الوحدة 10 الإحصاء الاستقرائي

:: السابق

- توصلت إلى مقاييس النزعة المركزية والانتشار ونظمّت البيانات الإحصائية.

:: الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - استخدام أشكال التوزيع لتحديد الإحصاء الوصفي المناسب.
  - إنشاء التوزيعات الاحتمالية واستخدامها.
  - استخدام نظرية النهاية المركزية.
  - إيجاد فترات الثقة واستخدامها وإجراء اختبار الفرضية.
  - التحليل والتنبؤ باستخدام بيانات ذات متغيرين.

:: لماذا؟ ▲

- **الهندسة البيئية** للإحصاء أهمية قصوى في الهندسة. ففي الهندسة البيئية، يمكن استخدام اختبار الفرضية لتحديد ما إذا كان للتغير في مستوى انبعاث مادة كيميائية تأثيرٌ هامّ في التلوّث الكلي أم لا. ناهيك عن أنه يمكن استخدام فترات الثقة للمساعدة في اقتراح قيودٍ على الفضلات الناشئة باعتبارها منتجات ثانوية في المياه الجوفية.

القراءة المسبقة اقرأ دليل الدراسة والمراجعة قراءةً سريعةً واستخدمه لوضع تنبؤين أو ثلاثةٍ عن الدروس المستفادة في الوحدة 10.

راجع عمل الطلاب.

Chapter sourced from Precalculus Chapter 11 © 2014 McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

شجّع الطلاب على بدء دراستهم للوحدة بقراءة كل درس مسبقًا. ينبغي عليهم التفكير في خلفيتهم المعرفية وعمل توقعات عن المحتوى. أعطِ وقتًا للمجموعات لمناقشة ما يقرءونه وطرح الأسئلة. أبرز سمات النص مثل عناوين الأقسام ومربعات "المفهوم الأساسي" و "ملخص المفهوم".

مشروع الوحدة

عمل بجدّ

يستخدم الطلاب ما تعلّموه عن الإحصاء الاستقرائي لتقييم الدراسة بعد الدوام المدرسي وعادات العمل.

- كلّف الطلاب بكتابة متوسّط عدد الساعات التي يقضونها في الدراسة كل أسبوع، ومتوسّط عدد الساعات التي يعملون خلالها كل أسبوع، إضافةً إلى جنسهم. وأدرج النتائج على اللوحة.
- اطلب من الطلاب مقارنة الساعات التي يقضيها الطلاب في العمل أو الدراسة بين الذكور والإناث. هل هناك فروقاتٌ بارزة؟ وهل يجيز توزيع البيانات استخدام الوسط أو الوسيط؟
- هل هناك ارتباطٌ بين عدد ساعات العمل والدراسة؟ فإن كان ذلك، فسّر الارتباط. وهل الارتباط دلاليّ إحصائيًا؟
- ما النسبة المئوية من الطلاب الذين يعملون أكثر من خمس ساعاتٍ في الأسبوع؟ وما فترة الثقة عند المستوى 95% للنسبة المئوية من المجتمع الإحصائي لطلاب المدرسة الثانوية الذين يعملون أكثر من خمس ساعاتٍ في الأسبوع؟
- كيف يمكن استخدام العدد المتوسط من ساعات العمل في الأسبوع للتنبؤ بمتوسط عدد من ساعات الدراسة في الأسبوع؟

المفردات الأساسية قدم المفردات الأساسية في الوحدة متبعًا النظام التالي.

تعريف: القيمة الإحصائية المقاومة أقل تأثرًا بالقيم المتطرفة من القيم الإحصائية غير المقاومة.

مثال: يساوي الوسط والوسيط لمجموعة البيانات [10, 13, 15, 17, 20] القيمة 15. ويساوي الوسط والوسيط لمجموعة البيانات [10, 13, 15, 17, 100] القيمتين 31 و 15 على الترتيب.

سؤال: لِمَ يُعدّ الوسيط المتوسطَ الموصى به للبيانات الملتوية؟ للقيم المتطرفة في الطرف الملتوي من التوزيع تأثيرٌ أقلّ في الوسيط من تأثيرها في الوسط.

الاستعداد للوحدة

أجب عن أسئلة التدريب السريع أدناه.

تدريب سريع

أوجد قيمة كل مما يلي.

1. ${}_5P_2$ 20
2. ${}_9P_4$ 3024
3. ${}_8C_3$ 56

a–b. انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

4. **شبكة الإنترنت** يعرض الجدول نتائج استقصاءٍ جرى على 18 طالبًا في مدرسةٍ ثانوية، حيث سئلوا عن عدد الساعات التي قضوها على شبكة الإنترنت خلال الأسبوع الماضي.

الساعات التي قضيت على الإنترنت					
2	3.5	1	8	2.5	7.5
10	4	5.5	3.5	7.5	1.5
4.5	11	3.5	5	8	6.5

a. ارسم مدرجًا إحصائيًا للبيانات.

b. هل كان الطلاب الذين قضوا 3 ساعاتٍ على الإنترنت أقل من الطلاب الذين قضوا 6 ساعاتٍ أم أكثر؟

في التمرينين 5 و 6، أكمل كل خطوة.

a. حوّل البيانات إلى الصورة الخطية تبعًا للنموذج المعطى.

b. مثّل البيانات المحولة إلى الصورة الخطية بيانيًا، وأوجد معادلة الانحدار الخطي.

c. استخدم النموذج الخطي لإيجاد نموذج للبيانات الأصلية.

5–6. انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

5. أسي

x	y
0	2.0
1	0.9
2	6.0
3	17.3
4	34.8
5	58.5

6. تربيعي

x	y
0	11.1
1	40.7
2	149.5
3	548.4
4	2012.1
5	7383.1

المفردات الجديدة

العربية	English
نسبة مئوية	percentiles
متغير عشوائي	random variable
توزيع احتمالي	probability distribution
توزيع ذو حدين	binomial distribution
توزيع طبيعي	normal distribution
قيمة z	z-value
الخطأ المعياري للمتوسط	standard error of the mean
الإحصاء الاستقرائي	inferential statistics
مستوى الثقة	confidence level
قيم حرجة	critical values
فترة الثقة	confidence interval
التوزيع t	t-distribution
اختبار الفرضية	hypothesis test
مستوى الدلالة	level of significance
قيمة p	p-value
معامل الارتباط	correlation coefficient
خط الانحدار	regression line
المتبقي	residual

مراجعة المفردات

الإحصاء p. P33 علم جمع البيانات وتحليلها وتفسيرها وعرضها

المدرج الإحصائي p. P35 بيانات رقمية منظّمة ضمن فترات متساوية ومعروضة باستخدام أشرطة

583

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

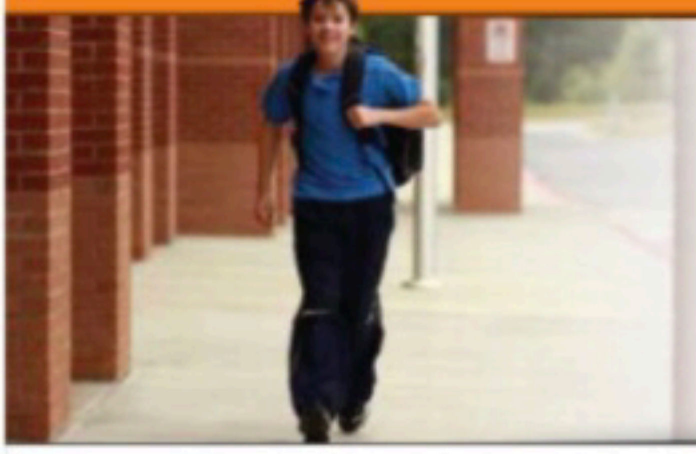
الأسئلة الأساسية

- كيف يمكنك تقويم المعلومات بفاعلية؟
الإجابة النموذجية: أولاً، حدد ما إذا كان مصدر المعلومات موثوقًا به. ثم حلل المعلومات بدقة لتحديد ما إذا كانت مفيدة للموقف المحدد.

- كيف يمكنك استخدام المعلومات لاتخاذ قرارات؟ الإجابة النموذجية: يمكنك البحث عن الاتجاهات، ثم صنع القرار استنادًا إلى ما حدث في الماضي و/أو على نحو ينعكس على المعلومات.

الدرس 1-10 الإحصاء الوصفي

السابق	الحالي	لماذا؟
• أوجدت مقاييس النزعة المركزية والانحرافات المعيارية	1 تحديد أشكال التوزيعات من أجل اختيار إحصاءٍ أكثر ملاءمة. 2 استخدام مقاييس الموقع لمقارنة مجموعتين من البيانات.	• أفادت مجلة المدرسة الثانوية بأنه بناءً على استقصاءٍ خضع له الطلاب، فإن متوسط ووسيط عدد مرات تأخر الطلاب دون عذرٍ بلغا 7 و 5 على الترتيب. وفي حين يمكن استخدام هاتين القيمتين لوصف تمركز بيانات الاستقصاء ومركزها، فإن تمثيلًا بيانيًا واحدًا للبيانات يمكن أن يوضح المقياس الذي يمثل العدد النموذجي لحالات تأخر الطلاب على النحو الأفضل.



المفردات الجديدة

أحادي المتغير univariate
توزيع ملتوٍ نحو اليسار negatively skewed distribution
توزيع متماثل
توزيع ملتوٍ نحو اليمين positively skewed distribution
قيمة إحصائية مقاومة resistant statistic
تجمع cluster
توزيع ثنائي المنوال bimodal distribution
مراكز مئوية percentiles
تمثيل بياني للمركز المئوي percentile graph

1 وصف التوزيعات

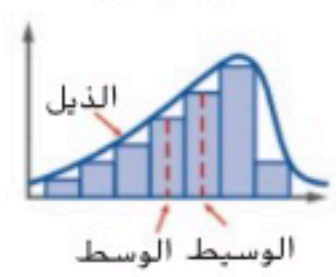
لقد وصفت في الدرس 8-0 توزيعات البيانات **أحادية المتغير** أو ذات المتغير الوحيد رقميًا. وأجريت ذلك عبر حساب عنصري التوزيع التاليين:

- **النزعة المركزية (تمركز البيانات)** باستخدام المتوسط أو الوسيط
- **الانتشار أو التباين** باستخدام الانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة (الأرباع).

لتحديد ملخص الإحصاءات التي ينبغي استخدامها لوصف تمركز مجموعة بياناتٍ وانتشارها بالصورة الأمثل، فيجب عليك تحديد شكل التوزيع. ونعطي فيما يلي ثلاثة أشكالٍ شائعةٍ للتوزيع.

المفهوم الأساسي التوزيعات المتماثلة والملتوية

التوزيع الملتوي نحو اليسار

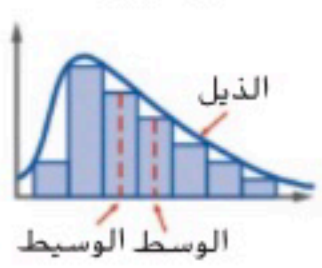


في **التوزيع الملتوي نحو اليسار**، يكون المتوسط أقل من الوسيط، وتقع معظم البيانات إلى الجهة اليمنى، بينما يمتد الذيل إلى الجهة اليسرى.

التوزيع المتماثل

في **التوزيع المتماثل**، تتوزع البيانات بصورةٍ متساويةٍ على كلا طرفي المتوسط، ويكون المتوسط والوسيط متساويين تقريبًا.

التوزيع الملتوي نحو اليمين



في **التوزيع الملتوي نحو اليمين**، يكون المتوسط أكبر من الوسيط، وتقع معظم البيانات إلى الجهة اليسرى، بينما يمتد الذيل إلى الجهة اليمنى.

عندما يكون توزيعٌ متماثلًا على نحوٍ معقول، فيكون المتوسط والوسيط قريبين بعضهما إلى بعض. ولكن في التوزيعات الملتوية، يتوضع المتوسط أقرب إلى الذيل من الوسيط. وتؤدي القيم المتطرفة، وهي القيم شديدة الارتفاع أو الانخفاض في مجموعات البيانات، إلى انحراف المتوسط باتجاه الذيل. ويتأثر الوسيط بصورةٍ أقل بوجود القيم المتطرفة. ولهذا السبب، يطلق على الوسيط اسم **القيمة الإحصائية المقاومة** ويطلق على المتوسط اسم *القيمة الإحصائية غير المقاومة*.

بما أن الانحراف المعياري يقيس انتشار توزيع في ضوء بعد قيم البيانات عن المتوسط، فإن هذه القيمة الإحصائية ليست مقاومةً أيضًا لتأثير القيم المتطرفة. ويقودنا هذا إلى الإرشادات التالية بشأن وصف ملخصات البيانات لوصف التوزيعات.

المفهوم الأساسي اختيار ملخصات الإحصاء

عند اختيار مقياسين للنزعة المركزية والانتشار لوصف توزيعٍ ما، ادرس أولًا شكل التوزيع.

- فإذا كان التوزيع متماثلًا على نحوٍ معقول وخاليًا من القيم المتطرفة، استخدم المتوسط والانحراف المعياري.
- وإذا كان التوزيع ملتويًا أو كانت له قيمٌ متطرفةٌ قوية، فإن ملخص الأعداد الخمسة (القيمة الصغرى، الرّبيع 1، الوسيط، الرّبيع 3، القيمة العظمى) يعطي تلخيصًا أفضل للنمط الكلي للبيانات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 1-10 إيجاد مقاييس النزعة المركزية والانحراف المعياري.

الدرس 1-10 تحديد أشكال التوزيعات لاختيار إحصاءاتٍ أكثر ملاءمة.
استخدام مقاييس الموضع لمقارنة مجموعتين من البيانات.

بعد الدرس 1-10 التعرّف على التوزيع الاحتمالي.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما تعريفا *الوسيط* و*الوسط*؟ الوسط هو مجموع القيم ضمن مجموعةٍ من البيانات مقسومًا على قيمها. والوسيط هو العدد الذي يمثل نقطة المنتصف في مجموعة البيانات.

عند تحديد شكلِ توزيعٍ ما، ركّز على النقاط العليا الرئيسة في التمثيل البياني بدلًا من الارتفاعات والانخفاضات الثانوية.

مثال 1 التوزيع الملتوي

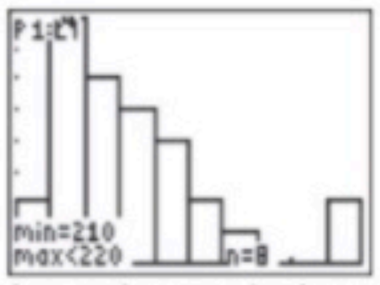
العقارات يعرض الجدول أسعار بيع عينةٍ من المنازل الجديدة في أحد الأحياء المحلية.

أسعار بيع المنازل الجديدة (آلاف الدراهم)				
248	219	234	250	225
299	205	212	215	245
257	228	221	233	212
220	213	231	212	266
238	249	292	223	235
218	227	209	242	217

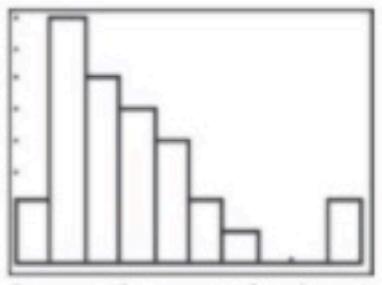
a. أنشئ مدرجًا إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

على حاسبة التمثيل البياني، انقر على الزر STAT Edit وأدخل البيانات في L1. ثم شغّل Plot1 ضمن القائمة STAT PLOT واختر . مثّل المدرج الإحصائي بيانيًا عبر نقر ZoomStat أو نقر GRAPH وضبط النافذة يدويًا.

يبدي التمثيل البياني ذروةً وحيدة. ويمكنك باستخدام السّمة TRACE تحديد أن هذه الذروة تمثل أسعار البيع التي تتراوح بين AED 210 و AED 220 ألفًا.



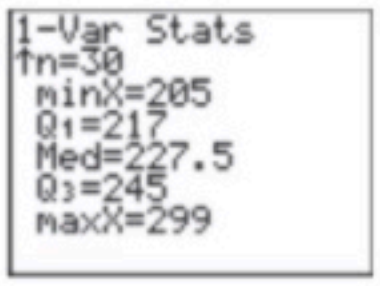
[200, 300] scl: 10 by [0, 8] scl: 1


[200, 300] scl: 10 by [0, 8] scl: 1

التمثيل البياني ملتوٍ إيجابيًا. حيث يبدو أن معظم أسعار البيع تقع بين AED 210 و AED 250 ألفًا. ولكن قليلًا منها أعلى من ذلك بكثير، ولذلك يتلاشى ذيل التوزيع نحو الجهة اليمنى.

b. صِف تمركز البيانات وانتشارها باستخدام إما المتوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علِّل اختيارك.

بما أن التوزيع ملتوٍ، استخدم ملخص الأعداد الخمسة بدلًا من المتوسط والانحراف المعياري لوصف تمركز البيانات وانتشارها بإيجاز. ولعرض هذا الملخص، انقر على STAT، واختر 1-Var Stats من القائمة الفرعية CALC ومرّر نحو الأسفل.



يشير ملخص الأعداد الخمسة (Q1 و minX و Med و Q3 و maxX) إلى أنه في حين كانت تتراوح الأسعار بين AED 205 و AED 299 ألفًا، كان سعر البيع الوسيط يساوي AED 227.5 ألفًا وكانت نصف الأسعار بين AED 217 و AED 245 ألفًا.

تمرين موجّه

1. **درجات النشاط المخبري** يعرض الجدول درجات النشاط المخبري لجميع الطلاب في مادة العلوم.

A. أنشئ مدرجًا إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

B. صِف تمركز البيانات وانتشارها باستخدام إما المتوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك.

درجات النشاط المخبري (نسبة مئوية)					
72	84	67	80	75	87
86	76	89	91	96	74
68	83	80	76	63	98
92	73	80	88	94	78

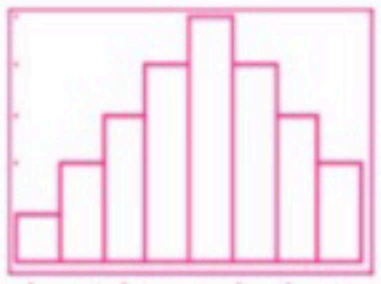
تلميح تقني

عرض الخانة يدعى كل شريطٍ في حاسبة التمثيل البياني *بالخانة*. وتختار عروض الخانات من قبل الحاسبة عند استخدام السمة ZoomStat. ويمكن تعديل عرض الخانة من خلال تغيير البارامتر Xscl ضمن WINDOW. ويؤثر العرض الصغير أو الزائد للخانة في الشكل الظاهري للتوزيع.

انتبه!

اتجاه الالتواء يشير ذيل التوزيع إلى اتجاه التواء التوزيع وليس إلى ذروته.

1A. التوزيع متماثل وذو نقطة عليا واحدة.


[60, 100] scl: 5 by [0, 5] scl: 1

1B. بما أن للبيانات توزيعًا متماثلًا، استخدم المتوسط والانحراف المعياري. كانت الدرجة المتوسطة تساوي 81.3% عند انحرافٍ معياري عن هذه القيمة يساوي 9.3%.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

- ما مقياس النزعة المركزية الذي يصف على النحو الأفضل نقاطًا متوافقةً جدًا في لعبة البولينغ؟ الوسط، لأنه لا توجد قيمٌ متطرفةٌ للنقاط
- تسجّل هلا العدد نفسه من النقاط تقريبًا عند ممارسة لعبة البولينغ، ولكنها ضاعفت من النقاط التي تسجلها في العادة خلال أحد الأشواط. فما مقياس النزعة المركزية الذي يصف على النحو الأفضل مستوى مهارة هلا؟ الوسيط، لأنه لا توجد نقاط متطرفة كبيرة.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 الجولف يضرب عشرون عضوًا من أعضاء فريق الجولف الكرة حتى أقصى مسافةٍ ممكنة. يعرض الجدول المسافة التي أوصل كل عضوٍ من أعضاء الفريق كرته إليها.

المسافة المقطوعة (متر)				
190	190	190	185	185
200	200	200	200	200
210	210	210	210	210
280	270	215	215	215

a. أنشئ مدرجًا إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع. انظر إلى الهامش السفلي واطّلع على التمثيل البياني. التمثيل البياني ملتوٍ التواءً موجبًا. وتتراوح مسافة معظم الضربات بين 185 و 215 m، ولكن بعض الضربات بلغت مسافةً أبعد بكثير.

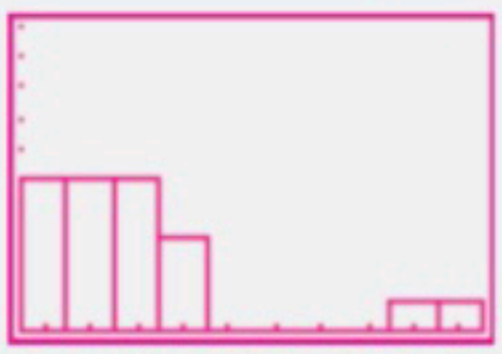
b. لخّص مركز البيانات وانتشارها باستخدام الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. وبرّر اختيارك. ملخص الأعداد الخمسة؛ يساوي الوسط 205 m. ويتراوح المدى الربيعي من 195 إلى 212.5 m.

1 وصف التوزيعات

يوضح **المثال 1** متى يكون من الملائم استخدام الوسط أو الوسيط (للنزعة المركزية) والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة (للتوزيع). ويوضح **المثال 2** كيفية تلخيص البيانات ثنائية المنوال. ويوضح **المثال 3** كيفية استخدام المخطط الصندوقي، أو مخطط الصندوق ذي العارضتين، لوصف توزيع مجموعة من البيانات.

إجابة إضافية (مثال إضافي)

1a.


[185, 285] scl: 10 by [0, 10] scl: 1

نصيحة دراسية

التوزيع المنتظم ثمّة نوعٌ آخر من أنواع التوزيع، يعرف *بالتوزيع المنتظم*، وفيه يكون لكل قيمةٍ التكرار النسبي نفسه، كما هو موضح أدناه.

لا تكون توزيعات البيانات متماثلةً أو ملتويةً على الدوام. بل إن البيانات تقع أحيانًا في مجموعاتٍ جزئية أو **تجمّعات**. فإذا كان توزيعٌ ما يضم فجوةً في المنتصف، فقد ينتج تجمّعان منفصلان للبيانات. ويعرف توزيع البيانات ذو المنوالين، وبالتالي ذو الذروتين، باسم **التوزيع ثنائي المنوال**.

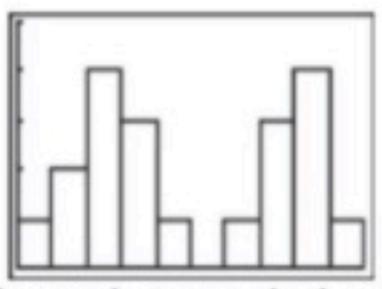
في البيانات التي تمثل تفضيل موضوع ما، يمكن أن يشير التوزيع ثنائي المنوال إلى استقطابٍ للآراء. ولكن في معظم الأحيان، يشير التوزيع ثنائي المنوال إلى أن بيانات عينةٍ تأتي من توزيعين متداخلين أو أكثر.

مثال 2 من الحياة اليومية التوزيع ثنائي المنوال

الرسوم الدراسية **يعرض الجدول الكلفة السنوية للرسوم الدراسية لعينةٍ من 20 جامعة تشارك في معرض التعاون الجامعي.**

تكاليف الرسوم الدراسية الجامعية (AED)				
32,000	10,100	31,000	11,000	31,500
5500	35,000	10,800	3600	11,500
7400	15,100	18,200	25,600	33,100
36,200	32,000	30,400	14,300	12,400

a. أنشئ مدرجًا إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.


[0, 40,000] scl: 4000 by [0, 6] scl: 1

لا يضم المدرج الإحصائي لبيانات ذروةً رئيسةً واحدةً بل اثنتين. ولذلك فإن التوزيع ليس متماثلًا ولا ملتويًا، بل إنه ثنائي المنوال. ويقترح التجمّعان المنفصلان وجود خليطٍ من نوعين من الطلاب في مجموعة البيانات. ومن المحتمل أن الجامعات الـ 11 ذات الرسوم الأقل هي جامعات حكومية وأن الجامعات الـ 9 ذات الرسوم الأعلى هي جامعات خاصة.

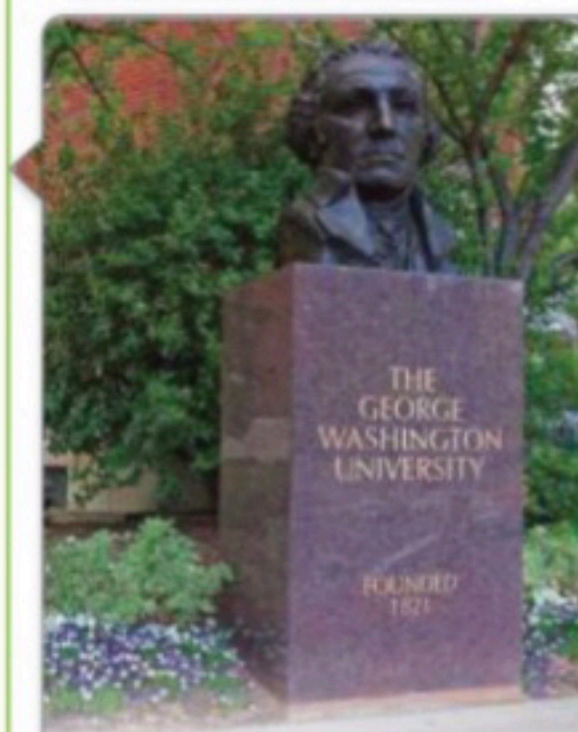
b. صِف تمركز البيانات وانتشارها باستخدام إما المتوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك.

بما أن التوزيع ثنائي المنوال، فإن استخدام تلخيصٍ كليٍ للتمركز والانتشار سيعطي تمثيل بياناتٍ يفتقر للدقة. وبدلًا من ذلك، عليك تلخيص تمركز كل تجمّع وانتشاره. وبما أن كل تجمّع يبدو متماثلًا بوضوح، أدخل كل تجمعٍ بصورةٍ منفصلةٍ ولخص البيانات باستخدام المتوسط والانحراف المعياري لكل تجمّع.

```
1-Var Stats
 x̄=31866.66667
 Σx=286800
 Σx²=9211820000
 Sx=3009.568075
 σx=2837.447993
↓n=9
```

```
1-Var Stats
 x̄=10900
 Σx=119900
 Σx²=1487370000
 Sx=4248.05838
 σx=4050.364742
↓n=11
```

تساوي التكلفة المتوسطة للتجمع 1 مبلغ AED 10,900 عند انحرافٍ معياري يساوي AED 4050 تقريبًا، في حين تساوي التكلفة المتوسطة للتجمّع 2 القيمة AED 31.866 عند انحرافٍ معياريٍ يساوي AED 2837 تقريبًا.



الربط بالحياة اليومية

خلال عام 2008، كانت رسوم جامعة جورج واشنطن هي الأعلى في الولايات المتحدة الأمريكية، وذلك بواقع AED 37,820 في العام، ويساوي ذلك تقريبًا 82% من وسيط دخل العائلة السنوي البالغ AED 46,326.

المصدر: مجلة فوربس

تمرين موجّه

2. **المضمار** يعرض الجدول عدد الدقائق التي ركض خلالها 30 عضوًا في فريق المدرسة الثانوية خلال حصةٍ تدريبية.

أزمنة حصة التدريب (min)									
26	36	31	58	51	29	56	23	61	46
30	50	45	22	64	49	34	42	53	55
41	37	28	54	32	50	59	48	62	39

A. أنشئ مدرجًا إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع. **انظر ملحق إجابات الوحدة 10.**

B. صِف تمركز البيانات وانتشارها باستخدام إما المتوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك.

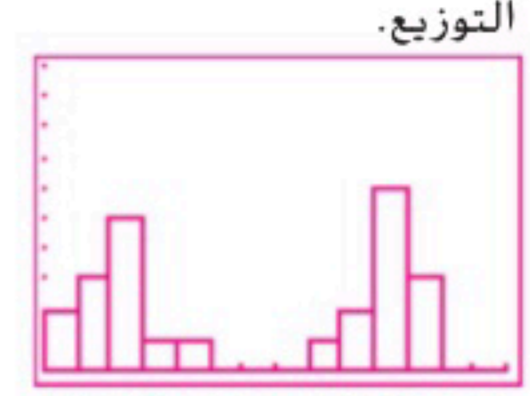
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال إضافي

2 **الهواتف الخلوية** سئل أشخاصٌ ينشطون في مهنتين اثنتين كم دفعوا مقابل هواتفهم المخصصة للعمل.

أسعار الهواتف الخلوية (AED)				
55	55	55	50	50
60	60	60	60	60
95	95	90	70	65
100	100	100	100	100
	105	105	105	100

a. أنشئ مدرجًا إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.


[50, 120] scl: 5 by [0, 10] scl: 1

التوزيع ثنائي المنوال.

b. لخّص مركز البيانات وانتشارها إما باستخدام الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. وبرر اختيارك. الإجابة النموذجية: تجمّع البيانات السفلي ملتوٍ التواءً موجبًا. إذًا فإن ملخص الأعداد الخمسة يوضح أن الأسعار تتراوح بين AED 50 و AED 70، وأن الوسط يساوي AED 60، وأن نصف الأسعار تقع بين AED 55 و AED 60. وبما أن التجمّع العلوي متماثل، فيمكن استخدام الوسط AED 99.58 والانحراف المعياري AED 4.50 على الترتيب لوصف مركز البيانات وانتشارها.

إرشاد للمعلمين الجدد

التوزيعات الملتوية قد يخلط الطلاب بين التوزيعات الملتوية نحو اليمين أو نحو اليسار. فذكّرهم أن التوزيع الملتوي نحو اليسار هو توزيعٌ ملتوٍ بعيدًا عن الجهة اليسرى، وليس إلى الجهة اليسرى.

التركيز على محتوى الرياضيات

الالتواء في التوزيعات الملتوية نحو اليسار، يكون الوسط أقل من الوسيط الأقل أيضًا من المنوال: الوسط < الوسيط < المنوال. وفي التوزيعات الملتوية نحو اليمين، يكون الوسط أكبر من الوسيط الأكبر من المنوال: الوسط > الوسيط > المنوال. وفي التوزيعات المتماثلة، تتجمّع القياسات الثلاث معًا.

يمكنك أيضًا دراسة مخطط الصندوق ذي العارضتين أو *مخطط الصندوق* لمجموعةٍ من البيانات من أجل تحديد شكل التوزيع. ولتحديد التماثل أو الالتواء من خلال مخطط الصندوق، عليك أن تأخذ في الحسبان موقع الخط الذي يمثل الوسيط وطول كل "عارضة".

المفهوم الأساسي المخططات الصندوقية ذات العارضين المتماثلة والملتوية

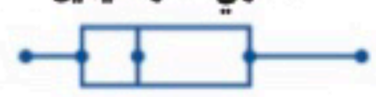
الملتوي نحو اليسار

العارضة اليسرى أطول من العارضة اليمنى، والخط الذي يمثل الوسيط أقرب إلى Q_3 من Q_1.

المتماثل

العارضتان من الطول نفسه، والخط الذي يمثل الوسيط يقع تمامًا بين Q_1 و Q_3.

الملتوي نحو اليمين



العارضة اليمنى أطول من العارضة اليسرى، والخط الذي يمثل الوسيط أقرب إلى Q_1 من Q_3.

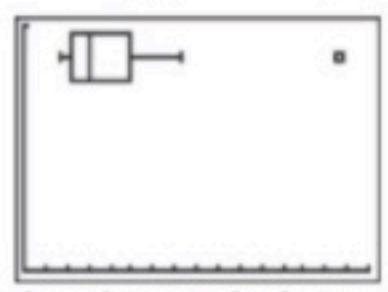
مثال 3 وصف التوزيع باستخدام المخطط الصندوقي

عدد السكان يعرض الجدول عدد السكان بالآلاف خلال إحدى السنوات الأخيرة في خمس عشرة منطقةً في الإمارات العربية المتحدة.

عدد السكان (بالآلاف)				
151	95	303	89	186
362	137	109	152	118
102	226	139	736	248

a. أنشئ مخططًا صندوقيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

أدخل البيانات في L1 على حاسبةٍ للتمثيل البياني. ثم شغّل Plot1 ضمن القائمة STAT PLOT واختر . مثّل المخطط الصندوقي بيانيًا عبر نقر ZoomStat أو نقر WINDOW وضبط النافذة يدويًا.



[0, 800] scl: 50 by [0, 1] scl: 0.5

بما أن العارضة اليمنى أطول من العارضة اليسرى وبما أن الخط الأيمن الذي يمثل الوسيط أقرب إلى Q_1 منه إلى Q_3، فالتوزيع ملتوٍ إيجابيًا. لاحظ أن للتوزيع قيمةً متطرفةً عند 736.

b. صِف تمركز البيانات وانتشارها باستخدام إما المتوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك.

```
1-Var Stats
↑n=15
 minX=89
 Q1=109
 Med=151
 Q3=248
 maxX=736
```

بما أن التوزيع ملتوٍ، استخدم ملخص الأعداد الخمسة. حيث يشير حيث يشير هذا الملخص أنه حين كانت عدد السكان يتراوح بين 89,000 و 736,000 نسمة، كان وسيط عدد السكان 151,000 نسمة. كان عدد السكان في النصف الأوسط من البيانات ضمن المجال 248,000 - 109,000 أو 139,000. وهو المدى الربعي.

تمرين موجّه

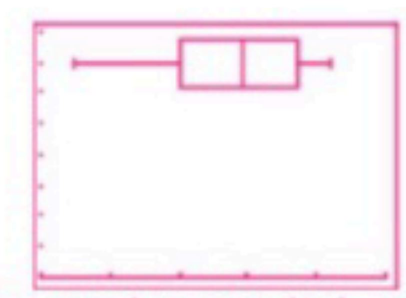
3. **الشاحنات** يعرض الجدول تكاليف اثنتي عشرة شاحنةً متماثلةً من حيث الشكل والطراز وعام التصنيع في موقع إلكترونيٍ لبيع السيارات المستعملة

تكاليف الشاحنات المستعملة (AED)		
9200	8200	9000
8500	8900	7800
7800	7500	6500
5500	6400	8000

A. أنشئ مخططًا صندوقيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

B. صِف تمركز البيانات وانتشارها باستخدام إما المتوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك.

3A. العارضة اليسرى أطول من العارضة اليمنى، ولكن الوسيط ليس أقرب إلى Q_1 ولذلك فإن التوزيع ليس ملتويًا ولا متماثلًا.



[5000, 10,000] scl: 1000 by [0, 1] scl: 0.125

مراجعة المفردات

المدى الربعي هو الفرق بين الرّبيع الأعلى والرّبيع الأدنى في مجموعة بيانات

3B. بما أنه ليست هناك قيمٌ متطرفةٌ للبيانات، فيمكن استخدام المتوسط AED 7775 والانحراف المعياري AED 1092.49 لوصف توزيع البيانات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال إضافي

3. **مبيعات المنازل** يعرض الجدول أسعار منازل بيعت حديثًا من قبل وسيطٍ عقاري.

أسعار بيع المنازل الجديدة (آلاف الدراهم)				
152	150	115	110	95
168	165	165	156	154
184	177	175	170	168

a. أنشئ مخططًا صندوقيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

[90, 190] scl: 1 by [0, 10] scl: 1

التوزيع ملتوٍ التواءً نحو اليسار.

b. صِف مركز البيانات وانتشارها باستخدام إما الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك.

```
1-Var Stats
↑n=15
 minX=95
 Q1=150
 Med=165
 Q3=170
 maxX=184
```

بما أن التوزيع ملتوٍ، استخدم ملخص الأعداد الخمسة. يساوي الوسيط AED 165,000. ويساوي المدى الرّبعي AED 20,000. ويساوي المدى AED 89,000.

التدريس المتمايز AL OL

المتعلّمون أصحاب النمط الطبيعي اطلب من الطلاب الاحتفاظ بسجلٍ يومي لعدد الطيور التي يرونها أثناء قدومهم إلى المدرسة. وبعد جمعهم لبياناتٍ لمدة 14 يومًا، اطلب منهم تقديم ملخصٍ عن مشاهداتهم يتضمن ما يلي: جدولًا تكراريًا ووصفًا لمجموعة البيانات، وقد يتمثل هذا الوصف بالوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة اعتمادًا على نوع التوزيع.

2 مقاييس الموقع

مقاييس الموقع تحدّد الأرباع الإحصائية التي يعطيها ملخص الأعداد الخمسة مواقع قيم البيانات ضمن التوزيعات. ولهذا السبب تعدّ مخططات الصندوق الأكثر فائدةً في المقارنات طرف-إلى-طرف لتوزيعين أو اكثر.

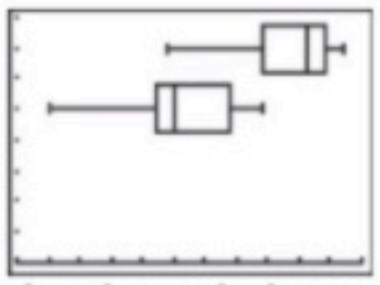
مثال 4 مقارنة المواقع باستخدام المخططات الصندوقية

كرة السلة يعرض الجدول عدد المباريات التي فاز بها فريق الوحدة خلال فترتين زمنيتين مختلفتين مدّة كلٍ منهما 15 عامًا. أنشئ مخططين صندوقيين متجاورين لمجموعتي البيانات. ثم استخدم طريقة العرض هذه لمقارنة التوزيعات.

فترة الأعوام الـ 15 الأولى				
49	52	59	57	60
60	54	62	59	58
54	48	34	44	56

فترة الأعوام الـ 15 الثانية				
48	32	35	33	15
36	19	36	35	49
44	36	45	33	24

أدخل البيانات في L1 و L2. ثم شغّل Plot1 و Plot2 ضمن القائمة STAT PLOT واختر . ومثّل المخطط الصندوقي بيانيًا عبر نقر ZoomStat أو نقر GRAPH وضبط النافذة يدويًا.



[10, 65] scl: 5 by [0, 1] scl: 0.5

مقارنة مقاييس الموقع

إن العدد الوسيط من المباريات التي فاز بها الفريق في كل موسمٍ خلال فترة الأعوام الـ 15 الأولى أكبر من وسيط المباريات التي فاز بها الفريق في فترة الأعوام الـ 15 الثانية. ويساوي الربيع الأول لفترة الأعوام الـ 15 الأولى القيمة العظمى لفترة الأعوام الـ 15 الثانية. ويعني ذلك أن 75% من قيم البيانات لفترة الأعوام الـ 15 الأولى أكبر من أيٍ من القيم في الفترة الثانية. ولذلك يمكن أن نستنتج أن أداء فريق الوحدة كان أكثر نجاحًا بصورةٍ كبيرةٍ خلال فترة الأعوام الـ 15 الأولى مقارنةً بالفترة الثانية.

مقارنة الانتشار

إن انتشار النصف الأوسط من البيانات، والذي يمثله الصندوق، هو نفسه تقريبًا في كلّ توزيع. ولذلك فإن التباين في عدد المباريات التي حقق فيها الفريق الفوز في كل موسمٍ خلال تلكما الفترتين كان نفسه تقريبًا.

تمرين موجّه

4. **البيسبول** يعرض الجدولان عدد الركضات الكاملة المحققة في دوريي عام 1927 و 2007 من قبل أفضل 20 لاعبًا في تسجيل الركضات. شكّل مخططين صندوقيين متجاورين لمجموعتي البيانات. ثم استخدم طريقة العرض هذه لمقارنة التوزيعين. **انظر الهامش.**

2007				
40	32	47	31	34
34	33	35	30	46
32	54	31	33	32
36	31	34	50	35

1927				
19	10	13	30	16
14	18	14	12	60
30	14	47	14	15
12	20	18	26	17

إضافةً إلى الأرباع الإحصائية، يمكنك أيضًا استخدام *النسب المئوية* لتحديد الموقع النسبي لقيمةٍ مفردةٍ ضمن مجموعةٍ من البيانات. وتقسم **النسب المئوية** التوزيع إلى 100 مجموعة متساوية ويرمز لها بـ $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{99}$. النسبة المئوية التي ترتيبها n أو P_n هي القيمة التي تكون عندها $n\%$ الخاصة بالبيانات أقل من P_n و $(100 - n)\%$ الخاصة بالبيانات أكبر أو تساوي P_n. ويمكن أن تكون النسبة المئوية الأعلى للبيانات هي النسبة المئوية التي رتبتها 99.

يستخدم **التمثيل البياني المئوي** القيم التي يستخدمها التمثيل البياني للتكرار النسبي التراكمي نفسها، باستثناء أنه يعبّر عن التناسبات بالنسب المئوية.

نصيحة دراسية

الكسور الربيعات والنسب المئوية نوعان من *الكسور*، وهي أعداد تقسم مجموعةً مرتبةً من البيانات إلى مجموعاتٍ متساوية. و*الأعشار* تقسم مجموعة البيانات إلى مجموعاتٍ متساويةٍ من عشرة.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

2 مقاييس الموضع

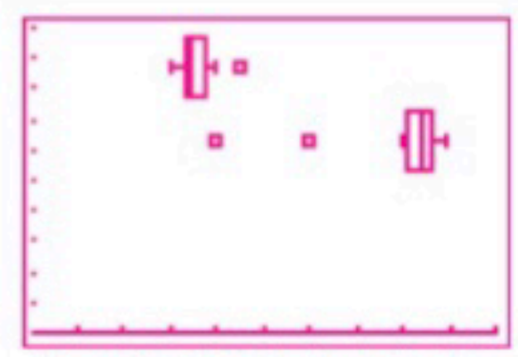
يعرض **المثال 4** كيفية استخدام المخططات الصندوقية لمقارنة توزيعات مجموعاتٍ من البيانات. ويعرض **المثال 5** كيفية إنشاء تمثيلٍ بيانيٍ للمراكز المئوية واستخدامه.

مثال إضافي

4. **الألعاب** سجّلت سنديّة وسالي النقاط التالية في إحدى الألعاب الحاسوبية الجديدة. أنشئ مخططين صندوقيين متجاورين لمجموعتي البيانات. ثم استخدمهما لمقارنة التوزيعين.

نقاط سندية					
35	35	34	32	30	30
45	40	38	38	36	35

نقاط سالي					
84	82	82	80	60	40
89	88	87	85	85	84

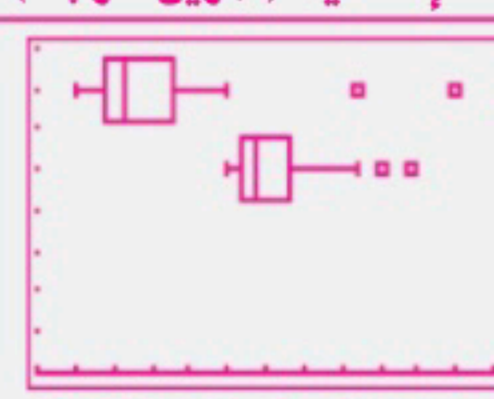


[1, 100] scl: 10 by [0, 10] scl: 1

وكانت النقاط الوسيطة التي أحرزتها سالي والبالغة 84 أعلى بكثير من النقاط الوسيطة لسندية والبالغة 35. والرّبيع الأول في توزيع نقاط سالي (82) أعلى بكثير من الربيع الثالث لسندية (38)، ما يجعل الفرق كبيرًا. والتوزيع الخاص بسالي ملتوٍ نحو اليسار، بينما التوزيع الخاص بسندية ملتوٍ نحو اليمين.

إجابات إضافية (تمرين موجه)

4.



[5, 65] scl: 5 by [0, 1] scl: 0.125

الإجابة النموذجية: يفوق العدد الوسطي من الركضات الكاملة المحققة عام 2007 عدد الركضات الكاملة المحققة عام 1927 في لعبة البيسبول. وتساوي القيمة العظمى في التمثيل البياني لعام 1927 تقريبًا القيمة الصغرى في التمثيل البياني لعام 2007. وهذا يعني أن 100% من قيم البيانات في التمثيل البياني لعام 2007 أكبر من جميع قيم البيانات في التمثيل البياني لعام 1927، باستثناء القيم المتطرفة. ولذلك، يمكن أن نستنتج أن عدد الركضات الكاملة المحققة عام 2007 كان أعلى دلاليًا من تلك المحققة عام 1927. وكلٌّ من التوزيعين ملتوٍ التواءً موجبًا. بيد أن انتشار النصف الأوسط من البيانات في التمثيل البياني لعام 2007 أصغر منه في التمثيل البياني لعام 1927. ولذلك كان تباين الركضات الكاملة عام 1927 أكبر.

يمكنك استخدام تمثيلٍ بيانيٍ مئويٍ لتقدير المركز المئوي لقيمةٍ محددةٍ لمتغير.

مثال 5 إنشاء تمثيلٍ بياني للنسب المئوية واستخدامه

المعدّل يوضح الجدول التراكمي الخاص بالمعدّلات التراكمية لـ 200 طالبٍ فيِ مدرسة السلام الثانوية.

الحدود الخاصة بالفصل	f	الحدود الخاصة بالفصل	f
2.00–2.25	10	3.00–3.25	36
2.25–2.50	28	3.25–3.50	32
2.50–2.75	30	3.50–3.75	26
2.75–3.00	32	3.75–4.00	6

a. أنشئ تمثيلًا بيانيا مئويًا للبيانات.

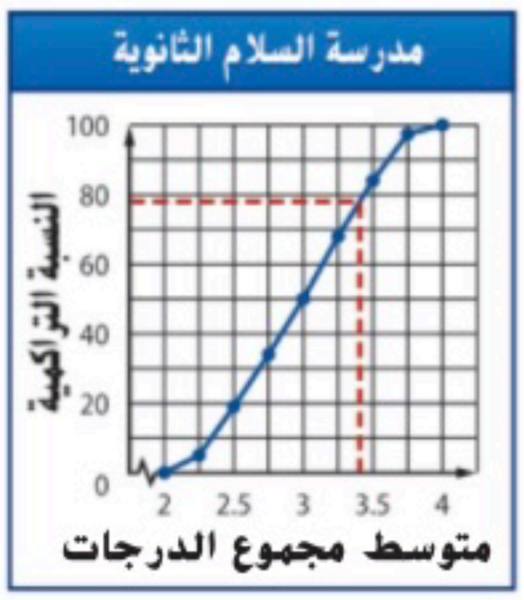
أولًا، أوجد التكرارات التراكمية. ثم أوجد النسب المئوية التراكمية عبر التعبير عن التكرارات التراكمية في صورة نسبٍ مئوية. ونوضح هنا الحسابات الخاصة بأول صفّين دراسيين.

الحدود الخاصة بالفصل	f	التكرار التراكمي	النسب المئوية التراكمية
2.00–2.25	10	10	$\frac{10}{200}$ أو 5%
2.25–2.50	28	10 + 28 أو 38	$\frac{38}{200}$ أو 19%
2.50–2.75	30	68	34%
2.75–3.00	32	100	50%
3.00–3.25	36	136	68%
3.25–3.50	32	168	84%
3.50–3.75	26	194	97%
3.75–4.00	6	200	100%

وأخيرًا، مثل البيانات بيانيًا مع الحدود الخاصة بكل صفٍ على طول المحور الأفقي x ومثّل النسبة المئوية التراكمية على طول المحور الرأسي y كما هو موضح.

b. قدّر المركز المئوي الذي يعطيه معدّل تكراري يساوي 3.4 في هذا التوزيع، وفسّر معناه.

أوجد 3.4 على المحور الأفقي x وارسم مستقيمًا رأسيًا على التمثيل البياني. تقابل هذه النقطة الموجودة على التمثيل البياني النسبة المئوية الثامنة والسبعين تقريبًا. ولذلك يكون للطالب ذي المعدل التراكمي 3.4 متوسطٌ أفضل للدرجات النقطية من 78% من الطلاب في مدرسة السلام الثانوية.



انتبه!
المركز المئوي مقابل النسبة المئوية *النسب المئوية* ليست نفسها *المراكز المئوية*. حيث إن الطالب إن حلّ 85 مسألة صحيحة من أصل 100، فإنه يحصل على النسبة 85 المئة. وهذا لا يحدد إن كانت الدرجة التي حصل عليها عاليةً أو متدنيةً بالمقارنة مع بقية أفراد الفصل الدراسي.

تمرين موجّه **5A–B. انظر الهامش.**

5. **الطول** يعطي الجدول التوزيع التكراري لأطوال الفتيات خلال فصل مقدمة في التفاضل والتكامل لدى الآنسة خولة.

A. أنشئ تمثيلًا للمراكز المئوية للبيانات.

B. قدّر المركز المئوي لفتاةٍ طولها 169 سنتيمترًا في هذا التوزيع، وفسّر معناه.

الحدود الخاصة بالفصل	التكرار (f)
146.5–154	11
154–161.5	15
161.5–169	15
169–176.5	12
176.5–184	7

انتبه!
استيعاب المراكز المئوية إن القول بأن طول فتاةٍ ما يقع في التمركز المئوي الخامس والسبعين لا يعني أن طولها يساوي 75% من طولٍ مثاليٍ ما. بل إن طولها أكبر من أطوال 75% من أطوال جميع الفتيات في فصل مقدمة في حساب التفاضل والتكامل.

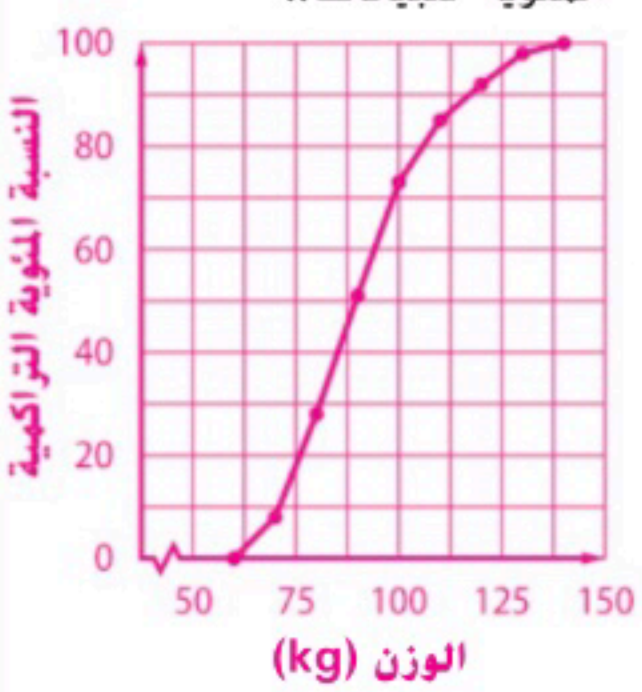
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال إضافي

5 **كرة القدم** يعطي الجدول التوزيع التكراري لأوزان لاعبي كرة القدم من 11 فريقًا.

مدى الأوزان (kg)	التكرار
55–63	46
64–72	120
73–81	135
82–90	130
91–99	70
100–108	40
109–117	34
118–126	13

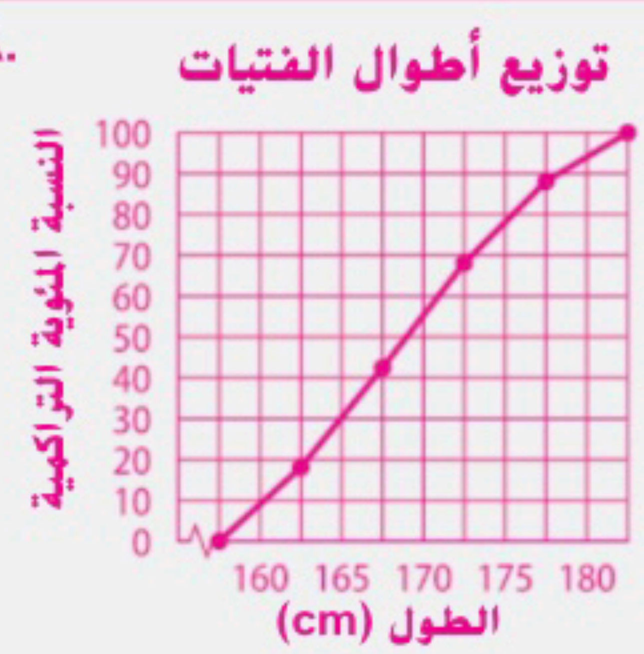
a. أنشئ تمثيلًا بيانيا للمراكز المئوية للبيانات..



b. قدّر المركز المئوي للاعبٍ وزنه 110 كيلوجرامات في هذا التوزيع، وفسّر معناه. المركز المئوي 79 تقريبًا؛ لاعب كرة القدم أثقل من حوالي 79% من اللاعبين الآخرين الذين يشملهم التوزيع.

إجابات إضافية (تمرين موجه)

5A.



5B. يقابل الطول 172 سنتيمترًا المركز المئوي الـ 70 على وجه التقريب. ولذلك، فإن فتاةً طولها 172 سنتيمترًا أطول من حوالي 70% من الفتيات في الصف الدراسي.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 10-1 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

إرشاد للمعلمين الجدد

ملخص الأعداد الخمسة عند حساب ملخص الأعداد الخمسة يدويًا، فقد يعاني الطلاب من صعوباتٍ في التعامل مع مجموعات البيانات التي تضم عددًا زوجيًا من العناصر. أدرج هذه الخطوات على اللوحة.

1. اكتب البيانات بترتيبٍ تنازلي.
2. أوجد وسيط البيانات.
3. قسّم البيانات إلى مجموعتين متساويتين. ثم كرر الخطوة 2 لكلا المجموعتين لإيجاد الرّبيعين الأول والثالث.

إجابات إضافية

1a.

[135, 165] scl: 5 by [0, 8] scl: 1

التمثيل البياني ملتوٍ نحو اليسار. حيث وقعت معظم حالات الهبوط بين 155 و 160 kmph. في حين حدث القليل منها عند أكثر من 160 kmph أو أقل من 140 kmph.

1b. الإجابة النموذجية: بما أن التوزيع ملتوٍ، فيمكن استخدام ملخص الأعداد الخمسة لوصف توزيع البيانات؛ تراوحت سرعات الهبوط بين 138 و 162 kmph. وكانت سرعة الهبوط الوسيطة 152.5 kmph. وكان نصف السرعات يتراوح بين 147 و 157.5 kmph.

التمارين

في التمارين 4-1، أكمل كل خطوة.

b. أنشئ مدرجًا إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

B. صِف تمركز البيانات وانتشارها باستخدام إما المتوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك. (المثالان 1 و 2)

1. **الطيران** يعرض الجدول سرعات الهبوط بالميل في الساعة لـ 20 رحلة طيران تجارية في أحد المطارات. **انظر الهامش.**

سرعات الهبوط (knph)			
150	157	153	145
155	158	158	162
149	142	138	154
156	161	146	148
158	144	151	152

انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

2. **الحواسيب** يعرض الجدول أسعار التجزئة لحواسيب محمولةٍ ومكتبيةٍ في أحد متاجر الإلكترونيات.

أسعار الحواسيب (AED)		
950	1000	975
1150	450	1075
675	1250	540
1025	1180	925
580	950	890

3. **البولينغ** يتراوح عدد النقاط في البولينغ بين 0 و 300. يعرض الجدول عدد النقاط التي أحرزها لاعبون مختارون عشوائيًا في إحدى صالات البولينغ. **انظر ملحق إجابات الوحدة 10.**

نقاط البولينغ				
116	81	234	173	75
61	205	92	219	156
134	259	273	53	241
105	190	94	127	235
228	248	271	46	112
99	223	142	217	68

انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

4. **الرواتب** يتراوح الراتب الإبتدائي لموظفٍ في إحدى الشركات الجديدة بين AED 20,000 و AED 90,000. ويعتمد الراتب الإبتدائي جزئيًا على عدد سنوات الخبرة السابقة للعامل ومستوى المنصب الذي عُين فيه. يعرض الجدول الرواتب الإبتدائية لجميع المعيّنين حديثًا في الشركة خلال العام السابق.

الرواتب (آلاف الدراهم)			
24	40	34	59
48	52	65	54
68	26	85	32
36	42	33	45
38	89		

في التمارين 6-5، أكمل كل خطوة.

a. أنشئ مخططًا صندوقيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

B. صِف تمركز البيانات وانتشارها باستخدام إما المتوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك. (المثال 3)

انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

5. **الألعاب الإلكترونية** يعرض الجدول الزمن الذي تقضيه عينةٌ من الطلاب في مدرسة الإخاء الثانوية على الألعاب الإلكترونية كل أسبوع.

الوقت الذي يقضيه الطالب على الألعاب الإلكترونية (ساعة)					
1.5	2.5	0	4.5	12.5	1
2.5	4	2	8.5	1.5	9
1	0	2	1.5	5.5	2

6. **الاختبار** التجريبي للقبول الجامعي خضع الطلاب في فصل الآنسة إيمان مؤخرًا للاختبار التجريبي للقبول الجامعي. يعرض الجدول درجات كل طالب.

درجات الاختبار التجريبي للقبول الجامعي							
32	21	24	35	28	29	28	30
28	25	29	19	24	23	25	22
23	29	27	24	27	29	21	18

انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

في التمارين 8-7، أكمل كل خطوة.

a. أنشئ مخططين صندوقين متجاورين لمجموعتي البيانات.

b. استخدم طريقة العرض هذه لمقارنة التوزيعين. (المثال 4)

7. **السيارات الهجينة** يعرض الجدول قيم كفاءة استخدام الوقود مقدرةً بالكيلومتر في اللتر لـ 18 سيارةً هجينةً أنتجت خلال السنتين الأخيرتين. **انظر ملحق إجابات الوحدة 10.**

العام 1								
23	48	31	27	28	35	27	28	24
15	16	28	33	22	16	28	40	24
العام 2								
29	34	25	33	26	35	27	40	27
22	48	29	34	21	24	29	21	34

انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

8. **الزلازل** يعرض الجدول الشدة على مقياس رختر لـ 18 زلزالًا حدثت خلال السنوات الأخيرة في ألاسكا وكاليفورنيا .

ألاسكا								
6.6	6.6	6.4	7.2	6.5	6.7	4.8	6.8	6.8
7.8	6.9	7.1	6.6	7.9	6.7	5.3	7.9	7.7
كاليفورنيا								
5.4	5.4	5.6	4.4	4.2	4.3	5.2	4.5	4.7
6.6	4.9	7.2	5.2	4.1	6.0	3.0	6.6	3.5

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

590 | الدرس 10-1 | الإحصاء الوصفي

9. **علم الأحياء البحرية** يعطي الجدول توزيع التكرار لأوزان 40 من إناث ثعلب البحر البالغات في حديقة حيوانات دبي. (المثال 5)

a. أنشئ تمثيلًا بيانيا للمراكز المئوية للبيانات.

b. قدّر المركز المئوي الذي يعطيه وزن 3.4 كيلوجرامات في هذا التوزيع، وفسّر معناه. **a–b. انظرملحق إجابات الوحدة 10.**

الحدود الخاصة بالفصل	f
18–20.5	4
20.5–23	5
23–25.5	7
25.5–28	12
28–30.5	9
30.5–33	3

10. **الهطول المطري** يعطي الجدول التوزيع التكراري للهطول المطري السنوي المتوسط بالبوصة في جميع الولايات الـ 50 بالولايات المتحدة الأمريكية. (مثال 5)

الحدود الخاصة بالفصل	f
0–20	3
20–40	8
40–60	4
60–80	14
80–100	16
100–120	5

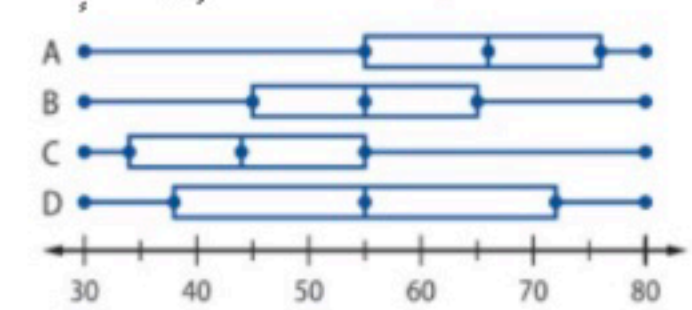
a. أنشئ تمثيلًا بيانيا مئويًا للبيانات.

b. قدّر المركز المئوي الذي يعطيه هطول مطري متوسط قيمته 100 سنتيمتر في هذا التوزيع، وفسّر معناه.

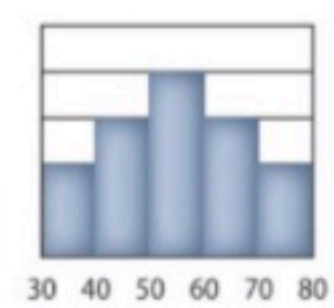
a–b. انظرملحق إجابات الوحدة 10.

B

اكتب حرف المخطط الصندوقي المقابل لكل مدرج إحصائي مما يلي.

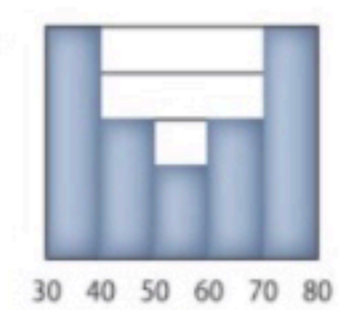


11.



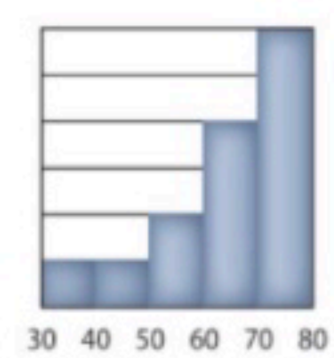
B

12.



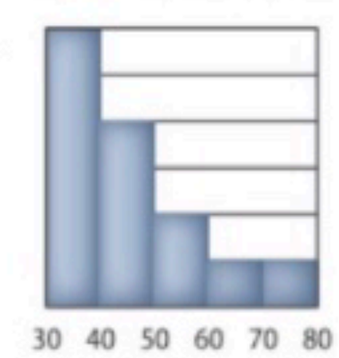
D

13.



A

14.



C

15. **الحضور** يبيّن الجدول العدد المتوسط لحضور مباريات الفريق الوطني داخل الإمارات في العام الواحد مقدرًا بالآلاف بين عامي 1979و 2008. **a, c, d. انظر الهامش.**

عدد حضور مباريات المنتخب الوطني					
31.7	32.4	30.2	25.2	27.9	22.5
27.5	28.0	30.0	32.7	27.0	24.8
23.0	21.6	29.8	29.7	23.5	27.8
31.9	36.5	40.7	38.0	40.8	42.7
42.8	47.8	50.5	51.9	52.7	53.1

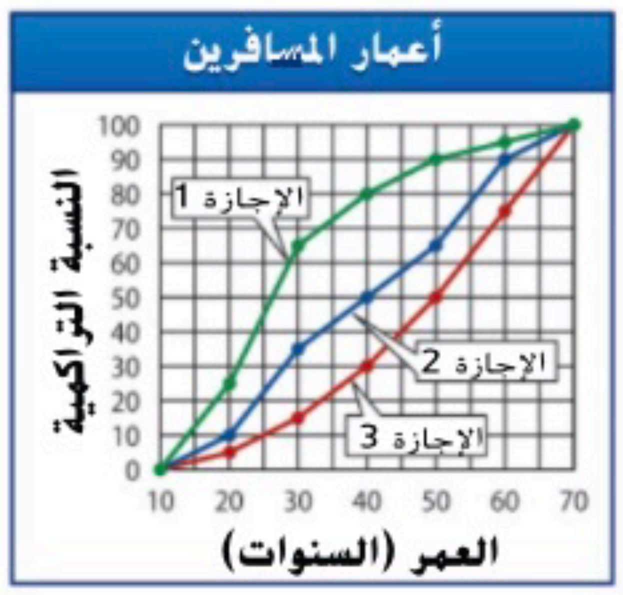
a. أنشئ مدرجًا تكراريًا ومخططًا صندوقيًا واستخدم التمثيلات البيانية لوصف شكل التوزيع.

b. أوجد العدد المتوسط لحضور مباريات الفريق الوطني داخل الإمارات خلال السنوات الـ 30 الأخيرة. **34,157**

c. ما التمثيل البياني الأفضل للاستخدام عند تقدير المتوسط؟ اشرح استنتاجك.

d. هل يمكن استخدام أيٍ من التمثيلات البيانية في الجزء a لوصف أي نزعاتٍ في عدد حضور مباريات الفريق الوطني خلال تلك الفترة؟ اشرح استنتاجك. **16a–b. انظر الهامش.**

16. **الإجازات** يمثل التمثيل البياني للمركز المئوي أعمار الأشخاص الذين ذهبوا في 3 إجازاتٍ مختلفةٍ مدة كل منها أسبوعان.



a. صِف شكل كل من التوزيعات.

b. ما الإجازات التي تضم أصغر المسافرين سنًا؟ وأيها تضم أكبرهم سنًا؟ اشرح استنتاجك.

17. **التصنيع** يعرض الجدول عمري نوعين من البطاريات القابلة لإعادة الشحن مقاسين بعدد دورات الشحن.

العلامة التجارية A				
998	950	1020	1003	990
942	1115	973	1018	981
1047	1002	997	1110	1003
العلامة التجارية B				
892	1044	1001	999	903
950	998	993	1002	995
990	1000	1005	997	1004

a. أنشئ مدرجًا إحصائيًا لكل مجموعة من البيانات. **انظر الهامش.**

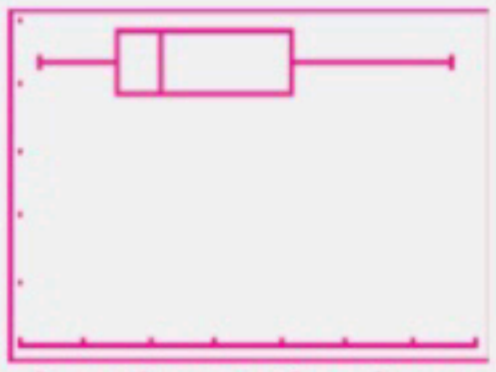
b. لأ يٍ من البيانات تباينٌ أكبر في العمر الافتراضي؟ **العلامة التجارية A**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابات إضافية

15a.

[20, 55] scl: 5 by [0, 10] scl: 2



[20, 55] scl: 5 by [0, 10] scl: 2

التوزيع ملتوٍ نحو اليمين.

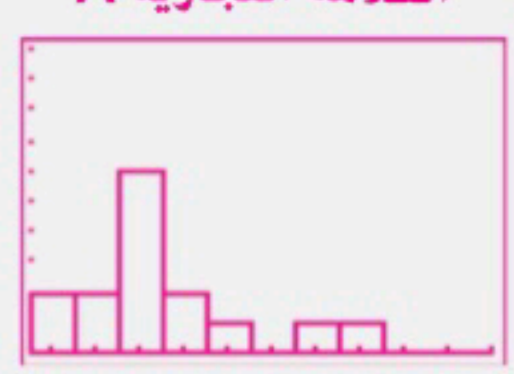
15c. المخطط الصندوقي؛ الإجابة النموذجية: بما أن التوزيع ملتوٍ، فإن الوسيط هو المقياس الأفضل للمركز. ويمكن قراءة الوسيط بسهولةٍ من التمثيل البياني على أنه أعلى قليلًا من 30,000

15d. لا؛ الإجابة النموذجية: بما أن المدرج التكراري لا يعرض سوى تكرار ظهور القيم في فترةٍ معطاة، وبما أن المخطط الصندوقي لا يعرض سوى النسبة المئوية للقيم التي تقع ضمن فترةٍ معطاة، فليس ثمة طريقةٌ لربط حضور أي شخصٍ بعامٍ معينٍ باستخدام هذه الأنواع من التمثيلات البيانية.

16a. توزيع الرحلة 1 ملتوٍ نحو اليمين، وتوزيع الرحلة 2 متماثلٌ تقريبًا، وتوزيع الرحلة 3 ملتوٍ نحو اليسار.

16b. يرتفع التمثيل البياني للمراكز المئوية بانحدارٍ شديدٍ بادئ الأمر بالنسبة للرحلة 1. وعليه فإن عددًا أكبر من المسافرين الأصغر سنًا ذهبوا في هذه الرحلة. ويرتفع التمثيل البياني للرحلة 3 ببطءٍ بادئ الأمر وبانحدارٍ في النهاية. ولذلك، فإن مسافرين أكبر سنًا ذهبوا في هذه الرحلة.

17a. العلامة التجارية A



[940, 1200] scl: 25 by [0, 10] scl: 1

العلامة التجارية B

[890, 1080] scl: 25 by [0, 15] scl: 2

18. **كرة السلة** يعرض الجدول أطوال لاعبي الفريق الوطني لكرة السلة لفئتي الرجال والسيدات خلال البطولة الأولمبية عام 2008.

أطوال الرجال					
2.06	1.93	2.03	1.91	1.98	1.93
1.98	2.11	2.08	1.83	2.06	2.03
أطوال السيّدات					
1.75	1.85	1.75	1.73	1.85	1.96
1.83	1.88	1.83	1.98	1.80	1.93

a. أنشئ تمثيلًا بيانيا للمراكز المئوية للبيانات.

b. قدّر المركزين المئويين للاعبي كرة سلة ذكر وأنثى طولاهما 1.91 متر في كل توزيع. واشرح معنى ذلك.

c. افترض أن لاعبة كرة السلة التي طولها 1.98 متر استبدلت بلاعبةٍ طولها 1.88 متر. فماذا سيكون المركز المئوي للاعبة الجديدة في التوزيع المقابل؟

يعطى مقياسٌ آخر للنزعة المركزية ويعرف *بالربيع الأوسط*. من خلال المعادلة $\frac{Q_1 + Q_3}{2}$. أوجد Q_1 و Q_2 و Q_3 و ربيع كل مجموعة من البيانات.

19.

0.12	0.25	0.19	0.38	0.28	0.16
0.41	0.29	0.32	0.11	0.04	0.25
0.29	0.07	0.26	0.09	0.31	0.23

20.

112	101	138	200	176	199
105	127	146	128	116	154
167	202	191	143	205	130

21. **الطاقة** يعرض الجدول استهلاك البترول بين عامي 1988 و 2007 في الولايات المتحدة الأمريكية وأمريكا الشمالية.

الولايات المتحدة (ألف برميل/اليوم)				
16,700	17,300	17,300	17,000	16,700
17,000	17,200	17,700	17,700	18,300
18,600	18,900	19,500	19,700	19,600
19,800	20000	20,700	20,800	20,700
أمريكا الشمالية (ألف برميل/اليوم)				
19,900	20,600	20,800	20000	20,200
20,600	20,800	21,400	21,300	22,000
22,400	22,800	23,500	23,800	23,700
23,800	24,200	25,000	25,200	25,000

a. أنشئ مخططين صندوقين متجاورين ومدرجين تكراريين.

b. قارن الاستهلاك المتوسط للبترول في الولايات المتحدة وأمريكا الشمالية.

c. ما التمثيل البياني الأسهل للاستخدام عند مقارنة مقياسي النزعة المركزية والانتشار؟

d. ما النسبة المئوية التي يمكن أن ننسبها لاستهلاك البترول في الولايات المتحدة إلى استهلاكه في أمريكا الشمالية؟ قرّب إلى أقرب نسبةٍ مئوية.

22. **التمثيلات المتعددة** ستدرس في هذه المسألة كيف يؤثر التحويل الخطي في شكل توزيع البيانات ونزعتة المركزية وانتشاره. خذ الجدول الموضح.

52	37	59	31	45
23	48	42	65	39
40	53	14	49	56
68	32	77	44	28

a. **بيانيًا** أنشئ مدرجًا إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

b. **عدديًا** أوجد متوسط مجموعة البيانات وانحرافها المعياري.

c. **جدوليًا** قم بكلٍ من التحويلات الخطية التالية ذات الصيغة $X' = a + bX$، حيث X هي القيمة الأولية للبيانات و X' هي قيمة البيانات المحولة. سجّل كل مجموعة من قيم البيانات المحولة (*i–iii*) في جدول منفصل.

i. $a = 3, b = 5$ ii. $a = 10, b = 1$ iii. $a = 0, b = 5$

d. **بيانيًا** كرّر الجزأين a و b لكل مجموعة من قيم البيانات المحولة التي توصلت إليها في الجزء c. واضبط عرض الخانة لكل منها بصورةٍ ملائمة.

e. **لفظيًا** صِف كيف يؤثر التحويل الخطي في شكل توزيع البيانات ومركزه وانتشاره.

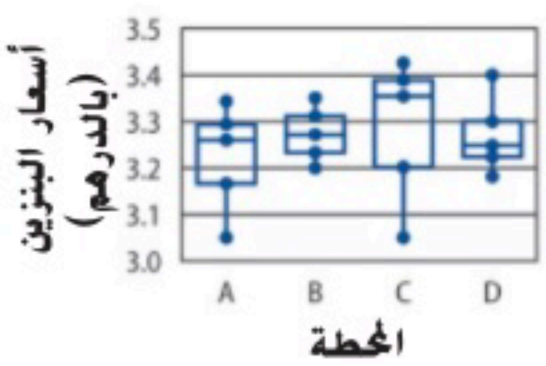
f. **تحليليًا** إذا ضربت كل قيمةٍ في مجموعة البيانات بثابتٍ c. فما الذي سيحدث لمتوسط التوزيع وانحرافه المعياري؟

مسائل مهارات التفكير العليا   استخدام مهارات التفكير العليا

23. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في أن استخدام المدى من شأنه أن يكون طريقةً فعالةً لقياس انتشار بياناتٍ موزعة.

24. **تحدٍ** افترض أن 20% من مجموعة البيانات تقع بين 35 و 55. فإذا أضيفت 10 إلى كل قيمةٍ في مجموعة البيانات ثم ضوعفت كل قيمة، فما القيمتان التي ستقع بينهما نسبة 20% من البيانات؟

التبرير **يعرض الجدول أسعار البنزين في أربع محطاتٍ للوقود خلال فترة شهرٍ واحد.**



25. أي من المحطات لها التباين الأكبر في أسعار البنزين؟ وأيها لها التباين الأصغر؟ اشرح إجابتك.

26 أي من التوزيعات التالية توزيع ملتوٍ نحو اليمين؟ وأيّها توزيع ملتوٍ نحو اليسار؟ وأيها توزيعٌ متماثل؟ اشرح إجابتك.

27. **الكتابة في الرياضيات** لِمَ يعدّ الوسيط أقل تأثرًا بالقيم المتطرفة من المتوسط؟ برّر إجابتك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابات إضافية

23. الإجابة النموذجية: يأخذ المدى في الحسبان قيمتي التوزيع الكبرى والصغرى فقط. ويمكن أن يكون لقيم البيانات المتطرفة أثرٌ كبيرٌ في المدى.

25. الإجابة النموذجية: يقاس التباين بانتشار الأسعار. للمحطة C التباين الأكبر في أسعار البنزين من AED 3.05 إلى AED 3.42. وللمحطة B التباين الأصغر في أسعار البنزين من AED 3.20 إلى AED 3.35.

592 | الدرس 1-10 | الإحصاء الوصفي

مراجعة شاملة

اكتب كل عدد مركب بالصورة الأسّية.

28. $\sqrt{3}+\sqrt{3}i$ $\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$
29. $\sqrt{5}-\sqrt{5}i$ $\sqrt{10}e^{i\frac{7\pi}{4}}$
30. $\sqrt{2}-\sqrt{6}i$ $2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{3}}$

استخدام نظرية ذات الحدّين لتفكيك كل ذات حدّين مما يلي. 31–33. انظر الهامش.

31. $(3a+4b)^5$
32. $(5c-2d)^4$
33. $(-2x+4y)^6$

أوجد مجموع كل متسلسلة هندسية مما يلي.

34. الحدود الخمسة الأولى لـ $\frac{5}{3}+5+15+\cdots$ $-\frac{11{,}605}{512}\approx -22.67$
35. الحدود الستة الأولى لـ $65+13+2.6+\cdots$ $\frac{50{,}778}{625}=81.2448$
36. الحدود العشرة الأولى لـ $1-\frac{3}{2}+\frac{9}{4}-\cdots$ $\frac{605}{3}\approx 201.67$

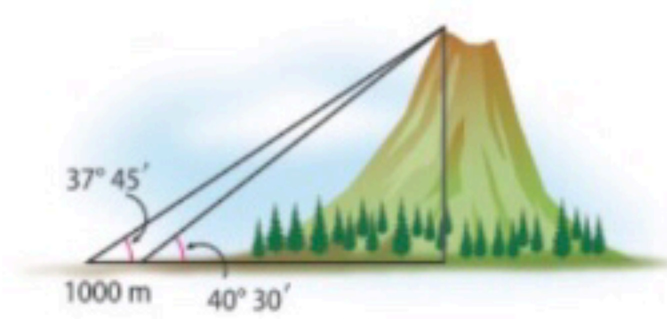
أوجد الزاوية θ بين المتّجهين u و v.

37. $\mathbf{u}=4\mathbf{i}-2\mathbf{j}+9\mathbf{k},\ \mathbf{v}=3\mathbf{i}+7\mathbf{j}-10\mathbf{k}$ 136.7°
38. $\mathbf{u}=\langle -7, 4, 2\rangle,\ \mathbf{v}=\langle 9, -5, 1\rangle$ 160.5°
39. $\mathbf{u}=\langle 4, 4, -6\rangle,\ \mathbf{v}=\langle 8, -5, 2\rangle$ 90°

مثّل القطع الناقص المعطى من خلال كل معادلة. 40–42. انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

40. $\frac{x^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{25}=1$
41. $\frac{(x+6)^2}{16}+\frac{(y-5)^2}{9}=1$
42. $\frac{(x-2)^2}{28}+\frac{y^2}{8}=1$

43. **عمليات المسح** لتحديد الارتفاع الجديد لبركانٍ بعد انفجاره، قاس مسّاح زاوية الارتفاع إلى قمة البركان على أنها ′45 °37. ثمّ اقترب المسّاح مسافة 1000 مترٍ من البركان وقاس زاوية الارتفاع على أنها ′30 °40. حدّد الارتفاع الجديد للبركان. **8287 m**



مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

44. **مراجعة** تعمل إحدى ألعاب مدينة الملاهي ككرة النوّاس. حيث تقطع هذه السفينة خلال أطول أشواطها قوسًا طوله 75 مترًا. وتنقص المسافة التي تقطعها السفينة في الشوط الواحد بمقدار خمسين عن الشوط السابق. فما المسافة الكلية التي ستقطعها السفينة من أطول أشواطها إذا تركت تتحرك دون تدخّل أحد؟

A 75 m
B 125 m
C 150 m
D 187.5 m

45. **مراجعة** تهتلك قيمة سيارةٍ محددةٍ بمعدلٍ ثابت. فإذا كانت قيمتها البدائية AED 25,000 وأصبحت قيمتها AED 8192 بعد خمس سنوات. أوجد المعدّل السنوي للاهتلاك.

F 10% **H** 30%
G 20% **J** 40%

46. **SAT/ACT** تجمع قيم جميع المنازل في إحدى المدن وتحلّل. فما الإحصاء الوصفي الذي يصف هذه البيانات على النحو الأفضل؟

A المتوسط **D** المدى
B الوسيط **E** الانحراف المعياري
C المنوال

47. يعرض الجدول التوزيع التكراري نتائج اختبار القيادة في أحد المراكز في يوم ما. قدّر المركز المئوي لشخصٍ أحرز لشخص سجل 72 نقطةً في ذلك اليوم.

F 27%
G 30%
H 34%
J 72%

الحدود الخاصة بالفصل	التكرار f
0–65.5	12
65.5–70.5	3
70.5–75.5	4
75.5–80.5	1
80.5–85.5	9
85.5–90.5	13
90.5–95.5	8
95.5–100	6

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4 التقويم

عيّن مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب تمثيل توزيعاتٍ ملتويةٍ متماثلةٍ وملتويةٍ نحو اليمين وملتويةٍ نحو اليسار. وكلّفهم بتحديد مقياس النزعة المركزية وانتشار البيانات اللذين من شأنهما توفير أدق المعلومات. يتعيّن على الطلاب كتابة الوسط والانحراف المعياري للتوزيع المتماثل وملخص الأعداد الخمسة للتوزيعات الملتوية.

إجابات إضافية

26. الإجابة النموذجية: المحطة D ملتوية نحو اليمين. والعارضة اليمنى أطول من العارضة اليمنى. والوسيط أقرب إلى الربع الأول منها إلى الثالث. المحطتان A و C ملتويتان نحو اليسار. والعارضة اليسرى في كل منهما أطول من اليمنى. والوسيط أقرب إلى الرّبيع الثالث منه إلى الأول. المحطة B متماثلة. العارضتان متماثلتان في الطول. والمستقيم الذي يمثل الوسيط يقع بالضبط بين الرّبيعين الأول والثالث.

27. الإجابة النموذجية: تتضمن صيغة الوسيط جميع قيم البيانات؛ تضم صيغة الوسيط فقط القيمة الواقعة في المنتصف إذا كان عدد قيم البيانات فرديًا، أو القيمتين الواقعتين في المنتصف إذا كان عدد القيم زوجيًا. وحين تكون هناك قيّم متطرفة، فسوف يضم الوسط هذه القيم وقد يحيد إلى يسار التوزيع أو يمينه؛ لن يتأثر الوسيط بشدةٍ بهذه القيم. فعلى سبيل المثال، لمجموعة البيانات {20, 25, 25, 30, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60} وسطٌ يساوي 37.7 ووسيطٌ يساوي 35. إذا أضيفت القيمتان البيانيتان 98 و 99 إلى مجموعة البيانات، فإن الوسيط يتزايد قليلًا إلى 37.5. في حين يتزايد الوسط إلى حوالي 49.6.

31. $243a^5+1620a^4b+4320a^3b^2+5760a^2b^3+3840ab^4+1024b^5$

32. $625c^4-1000c^3d+600c^2d^2-160cd^3+16d^4$

33. $64x^6-768x^5y+3840x^4y^2-10{,}240x^3y^3+15{,}360x^2y^4-12{,}288xy^5+4096y^6$

التدريس المتمايز BL

التوسّع كلّف الطلاب باستخدام شبكة الإنترنت أو مصادر من المكتبة لإيجاد بياناتٍ عن الإمارات العربية المتحدة وعن اثنتين من الإمارات. ويمكن أن تتضمن تلك البيانات تعداد السّكان أو عائدات الضرائب أو مساحة كتلة اليابسة أو غيرها من البيانات. واطلب من الطلاب إعداد مخططاتٍ صندوقيةٍ لكل مجموعةٍ من البيانات ومقارنتها. وينبغي أن تشتمل التحليلات على مقارنةٍ لقياسات الموضع والانتشارات إضافةً إلى مناقشة كيفية انعكاس المعلومات الخاصة بالدولة في الأعداد النسبية.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 10-2 إيجاد احتمالات أحداثٍ تضم توافيق.

الدرس 10-2 إنشاء توزيع احتمالي وحساب إحصاءاته التلخيصية. إنشاء توزيع ذي حدين واستخدامه، وحساب إحصاءاته التلخيصية.

بعد الدرس 10-2 استخدام التوزيع الطبيعي لإيجاد الاحتمالات.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة الفقرة **لماذا؟** من الدرس. وكلّفهم بالتفكير في إجراء التنبؤات.

اطرح السؤال التالي:

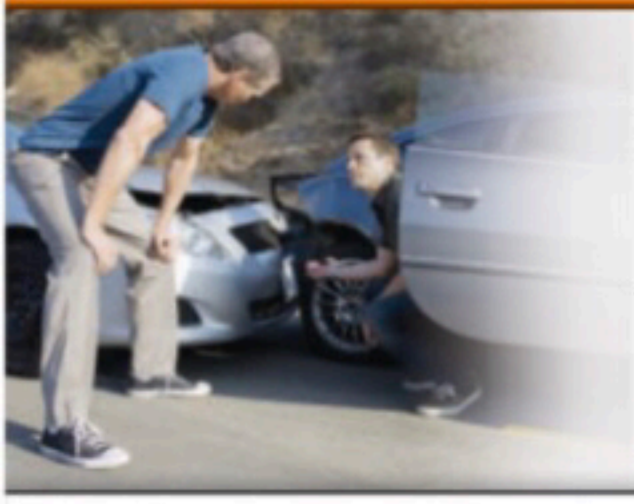
- لدى عشرة طلاب المبالغ المالية التالية في جيوبهم: AED 2 و AED 4 و AED 6 و AED 8 و AED 8 و AED 10 و AED 10 و AED 11 و AED 15 و AED16. ما وسط مجموعة هذه البيانات النموذجية وانحرافها المعياري؟ AED 9؛ AED 4.42

الدرس 10-2 التوزيعات الاحتمالية

السابق
- أوجدت احتمالات أحداثٍ تضم توافيق

الحالي
1. إنشاء توزيع احتمالي وحساب إحصاءاته.
2. إنشاء توزيعٍ ذي حدّين واستعماله، وحساب ملخص إحصاءاته.

