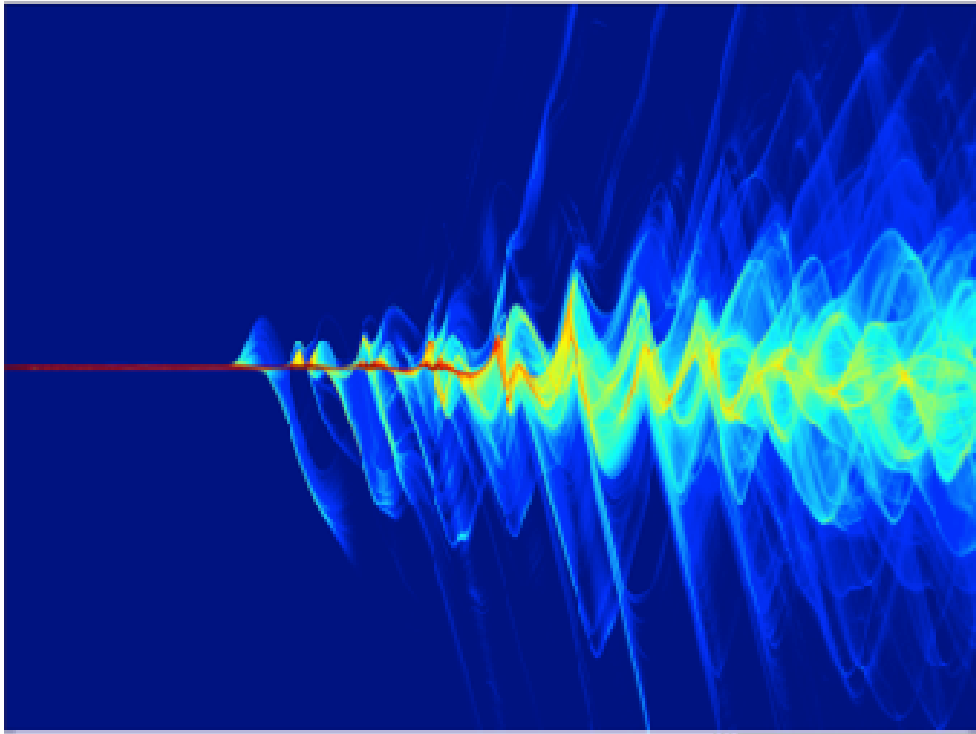


# مدخل إلى الضوء اللاخطي

**Introduction to non-linear optics**



الطبعة الثانية

الأستاذة الدكتورة يمن الأتاسي

الأستاذ الدكتور عمران قوبا

**2015**

## مقدمة

تأتي أهمية الضوء اللاخطي من تطبيقاته في مجالات عديدة كالاتصالات Telecommunication والحفظ الضوئي للمعلومات Optical Information Storage.

ففي هذا العصر، ونظراً إلى الكم الهائل من المعلومات اللازم معالجتها ونقلها، أضحت زيادة سعات وسُرْع منظومات الاتصالات ضرورة واضحة وملحّة. وتتجه الأبحاث منذ عدة سنوات نحو الميزات التي يتمتع بها الضوء المترابط بعد أن جعل تقدّم تقنيات الليزر العديد من تطبيقاته ممكنة.

أما في مجال شبكات الاتصال، فقد مكّنت الألياف الضوئية مؤخراً من نقل الإشارات عبر مسافات كبيرة واستطاعت أن تثبت جدارتها إذ وقّرت إمكانياتٍ عجزت التقنيات التقليدية في الاتصالات، القائمة على استخدام الإشارات الإلكترونية، من تحقيقها. ونخصّ بالذكر هنا معدّلات النقل العالية جداً التي توفرها هذه الألياف حتّى إنّ القيم التي تتنبأ بها الدراسات النظرية، والتي أُكّدت تجريبياً بصورة جزئية، بعيدة المنال عن أقصى مقدرات التقنيات التقليدية. فعلى سبيل المثال وبفضل الخواص اللاخطية للمواد المكوّنة للألياف الضوئية نصل إلى معدّلات نقل تقارب الـ Terabit/s أي  $10^{12}$  bit/s على مسافة من رتبة بضعة كيلومترات وهذا يسمح بدرجات عالية من الخلط multiplexing. ولا يُخفى ما لهذا من نتائج إيجابية في تقليص عدد خطوط النقل وتخفيف وزن وتشابك التمديدات. ولعلّ من أكثر السمات أهمية للألياف الضوئية هي عدم تأثرها بالتذبذبات الكهرومغناطيسية الخارجية أضف إلى ذلك انخفاض تكلفة المواد الأولية المشكّلة لها  $SiO_2$ .

إلاّ أنّها وحتى الآن تتم تقوية الإشارة بعد قطعها لكيلومترات عديدة في الألياف عن طريق تحويلها إلى إشارة إلكترونية ثمّ إعادتها إلى إشارة ضوئية قوية وذلك بفضل استخدام محوّلات ضوئية-إلكترونية وإلكترونية-ضوئية. ولما كانت النطاقات المارة التي تسمح بها المنظومات الإلكترونية غير متوافقة مع سرع النقل العالية التي توفرها الألياف الضوئية فإنّ هذا يحدّ من الاستخدام الأمثل للألياف. ولكي نتجاوز هذه المشكلة، تسعى الأبحاث حالياً إلى تكوين عناصر ضوئية بحمّة تتفوّق على نظيراتها الإلكترونية بإمكاناتها. إذ تؤمّن هذه العناصر الضوئية القدرة على المعالجة السريعة للمعلومات لا بل إنّها توفر معالجة تفرعية دون وجود خطر من التداخل بفضل الخواص الكهرومغناطيسية للضوء. وهكذا تتجه الأنظار نحو تركيب هذه العناصر الضوئية من مضخّات وثنائيات استقرار ضوئية أو بوابات منطقية ضوئية بحمّة وتعتمد جميع هذه العناصر على وجود وسط لاخطي تجتازه حزمة ليزيرية عالية الشدّة.

تعود الميزات التي تقدّمها هذه العناصر الضوئية البحتة بصورة مباشرة إلى الخصائص الأساسية للضوء. إذ تمكّننا الأطوال الموجية الضوئية القصيرة من تحقيق نبضات قصيرة للغاية  $\approx 1\text{ps}$  في نظم ذات معدلات نقل عالية. كما تسمح التواترات الضوئية العالية  $10^{15}\text{Hz}$  من جعل المعالجة الضوئية البحتة سريعة للغاية وتوفّر للعناصر المنطقية التي تعالج المعطيات زمن تبديل قصير جداً من رتبة الـ ps وهكذا تكون هذه العناصر متوافقة مع النطاقات المارة الخاصة بالألياف الضوئية.

ولعلّ العقبة الأساسية التي تقف أمام تطور العناصر الضوئية البحتة هو أن جميع المواد المستخدمة في الضوء اللاحطي ذات معاملات لاختطية صغيرة جداً وحينئذ يلزمنا استطاعات ضوئية عالية جداً لإظهار المفعول اللاحطي. وهكذا لا تعمل البوابات المنطقية الضوئية حالياً إلا باستخدام حزم ليزرية عالية الاستطاعة وهذا ما يسبّب استهلاكاً عالياً للطاقة وضياعاً حرارياً شديداً. ويلزم تكثيف الجهود حتى تتمكّن من تخفيض استطاعة الليزر المستخدمة إلى حدّ معقول عن طريق تركيب مواد لاختطية جديدة تتمتع بمعاملات لاختطية عالية.

نعلم من ناحية أخرى أنّ حفظ المعلومات على الأقراص المتراصّة CD محدود بطول الموجة. إذ يجب أن يكون نصف قطر مساحة التخزين  $a$  أكبر من طول الموجة  $\lambda$  لتفادي ظاهرة الانعراج. و لما كانت كمية المعلومات المخزّنة تتناسب عكساً مع مربع طول الموجة فإنّ مضاعفة التواتر وهو مفعول لاختطي للضوء يسمح بمضاعفة كمية المعلومات المخزّنة أربع مرات.

تفتقر المكتبة العربية بكلّ أسف إلى العديد من المراجع العلمية المتخصصة ومن ضمنها الضوء اللاحطي الذي لم يُكتب فيه بعدُ بالعربية ما يعطيه حقه ومكانته التي يستحق، وحرصاً مني على تقديم ما تعلّمته في هذا المجال ولكوني أدّرس مادة الضوء اللاحطي ومادة مواد للضوء اللاحطي لطلاب السنة الخامسة من الهندسة الفيزيائية في المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا، فقد ارتأيت كتابة هذه الأملية التي تشكّل مقرّر الضوء اللاحطي ومدخلاً إلى دراسة مقرّر مواد للضوء اللاحطي والذي سأتي على كتابة الأملية الخاصة به قريباً بإذن الله.

تضمّ الأملية ستة فصول مترابطة. يشكّل الأول منها مدخلاً في دراسة تفاعل الأشعة الكهرطيسية مع المادة وهو في الحقيقة تنمة لما درسه الطالب في منهاج الفيزياء-الكهرطيسية في السنة الثالثة في المعهد العالي حيث يتطرّق إلى استقطاب الديلكترية ومعادلات ماكسويل في هذا الوسط. أما الفصل الثاني فهو يقدّم مبادئ الضوء اللاحطي حيث يعرض الأسس التي يُبنى عليها هذا العلم. وقد حرصنا أن يكون العرض تربوياً وشيقاً فاستخدمنا الحسّ الفيزيائي في عرض مفاهيم صعبة بعض الشيء دون أن ينال ذلك من القيمة العلمية الدقيقة للمفهوم ثمّ أتبعنا ذلك بدراسة رياضية دقيقة ووافية سمحت بتقديم الأدوات الرياضية المستخدمة في هذا المجال ليسهل على الطالب استخدامها عن فهم فيما بعد. ويتعرّض الفصل الثالث لدراسة انتشار الأمواج الكهرطيسية في الأوساط اللاحطية وبرهان علاقات مانلي-رو

Manley-Rowe. في حين يتطرق الفصل الرابع إلى عرض كيفية تحقيق توافق الصفحة في وسط مضاعف الكسر حيث يدرس بالتفصيل توليد التوافقي الثاني في بلورة مضاعفة الكسر لنصل في الفصل الخامس إلى المضخمات الوسيطة والهزات الوسيطة وما لها من تطبيقات هامة في توليد منابع ضوئية مترابطة على مجال طيفي واسع. أما الفصل السادس فهو رديف للدراسة العملية المرافقة لهذه المادة حيث يقدم المعدلات الضوئية فيعالج المعدل الكهروضوئي و المعدل الصوتي-الضوئي. هذا وقد أفردنا المفعول الكهروضوئي دراسة نظرية موسّعة بعض الشيء.

وقد أتبعنا هذه الفصول باستثناء الأخير منها بعدد من التمرينات والمسائل ليتسنى للطلاب تعزيز استيعابه للمفاهيم النظرية. وتتدرج هذه التمرينات والمسائل في صعوبتها حيث نجد أنّ بعضها تطبيق مباشر للدراسة النظرية وبعضها الآخر مقتبس من أوراق بحث منشورة في الأدبيات المتخصصة. وهي على تنوعها هذا تلائم جميع الطلاب على اختلاف مستوياتهم.

في النهاية لا بدّ من شكر جميع من ساهموا في إنجاز هذا العمل وهم كثر. وأبدأ بالعاملين في قسم الرياضيات الذين قدّموا لي مشكورين مكتباً خاصاً وزوّدوني بالحاسوب والطابعة لكتابة هذا العمل. كما أشكر أيضاً السادة الدكتور عقيل سلوم والدكتور جمال صبح سعيد والمهندس نبيل شاهين والمهندس سهيل الحلبي لإطلاعي على بعض المراجع المتخصصة التي أضفتها إلى مراجع هذه الأملية. وكلي أمل أن تكون هذه الأملية خير دليل لطلابنا في دخول دنيا الضوء اللاخطي. وأتقدّم سلفاً بالشكر إلى كلّ قارئ يُبدي انتقاداً بناءً على فحوى هذه الأملية.



## الفصل الأول

# الخواص الكهرطيسية للدielekترك

- I. دراسة ميكروسكوبية للاستقطاب
  - 1.I. حقائق تجريبية
  - 2.I. الجزئيات القطبية والجزئيات غير القطبية
  - 3.I. استقطاب الدielekترك
  - 4.I. دراسة ظاهرة الاستقطاب
- II. دراسة ماكروسكوبية للاستقطاب
  - 1.II. شحنات الاستقطاب
  - 2.II. التحريض الكهربائي
  - 3.II. إدخال التحريض الكهربائي في معادلة ماكسويل-غوص
  - 4.II. العلاقات المكونة
- III. الطواعية الكهربائية
  - 1.III. الحقل الموضعي-علاقة لورنتز
  - 2.III. العلاقة بين الطواعية والاستقطابية
- IV. الاستقطاب في نظام متغير
  - 1.IV. نموذج مبسط
  - 2.IV. تطوير النموذج السابق
  - 3.IV. قرينة الانكسار العقدية
- V. معادلات ماكسويل في الدielekترك

يهدف هذا الفصل إلى دراسة سلوك عازل خاضع إلى تأثير حقل كهربائي عليه والذي يُشكّل ما يُسمّى اصطلاحاً ديلكتريك. ولفهم سلوك الديلكتريك نبدأ بدراسة تأثير الحقول الكهربائية الساكنة عليه حيث تُقسّم الدراسة إلى جزأين :

✦ دراسة على المستوى الجزئي (دراسة ميكروسكوبية) حيث نتطرق إلى دراسة تأثير الحقل الكهربائي على

الجزئيات المكوّنة للديلكتريك والمنشأ الفيزيائي للعلاقة بين استقطابية الجزئية وعزمها القطبي المتولّد.

✦ دراسة على المستوى الماكروسكوبي، حيث ندرس تأثير الحقل الكهربائي على الديلكتريك كوسط مادي

ونُظهر العلاقة بين الاستقطاب و الطواعية الكهربائية ثمّ نربط بين الطواعية الكهربائية - مقدار

ماكروسكوبي - والاستقطابية - مقدار ميكروسكوبي -.

من ثمّ نعمّم نتائج الدراسة السابقة إلى حالة حقول كهربائية متغيرة مع الزمن تغيراً جيبيّاً. وأخيراً نكتب في نهاية

الفصل معادلات ماكسويل في ديلكتريك.

يُكوّن هذا الفصل مفتاح دراسة آلية تفاعل الأمواج الكهرطيسية مع الأوساط الضوئية غير الخطية التي تكون

أوساطاً ديلكتريكية. ومن هنا فإنّ النماذج الفيزيائية المعروضة في هذا الفصل هي ذاتها التي نجدّها في الفصول القادمة

ولكن مع إدخال بعض التعديلات عليها.

## I. دراسة ميكروسكوبية للاستقطاب

### 1.1. حقائق تجريبية

من المعروف أنّ سعة المكثفة تتضاعف بمعامل معين إذا وضع بين لبوسيتها مادة عازلة ومتجانسة ومتماثلة المناحي.

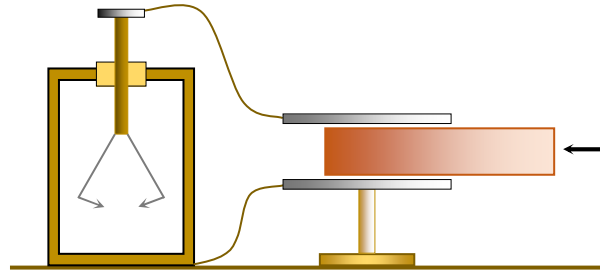
نسمي هذا المعامل الذي يزيد من سعة المكثفة بثابت العزل أو السماحية النسبية للعازل و نرمز إليه بالرمز  $\epsilon_r$ .

المادة	$\epsilon_r$
الهواء (غاز)	$1 + 5.4 \times 10^{-4}$
البنزن (سائل غير قطبي)	2.8
الماء (سائل قطبي)	80
NaCl (جسم صلب بلوري)	5.8

وبوجه عام، يحتلّ التوازن الكهربائي الساكن للنواقل عند وجود مواد عازلة. ويظهر هذا بوضوح عندما نضع

صفيحة من البرافين بين لبوسي مكثفة مشحونة ومربوطة بكاشف كهربائي كما يظهر في الشكل (1). إذ تقترب وريقتا

الذهب في الكاشف الكهربائي من بعضهما لدى إدخال صفيحة البارافين.



الشكل (1)

لفهم هذه الحقائق التجريبية سوف نبدأ بدراسة ميكروسكوبية للشحنات المقيدة في دليلكتر في ندرس سلوكها عند تطبيق حقل كهربائي.

### 2.I. الجزيئات القطبية والجزيئات غير القطبية

عندما لا يكون للجزيئة مركز تناظر كما هو الحال في جزيئات مثل  $\text{HCl}$ ،  $\text{H}_2\text{O}$ ،  $\text{NH}_3$  فإن مركز ثقل الشحنات الموجبة ومركز ثقل الشحنات السالبة يكونان غير منطبقين، ولذلك تتمتع الجزيئة بعزم كهربائي دائم، عزم ثنائي القطب، حتى في حال غياب حقل كهربائي مطبق عليها، وتوصف هذه الجزيئات بالقول إنها قطبية. في حين تُسمى الجزيئات التي تتمتع بمركز تناظر مثل  $\text{H}_2$ ،  $\text{CH}_4$ ،  $\text{C}_6\text{H}_6$  بالجزيئات غير القطبية. ورغم عدم تمتع الجزيئات غير القطبية بعزم كهربائي دائم إلا أنها قادرة على اكتساب عزم كهربائي محرض وذلك نتيجة لاستقطابها عند تأثير حقل كهربائي خارجي عليها.

### 3.I. استقطاب الدليلكتر:

يمكن النظر إلى جزيئات وسط مادي على أنها توزيع للشحنات الموجبة والسالبة بحيث تكون المحصلة الكلية للشحنات معدومة. ومن ثمّ يمكننا أن ننظر إليها على أنها ثنائيات قطب كهربائية وذلك فيما يتعلق بالحقل الكهربائي الناجم عنها على مسافات كبيرة جداً بالنسبة إلى أبعادها. لأنه إذا رمزنا بالرمز  $V$  إلى الكمون المتولد عن توزيع  $D$  للشحنات متوضع في حيز محدود، فإن منشور  $V$  وفقاً للقوى المتزايدة لـ  $\frac{1}{r}$ ، (عندما تكون المسافة  $r$  كبيرة جداً بالنسبة إلى أبعاد  $D$ ) يُظهر انعدام الحد الحاوي على  $\frac{1}{r}$  (الحد وحيد القطبية) في حين يكون الحد الحاوي على  $\frac{1}{r^2}$ ، والمسماى الحد ثنائي القطبية، راجحاً.

نسمي الشحنات الموجبة والسالبة في الجزيئة بالشحنات المقيدة تمييزاً لها عن الشحنات الحرة، (إلكترونات التكافؤ) التي نجدها في النواقل المعدنية والتي يمكنها قطع مسافات كبيرة جداً بالنسبة إلى الأبعاد الذرية. وعليه، استناداً إلى ما سبق يمكننا النظر إلى الشحنات المقيدة في وسط دليلكتر على أنها توزيع لثنائيات أقطاب. ومن وجهة نظر ماكروسكوبية يجري توصيف هذا التوزيع باستخدام الحقل الشعاعي  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  الذي نسميه الاستقطاب والذي يعبر عن الكثافة الحجمية للعزوم القطبية:

$$(1) \quad \vec{P} = \frac{d\vec{\mu}}{d\tau}$$

حيث  $\vec{\mu}$  هو العزم القطبي مقدراً بالـ  $\text{C.m}$  و  $d\tau$  هو عنصر الحجم. وهكذا يكون الاستقطاب مقدراً بـ  $\text{C.m}^{-2}$ .



وغالباً ما يكون الاستقطاب معدوماً عند غياب الحقل الكهربائي ويكوّن تولّده في ديالكتريك عند تطبيق حقل كهربائي عليه ما يُسمّى ظاهرة الاستقطاب.

#### 4.I دراسة ظاهرة الاستقطاب:

ينشأ الاستقطاب عن تشوه الغمامات الإلكترونية تحت تأثير حقل كهربائي مطبّق. لنأخذ جزيئة غير قطبية ولنخضعها لتأثير حقل كهربائي موضعي قيمته  $\vec{E}_\ell$ . عندئذ ينزاح مركز ثقل الشحنات السالبة في اتجاه معاكس لاتجاه الحقل الكهربائي و تكتسب الجزيئة عزمًا كهربائياً محرضاً  $\vec{\mu}$ . و غالباً ما يكون لـ  $\vec{\mu}$  منحى ووجهة الحقل الكهربائي الموضعي. كما أنّ شدة  $\vec{\mu}$  تتناسب مع  $\vec{E}_\ell$  في تقريب أولي. في هذه الحالة نعرّف مقداراً سلمياً موجباً  $\alpha$  نسميه الاستقطابية الإلكترونية للجزيئة بالعلاقة :

$$(2) \quad \vec{\mu} = \alpha \varepsilon_0 \vec{E}_\ell$$

❖ **ملاحظة 1.** قد نجد في بعض الكتب تعريفاً للاستقطابية وفقاً للعلاقة :  $\vec{\mu} = \alpha' \vec{E}_\ell$ . إلا أنّ إدخال  $\varepsilon_0$  في تعريف  $\alpha$  يسمح بإعطاء الاستقطابية بُعد الحجم، كما سنرى.

❖ **ملاحظة 2.** عندما لا تكون الجزيئات متناظرة لا يكون لـ  $\vec{\mu}$  منحى الحقل الكهربائي الموضعي ونستطيع كتابة علاقة مشابهة للعلاقة (2) وذلك بالنظر إلى  $\alpha$  كمؤثر خطي نسميه تنسور الاستقطابية، سنعود إلى تعريف التنسور بتفصيل أكثر في الفصل القادم.

لنتأمّل وسطاً لا قطعياً يضمّ  $n$  جزيئة ذات استقطابية  $\alpha$  في واحدة الحجم. فيكون الاستقطاب المتولّد في هذا الوسط تحت تأثير الحقل الكهربائي الموضعي  $\vec{E}_\ell$  هو :

$$(3) \quad \vec{P} = n \vec{\mu} = n \alpha \varepsilon_0 \vec{E}_\ell$$

التفسير الميكروسكوبي للعلاقتين (2) و (3) : باستخدام نموذج الإلكترون المرتبط ارتباطاً مرناً بالنواة، الذي يعتمد على افتراض أنّ الإلكترون يعود إلى موضع توازنه بفضل قوة إرجاع من الشكل  $-kr$ ، نكتب أنّ موضع الإلكترون تحت تأثير الحقل الكهربائي  $E_\ell$  معطى بالعلاقة :

$$-k \vec{r} - e \vec{E}_\ell = \vec{0}$$

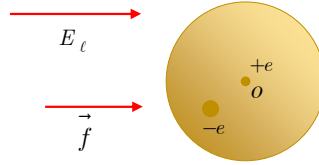
ويولّد انزياح الإلكترون عن وضع توازنه عزمًا قطعياً للجزيئة :

$$(4) \quad \vec{\mu} = -e \vec{r} = \frac{e^2}{k} \vec{E}_\ell$$

تُظهِر هذه العلاقة تناسب العزم القطبي مع الحقل الكهربائي الموضعي. أمّا وجود قوة إرجاع من الشكل  $-kr$  فهو نتيجة لإحدى النماذج المتبعة في وصف الذرة، كما في المثال التالي:

**مثال :** حساب استقطابية ذرة الهيدروجين وفقاً لنموذج تومسون للذرة.

وفقاً لنموذج تومسون تتألف ذرة الهيدروجين من شحنة موجبة  $+e$  متوزعة بانتظام داخل كرة ذات نصف قطر  $a$  ويتحرك داخلها بحرية إلكترون ذي شحنة نقطية  $-e$  الشكل (2). يسمح هذا النموذج لوصف الذرة، بتعليل وجود قوة إرجاع من الشكل  $-kr$  ويبرز استخدامنا لنموذج الإلكترون المرتبط ارتباطاً مرناً بالنواة.



الشكل (2)

في الحقيقة إنّ الحقل المتولد عن الشحنة  $+e$  لا يتعلّق إلا بـ  $r$  وتسمح نظرية غوص بحساب قيمته كما يلي:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} e \frac{r^3}{a^3}$$

ومن ثمّ

$$E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^3}$$

وهكذا يعود الإلكترون إلى وضع توازنه في  $o$  بفضل قوة الإرجاع  $-kr$  حيث:

$$k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

وعليه تعطى الاستقطابية بالعلاقة :

$$\alpha = 4\pi a^3$$

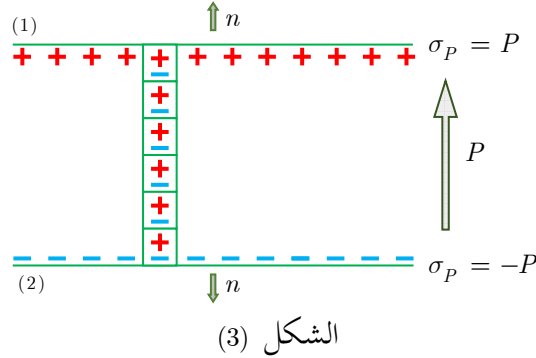
ويكون للاستقطابية بُعد حجم، وقيمتها من رتبة حجم الذرة.

تدعم النماذج الأكثر تطوراً في وصف بنية الذرة، كنموذج بور والنموذج الكمومي، فرضية الإلكترون المرتبط ارتباطاً مرناً بالنواة لا بل إنّ النموذج الكمومي يعتبر الإلكترون هزازاً له عدة تواترات تجاوب. وتسمح هذه النماذج بإظهار العلاقة بين استقطابية الجزيئات والحجم الجزيئي فنجد الاستقطابية من رتبة  $10^{-30} \text{ m}^3$ .

## II. دراسة ماكروسكوبية للاستقطاب

أوضحنا في الفقرة السابقة الأسباب الفيزيائية الكامنة وراء اعتبار ديلكتريك مستقطب على أنه توزيع لثنائيات أقطاب كهربائية. وسنأتي الآن على دراسة السلوك الكهربائي لهذا التوزيع الموصّف من وجهة نظر ماكروسكوبية بالحقل الشعاعي  $\vec{P}$  المسمّى الاستقطاب.

لأخذ صفيحة من ديلكتريك مستقطبة بانتظام و بصورة عمودية على وجهيها -الشكل (3) -



الشكل (3)

يمكننا النظر إلى هذه الصفيحة وكأنها مكوّنة من تكّس عدّة طبقات من ثنائيات الأقطاب المتعاقبة بحيث تتعادل الشحنات + و - لثنائيات الأقطاب المتتالية فيما بينها بصورة تامة، فتكون الكثافة الحجمية للشحنات المقيدة معدومة داخل الصفيحة. إلا أنه يتبقّى على وجهي الصفيحة طبقتان من الشحنات المقيدة التي لم يجرّ تعديلها كهربائياً. نسمي هذه الزيادة الموضعية من الشحنات المقيدة الناجمة عن ظاهرة الاستقطاب بشحنات الاستقطاب.

يسمح مثالنا السابق عن استقطاب منتظم بتوليد شحنات استقطاب سطحية يمكن توصيفها بكثافة  $\sigma_P$ . في حين لو افترضنا في ذلك المثال أنّ الاستقطاب يتزايد من أسفل الصفيحة نحو الأعلى أي  $\partial P / \partial z > 0$  لوجدنا بسهولة أنّ الشحنة السالبة في ثنائي قطب لا تتعادل إلا جزئياً بالشحنة الموجبة المتوضّعة في أعلى ثنائي القطب الواقع تحته مباشرة مما يؤدي في داخل الديلكترريك إلى ظهور زيادة في الشحنات السالبة المقيدة.

وبوجه عام فإنّ استقطاباً غير منتظم يولّد في آن واحد شحنات استقطاب سطحية يمكن توصيفها بكثافة سطحية  $\sigma_P$ ، وشحنات استقطاب حجمية يمكن توصيفها بالكثافة الحجمية  $\rho_P$ . ونبرهن على أنّ:

$$(4) \quad \rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$(5) \quad \sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

حيث  $\vec{n}$  هو شعاع واحد متجه نحو خارج الديلكترريك في النقطة التي نحسب عندها الكثافة السطحية للاستقطاب.

**ملاحظة:** لنحسب مجموع شحنات الاستقطاب المتوزعة على سطح الديلكترريك  $S$ ، و داخل الحجم  $V$ .

$$Q_P = \iint_S \sigma_P dS + \iiint_V \rho_P d\tau$$

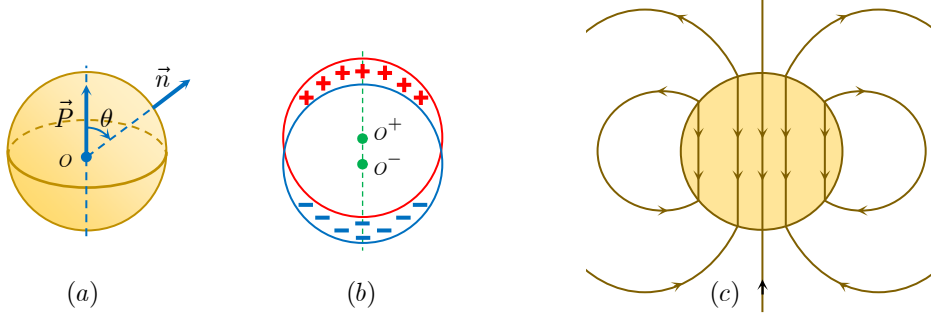
بالاستفادة من العلاقتين (4) و (5) وملاحظة أنّ  $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$  نجد:

$$Q_P = \iint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} + \iiint_V -(\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) d\tau$$

بتحويل التكامل الأول باستخدام علاقة أوستراغرادسكي نجد  $Q_P = 0$ .

وهذه النتيجة موافقة تماماً للدلالة الفيزيائية لـ  $\rho_P$  و  $\sigma_P$  اللذين يمثلان الزيادة الموضعية للشحنات المقيدة الناشئة عن تأثير ظاهرة الاستقطاب في وسط معتدل كهربائياً.

**تطبيق :** لنحسب الحقل الكهربائي الساكن لكرة  $S$  مستقطبة بانتظام -الشكل (4) -



الشكل (4)

لما كانت الكرة مستقطبة بانتظام فإن  $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$  في حين أن  $\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n} = P \cos \theta$  كما في الشكل (4 - a). ونستطيع حساب الحقل المتولد عن هذا التوزيع السطحي للشحنات إلا أننا سوف نلجأ إلى حساب الحقل بطريقة أخرى تعتمد على استخدام توزيع ثنائيات الأقطاب المتواجدة في الكرة  $S$ . إذ يمكن النظر إلى  $S$  وكأنها مكونة من كرتين  $S_+$  و  $S_-$  لكل منهما شحنة حجمية منتظمة التوزيع الشكل (4 - b). الكثافة الحجمية لشحنة الأولى  $+\rho$  ولشحنة الثانية  $-\rho$ ، وبمركزها يكون مركزا الكرتين  $O_+$  و  $O_-$ ، المنطبقان على بعضهما عند غياب الاستقطاب، منزاحين عن بعضهما قليلاً مما يسمح بظهور عزم قطبي كهربائي في  $S$  قيمته  $\mu$

$$\vec{\mu} = \tau \vec{P} = \rho \tau \overline{O_- O_+}$$

لنحسب الحقل الكهربائي المتولد عن  $S_+$  بتطبيق نظرية غوص :

$$\vec{E}_+ = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overline{O_+ M} \quad \text{داخل } S_+ : E_+ \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{خارج } S_+ : E_+ \text{ هو الحقل الناتج عن الشحنة } \rho \tau \text{ المتوضعة في } O_+$$

وبالطريقة نفسها نحسب الحقل  $E_-$  الناتج عن الكرة  $S_-$ .

ويكون الحقل الكهربائي  $E$  الذي نبحث عنه مساوياً لمحصلة الحقلين السابقين أي  $E = E_+ + E_-$  وعليه :

◆ داخل  $S$  :  $E$  منتظم ويُعطى بالعلاقة :

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overline{O_+ O_-} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

◆ خارج  $S$  :  $E$  هو الحقل الناتج عن ثنائي القطب ذي العزم  $\vec{\mu} = \tau \vec{P} = \rho \tau \overline{O_- O_+}$  والمتوضّع في  $O$ .

تخضع خطوط الحقل الكهربائي  $E$  لانكسار عند عبورها سطح الكرة، وتكون المركبة المماسية مستمرة عند عبور

$S$  في حين تخضع المركبة الناعمية لانقطاع قيمته  $\sigma_P/\epsilon_0$  الشكل (4 - c).

## 2.II. التحريض الكهربائي

عند كتابة معادلة ماكسويل-غوص في ديلكتريك ينبغي التمييز بين كثافة الشحنات الحرة المحتمل تواجدها وكثافة الشحنات المقيّدة بحيث تصبح المعادلة على الشكل:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{free}} + \rho_{\text{polar}}) = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{free}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P})$$

ونلاحظ أنّ بالإمكان إخفاء كثافة الشحنات المقيّدة في العبارة السابقة باستخدامنا لحقل شعاعي مساعد نسميه التحريض الكهربائي (أو الإثارة الكهربائية أو الانتقال الكهربائي) و نعرّفه بالعلاقة:

$$(6) \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

تُظهر هذه العلاقة أنّ  $\vec{D}$  له أبعاد الاستقطاب في جملة الواحدات الدولية وبالتالي فهو يُقدّر بـ  $\text{C.m}^{-2}$ .

## 3.II. إدخال التحريض الكهربائي في معادلة ماكسويل-غوص:

بتعويض العلاقة (6) في معادلة ماكسويل-غوص نجد:

$$(7) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{free}}$$

وهكذا سمح إدخال  $\vec{D}$  في معادلة ماكسويل-غوص بحساب للحقل بدلالة الشحنات الحرة فقط شرط ربط  $\vec{D}$  و  $\vec{E}$  أو بعبارة مكافئة  $\vec{P}$  و  $\vec{E}$  بعلاقة مكونة خاصة بالوسط المعتر. وسنأتي الآن على دراسة العلاقات المكونة في وسط ديلكتريك.

## 4.II. العلاقات المكونة

♦ حالة ديلكتريك خطي ومتماثل المناحي:

نلاحظ في كثير من الأوساط الديلكتريكية (الغازات، الأجسام الصلبة الزجاجية، البلورات المنتمية إلى الجملة التكعيبية) أنّ الاستقطاب الذي يظهر تحت تأثير حقل كهربائي غير عالي الشدة يكون متناسباً مع هذا الحقل ونكتب:

$$(8) \quad \vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

نسمي الوسط الذي يحقق العلاقة (8) في كلّ نقطة من نقاطه بالديلكتريك الخطي متماثل المناحي. نسمي المعامل  $\chi_e$  بالطواعية الكهربائية للوسط في النقطة المعترّة وهو مقدار لا واحدة له ويأخذ قيماً موجبة. وهكذا نكتب في وسط ديلكتريك خطي ومتماثل المناحي:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

$$(9) \quad \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad \text{أي:}$$

$$(10) \quad \epsilon_r = 1 + \chi_e \quad \text{حيث}$$

$\epsilon$  و  $\epsilon_r$  هما على الترتيب السماحية والسماحية النسبية للديلكتريك في النقطة المدروسة.

♦ حالة ديالكترىك خطي وغير متماثل المناحي:

في بعض الأوساط البلورية التي نسميها ديالكترىك خطي وغير متماثل المناحي لا يكون لشعاع الاستقطاب منحى الحقل الكهربائي بالضرورة ونكتب المعادلة المكوّنة (8) بالشكل:

$$(11) \quad \vec{P} = [\chi_e] \epsilon_0 \vec{E}$$

حيث  $[\chi_e]$  هو مؤثر خطي يسمح بالمرور من  $\epsilon_0 \vec{E}$  إلى  $\vec{P}$ . وتُسمى المصفوفة الممتلئة لهذا المؤثر بتنسور الطواعية للوسط في النقطة المعتبرة. ويُبرهن أنّ هذه المصفوفة متناظرة. وتأخذ العلاقة (9) الشكل:

$$(12) \quad \vec{D} = [\epsilon] \vec{E}$$

حيث  $[\epsilon]$  هو تنسور السماحية وهو تنسور متناظر.

### III. الطواعية الكهربائية

ينبغي أن تسمح نظرية الاستقطاب بتعليل منشأ العلاقة المكوّنة  $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$  ابتداء من بنية الوسط الذي تتحقق فيه هذه العلاقة بل يجب على نظرية شاملة للاستقطاب إيجاد العلاقة التي تربط  $\chi_e$  بالمتحولات التي تُوصف الوسط و من ثمّ مقارنة التوقّعات النظرية مع التجربة. وهنا تجدر الإشارة إلى ضرورة إيجاد العلاقة بين الحقل الكهربائي الموضعي  $E_l$  الذي استخدمناه عند تعريف الاستقطابية والحقل الكهربائي الماكروسكوبي  $E$  الذي يظهر عند تعريف الطواعية الكهربائية.

#### 1.III. الحقل الموضعي-علاقة لورنتز:

لن ندخل في هذه الفقرة في برهان العلاقة الرابطة بين الحقل الكهربائي الموضعي في ديالكترىك والحقل الماكروسكوبي ولكن سنكتفي بذكر هذه العلاقة التي وضعها لورنتز وشروط تطبيقها:

$$(13) \quad \vec{E}_l = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

وتكون هذه العلاقة محققة في الأوساط الغازية والسائلة والصلبة الزجاجية التي يمكن تمثيلها على أنّها توزيع غير منتظم من ثنائيات الأقطاب. كما تكون محققة في البلورات المنتمية إلى الجملة التكعيبية. و بعبارة أعم فإنّ علاقة لورنتز لا تكون صالحة إلا إذا كانت المسافات بين الجزيئات المكوّنة للوسط كبيرة جداً بالنسبة إلى الأبعاد الجزيئية (أي كان الوسط قليل الكثافة) وما تطبيقها في الأوساط الكثيفة (السائلة و الصلبة) إلا تقريب فهي غير صالحة للتطبيق أبداً في البلورات المنتمية إلى جمل غير تكعيبية.

