المعهد العالي
للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

الدكتور عمران قوبا

التحليل

2

التوابع المألوفة والنشر المحدود

متتاليات ومتسلسلات التوابع

تكامل ريمان

التكاملات المعممة والتابعة لوسيط

التحليل

الجزء الثاني

الدكتور عمران قوبا

منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا
2017

التحليل

الجزء الثاني

الدكتور عمران قوبا

تصميم الغلاف: المؤلف

من منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا
الجمهورية العربية السورية، 2017.

Analysis

Volume 2

Omran Kouba

Publications of the
Higher Institute for Applied Sciences and Technology (HIAST)
Syrian Arab Republic, 2017.
ISBN 978-9933-9228-0-1

منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

- "الجبر، الجزء الأول، مبادئ الجبر المجرد"، للدكتور عمران قوبا، الطبعة الأولى 2009، الطبعة الثانية 2017.
- "التحليل، الجزء الأول"، للدكتور عمران قوبا، الطبعة الأولى 2009، الطبعة الثانية 2017.
- "كيمياء المحاليل المائية"، للدكتورة يمن الأتاسي، الطبعة الأولى 2009، الطبعة الثانية 2016.
- "الأنظمة الرادارية في مواجهة التشويش والخداع"، للدكتور علي طه، 2011.
- "ميكانيك النقطة المادية"، للدكتور مصطفى العليوي والدكتور هاني قوبا، الإصدار الأول 2011، الإصدار الثاني 2016.
- "الجبر، الجزء الثاني، الجبر الخطي"، للدكتور عمران قوبا، 2017.
- "التحليل، الجزء الثاني"، للدكتور عمران قوبا، 2017.
- "المرجع في الرسم الصناعي، الجزء الثالث"، للدكتور محمد بدر قويدر، 2017.
- "مدخل إلى كيمياء المياه: تلوث- معالجة- تحليل"، للدكتور نصر الحايك، 2017.
- "الترموديناميك"، للدكتور عقيل سلوم، 2017.
- "دليل الرسام الصناعي"، للدكتور مصطفى الجرف، 2017.

سيصدر لاحقاً:

- "التحليل، الجزء الثالث"، للدكتور عمران قوبا.
- "التحليل، الجزء الرابع"، للدكتور عمران قوبا.
- "التحليل، الجزء الخامس"، للدكتور عمران قوبا.

لمعلومات أوفى عن المنشورات وطلب نسخة ورقية أو تحميل المتاح منها إلكترونياً، يمكن الاطلاع على موقع المعهد الإلكتروني:

www.hiast.edu.sy

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا مؤسسة حكومية للتعليم العالي أحدثت بموجب المرسوم التشريعي رقم /24/ لعام 1983، وذلك بهدف إعداد أطر علمية متميزة من مهندسين وباحثين للإسهام الفاعل في عملية التطوير العلمي والتنمية في الجمهورية العربية السورية.
يمنح المعهد العالي درجة الإجازة في الهندسة في الاتصالات والمعلوماتية والنظم الإلكترونية والميكاترونيكس وعلوم وهندسة المواد وهندسة الطيران. يقبل المعهد العالي لدراسة هذه الاختصاصات شريحة منتقاة من المتفوقين في الشهادة الثانوية من الفرع العلمي. يتيح المعهد العالي أيضاً برامج ماجستير أكاديمي في نظم الاتصالات وفي التحكم والروبوتيك وفي نظم المعطيات الكبيرة ونظم المعلومات ودعم القرار وفي علوم وهندسة المواد وعلوم وهندسة البصريات. ويمنح المعهد العالي درجة الدكتوراه في الاتصالات والمعلوماتية ونظم التحكم والفيزياء التطبيقية. تُحدث في المعهد العالي اختصاصات جديدة بحسب متطلبات سوق العمل وتوجهات البحث والتطوير المحلية والعالمية.

يمتاز المعهد بأطره الكفوءة ذات التأهيل العالي وبمختبراته المجهزة تجهيزاً عالياً وببنيته التحتية الفريدة في القطر. إلى جانب النشاط التعليمي، يمارس المعهد العالي عبر جهود أطره وفعالياته العلمية المختلفة نشاطاً حثيثاً في البحث والتطوير، إذ ينفذ مشاريع متنوعة لصالح الجهات العامة والخاصة في القطر، كما يتعاون مع جهات خارج القطر في بعض المشاريع البحثية والتطويرية. يسعى المعهد أيضاً، عبر دورات تدريبية نظرية وعملية متاحة للقطاعين العام والخاص وللأفراد، إلى إفادة أوسع فئة من المهتمين من إمكانيات فريقه العلمي ومختبراته.

استكمالاً لدور المعهد العالي الرائد في مجال التعليم ونشر العلم، يحرص المعهد العالي على نشر كتب علمية عالية المستوى من نتاج أطره العلمية، منها ما هو تدريسي يوافق المناهج في المعهد العالي ويفيد شريحة واسعة من الطلاب الجامعيين عموماً، ومنها ما هو علمي ثقافي. يخضع الكتاب قبل نشره إلى عملية تقويم علمي من مجموعة منتقاة بعناية من أصحاب الاختصاص، إضافةً إلى تدقيق لغوي حفاظاً على سوية عالية للمنشورات باللغة العربية.

يتيح المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا بعضاً من منشوراته على موقعه على الشابكة تحت رخصة المشاع الإبداعي لتعميم الفائدة على شريحة واسعة من القراء.

للتواصل مع المعهد العالي والاطلاع على شروط النشر وآخر المنشورات وتحميل المتاح منها:

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا، دمشق، ص.ب 31983
هاتف +(963)(11)5123819
فاكس +(963)(11)5140760
بريد إلكتروني contact@hiast.edu.sy
موقع إلكتروني www.hiast.edu.sy

شكر

أتقدّم بالشكر العميق إلى جميع الزملاء الذين أغنوا بملاحظاتهم فحوى هذا الكتاب، وأسهموا في إعطائه شكله النهائي هذا.

وأخصُّ بالشكر المعلِّم الفاضل الأستاذ الدكتور موفق دعبول، والسادة الأساتذة الدكتور نبيه عودة والدكتور خالد حلاوة على قراءتهم المتمعّنة لهذا الكتاب وعلى الملاحظات القيّمة التي أبدوها عليه. وأخيراً، وليس آخراً، أتقدم بجزيل الشكر والامتنان إلى الأستاذ مروان البواب الذي دقّق الكتاب لغوياً وأسهم بملاحظاته ومقترحاته في تحسين صياغة العديد من الفقرات.

محتوى الجزء الأوّل

مقدّمة

الفصل الأوّل
حقل الأعداد الحقيقيّة

الفصل الثاني
المتتاليات العدديّة

الفصل الثالث
المتسلسلات العدديّة

الفصل الرابع

التوابع لمتحوّل حقيقي : النهايات والاستمرار

الفصل الخامس

التوابع لمتحوّل حقيقي : الاشتقاق

محتوى الجزء الثاني

مقدّمة

الفصل التاسع
التوابع الأصليّة والتكامل المحدود

الفصل العاشر
التكاملات المعمَّمة أو المعتلّة
والتكاملات التابعة لوسيط

محتوى الجزء الثالث

مقدّمة

الفصل الحادي عشر
الفضاءات الشعاعيّة المنظّمة

الفصل الثاني عشر
التوابع لعدّة متحوّلات

الفصل الثالث عشر

منشأ المعادلات التفاضليّة وتصنيفها

الفصل الرابع عشر

المعادلات التفاضليّة السلّمية الشهيرة من المرتبة الأولى

الفصل الخامس عشر

المعادلات التفاضليّة الخطّية

الفصل السادس عشر

المبرهنات الأساسيّة المتعلّقة بالمعادلات التفاضليّة العاديّة

محتوى الجزء الرابع

مقدّمة

الفصل السابع عشر

المتسلسلات الصحيحة

الفصل الثامن عشر

نظريّة كوشي والتوابع الهولومورفيّة

الفصل التاسع عشر

النشر بمتسلسلات لوران ونظريّة الرواسب

الفصل العشرون

تحويلات لابلاس وتطبيقاتها

محتوى الجزء الخامس

مقدّمة

الفصل الحادي والعشرون

متسلسلات فورييه

الفصل الثاني والعشرون

مقدّمة في نظريّة القياس والتكامل

الفصل الثالث والعشرون

تحويلات فورييه

الفصل الرابع والعشرون

التوزيعات

مقدّمة

التحليل الرياضيّ هو فرعٌ من فروع الرياضيّات يتعامل مع الأعداد الحقيقيّة والأعداد العقديّة والتوابع، وهو يدرس مفاهيم الاستمرار والتكامل والتفاضل في أطرها العامّة.

تاريخياً، يمكن إرجاع بدايات هذا الفرع من فروع الرياضيّات إلى القرن السابع عشر، مع اختراع نيوتن ولايبنتز حسابَي التفاضل والتكامل، ثُمّ تطوّرت موضوعات المعادلات التفاضليّة وتحليل فورييه، والتوابع المولِّدة في العمل التطبيقي في القرنين السابع عشر والثامن عشر، واستُعملت تقانات حسابَي التفاضل والتكامل بنجاح في تقريب العديد من المسائل المنقطعة، والمسائل المتّصلة.

وبقي تعريف التابع موضع نقاش ومحاورة بين الرياضيّين طوال القرن الثامن عشر، وكان كوشي Cauchy أوّل من وضع التحليل الرياضي على أسس منطقيّة صلبة بإدخاله مفهوم متتاليات كوشي، وذلك مع بداية القرن التاسع عشر. كما أرسى كوشي القواعد الصوريّة الأساسيّة للتحليل العقدي. ودرسَ بواسون Poisson وليوفيل Liouville وفورييه Fourier وغيرهم المعادلات التفاضليّة الجزئيّة والتحليل التوافقي.

وفي منتصف القرن التاسع عشر وضع ريمان RIEMANN نظريّته في التكامل. وشهد الثُلث الأخير من ذلك القرن إعادة التنظيم الأخيرة للمفاهيم الأساسيّة في التحليل الرياضي بجهود فايرشتراس WEIERSTRASS، الذي رأى أنّ النظرة الهندسيّة لمفاهيم النهاية والاستمرار تقود أحياناً إلى استنتاجات خاطئة، فوضع ما يسمّى تعريف ε-δ للنهاية. وبعدها تنبّه الرياضيّون إلى أنّهم يفترضون وجود مجموعة "متّصلة" من الأعداد الحقيقيّة دون أي إثبات لوجود هذه المجموعة، فأنشأ ديدكند DEDEKIND مجموعة الأعداد الحقيقيّة مستعملاً ما سُميّ لاحقاً باسم "مقاطع ديدكند"، وجرت في الوقت نفسه تقريباً محاولات تطوير المبرهنات المتعلّقة بتكامل ريمان، وهذا ما أدّى إلى دراسة "قياس" المجموعات التي تكون عليها التوابع الحقيقيّة منقطعة.

وبدأت تظهر «الوحوش» المتمثّلة بتوابع غريبة مثل التوابع الحقيقيّة التي لا تقبل الاشتقاق عند أيّة نقطة، أو تلك التوابع التي تملأ منحنياتها الفراغ. وفي هذه الحقبة، طوّر جوردان JORDAN وبورِل BOREL نظرّية القياس، وطوّر كانتور CANTOR ما يُعرف اليوم بالنظريّة «الساذجة» للمجموعات.

ومع بداية القرن العشرين صار التحليل الرياضي يُصاغ باستعمال المفاهيم الجديدة في نظريّة المجموعات، وحلّ لوبيغ LEBESGUE مسألة نظريّة القياس والتكامل، وأدخل هِلبرت HILBERT مفهوم الفضاءات التي عُرفت فيما بعدُ باسمه لحل المعادلات التكامليّة، وكان مفهوم الفضاء الشعاعي المنظّم في الجوّ، إذْ أنشأ باناخ BANACH في العشرينيّات من ذلك القرن التحليل التابعي.

بدأت مفاهيم التوابع المعمّمة أو التوزيعات تظهر في نهايات القرن التاسع عشر، وذلك في إطار توابع غرين GREEN، وتحويلات لابلاس LAPLACE ونظريّة ريمان للمتسلسلات المثلثيّة التي هي ليست متسلسلات فورييه لتوابع قابلة للمُكاملة على سبيل المثال. وقاد الاستعمال المُكثّف لتحويلات لابلاس، وطرائق الحساب الرمزي إلى ما صار يُعرف بحساب العمليات. حملت هذه الطرائق سمعة سيّئة بين الرياضيّين لأنّ تعليل صحّتها كان يعتمد على متسلسلات متباعدة.

أمّا المرّة الأولى التي احتل فيها مفهوم التابع المُعمّم موقعاً مركزيّاً في الرياضيّات فقد جاءت في إطار تكامل لوبيغ، إذ صار التابع القابل للمُكاملة بمعنى لوبيغ مُكافئاً لأي تابع يتفق معه اتفاقاً شبه أكيد. وظهر تابع ديراك δ في العشرينيّات والثلاثينيّات من القرن العشرين، إذْ راح ديراك DIRAC يتعامل مع القياس بوصفه تابعاً بالمعنى التقليدي.

وجاء التتويج النهائي لهذه المفاهيم في نظريّة التوزيعات للوران شوارتز SCHWARTZ وذلك في نهاية الأربعينيّات من القرن العشرين. تكمن نقطة الضعف الأساسيّة في هذه النظريّة في عدم إمكان

معالجة المسائل اللاخطيّة في إطارها، فالتوزيعات بمعنى شوارتز لا تؤلّف جبراً، ولا يمكن حساب جداء ضرب التوزيعات كما تُضرب التوابع.

يهدف هذا المؤلَّف إلى دراسة التحليل الرياضي، وهو موجّه إلى طلابٍ سيتابعون دراستهم في مجالات هندسيّة، ومكوّن من خمسة أجزاء.

نعالج في هذا الجزء الثاني الموضوعات الآتية :

- يعرض الفصل السادس بناءً دقيقاً للتوابع المألوفة، التابع الأسيّ والتابع اللوغاريتميّ والتوابع المثلّثيّة والزائديّة وتوابعها العكسيّة.

- ويتضمّن الفصل السابع دراسة تفصيليّة لمقارنة التوابع في جوار نقطة، وطرائق حساب النشر المحدود، وتطبيقات ذلك في دراسة التوابع والمتتاليات وحساب النهايات.

- ويدرس الفصل الثامن متتاليات ومتسلسلات التوابع من حيث أنماط التقارب المختلفة، والشروط الواجب تحقُّقها حتّى تنتقل خواص استمرار أو قابليّة اشتقاق متتالية –أو متسلسلة– توابع متقاربة إلى نهايتها.

- ويعالج الفصل التاسع مفهومَي التوابع الأصليّة والتكامل المحدود، لتوابع تنتمي إلى صفّ واسع من التوابع الحقيقيّة أسميناه الصف $\mathcal{R}$، ويتطرق إلى أهم طرائق حساب هذه التكاملات.

- ويتصدّى الفصل العاشر لدراسة التكاملات المعمّمة أو المعتلّة، تقاربها أو تباعدها، ويقارن تقارب التكاملات المعمّمة بتقارب المتسلسلات، ثُمّ يتابع دراسة التوابع المعرّفة بتكاملات متعلّقة بوسيط من جهة استمرارها وقابلية اشتقاقها، وذلك باستخدام صياغة مبسّطة لمبرهنة التقارب للوبيغ، التي نعرض لها إثباتاً بعيداً عن إطار نظرية القياس، وندرس التوابع الأولريّة بصفتها تطبيقاً على هذه الدراسة.

هذا ويتبع كل فصل من فصول الكتاب مجموعة من التمرينات المتباينة في درجات صعوبتها، تهدف إلى مساعدة الطالب على اكتساب المهارات اللازمة، واستيعاب المفاهيم المدروسة.

ومن المفيد هنا الإشارة إلى أنّ دراسة كتاب رياضيات تختلف اختلافاً جوهرياً عن قراءة قصة أو رواية أو كتاب شعر يستمتع بهما المرء جالساً على كرسي مريح، إذ لا بُد من قلم وورقة ومنضدة نجلس إليها، نعالج المادّة النظريّة ونُغالب التمرينات حلّاً ومعاناة.

لذلك ننصح القارئ ألاّ يطّلع على الحلول المُقترحة للتمارين إلاّ بعد أن يستنفدَ جميع محاولات حلها، وعليه في جميع الأحوال إعادة صياغة الحلّ بلغته ليضمن الاستيعاب الكامل للمفاهيم والأفكار المُعالجة.

ختاماً، أُزجي الشكر لجميع الزملاء الذين ساهموا في إخراج هذا الكتاب إلى النّور، وأُعرب سلفاً عن شكري لكلّ زميل يُبدي ملاحظة أو انتقاداً بنّاءَيْن على فحوى هذا الكتاب.

تموز 2016

عمران قوبا

التوابع المألوفة

1. التابع الأسّي والتابع اللوغاريتميّ

1-1. **مبرهنة وتعريف**. تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ بالإطلاق أيّاً كان x من $\mathbb{R}$، ونرمز إلى مجموعها بالرمز e^x أو $\exp(x)$. ونسمّي $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ **التابع الأسّي**.

إنّ تقارب المتسلسلة واضح عندما $x = 0$. لنفترض أنّ $0 \neq x$، ولنضع بالتعريف $a_n = \frac{|x|^n}{n!}$. فيكون لدينا $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|}{n+1}$، ومن ثَمّ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$، والمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ متقاربة بالإطلاق.

2-1. **مبرهنة**. يحقّق التابع الأسّي الخواص الآتية :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{x+y} = e^x \cdot e^y \qquad ①$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x \geq 1 + x \qquad ②$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0 \qquad ③$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x < y \Rightarrow e^x < e^y \qquad ④$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad ⑤$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right| \leq |x|\, e^{|x|} \qquad ⑥$$

الإثبات

① لتكن (x,y) من $\mathbb{R}^2$، ولنعرّف المتتاليتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بالعلاقتين الآتيتين : $a_n = \frac{x^n}{n!}$، و $b_n = \frac{y^n}{n!}$، ولتكن $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} * (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$؛ أي جداء تلافّ المتتاليتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ الذي عرّفناه في الفصل الثالث من الجزء الأوّل.

عندئذ

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}$$

ولمّا كانت المتسلسلات $\sum a_n$ و $\sum b_n$ و $\sum c_n$ متقاربة كان

$$e^{x+y} = \sum_{n\geq 0} c_n = \left(\sum_{n\geq 0} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} b_n\right) = e^x \cdot e^y$$

② لمّا كانت $x \leq 0$، استنتجنا أنّ $\frac{x^n}{n!} \geq 0$ أيّاً كان n من $\mathbb{N}$، إذن

$$\forall n \geq 2,\ 1 + x + \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!} \geq 1 + x$$

وبجعل n تسعى إلى اللانهاية نجد $e^x \geq 1 + x$.

③ من الواضح أنّ $e^0 = 1$، و لقد أثبتنا أنّ $x > 0 \Rightarrow e^x > 1$. فإذا كانت $0 > x$ وجب أن يكون $e^{-x} > 1$، ومن ثَمّ تُثبتُ العلاقة $e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1$ أنّ $e^x > 0$. بهذا نكون قد أثبتنا أنّ $e^x > 0$ أيّاً كان العدد الحقيقي x.

④ ليكن (x, y) من $\mathbb{R}^2$، عندئذ يتيح لنا الشرط $y > x$ أن نكتب

$$y - x > 0 \Rightarrow e^{y-x} > 1 \Rightarrow e^x \cdot e^{y-x} > e^x \Rightarrow e^y > e^x$$

⑤ لتكن x من $\mathbb{R}$ و n من $\mathbb{N}^*$، ولنضع

$$\delta_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

فيكون

$$\begin{aligned}\delta_n(x) &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{x^k}{k!} - C_n^k \frac{x^k}{n^k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{(n-k+1)\cdots(n-1)n}{n^k}\right) \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \left(1 - \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)\right) \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=2}^{n} b_{n,k} \frac{x^k}{k!}\end{aligned}$$

وقد عرّفنا $b_{n,k} = 1 - \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \geq 0$، في حالة $n \geq k \geq 2$.

في الحقيقة، نثبت بالتدريج على العدد k أنّ :

$$\forall k \in \{2,3,\ldots,n\},\quad b_{n,k} \le \frac{k(k-1)}{2n}$$

فالمتراجحة صحيحة وضوحاً عندما $k=2$. لنفترض صحّتها عند قيمة k، فيكون

$$\begin{aligned} b_{n,k+1} &= 1-\Big(1-\frac{k}{n}\Big)\prod_{j=1}^{k-1}\Big(1-\frac{j}{n}\Big)\\ &= b_{n,k}+\frac{k}{n}\prod_{j=1}^{k-1}\Big(1-\frac{j}{n}\Big)\\ &\le \frac{k(k-1)}{2n}+\frac{k}{n}=\frac{k(k+1)}{2n}\end{aligned}$$

فإذا عُدنا إلى $\delta_n(x)$ أمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned}\big|\delta_n(x)\big| &\le \sum_{k=2}^{n} b_{n.k}\frac{|x|^k}{k!}\\ &\le \sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{2n}\cdot\frac{|x|^k}{k!}\\ &= \frac{x^2}{2n}\cdot\sum_{k=0}^{n-2}\frac{|x|^k}{k!}\le \frac{x^2}{2n}e^{|x|}\end{aligned}$$

ومن ثَمّ $\lim_{n\to\infty}\delta_n(x)=0$ ، فيتم إثبات المطلوب.

⑥ لتكن x من $\mathbb{R}$ و n من $\mathbb{N}^*$، عندئذ

$$\begin{aligned} e^x-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!} &= \sum_{k=n}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+n}}{(k+n)!}\\ &= \frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{C_{n+k}^k}\cdot\frac{x^k}{k!}\end{aligned}$$

ولمّا كان $C_{n+k}^k\ge 1$ استنتجنا

$$\left|e^x-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}\right|\le\frac{|x|^n}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^k}{k!}=\frac{|x|^n}{n!}\cdot e^{|x|}$$ ❐

1-3. **مبرهنة**. التابع الأسيّ $\exp$ قابلٌ للاشتقاق على $\mathbb{R}$. ويحقّق $\exp'=\exp$. ينتج من ذلك أنّ $\exp\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

الإثبات

إذا طبّقنا المتراجحة ⑥ من المبرهنة السابقة عند $n = 2$ و $x - x_0$ بدلاً من x، أمكننا أن نكتب

$$0 < |x - x_0| \leq 1 \Rightarrow \left|e^{x - x_0} - 1 - (x - x_0)\right| \leq \frac{e}{2}(x - x_0)^2$$

ومن ثَمّ

$$0 < |x - x_0| \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} - e^{x_0}\right| \leq \frac{e^{1+x_0}}{2}|x - x_0|$$

وهذا يثبتُ أنّ $\lim_{x_0} \Delta_{\exp, x_0} = e^{x_0}$. ❐

1-4. **مبرهنة**. إنّ التابع الأسيّ $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, \ x \mapsto e^x$ تقابلٌ. في الحقيقة، إنّ هذا التابع تشاكل تقابليّ زمريّ بين $(\mathbb{R}, +)$ و $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$.

الإثبات

لقد وجدنا سابقاً أنّ $\exp$ تابع مستمرٌّ و متزايدٌ تماماً ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}_+^*$. يكفي حتى نتيقن من صحة الخاصة المطلوبة أن نثبت أنّ $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$. يثبتُ الاقتضاء

$$x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 1 + x$$

أنّ $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. وينتج من ذلك أنّ

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

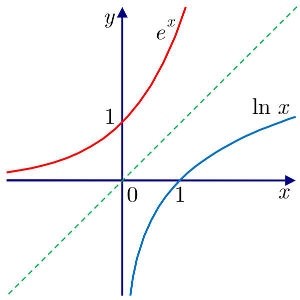
نستنتج إذن أنّ $\exp(\mathbb{R})$ مجالٌ محتوى في $\mathbb{R}_+^*$، حدُّه الأدنى 0 وحدُّه الأعلى $+\infty$، أي $\exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$. ❐

1-5. **تعريف**. نسمّي التابع العكسيّ للتابع $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ تابع اللوغاريتم الطبيعي، ونرمز إليه عادة بالرمز $\ln$ أو Log.

1-6. **مبرهنة**. ينتمي التابع اللوغاريتميّ $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln x$ إلى الصف C^∞. وبوجه خاص: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.

الإثبات

تنتج هذه المبرهنة مباشرة، من خصائص التابع الأسي، ومن مبرهنة اشتقاق التابع العكسي. ❐



الخط البياني لكلٍّ من التابعين الأسّي واللوغاريتمي

1-7. تعريف. في حالة (a,b) من $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$، نكتب a^b دلالة على $\exp(b \cdot \ln a)$.

فإذا كان a من $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$، أسمينا التابع

$$\mathcal{E}_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, x \mapsto a^x$$

التابع الأسّي بالأساس a، وهو تقابل من الصف C^∞، متزايد تماماً عندما $1 < a$، ومتناقص تماماً عندما $a > 1$. ويحقّق مشتقُّه العلاقة : $(\mathcal{E}_a)' = \ln a \cdot \mathcal{E}_a$.

وإذا كان b عدداً حقيقياً، أسمينا التابع

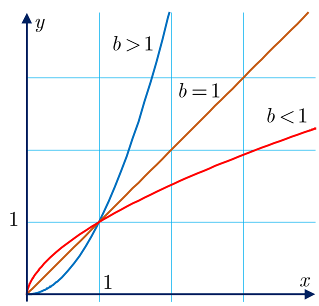
$$\mathcal{P}_b : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*, x \mapsto x^b$$

تابع **الرفع إلى الأس b**، وهو أيضاً من الصف C^∞، ويحقِّق مشتقُّه العلاقة $(\mathcal{P}_b)' = b \cdot \mathcal{P}_{b-1}$.

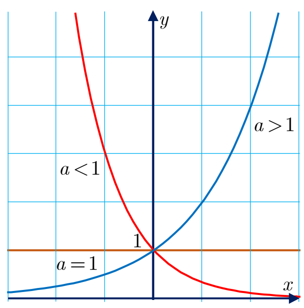
وأخيراً إذا كان $a \neq 1$ عدداً موجباً كتبنا $\log_a$ دلالة على **تابع اللوغاريتم بالأساس a**:

$$\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \ \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

وهو التابع العكسي للتابع $\mathcal{E}_a$.



الخط البياني للتابع الأسّي $\mathcal{E}_a$



الخط البياني لتابع الرفع إلى أس $\mathcal{P}_b$

2. التوابع الزائديّة

1-2. تعريف. نسمّي تابع **الجيب الزائديّ** التابع

$$\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

نسمّي تابع **جيب التمام الزائديّ** – أو **التجيب الزائدي**– التابع

$$\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

نسمّي تابع **الظل الزائديّ** التابع

$$\mathrm{th} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

نرى من التعريف السابق أنّ التابعين sh و th فرديّان، وأنّ التابع ch زوجيّ. وكذلك نتحقّق بسهولة أنّه، أيّاً كان x من $\mathbb{R}$، كان

$$(\mathrm{sh})'(x) = \mathrm{ch} x$$

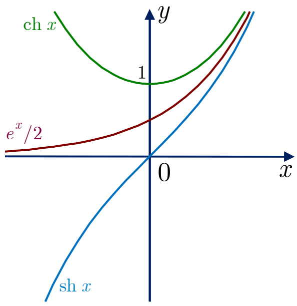
$$(\mathrm{ch})'(x) = \mathrm{sh} x$$

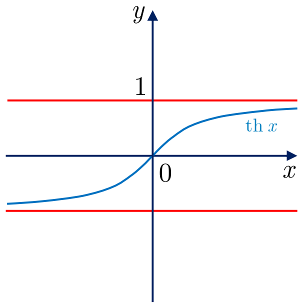
$$(\mathrm{th})'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1 - \mathrm{th}^2 x$$

فالتوابع الزائديّة تنتمي إلى الصف C^∞ على $\mathbb{R}$، وهي متزايدة تماماً على $\mathbb{R}_+$. ونترك للقارئ أن يثبت، انطلاقاً من التعريف، صحة العلاقات الآتية:

$$\mathrm{ch} t + \mathrm{sh} t = e^t, \quad \mathrm{ch} t - \mathrm{sh} t = e^{-t}, \quad \mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(a+b) &= \mathrm{sh} a\, \mathrm{ch} b + \mathrm{ch} a\, \mathrm{sh} b, \\
\mathrm{sh}(a-b) &= \mathrm{sh} a\, \mathrm{ch} b - \mathrm{ch} a\, \mathrm{sh} b. \\
\mathrm{ch}(a+b) &= \mathrm{ch} a\, \mathrm{ch} b + \mathrm{sh} a\, \mathrm{sh} b, \\
\mathrm{ch}(a-b) &= \mathrm{ch} a\, \mathrm{ch} b - \mathrm{sh} a\, \mathrm{sh} b. \\
\mathrm{th}(a+b) &= \frac{\mathrm{th} a + \mathrm{th} b}{1 + \mathrm{th} a\, \mathrm{th} b}, \\
\mathrm{th}(a-b) &= \frac{\mathrm{th} a - \mathrm{th} b}{1 - \mathrm{th} a\, \mathrm{th} b}.
\end{aligned}$$





الخطوط البيانية للتوابع الزائديّة

إنّ كلّاً من التطبيقات

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}:\ & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & x \mapsto \mathrm{sh}x \\ \mathrm{Ch}:\ & \mathbb{R}_+ \rightarrow [1,+\infty[\,, & x \mapsto \mathrm{ch}x \\ \mathrm{Th}:\ & \mathbb{R} \rightarrow]-1,+1[\,, & x \mapsto \mathrm{th}x \end{aligned}$$

تقابلٌ مستمرٌ ومتزايدٌ تماماً فله تقابل عكسيٌ مستمرٌ ومتزايد تماماً أيضاً، نرمز إليه على التوالي argsh و argch و argth .

- إنّ التابع sh من الصف C^∞، ومشتقُّه لا ينعدم، إذن argsh من الصف C^∞، وبوجه خاص، أيّاً كان x من $\mathbb{R}$،

$$\begin{aligned} (\mathrm{argsh})'(x) &= \frac{1}{(\mathrm{sh})'(\mathrm{argsh}\, x)} = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}\, x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}\, x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

- وكذلك ينتمي التابع Ch إلى الصف C^∞، ومشتقُّه لا ينعدم على $\mathbb{R}_+^*$، إذن argch ينتمي إلى الصف C^∞ على المجال $]1,+\infty[$، وبوجه خاص، أيّاً كان x من $]1,+\infty[$،

$$(\mathrm{argch})'(x) = \frac{1}{(\mathrm{ch})'(\mathrm{argch}\, x)} = \frac{1}{\mathrm{sh}(\mathrm{argch}\, x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

- وبأسلوب مماثل نرى أنّ التابع Th من الصف C^∞، ومشتقُّه لا ينعدم، إذن argth من الصف C^∞، وبوجه خاص، أيّاً كان x من $]-1,+1[$،

$$(\mathrm{argth})'(x) = \frac{1}{(\mathrm{th})'(\mathrm{argth}\, x)} = \frac{1}{1-\mathrm{th}^2(\mathrm{argth}\, x)} = \frac{1}{1-x^2}$$

من ناحية أخرى، نلاحظ بسهولة أنّ التابع

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{argsh} x - \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

قابلٌ للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأنّ مشتقَّه معدوم على هذا المجال، فهو إذن تابع ثابت. ولمّا كان $\varphi(0) = 0$ استنتجنا مباشرة أنّ $\varphi \equiv 0$، ومنه

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

ونترك القارئ يثبت بأسلوب مماثل أنّ

$$\forall x \in [+1, +\infty[, \quad \operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$
$$\forall x \in \,]-1, +1[, \quad \operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

وكذلك يتحقّق صحّةَ العلاقات الآتية

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x) &= \sqrt{x^2 + 1}, & \operatorname{ch}(\operatorname{argth} x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \\
\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x) &= \sqrt{x^2 - 1}, & \operatorname{sh}(\operatorname{argth} x) &= \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \\
\operatorname{th}(\operatorname{argsh} x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, & \operatorname{th}(\operatorname{argch} x) &= \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x},
\end{aligned}$$

3. التوابع المثلّثية

1-3. مبرهنة وتعريف. تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ بالإطلاق، أيّاً كان x من $\mathbb{R}$، ونرمز إلى مجموعها بالرمز $\sin x$. ونسمّي التابع $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \sin x$ **تابع الجيب**. وكذلك تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ بالإطلاق، أيّاً كان x من $\mathbb{R}$، ونرمز إلى مجموعها بالرمز $\cos x$. ونسمّي التابع $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos x$ **تابع جيب التمام** أو **التجيب**.

2-3. مبرهنة. إذا كان (x,y) من $\mathbb{R}^2$، كان

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

الإثبات

لتكن (x,y) من $\mathbb{R}^2$، ولنعرّف المتتاليات

$A=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $B=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $C=(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $D=(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$

كما يلي:

$$\begin{aligned}
a_{2n} &= \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, & a_{2n+1} &= 0.\\
b_{2n} &= \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!}, & b_{2n+1} &= 0.\\
c_{2n} &= 0, & c_{2n+1} &= \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.\\
d_{2n} &= 0, & d_{2n+1} &= \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

ولنعيِّن المتتالية $\Delta = (\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالعلاقة :

$$\Delta = A * B - C * D$$

من الواضح أنّ

$$\delta_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k b_{2n+1-k} - \sum_{k=0}^{2n+1} c_k d_{2n+1-k} = 0$$

ومن جهة أخرى

$$\begin{aligned}
\delta_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} a_k b_{2n-k} - \sum_{k=0}^{2n} c_k d_{2n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} b_{2n-2k} - \sum_{k=1}^{n} c_{2k-1} d_{2n-2k+1}\\
&= \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} x^{2k} y^{2n-2k} + \sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k-1} x^{2k-1} y^{2n-2k+1}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^{k} x^{k} y^{2n-k}\right) = \frac{(-1)^n}{(2n)!}(x+y)^{2n}
\end{aligned}$$

ولمّا كانت جميع المتسلسلات $\sum a_n$ و $\sum b_n$ و $\sum c_n$ و $\sum d_n$ و $\sum \delta_n$ متقاربة بالإطلاق، كان

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n\right)$$

أي
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

ونترك القارئ يثبتُ العلاقة الثانية بأسلوب مماثل. ❐

3-3. مبرهنة. إنّ كلّاً من التابعين $\cos$ و $\sin$ قابلٌ للاشتقاق على $\mathbb{R}$. وتتحقّق العلاقتان $\sin' = \cos$ و $\cos' = -\sin$.

الإثبات

لنلاحظ أولاً المتراجحتين

$$\left|\sin h - h\right| \le \sum_{n=3}^{\infty} \frac{|h|^n}{n!} \le \frac{|h|^3}{6} e^{|h|}$$

و
$$\left|\cos h - 1\right| \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|h|^n}{n!} \le \frac{|h|^2}{2} e^{|h|}$$

اللتين تفيدان أنّ

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\cos h - 1}{h} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin h - h}{h} = 0$$

ولكن بناءً على العلاقة الأولى من المبرهنة 3-2. نجد أنّه، أيّاً كان (x,h) من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ ،

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} + \sin x = \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h - h}{h}$$

ومن ثَمّ

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \left(\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\right) = -\sin x$$

فالتابع $\cos$ قابل للاشتقاق و $\cos' = -\sin$. ويثبت القارئ بأسلوب مماثل الخاصة الموافِقة للتابع $\sin$. ❐

3-4. نتيجة : ينتمي التابعان $\sin$ و $\cos$ إلى الصف C^{∞} على $\mathbb{R}$.

3-5. مبرهنة. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

الإثبات

يكفي أنّ نتأمّل التابع $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(x) = \cos^2 x + \sin^2 x - 1$ ، فهو تابع ثابت لأنّ مشتقّه معدوم على $\mathbb{R}$ ، وهو ينعدم عند الصفر. إذن $\varphi = 0$. ❐

3-6. مبرهنة. يحقّقُ التابعان $\sin$ و $\cos$ الخواص التالية :

① يوجد عدد حقيقي وحيد ϖ ينتمي إلى $]0,2[$ ويحقّق $\cos\varpi = 0$.

② التابع $\sin$ متزايد تماماً على المجال $[0,\varpi]$ ويحقّق $\sin([0,\varpi]) = [0,1]$.

③ التابع $\cos$ متناقص تماماً على المجال $[0,\varpi]$ ويحقّق $\cos([0,\varpi]) = [0,1]$.

④ نسمّي π العددَ 2ϖ ، ويكون كل من التابعين $\sin$ و $\cos$ دوريّاً و يقبل 2π دوراً أصغرياً له.

الإثبات

لنفترض أنّ t عدداً من المجال $]0,\sqrt{6}[$ ، فيكون

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{4n+1}}{(4n+1)!}\left(1 - \frac{t^2}{(4n+3)(4n+2)}\right) > 0$$

فالتابع $\sin$ موجب تماماً على المجال $]0,2[$ ، و التابع $\cos$ متناقص تماماً على المجال $[0,2]$. من ناحية أخرى، لمّا كان $\cos 0 = 1$ وكان

$$\begin{aligned} \cos 2 &= 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n+2}}{(4n+2)!}\left(1 - \frac{4}{(4n+3)(4n+4)}\right) \\ &= -\frac{1}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n+2}}{(4n+2)!}\left(1 - \frac{1}{(4n+3)(n+1)}\right) < 0 \end{aligned}$$

استنتجنا أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد ϖ ينتمي إلى $]0,2[$ ويحقّق $\cos\varpi = 0$ ، ويكون $\cos$ متناقصاً تماماً على $[0,\varpi]$ ، ويتحقّق $\cos([0,\varpi]) = [0,1]$.

ولمّا كان $\cos$ موجباً تماماً على $]0,\varpi[$ ، كان $\sin$ متزايداً تماماً على المجال $[0,\varpi]$. ولكن $\sin 0 = 0$ ، إذن $\sin\varpi > 0$ ، والعلاقة $\cos^2\varpi + \sin^2\varpi = 1$ تثبت، من ثَمّ، أنّ $\sin\varpi = 1$. نستنتج إذن أنّ $\sin([0,\varpi]) = [0,1]$.

ومنه يمكننا أن ننشئ جدول التحولات الآتي

t	0		ϖ
$\cos$	1	$\searrow$	0
$\sin$	0	$\nearrow$	1

ونلاحظ من جهة أخرى أنّه، أيّاً كان x من $\mathbb{R}$، لدينا

$$(*)\qquad \begin{aligned} \cos(x+\varpi) &= \cos x\cos\varpi - \sin x\sin\varpi = -\sin x,\\ \sin(x+\varpi) &= \sin x\cos\varpi + \cos x\sin\varpi = \cos x, \end{aligned}$$

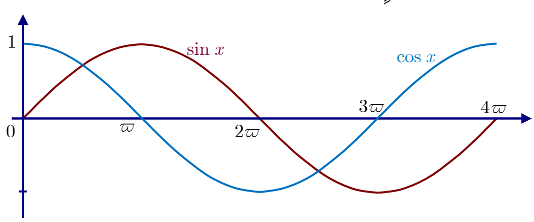
وهذا ما يتيح لنا أن نكتب، أيّاً كان x من $\mathbb{R}$،

$$\cos(x+4\varpi) = -\sin(x+3\varpi) = -\cos(x+2\varpi) = \sin(x+\varpi) = \cos x$$
$$\sin(x+4\varpi) = \cos(x+3\varpi) = -\sin(x+2\varpi) = -\cos(x+\varpi) = \sin x$$

إذن كلٌّ من $\sin$ و $\cos$ تابعٌ دوريٌّ ويقبل $4\varpi = 2\pi$ دوراً له. وتسمح لنا العلاقة $(*)$ بإكمال جدول التحولات لهذين التابعين على المجال $[0,4\varpi]$ كما يأتي:

t	0		ϖ		2ϖ		3ϖ		4ϖ
$\cos$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
$\sin$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

ونستنتج من ثَمّ أنّ 2π هو أصغر دورٍ لكلٍّ من $\sin$ و $\cos$. ❐



الخطان البيانيّان للتابعين $\sin$ و $\cos$.

7-3. ملاحظات

▪ ينتج من المبرهنات السابقة أنّه في حالة n من $\mathbb{N}$ و t من $\mathbb{R}$ لدينا

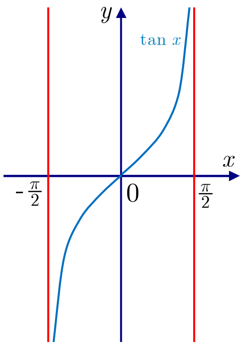
$$\sin^{(n)} t = \sin\left(t+\frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{و} \quad \cos^{(n)} t = \cos\left(t+\frac{n\pi}{2}\right)$$

- وكذلك ينتج من المبرهنة السابقة أنّ

$$\sin t = 0 \Leftrightarrow t \in \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\cos t = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3-8. **تعريف**. لتكن المجموعة $\mathcal{D} = \left\{t \in \mathbb{R} : \cos t \neq 0\right\} = \mathbb{R} \backslash \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ نسمّي التابع

$$\tan : \mathcal{D} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$$ ، **تابع الظلّ**.



يلاحظ القارئ بسهولة أنّ هذا التابع تابعٌ دوري، ويقبل π دوراً، وكذلك أنّه قابلٌ للاشتقاق على $\mathcal{D}$، ويحقّق مشتقُّه العلاقة

$$\forall x \in \mathcal{D},\ \ (\tan)'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

فالتابع $\tan$ من الصف C^∞ على $\mathcal{D}$. وهو متزايد تماماً على كلّ مجال محتوى في $\mathcal{D}$. كما نتحقّق بسهولة أنّ

$$\lim_{x \to (-\pi/2)^+} \tan x = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to (\pi/2)^-} \tan x = +\infty$$

4. التوابع العكسيّة للتوابع المثلّثيّة

4-1. **مبرهنة وتعريف**. لقد وجدنا عند دراسة التوابع المثلّثيّة أنّ التابع

$$\mathrm{Sin} : [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}] \to [-1, +1], \quad x \mapsto \sin x$$

تابع مستمرٌّ ومتزايد تماماً ويحقّق $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ و $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$، فهو إذن تقابل.

نرمز إلى تابعه العكسيّ بالرمز **arcsin**:

$$\arcsin : [-1, +1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

ولمّا كان $(\sin)'(x) = \cos x > 0$ في حالة x من المجال $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$، كان التابع $\arcsin$ تابعاً قابل للاشتقاق على المجال $]-1, +1[$ ولدينا

$$\forall x \in]-1, +1[,\ \ (\arcsin)'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

فالتابع $\arcsin$ ينتمي إلى الصف C^∞ على المجال $]-1, +1[$.

2-4. مبرهنة وتعريف. لقد وجدنا أيضاً عند دراسة التوابع المثلّثيّة أنّ التابع

$$\text{Cos} : [0,\pi] \to [-1,+1], \quad x \mapsto \cos x$$

تابع مستمرٌّ ومتناقص تماماً ويحقّق $\cos(0) = 1$ و $\cos(\pi) = -1$، فهو إذن تقابلٌ.

نرمز إلى تابعه العكسيّ بالرمز **arccos** :

$$\arccos : [-1,+1] \to [0,\pi]$$

ولمّا كان

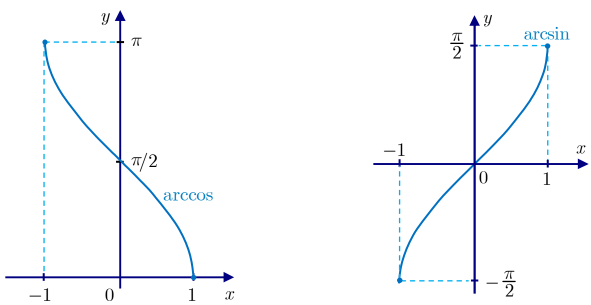
$$\forall x \in]0,\pi[, \;\; (\cos)'(x) = -\sin x < 0$$

كان $\arccos$ قابلاً للاشتقاق على المجال $]-1,+1[$، وكان

$$(\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ومن ثَمّ فالتابع $x \mapsto \arcsin x + \arccos x$ تابع ثابت على المجال $[-1,+1]$، وقيمته عند 0 تساوي $\frac{\pi}{2}$، وهذا ما يثبت المساواة الآتية:

$$\forall x \in [-1,+1], \;\; \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$



الخطّان البيانيان للتابعين $\arcsin$ و $\arccos$

3-4. مبرهنة وتعريف. لمّا كان التابعُ

$$\text{Tan} :]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}, \; x \mapsto \tan x$$

تابعاً مستمرّاً ومتزايداً تماماً ويحقّق $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \text{Tan}\, x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \text{Tan}\, x = -\infty$،

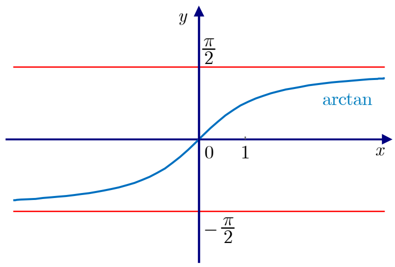
فهو إذن تقابلٌ نرمز إلى تابعه العكسيّ بالرمز $\arctan$:

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[$$

ولمّا كان $(\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$ في حالة x من $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$، كان $\arctan$ قابلاً للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وكان

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad (\arctan)'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

ومن ثَمّ فالتابع $\arctan$ ينتمي إلى الصف C^∞ على $\mathbb{R}$.



الخطّ البياني للتابع arctan

ونترك القارئ يتحقَّق صحّة الخواص والعلاقات الآتية:

$$x = \arcsin t \Leftrightarrow (t = \sin x) \wedge \left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$$
$$x = \arccos t \Leftrightarrow (t = \cos x) \wedge \left(0 \le x \le \pi\right)$$
$$x = \arctan t \Leftrightarrow (t = \tan x) \wedge \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(\arcsin t) = t,\qquad \cos(\arcsin t) = \sqrt{1-t^2},\qquad \tan(\arcsin t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$
$|t| \ne 1$ ↲

$$\sin(\arccos t) = \sqrt{1-t^2},\qquad \cos(\arccos t) = t,\qquad \tan(\arccos t) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}$$
$t \ne 0$ ↲

$$\sin(\arctan t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\qquad \cos(\arctan t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\qquad \tan(\arctan t) = t$$

$$t = \sin x \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\quad (x = \arcsin t + 2k\pi) \vee (x = \pi - \arcsin t + 2k\pi)$$
$$t = \cos x \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\quad (x = \arccos t + 2k\pi) \vee (x = -\arccos t + 2k\pi)$$
$$t = \tan x \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\quad (x = \arctan t + k\pi)$$

سنختم دراستنا للتوابع المألوفة بإثبات الخاصتين المفيدتين الآتيتين للتابع arctan .

4-4. **مبرهنة**.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \ \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x)$$

حيث $\operatorname{sgn}(x)$ هي إشارة العدد x .

الإثبات

لنتأمّل التابع

$$\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$$

نلاحظ باشتقاق هذا التابع أنّ مشتقَّه يساوي الصفر، فهو إذن ثابتٌ على كلِّ مجال محتوى في $\mathbb{R}^*$.
ولمّا كان هذا التابع فردياً ويحقّق $\varphi(1) = \frac{\pi}{2}$ فإننا نستنتج أنّ

$$\forall x > 0, \quad \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$
$$\forall x < 0, \quad \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

وهو المطلوب. ❐

5-4. **مبرهنة**. ليكن (a,b) من $\mathbb{R}^2$، ولنفترض أنّ $ab \neq 1$. عندئذ

$$\arctan a + \arctan b = \begin{cases} \arctan\dfrac{a+b}{1-ab} & : \ ab < 1 \\ \pi\cdot\operatorname{sgn}(b) + \arctan\dfrac{a+b}{1-ab} & : \ ab > 1 \end{cases}$$

حيث $\operatorname{sgn}(b)$ هي إشارة العدد b .

الإثبات

لنثبّت العدد b ولنفترض أنّ $b \neq 0$، (لأن صحة العلاقة المطلوبة واضحة في حالة $b = 0$). ثُمّ
لنتأمّل التابع

$$\varphi : \mathbb{R}\backslash\{\tfrac{1}{b}\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \arctan x + \arctan b - \arctan\frac{x+b}{1-x\cdot b}$$

نلاحظ أنّ φ قابلٌ للاشتقاق على $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{b}\}$ وأنّ $\varphi' = 0$. نستنتج من ذلك أنّ التابع φ
ثابت على كلٍّ من المجالين $]-\infty,\frac{1}{b}[$ و $]\frac{1}{b},+\infty[$.

ولمّا كان

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = +\frac{\pi}{2} + \arctan b + \arctan\frac{1}{b} = (+1+\operatorname{sgn}(b))\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = -\frac{\pi}{2} + \arctan b + \arctan\frac{1}{b} = (-1+\operatorname{sgn}(b))\frac{\pi}{2}$$

فإننا نستنتج أنّ

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{\tfrac{1}{b}\},\quad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & : \ (x<\frac{1}{b}) \ \wedge \ (b>0) \\ -\pi & : \ (x<\frac{1}{b}) \ \wedge \ (b<0) \\ \pi & : \ (x>\frac{1}{b}) \ \wedge \ (b>0) \\ 0 & : \ (x>\frac{1}{b}) \ \wedge \ (b<0) \end{cases}$$

أو

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{\tfrac{1}{b}\},\quad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & : \ xb<1 \\ \pi\operatorname{sgn}(b) & : \ xb>1 \end{cases}$$

وهذه هي العلاقة المطلوبة. ❐

تمرينات

التمرين 1. حلّ جملة المعادلتين :

$$\begin{cases} 2\log_x y + 2\log_y x = -5 \\ xy = e \end{cases}$$

الحل

تُكتب الجملة بالصيغة المُكافئة التالية

$$\begin{cases} 2\dfrac{\ln y}{\ln x} + 2\dfrac{\ln x}{\ln y} = -5 \\ \ln y + \ln x = 1 \end{cases}$$

أو، لأنّ $x \neq 1$ و $y \neq 1$،

$$\begin{cases} \left(\ln y + \ln x\right)^2 = -\dfrac{1}{2}\ln x \ln y \\ \ln y + \ln x = 1 \end{cases}$$

وأخيراً

$$\begin{cases} \ln x \ln y = -2 \\ \ln y + \ln x = 1 \end{cases}$$

إذن $\ln x$ و $\ln y$ هما جذرا المعادلة $z^2 - z - 2 = 0$ أي $\left\{\ln x, \ln y\right\} = \left\{-1, 2\right\}$ أو

$$\left\{x, y\right\} = \left\{e^{-1}, e^2\right\}$$

وهي النتيجة المرجوّة.

التمرين 2. حلّ المتراجحة :

$$\ln\left|1 + x\right| - \ln\left|2x + 1\right| \leq \ln 2$$

الحل

تُدرس هذه المتراجحة على $\mathbb{R}\backslash\{-1, -\frac{1}{2}\}$. وهي تُكتبُ على هذه المجموعة بالصيغة المُكافئة

$$\ln\left|\frac{1 + x}{2x + 1}\right| \leq \ln 2$$

وهذا يُكافئ

$$\left|\frac{1+x}{2x+1}\right| \leq 2, \quad x \neq -1, x \neq -\frac{1}{2}$$

أو

$$(x+1)^2 \leq 4(2x+1)^2, \quad x \neq -1, \quad x \neq -\frac{1}{2}$$

ومنه

$$0 \leq 15x^2 + 14x + 3, \quad x \neq -1$$

وأخيراً

$$0 \leq (3x+1)(5x+3), \quad x \neq -1$$

وعليه نستنتج أنّ مجموعة حلول المتراجحة $\ln\left|1+x\right| - \ln\left|2x+1\right| \leq \ln 2$ هي :

$$\left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,-\tfrac{3}{5}\right] \cup \left[-\tfrac{1}{3},+\infty\right[$$

وهو الحل المطلوب.

التمرين 3. احسب النهاية :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$$

الحل

لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} &= \frac{x^{(x^2)}}{x^{(x^x)}} = x^{x^2-x^x} = \exp\Big(\big(x^2 - x^x\big)\ln x\Big)\\ &= \exp\Big(-\big(1-x^{2-x}\big)x^x \ln x\Big)\\ &= \exp\left(-\left(1-\frac{1}{e^{(x-2)\ln x}}\right)e^{x\ln x}\ln x\right)\end{aligned}$$

وهنا، لمّا كان $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ ، استنتجنا أنّ

$\lim_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} (x-2)\ln x = +\infty$.

وعليه يكون

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln x} = +\infty \text{ و } \lim_{x\to+\infty} e^{(x-2)\ln x} = +\infty$$

إذن

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^{(x-2)\ln x}}\right)=1$$

ومن ثَمّ

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1-\frac{1}{e^{(x-2)\ln x}}\right)e^{x\ln x}\ln x\right)=+\infty \ .$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\lim_{x\to+\infty}\exp\left(-\left(1-\frac{1}{e^{(x-2)\ln x}}\right)e^{x\ln x}\ln x\right)=\lim_{t\to+\infty}e^{-t}=0$$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}=0$.

التمرين 4. حلّ المعادلة : $x^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}\right)^x$.

الحل

لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\left(x^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}\right)^x\right)&\Leftrightarrow\left(e^{\sqrt{x}\ln x}=e^{x\ln\sqrt{x}}\right)\\&\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}\ln x=\frac{x}{2}\ln x\right)\\&\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)\ln x=0\right)\end{aligned}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $x^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}\right)^x$ هي $\{1,4\}$.

التمرين 5. أثبت أنّ

$$\forall x>0,\quad x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$$

واستنتج قيمة نهاية الجداء

$$\Pi_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

عندما تسعى n إلى اللانهاية.

الحل

لنضع $h(x)=x-\ln(1+x)$ و $g(x)=x-\dfrac{x^2}{2}-\ln(1+x)$ في حالة $x\geq 0$.

نلاحظ أنّه على $\mathbb{R}_+^*$ لدينا

$$h'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0$$

و

$$g'(x)=1-x-\frac{1}{1+x}=\frac{-x^2}{1+x}<0$$

إذن h متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}_+$ و g متناقصٌ تماماً على $\mathbb{R}_-$. ومنه

$$\forall x>0,\quad g(x)<g(0)=0 \quad \text{و} \quad \forall x>0,\quad h(x)>h(0)=0$$

وتُكافئ هاتان المتراجحتان قولنا

$$\forall x>0,\quad x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$$

في حالة $1\leq k\leq n$ لدينا استناداً إلى المتراجحة السابقة :

$$\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}<\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)<\frac{k}{n^2}$$

وبجمع هذه المتراجحات عندما تتحوّل k من 1 إلى n نجد

$$\frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}<\ln\Pi_n<\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

أو

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3n}-\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{12n^3}<\ln\Pi_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$$

وهذا يُثبت

أنّ $$\lim_{n\to+\infty}\ln\Pi_n=\frac{1}{2}$$

ومن ثَمّ

$$\lim_{n\to+\infty}\Pi_n=\sqrt{e}\ .$$ ■

التمرين 6. بسّط العبارات التالية :

$$\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}\,x+1}{2}},\qquad \operatorname{arg\,sh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right),\qquad \operatorname{arg\,ch}\left(2x^2-1\right)$$
$$\ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{th}x}{1-\operatorname{th}x}},\qquad \operatorname{arg\,ch}\left(4x^3-3x\right),\quad \operatorname{arg\,th}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}$$

الحل

- لنلاحظ أوّلاً أنّ $\frac{\operatorname{ch}x+1}{2}=\left(\operatorname{ch}\frac{x}{2}\right)^2$ ، إذن $\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x+1}{2}}=\operatorname{ch}\frac{x}{2}=\operatorname{ch}\frac{|x|}{2}$

وقد استفدنا من كوْن التابع ch زوجياً. ولكن $\operatorname{arg\,ch}$ هو التابع العكسي لمقصور ch على $\mathbb{R}_+$ ، إذن

$$\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x+1}{2}}=\frac{|x|}{2}$$

- نلاحظ أنّ المساواة $\operatorname{arg\,sh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)=y$ ، تُكافئ المساواة $\frac{x^2-1}{2x}=\operatorname{sh}y$ ، أو

$x-\frac{1}{x}=e^y-\frac{1}{e^y}$ ، وهذا يُكافئ $(x-e^y)(x+e^{-y})=0$.

  - فإذا كان $x>0$ استنتجنا أنّ $y=\ln x$ ،
  - وإذا كان $x<0$ استنتجنا أنّ $y=\ln(-x)$ ومنه

$$\operatorname{arg\,sh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)=\operatorname{sgn}(x)\ln|x|$$

- التابع $\operatorname{arg\,ch}$ معرّف على $\left[1,+\infty\right[$ ونتحقّق مباشرة أنّ

$$2x^2-1>1\Leftrightarrow |x|>1$$

وعند حساب مشتق التابع الزوجي $f(x)=\operatorname{arg\,ch}(2x^2-1)$ على المجال $\left]1,+\infty\right[$ نجد:

$$f'(x)=\frac{4x}{\sqrt{(2x^2-1)^2-1}}=\frac{4x}{\sqrt{4x^2(x^2-1)}}=2\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=2\operatorname{arg\,ch}'(x)$$

ينتج من ذلك أنّه يوجد ثابت c يُحقّق $\forall x>1,\ f(x)=2\operatorname{arg\,ch}x+c$ ، وبملاحظة استمرار طرفي المساواة السابقة عند $x=1$ نجد أنّ

$$\forall x\geq 1,\qquad \operatorname{arg\,ch}(2x^2-1)=2\operatorname{arg\,ch}x$$

وبالاستفادة من كون التابع f زوجياً نستنتج أنّ

$$\forall x \notin \left]-1,1\right[,\quad \arg\operatorname{ch}(2x^2-1) = 2\arg\operatorname{ch}|x|\,.$$

❖ نرى مباشرة أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x} = \frac{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$$

وعليه

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}} = x$$

❖ التابع $\arg\operatorname{ch}$ معرّف على $[1,+\infty[$ ونتحقّق بدراسة التابع $x \mapsto 4x^3-3x$ أنّ

$$4x^3-3x > 1 \Leftrightarrow x > 1$$

وبحساب مشتق التابع $f(x) = \arg\operatorname{ch}(4x^3-3x)$ على المجال $\left]1,+\infty\right[$ نجد:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(4x^2-1)}{\sqrt{(4x^3-3x)^2-1}} = \frac{3(4x^2-1)}{\sqrt{(4x^2-1)^2(x^2-1)}} \\ &= 3\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = 3\operatorname{argch}'(x) \end{aligned}$$

إذن يوجد ثابت c يُحقّق $\forall x > 1,\ f(x) = 3\arg\operatorname{ch} x + c$، وبملاحظة استمرار طرفي المساواة السابقة عند $x = 1$ نجد أنّ

$$\forall x \geq 1,\quad \arg\operatorname{ch}(4x^3-3x) = 3\arg\operatorname{ch} x$$

❖ بملاحظة أنّ

$$\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2} = \operatorname{sh}^2\frac{x}{2} \quad \text{و} \quad \frac{\operatorname{ch} x + 1}{2} = \operatorname{ch}^2\frac{x}{2}$$

نستنتج مباشرة أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{ch} x - 1} = \operatorname{th}^2\frac{x}{2}$$

وعليه فإنّ

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \arg\operatorname{th}\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{ch} x - 1}} = \arg\operatorname{th}\left(\operatorname{th}\frac{|x|}{2}\right) = \frac{|x|}{2}$$

وبذا يتم إثبات المطلوب. ■

التمرين 7. ليكن a و b عددين حقيقيَّين لا يساويان الصفر معاً.

- أَيمكن إيجاد A و φ يُحقِّقان $\forall x \in \mathbb{R}, a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = A \operatorname{ch}(x+\varphi)$ ؟
- أَيمكن إيجاد A و φ يُحقِّقان $\forall x \in \mathbb{R}, a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = A \operatorname{sh}(x+\varphi)$ ؟

الحل

- **تحليل** : لنفترض أنّه يوجد A و φ يُحقّقان

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a \operatorname{ch}(x) + b \operatorname{sh}(x) = A \operatorname{ch}(x+\varphi) \qquad (*)$$

عندئذ يكون لدينا :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (a+b-Ae^{\varphi})e^{x} + (a-b-Ae^{-\varphi})e^{-x} = 0$$

فإذا ضربنا طرفي هذه المساواة بالمقدار e^{-x} وجعلنا x تسعى إلى $+\infty$، ثُمّ ضربنا طرفي هذه المساواة بالمقدار e^{x} وجعلنا x تسعى إلى $-\infty$، استنتجنا أنّ

$$\begin{cases} a+b = Ae^{\varphi} \\ a-b = Ae^{-\varphi} \end{cases}$$

وهذا يقتضي أن يكون $a = A \operatorname{ch}\varphi$ و $b = A\operatorname{sh}\varphi$، ومن ثَمّ $a^2 - b^2 = A^2 > 0$ (لأنّ a و b لا يساويان الصفر معاً)، أو $|a| > |b|$. فإذا افترضنا وجود عددين A و φ يُحقِّقان $(*)$، كان $|a| > |b|$.

تركيب: وبالعكس، في حالة $|a| > |b|$ نعرّف

$$\varphi = \operatorname{arg\,sh}\left(\frac{b}{A}\right) \quad \text{و} \quad A = \operatorname{sgn}(a)\sqrt{a^2 - b^2}$$

فيكون لدينا من جهة أولى $b = A\operatorname{sh}\varphi$، ومن جهة ثانية $A^2 = a^2 - b^2$، وينتج من ذلك أنّ $a^2 = A^2 \operatorname{ch}^2\varphi$، ولكن للعددين A و a الإشارة نفسها، إذن $a = A\operatorname{ch}\varphi$. وعندئذ يكون لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a \operatorname{ch}(x) + b \operatorname{sh}(x) = A \operatorname{ch}(x+\varphi)$$

إذن، الشرط اللازم والكافي لنجد A و φ يُحقِّقان $(*)$ هو أن تتحقّق المتراجحة $|a| > |b|$.

▪ **تحليل** : لنفترض أنّه يوجد A و φ يُحقّقان

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a\operatorname{ch}(x) + b\operatorname{sh}(x) = A\operatorname{sh}(x+\varphi) \qquad (**)$$

عندئذ يكون لدينا :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (a+b-Ae^{\varphi})e^{x} + (a-b+Ae^{-\varphi})e^{-x} = 0$$

فإذا ضربنا طرفي هذه المساواة بالمقدار e^{-x} وجعلنا x تسعى إلى $+\infty$، ثمّ ضربنا طرفي هذه المساواة بالمقدار e^{x} وجعلنا x تسعى إلى $-\infty$، استنتجنا أنّ

$$\begin{cases} a+b = Ae^{\varphi} \\ a-b = -Ae^{-\varphi} \end{cases}$$

وهذا يقتضي أن يكون $a = A\operatorname{sh}\varphi$ و $b = A\operatorname{ch}\varphi$، ومن ثمّ $b^2 - a^2 = A^2 > 0$، (لأنّ a و b لا يساويان الصفر معاً)، أو $|b| > |a|$. فإذا افترضنا أنّه يوجد عددان A و φ يُحقّقان $(**)$، كان $|b| > |a|$.

تركيب : وبالعكس، في حالة $|b| \geq |a|$ نعرّف

$$A = \operatorname{sgn}(b)\sqrt{b^2 - a^2} \quad \text{و} \quad \varphi = \arg\operatorname{sh}\left(\frac{a}{A}\right)$$

فيكون لدينا من جهة أولى $a = A\operatorname{sh}\varphi$، ومن جهة ثانية $A^2 = b^2 - a^2$، وينتج من ذلك أنّ $b^2 = A^2\operatorname{ch}^2\varphi$، ولكن للعددين A و b الإشارة ذاتها، إذن $b = A\operatorname{ch}\varphi$. وعندئذ يكون لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a\operatorname{ch}(x) + b\operatorname{sh}(x) = A\operatorname{sh}(x+\varphi)$$

إذن، الشرط اللازم والكافي لنجد A و φ يُحقّقان $(**)$ هو أن تتحقّق المتراجحة $|b| \geq |a|$.■

التمرين 8. احسب المجموعين

$$C = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kb+a) \quad \text{و} \quad S = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(kb+a).$$

في حالة عددين حقيقيين a و b.

مساعدة: احسب المقدارين $C+S$ و $C-S$.

الحل

نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
C+S=\sum_{k=0}^{n} e^{kb+a} &= e^{a}\sum_{k=0}^{n} e^{kb}\\
&= e^{a}\,\frac{e^{(n+1)b}-1}{e^{b}-1}\\
&= \frac{e^{a+\frac{(n+1)b}{2}}}{e^{b/2}}\cdot\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}b\right)}{\operatorname{sh}(b/2)}\\
&= e^{a+nb/2}\cdot\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}b\right)}{\operatorname{sh}(b/2)}
\end{aligned}$$

ونجد بأسلوب مماثل أنّ

$$\begin{aligned}
C-S=\sum_{k=0}^{n} e^{-(kb+a)} &= \sum_{k=0}^{n} e^{k(-b)+(-a)}\\
&= e^{-a-nb/2}\cdot\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}b\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{b}{2}\right)}
\end{aligned}$$

وعليه

$$S=\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}b\right)\operatorname{sh}\left(a+\frac{n}{2}b\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{b}{2}\right)} \quad \text{و} \quad C=\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}b\right)\operatorname{ch}\left(a+\frac{n}{2}b\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{b}{2}\right)}$$

وهو المطلوب. ■

التمرين 9. ليكن a عدداً حقيقيّاً. حلّ المعادلة

$$\operatorname{sh}(a)+\operatorname{sh}(a+x)+\operatorname{sh}(a+2x)+\operatorname{sh}(a+3x)=0$$

الحل

لقد أثبتنا في التمرين السابق

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(a)+\operatorname{sh}(a+x)+\operatorname{sh}(a+2x)+\operatorname{sh}(a+3x) &= \frac{\operatorname{sh}(2x)\operatorname{sh}\left(a+3x/2\right)}{\operatorname{sh}(x/2)}\\
&= 4\operatorname{sh}\left(a+3x/2\right)\operatorname{ch}(x/2)\operatorname{ch}x
\end{aligned}$$

وعليه فإنّ حلّ المعادلة المعطاة هو $x=-2a/3$. ■

التمرين 10. ليكن a و b عددين حقيقيَّين. ادرس جملة المعادلتين :

$$\mathcal{E}: \quad \begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = a \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = b \end{cases}$$

الحل

تكافئ الجملة المدروسة الجملة :

$$\begin{cases} e^x + e^y = a + b \\ e^{-x} + e^{-y} = a - b \end{cases}$$

وإذا وضعنا $X = e^x$ و $Y = e^y$ صارت الجملة المدروسة

$$\begin{cases} X + Y = a + b \\ \dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{Y} = a - b \end{cases}$$

وهي تُكافئ

$$\begin{cases} X + Y = a + b \\ XY = \dfrac{a+b}{a-b} \\ X > 0, \quad Y > 0 \end{cases}$$

إذن ليس لهذه الجملة حلول إذا كان $a \leq |b|$ لذلك سنفترض أنّ $a > |b|$.

ولكن يتحقَّق الشرطان $X + Y = a + b$ و $XY = \dfrac{a+b}{a-b}$ إذا وفقط إذا كان X و Y جذري المعادلة

$$Z^2 - (a+b)Z + \frac{a+b}{a-b} = 0$$

وهي تقبل جذرين حقيقيين إذا وفقط إذا كان

$$\Delta = (a+b)^2 - 4\frac{a+b}{a-b} = \frac{a+b}{a-b}(a^2 - b^2 - 4) \geq 0$$

وهو يُكافئ $a \geq \sqrt{b^2 + 4}$ ضمن الشرط $a > |b|$. وفي هذه الحالة يكون الجذران الحقيقيّان موجبين تماماً لأنّ مجموعهما وجداءهما موجبان.

وعندئذ تُعطى المجموعة $\{X, Y\}$ بالصيغة

$$\left\{\frac{a+b}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}(a^2-b^2-4)}, \frac{a+b}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}(a^2-b^2-4)}\right\}$$

وتعطى المجموعة $\{x, y\}$ بالصيغة

$$\left\{\ln\left(\frac{a+b}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}(a^2-b^2-4)}\right), \ln\left(\frac{a+b}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}(a^2-b^2-4)}\right)\right\}$$

أو

$$\left\{\ln\left(\frac{c+\sqrt{c(c-4)}}{2(a-b)}\right), \ln\left(\frac{c-\sqrt{c(c-4)}}{2(a-b)}\right)\right\}, \quad c = a^2-b^2$$

وبالنتيجة، ليس للجملة $\mathcal{E}$ حلولٌ في حالة $a < \sqrt{b^2+4}$. وفي حالة $a = \sqrt{b^2+4}$ تقبل الجملة $\mathcal{E}$ حلاً واحداً (x, y) هو $x = y = \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$، وأخيراً، عندما $a > \sqrt{b^2+4}$ تقبل الجملة حلّين هما

$$\left(\ln\frac{c \pm \sqrt{c(c-4)}}{2(a-b)}, \ln\frac{c \mp \sqrt{c(c-4)}}{2(a-b)}\right)$$

وقد عرّفنا $c = a^2 - b^2$. ■

التمرين 11. ليكن y عدداً من المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. نعرّف $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$. أثبت أنّ: $\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right) = \tan\left(\frac{y}{2}\right)$ و $\operatorname{th} x = \sin y$ و $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{\cos y}$.

الحل

نلاحظ أوّلاً أنّ

$$e^x = \tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\tan\left(\frac{y}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}$$

نستنتج منها

$$\tan\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{e^x-1}{e^x+1} = \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)$$

كما نستنتج منها أيضاً أنّ

$$e^{2x} = \frac{\left(1+\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right)^2}{\left(1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right)^2} = \frac{\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{y}{2}\right)} + 2\tan\left(\frac{y}{2}\right)}{\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{y}{2}\right)} - 2\tan\left(\frac{y}{2}\right)}$$
$$= \frac{1+2\sin\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right)}{1-2\sin\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right)} = \frac{1+\sin y}{1-\sin y}$$

ومنه

$$\sin y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \operatorname{th} x$$

وأخيراً

$$e^{x} + e^{-x} = \frac{1+\tan\left(\frac{y}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)} + \frac{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{y}{2}\right)}$$
$$= \frac{2}{\cos^2\left(\frac{y}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{y}{2}\right)} = \frac{2}{\cos y}$$

إذن $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{\cos y}$.

التمرين 12. حلّ المعادلة $\operatorname{arg\,ch} x = \operatorname{arg\,sh}\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

الحل

نعلم أنّ $\operatorname{arg\,ch} u = \ln\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)$ ، إذن

$$\operatorname{arg\,ch} x = \operatorname{arg\,sh}\left(x-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{\operatorname{arg\,ch} x} - e^{-\operatorname{arg\,ch} x}\right)$$
$$\Leftrightarrow x-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)$$
$$\Leftrightarrow x-\frac{1}{2} = \sqrt{x^2-1}$$

وبملاحظة أنّ أي حلّ للمعادلة الأخيرة يجب أن يكون أكبر من الواحد، نجد

$$x-\frac{1}{2}=\sqrt{x^2-1} \iff \left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=x^2-1\right)\wedge\left(x\geq 1\right)$$
$$\iff x=\frac{5}{4}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 13. حلّ المعادلة : $\arcsin x=\arccos\left(\frac{1}{3}\right)-\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$.

الحل

لنضع

$$\beta=\arccos\left(\frac{1}{4}\right) \quad \text{و} \quad \alpha=\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

فيكون $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ ، وكذلك

$$\cos\alpha=\frac{1}{3},\quad \sin\alpha=\frac{\sqrt{8}}{3},\quad \cos\beta=\frac{1}{4},\quad \sin\beta=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

نستنتج من المعادلة

$$\arcsin x=\alpha-\beta\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$$

أنّ

$$x=\sin(\alpha-\beta)$$

أي

$$x=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{8}-\sqrt{15}}{12}$$ ■

التمرين 14. أثبت أنّ

$$\forall(x,y)\in\left]-1,1\right[^2,\ \operatorname{arg\,th}x+\operatorname{arg\,th}y=\operatorname{arg\,th}\frac{x+y}{1+xy}$$

الحل

نعلم أنّ $\arg\operatorname{th} u=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+u}{1-u}\right)$. ليكن (x,y) من $]-1,1[^2$. عندئذ

$$\begin{aligned}\arg\operatorname{th} x+\arg\operatorname{th} y&=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\\&=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy}\right)\\&=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{x+y}{1+xy}}{1-\frac{x+y}{1+xy}}\right)=\arg\operatorname{th}\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\end{aligned}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 15. أثبت صحّة العلاقات التالية :

$$\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$$

$$3\arctan\left(2-\sqrt{3}\right)=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}$$

$$5\arctan\frac{1}{7}+2\arctan\frac{3}{79}=\frac{\pi}{4}$$

الحل

❖ لنضع $a=\arcsin\frac{4}{5}$، و $b=\arcsin\frac{5}{13}$. من الواضح أن العددين a و b ينتميان إلى المجال $]0,\frac{\pi}{2}[$. إذن من جهة أولى لدينا

$$\cos b=\frac{12}{13} \text{ و } \sin b=\frac{5}{13} \text{ و } \cos a=\frac{3}{5} \text{ و } \sin a=\frac{4}{5}$$

ومن ثَمّ

$$\cos(a+b)=\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{16}{65}$$

ومن جهة ثانية $a+b\in[0,\pi]$، إذن $a+b=\arccos\frac{16}{65}$ وهذا يُكافئ العلاقة المطلوبة :

$$a+b+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$$

❖ ليكن $a=\arctan(2-\sqrt{3})$. لمّا كان $0<2-\sqrt{3}<1$ استنتجنا أنّ a تنتمي إلى المجال $\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$. ولكن

$$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}=\frac{2(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

والعدد $2a$ ينتمي إلى المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$، إذن $2a=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6}$، ومنه $3a=\dfrac{\pi}{4}$.

ومن جهة أخرى، لنضع $b=\arctan\frac{1}{2}$ و $c=\arctan\frac{1}{3}$. عندئذ يكون لدينا

$$\tan(c+b)=\frac{\tan c+\tan b}{1-\tan c\tan b}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=1$$

ولكنْ كلٌّ من العددين b و c ينتمي إلى $\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$ إذن $c+b\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ ومنه المساواة المطلوبة:

$$c+b=\frac{\pi}{4}=3a$$

❖ لنعرّف $a=\arctan\frac{1}{7}$ و $b=\arctan\frac{3}{79}$. عندئذ يكون لدينا

$$\tan(a+b)=\frac{\frac{1}{7}+\frac{3}{79}}{1-3/553}=\frac{79+21}{550}=\frac{2}{11}$$

ولأنّ $0<a<\frac{\pi}{4}$ و $0<b<\frac{\pi}{4}$، استنتجنا أنّ $0<a+b<\frac{\pi}{2}$، ومن العلاقة السابقة نرى أنّه في الحقيقة لدينا $0<a+b<\frac{\pi}{4}$. ومجدّداً يمكننا أن نكتب

$$\tan(2a+b)=\frac{\frac{1}{7}+\frac{2}{11}}{1-2/77}=\frac{25}{75}=\frac{1}{3}$$

ولمّا كان $0<2a+b<\frac{\pi}{2}$ و $\tan(2a+b)<1$ استنتجنا أنّ $0<2a+b<\frac{\pi}{4}$. ومنه

$$\tan\bigl(4a+2b\bigr)=\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}$$

وهنا أيضاً نلاحظ أنّ $0<4a+2b<\frac{\pi}{4}$، ولأنّ $0<a<\frac{\pi}{4}$ استنتجنا أنّ $5a+2b$ عددٌ ينتمي إلى المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ ويُحقّق

$$\tan\bigl(5a+2b\bigr)=\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-3/28}=1$$

فلا بُدّ أن يكون $5a+2b=\frac{\pi}{4}$. وهذا يُثبت المطلوب. ■

ملاحظة. لمّا كان $2a+b=\arctan\frac{1}{3}$ نستنتج من $5a+2b=a+2(2a+b)$ أنّ

$$\arctan\frac{1}{7}+2\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$$

ونستنتج من كون $a+b=\arctan\frac{2}{11}$ و $3a+2(a+b)=5a+2b$ أنّ

$$3\arctan\frac{1}{7}+2\arctan\frac{2}{11}=\frac{\pi}{4}$$

وأخيراً أنّ

$$3\arctan\frac{1}{3}-\arctan\frac{2}{11}=\frac{\pi}{4}$$

التمرين 16. بسّط العبارة التالية :

$$2\arctan x+\arctan\frac{7-2x-7x^2}{1+14x-x^2}$$

الحل

لكثير الحدود $X^2-14X-1$ جذران حقيقيّان هما $7-5\sqrt{2}$ و $7+5\sqrt{2}$. لنعرّف إذن على $\mathcal{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{7-5\sqrt{2},7+5\sqrt{2}\right\}$ التابع

$$f:\mathcal{D}\to\mathbb{R},\ f(x)=2\arctan x+\arctan\frac{7-2x-7x^2}{1+14x-x^2}$$

من الواضح أنّ f مستمر وقابل للاشتقاق على $\mathcal{D}$ ، لنحسب هذا المشتق:

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{2}{1+x^2}+\frac{\left(\dfrac{7-2x-7x^2}{1+14x-x^2}\right)'}{1+\left(\dfrac{7-2x-7x^2}{1+14x-x^2}\right)^2}\\
&=\frac{2}{1+x^2}+\frac{(-2-14x)(1+14x-x^2)-(14-2x)(7-2x-7x^2)}{(7-2x-7x^2)^2+(1+14x-x^2)^2}\\
&=\frac{2}{1+x^2}-\frac{100+100x^2}{50+100x^2+50x^4}=0
\end{aligned}$$

إذن التابع f ثابت على كلٍّ مجال محتوى في $\mathcal{D}$. وبالاستفادة من كون $f(0) = \arctan 7$ و

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\pi + \arctan 7 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \pi + \arctan 7$$

نستنتج أنّ

$$f(x) = \begin{cases} \pi + \arctan 7 & : \qquad\qquad\quad x < 7 - 5\sqrt{2} \\ \arctan 7 & : \quad 7 - 5\sqrt{2} < x < 7 + 5\sqrt{2} \\ -\pi + \arctan 7 & : \quad 7 + 5\sqrt{2} < x \end{cases}$$

وبذا نكون قد بسّطنا العبارة المعطاة. ■

التمرين 17. ادرس التوابع الآتية وارسم خطوطها البيانية :

$$t \mapsto \arcsin \frac{t + \sqrt{1 - t^2}}{2}, \qquad ①$$

$$t \mapsto \arctan \frac{2t}{1 - t^2} - \arctan t, \qquad ②$$

$$t \mapsto \operatorname{argth} \frac{1 + 3\operatorname{th} t}{3 + \operatorname{th} t}. \qquad ③$$

الحل

① دراسة التابع $f(t) = \arcsin \dfrac{t + \sqrt{1 - t^2}}{2}$.

