وزارة التربيـة والتعليم
دائرة التعليـم والمعرفة

I ❤ MATHS

الرياضيـــات للحادي عشر / متقدم

الفصل الدراسي الثالث

2019 / 2018

الوحدة 11

الدوال من منظور التفاضل والتكامل

اعداد
أ. عبدالغني مصطفى زيتون
050 6171533

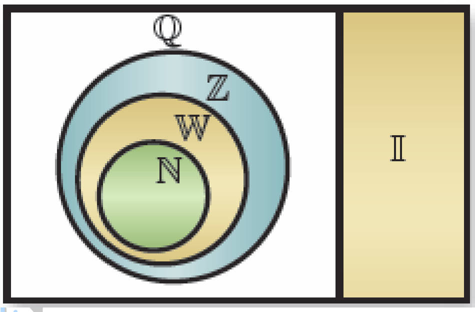
الدوال (1-11)

المجموعات الجزئية للأعداد الحقيقية

تستخدم مجموعة الأعداد الحقيقية في جميع المجالات في حياتنا اليومية وتشمل على المجموعات الجزئية للأعداد التالية :

المجموعة	الرمز	أمثلة
الأعداد النسبية	Q	$0.125 , -\frac{7}{8} , \frac{2}{3}=0.66.....$
الأعداد غير النسبية	I	$\pi=3.14459... ,\ 3=1.73205...$
الأعداد الصحيحة	Z	$-5 , -23 , 17 , 8$
الأعداد الكلية	W	$2 , 53 , 0 , 98$
الأعداد الطبيعية	N	$3 , 17 , 6 , 86$

الأعداد الحقيقية (ℝ)



يُمكن وصف مجموعات الأعداد الحقيقية هذه و المجموعات الجزئية للأعداد الأخرى باستخدام **رمز بناء المجموعات**

مثال **صف كل مجموعة مما يلي باستخدام رمز بناء المجموعات**

(1) $\{ 8, 9, 10, 11, \ldots \}$ تشمل المجموعة جميع الأعداد الكلية الأكبر من أو تساوي 8 ونعبر عنها كما يلي :
$\{ x | x \geq 8 , x \in w \}$ تقرأ مجموعة جميع العناصر x حيث x أكبر من أو تساوي 8 و x من الأعداد الكلية

(2) مجموعة جميع الأعداد الحقيقية الأصغر من 7 ونعبر عنها كما يلي : $\{ x | x < 7 , x \in R \}$

(3) مجموعة جميع الأعداد الصحيحة التي تمثل مضاعفات العدد 3 ونعبر عنها كما يلي : $\{ x | x = 3n , n \in z \}$

تدريب 1

صف كل مجموعة مما يلي باستخدام رمز بناء المجموعات :

(1) $\{ 1, 2, 3, 4 ,5 , \ldots \}$

....

(2) مجموعة جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من -6

....

(3) مجموعة جميع مضاعفات العدد π

....

(4) مجموعة جميع الأعداد الطبيعية الزوجية

....

(5) مجموعة جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من -3 وأصغر من 4

....

(6) مجموعة جميع الأعداد الطبيعية الفردية

....

الفترات في مجموعة الأعداد الحقيقية

فترات محدودة

المتباينة	الفترة	التمثيل
$a \le x \le b$	$[a,b]$	a b
$a < x < b$	(a,b)	a b
$a < x \le b$	$(a,b]$	a b
$a \le x < b$	$[a,b)$	a b

فترات غير محدودة

المتباينة	الفترة	التمثيل
$x \ge a$	$[a,\infty)$	a ∞
$x \le a$	$(-\infty,a]$	$-\infty$ a
$x > a$	$[a,\infty)$	a ∞
$x < a$	$(-\infty,a)$	$-\infty$ a
$-\infty < x < \infty$	$(-\infty,\infty)$	$-\infty$ ∞

تدريب 2

اكتب كلًّا من المجموعات الآتية باستخدام رمز الفترة ومثلها على خط الأعداد :

1) $-8 < x \le 15$ ....

2) $3 \le x < 11$ ....

3) $x \le 5$ ....

4) $x > -7$ ....

5) $-1 < x < 7.5$ ....

6) $x < -3 \; or \; x > 9$ ....

7) $x \ge 6 \;\; or \;\; x < 2$ ....

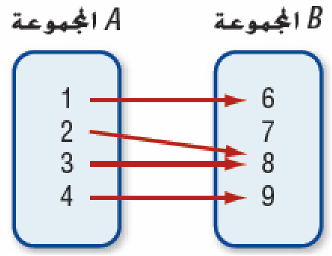
8) $x > -3 \; and \;\; x \le 3$ ....

9) $x \le -4 \;\; or \;\; x > 7$ ....

10) $x < -2 \; and \;\; x \le 6$ ....

المفهوم الأساسي للدالة :

الدالة f علاقة من A إلى B بحيث يرتبط كل عنصر x في المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B

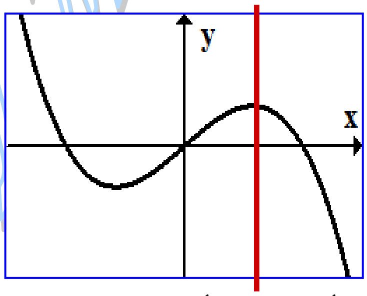


في الشكل المقابل : العلاقة من المجموعة A إلى المجموعة B هي دالة.

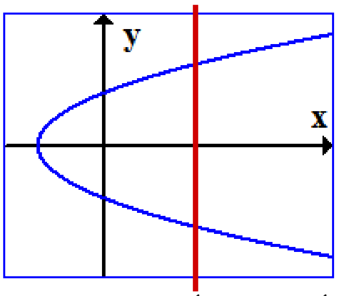
المجموعة A هي المجال. $D = \{1, 2, 3, 4\}$

المجموعة B تحتوي على المدى. $R = \{6, 8, 9\}$

اختبـــار الخط الرأسي إذا لم يقطع أي خط رأسي تمثيل بياني لـ $f(x)$ في أكثر من نقطة فإن $f(x)$ تمثل دالة في x



بما أن الخط الرأسي يقطع التمثيل في نقطة واحدة فإن y تمثل دالة في x



بما أن الخط الرأسي يقطع التمثيل في أكثر من نقطة فإن y **لا** تمثل دالة في x

تدريب 3 حـــدد العلاقات التي تعتبر دوال في كل مما يلي :

1) a) المعادلة $y = x^3 + 1$

....

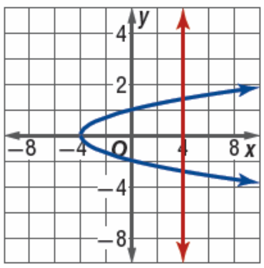
....

b) المعادلة $y^2 = x + 1$

2)

x	y
−8	−5
−5	−4
0	−3
3	−2

3)



....

....

تدريب 4 إيجـــاد قيم الدوال

إذا كانت $f(x) = x^2 + 3x - 10$ اوجـد قيمة كل من :

$f(-2)$ ....

$f(6)$ ....

....

$f(a+2)$ ....

$f(-4a)$ ....

....

....

مجال الدالة الحقيقية $f(x)$: مجموعة قيم x بحيث يكون $f(x)$ عدد حقيقي

✳ **مجال الدالة كثيرة الحدود** هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathcal{R}$. مالم يذكر غير ذلك

✳ **مجال الدالة** $f(x) = \sqrt{g(x)}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathcal{R}$ التي تجعل $g(x) \geq 0$.

✳ **مجال الدالة** $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathcal{R}$ المشتركة بين مجالي $g(x)$, $h(x)$

عدا أصفار المقام (أصفار الدالة $h(x)$)

مثال حدد مجال كل دالة :

1) الدالة $f(x) = x^2 - 2x + 5$ مجالها جميع الأعداد الحقيقية $\mathcal{R}$

2) الدالة $f(x) = \dfrac{4x-3}{x^2+1}$ مجالها جميع الأعداد الحقيقية $\mathcal{R}$ (*دالة نسبية مقامها* $\neq 0$)

3) الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 7}$ مجالها جميع الأعداد الحقيقية $\mathcal{R}$ لأن الجذر فردي (ليس زوجياً)

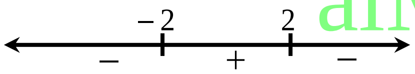
4) الدالة $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-9}$ لاحظ المقام صفر عندما $x = \pm 3$ إذاً المجال $\{ x | x \neq \pm 3 , x \in R \}$

5) الدالة $f(x) = \sqrt{x-7}$ بما أنه لا يوجد جذر تربيعي حقيقي للعدد السالب فإن $x - 7 \geq 0 \Leftarrow x \geq 7$

المجال جميع الأعداد الحقيقية x بحيث $x \geq 7$ أو المجال $[7, \infty)$

6) الدالة $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ بما أنه لا يوجد جذر تربيعي حقيقي للعدد السالب فإن $4 - x^2 \geq 0$

وهذه المتباينة محققة عندما $-2 \leq x \leq 2$ إذاً المجال $[-2, 2]$



تدريب 5 حدد مجال كل دالة :

1) $f(x) = \sqrt{x+9}$

....

....

2) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$

....

....

3) $f(x) = \dfrac{x+8}{2x-5}$

....

....

4) $f(x) = \dfrac{x+8}{x^2 - 4x + 3}$

....

....

....

تمارين

① اكتب كلًّا من المجموعات الآتية باستخدام رمز الفترة ومثلها على خط الأعداد :

2) $-13 \le x < 66$ ....

3) $x \le -4$ ....

4) $x > 23$ ....

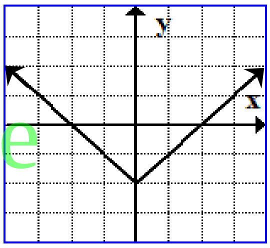
5) $-0.25 < x \le 6.75$ ....

6) $x < 61 \ or \ x > 69$ ....

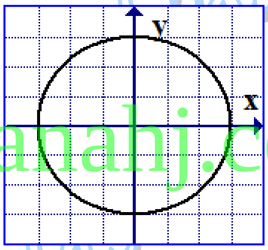
8) $x > -13 \ and \ x \ge 5$ ....

② حـــدد العلاقات التي تعتبر دوال في كل مما يلي :

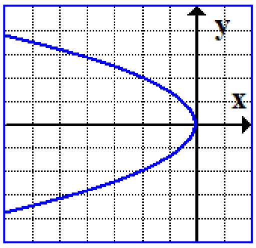
(1



(2



(3



....

....

(4 المعادلة $x^2 = y + 2$

(5 المعادلة $y^2 + 4 = 3x$

(6 المعادلة $y = \frac{2}{x}$

....

....

③ أوجـد كل من قيم الدوال

❶ $f(x) = x^2 - 1$

a) $f(4)$ ....

b) $f(4x)$ ....

❷ $f(x) = x^2 + 6x$

a) $f(1/2)$ ....

b) $f(-2x)$ ....

❸ $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$

a) $f(2/3)$ ....

b) $f(6x)$ ....

c) $f(3-2x)$ ....

....

❹ $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-2x}$

a) $f(3a)$ ....

b) $f(-2a)$ ....

c) $f(a-1)$ ....

....

④ قيم كل دالة متعددة التعريف

❶ $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & : x \le 1 \\ 6-x^2 & : x > 1 \end{cases}$

a) $f(4)$ ....

b) $f(1)$ ....

❷ $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & : x \ge 3 \\ 4 & : x < 3 \end{cases}$

a) $f(-3)$ ....

b) $f(3)$ ....

❸ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & : x < 1 \\ 2x+1 & : x \ge 1 \end{cases}$

a) $f(0)$ ....

b) $f(-3)$ ....

c) $f(1)$ ....

⑤ أوجـد مجال كل دالة مما يأتي :

1) $f(x)=\sqrt{x+2}$

....

....

2) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$

....

....

3) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-4}$

....

....

4) $f(x)=\dfrac{x+8}{x^2+2x-3}$

....

....

....

3

5) $f(x)=\sqrt{x^2-3x-10}$

....

....

....

6) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2x}$

....

....

7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{9-x^2}}$

....

....

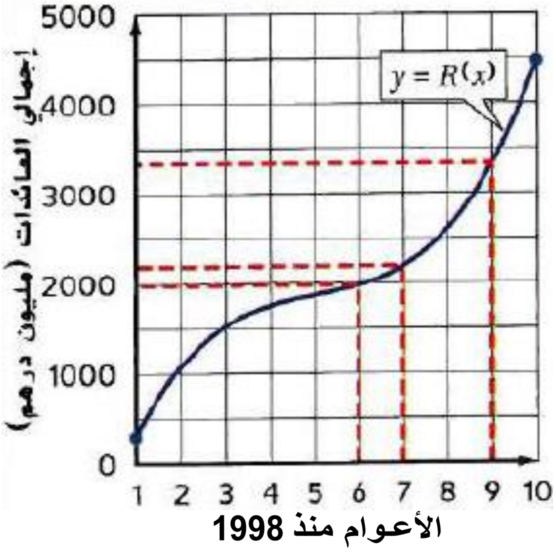
3

....

....

