}{3}$

4B. $\sin \frac{5\pi}{6}$

4C. $\sec(-135°)$

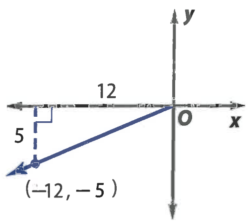
إذا كانت قيمة واحدة أو أكثر من النسب المثلثية معروفة وكذلك الربع الذي يقع ضلع الإنتهاء لــ θ فيه معروفًا، فقيم النسبة المتبقية يمكن اكتشافها.

مثال 5 استخدام قيمة نسبة مثلثية واحدة لإيجاد قيم النسب الأخرى

افترض أن $\tan \theta = \frac{5}{12}$، حيث $\sin \theta < 0$. جد القيم الدقيقة للخمسة نسب المثلثية المتبقية للزاوية θ.

لإيجاد قيم النسب الأخرى، يجب أن تجد الإحداثيات لنقطة على ضلع الإنتهاء للزاوية θ. أنت تعلم أن $\tan \theta$ موجبة، وأن $\sin \theta$ سالبة، إذًا θ يجب أن تقع في الربع III. هذا يعني أن كلاً من x و y سالبتان.

لأن $\tan \theta = \frac{y}{x}$ أو $\frac{5}{12}$. استخدم النقطة $(-12, -5)$ لإيجاد r.



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$ نظرية فيثاغورس

$$= \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2}$$ $x = -12$ و $y = -5$

$$= \sqrt{169} = 13$$ بأخذ الجذر التربيعي الموجب.

استخدم $x = -12$، $y = -5$، و $r = 13$ لكتابة النسب المثلثية الخمس المتبقية.

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = -\frac{5}{13} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r} = -\frac{12}{13} \qquad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{12}{5}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = -\frac{13}{5} \qquad \sec \theta = \frac{r}{x} = -\frac{13}{12}$$

تمرين موجّه

جد قيم النسب الخمسة المثلثية المتبقية للزاوية θ.

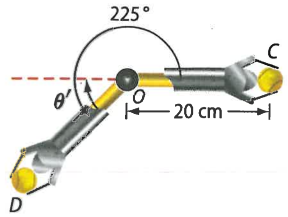
5A. $\sec \theta = \sqrt{3}, \tan \theta < 0$

5B. $\sin \theta = \frac{5}{7}, \cot \theta > 0$

انتبه!

إنطاق المقام تأكد من إنطاق المقام، في حالة الضرورة.

مثال 6 من الحياة اليومية إيجاد الإحداثيات بمعرفة نصف القطر وزاوية



تطبيقات الإنسان الآلي كجزء من فئة مدى الحركة في مسابقة المدرسة الثانوية حول تطبيقات الإنسان الآلي، برمج أحد الطلاب ذراعًا آليًا بطول 20 cm ليلتقط شيئًا عند نقطة C ويدور بزاوية 225° بالضبط ليضع الشيء في حاوية عند النقطة D. جد وضع الشيء عند النقطة D، بالنسبة للنقطة المحورية O.

مع وجود النقطة المحورية في نقطة الأصل والزاوية التي يدور بها الذراع في وضع قياسي، تتخذ النقطة C الإحداثيات $(20, 0)$. زاوية المرجع θ' لـ 225° هي $225° - 180°$ أو 45°.

لنفترض أن لوضع النقطة D الإحداثيات (x, y). تعريفات النسبة sine و cosine يمكن استخدامها لإيجاد قيم x و y. r هي 20 cm، هو طول الذراع الآلي. بما أن D تقع في الربع III، فإن النسبة sine و cosine للزاوية 225° سالبين.

نسبة الـ Sine	$\sin\theta = \frac{y}{r}$	نسبة الـ Cosine	$\cos\theta = \frac{x}{r}$
$\theta = 225°$ و $r = 20$	$\sin 225° = \frac{y}{20}$	$\theta = 225°$ و $r = 20$	$\cos 225° = \frac{x}{20}$
$\sin 225° = -\sin 45°$	$-\sin 45° = \frac{y}{20}$	$\cos 225° = -\cos 45°$	$-\cos 45° = \frac{x}{20}$
$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{y}{20}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{20}$
حل y.	$-10\sqrt{2} = y$	حل x.	$-10\sqrt{2} = x$

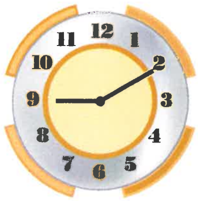
الإحداثيات الدقيقة لـ D هي $(-10\sqrt{2}, -10\sqrt{2})$. بما أن $10\sqrt{2}$ حوالي 14.14، فالشيء على بعد حوالي 14.14 cm على يسار النقطة المحورية وحوالي 14.14 cm أسفل النقطة المحورية.

الربط بالحياة اليومية

الروبوكاب (RoboCup) هي إحدى البطولات العالمية التي تتنافس فيها الفرق في سلسلة من مباريات الكرة بناء على حجم وذكاء آلاتهم. هدف المشروع هو تحسين الذكاء الصناعي وأبحاث تطبيقات الإنسان الآلي.

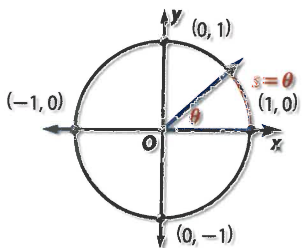
المصدر: RoboCup

تمرين موجّه



6. آلية الساعة عقرب الدقائق بطول 3 in يشير إلى الساعة إلا 45 دقيقة. ما الوضع الجديد لطرف عقرب الدقائق بالنسبة للنقطة المحورية عندما تمر 10 دقائق على الساعة التالية؟

2 النسب المثلثية على دائرة الوحدة



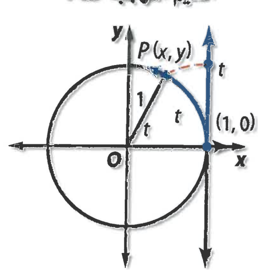
دائرة الوحدة هي دائرة نصف قطرها 1 متمركز على نقطة الأصل. لاحظ أنه على دائرة وحدة، مقياس راديان لزاوية مركزية $\theta = \frac{s}{1}$ أو s. إذًا فطول قوس تقطعه θ يتطابق تمامًا مع مقياس راديان للزاوية. هذا يتيح طريقة لتخطيط مدخل قيمته عدد حقيقي لنسبة مثلثية إلى مخرج قيمته عدد حقيقي.

فكّر في خط الأعداد الحقيقية الذي يمس أفقيًا دائرة الوحدة عند $(1, 0)$ كما هو موضح بالأسفل. إذا كان هذا الخط ملتفًّا حول الدائرة في كلا الاتجاهين: الموجب (عكس عقارب الساعة) أو السالب (مع عقارب الساعة)، فإن كل نقطة t على الخط ستكون مرتبطة بنقطة فريدة $P(x, y)$ على الدائرة. لأن $r = 1$، يمكننا تعريف النسب المثلثية للزاوية t بمجرد معرفة x و y.

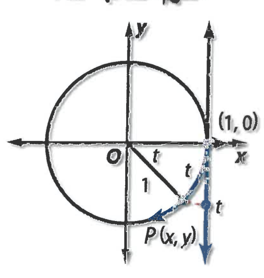
نصيحة دراسية

نسبة الالتفاف ارتباط نقطة على خط الأعداد بنقطة على الدائرة يسمى *نسبة الالتفاف*، $w(t)$. على سبيل المثال، إذا كانت $w(t)$ تربط نقطة t على خط الأعداد بنقطة $P(x, y)$ على دائرة الوحدة، فبالتالي $w(\pi) = (-1, 0)$ و $w(2\pi) = (1, 0)$.

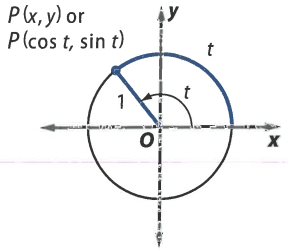
القيم الموجبة لـ t



القيم السالبة لـ t



المفهوم الأساسي النسب المثلثية على دائرة الوحدة



افترض أن t هي أي عدد حقيقي على خط الأعداد وافترض أن $P(x, y)$ هي النقطة على t عندما يلتف خط الأعداد على دائرة الوحدة. من ثم، تكون النسب المثلثية لــ t كالتالي:

$\sin t = y$ | $\cos t = x$ | $\tan t = \frac{y}{x}, x \neq 0$

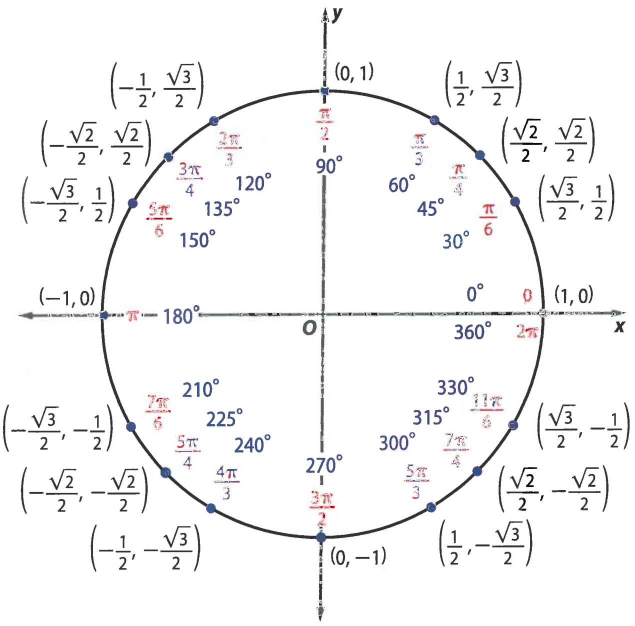
$\csc t = \frac{1}{y}, y \neq 0$ | $\sec t = \frac{1}{x}, x \neq 0$ | $\cot t = \frac{x}{y}, y \neq 0$

وهكذا، فإحداثيات P تطابق الزاوية t ويمكن كتابتها هكذا $P(\cos t, \sin t)$.

لاحظ أن قيمة المدخل في كل من التعريفات السابقة يمكن أن تعد مقياسًا للزاوية أو عددًا حقيقيًّا t. عندما يتم تعريفها كنسب نظام الأعداد الحقيقية باستخدام دائرة الوحدة، تسمى النسب المثلثية غالبًا **النسب الدائرية**.

باستخدام زوايا المرجع أو الزوايا الربعية، ينبغي أن تكون الآن قادرًا على إيجاد قيم المعادلة المثلثية لكل مضاعفات الأعداد الصحيحة لــ $30°$، أو $\frac{\pi}{6}$ راديان، و $45°$، أو $\frac{\pi}{4}$ راديان. تلتف هذه القيم الخاصة على 16 نقطة خاصة على دائرة الوحدة، كما هو موضح فيما يلي:

دائرة وحدة عليها 16 نقطة



نصيحة دراسية

دائرة الوحدة ذات 16 نقطة أنت بالفعل تتذكر هذه القيم في الربع الأول. القيم المتبقية يمكن تحديدها باستخدام المحورين الأفقي x والرأسي y، وتناظر نقطة الأصل لدائرة الوحدة مع إشارات x و y في كل ربع.

باستخدام الإحداثيات (x, y) مع دائرة الوحدة ذات 16 نقطة والتعريفات في مربع المفاهيم الأساسية أعلى الصفحة، يمكنك إيجاد القيم الخاصة بالنسب المثلثية لقياسات الزاوية المشتركة. من المفيد تذكر هذه القيم الدقيقة للنسبة حتى تتمكن من أداء الحسابات التي تتضمنهم سريعًا.

مثال 7 إيجاد قيم النسب المثلثية باستخدام دائرة الوحدة

جد قيمة كل تعبير مما يلي. إذا لم تكن مُعرَّفة، فاكتب غير مُعرَّفة.

a. $\sin \frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3}$ تتطابق مع النقطة $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ على دائرة الوحدة.

$\sin t = y$ — تعريف $\sin t$

$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ — $t = \frac{\pi}{3}$ عندما $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\cos 135°$

$135°$ تتطابق مع النقطة $(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ على دائرة الوحدة.

$\cos t = x$ — تعريف $\cos t$

$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ — $t = 135°$ عندما $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c. $\tan 270°$

$270°$ تتطابق مع النقطة $(x, y) = (0, -1)$ على دائرة الوحدة.

$\tan t = \frac{y}{x}$ — تعريف $\tan t$

$\tan 270° = \frac{-1}{0}$ — $t = 270°$ عندما $x = 0$ و $y = -1$

وهكذا تكون $\tan 270°$ غير مُعرَّفة.

d. $\csc \frac{11\pi}{6}$

$\frac{11\pi}{6}$ تتطابق مع النقطة $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ على دائرة الوحدة.

$\csc t = \frac{1}{y}$ — تعريف $\csc t$

$\csc \frac{11\pi}{6} = \frac{1}{-\frac{1}{2}}$ — $t = \frac{11\pi}{6}$ عندما $y = -\frac{1}{2}$

$= -2$ — بسّط

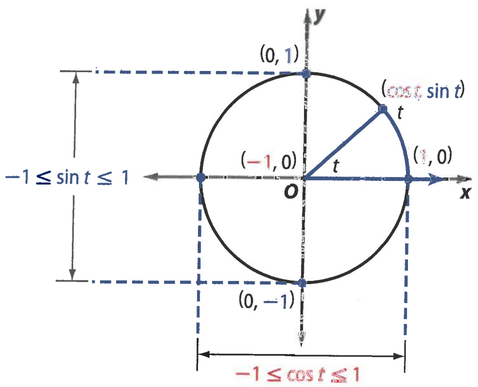
تمرين موجّه

7A. $\cos \frac{\pi}{4}$ **7B.** $\sin 120°$ **7C.** $\cot 210°$ **7D.** $\sec \frac{7\pi}{4}$

نصيحة دراسية

الراديان مقابل الدرجة بينما يمكننا أيضًا مناقشة إحدى الالتفافات وهي تتطابق مع زاوية قياسها $360°$، فإن هذا القياس لا علاقة له بمسافة. على دائرة الوحدة، تتطابق إحدى الالتفافات مع قياس الزاوية 2π والمسافة 2π حول الدائرة.

كما هو معرّف من خلال التفاف خط الأعداد حول دائرة الوحدة، فإن مجال نسب الـ Sine, Cosine هو مجموعة الأعداد الحقيقية كلها $(-\infty, \infty)$. مع أن خط الأعداد يمتد لا نهائيًا في كلا الاتجاهين، فيمكن أن يلتف عدة مرات حول دائرة الوحدة، مرتبطًا بأكثر من قيمة t للنقطة نفسها $P(x, y)$ مع كل التفاف، موجبًا كان أو سالبًا.



لأن $\cos t = x, \sin t = y$، والتفافًا واحدًا يناظر مسافة 2π،

$\cos(t + 2n\pi) = \cos t$ و $\sin(t + 2n\pi) = \sin t$،

لأي عدد صحيح n وعدد حقيقي t.

وبذلك، تقع قيم نسبة sin و cos في الفترة [1 ,1-] وتتكرر لكل عدد صحيح من مضاعفات 2π على خط الأعداد. النسب التي لها قيم تتكرر على فترات منتظمة تسمى **نسب دورية**.

نصيحة دراسية

النسب الدورية النسب الدائرية الثلاث الأخرى دورية أيضًا. ستتم مناقشة فترات هذه النسب في الدرس 5-4.

المفهوم الأساسي الدوال الدورية

تكون الدالة $y = f(t)$ دورية إذا وجد عدد حقيقي موجب c بحيث $f(t + c) = f(t)$ لكل قيم t في مجال f.

العدد الأصغر c الذي تكون f بالدالة له دورية يسمى **دورة الدالة f**.

نسب sin و cos دورية، حيث تكرر القيم بعد 2π. ومن ثم فترة هذه النسب هي 2π. يمكن توضيح أن قيم نسبة tan تتكرر بعد مسافة π على خط الأعداد. ومن ثم فنسبة tan لها دورة طولها π و

$$\tan t = \tan (t + n\pi)$$

لأي عدد صحيح n وعدد حقيقي t. ما لم تكن كل من $\tan t$ و $\tan (t + n\pi)$ غير معرفتين. بإمكانك استخدام الطبيعة الدورية لنسب sin و con و tan لإيجاد قيمة تلك النسب.

مثال 8 استخدام الطبيعة الدورية للنسب الدائرية

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

a. $\cos \frac{11\pi}{4}$

$$\cos \frac{11\pi}{4} = \cos \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi\right)$$

أعد كتابة $\frac{11\pi}{4}$ كمجموع لعدد و 2π.

$$= \cos \frac{3\pi}{4}$$

$\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4} + 2\pi$ مرتبطة بالنقطة نفسها $(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ على دائرة الوحدة.

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos t = x$ عند $t = \frac{3\pi}{4}$.

b. $\sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \sin \left(\frac{4\pi}{3} + 2(-1)\pi\right)$$

أعد كتابة $-\frac{2\pi}{3}$ كمجموع عدد ومضاعف العدد الصحيح 2π.

$$= \sin \frac{4\pi}{3}$$

$\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{4\pi}{3} - 2(-1)\pi$ يرتبط بالنقطة نفسها $(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ على دائرة الوحدة

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin t = y$ عند $t = \frac{4\pi}{3}$

c. $\tan \frac{19\pi}{6}$

$$\tan \frac{19\pi}{6} = \tan \left(\frac{\pi}{6} + 3\pi\right)$$

أعد كتابة $\frac{19\pi}{6}$ كمجموع عدد ومضاعف عدد صحيح π.

$$= \tan \frac{\pi}{6}$$

$\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{6} + 3\pi$ مرتبط بالنقطة نفسها على دائرة الوحدة بقيم ظل الزاوية نفسها.

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$y = \frac{1}{2}$ و $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\tan t = \frac{y}{x}$ عند $t = \frac{\pi}{6}$

تمرين موجّه

8A. $\sin \frac{13\pi}{4}$ **8B.** $\cos \left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ **8C.** $\tan \frac{15\pi}{6}$

تذكر من الدرس 2-1 أن دالة f تكون زوجية إذا كانت بالدالة لكل x في مجال f، $f(-x) = f(x)$ وفردية إذا كانت بالدالة لكل x في مجال f، $f(-x) = -f(x)$. بإمكانك استخدام دائرة الوحدة لتتحقق من كون دالة cos زوجية وأن دالة sin و tan فردية. بمعنى،

$$\cos (-t) = \cos t \qquad \sin (-t) = -\sin t \qquad \tan (-t) = -\tan t$$

تمارين

النقطة المعطاة تقع على ضلع الإنتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي. جد قيم النسب المثلثية الست لـ θ. (المثال 1)

1. $(3, 4)$
2. $(-6, 6)$
3. $(-4, -3)$
4. $(2, 0)$
5. $(1, -8)$
6. $(5, -3)$
7. $(-8, 15)$
8. $(-1, -2)$

جد قيمة كل نسبة مثلثية، إذا كانت مُعرَّفة. إذا لم تكن مُعرَّفة، فاكتب غير مُعرَّفة. (المثال 2)

9. $\sin \frac{\pi}{2}$
10. $\tan 2\pi$
11. $\cot (-180°)$
12. $\csc 270°$
13. $\cos (-270°)$
14. $\sec 180°$
15. $\tan \pi$
16. $\sec \left(-\frac{\pi}{2}\right)$

ارسم كل زاوية. ثم جد زاوية المرجع. (المثال 3)

17. $135°$
18. $210°$
19. $\frac{7\pi}{12}$
20. $\frac{11\pi}{3}$
21. $-405°$
22. $-75°$
23. $\frac{5\pi}{6}$
24. $\frac{13\pi}{6}$

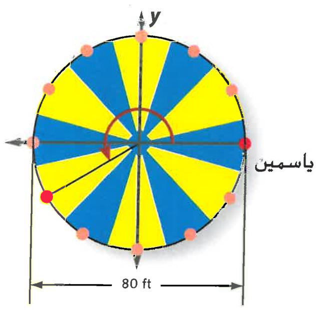
جد قيمة كل تعبير مما يلي. (المثال 4)

25. $\cos \frac{4\pi}{3}$
26. $\tan \frac{7\pi}{6}$
27. $\sin \frac{3\pi}{4}$
28. $\cot (-45°)$
29. $\csc 390°$
30. $\sec (-150°)$
31. $\tan \frac{11\pi}{6}$
32. $\sin 300°$

جد قيم النسب المثلثية الخمس المتبقية لـ θ. (المثال 5)

33. $\tan \theta = 2$، حيث $\sin \theta > 0$ و $\cos \theta > 0$
34. $\csc \theta = 2$، حيث $\sin \theta > 0$ و $\cos \theta < 0$
35. $\sin \theta = -\frac{1}{5}$، حيث $\cos \theta > 0$
36. $\cos \theta = -\frac{12}{13}$، حيث $\sin \theta < 0$
37. $\sec \theta = \sqrt{3}$، حيث $\sin \theta < 0$ و $\cos \theta > 0$
38. $\cot \theta = 1$، حيث $\sin \theta < 0$ و $\cos \theta < 0$
39. $\tan \theta = -1$، حيث $\sin \theta < 0$
40. $\cos \theta = -\frac{1}{2}$، حيث $\sin \theta > 0$

41. **لعبة دوامة الخيل** ركبت ياسمين لعبة دوامة الخيل في الكرنفال. قطر اللعبة 80 ft. جد مكان مقعدها من مركز اللعبة بعدما دارت 210°. (المثال 6)

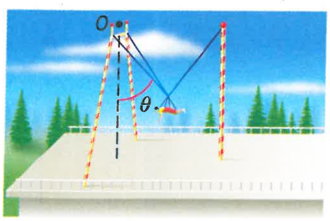


42. **أنبوب القطعة المعدنية** سقطت القطعة المعدنية في أنبوب؛ حيث أخذت تدور في دوائر أصغر حجمًا حتى سقطت في قاع الصندوق. قطر الدائرة الأولى التي صنعتها القطعة المعدنية 24 سنتيمترًا. قبل دورانها مسافة دائرة كاملة، تدور القطعة 150° وتسقط. ما هو المكان الجديد للقطعة المعدنية بالدالة بالنسبة الى الأنبوب؟ (المثال 6)

جد قيمة كل تعبير مما يلي. إن لم تكن معرّفة، اكتب غير معرّفة. (المثالان 7 و 8)

43. $\sec 120°$
44. $\sin 315°$
45. $\cos \frac{11\pi}{3}$
46. $\tan \left(-\frac{5\pi}{4}\right)$
47. $\csc 390°$
48. $\cot 510°$
49. $\csc 5400°$
50. $\sec \frac{3\pi}{2}$
51. $\cot \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$
52. $\csc \frac{17\pi}{6}$
53. $\tan \frac{5\pi}{3}$
54. $\sec \frac{7\pi}{6}$
55. $\sin \left(-\frac{5\pi}{3}\right)$
56. $\cos \frac{7\pi}{4}$
57. $\tan \frac{14\pi}{3}$
58. $\cos \left(-\frac{19\pi}{6}\right)$

59. **قطارات الملاهي** يركب مازن وأيوب قطار حديقة الملاهي. بعد الأرجحات الأولى العديدة، كانت الزاوية التي صنعها القطار مع الزاوية الرأسية تمثلها $\theta = 22 \cos \pi t$، حيث θ مقدرة بالراديان و t مقدرة بالثواني. حدد مقياس الزاوية مُقدّرًا بالراديان بالدالة لـ $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$، و2.5. (المثال 8)



أكمل كل تعبير مثلثي مما يلي.

60. $\cos 60° = \sin$ ___

61. $\tan \frac{\pi}{4} = \sin$ ___

62. $\sin \frac{2\pi}{3} = \cos$ ___

63. $\cos \frac{7\pi}{6} = \sin$ ___

64. $\sin(-45°) = \cos$ ___

65. $\cos \frac{5\pi}{3} = \sin$ ___

.66 **المثلجات** تقدر المبيعات الشهرية لمحل أحمد للمثلجات بآلاف الدراهم، ويمكن تمثيلها بالآتي: $y = 71.3 + 59.6 \sin \frac{\pi(t-4)}{6}$ ؛ حيث $t = 1$ تمثل يناير، $t = 2$ تمثل فبراير، وهكذا.

a. قدّر مبيعات يناير ومارس ويوليو وأكتوبر.

b. اشرح لماذا يمكن تمثيل مبيعات محل المثلجات من خلال نسبة مثلثية.

استخدم القيم المقدمة لإيجاد حل النسب المثلثية.

67. $\cos(-\theta) = \frac{8}{11}$; $\cos \theta = ?$; $\sec \theta = ?$

68. $\sin(-\theta) = \frac{5}{9}$; $\sin \theta = ?$; $\csc \theta = ?$

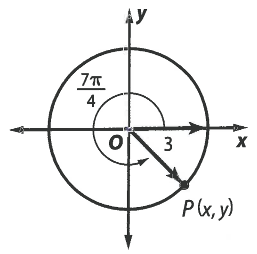
69. $\sec \theta = \frac{13}{12}$; $\cos \theta = ?$; $\cos(-\theta) = ?$

70. $\csc \theta = \frac{19}{17}$; $\sin \theta = ?$; $\sin(-\theta) = ?$

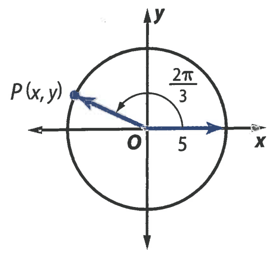
.71 **التمثيلات البيانية** بافتراض أن ضلع الانتهاء لزاوية θ في وضع قياسي يقع في المكان نفسه للتمثيل البياني لـ $y = 2x$ في الربع III. جد قيم النسب الست المثلثية لـ θ.

جد إحداثيات P لكل دائرة باستخدام نصف القطر المعطى وقياس الزاوية.

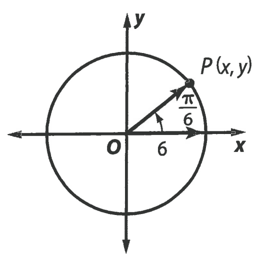
72.



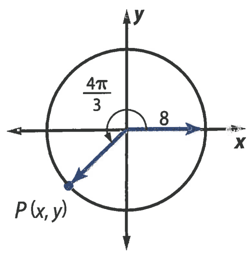
73.



74.



75.



.76 **مقارنة** بافتراض أن ضلع الإنتهاء للزاوية θ_1 في وضع قياسي يتضمن النقطة $(7, -8)$، وضلع الإنتهاء للزاوية الثانية θ_2 في وضع قياسي يتضمن النقطة $(-7, 8)$. قارن قيمة sin في كل من θ_1 و θ_2.

.77 **المد والجزر** عمق المد والجزر y مقدرًا بالمتر على الشاطئ يختلف باختلاف نسبة Sine x، الساعة في اليوم. في يوم معين، كانت الدالة $y = 3 \sin\left[\frac{\pi}{6}(x-4)\right] + 8$؛ حيث $x = 0, 1, 2, ..., 24$ يتطابق مع 12:00 منتصف الليل، 1:00 A.M.، 2:00 A.M.، ...، 12:00 منتصف الليل في الليلة التالية.

a. ما أقصى عمق، أو ارتفاع للمد والجزر، في ذلك اليوم؟

b. في أي وقت (أوقات) حدث ارتفاع المد والجزر؟

.78 **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف الفترة المتعلقة بنسبة الـ sine.

a. الجدولي انسخ وأكمل جدولاً مشابهًا للموجود أمامك، واجعله يتضمن قياسات الزوايا 16 كلها من دائرة الوحدة.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	...	2π
$\sin \theta$						
$\sin 2\theta$						
$\sin 4\theta$						

b. اللفظي بعد أي قيم لـ θ تقوم $\sin \theta, \sin 2\theta, \sin 4\theta$، بتكرار قيم مداها؟ بكلمات أخرى، ما الفترات لهذه النسب؟

c. اللفظي خمّن كيف تأثرت الفترة $y = \sin n\theta$ بقيم مختلفة لـ n.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

.79 **تحدي** صِف في كل عبارة مما يلي n.

a. $\cos\left(n \times \frac{\pi}{2}\right) = 0$

b. $\csc\left(n \times \frac{\pi}{2}\right)$ غير معرّفة

التبرير **حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة*. اشرح استنتاجك.**

.80 إذا كانت $\cos \theta = 0.8$ و $\sec \theta - \cos(-\theta) = 0.4$

.81 بما أن $\tan(-t) = -\tan t$، يكون tan الزاوية السالبة عدد سالب.

.82 **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا يمكن تمثيل عدد الحضور في متنزه على مدار العام بواسطة نسبة دورية. أي المشكلات أو الأحداث يمكن أن تقع على مدار الزمن لتغير هذا التمثيل الزمني؟

التبرير **استخدم دائرة الوحدة للتحقق من كل علاقة.**

83. $\sin(-t) = -\sin t$

84. $\cos(-t) = \cos t$

85. $\tan(-t) = -\tan t$

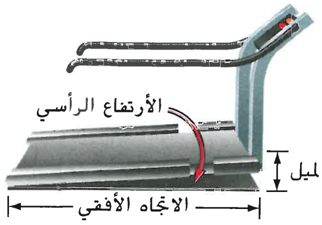
.86 **الكتابة في الرياضيات** خمّن دورة نسب secant و cosecant و cotangent. اشرح استنتاجك.

مراجعة شاملة

اكتب قياس كل درجة عشرية في صيغة وحدات الدرجات والدقائق والثواني (DMS) وكل قياس DMS في صيغة درجة عشرية لأقرب جزء من مئة.

87. $168.35°$ **88.** $27.465°$ **89.** $14° 5' 20''$ **90.** $173° 24' 35''$

91. **التمرين** تدريب مبرمج مسبقًا على جهاز الركض يتكون من فترات للركض، بمختلف المعدلات وزوايا الميل. 1% من الميل يعني وحدة ارتفاع رأسي واحدة لكل 100 وحدة من الاتجاه الأفقي.



a. في أي زاوية، بالنسبة للاتجاه الأفقي، يقع قاع جهاز الركض عندما يتم ضبطه بميل 10%؟ قرّب إلى أقرب درجة.

b. إذا كان طول قاع جهاز الركض 40 in. فما الارتفاع الرأسي عندما يتم ضبطه بميل 8% بوصة؟

جد قيمة اللوغاريتم في كل مما يلي:

92. $\log_8 64$ **93.** $\log_{125} 5$ **94.** $\log_2 32$ **95.** $\log_4 128$

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيها أصفار، إن وجدت.

96. $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2$

97. $g(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 3$

98. $h(x) = x^4 - x^2 + x - 1$

99. $h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$

100. $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 11x - 3$

101. $g(x) = 4x^3 + x^2 + 8x + 2$

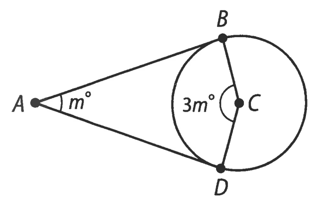
102. **الملاحة** يستخدم نظام تحديد المواقع العالمي (GPS) الأقمار الصناعية ليتيح للمستخدم تحديد موقعه على الأرض. يعتمد النظام على إشارات الأقمار الصناعية التي تنعكس من وإلى جهاز الإرسال المحمول. الوقت الذي تستغرقه الإشارة في الانعكاس يُستخدم في تحديد مكان جهاز الإرسال. موجات الراديو تسافر خلال الهواء بسرعة 299,792,458 m/s. والدالة $d(t) = 299{,}792{,}458t$ تربط الزمن t مقدرًا بالثواني بالمسافة المقطوعة $d(t)$ مقدرة بالمتر.

a. جد المسافة التي ستسافرها موجة الراديو في 1.4,5.9 ,0.2 ,0.05 ثانية.

b. إذا تم استقبال إشارة من القمر الصناعي الخاص بنظام تحديد المواقع العالمي على جهاز إرسال في 0.08 ثانية، فكم يبعد هذا القمر الصناعي عن جهاز الإرسال؟

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

103. SAT/ACT في الشكل، $\overline{AB}$ و$\overline{AD}$ كل منهما مماس للدائرة C. ما قيمة m؟



104. لنفترض أن θ زاوية في وضع قياسي مع $\sin \theta > 0$. في أي ربع (أرباع) يمكن أن يقع ضلع الإنتهاء للزاوية θ؟

A I فقط

B I و II

C I و III

D I و IV

105. **مراجعة** جد السرعة الزاوية مقدرة بالراديان لكل ثانية لنقطة على إطار دراجة إذا أتمت دورتين في 3 ثوانٍ.

F $\frac{\pi}{3}$

G $\frac{\pi}{2}$

H $\frac{2\pi}{3}$

J $\frac{4\pi}{3}$

106. **مراجعة** أي الزوايا لها tan و Cosine سالبين؟

A $110°$

B $180°$

C $210°$

D $340°$

3-4 استكشاف
تمثيل دالة الــ sine بيانيًّا باستخدام المعادلات الوسيطية

التركيز

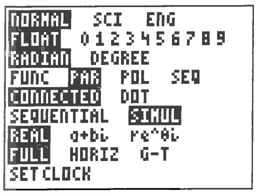
- استخدام الحاسبة البيانية والمعادلات الوسيطية لتمثيل دالة الــ sine ومعكوسها بيانيًّا.

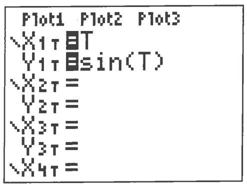
باستخدام نظام الأعداد الحقيقية، يمكنك تمثيل الدوال المثلثية على المستوى الإحداثي، وتطبيق التحليل البياني نفسه الذي قمت به للدوال في درس سابق. كما سبق في التوسع 7-1، ستُستخدَم المعادلات الوسيطية في تمثيل دالة الــ sine.

النشاط 1 تمثيل المعادلة الوسيطية بيانيًّا $y = \sin x$

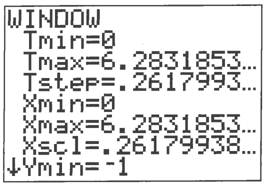
مثِّل بيانيًّا t ،$x = t$ ،$y = \sin t$.

الخطوة 1 تعيين المنوال. من القائمة MODE، اختر RADIAN ،PAR ،SIMUL و. يتيح هذا تمثيل المعادلات بيانيًّا على الفور. بعد ذلك، قم بإدخال المعادلات الوسيطية. في صيغة وسيطية، X,T,θ,n سيتم استخدام t بدلاً من x.



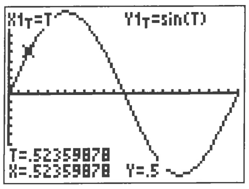


الخطوة 2 قم بإعداد قيم t و x للمدى من 0 إلى 2π. قم بإعداد مقياس Tstep و x على $\frac{\pi}{12}$. قم بإعداد y على [−1, 1] scl: 0.1.
تقوم الحاسبة تلقائيًّا بالتحويل إلى صيغة عشرية.



الخطوة 3 تمثيل المعادلة بيانيًّا. تتبَّع الدالة لتحديد النقاط على التمثيل البياني. اختر TRACE واستخدم السهم الأيمن للتحرك على المنحنى.

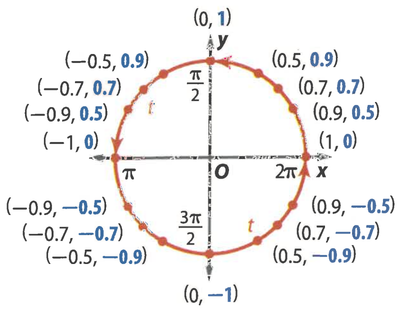
سجِّل القيم المتناظرة لكل من x و y.

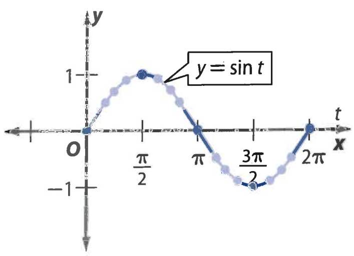


[0, 2π] scl: $\frac{\pi}{12}$ by [−1, 1] scl: 0.1
t: [0, 2π]; tstep $\frac{\pi}{12}$

الخطوة 4 يوضح الجدول قياس الزوايا من 0° إلى 180°، أو من 0 إلى π، والقيم المتناظرة لــ $\sin t$ على دائرة الوحدة. الأشكال التالية تمثل العلاقة بين التمثيل البياني ودائرة الوحدة.

الدرجات	180	150	135	120	90	60	45	30	0
الراديانات	3.14	2.618	2.356	2.094	1.571	1.05	0.79	0.52	0
$y = \sin t$	0	0.5	0.707	0.866	1	0.866	0.707	0.5	0





نصيحة دراسية

المعادلات العشرية فيما يلي المعادلات العشرية لقيم مثلثية مشتركة.

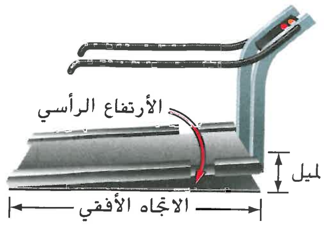
$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$

مراجعة شاملة

اكتب قياس كل درجة عشرية في صيغة وحدات الدرجات والدقائق والثواني (DMS) وكل قياس DMS في صيغة درجة عشرية لأقرب جزء من مئة.

87. $168.35°$ **88.** $27.465°$ **89.** $14° 5' 20''$ **90.** $173° 24' 35''$



91. **التمرين** تدريب مبرمج مسبقًا على جهاز الركض يتكون من فترات للركض، بمختلف المعدلات وزوايا الميل. 1% من الميل يعني وحدة ارتفاع رأسي واحدة لكل 100 وحدة من الاتجاه الأفقي.

a. في أي زاوية، بالنسبة للاتجاه الأفقي، يقع قاع جهاز الركض عندما يتم ضبطه بميل 10%؟ قرّب إلى أقرب درجة.

b. إذا كان طول قاع جهاز الركض 40 in. فما الارتفاع الرأسي عندما يتم ضبطه بميل 8% بوصة؟

جد قيمة اللوغاريتم في كل مما يلي:

92. $\log_8 64$ **93.** $\log_{125} 5$ **94.** $\log_2 32$ **95.** $\log_4 128$

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيها أصفار، إن وجدت.

96. $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2$

97. $g(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 3$

98. $h(x) = x^4 - x^2 + x - 1$

99. $h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$

100. $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 11x - 3$

101. $g(x) = 4x^3 + x^2 + 8x + 2$

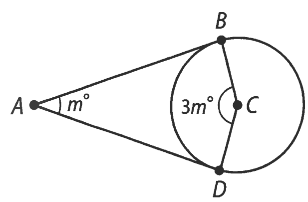
102. **الملاحة** يستخدم نظام تحديد المواقع العالمي (GPS) الأقمار الصناعية ليتيح للمستخدم تحديد موقعه على الأرض. يعتمد النظام على إشارات الأقمار الصناعية التي تنعكس من وإلى جهاز الإرسال المحمول. الوقت الذي تستغرقه الإشارة في الانعكاس يُستخدم في تحديد مكان جهاز الإرسال. موجات الراديو تسافر خلال الهواء بسرعة 299,792,458 m/s. والدالة $d(t) = 299{,}792{,}458t$ تربط الزمن t مقدرًا بالثواني بالمسافة المقطوعة $d(t)$ مقدرة بالمتر.

a. جد المسافة التي ستسافرها موجة الراديو في 0.05, 0.2, 1.4,5.9 ثانية.

b. إذا تم استقبال إشارة من القمر الصناعي الخاص بنظام تحديد المواقع العالمي على جهاز إرسال في 0.08 ثانية، فكم يبعد هذا القمر الصناعي عن جهاز الإرسال؟

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

103. SAT/ACT في الشكل، $\overline{AB}$ و$\overline{AD}$ كل منهما مماس للدائرة C. ما قيمة m؟



104. لنفترض أن θ زاوية في وضع قياسي مع $\sin \theta > 0$. في أي ربع (أرباع) يمكن أن يقع ضلع الإنتهاء للزاوية θ؟

A I فقط

B I و II

C I و III

D I و IV

105. **مراجعة** جد السرعة الزاوية مقدرة بالراديان لكل ثانية لنقطة على إطار دراجة إذا أتمت دورتين في 3 ثوانٍ.

F $\frac{\pi}{3}$

G $\frac{\pi}{2}$

H $\frac{2\pi}{3}$

J $\frac{4\pi}{3}$

106. **مراجعة** أي الزوايا لها tan و Cosine سالبين؟

A 110°

B 180°

C 210°

D 340°

تمثيل دالة الـ sine بيانيًا باستخدام المعادلات الوسيطية

التركيز

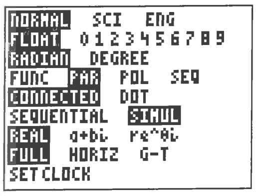
- استخدام الحاسبة البيانية والمعادلات الوسيطية لتمثيل دالة الـ sine ومعكوسها بيانيًا.

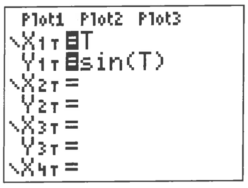
باستخدام نظام الأعداد الحقيقية، يمكنك تمثيل الدوال المثلثية على المستوى الإحداثي، وتطبيق التحليل البياني نفسه الذي قمت به للدوال في درس سابق. كما سبق في التوسع 7-1، ستُستخدَم المعادلات الوسيطية في تمثيل دالة الـ sine.

النشاط 1 تمثيل المعادلة الوسيطية بيانيًا $y = \sin x$

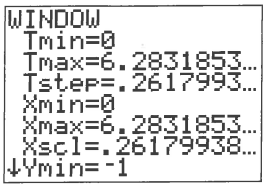
مثِّل بيانيًا $x = t$، $y = \sin t$.

الخطوة 1 تعيين المنوال. من القائمة MODE، اختر RADIAN، PAR، و SIMUL. يتيح هذا تمثيل المعادلات بيانيًا على الفور. بعد ذلك، قم بإدخال المعادلات الوسيطية. في صيغة وسيطية، سيتم استخدام t بدلاً من x X,T,θ,n



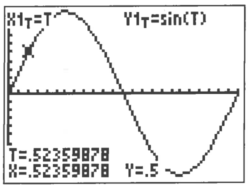


الخطوة 2 قم بإعداد قيم t و x للمدى من 0 إلى 2π. قم بإعداد مقياس Tstep و x على $\frac{\pi}{12}$. قم بإعداد y على scl: 0.1 $[-1, 1]$.
تقوم الحاسبة تلقائيًا بالتحويل إلى صيغة عشرية.



الخطوة 3 تمثيل المعادلة بيانيًا. تتبَّع الدالة لتحديد النقاط على التمثيل البياني. اختر TRACE واستخدم السهم الأيمن للتحرك على المنحنى.

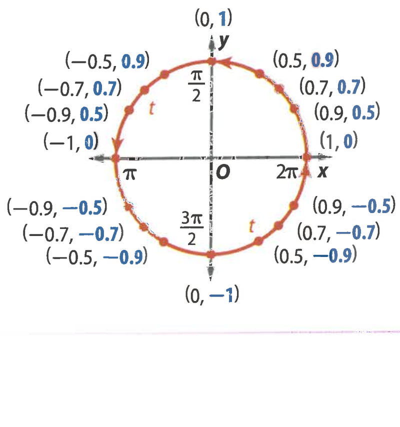
سجِّل القيم المتناظرة لكل من x و y.

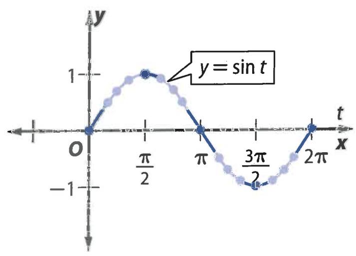


$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{12}$ by $[-1, 1]$ scl: 0.1
t: $[0, 2\pi]$; $t$step $\frac{\pi}{12}$

الخطوة 4 يوضح الجدول قياس الزوايا من $0°$ إلى $180°$، أو من 0 إلى π، والقيم المتناظرة لـ $\sin t$ على دائرة الوحدة. الأشكال التالية تمثل العلاقة بين التمثيل البياني ودائرة الوحدة.

الدرجات	180	150	135	120	90	60	45	30	0
الراديانات	3.14	2.618	2.356	2.094	1.571	1.05	0.79	0.52	0
$y = \sin t$	0	0.5	0.707	0.866	1	0.866	0.707	0.5	0





نصيحة دراسية

المعادلات العشرية فيما يلي المعادلات العشرية لقيم مثلثية مشتركة.

$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$

تمارين

مثِّل كل دالة على $[0, 2\pi]$.

1. $x = t, y = \cos t$
2. $x = t, y = \sin 2t$
3. $x = t, y = 3 \cos t$
4. $x = t, y = 4 \sin t$
5. $x = t, y = \cos (t + \pi)$
6. $x = t, y = 2 \sin \left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

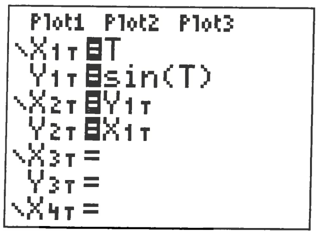
بالتعريف يكون $\sin t$ هو الإحداثي y للنقطة $P(x, y)$ على دائرة الوحدة؛ حيث يلتف العدد الحقيقي t حول خط الأعداد. كما هو مبين في الرسم التخطيطي بالصفحة السابقة، فإن التمثيل البياني لـ $y = \sin t$ يتبع الإحداثي y في النقطة التي تحددها t وهي تتحرك عكس عقارب الساعة حول دائرة الوحدة.

التمثيل البياني لدالة الـ sine يسمى منحنى الـ *sine*. تعلمت من الدرس 3-4 أن دالة الـ sine هي دالة زمنية لها دورة 2π. هذا معناه أن منحنى الـ sine الممثل بيانيًا من 0 إلى 2π سيُكرَّر كل مسافة قدرها 2π في أي من الاتجاهين، الموجب والسالب. يمكن استخدام المعادلات الوسيطية لتمثيل معكوس دالة الـ sine بيانيًا.

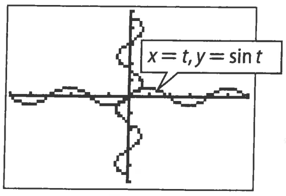
النشاط 2 تمثيل المعكوس بيانيًا

مثِّل بيانيًّا $x = t$، $\sin t$ y ومعكوسها. ثم حدِّد المجال الذي يجعل $y = \sin t$ بدالة واحد إلى واحد.

الخطوة 1 يتم إيجاد المعكوسات بتبديل x و y. قم بإدخال المعادلات المعطاة كالتالي: X_{1T} و Y_{1T}. لتمثيل المعكوس بيانيًّا، قم بإعداد $X_{2T} = Y_{1T}$ و $Y_{2T} = X_{1T}$. وهذه توجد في VARS القائمة. اختر Y-VARS، المعادلة الوسيطية، Y_{1T}. كرِّر بالدالة لـ X_{1T}.



الخطوة 2 تمثيل المعادلة بيانيًّا. عدِّل النافذة حتى يتضح كل من الرسمين البيانيين، كما هو موضح. ربما تحتاج إلى تعيين Tstep بقيمة صغرى حتى تحصل على منحنى بياني متجانس.



$[-3\pi, 3\pi]$ scl: $\frac{\pi}{12}$ by $[-10, 10]$ scl: 2

t: $[-3\pi, 3\pi]$; tstep $\frac{\pi}{12}$

الخطوة 3 بسبب أن منحنى الـ sine دوري، هناك عدد لانهائي من المجالات سيجتاز بسببها المنحى اختبار الخط الأفقي، بدالة واحد إلى واحد. أحد هذه المجالات مثلاً $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

نصيحة دراسية

إذا اتضح أن التمثيل البياني Tstep منكسر، يمكنك تغيير قيمة Tstep إلى قيمة صغرى حتى تحصل على منحنى متجانس.

تمارين

مثِّل كل دالة ومعكوسها. ثم حدِّد مجالاً تكون نسبته إلى كل دالة واحدًا إلى واحد.

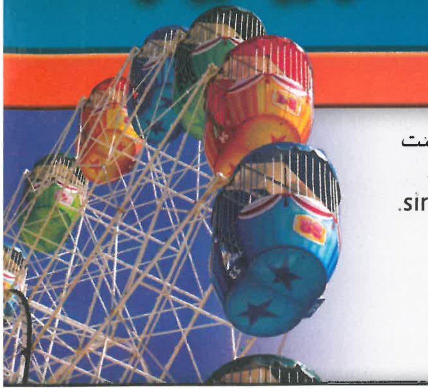
7. $x = t, y = \cos 2t$
8. $x = t, y = -\sin t$
9. $x = t, y = 2 \cos t$
10. $x = t + \frac{\pi}{4}, y = \sin t$
11. $x = t, y = 2 \cos (t - \pi)$
12. $x = t - \frac{\pi}{6}, y = \sin t$

3-4 تمثيل دوال sine و cosine الزاوية بيانيًا

السابق:
- لقد قمت بتحليل التمثيلات البيانية للدوال.

الحالي:
1. تمثيل التحويلات لدوال الـ sine و cosine بيانيًا
2. استخدام دوال الsine لحل المسائل.

لماذا:
- عندما تدور العجلة الدوارة، يختلف الارتفاع الذي كنت عليه فوق سطح الأرض بشكل دوري تمامًا مثل دالة دورية. يمكنك تمثيل هذا السلوك باستخدام *دالة* sine.



المفردات الجديدة
منحنى الجيب sinusoid
سعة amplitude
تكرار frequency
إزاحة الطور phase shift
إزاحة رأسية vertical shift
خط متوسط midline

1 تحويلات دوال sine , cosine

كما هو مبين في المثال 4-4. التمثيل البياني $y = \sin t$ يتبع الإحداثي y للنقطة المحددة بواسطة t وهي تتحرك حول دائرة الوحدة. وبالمثل، التمثيل البياني لـ $y = \cos t$ يتبع الإحداثي x لهذه النقطة. التمثيلات البيانية لهذه الوظائف دورية،وتتكرر بعد فترة من 2π. وفيما يلي تلخيص خصائص دوال الـ sine و cosine.

المفهوم الأساسي خواص دوال الـ sine, cosine

دالة الـ sine

المجال: $(-\infty, \infty)$ **المدى:** $[-1, 1]$

التقاطع مع المحور الرأسي **y:** 0

التقاطع مع المحور الأفقي **x:** $n\pi, n \in \mathbb{Z}$

الاتصال متصلة على $(-\infty, \infty)$

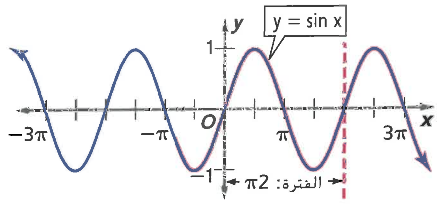
التناظر الأصل (دالة فردية)

القيم القصوى عظمى عند 1 $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

صغرى عند -1 $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

السلوك الطرفي $\lim_{x \to -\infty} \sin x$ و $\lim_{x \to \infty} \sin x$ غير موجودة.

التذبذب: بين -1 و 1



دالة الـ cosine

المجال: $(-\infty, \infty)$ **المدى:** $[-1, 1]$

التقاطع مع المحور الرأسي **y:** 1

التقاطع مع المحور الأفقي **x:** $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

الاتصال متصلة على $(-\infty, \infty)$

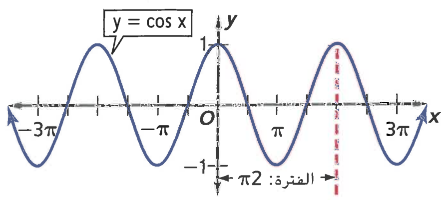
التناظر المحور y (دالة زوجية)

القيم القصوى عظمى عند 1 $x = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

صغرى عند -1 $x = \pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

السلوك الطرفي $\lim_{x \to -\infty} \cos x$ و $\lim_{x \to \infty} \cos x$ غير موجودة.

التذبذب: بين -1 و 1

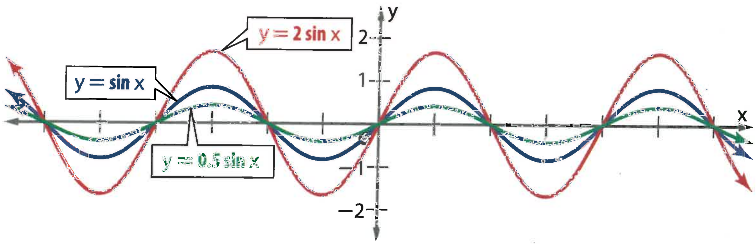


يمثل كل جزء من التمثيل البياني على $[0, 2\pi]$ فترة واحدة أو دائرة من الدالة. لاحظ أن التمثيل البياني لـ **cosine** هو ترجمة أفقية للتمثيل البياني للـ **sine**. أي تحوبل في دالة **sine** اسمه **sinusoid**. الشكل العام لهذه الدوال هو:

$$y = a \sin (bx + c) + d \quad \text{و} \quad y = a \cos (bx + c) + d$$

حيث a, b, c, d هي ثوابت، ولا تساوي a و b القيمة 0.

... البيانية لـ $y = \cos x$ و $y = \sin x$ رأسيًا
إذا $|a| > 1$ ويضغطها رأسيًا إذا $|a| < 1$.



التوسعات الرأسية تؤثر في سعة الدوال الجيبية(sinusoid)

> **نصيحة دراسية**
> **التوسع والتقاطع مع المحور الأفقي x** لاحظ أن تغيير الأبعاد (التمدّد) للدالة الجيبية لا يؤثر على مكان قطع المنحنى للمحور الأفقي x عند التقاطع مع المحور الأفقي x

المفهوم الأساسي تكرار دوال الـ sine , cosine

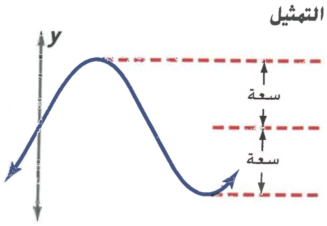
الشرح

سعة الدالة الجيبية (sinusoid)هي نصف المسافة بين القيم العظمى والصغرى من الدالة، أو نصف ارتفاع التموج.

الرموز

عندما يكون $y = a \sin (bx + c) + d$ و $y = a \cos (bx + c) + d$، تكون السعة $= |a|$.

التمثيل



لتمثيل دالة جيبية (sinusoid) بيانيًا صيغتها $y = a \cos x$ أو $y = a \sin x$، حدد موقع التقاطع مع المحور الأفقي x لـــsin الزاوية الرئيسية أو دالة الـــ cos، ثم استخدم السعة $|a|$ لتحديد نقاط الحد الأقصى ونقاط الحد الأدنى الجديدة. ثم ارسم موجة الـــsin من خلال هذه النقاط.

المثال 1 تغيير الأبعاد (التمدّد) الرأسي بمقياس التمثيل البياني للدوال الجيبية (sinusoid)

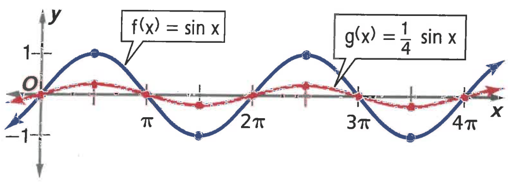
صف كيف أن التمثيلات البيانية لـــ $g(x) = \frac{1}{4} \sin x$ و $f(x) = \sin x$ مترابطة. ثم جد سعة $g(x)$، وارسم فترتي كلتا الدالتين على المحاور الإحداثية نفسها.

التمثيل البياني لـــ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـــ $f(x)$ المضغوط رأسيًا. سعة $g(x)$ هي $\left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$.

ضع جدولاً لإدراج إحداثيات تقاطعات x والقيم القصوى لـــ $f(x) = \sin x$ لفترة واحدة على $[0, 2\pi]$. ثم استخدم سعة $g(x)$ للعثور على نقاط مماثلة في تمثيلها البياني.

الدالة	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة العظمى	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة الصغرى	التقاطع مع المحور الأفقي x
$f(x) = \sin x$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$	$(\pi, 0)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$	$(2\pi, 0)$
$g(x) = \frac{1}{4} \sin x$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{4}\right)$	$(\pi, 0)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, -\frac{1}{4}\right)$	$(2\pi, 0)$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الموضحة لكل دالة. ثم كرر النموذج المقتَرح بواسطة فترة واحدة لكل تمثيل بياني وذلك لإكمال فترة ثانية على $[2\pi, 4\pi]$. ثم قم بتمديد كل منحنى إلى اليسار واليمين للدلالة على أن المنحنى مستمر في كلا الاتجاهين



> **نصيحة دراسية**
> **الراديان مقابل الدرجات** يمكن إعادة قياس المحور x من حيث الدرجات و إنتاج تمثيل بياني سيني يشبه تلك المنتجة باستخدام مقياس راديان و مع ذلك، في حساب التفاضل والتكامل، سوف تواجه قواعد تعتمد على قياس راديان. لذلك، في هذا الكتاب، فإننا سوف نوفر تمثيلًا بيانيًا لجميع الدوال المثلثية بمقياس راديان .

تمرين موجّه

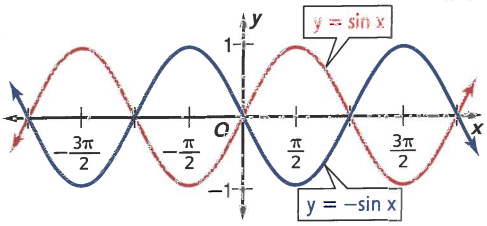
صف كيف أن التمثيلات البيانية الخاصة بـــ $f(x)$ و $g(x)$ مترابطة. ثم جد سعة $g(x)$، وارسم فترتين لكلتا الدالتين على محاور الإحداثيات نفسها.

1A. $f(x) = \cos x$
$g(x) = \frac{1}{3} \cos x$

1B. $f(x) = \sin x$
$g(x) = 5 \sin x$

1C. $f(x) = \cos x$
$g(x) = 2 \cos x$

بالنسبة للمحور x.



المثال 2 انعكاس التمثيل البياني للدوال الجيبية (sinusoid)

صف كيف أن التمثيلات البيانية لـ $f(x) = \cos x$ و $g(x) = -3 \cos x$ مترابطة. ثم جد سعة $g(x)$، و ارسم فترتي الدالتين على المحاور الإحداثية نفسها.

التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ الممدّد رأسيًا و من ثم منعكس بالنسبة للمحور x. تكون سعة $g(x)$ $|-3|$ أو 3.

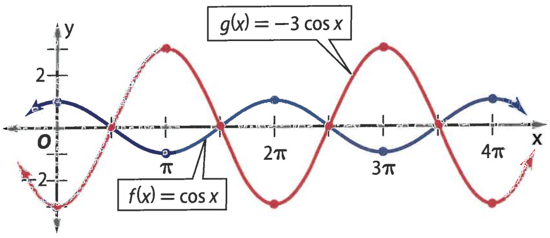
ضع جدولاً لإدراج إحداثيات أهم نقاط $f(x) = \sin x$ لفترة واحدة على $[0, 2\pi]$. استخدم سعة $g(x)$ لإيجاد نقاط متماثلة في التمثيل البياني لـ $y = 3 \cos x$. ثم اعكس هذه النقاط بالنسبة للمحور x لتجد النقاط المماثلة في التمثيل البياني لـ $g(x)$.

انتبه!

السعة لاحظ أن المثال 2 لا يذكر أن سعة $g(x) = -3 \cos x$ تكون -3. السعة هي ارتفاع وليست اتجاهية

الدالة	القيمة العظمى	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة العظمى	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة العظمى
$f(x) = \cos x$	$(0, 1)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$(\pi, -1)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$(2\pi, 1)$
$y = 3 \cos x$	$(0, 3)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$(\pi, -3)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$(2\pi, 3)$
$g(x) = -3 \cos x$	$(0, -3)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$(\pi, 3)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$(2\pi, -3)$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الموضحة لكل دالة. ثم كرر النموذج المقترح بواسطة فترة واحدة لكل تمثيل بياني وذلك لإكمال فترة ثانية على $[2\pi, 4\pi]$. ثم قم بتمديد كل منحنى إلى اليسار واليمين للدلالة على أن المنحنى مستمر في كلا الاتجاهين



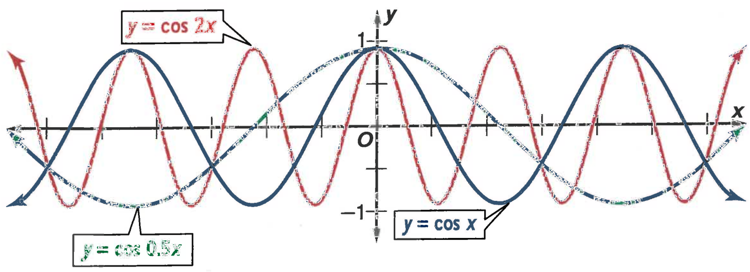
تمرين موجّه

صف كيف أن التمثيلات البيانية الخاصة بـ $f(x)$ و $g(x)$ مترابطة. ثم جد سعة $g(x)$، وارسم فترتي الدالتين على المحاور الإحداثية نفسها.

2A. $f(x) = \cos x$
$g(x) = -\frac{1}{5} \cos x$

2B. $f(x) = \sin x$
$g(x) = -4 \sin x$

في الدرس 5-1، أنه إذا كان $g(x) = f(bx)$، فإن $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ المضغوط أفقيًا إذا كان $|b| > 1$ والمتسع أفقيًا إذا كان $|b| < 1$. التوسعات الأفقية تؤثر على دورة الدالة الجيبية بطول دائرة واحدة كاملة.

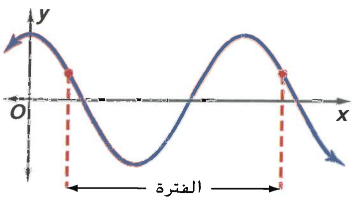


المفهوم الأساسي دورة دوال الـ sine, cosine

الشرح دورة الدالية الجيبية هي المسافة بين أي مجموعتين من نقاط التكرار على التمثيل البياني للدالة

الرموز إذا كان $y = a\sin(bx + c) + d$ و $y = a\cos(bx + c) + d$، حيث $b \neq 0$.
فإن الدورة $= \frac{2\pi}{|b|}$.

التمثيل



انتبه! **تحديد الدورة** عند تحديد دورة الدالة الزمنية من تمثيلها البياني تذكر أن الدورة هي أصغر مسافة تحتوي على كافة قيم الدالة.

لعمل تمثيل بياني لدالة الـsin للنموذج $y = \cos bx$ أو $y = \sin bx$، جد دورة الدالة ومن ثم أضف $\frac{\text{الدورة}}{4}$ من نقطة النهاية اليسرى للفترة مع هذا الطول. ثم استخدم هذه القيم كقيم للمحور x الخاصة بالنقاط الرئيسية على التمثيل البياني.

مثال 3: تمثيل التوسع الأفقي للدوال الجيبية (sinusoid) بيانيًا

صف كيف أن التمثيلات البيانية لـ $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \cos \frac{x}{3}$ مترابطة. ثم جد الفترة لـ $g(x)$، وارسم فترتي الدالتين على نفس المحاور الإحداثية.

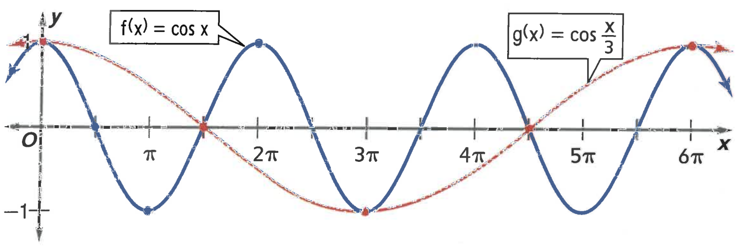
لأن $\cos \frac{1}{3}x = \cos \frac{x}{3}$، فإن التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ المتسع أفقيًا. وتكون دورة $g(x)$

$$\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$$

لأن دورة $g(x)$ تكون 6π. لإيجاد النقاط المناظرة على التمثيل البياني لـ $g(x)$، غيّر إحداثيات x لهذه النقاط على $f(x)$ كي تتراوح بين 0 و 6π لتزداد بزيادات من $\frac{6\pi}{4}$ أو $\frac{3\pi}{2}$.

الدالة	القيمة العظمى	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة الصغرى	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة العظمى
$f(x) = \cos x$	$(0, 1)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$(\pi, -1)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$(2\pi, 1)$
$g(x) = \cos \frac{x}{3}$	$(0, 1)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$(3\pi, -1)$	$\left(\frac{9\pi}{2}, 0\right)$	$(6\pi, 1)$

رسم منحنى من خلال النقاط المشار إليها لكل دالة، وتابع الأنماط لإتمام دورة كاملة واحدة لكل منها.



تمرين موجّه

صف كيف أن التمثيلات البيانية الخاصة بـ $f(x)$ و $g(x)$ مترابطة. ثم جد دورة $g(x)$، وارسم على الأقل دورة واحدة لكل دالة على المحاور الإحداثية نفسها.

3A. $f(x) = \cos x$
$g(x) = \cos \frac{x}{2}$

3B. $f(x) = \sin x$
$g(x) = \sin 3x$

3C. $f(x) = \cos x$
$g(x) = \cos \frac{1}{4}x$

المفهوم الأساسي تكرار دوال الـ cosine, sine

الشرح

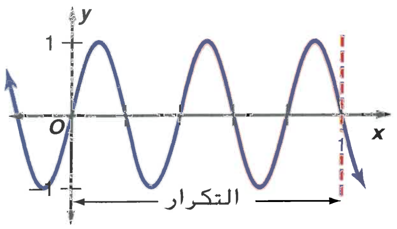
تكرار الدالة الجيبية هو عدد الدورات التي تكملها الدالة في فترة طولها وحدة واحدة. التكرار هو مقلوب الدورة.

الرموز

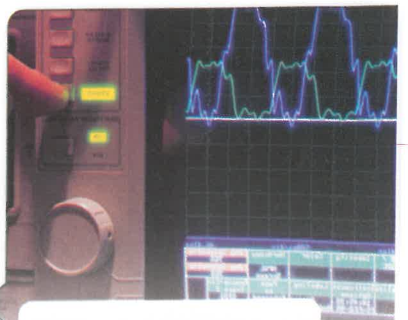
عندما يكون $y = a \sin (bx + c) + d$ و $y = a \cos (bx + c) + d$،

التكرار $= \frac{|b|}{2\pi} = \frac{1}{\text{الدورة}}$

التمثيل



لأن تكرار الدالة الجيبية مقلوب تلك الدورة، ويترتب على ذلك أن دورة الدالة مقلوب تكرارها.



الربط بالحياة اليومية

في الفيزياء، التكرار يتم قياسه بالهيرتز أو التذبذبات في الثانية الواحدة . على سبيل المثال، عدد موجات الصوت التي تتخطى النقطة A في الثانية الواحدة يمكن أن تكون تردد الموجة.

المصدر: عالم العلوم

مثال 4 من الحياة اليومية استخدام التكرار لكتابة الدالة الجيبية.

الموسيقى الملاحظات الموسيقية مصنفة وفقًا للتكرار. وضمن المقياس المخفف ذاته، يمثل الوسط C التردّد التكراري 262 هيرتز. استخدم هذه المعلومات والمعلومات التي في اليمين لكتابة معادلة دالة الـ sine التي يمكن استخدامها لتمثيل السلوك الأولي من الموجة الصوتية المرتبطة بالوسط C وذات سعة 0.2.

الشكل العام للمعادلة سوف يكون $y = a \sin bt$، حيث t يكون الزمن بالثواني. لأن السعة تكون 0.2 $= |a|$. هذا يعني أن $a = \pm 0.2$.

الدورة هي مقلوب التكرار أو $\frac{1}{262}$. استخدم هذه القيمة لتجد b.

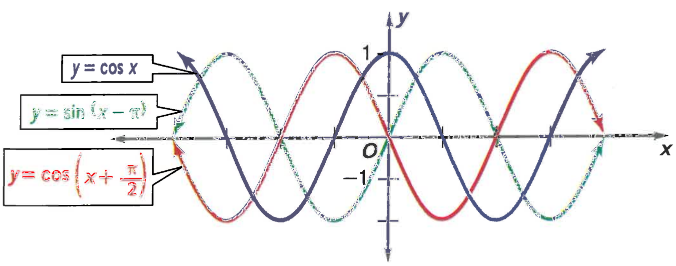
صيغة الدورة	الدورة $= \frac{2\pi}{|b|}$
الدورة $= \frac{1}{262}$	$\frac{1}{262} = \frac{2\pi}{|b|}$
حل لإيجاد $|b|$.	$|b| = 2\pi(262)$ أو 524π
تحل من أجل b.	$b = \pm 524\pi$

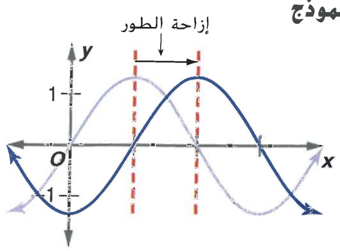
عن طريق الاختيار العشوائي للقيم الإيجابية من b و a، إحدى دوال الـsine التي تمثّل السلوك الأولي تكون $y = 0.2 \sin 524\pi t$.

تمرين موجّه

4. **الموسيقى** في نفس المقياس، مفتاح C الذي فوق مفتاح الوسط C له تردّد تكراري 524 هيرتز. اكتب معادلة لدالة الـsine التي يمكن استخدامها لتمثيل السلوك الأولي من الموجة الصوتية المرتبطة بمفتاح C هذا الذي له سعة 0.2.

أحد أطوار منحنى الـsine هو موقع الموجة ذات الصلة . وينتج عن الإزاحة الأفقية للدالة الجيبية *إزاحة الطور* تذكّر من الدرس 1-5 أن التمثيل البياني لـ $y = f(x + c)$ هو التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ مُنزاحاً أو محوّلاً بمقدار $|c|$ من الوحدات يسارًا إذا كان $c > 0$ و بمقدار $|c|$ الوحدات يمينًا إذا كان $c < 0$.



الشرح	إزاحة الطور دالة الـsin هو الاختلاف بين الوضع الأفقي للدالة وذاك الخاص بأي دالة sin مشابهة.	النموذج
الرموز	عندما يكون $y = a \sin (bx + c) + d$ و $y = a \cos (bx + c) + d$، حيث $b \neq 0$، فإن إزاحة الطور $= -\frac{c}{\lvert b \rvert}$.	

سوف تقوم بالتحقق من صيغة إزاحة الطور في التمرين 44.

لتمثيل إزاحة طور الدالة الجيبية (sinusoid) بيانيًا بالصيغة $y = a \cos (bx + c) + d$ أو $y = a \sin (bx + c) + d$ أولاً قم بتحديد نقاط نهاية الفترة الزمنية الذي يتوافق مع دورة واحدة للتمثيل البياني من خلال إضافة $-\frac{c}{b}$ إلى كل نقطة النهاية على الفترة الزمنية $[0, 2\pi]$ من دالة أم.

نصيحة دراسية

صيغة بديلة الصيغ العامة لدوال sine يمكن التعبير عنها كالآتي
$y = a \sin b(x - h) + k$
و $y = a \cos b(x - h) + k$.
في هذه الصيغ، كل دالة sine لها إزاحة طور لـ h وإزاحة رأسية لـ k بالمقارنة مع التمثيلات البيانية $y = a \sin bx$ و $y = a \cos bx$.

مثال 5 تمثيل الإزاحة الأفقية للدوال الجيبية (sinusoid) بيانيًا.

حدد السعة، والدورة والتكرار وإزاحة الطور لـ $y = \sin \left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$. ثم مثّل دورتين للدالة بيانيًا

في هذه الدالة، $a = 1$ و $b = 3$ و $c = -\frac{\pi}{2}$.

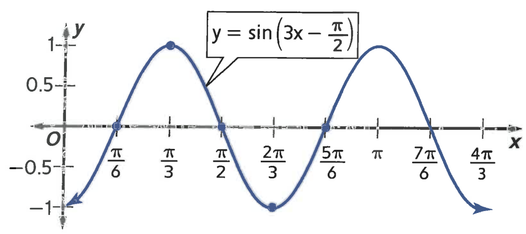
السعة: $\lvert a \rvert = \lvert 1 \rvert = 1$ — الدورة $\frac{2\pi}{\lvert b \rvert} = \frac{2\pi}{\lvert 3 \rvert}$ أو $\frac{2\pi}{3}$

التكرار: $\frac{\lvert b \rvert}{2\pi} = \frac{\lvert 3 \rvert}{2\pi}$ أو $\frac{3}{2\pi}$ — إزاحة الطور $-\frac{c}{\lvert b \rvert} = -\frac{-\frac{\pi}{2}}{\lvert 3 \rvert}$ أو $\frac{\pi}{6}$

لتمثيل $y = \sin \left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ بيانيًا. ضع في الاعتبار التمثيل البياني $y = \sin 3x$. فترة هذه الدالة هي $\frac{2\pi}{3}$. رتّب جدولاً للنقاط الرئيسية لـ $y = \sin 3x$ على الفترة $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$. لحساب إزاحة طور بقيمة $\frac{\pi}{6}$. أضف $\frac{\pi}{6}$ إلى قيم x لكل من النقاط الرئيسية للتمثيل البياني لـ $y = \sin 3x$.

الدالة	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة العظمى	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة الصغرى	التقاطع مع المحور الأفقي x
$y = \sin 3x$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$
$y = \sin \left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3}, -1\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$

ارسم التمثيل البياني $y = \sin \left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ من خلال هذه النقاط لمتابعة النمط وإكمال الدورتين.



تمرين موجّه

حدد السعة، والدورة والتكرار وإزاحة الطور لكل دالة. ثم مثّل بيانيًا دورتين للدالة.

5A. $y = \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

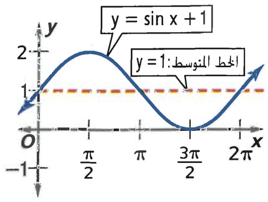
5B. $y = 3 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

خلال الإزاحة الرأسية أو **التحول الرأسي**. نتعلم من الدرس 1-5 أن التمثيل البياني $d + y = f(x)$ هو التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ منزاحاً أو محولاً بمقدار $|d|$ وحدات أعلى إذا كان $d > 0$ و بمقدار $|d|$ وحدات أدنى إذا كان $d < 0$. التحول الرأسي هو متوسط الحد الأقصى والأدنى من الدالة .

نصيحة دراسية

تدوين $\sin(x + d) \neq \sin x + d$ التعبير الأول يوضح إزاحة طور، والتعبير الثاني يعبر عن إزاحة رأسية .

الدالتان الرئيستان $y = \cos x$ و $y = \sin x$ تقعان حول المحور x. بعد الإزاحة الرأسية، يصبح محور أفقي جديد بـــ **الخط المتوسط** الخط المرجعي أو نقطة التوازن التي يتمحور حولها التمثيل البياني. على سبيل المثال، الخط الأوسط لـــ $y = \sin x + 1$ هو $y = 1$، كما هو موضح.



بشكل عام، يكون الخط الأوسط للتمثيلات البيانية $y = a\cos(bx + c) + d$ and $y = a\sin(bx + c) + d$ هو $y = d$.

مثال 6 تمثيل الإزاحة الرأسية للدوال الجيبية(sinusoid) بيانيا

حدد السعة، والدورة والتكرار وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية لـــ $y = \sin(x + 2\pi) - 1$. ثم مثِّل بيانيًا دورتين للدالة

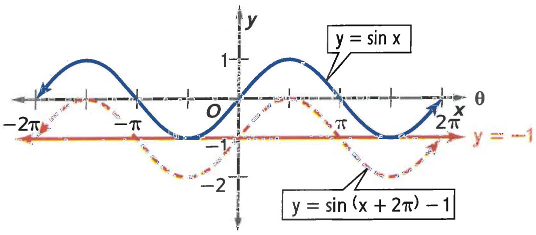
في هذه الدالة $a = 1, b = 1, c = 2\pi, d = -1$.

السعة: $|a| = |1| = 1$ الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$ التكرار: $\frac{|b|}{2\pi} = \frac{|1|}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$

إزاحة الطور: $-\frac{c}{|b|} = -\frac{2\pi}{|1|} = -2\pi$ الإزاحة الرأسية: d أو -1 الخط المتوسط: $y = d$ أو $y = -1$

أولاً،مثِّل بيانيًا الخط المتوسط $y = -1$. ثم مثِّل بيانيًا $y = \sin x$ المحولة 2π وحدات إلى اليسار ووحدة إلى الأسفل 1 .

لاحظ أن هذا التحول مساوٍ لترجمة وحدة 1 لأسفل لأن تحول المرحلة كان نقطة واحدة إلى اليسار.



تمرين موجّه

حدد السعة، والدورة والتكرار وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثِّل بيانيًا دورتين للدالة.

6A. $y = 2\cos x + 1$

6B. $y = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{2}\right) - 3$

خصائص تحولات الدوال الأم $y = \cos x$ و $y = \sin x$ ملخصة أدناه.

نصيحة تقنية

خاصية Zoom Trig عند تمثيل الدالة المثلثية بيانيًا باستخدام التمثيلات البيانية الخاصة بك، كن متأكدًا من أنك في وضع الراديان واستخدم خيار ZTrig أسفل خاصية التكبير لتغيير نافذة العرض الخاصة بك من النافذة القياسية إلى واحدة أكثر تناسبًا : $[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\pi/2$ في $[-4, 4]$ scl: 1

ملخص المفهوم التمثيلات البيانية للدوال الجيبية

وللتمثيلات البيانية الخاصة بـــ $y = a\cos(bx + c) + d$ و $y = a\sin(bx + c) + d$، حيث: $a \neq 0$ and $b \neq 0$. السمات الآتية:

السعة: $|a|$ الدورة: $\frac{2\pi}{|b|}$ التكرار: $\frac{1}{\text{الفترة}}$ أو $\frac{|b|}{2\pi}$

إزاحة الطور: $-\frac{c}{|b|}$ الإزاحة الرأسية: d الخط المتوسط: $y = d$

2 تطبيقات الدوال الجيبية

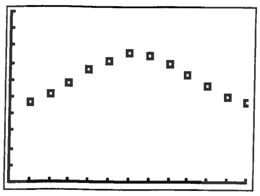
العديد من مواقف الحياة اليومية التي لها سلوك دوري بمرور الزمن يمكن تمثيلها من خلال التحولات $y = \cos x$ أو $y = \sin x$.

مثال 7 من الحياة اليومية تمثيل البيانات باستخدام الدوال الجيبية (sinusoid)

الأرصاد الجوية استخدم المعلومات الموجودة على اليمين لكتابة دالة جيبية تمثل عدد ساعات النهار في مدينة نيويورك كدالة زمن x بحيث $x = 1$ تمثل 15 يناير، و $x = 2$ تمثل 15 فبراير وهكذا. ثم استخدم تمثيلك لتقدير عدد ساعات النهار في 30 سبتمبر في نيويورك.

الخطوة 1 ارسم مخطط انتشار من البيانات واختر نموذجًا.

التمثيل البياني يظهر على شكل موجي لذا يمكنك أن تستخدم دالة جيبية من الشكل $y = a \sin (bx + c) + d$ أو $y = a \cos (bx + c) + d$. وسوف نختار استخدام $y = a \cos (bx + c) + d$ لتمثيل البيانات.



[0, 12] scl: 1 في [0, 20] scl: 2

الخطوة 2 جد القيمة العظمى M والقيم الصغرى لـــ m للبيانات، واستخدم تلك القيم لإيجاد a, b, c, d

القيمتان العظمى والصغرى لساعات النهار هما 15.7 و 9.27 . والسعة a هي نصف المسافة بين القيم العظمى.

$$a = \frac{1}{2}(M - m) = \frac{1}{2}(15.07 - 9.27) = 2.9$$

الإزاحة الرأسية d هي متوسط القيم العظمى والصغرى من البيانات.

$$d = \frac{1}{2}(M + m) = \frac{1}{2}(15.07 + 9.27) = 12.17$$

يكمل منحنى الـــsine نصف الدورة التي يستغرقها للانتقال من قيمته العظمى إلى الصغرى لقيمتها. ويتم تكرار الفترة الواحدة مرتين في هذه الحالة.

الفترة $= 2(x_{max} - x_{min}) = 2(12 - 6)$ أو 12

$x_{max} =$ شهر 21 أو 51 ديسمبر
$x_{min} =$ شهر 6 أو 15 يناير

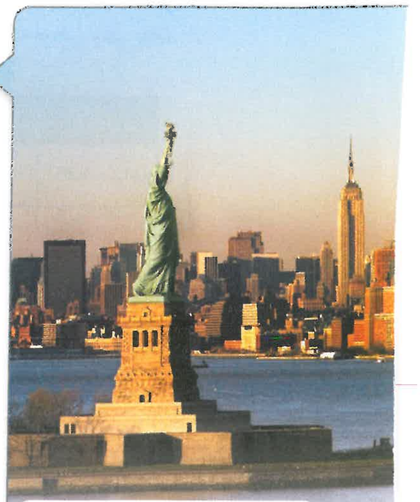
لأن الفترة تساوي $\frac{2\pi}{|b|}$ ، يمكن أن تكتب $|b| = \frac{2\pi}{\text{الدورة}}$ لذلك فإن، $|b| = \frac{2\pi}{12}, = \frac{\pi}{6}$

القيمة العظمى للبيانات تحدث عندما يكون $x = 6$. حيث إن $y = \cos x$ تبلغ القيمة العظمى لها أول مرة عندما يكون $x = 0$، يجب أن نطبق إزاحة طور بقيمة $6 - 0$ أو 6 وحدات. استخدم هذه القيمة لتجد c.

صيغة إزاحة الطور	إزاحة الطور $= -\frac{c}{|b|}$
إزاحة الطور $= 6$ و $|b| = \frac{\pi}{6}$	$6 = -\frac{c}{\frac{\pi}{6}}$
حل لـ c.	$c = -\pi$

الخطوة 3 اكتب الدالة باستخدام قيم a, b, c, d. استخدم $b = \frac{\pi}{6}$

$y = 2.9 \cos \left(\frac{\pi}{6}x - \pi\right) + 12.17$ هو نموذج واحد لساعات النهار.



الربط بالحياة اليومية

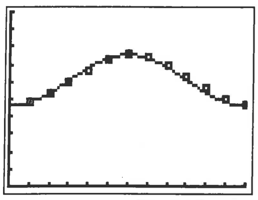
الجدول يوضح عدد ساعات النهار في الخامس عشر من كل شهر في مدينة نيويورك .

الشهر	ساعات النهار
يناير	9.58
فبراير	10.67
مارس	11.9
أبريل	13.3
مايو	14.43
يونيو	15.07
يوليو	14.8
أغسطس	13.8
سبتمبر	12.48
أكتوبر	11.15
نوفمبر	9.9
ديسمبر	9.27

المصدر: مرصد البحرية الأمريكية

مثِّل بيانيًا الدالة ومخططًا مبعثرًا في نافذة المعاينة نفسها، كما هو الحال في الشكل 3.4.1. لإيجاد عدد ساعات النهار في 30 سبتمبر، قيّم النموذج إذا علمت أن $x = 9.5$.

$y = 2.9 \cos \left(\frac{\pi}{6}(9.5) - \pi\right) + 12.17$ أو 11.42 ساعة نهار تقريبًا



[0, 12] scl: 1 في [0, 20] scl: 2

الشكل 3.4.1

تمرين موجّه

الأرصاد الجوية متوسط درجات الحرارة الشهرية في سياتل، واشنطن، موضحة أدناه.

الشهر	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
درجة الحرارة (°f)	41	44	47	50	56	61	65	66	61	54	46	42

7A. اكتب دالة تمثل درجات الحرارة الشهرية، باستخدام $x = 1$ لتمثل شهر يناير.