لنتأمّل أوّلاً التابع φ المعطى بالصيغة $\varphi(t) = \dfrac{1}{2}\left(t + \sqrt{1 - t^2}\right)$، وهو تابع معرّف على $[-1,1]$ وقابل للاشتقاق على المجال المفتوح $]-1,+1[$. وكذلك فإنّ

$$\forall t \in\,]-1,+1[, \quad \varphi'(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}\right)$$

وهنا نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} \varphi'(t) \le 0 \quad &\Leftrightarrow \quad t \ge \sqrt{1 - t^2} \\ &\Leftrightarrow \quad (1 > t \ge 0) \wedge (t^2 \ge 1 - t^2) \\ &\Leftrightarrow \quad 1 > t \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

وهذا يفيدنا في كتابة جدول تحوّلات φ كما يأتي:

t	-1		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$\varphi'(t)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$
$\varphi(t)$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

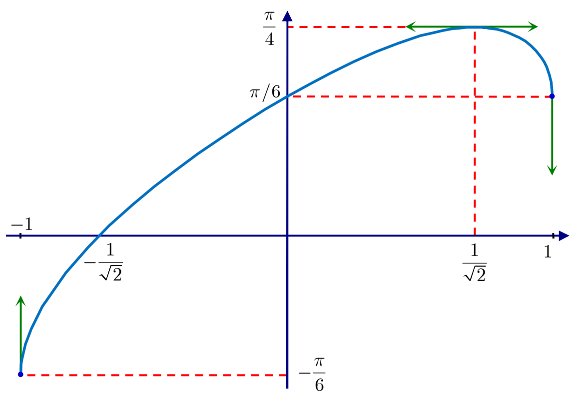
ينتج من ذلك أنّ $\varphi([-1,1]) \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

نستنتج من الدراسة السابقة أنّ التابع $f = \arcsin \circ \varphi$ تابع معرّف ومستمرٌّ على المجال $[-1,1]$، وهو قابل للاشتقاق على $]-1,+1[$. وكذلك فإنّ

$$f'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{1-\varphi^2(t)}}$$

وهذا يتيح لنا كتابة جدول تحولات التابع f، ولقد أضفنا إليه بعض النقاط الإضافيّة للمساعدة في رسم منحنيه البياني:

t	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$f'(t)$	$+\infty$	$+$	1	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	0	$-$	$-\infty$
$f(t)$	$-\frac{\pi}{6}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{6}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{6}$



الخطّ البياني للتابع $t \mapsto f(t) = \arcsin \frac{t+\sqrt{1-t^2}}{2}$

② دراسة التابع $f(t)=\arctan\dfrac{2t}{1-t^2}-\arctan t$.

التابع المدروس معرّف على $\mathcal{D}=\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. وهو من الصف C^∞ على كلِّ مجال محتوى في $\mathcal{D}$. هذا ونلاحظ بالاشتقاق أنّ

$$\begin{aligned}f'(t)&=\frac{\left(\dfrac{2t}{1-t^2}\right)'}{1+\left(\dfrac{2t}{1-t^2}\right)^2}-\frac{1}{1+t^2}\\&=\frac{2(1-t^2)+4t^2}{(1-t^2)^2+4t^2}-\frac{1}{1+t^2}=\frac{1}{1+t^2}\end{aligned}$$

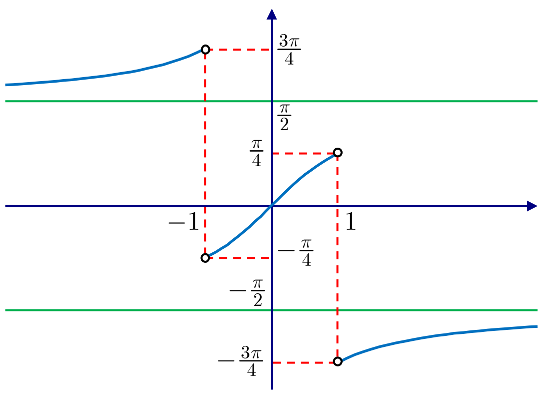
وعليه فإنّ الفرق $t\mapsto f(t)-\arctan t$ ثابتٌ على كلِّ مجال من $\mathcal{D}$، وبملاحظة أنّ

$$\lim_{t\to-\infty}f(t)=\pi \quad \text{و} \quad f(0)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{t\to\infty}f(t)=-\pi$$

نستنتج مباشرة أنّ :

$$\forall t\in\mathcal{D},\quad f(t)=\begin{cases}\arctan t+\pi & : \qquad\quad t<-1\\ \arctan t & : -1<t<1\\ \arctan t-\pi & : \quad 1<t\end{cases}$$

وهذا يفيدنا في رسم الخط البياني للتابع f .



الخطّ البياني للتابع $t\mapsto f(t)=\arctan\frac{2t}{1-t^2}-\arctan t$

③ دراسة التابع $f(t) = \arg\operatorname{th}\dfrac{1+3\operatorname{th}t}{3+\operatorname{th}t}$.

التابع f معرّف على كامل $\mathbb{R}$ ، لأنّ التابع $x \mapsto \frac{1+3x}{3+x}$ تقابل متزايد تماماً من $]-1,+1[$ إلى المجال نفسه. وفي الحقيقة، إذا كان $a = \ln\sqrt{2}$ كان $\operatorname{th}a = \frac{1}{3}$ وعليه فإنّ

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \arg\operatorname{th}\frac{\operatorname{th}a + \operatorname{th}t}{1+\operatorname{th}a\operatorname{th}t} = \arg\operatorname{th}(\operatorname{th}(t+a)) = t + a$$

أو $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = t + \ln\sqrt{2}$. ولا تطرح دراسة f أيّة مشكلة !

التمرين 18. حلّ المعادلات التالية :

- $\arctan x + \arctan(2x) = \dfrac{\pi}{4}$
- $\arcsin x + \arcsin\sqrt{1-x^2} = \dfrac{\pi}{2}$
- $2\arcsin x = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$
- $\arctan x + \arctan(\sqrt{3}x) = \dfrac{7\pi}{12}$

الحل

- ليكن x حلاً للمعادلة $\arctan x + \arctan(2x) = \dfrac{\pi}{4}$ عندئذ يكون $0 < x$ ، ويكون

$$\tan\left(\arctan x + \arctan(2x)\right) = 1$$

أو

$$\frac{3x}{1-2x^2} = 1$$

أو $2x^2 + 3x - 1 = 0$. ولأننا نريد الحل الموجب استنتجنا أنّ

$$x = \frac{1}{4}(\sqrt{17} - 3)$$

وبالعكس، لأنّ $0 < x$ نستنتج أنّ $\theta = \arctan x + \arctan 2x$ عنصر من $]0,\pi[$ ، ولأنّ $\tan\theta = 1$ استنتجنا أنّ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، أي $\arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4}$. فنكون قد أثبتنا أنّ للمعادلة المدروسة حلّاً وحيداً فقط هو $x = \frac{1}{4}(\sqrt{17} - 3)$.

- لنعرّف $\theta = \arcsin x$ من المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. عندئذ يكون x حلاً للمعادلة

$$\arcsin x + \arcsin\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$$

إذا وفقط إذا كان

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{1-\sin^2\theta} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\cos\theta\right)\\ &= \arccos\left(\cos\theta\right) = \left|\theta\right|\end{aligned}$$

وحلول هذه المعادلة هي جميع الأعداد θ من $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$، أي إنّ $\left[0,1\right]$ هي مجموعة حلول المعادلة المدروسة.

- لنعرّف $\theta = \arcsin x$ من المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. عندئذ يكون x حلاً للمعادلة

$$2\arcsin x = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$$

إذا وفقط إذا كان

$$2\theta = \arcsin\left(2\sin\theta\cos\theta\right) = \arcsin\left(\sin 2\theta\right)$$

أو

$$2\theta = \begin{cases} \pi - 2\theta & : \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 2\theta & : \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \\ -\pi - 2\theta & : \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \end{cases}$$

ومجموعة حلول المعادلة الأخيرة هي $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$، وبالعودة إلى x نجد أنّ حلول المعادلة المدروسة هي $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

- لحلّ المعادلة $\arctan x + \arctan\sqrt{3}x = \frac{7\pi}{12}$ نلاحظ مباشرة أنّ التابع

$$f : \mathbb{R} \to \left]-\pi, \pi\right[, t \mapsto \arctan t + \arctan\sqrt{3}t$$

تابع مستمرٌّ ومتزايدٌ تماماً ويعرِّف تقابلاً من $\mathbb{R}$ إلى $]-\pi, \pi[$. ونلاحظ مباشرة أنّ

$$f(1) = \arctan 1 + \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$$

إذن $x = 1$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = \frac{7\pi}{12}$. ■

التمرين 19. حلّ جملة المعادلتين :

$$\mathcal{E}:\quad\begin{cases}\operatorname{argsh} x = 2\operatorname{argsh} y\\ 3\ln x = 2\ln y\end{cases}$$

الحل

تُكافئ الجملةُ $\mathcal{E}$ الجملة

$$\begin{cases} x = \operatorname{sh}\left(2\operatorname{arg\,sh} y\right) = 2y\sqrt{1+y^2}\\ x^3 = y^2\end{cases} :\left(x,y\right)\in\mathbb{R}_+^{*2}$$

وهذه بدورها تُكافئ

$$\begin{cases} x^2 = 4y^2\left(1+y^2\right)\\ x^3 = y^2\end{cases} :\left(x,y\right)\in\mathbb{R}_+^{*2}$$

أو

$$\begin{cases} 1 = 4x+4x^4\\ y=\sqrt{x^3}\end{cases} :\left(x,y\right)\in\mathbb{R}_+^{*2}$$

ولكنّ التابع

$$f: x\mapsto 4x+4x^4$$

متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}_+$ ، ويُحقِّق

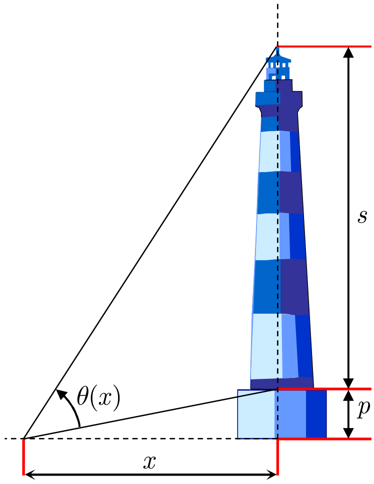
$$f\left(\frac{1}{4}\right)>1 \quad \text{و} \quad f\left(\frac{1}{8}\right)<1$$

إذن يوجد حلٌّ وحيدٌ، وليكن α ، للمعادلة $f(x)=1$. وهو ينتمي إلى $\left]\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right[$. ونجد بحساب تقريبي $\alpha\approx 0.246\,318\,79$.

فيكون الحل الوحيد للجملة $\mathcal{E}$ هو $\left(x,y\right)=\left(\alpha,\alpha\sqrt{\alpha}\right)$.

التمرين 20. تمثال ارتفاعُه s موضوع على قاعدة ارتفاعها p . على أيِّ مسافة من القاعدة يجب أن يقف مُراقبٌ، طوله مهمل، ليرى التمثال تحت زاوية عُظمى ؟

الحل



في الحقيقة، تُعطى الزاوية $\theta(x)$ التي يُرى بها التمثال، عندما يقف المراقب على مسافة x من مركز القاعدة، بالعلاقة

$$\theta(x)=\arctan\frac{s+p}{x}-\arctan\frac{p}{x}$$

لندرس إذن التابع $\theta:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$. فنلاحظ أنّه قابلٌ للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ويُحقّق مشتقّه العلاقة

$$\begin{aligned}\theta'(x)&=\frac{p}{x^2+p^2}-\frac{p+s}{x^2+(p+s)^2}\\&=\frac{p(x^2+(p+s)^2)-(p+s)(x^2+p^2)}{(x^2+p^2)(x^2+(p+s)^2)}\\&=\frac{ps(p+s)-sx^2}{(x^2+p^2)(x^2+(p+s)^2)}\end{aligned}$$

فيكون للتابع θ جدول التحولات الآتي :

x	0		$\sqrt{p(p+s)}$		$+\infty$
$\theta'(x)$		$+$	0	$-$	
$\theta(x)$		$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$	

وعليه يبلغ θ قيمة عظمى عند $x=\sqrt{p(p+s)}$ ، وهذه القيمة هي

$$\theta_{\max}=\arctan\sqrt{\frac{s+p}{p}}-\arctan\sqrt{\frac{p}{s+p}}=\frac{\pi}{2}-2\arctan\sqrt{\frac{p}{s+p}}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 21. ليكن التابع

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1$$

ولنعرّف المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ كما يأتي:

$$S_n = \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\ln(n) - n - \ln(n!)$$

1. أثبت أنّه أيّاً كان العدد الحقيقيّ t من المجال $[0,1[$ فلدينا:

$$2t+\frac{2}{3}t^3 \le \ln\frac{1+t}{1-t} \le 2t+\frac{2}{3}\frac{t^3}{1-t^2}$$

2. أثبت أنّه أيّاً كان العدد الحقيقيّ الموجب تماماً x فلدينا:

$$\frac{1}{3(2x+1)^2} \le f(x) \le \frac{1}{12x(x+1)}$$

يمكن الاستفادة من 1. بأخذ قيمة مناسبة للمتحوّل t.

3. استنتج أنّه مهما يكن العدد الحقيقيّ الموجب تماماً x فإنّ

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{2x+3}\right) \le f(x) \le \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$$

4. أثبت أنّ $S_m - S_n = \sum_{k=n}^{m-1} f(k)$، عندما $m > n \ge 1$. ثمّ استنتج أنّه في حالة $m > n \ge 1$ تتحقّق المتراجحة:

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2m+1}\right) \le S_m - S_n \le \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)$$

5. استنتج أنّه يوجد ثابت β يُحقّق :

$$\frac{1}{6\left(2n+1\right)} \le \beta - S_n \le \frac{1}{12n}$$

أيّاً كان $0 < n$. واحسب $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$ بدلالة β.

الحل

1. لنتأمّل التابع

$$\varphi : \left[0,1\right[\to \mathbb{R},\ \varphi(t) = \ln\frac{1+t}{1-t} - 2t - \frac{2}{3}t^3$$

هذا التابع تابعٌ قابل للاشتقاق على $[0,1[$ ويحقّق مشتقُّه على هذا المجال ما يأتي:

$$\varphi'(t) = \frac{2}{1-t^2} - 2 - 2t^2 = \frac{2t^4}{1-t^2} \geq 0$$

وعليه، التابع φ تابعٌ متزايدٌ ويُحقّق $\varphi(0) = 0$. فهو موجبٌ على المجال $[0,1[$، وهذه هي المتراجحة الأولى.

لنتأمّل أيضاً التابع

$$\psi : \left[0,1\right[\to \mathbb{R},\ \psi(t) = \ln\frac{1+t}{1-t} - 2t - \frac{2}{3}\frac{t^3}{1-t^2}$$

هذا التابع قابل للاشتقاق على $[0,1[$ ويُحقّق مشتقُّه على هذا المجال ما يأتي:

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= \frac{2}{1-t^2} - 2 - 2\frac{t^2}{1-t^2} - \frac{4t^4}{3(1-t^2)^2}\\ &= -\frac{4t^4}{3(1-t^2)^2} \leq 0\end{aligned}$$

وعليه، التابع ψ تابعٌ متناقص ويُحقّق $\psi(0) = 0$. فهو سالب على $[0,1[$، وهذه هي المتراجحة الثانية.

2. لتكن x من $\mathbb{R}_+^*$، ولنضع $t = \dfrac{1}{1+2x}$ في المتراجحة السابقة فنجد

$$1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+2x}\right)^2 \leq \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq 1 + \frac{1}{3}\frac{\left(\frac{1}{1+2x}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{1+2x}\right)^2}$$

أو

$$\frac{1}{3(1+2x)^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{12x\,(1+x)}$$

3. وبملاحظة أنّ $2x+1 \leq 2x+3$ نستنتج بسهولة من المتراجحة السابقة أنّ

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x+3}\right) \leq f(x) \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$$

4. لمّا كان $S_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n - \ln(n!)$ استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned} S_{k+1} - S_k &= \left(k + \frac{3}{2}\right)\ln(k+1) - \left(k + \frac{1}{2}\right)\ln k - 1 - \ln(k+1) \\ &= \left(k + \frac{1}{2}\right)\ln\frac{k+1}{k} - 1 = f(k) \end{aligned}$$

وبجمع العلاقات السابقة طرفاً إلى طرف، عندما تتحوّل k من $k = n$ إلى $k = m - 1$، نجد

$$S_m - S_n = \sum_{k=n}^{m-1} f(k)$$

واستناداً إلى 4. نستنتج مباشرة أنّه في حالة $1 \leq n < m$ لدينا

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2m+1}\right) \leq S_m - S_n \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)$$

5. نستنتج ممّا سبق أنّ المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ متقاربة لأنّها تُحقّق شرط كوشي، لتكن إذن

$$\beta = \lim_{n\to\infty} S_n$$

بجعل m تسعى إلى $+\infty$ في المتراجحة السابقة نجد مباشرة أنّه في حالة $n > 0$ لدينا

$$\frac{1}{6(2n+1)} \leq \beta - S_n \leq \frac{1}{12n}$$

وإذا لا حظنا أنّ $\exp(S_n) = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$ استنتجنا أنّ

$$e^{-\beta} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$$

يُبَرْهَن أنّ $e^{-\beta} = \sqrt{2\pi}$ فنحصل على ما يسمّى علاقة ستيرلينغ Stirling، وهي

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$$

في الحقيقة، لقد أثبتنا أكثر من ذلك، إذ لدينا

$$e^{1/(12n+6)} \leq \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} \leq e^{1/(12n)}$$

في حالة $n > 0$، وهذا يقتضي أنّ

$$\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

وهي أفضل من علاقة ستيرلينغ.

التمرين 22. نعرّف المتتاليتين $(v_n)_{n\geq 3}$ و $(u_n)_{n\geq 3}$ كما يلي:

$$v_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln k} \quad \text{و} \quad u_n = \ln(\ln n) - v_n$$

1. أثبت أنّه أيّاً كان العدد الحقيقيّ الموجب y فلدينا : $y \leq \ln(1+y) \leq \frac{y}{1+y}$.
2. عندما تكون $1 < x$، نضع $f(x) = \ln(\ln(1+x)) - \ln(\ln x)$.

i. أثبت أنّ $f(x) = \ln(1+y)$ حيث $y = \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x}$.

ii. استعمل المتراجحة التي أثبتّها في 1. مرّتين لإثبات أنّه عندما $x > 1$ يكون:

$$\frac{1}{(1+x)\ln(1+x)} \leq f(x) \leq \frac{1}{x\ln(x)}$$

3. استنتج أنّه عندما $3 \leq n < m$ لدينا :

$$0 \leq u_m - u_n \leq \frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{m\ln m}$$

4. أثبت أنّه يوجد ثابت حقيقيّ δ يُحقّق

$$n \geq 3 \Rightarrow 0 \leq \delta - u_n \leq \frac{1}{n\ln n}.$$

5. نعرّف في حالة $2 \leq m$ المقدار $I_m = \sum_{k=m+1}^{m^2} \frac{1}{k\ln k}$. أثبت أنّ

$$\lim_{m\to+\infty} I_m = \ln 2$$

الحل

1. لنتأمّل التابع

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ \varphi(t) = t - \ln(1+t)$$

هذا التابع قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}_+$ ويُحقّق مشتقُّه ما يأتي :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} \geq 0$$

وعليه، فالتابع φ تابعٌ متزايدٌ ولدينا $\varphi(0) = 0$. فهو موجب على $\mathbb{R}_+$ ، وهذه هي المتراجحة الأولى.

لنتأمّل بالمثل التابع

$$\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ \psi(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t}$$

هذا التابع قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}_+$ ويُحقّق مشتقُّه:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \psi'(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{t}{(1+t)^2} \geq 0$$

وعليه، فالتابع ψ تابعٌ متزايد ولدينا $\psi(0) = 0$. فهو موجب على $\mathbb{R}_+$ ، وهذه هي المتراجحة الثانية.

.i.2 لتكن $1 < x$. لدينا

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(\ln(1+x)) - \ln(\ln x) \\ &= \ln \frac{\ln x + \ln(1+x) - \ln x}{\ln x} \\ &= \ln\left(1 + \underbrace{\frac{1}{\ln x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{y}\right) \end{aligned}$$

.ii.2 وبالاستفادة من المتراجحة السابقة نرى أنّ

$$\frac{1}{\ln(1+x)}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leq f(x) \leq \frac{1}{\ln x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

ولكن بالاستفادة من المتراجحة السابقة نفسها نجد أيضاً أنّ

$$\frac{1}{1+x} \leq \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$$

إذن

$$\forall x > 1, \quad \frac{1}{(1+x)\ln(1+x)} \leq f(x) \leq \frac{1}{x\ln x}$$

3. لنلاحظ أنّ

$$u_{k+1} - u_k = \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln k) - \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}$$

نستنتج من ذلك أنّه في حالة $n \leq k < m$ لدينا

$$0 \leq u_{k+1} - u_k \leq \frac{1}{k\ln k} - \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}$$

وبجمع هذه المتراجحات نجد

$$2 < n < m \Rightarrow 0 \leq u_m - u_n \leq \frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{m\ln m}$$

4. نستنتج إذن أنّ المتتالية $(u_n)_n$ تُحقّق شرط كوشي فهي متقاربة ويوجد δ يُحقّق

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \delta$$

وبجعل m تسعى إلى $+\infty$ في المتراجحة السابقة نجد أنّه في حالة $n > 2$ لدينا

$$0 \leq \delta - u_n \leq \frac{1}{n\ln n}$$

5. نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} I_m &= v_{m^2} - v_m \\ &= u_m - \ln\ln m - u_{m^2} + \ln\ln m^2 \\ &= \ln 2 + u_m - u_{m^2} \end{aligned}$$

إذن $\lim_{m\to\infty} I_m = \ln 2$. ∎

التمرين 23. ليكن $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ التابع المعرّف بالعلاقة:

$$f(x)=\frac{(1+x^2/6)\sin x-(x+x^3/2)\cos x}{x^5}\ .$$

أثبت أن النهاية $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجودة واحسبها.

الحل

نستفيد من المتراجحتين :

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}\right| \le \frac{|x|^6}{7!}\operatorname{sh}|x|$$

$$\left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right| \le \frac{x^6}{6!}\operatorname{ch} x$$

إذن إذا عرّفنا، على $\mathbb{R}^*$، التابعين $x\mapsto a(x)$ و $x\mapsto b(x)$ الآتيين:

$$a(x)=\frac{1}{x^7}\left(\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}\right)$$

$$b(x)=\frac{1}{x^6}\left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)$$

كان هذان التابعان محدودين في جوار 0، وكان

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + a(x)x^7$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + b(x)x^6$$

وعليه

$$f(x)=\frac{17}{90}+\left(-\frac{7}{360}+a(x)-b(x)\right)x^2+\frac{a(x)-3b(x)}{6}x^4$$

إذن بجعل x تسعى إلى 0 نجد أنّ

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\frac{x^2}{6})\sin x-(x+\frac{x^3}{2})\cos x}{x^5}=\frac{17}{90}$$

وهي النهاية المطلوبة. ■

مقارنة التوابع والنشر المحدود

1. مقارنة التوابع في جوار نقطة

في هذه الفقرة تُمثِّل A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{R}$، ويمثّل a عنصراً من $\overline{\mathbb{R}}$. نفترض أنّ a لاصقة بالمجموعة A. ونرمز بالرمز $\mathcal{B}$ إلى آثار جوارات a على A أي إلى المجموعة $\{V \cap A : V \in \mathbb{V}(a)\}$، وبالرمز $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ إلى مجموعة التوابع الحقيقية f التي يحوي منطلق كلٍّ منها عنصراً من $\mathcal{B}$. أي ينتمي التابع $f : X \to \mathbb{R}$ إلى $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ إذا وُجِدت في $\mathcal{B}$ مجموعة B يكون f معرّفاً عليها أي تُحقّق $B \subset X$.

1-1. تعريف. ليكن f و g عنصرين من $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$. نقول إنّ g **يُهَيمِن** على التابع f في جوار a ونكتب $f = O(g)$ إذا وفقط إذا وُجِدَ B في $\mathcal{B}$، وعدد M في $\mathbb{R}_+^*$ يُحقّقان

$$\forall x \in B, \quad |f(x)| \le M|g(x)|$$

وهذا يكافئ وجود تابع محدود h في $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ يُحقِّق $f = hg$ في جوارٍ للعنصر a.

وإذا كان g لا ينعدم على المجموعة A فإنّ

$$f = O(g) \Leftrightarrow \left(\frac{f}{g} \text{ تابع محدود في جوارٍ للعنصر } a\right).$$

$$f = O(1) \Leftrightarrow \left(f \text{ تابع محدود في جوارٍ للعنصر } a\right).$$

2-1. مبرهنة.

① لتكن f_1 و f_2 و g عناصر من $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$. إذا كان $f_1 = O(g)$ وكان $f_2 = O(g)$ فإنّ $f_1 + \lambda f_2 = O(g)$ وذلك أياً كانت λ من $\mathbb{R}$.

② لتكن التوابع f_1 و f_2 و g_1 و g_2 عناصر من $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$. إذا كان لدينا $f_1 = O(g_1)$ وكان $f_2 = O(g_2)$ فإنّ $f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$.

③ لتكن التوابع f و g و h عناصر من $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$. إذا كان $f = O(g)$ و $g = O(h)$ فإنّ $f = O(h)$.

الإثبات

① يوجد، انطلاقاً من التعريف، B_1 في $\mathcal{B}$، وعددٌ M_1 في $\mathbb{R}_+^*$، يُحقّقان

$$\forall x \in B_1, \quad |f_1(x)| \le M_1\,|g(x)|$$

وكذلك يوجد B_2 في $\mathcal{B}$، وعددٌ M_2 في $\mathbb{R}_+^*$، يُحقّقان

$$\forall x \in B_2, \quad |f_2(x)| \le M_2\,|g(x)|$$

فإذا لاحظنا أنّ $B = B_1 \cap B_2$ ينتمي إلى $\mathcal{B}$، ووضعنا $M = M_1 + |\lambda|\, M_2$ أمكننا أن نكتب

$$\forall x \in B, \quad \left|f_1 + \lambda\, f_2(x)\right| \le M\left|g(x)\right|$$

ومن ثَمّ $f_1 + \lambda\, f_2 = O(g)$.

② يوجد، استناداً إلى التعريف، B_1 في $\mathcal{B}$، وعددٌ M_1 في $\mathbb{R}_+^*$، يُحقّقان

$$\forall x \in B_1, \quad |f_1(x)| \le M_1\,|g_1(x)|$$

وكذلك يوجد B_2 في $\mathcal{B}$، وعددٌ M_2 في $\mathbb{R}_+^*$، يُحقّقان

$$\forall x \in B_2, \quad |f_2(x)| \le M_2\,|g_2(x)|$$

فإذا لاحظنا أنّ $B = B_1 \cap B_2$ ينتمي إلى $\mathcal{B}$، ووضعنا $M = M_1 M_2$ أمكننا أن نكتب

$$\forall x \in B, \quad |f_1(x) f_2(x)| \le M\,|g_1(x) g_2(x)|$$

ومن ثَمّ $f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$.

③ يوجد، استناداً إلى التعريف، B_1 في $\mathcal{B}$، وعددٌ M_1 في $\mathbb{R}_+^*$، يُحقّقان

$$\forall x \in B_1, \quad |f(x)| \le M_1\,|g(x)|$$

وكذلك يوجد B_2 في $\mathcal{B}$، وعددٌ M_2 في $\mathbb{R}_+^*$، يُحقّقان

$$\forall x \in B_2, \quad |g(x)| \le M_2\,|h(x)|$$

فإذا لاحظنا أنّ $B = B_1 \cap B_2$ ينتمي إلى $\mathcal{B}$، ووضعنا $M = M_1 M_2$ أمكننا أن نكتب

$$\forall x \in B, \quad |f(x)| \le M_1\,|g(x)| \le M_1 M_2\,|h(x)|$$

ومن ثَمّ $f = O(h)$. ❐

3-1. تعريف. ليكن f و g عنصرين من $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$. نقول إنّ f **مُهمَلٌ** أمام g في جوار a ونكتب $f=o(g)$ إذا وفقط إذا تحقَّق الشرط الآتي : أياً كان ε من $\mathbb{R}_+^*$ ، يوجد B_ε في $\mathcal{B}$ ، يُحقِّقان

$$\forall x\in B_\varepsilon,\quad \left|f(x)\right|\le\varepsilon\left|g(x)\right|$$

وهذا يكافئ وجود تابع ξ في $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ يُحقِّق $f=\xi\cdot g$ في جوار a ، و $\lim_a \xi=0$.

وإذا كان g لا ينعدم على المجموعة A كان

$$\lim_a \frac{f}{g}=0\Leftrightarrow f=o(g).$$

$$\lim_a f=0\Leftrightarrow f=o(1).$$

4-1. مبرهنة.

① أياً كانت العناصر f و g و h من $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ ، وأياً كان λ من $\mathbb{R}$ ، فلدينا

$$\begin{array}{llll} i. & f=o(g) & \Rightarrow & f=O(g)\\ ii. & \big(f=o(g)\big)\wedge\big(g=O(h)\big) & \Rightarrow & f=o(h)\\ iii. & \big(f=O(g)\big)\wedge\big(g=o(h)\big) & \Rightarrow & f=o(h)\\ iv. & \big(f=o(h)\big)\wedge\big(g=o(h)\big) & \Rightarrow & \big(f+\lambda g=o(h)\big)\end{array}$$

② لتكن f_1 و f_2 و g_1 و g_2 من $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$. إذا كان $f_1=o(g_1)$ وكان $f_2=O(g_2)$ كان $f_1f_2=o(g_1g_2)$.

الإثبات

لنثبت النقطة ② على سبيل المثال، يوجد B_2 في $\mathcal{B}$ ، وعددٌ M_2 في $\mathbb{R}_+^*$ ، يُحقِّقان

$$\forall x\in B_2,\quad \left|f_2(x)\right|\le M\left|g_2(x)\right|$$

لتكن ε من $\mathbb{R}_+^*$ ، يوجد في $\mathcal{B}$ عنصر B_ε يُحقّق

$$\forall x\in B_\varepsilon,\quad \left|f_1(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{M}\left|g_1(x)\right|$$

فإذا لاحظنا أنّ $B=B\cap B_\varepsilon$ ينتمي إلى $\mathcal{B}$ ، أمكننا أن نكتب

$$\forall x\in B,\quad \left|f_1(x)f_2(x)\right|\le M\frac{\varepsilon}{M}\left|g_1(x)g_2(x)\right|\le\varepsilon\left|g_1(x)g_2(x)\right|$$

ومن ثَمّ $f_1f_2=o(g_1g_2)$. ❐

1-5. أمثلة

❶ أياً كان α من $\mathbb{R}$ ، وأياً كان β من $\mathbb{R}_+^*$ ، لدينا $x^\alpha = o(e^{x^\beta})$ في جوار $+\infty$.

إنّ هذه النتيجة واضحة إذا كان $\alpha \leq 0$ ، لأنه في هذه الحالة يكون التابع $x \mapsto x^\alpha$ محدوداً في جوار $+\infty$ و $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x^\beta} = +\infty$.

لنفترض أنّ $\alpha > 0$. يوجد في $\mathbb{N}$ عددٌ n يُحقِّق $\alpha < n\beta$. وبناءً على تعريف التابع الأسيّ يكون

$$\forall x > 1, \quad \frac{(x^\beta)^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{x^\beta}$$

ومنه

$$\begin{aligned} x > 1 \quad &\Rightarrow \quad x^\alpha \leq x^{\beta n} \leq \frac{(n+1)!}{x^\beta} e^{x^\beta} \\ &\Rightarrow \quad \frac{x^\alpha}{e^{x^\beta}} \leq \frac{(n+1)!}{x^\beta} \end{aligned}$$

ومن ثَمّ $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha e^{-x^\beta} = 0$.

❷ أياً كان α من $\mathbb{R}_+^*$ ، فلدينا $\ln x = o(x^\alpha)$ في جوار $+\infty$.

لمّا كان $\lim\limits_{t\to\infty} te^{-t} = 0$ ، كان $\lim\limits_{t\to\infty} te^{-\alpha t} = 0$. وبإجراء تغييرٍ للمتحوّل : $t = \ln x$ نجد $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$. وهذا يثبت المطلوب.

❸ أياً كان α من $\mathbb{R}_+^*$ لدينا $\ln x = o(x^{-\alpha})$ في جوار 0^+ .

تنتج هذه الخاصّة من السابقة بإبدال $\frac{1}{x}$ بالمقدار x .

2. النشر المحدود

سنفترض في هذه الفقرة أنّ المجموعة A مجالٌ غير تافه I من $\mathbb{R}$ ، وأنّ a عنصرٌ من I . وسنعرّف الرمزين $\mathcal{B}$ و $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ مثلما فعلنا في الفقرة السابقة.

1-2. **تعريف**. ليكن f تابعاً من $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$. نقول إنّ للتابع f نشراً محدوداً من المرتبة n في جوار a ، إذا وفقط إذا وُجِدَ كثير حدود $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ من الدرجة n على الأكثر يُحقّق $f(x) - P(x-a) = o((x-a)^n)$ في جوار a .

نسمّي التابع

$$x \mapsto P(x-a) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$$

من $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ ، **النشر المحدود من المرتبة n للتابع f في جوار a** (أو عند a)، ونرمز إليه عادة بالرمز $DL_n(f,a)$ أو ببساطة $DL_n(f)$ إذا لم يكن هنالك مجال للالتباس.

وإذا حقّق $DL_n(f,a)$ الشرط $f(x) - DL_n(f,a)(x) = O((x-a)^{n+1})$ في جوار a قلنا إنّ $DL_n(f,a)$ **نشر محدود بالمعنى القوي** من المرتبة n للتابع f عند a .

2-2. **ملاحظات**

- إذا كان f تابعاً من $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ يقبل نشراً محدوداً من المرتبة n في جوار a ، كان التابع f مستمراً عند a .
- إذا كان f تابعاً من $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ يقبل نشراً محدوداً بالمعنى القوي من المرتبة n في جوار a ، فإنّه يقبل نشراً محدوداً من المرتبة n في جوار a ، ولكنّ العكس خطأ. على سبيل المثال إذا كان $f(t) = 1 + t + t\sqrt{t}$ في جوار 0 ، فإنّ $DL_1(f)(t) = 1 + t$ ولكنّ هذا النشر المحدود ليس نشراً محدوداً بالمعنى القوي.

- إذا كان f تابعاً من $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ يقبل نشراً محدوداً $DL_n(f,a)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$ من المرتبة $n \geq 1$ في جوار a، فإنّه يقبل الاشتقاق عند a، ويقبل a_1 مشتقّاً له عند a.
ولكن لا يمكن تعميم هذه الخاصّة إلى مشتقات عليا.
فمثلاً إذا كان

$$f(t) = \begin{cases} t + t^3 \sin \frac{1}{t} & : \quad t \neq 0 \\ 0 & : \quad t = 0 \end{cases}$$

كان $DL_2(f)(t) = t$ في جوار 0، ولكن f لا يقبل الاشتقاق مرّتين عند 0.

- يفيد تغيير المتحوّل $t \mapsto x - a$ في إرجاع مسألة النشر المحدود في جوار a إلى الحالة $a = 0$، وهذا ما سنفعله في أغلب الأحيان.

- لقد جرت العادة أن نكتب

$$f = DL_n(f,a) + o((x-a)^n)$$

دلالة على المساواة $f - DL_n(f,a) = o((x-a)^n)$. وأن نكتبَ

$$f = DL_n(f,a) + O((x-a)^{n+1})$$

عوضاً عن $f - DL_n(f,a) = O((x-a)^{n+1})$.

2-3. أمثلة

- **التابع الأسّي**. لقد أثبتنا عند دراسة التوابع المألوفة أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$$

إذن يقبل التابع الأسيّ نشراً محدوداً من أيّة مرتبة n في جوار 0، ويكون

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1}) \qquad ❶$$

- **تابع الظلّ العكسي**. من الواضح استناداً إلى قانون مجموع متتالية هندسيّة أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} \right| \leq x^{2n+2}$$

فإذا كانت n من $\mathbb{N}$، وعرّفنا على $\mathbb{R}$ التابع

$$f(x) = \arctan x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

كان لدينا استناداً إلى ما سبق

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leq x^{2n+2}$$

إذن لتكن x من $\mathbb{R}$، نجد عملاً بمبرهنة التزايدات المحدودة عدداً θ من $]0,1[$، يُحقّق $f(x) = x\,f'(\theta x)$، ومن ثَمّ يكون

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq |x|^{2n+3}$$

نستنتج من هذه المناقشة أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| \arctan x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \right| \leq |x|^{2n+3}$$

إذن يقبل التابع $\arctan$ نشراً محدوداً من أية مرتبة n في جوار 0، ويكون

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + O(x^{2n+3}) \quad ❷$$

يمكننا أن نستنتج من المتراجحة السابقة أيضاً أنّه:

$$\forall x \in]-1,+1[, \quad \arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$ [1]

- **التابع اللوغاريتمي**. لتكن n من $\mathbb{N}^*$، ولتكن x من $]-1,+\infty[$. ثُمّ لنعرّف

$$f(x) = \ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$$

[1] تبقى هذه المساواة أيضاً صحيحة في حالة $x = 1$ أو $x = -1$.

نتحقق بسهولة أنّ

$$\forall x \in \left]-1,+\infty\right[, \quad f(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k = \frac{(-x)^n}{1+x}$$

لتكن x من $\left]-1,+\infty\right[$، نجد استناداً إلى مبرهنة التزايدات المحدودة عدداً θ من $\left]0,1\right[$، يُحقّق $f(x) = xf'(\theta x)$، ومن ثمّ

$$\forall x \in \left]-1,+\infty\right[, \quad \left|f(x)\right| \leq \max\left(1, \frac{1}{1+x}\right) \cdot |x|^{n+1}$$

نستنتج من هذا أنّه في حالة n من $\mathbb{N}^*$، و $x > -1$ لدينا

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right| \leq \max\left(1, \frac{1}{1+x}\right) \cdot |x|^{n+1}$$

إذن يقبل التابع $x \mapsto \ln(1+x)$ نشراً محدوداً بالمعنى القوي من أية مرتبة n في جوار 0، ويكون

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + O(x^{n+1}) \qquad ❸$$

ويمكننا أن نستنتج من المتراجحة السابقة أيضاً أنّه:

[2] $$\forall x \in \left]-1,+1\right[, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

نثبتُ بأسلوب مماثل أنّ التابع $x \mapsto \ln(1-x)$ يقبل نشراً محدوداً بالمعنى القوي من أيّة مرتبة n في جوار 0، وأنّ

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + O(x^{n+1}) \qquad ❸'$$

[2] تبقى هذه المساواة أيضاً صحيحة عندما $x = 1$.

2-4. **مبرهنة**. إذا كان f تطبيقاً من $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ يقبل نشراً محدوداً من المرتبة n في جوار a، كان هذا النشر المحدود وحيداً.

الإثبات

لنفترض وجود كثيري حدود P و Q من الدرجة n على الأكثر يُحقّقان

$$f(x) - Q(x-a) = o((x-a)^n)$$

و

$$f(x) - P(x-a) = o((x-a)^n)$$

إذن يكون

$$P(x-a) - Q(x-a) = o((x-a)^n)$$

في جوار a، وبإجراء تغيير للمتحوّل نستنتج أنّ $P(t) - Q(t) = o(t^n)$ في جوار 0. لنضع

$$R = P - Q = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$$

فيكون لدينا $R(t) = o(t^n)$ في جوار 0.

لنفترض على سبيل الجدل أنّ $R \neq 0$ ولنضع $r = \min\{k : c_k \neq 0\}$. ينتج من العلاقة $R(t) = o(t^n)$ أنّه في جوار 0 لدينا

$$c_r + c_{r+1}t + \cdots + c_n t^{n-r} = o(t^{n-r})$$

وإذا جعلنا t تسعى إلى 0، وجدنا $c_r = 0$، وهذا يناقض تعريف r. إذن لا بدّ أن يكون $R = 0$، أو $P = Q$. ❐

2-5. **مبرهنة**. إذا كان f تابعاً من $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ يقبل $DL_n(f)$ نشراً محدوداً من المرتبة n في جوار 0، فإنّ التابع $x \mapsto f(-x)$ يقبلُ $x \mapsto DL_n(f)(-x)$ نشراً محدوداً من المرتبة n في جوار 0.

الإثبات

الإثبات بسيط ومتروك للقارئ. ❐

2-6. **نتيجة**. إذا كان f تابعاً زوجياً (فردياً) من $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ وكان f يقبل $DL_n(f)$ نشراً محدوداً من المرتبة n في جوار 0، كانت الثوابت ذات الأدلّة الفردية (الزوجية) في $DL_n(f)$ معدومة.

الإثبات

الإثبات بسيط ومتروك للقارئ. ❐

3. قواعد حساب النشر المحدود

﴿ سنذكر القواعد في جوار 0 ، إذ يمكن الرجوع إلى هذه الحالة دوماً ﴾

1-3. ✍ ليكن f_1 و f_2 تابعين من $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ ، يقبلان نشرين محدودين من المرتبة n في جوار 0:

$$f_1(x) = DL_n(f_1)(x) + o(x^n)$$

و

$$f_2(x) = DL_n(f_2)(x) + o(x^n)$$

عندئذ، أياً كان λ من $\mathbb{R}$ ، يقبل التابع $f_1 + \lambda f_2$ نشراً محدوداً من المرتبة n في جوار 0 ، ويكون :

$$DL_n(f_1 + \lambda\, f_2) = DL_n(f_1) + \lambda\, DL_n(f_2)$$

وإذا كان النشران المحدودان للتابعين f_1 و f_2 نشرين محدودين بالمعنى القوي، كان النشر المحدود للتابع $f_1 + \lambda\, f_2$ نشراً محدوداً بالمعنى القوي.

2-3. ✍ ليكن f و g تابعين من $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ ، يقبلان نشرين محدودين من المرتبة n في جوار 0:

$$f(x) = DL_n(f)(x) + o(x^n)$$

و

$$g(x) = DL_n(g)(x) + o(x^n)$$

عندئذ يقبل التابع fg نشراً محدوداً من المرتبة n في جوار 0 ، وأمّا $DL_n(fg)$ فيساوي مجموع جميع الحدود التي لا تزيد درجتها على n في الجداء $DL_n(f) \cdot DL_n(g)$.

وإذا كان النشران المحدودان للتابعين f و g نشرين محدودين بالمعنى القوي، كان النشر المحدود للتابع fg نشراً محدوداً بالمعنى القوي.

لنضع تعريفاً $P = DL_n(f)$ و $Q = DL_n(g)$. عندئذ يوجد تابعان u و v من $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ يُحقِّقان $\lim\limits_0 u = 0$ و $\lim\limits_0 v = 0$ ، ويحققان أيضاً

$$f(x) = P(x) + x^n u(x)$$

و

$$g(x) = Q(x) + x^n v(x)$$

ومن ثَمّ يكون

$$(fg)(x) - P(x)Q(x) = x^n w(x)$$

حيث

$$w(x) = P(x)v(x) + Q(x)u(x) + x^n u(x)v(x)$$

و $\lim_0 w = 0$.

فإذا كان S مجموع جميع الحدود التي لا تزيد درجتها على n في الجداء PQ، كان X^{n+1} قاسماً لكثير الحدود $PQ - S$، وكان من ثَمّ

$$P(x)Q(x) = S(x) + O(x^{n+1})$$

ومنه نستنتج أنّ

$$(fg)(x) = S(x) + o(x^n)$$

ويثبت القارئ، بأسلوب مماثل، حالة النشر المحدود بالمعنى القوي.

3-3. ✍ ليكن f و g تابعين من $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$، يقبلان نشرين محدودين من المرتبة n في جوار 0:

$$f(x) = DL_n(f)(x) + o(x^n)$$

و

$$g(x) = DL_n(g)(x) + o(x^n)$$

نفترض أنّ $DL_n(g)(0) = b_0 \neq 0$ (هذا يعني أنّ $\lim_0 g = b_0$ وأنّه يمكن تعريف $1/g$ في جوار 0). عندئذ يقبل التابع f/g نشراً محدوداً من المرتبة n في جوار 0، أمّا النشر $DL_n(f/g)$ فيساوي خارجَ القسمة تَبَعاً للقوى المتزايدة حتى المرتبة n لكثير الحدود $DL_n(f)$ على كثير الحدود $DL_n(g)$.

وإذا كان النشران المحدودان للتابعين f و g نشرين محدودين بالمعنى القوي، كان النشر المحدود للتابع f/g نشراً محدوداً بالمعنى القوي.

لنضع $P = DL_n(f)$ و $Q = DL_n(g)$. عندئذ يوجد تابعان u و v من $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ يُحقّقان $\lim_0 u = 0$ و $\lim_0 v = 0$، ويُحقّقان أيضاً

$$f(x) = P(x) + x^n u(x)$$

و

$$g(x) = Q(x) + x^n v(x)$$

ولمّا كان g لا ينعدم في جوار الصفر، يمكننا أن نقتصر في كلٍّ ما يأتي على هذا الجوار، فيكون من ثَمّ

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{P(x)}{Q(x)} = x^n w(x)$$

حيث

$$w(x) = \frac{u(x)Q(x) - v(x)P(x)}{g(x)Q(x)}$$

و $\lim\limits_0 w = 0$.

وإذا كان S و R خارج وباقي القسمة تبعاً للقوى المتزايدة حتى المرتبة n لكثير الحدود P على Q، كان

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + x^{n+1}\frac{R(x)}{Q(x)}$$

والتابع الكسري $x \mapsto \dfrac{R(x)}{Q(x)}$ مستمرٌّ عند 0 لأنّ $Q(0) \neq 0$. إذن

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + O(x^{n+1})$$

ونستنتج أنّ

$$\frac{f(x)}{g(x)} = S(x) + o(x^n)$$

نترك للقارئ أن يثبتَ، بالأسلوب نفسه، حالة النشر بالمعنى القوي.

4-3. ✍ ليكن $f : I \to \mathbb{R}$ تابعاً معرّفاً على مجال غير تافه يحوي 0. نفترض أنّ التابع f يقبل الاشتقاق على I، و أنّ f' يقبل نشراً محدوداً من المرتبة n في جوار 0 كما يأتي:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

عندئذ يقبل f نشراً محدوداً من المرتبة $n+1$ في جوار 0 هو

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} x^k + o(x^{n+1})$$

وإذا كان النشر المحدود للتابع f' نشراً محدوداً بالمعنى القوي، كان النشر المحدود للتابع f نشراً محدوداً بالمعنى القوي. إنّ هذه القاعدة نتيجة مباشرة من مبرهنة التزايدات المحدودة.

3-5. ✍ ليكن f و g تابعين من $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$، يقبلان نشرين محدودين من المرتبة $n \geq 1$ في جوار للعدد 0:

$$f(x) = DL_n(f)(x) + o(x^n)$$

و

$$g(x) = DL_n(g)(x) + o(x^n)$$

نفترض أنّ $DL_n(g)(0) = 0$ (هذا يعني أنّ $\lim\limits_{0} g = 0$). عندئذ يقبل التابع $f \circ g$ نشراً محدوداً من المرتبة n في جوار 0، أمّا النشر $DL_n(f \circ g)$ فيساوي مجموعَ جميع الحدود التي لا تزيد درجتها على n في $DL_n(f) \circ DL_n(g)$.
وإذا كان النشران المحدودان للتابعين f و g نشرين محدودين بالمعنى القوي، كان النشر المحدود للتابع $f \circ g$ نشراً محدوداً بالمعنى القوي.

لا يحوي إثبات هذه القاعدة أفكاراً جديدة، لذلك لن نذكر التفاصيل تاركين هذا الإثبات تمريناً للقارئ.

قبل أن نعرض بعض الأمثلة على استعمال هذه القواعد في حساب النشر المحدود لبعض التوابع، لا بُدّ لنا من إيجاد النشر المحدود لبعض التوابع الشهيرة، وهذا ما سنفعله في الفقرة الآتية، التي تضمّ تذكيراً بمنشور تايلور–لاغرانج الذي درسناه في فصل سابق.

4. علاقات تايلور والنشر المحدود

لنذكّر بمنشور تايلور ومتراجحة تايلور لاغرانج اللتين درسناهما عند دراسة الاشتقاق.

1-4. **مبرهنة – منشور تايلور لاغرانج** Taylor-Lagrange. ليكن I مجالاً غير تافه في $\mathbb{R}$. وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ يقبل الاشتقاق $n+1$ مرّة على I. عندئذ أياً كان العنصر (a,b) من I^2 الذي يحقّق $a \neq b$، يوجد عددٌ θ من $]0,1[$ يُحقّق

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(b-a))}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

الإثبات

لنضع $h = b - a$، ولنعرّف التابع $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ بالعلاقة

$$\varphi(t) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t)^k}{k\,!} f^{(k)}(a+th)h^k - \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} A$$

حيث يتعيّن الثابت A بالشرط $\varphi(0) = 0$. نلاحظ أنّ φ مستمرٌّ وقابل للاشتقاق على $[0,1]$ ويحقّق $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. إذن، عملاً بمبرهنة رول، يوجد عددٌ θ في $]0,1[$ يُحقّق المساواة $\varphi'(\theta) = 0$. ولكن نجد بحساب بسيط أنّ

$$\varphi'(t) = \frac{(1-t)^n}{n\,!} h^{n+1} \left(A - f^{(n+1)}(a+th) \right)$$

فالشرط $\varphi'(\theta) = 0$ يثبت أنّ $A = f^{(n+1)}(a+\theta h)$، والعلاقة $\varphi(0) = 0$ تمثّل النشر المطلوب. ❐

2-4. نتيجة – متراجحة تايلور لاغرانج. ليكن I مجالاً غير تافه في $\mathbb{R}$. وليكن f تابعاً من الصف C^{n+1} على I. نفترض أنّه يوجد عددٌ M يُحقّق

$$\forall x \in I, \quad \left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq M$$

عندئذ يكون

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad \left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(b-a)^k \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)\,!} M$$

3-4. نتيجة. ليكن I مجالاً غير تافه في $\mathbb{R}$. وليكن f تطبيقاً من الصف C^{n+1} على I، وليكن a عنصراً من داخل I. عندئذ يقبل f نشراً محدوداً بالمعنى القوي من المرتبة n في جوار a، ويكون

$$DL_n(f,a)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k$$

الإثبات

يوجد $0<\eta$ يُحقّق $[a-\eta,a+\eta]\subset I$، ولمّا كان $f^{(n+1)}$ مستمراً على هذا المجال فهو محدود عليه، نعرّف إذن

$$M_\eta = \sup\left\{\frac{|f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!} : t\in[a-\eta,a+\eta]\right\}$$

ونطبِّق النتيجة السابقة على المجال $[a-\eta,a+\eta]$، فنجد

$$\forall x\in[a-\eta,a+\eta],\qquad \left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right|\le M_\eta\cdot\left|x-a\right|^{n+1}$$

وعليه نستنتج أنّه في جوار a يكون

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+O((x-a)^{n+1})$$ ❐

4-4. أمثلة

- بتطبيق متراجحة تايلور-لاغرانج على التابعين $\sin$ و $\cos$ نجد المتراجحتين المهمتين:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ \forall x\in\mathbb{R},\qquad \left|\sin x-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}\right|\le\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ \forall x\in\mathbb{R},\qquad \left|\cos x-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{(2k)!}x^{2k}\right|\le\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

وينتج منهما النشران المحدودان الآتيان في جوار 0:

$$\sin x=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}+O(x^{2n+1}) \qquad ❹$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{(2k)!}x^{2k}+O(x^{2n+2}) \qquad ❹'$$

- وكذلك بتطبيق متراجحة تايلور-لاغرانج على التابعين sh و ch نجد المتراجحتين

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall x \in \mathbb{R},\qquad \left| \operatorname{sh} x - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)!} x^{2k-1} \right| \le \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall x \in \mathbb{R},\qquad \left| \operatorname{ch} x - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \right| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

وينتج منهما النشران المحدودان التاليان في جوار 0:

❺
$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + O(x^{2n+1})$$

❺'
$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2n+2})$$

- ليكن α عدداً من $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{N})$، وليكن التابع

$$f :]-1,+\infty[\ \to \mathbb{R}, t \mapsto (1+t)^{\alpha}$$

لمّا كان التابع f من الصف C^{∞}، وكان

$$f^{(k)}(t) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+t)^{\alpha-k}$$

فإذا عرّفنا، في حالة عدد طبيعي موجب تماماً k الرمز C_k^{α} بالصيغة

$$C_k^{\alpha} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

واصطلحنا أنّ $C_0^{\alpha} = 1$. استنتجنا أنّ

❻
$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} C_k^{\alpha} x^k + O(x^{n+1})$$

فمثلاً، في حالة $\alpha = -1/2$، نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} C_k^{-1/2} &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!} \\ &= (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} = \frac{(-1)^k}{4^k} C_{2k}^{k} \end{aligned}$$

نستنتج إذن كلّاً من النشرين المحدودين الآتيين في جوار 0:

❼ $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k} C_{2k}^k x^k + O(x^{n+1})$$

❼' $$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} C_{2k}^k x^k + O(x^{n+1})$$

ونجد بتعويض x^2 مكان x في النشرين السابقين:

❼'' $$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k} C_{2k}^k x^{2k} + O(x^{2n+2})$$

❼''' $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} C_{2k}^k x^{2k} + O(x^{2n+2})$$

- ولمّا كان

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{و} \quad \operatorname{argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

فإننا نستنتج أيضاً من النشرين السابقين كلّاً من النشرين المحدودين الآتيين في جوار 0:

❽ $$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} C_{2k}^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + O(x^{2n+3})$$

❽' $$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k} C_{2k}^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + O(x^{2n+3})$$

- التابع $\tan$ ينتمي إلى الصف C^∞ على المجال $]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$ فهو يقبل نشراً محدوداً بالمعنى القوي من أيّة مرتبة n في جوار 0. ولمّا كان التابع $\tan$ فردياً فإنّ هذا النشر لا يحتوي إلاّ على حدود ذات أدلّة فردية. فهو إذن من الصيغة

$$\tan x = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{2k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} + O(x^{2n+1})$$

وقد عرّفنا $a_m = (\tan)^{(m)}(0)$.

ولكن لمّا كان $\tan' x = 1 + \tan^2 x$ كان $a_1 = 1$. ونجد بعد اشتقاق العلاقة $\tan' x = 1 + \tan^2 x$ عدداً يساوي $2n$ من المرّات واستعمال علاقة لايبنتز أنّ

$$(\tan)^{(2n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^{k} (\tan)^{(k)}(x)(\tan)^{(2n-k)}(x)$$

ومن ثَمّ

$$a_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{2k+1} a_{2k+1} a_{2(n-k)-1}$$

تفيد هذه العلاقات في حساب الثوابت a_3 و a_5 و a_7 و ... تدريجياً إذ تُكتب في حالة n من المجموعة $\{1, 2, 3\}$ كما يأتي :

$$\begin{aligned}
n = 1: \quad a_3 &= C_2^1 a_1 a_1 && = 2a_1^2 \\
n = 2: \quad a_5 &= C_4^1 a_1 a_3 + C_4^3 a_3 a_1 && = 8a_1 a_3 \\
n = 3: \quad a_7 &= C_6^1 a_1 a_5 + C_6^3 a_3 a_3 + C_6^5 a_5 a_1 && = 12a_1 a_5 + 20a_3^2
\end{aligned}$$

ومن ثَمّ $a_3 = 2$ و $a_5 = 16$ و $a_7 = 16 \times 17$.

يفيدنا هذا في كتابة

❾
$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + O(x^9)$$

ونجد بأسلوب مماثل أنّ التابع th يقبل نشراً محدوداً بالمعنى القوي من أية مرتبة في جوار 0 وأنّ

❾'
$$\mathrm{th}\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + O(x^9)$$

5. أمثلة على حساب النشر المحدود

يجب أن يُحسبَ أيّ نشر محدود بعناية ودقّة بالغتين، كما ينبغي عرضُ مراحل الحساب بوضوح بهدف جعل مراجعة الحسابات بحثاً عن أخطاء محتملة أكثر سهولة ويسراً.

5-1. مثال : المطلوب هو حساب نشر محدود من المرتبة السادسة في جوار 0 للتابع

$$f : \left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = (1+\sin x)^x$$

ينتمي هذا التابع إلى الصف C^∞، إذ يُكتب بالشكل $f(x) = \exp\left(x\ln(1+\sin x)\right)$، فهو يقبل إذن نشراً محدوداً بالمعنى القوي من أيّة مرتبة في جوار 0.

لنضع أولاً

$$h(x) = \ln(1+\sin x)$$

فيكون

$$f(x) = e^{xh(x)}$$

نبدأ إذن بحساب النشر المحدود حتى المرتبة الخامسة للتابع h في جوار العدد 0. نلاحظ أنّ

$$\ln(1+\sin x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{4}\sin^4 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + O(x^6)$$

ومن ثَمّ

$$\begin{array}{lllllll|cr}
DL_5(\sin,0) = & x & & -\frac{1}{6}x^3 & & +\frac{1}{120}x^5 & & \times & 1 \\
DL_5(\sin^2,0) = & & x^2 & & -\frac{1}{3}x^4 & & & \times & -\frac{1}{2} \\
DL_5(\sin^3,0) = & & & x^3 & & -\frac{1}{2}x^5 & & \times & \frac{1}{3} \\
DL_5(\sin^4,0) = & & & & x^4 & & & \times & -\frac{1}{4} \\
DL_5(\sin^5,0) = & & & & & x^5 & & \times & \frac{1}{5} \\
\hline
DL_5(h,0) & = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{24}x^5 & & & & & & &
\end{array}$$

ثُمّ نلاحظ أنّ $xh(x) = x^2 g(x) + O(x^6)$ حيث

$$g(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{24}$$

ينتج من ذلك أنّ

$$f(x) = \exp(xh(x)) = 1 + x^2 g(x) + \frac{x^4 g^2(x)}{2} + \frac{x^6 g^3(x)}{6} + O(x^7)$$

ولكن

$$\begin{array}{lcccccc|l}
DL_6(x^2 g\ ,0) = & & x^2 & -\frac{1}{2}x^3 & +\frac{1}{6}x^4 & -\frac{1}{12}x^5 & +\frac{1}{24}x^6 & \times 1 \\
DL_6(x^4 g^2,0) = & & & & x^4 & -x^5 & +\frac{7}{12}x^6 & \times\frac{1}{2} \\
DL_6(x^6 g^3,0) = & & & & & & x^6 & \times\frac{1}{6} \\
\hline
DL_6(f,0) = & 1 & +x^2 & -\dfrac{1}{2}x^3 & +\dfrac{2}{3}x^4 & -\dfrac{7}{12}x^5 & +\dfrac{1}{2}x^6 &
\end{array}$$

وأخيراً نصل إلى النشر المحدود الآتي للتابع f في جوار 0:

$$f(x) = 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{7}{12}x^5 + \frac{1}{2}x^6 + O(x^7)$$

2-5. **مثال** : لنتأمّل التابع

$$f : \mathbb{R} \to]-1,+\infty[, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} - 1 & : \quad x \neq 0 \\ \quad 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$$

نترك للقارئ أن يثبت أنّ هذا التابع تقابل متزايد تماماً، (ينتج هذا في الحقيقية من كوْن التابع الأسّي محدّباً تماماً)، وأنّ $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) > 0$، ومن ثَمّ أنّ f من الصف C^∞ على $\mathbb{R}$.

نستنتج من ذلك أنّ التابع العكسيّ $g = f^{-1} :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ ينتمي إلى الصف C^∞، فهو يقبل نشراً محدوداً بالمعنى القوي من أيّة مرتبة في جوار 0. المطلوب هو تعيين النشر المحدود من المرتبة 5 للتابع g في جوار 0.

سنتبع طريقة تعيين الثوابت المبيّنة فيما يأتي: نعلم أنّه في جوار 0 يمكننا أن نكتبَ

$$g(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + O(x^6)$$

ولمّا كان $g \circ f(x) = x$ كان

$$DL_5(g,0)\circ f \;=\; x + O(x^6)$$

ولكن :

$$\begin{array}{rllllll|l}
DL_5(f\ \ ,0) = & \frac{1}{2}x & +\frac{1}{6}x^2 & +\frac{1}{24}x^3 & +\frac{1}{120}x^4 & + & \frac{1}{720}x^5 & \times a_1 \\
DL_5(f^2,0) = & & \frac{1}{4}x^2 & + \ \frac{1}{6}x^3 & + \ \frac{5}{72}x^4 & + & \frac{1}{45}x^5 & \times a_2 \\
DL_5(f^3,0) = & & & \frac{1}{8}x^3 & + \ \frac{1}{8}x^4 & + & \frac{7}{96}x^5 & \times a_3 \\
DL_5(f^4,0) = & & & & \frac{1}{16}x^4 & + & \frac{1}{12}x^5 & \times a_4 \\
DL_5(f^5,0) = & & & & & & \frac{1}{32}x^5 & \times a_5 \\
\hline
\end{array}$$

ومن ثمّ تُكتب المساواة $DL_5(g,0)\circ f \;=\; x + O(x^6)$ بالشكل:

$$\frac{a_1}{2}x + (\frac{a_1}{6}+\frac{a_2}{4})x^2 + (\frac{a_1}{24}+\frac{a_2}{6}+\frac{a_3}{8})x^3 + (\frac{a_1}{120}+\frac{5a_2}{72}+\frac{a_3}{8}+\frac{a_4}{16})x^4$$
$$+(\frac{a_1}{720}+\frac{a_2}{45}+\frac{7a_3}{96}+\frac{a_4}{12}+\frac{a_5}{32})x^5 \;=\; x + O(x^6)$$

فنحصل على جملة المعادلات الآتية.

$$\begin{array}{llllll}
\frac{a_1}{2} & & & & & = 1 \\
\frac{a_1}{6} & +\frac{a_2}{4} & & & & = 0 \\
\frac{a_1}{24} & +\frac{a_2}{6} & +\frac{a_3}{8} & & & = 0 \\
\frac{a_1}{120} & +\frac{5a_2}{72} & +\frac{a_3}{8} & +\frac{a_4}{16} & & = 0 \\
\frac{a_1}{720} & +\frac{a_2}{45} & +\frac{7a_3}{96} & +\frac{a_4}{12} & +\frac{a_5}{32} & = 0
\end{array}$$

ونجد بحلّها تدريجياً أنّ

$$a_1 \;=\; 2,\quad a_2 \;=\; -\frac{4}{3},\quad a_3 \;=\; \frac{10}{9},\quad a_4 \;=\; -\frac{136}{135},\quad a_5 \;=\; \frac{386}{405}$$

ومن ثمّ

$$g(x) = 2x - \frac{4}{3}x^2 + \frac{10}{9}x^3 - \frac{136}{135}x^4 + \frac{386}{405}x^5 + O(x^6)$$

5-3. **مثال** : لنتأمّل التابع

$$f :]-1,+1[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^x$$

لمّا كان $f(x) = \exp\left(x \ln \dfrac{1+x}{1-x}\right)$ كان f تابعاً زوجيّاً من الصف C^∞، ويقبل هو ومشتقه f' نشرين محدودين بالمعنى القوي من أيّة مرتبة في جوار 0، استنتجنا أنّ

$$f(x) = 1 + a_2x^2 + \cdots + a_{2n}x^{2n} + O(x^{2n+2})$$

$$f'(x) = 2a_2x + \cdots + 2na_{2n}x^{2n-1} + O(x^{2n+1})$$

ولكن باشتقاق التابع f نجد

$$\forall x \in\,]-1,+1[, \quad f'(x) = f(x)g(x)$$

حيث

$$g'(x) = \frac{4}{(1-x^2)^2} \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{2x}{1-x^2} + \ln\frac{1+x}{1-x}$$

لنعيّن إذن النشر المحدود للتابع g في جوار 0. لمّا كان

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{n} t^k + \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

وجدنا بالاشتقاق أنّ

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)t^k + t^n\left(\frac{(n+1)-nt}{(1-t)^2}\right)$$

ومن ثَمّ

$$g'(x) = \frac{4}{(1-x^2)^2} = \sum_{k=0}^{n-1} 4(k+1)x^{2k} + O(x^{2n})$$

وأخيراً

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{4(k+1)}{2k+1}x^{2k+1} + O(x^{2n+1})$$

ولمّا كان $f' = f \cdot g$ كان الحدُّ ذو الدرجة $2p+1$ في $DL_n(f',0)$ هو مجموع الحدود التي درجتها $2p+1$ في الجداء $DL_n(f,0) \cdot DL_n(g,0)$. ومنه

$$2(p+1)a_{2p+2} = \sum_{k=0}^{p}\frac{4(k+1)}{2k+1}a_{2p-2k}$$

نحصل من ثَمّ على العلاقات الآتية التي تفيد في حساب الثوابت $\left(a_{2p}\right)_{p\geq 0}$ تدريجياً:

$$a_0 = 1, \quad a_{2p} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\frac{2k}{2k-1}a_{2p-2k}$$

فإذا أردنا تعيين $DL_9(f,0)$ أمكننا حساب a_2,a_4,a_6,a_8 من العلاقات

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1\\
a_2 &= 2a_0\\
a_4 &= \frac{2}{3}a_0 + a_2\\
a_6 &= \frac{2}{5}a_0 + \frac{4}{9}a_2 + \frac{2}{3}a_4\\
a_8 &= \frac{2}{7}a_0 + \frac{3}{10}a_2 + \frac{1}{3}a_4 + \frac{1}{2}a_6
\end{aligned}$$

ومنه $a_2 = 2, a_4 = \frac{8}{3}, a_6 = \frac{46}{15}, a_8 = \frac{1024}{315}$ ، وهذا ما يتيح لنا أخيراً أن نكتب

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^x = 1 + 2x^2 + \frac{8}{3}x^4 + \frac{46}{15}x^6 + \frac{1042}{315}x^8 + O(x^{10})$$

في جوار 0.

6. دراسة التوابع

إنّ أحد أهم تطبيقات دراستنا للنشر المحدود هي دراسة ورسم المنحنيات البيانيّة للتوابع، وتَتبُّع دراسة تحولات تابع حقيقي f بهدف رسم خطّه البياني طريقاً محدَّدة، إذ تمر بالنقاط الآتية.

① تعيين **مجموعة تعريف** التابع f التي نرمز إليها بالرمز D_f . كما نرمز بالرمز Γ_f إلى **منحني التابع** f أو **خطّه البياني**، وهو المجموعة

$$\Gamma_f = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x\in D_f)\wedge(y=f(x))\right\}$$

② البحث عن تناظرات محتملة لمنحني التابع f وذلك انطلاقاً من كون f فردياً، أو زوجياً أو دورياً أو …، وهذا ما يفيد في قَصْر دراسة f على مجموعة جزئية من المجموعة D_f .

③ دراسة f عند أطراف المجالات المكوّنة لمجموعة تعريفه، وفي النقاط ذات الطبيعة الخاصّة حيث لا يكون التابع f مستمراً أو قابلاً للاشتقاق.

④ دراسة المناحي المقاربة، فمثلاً

- يقبل المنحني Γ_f **مستقيماً مقارباً** معادلته $x = a$ إذا كان $\lim\limits_{a} f = +\infty$ أو كان $\lim\limits_{a} f = -\infty$.
- ويقبل المنحني Γ_f **مستقيماً مقارباً** معادلته $y = b$ إذا كان $\lim\limits_{+\infty} f = b$ أو كان $\lim\limits_{-\infty} f = b$.
- ويقبل المنحني Γ_f **مستقيماً مقارباً** معادلته $y = cx + d$ حيث $(c, d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$، إذا كان $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - cx \big) = d$ أو كان $\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x) - cx \big) = d$. وعندئذ تفيد دراسة إشارة المقدار $x \mapsto f(x) - cx - d$ في جوار $+\infty$ أو $-\infty$ في تحديد موقع المنحني Γ_f بالنسبة إلى المستقيم المقارب.

تجدر الإشارة إلى أنّه يمكن ألاّ يقبل Γ_f مستقيماً مقارباً، ومع ذلك يقبل التابع $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ نهاية منتهية ℓ عندما تسعى x إلى $+\infty$ أو $-\infty$، عندئذ نقول إنّ للمنحني Γ_f **منحى مُقارباً** هو المستقيم الذي معادلته $y = \ell x$.

⑤ دراسة تغيرات التابع f أو تحولاته وعرض ذلك في **جدول للتغيرات**، وغالباً ما يجري ذلك بدراسة إشارة مشتق التابع f.

⑥ رسم المنحني Γ_f، ودراسة النقاط الخاصة التي يوحي بوجودها هذا الرسم **كنقاط الانعطاف** ـأي حيث يغيِّر التابع جهة تقعُّرهـ ونقاط تقاطع المنحني مع المقاربات والمحاور الإحداثية إن أمكن.

نبيّن فيما يأتي مثالاً يوضّح الخطوات السابقة.

6-1. مثال : لندرس تحولات التابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2(x-1)}$ ولنرسم خطه البياني.

- من الواضح أنّ $D_f=\mathbb{R}$ ، وأنّ

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

- لتعيين المناحي المقاربة للتابع f نلاحظ أنه في جوار $+\infty$ أو $-\infty$ يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/3} \\ &= x\left(1-\frac{1}{3x}-\frac{1}{9x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &= x-\frac{1}{3}-\frac{1}{9x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

نستنتج إذن أنّ المنحني Γ_f يقبل مستقيماً مقارباً Δ معادلته $y=x-\frac{1}{3}$ في جوار كلٍّ من $+\infty$ و $-\infty$، ويقع Γ_f تحت المقارب Δ في جوار $+\infty$ وفوق Δ في جوار $-\infty$.

- يقبل التابع f الاشتقاق على كلٍ من المجالات $]1,+\infty[$ و $]0,1[$ و $]-\infty,0[$ ، ويكون

$$f'(x)=\frac{3x^2-2x}{3\sqrt[3]{x^4(x-1)^2}}$$

ومن ثَمّ يكون للمقدار $f'(x)$ إشارة $x(3x-2)$.

ومن ناحية أخرى لدينا

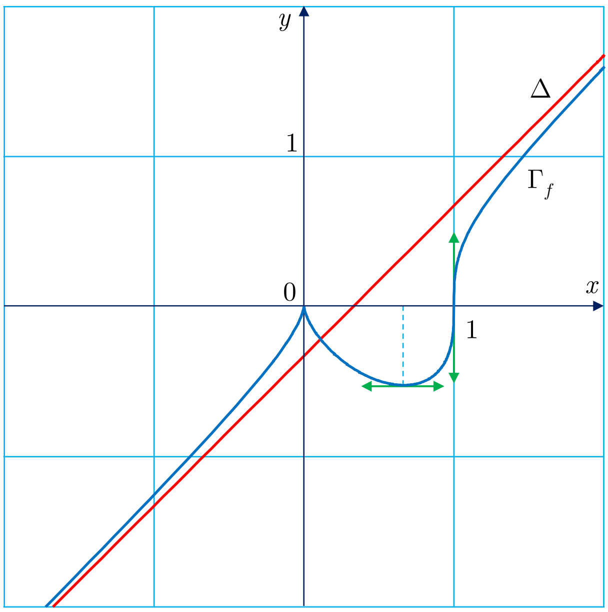
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=-\infty$$

فالتابع f ليس قابلاً للاشتقاق لا عند 0 ولا عند 1، ولكن للمنحني Γ_f مماسات توازي محور التراتيب عند النقطتين $(0,0)$ و $(1,0)$.

- يمكننا إذن أن نضع جدول التغيرات الآتي

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\sqrt[3]{4}/3$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- نلاحظ من رسمٍ أوّليّ أنّ المنحني Γ_f يتقاطع مع المستقيم المقارب Δ، وتتعين فاصلة نقطة التقاطع هذه من المعادلة $\sqrt[3]{x^2(x-1)} = x - \frac{1}{3}$، التي نحصل بحلّها على النقطة $\left(\frac{1}{9}, -\frac{2}{9}\right)$.



- يوحي الخط البياني السابق أنّ النقطتين $(0,0)$ و $(1,0)$ هما النقطتان الوحيدتان المرشحتان لتكونا نقطتي انعطاف للمنحني Γ_f، وبحساب المشتق الثاني للتابع f عند x من المجموعة $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ نجد أنّ

$$f''(x) = -\frac{2}{(x-1)\sqrt[3]{x^4(x-1)^2}}$$

فالتابع f محدَّب على كلٍّ من المجالين $]-\infty, 0[$ و $]0,1[$ ومقعَّر على المجال $]1,+\infty[$.

تمرينات

التمرين 1. جِدْ النشر المحدود بجوار الصفر حتّى المرتبة الثالثة لكل من التوابع الآتية:

① $f(x) = \ln\left|\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right|$, ② $f(x) = \big(1+x\big)^{1/x}$,

③ $f(x) = \big(1+\sin x\big)^{1/x}$, ④ $f(x) = \big(1+2x\big)^{1/(1+x)}$.

الحل

① يقبل التابع $h(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} - 1$ التمديد إلى تابع مستمرّ في جوار 0 ويقبل النشر المحدود الآتي:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) - 1 + O(x^4) \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + O(x^4) \end{aligned}$$

ولمّا كان $h(0) = 0$ استنتجنا أنّ

$$f(x) = \ln\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+h(x)) = h(x) - \frac{1}{2}h^2(x) + \frac{1}{3}h^3(x) + O(x^4)$$

ولكن

$$\begin{array}{lcccccccc|l} DL_3(h,0) & = & - & \dfrac{x}{2} & + & \dfrac{x^2}{3} & - & \dfrac{x^3}{4} & & \times 1 \\ DL_3(h^2,0) & = & & & & \dfrac{x^2}{4} & - & \dfrac{x^3}{3} & & \times -\dfrac{1}{2} \\ DL_3(h^3,0) & = & & & & & - & \dfrac{x^3}{8} & & \times \dfrac{1}{3} \\ \hline DL_3(f,0) & = & - & \dfrac{x}{2} & + & \dfrac{5x^2}{24} & - & \dfrac{x^3}{8} & & \end{array}$$

إذن

$$f(x) = \ln\frac{\ln(1+x)}{x} = -\frac{x}{2} + \frac{5x^2}{24} - \frac{x^3}{8} + O(x^4)$$

② لنلاحظ أنّ $f(x) = (1+x)^{1/x} = \exp\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right) = e\cdot\exp h(x)$ و h هو التابع المعرّف في الحساب السابق وعليه فإنّ

$$f(x) = e\cdot\left(1 + h(x) + \frac{h^2(x)}{2} + \frac{h^3(x)}{6}\right) + O(x^4)$$

ولكن

$$\begin{array}{lcrcrcr|l}
DL_3(h,0) & = & -\dfrac{x}{2} & + & \dfrac{x^2}{3} & - & \dfrac{x^3}{4} & \times 1 \\
DL_3(h^2,0) & = & & & \dfrac{x^2}{4} & - & \dfrac{x^3}{3} & \times\dfrac{1}{2} \\
DL_3(h^3,0) & = & & & & - & \dfrac{x^3}{8} & \times\dfrac{1}{6} \\
\hline
DL_3(f,0) & = & e - \dfrac{e}{2}x & + & \dfrac{11e}{24}x^2 & - & \dfrac{7e}{16}x^3 &
\end{array}$$

إذن

$$f(x) = (1+x)^{1/x} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 - \frac{7e}{16}x^3 + O(x^4)$$

③ لنلاحظ أنّ

$$f(x) = (1+\sin x)^{1/x} = e\cdot\exp\left(\frac{\ln(1+\sin x)}{x} - 1\right)$$

لنعرّف إذن التابعين المساعدين k و g كما يأتي:

$$g(x) = \frac{k(x)}{x} - 1 \qquad \text{و} \qquad k(x) = \ln(1+\sin x)$$

سننشر أوّلاً k، ثمّ g وأخيراً f في جوار 0. ونلاحظ أنّنا نحتاج إلى منشور k حتّى المرتبة 4 بسبب القسمة على x في عبارة g.