(11-2) تحليل الرسوم البيانية للدوال

يستخدم الرسم البياني للدوال لتقدير قيم الدالة وايجاد المجال والمدى والتقاطعات مع المحاور الإحداثية



مثال في الشكل المقابل الدالة R (عائدات الدعايا عبر الأنترنت)

حيث $R(x) = 17.7x^3 - 269x^2 + 1458x - 910$

a) استخدم الرسم لتقدير قيمة العائد الكلي من الدعاية عام 2007 وتأكد من تقديرك جبرياً

العام 2007 بعد العام 1998 بتسعة أعوام (عند $x=9$)

العائد الكلي عام 2007 هو قيمة الدالة عند $x=9$ حوالي 3300

جبرياً $R(9) = 17.7(9)^3 - 269(9)^2 + 1458(9) - 910 = 3326.3$

b) استخدم الرسم لتقدير العام الذي وصل فيه العائد إلى 2 مليار درهم وتأكد من تقديرك جبرياً

من الرسم نجد أن قيمة الدالة تصل إلى 2000 مليون عندما تكون قيمة x بين 6 و 7

أي أن العائد وصل إلى 2 مليار درهم عام 6+1998 (2004) وتجاوزه عام 7+1998 (2005)

ولتأكد جبرياً نحسب قيمة $R(6)$ و $R(7)$

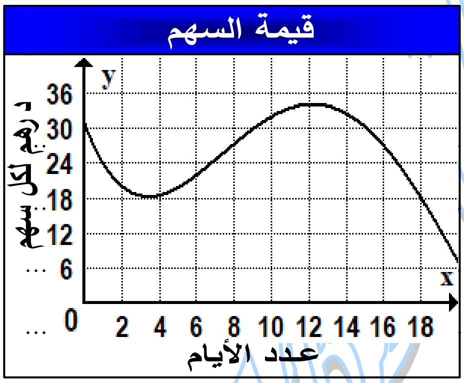
$R(6) = 17.7(6)^3 - 269(6)^2 + 1458(6) - 910 = 1977$ مليون

$R(7) = 17.7(7)^3 - 269(7)^2 + 1458(7) - 910 = 2186$ مليون

وبالتالي القدير البياني أن العائد الكلي للدعاية وصل إلى 2 مليار درهم عام 2005 تقدير معقول

تدريب 1 في الشكل المقابل الدالة $v(d)$ (القيمة اليومية لسهم ما خلال 20 يوماً)

حيث $v(d) = 0.002d^4 - 0.11d^3 + 1.77d^2 - 8.6d + 31$



a) استخدم الرسم لتقدير قيمة السهم في اليوم العاشر وتأكد من تقديرك جبرياً

....

....

....

....

b) استخدم الرسم لتقدير عدد الأيام التي تخطت فيها قيمة السهم 30 درهماً وتأكد من تقديرك جبرياً

....

....

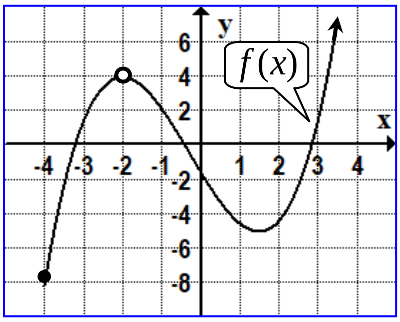
....

....

....

تحديد المجـال والمدى

تدريب 2 استخدم الرسم البياني للدالة f لتحديد مجال ومدى الدالة



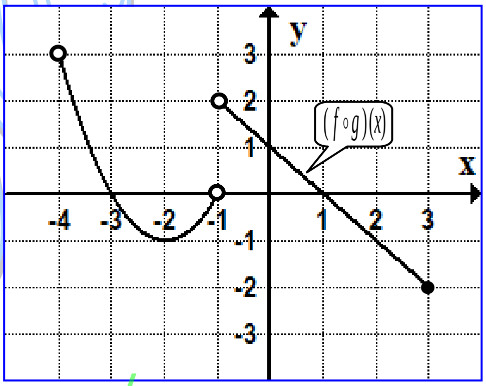
....

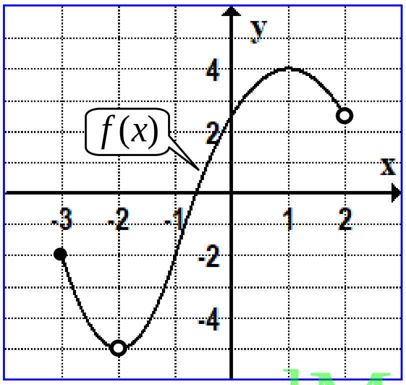
....

....

....

تدريب 3 استخدم الرسم البياني لتحديد المجال والمدى لكل دالة



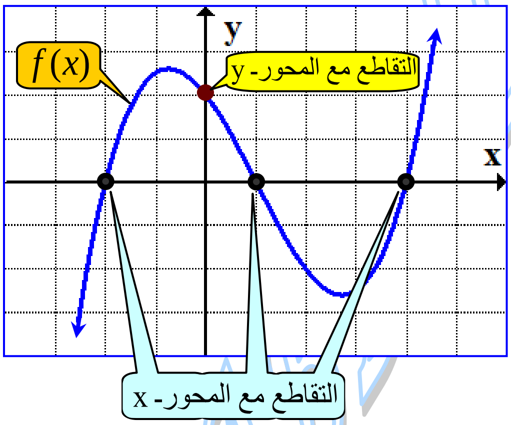


....

....

....

تحديد نقاط التقاطع مع المحاور الإحداثية



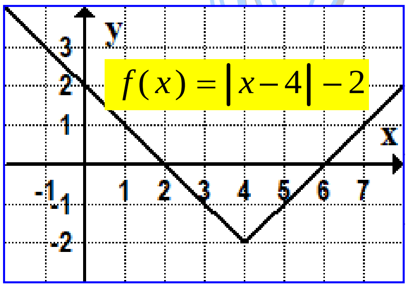
التقاطع مع المحور الرأسي y

يتقاطع التمثيل البياني لدالة مع المحور الرأسي y في نقطة واحدة فقط وتكون عند $x = 0$ ولتحديد هذه النقطة جبرياً نحدد قيمة $f(0)$

التقاطع مع المحور الأفقي x

يتقاطع التمثيل البياني لدالة مع المحور x في نقطة واحدة أو أكثر وتكون عند $y = 0$ ولتحديد هذه النقاط جبرياً نحل المعادلة $f(x) = 0$ أي أن نقاط التقاطع مع المحور x هي أصفار الدالة

تدريب 4 استخدم الرسم البياني لتقدير التقاطع مع المحور y وأوجدها جبرياً

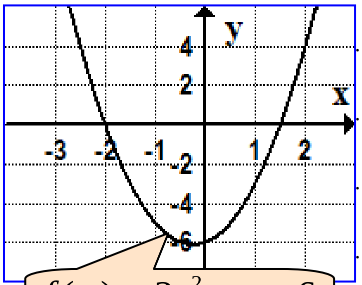


....

....

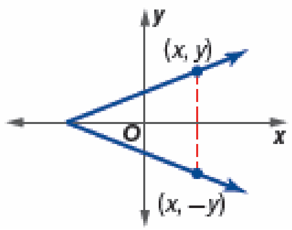
....

تدريب 5 استخدم الرسم البياني لتقدير التقاطع مع المحور x وأوجد الأصفار جبرياً



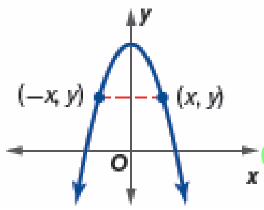
....

تناظر الرسوم البيانية / اختبارات التماثل /



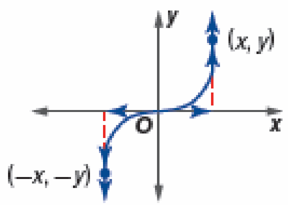
❖ يكون الرسم البياني للعلاقة متناظر حول المحور الأفقي x إذا كان
لكل نقطة $(x\,,\,y)$ من الرسم نقطة $(x\,,\,-y)$ تقع على الرسم أيضاً
(النقطتان $(x\,,\,y)\;,\;(x\,,\,-y)$ مناظرتان حول المحور الأفقي x)
وجبرياً استبدل كل y بـ $-y$ فتحصل على نفس المعادلة الأصلية

- - ✱ - - - ✱ - - - ✱ - - - ✱ - - - ✱ - - - ✱ - - - ✱ - - - ✱ - - - ✱ - -



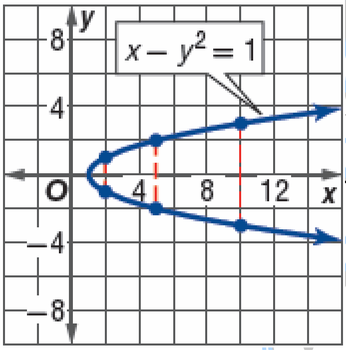
❖ يكون الرسم البياني للعلاقة متناظر حول المحور الرأسي y إذا كان
لكل نقطة $(x\,,\,y)$ من الرسم نقطة $(-x\,,\,y)$ تقع على الرسم أيضاً
(النقطتان $(x\,,\,y)\;,\;(-x\,,\,y)$ مناظرتان حول المحور الرأسي y)
وجبرياً استبدل كل x بـ $-x$ فتحصل على نفس المعادلة الأصلية

- - ✱ - - - ✱ - - - ✱ - - - ✱ - - - ✱ - - - ✱ - - - ✱ - - - ✱ - - - ✱ - -



❖ يكون الرسم البياني للعلاقة متناظر حول المحور الأفقي y إذا كان
لكل نقطة $(x\,,\,y)$ من الرسم نقطة $(-x\,,\,-y)$ تقع على الرسم أيضاً
(النقطتان $(x\,,\,y)\;,\;(-x\,,\,-y)$ مناظرتان حول نقطة الأصل)
وجبرياً استبدل كل x بـ $-x$ و كل y بـ $-y$ فينتج نفس المعادلة الأصلية

تدريب 6 ❶ استخدم الرسم البياني لكل معادلة لتتحقق من التناظر حول المحور الأفقي x
ادعم إجابتك بالأرقام .ثم تحقق منها من خلال الجبر



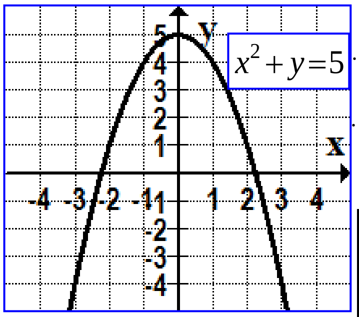
بيانيـاً : ....

بالأرقام :

x	2		5		10	
$(x\,,\,y)$						

جبرياً : ....

❷ استخدم الرسم البياني لكل معادلة لتتحقق من التناظر حول المحور الرأسي y
ادعم إجابتك بالأرقام .ثم تحقق منها من خلال الجبر



بيانياً : ....

....

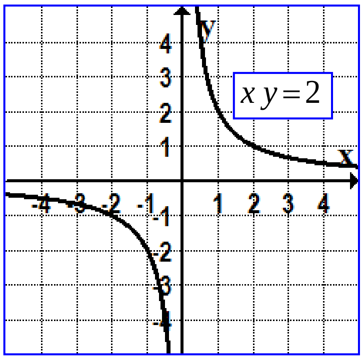
بالأرقام :

y	4		1		−4	
$(x\ ,\ y)$						

جبرياً : ....

....

❸ استخدم الرسم البياني لكل معادلة لتتحقق من التناظر حول المحور الرأسي y
ادعم إجابتك بالأرقام .ثم تحقق منها من خلال الجبر



بيانياً : ....

....

بالأرقام :

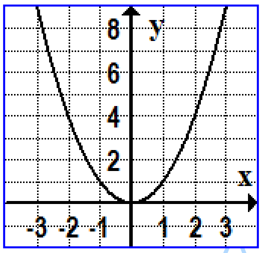
x	-4	-2	-1	1	2	4
$(x\ ,\ y)$						

جبرياً : ....

....

الدوال الزوجية والفردية

الدالة الزوجية :

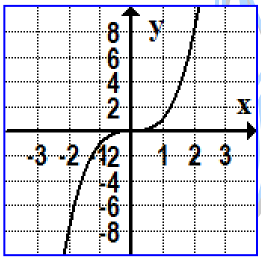


✓ تكون الدالة زوجية إذا كان رسمها البياني متناظر حول المحور الرأسي y

ويكون $f(-x)=f(x)$

وبصورة عامة نعوض كل x بـ $-x$ فإذا حصلنا على نفس الدالة تكون زوجية

الدالة الفردية :



✓ تكون الدالة فردية إذا كان رسمها البياني متناظر حول المحور نقطة الأصل

ويكون $f(-x)=-f(x)$

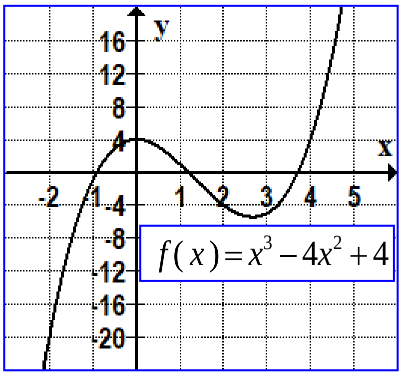
وبصورة عامة نعوض كل x بـ $-x$ فإذا تغيرت جميع الإشارات تكون فردية

ليس المطلوب إسعاد كل الناس ، ولكن عليك أن لا تؤذي أحداً من الناس

تمــارين

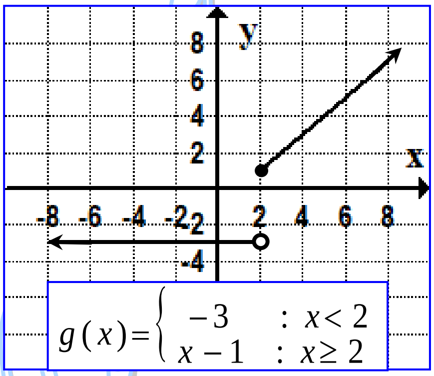
① استخدم الرسم البياني لكل دالة لتقدير القيم المشار إليها ، ثم تأكد من تقديرك جبرياً لأقرب جزء من عشرة