7B. وفقًا لنموذجك، ما متوسط درجة الحرارة الشهرية في سياتل في شهر فبراير؟

صف كيف أن التمثيلات البيانية الخاصة بـ $f(x)$ و $g(x)$ مرتبطة. ثم جد سعة $g(x)$ و ارسم دورتين لكلتا الدالتين على نفس محاور الإحداثيات. (المثالان 1 و 2)

1. $f(x) = \sin x$
$g(x) = \frac{1}{2}\sin x$

2. $f(x) = \cos x$
$g(x) = -\frac{1}{3}\cos x$

3. $f(x) = \cos x$
$g(x) = 6\cos x$

4. $f(x) = \sin x$
$g(x) = -8\sin x$

صف كيف أن التمثيلات البيانية لـ $f(x)$ و $g(x)$ مرتبطة. ثم جد دورة $g(x)$، و ارسم دورة واحدة على الأقل لكلا الدالتين في نفس محور الإحداثيات. (مثال 3)

5. $f(x) = \sin x$
$g(x) = \sin 4x$

6. $f(x) = \cos x$
$g(x) = \cos 2x$

7. $f(x) = \cos x$
$g(x) = \cos \frac{1}{5}x$

8. $f(x) = \sin x$
$g(x) = \sin \frac{1}{4}x$

9 **الأصوات** يشمل نوع الكونتر التو الرنان أعمق أصوات الغناء النسائية. حيث يمكن لبعض النساء من صاحبات الكونتر التو الغناء بطبقة متدنية مثل E وهي أقل من الطبقة C الوسطى(E3)، إذ يبلغ تردّده 165 هرتز. اكتب معادلة لدالة الـsine التي يمكن استخدامها لتمثيل السلوك الأولي من الموجة الصوتية المرتبطة بالوسط C ولها سعة 0.2. (مثال 4)

اكتب معادلة لدالة الـ sin التي يمكن استخدامها لتمثيل السلوك الأولي من الموجة الصوتية المرتبطة بالوسط C ولها سعة 0.2 . (مثال 4)

10. $f = 440, a = 0.3$

11. $f = 932, a = 0.25$

12. $f = 1245, a = 0.12$

13. $f = 623, a = 0.2$

حدِد السعة، الدورة، التكرار، إزاحة الطور، الإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثِّل بيانيًا دورتين للدالة (المثالان 5 و 6)

14. $y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

15. $y = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$

16. $y = 0.25\cos x + 3$

17. $y = \sin 3x - 2$

18. $y = \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - 1$

19. $y = \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) + 4$

20. **الإجازات** متوسط عدد الحجوزات R لدى منتجع في بداية كل شهر موضحة (المثال 7)

الشهر	R	الشهر	R
يناير	200	مايو	121
فبراير	173	يونيو	175
مارس	113	يوليو	198
أبريل	87	أغسطس	168

a. اكتب معادلة دالة جيبية توضح متوسط عدد الحجوزات باستخدام x = 1 لتمثيل شهر يناير .

b. وفقًا لنموذجك، كم يبلغ تقريبًا عدد الحجوزات التي يمكن أن يحققها المنتجع في نوفمبر؟

21. **المد والجزر** يوفّر الجدول المبين أدناه بيانات المد العالي والمنخفض في خليج معين خلال يومٍ واحد في شهر يونيو. (المثال 7)

المد والجزر	الارتفاع (ft)	الزمن
ارتفاع المد والجزر الأول	12.95	4:25 صباحًا
انخفاض المد والجزر الأول	2.02	10:55 صباحًا

a. حدد السعة، الدورة، إزاحة الطور، الإزاحة الرأسية لدالة جيبية توضح ذروة المد والجزر. افرض أن x توضح عدد الساعات التي يحدث فيها المد العالي أو المنخفض بعد منتصف الليل.

b. اكتب دالة جيبية لتكون نموذجًا للبيانات.

c. وفقًا لنموذجك، ماذا كان أعلى معدل للمد في 8:45 مساءً في تلك الليلة؟

22. **الأرصاد الجوية** متوسط درجات الحرارة الشهرية في سياتل، واشنطن، موضحة أدناه. (المثال 7)

الشهر	درجة الحرارة (°F)	الشهر	درجة الحرارة (°F)
يناير	29	يوليو	74
فبراير	30	أغسطس	72
مارس	39	سبتمبر	65
أبريل	48	أكتوبر	55
مايو	58	نوفمبر	45
يونيو	68	ديسمبر	34

a. حدد السعة والدورة وإزاحة الطور، والإزاحة الرأسية لدالة جيبية توضح درجات الحرارة الشهرية باستخدام x = 1 لتمثيل شهر يناير.

b. اكتب معادلة دالة جيبية تمثّل درجات الحرارة الشهرية.

c. وفقًا لنموذجك، ما متوسط درجة الحرارة الشهرية في سياتل في شهر فبراير؟

حاسبة التمثيل البياني جد قيم x في الفترة $-\pi < x < \pi$ التي تجعل كل معادلة أو تفاوت صحيحًا. (تلميح:استخدام دالة التقاطع.)

23. $-\sin x = \cos x$

24. $\sin x - \cos x = 1$

25. $\sin x + \cos x = 0$

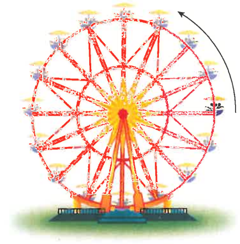
26. $\cos x \leq \sin x$

27. $\sin x \cos x > 1$

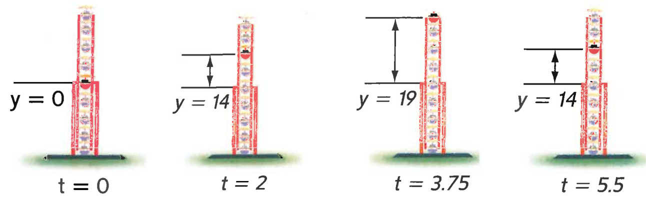
28. $\sin x \cos x \leq 0$

29. **الأحصنة الخشبية الدوارة** يتحرك حصان خشبي على دائرة صعودًا وهبوطًا كلما دارت. وعندما تنتهي فترة ركوب الدوارة، عادة ما يتوقف الحصان في وضع رأسي يختلف تمامًا على النقطة التي بدأ عندها الوضع y للحصان بعد t ثانية يمكن تمثيله بـ $y = 1.5\sin(2t + c)$، حيث لا بد من تغيير إزاحة الطور c باستمرار للتعويض عن أوضاع بدء الحركة المختلفة. إذا بلغ الحصان في جولة واحدة أقصى ارتفاع بعد $\frac{7\pi}{12}$ ثانية، جد المعادلة التي تمثل مكان الحصان.

30. **حدائق الملاهي** المكان y لعربة الركاب بالنسبة لمركز العجلة الدوارة مقدرًا بالقدم على مدار t ثانية موضح أمامك.



مشهد جانبي لعجلة دوارة عبر الفترة الزمنية [0, 5.5]



a. جد الزمن t الذي تستغرقه العربة للعودة إلى y = 0 خلال دورتها المبدئية.

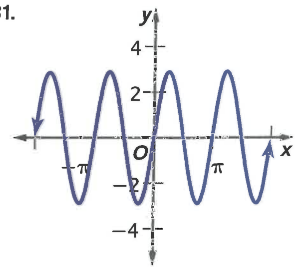
b. جد الفترة للعجلة الدوارة.

c. ارسم تمثيلًا بيانيًا يمثل مكان عربة الركاب خلال فترة واحدة.

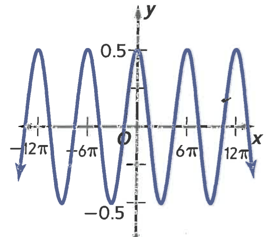
d. اكتب دالة جيبية تمثل مكان عربة الركاب بحيث تكون دالة زمنية t.

اكتب معادلة تماثل كل تمثيل بياني.

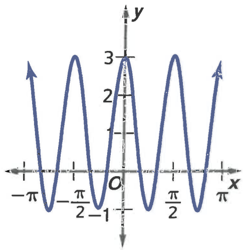
31.



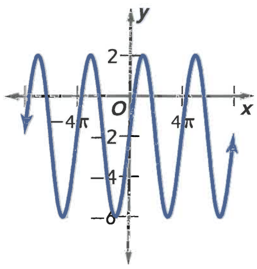
32.



33.



34.



اكتب دالة جيبية باستخدام الفترة المعطاة والسعة التي تمر خلال النقطة المعطاة.

35. الدورة: π؛ السعة: 5؛ النقطة: $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{2}\right)$

36. الدورة: 4π؛ السعة: 2؛ النقطة: $(\pi, 2)$

37. الدورة: $\frac{\pi}{2}$، السعة: 1.5؛ النقطة: $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\right)$

38. الدورة: 3π؛ السعة: 0.5؛ النقطة: $\left(\pi, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

39. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف التغير في تمثيل دالة جيبية بيانيًا للصيغة $y = \cos x$ أو $y = \sin x$ عندما تضاعفها دالة كثيرة الحدود.

a. **بيانيًا** استخدم الحاسبة البيانية لعمل مخطط للتمثيل البياني لـ $y = 2x, y = -2x$، و $y = 2x \cos x$ على المستوى الإحداثي نفسه، على الفترة [−20, 20].

b. **كلاميًا** صف سلوك التمثيل البياني لـ $y = 2x \cos x$ للرسوم البيانية لـ $y = -2x$ و $y = 2x$.

c. **بيانيًا** استخدم الحاسبة البيانية لعمل مخطط للتمثيلات البيانية لـ $y = x^2, y = -x^2$، و $y = x^2 \sin x$ على المستوى الإحداثي نفسه، على الفترة [−20, 20].

d. **كلاميًا** صِف سلوك التمثيل البياني لـ $y = x^2 \sin x$ للرسوم البيانية $y = -x^2$ و $y = x^2$.

e. **طريقة التحليل** خمّن سلوك التمثيل البياني للدوال الجيبية ذات الصيغة $y = \cos x$ أو $y = \sin x$ عندما تضاعفها دالة كثيرة الحدود لها الصيغة $y = f(x)$.

استخدام مهارات التفكير العليا

40. **التحدي** بدون التمثيل البياني، جد الإحداثيات النقطة العظمى الأولى على يمين المحور الرأسي y لـ $y = 4 \sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{9}\right)$.

التبرير حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة*. اشرح استنتاجك.

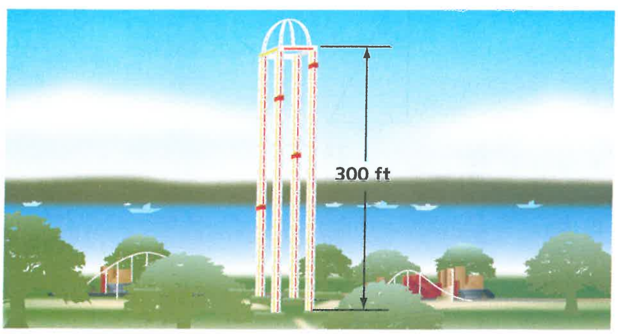
41. أي دالة جيبية من الصيغة $y = a \sin(bx + c) + d$ يمكن كتابتها أيضًا كدالة cos من الصيغة $y = a \cos(bx + c) + d$.

42. دورة $f(x) = \cos 8x$ تساوي أربع أمثال دورة $g(x) = \cos 2x$.

43. **التحدي** كم عدد أصفار $y = \cos 1500x$ على الفترة $0 \le x \le 2\pi$ ؟

44. **الإثبات** أثبت قاعدة تحويل المرحلة.

45. **الكتابة في الرياضيات** جولة برج الطاقة في ساندوسكي، أوهايو، مبينة أمامك. إلى جوار كل برج خيط من الأضواء يبعث نبضات ضوء متواصلة لأعلى ولأسفل كل برج بمعدل ثابت. اشرح لماذا لا يمكن لمسافة d التي تبعث الضوء بعيدًا عن الأرض على مدار زمن t أن تمثلها دالة جيبية.



مراجعة شاملة

النقطة المعطاة تقع على ضلع الإنتهاء للزاوية θ في الوضع القياسي. جد قيم النسب المثلثية الست لـ θ.

46. $(-4, 4)$ **47.** $(8, -2)$ **48.** $(-5, -9)$ **49.** $(4, 5)$

حول كل قياس بالدرجات الى الراديان كمضاعف لـ π وبالعكس.

50. $25°$ **51.** $-420°$ **52.** $-\frac{\pi}{4}$ **53.** $\frac{8\pi}{3}$

54. **العلوم** الكربون المشع عبارة عن طريقة لتقدير عمر المواد العضوية عن طريق حساب كمية الكربون 14 الموجود في المادة. عمر المادة يمكن حسابه باستخدام $A = t \cdot \frac{\ln R}{-0.693}$، حيث A هو عمر المادة بالأعوام، t هو العمر النصفي للكربون 14 أو 5700 عامًا، و R هو نسبة كمية الكربون 14 في **العينة إلى** كميتها الكربون 14 في الأنسجة الحية.

a. تحتوي عينة من المواد العضوية على 0.000076 جرام من الكربون 14. **تحتوي عينة حية** من المواد نفسها على 0.00038 جرام. كم **عمر** هذه العينة تقريبًا؟

b. عينة بعينها عمرها 20,000 عامًا على الأقل. ما النسبة المئوية القصوى المتبقية من الكربون 14 في العينة؟

عيّن العدد الممكن للأصفار الحقيقية ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.

55. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$ **56.** $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

57. $f(x) = x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 8x^2$ **58.** $f(x) = x^4 - 1$

حدد ما إذا كانت f لها دالة عكسية. إذا كانت كذلك، فجد الدالة العكسية وحدد أي قيود في مجالها.

59. $f(x) = -x - 2$ **60.** $f(x) = \frac{1}{x+4}$ **61.** $f(x) = (x-3)^2 - 7$ **62.** $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

63. **SAT/ACT** إذا كانت $x + y = 90°$ و x و y كلتاهما زاويتين غير سالبتين، وهو ما يساوي $\frac{\cos x}{\sin y}$؟

A 0

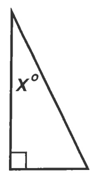
B $\frac{1}{2}$

C 1

D 1.5

E لا يمكن التحديد بالمعطيات المتوفرة.

64. **مراجعة** إذا كانت $\tan x = \frac{10}{24}$ في الشكل التالي، فما $\sin x$ و $\cos x$؟



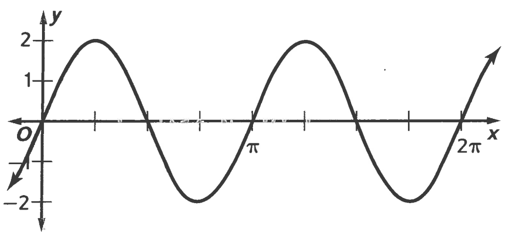
F $\sin x = \frac{26}{10}$ و $\cos x = \frac{24}{26}$

G $\sin x = \frac{10}{26}$ و $\cos x = \frac{24}{26}$

H $\sin x = \frac{26}{10}$ و $\cos x = \frac{26}{24}$

J $\sin x = \frac{26}{10}$ و $\cos x = \frac{26}{24}$

65. حدد المعادلة التي يمثلها التمثيل البياني.



A $y = \frac{1}{2}\sin 4x$

B $y = \frac{1}{4}\sin 2x$

C $y = 2\sin 2x$

D $y = 4\sin\frac{1}{2}x$

66. **مراجعة** إذا كانت $\cos\theta = \frac{8}{17}$ وضلع الإنتهاء للزاوية يقع في الربع IV. ما القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$؟

F $-\frac{15}{8}$

G $-\frac{17}{15}$

H $-\frac{15}{17}$

J $-\frac{8}{15}$

التوسع 3-4

مختبر تقنية التمثيل البياني

مجموع منحنيات sine والفرق بينها

التركيز:

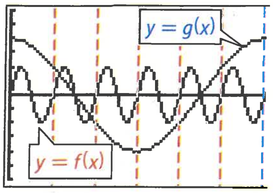
- تمثيل فترات مجموع والفرق بين منحنيات الـ sine بيانيًا وفحصها.

كثيرًا ما يكون التمثيل البياني لمجموع وفروق اثنين من منحنيات لـ sin فترات مختلفة عن التمثيلات البيانية للدوال الأصلية.

النشاط 1 مجموع منحنيات لـ sine

حدد الفترة المشتركة التي يكمل فيها كل من $f(x) = 2 \sin 3x$ و $g(x) = 4 \cos \frac{x}{2}$ عددًا كليًا من الدورات. ومثّل بيانيًا $h(x) = f(x) + g(x)$، ثم حدد دورة الدالة.

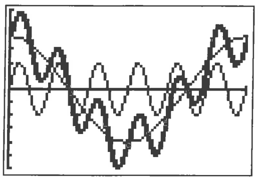
الخطوة 1 أدخل $f(x)$ لـ Y1 و$g(x)$ لـ Y2. ثم اضبط النافذة إلى أن يكمل كل تمثيل بياني دورة مكتملة أو أكثر في الفترة نفسها. وتكون $[0, 4\pi]$ إحدى الفترات التي يحدث فيها ذلك. في هذه الفترة، تُكمل $g(x)$ دورة كاملة، وتُكمل $f(x)$ ست دورات كاملة.

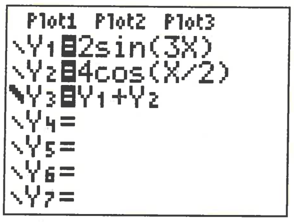


$[0, 4\pi]$ scl: π by $[-6, 6]$ scl: 1

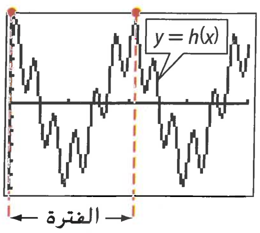
الخطوة 2 لتمثيل $h(x)$ بيانيًا مثل Y3، أسفل القائمة VARS، اختر Y-VARS، الدالة، ثم Y1 لإدخال Y1. ثم اضغط + واختر Y-VARS، الدالة، و Y2 لإدخال Y2.

الخطوة 3 مثّل بيانيًا كلاً من $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ **على الشاشة** نفسها. ولتمييز التمثيل البياني لـ $h(x)$، مرّر إلى يسار علامة يساوي بجانب Y، ثم اضغط على ENTER. ثم مثّل الدوال بيانيًا باستخدام النافذة نفسها كما في الأعلى.


$[0, 4\pi]$ scl: π by $[-6, 6]$ scl: 1



الخطوة 4 عن طريق ضبط شكل المحور الأفقي x من $[0, 4\pi]$ إلى $[0, 8\pi]$ لمراقبة نمط $h(x)$ الكامل؛ حيث يمكننا رؤية أن دورة مجموع المحورين الجيبين هي 4π.



$[0, 8\pi]$ scl: 2π by $[-6, 6]$ scl: 1

نصيحة تقنية

إخفاء التمثيلات البيانية مرر حتى علامة يساوي ثم اضغط على enter لإخفاء التمثيل البياني.

تمارين

حدد فترة مشتركة يُكمل فيها كل من $f(x)$ و $g(x)$ عددًا مكتملاً من الدورات. ومثّل بيانيًا $a(x) = f(x) + g(x)$ و $b(x) = f(x) - g(x)$، ثم حدد دورة الدالة.

1. $f(x) = 4 \sin 2x$
$g(x) = -2 \cos 3x$

2. $f(x) = \sin 8x$
$g(x) = \cos 6x$

3. $f(x) = 3 \sin (x - \pi)$
$g(x) = -2 \cos 2x$

4. $f(x) = \frac{1}{2} \sin 4x$
$g(x) = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

5. $f(x) = \frac{1}{4} \cos \frac{x}{2}$
$g(x) = -2 \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

6. $f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x$
$g(x) = 3 \cos 2x$

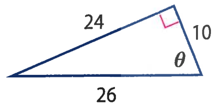
7. **التخمين:** اشرح كيف يمكن استخدام دورات منحنيي الـ sin , cos لإيجاد دورة مجموع أو فرق هذه المنحنيات.

اختبار منتصف الوحدة

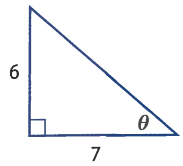
الدروس من 3-1 إلى 3-4

جد قيم النسب المثلثية الست لـ θ. (الدرس 3-1)

1.

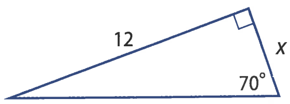


2.

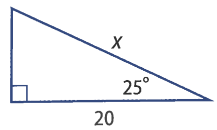


جد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر. (الدرس 3-1)

3.



4.



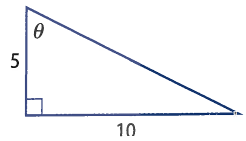
5. **الظلال** شجرة صنوبر تلقي بظلها على مسافة 7.9 ft عند تعامد الشمس بزاوية 80° أعلى الأفق. (الدرس 3-1)

a. جد ارتفاع الشجرة.

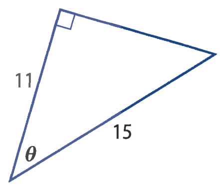
b. وبعدها في اليوم نفسه، شخص طوله 6 ft بلغ ظله 6.7 ft. ففي أي زاوية تكون الشمس عمودية على الأفق؟

جد قياس زاوية θ. قرّب إلى أقرب درجة، إن تطلب الأمر. (الدرس 3-1)

6.



7.



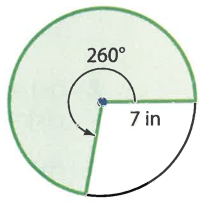
8. اكتب $\frac{2\pi}{9}$ بالدرجات. (الدرس 3-2)

حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة. ثم جد مع الرسم زاوية موجبة وزاوية سالبة مشتركة مع ضلع الانتهاء والزاوية المُعطاة. (الدرس 3-2)

9. $\frac{3\pi}{10}$

10. $-22°$

11. **الاختيار من متعدد:** جد المساحة بالتقريب للمنطقة المظللة. (الدرس 3-2)



A $12.2\ in^2$

B $42.8\ in^2$

C $85.5\ in^2$

D $111.2\ in^2$

12. **السفر** تتحرّك سيارة بسرعة 55 ميلاً في الساعة على إطارات تقاس بـ 2.6 قدم في القطر. جد سرعة زاوية الإطارات بالتقريب بمقياس راديان في الدقيقة. (الدرس 3-2)

ارسم كل زاوية. ثم جد زاوية المرجع الخاصة بها. (الدرس 3-3)

13. $175°$

14. $\frac{21\pi}{13}$

جد قيمة كل تعبير. إن لم تكن محددة، فاكتب غير محددة. (الدرس 3-3)

15. $\cos 315°$

16. $\sec \frac{3\pi}{2}$

17. $\sin \frac{5\pi}{3}$

18. $\tan \frac{5\pi}{6}$

جد قيم النسب المثلثية الست لـ θ. (الدرس 3-3)

19. $\cos \theta = -\frac{2}{5}$، حيث $\sin \theta < 0$ و $\tan \theta > 0$

20. $\cot \theta = \frac{4}{3}$، حيث $\cos \theta > 0$ و $\sin \theta > 0$

حدد السعة، والدورة، والتكرار وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم ارسم دورتين كاملتين للدالة. (الدرس 3-4)

21. $y = -3 \sin \left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

22. $y = 5 \cos 2x - 2$

23. **الاختيار من متعدد:** أي هذه الدوال لها التمثيل البياني نفسه مثل $y = 3 \sin (x - \pi)$؟ (الدرس 3-4)

F $y = 3 \sin (x + \pi)$

H $y = -3 \sin (x - \pi)$

G $y = 3 \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

J $y = -3 \cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

24. **النابض:** يمكن تمثيل تحرك جسم متصل بنابض يتذبذب عبر موضعه الأصلي بـ $x(t) = A \cos \omega t$؛ حيث A هي الإزاحة الأولية من موضع السكون، و ω ثابت يعتمد على النابض وكتلة الجسم المتصل بالنابض، و t هو الزمن بالثواني. (الدرس 3-4)

a. مثّل حركة الجسم المتصل بالنابض بيانيًا، مع إزاحة 4 سنتيمترات؛ حيث $\omega = 3$.

b. ما المدة التي يستغرقها الجسم للعودة إلى الموضع الأوّلي للمرة الأولى؟

c. إذا كان الثابت ω يساوي $\sqrt{\frac{k}{m}}$؛ حيث k ثابت النابض، و m كتلة الجسم. كيف يمكن أن تؤثر زيادة كتلة الجسم في فترة ذبذبته؟ اشرح استنتاجك.

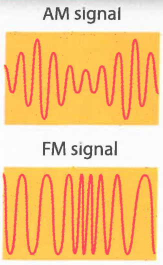
25. **العوامة:** إذا كان ارتفاع جهاز الإرسال الملحق بالعوامة على مستوى سطح البحر بالأقدام يُمثَّل بواسطة $h = a \sin bt + \frac{11}{2}$. وفي المياه الهائجة، يتراوح الارتفاع بين 1 ft و 10 ft، مع 4 ثوانٍ بين كل دورة. جد قيم a و b.

الدرس 5-3 التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى

السابق:
- تم تحليل التمثيلات البيانية للدوال المثلثية.

الحالي:
1. تمثيل دالة الـ tan بيانيًا ومقلوب الدوال المثلثية.
2. تمثيل الدوال المثلثية المتضائلة بيانيًا.

لماذا؟
- هناك نوعان من موجات الراديو الأولى تُعرَف بالموجة معدلة السعة (AM) والثانية تُعرَف بالموجة معدلة التردد (FM). عندما يرسل الصوت باستخدام موجة راديو معدلة السعة (AM)، يطلق على سعة الموجة الجيبية *موجة حاملة*، وتتغير لإخراج الصوت. أما الموجة معدلة التردد (FM)، فينتج عنها تغير تردد الموجة الحاملة. ستعرف أكثر عن التمثيلات البيانية لتلك الموجات، التي تُعرَف باسم *موجات التضاؤل* في هذا الدرس.



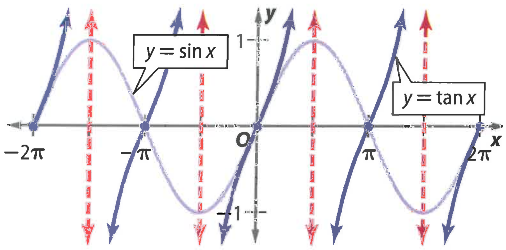
المفردات الجديدة

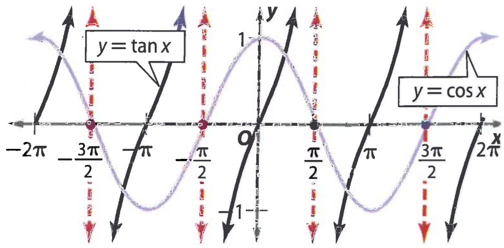
- دالة مثلثية متضائلة damped trigonometric function
- عامل التضاؤل damping factor
- تذبذب متضائل damped oscillation
- موجة متضائلة damped wave
- الحركة التوافقية المتضائلة damped harmonic motion

1 دالة الـ tan ودوال المقلوب المثلثية

في الدرس 4-3، مثلتَ دوال الـ sine و cosine بيانيًا على المستوى الإحداثي. يمكنك استخدام الأساليب نفسها في التمثيل البياني لدالة الـ tangent ودوال المقلوب المثلثية، وهي دالة cotangent و secant وcosecant .

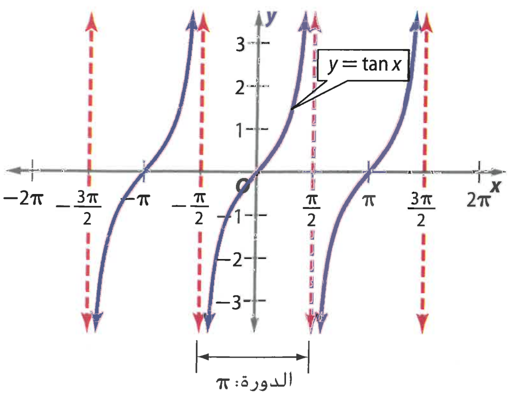
بما أن $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$، فإن دالة الـ tan تكون غير معرفة عندما تكون $\cos x = 0$. لذلك، فإن دالة tan الزاوية لها خط تقارب رأسي كلما كانت $\cos x = 0$. وبالمثل، فإن دوال tan الزاوية و sin الزاوية لها نقاط صفر عند مضاعفات الأعداد الصحيحة لـ π لأن $\tan x = 0$ عندما تكون $\sin x = 0$.





وفيما يلي ملخص خصائص دالة الـ tan:

المفهوم الأساسي خصائص دالة tan



المجال:	$x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$
المدى:	$(-\infty, \infty)$
التقاطعات مع المحور الأفقي x:	$n\pi, n \in \mathbb{Z}$
التقاطع مع المحور الرأسي y:	0
الاتصال:	انفصال لانهائي عند $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$
خطوط التقارب:	$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$
التناظر	الأصل (دالة فردية)
قيم قصوى:	لا يوجد
السلوك الطرفي:	$\lim_{x \to -\infty} \tan x$ و $\lim_{x \to \infty} \tan x$ غير موجود. تذبذب الدالة ما بين $-\infty$ و ∞.

نصيحة دراسية

السعة لا تنطبق سعة الحد على دوال الـ tan ودوال cotan؛ لأن أقصى ارتفاعات لهذه الدوال ليست لها نهاية.

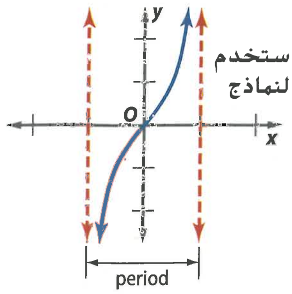
[illegible] $y = a\tan(bx + c) + d$ [illegible]، حيث a ينتج عنه امتداد أو ضغط رأسي b يؤثر في دورة الدالة، و c ينتج إزاحة طور، و d ينتج عنه إزاحة رأسية؛ ولا تكون قيمة a أو b تساوي 0.

المفهوم الأساسي دورة دالة الـ tan

الكلمات دورة دالة tan الزاوية هي المسافة بين أي خطي تقارب رأسيين متتاليين.

الرموز لإيجاد قيمة $y = a\tan(bx + c)$، حيث $b \neq 0$، الدورة $= \frac{\pi}{|b|}$.

استخدام النماذج



المقاربان الرأسيان المتتاليان للدالة $y = \tan x$ هما $x = -\frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{\pi}{2}$. يمكنك إيجاد خطي تقارب رأسيين متتاليين لدالة tan الزاوية للشكل $y = a\tan(bx + c) + d$ عن طريق حل المعادلات $bx + c = -\frac{\pi}{2}$ و $bx + c = \frac{\pi}{2}$.

يمكنك تمثيل دالة الـ tan بيانيًا عن طريق تخطيط خطوط تقارب رأسية، على التقاطع مع المحور الأفقي x ونقاط بين خطوط تقارب والتقاطع مع المحور الأفقي x.

المثال 1 تغيير الأبعاد (التمدّد) الأفقي بمقياس التمثيل البياني لدالة الـ tan

حدد خطوط التقارب الرأسية للدالة، ثم مَثل بيانيًا $y = \tan 2x$.

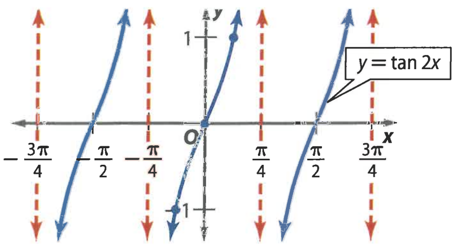
التمثيل البياني لـ $y = \tan 2x$ هو التمثيل البياني لـ $y = \tan x$ مضغوطًا أفقيًا. وتكون الدورة $\frac{\pi}{|2|}$ أو $\frac{\pi}{2}$. جد مقاربين رأسيين متتاليين.

	معادلات مقارب tan	
$bx + c = \frac{\pi}{2}$		$bx + c = -\frac{\pi}{2}$
$2x + 0 = \frac{\pi}{2}$	$b = 2, c = 0$	$2x + 0 = -\frac{\pi}{2}$
$x = \frac{\pi}{4}$	بسّط	$x = -\frac{\pi}{4}$

أنشئ جدولاً للنقاط الأساسية، به التقاطع مع المحور الرأسي x الذي يقع بين خطي التقارب الرأسيين عند $x = -\frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{\pi}{4}$.

الدالة	خط تقارب رأسي	النقطة المتوسطة	التقاطع مع المحور الأفقي x	النقطة المتوسطة	خط تقارب رأسي
$y = \tan x$	$x = -\frac{\pi}{2}$	$\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right)$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$	$x = \frac{\pi}{2}$
$y = \tan 2x$	$x = -\frac{\pi}{4}$	$\left(-\frac{\pi}{8}, -1\right)$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{8}, 1\right)$	$x = \frac{\pi}{4}$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الأساسية الموضحة للدالة. ثم ارسم دورة واحدة عن يسار الفترة $\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$ ودورة عن يمين الفترة $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$.



تمرين موجّه

حَدد خطوط التقارب الرأسية، ومَثل بيانيًّا كل دالة.

1A. $y = \tan 4x$

1B. $y = \tan \frac{x}{2}$

حدد خطوط التقارب الرأسية، ومثل بيانيًّا كل دالة.

a. $y = -\tan \frac{x}{2}$

التمثيل البياني لـ $y = -\tan \frac{x}{2}$ هو التمثيل البياني لـ $y = \tan x$ ممتدة أفقيًّا، ثم منعكسة على المحور الأفقي x.
الدورة هي $\frac{\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 2\pi$. جد مقاربين رأسيين متتاليين.

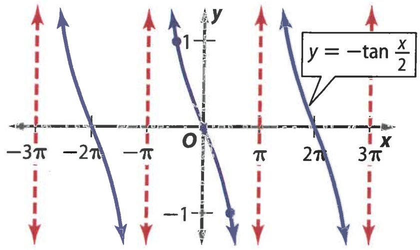
$\frac{x}{2} + 0 = -\frac{\pi}{2}$ $\qquad b = \frac{1}{2}, c = 0 \qquad$ $\frac{x}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$

$x = 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$ $\qquad$ بسّط $\qquad$ $x = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

أنشئ جدولاً للنقاط الأساسية، به التقاطع مع المحور الرأسي x الذي يقع بين خطي التقارب عند $x = -\pi$ و $x = \pi$.

الدالة	خط تقارب رأسي	النقطة المتوسطة	التقاطع مع المحور الأفقي x	النقطة المتوسطة	خط تقارب رأسي
$y = \tan x$	$x = -\frac{\pi}{2}$	$\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right)$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$	$x = \frac{\pi}{2}$
$y = -\tan \frac{x}{2}$	$x = -\pi$	$\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$	$x = \pi$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الموضحة لكل دالة. ثم كرّر هذا الأمر لرسم دورة عن يسار ويمين المنحنى الأول.



b. $y = \tan\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

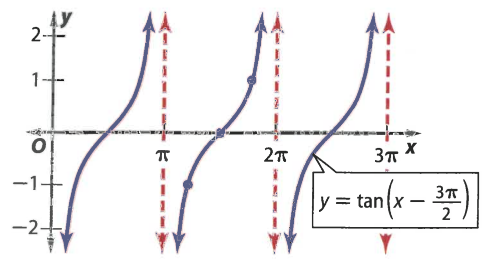
التمثيل البياني لـ $y = \tan\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$ هو التمثيل البياني لـ $y = \tan x$ بإزاحة مقدارها $\frac{3\pi}{2}$ وحدات إلى اليمين.
الدورة هي $\frac{\pi}{|1|}$ أو π. جد خطّي تقارب رأسيين متتاليين.

$x - \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ $\qquad b = 1, c = -\frac{3\pi}{2} \qquad$ $x - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = \pi$ $\qquad$ بسّط $\qquad$ $x = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 2\,\text{pi}$

الدالة	خط تقارب رأسي	النقطة المتوسطة	التقاطع مع المحور الأفقي x	النقطة المتوسطة	خط تقارب رأسي
$y = \tan x$	$x = -\frac{\pi}{2}$	$\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right)$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$	$x = \frac{\pi}{2}$
$y = \tan\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$	$x = \pi$	$\left(\frac{5\pi}{4}, -1\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4}, 1\right)$	$x = 2\pi$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الأساسية الموضحة للدالة ثم ارسم دورة واحدة عن يسار ويمين المنحنى الأول.



نصيحة دراسية

طريقة بديلة عند تمثيل الدالة فقط بيانيًّا بالإزاحة الأفقية c، يمكنك إيجاد النقاط الرئيسية عن طريق إضافة c لكل من *إحداثيات X للنقاط الرئيسية للدالة الأم.*

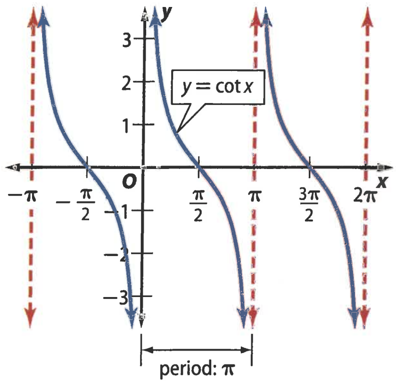
تمرين موجّه

2A. $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad$ **2B.** $y = -\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

تكون دالة الـ cotan هي مقلوب دالة الـ tan ويطلق عليها $\frac{\cos x}{\sin x}$ = cot.

وكما هو الحال في دالة الـ tan، تكون أيضًا صيغة دورة دالة cotan $y = a\cot(bx + c) + d$ ويمكن إيجادها عن طريق حساب $\frac{\pi}{|b|}$. كما يمكن إيجاد خطّي تقارب رأسيين متتاليين عن طريق حل المعادلات $bx + c = 0$ و $bx + c = \pi$. وفيما يلي ملخص خصائص دالة cotan.

المفهوم الأساسي خصائص دالة الـ Cotan



المجال: $x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$

المدى: $(-\infty, \infty)$

التقاطعات مع المحور الأفقي x: $\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

التقاطع مع المحور الرأسي y: لا يوجد

الاتصال: انفصال لانهائي عند $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

خطوط التقارب: $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

التناظر: نقطة الأصل (دالة فردية)

القيم القصوى: لا يوجد

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to \infty} \cot x$ و $\lim_{x \to -\infty} \cot x$ غير موجودة. تتذبذب الدالة ما بين $-\infty$ و ∞.

يمكنك تمثيل دالة cotan بيانيًا بالأساليب التي استخدمتها في تمثيل دالة الـtan.

المثال 3 تمثيل دالة الـ cotan بيانيًا

حدد خطي تقارب رأسيين، ثم مثل بيانيًا الآتي $y = \cot \frac{x}{3}$.

التمثيل البياني لـ $y = \cot \frac{x}{3}$ هو التمثيل البياني لـ $y = \cot x$ متمددًا أفقيًا. الدورة هي $\frac{\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|}$ أو 3π. جد خطي تقارب رأسيين متتاليين عن طريق حل $bx + c = 0$ و $bx + c = \pi$.

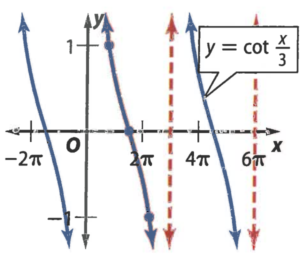
$\frac{x}{3} + 0 = 0$ $\quad$ $b = \frac{1}{3}, c = 0$ $\quad$ $\frac{x}{3} + 0 = \pi$

$x = 3(0)$ أو 0 $\quad$ بسّط $\quad$ $x = 3(\pi)$ أو 3π

أنشئ جدولاً للنقاط الأساسية به التقاطع مع المحور الأفقي x، الذي يقع بين خطي التقارب عند $x = 0$ و $x = 3\pi$.

الدالة	خط تقارب رأسي	النقطة المتوسطة	التقاطع مع المحور الأفقي x	النقطة المتوسطة	خط تقارب رأسي
$y = \cot x$	$x = 0$	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$	$x = \pi$
$y = \cot \frac{x}{3}$	$x = 0$	$\left(\frac{3\pi}{4}, 1\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{9\pi}{4}, -1\right)$	$x = 3\pi$

ثم اتبع الإرشادات التي استخدمتها في رسم دالة الـ tan، مع رسم منحنى من خلال النقاط الرئيسية المحددة التي تجدها. ثم ارسم دورة واحدة عن يسار ويمين المنحنى الأول.



تمرين موجّه

حدد خطوط التقارب الرأسية، ومثل بيانيًا كل دالة.

3A. $y = -\cot 3x$

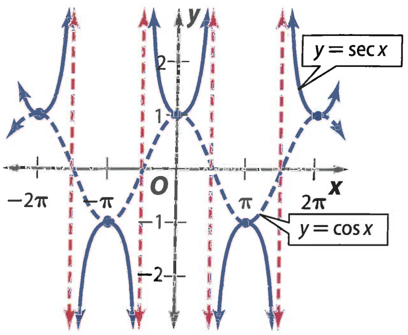
3B. $y = 3\cot \frac{x}{2}$

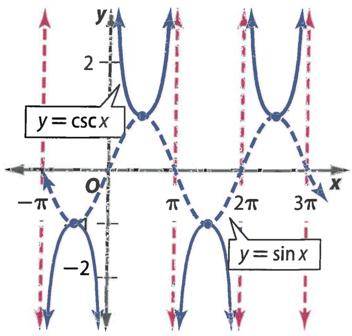
نصيحة تقنية

التمثيل البياني لدالة cotan

عند استخدام الحاسبة البيانية لتمثيل دالة cotan بيانيًا. أدخل مقلوب الـ $y = \frac{1}{\tan x}$ ،tan. الحاسبات البيانية قد تنتج خطوطًا متصلة عند حدوث الخطوط التقارب. وسيؤدي تعيين النمط على DOT إلى إخفاء الخط.

يطلق على مقلوب x ... $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ ويطلق على مقلوب ... $\frac{1}{\cos x} = \sec x$، كما هو موضح.





وتحتوي دالة csc على خطوط تقارب عندما تكون $\sin x = 0$، عند مضاعفات الأعداد الصحيحة لـ π. كذلك، تحتوي دالة sec على خطوط تقارب عندما تقع $\cos x = 0$، عند مضاعفات الأعداد الفردية لـ $\frac{\pi}{2}$. لاحظ أيضًا أن التمثيل البياني لـ $y = \csc x$ له قيمة صغرى نسبية لكل نقطة قيمة عظمى في منحنى sin، وقيمة عظمى نسبية لكل نقطة قيمة صغرى على منحنى sin. وينطبق الشيء نفسه على التمثيلات البيانية لـ $y = \sec x$ و $y = \cos x$.

وفيما يلي ملخص **خصائص** دوال sec ودوال csc.

المفهوم الأساسي خصائص دوال secant و دوال cosecant

دالة cosecant

المجال: $x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$

المدى: $(-\infty, -1]$ و $[1, \infty)$

التقاطعات مع المحور الأفقي x: لا يوجد

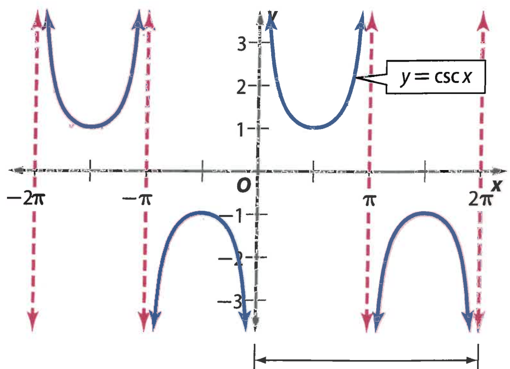
التقاطع مع المحور الرأسي y: لا يوجد

الاتصال: انفصال لانهائي عند $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

خطوط التقارب: $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

التناظر: نقطة الأصل (دالة فردية)

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to -\infty} \csc x$ و $\lim_{x \to \infty} \csc x$ غير موجودتين. تتذبذب الدالة ما بين $-\infty$ و ∞.



الدورة: 2π

دالة secant

المجال: $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

المدى: $(-\infty, -1]$ و $[1, \infty)$

التقاطعات مع المحور الأفقي x: لا يوجد

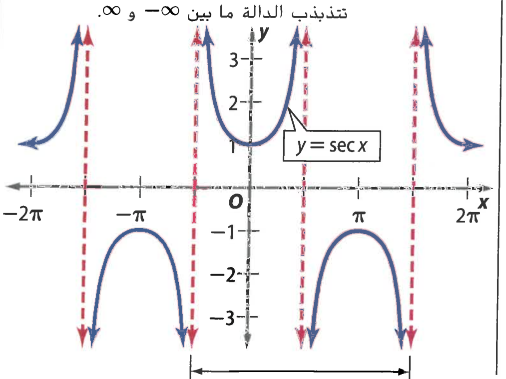
التقاطع مع المحور الرأسي y: 1

الاتصال: انقطاع الاتصال عند $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

خطوط التقارب: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

التناظر: محور رأسي y (الدالة الزوجية)

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to -\infty} \sec x$ و $\lim_{x \to \infty} \sec x$ غير موجودتين. تتذبذب الدالة ما بين $-\infty$ و ∞.



الدورة: 2π

نصيحة تقنية

التمثيل البياني يشبه التمثيل البياني لدوال csc ودوال sec على الحاسبة البيانية التمثيل البياني لدالة tan التمام. أدخل مقلوب دوال الـ sin ودوال الـ cosine.

ومثل دوال الـ sin. يمكن إيجاد دورة الدالة الـ sec للشكل $y = a \sec(bx + c) + d$ أو دالة csc للشكل $y = a \csc(bx + c) + d$ عن طريق حساب $\frac{2\pi}{|b|}$. يمكن إيجاد خطي التقارب الرأسيين لدالة sec عن طريق حل المعادلات $bx + c = -\frac{\pi}{2}$ و $bx + c = \frac{3\pi}{2}$ وإيجاد خطي تقارب رأسيين لدالة csc عن طريق حل المعادلات $bx + c = -\pi$ و $bx + c = \pi$.

... secant و cosecant بيانيًا، ضع خطوط التقارب للدالة، ثم جد الحد الأدنى النسبي المطابق والنقاط الدنيا.

المثال 4 تمثيل دوال الـ secant و الـ cosecant بيانيًا

حدد خطوط التقارب الرأسية، ومثل بيانيًا كل دالة.

a. $y = \csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

التمثيل البياني لـ $y = \csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ هو التمثيل البياني لـ $y = \csc x$ بإزاحة الوحدات بمقدار $\frac{\pi}{2}$ إلى اليسار. وتكون الدورة هي $\frac{2\pi}{|1|}$ أو 2π. ويوجد خطي التقارب الرأسيان عندما يكون $bx + c = -\pi$ و $bx + c = \pi$. لذا، فإن خطي التقارب هما $x + \frac{\pi}{2} = -\pi$ أو $x = -\frac{3\pi}{2}$ و $x + \frac{\pi}{2} = \pi$ أو $x = \frac{\pi}{2}$.

أنشئ جدولاً للنقاط الأساسية به القيمة العظمى النسبية والقيمة الصغرى النسبية، اللذان يقعان بين خطي التقارب عند $x = -\frac{3\pi}{2}$ و $x = \frac{\pi}{2}$.

الدالة	خط تقارب رأسي	القيمة النسبية القصوى	خط تقارب رأسي	القيمة النسبية الدنيا	خط تقارب رأسي
$y = \csc x$	$x = -\pi$	$\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$	$x = 0$	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$	$x = \pi$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الأساسية الموضحة للدالة. ثم ارسم دورة واحدة عن اليسار واليمين. يوضح التمثيل البياني فيما يلي في الشكل 3.5.1.

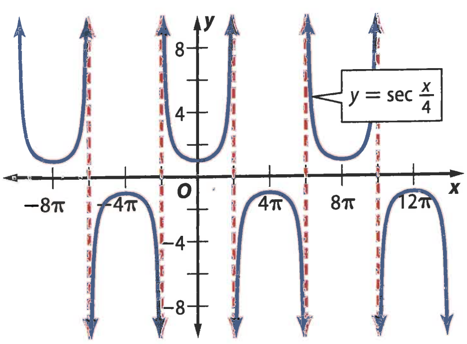
b. $y = \sec\frac{x}{4}$

التمثيل البياني لـ $y = \sec\frac{x}{4}$ هو التمثيل البياني لـ $y = \sec x$ ممتدًا أفقيًا. وتكون الدورة هي $\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|}$ أو 8π. ويوجد المتقاربان الرأسيان عندما $bx + c = -\frac{\pi}{2}$ و $bx + c = \frac{3\pi}{2}$. لذا، فإن خطي التقارب هما $\frac{x}{4} + 0 = -\frac{\pi}{2}$ أو $x = -2\pi$ و $\frac{x}{4} + 0 = \frac{3\pi}{2}$ أو $x = 6\pi$.

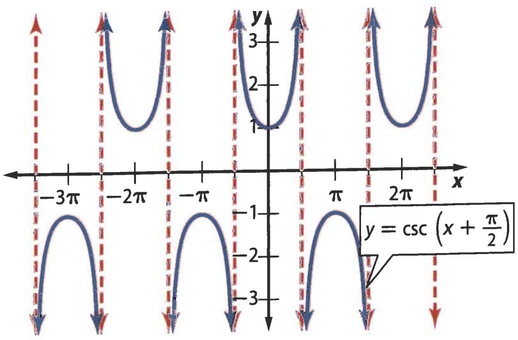
أنشئ جدولاً، وضع فيه النقاط الرئيسية الموجودة بين خطي التقارب عند $x = -2\pi$ و $x = 6\pi$.

الدالة	خط تقارب رأسي	القيمة النسبية الصغرى	خط تقارب رأسي	القيمة النسبية العظمى	خط تقارب رأسي
$y = \sec x$	$x = -\frac{\pi}{2}$	$(0, 1)$	$x = \frac{\pi}{2}$	$(\pi, -1)$	$x = \frac{3\pi}{2}$
$y = \sec\frac{x}{4}$	$x = -2\pi$	$(0, 1)$	$x = 2\pi$	$(4\pi, -1)$	$x = 6\pi$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الأساسية الموضحة للدالة. ثم ارسم دائرة واحدة عن اليسار واليمين. يوضح التمثيل البياني فيما يلي في الشكل 4.5.2.



الشكل 3.5.2



الشكل 3.5.1

نصيحة دراسية

العثور على خطوط التقارب والنقاط الرئيسية يمكنك الاستعانة بالطبيعة الدورية للتمثيلات البيانية للدوال المثلثية في إيجاد خطوط التقارب والنقاط الرئيسية. في المثال 4a، لاحظ أن خط التقارب الرأسي $x = -\frac{\pi}{2}$ على مسافة واحدة من خطوط التقارب المحسوبة $x = -\frac{3\pi}{2}$ و $x = \frac{\pi}{2}$.

تمرين موجّه

4A. $y = \csc 2x$

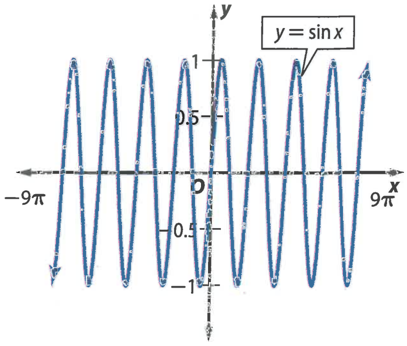
4B. $y = \sec(x+\pi)$

2 الدوال المثلثية المتضائلة

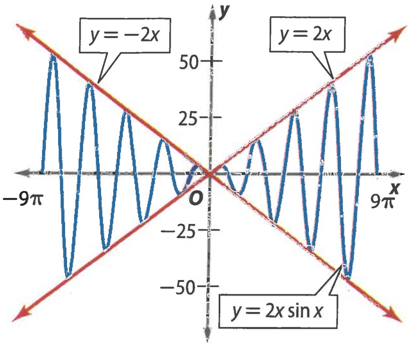
عندما تكون دالة الـ sin مضروبة بدالة أخرى $f(x)$، يكون التمثيل البياني للناتج مترددًا بين التمثيلات البيانية لـ $y = f(x)$ و$y = -f(x)$. عندما يقلل هذا الناتج سعة موجة دالة الـ sin الأصلية، يطلق عليه **تذبذب متضائل**، وينتج عن الدالتين ما يُعرف باسم **الدالة المثلثية المتضائلة**. يمكن رؤية هذا التغير في الذبذبات في الأشكال 3.5.3 و 3.5.4 للتمثيلات البياني للدالة $y = \sin x$ و $y = 2x \sin x$.

نصيحة دراسية

دوال التضاؤل الدوال المثلثية التي تتضاعف بالثوابت لا تتعرض للتضاؤل. ويؤثر الثابت في سعة الدالة.



الشكل 3.5.3



الشكل 3.5.4

وتأخذ الدالة المثلثية المتضائلة الشكل $y = f(x) \sin bx$ أو $y = f(x) \cos bx$، حيث $f(x)$ هو **عامل التضاؤل**.

ويحدث التذبذب المتضائل عندما يقترب x من $\pm\infty$ أو عندما يقترب x من 0 من كلا الاتجاهين.

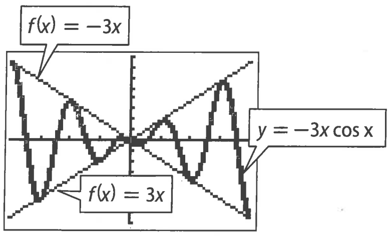
المثال 5 رسم الدوال المثلثية المتضائلة

حدد عامل التضاؤل $f(x)$ في كل دالة. استخدم الحاسبة البيانية في رسم التمثيلات البيانية لـ $f(x)$، $-f(x)$ وللدوال المعطاة باستخدام النافذة الظاهرة نفسها. صِف السلوك الطرفي للتمثيل البياني.

a. $y = -3x \cos x$

دالة $y = -3x \cos x$ هي ناتج الدوال $y = -3x$ و $y = \cos x$. إذًا $f(x) = -3x$.

وتتضاءل سعة الدالة كلما اقترب x من 0 من كلا الاتجاهين.

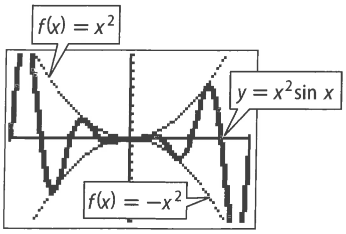


$[-4\pi, 4\pi]$ scl: π by $[-40, 40]$ scl: 5

b. $y = x^2 \sin x$

الدالة $y = x^2 \sin x$ هي ناتج ضرب الدوال $y = x^2$ و $y = \sin x$. لذا، فإن عامل التضاؤل هو $f(x) = x^2$.

وتتضاءل سعة الدالة كلما اقترب x من 0 من كلا الاتجاهين.

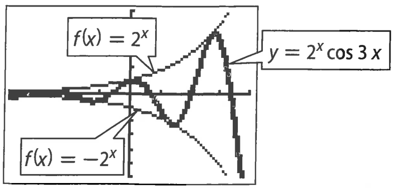


$[-4\pi, 4\pi]$ scl: π by $[-100, 100]$ scl: 10

c. $y = 2^x \cos 3x$

الدالة $y = 2^x \cos 3x$ هي ناتج ضرب الدالتين $y = 2^x$ و $y = \cos 3x$ لذا فإن $f(x) = 2^x$.

وتتضاءل سعة الدالة كلما اقترب x من $-\infty$.



$[-\pi, \pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-6, 6]$ scl: 1

تمرين موجّه

5A. $y = 5x \sin x$ **5B.** $y = \frac{1}{x} \cos x$ **5C.** $y = 3^x \sin x$

الربط بتاريخ الرياضيات

كاثلين سينج مورافيتس (1923–)

درست مورافيتس، كندية الأصل، تشتت الصوت والموجات المغناطيسية، ثم أثبت بعد ذلك النتائج المتعلقة بمعادلة الموجة غير الخطية.

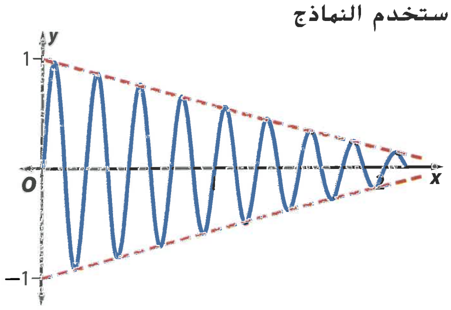
تتضاءل سعة الحركة بمرور الزمن نتيجة الاحتكاك، ويسمى ذلك الحركة التوافقية التضاؤلية.

المفهوم الأساسي الحركة التوافقية التضاؤلية

الكلمات يكون الجسم في حالة **حركة توافقية تضاؤلية** عندما تحدد سعته بالدالة $a(t) = ke^{-ct}$.

الرموز بالنسبة لـ $y = ke^{-ct} \sin \omega t$ و $y = ke^{-ct} \cos \omega t$، حيث k هو الإزاحة، c ثابت التضاؤل $c > 0$، t هو الزمن، و ω هي الفترة.

استخدم النماذج



ويكون أكبر ثابت تضاؤل c أسرع كلما اقتربت السعة من الصفر. ويتوقف مقدار c على حجم الجسم والمواد التي يتألف منها.

مثال 6 من الحياة اليومية الحركة التوافقية المتضائلة

الموسيقى: أدى سحب وتر جيتار مسافة 0.8 cm أعلى موضع سكونه، ثم إطلاقه إلى حدوث اهتزاز. وكان ثابت تضاؤل الوتر 2.1، وتردد الملاحظة الناتجة 175 دورة في الثانية

a. اكتب دالة مثلثية تمثل حركة الوتر.

ويحدث الحد الأقصى لإزاحة الوتر عندما يكون $t = 0$. لذا فإن الدالة $y = ke^{-ct} \cos \omega t$ يمكن أن تمثل حركة الوتر؛ لأن التمثيل البياني للدالة $y = \cos t$ يتقاطع مع المحور الرأسي y بدلاً من 0.

وتحدث الإزاحة القصوى عند سحب الوتر لمسافة 0.8 سنتيمتر. وتكون قيمة الإزاحة الكلية هي ناتج طرح الإزاحة القصوى من M الإزاحة الدنيا m، لذا فإن

$k = M - m = 0.8 - 0$ أو 0.8 cm.

ويمكنك استعمال قيمة التردد لإيجاد قيمة ω.

$$\frac{|\omega|}{2\pi} = 175 \qquad \text{التردد } = \frac{|\omega|}{2\pi}$$

$$|\omega| = 350\pi \qquad \text{وبضرب الطرفين في } 2\pi$$

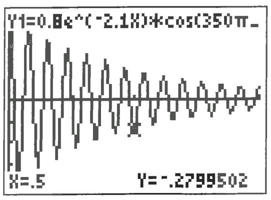
اكتب دالة مستعيناً بقيم k، ω، و c.

وتكون $y = 0.8e^{-2.1t} \cos 350\pi t$ هي إحدى النماذج التي تمثل حركة الوتر.

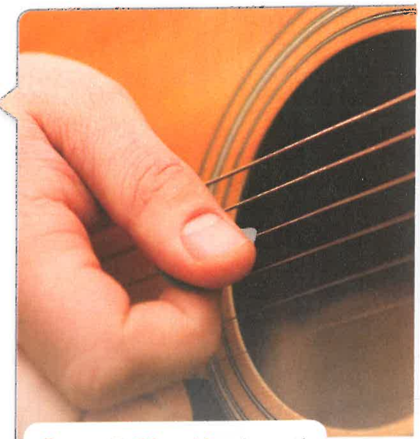
b. حدد الزمن t الذي يستغرقه الوتر ليتضاءل إلى $-0.28 \leq y \leq 0.28$.

باستخدام الحاسبة البيانية، حدد قيمة t عندما يكون التمثيل البياني للدالة $y = 0.8e^{-2.1t} \cos 350\pi t$ is يتذبذب بين $y = -0.28$ و $y = 0.28$.

ومن التمثيل البياني، ترى أن التمثيل البياني للدالة $y = 0.8e^{-2.1t} \cos 350\pi t$ يستغرق تقريبًا 0.5 ثانية ليتذبذب خلال الفترة $-0.28 \leq y \leq 0.28$.



[0, 1] scl: 0.5 by [−0.75, 0.75] scl: 0.25



الربط بالحياة اليومية

يمتد كل وتر في الجيتار إلى طول معين ونسبة شد معينة. وتلك العوامل، جنبًا إلى جنب مع وزن ونوع الخيط، تؤدي إلى حدوث اهتزاز مع تردد مميز أو نغمة تسمى بترددها الأساسي، وهي التي تُنتج النوتة الموسيقية التي نسمعها.

المصدر: كيف تجري الأمور

تمرين موجّه

6. **الموسيقى** بفرض وجود وتر جيتار آخر، تم سحبه لمسافة 0.5 سنتيمتر أعلى موضع سكونه بتردد 98 دورة في الثانية، وثابت تضاؤل 1.7.

A. اكتب دالة مثلثية تمثل حركة الوتر y بما أن دالة الزمن t.

B. حدد الزمن t الذي يستغرقه الوتر ليتضاءل إلى $-0.15 \leq y \leq 0.15$.

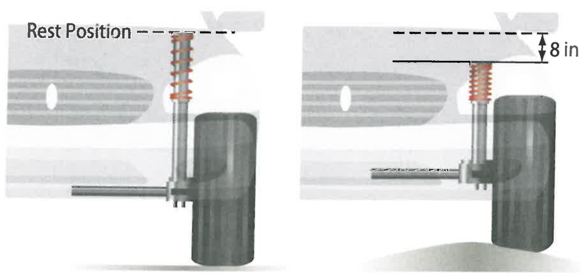
حدد خطوط التقارب الرأسية، ومثل بيانيًّا كل دالة. (الأمثلة 1-4)

1. $y = 2\tan x$
2. $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
3. $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
4. $y = -3\tan\frac{x}{3}$
5. $y = -\frac{1}{4}\cot x$
6. $y = -\tan 3x$
7. $y = -2\tan(6x - \pi)$
8. $y = \cot\frac{x}{2}$
9. $y = \frac{1}{5}\csc 2x$
10. $y = \csc\left(4x + \frac{7\pi}{6}\right)$
11. $y = \sec(x + \pi)$
12. $y = -2\csc 3x$
13. $y = 4\sec\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$
14. $y = \sec\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{5}\right)$
15. $y = \frac{3}{2}\csc\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$
16. $y = -\sec\frac{x}{8}$

حدد عامل التضاؤل $f(x)$ في كل دالة. استخدم الحاسبة البيانية في رسم التمثيلات البيانية لـ $f(x)$، $f(x)$ – وللدوال المعطاة باستخدام النافذة الظاهرة نفسها. صِف سلوك التمثيل البياني. (المثال 5)

17. $y = \frac{3}{5}x\sin x$
18. $y = 4x\cos x$
19. $y = 2x^2\cos x$
20. $y = \frac{x^3}{2}\sin x$
21. $y = \frac{1}{3}x\sin 2x$
22. $y = (x-2)^2\sin x$
23. $y = e^{0.5x}\cos x$
24. $y = 3^x\sin x$
25. $y = |x|\cos 3x$
26. $y = \ln x\cos x$

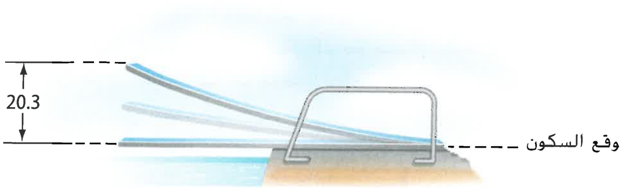
27. **الميكانيكا:** عند اصطدام السيارة المبينة أدناه بمضخة، يتم ضغط ممتص الصدمات حتى 8 بوصات، ثم تحريره ليبدأ في حركة توافقية تضاؤلية بتردد 2.5 دورة في الثانية. ويكون ثابت تضائل ممتص الصدمات هو 3. (المثال 6)



a. اكتب دالة مثلثية تمثل حركة الوتر y بما أن دالة الزمن t. افرض أن $t = 0$ لحظة تحرير ممتص الصدمات.

b. حدد الزمن t المستغرق في زيادة الاهتزاز ليصل إلى 4 in.

28. **الغوص:** ارتفعت حافة منصة الغطس 20.3 cm أعلى موقع سكونها بعد أن ترك الغواص المنصة. وبعد مرور ثانيتين، تحركت المنصة إلى الأعلى والأسفل 12 مرة. ويكون ثابت تضاؤل المنصة هو 0.901 (المثال 6)



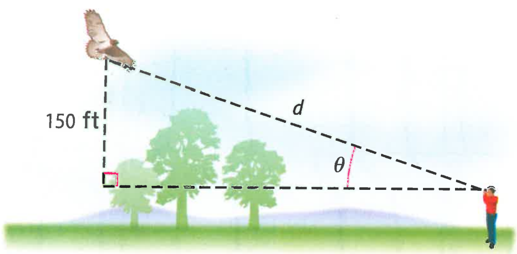
a. اكتب دالة مثلثية تمثل حركة منصة الغطس y إذا كانت دالة الزمن t.

b. حدد الزمن t الذي تستغرقه المنصة لتتضاءل إلى $-0.5 \le y \le 0.5$.

حَدد خطوط التقارب الرأسية، ومَثل بيانيًّا كل دالة.

29. $y = \sec x + 3$
30. $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 4$
31. $y = \csc\frac{x}{3} - 2$
32. $y = \csc\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + 3$
33. $y = \cot(2x + \pi) - 3$
34. $y = \cot\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

35. **التصوير:** التقط سعيد صورة لصقر كان يحلق على مسافة 150 ft فوقه. وفي النهاية، سيحلق الصقر مباشرة فوق سعيد. افرض أن d المسافة بين سعيد والصقر و θ تكون زاوية ارتفاع الصقر عن الكاميرا الخاصة بسعيد.



a. اكتب d كدالة لـ θ.

b. مثل الدالة بيانيًّا على الفترة. $0 < \theta < \pi$

c. بالتقريب، ما المسافة بين الصقر وسعيد عندما تكون زاوية الارتفاع °45؟

36. **المسافة:** يتسلق عنكبوت ببطء الجدار. وتقف هيام على بعد 6 ft من الجدار تشاهد العنكبوت. افرض أن d المسافة بين هيام والعنكبوت و θ تكون زاوية ارتفاع العنكبوت عن هيام.

a. اكتب d كدالة لـ θ.

b. مثل بيانيًّا الدالة في الفترة $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

c. بالتقريب، ما المسافة بين العنكبوت وهيام عندما تكون زاوية الارتفاع °32؟

باستخدام الحاسبة البيانية: جد قيمة θ على فترة $-\pi < \theta < \pi$ التي تجعل كل معادلة صحيحة.

38. $\sin \theta = \cot \theta$

37. $\cot \theta = 2 \sec \theta$

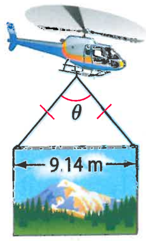
40. $\tan \frac{\theta}{2} = \sin \theta$

39. $4 \cos \theta = \csc \theta$

42. $\tan \theta = \sec \frac{\theta}{2}$

41. $\csc \theta = \sec \theta$

52. **الشد:** قدمت طائرة هليكوبتر لوحة كبيرة للمدينة، سيتم عرضها في وسط المدينة. وكانت هذه اللوحة متصلة بالطائرة الهليكوبتر عن طريق حبلين كما هو موضح أدناه. وكان مقدار الشد T لكل حبل يساوي نصف قوة الهبوط $\sec \frac{\theta}{2}$.



a. قوة الهبوط بالنيوتن تساوي كتلة اللوحة بالجاذبية، وهي 9,8 N لكل كليو جرام. إذا كانت كتلة اللوحة 544 kg. فجد قيمة قوة الهبوط.

b. اكتب معادلة تمثل الشد T في كل حبل>

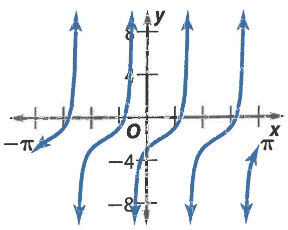
c. مثل بيانيًا هذه المعادلة التي توجد في b في الفترة $[0, 180°]$.

d. وبفرض أن طول هذه اللوحة يساوي 9.14 m والزاوية المثالية للشد هي θ الزاوية اليمني. حدد عدد الأحبال لنقل هذه اللوحة، بالإضافة إلى الشد المناسب لكل حبل.

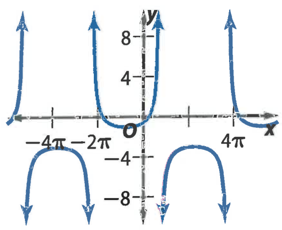
e. بفرض أن لديك 12.2 m من الأحبال لاستخدامها في نقل هذه اللوحة. جد قيمة θ وقيمة الشد المناسبة لكل حبل.

صِل كل دالة بتمثيلها البيانية.

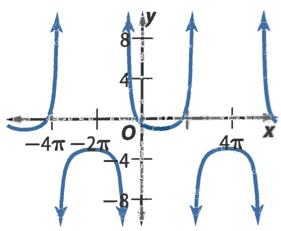
a.



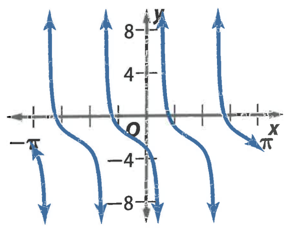
b.



c.



d.



44. $y = \csc\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - 2$

45. $y = \sec\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - 2$

46. $y = \cot(2x - \frac{\pi}{4}) - 2$

47. $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 2$

باستخدام حاسبة التمثيل البياني مثل بيانيًا كل زوج من الدوال في الشاشة نفسها، وخمِّن هل هما مساويان لجميع الأعداد الحقيقية؟ ثم استخدم خصائص الدوال لإثبات كل تخمين.

48. $f(x) = \sec x \cos x;\ g(x) = 1$

49. $f(x) = \sec^2 x;\ g(x) = \tan^2 x + 1$

50. $f(x) = \cos x \csc x;\ g(x) = \cot x$

51. $f(x) = \dfrac{1}{\sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right)};\ g(x) = \sin x$

مسائل معارات التفكير العليا

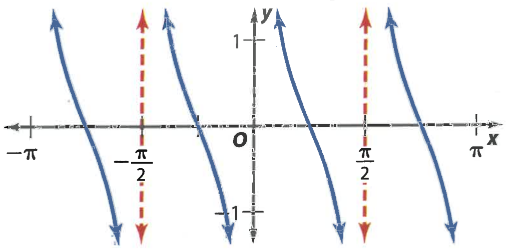
52. **الإثبات:** أثبت أن التقاطع مع المحور الراسي y في التمثيل البياني لدالة الشكل $y = ke^{-ct} \cos \omega t$ هو k.

التبرير حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة*. اشرح استنتاجك.

53. إذا كان $b \neq 0$. اذا $y = a + b \sec x$ لها قيمة قصوى $\pm(a + b)$.

54. إذا كان $x = \theta$ خطا تقاربياً لـ $y = \csc x$، إذا $x = \theta$ أيضًا يعد خطًا تقاربيًا لـ $y = \cot x$.

55. **تحليل الخطأ:** درست هناء وهدى التمثيل البياني المعروض. واعتقدت هناء أن التمثيل البياني لـ $y = -\frac{1}{3} \tan 2x$، واعتقدت هدى أن التمثيل البياني $y = \frac{1}{3} \cot 2x$. فأي إجابة صحيحة؟ اشرح استنتاجك.



56. **التحدي** اكتب دالة cosecant ودالة cotan لهما التمثيل البياني نفسه $y = \sec x$ و $y = \tan x$ على التوالي. تحقق من صحة إجابتك بالتمثيل البياني.

57. **الكتابة في الرياضيات** دالة مثلثية متضائلة تتردد بين التمثيل البياني الموجب والسالب لعامل التضاؤل. اشرح سبب تذبذب الدالة المثلثية المتضائلة بين التمثيل البياني الموجب والسالب لعامل التضاؤل، ولماذا تتوقف سعة الدالة على عامل التضاؤل.

مراجعة شاملة

حدد السعة والفترة والتكرار والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم ارسم فترتين للدالة.

58. $y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 10$

59. $y = 2\cos\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) - 6$

60. $y = \frac{1}{2}\cos(4x - \pi) + 1$

جد قيم الدوال المثلثية الخمس المتبقية لـ θ.

61. $\sin\theta = \frac{4}{5}, \cos\theta > 0$

62. $\cos\theta = \frac{6\sqrt{37}}{37}, \sin\theta > 0$

63. $\tan\theta = \frac{24}{7}, \sin\theta > 0$

.64 **مجتمع إحصائي** بلغ عدد سكان المدينة منذ 10 سنين 45,600. ومنذ ذلك الوقت، ازدادت الإحصائيات بمعدل ثابت كل سنة. فإذا كانت الإحصائيات حاليًا 64,800، فجد معدل النمو السنوي لهذه المدينة.

.65 **الطب:** عمر النصف للمادة المشعة هو الزمن الذي تستغرقه نصف ذرات المادة لتتفكك. واستخدم علماء الطب النووي نظير اليود 131-I بفترة عمر نصف 8 أيام للتحقق من وظيفة الغدة الدرقية للمريض. وبعد تناول عقار يحتوي على اليود و النظائر المجمعة في الغدة الدرقية للمريض وتثبيت كاميرا خاصة لرؤية وظيفتها. بفرض أن المريض تناول العقار الذي يحتوي على 9 مِكْرُوكُوري من 131-I. قرّب لأقرب ساعة المدة التي يستغرقها المكروكوري حتى يصل بمقدار 2.8 فقط في الغدة الدرقية للمريض؟

حلل كل معادلة كثيرة الحدود بالكامل باستخدام العامل المُعطى والقسمة المطولة.

66. $x^3 + 2x^2 - x - 2;\ x - 1$

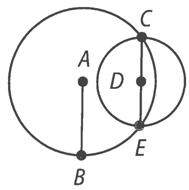
67. $x^3 + x^2 - 16x - 16;\ x + 4$

68. $x^3 - x^2 - 10x - 8;\ x + 1$

.69 **التمرين:** تنصح الجامعة الأمريكية للطب الرياضي بممارسة البالغين الأصحاء التمرينات على مستوى الهدف من 60٪ إلى 90٪ من المعدلات القصوى لضربات قلوبهم. ويمكنك تقدير أقصى معدل لضربات قلبك عن طريق طرح عمرك من 220. اكتب عبارة بها أكثر من متباينة لتمثل عمر a ومعدل ضربات القلب المستهدفة r.

مراجعة مهارات للاختبارات المعيارية

.70 **SAT/ACT** في الشكل، A و D مركزي الدائرتين، ويتقاطعان في النقاط C و CE هو قطر الدائرة D. إذا كان $AB = CE = 10$. فماذا تكون AD؟



A 5

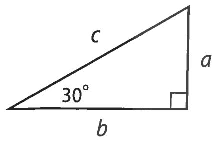
B $5\sqrt{2}$

C $5\sqrt{3}$

D $10\sqrt{2}$

E $10\sqrt{3}$

.71 **مراجعة** بالنظر إلى الشكل التالي. إذا كان $c = 14$، فجد قيمة b.



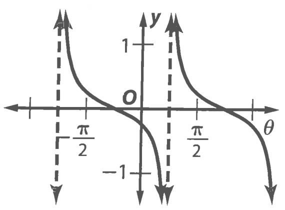
F $\frac{\sqrt{3}}{2}$

G $14\sqrt{3}$

H 7

J $7\sqrt{3}$

.72 أي معادلة ممثلة بالتمثيل البياني؟



A $y = \cot\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

B $y = \cot\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

C $y = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

D $y = \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

.73 **مراجعة** إذا كان $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ و $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$، ثم $\theta = ?$

F $\frac{13\pi}{12}$

G $\frac{7\pi}{6}$

H $\frac{5\pi}{4}$

J $\frac{4\pi}{3}$

الدوال المثلثية العكسية

.:السابق

- وجدت معكوسات العلاقات والدوال ومثّلتها بيانيًا.

.:الحالي

1. إيجاد قيمة الدوال المثلثية العكسية وتمثّلها بيانيًا.
2. إيجاد تركيب الدوال المثلثية.

.:لماذا؟

- يمكن استخدام الدوال المثلثية العكسية في تمثيل زاوية الدوران المتغيرة الأفقية اللازمة لكاميرا تلفزيونية لمتابعة حركة سيارة سباق.

المفردات الجديدة

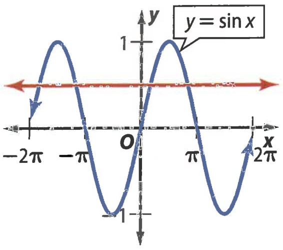
دالة قوس الجيب
arcsine function

دالة قوس جيب التمام
arccosine function

دالة قوس الظل
arctangent function

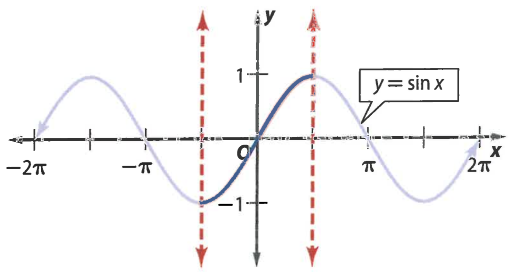
1 الدوال المثلثية العكسية

تعلمت سابقًا أن كل دالة لها دالة عكسية فقط إذا كانت *واحدًا إلى واحد*، بمعنى أن كل قيمة y في الدالة يمكن أن ترتبط بقيمة x واحدة فقط. وبما أن دالة الـ sin لا تحقق اختبار الخط الأفقي، فهي ليست واحدًا إلى واحد.

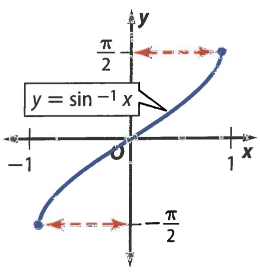


ولكن إذا قيدنا مجال دالة الـ sin في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$، فإن الدالة المقيدة تكون واحدًا إلى واحد، وتأخذ كل قيم المدى المحتملة [1 ,1-] للدالة غير المقيدة. في هذا المجال المقيد، $y = \sin x$ لها دالة عكسية تسمى *دالة* الـ sin *العكسية* $y = \sin^{-1} x$. ويكون التمثيل البياني للدالة $y = \sin^{-1} x$ هو معكوس تمثيل الدالة الـ sin المقيدة على الخط $y = x$.

دالة الجيب المقيدة



دالة الجيب العكسية



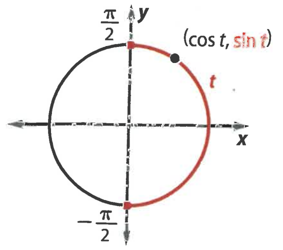
لاحظ أن مجال الدالة يكون $y = \sin^{-1} x$ هو [1 ,1-]. والمدى يكون $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. ولأن الزوايا والأقواس الموجودة في دائرة الوحدة لها قياسات مكافئة بالراديان، فأحيانًا يشار إلى دالة الـ sin العكسية **بدالة قوس الجيب** $y = \arcsin x$.

في الدرس 1-3، استخدمتَ العلاقة العكسية بين دالة الـ sin وبين دوال $\sin^{-1}$ لإيجاد قياس الزاوية الحادة. ومن التمثيل البياني بالأعلى، يمكنك أن ترى بشكل عام.

$y = \sin^{-1} x$ أو $y = \arcsin x$ إذا وفقط إذا كان $\sin y = x$، عندما يكون $-1 \le x \le 1$ و $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. إذا وفقط إذا كان تعني أنه شرط ضروري وكافٍ.

هذا يعني أن $\sin^{-1} x$ أو $\arcsin x$ يمكن تفسيره على أنه *الزاوية (أو القوس)* بين $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ مثلاً $\sin^{-1} 0.5$ هو الزاوية التي قيمة الـ sine لها يساوي 0.5.

قيم الجيب العكسية



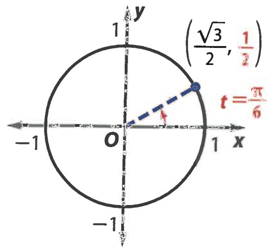
تذكر أن $\sin t$ هي الإحداثي y لنقطة على دائرة الوحدة التي تتوافق مع الزاوية أو طول القوس t. لأن مدى دالة الـ $\sin^{-1}$ مقيد بـ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$، فإن قياسات الزاوية المحتملة لدالة الـ $\sin^{-1}$ تقع في النصف الأيمن من دائرة الوحدة كما هو موضح.

ويمكنك الاستعانة بدائرة الوحدة في إيجاد القيمة الدقيقة لبعض التعابير التي تتضمن $\sin^{-1} x$ أو $\arcsin x$.

مثال 1 إيجاد قيم دوال الـ sin-1

جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

a. $\sin^{-1} \frac{1}{2}$



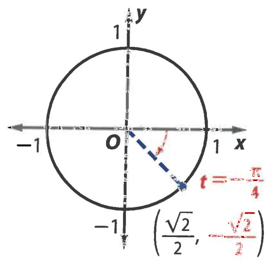
جد نقطة على دائرة الوحدة تقع في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

بإحداثي y يساوي $\frac{1}{2}$. عندما تكون $t = \frac{\pi}{6}$، $\sin t = \frac{1}{2}$.

من ثم تكون $\sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

التحقق إذا كان $\sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$، إذًا $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. ✔

b. $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



جد نقطة على دائرة الوحدة تقع في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

بإحداثي y يساوي $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. عندما يكون $t = -\frac{\pi}{4}$، $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

من ثم يكون $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

التحقق إذا كان $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$، إذًا $\sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. ✔

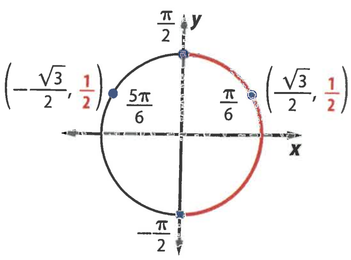
c. $\sin^{-1} 3$

نظرًا لأن مجال دالة $\sin^{-1}$ هو $[-1, 1]$ و $3 > 1$. فلا توجد sine زاوية بقيمة 3. ومن ثم، فإن قيمة $\sin^{-1} 3$ غير موجودة.

تمرين موجّه

1A. $\arcsin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **1B.** $\sin^{-1} (-2\pi)$ **1C.** $\arcsin (-1)$

> **نصيحة تقنية**
>
> **إيجاد قيمة $\sin^{-1}$** يمكنك أيضًا الاستعانة بحاسبة التمثيل البياني لإيجاد الزاوية التي قيمة sine لها $\frac{1}{2}$
>
> ```
> sin⁻¹(0.5)
>              .5235987756
> π/6
>              .5235987756
> ```
>
> تأكد من اختيار RADIAN من MODE في حاسبتك البيانية.



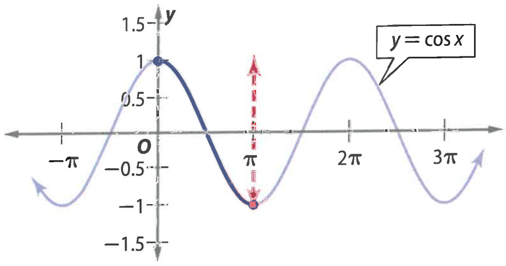
لاحظ أنه في المثال 1a بينما $\frac{5\pi}{6}$ تساوي $\frac{1}{2}$، فإن $\frac{5\pi}{6}$ ليست في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. من ثم، فإن $\sin^{-1} \frac{1}{2} \neq \frac{5\pi}{6}$.

عندما يكون المجال مقيدًا على $[0, \pi]$، تكون دالة cosine واحدًا لواحد، وتأخذ كل قيم المدى المحتملة على $[-1, 1]$. وفي هذا المجال المقيد، يكون لدالة cosine دالة معكوسة يطلق عليها $y = \cos^{-1} x$ و **دالة قوس جيب التمام** $y = \arccos x$.
والتمثيل البياني للدالة $y = \cos^{-1} x$ عبارة عن معكوس التمثيل البياني لدالة cosine المقيدة على الخط $y = x$.

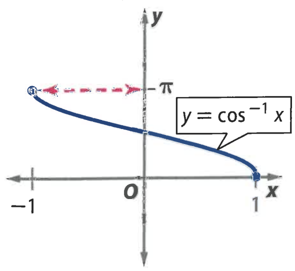
نصيحة دراسية

القيم الأساسية أحيانًا يشار إلى الدوال المثلثية التي لها مجالات مقيدة بحروف إنجليزية كبيرة. على سبيل المثال، $y = \text{Sin } x$ تمثل الدالة $y = \sin x$، بحيث تكون $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. وغالبًا ما يطلق على القيم في هذه المجالات المقيدة *القيم الأساسية*.

دالة جيب التمام المقيدة

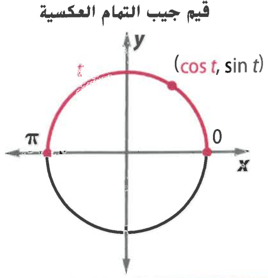


دالة جيب التمام العكسية



تذكر أن $\cos t$ هي الإحداثي x للنقطة على دائرة الوحدة التي تتوافق مع الزاوية أو طول القوس t. لأن مدى $y = \cos^{-1} x$ مقيد بـ $[0, \pi]$، تقع قيم دالة $\cos^{-1}$ في النصف العلوي من دائرة الوحدة.

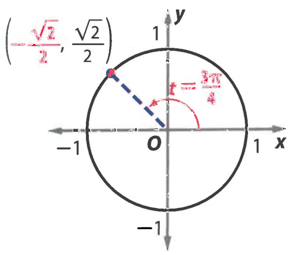
قيم جيب التمام العكسية



مثال 2 إيجاد قيمة دوال $\cos^{-1}$

جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

a. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



جد نقطة على دائرة في الفترة $[0, \pi]$ بإحداثي x يساوي $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. عندما تكون $t = \frac{3\pi}{4}$، $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

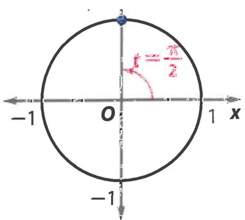
من ثم تكون $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

التحقق إذا كان $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$، إذًا $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. ✔

b. $\arccos(-2)$

بما أن مجال دالة arccos هو $[-1, 1]$ و $-2 < -1$، فلا توجد زاوية cosine بقيمة -2. لذا، فإن قيمة (-2) غير موجودة.

c. $\cos^{-1} 0$



جد نقطة على دائرة الوحدة في الفترة $[0, \pi]$ بإحداثي x يساوي 0.

عندما تكون $t = \frac{\pi}{2}$، $\cos t = 0$.