لمّا كان

$$k(x) = \ln(1+\sin x) = \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^4 x}{4} + O(x^5)$$

استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned} k(x) &= x-\frac{x^3}{6}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3-\frac{1}{4}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^4+O(x^5)\\ &= x-\frac{x^3}{6}-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{x^4}{3}\right)+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+O(x^5)\\ &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}+O(x^5) \end{aligned}$$

إذن

$$g(x)=\frac{k(x)}{x}-1=-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{12}+O(x^4)$$

ولمّا كان لدينا

$$f(x)=e\left(1+g(x)+\frac{g^2(x)}{2}+\frac{g^3(x)}{6}\right)+O(x^4)$$

استنتجنا

$$\begin{array}{llccccccc|l} DL_3(g,0) & = & - & \frac{x}{2} & + & \frac{x^2}{6} & - & \frac{x^3}{12} & & \times 1\\ DL_3(g^2,0) & = & & & & \frac{x^2}{4} & - & \frac{x^3}{6} & & \times\frac{1}{2}\\ DL_3(g^3,0) & = & & & & & - & \frac{x^3}{8} & & \times\frac{1}{6}\\ \hline DL_3(f,0) & = & e- & \frac{e}{2}x & + & \frac{7e}{24}x^2 & - & \frac{3e}{16}x^3 & & \end{array}$$

إذن

$$f(x)=(1+\sin x)^{1/x}=e-\frac{e}{2}x+\frac{7e}{24}x^2-\frac{3e}{16}x^3+O(x^4)$$

وهو النشر المحدود المنشود.

④ لنلاحظ أنّ

$f(x)=(1+2x)^{1/(1+x)}=\exp\big(u(x)\big)$ حيث $u(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{1+x}$.

ولكن

$$\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + O(x^4)$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + O(x^4)$$

وعليه

$$u(x) = 2x - 4x^2 + \frac{20}{3}x^3 + O(x^4)$$

ولمّا كان لدينا

$$f(x) = 1 + u(x) + \frac{u^2(x)}{2} + \frac{u^3(x)}{6} + O(x^4)$$

استنتجنا أنّ

$$\begin{array}{lcccccccc|l}
DL_3(u,0) & = & & 2x & - & 4x^2 & + & \dfrac{20x^3}{3} & \times 1 \\
DL_3(u^2,0) & = & & & & 4x^2 & - & 16x^3 & \times\dfrac{1}{2} \\
DL_3(u^3,0) & = & & & & & + & 8x^3 & \times\dfrac{1}{6} \\
\hline
DL_3(f,0) & = & 1+ & 2x & - & 2x^2 & + & 0x^3 &
\end{array}$$

إذن

$$(1+2x)^{1/(1+x)} = 1 + 2x - 2x^2 + O(x^4)$$

وهو النشر المحدود المنشود. ■

التمرين 2. جِدْ النشر المحدود بجوار الصفر حتى المرتبة الخامسة للتوابع الآتية:

① $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$, ② $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$,

③ $f(x) = \sin\big(\ln(1+x)\big)$, ④ $f(x) = \ln\left(\tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$,

⑤ $f(x) = \dfrac{\cos\alpha - x}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$, ⑥ $f(x) = \big(\cos x\big)^{1+\sin x}$.

الحل

① يُكتب التابع $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$ بالشكل المُكافئ الآتي:

$$f(x)=\sqrt{2}\left(1+\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2}\right)^{1/2}=\sqrt{2}\big(1+h(x)\big)^{1/2}$$

حيث $h(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2}$، وهو تابع من الصف C^∞ ينعدم عند 0. ولكن

$$\sqrt{1+t}=1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+O(t^3)$$

إذن

$$h(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{16}+O(x^6)$$

وكذلك

$$f(x)=\sqrt{2}\left(1+\frac{h(x)}{2}-\frac{h^2(x)}{8}\right)+O(h^3(x))$$

ومنه

$$\begin{aligned}f(x)&=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{16}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{16}\right)^2\right)+O(x^6)\\&=\sqrt{2}\left(1+\frac{x^2}{8}-\frac{x^4}{32}-\frac{x^4}{128}\right)+O(x^6)\end{aligned}$$

وعليه، نجد في جوار الصفر ما يأتي

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}x^2-\frac{5\sqrt{2}}{128}x^4+O(x^6)$$

② لنتأمّل التابع $f(x)=\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$، نلاحظ أنّ $f(x)=\ln(1+h(x))$ حيث

$$h(x)=\frac{\sin x-x}{x}=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+O(x^6)$$

ولمّا كان

$$f(x)=h(x)-\frac{1}{2}h^2(x)+O(h^3(x))$$

استنتجنا أنّ

$$f(x)=\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)^2+O(x^6)$$

أو

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+O(x^6)$$

③ ليكن $h(x)=\ln(1+x)$، فيصبح المطلوب حساب النشر المحدود للتابع f المعطى بالصيغة $f(x)=\sin(h(x))$ حتّى المرتبة الخامسة في جوار 0. ولكن

$$f(x)=h(x)-\frac{1}{6}h^3(x)+\frac{1}{120}h^5(x)+O(x^6)$$

إذن

$$\begin{array}{rcccccccccc|cc}
DL_5(h,0) & = & x & - & \frac{1}{2}x^2 & + & \frac{1}{3}x^3 & - & \frac{1}{4}x^4 & + & \frac{1}{5}x^5 & \times & 1\\
DL_5(h^2,0) & = & & & x^2 & - & x^3 & + & \frac{11}{12}x^4 & - & \frac{5}{6}x^5 & \times & 0\\
DL_5(h^3,0) & = & & & & & x^3 & - & \frac{3}{2}x^4 & + & \frac{7}{4}x^5 & \times & -\frac{1}{6}\\
DL_5(h^5,0) & = & & & & & & & & & x^5 & \times & \frac{1}{120}\\
\hline
DL_5(f,0) & = & x & - & \frac{1}{2}x^2 & + & \frac{1}{6}x^3 & + & 0\,x^4 & - & \frac{1}{12}x^5 & &
\end{array}$$

وعليه نجد

$$\sin(\ln(1+x))=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{12}+O(x^6)$$

④ لنضع $h(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$، فنلاحظ أنّ

$$f(x)=\ln\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\ln\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)=h(\tan x)$$

ولكن في جوار الصفر لدينا:

$$\begin{aligned}h(x) &= \ln(1+x) - \ln(1-x)\\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right) + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right) + O(x^6)\\ &= 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + O(x^6)\end{aligned}$$

ولمّا كان

$$f(x) = h(\tan x) = 2\tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{2}{5}\tan^5 x + O(x^6)$$

استنتجنا أنّ

$$\begin{array}{rccccc|cc}
DL_5(\tan,0) = & x & + & \frac{1}{3}x^3 & + & \frac{2}{15}x^5 & \times & 2\\
DL_5(\tan^3,0) = & & & x^3 & + & x^5 & \times & \frac{2}{3}\\
DL_5(\tan^5,0) = & & & & & x^5 & \times & \frac{2}{5}\\
\hline
DL_5(f,0) = & 2x & + & \frac{4}{3}x^3 & + & \frac{4}{3}x^5 & &
\end{array}$$

إذن

$$f(x) = 2x + \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^5 + O(x^6)$$

ملاحظة. يمكن حساب هذا النشر بطريقة ثانية، فإذا لاحظنا أنّ

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x+\frac{\pi}{4})\tan(x+\frac{\pi}{4})} = \frac{2}{\sin(2x+\frac{\pi}{2})}\\ &= \frac{2}{\cos 2x} = \frac{2}{1-(1-\cos 2x)}\\ &= 2\left(1 + (1-\cos 2x) + (1-\cos 2x)^2\right) + O\left((1-\cos 2x)^3\right)\end{aligned}$$

ولكن

$$1 - \cos 2x = 2x^2 - \frac{2x^4}{3} + O(x^6)$$

إذن

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2\left(1+\left(2x^2-\frac{2x^4}{3}\right)+\left(2x^2-\frac{2x^4}{3}\right)^2\right)+O(x^6)\\
&= 2\left(1+2x^2-\frac{2x^4}{3}+4x^4\right)+O(x^6)\\
&= 2+4x^2+\frac{20}{3}x^4+O(x^6)
\end{aligned}$$

وعليه، لأنّ $f(0)=0$ أمكننا أن نستنتج من ذلك ما يأتي:

$$f(x)=2x+\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{3}x^5+O(x^7)$$

⑤ لنتأمّل $F(X)=\dfrac{\cos\alpha - X}{1-2X\cos\alpha+X^2}$ في $\mathbb{C}(X)$، فنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
F(X) &= \frac{\cos\alpha - X}{(X-e^{\mathrm{i}\alpha})(X-e^{-\mathrm{i}\alpha})}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-\mathrm{i}\alpha}}{1-Xe^{-\mathrm{i}\alpha}}+\frac{e^{\mathrm{i}\alpha}}{1-Xe^{\mathrm{i}\alpha}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}e^{-(k+1)\mathrm{i}\alpha}X^k+\frac{X^ne^{-(n+1)\mathrm{i}\alpha}}{1-Xe^{-\mathrm{i}\alpha}}+\right.\\
&\qquad\qquad \left. +\sum_{k=0}^{n-1}e^{(k+1)\mathrm{i}\alpha}X^k+\frac{X^ne^{(n+1)\mathrm{i}\alpha}}{1-Xe^{\mathrm{i}\alpha}}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(\cos k\alpha)X^{k-1}+\frac{\cos\big((n+1)\alpha\big)-X\cos n\alpha}{1-2X\cos\alpha+X^2}X^n
\end{aligned}$$

وعليه فإنّ

$$f(x)=\sum_{k=1}^{5}(\cos k\alpha)x^{k-1}+O(x^5)$$

ملاحظة : لقد أثبتنا أنّه عموماً لدينا في جوار الصفر، ومهما كانت المرتبة n النشر المحدود بالمعنى القوي الآتي:

$$\frac{\cos\alpha - x}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\sum_{k=1}^{n}(\cos k\alpha)x^{k-1}+O(x^n)$$

⑥ لنتأمّل التابع $f(x) = (\cos x)^{1+\sin x}$. نلاحظ أنّ

$$f(x) = \exp\big((1+\sin x)\ln(1-(1-\cos x)\big)$$

ولكن

$$1-\cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + O(x^6)$$

وكذلك

$$\begin{aligned}\ln(\cos x) &= -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 + O(x^6)\\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + O(x^6)\\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + O(x^6)\end{aligned}$$

$$(1+\sin x) = 1 + x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$$

وعليه

$$(1+\sin x)\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{12} + O(x^6)$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}f(x) &= 1 + \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{12}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right)^2 + O(x^6)\\ &= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{4} + O(x^6)\end{aligned}$$

وأخيراً

$$(\cos x)^{1+\sin x} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{4} + O(x^6)$$

وهو النشر المحدود المنشود. ■

التمرين 3. جِدْ نهايات التوابع الآتية عند الصفر:

① $f(x) = \dfrac{\tan x - \sin x}{(\cos 2x - \cos x)\sin x}$

② $f(x) = \dfrac{1 + 2\cos^2 x - 3\sqrt[3]{\cos 2x}}{\sin^4 x}$

③ $f(x) = \dfrac{(\ln\cos x)^2}{x(\sin x - \tan x)}$

④ $f(x) = \left(\exp\left(\sqrt{x^2 + x^4}\right) - \sin x\right)^{\ln x}$

الحل

① نلاحظ أوّلاً أنّ

$$\begin{aligned}
\tan x - \sin x &= \left(x + \frac{x^3}{3}\right) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + O(x^5)\\
&= \frac{x^3}{2} + O(x^5)\\
(\cos 2x - \cos x)\sin x &= \left(\frac{x^2}{2} - 2x^2\right)\cdot\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + O(x^5)\\
&= -\frac{3}{2}x^3 + O(x^5)
\end{aligned}$$

وعليه فإنّ

$$f(x) = \frac{\tan x - \sin x}{(\cos 2x - \cos x)\sin x} = -\frac{1}{3} + O(x^2)$$

ومنه $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{3}$.

② وهنا نرى أنّ البسط $g(x) = 1 + 2\cos^2 x - 3\sqrt[3]{\cos 2x}$ يحقّق

$$\begin{aligned}
g(x) &= 3 - 2\sin^2 x - 3(1 - 2\sin^2 x)^{1/3}\\
&= 3 - 2\sin^2 x - 3\left(1 - \frac{2\sin^2 x}{3} - \frac{4\sin^4 x}{9}\right) + O(\sin^6 x)\\
&= \frac{4\sin^4 x}{3} + O(\sin^6 x)
\end{aligned}$$

إذن

$$f(x)=\frac{1+2\cos^2 x-3\sqrt[3]{\cos 2x}}{\sin^4 x}=\frac{4}{3}+O(x^2)$$

ومن ثمّ $\lim_{x\to0} f(x)=\frac{4}{3}$.

③ وهنا نرى أنّ

$$\sin x-\tan x=-\frac{x^3}{2}+O(x^5) \text{ و } \ln^2\cos x=\frac{x^4}{4}+O(x^6)$$

إذن

$$f(x)=\frac{\ln^2(\cos x)}{x(\sin x-\tan x)}=-\frac{1}{2}+O(x^2)$$

ومن ثمّ $\lim_{x\to0} f(x)=-\frac{1}{2}$.

④ في هذه الحالة لدينا،

$$\exp\sqrt{x^2+x^4}=e^{x\sqrt{1+x^2}}=e^{x+O(x^3)}=1+x+\frac{x^2}{2}+O(x^3)$$

ومن ثمّ

$$\exp\sqrt{x^2+x^4}-\sin x=1+\frac{x^2}{2}+O(x^3)$$

و

$$\ln\left(\exp\sqrt{x^2+x^4}-\sin x\right)=\frac{x^2}{2}+O(x^3)$$

إذن

$$\ln x\cdot\ln\left(\exp\sqrt{x^2+x^4}-\sin x\right)=\frac{x^2\ln x}{2}+O(x^3\ln x)$$

نستنتج إذن أنّ

$$f(x)=\left(\exp\sqrt{x^2+x^4}-\sin x\right)^{\ln x}=1+\frac{x^2\ln x}{2}+O(x^3\ln x)$$

وعليه فإنّ $\lim_{x\to0} f(x)=1$. ∎

التمرين 4. جِدْ نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$.

① $f(x) = x^{1/(1+2\ln x)}$

② $f(x) = x^2 e^{1/x} - \sqrt[3]{x^6 + 3x^5 + x^4}$

③ $f(x) = \left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln\, x}\right)^x$

④ $f(x) = x^2\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x - 4\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{3x}\right)$

الحل

① نلاحظ في حالة التابع $f(x) = x^{1/(1+2\ln x)}$ أنّ

$$f(x) = \exp\left(\frac{\ln x}{1+2\ln x}\right) \xrightarrow[x\to\infty]{} \exp\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$$

② لندرس حالة التابع $f(x) = x^2 e^{1/x} - \sqrt[3]{x^6 + 3x^5 + x^4}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{x^6 + 3x^5 + x^4} &= x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{1/3}\\
&= x^2\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{3}{x}\right)^2 + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\\
&= x^2 + x - \frac{2}{3} + O\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2 e^{1/x} &= x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\\
&= x^2 + x + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

إذن $f(x) = \dfrac{7}{6} + O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ وعليه

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{7}{6}\ .$$

③ حالة التابع $f(x)=\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^x$. نلاحظ هنا أنّ

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x)}{\ln x}&=1+\frac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{\ln x}\cdot\left(\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\&=1+\frac{1}{x\ln x}+O\left(\frac{1}{x^2\ln x}\right)\\\ln f(x)&=x\cdot\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)=x\left(\frac{1}{x\ln x}+O\left(\frac{1}{x^2\ln x}\right)\right)\\&=\frac{1}{\ln x}+O\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\end{aligned}$$

إذن

$$f(x)=\exp\left(\frac{1}{\ln x}+O\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right)=1+\frac{1}{\ln x}+O\left(\frac{1}{x\ln x}\right)$$

ومن ثَمّ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$.

④ حالة التابع $f(x)=x^2\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-4\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x}+3\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{3x}\right]$. نلاحظ هنا أنّ

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x&=\exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\\&=\exp\left(x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\right)\\&=e\cdot\exp\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\\&=e\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x}\right)^2+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\\&=e\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{11}{24x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{11}{24x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$
$$\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} = e\left(1-\frac{1}{4x}+\frac{11}{24\times 4x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$
$$\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x} = e\left(1-\frac{1}{6x}+\frac{11}{24\times 9x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$

وعليه فإنّ

$$f(x)=\frac{11e}{72}+O\left(\frac{1}{x}\right)$$

إذن

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{11}{72}e \,.$$

التمرين 5. ادرس تقارب المتسلسلات المعرّفة بحدّها العامّ الآتية.

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n}-\left(1+\frac{2}{n+a^2}\right)^{n},\quad u_n=\tan\frac{1}{n}+\ln\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n},$$
$$u_n=\left(\cos\frac{a}{n}+\sin\frac{b}{n}\right)^{n}-e^{ax}\left(1+\frac{b}{n}\right),\quad u_n=\left(\frac{\ln n}{\ln(1+n)}\right)^{n^2},$$
$$u_n=\sqrt{n^4+2n+1}-\sqrt{n^4+kn},\qquad u_n=\tan\left(\frac{\pi n}{4n+1}\right)-\cos\frac{\pi}{n}.$$

الحل

- المتسلسلة التي حدُّها العام $u_n=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n}-\left(1+\frac{2}{n+a^2}\right)^{n}$. نعلم أنّ

$$\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
$$=\frac{1}{n}-\frac{3}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

إذن

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n} = \exp\left(2-\frac{3}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = e^2\left(1-\frac{3}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

ومن جهة أخرى

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{2}{n+a^2}\right) &= \ln\left(1+\frac{2+a^2}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{a^2}{n}\right)\\ &= \left(\frac{2+a^2}{n}-\frac{(2+a^2)^2}{2n^2}\right)-\left(\frac{a^2}{n}-\frac{a^4}{2n^2}\right)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= \frac{2}{n}-\frac{2(1+a^2)}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{2}{n+a^2}\right)^{n} &= \exp\left(2-\frac{2(1+a^2)}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= e^2\left(1-\frac{2(1+a^2)}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\end{aligned}$$

وعليه يكون

$$u_n = \frac{e^2(2a^2-1)}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

وتتقارب المتسلسلة $\sum u_n$ إذا وفقط إذا كان $a^2 = 1/2$.

- المتسلسلة التي حدُّها العام $u_n = \tan\dfrac{1}{n}+\ln\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}$. من الواضح أنّ

$$\forall n\geq 2,\ \tan\frac{1}{n}\geq\frac{1}{n},\qquad \ln\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\geq 0$$

إذن

$$\forall n\geq 2,\ u_n\geq\frac{1}{n}$$

وهذا يُثبت تباعد المتسلسلة $\sum u_n$.

■ المتسلسلة التي حدُّها العام $u_n = \left(\cos\frac{a}{n} + \sin\frac{b}{n}\right)^n - e^{ax}\left(1+\frac{b}{n}\right)$. نعلم أنّ

$$\cos\frac{a}{n} + \sin\frac{b}{n} = 1 + \frac{b}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\ln\left(\cos\frac{a}{n} + \sin\frac{b}{n}\right) = \left(\frac{b}{n} - \frac{a^2}{2n^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{n} - \frac{a^2}{2n^2}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \frac{b}{n} - \frac{a^2+b^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\left(\cos\frac{a}{n} + \sin\frac{b}{n}\right)^n = e^b \exp\left(-\frac{a^2+b^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= e^b\left(1 - \frac{a^2+b^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

وعلى هذا يكون لدينا

$$u_n = e^b - e^{ax} + \frac{(a^2+b^2)e^b - 2be^{ax}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

إذن تكون المتسلسلة $\sum u_n$ متقاربة إذا وفقط إذا كان $(b = ax) \wedge (a^2+b^2 = 2b)$ وهذا يُكافئ

$$\big((a,b) = (0,0)\big) \vee \Big((a,b) = \left(\tfrac{2x}{1+x^2}, \tfrac{2x^2}{1+x^2}\right)\Big)$$

■ المتسلسلة التي حدُّها العام $u_n = \left(\frac{\ln n}{\ln(1+n)}\right)^{n^2}$. من الواضح أنّ

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)$$

$$\ln\left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right) = -\frac{1}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)$$

وعليه

$$u_n = \exp\left(-\frac{n}{\ln n} + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)$$

إذن

$$n^2 u_n = \exp\left(2\ln n - \frac{n}{\ln n} + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)$$

ومن ثَمّ يكون لدينا $\lim_{n\to\infty} n^2 u_n = 0$ إذن المتسلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

❖ المتسلسلة التي حدُّها العام $u_n = \sqrt{n^4 + 2n + 1} - \sqrt{n^4 + kn}$. من الواضح أنّ

$$u_n = \frac{2-k}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

إذن المتسلسلة $\sum u_n$ متقاربة إذا وفقط إذا كان $k = 2$.

❖ المتسلسلة التي حدُّها العام $u_n = \tan\left(\frac{\pi n}{4n+1}\right) - \cos\frac{\pi}{n}$. هنا لدينا

$$\begin{aligned} u_n &= \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4(4n+1)}\right) - \cos\frac{\pi}{n} \\ &= -\frac{\pi}{4(4n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

وعلى هذا فإنّ $\sum u_n$ متباعدة. ■

التمرين 6. ادرس تقارب المتسلسلات $\sum u_n$ المعرّفة بحدّها العامّ وفق ما يأتي:

① $$u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + an + b}\right)$$

② $$u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$$

③ $$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n + (-1)^n)}$$

الحل

① المتسلسلة التي حدُّها العام $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + an + b}\right)$. نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2 + an + b} &= n\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}}\\ &= n\left(1 + \frac{a}{2n} + \frac{b}{2n^2} - \frac{a^2}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= n + \frac{a}{2} + \frac{4b - a^2}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

ومن ثَمّ يكون لدينا

$$u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{a\pi}{2} + \frac{(4b - a^2)\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

وعليه:

- في حالة $a \notin 2\mathbb{Z}$ نرى بسهولة أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ لا تسعى إلى الصفر، ومن ثَمّ تكون المتسلسة $\sum u_n$ متباعدة.
- أمّا في حالة $a = 2k \in 2\mathbb{Z}$ فيكون

$$\begin{aligned}u_n &= (-1)^{n+k} \sin\left(\frac{(b - k^2)\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= (-1)^{n+k} \frac{(b - k^2)\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

وعندئذ تكون $\sum u_n$ متقاربة بمُقتضى معيار تقارب المتسلسلات المتناوبة.

② المتسلسلة التي حدُّها العام $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$. نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{(-1)^n}{n} \cdot \left(\frac{1}{1 + (-1)^{n+1}/n}\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

وتكون $\sum u_n$ متقاربة بمُقتضى معيار تقارب المتسلسلات المتناوبة.

③ المتسلسلة التي حدُّها العام $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n+(-1)^n)}$. نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{\ln n}\cdot\left(\frac{1}{1+\dfrac{\ln(1+(-1)^n/n)}{\ln n}}\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{\ln n}\left(1+\frac{(-1)^n}{n\ln n}+O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right)^{-1}\\ &= \frac{(-1)^n}{\ln n}-\frac{1}{n\ln^2 n}+O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\end{aligned}$$

والمتسلسلة متقاربة لتقارب المتسلسلة المتناوبة $\sum_{n>1}\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$، والمتسلسلتين $\sum_{n>1}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$ و $\sum_{n>1}\dfrac{1}{n^2\ln n}$ اللتين حدودهما موجبة. ■

التمرين 7. ليكن α عدداً حقيقيّاً موجباً تماماً، ولتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرّفة كما يلي:

$$u_1\in\mathbb{R}_+^*,\quad \forall n\geq 1,\quad u_{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^\alpha}\sum_{k=1}^n u_k$$

ادرس تقارب المتسلسلة $\sum u_n$.

الحل

لنعرّف $\sum_{k=1}^n u_k = S_n$. عندئذ يكون لدينا

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_{n+1}=\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^\alpha}\right)S_n$$

وهذا يتيح لنا أن نبرهن بالتدريج على n أنّ $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n>0$. نعرّف إذن $v_n=\ln S_n$ فيكون لدينا

$$\begin{aligned}\forall n>1,\qquad t_n &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}-(v_n-v_{n-1})\\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}-\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\geq 0\end{aligned}$$

لأنّ دراسة بسيطة تبيِّنُ أنّ $\forall x > -1,\ x - \ln(1+x) \geq 0$. نستنتج من ذلك أنّه يوجد في $[0,+\infty]$ عنصر ℓ، يُحقّق $\sum_{n=2}^{\infty} t_n = \ell$. ولأنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ متقاربة استنتجنا وجود λ في $[-\infty,0]$ يُحقّق

$$v_n - v_1 = \sum_{k=2}^{n}(v_k - v_{k-1}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$$

أو وجود μ في $]-\infty,+\infty[$ يُحقّق $\lim_{n\to\infty} v_n = \mu$ ، وهذا يقتضي وجود $\lim_{n\to\infty} S_n$ في $\mathbb{R}_+$. أي تقارب المتسلسلة $\sum u_n$.

التمرين 8. ليكن التابع

$$f_\lambda(x) = e^{-x} - \frac{(x-\lambda)^2 + \lambda}{(x+\lambda)^2 + \lambda}$$

1. عيّن λ_0 حتّى يتحقّق الشرط: $\lim_{x\to 0}\frac{f_{\lambda_0}(x)}{x} = 0$.
2. ثُمّ احسب نهاية المقدار $x \mapsto \frac{f_{\lambda_0}(x)}{x^5}$ عند الصفر في حال وجودها.

الحل

1. لنلاحظ أوّلاً أنّ

$$\frac{f_\lambda(x)}{x} = \frac{e^{-x} - 1}{x} + \frac{4\lambda}{(x+\lambda)^2 + \lambda}$$

وعليه فإنّ الشرط $\lim_{x\to 0}\frac{f_{\lambda_0}(x)}{x} = 0$ ، يُكافئ

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\lambda_0}{(x+\lambda_0)^2 + \lambda_0} = 1$$

وهذا يقتضي أنّ $\lambda_0 + \lambda_0^2 \neq 0$ ، و $\frac{4\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_0^2} = 1$ ، أي إنّ $\lambda_0 = 3$ ، وبالعكس عندما يكون $\lambda_0 = 3$ نرى مباشرة أنّ $\lim_{x\to 0}\frac{f_{\lambda_0}(x)}{x} = 0$.

2. لمّا كان

$$f_3(x) = e^{-x} - \frac{12-6x+x^2}{12+6x+x^2}$$

استنتجنا بإجراء قسمة إقليديّة وفق القوى المتزايدة أنّ

$$\frac{12-6x+x^2}{12+6x+x^2} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{144} + O(x^6)$$

وعلى هذا يكون لدينا

$$f_3(x) = \frac{x^5}{144} - \frac{x^5}{120} + O(x^6) = -\frac{x^5}{720} + O(x^6)$$

إذن

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_3(x)}{x^5} = -\frac{1}{720}$$

التمرين 9. عيّن الثوابت a و b و c حتى يكون التابع f لامتناهياً في الصغر من مرتبة عظمى، ثُمّ جِدْ مُكافئاً له في جوار الصفر، وذلك في الحالتين الآتيتين:

$$f(x) = \cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$

و

$$f(x) = \arctan x - \frac{ax+bx^3}{1+cx^2}$$

الحل

- نلاحظ هنا أنّ

$$\frac{1+ax^2}{1+bx^2} = 1 + (a-b)\ x^2 + b(b-a)\ x^4 + \ b^2(a-b)\ x^6 + O(x^8)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}\ x^2 + \frac{1}{24}\ x^4 - \frac{1}{720}\ x^6 + O(x^8)$$

فإذا اخترنا a و b ليكون $b = \frac{1}{12}$ و $b - a = \frac{1}{2}$ أي $(a,b) = \left(-\frac{5}{12}, \frac{1}{12}\right)$ وجدنا

$$\cos x - \frac{12-5x^2}{12+x^2} = -\frac{1}{480}x^6 + O(x^8)$$

- و نجد بأسلوب مماثل أنّ

$$\arctan x - \frac{x + \frac{4}{15}x^3}{1 + \frac{3}{5}x^2} = -\frac{4}{175}x^7 + O(x^9)$$

ملاحظة. لقد حسبنا في التمرينين السابقين تقريبات ممتازة بتوابع كسرية لكلٍّ من التابع الأسي وتابع التجيب وتابع الظل العكسي. يسمّى هذا النوع من التقريبات: **تقريبات باديه** Padé approximations.

التمرين 10. ادرس التوابع الآتية ارسم خطوطها البيانية.

① $f(x) = \left(x-1\right)e^{1/(x+1)}$, ② $f(x) = \left(x^3 - x^2\right)e^{1/x}$,

③ $f(x) = e^{1/x}\sqrt{x\left(x+2\right)}$, ④ $f(x) = \left(x + 2 - \dfrac{1}{x}\right)\arctan x$,

⑤ $f(x) = xe^{x/(x^2-1)}$, ⑥ $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt[3]{x^3-1}$,

⑦ $f(x) = \arcsin\dfrac{(x+1)^2}{2(1+x^2)}$, ⑧ $f(x) = \dfrac{\cos 3x}{\cos 2x}$,

⑨ $f(x) = \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$, ⑩ $f(x) = \left|\tan x\right|^{\cos x}$.

الحل

① **دراسة التابع** $f(x) = (x-1)e^{1/(x+1)}$.

مجموعة تعريف هذا التابع هي $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ ، و

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to(-1)^-} f(x) = 0$$

إذن المستقيم $x = -1$ مستقيم مقارب للخط البياني Γ_f للتابع f عندما تسعى x إلى -1 بقيم أكبر من -1 . وكذلك فإنّ النقطة $(-1,0)$ هي نقطة مقاربة للمنحني Γ_f عندما تسعى x إلى -1 بقيم أصغر من -1 . ومن جهة أخرى لدينا

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

وهنا نتحرّى إمكان وجود مُقارب مائل وذلك بإجراء نشر محدود بقوى $\frac{1}{x}$. فنجد بوضع $t = \frac{1}{x}$ أنّه في جوار $+\infty$ وأيضاً في جوار $-\infty$ لدينا

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{1}{t}-1\right)\exp\left(\frac{t}{1+t}\right) = \frac{1}{t}(1-t)\exp\Big(t - t^2 + O(t^3)\Big) \\ &= \frac{1}{t}(1-t).\left(1+t-\frac{1}{2}t^2 + O(t^3)\right) \\ &= \frac{1}{t}\left(1-\frac{3}{2}t^2 + O(t^3)\right) = x - \frac{3}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

إذن المستقيم D الذي معادلته $y = x$ مقارب للمنحني Γ_f في جوار $+\infty$ وفي جوار $-\infty$، ويقع Γ_f تحت D في جوار $+\infty$ وفوق D في جوار $-\infty$.

لدراسة تغيّرات التابع f نحسب المشتق فنجد

$$f'(x) = \frac{x^2+x+2}{(x+1)^2}\cdot e^{1/(x+1)}$$

فالمشتق موجب على D_f والتابع متزايد تماماً على كلّ مجالٍ من مجالي تعريفه. ومنه جدول التغيرات الآتي:

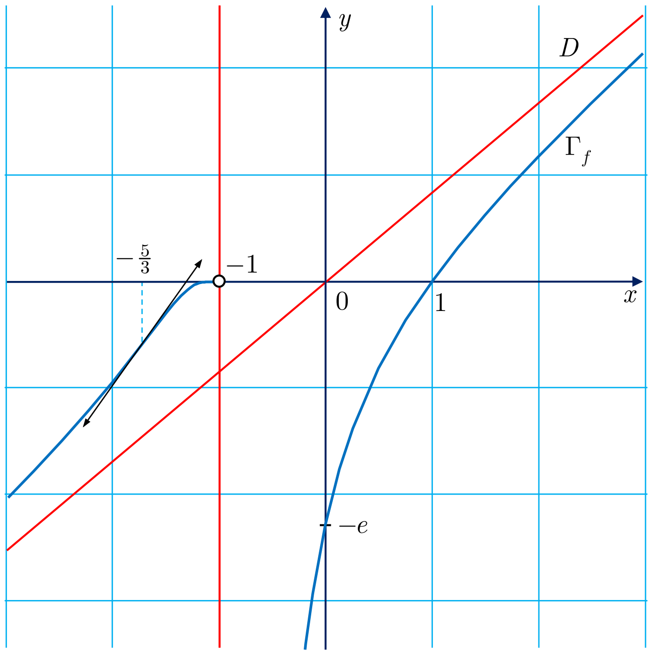
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0 \ \Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

يوحي لنا رسم أوّلي بوجود نقطة انعطاف، ونجد بحساب مباشر أنّ

$$f''(x) = -\frac{3x+5}{(x+1)^4}\cdot e^{1/(x+1)}$$

إذن يُغيِّر المشتق الثاني إشارته عند $x = -\frac{5}{3}$ فالنقطة $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{8}{3}e^{-3/2}\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحني Γ_f.

يبيِّن الشكل التالي الخط البياني Γ_f للتابع f.



منحني التابع $x \mapsto (x-1)e^{1/(x+1)}$

② **دراسة التابع** $f(x) = (x^3 - x^2)e^{1/x}$.

إنّ مجموعة تعريف هذا التابع هي $D_f = \mathbb{R}^*$ ، و

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

إذن المستقيم $x = 0$ مستقيم مقارب للخط البياني Γ_f للتابع f ، عندما تسعى x إلى 0 بقيم أكبر من 0 . وكذلك فإنّ النقطة $(0,0)$ هي نقطة مقاربة للمنحني Γ_f عندما تسعى x إلى 0 بقيم أصغر من 0 . ومن جهة أخرى لدينا

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

لنتحرَّ إمكانية وجود منحن مقارب وذلك بإجراء نشر محدود بقوى x^{-1} ، فنجد بوضع $t = 1/x$ ، أنّه في جوار $+\infty$ وأيضاً في جوار $-\infty$ لدينا

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3 - x^2)\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{24x^4} + O\left(\frac{1}{x^5}\right)\right) \\ &= x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} - \frac{1}{8x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

إذن Γ منحني التابع الحدودي الذي معادلته $y = x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$ هو منحن مقارب للمنحني Γ_f في جوار كل من $+\infty$ و $-\infty$، ويقع Γ_f تحت Γ في جوار $+\infty$ وفوق Γ في جوار $-\infty$.

لدراسة تغيّرات التابع f نحسب المشتق فنجد :

$$f'(x) = (3x^2 - 3x + 1)e^{1/x}$$

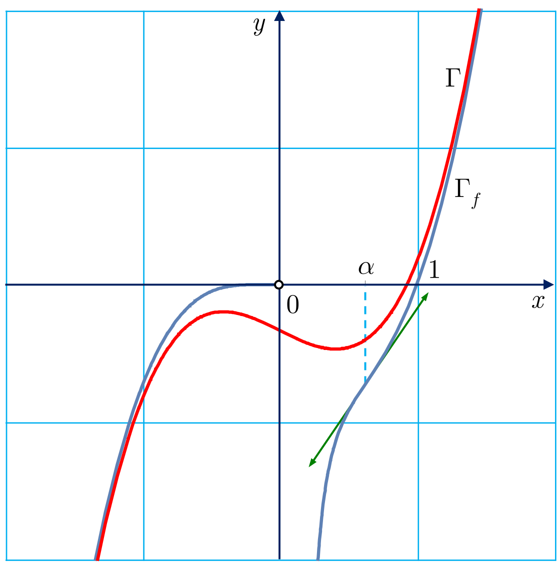
فالمشتق موجب على D_f والتابع متزايد تماماً على كلّ مجال من مجالي تعريفه.:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0 ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

يوحي لنا رسم أوّلي بوجود نقطة انعطاف، ونجد بحساب مباشر أنّ

$$f''(x) = (6x^3 - 6x^2 + 3x - 1)\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

وبدراسة تغيّرات التابع $x \mapsto 6x^3 - 6x^2 + 3x - 1$ نرى أنّ المشتق الثاني يغيّر إشارته مرّة واحدة عند قيمةٍ $x = \alpha$ من المجال $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$، فالنقطة $(\alpha, f(\alpha))$ هي نقطة انعطاف للمنحني Γ_f. ونجد بحساب تقريبي أنّ $\alpha = 0.626538$. يبيِّن الشكل التالي المنحني البياني للتابع f.



منحني التابع $x \mapsto (x^3 - x^2)e^{1/x}$

③ **دراسة التّابع** $f(x) = e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}$.

مجموعة تعريف هذا التابع هي $D_f =]-\infty,-2] \cup]0,+\infty[$. و

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

إذن المستقيم $x = 0$ مستقيم مقارب للخط البياني Γ_f للتابع f عندما تسعى x إلى 0 بقيم أكبر من 0. ومن جهة أخرى لدينا

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

وهنا نتحرّى إمكان وجود منحن مقارب وذلك بإجراء نشر محدود بقوى x^{-1}. فنجد بوضع $t = 1/x$ أنّه في جوار $+\infty$ وأيضاً في جوار $-\infty$ لدينا

$$\begin{aligned} f(x) &= |x|\, e^{1/x} \cdot \sqrt{1+\frac{2}{x}} \\ &= |x|\left(\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &= |x|\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &= \operatorname{sgn}(x)(x+2)+\frac{1}{|x|}+O\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

إذن المستقيم D_1 الذي معادلته $y = x + 2$ مستقيم مقارب للمنحني Γ_f في جوار $+\infty$ ويقع Γ_f فوق D_1 في ذلك الجوار، وكذلك فإنّ المستقيم D_2 الذي معادلته $y = -x - 2$ مستقيم مقارب للمنحني Γ_f في جوار $-\infty$ ويقع Γ_f أيضاً فوق D_2 في ذلك الجوار.

لدراسة تغيّرات التابع f ، نرى أنّ f يقبل الاشتقاق على داخل D_f وأنّ

$$f'(x) = \frac{x^2-2}{x} \cdot \frac{e^{1/x}}{\sqrt{x(x+2)}}$$

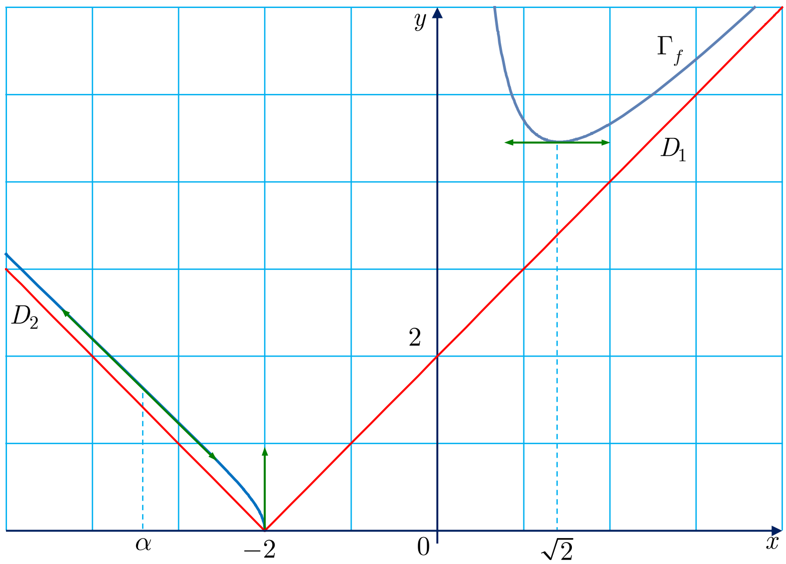
ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		-2		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	░	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0 ‖	░	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\sqrt{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

النقطة $\left(\sqrt{2}, f(\sqrt{2})\right)$ قيمة صغرى محليّاً للتابع f . يوحي لنا رسم أوّلي بوجود نقطة انعطاف، ونجد بحساب مباشر أنّ

$$f''(x) = (x^2 + 4x + 2) \cdot \frac{2e^{1/x}}{x^3(x+2)\sqrt{x(x+2)}}$$

ونرى أنّ المشتق الثاني يغيّر إشارته مرّة واحدة عند $\alpha = -2 - \sqrt{2}$ فالنقطة $(\alpha, f(\alpha))$ هي نقطة انعطاف للمنحني Γ_f . ويبيِّن الشكل التالي المنحني البياني للتابع f .



منحني التابع $x \mapsto e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}$

④ **دراسة التّابع** $f(x) = \left(x + 2 - \dfrac{1}{x}\right)\arctan x$.

مجموعة تعريف هذا التابع هي $D_f = \mathbb{R}^*$. ولدينا

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$

إذن يمكن تمديد التابع f إلى تابع مستمرٍّ عند 0 بوضع $f(0) = -1$. ومن جهة أخرى لدينا

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

وهنا نبحث عن إمكان وجود منحن مقارب وذلك بإجراء نشر محدود بقوى x^{-1}. فنجد بوضع $t = 1/x$ أنّه في جوار $+\infty$ وأيضاً في جوار $-\infty$ لدينا

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{1}{t} + 2 - t\right) \cdot \left(\frac{\pi \operatorname{sgn}(x)}{2} - \arctan t\right) \\
&= \left(\frac{1}{t} + 2 - t\right) \cdot \left(\frac{\pi \operatorname{sgn}(x)}{2} - t + O(t^3)\right) \\
&= \left(x + 2\right) \cdot \left(\frac{\pi \operatorname{sgn}(x)}{2} - t + O(t^3)\right) + t \cdot \left(\frac{\pi \operatorname{sgn}(x)}{2}\right) + O(t^2) \\
&= \left(x + 2\right) \cdot \left(\frac{\pi \operatorname{sgn}(x)}{2}\right) - 1 + \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{\pi \operatorname{sgn}(x)}{2} - 2\right) + O\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

إذن المستقيم D_1 الذي معادلته $y = \frac{\pi}{2}(x+2) - 1$ مستقيمٌ مقارب للمنحني Γ_f في جوار $+\infty$ ويقع Γ_f تحت D_1 في ذلك الجوار، وكذلك فإنّ المستقيم D_2 الذي معادلته $y = -\frac{\pi}{2}(x+2) - 1$ مستقيمٌ مقارب للمنحني Γ_f في جوار $-\infty$ ويقع Γ_f فوق D_2 في ذلك الجوار.

لدراسة تغيّرات التابع f، نرى أنّ f يقبل الاشتقاق على داخل D_f وأنّ :

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2} \cdot \left(\arctan x + \frac{x^3 + 2x^2 - x}{(x^2+1)^2}\right)$$

وعليه لدراسة إشارة f' علينا دراسة إشارة التابع المساعد

$$g(x) = \arctan x + \frac{x^3 + 2x^2 - x}{(x^2+1)^2}$$

نرى باشتقاق g أنّ

$$g'(x) = -\frac{4x(x^2 - 2x - 1)}{(x^2+1)^3}$$

إذن يمكننا وضع جدول تغيرات التابع g كما يأتي

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		0		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\pi/2$	$\nearrow$	$g(1-\sqrt{2})$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$g(1+\sqrt{2})$	$\searrow$	$\pi/2$

وينتج من ذلك أنّ التّابع g يغيّر إشارته مرّة واحدة وذلك عند قيمةٍ β من المجال $\left]-\infty, 1-\sqrt{2}\right[$ ، ونجد بحساب تقريبي أنّ $\beta = -0.6885549$.

ونلاحظ أيضاً أنّ

$$\frac{f(x)+1}{x} = \arctan x + 2\frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{x}\left(1 - \frac{\arctan x}{x}\right)$$

وعليه فإنّ

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+1}{x} = 2$$

والتابع f يقبل الاشتقاق عند 0 ، ومشتقّه هناك يساوي 2 .

يمكننا إذن كتابة جدول تغيرات التابع f كما يأتي:

x	$-\infty$		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$

يوحي رسم أوّلي للمنحني بوجود نقطة انعطاف لمنحني التابع على $\mathbb{R}_+$ لذلك نحسب المشتق الثاني للتابع f فنجد

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3(1+x^2)^2}\Big((1+x^2)^2 \arctan x - (x + 3x^3 - 2x^4)\Big)$$

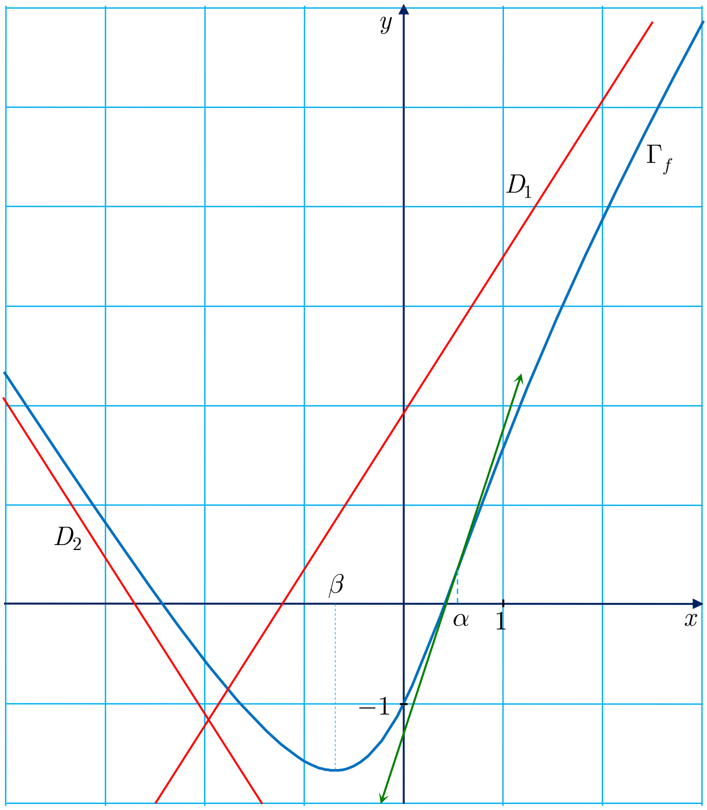
ونحصل بحساب تقريبي على فاصلة نقطة الانعطاف وهي $\alpha = 0.58066235$.

أمّا فواصل نقاط تقاطع Γ_f مع محور الفواصل فهي حلول المعادلة

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

أي $-1-\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}-1$.

تفيدنا المعطيات السابقة بإعطاء رسم دقيق للمنحني البياني C_f للتابع f .



منحني التابع $x \mapsto \left(x + 2 - \dfrac{1}{x}\right)\arctan x$

⑤ **دراسة التابع** $f(x) = xe^{x/(x^2-1)}$

مجموعة تعريف هذا التابع هي $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1,+1\}$. ولدينا

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$$

إذن يقبل الخط البياني Γ_f للتابع f المستقيم الذي معادلته $x = -1$ مستقيماً مقارباً في جوار -1 بقيم أكبر من -1، في حين تكون النقطة $(-1,0)$ نقطة مقاربة لهذا المنحني في جوار -1 بقيم أصغر من -1 . وكذلك فإنّ

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$$

إذن يقبل Γ_f المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مستقيماً مقارباً في جوار 1 بقيم أكبر من 1، في حين تكون النقطة $(1, 0)$ نقطة مقاربة لهذا المنحني في جوار 1 بقيم أصغر من 1. ولدينا أيضاً

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

وهنا نتحرى إمكان وجود منحن مقارب وذلك بإجراء نشر محدود بقوى x^{-1}. فنجد بوضع $t = 1/x$ أنّه في جوار $+\infty$ وأيضاً في جوار $-\infty$ لدينا

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{t}\cdot\exp\left(\frac{t}{1-t^2}\right) \\ &= \frac{1}{t}\cdot\left(1+\frac{t}{1-t^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{1-t^2}\right)^2+O\left(t^3\right)\right) \\ &= \frac{1}{t}\cdot\left(1+t+\frac{t^2}{2}+O\left(t^3\right)\right) = \frac{1}{t}+1+\frac{t}{2}+O\left(t^2\right) \\ &= x+1+\frac{1}{2x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

إذن المستقيم D الذي معادلته $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني Γ_f في جوار $+\infty$ وكذلك في جوار $-\infty$، ويقع Γ_f فوق D عند $+\infty$ ويقع تحت D في جوار $-\infty$.

لدراسة تغيّرات التابع f، نرى أنّ f يقبل الاشتقاق على داخل D_f وأنّ

$$f'(x) = \frac{x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1}{(x^2-1)^2}\cdot e^{x/(x^2-1)}$$

وعليه لدراسة إشارة f' علينا دراسة إشارة التابع المساعد

$$g(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1$$

نرى باشتقاق g أنّ

$$\begin{aligned} g'(x) &= 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 \\ g''(x) &= 12x^2 - 6x - 4 \end{aligned}$$

إذن

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{57}}{12}$		$\frac{3+\sqrt{57}}{12}$		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-153+19\sqrt{57}}{72}$	$\searrow$	$\frac{-153-19\sqrt{57}}{72}$	$\nearrow$	$+\infty$

ولأنّ $\frac{-153+19\sqrt{57}}{72} < 0$ استنتجنا أنّ للتابع g' جذر حقيقي وحيد β يقع في المجال $]1,2[$.

والتابع g متناقص تماماً على $]-\infty,\beta]$ ومتزايد تماماً على $[\beta,+\infty[$. ومن ثَمّ فإنّ $g(\beta)$ هو الحدّ الأدنى للتابع g على $\mathbb{R}$. ولكن $g(1) = -2 < 0$ إذن $g(\beta) < 0$ ، وعلى هذا فللتابع g جذران حقيقيان فقط α_1 و α_2 يُحقّقان

$$\alpha_2 \in \left]\beta,+\infty\right[\quad \text{و} \quad \alpha_1 \in \left]-\infty,\beta\right[$$

ويكون التابع g سالباً على المجال $]\alpha_1,\alpha_2[$ وموجباً خارجه. وبملاحظة أنّ $g(0) = 1$ ، استنتجنا أنّ $\alpha_1 \in]0,1[$ وأنّ $\alpha_2 \in]1,+\infty[$ ، ونحصل من ثَمّ على جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		-1		α_1		1		α_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0 ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha_1)$	$\searrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

ونجد بحساب تقريبي أنّ $\alpha_1 = 0.480534$ و $\alpha_2 = 2.08102$.

يوحي رسم أوّلي للمنحني Γ_f بوجود ثلاث نقاط انعطاف، وللتأكّد من ذلك نحسب المشتق الثاني للتابع f فنجد أنّ

$$f''(x) = \frac{x^5 + 6x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2}{(x^2 - 1)^4} \cdot e^{x/(x^2-1)}$$

وبدراسة كثير الحدود $Q(x) = x^5 + 6x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2$ نستنتج وجود ثلاثة جذور حقيقيّة فقط لهذا التابع تمثّل قيمها فواصل نقاط الانعطاف ولها القيم التقريبيّة الآتية:

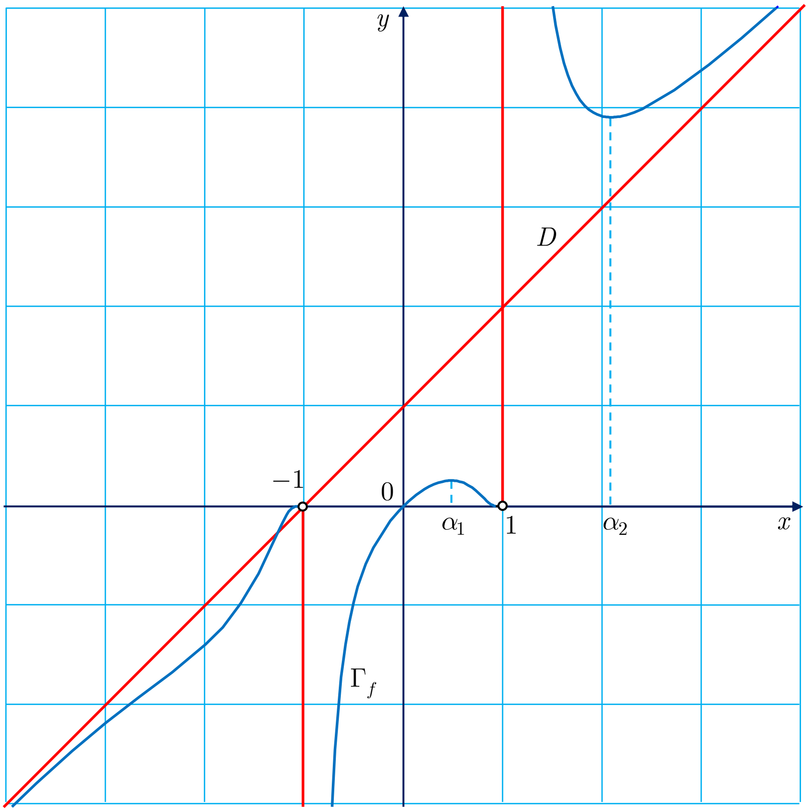
$$\left(a = -5.49539 \quad , \quad b = -1.35582 \quad , \quad c = 0.796109\right)$$

كما يتبيّن من الرسم أنّ المنحني Γ_f يتقاطع مع المقارب D ونجد بحساب تقريبي أن فاصلة نقطة التقاطع هذه تساوي -1.75624 . وأخيراً نلاحظ أنّ

$$\lim_{x\to(-1)^-} \frac{f(x)}{x+1} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to1^-} \frac{f(x)}{x-1} = 0$$

وهذا يثبت أنّ المماسات عند كل من النقطتين المقاربتين مماس أفقي.

يتيح لنا كلُّ هذا رسم المنحني Γ_f رسماً دقيقاً.



منحني التابع $x \mapsto xe^{x/(x^2-1)}$

⑥ **دراسة التابع** $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt[3]{x^3-1}$.

مجموعة تعريف هذا التابع هي $D_f = \mathbb{R}$. ولكنّ هذا التابع تابعٌ فردي، إذن تكفي دراسته على $\mathbb{R}_+$، وهذا ما سنفعله. نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. إذن لنبحث عن إمكان وجود منحن مقارب وذلك بإجراء نشر محدود بقوى x^{-1} . فنجد بوضع $t = 1/x$ أنّه في جوار $+\infty$ لدينا

$$\begin{aligned}
f(x) &= x \cdot \left((1+t^3)^{1/3} + (1-t^3)^{1/3}\right)\\
&= x \cdot \left(1 + \frac{t^3}{3} - \frac{t^6}{9} + 1 - \frac{t^3}{3} - \frac{t^6}{9} + O(t^9)\right)\\
&= x \cdot \left(2 - \frac{2t^6}{9} + O(t^9)\right) = 2x - \frac{2}{9x^5} + O\left(\frac{1}{x^8}\right)
\end{aligned}$$

إذن المستقيم D الذي معادلته $y = 2x$ هو مستقيم مقارب للمنحني Γ_f في جوار $+\infty$، ويقع C_f تحت D عند $+\infty$.

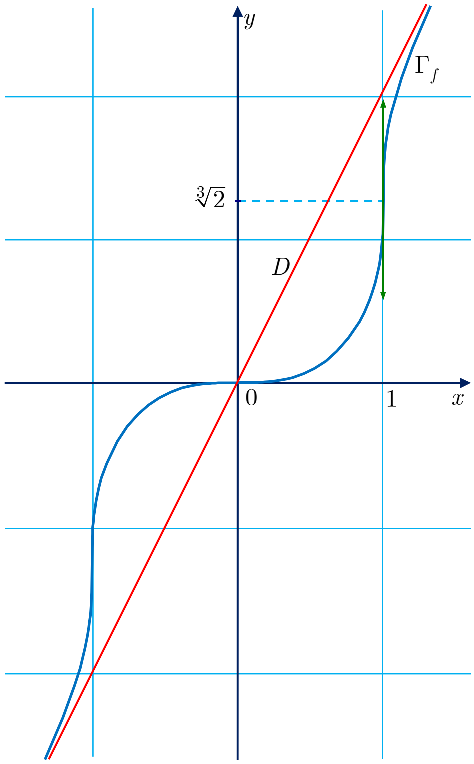
لدراسة تغيّرات التابع f، نرى أنّ f يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}\backslash\{-1,+1\}$ وأنّ :

$$f'(x) = x^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}} \right)$$

وعليه فالتابع f متزايد تماماً على $\mathbb{R}$، وله جدول التغيرات الآتي على $\mathbb{R}_+$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

وبملاحظة أنّ $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = +\infty$ نستنتج أنّ المماس لمنحني التابع عند النقطة التي فاصلتها تساوي 1 يوازي محور التراتيب. تفيدنا هذه الدراسة برسم منحني التابع كما هو مبين.



منحني التابع $x \mapsto \sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt[3]{x^3-1}$

⑦ **دراسة التابع** $f(x) = \arcsin\dfrac{(x+1)^2}{2(1+x^2)}$.

مجموعة تعريف هذا التابع هي $D_f = \mathbb{R}$ لأنّه مهما تكن x من $\mathbb{R}$ فلدينا

$$0 \leq \frac{(x+1)^2}{2(1+x^2)} \leq 1$$

وتحدث المساواة في الطرف الأيمن من المتراجحة إذا وفقط إذا كان $x = 1$. ونلاحظ أنّ

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{6}$$

إذن المستقيم D الذي معادلته $y = \dfrac{\pi}{6}$ هو مستقيم مقارب للمنحني Γ_f في جوار $+\infty$ وكذلك في جوار $-\infty$.

لدراسة تغيّرات التابع f ، نرى أنّ f يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}\backslash\{+1\}$ وأنّ :

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{(x+1)\,\mathrm{sgn}(1-x)}{(x^2+1)\sqrt{3x^2+2x+3}}$$

إذن إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة $1 - x^2$. ونجد أيضاً أنّ

$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ، } \lim_{x\to1^-} f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

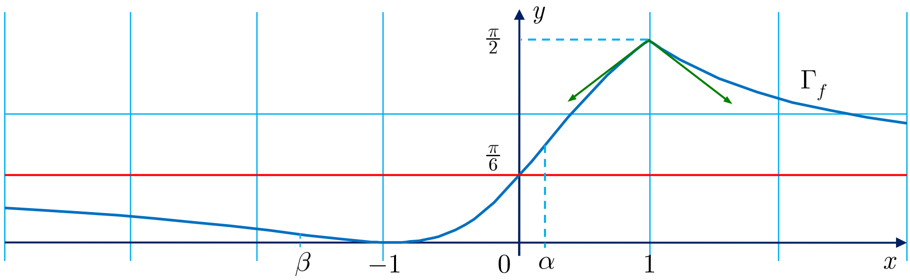
نحصل من ثَمّ على جدول التغيرات التالي للتابع f على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\frac{1}{\sqrt2}$ ‖ $\frac{-1}{\sqrt2}$	$-$	
$f(x)$	$\frac{\pi}{6}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{6}$

يوحي لنا رسم أوّلي بوجود نقاط انعطاف للمنحني Γ_f . ونجد بحساب المشتق الثاني للتابع f أنّ

$$f''(x) = 4 \cdot \frac{(3x^4+6x^3+4x^2+4x-1)\,\mathrm{sgn}(x-1)}{(x^2+1)^2(3x^2+2x+3)^{3/2}}$$

نجد بدراسة $x \mapsto 3x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 4x - 1$ أنّ له جذرين حقيقيّين فقط α و β قيمتاهما التقريبيّتان هما $\alpha = 0.197999$ و $\beta = -1.73777$ وهما تمثّلان فاصلتي نقطتي انعطاف المنحني Γ_f . ونجد فيما يلي المنحني البياني Γ_f .



منحني التابع $x \mapsto \arcsin \dfrac{(x+1)^2}{2(1+x^2)}$

⑧ **دراسة التابع** $f(x) = \dfrac{\cos 3x}{\cos 2x}$.

مجموعة تعريف هذا التابع هي $D_f = \mathbb{R} \backslash \{(2k+1)\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$. التابع f تابع زوجي ويقبل العدد 2π دوراً. إذن يكفي إجراء الدراسة على المجموعة $[0, \pi] \cap D_f$. ونلاحظ أيضاً أنّ

$$\forall x \in D_f, \quad f(x) + f(\pi - x) = 0$$

وهذا يبرهن أنّ منحني التابع f متناظر بالنسبة إلى النقطة $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ولهذا يكفي إجراء الدراسة على المجموعة $[0, \frac{\pi}{2}] \cap D_f = [0, \frac{\pi}{2}] \backslash \{\frac{\pi}{4}\}$. وهذا ما سنفعله فيما يأتي. نلاحظ أوّلاً أنّ

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} f(x) = -\infty$$

إذن المستقيم D الذي معادلته $x = \dfrac{\pi}{4}$ مستقيمٌ مقارب للخط البياني Γ_f في جوار $\dfrac{\pi}{4}$.

ونرى أنّ f يقبل الاشتقاق على $[0, \frac{\pi}{2}] \backslash \{\frac{\pi}{4}\}$ وأنّ

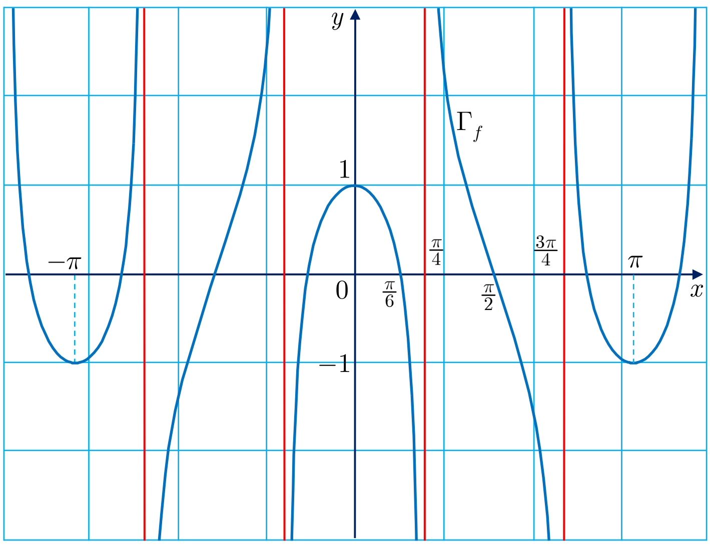
$$f'(x) = -\frac{3 + \cos 4x + \cos 2x}{\cos^2 2x} \cdot \sin x$$

وهو سالب على كل مجال من مجالَيْ الدراسة.

ونحصل من ثمّ على جدول التغيرات الآتي للتابع f على $[0,\frac{\pi}{2}]\backslash\{\frac{\pi}{4}\}$:

x	0			$\frac{\pi}{4}$			$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$-$		‖		$-$	-3
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$	‖	$+\infty$	$\searrow$	0

ونجد فيما يلي المنحني البياني Γ_f :



منحني التابع $x \mapsto \dfrac{\cos 3x}{\cos 2x}$

⑨ **دراسة التابع** $f(x) = \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$

مجموعة تعريف هذا التابع هي $D_f =]0,1[$. ونلاحظ أنّ

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \ .$$

إذن المستقيم D الذي معادلته $x = 1$ مستقيمٌ مقارب للمنحني Γ_f في جوار 1.

ونرى أنّ f يقبل الاشتقاق على D_f وأنّ :

$$f'(x) = \frac{2x-1}{2(x-x^2)^{3/2}} \cdot g(x)$$

و g هو التابع المعرّف بالعلاقة

$$g(x) = \arcsin\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x(1-x)}}{2x-1}$$

نرى باشتقاق التابع g أنّ

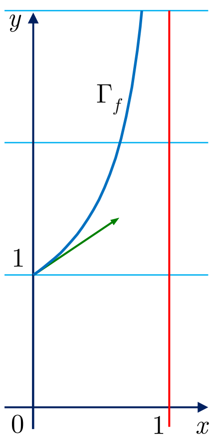
$$g'(x) = -2\frac{\sqrt{x(1-x)}}{(2x-1)^2}$$

إذن g متناقص تماماً على كلّ من المجالين $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ و $\left]\frac{1}{2},1\right]$ ، ولأنّ $g(0)=0$ و $g(1)=\frac{\pi}{2}$ ، استنتجنا أنّ $x \mapsto (2x-1)\cdot g(x)$ موجب تماماً على $]0,1[$.

وأخيراً نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-1}{x} &= \frac{1}{x}\left(\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}(1-x)^{-1/2} - 1\right)\\
&= \frac{1}{x}\left(\left(1+\frac{x}{6}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right) - 1 + O(x^2)\right)\\
&= \frac{2}{3} + O(x)
\end{aligned}$$

إذن يمكن تمديد f إلى تابع قابل للاشتقاق عند 0 ومشتقّه هناك يساوي $\frac{2}{3}$.



ومنه جدول التغيرات التالي للتابع f :

x	0			1
$f'(x)$	$\frac{2}{3}$	$+$		
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$	

ونجد في الشكل المجاور المنحني Γ_f للتابع $x \mapsto \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$.

⑩ **دراسة التابع** $f(x)=\left|\tan x\right|^{\cos x}=\exp(\cos x\cdot\ln|\tan x|)$

مجموعة تعريف هذا التابع هي $D_f=\mathbb{R}\backslash\{\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\}$. والتابع f تابعٌ زوجي ودوري دوره 2π ، إذن تكفي دراسته على $]0,\pi[\backslash\{\frac{\pi}{2}\}$. نلاحظ أنّ

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\pi^-} f(x)=+\infty$$

إذن المستقيم D الذي معادلته $x=\pi$ مستقيمٌ مقارب للمنحني Γ_f في جوار π . كما يمكن تمديد التابع f إلى تابع مستمر عند 0 و $\frac{\pi}{2}$، وذلك بوضع $f(0)=0$ و $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

نرى أنّ f يقبل الاشتقاق على D_f وأنّ :

$$f'(x)=\sin x\cdot g\left(\cot^2 x\right)\cdot f(x)$$

و g هو التابع المعرّف بالعلاقة : $g(u)=1+u+\frac{1}{2}\ln u$. من الواضح أنّ التابع g متزايد تماماً على $\mathbb{R}_+^*$ وأنّ $\lim\limits_{u\to 0} g(u)=-\infty$ و $\lim\limits_{u\to\infty} g(u)=+\infty$ فيوجد في $\mathbb{R}_+^*$ عدد وحيد α يُحقّق $g(\alpha)=0$ ، ويكون $g(u)<0$ في حالة $u<\alpha$ ، و $g(u)>0$ في حالة $u>\alpha$.

وعلى هذا إذا عرّفنا $\theta=\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$ كان لدينا

$$\begin{aligned}\theta<x<\pi-\theta \quad &\Rightarrow g(\cot^2 x)<0\\ (0<x<\theta)\vee(\pi<x<\pi-\theta) \quad &\Rightarrow g(\cot^2 x)>0\end{aligned}$$

ونجد بحساب تقريبي أنّ $\alpha=0.108858$. وأخيراً نلاحظ أنّ

$$\frac{f(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}=-\frac{\exp\left(\cos x\ln\left|\tan x\right|\right)-1}{\cos x\ln\left|\tan x\right|}\times\frac{\sin(x-\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}\times\ln\left|\tan x\right|$$

إذن $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}=-\infty$ ، والمماس لمنحني التابع عند $\frac{\pi}{2}$ يوازي محور التراتيب.

وكذلك نلاحظ أنّه في جوار 0^+ لدينا :

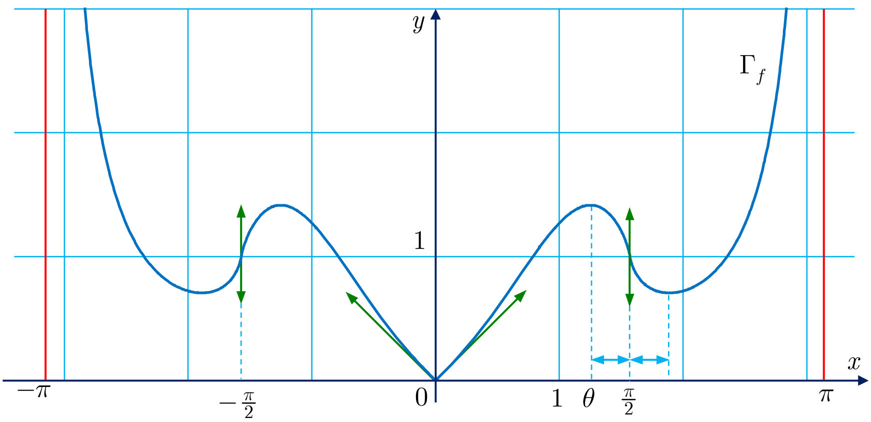
$$\frac{f(x)}{x}=\exp\left((\cos x-1)\ln(\tan x)\right)\times\exp\left(\ln\frac{\tan x}{x}\right)$$

إذن $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=1$. والتابع f يقبل مشتقّاً من اليمين يساوي 1 عند 0 .

وعليه يكون لمقصور f على مجال الدراسة جدول التغيرات الآتي:

x	0		θ		$\frac{\pi}{2}$			$\pi-\theta$		π
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	$-\infty$ ‖ $-\infty$		$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\theta)$	$\searrow$	1		$\searrow$	$f(\pi-\theta)$	$\nearrow$	$+\infty$

ونجد فيما يأتي المنحني البياني Γ_f للتابع f على دور.



منحني التابع $x \mapsto \left|\tan x\right|^{\cos x}$

وهو المطلوب.

التمرين 11. لنعرّف في حالة x من المجال $]-1,1[$ التابعين f و g كما يأتي

$$g(x)=\frac{30x-8x^3}{15-9x^2} \quad \text{و} \quad f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$$

1. جِد النشر المحدود من المرتبة السابعة في جوار الصفر لكلّ من التابعين f و g واستنتج قيمة النهاية الآتية $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x^7}$ في حال وجودها.

2. ليكن $h=f-g$. اكتب $h'(x)$ بالشّكل $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ، حيث P و Q كثيرا حدود. واستنتج وجود ثابت حقيقيّ A ، يُطلب تعيينه، يُحقّق

$$\forall x \in \left]0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[,\quad 0\le h'(x)\le Ax^6$$

3. استنتج ممّا سبق أنّ

$$\forall x \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[, \quad 0 \leq h(x) \leq \frac{A}{7} x^7$$

4. ليكن $\alpha = \ln\frac{4}{3}$ و $\beta = \ln\frac{9}{8}$.

① عبّر عن $\ln 2$ و $\ln 3$ بدلالة α و β .

② عيّن x_1 و x_2 ليكون $f(x_1) = \alpha$ و $f(x_2) = \beta$.

③ استنتج عددين عاديّين r_1 و r_2 يقرّبان العددين $\ln 2$ و $\ln 3$ ، وعيّن حدّاً أعلى للخطأ المرتكب.

الحل

1. بإجراء قسمة وفق القوى المتزايدة نجد، في جوار 0 ، أنّ

$$g(x) = \frac{30x - 8x^3}{15 - 9x^2} = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{6}{25}x^7 + O(x^9)$$

وكذلك نرى أنّ

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) \\ &= 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 + O(x^9) \end{aligned}$$

وعلى هذا نجد

$$\frac{f(x) - g(x)}{x^7} = \frac{2}{7} - \frac{6}{25} + O(x^2) = \frac{8}{175} + O(x^2)$$

إذن

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^7} = \frac{8}{175}$$

2. من الواضح أنّ

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{2}{1-x^2} - \frac{(30 - 24x^2)(15 - 9x^2) + 18x(30x - 8x^3)}{(15 - 9x^2)^2} \\ &= \frac{8x^6}{(1-x^2)(5-3x^2)^2} \end{aligned}$$

ولمّا كان

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], \quad (1-x^2)(5-3x^2)^2 \geq \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{8}$$

استنتجنا أنّه

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], \quad 0 \leq h'(x) \leq \frac{64}{49}x^6$$

ويمكننا أخذ $A = \dfrac{64}{49}$.

3. ينتج مما سبق أنّ كلّاً من التابعين $x \mapsto h(x)$ و $x \mapsto \dfrac{A}{7}x^7 - h(x)$ متزايد على المجال $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$، وينعدم عند 0 . فهما تابعان موجبان على هذا المجال. إذن

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], \quad 0 \leq h(x) \leq \frac{A}{7}x^7$$

4.① من الواضح أنّ $\ln 3 = 3\alpha + 2\beta$ وأنّ $\ln 2 = 2\alpha + \beta$.

4.② نجد بحساب بسيط أنّ $f\left(\dfrac{1}{7}\right) = \alpha$ و $f\left(\dfrac{1}{17}\right) = \beta$ ، إذن $x_1 = \dfrac{1}{7}$ و $x_2 = \dfrac{1}{17}$.

4.③ إذا تأمّلنا العددين العاديين $a = g\left(\dfrac{1}{7}\right)$ و $b = g\left(\dfrac{1}{17}\right)$ وجدنا، استناداً إلى ما سبق، المتراجحتين الآتيتين:

$$0 \leq \alpha - a \leq A\frac{1}{7^8}$$

و

$$0 \leq \beta - b \leq A\frac{1}{7 \cdot (17)^7}$$

وعلى هذا يكون لدينا، بأخذ $r_1 = 2a + b$ و $r_2 = 3a + 2b$ ، ما يأتي :

$$0 \leq \ln 2 - r_1 \leq A\left(\frac{2}{7^8} + \frac{1}{7 \cdot (17)^7}\right) < 4.54 \times 10^{-7}$$

$$0 \leq \ln 3 - r_2 \leq A\left(\frac{3}{7^8} + \frac{2}{7 \cdot (17)^7}\right) < 6.81 \times 10^{-7}$$

حيث

$$r_1 = 2\left(\frac{1}{7}\cdot\frac{30\cdot 49-8}{15\cdot 49-9}\right)+\left(\frac{1}{17}\cdot\frac{30\cdot 289-8}{15\cdot 289-9}\right)=\frac{3084013}{4449291}\approx \underline{0.693147}\,065$$
$$r_2 = 3\left(\frac{1}{7}\cdot\frac{30\cdot 49-8}{15\cdot 49-9}\right)+2\left(\frac{1}{17}\cdot\frac{30\cdot 289-8}{15\cdot 289-9}\right)=\frac{4888045}{4449291}\approx \underline{1.098612}\,116$$

وهذان هما التقريبان المطلوبان.

التمرين 12. ليكن لدينا التابع

$$f(x)=\sqrt{\left|\frac{(x+1)(x^2-x+2)}{x+2}\right|}$$

1. جِدْ مجموعة تعريف كلّ من التابع f وتابعه المشتق f'.
2. جِد الفروع اللانهائيّة للخط البياني $\mathcal{C}_f$ للتابع f. يُطلب تحديد وضع هذا الخط بالنسبة إلى المقاربات إن وجدت.
3. اكتب التابع $x\mapsto f(x)f'(x)$ بصيغة تابع كسريّ واستنتج جدول تغيرات التابع f.
4. ادرس تقاطع منحني التّابع مع المقاربات.
5. اكتب $x\mapsto \big(f(x)\big)^3 f''(x)$ بصيغة تابع كسريّ، واستنتج نقط انعطاف التابع f.
6. ارسم المنحني البياني للتابع f.

الحل

1. التابع f معرّف على $D_f=\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ ويقبل الاشتقاق على $D_{f'}=\mathbb{R}\backslash\{-1,-2\}$

2. من الواضح أوّلاً أنّ $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=+\infty$، والمستقيم Δ_1 الذي معادلته $x=-2$ مستقيم مقارب للمنحني $\mathcal{C}_f$. كما نلاحظ أنّه في جوار كل من $+\infty$ و $-\infty$ لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) &= |x|\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-1}}\\ &= |x|\cdot\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)}\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned} f(x) &= \left|x\right|\cdot\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &= \operatorname{sgn}(x)\cdot(x-1)+\frac{2}{|x|}+O\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

إذن المستقيم Δ_2 الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب للمنحني $\mathcal{C}_f$ في جوار $+\infty$ والمنحني يقع فوق مقاربه في ذلك الجوار. وكذلك المستقيم Δ_3 الذي معادلته $y=-x+1$ مستقيم مقارب للمنحني $\mathcal{C}_f$ في جوار $-\infty$، والمنحني يقع فوق مقاربه في ذلك الجوار.

3. نجد بحساب بسيط وبملاحظة أنّ $f\cdot f'$ هو مشتق $\frac{1}{2}f^2$ أنّ

ll $$\forall x\in D_{f'},\quad f(x)f'(x)=\frac{2x^2}{(x+2)^2}(x+3)\cdot\operatorname{sgn}(x+1)\cdot\operatorname{sgn}(x+2)$$

ونحصل من ثمّ على جدول التغيرات التالي للتابع f :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{7}$	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. إنّ فاصلة نقطة التّقاطع إن وجدت تحقّق المعادلة:ll

ll $$(x-1)^2=\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\cdot(x^2-x+2)$$

وتنتمي هذه النّقطة إلى المستقيم Δ_2 في حالة $0\le x-1$، وإلى Δ_3 إذا كان $x-1\le 0$.

تُكافئ المعادلة السابقة المعادلتين الآتيتين:

- في حالة $x\notin[-2,-1]$: $x=0$.
- في حالة $x\in[-2,-1]$: $x^3-x+2=0$. ولهذه المعادلة جذر حقيقي وحيد α ينتمي إلى المجال $]-2,-1[$، وهذه قيمة تقريبيّة له: $\alpha\approx-1.52138$.