❶



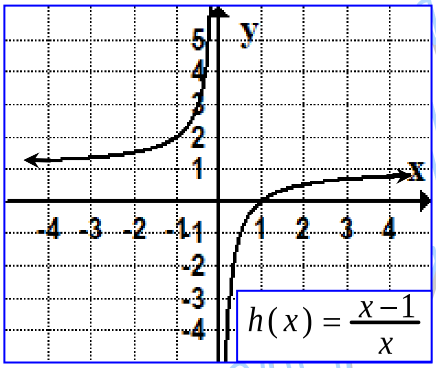
$a)\ f(-2)\ ,\ b)\ f(3)\ ,\ c)\ f(-2)$

❷



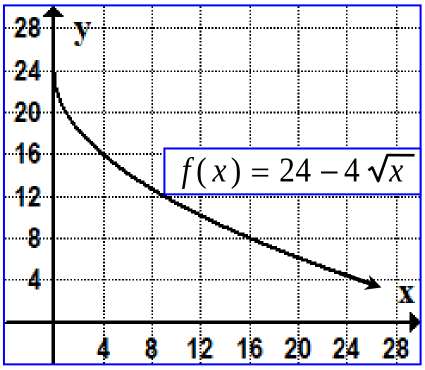
$a)\ g(-8)\ ,\ b)\ g(2)\ ,\ c)\ g(6)$

❸



$a)\ h(-4)\ ,\ b)\ h(0.5)\ ,\ c)\ h(2)$

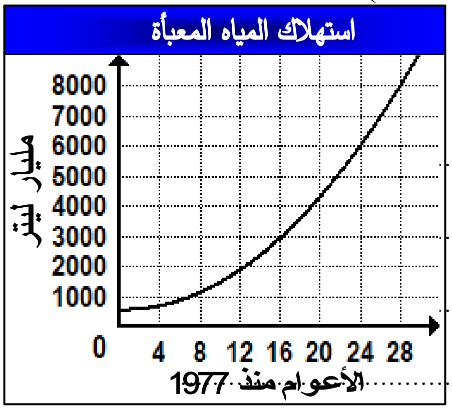
❹



$a)\ f(4)\ ,\ b)\ f(12)\ ,\ c)\ f(24)$

② في الشكل المقابل الدالة $f(x)$ (استهلاك المياه المعبأة بين عامي 1977 و 2006)

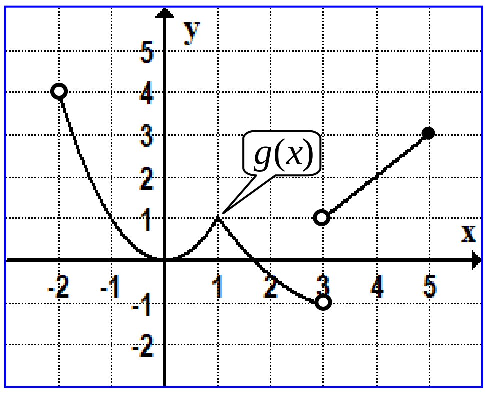
حيث $f(x)=9.7x^2-3x+570$ ، x عدد الأعوام بعد 1977

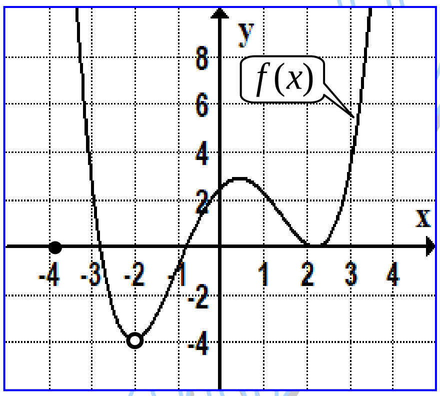


$a)$ استخدم الرسم لتقدير كمية المياه المعبأة عام 1993 وتأكد من تقديرك جبرياً

$b)$ استخدم الرسم لتقدير العام الذي وصلت فيه كمية المياه المعبأة إلى 6 مليار لتر ، وتأكد من تقديرك جبرياً

③ استخدم الرسم البياني لتحديد المجال والمدى لكل دالة





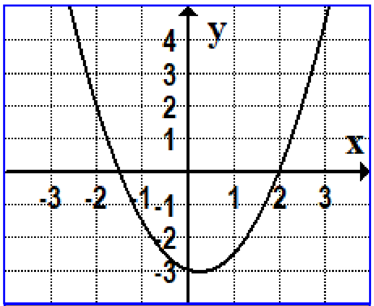
تموت الأسد في الغابات جوعاً
وذو جهل ينام على حرير

ولحم الضأن تأكله الكلاب
وذو علم مفارشه التراب

Amz.math@hotmail.com

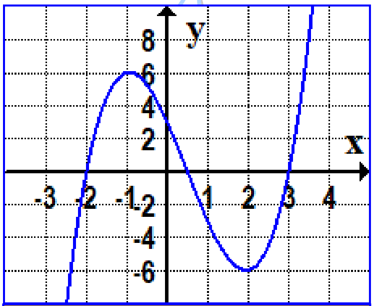
④ استخدم الرسم البياني لكل دالة لتقدير التقاطع مع المحور y والأصفار ، ثم أوجد هذه القيم جبرياً

❶



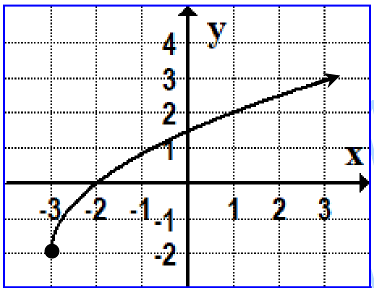
$f(x) = x^2 - 0.5x - 3$

❷



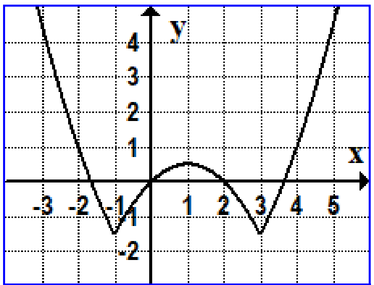
$g(x) = x^3 - 1.5x^2 - 5.5x + 3$

❸



$h(x) = 2\sqrt{x+3} - 2$

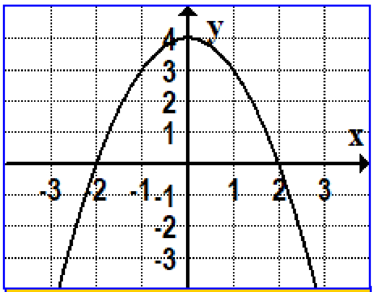
❹



$P(x) = x^2 - 0.5x - 3$

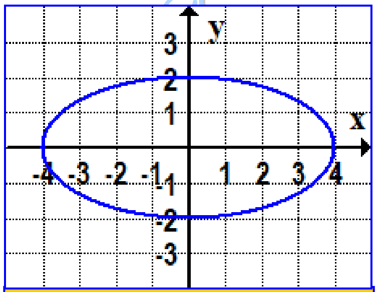
⑤ استخدم الرسم البياني لكل معادلة لتتحقق من التناظر حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل .ثم تحقق منها جبرياً

❶



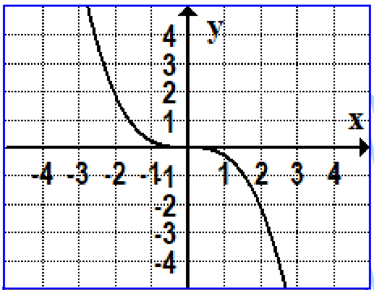
$y = 4 - x^2$

❷



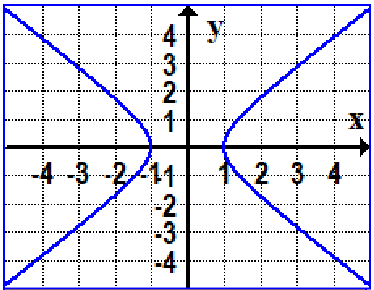
$x^2 - 4y^2 = 16$

❸



$y = x^3/4$

❹



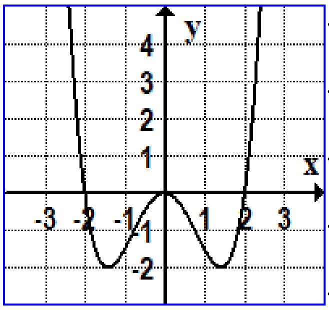
$x^2 - y^2 = 1$

عن المرءِ لا تسألْ وسلْ عن قرينه فكلُّ قرينٍ بالمقارن يقتدي

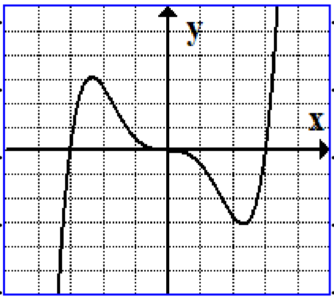
Amz.math@hotmail.com

⑥ في كل مما يلي حلّل الرسم البياني لتحديد ما إذا كانت الدالة زوجية،أو فردية، أو ليست أياً منهما .
ثم اثبت الحل باستخدام الجبر .إذا كانت الدالة فردية أو زوجية.

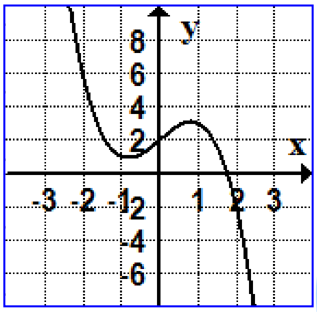
❶ $f(x) = x^4 - 4x^2$



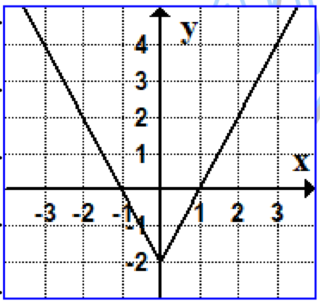
❷ $f(x) = 1/3x^5 - 4x^3$



❸ $f(x) = -x^3 + 2x + 2$

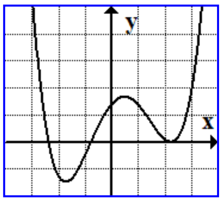


❹ $f(x) = |2x| - 2$



(11-3) الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات

تعريف الاتصال

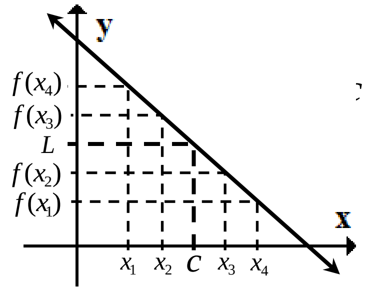


✲ الرسم البياني لدالة متصلة لايوجد به انفصالات أو فجوات أو فراغات

وأحد شروط اتصال دالة ما $f(x)$ عند نقطة c هو أن تقترب الدالة من قيمة مميزة L

كلما اقتربت x من القيمة c من اليسار واليمين وهذا ما يعرف بالنهاية

تعريف النهاية عند نقطة :



إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب الدالة من قيمة الوحيدة L عندما تقترب x من القيمة c

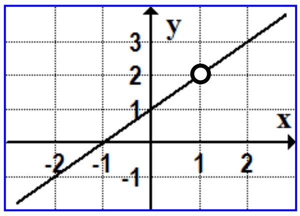
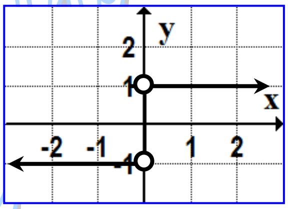
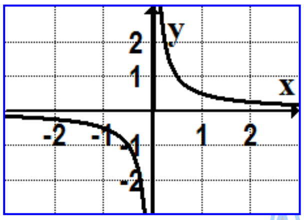
من كلا الجانبين (اليسار واليمين)

فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L

وتكتب $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ **وتقرأ** نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L

أنواع الانفصال

الجدول التالي يوضح أنواع الانفصال

انفصال يمكن إزالته	انفصال لا يمكن إزالته	
فجوة	**قفزة**	**لانهائي**
$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 	$f(x)=\dfrac{\lvert x\rvert}{x}$ 	$f(x)=\dfrac{1}{2x}$ 
الحالة الوحيدة التي تكون فيها النهاية موجودة سواء كانت الدالة معرفة أو غير معرفة	النهاية غير موجودة لأن النهاية اليمنى $\neq$ اليسرى ويكون عند نقاط التفرع في الدوال المتفرعة	النهاية غير موجودة $f(x)\to\pm\infty$ وتكون النهاية $\dfrac{\text{عدد}}{0}$

اختبار الاتصال

❀ تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=c$ إذا كانت تحقق الشروط الثلاثة التالية :

1) الدالة $f(x)$ معرفة عند $x=c$ ، أي أن $f(x)$ ذات قيمة محددة

2) تصل $f(x)$ لنفس القيمة من كلا جانبي c ، أي أن النهاية $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ لها قيمة محددة

3) القيمة التي تصل إليها $f(x)$ من كلا جانبي c هي $f(c)$ ، أي أن $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

سلام على الدنيا اذا لم يكن بها صديق صدوق صادق الوعد منصفا

Amz.math@hotmail.com

مثال 1 حدد ما إذا كانت الدالة $f(x)=2x^2-3x-1$ متصلة عند $x=2$ ، وضّح ذلك مستخدماً اختبار الاتصال

- هل الدالة $f(2)$ لها قيمة محددة

....

- هل النهاية $\lim_{x\to 2} f(x)$ ذات قيمة محددة

....

....

x تقترب من 2 من اليمين — x تقترب من 2 من اليسار

x	1.9	1.99	1.999	2	**2.001**	**2.01**	**2.1**
$f(x)$	0.52	0.95	0.995		**1.005**	**1.05**	**1.52**

- هل $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

....

....

تدريب 1 حدد ما إذا كانت كل دالة متصلة عند $x=0$ ، وضّح ذلك مستخدماً اختبار الاتصال

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & ; x<0 \\ x & ; x\geq 0 \end{cases}$

- هل الدالة $f(0)$ لها قيمة محددة

....