من ثم يكون $\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$.

التحقق إذا كان $\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$، إذًا $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. ✔

تمرين موجّه

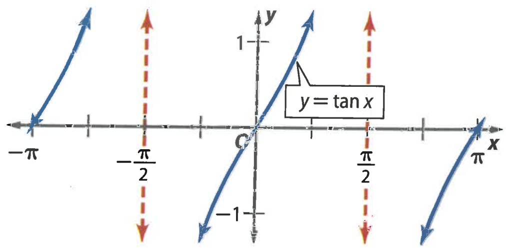
2A. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **2B.** $\arccos 2.5$ **2C.** $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

عندما تكون مقيدة بمجال $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$، تكون دالة ظل الزاوية واحدًا إلى واحد. وفي هذا المجال المقيد، يكون لدالة قوس الظل دالة عكسية تسمى *دالة معكوس ظل الزاوية* $y = \tan^{-1} x$ أو **دالة قوس الظل** $y = \arctan x$. التمثيل البياني $y = \tan^{-1} x$ يمكن إيجاده عن طريق انعكاس التمثيل البياني لدالة ظل الزاوية على الخط $y = x$. لاحظ أنه على عكس دوال sine و cosine، فإن مجال $\tan^{-1}$ الزاوية هو $(-\infty, \infty)$.

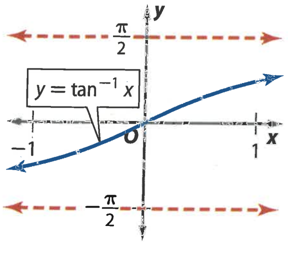
نصيحة دراسية

السلوك الطرفي لمعكوس ظل الزاوية لاحظ أنه عند انعكاس التمثيل البياني لدالة ظل الزاوية المقيدة على الخط $y = x$، تصير خطوط التقارب الرأسية $x = \pm\frac{\pi}{2}$ خطوط التقارب الأفقية $y = \pm\frac{\pi}{2}$ لدالة $\tan^{-1}$ الزاوية. من ثم تكون $\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$ و $\lim_{x \to \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$.

دالة ظل الزاوية المقيدة



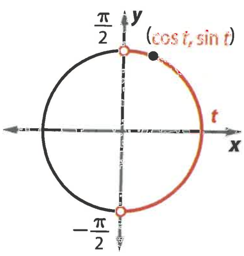
دالة معكوس ظل الزاوية



يمكنك أيضًا الاستعانة بدائرة الوحدة لإيجاد قيمة تعبير معكوس ظل الزاوية.

وفي دائرة الوحدة، تكون $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ أو $\frac{y}{x}$. وستقع قيم $y = \tan^{-1} x$ في النصف الأيمن من دائرة الوحدة، ولا تشمل $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$؛ لأن دالة ظل الزاوية غير محددة على تلك النقاط.

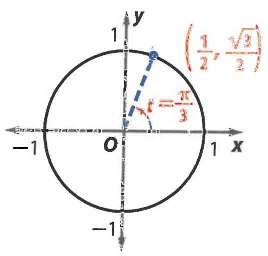
قيم معكوس ظل الزاوية



مثال 3 إيجاد قيمة دوال معكوس ظل الزاوية

جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

a. $\tan^{-1}\sqrt{3}$



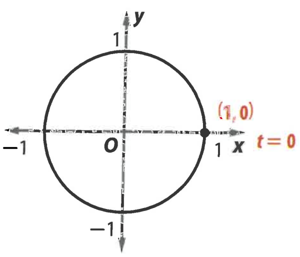
جد نقطة (x, y) على دائرة الوحدة في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

بحيث يكون $\frac{y}{x} = \sqrt{3}$. عندما يكون $t = \frac{\pi}{3}$، $\tan t = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$

أو $\sqrt{3}$. من ثم تكون $\tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

التحقق إذا كان $\tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$، إذًا $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. ✔

b. arctan 0



جد نقطة (x, y) على دائرة الوحدة في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

بحيث يكون $\frac{y}{x} = 0$. عندما تكون $t = 0$، $\tan t = \frac{0}{1}$ أو 0.

من ثم يكون $\arctan 0 = 0$.

التحقق إذا كان $\arctan 0 = 0$، إذًا $\tan 0 = 0$. ✔

تمرين موجّه

3A. $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

3B. $\tan^{-1}(-1)$

نصيحة تقنية

إيجاد قيمة $\tan^{-1}$ يمكنك أيضًا استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد الزاوية التي ظل زاويتها $\sqrt{3}$.

```
tan-1(√(3))
        1.047197551
π/3
        1.047197551
```

تأكد من اختيار RADIAN من MODE في حاسبتك البيانية.

في حين أن الدوال العكسية لـ Sec, Csc, Cot موجودة بالفعل، فإنها نادرة الاستخدام في العمليات الحسابية؛ لوجود دوال معكوسة لمقلوبها. علاوة على عدم وضوح كيفية تقرير حصر مجالات كل من Sec, Csc, Cot للحصول على Sec^{-1} الزاوية و Csc^{-1} و Cot^{-1}. ستكتشف هذه الدوال في التمرين 66.

وفيما يلي تلخيص الدوال المثلثية العكسية الأكثر شيوعًا.

المفهوم الأساسي الدوال المثلثية العكسية

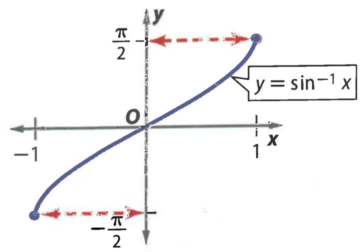
معكوس sin x

الشرح الزاوية (أو القوس) بين $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ بقيمة sin x.

الرموز $y = \sin^{-1} x$ إذا كان فقط $\sin y = x$ بالنسبة لـ $-1 \le x \le 1$ و $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

المجال: $[-1, 1]$

المدى: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



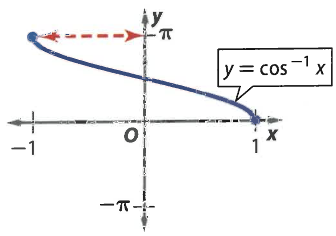
معكوس cos x

الشرح الزاوية (أو القوس) بين 0 و π بقيمة cos x.

الرموز $y = \cos^{-1} x$ إذا كان فقط $\cos y = x$ بالنسبة لـ $-1 \le x \le 1$ و $0 \le y \le \pi$.

المجال: $[-1, 1]$

المدى: $[0, \pi]$



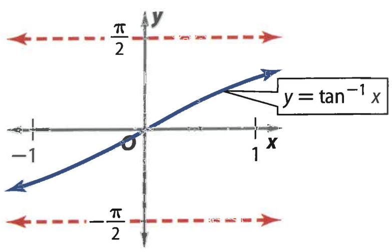
معكوس tan x

الشرح الزاوية (أو القوس) بين $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ بقيمة tan x.

الرموز $y = \tan^{-1} x$ إذا كان فقط $\tan y = x$ بالنسبة لـ $-\infty < x < \infty$ و $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

المجال: $(-\infty, \infty)$

المدى: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



يمكنك تمثيل الدوال المثلثية العكسية الموجودة بالأعلى بيانيًا عن طريق إعادة كتابتها بالصيغة $\sin y = x$، $\cos y = x$، أو $\tan y = x$، وتعيين قيم y، ثم إنشاء جدول للقيم، ثم تحديد النقاط وتوصيلها بمنحنى منتظم.

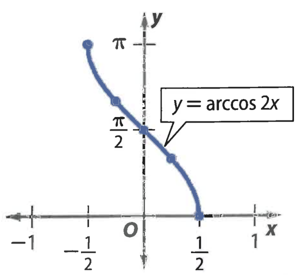
مثال 4 رسم التمثيلات البيانية للدوال المثلثية العكسية

مثّل بيانيًا $y = \arccos 2x$.

حسب التعريف، $y = \arccos 2x$ و $\cos y = 2x$ متساويين عند $0 \le y \le \pi$؛ لذا فالتمثيل البياني لكليهما واحد. أعد كتابة $\cos y = 2x$ حيث $x = \frac{1}{2}\cos y$ وعيّن قيم y في الفترة $[0, \pi]$ لإنشاء جدول القيم.

y	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$x = \frac{1}{2}\cos y$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{1}{2}$

ثم حدد النقاط (x, y) وصِلها بمنحنى منتظم. لاحظ أن لهذا المنحنى نقاط نهاية عند $\left(-\frac{1}{2}, \pi\right)$ و $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$، تشير إلى أن التمثيل البياني بأكمله $y = \arccos 2x$ موضَّح.



انتبه!
تذكر أن $\pi = 3.14$ radians أو 180°.

تمرين موجّه

مثّل كل دالة بيانيًا.

4A. $y = \arcsin 3x$

4B. $y = \tan^{-1} 2x$

الربط بالحياة اليومية

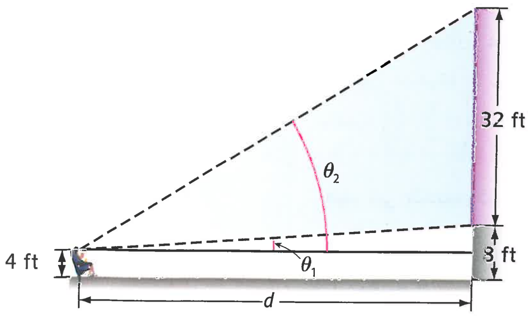
في أواخر القرن 19، بدأ توماس إديسون في العمل على اختراع جهاز لتسجيل الصور المتحركة يسمى الكينيتوسكوب. صار فيما بعدُ عارض الأفلام. وكانت أول صورة متحركة محفوظة الحقوق فيلمًا لأحد موظفي إديسون وهو يعطس.

***المصدر:** مكتبة الكونغرس*

الأفلام **في صالة السينما، تتغير زاوية رؤية المشاهد لمشاهدة الفيلم؛ بناءً على المكان الذي يجلس فيه في السينما.**

a. اكتب دالة تمثل زاوية الرؤية θ لشخص في السينما مستوى عينيه عند الجلوس هو 4 ft فوق مستوى الأرض.

اصنع رسمًا تخطيطيًّا لإيجاد زاوية الرؤية. افترض أن θ_1 تمثل الزاوية التي تتشكل من مستوى العين إلى أسفل الشاشة، ثم افترض أن θ_2 تمثل الزاوية التي تتشكل من مستوى العين إلى أعلى الشاشة.



بذلك، تكون زاوية الرؤية هي $\theta = \theta_2 - \theta_1$. يمكنك استخدام دالة ظل الزاوية لإيجاد قيمة θ_1 و θ_2. وبما أن مستوى عين المشاهد في أثناء جلوسه هو 4 أقدام فوق مستوى الأرض، إذًا فالمسافة المقابلة لـ θ_1 هي $4 - 8$ أقدام أو 4 أقدام.

$\tan \theta_1 = \frac{4}{d}$ adj = d و opp = 4

$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{4}{d}$ دالة $\tan^{-1}$ الزاوية

المسافة المقابلة لـ θ_2 هي $(8 + 32)$ - 4 ft = 36 ft.

$\tan \theta_2 = \frac{36}{d}$ adj = d و opp = 36

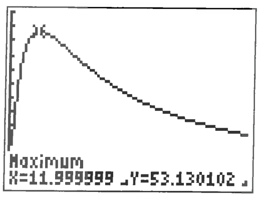
$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{36}{d}$ دالة $\tan^{-1}$ الزاوية

لذا، يمكن تمثيل زاوية الرؤية بالدالة $\theta = \tan^{-1} \frac{36}{d} - \tan^{-1} \frac{4}{d}$.

b. حدد المسافة التي تتوافق مع أقصى زاوية رؤية.

مسافة أقصى زاوية رؤية هي أقصى نقطة في التمثيل البياني. يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد هذه النقطة.

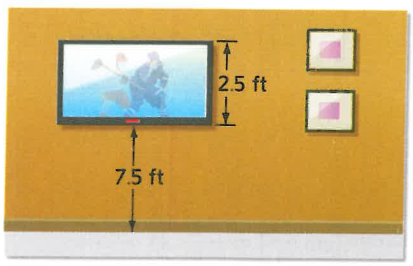
ومن خلال التمثيل البياني، ترى أن أقصى زاوية رؤية تحدث تقريبًا عند مسافة 12 قدمًا من الشاشة.



[0, 100] scl: 10 by [0, 60] scl: 5

تمرين موجّه

5. التلفاز اشترى أحمد شاشة تلفاز مسطحة جديدة. حتى تتمكن أسرته من مشاهدته، قرَّر تعليق التلفاز على الحائط كما هو موضح.



A. اكتب دالة تمثل المسافة d التي تقع فيها أقصى زاوية رؤية θ لأحمد إذا كان مستوى عينه في أثناء الجلوس يبعد 3 ft عن مستوى سطح الأرض.

B. حدد المسافة التي تتوافق مع أقصى زاوية رؤية.

2 تركيب الدوال المثلثية العكسية

تعلمت في الدرس [illegible] أنه إذا كانت x في مجال $f(x)$ و $f^{-1}(x)$، إذًا

$$f[f^{-1}(x)] = x \quad \text{و} \quad f^{-1}[f(x)] = x.$$

وبما أن مجالات الدوال المثلثية مقيدة للحصول على الدوال المثلثية العكسية، فإن الخواص لا تنطبق على قيم x.

على سبيل المثال، عندما يكون $\sin x$ محددة لجميع قيم x، يكون مجال $\sin^{-1} x$ هو [-1, 1]. ومن ثم، $\sin(\sin^{-1} x) = x$ لا يكون صحيحًا إلا عندما يكون $-1 \leq x \leq 1$. وينطبق قيد مختلف على التركيب $\sin^{-1}(\sin x)$. نظرًا لأن $\sin x$ مقيد بالفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$، $\sin^{-1}(\sin x) = x$ يكون صحيحًا فقط عندما يكون $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

وفيما يلي تلخيص لقيود هذا المجال.

المفهوم الأساسي مجال تركيب الدوال المثلثية

$f[f^{-1}(x)] = x$	$f^{-1}[f(x)] = x$
إذا كان $-1 \leq x \leq 1$، يكون $\sin(\sin^{-1} x) = x$.	إذا كان $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$، يكون $\sin^{-1}(\sin x) = x$.
إذا كان $-1 \leq x \leq 1$، يكون $\cos(\cos^{-1} x) = x$.	إذا كان $0 \leq x \leq \pi$، يكون $\cos^{-1}(\cos x) = x$.
إذا كان $-\infty < x < \infty$، يكون $\tan(\tan^{-1} x) = x$.	إذا كان $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$، يكون $\tan^{-1}(\tan x) = x$.

مثال 6 استخدام خصائص الدوال المثلثية العكسية

جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

a. $\sin\left[\sin^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$

تطبق خواص الدوال المثلثية العكسية لأن $-\frac{1}{4}$ تقع في الفترة $[-1, 1]$.

ومن ثم، فإن $\sin\left[\sin^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)\right] = -\frac{1}{4}$.

b. $\arctan\left(\tan\frac{\pi}{2}\right)$

وبما أن $\tan x$ غير محددة عندما يكون $x = \frac{\pi}{2}$، فإن $\arctan\left(\tan\frac{\pi}{2}\right)$ غير موجودة.

c. $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

لاحظ أن الزاوية $\frac{7\pi}{4}$ لا تقع في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. ومع ذلك، $\frac{7\pi}{4}$ مشتركة في ضلع الانتهاء مع $\frac{7\pi}{4} - 2\pi$ أو $-\frac{\pi}{4}$، والتي تقع في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \arcsin\left[\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad \sin\frac{7\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{4} \qquad \text{بما أن } -\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}\text{، فإن } \arcsin(\sin x) = x.$$

ومن ثم، فإن $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

انتبه!

التراكيب والمعكوسات عند حساب $f^{-1}[f(x)]$ بالدوال المثلثية، يبدو المجال $(-\infty, \infty)$. ومع ذلك، نظرًا إلى أن مدى الدوال العكسية مقيد، فأحيانًا يجب إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء.

تمرين موجّه

6A. $\tan\left(\tan^{-1}\frac{\pi}{3}\right)$

6B. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)$

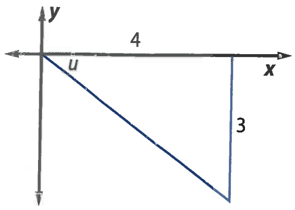
6C. $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

يمكنك أيضًا إيجاد قيمة التركيب الذي يحتوي على دالتين مثلثيتين مختلفتين.

مثال 7 إيجاد قيمة تركيب الدوال المثلثية

جد قيمة $\cos\left[\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$.

لتحويل التعبير إلى أبسط صورة، افترض أن $u = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)$، ومن ثم تكون $\tan u = -\frac{3}{4}$.



وبما أن دالة ظل الزاوية سالبة في الربع الثاني و والرابع، ومجال دالة معكوس ظل الزاوية مقيد في الربع الأول والرابع، يجب أن تكون u في الربع الرابع.

باستخدام مبرهنة فيثاغورس، ستجد أن طول الوتر هو 5. والآن، عليك حل المسألة لإيجاد $\cos u$.

$$\cos u = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \qquad \text{cosine دالة}$$

$$= \frac{4}{5} \qquad \text{hyp} = 5 \text{ و } \text{adj} = 4$$

ومن ثم، فإن $\cos\left[\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)\right] = \frac{4}{5}$.

تمرين موجّه

جد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

7A. $\cos^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)$

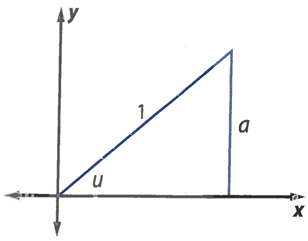
7B. $\sin\left(\arctan \frac{5}{12}\right)$

أحيانًا يقلّ التركيب الذي يحتوي على الدالتين المثلثتين المختلفتين إلى تعبير جبري لا يحتوي على أي تعابير مثلثية.

مثال 8 إيجاد قيمة تركيب الدوال المثلثية

اكتب $\tan(\arcsin a)$ في صورة تعبير جبري لـ a لا يحتوي على دوال مثلثية.

افترض أن $u = \arcsin a$، ومن ثم يكون $\sin u = a$.



ولأن مجال دالة arcsine مقيد بالربع الأول والرابع، لا بد أن تقع u في الربع الأول أو الرابع. ويكون الحل مماثلاً في كل ربع؛ لذا سنحل الربع الأول.

من نظرية فيثاغورس، تجد أن طول الضلع المجاور لـ u هو $\sqrt{1-a^2}$. والآن، عليك حل $\tan u$.

$$\tan u = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \qquad \text{tan دالة}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{a\sqrt{1-a^2}}{1-a^2} \qquad \text{adj} = \sqrt{1-a^2} \text{ و } \text{opp} = a$$

ومن ثم، فإن $\tan(\arcsin a) = \frac{a\sqrt{1-a^2}}{1-a^2}$.

تمرين موجّه

اكتب كل تعبير في صورة تعبير جبري لـ x لا يحتوي على دوال مثلثية.

8A. $\sin(\arccos x)$

8B. $\cot[\sin^{-1} x]$

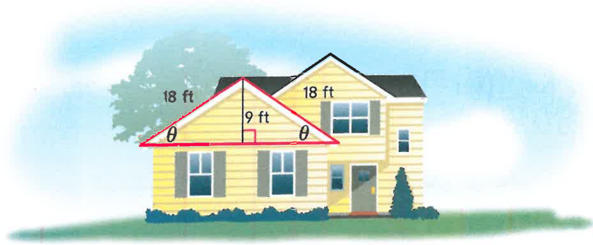
نصيحة دراسية

تحليل الدوال الجبرية يمكن عكس التقنية المستخدمة لتحويل التعابير المثلثية إلى تعابير جبرية. تحليل الدالة الجبرية كتركيب من دالتين مثلثتين هو تقنية تستخدم كثيرًا في حساب التفاضل والتكامل.

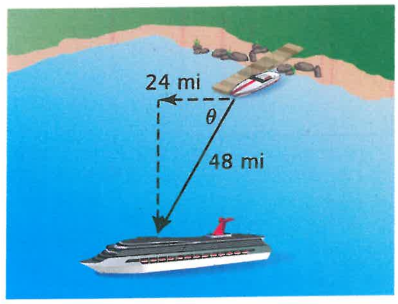
جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجدت. (الأمثلة 1-3)

1. $\sin^{-1} 0$
2. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $\sin^{-1} \frac{1}{2}$
5. $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
6. $\arccos 0$
7. $\cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$
8. $\arccos (-1)$
9. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$
10. $\cos^{-1} \frac{1}{2}$
11. $\arctan 1$
12. $\arctan (-\sqrt{3})$
13. $\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3}$
14. $\tan^{-1} 0$

.15 **الهندسة المعمارية** داعم سطح على شكل مثلث قائمين كما هو موضح أدناه. جد قيمة θ. (المثال 3)



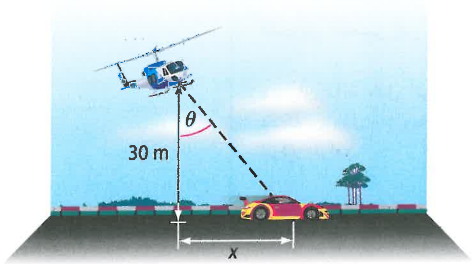
.16 **الإنقاذ** أبحرت سفينة سياحية غربًا بمقدار 24 ميلاً قبل الاتجاه نحو الجنوب. وعندما لم تستطع السفينة المتابعة، طلب طاقم السفينة المساعدة لاسلكيًا. ووجد قارب الإنقاذ أن أسرع طريق يبلغ طوله 48 ميلاً. جد الزاوية θ التي يجب أن يأخذها قارب الإنقاذ لمساعدة السفينة السياحية. (المثال 3)



مثّل كل دالة بيانيًّا. (المثال 4)

17. $y = \arcsin x$
18. $y = \sin^{-1} 2x$
19. $y = \sin^{-1} (x + 3)$
20. $y = \arcsin x - 3$
21. $y = \arccos x$
22. $y = \cos^{-1} 3x$
23. $y = \arctan x$
24. $y = \tan^{-1} 3x$
25. $y = \tan^{-1} (x + 1)$
26. $y = \arctan x - 1$

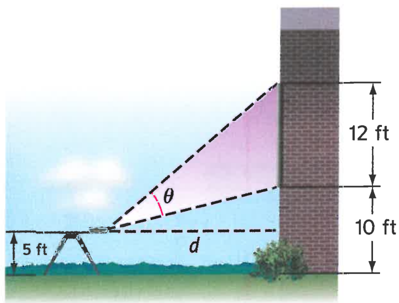
.27 **سباق السيارات** تُصوِّر كاميرا تليفزيونية سباق سيارات. وتدور الكاميرات مع حركة السيارات أمامها. وتبعد الكاميرا عن حلقة السباق مسافة 30 مترًا. جد قيمة θ و x كما هو موضح في الشكل. (المثال 5)



a. اكتب θ كدالة x.

b. جد θ عندما تكون $x = 6$ m و $x = 14$ m.

.28 **الرياضة** يريد سالم وراشد عرض لعبة كرة القدم للمحترفين بجانب مبنى سكنهما. فوضعا عارض الأفلام على طاولة يبلغ طولها 5 ft، ثم ثبّتا شاشة طولها 12 ft ترتفع عن الأرض بمقدار 10 ft. (المثال 5)



a. اكتب دالة تعبِّر عن θ من حيث المسافة d.

b. استخدم حاسبة التمثيل البياني في تحديد مسافة أقصى زاوية عرض.

جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجدت. (المثالان 6 و7)

29. $\sin\left(\sin^{-1} \frac{3}{4}\right)$
30. $\sin^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)$
31. $\cos\left(\cos^{-1} \frac{2}{9}\right)$
32. $\cos^{-1} (\cos \pi)$
33. $\tan\left(\tan^{-1} \frac{\pi}{4}\right)$
34. $\tan^{-1}\left(\tan \frac{\pi}{3}\right)$
35. $\cos (\tan^{-1} 1)$
36. $\sin^{-1}\left(\cos \frac{\pi}{2}\right)$
37. $\sin\left(2 \cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
38. $\sin (\tan^{-1} 1 - \sin^{-1} 1)$
39. $\cos (\tan^{-1} 1 - \sin^{-1} 1)$
40. $\cos\left(\cos^{-1} 0 + \sin^{-1} \frac{1}{2}\right)$

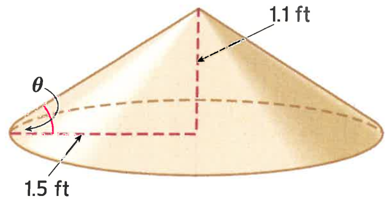
اكتب كل تعبير مثلثي في صورة تعبير جبري في x.

41. $\tan(\arccos x)$
42. $\csc(\cos^{-1} x)$
43. $\sin(\cos^{-1} x)$
44. $\cos(\arcsin x)$
45. $\csc(\sin^{-1} x)$
46. $\sec(\arcsin x)$
47. $\cot(\arccos x)$
48. $\cot(\arcsin x)$

صف كيفية ربط التمثيلات $f(x)$ و $g(x)$ البيانية.

49. $f(x) = \sin^{-1} x$ و $g(x) = \sin^{-1}(x-1) - 2$
50. $f(x) = \arctan x$ و $g(x) = \arctan 0.5x - 3$
51. $f(x) = \cos^{-1} x$ و $g(x) = 3(\cos^{-1} x - 2)$
52. $f(x) = \arcsin x$ و $g(x) = \frac{1}{2}\arcsin(x+2)$
53. $f(x) = \arccos x$ و $g(x) = 5 + \arccos 2x$
54. $f(x) = \tan^{-1} x$ و $g(x) = \tan^{-1} 3x - 4$

55. **الرمال** عند تراكم الرمال، تشكلت زاوية بين الكومة والأرض، وبقيت ثابتة إلى حد ما. ويطلق على هذه الزاوية زاوية السكون. وبافتراض أن امرأة صنعت كومة من الرمال على الشاطئ يبلغ قطرها 3 أقدام وارتفاعها 1.1 قدم.



a. ما قيمة زاوية السكون؟

b. إذا ظلت زاوية السكون ثابتة، فكَمْ يبلغ القطر الذي تحتاج إليه الكومة لتصل إلى الارتفاع 4 أقدام؟

حدد المجال والمدى لكل دالة تركيب. ومن ثم، استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيلها بيانيًا.

56. $y = \cos(\tan^{-1} x)$
57. $y = \sin(\cos^{-1} x)$
58. $y = \arctan(\sin x)$
59. $y = \sin^{-1}(\cos x)$
60. $y = \cos(\arcsin x)$
61. $y = \tan(\arccos x)$

62. **المعكوسات** تمثل دالة Sec^{-1} بيانيًا بتقييد مجال دالة Sec التي تقع في الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ و $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. وتمثل دالة Csc^{-1} عن طريق تحديد مجال دالة Csc للفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ و $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a. حدد المجال والمدى لكل دالة.

b. مثّل كل دالة بيانيًا.

c. اشرح لماذا يعد تقييد المجال لدوال Sec, Csc ضروريًا في التمثيل البياني للدوال العكسية.

اكتب كل تعبير جبري كدالة مثلثية للدالة المثلثية العكسية x.

63. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
64. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

65. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف التمثيلات البيانية لتركيبات الدوال المثلثية.

a. **تحليليًا** افترض أن $f(x) = \sin x$ و $f^{-1}(x) = \arcsin x$. صف مجال ومدى $f^{-1} \circ f$ و $f \circ f^{-1}$.

b. **بيانيًا** صمّم جدولاً من القيم العديدة لكل دالة تركيب في الفترة $[-2, 2]$. ثم استخدم الجدول لرسم التمثيلات البيانية لـ $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$. استخدم حاسبة التمثيل البياني للتحقق من تمثيلاتك البيانية.

c. **تحليليًا** افترض أن $g(x) = \cos x$ و $g^{-1}(x) = \arccos x$. صف مجال ومدى $g \circ g^{-1}$ و $g^{-1} \circ g$ وخمن كيف سيبدو شكل التمثيلات البيانية لـ $g^{-1} \circ g$ و $g \circ g^{-1}$. اشرح استنتاجك.

d. **بيانيًا** ارسم التمثيلات البيانية لـ $g^{-1} \circ g$ و $g \circ g^{-1}$. استخدم حاسبة التمثيل البياني للتحقق من تمثيلاتك البيانية.

e. **كلاميًا** خمن شكل التمثيلات البيانية للتركيبين المحتملين لدوال ظل الزاوية وقوس ظل الزاوية. اشرح استنتاجك. ثم تحقق من تخمينك باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

66. **تحليل الخطأ** يناقش أحمد وعلي الدوال المثلثية العكسية. بما أن $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ خمَّن أحمد أن $\tan^{-1} x = \frac{\sin^{-1} x}{\cos^{-1} x}$. ولكن لم يوافقه علي الرأي. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح.

67. **تحدٍ** استخدم التمثيلات البيانية لـ $y = \sin^{-1} x$ و $y = \cos^{-1} x$ لإيجاد قيمة $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ في الفترة $[-1, 1]$. اشرح استنتاجك.

68. **التبرير** حدّد ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة أم خاطئة: إذا كانت $\cos \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$، فإن $\cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\pi}{4}$. اشرح استنتاجك.

التبرير حدد ما إذا كانت كل دالة فردية أم زوجية أم لا فردية ولا زوجية. علل إجابتك.

69. $y = \sin^{-1} x$
70. $y = \cos^{-1} x$
71. $y = \tan^{-1} x$

72. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف يمكن لقيود دوال sine و cosine و tangent التحكم في المجال والمدى لدوالها العكسية.

مراجعة شاملة

حدد خطوط التقارب الرأسية، ومثّل كل دالة بيانيًا.

75. $y = 3 \csc \frac{1}{2}\theta$

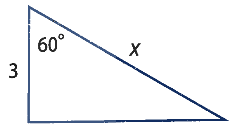
74. $y = \cot 5\theta$

73. $y = 3 \tan \theta$

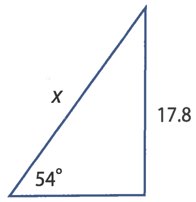
.76 **الأمواج** تطفو ورقة على سطح الماء، وتتحرك صعودًا وهبوطًا. والمسافة بين أعلى النقاط وأدناها 4 سنتيمترات. وتتحرك من النقطة العُليا إلى النقطة الدنيا، ثم إلى النقطة العُليا من جديد كل 10 ثوانٍ. اكتب الدالة التي تمثل حركة الورقة من حيث نقطة التوازن.

جد قيمة x. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

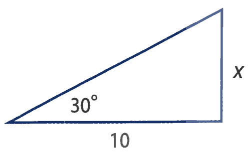
79.



78.



77.



لكل زوج من الدوال، جد $[f \circ g](x)$، $[g \circ f](x)$، و$[f \circ g](4)$.

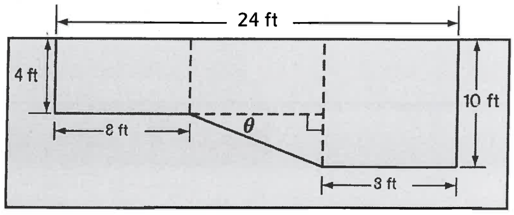
82. $f(x) = \sqrt{x+3}$
$g(x) = x^2 + 1$

81. $f(x) = 6 - 5x$
$g(x) = \frac{1}{x}$

80. $f(x) = x^2 + 3x - 6$
$g(x) = 4x + 1$

.83 **التعليم** أجاب طارق عن 11 سؤالاً من الاختبار اليومي القصير الذي يتكون من 20 سؤالاً بشكل صحيح. وقال له مدرب البيسبول الخاص به إنه يجب أن يرفع متوسط مستواه إلى 70% على الأقل إذا رغب في المشاركة في افتتاحية الموسم القادم. وتعهد طارق أن يدرس بجدٍّ، وأن يجيب عن جميع أسئلة الاختبار اليومي القصير بشكل صحيح في المستقبل. فكَمْ سؤالًا يجب عليه إجابته بشكل صحيح ليرفع متوسط مستواه إلى 70%؟

84. SAT/ACT ما قيمة زاوية الانخفاض θ بين نهاية السطح ونهاية عمق حمام السباحة لأقرب درجة؟



رؤية جانبية لحمام السباحة

A 25°　　**C** 41°　　**E** 73°

B 37°　　**D** 53°

85. أي مما يلي يمثل القيمة الدقيقة $\sin\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$

F $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　**H** $\frac{\sqrt{5}}{5}$

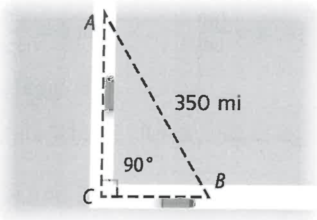
G $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　**J** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

86. مراجعة يبلغ وتر المثلث القائم 67 cm. إذا كان قياس إحدى الزوايا 47°، فما طول أقصر ضلع في المثلث؟

A 45.7 cm　　**C** 62.5 cm

B 49.0 cm　　**D** 71.8 cm

87. مراجعة شاحنتان، A و B، بدأ سيرهما من التقاطع C لطريقين مستقيمين في الوقت نفسه. وكانت الشاحنة A تتحرك بضِعف سرعة الشاحنة B. وبعد 4 ساعات، كان بُعْد إحدى الشاحنتين عن الأخرى 350 mi. جد تقريبًا سرعة الشاحنة B بالميل في كل ساعة.



F 39　　**H** 51

G 44　　**J** 78

الوحدة 3

دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

حساب مثلثات المثلثات قائمة الزاوية (الدرس 1-3)

$\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$ $\cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$ $\tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$

$\csc \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$ $\sec \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$ $\cot \theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}}$

الدرجات والراديان (الدرس 2-3)

- للتحويل من الدرجات إلى الراديان، اضرب في $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$
- للتحويل من راديان إلى درجة، اضرب في $\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}$
- السرعة الخطية: $v = \frac{s}{t}$، حيث s هي طول القوس خلال الزمن t
- السرعة الزاويّة: $\omega = \frac{\theta}{t}$، حيث θ هي زاوية الدوران (بالراديان) المحركة خلال الزمن t

النسب المثلثيّة على دائرة الوحدة (الدرس 3-3)

- بالنسبة لزاوية θ المقيسة بالراديان، والتي بها: (x, y) و $\cos \theta = \frac{x}{r}$ و $\sin \theta = \frac{y}{r}$ و $\tan \theta = \frac{y}{x}$، حيث $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- بالنسبة للزاوية t التي بها (x, y) على دائرة الوحدة $\cos \theta = x$ و $\sin \theta = y$ و $\tan \theta = \frac{y}{x}$.

تمثيل دوال الـ sine الزاوية والـ cosine بيانيًّا (الدرس 4-3)

- تُكتب دالة الـ sine كالتالي: $y = a \sin (bx + c) + d$ أو $y = a \cos (bx + c) + d$، حيث السعة= $|a|$، والفترة = $\frac{2\pi}{|b|}$ والتردد = $\frac{|b|}{2\pi}$، وإزاحة الطور = $-\frac{c}{|b|}$، والإزاحة الرأسية = d.

التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى (الدرس 5-3)

- تُكتب الدالة المثلثية المتضائلة كالتالي: $y = f(x) \sin bx$ أو $y = f(x) \cos bx$، عندما تكون $f(x)$ هي العامل المتضائل.

الدوال المثلثية العكسيّة (الدرس 6-3)

- $y = \sin^{-1} x$ iff $x = \sin y$ لكل x في الفترة $[-1, 1]$ و y في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- $y = \cos^{-1} x$ iff $x = \cos y$ لكل x في الفترة $[-1, 1]$ و y في الفترة $[0, \pi]$.
- $y = \tan^{-1} x$ iff $x = \tan y$ لكل x في الفترة $(-\infty, \infty)$ و y في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

المفردات الأساسية

السعة	المثلث المائل
زاوية الانخفاض	الفترة الزمنية
زاوية الارتفاع	دالة زمنية
السرعة الزاويّة	إزاحة الطور
دالة دائرية	الزاوية الربعية
قاطع التمام Cosecant	الراديان
جيب التمام Cosine	دالة المقلوب
ظل التمام	الزاوية المرجعية
زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء	القاطع
الدالة المثلثية المتضائلة	القطاع
الموجة المتضائلة	جيب الزاوية Sine
عامل التضاؤل	منحنى الـ Sine
التكرار	الوضع القياسي
ضلع الابتداء	المماس
الدالة المثلثية العكسية	ضلع الإنتهاء
السرعة الخطية	الدوال المثلثية
خط الوسط	الدوال المثلثية
	دائرة الوحدة
	إزاحة رأسية

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة*. إذا كانت *خاطئة*، فاستبدل المصطلح الموضوع تحته خط لصياغة عبارة صحيحة.

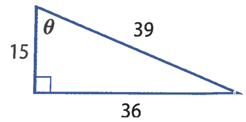
1. Sine الزاوية الحادة في مثلث قائم الزاوية هو نسبة طول الساق المقابل إلى الوتر.
2. نسبة دالة الـ Sec هي المعكوس الضربي لنسبة الـ Sine.
3. زاوية الارتفاع هي زاوية تتكون من خط أفقي وخط نظر المراقب تجاه هدف أدنى من هذا الخط.
4. قياس الراديان لزاوية يساوي نسبة طول قوسها المحصور إلى نصف القطر.
5. معدل تحرك الجسم على طول مسار دائري يسمى سرعته الخطية.
6. $0°$ و π و $-\frac{\pi}{2}$ هي أمثلة لزوايا المرجع.
7. دورة التمثيل البياني للدالة $y = 4 \sin 3x$ هي 4.
8. بالنسبة إلى $f(x) = \cos bx$ كلما ازداد b انخفض التكرار.
9. مدى دالة Sin^{-1} هو $[0, \pi]$.

المراجعة التابعة للدرس

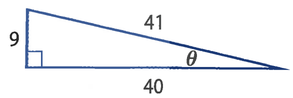
3-1 حساب مثلثات المثلثات قائمة الزوايا

جد قيم النسب المثلثية الست لـ θ.

11.

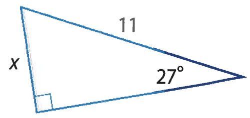


12.

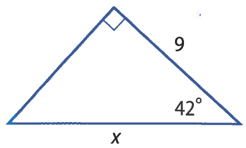


جد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

13.

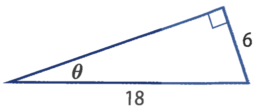


14.

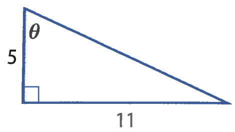


جد قياس زاوية θ. قرّب إلى أقرب درجة إذا لزم الأمر.

15.

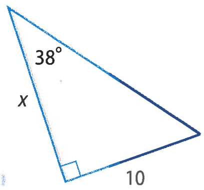


16.



مثال 1

جد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$ دالة tan

$\tan 38° = \frac{10}{x}$ $\theta = 38°$, opp $= 10$, adj $= x$

$x \tan 38° = 10$ اضرب كل طرف في x.

$x = \frac{10}{\tan 38°}$ اقسم كل طرف على $\tan 38°$.

$x \approx 12.8$ استخدم الحاسبة.

3-2 الدرجات والراديان

حول كل قياس درجات الى الراديان كمضاعف لـ π، و العكس.

17. $135°$

18. $450°$

19. $\frac{7\pi}{4}$

20. $\frac{13\pi}{10}$

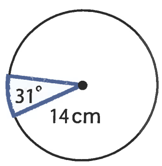
حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة. ثم جد مع الرسم زاوية موجبة وزاوية سلبية مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة.

21. $342°$

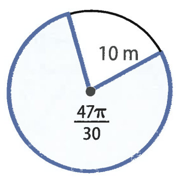
22. $-\frac{\pi}{6}$

جد مساحة كل قطاع.

23.



24.

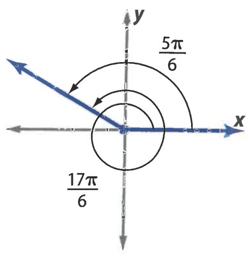


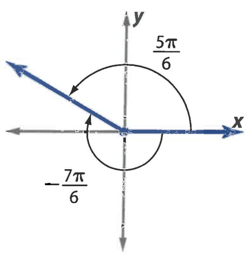
مثال 2

حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع $\frac{5\pi}{12}$. ثم جد مع الرسم زاوية موجبة وزاوية سلبية مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة.

قياسات جميع الزوايا $\frac{5\pi}{12} + 2n\pi$ مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية $\frac{5\pi}{12}$. افترض أن $n = 1, -1$.

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi(1) = \frac{17\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{6} - 2\pi(-1) = -\frac{7\pi}{6}$





دليل الدراسة والمراجعة متابعة

3-3 النسب المثلثية على دائرة الوحدة

ارسم كل زاوية. ثم جد زاوية المرجع.

25. $240°$

26. $75°$

27. $-\frac{3\pi}{4}$

28. $\frac{11\pi}{18}$

جد قيم النسب المثلثية الخمس المتبقية لـ θ.

29. $\cos\theta = \frac{2}{5}$؛ حيث تكون $\sin\theta > 0$ و $\tan\theta > 0$

30. $\tan\theta = -\frac{3}{4}$؛ حيث تكون $\sin\theta > 0$ و $\cos\theta < 0$

31. $\sin\theta = -\frac{5}{13}$؛ حيث تكون $\cos\theta > 0$ و $\cot\theta < 0$

32. $\cot\theta = \frac{2}{3}$؛ حيث تكون $\sin\theta < 0$ و $\tan\theta > 0$

جد قيمة كل تعبير مما يلي. إذا لم تكن مُعرَّفة، فاكتب *غير مُعرَّفة*.

33. $\sin 180°$

34. $\cot\frac{11\pi}{6}$

35. $\sec 450°$

36. $\cos\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$

مثال 3

افترض أن $\cos\theta = \frac{5}{13}$، حيث تكون $\sin\theta < 0$. جد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الخمس المتبقية لـ θ.

بما أن $\cos\theta$ موجبة و $\sin\theta$ سالبة، فإن θ تقع في الربع IV. وهذا يعني أن الإحداثي x لنقطة ما على ضلع الانتهاء لـ θ موجب، والإحداثي y سالب.

بما أن $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{5}{13}$، استخدم $x = 5$ و $r = 13$ لإيجاد y.

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ نظرية فيثاغورس

$= \sqrt{169 - 25} = 12$ $x = 5$ و $r = 13$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{12}{13}$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{12}{5}$ $\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{13}{5}$

$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{13}{12}$ $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{5}{12}$

3-4 تمثيل دوال sine و cosine بيانيًا

وضح كيفية ترابط التمثيلات البيانية لـ $f(x)$ و $g(x)$. ثم جد دورة وسِعَة $g(x)$، وارسم دورة واحدة على الأقل لكلتا الدالتين على محاور الإحداثيات نفسها.

37. $f(x) = \sin x$
$g(x) = 5\sin x$

38. $f(x) = \cos x$
$g(x) = \cos 2x$

39. $f(x) = \sin x$
$g(x) = \frac{1}{2}\sin x$

40. $f(x) = \cos x$
$g(x) = -\cos\frac{1}{3}x$

حدد السعة، والفترة، والتكرار، وإزاحة الطور، والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثل بيانيًا فترتين للدالة.

41. $y = 2\cos(x - \pi)$

42. $y = -\sin 2x + 1$

43. $y = \frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

44. $y = 3\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

مثال 4

حدد السعة، والدورة، والتكرار، وإزاحة الطور، والإزاحة الرأسية لـ $y = 4\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 4$. ثم مثّل بيانيًا دورتين للدالة.

في هذه الدالة، $a = 4$ و $b = 1$ و $c = -\frac{\pi}{2}$ و $d = -4$.

السعة: $|a| = |4|$ أو 4

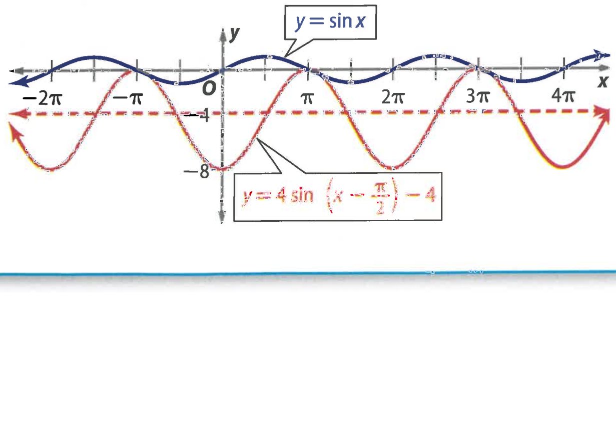
الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|}$ أو 2π

التكرار: $\frac{|b|}{2\pi} = \frac{|1|}{2\pi}$ أو $\frac{1}{2\pi}$

الإزاحة الرأسية: d أو -4

إزاحة الطور: $-\frac{c}{|b|} = -\frac{-\frac{\pi}{2}}{|1|}$ أو $\frac{\pi}{2}$

أولاً، مثّل خط الوسط $y = -4$ بيانيًا. ثم مثّل بيانيًا $y = 4\sin x$ مزاحة $\frac{\pi}{2}$ وحدة إلى اليمين، و 4 وحدات إلى الأسفل.



3-5 التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى

حَدد خطوط التقارب الرأسية، ومَثل كل دالة بيانيًا.

45. $y = 3\tan x$

46. $y = \frac{1}{2}\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

47. $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

48. $y = -\cot(x - \pi)$

49. $y = 2\sec\left(\frac{x}{2}\right)$

50. $y = -\csc(2x)$

51. $y = \sec(x - \pi)$

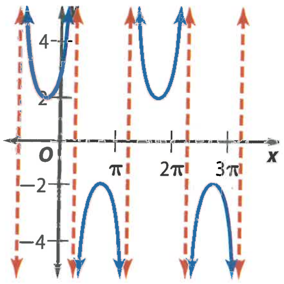
52. $y = \frac{2}{3}\csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

مثال 5

حَدد خطوط التقارب الرأسية، وارسم تمثيلاً بيانيًا لـ $y = 2\sec\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

لأن التمثيل البياني لـ $y = 2\sec\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ هو التمثيل البياني لـ $y = 2\sec x$ مزاحًا $\frac{\pi}{4}$ وحدات إلى اليسار، فإن خطوط التقارب الرأسية لفترة واحدة تقع في $-\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$.

مثّل بيانيًا دورتين على الفترة $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}\right]$



3-6 الدوال المثلثية العكسية

جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

53. $\sin^{-1}(-1)$

54. $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

55. $\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

56. $\arcsin 0$

57. $\arctan(-1)$

58. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$

59. $\sin^{-1}\left[\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

60. $\cos^{-1}[\cos(-3\pi)]$

مثال 6

جد قيمة $-\sqrt{3}$.

جد نقطة على دائرة الوحدة في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ بظل يساوي $-\sqrt{3}$.
عندما تكون $t = -\frac{\pi}{3}$ ، $\tan t = -\sqrt{3}$.
وبذلك، $\arctan -\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

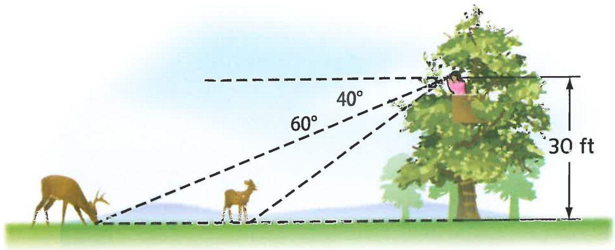
التطبيقات وحل المسائل

.67 البناء تقوم شركة تعمير بتركيب منحدر للكراسي المتحركة بارتفاع ثلاث أقدام على بسطة درج أحد المكاتب. بحيث تكون زاوية المنحدر °4. (الدرس 3-1)

.a ما طول المنحدر؟

.b ما ميل المنحدَر؟

.68 الطبيعة ضمن مشروع تصوير فوتوغرافي، تقوم خديجة بتصوير غزال من موقع على شجرة. من موقع نظرها الذي يرتفع 30 ft عن الأرض، تلمح غزالين في خط مستقيم، كما هو موضح أدناه. كم يبعد الغزال الثاني عن الأول؟ (الدرس 3-1)



.69 التزلّج الفني على الجليد تؤدي متزلّجة أوليمبية حركة معتادة بالقفز في الهواء لمدة 2.4 ثانية، بينما تدور 3 دورات كاملة. (الدرس 3-2)

.a جد السرعة الزاوية للمتزلّجة.

.b عبّر عن السرعة الزاويّة للمتزلّجة بالدرجات لكل دقيقة.

.70 الساعات يبلغ طول عقرب دقائق ساعة جيب 1.5 in. ما المساحة التي يغطيها عقرب الدقائق خلال 40 دقيقة؟ (الدرس 3-2)

.71 المعرض العالمي كان قطر أول ساقية دوارة 250 ft واستغرقت 10 دقائق لإتمام دورة واحدة كاملة حول محورها. (الدرس 3-3)

.a كم عدد الدرجات التي تدورها عجلة فيريس خلال 100 ثانية؟

.b ما المسافة التي يتحرَّكها شخص ما إن ركب عجلة فيريس لمدة 7 دقائق؟

.c كم يستغرق شخص ليتحرك 200 ft؟

.72 تكييف الهواء تعمل وحدة تكييف الهواء وتتوقف للمحافظة على درجة الحرارة المرادة. في أحد أيام الصيف، يعمل مكيف الهواء في الساعة 8:30 صباحًا. عندما تكون درجة الحرارة °80 فهرنهايت، ويتوقف تشغيله في الساعة 8:55 صباحًا. عندما تكون درجة الحرارة °74. (الدرس 3-4)

.a جد السعة والفترة إذا كنت ستستخدم دالة مثلثية لتمثيل التغير في درجة الحرارة؛ مُفترِضًا أن دورة درجة الحرارة ستستمر.

.b هل يصح تمثيل هذه الحالة باستخدام دالة مثلثية؟ اشرح استنتاجك.

.73 المد والجزر في خليج لويس، سُجّل مقدار الجزر 2 ft في 4:30 صباحًا، ومقدار المد بـ 5.5 ft في 10:45 صباحًا. (الدرس 3-4)

.a جد فترة التمثيل المثلثي.

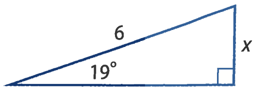
.b في أي وقت يحدث المد التالي؟

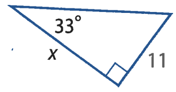
.74 الموسيقى عندما يُسحَب وتر الكمان، فإنه يتحرك بمقدار 1.5 in. بينما يكون معامل التضاؤل الخاص به 1.9 يصدر نوتة بتردد 90 دورة في الثانية. حدد المدة الزمنية التي يستغرقها الوتر ليتضاءل بحيث تكون: $-0.1 \le y \le 0.1$. (الدرس 3-5)

.75 الطلاء يستخدم الدّهان سلمًا طوله 4.6 m ليطلي جانب أحد المنازل. وإذا أصبحت الزاوية بين السلم والأرض أقل من °65، فسينزلق السلم من تحته. ما أكبر مسافة يمكن أن يبتعد بها قاع السلم عن جانب المنزل ويظل الدّهان بها آمنًا؟ (الدرس 3-6)

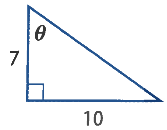
تدريب على الاختبار

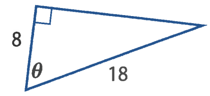
جد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

1. 

2. 

جد قياس زاوية θ. قرّب إلى أقرب درجة إذا لزم الأمر.

3. 

4. 

.5 **الاختيار من متعدد** ما السرعة الخطية لنقطة تدور بسرعة زاوية 36 راديان لكل ثانية على بعد 12 سنتيمتر من مركز الدوران؟

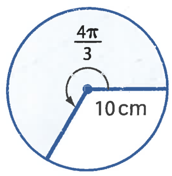
A 420 cm/s
B 432 cm/s
C 439 cm/s
D 444 cm/s

اكتب كل مقياس درجة بالراديان كمضاعف لـ π، وكل مقياس راديان بالدرجات.

6. $200°$

7. $-\frac{8\pi}{3}$

.8 أوجِد مساحة القطاع المعروض من الدائرة.



ارسم كل زاوية. ثم جد زاوية المرجع.

9. $165°$

10. $\frac{21\pi}{13}$

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

11. $\sec \frac{7\pi}{6}$

12. $\cos(-240°)$

.13 **الاختيار من متعدد** تتحقق في زاوية θ المتباينات التالية: $\csc \theta < 0$، $\cot \theta > 0$ و $\sec \theta < 0$. في أي ربع تقع θ؟

F I
G II
H III
J IV

حدد السعة، والفترة، والتكرار، وإزاحة الطور، والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثّل بيانيًا فترتين للدالة.

14. $y = 4 \cos \frac{x}{2} - 5$

15. $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

.16 **المد والجزر** يبين الجدول الأوقات التقريبية التي حدث فيها المد والجزر في خليج سان أزاليا على مدار يومين.

المد والجزر	المد 1	الجزر 1	المد 2	الجزر 2
اليوم 1	2:35 صباحًا	8:51 صباحًا	3:04 مساءً	9:19 مساءً
اليوم 2	3:30 صباحًا	9:48 صباحًا	3:55 مساءً	10:20 مساءً

a. يمكن تمثيل المد والجزر بدالة مثلثية. ما الفترة الزمنية لهذه الدالة تقريبًا؟

b. الفرق في الارتفاع بين المد والجزر هو 7 أقدام. ما سعة هذه الدالة؟

c. اكتب دالة توضح المد والجزر حين تكون t مقيسة بالساعات. افترض أن هذه الدالة ليس لها إزاحة طور أو إزاحة رأسية.

حدد خطوط التقارب الرأسية، ومثّل كل دالة بيانيًا.

17. $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

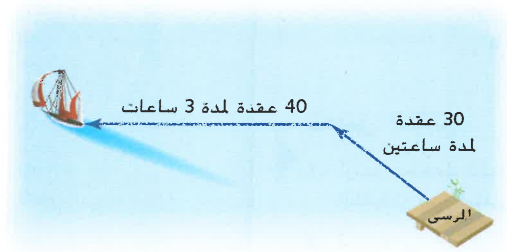
18. $y = \frac{1}{2} \sec 2x$

جد قيمة كل تعبير مما يلي، إن وُجِدت.

19. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

20. $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

.21 **المِلاحة** يغادر قاربٌ الميناء ويتحرك °45 شمال الغرب بمتوسط 30 عقدة لمدة ساعتين. ثم يتحرك القارب غربًا مباشرةً بمتوسط 40 عقدة لمدة 3 ساعات.



a. كم عدد الأميال الملاحية التي يبعدها القارب عن المرسى بعد 5 ساعات؟

b. كم درجةً جنوب الشرق يقع عندها المرسى بالنسبة إلى الموضع الحالي للمركب؟

الوحدة 3

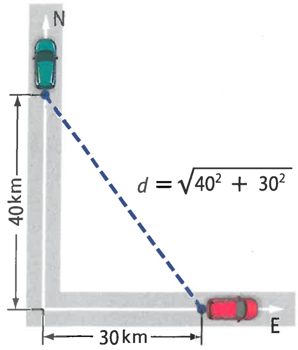
الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم
المعدلات المرتبطة

:: التركيز

- تمثيل مسائل المعدلات المرتبطة وحلها.

إذا كان الهواء يُضخ في بالون بمعدل معلوم، فهل يمكننا إيجاد معدل تمدد حجم البالون؟ كيف يؤثر معدل إنفاق شركة ما لأموالها في الدعاية في معدل مبيعاتها؟ *المعدلات المترابطة* تظهر مشكلاتها عندما يمكن إيجاد معدل التغير لمتغير واحد من خلال ربط ذلك بمعدلات التغير للمتغيرات الأخرى.

لنفترض أن سيارتين تغادران نقطة ما في الوقت نفسه. إحداهما تبلغ سرعتها 40 km/h وتتجه نحو الشمال، بينما الأخرى تبلغ سرعتها 30 km/h وتتجه نحو الشرق. كم تبعد إحداهما عن الأخرى بعد ساعة واحدة؟ وبعد ساعتين؟ وبعد 3 ساعات؟ يمكننا استخدام القانون: $d = rt$ ومبرهنة فيثاغورس للوصول إلى هذه القيم.



في هذه الحالة، نعرف معدلات التغير لكل سيارة. ماذا لو أردنا معرفة معدل تغير المسافة بين السيارتين؟

نشاط 1 معدل التغير

سيارتان تغادران منزلاً في الوقت نفسه. تغادر إحداهما باتجاه الشمال بسرعة 35 km/h، بينما الأخرى تتجه إلى الشرق بسرعة 55 km/h. عيِّن معدل تغير المسافة بين السيارتين تقريبًا.

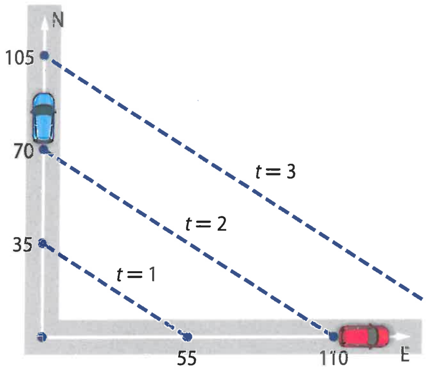
الخطوة 1 ارسم رسمًا تصوريًا لهذه الحالة.

الخطوة 2 اكتب معادلات تمثل المسافة التي تسيرها كل سيارة منهما بعد عدد t من الساعات.

الخطوة 3 أوجد المسافة التي قطعتها كل سيارة بعد ساعة وساعتين و 3 ساعات و 4 ساعات.

الخطوة 4 استخدم مبرهنة فيثاغورس لإيجاد المسافة بين السيارتين عند كل نقطة في الوقت المحدد.

الخطوة 5 أوجد متوسط معدل تغير المسافة بين السيارتين لـ $2 \le t \le 1$ و $3 \le t \le 2$ و $4 \le t \le 3$.



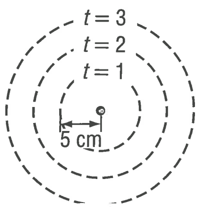
تحليل النتائج

1. ارسم مخطط تشتت يعرض المسافة الكلية بين السيارتين. افترض أن الزمن t هو المتغير المستقل، والمسافة الكلية d هي المتغير التابع. ارسم خطًّا بين النقاط.
2. أي نوع من الدوال يعبّر عنه التمثيل البياني؟ ما فرضيتك المبنية على القيم الموجودة في الخطوة 5؟
3. ماذا يحدث لمتوسط معدل تغير المسافة بين السيارتين إذا أبطأت إحدى السيارتين سرعتها أو زادتها؟ اشرح استنتاجك.

معدل تغير المسافة بين السيارتين *يرتبط* بمعدلات السيارتين. في حساب التفاضل والتكامل، يمكن حل المسائل التي تتضمن المعدلات المترابطة باستخدام *الاشتقاق الضمني*. ومع ذلك، قبل أن يكون بإمكاننا استخدام تقنيات التفاضل المتقدمة، نحتاج إلى فهم كيفية ارتباط المعدلات بعضها ببعض. ولذلك، فإن أولى خطوات حل أي مسألة معدلات مترابطة يجب أن تكون تمثيل الحالة باستخدام رسم تصوري أو تمثيل بياني، وبكتابة المعادلات باستخدام المتغيرات والقيم ذات الصلة.

نشاط 2 تمثيل المعدلات المرتبطة

أُلقِي حجر في جسم مائي ساكن، فصنع تموجًا دائريًا يتّسع بمعدل 5 cm/s. أوجد مساحة الدائرة بعد ثلاث ثوانٍ إذا كان نصف قطر الدائرة يبلغ 5 cm عندما تكون $t = 1$.



الخطوة 1 ارسم رسمًا تصويريًا لهذه الحالة.

الخطوة 2 اكتب معادلة لنصف قطر الدائرة r بعد عدد t من الثواني.

الخطوة 3 أوجد نصف القطر عندما تكون $t = 3$. ثم أوجد المساحة.

تحليل النتائج

4. أوجد معادلة للمساحة A في الدائرة بدلالة t.
5. أوجد مساحة الدائرة عندما $t = 1, 2, 3, 4, 5$ ثانية.
6. اصنع تمثيلًا بيانيًا للقيم. ما نوع الدوال الذي يعبّر عنه التمثيل البياني؟

يمكنك استخدام ناتج قسمة الفرق لحساب معدل التغير في مساحة الدائرة عند نقطة زمنية محددة.

نشاط 3 تقريب المعدل المترابط

عيّن معدل تغير مساحة الدائرة في النشاط 2 على وجه التقريب.

الخطوة 1 استبدل تعبير مساحة الدائرة بناتج قسمة الفرق.

الخطوة 2 عيّن معدل تغير الدائرة بعد ثانيتين على وجه التقريب. افترض أن $h = 0.1, 0.01, 0.001$.

الخطوة 3 كرر الخطوات 1, 2 عندما ثوانٍ $t = 3$، و ثوان $t = 4$.

تحليل النتائج

7. إلى أي قيمة من قيم t يبدو اقتراب معدلات التغير؟
8. ماذا يحدث لمعدل تغير مساحة الدائرة مع زيادة نصف القطر؟ اشرح.
9. ما وجه اختلاف هذا المنهج عن المنهج الذي استخدمته في النشاط 1 لإيجاد معدل تغير المسافة بين السيارتين؟ اشرح لماذا كان هذا ضروريًا.

نصيحة دراسية

ناتج قسمة الفرق تذكّر أن ناتج قسمة الفرق لحساب ميل خط المماس بالتمثيل البياني الخاص بـ $f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$ يكون $m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

التمثيل والتطبيق

10. سلّم يبلغ طوله 4 m يستند إلى جدار، بحيث تكون قاعدته على بعد 1.5 m من قاعدة الجدار. إذا بدأ قاع السلم في الانزلاق بعيدًا عن الجدار بمعدل 0.6 m/s. فما سرعة انزلاق قمة السلم إلى أسفل الجدار؟
   a. مثّل الحالة. افترض أن d هي المسافة من قمة السلم إلى الأرض، و m هو معدل انزلاق قمة السلم إلى أسفل الجدار.
   b. اكتب تعبيرًا للمسافة من قاعدة السلم إلى الحائط بعد عدد t من الثواني.
   c. أوجد معادلة للمسافة d من قمة السلم إلى الأرض بدلالة t بالتعويض بالتعبير الموجود في الجزء b في مبرهنة فيثاغورس.
   d. استخدم مبرهنة فيثاغورس لإيجاد المسافة d من قمة السلم إلى الأرض عندما يكون $t = 0, 1, 2, 3, 3.5, 3.75$.
   e. اصنع تمثيلاً بيانيًا للقيم. ما نوع الدوال الذي يعبّر عنه التمثيل البياني؟
   f. استخدم ناتج قسمة الفرق لتقدير معدل تغير m للمسافة من قمة السلم إلى الأرض عندما تكون $t = 2$. افترض أن $h = 0.1, 0.01, 0.001$. وباقتراب قيمة h من الصفر، فإلى أي القيم يبدو اقتراب قيم m ؟

4-1 المتطابقات المثلثية

:: السابق

- أوجدت القيم المثلثية باستخدام دائرة الوحدة.

:: الحالي

1. تحديد المتطابقات المثلثية الأساسية واستخدامها لإيجاد القيم المثلثية.
2. استخدام المتطابقات المثلثية الأساسية لتحويل التعابير المثلثية لأبسط صورة وإعادة كتابتها.

:: لماذا؟

- يتضمن العديد من التطبيقات الفيزيائية والهندسية مثل تحديد مسار طائرة استخدام الدوال المثلثية. وتصبح هذه الدوال أكثر مرونة إذا أمكنك تغيير التعابير المثلثية المتضمنة من إحدى الصيغ إلى صيغة مساوية لها ولكنها أكثر ملاءمة ويمكنك عمل ذلك باستخدام المتطابقات المثلثية.

المفردات الجديدة

متطابقة (identity)
متطابقة مثلثية (trigonometric identity)
الزوايا المتتامة (cofunction)

1 المتطابقات المثلثية الأساسية

تكون المعادلة **متطابقة** إذا كان طرفها الأيسر مساويًا لطرفها الأيمن لجميع قيم المتغير المُعرف في كلا طرفي المعادلة. فكّر في المعادلات أدناه.

$\frac{x^2-9}{x-3} = x+3$ هذه متطابقة لأن كلا طرفي المعادلة محدد ومساوٍ لكل x حيث يكون $x \neq 3$.

$\sin x = 1 - \cos x$ هذه ليست متطابقة. كلا طرفي هذه المعادلة محدد ومساوٍ لقيم معينة. كما هو الحال حين يكون $x = 0$. ولكنهما ليسا مساويين لقيم أخرى يتم تحديد كلا الطرفين من خلالها، كما هو الحال حين يكون $x = \frac{\pi}{4}$.

المتطابقات المثلثية هي المتطابقات التي تضم دوال مثلثية. وبعضها يُسمى المتطابقات المثلثية الأساسية. والمتطابقات العكسية ومتطابقات ناتج القسمة أدناه تتبع تمامًا تعريفات الدوال المثلثية الست التي تم شرحها سابقًا.

المفهوم الأساسي متطابقات المقلوب والمتطابقات النسبية

المتطابقات النسبية	متطابقات المقلوب		
$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$	$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$	$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$
$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

يمكنك استخدام المتطابقات المثلثية الأساسية لإيجاد القيم المثلثية. وكما هو الحال في أي كسر، لا يمكن أن يساوي المقام صفرًا.

مثال 1 استخدام متطابقات المقلوب والمتطابقات النسبية

a. إذا كانت $\csc\theta = \frac{7}{4}$، فجد $\sin\theta$.

$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$ متطابقة مقلوب

$= \frac{1}{\frac{7}{4}}$ $\csc\theta = \frac{7}{4}$

$= \frac{4}{7}$ اقسم

b. إذا كانت $\cot x = \frac{2}{5\sqrt{5}}$ وكانت $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$، فجد $\cos x$.

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ متطابقة نسبية

$\frac{2}{5\sqrt{5}} = \frac{\cos x}{\frac{\sqrt{5}}{3}}$ $\cot x = \frac{2}{5\sqrt{5}}, \sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

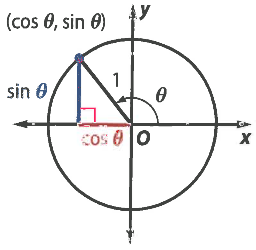
$\frac{2}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \cos x$ اضرب كل طرف في $\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\frac{2}{15} = \cos x$ بسّط

تمرين موجه

1A. إذا كانت $\sec x = \frac{5}{3}$، فجد $\cos x$.

1B. إذا كانت $\csc\beta = \frac{25}{7}$ وكانت $\sec\beta = \frac{25}{24}$، فجد $\tan\beta$.



يمكن تحديد المتطابقات المثلثية على دائرة الوحدة كما هو موضح.
لاحظ أنه بالنسبة لأي زاوية θ، فإن Sine الزاوية و Cosine الزاوية هما الطولان الموجهان للضلعين الجانبين لمثلث قائم الزاوية له الوتر 1. يمكننا تطبيق نظرية فيثاغورس على هذا المثلث قائم الزاوية لصياغة متطابقة مثلثية أساسية أخرى.

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1^2 \qquad \text{نظرية فيثاغورس}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \text{بسّط}$$

في حين أن إشارات هذه الأطوال الموجهة قد تتغير بناءً على الربع الذي يستقر عليه المثلث، فلاحظ أنه بسبب تربيع هذه الأطوال فإن المعادلة أعلاه تبقى صحيحة لأي قيمة لـ θ. هذه المعادلة هي إحدى **متطابقات فيثاغورس** الثلاث.

المفهوم الأساسي متطابقات فيثاغورس

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

ستثبت صحة متطابقتي فيثاغورس المتبقيتين في التمرينين 69 و 70.

قراءة الرياضيات

أسس الدوال المثلثية $\sin^2\theta$ تُقرأ هكذا: *sine square theta* وتفسّر على أنها تربيع الكمية $\sin\theta$.

لاحظ رمز الاختصار المستخدم لتمثيل أسس الدوال المثلثية: $\sin^2\theta = (\sin\theta)^2$، و $\cos^2\theta = (\cos\theta)^2$ و $\tan^2\theta = (\tan\theta)^2$، وهكذا.

مثال 2 استخدام متطابقات فيثاغورس

إذا كانت $\tan\theta = -8$ وكانت $\sin\theta > 0$، فجد $\sin\theta$ و $\cos\theta$

استخدم متطابقة فيثاغورس التي تتضمن $\tan\theta$.

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad \text{متطابقة فيثاغورس}$$

$$(-8)^2 + 1 = \sec^2\theta \qquad \tan\theta = -8$$

$$65 = \sec^2\theta \qquad \text{بسّط}$$

$$\pm\sqrt{65} = \sec\theta \qquad \text{خذ الجذر التربيعي لكل طرف.}$$

$$\pm\sqrt{65} = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \text{متطابقة عكسية}$$

$$\pm\frac{\sqrt{65}}{65} = \cos\theta \qquad \text{حل لإيجاد } \cos\theta$$

بما أن $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ سالبة و $\sin\theta$ موجبة، إذًا ينبغي أن تكون $\cos\theta$ سالبة. إذًا، فستكون $\cos\theta = -\frac{\sqrt{65}}{65}$. ويمكنك حينها استخدام متطابقة ناتج القسمة هذه لإيجاد $\sin\theta$.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \text{متطابقة نسبية}$$

$$-8 = \frac{\sin\theta}{-\frac{\sqrt{65}}{65}} \qquad \tan\theta = -8 \text{ و } \cos\theta = -\frac{\sqrt{65}}{65}$$

$$\frac{8\sqrt{65}}{65} = \sin\theta \qquad \text{اضرب كل طرف في } -\frac{\sqrt{65}}{65}.$$

تحقق

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \text{متطابقة فيثاغورس}$$

$$\left(\frac{8\sqrt{65}}{65}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{65}}{65}\right)^2 \stackrel{?}{=} 1 \qquad \cos\theta = -\frac{\sqrt{65}}{65} \text{ و } \sin\theta = \frac{8\sqrt{65}}{65}$$

$$\frac{64}{65} + \frac{1}{65} = 1 \checkmark \qquad \text{بسّط}$$

نصيحة دراسية

التحقق من الإجابات من المفيد تأكيد إجاباتك باستخدام متطابقة مختلفة عن المتطابقات التي استخدمتها لحل المسألة، كما في المثال 2، بحيث لا تقع في نفس الخطأ مرتين.

تمرين موجه

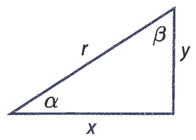
جد قيمة كل تعبير مستخدمًا البيانات المعطاة.

2A. $\cos\theta$ و $\csc\theta$؛ $\tan\theta$ و $\cot\theta = -3$، و $\cos\theta < 0$

2B. $\sin x = \frac{1}{6}$، $\cot x$ و $\sec x$، و $\cos x > 0$

مجموعة أخرى من المتطابقات المثلثية الأساسية تتضمن نسب مثلثية القيمة

في المثلث قائم الزاوية الموضح، الزاويتان α و β هما زاويتان متتامتان. باستخدام نِسب المثلث قائم الزاوية، يمكنك توضيح أن العبارات التالية صحيحة.



$$\sin \alpha = \cos \beta = \cos(90° - \alpha) = \frac{y}{r}$$

$$\tan \alpha = \cot \beta = \cot(90° - \alpha) = \frac{y}{x}$$

$$\sec \alpha = \csc \beta = \csc(90° - \alpha) = \frac{r}{y}$$

من خلال هذه العبارات، يمكننا كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين التالية، وهي صحيحة لكل الأعداد الحقيقية، وليس لقياسات الزاوية الحادة فقط.

المفهوم الأساسي متطابقات الزاويتين المتتامتين

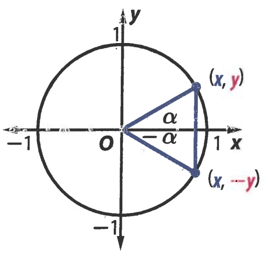
$\sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\tan \theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\sec \theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
$\cos \theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\cot \theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\csc \theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

ستُثبت صحة هذه المتطابقات لأي زاوية في الدرس 4-3.

نصيحة دراسية

كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين يمكن كذلك كتابة كل من متطابقات الزاويتين المتتامتين بدلالة الدرجات. فعلى سبيل المثال، $\sin \theta = \cos(90° - \theta)$.

لقد عرفت أيضًا أن كلًا من النسب المثلثية الأساسية(sin, cos, tan, cot, sec, csc). هي إما فردية أو زوجية. باستخدام دائرة الوحدة، يمكنك توضيح أن العبارات التالية صحيحة.



$\sin \alpha = y \qquad \sin(-\alpha) = -y$

$\cos \alpha = x \qquad \cos(-\alpha) = x$

تذكّر من درس سابق أن الدالة f زوجية إذا كان لكل x في مجال f، $f(-x) = f(x)$. وفردية إذا كان لكل x في مجال f، $f(-x) = -f(x)$. وهذه العلاقات تؤدي إلى المتطابقات الفردية الزوجية التالية.

المفهوم الأساسي متطابقات الدوال الزوجية و الفردية

$\sin(-\theta) = -\sin \theta$	$\cos(-\theta) = \cos \theta$	$\tan(-\theta) = -\tan \theta$
$\csc(-\theta) = -\csc \theta$	$\sec(-\theta) = \sec \theta$	$\cot(-\theta) = -\cot \theta$

يمكنك استخدام متطابقات الزاويتين المتتامتين ومتطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية لإيجاد القيم المثلثية.

مثال 3 استخدام متطابقات الزاويتين المتتامتين ومتطابقات الدوال الزوجية الفردية

إذا كانت $\tan \theta = 1.28$، فجد $\cot\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$.

حلل

$\cot\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cot\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$ متطابقة الدوال الزوجية الفردية

$= -\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ متطابقة الدالة متساوية القيمة

$= -\tan \theta$

$= -1.28$ $\tan \theta = 1.28$

تمرين موجه

3. إذا كانت $\sin x = -0.37$، فجد $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

2 تبسيط التعابير المثلثية وإعادة كتابتها لتحويل التعبير المثلثي لأبسط صورة، ابدأ بإعادة كتابته بدلالة النسبة المثلثية sine للزاوية أو بدلالة cosine الزاوية فقط.

مثال 4 التحويل لأبسط صورة بإستخدام sin و cos فقط

حوّل لأبسط صورة $\csc\theta\sec\theta-\cot\theta$.

جد الحل جبريًا

$\csc\theta\sec\theta-\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}\cdot\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ أعد الكتابة بدلالة sin و cos باستخدام المتطابقات العكسية والمتطابقات النسبية.

$=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ جد ناتج الضرب.

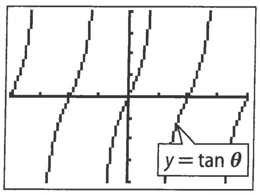
$=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}-\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$ أعد كتابة الكسور باستخدام مقام مشترك.

$=\dfrac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$ اطرح.

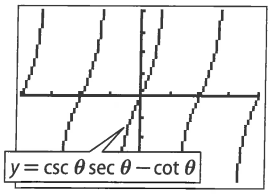
$=\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$ نظرية فيثاغورس

$=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ or $\tan\theta$ اقسم البسط والمقام على $\sin\theta$.

الدعم بالتمثيل البياني التمثيلان البيانيان اللذان يمثلان $y=\csc\theta\sec\theta-\cot\theta$ و $y=\tan\theta$ يبدوان متطابقين.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.5



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.5

تمرين موجه

4. حوّل لأبسط صورة $\sec x-\tan x\sin x$.

نصيحة تقنية

تمثيل الدوال العكسية بيانيًا عند استخدام حاسبة لتمثيل الدوال العكسية بيانيًا، مثل $y=\csc x$، فيمكنك إدخال معكوس الدالة.