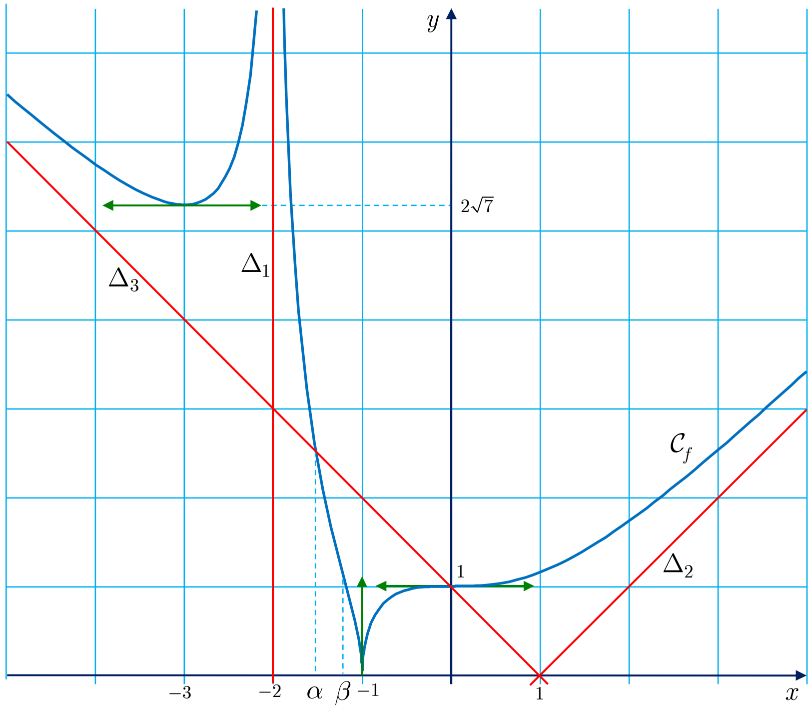
إذن يتقاطع المنحني $\mathcal{C}_f$ مع المقارب Δ_3 عند النقطتين اللتين فاصلتاهما 0 و α.

5. نجد بحساب بسيط أنّ

$$f^3(x)f''(x) = \frac{4x(x^3+2x^2+6x+6)}{(x+2)^4}$$

وللتابع $x \mapsto x^3+2x^2+6x+6$ جذر حقيقي بسيط واحد β ينتمي إلى المجال $]-2,-1[$ ، وهذه قيمة تقريبيّة له: $\beta \approx -1.19128$. إذن تمثّل النقطتان اللتان فاصلتاهما 0 و β نقطتي انعطاف لمنحني التابع f .

6. ونجد فيما يلي رسم المنحني البياني للتابع f :ll
ll



منحني التابع $x \mapsto \sqrt{\left|\frac{(x+1)(x^2-x+2)}{x+2}\right|}$

وهو المطلوب.

التمرين 13. احسب النهاية الآتية إن وُجِدَت

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\operatorname{sh}x)-\operatorname{sh}(\sin x)}{x^7}.$$

الحل

- ينتمي التابع $f: x\mapsto \sin(\operatorname{sh}x)$ إلى الصف C^∞ فهو يقبل نشراً محدوداً من أية مرتبة. ولمّا كان $\operatorname{sh}x=O(x)$ في جوار الصفر استنتجنا أنّ

$$\sin(\operatorname{sh}x)=\operatorname{sh}x-\frac{1}{6}\operatorname{sh}^3x+\frac{1}{120}\operatorname{sh}^5x+\frac{1}{7!}\operatorname{sh}^7x+O(x^9)$$

ولمّا كان

$$\operatorname{sh}x=x\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\frac{x^6}{7!}\right)+O(x^9)$$

استنتجنا أنّ

$$\begin{array}{rcccccccc|l}
\operatorname{sh}x &=& x &+& \frac{x^3}{6} &+& \frac{x^5}{120} &+& \frac{x^7}{5040} + O(x^9) & \times\ 1\\
\operatorname{sh}^3x &=& & & x^3 &+& \frac{x^5}{2} &+& \frac{13x^7}{120} + O(x^9) & \times\ \frac{-1}{6}\\
\operatorname{sh}^5x &=& & & & & x^5 &+& \frac{5x^7}{6} + O(x^9) & \times\ \frac{1}{120}\\
\operatorname{sh}^7x &=& & & & & & & x^7 + O(x^9) & \times\ \frac{-1}{5040}\\
\hline
f(x) &=& x &+& 0x^3 &-& \frac{x^5}{15} &-& \frac{x^7}{90} + O(x^9) &
\end{array}$$

وعليه نرى أنّ

$$\sin(\operatorname{sh}x)=x-\frac{x^5}{15}-\frac{x^7}{90}+O(x^9)$$

- ومن جهة أخرى نلاحظ أنّ $\operatorname{sh}(\sin x)=\frac{1}{\mathrm{i}}\sin\big(\operatorname{sh}(\mathrm{i}\,x)\big)$ إذن

$$\operatorname{sh}(\sin x)=x-\frac{x^5}{15}+\frac{x^7}{90}+O(x^9)$$

وعلى هذا نجد

$$\frac{\sin(\operatorname{sh} x)-\operatorname{sh}(\sin x)}{x^7}=-\frac{1}{45}+O(x^2)$$

إذن

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\operatorname{sh} x)-\operatorname{sh}(\sin x)}{x^7}=-\frac{1}{45}$$

وهي النهاية المطلوبة. ■

التمرين 14. احسب قيمة النهاية التالية:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3\left(\arctan(x+1)-\arctan(x)\right)-x\right)$$

الحل

لنلاحظ أنّه في حالة $x>0$ لدينا $0<\arctan x<\arctan(x+1)<\frac{\pi}{2}$ إذن

$$0<\arctan(x+1)-\arctan x<\frac{\pi}{2}$$

و

$$\tan\left(\arctan(x+1)-\arctan x\right)=\frac{x+1-x}{1+x(x+1)}=\frac{1}{x^2+x+1}$$

وعليه فإنّ

$$\begin{aligned}\arctan(x+1)-\arctan x&=\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)\\&=\frac{1}{x^2+x+1}+O\left(\frac{1}{x^6}\right)\end{aligned}$$

وقد استفدنا من كون $\arctan(t)=t+O(t^3)$ في جوار الصفر. وعليه

$$\begin{aligned}x^3\left(\arctan\left(x+1\right)-\arctan x\right)-x&=\frac{x^3}{x^2+x+1}-x+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\\&=-1+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\end{aligned}$$

إذن

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3\left(\arctan\left(x+1\right)-\arctan x\right)-x\right)=-1$$

■

التمرين 15. أوجد النشر المحدود حتّى المرتبة 8 في جوار 0 للتابع :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$$

الحل

لنلاحظ أنّ التابع $f : \left]-1,+\infty\right[\to \mathbb{R}, f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$ ينتمي إلى الصف C^∞. ولدينا بحساب مباشر للمشتق ما يأتي:

$$f'(x) = 2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\cdot\frac{2}{(1-x)^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4} = \frac{2(1-x^2)}{1+6x^2+x^4}$$

وعليه، بإجراء قسمة وفق القوى المتزايدة لكثير الحدود $2-2x^2$ على $1+6x^2+x^4$ نجد

$$\frac{2(1-x^2)}{1+6x^2+x^4} = 2 - 14x^2 + 82x^4 - 478x^6 + O(x^8)$$

ولأنّ $f(0) = \frac{\pi}{4}$ استنتجنا أنّه في جوار الصفر لدينا

$$\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 = \frac{\pi}{4} + 2x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{82}{5}x^5 - \frac{478}{7}x^7 + O(x^9)$$

وهو المطلوب.

في الحقيقة، يمكننا أن نفعل أكثر من ذلك. لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\frac{2(1-x^2)}{1+6x^2+x^4} &= \frac{2-2x^2}{(1+3x^2)^2-8x^4}\\ &= \frac{2-2x^2}{\left(1+(3+2\sqrt{2})x^2\right)\left(1+(3-2\sqrt{2})x^2\right)}\\ &= \frac{\omega}{1+\omega^2x^2} - \frac{\omega^{-1}}{1+\omega^{-2}x^2}\end{aligned}$$

حيث $\omega = 1+\sqrt{2}$ و $\omega^{-1} = -1+\sqrt{2}$.

ولكن

$$\frac{\omega}{1+(\omega x)^2} = \omega\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\omega^{2k}x^{2k} + O(x^{2n+2})$$
$$\frac{\omega^{-1}}{1+(\omega^{-1}x)^2} = \omega^{-1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\omega^{-2k}x^{2k} + O(x^{2n+2})$$

إذن

$$\frac{2(1-x^2)}{1+6x^2+x^4} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\omega^{2k+1}-\omega^{-2k-1}\right)x^{2k} + O(x^{2n+2})$$

وعليه فإنّ

$$\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\omega^{2k+1}-\omega^{-2k-1}}{2k+1}x^{2k+1} + O(x^{2n+3})$$

التمرين 16. نهدف في هذا التمرين إلى إثبات وجود وحساب قيمة النهاية التالية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\operatorname{th}x)-\operatorname{th}(\tan x)}{\tan(\sin x)-\sin(\tan x)}$$

1. نضع، في حالة x من المجال $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$، $f_1(x)=\operatorname{th}(\tan x)$.

① أثبت، دون حساب، وجود (a_1,a_3,a_5,a_7) من $\mathbb{R}^4$ تُحقّق

$$f_1(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7 + O(x^9)$$

② اكتب النشر المحدود حتى المرتبة 7 للتابع $x\mapsto\cos^2 x$ في جوار الصفر.

③ أثبت أنّ $\left(f_1(x)\right)^2 - 1 = \cos^2 x\cdot f_1'(x)$، $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

④ استنتج قيمة (a_1,a_3,a_5,a_7).

2. استنتج النشر المحدود حتى المرتبة 7 للتابع $x\mapsto\tan(\operatorname{th}x)-\operatorname{th}(\tan x)$ في جوار 0.

3. جِدْ كذلك أعداداً (b_1,b_3,b_5,b_7) في $\mathbb{R}^4$ تُحقّق في جوار الصفر

$$\tan(\sin x) = b_1x + b_3x^3 + b_5x^5 + b_7x^7 + O(x^9)$$

4. جِدْ كذلك (c_1,c_3,c_5,c_7) في $\mathbb{R}^4$ تُحقّق في جوار الصفر

$$\sin(\tan x) = c_1x + c_3x^3 + c_5x^5 + c_7x^7 + O\left(x^9\right)$$

5. استنتج وجود وقيمة النهاية المطلوبة.

الحل

①.1 لنلاحظ أنّ التابع $f_1 : \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, f_1(x) = \operatorname{th}(\tan x)$ هو تابعٌ فردي ينتمي إلى الصف C^∞، فله نشرٌ محدود بالمعنى القوي من أيّة مرتبة، وعليه توجد أعدادٌ a_1 و a_3 و a_5 و a_7 تُحقّق

$$f_1(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + O(x^9)$$

②.1 لمّا كان $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ استنتجنا من النشر المحدود للتابع $\cos$ ما يأتي:

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} - \frac{(2x)^6}{720}\right) + O(x^8)\\ &= 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{45}x^6 + O(x^8)\end{aligned}$$

③.1 من الواضح أنّ f_1 يقبل الاشتقاق على $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ وأنّ مشتقّه يُحقّق

$$\forall x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[, \quad \cos^2 x\, f_1'(x) = 1 - \big(f_1(x)\big)^2$$

④.1 ولأنّ f_1' يقبل نشراً محدوداً من أيّة مرتبة استنتجنا أنّ

$$f_1'(x) = a_1 + 3a_3 x^2 + 5a_5 x^4 + 7a_7 x^6 + O(x^8)$$

وعليه يكون لدينا من جهة أولى

$$\begin{aligned}\cos^2 x\, f_1'(x) = a_1 + (3a_3 - a_1)x^2 &+ \left(5a_5 - 3a_3 + \frac{1}{3}a_1\right)x^4\\ &+ \left(7a_7 - 5a_5 + a_3 - \frac{2}{45}a_1\right)x^6 + O(x^8)\end{aligned}$$

ومن جهة ثانية

$$\begin{aligned}1 - \big(f_1(x)\big)^2 &= 1 - x^2(a_1 + a_3x^2 + a_5x^4 + a_7x^6)^2 + O(x^9)\\ &= 1 - a_1^2x^2 - 2a_1a_3x^4 - (a_3^2 + 2a_1a_5)x^6 + O(x^8)\end{aligned}$$

إذن يجب أن يكون

$$\begin{aligned}a_1 &= 1\\ 3a_3 - a_1 &= -a_1^2\\ 5a_5 - 3a_3 + \tfrac{1}{3}a_1 &= -2a_1a_3\\ 7a_7 - 5a_5 + a_3 - \tfrac{2}{45}a_1 &= -a_3^2 - 2a_1a_5\end{aligned}$$

ومن ثمّ

$$a_7=-\frac{1}{45} \text{ و } a_5=-\frac{1}{15} \text{ و } a_3=0 \text{ و } a_1=1$$

إذن

$$\operatorname{th}(\tan x)=x-\frac{1}{15}x^5-\frac{1}{45}x^7+O(x^9)$$

2. بملاحظة أنّ

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\operatorname{th}\big(\tan(\mathrm{i}\,x)\big)=\frac{1}{\mathrm{i}}\operatorname{th}(\mathrm{i}\operatorname{th}x)=\tan(\operatorname{th}x)$$

نستنتج مما سبق أنّ

$$\tan(\operatorname{th}x)=x-\frac{1}{15}x^5+\frac{1}{45}x^7+O(x^9)$$

ومن ثمّ

$$\tan(\operatorname{th}x)-\operatorname{th}(\tan x)=\frac{2}{45}x^7+O(x^9)$$

3. نعلم أنّ $\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+O(x^9)$ وعليه

$$\tan(\sin x)=\sin x+\frac{1}{3}\sin^3 x+\frac{2}{15}\sin^5 x+\frac{17}{315}\sin^7 x+O(x^9)$$

ولكن

$$\begin{array}{lclcccccccc|c}
\sin x & = & x & - & \frac{x^3}{6} & + & \frac{x^5}{120} & - & \frac{x^7}{7\,!} & + O(x^9) & & \times\ 1\\
\sin^3 x & = & & & x^3 & - & \frac{x^5}{2} & + & \frac{13x^7}{120} & + O(x^9) & & \times\ \frac{1}{3}\\
\sin^5 x & = & & & & & x^5 & - & \frac{5x^7}{6} & + O(x^9) & & \times\ \frac{2}{15}\\
\sin^7 x & = & & & & & & & x^7 & + O(x^9) & & \times\ \frac{17}{315}\\
\hline
\tan(\sin x) & = & x & + & \frac{x^3}{6} & - & \frac{x^5}{40} & - & \frac{107x^7}{7\,!} & + O(x^9) & &
\end{array}$$

إذن

$$\tan(\sin x)=x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}-\frac{107x^7}{7\,!}+O(x^9)$$

4. وكذلك لدينا

$$\sin(\tan x) = \tan x - \frac{1}{6}\tan^3 x + \frac{1}{120}\tan^5 x - \frac{1}{7!}\tan^7 x + O(x^9)$$

وعليه

$$\begin{array}{lcccccccl|l}
\tan x & = & x & + & \frac{x^3}{3} & + & \frac{2x^5}{15} & + & \frac{17x^7}{315} + O(x^9) & \times\ 1 \\
\tan^3 x & = & & & x^3 & + & x^5 & + & \frac{11x^7}{15} + O(x^9) & \times \frac{-1}{6} \\
\tan^5 x & = & & & & & x^5 & + & \frac{5x^7}{3} + O(x^9) & \times \frac{1}{120} \\
\tan^7 x & = & & & & & & & x^7 + O(x^9) & \times \frac{-1}{7!} \\
\hline
\sin(\tan x) & = & x & + & \frac{x^3}{6} & - & \frac{x^5}{40} & - & \frac{275x^7}{7!} + O(x^9) &
\end{array}$$

إذن

$$\sin(\tan x) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{275x^7}{7!} + O(x^9)$$

ومنه

$$\tan(\sin x) - \sin(\tan x) = \frac{1}{30}x^7 + O(x^9)$$

5. بالاستفادة مما سبق نستنتج أنّ

$$\frac{\tan(\operatorname{th} x) - \operatorname{th}(\tan x)}{\tan(\sin x) - \sin(\tan x)} = \frac{\frac{2}{45} + O(x^2)}{\frac{1}{30} + O(x^2)} = \frac{4}{3} + O(x^2)$$

ومن ثَمّ

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\operatorname{th} x) - \operatorname{th}(\tan x)}{\tan(\sin x) - \sin(\tan x)} = \frac{4}{3}$$

وهي النهاية المطلوبة. ■

التمرين 17. لنتأمّل التابع : $f :]-1,+1[\to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. أثبت أنّ التابع f ينتمي إلى الصف C^∞ على $]-1,+1[$.
2. احسب المقدار $(1-x^2)f'(x)$ بدلالة x و $f(x)$.
3. لتكن n من $\mathbb{N}^*$ ، أثبت أنّه توجد ثوابت $a_n,\dots,a_1,a_0$ تحقّق في جوار الصفر ما يأتي :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k} + O(x^{2n+2})$$

4. استفدْ من نتيجة السؤال 2. لتوجد علاقة تدريجيّة تفيد في حساب $a_n,\dots,a_1,a_0$.
5. لتكن n من $\mathbb{N}^*$ ، أوجد النشر المحدود من المرتبة $2n+2$ في جوار 0 للتابع f .

الحل

1. في الحقيقة، إنّ التابع $f :]-1,+1[\to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ هو جداء ضرب تابعين من الصف C^∞ على المجال $]-1,+1[$.

2. ونلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,+1[,\quad f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin' x + \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' \arcsin x\\ &= \frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\\ &= \frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2}f(x)\end{aligned}$$

إذن

$$\forall x \in]-1,+1[,\quad (1-x^2)f'(x) = 1 + x\,f(x)$$

3. لمّا كان التابع f' ينتمي إلى الصف C^∞ استنتجنا أنّه يقبل في جوار الصفر نشراً محدوداً بالمعنى القوي من أية مرتبة. ولمّا كان f' تابعاً زوجيّاً استنتجنا أنّه توجد متتالية $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ تُحقّق في حالة n من $\mathbb{N}$ ما يأتي :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k} + O(x^{2n+2})$$

4. نستنتج إذن أنّ

$$\begin{aligned}(1-x^2)f'(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k} - \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k+2} + O(x^{2n+2})\\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k} - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} x^{2k} + O(x^{2n+2})\\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) x^{2k} + O(x^{2n+2})\end{aligned}$$

وكذلك أنّ

$$\begin{aligned}1 + x\,f(x) &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{2k+1} x^{2k+2} + O(x^{2n+2})\\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k-1}}{2k-1} x^{2k} + O(x^{2n+2})\end{aligned}$$

وعليه نستنتج من المساواة $(1-x^2)f'(x) = 1 + x\,f(x)$ أنّ $a_0 = 1$ وأنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ a_n - a_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{2n-1}$$

أو

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ a_n = \frac{2n}{2n-1} a_{n-1}$$

ومنه

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \frac{4^n}{C_{2n}^n}$$

5. وأخيراً نرى أنّ

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{C_{2k}^k} x^{2k} + O(x^{2n+2})$$

ولأنّ $f(0) = 0$ نستنتج

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{(2k+1)C_{2k}^k} x^{2k+1} + O(x^{2n+3})$$

وهو المطلوب حسابه.

التمرين 18.

1. ليكن $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمراً ومحدّباً ويُحقِّق الشرطين

$$f(0)>0 \quad \text{و} \quad f(1)<0$$

أثبت أنّه **يوجد** عدد حقيقي **وحيد** α ينتمي إلى $]0,1[$ يُحقّق $f(\alpha)=0$.

2. ليكن p عدداً حقيقيّاً من المجال $]2,+\infty[$.

① أثبت أنّه، أياً كان $n\geq 2$، فيوجد عدد حقيقي وحيد a_n من المجال $]0,1[$ يُحقّق $(a_n)^n-pa_n+1=0$.

② أثبت أنّ المتتالية $(a_n)_{n\geq 2}$ متناقصة. وأنّ $\forall n\geq 2,\ 1<pa_n<2$.

③ استنتج تقارب المتتالية $(a_n)_{n\geq 2}$ واحسب قيمة $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

④ أثبت أيضاً وجود النهاية $\lim\limits_{n\to\infty}(p^n\cdot(a_n-\lambda))$ واحسب قيمتها.

الحل

1. إنّ التابع f تابعٌ مستمرٌّ على $[0,1]$ وهو يغيّر إشارته على هذا المجال، فلا بد أن ينعدم عليه. إذن يوجد α ينتمي إلى $]0,1[$ يُحقّق $f(\alpha)=0$.

لنفترض جدلاً أنّ f ينعدم عند نقطة أخرى β من المجال $]0,1[$، يمكننا دون الإقلال من عموميّة الدراسة أن نفترض أنّ $0<\alpha<\beta<1$. وعندئذ نستنتج من كون التابع f محدّباً ومن المساواة

$$\beta=(1-\lambda)\cdot\alpha+\lambda\cdot 1 \quad \text{حيث} \quad \lambda=\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\in\,]0,1[$$

أنّ

$$0=f(\beta)\leq(1-\lambda)f(\alpha)+\lambda f(1)=\lambda f(1)<0$$

وهذا خُلفٌ. إذن العدد α هو الجذر الوحيد للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[0,1]$.

2. ليكن p عدداً حقيقيّاً من المجال $]2,+\infty[$.

①.2 ليكن n عدداً طبيعياً أكبر تماماً من 1، ولنتأمّل التابع $f_n(x)=x^n-px+1$ على المجال $[0,1]$. نلاحظ أنّ المشتق الثاني للتابع f_n موجبٌ على هذا المجال، وأنّ $f_n(0)=1>0$ و $f_n(1)=2-p<0$. إذن استناداً إلى الفقرة السابقة، يوجد عددٌ وحيدٌ a_n ينتمي إلى $]0,1[$ ويُحقّق $f_n(a_n)=0$. وبوجه خاص يكون $f_n(x)>0$ في حالة $x\in[0,a_n[$ و $f(x)<0$ في حالة $x\in\,]a_n,1]$.

②.2 لتعيين موضع a_{n+1} بالنسبة إلى a_n نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} f_n(a_{n+1}) &= a_{n+1}^n - pa_{n+1} + 1 \\ &= (a_{n+1})^n - (a_{n+1})^{n+1} = (a_{n+1})^n(1 - a_{n+1}) > 0 \end{aligned}$$

فإذا استفدنا من دراسة إشارة f_n في ①.2 استنتجنا أنّ $a_{n+1} < a_n$. والمتتالية $(a_n)_{n\geq 2}$ متناقصة.

وبأسلوب مماثل نلاحظ أنّ

$$f_n\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) - 1 < 0 \quad \text{و} \quad f_n\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p^n} > 0$$

فإذا استفدنا مجدّداً من دراسة إشارة f_n في ①.2 استنتجنا أنّ

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{1}{p} \leq a_n \leq \frac{2}{p}$$

③.2 في الحقيقة، لمّا كان $\forall n \geq 2,\ pa_n - 1 = (a_n)^n$ استنتجنا أنّ

$$\forall n \geq 2, \left|a_n - \frac{1}{p}\right| \leq \frac{1}{p}\left(\frac{2}{p}\right)^n$$

ولأنّ $p > 2$ استنتجنا أنّ المتتالية $(a_n)_{n\geq 2}$ متقاربة وأنّ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{p}$.

④.2 لنلاحظ أنّ

$$\forall n \geq 2, \qquad p^n(pa_n - 1) = p^n(a_n)^n = (pa_n)^n = (1 + (a_n)^n)^n$$

إذن في حالة $n \geq 2$ يمكننا أن نكتب

$$p^n(pa_n - 1) - 1 = n(a_n)^n \times \frac{\ln(1 + (a_n)^n)}{(a_n)^n} \times \frac{\exp\Big(n\ln(1 + (a_n)^n)\Big) - 1}{n\ln(1 + (a_n)^n)}$$

ولكن نستنتج من المتراجحة $\dfrac{1}{p} \leq a_n \leq \dfrac{2}{p}$ أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n)^n = 0$ ومن ثَمّ

$$\lim_{n\to\infty} n\ln(1 + n(a_n)^n) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} (a_n)^n = 0$$

فإذا استفدنا من النهايتين الشهيرتين

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1 \ \text{و}\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

استنتجنا مما سبق أنّ

$$p^n(pa_n-1)-1=n(a_n)^n(1+\varepsilon_n)=n(pa_n-1)(1+\varepsilon_n)$$

حيث $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$. وإذا عرّفنا $\lambda_n=p^n\left(pa_n-1\right)$ كان لدينا

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0 \quad \text{و} \quad \lambda_n-1=\frac{n}{p^n}\lambda_n\left(1+\varepsilon_n\right)$$

وهذا يُكتب بالشكل

$$\frac{1}{\lambda_n}=1-\frac{n}{p^n}+o\left(\frac{n}{p^n}\right)$$

الذي نستنتج منه أنّ $\lambda_n=1+\frac{n}{p^n}+o\left(\frac{n}{p^n}\right)$ أو

$$a_n=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^{n+1}}+\frac{n}{p^{2n+1}}+o\left(\frac{n}{p^{2n+1}}\right)$$

وهي النتيجة المنشودة.

التمرين 19.

1. ليكن h التابع من الصف C^∞ المعرّف كما يأتي:

$$h:]-\infty,2[\to\mathbb{R},\ h(x)=\arctan\frac{x}{2-x}+\arctan(1-x)$$

① بسّط عبارة التابع h.

② اكتب النشر المحدود من المرتبة 4 في جوار 0 للتابع $x\mapsto\arctan\frac{x}{2-x}$.

③ استنتج النشر المحدود من المرتبة 5 في جوار 0 للتابع $x\mapsto x\arctan(x-1)$.

2. لنرمز بالرمز C_f إلى المنحني البيانيّ للتابع f المعرّف كما يأتي:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x\arctan(x-1)$.

① أثبت أنّ لمنحني التابع f مستقيماً مقارباً Δ_1 في جوار $+\infty$، عيّنه وحدّد موقع C_f بالنسبة إلى Δ_1 في جوار $+\infty$.

② أثبت أنّ لمنحني التابع f مستقيماً مقارباً Δ_2 في جوار $-\infty$، عيّنه وحدّد موقع C_f بالنسبة إلى Δ_2 في جوار $-\infty$.

③ ادرس تغيّرات التابع $g = f'$، واستنتج أنّ للمعادلة $g(x) = 0$ حلاً حقيقياً وحيداً α، ينتمي إلى $]0,1[$. ثُمّ عيّن إشارة f'. هل للمنحني C_f نقاط انعطاف؟

④ استنتج دراسة تغيرات التابع f، وارسم منحنيه البيانيّ.

⑤ أثبت أنّ لمقصور التابع f على المجال $]-\infty,\alpha[$، أي $f|_{]-\infty,\alpha[}$، تابعاً عكسيّاً ψ من الصف C^∞.

⑥ احسب النشر المحدود من المرتبة 3 للتابع ψ في جوار 0.

الحل

①.1 نلاحظ أنّ h قابلٌ للاشتقاق، وأنّ

$$h'(x) = \frac{\dfrac{2}{(2-x)^2}}{1+\left(\dfrac{x}{2-x}\right)^2} - \frac{1}{1+(1-x)^2}$$

$$= \frac{2}{4-4x+2x^2} - \frac{1}{2-2x+x^2} = 0$$

فالتابع h تابعٌ ثابتٌ، ولأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \dfrac{\pi}{4}$ استنتجنا أنّ

$$\forall x < 2, \quad \arctan\frac{x}{2-x} + \arctan(1-x) = \frac{\pi}{4}$$

②.1 بإجراء قسمة وفق القوى المتزايدة للعدد 1 على $1 - x + \dfrac{1}{2}x^2$ نستنتج أنّ

$$\frac{1}{1-x+\frac{1}{2}x^2} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

ومن ثَمّ

$$\left(\arctan\frac{x}{2-x}\right)' = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + O(x^4)$$

إذن

$$\arctan\frac{x}{2-x} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + O(x^5)$$

③.1 ولمّا كان

$$\forall x < 2, \quad x \arctan(x-1) = -\frac{\pi x}{4} + x \arctan \frac{x}{2-x}$$

استنتجنا أنّه في جوار الصفر لدينا

$$x \arctan(x-1) = -\frac{\pi x}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{12} + O(x^6)$$

①.2 نستفيد من المساواة $\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$ في حالة $t > 0$، لنستنتج أنّه في جوار $+\infty$ لدينا

$$\begin{aligned} \arctan\left(x-1\right) &= \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x-1} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x-1} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1/x}{1-1/x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

ومن ثَمّ في جوار $+\infty$ لدينا

$$f(x) = x \arctan(x-1) = \frac{\pi}{2} x - 1 - \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

إذن المستقيم Δ_1 الذي معادلته $y = \frac{\pi}{2} x - 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني C_f في جوار $+\infty$، وكذلك فإنّ المنحني C_f يقع تحت المستقيم Δ_1 في جوار $+\infty$.

②.2 وبأسلوب مماثل، نستفيد من المساواة $\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = -\frac{\pi}{2}$ في حالة $t < 0$، لنستنتج أنّه في جوار $-\infty$ لدينا

$$\arctan(x-1) = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

ومن ثَمّ، في جوار $-\infty$ لدينا

$$f(x) = x \arctan(x-1) = -\frac{\pi}{2} x - 1 - \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

إذن المستقيم Δ_2 الذي معادلته $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني C_f في جوار $-\infty$، وكذلك فإنّ المنحني C_f يقع فوق المستقيم Δ_2 في جوار $-\infty$.

③.2 لنضع $g = f'$ عندئذ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \arctan(x-1) + \frac{x}{1+(x-1)^2}$$

ومن ثَمّ، أياً كان العدد الحقيقي x كان

$$g'(x) = \frac{2}{1+(x-1)^2} + \frac{-2(x-1)x}{(1+(x-1)^2)^2} = \frac{2(2-x)}{(1+(x-1)^2)^2}$$

ومنه جدول التغيرات الآتي :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\frac{-\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}+1$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$

إذن التابع g موجبٌ تماماً على المجال $[2,+\infty[$، وهو متزايدٌ تماماً ويغيّر إشارته على المجال $]-\infty,2]$، إذن للمعادلة $g(x)=0$ حلٌّ حقيقيٌّ وحيدٌ α ينتمي إلى المجال $]-\infty,2]$. في الحقيقة، نلاحظ أنّ

$$g(1) = 1 > 0 \quad \text{و} \quad g(0) = -\frac{\pi}{4} < 0$$

إذن $\alpha \in]0,1[$. ونجد بحساب تقريبي $\alpha \approx 0.532661$.

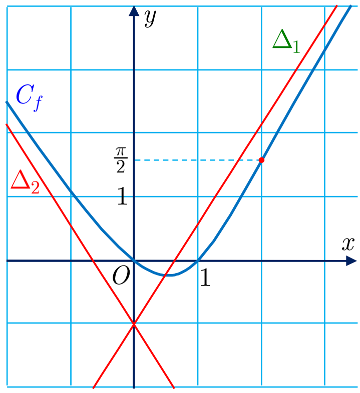
ويكون $f'(x) < 0$ في حالة $x \in]-\infty,\alpha[$ و $f'(x) > 0$ في حالة $x \in]\alpha,+\infty[$.

ونرى أنّ f'' ينعدم ويغيّر إشارته عند $x = 2$، إذن النقطة $\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$ هي نقطة انعطاف للخط البياني C_f.

④.2 نستنتج من الدراسة السابقة جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$			$-$		0		$+$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

ومنه الرسم البياني الآتي:



الرسم البياني للتابع $x \mapsto x\arctan(x-1)$

⑤.2 التابع f تابعٌ مستمرٌّ ومتناقصٌ تماماً على المجال $]-\infty,\alpha[$، فهو يعرّف تقابلاً

$$F :]-\infty,\alpha[\to]f(\alpha),+\infty[,\ x \mapsto f(x)$$

لنضع بالتعريف $\psi = F^{-1}$. ولمّا كان f ينتمي إلى الصف C^∞ و f' لا ينعدم على المجال $]-\infty,\alpha[$ استنتجنا أنّ ψ ينتمي إلى الصف C^∞ على المجال $]f(\alpha),+\infty[$. فهو يقبل نشراً محدوداً من أية مرتبة عند 0 الذي ينتمي إلى هذا المجال.

⑥.2 لنفترض أنّ $\psi(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + O(x^4)$ هو النشر المحدود من المرتبة الثالثة للتابع ψ عند 0. عندئذ نستنتج من المساواة $\psi(f(x)) = x$ المحقّقة في جوار الصفر، ومن النشر المحدود الذي وجدناه للتابع f في جوار الصفر

$$f(x) = -\frac{\pi x}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{12} + O(x^6)$$

ما يأتي

$$x = a_1f(x) + a_2f^2(x) + a_3f^3(x) + O(x^4)$$

ولكن

$$\begin{array}{rcrcrcrcl|l}
f(x) & = & -\dfrac{\pi x}{4} & + & \dfrac{x^2}{2} & + & \dfrac{x^3}{4} & & +O(x^4) & \times a_1 \\
f^2(x) & = & & & \dfrac{\pi^2x^2}{16} & - & \dfrac{\pi x^3}{8} & & +O(x^4) & \times a_2 \\
f^3(x) & = & & & & - & \dfrac{\pi^3x^3}{64} & & +O(x^4) & \times a_3
\end{array}$$

إذن يجب أن يكون

$$-\frac{\pi^3}{64}a_3 - \frac{\pi}{8}a_2 + \frac{1}{4}a_1 = 0, \frac{\pi^2}{16}a_2 + \frac{1}{2}a_1 = 0, -\frac{\pi}{4}a_1 = 1$$

ومنه

$$a_3 = -64\left(\frac{4+\pi}{\pi^5}\right) \quad \text{و} \quad a_2 = \frac{32}{\pi^3} \quad \text{و} \quad a_1 = -\frac{4}{\pi}$$

وعليه يكون

$$\psi(x) = -\frac{4}{\pi}x + \frac{32}{\pi^3}x^2 - 64\left(\frac{4+\pi}{\pi^5}\right)x^3 + O(x^4)$$

وبذا نجد المطلوب. ■

التمرين 20. ليكن التابع f الذي علاقة ربطه $f(x) = x^{x-x^2}$.

1. عيّن مجموعة تعريف f. وعيّن نهاياته عند أطراف مجال أو مجالات تعريفه. ماذا تستنتج؟
2. اكتب المشتق f' بصيغة جداء ضرب تابع h يطلب تعيينه بالتابع f. ثم ادرس تحولات h وبيّن أنه ينعدم مرتين على المجال $[0,1]$.
3. ادرس تحولات التابع f وارسم خطّه البياني.

الحل

1. التابع $x \mapsto f(x) = x^{x-x^2} = \exp((x-x^2)\ln x)$ تابعٌ معرّف ومن الصف C^∞ على $\mathbb{R}_+^*$. كما نرى مباشرة أنّ

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

إذن يمكن تمديد التابع f إلى تابع مستمرٍّ عند 0، بوضع $f(0) = 1$.

2. من جهة أخرى،

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \Big((x-x^2)\ln x\Big)' f(x) = h(x)f(x)$$

وقد عرّفنا $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ بالعلاقة

$$h(x) = ((x-x^2)\ln x)' = (1-2x)\ln x + 1 - x$$

هذا ونلاحظ أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad h'(x) = -2\ln x + \frac{1}{x} - 3$$

فالتابع h' تابعٌ متناقصٌ تماماً على المجال $\mathbb{R}_+^*$، ويُحقّق

$$h'(1) = -2 < 0 \quad \text{و} \quad h'(e^{-1}) = e - 1 > 0$$

فهو ينعدم على $\mathbb{R}_+^*$ مرّة واحدة فقط عند عدد α ينتمي إلى المجال $[e^{-1},1]$.

وعليه يكون للتابع h جدول التغيرات الآتي:

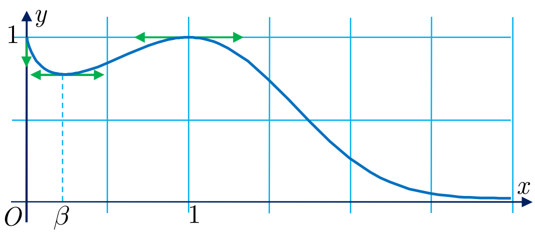
x	0		α		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0		$-$		
$h(x)$	$\Vert -\infty$	$\nearrow$	$h(\alpha)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

فإذا لاحظنا أنّ $h(1) = 0$ استنتجنا أنّ $h(\alpha) > 0$ والتابع h المتزايد تماماً على $]0,\alpha]$ يغير إشارته على هذا المجال فهو إذن ينعدم مرّة واحدة فقط عليه. لنرمز إذن بالرمز β إلى القيمة الوحيدة من المجال $]0,1[$ التي تُحقّق $h(\beta) = 0$. التابع h ينعدم مرّة ثانية على $\mathbb{R}_+^*$ وذلك عند العدد 1. ونجد بحساب تقريبي أنّ $\beta = 0.23561$.

3. من جهة أخرى، يمكننا استناداً إلى ما سبق أن نُعطي جدول التغيرات الآتي للتابع f.

x	0		β		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

وهذا هو الرسم البياني المطلوب :



الرسم البياني للتابع $x \mapsto x^{x-x^2}$

وتتمّ الدراسة.

متتاليات ومتسلسلات التوابع

《 في هذا البحث $\mathbb{K}$ هو $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ 》

1. عموميّات

1-1. تعريف. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{K}$. نسمّي **متتالية من التوابع العدديّة** التي منطلقها A كلَّ تطبيق من مجموعة الأعداد الطبيعيّة $\mathbb{N}$ إلى المجموعة $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$ أي مجموعة التوابع التي منطلقها A وتأخذ قيمها في $\mathbb{K}$ ، ونرمز عادة إلى متتالية توابع بالرمز $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و f_n عنصر من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$.

2-1. تعريف. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{K}$. ولتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. نقول إنّ المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **تتقارب ببساطة** من تابع f ينتمي إلى $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$ ، إذا وفقط إذا تحقَّق الشرط

$$\forall x \in A, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

ونسمي f النهاية البسيطة لمتتالية التوابع $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، و نكتب $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \overset{s}{=} f$.

3-1. تعريف. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{K}$. ولتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. نقول إنّ المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **تتقارب بانتظام** من تابع f ينتمي إلى $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$ ، إذا وفقط إذا تقاربت من الصفر المتتالية $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\overline{\mathbb{R}}$ ، المعرّفة بالعلاقة :

$$\mu_n = \sup_{x\in A}\left|f_n(x) - f(x)\right|$$

ونسمي f النهاية المنتظمة لمتتالية التوابع $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، ونكتب $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \overset{u}{=} f$.

4-1. ملاحظة. من الواضح أنه إذا تقاربت متتالية من التوابع من تابع ما بانتظام، فهي تتقارب ببساطة من التابع نفسه.

1-5. مثال. لندرس التقارب البسيط والتقارب المنتظم لمتتالية التوابع $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$، المعرّفة كما يأتي :

$$f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto n^\alpha t e^{-nt}. \qquad (\alpha \in \mathbb{R}_+)$$

من الواضح أنّ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب ببساطة من التابع الصفري على $\mathbb{R}_+$ والذي نرمز إليه بالرمز $\mathbb{O}$، أي $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \overset{s}{=} \mathbb{O}$. ومن ثَمّ إذا تقاربت $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بانتظام فلا بُد أن تكون نهايتها $\mathbb{O}$ أيضاً. لنضع إذن

$$\mu_n = \sup_{x\geq 0}\left|f_n(x)\right| = \sup_{x\geq 0} f_n(x)$$

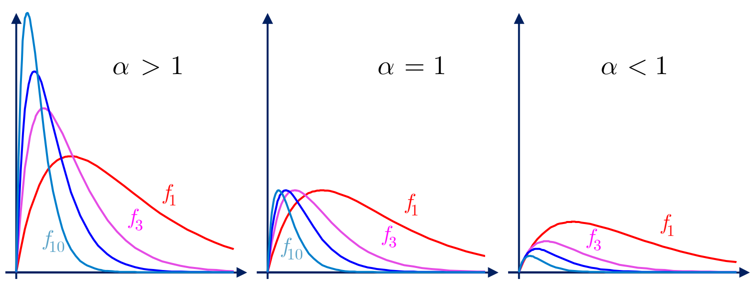
يبيّن جدول التغيرات الآتي:

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$	0

أنّ

$$\mu_n = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^{\alpha-1}e^{-1}$$

ومن ثَمّ نستنتج أنه إذا كان $\alpha < 1$ كان $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$، والمتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام من $\mathbb{O}$، أمّا إذا كان $\alpha \geq 1$، فإنّ المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ لا تتقارب بانتظام.



بعض حدود المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ عند قيم مختلفة للوسيط α

1-6. ملاحظة. لتكن متتالية التوابع $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. نفترض أنّ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب ببساطة من تابع f من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. إذا وُجِدَتْ متتالية $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر A بحيث لا تتقارب المتتالية التي حدُّها العام $\left|f_n(\xi_n)-f(\xi_n)\right|$ من 0 ، فإنّ المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ لا تتقارب بانتظام.

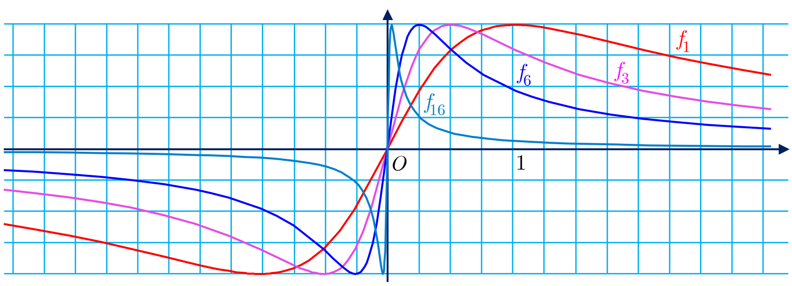
1-7. مثال. لندرس التقارب البسيط والتقارب المنتظم لمتتالية التوابع $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ ، المعرّفة كما يأتي:

$$f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ t\mapsto\frac{2nt}{1+n^2t^2}$$

من الواضح أنّ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب ببساطة من التابع الثابت الذي يساوي 0 على $\mathbb{R}$ ، أي $\lim\limits_{n\to\infty}f_n\overset{s}{=}\mathbb{O}$. ولكن

$$\forall n>0,\qquad \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-\mathbb{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right|=1$$

فالمتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ لا تتقارب بانتظام. ونجد في الشكل التالي بعض حدود هذه المتتالية.



1-8. تعريف. لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{K}$. نقول إنّ المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$ **تتقارب بانتظام على كل مجموعة متراصّة** من تابع f من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$ إذا وفقط إذا، تقاربت المتتالية التي حدُّها العام $\mu_n(K)=\sup\limits_{x\in K}\left|f_n(x)-f(x)\right|$ من الصفر، وذلك أياً كانت المجموعة المتراصّة K المحتواة في A .

نلاحظ أنّ التقارب المنتظم لمتتالية توابع $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$ من تابع f يقتضي تقاربها المنتظم على كل مجموعة متراصّة من التابع f ، وهذا بدوره يقتضي تقاربها البسيط من f . أمّا الاقتضاءان المعاكسان فهما خاطئان.

9-1. **مثال**. لنتأمّل متتالية التوابع $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ حيث :

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{nx} & : \quad x \neq 0, \\ 0 & : \quad x = 0. \end{cases}$$

تتقارب $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بانتظام على كل مجموعة متراصّة من التابع الثابت الذي يساوي 0 على $\mathbb{R}$ الذي رمزنا إليه بالرمز $\mathbf{0}$. في الحقيقة، إذا كانت K مجموعة متراصّة في $\mathbb{R}$، أمكننا أن نجد $M_K > 0$ يُحقّق $K \subset [-M_K, M_K]$، ومن ثمّ يكون

$$\begin{aligned} \forall n > 0, \quad \mu_n(K) &= \sup_{x\in K}\left|f_n(x)\right| \\ &\le \sup_{0<|x|\le M_K} x^2\left|\sin\frac{1}{nx}\right| \\ &\le \sup_{0<|x|\le M_K} \frac{x^2}{|nx|} = \frac{M_K}{n} \end{aligned}$$

ولكنّ المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ لا تتقارب بانتظام من $\mathbf{0}$، لأنّ $\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(n)| = 1$.

10-1. **تعريف**. لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{K}$. نقول إنّ المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$ تحقِّق **شرط كوشي بانتظام** إذا وفقط إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \left.\begin{matrix} (n,m) \in \mathbb{N}^2 \\ m \ge m \ge N_\varepsilon \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sup_{x\in A}\left|f_n(x) - f_m(x)\right| < \varepsilon$$

11-1. **مبرهنة**. لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{K}$. ولتكن المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. تكون المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام إذا وفقط إذا حقّقت شرط كوشي بانتظام.

الإثبات

- **لزوم الشرط**. لنفترض أنّ المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام من تابع f من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. ولتكن $0 < \varepsilon$، نجد إذن N_ε في $\mathbb{N}$ يُحقّق

$$n \ge N_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x\in A}\left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ومن ثَمّ إذا استعملنا متراجحة المثلّث وجدنا

$$\left(n \geq N_\varepsilon\right) \wedge \left(m \geq N_\varepsilon\right) \Rightarrow \sup_{x\in A}\left|f_n(x) - f_m(x)\right| < \varepsilon$$

والمتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقِّق شرط كوشي بانتظام.

▪ **كفاية الشرط**. لنفترض أنّ المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقِّق شرط كوشي بانتظام. ينتج إذن أنّه مهما كان x من A، حققت المتتالية $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathbb{K}$ شرط كوشي، فهي من ثَمّ تتقارب من عدد $f(x)$ في $\mathbb{K}$. وهكذا يمكننا أن نعرِّف التابع f كما يأتي:

$$f : A \to \mathbb{K}, x \mapsto f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

لتكن $\varepsilon > 0$، نجد، استناداً إلى شرط كوشي، N_ε في $\mathbb{N}$ يُحقِّق :

$$\left(n \geq N_\varepsilon\right) \wedge \left(m \geq N_\varepsilon\right) \Rightarrow \forall x \in A, \quad \left|f_n(x) - f_m(x)\right| \leq \varepsilon$$

وبجعل m تسعى إلى $+\infty$ نجد

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \forall x \in A, \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \varepsilon$$

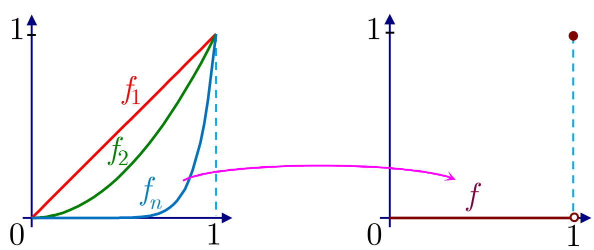
أي إنّ $\lim_{n\to\infty} f_n \overset{u}{=} f$. ❐

2. متتاليات التوابع والاستمرار

2-1. **مثال**. لنتأمّل متتالية التوابع $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$، المعرّفة كما يأتي :

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto t^n$$

من الواضح أنّ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من التوابع المستمرّة التي تتقارب ببساطة من التابع f من $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ الذي يساوي 0 على $[0,1[$ ويحقّق $f(1) = 1$. فالتابع f ليس مستمراً. إذن التقارب البسيط لمتتالية من التوابع المستمرّة لا يكفي حتى تكون النهاية تابعاً مستمرّاً.



2-2. **مبرهنة** : لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{K}$، وليكن a عنصراً من A. ولنتأمّل $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. نفترض أنّ

① المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام من تابع f في $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$.

② التابع f_n مستمرٌّ عند a، وذلك أياً كان n من $\mathbb{N}$.

إذن التابع f مستمرٌّ عند a.

الإثبات

لتكن $0 < \varepsilon$، ينتج من التقارب المنتظم أنه يوجد m في $\mathbb{N}$ يُحقّق

$$\sup_{x\in A}\left|f_m(x) - f(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{3}$$

ولمّا كان f_m مستمرّاً عند a، نجد $0 < \eta$ يُحقّق

$$(x \in A) \wedge (|x - a| < \eta) \Rightarrow \left|f_m(x) - f_m(a)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

نستنتج من ذلك أنه أياً كانت x من A التي تُحقّق الشرط $|x - a| < \eta$ كان

$$\begin{aligned}\left|f(x) - f(a)\right| &\le \left|f(x) - f_m(x)\right| + \left|f_m(x) - f_m(a)\right| + \left|f_m(a) - f(a)\right|\\ &\le 3 \times \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

وهذا يثبت استمرار f عند a. ❐

3-2. **نتيجة**. لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{K}$. ولتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من التوابع المستمرّة على A، والمتقاربة بانتظام من تابع f من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. عندئذ يكون التابع f مستمراً على A.

4-2. **مبرهنة**. لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{K}$، ولتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. نفترض أنّ

① المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام على كلّ مجموعة متراصّة من تابع f من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$.

② التابع f_n مستمرٌّ على A، وذلك أياً كان n من $\mathbb{N}$.

إذن التابع f مستمرٌّ على A.

الإثبات

ليكن a عنصراً من A، ولتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من A تسعى إلى a. نعلم أنّ المجموعة :

$$K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$$

مجموعة متراصّة محتواة في A. لنعرّف إذن $g_n = f_{n|K}$ و $g = f_{|K}$ أي مقصور كلٍّ من f_n و f على K. إنّ متتالية التوابع $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر $\mathcal{F}(K,\mathbb{K})$، متقاربة بانتظام من التابع g، وكلُّ g_n مستمرٌّ عند a. ينجم عن ذلك، بمُقتضى المبرهنة 2-2، أنّ g مستمرٌّ عند a. ولمّا كانت $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من K تسعى إلى a، كان $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a)$، وهذا ما يثبت أنّ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. نستنتج من المناقشة السابقة أنّ f مستمرٌّ عند a، وبذا نُكمِل إثبات المبرهنة. ❐

2-5. **مبرهنة**. لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{K}$. ولتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من التوابع المستمرّة على A، المتقاربة بانتظام من تابع f ينتمي إلى $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$، ولتكن $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من A متقاربة من عنصر ξ ينتمي إلى A. حينئذ يكون

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\xi_n) = f(\xi)$$

الإثبات

في الحقيقة، أياً كانت n من $\mathbb{N}$، فلدينا

$$\begin{aligned} |f_n(\xi_n) - f(\xi)| &\le |f_n(\xi_n) - f(\xi_n)| + |f(\xi_n) - f(\xi)| \\ &\le \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| + |f(\xi_n) - f(\xi)| \end{aligned}$$

ونحصل من ثَمّ على النتيجة المطلوبة بالاستفادة من استمرار التابع f عند ξ، والتقارب المنتظم للمتتالية $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من f. ❐

2-6. **مبرهنة** : لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{K}$. ولتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{C}(A,\mathbb{K})$، أي متتالية من التوابع المستمرّة على A. نفترض أنّ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقق شرط كوشي بانتظام. حينئذ تتقارب $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بانتظام من تابع f ينتمي إلى $\mathcal{C}(A,\mathbb{K})$.

الإثبات

تنتج صحّة هذه المبرهنة مباشرة من المبرهنتين 1-11 و 2-2. ❐

2-7. مبرهنة – ڤايرشتراس Weierstrass. ليكن $f:[0,1]\to\mathbb{K}$ تابعاً مستمرّاً. عندئذ توجد متتالية من كثيرات الحدود $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathbb{K}[X]$ تُحقِّق :

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|f(x)-P_n(x)\right|=0$$

الإثبات

لنعرّف في حالة n من $\mathbb{N}$، و k من $\{0,1,\ldots,n\}$، كثير الحدود :

$$B_n^k(X)=C_n^k X^k(1-X)^{n-k}$$

ولندرس، تمهيداً للإثبات، بعض الخواص البسيطة لكثيرات الحدود B_n^k التي تسمّى **كثيرات حدود برنشتاين** Bernstein.

نلاحظ بالاستفادة من منشور ذي الحدين أنّ

$$\sum_{k=0}^{n}B_n^k(x)\,e^{kt}=(1-x+x\,e^t)^n$$

ومن ثَمّ بتعويض $t=0$، ثم بالاشتقاق وتعويض $t=0$، وأخيراً بالاشتقاق مرّتين وتعويض $t=0$ نجد

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}B_n^k(X)&=1\\ \sum_{k=0}^{n}kB_n^k(X)&=nX\\ \sum_{k=0}^{n}k^2B_n^k(X)&=nX+n(n-1)X^2\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2B_n^k(x)&=x^2\sum_{k=0}^{n}B_n^k(x)-\frac{2x}{n}\sum_{k=0}^{n}kB_n^k(x)+\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2B_n^k(x)\\&=x^2-2x^2+\frac{x}{n}+\frac{n-1}{n}x^2=\frac{x(1-x)}{n}\end{aligned}$$

لنأتِ الآن إلى إثبات المبرهنة، ولنعرّف

$$P_n(X)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)B_n^k(X)$$

سنثبت فيما يلي أنّ متتالية التوابع $\left(x\mapsto P_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب بانتظام من التابع f.

لمّا كان f مستمرّاً على المجموعة المتراصّة $[0,1]$، كان f محدوداً، ومن ثَمّ ، أمكننا أن نعرّف $M = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ ، وكذلك كان f مستمرّاً بانتظام على $[0,1]$.

ليكن $\varepsilon > 0$ نجد، بسبب الاستمرار المنتظم للتابع f ، عدداً $0 < \delta_\varepsilon$ يُحقّق

$$\forall (x,y)\in[0,1]^2,\quad \left|x-y\right| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left|f(x)-f(y)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

نعرّف إذن $n_0 = 1 + \left\lfloor M/(\varepsilon\delta_\varepsilon^2)\right\rfloor$ ، فيكون لدينا، أياً كان n $n_0 < n$ وأياً كان x من المجال $[0,1]$ ما يأتي:

$$\begin{aligned} f(x)-P_n(x) &= f(x)\sum_{k=0}^{n} B_n^k(x) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)B_n^k(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_n^k(x)\\ &= \sum_{\substack{0\le k\le n\\ \left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta_\varepsilon}}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_n^k(x) + \sum_{\substack{0\le k\le n\\ \left|x-\frac{k}{n}\right|\ge\delta_\varepsilon}}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_n^k(x) \end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned} \left|f(x)-P_n(x)\right| &\le \frac{\varepsilon}{2}\sum_{\substack{0\le k\le n\\ \left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta_\varepsilon}} B_n^k(x) + 2M\sum_{\substack{0\le k\le n\\ \left|x-\frac{k}{n}\right|\ge\delta_\varepsilon}} B_n^k(x)\\ &\le \frac{\varepsilon}{2}\sum_{0\le k\le n} B_n^k(x) + \frac{2M}{\delta_\varepsilon^2}\sum_{\substack{0\le k\le n\\ \left|x-\frac{k}{n}\right|\ge\delta_\varepsilon}} \left|x-\frac{k}{n}\right|^2 B_n^k(x)\\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta_\varepsilon^2}\sum_{0\le k\le n} \left|x-\frac{k}{n}\right|^2 B_n^k(x)\\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta_\varepsilon^2}\frac{\left|x(1-x)\right|}{n} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2\delta_\varepsilon^2 n}\\ &\le \frac{\varepsilon}{2}\left(1+\frac{M}{\varepsilon\delta_\varepsilon^2 n}\right) \le \frac{\varepsilon}{2}\left(1+\frac{n_0}{n}\right) < \varepsilon \end{aligned}$$

بذلك نكون قد أثبتنا أنّ

$$n > n_0 \Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} \left|f(x)-P_n(x)\right| \le \varepsilon$$

وهي الغاية المرجوّة. ❐

2-8. **نتيجة**. ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ تابعاً مستمرّاً. حينئذ توجد في $\mathbb{K}[X]$ متتالية من كثيرات الحدود $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب بانتظام على المجال $[a,b]$ من التابع f.

الإثبات

لنعرّف التابع المستمرّ $g:[0,1]\to\mathbb{K}, t\mapsto f(a+t(b-a))$، نجد بناءً على المبرهنة السابقة متتالية $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من التوابع الحدودية متقاربة بانتظام من التابع g. ومن ثَمّ إذا عرّفنا $Q_n(X)=P_n\left(\frac{X-a}{b-a}\right)$ فإنّ $(Q_n)_{n\in\mathbb{K}}$ تتقارب بانتظام على المجال $[a,b]$ من التابع f. وبذلك يتم الإثبات. □

3. متتاليات التوابع وقابليّة الاشتقاق

ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$. ولتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من التوابع المعرّفة على I، وتأخذ قيمها في $\mathbb{K}$. ولنفترض أنّ f_n قابل للاشتقاق على I أياً كان n من $\mathbb{N}$، يسمح لنا هذا بتعريف متتالية التوابع $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$. ويمكننا هنا أن نطرح عدداً من الأسئلة:

❶ هل يقتضي التقارب البسيط، أو حتى المنتظم، للمتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تقاربَ $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$؟

❷ في حال تقارب كل من المتتاليتين $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$، هل يكون التابع $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'$ مشتقَّ التابع $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ ؟

تُبيّن الأمثلة الآتية أنّ الجواب عن السؤالين السابقين هو ”**لا**“ في الحالة العامّة.

3-1. أمثلة.

- المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة كما يأتي :

$$f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{1-\cos(n+1)x}{n+1}$$

هي متتالية من التوابع القابلة للاشتقاق، متقاربة بانتظام من التابع الصفري $\mathbb{O}$. ولكنّ المتتالية $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ لا تتقارب حتى ببساطة.

- المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة كما يأتي :

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

هي متتالية من التوابع القابلة للاشتقاق، متقاربة بانتظام من التابع

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$$

ولكنّ f لا يقبل الاشتقاق عند 0.

- المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة كما يأتي:

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

هي متتالية من التوابع القابلة للاشتقاق، متقاربة بانتظام من التابع $f = \mathbb{O}$. ولكن $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب ببساطة من التابع :

$$g : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & : \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & : \quad x = 1 \end{cases}$$

ومع ذلك فإنّ $f' \neq g$.

3-2. **مبرهنة** : ليكن I مجالاً **محدوداً** غير تافه في $\mathbb{R}$، ولتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية توابع من $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. نضع الفرضيّات التالية :

① أيّاً كان n من $\mathbb{N}$، فالتابع f_n قابل للاشتقاق على I .

② المتتالية $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب بانتظام على I .

③ توجد x_0 من I، تتقارب عندها المتتالية $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$.

حينئذ

❶ تتقارب المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بانتظام على I من تابع f من $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

❷ التابع f يقبل الاشتقاق على I، ويحقّق $\forall x \in I,\ f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

الإثبات

لمّا كان المجال I محدوداً، يوجد عدد حقيقيٌّ M يُحقّق

$$\forall (x,y) \in I^2,\ |x-y| \le M$$

لإثبات التقارب المنتظم للمتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ سنثبت أنها تحقّق شرط كوشي بانتظام.

ليكن $\varepsilon > 0$ ، نجد، بسبب تقارب المتتالية $\big(f_n(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$، عدداً n_0 يُحقِّق

$$(1) \qquad (n \geq n_0) \wedge (m \geq n_0) \Rightarrow \left|f_n(x_0) - f_m(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

أمّا التقارب المنتظم للمتتالية $\left(f_n'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ فيقتضي وجود عددٍ n_1 يُحقِّق

$$(2) \qquad (n \geq n_1) \wedge (m \geq n_1) \Rightarrow \forall t \in I, \quad \left|f_n'(t) - f_m'(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

لنعرّف $N = \max(n_0, n_1)$ ، ولتكن $n \geq N$ و $m \geq N$ و x من I ، نجد عندئذ

$$\begin{aligned}
\left|f_n(x) - f_m(x)\right| &\leq \left|f_n(x_0) - f_m(x_0)\right| + \left|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)\right|, \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \left|x - x_0\right| \left|(f_n' - f_m')(\,x_0 + \theta(x - x_0))\right|, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \theta \in]0,1[\\
&< \frac{\varepsilon}{2} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

وهذا يثبت أنّ المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تُحقِّق شرط كوشي بانتظام، فهي متقاربة بانتظام. نعرّف إذن التابع f بالصيغة $f \overset{u}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. التابع f تابعٌ مستمرٌّ على I لأنّه نهاية لمتتالية متقاربة بانتظام على I من التوابع المستمرّة على I .

لتكن x من I ، ولنعرِّف، أياً كانت n من $\mathbb{N}$ ، التابع φ_n كما يلي

$$\varphi_n : I \to \mathbb{K}, \quad t \mapsto \begin{cases} \dfrac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} & : \quad t \neq x, \\ f_n'(x) & : \quad t = x. \end{cases}$$

إنّ المتتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية من التوابع المستمرّة على I .

لتكن $\varepsilon > 0$ ، يوجد، بسبب التقارب المنتظم للمتتالية $\left(f_n'\right)_{n\in\mathbb{N}}$، عددٌ n_0 يُحقّق

$$(3) \qquad (n \geq n_0) \wedge (m \geq n_0) \Rightarrow \forall t \in I, \quad \left|f_n'(t) - f_m'(t)\right| < \varepsilon$$

فمن جهة أولى يكون لدينا

$$(n \geq n_0) \wedge (m \geq n_0) \Rightarrow \left|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\right| < \varepsilon$$

ومن جهة ثانية، أياً كان t من $I\backslash\{x\}$، نجد استناداً إلى مبرهنة التزايدات المحدودة أنّه في حالة $m \geq n_0$ و $n \geq n_0$ لدينا :

$$\begin{aligned}\left|\varphi_n(t)-\varphi_m(t)\right| &= \left|\frac{(f_n-f_m)(t)-(f_n-f_m)(x)}{t-x}\right| \\ &= \left|(f_n'-f_m')\big(x+\theta(t-x)\big)\right| < \varepsilon\end{aligned}$$

نستنتج من ذلك أنّ متتالية التوابع المستمرّة $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقّق شرط كوشي بانتظام فهي إذن متقاربة بانتظام من تابع مستمرّ $\varphi : I \to \mathbb{R}$. ومن ثَمّ يكون

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

وأياً كانت t من $I\backslash\{x\}$، كان :

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

ولكنّ التابع φ مستمرٌّ عند x إذن $\varphi(x) = \lim\limits_{t\to x} \varphi(t)$، وهذا يبيّن أنّ

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \varphi(x) = \lim_{\substack{t\to x\\ t\neq x}} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

فالتابع f قابل للاشتقاق عند x وقيمة مشتقه عند هذه النقطة هي $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$. وهذا يُكمل إثبات المبرهنة. ❐

3-3. نتيجة. ليكن I مجالاً غير تافه في $\mathbb{R}$، ولتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية توابع من $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.

نفترض ما يأتي :

① أياً كانت n من $\mathbb{N}$، فالتابع f_n قابل للاشتقاق على I .

② المتتالية $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام على كل مجموعة متراصّة في I .

③ توجد x_0 من I، تجعل المتتالية $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

حينئذ

❶ تتقارب $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بانتظام على كل مجموعة متراصة في I من f من $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.

❷ التابع f يقبل الاشتقاق على I، ويحقّق

$$\forall x \in I,\quad f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

الإثبات

يكفي أن نطبّق المبرهنة السابقة، على كلٍّ من متتاليتي التوابع $(\operatorname{Re} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(\operatorname{Im} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$، وعلى جميع المجالات المغلقة والمحدودة الجزئية من I، التي تحوي x_0. نترك التفاصيل تمريناً للقارئ المهتمّ. ❐

4. متسلسلات التوابع

1-4. تعريف. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{K}$. ولتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية توابع من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. نقول إنّ **المتسلسلة $\sum f_n$ متقاربة ببساطة، أو بانتظام، أو بانتظام على كل مجموعة متراصّة من A**، إذا وفقط إذا تقاربت متتالية التوابع $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$، حيث $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$، ببساطة، أو بانتظام، أو بانتظام على كل مجموعة متراصّة من A، على التوالي. ونسمّي $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ **مجموع المتسلسلة** $\sum f_n$ ونرمز إليه بالرمز $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

ونقول إنّ المتسلسلة $\sum f_n$ تحقّق **شرط كوشي بانتظام** إذا وفقط إذا حقّقت المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ شرط كوشي بانتظام، أي :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \left.\begin{array}{c}(n,m)\in\mathbb{N}^2\\ n > N_\varepsilon\end{array}\right\} \Rightarrow \sup_{x\in A}\left|\sum_{k=n}^{n+m} f_k(x)\right| \le \varepsilon$$

2-4. ملاحظات. تتقارب متسلسلة توابع بانتظام إذا وفقط إذا حقّقت شرط كوشي بانتظام. ومن ناحية أخرى إذا تقاربت متسلسلة توابع بانتظام فإنّ حدّها العام يسعى بانتظام إلى التابع الصفريّ.

3-4. تعريف. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{K}$. ولتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية توابع من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. نقول إنّ المتسلسلة $\sum f_n$ **متقاربة بالنظيم** إذا وفقط إذا، تقاربت المتسلسلة $\sum \| f_n \|_\infty$ إذ عرّفنا $\| f_n \|_\infty = \sup\limits_{x\in A} |f_n(x)| \in \overline{\mathbb{R}}$.

4-4. مبرهنة. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{K}$. ولتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية توابع من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. الاقتضاءات التالية صحيحة :

① ($\sum f_n$ متقاربة بالنظيم) $\Leftarrow$ ($\sum f_n$ متقاربة بانتظام).

② ($\sum f_n$ متقاربة بانتظام) $\Leftarrow$ ($\sum f_n$ متقاربة بانتظام على كل مجموعة متراصّة).

③ ($\sum f_n$ متقاربة بانتظام علىكل مجموعة متراصّة) $\Leftarrow$ ($\sum f_n$ متقاربة ببساطة).

الإثبات

الإثبات بسيط انطلاقاً من التعريف، وهو متروك للقارئ. ❐

تجدر الإشارة إلى أنّ جميع الاقتضاءات المعاكسة لما ورد في نص المبرهنة خطأ، كما سنرى في التمرينات.

5-4. مبرهنة. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{K}$. ولتكن $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتي توابع من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. نفترض أنّ

① المتتالية $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقيّة متناقصة، وذلك أياً كانت x من A .

② المتتالية $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب بانتظام من التابع الصفري $\mathbb{O}$.

③ يوجد في $\mathbb{R}_+^*$ عددٌ M ، يُحقّق :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in A,\qquad \left|\sum_{k=0}^{n} h_k(x)\right|\leq M$$

عندئذ تكون متسلسلة التوابع $\sum f_n$ ، وقد عرّفنا $f_n = g_n h_n$ ، متقاربة بانتظام.

الإثبات

لنرمز بالرمز $H_n(x)$ إلى المجموع $\sum_{k=0}^{n} h_k(x)$. عندئذ يكون لدينا بناءً على **تحويل آبل** وأياً كان x من A ، و (n,p) من $\mathbb{N}^2$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p} (g_k(x)-g_{k+1}(x))H_k(x) + g_{n+p+1}(x)H_{n+p}(x) - g_{n+1}(x)H_n(x)$$

ومنه

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \leq M\left(g_{n+1}(x) - g_{n+p+1}(x) + g_{n+p+1}(x) + g_{n+1}(x)\right)$$
$$\leq 2Mg_{n+1}(x)$$

ومن ثَمّ

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad \sup_{x\in A} \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \leq 2M \sup_A g_{n+1}$$

والشرط ② يتيح لنا أن نستنتج من ذلك أن المتسلسلة $\sum f_n$ متقاربة بانتظام لأنها تحقّق شرط كوشي بانتظام. ❐

4-6. تطبيق مهم. لتكن $(c_n)_{n\geq 0}$ متتالية حقيقيّة متناقصة وتسعى إلى الصفر. عندئذ تكون متتالية التوابع $\sum c_n h_n$ حيث $h_n(x) = e^{\mathrm{i}nx}$ متقاربة بانتظام على كلّ مجال من النمط

$$[2\pi k + \alpha, 2\pi(k+1) - \alpha]$$

حيث α من $]0,\pi[$، و k من $\mathbb{Z}$.

نطبّق المبرهنة السابقة على $h_n(x) = e^{\mathrm{i}nx}$، و $g_n(x) = c_n$. وذلك بعد ملاحظة أنّه، أيّاً كان x من $[2\pi k + \alpha, 2\pi(k+1) - \alpha]$ و n من $\mathbb{N}$، كان :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{\mathrm{i}kx} = \frac{e^{\mathrm{i}(n+1)x} - 1}{e^{\mathrm{i}x} - 1} = \frac{e^{\mathrm{i}(n+1/2)x} - e^{-\mathrm{i}x/2}}{e^{\mathrm{i}x/2} - e^{-\mathrm{i}x/2}}$$
$$= \frac{e^{\mathrm{i}(n+1/2)x} - e^{-\mathrm{i}x/2}}{2\mathrm{i}\sin(x/2)}$$

ومن ثَمّ

$$\left|\sum_{k=0}^{n} e^{\mathrm{i}kx}\right| \leq \frac{1}{\sin(\alpha/2)}$$

ونحصل على النتيجة المطلوبة بتطبيق المبرهنة 4-5.

نستنتج المبرهنات الآتية من المبرهنات المتعلّقة بمتتاليات التوابع دون حاجة إلى أيِّ إثبات إضافي.

7-4. **مبرهنة**. لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{K}$. ولتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{K}}$ متتالية توابع من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. نفترض أنّه، مهما تكن n من $\mathbb{N}$ فالتابع f_n مستمرٌّ عند a من A ، وأنّ المتسلسلة $\sum f_n$ متقاربة بانتظام. عندئذ يكون مجموعها $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ مستمراً عند a .

8-4. **مبرهنة**.لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{K}$. ولتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية توابع من $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$. نفترض أنّ f_n مستمرٌّ على A ، أياً كان n من $\mathbb{N}$ ، وأنّ المتسلسلة $\sum f_n$ متقاربة بانتظام على كل مجموعة متراصّة في A . عندئذ يكون مجموعها $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ مستمراً على A .

9-4. **مبرهنة**.لتكن I مجالاً غير تافه $\mathbb{R}$. ولتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية توابع من $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$. نفترض أنّ f_n قابل للاشتقاق على I أياً كانت n من $\mathbb{N}$ ، وأنّه يوجد في I عنصر x_0 يجعل المتسلسلة $\sum f_n(x_0)$ متقاربة، وأنّ المتسلسلة $\sum f_n'$ متقاربة بانتظام على كل مجموعة متراصّة في I . عندئذ تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ بانتظام على كل مجموعة متراصّة في I . ويكون مجموعها $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ قابلاً للاشتقاق على I ، ويحقّق

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$$

تمرينات

التمرين 1. ادرس التقارب البسيط، والتقارب المنتظم، وكذلك التقارب المنتظم على كل مجموعة متراصّة لمتتاليات التوابع الآتية :

$$f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}$$

$$f_n : [1,+\infty[\to \mathbb{R},\ f_n(x) = \ln\left(x + \frac{1}{n}\right)$$

$$f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ f_n(x) = nx^2 e^{-nx}$$

$$f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin nx}{n\sqrt{x}} & : \ x \neq 0 \\ 0 & : \ x = 0 \end{cases}$$

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & : \ x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ -n^2 x + 2n & : \ x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 & : \ x \in \left[\frac{2}{n}, 1\right] \end{cases}$$

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} nx - \dfrac{1}{n} & : \ x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 1 - x & : \ x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

الحل

❶ دراسة متتالية التوابع $(f_n)_{n\geq 1}$ حيث

$$f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}$$

نلاحظ بمناقشة حالة $1 \leq x$ وحالة $0 \leq x \leq 1$ كل على حدتها أنّ $x \leq 1 + x^n$. إذن

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq \frac{x}{1+x^n} \leq 1$$

وعليه يكون

$$\sup_{x\geq 0}\left|f_n(x)\right| \leq \frac{1}{n}$$

إذن متتالية التوابع $(f_n)_{n\geq 1}$ تتقارب بانتظام من التابع الصفري $\mathbb{O}$.

❷ دراسة متتالية التوابع $(f_n)_{n\geq 1}$ حيث

$$f_n : [1,+\infty[\,\to \mathbb{R},\ f_n(x) = \ln\left(x + \frac{1}{n}\right)$$

ليكن التابع $f : [1,+\infty[\,\to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x$. عندئذ يكون لدينا

$$\forall x \geq 1, \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

ومنه

$$\sup_{x\geq 1}\left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \frac{1}{n}$$

والمتتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ تتقارب بانتظام من التابع f .

❸ دراسة متتالية التوابع $(f_n)_{n\geq 1}$ حيث

$$f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f_n(x) = nx^2 e^{-nx}$$

إنّ دراسةً بسيطةً لتحوّلات التابع f_n تبيِّن أنّ

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+}\left|f_n(x)\right| = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4e^{-2}}{n}$$

إذن المتتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ تتقارب بانتظام من التابع الصفري $\mathbb{O}$.

❹ دراسة متتالية التوابع $(f_n)_{n\geq 1}$ حيث

$$f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin nx}{n\sqrt{x}} & : \quad x > 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$$

نلاحظ بسهولة أنّه في حالة $0 < x < \dfrac{1}{n}$ يكون

$$\left|f_n(x)\right| \leq \frac{nx}{n\sqrt{x}} = \sqrt{x} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

وهذا صحيح أيضاً في حالة $x = 0$. أمّا في حالة $x \geq \dfrac{1}{n}$ فيكون لدينا أيضاً

$$\left|f_n(x)\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{x}} \leq \frac{1}{n\sqrt{1/n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

وعليه يكون $\sup_{x\geq 0}\left|f_n(x)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. إذن متتالية التوابع $(f_n)_{n\geq 1}$ تتقارب بانتظام من التابع $\mathbb{O}$.

❺ دراسة متتالية التوابع $(f_n)_{n\ge1}$ حيث

$$f_n:[0,1]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\begin{cases} n^2x & : \ 0\le x\le \frac{1}{n}\\ -n^2x+2n & : \ \frac{1}{n}\le x\le\frac{2}{n}\\ 0 & : \ \frac{2}{n}\le x\le 1\end{cases}$$

من الواضح أنّ المتتالية $(f_n)_{n\ge1}$ تتقارب ببساطة نحو التابع الصفري $\mathbb{O}$. وهي لا تتقارب بانتظام على المجال $[0,1]$ لأنّ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n\left(\frac{1}{n}\right)=+\infty$. ولكنّها تتقارب بانتظام على مجموعة متراصّة في المجال $]0,1]$.

❻ دراسة متتالية التوابع $(f_n)_{n\ge1}$ حيث

$$f_n:[0,1]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\begin{cases} nx-\frac{1}{n} & : 0\le x\le\frac{1}{n}\\ 1-x & : \frac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$$

من الواضح أنّ المتتالية $(f_n)_{n\ge1}$ تتقارب ببساطة من التابع f التالي:

$$f:\left[0,1\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 0 & : \quad x=0\\ 1-x & : \ 0<x\le 1\end{cases}$$

وهذا التقارب غير منتظم لأنّ f غير مستمر. ■

التمرين 2. ليكن f تابعاً مستمراً على المجال $[0,1]$. ليكن $g_n(x)=f\left(\dfrac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right)$ حيث يرمز $\lfloor x\rfloor$ إلى الجزء الصحيح للعدد x. أثبت أنّ المتتالية $(g_n)_{n\ge1}$ متقاربة بانتظام من التابع f على المجال $[0,1]$.

الحل

لمّا كان f مستمرّاً على المجال المتراصّ $[0,1]$ استنتجنا أنّه مستمرٌّ بانتظام عليه. إذن لتكن $\varepsilon>0$ عندئذ يوجد $\eta_\varepsilon>0$ يُحقّق

$$(*)\qquad \forall(x,y)\in[0,1]^2,\quad \left|x-y\right|<\eta_\varepsilon \Rightarrow \left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon$$

لنضع إذن $n_\varepsilon=1+\left\lfloor 1/\eta_\varepsilon\right\rfloor$. ولتكن $n>n_\varepsilon$، عندئذ يكون لدينا

$$\forall x\in[0,1],\quad 0\le nx-\lfloor nx\rfloor\le 1$$

ومن ثَمّ

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \le x - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \le \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} \le \eta_\varepsilon$$

واستناداً إلى $(*)$، لا بُدَّ أن يكون

$$\forall x \in [0,1], \quad \left| f(x) - f\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) \right| < \varepsilon$$

أو

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| f(x) - g_n(x) \right| < \varepsilon$$

بذا نكون قد أثبتنا التقارب المنتظم للمتتالية $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ من التابع f. ■

التمرين 3. لتكن $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية من التوابع الحقيقية المعرّفة على المجال $[0,1]$، ولنفترض أنه أياً كانت a من $]0,1]$، تتقارب المتتالية $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بانتظام من الصفر على المجال $[a,1]$ وأنّ: $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], \quad \left| f_n(x) \right| \le M$.

أثبت أنّ المتتالية $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرّفة بالعلاقة $g_n(x) = x\, f_n(x)$ تتقارب بانتظام من الصفر على المجال $[0,1]$.

الحل

لتكن $0 < \varepsilon$، ولْنختر $a_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{1+M}$. عندئذ يقتضي تقارب المتتالية $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المنتظم على $[a_\varepsilon, 1]$ من 0 وجود n_ε، يُحقّق

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in [a_\varepsilon, 1]} \left| f_n(x) \right| \le \varepsilon$$

لنتأمّل إذن $n_\varepsilon < n$، و x من $[0,1]$. عندئذ هناك حالتان:

① في حالة $0 \le x \le a_\varepsilon$ يكون لدينا

$$\left| g_n(x) \right| = \left| x f_n(x) \right| \le Mx \le Ma_\varepsilon = \frac{M}{M+1}\varepsilon < \varepsilon$$

② وفي حالة $a_\varepsilon \le x \le 1$ يكون لدينا أيضاً

$$\left| g_n(x) \right| = \left| x f_n(x) \right| \le \left| f_n(x) \right| \le \varepsilon$$

وعليه فإنّ

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} \left|g_n(x)\right| \le \varepsilon$$

وهذا يُثبتُ التقارب المنتظم للمتتالية $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من التابع الصفري.