- هل النهاية $\lim_{x\to 0} f(x)$ ذات قيمة محددة

....

....

x تقترب من 0 من اليمين — x تقترب من 0 من اليسار

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	**0.001**	**0.01**	**0.1**
$f(x)$							

- هل $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

....

....

b) $f(x)=\sqrt{x+1}$

....

....

....

....

....

....

....

مثال 2 حدد ما إذا كانت كل دالة متصلة عند قيم x المحددة ، علل مستخدماً اختبار الاتصال
وإذا كانت منفصلة حدد نوع الانفصال سواء كان لا نهائي أو قفزي أو قابل للإزالة

$$a)\quad f(x)=\begin{cases} 3x-1 & ; \; x>2 \\ x+1 & ; \; x\le 2 \end{cases} \qquad at \;\; x=2$$

....

x تقترب من 2 من اليسار — x تقترب من 2 من اليمين

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$							

....

....

....

....

....

$$b)\quad f(x)=\frac{x^2+x-2}{x-1} \qquad at \;\; x=1$$

....

....

....

....

....

....

....

$$c)\quad f(x)=\frac{x}{x-1} \qquad at \;\; x=1$$

....

x تقترب من 1 من اليسار — x تقترب من 1 من اليمين

x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
$f(x)$							

....

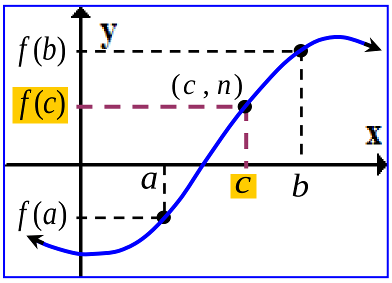
....

....

....

....

نظرية القيمة المتوسطة



إذا كانت f متصلة وكانت $a<b$ وكانت n أي عدد بين $f(a)$ و $f(b)$

فإنه يوجد عدد مثل c حيث $a<c<b$ و $f(c)=n$

نتيجة :

إذا كانت f متصلة وكانت قيمتا $f(a)$ و $f(b)$ مختلفتين بالإشارة

فإنه يوجد على الأقل عدد واحد c حيث $a<c<b$ و $f(c)=0$ أي أن صفر الدالة يقع بين b و a

مثال 3 حدد بين أية أعداد صحيحة متتالية تقع الأصفار الحقيقية لكل دالة في الفترة المعطاة

a) $f(x)=x^3-4x+2$; $[-3,3]$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-13	2	5	2	-1	2	17

نكون الجدول ونقارن بين القيم المتتالية للدالة f

بما أن $f(-3)$ و $f(-2)$ مختلفتين بالإشارة

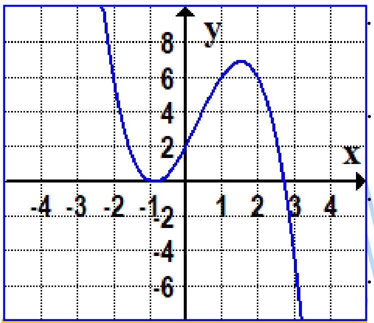
فإن للدالة f صفر حقيقي يقع بين -2 و -3

وحيث $f(x)$ تتغير إشارتها في الفترتين $0\le x\le 1$ و $1\le x\le 2$ فيوجد أصفار حقيقية بين 1 و 0 وبين 2 و 1

السلوك الطرفي

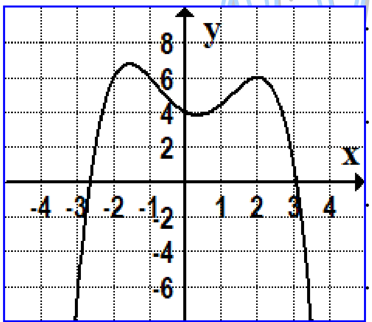
مثال 4 استخدم الرسم البياني لكل دالة لوصف السلوك الطرفي الخاص بها

❶



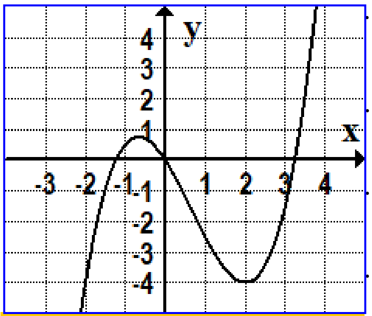
$f(x)=-x^3+x^2+4x+2$

❷

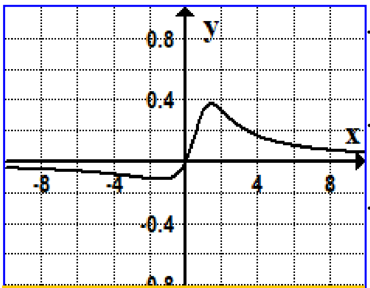


$f(x)=-x^4+x^3+4x^2-2x+4$

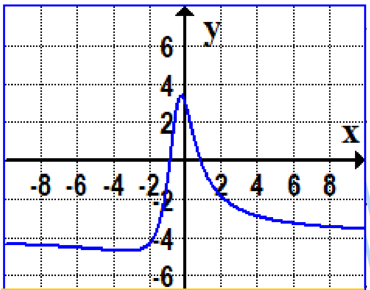
استخدم الرسم البياني لكل دالة لوصف السلوك الطرفي الخاص بها

❸


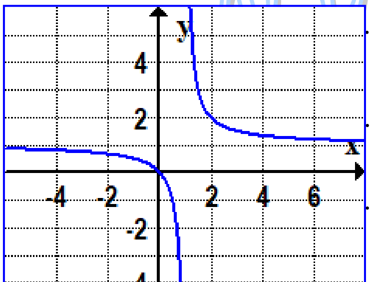
$f(x)=0.5x^3-x^2-2x$

❹


$f(x)=\dfrac{x}{2x^2-3x+4}$

❺


$f(x)=\dfrac{-4x^2+3}{x^2+x+1}$

❻


$f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2+x-2}$

تمــارين

① حدد ما إذا كانت كل دالة متصلة عند قيم x المحددة ، علل مستخدماً اختبار الاتصال
وإذا كانت منفصلة حدد نوع الانفصال سواء كان لا نهائي أو قفزي أو قابل للإزالة

1) $f(x)=\sqrt[3]{3x-5}$ at $x=-1$

....

....

....

....

2) $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x+5}$ at $x=-5$

....

....

....

....

....

3) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ at $x=2$

x تقترب من 2 من اليسار — x تقترب من 2 من اليمين

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$							

....

....

....

....

....

4) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & ; x>-2 \\ 5-x & ; x\le -2 \end{cases}$ at $x=-2$

....

....

....

....

....

② حدد ما إذا كانت كل دالة متصلة عند قيم x المحددة ، علل مستخدماً اختبار الاتصال
وإذا كانت منفصلة حدد نوع الانفصال سواء كان لا نهائي أو قفزي أو قابل للإزالة

5) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$ $\quad at \;\; x=0 \quad , \quad x=3$

....

....

....

....

....

....

....

6) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$ $\quad at \;\; x=1 \quad , \quad x=-3$

....

....

....

....

....

....

....

7) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & ; \; x>-3 \\ 5-x & ; \; x\le -3 \end{cases}$ $\quad at \;\; x=-3$

....

....

....

....

....

③ حدد بين أية أعداد صحيحة متتالية تقع الأصفار الحقيقية لكل دالة في الفترة المعطاة

1) $f(x) = x^3 - x^2 - 3 \quad ; \ [-2, 4]$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$							

2) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 3 \quad ; \ [-3, 3]$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

3) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x - 3}{x^2 + 1} \quad ; \ [-4, 2]$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$							

4) $f(x) = \sqrt{x^3 + 1} - 5 \quad ; \ [0, 5]$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$							

④ استخدم الاستدلال المنطقي لتحديد السلوك الطرفي أو النهايات للدوال الآتية كلما اقتربت x من اللا نهاية

1) $f(x)=\dfrac{4}{x}$

....

....

....

2) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$

....

....

....

3) $f(x)=\dfrac{4+x}{2x+3}$

....

....

....

4) $f(x)=\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2+5}$

....

....

....

5) $f(x)=\dfrac{x^2+4x-1}{x^3-x+2}$

....

....

....

6) $f(x)=-2x^5+7x^3+5$

....

....

....

⑤ أوجـد قيمة $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ واشرح استدلالك لكل مما يلي :

❶ $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ و f دالة زوجية

....

....

❷ $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ و f دالة فردية

....

....

❸ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ والرسم البياني للدالة f متماثل حول نقطة الأصل

....

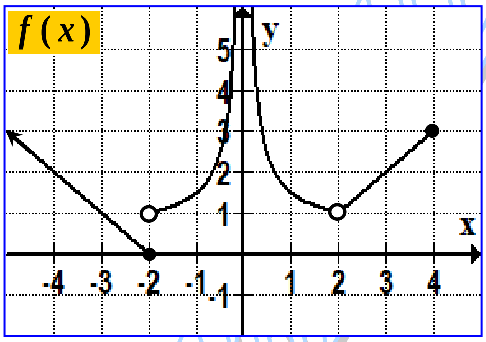
....

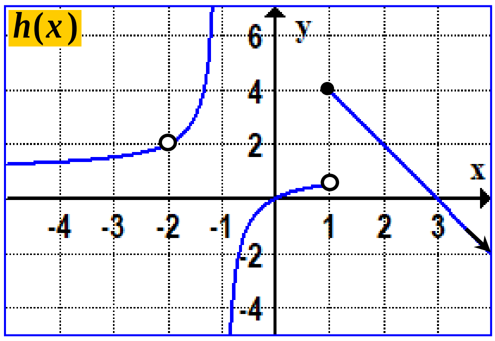
❹ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ والرسم البياني للدالة f متماثل حول المحور الرأسي y

....

....

⑥ باستخدام الرسم البياني أوجد نقاط الانفصال وحدد نوعه لكلٍ من الدوال الآتية :

❶


❷


....

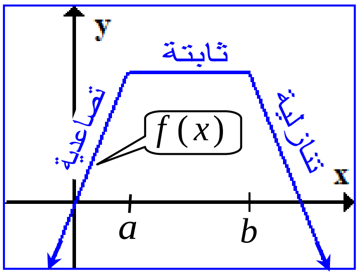
....

....

....

(11-4) القيم القصوى ومتوسط معدلات التغير

الدوال المتزايدة و المتناقصة والثابتة :



في الرسم الموضح للدالة $f(x)$ اثناء التحرك من اليسار إلى اليمين

الدالة : ✓ تتزايد (تصاعدية) على الفترة $(-\infty, a)$

✓ ثابتة (مستوية) على الفترة (a, b)

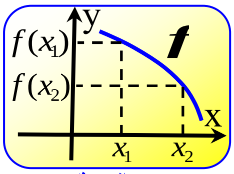
✓ تتناقص (تنازلية) على الفترة (b, ∞)

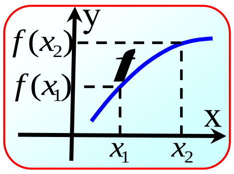
ويمكن تفسير ذلك باستخدام الجبر كما يلي :

f دالة متزايدة على فترة I إذا كان $f(x_1) < f(x_2)$ لكل $x_1 < x_2$

f دالة متناقصة على فترة I إذا كان $f(x_1) > f(x_2)$ لكل $x_1 < x_2$

f دالة ثابتة على فترة I إذا كان $f(x_1) = f(x_2)$ لكل $x_1 < x_2$



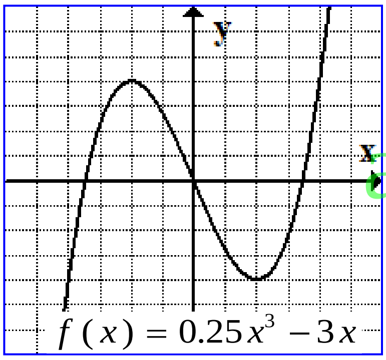


مثال باستخدام الرسم البياني لتقديرفترات التزايد و التناقص وادعم الإجابة عددياً

من الرسم نجد أن الدالة متزايدة (صعود) في الفترة $(-\infty, -2)$

و متناقصة (هبوط) في الفترة $(-2, 2)$ ومتزايدة في $(2, \infty)$

والجدول التالي يوضح ذلك



x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-4	2.25	4	2.75	0	-2.75	-4	-2.25	4

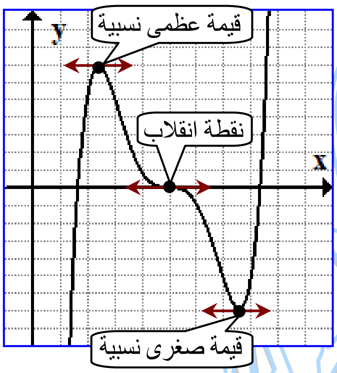
متزايدة ← متناقصة ← متزايدة

تعريف :

النقطة الحرجة للدالة f هي نقطة في مجال الدالة يكون عندها المماس افقياً أو رأسياً

النقاط القصوى تعتبر نقاط حرجة يتغير عندها سلوك الدالة من تزايد إلى تناقص أو العكس وعند هذه النقاط يكون للدالة قيمة عظمى أو صغرى (نسبية أو مطلقة)

نقطة الانعطاف يتغير عندها تقعرمنحنى الدالة من تقعر لأعلى إلى أسفل أو العكس



تعريف :

إذا كانت الدالة f معرفة على فترات (x_1, x_2) تحوي قيم مثل a فإن :

$f(a)$ **قيمة عظمى نسبية** إذا كانت $f(a) > f(x)$ لكل قيم x في (x_1, x_2)