### 2.III. العلاقة بين الطواعية والاستقطابية

لقد درسنا في الفقرة I إمكان ربط استقطاب ديلكتريك بالحقل الكهربائي الموضوعي وذلك في شروط حددناها في حينها :

$$(14) \quad \vec{P} = n\alpha\epsilon_0\vec{E}_\ell$$

حيث  $\alpha$  هي استقطابية الجزيئات المكوّنة للوسط و  $n$  هو عددها في واحدة الحجم. الآن إذا كانت شروط صلاحية العلاقة (13) محقّقة يكون لدينا :

$$\vec{P} = n\alpha\epsilon_0\vec{E}_\ell = n\alpha\epsilon_0\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}\right)$$

ومنه نجد أنّ:

$$\vec{P} = \frac{n\alpha}{1 - n\alpha/3}\epsilon_0\vec{E}$$

وهكذا نجد جلياً أنّ الوسط الذي تتحقق فيه العلاقتان (13) و (14) هو وسط تتحقق فيه العلاقة المكوّنة (11) التي تسمح بتعريف الطواعية الكهربائية  $\chi_e$  :

$$\vec{P} = [\chi_e]\epsilon_0\vec{E}$$

إذن نكتب

$$(15) \quad \chi_e = \frac{n\alpha}{1 - n\alpha/3}$$

### IV. الاستقطاب في نظام متغيّر

كانت دراستنا في الفقرات السابقة مخصصة لدراسة الديلكتريك الخاضع لتأثير حقل كهربائي ساكن (الاستقطابية الساكنة والطواعية الساكنة والسماحية الساكنة). سوف نعيد الدراسة السابقة ولكن في نظام متغيّر حيث سندرس آلية الاستقطاب بوجود حقل كهربائي يكون تابعاً جيبيّاً للزمن.

#### 1.IV. نموذج مبسّط

تحت تأثير حقل كهربائي جيبي موضعي تهتزّ الإلكترونات المقيّدة في الذرة اهتزازات قسرية موافقة لجهة الحقل الكهربائي. ولدراسة الحركة نلجأ إلى استخدام نموذج الإلكترون المرتبط ارتباطاً مرناً بالنواة، إذ نكتب:

$$mr'' = -kr - hr' - eE_\ell$$

إنّ وجود حدّ التخامد في وسط كثيف  $-hr'$  (الموافق لقوة احتكاك) يعود بصورة أساسية إلى الاصطدامات بين الإلكترونات والجسيمات الأخرى في الوسط. إلا أنه ينبغي دوماً إدخال هذا الحدّ لكي نأخذ بعين الاعتبار ظاهرة أخرى

لهدر الطاقة ألا وهي ظاهرة أشعة التسارع : إذ إنّ كلّ جسيم مشحون خاضع لتسارع يصدر أشعة كهرطيسية ويفقد جزءاً من طاقته. بفرض أنّ  $\omega_0^2 = k/m$  و  $\beta = h/m$  وباستخدام الاصطلاح العقدي تصبح المعادلة السابقة:

$$r'' + \beta r' + \omega_0^2 r = -\frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t}$$

حيث  $E_\ell = E_0 e^{-i\omega t}$ .

إنّ النظام القسري لحركة الإلكترون يوافق حلاً خاصاً من الشكل :  $r = r_0 e^{-i\omega t}$ . وهكذا نجد بمطابقة الطرفين:

$$r = -\frac{e}{m} \frac{E_\ell}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\beta\omega}$$

وهذه الحركة تقود إلى ظهور عزم كهربائي:

$$\vec{\mu} = -e\vec{r} = -\frac{e^2}{m} \frac{\vec{E}_\ell}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\beta\omega}$$

وهنا نعرّف الاستقطابية الديناميكية أو الحركية:

$$(16) \quad \alpha(\omega) = \frac{\mu}{\varepsilon_0 E_\ell} = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\beta\omega}$$

نقبل أنّ الإلكترون يقوم باهتزازات ذات تخامد ضعيف أي  $\beta \ll \omega_0$ . إذن بعيداً عن تواتر التجاوب ( $\omega$  ليست في جوار  $\omega_0$ ) يمكننا إهمال حدّ التخامد  $\beta\omega$  أمام الحدّ  $\omega_0^2 - \omega^2$  ومن ثمّ تصبح  $\alpha$  حقيقية.

$$\alpha(\omega) \approx \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

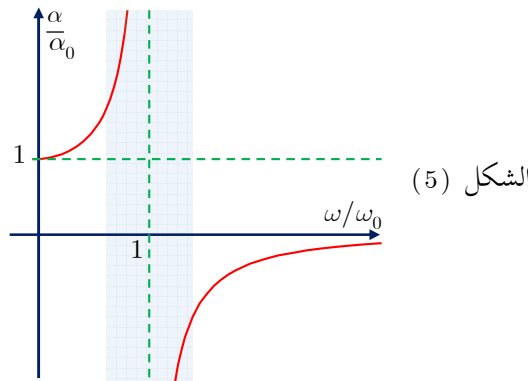
يوافق هذا التقريب إهمال الطاقة التي يقدمها الحقل للإلكترون. فإذا كان الحقل هو حقل موجة كهرطيسية، فإنّ الوسط لا يمتصّ إلا القليل القليل منها ونعبّر عن ذلك بالقول إنّنا في منطقة شفافية. ونلاحظ هنا أنّه:

في حالة تواترات للحقل أقلّ بكثير من  $\nu_0 = \omega_0/2\pi$  فإنّ الاستقطابية  $\alpha$  لا تختلف كثيراً عن

$$\alpha_0 = e^2/\varepsilon_0 m\omega_0^2 : \text{الاستقطابية الساكنة}$$

أمّا في حالة تواترات للحقل عالية جداً بالنسبة إلى  $\nu_0 = \omega_0/2\pi$  نجد أنّ الإلكترون لا يستطيع أبداً أن

يجاري اهتزازات الحقل وتسعى  $\alpha$  إلى الصفر. انظر الشكل (5).

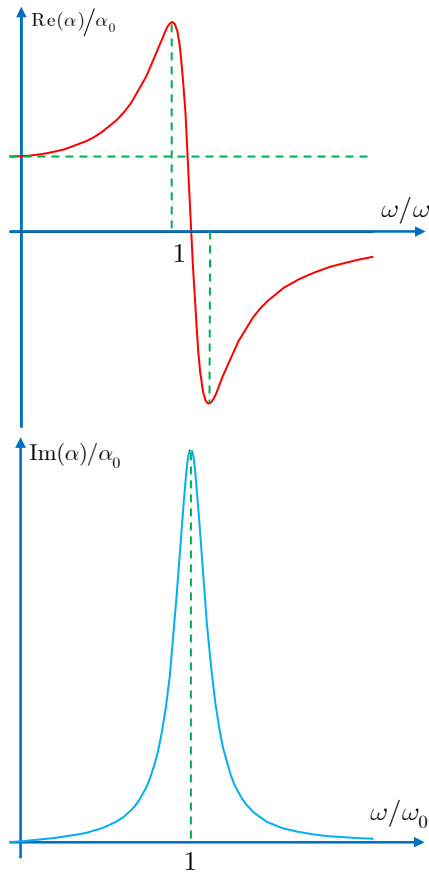




في جوار منطقة الامتصاص، المنطقة المهشّرة من الشكل (5)، يقوم الإلكترون باهتزازات عالية الشدة ويأخذ الوسط من الحقل طاقة غير مهمة ونعبّر عن ذلك بقولنا إننا في منطقة امتصاص. وينبغي عندها استخدام العبارة العقدية (16) لـ  $\alpha$ . فإذا كتبنا  $\alpha = \text{Re}(\alpha) + i \text{Im}(\alpha)$  يكون:

$$\text{Re}(\alpha) = \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}$$

$$\text{Im}(\alpha) = \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \frac{\beta \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}$$



الشكل (6)

إنّ وجود الجزء التخيلي في عبارة  $\alpha$  في منطقة الامتصاص يفسّر فرق الصفحة بين الاستقطاب والحقل، انظر الشكل (6).

لو افترضنا أنّ الوسط قليل الكثافة، أمكننا أن نكتب  $\chi_e(\omega) = n\alpha$  و بالتالي تكون عبارة السماحية النسبية الديناميكية:

$$(17) \quad \epsilon_r(\omega) = 1 + \chi_e = 1 + \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\beta\omega}$$

وهكذا تصبح السماحية في نظام متغير مقداراً عقدياً تابعاً لتواتر الحقل ونكتب  $\epsilon_r = \text{Re}(\epsilon_r) + i \text{Im}(\epsilon_r)$  وفي حالة وسط قليل الكثافة:

$$(18) \quad \text{Re}(\epsilon_r) = 1 + n \text{Re}(\alpha) = 1 + \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}$$

$$(19) \quad \text{Im}(\epsilon_r) = n \cdot \text{Im}(\alpha) = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{\beta \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}$$

**ملاحظة:** نطلق أحياناً اسم التواتر على النبض أو التواتر الراديائي  $\omega$  بدلاً من  $\nu$ .

## 2.IV. تطوير النموذج السابق

ينبغي التمييز بين الحقل الموضوعي والحقل المطبق على وسط كثيف، وهكذا وضمن شروط تطبيق العلاقة (15) نكتب:

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \chi_e = 1 + \frac{n\alpha}{1 - n\alpha/3}$$

يمكن وضع العلاقة السابقة على الشكل:

$$(20) \quad \epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2 - i\beta\omega}$$

بفرض أنّ  $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{ne^2}{3m\epsilon_0}\right)$  بحيث يبدو أنّ التغيير الوحيد الذي طرأ على العلاقة نتيجة كون الوسط قد أصبح كثيفاً هو انزياح في تواتر الامتصاص.

اقتصر النموذج السابق على حالة ذرة ذات إلكترون وحيد. يتمّ تعميم العلاقات السابقة بجمع الحدود الخاصة بمختلف الإلكترونات في الذرة:

$$(21) \quad \epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \sum_k \frac{n_k}{\omega_{1k}^2 - \omega^2 - i\beta_k \omega}$$

يُظهر الشكل (7) تحولات الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي بوجود عدة تواترات تجاوب ومن ثمّ وجود عدة مناطق امتصاص.

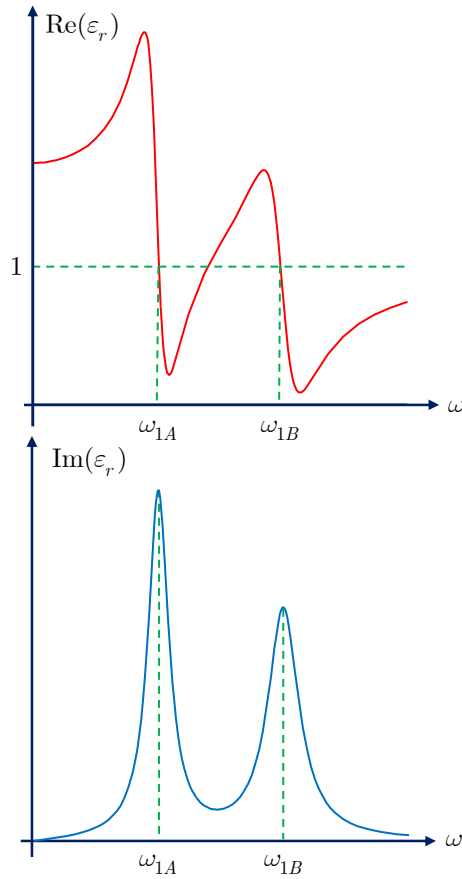
يضمّ طيف ذرة الهيدروجين رغم كونها ذات إلكترون وحيد عدة خطوط امتصاص وهذا ما لا يسمح به النموذج السابق. إنّ ميكانيك الكم يسمح بتفسير وجود هذه الخطوط الطيفية المختلفة عندما يعتبر أنّ كلّ إلكترون هو هزاز له عدة تواترات تجاوب. ويوافق كل انتقال بين مستويين للطاقة  $E_2$  و  $E_1$  تواتر تجاوب معطى بالعلاقة:  $\omega_R = (E_2 - E_1)/\hbar$ . كما يُظهر ميكانيك الكم وجوب استبدال الفرق بين أهلية المستويين السفلي 1 والعلوي 2:  $n_1 - n_2$ ، بالكثافة الإلكترونية  $n$ . لنفترض الآن أننا جعلنا المستوي العلوي أكثر أهلية من المستوي السفلي (عكس الأهلية) لوجدنا أنّ الجزء التخيلي للسماحية النسبية قد أصبح سالباً  $\text{Im}(\epsilon_r) < 0$  وهذا يوافق تضخيماً للموجة (امتصاص سالب). هذه الخاصة هي وراء مفعول الليزر.

نعلم أنّ  $n^2 = \epsilon_r$  . ومن ثمّ تكون قرينة الانكسار عقديّة .  
 في منطقة الشفافية يمكننا كتابة قرينة الانكسار بالشكل :

$$(22) \quad n^2 = \epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \sum_k \frac{n_k}{\omega_{1k}^2 - \omega^2}$$

حيث تظهر  $n^2$  كمجموع توابع متزايدة لـ  $\omega^2$  . أي إنّ  $n$  تتزايد بتزايد  $\omega$  ونقول إنّ الوسط مشتّت للضوء أو مبدّد للضوء .

وغالباً ما تأخذ قرينة الانكسار في مناطق الشفافية قيماً أكبر تماماً من الواحد، نستثني في ذلك الأشعة السينية حيث تكون  $n - 1 = -10^{-5}$  .



الشكل (7)

في منطقة الامتصاص نكتب قرينة الانكسار بالشكل :  $n = \text{Re}(n) + i \text{Im}(n)$  . إنّ الجزء الحقيقي لقرينة الانكسار موجب بسبب استمرار ما كانت عليه قرينة الانكسار في منطقة الشفافية . ولنبرهن أنّ الجزء التخيلي يجب أن يكون موجباً أيضاً .

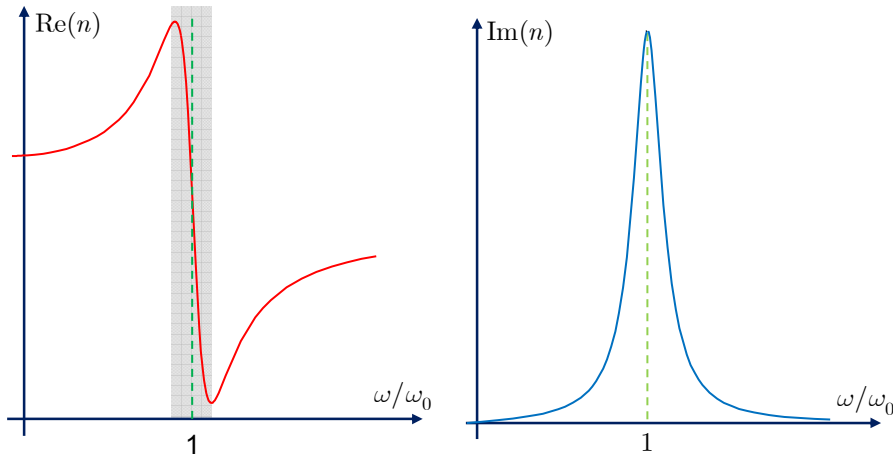
لهذا نأخذ الحقل الكهربائي لموجة مستوية ومنتشرة وفق الاتجاه الموجب للمحور  $ox$  :  $E = E_0 e^{i(kx - \omega t)}$  . لما كان

$$: \text{ فإن } k = \frac{\omega}{c} n = k_0 n = k_0 (\text{Re}(n) + i \text{Im}(n))$$

$$(23) \quad E = E_0 e^{-k_0 \text{Im}(n)x} e^{i(k_0 \text{Re}(n)x - \omega t)}$$

وبهذا تتمتع الموجة بشعاع موجة  $k_0 \text{Re}(n)$  وتتخامد أثناء انتشارها وفق  $e^{-k_0 \text{Im}(n)x}$  (لأن الموجة لا تتضخم عندما تنتشر في وسط مادي أي  $k_0 \text{Im}(n) > 0$ ) وهذا ما يفسر إطلاقنا على الجزء الحقيقي من  $n$  اسم قرينة الانكسار وإطلاقنا على الجزء التخيلي منها اسم قرينة الانطفاء. ويبدو جلياً مما سبق أن قرينة الانطفاء تكون موجبة دوماً. يُظهر الشكل (8) تغييرات الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي لقرينة الانكسار العقدية بدلالة التواتر  $\omega$ .

و نلاحظ أن قرينة الانكسار تتزايد مع تزايد التواتر خارج مناطق الامتصاص فنقول إن الوسط ذو تبدد عادي. في حين نجد أن قرينة الانكسار تتناقص مع تزايد التواتر في مناطق الامتصاص (الجزء المهتّر) فنقول عندئذ إن الوسط ذو تبدد غير عادي.



الشكل (8)

## V . معادلات ماكسويل في الديليكتريك:

نعلم أنّ معادلات ماكسويل في فضاء خالٍ من المادة وحاوٍ على كثافة حجمية من الشحنات الكهربائية  $\rho$  وكثافة حجمية من التيارات  $\vec{j}$  هي:

$$(24) \quad \begin{cases} \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), & \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{B} = 0, & \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \end{cases}$$

عندما تنتقل إلى وسط مادي حامل لشحنات كهربائية (ذات كثافة حجمية  $\rho$ ) ويجتازه تيار (ذو كثافة حجمية  $\vec{j}$ )، كما يقبل هذا الوسط استقطاباً كهربائياً أو مغناطيسياً عندئذ يكتسب العنصر الحجمي  $\delta\tau$  عزمًا كهربائياً  $\vec{P} \delta\tau$  أو عزمًا مغناطيسياً  $\vec{M} \delta\tau$  حيث  $\vec{P}$  و  $\vec{M}$  هما على الترتيب الاستقطاب الكهربائي وشدة المغنطة للوسط المدروس.

ونقبل أنّ وجود الاستقطاب الكهربائي يكافئ توزيعاً من الشحنات ذات الكثافة  $\rho_{\text{polar}}$  (بحيث أن  $\rho_{\text{polar}} = -\text{div } \vec{P}$ ) و توزيعاً من التيارات ذات الكثافة  $\vec{j}_{\text{polar}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ . بحيث يحقّق هذان التوزيعان علاقة انخفاض شحنات الاستقطاب:  $\text{div } \vec{j}_{\text{polar}} + \frac{\partial \rho_{\text{polar}}}{\partial t} = 0$

كما نقبل أنّ وجود الاستقطاب المغناطيسي يكافئ وجود تيارات ذات كثافة  $\vec{j}_{\text{magn}} = \text{rot } \vec{M}$  بحيث أنّ  $\text{div } \vec{j}_{\text{magn}} = 0$

إذن لكتابة معادلات ماكسويل في وسط مادي ينبغي أخذ شحنات وتيارات الاستقطاب بعين الاعتبار فتأخذ المعادلتان الثانية والثالثة الشكل التالي:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left[ \vec{j} + \vec{j}_{\text{polar}} + \vec{j}_{\text{magn}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] = \mu_0 \left[ \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{rot } \vec{M} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \\ \text{div } \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho + \rho_{\text{polar}}) = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho - \text{div } \vec{P}) \end{cases}$$

أو بعبارة أخرى:

$$\begin{cases} \text{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho - \text{div } \vec{P}) \\ \text{div} (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho \end{cases}$$

حيث استخدمنا الشعاعين المساعدین:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \text{و} \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

وعليه تصبح معادلات ماكسويل في وسط مادي على الوجه الآتي:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{D} = \rho, & \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases}$$

## تمارين ومسابقات

1. أثبت أن الاستقطاب الذي تكتسبه كرة ديلكتريك متجانسة خاضعة لتأثير حقل كهربائي منتظم  $E_0$  هو:

$$\vec{P} = \frac{\chi}{1 + \chi/3} \epsilon_0 \vec{E}_0$$

حيث  $\chi$  هي الطواعية الكهربائية للكرة.

بين أن حالة كرة ناقلة خاضعة لتأثير حقل كهربائي منتظم ما هي إلا حالة خاصة من الدراسة السابقة.

2. احسب الحقل الكهربائي في مركز مربع ديلكتريك مستقطب بانتظام بصورة موازية لأحد أضلاعه.

3. لتكن لدينا أسطوانة من الديلكتريك محورها  $oz$  وطولها  $2h$  ومستقطبة بانتظام وفقاً للمحور  $oz$ . احسب

الحقل الكهربائي في نقطة  $M$  على المحور  $oz$  باستخدامك للزوايا التي نرى فيها من  $M$  قاعدتي الاسطوانة.

4. لتكن لدينا أسطوانة من الديلكتريك طويلة جداً ذات نصف قطر  $a$  ومستقطبة بانتظام بصورة عمودية على

محورها  $oz$ . احسب الحقل الكهربائي في نقطة  $M$  من الفضاء  $(\vec{P}, \vec{u}_r)$ ،  $\theta = (\vec{P}, \vec{u}_r)$ ،  $\overline{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$ . برهن أنه

$$\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{2\epsilon_0} \text{ فإن } r < a \text{ وأنه عندما يكون } r > a \text{ فإن } |\vec{E}| = \frac{P}{2\epsilon_0} \frac{a^2}{r^2}$$

ارسم منحنيات تساوي الكمون و خطوط الحقل في مستوي عمودي على المحور  $oz$ . ثم احسب شحنات

الاستقطاب المتواجدة على سطح الاسطوانة وادرس استمرارية مركبات الحقل الكهربائي عند السطح.

5. انتشار Rayleigh. (تفسير زرقة السماء):

تتميز إلكترونات جزيئات الغلاف الجوي اهتزازات قسرية تحت تأثير الحقل الكهربائي لضوء الشمس. باستخدامنا

لنموذج الإلكترون المرتبط ارتباطاً مرناً بالنواة وبفرض أن تواتر التجاوب  $\omega_0$  لهذه الإلكترونات يقع في المجال فوق

البنفسجي البعيد.

♦ بين أن الاستطاعة المتوسطة للموجة الكهروستاتيكية التي تُصدرها جزيئة من الغلاف الجوي تحت تأثير الحقل

الكهربائي  $E_0$  ذي التواتر  $\omega$  الواقع في المجال المرئي هي:

$$P = \frac{e^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \frac{E_0^2}{m^2} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4$$

- ◆ اشرح لماذا يكون الضوء الأزرق طاغياً على مختلف الأضواء الصادرة عن جزيئات الغلاف الجوي -الضوء المنتشر-؟.
- ◆ فسّر اللون الأحمر للشمس عند المغيب.



## الفصل الثاني

# مبادئ في الضوء اللاخطي

- I. الاستقطاب اللاخطي
  - 1.I. مقدّمة عامة
  - 2.I. تصنيف الظواهر اللاخطية
  - 3.I. المنشأ الفيزيائي للاستقطاب اللاخطي من المرتبة الثانية
- II. الطواعيات اللاخطية
  - 1.II. النموذج التقليدي في حساب الطواعية (نموذج الهزاز اللاتوافقي)
  - 2.II. تعريف الطواعية غير الخطية في فضاء التواترات
    - ◆ الطواعية الخطية
    - ◆ الطواعية اللاخطية من المرتبة الثانية
- III. خواص تنسورات الطواعية غير الخطية
  - 1.III. دراسة الطواعية من المرتبة الثانية
    - ◆ اصطلاح Voigt
    - ◆ علاقات ABDP و علاقات Kleinman
  - 2.III. اختصار عناصر تنسور الطواعية من المرتبة الثانية باستخدام الخواص التناظرية
    - ◆ وجود مركز تناظر عكسي
    - ◆ وجود محور تناظر
    - ◆ وجود محور تناظر وعدد لا نهائي من المستويات المارة بهذا المحور  $C_{\infty v}$



## I. الاستقطاب اللاخطي

### 1.1. مقدمة عامة

يعتمد الضوء التقليدي على نظرية خطية تسمح بتطبيق مبدأ التراكيب؛ فيكون ردّ الوسط على عدة إثارات هو تركيب خطي لردوده المتعلقة بهذه الإثارات كلّ منها مطبّق على حدة. وهذا مردّه إلى :

- كون معادلات ماكسويل خطية.

- وكون المعادلات المكوّنة :  $\vec{D} = \epsilon_0 [\epsilon_r] \vec{E}$  و  $\vec{B} = \mu_0 [\mu_r] \vec{H}$  خطية.

والنتيجة المباشرة لهذه الخاصة هي أنّ أمواجاً كهرومغناطيسية ذات تواترات مختلفة  $\omega$  لا تتفاعل مع بعضها وبالتالي لا يطرأ تغيير على التواترات.

غير أنّ شعاع التحريض الكهربائي  $\vec{D}$  يتعلق بالحقل الكهربائي  $\vec{E}$ ، كما رأينا سابقاً، وفقاً للعلاقة  $\vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{D}$  حيث  $\vec{P}$  هو شعاع الاستقطاب الناجم عن الحقل الكهربائي المطبّق  $\vec{E}$ . ومادامت شدة هذا الحقل المطبّق  $\vec{E}$  صغيرة أمام شدات الحقول الكهربائية المميّزة للوسط (الحقول الكهربائية البينية للذرات) أمكننا اعتبار  $\vec{P}$  تابعاً خطياً لـ  $\vec{E}$  وعليه يكون :

$$\vec{P} = [\chi] \epsilon_0 \vec{E}$$

حيث  $[\chi]$  هو تنسور الطواعية الكهربائية وهو مرتبط بتنسور السماحية النسبية بالعلاقة  $[\epsilon_r] = 1 + [\chi]$ .

إذا أصبحت شدة الحقل الكهربائي كبيرة جداً، يصبح التابع  $\vec{P}(\vec{E})$  غير خطي، وفي الحقيقة يمكننا أن نشر  $\vec{P}$  وفقاً للقوى المتعاقبة لـ  $\vec{E}$  ( سنأتي على تبرير هذه الكتابة في الفقرة 2.II ) :

$$(1) \quad \vec{P} = \epsilon_0 [\chi^{(1)} : \vec{E} + \chi^{(2)} : \vec{E} : \vec{E} + \chi^{(3)} : \vec{E} : \vec{E} : \vec{E} + \dots]$$

حيث  $\chi^{(2)}$ ،  $\chi^{(3)}$ ، ... هي تنسورات الطواعية غير الخطية. إنّ قيمة  $\chi^{(j)}$  تتناقص بسرعة مع تزايد  $j$ . بحيث أنّ الحد  $j$  يتناسب مع  $(E/E_{at})^j$  حيث  $E_{at}$  هو الحقل الذري.

وبهذا يظهر الاستقطاب  $\vec{P}$  كمجموع لاستقطاب خطي

$$(2) \quad \vec{P}_L = \epsilon_0 \chi^{(1)} : \vec{E}$$

وآخر لا خطي

$$(3) \quad \vec{P}_{NL} = \epsilon_0 [\chi^{(2)} : \vec{E} : \vec{E} + \chi^{(3)} : \vec{E} : \vec{E} : \vec{E} + \dots]$$

ويسمح وجود الحدود  $\vec{E} : \vec{E} : \vec{E}$ ،  $\vec{E} : \vec{E} : \vec{E} : \vec{E}$ ، ... بتوليد تواترات جديدة.

وعليه إذا أردنا أن نضع تعريفاً للضوء اللاخطي قلنا إنه يهتم بدراسة تفاعل الحقول الكهرومغناطيسية العالية الشدة مع الأوساط المادية. ومفتاح الدراسة لجميع الظواهر اللاخطية هو الاستقطاب اللاخطي (3) حيث تشكّل المعادلة

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_L + \vec{P}_{NL}$$

حجر الأساس في دراسة أي تفاعل للمادة مع الإشعاع.

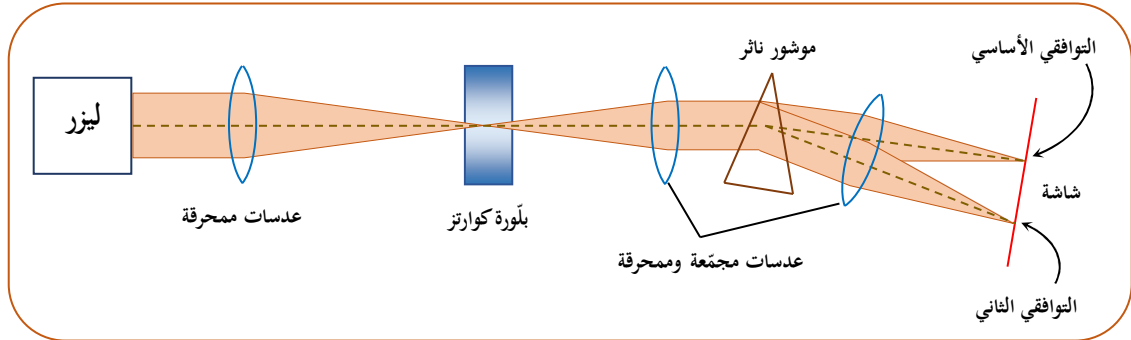
لننظر الآن إلى الحقل الكهربائي الذري الذي يربط الإلكترون بالنواة في ذرة الهيدروجين (أبسط الذرات) ذات نصف القطر  $a = 5 \times 10^{-11} \text{m}$  فنجد أنّ شدّته:

$$(4) \quad E_{\text{at}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a^2} \approx 5 \times 10^{11} \text{V/m}$$

لو قارنا هذه القيمة بشدة الحقل الكهربائي المرافق لضوء الشمس الواصل إلى الأرض التي تساوي  $E \approx 10^3 \text{V/m}$  لوجدنا أنّ تقريب الضوء الخطي مبرّر تماماً وبوجه عام فإنّ التقريب الخطي في الضوء التقليدي هو تقريب جيّد ومبرر عند استخدامنا للمنبع الضوئية التقليدية المتعارفة.

ولكن لو تأملنا الآن الحقل الكهربائي المرافق لليزر ذي استطاعة 10 MW متمحرق على سطح مساحته  $10^4 \mu\text{m}^2$  لوجدنا أنّ شدته من رتبة  $10^{11} \text{V/m}$  وهي قيمة غير مهملة أمام شدة الحقل الذري وبالتالي ينبغي هنا أن نأخذ بعين الاعتبار الاستقطاب اللاخطي.

ولهذا كان ظهور الضوء اللاخطي مواكباً لظهور الليزرزات العالية الاستطاعة وكانت التجربة الأولى في الضوء اللاخطي في عام 1961 عندما نجح فرانكن Franken من جامعة ميشيغان في توليد التوافقي الثاني  $\lambda = 347.1 \text{nm}$  لليزر الياقوت  $\lambda = 3694.3 \text{nm}$  بعد عبوره لبلورة من الكوارتز، انظر الشكل (1). وقد كان مردود التحويل لا يتجاوز 5%، في حين يتجاوز مردود التحويل حالياً 30% وذلك بعد عبور وحيد للحزمة داخل البلورة غير الخطية لمسافة من رتبة بضعة سنتيمترات.



الشكل (1)

## 2.1. تصنيف الظواهر اللاخطية

لقد صَنَّفنا بعض الظواهر اللاخطية تبعاً لتطبيقاتها في الجدول الآتي، وقد راعينا في هذا التصنيف التمييز بين الظواهر اللاخطية من المرتبة الثانية والظواهر اللاخطية من المرتبة الثالثة.

الظواهر اللاخطية من المرتبة الثانية	
توليد تواترات جديدة.	توليد التوافقي الثاني (مضاعفة التواتر) SHG. $\omega, \omega \rightarrow 2\omega$
التعديل والتبديل.	مفعول بوكلز Pockels $\omega, 0 \rightarrow \omega$
تطبيق جهد مستمر بين طرفي البلورة.	التصحيح الضوئي $\omega, -\omega \rightarrow 0$
توليد تواترات جديدة، الهزاز الوسيط.	المفعول الوسيط $\omega_1, \omega_2 \rightarrow \omega_1 \pm \omega_2$

الظواهر اللاخطية من المرتبة الثالثة	
توليد تواترات جديدة.	توليد التوافقي الثالث THG. $\omega, \omega, \omega \rightarrow 3\omega$
تبديل الاستقطاب.	مفعول كير Kerr $\omega, 0, 0 \rightarrow \omega$
توليد منابع ذات طيف مستمر.	مفعول رامان Raman $\omega_{\text{photon}} \pm \omega_{\text{phonon}} \rightarrow \omega_s^{AS}$
مطيافية بدون مفعول دوبلر. ترافق الطور.	امتصاص فوتونين $\omega, \omega, -\omega \rightarrow \omega$
التمحرق الذاتي. ثنائية الاستقرار الضوئية.	تغيير قرائن الانكسار $\omega, \omega, -\omega \rightarrow \omega$ حيث $n = n_0 + n_2 I$

وسأتي في الفصول القادمة على دراسة بعض هذه الظواهر بالتفصيل إلا أننا سوف نتوقف قليلاً عند ظاهرة تغيير قرائن الانكسار. إذ يسبب حقل كهربائي عالي الشدة تغييراً في قرينة انكسار الوسط الذي ينتشر فيه ومرد ذلك إلى ما يلي:

لَمَّا كان

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 [\vec{E} + \chi^{(1)} : \vec{E} + \chi^{(2)} : \vec{E} : \vec{E} + \chi^{(3)} : \vec{E} : \vec{E} : \vec{E} + \dots]$$

فإذا كان الحد من الرتبة الثانية  $\chi^{(2)} : \vec{E} : \vec{E}$  معدوماً بسبب تمتع الوسط بتناظر مركزي مثلاً (سنرى تفسير هذا عند دراستنا للخواص التنسورية لـ  $\chi^{(2)}$ ) أمكننا أن نكتب:

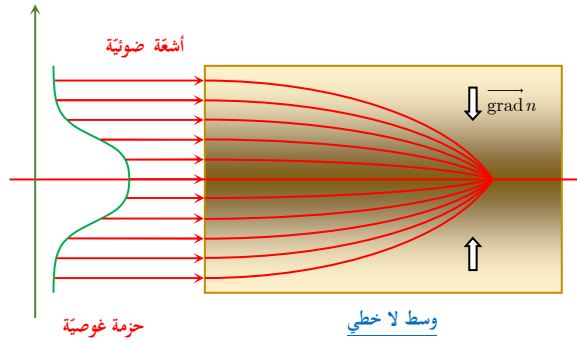
$$\vec{D} = \epsilon_0 n^2 \vec{E}$$

$$\text{حيث } n^2 = n_0^2 + \alpha^2 |E|^2$$

ولمّا كان  $\alpha^2 |E|^2$  صغيراً أمام  $n_0^2$  استطعنا أن نكتب  $n = n_0 + n_2 I$  أي إنّ قرينة الانكسار تتغير بتغير الشدة الضوئية.

فإذا وردت على وسط لخطي موجة عالية الشدة تتمتع طوليتها بتوزع غوصي كما في الشكل (2) لوجدنا أنّ الأشعة الضوئية تنحني و تتقارب من محور الحزمة حيث تكون قرينة الانكسار عالية وهذه الظاهرة تسمى ظاهرة التمحرق الذاتي. وتؤدي هذه الظاهرة إلى تمركز عالٍ للاستطاعة في نقطة التمحرق مما قد يُسبب تحريب المادة.

في الحقيقة تسعى الموجة بانتشارها في وسط مادي إلى الانفراج بسبب ظاهرة الانعراج وعليه إذا توصلنا إلى حالة مثلى يتم فيها تعديل ظاهرة الانعراج بظاهرة التمحرق الذاتي، حصلنا عندها على موجة تتمتع بانتشار مثالي خالٍ من التخامد في الوسط ونقول إننا حصلنا على موجة سوليتون (موجة يكون فيها حدّ فرق الصفحة الزمني معدوماً).



الشكل (2)

### 3.1. المنشأ الفيزيائي للاستقطاب اللاخطي من المرتبة الثانية

كما قد رأينا في الفصل السابق أنّ مردّ الاستقطاب في ديلكتريك هو إلكترونات التكافؤ (الشحنات المقيدة) التي تنزاح عن وضع توازنها بسهولة تحت تأثير الحقل الكهربائي المرافق لموجة كهرومغناطيسية على سبيل المثال. فإذا كان  $x$  هو مقدار الانزياح عن وضع التوازن وكانت  $n$  كثافة هذه الإلكترونات كتبنا عبارة الاستقطاب:

$$(5) \quad P(t) = -n e x(t)$$

عندما يكون الوسط الديلكتريك بلّورة تناظرية فإنّ عبارة الطاقة الكامنة للإلكترون تعكس الخواص التناظرية للوسط الذي يتواجد فيه الإلكترون وعليه يكون:

$$(6) \quad V(x) = \frac{m}{2} \omega_0^2 x^2 + \frac{m}{4} B x^4 + \dots$$

حيث  $\omega_0$  و  $B$  ثابتان ( $\omega_0$  يوافق تواتر التجاوب للهرّاز الإلكتروني) و  $m$  هي كتلة الإلكترون. ونلاحظ أنّ عبارة الطاقة الكامنة لا تضمّ إلا حدود القوى الزوجية لأنّ  $V(x) = V(-x)$ . وتكون عبارة قوة الإرجاع:

$$(7) \quad F = -\frac{\partial V}{\partial x} = -m\omega_0^2 x - mBx^2$$

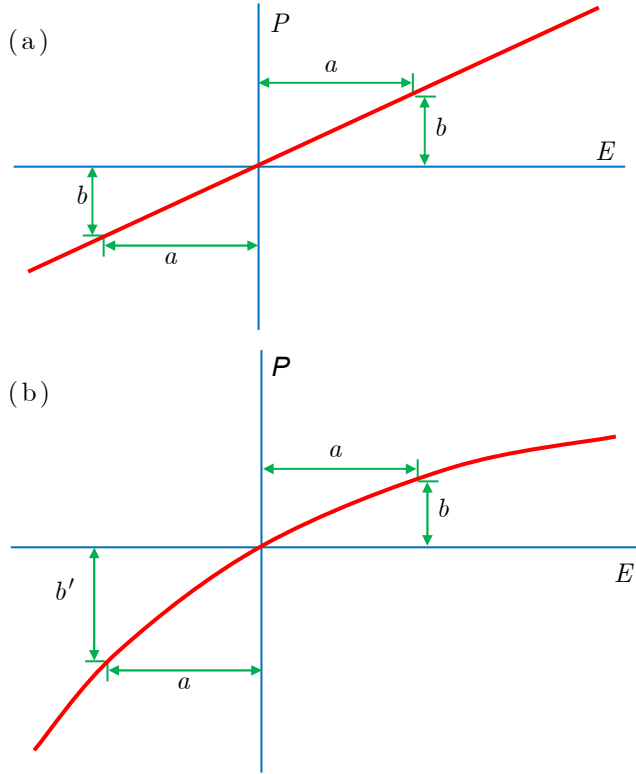
وهي معدومة عند وضع التوازن  $x = 0$ .

يعود الاستقطاب الخطي في البلورة إلى وجود الحد الأول في عبارة الطاقة الكامنة. ولكي نرى ذلك سنأخذ حقلاً كهربائياً منخفض التواتر حيث تكون مركبات فورييه الخاصة به عند تواترات صغيرة إذا ما قورنت بـ  $\omega_0$ . (يسمح افتراض الحقل منخفض التواتر بإهمال حدّ التسارع في معادلة القوة) ونكتب:

$$(8) \quad -eE(t) - m\omega_0^2 x(t) = 0$$

$$x(t) = -\frac{e}{m\omega_0^2} E(t)$$

وبذلك يكون الاستقطاب  $P(t) = -n e x(t)$  متناسباً مع الحقل الكهربائي المولّد له.