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=1/sin(X)
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
```

ويمكن تحليل التعابير المثلثية لأبسط صورة من خلال تطبيق المتطابقات والتحليل الى العوامل.

مثال 5 التحويل لأبسط صورة باستخدام التحليل إلى العوامل

حوّل لأبسط صورة $\sin^2 x\cos x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

جد الحل جبريًا

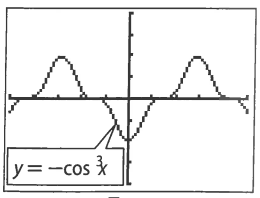
$\sin^2 x\cos x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin^2 x\cos x-\cos x$ متطابقة زاويتين متتامتين

$=-\cos x\,(-\sin^2 x+1)$ اخراج العامل المشترك $-\cos x$ من كل حد.

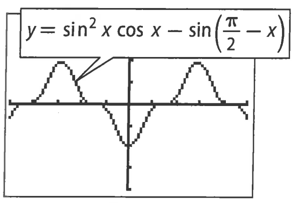
$=-\cos x\,(1-\sin^2 x)$ خاصية التبديل

$=-\cos x\,(\cos^2 x)$ or $-\cos^3 x$ متطابقة فيثاغورس

الدعم بالتمثيل البياني التمثيلات البيانية أدناه تبدو متطابقة.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.5



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.5

تمرين موجه

5. حوّل لأبسط صورة $-\csc\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\tan^2 x\sec x$.

انتبه!

التمثيل البياني في حين يمكن لمنهجية التمثيل البياني الموضحة في المثالين 4 و 5 أن تقدم الدعم لفكرة المساواة بين تعبيرين، فلا يمكن استخدامها لإثبات أن تعبيرين متساويان. من المستحيل توضيح أن التمثيلين البيانيين متطابقان على كامل امتداد مجاليهما باستخدام الجزء الموضح من التمثيل البياني على حاسبتك.

مثال 6 التحويل لأبسط صورة باستخدام جمع الكسور

حوّل لأبسط صورة $\frac{1 + \sin x}{\cos x} - \frac{\sin x \cos x}{1 - \sin x}$.

مقام مشترك
$$\frac{\sin x \cos x}{1 - \sin x} - \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{\sin x \cos x\,(\cos x)}{(1 - \sin x)(\cos x)} - \frac{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}{(\cos x)(1 - \sin x)}$$

جد حاصل الضرب.
$$= \frac{\sin x \cos^2 x}{\cos x - \sin x \cos x} - \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x - \sin x \cos x}$$

متطابقة فيثاغورس
$$= \frac{\sin x \cos^2 x}{\cos x - \sin x \cos x} - \frac{\cos^2 x}{\cos x - \sin x \cos x}$$

اطرح.
$$= \frac{\sin x \cos^2 x - \cos^2 x}{\cos x - \sin x \cos x}$$

حلل البسط والمقام إلى العوامل.
$$= \frac{(\cos^2 x)(\sin x - 1)}{(-\cos x)(\sin x - 1)}$$

اختصر العوامل المشتركة.
$$= -\cos x$$

تمرين موجه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

6A. $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{1 + \sin x}{\cos x}$

6B. $\frac{\csc x}{1 + \sec x} + \frac{\csc x}{1 - \sec x}$

في حساب التفاضل والتكامل، ستحتاج أحيانًا إلى إعادة كتابة التعبير المثلثي بحيث لا يضم كسرًا. حينما يكون المقام من الصيغة $1 \pm u$ أو $u \pm 1$، يمكنك أحيانًا فعل ذلك عن طريق ضرب البسط والمقام في مُرافق المقام وتنفيذ متطابقة فيثاغورس.

مراجعة المفردات

المُرافق (conjugate) عامل ذو حدين يَضرب في العامل ذي الحدين الأصلي ويكون حاصل الضرب هو الفرق بين المربعين (الدرس 0-3)

مثال 7 إعادة الكتابة لحذف الكسور

أعد كتابة $\frac{1}{1 + \cos x}$ في صورة تعبير لا يضم كسرًا.

اضرب البسط والمقام في مُرافق $1 + \cos x$، وهو $1 - \cos x$.
$$\frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{1 + \cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x}$$

جد حاصل الضرب.
$$= \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x}$$

متطابقة فيثاغورس
$$= \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$$

اكتب بصيغة توضح الفارق بين كسرين.
$$= \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

حلل.
$$= \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

متطابقات المقلوب والمتطابقات النسبية
$$= \csc^2 x - \cot x \csc x$$

تمرين موجه

أعد الكتابة في صورة تعبير لا يضم كسرًا.

7A. $\frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$

7B. $\frac{4}{\sec x + \tan x}$

جد قيمة كل تعبير مستخدمًا البيانات المعطاة. (مثال 1)

1. إذا كانت $\cot \theta = \frac{5}{7}$، فجد $\tan \theta$.
2. إذا كانت $\cos x = \frac{2}{3}$، فجد $\sec x$.
3. إذا كانت $\tan \alpha = \frac{1}{5}$، فجد $\cot \alpha$.
4. إذا كانت $\sin \beta = -\frac{5}{6}$، فجد $\csc \beta$.
5. إذا كانت $\cos x = \frac{1}{6}$ وكانت $\sin x = \frac{\sqrt{35}}{6}$، فجد $\cot x$.
6. إذا كانت $\sec \varphi = 2$ وكانت $\tan \varphi = \sqrt{3}$، فجد $\sin \varphi$.
7. إذا كانت $\csc \alpha = \frac{7}{3}$ وكانت $\cot \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{3}$، فجد $\sec \alpha$.
8. إذا كانت $\sec \theta = 8$ وكانت $\theta = 3\sqrt{7}$، فجد $\csc \theta$.

جد قيمة كل تعبير مستخدمًا المعلومات المعطاة. (مثال 2)

9. $\sec \theta$ و $\cos \theta;\ \tan \theta = -5,\ \cos \theta > 0$
10. $\cot \theta$ و $\sec \theta;\ \sin \theta = \frac{1}{3},\ \tan \theta < 0$
11. $\tan \theta$ و $\sin \theta;\ \sec \theta = 4,\ \sin \theta > 0$
12. $\sin \theta$ و $\cot \theta;\ \cos \theta = \frac{2}{5},\ \sin \theta < 0$
13. $\cos \theta$ و $\tan \theta;\ \csc \theta = \frac{8}{3},\ \tan \theta > 0$
14. $\sin \theta$ و $\cos \theta;\ \cot \theta = 8,\ \csc \theta < 0$
15. $\cot \theta$ و $\sin \theta;\ \sec \theta = -\frac{9}{2},\ \sin \theta > 0$
16. $\tan \theta$ و $\csc \theta;\ \cos \theta = -\frac{1}{4},\ \sin \theta < 0$

جد قيمة كل تعبير مستخدمًا المعلومات المعطاة. (مثال 3)

17. إذا كانت $\csc \theta = -1.24$، فجد $\sec\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$.
18. إذا كانت $\cos x = 0.61$، فجد $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
19. إذا كانت $\tan \theta = -1.52$، فجد $\cot\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$.
20. إذا كانت $\sin \theta = 0.18$، فجد $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$.
21. إذا كانت $\cot x = 1.35$، فجد $\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

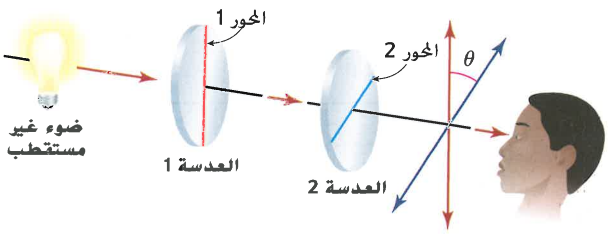
حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (المثالان 4 و5)

22. $\csc x \sec x - \tan x$
23. $\csc x - \cos x \cot x$
24. $\sec x \cot x - \sin x$
25. $\frac{\tan x + \sin x \sec x}{\csc x \tan x}$
26. $\frac{1 - \sin^2 x}{\csc^2 x - 1}$
27. $\frac{\csc x \cos x + \cot x}{\sec x \cot x}$
28. $\frac{\sec x \csc x - \tan x}{\sec x \csc x}$
29. $\frac{\sec^2 x}{\cot^2 x + 1}$
30. $\cot x - \csc^2 x \cot x$
31. $\cot x - \cos^3 x \csc x$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (مثال 6)

32. $\frac{\cos x}{\sec x + 1} + \frac{\cos x}{\sec x - 1}$
33. $\frac{1 - \cos x}{\tan x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$
34. $\frac{1}{\sec x + 1} + \frac{1}{\sec x - 1}$
35. $\frac{\cos x \cot x}{\sec x + \tan x} + \frac{\sin x}{\sec x - \tan x}$
36. $\frac{\sin x}{\csc x + 1} + \frac{\sin x}{\csc x - 1}$

37. **النظارات الشمسية** تُصنع العديد من النظارات الشمسية من عدسات مستقطبة تقلل من شدة الضوء. ويمكن حساب شدة الضوء الظاهر من نظام مكوّن من عدستين مستقطبتين، يمكن حساب I باستخدام $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2 \theta}$، حيث يكون I_0 هو شدة الضوء الداخل لنظام العدستين وتكون θ هي زاوية محور العدسة الثانية بالنسبة لزاوية محور العدسة الأولى. (مثال 6)



a. حوّل صيغة شدة الضوء الظاهر من نظام العدستين المستقطبتين لأبسط صورة.

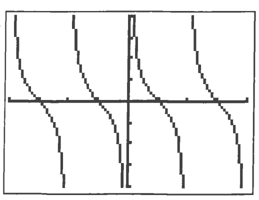
b. إذا كانت النظارة الشمسية تحتوي على نظام من عدستين مستقطبتين بحيث يكون المحوران على زاوية 30° من بعضهما البعض، فما الجزء الذي يظهر من شدة الضوء الداخلة إلى النظارة الشمسية؟

أعد الكتابة في صورة تعبير لا يضم كسرًا. (مثال 7)

38. $\frac{\sin x}{\csc x - \cot x}$
39. $\frac{\csc x}{1 - \sin x}$
40. $\frac{\cot x}{\sec x - \tan x}$
41. $\frac{\cot x}{1 + \sin x}$
42. $\frac{3 \tan x}{1 - \cos x}$
43. $\frac{2 \sin x}{\cot x + \csc x}$
44. $\frac{\sin x}{1 - \sec x}$
45. $\frac{\cot^2 x \cos x}{\csc x - 1}$
46. $\frac{5}{\sec x + 1}$
47. $\frac{\sin x \tan x}{\cos x + 1}$

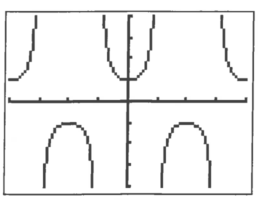
حدد ما إذا كانت كل دالة مثلثية رئيسة موضحة هي دالة فردية أم زوجية. اشرح استدلالك.

48.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

49.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

50. **كرة القدم** عند ركل كرة قدم من سطح الأرض، فإن ارتفاعها الممثل في y وإزاحتها الأفقية x مرتبطان بواسطة $y = \frac{-gx^2}{2v_0{}^2 \cos^2 \theta} + \frac{x \sin \theta}{\cos \theta}$، حيث تكون v_0 هي سرعة الكرة الابتدائية، وتكون θ هي الزاوية التي رُكِلت بها الكرة، وتكون g هي تسارع الجاذبية الأرضية. أعد كتابة هذه المعادلة بحيث تكون $\tan \theta$ هي الدالة المثلثية الوحيدة التي تظهر في المعادلة.

اكتب كل تعبير بدلالة دالة مثلثية واحدة.

51. $\tan x - \csc x \sec x$

52. $\cos x + \tan x \sin x$

53. $\csc x \tan^2 x - \sec^2 x \csc x$

54. $\sec x \csc x - \cos x \csc x$

55. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف كيفية التحقق من المتطابقات المثلثية. فكّر في الدوال الموضحة.

i. $y_1 = \tan x + 1$
$y_2 = \sec x \cos x - \sin x \sec x$

ii. $y_3 = \tan x \sec x - \sin x$
$y_4 = \sin x \tan^2 x$

a. **العرض الجَدْوَلي** انسخ وأكمل الجدول أدناه بدون تمثيل الدوال بيانيًا.

x	-2π	$-\pi$	0	π	2π
y_1					
y_2					
y_3					
y_4					

b. **التمثيل البياني** مثّل كل دالة بيانيًا على حاسبة بيانية.

c. **التمثيل اللفظي** كوّن مرافقًا عن العلاقة بين y_1 و y_2. كرر العملية لكل من y_3 و y_4.

d. **طريقة التحليل** هل المرافقات التي كوّنتها في الجزء c صحيحة للمجال الكامل لكل دالة؟ اشرح استنتاجك.

أعد كتابة كل تعبير في صورة لوغاريتم منفرد وحوّل الإجابة لأبسط صورة.

56. $\ln|\sin x| - \ln|\cos x|$

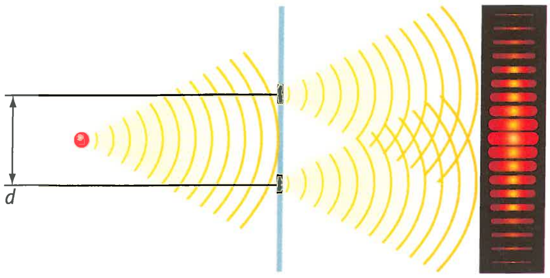
57. $\ln|\sec x| - \ln|\cos x|$

58. $\ln(\cot^2 x + 1) + \ln|\sec x|$

59. $\ln(\sec^2 x - \tan^2 x) - \ln(1 - \cos^2 x)$

60. **الكهرباء** التيار الساري في سلك في مجال مغناطيسي يسبب فرض قوة على السلك. ويمكن تحديد قوة المجال المغناطيسي باستخدام الصيغة $B = \frac{F \csc \theta}{I\ell}$، حيث تكون F هي القوة الواقعة على السلك، وتكون I هي التيار داخل السلك، وتكون ℓ هي طول السلك، وتكون θ هي الزاوية التي يصنعها السلك مع المجال المغناطيسي. في بعض كتب الفيزياء، يتم توضيح الصيغة كما يلي $F = I\ell B \sin \theta$ وضّح أن الصيغتين متساويتان.

61. **موجات الضوء** حين يشع الضوء عبر فتحتين ضيقتين، تظهر سلسلة من الحواف المضيئة والمظلمة. يمكن حساب الزاوية θ، بمقياس الزوايا النصف قطرية، المحددة لموقع الحافة رقم m^{th} بواسطة $\sin \theta = \frac{m\lambda}{d}$ حيث تكون d هي المسافة بين الفتحتين وتكون λ هي طول موجة الضوء.

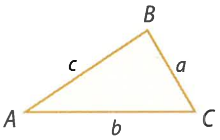


a. أعد كتابة الصيغة بدلالة θ.

b. حدد الزاوية المحددة لموقع الحافة المئة عندما يكون طول موجي للضوء يبلغ 550 نانومتر يشع عبر الفتحتين المزدوجتين اللتين تفصل بينهما مسافة 0.5 ميليمتر.

مسائل مهارات التفكير العليا

62. **التحقق من الصحة** أثبت أن مساحة المثلث هي $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ حيث تكون $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ (**إرشاد:** مساحة المثلث المائل هي $A = \frac{1}{2} bc \sin A$)



63. **تحليل الخطأ** تريد مها وموزة تحويل ما يلي لأبسط صورة $\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$. وتظن مها أن التعبير يتم تبسيطه إلى $\frac{\cos^2 x}{1 - 2\cos^2 x}$. وتظنّ موزة أن التعبير يتم تبسيطه إلى $\csc^2 x - \tan^2 x$. هل أيٌ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

التحدي اكتب كلاً من الدوال المثلثية الأساسية بناءً على الدوال التالية.

64. $\sin x$

65. $\cos x$

66. $\tan x$

الاستنتاج حدد ما إذا كانت كل عبارة ***صحيحة أم خاطئة***. **اشرح استنتاجك.**

67. $\csc^2 x \tan x = \csc x \sec x$ صحيحة بالنسبة لكل الأعداد الحقيقية.

68. يمكن استخدام متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية لإثبات أن التمثيلات البيانية التي تخص $y = \cos x$ و $y = \sec x$ متماثلة بالنسبة للمحور الرأسي y.

الإثبات أثبت كل متطابقة فيثاغورس.

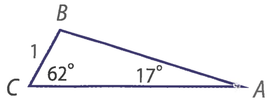
69. $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

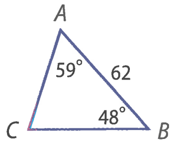
70. $\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$

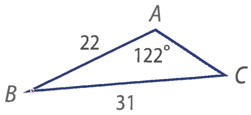
71. **الكتابة المسبقة** استخدم مخططًا أو جدولاً لمساعدتك على تنظيم المتطابقات المثلثية الرئيسية الموجودة في الدرس 1-4.

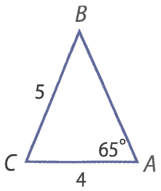
مراجعة شا

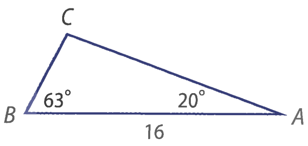
حُلّ كل مثلث. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

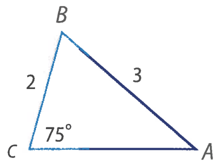
72. 

73. 

74. 

75. 

76. 

77. 

جد القيمة الصحيحة لكل تعبير، إن وُجِدت.

78. $\cot\left(\sin^{-1}\frac{7}{9}\right)$

79. $\tan(\arctan 3)$

80. $\cos\left[\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

81. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

82. $\cos^{-1}\left(\sin^{-1}\frac{\pi}{2}\right)$

83. $\sin\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}\right)$

84. **علم الأجناس البشرية** **قِياسُ التَّنامِي** هو دراسة العلاقة بين حجم كائن حي وحجم أي جزء من أجزائه. قرر أحد الباحثين إجراء اختبار لقياس التنامي بين حجم رأس الإنسان مقارنةً بجسمه بينما يتقدم الشخص في العمر. تمثل البيانات في الجدول الذَّكَر الأمريكي العادي.

a. جد نموذجًا تربيعيًا يربط هذه البيانات من خلال تقريب البيانات خطيًا وإيجاد معادلة الانحدار الخطي.

b. استخدم نموذج البيانات المقربة خطيًا لإيجاد نموذج للبيانات الأصلية.

c. استخدم نموذجك للتنبؤ بطول الذكر الأمريكي الذي محيط رأسه يساوي 61 سنتيمتر.

معدل نمو الذكر الأمريكي العادي (بعمر من 0 إلى 3 أعوام)	
محيط الرأس (cm)	**الطول (cm)**
35.8	49.5
45.7	67.1
46.5	75.4
47.5	82
48.5	87.4
49.3	91.9
49.8	95.8

المصدر: المركز القومي للإحصاءات الصحية

لنفترض أن $U=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A=\{6, 9\}$, $B=\{6, 9, 10\}$, $C=\{0, 1, 6, 9, 11\}$, $D=\{2, 5, 11\}$. **حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة. اشرح استنتاجك.**

85. $A \subset B$

86. $D \subset U$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

87. **SAT/ACT** إذا كان $x > 0$، فإن

$$\frac{x^2-1}{x+1}+\frac{(x+1)^2-1}{x+2}+\frac{(x+2)^2-1}{x+3}=$$

A $(x+1)^2$

B $(x-1)^2$

C $3x-1$

D $3x$

E $3(x-1)^2$

88. **مراجعة** إذا كان $\sin x = m$ وكانت $0 < x < 90°$، فإن $\tan x =$

F $\frac{1}{m^2}$

G $\frac{1-m^2}{m}$

H $\frac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$

J $\frac{m}{1-m^2}$

89. أيٌّ مما يلي يتساوى مع

$$\frac{1-\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}\cdot\tan\theta?$$

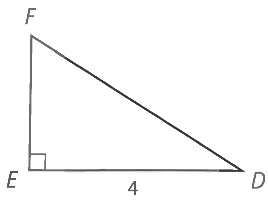
A $\tan\theta$

B $\cot\theta$

C $\sin\theta$

D $\cos\theta$

90. **مراجعة** انظر إلى الشكل. إذا كانت $\cos D = 0.8$، فما طول $\overline{DF}$؟



F 5

G 4

H 3.2

J $\frac{4}{5}$

الدرس 4-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

:: السابق
- حوّلت التعابير المثلثية إلى أبسط صورة.

:: الحالي
1. إثبات صحة المتطابقات المثلثية.
2. تحديد ما إذا كانت المعادلات متطابقات.

:: لماذا؟
- تتحرك لعبتان ناريتان بنفس السرعة v. ويرغب فني الألعاب النارية في تفجير إحداهما على ارتفاع أعلى من الأخرى عن طريق تعديل الزاوية θ الخاصة بالمسار الذي يشكله كل صاروخ مع الأرض. ولحساب أقصى ارتفاع h لكل صاروخ، فالصيغة $h = \dfrac{v^2 \tan^2 \theta}{2g \sec^2 \theta}$ يمكن استخدامها، ولكن هل ستؤدي $h = \dfrac{v^2 \sin^2 \theta}{2g}$ إلى نفس النتيجة؟

مفردات جديدة
إثبات صحة المتطابقة
verify an identity

1 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

لقد استخدمتَ المتطابقات المثلثية لإعادة كتابة التعابير بصيغ متكافئة وأحيانًا بصيغ أكثر جدوى. عند اثبات صحتها، يمكن استخدام هذه المتطابقات *الجديدة* أيضًا لحل المسائل أو لإعادة كتابة تعابير مثلثية أخرى.

إن **إثبات صحة متطابقة** يعني *التحقق* من أن كلا طرفي المتطابقة متساويان لكل قيم المتغير المعرف في كلا الطرفين من خلالها. ويتم هذا عن طريق تحويل التعبير في أحد طرفي المتطابقة إلى التعبير في الطرف الآخر عن طريق سلسلة من التعابير الوسيطة التي تتساوى كلها مع التعبير الأول. وكما هو الحال مع أنواع الإثباتات الأخرى، كل خطوة يبررها سبب، وهذا السبب هو عادةً متطابقة مثلثية أو عملية جبرية أخرى تم التحقق من صحتها.

ستجد في الأغلب أنه من الأسهل البدء في التحقق من صحة متطابقة مثلثية عن طريق البدء من الطرف الذي به التعبير الأكثر تعقيدًا ثم المتابعة للوصول إلى التعبير الأقل تعقيدًا.

مثال 1 اثبات صحة متطابقة فيثاغورس

أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{\csc^2 x - 1}{\csc^2 x} = \cos^2 x$.

الطرف الأيسر من هذه المتطابقة أكثر تعقيدًا، لذا عليك البدء بهذا التعبير أولاً.

$$\frac{\csc^2 x - 1}{\csc^2 x} = \frac{\cot^2 x}{\csc^2 x} \quad \text{متطابقة فيثاغورس}$$

$$= \cot^2 x \sin^2 x \quad \text{متطابقة مقلوب}$$

$$= \left(\frac{\cos^2 x}{\cancel{\sin^2 x}}\right)\cancel{\sin^2 x} \quad \text{متطابقة نسبية}$$

$$= \cos^2 x \checkmark \quad \text{متطابقة فيثاغورس}$$

لاحظ أن عملية اثبات الصحة تنتهي بوجود تعبير على الطرف الآخر من المتطابقة.

تمرين موجه

أثبت صحة كل متطابقة.

1A. $\sec^2 \theta \cot^2 \theta - 1 = \cot^2 \theta$

1B. $\tan^2 \alpha = \sec \alpha \csc \alpha \tan \alpha - 1$

وهناك في العادة أكثر من طريقة لإثبات صحة متطابقة. فعلى سبيل المثال، المتطابقة في المثال 1 يمكن التحقق من صحتها أيضًا كما يلي.

$$\frac{\csc^2 x - 1}{\csc^2 x} = \frac{\csc^2 x}{\csc^2 x} - \frac{1}{\csc^2 x} \quad \text{اكتب في صور الفرق بين كسرين}$$

$$= 1 - \sin^2 x \quad \text{بسّط وطبّق متطابقة مقلوب}$$

$$= \cos^2 x \quad \text{متطابقة فيثاغورس}$$

...ـابير، يمكنك إيجاد مقام مشترك لتقليل التعبير إلى كسر واحد.

مثال 2 إثبات صحة متطابقة مثلثية باستخدام جمع الكسور

أثبت أن $\frac{1}{\csc x + \cot x} + \frac{1}{\csc x - \cot x} = 2 \csc x$

الطرف الأيمن من هذه المتطابقة أكثر تعقيدًا، لذا عليك البدء من هناك، وإعادة كتابة كل كسر باستخدام المقام المشترك $(\csc x + \cot x)(\csc x - \cot x)$.

$\frac{1}{\csc x + \cot x} + \frac{1}{\csc x - \cot x}$ — ابدأ بالطرف الأيمن من المتطابقة.

$= \frac{\csc x - \cot x}{(\csc x + \cot x)(\csc x - \cot x)} + \frac{\csc x + \cot x}{(\csc x + \cot x)(\csc x - \cot x)}$ — المقام المشترك

$= \frac{2 \csc x}{(\csc x + \cot x)(\csc x - \cot x)}$ — اجمع.

$= \frac{2 \csc x}{\csc^2 x - \cot^2 x}$ — جد حاصل الضرب.

$= 2 \csc x$ ✔ — متطابقة فيثاغورس

تمرين موجه

2. أثبت أن $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = 2 \sec \alpha$

ولحذف كسر مقامه بالصيغة $1 \pm u$ أو $u \pm 1$، تذكّر أن تحاول ضرب البسط والمقام في مُرافق المقام. ثم يُحتمل أنه يمكنك تطبيق متطابقة فيثاغورس.

مثال 3 إثبات صحة متطابقة مثلثية باستخدام الضرب

أثبت أن $\csc \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$.

لأن الطرف الأيسر من هذه المتطابقة يضم كسرًا، فهو أكثر تعقيدًا بقليل من الطرف الأيمن. لذا، عليك البدء بالطرف الأيسر.

$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$ — اضرب البسط والمقام في مُرافق $1 - \cos \alpha$، وهو $1 + \cos \alpha$.

$= \frac{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)}{1 - \cos^2 \alpha}$ — جد حاصل الضرب.

$= \frac{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha}$ — متطابقة فيثاغورس

$= \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$ — اقسم على $\sin \alpha$.

$= \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ — اكتب في صورة مجموع كسرين.

$= \csc \alpha + \cot \alpha$ ✔ — متطابقة المقلوب ومتطابقة نسبية.

تمرين موجه

3. أثبت أن $\csc x - \cot x = \frac{\tan x}{\sec x + 1}$.

نصيحة دراسية

طريقة بديلة ليس عليك دومًا البدء بالطرف الأكثر تعقيدًا من المعادلة. فإذا بدأت بالطرف الأيمن في المثال 3، فإنه بإمكانك إثبات صحة المتطابقة.

$\csc \alpha + \cot \alpha$

$= \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

$= \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

$= \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$

$= \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$ ✔

وحتى يتم إثبات صحة متطابقة، لا يمكنك افتراض أن كلا الطرفين متساويان. ولهذا، لا يمكنك استخدام خصائص المعادلة لإجراء العمليات الجبرية على كل طرف من طرفي المتطابقة، مثل جمع نفس الكمية على كل طرف من المعادلة.

مثال 4 اثبات صحة متطابقة مثلثية باستخدام التحليل الى العوامل

أثبت أن $\cot\theta \sec\theta \csc^2\theta - \cot^3\theta \sec\theta = \csc\theta$

$\cot\theta \sec\theta \csc^2\theta - \cot^3\theta \sec\theta$ ابدأ بالطرف الأيسر من المتطابقة.

$= \cot\theta \sec\theta (\csc^2\theta - \cot^2\theta)$ حلل الى العوامل.

$= \cot\theta \sec\theta$ متطابقة فيثاغورس

$= \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \dfrac{1}{\cos\theta}$ المتطابقات العكسية ومتطابقة نسبية

$= \dfrac{1}{\sin\theta}$ جد حاصل الضرب.

$= \csc\theta$ ✓ متطابقة مقلوب

تمرين موجه

4. أثبت أن $\sin^2 x \tan^2 x \csc^2 x + \cos^2 x \tan^2 x \csc^2 x = \sec^2 x$.

فمن المفيد أحيانًا العمل بشكل مستقل على كل طرف من طرفي المتطابقة للحصول على تعبير وسيط مشترك.

مثال 5 اثبات صحة متطابقة بالعمل على كل طرف بشكل مستقل

أثبت أن $\dfrac{\tan^2 x}{1 + \sec x} = \dfrac{1 - \cos x}{\cos x}$

يبدو أن كلا الطرفين معقد، ولكن الطرف الأيسر أكثر تعقيدًا بقليل لأن مقامه يضم حدين. لذا، عليك البدء بالطرف الأيسر.

$\dfrac{\tan^2 x}{1 + \sec x} = \dfrac{\sec^2 x - 1}{1 + \sec x}$ متطابقة فيثاغورس

$= \dfrac{(\sec x - 1)(\sec x + 1)}{1 + \sec x}$ حلل الى العوامل.

$= \sec x - 1$ اقسم المقام المشترك لـ $\sec x + 1$.

من هذه النقطة، ليس واضحًا كيفية تحويل $\sec x - 1$ إلى $\dfrac{1 - \cos x}{\cos x}$، لذا عليك البدء بالطرف الأيمن والعمل لتحويله إلى صيغة وسيطة $\sec x - 1$.

$\dfrac{1 - \cos x}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\cos x}$ اكتب في صورة الفارق بين كسرين.

$= \sec x - 1$ استخدم متطابقة ناتج القسمة وبسط

لإكمال الإثبات، حُل بترتيب عكسي لربط طرفي الإثبات.

$\dfrac{\tan^2 x}{1 + \sec x} = \dfrac{\sec^2 x - 1}{1 + \sec x}$ متطابقة فيثاغورس

$= \dfrac{(\sec x - 1)(\sec x + 1)}{1 + \sec x}$ حلل إلى العوامل.

$= \sec x - 1$ اقسم على $\sec x + 1$

$= \dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\cos x}$ استخدم متطابقة ناتج القسمة واكتبها 1 في صورة $\dfrac{\cos x}{\cos x}$

$= \dfrac{1 - \cos x}{\cos x}$ ✓ اجمع الكسور.

تمرين موجه

5. أثبت أن $\sec^4 x - \sec^2 x = \tan^4 x + \tan^2 x$

نصيحة دراسية

خطوات إضافية أثناء إثبات صحة متطابقة، قد يكون عدد الخطوات اللازمة لتبرير التحقق واضحًا. ولكن، إذا لم يكن واضحًا، فمن الأسلم عادة تضمين خطوات أكثر من اللازم بدلاً من اعتماد خطوات أقل من اللازم.

ملخص المفاهيم إستراتيجيات لإثبات صحة المتطابقات المثلثية

- ابدأ بالطرف الأكثر تعقيدًا من المتطابقة واعمل على تحويله إلى الطرف الأبسط، مع إبقاء الطرف الآخر من المتطابقة في الحسبان على أنه هدفك.
- استخدم متطابقات المقلوب والمتطابقات النسبية ومتطابقات فيثاغورس وغيرها من المتطابقات المثلثية الأساسية.
- استخدم عمليات جبرية مثل جمع الكسور، وإعادة كتابة الكسور في صيغة مجموع أو فرق، وضرب التعابير، أو تحليل التعابير الى العوامل.
- حوّل المقام أو البسط بصيغة $u \pm 1$ أو صيغة $1 \pm u$ إلى حد فردي باستخدام المُرافق ومتطابقة فيثاغورس.
- اعمل على كل طرف بصورة منفصلة للوصول إلى تعبير وسيط مشترك.
- إذا لم تَظهر جدوى أي إستراتيجية، فحاول تحويل التعبير بالكامل إلى تعبير لا يشتمل إلا على جيوب الزوايا وجيوب التمام.

2 تحديد المتطابقات واللامتطابقات

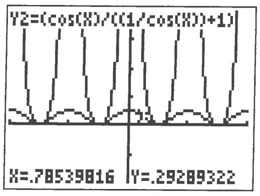
يمكنك استخدام الحاسبة البيانية لاستكشاف ما إذا كان من المحتمل أن المعادلة هي متطابقة أم لا من خلال التمثيل البياني للدوال المرتبطة بكل طرف من المعادلة.

مثال 6 تحديد ما إذا كانت المعادلة متطابقة أم لا

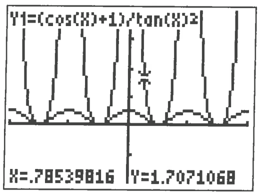
استخدم الحاسبة البيانية لاختبار ما إذا كانت كل معادلة متطابقة أم لا. فإذا بدا أنها متطابقة، فأثبت صحتها. وإن لم تبد كذلك، فجد قيمة يكون عندها الطرفان محددين وغير متساويين.

a. $\dfrac{\cos\beta + 1}{\tan^2\beta} = \dfrac{\cos\beta}{\sec\beta + 1}$

التمثيلات البيانية الخاصة بالدوال ذات الصلة لا **تتطابق** في كل قيم x التي تحدد كلتا الدالتين. حين **تكون** فإنّ $x = \frac{\pi}{4}$، $Y1 \approx 1.7$ ولكن $Y2 \approx 0.3$. وعندها تكون هذه المعادلة ليست متطابقة.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: π by $[-1, 3]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: π by $[-1, 3]$ scl: 1

b. $\dfrac{\cos\beta + 1}{\tan^2\beta} = \dfrac{\cos\beta}{\sec\beta - 1}$

المعادلة تبدو كأنها متطابقة لأن التمثيلات البيانية الخاصة بالدوال ذات الصلة تتطابق. تحقق من صحة هذا جبريًا.

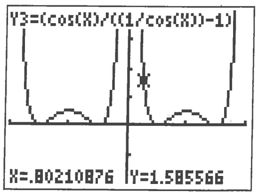
$$\frac{\cos\beta}{\sec\beta - 1} = \frac{\cos\beta}{\sec\beta - 1} \cdot \frac{\sec\beta + 1}{\sec\beta + 1}$$ اضرب البسط والمقام في مُرافق $\sec\beta - 1$.

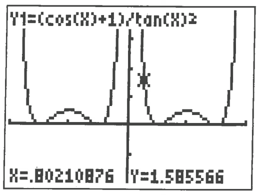
$$= \frac{\cos\beta\sec\beta + \cos\beta}{\sec^2\beta - 1}$$ جِد حاصل الضرب.

$$= \frac{\cos\beta\left(\frac{1}{\cos\beta}\right) + \cos\beta}{\sec^2\beta - 1}$$ متطابقة مقلوب

$$= \frac{1 + \cos\beta}{\sec^2\beta - 1}$$ بسّط

$$= \frac{\cos\beta + 1}{\tan^2\beta} \checkmark$$ خاصية التبديل ومتطابقة فيثاغورس





$[-2\pi, 2\pi]$ scl: π by $[-1, 3]$ scl: 1

تمرين موجه

6A. $\csc\theta = \dfrac{\cot\theta\tan^2\theta + \cot\theta}{\sec\theta}$

6B. $\dfrac{\cos x + 1}{\sec^2 x} = \dfrac{\cos x}{\sec x - 1}$

انتبه!

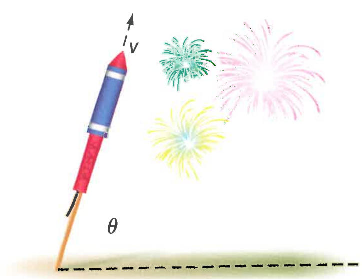
استخدام تمثيل بياني يمكنك استخدام حاسبة بيانية للمساعدة في تأكيد لامتطابقة، ولكنك لا تستطيع استخدام حاسبة بيانية *لإثبات* أن إحدى المعادلات هي متطابقة، عليك تقديم تحقق جبري من صحة متطابقة.

تمارين

أثبت صحة كل متطابقة. (الأمثلة 1-3)

1. $(\sec^2\theta - 1)\cos^2\theta = \sin^2\theta$
2. $\sec^2\theta(1 - \cos^2\theta) = \tan^2\theta$
3. $\sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta = \sin^3\theta$
4. $\csc\theta - \cos\theta\cot\theta = \sin\theta$
5. $\cot^2\theta\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot^4\theta$
6. $\tan\theta\csc^2\theta - \tan\theta = \cot\theta$
7. $\dfrac{\sec\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \cot\theta$
8. $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} + \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = 2\csc\theta$
9. $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \tan\theta = \sec\theta$
10. $\dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta} = \sin\theta + \cos\theta$
11. $\dfrac{1}{1-\tan^2\theta} + \dfrac{1}{1-\cot^2\theta} = 1$
12. $\dfrac{1}{\csc\theta+1} + \dfrac{1}{\csc\theta-1} = 2\sec^2\theta\sin\theta$
13. $(\csc\theta - \cot\theta)(\csc\theta + \cot\theta) = 1$
14. $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
15. $\dfrac{1}{1-\sin\theta} + \dfrac{1}{1+\sin\theta} = 2\sec^2\theta$
16. $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = 2\sec\theta$
17. $\csc^4\theta - \cot^4\theta = 2\cot^2\theta + 1$
18. $\dfrac{\csc^2\theta + 2\csc\theta - 3}{\csc^2\theta - 1} = \dfrac{\csc\theta + 3}{\csc\theta + 1}$

19. **الألعاب النارية** إذا أُطلق صاروخ من مستوى الأرض، فإن أقصى ارتفاع يصل إليه يُعطى بالعلاقة $h = \dfrac{v^2\sin^2\theta}{2g}$، بحيث تكون θ هي الزاوية بين الأرض والمسار الأولي للصاروخ، وتكون v هي سرعة الصاروخ الابتدائية، وتكون g هي تسارع الجاذبية الأرضية التي مقدارها تربيع $9.8\ m/s^2$. (مثال 3)



a. أثبت أن $\dfrac{v^2\sin^2\theta}{2g} = \dfrac{v^2\tan^2\theta}{2g\sec^2\theta}$.

b. لنفترض أنه تم إطلاق صاروخ آخر بزاوية قياسها $80°$ من الأرض بسرعة ابتدائية تبلغ $110\ m/s$. فجد أقصى ارتفاع للصاروخ.

أثبت صحة كل متطابقة. (المثالان 4 و5)

20. $(\csc\theta + \cot\theta)(1 - \cos\theta) = \sin\theta$
21. $\sin^2\theta\tan^2\theta = \tan^2\theta - \sin^2\theta$
22. $\dfrac{1-\tan^2\theta}{1-\cot^2\theta} = \dfrac{\cos^2\theta - 1}{\cos^2\theta}$
23. $\dfrac{1+\csc\theta}{\sec\theta} = \cos\theta + \cot\theta$
24. $(\csc\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$
25. $\dfrac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{1}{2\cos^2\theta - 1}$
26. $\tan^2\theta\cos^2\theta = 1 - \cos^2\theta$
27. $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\sin\theta$
28. $1 - \tan^4\theta = 2\sec^2\theta - \sec^4\theta$
29. $(\csc\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$
30. $\dfrac{1+\tan\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \sec\theta$
31. $\dfrac{2+\csc\theta\sec\theta}{\csc\theta\sec\theta} = (\sin\theta + \cos\theta)^2$

32. **علم البصريات** إذا وُضع منشوران بنفس القوة بجوار بعضهما البعض، يمكن تحديد إجمالي قوتهما باستخدام الصيغة $z = 2p\cos\theta$، حيث z هي القوة المجمعة للمنشورين، وتكون p هي قوة كل منشور على حدة، وتكون θ هي الزاوية بين المنشورين. فتحقق من أن $2p\cos\theta = 2p(1 - \sin^2\theta)\sec\theta$. (مثال 4)

33. **التصوير الفوتوغرافي** كمية الضوء المارة عبر مرشح استقطاب يمكن تمثيلها في نموذج باستخدام الصيغة $I = I_m\cos^2\theta$، حيث تكون I هي كمية الضوء المارة عبر المرشح، وتكون I_m هي كمية الضوء المُشعة على المرشح، وتكون θ هي زاوية الدوران بين مصدر الضوء والمرشح. أثبت أن $I_m\cos^2\theta = I_m - \dfrac{I_m}{\cot^2\theta + 1}$. (مثال 4)

الحاسبة البيانية اختبر ما إذا كانت كل معادلة متطابقة أم لا عن طريق التمثيل البياني. فإذا بدا أنها متطابقة، فأثبت صحتها. وإن لم تبد كذلك، فجد قيمة يكون عندها الطرفان محددين وغير متساويين. (مثال 6)

34. $\dfrac{\tan x + 1}{\tan x - 1} = \dfrac{1 + \cot x}{1 - \cot x}$
35. $\sec x + \tan x = \dfrac{1}{\sec x - \tan x}$
36. $\sec^2 x - 2\sec x\tan x + \tan^2 x = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$
37. $\dfrac{\cot^2 x - 1}{1 + \cot^2 x} = 1 - 2\sin^2 x$
38. $\dfrac{\tan x - \sec x}{\tan x + \sec x} = \dfrac{\tan^2 x - 1}{\sec^2 x}$
39. $\cos^2 x - \sin^2 x = \dfrac{\cot x - \tan x}{\tan x + \cot x}$

أثبت صحة كل متطابقة.

40. $\sqrt{\dfrac{\sin x \tan x}{\sec x}} = |\sin x|$

41. $\sqrt{\dfrac{\sec x - 1}{\sec x + 1}} = \left|\dfrac{\sec x - 1}{\tan x}\right|$

42. $\ln|\csc x + \cot x| + \ln|\csc x - \cot x| = 0$

43. $\ln|\cot x| + \ln|\tan x \cos x| = \ln|\cos x|$

أثبت صحة كل متطابقة.

44. $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \tan^4\theta$

45. $-2\cos^2\theta = \sin^4\theta - \cos^4\theta - 1$

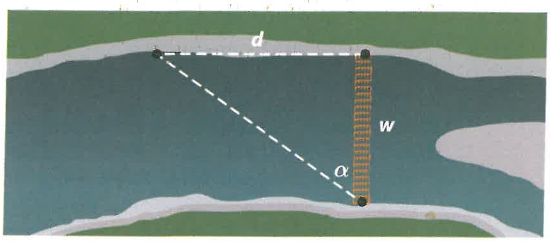
46. $\sec^2\theta\sin^2\theta = \sec^4\theta - (\tan^4\theta + \sec^2\theta)$

47. $3\sec^2\theta\tan^2\theta + 1 = \sec^6\theta - \tan^6\theta$

48. $\sec^4 x = 1 + 2\tan^2 x + \tan^4 x$

49. $\sec^2 x \csc^2 x = \sec^2 x + \csc^2 x$

.50 البيئة عالم أحياء يدرس التلوث وَضَعَ شبكة بعرض نهر ووضع أدوات في نقطتين مختلفتين على ضفة النهر لجمع العينات. وفي الرسم التخطيطي الموضح، فإن d هي المسافة بين المحطات وw هي عرض النهر.



.a حدد معادلة فيما يتعلق بـ $\tan\alpha$ الذي يمكن استخدامه لإيجاد المسافة بين المحطتين.

.b أثبت أن $d = \dfrac{w\cos(90° - \alpha)}{\cos\alpha}$

.c أكمل الجدول الموضح حينما تكون $d = 40$ مترًا.

w	20	40	60	80	100	120
α						

.d إذا كان $\alpha > 60°$ أو كان $\alpha < 20°$. فالأدوات لن تعمل بشكل سليم. استخدم الجدول من الجزء c لتحديد أي من الموقعين – حيث يكون عرض النهر فيه 5 أو 35 أو 140 قدمًا – يمكن استخدامه لإجراء التجربة.

الدوال الزائدية *الدوال المثلثية الزائدية* يمكن تحديدها بالطرق التالية.

$\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x}, x \neq 0$ $\sinh x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$ $\cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$\coth x = \dfrac{1}{\tanh x}, x \neq 0$ $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

أثبت صحة كل متطابقة باستخدام الدوال الموضحة أعلاه.

51. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

52. $\sinh(-x) = -\sinh x$

53. $\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$

54. $\cosh(-x) = \cosh x$

المناهج البيانية مثّل بيانيًا كل طرف من كل معادلة بيانيًا. فإذا بدا أن المعادلة متطابقة، أثبت صحتها جبريًا.

55. $\dfrac{\sec x}{\cos x} - \dfrac{\tan x \sec x}{\csc x} = 1$

56. $\sec x - \cos^2 x \csc x = \tan x \sec x$

57. $(\tan x + \sec x)(1 - \sin x) = \cos x$

58. $\dfrac{\sec x \cos x}{\cot^2 x} - \dfrac{1}{\tan^2 x - \sin^2 x \tan^2 x} = -1$

.59 التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستستكشف الطرق المستخدمة لحل المعادلات المثلثية. فكّر في $2\sin x = 1$.

.a تمثيل عددي اعزل الدالة المثلثية في المعادلة بحيث يكون $\sin x$ هو التعبير الوحيد الموجود بأحد طرفي المعادلة.

.b تمثيل بياني مَثّل بيانيًا الطرفين الأيسر والأيمن من المعادلة التي جدتها في الجزء a على نفس التمثيل البياني فوق $[0, 2\pi)$. حدد مكان أي نقاط تقاطع وعبّر عن القيم بالنسبة للزوايا النصف قطرية.

.c تمثيل هندسي استخدم دائرة الوحدة للتحقق من صحة الإجابات التي جدتها في الجزء b.

.d تمثيل بياني مثّل بيانيًا الطرفين الأيسر والأيمن من المعادلة التي جدتها في الجزء a على نفس التمثيل البياني فوق $-2\pi < x < 2\pi$. حدد مكان أي نقاط تقاطع وعبّر عن القيم بالنسبة للزوايا نصف القطرية.

.e تمثيل لفظي خمّن ما هي حلول $2\sin x = 1$. اشرح استنتاجك.

مسائل مهارات التفكير العليا

.60 التبرير هل يمكن استخدام طريقة التعويض لتحديد ما إذا كانت المعادلة متطابقة أم لا؟ اشرح استنتاجك.

.61 التحدي أثبت صحة أن مساحة مثلث A موضحة بالمعادلة

$$A = \frac{\alpha^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin(\beta + \gamma)}$$

حيث يمثل كلّ من a و b و c أضلاع المثلث ويمثل α و β و γ الزوايا المقابلة ذات الصلة.

.62 الكتابة في الرياضيات استخدم خصائص اللوغاريتمات لشرح السبب في أن مجموع اللوغاريتمات الطبيعية الخاصة بالدوال المثلثية الأساسية الست لأي زاوية θ يساوي 0.

.63 مسألة ذات إجابة مفتوحة كوّن متطابقات لكلٍ من $\sec x$ و$\csc x$ بدلالة دالتين أو أكثر من الدوال المثلثية الأخرى.

.64 التبرير إذا كانت الزاويتان α و β متتامتين، فهل $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$؟ اشرح استنتاجك. علل إجاباتك.

.65 الكتابة في الرياضيات اشرح كيف تثبت صحة متطابقة مثلثية يكون فيها طرفا المعادلة متساويين في درجة التعقيد.

مراجعة شاملة

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

66. $\cos\theta \csc\theta$

67. $\tan\theta \cot\theta$

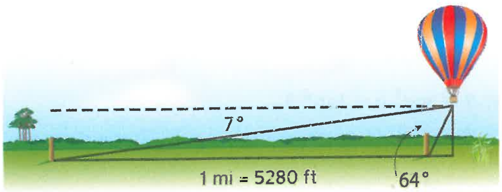
68. $\sin\theta \cot\theta$

69. $\dfrac{\cos\theta \csc\theta}{\tan\theta}$

70. $\dfrac{\sin\theta \csc\theta}{\cot\theta}$

71. $\dfrac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

.72 **ركوب المنطاد** بينما يمر منطاد هواء ساخن عبر جزء مستقيم من الطريق السريع، رأى قائده نقطتين متتابعتين من نقاط توضيح المسافة على نفس الجانب من المنطاد. وحين معاينة النقطتين، كانت زاويتا الانخفاض 64° و7°. فما ارتفاع المنطاد مقربًا لأقرب قدم؟



حدد خطوط التقارب الرأسية، ومَثّل كل دالة بيانيًا.

73. $y = \frac{1}{4}\tan x$

74. $y = \csc 2x$

75. $y = \frac{1}{2}\sec 3x$

حول قياس الزاوية من الدرجات الى الزوايا النصف قطرية بدلالة π وبالعكس.

76. $660°$

77. $570°$

78. $158°$

79. $\dfrac{29\pi}{4}$

80. $\dfrac{17\pi}{6}$

81. 9

حُلّ كلاً من المتباينات التالية.

82. $x^2 - 3x - 18 > 0$

83. $x^2 + 3x - 28 < 0$

84. $x^2 - 4x \leq 5$

85. $x^2 + 2x \geq 24$

86. $-x^2 - x + 12 \geq 0$

87. $-x^2 - 6x + 7 \leq 0$

.88 **الطعام** يفحص مدير مخبز عشوائيًا قِطَع من الكعك الذي أعدّه العاملون لضمان الطعم الصحيح والمضبوط في كل قِطعة. وينبغي أن تحتوي كل قطعة بوزن 12 أوقية على كريمة نصفها بطعم الشوكولاتة ونصفها بطعم الفانيليا. يمكن تمثيل كمية الشوكولاتة التي تختلف فيها كل شريحة بالصيغة $g(x) = \frac{1}{2}|x - 12|$. صِف التحوّلات في الدالة. ثم مثّل الدالة بيانيا.

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

89. SAT/ACT

$a, b, a, b, b, a, b, b, b, a, b, b, b, b, a, \ldots$

إذا استمرت المتتالية على هذه الوتيرة، فكم عدد حروف b الموجودة بين المرة الرابعة والأربعين والسابعة والأربعين لظهور الحرف a؟

A 91 **B** 135 **C** 138 **D** 182 **E** 230

.90 أي تعبير يمكن استخدامه لتكوين متطابقة فيها $\dfrac{\sec\theta + \csc\theta}{1+\tan\theta}$ حين تكون $\tan\theta \neq -1$؟

F $\sin\theta$

G $\cos\theta$

H $\tan\theta$

J $\csc\theta$

.91 **مراجعة** أيّ مما يلي لا يساوي $\cos\theta$ عندما يكون $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$؟

A $\dfrac{\cos\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$

B $\dfrac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}$

C $\cot\theta \sin\theta$

D $\tan\theta \csc\theta$

.92 **مراجعة** أيّ مما يلي يساوي $\sin\theta + \cot\theta \cos\theta$؟

F $2\sin\theta$

G $\dfrac{1}{\sin\theta}$

H $\cos^2\theta$

J $\dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin^2\theta}$

الدرس 4-3

حل المعادلات المثلثية

:: السابق

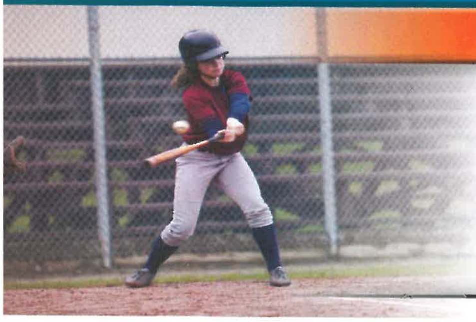
- لقد قمت بإثبات صحة المتطابقات المثلثية.

:: الحالي

1. حل المعادلات المثلثية باستخدام الأساليب الجبرية.
2. حل المعادلات المثلثية باستخدام المتطابقات الأساسية.

:: لماذا؟

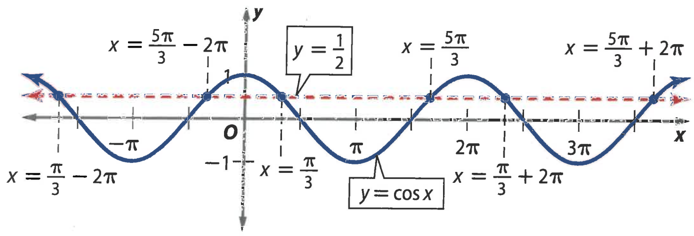
- كرة بيسبول تنطلق من سطح المضرب بزاوية انطلاق θ وتعود إلى ارتفاع ضربها الإبتدائي بعد مسافة d من الأمتار. ولإيجاد سرعة v_0 للكرة بينما تنطلق من سطح المضرب، يمكنك حل المعادلة المثلثية $d = \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{9.8}$



1 استخدام الأساليب الجبرية للحل

في الدرس 4-2، قمت بإثبات صحة المتطابقات المثلثية التي تكون صحيحة لجميع قيم المتغير في كلا الطرفين. وفي هذا الدرس، سندرس المعادلات المثلثية الشرطية والتي قد تكون صحيحة لبعض قيم المتغير ولكنها خاطئة عند القيم الأخرى.

فكّر في التمثيلات البيانية لكلا طرفي المعادلة المثلثية $\cos x = \frac{1}{2}$



يوضح التمثيل البياني أن $\cos x = \frac{1}{2}$ لها حلان بالفترة $[0, 2\pi)$، $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{5\pi}{3}$.
حيث إن دورة $y = \cos x$ هي 2π، فإن $\cos x = \frac{1}{2}$ لها حلول لانهائية للفترة $(-\infty, \infty)$. يمكن إيجاد حلول إضافية بجمع مضاعفات الأعداد الصحيحة للفترات، بحيث يمكننا التعبير عن جميع الحلول كتابةً

$x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ و $x = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$، حيث يكون n هو عدد صحيح.

لحل المعادلات المثلثية التي تضم تعبيرًا مثلثيًا واحدًا فقط، ابدأ بعزل هذا التعبير.

مثال 1 الحل بعزل التعابير المثلثية

حُلّ المعادلة: $2 \tan x - \sqrt{3} = \tan x$.

$2 \tan x - \sqrt{3} = \tan x$	المعادلة الأصلية
$\tan x - \sqrt{3} = 0$	اطرح tan x من كل طرف لعزل التعبير المثلثي
$\tan x = \sqrt{3}$	اجمع $\sqrt{3}$ على كل طرف

الدورة الخاصة بـ tan هي π. لذا فأنت لا تحتاج إلا إيجاد الحلول بالفترة $[0, \pi)$. الحل الوحيد بهذه الفترة هو $x = \frac{\pi}{3}$. الحلول بالفترة $(-\infty, \infty)$ يتم إيجادها فيما بعد عن طريق جمع مضاعفات العدد الصحيح π. ولهذا، فالصيغة العامة للحل هي

$x = \frac{\pi}{3} + n\pi$، حيث يكون n عددًا صحيحًا.

تمرين موجه

1. حُـلّ $4 \sin x = 2 \sin x + \sqrt{2}$.

مثال 2 الحل بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف

حُلّ المعادلة: $4 \sin^2 x + 1 = 4$.

$4 \sin^2 x + 1 = 4$	المعادلة الأصلية
$4 \sin^2 x = 3$	اطرح 1 من كل طرف
$\sin^2 x = \frac{3}{4}$	اقسم كل طرف على 4
$\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	خُذ الجذر التربيعي لكل طرف

بالفترة $[0, 2\pi)$، $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ حين يكون $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{2\pi}{3}$ وحين يكون $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$، $x = \frac{4\pi}{3}$ و $x = \frac{5\pi}{3}$.

بما أن دورة sin الزاوية هي 2π. فالحلول بالفترة $(-\infty, \infty)$ لها الصيغة العامة $x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ و $x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$ و $x = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$ و $x = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$، حيث يكون n عددًا صحيحًا.

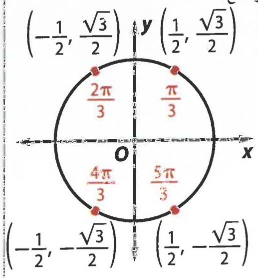
تمرين موجه

2. حُل $3 \cot^2 x + 4 = 7$.

نصيحة دراسية

إيجاد الحلول باستخدام دائرة الوحدة بما أن sin الزاوية يتوافق مع الإحداثي y بدائرة الوحدة.

فيمكنك إيجاد حلول sin بالفترة $[0, 2\pi)$ هي $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ باستخدام دائرة الوحدة كما هو موضح.



أي زاوية تشترك في ضلع الإنتهاء مع هذه الزوايا ستكون أيضًا حلاً للمعادلة.

حين لا يمكن جمع الدوال المثلثية على أحد طرفي معادلةٍ ما، جرّب طريقة التحليل الى العوامل وتطبيق خاصية ناتج الضرب الصفري. إذا كانت للمعادلة صيغة تربيعية، فحلل الى العوامل إن أمكن. وإذا تعذّر ذلك، فطبّق الصيغة التربيعية.

مثال 3 الحل باستخدام التحليل الى العوامل

حُلّ كل من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$.

a. $\cos x \sin x = 3 \cos x$

$\cos x \sin \theta = 3 \cos x$		المعادلة الأصلية
$\cos x \sin x - 3 \cos x = 0$		أعزل التعبير المثلثي
$\cos x (\sin x - 3) = 0$		حلل الى العوامل
$\cos x = 0$ أو	$\sin x - 3 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = \frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$	$\sin x = 3$	حُل لإيجاد x في $[0, 2\pi)$

المعادلة $\sin x = 3$ ليس لها حل حيث إن القيمة العظمى الممكنة لدالة الـ **Sine** الزاوية هي 1.
ولهذا، في الفترة $[0, 2\pi)$، إن حلول المعادلة الأصلية هي $\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$.

b. $\cos^4 x + \cos^2 x - 2 = 0$

$\cos^4 x + \cos^2 x - 2 = 0$		المعادلة الأصلية
$(\cos^2 x)^2 + \cos^2 x - 2 = 0$		اكتب بالصيغة التربيعية
$(\cos^2 x + 2)(\cos^2 x - 1) = 0$		حلل الى العوامل
$\cos^2 x + 2 = 0$ أو	$\cos^2 x - 1 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$\cos^2 x = -2$	$\cos^2 x = 1$	حُل لإيجاد $\cos^2 x$
$\cos x = \pm\sqrt{-2}$	$\cos x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$	خذ الجذر التربيعي لكل طرف

المعادلة $\cos x = \pm\sqrt{-2}$ ليست لها حلول حقيقية. في الفترة $[0, 2\pi)$. المعادلة $\cos x = \pm 1$ لها حلان هما 0 و π.

انتبه!

القسمة على العوامل المثلثية لا تقسم $\cos x$ في المثال 3a. وإذا كنت ستفعل ذلك، فلاحظ أنك قد تستنتج أن المعادلة ليس لها حل، في حين أنها في الواقع لها حلان بالفترة $[0, 2\pi)$.

تمرين موجه

3A. $2 \sin x \cos x = \sqrt{2} \cos x$

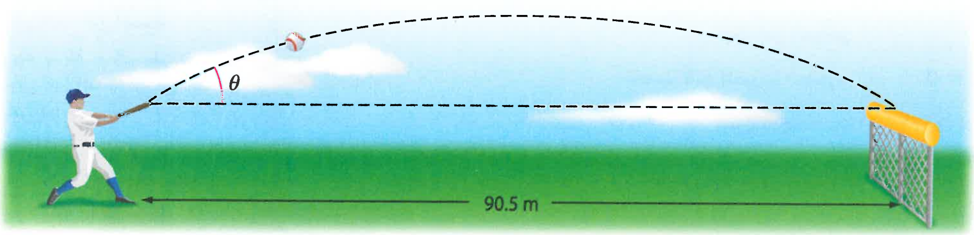
3B. $4 \cos^2 x + 2 \cos x - 2\sqrt{2} \cos x = \sqrt{2}$

تشتمل بعض المعادلات المثلثية على دوال لأضعاف زوايا. مثل $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ولحل هذه المعادلات، عليك أولاً حل أضعاف الزاوية.

> **نصيحة دراسية**
> **الحلول الدقيقة مقابل الحلول التقريبية** أثناء حل المعادلات المثلثية التي ليست في سياق من الحياة اليومية، اكتب إجاباتك باستخدام القيم الدقيقة بدلاً من التقريبات العشرية. فعلى سبيل المثال، الحلول العامة للمعادلة $\tan x = 2$ ينبغي التعبير عنها كما يلي $x = \tan^{-1} 2 + n\pi$ أو $x = \arctan 2 + n\pi$.

مثال 4 من الحياة اليومية الدوال المثلثية لأضعاف الزوايا

البيسبول كرة بيسبول تنطلق من سطح المضرب بسرعة إبتدائية تبلغ 30 m/s وتتجاوز سورًا على بعد 90.5 m. وارتفاع السور هو نفس الارتفاع الإبتدائي للكرة المضروبة. فإذا كانت المسافة التي قطعتها الكرة متمثلة في $d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{9.8}$ ، حيث الوحدة للمقام 9.8 هي m/s^2، فجد فترة لزوايا الإطلاق المحتملة للكرة.



$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{9.8}$$ الصيغة الأصلية

$$90.5 = \frac{30^2 \sin 2\theta}{9.8}$$ $d = 90.5$ و $v_0 = 30$

$$90.5 = \frac{900 \sin 2\theta}{9.8}$$ بسّط

$$886.9 = 900 \sin 2\theta$$ اضرب كل طرف في 9.8

$$\frac{886.9}{900} = \sin 2\theta$$ اقسم كل طرف على 900

$$\sin^{-1} \frac{886.9}{900}$$ تعريف Sin^{-1}

تعلمت سابقاً أن مدى دالة Sin^{-1} مقصور على الزوايا الحادة لـ θ في الفترة $[-90°, 90°]$. بما أننا نوجد Sin^{-1} الخاص بـ 2θ بدلاً من θ، فنحن بحاجة إلى التفكير في الزوايا الموجودة في الفترة $[-2(90°), 2(90°)]$ أو $[-180°, 180°]$. استخدم حاسبتك لإيجاد علاقة الزاوية الحادة وزاوية المرجع $\sin(180° - \theta) = \sin \theta$ لإيجاد الزاوية المنفرجة.

$$\sin^{-1} \frac{886.9}{900} = 2\theta$$ تعريف Sin^{-1}

$$80.2° = 99°.8 = 2\theta$$ $\sin^{-1} \frac{886.9}{900} \approx 80.2°$ و $\sin(180° - 80.2°) = \sin 99.8°$

$$40.1° = 49°.9 = \theta$$ اقسم على 2

الفترة هي $[40°.1, 49°.9]$. ستتجاوز الكرة السور إذا كانت الزاوية بين 40°.1 و49°.9.

التحقق عوّض عن قياسات الزاوية في المعادلة الأصلية لتأكيد الحل.

$d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{9.8}$	الصيغة الأصلية	$d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{9.8}$
$90.5 \stackrel{?}{=} \frac{30^2 \sin(2 \times 49.9°)}{9.8}$	$\theta = 40.1°$ أو $\theta = 49.9°$	$90.5 \stackrel{?}{=} \frac{30^2 \sin(2 \times 40.1°)}{9.8}$
$90.5 \approx 90.497$ ✓	استخدم حاسبة	$90.5 \approx 90.497$ ✓

> **نصيحة دراسية**
> **الزاوية المثالية** بتجاهل مقاومة الريح والعوامل الأخرى، ستقطع كرة البيسبول أطول مسافة حين تُضرب بزاوية 45°. وهذا لأن $\sin 2(45) = 1$، والتي تريد من مدى صيغة المسافة لأقصى حد في المثال.

تمرين موجه

4. **البيسبول** جد فترة زوايا الإطلاق المحتملة المطلوبة لتجاوز السور، إذا:

A. تزايدت السرعة الإبتدائية لتصل إلى 35 m/s.

B. ظلت السرعة الإبتدائية كما هي، ولكن المسافة نحو السور كانت 80 m.

2 استخدام المتطابقات المثلثية لحل المعادلات المثلثية

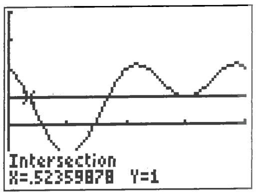
يمكنك استخدام المتطابقات المثلثية مع الطرق الجبرية لحل المعادلات المثلثية.

مثال 5 الحل بإعادة الكتابة باستخدام دالة مثلثية واحدة

حُلّ المعادلة $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$ بالفترة $[0, 2\pi)$.

$2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$	المعادلة الأصلية
$2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 = 0$	متطابقة فيثاغورس
$2 - 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$	اضرب
$-2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0$	بسّط
$-1(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$	حلل إلى العوامل
$2\sin x - 1 = 0 \qquad = \qquad \sin x + 1 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$\sin x = \frac{1}{2} \qquad\qquad \sin x = -1$	حُل لإيجاد $\sin x$
$x = \frac{\pi}{6}$ أو $x = \frac{5\pi}{6} \qquad\qquad x = \frac{3\pi}{2}$	حُل لإيجاد x في $[0, 2\pi)$

التحقق التمثيلات البيانية التي تخص $Y_1 = 2\cos^2 x - \sin x$ و $Y_2 = 1$ تتقاطع في $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{3\pi}{2}$ بالفترة $[0, 2\pi)$ كما هو موضح ✔

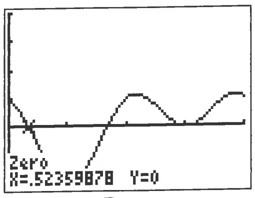


$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 4]$ scl: 1

نصيحة دراسية

طريقة بديلة هناك طريقة بديلة للتحقق من المثال 5 وهي التمثيل البياني لما يلي $y = 2\cos^2 x - \sin x - 1$.

تتضمن أصفارًا في $\frac{5\pi}{6}$، $\frac{\pi}{6}$، $\frac{3\pi}{2}$ في الفترة $[0, 2\pi)$ كما هو موضح.



$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 4]$ scl: 1

تمرين موجه

جد جميع حلول كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi)$.

5A. $1 - \cos x = 2\sin^2 x$

5B. $\cot^2 x \csc^2 x + 2\csc^2 x - \cot^2 x = 2$

ويمكنك أحيانًا الحصول على معادلة في دالة مثلثية واحدة من خلال تربيع كل طرف، ولكن هذه الطريقة قد تؤدي إلى الوصول لحلول غير مترابطة.

مثال 6 الحل باستخدام التربيع

حُلّ المعادلة $\csc x - \cot x = 1$ في الفترة $[0, 2\pi]$.

$\csc x - \cot x = 1$	المعادلة الأصلية
$\csc x = 1 + \cot x$	اجمع $\cot x$ على كل طرف
$(\csc x)^2 = (1 + \cot x)^2$	قم بتربيع كل طرف
$\csc^2 x = 1 + 2\cot x + \cot^2 x$	اضرب
$1 + \cot^2 x = 1 + 2\cot x + \cot^2 x$	متطابقة فيثاغورس
$0 = 2\cot x$	اطرح $1 + \cot^2 x$ من كل طرف
$0 = \cot x$	اقسم كل طرف على 2
$x = \frac{\pi}{2}$ أو $x = \frac{3\pi}{2}$	حُل لإيجاد x على $[0, 2\pi]$

التحقق

$\csc x - \cot x = 1$	$\csc x - \cot x = 1$	المعادلة الأصلية
$\csc \frac{3\pi}{2} - \cot \frac{3\pi}{2} \stackrel{?}{=} 1$	$\csc \frac{\pi}{2} - \cot \frac{\pi}{2} \stackrel{?}{=} 1$	استبدل
$-1 - 0 \neq 1$ ✗	$1 - 0 = 1$ ✓	بسّط

ولهذا، فالحل المتاح الوحيد هو $\frac{\pi}{2}$ بالفترة $[0, 2\pi]$.

تمرين موجه

6A. $\sec x + 1 = \tan x$

6B. $\cos x = \sin x - 1$

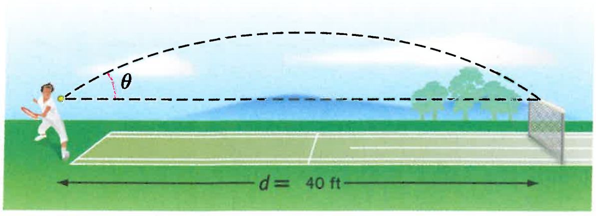
حُلّ كل معادلة لجميع قيم x. (المثالان 1 و2)

1. $5 \sin x + 2 = \sin x$
2. $5 = \sec^2 x + 3$
3. $2 = 4 \cos^2 x + 1$
4. $4 \tan x - 7 = 3 \tan x - 6$
5. $9 + \cot^2 x = 12$
6. $2 - 10 \sec x = 4 - 9 \sec x$
7. $3 \csc x = 2 \csc x + \sqrt{2}$
8. $11 = 3 \csc^2 x + 7$
9. $6 \tan^2 x - 2 = 4$
10. $9 + \sin^2 x = 10$
11. $7 \cot x - \sqrt{3} = 4 \cot x$
12. $7 \cos x = 5 \cos x + \sqrt{3}$

حُـــلّ كل من المعادلات الآتية في الفترة: $[0, 2\pi]$. (مثال 3)

13. $\sin^4 x + 2 \sin^2 x - 3 = 0$
14. $-2 \sin x = -\sin x \cos x$
15. $4 \cot x = \cot x \sin^2 x$
16. $\csc^2 x - \csc x + 9 = 11$
17. $\cos^3 x + \cos^2 x - \cos x = 1$
18. $2 \sin^2 x = \sin x + 1$

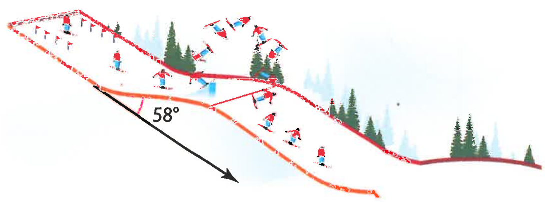
19. **التنس** كرة تنس تنطلق من سطح المضرب وتتجه نحو شبكة على بعد 40 ft. وارتفاع الشبكة هو نفس الارتفاع الإبتدائي لكرة التنس. (مثال 4)



a. فإذا ضُربت الكرة بسرعة 50 ft/s، وبتجاهل مقاومة الهواء، فاستخدم $d = \frac{1}{32} v_0^2 \sin 2\theta$ لإيجاد فترة الزوايا المحتملة التي تحتاجها الكرة لعبور الشبكة.

b. جد θ إذا ظلت السرعة الإبتدائية كما هي ولكن المسافة نحو الشبكة كانت 50ft.

20. **التزلج على الجليد** في المنافسة الأولمبية لرياضة التزلج الهوائي على الجليد، يُسرع المتزلجون نزولاً على منحدر يُطلقهم في الهواء، كما هو موضح. وأقصى ارتفاع يمكن للمتزلجين تحقيقه مُمثل فيما يلي $h_{peak} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$، حيث يكون g هو تسارع الجاذبية و تساوي 9.8 أمتار بالثانية المربعة. (مثال 4)



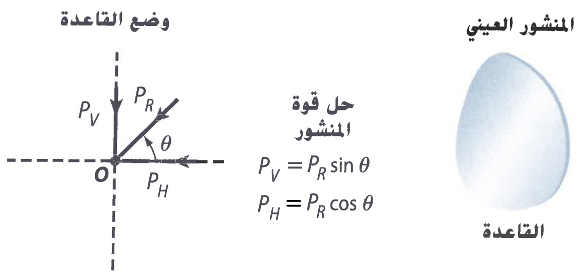
a. إذا حقق متزلج ارتفاع 5 m أعلى نهاية المنحدر. فماذا كانت سرعته الإبتدائية؟

b. استخدم إجابتك من الجزء a لتحديد الزمن الذي يستغرقه المتزلج ليصل لأقصى ارتفاع إذا كانت $t_{peak} = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$.

حُلّ كل من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi]$. (المثالان 5 و6)

21. $1 = \cot^2 x + \csc x$
22. $\sec x = \tan x + 1$
23. $\tan^2 x = 1 - \sec x$
24. $\csc x + \cot x = 1$
25. $2 - 2 \cos^2 x = \sin x + 1$
26. $\cos x - 4 = \sin x - 4$
27. $3 \sin x = 3 - 3 \cos x$
28. $\cot^2 x \csc^2 x - \cot^2 x = 9$
29. $\sec^2 x - 1 + \tan x - \sqrt{3} \tan x = \sqrt{3}$
30. $\sec^2 x \tan^2 x + 3 \sec^2 x - 2 \tan^2 x = 3$

31. **فحص البصر** يضم أخصائيو فحص البصر أحيانًا منشورين منحرفين أو مائلين لتصحيح الرؤية. القوة الانكسارية الناتجة P_R عن ضم منشورين منحرفين يمكن حسابها عن طريق تحليل كل منشور إلى مكوناته الأفقية والرأسية، P_H وP_V.



باستخدام المعادلات أعلاه، حدد قيم θ التي يكون فيها كلّ من P_V وP_H متساويين.

حُـــلّ كل من المعادلات الآتية $[0, 2\pi]$.

32. $\frac{\tan^2 x}{\sec x} + \cos x = 2$
33. $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{1 + \sin x}{\cos x} = -4$
34. $\frac{\sin x + \cos x}{\tan x} + \frac{1 - \sin x}{\sin x} = \cos x$
35. $\cot x \cos x + 1 = \frac{1}{\sec x - 1} + \frac{\sin x}{\tan^2 x}$

الحاسبة البيانية **حُلّ كل معادلة بالفترة $[0, 2\pi]$ عن طريق التمثيل البياني. قرّب إلى أقرب جزء من مائة.**

36. $3 \cos 2x = e^x + 1$
37. $\sin \pi x + \cos \pi x = 3x$
38. $x^2 = 2 \cos x + x$
39. $x \log x + 5x \cos x =$ -2

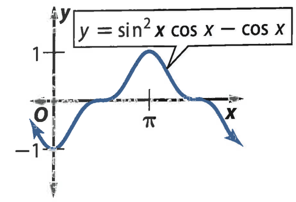
40. **الأرصاد الجوية** [illegible] بدرجات الفهرنهايت يمكن تمثيله بما يلي $t = 8.05 \cos\left(\frac{\pi}{6}x - \pi\right) + 66.95$، حيث تكون x دالة في الزمن، وتمثل $x = 1$ يوم 15 يناير، وتمثل $x = 2$ يوم 15 فبراير وهكذا.

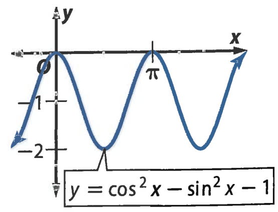
a. استخدم حاسبة بيانية لتقدير درجة الحرارة يوم 31 يناير.

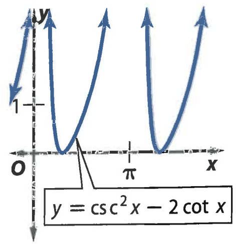
b. قرّب عدد الشهور التي يكون فيها متوسط درجة الحرارة أكبر من 70 درجة على مدار الشهر.

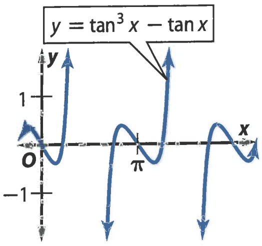
c. قدّر أعلى درجة حرارة في العام والشهر الذين تحدث فيهما.

جد التقاطع مع المحاور الأفقية x لكل تمثيل بياني بالفترة [0, 2π).

41.


42.


43.


44.


حُلّ كل من المعادلات التالية في الفترة [0, 4π).

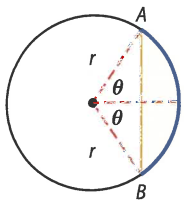
45. $4 \tan x = 2 \sec^2 x$

46. $2 \sin^2 x + 1 = -3 \sin x$

47. $\csc x \cot^2 x = \csc x$

48. $\sec x + 5 = 2 \sec x + 3$

49. **الهندسة** فكّر في الدائرة أدناه.



a. طول s للقوس AB يتمثل في $s = r(2\theta)$ حيث يكون $0 \leq \theta \leq \pi$. حين يكون $s = 18$ و$AB = 14$، فنصف القطر هو $r = \frac{7}{\sin\theta}$. استخدم حاسبة بيانية لإيجاد قياس 2θ بالراديان.

b. مساحة المنطقة المظللة تتمثل في $A = \frac{r^2(\theta - \sin\theta)}{2}$. استخدم حاسبة بيانية لإيجاد قياس θ بالراديان إذا كان نصف القطر هو 5 in والمساحة هي $36\ \text{in}^2$. قرّب إلى أقرب جزء من المئة.

حُلّ كل معادلة بالفترة [0, 2π).

50. $1 > 2 \sin x$

51. $0 < 2 \cos x - \sqrt{2}$

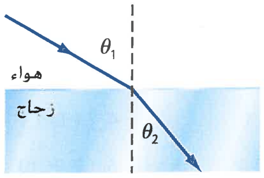
52. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

53. $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leq \tan x \cot x$

54. $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

55. $\sqrt{2} \sin x - 1 < 0$

56. **انكسار الضوء** حين ينتقل الضوء من وسط شفاف لوسطٍ آخر شفاف فإنه ينحني أو ينكسر، كما هو موضح.



يوصف انكسار الضوء بما يلي $n_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin\theta_1$، حيث يكون n_1 هو معامل انكسار الضوء الخاص بالوسط الذي يدخله الضوء، ويكون n_2 هو معامل انكسار الضوء الخاص بالوسط الذي يخرج منه الضوء، ويكون θ_1 هو زاوية السقوط، ويكون θ_2 هو زاوية الانكسار.

a. جد θ_2 لكل مادة موضحة إذا كانت زاوية السقوط هي 40° ومعامل انكسار الهواء هو 1.00.

b. إذا تضاعفت زاوية السقوط لتصل إلى 80°، فهل ستكون زوايا الانكسار الناتجة أكبر بمرتين من تلك الزوايا الموجودة في الجزء a؟

المادة	معامل الانكسار
الزجاج	1.52
الجليد	1.31
البلاستيك	1.50
المياه	1.33

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

57. **تحليل الخطأ** يحاول عامر وطارق حل ما يلي $\tan^2 x - \tan x + \sqrt{3} = \sqrt{3}\tan x$. يظن عامر أن الحلول هي $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$، و$x = \frac{5\pi}{4} + n\pi$، و$x = \frac{\pi}{3} + n\pi$، و$x = \frac{4\pi}{3} + n\pi$. ويظن طارق أن الحلول هي $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ و$x = \frac{\pi}{3} + n\pi$. هل أيٌ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

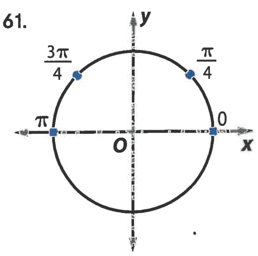
تحدٍّ **حُلّ كل معادلة في الفترة [0, 2π).**

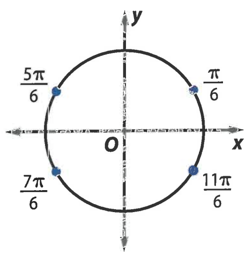
58. $16 \sin^5 x + 2 \sin x = 12 \sin^3 x$

59. $4 \cos^2 x - 4 \sin^2 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x = 3$

60. **التبرير** هل الحلان $\csc x = \sqrt{2}$ و $\cot^2 x + 1 = 2$ متساويان؟ إذا كانتا كذلك، فتحقق من صحة إجابتك جبريًا. وإذا لم تكونا متساويتين، فاشرح استنتاجك.

مسألة ذات إجابة مفتوحة **اكتب معادلة مثلثية بها كل حل من الحلول التالية.**

61.


62.


63. **الكتابة في الرياضيات** اشرح الفرق في الأساليب التي تُستخدم أثناء حل المعادلات والتحقق من صحة المتطابقات.

مراجعة شاملة

اثبت صحة كل متطابقة.

64. $\dfrac{1+\sin\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\cot^2\theta}{\csc\theta - 1}$

65. $\dfrac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

66. $\dfrac{1}{\sec^2\theta} + \dfrac{1}{\csc^2\theta} = 1$

جد قيمة كل تعبير مستخدمًا المعلومات المعطاة.

67. $\tan\theta,\ \sin\theta = \frac{1}{2},\ \tan\theta > 0$

68. $\csc\theta,\ \cos\theta = -\frac{3}{5},\ \csc\theta < 0$

69. $\sec\theta,\ \tan\theta = -1,\ \sin\theta < 0$

70. **تعداد الأحياء** يمكن تمثيل تعداد نوع معين من الغزلان بالدالة $p = 30000 + 20000\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$، حيث p هو التعداد و t هو الزمن بالأعوام.

a. ما سعة الدالة؟ ما الذي تمثله؟

b. ما دورة الدالة؟ ما الذي تمثله؟

c. مثّل الدالة بيانيًا.

بفرض أن $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ و $g(x) = 6x + 4$، جد كلاً مما يلي.

71. $(f-g)(x)$

72. $(f \times g)(x)$

73. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

74. **الأعمال التجارية** ينبغي على صاحب شركة صغيرة توظيف عمال موسميين حسب تزايد حاجته للعمال. توضح القائمة التالية عدد الموظفين الذين يتم توظيفهم شهريًا لمدة 5 شهور.

فإذا كان متوسط هذه البيانات هو 9، فما الانحراف المعياري للتعداد لهذه البيانات؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

الشهر	عدد الموظفين الإضافيين
أغسطس	5
سبتمبر	14
أكتوبر	6
نوفمبر	8
ديسمبر	12

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

75. **SAT/ACT** بالنسبة لكل القيم الموجبة لـ m و n، إذا كان

$\dfrac{3x}{m-nx} = 2$, then $x =$

A $\dfrac{2m-2n}{3}$

B $\dfrac{3+2n}{2m}$

C $\dfrac{2m-3}{2n}$

D $\dfrac{2m}{3+2n}$

E $\dfrac{3}{2m-2n}$

76. إذا كانت $\cos x = -0.45$، فما هي $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$؟

F -0.55

G -0.45

H 0.45

J 0.55

77. أيٌ مما يلي ليس حلًا لما يلي: $\sin\theta + \cos\theta\tan^2\theta = 0$؟

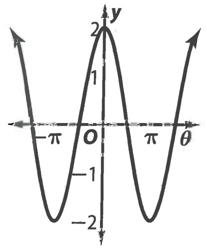
A $\dfrac{3\pi}{4}$

B $\dfrac{7\pi}{4}$

C 2π

D $\dfrac{5\pi}{2}$

78. **مراجعة** فيما يلي التمثيل البياني الذي يخص $y = 2\cos\theta$.
أيٌ مما يلي هو حل لـ $2\cos\theta = 1$؟



F $\dfrac{8\pi}{3}$

G $\dfrac{10\pi}{3}$

H $\dfrac{13\pi}{3}$

J $\dfrac{15\pi}{3}$

التوسع

4-3

مختبر تقنية التمثيل البياني

حل المتباينات المثلّثية

التركيز

- استخدام الحاسبة البيانية لحل المتباينات المثلّثية.

يمكنك استخدام الحاسبة البيانية لحل المتباينات المثلّثية. مثّل كل متباينة بيانيًا. ثم حدّد موقع نقاط نهاية كل تقاطع على التمثيل البياني لإيجاد الفواصل التي تكون المتباينة فيها **صحيحة**.

نشاط 1 تمثيل متباينة مثلّثية بيانيًا

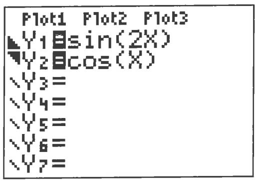
مثّل بيانيًا وجد حل $\sin 2x \geq \cos x$.

الخطوة 1 استبدل كل طرف من هذه المتباينة **بالمتغير** y لصياغة المتباينات الجديدة.

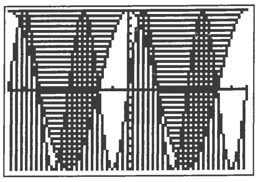
$Y_1 \geq \sin 2x$ و $Y_2 \geq \cos x$

الخطوة 2 مثّل كل متباينة بيانيًا. واجعل لكل متباينة رمزًا بالانتقال إلى يسار علامة التساوي واختيار ENTER إلى أن تومض المثلّثات المظلّلة. يمثّل المثلّث العلوي أكبر من، ويمثّل المثلّث السفلي أقل من (الشكل 4.3.1). في القائمة MODE اختر RADIAN.

الخطوة 3 مثّل المعادلات بيانيًا في النافذة الملائمة. استخدم مجال ومدى كل دالة مثلّثية كدليل (الشكل 4.3.2).



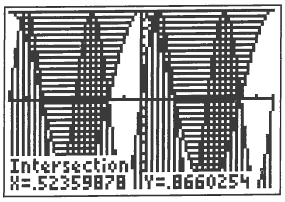
الشكل 4.3.1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-1, 1]$ scl: 0.1

الشكل 4.3.2

الخطوة 4 تشير المنطقة المظلّلة بلون داكن لنقطة تقاطع التمثيلات البيانية وحل نظام المتباينات. استخدم CALC: intersect **لتحديد** مواقع هذه التقاطعات. حرّك المؤشر فوق التقاطع واختر ENTER ثلاث مرات.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-1, 1]$ scl: 0.1

الخطوة 5 يحدث التقاطع الأول عندما تكون $y = 0.866$ أو $\frac{\sqrt{3}}{2}$. وبما أن $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$، يكون التقاطع عند $x = \frac{\pi}{6}$. ويكون التقاطع التالي عند $x = \frac{\pi}{2}$. إذًا، إحدى فترات الحل هي $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$. والفترة الأخرى هي $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$. هناك عدد لا نهائي من الفترات، وإذًا تكون حلول كل قيم x هي $\left[\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$ و $\left[\frac{5\pi}{6} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right]$.

تمارين

مثّل كل متباينة بيانيًا وجد حلًا لها.

1. $\sin 3x < 2\cos x$
2. $3\cos x \geq 0.5\sin 2x$
3. $\sec x < 2\cos x$
4. $\csc 2x > \sin 8x$
5. $2\tan 2x < 3\sin 2x$
6. $\tan x \geq \cos x$

الوحدة 4 اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 4-1 إلى 4-3

جد قيمة كل تعبير مستخدمًا المعلومات المعطاة. (الدرس 4-1)

.1 $\sin\theta$ و $\sec\theta$، $\cot\theta = 4$, $\cos\theta > 0$ و $\cos\theta$

.2 $\sec\theta$ و $\csc\theta$، $\tan\theta = -\frac{2}{3}$, $\csc\theta > 0$ و $\sin\theta$

.3 $\tan\theta$ و $\csc\theta$، $\cos\theta = \frac{1}{4}$, $\sin\theta > 0$ و $\csc\theta$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 4-1)

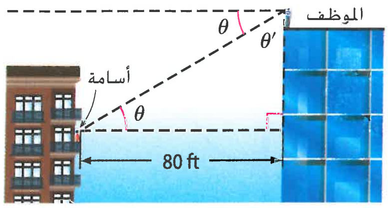
4. $\dfrac{\sin(-x)}{\tan(-x)}$

5. $\dfrac{\sec^2 x}{\cot^2 x + 1}$

6. $\dfrac{\sin(90° - x)}{\cot^2(90° - x) + 1}$

7. $\dfrac{\sin x}{1 + \sec x}$

.8 **زاوية الانخفاض** يستطيع أسامة أن يرى من نافذة شقّته قمة مبنى البنك في الجهة المقابلة من الشارع من زاوية ارتفاع θ. كما هو موضّح أدناه. (الدرس 4-1)



.a إذا نظر موظّف بالبنك من أعلى المبنى إلى الأسفل ناحية شقّة أسامة، فما المتطابقة التي يمكن استخدامها لاستنتاج أن $\sin\theta = \cos\theta'$؟

.b إذا نظر أسامة إلى الأسفل ناحية إحدى النوافذ السفلية للبنك من زاوية انخفاض 35°، فكم سيكون بُعد نافذة البنك أسفل شقّته؟

9 **الاختيار من متعدد** أي من العناصر التالية لا يساوي $\csc\theta$؟ (الدرس 4-1)

A $\sec(90° - \theta)$

B $\sqrt{\cot^2\theta + 1}$

C $\dfrac{1}{\sin\theta}$

D $\dfrac{1}{\sin(90° - \theta)}$

أثبت صحة كل متطابقة. (الدرس 4-2)

10. $\dfrac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} - \dfrac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} = -2\tan\theta$

11. $\csc^2\theta - \sin^2\theta - \cos^2\theta - \cot^2\theta = 0$

12. $\sin\theta + \dfrac{\cos\theta}{\tan\theta} = \csc\theta$

13. $\dfrac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} = \sec\theta - \tan\theta$

14. $\dfrac{\csc\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\cot\theta}{\cos\theta} = \cot^2\theta + \csc\theta + 1$

15. $\dfrac{1 + \sin\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1 - \sin\theta} = \dfrac{\csc\theta}{1 - \sin\theta}$

حُــلّ كل من المعادلات التالية في الفترة $[0, 2\pi)$. (الدرس 4-3)

16. $4\sec\theta + 2\sqrt{3} = \sec\theta$

17. $2\tan\theta + 4 = \tan\theta + 5$

18. $4\cos^2\theta + 2 = 3$

19. $\cos\theta - 1 = \sin\theta$

.20 **الاختيار من متعدد** أي من الآتي يُمثل مجموعة حل $\cos\theta\tan\theta - \sin^2\theta = 0$؟ (الدرس 4-3)

F $\frac{\pi}{2}n$، حيث n عددًا صحيحًا

G $\frac{\pi}{2} + n\pi$، حيث n عددًا صحيحًا

H $\pi + 2n\pi$، حيث n عددًا صحيحًا

J $n\pi$ حيث n عددًا صحيحًا

حُلّ كل معادلة لجميع قيم θ. (الدرس 4-3)

21. $3\sin^2\theta + 6 = 2\sin^2\theta + 7$

22. $\sin\theta + \cos\theta = 0$

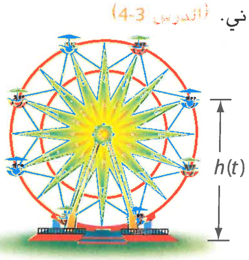
23. $\sec\theta + \tan\theta = 0$

24. $3 - 3\cos^2\theta = 1 + \sin^2\theta$

.25 **حركة المقذوف** إن المسافة d بالقدم التي تقطعها كرة تم ركلها بتسارع $32\ \text{ft/s}^2$ موضحة من خلال d

$= \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{32}$، حيث v_0 هي السرعة الابتدائية للجسم و θ هي الزاوية التي تم إطلاق الجسم منها. إذا تم ركل الكرة بسرعة ابتدائية تبلغ 82 قدمًا في الثانية، وقطعت 185 ft. فجد الزاوية (الزوايا) الممكنة التي تم إطلاق الكرة منها. (الدرس 4-3)

.26 **العجلة الدوارة** فيما يلي أدناه موضح ارتفاع h بالقدم لراكب على عجلة دوارة بعد t من الثواني. (الدرس 4-3)



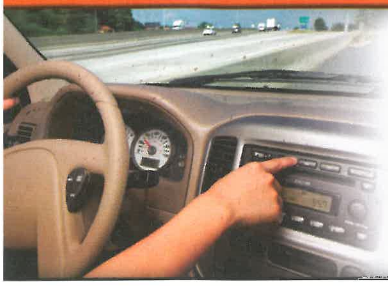
$$h(t) = 75 + 70\sin\left(\frac{\pi}{25}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

.a إذا كانت العجلة الدوارة تبدأ عند $t = 0$، فكم سيكون الارتفاع الإبتدائي للراكب؟

.b متى سيصل الراكب أول مرة للحد الأقصى للارتفاع عند 145 ft؟

الدرس 4-4 متطابقات المجموع والفرق

:: السابق	:: الحالي	:: لماذا؟
• أوْجَدْتَ قِيَم الدوال المثلّثية باستخدام دائرة الوحدة.	1 استخدام متطابقات المجموع والفرق لإيجاد قيمة الدوال المثلّثية. 2 استخدام متطابقات المجموع والفرق لإيجاد حل للمعادلات المثلّثية.	• عندما تكون الصورة على شاشة التليفزيون مشوّشة، أو عندما لا يعمل توليف محطة إذاعية على نحو صحيح، تكون المشكلة غالبًا بسبب *التداخل في الإشارات*. ويحدث هذا التداخل عندما تمر الموجات في الفراغ ذاته في نفس الوقت. يمكنك استخدام المتطابقات المثلّثية لتحديد نوع التداخل الذي يحدث



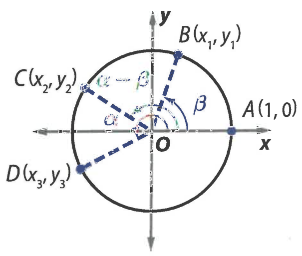
المفردات الجديدة

متطابقة اختزال
reduction identity

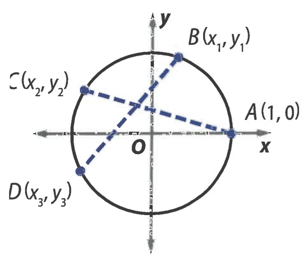
1 إيجاد قيمة الدوال المثلّثية

لقد استخدمتَ متطابقات أساسية تشتمل على متغير واحد فقط، لكن في هذا الدرس، سنستخدم متطابقات تشتمل على متغيرين. إحدى هذه المتطابقات متطابقة الفرق لـ *cosine*.

حدّد مواقع للنقاط A و B و C و D على دائرة الوحدة، واجعل α و β زوايا في الفترة $[0, 2\pi[$، و$\alpha > \beta$ كما هو موضّح في الشكل 4.4.1. لأن كل نقطة لها **موقع** على دائرة الوحدة، فإن $x_1^2 + y_1^2 = 1$ و $x_2^2 + y_2^2 = 1$ و $x_3^2 + y_3^2 = 1$.
لاحظ أيضًا أن قياس $(\alpha - \beta)$ arc $CD = \alpha -$ أو β وقياس arc $AB = \beta$.



الشكل 4.4.1



الشكل 4.4.2

بما أن arcs AB و CD لهما نفس القياس، إذًا يكون الوتران AC و BD الموضحان في الشكل 4.4.2 متطابقين.

$AC = BD$	الوتران AC و BD متطابقان.
$\sqrt{(x_2 - 1)^2 + (y_2 - 0)^2} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$	قانون المسافة
$(x_2 - 1)^2 + (y_2 - 0)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2$	قم بتربيع كل طرف.
$x_2^2 - 2x_2 + 1 + y_2^2 = x_3^2 - 2x_3x_1 + x_1^2 + y_3^2 - 2y_3y_1 + y_1^2$	قم بتربيع كل ذات حدّين.
$(x_2^2 + y_2^2) - 2x_2 + 1 = (x_1^2 + y_1^2) + (x_3^2 + y_3^2) - 2x_3x_1 - 2y_3y_1$	جمّع الحدود التربيعية المتشابهة.
$1 - 2x_2 + 1 = 1 + 1 - 2x_3x_1 - 2y_3y_1$	التعويض
$2 - 2x_2 = 2 - 2x_3x_1 - 2y_3y_1$	اجمع.
$-2x_2 = -2x_3x_1 - 2y_3y_1$	اطرح 2 من كل طرف.
$x_2 = x_3x_1 + y_3y_1$	اقسم كل طرف على −2.

في الشكل 4.4.1، لاحظ أنه وفقًا لتعريفات دائرة الوحدة لـ sin and cos، فإن $x_1 = \cos\beta$ و $x_2 = \cos(\alpha - \beta)$ و $x_3 = \cos\alpha$ و $y_1 = \sin\beta$ و $y_3 = \sin\alpha$. وعند التعويض، فإن $x_2 = x_3x_1 + y_3y_1$ تصبح $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. متطابقة الفرق لـ cos

يمكننا الآن الحصول على متطابقة المجموع لـ cosine.

$\cos[\alpha + (-\beta)] = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$	$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$
$\cos[\alpha + (-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta)$	$\cos(-\beta) = \cos(\beta), \sin\beta = -\sin(-\beta)$
$\cos[\alpha + \theta] = \cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta$	اجعل $(-\beta) = \theta$

يمكن استخدام متطابقتي cosine لإثبات كل من متطابقات المجموع والفرق الأخرى المدرجة أدناه.

المفهوم الأساسي متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع	متطابقات الفرق
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$	$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$	$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$	$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

سوف تُثبت متطابقات المجموع والفرق لـ sin و tan في التمارين 57-60.

من خلال كتابة قياسات الزاوية **بصيغة** مجاميع أو فروق قياسات خاصة للزاوية، يمكنك استخدام متطابقات المجموع والفروق هذه لإيجاد قيم دقيقة للدوال المثلّثية للزوايا الأقل شيوعًا.

مثال 1 إيجاد قيمة تعبير مثلّثي

جد القيمة الدقيقة لكل تعبير مثلّثي.

a. $\sin 15°$

اكتب °15 بصيغة مجموع أو فرق قياسات زاوية تعرفُ قيمة جيوبها.

$\sin 15° = \sin(45° - 30°)$ — $45° - 30° = 15°$

$= \sin 45°\cos 30° - \sin 30°\cos 45°$ — متطابقة الفرق لـ sin

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ — $\sin 30°=\frac{1}{2}, \sin 45°=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{6}}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ — جد ناتج الضرب.

$= \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ — جمّع الكسور.

b. $\tan\dfrac{7\pi}{12}$

$\tan\dfrac{7\pi}{12}=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ — $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}$

$=\dfrac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}$ — متطابقة المجموع لـ tan

$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}(1)}$ — $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ و $\tan\frac{\pi}{4}=1$

$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$ — بسّط.

$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\times\dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ — طبّق إنطاق المقام (تخليصه من الجذر التربيعي).

$=\dfrac{\sqrt{3}+1+3+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-3}$ — جد ناتج الضرب.

$=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{-2}$ — بسّط.

تمرين موجه

1A. $\cos 15°$

1B. $\sin\dfrac{5\pi}{12}$

نصيحة دراسية

تحقّق من إجاباتك يمكنك التحقّق من إجاباتك عن طريق استخدام الحاسبة البيانية. في المثال 1a، إن $\sin 15° \approx 0.259$ و $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\approx 0.259$. تأكّد من أن الحاسبة في الإعداد الصحيح.

غالبًا ما نستخدم متطابقات المجموع والفرق لحل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 2 من الحياة اليومية استخدام متطابقة المجموع أو الفرق

الكهرباء **يمكن إيجاد تذبذب التيار i بوحدات الأمبير في دائرة بعينها بعد t من الثواني باستخدام الصيغة $i = 3\ (\sin 165)t$، حيث *165 هي قياس الدرجة*.**

a. أعد كتابة القاعدة بدلالة مجموع قياسات زاويتين.

$i = 3\ (\sin 165)t$ — المعادلة الأصلية

$= 3\ [\sin (120 + 45)]t$ — $120 + 45 = 165$

b. استخدم متطابقة المجموع لـ sin لإيجاد التيار الدقيق بعد ثانية واحدة.

$i = 3\ [\sin (120 + 45)]t$ — معادلة أعيدت كتابتها

$= 3\ \sin (120 + 45)$ — $t = 1$

$= 3[(\sin 120)(\cos 45) + (\cos 120)(\sin 45)]$ — متطابقة المجموع لـ sin

$= 3\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$ — عوّض.

$= 3\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ — جد ناتج الضرب.

$= \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ — بسّط

التيار الدقيق بعد ثانية واحدة هو $\frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ بوحدات الأمبير.

تمرين موجه

2. **الكهرباء** يمكن إيجاد تذبذب التيار i بوحدات الأمبير في دائرة أخرى بعد t من الثواني باستخدام الصيغة $i = 2\ (\sin 285)t$، حيث 285 هي قياس الدرجة.

A. أعد كتابة القاعدة بدلالة فرق قياسات زاويتين.

B. استخدم متطابقة الفرق لـ sin لإيجاد التيار الدقيق بعد ثانية واحدة.

مهن من الحياة اليومية

فني التوصيلات السلكية فنيو التوصيلات السلكية هم المسئولون عن إنشاء مرافق نقل وتوزيع القدرة الكهربائية وصيانتها. ويطلق هذا المصطلح أيضًا على الفنيين الذين يقومون بتثبيت الهواتف وأجهزة التليفزيون الكبلي وخطوط الألياف الضوئية وصيانتها.

إذا كان التعبير المثلّثي له صيغة متطابقة المجموع أو الفرق، تستطيع حينها استخدام المتطابقة لإيجاد قيمة دقيقة أو لتحويل تعبير إلى أبسط صورة عن طريق إعادة كتابة التعبير بصفته دالة لزاوية واحدة.

مثال 3 إعادة الكتابة في صيغة تعبير مثلّثي واحد

a. جد القيمة الدقيقة لـ $\frac{\tan 32° + \tan 13°}{1 - \tan 32° \tan 13°}$.

$\frac{\tan 32° + \tan 13°}{1 - \tan 32° \tan 13°} = \tan (32° + 13°)$ — متطابقة المجموع لـ tan

$= \tan 45° = 1$ — بسّط

b. حوّل لأبسط صورة: $\sin x \sin 3x - \cos x \cos 3x$.

$\sin x \sin 3x - \cos x \cos 3x = -(\cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x)$ — خاصيتا التوزيع والتبديل

$= -\cos (x + 3x) = -\cos 4x$ — متطابقة المجموع لـ tan

تمرين موجه

3A. جد القيمة الدقيقة لـ $\frac{7\pi}{8} \cos \frac{5\pi}{24} + \sin \frac{7\pi}{8} \sin \frac{5\pi}{24}$.

3B. حوّل لأبسط صورة: $\frac{\tan 6x - \tan 7x}{1 + \tan 6x \tan 7x}$.

يمكن استخدام متطابقات المجموع والفرق لإعادة كتابة تعابير مثلثية بصفتها تعابير جبرية.

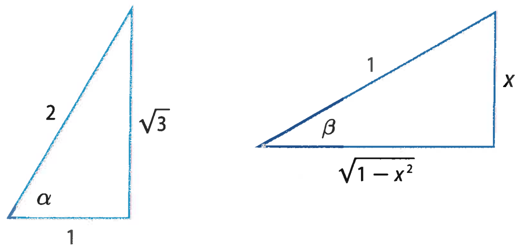
مثال 4 الكتابة بصيغة تعبير جبري

اكتب $\sin(\arctan\sqrt{3} + \arcsin x)$ بصيغة تعبير جبري لـ x بحيث لا يشتمل على دوال مثلّثية.

عند تطبيق متطابقة المجموع لـ sin ، نجد أن

$\sin(\arctan\sqrt{3} + \arcsin x) = \sin(\arctan\sqrt{3})\cos(\arcsin x) + \cos(\arctan\sqrt{3})\sin(\arcsin x)$.

إذا فرضنا أن $\alpha = \arctan\sqrt{3}$ و $\beta = \arcsin x$، إذا تكون $\tan\alpha = \sqrt{3}$ و $\sin\beta = x$. ارسم مثلّثًا قائم الزاوية بزاوية حادة α وآخر بزاوية حادة β. قم بتسمية الأضلاع على أن يكون $\tan\alpha = \sqrt{3}$ و $\sin\beta = x$. ثم استخدم مبرهنة فيثاغورس للتعبير عن طول كل ضلع ثالث.



باستخدام هذين المثلثين، نجد أن $\sin(\arctan\sqrt{3}) = \sin\alpha$ أو $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos(\arctan\sqrt{3}) = \cos\alpha$ أو $\frac{1}{2}$ و $\cos(\arcsin x) = \cos\beta$ or $\sqrt{1 - x^2}$ و $\sin(\arcsin x) = \sin\beta$ أو x.

الآن قم بالتعويض وحوّل لأبسط صورة.

$$\sin(\arctan\sqrt{3} + \arcsin x) = \sin(\arctan\sqrt{3})\cos(\arcsin x) + \cos(\arctan\sqrt{3})\sin(\arcsin x)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{1 - x^2}\right) + \frac{1}{2}x$$

$$= \frac{\sqrt{3 - 3x^2}}{2} + \frac{x}{2} = \frac{x + \sqrt{3 - 3x^2}}{2}$$

تمرين موجه

اكتب كل تعبير مثلّثي بصيغة تعبير جبري.

4A. $\cos(\arcsin 2x + \arccos x)$

4B. $\sin\left(\arctan x - \arccos\frac{1}{2}\right)$

يمكن استخدام متطابقات المجموع والفرق لإثبات صحة المتطابقات الأخرى.

مثال 5 إثبات صحة المتطابقات متساوية القيمة

اثبت صحة $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\sin x$ متطابقة الفرق لـ sin

$= 1(\cos x) - 0(\sin x)$ $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ و $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$= \cos x$ ✔ جد ناتج الضرب.

تمرين موجه

اثبت صحة كل متطابقة متساوية القيمة باستخدام متطابقة فرق.

5A. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

5B. $\csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$

قراءة في الرياضيات

الدوال المثلثية و تمامها(co)

متساوية القيمة كلمة "co" هنا تعني "تمام". ولذا تعدّ دوال sine and cosine, tan and cotan, secant and cosecant أزواج دوال متساوية القيمة لزوايا متتامة.

يمكن استخدام متطابقات المجموع والفرق لإعادة كتابة التعابير المثلثية التي تكون إحدى الزوايا بها مضاعف $90°$ أو $\frac{\pi}{2}$ بمقياس الزاوية النصف قطرية (راديان). تسمى المتطابقة الناتجة **متطابقة اختزال** لأنها تختزل صعوبة التعبير.

مثال 6 إثبات صحة متطابقات الاختزال

اثبت صحة كل متطابقة اختزال.

a. $\sin\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos\theta$

$\sin\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\theta\cos\frac{3\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{3\pi}{2}$ — قانون المجموع لـ sin

$= \sin\theta(0) + \cos\theta(-1)$ — $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$ و $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$

$= -\cos\theta$ ✔ — بسّط

b. $\tan(x - 180°) = \tan x$

$\tan(x - 180)° = \frac{\tan x - \tan 180°}{1 + \tan x \tan 180°}$ — متطابقة المجموع لـ tan

$= \frac{\tan x - 0}{1 + \tan x(0)}$ — $\tan 180° = 0$

$= \tan x$ ✔ — بسّط

تمرين موجه

اثبت صحة كل متطابقة متساوية القيمة.

6A. $\cos(360° - \theta) = \cos\theta$

6B. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

2 حل المعادلات المثلّثية

يمكنك حل المعادلات المثلّثية باستخدام متطابقات المجموع والفرق ونفس الطرق التي استخدمتها في الدرس 4-3.

مثال 7 حل معادلة مثلّثية

حُـــلّ المعادلة $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$ في الفترة $[0, 2\pi]$.

$\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$ — المعادلة الأصلية

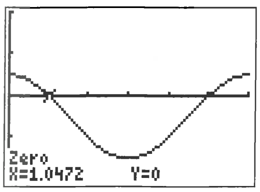
$\cos\frac{\pi}{3}\cos x - \sin\frac{\pi}{3}\sin x + \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{1}{2}$ — متطابقات المجموع و الفرق لـ cos

$\frac{1}{2}(\cos x) - \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin x) + \frac{1}{2}(\cos x) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin x) = \frac{1}{2}$ — عوّض.

$\cos x = \frac{1}{2}$ — بسّط

في الفترة $[0, 2\pi]$، $\cos x = \frac{1}{2}$ حيث $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{5\pi}{3}$.

التحقّق التمثيل البياني لـ $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \frac{1}{2}$ يتضمن أصفارًا في $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ في الفترة $[0, 2\pi]$. ✔



$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{3}$ by $[-2, 2]$ scl: 1

تمرين موجه

7. حُـــلّ المعادلة $\cos(x + \pi) - \sin(x - \pi) = 0$ في الفترة $[0, 2\pi]$.

تلميح تقني

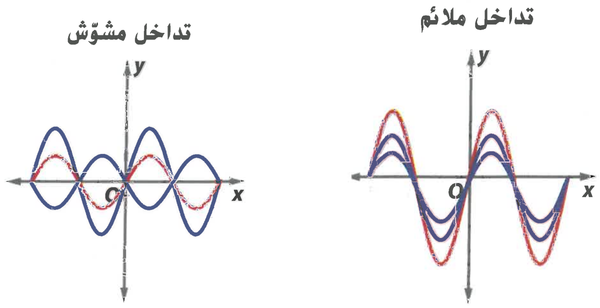
نافذة العرض عند التحقّق من إجابتك على الحاسبة البيانية تذكّر أن الفترة الواحدة لـ $y = \sin x$ أو $y = \cos x$ تكون 2π والسعة تكون 1. وهذا سيساعدك على تحديد نافذة العرض.

جد القيمة الدقيقة لكل تعبير مثلّثي. (مثال 1)

1. $\cos 75°$
2. $\sin(-210°)$
3. $\sin \frac{11\pi}{12}$
4. $\cos \frac{17\pi}{12}$
5. $\tan \frac{23\pi}{12}$
6. $\tan \frac{\pi}{12}$

7. الجهد الكهربائي يتضمن تحليل الجهد الكهربائي في مجفّف الشعر حدودًا بصيغة $\sin(nwt - 90°)$، حيث تكون n عددًا صحيحًا موجبًا و w تردد الجهد و t الزمن. استخدم متطابقة لتحويل هذا التعبير لأبسط صورة. (مثال 2)

8. **البَث** عندما يكون مجموع سعات موجتين أكبر من مجموع سعات الموجات المتراكبة، ينتج عن ذلك *تداخل ملائم*. وعندما تتجمّع الموجات المتراكبة لتكون لها سعة أصغر، يحدث *تداخل مشوّش*.



افترض أن هناك إشارتين ممثّل لهما بـــ $y = 10 \sin(2t + 30°)$ و $y = 10 \sin(2t + 210°)$. (مثال 2)

a. جد مجموع الدالتين.

b. ما نوع التداخل الذي ينتج عندما تجتمع الإشارتان الممثّل لهما بالمعادلتين؟

9. **الطقس** يمكن تمثيل درجات الحرارة المرتفعة شهريًا في دبي بالصيغة $f(x) = 31.65 \sin\left(\frac{\pi}{6}x - 2.09\right) + 52.35$، حيث x تمثّل الشهور والتي يكون فيها يناير = 1، وفبراير = 2، وهكذا. ويمكن تمثيل درجات الحرارة المنخفضة شهريًا في دبي بالصيغة $g(x) = 31.65 \sin\left(\frac{\pi}{6}x - 2.09\right) + 32.95$. (مثال 2)

a. اكتب دالة جديدة $h(x)$ عن طريق جمع الدالتين وقسمة الناتج على 2.

b. ما الذي تمثّله الدالة التي كتبتها في الجزء a؟

10. **التكنولوجيا** تَستخدِم أجهزة مساعدة المكفوفين على الحركة نفسَ فكرة السونار بالنسبة للخفّاش؛ وذلك لتمكين ذوي الإعاقة البصرية من اكتشاف الأشياء حولهم. ويمكن تمثيل الموجة الصوتية التي تنبعث من الجهاز لمريض بعينه بالصيغة $b = 30(\sin 195°)t$، حيث t تمثّل الوقت بالثواني و b تمثّل ضغط الهواء بالباسكال. (مثال 2)

a. أعد كتابة القانون بدلالة فرق قياسات زاويتين.

b. ما قياس الضغط بعد ثانية واحدة؟

جد القيمة الدقيقة لكل تعبير. (مثال 3)

11. $\dfrac{\tan 43° - \tan 13°}{1 + \tan 43° \tan 13°}$

12. $\cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{12} \sin \frac{\pi}{4}$

13. $\sin 15° \cos 75° + \cos 15° \sin 75°$

14. $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{12}$

15. $\cos 40° \cos 20° - \sin 40° \sin 20°$

16. $\dfrac{\tan 48° + \tan 12°}{1 - \tan 48° \tan 12°}$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (مثال 3)

17. $\dfrac{\tan 2\theta - \tan \theta}{1 + \tan 2\theta \tan \theta}$

18. $\cos \frac{\pi}{2} \cos x + \sin \frac{\pi}{2} \sin x$

19. $\sin 3y \cos y + \cos 3y \sin y$

20. $\cos 2x \sin x - \sin 2x \cos x$

21. $\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x$

22. $\dfrac{\tan 5\theta + \tan \theta}{\tan 5\theta \tan \theta - 1}$

23. **العلوم** تحتوي الدائرة الكهربائية على مكثّف ومستحث ومقاوم. يتم تحديد هبوط الجهد الكهربائي في المستحث بالصيغة $V_L = IwL \cos\left(wt + \frac{\pi}{2}\right)$، حيث I هو التيار الذروي، و w هو التردد، و L هو المحاثة، و t هو الوقت. استخدم متطابقة المجموع لـــcos للتعبير عن V_L بصيغة دالة $\sin wt$. (مثال 3)

اكتب كل تعبير مثلّثي بصيغة تعبير جبري. (مثال 4)

24. $\sin(\arcsin x + \arccos x)$

25. $\cos(\sin^{-1} x + \cos^{-1} 2x)$

26. $\cos\left(\sin^{-1} x - \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

27. $\sin\left(\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} - \tan^{-1} x\right)$

28. $\cos(\arctan \sqrt{3} - \arccos x)$

29. $\tan(\cos^{-1} x + \tan^{-1} x)$

30. $\tan\left(\sin^{-1} \frac{1}{2} - \cos^{-1} x\right)$

31. $\tan\left(\sin^{-1} x + \frac{\pi}{4}\right)$

اثبت صحة كل متطابقة متساوية القيمة باستخدام متطابقة فرق واحدة أو أكثر. (مثال 5)

32. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

33. $\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc x$

34. $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

اثبت صحة كل

35. $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

36. $\cos(2\pi + \theta) = \cos\theta$

37. $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

38. $\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$

39. $\cos(270^\circ - \theta) = -\sin\theta$

حُـــلّ كل من المعادلات التالية في الفترة $[0, 2\pi)$. (مثال 7)

40. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$

41. $\cos(\pi + x) + \cos(\pi + x) = 1$

42. $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 0$

43. $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2}$

44. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -2$

45. $\tan(\pi + x) + \tan(\pi + x) = 2$

اثبت صحة كل متطابقة.

46. $\tan x - \tan y = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y}$

47. $\cot\alpha - \tan\beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$

48. $\frac{(\tan u - \tan v)}{(\tan u + \tan v)} = \frac{\sin(u - v)}{\sin(u + v)}$

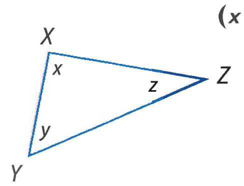
49. $2\sin a\cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$

الحاسبة البيانية مثّل كل دالة بيانيًا، وخمّن بناءً على التمثيل البياني. اثبت صحة فرضيتك جبريًا.

50. $y = \frac{1}{2}[\sin(x + 2\pi) + \sin(x - 2\pi)]$

51. $y = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

الإثبات اعتبر أن $\triangle XYZ$. اثبت كل متطابقة.
(تلميح: $x + y + z = \pi$)



52. $\cos(x + y) = -\cos z$

53. $\sin z = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

54. $\tan x + \tan y + \tan z = \tan x\tan y\tan z$

55. **حساب التفاضل والتكامل** يعبّر عن ناتج قسمة الفرق بواسطة $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

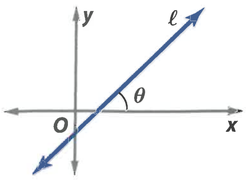
a. افترض أن $f(x) = \sin x$. اكتب تعبيرًا لناتج قسمة الفرق واكتب صيغة موسعة منه.

b. اجعل إجابتك من الجزء a مساويةً لـ y. استخدم حاسبة بيانية لتمثيل دالة القيم التالية لـ h بيانيًا: 2 و 1 و 0.1 و 0.01.

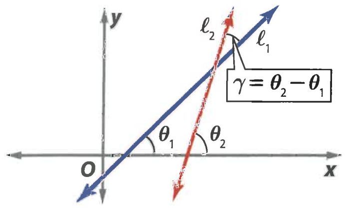
c. ما الدالة التي يشابهها التمثيل البياني في الجزء b حيث h تقترب من الصفر؟

الميل θ للمستقيم هي الزاوية التي تتكون بين محور الأفقي x الموجب والمستقيم، حيث $0^\circ < \theta < 180^\circ$.

a. اثبت أن الميل m للمستقيم ℓ الموضّح جهة اليسار تحدّده الصيغة $m = \tan\theta$.



b. افترض أن المستقيمين ℓ_1 و ℓ_2 أدناه بميل m_1 و m_2 على التوالي. اشتق قاعدة للزاوية γ التي يُكوّنها المستقيمان.



c. استخدم القاعدة التي توصلت إليها في الجزء b لإيجاد الزاوية التي يكوّنها $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ و $y = x$.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

الإثبات اثبت صحة كل متطابقة.

57. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

58. $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

59. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

60. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

61. **التبرير** استخدم متطابقة المجموع لـ sin من أجل اشتقاق متطابقة لـ $\sin(x + y + z)$ بدلالة sin and cos.

تحدٍّ إذا كانت $x = -\frac{2}{3}$ وكانت $\cos y = \frac{1}{3}$، فجد كلاًّ مما يلي إذا كان x في الربع الرابع و y في الربع الأول.

62. $\cos(x + y)$

63. $\sin(x - y)$

64. $\tan(x + y)$

65. **التبرير** فكّر في $\sin 3x\cos 2x = \cos 3x\sin 2x$.

a. جد حلول المعادلة على الفترة $[0, 2\pi]$ جبريًا.

b. دعّم إجابتك بالتمثيل البياني.

الإثبات اثبت كلًّا من متطابقات ناتج قسمة الفرق.

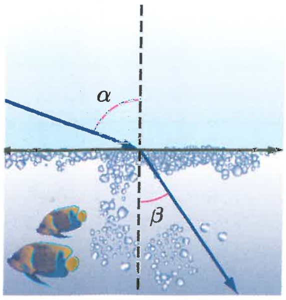
66. $\frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \sin x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\frac{\sin h}{h}$

67. $\frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} = \cos x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \sin x\frac{\sin h}{h}$

68. **الكتابة في الرياضيات** هل يمكن استخدام متطابقة المجموع أو الفرق لـ tan لحل أي من قواعد الانخفاض لـ tan؟ اشرح استنتاجك.

مراجعة شاملة

.69 **الفيزياء** وفقًا لقانون سنيل (Snell)، ترتبط زاوية دخول الضوء إلى المياه α بزاوية انتقال الضوء في المياه β بالعلاقة $\sin \alpha = 1.33 \sin \beta$. بأي زاوية تدخل حزمة ضوء إلى المياه إذا كانت تنتقل عبر المياه بزاوية 23°؟



اثبت صحة كل متطابقة.

70. $\dfrac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \sec \theta$

71. $\dfrac{\sec \theta}{\sin \theta} - \dfrac{\sin \theta}{\cos \theta} = \cot \theta$

جد القيمة الدقيقة لكل تعبير، إن وُجِد.

72. $\sin^{-1}(-1)$

73. $\tan^{-1}\sqrt{3}$

74. $\tan\left(\arcsin \frac{3}{5}\right)$

.75 **المال** افترض أنك أودعت مبلغًا أساسيًا يقدّر بـ P من الدراهم في حساب بنكي يدفع نسبة مرابحة مركّبة. إذا كانت نسبة المرابحة السنوية r (التي يعبّر عنها في صورة عدد عشري) ويُقدّم البنك مدفوعات الفائدة لعدد n مرات كل عام، فإن مبلغ المال A الذي ستحصل عليه بعد t من الأعوام تحدّده الصيغة $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$.

a. إذا كان المبلغ الأساسي ونسبة المرابحة وعدد مدفوعات الفائدة معلومة، فما نوع الدالة $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$؟ اشرح استنتاجك.

b. اكتب معادلة مبينًا مبلغ المال الذي ستحصل عليه بعد t من الأعوام إذا أودعت AED 1000 في حساب يدفع 4% نسبة مرابحة سنوية مركبة كل ثلاثة أشهر (أربع مرات في العام).

c. جد رصيد الحساب بعد 20 عامًا.

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها أصفارًا، إن وجدت.

76. $p(x) = x^4 + x^3 - 11x - 5x + 30$

77. $d(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 + 5x - 1$

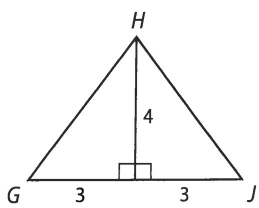
78. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 6$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

.79 **SAT/ACT** توجد 16 كرة خضراء، وكرتان حمراوان و 6 كرات صفراء في وعاء. كم عدد الكرات الصفراء التي تحتاج إلى إضافتها في الوعاء لمضاعفة احتمال اختيار كرة زجاجية صفراء؟

A 4　**B** 6　**C** 8　**D** 12　**E** 16

.80 **مراجعة** انظر الشكل الموضح أدناه. أي معادلة يمكن استخدامها لإيجاد $m\angle G$؟



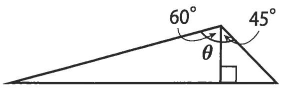
F $\sin G = \frac{3}{4}$

G $\cos G = \frac{3}{4}$

H $\cot G = \frac{3}{4}$

I $\tan G = \frac{3}{4}$

.81 جد القيمة الدقيقة لـ $\sin \theta$.



A $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

B $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

C $\dfrac{2 + \sqrt{3}}{4}$

D $\dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}$

.82 مراجعة أي مما يلي يساوي $\dfrac{\cos \theta (\cot^2 \theta + 1)}{\csc \theta}$؟

F $\tan \theta$

G $\cot \theta$

H $\sec \theta$

J $\csc \theta$

التوسع

4-4 مختبر تقنية التمثيل البياني
متطابقة الاختزال

التركيز

● استخدام تقنية التمثيل البياني والزوايا الربعية لمتطابقات الانخفاض.

تتضمن متطابقة انخفاض أخرى مجموع أو فرق قياسات إحدى الزوايا وزاوية ربعية. ويمكن توضيح ذلك بمقارنة التمثيل البياني للدوال الموجودة في دائرة الوحدة بتقنية التمثيل البياني.

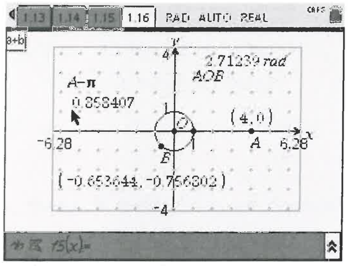
نشاط 1 استخدام دائرة الوحدة

استخدم دائرة الوحدة لتوضيح متطابقة الاختزال بيانيًا.

الخطوة 1 أضف صفحة Graphs (التمثيلات البيانية). اختر Zoom-Trig من القائمة Window، ثم اختر Show Grid (عرض شبكي) من القائمة View (عرض). من القائمة File (ملف) ضمن Tools (أدوات)، اختر Document Settings (إعدادات الملفات)، ثم اضبط Display Digits (عرض رقمي) على Float 2 (غير مقيد 2)، وفي النهاية تأكد من أن قياس الزاوية بالراديان.

الخطوة 2 اختر Points & Lines (نقاط وخطوط) ثم Point (نقطة) من القائمة. حدد النقطة عند (1, 0). بعد ذلك، اختر Shapes (أشكال)، ومن ثم Circle (دائرة) من القائمة. لرسم دائرة متمركزة عند نقطة الأصل من خلال (1, 0)، انقر على الشاشة وحدد نقطة المركز عند نقطة الأصل. حرّك المؤشر بعيدًا عن المركز، وستظهر الدائرة. توقف عندما تحصل على نصف قطر بمقدار 1 ووقوع (1, 0) في الدائرة.

الخطوة 3 حدد نقطة تجاه يمين الدائرة على المحور الأفقي x ثم قم بتسميتها بالحرف A. اختر Actions (إجراءات)، ثم Coordinatesand Equations (إحداثيات ومعادلات)، من القائمة وبعد ذلك انقر مرتين على النقطة لعرض إحداثياتها. من القائمة Construction (إنشاء)، اختر Measurement transfer (تحويل القياس). اختر الإحداثي x لـــ A والدائرة والنقطة عند (1, 0). قم بتسمية النقطة المنشأة على الدائرة بالحرف B ثم اعرض إحداثياتها.

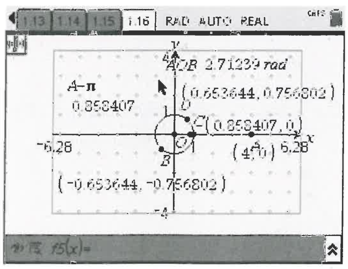


الخطوة 4 مع اعتبار أن O تمثل نقطة الأصل، قم باحتساب وكتابة قياس $\angle AOB$. اختر Text (نص) من القائمة Actions لكتابة التعبير $\pi - a$. ثم اختر Calculate (احسب) من القائمة Actions لاحتساب فرق الإحداثي x لكل من A وπ.

موقع A	$m\angle AOB$ (بالراديان)
(4, 0)	2.7124
(3, 0)	3.0708
(2, 0)	2.5708
(5, 0)	2.2123
(−2, 0)	0.5708

الخطوة 5 حرّك A بمحاذاة المحور الأفقي x، ولاحظ تأثير قياس $\angle AOB$.

الخطوة 6 من القائمة Construction، اختر Measurement transfer. اختر المحور الأفقي x وقيمة $\pi - a$.
قم بتسمية النقطة بالحرف C ثم اعرض إحداثياتها.
باستخدام Measurement transfer مجددًا، اختر الإحداثي x للنقطة C والدائرة والنقطة عند (1, 0).
قم بتسمية النقطة بالحرف D ثم اعرض إحداثياتها.



نصيحة دراسية

قياس الزاوية لا تساعد تقنية التمثيل البياني إلا في قياس الزوايا بين 0 و π.

تحليل النتائج

1A. في الخطوة 5. ما وجه ارتباط موقع A وقياس $\angle AOB$؟

1B. بمراعاة مواقع النقطتين B و D. ما متطابقة أو متطابقات الإختزال الصحيحة المقترحة من خلال هذه العلاقة؟

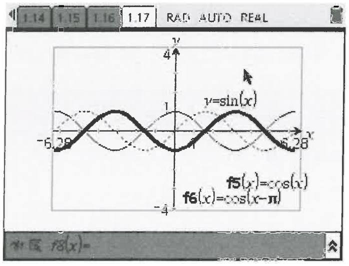
1C. **التخمين** في حالة تغيير التعبير $\pi - a$ إلى $\pi + a$، فما متطابقات الإختزال التي تعتقد بأنها ستكون النتيجة؟

نشاط 2 استخدام التمثيلات البيانية

استخدم تمثيلات بيانية لتحديد الدوال المثلثية المتساوية.

الخطوة 1 افتح صفحة Graphs (تمثيلات بيانية) جديدة. اختر Zoom-Trig من القائمة Window.

الخطوة 2 مثّل بيانيًا $f(x) = \cos x$ و $f(x) = \cos(x - \pi)$ و $f(x) = \sin x$. باستخدام خاصية Attributes (سمات) من القائمة Actions (إجراءات)، مع ضبط سمك الخط $f(x) = \cos(x - \pi)$ إلى متوسط ونمط الخط $f(x) = \sin x$ إلى مُنقّط.



الخطوة 3 استخدم إزاحات أو انعكاسات أو تغيير الأبعاد (التمدّد) لتحويل $f(x) = \sin x$ بحيث تتطابق التمثيلات البيانية مع $f(x) = \cos x$. اختر التمثيل البياني ثم اسحبه على $f(x) = \cos x$. وأثناء تحريك التمثيل البياني، ستتغير دالته على الشاشة.

الخطوة 4 استخدم إزاحات أو انعكاسات أو تغيير الأبعاد (التمدّد) لتحويل $f(x) = \cos(x - \pi)$ وبالتالي تتطابق التمثيلات البيانية مع التمثيلين البيانيين الآخرين. مجددًا، أثناء تحريك التمثيل البياني، ستتغير دالته على الشاشة.

تحليل النتائج

2A. اكتب المتطابقة الناتجة عن تحويلك لـ $f(x) = \sin x$ في الخطوة رقم 3. مثّل الدوال بيانيًا لتأكيد متطابقتك.

2B. اكتب المتطابقة الناتجة عن تحويلك لـ $f(x) = \cos(x - \pi)$ في الخطوة رقم 3. مثّل الدوال بيانيًا لتأكيد متطابقتك.

2C. **التخمين** ما الذي يقترحه انعكاس التمثيل البياني لغرض تطوير متطابقة؟ إزاحة؟

تمارين

استخدم دائرة الوحدة لكتابة متطابقة تنتمي إلى التعابير المعطاة. تحقق من صحة متطابقتك بالتمثيل البياني.

1. $\cos(90° - x), \sin x$

2. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right), \sin x$

اكتب الدالة المثلثية التي تكمل كل متطابقة.

3. $\cos x =$ ________ $\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

4. $\cot x =$ ________ $(x + 90°)$

5. $\sec x =$ ________ $(x - 180°)$

6. $\csc x =$ ________ $\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

استخدم التحويلات لإيجاد قيمة a لكل تعبير مما يلي.

7. $\sin ax = 2 \sin x \cos x$

8. $\cos 4ax = \cos^2 x - \sin^2 x$

9. $a \sin^2 x = 1 - \cos 2x$

10. $1 + \cos 6ax = 2 \cos^2 x$

4-5 متطابقات ضعف الزاوية وتحويل ناتج الضرب إلى مجموع

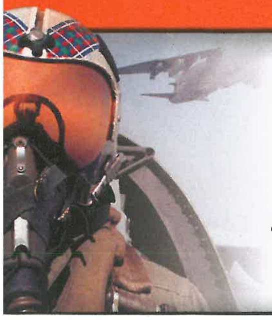
:: السابق

- لقد فهمتَ بإثبات واستخدام متطابقات المجموع والفرق.

:: الحالي

1. استخدام متطابقات ضعف الزاوية واختصار الأس و نصف الزاوية لإيجاد قيمة تعابير مثلثية وحل معادلات مثلثية.
2. استخدام متطابقات تحويل ناتج الضرب لمجموع لإيجاد قيمة تعابير مثلثية وحل معادلات مثلثية.

:: لماذا؟



- يمكن وصف سرعة طيران إحدى الطائرات بواسطة عدد *الماخ*؛ وهو نسبة سرعة الطائرة إلى سرعة الصوت ويؤدي تجاوز سرعة الصوت إلى إحداث موجة صادمة مخروطية الشكل خلف الطائرة. وترتبط الزاوية θ الموجودة عند رأس هذا المخروط بعدد الماخ وبصف الحرف M سرعة الطائرة بواسطة معادلة نصف الزاوية $\frac{1}{M} = \frac{\theta}{2}$.

1 استخدام متطابقات ضعف الزاوية

بافتراض أن α وβ كليهما مساوٍ لـــ θ في كل متطابقات مجموع الزوايا التي تعلمتَها في الدرس السابق، يمكنك اشتقاق متطابقات ضعف الزاوية التالية.

المفهوم الأساسي متطابقات ضعف الزاوية

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

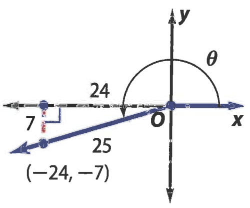
الإثبات متطابقة ضعف الزاوية لـــ sine

$\sin 2\theta = \sin(\theta+\theta)$	$2\theta = \theta + \theta$
$= \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta$	$\alpha = \beta = \theta$ متطابقة المجموع لـــ sine
$= 2\sin\theta\cos\theta$	بسّط

ستثبتُ متطابقات ضعف الزاوية لـــ cos ولـــ tan في التمارين 63-65.

مثال 1 إيجاد قيمة التعابير التي تتضمن أضعاف الزوايا

إذا كان $\sin\theta = -\frac{7}{25}$ في الفترة $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$، فجد $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$.



بما أن $\sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{7}{25}$ في الفترة $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$. فإن نقطة واحدة على ضلع الإنتهاء لـــ θ سيكون لها الإحداثي y=-7 ومسافة 25 وحدة من الأصل، كما هو موضح. الإحداثي x لهذه النقطة هو $-\sqrt{25^2-7^2}$ أو 24−. باستخدام هذه النقطة، سنجد أن

$\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{24}{25}$ و $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{7}{24}$

استخدم هذه القيم ومتطابقات ضعف الزاوية لـــ sin و لـــ cos لإيجاد sin 2θ و cos 2θ. ثم جد tan 2θ باستخدام أي من متطابقة ضعف الزاوية لـــ tan أو تعريف الـــ tan.

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$= 2\left(-\frac{7}{25}\right)\left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{336}{625}$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$= 2\left(-\frac{24}{25}\right)^2 - 1 = \frac{527}{625}$

الطريقة 1

$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$= \dfrac{2\left(\frac{7}{24}\right)}{1-\left(\frac{7}{24}\right)^2} = \frac{336}{527}$

الطريقة 2

$\tan 2\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$

$= \dfrac{\frac{336}{625}}{\frac{527}{625}} = \frac{336}{527}$

تمرين موجه

1. إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{5}$ في الفترة $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ فجد sin 2θ وcos 2θ وtan 2θ.

مثال 2 حل معادلة باستخدام متطابقة أضعاف الزوايا

حُـــلّ المعادلة: $\sin 2\theta - \sin \theta = 0$ في الفترة $[0, 2\pi]$.

استخدم متطابقة ضعف الزاوية لـــ sin لإعادة كتابة المعادلة بصفتها دالة لزاوية فردية.

$\sin 2\theta - \sin \theta = 0$	المعادلة الأصلية
$2 \sin \theta \cos \theta - \sin \theta = 0$	متطابقة ضعف الزاوية sin
$\sin \theta (2 \cos \theta - 1) = 0$	العامل.
$\sin \theta = 0$ أو $2 \cos \theta - 1 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري

$\theta = 0$ أو π $\qquad \cos \theta = 0.5$

$\theta = 0, \pi$ أو $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

الحلول الموجودة في الفترة $[0, 2\pi]$ هي $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$

تمرين موجه حُلّ كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$.

2A. $\cos 2\alpha = -\sin^2 \alpha$

2B. $\tan 2\beta = 2 \tan \beta$

نصيحة دراسية

أكثر من متطابقة واحدة لاحظ وجود ثلاث متطابقات مرتبطة مع $\cos 2\theta$. بينما توجد متطابقات أخرى يمكن أن تكون مرتبطة أيضًا مع $\sin 2\theta$ و$\tan 2\theta$. وتلك المرتبطة مع $\cos 2\theta$ يجب حفظها نظرًا لاستخدامها بمعدل أكثر شيوعًا.

يمكن استخدام متطابقات ضعف الزاوية لاشتقاق متطابقات اختصار الأس أدناه. تساهم هذه المتطابقات في تيسير تنفيذ عمليات للدوال مرتبطة بحساب التفاضل والتكامل مثل $y = \cos^2 x$ بدرجة أكبر.

المفهوم الأساسي متطابقات اختصار الأس

$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \qquad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \qquad \tan^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$

الإثبات متطابقة اختصار الأس لـــ sine

$\frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \frac{1 - (1 - 2\sin^2 \theta)}{2}$	متطابقة ضعف الزاوية Cosine لـــ cos
$= \frac{2 \sin^2 \theta}{2}$	اطرح.
$= \sin^2 \theta$	بسّط

ستُثبت صحة متطابقات الاختصار الأسي لـــ cos و لـــ tan في التمرينين 82 و83.

مثال 3 استخدام متطابقة لاختصار الأس

أعد كتابة $\sin^4 x$ في حدود بها أس لا يكون أكبر من 1.

$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$	$(\sin^2 x)^2 = \sin^4 x$
$= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2$	متطابقة الاختصار الأسي sin
$= \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}$	جد ناتج الضرب.
$= \frac{1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}}{4}$	متطابقة اختصار أس cos
$= \frac{2 - 4\cos 2x + 1 + \cos 4x}{8}$	مقام مشترك
$= \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2x + \cos 4x)$	عامل.

تمرين موجه

أعد كتابة كل تعبير بشرط عدم زيادة قيمة الأس عن 1.

3A. $\cos^4 x$

3B. $\sin^3 \theta$

الربط بتاريخ الرياضيات

فرانسوا فييت

(1540–1603)

وُلد في قرية تقع في غرب فرنسا. وقد تم استدعاؤه في باريس لفك شفرة رسائل للملك هنري الثالث. ونظرًا لمهارته الفائقة في استخدام المعادلات، استخدم متطابقات وضعف الزاوية لـــ sin and cos لاستخلاص متطابقات الزاوية الثلاثية والرباعية والخماسية.

مثال 4 حل معادلة باستخدام متطابقة اختصار الأس

حُـــلّ المعادلة: $\cos^2 x - \cos 2x = \frac{1}{2}$.

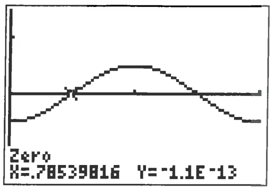
جد الحل جبريًا

$\cos^2 x - \cos 2x = \frac{1}{2}$	المعادلة الأصلية
$\frac{1+\cos 2x}{2} - \cos 2x = \frac{1}{2}$	متطابقة اختصار أس cos
$1 + \cos 2x - 2\cos 2x = 1$	اضرب كل طرف في 2.
$\cos 2x - 2\cos 2x = 0$	اطرح 1 من كل طرف.
$-\cos 2x = 0$	اطرح الحدود المتشابهة.
$\cos 2x = 0$	اضرب كل طرف في 1-.
$2x = \frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$	حلول ضعف الزاوية في $[0, 2\pi]$
$x = \frac{\pi}{4}$ أو $\frac{3\pi}{4}$	اقسم كل طرف على 2.

يتضمن التمثيل البياني لـــ $y = \cos 2x$ دورة π. لذا فالحلول هي $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ أو $\frac{3\pi}{4} + n\pi$ ، $n \in \mathbb{Z}$

دعم بالتمثيل البياني

التمثيل البياني لـــ $y = \cos^2 x - \cos 2x - \frac{1}{2}$ يتضمن أصفارًا في $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ في الفترة $[0, \pi]$. ✓



$[0, \pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-1.5, 1.5]$ scl: 1

تمرين موجه حُـــلّ كل معادلة.

4A. $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \frac{1}{2}$

4B. $\sin^2 3\beta = \sin^2 \beta$

باستبدال θ بـ $\frac{\theta}{2}$ في كل متطابقة من متطابقات اختصار الأس، يمكنك اشتقاق كل متطابقة نصف الزاوية مما يلي. تُحدَّد علامة كل متطابقة تتضمن الرمز ± بالتحقق من الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء $\frac{\theta}{2}$.

انتبه!

تحديد العلامات لتحديد الإشارة المناسبة عند استخدام متطابقة نصف زاوية، تحقق من الربع الذي يقع فيه $\frac{\theta}{2}$ ، وليس الربع الذي يقع فيه θ.

المفهوم الأساسي متطابقات نصف الزاوية

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

الإثبات متطابقة نصف الزاوية لـــ cosine

$\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\left(2 \times \frac{\theta}{2}\right)}{2}}$	أعد كتابة θ بصيغة $\frac{\theta}{2} \times 2$.
$= \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$	عوّض $x = \frac{\theta}{2}$.
$= \pm\sqrt{\cos^2 x}$	متطابقة اختصار أس cosine
$= \cos x$	بسّط.
$= \cos \frac{\theta}{2}$	عوّض.

ستُثبت متطابقات نصف الزاوية لـــ cos والـــ tan في التمارين 68-66.

مثال 5 إيجاد قيمة تعبير يتضمن نصف الزاوية

جد قيمة $\cos 112.5°$.

لاحظ أن $112.5°$ تساوي نصف $225°$. لذا، استخدم متطابقة نصف الزاوية لـــ cosine، مع ملاحظة أنه بوقوع $112.5°$ في الربع الثاني، فإن cosine سيكون سالبًا.

$$\cos 112.5° = \cos \frac{225°}{2} \qquad 112.5° = \frac{225°}{2}$$

$$= -\sqrt{\frac{1 + \cos 225°}{2}} \qquad \text{متطابقة نصف الزاوية cosine (زاوية الربع الثاني)}$$

$$= -\sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} \qquad \cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} \qquad \text{اطرح ثم اقسم.}$$

$$= -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{4}} \text{ أو } -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \qquad \text{خاصية ناتج القسمة للجذور التربيعية}$$

التحقق استخدم الآلة الحاسبة لدعم إثبات أن $\cos 112.5° = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

$\cos 112.5° \approx -0.3826834324$ و $\cos 112.5° = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \approx -0.3826834324$ ✓

تمرين موجه

جد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

5A. $\sin 75°$

5B. $\tan \frac{7\pi}{12}$

نصيحة دراسية

متطابقات نصف زاوية الـ tan

عند إيجاد قيمة دالة tan لقيم نصف الزاوية، من الأسهل عادة استخدام نموذج متطابقة نصف زاوية tan

$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$ نظرًا لأن المقام يتضمن حدًا واحدًا فقط.

تذكّر أنه يمكنك استخدام متطابقات المجموع والفروق لإيجاد حل للمعادلات. ويمكن استخدام متطابقات نصف الزاوية أيضًا لإيجاد حل للمعادلات.

مثال 6 حل معادلة باستخدام متطابقة نصف الزاوية

حُــــلّ المعادلة $\sin^2 x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$ في الفترة $[0, 2\pi]$.

$$\sin^2 x = 2\cos^2 \frac{x}{2} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$\sin^2 x = 2\left(\pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}\right)^2 \qquad \text{متطابقة نصف الزاوية cosine}$$

$$\sin^2 x = 2\left(\frac{1 + \cos x}{2}\right) \qquad \text{بسّط.}$$

$$\sin^2 x = 1 + \cos x \qquad \text{جد ناتج الضرب.}$$

$$1 - \cos^2 x = 1 + \cos x \qquad \text{متطابقة فيثاغورس}$$

$$-\cos^2 x - \cos x = 0 \qquad \text{اطرح 1 من كل طرف.}$$

$$\cos x\,(-\cos x - 1) = 0 \qquad \text{حلل إلى العوامل.}$$

$\cos x = 0$ أو $-\cos x - 1 = 0$ — خاصية ناتج الضرب الصفري

$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ أو $\cos x = -1$؛ لذا، $x = \pi$. — حلول لـ $[0, 2\pi]$

الحلول الموجودة في الفترة $[0, 2\pi]$ هي $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

تمرين موجه

حُــــلّ كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$.

6A. $2\sin^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1 + \sin x$

6B. $8\tan \frac{x}{2} + 8\cos x \tan \frac{x}{2} = 1$

2 استخدام متطابقات تحويل ناتج الضرب إلى مجموع

لاستخدام دوال مثل $y = \cos 5x \sin 3x$ في حساب التفاضل والتكامل، ستحتاج إلى تطبيق إحدى المتطابقات التالية لتحويل ناتج الضرب إلى مجموع.

المفهوم الأساسي متطابقات تحويل ناتج الضرب إلى مجموع

$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$

$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

الإثبات متطابقة تحويل ناتج الضرب إلى مجموع لـ $\sin \alpha \cos \beta$

$\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$ الطرف الأكثر تعقيدًا في المتطابقة

$= \frac{1}{2}(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)$ متطابقات المجموع والفروق

$= \frac{1}{2}(2 \sin \alpha \cos \beta)$ اجمع الحدود المتشابهة.

$= \sin \alpha \cos \beta$ جد ناتج الضرب.

ستثبت المتطابقات الثلاث المتبقية لتحويل ناتج الضرب لمجموع في التمارين 84-86.

نصيحة دراسية

الإثبات تذكّر العمل على حل الطرف الأكثر تعقيدًا أولاً عند إثبات هذه المتطابقات.

مثال 7 استخدام متطابقة لكتابة ناتج الضرب في صيغة مجموع أو فرق

أعد كتابة $\cos 5x \sin 3x$ في صيغة مجموع أو فرق.

$\cos 5x \sin 3x = \frac{1}{2}[\sin(5x+3x) - \sin(5x-3x)]$ متطابقة تحويل ناتج الضرب إلى مجموع

$= \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x)$ بسّط

$= \frac{1}{2}\sin 8x - \frac{1}{2}\sin 2x$ خاصية التوزيع

تمرين موجه أعد كتابة كل ناتج ضرب في صيغة مجموع أو فرق.

7A. $\sin 4\theta \cos \theta$

7B. $\sin 7x \sin 6x$

تتوافق متطابقات تحويل ناتج الضرب لمجموع هذه مع متطابقات تحويل المجموع لناتج الضرب.

المفهوم الأساسي متطابقات تحويل المجموع لناتج ضرب

$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

الإثبات متطابقة تحويل المجموع لناتج ضرب لـ $\sin \alpha + \sin \beta$

$2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$= 2 \sin x \cos y$ استخدم التعويض في $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ و $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$

$= 2\left\{\frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]\right\}$ متطابقة تحويل ناتج الضرب لمجموع

$= \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ استخدم التعويض وبسّط.

$= \sin\left(\frac{2\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\beta}{2}\right)$ اجمع الكسور.

$= \sin \alpha + \sin \beta$ بسّط.

ستثبت المتطابقات الثلاث المتبقية لتحويل المجموع لناتج الضرب في التمارين 87-89.

مثال 8 استخدام متطابقات تحويل ناتج الضرب إلى المجموع أو المجموع إلى ناتج الضرب

جد قيمة $\sin \frac{\pi}{12} + \sin \frac{5\pi}{12}$.

$\sin \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} = 2 \sin \left(\frac{\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}}{2}\right) \cos \left(\frac{\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}}{2}\right)$ متطابقة تحويل المجموع إلى ناتج الضرب

$= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6}$ بسّط

$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}}{2}$ بسّط

تمرين موجه

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

8A. $3 \cos 37.5° \cos 187.5°$

8B. $\cos \frac{7\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}$

ويمكنك أيضًا استخدام متطابقات تحويل المجموع إلى ناتج ضرب لإيجاد الحل لبعض المعادلات المثلثية.

مثال 9 حل المعادلة باستخدام متطابقة تحويل المجموع إلى ناتج الضرب

حُـــلّ المعادلة: $\cos 4x + \cos 2x = 0$.

جد الحل جبريًا

$\cos 4x + \cos 2x = 0$ المعادلة الأصلية

$2 \cos \left(\frac{4x + 2x}{2}\right) \cos \left(\frac{4x - 2x}{2}\right) = 0$ متطابقة تحويل المجموع إلى ناتج الضرب لـ cosine

$(2 \cos 3x)(\cos x) = 0$ بسّط

اجعل كل عامل يساوي صفرًا مع إيجاد حلول في الفترة $[0, 2\pi]$.

مجموعة العامل الثاني تساوي 0 $\cos x = 0$

حلول في $[0, 2\pi]$ $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

مجموعة العامل الأول تساوي 0 $2 \cos 3x = 0$

اقسم كل طرف على 2. $\cos 3x = 0$

حلول أضعاف الزاوية* في $[0, 2\pi]$ $3x = \frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$

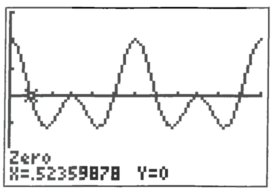
اقسم كل حل على 3. $x = \frac{\pi}{6}$ أو $\frac{\pi}{2}$

الفترة الخاصة بـ $y = \cos 3x$ هي $\frac{2\pi}{3}$، إذًا الحلول هي

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n$ $\quad \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $\quad \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}n$ أو $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

دعم بالتمثيل البياني

التمثيل البياني لـ $y = \cos 4x + \cos 2x$ يتضمن أصفارًا في $\frac{\pi}{6}$، $\frac{\pi}{2}$، $\frac{5\pi}{6}$، $\frac{7\pi}{6}$، $\frac{3\pi}{2}$، و$\frac{11\pi}{6}$ في الفترة $[0, 2\pi]$. ✓



$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{6}$ by $[-3, 3]$ scl: 1

> **انتبه!**
> **فترات الدوال المثلثية لزوايا متعددة** تذكّر ما تعلمته من الدروس السابقة أن فترات $y = \sin kx$ و $y = \cos kx$ هي $\frac{2\pi}{k}$، وليس 2π.

تمرين موجه

حُـــلّ كل من المعادلات التالية.

9A. $\sin x + \sin 5x = 0$

9B. $\cos 3x - \cos 5x = 0$

تمارين

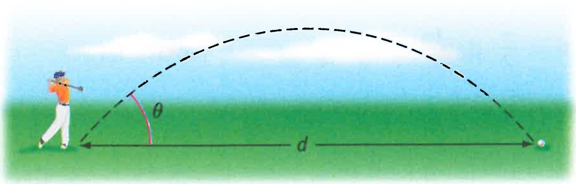
جد قيمة $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ للقيمة والفترة الموضحتين. (مثال 1)

1. $\cos\theta = \frac{3}{5}, (270°, 360°)$
2. $\tan\theta = \frac{8}{15}, (180°, 270°)$
3. $\cos\theta = -\frac{9}{41}, (90°, 180°)$
4. $\sin\theta = -\frac{7}{12}, \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
5. $\tan\theta = -\frac{1}{2}, \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
6. $\tan\theta = \sqrt{3}, \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
7. $\sin\theta = \frac{4}{5}, \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
8. $\cos\theta = -\frac{5}{13}, \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

حُلّ كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi)$. (مثال 2)

9. $\sin 2\theta = \cos\theta$
10. $\cos 2\theta = \cos\theta$
11. $\cos 2\theta - \sin\theta = 0$
12. $\tan 2\theta - \tan 2\theta \tan^2\theta = 2$
13. $\sin 2\theta \csc\theta = 1$
14. $\cos 2\theta + 4\cos\theta = -3$

15. **رياضة الجولف** تم ضرب كرة جولف بسرعة ابتدائية تبلغ 88 m/s. ويتم قياس مسافة تحرك الكرة بالصيغة $d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{9.8}$، حيث يمثل v_0 المسافة الإبتدائية، بينما يمثل θ الزاوية التي يحدثها مسار الكرة في الملعب، و 9.8 هي التسارع بالمتر في الثانية المربعة. (مثال 2)



a. إذا تحركت الكرة مسافة 242 ft. فما مقدار θ بالنسبة لأقرب زاوية؟

b. استخدم متطابقة ضعف الزاوية لإعادة كتابة المعادلة لـ d.

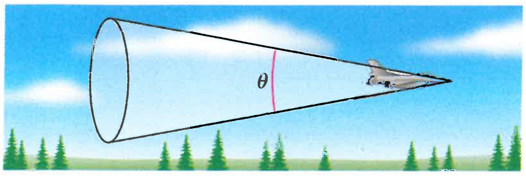
أعد كتابة كل تعبير في حدود بها أس لا يكون أكبر من 1. (مثال 3)

16. $\cos^3\theta$
17. $\tan^3\theta$
18. $\sec^4\theta$
19. $\cot^3\theta$
20. $\cos^4\theta - \sin^4\theta$
21. $\sin^2\theta\cos^3\theta$
22. $\sin^2\theta - \cos^2\theta$
23. $\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}$

حُلّ كل من المعادلات التالية. (مثال 4)

24. $1 - \sin^2\theta - \cos 2\theta = \frac{1}{2}$
25. $\cos^2\theta - \frac{3}{2}\cos 2\theta = 0$
26. $\sin^2\theta - 1 = \cos^2\theta$
27. $\cos^2\theta - \sin\theta = 1$

28. **عدد الماخ** ترتبط الزاوية θ الموجودة عند رأس الموجة الصادمة مخروطية الشكل، التي أحدثتها إحدى الطائرات مخترقة الحاجز الصوتي، بعدد الماخ M والذي يصف سرعة الطائرة بواسطة معادلة نصف الزاوية $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{M}$. (مثال 5)



a. عبّر عن عدد الماخ للطائرة استنادًا إلى cosine.

b. استخدم التعبير الموجود في الجزء a لإيجاد عدد الماخ لطائرة ما إذا كان $\cos\theta = \frac{4}{5}$.

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

29. $\sin 67.5°$
30. $\cos\frac{\pi}{12}$
31. $\tan 157.5°$
32. $\sin\frac{11\pi}{12}$

حُلّ كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi)$. (مثال 6)

33. $\sin\frac{\theta}{2} + \cos\theta = 1$
34. $\tan\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta}{2}$
35. $2\sin\frac{\theta}{2} = \sin\theta$
36. $1 - \sin^2\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2} = \frac{3}{4}$

أعد كتابة كل ناتج ضرب في صيغة مجموع أو فرق. (مثال 7)

37. $\cos 3\theta \cos\theta$
38. $\cos 12x \sin 5x$
39. $\sin 3x \cos 2x$
40. $\sin 8\theta \sin\theta$

جد قيمة كل تعبير مما يلي. (مثال 8)

41. $2\sin 135° \sin 75°$
42. $\cos\frac{7\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}$
43. $\frac{2}{3}\sin 172.5° \sin 127.5°$
44. $\sin 142.5° \cos 352.5°$
45. $\sin 75° + \sin 195°$
46. $2\cos 105° + 2\cos 195°$
47. $3\sin\frac{17\pi}{12} - 3\sin\frac{\pi}{12}$
48. $\cos\frac{13\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12}$

حُلّ كل من المعادلات التالية. (مثال 9)

49. $\cos\theta - \cos 3\theta = 0$
50. $2\cos 4\theta + 2\cos 2\theta = 0$
51. $\sin 3\theta + \sin 5\theta = 0$
52. $\sin 2\theta - \sin\theta = 0$
53. $3\cos 6\theta - 3\cos 4\theta = 0$
54. $4\sin\theta + 4\sin 3\theta = 0$

حوّل كل تعبير لأبسط ...

55. $\sqrt{\dfrac{1+\cos 6x}{2}}$ **56.** $\sqrt{\dfrac{1-\cos 16\theta}{2}}$

اكتب كل تعبير في صيغة مجموع أو فرق.

57. $\cos(a+b)\cos(a-b)$ **58.** $\sin(\theta-\pi)\sin(\theta+\pi)$

59. $\sin(b+\theta)\cos(b+\pi)$ **60.** $\cos(a-b)\sin(b-a)$

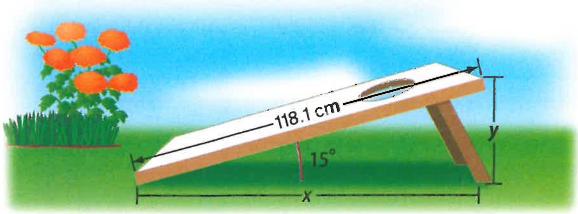
61. خرائط الإسقاط المركاتوري هو إسقاط مسطح للكرة الأرضية تزداد فيه المسافة بين خطوط العرض مع بُعدها عن خط الاستواء.

تتضمن عملية احتساب نقطة ما على الإسقاط المركاتوري التعبير $\tan\left(45° + \dfrac{\ell}{2}\right)$، حيث يمثل ℓ خط عرض النقطة.

a. اكتب التعبير بدلالة $\sin \ell$ و $\cos \ell$.

b. جد قيمة هذا التعبير إذا كان $\ell = 60°$.

62. لعبة التصويب BEAN BAG TOSS قام علي بإعداد هيكل للعبة التصويب كما هو موضح في الصورة أدناه.



a. كم سيبلغ المقدار الدقيق لبُعد الحافة الخلفية للوحة عن الأرضية؟

b. كم سيستغرق الإعداد بالضبط؟

الإثبات اثبت صحة كل متطابقة.

63. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ **64.** $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

65. $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ **66.** $\sin\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$

67. $\tan\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ **68.** $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

اثبت صحة كل متطابقة باستخدام متطابقات الاختصار الأسي ثم تأكد مجددًا باستخدام متطابقات تحويل ناتج الضرب لمجموع.

69. $2\cos^2 5\theta - 1 = \cos 10\theta$

70. $\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = \cos 4\theta$

... cosine لزوايا متعددة بها أس لا يكون أكبر من 1.

71. $\sin^6\theta$ **72.** $\sin^8\theta$

73. $\cos^7\theta$ **74.** $\sin^4\theta\cos^4\theta$

75. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستعمل على استكشاف كيفية استخدام التمثيلات البيانية للدالات لإيجاد المتطابقات.

a. التمثيل البياني استخدم الحاسبة البيانية لتمثيل $f(x) = 4\left(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{4} - \cos\theta\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$.

b. التحليل اكتب $h(x)$ كدالة sin تعبّر عن التمثيل البياني لـ $f(x)$. ثم اثبت صحة $f(x) = h(x)$ جبريًا.

c. التمثيل البياني استخدم حاسبة بيانية لتمثيل $g(x) = \cos^2\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$ في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$.

d. التحليل اكتب $k(x)$ كدالة cos تعبّر عن التمثيل البياني لـ $g(x)$. ثم اثبت صحة $g(x) = k(x)$ جبريًا.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

76. **تحدٍّ** اثبت صحة المتطابقة التالية.

$$\sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\sin\theta = \sin\theta$$

التبرير فكّر في وجود زاوية داخل دائرة الوحدة. حدد أي ربع ستقع فيه ضعف الزاوية ونصف الزاوية إذا كان ضلع الإنتهاء للزاوية في كل ربع.

77. I **78.** II **79.** III

تحدٍّ اثبت صحة كل متطابقة.

80. $\sin 4\theta = 4\sin\theta\cos\theta - 8\sin^3\theta\cos\theta$

81. $\cos 4\theta = 1 - 8\sin^2\theta\cos^2\theta$

الإثبات اثبت صحة كل متطابقة.

82. $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

83. $\tan^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$

84. $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

85. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

86. $\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$

87. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

88. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

89. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

90. **الكتابة في الرياضيات** صِف الخطوات التي قد تستخدمها لإيجاد القيمة الدقيقة لـ $\cos 8\theta$ إذا كان $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

مراجعة شاملة

جد القيمة الدقيقة لكل تعبير مثلّثي مما يلي.

91. $\cos \frac{\pi}{12}$
92. $\cos \frac{19\pi}{12}$
93. $\sin \frac{5\pi}{6}$
94. $\sin \frac{13\pi}{12}$
95. $\cos \left(-\frac{7\pi}{6}\right)$
96. $\sin \left(-\frac{7\pi}{12}\right)$

97. **زراعة الحدائق** تنتظر رنا اليوم الأول من فصل الربيع **حيث** ستكون ساعات النهار 14 ساعة من أجل بدء زراعة حديقة الزهور. يمكن تمثيل عدد ساعات النهار H في بلدتها بالصيغة $H = 11.45 + 6.5 \sin(0.0168d - 1.333)$. حيث يمثل d يوم من أيام العام، و$d = 1$ يمثل 1 يناير، و$d = 2$ يمثل 2 يناير وهكذا. في أي الأيام ستبدأ رنا في زراعة الحديقة؟

جد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي. إذا لم تكن مُعرَّفة فاكتب *غير مُعرَّفة*.

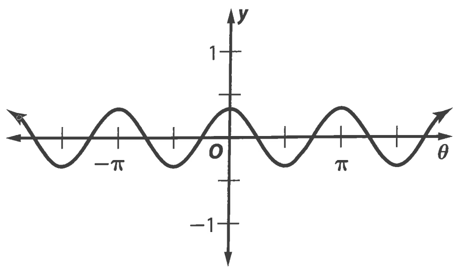
98. $\csc \left(-\frac{\pi}{3}\right)$
99. $\tan 210°$
100. $\sin \frac{19\pi}{4}$
101. $\cos(-3780°)$

مثِّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والمدى ونقاط التقاطع والسلوك الطرفي والاتصال، و فترات تزايد أو تناقص الدالة.

102. $f(x) = -\frac{1}{5}x^{\frac{2}{3}}$
103. $f(x) = 4x^{\frac{5}{4}}$
104. $f(x) = -3x^{6}$
105. $f(x) = 4x^{5}$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

106. **مراجعة** حدد المعادلة الخاصة بالتمثيل البياني.



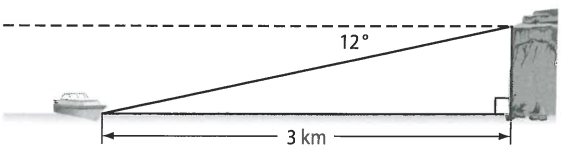
A $y = 3 \cos 2\theta$

B $y = \frac{1}{3} \cos 2\theta$

C $y = 3 \cos \frac{1}{2}\theta$

D $y = \frac{1}{3} \cos \frac{1}{2}\theta$

107. **مراجعة** من نقطة مراقبة على كهف موجود أعلى البحيرة، تبلغ زاوية الانخفاض لقارب على المياه 12°. وعلمًا بأن القارب يبعُد عن الشاطئ بمقدار 3 km أدنى المنحدر الصخري مباشرة. فما ارتفاع المنحدر الصخري بدءًا من سطح المياه وانتهاءً بنقطة المراقبة؟



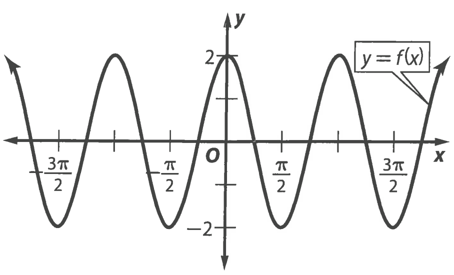
F $\frac{3}{\sin 12°}$

G $\frac{3}{\tan 12°}$

H $\frac{3}{\cos 12°}$

J $3 \tan 12°$

108. **إجابة حرة** استخدم التمثيل البياني للإجابة على كل مما يلي.



a. اكتب دالة بالصيغة $f(x) = a \cos(bx + c) + d$ تتوافق مع التمثيل البياني.

b. أعد كتابة $f(x)$ كدالة sin.

c. أعد كتابة $f(x)$ كدالة cos لزاوية فردية.

d. إيجاد جميع حلول $f(x) = 0$.

e. كيف ترتبط الحلول التي وجدتها في الجزء d بالتمثيل البياني الخاص بـ $f(x)$؟

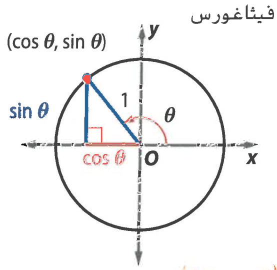
دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

المتطابقات المثلثية (الدرس 4-1)

- المتطابقات المثلثية هي متطابقات تتضمن دوال مثلثية ويمكن استخدامها لإيجاد قيم مثلثية.
- يمكن تحويل التعابير المثلثية إلى أبسط صورة بكتابة التعبير بدلالة إحدى الدوال المثلثية أو بدلالة sine and cosine.
- أكثر متطابقة مثلثية شيوعًا هي متطابقة فيثاغورس $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.



إثبات صحة المتطابقات المثلثية (الدرس 4-2)

- ابدأ بالطرف الأكثر تعقيدًا من المتطابقة واعمل على تحويله إلى الطرف الأسهل.
- استخدم المتطابقات العكسية ومتطابقات ناتج القسمة ومتطابقات فيثاغورس وغيرها من المتطابقات المثلثة الأساسية.
- استخدم عمليات جبرية مثل جمع الكسور، أو إعادة كتابة الكسور في صيغة مجموع أو فروق، أو إيجاد ناتج ضرب التعابير، أو تحليل التعابير الى العوامل.
- حوّل مقام بالصيغة $1 \pm u$ أو $u \pm 1$ إلى حد فردي باستخدام متطابقة المُرافق وفيثاغورس الخاصة به.
- اعمل على كل طرف بصورة منفصلة للوصول إلى تعبير مشترك.

حل معادلات مثلثية (الدرس 4-3)

- تقنيات جبرية يمكن استخدامها لحل معادلات مثلثية تتضمن عزل التعبير المثلثي، والحصول على الجذر التربيعي لكلا الطرفين، والتحليل إلى العوامل.
- يمكن استخدام متطابقات مثلثية لحل معادلات مثلثية بواسطة كتابة المعادلة باستخدام دالة مثلثية فردية أو بواسطة تربيع كل طرف للحصول على المتطابقة.

متطابقات المجموع والفروق (الدرس 4-4)

- يمكن استخدام متطابقات المجموع والفروق لإيجاد القيمة الدقيقة للدوال المثلثية لزوايا غير معروفة.
- يمكن أيضًا استخدام متطابقات المجموع والفروق لإعادة كتابة تعابير مثلثية في صورة تعبير جبري.

متطابقات ضعف الزوايا ومتطابقات تحويل ناتج الضرب إلى مجموع (الدرس 4-5)

- يمكن استخدام المتطابقات المثلثية لإيجاد قيم التعابير التي لا يمكن إيجاد قيمتها بطريقة أخرى.

المفردات الأساسية

دالة الزوايا المتتامة (cofunction)

متطابقة الفرق (difference identity)

متطابقة ضعف الزاوية (double-angle identity)

متطابقة نصف الزاوية (half-angle identity)

متطابقة (identity)

متطابقة فردية-زوجية (odd-even identity)

متطابقة اختصار الأس (power-reducing identity)

متطابقة تحويل ناتج الضرب إلى مجموع (product-to-sum identity)

متطابقة فيثاغورس (Pythagorean identity)

متطابقة ناتج القسمة (quotient identity)

متطابقة عكسية/معكوسة (reciprocal identity)

متطابقة اختزال (reduction identity)

متطابقة المجموع (sum identity)

متطابقة مثلثة (trigonometric identity)

إثبات صحة المتطابقة (verify an identity)

مراجعة المفردات

أكمل كل متطابقة بإكمال الفراغات. ثم قم بتسمية المتطابقة.

1. $\sec\theta =$ ________
2. ________ $= \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
3. ________ $+ 1 = \sec^2\theta$
4. $\cos(90° - \theta) =$ ________
5. $\tan(-\theta) =$ ________
6. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha$ ________ $+ \cos\alpha$ ________
7. ________ $= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
8. ________ $= \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\theta}{2}}$
9. $\dfrac{1 - \cos 2\theta}{2} =$ ________
10. ________ $= \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$

المراجعة التابعة للدرس

4-1 المتطابقات المثلثية

جد قيمة كل تعبير مستخدمًا المعلومات المعطاة.

11. $\sec\theta$ and $\cos\theta$, $\tan\theta = 3$, $\cos\theta > 0$
12. $\cot\theta$ and $\sin\theta$; $\cos\theta = -\frac{1}{5}$; $\tan\theta < 0$
13. $\csc\theta$ and $\tan\theta$; $\cos\theta = \frac{3}{5}$; $\sin\theta < 0$
14. $\cot\theta$ and $\cos\theta$; $\tan\theta = \frac{2}{7}$; $\csc\theta > 0$
15. $\sec\theta$ and $\sin\theta$; $\cot\theta = -2$, $\csc\theta < 0$
16. $\cos\theta$ and $\sin\theta$, $\cot\theta = \frac{3}{8}$, $\sec\theta < 0$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

17. $\sin^2(-x) + \cos^2(-x)$
18. $\sin^2 x + \cos^2 x + \cot^2 x$
19. $\frac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\cos(-x)}$
20. $\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 1}$
21. $\frac{1}{1 - \sin x}$
22. $\frac{\cos x}{1 + \sec x}$

مثال 1

إذا كانت $\sec\theta = -3$ و$\sin\theta > 0$، **فجد** $\sin\theta$.

بما أن $\sin\theta > 0$ و$\sec\theta < 0$، إذًا θ يجب أن تكون في الربع الثاني. لإيجاد $\sin\theta$، قم أولاً بإيجاد $\cos\theta$ باستخدام المتطابقة العكسية لـ $\sec\theta$ و$\cos\theta$.

$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ متطابقة عكسية

$= -\frac{1}{3}$ $\sec\theta = -3$

يمكنك الآن استخدام متطابقة فيثاغورس التي تتضمن $\sin\theta$ و$\cos\theta$ لإيجاد $\sin\theta$.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ متطابقة فيثاغورس

$\sin^2\theta + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1$ $\cos\theta = -\frac{1}{3}$

$\sin^2\theta + \frac{1}{9} = 1$ جد ناتج الضرب.

$\sin^2\theta = \frac{8}{9}$ اطرح.

$\sin\theta = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ بسّط.

4-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

اثبت صحة كل متطابقة مما يلي.

23. $\frac{\sin}{1 - \cos\theta} + \frac{}{1 + \cos\theta} = 2\csc\theta$
24. $\frac{\cos\theta}{\sec\theta} + \frac{\sin\theta}{\csc\theta} = 1$
25. $\frac{\cot\theta}{1 + \csc\theta} + \frac{1 + \csc\theta}{\cot\theta} = 2\sec\theta$
26. $\frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$
27. $\frac{\cot^2\theta}{1 + \csc\theta} = \csc\theta - 1$
28. $\frac{\sec\theta}{\tan\theta} + \frac{\csc\theta}{\cot\theta} = \sec\theta + \csc\theta$
29. $\frac{\sec\theta + \csc\theta}{1 + \tan\theta} = \csc\theta$
30. $\cot\theta\csc\theta + \sec\theta = \csc^2\theta\sec\theta$
31. $\frac{\sin\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \frac{\tan\theta}{1 + \tan\theta}$
32. $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \frac{1 - \tan^2\theta}{\sec^2\theta}$

مثال 2

اثبت صحة $\frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} + \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} = 2\csc\theta$

الطرف الأيسر من هذه المتطابقة أكثر تعقيدًا، لذا عليك البدء بذلك التعبير.

$$\frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} + \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + (1 + \cos\theta)^2}{\sin\theta(1 + \cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta(1 + \cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 1 + 2\cos\theta}{\sin\theta(1 + \cos\theta)}$$

$$= \frac{1 + 1 + 2\cos\theta}{\sin\theta(1 + \cos\theta)}$$

$$= \frac{2 + 2\cos\theta}{\sin\theta(1 + \cos\theta)}$$

$$= \frac{2(1 + \cos\theta)}{\sin\theta(1 + \cos\theta)}$$

$$= \frac{2}{\sin\theta}$$

$$= 2\csc\theta$$

المراجعة التابعة للدرس

4-3 حل المعادلات المثلثية

جد جميع حلول كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$.

33. $2 \sin x = \sqrt{2}$
34. $4 \cos^2 x = 3$
35. $\tan^2 x - 3 = 0$
36. $9 + \cot^2 x = 12$
37. $2 \sin^2 x = \sin x$
38. $3 \cos x + 3 = \sin^2 x$

حُـــلّ كل معادلة لجميع قيم x.

39. $\sin^2 x - \sin x = 0$
40. $\tan^2 x = \tan x$
41. $3 \cos x = \cos x - 1$
42. $\sin^2 x = \sin x + 2$
43. $\sin^2 x = 1 - \cos x$
44. $\sin x = \cos x + 1$

مثال 3

حُـــلّ المعادلة $\sin \theta = 1 - \cos \theta$ لجميع قيم θ.

$\sin \theta = 1 - \cos \theta$	المعادلة الأصلية.
$\sin^2 \theta = (1 - \cos \theta)^2$	جد تربيع كل طرف.
$\sin^2 \theta = 1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta$	اكتب الصيغة الموسعة.
$1 - \cos^2 \theta = 1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta$	متطابقة فيثاغورس
$0 = 2 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta$	اطرح.
$0 = 2 \cos \theta(\cos \theta - 1)$	حلل إلى العوامل.

جد حل x في $[0, 2\pi]$.

$\cos \theta = 0$ أو $\cos \theta = 1$

$\theta = \cos^{-1} 0$ $\theta = \cos^{-1} 1$

$\theta = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ $\theta = 0$

يوضح التحقق أن $\frac{3\pi}{2}$ هو حل غير مقبول. إذًا، فإن الحل هو $\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ أو $\theta = 0 + 2n\pi$.

4-4 متطابقات المجموع والفروق

جد قيمة كل تعبير مثلّثي مما يلي.

45. $\cos 15°$
46. $\sin 345°$
47. $\tan \frac{13\pi}{12}$
48. $\sin \frac{7\pi}{12}$
49. $\cos -\frac{11\pi}{12}$
50. $\tan \frac{5\pi}{12}$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

51. $\dfrac{\tan \frac{\pi}{9} + \tan \frac{\pi}{9}}{1 - \tan \frac{\pi}{9} \tan \frac{8\pi}{9}}$
52. $\cos 24° \cos 36° - \sin 24° \sin 36°$
53. $\sin 95° \cos 50° - \cos 95° \sin 50°$
54. $\cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{\pi}{18} + \sin \frac{2\pi}{9} \sin \frac{\pi}{18}$

اثبت صحة كل متطابقة مما يلي.

55. $\cos(\theta + 30°) - \sin(\theta + 60°) = -\sin \theta$
56. $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \theta - \sin \theta)$
57. $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \theta$
58. $\tan\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\tan \theta - 1}{\tan \theta + 1}$

مثال 4

جد قيمة $\tan \frac{23\pi}{12}$

$\tan \frac{23\pi}{12} = \tan\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)$	$\frac{23\pi}{12} = \frac{5\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}$
$= \dfrac{\tan \frac{5\pi}{4} + \tan \frac{2\pi}{3}}{1 - \tan \frac{5\pi}{4} \tan \frac{2\pi}{3}}$	متطابقة المجموع
$= \dfrac{1 - \sqrt{3}}{1 - (-\sqrt{3})}$	إيجاد قيمة tan
$= \dfrac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$	بسّط
$= \dfrac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \times \dfrac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$	طبّق عملية إنطاق المقام (تخليصه من الجذور).
$= \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{1 - 3}$	اضرب.
$= \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{-2} = -2 + \sqrt{3}$	بسّط

دليل الدراسة والمراجعة تابع

المراجعة التابعة للدرس

4-5 متطابقات ضعف الزاوية وتحويل ناتج الضرب إلى مجموع

جد قِيَم $\cos 2\theta$، $\sin 2\theta$، و$\tan 2\theta$ للقيمة والفترة الموضحين.

59. $\cos \theta = \frac{1}{3}, (0°, 90°)$

60. $\tan \theta = 2, (180°, 270°)$

61. $\sin \theta = \frac{4}{5}, \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

62. $\sec \theta = \frac{13}{5}, \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

63. $\sin 75°$

64. $\cos \frac{11\pi}{12}$

65. $\tan 67.5°$

66. $\cos \frac{3\pi}{8}$

67. $\sin \frac{15\pi}{8}$

68. $\tan \frac{13\pi}{12}$

مثال 5

جد قيم $\cos 2\theta$، $\sin 2\theta$، و$\tan 2\theta$ إذا كان θ في الربع الرابع و $\sin \theta = -\frac{24}{25}$.

يوجد θ في الربع الرابع، إذًا $\cos \theta = \frac{7}{25}$ و $\sin \theta = -\frac{24}{25}$.

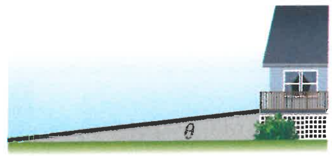
$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2\left(-\frac{24}{25}\right)\frac{7}{25} = -\frac{336}{625}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 2\left(\frac{7}{25}\right)^2 - 1 = -\frac{527}{625}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2\left(-\frac{24}{7}\right)}{1 - \left(-\frac{24}{7}\right)^2} = \frac{-\frac{48}{7}}{-\frac{527}{49}} = \frac{336}{527}$$

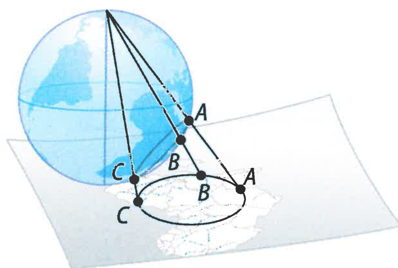
التطبيقات وحل المسائل

69. **الإنشاء** جد $\tan \theta$ التي يحدثها المنحدر مع سطح الأرض إذا كان $\sin \theta = \frac{\sqrt{145}}{145}$ و $\cos \theta = \frac{12\sqrt{145}}{145}$. (الدرس 4-1)



70. **الإضاءة** يمكن حساب شدة الضوء المنبعث من نظام مكوّن من عدستين مستقطبتين، باستخدام الصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2 \theta}$، حيث يكون I_0 شدة الضوء الداخل للنظام، بينما θ فتكون زاوية محور العدسة الثانية مع العدسة الأولى. اكتب معادلة لشدة الضوء مستخدمًا $\tan \theta$ فقط. (الدرس 4-1)

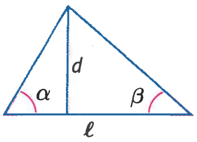
71. **الإسقاطات الخرائطية** يُستخدم الإسقاط المُجسّم من أجل إسقاط الخطوط المحيطة بشكل كروي ثلاثي الأبعاد على خريطة ثنائية الأبعاد. وترتبط النقاط الموجودة على الشكل الكروي بالنقاط الموجودة على الخريطة باستخدام الصيغة $r = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$. اثبت صحة $r = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$. (الدرس 4-2)



72. **حركة المقذوف** ستبقى كرة ما تُرمى بسرعة إبتدائية v_0 بزاوية θ وتتحرك بمسافة أفقية d في الهواء لمدة t ثانية، حيث $t = \frac{d}{v_0 \cos \theta}$. افترض أن الكرة رُميت بسرعة مبدئية تبلغ 50 ft/s، وتحركت لمسافة 100 ft وبقيت في الهواء لمدة 4 ثوانٍ. جد الزاوية التي ستُرمى الكرة منها. (الدرس 4-3)

73. **الإذاعة** يحدث تداخل عندما تمر موجتان في الفراغ ذاته في نفس الوقت. ويكون هذا التداخل مشوّشًا، إذا كانت سعة مجموع الموجتين أقل من سعة الموجات الفردية. حدد ما إذا كان التداخل مشوشًا عند تمثيل الموجتين بواسطة الجمع بين $y = 20 \sin(3t + 45°)$ و $y = 20 \sin(3t + 225°)$. (الدرس 4-4)

74. **التثليث** التثليث هو عملية قياس مسافة ما d باستخدام الزاويتين α و β والمسافة ℓ باستخدام $\ell = \frac{d}{\tan \alpha} + \frac{d}{\tan \beta}$. (الدرس 4-5)



a. حل القاعدة لإيجاد d.

b. اثبت أن $d = \frac{\ell \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}$.

c. اثبت أن $d = \frac{\ell \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

d. وضّح ما إذا كان $\alpha = \beta$، ثم $d = 0.5\ell \tan \alpha$.

تدريب على الاختبار

جد قيمة كل تعبير مستخدمًا المعلومات المعطاة.

1. $\sin\theta$ and $\cos\theta$; $\csc\theta = -4$, $\cos\theta < 0$

2. $\csc\theta$ and $\sec\theta$; $\tan\theta = \frac{2}{5}$; $\csc\theta < 0$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

3. $\dfrac{\sin(90° - x)}{\tan(90° - x)}$

4. $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\tan^2 x + 1}$

5. $\sin\theta(1 + \cot^2\theta)$

اثبت صحة كل متطابقة.

6. $\dfrac{\csc^2\theta - 1}{\csc^2\theta} + \dfrac{\sec^2\theta - 1}{\sec^2\theta} = 1$

7. $\dfrac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} + \dfrac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{2\cos\theta}{1 + \sin\theta}$

8. $\dfrac{1}{1 + \cos\theta} + \dfrac{1}{1 - \cos\theta} = 2\csc^2\theta$

9. $-\sec^2\theta\sin^2\theta = \dfrac{\cos^2\theta - 1}{\cos^2\theta}$

10. $\sin^4 x - \cos^4 x = 2\sin^2 x - 1$

11. **اختيار من متعدد** أي التعابير غير صحيح؟

A $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

B $\tan(-\theta) = \dfrac{1}{\cot(-\theta)}$

C $\tan(-\theta) = \dfrac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}$

D $\tan(-\theta) + 1 = \sec(-\theta)$

جد جميع حلول كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$.

12. $\sqrt{2}\sin\theta + 1 = 0$

13. $\sec^2\theta = \frac{4}{3}$

حُلّ كل معادلة لجميع قيم θ.

14. $\tan^2\theta - \tan\theta = 0$

15. $\dfrac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} = \cos\theta$

16. $\dfrac{1}{\sec\theta - 1} - \dfrac{1}{\sec\theta + 1} = 2$

17. $\sec\theta - 2\tan\theta = 0$

18. **التيار الكهربائي** يتم احتساب التيار الكهربائي المنتج بواسطة مولّد التيار من خلال الصيغة $I = 40\sin 135\pi t$. حيث I هي قياس التيار بالأمبير، بينما t هو الوقت بالثانية. في أي وقت t سيبلغ التيار 20 أمبيرًا لأول مرة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

جد قيمة كل تعبير مثلّثي مما يلي.

19. $\tan 165°$

20. $\cos -\frac{\pi}{12}$

21. $\sin 75°$

22. $\cos 465° - \cos 15°$

23. $6\sin 675° - 6\sin 45°$

24. **اختيار من متعدد** ما المتطابقة الصحيحة؟

F $\cos(\theta + \pi) = -\sin\pi$

G $\cos(\pi - \theta) = \cos\theta$

H $\sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\theta$

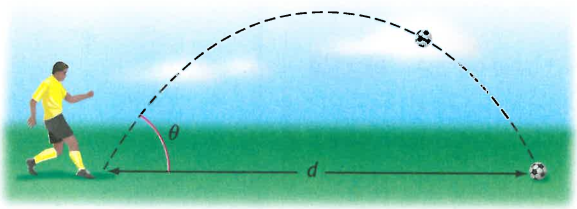
J $\sin(\pi + \theta) = \sin\theta$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

25. $\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}$

26. $\dfrac{\tan 135° - \tan 15°}{1 + \tan 135°\tan 15°}$

27. **الفيزياء** رُكلت كرة قدم من مستوى أرضية الملعب بسرعة إبتدائية v بزاوية ارتفاع θ.



a. يمكن تحديد المسافة الأفقية d التي ستتحركها الكرة باستخدام $d = \dfrac{v^2\sin 2\theta}{g}$، حيث g هي التسارع بسبب الجاذبية. اثبت صحة أن هذا التعبير مماثل للصيغة $\frac{2}{g}v^2(\tan\theta - \tan\theta\sin^2\theta)$.

b. يمكن تحديد الحد الأقصى للارتفاع h الذي يمكن للعنصر بلوغه باستخدام الصيغة $h = \dfrac{v^2\sin^2\theta}{2g}$. جد نسبة الارتفاع القصوى المحقق إلى المسافة الأفقية المقطوعة.

جد قِيَم $\cos 2\theta$، $\sin 2\theta$، و$\tan 2\theta$ للقيمة والفترة الموضحين.

28. $\tan\theta = -3, \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

29. $\cos\theta = \frac{1}{5}, (0°, 90°)$

30. $\cos\theta = \frac{5}{9}, \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

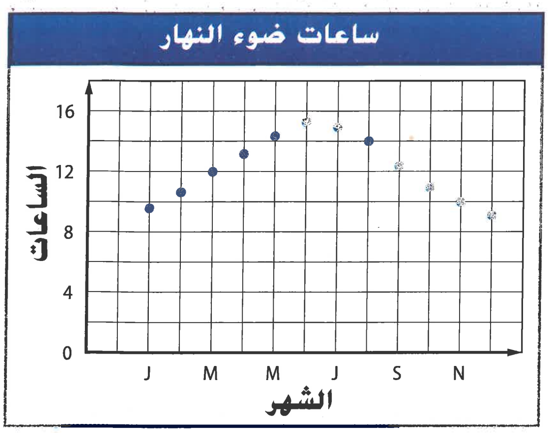
4 الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم

معدلات التغير لـ sine و cosine الزاوية

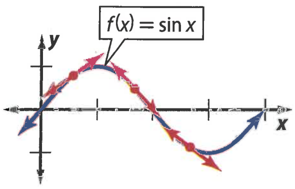
التركيز

- تقريب معدلات التغير لدوال sine و cosine الزاوية باستخدام ناتج قسمة الفرق.

لقد تعلمتَ أن العديد من المواقف في الحياة اليومية تتضمن سلوك متكررًا على مدار الوقت، وبالتالي يمكن تمثيلها بواسطة دوال منحنى الـ sine. ومن الممكن استخدام تحويلات الدوال الرئيسية sin x و cos x ونماذج مثلثية لتمثيل البيانات وتحليل الاتجاهات وتوقع القيم المستقبلية.



بينما يمكنك تمثيل مواقف من الحياة اليومية باستخدام تمثيلات بيانية لـ sine و cosine الزاوية. فيمكن استخدام حساب التفاضل لتحديد معدل تغير النموذج في أي نقطة زمنية. إن معرفتك بناتج قسمة الفرق، ومتطابقات المجموع لـ sine الزاوية و الـ cosine، وإيجاد قيمة الحدود يتيح لك الآن اكتشاف معدلات تغير هذه الدوال في أي نقطة زمنية.



نشاط 1 الحساب التقريبي لمعدل التغير

قرّب معدل تغير $f(x) = \sin x$ لعدة نقاط.

الخطوة 1 عوّض عن $f(x) = \sin x$ في ناتج قسمة الفرق.

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \longrightarrow m = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

الخطوة 2 قرّب معدل تغير $f(x)$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$. افترض أن $h = 0.1$ و0.01 و0.001 و0.0001.

الخطوة 3 كرر الخطوتين 1 و2 عندما $x = 0$ و $x = \pi$.

تحليل النتائج

1. استخدم خطوط المماس والتمثيل البياني لـ $f(x) = \sin x$ لتوضيح القيم الموجودة في الخطوتين 2 و3.
2. ما الذي سيحدث لمعدل تغير $f(x)$ كلما زاد x؟

على عكس الدالة الأسيّة للأساس الطبيعي $g(x) = e^x$ والمعادلة اللوغاريتمية الطبيعية $h(x) = \ln x$، فإن تعبير تمثيل معدل تغير $f(x) = \sin x$ في أي نقطة سيكون غير واضح. ورغم ذلك، يمكننا تعويض $f(x)$ في ناتج قسمة الفرق ثم تحويل التعبير لأبسط صورة.

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ ناتج قسمة الفرق

$$= \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$ $f(x) = \sin x$

$$= \frac{(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h}$$ متطابقة مجموع الـ sine الزاوية

$$= \frac{(\sin x \cos h - \sin x) + \cos x \sin h}{h}$$ اجمع الحدود مع sin x.

$$= \sin x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$$ حلل إلى العوامل في sin x و cos x

لدينا الآن تعبيران يتضمنان $\cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$ و $\sin x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)$, للحصول على تقريب دقيق لمعدل تغير $f(x)$ عند إحدى النقاط، سيلزم تقريب h من 0 قدر الإمكان. سابقًا، كان بمقدورنا التعويض عن $h = 0$ في تعبير لإيجاد القيمة الدقيقة لميل إحدى الدوال عند نقطة ما. ورغم ذلك، كلا التعابير الكسرية غير محددة عند $h = 0$.

$\cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$	تعابير أصلية	$\sin x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)$
$= \cos x\left(\frac{\sin 0}{0}\right)$	$h = 0$	$= \sin x\left(\frac{\cos 0-1}{0}\right)$
غير محددة		غير محددة

يمكننا تقريب القيمة للتعبيرين بواسطة إيجاد حد كل منهما كلما اقترب h من 0 وذلك باستخدام أساليب تمت مناقشتها في إحدى الدروس السابقة.

نشاط 2 حساب معدل التغير

جد تعبيرًا لمعدل تغير $f(x) = \sin x$.

الخطوة 1 استخدام الحاسبة البيانية لتقدير $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}$.

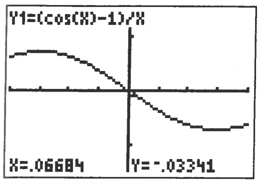
الخطوة 2 اثبت صحة القيمة الموجودة في الخطوة 1 باستخدام الخاصية TABLE بالآلة الحاسبة.

الخطوة 3 كرر الخطوتين 1 و2 لتقدير $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$.

الخطوة 4 عوّض عن القيم الموجودة في الخطوة 2 والخطوة 3 في معادلة الميل

$$m = \sin x\left(\frac{\cos h \quad 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right).$$

الخطوة 5 حوّل التعبير الموجود في الخطوة 4 لأبسط صورة.



$[-\pi, \pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-1.5, 1.5]$ scl: 1

X	Y1
-.0030	.00150
-.0020	1.0E-3
-.0010	5.0E-4
0.0000	ERROR
.00100	-5E-4
.00200	-1E-3
.00300	-.0015

X=-.001

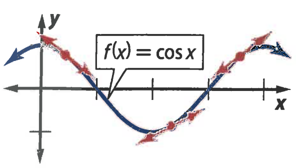
تحليل النتائج

3. جد معدل تغير $f(x) = \sin x$ عند $x = \frac{3\pi}{2}$، 2، و $\frac{5\pi}{2}$.

4. خمّن لماذا يلزم تمثيل معدلات التغير لجميع الدوال المثلثية بدوال مثلثية أخرى.

التمثيل والتطبيق

5. في هذه المسألة، ستجد تعبيرًا لمعدل تغير $f(x) = \cos x$ عند أي نقطة x.



a. عوّض عن $f(x) = \cos x$ في ناتج قسمة الفرق.

b. حوّل التعبير من الجزء **a** لأبسط صورة.

c. استخدم الحاسبة البيانية لإيجاد حد تعبيري الكسور كلما اقترب h من 0.

d. عوّض عن القيم الموجودة في الجزء **c** داخل معادلة الميل الموجودة في الجزء **b**.

e. حوّل معادلة الميل في الجزء **d** لأبسط صورة.

f. جد معدل تغير $f(x) = \cos x$ عند $\frac{3\pi}{2}$ ، $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

الوحدة 5 أنظمة المعادلات والمصفوفات

:: السابق

حلّلتَ أنظمة المعادلات وأجريتَ عمليات تتعلق بالمصفوفات.

:: الحالي

بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:

- ضرب المصفوفات وإيجاد محددات ومعكوسات المصفوفات.
- حل أنظمة المعادلات الخطية.
- كتابة التحليلات الجزئية للكسور الخاصة بالتعابير النسبية.
- استخدام البرمجة الخطية لحل التطبيقات.

:: لماذا؟ ▲

الأعمال لقد أصبحت البرمجة الخطية أداة قياسية للعديد من الأعمال، مثل الزراعة. فلا بد أن يراعي المزارعون العديد من القيود من أجل زيادة الأرباح لأقصى حد ممكن من بيع المحاصيل أو المواشي. ومن هذه القيود تكلفة العمالة والأرض والأعلاف.

قراءة مسبقة ناقش ما تعرفه بالفعل عن حل المعادلات مع زميل. ثم انظر إلى عناوين الدروس واكتب توقعين أو ثلاثة بشأن ما ستتعلمه في هذه الوحدة.

الاستعداد للوحدة

أجب عن أسئلة التدريب السريع أدناه.

التمرين سريع

استخدم أي طريقة لحل كل نظام من أنظمة المعادلات.

1. $2x - y = 7$
$3x + 2y = 14$

2. $3x + y = 14$
$2x - 2y = -4$

3. $x + 3y = 10$
$-2x + 3y = 16$

4. $4x + 2y = -34$
$-3x - y = 24$

5. $2x + 5y = -16$
$3x + 4y = -17$

6. $-5x + 2y = -33$
$6x - 3y = 42$

7. **الطب البيطري** تفرض طبيبة بيطرية رسومًا مختلفة لتشذيب أظافر الأرانب والقطط. وفي يوم الإثنين، جنت AED 96 من تشذيب أظافر 4 أرانب و 3 قطط. وفي يوم الثلاثاء، جنت AED 126 من تشذيب أظافر 6 أرانب و 3 قطط. فكم كانت تكلفة تشذيب أظافر كل حيوان؟

جد قيمة كل مما يلي إذا كان

$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -7 & 6 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & -9 & 1 \\ 10 & 8 & -1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -3 \\ 9 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$

8. $A + 3C$

9. $2(B - A)$

10. $2A - 3B$

11. $3C + 2A$

12. $A + B - C$

13. $2(B + C) - A$

اقسم.

14. $(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x - 5) \div (x - 1)$

15. $(2x^4 + 4x^3 - x^2 + 2x - 4) \div (x + 2)$

16. $(3x^4 - 6x^3 - 12x - 36) \div (x - 4)$

17. $(2x^5 - x^3 + 2x^2 + 9x + 6) \div (x - 2)$

18. $(2x^6 + 2x^5 + 3x^3 + x^2 - 8x - 6) \div (x + 1)$

المفردات الجديدة

نظام خطي متعدد المتغيرات	multivariable linear system
حذف جاوس	Gaussian elimination
مصفوفة موسعة	augmented matrix
مصفوفة المعاملات	coefficient matrix
نموذج درجة الصف	row-echelon form
نموذج درجة الصف المنخفض	reduced row–echelon form
حذف جاوس–جوردان	Gauss-Jordan elimination
مصفوفة محايدة	identity matrix
مصفوفة عكسية	inverse matrix
معكوس	inverse
قابل للعكس	invertible
مصفوفة منفردة	singular matrix
محدد	determinant
نظام مربع	square system
قاعدة كرامر	Cramer s Rule
كسر جزئي	partial fraction
الأمثل	optimization
برمجة خطية	linear programming
دالة الهدف	objective function
حلول ممكنة	feasible solutions
قيد	constraint
حلول مثلى متعددة	multiple optimal solutions
غير محدودة	unbounded

مراجعة المفردات

نظام المعادلات (system of equations) مجموعة من معادلتين أو أكثر

مصفوفة (matrix) تنظيم مستطيل من العناصر

مصفوفة مربعة (square matrix) مصفوفة لديها نفس العدد من الصفوف والأعمدة

كمية قياسية (scalar) العدد الثابت الذي يتم ضرب المصفوفة فيه

الدرس 5-1

الأنظمة الخطية متعددة المتغيرات وعمليات الصف الأولية (البسيطة)

:: السابق

- حلّلت أنظمة المعادلات جبريًا ومثّلت البيانات باستخدام المصفوفات.

:: الحالي

1 إيجاد حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات وحذف جاوس

2 إيجاد حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات وحذف جاوس-جوردان

:: لماذا ؟

- غالبًا ما يتم تصنيع السبائك المعدنية في صناعات السيارات لتحسين أداء السيارات. ويمكنك حل نظام من المعادلات لتحديد النسبة المئوية اللازمة من كل معدن لسبيكة محددة.

المفردات الجديدة

نظام خطي متعدد المتغيرات
multivariable linear system

نموذج درجة الصف
row-echelon form

حذف جاوس
Gaussian elimination

مصفوفة موسعة
augmented matrix

مصفوفة المعاملات
coefficient matrix

نموذج درجة الصف المنخفض
reduced row-echelon form

حذف جاوس-جوردان
Gauss-Jordan elimination

1 حذف جاوس

نظام خطي متعدد المتغيرات أو نظام خطي بأكثر من متغير واحد، عبارة عن نظام معادلات خطية ذات متغيرين أو أكثر. وفي المقررات الدراسية السابقة، ربما تكون قد استخدمت طريقة الحذف لحل مثل هذه الأنظمة. وتبدأ إحدى طرق الحذف بإعادة كتابة نظام باستخدام شكل مثلث معكوس يكون فيه المعامل الرئيس يساوي ا.

يمكن استخدام طريقتي التعويض والحذف اللتين تعلمتهما سابقًا في تحويل نظام خطي متعدد المتغيرات إلى نظام مكافئ في صورة مثلث أو **نموذج درجة صف**.

النظام في صورة نموذج درجة الصف

$$\begin{aligned} x - y - 2z &= 5 \\ y + 4z &= -5 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

لاحظ أن الطرف الأيسر للنظام يشكل مثلثًا تكون فيه المعاملات الرئيسة تساوي ا. وتحتوي المعادلة الأخيرة على متغير واحد فقط، وتحتوي كل معادلة فوقها على المتغيرات المأخوذة من المعادلة الموجودة تحتها مباشرة.

وبمجرد أن يكون النظام في صورة هذا النموذج، يمكن إيجاد الحل بالتعويض. وتحدد المعادلة الأخيرة المتغير الأخير. في المثال أعلاه، تحدد المعادلة الأخيرة أن $z = -2$.

عوِّض عن قيمة z في المعادلة الثانية لإيجاد قيمة y.

$y + 4z = -5$	المعادلة الثانية
$y + 4(-2) = -5$	$z = -2$
$y = 3$	حل لإيجاد قيمة y.

عوِّض عن قيمة المتغير y والمتغير z في المعادلة الأولى لإيجاد x.

$x - y - 2z = 5$	المعادلة الأولى
$x - 3 - 2(-2) = 5$	$y = 3$ و $z = -2$
$x = 4$	حُـلّ لإيجاد قيمة x.

إذًا، يصبح حل النظام هو $x = 4$ و $y = 3$ و $z = -2$.

يطلق على الخوارزمية المستخدمة لتحويل نظام المعادلات الخطية إلى نظام مكافئ في صورة نموذج درجة الصف اسم **حذف جاوس** (أو اختزال جاوس)، والذي سُمِّي نسبة لاسم عالم الرياضيات الألماني كارل فريدريش جاوس. وتتم الإشارة إلى العمليات المستخدمة لإنتاج أنظمة مكافئة فيما يلي.

المفهوم الأساسي العمليات التي تنتج أنظمة مكافئة

ينتج عن كل من العمليات التالية نظام مكافئ للمعادلات الخطية.

- بدّل بين أي معادلتين.
- اضرب إحدى المعادلتين في عدد حقيقي غير صفري.
- اجمع مضاعف إحدى المعادلات إلى المعادلة الأخرى.

يتم توضيح الخوارزمية المحددة لحذف جاوس في المثال التالي.

مثال 1 حذف جاوس مع نظام

اكتب نظام المعادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم حُـلّ النظام.

$5x - 5y - 5z = 35$ المعادلة 1

$-x + 2y - 3z = -12$ المعادلة 2

$3x - 2y + 7z = 30$ المعادلة 3

الخطوة 1 بما أن المعامل الرئيس في المعادلة 1 لا يساوي 1، إذًا يمكنك ضرب هذه المعادلة في المعكوس الضربي لمعاملها الرئيس.

$x - y - z = 7 \leftarrow \frac{1}{5}(5x - 5y - 5z = 35)$
$-x + 2y - 3z = -12$
$3x - 2y + 7z = 30$

الخطوة 2 احذف الحد x في المعادلة 2. وللقيام بذلك، استبدل المعادلة 1 بـ (المعادلة 1 + المعادلة 2).

$x - y - z = 7$
$y - 4z = -5 \leftarrow \begin{cases} x - y - z = 7 \\ (+)\ -x + 2y - 3z = -12 \\ \hline y - 4z = -5 \end{cases}$
$3x - 2y + 7z = 30$

الخطوة 3 احذف الحد x في المعادلة 3 بالتعويض عن المعادلة 3 بـ [−3(المعادلة 1) + المعادلة 3].

$x - y - z = 7$
$y - 4z = -5$
$y + 10z = 9 \leftarrow \begin{cases} -3x + 3y + 3z = -21 \\ (+)\ 3x - 2y + 7z = 30 \\ \hline y + 10z = 9 \end{cases}$

الخطوة 4 بما أن المعامل الرئيس في المعادلة 2 يساوي 2، إذًا يمكنك بعدها حذف الحد y من المعادلة 3 بالتعويض عن المعادلة 3 بـ [−1(المعادلة 2) + المعادلة 3].

$x - y - z = 7$
$y - 4z = -5$
$14z = 14 \leftarrow \begin{cases} -y + 4z = 5 \\ (+)\ y + 10z = 9 \\ \hline 14z = 14 \end{cases}$

الخطوة 5 بما أن المعامل الرئيس في المعادلة 3 لا يساوي 1، إذًا يمكنك ضرب هذه المعادلة في المعكوس الضربي لمعاملها الرئيس.

$x - y - z = 7$
$y - 4z = -5$
$z = 1 \leftarrow \frac{1}{14}(14z = 14)$

يمكنك استخدام التعويض لإيجاد أن $y = -1$ و$x = 7$. إذًا، حل النظام هو $x = 7$ و $y = -1$ و $z = 1$ أو الثلاثي المرتب $(7, -1, 1)$.

تمرين موجّه

اكتب كل نظام معادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم حُـلّ النظام.

1A. $x + 2y - 3z = -28$
$3x - y + 2z = 3$
$x + y - z = -5$

1B. $3x + 5y + 8z = -20$
$-x + 2y - 4z = 18$
$-6x + 4z = 0$

نصيحة دراسية

التفسير الهندسي يمكن تمثيل مجموعة الحل لنظام من معادلتين في متغيرين بتقاطع زوج من المستقيمات في مستوى، بينما يمكن تمثيل مجموعة حل نظام من ثلاث معادلات في ثلاثة متغيرات بتقاطع ثلاثة مستويات في الفراغ.

نصيحة دراسية

تحقق من صحة الحل عند حل نظام معادلات، ينبغي أن تتحقق من صحة حلك باستخدام التعويض في المعادلات الأصلية. ويتم فيما يلي توضيح طريقة التحقق من حل المثال 1.

المعادلة 1:
$5(7) - 5(-1) - 5(1) =$
35 ✓

المعادلة 2:
$-7 + 2(-1) - 3(1) =$
-12 ✓

المعادلة 3:
$3(7) - 2(-1) + 7(1) =$
30 ✓

ولا يؤثر حل نظام المعادلات الخطية باستخدام حذف جاوس إلا على معاملات المتغيرات بالطرف الأيسر والثوابت الموجودة على طرف المعادلة الأيمن، لذا يكون من الأسهل دائمًا تتبع هذه الأعداد فقط باستخدام مصفوفة.

قراءة في الرياضيات

المصفوفة الموسعة لاحظ أنه يوجد خط متقطع يفصل بين معاملات المصفوفة وعمود القيم الثابتة في المصفوفة الموسعة.

المصفوفة الموسعة هي نظام مكون من المعاملات والحدود الثابتة للمعادلات الخطية، والتي تكتب كل منها في صيغة قياسية مع كتابة الحدود الثابتة في الطرف الأيمن لعلامة يساوي. وإذا لم يتم إدراج الحدود الثابتة، تُختزل المصفوفة إلى **مصفوفة المعاملات** الخاصة بالنظام. وستستخدم هذا النوع من المصفوفات في الدرس 3-5.

نظام المعادلات

$$5x - 5y - 5z = 35$$
$$-x + 2y - 3z = -12$$
$$3x - 2y + 7z = 30$$

المصفوفة الموسعة

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -5 & -5 & 35 \\ -1 & 2 & -3 & -12 \\ 3 & -2 & 7 & 30 \end{array}\right]$$

مصفوفة المعاملات

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

مثال 2 كتابة مصفوفة موسعة

اكتب المصفوفة الموسعة لنظام المعادلات الخطية التالي.

$$w + 4x + z = 2$$
$$x + 2y - 3z = 0$$
$$w - 3y - 8z = -1$$
$$3w + 2x + 3y = 9$$

عندما تكون جميع المعادلات الخطية في صيغة قياسية،والمتغيرات الأربعة غير متوفرة للنظام في كل معادلة، لذا فإن الحدود المتشابهة لا تُكوِّن محاذاة. أعد كتابة النظام، باستخدام المعامل 0 للحدود غير المعلومة. ثم اكتب المصفوفة الموسعة.

المصفوفة الموسعة

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 9 \end{array}\right]$$

نظام المعادلات

$$w + 4x + 0y + z = 2$$
$$0w + x + 2y - 3z = 0$$
$$w + 0x - 3y - 8z = -1$$
$$3w + 2x + 3y + 0z = 9$$

تمرين موجّه

اكتب المصفوفة الموسعة لكل نظام من المعادلات الخطية التالية.

2A. $4w - 5x + 7z = -11$
$-w + 8x + 3y = 6$
$15x - 2y + 10z = 9$

2B. $-3w + 7x + y = 21$
$4w - 12y + 8z = 5$
$16w - 14y + z = -2$
$w + x + 2y = 7$

تحتوي العمليات الثلاث المستخدمة لاستنباط أنظمة مكافئة على ثلاث عمليات مصفوفية مقابلة يمكن استخدامها لانتاج مصفوفة موسعة مقابلة. وحيث إنه يقابل كل صف من صفوف المصفوفة الموسعة معادلة من النظام الأصلي، إذًا يطلق على هذه العمليات اسم عمليات الصف الأولية.

المفهوم الأساسي عمليات الصف الأولية

تنتج كل عملية من عمليات الصف التالية مصفوفة موسعة مكافئة.

- بدّل بين أي صفين.
- اضرب أحد الصفين في عدد حقيقي غير صفري.
- اجمع مضاعف أحد الصفين إلى الصف الآخر.

ويطلق على عمليات الصف **الأولية** نظرًا لأنها سهلة الحل. ومع ذلك، يسهل ارتكاب أي خطأ بها، لذا ينبغي تسجيل كل خطوة باستخدام الرمز الموضح أدناه.

1 الصف 1، الصف 2، الصف 3

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -5 & -5 & 35 \\ -1 & 2 & -3 & -12 \\ 3 & -2 & 7 & 30 \end{array}\right]$$

2 بدّل بين الصفين 2 و3.

$$\begin{array}{c} \\ R_3 \\ R_2 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -5 & -5 & 35 \\ 3 & -2 & 7 & 30 \\ -1 & 2 & -3 & -12 \end{array}\right]$$

3 اضرب الصف 1 في $\frac{1}{5}$.

$$\begin{array}{c} \frac{1}{5}R_1 \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 3 & -2 & 7 & 30 \\ -1 & 2 & -3 & -12 \end{array}\right]$$

4 اجمع 3− أضعاف الصف 1 إلى الصف 2.

$$\begin{array}{c} \\ -3R_1 + R_2 \rightarrow \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 10 & 9 \\ -1 & 2 & -3 & -12 \end{array}\right]$$

قارن حذف جاوس من المثال 1 بصيغة مصفوفته باستخدام عمليات الصف.

	المصفوفة الموسعة		نظام المعادلات
$\frac{1}{5}R_1 \rightarrow$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & -3 & -12 \\ 3 & -2 & 7 & 30 \end{array}\right]$	$\frac{1}{5}(\text{Eqn. 1}) \rightarrow$	$\begin{aligned} x - y - z &= 7 \\ -x + 2y - 3z &= -12 \\ 3x - 2y + 7z &= 30 \end{aligned}$
$R_1 + R_2 \rightarrow$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 3 & -2 & 7 & 30 \end{array}\right]$	$\text{Eqn. 1} + \text{Eqn. 2} \rightarrow$	$\begin{aligned} x - y - z &= 7 \\ y - 4z &= -5 \\ 3x - 2y + 7z &= 30 \end{aligned}$
$-3R_1 + R_3 \rightarrow$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 10 & 9 \end{array}\right]$	$-3(\text{Eqn. 1}) + \text{Eqn. 3} \rightarrow$	$\begin{aligned} x - y - z &= 7 \\ y - 4z &= -5 \\ y + 10z &= 9 \end{aligned}$
$-R_2 + R_3 \rightarrow$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 14 & 14 \end{array}\right]$	$-(\text{Eqn. 2}) + \text{Eqn. 3} \rightarrow$	$\begin{aligned} x - y - z &= 7 \\ y - 4z &= -5 \\ 14z &= 14 \end{aligned}$
$\frac{1}{14}R_3 \rightarrow$	$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$	$\frac{1}{14}(\text{Eqn. 3}) \rightarrow$	$\begin{aligned} x - y - z &= 7 \\ y - 4z &= -5 \\ z &= 1 \end{aligned}$

نصيحة دراسية

متكافئة الصف إذا أمكن الحصول على مصفوفة واحدة من خلال مجموعة متتالية من عمليات الصف على مصفوفة أخرى، فحينها يقال على المصفوفتين إنهما *متكافئتا الصف.*

يقال على المصفوفة الموسعة التي تقابل نموذج درجة الصف من النظام الأصلي للمعادلات إنها أيضًا في نموذج درجة الصف.

المفهوم الأساسي نموذج درجة الصف

تكون المصفوفة في صورة نموذج درجة الصف إذا تم استيفاء الشروط التالية.

- تظهر الصف التي تتكون من أصفار تمامًا (إن وُجدت) في نهاية المصفوفة.
- تكون قيمة المدخلة غير الصفري الأول في الصف هي 1، ويسمى *المعامل الرئيس* 1.
- بالنسبة للصفين التاليين اللذين يتمتعان بمدخلات غير صفرية، يكون المعامل الرئيس 1 في الصف الأعلى إلى أبعد إلى اليسار من المعامل الرئيس في الصف الأدنى.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

نصيحة دراسية

نموذج درجة الصف لا يعتبر نموذج درجة الصف للمصفوفة فريدًا، نظرًا لأنه يوجد العديد من توافيق عمليات الصف التي يمكن إجراؤها. ومع ذلك سيظل الحل النهائي لنظام المعادلات كما هو دائمًا.

مثال 3 تحديد المصفوفة الموسعة في صورة نموذج درجة الصف

حدد ما إذا كانت كل مصفوفة في صورة نموذج درجة الصف.

a. $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right]$

يوجد صفر أدنى المعامل الرئيس في الصف الأول لذا، فإن المصفوفة في شكل نموذج درجة الصف.

b. $\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 6 & 2 & -11 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

يوجد صفر أدنى كل من المعاملات الرئيسة في كل صف. لذا، فإن المصفوفة في شكل نموذج درجة الصف.

c. $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 5 & -6 & 10 \\ 0 & 1 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \end{array}\right]$

لا يوجد صفر أدنى المعامل الرئيس في الصف 2. لذا، فإن المصفوفة ليست في شكل نموذج درجة الصف.

تمرين موجّه

3A. $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -6 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \end{array}\right]$

3B. $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -20 \end{array}\right]$

3C. $\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 1 & 0 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & -3 & 10 & -7 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right]$

لحل نظام معادلات باستخدام مصفوفة موسعة وحذف جاوس، استخدم عمليات الصف لتحويل المصفوفة بحيث تكون في شكل نموذج درجة الصف. ثم اكتب نظام المعادلات المقابل واستخدم التعويض لإنهاء حل النظام. تذكر أنه إذا واجهتك معادلة خاطئة، فسيعني ذلك أن النظام ليس له حل.

مثال 4 من الحياة اليومية حذف جاوس مع مصفوفة

السفر ذهب محمد إلى إيطاليا أثناء عطلة الربيع. ويتم فيما يلي توضيح متوسط التكاليف اليومية للفندق والطعام والمواصلات لكل مدينة زارها. اكتب نظامًا للمعادلات وجد حلاً له لتحديد عدد الأيام التي قضاها محمد في كل مدينة. فسّر حلك.

النفقات	البندقية	روما	نابولي	الإجمالي
الفنادق	AED 60	AED 120	AED 60	AED 720
الطعام	AED 40	AED 90	AED 30	AED 490
وسائل النقل	AED 15	AED 10	AED 20	AED 130

اكتب المعطيات في صورة نظام معادلات. افترض أن x و y و z تمثل عدد الأيام التي قضاها محمد في البندقية وروما ونابولي على الترتيب.

$$60x + 120y + 60z = 720$$
$$490 = 40x + 90y + 30z$$
$$130 = 15x + 10y + 20z$$

بعد ذلك، اكتب المصفوفة الموسعة وطبق عمليات الصف الأولية للحصول على نموذج درجة الصف للمصفوفة.

مصفوفة موسعة

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 60 & 120 & 60 & 720 \\ 40 & 90 & 30 & 490 \\ 15 & 10 & 20 & 130 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{60}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 40 & 90 & 30 & 490 \\ 15 & 10 & 20 & 130 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-40R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \\ 15 & 10 & 20 & 130 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{10}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 15 & 10 & 20 & 130 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-15R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -20 & 5 & -50 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{20R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -15 & -30 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{15}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

يمكنك استخدام التعويض لإيجاد أن $y = 3$ و $x = 1.4$ إذًا، حل النظام هو $x = 4$، و $y = 3$، و $z = 2$، أو الثلاثي المُـــرتب $(4, 3, 2)$.

قضى محمد 4 أيام في البندقية و 3 أيام في روما ويومين في نابولي.

الربط بالحياة اليومية

في الأعوام الأخيرة، كانت إيطاليا رابع أكثر الدول التي تحظى بالزيارة عالميًا، حيث بلغ عدد السياح أكثر من 40 مليون سائح.

المصدر: منظمة السياحة العالمية

تمرين موجّه

4. السفر في العام التالي، سافر محمد إلى فرنسا لقضاء عطلة الربيع. ويتم فيما يلي توضيح متوسط التكاليف اليومية للفندق والطعام والمواصلات لكل مدينة زارها في فرنسا. اكتب نظامًا للمعادلات وجد حلاً له لتحديد عدد الأيام التي قضاها محمد في كل مدينة. فسّر حلك.

النفقات	باريس	ليون	مارسيليا	الإجمالي
الفنادق	AED 80	AED 70	AED 80	AED 500
الطعام	AED 50	AED 40	AED 50	AED 330
وسائل النقل	AED 10	AED 10	AED 10	AED 70

نصيحة دراسية

أنواع الحلول تذكر أنه يمكن أن يكون لنظام المعادلات حل واحد، وقد لا يكون له حلول، أو يكون له عدد لا نهائي من الحلول.

2 حذف جاوس-جوردان

إذا واصلت تطبيق عمليات الصف الأولية على نموذج درجة الصف من مصفوفة موسعة، فيمكنك الحصول على مصفوفة تكون قيمة أول عنصر غير صفري بكل صف فيها هي العدد 1، وتكون قيمة بقية العناصر في نفس العمود الخاص بهذا العنصر هي 0. وهذا ما يُطلق عليه **نموذج درجة الصف المنخفض** بالمصفوفة كما يظهر باليسار. ودائمًا ما يكون نموذج درجة الصف المنخفض للمصفوفة وحيدًا، بغض النظر عن ترتيب العمليات التي تم إجراؤها. ويطلق على حل النظام من خلال تحويل مصفوفة موسعة بحيث تكون في شكل نموذج درجة الصف المنخفض اسم **حذف جاوس-جوردان**، وقد تم تسميته بذلك نسبة إلى العالمين كارل فريدريش جاوس وفيلهلم جوردان.

نموذج درجة الصف المنخفض

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

مثال 5 استخدام طريقة حذف جاوس-جوردان

جد حلاً لنظام المعادلات.

$$x - y + z = 0$$
$$-x + 2y - 3z = -5$$
$$2x - 3y + 5z = 8$$

اكتب المصفوفة الموسعة. طبق عمليات الصف الأولية للحصول على نموذج درجة صف منخفض.

مصفوفة موسعة

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & 5 & 8 \end{array}\right]$$

$$R_1 + R_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & -3 & 5 & 8 \end{array}\right]$$

$$-2R_1 + R_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \end{array}\right]$$

$$R_2 + R_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

نموذج درجة الصف

$$R_2 + R_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$R_3 + R_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$2R_3 + R_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

نموذج درجة الصف المنخفض

إذًا، حل النظام هو $x = -2$ و $y = 1$ و $z = 3$ أو الثلاثي المدتب $(-2, 1, 3)$. تحقق من صحة هذا الحل في النظام الأصلي للمعادلات.

تمرين موجّه

حُـلّ كلاً من أنظمة المعادلات التالية.

5A. $x + 2y - 3z = 7$
$-3x - 7y + 9z = -12$
$2x + y - 5z = 8$

5B. $4x + 9y + 16z = 2$
$-x - 2y - 4z = -1$
$2x + 4y + 9z = -5$

نصيحة دراسية

الأنماط على الرغم من أنه يمكن استخدام مختلف عمليات الصف الأولية لحل نفس نظام المعادلات، فإنه يمكن استخدام نمط عام كدليل للمساعدة في تجنب العمليات المضيعة للوقت. وفيما يتعلق بالنظام الموجود إلى اليسار؛ ابدأ بالوصول إلى 0 في الحد الأول من الصف الثاني واعمل على حل المصفوفة بالترتيب الموضح، ومن ثم الوصول إلى الأصفار والأعداد 1. وبمجرد أن تنتهي من ذلك، يمكن تحويل الحدود في الصف الأول إلى أصفار وأعداد 1 كذلك.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 \leftarrow & 0 & b \\ 0 \rightarrow & 0 \rightarrow & 1 & c \end{array}\right]$$

تلميح تقني

يمكن التحقق من نموذج درجة الصف المنخفض للمصفوفة باستخدام خاصية rref(الموجودة في حاسبة التمثيل البياني.