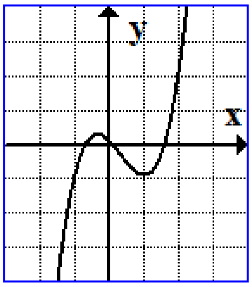
$f(a)$ **قيمة عظمى مطلقة** إذا كانت $f(a) > f(x)$ لجميع قيم x في مجال الدالة f

$f(a)$ **قيمة صغرى نسبية** إذا كانت $f(a) < f(x)$ لكل قيم x في (x_1, x_2)

$f(a)$ **قيمة صغرى مطلقة** إذا كانت $f(a) < f(x)$ لجميع قيم x في مجال الدالة f

ملء السنابل تنحني بتواضع والفـارغات رؤسهن شـوامخ

Amz.math@hotmail.com

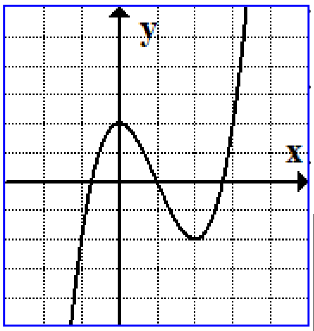


مثال حدد وصنف القيم القصوى للرسم البياني للدالة $f(x)=x^3-x^2-x$
وادعم الإجابات عددياً
من الرسم نجد أن للدالة $f(x)$ **قيمة صغرى نسبية** عند $x=1$
وقيمة عظمى نسبية بين $x=-1$ و $x=0$ كما أن
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ أي أنه لا توجد قيم قصوى مطلقة

x	-10	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	10
$f(x)$	-1110	-1.0	0.125	0	-0.63	-1.0	-0.38	890

بما أن $f(-0.5)>f(-1)$ و $f(-0.5)>f(0)$ توجد قيمة عظمى نسبية في الفترة $(-1,0)$
بالقرب من -0.5 وبالتالي القيمة التقريبية للقيمة العظمى النسبية هي $f(-0.5)\approx 0.13$
وكذلك لأن $f(1)<f(0.5)$ و $f(1)<f(1.5)$ توجد قيمة صغرى نسبية في الفترة $(0.5,1.5)$
بالقرب من 1 وبالتالي القيمة التقريبية للقيمة الصغرى النسبية هي $f(1)=-1$

تدريب 1 ❶ حدد وصنف القيم القصوى للرسم البياني للدالة $f(x)=x^3-3x^2+2$ وادعم الإجابات عددياً

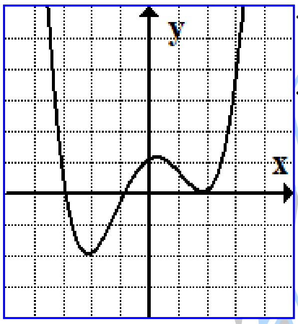


....
....
....

x	-2	-1	0	1	2	3	4	
$f(x)$								

....
....

❷ حدد وصنف القيم القصوى للرسم البياني للدالة $f(x)=0.25x^4-2x^2+x+2$ وادعم الإجابات عددياً



....
....
....

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$								

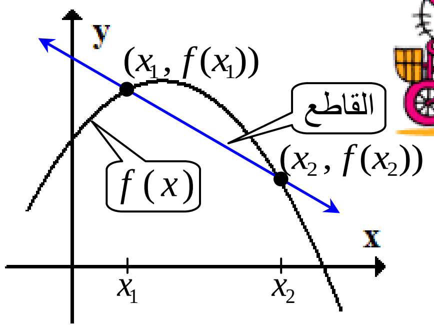
....
....
....

متوسط معدل التغيّر

إذا كانت $y = f(x)$ وتغيرت x من x_1 إلى x_2 فإن :

ميل الخط القاطع أو متوسط معدل التغيّر في الفترة $[x_1 , x_2]$:

$$m_{\sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



✓ عندما يكون متوسط معدل التغيّر في إحدى الفترات موجب فإن الدالة تتزايد
✓ عندما يكون متوسط معدل التغيّر في إحدى الفترات سالب فإن الدالة تتناقص

تدريب2

أوجد متوسط معدل التغير في الدالة $f(x) = -x^3 + 3x$ في كل من الفترتين $a)\ [-2,-1]$, $b)\ [0,1]$

....

....

....

....

....

....

....

....

تدريب3 أثناء ضرب كرة البيسبول إلى داخل الملعب بعد t ثانية يمكن تمثيل ارتفاع الكرة (بالأمتار) بالدالة $h(t) = -16t^2 + 32t + 4$ ،

(a أوجد متوسط سرعة الجسم في الفترة $[0.5 , 2]$

(b هل يصل ارتفاع الكرة إلى 25 متر

(c ما المجال المناسب لهذه الدالة ؟ اشرح

....

....

....

....

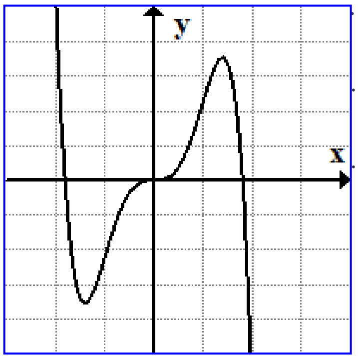
....

....

تمـارين

① استخدم الرسم البياني لكل دالة لتقدير فترات أقرب إلى 0.5 وحدة والتي تزايد أو تناقص فيها الدالة .
وادعم الإجابات عددياً

1) $f(x) = -x^5 + 3x^3$



....

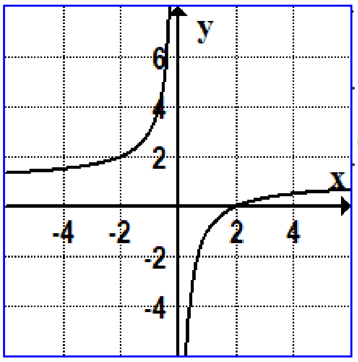
....

....

x								
$f(x)$								

....

2) $f(x) = \dfrac{x-2}{x}$



....

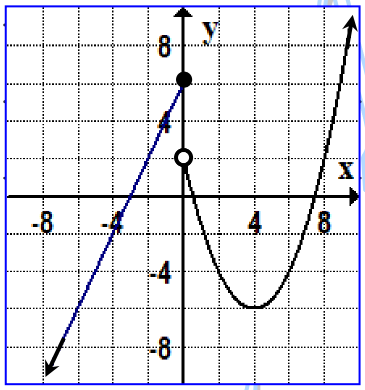
....

....

x								
$f(x)$								

....

3) $f(x) = \begin{cases} 2x+6 & ; \; x \le 0 \\ 0.5x^2 - 4x + 2 & ; \; x > 0 \end{cases}$



....

....

....

x								
$f(x)$								

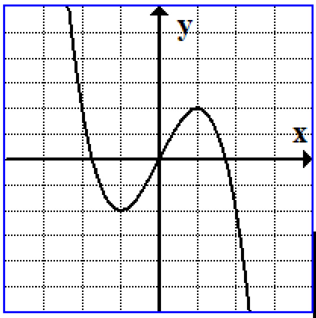
....

لا تدع خيبات آمال الأمس تلقي بظلالها على أحلام الغد ..

Amz.math@hotmail.com

② حدد وصنف القيم القصوى للرسم البياني الخاص بكل دالة ، وادعم الإجابات عددياً

1) $f(x) = -x^3 + 3x$



....

....

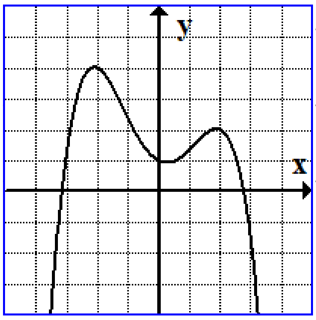
....

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	
$f(x)$								

....

....

2) $f(x) = -0.25x^4 + 2x^2 + 2$



....

....

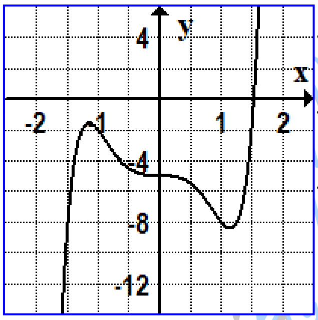
....

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$								

....

....

3) $f(x) = x^7 - 4x^3 - 5$



....

....

....

x								
$f(x)$								

....

....

③ أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة عند الفترات المحددة

1) $f(x) = -4x^2 + 3x - 4 \quad ; \ [-1 , 3]$

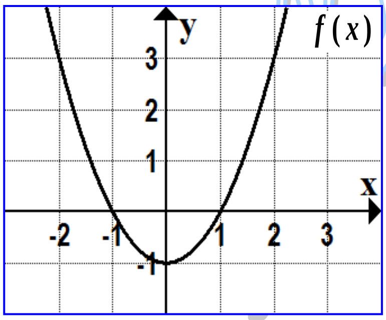
2) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 6 \quad ; \ [2 , 6]$

3) $f(x) = \dfrac{x+5}{x-4} \quad ; \ [-6 , 2]$

4) $f(x) = \sqrt{x+8} \quad ; \ [-4 , 1]$

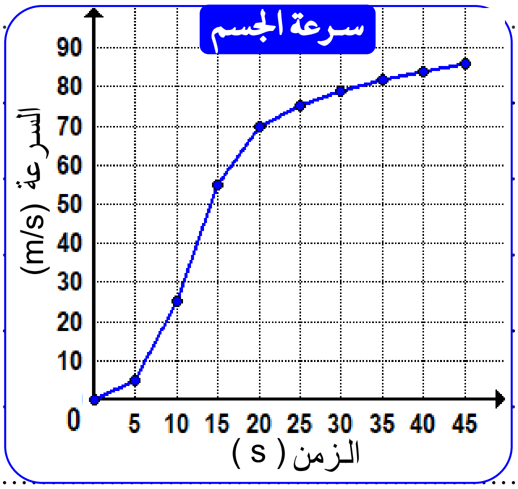
5) استخدم الرسم البياني للدالة $f(x)$ وأوجد :

a) متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[0 \ , \ 2]$



b) متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2 \ , \ 1]$

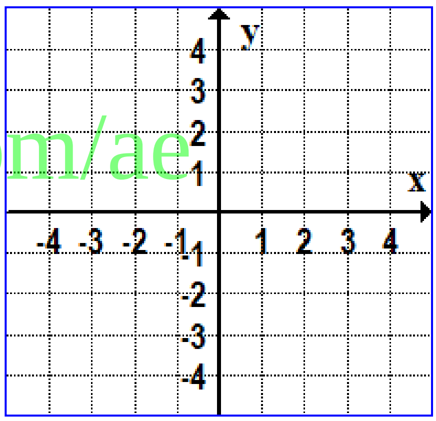
④ استخدم الرسم البياني لإيجـاد متوسط معدل التغير عند الفترات [5 , 15] و [15 , 20] و [25 , 45]



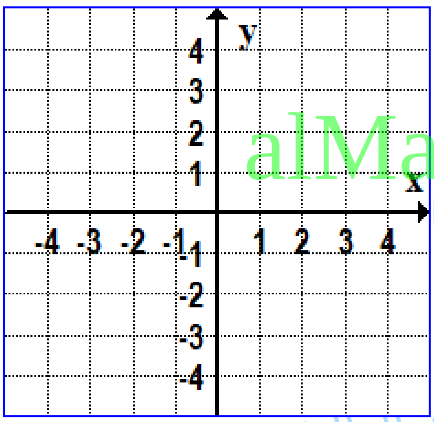
....

⑤ ارسم بيـانياً الدالة الخاصة بكل مجموعة من الخصائص :

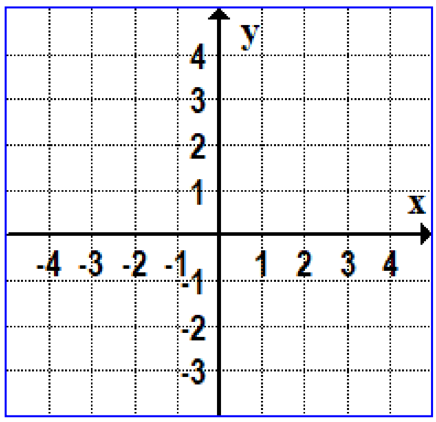
❶ $f(x)$ متصلة ومتزايدة دائماً



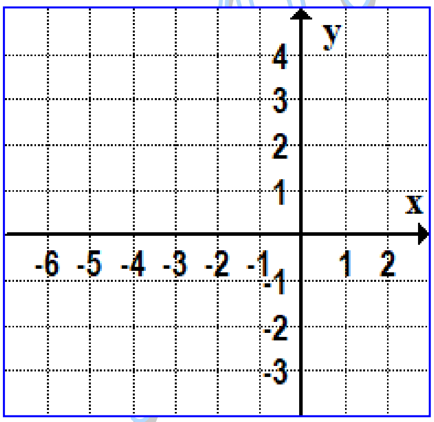
❷ $f(x)$ متصلة ومتناقصة دائماً



❸ $f(x)$ متصلة ومتناقصة عندما $x<0$ ومتزايدة عندما $x>0$



❹ انفصال لانهائي عند $x=-2$ ، $f(-6)=-6$ ومتزايدة على $(-\infty , -2)$ ومتزايدة على $(-2 , \infty)$

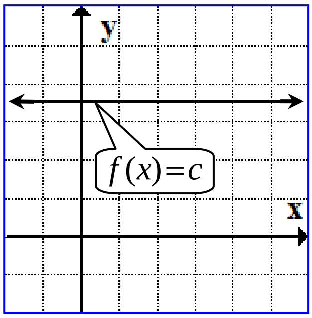


لا تيأس إذا رجعت خطوة للوراء فالسهم يحتاج أن ترجعه للوراء لينطلق بقوة إلى الأمام

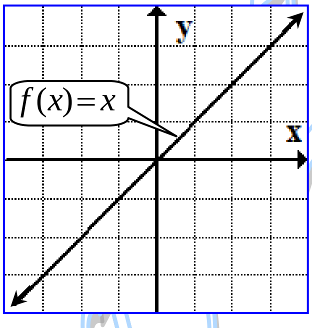
Amz.math@hotmail.com

الدوال الرئيسية والتحويلات (5-11)