الشكل (3)

لنفترض الآن أنّ البلورة غير تناظرية بمعنى أنّ الشرط  $V(x) = V(-x)$  غير محقق. في هذه الحالة يضمّ الكمون حدود القوى الزوجية والفردية أي:

$$(9) \quad V(x) = \frac{m}{2} \omega_0^2 x^2 + \frac{m}{3} D x^3 + \dots$$

الذي يوافق قوة إرجاع من الشكل:

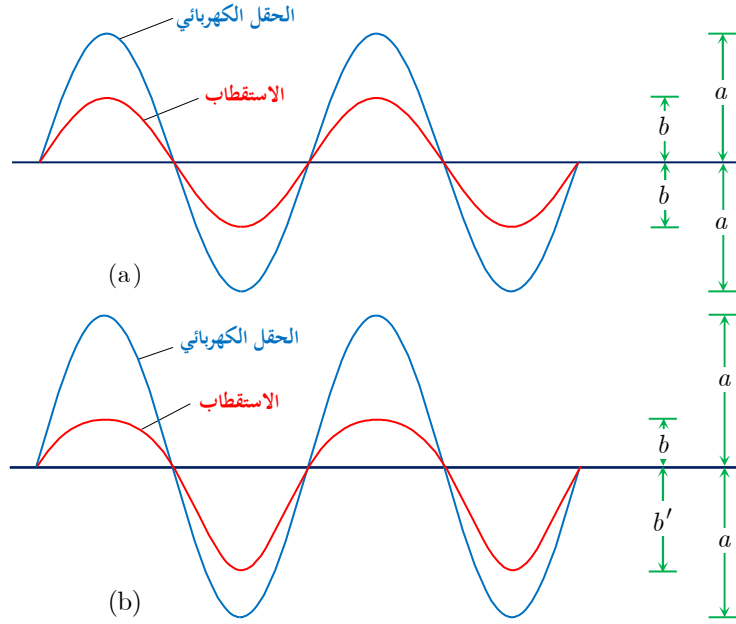
$$(10) \quad F = -\frac{\partial V}{\partial x} = -(m\omega_0^2 x + mDx^2 + \dots)$$

إنّ تفحصنا للعلاقة السابقة يُظهر أنّ انزياحاً بالاتجاه الموجب  $x > 0$  سيؤدي إلى ظهور قوة إرجاع أكبر من تلك التي تظهر من انزياح مماثل ولكن بالاتجاه السالب (وذلك بافتراض أنّ  $D$  موجبة). وعليه فإذا كانت القوة الكهربائية المطبقة على الإلكترون موجبة ( $E < 0$ ) كانت شدة الاستقطاب المتولّدة عن هذا الحقل مغايرة لتلك الناجمة عن حقل مماثل للحقل الكهربائي السابق بالشدة ومعاكس بالاتجاه.

يظهر هذا جلياً في الشكل (3) الذي يبيّن العلاقة بين الاستقطاب والحقل المولّد له في وسط خطي متمتع بمركز تناظر الشكل (3 - a) وفي وسط لا خطي الشكل (3 - b).

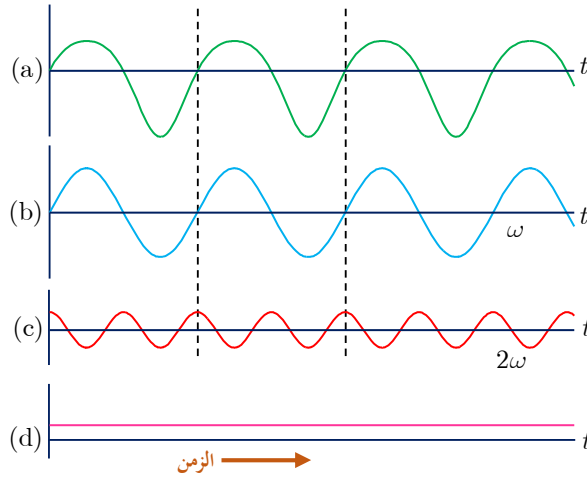
لنطبق الآن على الوسط البلوري حقلاً كهربائياً متناوباً (مرافقاً لموجة كهروطيسية ذات تواتر  $\omega$ ). يكون الاستقطاب المتولّد في البلورات الخطية متناسباً مع الحقل وعليه فإنّ هذا الاستقطاب سوف يهتز تماماً كالحقل عند التواتر  $\omega$  كما يظهر هذا في الشكل (4 - a).

عندما تكون البلورة غير خطية يمكننا الاستعانة بالشكل (3 - b) في رسم الاستقطاب اللاخطي المتولّد الشكل (4 - b). كما يُظهر الشكل (5) تحليل فورييه الخاص بالاستقطاب اللاخطي.



الشكل (4)

يُظهر تحليل فورييه وجود مركبة مهتزة عند التواتر  $2\omega$  بالإضافة إلى وجود مركبة ثابتة.



الشكل (5)

سنعالج في الفقرة القادمة النموذج الرياضي الذي يسمح بإيجاد العلاقة بين الاستقطاب اللاخطي والحقل الكهربائي المسؤول عن توليده.

## II. الطواعيات اللاخطية

### 1. II. النموذج التقليدي في حساب الطواعية (نموذج الهزاز اللاتوافقي)

- سوف نستخدم نموذج الإلكترون المرتبط ارتباطاً مرناً بالنواة، الذي درسناه في الفصل الأول. وفقاً لهذا النموذج تَحْتَرِّ الإلكترونات حول وضع التوازن بحيث تخضع هذه الاهتزازات الحرة لمعادلة الحركة:

$$(11) \quad m(x'' + \beta x' + \omega_0^2 x) = 0$$

حيث  $x$  هو مقدار الإزاحة عن وضعية التوازن و  $x' = \frac{dx}{dt}$  و  $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$  و  $\omega_0$  هو النبض الخاص بالهزاز غير المتخامد و  $\beta$  هو عامل التخامد و  $m$  هي كتلة الإلكترون.

- عند تطبيق موجة ضوئية، يخضع الهزاز السابق لاهتزازات قسرية بتأثير القوة  $F$  الناتجة عن الحقل الكهربائي، للموجة الكهرطيسية، المؤثر على الإلكترون  $F = -\frac{1}{2}eE(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ .

- عندما تصبح شدة الحقل الكهربائي المطبق  $E$  كبيرة لا تعود انزياحات الهزاز صغيرة وهذا ما نعبر عنه رياضياً بقولنا إن قوة الإرجاع للهزاز الحر  $F(x)$  تضم حداً إضافياً بـ  $x^2$  (هزاز لاتوافقي).

و بالتالي تصبح معادلة الحركة :

$$(12) \quad x'' + \beta x' + \omega_0^2 x + \gamma x^2 = -\frac{eE}{2m}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

- حل المعادلة التفاضلية السابقة ننشر  $x(t)$  في متسلسلة فورييه :

$$(13) \quad x = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} x_k e^{i\omega_k t}$$

وبهذا يكون لدينا :

$$x'' = -\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \omega_k^2 x_k e^{i\omega_k t} \quad \text{و} \quad x' = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} i\omega_k x_k e^{i\omega_k t}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد ما يأتي:

- أمثال  $e^{i\omega t}$  بإهمال الحدود ذات الدرجات العليا أمام الحد من الدرجة الأولى :

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + i\beta\omega)x_1 = -\frac{eE}{m}$$

ومنه :

$$(14) \quad x_1 = -\frac{eE}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\beta\omega}$$

ويكون الاستقطاب الموافق :

$$(15) \quad P_L = -\frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left( \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\beta\omega} + c.c. \right)$$

أي إن الطواعية الخطية الموافقة :

$$(16) \quad \chi^{(1)}(\omega) = -\frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\beta\omega}$$

• أما أمثال  $e^{2i\omega t}$  فهي

$$(\omega_0^2 - 4\omega^2 + 2i\beta\omega)x_2 = -\frac{\gamma}{2}x_1^2$$

وتكون عبارة  $x_2$  :

$$(17) \quad x_2 = -\frac{\gamma e^2 E^2}{2m^2} \frac{1}{((\omega_0^2 - \omega^2) + i\beta\omega)^2 \cdot ((\omega_0^2 - 4\omega^2) + 2i\beta\omega)}$$

ومنه نجد أنّ

$$(18) \quad P^{(2)} = \frac{n\gamma e^3 E^2}{2m^2} \frac{1}{((\omega_0^2 - \omega^2) + i\beta\omega)^2 \cdot ((\omega_0^2 - 4\omega^2) + 2i\beta\omega)}$$

وبالتالي يكون :

$$(19) \quad \chi^{(2)}(2\omega) = \frac{n\gamma e^3}{2m^2\epsilon_0} \frac{1}{((\omega_0^2 - \omega^2) + i\beta\omega)^2 \cdot ((\omega_0^2 - 4\omega^2) + 2i\beta\omega)}$$

وبهذا نجد أنّ

$$(20) \quad \chi^{(2)}(2\omega) = \frac{m\epsilon_0^2\gamma}{2n^2e^3} [\chi^{(1)}(\omega)]^2 \chi^{(1)}(2\omega)$$

إنّ هذه العلاقة مهمة للغاية إذ إنّها تربط الطواعية اللاخطية من الرتبة الثانية بالطواعية الخطية وثابت اللاتوافقية

$$\gamma \cdot \text{وتسمى النسبة} \delta = \frac{\chi^{(2)}(2\omega)}{[\chi^{(1)}(\omega)]^2 \chi^{(1)}(2\omega)} \text{ دليل ميلر وهي نسبة ثابتة بقطع النظر عن طبيعة البلورة.}$$

## 2.II. تعريف الطواعية غير الخطية في فضاء التواترات

كنا قد رأينا أنّ المعادلة المكوّنة  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  تشكّل حجر الأساس في دراسة كلّ تفاعل للأشعة مع المادة. إذ عندما تعبر موجة ذات حقل  $\vec{E}$  وسطاً مادياً فإنّ الوسط يستقطب حيث تظهر فيه ثنائيات أقطاب محرّضة وتمثّل طويلة شعاع الاستقطاب عددها في واحدة الحجم. وهكذا يكون جواب الوسط متميّزاً بظهور الطواعية الكهربائية  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$  وذلك ضمن التقريب الخطي.

♦ الطواعية الخطية

حتى تتمّ معالجة جواب الوسط بصورة دقيقة ينبغي إدخال تابع الجواب  $R$  حيث :

$$(21) \quad P(t) = \int_{-\infty}^t R(t-t')E(t')dt'$$

ونقصد بهذا التكامل أنّ كلّ الماضي المتعلّق بـ  $\vec{E}$  يدخل في الحساب.



عندما تكون الجملة غير متغيرة مع الزمن فإنّ تابع الإجابة  $R$  لا يتعلّق بمبدأ الزمن وإنما يتعلّق بالفرق  $t - t'$  وعليه يظهر  $P$  بصفته جداء التلاف لكلّ من التابع  $R$  والحقل  $E$ .

بأخذ تحويل فورييه  $E(\omega) = \int E(t)e^{-i\omega t} dt$  (الأصح هنا أن نكتب  $\hat{E}(\omega)$  ولكننا اعتدنا على هذا اللبس) نحصل على:

$$(22) \quad P(\omega) = \chi(\omega)E(\omega)$$

أي إنّ العلاقة السابقة غير صالحة إلا في فضاء التواترات وهي غير صالحة في الفضاء الزمني إلا عندما تكون الموجة وحيدة اللون (أي تتمتع بمركبة وحيدة في فضاء التواترات).

إنّ تابع الجواب  $R$  هو تابع حقيقي بمعنى أنّ:

$$(23) \quad \chi^*(\omega) = \chi(-\omega)$$

كما إنّ  $R$  سببيّ ومن هنا نجد علاقتي Kramers-Kronig:

$$(24) \quad \begin{cases} \chi'(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \\ \chi''(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \end{cases}$$

حيث  $\chi = \chi' + i\chi''$  و  $P$  هو القسم الرئيسي:

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\omega - \varepsilon} + \int_{\omega + \varepsilon}^{+\infty}$$

ونقرأ علاقتي Kramers-Kronig فيزيائياً كما يأتي: إنّ القسم الحقيقي من ثابت الديلكتريك والمتعلّق بالتبدد غير مستقل عن القسم العقدي والمتعلّق بالامتصاص.

#### ♦ الطواعية اللاخطية من الرتبة الثانية

لنأت الآن إلى الحدود غير الخطية في عبارة الاستقطاب وبالتحديد الاستقطاب اللاخطي من الرتبة الثانية ولنعرّف  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^3)$  أي فضاء التوابع من  $\mathbb{R}$  إلى  $\mathbb{C}^3$  التي نفترض أنّها تُحقّق ما يلزم من شروط الاستمرار وقابليّة الاشتقاق. ينتمي إلى هذا الفضاء مثلاً كلٌّ من الحقل الكهربيسي  $E(t) : t \mapsto \mathcal{E}$ ، والاستقطاب الناجم عنه  $P(t) : t \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{E})$ ، وغيرها.

إنّ مؤثّر الاستقطاب  $\mathcal{P}$  هو بوجه عام تابع:

$$\mathcal{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, \mathcal{E} \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{E})$$

يربط بكلّ حقل كهربيسي  $\mathcal{E}$  الاستقطاب  $\mathcal{P}(\mathcal{E})$  الناجم عنه. إنّ مؤثّر الاستقطاب  $\mathcal{P}$  هذا هو مؤثّر غير خطّي بوجه عام، واعتباره خطياً هو تقريب أوّلي يعطي النموذج الخطي الذي ذكرناه آنفاً. يمكننا في الحالة العامّة، وضمن شروط نفترض تحقّقها، أن ننشر الاستقطاب  $\mathcal{P}(\mathcal{E})$  في "قوى" الحقل  $\mathcal{E}$  على الوجه التالي:

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \mathcal{P}^{(0)} + \mathcal{P}^{(1)}(\mathcal{E}) + \mathcal{P}^{(2)}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) + \mathcal{P}^{(3)}(\mathcal{E}, \mathcal{E}, \mathcal{E}) + \dots$$

حيث  $\mathcal{P}^{(k)}$  هو تابع  $k$ -خطّي منطلقه  $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \times \dots \times \mathcal{F}$  (ويأخذ قيمه في  $\mathcal{F}$ )،  $(1 \leq k)$ .

سنهتم فيما يلي بالاستقطاب اللاخطي من المرتبة الثانية أي

$$\mathcal{P}^{(2)} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \mapsto \mathcal{P}^{(2)}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$$

ويتمتع  $\mathcal{P}^{(2)}$  ، وكذلك جميع التوابع  $\mathcal{P}^{(k)}$  ، بالخواص التالية:

♦ إن  $\mathcal{P}^{(2)}$  متناظر:

$$(25) \quad \mathcal{P}^{(2)}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \mathcal{P}^{(2)}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1)$$

♦ إن  $\mathcal{P}^{(2)}$  حقيقي، أي إذا كان  $\mathcal{E}_1$  و  $\mathcal{E}_2$  حقيقيين كان  $\mathcal{P}^{(2)}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$  حقيقياً.

♦ إن  $\mathcal{P}^{(2)}$  مستقل عن مبدأ الزمن. لتوضيح هذه الخاصية نحتاج إلى الرمز التالي: إذا كان  $A$  عنصراً من  $\mathcal{F}$ ،

وكان  $\tau$  عدداً حقيقياً، رمزنا بالرمز  $[A]_\tau$  إلى العنصر من  $\mathcal{F}$  المعرّف بالعلاقة  $[A]_\tau(t) = A(t - \tau)$  وذلك

أيًا كانت  $t$ . وعندها يمكننا صياغة هذه الخاصية بالقول:

$$(26) \quad \forall \tau, \quad \mathcal{P}^{(2)}([ \mathcal{E}_1 ]_\tau, [ \mathcal{E}_2 ]_\tau) = [ \mathcal{P}^{(2)}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) ]_\tau$$

♦ وأخيراً إن  $\mathcal{P}^{(2)}$  سببي فإذا انعدم الحقلان  $\mathcal{E}_1$  و  $\mathcal{E}_2$  قبل لحظة ما  $t_0$  كان  $\mathcal{P}^{(2)}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$  معدوماً حتى

اللحظة  $t_0$ .

**تعريف:** إذا كان  $(E, \omega)$  عنصراً من  $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}$  رمزنا بالرمز  $\mathcal{E}_{E, \omega}$  إلى العنصر من  $\mathcal{F}$  المعرّف بالعلاقة

$$\mathcal{E}_{E, \omega}(t) = E e^{i\omega t}$$

وكتبنا  $\varepsilon_0 \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2, E_1, E_2)$  للدلالة على المقدار  $\mathcal{P}^{(2)}(\mathcal{E}_{E_1, \omega_1}, \mathcal{E}_{E_2, \omega_2})(0)$  وذلك أيًا كان  $(E_1, \omega_1)$

و  $(E_2, \omega_2)$  من  $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}$ .

في الحقيقة، يسمح لنا استقلال  $\mathcal{P}^{(2)}$  عن مبدأ الزمن أن نكتب

$$(27) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{P}^{(2)}(\mathcal{E}_{E_1, \omega_1}, \mathcal{E}_{E_2, \omega_2})(t) = \varepsilon_0 \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2, E_1, E_2) e^{i(\omega_1 + \omega_2)t}$$

وذلك أيًا كان  $(E_1, \omega_1)$  و  $(E_2, \omega_2)$  من  $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}$ . إذ تُكتب العلاقة (26) بالشكل

$$\forall t, \forall \tau, \quad \mathcal{P}^{(2)}([ \mathcal{E}_{E_1, \omega_1} ]_\tau, [ \mathcal{E}_{E_2, \omega_2} ]_\tau)(t) = \mathcal{P}^{(2)}(\mathcal{E}_{E_1, \omega_1}, \mathcal{E}_{E_2, \omega_2})(t - \tau)$$

ولكن  $[ \mathcal{E}_{E, \omega} ]_\tau = e^{-i\omega\tau} \cdot \mathcal{E}_{E, \omega}$ ، فإذا استفدنا من كون  $\mathcal{P}^{(2)}$  ثنائي الخطية، ثم اخترنا  $t = \tau$  وجدنا أن

$$\forall t, \quad e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} \mathcal{P}^{(2)}(\mathcal{E}_{E_1, \omega_1}, \mathcal{E}_{E_2, \omega_2})(t) = \mathcal{P}^{(2)}(\mathcal{E}_{E_1, \omega_1}, \mathcal{E}_{E_2, \omega_2})(0) = \varepsilon_0 \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2, E_1, E_2)$$

ومن ناحية أخرى، لَمَّا كان التطبيق

$$\chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2) : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, (E_1, E_2) \mapsto \varepsilon_0 \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2, E_1, E_2)$$

تطبيقاً ثنائي الخطية، استنتجنا أنه معرّف تماماً من مركباته على الأساس القانوني ل  $\mathbb{C}^3$ ، أي:

$$e_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وعليه أياً كانت  $(\omega_1, \omega_2)$  من  $\mathbb{R}^2$ ، فإننا نعرف الثوابت  $(\chi_{abc}^{(2)}(\omega_1, \omega_2))_{(a,b,c) \in \{x,y,z\}^3}$  بالعلاقات

$$\chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2, e_b, e_c) = \chi_{xbc}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) e_x + \chi_{ybc}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) e_y + \chi_{zbc}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) e_z = \begin{bmatrix} \chi_{xbc}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \\ \chi_{ybc}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \\ \chi_{zbc}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \end{bmatrix}$$

حيث  $b$  و  $c$  من  $\{x, y, z\}$ . تُكوّن جماعة الثوابت  $(\chi_{abc}^{(2)}(\omega_1, \omega_2))_{(a,b,c) \in \{x,y,z\}^3}$ ، وعددها 27، ما يُسمّى تنسور الطواعيّة من المرتبة الثانية. وعندئذ يصبح لدينا

$$(28) \quad \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2, E_1, E_2) = \begin{bmatrix} \sum_{b,c} \chi_{xbc}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) E_{1b} E_{2c} \\ \sum_{b,c} \chi_{ybc}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) E_{1b} E_{2c} \\ \sum_{b,c} \chi_{zbc}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) E_{1b} E_{2c} \end{bmatrix}$$

حيث  $E_2 = E_{2x} e_x + E_{2y} e_y + E_{2z} e_z$  و  $E_1 = E_{1x} e_x + E_{1y} e_y + E_{1z} e_z$  ينتج من كون  $\mathcal{P}^{(2)}$  متناظراً، أنّ

$$\mathcal{P}^{(2)}(\mathcal{E}_{E_1, \omega_1}, \mathcal{E}_{E_2, \omega_2}) = \mathcal{P}^{(2)}(\mathcal{E}_{E_2, \omega_2}, \mathcal{E}_{E_1, \omega_1})$$

وبالاستفادة من العلاقة (27) نستنتج أنّ

$$(29) \quad \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2, E_1, E_2) = \chi^{(2)}(\omega_2, \omega_1, E_2, E_1)$$

وبأخذ  $E_2 = e_c$  و  $E_1 = e_b$  حيث  $b$  و  $c$  من  $\{x, y, z\}$ ، نستنتج الخاصّة المهمّة التالية لتنسور الطواعيّة من المرتبة الثانية:

$$(30) \quad \forall (a, b, c) \in \{x, y, z\}^3, \quad \chi_{a,b,c}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \chi_{a,c,b}^{(2)}(\omega_2, \omega_1)$$

وكذلك ينتج من كون  $\mathcal{P}^{(2)}$  حقيقياً، أنّ

$$\text{Im}(\mathcal{P}^{(2)}(\text{Re}(\mathcal{E}_{E_1, \omega_1}), \text{Re}(\mathcal{E}_{E_2, \omega_2}))) = 0$$

وذلك أياً كان  $E_1$  و  $E_2$  من  $\mathbb{C}^3$ ، و أياً كان  $\omega_1$  و  $\omega_2$  من  $\mathbb{R}$ . وبالاستفادة من كون  $\mathcal{P}^{(2)}$  ثنائي الخطيّة ومن العلاقة (27) نجد

$$[\chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2, E_1, E_2)]^* = \chi^{(2)}(-\omega_1, -\omega_2, E_1^*, E_2^*)$$

وهذا يثبت، بأخذ  $E_2 = e_c$  و  $E_1 = e_b$  حيث  $b$  و  $c$  من  $\{x, y, z\}$ ، أنّ

$$(31) \quad \forall (a, b, c) \in \{x, y, z\}^3, \quad [\chi_{a,b,c}^{(2)}(\omega_1, \omega_2)]^* = \chi_{a,c,b}^{(2)}(-\omega_2, -\omega_1)$$

يسمح تحليل فورييه بكتابة الحقل الكهرومغناطيسي، كمجموع، أو كتكامل، حقول وحيدة اللون من النمط  $\mathcal{E}_{E,\omega}$ ، فإذا كان  $\mathcal{E}$  حقلاً كهرومغناطيسياً كان لدينا

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}} E(\omega) e^{i\omega t} d\mu(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_{E(\omega),\omega}(t) d\mu(\omega)$$

فإذا استفدنا من (27) ومن كون  $\mathcal{P}^{(2)}$  ثنائي الخطية أمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(2)}(\mathcal{E}, \mathcal{E})(t) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{P}^{(2)}(\mathcal{E}_{E(\omega_1),\omega_1}, \mathcal{E}_{E(\omega_2),\omega_2})(t) d\mu(\omega_1) d\mu(\omega_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varepsilon_0 \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2, E(\omega_1), E(\omega_2)) e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} d\mu(\omega_1) d\mu(\omega_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \varepsilon_0 \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_3 - \omega_1, E(\omega_1), E(\omega_3 - \omega_1)) d\mu(\omega_1) \right) e^{i\omega_3 t} d\mu(\omega_3) \end{aligned}$$

حيث أجرينا تغيير المتحول  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . وهذا يُثبت أنه إذا رمزنا بـ  $P^{(2)}$  إلى تحويل فورييه لـ  $\mathcal{P}^{(2)}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$  كان لدينا:

$$(32) \quad P^{(2)}(\omega_3) = \int_{\mathbb{R}} \varepsilon_0 \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_3 - \omega_1, E(\omega_1), E(\omega_3 - \omega_1)) d\omega_1$$

فإذا كان للحقل الكهرومغناطيسي  $\mathcal{E}$  طيفاً منقطعاً كتبنا:

$$P^{(2)}(\omega_3) = \sum_{\{\omega_1, \omega_2: \omega_1 + \omega_2 = \omega_3\}} \varepsilon_0 \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2, E(\omega_1), E(\omega_2))$$

وإذا استفدنا من العلاقة (29) أمكننا أن نكتب

$$P^{(2)}(\omega_3) = \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 \\ \omega_1 \leq \omega_2}} D_2(\omega_1, \omega_2) \varepsilon_0 \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2) (E(\omega_1), E(\omega_2))$$

حيث يمثل  $D_2$  عامل الانحطاط المعرف كما يلي :

$$D_2(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 2 & : \omega_1 \neq \omega_2 \\ 1 & : \omega_1 = \omega_2 \end{cases}$$

### III. خواص تنسورات الطواعية غير الخطية

كما قد رأينا أن الاستقطاب المتولد في وسط، عند تطبيق حقل كهربائي قوي (مرافق لموجة كهرومغناطيسية) يتألف من استقطاب خطي  $P_L$  و استقطاب لاخطي  $P_{NL}$ . نقوم بنشر هذا الأخير وفقاً للقوى المتزايدة للحقل الكهربائي:

$$P = P_L + P_{NL} = \varepsilon_0 (\chi^{(1)} E + \chi^{(2)} EE + \chi^{(3)} EEE + \dots)$$

حيث  $\chi^{(1)}$  هي الطواعية الخطية وهو تنسور من المرتبة الثانية.

و  $\chi^{(n)}$  في حالة  $n > 1$  هي الطواعية غير الخطية من الرتبة  $n$  وهي تنسور من المرتبة  $n + 1$ .

نشير إلى أنه إذا كنا نتعامل مع أطوال موجية بعيدة عن مناطق الامتصاص للوسط المدروس، فإنّ الأجزاء التخيلية

للطواعيات غير الخطية تكون مهملة. كما يكون  $P$  و  $E$  شعاعين و يكون  $\chi^{(n)}$  تنسوراً من المرتبة  $n + 1$ .

في الأوساط متماثلة المناحي وفي البلورات التي تتمتع بمركز تناظر تكون جميع التنسورات ذات الرتب الزوجية

معدومة وسنأتي على برهان ذلك فيما يأتي.

لنهتم الآن بـ  $\chi^{(2)}$  وهي الطواعية غير الخطية من المرتبة الثانية وهي تنسور من المرتبة الثالثة. وعادة ما نكتب هذه الطواعية على الشكل :  $\chi_{ijk}^{(2)}$ .

وبهذا تكون المركبة  $P_i$  من شعاع الاستقطاب غير الخطي من الرتبة الثانية :

$$(33) \quad P_i^{(2)} = \varepsilon_0 \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k$$

ونكتب العبارة السابقة باستخدام التواترات الداخلة والمتولدة بالشكل:

$$(34) \quad P_i^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \varepsilon_0 \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) E_j(\omega_1) E_k(\omega_2)$$

وهنا لا بدّ من الإشارة إلى مختلف الاصطلاحات الخاصة بكتابة الطواعية غير الخطية من الرتبة الثانية :

$$(35) \quad \chi^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) = \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \chi^{(2)}(-\omega_3; \omega_1, \omega_2)$$

حيث  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$

وتعني الكتابة الأخيرة  $\chi^{(2)}(-\omega_3; \omega_1, \omega_2)$  أنّ مجموع الأشعة الموجية الموافقة للأمواج  $\omega$  و  $\omega$  و  $-2\omega$  يساوي الصفر (شرط توافق الصفحة كما سنرى في الفصول القادمة).

وغالباً ما نستخدم اصطلاح أينشتاين (لتسهيل الكتابة) في المعادلة (34) أي دون كتابة إشارة  $\sum$  قاصدين أنّنا نجتمع على الحدود ذات الأدلة المتكررة :

$$(36) \quad P_i^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \varepsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) E_j(\omega_1) E_k(\omega_2)$$

ويظهر ابتداءً من الكتابات السابقة أنّ  $\chi^{(2)} = \left( \chi_{ijk}^{(2)} \right)_{i,j,k=1,2,3}$  هو تنسور مؤلّف من 27 عنصراً في حين أنّ

$P$  هو شعاع من ثلاث مركبات و  $E = \left( E_j E_k \right)_{j,k=1,2,3}$  هي مصفوفة من ثلاثة أسطر وثلاثة أعمدة.

وعادة ما ننظر إلى عناصر  $\chi_{ijk}^{(2)}$  على أنّها متوزعة داخل مكعب فيه ثلاث مصفوفات مربعة  $3 \times 3$ ، بحيث يعبر الدليل  $i$  على رقم المصفوفة والدليل  $j$  على رقم السطر فيها والدليل  $k$  على رقم العمود. وهكذا نكتب عناصر المصفوفة الأولى كما يلي:

$$(37) \quad \begin{bmatrix} \chi_{111} & \chi_{112} & \chi_{113} \\ \chi_{121} & \chi_{122} & \chi_{123} \\ \chi_{131} & \chi_{132} & \chi_{133} \end{bmatrix}$$

كما نكتب المصفوفة الثانية:

$$(38) \quad \begin{bmatrix} \chi_{211} & \chi_{212} & \chi_{213} \\ \chi_{221} & \chi_{222} & \chi_{223} \\ \chi_{231} & \chi_{232} & \chi_{233} \end{bmatrix}$$

والمصفوفة الثالثة :

$$(39) \quad \begin{bmatrix} \chi_{311} & \chi_{312} & \chi_{313} \\ \chi_{321} & \chi_{322} & \chi_{323} \\ \chi_{331} & \chi_{332} & \chi_{333} \end{bmatrix}$$

وكما رأينا في الفقرة السابقة 2.II. فإن  $\chi^{(2)} = (\chi_{ijk}^{(2)})_{i,j,k=1,2,3}$  هي تنسور تناظري أي:

$$(40) \quad \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_2, \omega_1)$$

وبالتالي يضمّ تنسور الطواعية  $\chi^{(2)} = (\chi_{ijk}^{(2)})_{i,j,k=1,2,3}$  ثمانية عشر عنصراً مستقلاً بدلاً من سبعة وعشرين.

كما ونكتب عناصر المصفوفة  $E = (E_j E_k)_{j,k=1,2,3}$  بالشكل:

$$(41) \quad \begin{bmatrix} E_1 E_1 & E_1 E_2 & E_1 E_3 \\ E_2 E_1 & E_2 E_2 & E_2 E_3 \\ E_3 E_1 & E_3 E_2 & E_3 E_3 \end{bmatrix}$$

وهي أيضاً مصفوفة تناظرية.

ونجد أنّ المركبة  $i$  من الشعاع  $\vec{P}^{(2)}$  تنشأ من جداء المصفوفة ذات الرقم  $i$  من التنسور

$$\chi^{(2)} = (\chi_{ijk}^{(2)})_{i,j,k=1,2,3} \text{ بالمصفوفة } E = (E_j E_k)_{j,k=1,2,3} \text{ و نكتب :}$$

$$P_i^{(2)} = \varepsilon_0 (\chi_{111} E_1 E_1 + \chi_{122} E_2 E_2 + \chi_{133} E_3 E_3 + 2\chi_{123} E_2 E_3 + 2\chi_{113} E_1 E_3 + 2\chi_{112} E_1 E_2)$$

◆ اصطلاح Voigt

و غالباً ما نستخدم اصطلاح Voigt في تقليص الدليلين الثاني والثالث فنكتب :

$$\begin{aligned} 11 &\rightarrow 1 \\ 22 &\rightarrow 2 \\ 33 &\rightarrow 3 \\ 23 &\rightarrow 4 \\ 13 &\rightarrow 5 \\ 12 &\rightarrow 6 \end{aligned}$$

وبهذا يكون لدينا :

$$(42) \quad P_i^{(2)} = \varepsilon_0 (\chi_{11} E_1 E_1 + \chi_{12} E_2 E_2 + \chi_{13} E_3 E_3 + 2\chi_{14} E_2 E_3 + 2\chi_{15} E_1 E_3 + 2\chi_{16} E_1 E_2)$$

وفي كثير من الأحيان نستخدم  $d_{ij}$  في الكتابة بدلاً عن  $\chi_{ij}$  للدلالة على عنصر تنسوري بعد تقليص الأدلة

فيكون:

$$P_i^{(2)} = \varepsilon_0 (d_{11} E_1 E_1 + d_{12} E_2 E_2 + d_{13} E_3 E_3 + 2d_{14} E_2 E_3 + 2d_{15} E_1 E_3 + 2d_{16} E_1 E_2)$$

وعليه يتحول تنسور الطواعية غير الخطية من الرتبة الثانية إلى مصفوفة ذات ثلاثة أسطر وستة أعمدة :

$$(43) \quad \begin{bmatrix} P_1(\omega_3) \\ P_2(\omega_3) \\ P_3(\omega_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(\omega_1) E_1(\omega_2) \\ E_2(\omega_1) E_2(\omega_2) \\ E_3(\omega_1) E_3(\omega_2) \\ 2E_2(\omega_1) E_3(\omega_2) \\ 2E_1(\omega_1) E_3(\omega_2) \\ 2E_1(\omega_1) E_2(\omega_2) \end{bmatrix}$$

◆ علاقات ABDP و علاقات Kleinman :

في مقال شهير برهن Armstrong و Blombergen و Ducuing و Pershan أن:

$$(44) \quad \chi_{ijk}(\omega_1 + \omega_2) = \chi_{jik}(\omega_3 - \omega_1) = \chi_{kij}(\omega_3 - \omega_1)$$

وتُعرف هذه العلاقات بعلاقات ABDP.

فإذا أخذنا بعين الاعتبار تقريب Kleinman والقائل بأنه عندما تكون التواترات  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  بعيدة عن مناطق امتصاص الوسط أي  $\omega \ll \omega_0$  وعندما يكون منشأ الاستقطابية إلكترونياً بحتاً (غياب الاستقطاب التشاردي و الاستقطاب التوجّهي) فإنّ عناصر التنسور السابقة تصبح مستقلة عن التواترات ويمكننا تبديل الأدلة الثلاثة فيما بينها ونكتب :

$$(45) \quad \chi_{ijk} = \chi_{jik} = \chi_{kij} = \chi_{jki} = \chi_{kji} = \chi_{ikj}$$

ولا تعني الكتابة السابقة طبعاً أنّ جميع عناصر التنسور قد أصبحت متساوية (مثلاً  $\chi_{123} \neq \chi_{111}$ ). وبهذا ينخفض عدد العناصر المستقلة في تنسور الطواعية غير الخطية من المرتبة الثانية من 18 عنصراً إلى عشرة عناصر :

$$\begin{aligned} d_{21} = d_{16}, \quad d_{25} = d_{14}, \quad d_{26} = d_{12}, \quad d_{31} = d_{15}, \\ d_{32} = d_{14}, \quad d_{34} = d_{23}, \quad d_{35} = d_{13}, \quad d_{36} = d_{14} \end{aligned}$$

وتصبح  $\chi^{(2)}$  على الشكل :

$$(46) \quad \chi^{(2)} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{16} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{14} & d_{12} \\ d_{15} & d_{14} & d_{33} & d_{23} & d_{13} & d_{14} \end{bmatrix}$$

فيما يلي سنوضّح كيف أن وجود عناصر تناظرية في بلورة يؤدي إلى خفض عدد العناصر المستقلة في تنسور الطواعية اللاخطية من المرتبة الثانية.

2.III. اختصار عناصر تنسور الطواعية من المرتبة الثانية باستخدام الخواص التناظرية:

تحوّل عناصر التنسور عند تطبيق مؤثّر تناظري بالطريقة نفسها التي تتغير فيها الإحداثيات الديكارتية  $x_1, x_2, x_3$  في جملة الإحداثيات المرتبطة بالمنظومة المدروسة. أي أنّ العنصر  $\chi_{112}$  مثلاً سيتحول تماماً كما يتحول الجداء  $\cdot x_1 x_1 x_2$

◆ وجود مركز تناظر عكسي

نستطيع أن نستنتج من الملاحظة السابق أنّ  $\chi_{ijk}$  سوف تكون معدومة. كما يمكننا أن نرى انعدام  $\chi_{ijk}$  على النحو التالي : لنكتب عبارة الاستقطاب اللاخطي من الرتبة الثانية في بلورة ذات مركز تناظر عكسي

$$P_i^{(2\omega)} = \chi_{ijk} E_j^{(\omega)} E_k^{(\omega)}$$

لنقلب الآن جهة تطبيق الحقلين الكهربائيين  $E_j^{(\omega)} \rightarrow -E_j^{(\omega)}, E_k^{(\omega)} \rightarrow -E_k^{(\omega)}$  سوف يغير شعاع الاستقطاب اللاخطي من جهته حتى يحاكي تغير جهة الحقل. ولما كانت البلورة ذات مركز تناظر فإنّ الحقلين المعكوسين سيريان بلورة مطابقة للبلورة الأصلية وعليه فإن -شدة الاستقطاب الجديد المتولد ستكون مساوية لشدة الاستقطاب الأولي : أي سيكون  $-P_i^{(2\omega)} = \chi_{ijk}(-E_j^{(\omega)})(-E_k^{(\omega)})$  بمقارنة العلاقتين نجد أنّ  $\chi_{ijk}$  معدومة.

♦ وجود محور تناظر

لنفترض وجود محور تناظر موازي للمحور 3 . في هذه الحالة سوف يتحوّل الدليل 1 من العنصر التانسوري تماماً كما يتحوّل  $x_1 \rightarrow -x_1$  وكذلك سوف يتحوّل الدليل 2 من العنصر التانسوري كما يتحوّل  $x_2 \rightarrow -x_2$  بينما يبقى الدليل 3 على حاله. وعليه فإنّ جميع العناصر الحاوية الدليل 3 مرة واحدة أو ثلاث مرات تكون غير معدومة حكماً. وتصبح مصفوفة الطواعية :

$$(47) \quad \chi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & d_{25} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}$$

♦ وجود محور تناظر وعدد لا نهائي من المستويات المارة من هذا المحور  $C_{\infty v}$  :

لنفترض أن المنظومة تتمتع بمحور تناظر موازي للمحور 3 وعدد لا نهائي من المستويات الحاوية على هذا المحور. إنّ المستوي  $x_1x_3$  هو إذاً مستوي تناظر وبالتالي فإنّ الحدود  $d_{25}, d_{36}, d_{14}$  والتي تتحوّل كتحوّل  $x_1x_2x_3$  أي  $x_1x_2x_3 \rightarrow -x_1x_2x_3$  سوف تصبح معدومة. كذلك فإنّ  $d_{31} = d_{32}$  لأن المنظومة ذات تناظر أسطواني، فيكون المحوران 1 و 2 متكافئين.