```
rref([A])
   [[1 0 0 -2]
    [0 1 0 1 ]
    [0 0 1 3 ]]
```

عند حل نظام معادلات، إذا تعذر كتابة المصفوفة في نموذج درجة الصف المنخفض، فسيكون النظام إما بدون حل أو بعدد لا نهائي من الحلول.

مثال 6 بدون حل وبعدد لا نهائي من الحلول

حُـلّ كلٍّ من أنظمة المعادلات التالية.

a. $-5x - 2y + z = 2$
$4x - y - 6z = 2$
$-3x - y + z = 1$

اكتب المصفوفة الموسعة. ثم طبق عمليات الصف الأولية للحصول على مصفوفة درجة صف منخفض.

مصفوفة موسعة $\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -6 & 2 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{-2R_3 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -6 & 2 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{-4R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{3R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{-2R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

وفقًا للصف الأخير، $0x + 0y + 0z = 1$. ونظرًا لاستحالة هذا، إذًا فليس للنظام أي حل.

b. $3x + 5y - 8z = -3$
$2x + 5y - 2z = -7$
$-x - y + 4z = -1$

اكتب المصفوفة الموسعة. ثم طبق عمليات الصف الأولية للحصول على مصفوفة درجة الصف المنخفض.

مصفوفة موسعة $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -8 & -3 \\ 2 & 5 & -2 & -7 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & -7 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{2R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -9 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -9 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{2R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

اكتب نظام المعادلات الخطية المقابل لنموذج درجة الصف المنخفض للمصفوفة الموسعة.

$x - 6z = 4$
$y + 2z = -3$

بما أن قيمة المتغير z غير محددة، يكون لهذا النظام عدد لا نهائي من الحلول. من خلال الحل لإيجاد قيمة x و y بدلالة z. فلديك $x = 6z + 4$ و $y = -2z - 3$.

إذًا، يمكن التعبير عن حل النظام في الصورة $(6z + 4, -2z - 3, z)$، حيث تكون z أي عدد حقيقي.

نصيحة دراسية

عدد لا نهائي من الحلول لا يعتبر حل النظام الموجود في المثال 6b إجابة فريدة نظرًا لأنه يمكن التعبير عن الحل بدلالة أي من المتغيرات في النظام.

تمرين موجّه

حُـلّ كلٍّ من أنظمة المعادلات التالية.

6A. $3x - y - 5z = 9$
$4x + 2y - 3z = 6$
$-7x - 11y - 3z = 3$

6B. $x + 3y + 4z = 8$
$4x - 2y - z = 6$
$8x - 18y - 19z = -2$

عندما يكون للنظام عدد أقل من المعادلات مقارنة بالمتغيرات، فسيكون النظام إما بدون حل أو بعدد لا نهائي من الحلول. وعند حل نظام معادلات من ثلاثة متغيرات أو أكثر، فمن المهم التحقق من إجابتك باستخدام جميع المعادلات الأصلية. ويعتبر ذلك ضروريًا لأنه من المحتمل أن يُفلح الحل غير الصحيح مع بعض المعادلات بينما لا يفلح مع الأخرى.

مثال 7 عدد لانهائي من الحلول

جد حلاً لنظام المعادلات.

$$3x - 8y + 19z - 12w = 6$$
$$2x - 4y + 10z = -8$$
$$x - 3y + 5z - 2w = -1$$

اكتب المصفوفة الموسعة. ثم طبِّق عمليات الصف الأولية للحصول على المعاملات الرئيسة التي تساوي 1 في كل صف والأصفار أسفل هذه المعاملات في كل عمود.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -8 & 19 & -12 & 6 \\ 2 & -4 & 10 & 0 & -8 \\ 1 & -3 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 10 & 0 & -8 \\ 3 & -8 & 19 & -12 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -6 \\ 3 & -8 & 19 & -12 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-3R_1 + R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 4 & -6 & 9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -6 & 9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_2 + R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3R_2 + R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 4 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 4 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-5R_3 + R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 14 & -25 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

اكتب النظام المقابل لنظام المعادلات الخطية لنموذج درجة الصف المنخفض للمصفوفة الموسعة.

$$x + 14w = -25$$
$$y + 2w = -3$$
$$z - 2w = 3$$

لهذا النظام من المعادلات عدد لا نهائي من الحلول، حيث إنه لكل قيمة من قيم w هناك ثلاث معادلات، والتي يمكن استخدامها لإيجاد القيم المقابلة للمتغيرات x وy وz. ومن خلال الحل لإيجاد قيمة x و y وz بدلالة w، يكون لديك $x = -14w - 25$ و$y = -2w - 3$ و$z = 2w + 3$.

إذًا، يمكن التعبير عن حل النظام في صورة $(-14w - 25, -2w - 3, 2w + 3, w)$، حيث تعبر w عن أي عدد حقيقي.

التحقق باستخدام القيم المختلفة للمتغير w، احسب بعض الحلول وتحقق من صحتها في النظام الأصلي للمعادلات. فعلى سبيل المثال، إذا كانت $w = 1$، فإن حل النظام يكون $(-39, -5, 5, 1)$. ويتحقق هذا الحل في كل معادلة من النظام الأصلي.

$$3(-39) - 8(-5) + 19(5) - 12(1) = 6 \checkmark$$

$$2(-39) - 4(-5) + 10(5) = -8 \checkmark$$

$$(-39) - 3(-5) + 5(5) - 2(1) = -1 \checkmark$$

تمرين موجّه

حُـلّ كلٍّ من أنظمة المعادلات التالية.

7A. $-5w + 10x + 4y + 54z = 15$
$w - 2x - y - 9z = -1$
$-2w + 3x + y + 19z = 9$

7B. $3w + x - 2y - 3z = 14$
$-w + x - 10y + z = -11$
$-2w - x + 4y + 2z = -9$

الربط بتاريخ الرياضيات

فيلهم جوردان
(1842-1899)

جيُوديسيّ ألماني ينسب إليه فضل تبسيط طريقة جاوس لحل نظام المعادلات الخطية بحيث يمكن تطبيقها لتقليل الخطأ التربيعي في عمليات المسح.

تمارين

اكتب كل نظام معادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم حُـلّ النظام. (مثال 1)

1. $5x = -3y - 31$
$2y = -4x - 22$

2. $4y + 17 = -7x$
$8x + 5y = -19$

3. $12x = 21 - 3y$
$2y = 6x + 7$

4. $4y = 12x - 3$
$9x = 20y - 2$

5. $-3x + y + 6z = 15$
$2x + 2y - 5z = 9$
$4x - 5y + 2z = -3$

6. $8x - 24y + 16z = -7$
$40x - 9y + 2z = 10$
$32x + 8y - z = -2$

7. $3x + 9y - 6z = 17$
$-2x - y + 24z = 12$
$2x - 5y + 12z = -30$

8. $5x - 50y + z = 24$
$2x + 10y + 3z = 23$
$-5x - 20y + 10z = 13$

اكتب المصفوفة الموسعة لكل نظام من المعادلات الخطية التالية. (مثال 2)

9. $12x - 5y = -9$
$-3x + 8y = 10$

10. $-4x - 6y = 25$
$7x + 2y = 16$

11. $3x - 5y + 7z = 9$
$-10x + y + 8z = 6$
$4x - 15z = -8$

12. $4x - z = 27$
$-8x + 7y - 6z = -35$
$12x - 3y + 5z = 20$

13. $w - 8x + 5y = 11$
$7w + 2x - 3y + 9z = -5$
$6w + 12y - 15z = 4$
$3x + 4y - 8z = -13$

14. $14x - 2y + 3z = -22$
$5w - 4x + 11z = -8$
$2w - 6y + 3z = 15$
$3w + 7x - y = 1$

15. **بيع المخبوزات** نظم أعضاء مجموعة شبابية معرضًا لبيع المخبوزات لجمع الأموال لرحلة صيفية. وقد باعوا 30 كعكة و 40 فطيرة و 200 كعكة كوكيز كبيرة وجمعوا مبلغًا قدره AED 684.50. وتكون تكلفة الفطيرة أقل من تكلفة الكعكة بمقدار AED 2 وتكون تكلفة الكعكة 5 أضعاف تكلفة كعكة الكوكيز الكبيرة. (مثال 2)

a. افترض أن المتغير c = عدد الكعك وأن المتغير p = عدد الفطائر والمتغير g = عدد كعكات الكوكيز الكبيرة. اكتب نظامًا من ثلاث معادلات خطية لتمثيل هذه المسألة.

b. اكتب المصفوفة الموسعة لنظام المعادلات الخطية الذي كتبته في الجزء a.

c. جد حلًا لنظام المعادلات. فسّر حلك.

حدد ما إذا كانت كل مصفوفة في صورة نموذج درجة الصف. (مثال 3)

16. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

17. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

18. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -8 & 12 \\ 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$

19. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

20. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

21. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

حُـلّ كل نظام معادلات باستخدام حذف جاوس أو حذف جاوس-جوردان. (المثالان 4 و 5)

22. $2x = -10y + 11$
$-8y = -9x + 23$

23. $4y + 17 = -7x$
$8x + 5y = -19$

24. $x + 7y = 10$
$3x + 9y = -6$

25. $7y = 9 - 5x$
$8x = 2 - 5y$

26. $3x - 4y + 8z = 27$
$9x - y - z = 3$
$x + 8y - 2z = 9$

27. $x + 9y + 8z = 0$
$5x + 8y + z = 35$
$x - 4y - z = 17$

28. $4x + 8y - z = 10$
$3x - 8y + 9z = 14$
$7x + 6y + 5z = 0$

29. $2x - 10y + z = 28$
$-5x + 11y + 7z = 18$
$6x - y - 12z = 14$

30. **القهوة** يتخصص مقهى محلي في تقديم مشروبات الإسبريسو. ويوضح الجدول أدناه عدد الأكواب لكل مشروب تم بيعه طوال اليوم. اكتب نظام معادلات وجد حلاً له لتحديد سعر كل مشروب إسبريسو. فسّر حلك. (مثال 4)

الساعات	كابتشينو	لاتيه	قهوة ماكياتو	الأرباح (AED)
8-11	103	86	79	1040.25
11-2	48	32	26	406.50
2-5	45	25	18	334.00

31. **بائع زهور** يوضح إعلان لمحل زهور أسعار العديد من تنسيقات الزهور وقائمة من الزهور الموجودة في كل تنسيق على النحو الموضح أدناه. اكتب نظام معادلات وجد حلاً له لتحديد سعر كل نوع من الزهور. فسّر حلك. (مثال 6)

زهرة الزنبق AED 35.00
4 زهور، 12 زهرة زنبق، 5 زهور السوسن

الحديقة المشمسة AED 50.25
6 زهور، 9 زهور زنبق، 12 زهرة السوسن

نسمات الصيف العليل AED 83.75
10 زهور، 15 زهرة زنبق، 20 زهرة السوسن

حُـلّ كلًّ من أنظمة المعادلات التالية. (المثالان 6 و7)

32. $-2x + y - 3z = 0$
$3x - 4y + 10z = -7$
$5x + 2y + 8z = 23$

33. $4x - 5y - 9z = -25$
$-6x + y + 7z = -21$
$7x - 3y - 10z = 8$

34. $-x + 3y + 10z = 8$
$4x - 9y - 34z = -17$
$3x + 5y - 2z = 46$

35. $5x - 4y - 7z = -31$
$2x + y - 8z = 11$
$-4x + 3y + 6z = 23$

36. $-3x + 4y - z = -10$
$6x - y - 5z = -29$
$4x - 5y + z = 11$

37. $8x - 9y - 4z = -33$
$-2x + 3y - 2z = 9$
$-7x + 6y + 11z = 27$

38. $2x - 5y + 4z + 4w = 2$
$-3x + 6y - 2z - 7w = 11$
$5x - 4y + 8z - 5w = 29$

39. $x - 4y + 4z + 3w = 2$
$-2x - 3y + 7z - 3w = -9$
$3x - 5y + z + 10w = 15$

حاسبة التمثيل البياني جد نموذج درجة الصف ونموذج درجة الصف المنخفض لكل نظام من الأنظمة التالية.

40. $3x + 2.5y = 18$
$6.8x - 4y = 29.2$

41. $\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}y = 8$
$\frac{3}{4}x + \frac{5}{8}y = \frac{5}{2}$

42. $7x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{6}z = -\frac{13}{3}$
$-\frac{3}{5}x + y - \frac{1}{3}z = \frac{11}{10}$
$2x - \frac{2}{5}y - \frac{1}{2}z = -6$

43. $15.9x - y + 4.3z = 14.8$
$-8.2x + 14y = 14.6$
$-11x + 0.5y - 1.6z = -20.4$

44. المعرفة المالية حصلت شركة معدات رياضية على ثلاثة قروض مختلفة من أحد البنوك لشراء أجهزة الجري الكهربائية. ويتم عرض بيان البنك بعد العام الأول أدناه. وقد كان المبلغ المقترض بمعدل فائدة 6.5% أقل بمقدار AED 50,000 من المبلغين المقترضين بالمعدلين الآخرين مجتمعين.

شركة بنك الخليج

ملخص البيان

المبلغ المقترض	AED 350,000
القرض 1	معدل الفائدة 6.5%
القرض 2	معدل الفائدة 7%
القرض 3	معدل الفائدة 9%
الفائدة المدفوعة	AED 24,950

a. اكتب نظامًا من ثلاث معادلات خطية لتمثيل هذه الحالة.

b. استخدم حاسبة التمثيل البياني لحل نظام المعادلات. فسِّر الحل.

حدد عملية الصف التي تم القيام بها للحصول على كل مصفوفة.

45. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$

46. $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -5 & 4 \\ 9 & -1 & 4 & -2 \\ 8 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -5 & 4 \\ 9 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 7 & -7 \end{array}\right]$

47. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 15 & 2 & 4 & 14 \\ 0 & 8 & 5 & -5 & 15 \\ 2 & 1 & 0 & 16 & 20 \\ -3 & -11 & -1 & 6 & -4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 15 & 2 & 4 & 14 \\ 0 & 8 & 5 & -5 & 15 \\ 2 & 1 & 0 & 16 & 20 \\ 0 & 34 & 5 & 18 & 38 \end{array}\right]$

48. $\left[\begin{array}{ccccc|c} 8 & -2 & 0 & 2 & 12 & -2 \\ 8 & 5 & -7 & 1 & 6 & 9 \\ -1 & 0 & 9 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 8 & -2 & 0 & 2 & 12 & -2 \\ 0 & 7 & -7 & -1 & -6 & 11 \\ -1 & 0 & 9 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$

49. الطب هناك حاجة إلى محلول ملحي مخفف للإجراءات الطبية الروتينية في المستشفى. وتحتوي غرفة الإمدادات على كمية كبيرة من المحلول الملحي بتركيز 20% والمحلول الملحي بتركيز 40% ولكنها تحتاج إلى 10 لترات من المحلول الملحي بتركيز 25%.

a. اكتب نظام معادلات لتمثيل هذه الحالة.

b. جد حلاً لنظام المعادلات. فسّر الحل.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

50. مسألة غير محددة الإجابة ضع نظامًا من 3 معادلات بمتغيرات له عدد لا نهائي من الحلول. اشرح استنتاجك.

51. تحدٍّ ادرس نظام المعادلات التالي. ما قيمة k التي تجعل النظام متوافقًا ومستقلًا؟

$2x + 2y = 5$
$5y - kz = -22$
$2x + 5z = 26$
$-2x + ky + z = -8$

52. تحليل الخطأ يكتب يوسف وعبد الله المصفوفة الموسعة للنظام أدناه في صورة نموذج درجة الصف.

$2x - y + z = 0$
$x + y - 2z = -7$
$x - 3y + 4z = 9$

يوسف

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$

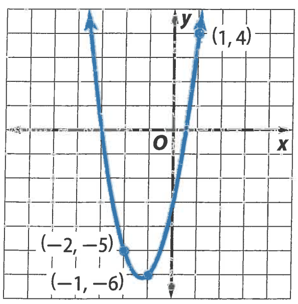
عبد الله

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$

هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

53. التبرير حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة: إذا كانت المصفوفة التربيعية الموسعة والمكتوبة في صورة نموذج درجة الصف وكان صفها الأخير صفًا من الأصفار، فحينها لا يكون لنظام المعادلات المقابل حل. اشرح استنتاجك.

54. تحدٍّ يمر قطع مكافئ عبر ثلاث نقاط موضحة في التمثيل البياني أدناه.



a. اكتب نظام معادلات يمكن استخدامه لإيجاد معادلة القطع المكافئ في النموذج $f(x) = ax^2 + bx + c$.

b. استخدم المصفوفات لحل نظام المعادلات الذي كتبته في الجزء a.

c. استخدم الحل الذي جدته في الجزء b لكتابة معادلة للقطع المكافئ. ثم تحقق من النتائج باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

55. الكتابة في الرياضيات قارن وقابل بين حذف جاوس وحذف جاوس-جوردان.

مراجعة شاملة

اثبت صحة كل متطابقة.

56. $2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x$

57. $\tan^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

58. $\frac{1}{\sin x \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \tan x$

جد قيمة كل تعبير مثلّثي مما يلي.

59. $\cos 105°$

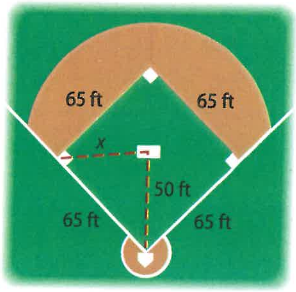
60. $\sin 165°$

61. $\cos\frac{7\pi}{12}$

62. $\sin\frac{\pi}{12}$

63. $\cot\frac{113\pi}{12}$

64. $\sec 1275°$



.65 **الكرة اللينة** في لعبة الكرة اللينة ذات الرميات البطيئة، تعد الماسة مربعًا يبعد 65 ft عن كل جانب. وتكون المسافة بين مكان الرامي وصفيحة الملعب 50 ft. فما بعد المسافة التي يحتاج الرامي إليها لرمي الكرة من مكان الرامي إلى القاعدة الثالثة لإيقاف لاعب يحاول الاستيلاء على القاعدة الثالثة؟

.66 **السفر** في أحد مراكب الجولات السياحية الاستطلاعية بالقرب من قاعدة شلالات حدوة الحصان بشلالات نياجرا، قدّر أحد الركاب زاوية الارتفاع إلى أعلى الشلالات بـ $30°$. فإذا كان ارتفاع شلالات حدوة الحصان 173 قدم، فما المسافة من المركب إلى قاعدة الشلالات؟

.67 **الأرانب** تتكاثر الأرانب بمعدلات ضخمة وتتزايد أعدادها أسيًا في غياب أعدائها الطبيعيين. افترض أنه كان هناك في الأصل 65,000 أرنب في منطقة ما، وبعدها بعامين أصبح العدد 2,500,000 أرنب.

a. اكتب دالة أسية يمكن استخدامها لتمثيل عدد الأرانب y في هذه المنطقة. اكتب الدالة بدلالة x، عدد الأعوام منذ العام الأصلي.

b. افترض أن عدد الأرانب استمر في النمو بهذا المعدل. قدّر عدد الأرانب في هذه المنطقة بعد 7 أعوام من العام الأصلي.

حُلّ كل من المعادلات التالية.

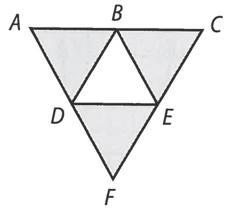
68. $\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} = \frac{17}{12}$

69. $\frac{4}{x+3} - \frac{2}{x+1} = \frac{2}{15}$

70. $\frac{4}{3} - \frac{1}{x-2} = \frac{13}{2x}$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

.71 **SAT/ACT** $\triangle ACF$ عبارة عن متساوي أضلاع له أضلاع طولها 4. فإذا كان B و D و E هي نقاط المنتصف لأضلاعه على التوالي، فما مجموع مساحات المناطق المظللة؟



A $3\sqrt{2}$

B $3\sqrt{3}$

C $4\sqrt{2}$

D $4\sqrt{3}$

E $6\sqrt{3}$

.72 **مراجعة** اشترى متعهد تقديم الطعام عدة جرامات من سلطات الدجاج والتونة لوجبة غداء. وتكلف سلطة الدجاج AED 7.30 لكل 100 g، بينما تكلف سلطة التونة AED 4.80 لكل 100 g. وقد اشترى إجمالي 6.4 kg من السلطات ودفع إجمالي AED 407.70. فما مقدار سلطة الدجاج التي اشتراها متعهد تقديم الطعام؟

F 2.7 kg

G 3.2 kg

H 3.6 kg

J 4.1 kg

.73 يبيع محل للألبان قوالب لبن على شكل مخروط، ويبيع الصغير بتكلفة AED 0.89 والمتوسط بتكلفة AED 1.19 والكبير بتكلفة AED 1.39. وفي أحد الأيام، باع سالم 52 قالبًا. وباع عددًا من القوالب المتوسطة أكبر من القوالب الصغيرة بمقدار سبعة. فإذا باع قوالب بمبلغ AED 58.98، فكم عدد القوالب المتوسطة التي باعها؟

A 11

B 17

C 24

D 36

.74 **مراجعة** للتدرُّب في المنزل، اشترى علي كرة سلة وكرة طائرة وكان إجمالي تكلفتهما AED 67.. فإذا كانت تكلفة كرة السلة b أكبر من ضعف تكلفة كرة الطائرة v بمقدار AED 4، فأي أنظمة المعادلات الخطية يمكن استخدامها لتحديد تكلفة كل كرة؟

F $b + v = 67$, $b = 2v - 4$

G $b + v = 67$, $b = 2v + 4$

H $b + v = 4$, $b = 2v - 67$

J $b + v = 4$, $b = 2v + 67$

الدرس 5-2 ضرب المصفوفات والمعكوسات والمحددات

:: السابق	:: الحالي	:: لماذا؟
● فمت بإجراء عمليات حسابية على المصفوفات.	1 ضرب المصفوفات. 2 إيجاد محددات ومعكوسات المصفوفة 2×2 والمصفوفة 3×3.	● تستخدم المصفوفات في العديد من الصناعات بصفتها وسيلة بسيرة لتخزين البيانات. بمجال إدارة المطاعم، يستخدم ضرب المصفوفات لتحديد مقدار المواد الخام الضرورية لإنتاج المنتج الأخير المنشود أو الأطباق الموجودة في القائمة.

المفردات الجديدة
مصفوفة محايدة identity matrix
مصفوفة عكسية inverse matrix
معكوس inverse
لها معكوس invertible
مصفوفة منفردة singular matrix
محدد determinant

1 ضرب المصفوفات تتمثل عمليات المصفوفات الأساسية الثلاث في جمع المصفوفات وضربها وضربها بكميات قياسية. وقد رأيت أن جمع المصفوفات يشبه جمع الأعداد الحقيقية وضرب المصفوفات في كمية قياسية يشبه ضرب الأعداد الحقيقية.

جمع المصفوفات

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$$

الضرب بالكميات القياسية

$$k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{bmatrix}$$

ولا يوجد لضرب المصفوفة أي عمليات مشابهة بنظام الأعداد الحقيقية. لضرب المصفوفة A في المصفوفة B، فإن عدد الأعمدة في A يجب أن يكون مساويًا لعدد الصفوف في B. ويمكن تحديد ذلك بدراسة أبعاد A و B. فإذا تحقق الشرط، يكون ناتج الضرب المصفوفة AB ويكون بها نفس عدد صفوف المصفوفة A ونفس عدد أعمدة المصفوفة B.

مصفوفة A	$\times$	مصفوفة B	$=$	AB
3×2		2×4		3×4

يساوي

أبعاد AB

المفهوم الأساسي ضرب المصفوفات

الشرح إذا كانت A مصفوفة $m \times r$ وكانت B مصفوفة $n \times r$، فإن ناتج ضربهما AB هو المصفوفة $m \times n$ التي يمكن الحصول عليها بجمع ناتج ضرب مدخلات الصف في المصفوفة A في المدخلات المناظرة لعمود في المصفوفة B.

الرموز إذا كانت A هي المصفوفة $m \times r$ و B هي المصفوفة $r \times n$، فإن ناتج الضرب AB هو المصفوفة $m \times n$ التي يكون فيها

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & & b_{rn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ c_{m1} & c_{m2} & & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

يمكن اعتبار كل مدخلة في ناتج ضرب مصفوفتين على أنه ناتج ضرب مصفوفة صف $1 \times r$ ومصفوفة عمود $r \times 1$. ادرس ناتج ضرب مصفوفة الصف 1×3 ومصفوفة العمود 3×1 الموضحة.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(4) + 1(-6) + 3(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

مثال 1 ضرب المصفوفات

استخدم المصفوفات $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ لإيجاد كل ناتج ضرب، إن وجد.

a. AB

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

أبعاد A: 2×2، أبعاد B: 2×3

A هي مصفوفة 2×2 و B هي مصفوفة 2×3. حيث إن عدد الأعمدة للمصفوفة A يساوي عدد الصفوف في المصفوفة، B؛ إذًا فإن ناتج الضرب AB موجود.

لإيجاد المدخل الأول في AB، اكتب مجموع نواتج ضرب المدخلات في الصف 1 للمصفوفة A وفي العمود 1 من المصفوفة B.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(-2) + (-1)(3) & & \\ & & \end{bmatrix}$$

اتبع نفس الإجراء لإيجاد مدخل الصف 1 والعمود 2 من AB.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(-2) + (-1)(3) & 3(0) + (-1)(5) & \\ & & \end{bmatrix}$$

استمر في ضرب كل صف في كل عمود لإيجاد مجموع كل مدخل.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(-2) + (-1)(3) & 3(0) + (-1)(5) & 3(6) + (-1)(1) \\ 4(-2) + 0(3) & 4(0) + 0(5) & 4(6) + 0(1) \end{bmatrix}$$

وأخيرًا، حوّل كل مجموع لأبسط صورة.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -5 & 17 \\ -8 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

b. BA

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

أبعاد B: 2×3، أبعاد A: 2×2

بما أن عدد أعمدة المصفوفة B لا يساوي عدد صفوف المصفوفة A، فإن ناتج الضرب BA ليس موجودًا. BA غير محدد.

تمرين موجّه

جد AB و BA؛ إن أمكن.

1A. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 7 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

1B. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$

تلميح تقني

ضرب المصفوفات يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لضرب المصفوفات. حدد A و B في قائمة المصفوفات ثم اضرب المصفوفات باستخدام حروفها المرجعية. لاحظ أن الحاسبة تظهر صفوف ناتج الضرب في المثال 1a باستخدام مصفوفات 3×1.