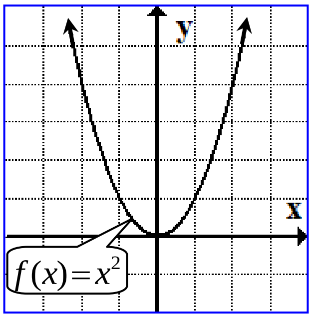
الدوال الرئيسية وكثيرة الحدود



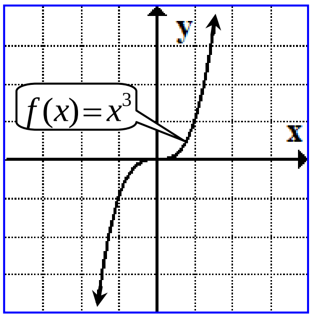
الدالة الثابتة $f(x)=c$
حيث أي عدد حقيقي



الدالة المحايدة $f(x)=x$
احداثيات نقاطها $(a\ ,\ a)$



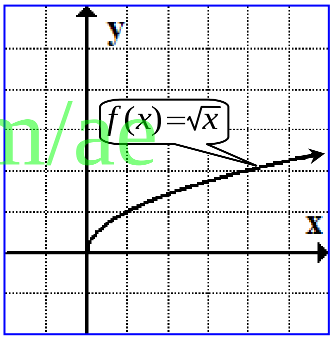
الدالة التربيعية $f(x)=x^2$
رسمها على شكل حرف U



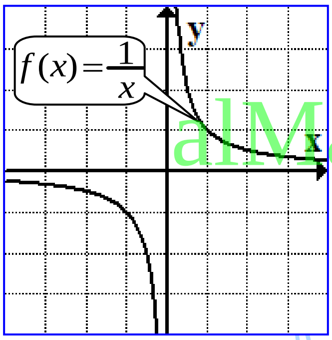
الدالة التكعيبية $f(x)=x^3$
متماثلة حول نقطة الأصل

دوال الجذر التربيعي والعكسية الرئيسة

دالة الجذر التربيعي لها الصيغة $f(x)=\sqrt{x}$



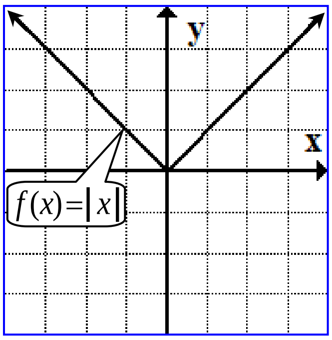
الدالة العكسية الرئيسة لها الصيغة $f(x)=1/x$



دالة القيمة المطلقة الرئيسة

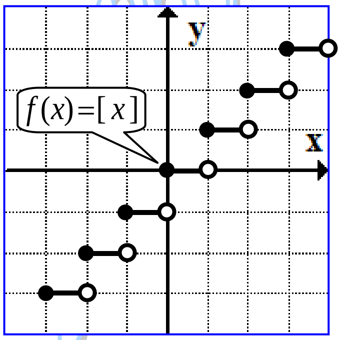
دالة القيمة المطلقة لها الصيغة $f(x)=|x|$

وتعرف كما يلي : $f(x)=\begin{cases} -x & ; x<0 \\ x & ; x\geq 0 \end{cases}$



دالة أكبر عدد صحيح الرئيسة

دالة أكبر عدد صحيح لها الصيغة $f(x)=[x]$
وإذا كان x عدد حقيقي و n كان عدد صحيح
فإن : $n\leq x<n+1 \iff [x]=n$

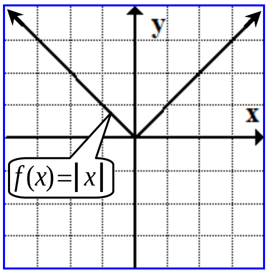


الذين لديهم الجرأة على مواجهة الفشل هم الذين يقهرون الصعاب وينجحون

Amz.math@hotmail.com

تدريب 1 صف الخصائص التالية للرسم البياني لكل دالة رئيسة : المجال ، المدى ، نقاط التقاطع ، التماثل ، الاتصال ، السلوك الطرفي ، فترات تزايد أو تناقص الرسم البياني

1) $f(x)=|x|$



يتصف الرسم البياني لدالة القيمة المطلقة بالخصائص التالية :

✓ مجال الدالة $(-\infty,\infty)$ و المدى $[0,\infty)$

✓ للرسم البياني نقطة تقاطع وحيدة هي $(0,0)$

✓ الرسم البياني متماثل حول المحور الرأسي y ، والدالة زوجية

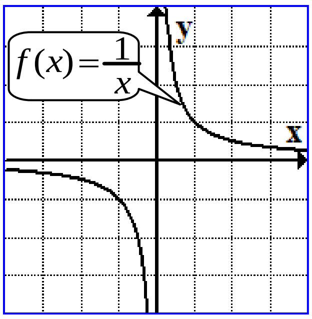
✓ الدالة متصلة على مجالها $(-\infty,\infty)$

✓ السلوك الطرفي $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

✓ الرسم البياني يتناقص في الفترة $(-\infty,0)$ ويتزايد في الفترة $(0,\infty)$

---

2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$



يتصف الرسم البياني للدالة العكسية الرئيسة بالخصائص التالية :

✓ ....

✓ ....

✓ ....

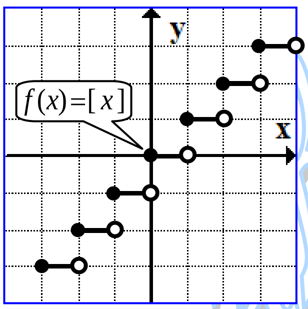
✓ ....

✓ ....

✓ ....

---

3) $f(x)=[x]$



يتصف الرسم البياني لدالة أكبر عدد صحيح الرئيسة بالخصائص التالية :

✓ ....

✓ ....

✓ ....

✓ ....

✓ ....

✓ ....

لا تنه عن خلق وتأتي مثله عارٌ عليك إذا فعلت عظيم
ابدأ بنفسك وانهها عن غيها فإذا انتهت عنه فأنت حكيم

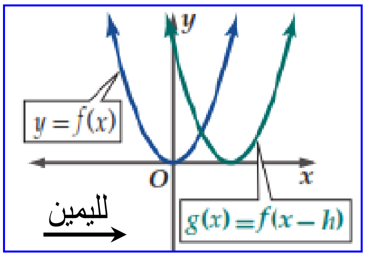
Amz.math@hotmail.com

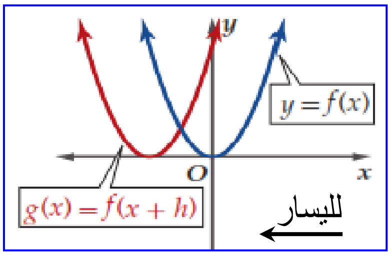
تحويلات الدوال

الإزاحة الأفقية (لليمين أو لليسار) مرتبطة بـ x

✓ $f(x-3)$ إزاحة $f(x)$ ثلاث وحدات لليمين

✓ $f(x+2)$ إزاحة الدالة $f(x)$ وحدتين لليسار

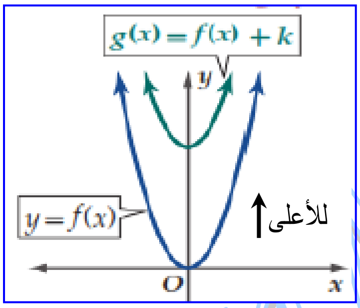


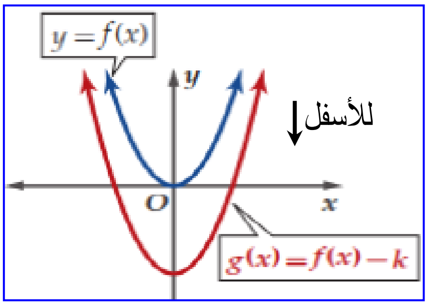


الإزاحة الرأسية (لأعلى أو لأسفل) مرتبطة بـ y

✓ $f(x)+2$ إزاحة $f(x)$ وحدتين للأعلى

✓ $f(x)-3$ إزاحة $f(x)$ ثلاث وحدات للأسفل





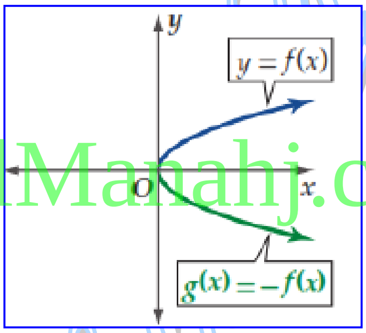
الانعكاس في المحاور الإحداثية

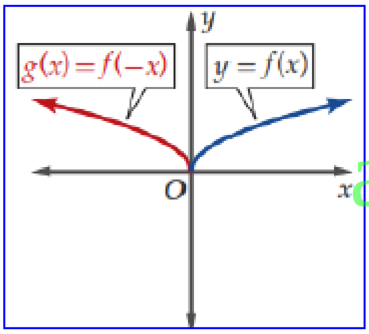
✓ $g(x)=-f(x)$ انعكاس في المحور x

للدالة $y=f(x)$ (نستبدل كل y بـ $-y$)

✓ $g(x)=f(-x)$ انعكاس في المحور y

للدالة $y=f(x)$ (نستبدل كل x بـ $-x$)





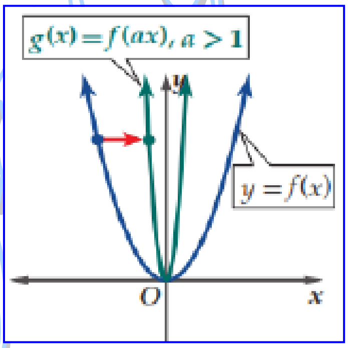
التمدد والانكماش الأفقي مرتبط بـ x

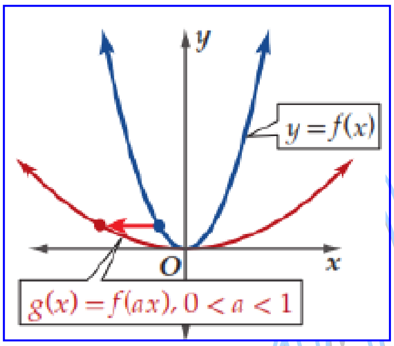
✓ $g(x)=f(ax)$; $a>1$ إنكماش أفقي لـ $f(x)$

$g(x)=f(2x)$ إنكماش أفقي معامله $1/2$

✓ $g(x)=f(ax)$; $0<a<1$ تمدد أفقي لـ $f(x)$

$g(x)=f(\frac{1}{2}x)$ تمدد أفقي معامله 2





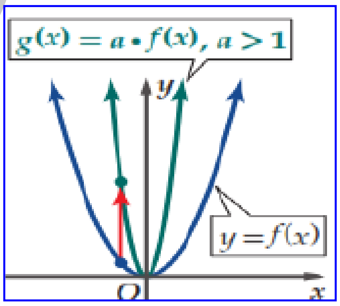
التمدد والانكماش الرأسي مرتبط بـ y

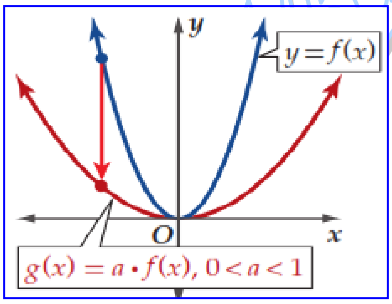
✓ $g(x)=f(ax)$; $a>1$ تمدد رأسي لـ $f(x)$

$g(x)=2f(x)$ تمدد رأسي معامله 2

✓ $g(x)=a f(x)$; $0<a<1$ إنكماش رأسي لـ $f(x)$

$g(x)=\frac{1}{2}f(x)$ إنكماش رأسي معامله $1/2$





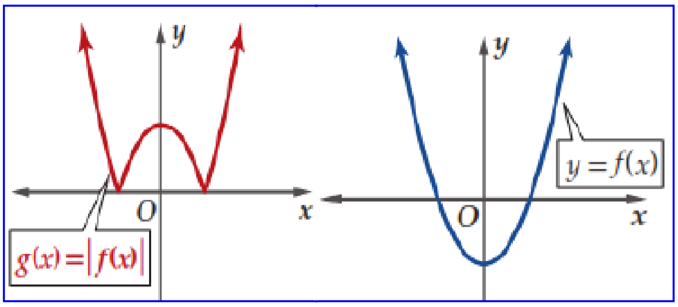
ملاحظة : جميع التحويلات المرتبطة بـ x تخالف ، أما التحويلات المرتبطة بـ y توافق

تحويلات القيمة المطلقة

$g(x) = |f(x)|$

هذا التحويل إنعكاس في المحور x لأجزاء الرسم البياني للدالة $f(x)$ الواقعة تحت المحور x لتصبح فوق المحور x

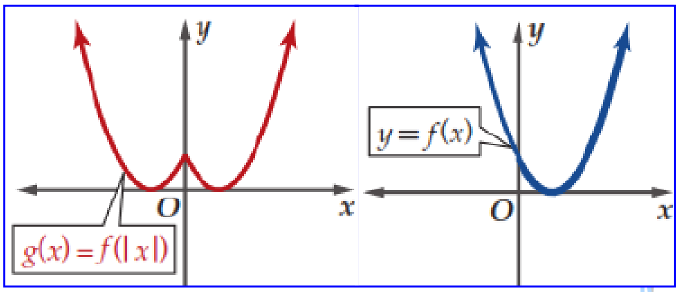
$g(x) = |x^2 - 2| \Longleftarrow f(x) = x^2 - 2$



$g(x) = f(|x|)$

هذا التحويل يستبدل جزء رسم الدالة $f(x)$ الواقع على يسار المحور y بانعكاس في المحور y لأجزاء الرسم البياني للدالة $f(x)$ الواقعة على يمين المحور y

$g(x) = (|x| - 1)^2 \Longleftarrow f(x) = (x-1)^2$



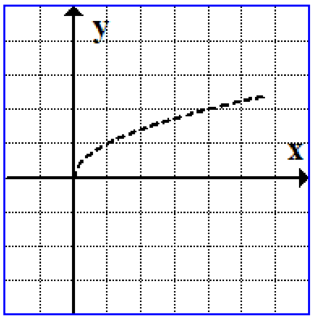
تدريب 2 اكتب التحويلات التي طُبقت على الدالة $f(x) = x^2$

الدالة الناتجة بعد التحويل	التحويلات التي طبقت على الدالة f
$y = x^2 + 2$	....
$y = (x-3)^2$	....
$y = 2x^2 - 3$	....
$y = -(3x)^2 + 2$	....
$y = (x-3)^2 - 5$	....
$y = -2x^2 + 4$	....
$y = (0.5x)^2 + 1$	....