لماذا؟
- تستخدم شركات تأمين السيارات الإحصاءات لقياس المخاطر المرافقة لأحداثٍ محددة، كالاصطدام. حيث تخصص احتمالاتٍ لجميع المخارج المحتملة المتصلة بالحدث وتحسب الإحصاءات بناءً على طريقة توزيع تلك الاحتمالات. ومن خلال هذه الإحصاءات، تستطيع الشركة التنبؤ باحتمال مخرجاتٍ محددةٍ واتخاذ قراراتٍ تبعًا لذلك.



المفردات الجديدة

متغير عشوائي
random variable
متغير ثابت منفصل
discrete random variable
متغير عشوائي متصل
continuous random variable
توزيع احتمالي
probability distribution
قيمة التوقع
expected value
تجربة ذات حدّين
binomial experiment
توزيع ذو حدّين
binomial distribution
دالة توزيع احتمالي ذي حدّين
binomial probability distribution function

1 التوزيعات الاحتمالية استخدمت في الدرس السابق الإحصاء الوصفي لتحليلمتغير وهو من خواصّ المجتمعات الإحصائية. وفي ذلك الدرس، حدّدت القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير عبرجمع البيانات. وفي هذا الدرس، ستدرس متغيراتٍ ذات قيم تحدّد على وجه المصادفة.

يمثل **المتغير العشوائي** X قيمةً عدديةً تعطى لمخرج تجربة احتمال. وثمة نوعان من المتغيرات العشوائية، وهما، المتغيرات المنفصلة والمتصلة.

المفهوم الأساسي المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة

يمكن أن يأخذ **متغير عشوائي منفصل** عددًا منتهيًا أو معدودًا من القيم المحتملة.

مثال

عدد حوادث السيارات بالسنة. X

يمكن أن يأخذ **المتغير العشوائي المتصل** عددًا لا نهائيًا من القيم المحتملة ضمن فترةٍ محددة.

مثال

عدد حوادث السيارات بالسنة. X

بما أن تقنياتٍ إحصائيةً مختلفةً تستخدم لتحليل هذين النوعين من المتغيرات العشوائية، فمن الضروري التمتّع بالقدرة على التمييز بينهما. ولتصنيف متغيرٍ عشوائي على نحوٍ صحيح، فكّر إن كان X يمثّل بياناتٍ معدودةً أو مقيسة.

مثال 1 تصنيف متغير عشوائي على أنه منفصل أو متصل

صنّف كل متغير عشوائي X على أنه *منفصل* أو *متصل*. اشرح استنتاجك.

a. يمثل X وزن الحبوب في عبوة حبوبٍ وزنها فارغةً 450 جرامًا تختار عشوائيًا من العبوات في خطٍ إنتاجي.

يمكن أن يقع وزن الحبوب عند أي قيمة بين 0 و 450 جرامًا. ولذلك، X متغيرٌ عشوائيٌ متصل.

b. يمثّل X عدد السيارات في موقف سيارات المدرسة والمختارة في توقيتٍ عشوائي خلال يوم الدوام المدرسي.

عدد السيارات في الموقف معدود. حيث يمكن أن تكون هناك 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو عدد كلي كامل من السيارات. ولذلك، فإن X متغير ثابت منفصل.

تمرين موجّه

1A. يمثل X الوقت المستغرق لتقديم الطعام إلى زبونٍ مختارٍ عشوائيًا في مطعمٍ للوجبات السريعة.

1B. يمثل X عدد الحضور خلال اجتماعٍ اختير عشوائيًا من اجتماعات مجلس التعليم الشهرية.

1A. متصل؛ يمكن أن يكون للزمن أي قيمة ضمن فترة معقولةٍمن الزمن، كأن يكون بين 0 و 10 دقائق. 1B. منفصل؛ عدد الحضور معدود، ولذلك يمكن إدراج جميع الأعداد المعقولة للحضور في مثل هذا الاجتماع.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

فضاء العينة الخاص بتجربة الاحتمال النظري التي تُرمى فيها قطعتان نقديتان هو {ص ص، ص ك، ك ص، ك ك}. فإذا كان X هو المتغير العشوائي لعدد الصور. إذًا فيمكن أن يأخذ X القيم 0 أو 1 أو 2. ويمكنك أن تجد من فضاء العينة الاحتمال النظرية لعدم الحصول على أي صورة أو الحصول على صورة واحدة أو صورتين.

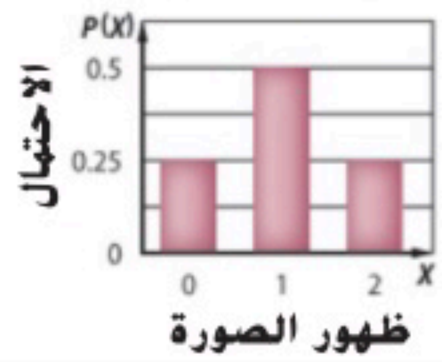
$P(0) = \frac{1}{4}$ $\quad P(1) = \frac{1}{2}$ $\quad P(2) = \frac{1}{4}$

قراءة في الرياضيات

احتمالات المتغيرات العشوائية يُقرأ الترميز $P(1)$ على أنه *احتمال أن يكون المتغير العشوائي X يساوي 1.*

يعرض الجدول أدناه والتمثيل البياني إلى الجهة اليسرى *التوزيع الاحتمالي لـ* X.

عدد الصور X	0	1	2
الاحتمال: $P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



المفهوم الأساسي التوزيع الاحتمالي

إن **التوزيع الاحتمالي** لمتغيرٍ عشوائي X هو جدولٌ أو معادلةٌ أو تمثيلٌ بياني يربط كل قيمة ممكنة لـ X باحتمال وقوع الحدث. وتُحدّد هذه الاحتمالات نظريًا أو بالرصْد.

يجب أن يحقق التوزيع الاحتمالي الشروط التالية.

- يجب أن تقع احتمال كل قيمة لـ X بين 0 و 1. أي $0 \le P(X) \le 1$.
- يجب أن يساوي مجموع جميع احتمالات كل قيم X العدد 1. أي $\sum P(X) = 1$.

نصيحة دراسية

التوزيعات المستمرة يركز هذا الدرس على المتغيرات الثابتة المنفصلة.

لإنشاء توزيعٍ احتماليٍ كمفصلٍ باستخدام البيانات المرصودة بدلًا من النظرية.استخدم تكرار كلٍ من القيم المرصودة لحساب الاحتمال.

مثال 2 إنشاء توزيع احتمالي

تقييم المعلّم طُلب من الطلاب أن يقيّموا شرح معلم أحد المقررات الدراسية على استمارة تقييم باستخدام مقياس تتراوح درجاته بين 1 و 5، حيث يشير العدد 1 إلى أن الشّرح مبسّط جدًا ويشير العدد 5 إلى أن الشرح على درجةٍ عاليةٍ جدًا من التقنية. استخدم التوزيع التكراري الموضح لإنشاء توزيعٍ احتماليٍ للمتغير العشوائي X وتمثيله بيانيًا.

الدرجة، X	التكرار
1	1
2	8
3	20
4	16
5	5

لإيجاد احتمال أن يأخذ X كلًا من القيم، قسّم تكرار كل قيمةٍ بالعدد الكلي للطلاب المقيّمين للمعلم، وهو $5 + 16 + 20 + 8 + 1$ أو 50.

$P(1) = \frac{1}{50}$ أو 0.02 $\quad P(2) = \frac{8}{50}$ أو 0.16 $\quad P(3) = \frac{20}{50}$ أو 0.40

$P(4) = \frac{16}{50}$ أو 0.32 $\quad P(5) = \frac{5}{50}$ أو 0.10

يعرض الجدول أدناه التوزيع الاحتمالي لـ X، ويعرض المخطط على الجهة اليسرى تمثيله البياني.

الدرجة، X	1	2	3	4	5
$P(X)$	0.02	0.16	0.40	0.32	0.10

التحقق لاحظ أن جميع الاحتمالات في الجدول تقع بين 0 و 1 وأن $\sum P(X) = 0.02 + 0.16 + 0.4 + 0.32 + 0.1$ أو 1. ✓

تمرين موجّه

2. مبيعات السيارات تتبّع أحد باعة السيارات عدد السيارات المباعة كل يومٍ خلال مدة 30 يومًا. استخدم التوزيع التكراري للنتائج لإنشاء توزيعٍ احتماليٍ للمتغير العشوائي X وتمثيله بيانيًا، مقربًا كل احتمالٍ إلى أقرب جزءٍ من مئة.

السيارات المباعة، X	0	1	2	3
التكرار	20	7	2	1

انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

- ما احتمال أن يضم جيب شخصٍ اختير عشوائيًا من المجموعة أقل من AED 7 ؟ 0.30
- ما احتمال أن يضم جيب شخصٍ اختير عشوائيًا من المجموعة مبلغ AED 7 أو أكثر؟ 0.30

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

1 التوزيعات الاحتمالية

يبيّن **المثال 1** كيفية تصنيف متغيراتٍ على أنها منفصلة أو متصلة. ويبيّن **المثال 2** كيفية إنشاء توزيع احتمالي. ويبيّن **المثال 3** كيفية إيجادٍ وسط توزيعٍ احتمالي. ويبيّن **المثال 4** كيفية إيجاد تباين توزيع احتمالي وانحرافه المعياري. ويبيّن **المثال 5** كيفية إيجاد قيمة التوقع.

مثال إضافي

1 صنف كل متغير عشوائي X على أنه *منفصل* أو *متصل*. اشرح استنتاجك.

a. X يمثل عدد مرات رنين الهاتف قبل الإجابة. منفصل؛ عدد الرنّات قابلٌ للعدّ.

b. X يمثّل الزمن بين وقت رنين هاتفٍ أول مرةٍ ووقت الإجابة. متّصل؛ يمكن أن يكون الزمن أي زمنٍ في فترةٍ معقولة.

التركيز على محتوى الرياضيات

تحويلات التوزيعات الاحتمالية إذا أضيف ثابتٌ إلى قيمة توزيع احتمالي، مزيحًا إياه على المحور الأفقي X، فإنّ قيمة الوسط (أو قيمة التوقع) تزداد بمقدارٍ ثابتٍ ولكن التباين والانحراف المعياري يبقيان على حالهما. وإذا ضربت جميع قيم توزيعٍ احتمالي بثابت، فإن التباين يُضرب بمقدار مربع الثابت والانحراف المعياري يضرب بالثابت.

لحساب متوسط توزيعٍ احتمالي، فيجب علينا استخدام صيغةٍ مختلفةٍ عن تلك المستخدمة لحساب متوسط مجتمعٍ إحصائي. ولفهم السبب في ذلك، خذ حساب متوسط عدد الصور X الناتج عن عددٍ لا نهائي من عمليات رمي قطعتين نقديتين. ولا نستطيع حساب المتوسط باستخدام $\mu = \frac{\sum X}{N}$، وذلك نظرًا إلى أن N سيكون لا نهائيًا. ولكن التوزيع الاحتمالي لـــ X يخبرنا عن كسر الرميات التي نتوقع أن تكون قيمتها 0 أو 1 أو 2.

عدد مرات الحصول على صور بعد رمي قطعتين نقديتين

$$\{\underbrace{\begin{matrix}TT, & TT, & ..., & TT, & TT,\\ 0, & 0 & ..., & 0, & 0,\end{matrix}}_{\frac{1}{4}} \quad \underbrace{\begin{matrix}HT, & HT, & ..., & HT, & HT, & TH, & TH, & ..., & TH, & TH,\\ 1, & 1, & ..., & 1, & 1, & 1, & 1, & ..., & 1, & 1,\end{matrix}}_{\frac{1}{2}} \quad \underbrace{\begin{matrix}HH, & HH, & ..., & HH, & HH\\ 2, & 2, & ..., & 2, & 2\end{matrix}}_{\frac{1}{4}}\}$$

ولذلك، فإننا سنتوقع أنه وبصورةٍ وسطية، يكون عدد الصور التي يتم الحصول عليها خلال عددٍ كبيرٍ أو لا نهائيٍ من الرميات هو $2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{4}$ أو 1. ونلخّص أدناه طريقة إيجاد متوسط توزيعٍ احتمالي.

المفهوم الأساسي متوسط التوزيع الاحتمالي

الشرح لإيجاد متوسط توزيعٍ احتمالي لـــX، اضرب كل قيمة لـــ X في احتمالها وأوجد مجموع نواتج الضرب.

الرموز يعطى متوسط متغير عشوائي Xبالعلاقة $\mu = \sum[X \cdot P(X)]$، حيث $X_1, X_2, ..., X_n$ هي قيم X و $P(X_1), P(X_2), ..., P(X_n)$ هي الاحتمالات المقابلة.

مثال 3 متوسط التوزيع الاحتمالي

تقييم المعلم **يعرض الجدول أدناه التوزيع الاحتمالي الخاص بسؤال** تقييم المعلم الوارد في **المثال 2. أوجد الدرجة الوسطية مقربة إلى أقرب جزءٍ من مئة، وفسّر معناه في سياق حالة المسألة.**

الدرجة، X	$P(X)$
1	0.02
2	0.16
3	0.40
4	0.32
5	0.10

اضرب كل درجةٍ باحتمالها، وأوجد مجموع نواتج الضرب هذه. نظّم حساباتك عبر توسيع الجدول.

الدرجة، X	$P(X)$	$X \cdot P(X)$
1	0.02	$1 \cdot 0.02 = 0.02$
2	0.16	$2 \cdot 0.16 = 0.32$
3	0.40	$3 \cdot 0.40 = 1.20$
4	0.32	$4 \cdot 0.32 = 1.28$
5	0.10	$5 \cdot 0.10 = 0.50$
		$\sum[X \cdot P(X)]$أو 3.3

ولذلك فإن المتوسط μ لهذا التوزيع الاحتمالي يساوي تقريبًا 3.3.

بما أن الدرجة 3 تشير إلى أن شروحات المعلّم ليس مبسطًا أو معقدًا، فإن المتوسط 3.3 يشير إلى أن الطلاب كانوا يشعرون بأن شرح المعلم مناسبًا ولكنه يميل إلى كونه معقدًا بعض الشيء.

نصيحة دراسية
قاعدة التقريب يتعيّن تقريب المتوسط، وكذلك التباين والانحراف المعياري، والتي سنناقشها في الصفحة التالية إلى عددٍ يزيد منزلة عشريةً واحدةً عن القيمة الحقيقية التي يمكن أن يأخذها X.

تمرين موجّه

3. مبيعات السيارات أوجد متوسط التوزيع الاحتمالي الذي أنشأته في التمرين الموجّه 2 وفسّر معناه في سياق حالة المسألة.

0.46; الإجابة النموذجية: يبيع البائع في المتوسط سيارةً واحدةً كل يومين.

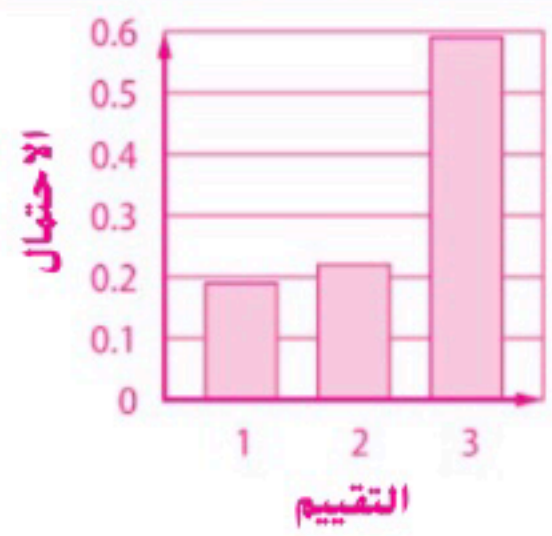
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

أمثلة إضافية

2 تقييم الأفلام طُلب من مرتادين لدار السينما تقييم فلم. وكانت التقييمات الممكنة هي 1 للإشارة إلى فيلم سيئ و 2 للإشارة إلى فيلم متوسط الجودة و 3 للإشارة إلى فيلم جيد. استخدم التوزيع التكراري الموضح لإنشاء توزيع احتمالي للمتغير العشوائي X وتمثيله بيانيًا.

التقييم، X	التكرار
1	12
2	14
3	37

التقييم، X	1	2	3
$P(X)$	0.19	0.22	0.59



3 تقييم الأفلام يعرض الجدول أدناه التوزيع الاحتمالي الخاص بالمثال الإضافي 2. أوجد وسط الدرجات مقربًا إلى أقرب جزءٍ من مئة، وفسّر معناه في سياق حالة المسألة.

التقييم، X	1	2	3
$P(X)$	0.19	0.22	0.59

2.4؛ يعدّ مرتادو دار السينما الفلم بين المتوسط والجيد .

إرشاد للمعلمين الجدد

التوزيعات الاحتمالية يحدّد التوزيع الاحتمالي احتمال كل قيمةٍ ممكنةٍ لمتغيرٍ ثابتٍ منفصلٍ أو احتمال فترةٍ معطاةٍ لمتغيرٍ ثابتٍ متصل.

أمثلة إضافية

4 تقييم الأفلام أوجد تباين التوزيع الاحتمالي لتقييم الفلم الوارد في المثال الإضافي 2 وانحرافه المعياري. 0.62؛ حوالي 0.7874

5 تناول الطعام يخسر أحد مطاعم الهواء الطلق على الشاطئ مبلغ AED 90,000 في الموسم الواحد حين يكون الطقس أكثر أمطارًا من العادة، ويربح مبلغ AED 450,000 حين يكون الطقس طبيعيًا. فإذا كان احتمال كون الطقس أكثر أمطارًا من الحدّ الطبيعي في هذا الموسم تساوي 20%، أوجد الربح المتوقع للمطعم. AED 342,000

ولا يمكن استخدام صيغة التباين المستخدمة في التوزيعات الخاصة بالمجتمع الإحصائي أيضًا لحساب التباين أو الانحراف المعياري لتوزيعٍ احتمالي، وذلك لأن قيمة N ستكون لا نهائية. وبدلًا من ذلك، تستخدم الصيغ التالية لإيجاد انتشار توزيعٍ احتمالي.

المفهوم الأساسي التباين والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي

الشرح لإيجاد تباين توزيع احتمالي X، اطرح متوسط توزيع العينة من كل قيمةٍ لـــ X وربّع الفرق، ثم اضرب كل فرقٍ باحتماليته المقابلة لإيجاد مجموع نواتج الضرب. والانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين.

الرموز يعطى تباين متغير عشوائي X من خلال $\sigma^2 = \sum[(X-\mu)^2 \cdot P(X)]$. ويعطى الانحراف المعياري من خلال $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

نصيحة دراسية

الصيغة البديلة

ثمّة صيغة رياضية بديلة لإيجاد تباين توزيع احتمالي من شأنها تبسيط حساب هذا الإحصاء، وهي $\sigma^2 = \sum[(X^2 \cdot P(X)] - \mu^2$.

مثال 4 تباين توزيعٍ احتماليٍ وانحرافه المعياري

تقييم المعلم أوجد التباين والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي الخاص بسؤال تقييم المعلم في المثال 2 مقرّبين إلى أقرب جزءٍ في المئة.

الدرجة، X	$P(X)$
1	0.02
2	0.16
3	0.40
4	0.32
5	0.10

اطرح كل قيمة لـــ X من المتوسط الذي وجدته في المثال 3، والمساوي 3.32، وربّع الفرق، ثم اضرب كل فرقٍ باحتماليته المقابلة وأوجد مجموع نواتج الضرب.

الدرجة، X	$P(X)$	$(X-\mu)^2$	$(X-\mu)^2 \cdot P(X)$
1	0.02	$(1-3.32)^2 \approx 5.38$	$5.38 \cdot 0.02 \approx 0.1076$
2	0.16	$(2-3.32)^2 \approx 1.74$	$1.74 \cdot 0.16 \approx 0.2788$
3	0.40	$(3-3.32)^2 \approx 0.10$	$0.10 \cdot 0.40 \approx 0.0410$
4	0.32	$(4-3.32)^2 \approx 0.46$	$0.46 \cdot 0.32 \approx 0.1480$
5	0.10	$(5-3.32)^2 \approx 2.82$	$2.82 \cdot 0.10 \approx 0.2822$
			$\sum[(X-\mu)^2 \cdot P(X)] = 0.8576$

يساوي التباين σ^2 تقريبًا 0.86، ويساوي الانحراف المعياري $\sqrt{0.8576}$ أو حوالي 0.93.

تمرين موجّه

4. مبيعات السيارات أوجد التباين والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي الذي أنشأته في التمرين الموجّه 2 مقربين إلى أقرب جزء من مئة. 568, 0.754.0

تساوي **قيمة التوقع** $E(X)$ لمتغير عشوائي خاصٍ بتوزيعٍ احتمالي متوسط المتغير العشوائي، أي، $E(X) = \mu = \sum[X \cdot P(X)]$.

مثال 5 إيجاد قيمة توقع

جمع التبرعات خلال حفل لجمع التبرعات، بيعت 500 بطاقة بقيمة AED 1 للبطاقة الواحدة وذلك للفوز بثلاث جوائز قيمتها AED 100 وAED 50 و AED10. فما قيمة التوقع للربح الصافي إن اشتريت بطاقةً واحدة؟

أنشئ توزيعًا احتماليًا لكلٍ من الأرباح الصافية الممكنة، ثم أوجد قيمة التوقع.
والربح الصافي لكل جائزة هو قيمة الجائزة مطروحًا منها ثمن البطاقات المشتراة.

الربح X	AED 100 − 1 أو AED 99	AED 50 − 1 أو AED 49	AED 10 − 1 أو AED 9	AED 0 − 1 أو −AED 1
الاحتمال، $P(X)$	$\frac{1}{500}$ أو 0.002	$\frac{1}{500}$ أو 0.002	$\frac{1}{500}$ أو 0.002	$\frac{497}{500}$ أو 0.994

$E(X) = \sum[X \cdot P(X)]$

$= (99 \cdot 0.002) + (49 \cdot 0.002) + (9 \cdot 0.002) + (-1 \cdot 0.994)$ أو حوالي −AED 0.68

تعني قيمة التوقع هذه أنه متوسط خسارةِ شخصٍ اشترى بطاقةً يساوي AED 0.68.

انتبه!

إساءة فهم قيمة التوقع

إن قيمة التوقع، كتلك التي حسبت في المثال 5، ليست مؤشرًا لمقدار ما سيربحه شخصٌ ما أو يخسره. ففي المثال 5، يمكن أن يخسر شخصٌ فقط مبلغ AED 1 مقابل كل بطاقة يشتريها ويمكن أن يفوز فقط بـــ AED 100 أو AED 50 أو AED 10.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز AL OL

المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية اطلب من الطلاب أن يعملوا في مجموعاتٍ من ثلاثة أو أربعة. واشرح لهم أن هناك عددًا من مجسّمات الأعداد الثمانية، وهي مجسمات لها ثمانية أوجهٍ مرقمةٍ من 1 إلى 8. أعطِ عددًا من المجسمات الثمانية إلى كل مجموعة. واطلب من الطلاب إيجاد احتمال كل مخرج ممكن. ثم اطلب منهم إيجاد الوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي. $P(1) = 0.125, P(2) = 0.125, P(3) = 0.125, P(4) = 0.125, P(5) = 0.125, P(6) = 0.125, P(7) = 0.125, P(8) = 0.125; \mu = 4.5; \sigma^2 = 5.25; \sigma = 2.29$

2 التوزيع ذو الحدين

يبيّن **المثال 6** كيفية تحديد التجربة ذات الحدّين. ويبيّن **المثال 7** كيفية إنشاء توزيع احتمالي. ويبيّن **المثال 8** كيفية إيجادُ وسط توزيع ذي حدين وتباينه وانحرافه المعياري.

مثال إضافي

6 حدّد إن كانت كل تجربةٍ تجربةً ذات حدّين أو إن كان يمكن اختزالها إلى تجربةٍ ذات حدّين. فإن كان يمكن تقديمها على أنها تجربةٌ ذات حدّين، فاذكر قيم n و p و q. ثمّ أدرج جميع القيم المحتملة للمتغير العشوائي. وإن لم تكن كذلك، فاشرح السبب.

a. تشير نتائج استطلاع إلى أن 65% من الأزواج لديهم عملان أو أكثر معًا. تخضع مجموعة من 50 زوجًا لاستبيانٍ يُسألون فيه عمّا إذا كان لدى كل منهم عملان أو أكثر. يمثل المتغير العشوائي عدد الأزواج الذين لديهم عملان أو أكثر. المعامل التجريبي ذو الحدّين. $n = 50,$ $p = 0.65, q = 0.35;$ $X = 1, 2, 3, \dots, 50$

b. توضع عشر قصاصاتٍ زرقاء وخمسٌ حمراء في قبعةٍ وتُهزّ. تُسحب ثلاث قصاصاتٍ من القبعة بواقع واحدةٍ كل مرةٍ بدون إعادة. يمثل المتغير العشوائي عدد القصاصات الزرقاء المسحوبة. الأحداث ليست مستقلةً لأن احتمال سحب قصاصةٍ زرقاء تتغير بعد كل عملية سحب. وهذه ليست تجربةً ذات حدين.

تمرين **موجّه**

5. مدينة الألعاب المائية تربح مدينةٌ للألعاب المائية مبلغ AED 350,000 حين يكون الطقس طبيعيًا وتخسر مبلغ AED 80,000 في الموسم عندما يفوق عدد الأيام ذات الطقس السيئ الأيام ذات الطقس الطبيعي. فإذا كان احتمال وجود عددٍ أكبر من الأيام سيئة الطقس من الأيام ذات الطقس الطبيعي هذا الموسم تساوي 35%. أوجد الربح المتوقع لمدينة الألعاب المائية. **AED 199,500**

2 توزيع ذات الحدّين

يمكن اختزال الكثير من التجارب الاحتمال إلى تجربةٍ ذات مخرجين فقط، وهما: النجاح أو الفشل. فعلى سبيل المثال، يمكن تصنيف سؤالٍ له خمسة خياراتٍ للإجابة على أنه صحيحٌ أو خاطئٌ ببساطة، أو يمكن تصنيف علاجٍ طبيٍ على أنه فعال أو غير فعالٍ. حيث اختزلت هاتان التجربتان إلى تجربتين ذواتي حدّين.

المفهوم الأساسي التجربة ذات الحدّين

التجربة ذات الحدّين عبارة عن تجربة لاحتمالات بحيث تتوافق مع الشروط التالية.

- تُكرّر التجربة لعددٍ ثابتٍ من المحاولات المستقلة n.
- لكل محاولةٍ مخرجان محتملان اثنان فقط، وهما النجاح S أو الفشل F.
- يتساوى احتمال النجاح $P(S)$ أو p في كل محاولة. ويساوي احتمال الفشل $P(F)$ أو q القيمة $1 - p$.
- يمثل المتغير العشوائي X عدد مرات النجاح في n محاولة.

مثال 6 من الحياة اليومية تحديد تجربة ذات حدّين

حدّد إن كانت كل تجربةٍ تجربةً ذات حدّين أو إن كان يمكن اختزالها إلى تجربةٍ ذات حدّين. فإن كان يمكن تقديمها على أنها تجربةٌ ذات حدّين، فاذكر قيم n و p و q. ثمّ أدرج جميع القيم المحتملة للمتغير العشوائي. وإن لم تكن كذلك، فاشرح السبب.

a. تشير نتائج استقصاءٍ جرى على مدرسةٍ إلى أن 68% من الطلاب يملكون مشغل MP3. اختير ستّة طلابٍ عشوائيًا وسئلوا إن كانوا يملكون مشغلَ MP3. يمثّل المتغير العشوائي عدد الطلاب الذين يقولون أنّ لديهم مشغّل MP3.

تحقّق التجربة شروط التجربة ذات الحدّين.

- يمثّل كل طالبٍ مختارٍ محاولةً واحدة، واختيار كلٍ من الطلاب الستة مستقلٌ عن الآخرين.
- ثمّة مخرجان اثنان فقط، وهما: إما أن يمتلك الطالب مشغّل MP3 S أو ألّا يمتلك مشغّل MP3 F.
- احتمال النجاح متساوٍ لكل طالبٍ مختار: $P(S) = 0.68$.

في هذه المسألة، يكون $n = 6$ و $p = P(S)$ أو 0.68. يساوي احتمال الفشل $q = 1 - p$. إذًا $q = 1 - 0.68$ أو 0.32. X تمثّل عدد الطلاب الذين يملكون مشغّل MP3 من أصل أولئك الطلاب المختارين. إذًا $X = 0$ أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6.

b. تُسحب خمس بطاقاتٍ عشوائيًا من رزمةٍ من الأوراق من أجل توزيعها خلال إحدى الألعاب. يمثل المتغير العشوائي عدد أوراق البستوني.

في هذه التجربة، تمثل كل ورقة لعبٍ محاولةً واحدة. واحتمال سحب ورقة بستوني بالنسبة للورقة الأولى تساوي $\frac{13}{52}$ أو $\frac{1}{4}$. ولكن بما أنّه يُحتفظ بهذه البطاقة في حوزة اللاعب، فالمحاولات ليست مستقلة. واحتمال النجاح في كل سحبٍ لن يكون هو نفسه. وعليه فلا يمكن اختزال هذه التجربة إلى تجربة ذات حدّين.

الربط بالحياة اليومية

لدى واحدٍ من أصل كل خمسة مراهقين أمريكيين بعمر 12 سنة وأكثر مشغّل MP3 محمول. بينما يمتلك أكثر من مراهقٍ واحدٍ من أصل كل عشرين مراهقًا أكثر من مشغّل.

المصدر: *Digital Trends*

تمرين **موجّه**

6A .تشير نتائج استقصاءٍ إلى أن 61% من الطلاب أعجبهم الزيّ المدرسي الجديد وإلى أن 24% لم يعجبهم هذا الزي. اختير عشرون طالبًا عشوائيًا وسُئلوا إن كان يعجبهم الزيّ الجديد. يمثّل المتغير العشوائي عدد الطلاب الذين أفادوا بأن الزّي الجديد يعجبهم.

6B. تؤدي اختبارًا عبر التخمين العشوائي للإجابات عن 20 سؤال اختيارٍ من متعددٍ لكلٍ منها 4 خياراتٍ للإجابة، وأحدها صحيحٌ فقط. يمثل المتغير العشوائي هنا عدد الإجابات الصحيحة.

6A. ليست تجربة ذات حدّين؛ P(S) تساوي 61%، ويعطي ذلك $P(F) = 1 - 61\%$ أو 39%. ولكن 24% من الطلاب لا يعجبهم الزّي، وذلك لا يساوي 39%.
6B. تجربة ذات حدّين؛ $n = 20,\ P(S) = \frac{1}{4},\ P(F) = \frac{3}{4};$ $X = 0, 1, 2, \dots 20$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نصيحة دراسية

راجع ما تعلّمت عد إلى الدرس 10-5 لمراجعة نشر ذات الحدّين ونظرية ذات الحدّين.

يُدعى توزيع مخارج تجربةٍ ذات حدّين وتوزيع احتمالاتها المقابلة **بالتوزيع ذي الحدّين**. ويمكن حساب الاحتمالات في هذا التوزيع باستخدام الصيغة التالية، والتي تمثّل الحدّ $p^{x}q^{n-x}$ في مفكوك المقدار ذي الحدّين لـ $(p+q)^{n}$.

المفهوم الأساسي قانون الاحتمال ذات الحدّين

احتمال تحقيق X نجاحٍ من أصل n محاولة مستقلة خلال تجربة ذات حدّين تساوي

$$P(X) = {}_{n}C_{x}\,p^{x}q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!x!}\,p^{x}q^{n-x},$$

حيث p احتمال نجاح محاولةٍ واحدة و q احتمال فشلها.

لاحظ أن هذه الصيغة تمثل دالةً منفصلةً للمتغير العشوائي X، والمعروفة **بدالة توزيع احتمالي ذي حدّين**.

مثال 7 التوزيعات ذات الحدّين

ممارسة التمارين الرياضية قال 35% من مراهقين خلال استقصاءٍ جرى مؤخرًا إنهم يمارسون التمارين الرياضية بصورةٍ دورية. ثم سُئل خمسة مراهقين اختيروا عشوائيًا إن كانوا يمارسون التمارين الرياضية على نحوٍ دوري. أنشئ توزيعًا احتماليًا للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد المراهقين الذين أجابوا بنعم ومثّله بيانيًا. ثم أوجد الاحتمال في أن ثلاثةً من أولئك المراهقين على الأقل أجابوا بنعم.

هذه تجربة ذات حدّين فيها $n = 5$ و $p = 0.35$ و $q = 1 - 0.35$ أو 0.65. استخدم حاسبةً لحساب احتمال كل قيمةٍ ممكنةٍ لـ X باستخدام صيغة الاحتمال ذات الحدّين.

$P(0) = {}_5C_0 \cdot 0.35^0 \cdot 0.65^5 \approx 0.116$

$P(1) = {}_5C_1 \cdot 0.35^1 \cdot 0.65^4 \approx 0.312$

$P(2) = {}_5C_2 \cdot 0.35^2 \cdot 0.65^3 \approx 0.336$

$P(3) = {}_5C_3 \cdot 0.35^3 \cdot 0.65^2 \approx 0.181$

$P(4) = {}_5C_4 \cdot 0.35^4 \cdot 0.65^1 \approx 0.049$

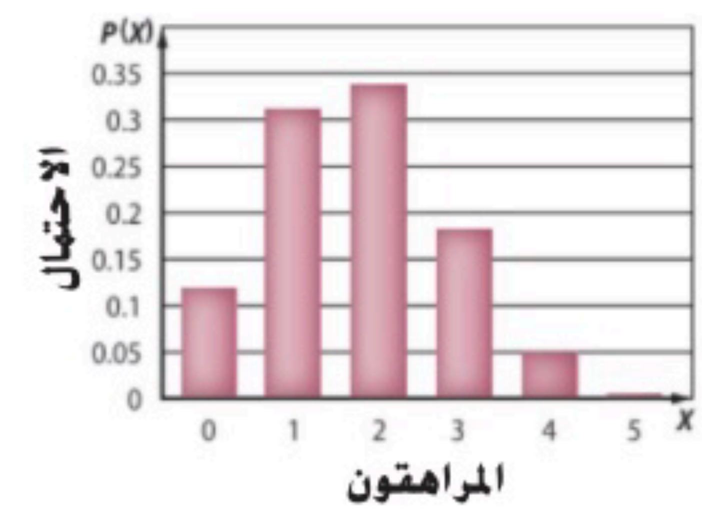
$P(5) = {}_5C_5 \cdot 0.35^5 \cdot 0.65^0 \approx 0.005$

تلميح تقني

احتمال ذات الحدّين لحساب كل احتمال لذات الحدّين على حاسبة التمثيل البياني، استخدم binompdf (n, p, x) ضمن القائمة DISTR .

تجد أدناه التوزيع الاحتمالي لـ X وتمثيله البياني.

X	$P(X)$
0	0.116
1	0.312
2	0.336
3	0.181
4	0.049
5	0.005



لإيجاد الاحتمال في أن يكون ثلاثة *على الأقل* من الطلاب يمارسون التمارين الرياضية بصورةٍ دورية، أوجد مجموع $P(3)$ و $P(4)$ و $P(5)$.

$P(X \geq 3) = P(3) + P(4) + P(5)$ — P (ثلاثة على الأقل)

$= 0.181 + 0.049 + 0.005$ — $P(3) = 0.181$، $P(4) = 0.049$ و $P(5) = 0.005$.

$= 0.235$ أو 23.5% — بسّط.

تمرين موجّه

7. **الصفوف الدراسية** خلال السنة الدراسية الأخيرة في مدرسةٍ ثانويةٍ محددة، درس 48% من الطلاب لغةً أجنبية. وقد سُئل سبعة طلابٍ اختيروا عشوائيًا إذا ما درسوا لغةً أجنبيةً خلال السنة الأخيرة. أنشئ توزيعًا احتماليًا عشوائيًا للمتغير العشوائي X الذي يمثل الطلاب الذين أجابوا بنعم ومثّله بيانيًا. ثم أوجد احتمال أن يكون أقل من 4 من أولئك الطلاب قد أجابوا بنعم. **انظر الهامش.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال إضافي

7 **الجامعة** أشار استبيانٌ جرى مؤخرًا على طلاب في السنة الأخيرة من المدرسة الثانوية إلى أن 78% من الطلاب يخططون للانخراط في الجامعة أو شكل من أشكال التدريب الرسمي. اختير أربعة طلابٍ في السنة الأخيرة من المدرسة الثانوية عشوائيًا وسئلوا إن كانوا يخططون للانخراط في تدريبٍ رسمي أو دخول الجامعة بعد المدرسة الثانوية. أنشئ توزيعًا ذا حدّين للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد طلاب السنة الأخيرة في المرحلة الثانوية الذين أجابوا بنعم ومثّله بيانيًا. ثم أوجد احتمال أن يكون ثلاثة منهم على الأقل قالوا نعم.

X	$P(X)$
0	0.002
1	0.033
2	0.177
3	0.418
4	0.370

0.788

إجابة إضافية (تمرين موجّه)

7.

X	$P(X)$
0	0.010
1	0.066
2	0.184
3	0.283
4	0.261
5	0.145
6	0.045
7	0.006

$P(X < 4) = 0.543$ أو 54.3%

استخدم الصيغ التالية لإيجاد المتوسط والتباين والانحراف المعياري لتوزيع ذي حدّين.

المفهوم الأساسي متوسط توزيع ذي حدّين وانحرافه المعياري

ويعطى المتوسط والتباين والانحراف المعياري لمتغير عشوائيٍ X له توزيع احتمالي بالصيغ التالية:

المتوسط $\mu = np$

التباين $\sigma^2 = npq$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ أو $\sqrt{npq}$

إن هذه الصيغ أبسط من الصيغ التي استخدمتها لإيجاد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيعات الاحتمال ولكنها مكافئةٌ لها من الناحية الجبرية.

مثال 8 من الحياة اليومية متوسط توزيعٍ ذي حدّين وانحرافه المعياري

ممارسة التمارين الرياضية يعرض الجدول التوزيع ذا الحدّين الوارد في المثال 7. أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع. وفسّر المتوسط في سياق حالة المسألة.

X	0	1	2	3	4	5
$P(X)$	0.116	0.312	0.336	0.181	0.049	0.005

الخطوة 1 استخدم الصيغ التالية لإيجاد المتوسط والتباين والانحراف المعياري لتوزيع احتمالي.

$$\mu = \sum[X \cdot P(X)]$$
$$= 0(0.116) + 1(0.312) + 2(0.336) + 3(0.181) + 4(0.049) + 5(0.005)$$
$$= 1.748$$

$$\sigma^2 = \sum[(X-\mu)^2 \cdot P(X)]$$
$$= (0-1.748)^2 \cdot 0.116 + (1-1.748)^2 \cdot 0.312 + (2-1.748)^2 \cdot 0.336 + (3-1.748)^2 \cdot 0.181 + (4-1.748)^2 \cdot 0.049 + (5-1.748)^2 \cdot 0.005$$
$$\approx 1.1354$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$
$$= \sqrt{1.1354}$$

الخطوة 2 استخدم صيغ إيجاد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي ذي الحدّين. في هذه التجربة ذات الحدّين. لديك $n = 5$ و $p = 0.35$ و $q = 0.65$.

$$\mu = np$$
$$= 5(0.35) \text{ or } 1.75$$

$$\sigma^2 = npq$$
$$= 5(0.35)(0.65) \text{ أو } 1.1375$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$
$$= \sqrt{1.1375} \text{ أو حوالي } 1.0665$$

تعطي كلتا الطريقتين النتائج نفسها تقريبًا. ولذلك، يساوي متوسط التوزيع 1.8 أو 2 تقريبًا. ما يعني أن 2 من أصل 5 طلاب في المتوسط سيقولون إنهم يمارسون الرياضة على نحو دوري. ويساوي كلا التباين والانحراف المعياري للتوزيع 1.1 تقريبًا.

تمرين موجّه

8. الصفوف الدراسية أوجد متوسط التوزيع الاحتمالي الذي أنشأته في التمرين الموجّه 7 وتباينه وانحرافه المعياري. وفسّر المتوسط في سياق حالة المسألة.

8. $\mu = 3.36$، $\sigma^2 = 1.747$، $\sigma \approx 1.322$؛ في المتوسط، درس حوالي 3 من أصل كل 7 طلاب لغةً أجنبيةً في سنتهم الدراسية الأخيرة.

الربط بالحياة اليومية

بحسب استفتاء جرى مؤخرًا للرأي العام، فإن 58% من المراهقين الأمريكيين مصنفون على أنهم ذوو نشاط مرتفع. وتتضمن الأنشطة التي يقال إنهم يشاركون فيها على نحو منتظم كرة السلة والجري والمشي السريع وركوب الدراجات والسباحة.

المصدر: استفتاء الرأي العام

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال إضافي

8 الجامعة يعرض الجدول التوزيع ذا الحدّين الوارد في المثال الإضافي 7. أوجد الوسط والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع. وفسّر معناها في سياق حالة المسألة.

X	$P(X)$
0	0.002
1	0.033
2	0.177
3	0.418
4	0.370

الوسط = 3.12، التباين= 0.682، الانحراف المعياري= 0.826؛ في المتوسط، يتلقى قرابة 3 من كل 4 طلاب في السنة الأخيرة من المرحلة الثانوية تدريبًا رسميًا بعد المدرسة الثانوية.

إرشاد للمعلمين الجدد

المفردات إذا كان الطلاب بحاجةٍ إلى المساعدة في استيعاب المفردات، فاطلب منهم العمل في مجموعاتٍ من اثنين أو ثلاثة. واجعل كل طالبٍ يكتب تعريفًا أو يرسم صورةً لكل مفردةٍ جديدة. وبعد أن يكون كل طالبٍ في كل مجموعةٍ قد أعدّ تعريفه أو صورته، اطلب من كل واحدٍ أن يشارك عمله مع المجموعة. فإذا كان العمل متوافقًا، فينبغي أن تنتقل المجموعة إلى الكلمة التالية. وإن كان العمل غير متوافق، فعلى المجموعة أن تناقش الفروقات وتحلّها.

إجابات إضافية

1. منفصل؛ عدد رسائل الهاتف المحمول قابل للعد، ولهذا فهو منفصل.
2. متصل؛ يمكن أن يكون للزمن أي قيمةٍ ضمن فترةٍ معقولةٍ من الزمن، كأن يكون بين 30 و 55 دقيقة.
3. متّصل؛ يمكن أن يكون الوزن أي عدد.
4. منفصل؛ عدد الأقراص المدمجة قابل للعد.
5. منفصل؛ عدد الأصوات قابل للعد.
6. متّصل؛ يمكن أن يكون الوزن أي عدد.
13. تجربة ذات حدين؛ $n = 25$، $P(S)$ = الطالب أعسر $P(F)$ = الطالب أيمن؛ الإجابة النموذجية: سيكون الطالب أعسرَ أو أيمن.

التمارين

صنّف كل متغير عشوائي X على أنه *منفصل* أو *متصل*. اشرح استنتاجك. (المثال 1) **1–6. انظر الهامش.**

1. X يمثل عدد الرسائل النصية التي أرسلها طالب اختير عشوائيًا في يوم معين.
2. X يمثل الزمن الذي يستغرقه طالب اختير عشوائيًا لإتمام اختبارٍ في الفيزياء.
3. X يمثّل وزن كعكة شوكولاتة رقيقة اختيرت عشوائيًا في كافتيريا المدرسة.
4. X يمثّل عدد الأقراص المدمجة التي يمتلكها طالب اختيار عشوائيًا في يومٍ معيّن.
5. X يمثّل عدد الأصوات التي تلقّاها مرشّح اختير عشوائيًا لانتخاباتٍ محددة.
6. X يمثل وزن مصارع اختير عشوائيًا في يوم معين.

أنشئ توزيعًا احتماليًا ومثّله بيانيًا لكل متغير عشوائي X. وأوجد المتوسط وفسّره في سياق الحالة المعطاة. (الأمثلة 2-4)

7. **الموسيقى** سُئل طلابٌ عن عدد مشغّلات MP3 التي يملكونها.
انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

المشغّلات X	التكرار
0	9
1	17
2	9
3	5
4	2

انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

8. **التسلية** كان هناك 20 مشاركًا في مسابقةٍ لتناول الشطائر ضمن معرضٍ ريفي.

عدد الشطائر المأكولة X	التكرار
1	1
2	5
3	9
4	3
5	2

انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

9. **الإفطار** سُئلت عينةٌ من طلاب المرحلة الثانوية عن عدد الأيام التي تناولوا فيها طعام الإفطار خلال الأسبوع المنصرم.

الأيام X	التكرار
0	5
1	3
2	17
3	27
4	6
5	19
6	18
7	65

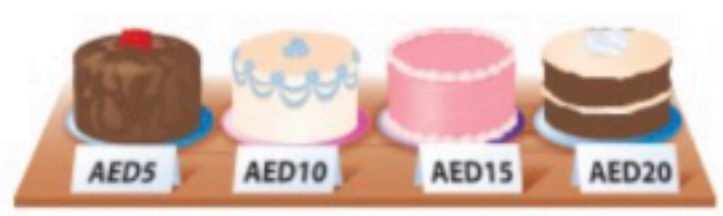
انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

10. **الصحة** سئل المرضى في عيادة أحد أطباء الأسنان عن عدد مرات تنظيفهم أسنانهم باستخدام الخيط في الأسبوع الواحد.

مرات التنظيف بالخيط X	التكرار
1	9
2	15
3	5
4	2
5	1
6	0
7	1

11. **التأمين على السيارات** تنصّ بوليصة تأمينٍ كلفتها AED 300 على سداد مبلغ AED 25,000 في حال سرقة سيارةٍ وعدم استعادتها. فإذا كان احتمال السرقة $p = 0.0002$، فما قيمة التوقع الخاصة بربح شركة التأمين (أو خسارتها) بموجب هذه البوليصة؟ (مثال 5)
الربح AED 295

12. **جمع التبرعات** تستضيف مدرسةٌ حفلًا سنويًا لجمع التبرعات، حيث تباع فيه بطاقاتٌ للمخبوزات ذات القيم المشار إليها أدناه. افترض أنّ 100 بطاقة بيعت للسحب على واحدةٍ من كل من الكعكات الأربع.



ما قيمة التوقع للربح الذي سيحققه أحد المشاركين إذا اشترى بطاقةً واحدةً بقيمة AED 1؟ (مثال 5) **الخسارة AED 0.50**

حدّد إن كانت كل تجربةٍ تجربةً ذات حدّين أو إن كان يمكن اختزالها إلى تجربةٍ ذات حدّين. فإن كان يمكن تقديمها على أنها تجربةٌ ذات حدّين، فاذكر قيم n و p و q. ثمّ أدرج جميع القيم المحتملة للمتغير العشوائي. وإن لم تكن كذلك، فاشرح السبب. (مثال 6) **13-19. انظر الهامش.**

3. تجري استقصاءً على 25 طالبًا لمعرفة كم من هؤلاء الطلاب أعسر. يمثل المتغير العشوائي عدد الأشخاص العُسر.
14. تجري استقصاءً على 200 شخصٍ لتعرف إن كانوا يتابعون أمسية يوم الإثنين الكروية. يمثل المتغير العشوائي عدد الأشخاص الذين يتابعون أمسية الإثنين الكروية.
15. ترمي حجر نردٍ 10 مراتٍ لتعرف إن كان يظهر العدد 5. يمثل المتغير العشوائي عدد مرات ظهور العدد 5.
16. ترمي قطعة نقدٍ 200 مرة كي ترى كم مرةً تظهر الكتابة. يمثل المتغير العشوائي عدد مرات ظهور الكتابة.
17. تسأل 15 شخصًا عن أعمارهم. يمثل المتغير العشوائي أعمارهم.
18. تجري استقصاءً على 40 طالبًا كي تعرف من منهم قد تخطّى اختبار القيادة. يمثل المتغير العشوائي عدد الطلاب الناجحين.
19. تختار 10 بطاقاتٍ من رزمةٍ دون إعادة. يمثل المتغير العشوائي عدد أوراق «القلوب».

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-24 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

ورقة البيانات ضع في الحسبان استخدام ورقة بياناتٍ في التمرينات التي تفرض على الطلاب تحديد الوسط والتباين والانحراف المعياري.

إجابات إضافية

14. تجربة ذات حدّين؛ $n = 200$؛ $P(S) =$ النسبة المئوية لمتابعي مباراة أمسية الاثنين في كرة القدم؛ $P(F) = 1 - P(S)$؛ الإجابة النموذجية: إما أن يتابع الفرد مباراة كرة القدم في أمسية الاثنين أو ألا يتابعها.
15. تجربة ذات حدين؛ $n = 10$. $P(S) = \frac{1}{6}$ في كل دحرجة؛ $P(F) = \frac{5}{6}$؛ الإجابة النموذجية: سوف يظهر لك العدد 5 أو عدد آخر.
16. تجربة ذات حدين؛ $n = 20$. $P(S) = \frac{1}{2}$. $P(F) = \frac{1}{2}$؛ الإجابة النموذجية: ستحطّ الصور أو الكتابات.
17. ليست تجربةً ذات حدين؛ الإجابة النموذجية: هذه ليست تجربةً ذات حدين لأن هناك أكثر من مخرجين اثنين. يمكن أن يكون عمر الشخص أي عددٍ معقول.
18. تجربة ذات حدين؛ $n = 40$. $P(S) =$ النسبة المئوية التي تخطت الاختبار. $P(F) = 1 - P(S)$؛ الإجابة النموذجية: أما أن يكون الشخص قد تخطّى الاختبار أو لم يتخطّه.
19. ليست تجربة ذات حدين؛ الإجابة النموذجية: بما أنك تسحب بطاقاتٍ دون إعادة، فإن الاحتمال يتغير لأن هناك بطاقاتٍ أقل.

أنشئ توزيعًا ذا حدّين ومثّله بيانيًا لكل متغير عشوائي. وأوجد المتوسط وفسّره في سياق الحالة المعطاة. ثم أوجد التباين والانحراف المعياري.
(المثالان 7 و 8) **20–24. انظر ملحق إجابات الوحدة 10.**

20. خلال استقصاءٍ جرى مؤخرًا تبيّن أن 89% من الأمريكيين يطلبون إضافاتٍ على وجبات البيتزا. يُسأل خمسة مراهقين اختيروا عشوائيًا إذا كانوا يطلبون إضافات.

21. في إيوركا بكاليفورنيا، 21% من الأيام مشمسة. فكّر في عدد الأيام المشمسة في فبراير.

22. يشير أحد استطلاعات الرأي إلى أن 26% من موظفي إحدى الشركات قد تصفحّوا الإنترنت أثناء العمل. اختير عشرة زملاء في العمل وسئلوا إن كانوا قد تصفّحوا الإنترنت أثناء العمل.

23. أشارت مجلة إحدى المدارس الثانوية إلى أن 65% من الطلاب يرتدون أحزمة الأمان أثناء القيادة. يُسأل ثمانية طلابٍ اختيروا عشوائيًا إن كانوا يرتدون أحزمة الأمان.

24. بحسب استقصاءٍ جرى مؤخرًا، فإن 41% من طلاب المدرسة الثانوية يملكون سيارة. يُطلب من سبعة طلابٍ اختيروا عشوائيًا تحديد ما إن كانوا يملكون سيارة.

25. **التطوع** خلال استقصاءٍ جرى مؤخرًا، أشارت نسبة 62% من الإماراتيين إلى أنهم أفردوا بعض الوقت للتطوع لصالح جمعيةٍ خيريةٍ خلال العام الأخير. فإذا اختيرت عينةٌ عشوائيةٌ من 10 إماراتيين، أوجد كلًا من الاحتمالات التالية. **a–d. انظر الهامش.**

a. أن يكون 6 أشخاصٍ بالضبط قد أفردوا وقتًا للجمعية الخيرية.
b. أن يكون 5 أشخاصٍ على الأقل قد أفردوا وقتًا للجمعية الخيرية.
b. أن يكون 3 أشخاصٍ على الأكثر قد أفردوا وقتًا للجمعية الخيرية.
d. أن يكون أكثر من 8 أشخاصٍ قد أفردوا وقتًا للجمعية الخيرية.

26. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف شكل توزيعٍ ذي حدّين.

a. **بيانيًا** أنشئ التوزيع ذا الحدّين الذي يقابل كلًا من التجارب التالية ومثّله بيانيًا. **a–d انظر ملحق إجابات الوحدة**

i. $n = 6,\ p = 0.5$ ii. $n = 6,\ p = 0.3$
iii. $n = 6,\ p = 0.7$ iv. $n = 8,\ p = 0.5$
v. $n = 10,\ p = 0.5$

b. **لفظيًا** صِف شكل كل من التوزيعات التي أوجدتها في الجزء a.

c. **تحليليًا** خمّن شكل توزيع له كلّ من احتمالات النجاح التالية: $p > 0.5$ و $p = 0.5$ و $p < 0.5$.

d. **تحليليًا** ما الذي يحدث لانتشار توزيعٍ ذي حدّين مع زيادة n ؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

27. **البرهان** استخدم التوزيع أدناه لتبرهن أن $\mu = np$ و $\sigma^2 = npq$ في توزيعٍ عشوائي. علمًا أن $\mu = \sum[X \cdot P(X)]$ و $\sigma^2 = \sum[(X - \mu)^2 \cdot P(X)]$ للتوزيع الاحتمالي.
انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

X	$P(X)$
0	$p - 1$
1	p

28. **الاستنتاج** افترض أن قطعةً نقديةً ترمى عشر مراتٍ وتستقرّ على الصورة في كل مرة. فهل ستزداد احتمال استقرار القطعة النقدية على الكتابة خلال الرمية التالية؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

29. **مسألة غير محددة الإجابة** يدعى التوزيع الاحتمالي الذي تظهر فيه جميع قيم المتغير العشوائي باحتمالٍ متساوٍ *بالتوزيع الاحتمالي المنتظم*. صِف مثالًا عن مسألةٍ تعطي توزيعًا منتظمًا. ثم أوجد الاحتمالات النظرية التي ستنشأ عن هذه التجربة. واشتمل على جدولٍ وتمثيلٍ بياني للتوزيع. **انظر ملحق إجابات الوحدة 10.**

التبرير **حدد ما إذا كانت كل من العبارات التالية صحيحةً أم *خاطئة*. واشرح إجابتك**

30. تحدّد الاحتمالات المرافقة لرمي حجري نردٍ نظريًا.
انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

31. متوسط متغيرٍ عشوائي يساوي دائمًا مخرجًا محتملًا للتجربة.
انظر الهامش.

32. **تحدٍ** خذ توزيعًا عشوائيًا فيه $n = 50$ و $\sigma = 1.54$. فما هو متوسط التوزيع؟ (*تلميح:* p أقرب إلى 0 من 1.) **2.5**

33. **الكتابة في الرياضيات** صِف طريقةً أخرى يمكنك من خلالها إيجاد احتمال أن يكون ثلاثة مراهقين على الأقل يتدربون بصورةٍ دورية أو $P(X \geq 3)$ من المثال 7. وأعطِ مثالًا عن حالةٍ يكون فيها من الأسرع استخدام هذه الطريقة. **انظر الهامش.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابات إضافية

26a. 24.9% **26b.** 86.5%
26c. 4.13% **26d.** 5.98%

29. لا؛ الإجابة النموذجية: رمي قطعة نقودٍ تجربة ذات حدين، حيث تكون كل محاولة مستقلة. ولذلك، فإن احتمال استقرار قطعةٍ نقديةٍ على الصورة هي نفسها في كل محاولة، ونتيجة مخرج كلٍ من التجارب الأسبق مستقل عن التجربة الحالية.

602 | الدرس 10-2 | التوزيعات الاحتمالية

مراجعة شاملة

34. **الأعمال الفنية** يعرض الجدول أسعار لوحاتٍ تباع خلال مزادٍ فني. **a–b انظر ملحق إجابات الوحدة**

b. أنشئ مدرجًا إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

b. صِف تمركز البيانات وانتشارها باستخدام إما المتوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك.

أسعار اللوحات (AED)					
1800	600	600	750	600	1800
600	750	1200	300	450	1350
300	750	600	2700	450	750
1200	2100	450	600	2300	750

استخدم المجموع الجزئي الخامس للمتسلسلة الأسية لتقريب كل قيمة إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

35. $e^{0.2}$ **1.221**

36. $e^{-0.4}$ **0.670**

37. $e^{-0.75}$ **0.474**

أوجد الأوساط الهندسية المحددة لكل زوجٍ من الحدود غير المتعاقبة.

38. 8 و 3.312؛ 5 متوسطات **$\pm 20, 50, \pm 125$**

39. $\frac{2}{9}$ و 54؛ 4 متوسطات **$\frac{2}{3}, 2, 6, 18$**

40. $\frac{3}{4}$ و $\frac{24}{3125}$؛ 4 متوسطات **$\frac{3}{10}, \frac{3}{25}, \frac{6}{125}, \frac{12}{625}$**

أوجد الحدود الأربعة التالية لكل متتالية.

41. $a_1 = -12, a_n = a_{n-1} + 3, n \geq 2$ **$-9, -6, -3, 0$**

42. $a_1 = 19, a_n = a_{n-1} - 13, n \geq 2$ **$6, -7, -20, -33$**

43. $a_1 = 81, a_n = a_{n-1} - 72, n \geq 2$ **$9, -63, -135, -207$**

أوجد ناتج الضرب النقطي لكل من u و v. ثم حدد ما إذا كان u و v متعامدين.

44. $\mathbf{u} = \langle 2, 9, -2 \rangle$ $\mathbf{v} = \langle -4, 7, 6 \rangle$ **43؛ غير متعامدين**

45. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ and $v = -7i + 8j + 9k$ **-7؛ غير متعامدين**

46. $\mathbf{u} = \langle 8, -2, -2 \rangle$ $\mathbf{v} = \langle -6, 6, -10 \rangle$ **40؛ غير متعامدين**

مثل بيانيًا القطع الزائد الممثل بكل معادلة. **50-48. انظر ملحق إجابات الوحدة 10.**

47. $\frac{(y+6)^2}{36} - \frac{(x-1)^2}{24} = 1$

48. $\frac{(y+5)^2}{49} - \frac{(x-6)^2}{20} = 1$

49. $\frac{(y+3)^2}{9} - \frac{(x+5)^2}{4} = 1$

أوجد AB و BA، إن أمكن. **53-51. انظر الهامش.**

50. $A = [2, -1], B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

51. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

52. $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 1 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

53. **المراجعة** أوجد مجموع ... + 4 + 8 + 16 **B**

A 28

B 32

C 48

D 64

54. خلال استطلاع حديثٍ للآراء، أفاد 48% من الإماراتيين أنهم سبق أن اشتروا هديةَ عيدٍ واحدةٍ على الأقل من شبكة الإنترنت. فإذا اختيرت عينةٌ عشوائيةٌ من 10 إماراتيين. فما احتمال أن يكون 7 منهم على الأقل قد اشتروا هديةً من شبكة الإنترنت؟ **J**

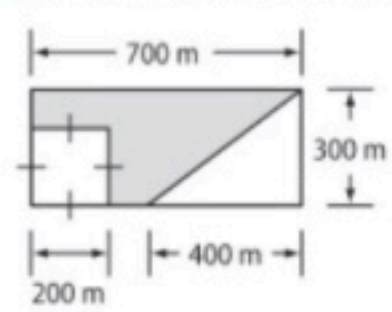
F 3.4%

G 4.8%

H 10.0%

J 14.1%

55. **SAT/ACT** أوجد مساحة المنطقة المظللة. **B**



A $90{,}000\ m^2$

B $110{,}000\ m^2$

C $130{,}000\ m^2$

D $150{,}000\ m^2$

E $210{,}000\ m^2$

56. **المراجعة** أي من التوزيعات التالية يصف البيانات على النحو الأفضل؟ **G**

{14, 15, 11, 13, 13, 14, 15, 14, 12, 13, 14, 15}

F التوزيع نحو اليسار

G التوزيع نحو اليمين

H التوزيع الطبيعي

J التوزيع ذو الحدين

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

انتبه!

خطأ شائع في التمرين 29. ربما يفترض الطلاب أن ظهور 10 صورٍ على التوالي يعني أن الرمية التالية ينبغي أن تعطي صورة. فذكّرهم بأن كل رمية هي حدثٌ مستقل.

4 التقويم

الكرة البلورية اطلب من الطلاب أن يصفوا كيف يرون أن من شأن درس اليوم حول التوزيعات الاحتمالية للقيم المنفصلة أن يساعدهم في الدرس التالي حول التوزيع العشوائي.

إجابات إضافية

32. خطأ؛ الإجابة النموذجية: يمكن أن يكون الوسط مخرجًا ممكنًا للتجربة أو ألا يكون كذلك.

34. الإجابة النموذجية: بدلًا من إيجاد $P(3)$ و $P(4)$ و $P(5)$ ومن ثم جمع النتائج، فيمكنك إيجاد $P(0)$ و $P(1)$ و $P(2)$ وجمع النتائج ومن ثم طرح الإجابة من 1. ستكون هذه الطريقة أسرع لو أنك توجد $P(X \geq 1)$ أو $P(X \geq 2)$ في المثال 7.

51. $AB = [6], BA = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$

52. $AB = \begin{bmatrix} 8 & -11 \\ 22 & 12 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 17 & -7 \\ 41 & 3 \end{bmatrix}$

53. $AB = \begin{bmatrix} 4 & 37 & -12 \\ 16 & 53 & -18 \\ -22 & 53 & -15 \end{bmatrix},$

$BA = \begin{bmatrix} 47 & 31 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}$

التدريس المتمايز BL

التوسّع اطلب من الطلاب تشكيل مجموعاتٍ من اثنين أو ثلاثة. على أعضاء كل مجموعةٍ كتابة سؤالٍ استبياني يرون أنه مشوّق. وكلّف كلّ مجموعةٍ أن تكتب كيف يحقق السؤال معايير التجربة ذات الحدّين ومن ثم أن تجري الاستبيان المرتبط بذلك السؤال. وبناء على النتيجة، اطلب من كل مجموعةٍ تحديد n و p و q وإنشاء التوزيع ذي الحدّين وتمثيله بيانيًا.

الدرس 10-3 التوزيع الطبيعي

:: السابق

- لقد حللت التوزيعات الاحتمال لمتغيرات ثابتة منفصلة.

:: الحالي

1. إيجاد المساحة المحصورة تحت منحنيات التوزيع.
2. إيجاد احتمالات التوزيعات الطبيعية، وإيجاد قيم البيانات عند إعطاء الاحتمالات.

:: لماذا

- خلال إحدى السنوات الأخيرة، كان لدى 107 ملايين شخص أعمارهم 20 عامًا مستوى كلي للكوليسترول يساوي 200 مليجرام في الديسيلتر أو أكثر. ويستخدم الأطباء متغيراتٍ من هذا النوع لمقارنة مستويات الكوليسترول لدى المرضى مع مجالات الكوليسترول *الطبيعية* . وفي هذا الدرس، سوف تحدد احتمال أن يكون لشخصٍ مختارٍ عشوائيًا مستوىً محدد للكوليسترول.

المفردات الجديدة

توزيع طبيعي
normal distribution
قاعدة تجريبية
empirical rule
قيمة z
z-value
توزيع طبيعي معياري
standard normal distribution

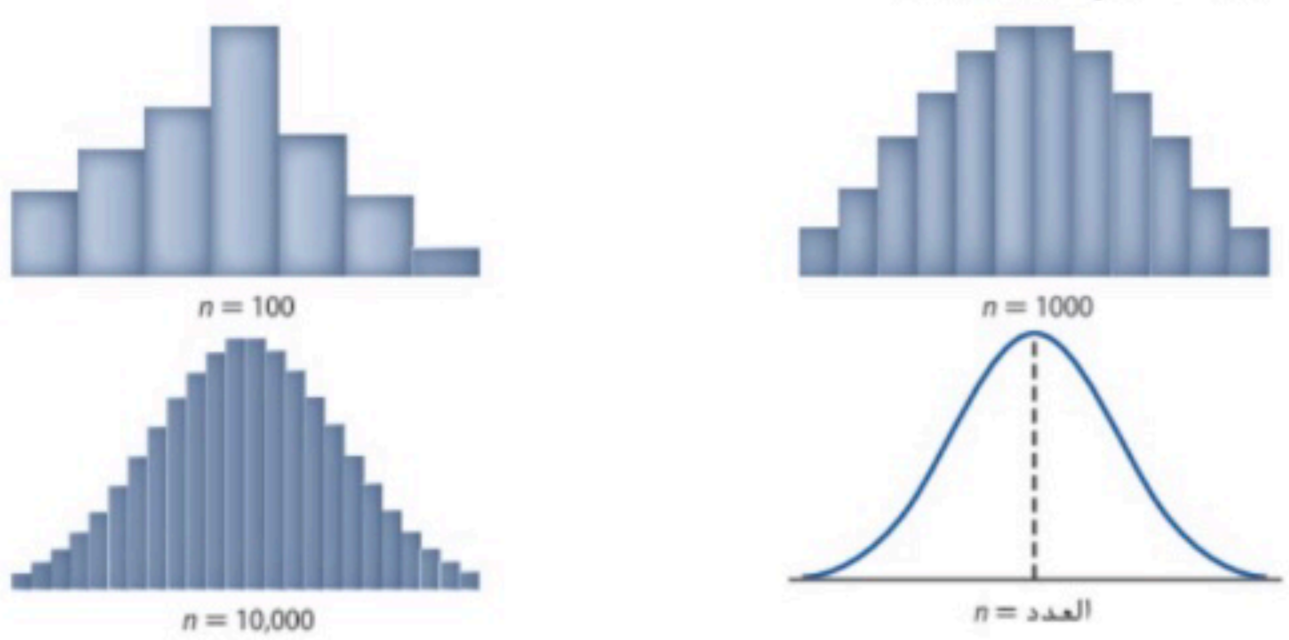
1 التوزيع الطبيعي

يُسمى التوزيع الاحتمالي لمتغير متصل *بالتوزيع الاحتمالي المتصل*. يُسمى التوزيع الاحتمالي المتصل الأكثر استخدامًا **بالتوزيع الطبيعي**. تكون خواص التوزيع الطبيعي كما يلي.

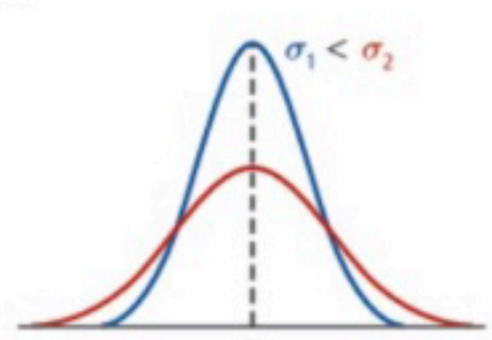
المفهوم الأساسي خواص التوزيع الطبيعي

- يتسم التمثيل البياني للمنحنى بأنه متصل ويشبه شكل الجرس ومتماثل بالنسبة للوسط.
- يتسم الوسط والوسيط والمنوال بالمساواة والمركزية.
- يُعد المنحنى متصلاً.
- يقترب المنحنى من المحور الأفقي x ولكنه لا يتلامس معه أبدًا.
- المساحة الإجمالية أسفل المنحنى تساوي 1 أو 100%.

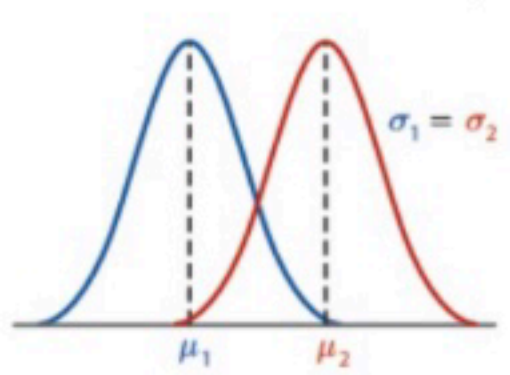
خذ توزيعًا احتماليًا متصلًا للأزمنة التي تحققها عينة عشوائيةٌ من 100 رياضي في سباق 400 متر. بزيادة حجم العينة والحدّ من عرض الفئة، يصبح التوزيع أكثر وأكثر تماثلًا. فإن كان من الممكن اعتيان المجتمع الإحصائي بأكمله، فإن التوزيع سيقارب التوزيع الطبيعي كما هو موضح



لكل متغير عشوائي ذي توزيع طبيعي، يعتمد شكل منحنى التوزيع الطبيعي وموقعه على المتوسط والانحراف المعياري. فعلى سبيل المثال، يمكنك أنّ ترى في المثال 10.3.1 أن زيادة حجم الانحراف المعياري تزيد من تسطّح المنحنى. ويؤدي التغير في المتوسط، كما يوضح الشكل 10.3.2، إلى إزاحةٍ أفقيةٍ للمنحنى.



الشكل 10.3.1



الشكل 10.3.2

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 10-3 تحليل التوزيعات الاحتمالية لمتغيرات عشوائية منفصلة.

الدرس 10-3 إيجاد المساحة المحصورة تحت منحنيات التوزيع الطبيعي.
إيجاد احتمالات التوزيعات الطبيعية، وإيجاد قيم البيانات عند إعطاء الاحتمالات.

بعد الدرس 10-3 استخدام التوزيع الطبيعي لإيجاد فترات الثقة.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة فقرة **لماذا؟** في هذا الدرس. واجعلهم يفكروا في المقصود بكون البيانات موزعةً توزيعًا طبيعيًا.

اطرح السؤال التالي:

- يساوي وزن إحدى أسماك المارلين الزرقاء الضخمة التي التقطت في إحدى مناطق الصيد 70 كيلوجرامًا. فإذا ذهبت إلى منطقة الصيد تلك والتقطت سمكة مارلين، فكم يمكن أن يكون وزنها برأيك؟ حوالي 70 كيلوجرامًا

- هل من الأرجح اصطياد سمكة مارلين تزن 80 أم سمكة مارلين تزن 90 كيلوجرامًا؟ 80 كيلوجرامًا
- ما الوزن المنطقي لسمكة مارلين أكبر من 90% من أسماك المارلين الأخرى التي اصطيدت؟ الإجابة النموذجية: على الرغم من أن الوزن أعلى، فإنه دون معرفة انتشار البيانات، فلن تكون هناك طريقة للإجابة.
- أي الحدثين التاليين أكثر أرجحية: صيد سمكةٍ وزنها أقل من 63 كيلوجرامًا أو صيد سمكةٍ وزنها أقل من 55 كيلوجرامًا؟ صيد سمكة مارلين وزنهاأقل من 63 كيلوجرامًا.

1 التوزيع الطبيعي

يوضح **المثال 1** كيفية استخدام القاعدة التجريبية لإيجاد الاحتمالات. ويعرض **المثال 2** كيفية إيجاد قيم z وكيفية استخدام قيم z لإيجاد النسب المئوية. ويوضح **المثال 3** كيفية استخدام التوزيع المعياري الطبيعي. ويوضح **المثال 4** كيفية إيجاد قيم z عند إعطاء مساحةٍ تقع تحت المنحنى الطبيعي.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 **الارتفاعات** ارتفاعات 32 قمةٍ في سلسلة جبال موزعة توزيعًا طبيعيًا وفق الوسط 3100 وبانحرافٍ معياريٍ يساوي 100 متر.

a. كم العدد التقريبي للذرى التي يفوق ارتفاعها 3650 مترًا؟ حوالي 5

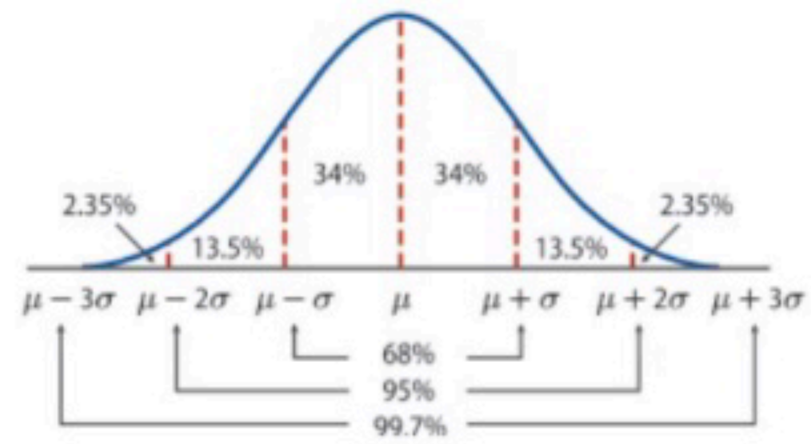
b. ما النسبة المئوية من الذرى التي تقع بين ارتفاع 3340 مترًا و 3750 مترًا؟ حوالي 95%

نصيحة دراسية
قاعدة تجريبية تُعرف القاعدة التجريبية أيضًا باسم *القاعدة 68-95-99.7*.

تمثل المنطقة الواقعة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي بين قيمتين للبيانات النسبة المئوية من البيانات الواقعة داخل هذه الفترة. يمكن استخدام **القاعدة التجريبية** لوصف المساحة أسفل المنحنى الطبيعي وضمن فترات تبعد انحرافًا معياريًا واحدًا أو اثنين أو ثلاثة عن الوسط.

المفهوم الأساسي القاعدة التجريبية

في التوزيع الطبيعي ذي الوسط μ والانحراف المعياري σ، ينطبق ما يلي:



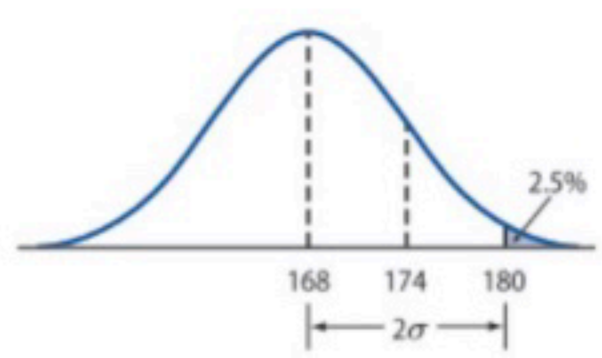
- تقع تقريبًا 68% من قيم البيانات فيما بين $\mu - \sigma$ و $\mu + \sigma$.
- تقع 95% من البيانات بين $\mu - 2\sigma$ و $\mu + 2\sigma$.
- تقع 99.7% من قيم البيانات بين $\mu - 3\sigma$ و $\mu + 3\sigma$.

يمكنك حلّ مسائل تتضمن توزيعاتٍ طبيعيةً تقريبًا باستخدام القاعدة التجريبية.

مثال 1 استخدام القاعدة التجريبية

الارتفاع يتوزع طول 880 طالبًا بمدرسة الشرق الثانوية طبيعيًا بوسط 168 سنتيمترًا وانحراف معياري بقيمة 6 سنتيمترات.

a. كم عدد الطلاب الذين يزيد طولهم عن 180 سنتيمترًا تقريبًا؟

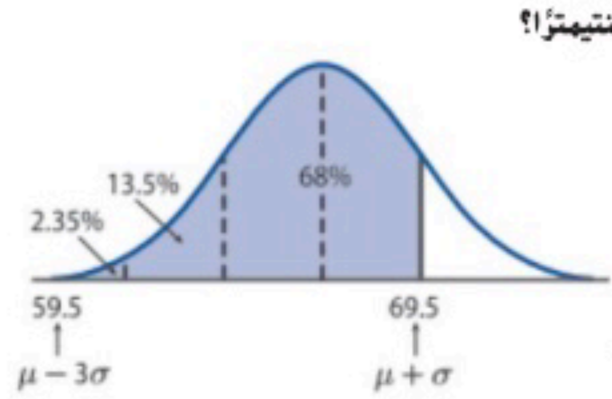


لتحديد عدد الطلاب الذين يزيد طولهم عن 183 سنتيمترًا، أوجد المنطقة المقابلة أسفل المنحنى.

يمكن أن ترى في التمثيل البياني الموضح أن 180 تبعد مسافة 2σ عن الوسط. ونظرًا إلى أن 95% من قيم البيانات تقع على بعد انحرافين معياريين عن الوسط، فإن كل ذيلٍ يمثل 2.5% من البيانات. وتساوي المساحة على الجهة اليمنى من العدد 180 النسبة 2.5% من 880 أو 22.

وهكذا، فإن حوالي 22 من الطلاب أطول من 180 سنتيمترًا.

b. ما النسبة المئوية للطلاب الذين يتراوح طولهم بين 150 و 174 سنتيمترًا؟



تُمثّل النسبة المئوية للطلاب الذين تتراوح أطوالهم بين 150 و 174 سنتيمترًا بالمساحة المظللة على الجهة اليمنى في الشكل، وهي تقع بين $\mu - 3\sigma$ و $\mu + \sigma$. تساوي المساحة الكلية تحت المنحنى البياني بين 150 و 174 مجموع مساحات كل من المناطق.

2%.35+ 13%.5+ 68%=83%.85

ولذلك، 84% من الطلاب تقريبًا تتراوح أطوالهم بين 150 و 174 سنتيمترًا.

نصيحة دراسية
كل ما يقع تحت المنحنى لاحظ أن في المثال 1a، استخدمنا 2.5%، بينما في المثال 1b، استخدمنا 2.35%. عندما يُطلب منك إيجاد قيمة *أكبر من* أو *أقل من*، فسوف تحتاج إلى كل ما هو أسفل هذا الجانب من التمثيل البياني.

تمرين موجّه

1. **التصنيع** توزّع آلةٌ لتعبئة قوارير الماء كمياتٍ مختلفةً قليلاً من الماء في كل قارورة. افترض أن حجم الماء في 120 قارورةً له توزيعٌ طبيعيٌ وسطه 1.1 لتر وانحرافٌ معياريٌ يساوي 0.02 لتر.
   A. ما العدد التقريبي لقوارير الماء التي تُملأ بكميةٍ أقل من 1.06 لتر؟ 3
   B. ما النسبة المئوية من القوارير التي تضم ما بين 1.08 و1.14 لتر؟ 81.5%

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إرشاد للمعلمين الجدد

القيمة العظمى لاحظ أن الوسط على المستوى الإحداثي يساوي القيمة العظمى على المنحنى.

مثال إضافي

2 أوجد قيمة كلّ مما يلي.

a. z إذا كان $X = 36,\ \mu = 40$. و $\sigma = 6$ **−0.67**

b. X إذا كان $\mu = 1.3$ و $z = 1.5$ و $\sigma = 0.6$ **2.2**

التركيز على محتوى الرياضيات

الانحراف المعياري تستخدم صيغة حساب الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{n}}$ في حالة المتغيرات العشوائية المنفصلة. وثمّة صيغةٌ ذات صلةٍ للمتغيرات العشوائية المنفصلة، وذلك نظرًا إلى أن الاحتمالات تخصّ فتراتٍ لا نقاط فردية. $\sigma = \sqrt{\int (x-\mu)^2\, p(x)dx}$، حيث $p(x)$ هي دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X، و $\mu = \int xp(x)\ dx$. كلا التكاملين محدّد ضمن كامل مجال X.

في حين يمكن استخدام القاعدة التجريبية في تحليل التوزيع الطبيعي، تكون فائدتها الوحيدة عند تقييم قيم محددة، مثل $\mu + \sigma$. يمكن تحويل المتغير الذي يتم توزيعه طبيعيًا إلى قيمة معيارية أو قيمة z، حيث يُمكن استخدامه في تحليل أي مدى من القيم في التوزيع الطبيعي. يُعرف هذا التحويل *بالمعيارية*. تُعرف **قيمة z** أيضًا بالدرجة z وإحصاء اختبار z، وتُمثل عدد الانحرافات المعيارية التي تشكلها قيمة بيانات معينة من الوسط.

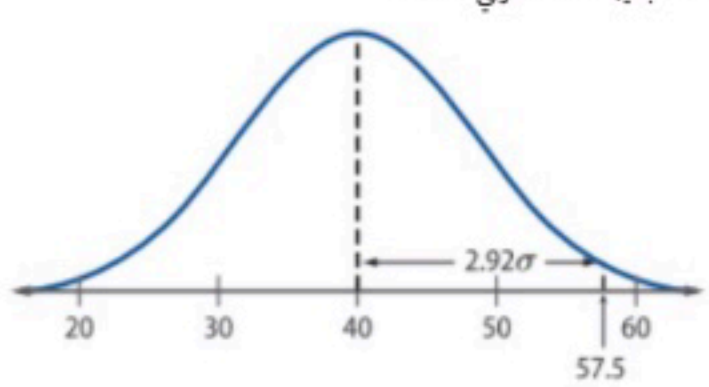
المفهوم الأساسي صيغة قيم z

قيمة z الخاصة بقيمة البيانات في مجموعة بيانات محددة من خلال $z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$، حيث X هي قيم البيانات، و μ هو الوسط، و σ هو الانحراف المعياري.

نصيحة دراسية

قِيم z الموجبة والسالبة إذا كانت قيمة البيانات أقل من الوسط، فقيمة z المطابقة تكون سالبة. وبالعكس، إذا كانت قيمة البيانات أكبر من الوسط، تكون القيمة z موجبة.

يمكنك استخدام قيم z لتحديد موقع *أي* قيمة بيانات داخل مجموعة بيانات. على سبيل المثال، لاحظ التوزيع في $\mu = 40$ و $\sigma = 6$. تقع قيمة البيانات 57.5 بالقرب من الانحراف المعياري 2.92 بعيدًا عن الوسط، كما هو مبيّن. لذلك، ففي هذا التوزيع، يرتبط $X = 57.5$ بقيمة z تساوي 2.92.



مثال 2 إيجاد قيم z

نصيحة دراسية

الموقع النسبي يمكن استخدام قيم z مثل النسب المئوية لمقارنة المواضع النسبية لقيمتين في مجموعتي بيانات مختلفتين.

أوجد كلاً مما يلي.

a. **z إذا كان $X = 24$ و $\mu = 29$ و $\sigma = 4.2$**

$z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$	صيغة قيم z
$= \dfrac{24-29}{4.2}$	$X = 24$ و $\mu = 29$ و $\sigma = 4.2$
≈ -1.19	بسّط.

قيمة z التي تتطابق مع $X = 24$ هي −1.19. وبالتالي، فإن 24 أقل بمقدار 1.19 انحراف معياري من وسط التوزيع.

b. **X إذا كان $z = -1.73$ و $\mu = 48$ و $\sigma = 2.3$**

$z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$	صيغة قيم z
$-1.73 = \dfrac{X-48}{2.3}$	$\mu = 48$ و $\sigma = 2.3$ و $z = -1.73$
$-3.979 = X - 48$	بضرب كل طرف في 2.3.
$44.021 = X$	بجمع 48 إلى كل طرف.

A تتطابق قيمة z البالغة −1.73 مع قيمة بيانات تبلغ حوالي 44 في التوزيع.

تمرين موجّه

2A. z إذا كان $X = 32$ و $\mu = 28$ و $\sigma = 1.7$ **2.35**

2B. X إذا كان $z = 2.15$ و $\mu = 39$ و $\sigma = 0.4$ **39.9**

يحتوي كل متغير عشوائي تم توزيعه طبيعيًا على وسط وانحراف معياري فريدين، وهو ما يؤثر على شكل وموقع المنحنى. ونتيجة ذلك، يوجد العديد من التوزيعات الاحتمال الطبيعية اللانهائية. ولحسن الحظ، يمكن ربطهم جميعًا بتوزيع واحد يُسمى التوزيع الطبيعي *المعياري*. **التوزيع الطبيعي المعياري** هو توزيع طبيعي لقيم z بمتوسط 0 وانحراف معياري 1.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

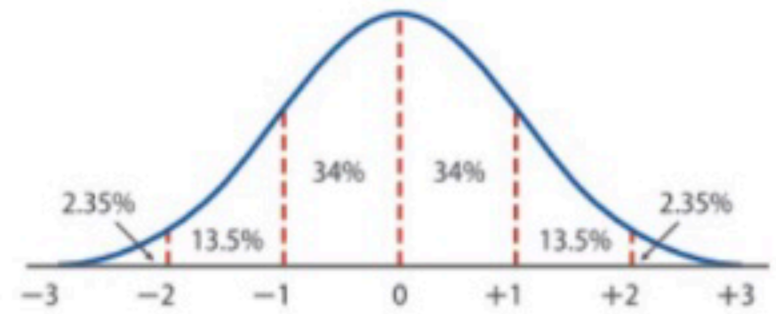
606 | الدرس 10-3 | التوزيع الطبيعي

مثال إضافي

3 **المبيعات** يحتفظ مندوب مبيعاتٍ بسجلٍ للاتصالات الهاتفية التي يجريها للعملاء المحتملين، وخلال فترة 60 يومًا، كان يساوي العدد المتوسط للاتصالات في اليوم الواحد 20 مكالمةً عند انحرافٍ معياري يساوي 4. أوجد عدد الأيام التي أجرى فيها البائع أكثر من 25 اتصالًا. **6.3 أيام**

تتلخص خواص التوزيع الطبيعي المعياري فيما يلي.

المفهوم الأساسي خواص التوزيع الطبيعي المعياري

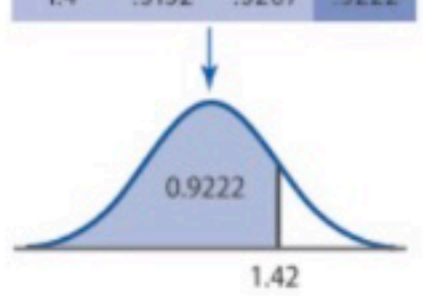


- المساحة الإجمالية أسفل المنحنى تساوي 1 أو 100%.
- تقع المنطقة كلها بين $z = -3$ و $z = 3$.
- التوزيع متماثل.
- الوسط يساوي 0 والانحراف المعياري يساوي 1.
- يقترب المنحنى من المحور الأفقي x ولكنه لا يتلامس معه أبدًا.