```
[A]*[B]
  [[-9  -5  17]
   [-8  0   24]]
```

لاحظ في المثال 1 أن ناتجي الضرب AB و BA مختلفان. وفي معظم الحالات، حتى عند تحديد كل من ناتجي الضرب، تكون $AB \neq BA$. ويعني ذلك أن خاصية التبديل لا تنطبق على ضرب المصفوفات. ومع ذلك، تنطبق بعض من خصائص الأعداد الحقيقية على ضرب المصفوفات.

المفهوم الأساسي خصائص ضرب المصفوفة

بالنسبة لأي مصفوفة A و B و C والتي يكون ناتج ضرب المصفوفة لها معروف وأي كمية قياسية k، تنطبق الخصائص التالية.

خاصية التجميع في ضرب المصفوفة $(AB)C = A(BC)$

خاصية التجميع في ضرب الكميات القياسية $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

خاصية التوزيع إلى اليسار $C(A + B) = CA + CB$

خاصية التوزيع إلى اليمين $(A + B)C = AC + BC$

ستبرهن على هذه العلاقات في التمارين 75-72.

يمكن استخدام ضرب المصفوفات لحل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 2 من الحياة اليومية ضرب المصفوفات

التصويت توضح نسبة المصوتين من فئات عمرية مختلفة والمسجلين بأحزاب الديموقراطيين أو الجمهوريين أو المستقلين بأحد الانتخابات الأخيرة في مدينة أمريكية. استخدم هذه المعلومات لتحديد إن كان عدد المصوتين من الذكور المسجلين لحزب الديموقراطيين أكبر من عدد الإناث المسجلين بحزب الجمهوريين.

التوزيع حسب الحزب والعمر (%)

الحزب	18–25	26–40	41–50	50+
الديموقراطيون	0.55	0.50	0.35	0.40
الجمهوريون	0.30	0.40	0.45	0.55
المستقلون	0.15	0.10	0.20	0.05

التوزيع حسب العمر والجنس

العمر	أنثى	ذكر
18-25	18,500	16,000
26-40	20,000	24,000
41-50	24,500	22,500
50+	16,500	14,000

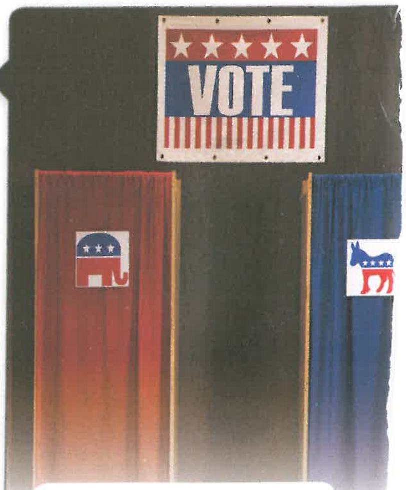
افترض أن المصفوفة X تمثل التوزيع حسب الحزب والعمر وافترض أن المصفوفة Y تمثل التوزيع حسب العمر والجنس. ثم جد ناتج الضرب XY.

$$XY = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.50 & 0.35 & 0.40 \\ 0.30 & 0.40 & 0.45 & 0.55 \\ 0.15 & 0.10 & 0.20 & 0.05 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 18{,}500 & 16{,}000 \\ 20{,}000 & 24{,}000 \\ 24{,}500 & 22{,}500 \\ 16{,}500 & 14{,}000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35{,}350 & 34{,}275 \\ 33{,}650 & 32{,}225 \\ 10{,}500 & 10{,}000 \end{bmatrix}$$

يمثل ناتج الضرب XY توزيع المصوتين من الذكور والإناث والمسجلين بكل حزب. يمكن استخدام ناتج ضرب المصفوفة لإيجاد عدد المصوتين الذكور المسجلين بحزب الديموقراطيين وعدد المصوتات الإناث المسجلين بحزب الجمهوريين.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \text{أنثى} & \text{ذكر} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{الديموقراطيون} \\ \text{الجمهوريون} \\ \text{المستقلون} \end{array} & \begin{bmatrix} 35{,}350 & \mathbf{34{,}275} \\ \mathbf{33{,}650} & 32{,}225 \\ 10{,}500 & 10{,}000 \end{bmatrix} \end{array}$$

كان عدد المصوتين الذكور المسجلين بحزب الديموقراطيين أكبر من عدد المصوتات الإناث المسجلات بحزب الجمهوريين، حيث إن $34{,}275 > 33{,}650$.



الربط بالحياة اليومية

في انتخابات عام 2008 في الولايات المتحدة الأمريكية، تلقى الرئيس باراك أوباما 66,882,230 صوتًا أو 53% من أصوت الجمهور.

المصدر: وكالة أنباء CNN

تمرين موجّه

2. المبيعات يوضح عدد أجهزة الكمبيوتر المحمولة التي باعتها إحدى الشركات في الأشهر الثلاثة الأولى من العام، وكذلك أسعار كل طراز أثناء هذه الأشهر. استخدم هذه المعطيات لتحديد أي النماذج تنتج أكبر قدر من الدخل للأشهر الثلاثة الأولى.

شهر	الطراز 1	الطراز 2	الطراز 3
يناير	150	250	550
فبراير	200	625	100
مارس	600	100	350

الطراز	يناير	فبراير	مارس
1	AED 650	AED 575	AED 485
2	AED 800	AED 700	AED 775
3	AED 900	AED 1050	AED 925

أنت تعلم أن المحايد الضربي للأعداد الحقيقية هو العدد 1، حيث إنه لأي عدد حقيقي a،
$a \times 1 = a$. ويطلق على المصفوفة المربعة للمحايد الضربي $n \times n$ اسم **المصفوفة المحايدة**.

المفهوم الأساسي المصفوفة المحايدة

الشرح إن المصفوفة المحايدة ذات الـــرُتبة n، المعبر عنها بواسطة I_n، هي مصفوفة $n \times n$ تكون جميع قيمها 1 على قطرها الرئيس، من أعلى اليسار إلى أدنى اليمين، وجميع قيمها 0 بالنسبة لجميع المُدخلات الأخرى.

الرموز

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

قراءة في الرياضيات

المصفوفة المحايدة يستخدم الترميز I_n لتمثيل المحايد للمصفوفة $n \times n$. يستخدم الرمز I بدلاً من I_2، I_3، I_4، إلى آخره، عندما يكون ترتيب المحايد معروفًا.

إذًا، إذا كانت A مصفوفة $n \times n$، فإن $AI_n = I_nA = A$. وقد تجد المصفوفة المحايدة بالطرف الأيسر لأي مصفوفة موسعة في صورة مستوى صف منخفض. وبشكل عام، إذا كانت A مصفوفة المعاملات لنظام المعادلات، فإن X هي مصفوفة العمود للمتغيرات و B هي مصفوفة العمود للثوابت، فيمكنك كتابة نظام المعادلات كمعادلة من المصفوفات (معادلة مصفوفية)..

معادلة المصفوفة

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} \underset{\times}{\times} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} \underset{=}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{B}$$

نظام المعادلات

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

مثال 3 حل أنظمة المعادلات الخطية

اكتب نظام المعادلات في صورة معادلة مصفوفية $AX = B$. ثم استخدم اختزال جاوس-جوردان على المصفوفة الموسعة لحل النظام.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= -1 \end{aligned}$$

اكتب النظام كمصفوفة بالشكل $AX = B$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$A \overset{\times}{\ } X = B$

اكتب المصفوفة الموسعة $[A \mid B]$. استخدم اختزال جاوس-جوردان لحل النظام.

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -4 & 7 & -1 \end{array}\right]$$

مصفوفة موسعة

$$[I \mid X] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

استخدم عمليات الصف الأولية لتحول A إلى I.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

يحدد حل المعادلة بواسطة X.

إذًا، فإن حل نظام المعادلة هو $(-13, 1, 6)$.

قراءة في الرياضيات

المصفوفة الموسعة يمثل الرمز $[A \mid B]$، والتي تقرأ A الموسعة بواسطة B. المصفوفة الموسعة والتي تنتج عندما تكون المصفوفة B متصلة بالمصفوفة A.

تمرين موجّه

اكتب كل نظام من أنظمة المعادلات في صورة معادلة مصفوفية $AX = B$. ثم استخدم اختزال جاوس-جوردان على المصفوفة الموسعة $[A \mid B]$ لحل النظام.

3A.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 9 \\ -4x_1 + x_2 + 8x_3 &= -16 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

3B.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

2 المعكوسات والمحددات

أنت تعلم أنه إذا كان a عددًا حقيقيًا غير صفري، فإن $\frac{1}{a}$ أو a^{-1} هو المعكوس الضربي للمتغير a حيث إن $a\left(\frac{1}{a}\right) = a \times a^{-1} = 1$. ويطلق على المعكوس الضربي لمصفوفة مربعة اسم **المصفوفة العكسية**.

المفهوم الأساسي معكوس المصفوفة المربعة

افترض أن A هي المصفوفة $n \times n$. فإذا وجدت مصفوفة B بحيث تكون $AB = BA = I_n$. فيطلق على المصفوفة B حينها **معكوس** المصفوفة A وتكتب بالصورة A^{-1}. إذًا، $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

قراءة في الرياضيات

المصفوفة العكسية يقرأ الرمز A^{-1} على أنه *المعكوس*.

مثال 4 التحقق من المصفوفة العكسية

حدد إذا كان $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ **و** $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ **مصفوفتين متعاكستين.**

إذا كانت المصفوفة A والمصفوفة B مصفوفتين متعاكستين، فإن $AB = BA = I$.

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+4 & 6+(-6) \\ -2+2 & 4+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+4 & 2+(-2) \\ -6+6 & 4+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حيث إن $AB = BA = I$، يترتب على ذلك أن $B = A^{-1}$ و $A = B^{-1}$.

تمرين موجّه

حدد إذا كانت المصفوفة A والمصفوفة B مصفوفتين متعاكستين.

4A. $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

4B. $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

وإذا كان للمصفوفة A معكوس، يقال إن المصفوفة A **قابلة للعكس أو لها معكوس** أو غير منفردة. أما **المصفوفة المنفردة** فليس لها معكوس. وليست جميع المصفوفات المربعة لها مصفوفة عكسية. ولإيجاد معكوس مصفوفة مربعة A، ستحتاج إلى إيجاد مصفوفة A^{-1}. بافتراض وجود A^{-1} وأن ناتج ضرب A و A^{-1} هو المصفوفة المحايدة. بعبارة أخرى، ستحتاج إلى حل المعادلة المصفوفية $AA^{-1} = I_n$ لإيجاد قيمة B. وبمجرد تحديد B، ستحتاج إلى التأكد أن $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

نصيحة دراسية

المصفوفة المنفردة إذا كانت المصفوفة منفردة، فإن المعادلة المصفوفية $AB = I$ ليس لها حل.

من إحدى طرق إيجاد معكوس المصفوفة المربعة استخدام نظام معادلات. افترض أن $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$، وافترض وجود A^{-1}. اكتب المعادلة المصفوفية $AA^{-1} = I_2$، حيث إن $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad AA^{-1} = I_2$$

$$\begin{bmatrix} 8a-5c & 8b-5d \\ -3a+2c & -3b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ضرب المصفوفة}$$

$$\begin{matrix} 8a-5c=1 & 8b-5d=0 \\ -3a+2c=0 & -3b+2d=1 \end{matrix} \qquad \text{مساواة العناصر المتناظرة}$$

من مجموعة المعادلات الأربع، سترى أن هناك نظامين من المعادلات يحتوي كل منهما على قيمتين مجهولتين. اكتب المصفوفات الموسعة المقابلة.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 8 & -5 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c} 8 & -5 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

لاحظ أن المصفوفة الموسعة لكل نظام لها نفس مصفوفة المعاملات، $\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

بما أن مصفوفة المعاملات للأنظمة متطابقة، يمكننا إجراء عملية خفض الصف على كل من المصفوفتين الموسعتين في نفس الوقت من خلال كتابة مصفوفة موسعة مزدوجة $[A \mid I]$. لإيجاد A^{-1}، استخدم المصفوفة الموسعة المزدوجة

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 8 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

مثال 5 معكوس المصفوفة

جد A^{-1}، إن وُجدت. وإن لم توجد A^{-1}، فاكتب منفردة.

a. $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

الخطوة 1 أنشئ المصفوفة الموسعة المزدوجة $[A \,\vdots\, I]$.

$$[A \,\vdots\, I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 8 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

مصفوفة موسعة مزدوجة

الخطوة 2 طبّق عمليات الصف الأولية لكتابة المصفوفة في صورة مستوى صف منخفض.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 8 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$3R_1 + 8R_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 8 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{array}\right]$$

$$R_1 + 5R_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 8 & 0 & 16 & 40 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{array}\right]$$

$$\tfrac{1}{8}R_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{array}\right] = [I \,\vdots\, A^{-1}]$$

العمودان الأولان هما المصفوفة المحايدة. إذًا، A لها معكوس ومعكوسها $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$.

التحقق تأكد أن $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \checkmark$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \checkmark$$

b. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$

الخطوة 1 مصفوفة موسعة مزدوجة

$$[A \,\vdots\, I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

الخطوة 2 طبّق عمليات الصف الأولية لكتابة المصفوفة في صورة مستوى صف منخفض.

$$\tfrac{1}{2}R_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$3R_1 + R_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right]$$

لاحظ أنه من المستحيل الحصول على مصفوفة محايدة I على الطرف الأيسر لمصفوفة موسعة مزدوجة

إذًا، المصفوفة A منفردة.

تمرين موجّه

5A. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

5B. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

5C. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$

> **تلميح تقني**
>
> **المعكوس** يمكنك استخدام $\boxed{x^{-1}}$ على حاسبة التمثيل البياني لإيجاد معكوس المصفوفة المربعة.
>
> ```
> [A]
>         [[8  -5]
>          [-3  2 ]]
> [A]-1
>          [[2  5]
>           [3  8]]
> ```

وفيما يلي ملخص العملية المستخدمة لإيجاد معكوس المصفوفة المربعة.

ملخص المفهوم إيجاد معكوس المصفوفة المربعة

افترض أن A هي المصفوفة $n \times n$.

1. اكتب المصفوفة الموسعة $[A \,\vdots\, I_n]$.
2. أجرِ عمليات الصف الأولية على المصفوفة الموسعة لخفض المصفوفة A صورة مستوى الصف المنخفض.
3. قرر إن كانت A لها معكوس.
   - إذا أمكن خفض A إلى المصفوفة المحايدة I_n، فإن A^{-1} هي المصفوفة الموجودة على يمين للمصفوفة الموسعة المحولة $[I_n \,\vdots\, A^{-1}]$.
   - إذا لم يتمكن من خفض المصفوفة A إلى مصفوفة محايدة I_n، فإن A مصفوفة منفردة.

> **تلميح تقني**
>
> **المصفوفات المنفردة** إذا كانت المصفوفة منفردة، فستُظهر حاسبة التمثيل البياني رسالة الخطأ التالية.
>
> ERR: SINGULAR MAT

بالرغم من أن طريقة إيجاد المصفوفة العكسية المستخدمة في مثال 5 تنجح مع أي مصفوفة مربعة، قد تجد القانون التالي مفيدًا عند إيجاد معكوس المصفوفة 2 × 2.

المفهوم الأساسي محدد ومعكوس المصفوفة 2 × 2

افترض $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. يكون للمصفوفة A معكوس فقط إن كان $ad - cb \neq 0$. وهو $A^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

العدد $ad - cb$ يسمى **مُحدِّد** المصفوفة 2 × 2 ويُعبَّر عنه بواسطة $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$.$\det(A) = |A| =$

ستُثبت هذه النظرية في التمرين 66.

إذًا، يقدم محدد المصفوفة 2 × 2 اختبارًا لتحديد إن كانت المصفوفة لها معكوس.

لاحظ أن محدد المصفوفة 2 × 2 هو الفرق بين ناتج ضرب قطري المصفوفة.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

مثال 6 محدد ومعكوس المصفوفة 2 × 2

جد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم جد معكوس المصفوفة، إن وُجدت.

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}$ $\quad a = 2, b = -3, c = 4, d = 4$

$= 2(4) - 4(-3) = 20$ $\quad ad - cb$

حيث إن A، $\det(A) \neq 0$ لها معكوس. طبّق الصيغة لمعكوس المصفوفة 2 × 2.

$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ $\quad$ معكوس مصفوفة 2 × 2

$= \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad a = 2, b = -3, c = 4, d = 4, ad - cb = 20$

$= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$ $\quad$ ضرب الكميات غير المتجهة

التحقق $AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✔

b. $B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$

$\det(B) = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 6(6) - 9(4) = 0$

حيث إن $\det(B) = 0$، فإن B ليس لها معكوس. إذًا، B^{-1} غير موجودة.

تمرين موجّه

6A. $\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}$

6B. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

نصيحة دراسية

معكوس المصفوفة 2 × 2 تكتب صيغة معكوس المصفوفة 2 × 2 في الصورة $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

يعين محدد المصفوفة 3×3 باستخدام المحددات 2×2 على النحو المبين.

المفهوم الأساسي محدد مصفوفة 3×3

افترض $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. إذًا $\det(A) = |A| = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$.

تلميح تقني

المُحدد يمكنك استخدام خاصية det(على حاسبة التمثيل البياني لإيجاد محدد المصفوفة المربعة. إذا حاولت إيجاد محدد مصفوفة بأبعاد غير $n \times n$، فستُظهر حاسبتك رسالة الخطأ التالية.
ERR:INVALID DIM

وكما هو الحال مع المصفوفات 2×2. يكون للمصفوفة A 3×3 معكوس فقط إذا كان $\det(A) \neq 0$. توجد صيغة لحساب معكوس المصفوفة 3×3 والمصفوفات الأعلى درجة. وعلى الرغم من ذلك، بسبب تعقيد هذه الصيغة، سنستخدم حاسبة التمثيل البياني لحساب معكوس المصفوفة 3×3 والمصفوفة المربعة الأعلى رتبة.

مثال 7 محدد ومعكوس مصفوفة 3×3

جد محدد $C = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$**. ثم جد C^{-1}، إن وُجدت.**

$$\det(C) = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -3[(-1)(0) - 4(2)] - 2[1(0) - (-1)(2)] + 4[1(4) - (-1)(-1)]$$

$$= -3(-8) - 2(2) + 4(3) = 32$$

حيث إن $\det(A)$ لا يساوي الصفر، فإن C^{-1} موجودة. استخدم حاسبة التمثيل البياني لإيجاد قيمة C^{-1}.

```
[C]-1
[[-.25   .5    ...
 [-.0625 .125  ...
 [.09375 .3125 ...
```

```
[C]-1
... .5    .25   ]
... .125  .3125 ]
... .3125 .03125]]
```

يمكن استخدام خاصية ►Frac تحت قائمة MATH لكتابة المعكوس باستخدام الكسور، على النحو المبين.