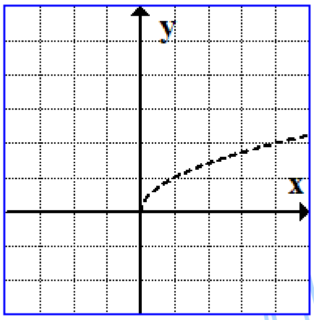
تمارين

① استخدم التمثيل البياني لدالة $f(x)=\sqrt{x}$ لرسم كل مما يلي :

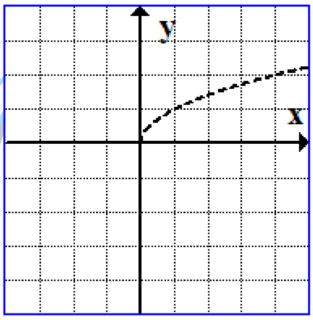
1) $f(x)=\sqrt{x-2}$



2) $f(x)=\sqrt{x}+3$



3) $f(x)=\sqrt{x+1}-4$

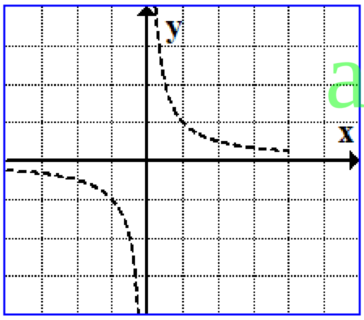


....

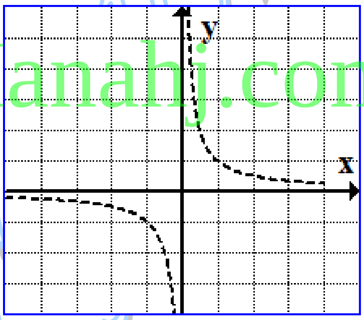
....

② استخدم التمثيل البياني لدالة $f(x)=\sqrt{x}$ لرسم كل مما يلي :

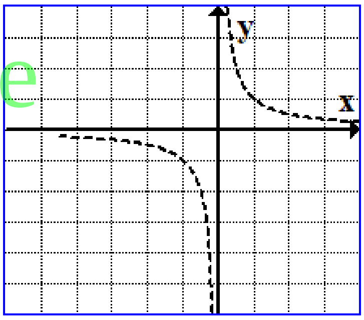
1) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$



2) $f(x)=\dfrac{1}{x}+2$



3) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-2$

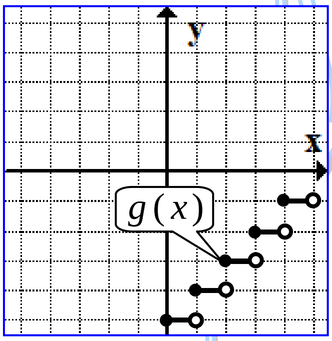


....

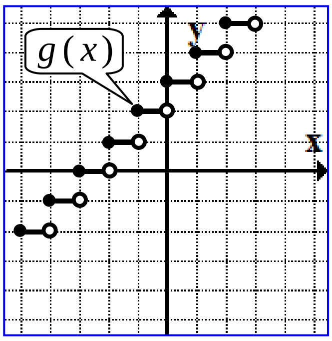
....

③ صف علاقة الرسوم البيـاني للدالتين $f(x)=[x]$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$

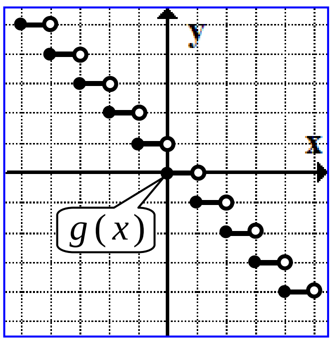
1)



2)



3)

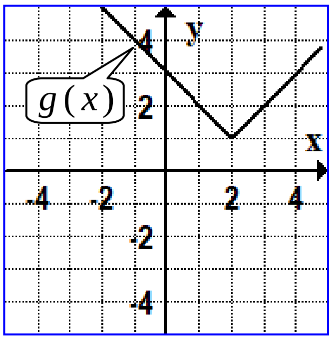


....

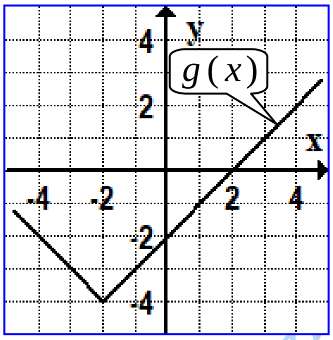
....

④ صف علاقة الرسوم البيـاني للدالتين $f(x) = [\,x\,]$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$

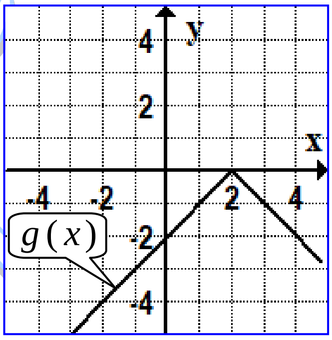
1)



2)



3)



....

....

⑤ حـدد الدالة الرئيسة $f(x)$ للدالة $g(x)$ وصف علاقة الرسم البيـاني لكل دالة $g(x)$ و $f(x)$

1) $g(x) = 3|x| - 4$

....

....

2) $g(x) = 3\sqrt{x+8}$

....

....

3) $g(x) = \dfrac{4}{x+1}$

....

....

4) $g(x) = 2[x-6]$

....

....

5) $g(x) = -2|x+5|$

....

....

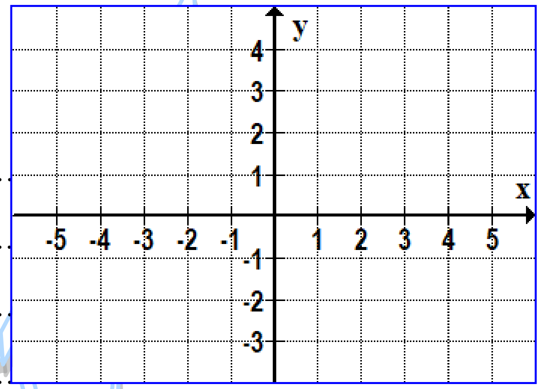
6) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{4}$

....

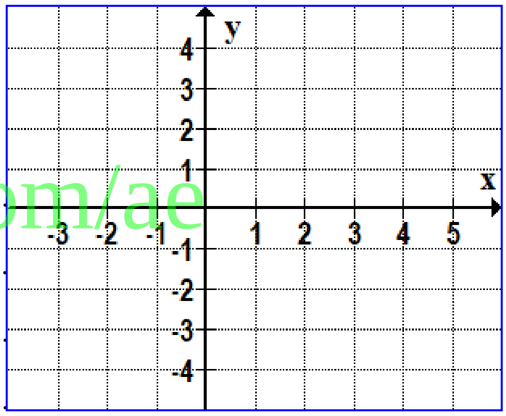
....

⑥ ارسم كل دالة مما يلي :

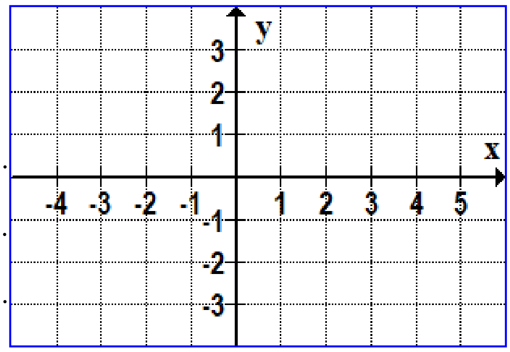
1) $f(x)=\begin{cases}(x+3)^2 & ;\ x<-2\\ 4 & ;-2\le x\le 1\\ |x-3| & ;\ x>1\end{cases}$



2) $f(x)=\begin{cases}x-2 & ;\ x\le 0\\ \dfrac{x^3}{2} & ;\ 0<x\le 2\\ 2/x & ;\ x>2\end{cases}$



3) $f(x)=\begin{cases}-x-1 & ;\ x<-1\\ [x+1] & ;-1\le x<2\\ |x-4| & ;\ x\ge 1\end{cases}$



(6-11) العمليات على الدوال وتركيب الدوال

تعريف : افترض أن f و g دالتان لهما مجالين متقاطعين ، فيكون لكل قيم x الموجودة داخل هذا التقاطع :

$\ast\ (f-g)(x) = f(x) - g(x)$ $\qquad$ $\ast\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$\ast\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\ ;\ g(x) \neq 0$ $\qquad$ $\ast\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

تركيب الدوال

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ، حيث x من مجال g و $g(x)$ من مجال f

✓ عند تركيب الدالة $(f \circ g)(x)$ نضع $g(x)$ بدلاً من من كل قيم x الموجودة في الدالة $f(x)$ ثم نبسط

✓ عند تركيب الدالة $(g \circ f)(x)$ نضع $f(x)$ بدلاً من من كل قيم x الموجودة في الدالة $g(x)$ ثم نبسط

مثال 1 إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = 2x - 1$ أوجد $a)\ (f \circ g)(x)$ ، $b)\ (g \circ f)(x)$

الحل:

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= g(x^2 + 1)$

$= 2(x^2 + 1) - 1$

$= 2x^2 + 1$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= f(2x - 1)$

$= (2x - 1)^2 + 1$

$= 4x^2 - 4x + 2$

تدريب 1 ❶ إذا كانت $g(x) = \frac{x-5}{x+1}$ ، $f(x) = x^2 - 1$ أوجد : $a)\ (f \circ g)(-4)$ ، $b)\ (g \circ f)(2)$

....

....

....

....

❷ إذا كانت $f(x) = 3x + 1$ و $g(x) = 5 - x^2$ أوجد $a)\ (f \circ g)(x)$ ، $b)\ (g \circ f)(x)$

....

....

....

....

....

....

مجال تركيب دالتين

مثال 2 إذا كانت $g(x)=\frac{1}{3-x}$ ، $f(x)=\frac{6}{2x+1}$ حدد مجال $(f\circ g)(x)$

الحل: لاحظ أن مجال $g(x)=\frac{1}{3-x}$ هو $x\neq 3$ (أصفار المقام)

وحيث مجال $f(x)=\frac{6}{2x+1}$ هو $x\neq\frac{-1}{2}$ نضع $g(x)=\frac{-1}{2}$ فيكون

$\frac{1}{3-x}=\frac{-1}{2} \Rightarrow -3+x=2 \Rightarrow x=5$

مجال $(f\circ g)(x)$ هو $\{x|x\neq 3,5\ ;\ x\in R\}$ أو مجال التركيب $f\circ g$ هو $R-\{3,5\}$

تدريب 2 ❶ إذا كانت $g(x)=\frac{1}{3-x}$ ، $f(x)=\frac{6}{2x+1}$ حدد مجال $(g\circ f)(x)$

....

....

....

....

....

❷ إذا كانت $g(x)=x^2-10$ ، $f(x)=\frac{1}{x+1}$ حدد مجال $(f\circ g)(x)$

....

....

....

....

❸ إذا كانت $g(x)=\sqrt{3-x}$ ، $f(x)=x^2-1$ حدد مجال $(g\circ f)(x)$

....

....

....

....

....

تحليل الدالة المركبة

مثال 3 أوجد الدالتين f و g بحيث تكون الدالة $h(x) = (f \circ g)(x)$ حيث $h(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

افترض أن $g(x) = x^3 + 1$ و $f(x) = \sqrt{x}$ فيكون

$$h(x) = \sqrt{x^3 + 1} = \sqrt{g(x)} = f[g(x)] = (f \circ g)(x)$$

تدريب 3 أوجد الدالتين f و g بحيث تكون الدالة $h(x) = (f \circ g)(x)$ حيث

a) $h(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$

....

....

....

b) $h(x) = 3x^2 - 6x + 3$

....

....

....

تدريب 4 ❶ إذا كانت $f(x) = \frac{3}{x}$ و $g(x) = x^2 - 4x + 1$ و $h(x) = \sqrt{x} - 4$ أوجد $(f \circ g \circ h)(x)$

....

....

....

....

....

❷ إذا كانت $f(x) = x - 9$ و $g(x) = x^2 - 6$ و $h(x) = \sqrt{x} + 3$ أوجد $(f \circ g \circ h)(4)$

....

....

....

....

....

تمارين

① أوجد قيمة $(f-g)(x)$ و $(f\cdot g)(x)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل من $f(x)$ و $g(x)$ وحدد مجال الدالة الجديدة

❶ $f(x)=x^2+4 \quad , \quad g(x)=\sqrt{x}$

....

....

....

....

....

....

....