يمكنك حل مسائل التوزيع الطبيعي بإيجاد قيمة z التي تتطابق مع القيمة المعطاة X، ثم إيجاد المنطقة القريبة أسفل منحنى المعيار الطبيعي.
يمكن إيجاد المنطقة المطابقة باستخدام جدول قيم z التي تظهر على يسار قيمة z المعطاة. على سبيل المثال، المنطقة أسفل المنحنى على يسار قيمة z البالغة 1.42 هي 0.9222، كما هو مبين.

يمكنك إيجاد المنطقة أسفل المنحنى التي تتطابق مع أي قيمة z باستخدام حاسبة التمثيل البياني. سوف تُستخدم هذه الطريقة لبقية هذه الوحدة.

z	0.00	0.01	0.02
0.0	.5000	.5040	.5080
•	•	•	•
•	•	•	•
1.4	.9192	.9207	.9222



مثال 3 استخدام التوزيع المعياري

الاتصالات بلغ متوسط المكالمات التي يستقبلها مندوب خدمة العملاء كل يوم خلال شهر 30 يومًا 105 مكالمات بالانحراف المعياري 12. أوجد عدد الأيام التي تقل المكالمات فيها عن 110 مكالمات. افترض أن عدد المكالمات يتم توزيعه طبيعيًا.

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$ صيغة قيم z

$$= \frac{110 - 105}{12}$$ أو حوالي 0.42 $X = 110$ و $\mu = 105$ و $\sigma = 12$

على الرغم من أن التوزيع الطبيعي المعياري يتسع إلى ما لا نهاية بالموجب أو السالب، عندما تجد المنطقة أقل من أو أكبر من القيمة المعطاة، يمكنك استخدام قيمة أقل تبلغ −4 وقيمة أكبر تبلغ 4.

```
normalcdf(-4,0.4
2)
        .6627255515
```

في هذه الحالة، أدخل قيمة z أقل تبلغ −4 وقيمة z أعلى تبلغ 0.42. المنطقة الناتجة هي 0.66. لأنه يوجد 30 يومًا في الشهر، يوجد عدد مكالمات أقل من 110 خلال $30 \cdot 0.66$ أو 19.8 يومًا.

وبالتالي، يوجد تقريبًا 20 يومًا تقل المكالمات فيها عن 110 مكالمات.

تلميح تقني

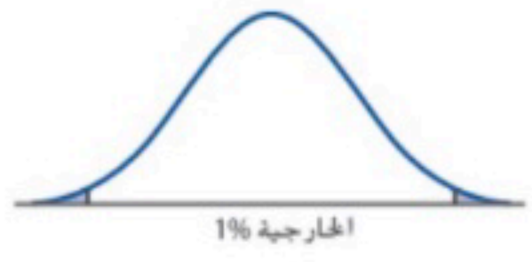
المنطقة أسفل المنحنى الطبيعي
يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد المنطقة أسفل المنحنى الطبيعي المعياري الذي يتطابق مع أي زوج من قيم z بتحديد [DISTR] 2nd و normalcdf (قيمة z الأدنى، قيمة z الأعلى).

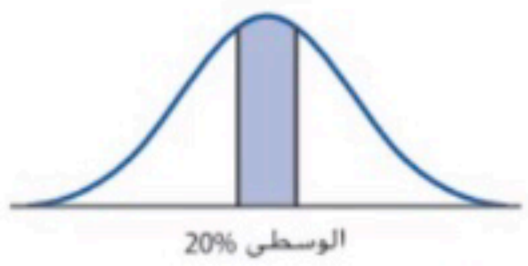
تمرين موجّه

3. **كرة السلة** بلغ متوسط عدد النقاط التي أحرزها أحد فرق كرة السلة خلال موسم واحد 63 مع انحراف معياري 18. إذا كانت هناك 15 مباراة خلال الموسم، فأوجد النسبة المئوية للمباريات التي أحرز فيها الفريق أكثر من 70 نقطة. افترض أن توزيع عدد النقاط كان طبيعيًا. **35%**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

في المثال 3، يمكنك إيجاد المنطقة أسفل المنحنى الطبيعي التي تتطابق مع قيمة z. يمكنك أيضًا إيجاد قيم z التي تتطابق مع مناطق معينة. على سبيل المثال، يمكنك إيجاد قيمة z التي تتطابق مع منطقة تجميعية بنسبة 1% أو 20% أو 99%. يمكنك أيضًا إيجاد فترات قيم z التي تحتوي أو تكون بين نسبة مئوية معينة من البيانات.



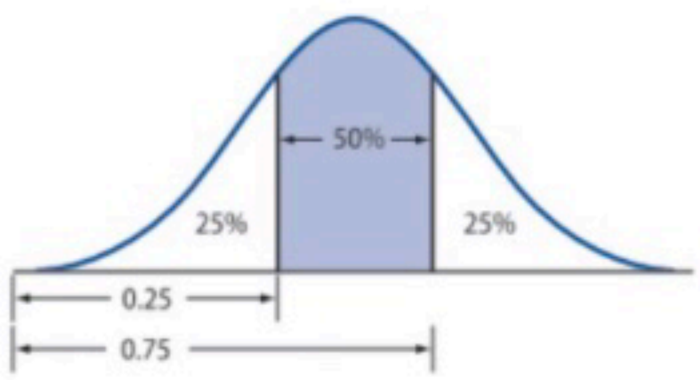


مثال 4 إيجاد قيم z التي تتطابق مع منطقة معينة

أوجد فترة قيم z المرتبطة بكل منطقة.

a. النسبة الوسطى 50% من البيانات

تتطابق النسبة الوسطى 50% من البيانات مع البيانات الواقعة بين 25% و 75% من التوزيع، أو 0.25 و 0.75، كما هو مبيّن.



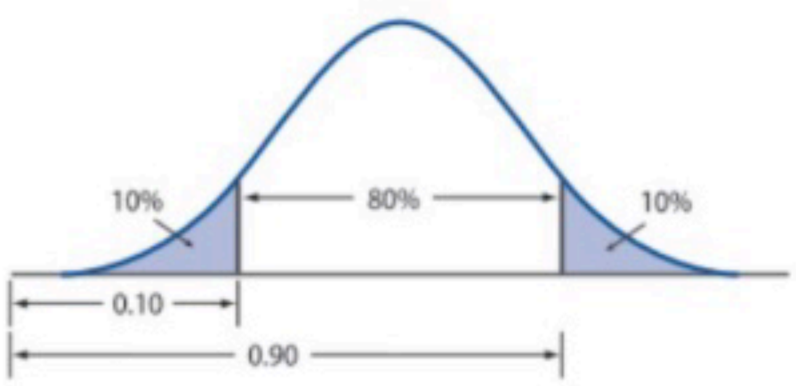
لإيجاد درجات z المطابقة لكل من 0.25 و 0.75، حدد [DISTR] 2nd لعرض قائمة DISTR على حاسبة التمثيل البياني. حدد invNorm (وأدخل 0.25. كرر العملية لإيجاد القيمة المطابقة لـ 0.75، كما هو مبيّن على اليسار. قيمة z المطابقة لـ 0.25 هي 0.67 والقيمة z المطابقة لـ 0.75 هي 0.67.

```
invNorm(0.25)
     -.6744897495
invNorm(0.75)
      .6744897495
```

وبالتالي، الفترة التي تمثل النسبة الوسطى 50% من البيانات هي $-0.67 < z < 0.67$.

b. النسبة الخارجية 20% من البيانات

تمثل النسبة الخارجية 20% من البيانات القمة 10% والقاع 10% من التوزيع أو 0.1 و 0.9، كما هو مبيّن.



لإيجاد قيمة z المطابقة لـ 0.10، أدخل 0.10 في حاسبة التمثيل البياني أسفل invNorm (وكرر هذه العملية لإيجاد 0.90، كما هو مبيّن. قيمة z المطابقة لـ 0.10 هي 1.28– وقيمة z المطابقة لـ 0.90 هي 1.28.

```
invNorm(0.10)
     -1.281551567
invNorm(0.90)
      1.281551567
```

وبالتالي، الفترة التي تمثل النسبة الخارجية 20% من البيانات هي $z < -1.28$ أو $z > 1.28$.

تمرين موجّه

4A. نسبة 25% الوسطى من البيانات $-0.32 < z < 0.32$

4B. النسبة الخارجية 60% من البيانات $-0.52 > z$ أو $z > 0.52$

نصيحة دراسية

التماثل التوزيع الطبيعي متماثل، ولذلك عندما يُطلب منك تحديد مجموعة النسبة الوسطى أو الخارجية للبيانات، فإن قيم z ستكون متقابلة.

مثال إضافي

4 أوجد فترة قيم z المرتبطة بكل منطقة.

a. المنطقة البالغة نسبتها 75% الواقعة في المنتصف من البيانات $-1.15 < z < 1.15$

b. المنطقة البالغة نسبتها 5% الواقعة في الأعلى من البيانات $z > 1.64$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

608 | الدرس 3-10 | التوزيع الطبيعي

2 الاحتمال والتوزيع الطبيعي

الاحتمال والتوزيع الطبيعي لقد رأيت كيف أن المنطقة أسفل المنحنى الطبيعي تتطابق مع تناسب قيم البيانات في إحدى الفترات. تتطابق المنطقة أيضًا مع احتمال وقوع قيم البيانات داخل فترة معينة. إذا تم اختيار قيمة z عشوائيًا، فاحتمال اختيار قيمة بين 0 و 1 ستكون مكافئة للمنطقة أسفل المنحنى بين 0 و 1.00، وهي 0.3413. وبالتالي، فاحتمال اختيار قيمة بين 0 و 1 ستكون حوالي 34%.

نصيحة دراسية

النسبة المئوية والتناسب والاحتمال والمساحة حين تطلب منا مسألة إيجاد نسبةٍ مئويةٍ أو تناسبٍ أو احتمال، فإنها تطلب منا إيجاد القيمة نفسها، وهي المساحة المقابلة أسفل المنحنى الطبيعي.

مثال 5 إيجاد الاحتمالات

الأرصاد الجوية **يتم توزيع درجات الحرارة لأحد الشهور في إحدى مدن دولة الإمارات حيث $\mu = 81°$ و $\sigma = 6°$. أوجد كل احتمال، واستخدم حاسبة التمثيل البياني لرسم المنطقة المطابقة أسفل المنحنى.**

a. $P(70° < X < 90°)$

السؤال هو طلب معرفة النسبة المئوية لدرجات الحرارة بين 70° و90°. أولاً، أوجد قيم z المطابقة لكل من $X = 70$ و $X = 90$.

$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ صيغة قيم z

$= \frac{70 - 81}{6}$ $X = 70$ و $\mu = 81$ و $\sigma = 6$

≈ -1.83 بسّط.

استخدم 90 لإيجاد قيمة z الأخرى.

$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ صيغة قيم z

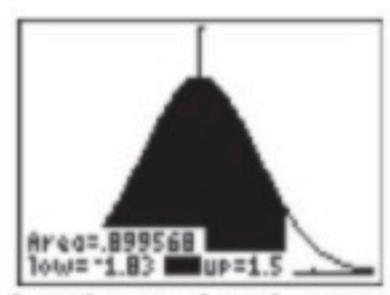
$= \frac{90 - 81}{6}$ $X = 90$ و $\mu = 81$ و $\sigma = 6$

≈ 1.5 بسّط.

نصيحة دراسية

عوامل الاتصال في التوزيع المتصل، ليس هناك فرقٌ بين $P(x \geq c)$ و $P(x > c)$ لأن احتمال أن تساوي x القيمة c تساوي الصفر.

يمكنك استخدام حاسبةٍ للتمثيل البياني لعرض المساحة المقابلة لأي قيم z من خلال اختيار [2nd] [DISTR]. وبعد ذلك من القائمة DRAW، اختر ShadeNorm (*lower z value, upper z value*). تساوي المساحة الواقعة بين $z = -1.83$ و $z = 1.5$ القيمة 0.899568 كما هو موضح.



[−4, 4] scl: 1 by [0, 0.5] scl: 0.125

ولذلك، فإن 90% تقريبًا من درجات الحرارة كانت تقع بين 70 و 90.

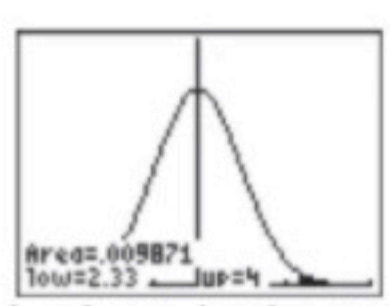
b. $P(X \geq 95°)$

$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ صيغة قيم z

$= \frac{95 - 81}{6}$ $X = 95$ و $\mu = 81$ و $\sigma = 6$

≈ 2.33 بسّط.

باستخدام حاسبة التمثيل البياني، يمكنك إيجاد أن المنطقة الواقعة بين $z = 2.33$ و $z = 4$ تساوي تقريبًا 0.0099.



[−4, 4] scl: 1 by [0, 0.5] scl: 0.125

لذلك، فإن احتمال أن تساوي درجة حرارة مختارة عشوائيًا على الأقل 95° هي حوالي 0.1%.

تمرين موجّه

5. الاختبار توزع درجات اختبارٍ معياري توزيعًا طبيعيًا فيه $\mu = 72$ و $\sigma = 11$. أوجد كل احتمالٍ مما يلي واستخدم حاسبةً للتمثيل البياني لتمثيل المساحة المقابلة أسفل المنحنى.

A. $P(X < 89)$ 93.9%　　**B.** $P(65 < X < 85)$ 62%

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 الاحتمال والتوزيع الطبيعي

يوضح **المثال 5** كيفية إيجاد الاحتمالات عند إعطاء قيم X الموزعة توزيعًا طبيعيًا. ويعرض **المثال 6** كيفية إيجاد فواصل عند إعطاء الاحتمالات باستخدام التوزيع الطبيعي المعياري.

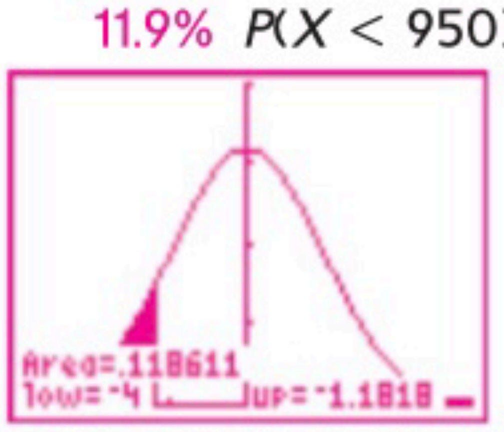
مثال إضافي

5 **حركة المرور** عدد السيارات التي تعبر أحد التقاطعات في ساعةٍ محددةٍ من اليوم موزّعٌ توزيعًا طبيعيًا فيه $\mu = 1210$ و $\sigma = 220$. أوجد كل احتمال مما يلي واستخدم حاسبةً للتمثيل البياني لتمثيل المساحة المقابلة المحصورة تحت المنحنى.

a. $P(1000 < X < 1420)$ 66.0%

[−4, 4] scl: 1 by [0, 0.5] scl: 0.125

b. $P(X < 950)$ 11.9%



[−4, 4] scl: 1 by [0, 0.5] scl: 0.125

إرشاد للمعلمين الجدد

رسم منحنى طبيعي يتغير المنحنى من منحنى مقعر للأسفل إلى منحنى مقعر للأعلى عند نقاط تبعد عن الوسط لمسافة انحراف معياري واحد.

التدريس المتمايز AL OL

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي اطلب من الطلاب تلخيص الخطوات المطلوبة لعزل مساحةٍ محصورةٍ تحت منحنىً طبيعيٍ لتحديد الاحتمال التي تعرّفها فترات الانحرافات المعيارية. وتستخدم هذه العملية عديدة الخطوات الاستنتاج الاستقرائي المطلوب لتحليل تمثيلٍ بياني.

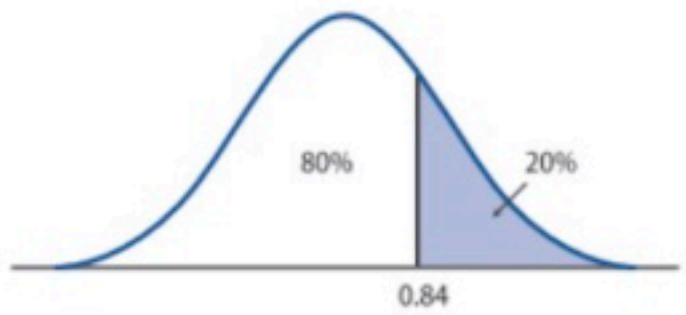
يمكنك إيجاد فواصل محددةٍ للبيانات المقابلة لاحتمالات أو نسبٍ مئويةٍ معطاةٍ باستخدام التوزيع الطبيعي المعياري.

مثال 6 من الحياة اليومية إيجاد فترات البيانات

الدراسة الجامعية تتوزع درجات اختبار قبول الجامعة في قسم الرياضيات طبيعيًا حيث $\mu = 65$ و $\sigma = 8$.

a. إذا أرادت فاطمة أن تكون ضمن الـ 20% الأوائل، فما الدرجة التي يجب عليها تحقيقها؟

لإيجاد الدرجات الـ 20% العليا في الامتحان، يجب عليك إيجاد درجة الامتحان X التي تفصل النسبة 20% العليا من المساحة الواقعة أسفل المنحنى الطبيعي، كما هو موضح. وترتبط نسبة الـ 20% العليا بـ $1 - 0.2$ أو 0.8. باستخدام حاسبة التمثيل البياني، يمكنك إيجاد أن قيمة z المقابلة تساوي 0.84.



الآن، استخدم صيغة قيمة z لتعداد إحصائي لإيجاد درجة الامتحان المقابلة.

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{صيغة قيم } z$$

$$0.84 = \frac{X - 65}{8} \quad \mu = 65 \text{ و } \sigma = 8 \text{ و } z = 0.84$$

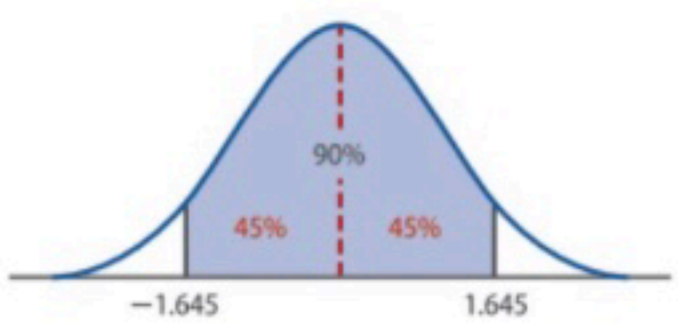
$$6.72 = X - 65 \quad \text{بضرب كل طرف في 8.}$$

$$71.72 = X \quad \text{بجمع 65 إلى كل طرف.}$$

تحتاج فاطمة إلى تحقيق 72 درجة على الأقل لتكون من بين الطلاب الـ 20% الأوائل.

b. تتوقع فاطمة أن تحصل على درجة ضمن النسبة الوسطى 90% في التوزيع. فما مدى الدرجات الذي يقع ضمن هذه الفئة؟

تُمثّل النسبة الوسطى 90% من درجات الامتحان 45% على كلٍ من طرفي الوسط. ولذلك فهي تقابل فترة المساحة الممتدة من 0.05 إلى 0.95. باستخدام حاسبةٍ للتمثيل البياني، فإن قيمتي z المقابلتين لكل من 0.05 و 0.95 هما -1.645 و 1.645 على التوالي.



استخدم قيم z لإيجاد كل قيمة لـ X.

$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$	صيغة قيم	$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$
$1.645 = \frac{X - 65}{8}$	$\mu = 65$ و $\sigma = 8$	$-1.645 = \frac{X - 65}{8}$
$13.16 = X - 65$	أوجد حاصل الضرب.	$-13.16 = X - 65$
$78.16 = X$	بسّط.	$51.84 = X$

وبالتالي، تتوقع فاطمة أن تكون درجتها بين 52 و 78.

الربط بالحياة اليومية

خلال دراسةٍ جرت حديثًا، كان متوسط الدرجات في امتحان SAT الوطني 502 في القراءة النقدية و 515 في الرياضيات و 494 في الكتابة. وكان متوسط الدرجات في امتحان ACT في العام نفسه 21.1.

المصدر: صحيفة *USA Today*

تمرين موجّه

6. **البحث** يختار باحث خلال إحدى الدراسات الطبية مجموعةً للدراسة وسط وزنها 86 كيلوجرامًا وانحرافها المعياري 5.5 كيلوجرامات. افترض أن الأوزان موزعةٌ طبيعيًا.

A. إذا كانت الدراسة ستركز بصورةٍ رئيسةٍ على المشاركين الذين تقع أوزانهم في النسبة الوسطى 80% من مجموعة البيانات، فما مدى الأوزان الذي سيتضمنه ذلك؟ $174.6 < X < 205.4$

B. إذا تم الاتصال بالمشاركين الذين تقع أوزانهم ضمن النسبة الخارجية 5% من التوزيع بعد أسبوعين من الدراسة، فما مدى أوزان الأشخاص الذين سيجري الاتصال بهم؟ $X < 213.5$ و $X > 166.5$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال إضافي

6 رفع الأثقال الأوزان القصوى للمكبس النضدي في أحد النوادي الرياضية المحلية موزعةٌ توزيعًا طبيعيًا فيه $\mu = 120$ و $\sigma = 20$.

a. إذا أراد رتّاعٌ أن يحلّ بين أول ثلاثة، فما الوزن الذي عليه كبسه؟ 128 kg

b. ما مدى الأوزان التي ستضع الربّاع في نسبة الـ 80% من منتصف التوزيع؟ 94 kg إلى 146 kg

المتابعة

استكشف الطلاب الإحصاءات الوصفية والتوزيعات الاحتمالية والتوزيع الطبيعي.

اطرح السؤال التالي:

- هل من الممكن أن يكون الإحصاء زائفًا؟ الإجابة النموذجية: يمكن أن يكون الإحصاء "زائفًا" عند التلاعب به ثم استخدامه للتأثير على معتقدات المستمعين المستهدفين وسلوكياتهم.

610 | الدرس 10-3 | التوزيع الطبيعي

التمارين

1. **التلوث الضوضائي** خلال دراسةٍ على التلوث الضوضائي، قاس باحثون مستوى الصوت بالديسبل في شارعٍ مكتظٍ ضمن إحدى المدن لمدة 30 يومًا. وتبعًا لهذه الدراسة، كان مستوى الضجيج المتوسط 82 ديسبل عند انحرافٍ معياريٍ يساوي 6 ديسبل. افترض أن البيانات ذات توزيعٍ طبيعي. (مثال 1)
   a. إذا كانت المحادثة الطبيعية تتم عند مستوى حوالي 64 ديسبل، حدّد عدد الساعات خلال الدراسة والتي كانت مستوى الضجيج عندها بهذا المستوى من الانخفاض. **1.08 ساعة**
   b. حدّد النسبة المئوية التي كان خلالها الضجيج يتراوح بين 76 ديسبل و 88 ديسبل. **68%**

2. **عدّاد المسافة** يسافر خميس مسافة 290 كيلومترًا كل أسبوعٍ للعمل. وتسير سيارته مسافة 29.6 كيلومترًا مقابل كل لترٍ تستهلكه من الوقود عند انحرافٍ معياريٍ يساوي 5.4 كيلومترات للتر الواحد. افترض أن البيانات موزعةٌ توزيعًا طبيعيًا. (مثال 1)
   46.4 km
   a. قدّر عدد الأميال التي يمكن لسيارة خميس أن تسير ضمنها مسافة 35 كيلومترًا مقابل كل لترٍ تستهلكه من البنزين أو أفضل من ذلك.
   b. ما النسبة المئوية من سفر خميس والتي من أجلها تسير السيارة ما بين 24.2 كيلومترًا للتر و 40.40 كيلومترًا للتر؟ **81.5%**

أوجد كلاً مما يلي (المثال 2)

3. z إذا كان $X = 19$ و $\mu = 22$ و $\sigma = 2.6$ **-1.15**
4. X إذا كان $z = 2.3$ و $\mu = 64$ و $\sigma = 1.3$ **66.99**
5. z إذا كان $X = 52$ و $\mu = 43$ و $\sigma = 3.7$ **2.43**
6. X إذا كان $z = 2.5$ و $\mu = 27$ و $\sigma = 0.4$ **28**
7. z إذا كان $X = 32$ و $\mu = 38$ و $\sigma = 2.8$ **-2.14**
8. X إذا كان $z = 1.7$ و $\mu = 49$ و $\sigma = 4.1$ **55.97**

9. **علم الأسماك** خلال مشروعٍ علمي، درس أسامة معدل نمو 797 سمكة سلّور ذهبية خضراء وتوصّل إلى المعلومات التالية. افترض أن البيانات موزّعة توزيعًا طبيعيًا. (مثال 3)

   a. حدّد عدد الأسماك التي طولها أقل من 4.5 مليمترات عند الولادة. **184**
   b. حدّد عدد الأسماك التي طولها أكبر من 5 مليمترات عند الولادة. **92**

10. **قطار الملاهي** يساوي متوسط وقت انتظار ركوب القطار لعدد 16,000 راكبًا لقطار الملاهي في اليوم 72 دقيقة بانحرافٍ معياريٍ يساوي 15 دقيقة. افترض أن البيانات موزعةٌ توزيعًا طبيعيًا. (مثال 3)
   a. حدّد عدد الركاب الذين ينتظرون أقل من 60 دقيقةً لركوب قطار الملاهي. **حوالي 3392**
   b. حدّد عدد الركاب الذين ينتظرون أكثر من 90 دقيقةً لركوب قطار الملاهي. **حوالي 1840**

أوجد فترة قيم z المقترنة بكل مساحة (مثال 4). **11–16. انظر الهامش.**

11. النسبة الوسطى 30%
12. النسبة الخارجية 15%
13. النسبة الخارجية 40%
14. النسبة الوسطى 10%
15. النسبة الخارجية 25%
16. النسبة الوسطى 84%

17. **البطاريات** العمر الافتراضي لنوعٍ محددٍ من البطاريات موزّع توزيعًا طبيعيًا حيث $\mu = 8$ ساعات و $\sigma = 1.5$ ساعة. أوجد احتمال كل مما يلي. (مثال 5)
   a. سوف تستمر البطارية لأقل من 6 ساعات. **9%**
   b. ستعمل البطارية أكثر من 12 ساعة. **0.4%**
   c. ستعمل البطارية بين 8 و 9 ساعات. **25%**

18. **الصحة** يساوي المستوى الوسطي لكوليسترول الدم لدى الإماراتيين البالغين 203 mg/dL (ميليجرام في الديسيلتر) عند انحرافٍ معياريٍ قيمته 38.8 mg/dL. أوجد احتمال كل مما يلي. وافترض أن البيانات موزعة توزيعًا طبيعيًا. (مثال 5)
   a. مستوى كوليسترول الدم ما دون 160 mg/dL، والذي يعدّ منخفضًا ويمكن أن يؤدي إلى خطر مرتفع للإصابة بجلطة **13%**
   b. مستوى كوليسترول الدم فوق 240 mg/dL، والذي يعدّ مرتفعًا ويمكن أن يؤدي إلى خطورة مرتفعة للإصابة بمرض القلب **17%**
   c. مستوى كوليسترول الدم بين 180 و 200 mg/dL، والذي يعدّ طبيعيًا **19%**

19. **هطول الثلج** يتوزّع هطول الثلج الوسطي بالسنتيمترات في منطقة الولايات المتحدة وكندا الواقعتين بين الخطين 45°N و 55°N توزيعًا طبيعيًا فيه $\mu = 260$ و $\sigma = 27$. (المثال 6)
   a. حدّد الكمية الصغرى لهطول الثلج المتشكّلة ضمن نسبة 15% العليا من التوزيع. **288.0 cm**
   b. حدّد الكمية القصوى لهطول الثلج المتشكّلة في نسبة 30% الدنيا. **245.8 cm**
   c. ما هو مدى هطول الثلج الذي يتشكّل عند نسبة 60% الوسطى؟ **237.3 cm – 282.7 cm**

20. **سرعة حركة المرور** تتوزع سرعة حركة المرور بالكيلومترات في الساعة في الشارع الشمالي توزيعًا طبيعيًا فيه $\mu = 60$ و $\sigma = 9$. (المثال 6)
   a. حدّد السرعة القصوى لأبطأ 10% من السيارات التي تعبر الشارع الشمالي. **40 km/h**
   b. حدّد السرعة الصغرى لأسرع 5% من السيارات التي تعبر الشارع الشمالي. **75 km/h**
   c. ما مدى سرعة السيارات ضمن النسبة الوسطى 25% التي تعبر الشارع الشمالي؟ **57 km/h – 63 mi/h**

21. **الاختبارات** أجرى صالح اختباري ACT و SAT وأحرز درجات مادة الرياضيات الموضحة. فما الدرجات التي لها موقع نسبي أعلى؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**
B

اختبار	درجة صالح	المتوسط الوطني	الانحراف المعياري
ACT	27	21	4.7
SAT	620	508	111

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-20 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

إرشاد للمعلمين الجدد

المنحنى الطبيعي في التمرينين 19 و 20، إذا احتاج الطلاب إلى المساعدة، فاقترح أن يرسموا أولًا المساحة المظللة على المنحنى الطبيعي. وحينها بوسعهم تحديد القيمة العظمى أو الصغرى في تلك المساحة بصورةٍ أسهل.

انتبه!

خطأ شائع في التمرين 22، إذا قال الطلاب إن أسماء أدّت بصورةٍ أفضل في اختبار علم الاجتماع لأن $76 < 81$، فذكّرهم أن عليهم مقارنة قيم z لكل اختبار.

إجابات إضافية

11. $-0.39 < z < 0.39$
12. $z < -1.44$ أو $z > 1.44$
13. $z < -0.84$ أو $z > 0.84$
14. $-0.13 < z < 0.13$
15. $z < -1.15$ أو $z > 1.15$
16. $-1.41 < z < 1.41$

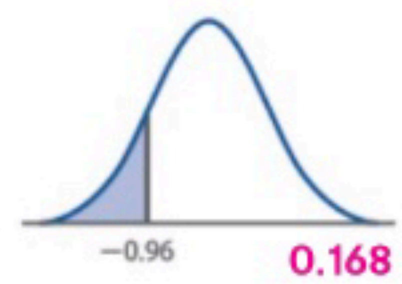
21. الإجابة النموذجية: للدرجات في امتحان الـ ACT قيمة z تساوي 1.28 وللدرجات في امتحان الـ SAT قيمة z تساوي 1.

ولذلك فإن لدرجات امتحان ACT البالغة 27 موضعٌ نسبيٌ أعلى بـ 27 من درجات امتحان SAT البالغة 620.

22. الامتحانات حققت أمل 76 درجة في اختبار الفيزياء الذي كان وسط الدرجات فيه يساوي 72 درجة وانحرافها المعياري 10. وحققت أيضًا 81 درجةً في اختبار علم الاجتماع الذي كان وسط الدرجات فيه يساوي 78 بانحراف معياري 9. قارن درجتي أمل النسبيتين في كل اختبار. وافترض أن البيانات موزعة توزيعًا طبيعيًا. **انظر الهامش.**

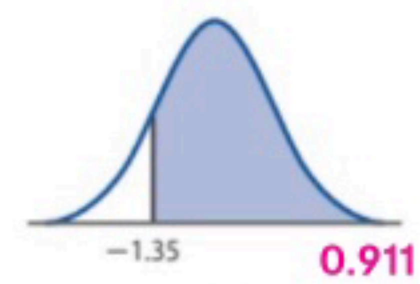
أوجد المساحة التي تتطابق مع كل منطقة مظللة.

23.



0.168

24.

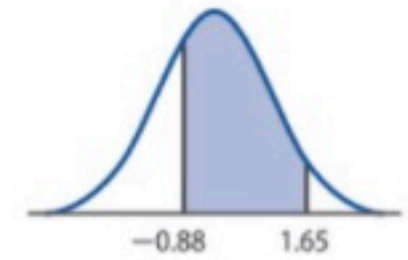


0.911

25.

0.493

26.



0.761

27. الكسور الربيعات والنسب المئوية والأعشار هي ثلاثة أنواع من الكسور التي تقسم مجموعةً مرتبةً من البيانات إلى مجموعات متساوية. أوجد قيم z المقابلة لكل من الكسور التالية.

a. D_{20} و D_{40} و D_{80} **−0.84, −0.25, 0.84**

b. Q_1 و Q_2 و Q_3 **−0.67, 0, 0.67**

c. P_{10} و P_{40} و P_{90} **−1.28, −0.25, 1.28**

28. الأرصاد الجوية يعرض الجدول الرطوبة التي رُصدت في صباح اليوم نفسه في مدن اليونان والجزائر ومصر. افترض أن البيانات موزعةٌ توزيعًا طبيعيًا **a–b. انظر الهامش.**

الدولة	الرطوبة	متوسط الرطوبة	انحراف معياري
اليونان	85%	82%	12%
الجزائر	94%	91%	15%
مصر	46%	43%	10%

a. ما الدولة ذات الرطوبة الأعلى؟ وما الدولة ذات الرطوبة الأدنى؟ اشرح استنتاجك.

b. ما وجه المقارنة مع مدينةٍ رابعةٍ رطوبتها 81% ورطوبتها المتوسطة 8% عند انحرافٍ معياريٍ 8%؟

29. الأعمال تتوزع رواتب العاملين في دائرة المبيعات ضمن إحدى الوكالات الإعلانية توزيعًا طبيعيًا بانحرافٍ معياريٍ يساوي AED 8000. وخلال موسم العطلة، يُمنح العاملون الذين يقبضون أقل من AED 35,000 سلّة هدايا.

a. على فرض أن 10% من العاملين يتلقّون سلّة هدايا. فما وسط الراتب في دائرة المبيعات؟ **حوالي AED 45,252**

b. على فرض أن العاملين الذين يكسبون رواتب تزيد بمبلغ AED 10,000 عن قيمة وسط الراتب يُمنحون علاوةً تحفيزية. فإذا كان هناك 200 عاملٍ في دائرة المبيعات، فكم عدد العاملين الذين سيمنحون علاوة؟ **22 موظفًا**

30. التمثيلات المتعددة ستستكشف في هذه المسألة شكل التوزيع الطبيعي. افتراض تعدادًا إحصائيًا يتكوّن من 4، 10، 6، 8 .

a. **بيانيًا** ارسم تمثيلاً بيانيًا بالأعمدة، واستخدمه لوصف شكل التوزيع. ثم أوجد وسط مجموعة البيانات وانحرافها المعياري.

b. **بيانيًا** اختر ثماني عيّناتٍ عشوائيةٍ حجمها 2، مع الإحلال، من مجموعة البيانات. وارسم تمثيلاً بيانيًا بالأعمدة واستخدمه لوصف شكل التوزيع. وأوجد الوسط والانحراف المعياري لقيم وسط العينات.

c. **جدوليًا** يضم الجدول جميع العينات التي حجمها 2 والتي يمكن أخذها، مع الإحلال، من مجموعة البيانات. أوجد وسط كل عينة والوسط والانحراف المعياري لجميع قيم وسط العينات. $\mu = 7, \sigma = 1.6$

العينة	الوسط	العينة	الوسط
8, 4	6	4, 4	4
8, 6	7	4, 6	5
8, 8	8	4, 8	6
8, 10	9	4, 10	7
10, 4	7	6, 4	5
10, 6	8	6, 6	6
10, 8	9	6, 8	7
10, 10	10	6, 10	8

d. **بيانيًا** ارسم تمثيلاً بيانيًا بالأعمدة لقيم وسط العينات من الجزء c واستخدمه لوصف شكل التوزيع. ماذا يحدث لشكل توزيع بياناتٍ بزيادة حجم العينة؟

e. **تحليليًا** اقسم الانحراف المعياري للتعداد الإحصائي، والذي أوجدته في الجزء a، على الجذر التربيعي لحجم العينة. ما الذي يحدث برأيك للوسط والانحراف المعياري لتوزيع البيانات في حالة زيادة حجم العينة؟

a, b, d, e. انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

31. تحليل الخطأ يوجد حسام وسالم الفترة z المرافقة للنسبة 35% الخارجية من توزيع للبيانات. ويعتقد حسام أنها تمثل الفترة $z < -0.39$ أو $z > 0.39$، بينما يرى سالم أنها تمثل الفترة $z < -0.93$ أو $z > 0.93$. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

32. التبرير في تطبيقات الحياة اليومية، تقع قيم z في العادة بين −3 و +3 في التوزيع المعياري الطبيعي. فلِمَ تعتقد أن هذه الحالة صحيحة؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

33. تحدٍ أوجد قيمتي z، إحداهما موجبة والأخرى سالبة، بحيث تكون مساحة الذيلين مجتمعين تساوي كلاً مما يلي:

a. 1% **−2.58, 2.58**

b. 5% **−1.96, 1.96**

c. 10% **−1.64, 1.64**

34. التبرير للمتغيرات المتصلة توزيعات طبيعية *أحيانًا* أو *دائمًا* أو ليس لها توزيعات طبيعية *على الإطلاق*. اشرح إجابتك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 10.**

35. الكتابة في الرياضيات قارن وقابل خواص التوزيع الطبيعي بخواص التوزيع المعياري الطبيعي. **انظر ملحق إجابات الوحدة 10.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابات إضافية

22. الإجابة النموذجية: قيمة z في الفيزياء تساوي 0.4 وفي علم الاجتماع تساوي 0.33. وبما أن قيمة z في الفيزياء أعلى، فإن الموضع النسبي لأسماء في الصف الدراسي لمادة الفيزياء أعلى من موضعها النسبي في الصف الدراسي لمادة علم الاجتماع.

28a. مصر؛ الجزائر؛ القيمة z لليونان والجزائر ومصر تساوي 0.025 و 0.2 و 0.3 على الترتيب.

مراجعة شاملة

36. **كرة السلة** يوضح التوزيع التكراري عدد الرميات المسجّلة من قبل فريق المجد أمسية لمباراتين متعاقبتين. **a–b. انظر ملحق إجابات الوحدة 10.**

التكرار	الضربات المسجلة، X
3	0
1	1
8	2
2	3
3	4

a. أنشئ توزيعًا احتماليًا للمتغير العشوائي X ومثله بيانيًا.

b. أوجد الوسط وفسره في سياق المسألة.

c. أوجد التباين والانحراف المعياري. $\sigma^2 \approx 1.65;\ \sigma \approx 1.28$

37. **كرة القدم** يعرض الجدول عدد ضربات الجزاء التي احتُسبت لصالح فريق كرة قدم محترف في كل مباراة خلال موسمين حديثين منصرمين. أنشئ مخططين صندوقيين متجاورين لمجموعتي البيانات.
ثم استخدم طريقة العرض هذه لمقارنة التوزيعين. **انظر ملحق إجابات الوحدة 10.**

الموسم 1				الموسم 2			
13	6	11	8	5	3	1	9
11	16	18	9	4	6	3	8
9	14	14	15	1	3	6	10
5	10	5	8	2	3	5	5

أوجد مجموع كل متسلسلة حسابية.

38. S_{51} لـ $-92 + (-88) + (-84) + \dots$ **408**

39. المجموع الجزئي الرابع والعشرون لـ $-13 + 2 + 17 + \dots$ **3828**

40. S_{46} لـ $295 + 281 + 267 + \dots$ **−920**

أوجد الإحداثيات المتعامدة لكل نقطة لها الإحداثيات القطبية المعطاة.

41. $\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

42. $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

43. $(-2, \pi)$ $(2, 0)$

لديك v و u • v، أوجد u. قد تكون هناك أكثر من إجابة.

44. $\mathbf{v} = \langle -4, 2, -7\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 17$ الإجابة النموذجية: $\langle 1, 0, -3\rangle$

45. $\mathbf{v} = \langle 2, 8, 5\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -6$ الإجابة النموذجية: $\langle 0, 3, -6\rangle$

46. $\mathbf{v} = \left\langle \frac{2}{3}, -3, \frac{1}{3}\right\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 10$ الإجابة النموذجية: $\langle 6, -1, 9\rangle$

أوجد زاوية اتجاه كل متجه مما يلي.

47. $6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ **26.6°**

48. $-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ **126.9°**

49. $2\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ **284.0°**

اكتب معادلة القطع الناقص المقابل لكل مجموعة من الخواص التالية. **50–52. انظر الهامش.**

50. الرؤوس $(-3, 11)$، $(-3, -9)$؛ بؤرتاه $(-3, -5)$، $(-3, 7)$

51. الرؤوس المرافقة $(-3, -6)$، $(-1, -6)$؛ طول المحور الأكبر 10

52. الرؤوس $(2, 8)$، $(2, -4)$؛ طول المحور الأصغر 8

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

53. **SAT/ACT** إذا كان X مجموع أول 1000 عدد صحيح موجب زوجي و Y مجموع أول 500 عدد صحيح فردي، فهل النسبة المئوية لـ X أكبر من Y؟ **C**

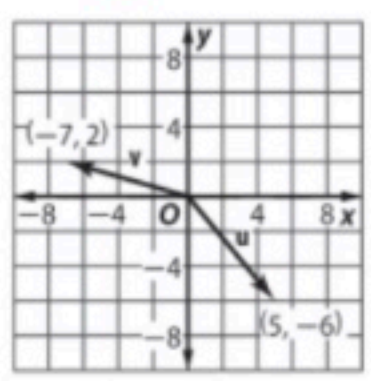
A 100%　　C 300%　　E 500%
B 200%　　D 400%

54. **مراجعة** خلال إحدى السنوات الأخيرة، كان الوسط والانحراف المعياري لدرجات امتحان ACT يساويان 21.0 و 4.7. افترض أن درجات الامتحان كانت موزعة توزيعًا طبيعيًا. فما الاحتمال التقريبي في أن يحصل أحد المشاركين على درجة أعلى من 30.4؟ **J**

F 1%　　H 2%
G 1.5%　　J 2.5%

55. تتوزع مدة كل أغنيةٍ في مجموعةٍ موسيقيةٍ توزيعًا طبيعيًا فيه $\mu = 4.12$ دقائق و $\sigma = 0.68$ دقيقة. أوجد احتمال كون مدة أغنية اختيرت عشوائيًا من المجموعة أطول من 5 دقائق. **A**

A 10%　　C 39%
B 19%　　D 89%



53. **مراجعة** أوجد u • v. **F**

F −47　　H −6
G −24　　J 47

McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 31، إجابة سالم صحيحة. ولعلّ حسام قد خلط بين قيم z وبين المساحة الخارجية. وقد يكون من الأخطاء المحتملة الأخرى استخدام قيمتي z تساويان −0.45 و 0.45، ويساوي ذلك تقريبًا 35% من المساحة المحصورة تحت المنحنى البياني بينهما.

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب

اطرح على الطلاب السؤال التالي. معدّل الذكاء هو قيمةٌ موزعةٌ توزيعًا طبيعيًا عند متوسط يساوي 100. فما الحدث الأقل احتمالًا في الحدوث؟ اشرح.

A. أن يكون معدل ذكاء شخصٍ أقل من 90.
B. أن يكون معدل ذكاء شخصٍ أكثر من 112.

B؛ 112 أبعد عن المتوسط. إذًا فمن الأقل احتمالًا أن يكون معدل الذكاء لدى شخصٍ أعلى من 112 من أن يكون معدل الذكاء لدى شخصٍ أقل من 90.

إجابات إضافية

28b. عند قيمة z المساوية لـ 0.375. سيكون لهذه المدينة أعلى رطوبةٍ نسبيةٍ من بين المدن جميعها.

31. سالم؛ تقابل الـ 35% الخارجية القيمتين 0.175 و 0.825، ويترافق ذلك مع قيم z على النحو $z < -0.93$ أو $z > 0.93$. أوجد حسام قيم z المرافقة للنسبة 70% الخارجية، والتي تقابل 0.35 و 0.65.

32. الإجابة النموذجية: تبعًا للقاعدة التجريبية، فإن 99.7% من جميع قيم البيانات ستقع ضمن 3 انحرافاتٍ معياريةٍ عن الوسط. ويقابل ذلك قيمًا لـ z تقع ضمن المدى $z = -3$ إلى $z = +3$ في التوزيع الطبيعي المعياري.

50. $\frac{(x+3)^2}{64} + \frac{(y-1)^2}{100} = 1$

51. $(x+2)^2 + \frac{(y+6)^2}{25} = 1$

52. $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

613

التدريس المتمايز BL

التوسّع اطلب من مجموعاتٍ من الطلاب أن يهزّوا 50 قطعةً نقديةً في كوبٍ ويسجلوا عدد مرات ظهور الصورة في كل 10 رميات. ثم اطلب من كل مجموعة حساب العدد الوسطي من مرات ظهور الصور في كل رمية. كلّف الطلاب بتفسير السبب في أنه يمكن تقريب التوزيع إلى توزيع طبيعي. وحدّد عدد الرميات التي تعطي عددًا من الصور يقع ضمن انحرافٍ معياريٍ واحدٍ وانحرافين معياريين وثلاثة انحرافاتٍ معياريةٍ عن الوسط. وقارن ذلك مع العدد المتوقع من الصور. راجع عمل الطلاب.

مختبر تقنية التمثيل البياني
تحويل البيانات الملتوية

10-3 التوسع

1 التركيز

الهدف استخدام حاسبة التمثيل البياني لتحويل البيانات الملتوية إلى بيانات شبيهة بالتوزيع الطبيعي.

نصيحة للتدريس

اشرح للطلاب أن من المفيد أن تكون البيانات موزعةً توزيعًا طبيعيًا، لا أن تكون ملتوية، لأن ذلك يتيح تحليلها باستخدام القاعدة التجريبية وقيم *z*.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

شكّل مجموعاتٍ ثنائيةً من طالبٍ يجيد استخدام حاسبة التمثيل البياني وآخر أقل إجادةً في استخدامها. واقترح أن يحلّ الطالب أكثر إجادة النشاط، على أن يكتفي الطالب الآخر بالمراقبة في البداية ثم يدخل المعلومات الخاصة بالتمرين.

تدريب كلف الطلاب بإكمال التمرين.

3 التقويم

التقويم التكويني

اطلب من الطلاب تحويل البيانات في التمرين باستخدام اللوغاريتم الطبيعي. واطلب منهم تمثيل البيانات بيانيًا ووصف شكل التوزيع وذكر مسوغ تحويل البيانات.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب تلخيص كيفية تحويل البيانات لتشبه توزيعًا طبيعيًا.

الهدف

- استخدام حاسبة التمثيل البياني لتحويل البيانات الملتوية إلى بيانات شبيهة بالتوزيع الطبيعي.

من الشائع أن يكون لبيانات علم الأحياء، والبيانات الطبية وغيرها توزيعٌ ملتوٍ إيجابيًا. وقد يكون من المفيد أحيانًا تحويل البيانات الأصلية بحيث تشبه التوزيع الطبيعي على نحوٍ أفضل. حيث يتيح ذلك انتشار البيانات بدلًا من تجمّعها في جهةٍ واحدةٍ من نموذج العرض.

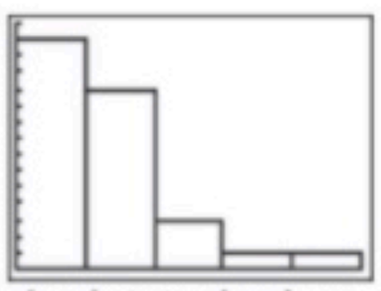
النشاط تحويل البيانات باستخدام لوغاريتمات طبيعية

استخدم البيانات التالية لإنشاء مدرجٍ إحصائي، وصِف شكل التوزيع. ثم حوّل البيانات عبر حساب اللوغاريتم المشترك لكل مُدخل. مثّل البيانات الجديدة بيانيًا، وصِف شكل التوزيع.

البيانات									
15	7	2	5	8	17	15	8	3	4
9	18	13	10	9	8	10	23	26	10
7	14	25	7	6	13	35	48	14	6

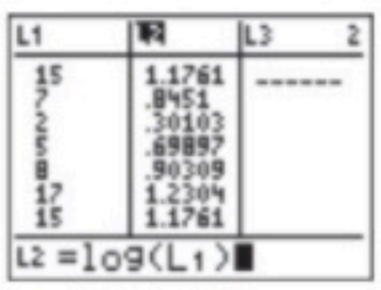
الخطوة 1 أدخل البيانات في L1، وأنشئ مدرجًا إحصائيًا للبيانات باستخدام الفترات والمقاييس الموضحة.

بيدو أن البيانات ذات توزيعٍ ملتوٍ إيجابيًا.



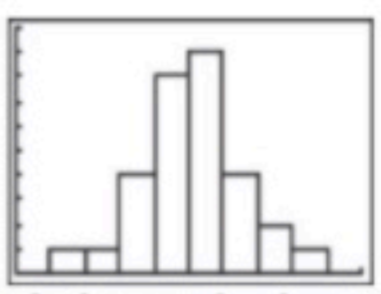
[0, 50] scl: 10 by [0, 15] scl: 1

الخطوة 2 أدخل اللوغاريتم المشترك لكل قيمة في L2.
ضع المؤشر على L2. اضغط LOG وأدخل L1. اضغط ENTER.



الخطوة 3 أنشئ مدرجًا إحصائيًا للبيانات الجديدة باستخدام الفترات والمقاييس الموضحة.

يبدو أن للبيانات توزيعًا طبيعيًا.



[0, 2] scl: 0.2 by [0, 10] scl: 1

يمكن تحويل البيانات أيضًا عبر حساب الجذور المربعة أو القوى الأسية للمُدخلات. وعند تحويل البيانات، فينبغي تحديد نوع العملية التي تجري على الدوام. ولا يؤدي التحويل دائمًا إلى توزيع البيانات الجديدة توزيعًا طبيعيًا.

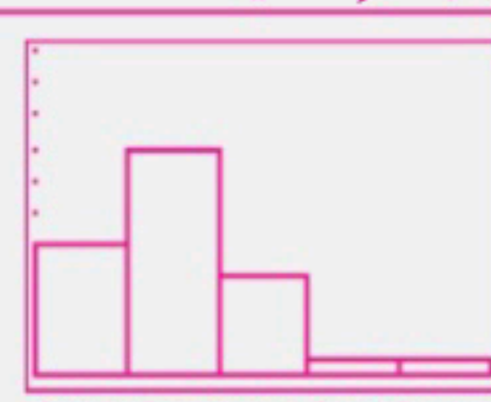
تمرين

استخدم البيانات التالية لإنشاء مدرجٍ إحصائي، وصِف شكل التوزيع. ثم حوّل البيانات عبر حساب الجذر التربيعي لكل مُدخل. مثّل البيانات الجديدة بيانيًا، وصِف شكل التوزيع. اشرح كيف أثّر التحويل في ملخّص الإحصاءات. **انظر الهامش.**

البيانات									
23	30	36	39	36	24	31	33	42	36
26	32	46	45	27	34	52	41	28	33
43	20	24	34	30	40	29	35	61	35

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابات إضافية



[20, 70] scl: 10 by [0, 20] scl: 2

البيانات ملتوية التواء موجبًا.

[4, 8] scl: 0.5 by [0, 10] scl: 1

تشبه البيانات توزيعًا طبيعيًا. الإجابة النموذجية: حوّل التحويل البيانات إلى توزيعٍ طبيعي. ومن شأن ذلك تسهيل تحليل البيانات.

الدرس 10-4 نظرية النهاية المركزية

السابق

- استخدمت التوزيع الطبيعي لإيجاد الاحتمالات لفترات قيم البيانات في التوزيعات.

الحالي

- 1 استخدام نظرية النهاية المركزية لإيجاد الاحتمالات.
- 2 إيجاد التقريبات الطبيعية للتوزيعات ذات الحدّين.

لماذا

- تستخدم أنظمة ضبط الجودة في عمليات التصنيع لتحديد متى تكون العملية خارج الحدّين الأدنى والأعلى للضبط أو "خارج نطاق السيطرة". ويجري ضبط المتوسط الخاص بالعملية؛ ولذلك يجب أن تكون المتوسطات الخاصة بالعينات المتعاقبة موزّعة طبيعيًا حول المتوسط الحقيقي.

المفردات الجديدة

توزيع أخذ العينات sampling distribution

الخطأ المعياري للمتوسط standard error of the mean

خطأ أخذ العينات sampling error

معامل تصحيح الاتصال continuity correction factor

1 نظرية النهاية المركزية

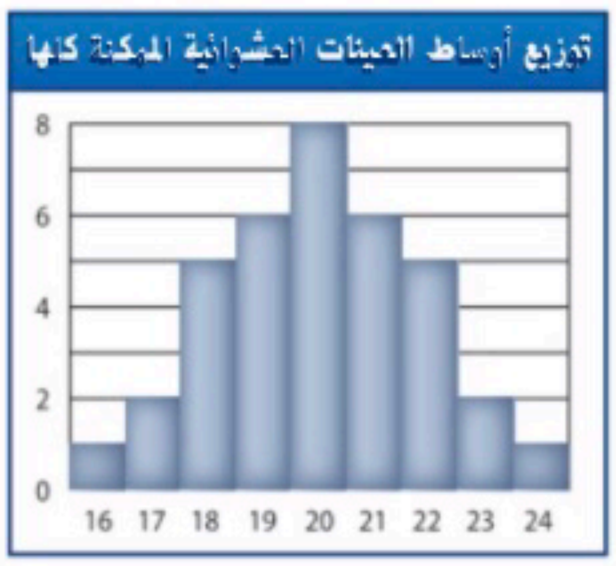
يعدّ أخذ العيّنات وسيلةً إحصائيةً مهمةً تُختار فيها مجموعاتٌ جزئية من المجتمع الإحصائي بحيث يمكن الاستدلال عن المجتمع الإحصائي بكامله. ويمكن مقارنة المتوسطات الخاصة بهذه المجموعات الفرعية، أو قيم وسط العينات، مع المتوسط الخاص بالمجتمع الإحصائي عبر استخدام توزيع أخذ العينات. و**توزيع أخذ العيّنات** هو توزيعٌ لقيم الوسط الخاصة بعينات عشوائية ذات حجم محدّد تُؤخذ من المجتمع الإحصائي.

فكّر في مجتمع إحصائي يتألف من 16 و 18 و 20 و 20 و 22 و 24، وبحيث يكون $\mu = 20$ ويكون $\sigma = 2.582$. وافترض أنه تم أخذ 12 عينة عشوائية من الحجم 2، مع التعويض. والوسط $\bar{x}$ لكل عينة موضح.

$\bar{x}$	العينة	$\bar{x}$	العينة	$\bar{x}$	العينة
22	22,22	19	20,18	21	20,22
18	18,18	19	16,22	20	22,18
18	20,16	20	24,16	22	20,24
23	24,22	22	20,24	20	20,20

توزيع أوساط العينات العشوائية الـ 12، الموضحة في الشكل 10.4.1، لا يبدو أنه طبيعي. ولكن إذا كان تم إيجاد كل العينات الـ 36 من الحجم 2 من المجتمع الإحصائي، فسيقترب توزيع أوساط العينة من التوزيع الطبيعي، كما هو موضح في الشكل 10.4.2.

الشكل 10.4.1



الشكل 10.4.2

يساوي متوسط المتوسطات الخاصة بجميع العينات الممكنة التي حجمها 2 في المجتمع الإحصائي:

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{16 + 17 + \dots + 24}{36} = \frac{720}{36} \text{ أو } 20.$$

لاحظ أن هذه القيمة مساوية لوسط المجتمع الإحصائي $\mu = 20$. إذًا، حين يتم إيجاد وسط أوساط كل عينة ممكنة من الحجم 2، يكون $\mu_{\bar{x}} = \mu$. والانحراف المعياري لأوساط العينة $\sigma_{\bar{x}}$ والانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي σ عندما يُقسم على الجذر التربيعي للعينة من الحجم n هما

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{(16-20)^2 + (17-20)^2 + \dots + (24-20)^2}}{36} \approx 1.826 \quad \text{و} \quad \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2.582}{\sqrt{2}} \approx 1.826.$$

بما أن هاتين القيمتين متساويتان، فيمكن إيجاد الانحراف المعياري لمتوسطات العينات، والمعروف أيضًا بـ **الخطأ المعياري للمتوسط**، عبر استخدام الصيغة $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 10-4 استخدام التوزيع الطبيعي لإيجاد احتمالات فتراتٍ لقيم البيانات في التوزيعات.

الدرس 10-4 استخدام نظرية النهاية المركزية لإيجاد الاحتمالات.
إيجاد تقريبات التوزيعات ذات الحدين إلى التوزيعات الطبيعية.

بعد الدرس 10-4 استخدام التوزيع الطبيعي والتوزيع t لإيجاد فواصل الثقة للأوساط.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة فقرة **لماذا؟** في الدرس، ثم فكّر بطرق يمكن عبرها استخدام بيانات العينة في مجالات عملٍ أخرى.

اطرح السؤال التالي:

- تجري مؤسسةٌ مختصةٌ في أبحاث التسويق استبيانًا على طلاب خمس مدارس ثانوية لتحديد السعر المناسب لتسويق صنفٍ جديدٍ من الملابس.

(يُتبَع في الصفحة التالية)

بصفة عامة، العينات المحددة عشوائيًا سيكون لها أوساط عينة تختلف عن وسط المجتمع الإحصائي. وهذه الاختلافات تنتج عن **خطأ أخذ العينات**، والتي تحدث بسبب أن العينة ليست تمثيلاً كاملاً للمجتمع الإحصائي. ولكن، إذا أُخذت كل العينات الممكنة من الحجم n من مجتمع إحصائي وسطه μ وانحرافه المعياري σ، فإن توزيع أوساط العينة سيكون فيه:

- وسط $\mu_{\bar{x}}$ يتساوى مع μ، إضافة إلى
- انحراف معياري $\sigma_{\bar{x}}$ يتساوى مع $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

عندما يكون حجم العينة n كبيرًا، وبغض النظر عن شكل التوزيع الأصلي، فإن نظرية النهاية المركزية تنص على أن شكل توزيع متوسطات العينات سيقارب توزيعًا طبيعيًا.

المفهوم الأساسي نظرية النهاية المركزية

مع تزايد حجم أخذ العينة n،

- سيقترب شكل التوزيع لوسط عينة لمجتمع إحصائي ذي وسط μ وانحرافه المعياري σ من التوزيع الطبيعي
- سيكون للتوزيع وسط μ وانحراف معياري $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

نصيحة دراسية

المتغيرات ذات التوزيع الطبيعي
إذا لم يكن المتغير الأصلي موزعًا توزيعًا طبيعيًا، إذًا فيجب أن يكون n أكبر من 30 لكي نستخدم التوزيع المعياري الطبيعي لتقدير توزيع متوسطات العينات.

ويمكن استخدام نظرية النهاية المركزية للإجابة عن أسئلةٍ حول متوسطات العينات بالطريقة نفسها التي استخدم بها التوزيع الطبيعي للإجابة عن أسئلةٍ عن القيم المفردة. وفي هذه الحالة، يمكننا استخدام صيغةٍ للقيمة z الخاصة بمتوسط العينة.

المفهوم الأساسي القيمة z لمتوسط عينة

قيمة z لوسط عينة في مجتمع إحصائي معطاة في $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$، حيث يكون $\sigma_{\bar{x}}$ هو وسط التجمع الإحصائي. ويكون μ هو وسط المجتمع الإحصائي، ويكون $\sigma_{\bar{x}}$ هو الخطأ المعياري.

مثال 1 استخدام نظرية النهاية المركزية.

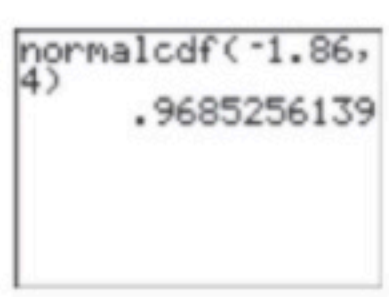
العُمْر وفقًا لدراسة حديثة، فإن متوسط العمر الذي يغادر فيه الشخص البالغ منزل العائلة هو 26 عامًا. فافترض أن هذا المتغير مُوزّع طبيعيًا بانحراف معياري بمقدار 2.4 عام. فإذا حُددت عينة عشوائية من 20 بالغًا، فأوجد احتمال أن وسط العمر الذي غادر فيه المشاركون في الدراسة أكبر من عمر 25 عامًا.

بما أن المتغير موزّعٌ توزيعًا عشوائيًا، فإن توزيع متوسطات العينات سيكون طبيعيًا تقريبًا وفيه $\mu = 26$ و $\sigma_{\bar{x}} = \frac{2.4}{\sqrt{20}}$ أو حوالي 0.537. أوجد قيمة z.

$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$ لوسط عينة z

$= \frac{25 - 26}{0.537}$ $\bar{x} = 25$ و $\mu = 26$ و $\sigma_{\bar{x}} = 0.537$

≈ -1.86 بسّط.



المساحة على يمين قيمة z الخاصة بـ 1.86− هي 0.9685. ولهذا، فاحتمال أن وسط عمر العينة أكبر من 25 أو $P(\bar{x} > 25)$ هو تقريبًا 96.85%.

تمرين موجّه

1. **الأعاصير** يساوي العدد المتوسط للأعاصير التي تضرب ولاية كانساس 47 إعصارًا في العام، وذلك بانحرافٍ معياريٍ يساوي 14.2 إعصارًا تقريبًا. فإذا اختيرت عينةٌ عشوائيةٌ من 15 عامًا، أوجد الاحتمال في أن يكون العدد المتوسّط من الأعاصير أصغر من 50. **79.3%**

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

- هل تكفي هذه المعلومات لاتخاذ قرارٍ جيد؟ لا. فالخمسة عينةٌ صغيرةٌ جدًا.
- كم عدد الطلاب الذين على المؤسسة إخضاعهم للاستبيان برأيك لاتخاذ قرارٍ جيدٍ عن السعر؟ قد تتباين إجابات الطلاب، ولكن يجب أن تكون العينة كبيرةً نسبيًا. 100 إلى 1000.
- هل تنصح المؤسسة باستطلاع آراء 1,000,000 طالب مدرسةٍ ثانوية؟ لِمَ أو لِمَ لا؟ لا؛ بعد عددٍ محددٍ من الطلاب، ستكون المعلومات موائمةً لتوزيع طبيعي. ولن تكون للمعلومات الإضافية قيمةٌ توازي كلفة استطلاع آراء عددٍ كبيرٍ من الطلاب .

1 نظرية النهاية المركزية

يوضح **المثالان 1 و 2** كيفية استخدام نظرية النهاية المركزية لإيجاد الاحتمالات. ويوضح **المثال 3** الفرق بين استخدام قيمةٍ مفردةٍ واستخدام أوساط عيناتٍ لتحديد الاحتمالات.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 **الأفلام** حدّد القائمون على إحدى شركات الترفيه أن إيراد أحد الأفلام خلال السنة الأولى بلغ في المتوسط AED 2.1 مليون. وقد افترضوا أن المتغير موزّعٌ توزيعًا طبيعيًا عند انحرافٍ معياري يساوي AED 0.8 مليون. فإذا اختيرت عينةٌ عشوائيةٌ من 16 فلمًا، أوجد احتمال أن يتجاوز الإيراد الوسطي للعينة AED 2.5 مليون. 2.3%

616 | الدرس 4-10 | نظرية النهاية المركزية

يمكنك أيضًا تحديد احتمال وقوع متوسط عينةٍ ضمن الفترة المعطاة لتوزيع أخذ العينات.

الربط بالحياة اليومية

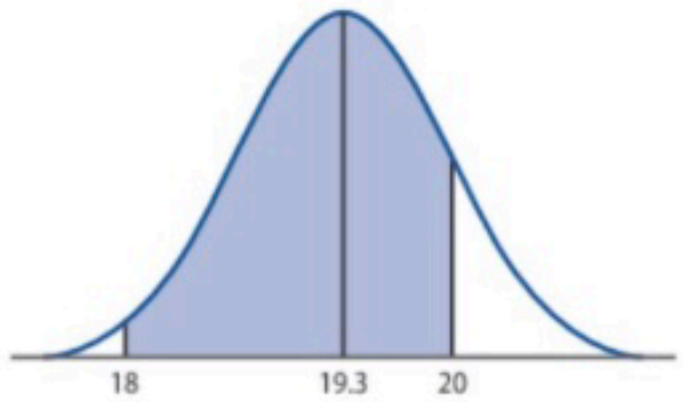
في 1994، تشكلت منظمة غير هادفة للربح تُدعى مؤسسة إعادة تدوير البطاريات القابلة لإعادة الشحن للترويج لإعادة تدوير البطاريات القابلة لإعادة الشحن في أمريكا الشمالية. وهذه المؤسسة توفر المعلومات عن أكثر من 50,000 موقع تجميع في أنحاء البلاد حيث يمكن فيها إعادة تدوير البطاريات القابلة لإعادة الشحن.

المصدر: Battery University

مثال 2 من الحياة اليومية إيجاد المساحة بين وسطي عينة

عمر البطاريات تعكف شركةٌ لإنتاج البطاريات القابلة لإعادة الشحن على تصميم بطاريةٍ تحتاج إلى إعادة الشحن بعد متوسط 19.3 ساعةً من الاستخدام. افترض أن التوزيع طبيعيٌ عند انحرافٍ معياري يساوي 2.4 ساعة. فإذا اختيرت عينةٌ عشوائيةٌ من 20 بطارية، أوجد الاحتمال في أن يكون العمر المتوسط للبطاريات قبل إعادة الشحن بين 18 و 20 ساعة.

المساحة التي تتوافق مع فترة من 18 إلى 20 ساعة موضحة على اليمين.



أولًا، أوجد الانحراف المعياري لمتوسطات العينات.

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ الانحراف المعياري لوسط العينة

$= \frac{2.4}{\sqrt{20}}$ $\sigma = 2.4$ و $n = 20$

≈ 0.536 بسّط.

استخدم صيغة قيمة z لمتوسط عينةٍ من أجل إيجاد قيم z المقابلة لـ 18 و 20.

قيمة z لـ $\bar{x} = 18$.

$z = \frac{x - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$ صيغة قيمة z لوسط عينة

$= \frac{18 - 19.3}{0.536}$ $\bar{x} = 18$ و $\mu = 19.3$ و $\sigma_{\bar{x}} = 0.536$

≈ -2.42 بسّط.

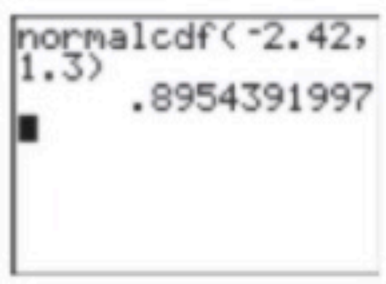
قيمة z لـ $\bar{x} = 20$.

$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$ صيغة قيمة z لوسط عينة

$= \frac{20 - 19.3}{0.536}$ $\bar{x} = 20$ و $\mu = 19.3$ و $\sigma_{\bar{x}} = 0.536$

≈ 1.30 بسّط.

باستخدام حاسبة التمثيل البياني، حدد normalcdf(لإيجاد المساحة بين $z = -2.42$ و $z = 1.30$.



المساحة بين قيمتي z لـ -2.42 و 1.30 تساوي 0.8954. ولذلك، $P(18 < \mu < 20)$ تساوي 89.54%.
إذًا، يساوي احتمال أن يكون متوسط عمر البطاريات بين 18 و 20 النسبة المئوية 89.54%.

تمرين موجّه

2. الألبان يساوي متوسط تكلفة لترٍ من الحليب في المدينة AED 3.49 عند انحرافٍ معياري يساوي AED 0.24. فإذا اختيرت عينةٌ عشوائيةٌ من 40 عبوة حليب سعة كل منها لترٌ واحد، أوجد احتمال أن يكون متوسط العينة بين AED 3.40 و AED 3.60. 98.9%

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال إضافي

2 الغوص توصلت إحدى شركات أسطوانات التنفس تحت الماء إلى أن أصغر أسطوانةٍ تستوعب مخزونًا يكفي 35 دقيقةً تحت الماء. افترض أن التوزيع طبيعيٌ وانحرافه المعياري يساوي 2.5 دقيقة. فإذا اختيرت عينة عشوائية من 25 أسطوانة، أوجد احتمال أن يكفي مخزون الأوكسجين ما بين 34 و 36 دقيقة. 95.4%

التركيز على محتوى الرياضيات

نظرية النهاية المركزية تنص نظرية النهاية المركزية على أنه بزيادة حجم أخذ العينات، فإن توزيع أوساط العينات يقترب من التوزيع الطبيعي. ولذلك يمكن حساب قيم z لأوساط العينات، ما يتيح حساب الاحتمالات والفترات عند إعطاء الاحتمالات. ويوفر هذا التقريب باستخدام التوزيع الطبيعي من وقت الحسابات، كما يتيح مقارنة الاحتمالات بصورةٍ أسهل.

617

مثال 3 تحليل القيم المفردة ومتوسطات العينات

حجم الفصل الدراسي وفقًا لدراسة حديثة، فإن متوسط حجم الفصل في المدارس الثانوية على مستوى البلاد هو 24.7 طالبًا لكل فصل. فافترض أن التوزيع طبيعي بانحراف معياري بمقدار 3.6 طلاب.

a. أوجد الاحتمال في أن يضمّ صفّ دراسيّ مختارٌ عشوائيًا أقل من 23 طالبًا.

السؤال يطلب تحديد القيمة المفردة التي فيها $P(x < 23)$. استخدم صيغة قيمة z لقيمة بيانات مفردة لإيجاد قيمة z المتوافقة.

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{صيغة قيمة } z \text{ لقيمة مفردة}$$

$$= \frac{23 - 24.7}{3.6} \text{ أو حوالي } -0.47 \quad X = 23 \text{ و } \mu = 24.7 \text{ و } \sigma = 3.6$$

المساحة المرافقة لـ $z < -0.47$، أو $P(z < -0.47)$، تساوي 0.3192. لذلك، فإن احتمال أن يضمّ صفّ دراسيّ مختارٌ عشوائيًا أقل من 23 طالبًا يساوي 31.9%.

b. إذا اختيرت عينةٌ مؤلفةٌ من 15 صفًا دراسيًا، أوجد احتمال أن يكون متوسط العينة أقل من 23 طالبًا في الصف الدراسي الواحد.

يتمحور هذا السؤال حول متوسط عينة، لذلك استخدم صيغة القيمة z الخاصة بمتوسط عينةٍ لإيجاد القيمة z. أولاً، ابحث عن الخطأ المعياري للمتوسط.

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{الخطأ المعياري للمتوسط}$$

$$= \frac{3.6}{\sqrt{15}} \text{ أو حوالي } 0.93 \quad n = 15 \text{ و } \sigma = 3.6$$

بعد ذلك، أوجد قيمة z باستخدام صيغة قيمة z لمتوسط عينة.

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} \quad \text{صيغة قيمة } z \text{ لمتوسط عينة}$$

$$= \frac{23 - 24.7}{0.93} \text{ أو حوالي } -1.83 \quad \bar{x} = 23 \text{ و } \mu = 24.7 \text{ و } \sigma_{\bar{x}} = 0.93$$

تساوي المساحة المرافقة لـ $z < -1.83$، أو $P(z < -1.83)$ القيمة 0.0336. ولذلك، فإن احتمال أن يكون لعينةٍ من 15 صفًا دراسيًا حجمٌ متوسطٌ أقل من 23 يساوي 3.36%.

نصيحة دراسية

صِيَغ قيمة z لاحظ أن الفرق بين صيغة قيمة z لقيمة بيانات مفردة وصيغة قيمة z لمتوسط عينة هو أن $\bar{x}$ مُعوّض عنه بـ X و $\sigma_{\bar{x}}$ مُعوّض عنه بـ σ في صيغة القيمة المفردة.

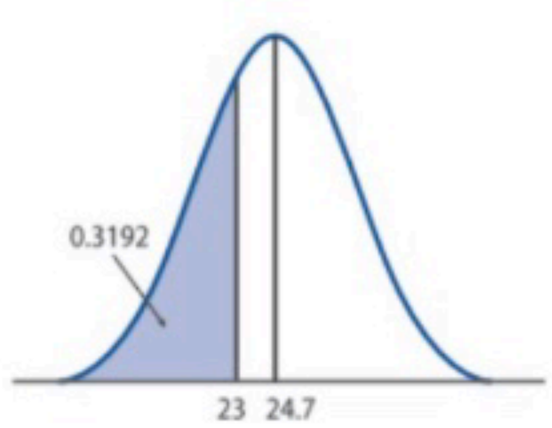
تمرين موجّه

3. **التفاح** يأكل المستهلكون في الولايات المتحدة متوسط 19 كيلوجرامًا من التفاح كل سنة. افترض أن الانحراف المعياري هو 4 كيلوجرامات والتوزيع طبيعي تقريبًا.

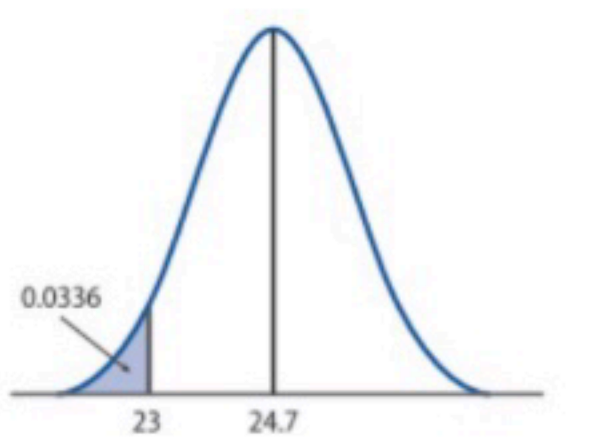
A. أوجد احتمال أن شخص محدد عشوائيًا يستهلك أكثر من 21 كيلوجرامًا من التفاح كل سنة. **30.9%**

B. إذا حددت عينة من 30 شخصًا، فأوجد احتمال أن متوسط العينة سيكون أكثر من 21 كيلوجرامًا من التفاح كل سنة. **0.3%**

لاحظ في الشكل 10.4.3 أن احتمال أن يضم فصل مفرد عدد طلاب أقل من 23 هو أكبر بكثير من الاحتمال المرتبط بمتوسط عينة أقل من 23 الموضحة في الشكل 10.4.4. وهذا يعني أنه مع تزايد حجم العينة، يصبح التوزيع أضيق وتتناقص قابلية التغيير.



الشكل 10.4.3



الشكل 10.4.4

مثال إضافي

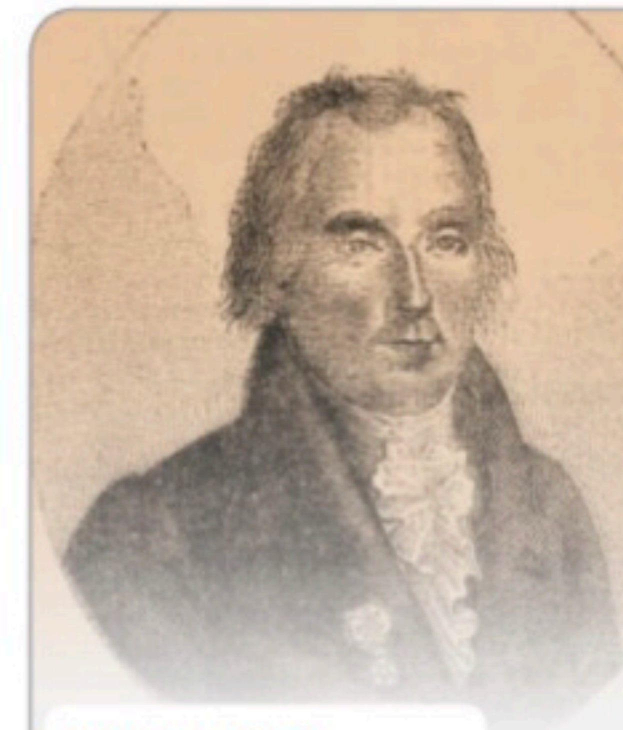
3 **الترفيه** أفادت دراسةٌ حديثةٌ أن الطلاب في عمر المدرسة الثانوية يستخدمون الحاسوب أو يشاهدون التلفاز لمدة 5.5 ساعات في اليوم. المتغير موزعٌ توزيعًا عشوائيًا عند انحرافٍ معياريٍ قيمته 1.1 ساعة.

a. أوجد الاحتمال في أن تستخدم عينةٌ مختارةٌ عشوائيًا من طلاب المدرسة الثانوية الحاسوب أو أن تشاهد التلفاز لأكثر من 6 ساعاتٍ في اليوم. **32.5%**

b. إذا اختيرت عينةٌ من 20 طالبًا من المدرسة الثانوية، أوجد احتمال استخدامهم الحاسوب أو مشاهدتهم التلفاز لمدة 6 ساعات أو أكثر في المتوسط خلال اليوم. **2.1%**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

618 | الدرس 10-4 | نظرية النهاية المركزية



الربط بتاريخ الرياضيات

بيير سيمون لابلاس

(1749–1827)

ولد بيير سيمون لابلاس، وهو عالِم رياضيّ وفلكيّ فرنسي، في بومونت أونوج بفرنسا. وكان لابلاس أول من قرّب التوزيع ذا الحدّين إلى التوزيع الطبيعي في كتابه الذي ألّفه عام 1812 بعنوان *النظرية التحليلية للاحتمالات*.

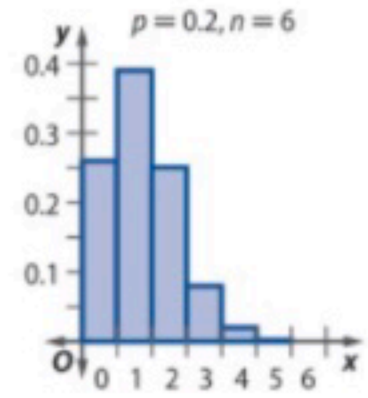
2 التقريب الطبيعي

التقريب الطبيعي وفقًا لنظرية النهاية المركزية، يمكن لأي توزيع لأخذ العينات أن يقترب من التوزيع الطبيعي مع تزايد n. ونتيجةً لهذا، فالتوزيعات الأخرى مثل التوزيع ذي الحدّين يمكن تقريبها باستخدام التوزيع الطبيعي. التوزيع ذا الحدّين يمكن تحديده باستخدام المعادلة

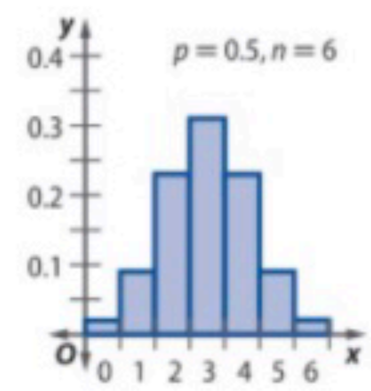
$$P(X) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x},$$

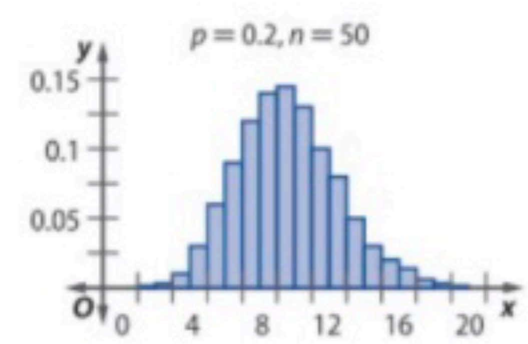
حيث n هو عدد التجارب، و p هو احتمال النجاح و q هو احتمال الفشل.

إذا ازداد عدد التجارب أو إذا اقترب احتمال النجاح من 0.5، فإن شكل التوزيع ذي الحدّين يبدأ يشبه التوزيع الطبيعي. على سبيل المثال، خذ التوزيع ذي الحدّين المبيّن على الجهة اليمنى. عندما $p = 0.2$ و $n = 6$، يكون التوزيع ملتويًا إيجابيًا.



ولكن، عندما يكون $p = 0.5$ ويكون $n = 6$ أو عندما يكون $p = 0.2$ ويكون $n = 50$، كما هو موضح أدناه، فالتوزيع طبيعي تقريبًا.





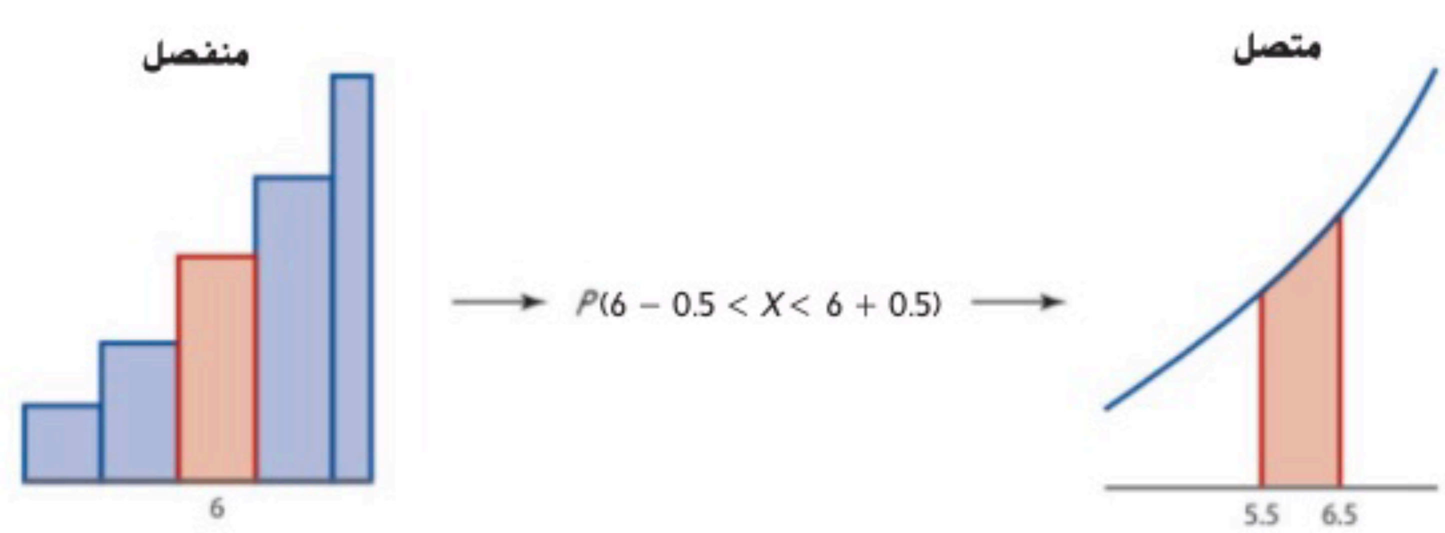
عندما يكون يكون احتمال قريبًا من 0 أو 1 وعندما يكون عددُ التجارب صغيرًا نسبيًا، فإن التقريب إلى التوزيع الطبيعي لا يكون دقيقًا. ولذلك، وبمثابة قاعدة، يستخدم التقريب إلى التوزيع الطبيعي فقط عندما $np \geq 5$ و $nq \geq 5$.

المفهوم الأساسي قاعدة التقريب للتوزيعات ذات الحدّين

الشرح	مكن استخدام التوزيع الطبيعي لتقريب توزيعٍ ذي حدّين عندما $np \geq 5$ و $nq \geq 5$.
مثال	إذا كان p يساوي 0.4 و n يساوي 5، إذًا $np = 5(0.4)$ أو 2. وبما أن $5 < 2$، فينبغي عدم استخدام التوزيع الطبيعي لتقريب التوزيع ذي الحدّين.

من المهم أيضًا تذكّر أن التوزيع الطبيعي ينبغي عدم استخدامه إلا للتقريب إلى التوزيع ذي الحدّين إذا كان المتغير الأصلي مُوزّعًا طبيعيًا أو كان $n \geq 30$.

بما أن التوزيعات ذات الحدّين *منفصلة* والتوزيعات الطبيعية *مستمرة*، فهناك تصحيح للاتصال يُسمى **معامل تصحيح الاتصال** ينبغي استخدامه عند تقريب توزيع ذي حدّين. ولاستخدام معامل التصحيح، تُجمع 0.5 وحدة أو تُطرح من حد منفصل معطى. على سبيل المثال، لإيجاد $P(X = 6)$ في التوزيع المنفصل، فسيكون التصحيح هو إيجاد $P(5.5 < X < 6.5)$ لتوزيع متصل، كما هو موضح أدناه.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 التقريب الطبيعي

يوضح **المثالان 4 و 5** كيفية تقريب توزيعٍ ذي حدين إلى تقريبٍ طبيعي.

التدريس المتمايز BL OL

المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية اطلب من الطلاب إجراء تجربةٍ ذات حدّين. كرمي قطعة نقدٍ 10 و 20 و 30 و 40 مرة وهكذا. واجعلهم يمثّلوا عدد مرات ظهور الصور في كل مجموعة من عمليات الرمي لكل تجربة. وعليهم أن يلاحظوا أنه بزيادة عدد المحاولات، يبدو التمثيل أشبه بتوزيعٍ طبيعيٍ أكثر فأكثر.

استخدم الخطوات التالية لتقريب توزيعٍ ذي حدّين إلى التوزيع الطبيعي.