التمرين 4. لنعرّف، أياً كان x من $[0,1]$ و n من $\mathbb{N}^*$، المقدار

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k} + \ln(1+x)$$

1. أثبت أنّ $(f_n)_{n\ge 1}$ متقاربة بانتظام من الصّفر على المجال $[0,1]$.
2. أثبت أنّ :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k = \ln 2$$

الحل

1. لتكن n من $\mathbb{N}$. نلاحظ أنّ f_n ينتمي إلى الصف C^1 على المجال $[0,1]$ وأنّ

$$\begin{aligned}\forall x\in[0,1],\quad f_n'(x) &= \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{n}(-x)^{k-1}\\ &= \frac{1}{1+x} - \frac{1-(-x)^n}{1+x} = \frac{(-x)^n}{1+x}\end{aligned}$$

أو

$$\forall x\in[0,1],\quad 0 \le (-1)^n f_n'(x) \le x^n$$

ينتج من ذلك أنّ كلاًّ من التابعين

$$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} - (-1)^n f_n(x) \quad \text{و} \quad x\mapsto (-1)^n f_n(x)$$

تابعٌ متزايدٌ على $[0,1]$ وينعدم عند $x=0$. فهما إذن موجبان على هذا المجال أي

$$\forall x\in[0,1],\quad 0 \le (-1)^n f_n(x) \le \frac{x^{n+1}}{n+1} \le \frac{1}{n+1}$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{x\in[0,1]} \left|f_n(x)\right| \leq \frac{1}{n+1}$$

وعليه فإنّ المتتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ تتقارب بانتظام من الصّفر على المجال $[0,1]$.

2. لنضع $\xi_n = \frac{n}{n+1}$ عندئذ تتقارب المتتالية $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من العدد 1. وينتج من التقارب المنتظم للمتتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ نحو الصّفر أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\xi_n) = 0$ أي

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k\right) = 0$$

وهذا يعني أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k = \ln 2$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 5. لتكن n من $\mathbb{N}^*$. نعرّف التابع f_n كما يأتي:

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} e^x - \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n & : x > -n \\ e^x & : x \leq -n \end{cases}$$

1. أثبت أنّ مقصور f_n على $\mathbb{R}_+$ تابع متزايد واستنتج أنّ المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة بانتظام من الصّفر على المجال $[0,a]$ وذلك أياً كان العدد الحقيقي الموجب تماماً a.
2. أثبت أنّ مقصور f_n على $\mathbb{R}_-$ تابع موجب، يبلغ حدّه الأعلى عند نقطة x_n وأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -2$. استنتج أنّ المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}_-$.

الحل

1. لنتأمّل التابع

$$h_n :]-n,+\infty[\to \mathbb{R}, h_n(x) = x - (n-1)\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

نجد بحساب مباشر أنّ h_n ينتمي إلى الصف C^1 وأنّ

$$\forall x > -n, \quad h_n'(x) = \frac{x+1}{x+n}$$

وهنا نلاحظ أنّ h_n' موجب تماماً على $\mathbb{R}_+$ ، وعليه فإنّ التابع h_n متزايد تماماً على $\mathbb{R}_+$ ، ولمّا كان $h_n(0) = 0$ استنتجنا أنّ h_n موجب على $\mathbb{R}_+$. وهذا يقتضي أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \geq \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1}$$

أو

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1}$$

وعلى هذا نرى أنّ التابع f_n' موجب على $\mathbb{R}_+$ ، فالتابع f_n متزايدٌ على $\mathbb{R}_+$ ، وهو موجب أيضاً على هذا المجال لأنّ $f_n(0) = 0$. إذن

$$\forall a > 0, \quad \sup_{x \in [0,a]} \left|f_n(x)\right| = f_n(a)$$

ولكنّ المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ببساطة نحو 0 ، إذن نستنتج مما سبق أنّها تتقارب بانتظام على كلِّ مجال من النمط $[0,a]$ نحو الصفر.

2. نلاحظ من دراسة التابع h_n أنّ له على المجال $]-n,0]$ جدول التغيرات الآتي:

x	$-n$		-1		0
$h_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$h_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$h_n(-1)$	$\nearrow$	0

إذن التابع h_n متناقص تماماً على المجال $]-n,-1]$ ، وهو يغيِّر إشارته على هذا المجال. إذن يوجد في المجال $]-n,-1[$ عدد حقيقي وحيد x_n يُحقّق

$$\begin{aligned} -n < x < x_n &\quad\Rightarrow\quad h_n(x) > 0 \\ x_n < x < 0 &\quad\Rightarrow\quad h_n(x) < 0 \end{aligned}$$

و x_n هو الحل الوحيد السالب تماماً للمعادلة $h_n(x) = 0$.

نستنتج من ذلك الخاصتين الآتيتين:

$$-n \le x \le x_n \quad \Rightarrow \quad e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \ge 0$$

$$x_n \le x \le 0 \quad \Rightarrow \quad e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \le 0$$

وعليه فالتابع f_n متزايد على $]-\infty, -n] \cup [-n, x_n]$ ومتناقص على $[x_n, 0]$.

وهذا ما يتيح لنا أن نكتب

$$\sup_{\mathbb{R}_-} \left| f_n \right| = f_n(x_n)$$

لتكن ε من المجال $]0,1[$ ، نلاحظ بسهولة أنّ

$$h_n(-\varepsilon n) = n\left(-\varepsilon - \ln(1-\varepsilon)\right) + \ln(1-\varepsilon)$$

فإذا اخترنا $\left\lfloor \dfrac{-\ln(1-\varepsilon)}{-\varepsilon - \ln(1-\varepsilon)} \right\rfloor + 1 = n_\varepsilon$ كان لدينا:

$$\begin{aligned} n \ge n_\varepsilon \quad &\Rightarrow \quad h_n(-\varepsilon n) > 0 \\ &\Rightarrow \quad -\varepsilon n < x_n < 0 \\ &\Rightarrow \quad -\varepsilon < \frac{x_n}{n} < 0 \end{aligned}$$

وهذا يثبتُ أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = 0$. لنضع إذن $\varepsilon_n = \dfrac{x_n}{n}$. عندئذ تُكافئ المعادلة $h_n(x_n) = 0$ ما يلي :

$$0 = n\left(\varepsilon_n - \ln(1+\varepsilon_n)\right) + \ln(1+\varepsilon_n)$$

أو

$$x_n = -\frac{\varepsilon_n \ln(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n - \ln(1+\varepsilon_n)}$$

وعلى هذا يكون لدينا $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -2$ لأنّ $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. ويكون أيضاً

$$\begin{aligned} f_n(x_n) &= e^{x_n} - \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = e^{x_n} - \left(1 + \frac{x_n}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^{n-1} \\ &= e^{x_n} - \left(1 + \frac{x_n}{n}\right) \cdot e^{x_n} = -\frac{x_n}{n} e^{x_n} \end{aligned}$$

إذن $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = 0$ لأنّ $\lim_{n\to\infty} x_n = -2$. وهذا يثبت التقارب المنتظم على $\mathbb{R}_-$ نحو 0 . ونكون قد أثبتنا التقارب المنتظم للمتتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ على كل مجموعة من الشكل $]-\infty, a]$ نحو الصفر.

ملاحظة. يكفي أن نستفيد من كون العدد $x_n < 0$ حتّى نتمكّن من إثبات الخاصّة المطلوبة. وذلك لأنّ

$$0 \leq f_n(x_n) = -\frac{x_n}{n} e^{x_n} \leq \frac{1}{n} \sup_{t\geq 0}\left(te^{-t}\right) = \frac{1}{en}$$

فيكون لدينا

$$\sup_{\mathbb{R}_-} \left| f_n \right| \leq \frac{1}{en}$$

وهذا كافٍ لاستنتاج المطلوب.

التمرين 6. ليكن f تطبيقاً غير صفري معرّفاً ومستمراً على مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، ويأخذ قيمه في المجموعة نفسها، ويحقّق $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ و $f(0) = 0$. ولنعرّف في حالة x من $\mathbb{R}_+$، و n من $\mathbb{N}^*$:

$$g_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right) \quad \text{و} \quad f_n(x) = f(nx)$$

1. أثبت أنّ المتتاليتين $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربتان ببساطة من الصفر على مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ولكنهما ليستا متقاربتين بانتظام.
2. أثبت أنّه يوجد ثابت حقيقي M يُحقّق المتراجحة $\forall x \in \mathbb{R}_+, \left| f(x) \right| \leq M$.
3. تحقّق أنّ :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) g_n(x) \leq M \min\left(f(nx), f(x/n)\right)$$

ثُمّ استنتج أنّ المتتالية $\left(f_n g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام من الصفر.

الحل

1. التقارب البسيط واضح. وهو غير منتظم لأنّه إذا كان $f(x_0) \neq 0$ كان لدينا ما يلي:

$$\forall n \geq 1, \quad f_n\left(\frac{x_0}{n}\right) = g_n(nx_0) = f(x_0)$$

2. هذه نتيجة معروفة، نترك إثبات صحتها للقارئ.

3.المتراجحة واضحة. لتكن $0<\varepsilon$، عندئذ يوجد عددان $0<a_\varepsilon<A_\varepsilon$ يُحقّقان

$$A_\varepsilon \leq x \Rightarrow f(x)<\frac{\varepsilon}{M} \quad \text{و} \quad 0\leq x\leq a_\varepsilon \Rightarrow f(x)<\frac{\varepsilon}{M}$$

وعندئذ إذا اخترنا $n_\varepsilon = 1+\left\lfloor\sqrt{A_\varepsilon/a_\varepsilon}\right\rfloor$، كان لدينا

$$n\geq n_\varepsilon \Rightarrow a_\varepsilon n \geq \frac{A_\varepsilon}{n} \Rightarrow \mathbb{R}_+ = [0,a_\varepsilon n]\cup[A_\varepsilon/n,+\infty[$$

وهذا يعني أنّ

$$\begin{aligned} n\geq n_\varepsilon \quad &\Rightarrow \quad \forall x\in\mathbb{R}_+, \left(0\leq \frac{x}{n}\leq a_\varepsilon\right)\vee\left(A_\varepsilon \leq nx\right)\\ &\Rightarrow \quad \forall x\in\mathbb{R}_+, \left(f\left(\frac{x}{n}\right)\leq\frac{\varepsilon}{M}\right)\vee\left(f(nx)\leq\frac{\varepsilon}{M}\right)\\ &\Rightarrow \quad \forall x\in\mathbb{R}_+,\ f_n(x)\cdot g_n(x)\leq\varepsilon \end{aligned}$$

وهذا يثبت التقارب المنتظم للمتتالية $(f_ng_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ من 0. ■

التمرين 7. مبرهنة – ديني Dini. لتكن K مجموعة متراصّة في مجموعة الأعداد الحقيقية، ولتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة من التوابع الحقيقية المستمرّة على K، ولنفترض أنّها متقاربة ببساطة من تابع مستمر f. أثبت أنّ المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام من f على المجموعة K.

تطبيق. ادرس متتالية التوابع $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة على المجال $[0,1]$ والتي تأخذ قيمها في مجموعة الأعداد الحقيقية والمعرّفة كما يأتي :

$$\begin{aligned} &\forall t\in[0,1],\quad P_0(t)=1,\\ &\qquad P_{n+1}(t)=P_n(t)+\frac{1}{2}\left(t-P_n^2(t)\right)\quad (n\geq 0) \end{aligned}$$

الحل

ليكن $0<\varepsilon$، ولنعرّف متتالية المجموعات $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كما يأتي :

$$F_n=\left\{x\in K : f(x)\geq f_n(x)+\varepsilon\right\}$$

نلاحظ أنّ F_n مجموعة مغلقة لأنّ التابعين f و f_n مستمرّان. ونلاحظ أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad F_{n+1}\subset F_n$$

لنفترض جدلاً أنّ $\forall n \in \mathbb{N}, F_n \neq \varnothing$ ، عندئذ يمكننا أن نختار من كلِّ مجموعة F_n عنصراً x_n . ولمّا كانت المجموعة K مجموعة متراصّة وُجِدت متتالية جزئيّة منها $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من عنصر a ينتمي إلى K .

لتكن m من $\mathbb{N}$. عندئذ مهما تكن $n > m$ يكن $m \leq \varphi(m) < \varphi(n)$ ومن ثَمّ يكن لدينا أيضاً $x_{\varphi(n)} \in F_{\varphi(n)} \subset F_m$. ولكنّ F_m مغلقة إذن $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} \in F_m$. بذا نكون قد أثبتنا أنّه

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad a \in F_m$$

أي

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad f(a) \geq f_m(a) + \varepsilon$$

وهذا يؤدّي إلى تناقض عند جعل m تسعى إلى $+\infty$. نستنتج إذن أنّه يوجد في $\mathbb{N}$ عدد n_ε ، يُحقّق $F_{n_\varepsilon} = \varnothing$. وعندئذ يكون $\forall n \geq n_\varepsilon, F_n = \varnothing$ ، أي

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in K, \quad f_n(x) \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon$$

أو

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \qquad \sup_{x\in K}\left|f(x) - f_n(x)\right| \leq \varepsilon$$

وهذا يثبت التقارب المنتظم للمتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من f .

تطبيق.

في الحقيقة، يمكننا ببساطة أن نبرهن بالتدريج على n ، أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], \quad 0 \leq P_n(t) \leq P_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$$

وأنّ

$$\forall t \in [0,1], \ \lim_{n\to\infty} P_n(t) = \sqrt{t}$$

إذن تتقارب المتتالية $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بانتظام على المجال $[0,1]$ من تابع الجذر التربيعي $x \mapsto \sqrt{x}$ ، وهذا هو المطلوب. ■

التمرين 8. لتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من التّوابع الحقيقيّة **المتزايدة** على المجال $[a,b]$، ولنفترض أنّها متقاربة ببساطة من تابع مستمرّ f . أثبت أنّ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب من f بانتظام.

الحل

لمّا كان f مستمرّاً على المجموعة المتراصّة $[a,b]$ كان مستمرّاً بانتظام عليها. لتكن إذن $0<\varepsilon$، عندئذ يوجد $0<\eta_\varepsilon$ يُحقّق

$$(1) \qquad \forall (x,y)\in[a,b],\quad \left|x-y\right|<\eta_\varepsilon \Rightarrow \left|f(x)-f(y)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

لنعرّف $n_\varepsilon = 1+\left\lfloor \frac{b-a}{\eta_\varepsilon}\right\rfloor$، ولنضع $t_k = a+\dfrac{k}{n_\varepsilon}(b-a)$ عندما $0\le k\le n_\varepsilon$. عندئذ نستنتج من التقارب البسيط أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\max\left(\left|f_n(t_k)-f(t_k)\right| : 0\le k\le n_\varepsilon\right)\right)=0$$

ومن ثَمّ يوجد عدد طبيعي $n_\varepsilon<\tilde{n}_\varepsilon$ يُحقّق

$$(2) \qquad n\ge \tilde{n}_\varepsilon \Rightarrow \left(\forall k\in\left\{0,1,\ldots,n_\varepsilon\right\},\quad \left|f_n(t_k)-f(t_k)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

لتكن إذن $\tilde{n}_\varepsilon<n$، ولتكن x من $[a,b]$، عندئذ بوضع $k(x)=\left\lfloor n_\varepsilon \frac{x-a}{b-a}\right\rfloor$ نجد :

$$t_{k(x)}\le x<t_{k(x)+1}$$

وبالاستفادة من تزايد f_n نجد

$$f(x)-f_n(t_{k(x)+1})\le f(x)-f_n(x)\le f(x)-f_n(t_{k(x)})$$

ولأنّ $\left|x-t_{k(x)}\right|<\eta_\varepsilon$ و $\left|x-t_{k(x)+1}\right|<\eta_\varepsilon$ نجد استناداً إلى (1) أنّ

$$-\frac{\varepsilon}{2}+f(t_{k(x)+1})-f_n(t_{k(x)+1})\le f(x)-f_n(x)\le f(t_{k(x)})-f_n(t_{k(x)})+\frac{\varepsilon}{2}$$

وبالنظر إلى (2) نستنتج مباشرة أن

$$-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\le f(x)-f_n(x)\le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$$

أو $\left|f(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon$، وذلك أياً كانت $\tilde{n}_\varepsilon<n$، و x من $[a,b]$. وهذا ما يثبت التقارب المنتظم للمتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من التابع f . ■

التمرين 9. لتكن $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من كثيرات الحدود الحقيقية التي لا تزيد درجاتها عن m. ولنفترض وجود أعداد $a_{m+1},\ldots,a_2,a_1$ مختلفة مثنى مثنى من المجال $[0,1]$، تجعل المتتاليات $(P_n(a_k))_{n\geq 0}$ متقاربة أياً كان k محقِّقاً $1 \leq k \leq m+1$. أثبت أن المتتالية $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب بانتظام على المجال $[0,1]$ من كثير حدود P.

الحل

لنذكِّر بتعريف كثيرات حدود لاغرانج:

$$\ell_k(X) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m+1} \frac{X-a_j}{a_k-a_j}, \qquad k \in \{1,2,\ldots,m+1\}$$

عندئذ نعلم أنّ كلَّ كثير حدود Q لا تزيد درجته على m يُكتبُ بالشكل:

$$Q(X) = \sum_{k=1}^{m+1} Q(a_k)\cdot \ell_k(X)$$

لنعرّف إذن

$$M = \max_{1\leq k\leq m+1}\left(\sup_{x\in[0,1]}\left|\ell_k(x)\right|\right)$$

عندئذ مهما يكن P كثير حدود لا تزيد درجته على m يكن

$$(*) \qquad \forall x\in[0,1], \quad \left|Q(x)\right| \leq M\cdot\sum_{k=1}^{m+1}\left|Q(a_k)\right|$$

لنعرّف إذن $b_k = \lim_{n\to\infty} P_n(a_k)$ في حالة $1\leq k\leq m+1$، ولنعرّف

$$P(X) = \sum_{k=1}^{m+1} b_k\cdot \ell_k(X)$$

بتطبيق $(*)$ على $Q = P_n - P$ نستنتج أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad \sup_{x\in[0,1]}\left|P_n(x)-P(x)\right| \leq M\sum_{k=1}^{m+1}\left|P_n(a_k)-b_k\right|$$

وعلى هذا نرى أنّ المتتالية $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب بانتظام على $[0,1]$ من كثير الحدود P . ■

التمرين 10. لتكن $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من كثيرات الحدود الحقيقية. نفترض أنّ المتتالية $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب بانتظام على $\mathbb{R}$ من تابع f. أثبت أن f كثير حدود وأنّ

$$\exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow P_n - f = c_n \in \mathbb{R}$$

الحل

لتكن $\varepsilon = 1$، عندئذ، استناداً إلى التقارب المنتظم، يوجد في $\mathbb{N}$ عددٌ n_0 يُحقّق

$$\forall n \geq n_0, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|P_n(x) - P_{n_0}(x)\right| \leq 1$$

وعلى هذا، مهما تكن $n_0 \leq n$، يكن التابع كثير الحدود $x \mapsto P_n(x) - P_{n_0}(x)$ محدوداً على $\mathbb{R}$ فهو من ثَمّ ثابتٌ عليها، لنعرّف إذن $c_n = P_n(0) - P_{n_0}(0) \in \mathbb{R}$ و $f = P_{n_0}$، فنجد

$$\forall n \geq n_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = f(x) + c_n$$

وهذه هي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 11. ادرس التقارب البسيط والتقارب المنتظم، والتقارب بالنظيم والتقارب المنتظم على كل مجموعة متراصّة لمتسلسلات التوابع $\sum f_n$ الآتية:

1. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*$
2. $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}, \quad n \in \mathbb{N}^*$
3. $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{nx^2}{n^3+x^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*$
4. $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^3x^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*$
5. $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{n+x}{n^3+x^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*$
6. $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+nx^{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}^*$

الحل

① دراسة متسلسلة التوابع $\sum_{n\geq 1} f_n$ حيث

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2}$$

لنلاحظ أنّه مهما تكن x من $\mathbb{R}$، فالمتتالية العدديّة $\left(\frac{1}{n+x^2}\right)_{n\geq 1}$ متتالية متناقصة نحو 0. ينتج من ذلك، استناداً إلى معيار تقارب المتسلسلات المتناوبة، أنّ متسلسلة التوابع $\sum_{n\geq 1} f_n$ متقاربة ببساطة، لنرمز بالرمز S إلى مجموعها. ينتج أيضاً من خواص المتسلسلات المتناوبة أنّ

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad \left| S(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \leq \frac{1}{n+1+x^2} \leq \frac{1}{n+1}$$

أو

$$\forall n \geq 1,\ \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| S(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

وهذا يثبت التقارب المنتظم للمتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f_n$. ولكنّها ليست متقاربة بالنظيم وضوحاً.

② دراسة متسلسلة التوابع $\sum_{n\geq 1} f_n$ حيث

$$f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}$$

بملاحظة أنّ $f_n(x) = \frac{1}{1+nx} - \frac{1}{1+(n+1)x}$ نرى مباشرة ما يأتي :

$$\forall x \geq 0, \forall n \geq 1,\quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+(n+1)x}$$

وعلى هذا فإنّ متسلسلة التوابع $\sum_{n\geq 1} f_n$ متقاربة ببساطة من التابع

$$S : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ S(x) = \begin{cases} 0 & : \ x = 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & : \ x > 0 \end{cases}$$

وهذا التقارب غير منتظم لأنّ جميع التوابع f_n مستمرّة، في حين أنّ النهاية S غير مستمرّة. ويمكن للقارئ أن يبرهن على أنّ التقارب منتظمٌ على كلِّ مجموعة من النمط $[a,+\infty[$ حيث $0 < a$.

③ دراسة متسلسلة التوابع $\sum_{n\geq 1} f_n$ حيث

$$f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{nx^2}{n^3 + x^2}$$

لتكن $A > 0$ عندئذ يكون لدينا

$$\sup_{x\in[0,A]} \left|f_n(x)\right| \leq \frac{A^2}{n^2}$$

وهذا يثبت التقارب المنتظم لمتسلسلة التوابع $\sum_{n\geq 1} f_n$ على كلِّ مجموعة متراصّة من $\mathbb{R}_+$. ولكنَّ المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f_n$ ليست متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}_+$ لأنّ حدّها العام لا يسعى بانتظام إلى 0. إذْ إنّ $\lim_{n\to\infty} f_n(n) = 1$.

④ دراسة متسلسلة التوابع $\sum_{n\geq 1} f_n$ حيث

$$f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{nx}{n^3x^2 + 1}$$

نلاحظ مباشرة أنّ $f_n(0) = 0$، وأنّه في حالة $x > 0$ يكون لدينا $\left|f_n(x)\right| \leq \dfrac{1}{n^2x}$. هذا يبرهن على أنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f_n$ متقاربة ببساطة على $\mathbb{R}_+$، بل على أنّ هذا التقارب منتظم على كلِّ مجموعة من النمط $[a, +\infty[$ حيث $0 < a$.

ولكن هذا التقارب غير منتظم على $\mathbb{R}_+$ وذلك لأنّه إذا عرّفنا $x_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ كان لدينا :

$$\begin{aligned}\forall n \geq 1,\quad \sup_{x\in\mathbb{R}_+}\left|\sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x)\right| &\geq \sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x_n)\\ &\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{nx_n}{8n^3x_n^2 + 1} = \frac{\sqrt{n}}{9}\end{aligned}$$

فمتتالية المجاميع الجزئية لا تتقارب بانتظام على $\mathbb{R}_+$.

⑤ دراسة متسلسلة التوابع $\sum_{n\geq 1} f_n$ حيث

$$f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{n + x}{n^3 + x^2}$$

نجد بدراسة بسيطة للتابع f_n أنّه موجب ويبلغ حدّه الأعلى على $\mathbb{R}_+$ عند x_n حيث

$$x_n = \sqrt{n^3 + n^2} - n$$

وعليه فإنّ

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|f_n(x)\right| \leq \frac{2}{n\sqrt{n}}$$

وهذا يثبت التقارب المنتظم لمتسلسلة التوابع $\sum_{n\geq 1} f_n$.

⑥ دراسة متسلسلة التوابع $\sum_{n\geq 1} f_n$ حيث

$$f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x^n}{1 + nx^{2n}}$$

نلاحظ أوّلاً أنّ المتسلسلة $\sum f_n(1)$ متباعدة. ولكن

- في حالة $0 < a < 1$ لدينا $\sup\limits_{[0,a]}\left|f_n\right| \leq a^n$.
- وفي حالة $1 < a$ لدينا $\sup\limits_{[a,+\infty[}\left|f_n\right| \leq a^{-n}$.

ينتج من ذلك أنّ $\sum_{n\geq 1} f_n$ متقاربة بانتظام على كلِّ مجموعة متراصّة من $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. ■

التمرين 12. عيّن مجموعة التعريف وأعط مُكافئاً في جوار 0^+ للتابع

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x\sqrt{n}}$$

الحل

من الواضح أنّ مجموعة تعريف التابع f هي $\mathbb{R}_+^*$. أمّا تعيين مُكافئ للمقدار $f(x)$ في جوار 0^+ فيتطلّب بعض الخواص البسيطة من نظريّة التكامل. لتكن $1 \leq n$، عندئذ مهما تكن x من $\mathbb{R}_+^*$، يكن

$$\begin{aligned} n - 1 \leq t \leq n \quad &\Rightarrow \quad x\sqrt{n-1} \leq x\sqrt{t} \leq x\sqrt{n} \\ &\Rightarrow \quad e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-x\sqrt{t}} \leq e^{-x\sqrt{n-1}} \end{aligned}$$

وعليه

$$e^{-x\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}\,t \leq e^{-x\sqrt{n-1}}$$

نستنتج من ذلك بالجمع أنّ

$$\sum_{k=0}^{n} e^{-x\sqrt{k}} - 1 \leq \int_{0}^{n} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}\,t \leq \sum_{k=0}^{n} e^{-x\sqrt{k}} - e^{-x\sqrt{n}}$$

ولكن

$$\begin{aligned}\int_{0}^{n} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}\,t = 2\int_{0}^{\sqrt{n}} e^{-xu}u\,\mathrm{d}\,u &= \left[-\frac{2}{x^2}(xu+1)e^{-xu}\right]_{0}^{\sqrt{n}} \\ &= \frac{2}{x^2}\left(1-(x\sqrt{n}+1)e^{-x\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

وعليه بجعل n تسعى إلى $+\infty$ في المتراجحة السابقة نجد

$$\forall x \in \mathbb{R}_{+}^{*}, \quad f(x) - 1 \leq \frac{2}{x^2} \leq f(x)$$

أو

$$\forall x \in \mathbb{R}_{+}^{*}, \quad \frac{2}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{2}{x^2} + 1$$

وهذا يبرهن أنّ

$$f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{2}{x^2}$$

ونحصل بذلك على المُكافئ المطلوب. ■

التمرين 13. عيّن مجموعة التعريف، وادرس استمرار التابع $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2x}$ ، ثُمّ أعطِ مكافئاً في جوار 0^+ ، وفي جوار $+\infty$ للتابع f .

الحل

لنعرّف المجموعة المتراصّة $\mathcal{K}_0 = \{0\} \cup \left\{-\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}^*\right\}$. عندئذ من الواضح أنّ f معرّف على المجموعة $D_f = \mathbb{R}\backslash\mathcal{K}_0$.

لتكن K مجموعة متراصّة ما من D_f . لمّا كان التابع

$$\varphi : K \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{d}(x, \mathcal{K}_0) = \min_{y \in \mathcal{K}_0} \left| x - y \right|$$

مستمرّاً على المجموعة المتراصّة K، لأنّه يحقّق شرط لِبشتز، استنتجنا أنّه يبلغ حدّه الأدنى μ_K عليها. أي يوجد في K عنصرٌ x_K يُحقّق

$$\mu_K = \varphi(x_K) = \inf_{x \in K} \varphi(x)$$

ولمّا كان $\varphi(x_K) = 0$ يعني أنّ $x_K \in \mathcal{K}_0$، لأنّ $\mathcal{K}_0$ متراصّة، وهذا يناقض كوْن التقاطع $K \cap \mathcal{K}_0$ خالياً، استنتجنا أنّ $0 < \mu_K$. وأنّ

$$\forall x \in K, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mu_K \le \left| x + \frac{1}{n} \right|$$

وعلى هذا يكون لدينا

$$\forall x \in K, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n^2 \mu_K \le \left| n^2 x + n \right|$$

أو

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sup_{x \in K} \frac{1}{\left| n^2 x + n \right|} \le \frac{1}{n^2 \mu_K}$$

هذا يثبتُ التقارب المنتظم على K لمتسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$. وعلى هذا تتقارب المتسلسلة التي تعرّف التابع f على كلِّ مجموعة متراصّة من D_f . والتابع f مستمرٌّ عليها.

❖ دراسة f في جوار 0^+ .

لتكن $n \ge 1$، و $x > 0$. عندئذ

$$n \le t \le n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1+x(n+1)^2} \le \frac{1}{t + x\,t^2} \le \frac{1}{n + x\,n^2}$$

ومنه

$$\frac{1}{n+1+x(n+1)^2} \le \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t + x\,t^2} \le \frac{1}{n + x\,n^2}$$

وبجمع هذه المتراجحات نجد أنّ

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k+x\,k^2}-\frac{1}{1+x}\le\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}\,t}{t+x\,t^2}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+x\,k^2}$$

ولكن

$$\begin{aligned}\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}\,t}{t+xt^2}&=\int_1^{n+1}\left(\frac{1}{t}-\frac{x}{1+xt}\right)\mathrm{d}\,t=\left[\ln\left(\frac{t}{1+xt}\right)\right]_1^{n+1}\\&=\ln\left(\frac{(n+1)(x+1)}{1+x(n+1)}\right)\end{aligned}$$

فإذا جعلنا n تسعى إلى $+\infty$ في المتراجحة السابقة وجدنا

$$\forall x>0,\;\; f(x)-\frac{1}{1+x}\le\ln\big(1+x\big)-\ln x\le f(x)$$

أو

$$\forall x>0,\;\; -\ln x\le f(x)\le-\ln x+\ln\big(1+x\big)+\frac{1}{1+x}$$

وعليه فإنّ $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{f(x)}{-\ln x}\right)=1$. أي إنّ $f(x)\underset{0^+}{\sim}-\ln x$.

❖ دراسة f في جوار $+\infty$.

نعلم أنّ $\dfrac{\pi^2}{6}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. وعليه فإنّ

$$\frac{\pi^2}{6}-x\,f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{x}{n+n^2x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(1+n\,x)}$$

إذن

$$\forall x>0,\qquad 0\le\frac{\pi^2}{6}-x\,f(x)\le\frac{1}{x}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

وهذا يبرهن أنّ $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\pi^2}{6\,x}$. ■

التمرين 14. ادرس تقارب متسلسلة التوابع $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n+x}}$ ، ثُمّ ادرس استمرار مجموعها على $]0,2\pi[$.

الحل

لنعرّف $D_{-1}(x)=0$ ، و $D_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ فيكون

$$\begin{aligned}
D_n(x) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{\mathrm{i}kx}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{\mathrm{i}(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{\mathrm{i}(n+1/2)x}-e^{-\mathrm{i}x/2}}{e^{\mathrm{i}x/2}-e^{-\mathrm{i}x/2}}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{\mathrm{i}(n+1/2)x}-e^{-\mathrm{i}x/2}}{2i\sin(x/2)}\right)\\
&= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x+\sin(x/2)}{2\sin(x/2)}
\end{aligned}$$

وعليه فإنّ

$$\forall x\in\left]0,2\pi\right[,\qquad \left|D_n(x)\right|\le\frac{1}{\sin(x/2)}$$

لنضع $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(kx)}{\sqrt{k+x}}$ ، عندئذ يكون لدينا

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{D_k(x)-D_{k-1}(x)}{\sqrt{k+x}}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{D_k(x)}{\sqrt{k+x}}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{D_k(x)}{\sqrt{k+1+x}}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{D_k(x)}{\sqrt{k+x}\cdot\sqrt{k+x+1}\left(\sqrt{k+x}+\sqrt{k+x+1}\right)}\\
&\qquad+\frac{D_n(x)}{\sqrt{n+1+x}}
\end{aligned}$$

لنعرّف إذن التابعين

$$f_n(x)=\frac{D_n(x)}{\sqrt{n+x}\cdot\sqrt{n+1+x}\cdot\left(\sqrt{n+x}+\sqrt{n+1+x}\right)}$$
$$g_n(x)=\frac{D_n(x)}{\sqrt{n+1+x}}$$

ولنتأمّل المجال $I_\alpha=[\alpha,2\pi-\alpha]$ حيث $0<\alpha<\pi$. عندئذ يكون لدينا

$$\sup_{x\in I_\alpha}\left|f_n(x)\right|\leq\frac{1}{2\sin(\alpha/2)}\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}}$$
$$\sup_{x\in I_\alpha}\left|g_n(x)\right|\leq\frac{1}{\sin(\alpha/2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$$

وهذا يُثبتُ أنّ المتسلسلة $\sum f_n$ متقاربة بالنظيم على I_α، ومن ثَمّ فالمتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ متقاربة بانتظام على كلِّ مجال من النمط I_α . إذن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{\sqrt{n+x}}$ متقاربة بانتظام على كل مجموعة متراصّة من $]0,2\pi[$ ، ومجموعها مستمرٌّ على هذا المجال. ■

التمرين 15. لتكن المتسلسلات $\sum u_n$ و $\sum v_n$ و $\sum w_n$ المعرّفة كما يأتي:

$$u_n(x)=\frac{1}{n^x},\quad v_n(x)=\frac{\ln n}{n^x},\quad w_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

في حالة n من $\mathbb{N}^*$ ، و x من $\mathbb{R}_+$.

1. أثبت أنه، أياً كان $1<a$ ، تتقارب المتسلسلتان $\sum u_n$ و $\sum v_n$ بانتظام على المجال $[a,+\infty[$. ثُمّ أثبت أنّ $f=\sum_{n\geq1}u_n$ تابعٌ من الصف C^1 على المجال $]1,+\infty[$. عيّن مشتقّه.

2. أثبت أنّ $g=\sum_{n\geq1}w_n$ من الصف C^1 على المجال $]0,+\infty[$ ، ثم أثبت أنّ

$$\forall x>1,\quad g(x)=(1-2^{1-x})f(x)$$

الحل

1. لتكن $a > 1$. لمّا كانت $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{(a-1)/2}} = 0$ أمكننا أن نعرّف $k_a = \sup_{n\ge 1} \frac{\ln n}{n^{(a-1)/2}}$. عندئذ يكون لدينا

$$\sup_{x\ge a} v_n(x) = v_n(a) \le \frac{k_a}{n^{(1+a)/2}}$$

ولأنّ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(a+1)/2}$ متقاربة، استنتجنا التقارب المنتظم لمتسلسلة التوابع $h = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$، على المجال $[a, +\infty[$.

من جهة أخرى، نلاحظ أنّ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ هي متسلسلة توابع من الصف C^1 على $]1, +\infty[$، وهي متقاربة في حالة $x = 2$ مثلاً، وكذلك فإنّ $u_n' = -v_n$. إذن يقتضي التقاربُ المنتظمُ للمتسلسلة $h = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$، على المجال $[a, +\infty[$، التقاربَ المنتظم للمتسلسلة $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ على المجال نفسه، كما يبيّن أيضاً أنّ f ينتمي إلى الصف C^1 على $[a, +\infty[$، وأنّ $f' = -h$. ولمّا كان $a > 1$ عدداً اختيارياً استنتجنا أنّ f ينتمي إلى الصف C^1 على $]1, +\infty[$ وأنّ $f' = -h$.

2. لتكن $a > 0$، عندئذ نجد بدراسة بسيطة للتابع $u \mapsto ue^{-xu}$ أنّه مهما تكن $x \ge a$، تكن المتتالية $(v_n(x))_{n\ge 1}$ متناقصة نحو الصفر بدءاً من الحد $n_a = 1 + \lfloor e^{1/a} \rfloor$. وعليه، استناداً إلى معيار تقارب المتسلسلات المتناوبة، تكون متسلسلة التوابع $\ell = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n$ متقاربة مهما كانت قيمة $x \ge a$، ويكون

$$\forall x \ge a,\ \forall n \ge n_a, \quad \left| \ell(x) - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k v_k(x) \right| \le v_n(x) \le v_n(a)$$

وهذا يثبتُ التقاربَ المنتظَمَ للمتسلسلة $\ell=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n v_n$ على كلِّ مجال من النمط $[a,+\infty[$ حيث $a>0$. فإذا لاحظنا أنّ $w_n'=(-1)^n v_n$ ، استنتجنا بتطبيق مبرهنة الاشتقاق أنّ التابع g ينتمي إلى الصف C^1 على $\mathbb{R}_+^*$ ، وأنّ $g'=\ell$.

ومن جهة أخرى، مهما تكن $1<x$ ، يكن

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^x}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^x}$$
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^x}$$

إذن

$$f(x)-g(x)=\frac{2}{2^x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}=2^{1-x}f(x)$$

وعليه $\forall x>1,\ g(x)=\left(1-2^{1-x}\right)f(x)$. ■

التمرين 16. لتكن المتسلسلات $\sum u_n$ و $\sum v_n$ و $\sum w_n$ المعرّفة كما يأتي:

$$u_n(x)=\frac{2x}{n^2+x^2},\quad v_n(x)=\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right),\quad w_n(x)=\frac{2(n^2-x^2)}{(n^2+x^2)^2}$$

في حالة n من $\mathbb{N}^*$ ، و x من $\mathbb{R}_+$.

1. أثبت تقارب المتسلسلات $\sum u_n$ و $\sum v_n$ و $\sum w_n$ بانتظام على كل مجال مغلق ومحدود في $\mathbb{R}$.
2. نرمز بالرمز S إلى مجموع المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} u_n$. أثبت أن S من الصف C^1 على $\mathbb{R}$ وأنّه متزايد تماماً على $[-1,1]$.
3. أثبت أنه أياً كان n من $\mathbb{N}^*$ ، لدينا

$$\left(1+\frac{X}{2n+1}\right)^{2n+1}-\left(1-\frac{X}{2n+1}\right)^{2n+1}=2X\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{X^2}{(2n+1)^2\tan^2\frac{\pi k}{2n+1}}\right)$$

4. استنتج أنه أياً كان x من $\mathbb{R}$، فلدينا $\operatorname{sh} x = \lim_{n\to+\infty} x\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right)$.

5. أعطِ صيغة بسيطةً للتابع S، واستنتج أنه تابع متزايد على $\mathbb{R}$.

الحل

1. لمّا كان من الواضح أنّ $\left|n^2 - x^2\right| \le n^2 + x^2$ استنتجنا ما يأتي:

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \left|w_n(x)\right| = \frac{2\left|n^2 - x^2\right|}{(n^2 + x^2)^2} \le \frac{2}{n^2 + x^2} \le \frac{2}{n^2}$$

فالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$، ومجموعها $h = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ مستمرٌّ على $\mathbb{R}$.

لنلاحظ أنّ التابع

$$v_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ v_n(x) = \frac{2x}{n^2 + x^2}$$

ينتمي إلى الصف C^1 على $\mathbb{R}$، وأنّ $v_n' = w_n$، و $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(0)$ متقاربة. إذن، استناداً إلى مبرهنة الاشتقاق تكون متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ متقاربة بانتظام على كلِّ مجموعة متراصّة في $\mathbb{R}$، ويكون مجموعها $g = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ من الصف C^1 على $\mathbb{R}$، و $g' = h$.

وكذلك نرى أنّ التابع

$$u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)$$

ينتمي إلى الصف C^1 على $\mathbb{R}$، وأنّ $u_n' = v_n$، و المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)$ متقاربة. إذن، استناداً إلى مبرهنة الاشتقاق تكون متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متقاربة بانتظام على كلِّ مجموعة متراصّة في $\mathbb{R}$، ويكون مجموعها $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ من الصف C^1 على $\mathbb{R}$، و $f' = g$.

2. من الواضح أنّ

$$\forall x \in [-1,+1], \quad g'(x) = h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n^2 - x^2)}{(n^2 + x^2)^2} > 0$$

إذن التابع g متزايد تماماً على $[-1,+1]$.

3. لنعرّف كثير الحدود

$$Q(X) = \left(1 + \frac{X}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{X}{2n+1}\right)^{2n+1} - 2X\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{X^2}{(2n+1)^2 \tan^2 \dfrac{\pi k}{2n+1}}\right)$$

من الواضح أنّ $\deg Q(X) \leq 2n+1$، وأنّ $Q(0) = 0$، وكذلك فإنّ $Q'(0) = 0$، لأنّ أمثال X في $Q(X)$ معدومة. ومن جهة أخرى، نرى أيضاً أنّه في حالة k من $\{1,2,\ldots,n\}$ لدينا

$$\begin{aligned}
Q(\mathrm{i}(2n+1)\tan\tfrac{\pi k}{2n+1}) &= \left(1 + \mathrm{i}\tan\tfrac{\pi k}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \mathrm{i}\tan\tfrac{\pi k}{2n+1}\right)^{2n+1}\\
&= 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\exp\frac{\mathrm{i}\pi k}{2n+1}}{\cos\frac{\pi k}{2n+1}}\right)^{2n+1}\\
&= 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\left(\frac{e^{\mathrm{i}\pi k}}{\cos^{2n+1}(\frac{\pi k}{2n+1})}\right) = 0
\end{aligned}$$

وبالاستفادة من كون أمثال كثير الحدود $Q(X)$ حقيقيّة نستنتج أنّه يقبل $2n$ جذراً مختلفاً هي $\left(\pm\mathrm{i}(2n+1)\tan\frac{\pi k}{2n+1}\right)_{1\leq k\leq n}$، ويقبل أيضاً 0 جذراً رتبة مضاعفته تساوي 2 على الأقل. ينتج من ذلك ومن كون $\deg Q(X) \leq 2n+1$ أنّ $Q(X) = 0$. وهذا يبرهن صحة المساواة المطلوبة.

4. النتيجة واضحة في حالة $x = 0$. سنفترض فيما يلي أنّ $x \neq 0$. عندئذ نرى بسهولة أنّ

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{x^2}{(2n+1)^2\tan^2\frac{\pi k}{2n+1}}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1 + \dfrac{x}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \dfrac{x}{2n+1}\right)^{2n+1}}{x}\\
&= \frac{\operatorname{sh} x}{x}
\end{aligned}$$

من جهة أولى، مهما تكن $n < m$ ، فلدينا

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x^2}{(2m+1)^2\tan^2\frac{\pi k}{2m+1}}\right) \leq \prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{x^2}{(2m+1)^2\tan^2\frac{\pi k}{2m+1}}\right)$$

وعليه، بجعل m تسعى إلى $+\infty$ في المتراجحة السابقة نجد أنّه مهما تكن $n \geq 1$:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x^2}{\pi^2k^2}\right) \leq \frac{\operatorname{sh} x}{x}$$

ولكن نعلم، من جهة ثانية، أنّ $\forall t \in \left[0,\pi/2\right[,\ \ t \leq \tan t$ إذن

$$\forall k \in \left\{1,2,\ldots,n\right\},\quad \pi k \leq (2n+1)\cdot\tan\frac{\pi k}{2n+1}$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x^2}{(2n+1)^2\tan^2\frac{\pi k}{2n+1}}\right) \leq \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x^2}{\pi^2k^2}\right)$$

إذن نكون قد أثبتنا أنّه، مهما تكن $x \neq 0$ ، ومهما تكن $n \geq 1$، فلدينا

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x^2}{(2n+1)^2\tan^2\frac{\pi k}{2n+1}}\right) \leq \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x^2}{\pi^2k^2}\right) \leq \frac{\operatorname{sh} x}{x}$$

وعليه، نستنتج بجعل n تسعى إلى $+\infty$ ، أنّ النهاية $\lim\limits_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x^2}{\pi^2k^2}\right)$ موجودة وأنّ

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x^2}{\pi^2k^2}\right) = \frac{\operatorname{sh} x}{x}$$

5. نستنتج من النتيجة السابقة أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \ln\left(\frac{\operatorname{sh}(\pi x)}{\pi x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x)$$

ولمّا كان $g = f'$ ، و $h = g' = f''$ استنتجنا أنّه مهما تكن x من $\mathbb{R}$ فلدينا

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\operatorname{th}(\pi x)} - \dfrac{1}{x} & : \quad x \neq 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi^2}{\operatorname{sh}^2(\pi x)}+\dfrac{1}{x^2} & : \quad x\neq 0\\[2mm] \dfrac{\pi^2}{3} & : \quad x=0\end{cases}$$

وبملاحظة أنّ

$$\operatorname{sh} x - x=\int_0^x(\operatorname{ch} t-1)\,\mathrm{d}\,t$$

يمكننا أن نبرهن أنّ $\frac{\operatorname{sh}^2 u}{u^2}>1$ ، $\forall u\in\mathbb{R}^*,$ وعليه نرى أنّ $\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)>0$ ، ومن ثَمّ فإنّ التابع g متزايد تماماً على كامل $\mathbb{R}$.

التمرين 17.

1. نذكّر أنّ $E(x)$ يمثل الجزء الصحيح للعدد x ، أياً كان x من $\mathbb{R}$ ، نعرّف
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \Delta(x)=\left|x-E\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\right|$$
   a. أثبت أن التابع Δ دوري ودوره 1 على $\mathbb{R}$.
   b. احسب $\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}\Delta(x)$ و $\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}\Delta(x)$. ماذا تستنتج ؟
   c. عبّر ببساطة عن $\Delta(x)$ على المجال $[0,1]$ ، وارسم بيان التابع Δ .
2. نضع $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}2^{-k}\Delta(2^k x)$ ، في حالة x من $\mathbb{R}$.
   a. أثبت أن المتتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ تتقارب بانتظام على $\mathbb{R}$ من تابع نرمز إليه بالرمز f .
   b. أثبت أن f مستمر، ومحدود، ويقبل العدد 1 دوراً، ويحقق
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)-\frac{1}{2}f(2x)=\Delta(x)$$
3. ليكن $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعاً محدوداً يحقّق $h(x)-\frac{1}{2}h(2x)=\Delta(x)$ أيّاً كان x من $\mathbb{R}$. أثبت أنّ $f=h$. لتحقيق ذلك أثبت أنّ
$$\forall x\in\mathbb{R},\forall m\in\mathbb{N}^*,\quad f_m(x)=h(x)-\frac{h(2^m x)}{2^m}$$

4. لنضع $\delta(x) = \Delta(x) + \frac{1}{2}\Delta(2x)$، في حالة x من $\mathbb{R}$.

a. ارسم بيان التابع δ.

b. أثبت أنّ : $f_{2m}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-2k}\delta(2^{2k}x)$، $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N}^*$، واستنتج أنّ $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) \leq \frac{2}{3}$.

c. أثبت أن $f_{2m}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}(1 - 4^{-m})$، ابدأ بحساب باقي قسمة 2^{2k} على 3. ثمّ أوجد قيمة $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

5. لنضع، في حالة x من $\mathbb{R}$، و n من $\mathbb{N}^*$، $\varepsilon_1(x) = E(2x) - 2E(x)$، وكذلك $\varepsilon_n(x) = \varepsilon_1(2^{n-1}x)$.

a. أثبت أن ε_1 يقبل 1 دوراً له، ويأخذ القيمتين 0 و 1 فقط.

b. أثبت أنه أياً كان x من $\mathbb{R}$. فلدينا $x = E(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{2^n}$.

c. أياً كان x من $\mathbb{R}$، نضع

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\varepsilon_k(x)}\right) \frac{\varepsilon_n(x)}{2^n}$$

أثبت أن g تابع محدود على $\mathbb{R}$، واستنتج أن $f = g$.

d. لنثبّت x من $\mathbb{R}$، ولنكتب ε_n عوضاً عن $\varepsilon_n(x)$ تبسيطاً. نعرّف

$$x_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k}{2^k} \text{ و } y_m = x_m + 2^{-m} \text{ و } y_{m,n} = x_m + \sum_{k=1+m}^{1+n+m} \frac{1}{2^k}$$

فيكون $y_m = \lim_{n\to\infty} y_{m,n}$.

احسب المقدارين $f(y_{m,n}) - f(x_m)$ ثمّ $f(y_m) - f(x_m)$، واستنتج أنّ

$$\frac{f(y_m) - f(x_m)}{y_m - x_m} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{\varepsilon_k(x)}$$

أخيراً أثبت اعتماداً على ما سبق أنّ f غير قابل للاشتقاق عند x.

الحل

1. نتأمّل التابع Δ المعرّف كما يأتي : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(x) = \left|x - E\left(x + \frac{1}{2}\right)\right|$.

$a.1$ لمّا كان $E(x+1) = E(x) + 1$ وذلك أياً كانت x من $\mathbb{R}$، استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(x+1) &= \left|x + 1 - E\left(x + \frac{1}{2} + 1\right)\right| \\ &= \left|x - E\left(x + \frac{1}{2}\right)\right| = \Delta(x)\end{aligned}$$

والتابع Δ يقبل 1 دوراً له.

$b.1$ نلاحظ هنا أنّه في حالة $0 < x < \frac{1}{2}$ يكون لدينا $\Delta(x) = x$، وفي حالة $\frac{1}{2} < x < 1$ يكون لدينا $\Delta(x) = 1 - x$. وعليه فإنّ

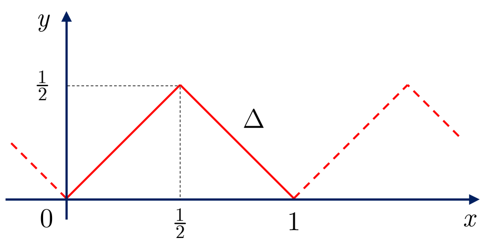
$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \Delta(x) = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} \Delta(x) = \frac{1}{2}$$

ونستنتج من هذا أنّ التابع Δ مستمرٌّ عند $\frac{1}{2}$، وهو من ثَمّ مستمرٌّ على $[0,1]$، ولأنّ Δ يقبل العدد 1 دوراً نستنتج أنّه مستمرٌّ على $\mathbb{R}$.

$c.1$ تكفي دراسة التابع على المجال $[0,1]$، وهنا نلاحظ أنّ

$$\Delta(x) = \begin{cases} x & : \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & : \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

وأنّ للتابع Δ الرسم البياني التالي:



الخط البياني للتابع $x \mapsto \Delta(x)$

2. نضع $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}2^{-k}\Delta(2^k x)$ ، في حالة x من $\mathbb{R}$ ، و $n \geq 1$.

a.2. لنلاحظ أنّ $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|2^{-k}\Delta(2^k x)\right| = 2^{-k-1}$ ، نستنتج من ذلك إذن أنّ متسلسلة التوابع

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big(x\mapsto 2^{-k}\Delta(2^k x)\Big)$$

متقاربة بالنظيم، ومن ثَمَّ بانتظام، على $\mathbb{R}$. وهذا ما يثبت التقارب المنتظم من f لمتتالية التوابع $(f_n)_{n\geq 1}$.

b.2. جميع التوابع f_n مستمرّة وتقبل العدد 1 دوراً لها، إذن التابع f تابع مستمرٌّ لأنّ التقارب منتظمٌ ويقبل الواحد دوراً. كما نرى بسهولة أنّ

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad 0\leq f(x)\leq\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}=1$$

ومن الواضح أنّ

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}f_n(2x) &= \sum_{k=0}^{n-1}2^{-k-1}\Delta(2^{k+1}x)\\ &= \sum_{k=1}^{n}2^{-k}\Delta(2^k x) = f_{n+1}(x)-\Delta(x)\end{aligned}$$

وذلك مهما تكن x من $\mathbb{R}$. إذن بجعل n تسعى إلى ما لا نهاية نجد

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)-\frac{1}{2}f(2x)=\Delta(x)$$

3. ليكن $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعاً محدوداً يحقق: $\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)-\dfrac{1}{2}h(2x)=\Delta(x)$.

ولتكن x من $\mathbb{R}$ ، عندئذ من الواضح أنّ

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{h(2^k x)}{2^k}-\frac{h(2^{k+1}x)}{2^{k+1}}=\frac{\Delta(2^k x)}{2^k}$$

وعليه، بجمع هذه العلاقات طرفاً إلى طرف عند قيم k من $\{0,1,\ldots,n-1\}$ ، نجد أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad h(x)-\frac{h(2^n x)}{2^n}=f_n(x)$$

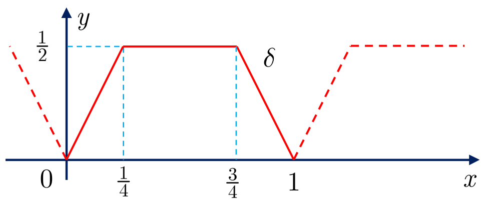
فإذا جعلنا n تسعى إلى $+\infty$ واستفدنا من كوْن التابع h محدوداً وجدنا أنّ $h=f$.

4. لنضع $\delta(x)=\Delta(x)+\dfrac{1}{2}\Delta(2x)$ ، في حالة x من $\mathbb{R}$.

a.4. نلاحظ مباشرة أنّ δ مستمرٌّ ودوري، ويقبل العدد 1 دوراً. ومن جهة ثانية نجد بمناقشة الحالات المختلفة أنّ:

$$\delta(x)=\begin{cases}2x & : \ 0\le x\le \frac{1}{4}\\ 1/2 & : \ \frac{1}{4}\le x\le\frac{3}{4}\\ 2(1-x) & : \ \frac{3}{4}\le x\le 1\end{cases}$$

ومنه الرسم البياني التالي :



الخط البياني للتابع $x\mapsto\delta(x)$

b.4. لنلاحظ أنّه مهما تكن x من $\mathbb{R}$ ، ومهما تكن $1\le m$ ، فلدينا

$$\begin{aligned}f_{2m}(x)&=\sum_{p=0}^{2m-1}2^{-p}\Delta(2^px)=\sum_{k=0}^{m-1}2^{-2k}\Delta(2^{2k}x)+\sum_{p=0}^{m-1}2^{-2k-1}\Delta(2^{2k+1}x)\\&=\sum_{p=0}^{m-1}2^{-2k}\left(\Delta(2^{2k}x)+\frac{1}{2}\Delta(2\cdot 2^{2k}x)\right)=\sum_{p=0}^{m-1}2^{-2k}\delta(2^{2k}x)\end{aligned}$$

ومن ثَمَّ فإنّ

$$\forall m\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\mathbb{R},\quad 0\le f_{2m}(x)\le\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}2^{-2k}=2\frac{1-4^{-m}}{3}\le\frac{2}{3}$$

وعليه فإذا جعلنا m تسعى إلى $+\infty$ وجدنا أنّ

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad 0\le f(x)\le\frac{2}{3}$$

c.4. ومن ناحية أخرى، من الواضح أنّ : $\forall k\in\mathbb{N},\quad 4^k\equiv 1^k\equiv 1 \bmod 3$. إذن

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \frac{2^{2k}}{3}-\frac{1}{3}\in\mathbb{N}$$

إذن، مهما تكن $1 \leq m$ يكن

$$f_{2m}\left(\frac{1}{3}\right) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2^{2k}} \delta\left(\frac{2^{2k}}{3}\right) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2^{2k}} \delta\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{2}{3}(1 - 4^{-m})$$

وعليه فإنّ $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$. وينتج من ذلك أنّ $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|f(x)\right| = \frac{2}{3}$.

5.لنضع $\varepsilon_1(x) = E(2x) - 2E(x)$ ، أياً كان x من $\mathbb{R}$. ولنضع في حالة x من $\mathbb{R}$ ، و $1 \leq n$. $\varepsilon_n(x) = \varepsilon_1(2^{n-1}x)$.

$a.5$ من الواضح أنّ التابع ε_1 دوريٌّ ويقبل العدد 1 دوراً. كما إنّ

$$\varepsilon_1(x) = \begin{cases} 0 & : \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & : \quad \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

$b.5$ لتكن x من $\mathbb{R}$ عندئذ يكون لدينا

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{\varepsilon_n(x)}{2^n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{E(2^n x) - 2E(2^{n-1}x)}{2^n}$$
$$= \sum_{n=1}^{m} \frac{E(2^n x)}{2^n} - \sum_{n=1}^{m} \frac{E(2^{n-1}x)}{2^{n-1}}$$
$$= \frac{E(2^m x)}{2^m} - E(x)$$

وعلى هذا فإنّ

$$x - E(x) - \sum_{n=1}^{m} \frac{\varepsilon_n(x)}{2^n} = \frac{2^m x - E(2^m x)}{2^m}$$

ومنه

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq x - E(x) - \sum_{n=1}^{m} \frac{\varepsilon_n(x)}{2^n} \leq \frac{1}{2^m}$$

وهذا يبرهن على أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x = E(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{2^n} .$$

.c.5 لنضع، أياً كان x من $\mathbb{R}$:

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\varepsilon_k(x)}\right)\frac{\varepsilon_n(x)}{2^n}$$

نلاحظ أوّلاً أنّ

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \left|g(x)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2^n}=4$$

والتابع g محدود على $\mathbb{R}$. وإذا استفدنا من كوْن $\varepsilon_n(2x)=\varepsilon_{n+1}(x)$ وجدنا أنّ

$$\begin{aligned}
\frac{g(2x)}{2}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\varepsilon_{k+1}(x)}\right)\frac{\varepsilon_{n+1}(x)}{2^{n+1}}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2-(-1)^{\varepsilon_1(x)}+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{\varepsilon_k(x)}\right)\frac{\varepsilon_{n+1}(x)}{2^{n+1}}\\
&=\sum_{n=2}^{\infty}\left(2-(-1)^{\varepsilon_1(x)}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\varepsilon_k(x)}\right)\frac{\varepsilon_n(x)}{2^n}\\
&=\sum_{n=2}^{\infty}\left(2+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\varepsilon_k(x)}\right)\frac{\varepsilon_n(x)}{2^n}-(-1)^{\varepsilon_1(x)}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\varepsilon_n(x)}{2^n}\\
&=g(x)-\left(2+(-1)^{\varepsilon_1(x)}\right)\frac{\varepsilon_1(x)}{2}-(-1)^{\varepsilon_1(x)}\left(x-E(x)-\frac{\varepsilon_1(x)}{2}\right)
\end{aligned}$$

وهكذا نرى أنّ

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)-\frac{g(2x)}{2}=\varepsilon_1(x)+(-1)^{\varepsilon_1(x)}\big(x-E(x)\big)$$

ولكن لاحظ أنّ التابع $x\mapsto\lambda(x)=\varepsilon_1(x)+(-1)^{\varepsilon_1(x)}\big(x-E(x)\big)$ تابع يقبل العدد 1 دوراً، ويُحقّق في حالة $0\le x<\frac{1}{2}$ أنّ $\lambda(x)=x$ ، وفي حالة $\frac{1}{2}\le x<1$ أنّ $\lambda(x)=1-x$.إذن $\lambda=\Delta$. وهذا يبرهن أنّ

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)-\frac{g(2x)}{2}=\Delta(x)$$

فإذا استفدنا من نتيجة السؤال 3. استنتجنا أنّ $f=g$.

.$d.5$ لنتأمّل m من $\mathbb{N}^*$، عندئذ نلاحظ هنا أنّ

$$\forall k \geq 1, \quad \varepsilon_k(x_m) = \begin{cases} \varepsilon_k & : \quad 1 \leq k \leq m \\ 0 & : \quad m < k \end{cases}$$

وأنّ

$$\forall k \geq 1, \quad \varepsilon_k(y_{m,n}) = \begin{cases} \varepsilon_k & : \quad 1 \leq k \leq m \\ 1 & : \quad m+1 \leq k \leq n+m+1 \\ 0 & : \quad n+m+1 < k \end{cases}$$

وعلى هذا فإنّ

$$\begin{aligned} f(y_{m,n}) &= \sum_{q=1}^{n+m+1} \left(2 + \sum_{k=1}^{q} (-1)^{\varepsilon_k(y_{m,n})} \right) \frac{\varepsilon_q(y_{m,n})}{2^q} \\ &= \sum_{q=1}^{m} \left(2 + \sum_{k=1}^{q} (-1)^{\varepsilon_k} \right) \frac{\varepsilon_q}{2^q} + \sum_{q=m+1}^{n+m+1} \left(2 + \sum_{k=1}^{m} (-1)^{\varepsilon_k} + \sum_{k=m+1}^{q} (-1)^1 \right) \frac{1}{2^q} \\ &= f(x_m) - \sum_{q=m+1}^{n+m+1} \frac{q}{2^q} + \left(2 + \sum_{k=1}^{m} (-1)^{\varepsilon_k} + m \right) \cdot \sum_{q=m+1}^{n+m+1} \frac{1}{2^q} \end{aligned}$$

وبالاستفادة من استمرار f وبجعل n تسعى إلى $+\infty$ نجد أنّ

$$f(y_m) - f(x_m) = - \sum_{q=m+1}^{\infty} \frac{q}{2^q} + \left(2 + \sum_{k=1}^{m} (-1)^{\varepsilon_k} + m \right) \cdot \sum_{q=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^q}$$

ولكن $\frac{1}{2^m} = \sum_{q=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^q}$ ، وكذلك

$$\begin{aligned} \sum_{q=m+1}^{\infty} \frac{q}{2^q} &= \sum_{q=m+1}^{\infty} \left(\frac{q}{2^{q-1}} - \frac{q}{2^q} \right) = \sum_{q=m}^{\infty} \frac{q+1}{2^q} - \sum_{q=m+1}^{\infty} \frac{q}{2^q} \\ &= \frac{m+1}{2^m} + \sum_{q=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^q} = \frac{m+2}{2^m} \end{aligned}$$

إذن : $f(y_m) - f(x_m) = \frac{1}{2^m} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{\varepsilon_k}$ ، أو

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{f(y_m) - f(x_m)}{y_m - x_m} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{\varepsilon_k}$$

ولمّا كان الحدُّ العام للمتسلسلة $\sum(-1)^{\varepsilon_n}$ لا يسعى إلى الصفر استنتجنا أنّ النهاية $\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{\varepsilon_k(x)}$ غير موجودة، وذلك مهما كانت قيمة x من $\mathbb{R}$ ، وعلى هذا نكون قد أثبتنا أنّه مهما كانت x من $\mathbb{R}$ فإنّ النهاية $\lim_{m\to\infty}\frac{f(y_m)-f(x_m)}{y_m-x_m}$ غير موجودة.

ولكن لو افترضنا جدلاً أنّ التابع f يقبل الاشتقاق عند x من $\mathbb{R}$ ، لكانت المتتاليتان $(\alpha_m)_{m\geq 1}$ و $(\beta_m)_{m\geq 1}$ المعرفتان بالعلاقتين :

$$\beta_m = \frac{f(y_m)-f(x)}{y_m-x} - f'(x) \quad \text{و} \quad \alpha_m = \frac{f(x)-f(x_m)}{x-x_m} - f'(x)$$

متقاربتين من 0 . ولكن

$$f(x_m) = f(x) + f'(x)\cdot(x_m - x) - \alpha_m(x - x_m)$$
$$f(y_m) = f(x) + f'(x)\cdot(y_m - x) + \beta_m(y_m - x)$$

إذن

$$f(y_m) - f(x_m) = f'(x)\cdot(y_m - x_m) + \beta_m(y_m - x) + \alpha_m(x - x_m)$$

وبالاستفادة من المتراجحة

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ x_m \leq x \leq y_m$$

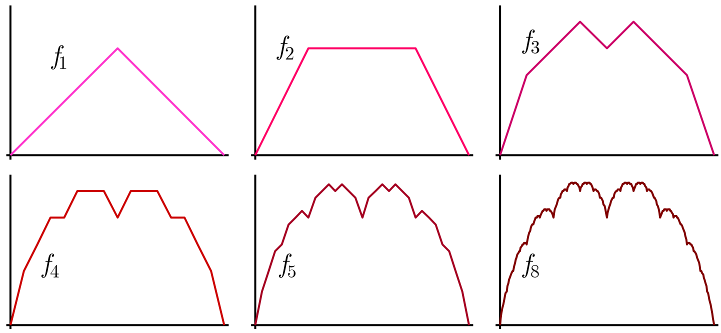
نستنتج أنّه، مهما تكن m من $\mathbb{N}^*$ ، يكن

$$\begin{aligned}\left|f(y_m) - f(x_m) - f'(x)\cdot(y_m - x_m)\right| &\leq \left|\beta_m\right|(y_m - x) + \left|\alpha_m\right|(x - x_m)\\ &\leq \left(\left|\beta_m\right| + \left|\alpha_m\right|\right)(y_m - x_m)\end{aligned}$$

أو

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{f(y_m)-f(x_m)}{y_m-x_m} - f'(x)\right| = 0$$

وهذا يناقض ما أثبتناه آنفاً. إذن لا يقبل التابع f الاشتقاق عند أيّ نقطة x من $\mathbb{R}$. يجد القارئ فيما يأتي الرسم البياني لبعض حدود المتتالية $\left(f_n\right)_{n\geq 1}$.



الخطوط البيانية لبعض حدود المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

وبذا يكتمل الحل. ■

التمرين 18. لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصة من $\mathbb{R}_+^*$. ولتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية التوابع المعرّفة كما يأتي :

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = a_n(1-x)x^n$$

1. أثبت أنّ متسلسلة التوابع $\sum f_n$ متقاربة ببساطة. نرمز بالرمز S إلى $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$.
2. احسب $\lambda_n = \sup\limits_{[0,1]}\left|f_n\right|$. واستنتج تقارب المتتالية $\left(n\lambda_n/a_n\right)_{n\geq 0}$ من نهاية يُطلب تعيينها. ثُمّ أثبت صحة التكافؤ

$$(\text{المتسلسلة } \sum_{n\geq 0} f_n \text{ متقاربة بالنظيم}) \Leftrightarrow (\text{المتسلسلة } \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n} \text{ متقاربة})$$

3. نعرّف، مهما تكن n من $\mathbb{N}^*$، المجموع الجزئي $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f_k$. أثبت صحة الخواص الآتية :

① $\forall n \geq 1, \forall x \in [0,1], \quad 0 \leq S(x) - S_n(x) \leq a_n$.

② $\forall n \geq 1, \forall x \in [0,1], \quad a_{2n-1}\, x^n(1-x^n) \leq S_{2n}(x) - S_n(x)$.

③ $\forall n \geq 1, \quad \dfrac{a_{2n-1}}{4} \leq \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|S(x) - S_n(x)\right| \leq a_n$.

4. استنتج صحَّة التكافؤ التالي:

$$(\text{المتسلسلة } \sum_{n\geq 0} f_n \text{ متقاربة بانتظام}) \Leftrightarrow (\lim_{n\to\infty} a_n = 0)$$

الحل

1. من الواضح أنّه في حالة $x = 1$ تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(1)$ متقاربة لأنّ جميع حدودها معدومة. أمّا في حالة $0 \leq x < 1$ فيكون لدينا $0 \leq f_n(x) < a_0(1-x)x^n$ فالمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة لأنّ المتسلسلة الهندسيّة $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ متقاربة في هذه الحالة. وعليه فإنّ متسلسلة التوابع $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ متقاربة ببساطة على المجال $[0,1]$. لنرمز بالرمز S إلى مجموعها.

2. تبيِّن دراسة بسيطة للتابع $x \mapsto (1-x)x^n$ أنّه يبلغ حدّه الأعلى على المجال $[0,1]$ عند $x = \dfrac{n}{1+n}$. ومن ثَمّ فإنّ $\lambda_n = \sup\limits_{[0,1]} \left| f_n \right| = \dfrac{a_n}{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$. إذن $\lambda_n \sim \dfrac{a_n}{ne}$.
فللمتسلسلتين $\sum \lambda_n$ و $\sum \dfrac{a_n}{n}$ الطبيعة نفسها. ومنه صحّة التكافؤ المطلوب.

3.① المتراجحة المطلوبة صحيحة وضوحاً في حالة $x = 1$. لنفترض إذن أنّ $0 \leq x < 1$ عندئذ يمكننا أن نكتب في حالة n من $\mathbb{N}^*$ ما يلي :

$$S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k(1-x)x^k$$

واعتماداً على كون المتتالية $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة، وحدود المجموع موجبة يمكننا أن نكتب

$$0 \leq S(x) - S_n(x) \leq a_n \sum_{k=n}^{\infty} (x^k - x^{k+1}) = a_n x^n \leq a_n$$

3.② المتراجحة المطلوبة صحيحة وضوحاً في حالة $x = 1$. لنفترض إذن أنّ $0 \leq x < 1$ عندئذ يمكننا أن نكتب في حالة n من $\mathbb{N}^*$ ما يلي :

$$S_{2n}(x) - S_n(x) = \sum_{k=n}^{2n-1} a_k(1-x)x^k$$

واعتماداً على كون المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة يمكننا أن نكتب

$$S_{2n}(x) - S_n(x) \geq a_{2n-1} \sum_{k=n}^{2n-1} (x^k - x^{k+1}) = a_{2n-1} x^n (1 - x^n)$$

3.③ ولأنّ التوابع $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ موجبة استنتجنا أنّ

$$S(x)-S_n(x)\geq S_{2n}(x)-S_n(x)=a_{2n-1}x^n(1-x^n)$$

ومنه

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|S(x)-S_n(x)\right|\geq a_{2n-1}\sup_{x\in[0,1]}x^n(1-x^n)=\frac{a_{2n-1}}{4}$$

فإذا استفدنا من المتراجحة الأولى 3.① استنتجنا أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{a_{2n-1}}{4}\leq\sup_{x\in[0,1]}\left|S(x)-S_n(x)\right|\leq a_n$$

4. لمّا كانت المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصة استنتجنا من المتراجحة السابقة أنّ الشرط $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ يُكافئ التقارب المنتظم لمتسلسلة التوابع $\sum_{n\geq 0}f_n$. ■

التمرين 19. ليكن α من $\mathbb{R}_+^*$. في حالة $0\leq n$ ، نضع

$$u_n:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\quad u_n(x)=\sin^\alpha x\cdot\cos^n x$$

1. ادرس التقارب البسيط للمتسلسلة $\sum_{n\geq 0}u_n$ ، وعيّن مجموعها U. وادرس استمرار U.
2. ادرس تبعاً لقيم α التقارب المنتظم للمتسلسلة $\sum_{n\geq 0}u_n$.

الحل

1. حالة $0<x\leq\frac{\pi}{2}$. في هذه الحالة تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^\infty u_n(x)$ لأنّها متسلسلة هندسيّة أساسها $\cos x$ وهو أصغر تماماً من 1 . ويكون

$$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right],\quad U(x)=\sum_{n=0}^\infty u_n(x)=\frac{\sin^\alpha x}{1-\cos x}$$

أمّا عندّ $x=0$. فتكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^\infty u_n(x)$ متقاربة أيضاً في هذه الحالة لأنّ جميع حدودها معدومة.

نستنتج إذن أنّ متسلسلة التوابع $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متقاربة ببساطة، ومجموعها هو التابع

$$U:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\quad U\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sin^{\alpha}x}{1-\cos x} & : \quad x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\\ 0 & : \quad x=0\end{cases}$$

ونلاحظ أنّ

$$\lim_{x\to 0^+} U\left(x\right)=\begin{cases}0 & : \quad \alpha>2\\ 2 & : \quad \alpha=2\\ +\infty & : \quad \alpha<2\end{cases}$$

إذن يكون التابع U مستمرّاً إذا وفقط إذا كان $\alpha>2$.

2. لمّا كان U غير مستمرٍّ في حالة $0<\alpha\leq 2$ استنتجنا أنّ تقارب المتسلسلة غير منتظم في هذه الحالة لأنّ جميع التوابع u_n مستمرّة. لنفترض أنّ $\alpha>2$. في هذه الحالة لدينا

$$\begin{aligned}\forall x\in\left]0,\tfrac{\pi}{2}\right],\quad U(x)-\sum_{k=0}^{n-1}u_k(x) &= \sin^{\alpha}x\,\frac{\cos^n x}{1-\cos x}\\ &= \sin^{\alpha-2}x\cdot\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}\cdot\cos^n x\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\forall x\in\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right],\quad U(x)-\sum_{k=0}^{n-1}u_k(x)=(1+\cos x)(\sin^{\alpha-2}x)\cos^n x$$

وعليه يكون لدينا

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\left|U(x)-\sum_{k=0}^{n-1}u_k(x)\right| &\leq 2\sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\left(\sin^{\alpha-2}x\cos^n x\right)\\ &= 2\sup_{u\in\left[0,1\right]}\left(t^{\beta}(1-t)^{n/2}\right)\end{aligned}$$

حيث عرّفنا $\beta=\dfrac{\alpha-2}{2}>0$ ، وأجرينا تغيير المتحوّل $t=\sin^2 x$.

نجد بحساب بسيط أنّ التابع $t \mapsto t^{\beta}(1-t)^{n/2}$ يبلغ حدّه الأعلى على المجال $[0,1]$ عند $t = \frac{2\beta}{2\beta+n}$ ومن ثَمّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \left| U(x) - \sum_{k=0}^{n-1} u_k(x) \right| \leq 2\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-2+n}\right)^{\beta}$$

وهذا يثبتُ التقارب المنتظم لمتسلسلة التوابع $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ في حالة $\alpha > 2$.

التمرين 20. لنتأمّل متتالية التوابع $(f_n)_{n\geq 2}$ من $\mathbb{R}_+$ إلى $\mathbb{R}$، المعرّفة كما يأتي:

$$f_n(x) = 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} - 1 = -1 + \sum_{k=2}^{n} kx^{k-1}$$

1. ① ادرس تحوّلات التابع f_n.

② أثبت أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد a_n ينتمي إلى $]0,1[$ ويُحقّق $f_n(a_n) = 0$، واحسب a_2 و a_3.

③ أثبت أنّ $\forall n \geq 2, \forall x \in]0,1[, \ f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

④ أثبت أنّ المتتالية $(a_n)_{n\geq 2}$ متقاربة وأنّ نهايتها a تُحقّق $0 \leq a \leq \dfrac{1}{2}$.

2. ① ليكن g_n مقصور التابع f_n على المجال $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. أثبت التقارب المنتظم للمتتالية $(g_n)_{n\geq 2}$ من تابع يطلب تعيينه.

② أثبت أنّ العدد a هو جذر للمعادلة $2x^2 - 4x + 1 = 0$. واحسبه.

الحل

①.1 بحساب بسيط للمشتق f_n' نرى أنّ التابع f_n متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}_+$.

②.1 ونلاحظ أنّ $f_n(0) = -1$ وأنّ

$$f_n(1) = \frac{n(n+1)}{2} - 2 \geq n+1-2 = n-1 \geq 1 > 0$$

إذن يوجد في $\mathbb{R}_+$ جذرٌ وحيدٌ للمعادلة $f_n(x) = 0$، وليكن a_n، وهو ينتمي إلى المجال $]0,1[$. ونجد بالحساب المباشر أنّ $a_2 = \frac{1}{2}$ و $a_3 = \frac{1}{3}$.

③.1 في الحقيقة، إذاكان $0 < x < 1$ و $n \geq 2$ كان

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = (n+1)x^n > 0$$

وهذا يثبتُ صحّة المتراجحة المطلوبة.

④.1 لتكن $n \geq 2$. استناداً إلى تغيرات التابع f_{n+1}، نعلم أنّ $f_{n+1}(x)$ موجبٌ تماماً في حالة $x > a_{n+1}$ وسالبٌ تماماً في حالة $1 \leq x < a_{n+1}$. وبالاستفادة من ③.1 لدينا

$$f_{n+1}(a_n) > f_n(a_n) = 0$$

إذن لا بُدّ أن يكون لدينا $a_n > a_{n+1}$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ المتتالية $(a_n)_{n\geq 2}$ متناقصة تماماً، وهي محدودة من الأدنى بالعدد 0 . فهي إذن متقاربة من عددٍ a ينتمي إلى المجال $\left[0, a_2\right] = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

①.2 لمّا كان $\sup_{x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} \left|nx^{n-1}\right| = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ، والمتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ متقاربة استناداً إلى معيار دالمبير مثلاً، استنتجنا أنّ المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}(x \mapsto nx^{n-1})$ ، متقاربة بالنظيم، ومن ثَمّ بانتظام، على $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. وهذا يثبت التقارب المنتظم على المجال $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ للمتتالية $\left(g_n\right)_{n\geq 2}$، حيث $g_n = f_{n|[0,1/2]}$ ، من تابعٍ سنرمز إليه بالرمز g .

ولكن مهما تكن n، لدينا على المجال $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ ما يلي :

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= -1 + \sum_{k=2}^{n} kx^{k-1} = -1 + \left(\sum_{k=2}^{n} x^k\right)' \\
&= -1 + \left(\frac{x^2 - x^{n+1}}{1-x}\right)' \\
&= -1 + \frac{(2x - (n+1)x^n)(1-x) + x^2 - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\
&= \frac{4x - 2x^2 - 1}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)(1-x) + x}{(1-x)^2}x^n
\end{aligned}$$

وبجعل n تسعى إلى اللانهاية نستنتج أنّ

$$\forall x \in \left[0,\frac{1}{2}\right], \quad g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{4x - 2x^2 - 1}{(1-x)^2}$$

②.2 لمّا كانت $(a_n)_{n\geq 2}$ متتالية من $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ متقاربة من عددٍ a، ولمّا كانت متتالية التوابع $\left(g_n\right)_{n\geq 2}$ متقاربة بانتظام على $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ من التابع g، استنتجنا أنّ $g(a) = \lim_{n\to\infty} g_n(a_n)$.
ولكن $g_n(a_n) = 0$ أيّاً كانت قيمة n. إذن لا بُدّ أن يكون $g(a) = 0$، وهذا يثبتُ أنّ a هو جذرٌ ينتمي إلى $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ للمعادلة $2a^2 - 4a + 1 = 0$. أي

$$a = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$$

التمرين 21.

1. لتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من التوابع المعرّفة على المجال $[a,b]$، وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$. نفترض أنّه يوجد ثابت موجب تماماً M يُحقّق

$$\forall (x,y)\in[a,b]^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\quad \left|f_n(x)-f_n(y)\right| \leq M\left|x-y\right|$$

ونفترض أنّ المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ببساطة من تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. أثبت أنّها في الحقيقة متقاربة بانتظام من f.

2. استنتج الخاصة الآتية: « لتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من التوابع القابلة للاشتقاق على المجال $[a,b]$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$. نفترض ما يلي:
   - يوجد ثابت موجب تماماً M يحقّق
   $$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[a,b],\quad \left|f_n'(x)\right|\leq M$$
   - المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ببساطة من تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

   عندئذ تكون المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام من التابع f ».

3. أثبت أنّ متتالية التوابع $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f_n(x) = \left(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n$ تتقارب بانتظام على كل مجموعة متراصّة في $\mathbb{R}$ من تابع f يطلب تعيينه.

الحل

1. لتكن $\varepsilon > 0$. نضع $m = m_\varepsilon = 1 + \left\lfloor\frac{3M(b-a)}{\varepsilon}\right\rfloor$، ونعرّف النقاط $\left(x_k\right)_{0\leq k\leq m}$ بالصيغة

$$\forall k\in\left\{0,1,\ldots,m\right\},\qquad x_k = a + \frac{k}{m}(b-a)$$

لمّا كان $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_k)=f(x_k)$ $\forall k\in\{0,1,\ldots,m\},$ استنتجنا أنّه يوجد عددٌ N_ε أكبر تماماً من m ويُحقّق

$$\forall k\in\{0,1,\ldots,m\},\qquad n>N_\varepsilon \Rightarrow \left|f(x_k)-f_n(x_k)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

لتكن إذن $n>N_\varepsilon$ وليكن x من $\left[a,b\right]$. عندئذ يكون لدينا $x_k\leq x<x_{k+1}$ في حالة $k=\left\lfloor \dfrac{x-a}{b-a}m\right\rfloor$، ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}
\left|f_n(x)-f(x)\right| &\leq \left|f_n(x)-f_n(x_k)\right|+\left|f_n(x_k)-f(x_k)\right|+\left|f(x_k)-f(x)\right|\\
&\leq 2M\left|x-x_k\right|+\left|f_n(x_k)-f(x_k)\right|\\
&\leq 2M\left(\frac{b-a}{m}\right)+\left|f_n(x_k)-f(x_k)\right|<2\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=3
\end{aligned}$$

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّه

$$\forall\varepsilon>0,\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\ n>N_\varepsilon\Rightarrow\forall x\in[a,b],\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$$

ومنه التقارب المنتظم للمتتالية $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ من التابع f.

2. هذه النتيجة واضحة استناداً إلى مبرهنة التزايدات المحدودة.

3. لتكن x من $\mathbb{R}$. عندئذ يمكننا أن نكتب في حالة $n>x^2$ ما يلي :

$$\begin{aligned}
\left(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n &= \exp\left(n\ln\left(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)=\exp\left(n\ln\left(1-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\
&=\exp\left(-\frac{x^2}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

إذن تتقارب متتالية التوابع $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ببساطة من التابع $x\overset{f}{\mapsto}e^{-x^2/2}$.

ومن جهة أخرى نلاحظ أنّ

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_n'(x)=-\sqrt{n}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^{n-1}$$

إذن

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \left|f_n'(x)\right|\leq\sqrt{n}\left|\sin\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right|\leq|x|$$

لتكن $\mathcal{K}$ مجموعة متراصّة ما من $\mathbb{R}$ ، عندئذ يوجد عددٌ موجبٌ $A_{\mathcal{K}}$ يُحقّق

$$\mathcal{K} \subset \left[-A_{\mathcal{K}}, A_{\mathcal{K}}\right] = I_{\mathcal{K}}$$

وعندئذ

$$\forall x \in I_{\mathcal{K}}, \quad \left|f_n'(x)\right| \le A_{\mathcal{K}}$$

ولمّا كانت متتالية التوابع $\left(f_{n|I_{\mathcal{K}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تتقارب ببساطة من $f_{|I_{\mathcal{K}}}$ استنتجنا بناءً على 2. أنّ $\left(f_{n|I_{\mathcal{K}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تتقارب بانتظام من $f_{|I_{\mathcal{K}}}$ ، وهذا يقتضي التقارب المنتظم لمتتالية التوابع $\left(f_{n|\mathcal{K}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ من التابع $f_{|\mathcal{K}}$. ومنه التقارب المنتظم على كلّ مجموعة متراصّة لمتتالية التوابع $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ من التابع f . ■

التمرين 22. نعرّف، أياً كانت x من $\mathbb{R}$ ، و n من $\mathbb{N}^*$ التابع كثير الحدود

$$P_n(x) = (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n) = \prod_{k=1}^{n}(1+x^k)$$

وحين تكون النهاية $\lim_{n\to\infty} P_n(x)$ موجودة نرمز إليها بالرمز $P(x)$. وأخيراً نعرّف، أياً كان x من $]-1,1[$ وأياً كان k من $\mathbb{N}^*$ ، المقدار $u_k(x) = \ln(1+x^k)$. نهدف في هذه المسألة إلى دراسة بعض خواص التابع P .

1. ليكن a من $]0,1[$.

① أثبت أنّ : $\left|u_k(x)\right| \le -\ln(1-a^k)$ $\forall x \in [-a,a], \forall k \in \mathbb{N}^*,$.

② أثبت أنّ متسلسلة التوابع $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ متقاربة بانتظام على المجال $[-a,a]$ ، وأنّ

$$\forall x \in [-a,a], \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \le -\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1-a^k)$$

③ برهن أنّ متتالية التوابع $\left(P_n\right)_{n\ge 0}$ متقاربة بانتظام على المجال $[-a,a]$.

2. أثبت أنّ التابع P معرّف فقط على المجال $\left]-1,1\right[$ ، وأنّه مستمرٌّ على المجال $]-1,1[$ ، ويأخذ قيماً موجبة تماماً على $]-1,1[$.

3. دراسة P في جوار -1.

① أثبت أنّ : $\forall x \in [-1,0],\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq P_{2n+2}(x) \leq P_{2n}(x)$.

② أثبت أنّ التابع P مستمرٌّ عند -1.

4. نمهّد في هذا السؤال إلى دراسة P في جوار 1.

① أثبت صحّة المتراجحة التالية:

$$\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

② أثبت أنّ التابع

$$h : [0,1] \to \mathbb{R},\ h(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+t)}{t} & : \ 0 < t \leq 1 \\ 1 & : \quad t = 0 \end{cases}$$

مستمرٌّ ومتناقص.

③ استنتج أنّ: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$.

④ نعلم أنّ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. احسب Λ قيمة التكامل $\int_0^1 h$.

5. دراسة P في جوار 1^-.

① أثبت أنّه في حالة k من $\mathbb{N}$ و x من $]0,1[$ تتحقّق المتراجحة

$$(1-x)\ln(1+x^k) \leq \int_{x^{k+1}}^{x^k} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1-x}{x}\ln(1+x^{k+1})$$

② استنتج من ذلك أنّه، أياً كانت x من $]0,1[$ ، وأياً كانت n من $\mathbb{N}^*$ فلدينا

$$x\int_{x^n}^{1} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t \leq (1-x)\ln P_n(x) \leq \int_{x^{n+1}}^{x} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

③ استنتج، بالاستفادة من 4.④ ، أنّ

$$\forall x \in]0,1[, \quad x \cdot \Lambda \leq (1-x)\ln P(x) \leq \Lambda$$

④ استنتج مُكافئاً للمقدار $\ln P(x)$ في جوار 1^-.

الحل

1. ليكن a من $]0,1[$.

①.1 لنفترض أنّ k عددٌ طبيعي زوجي، عندئذ يكون التابع $x \mapsto u_k(x) = \ln(1+x^k)$ تابعاً زوجياً ويكون متزايداً تماماً على المجال $[0,a]$. إذن، في هذه الحالة، تتحقّق المتراجحة

$$\forall x \in [-a,a], \quad 0 \le u_k(x) \le u_k(a)$$

وهنا نستفيد من كون $\ln(1-a^{2k}) < 0$ يقتضي $\ln(1+a^k) < -\ln(1-a^k)$ لنستنتج المطلوب، في هذه الحالة.

أمّا في الحالة التي يكون فيها العدد k عدداً طبيعياً فردياً. فعندئذ يكون التابع u_k تابعاً متزايداً تماماً على المجال $[-a,a]$، ومن ثمّ يكون

$$\forall x \in [-a,a], \quad \left|u_k(x)\right| \le \max(u_k(a), -u_k(-a))$$

ولكن

$$\max(u_k(a), -u_k(-a)) = -u_k(-a)$$

لأنّ $\ln(1+a^k) < -\ln(1-a^k)$ كما وجدنا آنفاً، وعليه نكون قد أثبتنا بوجه عام أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-a,a], \quad \left|u_k(x)\right| \le -\ln(1-a^k)$$

②.1 لمّا كان $-\ln(1-a^n) \sim a^n$ والمتسلسلة الهندسيّة $\sum a^n$ متقاربة، استنتجنا أنّ المتسلسلة $\sum u_n$ متقاربة بالنظيم على المجال $[-a,a]$، فهي إذن متقاربة بانتظام على هذا المجال.
وكذلك نستنتج من متراجحة المثلّث أنّ

$$\forall x \in [-a,a], \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \le -\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1-a^k)$$

لنعرّف إذن

$$M_a = \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1-a^k)\right)$$

نستنتج من المتراجحة السابقة أنّ

$$\forall x \in [-a,a], \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{M_a} \le P_n(x) \le M_a \qquad (1)$$

وعليه، لأنّ $P_{n+1}(x)-P_n(x)=x^{n+1}P_n(x)$ ، نستنتج أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \sup_{x\in[-a,a]}\left|P_{n+1}(x)-P_n(x)\right|\leq M_a\cdot a^{n+1}$$

ولمّا كانت المتسلسلة الهندسيّة $\sum a^n$ متقاربة استنتجنا أنّ المتسلسلة $\sum(P_{n+1}-P_n)$ متقاربة بالنظيم على المجال $[-a,a]$، وهذا يقتضي التقارب المنتظم على المجال $[-a,a]$ لمتتالية التوابع $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. نستنتج مما سبق أنّ متتالية التوابع $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تتقارب بانتظام على كلّ مجموعة متراصّة من المجال $]-1,1[$، ولدينا $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P_n(-1)=0$. هذا يثبت أنّ متتالية التوابع $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة ببساطة على المجال $]-1,1]$.

بذا نكون قد أثبتنا أنّ التابع P معرّف على المجال $]-1,1[$، وأنّه مستمرٌّ على المجال $]-1,1[$، وإذا استفدنا من المتراجحة (1) التي أثبتناها في 1.② استنتجنا أنّ

$$\forall x\in[-a,a],\ \ P(x)\geq\frac{1}{M_a}>0$$

وهذا يبرهن أنّ التابع P يأخذ قيماً موجبة تماماً على $]-1,1[$.

بقي أن نتوثّق أنّ المتتالية $\left(P_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تكون متباعدة عند أيّة قيمة للعدد x لا تنتمي إلى $[-1,1[$.

- إذا كان $x\geq 1$ كان $P_n(x)\geq 2^n$ في حالة $n\geq 1$ إذن $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)=+\infty$ في حالة $x\geq 1$.
- أمّا إذا كان $x<-1$ ، كان

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ \left|P_{n+1}(x)\right|&=\left|P_n(x)\right|\left|1+x^{n+1}\right|\\&\geq\left|P_n(x)\right|\left(\left|x\right|^{n+1}-1\right)\end{aligned}$$

وهذا يثبت أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|P_{n+1}(x)\right|}{\left|P_n(x)\right|}=+\infty$$

وعليه لا بُدّ أن يكون $\lim\limits_{n\to\infty}\left|P_n(x)\right|=+\infty$ ، وهذا يبرهن على تباعد المتتالية $\left(P_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ في هذه الحالة أيضاً.

3. دراسة P في جوار -1.

3.① لنلاحظ أنّ

$$P_{2n+2}(x) = P_{2n}(x)(1+x^{2n+1})(1+x^{2n+2})$$

- إذا كان $x = -1$ كان $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(x) = 0$.
- إذا كان $-1 < x \le 0$ كان لدينا في حالة n من $\mathbb{N}^*$ ما يأتي :

$$1-(1+x^{2n+1})(1+x^{2n+2}) = (-x)x^{2n}(\underbrace{1+x}_{>0}+x^{2n+2}) \ge 0$$

ومن ثَمّ، إذا استفدنا من كون $P_{2n}(x) > 0$ بناءً على المتراجحة (1) التي أثبتناها في 1.② استنتجنا أنّ $P_{2n+2}(x) \le P_{2n}(x)$.

- فنكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall x \in [-1,0],\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \le P_{2n+2}(x) \le P_{2n}(x)\ .$$

3.② نستنتج مما أثبتناه آنفاً أنّ

$$\forall x \in [-1,0],\ 0 \le P(x) \le P_2(x) \le 2(1+x)$$

وهذا يبرهن على أنّ $\lim_{x\to -1} P(x) = 0 = P(-1)$ ، فالتابع P تابعٌ مستمرٌّ عند -1 .

4.① لتكن n من $\mathbb{N}^*$ ، ولتكن x من $\left[0,1\right]$. عندئذ

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k &= \int_0^x \left(\frac{1}{1+t} - \sum_{k=1}^{n}(-t)^{k-1}\right)\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^x \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1-(-t)^n}{1+t}\right)\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}\,t
\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\right| \le \int_0^x \frac{|-t|^n}{1+t}\,\mathrm{d}\,t \le \int_0^x t^n\,\mathrm{d}\,t = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

②.4 المشتق الثاني للتابع $x \mapsto -\ln(1+x)$ موجبٌ تماماً على المجال $]-1,+\infty[$، فهو إذن تابعٌ محدّب، وهذا يقتضي أنّ تابع نسبة التغيّر المعرّف كما يأتي:

$$h :]-1,+\infty[\to \mathbb{R},\ h(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+t)}{t} & : \quad 0 < t \le 1 \\ 1 & : \quad t = 0 \end{cases}$$

هو تابعٌ مستمرٌّ ومتناقصٌ تماماً على المجال نفسه.

③.4 بالعودة إلى المتراجحة ①.4 وبعد القسمة على x ثُمّ المكاملة على المجال $[0,1]$ نستنتج

$$\left| \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} \,\mathrm{d}\,x - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \int_0^1 x^{k-1} \,\mathrm{d}\,x \right| \le \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}\,x$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left| \int_0^1 h(x) \,\mathrm{d}\,x - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \right| \le \frac{1}{(n+1)^2}$$

④.4 نستنتج إذن أنّ

$$\begin{aligned} \int_0^1 h(x) \,\mathrm{d}\,x &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

.5 دراسة P في جوار 1^-.

①.5 في حالة k من $\mathbb{N}$، و x من $]0,1[$، نستفيد من تناقص التابع h لنكتب

$$\forall t \in [x^{k+1}, x^k], \qquad h(x^k) \le h(t) \le h(x^{k+1})$$

وبالمُكاملة على المجال $[x^{k+1}, x^k]$ نستنتج أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad h(x^k)(x^k - x^{k+1}) \le \int_{x^{k+1}}^{x^k} h(t) \,\mathrm{d}\,t \le h(x^{k+1})(x^k - x^{k+1})$$

ومن ثَمّ، أياً كان k من $\mathbb{N}$ كان

$$(1-x)\ln(1+x^k) \leq \int_{x^{k+1}}^{x^k} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}\,t \leq \frac{1-x}{x}\ln(1+x^{k+1})$$

②.5 لتكن x من $]0,1[$ و n من $\mathbb{N}^*$. عندئذ بجمع المتراجحات اليسرى السابقة عندما تتحوّل k من 1 حتّى n نستنتج أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1-x)\ln P_n(x) \leq \int_{x^{n+1}}^{x} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}\,t$$

وبجمع المتراجحات اليمنى عندما تتحوّل k من 0 حتّى $n-1$ نستنتج أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{x^n}^{1} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}\,t \leq \frac{1-x}{x}\ln P_n(x)$$

ومنه

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x\int_{x^n}^{1} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}\,t \leq (1-x)\ln P_n(x) \leq \int_{x^{n+1}}^{x} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}\,t$$

③.5 بجعل n تسعى إلى اللانهاية في المتراجحة السابقة نستنتج أنّه في حالة x من $]0,1[$ لدينا

$$x\int_{0}^{1} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}\,t \leq (1-x)\ln P(x) \leq \int_{0}^{x} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}\,t \leq \int_{0}^{1} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}\,t$$

وبالاستفادة من نتيجة السؤال ④.4 يمكننا أن نكتب

$$\forall x \in \left]0,1\right[, \quad \frac{\pi^2}{12}x \leq (1-x)\ln P(x) \leq \frac{\pi^2}{12}$$

④.5 وهذا يتيح لنا أن نثبت أنّه في جوار 1^- لدينا

$$\ln P(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{\pi^2}{12(1-x)}$$

وهي النتيجة المطلوبة ■

التمرين 23.

1. ليكن التابع F المعطى بالصيغة : $F(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$.

① عيّن مجموعة تعريف التابع F .

② أثبت أن مقصور F على المجال $]0,1[$، يقبل التمديد إلى تابع مستمرٍّ على المجال $[0,1]$، نرمز إلى هذا التابع المُمَدَّد بالرمز $\widetilde{F}$، ما قيمة $\widetilde{F}(0)$؟

③ أثبت أنه في حالة x من $[0,1]$ تتحقّق المساواة

$$\widetilde{F}\left(\frac{x}{2}\right)+\widetilde{F}\left(\frac{x+1}{2}\right)-4\widetilde{F}(x)=\frac{a}{(x+1)^2}+\frac{b}{(2-x)^2}$$

حيث a و b ثابتان حقيقيّان يطلب تعيينهما.

2. نعرّف على المجال $[0,1]$ متتاليتي التوابع $(f_n)_{n\geq 2}$ و $(g_n)_{n\geq 1}$ بالصيغتين

$$g_n(x)=\frac{1}{(n+x)^2} \quad \text{و} \quad f_n(x)=\frac{1}{(n-x)^2}$$

① أثبت أن المتسلسلتين $\sum f_n$ و $\sum g_n$ متقاربتان بانتظام على $[0,1]$، نضع إذن

$$\forall x\in[0,1],\quad \widetilde{H}(x)=\sum_{n=2}^{\infty}f_n(x)+\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$$

② أثبت أنّ $\widetilde{H}$ مستمرٌّ على $[0,1]$، وأنه يوجد عددان حقيقيّان c و d يُطلب تعيينهما، يُحقّقان في حالة x من $[0,1]$ المساواة :

$$\widetilde{H}\left(\frac{x}{2}\right)+\widetilde{H}\left(\frac{x+1}{2}\right)-4\widetilde{H}(x)=\frac{c}{(x+1)^2}+\frac{d}{(2-x)^2}$$

3. عندما تكون x من $[0,1]$ نعرّف

$$G(x)=\widetilde{F}(x)+\widetilde{H}(x)$$

① أثبت أنّ G مستمرٌّ على $[0,1]$، وأنّ

$$\forall x\in[0,1],\quad G\left(\frac{x}{2}\right)+G\left(\frac{x+1}{2}\right)=4G(x)$$

② نضع $M=\sup_{x\in[0,1]}\left|G(x)\right|$. أثبت أنّ $M=0$.

③ استنتج أنّ

$$\forall x \in]0,1[, \qquad \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} = \frac{1}{x^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + x^2}{(n^2 - x^2)^2}$$

ما قيمة المجموع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ؟

الحل

①.1 من الواضح أنّ مجموعة تعريف التابع F هي $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

②.1 كما نلاحظ أنّه في جوار الصفر لدينا

$$\begin{aligned}
\sin^2 t - t^2 &= \frac{1}{2}(1 - 2t^2 - \cos 2t) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - 2t^2 - 1 + \frac{(2t)^2}{2} - \frac{(2t)^4}{24}\right) + O(t^6) \\
&= -\frac{t^4}{3} + O(t^6)
\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sin^2 t} = \frac{\sin^2 t - t^2}{t^2 \sin^2 t} = -\frac{1}{3} + O(t^2)$$

وعلى هذا نستنتج أنّ

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = 1 - \frac{\pi^2}{3}$$

وكذلك بملاحظة أنّ $F(1-x) = F(x)$ نستنتج

$$\lim_{x \to 1^-} F(x) = 1 - \frac{\pi^2}{3}$$

وهكذا نرى أنّه يمكن تمديد التابع F إلى تابعٍ $\widetilde{F}$ مستمرٍّ على المجال المغلق $[0,1]$ بوضع

$$\widetilde{F}(0) = \widetilde{F}(1) = 1 - \frac{\pi^2}{3}$$

③.1 لتكن x من $]0,1[$، عندئذ ينتمي العدادان $\frac{1+x}{2}$ و $\frac{x}{2}$ إلى المجال $]0,1[$ نفسه، ونجد مباشرة أنّ

$$\widetilde{F}\left(\frac{x}{2}\right)+\widetilde{F}\left(\frac{x+1}{2}\right)-4\widetilde{F}(x)=\frac{4}{(2-x)^2}+\frac{4}{(1+x)^2}$$

.2 نعرّف على المجال $[0,1]$ متتاليتي التوابع $(f_n)_{n\geq 2}$ و $(g_n)_{n\geq 1}$ بالصيغتين

$$g_n(x)=\frac{1}{(n+x)^2} \quad \text{و} \quad f_n(x)=\frac{1}{(n-x)^2}$$

①.2 نلاحظ في حالة $n\geq 2$ أنّ $\forall x\in[0,1],\ n-x\geq n-1$ ومن ثَمّ

$$\sup_{[0,1]}\left|f_n\right|=\frac{1}{(n-1)^2}$$

وهذا يُثبتُ أنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq 2} f_n$ متقاربة بالنظيم، ومن ثَمّ بانتظام على المجال $[0,1]$.

ومن جهة أخرى، في حالة $n\geq 1$ و x من $[0,1]$ يكون $n+x\geq n$، ومن ثَمّ

$$\sup_{[0,1]}\left|g_n\right|=\frac{1}{n^2}$$

وهذا يُثبتُ أنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} g_n$ متقاربة بالنظيم، ومن ثَمّ بانتظام على المجال $[0,1]$.

لنعرّف إذن التابع $\widetilde{H}$ على المجال $[0,1]$ بالصيغة

$$\widetilde{H}(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-x)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^2}.$$

②.2 نستنتج استمرار التابع $\widetilde{H}$ على المجال $[0,1]$ من استمرار التوابع $(f_n)_{n\geq 2}$ و $(g_n)_{n\geq 1}$ ومن التقارب المنتظم للمتسلسلتين $\sum_{n\geq 2} f_n$ و $\sum_{n\geq 1} g_n$ على المجال $[0,1]$. ونلاحظ أنّ

$$\widetilde{H}\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n+x)^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{(2n-x)^2}$$

$$\widetilde{H}\left(\frac{x+1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n+1+x)^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{(2n-1-x)^2}$$

إذن

$$\begin{aligned}\widetilde{H}\left(\frac{x}{2}\right)+\widetilde{H}\left(\frac{x+1}{2}\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(n+x)^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{(n-x)^2}-\frac{4}{(1+x)^2}-\frac{4}{(2-x)^2}\\&=4\widetilde{H}(x)-\frac{4}{(1+x)^2}-\frac{4}{(2-x)^2}\end{aligned}$$

3. لنعرّف في حالة x من $[0,1]$ المقدار $G(x)=\widetilde{F}(x)+\widetilde{H}(x)$.

①.3 لمّا كان التابعان $\widetilde{F}$ و $\widetilde{H}$ مستمرّين على المجال $[0,1]$ استنتجنا أنّ G مستمرٌّ على $[0,1]$، وإذا استفدنا من ③.1 و ②.2 استنتجنا أنّ

$$\forall x\in[0,1],\quad G\left(\frac{x}{2}\right)+G\left(\frac{x+1}{2}\right)=4G(x)$$

②.3 لمّا كان $x\mapsto\left|G(x)\right|$ مستمرّاً على المجال $[0,1]$ استنتجنا أنّه محدودٌ على هذا المجال وأنّه يبلغ حدّه الأعلى عليه. لنضع إذن $M=\left|G(x_0)\right|=\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|G(x)\right|$. عندئذ

$$\begin{aligned}4M&=4\left|G(x_0)\right|\\&=\left|G\left(\frac{x_0}{2}\right)+G\left(\frac{x_0+1}{2}\right)\right|\\&\leq\left|G\left(\frac{x_0}{2}\right)\right|+\left|G\left(\frac{x_0+1}{2}\right)\right|\leq M+M\end{aligned}$$

ومن ثَمّ $M=0$ وهذا يثبتُ أنّ

$$\forall x\in[0,1],\ G(x)=0$$

③.3 ليكن x من $]0,1[$. نستنتج من تعريف $\widetilde{H}$ أنّ

$$\begin{aligned}\widetilde{H}(x)+\frac{1}{(x-1)^2}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-x)^2}+\frac{1}{(n-x)^2}\right)\\&=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+x^2}{(n^2-x^2)^2}\end{aligned}$$

ولأنّ $\widetilde{H}(x)=-F(x)$ استنتجنا أنّ

$$-F(x)+\frac{1}{(x-1)^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+x^2}{(n^2-x^2)^2}$$

وبالعودة إلى صيغة F نستنتج أنّ

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} = \frac{1}{x^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+x^2}{(n^2-x^2)^2}$$

كما نستنتج من المساواة $\widetilde{F}\big(0\big)+\widetilde{H}\big(0\big)=0$ أنّ

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\widetilde{H}(0)=-\widetilde{F}(0)=\frac{\pi^2}{3}-1$$

إذن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ ، ويتمّ الإثبات. ∎

التوابع الأصليّة والتكامل المحدود

1. التوابع الأصليّة

1-1. **مبرهنة**. ليكن (a,b) من $\mathbb{R}^2$ يُحقِّق $a < b$. وليكن [1] $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ تابعاً مستمرّاً.

يوجد عندئذ تابع وحيد $F : [a,b] \to \mathbb{K}$ يحقِّق الشرطين:

- ينعدم التابع F عند a أي $F(a) = 0$.
- التابع F قابل للاشتقاق على $[a,b]$ و $H = 0$ $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b],$.

الإثبات

لنثبت أولاً وحدانية التابع F في حال وجوده. ليكن G تابعاً يحقق أيضاً الشرطين السابقين. عندئذ يكون التابع $H = F - G$ ثابتاً على المجال $[a,b]$ لأنّ مُشتقَّه معدوم في هذا المجال. ولـمّا كان $H(a) = 0$ فإننا نستنتج أنّ ، ومن ثَمّ يكون $F = G$.

لنأتِ الآن إلى إثبات الوجود. إذا كان $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ كثير حدود من $\mathbb{K}[X]$ فإننا نرمز بالرمز $\tilde{P}$ إلى كثير الحدود:

$$\tilde{P} = \sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} - \sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{k+1} a^{k+1}$$

ونلاحظ أنّ $\tilde{P}(a) = 0$ و $(\tilde{P})' = P$.

نجد استناداً إلى مبرهنة ڤايرشتراس Weierstrass متتالية من كثيرات الحدود $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathbb{K}[X]$ تتقارب متتالية التوابع الحدوديّة الموافقة لها بانتظام على المجال $[a,b]$ من f . نعرِّف إذن

$$F_n : [a,b] \to \mathbb{K},\ x \mapsto \tilde{P}_n(x)$$

فيكون لدينا من جهة أولى $F_n(a) = 0$ أيّاً كانت $n \geq 0$، ومن جهة ثانية تتقارب المتتالية $(F'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بانتظام من التابع f . نستنتج إذن أنّ المتتالية $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب بانتظام من تابع $F : [a,b] \to \mathbb{K}$ قابل للاشتقاق على $[a,b]$ ويحقِّق الشرطين المطلوبين. ❐

---

[1] $\mathbb{K}$ يمثِّل $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$.

1-2. **تعريف**. ليكن I مجالاً غير تافه من (a,b). ولكن $f : I \to \mathbb{K}$ تابعاً مستمرّاً. نقول إنّ التابع $F : I \to \mathbb{K}$ **تابع أصليّ** للتابع f إذا وفقط إذا كان F قابلاً للاشتقاق على I وكان $F' = f$.

1-3. **مبرهنة**. ليكن I مجالاً غير تافه من (a,b). ولكن $f : I \to \mathbb{K}$ تابعاً مستمرّاً. يوجد إذن تابع أصليّ $F : I \to \mathbb{K}$ للتابع f. ويكون كلُّ تابع أصليّ للتابع f من الشكل $c + F$ حيث c ثابت من $\mathbb{K}$.

الإثبات

① حالة $I = [a,b]$ و a و b عددان حقيقيان يحقّقان $a < b$.

نعلم بتطبيق المبرهنة السابقة أنّه يوجد تابع أصليّ $F : \left[a,b\right] \to \mathbb{K}$ للتابع f يحقّق الشرط $F(a) = 0$.

② حالة $I = [a,b[$ حيث a من $\mathbb{R}$، و $a < b \le +\infty$.

ليكن x عنصراً من $]a,b[$، بتطبيق الحالة السابقة على مقصور[2] التابع f على المجال $[a,x]$ نجد تابعاً أصلياً $G_x : [a,x] \to \mathbb{K}$ للتابع $f_{|[a,x]}$ يُحقّق $G_x(a) = 0$. ومن ثَمّ نعرّف التابع

$$F : [a,b[\to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & : \ x = a, \\ G_x(x) & : \ x \in]a,b[. \end{cases}$$

ليكن (x,y) من I^2 يُحقّق $a < x \le y < b$. إنّ التابع $G_{y|[a,x]} - G_x$ تابعٌ مشتقُّه معدوم على المجال $[a,x]$ فهو ثابت على هذا المجال، وهذا الثابت يساوي الصفر لانعدام هذا التابع عند a. نستنتج من ذلك الخاصة الآتية:

$$\forall (x,y) \in I^2, \ \ x \le y \Rightarrow F(x) = G_y(x)$$

لتكن x_0 من I، يوجد β في I يُحقّق $x_0 < \beta$. لمّا كان $x_0 \in [a,\beta]$، والتابع G_β يقبل $f(x_0)$ مشتقّاً له عند x_0، فإنّنا نستنتج من كون $F_{|[a,\beta]} = G_\beta$ أنّ F يقبل أيضاً $f(x_0)$ مشتقاً له عند x_0. والتابع F تابع أصليّ للتابع f.

---

[2] إنّ مقصور تابع $h : A \to B$ على مجموعة $C \subset A$ هو التابع $h_{|C} : C \to B, x \mapsto h(x)$.

③ حالة f حيث a من $\mathbb{R}$، و $-\infty \leq b < a$.

لنعرّف التابع $f_1 : [-a, -b[\to \mathbb{K},\ x \mapsto f(-x)$. نجد بتطبيق الحالة السابقة تابعاً أصلياً F_1 للتابع f_1. ونتيقّن بسهولة أنّ $-F_1(-x)$ تابع أصليّ للتابع f.

④ حالة $I =]a, b[$ حيث $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

نختار عدداً c من I. نجد استناداً إلى الحالتين السابقتين تابعاً أصلياً F_1 للتابع $f_{|[c,b[}$ وكذلك نجد تابعاً أصلياً F_2 للتابع $f_{|]a,c]}$. يمكننا أن نفترض –بإضافة ثابت إذا تطلّب الأمر– أنّ $F_1(c) = F_2(c)$. من ثَمّ نعرّف التابع

$$F :]a, b[\to \mathbb{K},\ x \mapsto \begin{cases} F_1(x) & : \quad x \in [c, b[\\ F_2(x) & : \quad x \in]a, c[\end{cases}$$

فيكون F تابعاً أصلياً للتابع f.

أخيراً، إذا كان $G : I \to \mathbb{K}$ أيضاً تابعاً أصلياً للتابع f، كان التابع $G - F$ تابعاً ثابتاً لأنّ مشتقّه معدوم على المجال I، و من ثَمّ يوجد c في $\mathbb{K}$ يُحقّق $G = c + F$. ❐

1-4. **تعريف**. ليكن (a, b) من $\mathbb{R}^2$ يُحقّق $a < b$. وليكن $f : [a, b] \to \mathbb{K}$. نقول إنّ f **مستمرٌّ قِطَعِياً**، إذا وفقط إذا وُجِدتْ n من $\mathbb{N}^*$، و $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ من $\mathbb{R}^{n+1}$ يحقّقان:

❶ $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

❷ يقبل التابع $f_{|]x_k, x_{k+1}[}$ التمديد إلى تابع مستمرٍّ على المجال $[x_k, x_{k+1}]$ وذلك أيّاً كان k من $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

نرمز بالرمز $C_P([a, b])$ إلى مجموعة التوابع الحقيقية المستمرّة قِطَعيّاً على $[a, b]$. وهي جبر جزئي من جبر التوابع المحدودة على $[a, b]$.

وإذا كان f من $C_P([a, b])$ فإننا نرمز إلى **نقاط استمرار التابع** f بالرمز $\mathrm{cont}(f)$ وهي مجموعة النقاط x من $[a, b]$ التي يكون عندها التابع f مستمراً. وتكون عندئذ المجموعة $[a, b] \backslash \mathrm{cont}(f)$ مجموعة منتهية.

1-5. **تعريف**. ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$. وليكن $f : I \to \mathbb{K}$. نقول إنّ f **مستمرٌّ قِطَعِيّاً محلياً**، إذا وفقط إذا كان مقصور f على أيّ مجال متراصٍ محتوى في I مستمرّاً قِطَعِيّاً، أي

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad a < b \Rightarrow f_{|[a,b]} \in C_P([a,b])$$

نرمز بالرمز $C_P^{\mathrm{loc}}\left(I\right)$ إلى مجموعة التوابع الحقيقية المستمرّة قِطَعِيّاً محليّاً على I. وهي جبر جزئي من جبر التوابع $\mathcal{F}\left(I,\mathbb{R}\right)$.

وإذا كان f من $C_P^{\mathrm{loc}}(I)$ رمزنا بالرمز $\mathrm{cont}(f)$ إلى مجموعة النقاط x من I التي يكون f مستمراً عندها.

1-6. **تعريف**. ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$. وليكن f تابعاً من $C_P^{\mathrm{loc}}(I)$. نقول إنّ التابع $F : I \to \mathbb{K}$ **تابعٌ أصليٌّ** للتابع f، إذا وفقط إذا تحقّق الشرطان

① التابع F مستمرٌّ على I.

② التابع F يقبل الاشتقاق عند كلّ نقطة من $\mathrm{cont}(f)$ ويكون
$\forall x \in \mathrm{cont}(f), \;\; F'(x) = f(x)$

1-7. **مبرهنة**. ليكن (a,b) من $\mathbb{R}^2$ يُحقِّق $a < b$. وليكن $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ تابعاً من $C_P\left([a,b]\right)$. حينئذ يقبل التابع f تابعاً أصليّاً $F : [a,b] \to \mathbb{K}$. ويكون عندئذ كل تابع أصلي للتابع f من النمط $F + c$ حيث c ثابت من $\mathbb{K}$.

الإثبات

لتكن $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ من $\mathbb{R}^{n+1}$ تُحقِّق $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$، وبحيث يقبل التابعُ $f_{|]x_k,x_{k+1}[}$ التمديد إلى تابع مستمرٍّ $f_k : [x_k, x_{k+1}] \to \mathbb{K}$، وذلك أيّاً كان k من $\{0,\ldots,n-1\}$.

يمكننا افتراض أنّ $n \geq 2$ وإلاّ كان f مستمراً وليس هناك ما يجب إثباته في هذه الحالة.

أيّاً كان k من $\{0,\ldots,n-1\}$، نجد اعتماداً على 1-1 تابعاً $F_k : [x_k, x_{k+1}] \to \mathbb{K}$ يحقِّقُ الشرطين $F_k' = f_k$ و $F_k(x_k) = 0$.

نُعرِّف إذن $F:[a,b]\to\mathbb{K}$ كما يأتي:

$$F(x)=\begin{cases} F_0(x) & : \quad x\in[x_0,x_1[,\\ F_i(x)+\sum_{k=0}^{i-1}F_k(x_{k+1}) & : \quad x\in[x_i,x_{i-1}[,1\le i<n,\\ F_{n-1}(x)+\sum_{k=0}^{n-2}F_k(x_{k+1}) & : \quad x\in[x_{n-1},x_n].\end{cases}$$

نلاحظ أنّه، أيّاً كان i من $\{1,\ldots,n-1\}$، كان

$$\lim_{x\to x_i^-}F(x)=\sum_{k=0}^{i-1}F_k(x_{k+1})=\lim_{x\to x_i^+}F(x)=F(x_i)$$

فالتابع F تابعٌ مستمرٌّ على $[a,b]$. وأيّاً كان x من $[a,b]\backslash\{x_0,\ldots,x_n\}$ يقبل التابع F الاشتقاق عند x، ويكون $F'(x)=f(x)$.

لنفترض أنّ إحدى النقاط x_j تنتمي إلى $\mathrm{cont}(f)$. يوجد عندئذ مجال J محتوى في $[a,b]$ يكون التابع F قابلاً للاشتقاق عند كل نقطة من $J\backslash\{x_j\}$ ويكون

$$\lim_{x\to x_j,x\ne x_j}F'(x)=\lim_{x\to x_j,x\ne x_j}f(x)=f(x_j)$$

فالتابع F قابل للاشتقاق عند x_j ويحقّق $F'(x_j)=f(x_j)$. نستنتج إذن أنّ التابع F تابع أصليٌّ للتابع f.

ومن جهة أخرى، ليكن G تابعاً أصلياً آخر للتابع f، ولنضع $H=G-F$. إنّ التابع H قابل للاشتقاق ومشتقُّه معدوم على كلٍّ من المجالات $\big(]x_k,x_{k+1}[\big)_{0\le k<n}$، فهو إذن ثابت على كلٍّ من هذه المجالات. ولمّا كان H مستمرّاً على المجال $[a,b]$، استنتجنا أنه ثابت على هذا المجال، أي يوجد c من $\mathbb{K}$ يُحقّق $G=c+F$. □

1-8. **مبرهنة**. ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$، وليكن f تابعاً من $C_P^{\text{loc}}(I)$. حينئذ يقبل التابع f تابعاً أصليّاً $F : I \to \mathbb{K}$. ويكون عندئذ كل تابع أصلي للتابع f من النمط $F + c$ حيث c ثابت من $\mathbb{K}$.

الإثبات

تنتج هذه المبرهنة من المبرهنة السابقة، وذلك بأسلوب مماثل لذلك الذي اتبعناه في إثبات المبرهنة 1-3. انطلاقاً من المبرهنة 1-1. ❐

1-9. **مثال**. إذا كان $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ هو تابع الجزء الصحيح، وهو تابع من $C_P^{\text{loc}}(\mathbb{R})$، فإنّنا نتحقّق بسهولة أنّ التابع

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x \cdot E(x) - \frac{1}{2}E(x)\big(1 + E(x)\big)$$

هو تابع أصليٌّ للتابع E.

2. التكامل المحدود

2-1. **تعريف**. ليكن I مجالاً غير تافه في $\mathbb{R}$. وليكن f تابعاً مستمراً قِطَعِياً محليّاً على I. وأخيراً ليكن (a,b) من I^2. لا يتعلق المقدار $F(b) - F(a)$ بالتابع F، وذلك أيّاً كان التابع الأصلي F للتابع f. نسمّي إذن هذا العددَ **التكامل المحدود** من a إلى b للتابع f، ونرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ أو $\int_a^b f$. أي

$$\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t = \Big[\, F(t) \,\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

و F تابع أصليٌّ ما للتابع f.

2-2. **مبرهنة**. ليكن I مجالاً غير تافه في $\mathbb{R}$. و ليكن f تابعاً مستمراً قِطَعِياً محليّاً على I .

1. إذا كان (a,b) من I^2 ، كان $\int_a^b f = -\int_b^a f$.
2. إذا كان (a,b,c) من I^3 ، كان $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ وهي ما يُسمّى **علاقة شال** Chasles.
3. إذا كان (a,b) من I^2 ، يُحقّق $a < b$ ، وكان f يأخذ قيمه في $\mathbb{R}$ كان

$$(b-a)\inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f \leq (b-a)\sup_{[a,b]} f$$

4. إذا كان (a,b) من I^2 ، يُحقّق $a < b$ ، وكان $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0$ ، كان

$$\int_a^b f \geq 0$$

الإثبات

- الخاصّتان 1. و 2. واضحتان من التعريف.
- ليكن (a,b) من I^2 ، يُحقّق $a < b$ ، ولنضع

$$M = \sup_{[a,b]} f \quad \text{و} \quad m = \inf_{[a,b]} f\ .$$

ولتكن $(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ من $\mathbb{R}^{n+1}$ تُحقّق $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ، وبحيث يقبل $f|_{]x_k,x_{k+1}[}$ التمديد إلى تابع مستمرٍّ $f_k : [x_k,x_{k+1}] \to \mathbb{R}$ ، وذلك أيّاً كان k من $\{0,\ldots,n-1\}$. أخيراً ليكن F_k التابع الأصليَّ للتابع f_k . تتيح لنا علاقة شال كتابة

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \big(F_k(x_{k+1}) - F_k(x_k)\big)$$

فيكون لدينا بالاستفادة من مبرهنة التزايدات المحدودة

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k)$$

حيث $\xi_k \in \left]x_k,x_{k+1}\right[$. نستنتج من ذلك أنّ

$$\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) m \leq \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) M$$

ومن ثَمّ

$$(b-a)m \le \int_a^b f \le (b-a)M$$

ومنه الخاصّة 3.

▪ وتنتج الخاصة 4. بملاحظة أنّ $0 \le \inf\limits_{[a,b]} f$. ❐

2-3. **مبرهنة**. ليكن I مجالاً غير تافه في $\mathbb{R}$. وليكن f و g تابعين مستمرين قِطَعِياً محليّاً على I. عندئذ، أيّاً كان λ من $\mathbb{K}$، كان

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$$

الإثبات

لتكن F و G و H توابع أصلية للتوابع f و g و $\lambda f + g$ على التوالي. وهي موجودة استناداً إلى المبرهنة 1-8. ولنضع $U = H - \lambda F - G$.

ليكن (a,b) عنصراً من I^2 يُحقّق $a < b$. إنّ كلاً من $f_{|[a,b]}$ و $g_{|[a,b]}$ تابعٌ مستمرٌّ قِطَعِيّاً فالمجموعة $\mathcal{A} = [a,b] \backslash (\mathrm{cont}(f) \cap \mathrm{cont}(g))$ منتهية.

إذا كان x عنصراً من $[a,b] \backslash \mathcal{A}$، كانت التوابع f و g و $\lambda f + g$ مستمرّة عند x، ومن ثَمّ كان U قابلاً للاشتقاق عند x و $U'(x) = 0$. نستنتج إذن أنّ التابع U تابع ثابت على كلٍّ من مجالات المجموعة $[a,b] \backslash \mathcal{A}$، ولمّا كان U مستمرّاً على $[a,b]$ نتج أنّ U ثابتٌ على $[a,b]$، ومنه $U(b) - U(a) = 0$. يسمح لنا هذا أن نستنتج أنّ

$$H(b) - H(a) = \lambda\big(F(b) - F(a)\big) + G(b) - G(a)$$

وهذه هي الخاصّة المطلوبة. ❐

2-4. **نتيجة**. ليكن I مجالاً غير تافه في $\mathbb{R}$. وليكن f تابعاً مستمراً قِطَعِياً محليّاً على I. عندئذ، أيّاً كان (a,b) من I^2 كان $\int_a^b \overline{f} = \overline{\int_a^b f}$، ومن ثَمّ

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f) \quad \text{و} \quad \mathrm{Im}\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f)$$

الإثبات

في الحقيقة، تنتج المساواة الأولى من الملاحظة المباشرة التالية : إذا كان F تابعاً أصليّاً للتابع f على I كان كذلك $\overline{F}$ تابعاً أصليّاً للتابع $\overline{f}$ على I. وعلى هذا نستخلص الخواصّ المتعلّقة بالجزأين الحقيقي والتخيّلي من المبرهنة 2-3 مطبّقة على المساواتين

$$\operatorname{Im} f = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left(f - \overline{f}\right) \quad \text{و} \quad \operatorname{Re} f = \frac{1}{2}\left(f + \overline{f}\right) \qquad \square$$

2-5. **مبرهنة**. ليكن I مجالاً غير تافه في $\mathbb{R}$. وليكن f تابعاً مستمراً قِطَعِياً محليّاً على I. عندئذ يكون

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad a < b \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

الإثبات

- لنبدأ بدراسة الحالة التي يأخذ فيها f قيماً حقيقيّة.

ليكن (a,b) عنصراً من I^2 يُحقّق $a < b$. لمّا كان كلٌّ من التابعين $|f| - f$ و $|f| + f$ تابعاً موجباً، أمكننا بناءً على المبرهنة 2-2 أن نكتب

$$\int_a^b \left(|f| + f\right) \geq 0$$

و

$$\int_a^b \left(|f| - f\right) \geq 0$$

ومن المبرهنة السابقة نستنتج أنّ

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

وهي المتراجحة المطلوبة في هذه الحالة.

- الحالة العامّة التي يأخذ فيها f قيمه في $\mathbb{C}$.

يمكننا أن نفترض أنّ $\int_a^b f \neq 0$ ، وعندئذ يوجد θ في $\mathbb{R}$ ، يُحقّق

$$\int_a^b f = \left|\int_a^b f\right| \cdot e^{\mathrm{i}\,\theta}$$

وعندئذ يكون

$$\left|\int_a^b f\right| = e^{-\mathrm{i}\theta}\cdot\int_a^b f = \int_a^b (e^{-\mathrm{i}\theta}f)$$

ولأنّ الطرف الأيسر من المساواة السابقة حقيقي استنتجنا أنّ

$$\left|\int_a^b f\right| = \mathrm{Re}\int_a^b (e^{-\mathrm{i}\theta}f) = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-\mathrm{i}\theta}f)$$

فإذا استفدنا من النتيجة الموافقة للتوابع الحقيقيّة أمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f\right| &= \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-\mathrm{i}\theta}f) \leq \int_a^b \left|\mathrm{Re}(e^{-\mathrm{i}\theta}f)\right| \\ &\leq \int_a^b \left|e^{-\mathrm{i}\theta}f\right| = \int_a^b |f|\end{aligned}$$

وهذا هو المطلوب. ❐

2-6. تعريف. ليكن $[a,b]$ مجالاً مغلقاً غير تافه من $\mathbb{R}$. وليكن

$$\sigma = (t_0,t_1,\ldots,t_m,\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m+1}\times\mathbb{R}^m$$

نقول إنّ σ **تقسيمة منقوطة** للمجال $[a,b]$، إذا وفقط إذا تحقّق الشرطان الآتيان:

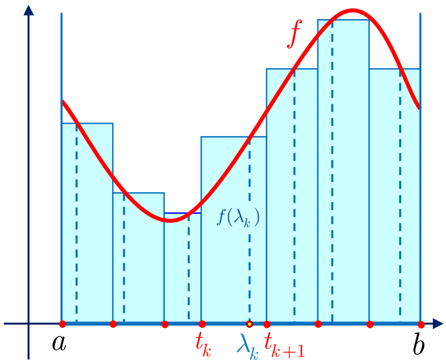
- $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$.
- $\forall i \in \{0,1,\ldots,m-1\}, \quad \lambda_i \in [t_i,t_{i+1}]$.

ونسمّي المقدار $h(\sigma) = \max\limits_{0\leq i<m}(t_{i+1}-t_i)$ **خطوة التقسيمة المنقوطة** σ .

2-7. تعريف. ليكن $[a,b]$ مجالاً مغلقاً غير تافه من $\mathbb{R}$. وليكن f من $\mathcal{F}\left([a,b],\mathbb{R}\right)$ ، وأخيراً لتكن $\sigma = (t_0,t_1,\ldots,t_m,\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m+1}\times\mathbb{R}^m$ تقسيمة منقوطة للمجال $[a,b]$. عندئذ نرمز بالرمز $S(f,\sigma)$ إلى المقدار

$$S(f,\sigma) = \sum_{k=0}^{m-1}(t_{k+1}-t_k)\,f(\lambda_k)$$

ونسمّيه **مجموع ريمان** Riemann للتابع f الموافق للتقسيمة المنقوطة σ .



مجموع ريمان $S(f,\sigma)$

8-2. **مبرهنة**. ليكن $[a,b]$ مجالاً مغلقاً غير تافه من $\mathbb{R}$. وليكن f تابعاً مستمراً قِطَعيّاً على $[a,b]$، ولتكن $0 < \varepsilon$. عندئذ توجد $0 < \eta$ تُحقِّق

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - S(f,\sigma)\right| < \varepsilon$$

وذلك أيّاً كانت التقسيمة المنقوطة σ للمجال $[a,b]$ المُحقِّقَة للشرط $h(\sigma) < \eta$.

الإثبات

سنفترض أنّ f يأخذ قيمه في $\mathbb{R}$، ونستنتج الحالة العامّة بتطبيق النتيجة على كلٍّ من $\operatorname{Re} f$ و $\operatorname{Im} f$.

لمّا كان f تابعاً مستمراً قِطَعيّاً على $[a,b]$، فهو

- من جهة أولى، محدود على $[a,b]$، إذن يمكننا أن نعرِّف $\sup_{t\in[a,b]} \left|f(t)\right| = M$.
- ومن جهة ثانية، يوجد $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ في $\mathbb{R}^{n+1}$ يحقّق

① $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

② ويقبل التابعُ $f|_{]x_i,x_{i+1}[}$ التمديدَ إلى تابعٍ مستمرٍّ ، ومن ثَمّ مستمرٍّ بانتظام، على $[x_i, x_{i+1}]$ وذلك أيّاً كان الدليل i من المجموعة $\{0,1,\ldots,n-1\}$.

لتكن إذن $0 < \varepsilon$، يوجد $0 < \eta_1$ يُحقِّق، أيّاً كان i من $\{0,1,\ldots,n-1\}$، الشرط

$$\forall (x,y) \in \left(]x_i, x_{i+1}[\right)^2, \quad \left|x-y\right| < \eta_1 \Rightarrow \left|f(x)-f(y)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad ❶$$

لنضع بالتعريف

$$\eta = \min\left(\eta_1, \frac{\varepsilon}{4Mn}, \min_{0<k<n}(x_{k+1} - x_k)\right)$$

ولتكن

$$\sigma = (t_0, t_1, \ldots, t_m, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^m$$

تقسيمة منقوطة ما للمجال $[a,b]$ تُحقّق $h(\sigma) < \eta$.

يضمن اختيارنا للعدد η أن يحتوي كل مجال $[t_i, t_{i+1}[$ على عنصر واحد على الأكثر من المجموعة $\{x_k : 0 \leq k \leq n\}$. فإذا عرّفنا المجموعة

$$\mathcal{A} = \left\{ i \in \left\{0,1,\ldots,m-1\right\} : \exists k < n, x_k \in [t_i, t_{i+1}[\ \right\}$$

كان عدد عناصر هذه المجموعة n عنصراً على الأكثر، أي $\mathrm{card}(\mathcal{A}) \leq n$.

لنعرّف كذلك

$$\mathcal{B} = \{0,1,\ldots,m-1\} \backslash \mathcal{A}$$

وليكن F تابعاً أصليّاً ما للتابع f. وليكن i من $\{0,1,\ldots,n-1\}$، نناقش الحالتين التاليتين:

- $i \in \mathcal{B}$. في هذه الحالة نجد مجالاً $[x_k, x_{k+1}]$ يحقّق $[t_i, t_{i+1}] \subset [x_k, x_{k+1}]$، ومن ثَمّ نستنتج انطلاقاً من مبرهنة التزايدات المحدودة ومن ❶ أنّ

$$\left|\frac{F(t_{i+1}) - F(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - f(\lambda_i)\right| = \left|f(\underbrace{\xi_i}_{]t_i, t_{i+1}[\ni}) - f(\lambda_i)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

ومن ثَمّ

$$\left|F(t_{i+1}) - F(t_i) - f(\lambda_i)(t_{i+1} - t_i)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(t_{i+1} - t_i) \quad ❷$$

- $i \in \mathcal{A}$. في هذه الحالة يمكننا أن نكتب

$$\left|F(t_{i+1}) - F(t_i)\right| \leq M(t_{i+1} - t_i) \leq M\eta$$

ومن ثَمّ

$$\left|F(t_{i+1}) - F(t_i) - f(\lambda_i)(t_{i+1} - t_i)\right| \leq 2M\eta \quad ❸$$

وأخيراً نجد بالاستفادة من ❷ و❸ ما يلي:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\,dt - S(f,\sigma)\right| &= \left|\sum_{i=0}^{m-1}\Big(F(t_{i+1}) - F(t_i) - f(\lambda_i)(t_{i+1}-t_i)\Big)\right| \\ &\le \sum_{i=0}^{m-1}\left|F(t_{i+1}) - F(t_i) - f(\lambda_i)(t_{i+1}-t_i)\right| \\ &\le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i\in\mathcal{B}}(t_{i+1}-t_i) + 2M\eta\,\mathrm{card}(\mathcal{A}) \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + 2M\eta n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

وهو المطلوب إثباته. ❐

2-9. **نتيجة**.ليكن $[a,b]$ مجالاً مغلقاً غير تافه من $\mathbb{R}$. وليكن f تابعاً مستمراً قِطَعياً على $[a,b]$. عندئذ يكون

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$$

الإثبات

يكفي أن نتأمّل التقسيمة المنقوطة التالية $\sigma = (t_0,t_1,\ldots,t_n,t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^n$ حيث $t_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ ، وهي تُحَقِّق $h(\sigma) = \frac{b-a}{n}$. ❐

مثال. بأخذ $f(x) = x^\alpha$ في حالة $\alpha \ge 0$ ، والمكاملة على المجال $[0,1]$ نستنتج أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n}k^\alpha = \int_0^1 x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{1}{1+\alpha}$$

2-10.**تعريف**. ليكن $[a,b]$ مجالاً مغلقاً غير تافه من $\mathbb{R}$. وليكن التابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. نقول إنّ التابع f ينتمي إلى **الصف** $\mathcal{R}$ ، ونكتب $f\in\mathcal{R}([a,b])$ إذا وفقط إذا وُجِدَتْ متتالية من التوابع المستمرّة قِطَعيّاً على $[a,b]$ ، متقاربة بانتظام من التابع f .

2-11. **مبرهنة**. ليكن $[a,b]$ مجالاً مغلقاً غير تافه من $\mathbb{R}$. تضمُّ مجموعة التوابع $\mathcal{R}([a,b])$ جميع التوابع المستمرّة قطعياً على $[a,b]$، وهي جبر جزئي مغلق – بالنسبة إلى التقارب المنتظم– من جبر التوابع الحقيقية المحدودة على $[a,b]$، إذ تتحقق بوجه خاص الخواص التالية:

1. إذا كان f من $\mathcal{R}([a,b])$، كان f تابعاً محدوداً على $[a,b]$.
2. إذا كان f من $\mathcal{R}([a,b])$، انتمى $\left|f\right|$ إلى $\mathcal{R}([a,b])$.
3. إذا كان f و g من $\mathcal{R}([a,b])$، و λ من $\mathbb{K}$، انتمى $f+\lambda g$ إلى $\mathcal{R}([a,b])$.
4. إذا كان f و g من $\mathcal{R}([a,b])$، انتمى $f\cdot g$ إلى $\mathcal{R}([a,b])$.
5. إذا كانت $(f_n)_{n\ge 0}$ متتالية من $\mathcal{R}([a,b])$ متقاربة بانتظام من $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{K}$ انتمى f إلى $\mathcal{R}([a,b])$.

الإثبات

1. ليكن f من $\mathcal{R}([a,b])$، ولتكن $(\varphi_n)_{n\ge 0}$ متتالية من $C_P([a,b])$ متقاربة بانتظام من f . إذن يوجد n_0 يُحقّق $\sup\limits_{[a,b]}\left|f-\varphi_{n_0}\right|\le 1$، ومن ثَمّ

$$\sup_{[a,b]}\left|f\right|\le 1+\sup_{[a,b]}\left|\varphi_{n_0}\right|$$

2. هذه الخاصّة واضحة.

3. ليكن f و g من $\mathcal{R}([a,b])$، ولتكن λ من $\mathbb{K}$. إذن توجد متتاليتا توابع $(\varphi_n)_{n\ge 0}$ و $(\psi_n)_{n\ge 0}$ من $C_P([a,b])$ متقاربتان بانتظام من f و g على الترتيب. تبيِّن المتراجحة

$$\sup_{[a,b]}\left|f+\lambda g-(\varphi_n+\lambda\psi_n)\right|\le\sup_{[a,b]}\left|f-\varphi_n\right|+\left|\lambda\right|\sup_{[a,b]}\left|g-\psi_n\right|$$

أنّ المتتالية $\left(\varphi_n+\lambda\psi_n\right)_{n\ge 0}$ من $C_P([a,b])$ تتقارب بانتظام من $f+\lambda g$.

4. ليكن f و g من $\mathcal{R}([a,b])$، إذن توجد متتاليتان $(\varphi_n)_{n\ge 0}$ و $(\psi_n)_{n\ge 0}$ من $C_P([a,b])$ متقاربتان بانتظام من f و g على الترتيب.

ولكن لدينا

$$fg-\varphi_n\psi_n=(g-\psi_n)f+(f-\varphi_n)g-(f-\varphi_n)(g-\psi_n)$$

ومن ثَمّ، تُبيِّن المتراجحة الآتية

$$\sup_{[a,b]}\left|fg-\varphi_n\psi_n\right| \le \sup_{[a,b]}\left|f\right|\cdot\sup_{[a,b]}\left|g-\psi_n\right| + \sup_{[a,b]}\left|g\right|\cdot\sup_{[a,b]}\left|f-\varphi_n\right|$$
$$+\sup_{[a,b]}\left|f-\varphi_n\right|\cdot\sup_{[a,b]}\left|g-\psi_n\right|$$

أنّ المتتالية $(\varphi_n\psi_n)_{n\ge 0}$ من $C_P([a,b])$ تتقارب بانتظام من $f\,g$.

5. لتكن $(f_n)_{n\ge 0}$ متتالية من $\mathcal{R}([a,b])$ متقاربة بانتظام من تابع $f:[a,b]\to\mathbb{K}$. أيّاً كان n من $\mathbb{N}$ ، يوجد تابع φ_n من $C_P([a,b])$ يُحقّق $\sup_{[a,b]}\left|f_n-\varphi_n\right|\le 2^{-n}$ ، وذلك لأنّ f_n من الصف $\mathcal{R}$. ويكون لدينا

$$\sup_{[a,b]}\left|f-\varphi_n\right| \le \sup_{[a,b]}\left|f-f_n\right| + \sup_{[a,b]}\left|f_n-\varphi_n\right| \le \sup_{[a,b]}\left|f-f_n\right| + 2^{-n}$$

وهذا يثبت أنّ $(\varphi_n)_{n\ge 0}$ تتقارب بانتظام من التابع f . ❐

2-12. **تعريف**. ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$. وليكن التابع $f:I\to\mathbb{K}$. نقول إنّ التابع f ينتمي إلى **الصف** $\mathcal{R}^{\text{loc}}$ ، ونكتب $f\in\mathcal{R}^{\text{loc}}(I)$ ، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط:

$$\forall (a,b)\in I^2,\quad a<b \Rightarrow f_{|[a,b]}\in\mathcal{R}([a,b])$$

2-13. **مبرهنة وتعريف**. ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$. وليكن التابع f من $\mathcal{R}^{\text{loc}}(I)$ ، و (a,b) من I^2 يُحقّق $a<b$. يوجد عندئذ عدد حقيقي وحيد $I_a^b(f)$ يُحقق

$$I_a^b(f)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n$$

أيّاً كانت المتتالية $(\varphi_n)_{n\ge 0}$ من $C_P([a,b])$ المتقاربة بانتظام على $[a,b]$ من f . نسمي حينئذ العدد $I_a^b(f)$ **التكامل المحدود** للتابع f من a إلى b ، و نرمز إليه بالرمز $\int_a^b f$ أو $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$. وأخيراً إذا كان $a<b$ فإننا نضع بالتعريف

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

الإثبات

لتكن $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ متتالية من $C_P([a,b])$ متقاربة بانتظام على $[a,b]$ من التابع f . ولتكن $0<\varepsilon$، عندئذ يوجد في $\mathbb{N}$ عددٌ n_0 يُحقّق

$$n \geq m > n_0 \Rightarrow \sup_{[a,b]}\left|\varphi_n - \varphi_m\right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

و من ثَمّ، في حالة $n_0 < m \leq n$، يكون لدينا

$$\left|\int_a^b \varphi_n - \int_a^b \varphi_m\right| \leq \int_a^b\left|\varphi_n - \varphi_m\right| \leq (b-a)\sup_{[a,b]}\left|\varphi_n - \varphi_m\right| \leq \varepsilon$$

نستنتج أنّ المتتالية $\left(\int_a^b \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقِّق شرط كوشي في $\mathbb{R}$ فهي متقاربة.

لنضع $\ell = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n$، ولتكن $(\psi_n)_{n\geq 0}$ متتالية أخرى من $C_P([a,b])$ متقاربة بانتظام على $[a,b]$ من التابع f . عندئذ تتقارب المتتالية $\left(\varphi_n - \psi_n\right)_{n\geq 0}$ بانتظام من 0 . ولمّا كان

$$\left|\int_a^b \varphi_n - \int_a^b \psi_n\right| \leq (b-a)\sup_{[a,b]}\left|\varphi_n - \psi_n\right|$$

استنتجنا أنّ

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n$$

وبهذا يتم إثبات المطلوب. ❐

2-14. مبرهنة. ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$. عندئذ تتحقَّق الخواص التالية:

1. أيّاً كان f من $\mathcal{R}^{\text{loc}}(I)$، وأيّاً كان (a,b,c) من I^3، كان
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

2. أيّاً كان f و g من $\mathcal{R}^{\text{loc}}(I)$، وأيّاً كان λ من $\mathbb{K}$، و (a,b) من I^2، فلدينا
$$\int_a^b\left(f+\lambda g\right) = \int_a^b f + \lambda\int_a^b g$$

3. أيّاً كان التابعان الحقيقيان f و g من $\mathcal{R}^{\text{loc}}(I)$ ، وأيّاً كان (a,b) من I^2 حيث $a<b$ ، فلدينا

$$\big(\forall x\in[a,b],\quad g(x)\le f(x)\big)\Rightarrow \int_a^b g\le\int_a^b f$$

4. أيّاً كان f من $\mathcal{R}^{\text{loc}}(I)$ ، وأيّاً كان (a,b) من I^2 حيث $a<b$ ، كان

$$\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|$$

5. ليكن f من $\mathcal{R}^{\text{loc}}(I)$ وليكن (a,b) من I^2 حيث $a<b$ ، عندئذ أيّاً كانت $\varepsilon>0$ توجد $\eta>0$ تُحقّق

$$\left|\int_a^b f-S(f,\sigma)\right|<\varepsilon$$

وذلك أيّاً كانت التقسيمة المنقوطة σ للمجال $[a,b]$ المحقّقة للشرط $h(\sigma)<\eta$.

6. لتكن $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{R}([a,b])$ متقاربة بانتظام من تابع f ، عندئذ يكون

$$\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$$

7. ليكن f من $\mathcal{R}^{\text{loc}}(I)$ ولتكن α من I . نعرّف التابع

$$\forall x\in I,\quad F(x)=\int\limits_{\alpha}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

عندئذ يكون F تابعاً مستمراً على I . وإذا كان f مستمراً عند نقطة x_0 كان F قابلاً للاشتقاق عند x_0 وتحقّقتِ المساواة $F'(x_0)=f(x_0)$.

الإثبات

1. هذه العلاقة واضحة انطلاقاً من مثيلتها بالنسبة إلى التوابع المستمرّة قِطَعِيّاً.

2. يمكننا أن نفترض أنّ $a<b$. لتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين من $C_P([a,b])$ متقاربتين بانتظام من $f_{|[a,b]}$ و $g_{|[a,b]}$ على التوالي. عندئذ تتقارب المتتالية $\left(f_n+\lambda g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ بانتظام من $(f+\lambda g)_{|[a,b]}$.

ومن ثمّ يكون

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+\lambda g) &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b (f_n+\lambda g_n)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n + \lambda \lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n\\ &= \int_a^b f + \lambda\int_a^b g\end{aligned}$$

3. لتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين من $C_P([a,b])$ متقاربتين بانتظام من $f|_{[a,b]}$ و $g|_{[a,b]}$ على التوالي. عندئذ نعرّف

$$\alpha_n = \sup_{x\in[a,b]}\left|f_n(x)-f(x)\right|$$

و

$$\beta_n = \sup_{x\in[a,b]}\left|g_n(x)-g(x)\right|$$

ينتج من ذلك أنّ

$$\forall x\in[a,b],\ \ g_n(x)-\beta_n \le g(x)\le f(x)\le f_n(x)+\alpha_n$$

أو

$$\forall x\in[a,b],\ \ g_n(x)\le f_n(x)+\alpha_n+\beta_n$$

ومنه

$$\int_a^b g_n \le \int_a^b f_n + (\alpha_n+\beta_n)(b-a)$$

وبملاحظة أنّ $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\beta_n = 0$ ، نحصل على المتراجحة المطلوبة بجعل n تسعى إلى $+\infty$ في المتراجحة السابقة.

4. يمكن اتّباع برهان المبرهنة 2-5. نفسه.

5. لتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $C_P([a,b])$ متقاربة بانتظام من $f|_{[a,b]}$. ولتكن $0<\varepsilon$. يوجد n في $\mathbb{N}$ يُحقّق

$$\sup_{x\in[a,b]}\left|f_n(x)-f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \tag{1}$$

وتبعاً للمبرهنة 2-8 نجد $0<\eta$ يُحقّق

$$(2)\qquad \left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - S(f_n,\sigma)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

وذلك أيّاً كانت التقسيمة المنقوطة σ التي تُحقق الشرط $h(\sigma) < \eta$.

ولكن من جهة أولى لدينا، بالاستفادة من (1)، ما يأتي

$$(3)\qquad \left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b \left|f_n(x) - f(x)\right|\mathrm{d}\,x \le \frac{\varepsilon}{3}$$

ومن جهة ثانية إذا كانت $\sigma = (t_0, t_1, \ldots, t_m, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^m$ تقسيمة منقوطة ما للمجال $[a,b]$، فإنّنا نجد أيضاً استناداً إلى (1) أنّ

$$(4)\qquad \begin{aligned} \left|S(f_n,\sigma) - S(f,\sigma)\right| &= \left|\sum_{i=0}^{m-1}(t_{i+1}-t_i)(f_n(\lambda_i) - f(\lambda_i)\right| \\ &\le \sum_{i=0}^{m-1}(t_{i+1}-t_i)\frac{\varepsilon}{3(b-a)} = \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

وباستعمال (2) و (3) و (4) نجد أنّ

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x - S(f,\sigma)\right| < \varepsilon$$

وذلك أيّاً كانت التقسيمة المنقوطة σ التي تُحقق الشرط $h(\sigma) < \eta$.

6.لتكن $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $C_P([a,b])$ متقاربة بانتظام من $f|_{[a,b]}$، نعلم عندئذ أنّ f ينتمي إلى $\mathcal{R}([a,b])$. ويكون لدينا

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \le \int_a^b \left|f_n - f\right| \le (b-a)\sup_{[a,b]}\left|f_n - f\right|$$

وهذا يثبت أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b f$$

7. يكفي أن نثبت أنّ $F_{|[a,b]}$ يحقّق الخواصّ المطلوبة، أيّاً كان (a,b) من I^2 حيث $a<b$.

ليكن إذن (a,b) من I^2 حيث $a<b$. لمّا كان $f_{|[a,b]}$ من الصف $\mathcal{R}$ كان محدوداً، ووجدنا $M=\sup_{[a,b]}\left|f(t)\right|$. ومن ثمّ

$$\forall (x,y)\in[a,b]^2,\quad \left|F(x)-F(y)\right|=\left|\int_y^x f(t)\mathrm{d}t\right|\le M\left|y-x\right|$$

فالتابع $F_{|[a,b]}$ مستمرٌّ على $[a,b]$.

لنفترض أنّ f مستمرٌّ عند x_0 من $[a,b]$، ولتكن $\varepsilon>0$، يوجد عندئذ $\eta>0$ تُحقّق

$$(t\in[a,b])\wedge\left(\left|t-x_0\right|<\eta\right)\Rightarrow\left|f(t)-f(x_0)\right|<\varepsilon$$

فإذا كان y من $[a,b]$، يُحقّق $0<\left|y-x_0\right|<\eta$ كان

$$F(y)-F(x_0)-(y-x_0)f(x_0)=\int_{x_0}^{y}\left(f(t)-f(x_0)\right)\mathrm{d}\,t$$

ومنه

$$\left|F(y)-F(x_0)-(y-x_0)f(x_0)\right|\le\varepsilon\left|y-x_0\right|$$

أو

$$\left|\frac{F(y)-F(x_0)}{y-x_0}-f(x_0)\right|\le\varepsilon$$

وهذا يثبت أنّ F يقبل الاشتقاق عند x_0 و أنّ مشتقَّه عندها هو $f(x_0)$. ❐

تنبع أهمية المبرهنة التالية من كونها تُعطي خاصّة بسيطة نسبيّاً تُميِّزُ التوابع التي تنتمي إلى الصف $\mathcal{R}$. سنذكر هذه المبرهنة دون إثبات، لأن إثباتها يتّصف بالتقنيّة دون العمق، ولا يتطلب معارفَ أو أفكاراً جديدة.

2-15. **مبرهنة**. ليكن $[a,b]$ مجالاً مغلقاً ومحدوداً وغير تافه من $\mathbb{R}$. وليكن f تابعاً من $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$. عندئذ هناك تكافؤ بين الخاصّتين الآتيتين:

① ينتمي التابع f إلى الصف $\mathcal{R}$.

② يقبل التابع f نهاية منتهية من اليمين عند كل نقطة من $[a,b[$، ونهاية منتهية من اليسار عند كل نقطة من $]a,b]$.

2-16. **ملاحظة**. ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$ ، وليكن f تابعاً من $\mathcal{R}^{\text{loc}}(I)$. عندئذ تكون مجموعة نقط انقطاع التابع f مجموعة قابلة للعدِّ على الأكثر.

2-17. **نتيجة**. ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$ ، وليكن $f : I \to \mathbb{R}$ تابعاً مطرداً عندئذ ينتمي التابع f إلى الصف $\mathcal{R}$.

فمثلاً التابع :

$$f : [0, x] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + \lfloor x \rfloor} & : \quad x > 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$$

حيث $\lfloor x \rfloor$ هو الجزء الصحيح للعدد x ، تابعٌ من الصف $\mathcal{R}$ دون أن يكون مستمرّاً قِطعيّاً.

3. حساب التكاملات والتوابع الأصليّة

3-1. التوابع الأصليّة لبعض التوابع المألوفة

سنذكر في الجدول التالي توابع أصليّة F لبعض التوابع المألوفة f ، ومجال تعريف كلٍّ منها:

I	$x \mapsto f(x),$	$x \mapsto F(x)$
$]0, +\infty[$	$x \mapsto x^\alpha, (\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{-1\})$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$
$]0, +\infty[$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x$
$]-\infty, 0[$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(-x)$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^{ax}, (a \in \mathbb{C}^*)$	$x \mapsto \dfrac{e^{ax}}{a}$
$\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$	$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$x \mapsto \operatorname{th} x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \operatorname{ch} x$	$x \mapsto \operatorname{sh} x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \operatorname{sh} x$	$x \mapsto \operatorname{ch} x$

وكذلك لدينا

I	$x \mapsto f(x)$	$x \mapsto F(x)$
$]-1,+1[$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \arcsin x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \mapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$
$]+1,+\infty[$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2-1})$
$]-\infty,-1[$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \mapsto -\ln(-x+\sqrt{x^2-1})$

3-2. المُكاملة بالتجزئة

ليكن $[a,b]$ مجالاً مغلقاً ومحدوداً وغير تافه من $\mathbb{R}$، وليكن f و g تابعين من الصف C^1 على $[a,b]$. عندئذ يكون $f \cdot g$ تابعاً أصليّاً للتابع $f \cdot g' + f' \cdot g$ على $[a,b]$، ومنه العلاقة المهمّة التالية :

$$\begin{aligned}\int_a^b g(t)f'(t)\mathrm{d}t &= \Big[f(t)\,g(t)\Big]_a^b - \int_a^b g'(t)f(t)\mathrm{d}t\\ &= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b g'(t)f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

3-2-1. **مثال**. لحساب التكامل المحدود $I = \int_0^1 x\arctan x\,\mathrm{d}x$، نطبّق العلاقة السابقة بعد أن نختار $g(x) = \arctan x$ و $f(x) = \dfrac{1+x^2}{2}$ فيكون

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 g(x)f'(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1+x^2}{2}\arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 g'(x)f(x)\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1+x^2}{2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

3-2-2.**مثال**. نرغب في حساب التكاملات المحدودة : $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x$ عند بعض قيم n من $\mathbb{N}$. نلاحظ مباشرة أنّ $I_0 = 1$، وأنّ

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^2} = \Big[\arctan x\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

وإذا كانت $n \geq 1$ فإنّ

$$\begin{aligned}
I_n - I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n+1}}\mathrm{d}x = \frac{-1}{2n}\int_0^1 x\cdot\left(\frac{1}{(1+x^2)^n}\right)'\mathrm{d}x \\
&= \frac{-1}{2n}\left(\left[\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2n}I_n - \frac{1}{n2^{n+1}}
\end{aligned}$$

تسمح لنا العلاقة السابقة أن نستنتج العلاقة التدريجيّة الآتية:

$$\forall n \geq 1,\ \ I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2^2} = \frac{2+\pi}{8} \\
I_3 &= \frac{3}{4}I_2 + \frac{1}{2^4} = \frac{8+3\pi}{32}
\end{aligned}$$

ويمكننا أن نثبت بالتدريج على n أنّ

$$\forall n \geq 1,\ \ I_{n+1} = \frac{\pi}{4}\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} + \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}}{k\,C_{2k}^k}$$

وكذلك يمكن بسهولة تعميم هذه الطريقة لحساب $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$.

3-2-3. **مثال**. ليكن (a,b) من $\mathbb{R}^2$ يُحقّق $a < b$، ولتكن p من $\mathbb{R}^*$. سنتأمّل التكاملين

$$J = \int_a^b e^{px} \cos x \,\mathrm{d}\, x \quad \text{و} \quad I = \int_a^b e^{px} \sin x \,\mathrm{d}\, x$$

نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b e^{px} \sin x \,\mathrm{d}\, x = \int_a^b e^{px} (-\cos x)' \mathrm{d} x \\ &= \Big[-e^{px} \cos x \Big]_a^b + p \int_a^b e^{px} \cos x \,\mathrm{d}\, x = e^{pa} \cos a - e^{pb} \cos b + p\, J \end{aligned}$$

وكذلك

$$\begin{aligned} J &= \int_a^b e^{px} \cos x \,\mathrm{d}\, x = \int_a^b e^{px} (\sin x)' \mathrm{d} x \\ &= \Big[e^{px} \sin x \Big]_a^b - p \int_a^b e^{px} \sin x \,\mathrm{d}\, x = e^{pb} \sin b - e^{pa} \sin a - p\, I \end{aligned}$$

ويمكننا حساب كلٍّ من I و J من العلاقتين السابقتين فنجد

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{p^2 + 1} \Big(e^{pa} (\cos a - p \sin a) - e^{pb} (\cos b - p \sin b) \Big), \\ J &= \frac{1}{p^2 + 1} \Big(e^{pb} (\sin b + p \cos b) - e^{pa} (\sin a + p \cos a) \Big). \end{aligned}$$

3-3. المُكاملة بتغيير المتحوّل

ليكن I و J مجالين غير تافهين من $\mathbb{R}$، وليكن $f : I \to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^1 ويحقّق $f(I) \subset J$، وكذلك ليكن $g : J \to \mathbb{K}$ تابعاً مستمراً. وأخيراً ليكن (a,b) من I^2.

إذا كان G تابعاً أصلياً للتابع g على J كان

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(u) \mathrm{d} u = G(f(b)) - G(f(a)) \tag{1}$$

ومن جهة ثانية ينتمي التابع $G \circ f : I \to \mathbb{K}$ إلى الصف C^1 ويحقّق

$$(G \circ f)' = g \circ f \cdot f'$$

إذن

$$\int_a^b g(f(x))\, f'(x) \,\mathrm{d} x = G(f(b)) - G(f(a)) \tag{2}$$

وبمقارنة (1) و (2) نجد

$$\int_a^b g(f(x))\,f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)\mathrm{d}u$$

3-3. **مثال**. حساب التكامل $\int_0^{\pi/4} \tan x\,\mathrm{d}x$. هنا لدينا

$$\int_0^{\pi/4} \tan x\,\mathrm{d}\,x = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\cos' x\,\mathrm{d}\,x$$

إذن التابع f هو التابع $\cos$ والتابع g هو التابع $u \mapsto -\dfrac{1}{u}$ على $\mathbb{R}_+^*$. وكذلك فإنّ $f(0) = 1$ و $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ، ومنه

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \tan x\,\mathrm{d}x &= -\int_1^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= \Big[-\ln u\Big]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

2-3-3. **مثال**. حساب التكامل $\int_0^1 \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$. هنا لدينا

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+(e^x)^2}(e^x)'\,\mathrm{d}x$$

إذن التابع f هو التابع الأسيّ $\exp$ ، والتابع g هو التابع $u \mapsto \dfrac{1}{1+u^2}$ على $\mathbb{R}$. كما إنّ $f(0) = 1$ و $f(1) = e$. ومنه

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x &= \int_1^e \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= \Big[\arctan u\Big]_1^e = \arctan e - \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

4-3. مُكاملة التوابع الكسريّة

مثال. حساب التكامل $I = \int_0^1 \frac{x^4+1}{x^3+1} \mathrm{d}x$.