وعندما تكون شروط Kleinman محقّقة نكتب:

$$(48) \quad \begin{aligned} d_{15} &= d_{31} \\ d_{24} &= d_{32} = d_{31} \end{aligned}$$

وعليه يصبح تنسور الطواعية غير الخطية:

$$(49) \quad \chi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{31} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





## تمريبات ومساائل

1. احسب الطواعية غير الخطية من الرتبة الثالثة  $\chi^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  في وسط يتمتع بتناظر مركزي وذلك باستخدامك لنموذج الإلكترون المرتبط بمرونة بالنواة.

2. نعلم أنّ ثابت ميلر يُكتب على الشكل  $\delta = \frac{m\varepsilon_0^2\gamma}{2n^2e^3}$ .

◆ أعط قيمة تقريبية لـ  $\gamma$  بفرض أنّ القسمين الخطي وغير الخطي من قوة الإرجاع لهما الرتبة نفسها وذلك عندما تكون المسافة  $x = d$  (حيث  $d$  هي المسافة البينية للذرات).

◆ إذا علمت أنّ  $n = 10^{22} \text{ cm}^{-3}$  وأنّ تواتر التجاوب  $\omega_0$  يقع في مجال الطيف فوق البنفسجي وأن المسافة البينية للذرات  $d$  من رتبة بضعة أنغسترومات و جميع المعطيات السابقة لا تتغير كثيراً عند الانتقال من بلورة إلى أخرى، بيّن أنّ  $\delta$  ثابت لا يتغير من وسط لآخر.

◆ بيّن أنّه عندما نعمل بعيداً عن مناطق الامتصاص  $\omega \ll \omega_0$  فإنّ  $\chi^{(2)} \approx \frac{e^3}{\varepsilon_0 m^2 \omega_0^4 d^4}$ ، ثمّ أعط قيمة

تقريبية لـ  $\chi^{(2)}$  علماً أنّ  $\omega_0 = 10^{16} \text{ s}^{-1}$  و  $d = 3\text{Å}$  و  $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$  و  $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ S.I.}$  و  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  ماذا تستنتج؟

3. لنأخذ بلورة الكوارتز التي تنتمي إلى الجملة الثلاثية trigonal وتتمتع بخواص الزمرة  $D_3$  ووفقاً لهذا تكون عناصر التنسور غير المعدومة هي :

$$\begin{aligned} \chi_{xxx} &= -\chi_{xyy} = -\chi_{yyx} = -\chi_{yxy} \\ \chi_{xyz} &= -\chi_{yxz} \\ \chi_{xzy} &= -\chi_{yzx} \\ \chi_{zxy} &= -\chi_{zyx} \end{aligned}$$

◆ كيف تصبح العلاقات السابقة في حال تطبيق علاقة Kleinman؟  
◆ بيّن أنّ الاستقطاب غير الخطي من الرتبة الثانية معدوم وفق المحور  $OZ$  واكتب عبارته في حالة توليد التوافقي الثاني.

4. احسب النسبة  $\frac{P_{NL}^{(2)}}{P_L}$  وبيّن أنّ  $\frac{P_{NL}^{(2)}}{P_L} \propto \frac{E}{E_{at}}$ .

5. مسألة. الخواص التناظرية لتنسور الطواعية غير الخطية من الرتبة الثانية.

نعلم أنّ تنسور الطواعية غير الخطية يضمّ 27 عنصراً. ولكن ولحسن الحظ يمكننا أن نقلّص من عدده هذه العناصر باستخدامنا للعديد من الخواص التناظرية في الوسط اللاخطي.

فيما يلي سوف نفترض أنّ تنسور الطواعية غير الخطية  $\chi^{(2)}$  مستقل عن التواتر. حدّد الشروط لصلاحية هذه الفرضية.

**I. الخواص التناظرية التبديلية.** برهن أنّ:  $\chi_{ijk}^{(2)} = \chi_{ikj}^{(2)}$ ، ثمّ استنتج أنّ التنسور  $\chi^{(2)}$  لا يضمّ حينها إلا 18 عنصراً مستقلاً. نستخدم عادة الاصطلاح المستخدم في الكهربائية الضغطية، حيث نستبدل بالدليلين  $(j, k)$  رقماً واحداً كما يلي:  $xx = 1; yy = 2; zz = 3; yz = zy = 4; xz = zx = 5; xy = yx = 6$ . في الحالة الخاصة التي يتولّد فيها التوافقي الثاني، اكتب على شكل مصفوفي العلاقة التي تربط بين مختلف مركبات الاستقطاب اللاخطي من الرتبة الثانية ومركبات طولية الحقل الكهربائي الوارد.

### II. الخواص التناظرية الفراغية.

1. لماذا يكون التنسور  $\chi^{(2)}$  معدوماً في وسط متمتع بمركز تناظر.
2. لنأخذ بلورة الـ  $KDP$  التي تتمتع بتناظر فراغي  $D_{2d}$ . إنّ العناصر التناظرية في هذه الزمرة هي:

$I$ : التطبيق المطابق.

$C_2(i)$ : دوران بزواوية  $\pi$  حول المحور  $x, y, z$ .

$S_d$ : تناظر بالنسبة للمستوي  $x = y$ .

$S'_d$ : تناظر بالنسبة للمستوي  $x = -y$ .

$S_4$ : دوران بزواوية  $\pi/2$  حول المحور  $z$ ، يتبعه تناظر بالنسبة للمستوي  $(x, y)$ .

$S'_4$ : دوران بزواوية  $-\pi/2$  حول المحور  $z$ ، يتبعه تناظر بالنسبة للمستوي  $(x, y)$ .

أثبت أنّ التنسور  $\chi^{(2)}$ ، في حالة توليد التوافقي الثاني، يصبح على الشكل:

$$\chi^{(2)} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}$$

3.  $\chi'^{(2)}$  هو تحوّل التنسور  $\chi^{(2)}$  بعد تغيير جملة الإحداثيات من  $(\alpha, \beta, \gamma)$  المرتبطة بمحاور البلورة إلى الجملة  $(i, j, k)$  المختارة لدراسة انتشار الحقل الكهرومغناطيسي في البلورة. برهن أنّ مركبات  $\chi'^{(2)}$  معطاة بالعلاقة:

$$\chi'^{(2)}_{ijk} = \ell_{i\alpha} \ell_{j\beta} \ell_{k\gamma} \chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}$$

حيث تمثّل الحدود  $\ell_{i\alpha}$  عناصر مصفوفة الدوران الناتج عن تغيير جملة الإحداثيات.

### III. تناظر Kleinman.

سوف نفترض أنّ الوسط المادي بدون ضياع (غياب الامتصاص) كما أنّ تبادل الطاقة يتم فقط بين الأمواج الكهرومغناطيسية المتزاوجة في هذا الوسط اللاخطي:

$$1. \text{ أثبت أنّ: } \vec{E} \cdot d\vec{D} = \vec{D} \cdot d\vec{E}$$

2. استنتج أنّ تنسور الاستقطاب الخطي  $\chi^{(1)}$  تناظري.

3. عمّم النتيجة السابقة في حالة تنسور من الرتبة الثانية وبيّن أنّ:  $\chi^{(2)}_{ijk} = \chi^{(2)}_{kij} = \chi^{(2)}_{jki}$

4. تطبيق في حالة الـ  $KDP$ . هل تتحقّق هذه العلاقات تجريبياً (انظر ملحق القيم التجريبية في الصفحة 44

الخاص بالـ  $KDP$  ومشتقاته من الفوسفات و الزرنيخات)؟ كيف تعلّل هذا الانزياح؟

المرجع:

6. مسألة. توليد التوافقي الثاني من قبل سطح.

### I. الخواص التناظرية لسطح.

1. لماذا يكون التنسور  $\chi^{(2)}$  معدوماً في وسط متمائل المناحي؟ ثم علّل كون  $\chi^{(2)}$  غير معدوم عند السطح.
2. لنختر جملة الإحداثيات  $Oxyz$  بحيث يكون المحوران  $Ox$  و  $Oy$  في مستوى السطح (الذي نعتبره مستويًا تماماً) في حين يكون المحور  $Oz$  متعامداً مع هذا السطح. اشرح باقتضاب لماذا يمكننا أن نكتب مركبات الاستقطاب اللاخطي (استقطاب عنصر واحدة السطح) على الشكل

$$\begin{bmatrix} P_x^{(2)}(2\omega) \\ P_y^{(2)}(2\omega) \\ P_z^{(2)}(2\omega) \end{bmatrix} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} & \chi_{14} & \chi_{15} & \chi_{16} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} & \chi_{24} & \chi_{25} & \chi_{26} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} & \chi_{34} & \chi_{35} & \chi_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^2(\omega) \\ E_y^2(\omega) \\ E_z^2(\omega) \\ 2E_y(\omega)E_z(\omega) \\ 2E_z(\omega)E_x(\omega) \\ 2E_x(\omega)E_y(\omega) \end{bmatrix}$$

3. بافتراض أنّ السطح متمائل المناحي في المستوي  $Oxy$  برهن أنّ التنسور  $\chi^{(2)}$  يصبح على الشكل :

$$\chi_{surface}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{ssn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi_{ssn} & 0 & 0 \\ \chi_{nss} & \chi_{nss} & \chi_{nnn} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### II. توجيه الجزينات على سطح

1. لنأخذ طبقة وحيدة مؤلفة من جزينات لا تناظرية مرتبطة بصورة انتقائية على السطح. سوف نشبه كل جزئية بعضاً صغيرة موجهة وفق المحور  $OZ$ . لنفترض أنّ تنسور الاستقطابية من الرتبة الثانية يقبل حداً وحيداً غير معدوم هو  $\alpha_{ZZZ}^{(2)}$  بحيث أنّ العزم القطبي المحرّض يصبح على الشكل :
$$\mu_z^{(2)}(2\omega) = \varepsilon_0 \alpha_{ZZZ}^{(2)} E_z^2(\omega)$$
2. بافتراض أنّ السطح يضمّ  $N$  جزئية في واحدة السطح وأنّ هذه الجزينات موزعة بانتظام في المستوي (أي أنّ قيم  $\phi$  متساوية الاحتمال) . بيّن أنّ :

$$\chi_{surface}^{(2)} = N \alpha_{ZZZ}^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ A & A & B & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث  $A = \langle \cos \theta \sin^2 \theta \rangle$  و  $B = \langle \cos^3 \theta \rangle$  يمثلان متوسط التوزعات الزاوية لمحور الجزينات. حدّد

واحدة  $\chi_{surface}^{(2)}$ .

3. استنتج أنّ نسبة مركبتين من الاستقطاب اللاخطي تسمح بالحصول على معلومة بشأن التوزع الزاوي.

4. ماذا يحصل في الحالتين الحديتين الآتيتين :

-توجّه تام لجميع الجزيئات؟

-عدم تماثل في المناحي؟

**III.** قيمة تقريبية للحقل الكهربائي  $2\omega$  الصادر عن السطح :

1. يتم إضاءة السطح بموجة مستوية  $\omega$  بورود حدّي. ويكون استقطاب هذه الموجة خطياً ووفق الناظم على

السطح. فإذا فرضنا أنّ طولية الحقل الكهربائي هي  $\mathcal{E}(\omega)$ ، علّل كون الاستقطاب اللاخطي المحرّض عمودياً

على السطح وأنه يصدر موجة مستوية  $2\omega$  ذات طولية على  $\mathcal{E}_{\text{surface}}(2\omega)$  ثم حدّد استقطابها.

2. برهن أنّ رتبة طولية الحقل الكهربائي الصادر عند  $2\omega$  معطاة بالعلاقة :

$$\mathcal{E}_{\text{surface}}(2\omega) \approx \frac{\omega}{n_{2\omega} c} \chi_{nm}^{(2)} \mathcal{E}^2(\omega)$$

علماً أننا نستخدم للإثارة ليزراً YAG – Q switch حيث نمحرق النبضة (10 ns) ذات الطاقة 100 mJ على

سطح  $0.1 \text{ cm}^2$ . و أنّ قرينة انكسار السطح 1.5 وهو مؤلف من  $10^{14} \text{ molecules/cm}^2$  وهي جميعها منتظمة بصورة

عمودية على السطح وتتمتع باستقطابية غير خطية:

$$\alpha_{ZZZ}^{(2)} = 5.10^{-39} \text{ m.V}^{-1}$$

احسب شدة الحزمة  $2\omega$  الصادرة عن السطح.

3. عبّر عن هذه الشدة بعدد الفوتونات في النبضة. ثمّ قارن النتيجة مع عدد الفوتونات في نبضة المضخة.

4. ماذا تستنتج بشأن استخدام هذه التقانة في دراسة السطوح؟

معطيات:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 \text{ F}^{-1}\text{m}^{-1}$$

$$h = 6.62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$$

$$\sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = 377 \Omega$$

ملحق القيم التجريبية الخاص بالـ  $KDP$  ومشتقاته من الفوسفات والزرنيخات

مردود توليد التوافقي الثاني	الطواعية اللاخطية $d \times 10^{12} m / V$		قربنة الانكسار			المادة
	$d_{36}$	$d_{14}$	$n_e$	$n_o$	$\lambda(nm)$	
23%	0.49 0.56	0.48 0.55	1.50	1.55	347	$NH_4H_2PO_4$ (ADP)
			1.48	1.53	530	
			1.48	1.52	694	
			1.47	1.51	1060	
20%	0.47 0.47	0.47 0.49	1.49	1.54	347	$KH_2PO_4$ (KDP)
			1.47	1.51	530	
			1.47	1.51	694	
			1.46	1.49	1060	
25%	0.50 0.50	0.46 0.50	1.49	1.53	347	$KD_2PO_4$ (D-KDP)
			1.47	1.51	530	
			1.46	1.50	694	
			1.46	1.49	1060	
20%	0.48	0.56	1.49	1.53	347	$RbH_2PO_4$ (RDP)
			1.47	1.51	530	
			1.46	1.50	694	
			1.46	1.50	1060	
25%	0.42		1.55	1.60	347	$RbH_2AsO_4$ (RDA)
			1.60	1.55	694	
22%	0.43		1.57	1.60	347	$CsH_2AsO_4$ (CDA)
			1.55	1.57	530	
			1.54	1.56	694	
			1.53	1.55	1060	
30%	0.43		1.57	1.59	347	$CsD_2AsO_4$ (D-CDA)
			1.55	1.57	530	
			1.54	1.56	694	
			1.53	1.55	1060	

## الفصل الثالث

# الانتشار في وسط لا خطي

- I. معادلات انتشار الأمواج الكهرطيسية في وسط لا خطي
  - 1.I. المعادلة التفاضلية الخاصة بالانتشار
  - 2.I. البحث عن حلٍ للمعادلة التفاضلية الخاصة بالانتشار
- II. علاقات مانلي-رو Manley-Rowe
- III. توليد تواترات الجمع و الفرق - مفهوم توافق الصفحة phase matching
- IV. الدلالة الفيزيائية لشرط توافق الصفحة

## I. معادلات انتشار الأمواج الكهرومغناطيسية في وسط لاخطي

تهدف هذه الدراسة إلى إظهار تأثير حد الاستقطاب اللاخطي في معادلة الانتشار للأمواج الكهرومغناطيسية في وسط لاخطي.

### 1.1. المعادلة التفاضلية الخاصة بالانتشار

إن نقطة الانطلاق في كتابة معادلات الانتشار في وسط لاخطي هي معادلات ماكسويل. إذ نعلم أنّ :

$$(1) \quad \begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{h} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{d}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{e} &= -\mu \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \end{aligned}$$

حيث  $\vec{d} = \epsilon_0 \vec{e} + \vec{p}$  و  $\vec{p} = \epsilon_0 \chi \vec{e} + \vec{p}_{NL}$ ، وحيث  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  وتصف العلاقة الأخيرة (قانون أوم) الضياع الناجم عن امتصاص الوسط إذ تمثل  $\sigma$  ناقلية الوسط.

وهكذا نكتب المعادلة الأولى من (1) بالشكل:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{h} = \sigma \vec{e} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} + \epsilon_0 \chi \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{p}_{NL}}{\partial t}$$

وبالاستفادة من  $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$  يمكننا إعادة كتابة المعادلة السابقة بالشكل:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{h} = \sigma \vec{e} + \epsilon \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{p}_{NL}}{\partial t}$$

من ناحية أخرى لدينا:

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{e}) = -\mu \frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}} \vec{h}}{\partial t}$$

ونعلم أيضاً أنّ  $-\Delta \vec{e} \approx \text{grad}(\text{div} \vec{e}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{e})$  حيث اعتبرنا  $\text{div} \vec{e} \approx 0$  لتبسيط المسألة على

الرغم من أنّ الأوساط اللاخطية تكون مضاعفة الكسر وليست متمثلة المناحي.

وبهذا نكتب :

$$(2) \quad \Delta \vec{e} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial^2 \vec{p}_{NL}}{\partial t^2}$$

وهكذا يظهر الحد  $\mu \frac{\partial^2 \vec{p}_{NL}}{\partial t^2}$  الحاوي على الاستقطاب اللاخطي كحد منبع يسمح بتوليد تواترات جديدة في

الوسط مغايرة عن تلك الداخلة إليه. يكون الحد  $\mu \frac{\partial^2 \vec{p}_{NL}}{\partial t^2}$  معدوماً في الضوء التقليدي وبالتالي لا يمكن لموجة ذات تواتر

$\omega$  الانتشار في الوسط إلا إذا كانت قادمة من الخارج وهذا ما نعبر عنه باستخدامنا للشروط الحدية.

## 2.I. البحث عن حلٍّ للمعادلة التفاضلية الخاصة بالانتشار:

فيما يلي سنفترض وجود ثلاث موجات مستوية فقط منتشرة في الوسط وفق المحور  $oz$  تواترها هي  $\omega_1$  ،  $\omega_2$  ،

$\omega_3$  بحيث :

$$(3) \quad \begin{aligned} e^{\omega_1}(z, t) &= \frac{1}{2} \left[ E_1(z) e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + c.c. \right] \\ e^{\omega_2}(z, t) &= \frac{1}{2} \left[ E_2(z) e^{i(\omega_2 t - k_2 z)} + c.c. \right] \\ e^{\omega_3}(z, t) &= \frac{1}{2} \left[ E_3(z) e^{i(\omega_3 t - k_3 z)} + c.c. \right] \end{aligned}$$

أي إنّ الحقل الكلي هو

$$(4) \quad e = e^{(\omega_1)}(z, t) + e^{(\omega_2)}(z, t) + e^{(\omega_3)}(z, t)$$

لنعوّض المعادلة السابقة في معادلة الانتشار ثمّ لنفصل هذه الأخيرة إلى ثلاث معادلات تحتوي كل منها على حدود مهتزة على إحدى التواترات الثلاثة السابقة.

يضمّم الاستقطاب اللاخطي حدوداً من الشكل :

$$\text{Re} \left[ d^{(\omega_3 - \omega_2)} E_3 E_2^* e^{i[(\omega_3 - \omega_2)t - (k_3 + k_2)z]} \right] \quad \text{و} \quad \text{Re} \left[ d^{(\omega_1 + \omega_2)} E_1 E_2 e^{i[(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)z]} \right]$$

ومن الواضح أنّ جميع هذه الحدود تهمّت عند تواترات جديدة  $\omega_1 + \omega_2$  ،  $\omega_1 - \omega_2$  ،  $\omega_3$  ، ... وهذه التواترات غير متزامنة

بوجه عام إلاّ إذا كان  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  حيث يهتّز في هذه الحالة الحد

$$\mu d^{(\omega_1 + \omega_2)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_1 E_2 e^{i[(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)z]}$$

عند التواتر  $\omega_3$  و سيلعب دور منبع للتواتر  $\omega_3$  . بعبارة أخرى من وجهة نظر فيزيائية فإنّ تدفقاً للطاقة سيتمّ من

الحقلين  $\omega_1$  و  $\omega_2$  باتجاه الحقل  $\omega_3$  .

و هكذا تأخذ معادلة الانتشار الشكل التالي :

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 e^{(\omega_1)}}{\partial z^2} &= \mu \sigma_1 \frac{\partial e^{(\omega_1)}}{\partial t} + \mu \varepsilon_1 \frac{\partial^2 E^{(\omega_1)}}{\partial t^2} + \mu d \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{E_3 E_2^*}{2} e^{i[(\omega_3 - \omega_2)t - (k_3 - k_2)z]} + c.c. \right] \\ \frac{\partial^2 e^{(\omega_2)}}{\partial z^2} &= \mu \sigma_2 \frac{\partial e^{(\omega_2)}}{\partial t} + \mu \varepsilon_2 \frac{\partial^2 e^{(\omega_2)}}{\partial t^2} + \mu d \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{E_3 E_1^*}{2} e^{i[(\omega_3 - \omega_1)t - (k_3 - k_1)z]} + c.c. \right] \\ \frac{\partial^2 e^{(\omega_3)}}{\partial z^2} &= \mu \sigma_3 \frac{\partial e^{(\omega_3)}}{\partial t} + \mu \varepsilon_3 \frac{\partial^2 e^{(\omega_3)}}{\partial t^2} + \mu d \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{E_1 E_2}{2} e^{i[(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)z]} + c.c. \right] \end{aligned}$$

لنقم الآن بدراسة حدود المعادلة الأولى الخاصة بانتشار الموجة  $\omega_1$  :

♦ دراسة الحد  $\frac{\partial^2 e^{(\omega_1)}}{\partial z^2}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e^{(\omega_1)}}{\partial z^2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ E_1(z) e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + c.c. \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[ k_1^2 E_1(z) + 2ik_1 \frac{dE_1(z)}{dz} - \frac{d^2 E(z)}{dz^2} \right] e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + c.c. \end{aligned}$$



سوف نفترض أنّ التابع  $E(z)$  يتغير ببطء و بتحديد أكثر إنّ  $\frac{dE(z)}{dz} \ll k \frac{dE(z)}{dz}$  و هذا يعني أنّ التابع  $E(z)$  لا يتغير كثيراً على مسافة من رتبة طول الموجة  $\lambda$ . و هكذا نكتب :

$$\frac{\partial^2 e^{(\omega_1)}}{\partial z^2} == -\frac{1}{2} \left[ k_1^2 E_1(z) + 2ik_1 \frac{dE_1(z)}{dz} \right] e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + c.c.$$

♦ دراسة الحد  $\mu \sigma_1 \frac{\partial e^{(\omega_1)}}{\partial t}$  :

$$\mu \sigma_1 \frac{\partial e^{(\omega_1)}}{\partial t} = i\mu \sigma_1 \omega_1 \frac{E_1(z)}{2} e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + c.c.$$

♦ دراسة الحد  $\mu \varepsilon_1 \frac{\partial^2 e^{(\omega_1)}}{\partial t^2}$  :

$$\mu \varepsilon_1 \frac{\partial^2 e^{(\omega_1)}}{\partial t^2} = -\mu \varepsilon_1 \omega_1^2 \frac{E_1(z)}{2} e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + c.c.$$

♦ دراسة الحد  $\mu d \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{E_3 E_2^*}{2} e^{i[(\omega_3 - \omega_2)t - (k_3 - k_2)z]} + c.c. \right]$  :

$$\begin{aligned} \mu d \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{E_3 E_2^*}{2} e^{i[(\omega_3 - \omega_2)t - (k_3 - k_2)z]} + c.c. \right] &= \mu d \frac{E_3 E_2^*}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ e^{i[\omega_1 t - (k_3 - k_2)z]} + c.c. \right] \\ &= -\mu d \omega_1^2 \frac{E_3 E_2^*}{2} e^{i[\omega_1 t - (k_3 - k_2)z]} + c.c. \end{aligned}$$

و بهذا تصبح المعادلة التفاضلية الخاصة بانتشار الموجة  $\omega_1$  آخذين بعين الاعتبار أنّ

$$k_1^2 = \frac{\omega_1^2}{v_1^2} = \omega_1^2 \varepsilon_1 \mu$$

على النحو التالي

$$-ik_1 \frac{dE_1}{dz} e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} = \frac{i\omega_1 \mu \sigma_1 E_1}{2} e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} - \mu d \omega_1^2 \frac{E_3 E_2^*}{2} e^{i[\omega_1 t - (k_3 - k_2)z]}$$

بضرب طرفي المعادلة بـ  $\frac{i}{k} e^{-i(\omega_1 t - k_1 z)}$  نجد :

$$\frac{dE_1}{dz} = \frac{-\sigma_1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_1}} E_1 - \frac{i\omega_1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_1}} d E_3 E_2^* e^{-i(k_3 - k_2 - k_1)z}$$

نُفترض أن  $k_3 - k_2 - k_1 = \Delta k$  تصبح المعادلات الخاصة بالانتشار هي :

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{dE_1}{dz} &= \frac{-\sigma_1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_1}} E_1 - \frac{i\omega_1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_1}} dE_3 E_2^* e^{-i\Delta kz} \\ \frac{dE_2}{dz} &= \frac{-\sigma_2}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_2}} E_2 - \frac{i\omega_2}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_2}} dE_3 E_1^* e^{-i\Delta kz} \\ \frac{dE_3}{dz} &= \frac{-\sigma_3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_3}} E_3 - \frac{i\omega_3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_3}} dE_1 E_2 e^{+i\Delta kz} \end{aligned}$$

## II. علاقات مانلي-رو *Manley-Rowe*

سوف نجري تغييراً في المتحولات ونكتب

$$(7) \quad A_j = \left( \frac{n_j}{\omega_j} \right)^{1/2} E_j$$

يسمح هذا التغيير بالتعبير عن تدفق الفوتونات  $F_j$  بدلالة  $A_j$ . حيث  $F_j = \frac{I_j}{\hbar\omega_j}$  و  $I_j$  هي شدة الموجة

$$. I_j = \frac{n_j \varepsilon_0 c |E_j|^2}{2} \text{ و } F_j = \frac{\varepsilon_0 c |A_j|^2}{2\hbar}$$

تصبح معادلات الانتشار بعد تغيير المتحولات على الشكل :

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} &= \frac{-\alpha_1}{2} A_1 - i\lambda A_3 A_2^* e^{-i\Delta kz} \\ \frac{dA_2}{dz} &= \frac{-\alpha_2}{2} A_2 - i\lambda A_3 A_1^* e^{-i\Delta kz} \\ \frac{dA_3}{dz} &= \frac{-\alpha_3}{2} A_3 - i\lambda A_1 A_2 e^{+i\Delta kz} \end{aligned}$$

$$. \lambda = \frac{d}{2\varepsilon_0 c} \sqrt{\frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{n_1 n_2 n_3}} \text{ و } \alpha_j = \frac{\sigma_j}{n_j \varepsilon_0 c}$$

لو افترضنا الآن أن  $\alpha_j = 0$  أي أهملنا الضياعات في الوسط ثم ضربنا طرفي المعادلة الأولى بـ  $A_1^*$  وطرفي المعادلة

الثانية بـ  $A_2^*$  لوجدنا أن

$$\begin{aligned} A_1^* \frac{dA_1}{dz} &= -i\lambda A_3 A_1^* A_2^* e^{-i\Delta kz} \\ . A_2^* \frac{dA_2}{dz} &= -i\lambda A_3 A_1^* A_2^* e^{-i\Delta kz} \end{aligned} \quad \text{و}$$

و باستخدام المعادلتين الخاصتين بـ  $\frac{dA_1^*}{dz}$  و  $\frac{dA_2^*}{dz}$  بعد ضرب طرفي المعادلة الأولى بـ  $A_1$  والثانية بـ  $A_2$  نجد بسهولة

أن :

$$. \frac{d}{dz} |A_1|^2 = \frac{d}{dz} |A_2|^2$$

بتكرار ما فعلناه آنفاً ولكن هذه المرة باستخدام للمعادلتين الثانية والثالثة نجد أنّ

$$\cdot \frac{d}{dz} |A_2|^2 = - \frac{d}{dz} |A_3|^2$$

أي إنّ :

$$(9) \quad \frac{d}{dz} |A_1|^2 = - \frac{d}{dz} |A_3|^2 = \frac{d}{dz} |A_2|^2$$

تشكّل هاتان العلاقتان ما يُعرف باسم علاقتي مانلي-رو .

ولما كان  $|A_i|^2$  متناسباً مع تدفق الفوتونات  $F_i$  فإنّ العلاقات السابقة تقتضي أنّ تولّد فوتون بتواتر  $\omega_3$  يتصاحب باختفاء فوتون بتواتر  $\omega_1$  و آخر بتواتر  $\omega_2$  حيث  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  . و توافق هذه الآلية تولّد الموجة ذات تواتر المجموع و لكن باستخدام مفهوم الفوتونات أي باستخدام المظهر الجسيمي للثنائية (ضوء-جسيم).

لو أعدنا الآن كتابة علاقتي مانلي-رو باستخدام الاستطاعة  $P_i \propto F_i \hbar \omega_i$  لوجدنا :

$$(10) \quad \frac{1}{\omega_1} \frac{dP_1}{dz} = \frac{1}{\omega_2} \frac{dP_2}{dz} = - \frac{1}{\omega_3} \frac{dP_3}{dz}$$

و تُقرأ هذه العلاقة فيزيائياً على النحو التالي : لما كان  $\frac{dP_1}{dz} = - \frac{\omega_1}{\omega_3} \frac{dP_3}{dz}$  فإنّ جزءاً من استطاعة الموجة ذات

التواتر  $\omega_3$  وقدره  $\frac{\omega_1}{\omega_3} P_3$  سوف يتحوّل إلى موجة بتواتر  $\omega_1$  و ذلك وفقاً لآلية الهزاز الوسيطي .

### III. توليد تواترات الجمع والفرق - مفهوم توافق الصفحة *phase matching*

يضمّ الاستقطاب اللاخطي حدوداً مهتزة عند التواترات  $\omega_1 + \omega_2$  ،  $|\omega_1 - \omega_2|$  ،  $2\omega_1$  ،  $2\omega_2$  . لندرس الآن

توليد التوافقي الثاني :

إنّ الموجة الواردة  $E = \frac{1}{2} [E^{(\omega)}(z)e^{i(\omega t - k_\omega z)} + c.c.]$  سوف تولّد استقطاباً لاخطياً مهتزاً عند التواتر  $2\omega$  :

$$(11) \quad P_{2\omega}^{NL} = \frac{\epsilon_0 d}{2} [E^2 e^{i(2\omega t - 2k_\omega z)} + c.c.]$$

و نتيجة لذلك تُصدر ثنائيات الأقطاب المتولدة موجات ذات تواتر  $2\omega$  ويكون شعاع الموجة الموافق لها

$$k_{2\omega} = \frac{2\omega}{v_{2\omega}} = \frac{2n_{2\omega}\omega}{c}$$

و حتى يكون توليد هذه الموجة ذات التواتر  $2\omega$  فعالاً ينبغي أن تبقى صفحة الاستقطاب اللاخطي مطابقة لصفحة تلك الموجة أثناء انتشارها. وإلا فإنّ الموجات المتولدة من نقاط مختلفة من الوسط لن تكون على توافق بالصفحة وستختفي بالتداخل الهدّام. و لهذا نكتب :  $(k_{2\omega} - 2k_\omega) \times \ell_c = 2\pi$  حيث  $\ell_c$  هو المسافة القصوى من الوسط المستخدمة في توليد التوافقي الثاني و نسميه بطول التوافق. وتكون قيمته في البلورات اللاخطية من رتبة 0.01 cm .

حتى يكون توليد هذه الموجة ذات التواتر  $2\omega$  فعالاً ينبغي أن تبقى صفحة الاستقطاب اللاخطي مطابقة لصفحة

تلك الموجة أثناء انتشارها. و نسمي هذا الشرط بشرط توافق الصفحة ونكتب :

$$(12) \quad k_{2\omega} = 2k_\omega = k_\omega + k_\omega$$

أو إذا عيّرتنا عنه باستخدام قرائن الانكسار فنكتب :

$$(13) \quad n_{2\omega} = n_{\omega}$$

وسنرى في الفصل القادم كيف يجري تحقيق شرط توافق الصفحة في بلورة مضاعفة الكسر.

#### IV. الدلالة الفيزيائية لشرط توافق الصفحة

إذا تدكرنا بأن نبض الفوتون معطى بالعلاقة  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$  ، أمكننا القول بأن شرط توافق الصفحة السابق يوافق انحفاظ دفع الفوتونات في حين أنّ علاقات مانلي-رو توافق انحفاظ طاقة تلك الفوتونات.

ففي آلية مضاعفة التواتر سوف يختفي فوتونان كل منهما له الطاقة  $\hbar\omega$  لتوليد فوتون بطاقة  $\hbar(2\omega)$  . وهذا يوافق انحفاظ طاقة الفوتونات إلا أنّ هذه الآلية لن تكون فعالة ما لم ينحفظ الدفع أيضاً.

♦ في حالة موجتين مستويتين بتواترين  $\omega_1$  و  $\omega_2$  تنتشران في وسط لاخطي لتوليد موجة ذات تواتر  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  فإنّ الاستقطاب اللاخطي المهترز عند التواتر  $\omega_3$  يعطى بالعلاقة :

$$(14) \quad P_{2\omega}^{NL} = \frac{\varepsilon_0 \chi^{(2)}(-\omega_3; \omega_1, \omega_2)}{2} [E_1 E_2 e^{i(\omega_3 t - (k_1 + k_2)z)} + c.c.]$$

والموجة المتولدة عند التواتر  $\omega_3$  هي

$$(15) \quad E = \frac{1}{2} [E^{(\omega_3)}(z) e^{i(\omega_3 t - k_3 z)} + c.c.]$$

ونعبر عن شرط توافق الصفحة بكتابة :

$$(16) \quad \Delta k = k_3 - k_2 - k_1 = 0$$

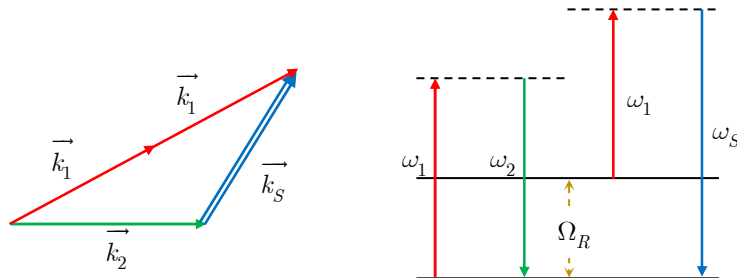
أو باستخدام قرائن الانكسار :

$$(17) \quad n_{\omega_3} \omega_3 = n_{\omega_1} \omega_1 + n_{\omega_2} \omega_2$$

♦ في حالة الآليات غير الخطية ذات رتب أعلى نقوم بتعميم النتائج السابقة. فمثلاً في حالة الـ C.A.R.S.

(Coherent Anti-Stokes Raman Scattering) تكون الطوعية اللاخطية الناجمة هنا هي

حيث يوافق  $\omega_s = 2\omega_1 - \omega_2$  التواتر الصادر كما في الشكل (1).



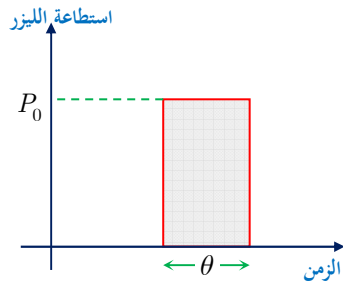
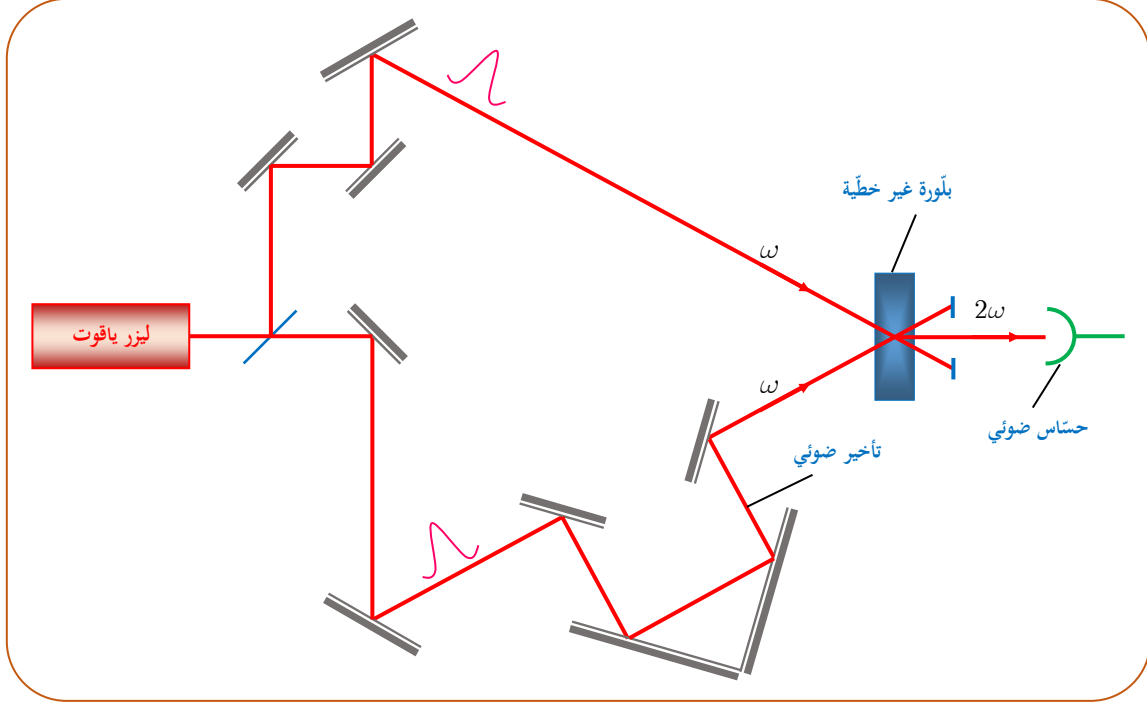
الشكل (1)

ونكتب في هذه الحالة شرط توافق الصفحة :  $\vec{k}_s = \vec{k}_1 - \vec{k}_2 + \vec{k}_1$  أي  $\vec{k}_s = 2\vec{k}_1 - \vec{k}_2$  و يتحقق هذا الشرط باستخدام حزم غير متوازية.

## تمرينات ومسائل

1. **مسألة.** حساب زمن نبضة ليزر باستخدام طريقة تعتمد على مضاعفة التواتر.