المفهوم الأساسي التقريب الطبيعي للتوزيع ذي الحدّين

يقوم الإجراء الخاص بتقريب توزيعٍ ذي حدّين على الخطوات التالية:

الخطوة 1 أوجد الوسط μ والانحراف المعياري σ.

الخطوة 2 اكتب المسألة بالرمز الاحتمالي باستخدام X.

الخطوة 3 أوجد معامل تصحيح الاتصال، وأعد كتابة المسألة لتوضح المساحة المقابلة تحت التوزيع الطبيعي.

الخطوة 4 أوجد أي قيم z مقابلة لـ X.

الخطوة 5 استخدم حاسبة التمثيل البياني لإيجاد المساحة المقابلة.

نصيحة دراسية

الصيغ ذات الحدّين يتم إيجاد المتوسط μ والانحراف المعياري σ لتوزيع ذي حدّين باستخدام $\mu = np$ و $\sigma = \sqrt{npq}$ على التوالي.

مثال 4 التقريب الطبيعي للتوزيع ذي الحدّين

الجامعة أشارت صحيفةٌ مدرسيةٌ إلى أن 20% من طلاب السنة الأخيرة في المدرسة الثانوية سيلتحقون بجامعةٍ خارج الإمارة. فإذا اختير 35 طالبًا من السنة الأخيرة عشوائيًا، أوجد الاحتمال بأن ينضم أقل من 5 من طلاب السنة الأخيرة في المدرسة الثانوية لجامعةٍ خارج الإمارة.

في هذه التجربة ذات الحدّين $n = 35$ و $p = 0.2$ و $q = 0.8$.

الخطوة 1 أوجد الوسط μ والانحراف المعياري σ.

$\mu = np$ | الوسط والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدّين | $\sigma = \sqrt{npq}$

$= 35 \cdot 0.2$ | $n = 35$ و $p = 0.2$ و $q = 0.8$ | $= \sqrt{35 \cdot 0.2 \cdot 0.8}$

$= 7$ | بسّط. | ≈ 2.37

نظرًا إلى أن $np = 35(0.2)$ أو 7 و $nq = 35(0.8)$ أو 28، وكلاهما أكبر من 5، فسيكون من الممكن استخدام التوزيع الطبيعي لتقريب التوزيع ذي الحدّين.

الخطوة 2 اكتب المسألة بصيغة الاحتمال باستخدام X.

تساوي احتمال أن يلتحق أقل من 5 طلاب من طلاب السنة الأخيرة في المدرسة الثانوية بجامعة خارج الإمارة $P(X < 5)$.

الخطوة 3 أعد كتابة المسألة متضمنةً معامل الاتصال.

بما أن السؤال يطلب إيجاد احتمال انضمام *أقل* من 5 أشخاص، فاطرح 0.5 وحدة من 5.

$P(X < 5) = P(X < 5 - 0.5)$ أو $P(X < 4.5)$

الخطوة 4 أوجد قيمة z المتوافقة لـ X.

$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ صيغة قيمة z

$= \frac{4.5 - 7}{2.37}$ $\quad X = 4.5$ و $\mu = 7$ و $\sigma = 2.37$

≈ -1.05 بسّط.

انتبه!

صيغة القيمة z عند تقريب التوزيع ذي الحدّين باستخدام التوزيع الطبيعي، تذكّر أن تستخدم صيغة القيمة z لقيمةٍ مفردةٍ للبيانات، وليس صيغة متوسط العينة.

الخطوة 5 استخدم حاسبة التمثيل البياني لإيجاد المساحة على يسار z. المساحة التقريبية الواقعة إلى يسار $z = -1.05$ تساوي 0.147، كما هو موضح على الجهة اليمنى. ولذلك يساوي احتمال التحاق أقل من 5 طلاب من طلاب السنة الأخيرة بجامعةٍ خارج إمارتهم حوالي 14.7% ضمن عينة عشوائية من 35 طالبًا في السنة الأخيرة.

```
normalcdf(-4,-1.
05)
          .1468273946
```

تمرين موجّه

4. الإعلانات أشارت نتائج دراسةٍ استبيانٍ إعلانيٍ أرسل إلى عملاء اختيروا عشوائيًا إلى أن 65% من العملاء لم يروا أحد الإعلانات التليفزيونية التي عُرضت مؤخرًا. أوجد احتمال أن يكون 15 شخصًا أو أكثر لم يروا الإعلان من أصل عينة من 50 شاركوا في الدراسة. **99.9%**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال إضافي

4 السفر أشارت نسبة 40% من المشاركين في استطلاع إلى أنهم يرغبون بالسفر إلى بلدٍ أجنبي واحدٍ على الأقل خلال السنوات الخمس التالية. فإذا اختير 30 مشاركًا عشوائيًا، أوجد الاحتمال في أن يكون أكثر من نصفهم يرغبون بالسفر إلى بلدٍ أجنبي خلال السنوات الخمس المقبلة. **9.6%**

إرشاد للمعلمين الجدد

حاسبة التمثيل البياني لاحظ أن الـ 0 و الـ 1 غير مطلوبين لحساب [NORMAL CDF] على حاسبة التمثيل البياني. وتفترض حاسبة التمثيل البياني هاتين القيمتين افتراضًا.

620 | الدرس 10-4 | نظرية النهاية المركزية

مثال إضافي

5 رحلات الركوب يقدّر القائمون على إحدى مزارع الخيل أن النسبة المئوية من الزوار المهتمّين بركوب الخيل تساوي 70%. ولكي يتمكن الزوار من المشاركة في رحلة ركوبٍ جماعية، فيجب أن يبلغ عددُ المشاركين 10 على الأقل وألا يتجاوز 15. فإذا حضر 17 ضيفًا إلى المزرعة، فما احتمال أن يكون هناك رتلٌ واحدٌ من الراكبين؟ **87.0%**

مثال 5 من الحياة اليومية التقريب الطبيعي للتوزيع ذي الحدّين

التصنيع اكتشفت إحدى شركات تصنيع السيارات عيبًا في موديل جديد. ويتوقع أن يؤثر العيب في 30% من السيارات المنتجة. فما احتمال وجود 10 سيارات معيبة على الأقل و 15 سيارة معيبة على الأكثر ضمن عينةٍ عشوائيةٍ من 40 سيارة؟

في هذه التجربة ذات الحدّين، $n = 40$ و $p = 0.3$ و $q = 0.7$.

الخطوة 1 ابدأ بإيجاد الوسط μ والانحراف المعياري σ.

$\sigma = \sqrt{npq}$	الوسط والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدّين	$\mu = np$
$= \sqrt{40 \cdot 0.3 \cdot 0.7}$	$n = 40$، و $p = 0.3$ و $q = 0.7$	$= 40 \cdot 0.3$
≈ 2.9	بسّط.	$= 12$

بما أن $np = 40(0.3)$ أو 12 و $nq = 40(0.7)$ أو 28، وكلاهما أكبر من 5، فسيكون من الممكن استخدام التوزيع الطبيعي لتقريب التوزيع ذي الحدّين.

الخطوة 2 اكتب المسألة بالرمز الاحتمالي، $P(10 \leq X \leq 15)$.

الخطوة 3 أعد كتابة المسألة متضمنةً معامل الاتصال.

$$P(10 \leq X \leq 15) = P(10 - 0.5 < X < 15 + 0.5) \text{ أو } P(9.5 \leq X \leq 15.5)$$

الخطوة 4 أوجد قيم z المقابلة لـ $X = 9.5$ و $X = 15.5$.

$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$	صيغة قيمة z	$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$
$= \frac{15.5 - 12}{2.9}$	عوّض	$= \frac{9.5 - 12}{2.9}$
≈ 1.21	بسّط.	≈ -0.86

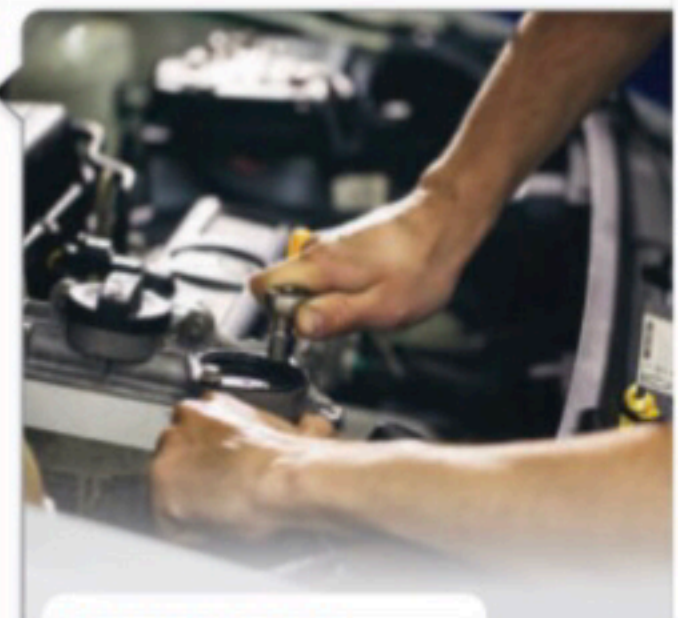
الخطوة 5 استخدم حاسبة التمثيل البياني لإيجاد المساحة الواقعة بين $z = -0.86$ و $z = 1.21$.

```
normalcdf(-0.86,
1.21)
         .6919660179
```

المساحة التقريبية المقابلة لـ $-0.86 < z < 1.21$ تساوي 0.692، وذلك وفق ما هو موضح على الجهة اليمنى. ولذلك، يساوي احتمال وجود 10 سيارات معيبة على الأقل و 15 سيارة معيبة على الأكثر ضمن عينة عشوائية من 40 سيارة يساوي تقريبًا 69.2%.

تمرين موجّه

5. **التصنيع** افترض أنه من المتوقع أن يؤثر عيبٌ في موديل ثانٍ من إنتاج شركة السيارات نفسها على 20% من السيارات المنتجة. فما احتمال وجود 8 سيارات معيبة على الأقل و 10 سيارات معيبة على الأكثر ضمن عينةٍ عشوائيةٍ من 30 سيارة؟ **22.7%**



الربط بالحياة اليومية

يحدث تنويه إعادة المنتجات عندما يرسل مصنّع طلبًا إلى المستهلكين بأن يعيدوا منتجًا بعد اكتشاف مشكلةٍ في سلامته. وتعدّ هذه التنويهات مكلفة، ولكنها تتم للحدّ من المسؤولية القانونية التي يتحمّلها المصنّع.

المصدر: الإدارة الوطنية لسلامة حركة المرور على الطرق السريعة

قد يبدو من الصعب معرفة ما إن كان يجب أن تضاف 0.5 وحدة إلى قيمةٍ منفصلةٍ للبيانات أو تطرح منها لإيجاد معامل تصحيح الاتصال. يعرض الجدول أدناه كل حالة.

ملخص المفهوم معاملات تصحيح التوزيع ذي الحدّين

عند استخدام التوزيع الطبيعي لتقريب توزيع ذي حدّين، ينبغي استخدام معاملات التصحيح التالية، حيث إن c هي قيمةٌ معطاة للبيانات في التوزيع ذي الحدّين.

طبيعي	ذو حدّين
$P(c - 0.5 < X < c + 0.5)$	$P(X = c)$
$P(X > c + 0.5)$	$P(X > c)$
$P(X > c - 0.5)$	$P(X \geq c)$
$P(X < c - 0.5)$	$P(X < c)$
$P(X < c + 0.5)$	$P(X \leq c)$

انتبه!

كتابة المتباينات عندما تسأل مسألةٌ عن احتمال تقع بين قيمتين، فاكتب المتباينة بالصورة $P(c_1 < X < c_2)$، وليس $P(c_1 \leq X \leq c_2)$. على سبيل المثال، في المثال 5، سيساوي احتمال وجود *ما* بين 10 و 15 عيبًا $P(10 < X < 15)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

621

التمارين

1. **الألعاب الإلكترونية** يعرض الجدول الأسعار المتوسطة لثلاث ألعابٍ إلكترونيةٍ في موقعٍ للبيع بالمزاد العلني على شبكة الإنترنت. افترض أن المتغير موزّع توزيعًا طبيعيًا. (المثالان 1 و 2)

اللعبة	متوسط السعر (AED)
الأعمدة	35
الهجوم على السجن	45
سباق الفضاء	52

   a. من أصل عينة من 35 سعرًا للعبة "الأعمدة" على شبكة الإنترنت. أوجد احتمال أن يكون السعر المتوسط أكثر من AED 38. إذا كان الانحراف المعياري هو AED 9. **2.4%**

   b. من أصل عينة عشوائية من 40 سعرًا للعبة "سباق الفضاء". أوجد احتمال أن يكون السعر المتوسط بين AED 50 و AED 55 إذا كان الانحراف المعياري هو AED 12. **79.7%**

2. **اللبان** يمضغ الفرد الأمريكي ما متوسطه 182 قطعةً من اللبان في العام. افترض أن الانحراف المعياري يساوي 13 قطعةً في كل سؤالٍ مما يلي. وافترض أن المتغير موزّع عشوائيًا. (المثالان 1 و 2)

   a. أوجد الاحتمال في أن يكون 50 شخصًا اختيروا عشوائيًا يمضغون ما متوسطه 175 قطعةً أو أكثر من العلكة. **99.9%**

   b. إذا اختيرت عينة عشوائية من 45 شخصًا. أوجد الاحتمال في أن يقع العدد المتوسط من قطع العلكة التي يمضغونها في العام بين 180 و 185. **78.8%**

3. **ممارسة التمارين الرياضية** يعرض الجدول العدد المتوسط من أيام الأسبوع التي كان الإماراتيون من أربع فئاتٍ عمريةٍ مختلفةٍ يقضونها في ممارسة الرياضة خلال إحدى السنوات الأخيرة. افترض أن المتغير موزّع عشوائيًا. (المثالان 1 و 2)

   a. أوجد الاحتمال في أ ن تكون عينةٌ عشوائيةٌ من 30 إماراتيًا أعمارهم بين 45 و 54 تقضي أكثر من 1.5 يومًا في الأسبوع في ممارسة التمارين الرياضية إذا كان الانحراف المعياري 0.5 يوم. **86.3%**

   b. بفرض أن الانحراف المعياري يساوي 1.2 يوم في عينة عشوائية من 30 شخصًا بالغًا أعمارهم بين 18 و 24. فأوجد الاحتمال في أن يكون متوسط الوقت الذي يُقضى في ممارسة التمارين الرياضية يقع بين يومين و2.5 يوم في الأسبوع. **64.2%**

4. **الدواء** يساوي متوسط زمن الشفاء لدى مرضى مصابين بفيروسٍ محددٍ 4.5 أيام عند انحرافٍ معياريٍ يساوي يومين. افترض أن المتغير موزّع عشوائيًا. (المثالان 1 و 2)

   a. أوجد احتمال أن يساوي زمن الشفاء المتوسط أقل من أربعة أيام لدى عيّنة عشوائية من 75 شخصًا. **1.5%**

   b. إذا كانت لديك عينة عشوائية من 80 شخصًا. أوجد احتمال أن يقع زمن الشفاء المتوسط بين 4.4 و 4.8 أيام. **58.3%**

5. **السياحة** يساوي متوسط عدد السيّاح الذين يزورون أحد المعالم الوطنية في كل شهرٍ 55,000. بانحرافٍ معياريٍ يساوي 8000. افترض أن المتغير موزّعٌ طبيعيًا. (المثال 3)

   a. إذا اختير شهرٌ عشوائيًا. فأوجد احتمال أن يكون هناك أقل من 50,000 سائح زائر. **26.6%**

   b. إذا اختيرت عينة من 10 أشهر. فأوجد احتمال أن يكون هناك أقل من 50,000 سائح زائر. **2.4%**

6. **التغذية** يساوي المحتوى المتوسط من البروتين في نوعٍ محددٍ من أنواع قِطع الحبوب عالية الطاقة 12 جرامًا عند انحرافٍ معياريٍ يساوي جرامين. افترض أن المتغير موزّع عشوائيًا. (مثال 3)

   a. أوجد الاحتمال في أن تضم قطعة مختارة عشوائيًا أكثر من 10 جرامات من البروتين. **84.1%**

   b. في عينةٍ من 15 قطعة. أوجد الاحتمال في أن يكون المحتوى المتوسط من البروتين أعلى من 10 جرامات. **99.99%**

7. **كأس العالم** في إحدى السنوات الأخيرة. قال 33% من المشاهدين إنهم كانوا يخططون لمشاهدة بطولة كأس العالم في كرة القدم. فما احتمال أنه في عينة عشوائية من 45 شخصًا. سيخطط أقل من 14 شخصًا لمشاهدة كأس العالم؟ افترض أن المتغير موزّع طبيعيًا. (المثال 4) **33.4%**

8. **الأفلام** بناءً على استطلاعٍ وطنيٍ للآراء خلال إحدى السنوات الأخيرة. فإن 27% من المشاركين شاهدوا 5 أفلام أو أكثر في دور السينما. فمن أصل عينة عشوائية من 40 شخصًا. ما احتمال أن يكون ما بين 6 و 11 شخصًا شاهدوا أكثر من 5 أفلامٍ في دار السينما خلال ذلك العام؟ افترض أن المتغير موزع طبيعيًا. (المثال 5) **39.5%**

9. **المكتبة** أُجري استطلاعٌ للآراء في إحدى المكتبات لتقريب النسبة المئوية للكتب والأقراص المدمجة والمجلات والأفلام التي استُعيرت في شهرٍ واحد. يعرض الجدول نتائج ذلك. افترض أن المتغير موزّعٌ طبيعيًا. (المثالان 4 و 5)

الموارد	النسبة المئوية
كُتب	45
أقراص مدمجة	20
مجلات	3
أفلام	32

   a. ما احتمال أن يكون من أصل 65 مصدرًا اختير عشوائيًا هناك 35 كتابًا؟ **3.6%**

   b. من أصل 85 مصدرًا اختير عشوائيًا. أوجد الاحتمال في أن يكون هناك 15 قرصًا مدمجًا على الأقل و18 قرصًا على الأكثر. **40.9%**

10. **القيادة** وجد أحد معلّمي قيادة السيارات أن 12% من المتدربين يُلغون الدروس أو ينسونها. افترض أن المتغير موزّعٌ طبيعيًا. (المثالان 4 و 5)

   a. إذا كان لدى المعلّم 60 درسًا. فما الاحتمال في أن يفوّت أكثر من 10 متدرّبين درسًا؟ **9.5%**

   b. من أصل 80 درسًا. ما هي احتمال أن يفوّت 7 متدربين بالتحديد درسًا؟ **9.2%**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1–10 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع في التمرين 7. قد ينسى الطلاب استخدام معامل تصحيح. فذكّرهم باستخدام العدد 13.5 بمثابة قيمةٍ لذلك المعامل وليس 14.

إرشاد للمعلمين الجدد

الاحتمال في التمرين 10b. إذا احتاج الطلاب إلى المساعدة في إيجاد احتمال قيمةٍ واحدة. فاقترح استخدام الفترة $6.5 \leq X \leq 7.5$ بمثابة قيمٍ مقبولة.

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 19. إجابة حليمة 18.7% صحيحة. وأضافت هناء معامل التصحيح بدلًا من أن تطرحه، حيث استخدمت القيمة 30.5 بدلًا من القيمة الصحيحة 29.5.

إجابات إضافية

16b.

التوافيق	$\bar{x}$
ABC	6.43
ABD	8.23
ACD	7.77
BCD	7.17

16c. $\bar{x} = 7.4$؛ الإجابة النموذجية: وسط المجتمع الإحصائي ووسط أوساط العينات متساويان.

19. وليد؛ الإجابة النموذجية: أوجدت هناء معامل تصحيحٍ خاطئٍ للاتصال قيمته $P(X > 30.5)$.

11. **الاختبارات** يتألف اختبار اختيارٍ من متعددٍ 50 سؤالاً إجاباتها المحتملة هي A و B و C و D. عند التخمين العشوائي، أوجد الاحتمال في أن يكون عدد الإجابات الصحيحة يساوي كلاً مما يلي.

B

a. أقل من 18 **94.9%**

b. 12 تمامًا **12.8%**

c. 14 على الأقل **37.2%**

d. بين 10 و 15 **48.6%**

أوجد حجم العينة الأصغر المطلوب لكل احتمال كي يمكن استخدام التوزيع الطبيعي لتقريب توزيع ذي حدّين.

12. $p = 0.1$ **50**

13. $p = 0.4$ **13**

14. $p = 0.5$ **10**

15. $p = 0.8$ **25**

16. **كرة السلة** يعرض الجدول العدد المتوسط من النقاط التي أحرزها أربعة لاعبي كرة سلة مختلفين في المباراة الواحدة.

اللاعب	D	C	B	A
المتوسط	10.3	4.9	6.3	8.1

b–c. انظر الهامش.

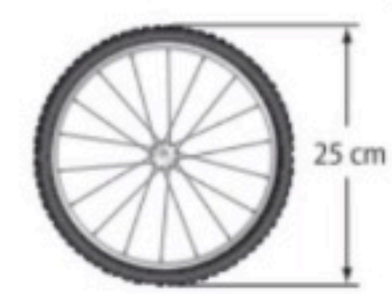
a. أوجد وسط البيانات والانحراف المعياري للمتوسطات.

b. حدّد كلاً من التوافيق الممكنة لمتوسطات 3 لاعبين، وأوجد متوسط كلٍ من التوافيق. $\mu = 7.4$، $\sigma = 2.02$

c. أوجد وسط كلٍ من الوسطين اللذين أوجدتهما في الجزء **b**. فما وجه مقارنة ذلك بالوسط الذي أوجدته في الجزء **a**؟

17. **الدراجات الهوائية** لاحظ عجلة الدراجة الهوائية الموضحة، حيث $\mu = 25$ cm و $\sigma = 0.125$ cm.

C



يوضح الجدول أقطار 10 عينات من عجلات الدراجات المختارة عشوائيًا من أحد خطوط الإنتاج.

العينة	القُطر	العينة	القُطر
1	25.2, 24.9, 25	6	24.9, 25.1, 24.8
2	25.1, 25, 24.8	7	25.3, 24.9, 25.1
3	25.3, 24.9, 24.8	8	25.4, 24.8, 25.3
4	24.9, 25.3, 25.2	9	24.8, 24.9, 25.2
5	25, 25.2, 24.7	10	25, 25.3, 24.7

a. أوجد $\bar{x}$ و s لكل عينة.

b. أنشئ مخططًا نشتتيًا بحيث يقع رقم العينة على المحور الأفقي x وتقع متوسطات العينات على المحور الرأسي y.

c. في هذه العملية، حد الضبط الأعلى هو $\bar{\bar{x}} + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$ وحد الضبط الأدنى هو $\bar{\bar{x}} - \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$. فإذا كانت العملية ضمن نطاق الضبط، يجب أن تقع كل القيم بين حدَي الضبط. استخدم التمثيل البياني من الجزء **b** لتحديد ما إذا كانت العملية ضمن نطاق. واشرح استنتاجك. **17a–c. انظر ملحق إجابات الوحدة 10.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

18. **زُمر الدّم** يعرض الجدول توزيعات الزمر الدموية لدى مواطني الولايات المتحدة وكندا.

كندا		الولايات المتحدة	
التوزيع	النوع	التوزيع	النوع
46%	O	44%	O
42%	A	42%	A
9%	B	10%	B
3%	AB	4%	AB

a. إذا اختير 50 مواطنًا أمريكيًا عشوائيًا، أوجد الاحتمال في أن تكون زمرة دم أقل من 20 من أولئك المختارين هي الزمرة O. **23.8%**

b. من أصل 100 شخصٍ كندي اختيروا عشوائيًا، أوجد الاحتمال في أن تكون زمرة ما بين 80 و 90 شخصًا من المختارين هي الزمرة O أو A. **67.1%**

c. ما احتمال أن يكون لشخصين مختارين عشوائيًا من الولايات المتحدة أو كندا زمرة الدم نفسها؟ **38.9%**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

19. **تحليل الخطأ** تحسب حليمة وهناء نتائج استبيانٍ تشاركان فيه بمثابة جزءٍ من التدريب الصيفي. وقد توصّلتا إلى أنّ من بين السكّان نسبة 65% لا يعيدون استخدام أدواتهم. وقد توصلت حليمة إلى أن الاحتمال في أن يكون أقل من 30 من أصل 50 ساكنًا عشوائيًا لا يعيدون استخدام أدواتهم تساوي 18.7%. في حين توصلت هناء إلى أن تلك النسبة سوف تساوي 27.7%. فهل أيٍ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

20–22. انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

20. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف يمكن استخدام نظرية النهاية المركزية لوصف شكل توزيع أوساط عيناتٍ ومركزه وانتشاره.

21. **تحدٍ** في الولايات المتحدة، 7% من الذكور و 0.4% من الإناث مصابون بعمى الألوان. افترض أنه اختيرت عينات عشوائية من 100 رجل و 1500 امرأة. فهل هناك احتمال أكبر بأن الرجال أو النساء سيضمون على الأقل 10 أشخاص مصابين بعمى الألوان؟ اشرح استنتاجك.

22. **مسألة غير محددة الإجابة** أعطِ مثالاً عن مجتمعٍ إحصائي وعن عينةٍ من المجتمع الإحصائي. واشرح المقصود بتوزيع أخذ العيناتِ المقابل.

التبرير حدد ما إذا كانت كل عبارة من العبارات التالية صحيحة أم خطأ. اشرح إجابتك. 23–24. انظر الهامش.

23. مع زيادة عدد العينات، يقترب توزيع أخذ العينات الخاص بمتوسطات العينات من التوزيع الطبيعي.

24. في التوزيع ذي الحدّين، $P(X \geq c) \neq P(X > c)$.

25. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في أنه يمكن استخدام التوزيع الطبيعي لتقريب توزيع ذي حدّين. وما الشروط الضرورية للقيام بذلك. وما السبب في الحاجة إلى تصحيح للاتصال. **انظر ملحق إجابات الوحدة 10.**

إجابات إضافية

23. خطأ؛ الإجابة النموذجية: يقارب توزيعُ التوزيع الطبيعي مع زيادة حجم العينة، لا العدد الكلي من العينات.

24. صحيح؛ الإجابة النموذجية: في التوزيع ذي الحدّين، لا يساوي احتمال مساواة متغيرٍ ثابتٍ منفصلٍ لقيمةٍ محددةٍ الصفر. ولذلك، $P(X \geq c) \neq P(X > c)$.

مراجعة شاملة

26. **الخدمة المجتمعية** كشفت دراسة حديثة أجريت على 1286 مدرسة ثانوية أن الطلاب أتموا ما متوسطه 38 ساعة من العمل التطوعي على مدار الصيف بانحراف معياري بمقدار 6.7 ساعات. حدد عدد طلاب السنة الأخيرة الذين أتموا أكثر من 42 ساعة من الخدمة المجتمعية. وافترض أن المتغير موزّع طبيعيًا. **354**

27. **الألعاب** أجرى مديرو نادٍ للياقة البدنية استطلاعًا عشوائيًا على 56 عضوًا وسجلوا عدد الأيام التي حضرها كل عضو في أسبوع محدد. استخدم توزيع التكرار الموضح لإنشاء توزيع احتمالي للمتغير العشوائي X. ثم أوجد التغير، والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي. **انظر الهامش.**

التكرار	الأيام، X	التكرار	الأيام، X
11	4	3	0
9	5	5	1
3	6	10	2
1	7	14	3

أوجد مجموع كل مما يلي.

28. $\sum_{n=1}^{19} -50 + 5n$ **0**

29. $\sum_{n=12}^{68} 5 - \frac{n}{4}$ **−285**

30. $\sum_{n=10}^{16} 24n - 90$ **1554**

أوجد الحد المحدّد لكل متتالية حسابية.

31. الحدّ السابع؛ $a_n = (a_{n-1} - 6)^2, a_1 = 4$ **4**

32. الحدّ السادس؛ $a_n = 3n^2 - 4n$ **84**

33. الحدّ الرابع؛ $a_n = (a_{n-1})^2 - 11, a_1 = 3$ **38**

أوجد الإحداثيات المتعامدة لكل نقطة لها الإحداثيات القطبية المعطاة.

34. $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ **$(0, 2)$**

35. $\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ **$\left(\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{8}\right)$**

36. $(6, 210°)$ **$(-3\sqrt{3}, -3)$**

أوجد كلاً مما يلي لكل من $p = \langle 4, 0 \rangle$، و $q = \langle -2, -3 \rangle$، و $t = \langle -4, 2 \rangle$.

37. $p - t - 2q$ **$\langle 12, 4 \rangle$**

38. $q - 4p + 3t$ **$\langle -30, 3 \rangle$**

39. $4p + 3q - 6t$ **$\langle 34, -21 \rangle$**

اكتب معادلة لكل قطع مكافئ بؤرة F والخصائص المعطاة ومثّله بيانيًا. **40–41. انظر الهامش.**

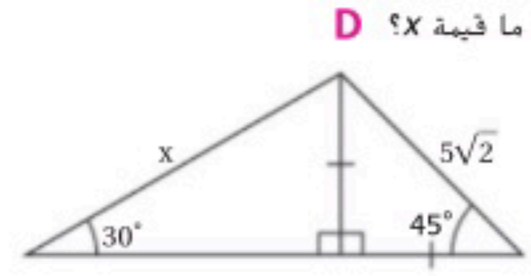
40. $F(-6, 8)$؛ يفتح لأعلى؛ ويحتوي على $(0, 16)$

41. $F(2, -5)$؛ يفتح لأسفل؛ ويحتوي على $(10, -11)$

42. **الزبادي** يبيع متجر الزبادي المثلج عبوات بثلاثة أحجام: صغير، بسعر AED 2.89 ومتوسط، بسعر AED 3.19 وكبير، بسعر AED 3.39. وفي يوم الجمعة، تم بيع 78 عبوة بإجمالي AED 246.42. وباع المتجر ست عبوات متوسطة أكثر من العبوات الصغيرة ذاك اليوم. استخدم قاعدة كرامر لتحديد عدد كل نوع من العبوات المبيعة يوم الجمعة. **24 عبوة صغيرة و 30 عبوة متوسطة و 24 عبوة كبيرة**

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

43. **SAT/ACT** ما قيمة x؟ **D**



A $2\sqrt{2}$
B 5
C $5\sqrt{3}$
D 10
E $5\sqrt{6}$

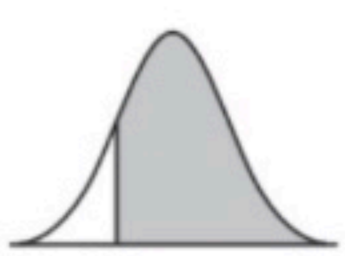
44. **المراجعة** في إحدى الدراسات، قال 62% من المصوتين المسجلين إنهم صوتوا في انتخابات 2008 الرئاسية. فإذا اختير 6 مصوتين مسجلين عشوائيًا، فما احتمال أن يكون 4 منهم على الأقل قد صوتوا في الانتخابات؟ **H**

F 32%
G 41.2%
H 58.6%
J 73.2%

45. متوسط عدد المرضى الذين يخضعون للفحص كل أسبوع في مستشفى بعينه موزّع طبيعيًا. والمتوسط لكل أسبوع هو 12,423، بانحراف معياري 3269. إذا اختير أسبوع عشوائيًا، فأوجد احتمال وجود أقل من 4000 مريض. **A**

A 0.50%
B 2.37%
C 32.20%
D 36.73%

46. **المراجعة** أوجد المساحة التي تتوافق مع المنطقة المظللة من هذا التوزيع المعياري الطبيعي. **J**



−2.03

F 0.02
G 0.04
H 0.96
J 0.98

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4 التقويم

حصاد الأمس اطلب من الطلاب وصف وجه تشابه ووجه اختلافٍ بين إيجاد قيم Z الخاصة بقيمة X ذات توزيع طبيعي وبين إيجاد وسط عينة. الإجابة النموذجية: أحد أوجه التشابه هو حساب قيم Z ومن ثم استخدام القيمة (القيمة) لتحديد الاحتمالات. ومن أوجه الاختلاف أن لقيمة X انحرافًا معياريًا. ولوسط عينة خطأ معياري يتبع جزئيًا لحجم العينة.

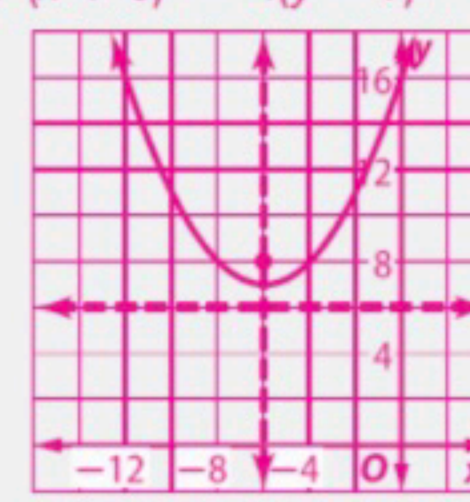
إجابات إضافية

27.

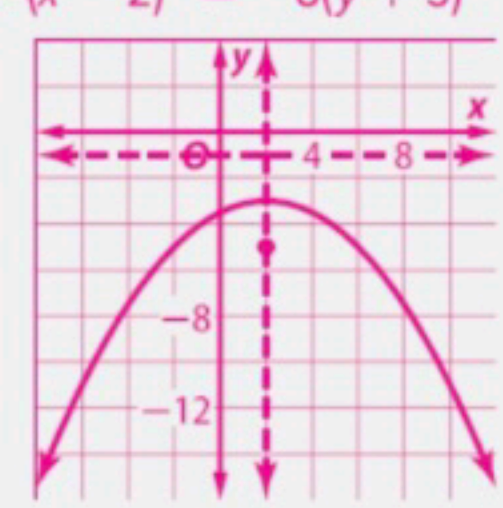
الأيام، X	0	1	2	3
$P(X)$	0.05	0.09	0.18	0.25
الأيام، X	**4**	**5**	**6**	**7**
$P(X)$	0.20	0.16	0.05	0.02

3.24; 2.54; 1.59

40. $(x + 6)^2 = 4(y - 7)$



41. $(x - 2)^2 = -8(y + 3)$



التدريس المتمايز BL

التوسّع تبيّن أن مستوى الكوليسترول الوسطي لدى مجتمع إحصائي من البالغين يساوي 160 mg/dL. ومستوى الكوليسترول ذو توزيع عشوائي انحرافه المعياري 30 mg/dL. وقد أشارت دراسةٌ طبيةٌ حديثةٌ أنه بعد تناول دواءٍ تجريبيٍ لمدةِ ستة أشهر، فإن نسبة 2.5% فقط من أصل 300 شخصٍ معرضين لخطرٍ كبيرٍ للإصابة بمرضِ القلب كان مستوى الكوليسترول فيها فوق 200 mg/dL (المستوى الحدي لخطرِ الإصابة بمرض القلب). في ضوء هذه المعلومات، كم كان المستوى الوسطي للكوليسترول في العينة؟ **141.2 mg/dL**

الوحدة 10 اختبار نصف الوحدة

الدروس من 10-1 إلى 10-4

1. تجارب الأداء يعرض الجدول أعمار 20 طالبًا شاركوا في تجارب أداء أدوار عرض مسرحي مدرسي يجسد رواية ذهب مع الريح . (الدرس 10-1)

أعمار الطلاب				
14	15	17	16	14
16	17	16	18	16
15	16	18	15	17
14	18	15	17	16

a. أنشئ مدرجًا إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

b. صِف مركز البيانات وانتشارها باستخدام إما المتوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك.
a–b. انظر الهامش.

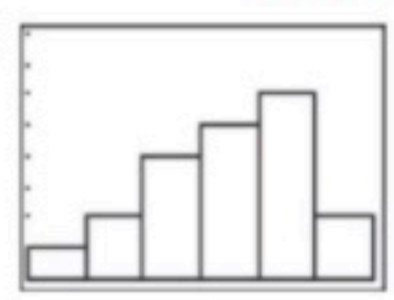
2. الإجازات تخطط سهيلة للذهاب في رحلة خلال إجازة الربيع. وقد حصرت خياراتها بموقعين اثنين. يعرض الجدول أدناه درجات الحرارة خلال اثني عشر يومًا تتزامن مع توقيت إجازة الربيع لكل موقع. (الدرس 10-1)

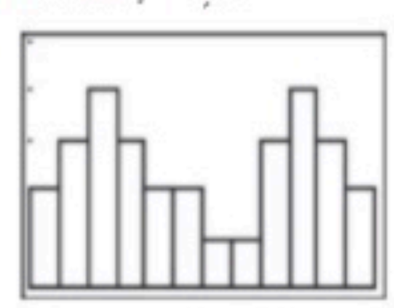
شاطئ جميرا					
52	60	62	57	55	63
64	59	54	52	54	60
برج خليفة					
77	77	76	76	72	71
72	74	74	72	73	73

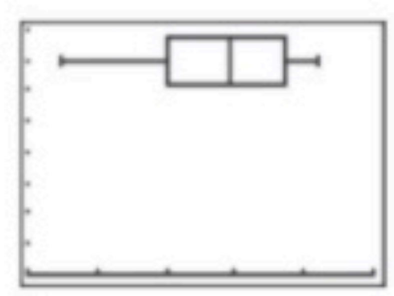
a. أنشئ مخططين صندوقيين متجاورين لمجموعتي البيانات. واستخدم طريقة العرض هذه لمقارنة مركزي التوزيعين وانتشاريهما. **انظر الهامش.**

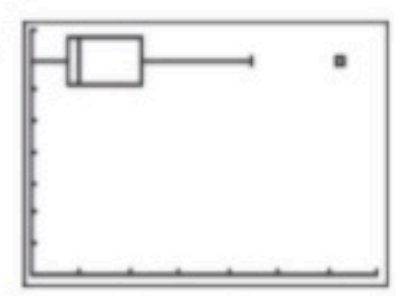
b. ما الموقع الذي فيه تباين أكبر لدرجة الحرارة؟ **شاطئ جميرا**

3. الاختيار من متعدد أي من المخططات التالية يعرض مجموعة بيانات ذات توزيع ملتوٍ إيجابيًا؟ (الدرس 10-1) **D**

A


C


B


D


صنّف كل متغير عشوائي X على أنه منفصل أو متصل. اشرح استنتاجك. (الدرس 10-2) **4–5. انظر الهامش.**

4. يمثل X عدد مرات استقرار قطعة نقدية على الصورة إذا رُميت لعددٍ عشوائيٍ من المرات..

5. يمثل X الزمن الذي يستغرقه متسابق ماراثون اختير عشوائيًا لإكمال السباق.

6. السفر خلال استطلاع للآراء، أفاد 20% من المراهقين المشاركين بأنهم زاروا برج العرب. أوجد احتمال أن يكون 3 على الأقل من أصل 6 مراهقين اختيروا عشوائيًا قد زاروا البرج. (الدرس 10-2) **9.9%**

7. الشامبو كميّة الماء بالميليلتر في نوع محددٍ من أنواع الشامبو موزعةٌ توزيعًا طبيعيًا فيه $\mu = 125$ و $\sigma = 7$. أوجد كلًا مما يلي. (الدرس 10-3)

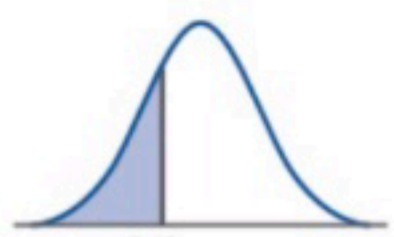
a. $P(X < 105)$ **0.21%**

b. $P(X > 140)$ **1.60%**

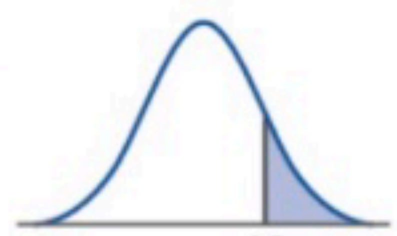
c. $P(115 < X < 130)$ **68.59%**

8. الجولف سجّل كل لاعب من عينة اختيرت عشوائيًا من 130 لاعب جولف في المتوسط 78 نقطة عند انحرافٍ معياري يساوي 6.3. أوجد عدد لاعبي الجول الذين يساوي عدد النقاط التي سجّلها كل منهم 70 أو أقل. (الدرس 10-3) **13**

أوجد المساحة المقابلة للمنطقة المظللة. (الدرس 10-3)

9.


0.268

10.


0.067

11. المشاريع تتوزّع درجات مشروع علمي في أحد الصفوف الدراسية توزيعًا عشوائيًا فيه $\mu = 78$ و $\sigma = 8$. أوجد كل احتمال مما يلي. (الدرس 10-3)

a. $P(X \geq 96)$ **1.2%**

b. $P(60 < X < 85)$ **79.7%**

أوجد احتمال متوسط كل عينة. (الدرس 10-4)

12. $P(\bar{x} < 38); \mu = 40, \sigma = 5.5, n = 25$ **3.4%**

13. $P(\bar{x} > 82.2); \mu = 82.5, \sigma = 4.1, n = 50$ **69.8%**

14. التوظيف أشارت دراسة جرت مؤخرًا إلى أن العمر المتوسط الذي يبدأ فيه شخص عمله الأول هو 16.8 سنوات. افترض أن هذا المتغير موزّع عشوائيًا عند انحراف معياري يساوي 1.7 سنة. فإذا اختيرت عينة عشوائية من 25 شخصًا. أوجد احتمال أن يكون متوسط العمر الذي بدأ عنده أولئك المشاركون عملهم الأول أكبر من 17 عامًا. (الدرس 10-4) **27.8%**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

625

الدروس من 10-1 إلى 10-4

التقويم التكويني

استخدم اختبار نصف الوحدة القصير لتقويم تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

بالنسبة للمسائل المجاب عنها بشكل خاطئ، كلّف الطلاب بمراجعة الدروس المشار إليها بين الأقواس.

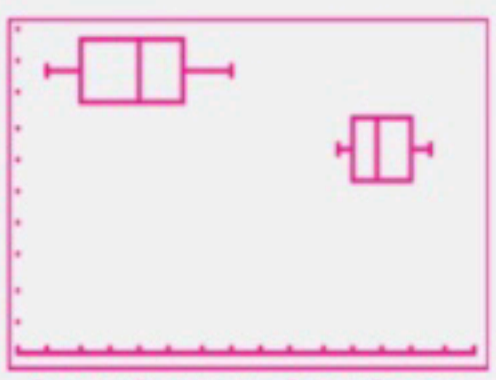
إجابات إضافية

1a.

[14, 19] scl: 1 by [0, 7] scl: 1

التوزيع متماثل.

1b. الإجابة النموذجية: بما أن التوزيع متماثل، فيمكن استخدام الوسط المساوي 16 عامًا والانحراف المعياري المقدّر بـ 1.3 تقريبًا لوصف المركز والانتشار.

2a.

[50, 80] scl: 2 by [0, 10] scl: 1

الإجابة النموذجية: درجة الحرارة الوسيطة في برج خليفة أعلى من درجة الحرارة الوسيطة في شاطئ جميرا. ودرجة الحرارة الدنيا في برج خليفة أعلى من درجة الحرارة العظمى في شاطئ جميرا.

4. منفصل؛ سيكون عدد مرات ظهور الصور معدودًا دائمًا لأنك لا يمكن أن تحصل على كسرٍ من صورة.

5. متّصل؛ يمكن أن يتمّ المتسابق السباق خلال أي مقدارٍ من الزمن.

الدرس 10-5 فترات الثقة

السابق

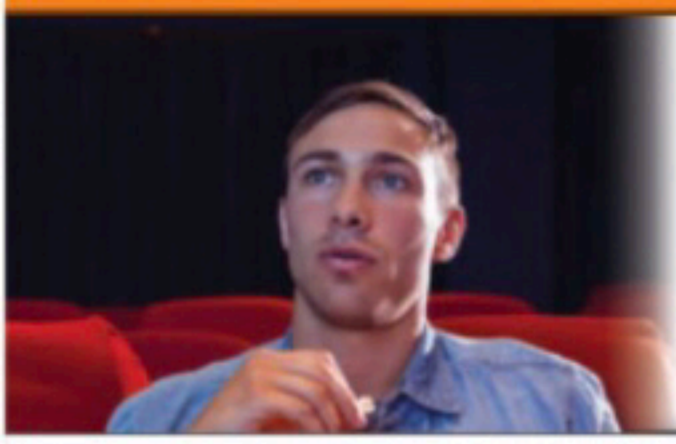
- حلّلت أوساط العينات وأثر نظرية النهاية المركزية في توزيع أخذ العينات.

الحالي

1. استخدام التوزيعات الطبيعية لإيجاد فترات ثقة الوسط.
2. استخدام التوزيعات t لإيجاد فترات ثقة الوسط.

لماذا؟

- يريد المدراء التنفيذيون في استديو لإنتاج الأفلام معرفة العمر الوسطي للأشخاص الذين يتابعون أحد الأفلام. وقد أوضح استطلاعٌ للآراء خضع له 200 شخصٍ شاهدوا الفلم أن العمر الوسطي لهم كان 20.4 سنة. قرر التنفيذيون تقدير العمر الوسطي a لجميع الزبائن أنه بين 18.1 و 22.7 أو $18.1 < a < 22.7$.



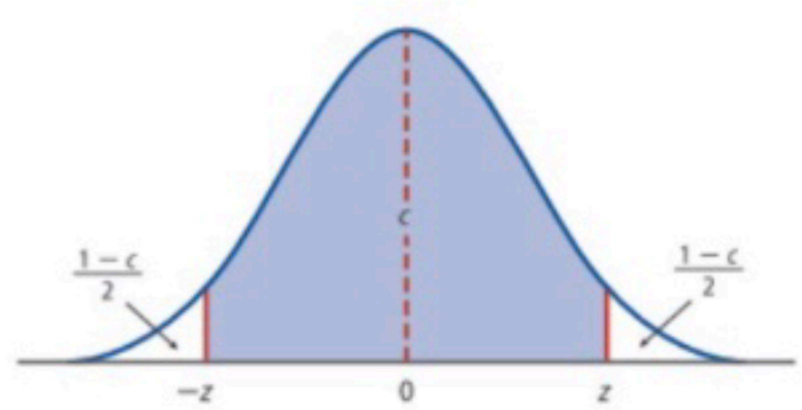
1 التوزيع الطبيعي

التوزيع الطبيعي في **الإحصاء الاستقرائي**، تُحلّل عينةٌ من البيانات وتستخلص استنتاجاتٌ عن المجتمع الإحصائي بأكمله. ويستخدم هذا الإجراء لأنه من الصعوبة بمكانٍ الحصول على معلوماتٍ من كل عضوٍ من أعضاء المجتمع الإحصائي. ويدعى المقياس الذي يصف خاصيةً في المجتمع الإحصائي، كالمتوسط أو الانحراف المعياري، **بالمعلمة**. ويمكن استخدام الكثير من المعلّمات لتحليل البيانات، ولكننا في هذا الدرس سنركّز على الوسط.

متوسط العمر المساوي 20.4 عامًا هو مثال عن **تقدير نقطة**، وهو تقديرٌ لقيمةٍ واحدةٍ لمعلمةٍ واحدةٍ مجهولةٍ في المجتمع الإحصائي. ونظرًا إلى خطأ أخذ العينات والحجم المحدود نسبيًا لأخذ العيّنات، فإن من الأرجح ألّا يطابق تقدير النقطة هذا وسط المجتمع الإحصائي. ولهذا السبب، استخدم المديرون التنفيذيون **تقدير الفترة** $18.1 < a < 22.7$. وتقدير الفترة هو مدىً من القيم المستخدمة لتقدير معلمةٍ مجهولةٍ في المجتمع الإحصائي. ولإجراء تقدير الفترة، يستخدم تقدير نقطةٍ بمثابة مركزٍ للفترة، ويضاف هامش خطأ إلى تقدير النقطة أو يطرح منه. وفي هذه الدراسة، جعل التنفيذيون هامش الخطأ يساوي 2.3 سنة.

قبل إعداد تقدير الفترة، فمن المفيد معرفة مقدار الموثوقية الذي ترغب به للتقدير بالضبط. وتعرف الاحتمال في أن يتضمن تقدير الفترة معلمة المجتمع الإحصائي الفعلية المعروفة باسم **مستوى الثقة**، ويرمز له بالحرف c. يمكننا توضيح مستوى الثقة باستخدام التوزيع الطبيعي إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي σ معلومًا وكان المجتمع الإحصائي موزعًا توزيعًا طبيعيًا أو إذا كان $n \geq 30$. تذكّر أن نظرية النهاية المركزية تنص على أنه عندما $n \geq 30$، فإن توزيع أخذ العينات لمتوسطات العينة يشبه التوزيع الطبيعي.

تساوي فترة الثقة في التوزيع الطبيعي المساحة المحصورة تحت المنحنى المعياري الطبيعي بين $-z$ و z كما هو موضح. إذًا فإن المساحة المتبقية في الذيلين المتبقيين هي $\frac{1}{2}(1-c)$ لكل ذيل.



افترض أن تؤدي تجربةً تريد أن تحقق فيها مستوى ثقةٍ نسبته 95%. عندما $c = 95\%$، فإن نسبة 2.5% من المساحة تقع إلى يسار $-z$ وتقع نسبة 2.5% إلى يمين z. يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لتجد أن القيمة المماثلة لــ $-z$ تساوي -1.96 وأن قيمة z تساوي 1.96. وبحساب قيم z والانحراف المعياري لمتوسطات العينة $\sigma_{\bar{x}}$، فيمكن تحديد **أقصى خطأ للتقدير** E، وهو الفرق الأقصى بين نقطة التقدير وبين قيمة المعلّم.

المفردات الجديدة

الإحصاء الاستقرائي
inferential statistics

مَعلَمة parameter

تقدير نقطة
point estimate

تقدير الفترة
interval estimate

مستوى الثقة
confidence level

أقصى خطأ للتقدير
maximum error of estimate

قيم حرجة
critical values

فترة الثقة
confidence interval

التوزيع t t-distribution

درجات الحرية
degrees of freedom

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 10-5 تحليل أوساط العينات وأثر نظرية النهاية المركزية في توزيع أخذ العينات.

الدرس 10-5 استخدام التوزيعات الطبيعية لإيجاد فترات ثقة الوسط. استخدام توزيعات t لإيجاد فواصل ثقة الوسط.

بعد الدرس 10-5 أداء اختبار الفرضية باستخدام إحصاءات الاختبار وقيم p.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- تدرّ الأفلام الكوميدية AED 25,580,901 في المتوسط. فهل من الممكن أن تدرّ بعض الأفلام الكوميدية AED 15,000,000؟ نعم؛ لا يشير المتوسط إلى انتشار البيانات.

نصيحة دراسية

أقصى خطأ للتقدير سيكون أقصى خطأ للتقدير E قيمةً موجبةً نظرًا لكونه يساوي الفرق الأقصى بين تقدير نقطةٍ والقيمة الحقيقية للمعلمة.

المفهوم الأساسي أقصى خطأ للتقدير

يعطى أقصى خطأ للتقدير E لمتوسط مجتمع إحصائي μ بالعلاقة

$$E = z \cdot \sigma_{\bar{x}} \text{ أو } z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

حيث z قيمة حرجة تقابل مستوى ثقة محدد، و $\sigma_{\bar{x}}$ أو $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ هو الانحراف المعياري لمتوسطات العينات. وعندما يكون $n \geq 30$, فيمكن تعويض الانحراف المعياري للعينة s بـــ σ.

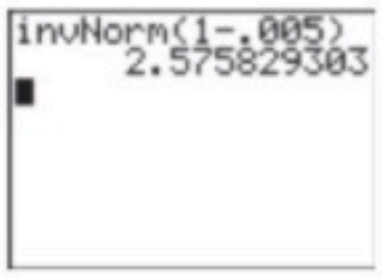
تعرف قيم z المقابلة لمستوى ثقة محدد **بالقيم الحرجة**. ونعرض أدناه مستويات الثقة الأكثر استخدامًا والقيم الحرجة المقابلة.

مستوى الثقة	قيمة z
90%	1.645
95%	1.960
99%	2.576

مثال 1 إيجاد أقصى خطأ للتقدير

الكتب الدراسية **أظهر استطلاعٌ جرى على 75 طالبًا جامعيًا اختيروا عشوائيًا أن الطلاب كانوا ينفقون في المتوسط مبلغ 230 AED على الكتب المدرسية في الفصل الواحد. فعلى فرض أن دراساتٍ سابقةً أشارت إلى أن الانحراف المعياري كان يساوي 55 AED. فاستخدم مستوى ثقةٍ يساوي 99% للبحث عن أقصى خطأ لتقدير مبلغ المال الذي أنفقه الطلاب على شراء الكتب.**

عند فترة الثقة 99%، تقع 0.5% من المساحة ضمن كل ذيل. ويمكنك أن تجد أن قيمة z تساوي 2.57633 باستخدام حاسبة التمثيل البياني أو الجدول أعلاه.



$E = z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ أقصى خطأ للتقدير

$= 2.576 \cdot \frac{55}{\sqrt{75}}$ $z = 2.576$ و $\sigma = 55$ و $n = 75$

≈ 16.36 بالتبسيط.

وهذا يعني أنه يمكنك الوثوق بنسبة 99% من أن وسط المجتمع الإحصائي للمال المنفق على الكتب سيكون أكثر من AED 16.36 من وسط العينة AED 230.

تمرين موجّه

1. **الموسيقى** أجرى القائمون على شركة توزيع موسيقيةٍ استطلاعًا شمل 125 شخصًا ينصّبون الموسيقى على نحوٍ دوري، وتوصلوا إلى أن المستمعين قد نصّبوا 740 تسجيل MP3 على حواسيبهم. فعلى فرض أن الانحراف المعياري يساوي 86 تسجيل MP3. فاستخدم مستوى ثقةٍ يساوي 94% للبحث عن أقصى خطأ لتقدير كمية تسجيلات MP3 في حاسوبِ شخصٍ نشطٍ في تنصيب الموسيقى. **14.5 أو 15 تسجيل MP3**

وحالما يجري تحديد مستوىً للثقة ويُحسب أقصى خطأ لتقدير الخطأ، فيمكن استخدامه لتحديد **فترة ثقة**. وفترة الثقة، والتي يرمز لها بـــ CI، هي تقديرٌ محدد لفترة بارامتر. ويمكن إيجاده عند إضافة أقصى خطأٍ للتقدير وطرحه من وسط العينة.

المفهوم الأساسي فترة ثقة الوسط

تعطى فترة الثقة CI لوسط مجتمعٍ إحصائي μ بالعلاقة

$$CI = \bar{x} \pm E \text{ أو } \bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

حيث إن $\bar{x}$ تساوي وسط العينة و E تساوي أقصى خطأ للتقدير.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

- هل يمكن أن يدرّ فلمٌ كوميديٌ AED 38,000,000؟ نعم؛ لا يشير المتوسط إلى انتشار البيانات.
- ما المعلومات الإضافية المفيدة عن توزيع إيرادات الأفلام الكوميدية؟ الانحراف المعياري

1 التوزيع الطبيعي

يوضح **المثال 1** كيفية إيجاد قياس الخطأ عند معرفة قيمةٍ حرجة. ويوضح **المثال 2** كيفية إيجاد فاصل ثقةٍ عند معرفة σ. ويوضح **المثال 3** كيفية إيجاد فاصل الثقة عندما يكون σ مجهولًا.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 **إطفاء الحرائق** حدّدت شركةٌ لصناعة الشاحنات بناءً على عينةٍ من 80 شاحنةً أن أحد أنواع سيارات الإطفاء يمكّن رجال الإطفاء من رشّ رذاذٍ من الماء لمسافة 40 مترًا في المتوسط. ويعتقد أن الانحراف المعياري لهذا المقياس يساوي 6 أمتار. استخدم فاصل ثقة عند المستوى 95% لإيجاد أقصى خطأ للتقدير للمسافة التي يمكن رش الماء إليها. 1.3 مترًا

مثال 2 إيجاد فترات الثقة عندما يكون σ معلومًا

الواجب المنزلي أظهر استطلاعٌ جرى على 20 طالب مدرسةٍ اختيروا عشوائيًا أن الطلاب كانوا يقضون زمنًا وسطيًا يساوي 35 دقيقةً في الليلة على حلّ الواجبات المنزلية. افترض أن التوزيع طبيعيٌ وانحرافه المعياري يساوي 12 دقيقة. أوجد فترة ثقةٍ عند المستوى 90% لوسط الطلاب جميعًا.

عوّض العدد 1.645، وهو قيمة z المقابلة لفترة الثقة عند 90% ضمن صيغة فترة الثقة.

$$CI = \bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ فترة الثقة الخاصة بالوسط

$$= 35 \pm 1.645 \cdot \frac{12}{\sqrt{20}}$$ $n = 20$ و $\sigma = 12$ و $z = 1.645$ و $x = 35$

$$\approx 35 \pm 4.41$$ بالتبسيط.

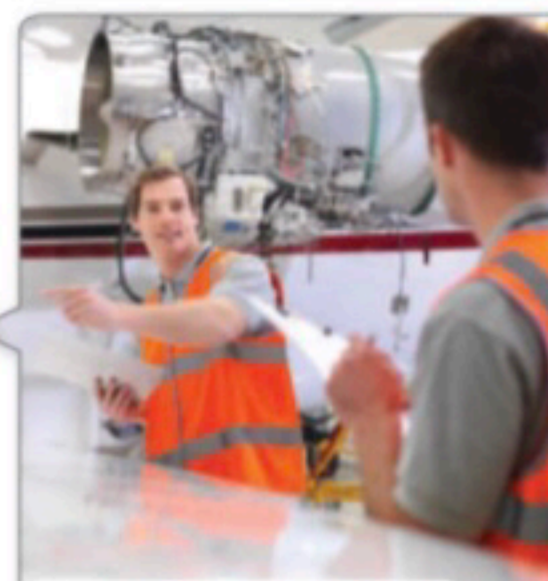
اجمع هامش الخطأ واطرحه.

الحدّ الأيسر	الحدّ الأيمن
$35 - 4.41 = 30.59$	$35 + 4.41 = 39.41$

يساوي فاصل الثقة عند مستوى 90% القيمة $39.41 > \mu > 30.59$. ولذلك، فعند مستوى ثقة يساوي 90%، يقع متوسط الوقت الذي يقضيه الطلاب في حل الواجبات بين 30.6 و 39.4 دقيقة.

تمرين موجّه

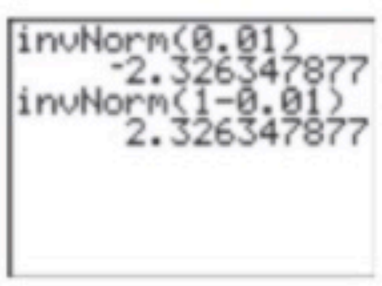
2. **التسوّق** قالت عينة من 65 زبونًا لأحد المجمّعات التجارية اختيروا عشوائيًا أنهم أنفقوا في المتوسط مبلغ AED 70 في ذلك اليوم. فعلى فرض أن الانحراف المعياري يساوي AED 12، أوجد فترة ثقةٍ عند المستوى 95% للمبلغ المتوسط الذي أنفقه زبونٌ واحدٌ في ذلك اليوم. $67.1 < \mu < 72.9$



في الكثير من حالات الحياة اليومية، يكون الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي مجهولًا. وحين يكون الحال كذلك، يمكن استخدام الانحراف المعياري s للعينة مكان الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي، وذلك طالما أن المتغير موزع عشوائيًا وأن $n \geq 30$.

مثال 3 من الحياة اليومية إيجاد فترة الثقة عندما تكون σ مجهولة

هندسة قوة الشد هي الإجهاد الذي تتحطم عنده المادة أو تتشوه. ترغب شركة في تقدير متوسط قوة شد مادة جديدة. فوزّعت عينة عشوائية من 40 وحدة توزيعًا طبيعيا بمتوسط قوة شد 2,552 كيلوجرامًا في السنتيمتر المربّع وانحراف معياري يساوي 203 كيلوجرامًا في السنتيمتر المربع. أوجد فترة الثقة عند المستوى 98% لمتوسط قوة الشد للمادة.



في فترة الثقة عند 98%، تقع 1% من المساحة في كل ذيل. يمكنك إيجاد القيمة المناظرة z لتصبح 2.33 باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

بما أن التوزيع طبيعي و $n \geq 30$، إذًا يمكن استخدام الانحراف المعياري للعينة لإيجاد فترة الثقة.

$$CI = \bar{x} \pm z \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$ فترة ثقة المتوسط

$$= 2{,}552 \pm 164 \cdot \frac{203}{\sqrt{40}}$$ $n = 40$ و $s = 203$ و $z = 164$ و $x = 2{,}552$

$$\approx 2{,}552 \pm 74$$ بالتبسيط.

لذلك، تساوي فترة الثقة عند مستوى الثقة 98% القيمة $2{,}626 > \mu > 2{,}478$.

تمرين موجّه

3. **هندسة** افترض أنه تمّ توزيع عينة عشوائية من 50 وحدة من نفس المادة توزيعًا طبيعيًا بوسط قوة شد 39.2 ksi وانحراف معياري 3.1 ksi. قدرّ الوسط لقوة الشد عند الثقة 99%. $38.1 < \mu < 40.3$

مهنة من الحياة اليومية

الهندسة يستخدم المهندسون العلم والرياضيات لإيجاد حلولٍ للمسائل التقنية. وعادةً ما يُشترط الحصول على بكالوريوس في الهندسة للقبول في هذا النوع من الأعمال.

تلميح تقني

حساب فترات الثقة يمكنك التحقق من إجابتك عبر استخدام حاسبةٍ للتمثيل البياني. اضغط STAT واختر ZInterval من القائمة TESTS. في خانة Input: اختر Stats ثم أدخل كلًا من القيم. ثم اختر Calculate.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

أمثلة إضافية

2 مشاهدة الدلافين تنظم شركةٌ رحلاتٍ لمشاهدة الدلافين مدتها أربع ساعات. وخلال 30 رحلة، كان الزمن المتوسط بدءًا من الانطلاق من الرصيف إلى لحظة رؤية الدلافين 125 دقيقة. فعلى فرض أن التوزيع عشوائيٌ عند انحرافٍ معياري يساوي 28 دقيقة، أوجد فترة ثقةٍ عند المستوى 95% للزمن الوسطي حتى تُرى الدلافين للمرة الأولى خلال جميع الرحلات. $115 < \mu < 135$ min

3 إعادة التدوير يعدّ مدير إحدى المدن تقريرًا عن جهود إعادة التدوير. وقد أوجد الوزن الكلي للمواد معادة التدوير خلال 30 يومًا مختارًا عشوائيًا من السنة. هذه الأوزان موزعةٌ توزيعًا عشوائيًا عند متوسط 22,500 كيلوجرام عند انحرافٍ معياري يساوي 11,100 كيلوجرام. أوجد فترة ثقةٍ عند المستوى 90% للوزن الوسطي للمواد معادة التدوير خلال يوم واحد. $19{,}166 < \mu < 25{,}834$ kg

التركيز على محتوى الرياضيات

فواصل الثقة تستخدم فواصل الثقة أكثر من تقديرات النقاط في الأبحاث، وذلك لأنها توفر معلوماتٍ عن متوسط البيانات وانتشارها. وفواصل الثقة تابعةٌ لمستوى الثقة المرغوب أو الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي σ أو الانحراف المعياري للعينة s إضافةً إلى حجم العينة n.

628 | الدرس 10-5 | فترات الثقة

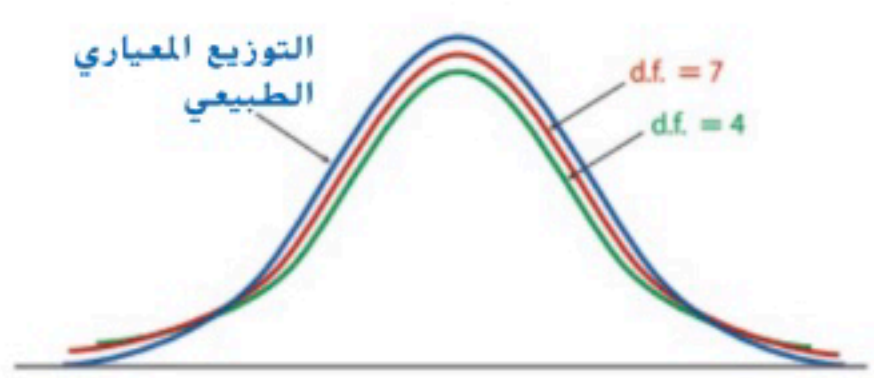
2 التوزيع-t

في الكثير من الحالات، لا يكون الانحراف المعياري لعينة معلومًا، إضافةً إلى أنه نظرًا لبعض القيود كالزمن والتكلفة، لا تكون أحجام العينات التي تتخطى 30 واقعية. وفي هذه الحالات، يمكن استخدام توزيعٍ آخر يدعى التوزيع t، وذلك طالما أن المتغير موزّعٌ توزيعًا طبيعيًا تقريبًا.

التوزيع t هو مجموعةٌ من المنحنيات التي تعتمد على معلّمةٍ معروفةٍ بدرجات *الحرّية*. وتساوي **درجات الحرّية (d.f.)** $n - 1$ و تمثّل عدد القيم التي تتباين بحريةٍ بعد تحديد إحصاء عيّنة.

على سبيل المثال، إذا كان $\bar{x} = 4$ في عينة من 10 قيم، وكانت 9 من القيم العشرة تتباين بحرية. حالما تُختار القيم الـ 9 الأولى، فيجب أن تكون القيمة العاشرة عددًا محددًا كي يكون $\bar{x} = \frac{40}{10}$. إذًا، فدرجات الحرية تساوي $10 - 1$ أو 9، ويقابل ذلك منحنى محددًا.

لاحظ في الشكل أدناه أنه بزيادة درجات الحرية، أو حين تقترب درجات الحرية من 30، فإن التوزيع t يقترب من التوزيع المعياري الطبيعي.



تتلخص خواص التوزيع t وفق ما يلي.

المفهوم الأساسي خصائص التوزيع t

- للتوزيع شكل جرسٍ متماثلٍ حول الوسط.
- يساوي الوسط والوسيط والمنوال 0، وجميعها تقع في مركز التوزيع.
- يلامس المنحنى المحور الأفقي x.
- الانحراف المعياري أكبر من 1.
- التوزيع هو مجموعة من المنحنيات المرتكزة على حجم العينة n.
- عند زيادة n، يقترب التوزيع من التوزيع المعياري الطبيعي.

كما التوزيع الطبيعي، فيمكن استخدام التوزيع t لإنشاء فترة ثقةٍ عبر استخدام قيمة t بدلًا من قيمة z لحساب أقصى خطأ للتقدير E. ويمكن إيجاد قيمة t من خلال

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$ أو $$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$$، حيث μ وسط المجتمع الإحصائي.

سوف تستخدم حاسبةً للتمثيل البياني لإيجاد t نظرًا إلى أن وسط العينة μ هو المعلّمة التي نحاول تقديرها. ويمكنك إيجاد فترة ثقةٍ عند استخدام التوزيع t عبر استخدام الصيغة الموضحة.

المفهوم الأساسي فترة الثقة باستخدام التوزيع t

تعطى فترة الثقة CI للتوزيع t بالعلاقة

$$CI = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},$$

حيث $\bar{x}$ وسط العينة و t قيمة حدّية، وذلك عند $n - 1$ درجة حرية، و s هو الانحراف المعياري للعينة و n هو حجم العينة.

نصيحة دراسية

التوزيعات غير الطبيعية
لا يمكنك استخدام توزيعٍ طبيعي أو توزيع t لإنشاء فترةٍ ثقةٍ إذا لم تكُون العينة موزعةً توزيعًا طبيعيًا أو شبه طبيعي.

نصيحة دراسية

التوزيعات عندما يكون $n \geq 30$، فمن المتعارف عليه استخدام التوزيع الطبيعي، ولكن، يمكن مع ذلك استخدام توزيعات t.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 التوزيع t

يوضح **المثال 4** كيفية إيجاد فترات الثقة باستخدام توزيع t. ويوضح **المثال 5** كيفية إيجاد حجم متوسطٍ للعينة عند إعطاء مقياسٍ أعظم للخطأ.

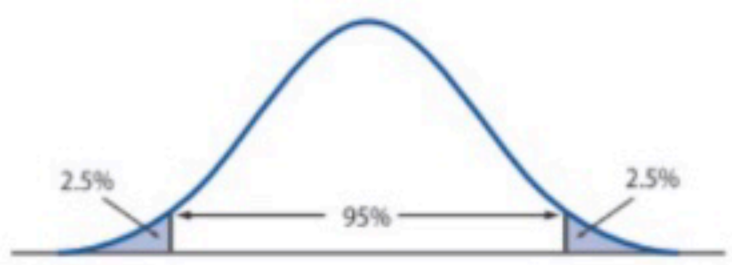
629

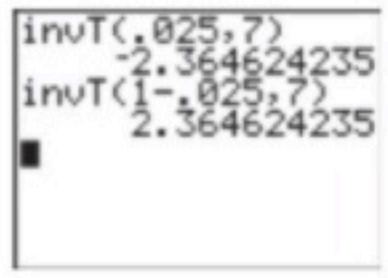
مثال 4 إيجاد فترات الثقة في التوزيع t

السعة قيست سعات ثمانية خزاناتٍ اختيرت عشوائيًا. كانت السعة الوسطية تساوي 143 لترًا وكان الانحراف المعياري 3.0. أوجد فترة الثقة عند مستوى الثقة 95% للسعة الوسطة للخزان. وافترض أن المتغير يتوزع توزيعًا طبيعيًا.

إن الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي معلوم، و $n < 30$. إذًا فيجب استخدام التوزيع t. بما أن $n = 8$، فثمّة هناك $8 - 1$ أو 7 درجات حرية. يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد قيمة t المقابلة.

من القيمة DISTR. اختر InvT(*a*, df). تمثل قيمة *a* مساحة ذيلٍ واحدٍ للتوزيع و تمثل df درجات الحرية. إذًا، عند فترة ثقة 95%، فإن المساحة في أيٍ من ذيلي التوزيع -t تساوي نصف 5% أو 0.025.





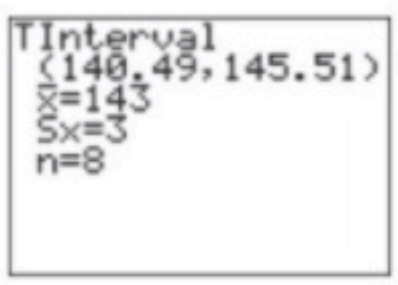
$CI = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ فترة الثقة باستخدام التوزيع t

$= 143 \pm 2.365 \cdot \frac{3}{\sqrt{8}}$ $\bar{x} = 143$ و $t = 2.365$ و $s = 3$ و $n = 8$

$= 143 \pm 2.5$ بالتبسيط.

ولذلك، تساوي فترة الثقة عند المستوى 95% القيمة $140.5 < \mu < 145.5$.

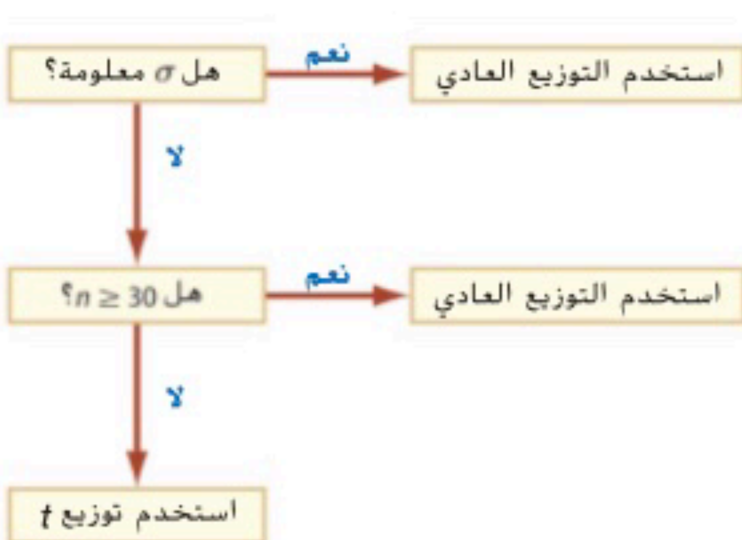
التحقق يمكنك التحقق من إجابتك استخدام حاسبة التمثيل البياني. من القائمة STAT، اختر TESTS وTInterval. ومن القائمة TInterval، اختر Stats وأدخل كلًا من القيم. ثم اختر Calculate.



تمرين موجّه

4. **المطاعم** قيس وسط زمن انتظار عشرة زبائن اختيروا عشوائيًا في مطعمٍ 25 دقيقة عند انحرافٍ معياري يساوي 4 دقائق. أوجد فترة ثقة زمن الانتظار الوسطي لجميع الزبائن عند مستوى الثقة 99%. على فرض أن المتغير موزّعٌ توزيعًا طبيعيًا. **$20.9 < \mu < 29.1$**

قد يكون من الصعب تحديد ما إن كان ينبغي استخدام توزيع طبيعي أو توزيع t في مسألة معطاة. ويلخص المخطط المبيّن أدناه متى ينبغي استخدام كل منهما، مع افتراض أن المجتمع الإحصائي موزّعٌ طبيعيًا أو قريبٌ من التوزيع الطبيعي.



نصيحة دراسية

استخدام توزيع t يجري إتمام معظم استنتاجات الحياة اليومية الخاصة بوسط المجتمع الإحصائي باستخدام القيمة t لأنه من النادر أن يكون σ معلومًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال إضافي

4 **مسابقة الحيوانات الأليفة** يودّ أحد مقتني الحيوانات الأليفة إشراك قطه في إحدى المسابقات. حيث على القط جلب طائرٍ اصطناعي يرمى للمسافة نفسها 25 مرة. يُحسب صاحب القطّ الزمن الذي يستغرقه ويجد أن البيانات موزعةٌ توزيعًا طبيعيًا عند زمنٍ وسطي لالتقاط الطائر مقداره 18.4 ثانيةً وبانحرافٍ معياري يساوي 4.7 ثوان. أوجد فترة الثقة عند المستوى 90% للزمن الوسطي. **$16.8 < \mu < 20.0$ ثانية**

إرشاد للمعلمين الجدد

مستويات الثقة يحدث ارتفاع مستوى الثقة على حساب توسّع فترة الثقة. استكشف العلاقة بين مستوى الثقة وفترات الثقة عبر إدراج أربعة أعمدةٍ على اللوحة: أحدها لمستوى الثقة، وآخر لحجم العينة، وثالثٌ للانحراف المعياري، ورابعٌ لفترة الثقة. أدرج النسب 90% و 95% و 99% في عمود فترة الثقة. وأدرج حجم العينة 40 ثلاث مرات في عمود حجم العينة. أدرج الانحراف المعياري 5 مراتٍ في عمود الانحراف المعياري. واطلب من الطلاب مساعدتك في إتمام العمود الأخير. وساعد الطلاب على رؤية النمط. فكلّما ارتفع مستوى الثقة، توسّعت فترة الثقة.

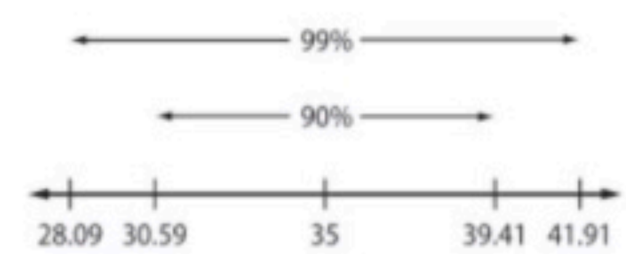
630 | الدرس 10-5 | فترات الثقة

مثال إضافي

5 التجهيزات الطبّية يشترط أحد صنّاع التجهيزات الطبية ألا يتعدّى خطأ القياس فيها ±0.01 ميليمترًا عند مستوى ثقة 99%. فإذا كان $\sigma = 0.05$ ميليمترًا، فكم عدد القياسات المطلوبة؟
166 قياسًا على الأقل

في جميع التجارب الإحصائية، يحدّد المستخدم مستوى الثقة، والذي يؤثر مباشرةً في فترة الثقة. وعند تثبيت جميع المتغيرات الأخرى، توسّع زيادة مستوى الثقة فترة الثقة. ويحدّ توسيع فترة الثقة من دقة التقدير. فعلى سبيل المثال، لاحظ فترة الثقة في المثال 2 عند رفع مستوى الثقة إلى 99%.

	90% مستوى الثقة	99% مستوى الثقة
قيمة z	1.645	2.576
E	4.41	6.91
CI	$30.59 < \mu < 39.41$	$28.09 < \mu < 41.91$



على وجه العموم، يُحبّذ أن يكون مستوى الثقة عاليًا وأن تكون فترة الثقة صغيرة. ويمكن تحقيق ذلك عبر زيادة حجم العينة n. ويمكنك إيجاد الحجم الأصغر للعينة والمطلوب لأقصى خطأٍ محددٍ للتقدير عبر البدء، بصيغة إيجاد E وحلّها لإيجاد n.

$E = z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	أقصى خطأ للتقدير
$\sqrt{n} \cdot E = z \cdot \sigma$	بضرب كل طرف بـ $\sqrt{n}$.
$\sqrt{n} = \frac{z \cdot \sigma}{E}$	بقسمة كل طرف على E.
$n = \left(\frac{z\sigma}{E}\right)^2$	بتربيع كل طرف.

المفهوم الأساسي صيغة الحجم الأدنى لعينة

يعطى حجم العينة الأدنى المطلوب عند إيجاد فترة الثقة للوسط بالعلاقة $n = \left(\frac{z\sigma}{E}\right)^2$، وفيها n هو حجم العينة و E هو أقصى خطأ للتقدير.

مثال 5 إيجاد الحجم الأدنى لعينة

تطوير المنتجات هب أنك تختبر موثوقية ميزان حرارة. وطلب منك مديرك إجراءاختبارٍ دقة نتائجه تساوي ±0.05 درجة وعند مستوى ثقة 95%. فإذا كان $\sigma = 0.8$، فكم العدد المطلوب من القياسات؟

$n = \left(\frac{z\sigma}{E}\right)^2$	صيغة الحجم الأدنى للعينة
$= \left(\frac{1.96(0.8)}{0.05}\right)^2$	$z = 1.96$ و $\sigma = 0.8$ و $E = 0.05$
$= 983.45$	بالتبسيط.

تُطلب على الأقل 984 مشاهدة ليكون هامش الخطأ ±0.05 عند مستوى ثقة 95%.

نصيحة دراسية
التقريب ليس من الممكن دائمًا أن يكون حجم العينة كسرًا. ولذلك، عند إيجاد حجم العينة الأصغر، قرّب الإجابات دائمًا في صورةِ كسرٍ أو كسرٍ عشريٍ إلى العدد الكلي التالي الأكبر.

تمرين موجّه

5. **التسويق** يريد القائمون على متجرٍ للسيارات تقدير العمر المتوسط لزبائنهم قبل إعداد إعلانٍ تلفزيوني. ويريدون أن يكونوا واثقين بنسبة 90% من أن العمر الوسطي يتباين بمقدار ±2 بالنسبة لوسط العينة. إذا كان الانحراف المعياري عن دراسةٍ سابقةٍ يساوي 12 عامًا، فكم ينبغي أن يكون حجم العينة؟ 98 زبونًا

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون بطريقة التواصل اطلب من الطلاب العمل في مجموعاتٍ ثنائيةٍ معًا لاستكشاف العلاقة بين حجم العينة والخطأ المعياري للوسط ومستوى الثقة. أعطِ كل مجموعةٍ من طالبين وسط عينةٍ وانحرافها المعياري. واطلب من طالبٍ اختيار فاصل ثقة. بينما على الطالب الآخر اختيار حجم عينةٍ تعطي فترةٍ معقولةٍ حول الوسط تعطي فترة الثقة المرغوبة. وكرّر العملية مع تبديل أدوار الطلاب.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-14 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع في التمارين 7-12. إذا اختار الطلاب توزيعًا خاطئًا، فذكرهم باستخدام توزيع t عندما يكون حجم العينة n أقل من 30 وأن يستخدموا التوزيع الطبيعي حين يساوي حجم العينة 30 أو أكثر.

ملاحظات لحل التمرين

التوزيع t في التمرين 15، ذكّر الطلاب بأن ينتبهوا إلى التوزيع. ولاستخدام التوزيع t، فينبغي أن يبقى المتغير يظهر على شكلٍ جرسٍ وأن يكون متماثلًا حول الوسط.

تغيير المعلّمات في التمارين 25-28. قد يحتاج الطلاب إلى تحديد أثر تغيير معلّماتٍ مختلفة. فاقترح أن يقارنوا حسابين يختلفان فقط في المتغير الذي ينظرون إليه. على سبيل المثال، في التمرين 25 كلّف الطلاب بحساب فترتي ثقة، إحداهما حجم عينتها 20 والأخرى حجم عينتها 40. واطلب منهم التفكير في أثر زيادة حجم العينة في فترة الثقة.

إجابات إضافية

7. توزيع t؛ $125.3 < \mu < 130.7$
8. توزيع طبيعي؛ $63.2 < \mu < 66.8$
9. توزيع t؛ $38.7 < \mu < 40.1$
10. توزيع طبيعي؛ $122.2 < \mu < 122.4$
11. توزيع طبيعي؛ $27 < \mu < 29.6$
12. توزيع طبيعي؛ $2485.3 < \mu < 2492.7$

التمارين

1. **النقل** أبدت عينة من 85 شخصًا من سكان أبو ظبي أن زمن الوصول المتوسط إلى العمل يساوي 36.5 دقيقة. افترض أن الانحراف المعياري في الدراسات السابقة كان 11.3 دقيقة. ابحث عن أقصى خطأ للتقدير عند مستوى ثقة 99%. ثم أنشئ فترة ثقةٍ لزمن الوصول المتوسط إلى العمل لجميع سكان أبو ظبي. (الأمثلة 1-3) **3.2 min; $33.3 < \mu < 39.7$**

2. **البرتقال** يختار مالك أحد بساتين البرتقال عشوائيًا 50 برتقالةً من أحد الأصناف ويزنها ليجد أن الوزن الوسطي للبرتقالة يساوي 208.6 جرامات وأن الانحراف المعياري يساوي 22.5 جرامًا. ابحث عن أقصى خطأً للتقدير عند مستوى ثقة 98%. ثم قدّر الوزن الوسطي للبرتقالات باستخدام فترة ثقة. (الأمثلة 1-3) **7.3 g; $201.3 < \mu < 215.9$**

3. **درجة الحرارة** يساوي متوسط درجة حرارة أجسام 15 دبًا قطبيًا اختيرت عشوائيًا 36.4°C. افترض أن الانحراف المعياري عن دراسةٍ حديثةٍ كان 1.6°C. ابحث عن أقصى خطأ للتقدير عند مستوى ثقى 95%. قمّ قدّر درجة الحرارة الوسطىلجميع الدببة القطبية في المنطقة باستخدامفترة ثقة. (الأمثلة 1-3) **0.8°C, $35.6 < \mu < 37.2$**

4. **سرعة الكتابة** كانت سرعة الكتابة المتوسطة على لوحة المفاتيح لدى عينةٍ عشوائيةٍ من 20 طالبًا في مادة الحاسوب 40 كلمة في الدقيقة (WPM) عند انحرافٍ معياريٍ يساوي 8 WPM. قدّر سرعة الكتابة الوسطية على لوحة المفاتيح لجميع الطلاب في هذه المادة باستخدام مستوى ثقة 90%. (مثال 4) **$36.9 < \mu < 43.1$**

5. **الرسائل النصية** في عينةٍ عشوائيةٍ من 25 طالبًا يحملون هواتف خلوية، وجد أن الطلاب يستقبلون أو يرسلون 68 رسالةً نصيةً في اليوم وبانحرافٍ معياريٍ يساوي 13 رسالة. قدّر العدد الوسطي من الرسائل النصّية لجميع الطلاب الذين يحملون هواتف خلوية باستخدام مستوى ثقة يساوي 96%. (المثال 4) **$62.4 < \mu < 73.6$**

6. **الزيارات الجامعية** تبيّن أن عينةً عشوائيةً من 20 طالبًا مستجدًا قد زاروا في المتوسط 6.4 جامعةً عند انحرافٍ معياري 1.9. قدّر العدد الوسطي من الزيارات الجامعية التي أدّاها جميع الطلاب المستجدين باستخدام مستوى ثقة 95%. (المثال 4) **$5.5 < \mu < 7.3$**

حدد ما إذا كان يجب استخدام التوزيع الطبيعي أو توزيع t في كل سؤال. ثم أوجد كل فترة من فترات الثقة باستخدام المعلومات الموضحة التالية. (الأمثلة 2-4) **7–12. انظر الهامش.**

7. $90\%; \bar{x} = 128, s = 7, n = 20$
8. $95\%; \bar{x} = 65, s = 15.9, n = 300$
9. $95\%; \bar{x} = 39.4, s = 1.2, n = 15$
10. $98\%; \bar{x} = 122.3, \sigma = 2.2, n = 2000$
11. $99\%; \bar{x} = 28.3, \sigma = 4.5, n = 75$
12. $99\%; \bar{x} = 2489, \sigma = 18.3, n = 160$

13. **القهوة** يريد مالك مقهىً تحديد السعر الوسطي لفنجانٍ صغيرٍ من القهوةفي مدينته. فكم ينبغي أن يكون حجم العينة إذا أراد أن يتحرّى الدقة ضمن المجال 0.015 AED ومستوى ثقة 90%؟ أظهرت دراسةٌ سابقةٌ أن الانحراف المعياري للسعر كان 0.10 AED. (المثال 5) **121**

14. **الاختبارات** يريد معلّمٌ تقدير مقدار الزمن المتوسط اللازم كي يتمّ الطلاب اختبارًا من 25 سؤالًا. فكم يتعيّن أن يساوي حجم العينة إذا أراد المعلّم أن يحقق مستوى 99% من الدقة خلال 8 دقائق؟ وقد أظهرت دراسة سابقة أن الانحراف المعياري للزمن كان 11.3 دقيقة. (المثال 5) **14**

15. **المدرسة** جرى استبيانٌ على 26 طالبًا مختارًا عشوائيًا. حيث سجّل فيه كل طالبٍ زمن مشاركته في أنشطة ما بعد المدرسة خلال أسبوعٍ محدد. افترض أن الزمن موزع توزيعًا طبيعيًا. B

الزمن (بالساعة)						
11	7	2	7	6	12	9
10	8	6	4	8	8	7
4	7	8	8	6	5	
9	9	10	15	12	13	

a. حدّد نوع التوزيع الذي يمكن استخدامهلتقدير وسط العينة. واشرح استنتاجك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 10.**

b. احسب الوسط والانحراف المعياري مقرّبين إلى أقرب جزءٍ من عشرة. **8.1؛ 3.0**

c. أنشئ فترة ثقة عند 95% للزمن الوسطي الذي يشارك به الطلاب في أنشطة ما بعد المدرسة. **$6.9 < \mu < 9.3$**

d. فسّر فترة الثقة في سياق المسألة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 10.**

16. **الأجور** أظهرت دراسة سابقة أن الانحراف المعياري للأجور البدائية لدى طلاب المدرسة الثانوية العاملين كان يساوي 0.50 AED. وجرى استبيانٌ على 20 طالبًا عاماً من المرحلة الثانوية وسُجّلت أجورهم البدائية. افترض أن الأجور موزعة توزيعًا طبيعيًا.