```
... .5    .25   ]
... .125  .3125 ]
... .3125 .03125]]
Ans►Frac
[[-1/4  1/2   1/...
 [-1/16 1/8   5/...
 [3/32  5/16  1/...
```

```
... .5    .25   ]
... .125  .3125 ]
... .3125 .03125]]
Ans►Frac
.../4   1/2  1/4 ]
.../16  1/8  5/16]
...32   5/16 1/32]]
```

إذًا، $C^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{5}{16} \\ \frac{3}{32} & \frac{5}{16} & \frac{1}{32} \end{bmatrix}$.

تمرين موجّه

جد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم جد معكوسها، إن وُجدت.

7A. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

7B. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

جد AB و BA؛ إن أمكن. (مثال 1)

1. $A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -10 & 9 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 \\ -4 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -8 \\ -6 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 6 & -9 & 10 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 3 & -9 \\ -2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

9. **كرة السلة** يتم منح قيم نقاط مختلفة للتسديدات المختلفة في كرة السلة. استخدم المعطيات لتحديد إجمالي مقدار النقاط التي أحرزها كل لاعب. (مثال 2)

اللاعب	رمية حرة	هدف بنقطتين	هدف بثلاث نقاط
أيوب	44	32	25
مازن	37	24	31
سعيد	35	39	29

الضربات	النقاط
رمية حرة	1
هدف بنقطتين	2
هدف بثلاث نقاط	3

10. **السيارات** يوضح عدد المركبات التي تصنعها إحدى الشركات يوميًا من مصنعين مختلفين، وكذلك سعر المركبة بمبيعات كل ربع سنوي. استخدم المعطيات لتحدد أي المصنعين حقق أعلى مبيعات في الربع السنوي الرابع. (مثال 2)

المصنع	الطراز			
	سيارة كوبيه	سيارة سيدان	سيارة رياضية متعددة الأغراض	سيارة فان صغيرة
1	500	600	150	250
2	250	350	250	400

الطراز	الربع السنوي			
	الأول (AED)	الثاني (AED)	الثالث (AED)	الرابع (AED)
سيارة كوبيه	18,700	17,100	16,200	15,600
سيارة سيدان	25,400	24,600	23,900	23,400
سيارة رياضية متعددة الأغراض	36,300	35,500	34,900	34,500
سيارة فان صغيرة	38,600	37,900	37,400	36,900

اكتب كل نظام من أنظمة المعادلات في صورة معادلة مصفوفة $AX = B$. ثم استخدم اختزال جاوس- جوردان على المصفوفة الموسعة لإيجاد حل النظام. (مثال 3)

11. $2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 9$, $4x_1 + x_2 - 6x_3 = 35$, $-3x_1 + 9x_2 - 7x_3 = -6$

12. $3x_1 - 10x_2 - x_3 = 6$, $-5x_1 + 12x_2 + 2x_3 = -5$, $-4x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 16$

13. $2x_1 - 10x_2 + 7x_3 = 7$, $6x_1 - x_2 + 5x_3 = -2$, $-4x_1 + 8x_2 - 3x_3 = -22$

14. $x_1 + 5x_2 + 5x_3 = -18$, $-7x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3$, $6x_1 + 7x_2 - x_3 = 42$

15. $2x_1 + 6x_2 - 5x_3 = -20$, $8x_1 - 12x_2 + 7x_3 = 28$, $-4x_1 + 10x_2 - x_3 = 7$

16. $3x_1 - 5x_2 + 12x_3 = 9$, $2x_1 + 4x_2 - 11x_3 = 1$, $-5x_1 + 7x_2 - 15x_3 = -28$

17. $-x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 25$, $-5x_1 + 11x_2 + 8x_3 = 33$, $2x_1 + x_2 - 13x_3 = -45$

18. $x_1 - 8x_2 - 3x_3 = -4$, $-3x_1 + 10x_2 + 5x_3 = -42$, $2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 20$

حدد إذا كانت المصفوفة A والمصفوفة B مصفوفتين متعاكستين. (مثال 4)

19. $A = \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

21. $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$

جد A^{-1}، إن وُجدت. وإن لم توجد A^{-1}، فاكتب منفردة. (مثال 5)

27. $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

28. $A = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

29. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

30. $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

31. $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

32. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

33. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

34. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 6 & -5 \\ -2 & -8 & 1 \end{bmatrix}$

جد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم جد معكوس المصفوفة إن وُجد. (المثالان 6 و 7)

35. $\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

37. $\begin{bmatrix} -4 & -7 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

38. $\begin{bmatrix} 12 & -9 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

39. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 8 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

40. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & 9 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

41. $\begin{bmatrix} 9 & 3 & 7 \\ -6 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

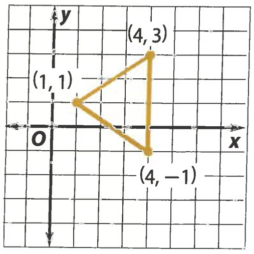
42. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -5 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

43. $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & -3 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

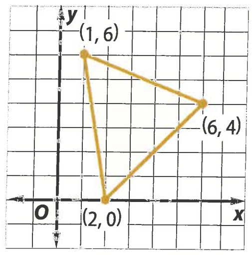
44. $\begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

جد المساحة A لكل مثلث بالرؤوس (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، (x_3, y_3)، باستخدام $A = \frac{1}{2}|\det(X)|$، حيث إن X تساوي $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$.

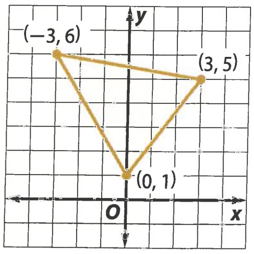
45.



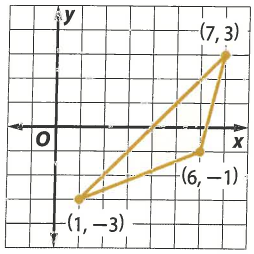
46.



47.



48.



باستخدام A و AB، جد B.

49. $A = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 36 & 48 \\ -24 & 48 \end{bmatrix}$

50. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -16 & -6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

جد x و y.

51. $A = \begin{bmatrix} 2x & -y \\ -3y & 5x \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} -2 \\ 31 \end{bmatrix}$

جد محدد كل من المصفوفات التالية.

52. $\begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$

53. $\begin{bmatrix} c & c & c \\ 0 & c & c \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

54. **جمع التبرعات** تقوم مدرسة عبد الله بن الزبير الثانوية بجمع التبرعات عن طريق بيع الفشار. وقد اشترت المدرسة أربع نكهات من الفشار بحسب الكيس. وتوضح أسعار شراء الأنواع المختلفة من الفشار وأسعار بيعها.

الصف الدراسي	أكياس الفشار			
	زبد	توابل	جبن	كراميل
الصف التاسع	152	80	125	136
الصف العاشر	112	92	112	150
الصف الحادي عشر	176	90	118	122
الصف الثاني عشر	140	102	106	143

النكهة	السعر المدفوع للكيس (AED)	سعر البيع للكيس (AED)	الأرباح بكل كيس (AED)
زبد	18.90	42.00	
توابل	21.00	45.00	
جبن	23.10	48.00	
كراميل	25.20	51.00	

a. أكمل العمود الأخير في الجدول الثاني.

b. أي الصفوف الدراسية حصدت أعلى إجمالي مبيعات؟

c. كم زادت أرباح طلاب الصف الثاني عشر عن طلاب الصف العاشر؟

55. افترض أن $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a. جد قيم A^2, A^3, A^4. ثم استخدم النمط لكتابة مصفوفة لـ A^n.

b. جد قيم B^2, B^3, B^4, B^5. ثم استخدم النمط لكتابة صيغة عامة لـ B^n.

c. جد قيم C^2, C^3, C^4, C^5، ... إلى أن تلاحظ نمطًا. ثم استخدم النمط لكتابة صيغة عامة لـ C^n.

d. استخدم الصيغة التي كتبتها في الجزء c لإيجاد قيمة C^7.

56. **الخيول** يشتري كل مالك من ملاك إسطبلات الخيول المدرجين أدناه حزم من القش وأكياس من العلف كل شهر. وفي مايو، كانت تكلفة كل حزمة من حزم القش AED 2.50 وتكلفة كل كيس علف AED 7.95. وفي يونيه، كانت تكلفة كل حزمة من حزم القش AED 3.00 وتكلفة كل كيس علف AED 6.75.

الإسطبلات	حزم القش	أكياس العلف
مزارع الخيل البارع	45	5
إسطبل أجيال	75	9
مزارع المُهر	135	16
مزارع الأدهم	90	11

a. اكتب مصفوفة X لتمثيل حزم القش i وأكياس العلف j التي يشتريها كل إسطبل شهريًا.

b. اكتب مصفوفة Y لتمثيل تكاليف كل حزمة قش وكيس علف لشهري مايو ويونيه.

c. جد ناتج ضرب YX، وقم بتسمية صفوفه وأعمدته.

d. كم زاد إجمالي التكاليف في شهر يونيه لمزارع المُهر عن إجمالي التكاليف لشهر مايو لمزارع الخيل البارع؟

جد قيمة كل تعبير مما يلي.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 9 & -6 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

57. $BD + B$ **58.** $DC - A$

59. $B(A + C)$ **60.** $AB + CB$

حُـلّ كل معادلة لإيجاد قيمة X، إن وجدت.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 1 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

61. $A + C = 2X$ **62.** $4X + A = C$

63. $B - 3X = D$ **64.** $DA = 7X$

.65 محددات 3 × 3 في هذه المسألة، ستكتشف طريقة بديلة لحساب محدد مصفوفة 3 × 3.

.a احسب $\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ باستخدام الطريقة الموضحة في هذا الدرس.

.b قم بضم أول عمودين إلى يمين $\det(A)$ على النحو الموضح. ثم جد الفارق بين مجموع نواتج الضرب على طول الأقطار المبينة بالتحرك لأسفل ومجموع نواتج الضرب على طول الأقطار المبينة بالتحرك لأعلى.

$$\left|\begin{matrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -2 & 3 \\ 4 & 6 \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

.c قارن بين إجابتيك على الجزأين a و b.

.d وضّح أنه بوجه عام يمكن إيجاد محدد مصفوفة 3 × 3 باستخدام الإجراء الموضح أعلاه.

.e هل تفلح هذه الطريقة مع مصفوفة 4 × 4؟ وإذا كانت كذلك، فاشرح استنتاجك. وإذا لم تكن كذلك، فاضرب مثالاً مضادًا.

.66 البرهان افترض أن $A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. استخدم معادلة المصفوفة $AA^{-1} = I_2$ لاشتقاق صيغة معكوس مصفوفة 2 × 2.

.67 البرهان اكتب فقرة برهان لتبين إذا كان لمصفوفة مربعة معكوس، يكون هذا المعكوس فريدًا. (تلميح: افترض أن للمصفوفة A معكوسين C و B. ثم بيّن أن $B = C$.)

.68 تمثيلات متعددة في هذه المسألة، سوف تكتشف المصفوفات المربعة. يطلق على المصفوفة المربعة مثلثية عليا إذا كانت جميع العناصر تحت قطرها الرئيس تساوي 0. ويطلق عليها مثلثية دنيا إذا كانت جميع العناصر فوق قطرها الرئيسي تساوي 0. إذا لم تكن جميع العناصر على قطر المصفوفة تساوي 0. يطلق على المصفوفة قطرية. في هذه المسألة، سوف تستكشف محدد مصفوفة 3 × 3 من المصفوفات المثلثية العليا والمثلثية الدنيا والقطرية.

.a التحليل اكتب مصفوفة واحدة مثلثية عليا وأخرى مثلثية دنيا وأخرى قطرية بأبعاد 2 × 2 . ثم جد محدد كل مصفوفة.

.b التحليل اكتب مصفوفة واحدة مثلثية عليا وأخرى مثلثية دنيا وأخرى قطرية بأبعاد 3 × 3 . ثم جد محدد كل مصفوفة.

.c لفظيًا خمّن قيمة محدد أي مصفوفة مثلثية عليا أو مثلثية دنيا أو قطرية بالأبعاد 3 × 3.

.d التحليل جد معكوس كل من المصفوفات القطرية التي كتبتها في الجزأين **a** و **b**.

.e لفظيًا خمّن معكوس أي مصفوفة قطرية بالأبعاد 3 × 3.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

.69 تحدٍ باستخدام A و AB، جد B.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 14 & 6 & 33 \\ 4 & 4 & 13 \\ 1 & 18 & 12 \end{bmatrix}$$

.70 التبرير اشرح سبب أنه لا يمكن أن يكون للمصفوفة معكوس.

.71 مسألة غير محددة الإجابة اكتب مصفوفتين A و B بحيث يكون $AB = BA$، على ألا تكون A أو B المصفوفة المحايدة.

البرهان بيّن صحة الخصائص التالية لجميع مصفوفات 2 × 2.

.72 خاصية التوزيع إلى اليمين

.73 خاصية التوزيع إلى اليسار

.74 خاصية التجميع في ضرب المصفوفة

.75 خاصية التجميع في ضرب الكميات غير المتجهة

.76 تحليل الخطأ يناقش علي وناصر المحددات. وقد توصل علي إلى النظرية أن المصفوفة 2 × 2 لا تتغير إذا تم الإبدال بين صفين من المصفوفة. وتوصل ناصر إلى النظرية أن محدد المصفوفة الجديدة سيكون له نفس القيمة المطلقة ولكن ستختلف علامته. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

.77 التبرير إذا كانت AB ذات أبعاد 8 × 5، وكانت أبعاد A تساوي 6 × 5، فما هي أبعاد B؟

.78 الكتابة في الرياضيات اشرح سبب أهمية الترتيب عند إيجاد ناتج ضرب مصفوفتين A و B. اضرب بعض الأمثلة العامة لدعم إجابتك.

مراجعة شاملة

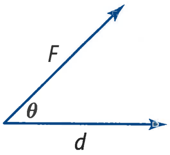
اكتب المصفوفة الموسعة لكل نظام من المعادلات الخطية التالية.

79. $10x - 3y = -12$
$-6x + 4y = 20$

80. $15x + 7y - 2z = 41$
$9x - 8y + z = 32$
$5x + y - 11z = 36$

81. $w - 6x + 14y = 19$
$3w + 2x - 4y + 8z = -2$
$9w + 18y - 12z = 3$
$5x + 10y - 16z = -26$

.82 **الفيزياء** يمثل الجهد المبذول لتحريك أحد الأجسام $W = Fd \cos \theta$، حيث إن θ هي الزاوية بين الإزاحة d والقوة المبذولة F. فإذا بذلت ليلى جهدًا بمقدار 2400 جول عند بذل قوة بمقدار 120 نيوتن في إزاحة قدرها 40 مترًا، ففي أي زاوية قامت ببذل القوة؟



حول قياس الزاوية من الدرجات إلى الراديان كمضاعف لـ π ومن الراديان إلى الدرجات.

83. $-10°$

84. $485°$

85. $\frac{3\pi}{4}$

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

86. $\log_{10} \sqrt[3]{10} = x$

87. $2 \log_5 (x - 2) = \log_5 36$

88. $\log_5 (x + 4) + \log_5 8 = \log_5 64$

89. $\log_4 (x - 3) + \log_4 (x + 3) = 2$

90. $\frac{1}{2}(\log_7 x + \log_7 8) = \log_7 16$

91. $\log_{12} x = \frac{1}{2} \log_{12} 9 + \frac{1}{3} \log_{12} 27$

.92 **فن الملاحة الجوية** تمثل البيانات أدناه معدل رفع الجناح لأحد طُرز الطائرات في ممر هوائي بزاوية محددة لهبوب الهواء. وتعتبر زاوية الهبوب α للجناح هي الزاوية ما بين الجناح وهبوب الرياح.

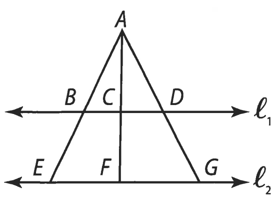
زاوية هبوب الهواء α	0.1	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	5.0	10.0
معدل الرفع (lb)	5.3	107	216	322.8	431	808.6	1081.5	1836.7

.a حدد دالة أسية لتمثيل البيانات.

.b استخدم الدالة لتوقع معدل رفع الجناح عند 4.0 درجات.

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

.93 **SAT/ACT** في الشكل، $\ell_1 \parallel \ell_2$. إذا كان $EF = x$، و $EG = y$. فأي مما يلي يمثل نسبة CD إلى BC؟



A $1 - \frac{y}{x}$

B $1 + \frac{y}{x}$

C $\frac{y}{x} - 1$

D $1 - \frac{x}{y}$

E $1 + \frac{x}{y}$

.94 ما أبعاد المصفوفة التي تنتج عن عملية الضرب الموضحة؟

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

F 1×3

G 3×1

H 3×3

J 4×3

.95 **مراجعة** أنفقت مايسة 42 AED على علبة من بطانة الدهان وعلبتين من الدهان على غرفتها. فإذا كان سعر علبة من الدهان p يساوي 150% من سعر علبة من بطانة الدهان r، فأي نظام معادلات يمكن استخدامه لإيجاد سعر الدهان وبطانة الدهان؟

A $p = r + \frac{1}{2}r,\ r + 2p = 42$

B $p = r + 2r,\ r + \frac{1}{2}p = 42$

C $r = p + \frac{1}{2}p,\ r + 2r = 42$

D $r = p + 2p,\ r + \frac{1}{2} = 42$

.96 **مراجعة** للانضمام إلى فريق كرة قدم، يجب أن يكون المعدل التراكمي للطالب 2.0 على الأقل، وأن يكون قد حضر على الأقل خمسة تمارين بعد الدوام المدرسي. أي نظام متباينات يمثل بشكل أفضل هذا الموقف إذا كان x يمثل المعدل التراكمي للطالب، ويمثل y عدد التمارين التي حضرها الطالب بعد الدوام المدرسي؟

F $x \geq 2, y \geq 5$

G $x \leq 2, y \leq 5$

H $x < 2, y < 5$

J $x > 2, y > 5$

5-2 التوسع
مختبر تقنية التمثيل البياني
المحددات ومساحات المضلعات

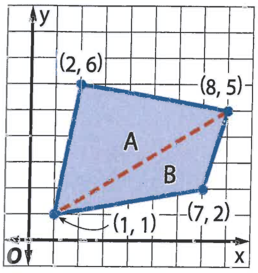
التركيز

- استخدام الحاسبة البيانية لإيجاد مساحات المضلعات باستخدام المحددات.

لقد تعلمت أن مساحة المثلث X ذي الرؤوس (x_1, y_1) و(x_2, y_2) و(x_3, y_3) يمكن إيجادها بحساب $\frac{1}{2}|det\ (X)|$. ويمكن استخدام هذه العملية لإيجاد مساحة أي مضلع.

نشاط مساحة الشكل الرباعي

a. جد مساحة الشكل الرباعي الذي رؤوسه (1 ،1)، (2 ،6)، (8 ،5)، (7 ،2).

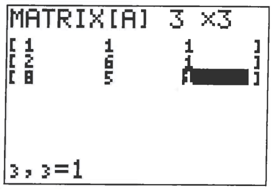


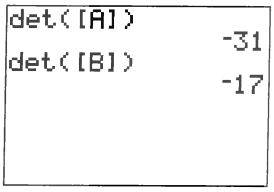
الخطوة 1 ارسم الشكل الرباعي، ثم اقسمه إلى مثلثين.

الخطوة 2 أنشئ مصفوفة لكل مثلث.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

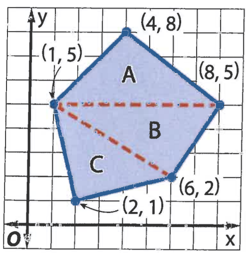
الخطوة 3 أدخل كل مصفوف في حاسبة بيانية، وجد det(A) و det(B).





الخطوة 4 اضرب القيمة المطلقة لكل محدد في $\frac{1}{2}$ ، وجد المجموع.
المساحة تساوي $\frac{1}{2}|-17| + \frac{1}{2}|-31|$ أو 24 وحدة مربعة.

b. جد مساحة مضلع بالرؤوس (1، 5)، (4، 8)، (8، 5)، (6، 2)، (2، 1).



الخطوة 1 ارسم خماسي الأضلاع، ثم اقسمه إلى ثلاثة مثلثات.

الخطوة 2 أنشئ مصفوفة لكل مثلث.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

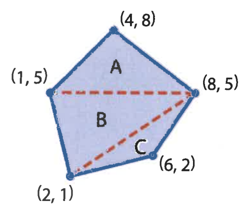
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة 3 أدخل كل مصفوفة في الحاسبة البيانية، وجد المحددات. المحددات هي 21− و21− و17−.

الخطوة 4 اضرب القيمة المطلقة لكل محدد في $\frac{1}{2}$ وجد المجموع. المساحة تساوي $\frac{1}{2}|-17| + \frac{1}{2}|-21| + \frac{1}{2}|-21|$ أو 29.5 وحدة مربعة.

نصيحة دراسية

قسمة المضلعات قد تكون هناك طرق عديدة لقسمة مضلع محدد إلى مثلثات. فعلى سبيل المثال، يمكن أيضًا تقسيم رباعي الأضلاع الموجود في المثال 2 على النحو المبين أدناه.



تمارين

جد مساحة المضلع باستخدام معطيات الرؤوس التالية.

1. (3, 2), (1, 9), (10, 12), (8, 3)

2. (−2, −4), (−11, −1), (−9, −8), (−1, −12)

3. (1, 3), (2, 9), (10, 11), (13, 7), (6, 2)

4. (−7, −6), (−10, 2), (−9, 8), (−5, 10), (8, 6), (13, 2)

الدرس 5-3

حل الأنظمة الخطية باستخدام المعكوسات وقاعدة كرامر

السابق

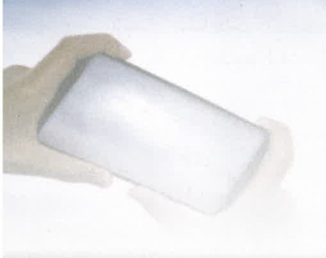
- تعلمت إيجاد محددات ومعكوسات المصفوفة 2×2 والمصفوفة 3×3.

الحالي

1. حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات العكسية (معكوس المصفوفات).
2. حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر.

لماذا؟

- تقوم مها بتنزيل البرامج المفضلة لها على مشغل الوسائط المحمول الخاص بها. ويتطلب برنامج الطبيعة ضعف مساحة الذاكرة اللازمة للمسرحية الهزلية، ويتطلب الفيلم ضعف مساحة الذاكرة اللازمة لبرنامج الطبيعة. وبمعرفة حجم الذاكرة الذي تم استخدامه، يمكنك استخدام المصفوفة العكسية (معكوس المصفوفة) لحل نظام المعادلات لإيجاد عدد كل نوع من البرامج التي قامت مها بتنزيلها



المفردات الجديدة

نظام مربع square system

قاعدة كرامر Cramer s Rule

1 استخدام المصفوفات العكسية

إذا تساوى عدد المعادلات مع المتغيرات في نظام المعادلات الخطية، فإن مصفوفة المعاملات الخاصة به تكون مربعة ويُقال حينئذ إن النظام **نظام مربع**. وإذا كانت مصفوفة المعاملات المربعة هذه لها معكوس، فحينها يكون للنظام حل وحيد.

المفهوم الأساسي الأنظمة الخطية المربعة التي لها معكوس

لنفرض أن A هو مصفوفة المعاملات لنظام n من المعادلات الخطية في n من المتغيرات تحددها المعادلة $AX = B$، حيث X هو مصفوفة المتغيرات و B هو مصفوفة الثوابت. إذا كانت A لها معكوس، يكون لنظام المعادلات حل وحيد تحدده المعادلة $X = A^{-1}B$.

مثال 1 إيجاد حل نظام 2×2 باستخدام مصفوفة عكسية

استخدم المصفوفة العكسية لحل نظام المعادلات، إن أمكن.

$$2x - 3y = -1$$
$$-3x + 5y = 3$$

اكتب النظام في مصفوفة بالشكل $AX = B$.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad AX = B$$

استخدم هذه الصيغة مع معكوس مصفوفة 2×2 لإيجاد المعكوس A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad \text{صيغة معكوس مصفوفة } 2 \times 2 \text{ هي } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2(5) - (-3)(-3)}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad a = 2, b = -3, c = -3, d = 5$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{بسّط}$$

اضرب A^{-1} في B لحل النظام.

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad X = A^{-1}B$$

لذلك، يكون حل النظام هو $(4, 3)$.

تمرين موجّه

استخدم المصفوفة العكسية لحل نظام المعادلات، إن أمكن.

1A. $6x + y = -8$
$-4x - 5y = -12$

1B. $-3x + 9y = 36$
$7x - 8y = -19$

لحل نظام معادلات 3 × 3 باستخدام المصفوفة العكسية، استخدم الحاسبة.

مثال 2 من الحياة اليومية إيجاد حل نظام 3×3 باستخدام مصفوفة عكسية

المعرفة المالية تستثمر بدرية AED 20,000 بشراء ثلاثة سندات ذات عوائد سنوية متوقعة نسبتها 10% و 8% و 6%. وتكون الاستثمارات ذات العائد المتوقع الأعلى أكثر خطورة غالبًا من الاستثمارات الأخرى. وترغب بدرية في تحقيق متوسط عائد سنوي يبلغ AED 1340. فإذا كانت تريد استثمار مبلغ في السند ذي العائد 6% يساوي ثلاثة أضعاف المبلغ المستثمر في السندين الآخرين مجتمعين، فكم يكون المبلغ اللازم استثماره في كل سند؟

يمكن تمثيل استثمارها بالمعادلات

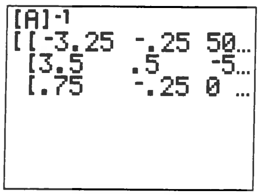
$$x + y + z = 20{,}000$$
$$3x + 3y - z = 0$$
$$0.10x + 0.08y + 0.06z = 1340.$$

حيث x و y و z تمثل المبالغ المستثمرة في السندات ذات العوائد السنوية 10% و 8% و 6% على التوالي.

اكتب النظام في مصفوفة بالشكل $AX = B$.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0.10 & 0.08 & 0.06 \end{bmatrix}} \times \underset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 20{,}000 \\ 0 \\ 1340 \end{bmatrix}}$$

استخدم حاسبة التمثيل البياني لإيجاد قيمة A^{-1}.



$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3.25 & -0.25 & 50 \\ 3.5 & 0.5 & -50 \\ 0.75 & -0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

اضرب A^{-1} في B لحل النظام.

$$X = A^{-1}B$$
$$= \begin{bmatrix} -3.25 & -0.25 & 50 \\ 3.5 & 0.5 & -50 \\ 0.75 & -0.25 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 20{,}000 \\ 0 \\ 1340 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2000 \\ 3000 \\ 15{,}000 \end{bmatrix}$$

حل النظام هو (2000, 3000, 15,000). إذًا، استثمرت بدرية AED 2000 في السند ذي العائد السنوي 10%. و AED 3,000 في السند ذي العائد السنوي 8%، و AED 15,000 في السند ذي العائد السنوي 6%.

التحقق يمكنك التحقق من الحل بإحلاله في النظام الأصلي.

$$2000 + 3{,}000 + 15{,}000 = 20{,}000$$
$$20{,}000 = 20{,}000 \checkmark$$
$$3(2{,}000) + 3(3{,}000) - 15{,}000 = 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$
$$0.10(2{,}000) + 0.08(3{,}000) + 0.06(15{,}000) = 1{,}340$$
$$1340 = 1340 \checkmark$$

تمرين موجّه

2. **الصناعة** خلال ثلاثة أعوام متتالية، أنتج مصنع لتجميع السيارات إجمالي 720,000 سيارة. فإذا كان عدد السيارات التي أُنتِجت في العام الثاني تزيد عن العام الأول بعدد 50,000 سيارة، وكان عدد السيارات التي أُنتِجت في العام الثالث تزيد عن الثاني بعدد 80,000، فكم عدد السيارات التي أُنتِجت في كل عام؟

الربط بالحياة اليومية

السند بصورة أساسية عبارة عن إقرار بالمديونية تصدره شركة أو حكومة لتمويل عملياتها اليومية أو مشروع معين. فإذا استثمرتَ في السندات، فإنك تقرض أموالك لجهة إصدار السند لفترة زمنية محددة. وفي المقابل، تستعيد أموالك مضافًا إليها الفوائد.

المصدر: CNN

2 استخدام قاعدة كرامر

طريقة أخرى لحل الأنظمة المربعة تُعرف باسم **قاعدة كرامر**، وفيها تُستخدم المحددات بدلاً من تقليل الصفوف أو المصفوفات العكسية (معكوس المصفوفات).

فكِّر في نظام 2 × 2 التالي.

$$ax + by = e$$
$$cx + dy = f$$

استخدم طريقة الحذف لإيجاد x.

$$\begin{array}{llll} & adx + bdy & = ed & \longrightarrow \text{اضرب في } d \\ (+) & -bcx - bdy & = -fb & \longrightarrow \text{اضرب في } -b \\ \hline & (ad - bc)x & = ed - fb & \end{array}$$

إذًا، $x = \dfrac{ed - fb}{ad - bc.}$

وبالمثل، يتضح أن $y = \dfrac{af - ce}{ad - bc}$. ينبغي عليك أن تدرك أن مقام كل كسر بمثابة محدد مصفوفة معامل النظام $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. ويمكن التعبير عن كل من بسط ومقام كل حل باستخدام المحددات.

$$x = \frac{ed - fb}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{|A_x|}{|A|} \qquad y = \frac{af - ce}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{|A_y|}{|A|}$$

لاحظ أن البسْطَين $|A_x|$ و $|A_y|$ هما محددا المصفوفات التي تتكون باستبدال معامل x أو y على التوالي في مصفوفة المعامل بعمود الحدود الثابتة $\begin{matrix} e \\ f \end{matrix}$ من النظام الأصلي $\left[\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array}\right]$

يمكن تعميم قاعدة كرامر على أنظمة n من المعادلات في n من المتغيرات.

المفهوم الأساسي قاعدة كرامر

لنفرض أن A هو مصفوفة المعاملات في نظام n من المعادلات الخطية في n من المتغيرات، وتحددها المعادلة $AX = B$. فإذا كان $\det(A) \neq 0$، فإن الحل الوحيد للنظام تعبر عنه المعادلة

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ x_3 = \frac{|A_3|}{|A|},\ \ldots,\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

حيث يتم الحصول على A_i باستبدال العمود i^{th} الخاص بـ A بعمود الحدود الثابتة B. وإذا كان المحدد $(A) = 0$، فإن $AX = B$ إما ليس لها حل أو لها عدد لا نهائي من الحلول.

مثال 3 استخدام قاعدة كرامر لحل نظام 2 × 2

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

$$3x_1 + 2x_2 = 6$$
$$-4x_1 - x_2 = -13$$

مصفوفة المعاملات هي $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$. احسب محدد A.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - (-4)(2) = 5$$

نظرًا لأن محدد A لا يساوي صفرًا، فبإمكانك استخدام قاعدة كرامر.

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -13 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{6(-1) - (-13)(2)}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -4 & -13 \end{vmatrix}}{5} = \frac{3(-13) - (-4)(6)}{5} = \frac{-15}{5} = -3$$

إذًا، الحل هو $(4, -3)$ أو $x_1 = 4$ و $x_2 = -3$. تحقق من الحل بالتعويض في النظام الأصلي.

انتبه!

القسمة على صفر تذكر أن قاعدة كرامر لا تنطبق عندما يكون محدد مصفوفة المعامل 0. وذلك لأن هذا قد يتسبب في القسمة على صفر، والتي تكون نتيجتها "غير محددة".

تمرين موجّه

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

3A. $2x - y = 4$
$5x - 3y = -6$

3B. $-9x + 3y = 8$
$2x - y = -3$

3C. $12x - 9y = -5$
$4x - 3y = 11$

مثال 4 استخدام قاعدة كرامر لحل نظام 3×3

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

$-x - 2y = -4z + 12$
$3x - 6y + z = 15$
$2x + 5y + 1 = 0$

مصفوفة المعاملات هي $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$. احسب محدد A.

الصيغة الخاصة بمحدد مصفوفة 3×3

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

بسّط

$$= -1[-6(0) - 5(1)] - (-2)[3(0) - 1(2)] + 4[3(5) - 2(-6)]$$

بسّط

$$= -1(-5) + 2(-2) + 4(27) = 109$$

نظرًا لأن محدد A لا يساوي صفرًا، فبإمكانك استخدام قاعدة كرامر.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -2 & 4 \\ 15 & -6 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{109} = \frac{12[(-6)(0) - 5(1)] - (-2)[15(0) - (-1)(1)] + 4[15(5) - (-1)(-6)]}{109} = \frac{218}{109} = 2$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 12 & 4 \\ 3 & 15 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{109} = \frac{(-1)[15(0) - 1(-1)] - 12[3(0) - 2(1)] + 4[3(-1) - 2(15)]}{109} = \frac{-109}{109} = -1$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 3 & -6 & 15 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{109} = \frac{(-1)[(-6)(-1) - 5(15)] - (-2)[3(-1) - 2(15)] + 12[3(5) - 2(-6)]}{109} = \frac{327}{109} = 3$$

إذًا، الحل هو $(2, -1, 3)$ = $x = 2, y = -1, z = 3$.

التحقق تحقق من الحل بالتعويض في النظام الأصلي.

$-(2) - 2(-1) = -4(3) + 12$
$0 = 0$ ✔

$3(2) - 6(-1) + 3 = 15$
$15 = 15$ ✔

$2(2) + 5(-1) + 1 = 0$
$0 = 0$ ✔

قراءة في الرياضيات

استبدال الأعمدة الرمز $|A_x|$ يُقرأ كالآتي: محدد مصفوفة المعامل A مع عمود المعاملات x المستبدل بعمود الثوابت.

تمرين موجّه

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

4A. $8x + 12y - 24z = -40$
$3x - 8y + 12z = 23$
$2x + 3y - 6z = -10$

4B. $-2x + 4y - z = -3$
$3x + y + 2z = 6$
$x - 3y = 1$

تمارين

استخدم المصفوفة العكسية لحل كل نظام معادلات، إن أمكن. (المثالان 1 و 2)

1. $5x - 2y = 11$
$-4x + 7y = 2$

2. $2x + 3y = 2$
$x - 4y = -21$

3. $-3x + 5y = 33$
$2x - 4y = -26$

4. $-4x + y = 19$
$3x - 2y = -18$

5. $2x + y - z = -13$
$3x + 2y - 4z = -36$
$x + 6y - 3z = 12$

6. $3x - 2y + 8z = 38$
$6x + 3y - 9z = -12$
$4x + 4y + 20z = 0$

7. $x + 2y - z = 2$
$2x - y + 3z = 4$
$3x + y + 2z = 6$

8. $4x + 6y + z = -1$
$-x - y + 8z = 8$
$6x - 4y + 11z = 21$

9. **التنزيل** قامت هداية بتنزيل بعض البرامج على مشغل الوسائط المحمول الخاص بها. وبشكل عام، تستهلك مسرحية هزلية مدتها 30 دقيقة مساحة 0.3 جيجابايت من الذاكرة، ويستهلك برنامج حواري مدته ساعة 0.6 جيجابايت، وفيلم مدته ساعتان يستهلك 1.2 جيجابايت. وقامت هداية بتنزيل 9 برامج بمجموع 5.4 جيجابايت. فإذا كانت قامت بتنزيل عدد مسرحيات هزلية يزيد عن عدد الأفلام بمقدار اثنين، فكم عدد كل نوع قامت بتنزيله؟ (مثال 2)

10. **كرة السلة** يعلم طارق أنه قد سجل 37 مرة بإجمالي نقاط يبلغ 70 نقطة حتى الآن في موسم كرة السلة هذا. ويود أن يعرف عدد الرميات الحرة، والرميات ذات النقطتين والثلاث نقاط التي أحرزها. وكان مجموع الرميات ذات النقطتين والثلاث نقاط يساوي ضعف عدد الرميات الحرة ناقص اثنين. فكم عدد الرميات الحرة والرميات ذات النقطتين والثلاث نقاط التي أحرزها طارق؟ (مثال 2)

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجِد حل فريد. (المثالان 3 و 4)

11. $-3x + y = 4$
$2x + y = -6$

12. $2x + 3y = 4$
$5x + 6y = 5$

13. $5x + 4y = 7$
$-x - 4y = -3$

14. $4x + \frac{1}{3}y = 8$
$3x + y = 6$

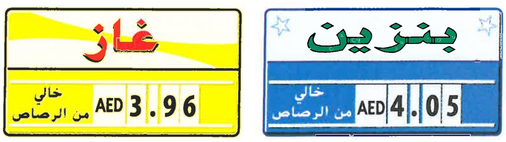
15. $2x - y + z = 1$
$x + 2y - 4z = 3$
$4x + 3y - 7z = -8$

16. $x + y + z = 12$
$6x - 2y - z = 16$
$3x + 4y + 2z = 28$

17. $x + 2y = 12$
$3y - 4z = 25$
$x + 6y + z = 20$

18. $9x + 7y = -30$
$8y + 5z = 11$
$-3x + 10z = 73$

19. **رحلة بالسيارة** توقفت مايسون مرتين خلال رحلة على الطريق للتزود بالوقود. موضح بالأسفل سعر البنزين لكل محطة. وقد اشترت مايسون إجمالي 33.5 L وأنفقت AED 134.28. استخدم قاعدة كرامر لتحديد عدد جالونات البنزين التي اشترتها مايسون مقابل AED 3.96 للتر. (مثال 3)



20. **تخطيط جماعي** تخطط لجنة تكريم دفعة التخرج لاستقبال 400 ضيف في اجتماع الحفل العاشر لها. ويمكن للضيوف اختيار واحد من بين ثلاثة اختيارات من الحلوى الموضحة بالأسفل. ويجب أي يستغرق الطاهي القائم على إعداد الحلوى 5 دقائق لكل فطيرة، و 8 دقائق لكل كعكة، و 12 دقيقة لكل كعكة جُبن. وكانت التكلفة الإجمالية لأصناف الحلوى AED 1170، كما أمضى الطاهي 45 ساعة بالضبط في إعدادها. استخدم قاعدة كرامر لتحديد عدد الأطباق التي تم إعدادها من كل نوع من الحلوى. (مثال 4)

21. **هواتف** قامت كل من نهلة ونسرين ونورا بمراجعة أنظمة الهاتف الخاصة بهم. دفعت نهلة AED 52.90 مقابل 30 دقيقة إضافية من الألعاب، و 12 دقيقة من المكالمات، و 40 رسالة نصية. ودفعت نسرين AED 48.07 مقابل 18 دقيقة من الألعاب، و 15 دقيقة من المكالمات، و 55 رسالة نصية. ودفعت نورا AED 13.64 فقط مقابل 6 دقائق من الألعاب، و 7 دقائق من المكالمات. فإذا كان جميعهن يستخدمن النظام نفسه، فجد تكلفة كل خدمة. (مثال 4)

حُلّ كل معادلة مصفوفة.

22. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 17 & -9 \end{bmatrix}$

26. **لياقة بدنية** تتدرب شيخة على مسافة نصف ماراثون وتستهلك أسبوعيًا جل وبسكويت ومشروبات طاقة. وقد استهلكت هذا الأسبوع 12 منتج طاقة بإجمالي 1450 سعرًا حراريًا و 310 جرامات من الكربوهيدرات. موضح بالأسفل المحتوى الغذائي لكل عنصر.

منتج الطاقة	جل	بسكويت	مشروب
السعرات الحرارية	100	250	50
الكربوهيدرات (g)	25	43	14

فكم عدد جل وبسكويت ومشروبات الطاقة التي استهلكتها شيخة هذا الأسبوع؟

حاسبة التمثيل البياني ... المصفوفات العكسية.

27. $2a - b + 4c = 6$
$a + 5b - 2c = -6$
$3a - 2b + 6c = 8$

28. $3x - 5y + 2z = 22$
$2x + 3y - z = -9$
$4x + 3y + 3z = 1$

29. $r + 5s - 2t = 16$
$-2r - s + 3t = 3$
$3r + 2s - 4t = -2$

30. $-4m + n + 6p = 17$
$3m - n - p = 5$
$-5m - 2n + 3p = 2$

جد قيم n بحيث لا يمكن حل النظام الذي تعبر عنه المصفوفة الموسعة المعطاة باستخدام المصفوفة العكسية.

31. $\left[\begin{array}{cc|c} n & -8 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$

32. $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & n & 4 \\ n & 2 & -5 \end{array}\right]$

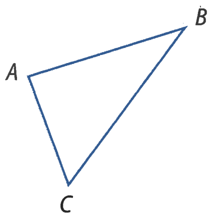
33. $\left[\begin{array}{cc|c} -5 & -9 & 3 \\ n & n & 11 \end{array}\right]$

34. $\left[\begin{array}{cc|c} n & -n & 0 \\ 7 & n & -8 \end{array}\right]$

35. **مواد كيميائية** تحتوي ثلاث سبائك من النحاس والفضة على 35% من الفضة الخالصة، و 55% من الفضة الخاصة، و 60% من الفضة الخالصة على التوالي. فكم المقدار الواجب خلطه من كل معدن للحصول على سبيكة بوزن 2.5 كيلو جرامات وتحتوي على 4.54% فضة إذا كان هناك 0.5 كيلو جرام زيادة في السبيكة 60% عن السبيكة 55%؟

36. **متجر أغذية** يبيع متجر أغذية إماراتي وجبات الشاورما الموضحة بالأسفل. في إحدى وجبات الغداء، باع المتجر مجموع 74 وجبة شاورما وكسب 320.50 AED. وكان مجموع كمية اللحم المستخدم في إعداد وجبات الشاورما الصغيرة والكبيرة والضخمة الحجم 708 كيلوجراماً. وكان عدد وجبات الشاورما كبيرة الحجم المبيعة يزيد عن ضعف عدد وجبات الشاورما الضخمة المبيعة بمقدار واحد. فكم عدد وجبات الشاورما التي باعها المتجر خلال الغداء من كل نوع؟

37. **الهندسة** يبلغ محيط المثلث $\triangle ABC$ 89 ملليمترًا. وطول القطعة المستقيمة $\overline{AC}$ أقل من طول الضلعين الآخرين بمقدار 47 مليمترًا. ويزيد طول القطعة المستقيمة $\overline{BC}$ بمقدار 20 مليمترًا عن نصف طول القطعة المستقيمة $\overline{AB}$. استخدم نظام المعادلات لإيجاد طول كل ضلع.



جد معكوس كل مصفوفة، إن أمكن.

38. $\begin{bmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ e^{x} & e^{-3x} \end{bmatrix}$

39. $\begin{bmatrix} \frac{1}{x} & \frac{3}{x} \\ x & 2 \end{bmatrix}$

40. $\begin{bmatrix} \pi^{x} & 1 \\ 0 & \pi^{-2x} \end{bmatrix}$

41. $\begin{bmatrix} i & -3 \\ i^2 & 2i \end{bmatrix}$

... مصفوفتان $n \times n$ ونفترض أن C و D و X مصفوفات $n \times 1$. جد حلاً لكل معادلة لإيجاد X. افترض وجود جميع المعكوسات.

42. $AX = BX - C$

43. $D = AX + BX$

44. $AX + BX = 2C - X$

45. $X + C = AX - D$

46. $3X - D = C - BX$

47. $BX = AD + AX$

48. **حساب التفاضل والتكامل** في حساب التفاضل والتكامل، يمكن الحصول على نظام المعادلات باستخدام المشتقات الجزئية. هذه المعادلات تضم λ، والتي تُسمى مضاعف لاجرانج. جد قيم x و y بحيث تحقق المعادلات $x + \lambda + 1 = 0;\ 2y + \lambda = 0;\ x + y + 7 = 0$.

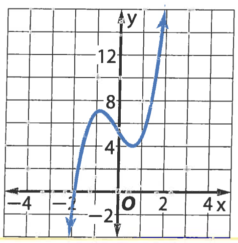
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

49. **تحليل الخطأ** تحاول عائشة ورنا حل النظام أدناه باستخدام قاعدة كرامر. فهل إجابة أي منهما صواب؟ اشرح استنتاجك.

$2x + 7y = 10$
$6x + 21y = 30$

عائشة	رنا
النظام ليس له حل لأن محدد مصفوفة المعامل يساوي صفرًا.	النظام له حل واحد ولكن لا يمكن إيجاده باستخدام قاعدة كرامر.

50. **تحدٍ** يمر المنحنى أدناه بالنقاط $(-2, -1), (-1, 7), (1, 5), (2, 19)$. وتتخذ معادلة المنحنى الشكل $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



جد معادلة المنحنى من خلال حل نظام المعادلات باستخدام المصفوفة العكسية.

51. **التبرير** إذا كان $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وكانت A غير منفردة، فهل $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$؟ اشرح استنتاجك.

52. **مسألة غير محددة الإجابة** أعطِ مثالاً على نظام معادلات في متغيرين ليس له حل وحيد، ووضِّح كيف أن النظام المعبر عنه بمعادلة مصفوفة ليس له حل.

53. **الكتابة في الرياضيات** صف أنواع الأنظمة الممكن حلها باستخدام كل طريقة. اشرح استنتاجك.

a. حذف جاوس-جوردان

b. المصفوفات العكسية

c. قاعدة كرامر

مراجعة شاملة

جد AB و BA؛ إن أمكن.

54. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

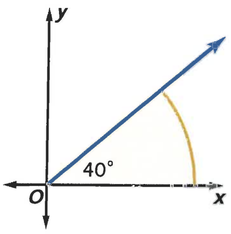
55. $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 7 & 8 & 3 \\ 11 & -5 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 17 & 2 & -4 \\ 10 & -9 & 6 \\ 1 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

حدد ما إذا كانت كل مصفوفة لها نموذج درجة الصف.

56. $\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & -3 & -6 & 4 \\ 9 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right]$

57. $\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$

58. **ألعاب القوى** يجب أن تسقط الكرة الحديدية في لعبة رمي الجلة داخل القطاع 40°. يقع رأس الزاوية عند نقطة الأصل، ويمتد أحد الضلعين على طول المحور x. فإذا أسقط اللاعب الكرة عند نقطة إحداثياتها (18, 17)، فهل ستسقط الكرة داخل المنطقة المطلوبة؟ اشرح استنتاجك.



59. **النجوم** تظهر بعض النجوم ساطعة أكثر من غيرها لقربها الشديد منا. والنصوع المطلق (أو القدر المطلق) M هو وحدة قياس مدى السطوع الذي يظهر عليه النجم إذا كان يبعد عن الأرض مسافة 10 فراسخ نجمية أو حوالي 32 سنة ضوئية. وكلما قل النصوع، دل ذلك على زيادة سطوع النجم. والنصوع المطلق تحدده المعادلة $M = m + 5 - 5 \log d$، حيث d هو بُعد النجم عن الأرض مقيسًا بالفراسخ و m هو النصوع الظاهري للنجم.

النجم	النصوع الظاهري	المسافة (بالفرسخ النجمي)
سيريوس	−1.44	2.64
فيجا	0.03	7.76

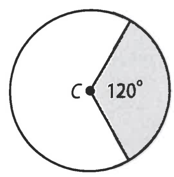
a. سيريوس وفيجا اثنان من النجوم الأكثر سطوعًا. فأيهما أكثر سطوعًا؟

b. جد النصوع المطلق لكل من سيريوس وفيجا.

c. أي النجمين أكثر سطوعًا في الحقيقة؟ بعبارة أخرى، أيهما له نصوع مطلق أقل؟

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

60. **SAT/ACT** تقع النقطة C في مركز الدائرة بالشكل أدناه. تبلغ مساحة المنطقة المظللة 3π سنتيمترات مربعة. فما محيط المنطقة المظللة بالسنتيمترات؟



A $2\pi + 6$

B $2\pi + 9$

C $2\pi + 12$

D $3\pi + 6$

E $3\pi + 12$

61. اشترت نبيلة في شهر مارس نغمتين عاديتين وأخريين مميزتين من مقدم خدمات الهاتف المحمول الذي تتعامل معه مقابل AED 8.96. وفي مايو، دفعت AED 9.46 مقابل نغمة عادية و 3 نغمات مميزة. فما سعر كل من النغمة العادية والمميزة؟

F AED 1.99, AED 2.49

G AED 2.29, AED 2.79

H AED 1.99, AED 2.79

J AED 2.49, AED 2.99

62. **مراجعة** كل عام، يدلي طلاب مدرسة الإمارات الثانوية تصويتًا على الموضوع الرئيس لمهرجان الترحيب بالطلاب القدامى. حصل الموضوع "ليلة تحت النجوم" على 225 صوتًا. أما الموضوع "لحظة حياتي" فقد حصل على 480 صوتًا. فإذا كان 40% من طلاب العام قبل الأخير صوّتوا على موضوع النجوم، و 75% من طلاب العام الأخير على موضوع الحياة، وقد أدلى الطلاب كلهم بأصواتهم، فكم عدد طلاب العام قبل الأخير والعام الأخير في مدرسة الإمارات؟

A 854 طالبًا بالعام الأخير و 176 طالبًا بالعام قبل الأخير

B 705 طلاب بالعام الأخير و 325 طالبًا بالعام قبل الأخير

C 395 طالبًا بالعام الأخير و 310 طلاب بالعام قبل الأخير

D 380 طالبًا بالعام الأخير و 325 طالبًا بالعام قبل الأخير

63. **مراجعة** ما حل $\frac{1}{8}x - \frac{2}{3}y + \frac{5}{6}z = -8$, $\frac{3}{4}x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{3}z = -12$, $\frac{3}{16}x - \frac{5}{8}y - \frac{7}{12}z = -25$ ؟

F $(-4, 6, 3)$

G $(-8, 12, 6)$

H $(-16, 24, 12)$

J ليس لها حل

التوسع 5-3 مختبر تقنية التمثيل البياني المصفوفات وعلم التشفير

التركيز

- استخدام حاسبة التمثيل البياني والمصفوفات لتشفير الرسائل وفك شفرتها.

علم التشفير هو دراسة الرسائل المشفرة. ويمكن استخدام المصفوفات لتشفير الرسائل بحيث لا يمكن قراءتها إلا بعد فك الشفرة باستخدام *مفتاح فك الشفرة*.

الخطوة الأولى هي تحديد المفتاح الذي يمكن استخدامه لتشفير المصفوفة. ويجب أن يكون المفتاح مصفوفة لها معكوس في صيغة $n \times n$. الخطوة التالية هي تحويل الرسالة إلى أعداد وكتابتها في شكل مصفوفة. فكل حرف أبجدي يمثله عدد. ويستخدم العدد 0 لتمثيل مسافة فارغة.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

أخيرًا، يتم تشفير الرسالة بضربها في المفتاح.

نشاط 1 تشفير الرسالة

استخدم $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ لتشفير الرسالة SATURDAY AT NOON.

الخطوة 1 حوّل الرسالة إلى أعداد واكتبها في صورة مصفوفة.

S	A	T	U	R	D	A	Y	_	A	T	_	N	O	O	N
19	1	20	21	18	4	1	25	0	1	20	0	14	15	15	14

المفتاح هو مصفوفة 2×2. لكي تجعل ضرب المصفوفة ممكنًا، اكتب الرسالة على هيئة مصفوفة 2×8.

$$\begin{bmatrix} 19 & 1 \\ 20 & 21 \\ 18 & 4 \\ 1 & 25 \\ 0 & 1 \\ 20 & 0 \\ 14 & 15 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

نصيحة دراسية

التحويل أضف أصفارًا إلى نهاية الرسالة إذا احتجت إلى مدخلات إضافية لملء المصفوفة.

الخطوة 2 اضرب الرسالة المُحوّلة في المفتاح باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

```
[[18  -35]
 [-1  23 ]
 [14  -24]
 [-24 73 ]
 [-1  3  ]
 [20  -40]
 [-1  17 ]↓
```

الخطوة 3 تخلص من علامات ترقيم المصفوفة للكشف عن الرسالة المشفرة.

18 −35 −1 23 14 −24 −24 73 −1 3 20 −40 −1 17 1 12

تمارين

استخدم $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ لتشفير كل من الرسائل التالية.

1. CALL ME
2. SEE YOU LATER
3. ORDER PIZZA

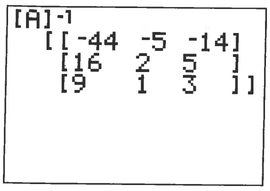
4. **تحدٍ** استخدم $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ لتشفير الرسالة MEET ME AT FIVE.

لفك تشفير رسالة ما، يجب إيجاد معكوس المفتاح. بعد ذلك تتم كتابة الرسالة المشفرة على هيئة مصفوفة ليكون الضرب ممكنًا. على سبيل المثال، إذا كان المفتاح مصفوفة $n \times n$، تُكتب الرسالة على هيئة مصفوفة $k \times n$، حيث k هو عدد الصفوف اللازمة لتضمين كل عدد في المصفوفة. وإذا لم توجد أحرف كافية لملء الصف، فأدخل "0" كمسافات. وأخيرًا، يتم ضرب المصفوفة المشفرة في معكوس المفتاح.

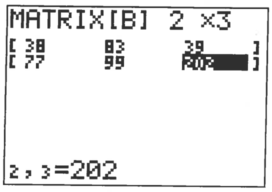
نشاط 2 فك تشفير الرسالة

استخدم معكوس $\begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **لفك تشفير الرسالة 202 99 77 39 83 38.**

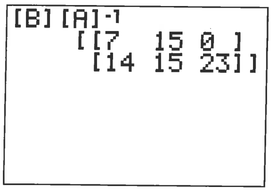
الخطوة 1 استخدم حاسبة التمثيل البياني لإيجاد معكوس المفتاح.



الخطوة 2 اكتب الرسالة المشفرة على هيئة مصفوفة. ستحتوي المصفوفة المشفرة على 3 أعمدة لأن المفتاح عبارة عن مصفوفة 3×3. وتكون المصفوفة 2×3 نظرًا لوجود أعداد تكفي لملء صفين. أدخل المصفوفة إلى حاسبة التمثيل البياني.



الخطوة 3 استخدم حاسبة التمثيل البياني لضرب المصفوفة المشفرة في معكوس المفتاح.



الخطوة 4 تخلص من علامات ترقيم المصفوفة وحوّل الأعداد إلى أحرف.

7	15	0	14	15	23
G	O	_	N	O	W

تمارين

استخدم معكوس $\begin{bmatrix} -7 & 12 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ **لفك شفرة الرسائل التالية.**

5. 128 −73 232 −135 300 −175 99 −56 83 −48 180 −104 300 −175
6. −27 17 38 −21 84 −49 21 −11 131 −76 201 −116 161 −93
7. 151 −88 150 −86 93 −54 −35 22 −5 3 191 −111 −30 18 182 −105
8. 102 −58 45 −26 −48 29 −69 42 39 −21 228 −133 141 −81 −19 12 228 −133

9. **تحدٍ** استخدم معكوس $\begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 & 2 \\ -6 & -4 & 8 & 1 \\ 3 & -5 & 6 & 7 \\ 2 & 9 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ لفك شفرة

126 265 −49 −34 198 347 193 96 174 239 49 72 177 286 −61 −27 48 200 70 −76 122 162 −21 35 81 190 −37 −63 130 331 214 17 67 267 94 −25 93 161 120 25.

اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 5-1 إلى 5-3

اكتب كل نظام معادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم جد حل النظام. (الدرس 5-1)

1. $2x - y = 13$
   $2x + y = 23$

2. $x + y + z = 6$
   $2x - y - z = -3$
   $3x - 5y + 7z = 14$

حُلّ كلًّ من أنظمة المعادلات التالية. (الدرس 5-1)

3. $3x + 3y = -8$
   $6x - 5y = 28$

4. $-x + 8y - 2z = -37$
   $2x + 5y - 11z = -7$
   $4x - 7y + 6z = 4$

5. $-2x + 2y + z = 5$
   $3x - 2y + 2z = 7$
   $5x - y + 4z = 8$

6. $x - 5y + 8z = 7$
   $-8x + 3y + 12z = -9$
   $5x - 4y - 3z = 9$

7. **رعاية الحيوانات** اشترت علياء إجمالي 10 kg من طعام الأرانب والقطط وحبوب للطيور بمبلغ AED 400. ثم اشترت طعام أرانب إضافيًا بزيادة قدرها 5 kg عن حبوب الطيور. موضح بالأسفل تكلفة كيلوجرام لكل نوع من الطعام. (الدرس 5-1)

AED 40 /kg   AED 70/kg   AED 30/kg

a. اكتب مجموعة من المعادلات الخطية للتعبير عن هذه الحالة.

b. حدد عدد الأرطال لكل نوع طعام اشترته علياء.

8. **اختيار من متعدد** أي مصفوفة غير منفردة؟ (الدرس 5-2)

A $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -5 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & -7 & 8 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 10 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 5 \\ 7 & 7 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

جد AB و BA؛ إن أمكن. (الدرس 5-2)

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & -6 \end{bmatrix}$
   $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$
    $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -8 & 2 \end{bmatrix}$

جد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم جد معكوس المصفوفة، إن وُجد. (الدرس 5-2)

11. $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} -9 & -5 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

15. **التمريض** تعمل حفصة ممرضة بغرفة الطوارئ. وتكسب AED 24 في الساعة خلال نوبات العمل العادية، و AED 30 في الساعة عند العمل لوقت إضافي. ويوضح الجدول التالي ساعات العمل لحفصة خلال الأسابيع الثلاثة الماضية. (الدرس 5-2)

الأسبوع	الساعات العادية	الساعات الإضافية
1	35	7
2	38	0
3	40	9

a. استخدم المصفوفات لتحديد المبلغ الذي جنته حفصة خلال كل أسبوع.

b. خلال الأسبوع الرابع، عملت حفصة ساعات عمل عادية أكثر من ساعات العمل الإضافي بأربع مرات. حدد عدد الساعات التي عملتها إذا كانت قد جنت AED 1008.

استخدم مصفوفة عكسية لحل كل نظام معادلات، إن أمكن. (الدرس 5-3)

16. $2x - y = 6$
    $3x + 2y = 37$

17. $2x + y + z = 19$
    $3x - 2y + 3z = 2$
    $4x - 6y + 5z = -26$

18. **اختيار من متعدد** أي من المصفوفات الموسعة يمثل الحلول لنظام المعادلات؟ (الدرس 5-3)

$x + y = 13$
$2x - 3y = -9$

F $\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$

H $\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$

G $\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$

J $\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد. (الدرس 5-3)

19. $2x - y = 6$
    $4x - 2y = 12$

20. $3x - y - z = 13$
    $3x - 2y + 3z = 16$
    $-x + 4y - 8z = -9$

5-4 الكسور الجزئية

:: السابق

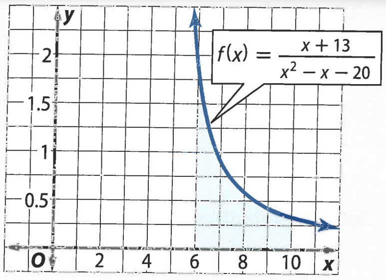
- فهمت بتمثيل الدوال النسبية بيانيًا.

:: الحالي

1. كتابة تحليلات الكسور الجزئية (تجزئة الكسور) للتعابير النسبية ذات العوامل الخطية في المقام
2. كتابة تحليلات الكسور الجزئية للتعابير النسبية ذات عوامل تربيعية أولية

:: لماذا؟

- في حساب التفاضل والتكامل، سوف نتعلم إيجاد المساحة الواقعة تحت التمثيل البياني لدالة خلال فترة محددة. لإيجاد المساحة الواقعة تحت منحنى دالة نسبية مثل $f(x) = \frac{x+13}{x^2-x-20}$ سنحتاج أولاً إلى تحليل التعبير النسبي أو إعادة كتابته على هيئة مجموع تعبيرين أبسط.



المفردات الجديدة

كسر جزئي
partial fraction
تحليل الكسر الجزئي
partial fraction decomposition

1 العوامل الخطية

تعلمت أن العديد من الدوال كثيرة الحدود ذات معاملات حقيقية يمكن التعبير عنها في شكل ناتج ضرب العوامل الخطية والتربيعية. وبالمثل، يمكن التعبير عن العديد من الدوال النسبية في شكل مجموع لدالتين نسبيتين أبسط أو أكثر. بسطهما ثوابت حقيقية ومقاماهما عبارة عن قوة لأحد العوامل الخطية أو عامل تربيعي غير قابل للاختزال. على سبيل المثال، يمكن كتابة الدالة النسبية $f(x)$ أدناه في شكل مجموع كسرين مقاماهما عوامل خطية للمقام الأصلي.

$$f(x) = \frac{x+13}{x^2-x-20} = \frac{2}{x-5} + \frac{-1}{x+4}$$

وكل كسر في المجموع هو **كسر جزئي**. ومجموع هذه الكسور الجزئية يكوّن **تحليل الكسر الجزئي** للدالة النسبية الأصلية.

مثال 1 المقام ذو العوامل الخطية غير المكررة

جد تحليل الكسر الجزئي لـ $\frac{x+13}{x^2-x-20}$.

أعد كتابة التعبير في شكل كسور جزئية ذات بُسط ثابتة، A و B، ومقامات تعتبر عوامل خطية للمقام الأصلي.

$$\frac{x+13}{x^2-x-20} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+4}$$ صيغة تحليل الكسر الجزئي

$$x + 13 = A(x+4) + B(x-5)$$ اضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر، $x^2 - x - 20$.

$$x + 13 = Ax + 4A + Bx - 5B$$ خاصية التوزيع

$$1x + 13 = (A + B)x + (4A - 5B)$$ جمّع الحدود المتشابهة.

ساوِ بين معاملات الجانبين الأيمن والأيسر من المعادلة للحصول على نظام من معادلتين. لحل النظام، يمكنك كتابته في شكل مصفوفة $CX = D$ وإيجاد قيمة X.

$$\begin{array}{l} A + B = 1 \\ 4A - 5B = 13 \end{array} \longrightarrow \underset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}} \cdot \underset{X}{\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}} = \underset{D}{\begin{bmatrix} 1 \\ 13 \end{bmatrix}}$$

يمكنك استخدام الحاسبة البيانية لإيجاد قيمة $X = C^{-1}D$. إذًا، $A = 2$ و $B = -1$. استخدم التعويض لإيجاد تحليل الكسر الجزئي.