بغية حساب زمن نبضة ليزر الياقوت (modes synchronisés) نلجأ إلى استخدام المونتاج التجريبي الآتي:



نقوم في هذا المونتاج بتجزئة الحزمة الصادرة عن الليزر إلى حزمتين، نخضع إحداهما إلى تأخير ضوئي  $\delta$  قابل للتغيير. نسمي الزمن الموافق لهذا التأخير. تختلط الحزمتان معاً في بلورة غير خطية و تتولد الحزمة  $2\omega$  وفق منصف الزاوية الناجمة عن تلاقي الحزمتين الواردين  $\omega$ . سوف نفترض أن شدة (استطاعة) كل من الحزمتين الواردين على البلورة  $I_1$  و  $I_2$  متساويتان و أنّ الليزر خلال زمن  $\theta$  يُطلق نبضة ذات استطاعة ثابتة.

1. اكتب عبارة استطاعة الحزمة  $2\omega$  :  $\Pi(t)$  بدلالة الشدتين  $I_1$  و  $I_2$ .

2. اكتب عبارة الطاقة الكلية  $P(\tau)$  بدلالة  $\Pi(t)$ .

3. سوف نقوم بتغيير التأخير  $\tau$  بين الحزمتين الواردين عن طريق تغيير  $\delta$  و سنقيس الطاقة الكلية للحزمة  $2\omega$  عند كل نبضة بدلالة  $\tau$ .

♦ احسب  $P(\tau)$  في الحالات الثلاث الآتية :  $\tau \geq \theta$  ;  $0 < \tau < \theta$  ;  $\tau = 0$ .

♦ بيّن أنّ تسجيل المنحني  $P(\tau)$  يسمح بحساب  $\theta$ .

4. تطبيق عددي : إذا كانت  $\theta = 10$  ps فما هي قيمة  $\delta$  اللازمة لرسم المنحني  $P(\tau)$  ؟

5. هل نستطيع تحقيق المونتاج التجريبي السابق بحيث يكون لجميع الحزم الحامل ذاته؟ ما هي مساوئ هذا المونتاج بالمقارنة مع المونتاج المعطى في المسألة؟

2. مسألة. السوليتونات الفضائية. تقوم هذه المسألة على دراسة السوليتونات الفضائية وتضم جزأين مستقلين.

♦ يعالج الجزء الأول الطوعية اللاخطية في وسط يحقق المفعول Kerr الضوئي.

♦ يعالج الجزء الثاني وجود السوليتونات الفضائية في هذه الأوساط.

في هذه المسألة، لن نأخذ بعين الاعتبار إلا التفاعلات من الشكل :  $\omega \rightarrow \omega = \omega + \omega - \omega$ .

### I. الخاصة غير الخطية من النوع Kerr الضوئي

نعزو عدم الخطية إلى حركة الإلكترونات المقيدة ضمن بئر كمومي غير قطعي مكافئ نظراً لكون انزياحات الإلكترونات بالنسبة لوضع توازنها كبيراً. تتحرك الإلكترونات تحت تأثير الحقل الكهربائي ذي النبض  $\omega$ . فإذا أسمينا  $x(t)$  انزياح الإلكترون عن وضع توازنه كانت معادلة الحركة :

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x + \nu x^2 + \mu x^3 = \frac{e}{m} [E e^{-j\omega t} + c.c.]$$

$c.c$  : هو المرافق العقدي.

$e, m$  : هما على الترتيب شحنة الإلكترون وكتلته.

$\gamma, \omega_0$  : هما على الترتيب ثابت التخميد وتواتر التجاوب.

$\nu, \mu$  : هما ثابتان يسمحان بوصف عدم كون البئر الكمومي قطعي ناقص.

نسمي  $\chi^L(\omega)$  الطوعية الخطية عند النبض  $\omega$  و  $N$  عدد الهزازات في واحدة الحجم. نبحث عن حل للمعادلة السابقة على الشكل :

$$(2) \quad x(t) = \sum_{\omega_i} X(\omega_i) e^{-j\omega_i t} + c.c$$

1. ما هي عبارة  $\chi^L(\omega)$  ؟

2. a. برهن أنّ الحدين  $\nu$  و  $\mu$  كلاً منه مأخوذاً على حدة يقودان إلى طوعية غير خطية عند التواتر

$\omega = \omega + \omega - \omega$ . حدّد في كلّ حالة نوع التفاعل اللاخطي الذي يعطي  $\omega$ .

b. في الأوساط المتمتعة بتناظر مركزي ينعلم أحد هذين التفاعلين. حدّد هذا التفاعل.

c. يوافق كلاً من هذين التفاعلين غير الخطيين طوعية غير خطية  $\chi^{NL}(\omega = \omega + \omega - \omega)$ . سوف نفترض أنّ

$\omega \ll \omega_0$  اكتب عبارتي  $\chi^{NL}(\omega = \omega + \omega - \omega)$  بدلالة  $\chi^L(\omega)$ .

3. إذا كان الوسط نصف ناقل، بيّن كيف يمكننا التمييز بين ظاهرة ال band filling واللاخطية وذلك فيما يتعلق

بمتحولات كزمن الإجابة و المواصفات الطيفية؟

### II. دراسة كهروطيسية

إنّ النموذج الذي عالجه في الجزء I هو نموذج سلّمي لا يسمح بإظهار الخاصة التنسورية ل

$\chi^{NL}(\omega = \omega + \omega - \omega)$ . سنحاول إظهار هذه الخاصة التنسورية في هذا الجزء ولهذا سوف نأخذ وسطاً متماثلاً

المناحي تكون فيه العناصر غير المعدومة من  $\chi^{NL}$  إضافة إلى العلاقات الرابطة فيما بينها مبينة في الجدول الملحق في آخر

المسألة (الاصطلاح المعتمد هو  $\chi_{ijkl} = \chi_{jikl}$ ). سنفترض أنّ  $\omega \ll \omega_0$  وبأن استقطاب الحقل الكهربائي هو TE

حيث  $\vec{E} = (0, 0, E)$  وأن  $\frac{d}{dz} = 0$ . وسعتمد أيضاً تبعية زمنية من الشكل  $e^{-j\omega t}$  ونبحث عن حلّ منتشر وفق  $Ox$ .

1. اكتب معادلات ماكسويل عند النبض  $\omega$ .
  2. ما هي المعادلة التفاضلية التي يخضع لها  $E$ ؟
  3. نبحت عن حل على الشكل  $E(x,y) = A(y)e^{-jkx}$  حيث  $k_x$  هو عدد حقيقي. اكتب معادلة تحولات  $A(y)$  بفرض أن  $\alpha = \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{zzz}$  و  $\gamma^2 = k_x^2 - k^2$  حيث  $k^2 = \epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2}$ .
  4. a. بفرض أن  $A(y) = \rho(y)e^{j\varphi(y)}$  حيث  $\rho$  هو حقيقي موجب، ما هما المعادلتان اللتان يخضع لهما كل من  $\rho(y)$  و  $\varphi(y)$ ؟  
b. أثبت أن إحدى المعادلتين اللتين توصلنا إليهما في الطلب السابق يمكن وضعها على الشكل:  

$$\frac{d}{dy} \left[ \rho^2 \frac{d\varphi}{dy} \right] = 0$$
  
c. ما هي عبارة  $\frac{d\varphi}{dy}$ ؟ (سنضع  $c_1$  ثابت التكامل)  
d. لنقبل أن  $c_1$  معدوم. اكتب عبارة المعادلة الثانية التي حصلنا عليها في الطلب a.  
e. بضرب المعادلة السابقة بـ  $\frac{d\rho}{dy}$  ثم مكاملتها بيّن أننا نحصل على معادلة من الشكل  $f(\rho) = \left( \frac{d\rho}{dy} \right)^2$ . نسمي  $c_2$  ثابت التكامل.  
f. إن  $\rho$  و  $\frac{d\rho}{dy}$  تسعيان إلى الصفر عندما  $y \rightarrow \pm\infty$ . أوجد قيمة  $c_2$ .  
g. ما هو الشرط على  $\rho$  الذي يجعل المعادلة  $f(\rho) = \left( \frac{d\rho}{dy} \right)^2$  محققة؟  
h. تحقّق من أن حل المعادلة  $f(\rho) = \left( \frac{d\rho}{dy} \right)^2$  يُكتب على الشكل:  $\rho(y) = \frac{a}{b \operatorname{ch}(ay)}$ . أوجد عبارتي  $a$  و  $b$  بدلالة  $\alpha$  و  $\gamma$ .  
i. بفرض أن  $Y = ay$  و  $A = \frac{b}{a} \rho$  ارسم المنحني  $A(Y)$ . إنّ الحل الذي توصلنا إليه هو السوليتون الفضائي.
5. نقترح الآن أن نعلّل فيزيائياً الحلّ السابق، لهذا سنأخذ حزمة ليزرية غوصية ذات شدة عالية واردة على الوسط Kerr الضوئي السابق. اشرح باختصار ما هي التحولات الطارئة على شكل الحزمة أثناء انتشارها في الوسط.

**ملحق :**

في وسط متماثل المناحي يوجد 21 عنصراً تنسورياً غير معدوم. ثلاثة فقط منها مستقلة عن بعضها. وهذه

العناصر هي :

$$\begin{aligned} xxx &= yyy = zzz \\ yyz &= zzy = zzz = xzx = xxy = yxy \\ yzy &= zyz = zxx = xzx = xyx = yxy \\ yzy &= zyz = zxx = xzx = xyx = yxy \\ xxx &= xxy + xyx + yxy \end{aligned}$$

## الفصل الرابع

# توافق الصفحة في وسط مضاعف الكسر

- I. توليد التوافقي الثاني-تحقيق توافق الصفحة في الأوساط مضاعفة الكسر
  - 1.I. تأثير عدم توافق الصفحة
  - 2.I. تذكرة عن الأوساط الضوئية لا متماثلة المناحي
  - 3.I. تحقيق توافق الصفحة في بلورة وحيدة المحور
- II. استخدام حزمة ليزرية غوصية متمحقة



## I. توليد التوافقي الثاني - تحقيق توافق الصفحة في الأوساط مضاعفة الكسر

سوف ندرس بالتفصيل توليد التوافقي الثاني (مضاعفة التواتر) في بلورة لا تتمتع بمركز تناظر بحيث أنّ  $\chi^{(2)}(\omega, \omega)$  غير معدومة. وهنا يختفي فوتونان بتواتر  $\omega$  ليتولد فوتون بتواتر  $2\omega$ . و يُعبّر عن شرط توافق الصفحة (انحفاظ الدفع) بالعلاقة  $\vec{k}'_{\omega} + \vec{k}'_{\omega} = \vec{k}_{2\omega}$ .

### 1.1. تأثير عدم توافق الصفحة

لنحسب استطاعة الموجة المتولدة عند التواتر  $2\omega$ .

لهذا سنعود إلى النموذج الذي درسناه في الفقرة II من الفصل الثالث وبالتحديد إلى المعادلات (8) :

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dz} &= \frac{-\alpha_1}{2} A_1 - i\lambda A_3 A_2^* e^{-i\Delta kz} \\ \frac{dA_2}{dz} &= \frac{-\alpha_2}{2} A_2 - i\lambda A_3 A_1^* e^{-i\Delta kz} \\ \frac{dA_3}{dz} &= \frac{-\alpha_3}{2} A_3 - i\lambda A_1 A_2 e^{+i\Delta kz}\end{aligned}$$

وسنفترض هنا أنّ الضياع الناجم عن امتصاص الوسط مهمل ونكتب  $\alpha_i = 0$  حيث  $i = 1, 2, 3$ . وسنجعل  $A_1 = A_2$ . كما أنّ لدينا  $\Delta k = k_{2\omega} - 2k_{\omega}$ . سنفترض أيضاً أنّ مردود التحويل من  $\omega$  إلى  $2\omega$  صغير كفاية حتى نستطيع إهمال انخفاض شدة الموجة  $\omega$  نتيجة لهذا التحويل. و لهذا نكتب  $A_1(z) = A_1(0)$ .

لما كانت الموجة ذات التواتر  $2\omega$  غير موجودة عند مدخل البلورة كان  $A_3(0) = 0$ . ومن ثمّ تصبح المعادلة

$$\text{الخاصة بـ } A_3(z) : \frac{dA_3}{dz} = -i\lambda A_1^2(0) e^{+i\Delta kz} \text{ و يعطي تكامل هذه المعادلة :}$$

$$A_3(z) = C e^{i\Delta kz} + D = C (e^{i\Delta kz} - 1) \text{ حيث } C = \frac{-\lambda A_1^2(0)}{\Delta k}$$

$$(19) \quad A_3(z) = \frac{-\lambda A_1^2(0)}{\Delta k} e^{\frac{i\Delta kz}{2}} \times 2i \sin\left(\frac{\Delta kz}{2}\right)$$

أي إنّ

$$(20) \quad A_3(z) \times A_3^*(z) = \lambda^2 (A_1(0)A_1^*(0))^2 z^2 \left( \frac{\sin\left(\frac{\Delta kz}{2}\right)}{\frac{\Delta kz}{2}} \right)^2$$

ولما كانت شدة الموجة ذات التواتر  $2\omega$  عند مخرج البلورة ذات الطول  $L$  هي :

$$I_{2\omega}^{(L)} = \varepsilon_0 c \omega |A_3(L)|^2$$

ولما كانت شدة الموجة ذات التواتر  $\omega$  عند مدخل البلورة هي :

$$I_{\omega} = \frac{\varepsilon_0 c \omega}{2} |A_1(0)|^2$$

استنتجنا أنّ :

$$(21) \quad I_{2\omega}^{(L)} = \lambda^2 \frac{\omega^2 I_{\omega}^2}{\varepsilon_0^2 c^2} L^2 \left( \frac{\sin\left(\frac{\Delta k L}{2}\right)}{\frac{\Delta k L}{2}} \right)^2$$

و بتعويض  $\lambda$  بقيمتها :  $\lambda = \frac{d}{2c\varepsilon_0} \sqrt{\frac{\omega \cdot \omega \cdot 2\omega}{n_{\omega} \cdot n_{\omega} \cdot n_{2\omega}}}$  نكتب :

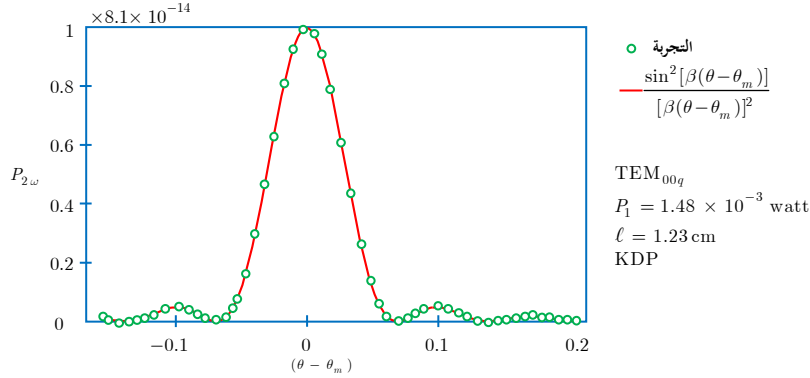
$$(22) \quad I_{2\omega}^{(L)} = \frac{8d^2 \omega^2 L^2}{\varepsilon_0^4 c^4 n_{\omega}^2 n_{2\omega}} I_{\omega}^2 \left( \frac{\sin\left(\frac{\Delta k L}{2}\right)}{\frac{\Delta k L}{2}} \right)^2$$

حيث  $\Delta k = k_{2\omega} - 2k_{\omega} = \frac{2\omega}{c}(n_{2\omega} - n_{\omega})$

عندما يتحقق توافق الصفحة  $\Delta k = 0$  تكون شدة الموجة ذات التواتر  $2\omega$  متناسبة مع مربع طول البلورة. و يظهر جلياً أنّ عامل انخفاض الشدة :

$$(23) \quad \frac{I_{2\omega}}{I_{2\omega}^{\max}} = \left( \frac{\sin\left(\frac{\Delta k L}{2}\right)}{\frac{\Delta k L}{2}} \right)^2$$

هو المعبر عن الأثر الناجم عن عدم تحقق توافق الصفحة كما يظهر تجريبياً من المنحني التالي الشكل (2) :



الشكل (2)

❖ يُعطى مردود التحويل من التوافقي الأول إلى التوافقي الثاني بالعلاقة :

$$(24) \quad \rho = \frac{I_{2\omega}}{I_{\omega}} = \frac{P_{2\omega}}{P_{\omega}} = \frac{8d^2 \omega^2 L^2}{\varepsilon_0^4 c^4 n_{\omega}^2 n_{2\omega}} I_{\omega} \left( \frac{\sin\left(\frac{\Delta k L}{2}\right)}{\frac{\Delta k L}{2}} \right)^2$$

أي إنّ  $\rho \propto I_{\omega}$  ومن ثمّ حتى نحصل على مردود عالٍ في توليد التوافقي الثاني يجب استخدام ليزرات عالية الاستطاعة كالليزرات النبضية.

لما كان شرط توافق الصفحة يُكتب باستخدام قرائن الانكسار على النحو  $n_{2\omega} = n_{\omega}$  و لما كان دليل الانكسار يتزايد مع تزايد طول الموجة خارج مناطق الامتصاص (تبدد طبيعي) فإنّ  $n_{2\omega} > n_{\omega}$ . إلا أننا سنرى كيفية تحقيق شرط توافق الصفحة في وسط لا تماثل المناحي وذلك باختيار استقطاب مناسب للموجة واستخدام خاصة مضاعفة الكسر للوسط.

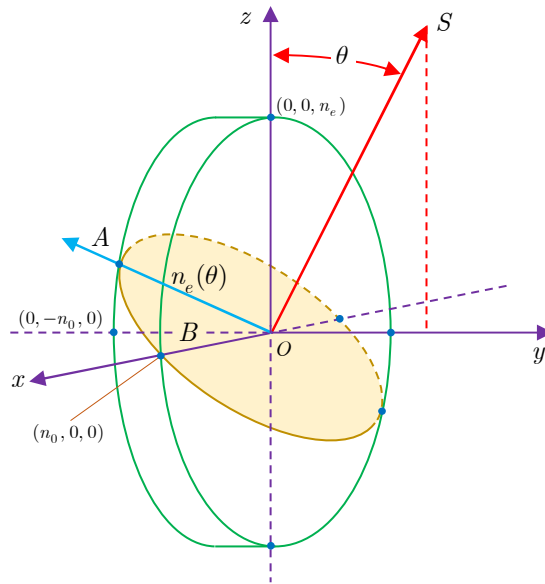
## 2.I. تذكرة عن الأوساط الضوئية لا متماثلة المنحني

في وسط لا متماثل المنحني و في منحى معين للانتشار توجد موجتان مستويتان مستقطبتان خطياً يمكنهما الانتشار من غير أن تخضعا لأي تشوه (و نقصد بالتشوه هنا تغيير الاستقطاب). و يوافق هذا وجود قرينتي انكسار و نسمي الفرق بين هاتين القرينتين بالكسر المضاعف.

و يسمح استخدام مجسم القطع الناقص الدوراني الخاص بقرائن الانكسار بوصف هذه الخاصية. فمثلاً في حالة بلورة وحيدة المحور (أي تتمتع بمحور تناظر وحيد من رتبة أكبر أو تساوي 3) تكون معادلة مجسم القطع الناقص الدوراني :

$$(25) \quad \frac{x^2}{n_o^2} + \frac{y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1$$

وذلك بافتراض أن المحور  $OZ$  هو المحور البصري و  $n_e$  و  $n_o$  هما بالترتيب قرينة الانكسار العادية وقرينة الانكسار الغريبة. بغية تحديد منحبي الاستقطاب الخطي و قرينتي الانكسار الخاصتين بهما نرسم شعاعاً  $\overrightarrow{OP}$  ماراً بمركز معادلة مجسم القطع الناقص الدوراني وموازياً لمنحى الانتشار كما يظهر في الشكل (3).



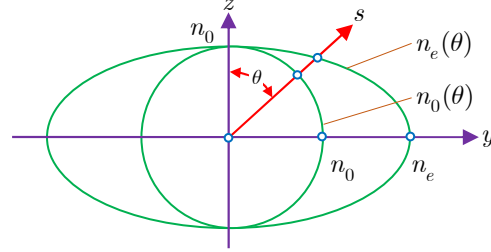
الشكل (3)

يصنع الشعاع  $\overrightarrow{OP}$  مع المحور البصري زاوية تساوي  $\theta$ . إنَّ المستوي المار بـ  $O$  و المتعامد مع  $\overrightarrow{OP}$  سوف يقطع مجسم القطع الناقص الدوراني وفقاً لقطع ناقص. و يوافق منحني محوري القطع الناقص منحبي الاستقطاب الخطي اللذين نبحت عنهما. كما يوافق طولاً نصفين المحورين قرينتي الانكسار اللتين نبحت عنهما.

و كذا نجد أن أحد هذين الاستقطابين عمودي على المحور البصري وهو يوافق ما نسميه بالموجة العادية في حين أن الآخر يوافق ما نسميه بالموجة الغريبة. وتكون قرينة الانكسار الموافقة للموجة العادية هي  $N_o(\theta) = n_o$  وهي مستقلة عن  $\theta$  في حين أن قرينة الانكسار  $N_e(\theta)$  توافق الموجة الغريبة وتتراوح قيمتها بين  $N_e(90^\circ) = n_e$  (أي عندما يكون  $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OZ}$ ) و  $N_e(0^\circ) = n_o$  (أي عندما يكون  $\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{OZ}$ ).

إذا كان  $n_e > n_o$  قلنا عن البلورة الوحيدة المحور إنها موجبة في حين نقول عنها إنها سالبة إذا كان  $n_e < n_o$ .

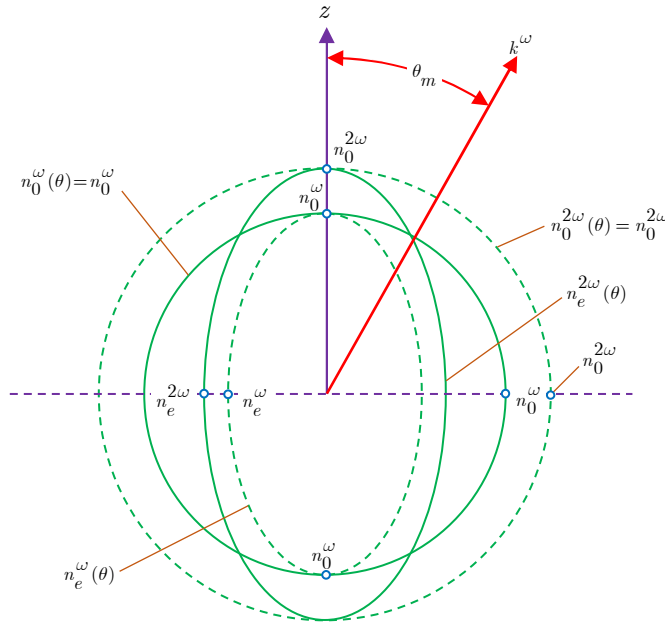
نرسم ما يُسمى بسطح القرائن بأخذ المسافة  $OM_e = N_e(\theta)$  أو المسافة  $OM_o = N_o(\theta)$  على المحور الحامل للشعاع  $\vec{OP}$ . فنحصل في حالة الموجة العادية على كرة و في حالة الموجة الغريبة مجسم قطع ناقص دوراني. إنّ تقاطع هذا السطح مع المستوي  $YOZ$  دائرة ذات نصف قطر  $n_o$  (الموجة العادية) و قطع ناقص بنصفي محورين  $n_e$  و  $n_o$  (الموجة الغريبة). ويكون القطع الناقص والدائرة متماسين عند المحور  $OZ$  وهو المحور البصري للبلورة الشكل (4).



الشكل (4)

### 3.I. تحقيق توافق الصفحة في بلورة وحيدة المحور

لنتذكّر أنّ شرط توافق الصفحة باستخدام قرائن الانكسار هو  $N_{2\omega} = N_\omega$ . وفي وسط متمائل المناحي يكون دوماً  $N_{2\omega} > N_\omega$  (خارج مناطق الامتصاص) و بالتالي لا يمكن تحقيق شرط توافق الصفحة في تلك الأوساط. لنفترض الآن أنّ الوسط اللاخطي هو بلورة وحيدة المحور وأنّ الموجة ذات التواتر  $\omega$  هي الموجة العادية والموجة ذات التواتر  $2\omega$  هي الموجة الغريبة.



الشكل (5)

يصح شرط توافق الصفحة من أجل منحى انتشار يصنع الزاوية  $\theta_m$  مع المحور البصري :

$$N_e(2\omega, \theta_m) = N_o(\omega)$$

ولدينا  $N_o(\omega) < N_o(2\omega) = N_e(2\omega, 0)$ . وعليه فإنّ شرط توافق الصفحة  $N_e(2\omega, \theta_m) = N_o(\omega)$  قابل

للتحقيق في بلورة وحيدة المحور وسالبة أي عندما يكون  $n_e^{2\omega} = N_e(2\omega, 90^\circ) < n_o^\omega$ .

و لما كان  $n_e^{2\omega} < n_o^\omega < n_o^{2\omega}$  في هذه البلورة فإنّ :  $(n_o^{2\omega} - n_e^{2\omega}) > (n_o^{2\omega} - n_o^\omega)$  و نعبّر عن ذلك بالقول أنّ الكسر المضاعف أكبر من التبدد. في هذا النوع من توافق الصفحة حيث تعطي موجتان من الطبيعة ذاتها موجة من طبيعة مختلفة نقول عن توافق الصفحة بأنه من النوع I ونعبّر عنه رمزاً بالكتابة:  $O_\omega + O_\omega \rightarrow E_{2\omega}$  إذ نقصد بالرمز Ordinaire : O و بالرمز Extraordinaire : E.

يمكننا أيضاً تحقيق ما يُسمّى بتوافق في الصفحة من النوع II في بلورة وحيدة المحور وسالبة :

$$O_\omega + E_\omega \rightarrow E_{2\omega}$$

لنعد إلى مثالنا السابق (النوع I) تُعطي الزاوية  $\theta_m$  بالعلاقة :

$$\frac{(n_o^\omega \sin \theta_m)^2}{(n_e^{2\omega})^2} + \frac{(n_o^\omega \cos \theta_m)^2}{(n_o^{2\omega})^2} = 1$$

أي إنّ :

$$\sin^2 \theta_m = \frac{(n_o^\omega)^{-2} - (n_o^{2\omega})^{-2}}{(n_e^{2\omega})^{-2} - (n_o^{2\omega})^{-2}}$$

فمثلاً في بلورة الـ *KDP* وفي حالة ليزر الياقوت  $\lambda = 694 \text{ nm}$  يكون لدينا :

$$n_e^\omega = 1.466; \quad n_o^\omega = 1.506; \quad n_e^{2\omega} = 1.487; \quad n_o^{2\omega} = 1.534$$

و منه نجد  $\theta_m = 50.4^\circ$ .

يُظهر الجدول الآتي القيم العددية لقرنتي الانكسار العادية والغريبة عند أطوال موجية مختلفة لبلورة الـ *KDP*

وتسمح تلك القيم بحساب الزاوية  $\theta_m = 50.4^\circ$  التي يتحقق عندها توافق الصفحة :

طول الموجة ( $\mu\text{m}$ )	$n_o$	$n_e$
0.2000	1.622630	1.563913
0.3000	1.545570	1.498153
0.4000	1.524481	1.480244
0.5000	1.514928	1.472486
0.6000	1.509274	1.468267
0.7000	1.505235	1.465601
0.8000	1.501924	1.463708
0.9000	1.498930	1.462234
1.0000	1.496044	1.460993
1.1000	1.493147	1.459884
1.2000	1.490169	1.458845
1.3000	1.487064	1.457838
1.4000	1.483803	1.456838
1.5000	1.480363	1.455829
1.6000	1.476729	1.454797
1.7000	1.472890	1.453735
1.8000	1.468834	1.452636
1.9000	1.464555	1.451495
2.0000	1.460044	1.450308

## II. استخدام حزمة ليزرية غوصية متمحرة

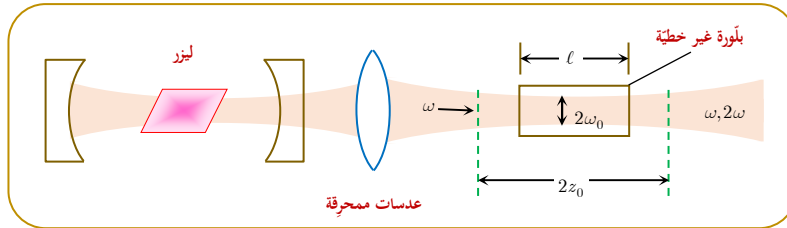
إنّ الحزم الليزرية هي حزم في أفضل حالاتها غوصية وعليه يلزمنا محرقة هذه الحزم الغوصية داخل البلورة غير الخطية حتى نحقق كثافة طاقة كافية لإظهار الأثر اللاخطي كما في الشكل (6).

♦ لتكن  $z_0$  (طول Rayleigh) المسافة التي يتضاعف عندها سطح الحزمة وذلك ابتداءً من خصر الحزمة. فإذا كان  $\omega_0$  هو نصف قطر الخصر، كان  $z_0$  معطى بالعلاقة :

$$z_0 = \frac{\pi\omega_0^2 n}{\lambda}$$

فإذا كان  $L \gg z_0$  حيث  $L$  هو طول البلورة غير الخطية أمكننا اعتبار سطح الحزمة ثابتاً ويساوي  $\pi\omega_0^2$  وعليه فإنّ شدة الحزمة الواردة تبقى ثابتة وتساوي  $I_\omega = \frac{P_\omega}{\pi\omega_0^2}$  واستطعنا بالتالي استخدام النتائج التي حصلنا عليها في حالة الأمواج المستوية.

♦ إنّ السعي إلى تصغير خصر الموجة  $\omega_0$  إلى حد كبير لا يؤدي، عكس ما نتوقع، إلى زيادة في مردود الأثر اللاخطي لأنّ الحزمة عندها سوف تنفرج داخل البلورة ويصبح لها عدة أشعة موجية  $k$ : لا يتحقق لها توافق في الصفحة وما نريه في محرقة الحزمة نخسره في انعدام توافق الصفحة والحل الأمثل يكون عندما  $L = 2z_0$ .



الشكل (6)



## تمرينات ومسائل

1. مسألة. نجري تجربة مضاعفة التواتر باستخدام ليزر Nd-Yag ( $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ ) وبلورة الـ KDP غير الخطية.

1. زاوية توافق الصفحة. إذا علمت أن قرائن الانكسار العادية والغريبة لبلورة الـ KDP هي :

$$\lambda = 1.06 \mu\text{m} \quad ; \quad n_o^\omega = 1.4939 \quad ; \quad n_e^\omega = 1.4599$$

$$\lambda = 0.53 \mu\text{m} \quad ; \quad n_o^\omega = 1.5125 \quad ; \quad n_e^\omega = 1.4706$$

وأن شرط توافق الصفحة هو من النمط II أي :  $O_w + E_w \rightarrow E_{2\omega}$  وأن جميع الحزم منطبقة على بعضها.

a. اكتب شرط توافق الصفحة بدلالة  $N_e(\theta, \omega)$  و  $N_e(\theta, 2\omega)$  وقرينة الانكسار العادية  $n_o^\omega$ . حيث

$N_e(\theta, \omega')$  هي قرينة الانكسار للموجة الغريبة ذات التواتر  $\omega'$  وذلك عندما يصنع منحى هذه الحزمة

الزاوية  $\theta$  مع المحور البصري للبلورة. ما هي الدلالة الفيزيائية لهذا الشرط؟

b. اكتب عبارتي  $N_e(\theta, \omega)$  و  $N_e(\theta, 2\omega)$  بدلالة قرائن الانكسار العادية و الغريبة و بدلالة الزاوية  $\theta$ .

واحسب  $N_e(\theta, \omega)$  و  $N_e(\theta, 2\omega)$  عندما تكون  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  ثم احسب زاوية توافق الصفحة.

2. شدة التوافقي الثاني. فيما يلي سوف نفترض وجود نوع واحد من الأمواج ذات التواتر  $\omega$ . أي وفقاً

للاصطلاحات الواردة في البحث النظري  $A_1(z) = A_2(z)$ . لنفترض أيضاً أن شرط توافق الصفحة محقق

$\Delta k = 0$  وأن الامتصاص داخل البلورة معدوم  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ;  $\alpha_3 = 0$ . ونقترح حساب الشدة  $I_3(\ell)$

للموجة ذات التواتر  $2\omega$  عند مخرج البلورة ذات الطول  $\ell$  بدلالة الشدة  $I_1(0)$  للموجة ذات التواتر  $\omega$  عند مدخل البلورة.

a. ليكن  $A_1(0)$  مطال الموجة الأساسية عند مدخل البلورة حيث  $I_1(0) = \frac{\epsilon_0 c \omega}{2} |A_1(0)|^2$  وسوف نعتبر أن  $A_1(0)$  حقيقي.

♦ تحقق من أن المطالين  $A_1(z)$  و  $A_3(z)$  للموجتين الأساسية والتوافقية على الشكل :

$$A_1(z) = \alpha / \text{ch}\left(\frac{z}{a}\right); \quad A_3(z) = \beta \text{th}\left(\frac{z}{a}\right)$$

حيث  $\alpha$  و  $\beta$  و  $a$  هي ثوابت يلزم تحديدها.

♦ استنتج عبارتي الشدتين  $I_1(z)$  و  $I_3(z)$  ثم تحقق من شرط انحفاظ الطاقة.

♦ احسب الثابت  $a$  عندما  $I_1(0) = 10^8 \text{ W/cm}^2$  إذا علمت أن :

$$d = 0.63 \times 10^{-12} \text{ m/V}; \quad n_\omega \approx n_{2\omega} \approx 1.5; \quad c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}; \quad 1/4\pi\epsilon_0 = 9 \times 10^9 \text{ (MKS)}$$

♦ احسب مردود مضاعفة التواتر في بلورة طولها  $\ell = 2.8 \text{ cm}$ .

♦ ارسم المنحنيين المعبرين عن تغيّرات التابعين  $Y_1 = I_1(z)/I_1(0)$  و  $Y_3 = I_3(z)/I_1(0)$  وذلك

بدلالة  $X = z/a$  عندما تكون  $0 < X < 2$ .

b. عندما لا يكون طول البلورة كبيراً  $1 \ll \ell/a$  أثبت باستخدام طريقة تكرارية لحلّ المعادلات التفاضلية

المتزاوجة أننا نستطيع نشر الطويلات على الشكل :

$$A_1(z) = A(1 - Bz^2)$$

$$A_3(z) = ACz$$

حيث  $A, B, C$  هي ثوابت يُطلب تعيينها.

♦ للقيام بذلك نفترض في البداية أنّ الموجة  $A_1$  غير متخامدة ونستنتج قيمة تقريبية لـ  $A_3$  ثمّ نستخدم

هذه القيمة في حساب الانخفاض الذي طرأ على  $A_1$  بعد عبور البلورة. حدد الثوابت  $A, B, C$ .

♦ تحقّق من أننا نصل إلى النتيجة السابقة بقيامنا بنشر محدود لعبارتي  $A_1(z), A_3(z)$  الواردتين في 1.b.

♦ ما هو الطول الأعظمي للبلورة  $\ell_{\max}$  حتى لا تنخفض شدة الموجة الأساسية أكثر من 10%؟

3. زمن النبضة  $2\omega$ . يجري تحقيق التجربة باستخدام ليزر نبضي بحيث أنّ عرض النبضة عند منتصف الارتفاع (في

الشدة) من رتبة 12 ns. لنفترض أنّ التبعية الزمنية للشدة هي غوصية. أي:

$$I_1(z, t) = I_1(z) \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right)$$

لنفترض ضمن السّلم الزمني المعتبر أنّ الاستقطاب اللاخطي من الرتبة الثانية يتبع بأمانة التغييرات الزمنية للموجة

الأساسية. في الحالة التي يكون فيها انخفاض شدة الموجة الأساسية الناجم عن التحويل إلى الموجة التوافقية قليلاً

ما هو الشكل الزمني وما هو زمن النبضة  $2\omega$ ؟ ماذا تستنتج؟

2. مسألة. تتمتع الكواشف الضوئية المتوافرة حالياً (كالمضاعفات الفوتونية و الديودات الضوئية) التي تعمل في

المجال المرئي أو تحت الأحمر القريب بمواصفات (الحساسية، الضجيج، زمن الإجابة) تفوق مثيلاتها التي تعمل في

المجال تحت الأحمر المتوسط. لهذا فمن المفيد أن يجري تحويل الضوء تحت الأحمر المراد كشفه إلى ضوء بتواتر أعلى

وذلك عن طريق خلط التواترات في بلورة غير خطية (upconversion) ثمّ كشف هذا الضوء. في هذه المسألة

سوف ندرس تحويل التواتر لليزر  $\text{CO}_2$  (طول موجة عمله  $\lambda_1 = 10.6 \mu\text{m}$ ) وذلك عن طريق خلط التواتر

باستخدام ليزر الـ Nd-Yag (طول موجة عمله  $\lambda_2 = 1.06 \mu\text{m}$ ) داخل بلورة من البروستيت  $\text{Ag}_3\text{AsS}_3$ . إنّ

المعامل الفعلي غير الخطي من الرتبة الثانية لهذه البلورة هو  $d = 10^{-22} \text{m/V}$ . كما تسمح علاقة التبديد لـ

Sellmeier بحساب تقريبي لقرائن الانكسار العادية والغريبة للبلورة :

$$n^2 = A + \frac{B_1}{\lambda^2 - B_2} - \frac{C_1}{C_2 - \lambda^2}$$

حيث  $\lambda$  هو طول الموجة مقدراً بـ  $\mu\text{m}$  و  $A, B_1, B_2, C_1, C_2$  هي ثوابت معطاة في الجدول الآتي للموجتين

العادية والغريبة :

الموجة	$A$	$B_1$	$B_2$	$C_1$	$C_2$
العادية	9.220	0.4454	0.1264	1733	1000
الغريبة	7.007	0.3230	0.1192	660	1000



1. احسب طول الموجة في الخلاء  $\lambda_3$  للضوء الناجم عن خلط التواترات.
2. احسب قرائن الانكسار العادية و الغريبة للبلورة عند الأطوال الموجية الثلاثة  $\lambda_1$  ،  $\lambda_2$  ،  $\lambda_3$ .
3. تنتشر الأمواج الثلاث في البلورة (و التي سنعتبرها أمواجاً مستوية) منطبقة فوق بعضها. تكون حزمة الليزر Nd-Yag مستقطبة خطياً و عمودية على حزمة ليزر الـ  $\text{CO}_2$ . إن زاوية توافق الصفحة تساوي  $\theta_M = 20^\circ$ . ما هو نمط توافق الصفحة المحقق؟ تأكد من تحقق شرط توافق الصفحة ثم حدّد طبيعة كل من الأمواج الثلاث (عادية أم غريبة). هل بالإمكان تحقيق النمط الآخر من توافق الصفحة؟
4. بفترض أننا نحمل النقصان في شدة الموجة  $I_2$  ( $\lambda_2 = 1.06 \mu\text{m}$ ) الناجم عن التحويل upconversion. كما نعمل امتصاص البلورة للأطوال الموجية  $\lambda_1$  ،  $\lambda_2$  ،  $\lambda_3$ . أوجد عباراتي المطال والشدة عند مخرج البلورة ذات الطول  $\ell = 0.5 \text{ cm}$  للموجة  $\lambda_1 = 10.6 \mu\text{m}$  و الموجة ذات التواتر  $\lambda_3$ . نرسم  $I_1(0)$  و  $I_2(0)$  لشدتي الموجتين  $\lambda_1 = 10.6 \mu\text{m}$  و  $\lambda_2 = 1.06 \mu\text{m}$  عند مدخل البلورة ونفترض أنّ
 
$$L = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{n_1 n_2 n_3}{\omega_1 \omega_3}} \times \sqrt{\frac{2 \varepsilon_0^3 c^3}{I_2(0)}}$$
 احسب  $L$  عندما  $I_2(0) = 1 \text{ MW/cm}^2$  علماً أنّ  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$  و  $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ S.I.}$
5. حتى تعمل الجملة السابقة بصورة صحيحة ينبغي أن تكون خطية. بمعنى آخر ينبغي أن تكون شدة الموجة  $\lambda_3$  متناسبة خطياً مع شدة الموجة الواردة  $\lambda_1 = 10.6 \mu\text{m}$  أي  $I_3(\ell) \propto I_1(0)$ . يلزم لتحقيق ذلك أن يكون تعيّر  $I_2$  و كذلك  $I_1$  صغيراً على طول البلورة. و لهذا نكتب  $I_1(\ell) = (1 - \varepsilon^2) I_1(0)$  حيث  $\varepsilon^2 \ll 1$ . اكتب في هذه الحالة عبارة الشدة  $I_3(\ell)$ . نتحقق تجريبياً من هذا السلوك الخطي لـ  $I_3(\ell)$  بدلالة  $I_1(0)$  حتى القيمة  $I_1(0) = 1 \text{ MW/cm}^2$ . احسب عند تلك القيمة مردود عملية التحويل  $\rho = \frac{I_3(\ell)}{I_1(0)}$ ، ثم احسب الجزء الكسري  $\eta$  من شدة الموجة  $\lambda_2 = 1.06 \mu\text{m}$  الذي يتحوّل فعلياً.