الأجور (AED)				
6.75	6.50	6.50	5.50	6.75
5.75	6.50	7.50	7.25	6.00
6.50	7.25	6.75	6.00	5.75
6.00	6.50	6.75	7.00	6.25

a. حدّد نوع التوزيع الذي يمكن استخدامه لتقدير وسط العينة. واشرح استنتاجك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 10.**

b. احسب الوسط مقربًا إلى أقرب جزءٍ من مئة. **6.49**

c. أنشئ فترة ثقة عند 90% للأجر البدائي المتوسط لطالبٍ عاملٍ في المرحلة الثانوية. **$6.31 < \mu < 6.67$**

d. فسّر فترة الثقة في سياق المسألة.

انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

632 | الدرس 10-5 | فترات الثقة

إجابات إضافية

.18a الأنثى: $\bar{x} = 116.9, s = 7.5$
الذكر: $\bar{x} = 116.9, s = 15.9$

.18b الأنثى: $111.4 < \mu < 122.4$؛
الذكر: $105.2 < \mu < 128.6$

.18c الإجابة النموذجية: توفر فترة الثقة الخاصة بالإناث تقديرًا أدقّ من فترة الثقة الخاصة بالذكور.

.17 **العمر** يريد يوسف تقدير العمل المتوسط للمعلمين عند مستوى ثقة 95%. وهو يعلم أن الانحراف المعياري من الدراسات السابقة يساوي 9 سنوات. فإذا كان في مدرسة يوسف 50 معلمًا فقط كي يجري الاستبيان عليهم، فما مدى الدقة التي يمكن أن يجري وفقه تقديره؟ **2.5 سنة**

.18 **التلفاز** يريد ناصر وأيوب مقارنة الزمن الوسطي الذي يتابع خلاله الصبية والفتيات التلفاز بالدقائق في اليوم الواحد. وقد أجريا استبيانًا على 16 طالبةً أنثى و 16 طالبًا ذكرًا اختيروا عشوائيًا وسجّلت أزمنة المشاهدة خاصّتهم. **a–c. انظر الهامش.**

أنثى	
115	120
125	130
120	120
125	105
110	115
105	110
120	125
110	115

ذكر	
90	140
120	110
105	115
125	120
105	130
150	125
120	110
115	90

a. احسب الوسط والانحراف المعياري لكل مجموعة من البيانات.

b. أنشئ فترتي ثقة عند المستوى 99% للزمن الوسطي الذي يُقضى في مشاهدة التلفاز من قبل الصبية والفتيات.

c. صِغ عبارة تقارن بين تأثير الفترتين.

.19 **المطعم** يريد صاحب مطعم أن يساوي الزمن الوسطي لتحضير الطلب الواحد 20 دقيقة. وللمساعدة في ضمان تحقيق هذا الهدف، قاس صاحب المطعم الزمن اللازم لتحضير 24 وجبة اختيرت عشوائيًا وتوصل إلى أن زمن التحضير المتوسط كان 22 دقيقة عند انحراف معياري مقداره 4 دقائق. وسيكون صاحب المطعم راضيًا إذا وقع زمن التحضير ضمن فترة الثقة البالغة 99% والتي يعمل عندها المطعم في الوقت الحالي. فهل صاحب المطعم راضٍ؟ اشرح استنتاجك.
انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

.20 **الدخل** ينوي صاحب عمل خليفة نقله إلى مدينة أخرى. وقد خيّره بين ثلاثة مدن. وقبل أن يتخذ خليفة القرار، أراد أن يقارن قيم الدخل الوسطية لزملائه في المدن الأخرى. وقد استعان بدائرة الموارد البشرية لتدوين المعلومات التالية. وكان حجم العينة في كل مدينة 35 موظفًا. **a–b. انظر ملحق إجابات الوحدة 10.**

المدينة	$\bar{x}$ (AED)	σ (AED)
1	46,700	6300
2	47,800	3000
3	45,000	8000

a أنشئ فترة ثقة عند 95% للدخل الوسطي للموظفين كل يوم.

b. إذا كان الراتب هو الجانب الوحيد الذي وضعه خليفة في الحسبان، فما المدينة التي سيختار النقل إليها؟ اشرح استنتاجك.

.21 **الهواتف الخلوية** تريد شركةٌ لتصنيع الهواتف الخلوية أن تحقق بطارياتها طويلة العمر زمن تحدث مدّته 62 ساعة، وهو زمن انشغال الهاتف بصورةٍ متواصلةٍ في إرسال رسائل أو التحدّث. ولضمان جودة البطاريات، تختار الشركة عينةً من 14 هاتف بصورةٍ عشوائية وتسجّل زمن التحدّث بالساعة.

زمن التحدث (ساعة)						
61.0	63.1	63.3	59.1	63.4	61.5	60.0
62.6	62.3	60.3	62.9	61.3	62.4	63.6

ستشعر الشركة بالرضا إذا وقع زمن التحدّث الوسطي ضمن فترة ثقة عند 99%، وهي الفترة التي تعمل عندها البطاريات حاليًا. فهل الشركة راضية؟ اشرح استنتاجك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 10.**

.22 **القراءة** تجري رنا دراسةً على الزمن المتوسط الذي يقضيه أشخاص تتراوح أعمارهم بين 17 و 25 سنةً كل يوم في القراءة. وقد استطلعت آراء 20 شخصًا اختيروا عشوائيًا. ولديها في الوقت الحالي فترة ثقةٍ عند أقصى خطأ للتقدير مقداره 8 دقائق. فكم يتعيّن أن يكون حجم عينة رنا إذا ما أرادت الحدّ من الخطإ إلى 5 دقائق؟ وإلى 2.5 دقيقة؟ **80 شخص؛ 320 شخص**

مسائل مهارات التفكير العليا — استخدام مهارات التفكير العليا

.23 **تحدٍ** أعطت دراسة عشوائية مستوى ثقة $40.872 < \mu < 49.128$. فإذا كان الانحراف المعياري للعينة 10 وكانت قيمة t المستخدمة تساوي 2.064، فأوجد درجات الحرية للتوزيع t. **24**

.24 **الكتابة في الرياضيات** تسعى معظم الدراسات إلى تحقيق نتائج ذات مستويات عالية من الثقة. فاشرح السبب في أن مستوى الثقة 99% لا يستخدم في جميع الدراسات. **انظر ملحق إجابات الوحدة 10.**

التبرير حدد ما إذا كانت كل عبارة من العبارات التالية صحيحة أم خطأ. اشرح إجابتك.

.25 توسّع زيادة حجم العينة فترة الثقة. **خطأ**

.26 توسّع زيادة مستوى الثقة فترة الثقة. **صواب**

.27 توسّع زيادة الانحراف المعياري فترة الثقة. **صواب**

.28 توسّع الوسط فترة الثقة. **خطأ**

25-28. انظر ملحق إجابات الوحدة 10 للاطلاع على البراهين والاستنتاجات.

.29 **الاستنتاج** إذا أراد شخص يجري تجربةً أن يحدّ من أقصى خطأ للتقدير بمقدار $\frac{1}{x}$، فما الذي ينبغي عليه عمله لحجم العينة؟
سيكون على الشخص ضرب حجم العينة بـ x^2.

.30 **تحدٍ** أعطت دراسةٌ أجريت على عينة عشوائية حجمه $n = 64$ فترة ثقة $3.19 < \mu < 4.01$. فإذا شُكّلت فترة الثقة باستخدام مستوى الثقة 90%، أوجد الانحراف المعياري للعينة. **2**

.31 **الكتابة في الرياضيات** اشرح لم تعدّ المعلمات مطلوبةً في الإحصاءات. **انظر ملحق إجابات الوحدة 10.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

633

مراجعة شاملة

32. **التعليم** أشار استطلاعٌ جرى مؤخرًا إلى أن 35% من الإماراتيين البالغين حازوا على درجة البكالوريوس. فما احتمال أن تضم عينةٌ عشوائيةٌ من 50 شخصًا ما بين 12 و 16 شخصًا قد نال درجة بكالوريوس؟ **20.8%**

33. **بطاريات السيارات** العمر النافع لنوعٍ محددٍ من بطاريات السيارات موزّعٌ عشوائيًا عند وسطٍ قيمته 1000,000 كيلومترًا وانحرافٍ معياريٍ قيمته 10,000 كيلومترًا. تنتج الشركة 20,000 بطاريةً في الشهر. فما الاحتمال في أنك إذا اخترت بطارية سيارةٍ عشوائيًا. فستبقى لمسافة 80,000 و 110,000 كيلومتر؟ **81.86%**

استخدم المجموع الجزئي الخامس للمتسلسلة المثلثية لـ cosine أو sine لتقريب كل قيمة إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

34. $\sin \frac{\pi}{7}$ **0.434**

35. $\cos \frac{2\pi}{11}$ **0.841**

36. $\sin \frac{4\pi}{17}$ **0.674**

حدد الاختلاف المركزي ونوع القطع المخروطي ومعادلة الدليل المعطاة من خلال كل معادلة قطبية.

37. $r = \frac{8}{\cos \theta + 5}$ **$e = 0.2$؛ قطع ناقص؛ $x = 8$**

38. $r = \frac{4}{7 \cos \theta + 4}$ **$e = \frac{7}{4}$؛ قطع زائد؛ $x = \frac{4}{7}$**

39. $r = \frac{2}{\sin \theta + 3}$ **$e = \frac{1}{3}$؛ قطع ناقص؛ $y = 2$**

استخدم ناتج الضرب النقطي لإيجاد مقدار المتجه المذكور.

40. $\mathbf{u} = \langle -8, 0 \rangle$ **8**

41. $\mathbf{v} = \langle 7, 2 \rangle$ **$\sqrt{53} \approx 7.28$**

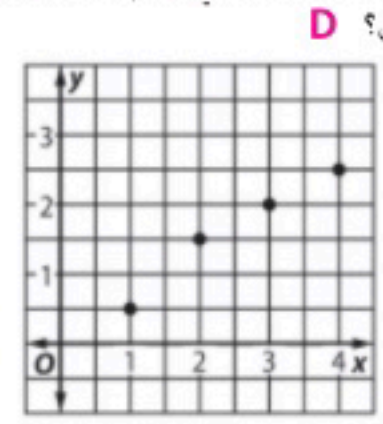
42. $\mathbf{u} = \langle 4, 8 \rangle$ **$4\sqrt{5} \approx 8.94$**

43. **ألعاب الملاهي** في إحدى مدن الملاهي، هناك رسمٌ إضافيٌ على الشخص الواحد عند ركوب الأرجوحة الشاهقة والأرجوحة الخطرة لفئة شخصٍ واحدٍ واثنين وثلاثة. يعرض الجدول عدد الأشخاص الذين سدّدوا رسم ركوب الأراجيح خلال الساعات الأربعة الأولى لافتتاح مدينة الملاهي. اكتب نظام معادلاتٍ لتحديد كلفة ركوب كل أرجوحةٍ للشخص الواحد. واشرح حلّك. **انظر الهامش**

ساعة	الأرجوحة الشاهقة	الأرجوحة الخطرة			المبلغ الإجمالي المدفوع (AED)
		فئة شخص واحد	فئة شخصين	فئة 3 أشخاص	
1	8	5	10	3	575
2	10	8	2	6	574
3	16	4	8	3	661
4	13	11	6	0	722

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

44. **SAT/ACT** ما الخط الذي يلائم البيانات في التمثيل البياني على النحو الأفضل؟ **D**



A $y = x$

B $y = -0.5x + 4$

C $y = -0.5x - 4$

D $y = 0.5 + 0.5x$

E $y = 0.75x$

45. **مراجعة** اختير أشخاصٌ عشوائيًا وسُئلوا عند عدد مرات خروجهم لتناول الطعام خارج المنزل في الأسبوع. فإذا كان $\sigma = 0.6$، وكان للنتيجة مستوى ثقة 95%، وكانت الدقة ضمن المجال ± 0.05. فكم عدد الأشخاص الذين طرح عليهم السؤال؟ **J**

F 6 **G** 23 **H** 144 **J** 554

46. في عيّنةٍ من 28 راشدًا تلقّوا تعليمًا جامعيًا وأعمارهم بين 25 و 35 عامًا، كان الرصيد المدين المتوسط للقرض الطلابي يساوي AED 5566 عند انحرافٍ معياريٍ يساوي AED 1831. قدّر الرصيد المدين الوسطي للقرض الطلابيّ لجميع الراشدين الذين تلقوا تعليمًا جامعيًا وأعمارهم بين 25 و 35 سنةً باستخدام فترة ثقة 90%. **D**

A $4188 < \mu < 6944$

B $4319 < \mu < 6813$

C $4507 < \mu < 6625$

D $4997 < \mu < 6135$

47. **المراجعة** لدى مدرسةٍ مولدان احتياطيان مستقلان احتمالا نجاح تشغيلهما 0.9 و 0.95 على الترتيب في حال انقطاع الكهرباء. فما الاحتمال في أن يعمل أحد المولّدين على الأقل عند حدوث انقطاعٍ في الكهرباء؟ **J**

F 0.855 **H** 0.95

G 0.89 **J** 0.995

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب اطلب من الطلاب كتابة أصغر حجم عينةٍ للحصول على نتائج دقيقةٍ بمقدار ± 0.03 عند مستوى ثقة 95% حين يكون $\sigma = 0.09$. **35**

إجابة إضافية

43. $8w + 5x + 10y + 3z = 575$
$10w + 8x + 2y + 6z = 574$
$16w + 4x + 8y + 3z = 661$
$13w + 11x + 6y = 722$
(20, 30, 22, 15)؛ أرجوحة الشاهقة: الكلفة 20 AED/الشخص؛ الأرجوحة الخطرة، الشخص الواحد: الكلفة 30 AED/الشخص؛ الأرجوحة الخطرة، شخصان: الكلفة 22 AED/الشخص؛ الأرجوحة الخطرة، 3 أشخاص: الكلفة 15 AED/الشخص

التدريس المتمايز BL

التوسّع اطلب من الطلاب أن يعمل كلٌّ بمفرده على إيجاد أمثلةٍ عديدةٍ عن دراساتٍ تقدّم فترات ثقة. واطلب من الطلاب في كل دراسةٍ تحديد القيم ذات الصلة وتحديد ما إن كانت الفترات صحيحة. فإن وجد طالبٌ خطأً، فاطلب منه مشاركته مع الصف الدراسي (أو المجموعة) للتحقق من صحة النتائج.

634 | الدرس 10-5 | فترات الثقة

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 10-6 إيجاد فترات الثقة لمتوسطات وزيعات.

الدرس 10-6 كتابة فرضية العدم والفرضية البدي ة و حديد ا يمثّل الافتراضات. إجراء اختبار الفرضية باستخدام إحصاءات الاختبار وقيم p.

بعد الدرس 10-6 إيجاد ستقيم انحدار جموعتين ن البيانات واستخدا هما ل ت بؤ بتوقعات.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اط ب ن الطلا أن يقرءوا الفقرة **لماذا؟** ف الدر .ثم اط ب هم أن يفكروا ف الافتراضات الت يسمعونها وكيفية قييمها.

اطرح السؤال التالي:

- عـ د ا يقرر الـ ا ا الدواء الذي يت اولونه لعلا الصدا . فما الـ واحـ الت يراعونها؟ **الإجابات الـ موذجية:** خفيـ الألم، سرعة التأثير، حدودية الآثار الجانبية

(يُتبع فـ الصفحة التالية)

الدرس 10-6 اختبار الفرضيات

.. السابق

- أوجدت فترات الثقة الخاصة بقيم الوسط للتوزيعات.

.. الحالي

1. كتابة عبارة فرضية العدم والفرضية البديلة، وتحديد أيّ عبارة تمثّل الافتراض.
2. إجراء اختبار الفرضية باستخدام إحصاءات الاختبارات و قيم p.

.. لماذا؟

- يصوّب سعيد وفهد كُراتهما نحو السلّة، حيث قال فهد بفخر: "أستطيع أن أحرزَ 90% من رمياتي الحرة داخل الشبكة". أثارت هذه الملاحظة فضولَ سعيد وأراد أن يتحقق من دقة زعمِ صديقه.

المفردات الجديدة

اختبار الفرضية
hypothesis test
فرضية العدم
null hypothesis
فرضية بديلة
alternative hypothesis
مستوى الدلالة
level of significance
اختبار الذيل المتجه إلى اليسار
left-tailed test
اختبار ثنائي الذيل
two-tailed test
اختبار الذيل الأيمن
right-tailed test
قيمة p-value p

1 الفرضية

يقيّم **اختبار الفرضية** الأدلة التي تقدمها البيانات عن افتراضٍ خاصٍ بمعلمة في المجتمع الإحصائي. ويدعى هذا النوع من الافتراضات بالفرضية الإحصائية، وهي يمكن أن تكون صحيحةً أو خاطئة. وافتراض فهد في بداية الدرس هو مثالٌ عن فرضيةٍ إحصائية.

لاختبار صحة افتراضٍ ما، اكتبْه في صورة جملةٍ رياضية. ويمكن كتابة افتراض فهد بالصيغة $\mu \geq 90\%$، حيث μ هي النسبة المئوية لمتوسط تصويباته. فعبارة $\mu < 90\%$ هي المتممة للعبارة الأصلية، التي لا تحقق صحة افتراض فهد. وتمثل هاتان العبارتان زوجًا من الفرضيات يجب إقرارهما لاختبار افتراضٍ ما.

- فرضية **العدم** H_0: لا يوجد فرق واضح بين قيمة العينة والمُعامل الخاص بالمجتمع الإحصائي المستهدَف. وستحتوي هذه الفرضية على عبارة مساواة، مثل $\geq$ أو $=$ أو $\leq$. وفي هذا المثال، $\mu \geq 90\%$ هي فرضية العدم.
- الفرضية **البديلة** H_a: يوجد فرق بين قيمة العينة ومُعامل المجتمع الإحصائي المستهدف، ولذا ستحتوي هذه الفرضية على عبارة عدم مساواة، مثل $<$ أو $\neq$ أو $>$. وفي هذا المثال، $\mu < 90\%$ هي الفرضية البديلة.

إذا كان الافتراض k يمثّل الوسط لمجتمع إحصائي μ، فإن التوافيق المحتملة للفرضيات هي:

$H_0: \mu \leq k$ و $H_a: \mu > k$ $\qquad$ $H_0: \mu \geq k$ و $H_a: \mu < k$ $\qquad$ $H_0: \mu = k$ و $H_a: \mu \neq k$

مثال 1 فرضية العدم والفرضية البديلة

لكل عبارة، اكتبْ فرضية العدم والفرضية البديلة. ثم حدّدْ أيا منهما يمثّل الافتراض.

a. بعض صنّاع العلكة يزعمون أن منتجهم يحافظ على نكهته لمدة لا تقلّ عن 5 ساعات.

يصبح هذا الافتراض بالصيغة $\mu \geq 5$ وهو يمثل فرضية العدم حيث إنه يحتوي على رمز التساوي، وتكون العبارة المتممة $\mu < 5$.

$H_0: \mu \geq 5$ (الافتراض) $\qquad H_a: \mu < 5$

b. يزعم فنيو شركة سيارات أنهم سيقومون بتغيير الزيت في أقل من 15 دقيقة.

يصبح هذا الافتراض بالصيغة $\mu < 15$ وهو يمثل الفرضية البديلة حيث إنه يحتوي على رمز عدم المساواة، وتكون العبارة المتممة $\mu \geq 15$.

(الافتراض) $H_a: \mu < 15 \qquad H_0: \mu \geq 15$

c. يزعم أحد المعلمين أن متوسط الوقت الذي يستغرقه طلابه في أداء الواجبات المنزلية كل ليلة هو 35 دقيقة.

يصبح هذا الافتراض بالصيغة $\mu = 35$ وهو يمثل فرضية العدم حيث إنه يحتوي على رمز التساوي، وتكون العبارة المتممة $\mu \neq 35$.

$H_a: \mu \neq 35$ $\qquad$ (الافتراض) $H_0: \mu = 35$

تمرين موجّه

1A. يزعم أحد لاعبي كرة القدم أنه يستطيع تحقيق أكثر من 100 متر من التسارع في المباراة الواحدة.

1B. تزعم إحدى العدّاءات أنها ستقطع مسافة a مترًا خلال ما لا يزيد عن 4 دقائق.

1C. يزعم أحد البائعين أن متوسط المبيعات لديه يبلغ 12 في الشهر.

1A. $H_0: \mu \leq 100$, $H_a: \mu > 100$ **(الافتراض)**

1B. $H_0: \mu \leq 4$ **(الافتراض)**، $H_a: \mu > 4$

1C. $H_0: \mu = 12$ **(الافتراض)**، $H_a: \mu \neq 12$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 الدلالة والاختبارات

الدلالة والاختبارات لإثبات صحة افتراض، يجب دائمًا اختبار فرضية العدم. ففي المثال المطروح في بداية الدرس، سيتم التحقق من $\mu \geq 90\%$. وسيتم اتخاذ أحد قرارين بعد تحليل عينة من البيانات.

- رفض فرضية العدم.
- قبول فرضية العدم.

ليست كل رمية يلقيها فهد يتم تسجيلها، ولذا لا يستطيع سعيد إلا تحليل عينة من البيانات مثل 100 رمية يلقيها فهد. إذًا، هناك دائمًا فرصة أن يتخذ سعيد القرار الخاطئ. وفي حالة القرار الخاطئ، فإما أن يكون خطأً من النوع الأول أو النوع الثاني.

انتبه!
مرفوض أم غير مرفوض فرضية العدم هي الفرضية التي يتم اختبارها ولكنها قد لا تمثل الافتراض. على سبيل المثال، إذا كانت الفرضية البديلة تمثل الافتراض وتم رفض فرضية العدم، إذًا فالافتراض مؤيد بالفعل.

	H_0 صحيحة	H_0 خاطئة
H_0 مرفوضة	**خطأ النوع الأول** يتم رفض فرضية العدم، عندما تكون صحيحة بالفعل. يرفض سعيد العبارة $\mu \geq 90\%$ عندما ينجح فهد بالفعل في إحراز 90% أو أكثر.	**القرار الصائب** يرفض سعيد العبارة $\mu \geq 90\%$ عندما ينجح فهد بالفعل في إحراز أقل من 90%.
H_0 غير مرفوضة	**القرار الصحيح** لا يرفض سعيد العبارة. $\mu \geq 90\%$ عندما ينجح فهد بالفعل في إحراز 90% أو أكثر.	**خطأ النوع الثاني** لا يتم رفض فرضية العدم عندما تكون خاطئة بالفعل. لا يرفض سعيد العبارة. $\mu \geq 90\%$ عندما ينجح فهد بالفعل في إحراز أقل من 90%.

وهذا يقترح وجود أربع نتائج محتملة بالفعل عندما يتم اتخاذ قرار بشأن فرضية العدم. والسبيل الوحيد لضمان الدقة المتناهية هو إجراء اختبار على المجتمع الإحصائي كافة.

مستوى الدلالة، الذي يُرمز إليه بالرمز α، هو أقصىاحتمال مسموح بها عند ارتكاب خطأ من النوع الأول. على سبيل المثال، إذا كان $\alpha = 0.10$، فهناك فرصة بنسبة 10% أن يتم رفض H_0 عندما تكون صحيحة بالفعل، أو أن هناك فرصة بنسبة 90% لاتخاذ القرار الصائب. وهنا يمكن اختيار أي مستوى من مستويات الدلالة. إن أكثر ثلاث مستويات استخدامًا هي $\alpha = 0.10$ و $\alpha = 0.05$ و $\alpha = 0.01$.

نصيحة دراسية
أخطاء إن خطورة ارتكاب خطأ من النوع الأول متطابق مع مستوى الدلالة. فانخفاض خطورة الخطأ من النوع الأول يزيد من خطورة الأخطاء من النوع الثاني بزيادة حجم الفترة المقبولة.

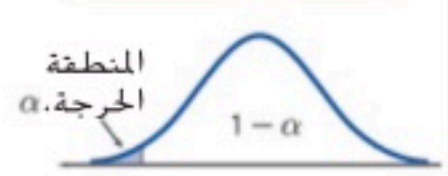
بعد اختيار مستوى الدلالة، يمكن إيجاد القيمة الحرجة إمّا باستخدام قيمة z أو t وكما في فترات الثقة. فإن قرار استخدام قيمة z أو t يعتمد على خصائص الدراسة.

- إذا كانت قيمة σ معلومة أو $n \geq 30$، فاستخدمْ قيمة z.
- إذا كانت قيمة σ مجهولة و $n < 30$، فاستخدم قيمة t.

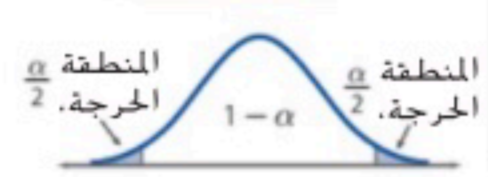
من خلال قيمة z أو t والفرضية البديلة، سيتم تحديد المنطقة الحرجة، وهي المدى الذي تُظهر عنده القيم اختلافًا واضحًا بالقدر الكافي لرفض فرضية العدم. ويتم تحديد موقع المنطقة الحرجة بعلامة عدم التساوي في الفرضية البديلة، والتي تبيّن إذا ما كان الاختبار اختبار الذيل المتجه إلى اليسار، أو المتجه إلى اليمين، أو ثنائي الذيل.

ملخص المفهوم اختبارات الدلالة

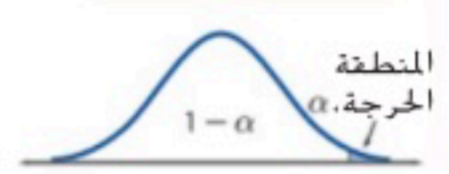
إذا كان $H_a: \mu < k$، فإن اختبار الفرضية هو **اختبار الذيل التجه إلى اليسار**.



إذا كان $H_a: \mu \neq k$، فإن اختبار الفرضية هو **اختبار ثنائي الذيل**.



إذا كان $H_a: \mu > k$، فإن اختبار الفرضية هو **اختبار الذيل المتجه لليمين**.



وفور تحديد المساحة المناظرة لمستوى الدلالة، يتم حساب إحصاء الاختبار لوسط العينة. وإحصاء الاختبار هو قيمة z أو t للعينة، وسيتم الإشارة إليها على أنها إحصاء z أو إحصاء t. إذا كان إحصاء z أو t للعينة:

- داخل المنطقة الحرجة، فإن H_0 يجب رفضها.
- لم يكن داخل المنطقة الحرجة، فإن H_0 لا يجب رفضها.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

- بعيدًا عن خبرتك، ما المعلومات التي نستخدمها عند هذا الاختيار؟ الإجابات النموذجية: الإعلان، آراء الآخرين، الأبحاث
- على فرض أنك تصنع عقارًا لعلاج الصداع، فما الدليل المقنع الذي ستعتمده لكفاءة عقارك؟ الإجابة النموذجية: سأجري دراسة مراقبةٍ على عددٍ كبيرٍ من الأشخاص المختارين عشوائيًا تثبت انخفاضًا ذا دلالةٍ إحصائيةٍ في الصّداع.

1 الفرضيات

يوضح **المثال 1** كيفية تحديد فرضية العدم والفرضيات البديلة لعبارة ما.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 لكل عبارة، اكتبْ فرضية العدم والفرضية البديلة. ثم حدّدْ أيا منهما يمثّل الافتراض.

a. يقول صاحب مطعمٍ إن زمن تقديم وجبة الطعامِ لن يتجاوز 12 دقيقةً بعد طلبها. $H_0: \mu \leq 12$ (الافتراض)؛ $H_a: \mu > 12$

b. تقول شركةٌ إن مصابيحها تدوم أكثر من 1200 ساعة. $H_a: \mu > H_0: \mu \leq 1200$؛ 1200 (الافتراض)

c. تقول محررة في مجلة إنها تراجع 17 مقالة تُنشر في الشهر. $H_0: \mu = 17$ $H_a: \mu \neq 17$؛(الافتراض)

التركيز على محتوى الرياضيات

فرضية العدم والفرضية البديلة تنص فرضية العدم H_0 على أنه ليس ثمة فرقٌ دلاليّ بين معلّمات عينةٍ ومعلّمات المجتمع الإحصائي. وتنص الفرضية البديلة H_a أنه ثمّة فرقٌ دلالي بينهما. والافتراض إما أن يكون نظرية عدمٍ أو نظريةً بديلة.

نصيحة دراسية

حساب إحصاء z وإحصاء t لحساب إحصاء، استخدم $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$.
ولحساب إحصاء t، استخدم $t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$.

يتم تلخيص خطوات إجراء اختبار الفرضية فيما يلي.

ملخص المفهوم خطوات اختبار الفرضية

الخطوة 1 اذكر الفرضيات وحدد الافتراض.

الخطوة 2 حدد القيمة (القيم) الحرجة والمنطقة الحرجة.

الخطوة 3 احسب إحصاء الاختبار.

الخطوة 4 ارفُض فرضية العدم أو لا ترفضها.

مثال 2 من الحياة اليومية اختبار الفرضية وحيدة الجانب

التغذية قدم ممثلو شركةٍ ما تقريرًا يفيد باحتواء منتجهم على ما لا يزيد عن 5 جرامات من الدهون. فأجرى أحد الباحثين اختبارًا على عينة عشوائية من 50 منتجًا ووجد أن g $\bar{x} = 5.03$. فإذا كان الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي يساوي 0.14 جرام، فاستخدم مستوى دلالة 5% لتحديد ما إذا كان هناك دليل كافٍ لرفض زعم الشركة.

الخطوة 1 اذكر فرضية العدم والفرضية البديلة، وحدد الافتراض.

الافتراض المكتوب في صورة عبارة رياضية هو $\mu \leq 5$. وهذه هي فرضية العدم. والفرضية البديلة هي $\mu > 5$.

H_0: $\mu \leq 5$ (الافتراض) H_a: $\mu > 5$

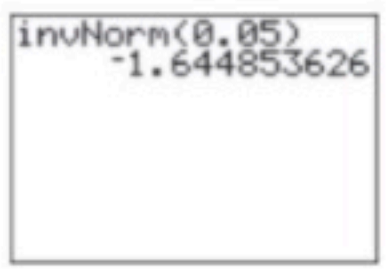
الربط بالحياة اليومية

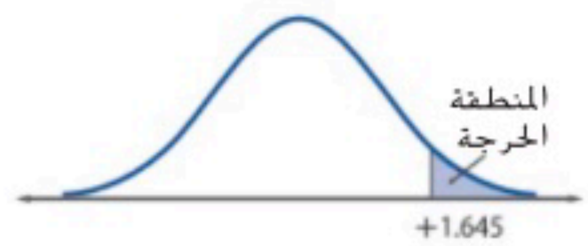
كان قانون الوسم والتثقيف الغذائي الصادر عام 1990، أو ما يعرف اختصارًا بـ NLEA، يفرض وسم معظم المواد الغذائية باستثناء اللحم والدواجن.

المصدر: *إدارة الغذاء والدواء الأمريكية*

الخطوة 2 حدد القيمة (القيم) الحرجة والمنطقة الحرجة.

لانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي معلوم و $n \geq 30$. إذًا يمكنك استخدام قيمة z. والاختبار هنا اختبار الذيل الأيمن حيث $\mu > 5$. وبسبب أن هذا يتطلب استدعاء مستوى الدلالة 5%. فإن $\alpha = 0.05$. استخدم حاسبة التمثيل البياني لإيجاد قيمة z.





الخطوة 3 احسب إحصاء الاختبار.

أوجد إحصاء z. حيث إن $\sigma = 0.14$ و $n = 50$ فإن $\sigma_{\bar{x}} = \frac{0.14}{\sqrt{50}}$ أو حوالي 0.02.

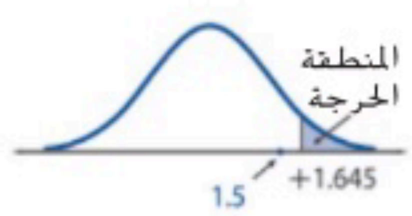
$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$$ قانون إحصاء z

$$= \frac{5.03 - 5}{0.02}$$ $x = 5.03$ و $\mu = 5$ و $\sigma_{\bar{x}} = 0.02$

$$= 1.5$$ بالتبسيط.

الخطوة 4 ارفُض فرضية العدم أو لا ترفضها.

H_0 غير مرفوضة لأن إحصاء الاختبار لا يقع داخل المنطقة الحرجة.



لذلك، ليس هناك ما يكفي من الأدلة لرفض الافتراض القائل إنه لا يوجد أكثر من 5 جرامات من الدسم في المنتج.

تمرين موجّه

2. **وظائف** يزعم الموظفون في أحد متاجر بيع الكتب أن وسط الأجر في الساعة يقِل عن وسط الأجر لدى أحد المنافسين والبالغ AED 10.50. فإذا أوضحت عينة عشوائية من 20 موظفًا أن الأجر الوسطي يبلغ AED 10.05 بانحرافٍ معياريٍ يساوي AED0.75. فاختبر افتراض الموظفين عند $\alpha = 0.01$.

2. بما أن $-2.54 > -2.68$، فإنّ H_0 مرفوضة، إذًا فثمة ما يكفي من الأدلة لتأييد الافتراض القائل بأن متوسط أجر المنافس أعلى.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 الدلالة والاختبارات

يوضح **المثال 2** كيفية إعداد اختبار فرضيةٍ أحادي الطرف وحسابه. ويوضح **المثال 3** كيفية إعداد اختبار فرضيةٍ ثنائي الطرف وحسابه. ويوضح **المثال 4** كيفية استخدام القيم p في اختبار الفرضية.

مثال إضافي

2 **الإعلانات** تزعم إحدى شركات الشحن في أحد إعلاناتها أنها توصِل الطلبيات خلال أقل من 5 أيام. فإذا تبين خلال اختبارٍ عشوائي لـ 40 زمن توصيل أن الزمن الوسطي للتوصيل هو 4.9 أيام عند انحراف معياري يساوي 0.2 يوم. فهل ثمة ما يكفي من الأدلة لرفض افتراض شركة الشحن عند $\alpha = 0.05$؟ يساوي الإحصاء z القيمة -3.16، وتقع هذه القيمة داخل المنطقة الحرجة $z \leq -1.64$. وبناء عليه تُرفض فرضية العدم ولا تنفي الأدلة الافتراض القائل إن $\mu < 5$.

التركيز على محتوى الرياضيات

فترات الثقة واختبارات الفرضية بينما تستخدم فترة الثقة لتقدير قيمة كمية معينة عند درجة معطاة من اليقين، فإنه يتم إجراء اختبار الفرضية للإجابة على سؤال نعم أو لا حول ما إذا كانت فرضية العدم صحيحة. ويمكن استخدام فترة الثقة للمساعدة في الإجابة على هذا السؤال.

التدريس المتمايز BL

التوسّع بعد المثال 2، اطلب من الطلاب أن يعمل كل منهم بمفرده للإجابة عن الأسئلة التالية.
بكم يتعيّن أن يزاد حجم العينة لرفض فرضية العدم H_0؟ زيادة n من 50 إلى 60.
بكم يتعيّن إنقاص الانحراف المعياري لرفض فرضية العدم H_0؟ إنقاص σ من 0.14 إلى 0.128. ثم اطلب من كل طالبٍ كتابة مسألةٍ فيها فرضية العدم H_0 مرفوضة.

فيما يتعلق بالاختبار ثنائي الجانب، يجب قسمة مستوى الدلالة α على 2 من أجل تحديد القيمة الحرجة في كل ذيل.

مثال 3 الاختبار ثنائي الجانب

وجبات خفيفة من الفاكهة قرّر المندوبون لإحدى الشركات أن كل صندوق من وجبات الفاكهة الخفيفة يحتوي على 80 قطعة، وأراد باحث أن يتحقق من صحة هذا القول فاختار عينة عشوائية من 25 صندوقًا بوسط للعينة يبلغ 84.1 قطعة وانحراف معياري يبلغ 7 قطع. فهل هذا له دلالة إحصائية عند $\alpha = 0.01$؟

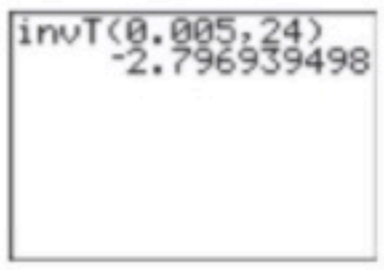
الخطوة 1 اذكر فرضية العدم والفرضية البديلة، وحدد الافتراض.

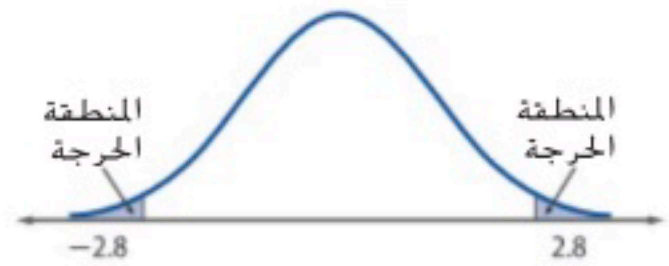
الافتراض المكتوب في صورة عبارة رياضية هو $\mu = 80$. وهذه هي فرضية العدم. والفرضية البديلة هي $\mu \neq 80$.

H_0: $\mu = 80$ (افتراض) H_a: $\mu \neq 80$

الخطوة 2 حدد القيمة (القيم) الحرجة والمنطقة الحرجة.

يجب استخدام القيمة t حيث إن $n < 30$، وσ معلومة. والاختبار هو اختبار ثنائي الذيل لأن $\mu \neq 80$. حيث تم تحديد القيم الحرجة بـما قدره $\frac{\alpha}{2}$ أو 0.005. وباستخدام حاسبة التمثيل البياني، فإن القيم الحرجة لـ $\alpha = 0.005$ مع $25 - 1$ أو 24 درجة من درجات الحرية هي $t = -2.8$ و $t = 2.8$.





الخطوة 2 احسب إحصاء الاختبار.

$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$ قانون إحصاء t

$= \frac{84.1 - 80}{1.4}$ $x = 84.1$ و $\mu = 80$ و $\sigma_{\bar{x}} = \frac{7}{\sqrt{25}}$ أو 1.4

≈ 2.93 بالتبسيط.

الخطوة 3 ارفُض فرضية العدم أو لا ترفضها.

H_0 مرفوضة لأن إحصاء الاختبار يقع داخل المنطقة الحرجة.

الدليل كافٍ لرفض الافتراض الذي يزعم وجود 80 قطعة في كل صندوق.

تمرين موجّه

3. السَفَر يدّعي ممثلو أحد مكاتب السفريات في مدينة إماراتية أن متوسط الأشخاص الذين زاروا المدينة في أحد الأعوام القريبة يصل إلى 110 أشخاص في اليوم الواحد. وفي عينة من 90 يومًا، كان متوسط الزائرين 115 زائرًا في اليوم، بانحراف معياري قدره 18 زائرًا. فهل عند $\alpha = 0.05$، يوجد دليل كافٍ لرفض هذا الافتراض؟

إن **قيمة p** يمكن استخدامها لتحديد إذا ما كانت H_0 يجب رفضها. أمّا قيمة p فهي أقل مستوى للدلالة يمكن عندها رفض القيمة H_0 تبعًا لمجموعة متاحة من البيانات. وبعد حساب إحصاء z أو t بالنسبة لاختبار الفرضية، يمكن تحويلها إلى قيمة p باستخدام حاسبة التمثيل البياني. ولاستخدام قيمة p في تقدير H_0، قارن بين قيمة p وقيمة α.

- إذا كانت $p \leq \alpha$، فارفض حينئذٍ H_0.
- إذا كانت $p > \alpha$، إذًا لا ترفض H_0.

انتبه!

تحديد القيم الحرجة تذكّر استخدام دالة InvT(لإيجاد قيمة t عند توزيع t وتذكّر استخدام) InvNorm لإيجاد قيمة z عند التوزيع الطبيعي.

3. بما أن $1.96 < 2.64$، فإنّ H_0 مرفوضة. وبالتالي، لا يوجد ما يكفي من الأدلة لدعم الافتراض القائل بزيارة 110 أشخاص للمدينة كل يوم.

مثال إضافي

3 ضبط الجودة تنتج شركةٌ لإنتاج المستحضرات الدوائية دواءً للقلب على شكل أقراصٍ وزن أحدها 50 ميليجرامًا. أجرى مدير ضبط الجودة دراسةً لتحديد ما إن كانت تلك المعلومة صحيحة. حيث اختار عينةً عشوائيةً من 20 قرصًا ليجد أن الوزن المتوسط للقرص الواحد 49.7 ميليجرامًا عند انحرافٍ معياري يساوي 0.6 ميليجرامًا. فهل الفرق ذُو دلالةٍ إحصائيةٍ عند $\alpha = 0.05$؟

$t \approx -2.2$؛ فرضية العدم مرفوضة. ولذلك تنفي الأدلة الافتراض القائل إن القرص يزن 50 mg.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

638 | الدرس 10-6 | اختبار الفرضيات

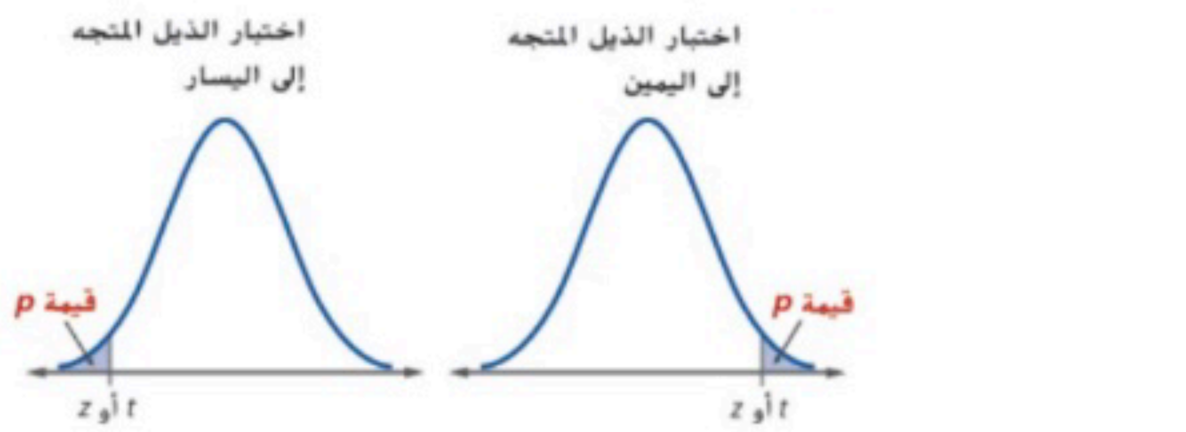
مثال إضافي

4 **علم الأحياء** يساوي الوزن المتوسط لذكر البط في إحدى الإمارات 1.1 كيلوجرام. ويشعر أحد الباحثين بالقلق من أن البط في إحدى المناطق الأصغر يعاني من المرض ووزنه منخفضٌ بصورةٍ خطرة. ولذلك يأخذ عينةً من 45 من البطّ ليجد أن الوزن المتوسط للحيوان الواحد يساوي 0.9 كيلوجرام عند انحرافٍ معياريٍ يساوي 0.5 كيلوجرام. حدّد ما إن كانت النتيجة دلاليةً عند $\alpha = 0.05$. قيمة $p \approx 0.0036$؛ فرضية العدم عند $\mu \geq 1.1$ مرفوضة. وهذا يدعم الافتراض $\mu < 1.1$ والذي ينص على أن البطّ يعاني من انخفاضٍ في الوزن في تلك المنطقة بالنسبة للإمارة.

نصيحة دراسية

قانون الأعداد الكبيرة قيمة $\bar{x}$ نادرًا ما تتطابق مع قيمة μ الحقيقية وتتنوع غالبًا من عينة لأخرى. ومع ذلك. وبسبب قانون الأعداد الكبيرة، فإذا أخذنا عينات أكبر، فسنضمن أن $\bar{x}$ ستقترب أكثر من قيمة μ الحقيقية. وهذا ينطبق على *أي* توزيع.

تتناظر قيمة p مع المساحة الموجودة أسفل المنحنى الطبيعي على يسار أو يمين إحصاء z أو إحصاء t المحسوب من أجل بيانات العينة. ويتم تحديد موقع المساحة بنوع الاختبار المستخدَم.



يختار الباحث قيمة α قبل إجراء الاختبار الإحصائي، بينما يتم حساب قيمة p بعد تحديد الوسط للعينة.

مثال 4 اختبار الفرضية وقيم p

البَسْتَنَة عالج خبير بيولوجي 40 نباتًا بأحد المواد الكيميائية ثم قارن مقدار النمو بالنباتات التي لم تُعالج بهذه المادة، فوجد أن متوسط ارتفاع النباتات غير المعالَجة يبلغ 21.6 سنتيمترًا بينما وصل وسط ارتفاع النباتات المعالَجة إلى 22.4 سنتيمترًا و $s = 1.8$ cm. يزعم هذا البيولوجي أن المادة الكيميائية ساعدت على زيادة نمو النباتات، فحددْ ما إذا كانت لهذه النتيجة دلالة عند $\alpha = 0.01$.

الافتراض المكتوب في صورة عبارة رياضية هو $\mu > 21.6$. وهذه هي الفرضية البديلة. وفرضية العدم هي $\mu \leq 21.6$.

H_0: $\mu \leq 21.6$ $\qquad$ H_a: $\mu > 21.6$ $\qquad$ (الافتراض)

بما أن $n \geq 30$، إذًا يتم استخدام إحصاء z.

$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$ $\qquad$ قانون إحصاء z

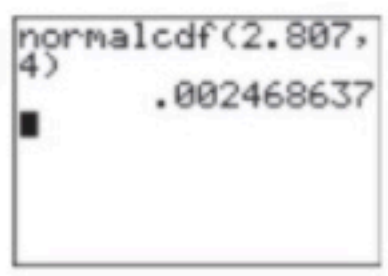
$\approx \frac{22.4 - 21.6}{0.285}$ $\qquad$ $\bar{x} = 22.4$ و $\mu = 21.6$ و $\sigma_{\bar{x}} = \frac{1.8}{\sqrt{40}}$ أو حوالي 0.285

≈ 2.807 $\qquad$ بسّط.

تلميح تقني

حساب المساحة الموجودة أسفل المنحنى t يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد المساحة الموجودة أسفل المنحنى t التي تتناظر مع أي قيمة t وذلك باختيار 2nd [DISTR] و tcdf (قيمة t المنخفضة، قيمة t العالية، *d.f.*).

هذا اختبار ذيل أيمن نظرًا إلى أن الفرضية البديلة هي $\mu > 21.6$. والمساحة المرافقة لـ $z = 2.807$ هي 0.0025.



قيمة p 0.0025 هي أقل من 0.01. إذًا، فرضية العدم مرفوضة وهناك دليل واضح أن المادة الكيميائية ساعدت على زيادة نمو النباتات.

تمرين موجّه

4. **عقاقير** يزعم بعض مصنّعي عقار يساعد على النوم أن هذا المنتَج يتيح لمتناوله نوما مستمرًا لمدة تزيد عن 8 ساعات. وفي اختبار أُجريَ على 50 مريضًا، بلغ وسط النوم المستمر إلى 8.07 ساعات بانحراف معياري 0.3 من الساعة. أوجد قيمة p وحدّدْ إذا ما كان هناك دليل كافٍ لرفض الافتراض عندما $\alpha = 0.03$.

4. قيمة p تساوي 0.05. وفرضية العدم غير مرفوضة. إذًا، فالدليل كافٍ لرفض الافتراض القائل إن $\mu > 8$.

من الضروري أن تتذكر أن الاختبارات الإحصائية لا تثبت صحة افتراضٍ ما أو خطأه. حيث تذكر هذه الأنواع من الاختبارات ببساطة أنه لا يوجد ما يكفي من الأدلة للقول بأن الافتراض قد يكون صحيحًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز BL OL

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي اطلب من الطلاب إدراج مقاسات أحذيتهم على اللوحة. ولغرض هذا النشاط، ادمج مقاسات أحذية الذكور بالإناث. واطلب من الطلاب العمل في مجموعاتٍ ثنائيةٍ والإجابة عن الأسئلة التالية. ما مقاس الحذاء الوسطي؟ ما الانحراف المعياري؟ افترض أن الوسط والانحراف المعياري يمثلان معلّمتي المجتمع الإحصائي. والآن اطلب من الطلاب العودة إلى اللوح وزيادة مقاسات الأحذية بمقدار واحد. افترض أن الإحصاءات الناتجة تمثل عينة. واطلب من الطلاب تحديد ما إن كان وسط العينة أكبر بصورةٍ دلاليةٍ من وسط المجتمع الإحصائي.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 17 للتحقق من الاستيعاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع في التمارين 5-1. قد يخلط الطلاب بين الافتراض وبين فرضية العدم أو الفرضية البديلة. فذكّرهم بأن عليهم أن يحددوا الفرضيات أولاً وأن فرضية العدم تضم مساواةً على الدوام. وبعد القيام بذلك فقط يتعيّن عليهم التفكير في الفرضية التي تمثل الافتراض.

خطأ شائع في التمرين 26. قد يحسب بعض الطلاب قيمة p الصحيحة، ولكنهم قد يرفضون فرضية العدم H_0. وفي هذه الحالة، قد يضع الطلاب افتراضًا خاطئًا عمّا إذا كان الاختبار أحادي الذيل أو ثنائي الذيل. فإن كان ذلك، ذكّر الطلاب بأن الاختبار أحادي الذيل.

تحليل الخطأ في التمرين 30. ربما يكون شادي قد فكر في حالاتٍ بحثيةٍ يقصد فيها من خلال رفض فرضية العدم H_0 تأييد الفرضية البديلة H_a على أنها محبّذة. ولكن كلا نوعي الأخطاء يفضيان إلى نتائج مؤثرة وربما غير مرغوبة في حالاتٍ بحثيةٍ مختلفة.

إجابات إضافية

1. $H_0: \mu = 4$ (الافتراض), $H_a: \mu \neq 4$
2. $H_0: \mu \geq 85$ (الافتراض), $H_a: \mu < 85$
3. $H_0: \mu \geq 10$ $H_a: \mu < 10$ (الافتراض)
4. $H_0: \mu = 183$ (الافتراض), $H_a: \mu \neq 183$
5. $H_0: \mu \leq 38$, $H_a: \mu > 38$ (الافتراض)

10. $z \approx 1.1$؛ الفرضية ليست مرفوضة؛ الافتراض ليس مرفوضًا
11. $z \approx 3.85$؛ الفرضية مرفوضة؛ الافتراض ليس مرفوضًا
12. $z \approx -2.19$؛ الفرضية ليست مرفوضة؛ الافتراض مرفوض
13. $z \approx -4.19$؛ الفرضية مرفوضة؛ الافتراض ليس مرفوضًا
14. $z \approx 0.75$؛ الفرضية ليست مرفوضة؛ الافتراض ليس مرفوضًا

18a. $H_0: \mu \geq 7.00$; $H_a: \mu < 7.00$ (الافتراض)

التمارين

اكتبْ فرضية العدم والفرضية البديلة لكل عبارة، ثم حدد الفرضية التي تمثل الزعم. (المثال 1) **5–1. انظر الهامش.**

1. يزعم مصنّعو إحدى ماركات الحبوب الغذائية أن منتجهم يحتوي على 4 جرامات من الألياف.
2. يزعم أحد الطلاب حصوله على ما لا يقل عن 85% في اختبارات الرياضيات.
3. تزعم خديجة قدرتها على القيادة من منزلها إلى المدرسة في أقل من 10 دقائق.
4. تزعم عائشة أن متوسط رمياتها في لعبة البولينج يبلغ 183.
5. يزعم عمّار قدرته على ذكر أسماء أكثر من 38 رئيسًا سابقًا للولايات المتحدة.

احسب إحصاء الاختبار وحدد احتمال وجود دليل كافٍ لرفض فرضية العدم. وبعد ذلك صِغْ عبارة تخص الافتراض الأصلي.

6. **إعلانات** يزعم مندوبو إحدى الشركات قدرتهم على شحن أي منتج في أقل من أربعة أيام. فإذا كان وسط العينة للاختيار العشوائي لأزمنة التوصيل لمقدار 60 منتجًا يبلغ 3.9 أيام وانحراف معياري قدره 0.6 يوم. فهل يوجد دليل كافٍ لرفض الافتراض عندما $\alpha = 0.05$؟ اشرح. (المثالان 2 و 3) **$z = -1.29$؛ الافتراض مرفوض**
7. **الصحة** يزعم أحد الباحثين أن مكمّلًا غذائيًا لا يزيد من كثافة العظام بمقدار 0.05 من الجرام لكل سنتيمتر مربع كحد سفلي. فإذا أوضحت إحدى الدراسات أن هذا المكمّل الغذائي زاد من كثافة العظام في عينة عشوائية من 35 شخصًا بمقدار 0.048 من الجرام لكل سنتيمتر مربع بانحراف معياري قدره 0.004. فهل يوجد دليل كافٍ لرفض الافتراض عندما $\alpha = 0.01$؟ اشرح. (المثالان 2 و 3) **$z = -2.5$؛ الافتراض غير مرفوض**
8. **فنادق** يزعم مالكو سلسلة فنادق أن متوسط تكلفة إحدى الحجرات في فنادق المدينة يبلغ 82 AED. ثم جمع عينة من البيانات الخاصة بـ 25 حجرة فندقية. ووجد أن متوسط التكلفة يبلغ 85 AED بانحراف معياري قدره 8 AED. فهل يوجد ما يكفي من الأدلة لرفض زعم المُلّاك عند $\alpha = 0.02$؟ اشرح. (المثالان 2 و 3) **$t = 2.5$؛ الافتراض مرفوض**
9. **آلات حاسبة** يزعم أحد المعلمين أن متوسط تكلفة نوع معين من حاسبات التمثيل البياني لا يقل عن 90 AED. وأوضحت عينة عشوائية من 40 متجرًا أن الوسط للتكلفة يبلغ 89 AED بانحراف معياري قدره 4.95 AED. فهل يوجد ما يكفي من الأدلة لرفض زعم المعلم عند $\alpha = 0.05$؟ اشرح. (المثالان 2 و 3) **$z \approx -0.96$؛ الافتراض غير مرفوض**

14–10. انظر الهامش.

لكل افتراض k، استخدم المعلومات المحددة لحساب إحصاء الاختبار وتحديد ما إذا كان هناك دليل كافٍ لرفض فرضية العدم. وبعد ذلك، صُغ عبارة تخص الافتراض الأصلي. (المثالان 2 و 3)

10. $k: \mu = 1240, \alpha = 0.05, \bar{x} = 1245, s = 32, n = 50$
11. $k: \mu > 88, \alpha = 0.05, \bar{x} = 91.2, s = 3.9, n = 22$
12. $k: \mu < 500, \alpha = 0.01, \bar{x} = 490, s = 27, n = 35$
13. $k: \mu \neq 5500, \alpha = 0.01, \bar{x} = 5430, s = 236, n = 200$
14. $k: \mu \leq 10{,}000, \alpha = 0.01, \bar{x} = 10{,}015, s = 85, n = 18$

15. **العقارات** ترغب إحدى الباحثات في اختبار افتراض يقرر أن متوسط سعر بيع المنازل السكنية في الإمارات العربية المتحدة أقل من 260,000 AED. فاختارت عينة من 40 منزلًا ووجدت أن الوسط لسعر البيع في العينة بلغ 254,500 AED بانحراف معياري قدره 12,500 AED. أوجد قيمة p. وحدد إذا ما كان هناك ما يكفي من الأدلة لدعم هذا الافتراض عند $\alpha = 0.05$. (المثال 4) **0.003 ≈؛ الفرضية $\mu \geq 260{,}000$ مرفوضة؛ ويدعم $\mu < 260{,}000$**
16. **موسيقى** يزعم ممثلو إحدى شركات الأجهزة الإلكترونية أن متوسط العمر الافتراضي لجهاز مشغل MP3 يصل إلى ما لا يقل عن 5 سنوات. وأوضحت عينة عشوائية من 100 جهاز وسطًا حسابيًا للعمر الافتراضي يبلغ 5.2 أعوام بانحراف معياري 1.2 عام. فأوجد قيمة p. وحدد ما إذا كان هناك دليل يكفي لتدعيم هذا الافتراض عندما $\alpha = 0.01$. (المثال 4) **0.047 ≈؛ الفرضية $\mu \geq 5$ غير مرفوضة؛ وتدعم $\mu \geq 5$**
17. **البيسبول** تعتقد رنا أن تكلفة حضور أسرة مكونة من شخصين بالغين وطفلين لمباراة بيسبول تبلغ أقل من 125 AED. فقامت بعمل دراسة استطلاعية على 18 أسرة تم اختيارهم عشوائيًا ووجدت أن متوسط التكلفة يبلغ 122.88 AED بانحراف معياري 13.21 AED. أوجد قيمة p وحدد إذا ما كان هناك دليل كافٍ لدعم هذا الافتراض عند $\alpha = 0.10$. **0.252 ≈؛ فرضية العدم لـ $\mu \geq 125$ غير مرفوضة. وهذا لا يدعم افتراض $\mu < 125$.**
18. **العدْو في أماكن مفتوحة** يزعم منصور أن متوسط الزمن الذي يستغرقه الطلاب في مدرسته لقطع مسافة كيلومتر واحد يبلغ أقل من 7 دقائق. فقام بتسجيل الأزمنة التي يستغرقها 20 طالبًا تم اختيارهم عشوائيًا. حدد إذا ما كان افتراض منصور له ما يدعمه عند $\alpha = 0.05$. **a–c. انظر الهامش.**

أوقات قطع مسافة الكيلومتر (بالدقائق)									
5.25	7.27	5.46	7.63	7.75	5.42	6.00	8.17	9.45	6.20
6.63	7.38	6.97	7.85	7.03	6.53	6.87	7.22	7.16	6.92

a. اكتب فرضية العدم والفرضية البديلة، واذكر الفرضية التي تمثل الادعاء.
b. حددْ إذا ما كان هناك دليل كافٍ لرفض فرضية العدم باستخدام القيم الحرجة.
c. صُغ عبارة تخص الافتراض الأصلي.

19. **الواجب المنزلي** تزعم السيدة بثينة أن طلابها يقضون 25 دقيقة كل ليلة في عمل الواجب المنزلي لمادة الرياضيات. فطلبت منى من زميلاتها تسجيل متوسط الوقت الذي يستغرقنه في عمل الواجب المنزلي كل ليلة على مدار أسبوع. حدد ما إذا كان افتراض السيدة بثينة له ما يدعمه عند $\alpha = 0.10$. **a–c. انظر الهامش.**

الوقت (بالدقائق)											
45	40	10	15	18	20	34	36	20	25	28	25
26	30	22	25	24	29	26	28	23	28	25	26
29	30	22	20	22	24	23	24	25	29	25	

a. اكتب فرضية العدم والفرضية البديلة، واذكر الفرضية التي تمثل الادعاء.
b. إذا ما كان هناك دليل كافٍ لرفض فرضية العدم باستخدام القيم الحرجة.
c. صُغ عبارة تخص الافتراض الأصلي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

صف الناتج في حالة ارتكاب خطأ من النوع الأول أو الثاني عند اختبار فرضية العدم.

20. المتّهم ليس مذنبًا.

21. تُظهر أشعة X نتيجة إيجابية لالتواء الكاحل.

22. يستغل الطلاب وقت الدراسة بكفاءة.

23. معظم الطلاب لا توجد لديهم أعمال.

24. متوسط عمر السمكة الذهبية يبلغ عامين.

25. سمّ الأفعى ليس سامًا.

20-25. انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

3d,26a. انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

26. **النوم** يعتقد السيد عبد الكريم أن طلاب الجامعة يحصلون على فترة نوم أقل من 6 ساعات في كل ليلة. فاختار مجموعة عشوائية من الطلاب وسجّل متوسط فترة النوم التي يحصل عليها كل طالب في كل ليلة.

متوسط فترة النوم (ساعات/ليلة)								
5.4	6.7	6.5	5.5	5.5	6.0	5.8	6.7	6.8
4.5	5.7	7.5	5.4	5.3	8.0	4.5	4.5	5.0

a. اكتب فرضية العدم والفرضية البديلة، واذكر الفرضية التي تمثل الادعاء.

b. إيجاد قيمة p. **0.268≈**

c. حدد إذا ما كان هناك دليل كافٍ لرفض فرضية العدم عند $\alpha = 0.05$. **لا ترفض**

d. ضَع عبارة تخص الافتراض الأصلي.

3d,27a. انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

27. **اختبار ACT** متوسط الدرجة المركّبة في اختبار ACT هو 21. ويزعم معلمو أحد الصفوف المعدة لإجراء ACT مقدرتهم على زيادة درجات الممتحنين، وتم تسجيل نتائج الحاضرين عشوائيًا.

درجات اختبار ACT											
24	23	27	23	19	16	33	30	22	25	23	26
21	30	22	18	28	21	26	32	20	17	23	24
25	28	19	22	21	19	18	20	25	22	24	23

a. اكتب فرضية العدم والفرضية البديلة، واذكر الفرضية التي تمثل الادعاء.

b. إيجاد قيمة p. **0.0004≈**

c. حدد إذا ما كان هناك دليل كافٍ لرفض فرضية العدم عند $\alpha = 0.01$. **رفض**

d. ضَع عبارة تخص الافتراض الأصلي.

28a–c. انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

28. **الكميّة** يزعم أحد مصنّعي الشوكولا أن متوسط عدد قطع الحلوى في كل كيس يبلغ 81 قطعة على الأقل. فاختار عمر بعض الأكياس عشوائيًا وقام بعدّ القطع. بفرض أن $\sigma = 1.2$.

عدد القطع								
81	80	82	82	83	82	84	81	81
80	83	83	82	81	80	84	81	81

a. اكتب فرضية العدم والفرضية البديلة، واذكر الفرضية التي تمثل الادعاء.

b. حدد إذا ما كان هناك دليل كافٍ لرفض فرضية العدم عند $\alpha = 0.05$ باستخدام القيم الحرجة.

c. أوجد قيمة p ثم حدد إذا ما كان هناك دليل كافٍ لرفض فرضية العدم عندما $\alpha = 0.05$.

a–d. انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

29. **درجات الطلاب** يزعم السيد عيسى أن متوسط درجات طلابه يبلغ 85%. فجمع طالبان من طلابه، عدنان وعبيد، عينات الدرجات التالية من الطلاب في فصولهم.

درجات عدنان								
64	84	86	99	76	90	79	94	85
84	85	88	91	80	85	76	86	96

درجات عُبيد							
95	86	95	83	86	85	84	88
88	86	87	88	95	86	85	95

a. اكتب فرضية العدم والفرضية البديلة، واذكر الفرضية التي تمثل الادعاء.

b. افرض أن $\alpha = 0.10$. لكل صف، حدد احتمال وجود دليل كافٍ لرفض فرضية العدم. وبعد ذلك صِغ عبارة تخص الافتراض الأصلي.

c. حدد ما إذا كان هناك ما يكفي من الأدلة لرفض فرضية العدم إذا تم الجمع بين نموذجين للبيانات. وبعد ذلك استخدم النتائج في صياغة عبارة تخص الافتراض الأصلي.

d. افترض تخمينًا يتعلق بالنتائج الموجودة في الجزء c وقانون الأعداد الكبيرة.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

30. **تحليل الخطأ** يُكمل عبد الله وعبد الرحمن واجبيهما في مادة الإحصاء. ويزعم عبد الله أنه من الأفضل دائمًا ارتكاب خطأ من النوع الأول بدلًا من ارتكاب خطأ من النوع الثاني. أمّا عبد الرحمن فلا يتفق معه. فهل كلاهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.
انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

31. **الكتابة في الرياضيات** صِف الفرق بين إجراء اختبار فرضية باستخدام إحصاء الاختبار والقيم الحرجة وإجراء اختبار فرضية باستخدام قيم p.
انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

32-34. انظر ملحق إجابات الوحدة 10 للاطلاع على البراهين والاستنتاجات.

التبرير حدد ما إذا كانت كل عبارة من العبارات التالية صحيحة أم خطأ. اشرح إجابتك.

32. إذا رُفضت فرضية العدم، فالافتراض مرفوضٌ دائمًا. **خطأ**

33. يمكن أن تتضمن الفرضية البديلة رمز المساواة إذا كانت تمثل الافتراض. **خطأ**

34. قيمة p دائمًا ما تكون قيمة موجبة. **صواب**

35. **تحدٍ** بالنسبة لمجموعة عشوائية من البيانات، $p = 0.0104$ و $s = 0.3$ و $\bar{x} = 14.9.1$. فإذا جرت الدراسة لاختبار الافتراض $\mu < 15$، أوجد n.
48

36. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب المحتمل لعدم اهتمام الباحث الدائم في معرفة أقل مستويات الدلالة المحتملة من أجل تقليل احتمال ارتكاب خطأ من النوع الأول . **انظر ملحق إجابات الوحدة 10.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابات إضافية

18b. $t \approx -0.19$؛ فرضية العدم ليست مرفوضة.

18c. الإجابة النموذجية: افتراض أن $\mu < 7.00$ لا تدعمه الأدلة.

19a. $H_0: \mu = 25$ (الافتراض)؛ $H_a: \mu \neq 25$

19b. $z \approx 0.6766$؛ فرضية العدم ليست مرفوضة.

19c. الإجابة النموذجية: افتراض أن $\mu = 25$ لا تدعمه الأدلة.

مراجعة شاملة

37. **أحذية** كان متوسط التكلفة لعينة من 35 زوجًا من أحذية الجري يساوي AED 45.25 بانحراف معياري قدره AED7.60. قدّر الوسط الحسابي لتكلفة هذه الأحذية باستخدام فترة ثقة علمًا أن مستوى الثقة يساوي 90%. $43.14 < \mu < 47.36$

38. **كُتب نادرة** الأسعار الموضحة هي متوسط أسعار ثلاثة كتب قديمة مهمة. تختلف هذه الأسعار حسب عمر وحالة كل كتاب.

الكتاب	متوسط السعر (AED)
دون كي شوت	155
موبي ديك	98
أوليفر تويست	118

a. بالنسبة لعينة من 25 نسخة من كتاب دون كيشوت، أوجد احتمال أن يكون وسط السعر أكبر من AED 160، إذا كان الانحراف المعياري AED 18. **8.2%**

b. بالنسبة لعينة من 40 نسخة من كتاب أوليفر تويست، أوجداحتمال أن يكون وسط السعر بين AED 115 و AED 120، إذا كان الانحراف المعياري يساوي AED 15. **69.6%**

حدد ما إذا كانت كل متتالية هندسية مما يلي *تقاربية* أم *تباعدية*.

39. $a_n = (10 - n)^2$ **متقاربة**

40. $a_n = n^2 + 10n - 9$ **متباعدة**

41. $a_n = \frac{3n + 2}{n}$ **متباعدة**

أوجد الزاوية θ بين المتجهين u و v.

42. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = -7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$ **142.4°**

43. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ **91.5°**

44. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - 9\mathbf{k}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$ **24.8°**

أوجد متّجه الوحدة الذي له نفس اتّجاه v. **47–45. انظر الهامش.**

45. $\mathbf{v} = \langle -9, 2 \rangle$

46. $\mathbf{v} = \langle -5, 1 \rangle$

47. $\mathbf{v} = \langle 4, 3 \rangle$

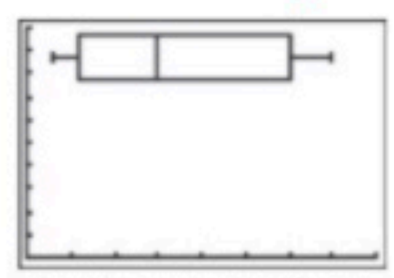
اكتب معادلة للقطع الزائد ذي الخصائص الموضحة. **49–48. انظر الهامش.**

48. رؤوس الزوايا (3 ,4)، (3 ,−6)؛ محور مرافق يساوي 8 وحدات

49. رؤوس الزوايا (4− ,2−)، (6 ,2−)؛ محور مرافق يساوي 6 وحدات

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

50. **مراجعة** قدّر وسيط ومدى انتشار البيانات التي يمثلها مخطط الصندوق. **B**



[0, 80] scl: 10 by [0, 10] scl: 1

A الوسيط ≈ 30، الانتشار ≈ 50

B الوسيط ≈ 30، الانتشار ≈ 65

C الوسيط ≈ 50، الانتشار ≈ 50

D الوسيط ≈ 50، الانتشار ≈ 65

51. **مراجعة** أوجد الحلول لـ $x^2 = i$. **G**

F i و $-i$

G $\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$ و $\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}$

H 1 و -1

J $\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$ و $\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}$

52. **اختبار SAT/ACT** أي من العبارات التالية صحيحة إذا كان n عددًا كاملًا؟ **C**

I. $3n + 6$ يقبل القسمة على 3.

II. $10n + 8$ يقبل القسمة على 2.

III. $4n - 2$ يقبل القسمة على 4.

A I فقط

B II فقط

C I و II فقط

D I و III فقط.

E I و II و III صحيحة

53. يعتقد راشد أن متوسط سعر البنزين لا يزال أقل من AED 2.50 لكل لتر. فقام بالاتصال عشوائيًا بـ 40 محطة خدمة مختلفة ووجد أن متوسط السعر هو AED 2.51 عند انحراف معياري قدره AED 0.06. فأوجد قيمة p وحدد ما إذا كان هناك ما يكفي من الأدلة لدعم الافتراض عند $\alpha = 0.10$. **F**

F 0.85؛ دليل غير كافٍ

G 0.95؛ دليل كافٍ

H 0.15؛ دليل غير كافٍ

J 0.05؛ دليل كافٍ

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4 التقويم

عيّن مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب إدراج الخطوات المطلوبة لاختبار فرضية.

1. اذكر الفرضيات، وحدد الافتراض.
2. حدد القيمة (القيم) الحرجة والمنطقة الحرجة.
3. احسب إحصاء الاختبار.
4. اقبل فرضية العدم أو ارفضها.

إجابات إضافية

45. $\left\langle -\frac{9\sqrt{85}}{85}, \frac{2\sqrt{85}}{85} \right\rangle$

46. $\left\langle -\frac{5\sqrt{26}}{26}, -\frac{\sqrt{26}}{26} \right\rangle$

47. $\left\langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle$

48. $\frac{(x+1)^2}{25} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1$

49. $\frac{(y-1)^2}{25} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$

المتابعة

لقد استكشف الطلاب اختبار الفرضية.

اطرح السؤال التالي:

- كيف يمكن استخدام اختبارٍ إحصائي في عملية اتخاذ قرار؟ الإجابة النموذجية: يمكنك استخدام اختبارٍ إحصائي لمساعدتك في تحديد قوة قرارك.

الدرس 10-7 الارتباط والانحدار الخطي

:: السابق

- حلّلتَ بياناتٍ أحادية المتغير.

:: الحالي

1 قياس الارتباطات الخطية لمجموعات من البيانات ذات المتغيرين باستخدام معامل الارتباط، وتحديد ما إذا كانت الارتباطات ذات دلالة.

2 إنشاء خطوط انحدار المربعات الصغرى لمجموعات البيانات ذات المتغيرين، واستخدام الخطوط لتقديم تنبؤات.

:: لماذا؟

- كان أحد كُتّاب صحيفة مدرسية مهتمًا بتحديد ما إذا كان عدد ساعات النوم الذي يحصل عليه الطلاب كل ليلة له علاقة بمتوسط إجمالي الدرجات التي يحصلون عليها. ومن الناحية الإحصائية، يود الكاتب أن يعرف ما إذا كان هناك *ارتباط* بين النوم والدرجات.

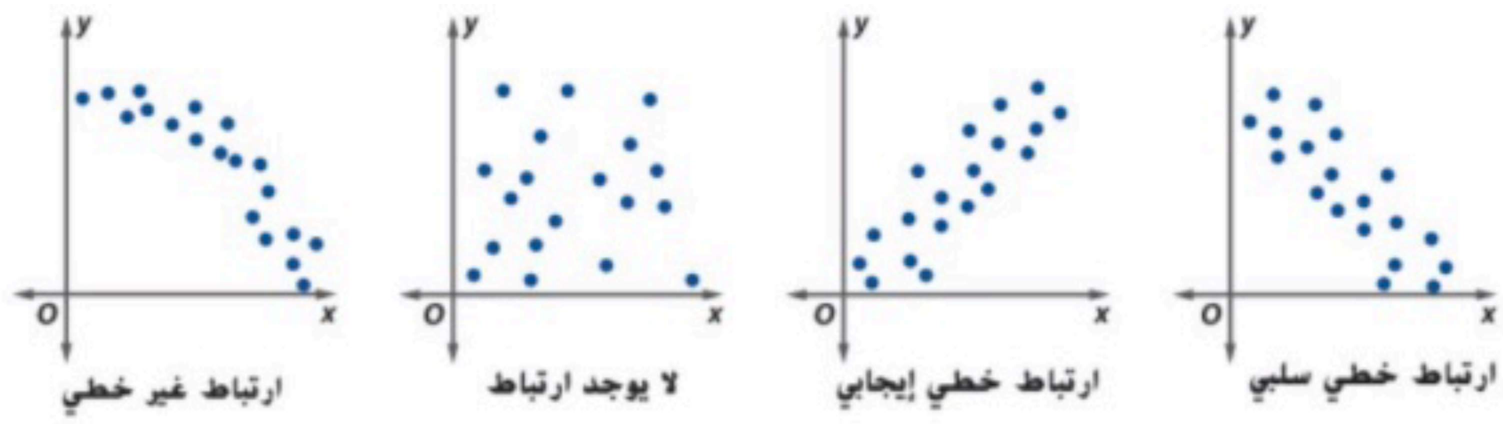
المفردات الجديدة

ارتباط correlation
ذو متغيرَين bivariate
المتغير التفسيري explanatory variable
متغير الاستجابة response variable
معامل الارتباط correlation coefficient
خط الانحدار regression line
المستقيم الأفضل مواءمة line of best fit
الناتج المتبقي residual
خط انحدار ذو مربعات أقل least-squares regression line
مخطط البواقي residual plot
مؤشر استكمال داخلي interpolation
استكمال خارجي extrapolation

1 الارتباط

حتى الآن في هذه الوحدة، قمتَ بعمل تمثيل بياني لبعض الإحصائيات المختصرة ووصفتَ خصائصها واستخدمتها من أجل وصف التوزيعات الخاصة ببعض مجموعات البيانات أحادية المتغير. واستخدمتَ، بالإضافة إلى ذلك، عينة إحصائية لمثل هذه البيانات أحادية المتغير لعمل تداخلات في المجتمع الإحصائي عن طريق تطوير فترات الثقة وأداء اختبارات الفرضية. **والارتباط** هو مجال آخر من الإحصاء الاستدلالي الذي ينطوي على تحديد احتمال وجود علاقة بين متغيرين في مجموعة من **البيانات** ذات المتغيرين.

يمكن تمثيل البيانات ذات المتغيرين في صورة أزواج مرتبة (x, y)، حيث يمثل x المتغير المستقل أو **التفسيري** ويمثل y المتغير التابع أو **متغير الاستجابة**. ولكي تحدد ما إذا كان هناك ارتباط خطي أو غير خطي أو عدم وجود ارتباط بين المتغيرات، يمكنك استخدام مخطط انتشار بياني.



نقول إن البيانات لها علاقة خطية قوية إذا وقعت النقاط قريبةً من خط مستقيم و نقول عنها ضعيفة إذا كانت النقاط بعيدةً عن المستقيم. ولكن تفسير الارتباط باستخدام مخطط الانتشار لا يبدو موضوعيا. والطريقة الأكثر دقة في تحديد قوة العلاقة الخطية بين متغيرَين ونوعها هي أن نحسب **معامل الارتباط**. فيما يلي معادلة موضحة لهذا المقياس.

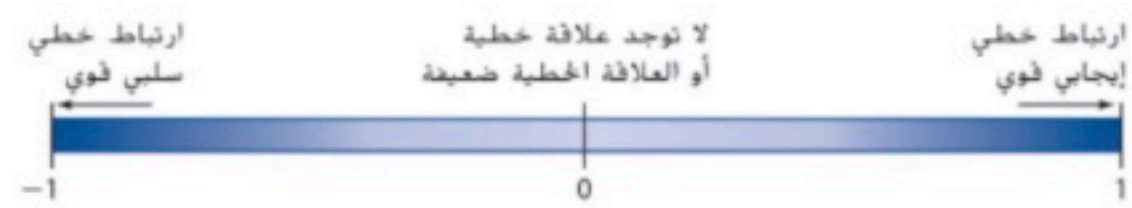
المفهوم الأساسي معامل الارتباط

لعدد n من أزواج عينات البيانات الخاصة بالمتغيرين x وy، فإن معامل الارتباط r بين x و y يتم استنتاجه بالمعادلة

$$r = \frac{1}{n-1} \sum \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y}\right),$$

حيث x_i و y_i يمثلان قيمتي زوجي البيانات ذوي الترتيب i، و $\bar{x}$ و $\bar{y}$ يمثلان وسطي المتغيرين و s_x و s_y يمثلان الانحرافين المعياريين للمتغيرين.

يمكن لمعامل الارتباط أن يتضمن قيمًا من -1 إلى 1. وتوضح هذه القيمة قوة الارتباط الخطي ونوعه بين x و y كما هو موضح في المخطط أدناه.



643

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 10-7 تحليل البيانات وحيدة المتغير.

الدرس 10-7 قياس الارتباطات الخطية لمجموعات من البيانات ذات المتغيرين باستخدام معامل الارتباط، وتحديد ما إذا كانت الارتباطات ذات دلالة.
توليد خطوط انحدار ذات مربعات أقل لمجموعات البيانات ذات المتغيرين، واستخدام الخطوط لتقديم تنبؤات.

بعد الدرس 10-7 استخدام مستقيم مواءمةٍ مع الوسيط لتمثيل البيانات.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة الفقرة **لماذا؟** من هذا الدرس، وكلّفهم بالتفكير في الارتباطات المتصلة بدرجات الطلاب.

اطرح السؤال التالي:

- طلب ممثلو إحدى الشركات دراسةً عن مدى فعالية منتجٍ تجريبي.

(يُتبَع في الصفحة التالية)

- ما نتائج الدراسة التي يدوّنون رؤيتها؟ حين يقضي الطلاب وقتًا أطول في استخدام المواد التجريبية، تزداد درجات الاختبار (ارتباط إيجابي).
- ما النتائج التي ستشكّل خيبة أمل بالنسبة للشركة؟ عدم وجود ارتباطٍ أو وجود ارتباطٍ سلبي
- كيف يمكن أن تعلن الشركة عن نتائج دراسةٍ ملائمة؟ الإجابة النموذجية: مع انتهاء الطلاب من كل فقرةٍ ضمن الاختبار، يمكن أن تتوقع زيادة نتائج الاختبار بمقدار نقطتين.

1 الارتباط

يوضح **المثال 1** كيفية حساب معامل الارتباط. ويوضح **المثال 2** كيفية اختبار دلالية معامل الارتباط.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 **دراسة الرواتب** أجرى باحث دراسةً لتحديد ما إذا كانت هناك علاقة خطية بين عدد سنوات خبرة الإدارة والراتب السنوي. يعرض الجدول في الهامش السفلي نتائج استبيانٍ على 20 مديرًا. شكّل مخطط انتشارٍ للبيانات، وحدّد العلاقة القائمة. ثم احسب معامل الارتباط وفسره. يساوي معامل الارتباط 0.9155، ويقترح ذلك إمكانية وجود ارتباطٍ خطيٍ إيجابي وقوي.

[1, 20] scl: 1 by [50,000, 100,000] scl: 1000

لاحظ من الصيغة أن معامل الارتباط هو متوسط ناتج ضرب القيم المعيارية لـ x والقيم المعيارية لـ y. يمكن أن يكون الحساب اليدوي لمعامل الارتباط مملًا. ولذا فنحن نعتمد غالبًا على برامج الحاسوب أو حاسبة التمثيل البياني.

نصيحة دراسية

مقاومة معامل الارتباط مِثل الوسط الحسابي والانحراف المعياري، فإن r يُمثل إحصاء عديم المقاومة. ومن الممكن أن يتأثر بالقيم المتطرفة.

مثال 1 حساب معامل الارتباط وتفسيره

دراسة العلاقة بين النوم والدرجات الدراسية يُجري كاتب في صحيفة طلابية دراسةً لتحديد ما إذا كانت هناك علاقة خطية بين متوسط عدد ساعات النوم لكل طالب في الليلة ومتوسط إجمالي درجاته. ويوضح الجدول البيانات التي جمعها الكاتب. ارسم مخطط انتشار للبيانات وحدد العلاقة. بعد ذلك احسب معامل الارتباط وفسرّه.

عدد ساعات النوم	إجمالي عدد الدرجات	عدد ساعات النوم	إجمالي عدد الدرجات
6.6	2.2	8.0	2.9
6.6	2.4	8.0	3.1
6.7	2.3	8.1	3.3
6.8	2.3	8.2	3.3
6.8	2.2	8.2	3.2
7.0	2.6	8.3	2.8
7.0	2.7	8.4	3.1
7.2	2.8	8.6	3.3
7.4	2.6	8.7	3.4
7.4	3.0	8.8	3.1
7.4	2.9	8.8	3.2
7.5	2.7	8.8	3.4
7.7	2.8	9.1	3.3
7.9	2.9	9.2	3.8
7.9	3.0	9.2	3.5

الخطوة 1 مثلْ بيانيا مخططًا لانتشار البيانات.

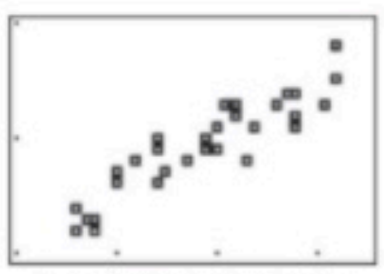
أدخل البيانات إلى L1 و L2 على حاسبتك الآلية. بعد ذلك افتح Plot1 ضمن قائمة STAT PLOT واختر استخدام L1 الخاص بـ Xlist و L2 الخاص بـ Ylist. مَثّلْ مخطط الانتشار بيانيًا بالضغط على ZoomStat أو بالضغط على GRAPH وضبط النافذة يدويًا (الشكل 10.7.1). يتضح من التمثيل البياني أن البيانات لها ارتباط خطي موجب.

1. يبدو أن للبيانات ارتباط خطي سالب؛ $r \approx -0.926$؛ ويوضح معامل الارتباط أن للبيانات ارتباط خطي سالب قوي.

[0, 7] scl: 1 by [40, 70] scl: 5

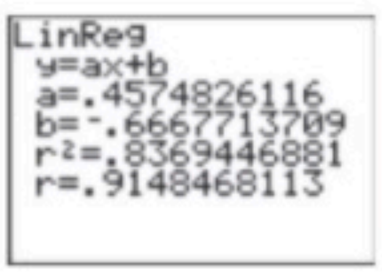
الخطوة 2 حساب معامل الارتباط وتفسيره.

اضغط على STAT واختر LinReg(ax+b) ضمن قائمة CALC (الشكل 10.7.2). يبلغ معامل الارتباط r حوالي 0.9148. وبسبب قرب r من 1، فهذا يقترح احتمال وجود ارتباط خطي موجب قوي للبيانات. وهذا التقييم العددي للبيانات يتوافق مع التقييم البياني الذي أجريناه.