لمّا كانت درجة البسط $P = X^4 + 1$ أكبر من درجة المقام $Q = X^3 + 1$، نبدأ بإجراء قسمة إقليديّة للبسط على المقام فنجد $P(X) = XQ(X) + 1 - X$.

وعليه

$$\frac{X^4+1}{X^3+1} = X + \frac{1-X}{X^3+1}$$

إذن

$$I = \int_0^1 \frac{x^4+1}{x^3+1} \mathrm{d}\,x = \underbrace{\int_0^1 x \,\mathrm{d}\,x}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 \frac{1-x}{x^3+1} \mathrm{d}\,x}_{I_2}$$

حساب التكامل الأوّل I_1 بسيط ونجد

$$I_1 = \int_0^1 x \,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

أمّا لحساب التكامل الثاني I_2 فنلاحظ أولاً أنّه يمكن تحليل المقام كما يلي :

$$Q(X) = (X+1)(X^2 - X + 1)$$

وهنا نسعى إلى تفريق الكسر $\frac{1-X}{X^3+1}$ إلى عناصر بسيطة، بتعيين الثوابت A و B و C ليكون:

$$\frac{1-X}{X^3+1} = \frac{1-X}{(X+1)(X^2-X+1)} = \frac{A}{X+1} + \frac{BX+C}{X^2-X+1}$$

تُكافئ هذه المساواة بعد توحيد المقامات :

$$1 - X = A(X^2 - X + 1) + (X+1)(BX + C)$$

فإذا عوّضنا $X = -1$ استنتجنا أنّ $A = \frac{2}{3}$، وإذا لاحظنا أنّ أمثال X^2 في الطرف الأيمن يجب أن تكون معدومة استنتجنا أنّ $B = -\frac{2}{3}$، وأخيراً بتعويض $X = 0$ نجد $C = \frac{1}{3}$.

وعليه

$$\frac{1-X}{X^3+1}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{X+1}-\frac{1}{3}\times\frac{2X-1}{X^2-X+1}$$

وهنا إذا لاحظنا أنّ $(x^2-x+1)'=2x-1$ استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}I_2&=\int_0^1\frac{1-x}{x^3+1}\,\mathrm{d}\,x=\frac{2}{3}\cdot\int_0^1\frac{\mathrm{d}\,x}{x+1}-\frac{1}{3}\cdot\int_0^1\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}\,x\\&=\left[\frac{2}{3}\ln(1+x)\right]_0^1-\left[\frac{1}{3}\ln(x^2-x+1)\right]_0^1=\frac{2}{3}\ln 2\end{aligned}$$

وأخيراً نجد

$$I=\int_0^1\frac{x^4+1}{x^3+1}\mathrm{d}x=I_1+I_2=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\ln 2$$

لنتأمّل إذن الحالة العامّة. ليكن $R(X)=\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ كسراً عادياً حقيقياً بمتحوّلٍ واحدٍ، حيث P و Q كثيرا حدود من $\mathbb{R}[X]$ أوليّان فيما بينهما، ولنفترض أنّ $\deg Q>0$. نسمّي جذور Q الحقيقية $\{a_1,\ldots a_p\}$، في حال وجودها، الأقطاب الحقيقية للكسر $R(X)$، ويمكننا من ثَمّ أن نعرِّف التابع الكسري :

$$f:\mathbb{R}\backslash\{a_1,\ldots a_p\}\to\mathbb{R},x\mapsto R(x)$$

وهو تابع مستمرٌّ على كلِّ مجال من مجالات تعريفه. ليكن $[a,b]$ مجالاً مغلقاً ومحدوداً وغير تافه محتوى في منطلق f . سنشرح فيما يلي طريقة حساب $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

نعلم من دراستنا للجبر أنّه يمكن تفريق كثير الحدود Q إلى جداء كثيرات حدود غير خزولة في $\mathbb{R}[X]$، على الوجه الآتي:

$$Q(X)=\lambda\prod_{i=1}^{p}(X-a_i)^{n_i}\prod_{j=1}^{q}(X^2+c_jX+d_j)^{m_j}$$

وعندئذ يُكتبُ الكسر $R(X)$ بطريقة وحيدة بالشكل :

$$R(X)=E(X)+\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n_i}\frac{\lambda_{i,k}}{(X-a_i)^k}\right)+\sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{\ell=1}^{m_j}\frac{\alpha_{j,\ell}X+\beta_{j,\ell}}{(X^2+c_jX+d_j)^\ell}\right)$$

حيث $E(X)$ هو خارج القسمة الإقليديّة لكثير الحدود P على Q. والمقادير $\left(\lambda_{i,s}\right)_{\substack{1\le i\le p\\1\le s\le n_i}}$ و $\left(\alpha_{j,t}\right)_{\substack{1\le j\le q\\1\le t\le m_j}}$ و $\left(\beta_{j,t}\right)_{\substack{1\le j\le q\\1\le t\le m_j}}$ هي أعداد حقيقيّة.

يسمّى هذا المجموع تفريق R إلى عناصر بسيطة، وتسمّى الكسور $\dfrac{\lambda_{i,s}}{(X-a_i)^s}$ عناصر بسيطة من النوع الأول، والكسور $\dfrac{\alpha_{j,t}X+\beta_{j,t}}{(X^2+c_jX+d_j)^t}$ عناصر بسيطة من النوع الثاني.

إنّ حساب كلٍّ من $\displaystyle\int_a^b E(x)\mathrm{d}x$ و $\displaystyle\int_a^b\frac{\lambda_{i,s}}{(x-a_i)^s}\mathrm{d}x$ أمرٌ سهل، ويبقى حساب التكاملات من النمط $\displaystyle\int_a^b\frac{\alpha x+\beta}{(x^2+cx+d)^n}\mathrm{d}x$. بإجراء تغيير للمتحول من الشكل $x=uy+v$ تؤول المسألة إلى حساب كلٍّ من التكاملين

$$\int_{a'}^{b'}\frac{1}{(y^2+1)^n}\mathrm{d}y \quad \text{و} \quad \int_{a'}^{b'}\frac{y}{(y^2+1)^n}\mathrm{d}y$$

أمّا التكامل $\displaystyle\int_{a'}^{b'}\frac{y}{(y^2+1)^n}\mathrm{d}y$ فحسابه بسيط إذ إنّ

$$\int_{a'}^{b'}\frac{2y}{(y^2+1)^n}\mathrm{d}y=\begin{cases}\left[\ln(1+y^2)\right]_{a'}^{b'} & : \quad n=1\\ \left[\dfrac{-1}{(n-1)(1+y^2)^{n-1}}\right]_{a'}^{b'} & : \quad n>1\end{cases}$$

ويبيّن المثال 3-2-2. طريقة تدريجيّة لحساب التكاملات من النوع $\displaystyle\int_{a'}^{b'}\frac{y}{(y^2+1)^n}\mathrm{d}y$.

3-4-1. مثال. لنحسب $I = \int_3^4 \frac{x^3-2x^2-x+3}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$.

يُكتب كثير الحدود $Q(X) = X^2 - 3X + 2$ بالشكل $Q(X) = (X-1)(X-2)$ وجذوره ليست جذوراً للبسط: $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 3$. إذن لا يقبل الكسر $R(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ الاختزال. وكذلك فإن المجال $[3,4]$ لا يحوي أيّاً من أقطاب $R(X)$.

نلاحظ بإجراء قسمة إقليديّة أنّ

$$P(X) = (X+1)Q(X) + 1$$

ومنه

$$R(X) = X + 1 + \frac{1}{(X-1)(X-2)}$$

ونعلم أنّه يمكن تفريق الكسر $\frac{1}{(X-1)(X-2)}$ إلى عناصر بسيطة من الشكل

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)} = \frac{\lambda_1}{X-1} + \frac{\lambda_2}{X-2}$$

لتعيين λ_1 نضرب طرفَي المساواة السابقة بالمقدار $X-1$ ثُمّ نعوّض $X=1$ فنجد $\lambda_1 = -1$. وبأسلوب مماثل نجد $\lambda_2 = 1$. ومنه

$$R(X) = X + 1 - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X-2}$$

وأخيراً

$$\begin{aligned}
I &= \int_3^4 \frac{x^3-2x^2-x+3}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_3^4 (x+1)\mathrm{d}x - \int_3^4 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int_3^4 \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_3^4 - \Big[\ln(x-1)\Big]_3^4 + \Big[\ln(x-2)\Big]_3^4 = \frac{9}{2} + \ln\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

2-4-3. مثال. لنحسب $I = \int\limits_0^1 \frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}\mathrm{d}x$.

إنّ التابع الكسريّ المُكامَل مستمرٌّ على $\mathbb{R}$. ويمكن تفريق $R(X) = \frac{X^3+X+1}{(X^2+2)^2}$ إلى عناصر بسيطة كما يأتي:

$$R(X) = \frac{\alpha_2 X + \beta_2}{(X^2+2)^2} + \frac{\alpha_1 X + \beta_1}{X^2+2}$$

وبالمطابقة نجد

$$X^3 + X + 1 = \alpha_1 X^3 + \beta_1 X^2 + (2\alpha_1 + \alpha_2)X + (2\beta_1 + \beta_2)$$

ومنه

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 = -1, \quad \beta_2 = 1$$

إذن

$$R(X) = \frac{-X+1}{(X^2+2)^2} + \frac{X}{X^2+2}$$

لحساب $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)^2}$ نتبع طريقة المثال 2-2-3.:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)^2} &= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{(2+x^2-x^2)}{(x^2+2)^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+2}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\frac{x}{(x^2+2)^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+2}\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int\limits_0^1 x\cdot\left(\frac{1}{x^2+2}\right)'\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+2}\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\left(\left[\frac{x}{x^2+2}\right]_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+2}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+2}\mathrm{d}x + \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

وكذلك

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنه

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومن جهة أخرى

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}\,x}{(x^2+2)^2} = \left[\frac{-1}{2(x^2+2)}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

و

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}\,x}{x^2+2} = \left[\frac{1}{2}\ln(2+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

أخيراً نجد

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \frac{x}{(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)^2} + \int_0^1 \frac{x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

5-3. التكاملات التي تؤول إلى مُكاملة التوابع الكسريّة

① التكاملات من الشكل $\int_a^b R(e^x)\mathrm{d}x$ حيث $u \mapsto R(u)$ تابع كسري، تؤول إلى حساب تكامل تابع كسري بإجراء تغيير للمتحول $e^x = u$ ، إذ يكون

$$\int_a^b R(e^x)\,\mathrm{d}x = \int_{e^a}^{e^b} \frac{R(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

فمثلاً

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x} &= \int_0^2 \frac{2e^x}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x = \int_1^{e^2} \frac{2}{u^2+1}\mathrm{d}u \\ &= \Big[2\arctan u\Big]_1^{e^2} = 2\arctan e^2 - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

② التكاملات من الشكل $\int_a^b R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ والتابع $(u,v) \mapsto R(u,v)$ تابعٌ كسري بمتحوّلين. يمكننا، بالاستفادة من كون التوابع $\sin$ و $\cos$ تقبل 2π دوراً، أن نفترض أنّ a و b تقعان في المجال $[-\pi, \pi]$. عندئذ يمكننا أن نستعمل التابع $u \mapsto \tan(u/2)$ لتعريف تقابل بين المجال المفتوح $]-\pi, \pi[$ و $\mathbb{R}$.

فإذا وضعنا

$$x = 2\arctan t \quad \text{أي} \quad t = \tan\frac{x}{2}$$

كان

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x'(t) = \frac{2}{1+t^2}$$

ومنه

$$\int_a^b R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int_{\tan\frac{a}{2}}^{\tan\frac{b}{2}} R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

3-5-1. مثال. حساب التكامل $I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos x}\mathrm{d}x$. في هذه الحالة نُجري تغيير المتحوّل $x = 2\arctan t$ الذي يُكافئ $t = \tan\frac{x}{2}$ و $t \in [0,1]$، فنجد

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\mathrm{d}t$$
$$= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

المشكلة في هذه الطريقة هي أنها ترفع كثيراً درجة التابع الكسري المُكامَل. لذلك يمكننا اللجوء إلى أنماط أخرى من تغيير المتحوّل في بعض الحالات الخاصّة التي نُدرجها فيما يأتي، وقد رمزنا بالرمز $f(x)$ إلى المقدار $R(\sin x, \cos x)$:

- إذا كان $f(\pi - x) = -f(x)$ فإنّ تغيير المتحول $t = \sin x$ يجعل التكامل المطلوب تكامل تابع كسري.
- إذا كان $f(-x) = -f(x)$ فإنّ تغيير المتحول $t = \cos x$ يجعل التكامل المطلوب تكامل تابع كسري.
- إذا كان $f(\pi + x) = f(x)$ فإنّ تغيير المتحول $t = \tan x$ يجعل التكامل المطلوب تكامل تابع كسري.

3-5-2. مثال. حساب التكامل $I = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2+\cos^2 x}\mathrm{d}x$. هنا إذا أجرنا تغيير المتحوّل $x = 2\arctan t$ الذي يُكافئ $t = \tan\frac{x}{2}$ و $t \in \left[0, \tan\frac{\pi}{8}\right]$، وجدنا

$$I = \int_0^{\tan(\pi/8)} \frac{1}{2+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = 2\int_0^{\tan(\pi/8)} \frac{1+t^2}{3+2t^2+3t^4}\mathrm{d}t$$

ولكن بملاحظة أنّ التابع المُكامل يأخذ القيمة نفسها عند x وعند $x+\pi$ نستنتج أنّ تغيير المتحوّل $t=\tan x$ قد يكون مفيداً، وعندئذ نجد أنّ

$$I=\int_0^1 \frac{1}{2+\frac{1}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1}{2t^2+3}\,\mathrm{d}t$$
$$=\left[\frac{1}{\sqrt6}\arctan\left(t\sqrt{\frac23}\right)\right]_0^1=\frac{1}{\sqrt6}\arctan\left(\sqrt{\frac23}\right)$$

③ التكاملات من الشكل $\int_a^b R(x,\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})\,\mathrm{d}x$ و $(u,v)\mapsto R(u,v)$ هو تابعٌ كسري بمتحوِّلين. يمكننا، بالاستفادة من تغيير المتحوّل $t=x+\dfrac{\beta}{2\alpha}$، أن نفترض أنّ $\beta=0$، وهذا ما سنفعله فيما يأتي.

لحساب $\int_a^b R(x,\sqrt{\alpha x^2+\gamma})\,\mathrm{d}x$ يمكننا أن نفترض أنّ $\gamma\neq 0$.

- في حالة $\alpha>0$ و $\gamma>0$، يُعيد تغيير المتحوّل $t=\dfrac{\sqrt\alpha}{\sqrt\gamma}x$ المسألة إلى حساب تكامل من النمط التالي : $\int_{a'}^{b'} S(t,\sqrt{t^2+1})\,\mathrm{d}t$، وأخيراً نستعمل تغيير المتحول $t=\dfrac12\left(u-\dfrac1u\right)$ فتؤول المسألة إلى تكامل تابع كسري.

- في حالة $\alpha>0$ و $\gamma<0$، يُعيد تغيير المتحوّل $t=\dfrac{\sqrt\alpha}{\sqrt{-\gamma}}x$ أو $t=\dfrac{-\sqrt\alpha}{\sqrt{-\gamma}}x$ المسألة إلى حساب تكامل من النمط $\int_{a'}^{b'} S(t,\sqrt{t^2-1})\,\mathrm{d}t$ حيث $1\le a'\le b'$. ثُمّ نستعمل تغيير المتحول $t=\dfrac12\left(u+\dfrac1u\right)$ فتؤول المسألة إلى تكامل تابع كسري.

- في حالة $\alpha<0$ و $\gamma>0$، يعيد تغيير المتحوّل $t=\dfrac{\sqrt{-\alpha}}{\sqrt\gamma}x$ المسألة إلى حساب تكامل من النمط $\int_{a'}^{b'} S(t,\sqrt{1-t^2})\,\mathrm{d}t$. ثُمّ نستعمل تغيير المتحول $t=\cos u$ فتؤول المسألة إلى حالة سبقت معالجتها.

تمرينات

التمرين 1. عيّن مجموعة تعريف التوابع الآتية، واحسب تابعاً أصلياً لكل منها على كل مجال من مجالات تعريفه.

① $$f(x)=\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}$$

② $$f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}$$

③ $$f(x)=\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)}$$

④ $$f(x)=\frac{1}{(x+1)\cdot(1+x^2)}$$

⑤ $$f(x)=\frac{x^4+x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$$

الحل

① التابع $f(x)=\dfrac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}$. هو تابع مستمرّ على $\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$، وإذا كان I مجالاً ما محتوى في $\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$ تحقّقنا مباشرة أنّ

$$\forall x\in I,\quad f(x)=5+\frac{2}{x}+\frac{4}{x+2}+\frac{3}{x-2}$$

وعندئذ يكون

$$x\mapsto F(x)=5x+\ln\Big(x^2(x+2)^4\ |x-2|^3\Big)$$

تابعاً أصليّاً للتابع f على I.

② التابع $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)^2}$. هو تابع مستمرّ على $\mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}$، وإذا كان I مجالاً ما محتوى في $\mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}$ تحقّقنا مباشرة أنّ

$$\forall x\in I,\quad f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^2}$$

وعندئذ يكون $x\mapsto F(x)=\dfrac{1}{x+2}+\ln\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|$ تابعاً أصليّاً للتابع f على I.

③ التابع $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)}$ تابعٌ مستمرّ على $\mathbb{R}$. ونتحقّق مباشرة أنّ

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{x^2+4}+\frac{1}{40}\cdot\frac{1}{x^2+9}$$

وعندئذ يكون

$$x\mapsto F(x)=\frac{1}{24}\arctan x-\frac{1}{30}\arctan\frac{x}{2}+\frac{1}{120}\arctan\frac{x}{3}$$

تابعاً أصليّاً للتابع f على $\mathbb{R}$.

④ التابع $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)\cdot(1+x^2)}$. هو تابع مستمرّ على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ ، وإذا كان I مجالاً ما محتوى في $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ تحقَّقنا مباشرة أنّ

$$\forall x\in I,\quad f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}$$

وعندئذ يكون

$$x\mapsto F(x)=\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{4}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x^2}$$

تابعاً أصليّاً للتابع f على I .

⑤ التابع $f(x)=\dfrac{x^4+x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$. هو تابع مستمرّ على $\mathbb{R}$. ونلاحظ بسهولة أنّ

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=1-\frac{2x}{x^2+x+1}$$

وبملاحظة أنّ

$$x\mapsto\ln(x^2+x+1)-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

هو تابع أصلي للتابع $x\mapsto\dfrac{2x}{x^2+x+1}$ استنتجنا أنّ التابع F المعرّف بالعلاقة:

$$F(x)=x-\ln(x^2+x+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

هو تابع أصليٌّ للتابع f على $\mathbb{R}$. ∎

التمرين 2. عيّن مجموعة تعريف التوابع التالية، واحسب تابعاً أصلياً لكل منها على كل مجال من مجالات تعريفه.

① $f(x)=\dfrac{1}{(2+\cos x-2\sin x)\sin x}$ ② $f(x)=\dfrac{1}{5+3\cos x+\sin x}$

③ $f(x)=\dfrac{1}{(2\cos^2 x-1)\sin x}$ ④ $f(x)=\dfrac{\sin^2 x\cdot\cos x}{\cos x+\sin x}$

⑤ $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^4 x}$ ⑥ $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$

⑦ $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x+\tan^2 x}$ ⑧ $f_n(x)=\tan^n x,\ n\in\mathbb{N}$

الحل

① التابع $f(x)=\dfrac{1}{\sin x\cdot(2+\cos x-2\sin x)}$. نلاحظ هنا أنّه في حالة $x\notin\pi\mathbb{Z}$ يكون المقدار $t=\tan\dfrac{x}{2}$ معرّفاً ويكون

$$\begin{aligned}2+\cos x-2\sin x&=2+\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{4t}{1+t^2}\\&=\frac{3-4t+t^2}{1+t^2}=\frac{(t-1)(t-3)}{1+t^2}\end{aligned}$$

وعليه فإنّ التابع f مستمرّ على

$$\mathbb{R}\backslash\left(\pi\mathbb{Z}\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}\right)\cup\left(2\arctan 3+2\pi\mathbb{Z}\right)\right)$$

فإذا كان I أيّاً من المجالات: $I_k^1=]-\pi,0[+2\pi k$ ، أو $I_k^2=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[+2\pi k$ ، أو $I_k^3=\left]\frac{\pi}{2},\alpha\right[+2\pi k$ ، أو $I_k^4=]\alpha,\pi[+2\pi k$ ، حيث $\alpha=2\arctan 3$ ، والتي يكوّن اجتماعها مجموعة تعريف f ، سمح لنا تغيير المتحوّل $x=2\pi k+2\arctan t$ بحساب التابع الأصلي المطلوب : إذ نجد أنّ

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1+t^2}{t(t-1)(t-3)}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{3t}-\frac{1}{t-1}+\frac{5}{3(t-3)}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t(t-3)^5}{(t-1)^3}\right|=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sin x\cdot(2+\cos x-2\sin x)}{(1-\sin x)^4(1+\cos x)^2}\right|\end{aligned}$$

وعلى هذا يكون التابع

$$x \mapsto F(x) = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sin x\cdot(2+\cos x-2\sin x)}{(1-\sin x)^4(1+\cos x)^2}\right|$$

تابعاً أصليّاً للتابع f على كلِّ مجال I محتوى في مجموعة تعريفه.

② التابع $f(x)=\dfrac{1}{5+3\cos x+\sin x}$. هذا التابع تابعٌ مستمرّ على $\mathbb{R}$، ونتحقّق بالاشتقاق أنّ التابع

$$x \mapsto F(x) = \frac{x}{\sqrt{15}}+\frac{2}{\sqrt{15}}\arctan\left(\frac{\cos x-3\sin x}{\sqrt{15}+5+3\cos x+\sin x}\right)$$

هو تابع أصلي للتابع f على $\mathbb{R}$.

وبوجه عام في حالة $a^2>b^2+c^2$ يكون لدينا

$$\left(\frac{x}{d}+\frac{2}{d}\arctan\left(\frac{c\cos x-b\sin x}{d+a+b\cos x+c\sin x}\right)\right)' = \frac{1}{a+b\cos x+c\sin x}$$

حيث $d=\sqrt{a^2-b^2-c^2}$.

③ التابع $f(x)=\dfrac{1}{(2\cos^2 x-1)\cdot\sin x}$. هذا التابع مستمرّ حيث لا ينعدم مقامه، أي على المجموعة $\mathbb{R}\backslash\left(\pi\mathbb{Z}\cup\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)\right)$، فإذا كان I مجالاً ما محتوى في مجموعة تعريفه عرّفَ تغيير المتحوّل $u\mapsto\cos x$ تقابلاً من I إلى صورته. ويكون لدينا

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}\,x &= \int\frac{-\mathrm{d}\,u}{(2u^2-1)\cdot(1-u^2)}\\
&= \int\left(\frac{1}{2(u-1)}-\frac{1}{2(u+1)}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}u-1}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}u+1}\right)\mathrm{d}\,u\\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+\sqrt{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x}\right|\\
&= \ln\frac{|\sin x|}{1+\cos x}+\sqrt{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x}\right|
\end{aligned}$$

وعليه يُعطى التابع الأصلي للتابع f على I بالصيغة التالية :

$$x \mapsto F(x) = \ln \frac{|\sin x|}{1+\cos x} + \sqrt{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x}\right|$$

④ التابع $f(x) = \dfrac{\sin^2 x \cdot \cos x}{\cos x + \sin x}$. وهذا التابع مستمرّ حيث لا ينعدم مقامه، أي على $\mathbb{R}\backslash\left(\frac{3\pi}{4}+\pi\mathbb{Z}\right)$، ليكن إذن I مجالاً ما محتوى في مجموعة تعريفه.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{((\cos x + \sin x)^2 - 1)\cdot \sin x}{2(\cos x + \sin x)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin x \cos x + \sin^2 x\right) - \frac{\sin x}{2(\cos x + \sin x)} \\ &= \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\sin x}{2(\cos x + \sin x)} \\ &= \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos x - \sin x}{4(\cos x + \sin x)} \end{aligned}$$

إذن

$$f(x) = \left(-\frac{\sin 2x}{8} - \frac{\cos 2x}{8} + \frac{1}{4}\ln\left|\cos x + \sin x\right|\right)'$$

وعليه يكون التابع

$$x \mapsto F(x) = -\frac{\sin 2x}{8} - \frac{\cos 2x}{8} + \frac{1}{4}\ln\left|\cos x + \sin x\right|$$

تابعاً أصليّاً للتابع f على I.

⑤ التابع $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x}$. هذا التابع مستمرّ حيث لا ينعدم مقامه، أي على $\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)$، ليكن إذن I مجالاً ما محتوى في مجموعة تعريفه. عندئذ يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{(1+\tan^2 x)^2}{\tan^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\left(\frac{1}{\tan^2 x} + 2 + \tan^2 x\right) \end{aligned}$$

أو

$$f(x) = \left(-\frac{1}{\tan x} + 2\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x\right)'$$

وعليه يكون التابع

$$x \mapsto F(x) = -\frac{1}{\tan x} + 2\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x$$

تابعاً أصليّاً للتابع f على I .

⑥ التابع $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\sin x}$. هذا التابع مستمرّ على المجموعة $\mathbb{R}\backslash\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$ ، ليكن إذن I مجالاً ما محتوى في أحد مجالات المجموعة $\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{1+\sin x} = 1 - \frac{1}{1+\sin x} \\ &= 1 - \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \left(x - \tan x + \frac{1}{\cos x}\right)' = \left(x + \frac{1-\sin x}{\cos x}\right)' \\ &= \left(x + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right)' \end{aligned}$$

وعليه فإنّ التابع

$$x \mapsto F(x) = x + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

هو تابع أصليّ للتابع f على أي مجال I محتوى في $\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

⑦ التابع $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x + \tan^2 x}$. هذا التابع معرّفٌ على المجموعة $\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ ، ولكنّه يقبل التمديد إلى تابع مستمرٍّ على $\mathbb{R}$. لذلك فهو يقبل تابعاً أصلياً معرّفاً على $\mathbb{R}$. ليكن $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ عندئذ يمكننا إجراء تغيير المتحوّل $u = \cos x$. فنجد

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + \tan^2 x}\,\mathrm{d}\,x = \int g(u)\,\mathrm{d}\,u$$

حيث $g(u) = -(u^2 + 1/u^2 - 1)^{-1}$.

ونلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}g(u) &= \frac{-u^2}{u^4-u^2+1}\\ &= -\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{u}{u^2-\sqrt{3}u+1}-\frac{u}{u^2+\sqrt{3}u+1}\right)\\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\frac{2u+\sqrt{3}}{u^2+\sqrt{3}u+1}-\frac{2u-\sqrt{3}}{u^2-\sqrt{3}u+1}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1+1/u^2}{u^2+1/u^2-1}\\ &= \left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\ln\frac{u^2+\sqrt{3}u+1}{u^2-\sqrt{3}u+1}\right)-\frac{1}{2}\arctan\left(u-\frac{1}{u}\right)\right)'\end{aligned}$$

وعلى هذا يكون التابع

$$\forall x\in I,\ \ F(x)=\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\ln\frac{\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x+1}{\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x+1}\right)-\frac{1}{2}\arctan\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

تابعاً أصلياً للتابع f على I. ولكن نلاحظ أنّ التابع

$$x\mapsto F(x)=\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\ln\frac{\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x+1}{\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x+1}\right)-\frac{1}{2}\arctan\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

معرّفٌ على $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ ويقبل التمديد إلى تابع مستمرّ على كامل $\mathbb{R}$ بوضع

$$\forall k\in\mathbb{Z},\qquad F(2k\pi)=-F((2k+1)\pi)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\frac{\pi}{4}$$

ونجد بتحقّق بسيط ومباشر أنّ F المعرّف بهذه الصيغة على $\mathbb{R}$ هو تابع أصلي للتابع f عليها.

⑧ التابع $f_n(x)=\tan^n x$. التابع مستمرّ على المجموعة $\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$، وإذا كان F_n التابع الأصلي للتابع f_n على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ والذي ينعدم عند 0، كان $x\mapsto F_n(x-\pi k)$ تابعاً أصليّاً للتابع f على المجال $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$. وهنا نلاحظ أنّه في حالة x من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ لدينا

$$F_n(x)+F_{n+2}(x)=\int_0^x(1+\tan^2 t)\tan^n t\,\mathrm{d}t=\frac{\tan^{n+1}x}{n+1}$$

وعليه، مهما تكن x من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ، و مهما تكن n من $\mathbb{N}$ ، يكن

$$F_{2n}(x)=(-1)^n x+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}}{2k+1}\tan^{2k+1}x$$
$$F_{2n+1}(x)=(-1)^{n+1}\ln(\cos x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{2k}\tan^{2k}x$$

وبذا يتمّ إثبات المطلوب.

التمرين 3. عيّن مجموعة تعريف التوابع التالية، واحسب تابعاً أصلياً لكل منها على كل مجال من مجالات تعريفه.

① $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}$ ② $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}$

③ $f(x)=\dfrac{1}{x^4\cdot\sqrt{1+x^2}}$ ④ $f(x)=x^5(1+x^2)^{2/3}$

⑤ $f(x)=\dfrac{1}{x^{11}\cdot\sqrt{1+x^4}}$ ⑥ $f(x)=\dfrac{1}{x^3}\sqrt[5]{\dfrac{x}{1+x}}$

⑦ $f(x)=\dfrac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2(x-1)}}$ ⑧ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x+2)^5(x-1)^3}}$

الحل

① التابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}$ مستمرٌّ على $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ ، ويتيح لنا تغيير المتحوّل $u=\sqrt[3]{x}$ حساب تابع أصلي له على المجال I الذي يمثل $]-1,0[$ أو $]0,+\infty[$. فنجد أنّ

$$\begin{aligned}F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}\,x&=3\int\sqrt{1+u}\,\mathrm{d}\,u\\&=2\sqrt{(1+u)^3}=2\sqrt{(1+\sqrt[3]{x})^3}\end{aligned}$$

وعليه يكون التابع $x\mapsto 2\sqrt{(1+\sqrt[3]{x})^3}$ تابعاً أصليّاً للتابع f على المجال I .

② التابع $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}$. مستمرٌّ على المجموعة $\mathbb{R}_+^*$، ويسمح لنا تغيير المتحوِّل $u=\sqrt[4]{x}$ بحساب تابع أصلي له على المجال $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}F(x)&=\int f(x)\,\mathrm{d}\,x=4\int u\sqrt[3]{1+u}\,\mathrm{d}\,u\\&=4\int\left((1+u)^{4/3}-\sqrt[3]{1+u}\right)\mathrm{d}\,u\\&=\frac{12}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{7/3}-3(1+\sqrt[4]{x})^{4/3}\end{aligned}$$

وعليه يكون

$$x\mapsto\frac{12}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{7/3}-3(1+\sqrt[4]{x})^{4/3}$$

تابعاً أصليّاً للتابع f على $\mathbb{R}_+^*$.

③ التابع $f(x)=\dfrac{1}{x^4\cdot\sqrt{1+x^2}}$. هذا التابع مستمرّ على المجموعة $\mathbb{R}^*$، وإذا كان F تابعاً أصليّاً للتابع f على $\mathbb{R}_+^*$ كان $x\mapsto -F(-x)$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}_-^*$. يكفي إذن تعيين تابع أصلي للتابع f على $\mathbb{R}_+^*$. وهذا ما يسمح لنا به تغيير المتحوِّل $u=1+\dfrac{1}{x^2}$ لنجد

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad F(x)&=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+1\,/\,x^2}}\cdot\frac{-2}{x^3}\,\mathrm{d}\,x\\&=\frac{1}{2}\int\frac{1-u}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}\,u\\&=\sqrt{u}-\frac{1}{3}u\sqrt{u}\\&=\frac{2x^2-1}{3x^3}\cdot\sqrt{1+x^2}\end{aligned}$$

وعليه يكون التابع

$$x\mapsto\frac{2x^2-1}{3x^3}\cdot\sqrt{1+x^2}$$

تابعاً أصليّاً للتابع f على كلٍّ من $\mathbb{R}_+^*$ و $\mathbb{R}_-^*$.

④ التابع $f(x)=x^5(1+x^2)^{2/3}$. هذا التابع مستمرّ على كامل $\mathbb{R}$ ، ويسمح لنا تغيير المتحوّل $u=1+x^2$ بحساب تابع أصلي له فنجد:

$$\begin{aligned}F(x)&=\int(u-1)^2u^{2/3}\,\mathrm{d}\,u=\int\Big(u^{8/3}-2u^{5/3}+u^{2/3}\Big)\mathrm{d}\,u\\&=\frac{3}{11}u^{11/3}-\frac{3}{4}u^{8/3}+\frac{3}{5}u^{5/3}\\&=\left(\frac{3}{11}(1+x^2)^2-\frac{3}{4}(1+x^2)+\frac{3}{5}\right)\sqrt[3]{(1+x^2)^5}\\&=\left(\frac{3}{11}x^4-\frac{9}{44}x^2+\frac{27}{220}\right)\sqrt[3]{(1+x^2)^5}\end{aligned}$$

⑤ التابع $f(x)=\dfrac{1}{x^{11}\cdot\sqrt{1+x^4}}$. هذا التابع مستمرّ على المجموعة $\mathbb{R}^*$ ، وإذا كان F تابعاً أصليّاً للتابع f على $\mathbb{R}_+^*$ كان $x\mapsto F(-x)$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}_-^*$. يكفي إذن تعيين تابع أصلي للتابع f على $\mathbb{R}_+^*$.

يسمح لنا تغيير المتحوّل $u^2=1+\dfrac{1}{x^4}$ بحساب تابع أصلي له على $\mathbb{R}_+^*$ كما يأتي :

$$\begin{aligned}F(x)&=\int\frac{1\,/\,x^8}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^4}}}\cdot\frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}\,x=-\frac{1}{2}\int\frac{(u^2-1)^2}{u}\cdot u\,\mathrm{d}\,u\\&=-\frac{1}{10}u^5+\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{2}u\\&=\left(-\frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^2+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{x^4}\right)-\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\\&=\frac{-1}{30x^{10}}\Big(3+4x^4+8x^8\Big)\sqrt{1+x^4}\end{aligned}$$

وعليه يكون التابع

$$x\mapsto\frac{-1}{30x^{10}}\Big(3+4x^4+8x^8\Big)\sqrt{1+x^4}$$

تابعاً أصليّاً للتابع f على $\mathbb{R}_+^*$ ، وكذلك على $\mathbb{R}_-^*$.

⑥ التابع $f(x)=\dfrac{1}{x^3}\sqrt[5]{\dfrac{x}{1+x}}$. هذا التابع مستمرّ على المجموعة $\mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$ وهي اجتماع ثلاثة مجالات. ليكن I أحد هذه المجالات. يسمح لنا تغيير المتحوِّل $u=\dfrac{x}{1+x}$ بحساب تابع أصلي له على I، كما هو مبين أدناه:

$$\begin{aligned}F(x)&=\int\left(\frac{1-u}{u}\right)^3\cdot\frac{u^{1/5}}{(1-u)^2}\,\mathrm{d}\,u=\int\left(u^{-14/5}-u^{-9/5}\right)\mathrm{d}\,u\\&=\frac{5}{4}u^{-4/5}-\frac{5}{9}u^{-9/5}=\frac{5}{36}\left(9-\frac{4}{u}\right)\cdot u^{-4/5}\\&=\frac{5}{36}\left(\frac{5x-4}{x}\right)\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{1+x}{x}\right)^4}\end{aligned}$$

وعليه يكون التابع

$$x\mapsto\frac{5}{36}\left(\frac{5x-4}{x}\right)\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{1+x}{x}\right)^4}$$

تابعاً أصليّاً للتابع f على I.

⑦ التابع $f(x)=\dfrac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2(x-1)}}$. هذا التابع مستمرّ على المجموعة $\mathbb{R}\backslash\left\{0,\frac{1}{9}\right\}$ وهي اجتماع ثلاثة مجالات. ليكن I أحد هذه المجالات. يسمح لنا تغيير المتحوِّل $u^3=\dfrac{x-1}{x}$ بحساب تابع أصلي له على I. كما يلي:

$$\begin{aligned}F(x)&=\int\frac{1-u^3}{(2+u)}\cdot\frac{3u^2}{(1-u^3)^2}\,\mathrm{d}\,u=\int\left(\frac{3u^2}{(2+u)(1-u^3)}\right)\mathrm{d}\,u\\&=\int\left(\frac{4\,/\,3}{2+u}+\frac{1\,/\,3}{1-u}-\frac{u+1}{u^2+u+1}\right)\mathrm{d}\,u\\&=\frac{4}{3}\ln\left|2+u\right|+\frac{1}{3}\ln\left|1-u\right|-\frac{1}{2}\ln(u^2+u+1)-\frac{\sqrt{3}}{4}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\\&=\frac{4}{3}\ln\left|\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+2\right|+\frac{5}{6}\ln\left|\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}-1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|x\right|-\frac{\sqrt{3}}{4}\arctan\frac{2\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

وعليه يكون التابع

$$x \mapsto \frac{4}{3}\ln\left|\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+2\right| + \frac{5}{6}\ln\left|\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}-1\right| + \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{\sqrt{3}}{4}\arctan\frac{2\sqrt[3]{1-1/x}+1}{\sqrt{3}}$$

تابعاً أصليّاً للتابع f على I.

⑧ التابع $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x+2)^5(x-1)^3}}$. هذا التابع مستمرٌّ على اجتماع مجالين هما $]1,+\infty[$ و $]-\infty,-2[$، ليكن I أحد هذين المجالين. عندئذ نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(x+2)(x-1)\cdot\sqrt[4]{(x+2)/(x-1)}} \\ &= \frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{-5/4} \\ &= -\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)'\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{-5/4} = \left(\frac{4}{3}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{-1/4}\right)' \end{aligned}$$

وعليه يكون التابع $x \mapsto \dfrac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}}$ تابعاً أصليّاً للتابع f على I. ∎

التمرين 4. عيّن مجموعة تعريف التوابع التالية، واحسب تابعاً أصلياً لكل منها على كل مجال من مجالات تعريفه.

① $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}}$ ② $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$

③ $f(x)=3^{\sqrt{2x+1}}$ ④ $f(x)=\arctan\sqrt{\dfrac{1+x}{3+x}}$

⑤ $f(x)=e^{x\sqrt{2}}\tan^3 x$ ⑥ $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$

⑦ $f(x)=\sqrt{1+x}\ln x$ ⑧ $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$

الحل

① التابع $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}}$ ، هذا التابع مستمرّ على $]-1,+1[$ ، وإذا كان F تابعاً أصلياً للتابع f على $]0,1[$ كان $x\mapsto -F(-x)$ تابعاً أصلياً للتابع f على $]-1,0[$. لذلك سنبحث عن تابع أصلي للتابع f على $]0,1[$. لنعرّف متحوّلاً جديداً t بالعلاقة

$$t=\sqrt{\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}}\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+2t^2}}{1+t^2}=x$$

عندئذ يكون لدينا على $]0,1[$ ما يلي :

$$\begin{aligned}
F(x)&=\int f(x)\,\mathrm{d}\,x\\
&=\int\frac{\sqrt{1+2t^2}}{t}\left(\frac{2t}{\sqrt{1+2t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}-\sqrt{1+2t^2}\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^2}\right)\mathrm{d}\,t\\
&=\int\frac{-2t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}\,t=\int t\left(\frac{1}{1+t^2}\right)'\mathrm{d}\,t\\
&=\frac{t}{1+t^2}-\arctan t\\
&=\frac{x\cdot\sqrt[4]{1-x^2}}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}-\arctan\frac{\sqrt[4]{1-x^2}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{x}\\
&=\frac{x\cdot\sqrt[4]{1-x^2}}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}+\arctan\frac{x}{\sqrt[4]{1-x^2}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}-\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

وعلى هذا يكون التابع

$$x\mapsto\frac{x\cdot\sqrt[4]{1-x^2}}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}+\arctan\frac{x}{\sqrt[4]{1-x^2}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

تابعاً أصليّاً للتابع f على $]-1,+1[$.

② التابع $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ هذا التابع مستمر على $]-1,+1[$، لنعرّف متحوّلاً جديداً بالعلاقة $\cos\theta=x \Leftrightarrow \theta=\arccos x$ عندئذ يكون لدينا

$$\begin{aligned}F(x)&=\int f(x)\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{-1}{1-\cos\theta}\,\mathrm{d}\,\theta\\&=\frac{1}{2}\int\frac{-1}{\sin^2(\theta/2)}\,\mathrm{d}\,\theta=\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\\&=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

والتابع $x\mapsto\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$ هو تابع أصلي للتابع f على $]-1,+1[$.

③ التابع $f(x)=3^{\sqrt{2x+1}}$. هذا التابع مستمرٌّ على $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$. وبإجراء تغيير المتحوّل

$$t=\ln 3\sqrt{2x+1}$$

يمكننا أن نكتب :

$$\begin{aligned}F(x)&=\int f(x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{(\ln 3)^2}\int u\,e^u\,\mathrm{d}\,u\\&=\frac{1}{(\ln 3)^2}(u-1)\,e^u=\left(\frac{\sqrt{2x+1}}{\ln 3}-\frac{1}{(\ln 3)^2}\right)\cdot 3^{\sqrt{2x+1}}\end{aligned}$$

وعلى هذا يكون التابع

$$x\mapsto\left(\frac{\sqrt{2x+1}}{\ln 3}-\frac{1}{(\ln 3)^2}\right)\cdot 3^{\sqrt{2x+1}}$$

تابعاً أصليّاً للتابع f على المجال $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

④ التابع $f(x)=\arctan\sqrt{\dfrac{1+x}{3+x}}$. هذا التابع مستمرٌّ على $]-\infty,-3[\cup]-1,+\infty[$.

ونلاحظ أنّه مهما تكن x من أحد هذين المجالين فلدينا :

$$f(x)=\left((x+2)\arctan\sqrt{\frac{1+x}{3+x}}\right)'-\frac{1}{2\sqrt{(x+2)^2-1}}$$

وعلى هذا يكون

$$x \mapsto (x+2)\arctan\sqrt{\frac{1+x}{3+x}} - \frac{1}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{(x+1)(x+3)}\,\right|$$

تابعاً أصليّاً للتابع f على أيٍّ من مجالي تعريفه.

⑤ التابع $f(x) = e^{x\sqrt{2}}\tan^3 x$. التابع مستمرٌّ على $\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$. وإذا كان I مجالاً ما من مجموعة تعريفه كان التابع $x \mapsto \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}x}\left(\tan^2 x - \sqrt{2}\tan x + 1\right)$ تابعاً أصليّاً له على هذا المجال كما يتوثّق القارئ من ذلك بسهولة.

⑥ التابع $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$. هذا التابع مستمرٌّ على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$، وهو يقبل تابعاً أصليّاً على أي مجال I من $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. يسمح لنا تغيير المتحول $u = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ بإجراء هذا الحساب :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int u\left(-1+\frac{2}{1-u^3}\right)'\mathrm{d}\,u = \int u\left(\frac{2}{1-u^3}\right)'\mathrm{d}\,u \\
&= \frac{2u}{1-u^3} + \frac{2}{3}\int\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2u+1}{u^2+u+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{u^2+u+1}\right)\mathrm{d}\,u \\
&= \frac{2u}{1-u^3} + \frac{1}{3}\ln\frac{(u-1)^2}{u^2+u+1} + \sqrt{3}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}} \\
&= \sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)} + \ln\left|\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x+1}\right| + \sqrt{3}\arctan\frac{2\cdot\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}+1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

وعلى هذا يكون التابع

$$x \mapsto \sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)} + \ln\left|\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x+1}\right| + \sqrt{3}\arctan\frac{2\cdot\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}+1}{\sqrt{3}}$$

تابعاً أصليّاً للتابع f على I .

⑦ التابع $f(x) = \sqrt{1+x}\ln x$. هذا التابع مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+^*$. ويسمح تغيير المتحوّل $u = \sqrt{1+x}$ بحساب تابع أصلي له لنجد،

$$x \mapsto \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\ln x - \frac{4}{9}(x+4)\sqrt{1+x} - \frac{2}{3}\ln\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}$$

⑧ التابع $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$. هذا التابع مستمرٌّ على $]-1,1[$. نجد أوّلاً أنّ التابع $x\mapsto -\dfrac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}$ هو تابع أصلي للتابع $x\mapsto \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ على $]-1,1[$، ثُمّ نجري مُكاملة بالتجزئة فنجد أنّ:

$$x\mapsto \frac{x^3}{9}+\frac{2x}{3}-\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}\arcsin x$$

هو تابع أصلي للتابع f على $]-1,1[$. ■

التمرين 5. لتكن n من $\mathbb{N}^*$، وليكن F_n تابعاً أصلياً ينعدم عند 0 للتابع

$$f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \frac{1}{(1+x^4)^n}$$

أعطِ علاقة تدريجية تفيد في حساب F_n. ثم أثبت أن النهاية $I_n=\lim\limits_{x\to+\infty}F_n(x)$ موجودة أيّاً كان n في $\mathbb{N}^*$، واحسب I_n.

الحل

لنلاحظ أولاً أنّ

$$\begin{aligned}
F_1(x)&=\int_0^x\frac{\mathrm{d}\,t}{1+t^4}=\int_0^x\frac{\mathrm{d}\,t}{(t^2+\sqrt{2}t+1)\cdot(t^2-\sqrt{2}t+1)}\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\int_0^x\frac{t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\mathrm{d}\,t+\int_0^x\frac{-t+\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\mathrm{d}\,t\right)\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\int_0^x\frac{t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\mathrm{d}\,t-\int_0^{-x}\frac{t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\mathrm{d}\,t\right)\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-x}^x\frac{t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\mathrm{d}\,t\\
&=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int_{-x}^x\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\mathrm{d}\,t+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int_{-x}^x\frac{\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\mathrm{d}\,t
\end{aligned}$$

وعلى هذا يكون لدينا

$$F_1(x) = \left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(t^2 + \sqrt{2}t + 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t + 1)\right]_{-x}^{x}$$

وأخيراً نرى أنّ

$$F_1(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{\arctan(\sqrt{2}x + 1) + \arctan(\sqrt{2}x - 1)}{2\sqrt{2}}$$

وبوجه خاص يكون لدينا

$$I_1 = \lim_{x\to\infty} F_1(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

لنعرّف بوجه عام $F_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\,t}{(1+t^4)^n}$ ، فيكون لدينا

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) - F_n(x) &= \int_0^x \frac{-t^4}{(1+t^4)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{4n}\int_0^x t\left(\frac{1}{(1+t^4)^n}\right)'\mathrm{d}\,t \\ &= \frac{1}{4n}\left(\left[\frac{t}{(1+t^4)^n}\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{(1+t^4)^n}\,\mathrm{d}\,t\right) \\ &= \frac{x}{4n(1+x^4)^n} - \frac{1}{4n}F_n(x) \end{aligned}$$

وعليه فإنّه، مهما تكن x من $\mathbb{R}$ ، ومهما تكن n من $\mathbb{N}^*$ ، يكن

$$F_{n+1}(x) = \left(1 - \frac{1}{4n}\right)F_n(x) + \frac{x}{4n(1+x^4)^n}$$

فإذا كانت النهاية $I_n = \lim_{x\to\infty} F_n(x)$ موجودة كانت النهاية $I_{n+1} = \lim_{x\to\infty} F_{n+1}(x)$ موجودة أيضاً عملاً بالمساواة السابقة، وكان لدينا :

$$I_{n+1} = \frac{4n-1}{4n} I_n$$

تفيدنا هذه العلاقة التدريجيّة بحساب I_n بدلالة I_1 ونجد من ثَمّ :

$$\forall n > 1, \quad I_n = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{4k}\right)$$

فعلى سبيل المثال نجد :

$$I_3 = \frac{21\pi}{64\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad I_2 = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad I_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

التمرين 6. ليكن f و g تابعين من الفضاء $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$. أثبت متراجحة كوشي–شوارتز Cauchy-Schwarz الآتية:

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_a^b \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t} \cdot \sqrt{\int_a^b \left|g(t)\right|^2 \mathrm{d}t}$$

الحل

في حالة $\int_a^b |f|^2 = 0$ ليس هناك ما يجب إثباته، لنفترض العكس إذن، لمّا كان

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b (f + \lambda g)^2 \geq 0$$

استنتجنا أنّ

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b f^2 + 2\lambda\int_a^b fg + \lambda^2\int_a^b g^2 \geq 0$$

ولا بُدَّ أن يكون مميِّز ثلاثي الحدود المبيّن أعلاه سالباً أو معدوماً، أي

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 - \int_a^b g^2\,\mathrm{d}t \cdot \int_a^b f^2\,\mathrm{d}t \leq 0$$

وهي المتراجحة المطلوبة.

التمرين 7. ليكن f تابعاً من $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$، نضع $M = \sup\limits_{[a,b]} f$ و $m = \inf\limits_{[a,b]} f$. ونفترض أنّ $0 < m$. أثبت صحة المتراجحتين الآتيتين:

$$2\sqrt{\frac{m}{M}}(b-a) \leq \frac{1}{M}\int_a^b f + m\int_a^b \frac{1}{f} \leq \left(1 + \frac{m}{M}\right)(b-a)$$

$$(b-a)^2 \leq \int_a^b f \cdot \int_a^b \frac{1}{f} \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2$$

الحل

لمّا كان من الواضح أنّ $\left(\sqrt{\dfrac{f}{M}}-\sqrt{\dfrac{m}{f}}\right)^2\geq 0$ استنتجنا أنّ

$$\frac{f}{M}+\frac{m}{f}\geq 2\sqrt{\frac{m}{M}} \tag{1}$$

وكذلك لمّا كان $\dfrac{(f-m)\cdot(M-f)}{Mf}\geq 0$ استنتجنا أيضاً أنّ

$$1+\frac{m}{M}\geq\frac{f}{M}+\frac{m}{f} \tag{2}$$

وبمُكاملة المتراجحتين (1) و (2) على المجال $[a,b]$ نستنتج المتراجحة الأولى :

$$2\sqrt{\frac{m}{M}}\cdot(b-a)\leq\frac{1}{M}\int_a^b f+m\int_a^b\frac{1}{f}\leq\left(1+\frac{m}{M}\right)\cdot(b-a)$$

ومن جهة ثانية، بالاستفادة من متراجحة كوشي–شوارتز نجد أنّ

$$(b-a)^2=\left(\int_a^b\sqrt{f}\cdot\frac{1}{\sqrt{f}}\right)^2\leq\int_a^b f\cdot\int_a^b\frac{1}{f} \tag{3}$$

وبالاستفادة من المتراجحة البسيطة

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad x\,y\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

نستنتج أيضاً أنّ

$$\frac{m}{M}\int_a^b f\cdot\int_a^b\frac{1}{f}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{M}\int_a^b f+m\int_a^b\frac{1}{f}\right)^2\leq\frac{1}{4}\left(1+\frac{m}{M}\right)^2(b-a)^2$$

أو

$$\int_a^b f\cdot\int_a^b\frac{1}{f}\leq\frac{(m+M)^2}{4Mm}(b-a)^2 \tag{4}$$

وتبرهن المتراجحتان (3) و (4) صحّة المتراجحات المطلوبة. ■

التمرين 8. ليكن f تابعاً مستمراً من $C([a,b],\mathbb{R})$. أثبت أن :

$$\left(\forall t\in[a,b],\quad f(t)\geq 0\right)\wedge\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=0\right)\Rightarrow f=0$$

الحل

لنتأمّل التابع الأصلي $x\mapsto F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$. لمّا كان التابع f مستمرّاً على $[a,b]$ استنتجنا أنّ F ينتمي إلى الصف C^1 على $[a,b]$. ولأنّ

$$\forall t\in[a,b],\ F'(t)=f(t)\geq 0$$

لا بُدَّ أن يكون F متزايداً على $[a,b]$ وعليه فإنّ

$$\forall x\in[a,b],\quad 0=F(a)\leq F(x)\leq F(b)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t=0$$

أي مهما تكن x من $[a,b]$، يكن $F(x)=0$، وهذا يقتضي أنّ :

$$\forall x\in[a,b],\ f(x)=F'(x)=0$$

وبذا يتمّ الإثبات. ■

التمرين 9. ليكن $f:[0,1]\to\mathbb{R}_+$ تابعاً مستمراً. نضع $I_n=\int_0^1 x^{n-1}f(x)\,\mathrm{d}x$ في حالة $1\leq n$.

1. أثبت أن $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n=f(1)$.
2. نفترض أن f ينتمي $C^m([0,1])$. أثبت أن

$$\left|I_n-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{n(n+1)\cdots(n+k)}f^{(k)}(1)\right|\leq\frac{\sup_{[0,1]}\left|f^{(m)}\right|}{n(n+1)\cdots(n+m)}$$

3. استنتج نشراً حتى المرتبة الثالثة بقوى $\frac{1}{n}$ للمقدار $\frac{\pi}{4}-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

الحل

1. لنلاحظ أولاً أنّه مهما تكن $n \geq 1$ ومهما تكن η من $]0,1[$ ، يكن لدينا:

$$\begin{aligned}\left|nI_n - f(1)\right| &= \left|\int_0^1 nx^{n-1}\big(f(x)-f(1)\big)\,\mathrm{d}\,x\right| \\ &\leq \int_0^1 nx^{n-1}\left|f(x)-f(1)\right|\mathrm{d}\,x \\ &\leq \int_0^{1-\eta} nx^{n-1}\left|f(x)-f(1)\right|\mathrm{d}\,x + \int_{1-\eta}^1 nx^{n-1}\left|f(x)-f(1)\right|\mathrm{d}\,x \\ &\leq 2\sup_{[0,1]}\left|f\right|\int_0^{1-\eta} nx^{n-1}\,\mathrm{d}\,x + \sup_{[1-\eta,1]}\left|f-f(1)\right|\int_{1-\eta}^1 nx^{n-1}\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

إذن لقد اثبتنا أنّ

$$\left|nI_n - f(1)\right| \leq 2\sup_{0\leq x\leq 1}\left|f(x)\right|\cdot(1-\eta)^n + \sup_{1-\eta\leq x\leq 1}\left|f(x)-f(1)\right|$$

لتكن $\varepsilon > 0$ عندئذ نجد، بسبب استمرار f عند 1، عدداً $0 < \eta_\varepsilon$ يُحقِّق

$$\forall x \in [0,1],\quad 1-\eta_\varepsilon \leq x \leq 1 \Rightarrow \left|f(x)-f(1)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ثُمّ نختار $N_\varepsilon = 1 + \left\lfloor \dfrac{\ln(\varepsilon/(4M+1))}{\ln(1-\eta_\varepsilon)} \right\rfloor$ حيث $M = \sup\limits_{[0,1]}\left|f\right|$. عندئذ

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow 2M(1-\eta_\varepsilon)^n \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ومن ثَمّ فإنّ الشرط $n \geq N_\varepsilon$ يقتضي $\left|nI_n - f(1)\right| \leq \varepsilon$، ومنه 1.

2. يمكننا أن نبرهن بسهولة، بإجراء مُكاملة بالتجزئة، وبالتدريج على p من $\{1,\ldots,m\}$، أنّه:

$$I_n - \sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{n(n+1)\cdots(n+k)}f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^p(n-p)!}{n!}\int_0^1 x^{n+p}f^{(p)}(x)\,\mathrm{d}\,x$$

ونحصل على العلاقة المطلوبة عندما $p = m$.

3. بملاحظة أنّ

$$\frac{1}{1+x^2}-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k-2}=\frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}$$

وأنّ $\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^2}$ نجد

$$\frac{\pi}{4}-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=(-1)^n\int_0^1 x^{2n-1}\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x=(-1)^n I_{2n}(f)$$

حيث $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$. وهنا نلاحظ أنّ $f(1)=\frac{1}{2}$ و $f'(1)=0$ و $f''(1)=-\frac{1}{2}$.
إذن

$$\begin{aligned}I_{2n}(f)&=\frac{1}{4n}-\frac{1}{8n(n+1)(2n+1)}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\\&=\frac{1}{4n}-\frac{1}{16n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\end{aligned}$$

وعليه فإنّ

$$\frac{\pi}{4}-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=\frac{(-1)^n}{4n}-\frac{(-1)^n}{16n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

■

التمرين 10. احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ في كلٍّ من الحالات الآتية:

① $u_n=\sum_{k=0}^{2n}\frac{k}{k^2+n^2}$ ② $u_n=\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{1}{\alpha}}\left(n^{\alpha-\frac{1}{\alpha}}+k^{\alpha-\frac{1}{\alpha}}\right)$

③ $u_n=\sum_{k=n}^{2n}\sin\frac{\pi}{k}$ ④ $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k^2}{n^3+k^3}$

⑤ $u_n=\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}$ ⑥ $u_n=n^2\left(\prod_{k=1}^{n}k^k\right)^{-4/n^2}$

الحل

1. نلاحظ أنّ

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n} \frac{k/n}{1+(k/n)^2}$$

وعلى هذا فإنّ u_n هو مجموع ريمان الموافق للتابع $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ ولتقسيمة منتظمة خطوتها $\frac{1}{n}$ للمجال $[0,2]$. وعليه فإنّ

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \int_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 5$$

2. هنا نفترض أنّ $\alpha > 0$. عندئذ يكون لدينا

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n} k^{1/\alpha}\left(n^{\alpha-1/\alpha}+k^{\alpha-1/\alpha}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^{1/\alpha}+\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}\right)$$

إذن u_n هو مجموع ريمان الموافق للتابع $x \mapsto x^{1/\alpha}+x^{\alpha}$ ولتقسيمة منتظمة خطوتها $\frac{1}{n}$ للمجال $[0,1]$. وعليه فإنّ

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \int_0^1 (x^{\frac{1}{\alpha}}+x^{\alpha})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+1/\alpha}+\frac{1}{1+\alpha} = 1$$

3. بالاستفادة من المتراجحة البسيطة: $0 \le x-\sin x \le x^3/6$ في حالة $x \ge 0$، يمكننا أن نكتبَ ما يلي

$$\forall n \ge 1, \quad 0 \le \sum_{k=n}^{2n}\left(\frac{\pi}{k}-\sin\frac{\pi}{k}\right) \le \frac{\pi^3}{6}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^3} \le \frac{\pi^3(n+1)}{6n^3}$$

وعليه فإنّ

$$\lim_{n\to\infty}\left(u_n - \sum_{k=n}^{2n}\frac{\pi}{k}\right) = 0$$

ولكن

$$\sum_{k=n}^{2n}\frac{\pi}{k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\pi}{k+n} = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+k/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi\cdot\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \pi\ln 2$$

إذن $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \pi\ln 2$.

4. نلاحظ هنا أنّ

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k^2}{n^3+k^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k/n)^2}{1+(k/n)^3} + \underbrace{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^3}}_{\leq \frac{1}{n}}$$

إذن u_n هو مجموع ريمان الموافق للتابع $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^3}$ ولتقسيمة منتظمة خطوتها $\frac{1}{n}$ للمجال $[0,1]$، مضافاً إليه حدٌّ يسعى إلى الصفر وعليه فإنّ

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\ln 2}{3}$$

5. وهنا أيضاً لدينا

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\left(k+\frac{1}{2}\right)/n}\right)$$

إذن u_n هو نصف مجموع ريمان الموافق للتابع $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ ولتقسيمة منتظمة خطوتها $\frac{1}{n}$ للمجال $[0,1]$، وعليه فإنّ

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\ln 2}{2}$$

6. لندرس حالة $u_n = n^2\left(\prod_{k=1}^{n} k^k\right)^{-4/n^2}$. هنا نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
\ln u_n &= 2\ln n - \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln k \\
&= 2\ln n - \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k(\ln k - \ln n + \ln n) \\
&= 2\ln n - \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\frac{k}{n} - \frac{4\ln n}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \\
&= -2\frac{\ln n}{n} - \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\frac{k}{n}
\end{aligned}$$

إذن $\ln u_n$ هو مجموع ريمان الموافق للتابع $x \mapsto -4x\ln x$ ولتقسيمة منتظمة خطوتها $\frac{1}{n}$ للمجال $[0,1]$، مضافاً إليه حدٌّ يسعى إلى الصفر وعليه فإنّ

$$\lim_{n\to\infty} \ln u_n = -4\int_0^1 x\ln x \,\mathrm{d}\,x = 1$$

وعلى هذا فإنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = e$.

التمرين 11. ليكن f تابعاً من الصف C^1 على المجال $[a,b]$. أثبت أنّ :

$$\forall t \in [a,b], \quad \left|f(t)\right| \leq \frac{1}{2}\left(\left|f(a)+f(b)\right| + \int_a^b \left|f'(t)\right| \mathrm{d}\,t\right)$$

الحل

نلاحظ أولاً أنّ

$$\forall t \in [a,b], \quad f(t) = f(a) + \int_a^t f'(x)\,\mathrm{d}\,x$$
$$f(t) = f(b) - \int_t^b f'(x)\,\mathrm{d}\,x$$

وعلى هذا فإنّ

$$\forall t \in [a,b], \quad f(t) = \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{1}{2}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{sgn}(t-x)\,\mathrm{d}\,x$$

ومن ثَمّ

$$\forall t \in [a,b], \quad \left|f(t)\right| \leq \left|\frac{f(a)+f(b)}{2}\right| + \frac{1}{2}\int_a^b \left|f'(x)\right| \mathrm{d}\,x$$

وهو المطلوب إثباته.

التمرين 12. ليكن f و g تابعين مستمرين على $\mathbb{R}_+$ وقيمهما موجبة.نفترض أنه يوجد ثابتٌ c في $\mathbb{R}_+^*$، يُحقِّق

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) \leq c + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}\,t$$

أثبت أنّ

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) \leq c\,\exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}\,t\right)$$

الحل

لنعرّف التابع $u \mapsto H(u) = \int_0^u f(t)g(t)\,\mathrm{d}\,t$، فيكون لدينا

$$\forall u \geq 0, \quad f(u) \leq c + H(u) \tag{1}$$

ثُمّ لنثبّت عدداً x من $\mathbb{R}_+^*$، ولنعرّف $t \mapsto G(t) = \int_t^x g(u)\,\mathrm{d}\,u$ على المجال $[0,x]$.
سنثبتُ بالتدريج على العدد n أنّه مهما تكن $0 \leq n$ فلدينا

$$f(x) \leq c\left(1+G(0)+\frac{G^2(0)}{2}+\cdots+\frac{G^n(0)}{n!}\right)+\frac{1}{n!}\int_0^x G^n(t)g(t)f(t)\,\mathrm{d}\,t \tag{2}$$

إنّ حالة $n = 0$ هي فرْض التمرين (1). لنفترض صحة المتراجحة (2) في حالة n. ولنلاحظ أنّ

$$\forall t \in [0,x], \quad G^n(t)g(t) \geq 0$$

ينتج إذن من (1) أنّ

$$\forall t \in [0,x], \quad G^n(t)g(t)f(t) \leq cG^n(t)g(t) + G^n(t)g(t)H(t)$$

وبالمكاملة وملاحظة أنّ $G^n g = -\frac{1}{n+1}\left(G^{n+1}\right)'$ نجد

$$\begin{aligned}
\int_0^x G^n gf &\leq \frac{c}{n+1}G^{n+1}(0) - \frac{1}{n+1}\int_0^x \left(G^{n+1}\right)' H \\
&\leq \frac{cG^{n+1}(0)}{n+1} - \left[\frac{G^{n+1}(t)}{n+1}H(t)\right]_0^x + \frac{1}{n+1}\int_0^x G^{n+1}H' \\
&\leq \frac{cG^{n+1}(0)}{n+1} + \frac{1}{n+1}\int_0^x G^{n+1}gf
\end{aligned}$$

وبالتعويض في (2) نستنتج أنّ (2) تبقى صحيحة في حالة $n+1$ ويكتمل إثباتها بالتدريج.

والآن إذا عرّفنا $R_n = \frac{1}{n!}\int_0^x G^n(t)g(t)f(t)\,\mathrm{d}\,t$ كان من الواضح لدينا أنّ

$$\forall n \geq 1, \quad \left|R_n\right| \leq \sup_{[0,x]}\left(f\right)\cdot\frac{G^{n+1}(0)}{(n+1)!}$$

إذن $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$. فإذا جعلنا n تسعى إلى $+\infty$ في المتراجحة (2) وتذكّرنا تعريف التابع الأسّي استنتجنا أنّ

$$f(x) \leq c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{G^n(0)}{n!} = ce^{G(0)} = c\exp\left(\int_0^x g(u)\,\mathrm{d}\,u\right)$$

وهذه هي المتراجحة المطلوبة لأنّ x عدد موجب كيفي. ■

التمرين 13. أثبت أنّ $\int_0^{\pi/4}\ln\cos x\,\mathrm{d}\,x = \int_0^{\pi/4}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\mathrm{d}x$ واستنتج قيمة

$$\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}\,x$$

الحل

لتكن a من $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. إنّ تغيير المتحوّل $x \mapsto a-x$ يتيح لنا أن نكتب

$$\int_0^a \ln\cos x\,\mathrm{d}\,x = \int_0^a \ln\cos(a-x)\,\mathrm{d}\,x$$

ومن ثَمّ فإنّ

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^a \ln\frac{\cos(a-x)}{\cos x}\,\mathrm{d}\,x\\
&= \int_0^a \ln\frac{\cos a\cos x + \sin a\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}\,x\\
&= \int_0^a \ln\big(\cos a + \sin a\tan x\big)\,\mathrm{d}\,x\\
&= a\ln\cos a + \int_0^a \ln\big(1+\tan a\tan x\big)\,\mathrm{d}\,x
\end{aligned}$$

إذن

$$\forall a \in \left]0,\tfrac{\pi}{2}\right[,\qquad \int_0^a \ln\big(1+\tan a\tan x\big)\,\mathrm{d}\,x = -a\ln\cos a$$

وبوجه خاص

$$\int_0^{\pi/4}\ln\big(1+\tan x\big)\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{8}\ln 2$$ ■

التمرين 14. أثبت أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x\ln x}\displaystyle\int_1^x e^t\ln t\,\mathrm{d}\,t=1$.

الحل

لنعرّف التابع H على $]1,+\infty[$ كما يأتي:

$$\forall x>1,\quad H(x)=1-\frac{1}{e^x\ln x}\int_1^x e^t\ln t\,\mathrm{d}\,t$$

تسمح لنا مُكاملة بالتجزئة أن نكتبَ :

$$\int_1^x e^t\ln t\,\mathrm{d}\,t=\Big[e^t\ln t\Big]_1^x-\int_1^x\frac{e^t}{t}\mathrm{d}\,t=e^x\ln x-\int_1^x\frac{e^t}{t}\mathrm{d}\,t$$

وعليه فإنّ

$$\forall x>1,\quad H(x)=\frac{1}{e^x\ln x}\int_1^x\frac{e^t}{t}\mathrm{d}\,t$$

ومنه نستنتج أنّه في حالة $x>1$ لدينا

$$0<H(x)\leq\frac{1}{e^x\ln x}\int_1^x e^t\leq\frac{1}{\ln x}$$

إذن

$$\lim_{x\to\infty}H(x)=0$$

وهذه هي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 15. ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+^*$ تابعاً مستمراً. أثبت الخاصتين الآتيتين:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f^n(t)\mathrm{d}t\right)^{1/n}=\sup_{t\in[a,b]}f(t),$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\sqrt[n]{f(t)}\,\mathrm{d}\,t\right)^n=\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(t)\mathrm{d}\,t\right)$$

الحل

- لنعرّف $M = \sup_{[a,b]} f$. لمّا كان f مستمرّاً على $[a,b]$ استنتجنا أنّه يوجد x_0 في $[a,b]$ يُحقّق $f(x_0) = M$. لتكن ε من $]0, M[$ ، نظراً إلى استمرار f عند x_0 ، يوجد مجال $I_\varepsilon = [\alpha, \beta]$ محتوى في $[a,b]$ يُحقّق

$$\forall t \in I_\varepsilon, \quad f(t) \geq M - \varepsilon$$

ومن ثَمّ يكون

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (M-\varepsilon)\cdot \sqrt[n]{\beta-\alpha} \leq \left(\int_\alpha^\beta f^n\right)^{1/n} \leq \left(\int_a^b f^n\right)^{1/n} \leq M$$

ولأنّ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\beta-\alpha} = 1$ استنتجنا أنّ

$$M - \varepsilon \leq \varliminf_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n\right)^{1/n} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n\right)^{1/n} \leq M$$

وهذا يبرهن النتيجة الأولى لأنّ ε عدد موجب كيفي.

- ومن جهة أخرى، لمّا كان كلٌّ من التابعين $x \mapsto f(x)$ و $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ مستمرّاً وموجباً على المجال المتراصّ $[a,b]$ استنتجنا أنّه يوجد عدد $A > 1$ يُحقّق

$$\forall t \in [a,b], \quad \frac{1}{A} \leq f(t) \leq A$$

فإذا استفدنا من المتراجحة المألوفة $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|e^x - 1 - x\right| \leq \dfrac{x^2}{2} e^{|x|}$ وجدنا أنّ

$$\left|\exp\frac{\ln f(t)}{n} - 1 - \frac{\ln f(t)}{n}\right| \leq \frac{(\ln A)^2}{2n^2}\sqrt[n]{A}$$

وذلك مهما تكن t من $[a,b]$، ومهما تكن $n \geq 1$. وبالمكاملة نجد

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b \sqrt[n]{f(t)}\,\mathrm{d}\,t - 1 - \frac{1}{n(b-a)}\int_a^b \ln f(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \leq \frac{K}{n^2}$$

وقد اخترنا $K = (\ln A)^2 A$ مثلاً. وعليه يكون

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \sqrt[n]{f(t)}\,\mathrm{d}\,t = 1 + \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(t)\,\mathrm{d}\,t\right)\frac{1}{n} + O\!\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

وهذا يقتضي أنّ

$$n\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \sqrt[n]{f(t)}\,\mathrm{d}\,t\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(t)\,\mathrm{d}\,t + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

إذن

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \sqrt[n]{f(t)}\,\mathrm{d}\,t\right)^n = \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(t)\,\mathrm{d}\,t\right)$$

وهي النتيجة المطلوبة.

التمرين 16. ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمراً يحقّق

$$\forall x\geq 0,\quad f(a+b-x)=f(x)$$

أثبت أن $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ $\displaystyle\frac{a+b}{2}$ $=$ $\displaystyle\int_a^b x\,f(x)\,\mathrm{d}x$ ، واحسب

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x \quad \text{و} \quad \int_0^\pi \frac{x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$$

الحل

بإجراء تغيير المتحوّل $x=a+b-u$ نجد أنّ

$$\begin{aligned}\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}\,x &= -\int_a^b (a+b-u)f(a+b-u)\,\mathrm{d}\,u\\ &= \int_a^b (a+b-x)f(x)\,\mathrm{d}\,x\\ &= (a+b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

وعليه يكون

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{a+b}{2}\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

وبوجه خاص نرى أنّ

$$\int_0^\pi \frac{x}{1+\sin x}\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2}\cdot\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2}\cdot\left[\frac{-\cos x}{1+\sin x}\right]_0^\pi = \pi$$

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2}\cdot\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2}\cdot\left[\arctan(-\cos x)\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}$$

وبذا يكتمل الحل.

التمرين 17. لنعرّف أيّاً كان x من $\mathbb{R}_+$ المقدارين

$$J(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{\sin^2 t+x^2\cos^2 t}},\qquad K(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t\,\mathrm{d}\,t}{\sqrt{\sin^2 t+x^2\cos^2 t}}.$$

1. أثبت أنّ: $\lim\limits_{x\to0^+}\big(J(x)-K(x)\big)=\ln 2$.
2. احسب $K(x)$ عندما تنتمي x إلى $]0,1[$. واستنتج $\lim\limits_{x\to0^+}\big(J(x)+\ln x\big)$.

الحل

1. نلاحظ أوّلاً أنّ

$$J(x)-K(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos t}{\sqrt{\sin^2 t+x^2\cos^2 t}}\mathrm{d}\,t$$

ومن جهة ثانية من الواضح أنّ

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos t}{\sin t}\mathrm{d}\,t&=\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos^2 t}{\sin t\cdot(1+\cos t)}\mathrm{d}\,t\\&=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{1+\cos t}\mathrm{d}\,t=\Big[-\ln(1+\cos t)\Big]_0^{\pi/2}\\&=\ln 2\end{aligned}$$

إذن نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}\Delta(x)&=\ln 2+K(x)-J(x)\\&=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos t}{\sin t}-\frac{1-\cos t}{\sqrt{\sin^2 t+x^2\cos^2 t}}\right)\mathrm{d}\,t\\&=\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos t}{\sin t\cdot\sqrt{\sin^2 t+x^2\cos^2 t}}\left(\sqrt{\sin^2 t+x^2\cos^2 t}-\sin t\right)\mathrm{d}\,t\\&=\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos t}{\sin t\cdot\sqrt{\cancel{\sin^2 t}+x^2\cos^2 t}}\cdot\frac{x^2\cos^2 t}{\sqrt{\sin^2 t+\cancel{x^2\cos^2 t}}+\sin t}\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

وبحذف الحدَّيْن المشار إليهما نستنتج أنّه مهما تكن $x > 0$ يكن

$$0 \leq \Delta(x) \leq x \int_0^{\pi/2} \frac{(1-\cos t)\cos t}{2\sin^2 t} \,\mathrm{d}\,t = \frac{x}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1+\cos t} \,\mathrm{d}\,t \leq \frac{\pi}{4} x$$

وهذا يقتضي أنّ $\lim\limits_{x \to 0^+} \Delta(x) = 0$ أي

$$\lim_{x \to 0^+} \big(J(x) - K(x) \big) = \ln 2$$

2.ليكن x من $]0,1[$ ، ولنُجرِ في عبارة $K(x)$ تغيير المتحوّل $u = \dfrac{1}{x}\sqrt{1-x^2}\sin t$:

$$\begin{aligned} K(x) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t \,\mathrm{d}\,t}{\sqrt{\sin^2 t + x^2 \cos^2 t}} = \int_0^{\sqrt{1-x^2}/x} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}\,u}{x\sqrt{1+u^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \int_0^{\sqrt{1-x^2}/x} \frac{\mathrm{d}\,u}{\sqrt{1+u^2}} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln\left(u + \sqrt{1+u^2} \right) \right]_0^{\sqrt{1-x^2}/x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right) \end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned} K(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \ln \frac{x}{2} - \ln \frac{x}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{x^2 \ln(x/2)}{\sqrt{1-x^2}\,(1+\sqrt{1-x^2}\,)} - \ln \frac{x}{2} \end{aligned}$$

ومن ثَمّ فإنّ $\lim\limits_{x \to 0^+} \big(K(x) + \ln x \big) = \ln 2$ ، فإذا جمعنا هذه النتيجة مع نتيجة .1 وجدنا :

$$\lim_{x \to 0^+} \big(J(x) + \ln x \big) = 2\ln 2$$ ■

التمرين 18. أيّاً كان (x,y) من $\mathbb{R}_+^2\backslash\{(0,0)\}$ ، نضع

$$A(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln\left(x\sin^2\theta+y\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

1. أثبت أنّ $A(x,y)=A(y,x)$ وأنّ $A\left((\frac{x+y}{2})^2,xy\right)=2A(x,y)$.

2. نعرّف المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقات

$$u_0=x,\quad v_0=y,\quad u_{n+1}=\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)^2,\quad v_{n+1}=v_nu_n$$

أثبت أن

$$\forall n\geq 1,\qquad \frac{1}{2^n}\ln v_n\leq A(u_0,v_0)\leq\frac{1}{2^n}\ln u_n$$.

3. بالاستفادة من المتتاليتين $(S_n)_{n\geq 0}$ و $(T_n)_{n\geq 0}$ المعرّفتين بالعلاقتين :

$$T_n=\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n}\quad \text{و}\quad S_n=\sqrt{u_n}+\sqrt{v_n}$$

احسب النهايتين

$$\lim_{n\to+\infty}2^{-n}\ln(u_n)\quad \text{و}\quad \lim_{n\to+\infty}2^{-n}\ln(v_n)$$

واستنتج قيمة $A(x,y)$.