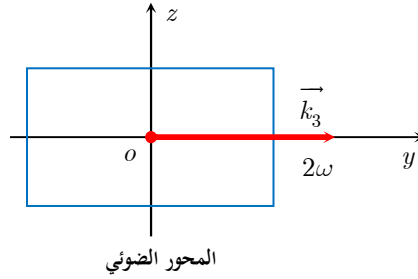
مراجع :

P.A. Iaanimiagi, M.C. Richardson, N.R. Iswnor. "Upconversion linearity in proustite for short  $10.6 \mu\text{m}$  pulse diagnostics", Optics Letters, 4, 45(1979).

3. مسألة. نحقق تجربة جمع تواترين ضوئيين باستخدام بلورة غير خطية وحيث تكون حوامل الحزم الضوئية المستخدمة غير متوازية. بافتراض أنّ تواتري الحزمتين الواردتين على البلورة هما  $\omega_1$  و  $\omega_2$  وبافتراض أنّ شعاعي الموجة الموافقين هما  $\vec{k}_1$  و  $\vec{k}_2$ . تلتقي هاتان الحزمتان داخل البلورة لتولّد موجة ذات تواتر  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  وشعاع موجة  $\vec{k}_3$ . فيما يلي سنفترض أنّ جميع الأمواج مستوية وأنّ الأشعة الموجية  $\vec{k}_i$  توافق انتشار الأمواج داخل البلورة.

1. ما هي الدلالة الفيزيائية لشرط توافق الصفحة ؟ اكتب العبارة الرياضية المعبرة عن هذا الشرط في حالة جمع تواترين ضمن هندسة غير خطية للحزم. علّل إجابتك.
2. ما هي تبعية استطاعة الموجة الصادرة عند التواتر  $\omega_3$  للشدتين  $I_1$  و  $I_2$  للموجتين  $\omega_1$  و  $\omega_2$  ؟ علّل إجابتك.

4. مسألة. مضاعفة التواتر باستخدام حزم متلاقية، تحقيق توافق الصفحة. تتداخل حزمتان كل منهما بتواتر  $\omega$  في بلورة غير خطية (بلورة وحيدة المحور) وتنتجان حزمة بتواتر  $2\omega$  وفق المحور  $oy$  العمودي على المحور البصري  $oz$  للبلورة.



1. الموجتان ذات التواتر  $\omega$  عاديتان ويصنع شعاعا الموجة فيما بينهما زاوية مقدارها  $\phi$ ، في حين أنّ الموجة ذات التواتر  $2\omega$  غريبة. احسب الزاوية  $\phi_0$  التي يتحقق عندها توافق الصفحة لمضاعفة تواتر ليزر الياقوت .  $\lambda = 0.694 \mu\text{m}$

معطيات عددية : الموجة العادية

$$n_o(\lambda = 0.347 \mu\text{m}) = 1.534 \quad \text{و} \quad n_o(\lambda = 0.694 \mu\text{m}) = 1.505$$

الموجة الغريبة

$$n_e(\lambda = 0.347 \mu\text{m}) = 1.487 \quad \text{و} \quad n_e(\lambda = 0.694 \mu\text{m}) = 1.465$$

ما هي مناحي استقطاب الحزمتين  $\omega$  و الحزمة  $2\omega$ ؟ وما هي المركبة الوحيدة من تسور الطواعية التي تساهم في هذه الظاهرة؟

2. الموجتان ذات التواتر  $\omega$  غريبتان ويصنع شعاعا الموجة فيما بينهما زاوية مقدارها  $\phi$ ، في حين أنّ الموجة ذات التواتر  $2\omega$  عادية وتصدر وفق المحور  $oy$  العمودي على المحور البصري للبلورة  $oz$ . فإذا علمت أنّ منحيي الحزمتين عند التواتر  $\omega$  متناظران بالنسبة للمستوي  $xoy$  المتعامد مع محور البلورة. أوجد المعادلة التي تسمح بحساب الزاوية  $\phi = \phi_0$  التي يتحقق عندها شرط الصفحة. احسب  $\phi_0$  باستخدام القيم العددية الآتية :  
الموجة العادية

$$n_o(\lambda = 0.347 \mu\text{m}) = 1.472 \quad \text{و} \quad n_o(\lambda = 0.694 \mu\text{m}) = 1.461$$

الموجة الغريبة

$$n_e(\lambda = 0.347 \mu\text{m}) = 1.515 \quad \text{و} \quad n_e(\lambda = 0.694 \mu\text{m}) = 1.496$$

5. مسألة. توليد التوافقي الثاني.

A. تحقيق شرط توافق الصفحة في بلورة وحيدة المحور ومضاعفة الكسر.

تعتمد الطريقة الأكثر شهرة و الأكثر مردوداً في تحقيق شرط توافق الصفحة تجريبياً في بلورة مضاعفة الكسر على أنّ قرينة الانكسار هي تابع لطول الموجة وحالة استقطاب الموجة الضوئية. ولتبسيط الدراسة القادمة سوف نعتمد فقط البلورات وحيدة المحور حيث يمكن تغيير قرينة الانكسار بدلالة الزاوية  $\theta$  الواقعة بين المحور البصري للبلورة ومنحى الانتشار المتميز بشعاع الموجة  $\vec{k}$ . فإذا كان التغيير في قرينة الانكسار والعائد إلى خاصية مضاعفة الكسر أكبر من التغيير الناجم عن التبدد أمكن تحقيق شرط توافق الصفحة وذلك ضمن نخطين معرفين كما يلي :

- ♦ توافق الصفحة من النمط  $I$ . يكون الفوتونان عند التواتر الأساسي  $\omega$  مستقطبين الاستقطاب ذاته، أي أنّ الاثنين يوافقان موجة عادية أو موجة غريبة. في حين تتولّد الموجة ذات التواتر التوافقي  $2\omega$  وفق اهتزاز عمودي على منحى اهتزاز الموجة الأساسية.
- ♦ توافق الصفحة من النمط  $II$ . يكون الفوتونان عند التواتر الأساسي  $\omega$  مستقطبين وفق منحنيين متعامدين. في حين تتولّد الموجة ذات التواتر التوافقي  $2\omega$  وفق منحى موازٍ لإحدى الموجتين  $\omega$ .

### 1. شرط توافق الصفحة.

- a. اكتب العلاقة بين قرائن الانكسار عند  $\omega$  و  $2\omega$  عند تحقّق شرط توافق الصفحة في كلا النمطين  $I$  و  $II$  وذلك في الحالتين الآتيتين:
- ♦ بلورة وحيدة المحور وسالبة  $n_e \leq n_o$ .
  - ♦ بلورة وحيدة المحور وموجبة  $n_e \geq n_o$ .
- b. نقترح تحويل الإشعاع عند طول الموجة  $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$  إلى ضوء عند طول الموجة  $\lambda = 0.53 \mu\text{m}$ . حدّد لكلّ من البلورات الثلاث (كوارتز،  $\text{LiNbO}_3$ ،  $\text{KDP}$ ) إمكانية تحقيق شرط توافق الصفحة ووفق أي من النمطين السابقين؟ (انظر المعطيات العددية في نهاية المسألة).

### 2. شرط توافق الصفحة من النمط $I$ في بلورة الـ $\text{KDP}$ .

- a. احسب الزاوية  $\theta_1$  بين منحى الانتشار والمحور البصري للبلورة والتي يتحقق عندها توافق الصفحة.
- b. حدّد توجه البلورة الذي يجعل التزاوج اللاخطي أمثلياً وذلك عن طريق تحديد الزاويتين  $(\theta_1, \Phi)$  اللتين يصنعهما منحى الانتشار في جملة الإحداثيات الديكارتيّة للمحاور البلورية. نذكر أنّ التنسور  $\chi^{(2)}$  الموافق لبلورة الـ  $\text{KDP}$  يصبح عندما نأخذ المحور البصري وفق  $Oz$  على الشكل :

$$\chi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \chi_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{36} \end{bmatrix}$$

- c. إنّ تأثير انزياح قدره  $\delta\theta$  بالنسبة لزاوية توافق الصفحة  $\theta_1$  يوافق إدخال عدم توافق في الصفحة  $\Delta k$ . فإذا علمت أنّ فعالية التحويل بعد عبور المسافة  $l$  من البلورة هي :

$$\frac{P(2\omega)}{P(\omega)} \propto \left( \frac{\sin(\Delta k \cdot l/2)}{\Delta k \cdot l/2} \right)^2$$

- حدّد الانزياح  $\delta\theta_{1/2}$  الذي يتسبّب بانخفاض فعالية التحويل إلى نصف قيمتها. نذكر أنّ  $\sin^2 \xi / \xi^2 = 1/2$  عندما  $\xi = 1.39$ .

- قارن هذه النتيجة مع الحالة التي يكون فيها  $\theta_1 = \pi/2$  ثمّ علّل وصف توافق الصفحة هذا بأنّه غير حرج.
- d. برهن أنّ الأشعة الموافقة للموجة التوافقية لا تنتشر وفق منحى الأشعة الموافقة للموجة الأساسية (ظاهرة الـ walk-off). ما تأثير هذا على فعالية التحويل؟
- احسب زاوية الـ walk-off  $\Theta$  بين أشعة الموجتين الأساسية والتوافقية. قارن هذه النتيجة مع حالة توافق الصفحة غير الحرج.

B. انتقال الطاقة من الموجة المضخخة إلى الموجة التوافقية.

سنفترض الآن أنّ شرط توافق الصفحة محقق وسنهتم الآن بطاقة الموجة المضخخة.

1. اكتب عبارتي الاستقطاب اللاخطي المهتز عند التواترين  $\omega$  و  $2\omega$ . سنفترض أنّ علاقة Kleinman محققة:

$$\chi_{ijk}(2\omega, \omega) = 2\chi_{kij}(\omega, \omega)$$

يعود وجود العامل 2 إلى تضاعف التواتر.

2. برهن أنّ معادلي التحوّل ل  $E_1$  و  $E_2$  اللذين يمثلان طولي الحقل الكهربائي عند كل من التواترين  $\omega$  و  $2\omega$

على الترتيب أثناء انتشارهما وفق المحور  $Oz$  الموافق لمنحى توافق الصفحة تُكتب على الشكل :

$$\begin{cases} \frac{dE_1}{dz} = i \frac{\omega}{nc} \chi_{\text{eff}} E_1^* E_2 \\ \frac{dE_2}{dz} = i \frac{\omega}{nc} \chi_{\text{eff}} E_1^2 \end{cases}$$

3. قم بتغيير المتحولات :

$$\begin{cases} E_1(z) = \sqrt{\frac{\omega}{n}} e_1(z) e^{i\phi_1(z)} \\ E_2(z) = \sqrt{\frac{2\omega}{n}} e_2(z) e^{i\phi_2(z)} \end{cases}$$

ثمّ برهن أنّ جملة المعادلات السابقة تقبل التقسيم إلى جملتين فرعيتين تسمحان بوصف تحوّل الطويلات والصفحات كتتابع حقيقية للمتحوّل  $z$ .

4. اكتب معادلات تحوّل الطويلات في الحالة الخاصة الآتية :  $\frac{d\phi_1}{dz} = \frac{d\phi_2}{dz} = 0$ ، أي إنّ صفحتي الحقلين

مستقرتان. برهن أنه في حالة فرق للصفحة مناسب للحقل الكهربائي للموجة التوافقية بالنسبة للاستقطاب اللاخطي المنبع، فإنّ هذه الموجة ستتضخّم في حين يطرأ اضمحلال على الموجة الأساسية المضخخة.

5. تحقّق من أنّ :  $\frac{d}{dz} (e_1^2(z) + 2e_2^2(z)) = 0$ .

6. تحقّق عند الشروط الابتدائية :  $e_2(0) = 0$  ،  $e_1(0) = e_0$ ، أنّ :

$$e_1(z) = e_0 \frac{1}{\text{ch}\left(\frac{z}{z_0}\right)} \quad e_2(z) = \text{th}\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

هما حلان للمعادلتين المتزاوجتين السابقتين. ارسم تحولات دفع الفوتونات و الشدات الضوئية للحزمتين الأساسية و التوافقية أثناء الانتشار.

معطيات عددية :

الكوارتز :

$n_e$	$n_o$	طول الموجة
1.544	1.534	$\lambda = 1.06 \mu\text{m}$
1.554	1.546	$\lambda = 0.53 \mu\text{m}$

: LiNbO<sub>3</sub>

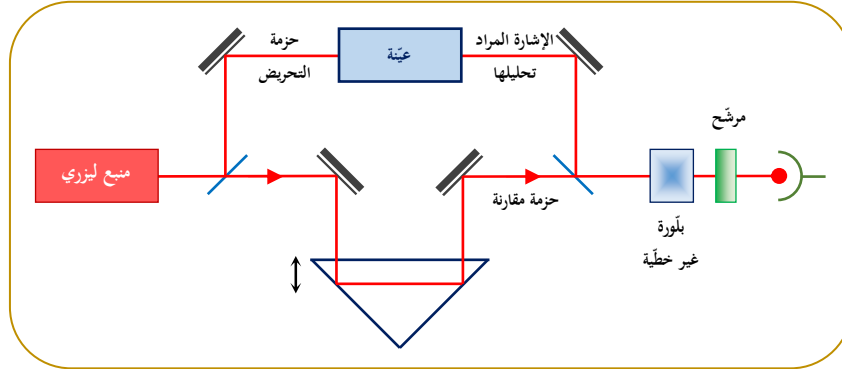
$n_e$	$n_o$	طول الموجة
2.16	2.25	$\lambda = 1.06 \mu\text{m}$
2.24	2.34	$\lambda = 0.53 \mu\text{m}$

: KDP

$n_e$	$n_o$	طول الموجة
1.46	1.49	$\lambda = 1.06 \mu\text{m}$
1.47	1.51	$\lambda = 0.53 \mu\text{m}$

6. مسألة. التحليل الزمني لإشارة ضوئية من رتبة الـ ps .

لا يتم التحليل الزمني لإشارة ضوئية من رتبة الـ ps أو أجزاء الـ ps بسبب عدم وجود كواشف إلكترونية سريعة بما فيه الكفاية. ونستطيع في بعض الأحيان استخدام حزمة مرجعية وأخرى ناجمة عن تفاعل لاختطي (على سبيل المثال جمع تواترين) في بلورة لتحقيق تقطيع زمني للإشارة المراد تحليلها. وذلك وفق المخطط الآتي :



يجري تقسيم الحزمة الليزرية إلى جزأين باستخدام صفيحة مجهر. يسهم الجزء الوارد على العينة (الحزمة المهيججة) بتوليد الحزمة الإشارة ذات التواتر  $\nu_1$  في حين يمر الجزء الآخر من الحزمة الليزرية عبر خط تأخير يمكن التحكم به ويشكل ما نسميه الحزمة المرجعية ذات التواتر  $\nu_2$ . تتداخل الحزمتان الإشارة والمرجعية في البلورة غير الخطية ونسجل الاستطاعة الضوئية عند التواتر  $\nu_3$  عند مخرج البلورة غير الخطية بدلالة التأخير المتغير  $\tau$ .

1. شرط توافق الصفحة.

نحقق جمع التواترين  $\nu_1$  للحزمة المرجعية و  $\nu_2$  للحزمة الإشارة باستخدام بلورة البولة. ويجري تحقيق توافق في الصفحة من النمط II وفقاً ل :

$$O_{\nu_1} + E_{\nu_2} \rightarrow O_{\nu_3}$$

اكتب شرط توافق الصفحة بدلالة قرائن الانكسار العادية والغريبة عند مختلف التواترات ثم اكتب عبارة زاوية توافق الصفحة  $\theta_m$ .

**تطبيق :** بفرض أنّ الموجتين الإشارة والمرجعية لهما التواتر نفسه (طول الموجة في الخلاء الموافق لهذا هو

$n_o = 1.4827$  و  $\lambda = 689.2 \text{ nm}$ ) وأنّ قرينتي الانكسار في بلورة البولة عند طول الموجة السابق هما :

$n_e = 1.5884$  في حين أنّ  $n'_o = 1.5198$  عند طول الموجة  $\lambda = 344.6 \text{ nm}$ .

احسب زاوية توافق الصفحة  $\theta_m$ . سنفترض فيما يلي أنّ شرط توافق الصفحة محقق.

2. ما هي عناصر تنسور الطواعية غير الخطية من الرتبة الثانية  $\chi_{ijk}^{(2)}$  التي تساهم في جمع التواترين ضمن الشروط

الواردة في السؤال 1؟ لماذا نستطيع أن نعتبر، حتى ولو كان  $\nu_1 = \nu_2$ ، أننا أمام جمع حزمتين مختلفتين؟ هل

نحصل على موجة إشارة بتواتر  $2\nu_1$  (أو  $2\nu_2$ ) بوجود إحدى الحزمتين السابقتين فقط في البلورة؟ لماذا؟

3. شدة الإشارة عند تواتر الجمع.

سوف نفترض في السؤالين 3 و 4 أن الحزم المستخدمة هي حزم مستمرة وسنأتي في الطلب 5 إلى المنابع النبضية.

وإذا افترضنا أيضاً أنّ عدم الخطية تتبع بصورة شبه آنية التغيرات الزمنية لشدات الحزم الضوئية، أمكننا أن نطبق

نتائج السؤالين 3 و 4 عند كلّ لحظة  $t$ .

بفرض أنّ الحزمة الإشارة عند  $\nu_1$  أقل شدة بكثير من الحزمة المرجعية عند التواتر  $\nu_2$  بحيث يمكننا إهمال التخماد

الطارئ على الحزمة المرجعية نتيجة التحول الكبير للحزمة الإشارة إلى التواتر  $\nu_3$ .

ضمن هذه الشروط اكتب عبارة الشدة  $I_3(\ell)$  للموجة عند التواتر  $\nu_3$  بدلالة الشدتين  $I_1(0)$  و  $I_2(0)$  للموجتين

$\nu_1$  و  $\nu_2$  الواردتين على البلورة غير الخطية. اكتب أيضاً شدة الموجة الإشارة  $I_1(\ell)$  عند مخرج البلورة. ثمّ اكتب

عبارة الطول  $a$  من البلورة الذي تتحول فيه الإشارة عند  $\nu_1$  كلياً إلى  $\nu_3$ .

تطبيق عددي :

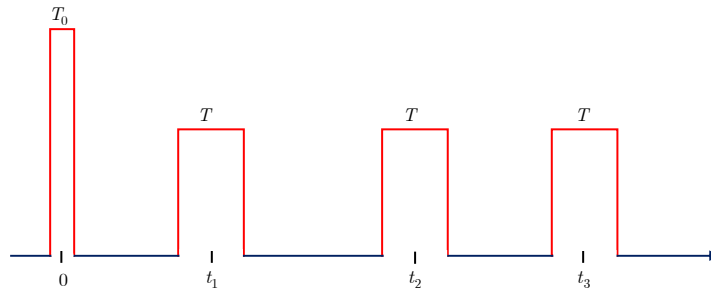
احسب  $a$  إذا علمت أنّ  $I_2(0) = 1 \text{ MW/cm}^2$  و  $\lambda_1 = \lambda_2 = 689.2 \text{ nm}$  وأنّ معامل عدم الخطية

$$d = 1.4 \times 10^{-12} \text{ m/V} \text{ و } \epsilon_0 = 1/36\pi 10^9$$

4. كيف تصبح عبارات  $I_1(\ell)$  و  $I_3(\ell)$  في الحالة التي يكون فيها التحويل  $\nu_1 \rightarrow \nu_3$  صغيراً (كأن يكون طول

البلورة أصغر بكثير من  $a$  :  $\ell \ll a$  ؟

5. سوف نبقي في الحالة  $\ell \ll a$  وسنفترض أنّ الإشارة لها الشكل الآتي :



حيث تمثل النبضة الأولى متبقيات من الحزمة المهيجة وتكون مدتها  $T_0$  مطابقة لمدة الحزمة المرجعية والحزمة

المهيجة). أما بقية النبضات فتؤلف معطيات يلزم استخراجها (مدة كلّ نبضة "معطى"  $T > T_0$ ).

ليكن  $\tau$  هو التأخير المتغير بين حزمتي الإثارة و المرجعية. عندما تكون  $\tau = 0$  تصل الحزمتان بأن واحد إلى البلورة.

يتمتع الكاشف الضوئي بزمن إجابة أكبر بكثير من مدة الإشارات المدروسة بحيث يكون للإشارة الكهربائية الناتجة الشكل :

$$S(\tau) = K \int I_3(t, \tau) dt$$

ارسم المنحني  $S(\tau)$  إذا علمت أنّ الإشارة لا تضمّ إلا نبضة واحدة هي متبقيات من الحزمة المهيجة وتكون مدتها  $T_0$  مطابقة لمدة الحزمة المرجعية.

أعد السؤال السابق إذا ضمت الإشارة بالإضافة إلى ما سبق نبضة معطيات مدتها  $T > T_0$  ومنزاحة بمقدار  $t_1$  بالنسبة إلى الحزمة المهيجة.

أعد السؤال السابق إذا ضمت الإشارة بالإضافة إلى ما سبق عدة نبضات معطيات. ماذا تستنتج؟ ماذا يحصل عندما يكون  $T \ll T_0$ ؟

6. هل يمكننا استخدام الطريقة السابقة في ال echantillonage عندما :

- لا يكون الشرط  $\ell \ll a$  محققاً؟

- عندما يكون للحزمة المرجعية وللمعطيات أشكالاً زمنية لا على التعيين؟

## الفصل الخامس

# المضخمات الوسيطة والهزانات الوسيطة

- I. التضخيم الوسيطي-الهزاز الوسيطي
  - 1.I. مقدمة
  - 2.I. المضخم الوسيطي-حساب الريح
  - 3.I. الهزاز الوسيطي - شرط العتبة
    - ◆ الهزاز مضاعف التجاوب
    - ◆ الهزاز بسيط التجاوب
- II. توافق الصفحة في التفاعل الوسيطي
  - ◆ توافق الصفحة من النمط I
  - ◆ توافق الصفحة من النمط II
- III. مسح التواترات في الهزاز الوسيطي
- IV. الاستطاعة عند الخرج وإشباع المضخة في هزاز وسيطي



## I. التضخيم الوسيطي-الهزاز الوسيطي

### 1.1. مقدمة

ينشأ كل من التضخيم الوسيطي والاهتزاز الوسيطي عن تفاعل موجة عالية الشدة بتواتر  $\omega_3$  تسمى الموجة المضخة مع بلورة غير خطية. ينجم عن هذا التفاعل موجتان تسمى الأولى الموجة الإشارة بتواتر  $\omega_1$  والثانية الموجة الوهم بتواتر  $\omega_2$  بحيث يكون  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . و يمكن النظر إلى هذه الآلية غير الخطية على أنها معاكسة لآلية جمع تواترين التي درسناها سابقاً.

يوافق التفاعل الوسيطي من وجهة نظر فيزيائية اختفاء فوتون مُضخ بطاقة  $\hbar\omega_3$  وولادة فوتون إشارة بطاقة  $\hbar\omega_1$  وفوتون وهم بطاقة  $\hbar\omega_2$ . ونكتب شرط الحفظ الطاقة على الشكل :  $\hbar\omega_3 = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2$  أو بعبارة مكافئة :  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . أما شرط الحفظ دفع الفوتونات فنكتبه على النحو :  $\hbar\vec{k}_3 = \hbar\vec{k}_1 + \hbar\vec{k}_2$  أو بعبارة مكافئة :  $\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$  وهذا يوافق شرط توافق الصفحة الذي تحدّثنا عنه بالتفصيل سابقاً. ويمكن التعبير عن الشرط السابق باستخدام قرائن الانكسار  $n_1, n_2, n_3$  وذلك عندما تكون الحزم الضوئية ذات منحى واحد وتنتشر في اتجاه واحد، فنكتب :

$$n_3\omega_3 = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$$

نبرهن فيما بعد أنه عندما نرسل إلى البلورة غير الخطية، إضافة إلى الموجة المضخة، موجة إشارة ضعيفة الشدة فإن هذه الموجة سوف تتضخم ومن هنا تأتي التسمية : التضخيم الوسيطي. ونستطيع توظيف هذا التضخيم في دعم الاهتزاز بوضع البلورة غير الخطية في حجرة تجاوب ومن هنا تأتي التسمية : الاهتزاز الوسيطي. عندما تكون الحجرة متجاوبة فقط مع تواتر الموجة الإشارة نقول إننا حققنا هزازاً وسيطياً بسيطاً في حين نقول إننا حققنا هزازاً وسيطياً مضاعف التجاوب عندما تكون الحجرة متجاوبة مع تواتري الموجتين الإشارة و الوهم.

لحساب الريح في المضخم الوسيطي أو لتحديد شرط العتبة في الهزاز الوسيطي، سوف نعود إلى المعادلات:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} &= \frac{-\alpha_1}{2} A_1 - i\lambda A_3 A_2^* e^{-i\Delta kz} \\ \frac{dA_2}{dz} &= \frac{-\alpha_2}{2} A_2 - i\lambda A_3 A_1^* e^{-i\Delta kz} \\ \frac{dA_3}{dz} &= \frac{-\alpha_3}{2} A_3 - i\lambda A_1 A_2 e^{+i\Delta kz} \end{aligned}$$

سوف نفترض أنّ تخامد الموجة المضخة بسبب التفاعل اللاخطي مع البلورة مهمل بحيث نستطيع أن نكتب

$$(2) \quad A_3(z) = A_3(0)$$

كما سنفترض أيضاً أنّ شرط توافق الصفحة محقق أي

$$(3) \quad \vec{k}_3 - (\vec{k}_1 + \vec{k}_2) = n_3\omega_3 - (n_1\omega_1 + n_2\omega_2) = 0$$

في الحقيقة إنّ تحقق شرط توافق الصفحة في الهزاز الوسيطي يسمح بتحديد تواترات الأمواج الصادرة وسنرى عند دراستنا للهزاز الوسيطي كيفية تغيير هذه التواترات على مجال كبير من الطيف بحيث يمكننا القول بأنّ الهزازات الوسيطية تشكّل منابع ضوئية متماسكة قابلة لتغيير طول الموجة على مجال واسع من الطيف الكهرومغناطيسي.

## 2.1. المضخم الوسيطي - حساب الريح

باستخدام العلاقتين  $A_3(z) = A_3(0)$  و  $\Delta k = 0$  تأخذ المعادلات (1) الشكل الآتي:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dA_1}{dz} = \frac{-\alpha_1}{2} A_1 - i \frac{g}{2} A_2^* \\ \frac{dA_2^*}{dz} = \frac{-\alpha_2}{2} A_2^* + i \frac{g^*}{2} A_1 \end{cases}$$

حيث افترضنا

$$(5) \quad g = 2\lambda A_3(0) = \frac{2d}{c} \left( \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{n_1 n_2 n_3} \right)^{1/2} A_3(0)$$

كما نعرف المقدار

$$(6) \quad G^2 = gg^* = \frac{4d^2}{c^2} \left( \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{n_1 n_2 n_3} \right) A_3(0) \times A_3^*(0)$$

ولمّا كان  $A_3(0) \times A_3^*(0) = \frac{2I_3}{\epsilon_0 c \omega_3}$  ، استنتجنا أنّ

$$(7) \quad G^2 = gg^* = \frac{8d^2 \omega_1 \omega_2}{\epsilon_0 c^3 n_1 n_2 n_3} I_3$$

سوف نفترض أنّ البلورة لا تمتصّ عند  $\omega_1$  و  $\omega_2$  أي إنّ  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  وبهذا تصبح المعادلات (4) بالشكل:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{dA_1}{dz} = -i \frac{g}{2} A_2^* \\ \frac{dA_2^*}{dz} = +i \frac{g^*}{2} A_1 \end{cases}$$

ومنه نجد باشتقاق المعادلة الأولى مرة ثانية أنّ

$$(9) \quad \frac{d^2 A_1}{dz^2} = \frac{gg^*}{4} A_1$$

بمكاملة المعادلة السابقة آخذين بعين الاعتبار أنّه في حالة المضخم الوسيطي نرسل فقط الموجة الإشارة إلى البلورة مع الموجة المضخمة أي  $A_1(0) \neq 0$  في حين تكون الموجة الوهم معدومة  $A_2(0) = 0$  فنجد أنّ:

$$(10) \quad A_1(z) = A_1(0) \text{ch}\left(\frac{G}{2} z\right)$$

أي إنّ

$$A_1(z) \times A_1^*(z) = A_1(0) \times A_1^*(0) \times \text{ch}^2\left(\frac{G}{2} z\right)$$

ومنه نكتب

$$(11) \quad \frac{I_1(z)}{I_1(0)} = \text{ch}^2\left(\frac{G}{2} z\right)$$

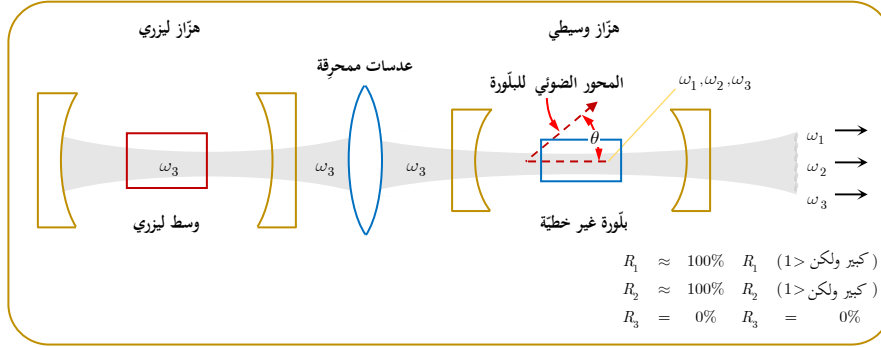
فإذا كان  $Gz \gg 1$  أصبح لدينا

$$(12) \quad \frac{I_1(z)}{I_1(0)} \cong \frac{1}{4} e^{Gz}$$

ونبرهن أنّه، حتى في حالة استطاعات عالية جداً للموجة المضخمة  $G \approx 1 \text{ cm}^{-1}$ ، فإنّ الريح الناتج عن التضخيم متواضع جداً بحيث أنّ الاستخدام الأمثل للتفاعل الوسيطي يكون بوضع البلورة ضمن حجرة التجاوب لتحقيق الاهتزاز الوسيطي.

### 3.1. الهزاز الوسيطى-شرط العتبة :

تتواجد البلورة اللاخطية في حجرة متجاوبة مؤلفة من مرآتين كما يظهر هذا من الشكل (1). تكون المرآتان شفافتين بالنسبة لتواتر الموجة المضخة  $\omega_p$  في حين تعكسان بشدة  $\omega_i$  و  $\omega_s$  (في حالة الهزاز الوسيطى مضاعف التجاوب) أو تعكسان بشدة فقط  $\omega_s$  في حالة الهزاز الوسيطى البسيط. تسمح المرآة الثانية بنفوذية بسيطة  $T$  للموجة  $\omega_s$  لتتمكن من استخلاصها من الحجرة.



الشكل (1): مخطط الهزاز الوسيطى

سوف نأخذ بعين الاعتبار عند استخدامنا للمعادلات (4) الضياع داخل الحجرة. ومردّ هذا الضياع أمران : أولهما أنّ الريح الوسيطى لا يتم إلا إذا كان للحزم الثلاث  $\omega_s$  و  $\omega_i$  و  $\omega_p$  منحى الانتشار ذاته أي فقط جهة الذهاب إذ إنّ شرط توافق الصفحة محقق في جهة الذهاب وليس في جهة الإياب، وثانيهما أنّ المرآتين لا تتمتعان بمعامل  $R$  يساوي تماماً الواحد فينشأ بالتالي ضياع في جهتي الذهاب و الإياب، أضف إلى ذلك الضياع الناجم عن ظاهرة الانعراج.

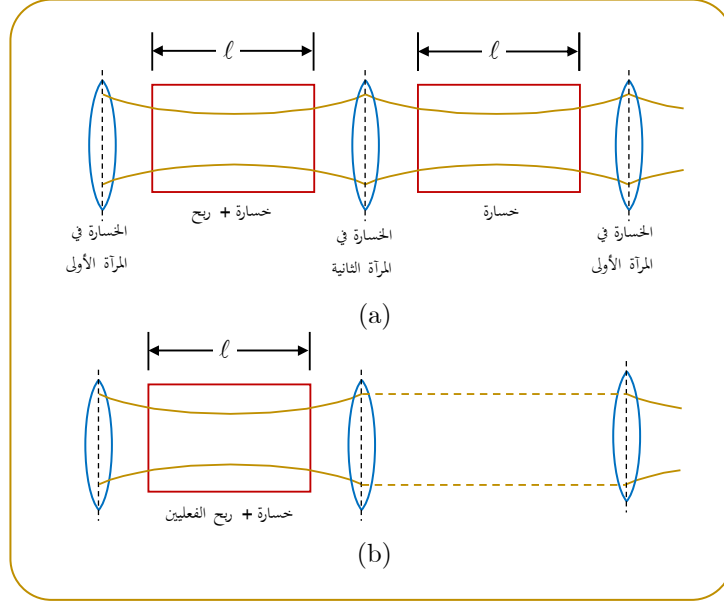
لهذا سوف نعيد تعريف معاملات الضياع التي تظهر في المعادلات (4) كما يلي: لنفترض بعد ذهاب وإياب للحزمة داخل الحجرة و بغياب المفعول الوسيطى  $\lambda = 0$ ، ضُربت شدة الموجة الواردة ذات التواتر  $\omega_i$  بالمعامل  $\beta_i$  :

$$(13) \quad I_i(2d) = \beta_i I_i(0)$$

حيث وضعنا  $\beta_i = \exp(-\gamma_i \ell)$  و  $\ell$  هو طول البلورة غير الخطية، انظر الشكل (2).

وبهذا يصبح معامل الضياع الفعلي  $\gamma_i = -\ln \beta_i / \ell = \Gamma_i / \ell$  الذي يسمح لنا بإعادة كتابة المعادلات (4) باستبدال  $\gamma_i$  بـ  $\alpha_i$  آخذين بعين الاعتبار أنّ الأمواج  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  تنتشر داخل بلورة طولها  $\ell$  ووفق المنحى  $z > 0$ .

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{dA_1}{dz} = \frac{-\gamma_1}{2} A_1 - i \frac{g}{2} A_2^* \\ \frac{dA_2^*}{dz} = \frac{-\gamma_2}{2} A_2^* + i \frac{g^*}{2} A_1 \end{cases}$$



الشكل (2): الضياع في الهزاز الوسيطي:

(a) ضياع في المرآة الأولى عند الذهاب والإياب، ضياع في المرآة الثانية عند الإياب وضياع في البلورة اللاخطية.

(b) اختزال الضياعات السابقة إلى ضياع فعلي وحيد في البلورة غير الخطية ذات الطول  $l$ .

❖ الهزاز مضاعف التجاوب.

إذا افترضنا أنّ الرياح الوسيطي عالٍ بما فيه الكفاية ليعادل الضياع الطارئ على كل من الموجة الإشارة والموجة الوهم

في حالة الهزاز مضاعف التجاوب، استطعنا أن نكتب في نظام دائم :

$$(15) \quad \frac{dA_1}{dz} = \frac{dA_2}{dz} = 0$$

في الحقيقة، لن يتحقق الشرط السابق إلا إذا كانت شدة الموجة المضخمة تساوي شدة العتبة أي إنّ:

$$(16) \quad I_3 = I_{th}$$

نسمي الشرط السابق شرط العتبة في الهزاز الوسيطي مضاعف التجاوب. وسنبحث الآن على قيمة هذه الشدة

العتبة :

يُكتب الشرط (16) بالشكل :

$$(17) \quad \begin{aligned} \gamma_1 A_1 + ig A_2^* &= 0 \\ ig^* A_1 - \gamma_2 A_2^* &= 0 \end{aligned}$$

حتى تقبل هذه الجملة حلاً غير الحلال التافه  $A_1 = A_2 = 0$  ينبغي أن يكون :

$$(18) \quad \gamma_1 \gamma_2 = gg^* = G^2 = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\ell^2}$$

وباستخدام عبارة  $G^2$  من العلاقة (7) نجد أنّ شدة العتبة هي:

$$(19) \quad I_{th} = \frac{\varepsilon_0 c^3 n_1 n_2 n_3}{8 \omega_1 \omega_2} \times \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\ell^2 d^2}$$

وهكذا نجد أنّ شدة العتبة متناسبة عكسياً مع كل من مربع طول البلورة والمعامل غير الخطي.

❖ الهزاز بسيط التجاوب.