[6, 9.5] scl: 1 by [2, 4] scl: 1

الشكل 10.7.1



الشكل 10.7.2

كمية الأمطار (cm)	درجة الحرارة (C°)
5.35	41.3
4.03	44.3
3.77	46.6
2.51	50.4
1.84	56.1
1.59	61.4
0.85	65.3
1.22	65.7
1.94	60.8
3.25	53.5
5.65	46.3
6.00	41.6

الشكل 10.7.3

تمرين موجّه

1. **الأرصاد الجوية** يُوضح برنامج الأرصاد الجوية بعض الأحوال الخاصة في إحدى المدن حيث تم إجراء دراسة لتحديد احتمال وجود علاقة خطية بين متوسط كمية الأمطار الشهرية ودرجة الحرارة. ويوضح الجدول الموجود بالشكل 10.7.3 البيانات المجمّعة. ارسم مخطط انتشار لهذه البيانات ثم احسب معامل ارتباط البيانات وفسّرْه.

في المثال 1، تمثل البيانات المجمعة مجرد عينة من المجتمع الكلي للمدرسة؛ ولذا، فإن r تمثل *معامل ارتباط العينة*. ولكي تكون r تقديرًا صحيحًا لمعامل ارتباط المجتمع الإحصائي ρ، يجب أن تكون الافتراضات التالية صحيحة.

- المتغيران x و y مرتبطان خطيا.
- المتغيران هما متغيران عشوائيان.
- المتغيران لهما توزيع طبيعي ذو متغيرين. وهذا لأن x و y ناتجان عن مجتمع إحصائي موزع توزيعًا طبيعيا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

سنوات الخبرة	0.5	0.5	1.0	1.0	1.0	1.5	1.5	2.0	2.0	2.0
الراتب (AED)	52,000	55,000	62,000	57,000	61,000	60,000	55,000	64,000	64,000	67,000
سنوات الخبرة	2.0	3.0	4.0	4.0	4.5	8.0	9.0	9.5	9.5	15.0
الراتب (AED)	68,000	70,000	66,000	74,000	74,000	80,000	75,000	85,000	89,000	90,000

644 | الدرس 10-7 | الارتباط والانحدار الخطي

نفضّل استخدام قيمة r لعمل استنتاج عن العلاقة بين المتغيرين x وy للمجتمع الإحصائي كافة. ولتنفيذ ذلك، يجب أن نحدد ما إذا كانت قيمة $|r|$ كبيرة بما يكفي لاستنتاج وجود علاقة ذات دلالة بين x وy.

لتحديد ذلك، يمكنك إجراء اختبار الفرضية. ستجد أن فرضية العدم والفرضية البديلة لاختبار ثنائي الذيل الخاص بمعامل ارتباط المجتمع الإحصائي ρ يكونان كالتالي.

لا يوجد ارتباط بين المتغيرين x و y في المجتمع الإحصائي. $H_0: \rho = 0$

يوجد ارتباط بين المتغيرين x و y في المجتمع الإحصائي. $H_a: \rho \neq 0$

يمكننا استخدام اختبار t كما هو موضح أدناه لاختبار دلالة معامل الارتباط.

المفهوم الأساسي المعادلة التي تخص اختبار t لمعامل الارتباط

بالنسبة لاختبار t الخاص بالارتباط بين المتغيرين، فإن إحصاء الاختبار بالنسبة لقيمة ρ هو معامل الارتباط للعينة r وإحصاء الاختبار المعياري t يتم استنتاجه عن طريق المعادلة

$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$، حيث $n - 2$ هي درجات الحرية.

قراءة في الرياضيات

معامل ارتباط المجتمع الإحصائي الحرف اليوناني ρ المستخدم ليمثل معامل ارتباط المجتمع الإحصائي يُنطق "رو" (rho).

مثال 2 من الحياة اليومية اختبار الدلالة

دراسة العلاقة بين النوم والدرجات الدراسية في المثال 1، تمكنتَ من حساب معامل الارتباط r لعدد 30 زوجًا من بيانات نوم الطلاب وإجمالي درجاتهم وبلغ حوالي 0.9148. اختبر دلالة معامل الارتباط هذا عند المستوى 5%.

الخطوة 1 اذكر الفرضيات.

$H_0: \rho = 0$ $\qquad$ $H_a: \rho \neq 0$

الخطوة 2 تحديد القيم الحرجة.

إجراء اختبار الدلالة عند المستوى 5% يعني أن $\alpha = 0.05$. وبما أن هذا الاختبار هو اختبار ثنائي الذيل، يتم تحديد القيم الحرجة عن طريق $\frac{\alpha}{2}$ أو 0.025.

باستخدام حاسبة التمثيل البياني، تصبح القيم الحرجة لــ $\alpha = 0.025$ مع $30 - 2$ أو 28 درجة من درجات الحرية هي $t = \pm 2.0$.

```
invT(0.025,28)
        -2.048407113
invT(1-0.025,28)
         2.048407113
```

الخطوة 3 احسب إحصاء الاختبار.

احسب إحصاء الاختبار لــ ρ.

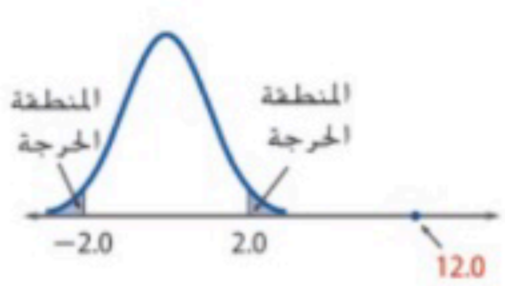
$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

$n = 30$ و $r = 0.9148$

$$= 0.9148\sqrt{\frac{30-2}{1-(0.9148)^2}}$$ أو حوالي 12.0

الخطوة 4 ارفض فرضية العدم أو لا ترفضها.

بما أن $12.0 > 2.0$، فالإحصاء يقع داخل المنطقة الحرجة وتصبح فرضية العدم مرفوضة.



عند مستوى 5%، هناك ما يكفي من الأدلة أن نخلص إلى أن هناك ارتباط كبير بين متوسط مقدار نوم الطالب كل ليلة ومتوسط إجمالي درجاته.

الربط بالحياة اليومية

يعاني حوالي 40 مليون شخص في الولايات المتحدة الأمريكية من اضطرابات النوم كل عام. ومن الممكن أن تؤدي قلة النوم إلى عواقب طبية وخيمة.

المصدر: المركز الوطني لأبحاث اضطرابات النوم

تمرين موجّه

2. الأرصاد الجوية في التمرين الموجّه للمثال 1، تمكنت من حساب معامل الارتباط r لعدد 12 زوجا من بيانات سقوط الأمطار ودرجات الحرارة. اختبر دلالة معامل الارتباط هذا عند المستوى 10%.

2. بما أن $t \approx -7.76$ و $-7.76 < -1.81$ يقع الإحصاء داخل المنطقة الحرجة وفرضية العدم مرفوضة. إذًا، توجد دلالة للارتباط عند المستوى 10%.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال إضافي

2 دراسة الرواتب لقد حددت في المثال الإضافي 1 أن معامل الارتباط r لخبرة المدير والراتب كان يساوي 0.9155. اختبر دلالة معامل الارتباط هذا عند المستوى 5%. بما أن $t \approx 9.7$ و $9.7 > 2.1$، فإن الإحصاء يقع داخل المنطقة الحرجة ونظريةُ العدم مرفوضة. ولذلك فإن الارتباط دلاليّ عند المستوى 5%.

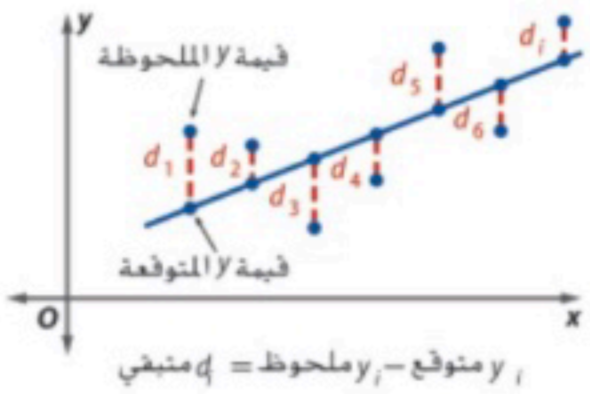
إرشاد للمعلمين الجدد

حتى لو كان $n \geq 30$، فيمكن استخدام التوزيعات t على الرغم من ذلك مكان التوزيعات الطبيعية.

2 الانحدار الخطي

الانحدار الخطي بعد تحديد الارتباط بين متغيرين على أنه ذو دلالة، فالخطوة التالية هي تحديد معادلة **خط الانحدار**. ويسمى أيضًا **المستقيم الأفضل مواءمة**. يصف خط الانحدار كيفية تغير متغير الاستجابة y عندما يتغير المتغير التفسيري x.

في حين أنه يمكن رسم العديد من المستقيمات الأفضل تناسُب من خلال مجموعة من النقاط، فإن المستقيم الأكثر استخدامًا محددًا بمعايير معينة. فكّر في مخطط الانتشار وخط الانحدار الموضحَين أمامك. الفرق d بين قيمة y الملحوظة وقيمة y المتوقعة على خط الانحدار يُسمّى **الناتج المتبقي**.



y_i متوقع $- y_i$ ملحوظ $= d_i$ متبقي

تصبح النواتج المتبقية موجبة عندما تكون القيمة الملحوظة فوق الخط، وتصبح سالبة عندما تكون القيمة الملحوظة تحت الخط، وتساوي صفرًا عندما تكون على الخط. **خط الانحدار ذو المربعات الأقل** هو الخط الناشئ عندما يكون مجموع مربعات النواتج المتبقية أقل ما يمكن.

المفهوم الأساسي معادلة خط الانحدار ذي مربعات أقل

معادلة خط الانحدار ذي المربعات الأقل للمتغير التفسيري x ومتغير الاستجابة y هي $\hat{y} = ax + b$.

يتم استنتاج الميل a والتقاطع مع المحور y عند b في هذه المعادلة باستخدام

$$a = r\frac{s_y}{s_x} \text{ ، } b = \bar{y} - a\bar{x},$$

حيث يمثل r معامل الارتباط بين المتغيرين، و $\bar{x}$ و $\bar{y}$ يمثلان متوسطيهما و s_x و s_y يمثلان انحرافيهما المعياريين.

قراءة في الرياضيات

رمز معادلة الانحدار الرمز $\hat{y}$ يُقرأ y hat ويُستخدم لتأكيد أن المعادلة تعطي الاستجابة المتوقعة وليست الفعلية y لأي x.

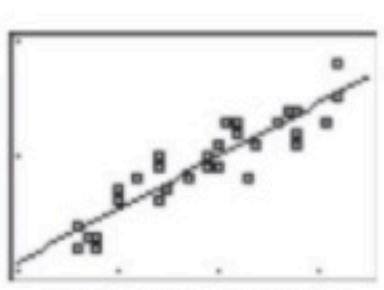
ليس من الضروري حساب معادلة الانحدار ذات المربعات الأقل بطريقة يدوية مثل حساب معامل الارتباط. فباستخدام برامج الحاسوب أو حاسبة التمثيل البياني، يمكنك إيجاد الميل a وتقاطُع y مع b على خط الانحدار ذي المربعات الأقل بالنسبة لقيم المتغيرات.

مثال 3 إيجاد خط الانحدار ذي المربعات الأقل

دراسة العلاقة بين النوم والدرجات الدراسية **أوجِد معادلة خط الانحدار للبيانات المستخدَمة في المثال 1. فسّرْ الميل والتقاطع في السياق ثم قيّمْ مدى ملاءمة معادلة تمثيل النماذج عن طريق تمثيلها بيانيًا، جنبًا إلى جنب مع مخطط انتشار البيانات، في النافذة نفسها.**

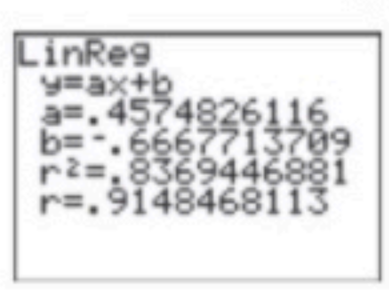
وباستخدام نفس النافذة التي استخدمتها للحصول على معامل الارتباط (الشكل 10.7.4). فإن معادلة الانحدار ذي المربعات الأقل هي تقريبًا $\hat{y} = 0.457x - 0.667$. والميل a – 0.457 يوضح أنه مع كل ساعة نوم إضافية، سيزداد معدل درجات الطالب بمقدار 0.457 نقطة. والتقاطع مع المحور y عند 0.667– – b يوضح أنه عندما يبلغ معدل الطالب 0 من النوم، فإن معدل درجاته يصبح أقل من 0. وهذا غير ممكن.

بما أن البيانات تبدو مبعثرة حول المستقيم بشكل عشوائي $\hat{y} = 0.457x - 0.667$ يبدو أن خط الانحدار هذا متلائم مع البيانات (الشكل 10.7.5).



[6, 9.5] scl: 1 by [2, 4] scl: 1

الشكل 10.7.5



الشكل 10.7.4

تمرين موجّه

3. **الأرصاد الجوية** أوجد معادلة خط الانحدار لبيانات الأمطار ودرجات الحرارة المستخدمة في التمرين الموجّه في المثال 1. فسّرْ الميل والتقاطع في السياق، ثم قيّمْ مدى ملاءمة معادلة تمثيل النماذج وذلك بتمثيلها بيانيا و تمثيل مخطط انتشار البيانات، في النافذة نفسها.

3. $\hat{y} = -4.638x + 67.461$؛ **يشير الميل** $a = -4.638$ **إلى أنه مع تساقط كل قطرة مطر، تهبك درجة الحرارة بمقدار 4.638°F. وتشير نقطة التقاطع مع المحور الرأسي** y 67.461 – b **إلى أنه عند هطولٍ مطري قيمته 0 بوصة، ستساوي درجة الحرارة تقريبًا 67.5°F.**

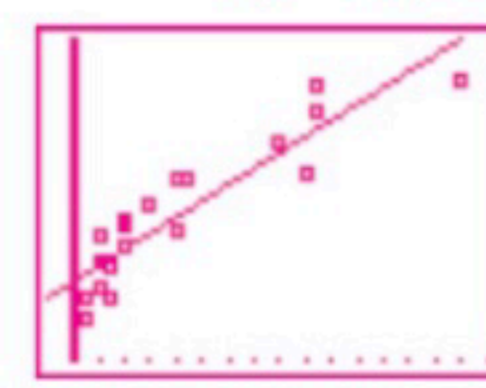
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 الانحدار الخطي

يعرض **المثال 3** كيفية إيجاد خط انحدارٍ ذي مربعاتٍ أقل. ويوضح **المثال 4** كيفية تمثيل مخطط القيمة الباقي وتحليله. ويوضح **المثال 5** كيفية تحديد القيم المتطرفة المؤثرة. ويوضح **المثال 6** كيفية وضع تنبؤاتٍ عبر معادلات الانحدار.

مثال إضافي

3 **دراسة الراتب** أوجد معادلة مستقيم انحدار البيانات المستخدمة في المثال الإضافي 1. وفسّر الميل ونقطة التقاطع مع المحور الرأسي y في السياق. ثم قيّم مواءمة معادلة التمثيل عبر تمثيلها بيانيًا إضافةً إلى مخطط تشتت البيانات في النافذة نفسها. $\hat{y} = 2564x + 57{,}953$؛ يشير الميل $a = 2564$ إلى أنّ الراتب يزداد عن كل سنة خبرةٍ بمقدار AED 2564. وتشير نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y عند 57,953 أن مديرًا بلا خبرةٍ يمكن أن يتوقع كسب AED 57,953 بمثابة راتبٍ ابتدائي.



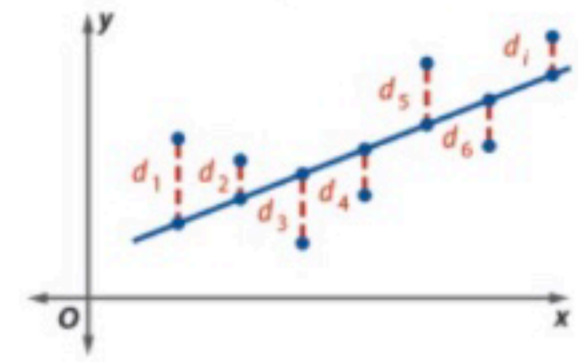
[1, 20] scl: 1 by [50,000, 100,000] scl: 1000

إرشاد للمعلمين الجدد

r^2 تمثل قيمة r^2 النسبة المئوية لتباين متغير الاستجابة في معادلة الانحدار الخطي. $1 - r^2$ هي النسبة المئوية لتباين متغير الاستجابة في البواقي.

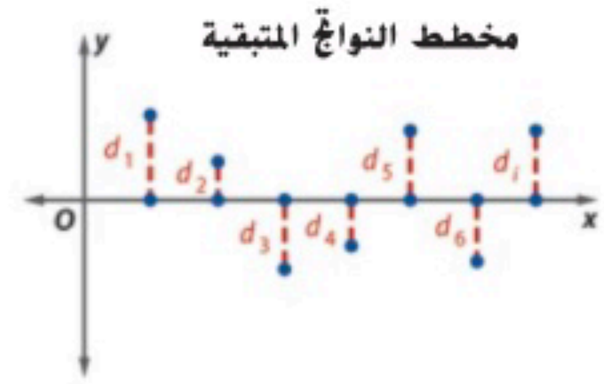
يصف خط الانحدار ذو المربعات الأقل النمط الشامل في مجموعة من البيانات ذات المتغيرين. كما في تحليل البيانات ذات المتغير الواحد، يجب دومًا أن تبحث عن الانحرافات اللافتة للنظر، أو القيم المتطرفة، من هذا النمط. تذكر أن النواتج المتبقية تقيس مقدار البيانات التي تحيد عن خط الانحدار.

مخطط الانتشار لخط الانحدار



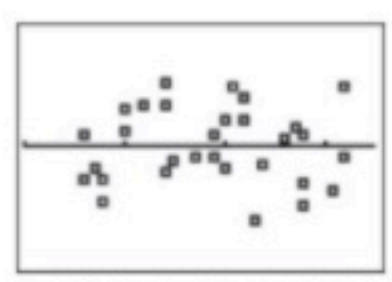
إن فحص مخطط الانتشار للنواتج المتبقية، والذي يُسمى **مخطط النواتج المتبقية**، يمكن أن يساعدك في تقييم مدى دقة وصف خط الانحراف للبيانات. ففي مخطط النواتج المتبقية، يتناظر المستقيم الأفقي عند 0 مع خط الانحدار. يمكنك إنشاء مخطط نواتج متبقية باستخدام حاسبة التمثيل البياني خاصتك. فإذا ظهر مخطط النواتج المتبقية منتشرًا بصورة عشوائية ومتمركزًا حول $y = 0$. إذًا سوف يكون استخدام نموذج خطي للبيانات اختيارًا مؤيدًا. أمّا إذا كان المخطط يعرض نمطًا على شكل منحنى، فلن يكون استخدام نموذج خطي اختيارًا مؤيدًا.

مخطط النواتج المتبقية



مثال 4 التمثيل البياني لمخطط النواتج المتبقية وتحليله

دراسة العلاقة بين النوم والدرجات الدراسية مثل مخطط النواتج المتبقية الخاص ببيانات متوسط ساعات النوم والدرجة الإجمالية للطالب في المثال 1 تمثيلًا بيانيًا وحلّله لتحديد إذا ما كان النموذج الخطي الموجود في المثال 3 ملائمًا أم لا.



[6, 9.5] scl: 1 by [−0.5, 0.5] scl: 1

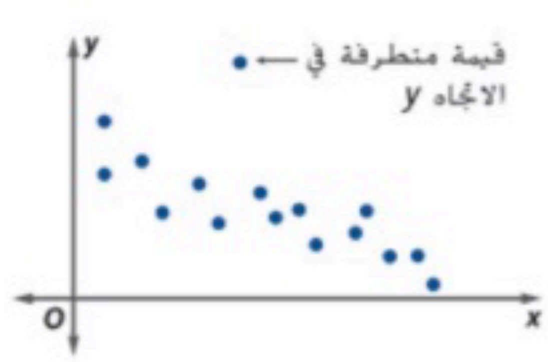
بعد حساب خط الانحدار ذي المربعات الأقل في المثال 3، يمكنك الحصول على مخطط نواتج متبقية من البيانات عن طريق تشغيل Plot2ضمن القائمة STAT PLOT واختيار باستخدام L1من أجل Xlist و RESIDمن أجل Ylist. ويمكنك الحصول على RESIDعبر ضغط 2nd STAT واختيار RESID من قائمة الأسماء. مثّل مخطط التشتت الخاص بالبواقي عبر ضغط ZoomStat.

تظهر النواتج المتبقية متناثرة عشوائيًا وتتمحور حول خط الانحدار عند $y = 0$. وهذا يدعم الادعاء بأن استخدام نموذج خطي أمر مناسب.

تمرين موجّه

4. **الأرصاد الجوية** مثل مخطط البواقي الخاص ببيانات الأمطار ودرجة الحرارة تمثيلًا بيانيًا وحلّله لتحديد إذا ما كان النموذج الخطي الموجود في التمرين الموجّه للمثال 3 ملائمًا أم لا.

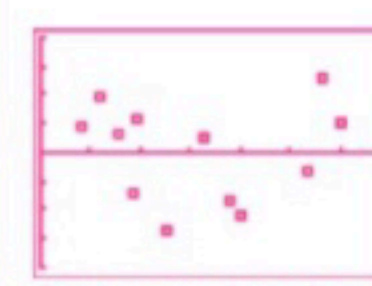
يساعد مخطط النواتج المتبقية على تضخيم انحرافات نقاط البيانات من خط الانحدار؛ مما يجعل من الأسهل معرفة القيم المتطرفة في البيانات التي تقع في الاتجاه y. ويمكن للقيم المتطرفة عند الاتجاه y أن تشير إلى أخطاء في تسجيل البيانات أو في بعض الحالات الفريدة، لا سيما عند وصف الاتجاهات المجتمعية أو الصفات السلوكية.



نصيحة دراسية

النواتج المتبقية بينما يمكن حساب البواقي من أي خط انحدار مزود بالبيانات، فالنتائج المتبقية من خط الانحدار ذي المربعات الأقل تحتوي على خاصية خاصة. فمتوسط البواقي ذات المربعات الأقل سوف يكون صفرًا دائماً.

.4



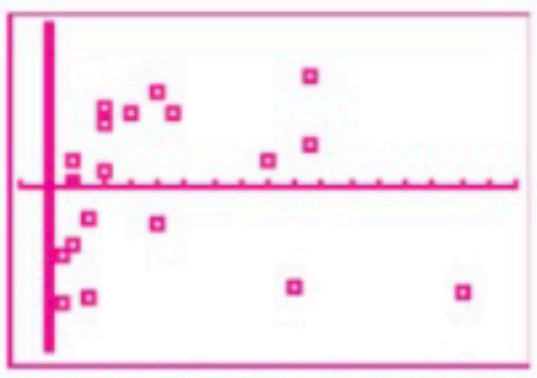
[0, 7] scl: 1 by [−8, 8] scl: 2

تَظهر النواتج المتبقية متناثرة عشوائيًا وتتمحور حول خط الانحدار عند $y = 0$. وهذا يدعم الادعاء بأن استخدامنا لنموذج خطي أمر مناسب.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال إضافي

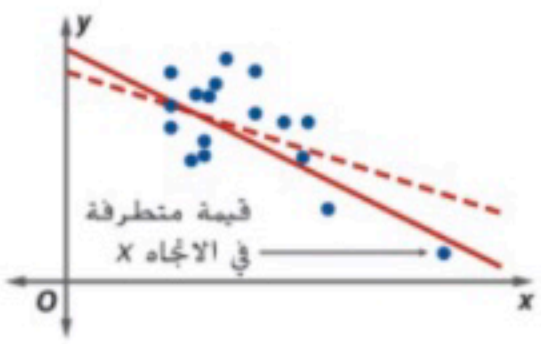
4 **دراسة الراتب** مثل مخطط البواقي الخاص ببيانات دراسة الراتب في المثال الإضافي 1 لتحديد إذا ما كان النموذج الخطي الموجود في المثال الإضافي 3 ملائمًا أم لا.



[−1, 17] scl: 1 by [−10,000, 10,000] scl: 100

تبدو البواقي منتشرةً عشوائيًا ومتمركزةً حول مستقيم الانحدار عند $y = 0$. من الملائم استخدام نموذجٍ خطي.

647



القيم المتطرفة في الاتجاه x يمكن أن يكون لها تأثير قوي على موقع خط الانحدار. ففي الشكل، يتم عرض اثنين من خطوط الانحدار ذات المربعات الأقل. ويتم حساب الخط المتصل باستخدام جميع البيانات، بينما يُحسب الخط المتقطع بحذف القيمة المتطرفة في الاتجاه x. لاحظ أن حذف هذه النقطة يؤدي إلى تحريك خط الانحدار بدرجة يسهل ملاحظتها.

نصيحة دراسية

تأثير إن تأثير القيمة المتطرفة ليست مسألة نعم أو لا، بل هي مسألة درجة ولذلك فهي غير موضوعية.

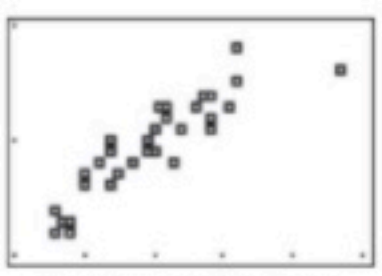
يقال إن نقطة البيانات الفردية التي تغيير خط الانحدار إلى حد كبير تكون **مؤثرة**. فالقيم المتطرفة في الاتجاه x تؤثر غالبًا على خط الانحدار ذي المربعات الأقل. ولتحديد ما إذا كانت نقطة عبارة عن قيمة متطرفة مؤثرة، احسب خطوط الانحدار ومثلها بيانيا مع أو بدون هذه النقطة. فهذه النقطة تكون مؤثرة إذا كان هناك اختلاف كبير في مواقع خطوط الانحدار عند إزالة هذه النقطة.

مثال 5 تحديد القيم المتطرفة المؤثّرة

عدد ساعات النوم	إجمالي عدد الدرجات
10.7	3.6

دراسة العلاقة بين النوم والدرجات الدراسية افترض أن الكاتب الصحفي المذكور في المثال 1 والذي أجرى دراسة عن العلاقة بين النوم وإجمالي مجموع الدرجات الدراسية قد تلقّى في وقت لاحق بعض المعلومات الإضافية المدرَجة في الجدول، وهي عبارة عن قيمة متطرفة.

a. **صمّمْ مخططًا جديدًا لانتشار بيانات العلاقة بين النوم وإجمالي مجموع الدرجات يحتوي على نقطة البيانات الإضافية.**


[6, 11] scl: 1 by [2, 4] scl: 1

أضِفْ نقطة البيانات إلى نهاية L1 و L2 ثم مَثّل البيانات بيانيا. مع ضبط النافذة عند الضرورة. ويمكنك من خلال التمثيل البياني معرفة أن هذه النقطة عبارة عن قيمة متطرفة في الاتجاه x.

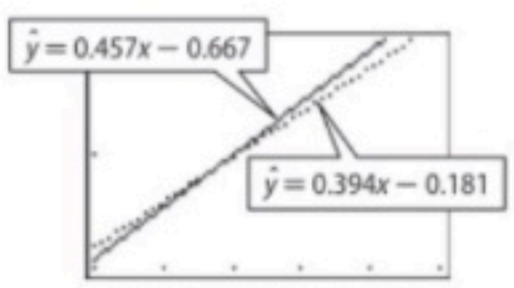
b. **احسب معامل الارتباط وخط الانحدار ذا المربعات الأقل مع هذه القيمة المتطرفة. وصِفْ تأثير هذه القيمة المتطرفة على قوة الارتباط وعلى الميل وتقاطع خط الانحدار.**

البيانات الأساسية: $\hat{y} = 0.457x - 0.667$ $r \approx 0.9148$

البيانات مع القيمة المتطرفة: $\hat{y} = 0.394x - 0.181$ $r \approx 0.8934$

أدت القيمة المتطرفة إلى تخفيض قوة الارتباط. وأدى التغيير في ميل معادلة الانحدار إلى هبوط المعدل – الذي يتم رفع درجات كل طالب وفقًا له بسبب النوم الإضافي – من 0.457 نقطة في الساعة إلى 0.394 كل ساعة. وفي الوقت ذاته، رفعت هذه القيمة المتطرفة من التقاطع مع محور y، مشيرةً إلى أن الطالب الذي لا ينام سيحصل على مجموع درجات يقترب من 0.

c. **خَطِطْ كلا خطي الانحدار في نفس النافذة. ثم اذكرْ ما إذا كانت القيمة المتطرفة مؤثرة أم لا. اشرح استنتاجك.**



[6, 11] scl: 1 by [2, 4] scl: 1

يوضح التمثيل البياني لخطوط الانحدار أن خط الانحدار يتحرك أكثر من مقدار صغير عند إضافة القيمة المتطرفة. إذًا، القيمة المتطرفة (11.7, 3.6) مؤثرة.

تمرين موجّه

5. **الأرصاد الجوية** بفرض أن القيمة (2.51, 50.4) لكمية الأمطار المتساقطة ودرجة الحرارة من التمرين الموجّه 1 تم استبدالها بالقيمة (0.5, 50.4).

A. ارسم مخطط انتشار للبيانات الأساسية لدرجة الحرارة/الأمطار التي تتضمن هذه القيمة المتطرفة.

B. احسب معامل الارتباط وخط الانحدار ذا المربعات الأقل مع هذه القيمة المتطرفة. وصِفْ تأثير هذه القيمة المتطرفة على قوة الارتباط وعلى الميل وتقاطع خط الانحدار.

C. خَطّطْ كلا خطي الانحدار في نفس النافذة. ثم اذكرْ ما إذا كانت القيمة المتطرفة مؤثرة أم لا. اشرح استنتاجك.

5A.


[0,7] scl: 1 by [40, 70] scl: 4

5B. $r \approx -0.83, \hat{y} = -3.819x + 64.229$; **الإجابة النموذجية: أدّت القيمة المتطرفة إلى تخفيض قوة الارتباط. وأدى التغيير في ميل معادلة الانحدار إلى هبوط المعدل الذي انخفض به متوسط درجة الحرارة الشهرية من 4.64°F- إلى 3.82°F-. وقد أدت القيمة المتطرفة إلى إنزال نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y، ما يشير إلى أن درجة الحرارة الشهرية المتوسطة خلال فصل خالٍ من الهطول المطري تساوي 64.2°.**

5C. تُعدّ النقطة (0.5, 50.4) قيمة متطرفة في الاتجاه x. وتؤدي إزالة هذه النقطة إلى تحريك معادلة الانحدار الأصلية لمسافةٍ أكبر من الصغيرة، إذًا القيمة المتطرفة مؤثرة، كما هو موضح في التمثيل البياني.

[0, 7] scl: 1 by [40, 70] scl: 4

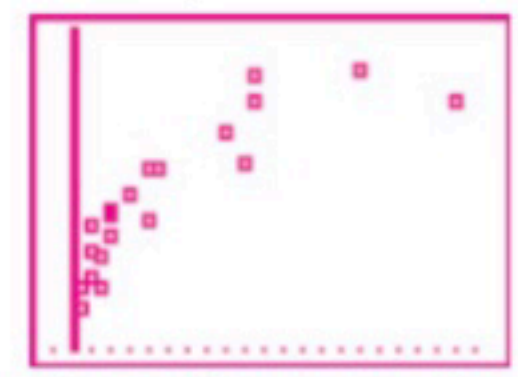
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال إضافي

5 افترض أن مديرًا آخر خضع لاستبيانٍ في دراسة الراتب الواردة في المثال الإضافي 1. يضم الجدول البيانات المأخوذة من هذا المدير.

سنوات الخبرة	الراتب (AED)
20.0	85,000

a. صمّمْ مخططًا جديدًا لانتشار بيانات الراتب يحتوي على نقطة البيانات الإضافية.


[−1, 22] scl: 1 by [45,000, 100,000] scl: 1000

b. احسب معامل الارتباط وخط الانحدار ذي المربعات الأقل عند هذه القيمة المتطرفة. وصِف أثر هذه القيمة المتطرفة في قوة الارتباط وفي ميل خط الانحدار ونقطة تقاطعه. $r \approx 0.8582$ أسفل $0.9155, \hat{y} = 1890x + 60{,}057$؛ الإجابة النموذجية: أضعفت القيمة المتطرفة من قوة الارتباط. وقد سبب التغيير في ميل معادلات الانحدار هبوط معدل زيادة الراتب سنويًا بمقدار AED 674. وفي الوقت نفسه، رفعت القيمة المتطرفة نقطة التقاطع مع المحور الأفقي y، ما يشير إلى أن الراتب البدائي سيساوي تقريبًا AED 60,057.

648 | الدرس 7-10 | الارتباط والانحدار الخطي

وبمجرد تحديد أن معامل الارتباط الخطي لمجموعة من البيانات له دلالة وإيجاد خط الانحدار ذي المربعات الأقل، يمكنك حينئذٍ استخدام المعادلة لعمل تنبؤات عبر نطاق البيانات. ويسمى عمل مثل هذه التنبؤات **الاستكمال الداخلي**. إن استخدام المعادلة في عمل تنبؤات تقع خارج نطاق قيم x التي استخدمتها للحصول على خط الانحدار يسمى **الاستكمال الخارجي**. وينبغي تجنب الاستكمال الخارجي، نظرًا لأن قليلًا من علاقات الحياة اليومية خطي بالنسبة لكل قيم المتغير التفسيري.

انتبه!
التنبؤ لا تستخدم خط الانحدار ذا المربعات الأقل في عمل تنبؤات إلا إذا كان النموذج الخطي مناسبًا وكان معامل الارتباط ذا دلالة. خلاف ذلك، ستكون هذه التنبؤات غير ذات معنى.

مثال 6 التنبؤات بالانحدار

دراسة العلاقة بين النوم والدرجات الدراسية إن معادلة الانحدار لمتوسط ساعات النوم x وإجمالي مجموع الدرجات y من مثال 3 كانت $\hat{y} = 0.457x - 0.667$. استخدم هذه المعادلة لتتنبأ بإجمالي مجموع الدرجات المتوقعة (لأقرب جزء من عشرة) للطالب الذي يبلغ معدل ساعات نومه ما يلي، واذكرْ ما إذا كان هذا التنبؤ صحيحًا. اشرح.

a. 8 ساعات

أوجد قيمة معادلة الانحدار لـ $x = 8$ لتحسب قيمة $\hat{y}$.

$\hat{y} = 0.457x - 0.667$	معادلة الانحدار
$= 0.457(8) - 0.667$	$x = 8$
$= 3.656 - 0.667$	أوجد حاصل الضرب.
$= 2.989$	اطرح.

باستخدام هذا النموذج، نتوقع أن الطالب الذي يصل متوسط ساعات نومه إلى 8 ساعات سيحصل على إجمالي مجموع درجات يبلغ حوالي 3.0. وهذا الإجمالي صحيح ومنطقي لأن 8 هي قيمة x في نطاق البيانات الأصلية.

b. 10.5 ساعات

$\hat{y} = 0.457x - 0.667$	معادلة الانحدار
$= 0.457(10.5) - 0.667$	$x = 10.5$
$= 4.7985 - 0.667$	أوجد حاصل الضرب.
$= 4.1315$	اطرح.

باستخدام هذا النموذج، نتوقع أن الطالب الذي يصل متوسط ساعات نومه إلى 10.5 ساعات سيحصل على إجمالي مجموع درجات يبلغ حوالي 4.1. وهذه القيمة غير صحيحة ولا منطقية، بما أننا نقدّر الاستكمال الخارجي لقيمة y بالنسبة لقيمة x التي تقع بعيدًا خارج نطاق البيانات الأصلية. كما أنها غير ذات معنى، حيث لا يمكن للطالب أن يحصل على إجمالي مجموع درجات أعلى من 4.0 في هذا النموذج.

6A. متوسط درجة الحرارة الشهرية الذي يبلغ حوالي 53.5°F هو متوسط صحيح لأنه يقع داخل نطاق درجات الحرارة الأخرى.

6B. متوسط درجة الحرارة الشهرية الذي يبلغ حوالي 30.34°F غير صحيح لأنه أقل بمقدار 10° عن درجتي الحرارة الأقل في مجموعة البيانات.

تمرين موجّه

6. الأرصاد الجوية استخدم معادلة الانحدار لبيانات الأمطار ودرجة الحرارة من التمرين الموجّه 3 لتتنبأ بدرجة الحرارة المتوقعة (مقربة لأقرب جزء من عشرة من الدرجة) لمدة شهور مع متوسط كمية الأمطار في كل منها. اذكر ما إذا كان هذا التنبؤ صحيحًا. اشرح.

A. 3 cm　　B. 8 cm

انتبه!
الارتباط مقابل السببية لمجرد أن اثنين من المتغيرات يرتبطان بشدة لا يعني بالضرورة وجود علاقة السبب والنتيجة، بل يشير الارتباط القوي إلى وجود علاقة هامة بين y و x بطريقة ما.

عند تحليل البيانات ذات المتغيرين، اتبع الخطوات المختصرة أدناه.

ملخص المفهوم تحليل البيانات ذات المتغيرين

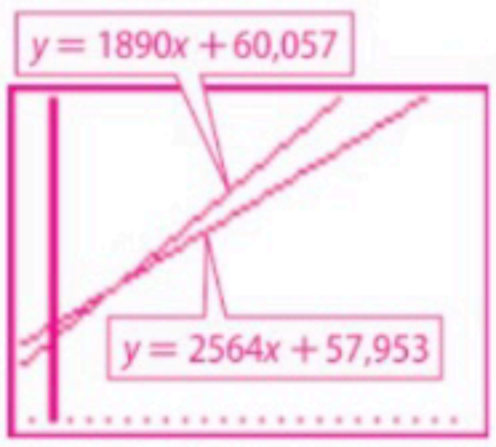
الخطوة 1	ارسم مخطط انتشار وقرّر ما إذا كانت المتغيرات تبدو مترابطة خطيا.
الخطوة 2	إذا كانت هذه المتغيرات مترابطة بشكل خطي، فاحسب قوة العلاقة عن طريق حساب معامل الارتباط.
الخطوة 3	استخدم اختبار t لتحديد ما إذا كان الارتباط ذا دلالة.
الخطوة 4	إذا كان ذا دلالة، فأوجد معادلة الانحدار ذي المربعات الأقل التي تمثل البيانات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال إضافي

المثال الإضافي 5 (يُتبع)

C. خَطّطْ كلا مستقيمي الانحدار في نفس النافذة. ثم اذكرْ ما إذا كانت القيمة المتطرفة مؤثرة أم لا. اشرح استنتاجك.



[−1, 22] scl: 1 by [45,000, 100,000] scl: 1000

يوضح التمثيل البياني لمستقيمات الانحدار أن المستقيم يتحرك أكثر من مقدار صغير عند إضافة القيمة المتطرفة. إذًا، القيمة المتطرفة (20, AED85 ,000) مؤثرة.

6 دراسة الراتب كانت معادلة الانحدار لسنوات الخبرة x والراتب y من دراسة الراتب في المثال الإضافي 1 هي $\hat{y} = 2564x + 57{,}953$. استخدم هذه المعادلة للتنبؤ بالراتب المتوقع لمدير لديه سنوات الخبرة التالية، واذكر إن كان هذا التنبؤ منطقيًا مع الشرح.

a. 6.5 أعوام AED 74,619؛ منطقي نظرًا إلى أن x هو مدى البيانات الأصلية.

b. 40 أعوام AED 160,513؛ غير منطقي نظرًا إلى أن x خارجي وبعيد عن البيانات الأصلية.

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية اطلب من الطلاب أن يعمل كل منهم بمفرده على تمثيل النقاط الواردة في المثال 1 بيانيًا على شبكةٍ إحداثية. ثم اطلب من الطلاب رسم ما يعتقدون أنه المستقيم الأفضل مواءمة. على الطلاب أن يلاحظوا باستخدام الشبكة الميل (المسافة الرأسية على الأفقية) ونقطة التقاطع مع المحور الرأسي y. واسألهم عن مدى تطابق إجابتي الميل ونقطة التقاطع مع المحور الرأسي y مع المعلّمات نفسها التي أوجدت في المثال ($a = 0.457$ أو حوالي $b = -0.667$ ،0.5 أو حوالي 0.7−).

649

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-6 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

إرشاد للمعلمين الجدد

تحويل البيانات اطلب من الطلاب تمثيل البيانات الأصلية في المثال 11. واسأل إذا ما كانت البيانات الأصلية تبدو مرتبطةً خطيًا. واشرح أن البيانات تحتاج إلى تحويلٍ قبل أن يكون النموذج الخطي ملائمًا.

انتبه!

خطأ شائع في التمرين 14، إذا كان الطلاب يزعمون أن 0.75 يمثل معامل ارتباطٍ أقوى من -0.85 لأن $-0.85 < 0.75$، فاشرح أن الارتباطات يمكن أن تكون موجبةً أو سالبة. يساوي الارتباط المثالي السالب ($r = -1$) من حيث قوة الارتباط الارتباط المثالي الموجب ($r = 1$).

التمارين

1-6. انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

للتمارين من 1 إلى 6، حلّلْ البيانات ذات المتغيرين. (الأمثلة 1-6)

a. ارسم مخطط انتشار للبيانات وحدد العلاقة. ثم احسب معامل الارتباط وفسّرْه.

b. حدّدْ إذا ما كانت هناك دلالة لمعامل الارتباط عند المستويات 1% و 5% و 10% . اشرح استنتاجك.

c. إذا كانت للارتباط دلالة عند مستوى 10%، فاذكر معادلة الانحدار ذات المربعات الأقل وفسّر الميل والتقاطع في السياق.

d. وضّح بالتمثيل البياني مخطط النواتج المتبقية وحلّله.

e. حددْ أي قيم متطرفة مؤثرة. وصِفْ تأثير القيمة المتطرفة على قوة الارتباط الأصلي وعلى ميل وتقاطع خط الانحدار الأصلي.

f. إذا تمت إزالة أي بيانات، فأعدْ تقييم أهمية الارتباط عند مستوى 10%، وإذا كان لا يزال مناسبًا، فأعدْ حساب معادلة الانحدار.

g. استخدم معادلة الانحدار لعمل التوقعات المحددة. وفسّرْ النتائج الخاصة بك، وما إذا كان التنبؤ معقولًا. اشرح استنتاجك.

1. **جرامات من الدهون والبروتينات** يتساءل رياضيّ عما إذا كان هناك ارتباط خطي كبير وذو دلالة بين عدد جرامات الدهون وجرامات البروتين في الأطعمة المختلفة. إذا كان ذلك مناسبًا، فاستخدم البيانات الواردة أدناه للتنبؤ بكمية البروتين (لكل حصة غذائية) في كل صنف متضمنًا ذلك 1 أو 5 أو 13 جرامًا من الدهون.

الدهون (g)	البروتين (g)	الدهون (g)	البروتين (g)
12	14	9	13
57	30	18	24
9	15	30	25
20	25	18	25
12	15	32	24
39	28		

2. **الألياف والسعرات الحرارية** تبيّن البيانات التالية حساب السعرات الحرارية وكمية الألياف في مجموعة متنوعة من حبوب الإفطار. استخدم البيانات للتنبؤ بالسعرات الحرارية في وجبة من الحبوب تحتوي على 4.5 أو 5.5 أو 7 جرامات من الألياف.

الألياف (g)	السعرات الحرارية	الألياف (g)	السعرات الحرارية
1.5	133.5	1	149
0.5	115.5	1.5	114.5
1	143	0.5	85.5
2.5	109.5	1	116
0	119	1.5	110
0.5	113.5	0	53.5
0.5	102	8	196.5
0.5	117.5	0.5	99.5
6	186.5	6.5	114.5
1	154	3.5	140.5
11	389	0.5	122.5
4	114.5	2	110

3. **التعليم والرعاية الصحية** توضح البيانات التالية قوائم تصنيفات الأداء في التعليم والرعاية الصحية في 14 دولة. إذا كان ذلك مناسبًا، فاستخدم البيانات للتنبؤ بترتيب الرعاية الصحية إذا كان ترتيب التعليم 15 أو 28 أو 42.

التعليم	الرعاية الصحية	التعليم	الرعاية الصحية
1	45	8	35
2	48	9	18
3	50	10	13
4	37	11	20
5	39	12	28
6	26	13	15
7	21	14	29

4. **الوزن والميل لكل جالون** يريد أحد المتسوقين تحديد ما إذا كان هناك ارتباط خطي كبير وذو دلالة بين وزن السيارات وكفاءة استهلاك الوقود على الطريق السريع. إذا كان ذلك مناسبًا، فاستخدم البيانات الواردة أدناه للتنبؤ بالمسافة التي تقطعها السيارات التي تزن 2900 و 3300 و 4000 كيلوجرام.

الوزن (kg)	KMPL	الوزن (kg)	KMPL
3450	32	3460	28
3216	32	2897	36
2636	34	2805	32
2690	40	3067	28
2875	51	2716	31
2403	36	2595	38
2972	35	2326	39
2811	34	2911	30

5. **التخرج والبطالة** أخذ خبير اقتصادي عينة من معدلات التخرج ومعدلات البطالة بين مختلف الدول في سنة معينة. إذا كان ذلك مناسبًا، فاستخدم البيانات الواردة أدناه للتنبؤ بمعدل البطالة إذا كانت معدلات التخرج 70% أو 80% أو 90%.

خريج جامعي	73	85	64	79	68	82
عاطل عن العمل	6.9	4.1	3.2	2.9	4.3	5.1
خريج جامعي	71	81	76	64	77	82
عاطل عن العمل	4.1	5.5	5	6.8	4.8	5.2

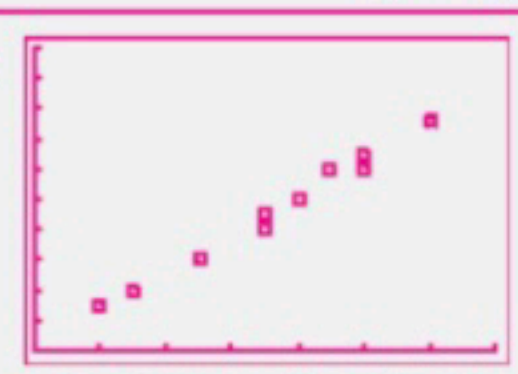
6. **تعداد السكان والجريمة** توضح البيانات التالية قوائم تصنيفات الأداء لتعداد السكان والجريمة في 14 دولة من الدول. إذا كان ذلك مناسبًا، فاستخدم البيانات للتنبؤ بتصنيف الجريمة إذا كان تصنيف السكان 15.

تعداد السكان	1	2	3	4	5	6	7
الجريمة	14	15	13	4	5	9	7
تعداد السكان	8	9	10	11	12	13	14
الجريمة	11	3	12	10	8	1	6

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابات إضافية

12a.



[0, 14] scl: 1 by [0, 20] scl: 2

$r = 0.993$

12b. الإجابة النموذجية: بما أن $t = 23.78$ و $23.78 > 1.86$، فإن فرضية العدم مرفوضة. ولذلك فإن الارتباط دلاليّ عند المستوى 10%؛ $\hat{y} = 1.23x + 0.212$.

14. صحيح؛ الإجابة النموذجية: يمكن أن يكون الارتباط الشديد إيجابيًا أو سلبيًا. ولذلك، بما أن -0.85 أقرب إلى -1 من قرب $r = 0.75$ إلى 1، فإن القيمة -0.85 تشير إلى ارتباطٍ قوي.

650 | الدرس 7-10 | الارتباط والانحدار الخطي

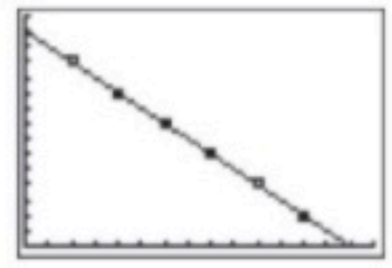
إجابات إضافية

.15 خطأ؛ الإجابة النموذجية: عند رفض فرضية العدم، فيعني ذلك أن هناك فرقًا دلاليًا بين قيمة ρ و 0.

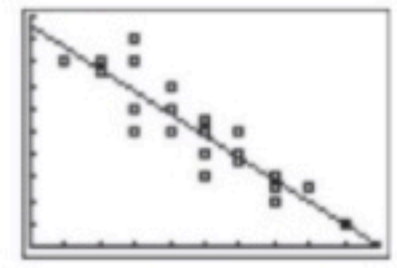
.16 الإجابة النموذجية: ستساوي الميول القيم العكسية.

B صِل بين كل من الرسوم البيانية التالية ومعامل الارتباط المقابل.

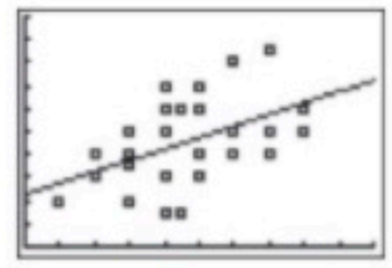
a.



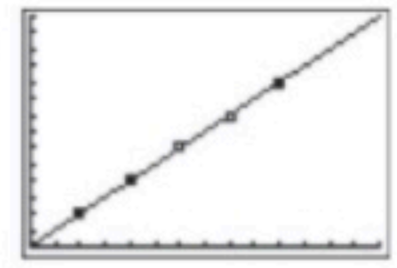
b.



c.



d.



.7 $r = -0.90$ **b**

.8 $r = 0.50$ **c**

.9 $r = 1.00$ **d**

.10 $r = -1.00$ **a**

.11 **الدخل وتناول الطعام خارج المنزل** يُجري مطعم دراسة لتحديد العلاقة بين الدخل الشهري للفرد وعدد مرات تناول ذلك الشخص للطعام به كل شهر.

الدخل	500	1125	300	750	1250	950
الوجبات	4	10	3	6	12	8

.a ارسم مخطط انتشار للبيانات ثم ضعه في صورة خطية عن طريق إيجاد $(x, \ln y)$.

.b ارسم مخطط انتشار للبيانات الخطية، واحسب r وفسرها.

.c حدد ما إذا كانت r ذات دلالة عند المستوى 5%.

.d إذا كانت r لها دلالة كبيرة، فأوجد معادلة الانحدار ذات المربعات الأقل باستخدام نموذج البيانات الخطية لإيجاد نموذج للبيانات الأصلية.

.e إذا كان ذلك مناسبًا، فاستخدم معادلة الانحدار للتنبؤ بعدد المرات التي يتناول فيها شخص طعامًا خارج المنزل إذا كان الدخل الشهري لهذا الشخص يبلغ AED 2000 . هل تنبؤك صحيح؟ اشرح استنتاجك.

6–11e. انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

.12 **إعلانات ومبيعات** ترغب شركة إعلان في تحديد قوة العلاقة بين عدد الإعلانات التي يبثها التليفزيون كل أسبوع وكمية مبيعات المنتجات (بآلاف الدراهم). **a–b. انظر الهامش.**

الإعلانات	2	3	5	7	7
المبيعات (AED)	3	4	6	8	9
الإعلانات	8	9	10	10	12
المبيعات (AED)	10	12	12	13	15

.a ارسم مخطط انتشار للبيانات وحدد العلاقة. ثم أوجد معامل الارتباط.

.b حدّد إذا ما كانت هناك دلالة لمعامل الارتباط عند المستوى 10%. وإذا كان الأمر كذلك، فأوجد معادلة الانحدار ذات المربعات الأقل.

.c بفرض أن الشركة تبث 15 إعلانًا خلال أسبوع واحد و18 إعلانًا في الأسبوع التالي، وكانت تكاليف كل إعلان AED 500. تنبأ عن الزيادة في الأرباح من الأسبوع الأول إلى الأسبوع الثاني.

AED 2190

.13 **C** **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف *معامل التحديد*.

.a **بيانيًا** ارسمْ مخطط انتشار للبيانات أدناه، ثم احسب معامل الارتباط r.

x	1	2	3	4	5	6
y	4	9	12	15	20	24

.b **عدديًا** أوجد الوسط الحسابي $\overline{y}$ لقيم y. **14**

.c **عدديًا** حدد معادلة الانحدار ذي المربعات الأقل، وأوجد قيم $\hat{y}$ المتوقعة عن طريق التعويض عن كل قيمة من قيم x في المعادلة.

.d **عدديًا** استخدم الصيغ التالية لإيجاد التغير الكلي $\Sigma(y - \overline{y})^2$، والتغير المبرر $\Sigma(\hat{y} - \overline{y})^2$ والتغير غير المبرر $\Sigma(y - \hat{y})^2$.

.e **عدديًا** يتم استنتاج معامل التحديد عن طريق $r^2 = \frac{\text{التغير المبرر}}{\text{التغير الكلي}}$ استخدم الصيغة وإجاباتك من الجزء **d** لإيجاد r^2. **0.993≈**

.f **تحليليًا** إذا كان التغير المبرر هو التغير الذي يمكن تفسيره بالعلاقة بين x و y، فما رأيك في معنى قيمة معامل التحديد الذي أوجدته؟

a, c, d, f. انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

التبرير حدد ما إذا كانت كل عبارة من العبارات التالية صحيحة أم خطأ. اشرح إجابتك. **14–15. انظر الهامش.**

.14 قيمة r التي تساوي 0.85− تشير إلى ارتباط خطي أقوى من قيمة r التي تساوي 0.75.

.15 إذا كانت فرضية العدم مرفوضة، فهذا يعني أن قيمة ρ لا تختلف كثيرًا عن 0.

.16 **تحدٍ** فكّر في مجموعتين من البيانات ذات المتغيرين، C و D، واللتين تمثلان علاقات أسيّة. مع الانحدار الأسي، فإن قيمة الأساس b في المجموعة C هي المعكوس الضربي لقيمة b في المجموعة D. ومعاملات الارتباط لكل منهما تساوي 0.99. فما العلاقة بين خطوط الانحدار الخطية عند C و D؟ **انظر الهامش.**

.17 **الاستنتاج** فكّر في مجموعة البيانات أدناه حيث يمثل الصف A المتغير التفسيري ويمثل الصف B المتغير الاستجابي.

A	21	30	44	49	52	59
B	114	127	148	154	169	179

.a ارسم مخطط انتشار للبيانات، ثم حدد معادلة خط الانحدار ذي المربعات الأقل ومثلها بيانيا في نفس نافذة مخطط الانتشار.

.b بدّلْ بين A و B وكرّر الجزء **a**.

.c ما تأثير التبديل بين المتغيرات التفسيرية ومتغيرات الاستجابة على خط الانحدار؟

a–c. انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

.18 **الكتابة في الرياضيات** صِفْ نقاط القوة والضعف لمعامل الارتباط كمقياس للارتباط الخطي لمجموعة بيانات ذات متغيرين.

انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة شاملة

19. **كرة القدم** يزعم زايد أنه قادر على رمي كرة قدم لمسافة 55 مترًا على الأقل. وبعد 37 رمية، كان متوسط المسافة هو 57.7 مترًا بانحراف معياري قدره 3.6 أمتار. فهل توجد أدلة كافية لرفض افتراض زايد عند $\alpha = 0.05$؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

20. **كرة البولينج** أرادت سها وشيخة مقارنة نتائجهما في لعبة البولينج. فسجلتا نتائج 16 مباراة كما هو موضح.
- **a.** احسب الوسط والانحراف المعياري لكل مجموعة من البيانات. **a–c. انظر الهامش.**
- **b.** أنشئ فترتي ثقة 99% لمتوسط نتائج كل من سها وشيخة.
- **c.** صِغ عبارة تقارن بين تأثير الفترتين.

سها		شيخة	
112	109	88	169
98	116	129	190
143	131	146	99
109	98	170	108
121	122	95	181
84	128	111	183
106	121	108	122
100	107	181	99

إذا كان ذلك ممكنًا، فأوجد مجموع كل متسلسلة لا نهائية.

21. $a_1 = 4, r = \frac{5}{7}$ **14**

22. $a_1 = 14, r = \frac{7}{3}$ **لا يوجد**

23. $16 + 12 + 9 + \ldots$ **64**

اكتب صيغة صريحة وصيغة ضمنية لإيجاد الحد رقم n لكل متتالية حسابية. 24–26. انظر الهامش.

24. $10, 26.5, 43, \ldots$

25. $15, -9, -33, \ldots$

26. $3, \frac{11}{3}, \frac{13}{3}, \ldots$

عبّر عن كل عدد مركب بالصورة القطبية.

27. $6 - 8i$ $10(\cos 5.36 + i \sin 5.36)$

28. $-4 + i$ $\sqrt{17}(\cos 2.90 + i \sin 2.90)$

29. $3 + 2i$ $\sqrt{13}(\cos 0.59 + i \sin 0.59)$

حدد ما إذا كان كل زوجين من المتجهات متوازيين.

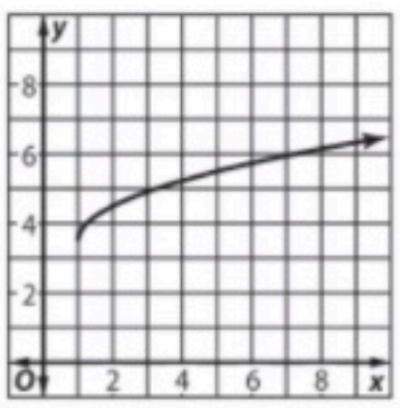
30. $\mathbf{g} = \langle 3, 4, -6 \rangle, \mathbf{h} = \langle 9, 12, -18 \rangle$ **متوازيان**

31. $\mathbf{j} = \langle 9, -15, 11 \rangle, \mathbf{k} = \langle -14, 10, 7 \rangle$ **غير متوازيين**

32. $\mathbf{n} = \langle -16, -8, -13 \rangle, \mathbf{p} = \langle -15, 9, 5 \rangle$ **غير متوازيين**

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

33. **SAT/ACT** أي مما يلي يجب أن ينطبق على الرسم البياني؟ **E**



- **I.** المجال بكامله من الأعداد الحقيقية.
- **II.** الدالة هي $y = \sqrt{x} + 3.5$
- **III.** المدى تقريبًا هو $\{y \mid y \geq 3.5\}$.

A I فقط
B II و III
C I و II و III
D II فقط
E III فقط

34. يبين الجدول إجمالي الحضور لدوري البيسبول الفرعي في بعض السنوات الأخيرة. أي مما يلي يمثل معادلة انحدار للبيانات؟ **F**

العام	الحضور (بالملايين)
1990	18.4
1995	25.2
2000	33.1
2005	37.6

F $y = 1.31x - 2588.15$
G $y = 1.46x - 2588.15$
H $y = 1.31x - 18.4$
J $y = 1.46x - 18.4$

35. **إجابة حرة** بالنسبة للمسألة التالية، فكر في موقف من الحياة اليومية يعرض خصائص النمو الأسي أو اللوجيستي أو الاضمحلال. **انظر ملحق إجابات الوحدة 10.**
- **a.** حدّد الموقف ونوع النمو أو الاضمحلال الذي يمثّله الموقف.
- **b.** اطرح سؤالًا أو قدّم افتراضًا عن الموقف.
- **c.** ضع فرضيةً للإجابة عن السؤال.
- **d.** طوّر وبرّر وطبّق أسلوب جمع وتنظيم وتحليل البيانات ذات الصلة.
- **e.** وسّع طبيعة البيانات المجمعة، وافصلها عن الدالة المتصلة التي تصف مجموعة البيانات المعروفة.
- **f.** عمّم النتائج واستخرج الاستنتاجات.
- **g.** قارن بين الفروض والاستنتاجات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب اطلب من الطلاب وصف ميل مستقيم انحدارٍ يلائم مقاسات أحذية طلابِ أعمارهم بين 13 و 18 وأطوالهم ونقطة تقاطعه مع المحور الرأسي y. الإجابة النموذجية: ميل موجب ونقطة تقاطع موجبة مع المحور الرأسي y.

إجابات إضافية

19. لا؛ $z = 4.562$. إذا فرضية العدم ليست مرفوضة. ولذلك فإن افتراض زايد أن $\mu \geq 55$ ليس مرفوضًا.

20a. سها: $\bar{x} = 112.8, s = 14.71$؛ شيخة: $\bar{x} = 136.2, s = 37.13$

20b. سها: $102.0 < \mu < 123.6$؛ شيخة: $108.8 < \mu < 163.6$

20c. الإجابة النموذجية: توفر فترة الثقة الخاصة بسها تقديرًا أدقّ من فترة ثقة شيخة.

24. $a_n = 10 + 16.5(n - 1); a_1 = 10, a_n = a_{n-1} + 16.5$

25. $a_n = 15 + (-24)(n - 1); a_1 = 15, a_n = a_{n-1} - 24$

26. $a = 3 + \frac{2}{3}(n - 1); a_1 = 3, a_n = a_{n-1} + \frac{2}{3}$

التدريس المتمايز BL

التوسّع اطلب من الطلاب العمل في مجموعاتٍ من اثنين إلى ثلاثةٍ لإيجاد أو توليد علاقةٍ ثنائية المتغيرات وغير خطية. واطلب من الطالب تمثيل البيانات بيانيًا في مخطط انتشار، وأن يحددوا معادلة الانحدار ويعيّنوا البواقي. قد تتباين الإجابات، ولكن مخطط البواقي ينبغي أن يعرض نمطًا منحنيًا.

1 التركيز

الهدف استخدام تقنية TI-Nspire لإيجاد مستقيم مواءمة الوسيط من أجل تمثيل العلاقة المبينة في مخطط الانتشار.

نصيحة للتدريس

راجع تعريف الإحصاء المقاوم. وذكر الطلاب أن الوسيط أقل تأثرًا بالقيم المتطرفة من الوسط. ويمتدّ مفهوم المقاومة ليشمل مستقيم المواءمة مع الوسيط الأكثر مقاومةً، ولا سيما عندما يكون حجم العينة n صغيرًا.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

شكّل مجموعات ثنائية تضم كل منها طالبًا يتقن استخدام حاسبة التمثيل البياني وآخر لا يتقنه.

التوسّع 10-7

مختبر تقنية التمثيل البياني

مستقيمات تناسُب الوسيط

الهدف

- استخدم حاسبة التمثيل البياني لإيجاد مستقيم تناسُب الوسيط من أجل تمثيل العلاقة المبينة في مخطط الانتشار.

في الدروس السابقة، كنت قد استخدمت معادلات الانحدار لتمثيل مجموعة من البيانات. نوع آخر من الانحدار المستخدم في تمثيل البيانات هو مستقيم *تناسُب الوسيط*.

يتم إيجاد مستقيم تناسُب الوسيط بتقسيم مجموعة من البيانات إلى ثلاث مجموعات متساوية الحجم واستخدام المتوسطات لهذه المجموعات لتحديد معادلة انحدار البيانات.

النشاط 1 رسم مستقيم تناسُب الوسيط

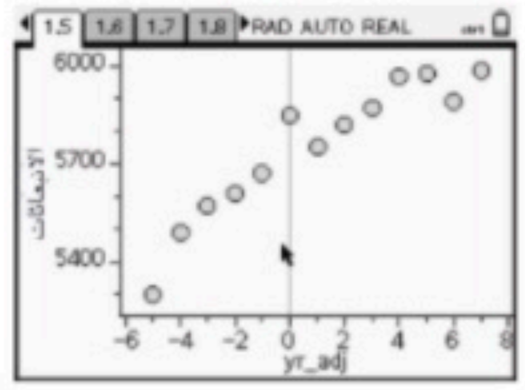
استخدم البيانات المدرجة في الجدول لرسم مستقيم تناسُب الوسيط.

انبعاثات ثاني أكسيد الكربون المتصلة بالطاقة في الولايات المتحدة (مليون طن متري)

العام	انبعاثات	العام	انبعاثات
1995	5301	2002	5820
1996	5489	2003	5872
1997	5570	2004	5966
1998	5607	2005	5974
1999	5669	2006	5888
2000	5848	2007	5984
2001	5754		

المصدر: إدارة معلومات الطاقة

الخطوة 1 أدخل البيانات في ورقة بيانات. ثم شكّل مخططًا تشتتيًا للبيانات. وليكن المحور الأفقي x يمثل عدد السنوات حيث 0 تمثل العام 2000 والمحور الرأسي y يمثل الأطنان المترية لثاني أكسيد الكربون.

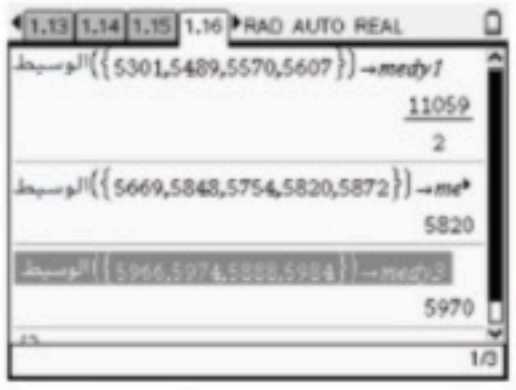


الخطوة 2 قسّمِ البيانات إلى ثلاث مجموعات متناظرة ومتساوية نسبيا. ستحتوي المجموعة الثانية على 5 قيم للبيانات. وستحتوي بقية المجموعات على 4. ثم أوجد الوسائط لقيم x و y لكل مجموعة.

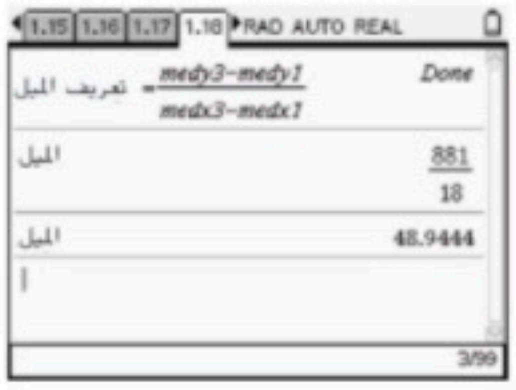
وسيط المجموعة 1: (−3.5, 5529.5)

وسيط المجموعة 2: (1, 5820)

وسيط المجموعة 3: (5.5, 5970)



الخطوة 3 يستخدم مستقيم تناسُب الوسيط نقاطَ الوسيط من المجموعة الأولى والثالثة لتحديد ميل ومتوسط نقاط الوسيط الثلاث على صورة نقطة على المستقيم. وباستخدام صيغة نقطة الميل، $y = m(x - a) + b$، حيث m = الميل و (a, b) المتوسط. فيمكنك استنتاج مستقيم تناسُب الوسيط.



تلميح تقني

أيقونات استخدم أيقونات مختلفة لنقاط الوسيط لتميزها بسهولة عن نقاط البيانات العادية. أمسكْ بكل نقطة واختر Attributes لتغيير نوع الأيقونة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب اطلب من الطلاب إتمام النشاطين 1 و 2.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم تدريب تحليل النتائج 1 لتقييم ما إذا كان الطلاب يستوعبون كيفية استخدام مستقيم المواءمة مع الوسيط الخاص بالانحدار.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب تلخيص طريقة تمثيل البيانات باستخدام مستقيم مواءمةٍ مع الوسيط.

توسيع المفهوم

اطلب من الطلاب شرح السبب في إزاحة المستقيم بين الوسيطين الأول والثالث بمقدار $\frac{1}{3}$ من المسافة باتجاه قيمة الوسيط الوسطى. ولمَ لا تحدث تلك الإزاحة بمقدار $\frac{1}{2}$ أو $\frac{2}{3}$ من المسافة؟ الإجابة النموذجية: الوسيط الأوسط واحدٌ من ثلاثة وسطاء، ولذلك ينبغي أن يسحب المستقيم الممتد من الوسيطين الأول والثالث لــ $\frac{1}{3}$ من المسافة فقط.

إجابات إضافية

1. الإجابة النموذجية: يشير الميل إلى أن انبعاثات ثاني أكسيد الكربون تتزايد بمعدلٍ وسطيٍ يساوي 48.94 طن سنويًا.
2. الإجابة النموذجية: لا؛ يجري تطوير صيغ بديلةٍ من الطاقة التي لا تسبِّب انبعاثات ثاني أكسيد الكربون. إضافةً إلى أن هذه الانبعاثات تأتي من حرق كميةٍ محدودةٍ من أنواع الوقود الأحفوري.
3. الإجابة النموذجية: حوالي 6458.4 مليون طن متري.

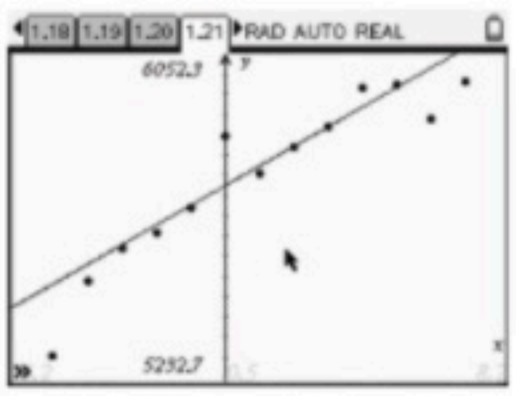
نصيحة دراسية

التفسير الهندسي هندسيًا، تحدد نقاط الوسيط الثلاثة مثلثًا ومتوسط قيم x و y يمثل النقطة الوسطى في المثلث.

الخطوة 4 حدّد متوسط y بالصيغة $avey = \frac{medy1 + medy2 + medy3}{3}$.

حدّد مستقيم تناسب الوسيط بالصيغة $med\_med(x) = 48.944(x - 1) + 5773.17$.

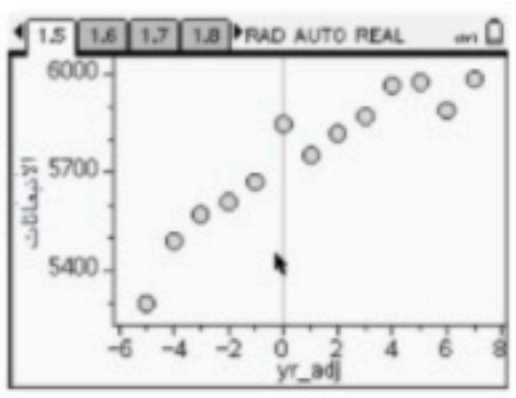
ثم مثل مستقيم تناسب الوسيط بيانيًا.



النشاط 2 حساب مستقيم تناسُب الوسيط.

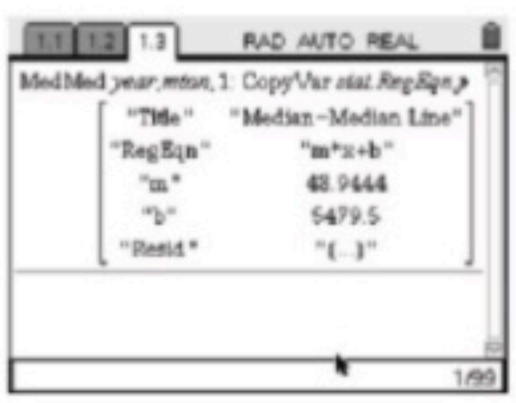
استخدم البيانات المدرجة في نشاط 1 لحساب مستقيم تناسُب الوسيط.

الخطوة 1 احذف الأزواج المرتّبة الثلاثة التي تمثّل الوسائط ثم صمم مخطط انتشار البيانات.

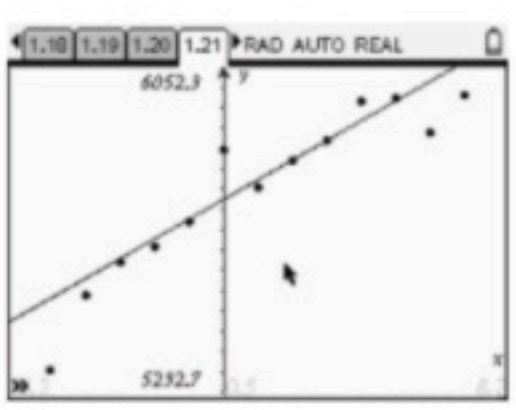


الخطوة 2 احسبْ معادلة مستقيم تناسب الوسيط ثم مثّلْ المستقيم بيانيًا.

افتح شاشة جديدة في الحاسبة. وتحت قائمة Statistics: Stat Calculations. اختر Median-Median Line. أدخِلْ قوائم قيم x و y.



لاحظ أن معادلة تناسُب الوسيط التي أوجدتها في النشاط 1 تطابق معادلة التراجع المستخلصة على الحاسبة.



تحليل النتائج 1–3. انظر الهامش.

1. اشرح معنى ميل مستقيم تناسُب الوسيط في هذا الموقف.
2. هل من المعقول أن نتوقع من هذا الخط تمثيل البيانات بشكل غير محدد؟ اشرح لماذا أو لماذا لا.
3. كم طن متري من انبعاثات ثاني أكسيد الكربون يمكن أن تتوقعه بحلول عام 2015؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

654 | التوسّع 10-7 | مختبر تقنية التمثيل البياني: مستقيمات تناسُب الوسيط

التقويم التكويني

المفردات الرئيسية تشير مراجع الصفحة بعد كل كلمة إلى المكان الذي ذُكر فيه المصطلح لأول مرة. إذا واجه الطلاب صعوبة في الإجابة عن الأسئلة 1-8، فذكرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لإنعاش ذاكراتهم بشأن المفردات.

الوحدة 10 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الوحدة

المفاهيم الأساسية

الإحصاءات الوصفية (الدرس 1-10)

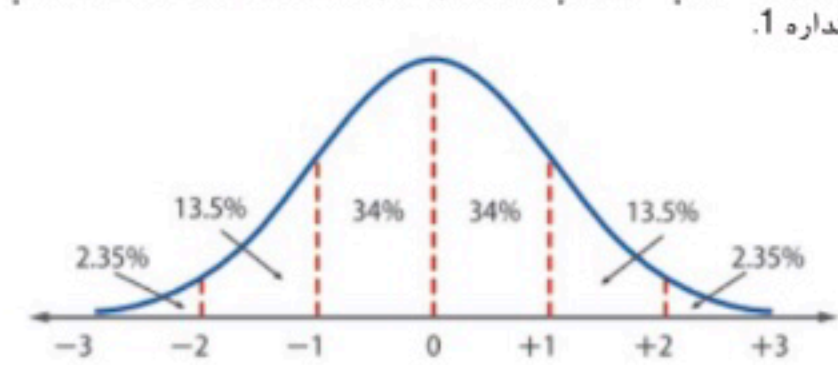
- الأشكال الثلاثة الأكثر شيوعًا لتوزيعات البيانات هي توزيع ملتوٍ نحو اليسار وتوزيع متماثل وتوزيع ملتوٍ نحو اليمين.

التوزيع الاحتمالي (الدرس 2-10)

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X يربط كل قيمة محتملة لـ X باحتمال حدوثها.

التوزيع الطبيعي (الدرس 3-10)

- القيمة z تمثل عدد الانحرافات المعيارية لقيمة بيانات معطاة من الوسط، وممثلة بالتعبير $z = \frac{X - \mu}{\sigma}$.
- التوزيع الطبيعي المعياري هو توزيع قيم z بوسط 0 وانحراف معياري مقداره 1.



نظرية النهاية المركزية (الدرس 4-10)

- كلما زاد حجم العينة n، اقترب شكل توزيع أوساط العينة من التوزيع الطبيعي.

فترات الثقة (الدرس 5-10)

- عندما يكون $n \geq 30$، فإن $CI = \bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$؛ عندما يكون $n < 30$ و σ مجهولًا، فإن $CI = \sigma \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$.

اختبار الفرضية (الدرس 6-10)

- تتم خطوات إجراء اختبار الفرضية على النحو التالي.

الخطوة 1 اذكر الفرضيات، وحدد الافتراض.

الخطوة 2 حدد القيمة (القيم) الحرجة والمنطقة الحرجة.

الخطوة 3 احسب إحصاء الاختبار.

الخطوة 4 اقبل فرضية العدم أو ارفضها.

الارتباط والانحدار الخطي (الدرس 7-10)

- لتحليل بيانات ذات متغيرين:

الخطوة 1 صمّم مخطط انتشار بياني، وقرّر ما إذا كان المتغيران بيدوان مترابطين خطيًا.

الخطوة 2 احسب معامل الارتباط.

الخطوة 3 استخدم اختبار t لتحديد ما إذا كان الارتباط ذا دلالة.

الخطوة 4 أوجد معادلة الانحدار ذات المربعات الأقل.

المفردات الأساسية

الفرضية البديلة **alternative hypothesis**
التوزيع ذو الحدّين **binomial distribution**
فترة الثقة **confidence interval**
متغير عشوائي متصل **continuous random variable**
الارتباط **Correlation**
معامل الارتباط **correlation coefficient**
القيم الحرجة **critical values**
المتغير الثابت المنفصل **discrete random variable**
القاعدة التجريبية **empirical rule**
المتغير التفسيري **eXplanatory variable**
استكمال خارجي **eXtrapolation**
اختبار الفرضية **hypothesis test**
الإحصاء الاستقرائي **inferential statistics**
استكمال داخلي **interpolation**
خط انحدار ذو مربعات أقل **least squares regression line**
توزيع ملتو نحو اليسار **negatively skewed distribution**
توزيع طبيعي **normal distribution**
فرضية العدم **null hypothesis**
نسب مئوية **percentiles**
توزيع ملتو نحو اليمين **positively skewed distribution**
توزيع احتمالي **probability distribution**
متغير عشوائي **random variable**
خط الانحدار **regression line**
متغير الاستجابة **response variable**
توزيع أخذ العينات **sampling distribution**
خطأ أخذ العينات **sampling error**
توزيع طبيعي معياري **standard normal distribution**
توزيع متماثل **symmetrical distribution**
التوزيع **t-distribution**
قيمة z- **z-value**

مراجعة المفردات

حدد أفضل كلمة أو عبارة لإكمال كل جملة.

1. الوسط يكون أقل من الوسيط وأغلب البيانات موضحة على الجانب الأيمن في توزيع (ملتوٍ نحو اليسار ، ملتوٍ نحو اليمين). **يملتوٍ سلب**
2. A متغير عشوائي (متصل، منقطع) قد يأخذ عددًا لا نهائي من القيم الممكنة خلال فترة محددة. **متصل**
3. A يسمى توزيع قيم z بوسط 0 وانحراف معياري قدره 1 بالتوزيع (ثنائي الحدّين، الطبيعي المعياري). **الطبيعي المعياري**
4. يسمى الانحراف المعياري لوسط العينة بـ (خطأ أخذ العينات، الخطأ المعياري للوسط). **الخطأ المعياري للوسط**
5. تنص (نظرية النهاية المركزية، القاعدة التجريبية) على أنه كلما زادت n، اقترب شكل توزيع أوساط العينة من التوزيع الطبيعي. **نظرية النهاية المركزية**
6. يسمى تقدير القيمة المنفردة لأية معلمة مجتمع إحصائي مجهول بتقدير (الفترة، النقطة) (n). **النقطة**
7. تنص (الفرضية البديلة، فرضية العدم) على عدم وجود اختلاف كبير بين قيمة العينة ومعلمة المجتمع الإحصائي. **فرضية العدم**
8. يطلق على استخدام معادلة لإجراء تنبؤات خارج مدى قيم X التي استخدمنها للحصول على خط الانحدار اسم (الاستكمال الخارجي، الاستكمال الداخلي). **استكمال خارجي**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

655

الوحدة 10 دليل الدراسة والمراجعة تابع

مراجعة درس بدرس

10-1 الإحصاء الوصفي

9. نتائج اختبار SAT يعرض الجدول نتائج اختبار SAT في الرياضيات الذي أجري على 24 طالبًا من طلاب المرحلة الإعدادية لحساب التفاضل والتكامل. **a–b. انظر الهامش.**

نتائج اختبار الرياضيات SAT					
373	437	477	491	503	516
392	454	479	491	508	519
405	463	485	498	508	522
417	470	485	499	513	533

a. أنشئ مدرجًا إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

b. لخص المركز وانتشار البيانات باستخدام أي من الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة.

10. غاز الرادون يوضح الجدول كمية إشعاع بيكوكوري لكل لتر من غاز الرادون في عينة من المنازل. **a–b. انظر الهامش.**

كمية الرادون (pCi/L)				
0.5	1.1	1.9	2.4	4.0
0.7	1.4	2.2	2.5	4.2
1.0	1.5	2.2	2.9	5.4
1.0	1.7	2.2	2.9	6.3
1.1	1.8	2.3	3.1	7.0

a. أنشئ مخططًا صندوقيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

b. لخص مركز البيانات وانتشارها باستخدام إما الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. برر اختيارك.

11. سباقات الماراثون يوضح الجدول التوزيع التكراري لمواعيد انتهاء ماراثون بوسطن لأول 322 امرأة تنتهي من السباق. أنشئ تمثيلًا بيانيًا مئويًا. وقدّر المركز المئوي لمن ينهون السباق في أقل من 3 ساعات. وفسر معناه. **انظر الهامش.**

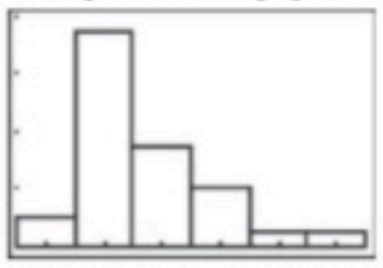
الزمن (بالساعة)	المتسابقون
2:45–2:49.59	3
2:50–2:54.59	4
2:55–2:59.59	28
3:00–3:04.59	35
3:05–3:09.59	54
3:10–3:14.59	80
3:15+	118

مثال 1

حقائب الظهر يوضح الجدول وزن حقائب الظهر المدرسية في عينة من طلاب المرحلة الثانوية.

متوسط وزن حقيبة الظهر (kg)					
11.5	15.0	16.0	17.0	19.0	24.5
12.5	15.5	16.0	17.5	21.0	25.0
14.5	15.5	16.5	18.0	21.0	25.0
14.5	15.5	17.0	18.0	21.5	27.0
15.0	16.0	17.0	18.5	23.5	30.0

a. أنشئ مدرجًا إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.


[10, 34] scl: 4 by [0, 16] scl: 4

التمثيل البياني ملتوٍ إيجابيًا. فمن الواضح أن أوزان معظم حقائب الظهر تتراوح ما بين 14 و 22 كيلوجرامًا. وبعضها أثقل من ذلك، ولذلك يتلاشى ذيل التوزيع نحو الجهة اليمنى.

b. لخص المركز وانتشار البيانات باستخدام أي من الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة.

```
1-Var Stats
↑n=30
 minX=11.5
 Q1=15.5
 Med=17
 Q3=21
 maxX=30
```

توزيع البيانات يكون ملتويًا؛ ومن ثم يمكن استخدام ملخص الأعداد الخمسة لوصف التوزيع. فملخص الأعداد الخمسة يشير إلى أنه برغم تراوح أوزان الحقائب بين 11,5 و 30 كيلوجرامًا. فإن وسيط الأوزان يساوي 17 كيلوجرامًا. ونصف الأوزان تتراوح بين 15,5 و 21 كيلوجرامًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

التدخل التقويمي إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لعرض الموضوعات التي تتناولها الأسئلة، فذكر الطلاب بأن الصفحات المرجعية ترشدهم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

إجابات إضافية

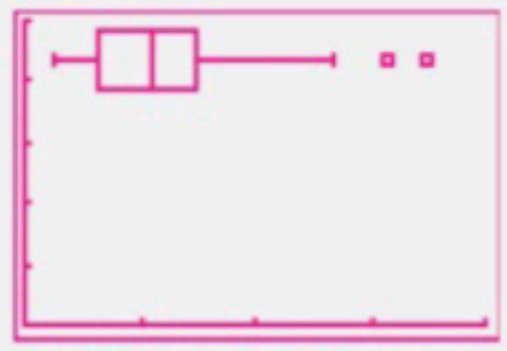
9a.


[370, 550] scl: 25 by [0, 8] scl: 1

التوزيع ملتوٍ التواءً سالبًا قليلًا.

9b. توزيع البيانات ملتوٍ؛ ولذلك، يمكن استخدام ملخص الأعداد الخمسة لـ 373 و 458.5 و 488 و 508 و 533 لوصف التوزيع. تراوحت الدرجات من 373 إلى 533. وكانت درجة الهبوط الوسيطة 488. والدرجة الوسطى كانت تقع بين 458.5 و 508.

10a.


[0, 8] scl: 2 by [0, 5] scl: 1

تتراوح البيانات من 0 إلى 8، مع وقوع أكثر من 75% منها تحت 3. وهناك قيمتان متطرفتان.

10b. توزيع البيانات ملتوٍ؛ ولذلك، يمكن استخدام ملخص الأعداد الخمسة لوصف التوزيع. الوسيط يساوي 2.2، مع وقوع 50% من البيانات بين 1.25 و 3.0.

إجابات إضافية

12. منفصل؛ يمكن عدّ الأشخاص الذين يحضرون ولذلك فهو منفصل.

13. متصل؛ يمكن أن تكون كمية الدم أي قيمة

14a.