❷ $f(x)=\dfrac{6}{x} \quad , \quad g(x)=x^3+x$

....

....

....

....

....

....

....

❸ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}} \quad , \quad g(x)=4\sqrt{x}$

....

....

....

....

....

....

....

② أوجد $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ لكل زوج من الدوال الآتية :

❶ $f(x) = 2x + 4 \quad , \quad g(x) = 3x - 1$

....

....

....

❷ $f(x) = x^2 - 2x \quad , \quad g(x) = x + 5$

....

....

....

....

❸ $f(x) = 3 - x^2 \quad , \quad g(x) = x^3 + 1$

....

....

....

....

③ لكل زوج من الدوال ، أوجد $(f \circ g)(x)$ وحـــدد المجال :

❶ $f(x) = \dfrac{8}{5-4x} \quad , \quad g(x) = \dfrac{2}{x+3}$

....

....

....

....

❶ $f(x) = \dfrac{6}{1+2x} \quad , \quad g(x) = \dfrac{4}{4-x}$

....

....

....

....

④ أوجد الدالتين f و g بحيث تكون الدالة $h(x) = (f \circ g)(x)$ لكل مما يلي :

1) $h(x) = \sqrt{4x+2} + 7$

....

....

....

2) $h(x) = |3x+4| - 9$

....

....

....

3) $h(x) = \dfrac{6}{(x+2)^2}$

....

....

....

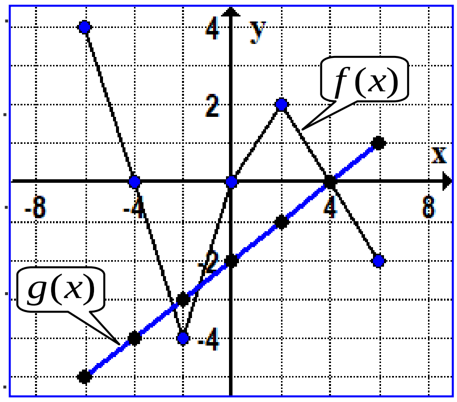
4) $h(x) = \dfrac{x+5}{\sqrt{x-1}}$

....

....

....

⑤ استخدم الرسوم البيانية للدالتين f و g لإيجـاد قيمة كل دالة مما يلي :



1) $(f-g)(-6)$ ....

2) $(f \cdot g)(4)$ ....

3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(-2)$ ....

4) $(f \circ g)(-4)$ ....

5) $(g \circ f)(6)$ ....

(7-11) العلاقات العكسية والدوال

الدوال العكسية توجد العلاقات العكسية إذا كانت العلاقة تتضمن (a , b) حينما تتضمن العلاقة الأخرى (b , a) وذلك عند التعبير عن دالة في صورة معادلة .

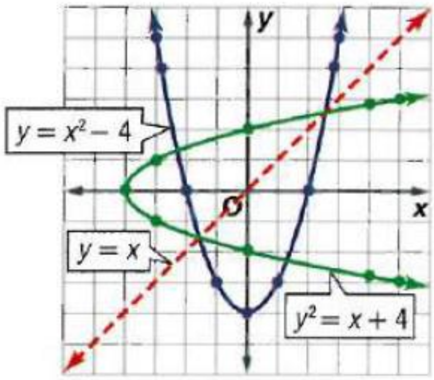
ويمكن إيجاد العلاقة العكسية بالتبادل بين المتغيرات المستقلة والتابعة ، أي تبديل كل (x , y) بـ (y , x)

لاحظ أن الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ للدالة $y = f(x)$ هي انعكاس $y = f(x)$ في المستقيم $y=x$ انظر الشكل

علاقة عكسية

$x = y^2 - 4$ أو $y^2 = x + 4$

x	y
−3	5
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0
3	5



العلاقة

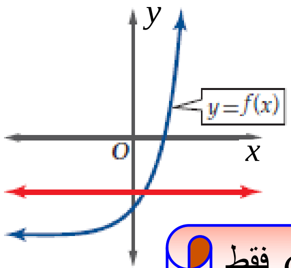
$y = x^2 - 4$

x	y
5	−3
0	−2
−3	−1
−4	0
−3	1
0	2
5	3

اختبـــار الخط الأفقي

يوجد للدالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى f عند نقطة واحدة على الأكثر

✓ في الشكل المقابل للدالة $y = f(x)$ دالة عكسية ، لماذا يا هذا ؟!



تعريف: تكون $f(x)$ دالة واحد لواحد إذا كانت المساواة $f(a) = f(b)$ عندما $a = b$ فقط
ويكون للدالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كانت دالة واحد لواحد

إيجـاد دالة عكسية

تحقق من معرفة ما إذا كانت $f(x)$ دالة واحد لواحد

في معادلة الدالة $f(x)$ ، استبدل $f(x)$ بـ y ثم بدّل بين x و y ثم أوجد حل y

وأخيراً استبدال y بـ $f^{-1}(x)$ وضع القيـود الموجودة على مجال $f^{-1}(x)$ وتذكر

مجال $f(x)$ = مدى $f^{-1}(x)$
مدى $f(x)$ = مجال $f^{-1}(x)$

مثال 1 أوجد الدلة العكسية لكل دالة مما يلي :

1) $y = x^3 - 5$

$y + 5 = x^3$

$(y + 5)^{1/3} = (x^3)^{1/3} = x$

$x = f^{-1}(y) = (y + 5)^{1/3}$

$f^{-1}(x) = (x + 5)^{1/3}$

2) $y = \dfrac{1}{x + 2}$

$x + 2 = \dfrac{1}{y} \Rightarrow x = \dfrac{1}{y} - 2$

$x = f^{-1}(y) = \dfrac{1}{y} - 2$

$f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} - 2$

تدريب 1 أوجد الدلة العكسية لكل دالة مما يلي :

1) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

2) $y = (x-1)^3$

....

تركيبات الدوال العكسية :

تكون الدالتان f و g عكسيتين إذا وفقط إذا كان

$f[g(x)] = x$ ✓ لكل x في مجال $g(x)$

$g[f(x)] = x$ ✓ لكل x في مجال $f(x)$

ونقول أن g هي الدالة العكسية لـ f وتكتب بالصيغة $g = f^{-1}$ ، وبصورة مكافئة $f = g^{-1}$

مثال 2 إذا كانت $g(x) = \frac{x-9}{4}$, $f(x) = 4x+9$ أوضح أن f و g متعاكستان

الحل: **يجب إثبات أن** $g(f(x)) = x$, $f(g(x)) = x$ ، لكل الأعداد الحقيقية x لدينا

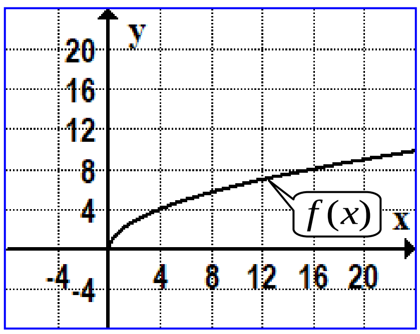
$$f(g(x)) = \cancel{4}\left(\frac{x-9}{\cancel{4}}\right) + 9 = x$$

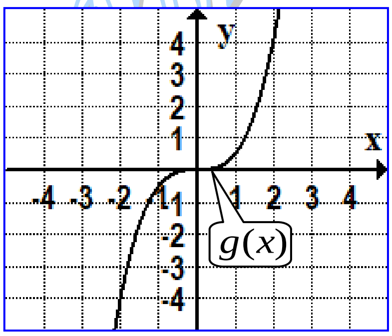
$$g(f(x)) = \frac{(4x+\cancel{9}) - \cancel{9}}{4} = x$$

تدريب 2 إذا كانت $g(x) = \frac{1-2x}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x+2}$ $(x \neq 0, -2)$ أوضح أن: $f(g(x)) = x$, $g(f(x)) = x$

....

تدريب 3 استخدم الرسم البياني لكل دالة لرسم الدالة العكسية لها بيانياً





أكثر الرجال حكمة الذي يظن أنه أقل حكمة!

Amz.math@hotmail.com

تمارين

① أوجد الدالة العكسية وحدد أي قيود في مجالها لكل دالة مما يلي :

1) $f(x)=\sqrt{x+8}$

2) $f(x)=\sqrt{x}-3$

3) $f(x)=\dfrac{4-x}{x}$

4) $f(x)=\dfrac{x-6}{x}$

5) $f(x)=\dfrac{6}{\sqrt{8-x}}$

6) $f(x)=\dfrac{7}{\sqrt{x+3}}$

7) $f(x)=\dfrac{4-x}{2x+1}$

8) $f(x)=\dfrac{6x+3}{x-8}$

② وضّح باستخدام الجبر أن f و g دالتان متعاكستان :

1) $f(x) = -6x + 3$, $g(x) = \dfrac{3-x}{6}$

....

....

....

2) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + 3 \; , x \geq 0$, $g(x) = \sqrt{2x-6}$

....

....

....

3) $f(x) = 2x^3 - 6$, $g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+6}{2}}$

....

....

....

....

4) $f(x) = \dfrac{x-6}{x+2}$, $g(x) = \dfrac{2x+6}{1-x}$

....

....

....

....

③ افترض أن للدالة f دالة عكسية أوجـد قيمة الدالة المحددة بدون إيجاد الدالة العكسية :

1) $f(x) = x^3 + 4x - 1$; $(a) \;\; f^{-1}(-1)$, $(b) \;\; f^{-1}(4)$

$(a)\ 0$, $(b)\ 1$

مساعدة رياضية

$(a) \;\; f^{-1}(-1)$

ضع $f(x) = -1$

ثم أوجد x

....

....

....

2) $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x + 4}$; $(a) \;\; f^{-1}(4)$, $(b) \;\; f^{-1}(2)$

$(a)\ 2$, $(b)\ 0$

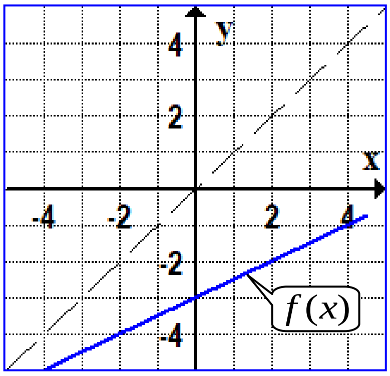
....

....

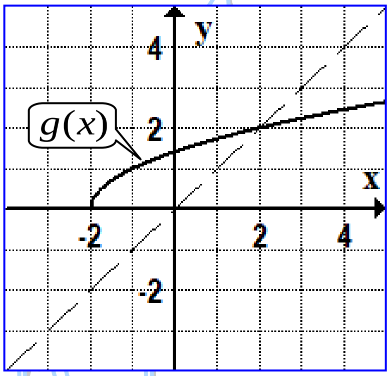
....

④ استخدم الرسم البياني لكل دالة لرسم الدالة العكسية لها بيـانياً

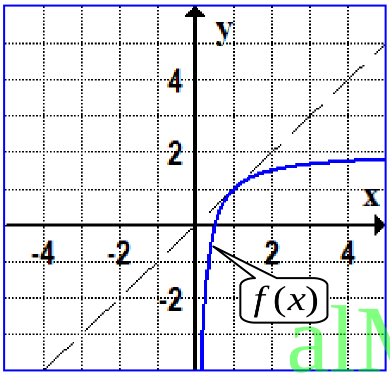
❶



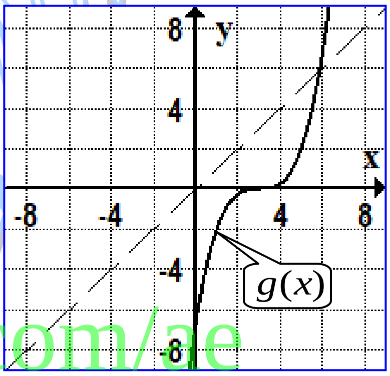
❷



❸

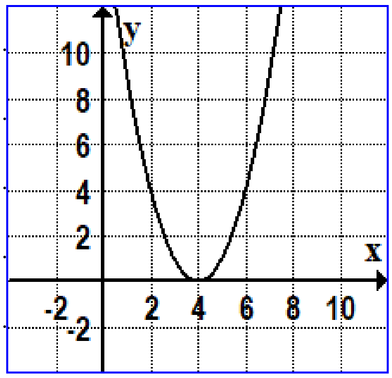


❹



⑤ ضع قيوداً على مجال كل دالة بحيث يكون الدالة الناتجة واحد ـ لواحد ، ثم أوجد معكوسة الدالة

1) $f(x) = (x-4)^2$



....

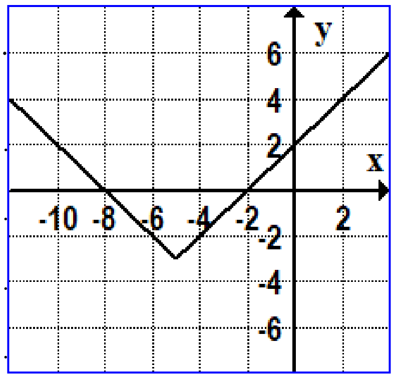
....

....

....

....

2) $f(x) = |x+5| - 3$



....

....

....

....

....

قل لمن ادعى في العلم فلسفة علمت شيئا وغابت عنك أشياء

Amz.math@hotmail.com

⑥ وضّح مجال ومدى كل من f و f^{-1} لكل دالة :

1) $f(x) = \sqrt{x-6}$

2) $f(x) = \sqrt{x} - 3$

3) $f(x) = \dfrac{8x+3}{2x-6}$

⑦ استخدم $f(x) = 3x - 4$ و $g(x) = 2x + 1$ **لإيجاد كل مما يلي :**

1) $[f^{-1} \circ g^{-1}](x)$ 2) $[f \circ g]^{-1}(x)$ 3) $[f^{-1} \cdot g^{-1}](x)$