في هذه الحالة، لا تُبنى الموجة الوهم خلال ذهاب وإياب في الحجرة والضياع الوحيد الذي تخضع له يأتي من البلورة غير الخطية وسوف نعتبره مهملًا ( $\alpha_2 = 0$ ).  
سوف نفترض كما افترضنا في حالة الهزاز مضاعف التجاوب أنّ تخامد الموجة المضخة مهمل وأنّ شرط توافق الصفحة محقق. وبهذا تصبح المعادلات (14) على الشكل:

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{dA_1}{dz} = \frac{-\gamma_1}{2} A_1 - i \frac{g}{2} A_2^* \\ \frac{dA_2^*}{dz} = i \frac{g^*}{2} A_1 \end{cases}$$

عندما تكون  $z = 0$  فإنّ  $A_2(0) = 0$  إذ لا توجد موجة عند مدخل البلورة بتواتر  $\omega_2$  لكون الحجرة غير متجاوبة عند هذا التواتر في حين أنّ  $A_1(0) \neq 0$ .  
وعندما تكون نسبة التحويل  $A_3 \rightarrow A_1$  ضعيفة، يمكننا أن نكتب  $A_1(z) \approx A_1(0)$  وبهذا يعطي تكامل المعادلة الثانية من جملة المعادلات (20):

$$(21) \quad A_2^*(z) \approx ig^* A_1(0) \frac{z}{2}$$

وتصبح بالتالي المعادلة الأولى من جملة المعادلات (20) بالشكل:

$$\frac{dA_1}{dz} \approx \left( \frac{-\gamma_1}{2} + \frac{gg^*}{4} z \right) A_1(0)$$

وبالمكاملة على طول البلورة نجد أنّ:

$$(22) \quad A_1(\ell) \approx \left( 1 - \frac{\gamma_1 \ell}{2} + \frac{gg^*}{8} \ell^2 \right) A_1(0)$$

وفي نظام دائم يكون  $A_1(\ell) = A_1(0)$  أي إنّ الموجة الإشارة لا تزداد أسياً أثناء مسير ذهاب وإياب داخل الحجرة. وبذلك يصبح شرط العتبة على الشكل:

$$(23) \quad \frac{\gamma_1 \ell}{2} = \frac{gg^*}{8} \ell^2 = \frac{G^2 \ell^2}{8}$$

وهكذا نجد أنّ:

$$(24) \quad G^2 = \frac{4\gamma_1}{\ell} = \frac{4\Gamma_1}{\ell^2}$$

وباستخدام عبارة  $G^2$  نجد أنّ:

$$(25) \quad I'_{th} = \frac{\varepsilon_0 c^3 n_1 n_2 n_3}{8\omega_1 \omega_2} \times \frac{4\Gamma_1}{\ell^2 d^2}$$

بمقارنة شدتي العتبة في حالتي الهزاز الوسيطى مضاعف التجاوب والهزاز الوسيطى بسيط التجاوب نجد أنّ:

$$(26) \quad \rho = \frac{I'_{th}}{I_{th}} = \frac{4}{\Gamma_2}$$

ف عندما يكون  $\Gamma_2 = 4\%$  يكون  $\rho = 100$ .

أي إنّ الهزاز مضاعف التجاوب يتطلّب استطاعة للموجة المضخة أقل مما يتطلبه الهزاز بسيط التجاوب إلا أنّ تحقيقه تجريبياً يكون أكثر صعوبة لظهور مشاكل في المرايا المكوّنة للحجرة ولصعوبة تحقيق استقرار في الاهتزازات المتولّدة.

وتماماً كما يحصل في الليزر فإنّ إقلاع الاهتزازات يتمّ ابتداءً من الضجيج المتواجد في الحجرة : الضجيج الوسيطي عند  $\omega_1$  (للهاز بسيط التجاوب) أو عند  $\omega_1$  و  $\omega_2$  (للهاز مضاعف التجاوب) والإصدار التلقائي في حالة الليزر.

## II. توافق الصفحة في التفاعل الوسيطي

عندما يكون انتشار جميع الحزم الضوئية وفق منحى واحد فإنّ شرط توافق الصفحة يصبح :

$$n_3\omega_3 = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$$

يمكننا تحقيق هذا الشرط في بلورة غير خطية مضاعفة الكسر وتكون زاوية توافق الصفحة  $\theta_m$  التي يصنعها منحى

الانتشار مع المحور البصري للبلورة محددة كما يلي :

♦ توافق بالصفحة من النمط I :  $E_{\omega_3} \rightarrow O_{\omega_1} + O_{\omega_2}$  ، تحقق  $\theta_m$  العلاقة التالية:

$$(27) \quad \left[ \left( \frac{\cos \theta_m}{n_o^{\omega_3}} \right)^2 + \left( \frac{\sin \theta_m}{n_e^{\omega_3}} \right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{\omega_1}{\omega_3} n_o^{\omega_1} + \frac{\omega_2}{\omega_3} n_o^{\omega_2}$$

♦ توافق بالصفحة من النمط II :  $E_{\omega_3} \rightarrow E_{\omega_1} + O_{\omega_2}$  ، تحقق  $\theta_m$  العلاقة التالية:

$$(28) \quad \left[ \left( \frac{\cos \theta_m}{n_o^{\omega_3}} \right)^2 + \left( \frac{\sin \theta_m}{n_e^{\omega_3}} \right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{\omega_1}{\omega_3} \left[ \left( \frac{\cos \theta_m}{n_o^{\omega_1}} \right)^2 + \left( \frac{\sin \theta_m}{n_e^{\omega_1}} \right)^2 \right]^{-1/2} + \frac{\omega_2}{\omega_3} n_o^{\omega_2}$$

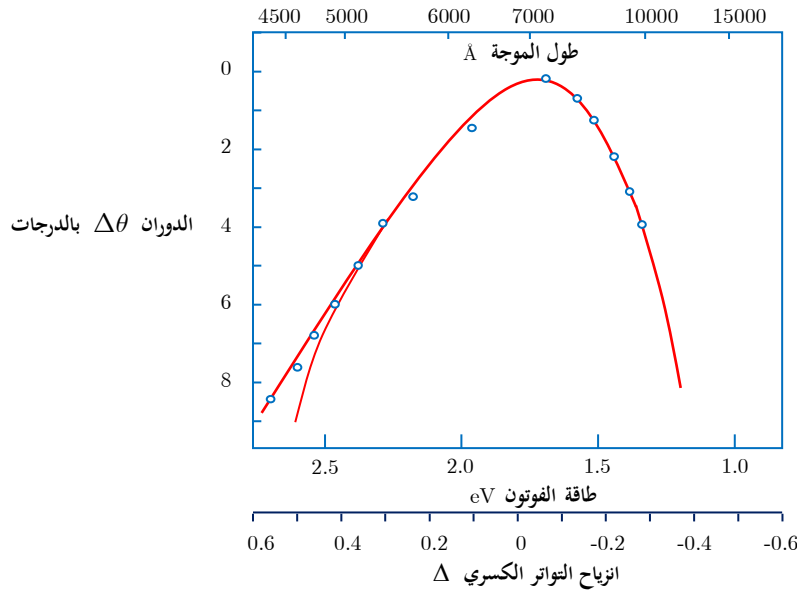
إلا أننا في بعض الحالات نسعى إلى تحقيق توافق في الصفحة عند  $\theta = 90^\circ$  وذلك عن طريق تغيير درجة حرارة البلورة كما يحصل في حالة بلورة نيوبات الليتيوم  $LiNbO_3$  التي تُضخ عادة في المجال المرئي.

## III. مسح التواترات في الهزاز الوسيطي

نعلم أن تواتري الموجة الإشارة و الموجة الوهم مرتبطان فيما بينهما بالعلاقة  $\omega_p = \omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  . ولكن

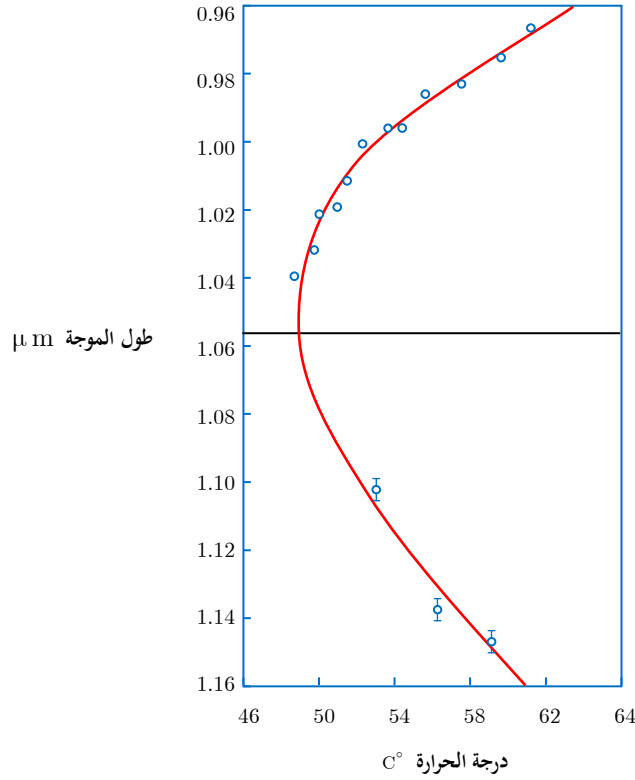
السؤال هنا ما هو التواتر  $\omega_1$  الذي سيصدر من الهزاز الوسيطي؟

في الواقع تكون التواترات الصادرة هي تلك التي تحقق بأن واحد الشرط  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  و شرط توافق الصفحة.



الشكل (3) : تغيير التواتر في الهزاز الوسيطي عن طريق تدوير البلورة.

يجري مسح التواترات بطريقتين إما بتدوير البلورة كما في الشكل (3) وإما بتغيير درجة حرارتها كما في الشكل (4).



الشكل (4): تغيير التواتر في الهزاز الوسيط عن طريق تغيير درجة الحرارة

يتعلق الاستقرار الطيفي للهزاز الوسيط بالعرض الطيفي للحزمة المضخة  $\Delta\omega_p$  و التبدد في البلورة  $\frac{dn}{d\omega}$  وبنية الحجرة الرنانة. وغالباً ما تتراوح قيمة هذا الاستقرار الطيفي بين  $0.1-5 \text{ cm}^{-1}$ .

#### IV. الاستطاعة عند الخرج وإشباع المضخة في هزاز وسيطي

نعلم أنه في حالة هزاز ليزري في نظام دائم يكون الريح مساوياً لقيمته عند العتبة وذلك مهما كانت شدة الموجة المضخة. نجد الظاهرة نفسها في حالة الهزاز الوسيط. فعندما تصل  $I_3$  إلى قيمتها العتبة يعادل الريح تماماً الضياع وتصبح الجملة عند عتبة الاهتزاز. إذا أصبحت  $I_3$  أكبر من تلك القيمة العتبة، فإنّ الريح لا يستطيع أن يزداد ويبقى مساوياً لقيمته العتبة وإلا لما استطعنا تحقيق نظام دائم، إذ ستزداد  $I_1$  و  $I_2$  مع الزمن لِمَا  $G > G_{th}$ . و لِمَا كان  $G$  متناسباً مع  $\sqrt{I_3}$ ، كما في المعادلة (7)، فهذا يقتضي أن تُشبع الشدة  $I_3$  داخل الهزاز عند قيمة مساوية لقيمتها عند العتبة.

## تمرينات ومسائل

1. مسألة. تضمّ هذه المسألة جزأين متتاليين و B مرتبطين منطقياً إلا أنه يمكننا معالجة معظم الجزء B دون استخدام نتائج الجزء A.

A. المضخم الوسيطي.

نأخذ بلورة غير خطية من الرتبة الثانية مميّزة بطواعية غير خطية  $\chi^{(2)}$  (لها بُعد مقلوب الحقل الكهربائي) ويتواجد فيها ثلاثة حقول كهربائية  $E_1, E_2, E_3$  ذات تواترات  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  متزوجة فيما بينها بفعل اللاخطية. تنتشر هذه الحقول وفق المحور  $oz$  ويمكننا باختيار مناسب لمحاور جملة الإحداثيات إغفال الخاصة

$$E_j(z, t) = \mathcal{E}_j(z) e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c., \quad k_j = n_j \frac{\omega_j}{c}$$

1. باستخدام تقريب المغلف بطيء التغير، يمكننا أن نكتب جملة المعادلات الآتية :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_1}{dz} &= i\mu_0 \frac{\omega_1 c}{2n_1} \chi^{(2)} \mathcal{E}_3(z) \mathcal{E}_2^*(z) e^{i\Delta k z} \\ \frac{d\mathcal{E}_2}{dz} &= i\mu_0 \frac{\omega_2 c}{2n_2} \chi^{(2)} \mathcal{E}_3(z) \mathcal{E}_1^*(z) e^{i\Delta k z} \\ \frac{d\mathcal{E}_3}{dz} &= i\mu_0 \frac{\omega_3 c}{2n_3} \chi^{(2)} \mathcal{E}_1(z) \mathcal{E}_2^*(z) e^{-i\Delta k z} \end{aligned}$$

حيث  $k_3 - k_1 - k_2 = \Delta k$ . اشرح باختصار كيفية الوصول إلى جملة المعادلات التفاضلية السابقة.

فيما يلي سنفترض أنّ  $\chi^{(2)}$  حقيقي. حدّد الشرط الذي يسمح لنا بهذا الافتراض.

$$2. \text{ سوف نستخدم متحولات جديدة (الطويلات المختزلة) : } A_j(z) = \sqrt{\frac{n_j}{\omega_j}} \mathcal{E}_j$$

a. بيّن أنّ تدفق الفوتونات في واحدة السطوح  $N_j$  من الحقل  $j$  متناسب مع  $|A_j|^2$  ثمّ حدّد معامل التناسب. برهن، محدداً الثابت  $\kappa$ ، أنّ :

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} &= i\kappa A_3(z) A_2^*(z) e^{i\Delta k z} \\ \frac{dA_2}{dz} &= i\kappa A_3(z) A_1^*(z) e^{i\Delta k z} \\ \frac{dA_3}{dz} &= i\kappa A_2(z) A_1(z) e^{-i\Delta k z} \end{aligned}$$

3. أوجد العلاقة بين  $dN_1/dz$ ،  $dN_2/dz$ ،  $dN_3/dz$  ثمّ عبّر عن النتيجة السابقة باستخدام الفوتونات. ما هي العلاقة العامة التي نحصل عليها هنا؟

4. سوف نفترض أنّ الشدتين الضوئيتين للموجتين  $\omega_1$  و  $\omega_2$  تبقيان ضعيفتين أمام شدة الموجة  $\omega_3$  (الموجة المضخمة) وسوف نستخدم طريقة تكرارية فنفترض أنّ المضخمة ذات شدة ثابتة :

$$A_3(z) \approx A_3(0) = |A_3(0)| e^{i\theta_3}$$

اكتب المعادلات التفاضلية المتزوجة الخاصة بـ  $A_1(z)$  و  $A_2^*(z)$ . (سنفرض أنّ  $g = 2\kappa |A_3(0)|$ ). اكتب جملة المعادلات الخطية ذات الأمثال الثابتة. باستخدام التحويل :

$$\tilde{A}_2(z) = A_2(z) e^{-\frac{i\Delta k}{2} z} \quad \text{و} \quad \tilde{A}_1(z) = A_1(z) e^{-\frac{i\Delta k}{2} z}$$





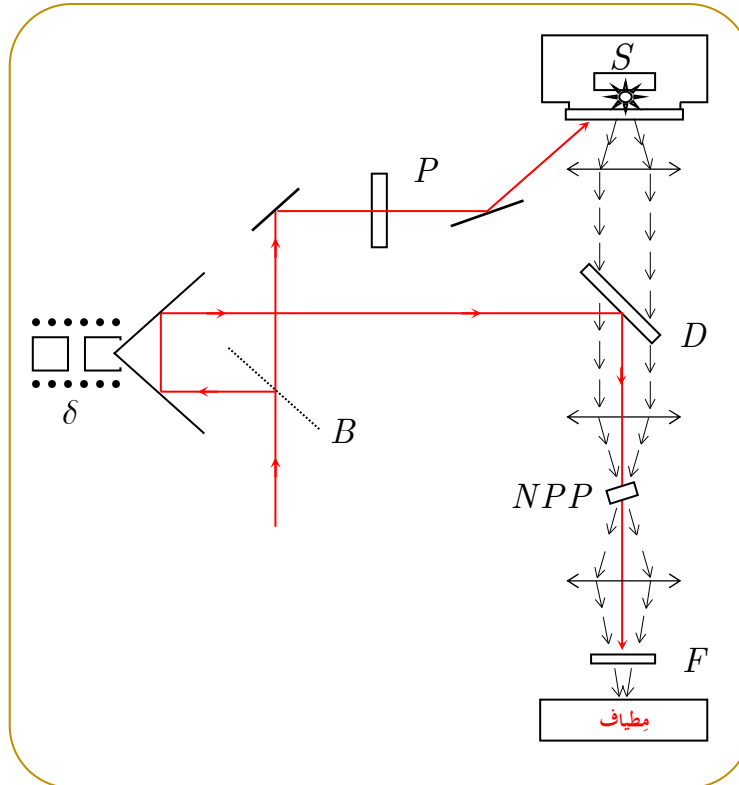
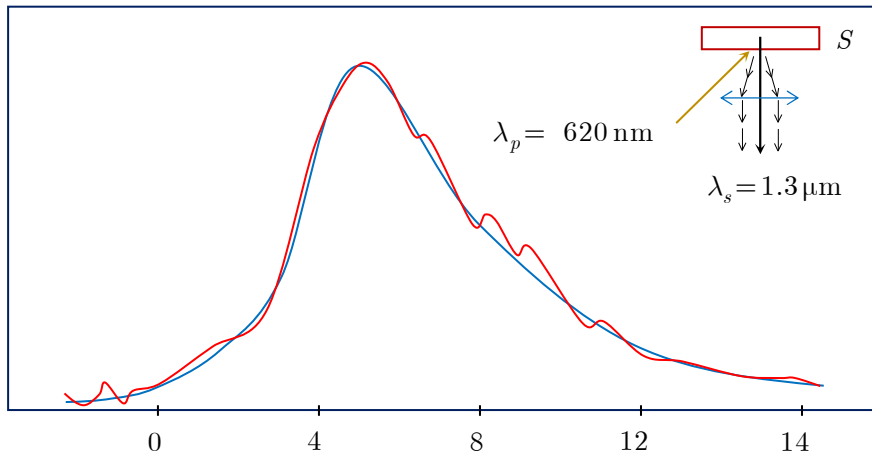
2. ذكّر بتوافق الصفحة من النمط II. ثمّ اشرح كيفية توجيه المقطّب.
3. نقترح كتابة شرط الاهتزاز للموجة الإشارة عند  $\omega_1$ . وتماماً كما هي الحال في الليزر فإنّ الحقل الكهربائي للموجة الإشارة يجب ألا يتغيّر بعد دورة في الحجرة وذلك في نظام مستقر. بكتابة الشرط الذي يحققه الطور حدّد التواترات الممكنة للاهتزازات (لاحظ أنّ الجملة تهتزّ في الحقيقة عند تواتر وحيد يوافق ضياعات أصغرية).
4. اكتب شرط عدم تغيّر الحقل الكهربائي  $E_1$  بعد دورة. أثبت وجود قيمة محددة لطويلة الموجة المضخّة عند مدخل البلورة تسمح بحدوث الاهتزازات. احسب هذه القيمة عندما تكون  $T_1$  صغيرة أمام الواحد ثمّ احسب الشدة الضوئية الموافقة لها مقدرة بـ  $\text{W.cm}^{-2}$  علماً أنّ :
- $$T_1 = 0.1 \text{ كما أنّ } \chi^{(2)} = 10^{-21} \text{mV}^{-1} \text{ و } n_1 = n_2 = n_3 = 1.5 \text{ و } \omega_1 \approx \omega_2 = 2\pi \frac{c}{10^{-6}} \text{ rad/s}$$
5. اكتب عبارة لطويلة الموجة المضخّة داخل الحجرة وذلك بعد مرآة الخروج  $M_s$  بدلالة  $A_3(D)$  وطويلة الموجة الواردة  $A_3^{\text{in}}$ . نقبل أنّ معامل النفوذية لطويلة  $A_3^{\text{in}}$  عبر  $M_s$  هو  $t_3 = T^{1/2}$ .
6. نقترح الآن كتابة شرط عدم تغيّر الحقل المضخّة بعد دورة داخل الحجرة. نقبل أنّ الحجرة متجاوبة عند التواتر  $\omega_3$  وأنّ الشرط السابق يُختزل فقط إلى شرط عدم تغير الطويلة المختزلة  $A_3$ . باستخدام نتيجة السؤال السابق اكتب عبارة لطويلة الموجة المضخّة داخل الحجرة وذلك بعد مرآة الخروج  $M_s$  بدلالة  $A_3(0)$  وطويلة الموجة الواردة  $A_3^{\text{in}}$  ثمّ اكتب أنّ هذه الطويلة تجد نفسها عند مدخل البلورة غير متغيرة. استنتج بعد ذلك علاقة بين طويلة المحو الإشارة وطويلة الموجة المضخّة الواردة  $A_3^{\text{in}}$ .
7. اكتب عبارة الاستطاعة الخارجة من الهزاز بدلالة الاستطاعة الواردة للموجة المضخّة. ثمّ ارسم المنحني الممثل للعلاقة السابقة عندما  $T_1 = 0.1$  و  $T_3 = 0.5$ . فسّر النتيجة. كيف يكون انحفاظ طاقة الموجة المضخّة؟
2. مسألة. المضخّم الوسيطي مع انحطاط في التواتر. تهدف هذه المسألة إلى دراسة تقانة التقطيع الضوئي فهي بالتالي تسمح بالحل الزمني لظواهر من رتبة أجزاء الـ  $ps$ . حيث يتمّ استخدام ليزر فمتو-ثانية عند طول الموجة  $620 \text{ nm}$  ومضخّم وسيطي يضمّ بلورة غير خطية  $\chi^{(2)}$ .
1. لنأخذ التزاوج بين الحزمة المضخّة العالية الشدة  $620 \text{ nm}$  ذات الطويلة العقدية  $\mathcal{E}_p$  والحزمة الإشارة  $1.3 \mu\text{m}$  وذات الطويلة العقدية  $\mathcal{E}_s$  وذلك داخل بلورة  $NPP$  (بلورة عضوية). حدّد المقصود من آلية وسيطية للتفاعل بين هاتين الحزمتين.
2. بفرض أنّ :
- شرط توافق الصفحة محقق بين مختلف الأمواج المتفاعلة داخل البلورة.
- شدة الموجة المضخّة عالية بما فيه الكفاية بحيث نستطيع إهمال تغيرات طوليتها نتيجة المفعول الوسيطي.
- a. بفرض أنّ المفعول اللاخطي يتبع وبأمانة التغيرات في طويلة الأمواج الضوئية وبفرض أننا في وضع انحطاط. اكتب المعادلات المتزاوجة التي تظهر تحولات طويلة موجة الإشارة  $|\mathcal{E}_s|$  وتحولات طورها  $\phi_s$  وذلك باستخدام الطواعية الفعلية  $\chi_{\text{eff}}$ .
- b. حدّد قيم طور الموجة الإشارة  $\phi_s^{\text{stat}}$  التي تكون مستقرة أثناء الانتشار. ثمّ استنتج تحولات  $|\mathcal{E}_s|$  في هذه الحالة الخاصة.

c. ادرس استقرار الحلول السابقة وذلك أمام اضطراب بسيط بالنسبة للقيمة المستقرة للطور  $\phi_s^{stat} \rightarrow \phi_s^{stat} + \varepsilon$  ماذا تستنتج؟

d. استنتج الشدة الناتجة  $I_{out}$  لحزمة الإشارة عند مخرج البلورة ذات الطول  $\ell$  وذلك بدلالة شدتها الواردة  $I_{in}$  وشدة الحزمة المضخمة  $I_p$ .

3.a. احسب الشدة وكذلك الحقل الكهربائي المرافق لموجة مضخمة ذات طاقة كلية  $1\mu\text{J}$  ومدة  $100\text{fs}$  و متمحرق على سطح  $1\text{mm}^2$ . استنتج الريح الوسيطي لبلورة ذات طول  $1\text{mm}$  وقرينة انكسار تساوي  $1.5$  وتتمتع بطواعية فعلية  $\chi_{eff} = 10^{-10}\text{mV}^{-1}$ .

b. ندرس التوهج لصباغ عضوي في مجال تحت الأحمر عند  $1.3\mu\text{m}$  وذلك بعد إثارة قصيرة  $620\text{nm}$ . برهن أنّ التفاتة السابقة تسمح بتقطيع عيبي زمني لارتخاء التهيج وذلك عند تأخير  $\delta$  مناسب بين الإثارة والمضخة.



## الفصل السادس

# المعدلات الضوئية

- I. دراسة تمهيدية
  - 1.I. مقدمة عامة
  - 2.I. المعدلات الكهروضوئية
  - 3.I. تصميم المعدلات الكهروضوئية
  - 4.I. المعدل الصوتي-الضوئي
- II. المفعول الكهروضوئي
  - 1.II. مقدمة
  - 2.II. المفعول الكهروضوئي في بلورة  $\text{KH}_2\text{PO}_4$  - دراسة حالة بسيطة

## I. دراسة تمهيدية

## 1.1. مقدمة عامة

تسمح المعدلات الضوئية بطبع المعلومات على المنابع الضوئية ومن ثم استخراج هذه المعلومات ابتداء من الضوء الصادر عنها. وفيما يلي شرح مقتضب لآلية عمل هذه المعدلات:

لا تحمل موجة ضوئية جيبية نقية أية معلومات على مدى انتشارها الزماني والمكاني. فإذا ما اختفت هذه الموجة أو انقطعت فجأة (مكانياً أو زمانياً)، تكون معلومة معينة قد وصلت إلينا (زمن التوقف أو مكان التوقف) ولكن عند ذلك أيضاً لا تعود هذه الموجة موجة جيبية نقية بل تضمّ تواترات جديدة نتيجة لهذا الانقطاع (فورييه!).

وهكذا إذا أردنا نقل المعلومات باستخدامنا لإشارة ضوئية وجب علينا تغيير إحدى المعاملات الموصفة للموجة بطريقة تسمح بإيجاد علاقة محددة وموثوقة بين التغيير والمعلومة. فيمكننا تغيير طولية الموجة أو شدتها أو تواترها أو صفحتها أو حتى حالة استقطابها إلخ. إنّ اختيارنا لمعامل دون آخر يعتمد على طبيعة المعلومة المراد نقلها وطبيعة المنبع الضوئي والوسط الناقل للضوء والتكلفة الاقتصادية التي نستطيع تخصيصها لإجراء هذه العملية.

ولعلّ من أهم الأشياء التي ينبغي أن نهتم بها هي درجة تشوّه المعلومة نتيجة لانتشارها في الوسط. فلو كنا نرغب بنقل المعلومة عبر الغلاف الجوي حيث السحب والغبار و إلخ تكون الطويلة أكثر عرضة للتشوهات من الطور ولهذا ينبغي عدم اختيار التعديل الطويلي إذ ستصل الإشارة مليئة بالضجيج. كذلك علينا أن نفكر بطريقة استخلاص المعلومات عند نقطة الوصول إذ ينبغي أن يتم هذا الاستخلاص بأقل تكلفة وبأعلى مردودية، فمن المعلوم أن كواشف الطويلة هي من أسهل وأرخص الكواشف ولكن إذا تبدّى لنا أنّ الإشارة مليئة بالضجيج وجب العدول عنها واللجوء إلى كواشف الطور أو الاستقطاب على الرغم من ارتفاع تكلفة كواشف هذا النوع وتعقّد تقاقتها. وبهذا نصل إلى أنّ تصميم النظم هو فن اختيار الأمثل والأكثر مواءمة ولهذا تتجلى الحاجة للوجود أنواع عديدة من المعدلات كي توفّر لنا سهولة في اختيار الأمثل.

## 2.1. المعدلات الكهروضوئية

عندما يخضع وسط مادي إلى تأثير حقل كهربائي فإنّ إلكترونات هذا الوسط سوف تسعى وبشكل عام إلى الحركة في منحنى هذا الحقل قياساً إلى المنحنى الآخر العمودي عليه. و بالنتيجة سوف يتمتع هذا الوسط بخاصية مضاعفة الكسر و تُعرف هذه الخاصية بالمفعول الكهربصري.

إنّ تطبيق حقل كهربائي على وسط ماديّ يؤدي إلى توليد مضاعف كسر خطي. وعليه، من أجل منحنى انتشار معين، توجد موجتان مستقطبتان خطياً وفق منحنيين متعامدين يمكنهما الانتشار دون أن تخضعا لأي تشوّه داخل الوسط ويتمّ انتشارهما وفق سرعتين مختلفتين.

فإذا كان الوسط متمائل المناحي، كان أحد منحني الاستقطابين الخطيين موازياً لمنحنى تطبيق الحقل الكهربائي و الآخر متعامداً معه. في حين يتبع منحيا الاستقطاب في وسط لا تناظري الطبيعة التناظرية الخاصة التي يتمتع بها الوسط البلوري.

وعادة ما نعبر عن الاختلاف في سرعتي الانتشار باستخدامنا للفرق بين قرينتي الانكسار  $\Delta n$  وهنا نتميز بين نوعين رئيسيين للمعدلات الكهروضوئية وذلك وفقاً للعلاقة التي تربط  $\Delta n$  بالحقل الكهربائي  $E$ . فإذا كانت العلاقة خطية حصلنا على ما يسمى مفعول بوكلز Pockels في حين نحصل على مفعول كير Kerr إذا كان  $\Delta n$  متناسباً مع مربع  $E$ .

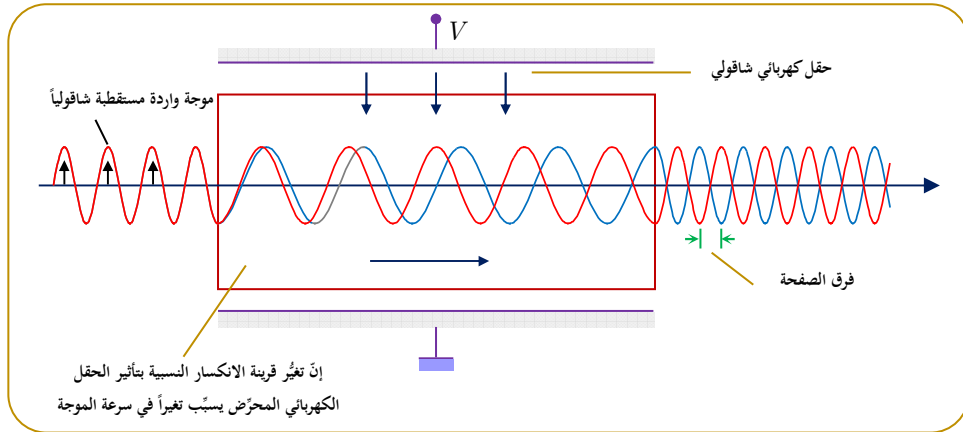
$$(1) \quad \Delta n = P E$$

$$(2) \quad \Delta n = K E^2$$

نسمي  $P$  و  $K$  على الترتيب معاملي بوكلز وكير وغالباً ما نكتب  $K$  على الشكل  $K = \lambda B$  حيث  $\lambda$  هو طول موجة الضوء المستخدم وعندها يكون  $B$  هو معامل كير (ومردّ الكتابة السابقة إلى أن تغيّر الطور بعد مسافة  $l$  يمكن كتابته على الشكل  $(2\pi/\lambda)\lambda B E^2 l$ ) وبالتالي يصبح تغيّر الطور مستقلاً عن  $\lambda$  كتقريب أولي. إذ إنّ  $B$  ما تزال متعلقة بـ  $\lambda$  عن طريق تعلقها بتبديد الوسط عند طول الموجة  $\lambda$ .

### 3.I. تصميم المعدلات الكهروضوئية

نأتي الآن إلى دراسة كيفية استخدام التغير  $\Delta n$  في تصميم المعدل الكهروضوئي، ولهذا سنبدأ بشرح آلية التعديل الطوري لكونه أكثر بساطة. يظهر الشكل (1) مخططاً لمعدّل كهروضوئي يقوم على التعديل الطوري.



الشكل (1) : التعديل الطوري باستخدام المفعول الكهروضوئي

عندما نرسل ضوءاً مستقطباً خطياً إلى وسط خاضع لتأثير حقل كهربائي عرضاني متعامد مع منحى استقطاب الضوء، يكون التغير في الطور الضوئي الناجم عن وجود حقل كهربائي هو :

$$(3) \quad \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n l$$

حيث  $l$  هو طول المسار الضوئي في الوسط و  $\lambda$  هو طول الموجة الضوئية. وباستخدامنا للعلاقة (1) نجد أنّ:

$$(4) \quad \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} l P E$$

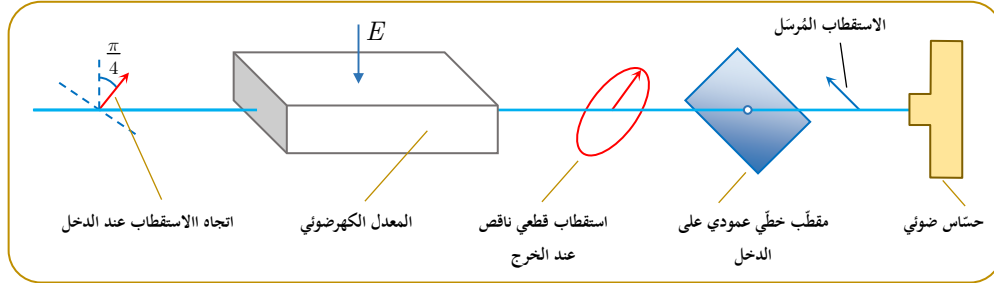
فإذا كان منشأ  $E$  هو جهد مطبق على مسافة  $d$  كتبنا:

$$(5) \quad \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{l}{d} P V$$

وهكذا يكون تعيّر الطور متناسباً مع الجهد المطبق. وغالباً ما تكون المعلومة المراد نفلها على شكل موجة جهد.

من الممكن أيضاً استخدام المفعول الكهروضوئي في تعديل طويلة الموجة ولنفهم آلية هذا الاستخدام لننظر إلى

الشكل (2)



الشكل (2) التعديل الكهروضوئي للطويلة.

نرسل إلى الوسط موجة مستقطبة خطياً بحيث يصنع الاستقطاب زاوية مقدارها  $45^\circ$  مع منحي الاستقطاب للموجتين الخطيتين اللتين يمكنهما الانتشار في الوسط دون أن تخضعاً لأي تشوه.

ولتوضيح ذلك سنفترض أنّ الوسط لا يتمتع بمضاعف كسر مسبق قبل تطبيق الحقل الكهربائي عليه وسنفترض أنّ الحقل الكهربائي يولّد مضاعف كسر وفق  $ox$  و  $oy$  بينما ينتشر الضوء وفق اتجاه المحور  $oz$ . سنفترض أيضاً أنّ منحي استقطاب الموجة الداخلة يصنع زاوية يصنع  $45^\circ$  مع المحورين  $ox$  و  $oy$  وبالتالي تكون مركبتا الموجة على المحورين  $oy$  و  $ox$  هما:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{e_0}{\sqrt{2}} \cos \omega t \\ e_y &= \frac{e_0}{\sqrt{2}} \cos \omega t \end{aligned} \quad (6)$$

حيث  $e_0 \cos \omega t$  هي الموجة الواردة.

عند مخرج البلورة تصبح مركبتا الحقل الكهربائي:

$$\begin{aligned} e_x'' &= \frac{e_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t + \delta + \varphi) \\ e_y'' &= \frac{e_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t + \delta) \end{aligned} \quad (7)$$

حيث  $\delta$  هو تأخير طوري ناجم عن مرور الحزمة في الوسط الكهروضوئي وذلك في غياب تطبيق الحقل الكهربائي

وهو لذلك واحد بالنسبة للمحورين، بينما  $\phi$  معطى بالعلاقة (3):

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n l$$

فإذا وضعنا مقطّباتاً محلاً يصنع زاوية  $90^\circ$  مع منحي استقطاب الموجة الواردة فإنّ منحي استقطاب الضوء المار

هو:

$$e_p = \frac{e_x''}{\sqrt{2}} - \frac{e_y''}{\sqrt{2}} = \frac{e_0}{2} \cos(\omega t + \delta + \phi) - \frac{e_0}{2} \cos(\omega t + \delta) \quad (8)$$

وباستخدام علاقة مثلثية بسيطة نجد أن:

$$(9) \quad e_p = e_0 \sin \frac{\phi}{2} \cdot \sin \left( \omega t + \delta + \frac{1}{2} \phi \right)$$

وهكذا تكون شدة الضوء الواصلة إلى الكاشف الضوئي معطاة بالعلاقة:

$$(10) \quad I \propto |e_p|^2 = e_0^2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2} \phi$$

حيث تتناسب  $\phi$  مع الحقل  $E$  (المفعول بوكلز) أو مع  $E^2$  (المفعول كير).

إنّ العلاقة السابقة (10) غير مرضية تماماً إذ إنّ التناسب بين الشدة و الحقل غير مباشر نتيجة وجود التابع

الجيبّي. وما يلزمنا هو بالحقيقة علاقة تناسب مباشرة بين الشدة  $I$  و الحقل  $E$ .

لحلّ هذه المشكلة -الشكل (3)- سوف نفترض إدخال تأخير طور انحيازي بقيمة  $\pi/2$  بين مركبتي الاستقطاب

قبل وصولهما إلى المحلل فنجد عندها أنّ:

$$(11) \quad I \propto e_0^2 \sin^2 \left( \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \phi \right) = e_0^2 \cos^2 \frac{1}{2} \phi$$

أي إنّ:

$$(12) \quad I \propto \frac{1}{2} e_0^2 (1 - \sin \phi)$$

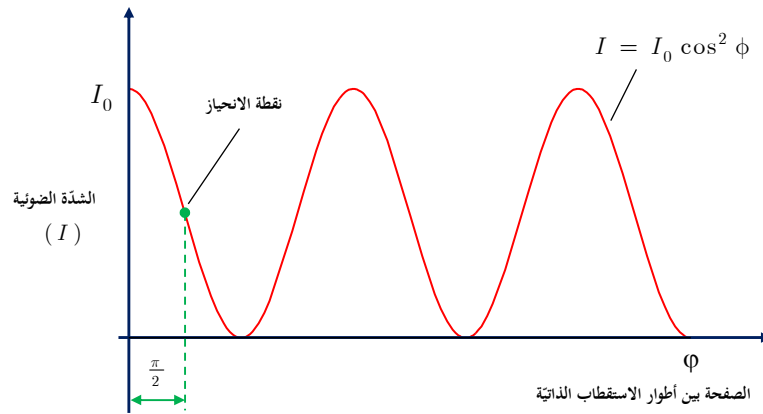
وعندما تكون  $\phi$  صغيرة نكتب:

$$(13) \quad I \propto \frac{1}{2} e_0^2 (1 - \phi)$$

وهكذا سوف يتحسن الكاشف شدة ضوئية ثابتة متناسبة مع  $\frac{1}{2} e_0^2$  وأي تغييرات تطرأ على  $I$  تعود إلى  $\phi$

وبالتالي  $E$  أو  $E^2$ ، بمعنى أنّ:

$$(14) \quad \Delta I = \frac{1}{2} e_0^2 \phi$$



الشكل (3): انحياز طوري للحصول على مخرج خطي

❖ المفعول بوكلز: في هذه الحالة يكون  $\Delta I$  متناسباً مع  $E$  وبالتالي متناسباً مع الجهد.