X	$P(X)$
0	0.007
1	0.059
2	0.201
3	0.342
4	0.291
5	0.099

10-2 التوزيعات الاحتمالية

صنّف كل متغير عشوائي X على أنه *منفصل* أو *متصل*. اشرح استنتاجك. **12–13. انظر الهامش.**

12. X يمثل عدد الأشخاص الذين يحضرون عرضًا افتتاحيا لفيلم جديد في يوم محدد.

13. X يمثل كمية الدم التي تبرع بها كل شخص في آخر حملات التبرع بالدم.

14. **المشاهير** في أحد الاستقصاءات، قال 63% من البالغين إنهم تعرفوا على لاعب رياضي شهير. وتم اختيار خمسة بالغين بشكل عشوائي وسئلوا عما إذا كانوا يعرفون هذا اللاعب.

a. أنشئ توزيعًا ذا حدّين للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد البالغين الذين تعرفوا على اللاعب الرياضي ومثّله بيانيًا.

b. أوجد احتمال تعرف أكثر من بالغين على اللاعب. **انظر الهامش.**

15. **الكلاب** أوجد التباين والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي لعدد الكلاب في كل منزل. **73.3%**

الكلاب	التكرار
0	17,519
1	2720
2	1614
3	774
4	333

$\sigma^2 \approx 0.77, \sigma \approx 0.88$

مثال 2

التمثيل البياني في استقصاء أجري على إحدى المدارس، قال 45% من الطلاب إنهم عرفوا كيف يمثلون مخروطًا تمثيلًا بيانيا. وسئل خمسة طلاب تم اختيارهم بشكل عشوائي عما إذا كان بإمكانهم تمثيل المخروط بيانيا.

a. أنشئ توزيعًا ذا حدّين للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد البالغين الذين تعرفوا على اللاعب الرياضي.

هنا $n = 5$ و $p = 0.45$ و $q = 1 - 0.45$ أو 0.55.

$P(0) = {}_5C_0 \cdot 0.45^0 \cdot 0.55^5 \approx 0.050$

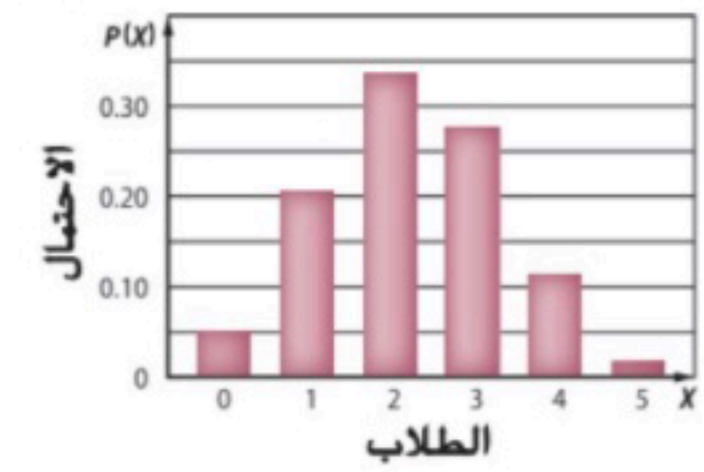
$P(1) = {}_5C_1 \cdot 0.45^1 \cdot 0.55^4 \approx 0.206$

$P(2) = {}_5C_2 \cdot 0.45^2 \cdot 0.55^3 \approx 0.337$

$P(3) = {}_5C_3 \cdot 0.45^3 \cdot 0.55^2 \approx 0.276$

$P(4) = {}_5C_4 \cdot 0.45^4 \cdot 0.55^1 \approx 0.113$

$P(5) = {}_5C_5 \cdot 0.45^5 \cdot 0.55^0 \approx 0.018$



b. أوجد احتمال تمكن عدد أقل من ثلاثة طلاب خضعوا للمقابلة الشخصية من تمثيل المخروط بيانيا.

$P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2)$

$= 0.05 + 0.21 + 0.34$ أو 0.60 أو 60%

10-3 التوزيع الطبيعي

أوجد كلاً مما يلي.

16. z إذا كان $X = 1.5$ و $\mu = 1.1$ و $\sigma = 0.3$ **1.33**

17. X إذا كان $z = 2.34$ و $\mu = 105$ و $\sigma = 18$ **147.12**

18. z إذا كان $X = 125$ و $\mu = 100$ و $\sigma = 15$ **1.67**

19. X إذا كان $z = -1.12$ و $\mu = 35$ و $\sigma = 3.4$ **31.192**

أوجد فترة قيم z المرتبطة بكل منطقة.

20. الخارج 55%

21. الوسط 24%

22. الوسط 96%

23. الخارج 49%

مثال 3

أوجد قيمة z إذا كان $X = 36$، و $\mu = 31$، و $\sigma = 1.3$.

$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ صيغة لقيم z

$= \frac{36 - 31}{1.3}$ $X = 36, \mu = 31,$ و $\sigma = 1.3$

≈ 3.85 بسّط.

20. $z < -0.598$ أو $z > 0.598$

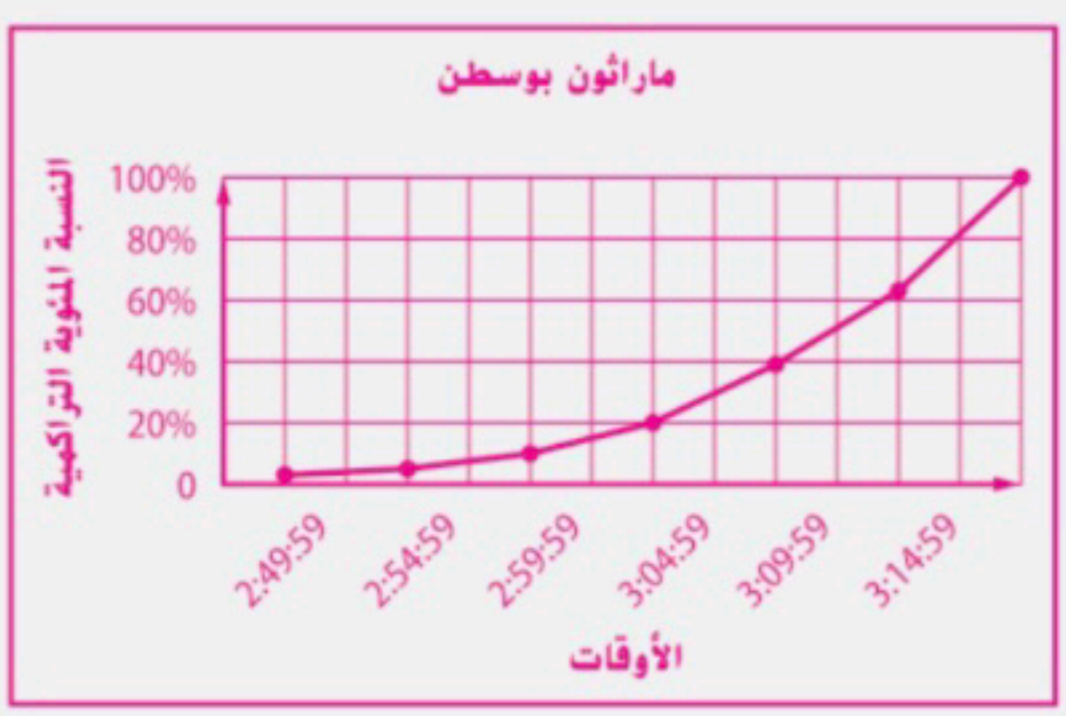
21. $-0.31 < z < 0.31$

22. $-2.05 < z < 2.05$

23. $z < -0.69$ أو $z > 0.69$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

11.



11% من النساء قطعن مسافة السباق في أقل من 3 ساعات.

الوحدة 10 دليل الدراسة والمراجعة تابع

10-4 نظرية النهاية المركزية

24. **الدرجات** متوسط الدرجات النقطية أو GPA في مدرسة بعينها هو 2.88 بانحراف معياري يبلغ تقريبًا 0.67. أوجد كل احتمال لعينة عشوائية من 50 طالبًا مأخوذة من هذه المدرسة.

a. احتمال أن يكون الوسط GPA أقل من 2.75 **8.53%**

b. احتمال أن يكون الوسط GPA أكبر من 3.05 **3.67%**

c. احتمال أن يكون الوسط GPA أكبر من 3.0 ولكن أقل من 3.75 **10.2%**

25. **التصوير** قال أحد المصورين المحليين إن 55% من طلاب صف التخرج التقطوا صور التخرج الخاصة بهم بالخارج. فإذا تم اختيار 15 طالبًا بشكل عشوائي، فأوجد احتمال التقاط عدد من الطلاب أقل من 5 لصورهم بالخارج. **2.6%**

أوجد كلا مما يلي إذا كان z هو القيمة z، و $\bar{x}$ هو وسط العينة، و μ هو وسط المجتمع الإحصائي، و n هو حجم العينة، و σ هو الانحراف المعياري.

26. z إذا كان $\bar{x} = 5.8$، و $\mu = 5.5$، و $n = 18$، و $\sigma = 0.2$ **6.36**

27. μ إذا كان $\bar{x} = 14.8$، و $z = 4.49$، و $n = 14$، و $\sigma = 1.5$ **13**

28. n إذا كان $z = 1.5$، و $\bar{x} = 227$، و $\mu = 224$، و $\sigma = 10$ **25**

29. σ إذا كان $z = -2.67$ و $\bar{x} = 38.2$ و $\mu = 40$ و $n = 16$ **2.7**

مثال 4

الطقس متوسط سقوط الثلوج سنويا في مدينة نيويورك هو 62 سنتيمترًا بمعدل انحراف معياري يساوي 20 سنتيمترًا تقريبًا. أوجد احتمال أن يتراوح وسط سقوط الثلوج بين 60 و 70 سنتيمترًا باستخدام عينة عشوائية لبيانات مأخوذة لمدة 7 سنوات.

القيمة z لـ $\bar{x} = 60$،

$= \frac{60 - 62}{7.56}$ $\quad \bar{x} = 60, \mu = 62,$ و $\sigma_{\bar{x}} = \frac{20}{\sqrt{7}} \approx 7.56$

≈ -0.26 بسّط.

القيمة z لـ $\bar{x} = 70$،

$= \frac{70 - 62}{7.56}$ $\quad \bar{x} = 70, \mu = 62,$ و $\sigma_{\bar{x}} = \frac{20}{\sqrt{7}} \approx 7.56$

≈ 1.06 بسّط.

هناك احتمال بنسبة 8,45% أن يتراوح معدل سقوط الثلوج بين 60 و 70 سنتيمترًا.

```
normalcdf(-0.26,
1.06)
      .4579957305
```

10-5 فترات الثقة

حدد ما إذا كان يجب استخدام التوزيع الطبيعي أو توزيع t في كل سؤال. ثم أوجد كل فترة من فترات الثقة باستخدام المعلومات الموضحة التالية.

30. $c = 90\%, \bar{x} = 73, s = 4.8, n = 12$ **t; $70.51 < \mu < 75.49$**

31. $c = 96\%, \bar{x} = 34, \sigma = 2.3, n = 38$ **طبيعي؛ $33.23 < \mu < 34.77$**

32. $c = 99\%, \bar{x} = 16, s = 1.6, n = 55$ **طبيعي؛ $15.44 < \mu < 16.56$**

33. $c = 90\%, \bar{x} = 5.8, \sigma = 1.1, n = 47$ **طبيعي؛ $5.54 < \mu < 6.06$**

حدد أقل حجم للعينة مطلوب لإجراء تجربة لها المتطلبات المعطاة.

34. $c = 90\%, \sigma = 3.9, E = 0.8$ **65**

35. $c = 95\%, \sigma = 1.6, E = 0.6$ **28**

36. $c = 98\%, \sigma = 6.8, E = 1.2$ **174**

37. $c = 92\%, \sigma = 10.2, E = 3.5$ **27**

مثال 5

حدد ما إذا كان يجب استخدام التوزيع الطبيعي أو توزيع t لإيجاد فترة ثقة نسبتها 95% فيها $\bar{x} = 12.8$، و $s = 3.8$، و $n = 50$. ثم أوجد فترة الثقة.

بما أن $n \geq 30$، فيجب استخدام التوزيع الطبيعي.

في فترة ثقة نسبتها 95%، تقع 5.2% من المساحة في كل ذيل. استخدم حاسبة التمثيل البياني لإيجاد z.

$CI = \bar{x} \pm z \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ فترة الثقة الخاصة بالوسط

$= 12.8 \pm 1.96 \cdot \frac{3.8}{\sqrt{50}}$ $\quad \bar{x} = 12.8x, z = 1.96, s = 3.8,$ و $n = 50$

$= 12.8 \pm 1.05$ بسّط.

فترة الثقة بنسبة 95% تساوي $11.75 < \mu < 13.85$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

658 | الوحدة 10 | دليل الدراسة والمراجعة

إجابات إضافية

42. $z \approx 8.82$؛ فرضية العدم مرفوضة؛ الافتراض مرفوض.

43. $z \approx 4.28$؛ فرضية العدم مرفوضة؛ الافتراض مرفوض.

44. $t \approx -2.55$؛ فرضية العدم مرفوضة؛ الافتراض ليس مرفوضًا.

45. $z \approx -1.0$؛ فرضية العدم ليست مرفوضة؛ الافتراض ليس مرفوضًا.

46a.

[60, 102] scl: 5 by [2, 4.5] scl: 0.5

$r = 0.925$؛ يقابل معامل الارتباط علاقةً موجبةً قويةً بين نتيجة الاختبار التمهيدي والدرجة النهائية.

46b. $t = 10.328$؛ القيمتان الحديتان هما ±1.734. بما أن $10.328 > 1.734$. فإن الإحصاء يقع ضمن المنطقة الحرجة وفرضية العدم مرفوضة. وهكذا فثمة ارتباط بين نتيجة الاختبار التمهيدي والدرجة النهائية.

10-6 اختبار الفرضية

لكل عبارة، اكتبْ فرضية العدم والفرضية البديلة، واذكر أيا منهما يمثّل الافتراض. $H_a: \mu > 50$ $H_0: \mu \leq 50$ (الافتراض)،

38. تقول نجلاء إنها لم تقد سيارتها بسرعة أكبر من 50 كيلومترًا في الساعة خلال الرحلة كاملة.
$H_0: \mu \geq 3, H_a: \mu < 3$ (الافتراض)

39. يقول عبد العزيز إن بإمكانه كتابة أكثر من 60 كلمة في الدقيقة.

40. تقول نسرين إنها تستغرق أقل من 3 أيام في المتوسط لكتابة قصة قصيرة. $H_0: \mu \leq 60, H_a: \mu > 60$ (الافتراض)،

41. يقول عبد الكريم إن بإمكانه خبز 6 دستات من البسكويت على الأقل في الساعة. $H_a: \mu < 6$ $H_0: \mu \geq 6$ (الافتراض)،

لكل افتراض k، استخدم المعلومات المحددة لحساب إحصاء الاختبار وتحديد ما إذا كان هناك دليل كافٍ لرفض فرضية العدم. وبعد ذلك، ضع عبارة تخص الافتراض الأصلي.

42. $k: \mu \leq 26.5, \alpha = 0.10, \bar{x} = 27.8, s = 1.0, n = 46$

43. $k: \mu = 56, \alpha = 0.05, \bar{x} = 58.9, s = 6.7, n = 98$

44. $k: \mu < 18, \alpha = 0.01, \bar{x} = 17.6, s = 0.8, n = 26$

45. $k: \mu \geq 39, \alpha = 0.10, \bar{x} = 38.6, s = 2.6, n = 42$

42–45. انظر الهامش.

مثال 6

للافتراض k، استخدم المعلومات المحددة لحساب إحصاء الاختبار وتحديد ما إذا كان هناك دليل كافٍ لرفض فرضية العدم. وبعد ذلك، ضَع عبارة تخص الافتراض الأصلي.

$k: \mu \geq 62, \alpha = 0.05, \bar{x} = 61.5, s = 4.3, n = 70$

اذكر فرضية العدم والفرضية البديلة، وحدد الافتراض.

$H_0: \mu \geq 62$ الافتراض $H_a: \mu < 62$

حدد القيمة (القيم) الحرجة والمنطقة الحرجة.

استخدم القيمة z بما أن $n \geq 30$ واختبار الذيل المتجه إلى اليسار بما أن $\mu < 62$. بما أن $\alpha = 0.05$. فيمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد $z = -1.645$.

```
invNorm(0.05)
    -1.644853626
```

حساب إحصاء الاختبار.

$\bar{x} = 61.5, \mu = 62,$ و $\sigma_{\bar{x}} = \frac{4.3}{\sqrt{70}}$ $\quad z = \frac{61.5 - 62}{0.51} \approx -0.98$

ارفض فرضية العدم أو لا ترفضها.

H_0 غير مرفوضة بما أن إحصاء الاختبار لا يقع داخل نطاق المنطقة الحرجة. ومن ثم، لا يوجد دليل كافٍ لرفض الافتراض.

10-7 الارتباط والانحدار الخطي

46. الدرجات يوضح الجدول الدرجات النهائية ودرجات الاختبار الأولي لطلاب صف المرحلة الثانوية والإعداد للجامعة. (X = الاختبار الأولي، y = الدرجات النهائية)

نتائج صف الإعداد للجامعة							
X	y	X	y	X	y	X	y
86	3.5	77	2.5	85	3.0	62	1.9
70	3.0	97	3.9	85	3.8	92	3.6
100	4.0	79	3.0	68	2.2	84	3.0
87	3.8	69	2.4	73	2.4	84	3.6
99	4.0	67	2.1	91	3.7	74	2.8

a. صمّم مخطط انتشار للبيانات وحدد العلاقة. ثم احسب معامل الارتباط وفسّره.

b. اختبر أهمية معامل الارتباط هذا عند مستوى 10%.

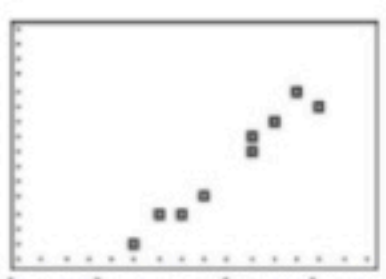
a–b. انظر الهامش.

مثال 7

الأطوال يوضح الجدول أطوال الإخوة والأخوات. صمّم مخطط انتشار للبيانات وحدد العلاقة. ثم احسب معامل الارتباط وفسّره.

70	67	66	68	71	الأخ
68	63	63	64	69	الأخت
65	72	73	70	71	الأخ
61	71	70	67	69	الأخت

معامل الارتباط r يساوي حوالي 0.9773. وبما أن r يقترب من 1، فهذا يعني أن البيانات لها ارتباط خطي موجب قوي. وهذا التقويم العددي للبيانات يتوافق مع تقويماتنا التمثيلية البيانية.



[60, 75] scl: 1 by [60, 75] scl: 1

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 10 دليل الدراسة والمراجعة تابع

التطبيقات وحل المسائل

47. **الرياضة** يعرض الجدول التالي مستويات الدهون في الجسم عند 20 لاعبًا محترفًا من لاعبي كرة السلة. (الدرس 10-1)

a–b. انظر الهامش.

مستويات الدهون في الجسم (%)			
3.4	5.5	6.1	4.8
8.3	7.7	6.5	6.5
4.9	3.7	3.9	4.0
7.3	8.9	9.5	9.8
3.9	7.1	6.3	6.1

a. أنشئ مدرجًا إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

b. لخص مركز البيانات وانتشارها باستخدام إما الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. برر اختيارك.

48. **تمرين** يعرض الجدول التالي عدد ساعات التمارين التي تمارسها عينة من الطلاب كل أسبوع. (الدرس 10-1)

الزمن المستغرق في ممارسة التمارين (بالساعات)		
3	2.5	0
1.5	3	2
3.5	2	0
1.5	9.5	0
8	0.5	1.5
1	10	4

a. أنشئ مخططًا صندوقيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

a–b. انظر الهامش.

b. لخص مركز البيانات وانتشارها باستخدام إما الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. برر اختيارك.

49. **صفوف AP** يوضح الجدول عدد صفوف تحديد المستوى المتقدم (AP) لكل طالب في مرحلة ما قبل الالتحاق بالجامعة. أوجد الوسط والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع. (الدرس 11-2)

1.97; 1.51; 1.23

X	0	1	2	3	4
التكرار	12	18	25	19	11

50. **نسبة الذكاء** يتم عادة توزيع اختبارات نسبة الذكاء (IQs) على مجموعة من الأشخاص بوسط قدره 105 وانحراف معياري قدره 22. أوجد احتمال اختيار شخص بشكل عشوائي نسبة ذكائه تتناسب مع كل مما يلي. (الدرس 11-3)

a. أكثر من 101 **0.57**

b. أقل من 94s **0.31**

c. بين 110 و 120 **0.16**

51. **البسكويت** عدد رقائق الشوكولاتة في البسكويت تكون موزعة عادة على النحو $\mu = 25$ و $\sigma = 3$. أوجد كلاً مما يلي. (الدرس 10-3)

a. $P(X < 35)$ **99.95%**

b. $P(21 < X < 29)$ **81.65%**

c. $P(X > 15)$ **99.95%**

52. **المصارعة** يتم عادة توزيع متوسط عدد المشجعين الذين يحضرون لقاءات المصارعة التي تُعقد في مدرسة "الشرق الثانوية" على النحو $\mu = 88$ و $\sigma = 16$. وإذا تم اختيار 6 لقاءات بشكل عشوائي، فأوجد احتمال أن يكون وسط العينة أكبر من 90 مشجعًا. (الدرس 10-4)

38%

53. **تمرين** توصلت عينة من 58 طالبًا إلى أن الطلاب في المتوسط يقضون 185 دقيقة كل أسبوع في ممارسة نشاط بدني. افترض أن الانحراف المعياري المأخوذ من دراسة أجريت مؤخرًا قدره 28 دقيقة. قدّر وسط الزمن الذي يقضيه الطلاب في ممارسة نشاط بدني كل أسبوع باستخدام فترة ثقة علمًا بأن مستوى الثقة يبلغ 95%. (الدرس 10-5)

$177.8 < \mu < 192.2$

54a. $H_0: \mu \geq 3.0, H_a: \mu < 3.0$ (الافتراض)

54. **الطيران** تقول إحدى شركات الطيران إن رحلاتها من أوهايو إلى تكساس تستغرق أقل من 3 ساعات. وتوصلت عينة عشوائية لـ 30 رحلة طيران إلى متوسط زمني قدره 2.9 ساعة وانحراف معياري قدره 0.25 ساعة. حدد ما إذا كان ادعاء شركة الطيران مدعومًا عندما تكون $\alpha = 0.05$. (الدرس 10-6)

a. اكتب فرضية العدم والفرضية البديلة، واذكر الفرضية التي تمثل الادعاء.

b. احسب إحصاء الاختبار. **−1.649**

c. حدد ما إذا كان هناك دليل كافٍ لرفض فرضية العدم. **مرفوضة**

d. صِغ عبارة تخص الادعاء الأصلي.

الافتراض $\mu < 3.0$ غير مرفوض.

55. **النتائج** **يوضح الجدول التالي نتائج اختبار الموهبة والكتابة الذي أجري على أحد الصفوف في المادة نفسها.** (الدرس 10-7)

الموهبة					الكتابة				
135	146	153	154	139	26	33	55	50	32
131	149	137	133	149	25	44	31	31	34
141	164	146	149	147	32	47	37	46	36
152	143	146	141	136	47	36	35	28	28
154	151	155	140	143	36	48	36	33	42
148	149	141	137	135	32	32	29	34	30

a. صمم مخطط انتشار للبيانات وحدد العلاقة. ثم احسب معامل الارتباط وفسّره.

b. اختبر أهمية معامل الارتباط هذا عند مستوى 5%.

c. أوجد معادلة خط الانحدار. a–c. انظر الهامش.

d. استخدم هذه المعادلة للتنبؤ بنتيجة الكتابة لطالب أحرز الدرجة 142 في اختبار الموهبة. **34**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابات إضافية

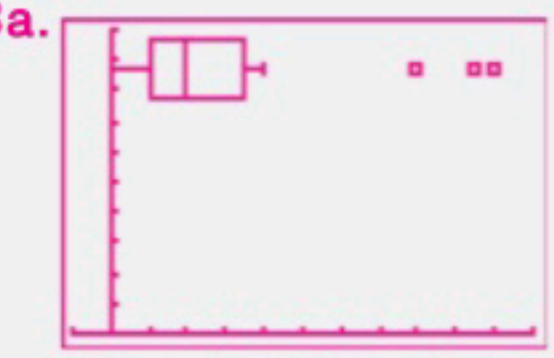
47a.

[3, 12] scl: 1 by [0, 10] scl: 1

يبدو التمثيل البياني مجمّعًا. ويبدو أن مستويات الدهون في الجسم تتقلّب بين 3% و 10%.

47b. يساوي مستوى الدهون الوسطي 6.2% عند انحرافٍ معياري يساوي 1.9%. والتوزيع ليس ملتويًا، ولذلك لا حاجة لملخص الأعداد الخمسة.

48a.



[−1, 11] scl: 1 by [0, 10] scl: 1

بما أن العارضة اليمنى أطول من اليسرى وبما أن مستقيم الوسيط أقرب إلى Q_1 من Q_3، فالتوزيع ملتوٍ إيجابي.

48.b توزيع البيانات ملتوٍ؛ ومن ثم يمكن استخدام ملخص الأعداد الخمسة لوصف التوزيع. ويتراوح عدد الساعات التي قضاها الطلاب في التمرين من 0 إلى 10 ساعات. ويساوي الوسط ساعتين. وقضى نصف الطلاب ما بين ساعة و 3.5 ساعات.

55a.

[125, 170] scl: 5 by [20, 60] scl: 5

يبدو أن للبيانات ارتباطًا إيجابيًا. $r \approx 0.7424$، ما يوضح وجود علاقةٍ خطيةٍ موجبةٍ بين الكفاءة واختبارات الكتابة.

55b. $t = 5.864$. القيمتان الحديّتان هما ± 2.048. بما أن $5.864 > 2.048$، فإن الإحصائي يقع ضمن المنطقة الحرجة وفرضية العدم مرفوضة. وهكذا فثمة ارتباط الكفاءة واختبارات الكتابة.

55c. $\hat{y} = 0.743x - 71.371$

الوحدة 10 تدريب على الاختبار المعياري

1. **السباق** يعرض الجدول التالي أعمار آخر 20 فائزًا في سباق السيارات. **1a–b. انظر الهامش.**

العمر (بالأعوام)									
42	36	30	27	25	40	33	28	26	24
46	38	33	27	26	43	35	32	27	26

a. أنشئ مدرجًا إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

b. لخص المركز وانتشار البيانات باستخدام أي من الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة.

2a. انظر ملحق إجابات الوحدة 10.

2. **أجهزة التلفاز** يعرض الجدول التالي عدد أجهزة التلفزيون في كل منزل خاص بعدد 100 طالب.

أجهزة التلفزيون	0	1	2	3	4	5
التكرار	1	3	21	53	16	6

a. استخدم توزيع التكرار لإنشاء توزيع احتمالي للمتغير العشوائي X وتمثيله بيانيًا.

b. أوجد وسط النتائج، وفسر معناها في سياق موقف المسألة.

c. أوجد التباين والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي. **0.91 ;0.82**

2b. 2.98؛ كل منزل فيه حوالي 3 أجهزة تلفزيون.

3. **الرحلات بالسيارات** أجرى صف اللغة الإسبانية الذي تدرس له المعلمة نهلة استطلاعًا للتوصل إلى عدد الرحلات بالسيارات التي قام بها الطلاب خلال أسبوع.

X	0	1	2	3	4	5
التكرار	10	16	12	22	8	2

a. استخدم توزيع التكرار الخاص بالنتائج لإنشاء توزيع احتمالي للمتغير العشوائي X وتمثيله بيانيا. مع تقريب كل احتمال إلى أقرب جزء من مئة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 11.**

b. أوجد وسط التوزيع الاحتمالي. **2.09**

c. أوجد التباين والانحراف المعياري. **1.34 ,1.80**

4. **العطلة** في فصل الصيف، يكون متوسط درجة الحرارة في أحد منتجعات منطقة البحر الكاريبي المخصصة لقضاء العطلات 32°C مع انحراف معياري مقداره 2.5°C. وفي يوم مختار عشوائيًا، أوجد احتمال أن تكون درجة الحرارة على النحو التالي.

a. أكثر من 22°C **1**

b. أقل من 20°C **0**

c. بين 29°C و 34°C **0.60**

التعبئة صندوق من الحبوب وسط وزنه يبلغ 362 جرامًا وبانحراف معياري مقداره 5. فإذا أخذت عينة لعدد 5 صناديق مختارة عشوائيًا، فأوجد التالي.

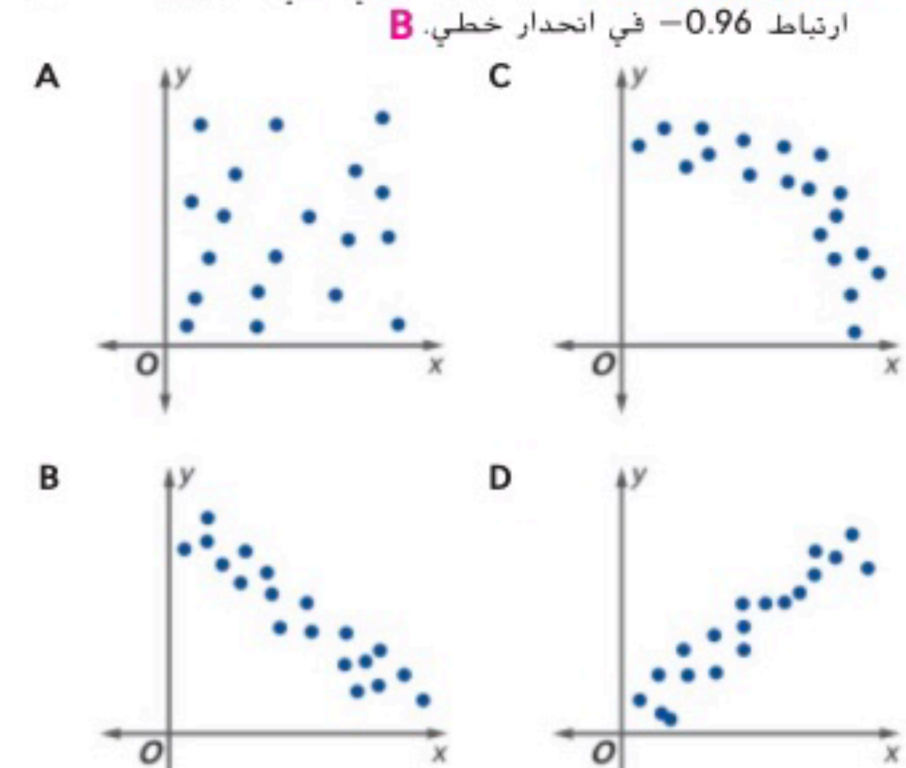
5. احتمال أن يكون وسط الوزن أقل من 355 **0.0008424 أو 0.084%**

6. احتمال أن يكون وسط الوزن أكبر من 370 **0.0001468 أو 0.015%**

7. **أكشاك الوجبات الخفيفة** وجد استطلاع للرأي أجري على 97 من المرتادين الدائمين لدور السينما أن هؤلاء العملاء أنفقوا متوسط AED 12.50 على شراء أطعمة من أكشاك الوجبات الخفيفة. افترض أن الانحراف المعياري المأخوذ من دراسة أجريت مؤخرًا كان قدره AED 2.25. قدّر وسط مقدار المال الذي ينفقه العملاء بالنظر إلى مستوى ثقة يبلغ 95%. $12.05 < \mu < 12.95$

8. **الإيجار** يقول عبد الله إن الطالب الجامعي ينفق في المتوسط أقل من AED 400 على الإيجار. وتوصلت عينة من 48 طالبًا إلى أن الطلاب أنفقوا في المتوسط AED 385 على الإيجار كل شهر وبانحراف معياري قدره AED 30. فعندما تكون $\alpha = 0.10$، حدد ما إذا كان هناك دليل كافٍ لرفض فرضية العدم. وأنشئ عبارة تخص الافتراض الأصلي. **فرضية العدم مرفوضة. وافتراض أن الطالب الجامعي ينفق في المتوسط أقل من AED 400 شهريا على الإيجار ليس مرفوضًا.**

9. **الاختيار من متعدد** حدد التمثيل البياني الذي قد يكون له معامل ارتباط 0.96− في انحدار خطي. **B**



10. **القيادة** يدرج الجدول متوسط عدد الحوادث في الشهر لقطاعات من الطرق في مدينة تتبع حدود السرعة المعلنة.

a. ارسم مخطط انتشار للبيانات، وحدد العلاقة. **a–b. انظر الهامش.**

b. احسب معامل الارتباط وفسره.

c. حدد ما إذا كانت هناك دلالة لمعامل الارتباط عند المستوى 5%. اشرح استنتاجك.

بما أن $t \approx 24.13$ و $24.13 > 2.31$، فإن الارتباط يكون كبيرًا عند المستوى 5%.

السرعة (km/h)	الحوادث
25	2.6
30	3.5
35	6.9
40	10.3
45	15.2
50	18.3
55	22.3
60	24.8
65	26.0
70	29.2

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابات إضافية

1a. 

[25, 50] scl: 5 by [0, 12] scl: 1

البيانات ملتوية نحو اليمين.

1b.

```
1-Var Stats
x̄=32.2
Σx=644
Σx²=21596
Sx=6.724660038
σx=6.554387843
↓n=20
```

```
1-Var Stats
↑n=20
minX=24
Q1=26.5
Med=31
Q3=37
maxX=46
```

بما أن التوزيع ملتو، فيمكن استخدام ملخص الأعداد الخمسة لوصف توزيع البيانات؛ تتراوح أعمار الفائزين في سباق الزوارق السريعة بين 24 و 46. ويساوي العمر الوسيطي 31. ونصف الأعمار يتراوح بين 26 و 37.

10a. 

[20, 80] scl: 5 by [0, 30] scl: 2

الإجابة النموذجية: من التمثيل البياني، يبدو أن للبيانات ارتباطًا خطيًا موجبًا.

10b. $r = 0.9932$؛ الإجابة النموذجية: يشير معامل الارتباط إلى أن للبيانات ارتباطًا خطيًا موجبًا قويًا إلى حد ما.

1 التركيز

الهدف إنشاء فترات ثقة لتناسبات المجتمع الإحصائي.

نصيحة للتدريس

أكّد أن تناسب المجتمع الإحصائي غير متاحٍ في أغلب الأحيان أو غير قابلٍ للتحقق من الناحية اللوجستية. وتعدّ فترة الثقة القائمة على تناسب المجتمع الإحصائي طريقةً شائعةً وملائمةً لتقدير وسط مجتمع إحصائي.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

اطلب من الطلاب العمل في مجموعات مكوّنة من ثلاثة أو أربعة طلاب متفاوتي القدرات. واطلب من المجموعات العمل معًا لإكمال النشاط 1 و 3 وتحليل التمارين 5-1.

اطرح السؤال التالي:

- لِمَ من الضروري أن تكون العينة عشوائيةً عند استخدام تناسب عينة؟ الإجابة النموذجية: إذا لم تكن العينة عشوائية، فليس من الضروري أن تكون ممثلةً للمجتمع الإحصائي ككل.
- لِمَ من الضروري أن يكون np و nq أكبر من 5؟ الإجابة النموذجية: يوضح كون ناتج الضرب كبيرًا أنه يمكن تقريب توزيع أخذ العينات من التوزيع الطبيعي.

الوحدة 10 الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم
تناسبات المجتمع الإحصائي

الهدف

- إنشاء فترات ثقة لتناسبات المجتمع الإحصائي.

تعلمت أن احتمال النجاح في محاولةٍ واحدةٍ خلال تجربةٍ ذات حدّين تساوي p ويمكن التعبير عنها في صورة كسر أو كسرٍ عشريٍ أو نسبةٍ مئوية. فعلى سبيل المثال، يساوي احتمال رمي قطعة نقدٍ سليمةٍ ومتوازنةٍ وظهور الكتابة $\frac{1}{2}$ أو 0.5 أو 50%. وهذا الاحتمال هو *تناسبٌ للمجتمع الإحصائي* لأنه في حالة قطعة نقدية سليمة ومتوازنة. تؤخذ الصور و الكتابات في الحسبان.

ليس من الممكن دائمًا حساب تناسبات المجتمع الإحصائي. فحساب النسبة المئوية لطلاب في المرحلة الثانوية يملكون سياراتهم الخاصة، على سبيل المثال، سيتطلب إجراء استطلاع على كل طالب في المرحلة الثانوية. ومن ثم، يمكن تقدير تناسبات المجتمع الإحصائي باستخدام *تناسبات العينة* بالطريقة نفسها التي استخدمت بها أوساط العينة لتقدير أوساط المجتمع الإحصائي في هذه الوحدة.

تناسب العينة $\hat{p}$ هو تناسب النجاحات في عينة معينة ويعطى بالتعبير $\hat{p} = \frac{x}{n}$. وفيه x هو عدد النجاحات في العينة و n هو حجم العينة. واحتمال الفشل عندئذٍ تعطى بالعلاقة $\hat{q} = 1 - \hat{p}$.

النشاط 1 تناسب العينة

عينة تتألف من 2582 طالبًا من طلاب المرحلة الثانوية وجدت أن 362 طالبًا يملكون سيارات خاصة بهم. قدر تناسب المجتمع الإحصائي لطلاب المرحلة الثانوية الذين يملكون سيارات خاصة عن طريق حساب تناسب العينة $\hat{p}$.

الخطوة 1 عوّض $x = 362$ و $n = 2582$ في الصيغة $\hat{p}$ وبسّط.

$\frac{362}{2582}$ أو 0.14 أو 14%

الخطوة 2 تفسير النتيجة

نسبة جميع طلاب المرحلة الثانوية الذين يملكون سيارات خاص تساوي 14% تقريبًا.

تحليل النتائج

1. هل يعد تناسب العينة تقديرًا دقيقًا لتناسب المجتمع الإحصائي؟ اشرح استنتاجك.
2. إذا أُعدّت عينة بحيث تكون قيمة n كبيرةً فيها، فما الذي يمكن قوله عن العلاقة بين تناسب العينة وتناسب المجتمع الإحصائي؟
3. هل سيتساوى تناسب العينة دائمًا مع تناسب المجتمع الإحصائي؟ إذا كان الجواب بلا، فما الذي يمكن فعله لتناسب العينة بالإضافة إلى زيادة n للحصول على تقدير أفضل لتناسب المجتمع الإحصائي؟ اشرح استنتاجك.

1. الإجابة النموذجية: قد يكون $\hat{p}$ الذي أوجدناه في الخطوة 1 تقديرًا دقيقًا. ولكن، اعتمادًا على حجم التناسب، فإن $\hat{p}$ يمكن أن يكون منخفضًا أو عاليًا جدًا. ومن شأن ذلك أن يساعد في الحصول على تقديرٍ أفضل.
2. الإجابة النموذجية: عندما يزداد n، فإن تناسب العينة يقترب من تناسب المجتمع الإحصائي.
3. الإجابة النموذجية: لا؛ يعطي إنشاء فترة ثقةٍ لتناسب المجتمعٍ الإحصائي تقديرًا أفضل.

$\hat{p}$ الموجودة في النشاط 1 هي تقدير *نقطة*. وإذا أردنا ابتكار تقدير أفضل، فإننا سنحتاج إلى إنشاء فترة. ويكون سلوك توزيع تناسبات العينة أشبه بتوزيع أوساط العينة. فكلما زاد حجم العينة، أصبح التوزيع أقرب للطبيعي وقارب متوسط تناسبات العينة تناسب المجتمع الإحصائي p.

نصيحة دراسية
التوزيع الطبيعي وقيم z
تذكّر أن التوزيع الطبيعي يستخدم في حالة التوزيع ذي الحدّين عندما $np \geq 5$ و $nq \geq 5$. وهكذا يمكننا إيجاد قيم z واستخدامها لحساب E

مثلما يمكن حساب فترة الثقة لوسط المجتمع الإحصائي عن طريق جمع وطرح أقصى خطأ للتقدير E إلى/من وسط العينة $\bar{x}$، فإنه يمكن جمع وطرح أقصى خطأ للتقدير إلى/من تناسب العينة $\hat{p}$ لإنشاء فترة ثقة لتناسب المجتمع الإحصائي.

المفهوم الأساسي فترة الثقة لتناسب عينة

تعطى فترة الثقة CI لتناسب مجتمعٍ إحصائي بالصيغة

$$CI = \hat{p} \pm E,$$

حيث $\hat{p}$ هو تناسب العينة و E هو أقصى خطأ للتقدير ممثلًا بـ $z\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب اطلب من الطلاب إكمال خطوتي التمثيل والتطبيق في التمرينين 6 و 7.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم النموذج وطبق التمرين 6 لتقييم ما إن كان الطلاب يستطيعون إيجاد فترات الثقة لتناسب عينة.

من العملي إلى النظري

اطرح السؤال التالي:

- يستخدم باحث بياناتٍ من أحدث إحصاءٍ رسميٍ جرى في البلاد. فهل يمكن للباحث استخدام تناسبات عينات؟ الإجابة النموذجية: لا؛ يجمع الإحصاء الرسمي بياناتٍ عن المجتمع الإحصائي بكامله إذًا فتناسب المجتمع الإحصائي معروف.

توسيع المفهوم

اطلب من الطلاب التفكير في السؤال البحثي التالي. تدرس مجموعة من الباحثين الطبيين فعالية دواءٍ جديد. ترغب المجموعة بإثبات أن الدواء يحدّ من نسبة الخلايا المصابة إلى ما دون عتبةٍ حرجة. فما مستوى الثقة الذي ينبغي أن تستخدمها المجموعة؟ الإجابة النموذجية: 99%؛ من الأهمية بمكانٍ أن يجري الباحثون تقييمًا دقيقًا لأثر الدواء.

النشاط 2 فترة الثقة لتناسب

سجّل استبيانٌ جرى على 825 من المتقدمين للدخول إلى الجامعة المعدّل التراكمي للطلاب في المرحلة الثانوية *a*. أوجد فترة الثقة عند المستوى 90% لتناسب المتقدمين للدخول إلى الجامعة الذين يساوي معدلهم التراكمي 3.0 أو أكثر.

المعدل التراكمي *a*	المتقدمون
$4.0 \le a$	33
$3.0 \le a < 4.0$	600
$2.0 \le a < 3.0$	175
$a < 2.0$	17

الخطوة 1 أوجد $\hat{p}$ و $\hat{q}$.

$\hat{p} = \frac{x}{n}$ قانون تناسب عينة

$= \frac{633}{825}$ أو 0.77 تقريبًا $n = 825$ و $x = 633$

لذلك، $\hat{q} = 1 - 0.77$ أو 0.23 تقريبًا.

الخطوة 2 أثبت أن $n\hat{p} \ge 5$ و $n\hat{q} \ge 5$.

$n\hat{p} \approx 825(0.77)$ أو 635.25 $\quad n\hat{q} \approx (825)(0.23)$ أو 189.75

بما أن $n\hat{p} \ge 5$ و $n\hat{q} \ge 5$، فإن توزيع أخذ العينات لـ $\hat{p}$ يمكن تقريبه من خلال التوزيع الطبيعي.

الخطوة 3 أوجد قيمة *z*.

لمستوى الثقة الذي نسبته 90%، $z = 1.645$.

الخطوة 4 بحث عن أقصى خطأ للتقدير.

$E = z\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ قانون أقصى خطأ للتقدير

$\approx 1.645\sqrt{\frac{0.77(0.23)}{825}}$ أو حوالي 0.0241 $\quad z = 1.645$ و $\hat{p} \approx 0.77$ و $\hat{q} \approx 0.23$ و $n = 825$

الخطوة 5 أوجد نقطتي فترة الثقة الطرفيتين اليمنى واليسرى.

$CI = \hat{p} \pm E$ فترة الثقة للتناسب

$= 0.77 \pm 0.0241$ $\quad \hat{p} = 0.77$ و $E = 0.0241$

الحد الأيمن	الحد الأيسر
$0.77 + 0.0241 = 0.7941$	$0.77 - 0.0241 = 0.7459$

فترة الثقة عند المستوى 90% عندئذٍ هي $0.746 < p < 0.794$. ولذلك فإننا على ثقة بنسبة 90% أن تناسب المتقدمين الذين يساوي معدّلهم التراكمي 3.0 أو أكثر بين 74.6% و 79.4%.

نصيحة دراسية

إيجاد قيم *z* تذكّر أن أكثر مستويات الثقة شيوعًا وقيم *z* المقابلة لها هي كالتالي:

مستوى الثقة	قيمة *z* (z-value)
90%	1.645
95%	1.960
99%	2.576

تذكّر أنه يمكنك العثور على قيمة *z* لأي فترة ثقة بواسطة حاسبةٍ للتمثيل البياني.

تحليل النتائج

4. صف طريقتين يمكن من خلالهما تضييق فترة الثقة التي أوجدتها في الخطوة 5.

5. إذا ثُبّتت فترة الثقة، فكم ينبغي أن يساوي *n* للحد من أقصى خطأ للتقدير بمقدار $\frac{1}{2}$؟ **3301**

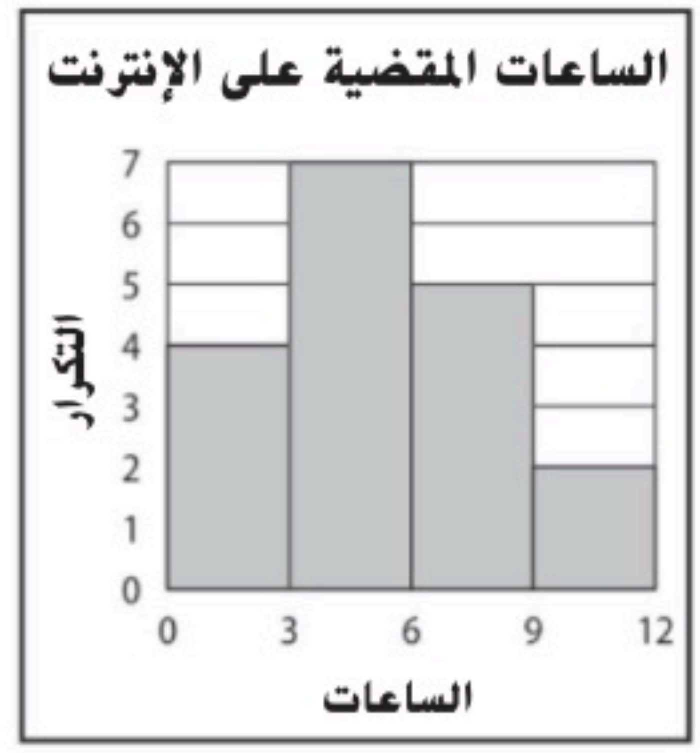
4. الإجابة النموذجية: يمكن رفع حجم العينة أو يمكن خفض فترة الثقة.

النموذج والتطبيق

6. في استطلاع أجرته مؤسسة جالوب عام 2006 على 1000 بالغ، رأى 480 منهم أن الأموال التي أنفقتها الحكومة على المركبة الفضائية كان ينبغي إنفاقها على شيء آخر. أوجد فترة الثقة التي نسبتها 95% المتعلقة بالتناسب الخاص بجميع البالغين الذين كان لهم نفس هذا الرأي. $44.9\% < p < 51.1\%$

7. وجدت عينة عشوائية أجريت على 279 أسرة أن 58% منها كانت لديها سيارة رياضية. أوجد فترة الثقة التي نسبتها 99% للتناسب المتعلق بجميع الأسر التي تملك سيارة من هذا النوع. $50.4\% < p < 65.6\%$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4a. 

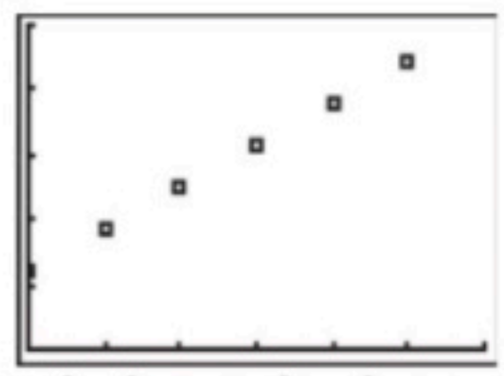
4b. قضى الطلاب وقتًا على الإنترنت لأكثر من ست ساعات.

5a.

x	0	1	2	3	4	5
$\ln y$	2.41	3.71	5.01	6.31	7.61	8.91

5b. $\hat{y} = 1.3\hat{x} + 2.41$

5c. $y = 11.1e^{1.3x}$



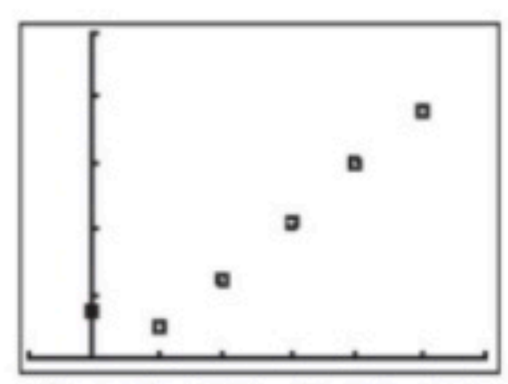
[0, 6] scl: 1 by [0, 10] scl: 2

6a.

x	0	1	2	3	4	5
$\sqrt{y}$	1.4	0.9	2.4	4.2	5.9	7.6

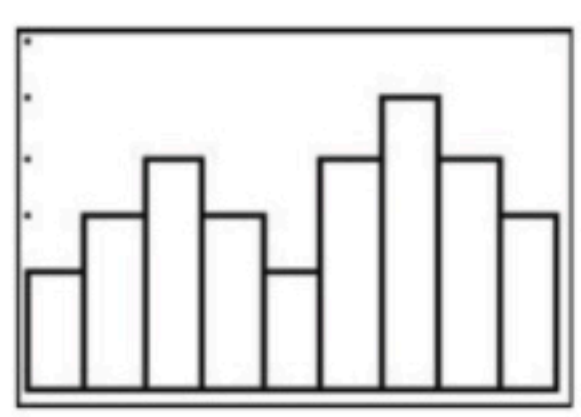
6b. $\hat{y} = 1.366x + 0.32$

6c. $y = 1.866x^2 + 0.874x$
0.1024



[−1, 6] scl: 1 by [0, 10] scl: 2

الدرس 10-1 (تمرين موجّه)

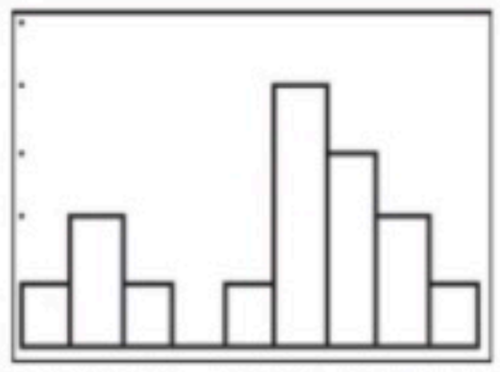
2A. 

[20,65] scl: 5 by [0,6] scl: 1

التوزيع ثنائي المنوال.

2B. الإجابة النموذجية: بما أن التجمّع السفلي متماثل، فيمكن استخدام الزمن الوسطي 32.1 دقيقة والانحراف المعياري 6.1 دقائق لوصف المركز والانتشار على الترتيب. تجمّع البيانات العلوي ملتوٍ نحو اليمين، ولذلك فإن ملخص الأعداد الخمسة يشير إلى أن أزمنة التدريب كانت تتراوح من 45 إلى 64 دقيقة، مع وسيطٍ يساوي 53.5 دقيقة، وكان نصف الأزمنة يقع بين 49.5 و 58.5 دقيقة.

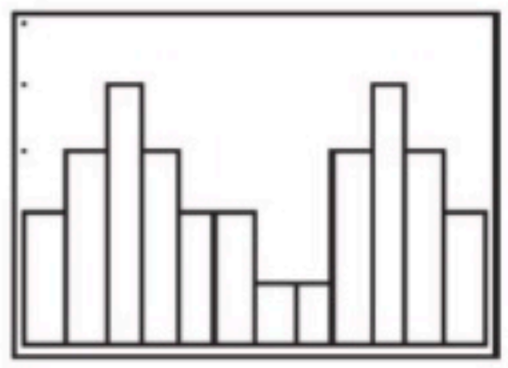
الدرس 10-1

2a. 

[400, 1300] scl: 100 bv [0, 5] scl: 1

التمثيل البياني ثنائي المنوال مع وجود تجمعين منفصلين، ما يقترح وجود مستويين مختلفين لأسعار الحواسيب في مجموعة البيانات المختلطة.

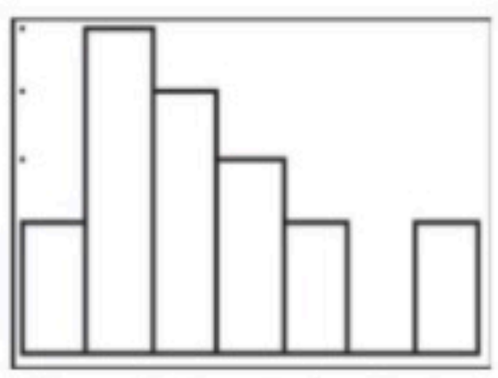
2b. بما أن التجمّع السفلي للبيانات متماثل تقريبًا، فيمكن استخدام السعر الوسطي AED 561.25 والانحراف المعياري AED 80.81 لوصف مركز البيانات وانتشارها على الترتيب. تجمّع البيانات العلوي ملتوٍ نحو اليمين، ولذلك فإن ملخص الأعداد الخمسة يشير إلى أن الأسعار كانت تتراوح من AED 890 إلى AED 1250. وكان نصف الأسعار بين AED 950 و AED 1150.

3a. 

[40, 280] scl: 20 by [0, 5] scl: 1

التمثيل البياني ثنائي المنوال، ما يقترح وجود نوعين مختلطين مختلفين من لاعبي البولينغ في مجموعة البيانات: متوسطو المستوى وذوو الخبرة.

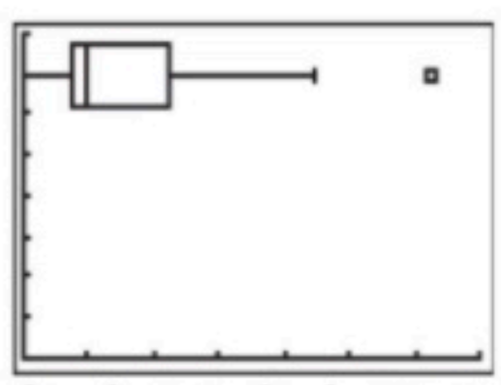
3b. الإجابة النموذجية: بما أن التجمّع السفلي للبيانات متماثل تقريبًا، فيمكن استخدام نقاط البولينغ لوسطية المساوية 97.6 والانحراف المعياري 31.5 لوصف مركز البيانات وانتشارها على الترتيب. تجمّع البيانات العلوي ملتوٍ نحو اليمين، ولذلك فإن ملخص الأعداد الخمسة يشير إلى أن النقاط كانت تتراوح من 173 إلى 273. وكان نصف عدد النقاط يقع بين 217 و 248.

4a. 

[20, 90] scl: 10 by [0, 5] scl: 1

التمثيل البياني ملتوٍ إيجابيًا. يجمع معظم الموظفين ما بين AED 30,000 و AED 40,000، مع وجود القليل من الرواتب فوق AED 60,000 أو أدنى من AED 30,000.

4b. الإجابة النموذجية: بما أن التوزيع ملتوٍ، فيمكن استخدام ملخص الأعداد الخمسة لوصف توزيع البيانات: تراوحت الرواتب بين AED 24,000 و AED 89,000. وكان الراتب البدائي يساوي AED 43,500. وكان نصف الرواتب يتراوح بين AED 34,000 و AED 59,000.

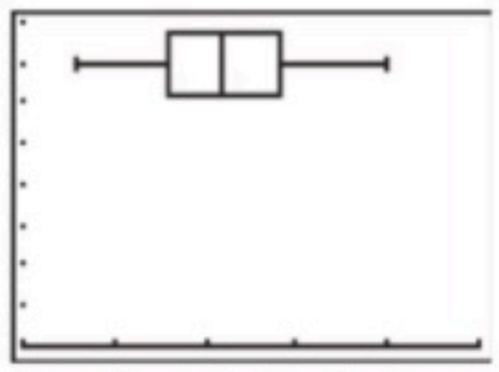
5a. 

[0, 14] scl: 2 by [0, 1] scl: 0.125

بما أن العارضة اليمنى أطول من اليسرى وبما أن مستقيم الوسيط أقرب إلى $Q1$ من $Q3$، فالتوزيع ملتوٍ إيجابي.

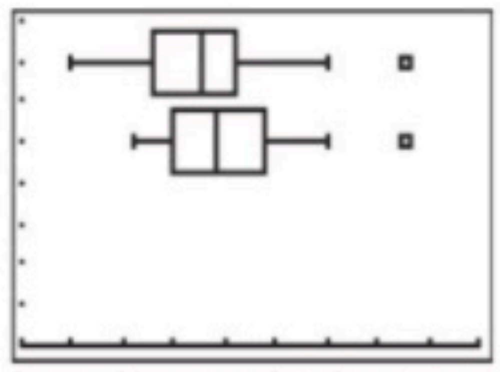
5b. الإجابة النموذجية: توزيع البيانات ملتوٍ؛ ومن ثم يمكن استخدام ملخص الأعداد الخمسة لوصف التوزيع. ويتراوح عدد الساعات التي قضاها الطلاب في ممارسة الألعاب الإلكترونية من 0 إلى 12.5 ساعات، ويساوي الوسط ساعتين، وقضى نصف الطلاب ما بين 1.5 ساعة 4.5 ساعات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

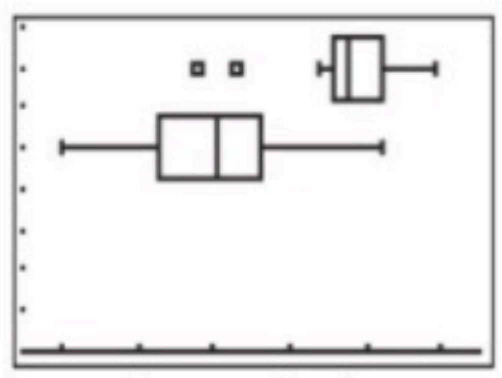
6a. 
[15, 40] scl: 5 by [0, 1] scl: 0.125

بما أن العارضتين متساويتان في الطول تقريبًا وبما أن الوسيط يقع تقريبًا بالضبط بين $Q1$ و $Q2$، فالتوزيع متماثل تقريبًا.

6b. بما أن توزيع البيانات شبه متماثل، فيمكن استخدام العدد الوسطي من النقاط 25.8 والانحراف المعياري 4.05 لوصف مركز البيانات وانتشارها على الترتيب.

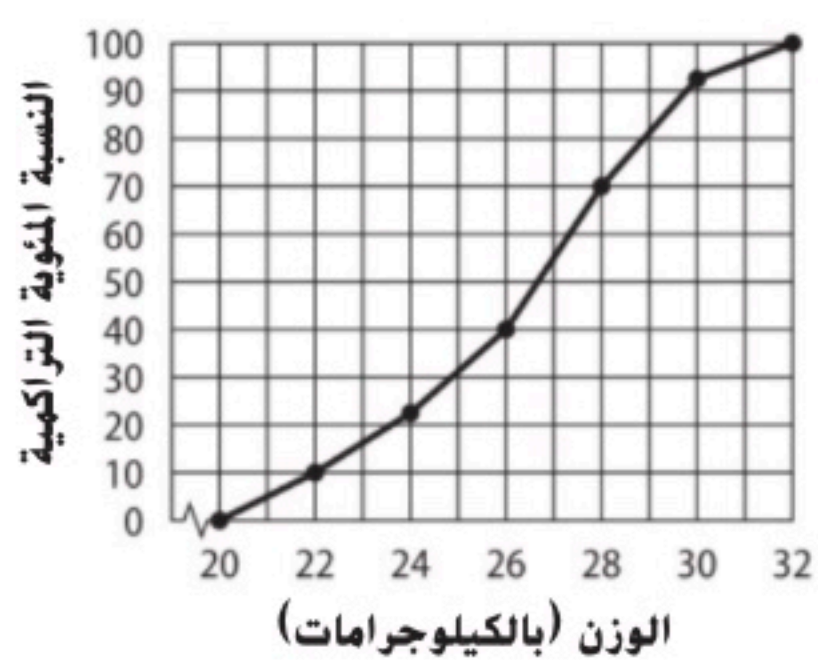
7a. 
[10, 55] scl: 5 by [0, 1] scl: 0.125

7b. إن كفاءة استهلاك الوقود الوسيطة للسيارات في العام الأول أقل منها في العام الثاني. والقيمتان الصغرتان في العام الأول أخفض منهما في العام الثاني. ولكن القيمتين العظميين متساويتان تقريبًا. ولذلك، لم يكن ثمة تحسنٌ كبيرٌ في كفاءة استهلاك الوقود في السيارات الهجينة من العام الأول إلى العام الثاني. وانتشار النصف الأوسط من البيانات أكبر قليلًا بالنسبة للسيارات في العام الثاني، ولكنه نفسه تقريبًا بالنسبة للسيارات في العام الأول.

8a. 
[2.5, 8.5] scl: 1 by [0, 1] scl: 0.125

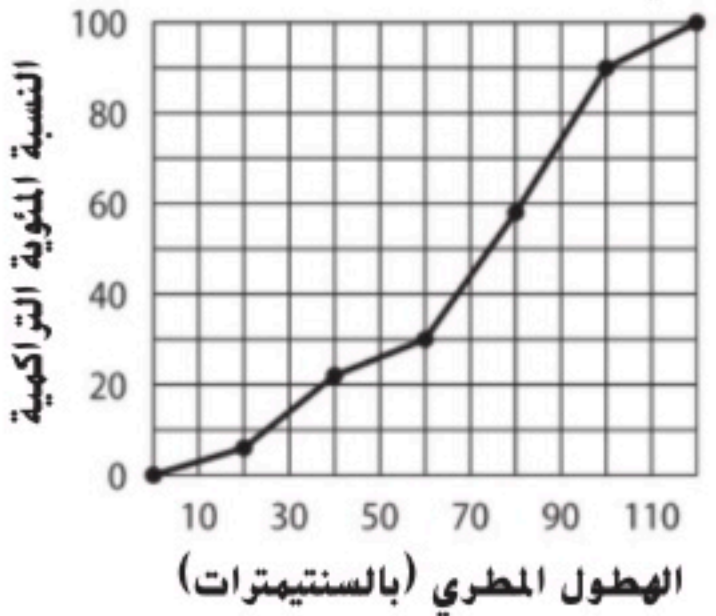
8b. يساوي القياس الوسيطي للزلازل في كاليفورنيا تقريبًا القياس الأدنى لها في ألاسكا. وتساوي القيمة العظمى للقياسات في كاليفورنيا تقريبًا الربيع الثالث في ألاسكا. ما يعني أن 25% من قيم البيانات في ألاسكا أكبر من مقابلتها في كاليفورنيا. ولذلك فإن قياسات الزلازل في ألاسكا أكبر بكثيرٍ منها في كاليفورنيا. وانتشار النصف الأوسط من البيانات أكبر بكثيرٍ في كاليفورنيا. ولذلك، فتباين قياسات الزلازل في كاليفورنيا أكبر من تباينها في ألاسكا.

9a. **أوزان إناث ثعلب البحر البالغة**

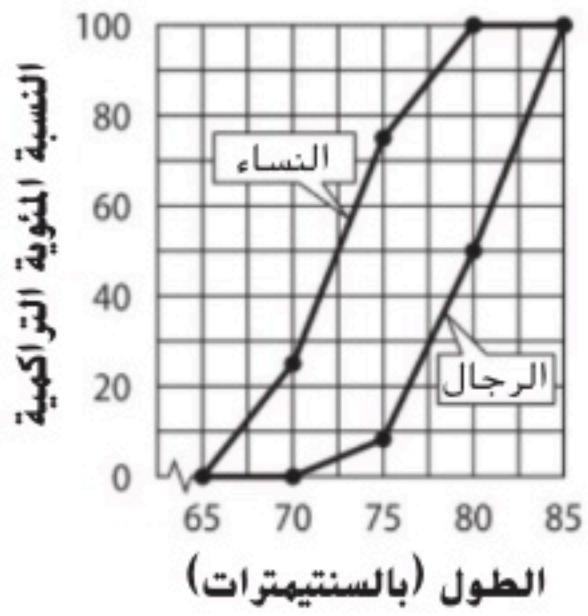


9b. الإجابة النموذجية: تقع أنثى ثعلب البحر البالغة التي وزنها 25 كيلوجرام في المركز المئوي الـــ 40. ما يعني أن 40% من ثعالب البحر لها وزن أقل.

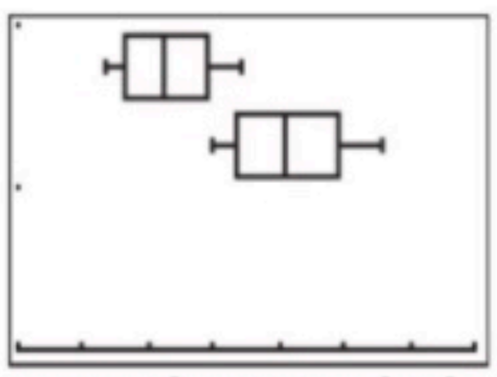
10a. **متوسط الهطول المطري السنوي في الولايات المتحدة الأمريكية**

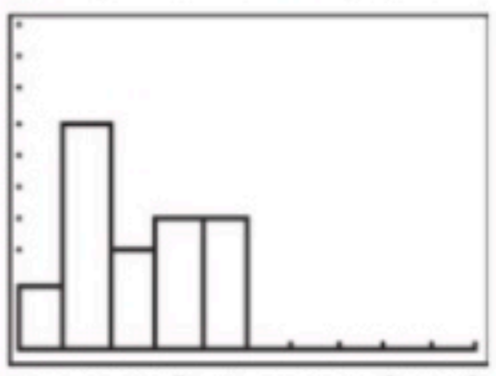


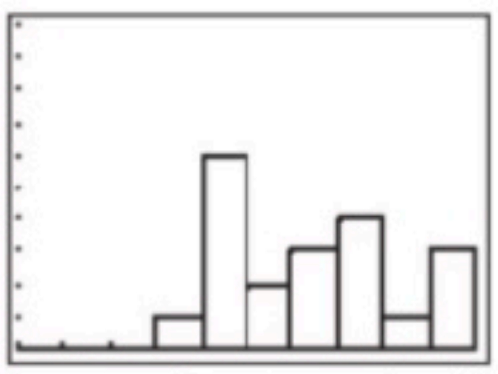
10b. الإجابة النموذجية: تقع الولاية التي يساوي معدل هبوط الأمطار السنوي فيها 100 سنتيمترًا في المركز المئوي الـــ 90. ما يعني أن لـــ 90% من الولايات معدل وسطي أقل لهطول الأمطار.

18a. 

18b. الإجابة النموذجية: يقع اللاعب الذي طوله 75 بوصةً في المركز المئوي العاشر تقريبًا. ما يعني أن حوالي 10% من اللاعبين أقصر منه. وتقع اللاعبة التي طولها 75 بوصةً تقريبًا في المركز المئوي الـــ 75. ما يعني أن حوالي 75% كم اللاعبات أقصر منها.

21a. 
[14,000, 28,000] scl: 2000 by [0, 1] scl: 0.5


[16,000, 26,000] scl: 1000 by [0, 10] scl: 1

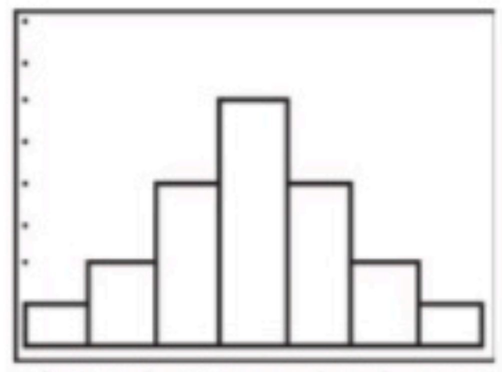

[16,000, 26,000] scl: 1000 by [0, 10] scl: 1

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

21b. الإجابة النموذجية: بلغ الاستهلاك الوسيطي للبترول في الولايات المتحدة الأمريكية بين عام 1987 و 2007 القيمة 18,450. في العظميين الوسط يساوي 18,560؛ وفي أمريكا الشمالية، كان الوسيط يساوي 22,200 وكان الوسط يساوي 22,350.

21c. الإجابة النموذجية: من الأسهل تحديد وسط كل توزيع من المخططات الصندوقية المتجاورة بالمقارنة مع أوساط المدارج التكرارية. وفي حين يمكنك تحديد انتشار مدى البيانات بكامله من أي من التمثيلين البيانيين، فإن بإمكانك أيضًا تحديد مدى كل ربيع من المخططات الصندوقية.

22a.



[10, 80] scl: 10 by [0, 8] scl: 1

شكل التوزيع متماثل.

22b. الوسط= 45.1. الانحراف المعياري = 15.2

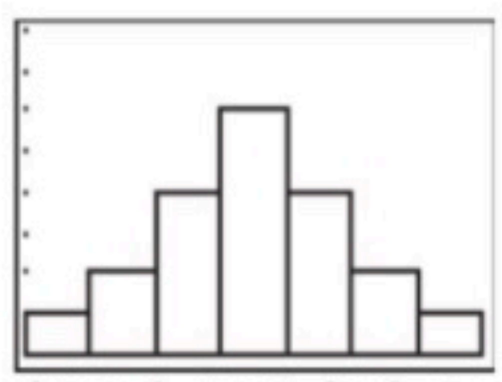
22c.

$X' = 3 + 5X$				
263	188	298	158	228
118	243	213	328	198
203	268	73	248	283
343	163	388	223	143

$X' = 10 + X$				
62	47	69	41	55
33	58	52	75	49
50	63	24	59	66
78	42	87	54	38

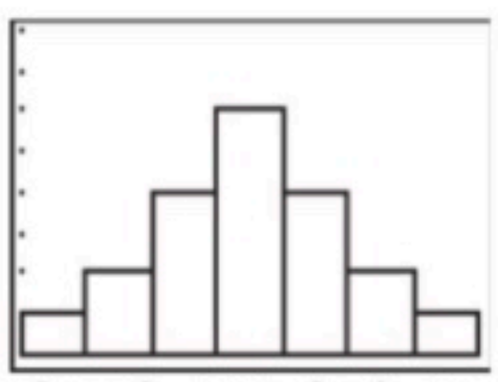
$X' = 5X$				
260	185	295	155	225
115	240	210	325	195
200	265	70	245	280
340	160	385	220	140

22d.



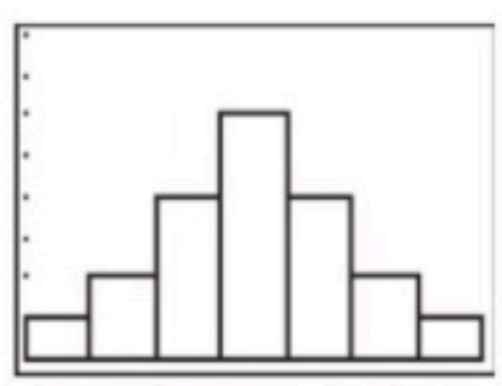
[50, 400] scl: 50 by [0, 8] scl: 1

شكل التوزيع متماثل.
الوسط= 228.5. الانحراف المعياري = 76.2.



[20, 90] scl: 10 by [0, 8] scl: 1

شكل التوزيع متماثل.
الوسط= 55.1، الانحراف المعياري = 15.2

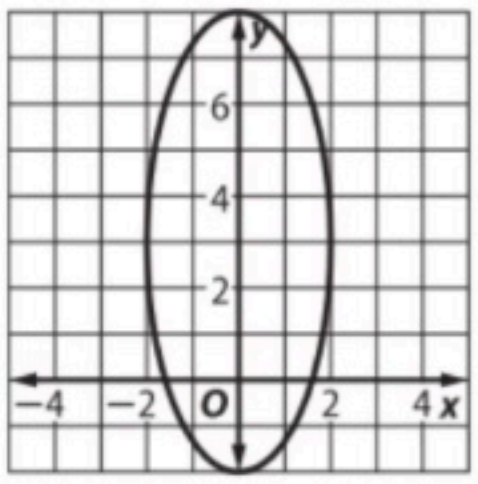


[50, 400] scl: 50 by [0, 8] scl: 1

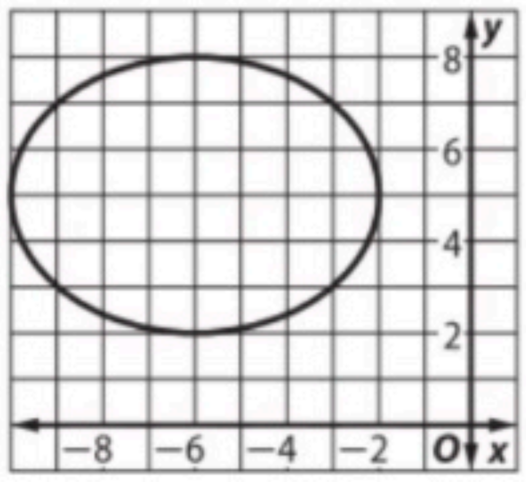
شكل التوزيع متماثل.
المتوسط = 225.5. الانحراف المعياري = 76.2

22e. الإجابة النموذجية: ليس للتحويل الخطي أثر في شكل التوزيع. في الإزاحة الخطية التي صيغتها $X' = a + bX$. يزداد كل من الوسط والانحراف المعياري أو ينخفضان بمعامل يساوي b ويزاحان مسافة a وحدة يمينًا أو يسارًا.

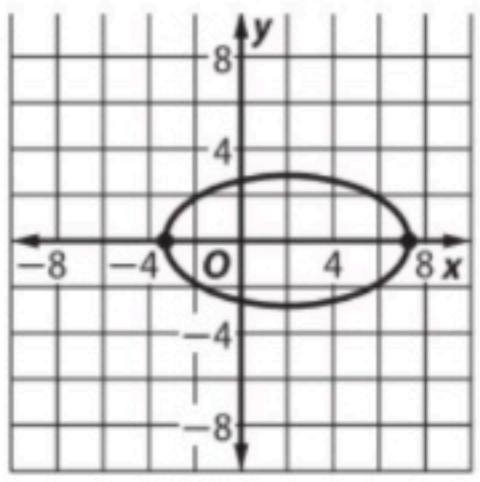
40.



41.



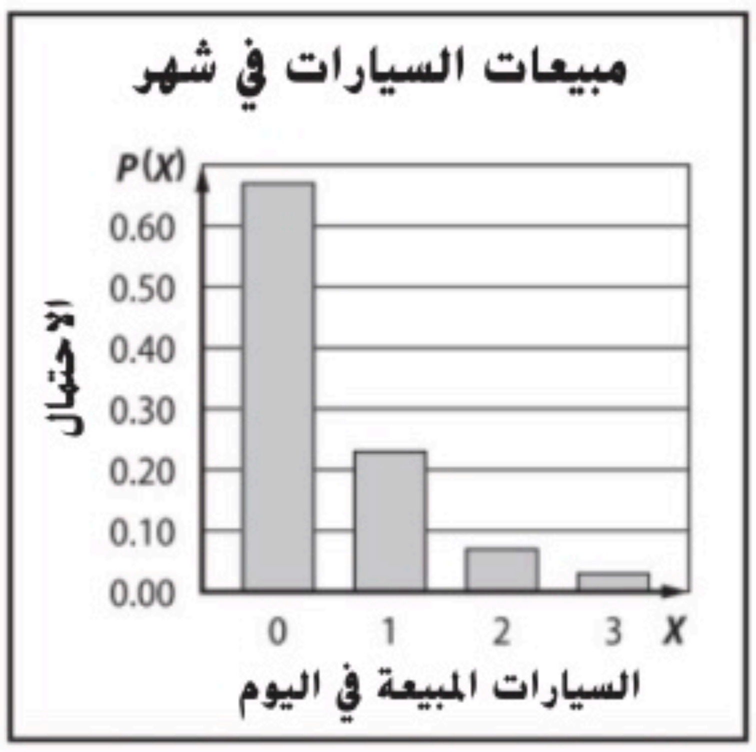
42.



الدرس 2-10 (تمرين موجّه)

2.

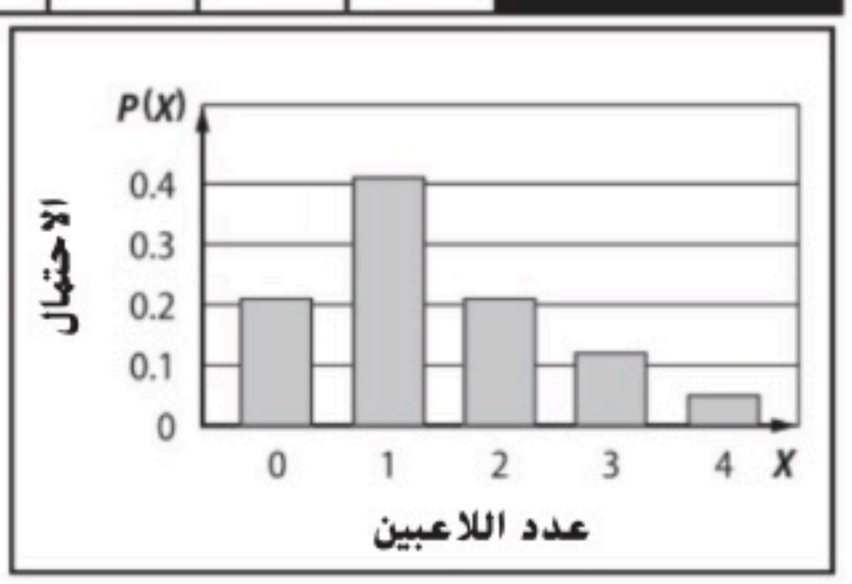
السيارات المبيعة، X	3	2	1	0
$P(X)$	0.03	0.07	0.23	0.67



الدرس 2-10

7.

المشغّلات، X	4	3	2	1	0
$P(X)$	0.05	0.12	0.21	0.41	0.21

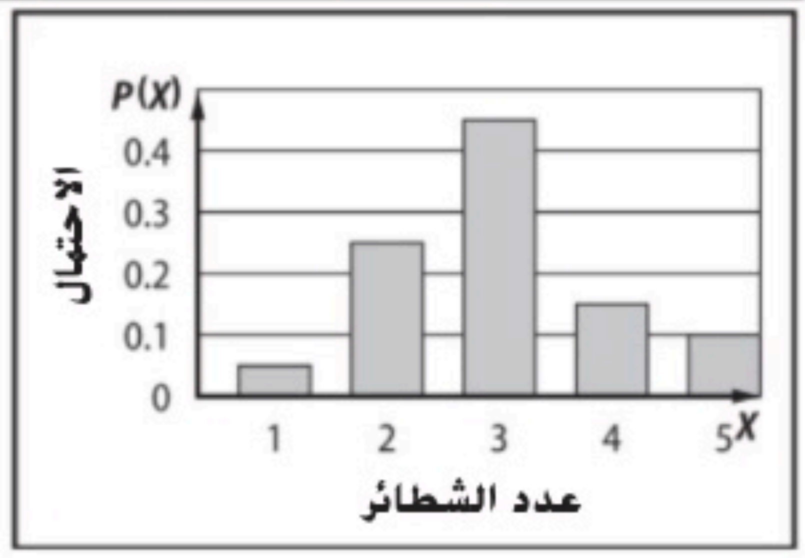


1.39؛ الإجابة النموذجية: في المتوسط، كان لدى الطلاب جهاز واحد أو جهازان لتشغيل MP3؛ 1.20؛ 1.09

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

.8

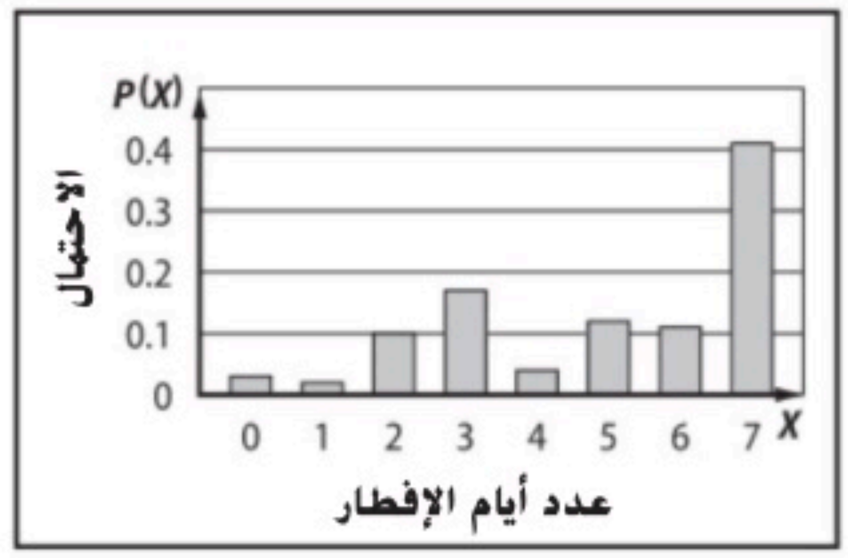
الشطائر، X	5	4	3	2	1
$P(X)$	0.1	0.15	0.45	0.25	0.05



3؛ الإجابة النموذجية: تناول كل من المشاركين في مسابقة أكل الشطائر في المتوسط 3 شطائر؛ 1.1

.9

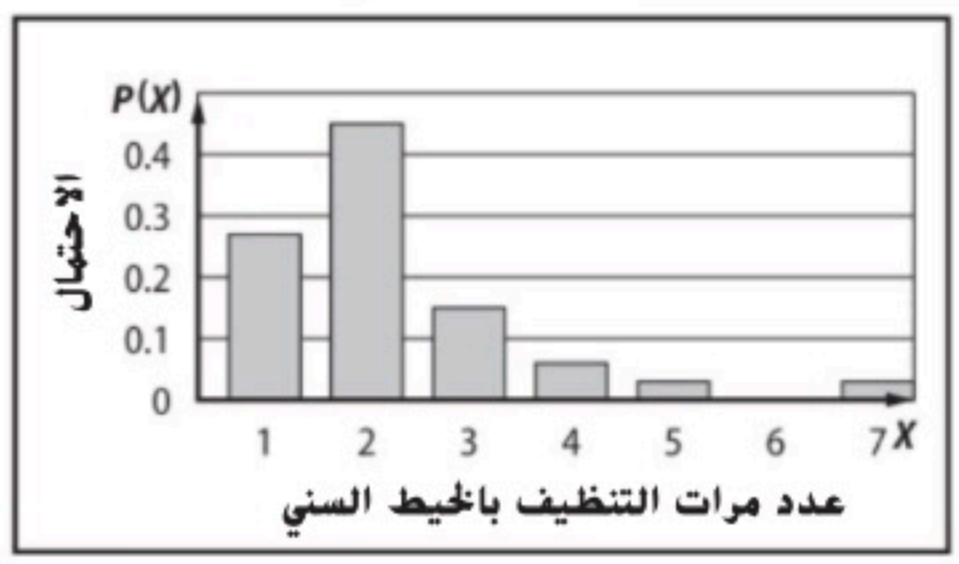
الأيام، X	7	6	5	4	3	2	1	0
$P(X)$	0.41	0.11	0.12	0.04	0.17	0.11	0.02	0.03



5؛ الإجابة النموذجية: كان الطلاب يتناولون طعام الإفطار خلال 5 أيامٍ في الأسبوع في المتوسط؛ 4.5، 2.1

.10

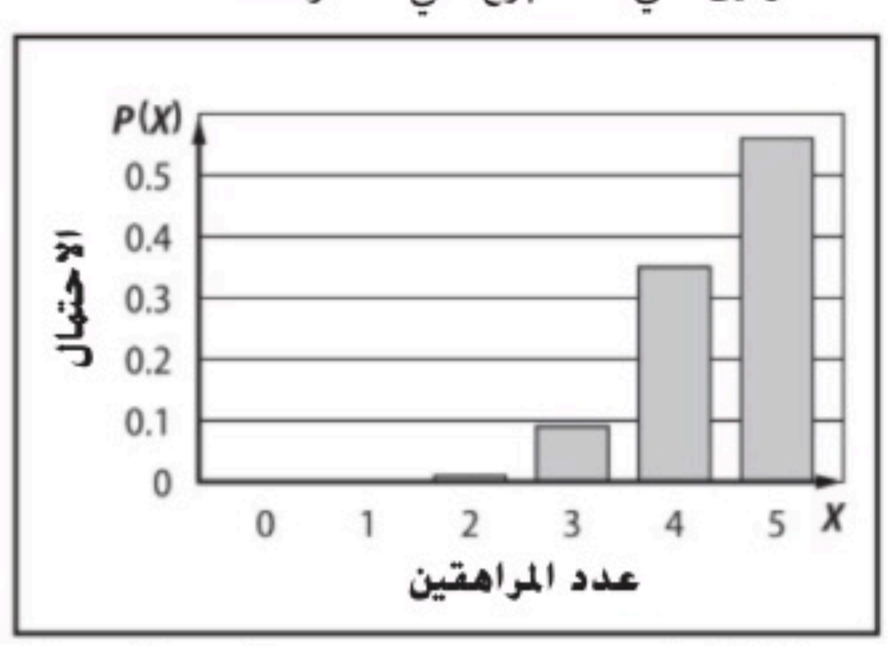
مرات التنظيف بالخيط، X	1	2	3	4	5	6	7
$P(X)$	0.27	0.45	0.15	0.06	0.03	0.00	0.03



2.2؛ الإجابة النموذجية: كان المرضى ينظفون أسنانهم بالخيط مرتين في الأسبوع في المتوسط؛ 1.2، 1.1

20.