```
[C]-1*[D]
            [[2 ]
             [-1]]
```

$$\frac{x+13}{x^2-x-20} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+4}$$ صيغة تحليل الكسر الجزئي

$$\frac{x+13}{x^2-x-20} = \frac{2}{x-5} + \frac{-1}{x+4}$$ $A = 2$ و $B = -1$

تمرين موجّه

جد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي.

1A. $\frac{2x+5}{x^2-x-2}$

1B. $\frac{x+11}{2x^2-5x-3}$

إذا كان التعبير النسبي $\frac{f(x)}{d(x)}$ مركبًا كانت درجة $f(x)$ أكبر من $d(x)$ أو تساويها، فيجب عليك استخدام خوارزمية القسمة $\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$ أولاً لإعادة كتابة التعبير على هيئة مجموع تعبير نسبي عادي وكثير الحدود. ثم حلل التعبير النسبي الباقي.

مثال 2 التعبير النسبي المركَّب

جد تحليل الكسر الجزئي لـ $\frac{2x^2 + 5x - 4}{x^2 - x}$.

نظرًا لأن درجة البسط أكبر من درجة المقام أو تساويها، فإن التعبير النسبي مركَّب. لإعادة كتابة التعبير، اقسم البسط على المقام باستخدام القسمة كثيرة الحدود.

$$\begin{array}{r} 2 \\ x^2 - x\overline{)2x^2 + 5x - 4} \\ (-)\ \underline{2x^2 - 2x} \\ 7x - 4 \end{array}$$

اضرب المقسوم عليه في 2 لأن $\frac{2x^2}{x^2} = 2$.

اطرح وأسقط الحد التالي.

إذًا، يساوي التعبير الأصلي $2 + \frac{7x - 4}{x^2 - x}$

نظرًا لأن التعبير النسبي المتبقي عادي الآن، بإمكانك تحديد عوامل المقام في الصورة $x(x - 1)$ وإعادة كتابة التعبير باستخدام الكسور الجزئية.

$\frac{7x - 4}{x^2 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1}$ صيغة التحليل

$7x - 4 = A(x - 1) + B(x)$ اضرب في المقام المشترك الأصغر، $x^2 - x$.

$7x - 4 = Ax - A + Bx$ خاصية التوزيع

$7x - 4 = (A + B)x - A$ جمّع الحدود المتشابهة.

اكتب نظام المعادلات التي تحصل عليه بمعادلة المعاملات وجد حله.

$$\begin{aligned} A + B &= 7 \\ -A &= -4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= 4 \\ B &= 3 \end{aligned}$$

لذلك، $\frac{2x^2 + 5x - 4}{x^2 - x} = 2 + \frac{7x - 4}{x^2 - x} = 2 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x - 1}$.

التحقق يمكنك التحقق من إجابتك بتبسيط التعبير الموجود بالجانب الأيمن من المعادلة.

$\frac{2x^2 + 5x - 4}{x^2 - x} = 2 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x - 1}$ تحليل الكسر الجزئي

$= \frac{2x(x - 1)}{x(x - 1)} + \frac{4(x - 1)}{x(x - 1)} + \frac{3x}{x(x - 1)}$ إعادة الكتابة باستخدام المقام المشترك الأصغر، $x(x - 1)$.

$= \frac{2(x^2 - x) + 4(x - 1) + 3x}{x(x - 1)}$ اجمع

$= \frac{2x^2 - 2x + 4x - 4 + 3x}{x^2 - x}$ اضرب

$= \frac{2x^2 + 5x - 4}{x^2 - x}$ ✓ بسّط

نصيحة دراسية

طريقة بديلة بشكل مقصود، تكون المعادلة $7x - 4 = A(x - 1) + B(x)$ التي نحصل عليها بعد التخلص من الكسور في المثال 2 حقيقية لجميع قيم x. ولذلك، يمكنك التعويض بأي قيمة مناسبة من قيم x لإيجاد قيم A و B. القيم المناسبة هي تلك القيم التي تجعل قيمة المقام الأصلي صفرًا. إذا كان $x = 0$، فإن $A = 4$. إذا كان $x = 1$، فإن $B = 3$.

تمرين موجّه

جد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي.

2A. $\frac{3x^2 + 12x + 4}{x^2 + 2x}$

2B. $\frac{x^4 - 3x^3 + x^2 - 9x + 4}{x^2 - 4x}$

إذا كان مقام التعبير النسبي يتضمن عاملاً خطيًا مكررًا لعدد n من المرات، فيجب أن يحتوي تحليل الكسر الجزئي على كسر جزئي له بسط ثابت مقابل كل قوة أُسيّة من 1 إلى n من العامل الخطي. على سبيل المثال، لإيجاد تحليل الكسر الجزئي لـ $\frac{5x-1}{x^3(x-1)^2}$، فيتعين عليك كتابة

$$\frac{5x-1}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{(x-1)^2}.$$

مثال 3 المقام ذو العوامل الخطية المكررة

جد تحليل الكسر الجزئي لـ $\frac{-x^2-3x-8}{x^3+4x^2+4x}$.

هذا التعبير النسبي عادي؛ لذا، ابدأ بتحديد عوامل المقام بالشكل $x(x^2+4x+4)$ أو $x(x+2)^2$. نظرًا لأن العامل $(x+2)$ يحمل التعدد 2، قم بتضمين الكسور الجزئية مع مقامات x، و$(x+2)$، و$(x+2)^2$.

$$\frac{-x^2-3x-8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$ صيغة تحليل الكسر الجزئي

$$-x^2-3x-8 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$$ اضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر، $x(x+2)^2$.

$$-x^2-3x-8 = Ax^2 + 4Ax + 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx$$ خاصية التوزيع

$$-1x^2 - 3x - 8 = (A+B)x^2 + (4A+2B+C)x + 4A$$ جمّع الحدود المتشابهة

بمجرد إيجاد نظام المعادلات الذي تحصل عليه من معادلة المعاملات، هناك طريقتان يمكن استخدامهما لإيجاد قيم A، وB، وC.

الطريقة 1 يمكنك كتابة نظام المعادلات وحله باستخدام الطريقة ذاتها في المثال 2.

$A + B = -1$ | $A = -2$

$4A + 2B + C = -3$ → $B = 1$

$4A = -8$ | $C = 3$

الطريقة 2 طريقة أخرى لحل هذا النظام هي مساواة x بقيمة مناسبة لحذف أحد متغيرات المعادلة التي تنشأ بضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر.

$$-x^2-3x-8 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$$ المعادلة الأصلية

$$-(0)^2 - 3(0) - 8 = A(0+2)^2 + B(0)(0+2) + C(0)$$ افرض أن $x = 0$ لحذف B و C.

$$-8 = 4A$$

$$-2 = A$$

$$-x^2-3x-8 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$$ المعادلة الأصلية

$$-(-2)^2 - 3(-2) - 8 = A(-2+2)^2 + B(-2)(-2+2) + C(-2)$$ لنفرض أن $x = -2$ لحذف A و B.

$$-6 = -2C$$

$$3 = C$$

عوّض بهذه القيم عن A و C وبأي قيمة عن x في المعادلة لإيجاد قيمة B.

$$-x^2-3x-8 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$$ المعادلة الأصلية

$$-1^2 - 3(1) - 8 = -2(1+2)^2 + B(1)(1+2) + 3(1)$$ افرض أن $x = 1$، و $A = -2$، و $C = 3$.

$$-12 = -15 + 3B$$ بسّط

$$B = 1$$ جد حل B.

إذًا، $\frac{-x^2-3x-8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{-2}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^2}$

نصيحة دراسية

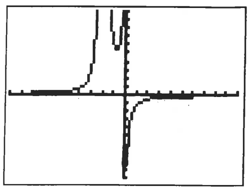
التحقق بالتمثيل البياني يمكنك التحقق من حل المثال 3 بتمثيله بيانيًا

$y_1 = \frac{-x^2-3x-8}{x^3+4x^2+4x}$ و

$y_2 = \frac{-2}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^2}$

في نافذة العرض نفسها.

يجب أن تتطابق التمثيلات البيانية. ✓



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

تمرين موجّه

جد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي.

3A. $\frac{x+2}{x^3-2x^2+x}$

3B. $\frac{x+18}{x^3-6x^2+9x}$

2 العوامل التربيعية الأولية إذا كان مقام التعبير النسبي يحتوي على عامل تربيعي أولي، فيجب أن يحتوي تحليل الكسر الجزئي على كسر جزئي له بسط خطي بالشكل $Bx + C$ لكلٍ من قوى هذا العامل.

مثال 4 المقام ذو العوامل التربيعية الأولية

جد تحليل الكسر الجزئي للتعبير $\dfrac{x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 5x + 16}{x(x^2+4)^2}$.

هذا التعبير عادي. يضم المقام عاملاً خطيًا واحدًا وعاملاً تربيعيًا أوليًا واحدًا يحمل المضاعفة 2.

$$\frac{-x^2 - 3x - 8}{x^3 + 4x^2 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

$$x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 5x + 16 = A(x^2+4)^2 + (Bx + C)x(x^2+4) + (Dx + E)x$$

$$x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 5x + 16 = Ax^4 + 8Ax^2 + 16A + Bx^4 + Cx^3 + 4Bx^2 + 4Cx + Dx^2 + Ex$$

$$1x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 5x + 16 = (A + B)x^4 + Cx^3 + (8A + 4B + D)x^2 + (4C + E)x + 16A$$

اكتب نظام المعادلات التي تحصل عليه بمعادلة المعاملات وجد حله.

$A + B = 1$	$A = 1$
$C = -2$	$B = 0$
$8A + 4B + D = 8$	$C = -2$
$4C + E = -5$	$D = 0$
$16A = 16$	$E = 3$

لذلك، $\dfrac{x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 5x + 16}{x(x^2+4)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2+4} + \dfrac{3}{(x^2+4)^2}$.

تمرين موجّه

جد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي.

4A. $\dfrac{x^3 + 2x}{(x^2+1)^2}$

4B. $\dfrac{4x^3 - 7x}{(x^2 + x + 1)^2}$

انتبه!

العوامل التربيعية الأولية الطريقة البديلة التي قُدِّمت في المثالين 2 و 3 ليست فعالة مثل تلك المقدمة في المثال 4 عندما يضم مقام التعبير النسبي عاملاً تربيعيًا أوليًا. وهذا بسبب عدم وجود قيم مناسبة كافية لـ x أو عدم وجود قيم على الإطلاق.

ملخص المفهوم تحليل الكسور الجزئية بالصيغة $f(x)/d(x)$

1. إذا كانت درجة $f(x) \geq$ درجة $d(x)$. فاستخدم القسمة المطولة كثيرة الحدود وخوارزمية القسمة لكتابة $\dfrac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \dfrac{r(x)}{d(x)}$ ثم طبّق تحليل الكسور الجزئية على $\dfrac{r(x)}{d(x)}$.

2. إذا كان $\dfrac{f(x)}{d(x)}$ كسرًا عاديًا. فقم بتحليل $d(x)$ إلى العوامل على شكل ناتج للعوامل الخطية و/أو العوامل التربيعية الأولية.

3. لكل عامل يحمل الصيغة $(ax + b)^n$ في المقام. يجب أن يحتوي تحليل الكسر الجزئي على مجموع n من الكسور

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \ldots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

حيث $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ أعداد حقيقية.

4. لكل عامل تربيعي أولي يتكرر عدد n من المرات في المقام. فيجب أن يحتوي تحليل الكسر الجزئي على مجموع من n من العوامل

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \frac{B_3x + C_3}{(ax^2 + bx + c)^3} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

حيث $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ و $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ أعداد حقيقية.

5. تحليل الكسر الجزئي للدالة الأصلية هو مجموع $q(x)$ من الجزء 1 والكسور في الجزأين 3 و 4.

تمارين

جد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي. (مثال 1)

1. $\dfrac{x+1}{x^2+5x+6}$

2. $\dfrac{x-18}{x^2-13x+42}$

3. $\dfrac{x+13}{x^2+7x+12}$

4. $\dfrac{x+12}{x^2+14x+48}$

5. $\dfrac{x+6}{-2x^2-19x-45}$

6. $\dfrac{x+7}{2x^2+15x+28}$

جد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مركب. (المثال 2)

7. $\dfrac{3x^2+x-4}{x^2-2x}$

8. $\dfrac{-5x^2-30x-21}{x^2+7x}$

9. $\dfrac{-2x^3+4x^2+22x-32}{x^3+2x^2-8x}$

10. $\dfrac{x^4-2x^3-2x^2+8x-6}{x^2-2x}$

11. $\dfrac{x^3+12x^2+33x+2}{x^2+8x+15}$

12. $\dfrac{x^4-9x^3+24x^2-4x-12}{x^3-6x^2+8x}$

جد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي به عوامل مكررة في المقام. (المثال 3)

13. $\dfrac{x^2-3}{x^3+2x^2+x}$

14. $\dfrac{5x^2-18x+24}{x^3-4x^2+4x}$

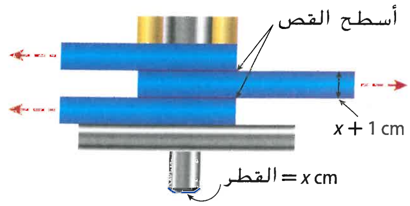
15. $\dfrac{-x^2-22x-50}{x^3+10x^2+25x}$

16. $\dfrac{-5x^2-6x+16}{x^3+8x^2+16x}$

17. $\dfrac{17x+256}{x^3-16x^2+64x}$

18. $\dfrac{-10x-108}{x^3+12x^2+36x}$

19. **الهندسة** يمكن تقريب مجموع متوسط إجهاد الشد والقص في القضيب الموضح بالأسفل بـ $s(x)=\dfrac{20x+10\pi x+20}{\pi x^3+\pi x^2}$، حيث x هي قطر الوتد. (مثال 3)



a. جد تحليل الكسر الجزئي.

b. مثّل بيانيًا كل من $s(x)$ والإجابة عن الجزء a في نافذة العرض نفسها.

جد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي به عوامل تربيعية أولية في المقام. (مثال 4)

20. $\dfrac{x^3+5x-5}{(x^2+4)^2}$

21. $\dfrac{3x^4+4x^2+8x+18}{x(x^2+3)^2}$

22. $\dfrac{4x^4+x^2-25x+32}{x^5-4x^3+4x}$

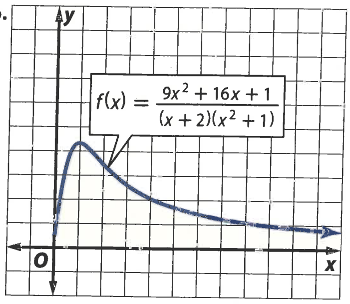
23. $\dfrac{8x^3-48x+7}{(x^2-6)^2}$

24. $\dfrac{-5x^3-10x^2-6x+4}{(x^2+2x+3)^2}$

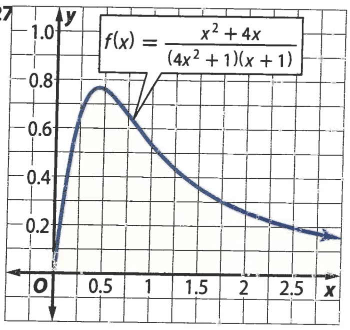
25. $\dfrac{4x^3-12x^2-5x+20}{(x^2-3x+3)^2}$

حساب التفاضل والتكامل في حساب التفاضل والتكامل، يمكنك إيجاد مساحة المنطقة الموجودة بين التمثيل البياني لدالة نسبية والمحور x الواقعة على مجال مقيد. الخطوة الأولى في هذه العملية هي كتابة تحليل الكسر الجزئي للتعبير النسبي. جد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي.

26.



27.



جد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي. ثم استخدم الحاسبة البيانية للتحقق من إجابتك.

28. $\dfrac{x+4}{3x^2-x-2}$

29. $\dfrac{5x^2-2x+8}{x^3-4x}$

30. $\dfrac{4x^2-3x+3}{4x(x-1)^2}$

31. $\dfrac{x^2+x+5}{(x^2+3)^2}$

32. $\dfrac{2x^3}{(x-1)^2(x+1)^2}$

33. $\dfrac{2x^3+12x^2-3x+3}{x^2+6x+5}$

34. جد تعبيرين نسبيين مجموعهما $\dfrac{x+4}{3x^2-x-2}$.

35. جد ثلاثة تعابير نسبية مجموعها $\dfrac{6-x}{x^3+2x^2+x}$.

جد A، و B، و C، و D بدلالة r و t.

36. $\dfrac{rx-t}{x^2-x-2}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+1}$

37. $\dfrac{4x^2+rx+2t}{x^2+3x}=4+\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+3}$

38. $\dfrac{rx+t}{x^3+x^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x+1}$

39. $\dfrac{3x^3+5rx^2-16tx+32}{x^2(x^2+16)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+16}$

جد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي.

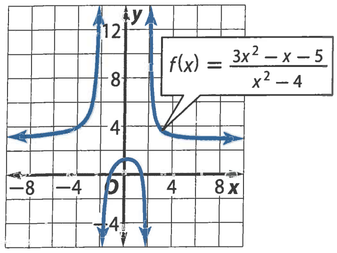
40. $\dfrac{x^3+2x-1}{(x^2-x-2)^2}$

41. $\dfrac{x^3+4}{(x^2-1)(x^2+3x+2)}$

42. $\dfrac{4x^3+x^2-3x+3}{x(x-1)^2}$

43. $\dfrac{7x^7+2x^6-13x^5+32x^4-19x^3+8x^2-7x+2}{x(x-1)^2(x+2)(x^2+1)}$

44. **تمثيلات متعددة** في هذه المسألة، سوف تكتشف العلاقة بين تحليل الكسر الجزئي لدالة نسبية وتمثيلها البياني. تأمل الدالة النسبية الموضحة بالأسفل.



a. **لفظيًا** صف السلوك الطرفي وخط التقارب الأفقي والرأسي للدالة.

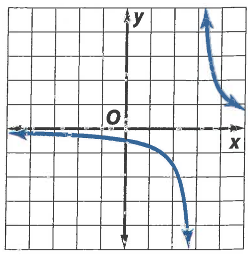
b. **تحليليًا** اكتب تحليل الكسر الجزئي لـ $f(x)$.

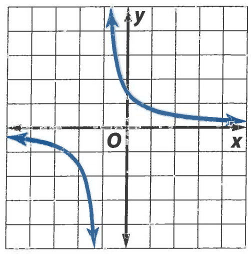
c. **بيانيًا** مثِّل كل حد مضاف في تحليل الكسر الجزئي الذي كتبته في الجزء b بيانيًا في شكل دالة منفصلة.

d. **لفظيًا** قارن التمثيلات البيانية من الجزء c مع التمثيل البياني لـ $f(x)$ والتحليل الذي كتبته في الجزء b.

e. **تحليليًا** خمن كيف يمكن استخدام تحليل الكسر الجزئي لتمثيل دالة نسبية بيانيًا.

45. **تحليل التمثيل البياني** الدوال النسبية الموضحة تكوّن تحليل الكسر الجزئي لـ $f(x)$.





حدد أي من الدوال الأربع المذكورة بالأسفل قد تكون الدالة الأصلية $f(x)$.

I. $f(x)=\dfrac{6}{x^2-2x-3}$

II. $f(x)=\dfrac{6}{x^2+2x-3}$

III. $f(x)=\dfrac{6}{x^2+4x+3}$

IV. $f(x)=\dfrac{6}{x^2-4x+3}$

مسائل مهارات التفكير العليا
استخدام مهارات التفكير العليا

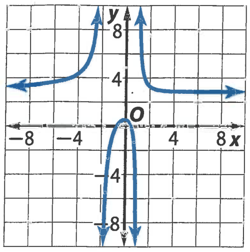
التبرير استخدم تحليل الكسر الجزئي لـ $f(x)$ لشرح كل مما يلي.

46. إذا كان $f(x)=\dfrac{-2x^3-7x^2+13x+43}{(x-2)(x+3)^2}$ فاشرح لما $\lim_{x\to\infty} f(x)=-2$.

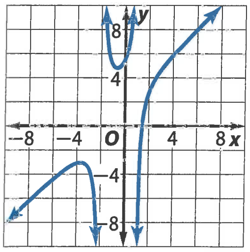
47. إذا كان $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{(x+1)^3}$، إذًا ماذا تكون $\lim_{x\to\infty} f(x)$؟

تحدٍّ صِل التمثيل البياني لكل دالة نسبية بمعادلته.

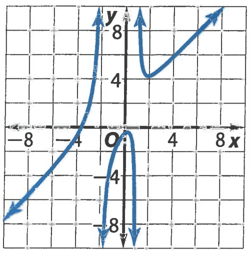
48.



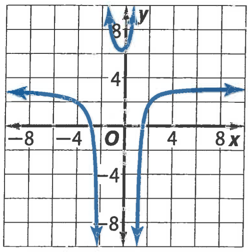
49.



50.



51.



a. $y=x+2+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{-3}{x+2}$

b. $y=x+2+\dfrac{-2}{x-1}+\dfrac{3}{x+2}$

c. $y=3+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{-3}{x+2}$

d. $y=3+\dfrac{-2}{x-1}+\dfrac{3}{x+2}$

التبرير حدد ما إذا كانت العبارات التالية صواب أم خطأ. اشرح استنتاجك.

52. إذا كان $f(x)=\dfrac{x^3+8}{(x^2-1)(x-2)}$، فإن $\lim_{x\to\infty} f(x)=8$.

53. تحليل الكسر الجزئي للدالة $f(x)=\dfrac{-4x^4+5x^3+27x^2-11x-45}{x(x^2-3)^2}$ هو $\dfrac{-5}{x}+\dfrac{4+x}{(x^2-3)}+\dfrac{x^2+1}{(x^2-3)^2}$.

54. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب تعبيرًا نسبيًا بالشكل $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ يحتوي فيه تحليل الكسر الجزئي على كل من المقامات التالية.

a. عوامل خطية غير مكررة فقط

b. عامل خطي مكرر واحد على الأقل

55. **الكتابة في الرياضيات** صف الخطوات المستخدمة للحصول على تحليل الكسر الجزئي لتعبير نسبي.

مراجعة شاملة

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

56. $x + y + z = 6$
$2x + y - 4z = -15$

57. $a - 2b + c = 7$
$6a + 2b - 2c = 4$
$5x - 3y + z = -10$

58. $p - 2r - 5t = -1$
$p + 2r - 2t = 5$
$4a + 6b + 4c = 14$
$4p + r + t = -1$

59. المالية اشترت شيماء أسهمًا في ثلاث شركات لأحد مشاريع الصف الدراسي. فاشترت 150 سهمًا في شركة مرافق، و 100 سهم في شركة كمبيوتر، و 200 سهم في شركة أغذية. وفي نهاية المشروع، "باعت" كل أسهمها.

الشركة	سعر الشراء للسهم (AED)	سعر البيع للسهم (AED)
المرافق	54.00	55.20
الكمبيوتر	48.00	58.60
الأغذية	60.00	61.10

a. نظّم البيانات في مصفوفتين واستخدم ضرب المصفوفة لإيجاد المبلغ الكلي الذي أنفقته شيماء على الأسهم.

b. اكتب مصفوفتين واستخدم ضرب المصفوفة لإيجاد المبلغ الكلي الذي حصلت عليه مقابل بيع الأسهم.

c. كم المبلغ الذي "جنته" شيماء أو "خسرته" في هذا المشروع؟

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

60. $\csc\theta \cos\theta \tan\theta$

61. $\sec^2\theta - 1$

62. $\frac{\tan\theta}{\sin\theta}$

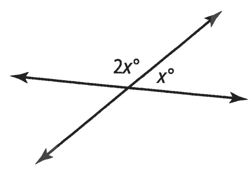
63. الطب قد يستخدم الأطباء شوكة رنانة يرتجع صداها بتردد معين كوسيلة مساعدة لتشخيص مشكلات السمع. يمكن عمل نموذج للموجات الصوتية التي تصدر عن الشوكة الرنانة باستخدام دالة sine الزاوية.

a. إذا كانت سعة دالة الـ sine هي 0.25، فاكتب المعادلات الخاصة بالشوكة الرنانة التي يرتجع صداها بترددات 64 و 256 و 512 هرتز.

b. كيف تختلف فترات الشوكات الرنانة؟

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

64. SAT/ACT في الشكل، ما قيمة x؟



A 40
B 45
C 60
D 75
E 90

65. حلل $\frac{3p-1}{p^2-1}$ إلى كسور جزئية.

F $\frac{2}{p+1} + \frac{1}{p-1}$

G $\frac{2}{p-1} + \frac{1}{p+1}$

H $\frac{2}{p+1} - \frac{1}{p-1}$

J $\frac{2}{p-1} - \frac{1}{p+1}$

66. مراجعة تقوم آلة رش المياه بسقي قطاع دائري من العشب قطره 20 مترًا تقريبًا. قرر مالك المنزل أن وضع آلة الرش في النقطة (7, 5) سوف تزيد مساحة العشب المسقي للحد الأقصى. أي معادلة تمثل حد المنطقة التي تسقيها آلة الرش؟

A $(x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 100$

B $(x + 7)^2 - (y + 5)^2 = 100$

C $(x - 7)^2 - (y + 5)^2 = 100$

B $(x + 7)^2 - (y + 5)^2 = 100$

67. مراجعة أي مما يلي هو ناتج جمع $\frac{x+2}{x+3}$ و $\frac{4}{x^2+x-6}$؟

F $\frac{-3x-9}{x^2+x-6}$

G $\frac{x^2-3x-24}{x^2+x-6}$

H $\frac{x^2}{x^2+x-6}$

J $\frac{x^2+x-1}{x^2+x-6}$

5-5 البرمجة الخطية

:: السابق

- قمت بحل أنظمة المتباينات الخطية.

:: الحالي

1. إستخدام البرمجة الخطية لحل التطبيقات.
2. التعرف على الحالات التي لا يكون لها حلول أو لها أكثر من حل واحد لتطبيق البرمجة الخطية.

:: لماذا؟

- بوجه عام، تسعى الشركات جاهدة إلى تقليل التكاليف إلى أدنى حد ممكن من أجل تعظيم الأرباح. ويُطلق على العوامل التي تتسبب في تكاليف الأعمال أو تؤدي إلى زيادتها والتي تحد أو تقلل من الأرباح اسم قيود الأعمال.

بالنسبة لشركة شحن، قد يتمثل أحد القيود في عدد الساعات في اليوم التي يستطيع سائق الشاحنة خلالها القيادة بشكل آمن. أما في حالة مركز رعاية نهارية فقد تتمثل أحد القيود في لائحة حكومية تحد من عدد الأطفال لكل مقدم للرعاية بالنسبة لفئات عمرية معينة.

المفردات الجديدة

الحل الأمثل optimization
البرمجة الخطية linear programming
الدالة الهدف objective function
قيود constraints
الحلول الممكنة feasible solutions
حلول مثلى متعددة multiple optimal solutions
غير محدودة unbounded

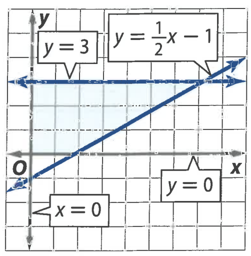
1 البرمجة الخطية تنطوي العديد من التطبيقات في مجال الأعمال والاقتصاد على **الأمثلية (البحث عن الحل الأمثل)**؛ وهي عملية إيجاد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى لكمية معينة. وعندما تكون الكمية المطلوب تحقيق الأمثلية لها ممثلةً بدالة خطية، فإن هذه العملية تُسمى **برمجة خطية**.

تتكون مسألة البرمجة الخطية ثنائية الأبعاد من دالة خطية مطلوب تحقيق الأمثلية لها تُسمى **دالة الهدف**، وهي تتألف من الصيغة $f(x, y) = ax + by + c$ ونظام من المتباينات الخطية يُسمى **قيود**. وتكون مجموعة حل نظام المتباينات عبارة عن مجموعة من **الحلول الممكنة أو المحتملة**، والتي تكون نقاطًا تأخذ الصيغة (x, y).

تذكر من الدرس 5-0 أن حل نظام المتباينات الخطية هو مجموعة من الأزواج المرتبة التي تحقق كل متباينة. وبيانيًا، يكون الحل هو تقاطع المناطق التي تمثل مجموعات حل المتباينات في النظام.

على سبيل المثال، يتمثل حل النظام أدناه في المنطقة المظللة كما هو موضح في التمثيل البياني.

$$y \geq \frac{1}{2}x - 1$$
$$y \leq 3$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

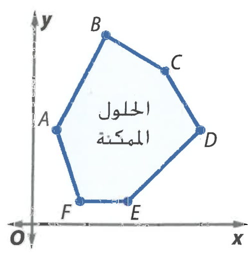


لنفترض أن المطلوب إيجاد القيمة العظمى للدالة $f(x, y) = 3x + 5y$ مع مراعاة القيود الواردة في النظام أعلاه. ونظرًا لأن المنطقة المظللة التي تمثل مجموعة الحلول الممكنة تحتوي على عدد لا نهائي من النقاط، فسيكون من المستحيل إيجاد قيمة $f(x, y)$ لجميعها. ولحسن الحظ، تقدم نظرية الرأس إستراتيجية لإيجاد الحل، إن وُجد.

المفهوم الأساسي نظرية الرأس المتعلقة بالحل الأمثل

الشرح إذا كان من الممكن إيجاد الحل الأمثل لمسألة برمجة خطية، فسوف تظهر القيمة المثلى عند إحدى رؤوس المنطقة التي تمثل مجموعة الحلول الممكنة.

مثال القيمة العظمى أو الصغرى للدالة $f(x, y) = ax + by + c$ عبر مجموعة الحلول الممكنة الممثلة بيانيًا تظهر عند النقطة A أو B أو C أو D أو E أو F.



المفهوم الأساسي البرمجة الخطية

لحل مسألة برمجة خطية، اتبع الخطوات التالية.

الخطوة 1 مثّل منطقة الحل الخاص بنظام القيود بيانيًا.

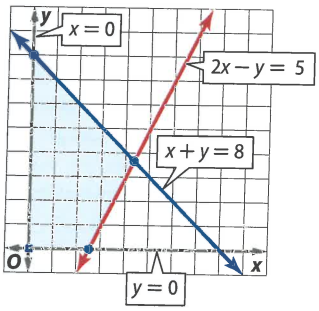
الخطوة 2 جد إحداثيات رؤوس المنطقة الناتجة.

الخطوة 3 جد قيمة دالة الهدف عند كل رأس لتحديد أي من قيمتي x و y، تحقق القيمة عظمى أو صغرى إن وُجدت.

مثال 1 زيادة دالة الهدف وإنقاصها إلى أقصى حد

جد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y) = x + 3y$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود التالية.

$x + y \leq 8$
$2x - y \leq 5$
$x \geq 0$
$y \geq 0$



ابدأ بتمثيل النظام المعطى للمتباينات الأربع بيانيًا. ويتمثل حل النظام، الذي يشكل مجموعة الحلول الممكنة لدالة الهدف، في المنطقة المظللة، بما في ذلك القطع الحدودية الخاصة بها.

تتمتع منطقة الحلول الممكنة متعددة الأضلاع بأربع رؤوس. **وتوجد** إحداها عند النقطة (0, 0).

جد حل كل من الأنظمة الثلاثة التالية لإيجاد إحداثيات الرؤوس المتبقية.

نظام المعادلات المحدودة	$x + y = 8$ $2x - y = 5$	$2x - y = 5$ $y = 0$	$x + y = 8$ $x = 0$
الحل (نقطة الرأس)	$\left(\frac{13}{3}, \frac{11}{3}\right)$	$\left(\frac{5}{2}, 0\right)$	(0, 8)

جد قيمة دالة الهدف $f(x, y) = x + 3y$ عند كل رأس من الرؤوس الأربع.

$f(0, 0) = 0 + 3(0) = 0$ ← القيمة الصغرى لـ $f(x, y)$

$f\left(\frac{5}{2}, 0\right) = \frac{5}{2} + 3(0) = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{13}{3}, \frac{11}{3}\right) = \frac{13}{3} + 3\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{46}{3} = 15\frac{1}{3}$

$f(0, 8) = 0 + 3(8) = 24$ ← القيمة العظمى لـ $f(x, y)$

إذًا، القيمة العظمى لـ f هي 24 عندما يكون $x = 0$ و $y = 8$. القيمة الصغرى لـ f هي 0 عندما يكون $x = 0$ و $y = 0$.

تمرين موجّه

جد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y)$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة.

1A. $f(x, y) = 2x + 5y$
$x + y \geq -3$
$6x + 3y \leq 24$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

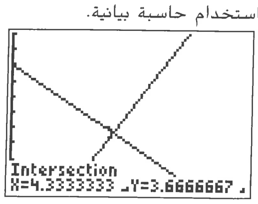
1B. $f(x, y) = 5x - 6y$
$y \leq 6$
$y \geq 2x - 2$
$y \geq -3x - 12$

نصيحة دراسية

مجموعة المضلع المحدب المجموعة المحدودة من النقاط التي تقع على أو بداخل مضلع محدب ممثَّل بيانيًا على مستوى إحداثي تُسمى *مجموعة المضلع المحدب*.

تلميح تقني

إيجاد الرؤوس تذكر من الوحدة 0 أنه توجد طريقة أخرى لإيجاد الرأس وهي حساب تقاطع الخطوط الحدودية للقيدين باستخدام حاسبة بيانية.



[0, 10] scl: 1 by [0, 10] scl: 1

مثال 2 من الحياة اليومية تعظيم الربح

الأعمال يزرع مركز أشجار بساتين فقط نباتات العرعر والأزالية في دفيئة زراعية تتسع ما يصل إلى 3000 شجيرة. ونظرًا لتكاليف العمالة، يجب أن يكون عدد شجيرات الأزالية المزروعة أقل من أو يساوي 1200 زائد ثلاث مرات عدد شجيرات العرعر. ويشار إلى أن طلب السوق على الأزالية يعادل مرتين على الأقل من الطلب على العرعر. ويحقق المركز ربحًا قدره AED 2 لكل شجيرة عرعر و AED 1.50 لكل شجيرة أزالية.

a. اكتب دالة هدف، وقائمة بالقيود التي تمثل الحالة المبينة.

افترض أن x يمثل عدد شجيرات العرعر الناتجة و y يمثل عدد شجيرات الأزالية. إذًا، يتم التعبير عن دالة الهدف عن طريق المعادلة $f(x, y) = 2x + 1.5y$.

ويتم التعبير عن القيود عن طريق التالي.

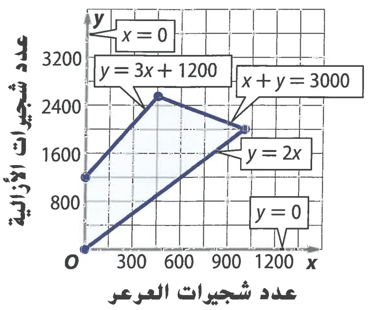
$y \geq 2x$ قيد طلب السوق

$y \leq 3x + 1200$ قيد الإنتاج

$x + y \leq 3000$ قيد سعة الدفيئة الزراعية

نظرًا لأن x و y لا يمكن أن يكونا سالبين، فإن القيود الإضافية تتمثل في أن $x \geq 0$ و $y \geq 0$.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا للمنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء (a) لإيجاد عدد الشجيرات لكل نبتة يجب على الشركة زراعتها لتحقيق أقصى ربح ممكن.



تتسم المنطقة المضلعة المظللة بأن لها أربع نقاط رأسية عند $(0, 0)$ و$(0, 1200)$ و$(450, 2550)$ و$(1000, 2000)$.

جد قيمة $f(x, y) = 2x + 1.5y$ عند كل رأس من الرؤوس الأربع.

$f(0, 0) = 2(0) + 1.5(0) = 0$

$f(0, 1200) = 2(0) + 1.5(1200) = 1800$

$f(450, 2550) = 2(450) + 1.5(2550) = 4725$

$f(1000, 2000) = 2(1000) + 1.5(2000) = 5000$ ← القيمة العظمى لـ $f(x, y)$

نظرًا لأن f أكبر عند $(1000, 2000)$، فإنه يجب على مركز أشجار البساتين زراعة 1000 شجيرة عرعر و 2000 شجيرة أزالية لتحقيق ربح أقصى قدره AED 5000.

تمرين موجّه

2. **التصنيع** مصنع خشب يستطيع إنتاج ما يصل إلى 600 وحدة من المنتج كل أسبوع. ولتلبية احتياجات عملائه المعتادين، يجب على المصنع أن ينتج على الأقل 150 وحدة من الخشب المنشور و 225 وحدة من الخشب الرقائقي. ويحقق المصنع ربحًا قدره AED 30 لكل وحدة من الخشب المنشور و AED 45 لكل وحدة من الخشب الرقائقي.

A. اكتب دالة هدف وقائمة بالقيود التي تمثل الحالة المبينة.

B. ارسم تمثيلاً بيانيًا للمنطقة المحددة بواسطة القيود لإيجاد عدد الوحدات لكل من نوعي الخشب المنتَجين التي يجب على المصنع إنتاجها لتحقيق الربح الأقصى.

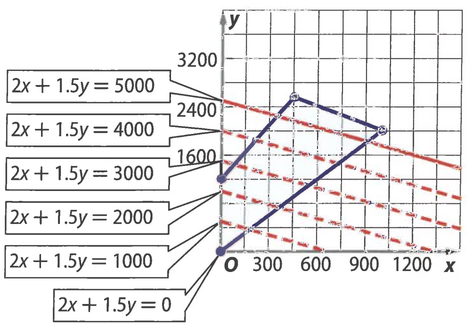
الربط بالحياة اليومية

يعد Biosphere 2 في أوراكل بولاية أريزونا مركزًا للأبحاث والتطوير حول تقنية الاكتفاء الذاتي بمستعمرات الفضاء. وتحتوي الدفيئة الزراعية على 203,881.3 متر مكعب من الزجاج المانع للتسرب، و 6500 نافذة، بنقطة ارتفاع تبلغ 27.7 مترًا.

المصدر: جامعة أريزونا

من أجل التوصل إلى فهم أفضل للسبب في أن القيمة العظمى للدالة $f(x, y) = 2x + 1.5y$ يجب أن تقع عند إحدى الرؤوس في المثال 2، قم بتعيين قيم موجبة مختلفة لـ f من 0 إلى 5000 ثم مثّل المجموعة المتوافقة للخطوط المستقيمة المتوازية بيانيًا.

لاحظ أن مسافة الخط المستقيم في هذه المجموعة من نقطة الأصل تزداد مع ازدياد f، وتمتد عبر منطقة الحلول الممكنة.



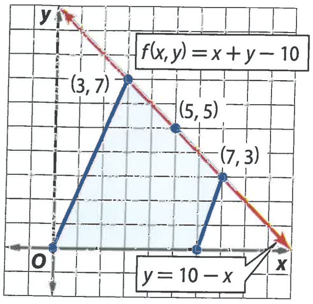
من الناحية الهندسية، لزيادة الدالة f إلى أقصى حد عبر مجموعة من الحلول الممكنة، فإنك تحتاج إلى الخط المستقيم صاحب قيمة f الأكبر، والذي لا يزال يتقاطع مع المنطقة المظللة. من خلال التمثيل البياني، يمكنك رؤية أن مثل هذا الخط المستقيم سيتقاطع مع المنطقة المظللة عند نقطة واحدة، وهي الرأس عند النقطة $(1000, 2000)$.

نصيحة دراسية

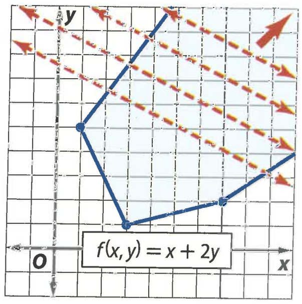
دوال الهدف لإيجاد المعادلة المتعلقة بدالة الهدف، جد حل معادلة الهدف من أجل y.

2 عدم وجود حلول مثلى أو تعددها

كما هو الحال مع أنظمة المعادلات الخطية، يمكن أن يكون لمسائل البرمجة الخطية حل أمثل واحد أو حلول مثلى متعددة أو تفتقر إلى هذه الحلول تمامًا. إذا كان التمثيل البياني للمعادلة المتعلقة بدالة الهدف f المطلوب إيجاد حل أمثل لها يقع في المكان نفسه عند أحد جوانب منطقة الحلول الممكنة، فإن الدالة f يكون لها **حلول مثلى متعددة**. وفي الشكل (5.5.1)، فإن أي نقطة على القطعة التي تصل بين الرأسين اللتين تقعان عند $(3, 7)$ و $(7, 3)$، تعتبر حلاً أمثل للدالة f. وإذا كانت المنطقة لا تشكل مضلعًا ولكنها بدلاً من ذلك **غير محدودة**، فقد لا تكون للدالة f أي قيمة صغرى أو عظمى. وفي الشكل (5.5.2)، لا يكون للدالة f أي قيمة عظمى.



الشكل (5.5.1)



الشكل (5.5.2)

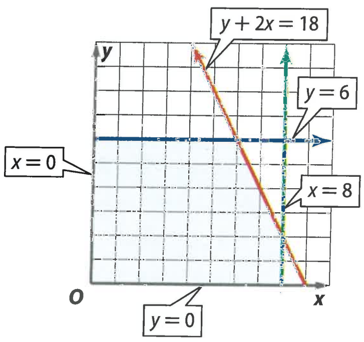
مثال 3 الأمثلية عند نقاط متعددة

جد القيمة العظمى لدالة الهدف $f(x, y) = 4x + 2y$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحقق عندهما هذه القيمة، مع مراعاة القيود التالية.

$y + 2x \leq 18$
$y \leq 6$
$x \leq 8$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

مثّل المنطقة المحدودة بالقيود المذكورة بيانيًا.
تتمتع منطقة الحلول الممكنة المضلعة بخمس رؤوس عند النقاط $(0, 0)$ و $(8, 2)$ و $(0, 6)$ و $(8, 0)$ و $(6, 6)$.
جد قيمة دالة الهدف $f(x, y) = 4x + 2y$ عند كل رأس.

$f(0, 0) = 4(0) + 2(0) = 0$
$f(8, 2) = 4(8) + 2(2) = 36$
$f(0, 6) = 4(0) + 2(6) = 12$
$f(8, 0) = 4(8) + 2(0) = 32$
$f(6, 6) = 4(6) + 2(6) = 36$

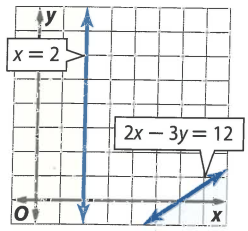


نظرًا لأن $f(x, y) = 36$ عند $(6, 6)$ و $(8, 2)$، فإنه توجد نقاط متعددة يتم فيها تحقيق الأمثلية للدالة f. وتكون معادلة الخط المستقيم عبر هاتين الرأسين هي $y = -2x + 18$. لذا، فإن f تكون لها قيمة عظمى تبلغ 36 عند كل نقطة على $y = -2x + 18$ لكي يكون $6 \leq x \leq 8$.

نصيحة دراسية

مسألة البرمجة الخطية غير ممكنة

الحل يُقال عن حل مسألة البرمجة الخطية إنه غير ممكن إذا كانت مجموعة القيود لا تحدد منطقة لها نقاط مشتركة. فعلى سبيل المثال، لا يحدد التمثيل البياني أدناه منطقة حلول ممكنة يمكن الاعتماد عليها لتحقيق أمثلية (الوصول إلى حل أمثل) لدالة الهدف.



تمرين موجّه

جد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y)$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة.

3A. $f(x, y) = 3x + 3y$
$4x + 3y \geq 12$
$y \leq 3$
$y \geq 0$
$x \leq 4$
$x \geq 0$

3B. $f(x, y) = 4x + 8y$
$x + 2y \leq 16$
$y \geq 2$
$x \geq 3$

مثال 4 من الحياة اليومية منطقة الحل ... غير المحدودة

الطب البيطري يوصي أحد الأطباء البيطريين بأن تخضع أرنب صغيرة جديدة لنظام غذائي يتألف على الأقل من 43.66 g من البروتينات و 15.87 g من الدهون يوميًا. استخدم الجدول التالي لتحديد كمية كل طعام للقطط ينبغي استخدامه لتلبية المتطلبات الغذائية بالتكلفة الصغرى.

العلامة التجارية لطعام القطط	البروتينات (جرام/كوب)	الدهون (جرام/كوب)	تكلفة الكوب (AED)
Good Start	23.8	5.95	1.32
Sirius	15.87	13.9	0.81

a. اكتب دالة هدف واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

افترض أن x يمثل عدد أكواب *Good Start* التي تم تناولها و y يمثل عدد أكواب *Sirius* التي تم تناولها. إذًا، يتم التعبير عن دالة الهدف عن طريق $f(x, y) = 0.36x + 0.22y$.

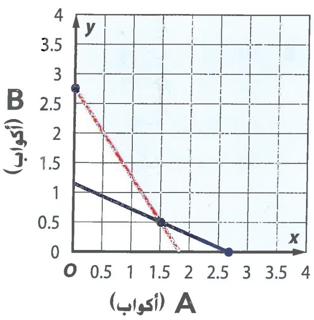
يتم التعبير عن القيود على الدهون والبروتينات اللازمة عن طريق

$0.84x + 0.56y \geq 1.54$ قيد البروتينات

$0.21x + 0.49y \geq 0.56$ قيد الدهون

نظرًا لأن x و y لا يمكن أن يكونا سالبين، فهناك أيضًا قيود لكل من $x \geq 0$ و $y \geq 0$.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يمثل المنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء (a) لإيجاد عدد الأكواب التي ينبغي استخدامها لكل نوع من نوعي طعام الأرانب A ، B لتلبية المتطلبات الغذائية بالتكلفة المثلى.



تتسم المنطقة المضلعة المظللة بأن لها ثلاث نقاط رأسية عند $(0, 2.75)$ و $(1.5, 0.5)$ و $(2.67, 0)$.

ستكون التكلفة المثلى القيمة الصغرى لـ $f(x, y) = 0.36x + 0.22y$.
جد قيمة دالة الهدف عند كل رأس.

$f(0, 2.75) = 0.36(0) + 0.22(2.75) = 0.605$ ← القيمة الصغرى لـ $f(x, y)$

$f(1.5, 0.5) = 0.36(1.5) + 0.22(0.5) = 0.65$

$f(2.67, 0) = 0.36(2.67) + 0.22(0) = 0.9612$

إذًا، من أجل تلبية متطلبات الطبيب البيطري بأدنى تكلفة تبلغ حوالي AED 2.24 للكوب الواحد، ينبغي أن تأكل الهرة 2.75 كوب فقط من المنتج ذي العلامة التجارية *Sirius*.

مهن في حياتنا

طبيب بيطري يجب أن يتخرج الأطباء البيطريون المستقبليون بدرجة دكتوراه في الطب البيطري من جامعة معتمدة. في أحد الأعوام الأخيرة، شغل الأطباء البيطريون 62,000 وظيفة في الولايات المتحدة الأمريكية، حيث وُظِّف 3 من أصل 4 أشخاص في عيادة فردية أو جماعية.

تمرين موجّه

4. **الإدارة** وفقًا لمدير أحد متاجر البيتزا، ترتبط الإنتاجية في ساعات عمل الموظفين لديها بمناصبهم. وتعادل ساعة العمل الواحدة كمية العمل الذي ينجزه موظف متوسط في ساعة واحدة. وستحتاج من أجل نوبة العمل التالية البالغة ثماني ساعات إلى اثنين من مشرفي النوبات، وعلى الأقل اثنين من المساعدين، و 10 من الموظفين على الأقل إجمالاً. وينبغي أن تخصص المديرة أيضًا ما لا يقل عن 120 ساعة عمل لتلبية طلب العملاء خلال تلك النوبة.

الموظفون العاملون	الإنتاجية (بساعات العمل)	الأجر (AED)
مساعد	1.5	7.50
موظف	1.0	6.50
مشرف نوبة	2.0	9.00

A. بافتراض أن كل موظف يعمل نوبة عمل الساعات الثماني كاملة، اكتب دالة هدف واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

B. ارسم تمثيلاً بيانيًا للمنطقة المحددة بالقيود لإيجاد عدد الموظفين الذين ينبغي تكليفهم بالعمل لتحسين تكاليف العمالة على النحو الأمثل.

تمارين

جد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y)$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة. (مثال 1)

1. $f(x, y) = 3x + y$
$y \le 2x + 1$
$x + 2y \le 12$
$1 \le y \le 3$

2. $f(x, y) = -x + 4y$
$y \le x + 4$
$y \ge -x + 3$
$1 \le x \le 4$

3. $f(x, y) = x - y$
$x + 2y \le 6$
$2x - y \le 7$
$x \ge -2$
$y \ge -3$

4. $f(x, y) = 3x - 5y$
$x \ge 0, y \ge 0$
$x + 2y \le 6$
$2y - x \le 2$
$x + y \le 5$

5. $f(x, y) = 3x - 2y$
$y \le x + 3$
$1 \le x \le 5$
$y \ge 2$

6. $f(x, y) = 3y + x$
$4y \le x + 8$
$2y \ge 3x - 6$
$2x + 2y \ge 4$

7. $f(x, y) = x - 4y$
$x \ge 2, y \ge 1$
$x - 2y \ge -4$
$2x - y \le 7$
$x + y \le 8$

8. $f(x, y) = x - y$
$3x - 2y \ge -7$
$x + 6y \ge -9$
$5x + y \le 13, x - 3y \ge -7$

.9 **عيادة طبية** يعمل عامر موظف استقبال في عيادة طبية. وتتمثل إحدى مهامه في تحديد مواعيد الزيارات. وهو يخصص 20 دقيقة للكشف و 40 دقيقة للفحص البدني. ولا يستطيع الطبيب إجراء أكثر من 6 فحوصات بدنية في اليوم، وتتيح العيادة 7 ساعات لمواعيد الزيارات في العمل. وتبلغ تكلفة الكشف AED 55 وتبلغ تكلفة الفحص البدني AED 125. (مثال 2)

a. اكتب دالة هدف، واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يمثل المنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء **a** لإيجاد مجموعة الحلول الممكنة لدالة الهدف.

c. كم عدد الزيارات الطبية من كل فئة التي ينبغي أن ينظمها عامر لتحقيق أقصى دخل؟ ما الدخل الأقصى؟

.10 **الدخل** يعمل أحمد بدوام جزئي لدفع بعض نفقات جامعته. ويقوم أحمد بتوصيل البيتزا مقابل AED 5 في الساعة بالإضافة إلى البقشيش، وبالتالي يبلغ إجمالي ما يحصل عليه AED 8 تقريبًا في الساعة، كما يُلقي دروسًا خصوصية في معمل الرياضيات مقابل AED 15 في الساعة. ويتم فتح معمل الرياضيات لمدة ساعتين فقط يوميًا من الاثنين حتى الجمعة، عندما يكون أحمد متاحًا لإلقاء الدروس الخصوصية. ولا يمكن لأحمد أن يعمل أكثر من 20 ساعة في الأسبوع نظرًا لجدول مواعيد الصف لديه. (مثال 2)

a. اكتب دالة هدف، واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يمثل المنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء **a** لإيجاد مجموعة الحلول الممكنة لدالة الهدف.

c. كيف يمكن لأحمد تحقيق أكبر مبلغ من المال، وكم يساوي هذا المبلغ؟

.11 **أعمال صغيرة** شركة تصميم تنشئ مواقع ويب وألبومات إلكترونية. ويتطلب كل موقع ويب 10 ساعات من التخطيط و 4.5 ساعات من تصميم الصفحات. ويتطلب كل ألبوم عائلي إلكتروني 15 ساعة من التخطيط و 9 ساعات من تصميم الصفحات. وتُتاح 70 ساعة في الأسبوع لكي يقوم الموظفون بعملية التخطيط و 36 ساعة لتصميم الصفحات. (مثال 2)

a. إذا كان الربح المتحقق يبلغ AED 600 لكل موقع ويب و AED 700 لكل ألبوم عائلي إلكتروني، فاكتب دالة هدف واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يمثل المنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء **a** لإيجاد مجموعة الحلول الممكنة لدالة الهدف.

c. ما العدد الذي يجب أن تنتجه الشركة من كل منتج لتحقيق أقصى ربح؟ كم يبلغ الربح؟

جد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y)$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة. (المثالان 3 و 4)

12. $f(x, y) = 4x - 4y$
$2x + y \ge -7$
$y \le x + 2$
$y \le 11 - 2x$

13. $f(x, y) = 3x + 6y$
$y \le -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
$y \le 2, y \ge 0$
$x \le 3, x \ge 0$

14. $f(x, y) = -3x - 6y$
$y \le -\frac{1}{2}x + 5$
$y \le 4, y \ge 0$
$x \le 6, x \ge 0$

15. $f(x, y) = 6x - 4y$
$2x + 3y \ge 6$
$3x - 2y \ge -4$
$5x + y \ge 15$

16. $f(x, y) = 3x + 4y$
$y \le x - 3$
$y \le 6 - 2x$
$2x + y \ge -3$

17. $f(x, y) = 8x + 10y$
$y \le -\frac{4}{5}x + 4$
$y \le 4, y \ge 0$
$x \le 5, x \ge 0$

.18 **التغذية** تريد مها استهلاك المزيد من المواد المغذية. وهي تسعى للحصول على ما لا يقل عن 40 mg من الكالسيوم و 600 mg من البوتاسيوم و 50 mg من فيتامين "C". وتُفضل مها من الفاكهة كلاً من التفاح والموز. وفيما يلي يتبين متوسط المحتوى الغذائي لكليهما. (مثال 4)

الفاكهة	الكالسيوم	البوتاسيوم	فيتامين "C"
التفاح	9.5 mg	158 mg	9 mg
الموز	7.0 mg	467 mg	11 mg

a. إذا كانت تكلفة كل تفاحة AED 0.55 وتكلفة كل موزة AED 0.35، فاكتب دالة هدف. واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا للمنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء **a** لإيجاد مجموعة الحلول الممكنة لدالة الهدف.

c. حدد عدد كل نوع من الفاكهة التي يجب على مها تناولها لتحقق أدنى تكلفة بينما تظل تحصل في الوقت نفسه على الحصة الغذائية التي ترغب فيها.

جد قيمة a بحيث تكون لكل دالة هدف قيم عظمى عند الرأس المحدد، مع مراعاة القيود التالية.

$$x \geq 0$$
$$y \geq 2$$
$$x + y \leq 9$$
$$-4x + 3y \leq 6$$

19. $f(x, y) = -4x + ay, (0, 2)$

20. $f(x, y) = -4x + ay, (3, 6)$

21. $f(x, y) = x - ay, (3, 6)$

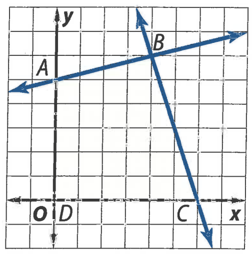
22. $f(x, y) = x - ay, (7, 2)$

23. $f(x, y) = ax + 4y, (7, 2)$

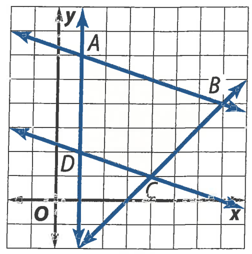
24. $f(x, y) = ax - 3y, (0, 2)$

جد دالة هدف لها قيمة عظمى أو صغرى عند كل رأس محددة.

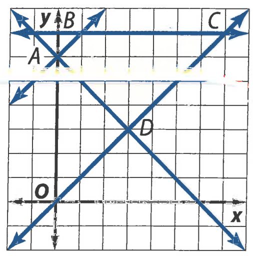
25. الصغرى عند A



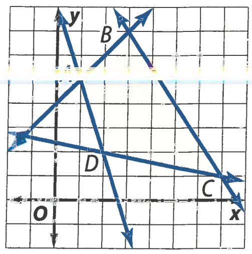
26. العظمى عند C



27. العظمى عند B



28. الصغرى عند D



29. **الأعمال** يتطلب إعداد دفعة كوكتيل مانجو شروق الشمس 3 L من عصير المانجو ولترًا واحدًا من عصير الفراولة. ويتطلب إعداد دفعة كوكتيل "أحلام الواحة" لترين من عصير المانجو ولترًا واحدًا من عصير الفراولة. ويمتلك المتجر 40 L من عصير المانجو و 15 L من عصير الفراولة ويرغب في استهلاكها بالكامل قبل نهاية اليوم. ويحقق كوكتيل مانجو شروق الشمس ربحًا قدره 16 AED للدفعة الواحدة، بينما يحقق كوكتيل أحلام الواحة ربحًا قدره 12 AED للدفعة الواحدة.

a. اكتب دالة هدف، واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

b. من أجل الوصول إلى أقصى ربح، كم عدد الدفعات من كل مشروب التي يجب على متجر العصير إعدادها؟

جد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y)$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة.

30. $f(x, y) = 4x - 8y$
$y \geq x^2 - 8x + 18$
$y \leq -x^2 + 8x - 10$
$y \leq 8 - x$

31. $f(x, y) = -2x + 5y$
$y \geq x^2 + 6x + 3$
$y \leq -x^2 - 4x + 15$
$y \leq x + 9$

جد مساحة المنطقة المحاطة بمجموعة المضلع المحدب والمُعرَّفة بكل نظام من المتباينات.

32. $x \geq 0$
$x \leq 12$
$2x + 6y \leq 84$
$2x - 3y \leq -3$
$8x + 3y \geq 33$

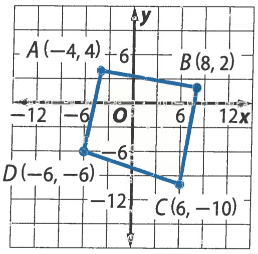
33. $y \leq 9$
$x \geq 2$
$x - y \leq 5$
$2x + y \leq 25$
$3x + 2y \leq 20$

34. $x \geq 0$
$y \geq \frac{1}{2}x$
$3x + 2y \geq 8$
$-3x + 4y \leq 28$
$x + 2y \leq 24$

35. $x \leq 10$
$x + y \leq 14$
$x + 3y \geq 13$
$-x + 5y \leq 40$
$4x + y \geq 8$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

36. **تحدٍ** اكتب نظامًا من المتباينات يشكل مجموعة المضلع المحدب الموضحة أدناه.



37. **التبرير** فكر بدالة الربح $P(x, y) = ax + by$. هل سيظل P له قيمة عظمى موجبة إذا كانت منطقة الحلول الممكنة تقع بالكامل بداخل الربع الأول؟ اشرح استنتاجك.

38. **تحدٍ** جد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y) = -6x + 3y$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة.

$y \geq 4$
$3x + 2y \geq 14$
$-2x + 5y \leq 60$
$-x + y \geq -3$
$-7x + 5y \leq 35$
$2x + y \leq 36$

39. **مسألة غير محددة الإجابة** البرمجة الخطية لها تطبيقات عديدة من الحياة اليومية.

a. اكتب مسألة من الحياة اليومية يمكن حلها باستخدام البرمجة الخطية.

b. باستخدام 4 قيود على الأقل، اكتب دالة هدف مطلوب قيمتها العظمى أو الصغرى.

c. ارسم تمثيلاً بيانيًا للمنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء a لإيجاد مجموعة الحلول الممكنة.

d. جد حلاً لهذه المسألة.

40. **الكتابة في الرياضيات** هل من الممكن ألا يكون لمسألة برمجة خطية أي حلول عظمى أو صغرى؟ اشرح استنتاجك.

مراجعة شاملة

جد تحليل الكسور الجزئية لكل تعبير نسبي مما يلي.

41. $\frac{8y+7}{y^2+y-2}$

42. $\frac{x-6}{x^2-2x}$

43. $\frac{5m-4}{m^2-4}$

44. $\frac{-4y}{3y^2-4y+1}$

45. **ألعاب أركيد** اشترى ماجد وبلال بطاقتي لعب لكي يلعبا ألعابًا افتراضية على الأركيد. واستخدم ماجد 47 نقطة من بطاقة اللعب الخاصة به لقيادة سيارة السباق المحاكية وركوب لوح التزلج على الجليد المحاكي بمعدل أربع مرات لكل لعبة. واستخدم بلال 48.25 نقطة من بطاقة اللعب الخاصة به لقيادة سيارة السباق المحاكية خمس مرات وركوب لوح التزلج على الجليد المحاكي ثلاث مرات. كم عدد النقاط التي تتطلبها كل لعبة في المرة الواحدة؟

46. **أمواج** بعد أن نشأت موجة بفعل قارب، يمكن تمثيل ارتفاع الموجة باستخدام $y = \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h \sin \frac{2\pi t}{P}$. حيث h هو الارتفاع الأقصى للموجة بالمتر، و P هو الفترة الزمنية بالثواني، و t هو مدة انتشار الموجة بالثواني.

a. إذا كان $h = 3$ و $P = 2$، فاكتب المعادلة الخاصة بالموجة. مثّل هذه المعادلة بيانيًا على مدى فترة زمنية فاصلة تبلغ 10 ثوانٍ.

b. كم عدد المرات التي يتوقع التمثيل البياني خلالها ارتفاع الموجة لقدم واحد خلال الثواني العشر الأولى؟

47. اثبت أن $\tan\theta \sin\theta \cos\theta \csc^2\theta = 1$ هي مصفوفة وحدة.

جد مساحة كل مثلث مقربة إلى أقرب جزء عشري.

48. $\triangle ABC$, إذا كان $A = 127°$، و $b = 12$ m، و $c = 9$ m

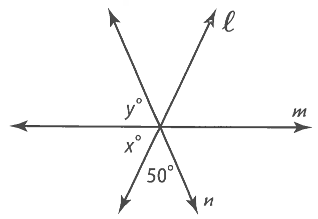
49. $\triangle ABC$, إذا كان $a = 7$ yd، و $b = 8$ yd، و $C = 44°$

50. $\triangle ABC$, إذا كان $A = 50°$، و $b = 15$ in، و $c = 10$ in

51. $\triangle ABC$, إذا كان $a = 6$ cm، و $B = 135°$، و $c = 3$ cm

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

52. **SAT/ACT** في الشكل أدناه، تتقاطع الخطوط المستقيمة ℓ و m و n في نقطة واحدة. فما قيمة $x + y$؟



A 40
B 70
C 90
D 130
E 260

53. موقف سيارات تبلغ مساحته $600\ m^2$. وتحتاج السيارة إلى $6\ m^2$ من المساحة، في حين تحتاج الحافلة إلى $30\ m^2$ من المساحة. ولا يستطيع العامل بالموقف التعامل مع أكثر من 60 مركبة. فإذا كانت تكلفة وقوف السيارة AED 3 ووقوف الحافلة AED 8، فما عدد كل منهما الذي ينبغي أن يوافق العامل على خدمته لتحقيق أقصى دخل؟

F 20 حافلة و 0 سيارة

G 10 حافلات و 50 سيارة

H 5 حافلات و 55 سيارة

J 0 حافلة و 60 سيارة

54. **إجابة حرة** استخدم نظامي المعادلات للإجابة عن كل مما يلي.

A

$$-5x + 2y + 11z = 31$$
$$2y + 6z = 26$$
$$2x - y - 5z = -15$$

B

$$x + 2y + 2z = 3$$
$$3x + 7y + 9z = 30$$
$$-x - 4y - 7z = -37$$

a. اكتب مصفوفة المعاملات لكل نظام. عَرّف المصفوفتين A و B.

b. جد AB و BA إن أمكن.

c. اكتب مصفوفة موسعة للنظام A في نموذج درجة صف منخفض.

d. جد محدد كل مصفوفة معاملات. أي من المصفوفات يكون لها معكوس؟ اشرح استنتاجك.

e. جد معكوس المصفوفة B.

f. استخدم معكوس المصفوفة B لحل النظام.

g. أي أنظمة يمكنك أن تستخدم معها قاعدة كرامر لحلها؟ اشرح استنتاجك.

5 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

الأنظمة الخطية متعددة المتغيرات وعمليات الصف (الدرس 5-1)

- كل عملية من عمليات الصف هذه تنتج مصفوفة موسعة مكافئة.
  - التبديل بين أي صفين.
  - ضرب أحد الصفين في عدد حقيقي غير صفري.
  - جمع مضاعف أحد الصفين مع الصف الآخر.

ضرب المصفوفات (الدرس 5-2)

- إذا كانت A هي المصفوفة $m \times r$ و B هي المصفوفة $r \times n$، فإن ناتج ضرب AB إذًا هو المصفوفة $m \times n$ التي يكون فيها
$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ir}b_{rj}$
- I_n هي مصفوفة $n \times n$ تكون جميع قيمها 1 على قطرها الرئيس، وجميع قيمها 0 بالنسبة لجميع العناصر الأخرى.
- معكوس A هو A^{-1} حيث $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
- إذا كان $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $ad - cb \neq 0$، إذًا $A^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. العدد $ad - cb$ يُسمى مُحَدِّد المصفوفة 2×2 ويُعبَّر عنه بواسطة $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

حل الأنظمة (الدرس 5-3)

- افترض أن $AX = B$، حيث A هي مصفوفة معاملات النظام الخطي، و X هي مصفوفة المتغيرات، و B هي مصفوفة الحدود الثابتة. إذا كان A لها معكوس، فإن $AX = B$ يكون له إذًا حل فريد يتم التعبير عنه من خلال $X = A^{-1}B$.
- إذا كان $\det(A) \neq 0$، فإن الحل الفريد للنظام إذًا يتم التعبير عنه من خلال $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$. إذا كان $\det(A) = 0$، فإن $AX = B$ يكون إذًا إما ليس له حل أو له عدد لا نهائي من الحلول.

الكسور الجزئية (الدرس 5-4)

- إذا كانت درجة $f(x)$ أكبر من أو تساوي درجة $d(x)$، فاستخدم قسمة مطولة كثيرة الحدود المطولة وخوارزمية القسمة لكتابة $\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$. ثم طبّق تحليل الكسور الجزئية (أو ما يُعرف بتجزئة الكسور) على $\frac{r(x)}{d(x)}$.

البرمجة الخطية (الدرس 5-5)

- القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة الخطية في x و y تُحدَّدان بواسطة أساليب البرمجة الخطية.
الخطوة 1. مثّل حل نظام القيود بيانيًا.
الخطوة 2. جد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.
الخطوة 3. جد قيمة دالة التركيز عند كل رأس لإيجاد القيم التي تُقلل/تزيد الدالة إلى الحد الأدنى/الأقصى.

المفردات الأساسية

مصفوفة موسعة augmented matrix	حلول مثلى متعددة multiple optimal solutions
مصفوفة المعاملات augmented matrix	نظام خطي متعدد المتغيرات multivariable linear system
قيد constraint	دالة التركيز objective function
قاعدة كرامر Cramer's Rule	الحل الأمثل optimization
مُحَدِّد determinant	كسر جزئي partial fraction
حل ممكن feasible solution	تحليل الكسر الجزئي partial fraction decomposition
حذف جاوس Gaussian elimination	نموذج درجة الصف المنخفض reduced row–echelon form
المصفوفة المحايدة identity matrix	نموذج درجة الصف row-echelon form
معكوس inverse	مصفوفة منفردة singular matrix
مصفوفة عكسية inverse matrix	نظام مربع square system
لها معكوس invertible	غير محدودة unbounded)
برمجة خطية linear programming	

مراجعة المفردات

اختر أفضل كلمة أو عبارة لإكمال الجمل التالية.

1. (المصفوفة الموسعة، مصفوفة المعاملات) هي مصفوفة تتكون من جميع معاملات النظام الخطي وحدوده الثابتة.
2. يختزل/تختزل (حذف جاوس/عمليات الصف الأولية) نظام المعادلات إلى نظام أبسط ومكافئ لتسهيل إيجاد حل له.
3. ناتج حذف جاوس–جوردان هو مصفوفة في صورة (نموذج درجة صف منخفض "أو ما يعرف أيضًا بصورة مستوى صف منخفض"، لها معكوس).
4. ناتج المصفوفة $n \times n$ المتمثل في A مع اعتبار (المصفوفة العكسية، مصفوفة الوحدة) هو A.
5. المصفوفة المحايدة I تكون هي ذاتها (مصفوفتها الموسعة، مصفوفتها العكسية).
6. المصفوفة المربعة التي ليس لها معكوس تكون (غير منفردة، منفردة).
7. (المُحَدِّد، النظام المربع) الخاص بـ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $ad - bc$.
8. عند حل نظام خطي مربع، يكون البديل لحذف جاوس هو (قاعدة كرامر، تحليل الكسر الجزئي).
9. تتكون مسألة البرمجة الخطية ثنائية الأبعاد من (قيود، حلول ممكنة)، والتي تكون عبارة عن متباينات خطية.
10. إذا كان التمثيل البياني لدالة التركيز المطلوب إيجاد حلها الأمثل، f، يقع في المكان نفسه عند أحد أطراف منطقة الحلول الممكنة، فحينها قد تكون هناك حلول (مثلى متعددة، غير محدودة).

المراجعة التابعة للدرس

5-1 الأنظمة الخطية متعددة المتغيرات وعمليات الصف الأولية (البسيطة)

اكتب كل نظام معادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم جد حلاً للنظام.

11. $3x + 4y = 7$
$2y = -5x + 7$

12. $5x - 3y = 16$
$x + 3y = -4$

13. $x + y + z = 4$
$2x - y - 3z = 4$
$-3x - 4y - 5z = -13$

14. $x + y - z = 5$
$2x - 3y + 5z = -1$
$3x - y + 2z = 10$

15. $2x - 5y = 2z + 11$
$3y + 4z = x - 28$
$3z - x = -18 - 3y$

16. $2x - 3z = y - 1$
$5z - 8 = 3x + 4y$
$x + y + z = 3$

حل كل من أنظمة المعادلات التالية.

17. $2x + 2y = 8$
$3x - 8y = -21$

18. $x - 2y = 13$
$-5x - 6y = 15$

19. $x + y = 4$
$x + y + z = 7$
$x - z = -1$

20. $x + y = 1$
$3x - 7y + z = -7$
$4x + 8y + 3z = -9$

21. $3x - y + z = 8$
$2x - 3y = 3z - 13$
$x + z = 6 - y$

22. $x + y = z - 1$
$2x + 2y + z = 13$
$3x - 5y + 4z = 8$

مثال 1

جد حل نظام المعادلات باستخدام حذف جاوس.

$$\mathbf{x + 2y + 3z = 8}$$
$$\mathbf{2x - 4y + z = 2}$$
$$\mathbf{-3x - 6y + 7z = 8}$$

اكتب المصفوفة الموسعة. ثم طبق عمليات الصف الأولية للحصول على نموذج درجة الصف.

مصفوفة موسعة
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & -4 & 1 & 2 \\ -3 & -6 & 7 & 8 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ -2R_1 + R_2 \rightarrow \\ 3R_1 + R_3 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -8 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & 16 & 32 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{16}R_3 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -8 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

يمكنك استخدام التعويض لإيجاد أن $y = 0.5$ و $x = 1$. إذًا، حل النظام هو $x = 1$، و $y = 0.5$، و $z = 2$، أو المجموعة المرتبة ثلاثية العناصر $(1, 0.5, 2)$.

5-2 ضرب المصفوفة والمعكوسات والمحددات

جد AB و BA، إن أمكن.

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$B = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$
$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix}$
$B = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$
$B = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$

جد $A-1$، في حالة وجودها. وإن لم تكن $A-1$ موجودة، فاكتب *منفردة*.

27. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$

28. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

29. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -8 & -12 \end{bmatrix}$

30. $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

مثال 2

افترض أن $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$. جد A^{-1}، في حالة وجودها. وإن لم تكن A^{-1} موجودة، فاكتب *منفردة*.

اكتب أولاً مصفوفة موسعة مزدوجة. ثم طبّق عمليات الصف الأولية لكتابة المصفوفة في نموذج درجة صف منخفض.

مصفوفة موسعة ←
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ -2R_1 + R_2 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} -4R_2 + R_1 \rightarrow \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

نظرًا لأن النظام له حل، و $a = 9$، و $b = -4$، و $c = -2$، و $d = 1$، فإن A لها معكوس ومعكوسها $A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

5-3 حل الأنظمة الخطية باستخدام المعكوسات وقاعدة كرامر

استخدم المصفوفة العكسية لحل كل نظام معادلات، إن أمكن.

31. $2x - 3y = -23$
$3x + 7y = 23$

32. $3x - 6y = 9$
$-5x - 8y = -6$

33. $2x + y = 1$
$x - 3y + z = -4$
$y + 8z = -7$

34. $x + y + z = 1$
$x + y - z = -7$
$y + z = -1$

35. $3y + 5z = 25$
$2x - 7y - 3z = 15$
$x + y - z = -11$

36. $x - 2y - 3z = 0$
$2x - 3y + 4z = 11$
$x - 8y + 2z = -1$

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

37. $2x - 4y = 30$
$3x + 5y = 12$

38. $2x + 6y = 14$
$x - 3y = 1$

39. $2x + 3y - z = 1$
$x + y - 3z = 12$
$5x - 7y + 2z = 28$

40. $x + 2y + z = -2$
$2x + 2y - 5z = -19$
$3x - 4y + 8z = -1$

41. $-3x - 4y + z = 15$
$x - 5y - z = 3$
$4x - 3y - 2z = -8$

42. $2x + 3y + 4z = 29$
$x - 8y - z = -3$
$2x + y + z = 4$

مثال 3

استخدم المصفوفة العكسية لحل نظام المعادلات، إن أمكن.

$$x - y + z = -5$$
$$2x + 2y - 3z = -27$$
$$-3x - y + z = 17$$

اكتب النظام في صورة مصفوفة.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} -5 \\ -27 \\ 17 \end{bmatrix}}$$

استخدم الحاسبة البيانية لإيجاد قيمة A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 \\ -1.75 & -1 & -1.25 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

اضرب A^{-1} في B لحل النظام.

$$X = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 \\ -1.75 & -1 & -1.25 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -27 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5 \\ 14.5 \\ 15 \end{bmatrix}$$

إذًا، الحل هو $(-5.5, 14.5, 15)$.

5-4 الكسور الجزئية

جد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي.

43. $\frac{2x}{x^2 - 4}$

44. $\frac{7x - 6}{x^2 - x - 6}$

45. $\frac{-2x + 9}{x^2 - 11x + 30}$

46. $\frac{6x^2 - 4x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x}$

47. $\frac{2x^3 - 14x^2 + 2x + 7}{x^2 - 7x}$

48. $\frac{2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 2}{x(x^2 + 1)^2}$

49. $\frac{2x^2 + 4}{x^2 - 2x}$

50. $\frac{2x^2 - 12x - 20}{x^2 + 4x}$

51. $\frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 3x}$

52. $\frac{3x^2 - 10x - 20}{2x^2 + 5x}$

مثال 4

جد تحليل الكسر الجزئي لـ $\frac{x - 8}{x^2 - 11x + 18}$.

أعد كتابة المعادلة في صورة كسور جزئية ذات بسوط ثابتة، A و B.

$$\frac{x + 12}{x^2 - 11x + 18} = \frac{A}{x - 9} + \frac{B}{x - 2}$$
$$x + 12 = A(x - 2) + B(x - 9)$$
$$x + 12 = Ax - 2A + Bx - 9B$$
$$x + 12 = (A + B)x + (-2A - 9B)$$

ساوِ بين معاملات الطرفين الأيسر والأيمن للمعادلة للحصول على نظام من معادلتين.

$$A + B = 1$$
$$-2A - 9B = 12$$

حل النظام هو $A = 3$ و $B = -2$. إذًا، $\frac{x + 12}{x^2 - 11x + 18} = \frac{3}{x - 9} + \frac{-2}{x - 2}$

5-5 البرمجة الخطية

جد القيمتين العظمى والصغرى لدالة التركيز $f(x, y)$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة.

53. $f(x, y) = 2x - y$
$x \geq 0$
$y \leq -x + 7$
$y \geq x + 1$

54. $f(x, y) = 3x + y$
$2x - y \leq 1$
$1 \leq y \leq 9$
$x \geq 1$

55. $f(x, y) = x + y$
$0 \leq x \leq 10$
$x + 2y \geq 8$
$0 \leq y \leq 8$

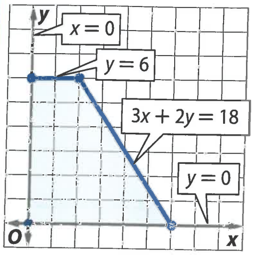
56. $f(x, y) = 2x - 4y$
$x \geq 3$
$y \geq 3$
$4x + 5y \leq 47$

57. $f(x, y) = 4x + 3y$
$3x + y \geq 8$
$2x + y \leq 12$
$y \geq x$

58. $f(x, y) = 2y - 5x$
$2x + y \geq 0$
$x - 5y \leq 0$
$3x + 7y \leq 22$

مثال 5

جد القيمة العظمى لدالة التركيز $f(x, y) = 2x + 6y$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما هذه القيمة، مع مراعاة القيود التالية.
$y \geq 0,\ x \geq 0,\ y \leq 6,\ 3x + 2y \leq 18$



مثِّل المنطقة المحدودة بالقيود المذكورة بيانيًا. جد قيمة دالة التركيز $f(x, y) = 2x + 6y$ عند كل رأس.

$f(0, 0) = 0 + 0$ أو 0
$f(0, 6) = 0 + 36$ أو 36
$f(6, 0) = 12 + 0$ أو 12
$f(2, 6) = 4 + 36$ أو 40

إذًا، القيمة العظمى لـ f هي 40 عندما يكون $x = 2$ و $y = 6$.

التطبيقات وحل المسائل

.59 شطائر البرجر البقري يوضح الجدول التالي عدد شطائر البرجر البقري والبرجر بالجبن والبرجر النباتي المبيعة في مطعم خلال فترة غداء تمتد على مدار 3 ساعات. جد سعر كل نوع من أنواع البرجر. (الدرس 5-1)

الساعات	العادي	بالجبن	النباتي	إجمالي المبيعات (AED)
11 صباحا – 12 مساء	2	8	2	53
12-1 مساء	7	12	8	119
1-2 مساء	1	5	7	64

.60 وضع الدرجات قررت الأستاذة عبير وضع درجات تقييمية على اختبارات وواجبات منزلية ومشروعات فضلاً عن المشاركة في الصف. وخصصت أوزانًا مئوية مختلفة لكل فئة كما هو موضح. جد الدرجة النهائية لكل طالب مع التقريب إلى أقرب نسبة مئوية. (الدرس 5-2)

الفئة	الاختبارات	الواجبات المنزلية	المشروعات	المشاركة
الوزن	40%	30%	20%	10%

الفئة	سامر	أنور	كريم	شوقي
الاختبارات	88	72	78	91
الواجبات المنزلية	95	90	68	71
المشروعات	80	73	75	85
المشاركة	100	95	100	80

.61 الآيس كريم يبيع كشك آيس كريم 3 نكهات تتمثل في الفراولة والأناناس والكرز. وتُباع كل نكهة بسعر AED 1.25. في أحد الأيام، جنى الكشك مبلغ AED 60 كإجمالي مبيعات. وقد حقق الكشك زيادة تبلغ AED 13.75 في مبيعات الكرز مقارنة بمبيعات الأناناس و AED 16.25 زيادة مقارنة بمبيعات الفراولة. استخدم قاعدة كرامر لتحديد عدد مرات بيع كل نكهة. (الدرس 5-3)

.62 ركوب الدراجات في رحلة على دراجة، قطع زوجان 240 كيلومترات في اليوم 1 و 270 كيلومترات في اليوم 2. وكان متوسط المعدل المقطوع خلال اليوم 1 أسرع بـ5 كيلومترات في الساعة من متوسط المعدل المقطوع خلال اليوم 2. إجمالي عدد الساعات المقضية في قيادة الدراجة $T = \frac{510r - 1200}{r(r-5)}$. (الدرس 5-4)

a. جد تحلل الكسر الجزئي لـ T.

b. كل كسر يمثل المدة الزمنية المنقضية في قيادة الدراجة كل يوم. إذا قاد الزوجان الدراجة بمقدار 6 ساعات أطول في اليوم 2، فما إجمالي عدد الساعات التي أمضياها في قيادة الدراجة؟

.63 إعادة التدوير قررت شركة إعادة تدوير جمع المخلفات من المواقع الخاصة إذا كان الموقع يخرج على الأقل 27 كيلومترات من عناصر إعادة التدوير في الأسبوع. ويمكن أن تجمع الشركة 22 كيلومترات من الورق و 17 كيلومترات من الزجاج كحد أقصى من كل موقع. وتربح الشركة AED 163.24 على كل رطل من الزجاج و AED 204 على كل رطل من الورق. (الدرس 5-5)

a. اكتب دالة هدف، واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

b. حدد عدد أرطال الزجاج والورق المطلوب لتحقيق الربح الأقصى.

c. ما الربح الأقصى؟

الوحدة 5 تدريب على الاختبار

اكتب كل نظام معادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم جد حلاً للنظام.

1. $-3x + y = 4$
$5x - 7y = 20$

2. $x + 4y - 3z = -8$
$5x - 7y + 3z = -4$
$3x - 2y + 4z = 24$

جد حلاً لنظام المعادلات.

3. $5x - 6y = 28$
$6x + 5y = -3$

4. $2x - 4y + z = 8$
$3x + 3y + 4z = 20$
$5x + y - 3z = -13$

5. المكتبة استعارت ليلى كتبًا وأسطوانات مضغوطة وأسطوانات DVD من المكتبة. وبلغ إجمالي ما استعارته 16 عنصرًا. وكان إجمالي عدد الأسطوانات المضغوطة وأسطوانات DVD مساويًا لعدد الكتب. واستعارت ليلى أسطوانتين مضغوطتين زيادة عن أسطوانات DVD.

a. افترض أن b = عدد الكتب، و c = عدد الأسطوانات المضغوطة، و d = عدد أسطوانات DVD. اكتب نظامًا من ثلاث معادلات خطية لتمثيل المسألة.

b. جد حلًا لنظام المعادلات. فسّر حلك.

جد AB و BA، إن أمكن.

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = [2 \quad -1 \quad -8]$

8. الهندسة يمكن كتابة إحداثيات النقطة (x, y) في صورة مصفوفة 2×1 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. افترض أن $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a. افترض أن P هي النقطة $(-3, 4)$. ناقش كيف يؤثر ضرب A في P على P.

b. مثلث يحتوي على الرؤوس $(0, 0)$ و$(2, 6)$ و$(8, 3)$. أنشئ مصفوفة 3×2 ,B لتمثيل المثلث. جد AB. ما التأثير الواقع على المثلث؟ هل يتفق مع إجابتك عن الجزء a؟

جد A^{-1}، في حالة وجودها. وإن لم تكن A^{-1} موجودة، فاكتب *منفردة*.

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$

استخدم المصفوفة العكسية لحل كل نظام معادلات، إن أمكن.

11. $2x - 3y = -7$
$5x + 2y = 11$

12. $2x + 2y + 5z = -6$
$2x - 3y + 7z = -7$
$x - 5y + 9z = 4$

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل فريد.

13. $3x - 2y = -2$
$4x - 2y = 2$

14. $3x - 2y - 3z = -24$
$3x + 5y + 2z = 7$
$-x + 5y + 3z = 25$

جد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي.

15. $\dfrac{4x}{x^2 - 9}$

16. $\dfrac{2x + 10}{x^2 - 4x + 3}$

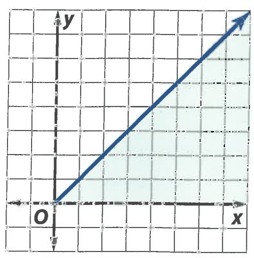
جد القيمتين العظمى والصغرى لدالة التركيز $f(x, y)$ وحدد مكان قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة.

17. $f(x, y) = 2x - y$
$x \geq 0$
$y \geq 0$
$y \geq -2x + 8$

18. $f(x, y) = -x + 2y$
$x - 3y \leq 0$
$x \geq 0$
$y \leq 9$

19. التسعير تبيع إحدى شركات المكسرات والحلويات مزيج المكسرات حيث يمكن للعملاء اختيار أي تشكيلات يرغبون فيها. ويحتوي المزيج المفضل لدى بدر على الفول السوداني والتوت البري المجفف والمعجنات المغطاة بالخروب. ويتم عرض الأسعار المتعلقة بكل عنصر أدناه. فإذا اشترى بدر مزيجًا من 2.3 رطل نظير AED 61.71 وكان يحتوي على معجنات مغطاة بالخروب بأرطال تعادل ضعف كمية التوت البري، فكم عدد الأرطال التي اشتراها من كل عنصر؟

20. الاختيار من متعدد يعرض التمثيل البياني قيود دالة التركيز. فأي مما يلي لا يمكن أن يكون أحد هذه القيود؟



A $y \geq 0$

B $x \geq 0$

C $x - y \leq 0$

D $x - y \geq 0$

الأمثلية غير الخطية

التركيز:

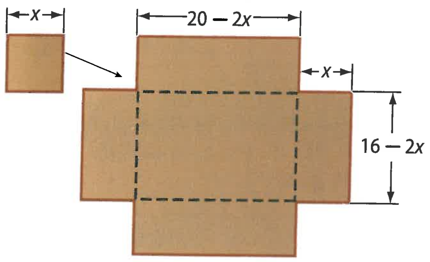
- تقريب حلول مسائل الأمثلية غير الخطية.

لقد تعلّمتَ كيفية حل مسائل الأمثلية باستخدام البرمجة الخطية. فقد كان يتم تمثيل دالة الهدف ونظام القيود باستخدام دوال خطية. غير أنه، لسوء الحظ، لا يمكن تعريف جميع المواقف التي تتطلب أمثلية بالدوال الخطية.

إن مسائل الأمثلية المتقدمة المشتملة على دوال تربيعية وتكعيبية ودوال غير خطية أخرى تتطلب حساب التفاضل والتكامل لإيجاد الحلول الدقيقة. ومع ذلك، يمكننا إيجاد تقريبات جيدة باستخدام الحاسبات البيانية.

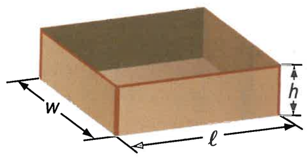
نشاط 1 الحجم الأقصى (أكبر حجم ممكن)

تم استخدام قطعة ورق مقوى مقاسها 16 in × 20 in لصنع صندوق ليس له قمة عن طريق قطع المربعات المتطابقة من كل ركن وثني الأضلاع لأعلى. ما أبعاد الصندوق مع اعتبار أكبر حجم ممكن؟ ما الحجم الأقصى؟



الخطوة 1 أعد رسمًا تخطيطيًا لهذه الحالة.

الخطوة 2 افترض أن x يمثل طول ضلع أحد المربعات المطلوب إزالتها. اكتب تعابير لطول الصندوق وعرضه وارتفاعه بدلالة x.



الخطوة 3 جد معادلة لحجم الصندوق V بدلالة x باستخدام الأبعاد التي حصلت عليها في الخطوة 2.

الخطوة 3 استخدم الحاسبة لتمثيل المعادلة التي حصلت عليها في الخطوة 3 بيانيًا.

تحليل النتائج

1. صف مجال x. اشرح استنتاجك.
2. استخدم الحاسبة لإيجاد إحداثيات النقطة العظمى على التمثيل البياني. فسّر دلالة هذه الإحداثيات.
3. ما أبعاد الصندوق مع اعتبار أكبر حجم ممكن؟ ما الحجم الأقصى؟

يختلف الناتج المطلوب والتعقيد حسب مسألة الأمثلية نفسها. ويمكنك استخدام الخطوات التالية لتحليل كل مسألة وإيجاد حل لها.

المفهوم الأساسي الأمثلية

لحل مسائل الأمثلية، راجع هذه الخطوات.

الخطوة 1 أعد رسمًا تخطيطيًا للحالة مع تسمية جميع الكميات المعروفة وغير المعروفة.

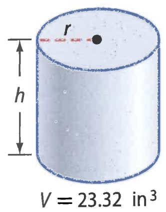
الخطوة 2 حدد الكمية المطلوب اعتبار أقصى أو أدنى حد لها. اختر القيم الضرورية لإيجاد الكمية المطلوبة، ومثّل كل قيمة بعدد أو متغير أو تعبير.

الخطوة 3 اكتب معادلة للكمية المطلوب إيجاد حلها الأمثل بدلالة متغير واحد.

الخطوة 4 مثّل المعادلة بيانيًا مع إيجاد إما القيمة العظمى أو الصغرى. حدد المجال المسموح به للمتغير.

نشاط 2 مساحة السطح الصغرى

عبوة نموذجية تبلغ تقريبًا 2.5 in عرضًا و 4.75 in طولاً وتسع حجمًا يساوي $23.32\ in^3$ تقريبًا. ماذا ستكون أبعاد عبوة مشروب إذا ظل الحجم ثابتًا ولكن تم تقليل كمية المادة المستخدمة في صناعة العبوة إلى الحد الأدنى؟



الخطوة 1 أعد رسمًا تخطيطيًا لهذه الحالة.

الخطوة 2 الكمية المطلوب تقليلها إلى الحد الأدنى هي مساحة السطح. قيمتا نصف قطر العبوة وارتفاعها مطلوبتان. جد تعبيرًا لارتفاع h الخاص بالعبوة بدلالة نصف القطر r باستخدام الحجم المُعطى.

الخطوة 3 استخدم التعبير الذي حصلت عليه في الخطوة 2 في كتابة معادلة لمساحة السطح SA.

الخطوة 4 استخدم الحاسبة لتمثيل المعادلة التي حصلت عليها في الخطوة 3 بيانيًا. اذكر مجال r.

> **نصيحة دراسية**
> **الأسطوانات** تذكر أن معادلة حجم الأسطوانة هي $V = \pi r^2 h$. حيث r هو نصف قطر القاعدة وh هو ارتفاع الأسطوانة.

تحليل النتائج

4. جد إحداثيات النقطة الصغرى. فسّر دلالة هذه الإحداثيات.

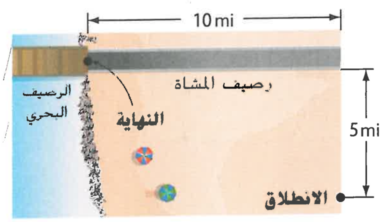
5. ما أبعاد مساحة سطح العبوة مع اعتبار أقل مساحة سطح ممكنة؟

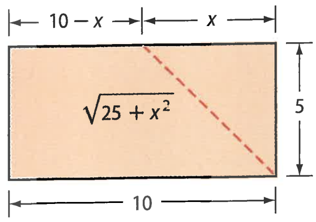
6. من المقرر إنشاء أسطوانة قائمة ليس لها قمة بمساحة سطح تبلغ $6\pi\ in^2$. ما الارتفاع ونصف القطر اللذان سيزيدان حجم الأسطوانة إلى الحد الأقصى؟ ما الحجم الأقصى؟

تقليل المواد إلى الحد الأدنى ليس التطبيق الوحيد للأمثلية.

نشاط 3 المسار الأسرع

مشاركون في سباق على الأقدام يركضون على الشاطئ أو على رصيف المشاة وصولاً إلى الرصيف البحري كما هو موضح. ويمكن أن يسلك المتسابقون أي مسار يختارونه. فإذا كان المتسابق يستطيع أن يركض 6 mi/h على الرمال و 7.5 mi/h على رصيف المشاة، فما المسار الذي يتطلب أقصر مدة زمنية؟





الخطوة 1 أعد رسمًا تخطيطيًا لهذه الحالة.

الخطوة 2 لتقليل المدة الزمنية إلى الحد الأدنى، اكتب تعابير للمسافات المقطوعة على كل سطح بكل معدل. افترض أن x يمثل المسافة التي لم يركضها العداء على رصيف المشاة كما هو موضح. جد تعابير للمسافات المقطوعة على كل سطح بدلالة x.

الخطوة 3 استخدم التعابير التي حصلت عليها في الخطوة 2 في كتابة معادلة للمدة الزمنية.

الخطوة 4 استخدم الحاسبة لتمثيل المعادلة التي حصلت عليها في الخطوة 3 بيانيًا. اذكر مجال x.

تحليل النتائج

7. جد إحداثيات النقطة الصغرى. فسّر دلالة هذه الإحداثيات.

8. ما المسار الذي سوف يتطلب أقصر مدة زمنية؟ ما طول المدة التي سوف يستغرقها؟

9. جد متوسط معدل التغير m عند النقطة الصغرى للتمثيل البياني باستخدام ناتج قسمة الفرق. ما الذي تشير إليه هذه القيمة فيما يتعلق بخط مماس التمثيل البياني عند هذه النقطة؟

10. ضع فرضية بشأن معدلات التغير وخطوط المماس للتمثيلات البيانية عند النقاط الصغرى والعظمى. هل تنطبق فرضيتك على أول نشاطين؟ اشرح.

كتيب الطالب

الرموز والصيغ والمفاهيم الأساسية

الجبر

$\neq$	لا يساوي
$\approx$	تقريبًا يساوي
$\sim$	يشابه
$>, \geq$	أكبر من، أكبر من أو يساوي
$<, \leq$	أصغر من، أصغر من أو يساوي
$-a$	معكوس a أو المعكوس الجمعي لـ a
$\lvert a \rvert$	القيمة المطلقة لـ a
$\sqrt{a}$	الجذر التربيعي الأساسي لـ a
$a : b$	نسبة a إلى b
(x, y)	زوج مرتّب
(x, y, z)	مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر (ثلاثي مُرتّب)
i	الوحدة التخيلية
$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$	الجذر النوني لـ b
$\mathbb{Q}$	الأعداد النسبية
$\mathbb{I}$	الأعداد غير النسبية
$\mathbb{Z}$	الأعداد الصحيحة
$\mathbb{W}$	الأعداد الكاملة
$\mathbb{N}$	الأعداد الطبيعية
∞	ما لا نهاية
$-\infty$	سالب ما لا نهاية
[ ]	تتضمن الأطراف
( )	لا تتضمن الأطراف
$\log_b x$	لوغاريتم x للأساس b
$\log x$	اللوغاريتم العادي لـ x
$\ln x$	اللوغاريتم الطبيعي لـ x
ω	أوميجا، السرعة الزاويّة
α	ألفا، قياس الزاوية
β	بيتا، قياس الزاوية
γ	جاما، قياس الزاوية
θ	ثيتا، قياس الزاوية
λ	لامدا، طول الموجة
ϕ	فاي، قياس الزاوية
$\mathbf{a}$	متجه a
$\lvert\mathbf{a}\rvert$	طول المتجه a

المجموعات والمنطق

$\in$	ينتمي إلى
$\subset$	مجموعة جزئية من
$\cap$	تقاطع
$\cup$	اتحاد
$\varnothing$	المجموعة الخالية
$\sim p$	نفي p، ليس p
$p \wedge q$	ربط p و q
$p \vee q$	فصل p أو q
$p \rightarrow q$	العبارة الشرطية، إذا كان p فإن q
$p \leftrightarrow q$	العبارة ثنائية الشرط، p إذا وفقط إذا q

الهندسة

$\angle$	زاوية
$\triangle$	مثلث
$^\circ$	درجة
π	باي pi
$\measuredangle$	درجات
$m\angle A$	قياس $\angle A$
$\overleftrightarrow{AB}$	مستقيم يحتوي على النقطتين A و B
$\overline{AB}$	مستقيم نقطتاه الطرفيتان A و B
$\overrightarrow{AB}$	الشعاع من النقطة A الى النقطة B
AB	قياس $\overline{AB}$، المسافة بين A و B
$\parallel$	يوازي
$\nparallel$	لا يوازي
$\perp$	متعامد على
$\triangle$	مثلث
$\square$	متوازي أضلاع
n-gon	مضلع عدد أضلاعه n
$\vec{a}$	متجه a
$\overrightarrow{AB}$	المتجه من A إلى B
$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	مقدار متجه من A إلى B
A'	صورة الصورة الأصلية A
$\rightarrow$	موضوع على
$\odot A$	دائرة مركزها A
$\overset{\frown}{AB}$	قوس أصغر نقطتاه الطرفيتان A و B
$\overset{\frown}{ABC}$	قوس أكبر نقطتاه الطرفيتان A و C
$m\overset{\frown}{AB}$	قياس درجة القوس AB

حساب المثلثات

$\sin x$	جيب الزاوية x
$\cos x$	جيب تمام الزاوية x
$\tan x$	ظل الزاوية x
$\sin^{-1} x$	Arcsin x
$\cos^{-1} x$	Arccos x
$\tan^{-1} x$	Arctan x

الرموز

الدوال

$f(x)$	f لـ x، قيمة f لـ x
$f(x) = \{$	دالة متعددة التعريف
$f(x) = \|x\|$	دالة القيمة المطلقة
$f(x) = [\![x]\!]$	دالة أكبر عدد صحيح ليس أكبر من x
$f(x, y)$	f لـ x و y، دالة متغيراها x وy
$[f \circ g](x)$	f لـ g لـ x، تركيب الدالتين f وg
$f^{-1}(x)$	معكوس $f(x)$

النهايات والتفاضل والتكامل

$\lim\limits_{x \to c}$	النهاية عندما تقترب x من c
m_{sec}	ميل القاطع
$f'(x)$	مشتقة الدالة $f(x)$
Δ	دلتا، أو مقدار التغيير
$\int$	تكامل غير محدود
$\int_a^b$	تكامل محدود
$F(x)$	مشتقة عكسية للدالة $f(x)$

الاحصاء والاحتمالات

$P(a)$	احتمال a
$P(n, r)$ أو $_nP_r$	تباديل n من العناصر مأخوذ منها r عنصر في كل مرة
$C(n, r)$ أو $_nC_r$	توافيق n من العناصر مأخوذ منها r عنصر في كل مرة
$P(A)$	احتمال A
$P(A\|B)$	احتمال A إذا علمت أن B حدث بالفعل
$n!$	مضروب العدد n (حيث n عدد طبيعي)
$\sum$	سيجما، رمز المجموع
μ	متوسط مجتمع إحصائي
σ	الانحراف المعياري لمجتمع إحصائي
σ^2	تباين المجتمع الإحصائي
s	الانحراف المعياري لعينة
s^2	تباين العينة
$\sum\limits_{n=1}^{k}$	مجموع من $n = 1$ إلى k
$\overline{x}$	متوسط x ، متوسط العينة
H_0	فرضية العدم
H_a	الفرضية البديلة

القياسات

متري	عُرفي
الطول	
1 كيلومتر (km) = 1000 متر (m) 1 متر = 100 سنتيمتر (cm) 1 سنتيمتر = 10 ملليمتر (mm)	1 ميل (mi) = 1760 ياردة (yd) 1 ميل = 5280 قدمًا (ft) 1 ياردة = 3 أقدام 1 قدم = 12 بوصة (in) 1 ياردة = 36 بوصة
الحجم والسعة	
1 لتر (L) = 1000 ملليلتر (mL) 1 كيلولتر (kL) = 1000 لتر	1 جالون (gal) = 4 أرباع (qt) 1 جالون = 128 أونصة سائلة (fl oz) 1 كوارت = 2 باينت (pt) 1 باينت = 2 كوب (c) 1 كوب = 8 أونصات سائلة
الوزن والكتلة	
1 كيلوجرام (kg) = 1000 جرام (g) 1 جرام = 1000 ملليجرام (mg) 1 طن متري (t) = 1000 كيلوجرام	1 طن (T) = 2000 رطل (lb) 1 رطل = 16 أونصة (oz)

العمليات والعلاقات الحسابية

المحايد	لأي عدد a، يكون $a + 0 = 0 + a = a$ و $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
التعويض (=)	إذا كان $a = b$، يمكن التعويض عن a باستخدام b.
الانعكاس (=)	$a = a$
التماثل (=)	إذا كان $a = b$، فإن $b = a$.
التعدي (=)	إذا كان $a = b$ و $b = c$، فإن $a = c$.
التبديل	لأي عددين a و b، $a + b = b + a$ و $a \cdot b = b \cdot a$.
التجميع	لأي أعداد a و b و c، $(a + b) + c = a + (b + c)$ و $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
التوزيع	لأي أعداد a و b و c، $a(b + c) = ab + ac$ و $a(b - c) = ab - ac$.
المعكوس الجمعي	لأي عدد a، يوجد عدد واحد فقط $-a$ بحيث $a + (-a) = 0$.
المعكوس الضربي	لأي عدد $\frac{a}{b}$، حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$، يوجد عدد واحد فقط $\frac{b}{a}$ بحيث $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.
الضرب (0)	لأي عدد a، يكون $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
الجمع (=)	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a = b$، فإن $a + c = b + c$.
الطرح (=)	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a = b$، فإن $a - c = b - c$.
الضرب والقسمة (=)	لأي أعداد a و b و c، حيث $c \neq 0$، إذا كان $a = b$، فإن $ac = bc$ و $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
الجمع (>)*	لأي أعداد a و b و c،إذا كان $a > b$، فإن $a + c > b + c$.
الطرح (>)*	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a > b$، فإن $a - c > b - c$.
الضرب والقسمة (>)*	لأي أعداد a و b و c، 1. إذا كان $a > b$ و $c > 0$، فإن $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. 2. إذا كان $a > b$ و $c < 0$، فإن $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
ناتج الضرب الصفري	لأي عددين حقيقيين a و b، إذا كان $ab = 0$، فإن $a = 0$ أو $b = 0$ أو a و b كلاهما 0.

* تنطبق هذه الخواص كذلك على < و ≥ و ≤.

الصيغ والمفاهيم الجبرية

المصفوفات

الجمع	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$	الضرب في كمية عددية	$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$
الطرح	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$	الضرب	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$

كثيرات الحدود

القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$	مربع فرق	$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$
مربع مجموع	$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$	ناتج ضرب مجموع وفرق	$(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

اللوغاريتمات

خاصية الضرب	$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$	خاصية الأس الثابت	$\log_b m^p = p \log_b m$
خاصية القسمة	$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b, b \neq 0$	تغيير الأساس	$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

الصيغ والمفاهيم الجبرية

الدوال الأسيّة واللوغاريتمية

المرابحة المركبة	$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$	النمو أو الاضمحلال الأسّي	$N = N_0(1+r)^t$
النمو المركب المستمر	$A = Pe^{rt}$	النمو أو الاضمحلال الأسّي المستمر	$N = N_0e^{kt}$
خاصية الضرب	$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$	خاصية القوة	$\log_b x^p = p\log_b x$
خاصية القسمة	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$	خاصية تغيير الاساس	$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

المتتاليات والمتسلسلات

الحد النوني لمتتالية حسابية	$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحد النوني لمتتالية هندسية	$a_n = a_1r^{n-1}$
مجموع متسلسلة حسابية	$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$ أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$	مجموع متسلسلة هندسية	$S_n = \frac{a_1 - a_1r^n}{1-r}$ أو $S_n = \frac{a_1 - a_nr}{1-r}, r \neq 1$
مجموع متسلسلة هندسية لانهائية	$S = \frac{a_1}{1-r}, \lvert r \rvert < 1$	صيغة أويلر	$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
متسلسلة القوة	$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$	المتسلسلة الأسّية	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
نظرية ذات الحدين	$(a+b)^n = {}_nC_0\,a^nb^0 + {}_nC_1\,a^{n-1}b^1 + {}_nC_2\,a^{n-2}b^2 + \dots + {}_nC_r\,a^{n-r}b^r + \dots + {}_nC_n\,a^0b^n$		
متسلسلة القوة للجيب وجيب التمام	$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$		

المتجهات

الجمع في المستوى	$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \langle a_1+b_1, a_2+b_2\rangle$	الجمع في الفضاء	$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \langle a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3\rangle$
الطرح في المستوى	$\mathbf{a}-\mathbf{b} = \langle a_1-b_1, a_2-b_2\rangle$	الطرح في الفضاء	$\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{a}+(-\mathbf{b}) = \langle a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3\rangle$
الضرب القياسي في المستوى	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2\rangle$	الضرب القياسي في الفضاء	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3\rangle$
الضرب النقطي في المستوى	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$	الضرب النقطي في الفضاء	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
الزاوية بين متجهين	$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert}$	مسقط u على v	$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{v}\rvert^2}\right)\mathbf{v}$
طول المتجه	$\lvert\mathbf{v}\rvert = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$	الضرب القياسي لثلاثة متجهات	$\mathbf{t}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

معادلة المستقيم في المستوى الإحداثي

صيغة الميل والمقطع	$y = mx + b$
صيغة النقطة والميل	$y - y_1 = m(x - x_1)$

الصيغ والمفاهيم الجبرية

القطوع المخروطية

قطع مكافئ	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ أو $(y-k)^2 = 4p(x-h)$	دائرة	$x^2 + y^2 = r^2$ أو $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
قطع ناقص	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	قطع زائد	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
الدوران المحوري للقطوع المخروطية	$x' = x \cos\theta + y \sin\theta$ و $y' = y\cos\theta - x \sin\theta$		

المعادلات الوسيطية

الموقع العمودي	$y = tv_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$	المسافة الأفقية	$x = tv_0 \cos\theta$

الأعداد المركبة

صيغة الضرب	$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$	صيغة القسمة	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$
صيغة الجذور المختلفة	$r^{\frac{1}{p}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{p} + i\sin\frac{\theta+2n\pi}{p}\right)$	نظرية ديموافر	$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n$ أو $r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

الصيغ والمفاهيم الهندسية

الهندسة الإحداثية

الميل	$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, x_2 \neq x_1$	المسافة على خط الأعداد	$d = \|a-b\|$
المسافة بين نقطتين في المستوى	$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$	طول القوس	$\ell = \frac{x}{360} \cdot 2\pi r$
نقطة المنتصف في المستوى الاحداثي	$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$	نقطة المنتصف على خط الأعداد	$M = \frac{a+b}{2}$
نقطة المنتصف في الفضاء	$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$	نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$

المحيط

مربع	$P = 4s$	مستطيل	$P = 2\ell + 2w$	دائرة	$C = 2\pi r$ أو $C = \pi d$

مساحة السطح الجانبية

منشور	$L = Ph$	هرم	$L = \frac{1}{2}P\ell$
إسطوانة	$L = 2\pi rh$	مخروط	$L = \pi r\ell$

مساحة السطح الكلية

منشور	$S = Ph + 2B$	مخروط	$S = \pi r\ell + \pi r^2$	إسطوانة	$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$
هرم	$S = \frac{1}{2}P\ell + B$	كرة	$S = 4\pi r^2$	مكعب	$S = 6s^2$

الحجم

منشور	$V = Bh$	مخروط	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h^2$	إسطوانة	$V = \pi r^2 h$
هرم	$V = \frac{1}{3}Bh$	كرة	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	مكعب	$V = s^3$
متوازي مستطيلات	$V = \ell wh$				

الدوال والمتطابقات المثلثية

الدوال المثلثية

النسب المثلثية

$$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

قانون جيوب التمام

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

قانون الجيوب

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

صيغة هيرون

$$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

السرعة الخطية

$$v = \frac{s}{t}$$

السرعة الزاوية

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

المتطابقات المثلثية

متطابقات المقلوب

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

متطابقات فيثاغورس

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad \cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

متطابقات المتممات

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \qquad \tan\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \qquad \sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \qquad \cot\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \qquad \csc\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

متطابقات الفردي والزوجي

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \tan(-\theta) = -\tan\theta$$

$$\csc(-\theta) = -\csc\theta \qquad \sec(-\theta) = \sec\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

متطابقات المجموع والفرق

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \qquad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

متطابقات ضعف الزاوية

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \qquad \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \qquad \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \qquad \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

متطابقات تخفيض الأس

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \qquad \cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \qquad \tan^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$$

متطابقات نصف الزاوية

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}} \qquad \tan\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} \qquad \tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$$

متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \qquad \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \qquad \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

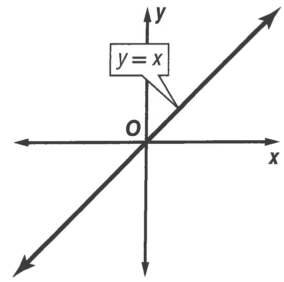
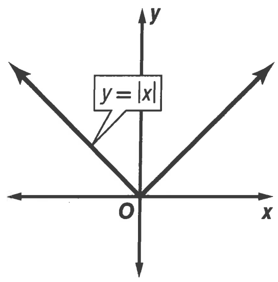
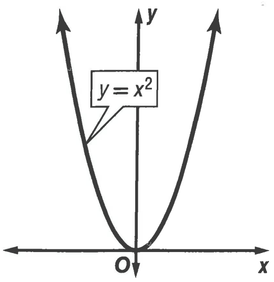
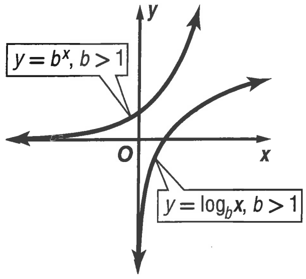
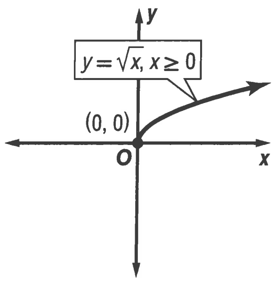
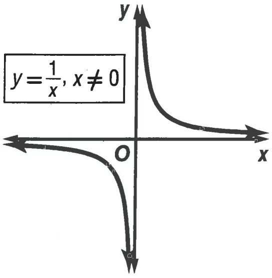
متطابقات تحويل المجموع أو الفرق إلى ضرب

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \qquad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال

الدوال الأصلية

الدوال الخطية	دوال القيمة المطلقة	الدوال التربيعية
		
الدوال الأسيّة واللوغاريتمية	**دوال الجذر التربيعي**	**الدوال العكسية والنسبية**
		

العمليات الحسابية على الدوال

الجمع	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	**الضرب**	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
الطرح	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	**القسمة**	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$

النهايات والتفاضل والتكامل

النهايات

نهاية مجموع دالتين	$\lim_{x\to c}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$	**نهاية طرح دالتين**	$\lim_{x\to c}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$
نهاية قسمة دالتين	$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$ ، إذا كان $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$	**نهاية دالة مرفوعة لأس**	$\lim_{x\to c}[f(x)^n] = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$
السرعة	اللحظيّة $v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ المتوسطة $v_{avg} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$	**نهاية الجذر النوني لدالة**	$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ ، إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ و n عدد زوجي

التفاضل

قاعدة القوة	إذا كان $f(x) = x^n$ فإن $f'(x) = nx^{n-1}$	**المجموع أو الفرق**	إذا كان $f(x) = g(x) \pm h(x)$ فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
قاعدة الضرب	$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	**قاعدة القسمة**	$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

التكامل

التكامل غير المحدود	$\int f(x)\,dx = F(x) + C$	**النظرية الاساسيّة في التفاضل والتكامل**	$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

الصيغ والمفاهيم الاحصائية

قيمة z لمتوسط العينة	$z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$	قيمة z	$z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$
الحد الأقصى لقيمة التوقع	$E = z \cdot \sigma_{\bar{x}}$ or $z \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	خاصية ذات الحدين	$P(X) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x} = \dfrac{n!}{(n-x)!\,x!}\, p^x q^{n-x}$
فترة الثقة في توزيع t	$CI = \bar{x} \pm t \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}}$	فترة الثقة، في توزيع طبيعي	$CI = \bar{x} \pm E$ or $\bar{x} \pm z \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
معامل الارتباط لاختبار t	$t = r\sqrt{\dfrac{n-2}{1-r^2}}$ ، درجات الحرية: $n - 2$	معامل الارتباط	$r = \dfrac{1}{n-1}\sum\left(\dfrac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)\left(\dfrac{y_i - \bar{y}}{s_y}\right)$