❖ **المفعول كبير:** في هذه الحالة تكون تغيرات الشدة  $\Delta I$  متناسبة مع مربع  $E$  وكذلك الحال مع الجهد. ولهذا نقوم باستخدام طريقة الانحياز السابقة عن طريق تطبيق حقل كهربائي خارجي على الوسط  $E_0$  فيكون لدينا:

$$(15) \quad \phi = \frac{2\pi}{\lambda} l K (E + E_0)^2 = \xi (E + E_0)^2$$

حيث  $E$  هو حقل الإشارة. عند ذلك نكتب:

$$(16) \quad \phi = \xi (E^2 + 2E E_0 + E_0^2)$$

فإذا كانت  $E \gg E_0$  كتبنا أن:

$$(17) \quad \phi \propto 2\xi E E_0 + \xi E_0^2$$

وبهذا يصبح أي تغيير في  $\phi$  متناسباً مع الحقل  $E$ .  
إن تقانات الانحياز السابقة هي تقانات شائعة الاستخدام للتخلص من العلاقات غير الخطية لتسهيل القياسات. وبهذا نجد أن استخدام الانحياز في الطور في حالة المفعول بوكلز والانحياز في كل من الطور والحقل الكهربائي في حالة المفعول كبير، مكّننا من تصميم معدل كهروضوئي يسمح بتزويد شدة ضوئية متناسبة مع الكمون المطبق.

#### 4.I. المعدّل الصوتي-الضوئي

تولّد موجة صوتية طولانية عند عبورها في وسط مادي سلسلة من الانضغاطات و التخلخلات وذلك وفقاً لمنحى الانتشار. تؤدي هذه الانضغاطات و التخلخلات إلى تغيير في كثافة الوسط مما يسبب تغييرات في قرينة الانكسار. وبهذا نصل إلى تغيير في قرينة الانكسار مرافق لتغيرات شدة الموجة الصوتية.

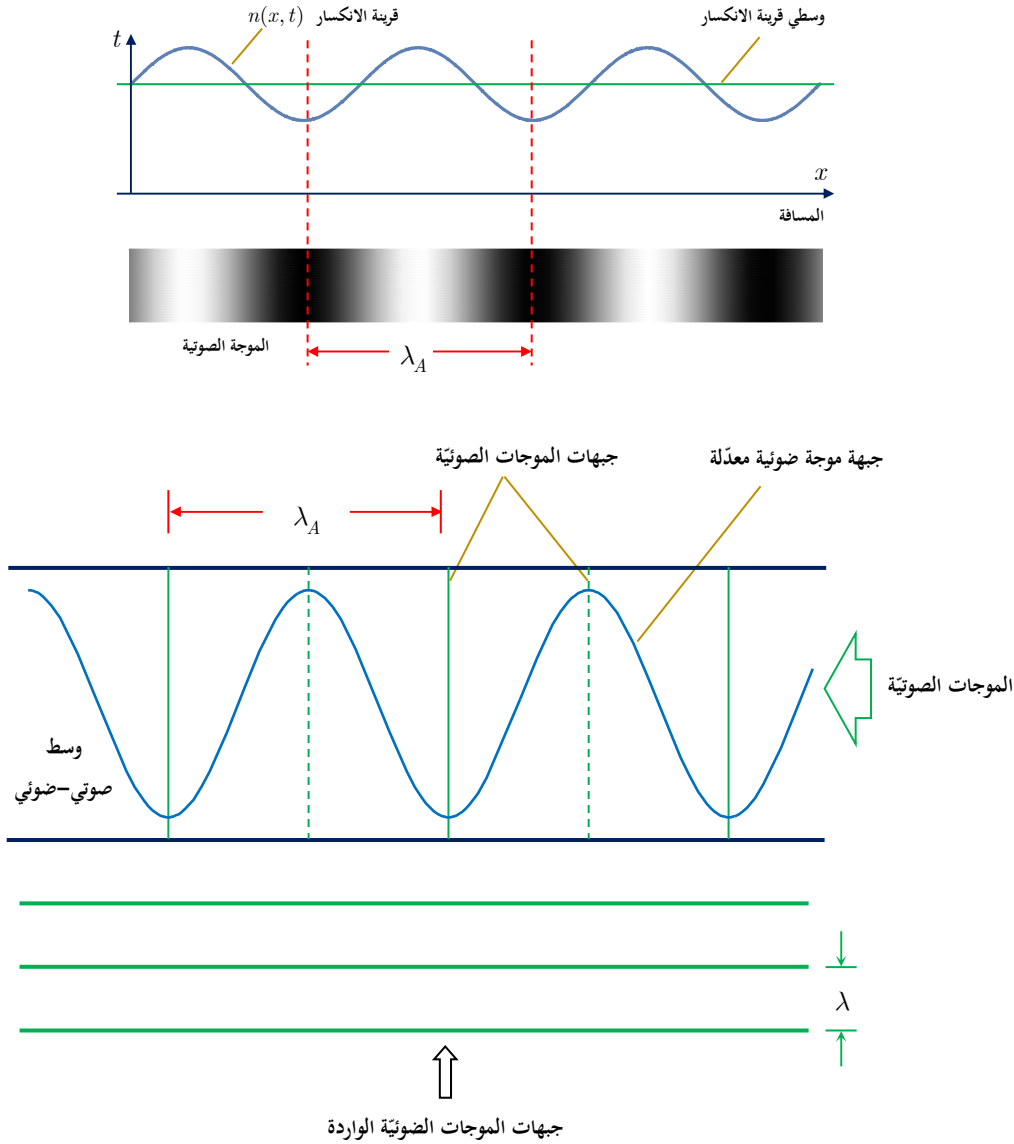
نعلم أنه بعبور الضوء في وسط مادي فإنه يخضع إلى تغيير في الطور متعلق بطول المسير الضوئي وبقرينة انكسار الوسط. وهكذا إذا عبرت موجة صوتية مستوية وسطاً مادياً وفق منحى عمودي على منحى انتشار موجة صوتية فإنه يطرأ تعديل فضائي لطور الموجة الضوئية موافق لتغيرات الموجة الصوتية ويتجلى ذلك بظهور نهايات حدية عظمية في اتجاهات محددة دون غيرها. بمعنى أنّ الموجة الصوتية تلعب دور شبكة انعراج حيث تتعلق زاوية الانحراف وشدة الضوء المنحرف بمواصفات الموجة الصوتية وبالتالي أصبح لدينا وسيلة لتعديل الضوء.

وهنا ينبغي التمييز بين حالتين أو نظامين، ففي الحالة الأولى يكون الوسط الصوتي-الضوئي رقيقاً أي إنّ المسافة التي تتفاعل فيها الموجة الضوئية مع الموجة الصوتية صغيرة وهنا يلعب الوسط بالنسبة للموجة الضوئية دور شبكة انعراج ثنائية البعد ويكون طور الموجة الضوئية الخارجة متعلقاً فقط بنقطة دخولها. يُعرف هذا النظام باسم نظام رامن - ناث Raman-Nath. أما في الحالة الثانية فإنّ الوسط يكون ثخيناً ويعاني فيه الضوء باستمرار أثناء انتشاره من إعادة توزيع . وفي هذا النظام يلعب الوسط دور شبكة انعراج طورية ثلاثية البعد. يُعرف هذا النظام باسم نظام براغ Bragg.

#### ❖ نظام رامن-ناث.

سوف ندرس بقليل من التفصيل هذا النظام. لننظر إلى الشكل (4) حيث تدخل الموجة الضوئية وسطاً تنتشر فيه موجة صوتية جيبية وفق منحى متعامد مع منحى انتشار الموجة الضوئية. وتكون ثخانة الوسط قليلة : بضع مئات من طول الموجة الصوتية. في هذه الحالة يلعب الوسط دور شبكة انعراج مكوّنة من تغيرات طورية جيبية. إنّ

التحليل الدقيق للضوء المنعرج يكون معقداً بعض الشيء ويستدعي استخدام توابع بيسل Bessel functions إذ سنجد عبارات على شكل تابع جيبي لتابع جيبي آخر وسنعود بعد قليل إلى هذه النقطة ولكن لو حاولنا الآن أن نتصور الملامح الأساسية باستخدام الحس الفيزيائي فنجد أنه إذا أخذنا مجموعة من النقاط المتباعدة عن بعضها بمسافة  $\lambda_A$  حيث  $\lambda_A$  هو طول الموجة الصوتية تكون للموجة الضوئية الطور نفسه عند جميع هذه النقاط.

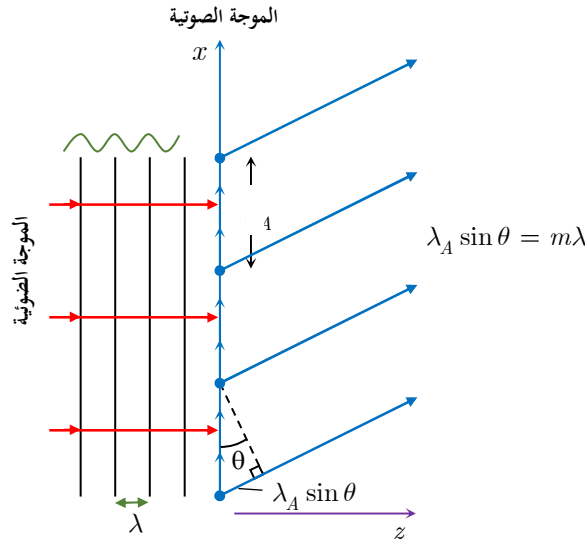


الشكل (4): مبدأ التعديل الصوتي-الضوئي

ويكون الشرط الذي تكون من أجله الأشعة الصادرة من هذه النقاط وفق منحى  $\theta$  مع العمودي على شبكة الانعراج متداخلة تداخلاً بناءً كما في الشكل (5) هو :

$$(18) \quad \frac{2\pi}{\lambda} \lambda_A \sin \theta = 2\pi m$$

حيث  $\lambda$  هو طول الموجة الضوئية و  $m$  هو عدد صحيح.



الشكل (5) : شرط التداخل البناء في نظام رامان-ناث.

لنعد إلى الشكل (4) حيث تنتشر الموجة الصوتية وفق المنحى  $ox$  ضمن الوسط ويؤدي هذا الانتشار إلى تغيير في قرينة الانكسار وفق العلاقة :

$$(19) \quad n(x, t) = n_0 + \Delta n \sin(\Omega t - Kx)$$

حيث  $n_0$  هو قرينة انكسار الوسط قبل مرور الموجة الصوتية و  $\Delta n$  هو مقدار التغير على قرينة الانكسار المتناسب طبعاً مع طول الموجة الصوتية ذات التواتر الزاوي  $\Omega$  والعدد الموجي  $K$ .  
عندما تعبر هذا الوسط موجة صوتية ذات طول موجة  $\lambda$  ووفق منحى عمودي على منحى انتشار الموجة الصوتية، فإنها تخضع لتغير في الطور وفق العلاقة:

$$(20) \quad \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} n(x, t) l = \phi_0 + \phi_1 \sin(\Omega t - Kx)$$

حيث  $l$  هو طول المسار الضوئي في الوسط وحيث

$$(21) \quad \phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} n_0 l$$

وحيث

$$(22) \quad \phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n l$$

من الواضح أنّ  $\phi_1$  متناسب مع طول الموجة الصوتية.

بفرض أنّ الموجة الضوئية تُكتب على الشكل التالي عند مدخل الوسط:

$$(23) \quad E = E_0 \exp[i(\omega t - kz)]$$

حيث تنتشر وفق المنحى  $oz$ . عند خروجها من الوسط يكون طورها قد خضع لتغيرات وفق المنحى  $ox$ .

$$(24) \quad \begin{aligned} E &= E_0 \exp\{i[\omega t - kz - \phi_0 - \phi_1 \sin(\Omega t - Kx)]\} \\ &= E_0 \exp[i(\omega t - kz - \phi_0)] \exp[-i\phi_1 \sin(\Omega t - Kx)] \end{aligned}$$

يظهر من المعامل الثاني ظهور جيب أو تجيب لتابع جيبي وبالتالي سنستخدم توابع بسل. وبهذا نكتب بعد نشر العلاقة السابقة وفق متسلسلة فورييه:

$$e^{ix \sin \theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) e^{in\theta}$$

أُن:

$$(25) \quad \begin{aligned} E = & E_0 J_0(\phi_1) \exp[i(\omega t - kz - \phi_0)] \\ & - E_0 J_1(\phi_1) \exp[i(\omega + \Omega)t - kz - Kx - \phi_0] \\ & + E_0 J_1(\phi_1) \exp[i(\omega - \Omega)t - kz + Kx - \phi_0] \\ & + E_0 J_2(\phi_1) \exp[i(\omega + 2\Omega)t - kz - 2Kx - \phi_0] \\ & + E_0 J_2(\phi_1) \exp[i(\omega - 2\Omega)t - kz + 2Kx - \phi_0] \end{aligned}$$

حيث  $J_m(\phi_1)$  هي توابع بسل ذات العمدة  $\phi_1$  وهنا اكتفينا بالحدود الثلاثة الأولى من النشر. وكما يظهر من العلاقة السابقة فإنّ المعاملات  $J_m(\phi_1)$  هي التي تحدّد مقدار انحراف الضوء. وفي حالة النظام رامان-ناث فإنّ  $\phi_1$  يكون صغيراً و عندما  $\phi_1 \ll \pi/2$  فإنّ:

$$(26) \quad J_m(\phi_1) \approx \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{2} \phi_1\right)^m$$

وعندها نكتب:

$$(27) \quad \begin{aligned} E = & E_0 J_0(\phi_1) \exp[i(\omega t - kz - \phi_0)] \\ & - \frac{1}{2} E_0 \phi_1 \exp[i(\omega + \Omega)t - kz - Kx - \phi_1] \\ & + \frac{1}{2} E_0 \phi_1 \exp[i(\omega - \Omega)t - kz - Kx + \phi_0] \end{aligned}$$

وهكذا تكون نسبة الضوء المنحرف وفق إحدى هذه الأطوار بالمقارنة مع الضوء غير المنحرف هي:

$$(28) \quad \eta = \left( \frac{\frac{1}{2} E_0 \phi_1}{E_0} \right)^2 = \frac{1}{4} \phi_1^2$$

والتي نكتبها عادة على الشكل:

$$(29) \quad \eta = \frac{\pi^2}{\lambda^2} (\Delta n)^2 l^2$$

## II. المفعول الكهروضوئي:

### 1.II. مقدمة

رأينا في الفصل الرابع أنه يمكن لموجتين مستقطبتين خطياً أن تنتشرا في الوسط وفق منحى انتشار معين دون أن تخضعاً لأي تشوه إذ يكون منحى الاستقطاب هو منحى الشعاع  $\vec{D}$  الذي يوافق منحى قرينة انكسار معينة (أي سرعة انتشار). (انتشار).

ورأينا إمكانية إيجاد هذين المنحنيين المتعامدين وكذلك تحديد لقرينتي الانكسار الخاصتين بهما باستخدامنا لمجسم القطع الناقص الدوراني الخاص بقرينة الانكسار:

$$(30) \quad \frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1$$

حيث  $x, y, z$  هي المحاور الأساسية في الديلكترتك أي المحاور التي يكون فيها الشعاعان  $\vec{E}$  و  $\vec{D}$  متوازيين. وقلنا إن وجود هاتين القرينتين يخلق ما يسمى بظاهرة مضاعف الكسر.

يوافق المفهول الكهروضوئي الخطي تغيراً في قرينتي الانكسار العادية والغريبة تحت تأثير حقل كهربائي مطبق بحيث تكون شدة هذا التغيير  $\Delta n$  متناسبة مع  $E$ .

نجد هذا المفعول في البلورات التي لا تتمتع بمركز تناظر عكسي. إذ لو افترضنا أن البلورة ذات مركز تناظر: فإن تطبيق حقل كهربائي  $E$  عليها وفقاً لمنحنى معين سوف يسبب تغيراً في قرينة الانكسار  $\Delta n_1 = sE$  حيث  $s$  هو ثابت مميز للمفعول الكهروضوئي. إذا قلبنا الآن جهة تطبيق الحقل الكهربائي تصبح عبارة التغيير في قرينة الانكسار  $\Delta n_2 = s(-E)$ . إن وجود مركز التناظر يعني أن المنحنيين السابقين متكافئان فيزيائياً أي  $\Delta n_1 = \Delta n_2$  وبالتالي فإن  $s = -s$  وهذا لا يكون صحيحاً إلا إذا كان  $s = 0$  وبالتالي لا وجود لمفعول كهروضوئي عند وجود مركز تناظر في الوسط.

لما كان الانتشار في بلورة يُوصف تماماً باستخدام القطع الناقص الوراني المتعلق بقرائن الانكسار، فإن تأثير الحقل الكهربائي على الانتشار يتجلى تماماً بذكر التغيرات التي تطرأ على الثوابت  $\frac{1}{n_x^2}, \frac{1}{n_y^2}, \frac{1}{n_z^2}$  في معادلة مجسم القطع الناقص.

وفي الأديبات: نكتب معادلة مجسم القطع الناقص بقرينة الانكسار على النحو:

$$(31) \quad \left(\frac{1}{n^2}\right)_1 x^2 + \left(\frac{1}{n^2}\right)_2 y^2 + \left(\frac{1}{n^2}\right)_3 z^2 + 2\left(\frac{1}{n^2}\right)_4 yz + 2\left(\frac{1}{n^2}\right)_5 xz + 2\left(\frac{1}{n^2}\right)_6 xy = 1$$

حيث اخترنا المحاور  $x, y, z$  موازية للمحاور الأساسية للديلكترتك وبالتالي عند انعدام الحقل الكهربائي تصبح المعادلة (31) مطابقة للمعادلة (30) أي إن:

$$(32) \quad \left(\frac{1}{n^2}\right)_1 \Big|_{E=0} = \frac{1}{n_x^2}, \quad \left(\frac{1}{n^2}\right)_2 \Big|_{E=0} = \frac{1}{n_y^2}, \quad \left(\frac{1}{n^2}\right)_3 \Big|_{E=0} = \frac{1}{n_z^2}$$

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)_4 \Big|_{E=0} = 0, \quad \left(\frac{1}{n^2}\right)_5 \Big|_{E=0} = 0, \quad \left(\frac{1}{n^2}\right)_6 \Big|_{E=0} = 0,$$

نعرف التغيير الخطي في المعاملات  $\left(\frac{1}{n^2}\right)_i$  حيث  $i = 1, 2, \dots, 6$  الناجم عن تطبيق حقل كهربائي

بالعلاقة:  $E(E_x, E_y, E_z)$

$$(33) \quad \Delta \left(\frac{1}{n^2}\right)_i = \sum_{j=1}^3 r_{ij} E_j$$

حيث جمعنا بالنسبة إلى  $j$  واستخدمنا الاصطلاح  $1 = x, 2 = y, 3 = z$ .

وبذلك نجد أن:

$$(34) \quad \begin{pmatrix} \Delta \left( \frac{1}{n^2} \right)_1 \\ \Delta \left( \frac{1}{n^2} \right)_2 \\ \Delta \left( \frac{1}{n^2} \right)_3 \\ \Delta \left( \frac{1}{n^2} \right)_4 \\ \Delta \left( \frac{1}{n^2} \right)_5 \\ \Delta \left( \frac{1}{n^2} \right)_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

حيث نجد باستخدامنا لقواعد ضرب المصفوفات أنه على سبيل المثال:

$$\Delta \left( \frac{1}{n^2} \right)_6 = r_{61}E_1 + r_{62}E_2 + r_{63}E_3$$

نسمي المصفوفة  $6 \times 3$  ذات العناصر  $r_{ij}$  بالتنسور الكهروضوئي وكنا قد رأينا أن جميع العناصر  $r_{ij}$  تنعدم في وسط متمتع بمركز تناظر.

تسمح الخواص التناظرية للوسط المدروس بإيجاد شكل التنسور  $r_{ij}$  أي العناصر غير المعدومة فيه والعلاقات التي تربط فيما بينها وذلك من دون تحديد قيمها-انظر الملحق الخاص بالمفعول الكهروضوئي في آخر الأملية-.

## 2.II. المفعول الكهروضوئي في بلورة $\text{KH}_2\text{PO}_4$ - دراسة حالة بسيطة

تُعرف هذه البلورة بالاسم  $KDP$  وهي تتمتع بمحور تناظر من المرتبة الرابعة الذي نأخذه عادة وفق المحور الضوئي  $oz$ . كما تتمتع البلورة بمحورين تناظريين متعامدين من المرتبة الثانية يقعان في المستوي العمودي على المحور  $oz$  واللذين نأخذهما عادة وفق المحورين  $ox$  و  $oy$  حيث تكون الزمرة التناظرية للبلورة هي  $42m$  كما ويُعطى تنسور المفعول الكهروضوئي بالعلاقة:

$$(35) \quad r_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{pmatrix}$$

أي إن العناصر غير المعدومة هي  $r_{41}, r_{63}$ .

باستخدام العلاقتين (31) و (34) نحصل على العلاقة التي تعطي معادلة القطع الناقص الدوراني بوجود الحقل الكهربائي  $E(E_x, E_y, E_z)$ :

$$(36) \quad \frac{x^2}{n_o^2} + \frac{y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} + 2r_{41}E_x yz + 2r_{41}E_y xz + 2r_{63}E_z xy = 1$$

حيث تكون الثوابت الثلاثة الأولى من المعادلة السابقة غير متعلقة بالحقل الكهربائي.

وبما أنّ البلورة وحيدة المحور فإنّ  $n_x = n_y = n_o$ ,  $n_z = n_e$  وهكذا فإنّ تأثير الحقل الكهربائي قد سبّب ظهور الحدود المتصالبة في معادلة مجسم القطع الناقص. ويعني ظهور هذه الحدود أنّ المحاور العظمى في القطع الناقص الدوراني عند تطبيق الحقل الكهربائي لم تعد موازية للمحاور  $x, y, z$  وأصبح من الآن الواجب إيجاد المحاور الجديدة وأطولها ليتسنى لنا تحديد تأثير الحقل الكهربائي على انتشار الأمواج الضوئية.

لتبسيط المسألة سنفترض أنّ الحقل الكهربائي يوازي المحور  $z$  وبالتالي تصبح المعادلة السابقة (36) على الشكل:

$$(37) \quad \frac{x^2}{n_o^2} + \frac{y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} + 2r_{63}E_z xy = 1$$

أصبحت المسألة الآن هي إيجاد محاور جديدة  $x', y', z'$  تكون فيها معادلة مجسم القطع الناقص خالية من الحدود المتصالبة أي على الشكل:

$$(38) \quad \frac{x'^2}{n_{x'}^2} + \frac{y'^2}{n_{y'}^2} + \frac{z'^2}{n_{z'}^2} = 1$$

حيث  $x', y', z'$  هي مناحي المحاور العظمى لمجسم القطع الناقص الدوراني بوجود حقل كهربائي مطبّق وفق المحور  $z$  كما تكون أطوال هذه المحاور الأعظمية هي  $2n_{x'}, 2n_{y'}, 2n_{z'}$  وهي بالطبع متعلّقة بشدة الحقل المطبّق. في حالتنا البسيطة هذه نجد بسهولة أنّ:

$$(39) \quad \begin{aligned} x &= x' \cos 45^\circ + y' \sin 45^\circ \\ y &= -x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ \\ z &= z' \end{aligned}$$

وعليه تصبح معادلة مجسم القطع الناقص:

$$(40) \quad \left( \frac{1}{n_o^2} - r_{63}E_z \right) x'^2 + \left( \frac{1}{n_o^2} + r_{63}E_z \right) y'^2 + \frac{z'^2}{n_e^2} = 1$$

تُظهر المعادلة السابقة أنّ المحاور  $x', y', z$  هي المحاور الأساسية لمجسم القطع الناقص عند تطبيق الحقل الكهربائي وفق المحور  $z$ . ويكون طول المحور  $x'$  هو  $2n_{x'}$  حيث:

$$(41) \quad \frac{1}{n_{x'}^2} = \frac{1}{n_o^2} - r_{63}E_z$$

فإذا افترضنا أنّ  $r_{63}E_z \ll \frac{1}{n_o^2}$  أمكننا استخدام المعادلة التفاضلية  $dn = -\frac{n^3}{2} d\left(\frac{1}{n^2}\right)$  التي تسمح بحساب التغيير على  $n_{x'}$ :

$$(42) \quad dn_{x'} = -\frac{n_o^3}{2} r_{63}E_z$$

أي إنَّ

$$(43) \quad n_{x'} = n_o + \frac{n_o^3}{2} r_{63} E_z$$

وبطريقة مشابهة نجد أنَّ:

$$(44) \quad n_{y'} = n_o - \frac{n_o^3}{2} r_{63} E_z$$

وكذلك فإنَّ

$$(45) \quad n_z = n_e$$

يمكننا إيجاد الحل السابق باستخدام المصفوفة  $S_{ij}$  ابتداء من المعادلة (37) فنجد أنَّ:

$$(46) \quad S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_o^2} & r_{63} E_z & 0 \\ r_{63} E_z & \frac{1}{n_o^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_e^2} \end{bmatrix}$$

إنَّ القيم الذاتية للمصفوفة السابقة هي جذور المعادلة:

$$(47) \quad \det \begin{vmatrix} \frac{1}{n_o^2} - S & r_{63} E_z & 0 \\ r_{63} E_z & \frac{1}{n_o^2} - S & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_e^2} - S \end{vmatrix} = 0$$

التي نكتبها بالشكل:

$$(48) \quad \left( \frac{1}{n_e^2} - S \right) \left[ \left( \frac{1}{n_o^2} - S \right)^2 - (r_{63} E_z)^2 \right] = 0$$

حيث نجد الجذور:

$$(49) \quad \begin{aligned} S' &= \frac{1}{n_e^2} \\ S'' &= \frac{1}{n_o^2} + r_{63} E_z \\ S''' &= \frac{1}{n_o^2} - r_{63} E_z \end{aligned}$$

وهي الحلول ذاتها التي وجدناها سابقاً.

أما الأشعة الذاتية فهي:



$$(50) \quad \begin{cases} \left( \frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} \right) x_1' + r_{63} E_z x_2' = 0 \\ r_{63} E_z x_1' + \left( \frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} \right) x_2' = 0 \\ \left( \frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} \right) x_3' = 0 \end{cases}$$

تتحقق المعادلتان الأولى والثانية عندما  $x_1' = 0$  و  $x_2' = 0$ . في حين تتحقق المعادلة الثالثة من أجل أية قيمة لـ  $x_3'$ . وبهذا يكون الشعاع الذاتي الخاص بـ  $S'$  هو شعاع موازٍ للمحور  $oz$ . وبطريقة مشابهة نجد أن الشعاع الذاتي الموافق لـ  $S''$  موازياً للمنصف الأول في حين يكون الشعاع الذاتي الموافق للقيمة الذاتية  $S'''$  موازياً للمنصف الثاني. وبذلك يمكننا كتابة معادلة مجسم القطع الناقص الدوراني باستخدام الإحداثيات الأساسية الجديدة:

$$\left( \frac{1}{n_o^2} - r_{63} E_z \right) x'^2 + \left( \frac{1}{n_o^2} + r_{63} E_z \right) y'^2 + \frac{z^2}{n_e^2} = 1$$

تشكّل الطريقة الثانية التي استخدمناها في البحث عن المحاور الأساسية لمجسم القطع الناقص طريقة عامة يمكن تطبيقها في حالات أشدّ تعقيداً كأن يكون الحقل الكهربائي غير موازٍ للمحور  $oz$  أو في بلورة أخرى غير الـ  $KDP$ .



ملحق: التمثيل العقدي



## التمثيل العقدي

في المسائل التي نستخدم فيها توابع جيبيية متغيرة مع الزمن، يمكننا استخدام توابع عقدية بدلاً عن هذه التوابع الجيبيية وذلك لسهولة التعامل الرياضي معها.

فلو أخذنا التابع:  $a(t) = |A| \cos(\omega t + \varphi_a)$  حيث  $\omega$  هو نبض الحركة و  $\varphi_a$  هي الصفحة الابتدائية، لكانت الطويلة العقدية هي:  $A = |A| e^{i\varphi_a}$  وبالتالي:

$$a(t) = \text{Re} \left[ A e^{i\omega t} \right]$$

ولكننا في كثير من الأحيان نُغفل كتابة  $\text{Re}$  ونكتب  $a(t) = A e^{i\omega t}$ . إنَّ هذه الكتابة غير دقيقة ونقبلها تجاوزاً لأنه في معظم الأحيان لا يؤدي نسيان كتابة  $\text{Re}$  إلى ظهور مشاكل (اشتقاق تابع جيبي مثلاً). إلا أنَّ المشاكل تظهر عندما نريد كتابة جداء توابع جيبيية - وهذا ما نصادفه كثيراً في دراسة الضوء اللاخطي -.

ولكي نوضِّح هذا الأمر سنأخذ مثالين لا يؤدي إغفال كتابة  $\text{Re}$  إلى إعطاء نتيجة خاطئة في المثال الأول بينما تكون النتيجة خاطئة تماماً في المثال الثاني:

□ المثال الأول، اشتقاق تابع جيبي:

لنأخذ التابع الجيبي  $a(t) = |A| \cos(\omega t + \varphi_a)$ . إنَّ مشتقَّ هذا التابع هو  $\frac{da(t)}{dt} = -\omega |A| \sin(\omega t + \varphi_a)$ . في حين أنَّ اشتقاق  $a(t) = A e^{i\omega t}$  يعطي  $\frac{da(t)}{dt} = i\omega A e^{i\omega t} = i\omega |A| e^{i(\omega t + \varphi_a)}$ . لو أخذنا الآن القسم الحقيقي للمشتق لوجدناه يساوي  $\text{Re} \left( \frac{da(t)}{dt} \right) = -\omega |A| \sin(\omega t + \varphi_a)$ .

المثال الثاني، جداء تابعين جيبيين، لنأخذ التابعين الجيبيين

$$b(t) = |B| \cos(\omega t + \varphi_b) = \text{Re} \left[ B e^{i\omega t} \right] \text{ و } a(t) = |A| \cos(\omega t + \varphi_a) = \text{Re} \left[ A e^{i\omega t} \right]$$

حيث  $A = |A| e^{i\varphi_a}$  و  $B = |B| e^{i\varphi_b}$ . إنَّ جداء هذين التابعين الجيبيين هو:

$$a(t) \cdot b(t) = \frac{|A||B|}{2} [\cos(2\omega t + \varphi_a + \varphi_b) + \cos(\varphi_a - \varphi_b)]$$

في حين لو استخدمنا الاصطلاح العقدي مع إغفال كتابة  $\text{Re}$  لوجدنا أنَّ

$$a(t) \cdot b(t) = |A||B| e^{2i\omega t} = |A||B| e^{i(2\omega t + \varphi_a + \varphi_b)}$$

يظهر الفرق واضحاً من مقارنة النتيجة، حيث يختفي الحدّ الحاوي على المركبة المستقلة عن الزمن

$$\frac{|A||B|}{2} \cos(\varphi_a - \varphi_b)$$

كما أنَّ المتوسط الزمني لجداء تابعين هو:

$$\overline{a(t) \cdot b(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T |A| \cos(\omega t + \varphi_a) |B| \cos(\omega t + \varphi_b) dt = \frac{|A||B|}{2} \cos(\varphi_a - \varphi_b)$$

$$\overline{a(t) \cdot b(t)} = \frac{1}{2} \text{Re}(AB^*) \text{ أي إنَّ}$$



## المراجع

1. "Essentials of Optoelectronics with applications", Alan Rogers, Chapman & Hall, London, first edition 1997.
2. "Optical Electronics in Modern Communications", Amnon Yariv, Oxford University Press, New York, Fifth edition 1997.
3. "Cours d'optique non lineaire", DEA d'Optique et Photonique, Universite Paris XI, Orsay, 1990.
4. "Cours d'optique non lineaire", DEA Physico-Chimie Moleculaire, Universite Paris XI, Orsay, 1993.
5. "Cours d'optique non lineaire", Troisieme annee: Institut Superieure d'Optique, Orsay, 1992.
6. "Cours d'optoelectronique", Troisieme annee: Ecole National Superieure de Physique de Marseille, Marseille, 1992.
7. "Cours d'optique non lineaire", Troisieme annee: Ecole National Superieure de Physique de Grenoble, Grenoble, 1992.
8. "Ultra Light Pulses", SL. Shalpiro, Topics in Applied Physics, Vol. 18, Springer Verlag, 1977.
9. "Nonlinear Dielectric Polarization in Optical Media", D.A. Kleinman," *Phys. Rev.*, **126**, 1977 (1962).
10. "Upconversion linearity in proustite for short  $10.6 \mu\text{m}$  pulse diagnostics P.A. Iaanimiagi, M.C. Richardson, N.R. Iswnor," *Optics letters*, **4**, 45 (1979).
11. "Optique", R. Suardet, Collection de Sciences Physiques, Tec & Doc Lavoisier, Paris, 1982.
12. "Electromagnetisme 2", H. Gie and J.P. Sarmant, Collection de Sciences Physiques, Tec & Doc Lavoisier, Paris, 1983.
13. "Optical Waves in Crystals, Propagation and Control of Laser Radiation", Amnon Yariv and Pochi Yeh, Wiley Interscience, New York, 1984.
14. "Optical Materials, An Introduction to Selection and Application", Solomon Musikant, Marcel Dekker, Inc., New York 1985.
15. "Optics, Optoelectronics and Photonics. Engineering Principles and Applications", Alan Billings, Prentice Hall, New York, 1993.



## فهرس

### الفصل الأول

#### الخواص الكهرطيسية للديلكترك

2	I	دراسة ميكروسكوبية للاستقطاب
2	1.I	حقائق تجريبية
3	2.I	الجزينات القطبية والجزينات غير القطبية
3	3.I	استقطاب الديلكترك
4	4.I	دراسة ظاهرة الاستقطاب
5	II	دراسة ماكروسكوبية للاستقطاب
6	1.II	شحنات الاستقطاب
8	2.II	التحريض الكهربائي
8	3.II	إدخال التحريض الكهربائي في معادلة ماكسويل-غوص
8	4.II	العلاقات المكونة
9	III	الطواعية الكهربائية
9	1.III	الحقل الموضوعي-علاقة لورنتز
10	2.III	العلاقة بين الطواعية والاستقطابية
10	IV	الاستقطاب في نظام متغير
11	1.IV	نموذج مبسط
13	2.IV	تطوير النموذج السابق
14	3.IV	قرينة الانكسار العقدية
16	V	معادلات ماكسويل في الديلكترك
17		تمرينات ومسائل



مبادئ في الضوء اللاخطي

20	I	الاستقطاب اللاخطي
20	1.I	مقدمة عامة
22	2.I	تصنيف الظواهر اللاخطية
23	3.I	المنشأ الفيزيائي للاستقطاب اللاخطي من المرتبة الثانية
26	II	الطواعيات اللاخطية
26	1.II	النموذج التقليدي في حساب الطواعية (نموذج الهزاز اللاتوافقي)
27	2.II	تعريف الطواعية غير الخطية في فضاء التواترات
27		♦ الطواعية الخطية
28		♦ الطواعية اللاخطية من الرتبة الثانية
31	III	خواص تنسورات الطواعية غير الخطية
32	1.III	دراسة الطواعية من المرتبة الثانية
33		♦ اصطلاح Voigt
34		♦ علاقات ABDP و علاقات Kleinman
34	2.III	اختصار عناصر تنسور الطواعية من المرتبة الثانية باستخدام الخواص التناظرية
34		♦ وجود مركز تناظر عكسي
35		♦ وجود محور تناظر
35		♦ وجود محور تناظر وعدد لا نهائي من المستويات المارة من هذا المحور $C_{\infty v}$ ...
36		تمارين ومسابقات

الفصل الثالث

الانتشار في وسط لاخطي

42	I	معادلات انتشار الأمواج الكهرومغناطيسية في وسط لاخطي
42	1.I	المعادلة التفاضلية الخاصة بالانتشار
43	2.I	البحث عن حل للمعادلة التفاضلية الخاصة بالانتشار
45	II	علاقات مانلي-رو Manley-Rowe
46	III	توليد تواترات الجمع و الفرق - مفهوم توافق الصفحة phase matching
47	IV	الدلالة الفيزيائية لشرط توافق الصفحة
48		تمارين ومسابقات

## الفصل الرابع

### تحقيق توافق الصفحة في وسط مضاعف الكسر

I	توليد التوافقي الثاني-تحقيق توافق الصفحة في الأوساط مضاعفة الكسر	52
1.I	تأثير عدم توافق الصفحة	52
2.I	تذكرة عن الأوساط الضوئية لا متماثلة المناحي	54
3.I	تحقيق توافق الصفحة في بلورة وحيدة المحور	55
II	استخدام حزمة ليزرية غوصية متمحرفة	57
	تمرينات ومسائل	58

## الفصل الخامس

### المضخمات الوسيطة و الهزازات الوسيطة

I	التضخم الوسيطي-الهزاز الوسيطي	68
1.I	مقدمة	68
2.I	المضخم الوسيطي-حساب الريح	69
3.I	الهزاز الوسيطي-شرط العتبة	70
♦	الهزاز مضاعف التجاوب	71
♦	الهزاز بسيط التجاوب	71
II	توافق الصفحة في التفاعل الوسيطي	73
♦	توافق الصفحة من النمط I	73
♦	توافق الصفحة من النمط II	73
III	مسح التواترات في الهزاز الوسيطي	73
IV	الاستطاعة عند الخرج وإشباع المضخخة في هزاز وسيطي	74
	تمرينات ومسائل	75

المعدلات الضوئية

80	دراسة تمهيدية	I
80	1.I مقدمة عامة	
80	2.I المعدلات الكهرضوئية	
81	3.I تصميم المعدلات الكهرضوئية	
84	4.I المعدل الصوتي-الضوئي	
87	II المفعول الكهرضوئي	
87	1.II مقدمة	
89	2.II المفعول الكهرضوئي في بلورة $\text{KH}_2\text{PO}_4$ - دراسة حالة بسيطة	
95	الملحق	
97	المراجع	
99	الفهرس	