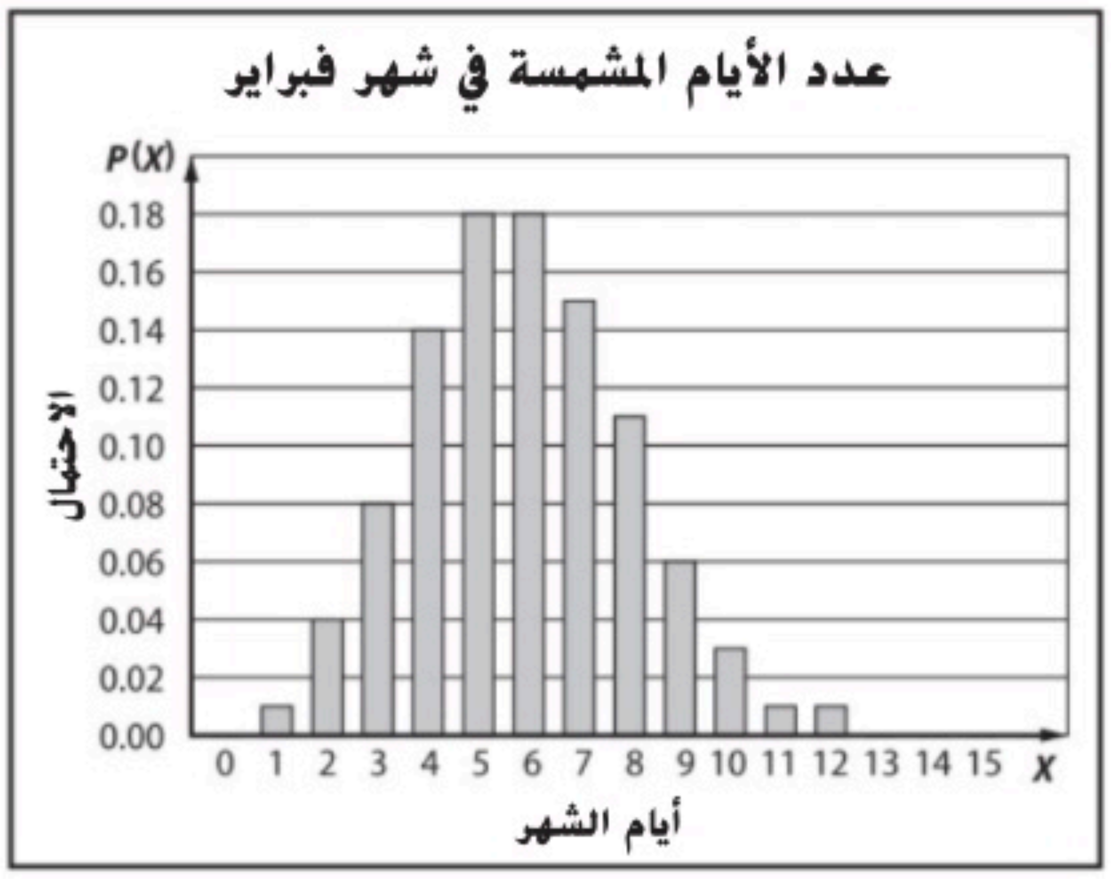
X	$P(X)$
0	0.00
1	0.00
2	0.01
3	0.09
4	0.35
5	0.56



4.45؛ الإجابة النموذجية: من أصل 5 مراهقين، سيطلب 4.5 إضافات؛ 0.49، 0.70

21.

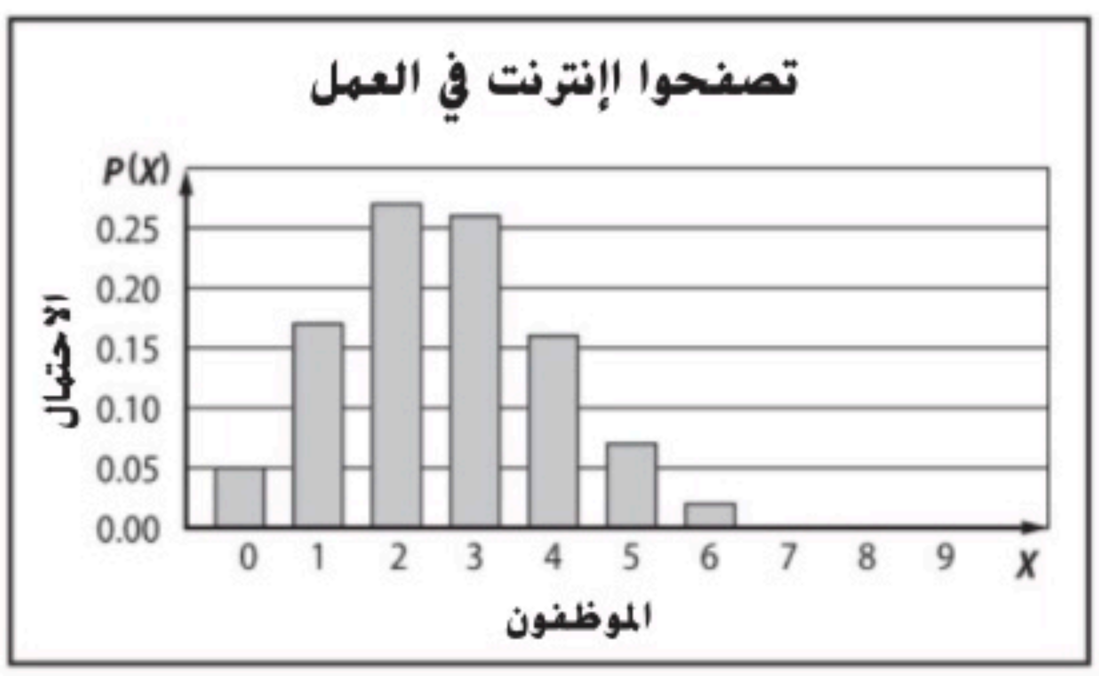
X	$P(X)$	X	$P(X)$	X	$P(X)$
0	0.00	10	0.03	20	0.00
1	0.01	11	0.01	21	0.00
2	0.04	12	0.01	22	0.00
3	0.08	13	0.00	23	0.00
4	0.14	14	0.00	24	0.00
5	0.18	15	0.00	25	0.00
6	0.18	16	0.00	26	0.00
7	0.15	17	0.00	27	0.00
8	0.11	18	0.00	28	0.00
9	0.06	19	0.00		



5.88؛ الإجابة النموذجية: من أصل 28 يومًا في فبراير، ستكون هناك 5.88 أيام مشمسة؛ 4.65؛ 2.16

22.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X)$	0.05	0.17	0.27	0.26	0.16	0.07	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00

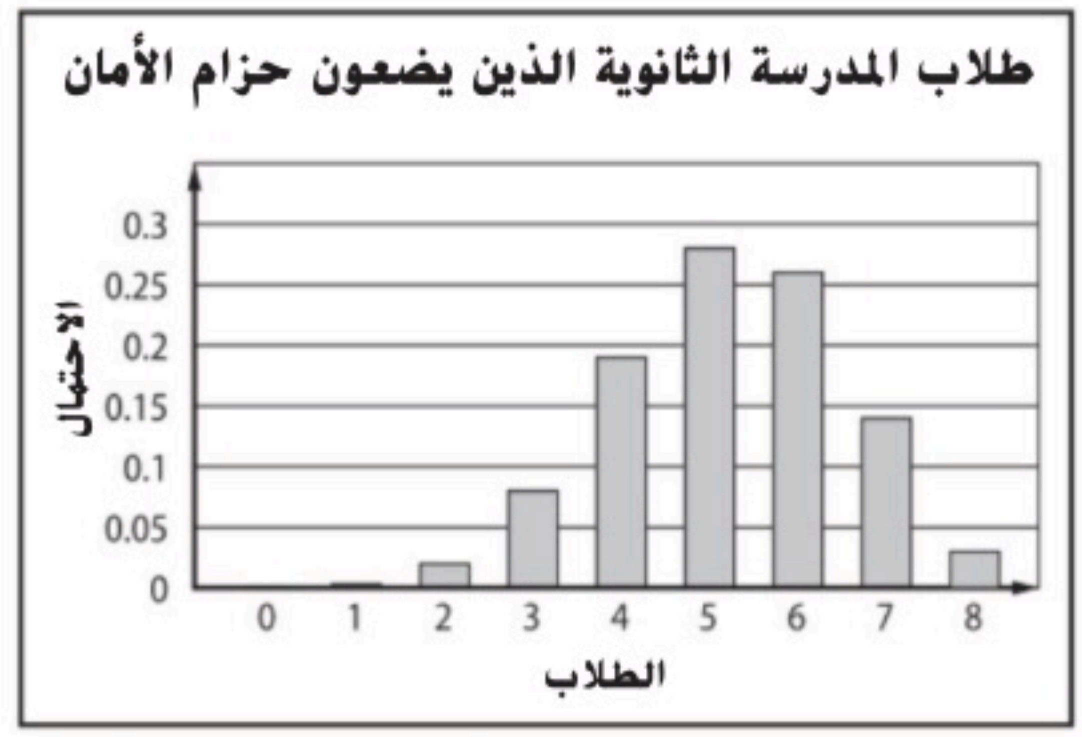


2.60؛ الإجابة النموذجية: من أصل 10 موظفين، سيكون 2.6 قد تصفحوا الإنترنت في مكان عملهم.؛ 1.92؛ 1.39

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

23.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X)$	0.00	0.003	0.02	0.08	0.19	0.28	0.26	0.14	0.03

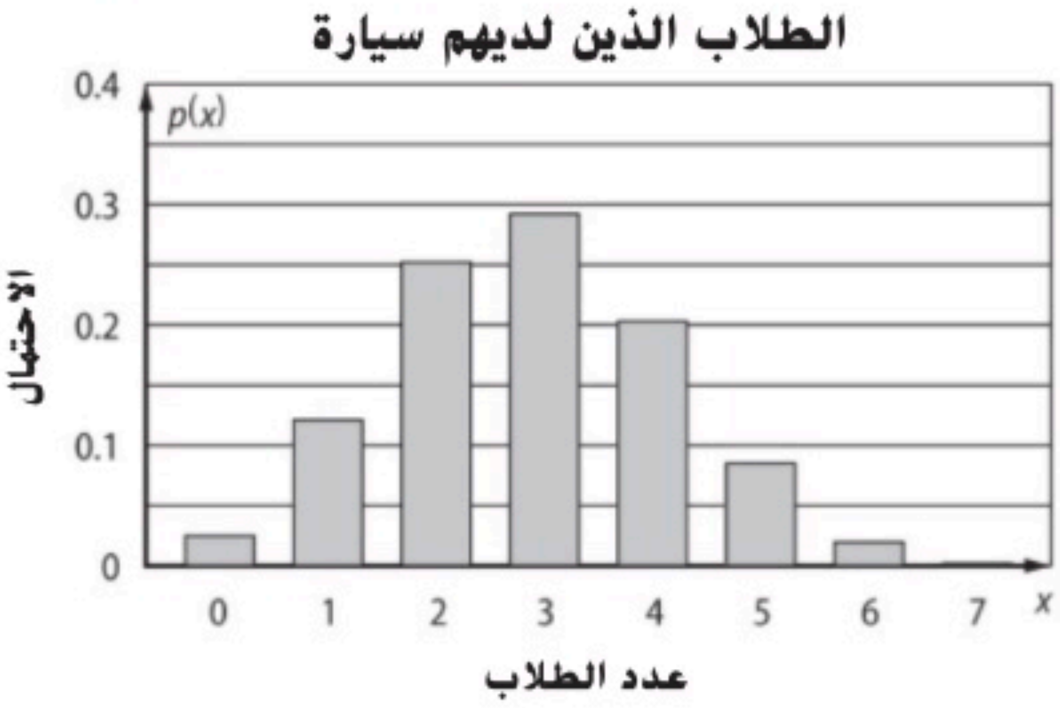


5.20؛ الإجابة النموذجية: من أصل 8 طلاب، سيرتدي 5.2 أحزمة الأمان خاصتهم؛ 1.82؛ 1.35

24.

X	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X)$	0.02	0.12	0.25	0.29	0.20	0.08	0.02	0.00

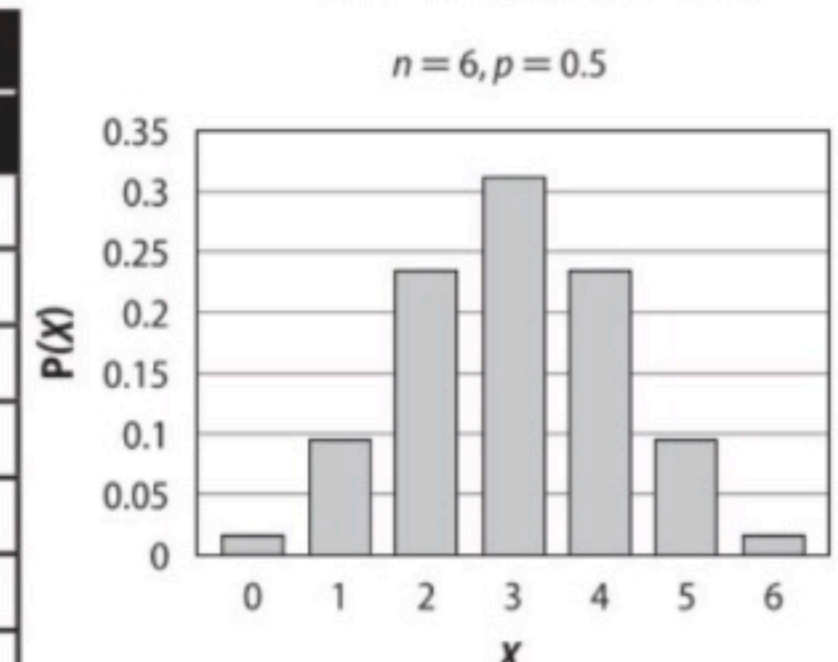
الطلاب الذين لديهم سيارة



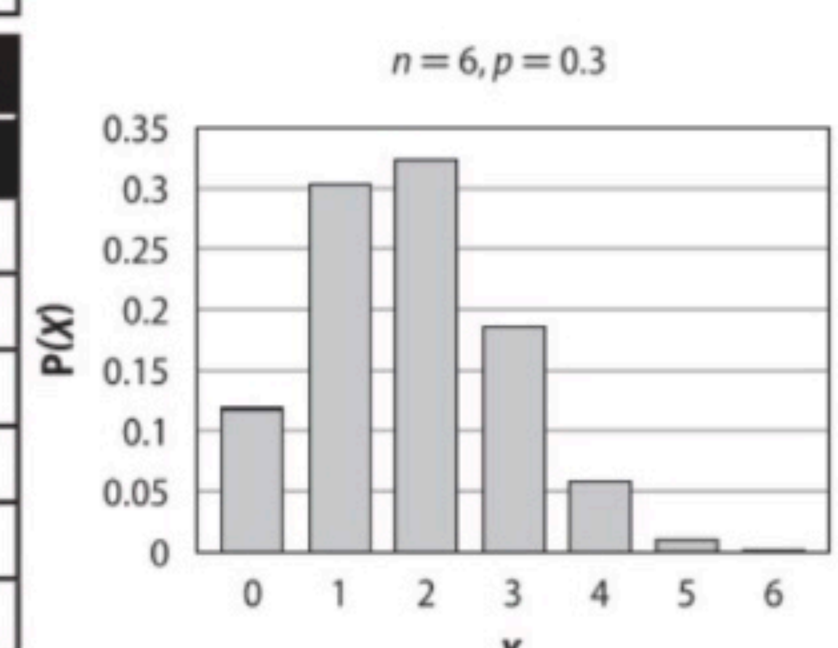
2.87؛ الإجابة النموذجية: من أصل 7 طلاب، سيمتلك 2.87 سيارة؛ 1.69؛ 1.30

27a.

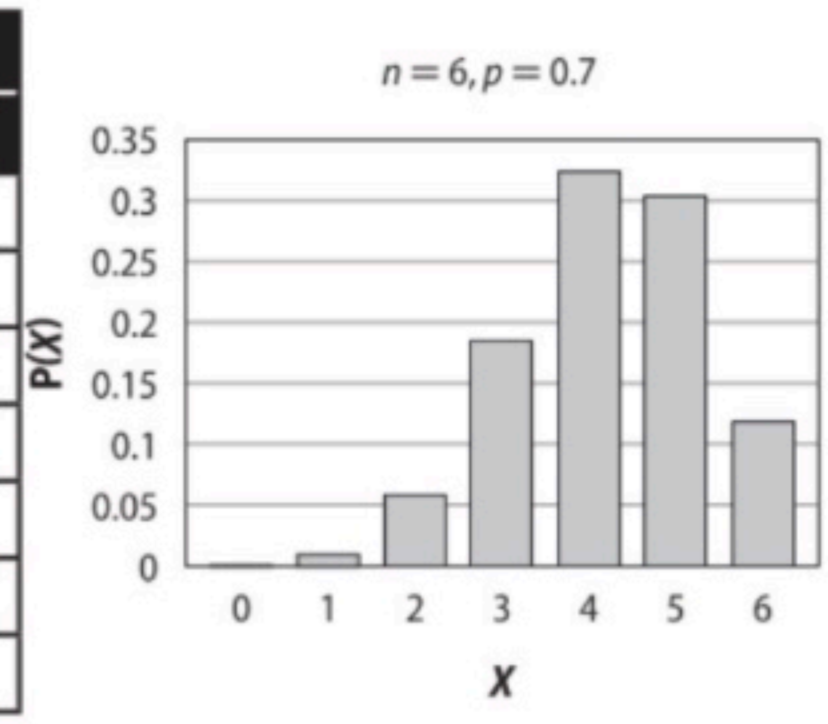
$n = 6, p = 0.5$	
X	$P(X)$
0	0.016
1	0.094
2	0.234
3	0.312
4	0.234
5	0.094
6	0.016



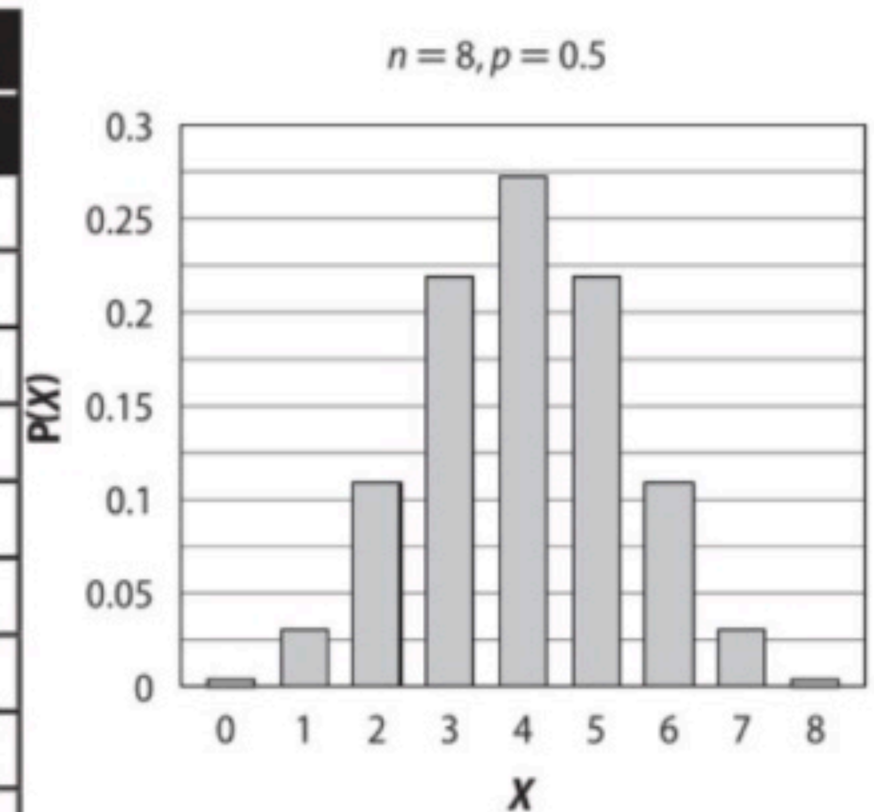
$n = 6, p = 0.3$	
X	$P(X)$
0	0.118
1	0.303
2	0.324
3	0.185
4	0.059
5	0.010
6	0.001



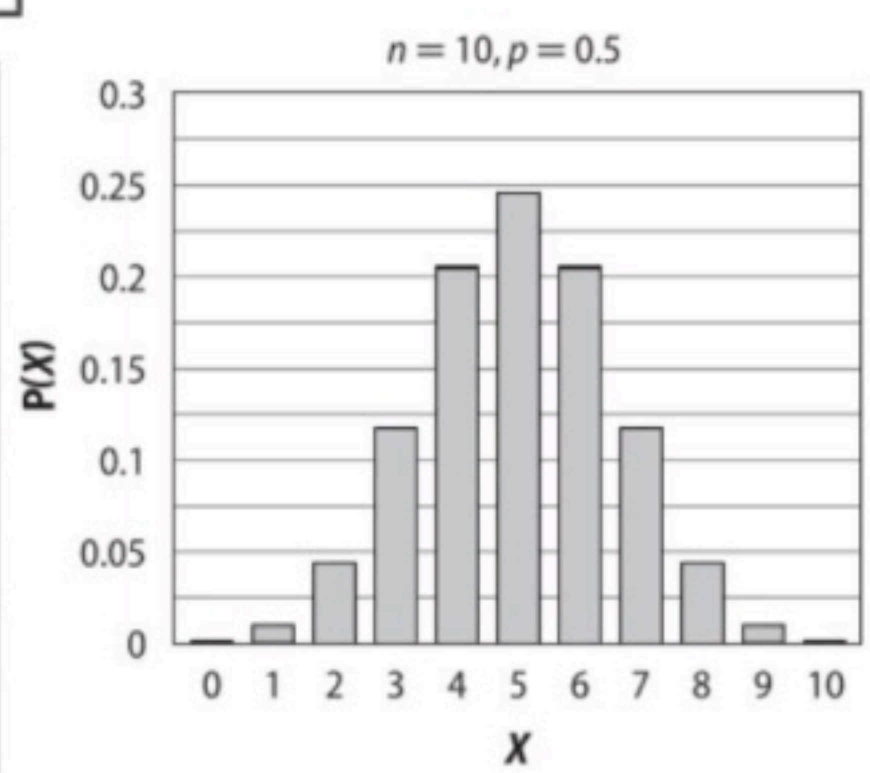
$n = 6, p = 0.7$	
X	$P(X)$
0	0.001
1	0.010
2	0.059
3	0.185
4	0.324
5	0.303
6	0.118



$n = 8, p = 0.5$	
X	$P(X)$
0	0.004
1	0.031
2	0.109
3	0.219
4	0.273
5	0.219
6	0.109
7	0.031
8	0.004



$n = 10, p = 0.5$	
X	$P(X)$
0	0.001
1	0.010
2	0.044
3	0.117
4	0.205
5	0.246
6	0.205
7	0.117
8	0.044
9	0.010
10	0.001



27b. الإجابة النموذجية: التوزيع المقابل لـ $n = 6$ و $p = 0.5$ متماثل. التوزيع المقابل لـ $n = 6$ و $p = 0.3$ ملتوٍ التواءً موجبًا والتوزيع المقابل لـ $n = 6$ و $p = 0.7$ ملتوٍ التواءً سالبًا. التوزيع المقابل لـ $n = 8$ و $p = 0.5$ و $n = 10$ و $p = 0.5$ متماثلان.

27c. الإجابة النموذجية: عندما يكون $p = 0.5$ يكون شكل التوزيع ذي الحدّين متماثلًا، وعندما $p < 0.5$ يكون شكل التوزيع ملتويًا إيجابيًا، وعندما $p > 0.5$ يكون التوزيع ملتويًا التواءً سالبًا.

27d. الإجابة النموذجية: مع تزايد n، يتوسّع التوزيع الاحتمالي ويزداد الانحراف المعياري.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

28. المعطى: $\mu = \Sigma\,[X \cdot P(X)]$

المطلوب إثباته: $\mu = np$

$$\mu = \Sigma\,[X \cdot P(X)]$$
$$= X_1 \cdot P(X_1) + X_2 \cdot P(X_2)$$
$$= (0)\,(1-p) + (1)(p)$$

$= p$ أو np لـ n محاولة

المعطى: $\sigma^2 = \Sigma[(X-\mu)^2 \cdot P(X)]$

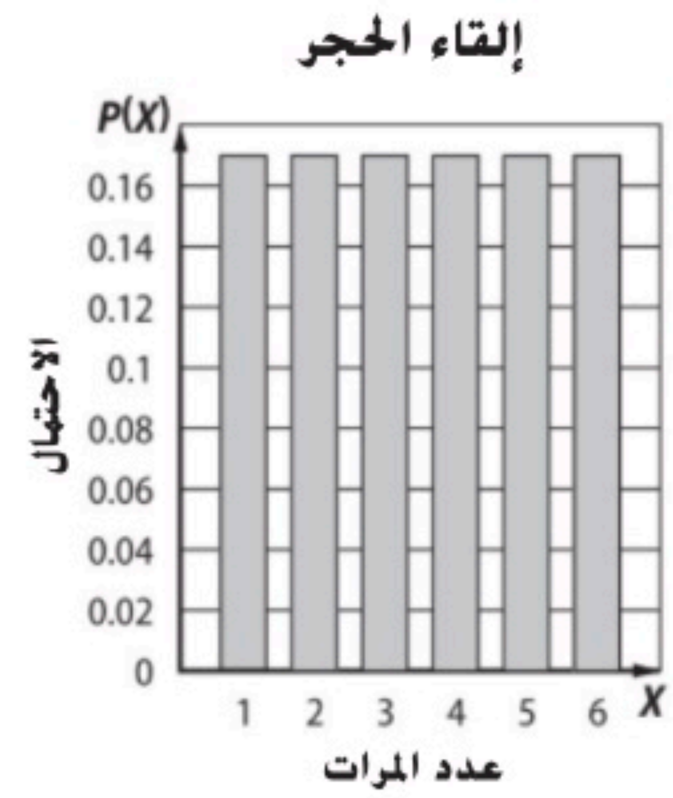
المطلوب إثباته: $\sigma^2 = npq$

$$\sigma^2 = \Sigma[(X-\mu)^2 \cdot P(X)]$$
$$= (X_1 - p)^2 \cdot P(X_1) + (X_2 - p)^2 \cdot P(X_2)$$
$$= (0-p)^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p$$
$$= p^2 - p^3 + p - 2p^2 + p^3$$

$= p(1-p)$ أو npq لـ n محاولة

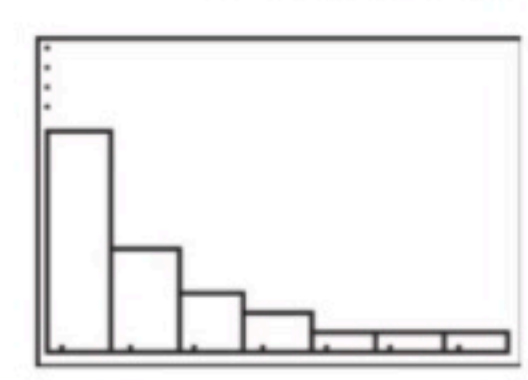
30. الإجابة النموذجية: الاحتمال التجريبي لرمي حجر النرد ستعطي توزيعًا متماثلًا لأن احتمالات ظهور العدد 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 متساوية.

X	$P(X)$
1	$\frac{1}{6}$ أو حوالي 0.17
2	$\frac{1}{6}$ أو حوالي 0.17
3	$\frac{1}{6}$ أو حوالي 0.17
4	$\frac{1}{6}$ أو حوالي 0.17
5	$\frac{1}{6}$ أو حوالي 0.17
6	$\frac{1}{6}$ أو حوالي 0.17



31. صحيحة: الإجابة النموذجية: رمي حجر النرد مثال عن تجربة احتماليةٍ نظرية. *نظريًا*، عند رمي حجري نردٍ سداسيي الأوجه، فينبغي أن تحصل على عددين مجموعهما 7 مرة واحدة من أصل 6 رميات. ولكن *عمليًا*، يمكن أن تحصل على 7 بصورةٍ أكثر أو أقل تكرارًا.

35a.

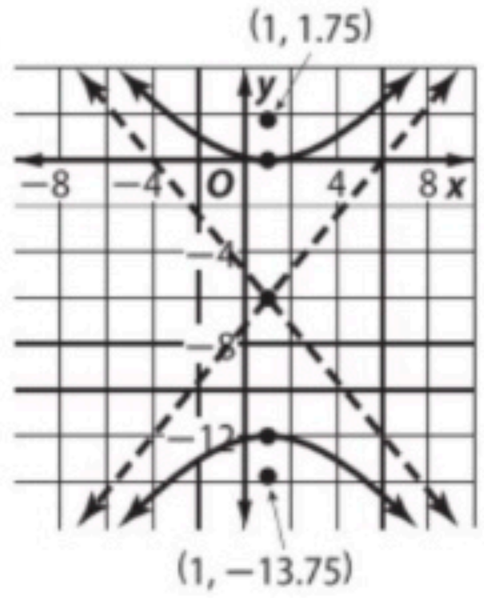


[300, 3100] scl: 400 by [0, 15] scl: 1

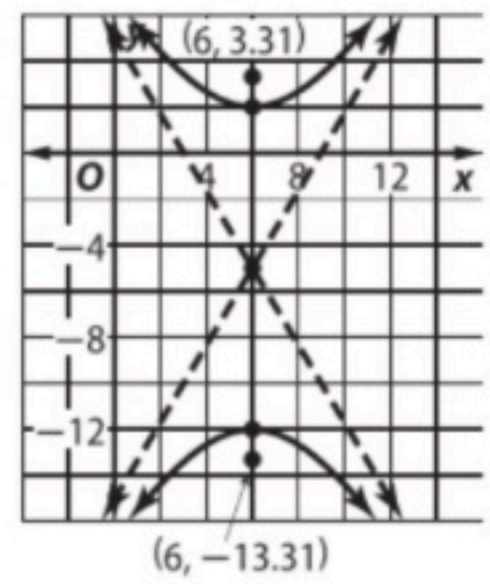
التمثيل البياني ملتوٍ إيجابي، ما يقترح أن معظم الأسعار في الطرف المنخفض، عند حوالي AED 700 أو أقل.

35b. التمثيل البياني ملتوٍ إيجابيًا، ولذلك يمكننا استخدام ملخص الأعداد الخمسة. تتراوح الأسعار من AED 300 إلى AED 2700 ونصف الأسعار يقع بين AED 600 و AED 1275.

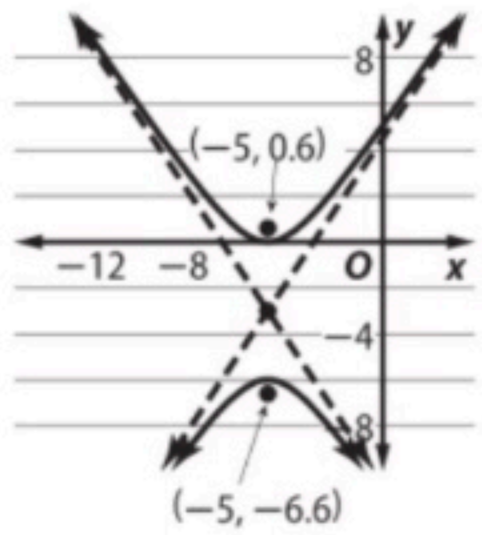
48.



49.

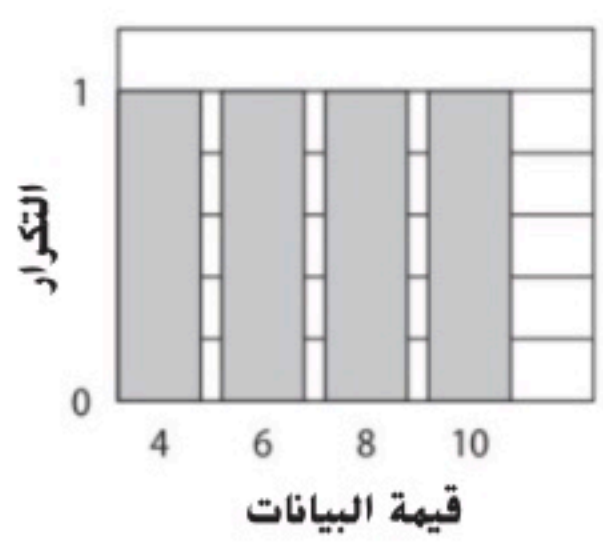


50.



الدرس 3-10

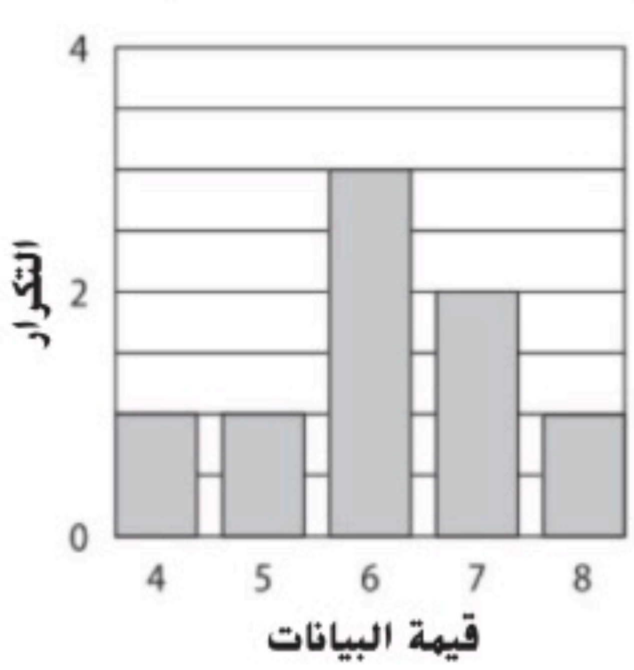
30a.



شكل التوزيع متساوٍ؛ $\mu = 7, \sigma = 2.2$

30b. الإجابة النموذجية:

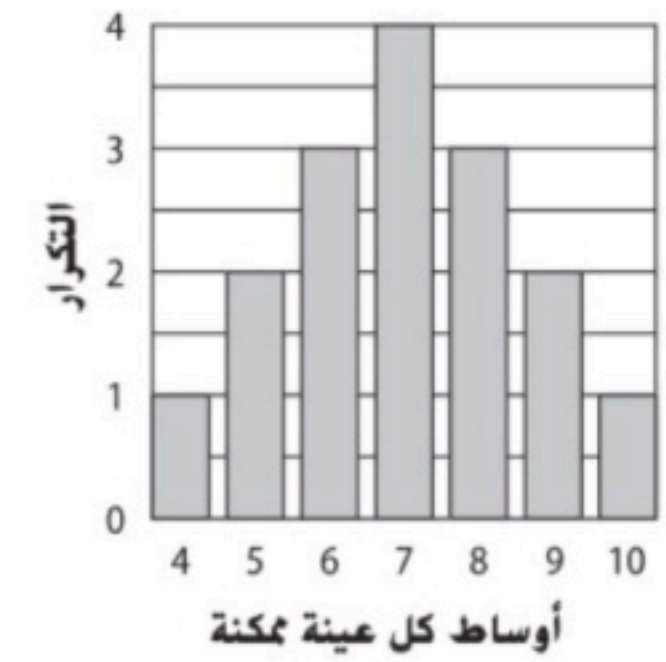
العينة	الوسط	العينة	الوسط
4, 8	6	4, 6	5
4, 4	4	6, 6	6
10, 4	7	6, 10	8
8, 4	6	8, 6	7



التوزيع متماثل إلى حد ما؛ $\mu = 6.13, \sigma = 1.16$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

.30d



التوزيع متماثل. الإجابة النموذجية: بزيادة حجم العينة، اقترب شكل توزيع متوسطات عيناتٍ من االتوزيع الطبيعي.

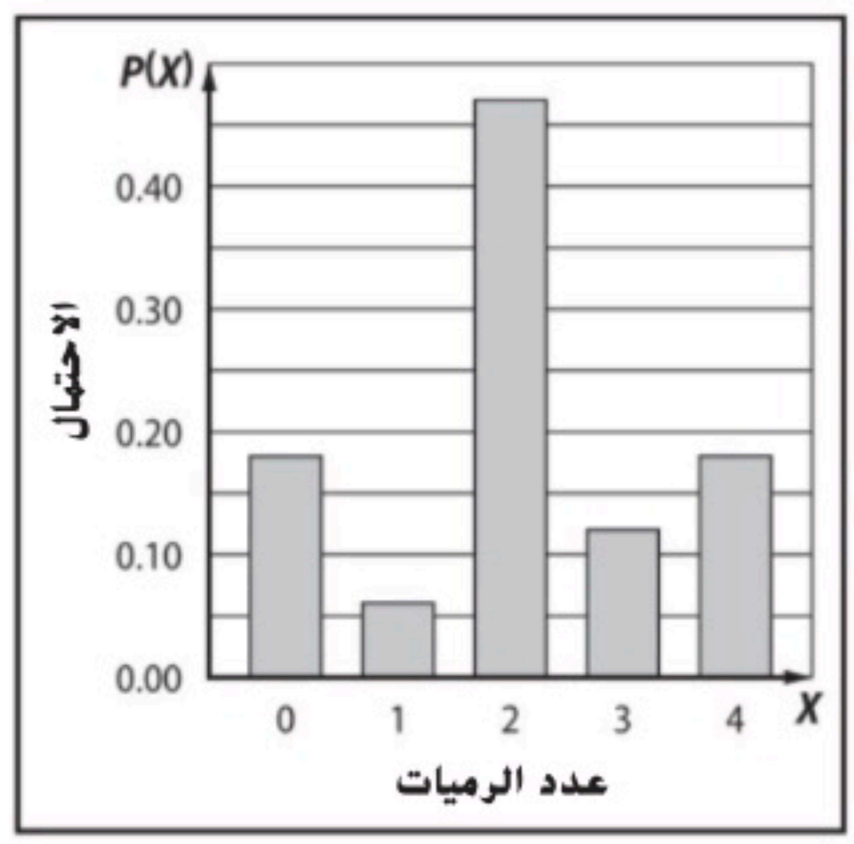
.30e $1.58 \approx \frac{2.23}{\sqrt{2}}$؛ الإجابة النموذجية: مع زيادة حجم العينة، يقترب وسط أوساط العينات من وسط المجتمع الإحصائي ويساوي الانحراف المعياري لأوساط العينات الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي مقسومًا على الجذر التربيعي لحجم العينة.

.34 أحيانًا؛ الإجابة النموذجية: على الرغم من أن المتغيرات المتصل يمكن أن تكون ذات توزيعٍ طبيعي، فيمكن أن تكون ملتويةً أيضًا.

.35 الإجابة النموذجية: تساوي المساحة الكلية تحت التوزيعين الطبيعي والطبيعي المعياري 1. وكلا المنحنيين متصلان ومتماثلان بالنسبة للوسط أيضًا. ولكن للتوزيع المعياري وسط يساوي 1 وانحراف معياري يساوي 0، في حين أن الوسط والانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي يمكن أن يكونا بأي قيمة.

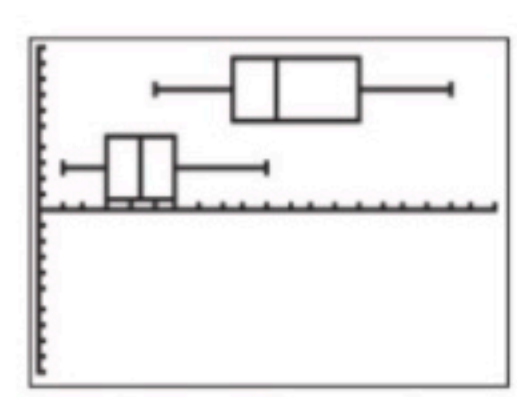
.36a

الضربات المسجلة، X	4	3	2	1	0
$P(X)$	0.18	0.12	0.47	0.06	0.18



.36b 2.08؛ الإجابة النموذجية: سجل الفريق في المتوسط رميتين للاعب الواحد على مدار المباراتين المتتاليتين.

.37



[0, 20] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

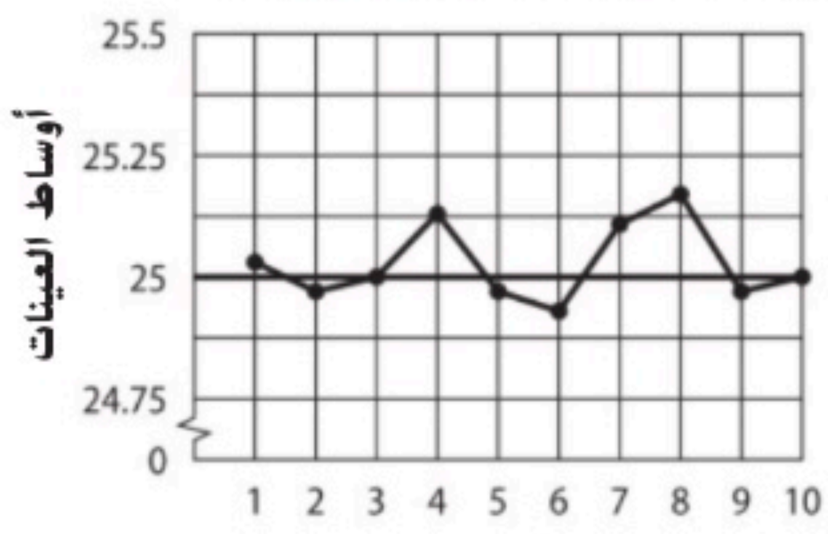
الإجابة النموذجية: العدد الوسيطي من ركلات الجزاء في الموسم 1 أكبر من ذلك العدد في الموسم 2. والعدد الأقصى من ركلات الجزاء في الموسم 2 أقل من من الوسيط الخاص بالموسم 1، ما يعني أن اكثر من 50% من قيم البيانات للموسم 1 أعلى من تيم بيانات الموسم 2. ولذلك، فإن عدد ركلات الجزاء التي منحت إلى الفريق خلال الموسم 2 أقل بصورةٍ عامةٍ مما منح إليه في الموسم 1.

الدرس 10-4

17a.

العينة	$\bar{x}$	s
1	25.03	0.153
2	24.97	0.153
3	25	0.265
4	25.13	0.208
5	24.97	0.252
6	24.93	0.153
7	25.1	0.200
8	25.17	0.321
9	24.97	0.208
10	25	0.300

17b. مخطط مراقبة أوساط العينات



.17c الإجابة النموذجية: حدّ الضبط الأعلى هو 25.22 وحدّ الضبط الأدنى هو 24.78. بما أن جميع أوساط العينات تقع ضمن هذين الحدين، فالعملية ضمن نطاق السيطرة.

.20 الإجابة النموذجية: مع تزايد n، يقترب شكل توزيع العينة من شكل التوزيع الطبيعي. وسيكون مركز توزيع أوساط العينات مساويًا وسط المجتمع الإحصائي، كما سيكون الانحراف المعياري لمتوسطات العينات مساويًا للانحراف المعياري لوسط المجتمع الإحصائي مقسومًا على الجذر التربيعي لحجم العينة.

.21 الإجابة النموذجية: هناك احتمال نسبته 8% في أن تكون نساءٍ في العينة على الأقل مصاباتٍ بعمى الألوان وهناك احتمال نسبته 16% في أن يكون 10 رجالٍ مصابين بعمى الألوان. ولذلك، ثمة احتمال أكبر في أن يكون 10 رجالٍ اختيروا عشوائيًا مصابين بعمى الألوان في عينةٍ من 100 رجل.

.22 الإجابة النموذجية: من أمثلة المجتمعات الإحصائية درجاتُ امتحان ACT للطلاب في الولايات المتحدة. ومن عينات المجتمع الإحصائي درجات امتحان ACT لـ 1000 طالبٍ اختيروا عشوائيًا في البلاد. وحينها يكون توزيع أخذ العينات هو توزيع أوساط عينات جميع العينات الممكنة لدرجات امتحان ACT الخاصة بالطلاب المختارين عشوائيًا.

.25 الإجابة النموذجية: بحسب نظرية النهاية المركزية، يقترب أي توزيع من التوزيع الطبيعي بتزايد حجم العينة. ولذلك، طالما أن $np \geq 5$ و $nq \geq 5$، وطالما أن المتغير الأصلي موزعٌ توزيعًا طبيعيًا أو $n \geq 30$، فيمكن استخدام التوزيع الطبيعي لتقريب توزيعٍ ذي حدّين. ويحتاج الأمر إلى استخدام معامل تصحيحٍ للاتصال لأن التوزيع ذا الحدّين منفصل، في حين أن التوزيع الطبيعي متصل.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 10-5

15a. توزيع t؛ الإجابة النموذجية: حجم العينة أقل من 30 والانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي مجهول.

15d. الإجابة النموذجية: بناءً على الاستبيان، فنحن واثقون بنسبة 90% من أن الطلاب يقضون في المتوسط ما بين 6.9 و 9.3 ساعات في الأسبوع في ممارسة أنشطة ما بعد المدرسة.

15a. توزيع طبيعي؛ الإجابة النموذجية: حجم العينة أقل من 30 ولكن الانحراف المعياري معروف.

16d. الإجابة النموذجية: بناءً على الاستبيان، فنحن واثقون بنسبة 90% من أن الطلاب يقبضون في المتوسط بين AED 6.31 و AED 6.67.

19. نعم؛ الإجابة النموذجية: يعطي حساب فترة الثقة عند المستوى 99%باستخدام التوزيع t وجعل $n = 24$ و $s = 4$ و $\bar{x} = 22$ النتيجة $19.7 < \mu < 24.3$. يقع زمن التحضير المواتي 20 دقيقةً ضمن هذه الفترة.

20a. المدينة 1: $44{,}613 < \mu < 48{,}787$؛
المدينة 2: $46{,}806 < \mu < 48{,}794$؛
المدينة 3: $42{,}350 < \mu < 47{,}650$

20b. الإجابة النموذجية: ربّما على خليفة الانتقال إلى المدينة 2 لأن متوسط الرواتب فيها أعلى والانحراف المعياري هو الأقل. وبعد مقارنة فترات الثقة، وفي حين تبدو أسقف الرواتب تقاربية في جميع المدن، فيبدو أن الرواتب الدنيا في المدينتين 1 و 3 أصغر بكثير من الراتب الأدنى في المدينة 2.

21. نعم؛ الإجابة النموذجية: يعطي حساب فترة الثقة عند المستوى 99%باستخدام التوزيع t وجعل $n = 14$ و $s = 1.41$ و $\bar{x} = 61.91$ النتيجة $60.77 < \mu < 63.05$. يقع زمن التحدث المواتي لمدة 62 ساعةً ضمن هذه الفترة.

24. الإجابة النموذجية: كلما ارتفع مستوى الثقة، كلما اتّسعت فترة الثقة. وقد لا ينتج اتساع فترة الثقة على الدوام أدق فترة ثقة.

25. تعطي زيادة حجم العينة تمثيلاً أفضل للمعلّمة الفعلية وتضيّق من فترة الثقة، ما يزيد من دقتها.

26. توسّع زيادة مستوى الثقة فترة الثقة، ما يزيد من احتمال احتواء الفترة للمعلّمة.

27. إن الزيادة في الانحراف المعياري تزيد من أقصى خطأ للتقدير وتوسع فترة الثقة.

28. تزيح الزيادة في الوسط فترة الثقة، ولكنها لا توسعها.

31. الإجابة النموذجية: يمكن باستخدام معلّمةٍ تمثيل خاصيةٍ من خواص المجتمع الإحصائي باستخدام عددٍ مفردٍ أو مدىً من الأعداد بدلاً من عددٍ كبيرٍ من نقاط البيانات المفردة.

الدرس 10-6

20. النوع 1: أشير إلى أن الرجل مذنب في حين أنه في الحقيقة ليس مذنبًا.
النوع 2: أشير إلى أن الرجل غير مذنب في حين أنه في الحقيقة مذنب.

21. النوع 1: تحدد الأشعة السينية عدم وجود التواءٍ في الكاحل في حين يوجد في الحقيقة التواءٌ في الكاحل.
النوع 2: تحدد الأشعة السينية وجود التواءٍ في الكاحل في حين لا يوجد في الحقيقة التواءٌ في الكاحل.

22. النوع 1: يحدد أن الطلاب لا يستثمرون زمن الدراسة بكفاءةٍ بالرغم من أنهم يستثمرونه بكفاءةٍ في الحقيقة.
النوع 2: يحدد أن الطلاب يستثمرون زمن الدراسة بكفاءةٍ بالرغم من أنهم لا يستثمرونه بكفاءةٍ في الحقيقة.

23. النوع 1: يُحدّد أن معظم الطلاب لديهم عمل في حين أن الأمر ليس كذلك في الحقيقة.
النوع 2: يُحدّد أن معظم الطلاب ليس لديهم عمل في حين أن لديهم عملًا في الحقيقة.

24. النوع 1: يُحدّد أن العمر المتوسط للسمكة الذهبية ليس عامين في حين أنه عامان في الحقيقة.
النوع 2: يُحدّد أن العمر المتوسط للسمكة الذهبية عامان في حين أنه ليس كذلك في الحقيقة.

25. النوع 1: يُحدّد أن السّم سامٌ في حين أنه ليس كذلك.
النوع 2: يُحدّد أن السّم ليس سامًا في حين أنه سامٌ في الحقيقة.

26a. $H_0\colon \mu \geq 6,\ H_a\colon \mu < 6$ (الافتراض)

26d. ليس ثمة ما يكفي من الأدلة لتأييد الافتراض القائل إن $H_a\colon \mu < 6$.

27a. $H_0\colon \mu \leq 21,\ H_a\colon \mu > 21$ (الافتراض)

27d. ثمة ما يكفي من الأدلة لتأييد الافتراض القائل إن $H_a\colon \mu > 21$.

28a. $H_0\colon \mu \geq 81$ (الافتراض)، $H_a\colon \mu < 81$

28b. $z \approx 2.47$؛ فرضية العدم ليست مرفوضة.

28c. ≈ 0.067؛ فرضية العدم ليست مرفوضة.

29a. $H_0\colon \mu = 85$ (الافتراض)، $H_a\colon \mu \neq 85$

29b. فصل راشد الدراسي: $t \approx -0.58$؛ فرضية العدم ليست مرفوضة. افتراض أن $\mu = 85$ تدعمه الأدلة.
فصل لمياء الدراسي: $t \approx 3.06$؛ فرضية العدم مرفوضة. افتراض أن $\mu = 85$ لا تدعمه الأدلة.

29c. $z \approx 1.27$؛ فرضية العدم ليست مرفوضة. افتراض أن $\mu = 85$ لا تدعمه الأدلة.

29d. ينصّ قانون الأعداد الكبيرة أنه كلما ازداد حجم العينة، اقترب $\bar{x}$ أكثر إلى μ. يزيد تركيب العينتين قيمة n وينتج نتيجةً أكثر تمثيلًا لوسط المجتمع الإحصائي. وهذا يحدث أيضًا ليتوافق مع الافتراض.

30. عبد الرحمن؛ الإجابة النموذجية: يعتمد الخطأ المسموح به أكثر على نوع الدراسة. على سبيل، في المجال الطبي، قد لا يكون من الحكومة وجود خطأ من النوع 2 في عقارٍ يفترض أن يخفض من ضغط الدم. وعلى العكس من ذلك، قد لا يرغب أخصائي تغذية بوقوع خطأ من النوع الأول يخصّ افتراض أن تناول أطعمةٍ عالية الدهون يزيد من قابلية الإصابة بمرض القلب.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

.31 الإجابة النموذجية: عند استخدام الإحصائات والقيمة الحرجة، يُحوّل مستوى الدلالة في البداية إلى قيمةٍ حرجة، وهي تستخدم لاحقًا لتحديد منطقةٍ حرجة. بعدها يقارن إجصاء اختباري بمنطقة حرجة. ولاستخدام قيم p، يُحوّل الإحصاء الاختباري إلى قيمة p. ثم يقارن هذا العدد بمستوى الدلالة.

.32 الإجابة النموذجية: إذا كان الافتراض ممثلًا بالفرضية البديلة، فإن رفض نظرية العدم سيدعم في الحقيقة الافتراض.

.33 الإجابة النموذجية: سوف تتضمن الفرضية البديلة رموز متباينةٍ فقط، وإن كانت تمثل الافتراض.

.34 الإجابة النموذجية: تقابل القيمة p المساحة المحصورة تحت المنحنى الطبيعي. والمساحة تبقى موجبةً على الدوام.

.36 الإجابة النموذجية: يزيد الحدّ من الأخطاء من النوع 1 عبر خفض مستوى الدلالة من احتمال الأخطاء من النوع 2. وهذا يعني أن من الأرجح رفض فرضيات العدم الخاطئة في الحقيقة.

الدرس 7-10

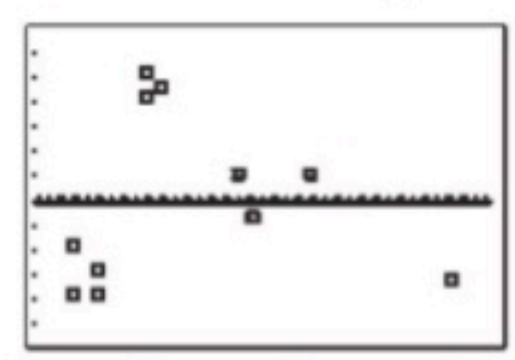
.1a يبدو أن للبيانات ارتباطًا خطيًا سالبًا؛ $r \approx 0.8320$؛ يشير معامل الارتباط أن للبيانات ارتباطًا خطيًا.

[4, 60] scl: 1 by [10, 35] scl: 1

.1b بما أن $t \approx 4.499$ و $3.250 < 4.499$ و $2.262 < 4.499$ و $1.833 < 4.499$، فإن الارتباط يكون دلاليًا عند المستويات 1% و 5% و 10%.

.1c $\hat{y} = 0.34155x + 13.6875$؛ يشير الميل $a = 0.34155$ إلى أن كل جرام من الدهون يعطي تقريبًا 0.34155 جرامًا من البروتين. وتشير نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y والمساوية $b = 13.6875$ إلى أن طبقًا من الطعام يحوي صفرًا من الدهون سيعطي 13.6875 جرامًا من البروتين، والحال ليس كذلك دائمًا.

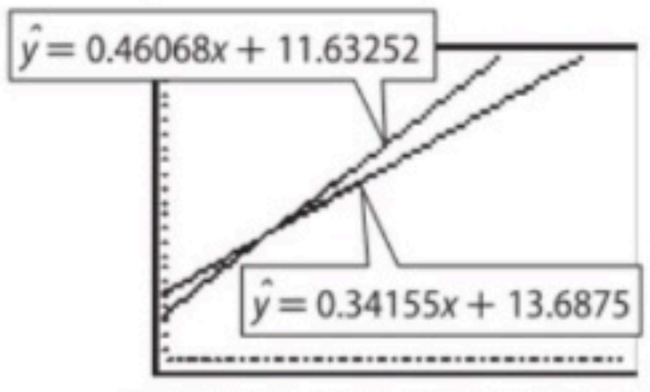
.1d



[4.2, 61.8] scl: 1 by [−5.3, 6.6] scl: 1

تَظهر النواتج المتبقية متناثرة عشوائيًا وتتمحور حول خط الانحدار عند $y = 0$. وهذا يدعم الادعاء بأن استخدامنا لنموذج خطي أمر مناسب.

.1e تُعدّالنقطة (57,30) قيمة متطرفة في الاتجاه x. وتؤدي إزالة هذه النقطة إلى تحريك معادلة الانحدار الأصلية لمسافةٍ أكبر من الصغيرة، إذًا فالقيمة المتطرفة مؤثرة، كما هو موضح في التمثيل البياني.

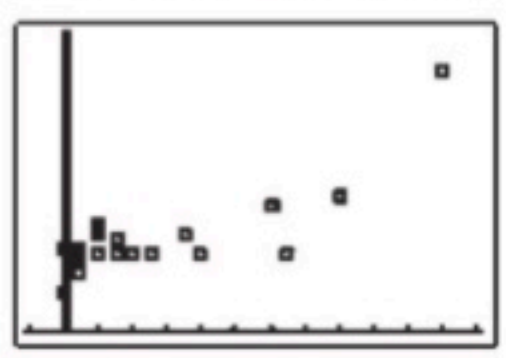


[4.2, 61.8] scl: 1 by [−5.3, 6.6] scl: 1

.1f عند إزالة النقطة المتطرفة (57, 30)، يكون $r \approx 0.83441$ و $\hat{y} = 0.46068x + 11.63252$ و $t \approx 4.282$. وبما أن $1.860 < 4.282$، فإن الارتباط دلاليّ عند المستوى 10%.

.1g إذا كان $x = 1$، فإن $\hat{y} \approx 12.09$. وإذا كان $x = 5$، $\hat{y} \approx 13.94$. وإذا كان $x = 13$، فإن $\hat{y} \approx 17.63$. وهذا يعني أنه من أجل المواد التي تضم 1 و 5 و 13 جرامًا من الدهون، فسيكون هناك 12.09 و 13.94 و 17.63 جرامًا من البروتين على الترتيب. التنبؤان بـــ 5 و 13 جرامًا من الدهون منطقيان، وذلك نظرًا إلى أن القيمتين تقعان ضمن مدى البيانات الأصلية التي ترتكز عليها معادلة الانحدار المعدّلة أو بعده قليلًا. وقد لا يكون التنبؤ بجرامٍ واحدٍ ذا معنى لكونه يقع بعد مدى البيانات الأصلية.

.2a يبدو أن للبيانات ارتباطًا خطيًا سالبًا؛ $r \approx 0.7939$؛ يشير معامل الارتباط أن للبيانات ارتباطًا خطيًا.

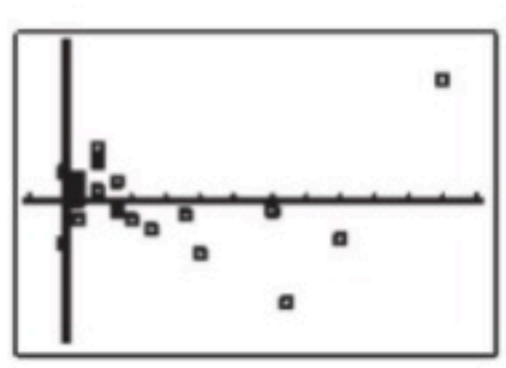


[−1.1, 12.1] scl: 1 by [−3.53, 446.035] scl: 1

.2b بما أن $t \approx 4.499$ و $2.819 < 6.124$ و $2.074 < 6.124$ و $1.717 < 6.124$، فإن الارتباط يكون دلاليًا عند المستويات 1% و 5% و 10%.

.2c $\hat{y} = 0.34155x + 13.6875$؛ يشير الميل $a = 0.34155$ إلى أن كل جرام من الألياف يعطي تقريبًا 17.282 سعرةً حرارية من البروتين. وتشير نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y والمساوية $b = 93.765$ إلى أن طبقًا من الطعام يحوي صفرًا من الألياف سيعطي 93.765 سعرةً حرارية، والحال قد لا يكون كذلك دائمًا.

.2d

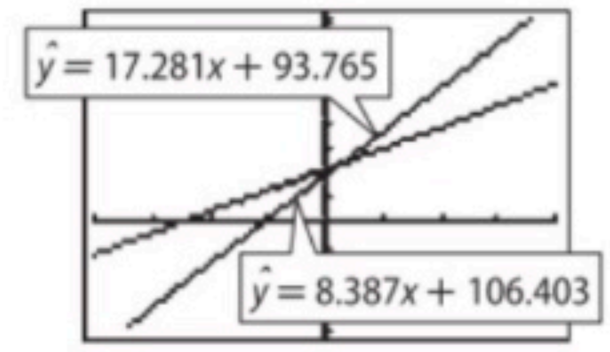


[−1.1, 12.1] scl: 1 by [−125.04, 138.58] scl: 1

تَظهر النواتج المتبقية متناثرة عشوائيًا وتتمحور حول خط الانحدار عند $y = 0$. وهذا يدعم الادعاء بأن استخدام نموذج خطي أمر مناسب.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2e. تُعدّ النقطة (11, 389) قيمة متطرفة في الاتجاهين x و y. وتؤدي إزالة هذه النقطة إلى تحريك معادلة الانحدار الأصلية لمسافةٍ أكبر من الصغيرة. إذًا القيمة المتطرفة مؤثرة، كما هو موضح في التمثيل البياني.

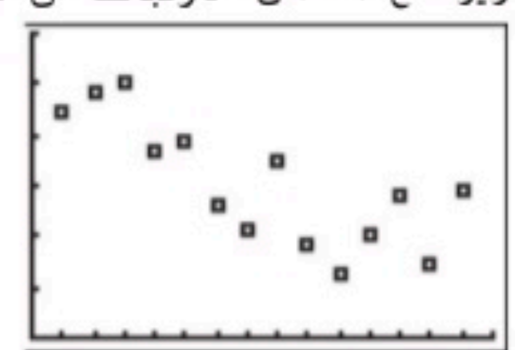


[−20, 20] scl: 5 by [−200, 400] scl: 50

2f. عند إزالة النقطة المتطرفة (11, 389)، يكون $r \approx 0.6125$. $\hat{y} = 8.387x + 106.403$ و $t \approx 3.551$. وبما أن $1.7207 < 3.551$، فإن الارتباط دلاليّ عند المستوى 10%.

2g. إذا كان $x = 4.5$، فإن $\hat{y} \approx 144.145$. وإذا كان $x = 5.5$، فإن $\hat{y} \approx 152.532$. وإذا كان $x = 7$، فإن $\hat{y} \approx 165.112$. وهذا يعني أنه من أجل المواد التي تضم 4.5 و 5.5 و 7 جراماتٍ من الألياف، فسيكون هناك 144.145 و 152.532 و 165.112 سعرةً حراريةً على الترتيب. والتنبؤات بالقيم الثلاث جميعها منطقي، وذلك نظرًا إلى أن القيم الثلاث تقع ضمن مدى البيانات الأصلية التي ترتكز عليها معادلة الانحدار المعدّلة أو بعده قليلًا.

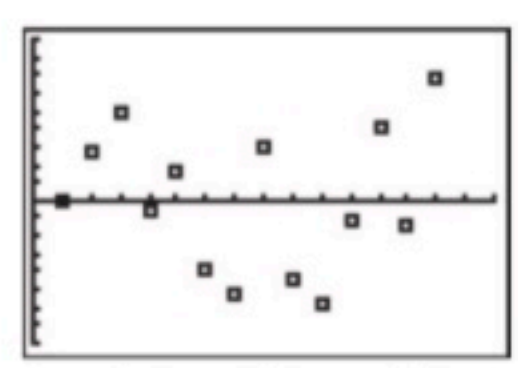
3a. يبدو أن للبيانات ارتباطًا خطيًا سالبًا ضعيفًا؛ $r \approx -0.769$؛ ويوضح معامل الارتباط أن للبيانات ارتباطًا خطيًا سالبًا.


[0, 15] scl: 1 by [0, 60] scl: 10

3b. بما أن $t \approx -4.167$ و $-3.055 < -4.167$، و $-2.179 < -4.167$ و $-1.782 < -4.167$، يقع الإحصاء داخل المنطقة الحرجة وفرضية العدم مرفوضة. إذًا، توجد دلالة للارتباط عند المستويات 1% و 5% و 10%.

3c. $\hat{y} = -2.259x + 47.231$؛ يشير الميل $a = -2.259$ إلى أن رتبة الرعاية الصحية تنخفض بمقدار 2 لكل زيادة في رتبة التعليم. وتشير نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y والمساوية $b = 47.23$ إلى أنه عند رتبة التعليم 0، تساوي رتبة الرعاية الصحية 47.23، وذلك على الرغم من كون رتبة التعليم 0 أمرٌ غير ممكن.

3d.


[0, 16] scl: 1 by [−16, 18] scl: 2

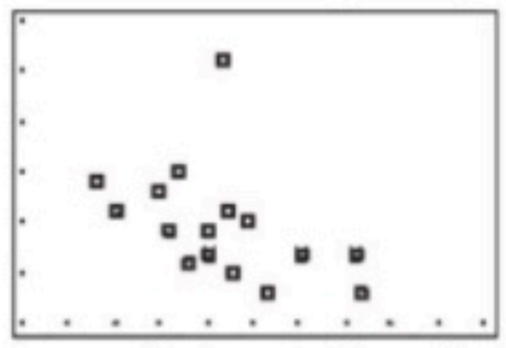
تُظهر النواتج المتبقية متناثرة عشوائيًا وتتمحور حول خط الانحدار عند $y = 0$. وهذا يدعم الادعاء بأن استخدامنا لنموذج خطي أمر مناسب.

3e. لا قيم متطرفة حقيقية

3f. لا قيم متطرفة حقيقية

3g. سيكون لمدينةٍ رتبتها 15 من ناحية التعليم رتبة عناية صحية تساوي 13، وذلك منطقي. ولمدينةٍ تحتل الرتبة 28 من حيث التعليم رتبة رعايةٍ صحيةٍ تساوي-16، في حين تكون لمدينةٍ رتبة التعليم فيها 42 رتبة رعاية صحية -47، وكلتا الحالتين غير منطقية، حيث لا يمكن أن تكون الرتبة سالبة.

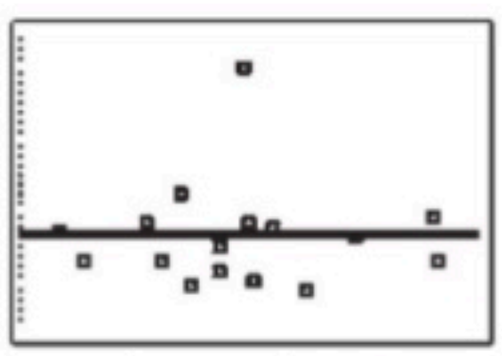
4a. يبدو أن للبيانات ارتباطًا خطيًا سالبًا؛ $r \approx -0.4282$؛ ويوضح معامل الارتباط أن للبيانات ارتباطًا خطيًا سالبًا ضعيفًا نسبيًا.


[2000, 4000] scl: 200 by [25, 55] scl: 5

4b. بما أن $t \approx -1.773$ و $-2.977 < -1.773$، و $-2.145 < -1.773$ و $-1.761 \not> -1.773$، فلا يكون الارتباط ذا دلالةٍ عن المستويين 1% و 5% ولكنه يكون ذا دلالةٍ عند المستوى 10%.

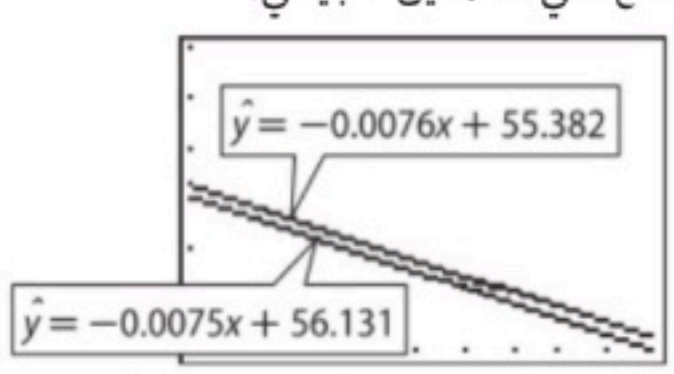
4c. $\hat{y} = -0.0075x + 56.1313$؛ يشير الميل $a = -0.00746$ إلى أنه عند إضافة كيلوجرامٍ واحدٍ إلى وزن السيارة، ينخفض معدل الكيلومترات المقطوعة مقابل لتر الوقود بمقدار 0.0075. وتشير نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y والمساوية $b = 56.1313$ إلى أن سيارةً وزنها صفر كيلوجرام تعطي كفاءةً في استهلاك الوقود قدرها 56.1313 kmpl، وهذا غير ممكن.

4d.


[2212.6, 3573.4] scl: 1 by [−8.903, 19.995] scl: 1

تُظهر النواتج المتبقية متناثرة عشوائيًا وتتمحور حول خط الانحدار عند $y = 0$. وهذا يدعم الادعاء بأن استخدامنا لنموذج خطي أمر مناسب.

4e. تُعدّ النقطة (2875,51) قيمة متطرفة في الاتجاه y. وتؤدي إزالة هذه النقطة إلى تحريك معادلة الانحدار الأصلية لمسافةٍ أكبر من الصغيرة. إذًا القيمة المتطرفة مؤثرة، كما هو موضح في التمثيل البياني.



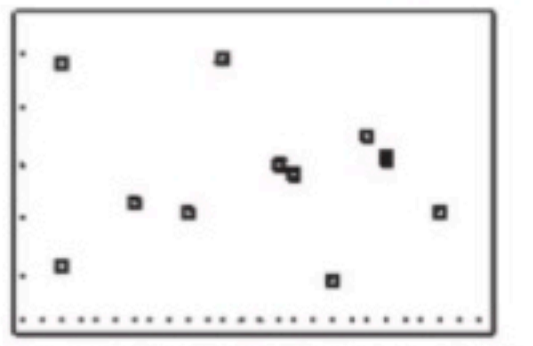
[2000, 40,000] scl: 200 by [25, 55] scl: 5

4f. عند إزالة النقطة المتطرفة (2875, 51)، يكون $r \approx -0.6819$ و $\hat{y} = -0.0076x + 55.382$ و $t \approx -3.361$. وبما أن $-1.771 \not> -3.361$، فإن الارتباط دلاليّ عند المستوى 10%.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4g. إذا كان $x = 2900$، فإن $\hat{y} \approx 33.34$، و إذا كان $x = 3300$، فإن $\hat{y} \approx 30.30$، وإذا كان $x = 4000$، فإن $\hat{y} \approx 24.98$. هذا يعني أن للسيارات التي تزن 2900 و 3300 و 4000 كيلوجرام كفاءات استهلاكٍ للوقود قيمها 33.34 و 30.30 و 24.98 mpg على الترتيب. التنبؤان المقابلان لــ 2900 و 3300 كيلوجرام منطقيان، وذلك لأن كلتا القيمتين تقعان ضمن مجال البيانات الأصلية لمعادلة الانحدار المعدلة أو بعده قليلًا. وقد لا يكون التنبؤ المقابل لــ 4000 كيلوجرام ذا مغزىً من المستوى نفسه نظرًا لوقوعه بعد مدى البيانات الأصلية تمامًا.

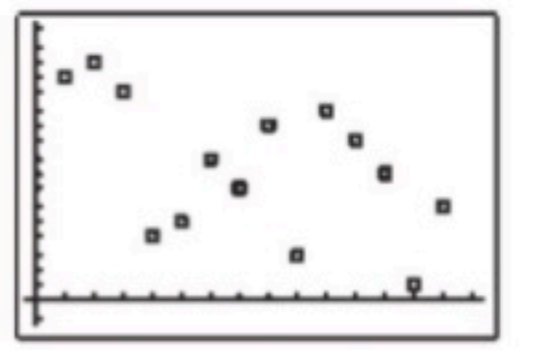
5a. يبدو أن للبيانات ارتباطًا خطيًا سالبًا؛ $r \approx -0.079$؛ ويوضح معامل الارتباط إلى أن للبيانات ارتباطًا خطيًا سالبًا شديد الضعف.



[61.9, 87.1] scl: 1 by [2.22, 7.58] scl: 1

5b. بما أن $t \approx -0.251$ و $-3.169 < -0.251$، و $-2.228 < -0.251$، و $-1.812 < -0.251$. فليس الترابط دلاليًا عند المستويات 1% أو 5% أو 10%

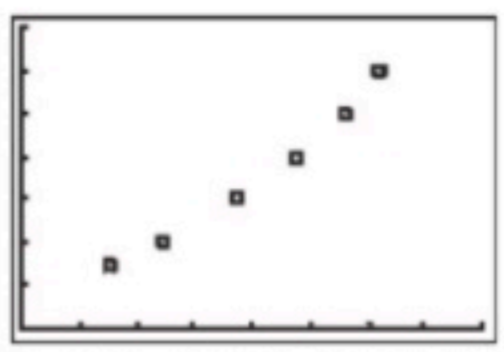
6a. يبدو أن للبيانات ارتباطًا خطيًا سالبًا؛ $r \approx -0.512$ ويوضح معامل الارتباط أن للبيانات ارتباطًا خطيًا سالبًا ضعيفًا نسبيًا.



[−0.3, 15.3] scl: 1 by [−1.38, 17.38] scl: 1

6b. بما أن $t \approx -2.065$ و $-3.055 < -2.065$، و $-2.179 < -2.065$، و $-1.782 \not< -2.065$. فليس الترابط دلاليًا عند المستويات 1% أو 5% أو 10%.

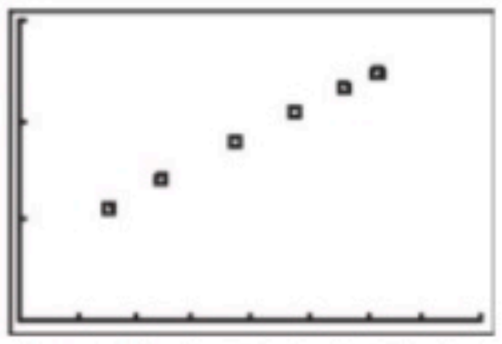
11a.



[0, 1600] scl: 200 by [0, 14] scl: 2

x	500	1125	300	750	1250	950
$\ln y$	1.39	2.30	1.10	1.79	2.48	2.08

11b.



[0, 1600] scl: 200 by [0, 3] scl: 1

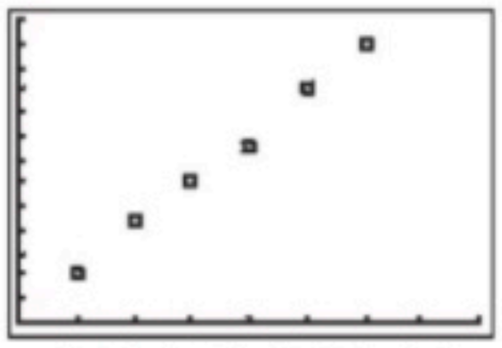
$r \approx 0.999$؛ الإجابة النموذجية: يبدو أن للبيانات ارتباطًا خطيًا موجبًا وقويًا.

11c. الإجابة النموذجية: بما أن $t \approx 44.69$ و $2.78 < 44.69$، فالارتباط دلاليّ عند المستوى 5%.

11d. $\hat{y} = 1.96e^{0.00146x}$

11e. 36؛ الإجابة النموذجية: لا. ليس هذا منطقيًا لأن هناك 30 يومًا في الشهر فقط.

13a.



[1, 8] scl: 1 by [0, 26] scl: 2

$r \approx 0.997$

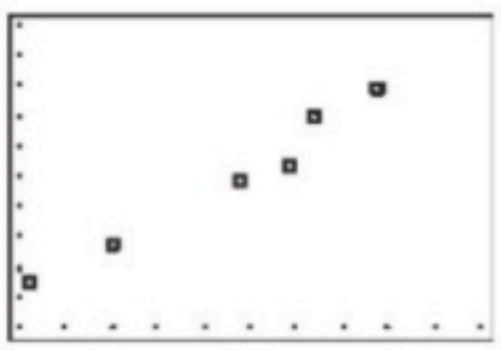
13c. $\hat{y} = 3.886x + 0.4$

x	1	2	3	4	5	6
$\hat{y}$	4.286	8.172	12.058	15.944	19.83	23.716

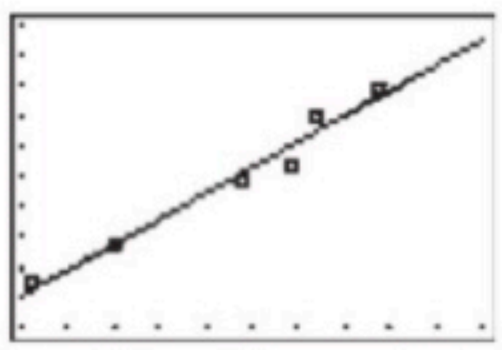
13d. التباين الكلي= 266، التباين المفسّر≈ 264.27، التباين غير المفسّر ≈ 1.77

13f. الإجابة النموذجية: تعني القيمة 0.993 أن 99.3% من إجمالي تباين y يمكن تفسيرها بالعلاقة بين x و y.

17a.



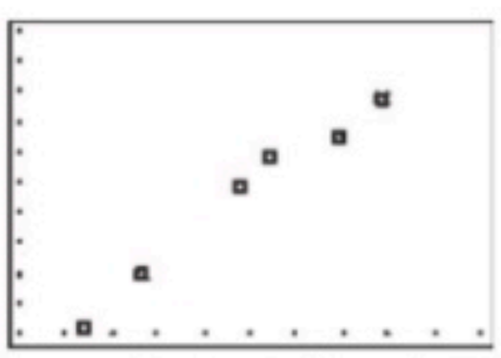
[20, 70] scl: 5 by [100, 200] scl: 10



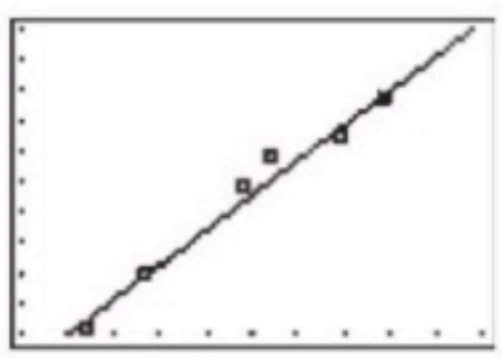
[20, 70] scl: 5 by [100, 200] scl: 10

$\hat{y} = 1.700x + 76.243$

17b.



[100, 200] scl: 10 by [20, 70] scl: 5



[100, 200] scl: 10 by [20, 70] scl: 5

$\hat{y} = 0.575x - 42.850$

17c. الإجابة النموذجية: يبقى الميل موجبًا، ولكن ميل معادلة انحدارٍ يساوي تقريبًا المعكوس الضربي لميل معادلة الانحدار الأخرى. ولم يتغير معامل الارتباط.

الوحدة 10 ملحق الإجابات

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

18 الإجابة النموذجية: يعد معامل الارتباط هامًا لأنه يمكن أن يستخدم لتحديد نوع العلاقة الخطية بين متغيرين وقوتها. ولكن معامل الارتباط ليس إحصاءً مقاومًا. ولذلك فقد يتأثر بالقيم المتطرفة للبيانات. ومن الهام أيضًا أن نلاحظ أنه بالرغم من أن معامل الترابط قد يوضح وجود علاقةٍ خطيةٍ قويةٍ بين متغيرين، فإنه لا يعني بالضرورة أن x سبّب y أو أن y سبّب x. حيث يمكن أن تعزى العلاقة إلى الصدفة أو قد تكون هناك متغيراتٌ أخرى ذات صلة.

35a. الإجابة النموذجية: بالتدريب المستمر، يزداد متوسط عدد النقاط التي يحققها الفرد في لعبة البولينغ ببطء، ويمكن أن يبلغ من الناحية النظرية 300 نقطة. ويمثل ذلك دالةَ نموٍ لوجستيٍ لأنه مع استمرار التدريب، يزديد عدد النقاط المتوسطة التي يحققها الفرد ببطء ولا يمكن أن يبلغ أي شخصٍ عددًا متوسطًا من النقاط أكثر من 300.

35b. الإجابة النموذجية: يقول فهد إنه يستطيع من خلال التدريب تحقيق ما متوسطه 180 نقطة، ولكن أيمن يقول إنه سيحقق أقل من ذلك.

35c. الإجابة النموذجية: $H_0: \mu = 180; H_a: \mu \neq 180$

35d. الإجابة النموذجية: يتدرّب فهد بضعة أشهر. ثم ينضم وأيمن إلى دوري للبولينغ لمتابعة النقاط المتوسطة لفهد. يحاكي هذا الدوري مسابقةً تنافسيةً في البولينغ ويقيس متوسط نقاط فهد. وعند انتهاء الدوري فإنهم يراجعون متوسط عدد نقاط فهد بمرور الزمن.

35e. الإجابة النموذجية: تتبع أيمن العدد المتوسط من النقاط التي حققها فهد طيلة كل أسبوع من دوري البولينغ واستخدم البيانات لتأسيس انحدارٍ لوجيستي. وكانت معادلة الانحدار اللوجيستي.

كانت معادلة الانحدار اللوجيستي $y = \dfrac{155.32}{1 + 0.867e^{-0.2356x}}$.

كانت معادلة الانحدار اللوغاريتمي $y = 144.95 + 3.93 \ln x$.

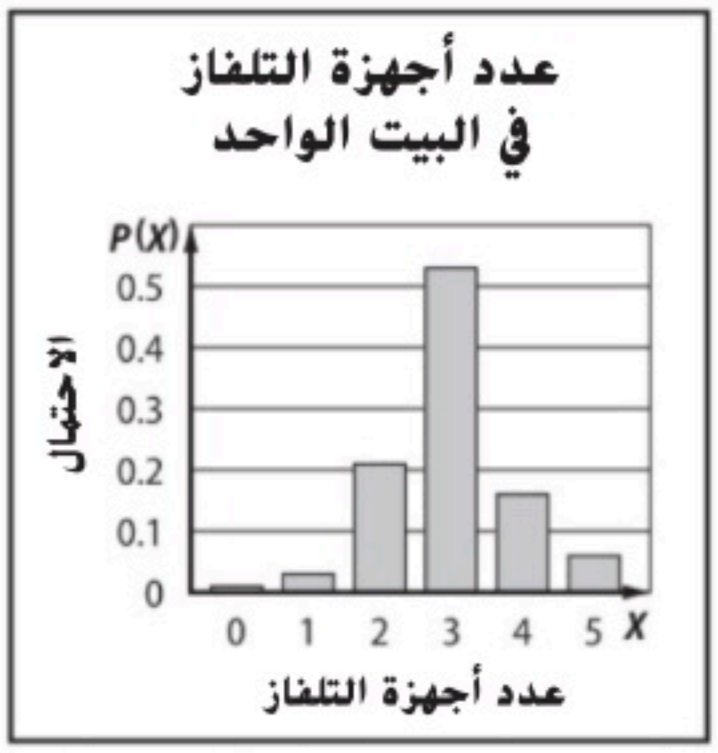
35f. الإجابة النموذجية: الانحدار الخطي تمثيلٌ أكثر دقةً للبيانات لأن فهد قد يحقق في النهاية أكثر من 155 نقطة في المتوسط. وفي حين لا يبدو أن المعادلة تتزايد إلى ما لا نهاية، فإن معدل التغيير يكون أصغريًا لدرجة أن فهد لن يحقق 300 نقطة في المتوسط سوى بعد أن يلعب أكثر من مليون مباراة.

35g. الإجابة النموذجية: فرضية العدم مرفوضة وفرضية أيمن بأن فهد لا يمكن أن يحقق في المتوسط 180 نقطة ليست مقبولة.

الصفحة 731، تدريب على الاختبار

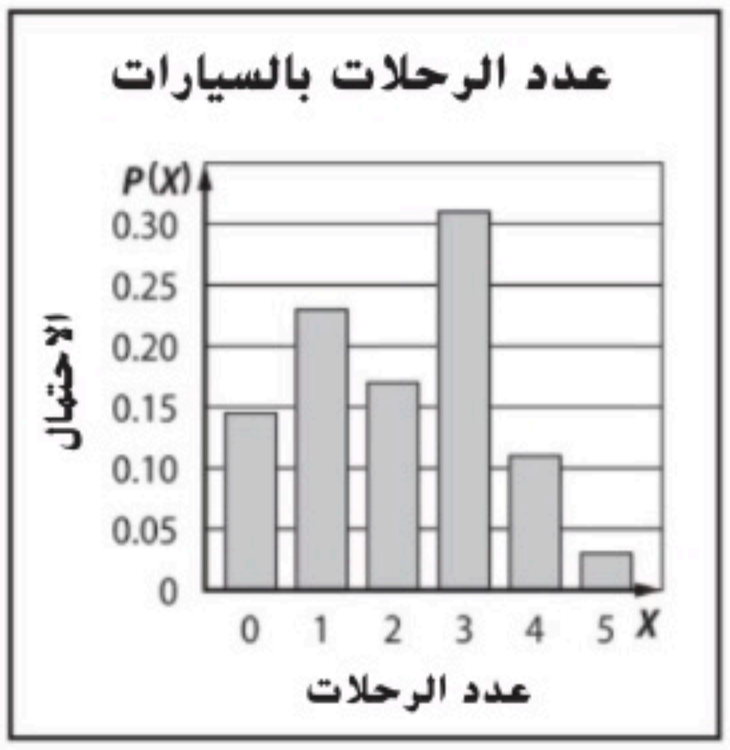
2a.

عدد أجهزة التلفاز	$P(X)$
0	0.01
1	0.03
2	0.21
3	0.53
4	0.16
5	0.06



3a.

X	$P(X)$
0	0.14
1	0.23
2	0.17
3	0.31
4	0.11
5	0.03



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education