الحل

1. تنتج المساواة $A(x,y)=A(y,x)$ من تغيير المتحوّل $\theta\mapsto\frac{\pi}{2}-\theta$. ومن ناحية أخرى لنضع $g(x,y,\theta)=x\sin^2\theta+y\cos^2\theta$ ، عندئذ نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}g(x,y,\theta)g(y,x,\theta)&=(x\sin^2\theta+y\cos^2\theta)\cdot(y\sin^2\theta+x\cos^2\theta)\\&=(x^2+y^2)\sin^2\theta\cos^2\theta+xy(\cos^4\theta+\sin^4\theta)\\&=(x^2+y^2+2xy)\sin^2\theta\cos^2\theta+xy(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2\\&=\left(\tfrac{x+y}{2}\right)^2\sin^2(2\theta)+xy\cos^2(2\theta)\\&=g\left(\left(\tfrac{x+y}{2}\right)^2,xy,2\theta\right)\end{aligned}$$

وعلى هذا يكون لدينا:

$$\begin{aligned}
2A(x,y) &= A(x,y)+A(y,x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln\big(g(x,y,\theta)g(y,x,\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln g\left(\left(\tfrac{x+y}{2}\right)^2, xy, 2\theta\right)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \ln g\left(\left(\tfrac{x+y}{2}\right)^2, xy, \theta\right)\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln g\left(\left(\tfrac{x+y}{2}\right)^2, xy, \theta\right)\mathrm{d}\theta + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \ln g\left(\left(\tfrac{x+y}{2}\right)^2, xy, \theta\right)\mathrm{d}\theta}_{\theta\leftarrow\pi-\theta}\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln g\left(\left(\tfrac{x+y}{2}\right)^2, xy, \theta\right)\mathrm{d}\theta = A\left(\left(\tfrac{x+y}{2}\right)^2, xy\right)
\end{aligned}$$

ونحصل من ثَمّ على المساواة المطلوبة.

2. ينتج لدينا انطلاقاً مما سبق

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad A(u_{n+1},v_{n+1}) = 2A(u_n,v_n)$$

وعلى هذا يكون لدينا وضوحاً

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad A(u_n,v_n) = 2^n A(u_0,v_0) = 2^n A(x,y)$$

نلاحظ بسهولة أنّ

$$u_{n+1}-v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n-v_n)^2 \geq 0$$

إذن مهما تكن $n\geq 1$ يكن $u_n \geq v_n$، ومن ثَمّ مهما تكن $n\geq 1$ يكن

$$\begin{aligned}
A(u_n,v_n) &\leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln(u_n\sin^2\theta + u_n\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \ln u_n\\
A(u_n,v_n) &\geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln(v_n\sin^2\theta + v_n\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \ln v_n
\end{aligned}$$

وعليه نكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \ln v_n \leq 2^n A(x,y) \leq \ln u_n$$

3. نتيقَّن بسهولة أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{n+1} = \frac{1}{2} S_n^2, \quad T_{n+1} = \frac{1}{2} T_n^2$$

ينتج من ذلك بالتدريج البسيط أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \frac{2}{2^{2^n}} S_0^{2^n}, \quad T_n = \frac{2}{2^{2^n}} T_0^{2^n}$$

وعليه، مهما تكن n من $\mathbb{N}$ يكن

$$\sqrt{u_n} = \frac{1}{2}\left(S_n + T_n\right) = \frac{1}{2^{2^n}}\left(S_0^{2^n} + T_0^{2^n}\right) = \left(\frac{S_0}{2}\right)^{2^n} \cdot \left(1 + \left(\frac{T_0}{S_0}\right)^{2^n}\right)$$

$$\sqrt{v_n} = \frac{1}{2}\left(S_n - T_n\right) = \frac{1}{2^{2^n}}\left(S_0^{2^n} - T_0^{2^n}\right) = \left(\frac{S_0}{2}\right)^{2^n} \cdot \left(1 - \left(\frac{T_0}{S_0}\right)^{2^n}\right)$$

ومنه

$$\frac{1}{2^{n+1}} \ln u_n = \ln\left(\frac{S_0}{2}\right) + \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \left(\frac{T_0}{S_0}\right)^{2^n}\right)$$

$$\frac{1}{2^{n+1}} \ln v_n = \ln\left(\frac{S_0}{2}\right) + \frac{1}{2^n} \ln\left(1 - \left(\frac{T_0}{S_0}\right)^{2^n}\right)$$

وبملاحظة أنّ $\left|T_0 / S_0\right| < 1$ نستنتج مباشرة أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \ln u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \ln v_n = \ln\left(\frac{S_0}{2}\right)$$

أو

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \ln u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \ln v_n = 2\ln\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2}\right)$$

وبالاستفادة من المتراجحة التي أثبتناها في 2. نستنتج أنّ

$$A(x, y) = 2\ln\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2}\right)$$

وأخيراً

$$\int_0^{\pi/2} \ln(x\sin^2\theta + y\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\,\theta = \pi\ln\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)$$

وذلك مهما تكن (x,y) من $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$.

التمرين 19. ليكن φ تابعاً حقيقياً من الصف C^1 على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$، يحقق $\varphi(0)=0$.

أثبت أنّ :

$$\int_0^{\pi/2} \varphi^2(x)\,\mathrm{d}\,x \le \int_0^{\pi/2} \varphi'^2(x)\,\mathrm{d}\,x$$

وذلك بالاستفادة من التابع المساعد:

$$g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\varphi^2(x)\cot x\Big) + \Big(\varphi'(x) - \varphi(x)\cot x\Big)^2$$

ثم أثبت أن المساواة تتحقَّق إذا وفقط إذا كان φ من الشكل $x \mapsto \lambda\sin x$. استنتج أنه أيّاً كان التابع الحقيقي f من الصف C^1 على المجال $[a,b]$، لدينا

$$\int_a^b \Big(f(x)-f(a)\Big)^2\,\mathrm{d}x \le \frac{4(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b \Big(f'(x)\Big)^2\,\mathrm{d}x$$

الحل

نلاحظ أوّلاً أنّ التابع $x \mapsto \varphi(x)\,\mathrm{cotan}\,x$ يقبل التمديد إلى تابع مستمرّ على $[0,\frac{\pi}{2}]$ لأنّ $\varphi(0)=0$ وهو من الصف C^1 . لنتأمّل إذن التابع g فنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\varphi^2\cot x\Big) + \Big(\varphi' - \varphi\cot x\Big)^2\\
&= 2\varphi'\varphi\cot x + \varphi^2(-1-\cot^2 x) + \varphi'^2 - 2\varphi'\varphi\cot x + \varphi^2\cot^2 x\\
&= \varphi'^2 - \varphi^2
\end{aligned}$$

وعلى هذا يكون لدينا وضوحاً

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\Big(\varphi'^2(x) - \varphi^2(x)\Big)\mathrm{d}\,x &= \Big[\varphi^2(x)\cot x\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\Big(\varphi'(x)-\varphi(x)\cot x\Big)^2\,\mathrm{d}\,x\\
&= \int_0^{\pi/2}\Big(\varphi'(x)-\varphi(x)\cot x\Big)^2\,\mathrm{d}\,x
\end{aligned}$$

أو

$$\int_0^{\pi/2} \varphi'^2(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_0^{\pi/2} \varphi^2(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^{\pi/2} \big(\varphi'(x) - \varphi(x)\cot x\big)^2\,\mathrm{d}\,x$$

نستنتج من ذلك مباشرة أنّ

$$\int_0^{\pi/2} \varphi'^2(x)\,\mathrm{d}\,x \geq \int_0^{\pi/2} \varphi^2(x)\,\mathrm{d}\,x$$

وتحدث المساواة إذا وفقط إذا كان $\int_0^{\pi/2} \big(\varphi'(x) - \varphi(x)\cot x\big)^2\,\mathrm{d}\,x = 0$ ، ويكافئ هذا الشرط قولنا $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi'(x) = \varphi(x)\cot x$. أو

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \left(\frac{\varphi(x)}{\sin x}\right)' = 0$$

وهذا يُكافئ وجود λ في $\mathbb{R}$ يُحقّق :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \varphi(x) = \lambda \sin x$$

ليكن f تابعاً حقيقيّاً f من الصف C^1 على المجال $[a,b]$. بتطبيق ما سبق على التابع

$$\varphi : \left[0, \tfrac{2}{\pi}\right] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \varphi(x) = f\Big(a + \tfrac{2}{\pi}(b-a)x\Big) - f(a)$$

نستنتج أنّ

$$\int_a^b \big(f(x) - f(a)\big)^2\,\mathrm{d}x \leq \frac{4(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b \big(f'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$$

وتحدث المساواة إذا وفقط إذا كان التابع f من الشكل

$$x \mapsto \alpha + \beta \sin\frac{\pi(x-a)}{2(b-a)}$$

حيث (α, β) من $\mathbb{R}^2$. وبذا يكتمل إثبات المطلوب. ∎

التمرين 20. نضع $I_n = \int_0^1 \sqrt{1+n^2x^{2(n-1)}}\,\mathrm{d}x$ ، أيّاً كان n من $\mathbb{N}^*$ ، يمثّل هذا المقدار طول المنحني الممثّل للتابع $x \mapsto x^n$ على المجال $[0,1]$. ونعرّف أيّاً كان y من $\mathbb{R}_+^*$ المقدار :

$$J(y) = \int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{1+t+\sqrt{1+t^2}}$$

1. أثبت أنّ $I_n = 2 - \frac{2}{n-1}J(n) + \frac{2}{n-1}\int_0^1 J(nx^{n-1})\,\mathrm{d}x$.
2. أثبت أنّ $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 J(nx^{n-1})\,\mathrm{d}x = 0$.
3. استنتج قيمة النهاية $\lim_{n\to+\infty}\left(n(I_n-2)+\ln n\right)$.

الحل

1. لنلاحظ أوّلاً أنّ

$$\begin{aligned}
I_n - 2 &= \int_0^1 \sqrt{1+n^2x^{2(n-1)}}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 (1+nx^{n-1})\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{-2nx^{n-1}}{\sqrt{1+n^2x^{2(n-1)}}+1+nx^{n-1}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

ولكن من الواضح أنّ

$$\left(J(nx^{n-1})\right)' = \frac{n(n-1)x^{n-2}}{\sqrt{1+n^2x^{2(n-1)}}+1+nx^{n-1}}$$

إذن

$$\begin{aligned}
I_n - 2 &= \frac{-2}{n-1}\int_0^1 x\left(J(nx^{n-1})\right)'\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{-2}{n-1}xJ(nx^{n-1})\right]_0^1 + \frac{2}{n-1}\int_0^1 J(nx^{n-1})\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2J(n)}{n-1} + \frac{2}{n-1}\int_0^1 J(nx^{n-1})\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

2. لنضع حين تكون $2 \leq n$، $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$ بحيث يكون $n(x_n)^{n-1} = 1$. عندئذ يكون لدينا

$$\int_0^{x_n} J(nx^{n-1})\,\mathrm{d}\,x \leq \frac{1}{2}\int_0^{x_n} nx^{n-1}\,\mathrm{d}\,x = \frac{(x_n)^n}{2} = \frac{x_n}{2n} \leq \frac{1}{2n}$$

وذلك لأنّه من الواضح أنّ $J(y) \leq \dfrac{y}{2}$. ومن جهة ثانية لدينا

$$\begin{aligned}\int_{x_n}^{1} J(nx^{n-1})\,\mathrm{d}\,x &\leq (1-x_n)J(n)\\ &\leq (1-x_n)\cdot\int_0^{n}\frac{\mathrm{d}\,t}{1+t} = (1-x_n)\cdot\ln(n+1)\end{aligned}$$

ولكن $\forall t \in \mathbb{R}, 1-e^{-t} \leq t$ إذن

$$1-x_n = 1-\exp\left(-\frac{\ln n}{n-1}\right) \leq \frac{\ln n}{n-1}$$

وعلى هذا نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}0 \leq \int_0^{1} J(nx^{n-1})\,\mathrm{d}\,x &= \int_0^{x_n} J(nx^{n-1})\,\mathrm{d}\,x + \int_{x_n}^{1} J(nx^{n-1})\,\mathrm{d}\,x\\ &\leq \frac{1}{2n} + \frac{\ln n\cdot\ln(n+1)}{n-1}\end{aligned}$$

وهذا يثبتُ أنّ $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 J(nx^{n-1})\,\mathrm{d}\,x = 0$ ، بل لقد أثبتنا أنّ

$$\int_0^1 J(nx^{n-1})\,\mathrm{d}\,x = O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)$$

3. لنحسب التكامل $J(y)$ ، نلاحظ أولاً أنّ

$$\begin{aligned}J(y) &= \int_0^{y}\frac{\mathrm{d}\,t}{1+t+\sqrt{1+t^2}} = \int_0^{y}\frac{1+t-\sqrt{1+t^2}}{2t}\,\mathrm{d}\,t\\ &= \frac{y}{2}-\frac{1}{2}\int_0^{y}\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{t}\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{aligned}y - 2J(y) &= \int_0^y \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{t}\,\mathrm{d}\,t \underset{u\leftarrow\sqrt{1+t^2}}{=} \int_1^{\sqrt{1+y^2}} \frac{u-1}{u^2-1}\,u\,\mathrm{d}\,u \\ &= \int_1^{\sqrt{1+y^2}} \frac{u}{u+1}\,\mathrm{d}\,u = \Big[u - \ln(1+u)\Big]_1^{\sqrt{1+y^2}} \\ &= \sqrt{1+y^2} - \ln(1+\sqrt{1+y^2}) - 1 + \ln 2\end{aligned}$$

وأخيراً

$$\ln y - 2J(y) = \frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}} + \ln\frac{y}{1+\sqrt{1+y^2}} - 1 + \ln 2$$

وهذا يثبتُ أنّ

$$\lim_{y\to\infty}\big(\ln y - 2J(y)\big) = \ln 2 - 1$$

وبالاستفادة من نتيجة الطلب الأوّل يمكننا أن نكتب

$$n(I_n - 2) + \ln n = \big(\ln n - 2J(n)\big) - \frac{2J(n)}{n-1} + \frac{2n}{n-1}\int_0^1 J(nx^{n-1})\,\mathrm{d}\,x$$

وعلى هذا فإنّ $\lim_{n\to\infty}\big(n(I_n-2)+\ln n\big) = \ln(2/e)$ أو

$$I_n = 2 - \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln(2/e)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

■

التمرين 21. أيّاً كان n من $\mathbb{N}$، نضع $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}\,x$.

1. جِدْ علاقة تربط بين I_n و I_{n-2} حين يكون $2 \leq n$.
2. استنتج قيمة I_{2n} و قيمة I_{2n+1}.
3. بملاحظة أنّ $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}$، أثبت علاقة Wallis:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!\cdot\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

4. أيّاً كانت n من $\mathbb{N}^*$، نضع $a_n = \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ و $u_n = \ln\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

① أثبت أن المتسلسلة $\sum u_n$ متقاربة.

② استنتج تقارب المتتالية $(a_n)_{n\ge1}$ من عدد حقيقي $0 < \ell$.

③ عيّن ℓ بحساب النسبة $\dfrac{a_n^2}{a_{2n}}$ وباستعمال علاقة Wallis. ثُمّ أثبت علاقة Stirling الآتية:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$$

الحل

1. من الواضح أنّ

$$\begin{aligned}
I_{n-2} - I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos x \cdot \cos x \,\mathrm{d}\, x \\
&= \left[\frac{\sin^{n-1} x}{n-1}\cos x\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{n-1} x}{n-1} \cdot \sin x \,\mathrm{d}\, x \\
&= \frac{1}{n-1} I_n
\end{aligned}$$

وعلى هذا فإنّ

$$\forall n \ge 2, \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

2. نلاحظ أولاً أنّ $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ وأنّ $I_1 = 1$. ونبرهن بالتدريج على n أنّ

$$\begin{aligned}
I_{2n} &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \\
I_{2n+1} &= \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

3. لمّا كان $0 \le \sin x \le 1$ وذلك أيّاً كانت x من $[0,\frac{\pi}{2}]$ استنتجنا أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin^{2n+2} x \le \sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}$$

أو

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}$$

ولكن من الواضح أنّ $I_{2n} I_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2(2n+1)}$ وعليه ينتج مِمّا سبق أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\pi}{2(2n+2)} \leq I_{2n+1}^2 \leq \frac{\pi}{2(2n+1)}$$

أو

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{(2n+1)}{\sqrt{2n(2n+2)}} \leq \frac{2n+1}{\sqrt{2n}} \cdot I_{2n+1} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2n}}$$

ومنه

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}} \leq \frac{2n+1}{\sqrt{2n}} \cdot I_{2n+1} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2n}}$$

إذن

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n+1}{\sqrt{2n}} \cdot I_{2n+1} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

وهذا يُكافئ

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{\sqrt{2n} \cdot (2n)!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} .$$

4. لنتأمّل $a_n = \dfrac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$ ، و $u_n = \ln \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

①.4 نلاحظ بسهولة أنّ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

ومن ثَمّ فإنّ

$$\begin{aligned} u_n &= 1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= 1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

وهذا يثبت أنّ المتسلسلة $\sum u_n$ متقاربة بالإطلاق.

4.② لمّا كان

$$\sum_{k=1}^{n-1} u_k = \ln a_n - \ln a_1$$

استنتجنا من السؤال السابق أنّ $(\ln a_n)_{n\ge 1}$ متقاربة من عدد حقيقي α. وهذا يقتضي أنّ $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\alpha} = \lambda > 0$.

4.③ لنلاحظ أنّ

$$\frac{a_n^2}{a_{2n}} = \left(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\right)^2\cdot\left(\frac{(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{(2n)!\cdot e^{2n}}\right) = 2\cdot\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{2n}}$$

إذن، من جهة أولى لدينا $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_{2n}} = \lambda$ ، ومن جهة ثانية، استناداً إلى علاقة Wallis لدينا أيضاً $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_{2n}} = \sqrt{2\pi}$ ، إذن $\lambda = \sqrt{2\pi}$ ، ومن ثَمّ

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1 \qquad \blacksquare$$

التمرين 22. **توطئة Riemann**، ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمراً. نضع

$$I(f,\lambda)=\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}\,x$$

أثبت أنّ $\lim_{\lambda\to+\infty} I(f,\lambda)=0$.

مساعدة: يمكن أن نبدأ بحالة f من الصف C^1.

الحل

ليكن g تابعاً من الصف C^1 على المجال $[a,b]$، ولتكن $\lambda > 0$، عندئذ يكون لدينا

$$\begin{aligned} I(g,\lambda) &= \int_a^b g(x)\sin\lambda x \,\mathrm{d}\, x \\ &= \left[-\frac{\cos\lambda x}{\lambda}g(x)\right]_a^b + \frac{1}{\lambda}\int_a^b g'(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{\cos\lambda a}{\lambda}g(a) - \frac{\cos\lambda b}{\lambda}g(b) + \frac{1}{\lambda}\int_a^b g'(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}\,x \end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\left|I(g,\lambda)\right| \le \frac{1}{\lambda}\left(\left|g(a)\right| + \left|g(b)\right| + \int_a^b \left|g'(x)\right|\mathrm{d}\,x\right)$$

إذن $\lim\limits_{\lambda\to\infty} I(g,\lambda) = 0$ وذلك مهما يكن التابع g من الصف C^1 على $[a,b]$.

لتكن $\varepsilon > 0$، عندئذ يوجد تابع كثير الحدود $g_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ يُحقِّق

$$\sup_{[a,b]}\left|f - g_\varepsilon\right| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

وذلك استناداً إلى مبرهنة Weierstrass. ولأنّ g_ε من الصف C^1 يوجد، بناءً على ما سبق عددٌ Λ_ε يُحقِّق

$$\lambda \ge \Lambda_\varepsilon \Rightarrow \left|I(g_\varepsilon,\lambda)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

وعندئذ، في حالة $\lambda \ge \Lambda_\varepsilon$ يكون لدينا

$$\left|I(f,\lambda)\right| \le \left|I(f-g_\varepsilon,\lambda)\right| + \left|I(g_\varepsilon,\lambda)\right| < \int_a^b \left|f - g_\varepsilon\right| + \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وهذا يثبتُ أنّ $\lim\limits_{\lambda\to\infty} I(f,\lambda) = 0$. ■

التمرين 23. احسب التكامل المحدود:

$$\mathcal{I} = \int_{0}^{\pi/4} \frac{\sin x}{1+\tan 2x}\,\mathrm{d}\,x$$

الحل

الفكرة الرابحة هي في إجراء تغيير المتحوّل $x = \frac{\pi}{8} + t$ وملاحظة أنّه في هذه الحالة لدينا :

$$1+\tan 2x = 1+\tan\left(\frac{\pi}{4}+2t\right) = 1+\frac{1+\tan 2t}{1-\tan 2t} = \frac{2}{1-\tan 2t}$$

وعليه فإنّ

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/8}^{\pi/8} \sin\left(\frac{\pi}{8}+t\right)\left(1-\tan 2t\right)\mathrm{d}\,t \\
&= \left[-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}+t\right)\right]_{-\pi/8}^{\pi/8} - \frac{1}{2}\int_{-\pi/8}^{\pi/8} \sin\left(\frac{\pi}{8}+t\right)\tan 2t\,\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{8}\cancel{\int_{-\pi/8}^{\pi/8} \cos t\cdot\tan 2t\,\mathrm{d}\,t} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{8}\int_{-\pi/8}^{\pi/8} \sin t\cdot\tan 2t\,\mathrm{d}\,t
\end{aligned}$$

ولكنّ التابع $t \mapsto \cos t\cdot\tan 2t$ تابعٌ فردي والتابع $t \mapsto \sin t\cdot\tan 2t$ تابعٌ زوجي، إذن

$$\mathcal{I} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} - \cos\frac{\pi}{8}\int_{0}^{\pi/8} \sin t\cdot\tan 2t\,\mathrm{d}\,t;$$

فإذا استفدنا من المساواة

$$\tan 2t = \frac{2\sin t\cos t}{1-2\sin^2 t}$$

أمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} + \cos\frac{\pi}{8}\int_{0}^{\pi/8} \frac{-2\sin^2 t\cos t}{1-2\sin^2 t}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} + \cos\frac{\pi}{8}\int_{0}^{\pi/8} \cos t\,\mathrm{d}\,t - \cos\frac{\pi}{8}\int_{0}^{\pi/8} \frac{\cos t}{1-2\sin^2 t}\,\mathrm{d}\,t
\end{aligned}$$

ثُمّ أمكننا المتابعة كما يأتي

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} + \cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{8}\int_0^{\pi/8}\left(\frac{\cos t}{1-\sqrt{2}\sin t} + \frac{\cos t}{1+\sqrt{2}\sin t}\right)\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{8}\left[\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t}\right)\right]_0^{\pi/8} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{8}\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}\sin(\pi/8)}{1-\sqrt{2}\sin(\pi/8)}\right)
\end{aligned}$$

ولكن

$$\frac{1+\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}}{1-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}} = \frac{\left(1+\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}\right)^2}{1-2\sin^2\frac{\pi}{8}} = 2\sqrt{2}-1+4\sin\frac{\pi}{8}$$

ولدينا

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \qquad \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

وعليه نجد أنّ

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}}\ln\left(2\sqrt{2}-1+2\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4}\ln\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)
\end{aligned}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ∎

التمرين 24. احسب، في حالة x من المجال $[-1,1]$ التكامل المحدود الآتي:

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\,t}{t+\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}$$

الحل

نلاحظ أنّ المقدار $x+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ لا ينعدم عندما تتحوّل x في المجال $[-1,1]$.
وعليه يكون التابع f المعرّف بالصيغة

$$f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

مستمرّاً على المجال $[-1,1]$. وبملاحظة كلٍّ من العلاقتين $1+\sin 2\theta=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$ و $1-\sin 2\theta=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$ نستنتج أنّ تغيير المتحوّل $t=\sin 2\theta$ أو بالأصَح $\theta=\dfrac{1}{2}\arcsin t$ يسمح لنا بالتخلّص من إشارتي الجذر التربيعي في آن معاً:

$$\begin{aligned}
F(x)&=\int_0^x\frac{\mathrm{d}\,t}{t+\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}},\\
&=\int_0^{\frac{1}{2}\arcsin x}\frac{2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\,\theta}{\sin 2\theta+\sqrt{1+\sin 2\theta}+\sqrt{1-\sin 2\theta}},\\
&=\int_0^{\frac{1}{2}\arcsin x}\frac{2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\,\theta}{\sin 2\theta+2\cos\theta}, \quad ☞\cos(\tfrac{\pi}{4}-\theta)+\sin(\tfrac{\pi}{4}-\theta)=\sqrt{2}\cos\theta\\
&=\int_0^{\frac{1}{2}\arcsin x}\frac{1-2\sin^2 u}{\left(1+\sin u\right)\cos u}\mathrm{d}\,u
\end{aligned}$$

وأخيراً

$$F(x)=\int_0^{\frac{1}{2}\arcsin x}\frac{1-2\sin^2 u}{(1+\sin u)(1-\sin^2 u)}\cos u\,\mathrm{d}\,u$$

فإذا أجرينا تغيير المتحوّل $u=\arcsin v$ وعرّفنا $\lambda(x)=\sin\left(\dfrac{1}{2}\arcsin x\right)$ وجدنا أنّ

$$F(x)=\int_0^{\lambda(x)}\frac{1-2v^2}{(1+v)^2(1-v)}\mathrm{d}\,v$$

بقي أن نكامل التابع الكسري $v \mapsto \dfrac{1-2v^2}{(1+v)^2(1-v)}$ ، نعلم أنّه توجد ثوابت a,b,c تُحقّق

$$\frac{1-2v^2}{(1+v)^2(1-v)} = \frac{a}{1-v} + \frac{b}{1+v} + \frac{c}{(1+v)^2}$$

بضرب الطرفين بالمقدار $(1-v)$ ثُمّ التعويض $v \leftarrow 1$ نجد أنّ $a = -\frac{1}{4}$. ثُمّ بضرب الطرفين بالمقدار $(1+v)^2$ ثُمّ التعويض $v \leftarrow -1$ نجد أنّ $c = -\frac{1}{2}$. وأخيراً بتعويض $v \leftarrow 0$ نستنتج أنّ $b = \frac{7}{4}$. إذن

$$\frac{1-2v^2}{(1+v)^2(1-v)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{-1}{1-v} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{(1+v)^2} + \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{1+v}$$

وعليه يكون

$$F(x) = \frac{1}{4}\ln\big(1-\lambda(x)\big) + \frac{7}{4}\ln\big(1+\lambda(x)\big) - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda(x)}{1+\lambda(x)}\right)$$

ونترك القارئ يبرهن أنّ

$$\forall x \in [-1,1], \quad \lambda(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}$$

وعلى هذا، مهما تكن x من $[-1,1]$ ، يكن

$$F(x) = \frac{1}{4}\ln\left(1 - \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}\right) + \frac{7}{4}\ln\left(1 + \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2+\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)$$

فمثلاً

$$F(1) = \frac{3}{2}\ln(\sqrt{2}+1) - \ln 2 - \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$
$$F(-1) = -\frac{3}{2}\ln(\sqrt{2}+1) - \ln 2 + \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

وعليه

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}\,x}{x+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 3\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2}$$

■

التمرين 25. ادرس تحولات التابع الآتي :

$$x \mapsto F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}\,t}{\ln t}$$

الحل

- **مجموعة التعريف:** نلاحظ أنّه في حالة $x > 1$ يكون المجال $[x, x^2]$ محتوى في $]1,+\infty[$، ويكون التكامل معرّفاً. وفي حالة $0 < x < 1$ يكون $[x, x^2]$ محتوى في $]0,1[$ ويكون من ثَمّ التكامل معرّفاً أيضاً في هذه الحالة. إذن التابع F معرّفٌ على $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

- التابع $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ يقبل التمديد إلى تابع مستمرٍّ على المجال $[0,1[$ فهو ينتمي إذن إلى $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}\big([0,1[\big)$. ليكن G تابعاً أصليّاً لهذا التابع معرّفاً على المجال $[0,1[$، عندئذ يكون

$$\forall x \in [0,1[,\ \ F(x) = G(x^2) - G(x)$$

وعليه نستنتج أنّ F يقبل الاشتقاق على المجال $[0,1[$ ويكون:

$$\forall x \in\ ]0,1[,\ F'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = \frac{x-1}{\ln x} > 0$$

و $\lim\limits_{x\to 0^+} F'(x) = 0$. وعليه نرى أنّ F ينتمي إلى الصف C^1 على المجال $[0,1[$، وهو متزايد تماماً على هذا المجال، ويحقّق $F(0) = F'(0) = 0$.

- التابع $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ تابع مستمرٌّ على المجال $]1,+\infty[$ فهو ينتمي إذن إلى الصف $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}\big(]1,+\infty[\big)$. ليكن H تابعاً أصليّاً لهذا التابع معرّفاً على المجال $]1,+\infty[$ ، عندئذ يكون

$$\forall x \in\ ]1,+\infty[,\ \ F(x) = H(x^2) - H(x)$$

وعليه نستنتج أنّ F يقبل الاشتقاق أيضاً على المجال $]1,+\infty[$ ويكون:

$$\forall x \in\ ]1,+\infty[,\ F'(x) = 2xH'(x^2) - H'(x) = \frac{x-1}{\ln x} > 0$$

وعليه نرى أنّ F ينتمي إلى الصف C^1 على المجال $]1,+\infty[$ ، وهو متزايد تماماً على هذا المجال.

كما نلاحظ أنّ:

$$\forall x > 1,\ F\left(x\right) \geq \frac{x^2 - x}{2\ln x}$$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

▫ **الدراسة في جوار العدد** 1^+. نعلم أنّ $\forall x > 1,\ \left(\ln\ln x\right)' = \dfrac{1}{x\ln x}$ ، وعليه من الواضح أنّ

$$\forall x > 1,\ \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}\,t}{t\ln t} = \Big[\ln\ln t\Big]_x^{x^2} = \ln\left(2\ln x\right) - \ln\ln x = \ln 2$$

إذن نرى أنّ

$$\forall x > 1,\ \ F(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2}\left(1 - \frac{1}{t}\right)\frac{\mathrm{d}\,t}{\ln t} = \int_x^{x^2} \frac{t-1}{\ln t}\cdot\frac{\mathrm{d}\,t}{t}$$

ولكنّ التابع $j : t \mapsto \dfrac{t-1}{t\ln t}$ يقبل التمديد إلى تابع مستمرٍّ على $]0,+\infty[$ فله تابع أصلي J على هذا المجال، وينتج من ذلك أنّ

$$\lim_{x\to1^+}\left(F(x) - \ln 2\right) = \lim_{x\to1^+}\Big(J(x^2) - J(x)\Big) = J(1) - J(1) = 0$$

إذن $\lim\limits_{x\to1^+} F\left(x\right) = \ln 2$.

▫ **الدراسة في جوار العدد** 1^-. نعلم أنّ $\forall x \in\,]0,1[,\ \left(\ln(-\ln x)\right)' = \dfrac{1}{x\ln x}$ ، وعليه من الواضح أنّه في حالة $0 < x < 1$ لدينا أيضاً

$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}\,t}{t\ln t} = \Big[\ln(-\ln t)\Big]_x^{x^2} = \ln\left(-2\ln x\right) - \ln\left(-\ln x\right) = \ln 2$$

وعليه نرى أنّه في حالة $0 < x < 1$ لدينا

$$F(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2}\left(1 - \frac{1}{t}\right)\frac{\mathrm{d}\,t}{\ln t} = \int_x^{x^2}\frac{t-1}{\ln t}\cdot\frac{\mathrm{d}\,t}{t} = J(x^2) - J(x)$$

وينتج من ذلك أنّ

$$\lim_{x\to1^-}\left(F(x)-\ln 2\right)=\lim_{x\to1^-}\left(J(x^2)-J(x)\right)=J(1)-J(1)=0$$

إذن $\lim_{x\to1^-} F\left(x\right)=\ln 2$.

- بناءً على ما سبق يمكن تمديد التابع F إلى تابع مستمرٍّ عند $x=1$ بوضع $F(1)=\ln 2$. فنحصل بذلك على تابع مستمرٍّ ومتزايدٍ تماماً على $\mathbb{R}_+$، ويحقّق $F(\mathbb{R}_+)=\mathbb{R}_+$. ولمّا كان

$$\lim_{x\to1} F'\left(x\right)=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\ln x}=1$$

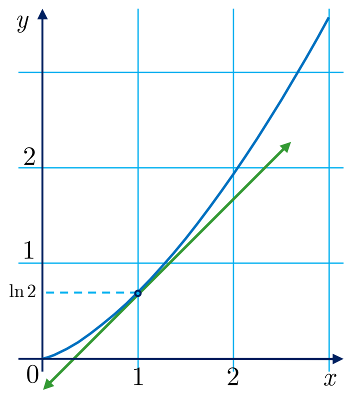
استنتجنا أنّ F ينتمي إلى الصف C^1 على $\mathbb{R}_+$، ويكون لدينا $F'(1)=1$.

- ينتج من الدراسة السابقة أنّ

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad F(x)=\int_0^x\frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}\,t=\ln 2+\int_1^x\frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}\,t$$

ونستنتج بوجه خاص أنّ $\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}\,t=\ln 2$.

ونجد فيما يلي الرسم البياني للتابع المدروس :



الخط البياني للتابع $x\mapsto\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}\,t}{\ln t}$

وبذا تتمّ الدراسة.

التمرين 26. احسب في حالة (m,n) من $\mathbb{N}^2$ قيمة التكامل المحدود الآتي:

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2mx)\cos^{2n} x \,\mathrm{d}\, x$$

الحل

لحساب هذا التكامل نستعمل طريقة متعارفة تنص على تحويل العبارة الحاوية جداء ضرب نسب مثلثيّة إلى عبارة تحوي مجموع حدود لمضاعفات الزاوية.

$$\begin{aligned}
\cos^{2n} x &= \left(\frac{e^{\mathrm{i}\,x} + e^{-\mathrm{i}\,x}}{2}\right)^{2n} \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{-\mathrm{i}\,kx} e^{\mathrm{i}\,x(2n-k)} \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{2\,\mathrm{i}\,x(n-k)}
\end{aligned}$$

وعليه يكون

$$\begin{aligned}
\cos(2mx)\cos^{2n} x &= \mathrm{Re}\Big(e^{2\,\mathrm{i}\,xm}\cos^{2n} x\Big) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{2\,\mathrm{i}(m+n-k)x}\right) \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \cos\big(2(m+n-k)x\big)
\end{aligned}$$

ولكن

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2px)\,\mathrm{d}\, x = \begin{cases} 0 & : \quad p \neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & : \quad p = 0 \end{cases}$$

إذن

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2mx)\cos^{2n} x \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{2^{2n+1}} C_{2n}^{n+m}$$

ونحصل بذلك على النتيجة المرجوّة ■

التمرين 27. احسب في حالة (a,n) من $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*$ قيمة التكامل المحدود الآتي:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+a^x)\sin x}\,\mathrm{d}\,x$$

الحل

في الحقيقة إنّ البحث عن تابع أصلي في مثل هذه الحالة أمرٌ عويص. ولكنّ الحالة الخاصّة لهذا التابع تساعدنا كثيراً، فتأمّل:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+a^x)\sin x}\,\mathrm{d}\,x &= \int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+a^x)\sin x}\,\mathrm{d}\,x + \underbrace{\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin nx}{(1+a^x)\sin x}\,\mathrm{d}\,x}_{-x\mapsto x} \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+a^x)\sin x}\,\mathrm{d}\,x + \int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+a^{-x})\sin x}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+a^x)\sin x}\,\mathrm{d}\,x + \int_{0}^{\pi} \frac{a^x\sin nx}{(1+a^x)\sin x}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}\,x \qquad ☺
\end{aligned}$$

والآن، لحساب التكامل الأخير، نستفيد من المتطابقة الشهيرة

$$\frac{a^n-b^n}{a-b} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

فنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
\frac{\sin nx}{\sin x} &= \frac{e^{\mathrm{i}\,nx}-e^{-\mathrm{i}\,nx}}{e^{\mathrm{i}\,x}-e^{-\mathrm{i}\,x}} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\mathrm{i}\,kx} e^{-\mathrm{i}(n-1-k)x} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} e^{\mathrm{i}(2k+1-n)x}
\end{aligned}$$

وعليه نجد أنّ

$$\int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}\,x = \begin{cases} 0 & : \quad n = 0 \bmod 2 \\ \pi & : \quad n = 1 \bmod 2 \end{cases}$$

إذن

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{(1+a^x)\sin x}\,\mathrm{d}\,x=\begin{cases}0 & : \quad n=0\bmod 2\\ \pi & : \quad n=1\bmod 2\end{cases}$$

وهي النتيجة المطلوبة.

التمرين 28. احسب قيمة التكامل المحدود الآآتي:

$$\mathcal{I}=\int_0^1 \arctan\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

الحل

بإجراء تغيير المتحوّل $x \leftarrow \sin\dfrac{u}{2}$ ثمّ مكاملة بالتجزئة نجد

$$\begin{aligned}\mathcal{I}&=\int_0^1 \arctan\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\arctan\left(\cos\frac{u}{2}\right)\cos\frac{u}{2}\,\mathrm{d}\,u\\
&=\left[\arctan\left(\cos\frac{u}{2}\right)\sin\frac{u}{2}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}}{1+\cos^2\frac{u}{2}}\sin\frac{u}{2}\,\mathrm{d}\,u\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{2\sin^2\frac{u}{2}}{2+2\cos^2\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}\,u=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos u}{3+\cos u}\,\mathrm{d}\,u\\
&=-\frac{\pi}{2}+2\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\cos u}\,\mathrm{d}\,u\end{aligned}$$

تؤول المسألة إذن إلى الحساب التكامل

$$\int_0^x\frac{\mathrm{d}\,u}{a+\cos u}$$

في حالة $a>1$ و $0\leq x<\pi$.

ولكن، بإجراء تغيير المتحوّل $u \leftarrow 2\arctan t$ نجد

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\mathrm{d}\,u}{a+\cos u} &= \int_0^{\tan(x/2)} \frac{\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}\,t}{a+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\\ &= 2\int_0^{\tan(x/2)} \frac{\mathrm{d}\,t}{a+1+(a-1)t^2}\\ &= 2\int_0^{\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\tan\frac{x}{2}} \frac{\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\,\mathrm{d}\,v}{(a+1)(1+v^2)} \qquad ☞ t \leftarrow \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}v\\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\int_0^{\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\tan\frac{x}{2}} \frac{\mathrm{d}\,v}{1+v^2}\\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\tan\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

وعليه

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\,u}{a+\cos u} = \lim_{x\to\pi^-}\int_0^x \frac{\mathrm{d}\,u}{a+\cos u} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

فإذا عُدنا إلى مسألتنا استنتجنا أنّ

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \arctan\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{\sqrt{3^2-1}} = \frac{\pi}{2(1+\sqrt{2})}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 29. لنتأمّل تابعاً مستمرّاً $f:[0,1]\to\mathbb{K}$، وتابعاً $g:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ من الصف $\mathcal{R}$ يقبل العدد 1 دوراً. عندئذ يكون لدينا

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x\cdot\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}\,x$$

☜ **تطبيق**. احسب قيمة $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+3\cos^2 nx}\,\mathrm{d}\,x$

الحل

لنضع تعريفاً $\mu = 1 + \int_0^1 \left|g(t)\right| \mathrm{d}\, t$، وليكن $0 < \varepsilon$. عندئذ ينتج من الاستمرار المنتظم للتابع f على المجال المغلق والمحدود $[0,1]$، أنّه يوجد $0 < \eta$ يُحقّق

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad \left|x-y\right| < \eta \Rightarrow \left|f(x) - f(y)\right| < \frac{\varepsilon}{2\mu} \tag{1}$$

ومن جهة ثانية، نجد عدداً طبيعيّاً n_0 يُحقّق

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow \left| \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\, x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2\mu} \tag{2}$$

ولكن

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)g(nx)\,\mathrm{d}\, x &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)g(nx)\,\mathrm{d}\, x \\
&= \sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) \underbrace{\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(nx)\,\mathrm{d}\, x}_{x \leftarrow \frac{k-1}{n} + \frac{u}{n}} + \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right) g(nx)\,\mathrm{d}\, x \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) \int_0^1 g(u)\,\mathrm{d}\, u + \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right) g(nx)\,\mathrm{d}\, x
\end{aligned}$$

وعلى هذا نرى أنّ

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 f(x)g(nx)\,\mathrm{d}\, x - \int_0^1 f \cdot \int_0^1 g = \\
&\qquad \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) - \int_0^1 f \right) \cdot \int_0^1 g + \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right) g(nx)\,\mathrm{d}\, x
\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)g(nx)\,\mathrm{d}\,x-\int_0^1 f\cdot\int_0^1 g\right| &\leq\\ \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right)-\int_0^1 f\right|\cdot\left|\int_0^1 g\right| &+\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f(x)-f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right|\left|g(nx)\right|\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

فإذا اخترنا $n_1>\max\left(n_0,\frac{1}{\eta}\right)$ صار لدينا استناداً إلى (2) ومهما تكن $n_1<n$ ، ما يلي :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right)-\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}\,u\right|\int_0^1\left|g\right|\mathrm{d}\,u<\frac{\varepsilon}{2\mu}\mu=\frac{\varepsilon}{2}$$

واستناداً إلى (1) ، صار لدينا أيضاً :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f(x)-f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right|\left|g(nx)\right|\mathrm{d}\,x &\leq \frac{\varepsilon}{2\mu}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|g(nx)\right|\mathrm{d}\,x\\ &=\frac{\varepsilon}{2\mu n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\left|g(u)\right|\mathrm{d}\,u<\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

إذن، وجدنا n_1 يُحقّق

$$n\geq n_1\Rightarrow\left|\int_0^1 f(x)g(nx)\,\mathrm{d}\,x-\int_0^1 f\cdot\int_0^1 g\right|<\varepsilon$$

وهذا يثبت النتيجة المطلوبة.

تعميم.

لنتأمّل تابعاً مستمرّاً $f:[0,T]\to\mathbb{K}$ ، وتابعاً $g:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ من الصف $\mathcal{R}$ يقبل العدد T دوراً. عندئذ يكون لدينا

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f(x)g(nx)\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}\,x\cdot\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}\,x$$

في الحقيقة، يكفي أن نطبّق النتيجة السابقة على $x\mapsto f(xT)$ و $x\mapsto g(xT)$.

فإذا أتينا إلى التطبيق استنتجنا أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+3\cos^2 nx}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}\,x \cdot \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\,x}{1+3\cos^2 x} = 1$$

وذلك لأنّ

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\,x}{1+3\cos^2 x} &= 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\,x}{1+3\cos^2 x}\\ &= 2\lim_{t\to\pi/2}\int_0^t \frac{\mathrm{d}\,x}{1+3\cos^2 x}\\ &= 2\lim_{t\to\pi/2}\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\tan x}{2}\right)\right]_0^t = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

وهي النتيجة المطلوبة.

التمرين 30. نهدف إلى حساب قيمة التكامل

$$\mathcal{I} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1-t^2}}$$

1. لتكن x من $]0,1]$، احسب كلّاً من التكاملين المحدودين

$$G(x) = \int_x^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}\,t \quad \text{و} \quad F(x) = \int_x^1 \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}\,t$$

2. أثبت أنّ $\mathcal{I} = \lim_{x\to 0^+}\big(F(x)-G(x)\big)$، واستنتج قيمة $\mathcal{I}$.

الحل

1. لنلاحظ أنّه في حالة $u>0$ لدينا

$$\begin{aligned}F(\operatorname{sh} u) &= \int_{\operatorname{sh} u}^1 \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}\,t \underset{t\leftarrow \operatorname{sh} v}{=} \int_u^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\operatorname{ch}^2 v}{\operatorname{sh}^2 v}\,\mathrm{d}\,v\\ &= \ln(1+\sqrt{2}) - u + \int_u^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\mathrm{d}\,v}{\operatorname{sh}^2 v}\\ &= \ln(1+\sqrt{2}) - u - \left[\frac{\operatorname{ch} v}{\operatorname{sh} v}\right]_u^{\ln(1+\sqrt{2})}\end{aligned}$$

إذن

$$F(\operatorname{sh} u) = \ln(1+\sqrt{2}) - u - \sqrt{2} + \frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u}$$

وعليه

$$F(x) = \ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

وكذلك نلاحظ أنّه في حالة $0 < u \leq \frac{\pi}{2}$ لدينا

$$\begin{aligned} G(\sin u) &= \int_{\sin u}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}\,t \underset{t \leftarrow \sin v}{=} \int_{u}^{\pi/2} \frac{\cos^2 v}{\sin^2 v}\,\mathrm{d}\,v \\ &= u - \frac{\pi}{2} + \int_{u}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\,v}{\sin^2 v} = u - \frac{\pi}{2} - \left[\frac{\cos v}{\sin v}\right]_u^{\pi/2} \\ &= u - \frac{\pi}{2} + \frac{\cos u}{\sin u} \end{aligned}$$

وعليه

$$G(x) = \arcsin x - \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

2. ومن جهة أخرى، في حالة x من $]0,1]$ ، لدينا

$$F(x) - G(x) = \int_{x}^{1} \frac{\sqrt{1+t^2}-\sqrt{1-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}\,t = \int_{x}^{1} \frac{2}{\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}\,t$$

إذن

$$\lim_{x\to 0^+} \big(F(x) - G(x)\big) = \int_{0}^{1} \frac{2}{\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}\,t = \mathcal{I}$$

ولكن للمقدار $F(x) - G(x)$ الصيغة الآتية:

$$\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{arg\,sh} x - \arccos x$$

إذن $\mathcal{I} = \ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} + \frac{\pi}{2}$.

التمرين 31. تقريب العدد π بعدد عادي

1. لنعرّف $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t$ في حالة n من $\mathbb{N}$. برهن أن المتتالية $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة تماماً. ثُمّ جِدْ علاقة تدريجيّة تفيد في حساب W_{n+2} بدلالة W_n، ثُمّ برهن على أنّ المتتالية $\left((n+1)W_{n+1}W_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ تبقى ثابتة. وأخيراً استنتج أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \leq W_{2n+1} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

2. ليكن $I_n = \int_0^1 x^n (1-x)^n \,\mathrm{d}x$ في حالة n من $\mathbb{N}$. أثبت أنّ $I_n = \frac{1}{2^{2n}} W_{2n+1}$.

3. لتكن n من $\mathbb{N}^*$. أثبت أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد λ_n يطلب تعيينه، يجعل كثير الحدود $X^{4n}(1-X)^{4n} + \lambda_n$ يقبل القسمة على X^2+1. نعرّف عندئذ $Q_n(X)$ خارجَ قسمةِ $X^{4n}(1-X)^{4n} + \lambda_n$ على X^2+1. احسب $Q_1(X)$.

4. نعرّف،في حالة n من $\mathbb{N}^*$، كثير الحدود :

$$R_n = X^4(1-X)^4 Q_n(X) - \lambda_n Q_1(X)$$

احسب $(X^2+1)R_n$، واستنتج علاقة تدريجيّة تفيد في حساب $Q_{n+1}(X)$ بدلالة $Q_n(X)$ و $Q_1(X)$.

5. برهن أنّ ثوابت كثير الحدود $Q_n(X)$ تنتمي إلى $\mathbb{Z}$. نعرّف إذن، أيّاً كانت n من $\mathbb{N}^*$، العدد العادي Π_n بالصيغة :

$$\Pi_n = \frac{4}{\lambda_n} \int_0^1 Q_n(x) \,\mathrm{d}x$$

6. برهن أنّ $\Pi_n - \pi = \frac{4}{\lambda_n} \int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$، واستنتج من ذلك أنّ

$$\forall n \geq 1, \; \left|\Pi_n - \pi\right| \leq \sqrt{\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{1}{(1024)^n}$$

7. احسب Π_1 و Π_2.

الحل

1. لمّا كان $0 \leq \sin x \leq 1$ وذلك أيّاً كانت x من $[0,\frac{\pi}{2}]$ استنتجنا أنّ

$$\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right], \quad 0 \leq \sin^{n+1} x < \sin^n x$$

وهذا يثبت أنّ المتتالية $\left(W_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة تماماً. ومن جهة أخرى من الواضح أنّ

$$\begin{aligned} W_{n-2} - W_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos x \cdot \cos x \,\mathrm{d}\, x \\ &= \left[\frac{\sin^{n-1} x}{n-1} \cos x\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{n-1} x}{n-1} \cdot \sin x \,\mathrm{d}\, x \\ &= \frac{1}{n-1} W_n \end{aligned}$$

وعلى هذا فإنّ

$$\forall n \geq 2, \quad W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$$

نلاحظ أولاً أنّ $W_0 = \frac{\pi}{2}$ وأنّ $W_1 = 1$. وكذلك فإنّ

$$\forall n \geq 2, \quad n W_n W_{n-1} = (n-1) W_{n-1} W_{n-2}$$

فالمتتالية $\left((n+1)W_{n+1}W_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية ثابتة وجميع حدودها تساوي $W_1 W_0 = \frac{\pi}{2}$.

لمّا كان $W_{2n+2} < W_{2n+1} < W_{2n}$ استنتجنا أنّ

$$W_{2n+2} W_{2n+1} < W_{2n+1}^2 < W_{2n+1} W_{2n}$$

أو

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2n+2} < W_{2n+1}^2 < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

وعليه ينتج مِمّا سبق أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+2}} < W_{2n+1} < \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

2. ليكن $I_n = \int_0^1 x^n(1-x)^n \, \mathrm{d}\, x$ في حالة n من $\mathbb{N}$. عندئذ

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^n(1-x)^n \, \mathrm{d}\, x \underset{x\leftarrow \sin^2\frac{\theta}{2}}{=} \int_0^\pi \sin^{2n}\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\cos^{2n}\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\,\theta \\ &= \frac{1}{2^{2n+1}}\int_0^\pi \sin^{2n+1}\theta \, \mathrm{d}\,\theta = \frac{1}{2^{2n}}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}\theta \, \mathrm{d}\,\theta = \frac{1}{2^{2n}} W_{2n+1} \end{aligned}$$

3. لتكن n من $\mathbb{N}^*$. ليكن $P_n(X) = X^{4n}(1-X)^{4n}$ ولنضع

$$\lambda_n = -P_n(\mathrm{i}) = -(1-\mathrm{i})^{4n} = -(-2\,\mathrm{i})^{2n} = -(-4)^n$$

عندئذ ينعدم كثير الحدود $P_n(X) + \lambda_n$ عند i فهو ينعدم أيضاً عند $-\mathrm{i}$ لأنّ أمثاله حقيقيّة، وهو من ثَمّ يقبل القسمة على X^2+1 . لنعرّف إذن $Q_n(X)$ خارجَ قسمة $P_n(X)+\lambda_n$ على X^2+1 . وبوجه خاص لدينا

$$\begin{aligned} P_1(x) + \lambda_1 &= X^4(1-X)^4 + 4 \\ &= (1+X^2)(X^6 - 4X^5 + 5X^4 - 4X^2 + 4) \end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$Q_1(X) = X^6 - 4X^5 + 5X^4 - 4X^2 + 4$$

4. لنعرّف، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، كثير الحدود :

$$R_n(X) = X^4(1-X)^4 Q_n(X) - \lambda_n Q_1(X)$$

عندئذ

$$\begin{aligned} (X^2+1)R_n &= X^4(1-X)^4(X^{4n}(1-X)^{4n} + \lambda_n) - \lambda_n X^4(1-X)^4 - 4\lambda_n \\ &= X^{4(n+1)}(1-X)^{4(n+1)} + \lambda_{n+1} \\ &= (X^2+1)Q_{n+1}(X) \end{aligned}$$

وهذا يثبتُ أنّ :

$$Q_{n+1}(X) = X^4(1-X)^4 Q_n(X) + (-4)^n Q_1(X)$$

5. نستنتج من العلاقة السابقة أنّه إذا كان $Q_n \in \mathbb{Z}[X]$ كان $Q_{n+1} \in \mathbb{Z}[X]$، وعليه فإنّ ثوابت كثير الحدود $Q_n(X)$ تنتمي إلى $\mathbb{Z}$. نعرّف إذن، أيّاً كانت n من $\mathbb{N}^*$، العدد العادي Π_n بالعلاقة : $\Pi_n = \dfrac{4}{\lambda_n}\int_0^1 Q_n(x)\,\mathrm{d}\,x$.

6. وعندئذ لمّا كان $\pi = 4\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}\,x}{1+x^2}$ استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}
\Pi_n - \pi &= \frac{4}{\lambda_n}\int_0^1 Q_n(x)\,\mathrm{d}\,x - 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^2}\\
&= \frac{4}{\lambda_n}\int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}+\lambda_n-\lambda_n}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x\\
&= \frac{4}{\lambda_n}\int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x
\end{aligned}$$

ومن ثَمّ، بملاحظة أنّ $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$ في حالة $0 \leq x \leq 1$، نستنتج

$$\frac{2}{4^n}\int_0^1 x^{4n}(1-x)^{4n}\,\mathrm{d}\,x \leq \left|\Pi_n - \pi\right| \leq \frac{4}{4^n}\int_0^1 x^{4n}(1-x)^{4n}\,\mathrm{d}\,x$$

ولكن بالاستفادة من $I_{4n} = \dfrac{1}{2^{8n}} W_{8n+1}$، نجد

$$\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{n+1}} < \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4n+1}} < W_{8n+1} < \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{8n+1}} < \frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

إذن

$$\frac{1}{2^{10n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{n+1}} \leq \left|\Pi_n - \pi\right| \leq \frac{1}{2^{10n}}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

وبوجه خاص

$$\left|\Pi_n - \pi\right| \leq \frac{1}{(1024)^n}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

فعلى سبيل المثال نجد $\Pi_1 = \dfrac{22}{7}$ و $\Pi_2 = \dfrac{47171}{15015}$. ■

التمرين 32. لتكن $n \geq 2$، ولنعرّف حين يكون k من $\mathbb{N}_n$، المقدار $t_k^{(n)} = \dfrac{\ln k}{\ln n}$. ثمّ نعرّف في المجال $[0,1]$ التقسيمة المنقوطة

$$\sigma_n = (t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{n-1}^{(n)}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1}$$

1. احسب خطوة التقسيمة المنقوطة σ_n أي $h(\sigma_n)$.
2. ليكن $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف $\mathcal{R}$. ولنعرّف

$$\forall n \geq 2, \quad I_n(f) = \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{\ln k}{\ln n}\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

أثبت أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

3. ليكن $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف $\mathcal{R}$. ولنعرّف

$$\forall n \geq 2, \quad J_n(f) = \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot f\left(\frac{\ln k}{\ln n}\right)$$

استنتج مما سبق أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} J_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

4. احسب مستعملاً النتائج السابقة قيمة كلٍّ من النهايتين الآتيتين عندما $p > 0$:

$$b = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\ln n)^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln k)^p}{k} \quad \text{و} \quad a = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (\ln k + \ln n)}$$

الحل

1. لحساب خطوة التقسيمة المنقوطة σ_n أي $h(\sigma_n)$، نلاحظ أنّه في حالة $1 \leq k < n$ لدينا

$$t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)} = \frac{\ln(k+1)}{\ln n} - \frac{\ln k}{\ln n} = \frac{1}{\ln n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

إذن

$$h(\sigma_n) = \frac{1}{\ln n} \cdot \max_{1\leq k<n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{\ln 2}{\ln n}$$

2. ليكن $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ تابعاً من الصف $\mathcal{R}$. عندئذ يُكتب مجموع ريمان $S(f,\sigma_n)$ بالشكل

$$\begin{aligned}S(f,\sigma_n) &= \sum_{k=1}^{n-1}(t_{k+1}^{(n)}-t_k^{(n)})f(t_k^{(n)})\\ &= \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{\ln k}{\ln n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\\ &= \underbrace{\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{\ln k}{\ln n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}_{I_n(f)} - \frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)f(1)\end{aligned}$$

ولمّا كان $\lim\limits_{n\to\infty} h(\sigma_n)=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} S(f,\sigma_n)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t$ ، ولأنّ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$$

استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(f)=\int_0^1 f$.

3. لتكن x من $[0,1]$. عندئذ نلاحظ أنّ $x-\ln(1+x)=\int_0^x \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}\,t$ ، ومن ثَمّ

$$0\le x-\ln(1+x)=\int_0^x \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}\,t \le \int_0^x t\,\mathrm{d}\,t=\frac{x^2}{2}$$

ولكن

$$I_n(f)-J_n(f)=\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{\ln k}{\ln n}\right)\left(\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{k}\right)$$

ومن ثَمّ، إذا استفدنا من المتراجحة السابقة وجدنا

$$\begin{aligned}\left|I_n(f)-J_n(f)\right| &\le \frac{1}{\ln n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(\frac{\ln k}{\ln n}\right)\right|\cdot\left(\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)\\ &\le \frac{1}{\ln n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\left|f\left(\frac{\ln k}{\ln n}\right)\right|\\ &\le \frac{1}{\ln n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)\cdot\sup_{[0,1]}|f|\end{aligned}$$

إذن $\lim\limits_{n\to\infty}\big(I_n(f)-J_n(f)\big)=0$.

ولأنّ $\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} I_n(f)$ استنتجنا أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} f\left(\frac{\ln k}{\ln n}\right) = \int_0^1 f$$

4. فإذا اخترنا $f(x) = \frac{1}{1+x}$ استنتجنا أنّ

$$J_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\left(\ln n + \ln k\right)}$$

ومن ثَمَّ

$$a = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(\ln k + \ln n)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x} = \ln 2$$

وإذا اخترنا $f(x) = x^p$ في حالة $p > 0$ استنتجنا أنّ

$$J_n(f) = \frac{1}{\ln^{p+1} n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln^p k}{k}$$

ومن ثَمَّ

$$b = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln^{p+1} n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln^p k}{k} = \int_0^1 x^p\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{p+1}$$

التمرين 33. لنعرّف في حالة n من $\mathbb{N}$ المقدار

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}\,x$$

1. احسب u_0 و u_1.
2. أثبت أنّ المقدار

$$(n+1)u_{n+1} + (n+\tfrac{1}{2})u_n + nu_{n-1}$$

ثابتٌ لا يتعلّق بالعدد n واحسبه.

3. احسب u_2 و u_3 و u_4.

الحل

1. لنلاحظ أوّلاً أنّ

$$u_0=\int_0^1\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1+x+x^2}}=\int_0^1\frac{2\,\mathrm{d}\,x}{\sqrt{3+(1+2x)^2}}\underset{t\leftarrow\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{=}\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{1+t^2}}$$
$$=\left[\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}\right)$$

وأنّ

$$u_1=\int_0^1\frac{x\,\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1+x+x^2}}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(2x+1)\,\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1+x+x^2}}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1+x+x^2}}$$
$$=\left[\sqrt{1+x+x^2}\,\right]_0^1-\frac{u_0}{2}=\sqrt{3}-1-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

2. لنتأمّل المقدار $\Delta_n=(n+1)u_{n+1}+(n+\frac{1}{2})u_n+nu_{n-1}$ عندئذ

$$\Delta_n=\int_0^1\frac{(n+1)x^{n+1}+(n+\frac{1}{2})x^n+nx^{n-1}}{\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}\,x$$
$$=\int_0^1\frac{nx^{n-1}(x^2+x+1)+x^n(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}\,x$$
$$=\int_0^1\left(nx^{n-1}\sqrt{1+x+x^2}+x^n\left(\sqrt{1+x+x^2}\right)'\right)\mathrm{d}\,x$$
$$=\int_0^1\left(x^n\sqrt{1+x+x^2}\right)'\mathrm{d}\,x=\left[x^n\sqrt{1+x+x^2}\,\right]_0^1=\sqrt{3}$$

3. ومنه العلاقة التدريجيّة الآتية لحساب التكاملات $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_0=\ln\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}},\quad u_1=\sqrt{3}-1-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}$$
$$\forall n\geq 1,\quad u_{n+1}=\frac{1}{n+1}\left(\sqrt{3}-(n+\tfrac{1}{2})u_n-nu_{n-1}\right)$$

وبوجه خاص

$$\begin{aligned}
u_2 &= \frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{8}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\\
u_3 &= \frac{1}{24}-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{7}{16}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\\
u_4 &= -\frac{115}{192}+\frac{35\sqrt{3}}{64}-\frac{37}{128}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

ويكتمل الحل.

التمرين 34. لتكن α من $\mathbb{R}$. ولنعرّف $f_n(x)=\dfrac{\cos nx-\cos n\alpha}{\cos x-\cos\alpha}$.

1. أثبت أنّه يمكن تمديد f_n إلى تابع مستمرّ على $\mathbb{R}$ وذلك أيّاً كانت قيمة n .

2. نعرّف $I_n(\alpha)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos nx-\cos n\alpha}{\cos x-\cos\alpha}\,\mathrm{d}x$.

① احسب $I_0(\alpha)$ و $I_1(\alpha)$ و $I_2(\alpha)$.

② عبّر عن $I_{n+1}(\alpha)+I_{n-1}(\alpha)$ بدلالة $I_n(\alpha)$ و $\cos\alpha$.

③ أثبت أنّ $I_n(\alpha)=\dfrac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}$ ، وذلك أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$.

الحل

1. لنتذكّر أنّ

$$\begin{aligned}
\cos nx &= \mathrm{Re}\Big((\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n\Big)\\
&= \sum_{0\le 2k\le n}(-1)^k C_n^{2k}\cos^{n-2k}x\sin^{2k}x = T_n(\cos x)
\end{aligned}$$

وقد رمزنا إلى كثير الحدود $\displaystyle\sum_{0\le 2k\le n}(-1)^k C_n^{2k}X^{n-2k}(1-X^2)^k$ بالرمز $T_n(X)$.

ولمّا كان كثير الحدود T_n يقبل الاشتقاق على كامل $\mathbb{R}$ استنتجنا أنّ التابع

$$h_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h_n(t)=\begin{cases}\dfrac{T_n(t)-T_n(\cos\alpha)}{t-\cos\alpha} & : \quad t\neq\cos\alpha\\ T_n'(\cos\alpha) & : \quad t=\cos\alpha\end{cases}$$

تابعٌ مستمرٌّ على كامل $\mathbb{R}$.

وعليه نستنتج أنّ التابع $x \mapsto h_n(\cos x)$ تابعٌ مستمرٌّ على كامل $\mathbb{R}$ وهو يتّفق مع f_n على مجموعة تعريف f_n وهي $\mathbb{R}\backslash\big((\alpha+2\pi\mathbb{Z})\cup(-\alpha+2\pi\mathbb{Z})\big)$. فالتابع f_n يقبل التمديد إلى تابع مستمرٍّ على كامل $\mathbb{R}$.

2. نعرّف

$$I_n(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos nx-\cos n\alpha}{\cos x-\cos\alpha}\,\mathrm{d}\,x$$

①.2 عندئذ $I_0(\alpha)=0$ و $I_1(\alpha)=1$ و أخيراً

$$\begin{aligned}
I_2(\alpha)&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos 2x-\cos 2\alpha}{\cos x-\cos\alpha}\,\mathrm{d}\,x\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{2\cos^2 x-2\cos^2\alpha}{\cos x-\cos\alpha}\,\mathrm{d}\,x\\
&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \big(\cos x+\cos\alpha\big)\,\mathrm{d}\,x=2\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}
\end{aligned}$$

②.2 من جهة أخرى، إذا تذكّرنا أنّ

$$\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos n\theta\cos\theta$$

استنتجنا، أنّه في حالة n من $\mathbb{N}^*$ ، يكون لدينا

$$\begin{aligned}
I_{n+1}(\alpha)+I_{n-1}(\alpha)&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos nx\cos x-\cos n\alpha\cos\alpha}{\cos x-\cos\alpha}\,\mathrm{d}\,x\\
&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\cos nx+\frac{\cos nx-\cos n\alpha}{\cos x-\cos\alpha}\cos\alpha\right)\mathrm{d}\,x\\
&=2\cos\alpha\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos nx-\cos n\alpha}{\cos x-\cos\alpha}\,\mathrm{d}\,x\right)\\
&=2\cos\alpha I_n(\alpha)
\end{aligned}$$

③.2 لقد رأينا أنّ العلاقة $I_n(\alpha)=\dfrac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}$ صحيحة في حالة $n\in\{0,1,2\}$، فإذا افترضنا صحّتها في حالة n و $n-1$ استنتجنا من العلاقة التدريجيّة السابقة أنّ

$$\begin{aligned}I_{n+1}(\alpha)&=2(\cos\alpha)I_n(\alpha)-I_{n-1}(\alpha)\\&=2\cos\alpha\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin(n-1)\alpha}{\sin\alpha}\\&=\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}\end{aligned}$$

وهذا يثبتُ أنّ $I_n(\alpha)=\dfrac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}$ أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$. ■

التمرين 35. حساب تكامل مشهور.

1. ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^1، و λ من $\mathbb{R}_+^*$. أثبت بإجراء مكاملة بالتجزئة أنّ

$$\left|\int_a^b f(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}\,t\right|\le\frac{1}{\lambda}\left(\left|f(a)\right|+\left|f(b)\right|+\int_a^b\left|f'(t)\right|\mathrm{d}\,t\right)$$

2. واستنتج وجود وقيمة النهاية $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}\,t$.

3. ليكن التابع:

$$g:\left]0,\tfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}:g(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{\sin t}$$

أثبت أنّ g مستمر ويقبل مشتقاً مستمراً على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$، ثُمّ أثبت وجود النهايتين $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to0}g'(x)$ واحسبهما. نستنتج أن g يقبل التمديد إلى تابع من الصف C^1 على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. نرمز إلى هذا اللمُمَدَّد بالرمز g أيضاً.

4. في حالة $0\le n$، نعرّف التابع المستمرّ f_n بالصيغة :

$$f_n:\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}:f_n(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}&:\quad t\ne0\\ 2n+1&:\quad t=0\end{cases}$$

احسب قيمة $I_n=\int_0^{\pi/2}f_n(t)\,\mathrm{d}\,t$. **مساعدة** : احسب I_n-I_{n-1} أولاً.

5. نعرّف التابع المستمر

$$h:[0,+\infty[\ \to \mathbb{R} : h(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin t}{t} & : \ t\neq 0\\ 1 & : \ t=0\end{cases}$$

ونضع $J_n=\int_0^{\pi(n+1/2)} h(t)\,\mathrm{d}\,t$ في حالة $0\leq n$.

① أثبت أنّ $J_n=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin((2n+1)t)}{t}\,\mathrm{d}\,t$.

② استفد من نتائج الأسئلة السابقة لإثبات أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}(J_n-I_n)=0$.

③ نعرّف $H(x)=\int_0^x \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t$ لمّا $0\leq x$. أثبت أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} H(x)=\dfrac{\pi}{2}$.

الحل

1. ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^1. عندئذ بإجراء مكاملة بالتجزئة نجد أنّ

$$\int_a^b f(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}\,t=\left[-f(t)\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\right]_a^b+\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\cos\lambda t\,\mathrm{d}\,t$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}\,t\right| &\leq \frac{1}{\lambda}\left(\left|f(b)\cos\lambda b+f(a)\cos\lambda a\right|+\int_a^b\left|f'(t)\cos\lambda t\right|\mathrm{d}\,t\right)\\ &\leq\frac{1}{\lambda}\left(\left|f(b)\right|+\left|f(a)\right|+\int_a^b\left|f'(t)\right|\mathrm{d}\,t\right)\end{aligned}$$

2. وهذا يثبتُ أنّ $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}\,t=0$.

3. لمّا كان $\sin t-t=-\dfrac{t^3}{6}+O(t^5)$ استنتجنا أنّ g في جوار الصفر يُحقّق

$$g(x)=\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\frac{-\frac{1}{6}x^3+O(x^5)}{x^2+O(x^4)}=-\frac{x}{6}+O(x^3)$$

ومن ثَمّ $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=0$ فإذا عرّفنا $g(0)=0$ كان g مستمرّاً على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

ومن جهة أخرى لدينا في جوار $x = 0$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x^2\cos x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = -\frac{1}{6} + O(x^2)$$

إذن $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = -\frac{1}{6}$ ، وعليه يقبل التابع المُمَدّد g الاشتقاق عند 0 و $g'(0) = -\frac{1}{6}$

وهذا المشتق مستمرٌّ هناك. فالتابع المُمَدّد g ينتمي إلى الصف C^1 على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4. إذا عرّفنا $\displaystyle I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}\,t$ كان لدينا، في حالة n من $\mathbb{N}^*$ ما يلي :

$$\begin{aligned}
I_n - I_{n-1} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}\,t - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t - \sin(2n-1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos 2nt\,\mathrm{d}\,t = \left[\frac{\sin 2nt}{2n}\right]_0^{\pi/2} = 0
\end{aligned}$$

إذن $\forall n \in \mathbb{N},\quad I_n = I_0 = \frac{\pi}{2}$.

5. لنعرّف التابع المستمر

$$h : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : h(\mathrm{t}) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & : \ t \neq 0 \\ 1 & : \ t = 0 \end{cases}$$

ولنضع $J_n = \int_0^{\pi(n+1/2)} h(t)\,\mathrm{d}\,t$ في حالة $0 \leq n$.

①.5 عندئذ

$$\begin{aligned}
J_n &= \int_0^{(2n+1)\pi/2} h(t)\,\mathrm{d}\,t \underset{t\leftarrow(2n+1)u}{=} \int_0^{\pi/2} h\big((2n+1)u\big)(2n+1)\,\mathrm{d}\,u \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,\mathrm{d}\,t
\end{aligned}$$

②.5 ومن ثَمّ

$$\begin{aligned} J_n - I_n &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,\mathrm{d}\,t - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}\right)\sin\big(2n+1\big)t\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{\pi/2} g(t)\sin(2n+1)t\,\mathrm{d}\,t \end{aligned}$$

فإذا تذكّرنا أنّ g ينتمي إلى الصف C^1 واستفدنا من نتيجة السؤال 1. استنتجنا أنّ $\lim_{n\to\infty}(J_n - I_n) = 0$ أو

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \int_0^{\pi(n+1/2)} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\pi}{2}$$

③.5 يمكننا أن نكتب بعد مُكاملة بالتجزئة

$$\begin{aligned} H(x) &= \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \frac{1-\cos x}{x} + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t \end{aligned}$$

ولـمّا كان التابع $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ تابعاً مستمراً وموجباً على $\mathbb{R}_+$ استنتجنا أنّ التابع

$$x \mapsto \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t$$

تابعٌ متزايدٌ على $\mathbb{R}_+$، إذن يوجد عنصرٌ λ في $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ يُحقّق

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t = \lambda$$

ولـمّا كان

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

استنتجنا أنّ $\lim_{x\to\infty} H(x) = \lambda$.

علاوة على ذلك، لا بُدّ أنّ يكون $\lambda = \frac{\pi}{2}$ لأنّنا أثبتنا في الطلب السابق أنّ

$$\lim_{n\to\infty} H\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = \frac{\pi}{2}$$

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\pi}{2}$$

وبذا يتمّ المطلوب.

التمرين 36. حساب مجاميع بعض متسلسلات ريمان

الجزء الأول

1. لنتأمّل التابع : $f : \left]0,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{\sin x}$. بيّن أنّ f يقبل التمديد إلى تابع، نرمز إليه بالرمز f أيضاً، من الصف C^1 على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. عيّن بوجه خاص قيمة $f(0)$ و $f'(0)$.

2. ليكن g تابعاً من الصف C^1 على المجال $[0,1]$.

① أثبت بإجراء تكامل بالتجزئة أنه يوجد ثابت حقيقي موجبٌ A يحقّق

$$\forall x > 0, \qquad \left|\int_0^1 g(t)\sin xt\mathrm{d}\,t\right| \le \frac{A}{x}$$

② احسب $\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 g(t)\sin xt\,\mathrm{d}\,t$.

3. ليكن P كثير حدود ثوابته حقيقية، ويحقق $P(0) = 0$.

① في حالة x من $\left]0,1\right]$ ، نعرّف $\varphi(x) = \frac{P(x)}{\sin(\pi x/2)}$. أثبت أنّ φ يقبل التمديد إلى تابع من الصف C^1 على المجال $[0,1]$.

② احسب النهاية

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 P(t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi t}{\sin(\pi t/2)}\mathrm{d}t$$

الجزء الثاني

ليكن $E=\mathbb{R}[X]$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقية. وليكن التطبيق الخطيّ

$$h: E\to E,\ P\mapsto h(P)=Q$$

المعرّف بالصيغة الآتية:

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad Q(x)=\int_0^x (t-x)P(t)\mathrm{d}t+\frac{x^2}{2}\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$$

1. ليكن P من E، و لنضع $h(P)=Q$.

① أثبت أنّ $\forall x\in\mathbb{R},\ Q'(x)=x\int_0^1 P-\int_0^x P$، واحسب Q''.

② عيّن $\operatorname{Im} h$ صورة التطبيق h و نواته $\ker h$. ابدأ بحساب $h(X^p)$.

2. نعرّف متتالية كثيرات الحدود $(P_n)_{n\geq 1}$ كما يأتي :

$$P_1=\frac{1}{2}X^2-X \text{ و } P_n=h(P_{n-1}) \text{ في حالة } n\geq 2.$$

① احسب P_2 و P_3.

② احسب في حالة $n\geq 2$ كلّاً من $P_n(0)$ و $P_n'(0)$ و $P_n'(1)$.

③ نعرّف المتتالية $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ كما يأتي:

$$\lambda_1=\frac{1}{3} \text{ و } \lambda_n=\frac{2n}{(2n+1)!}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda_{n-k}}{(2k+1)!} \text{ في حالة } n\geq 2$$

أثبت بالتدريج على n أنّه مهما تكن $n\geq 2$، يكن

$$P_n=(-1)^{n-1}\left(\frac{X^{2n}}{(2n)!}-\frac{X^{2n-1}}{(2n-1)!}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda_{n-k}}{(2k)!}X^{2k}\right)$$

3. نحافظ على رموز السؤال السابق.

① بيّن، دون استعمال 2.③، أنّه في حالة $(k\geq 1)$:

- $\forall m\geq 2,\quad P_m''=\int_0^1 P_{m-1}(t)\mathrm{d}t-P_{m-1},$
- $\forall m\geq 2,\quad \int_0^1 P_m(t)\cos(k\pi t)\mathrm{d}t=\frac{1}{(\pi k)^2}\int_0^1 P_{m-1}(t)\cos(k\pi t)\mathrm{d}t,$
- $\forall m\geq 1,\quad \int_0^1 P_m(t)\cos(k\pi t)\mathrm{d}t=\frac{1}{(\pi k)^{2m}},$

② أثبت أنّ

$$\forall n \geq 1,\ \forall t \in \left]0,\pi\right],\ \sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{2}$$

③ استنتج أنّه في حالة n و m من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2m}} = \pi^{2m}\int_0^1 P_m(t)\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\pi t/2)} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\,t$$

④ ثم استنتج أنّ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}} = \frac{1}{2}(-1)^{m-1}\lambda_m\pi^{2m}$ وذلك مهما تكن $m \leq 1$.

⑤ عيّن قيمة مجموع المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}$ في حالة m من $\{4,3,2,1\}$.

الحل

الجزء الأول

1. لمّا كان $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ استنتجنا أنّه إذا عرّفنا $f(0) = 1$ حصلنا على تابع مستمرٍّ على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. ومن جهة أخرى نلاحظ أنّ

$$\forall x \in \left]0,\tfrac{\pi}{2}\right],\quad f'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$$

ومن ثَمّ $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$، فإذا عرّفنا $f'(0) = 0$ حصلنا على تابع f من الصف C^1 على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

2.① ليكن $x > 0$ عندئذ بإجراء مكاملة بالتجزئة نجد أنّ

$$\int_0^1 g(t)\sin xt\,\mathrm{d}\,t = \left[-g(t)\frac{\cos xt}{x}\right]_0^1 + \frac{1}{x}\int_0^1 g'(t)\cos xt\,\mathrm{d}\,t$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 g(t)\sin xt\,\mathrm{d}\,t\right| &\leq \frac{1}{x}\left(\left|g(1)\cos x + g(0)\right| + \int_0^1\left|g'(t)\cos xt\right|\mathrm{d}\,t\right)\\ &\leq \frac{1}{x}\left(\left|g(1)\right| + \left|g(0)\right| + \int_0^1\left|g'(t)\right|\mathrm{d}\,t\right)\end{aligned}$$

②.2 وهذا يثبتُ أنّ $\lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_0^1 g(t)\sin xt\,\mathrm{d}\,t = 0$.

①.3 P كثير حدود ثوابته حقيقية، ويحقّق $P(0) = 0$. نعرّف في حالة x من $]0,1]$ ، المقدار

$$\varphi(x) = \frac{P(x)}{\sin(\pi x/2)}$$

عندئذ نستنتج من $P(0) = 0$ وجود كثير حدود Q يحقّق $P = XQ$. وعندئذ

$$\forall x \in\ ]0,1],\ \varphi(x) = \frac{x}{\sin(\pi x/2)}Q(x) = \frac{2}{\pi}f\left(\frac{\pi x}{2}\right)Q(x)$$

وإذا استفدنا من نتيجة 1. استنتجنا أنّ φ يقبل التمديد إلى تابع من الصف C^1 على $[0,1]$.

②.3 بالاستفادة من ②.2 نستطيع أن نكتب

$$\lim_{x\to\infty}\int\limits_0^1 \varphi(t)\sin xt\,\mathrm{d}\,t = 0$$

ومن ثَمّ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \varphi(t)\sin(n+\frac{1}{2})t\,\mathrm{d}\,t = 0$ أي

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 P(t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi t}{\sin(\pi t/2)}\mathrm{d}t = 0$$

الجزء الثاني

①.1 ليكن P من E ، و لنضع $h(P) = Q$. عندئذ، مهما تكن x من $\mathbb{R}$ يكن

$$Q(x) = \int_0^x tP(t)\mathrm{d}t - x\int_0^x P(t)\mathrm{d}t + \frac{x^2}{2}\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$$

ومنه $$Q'(x) = x\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t - \int_0^x P(t)\mathrm{d}t$$

وكذلك $$Q''(x) = \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t - P(x)$$

1.② وهنا نلاحظ أنّ

$$\operatorname{Im} h \subset \left\{Q \in \mathbb{R}[X] : Q(0) = Q'(0) = Q'(1) = 0\right\}$$

وبالعكس، إذا كان Q كثير حدود يُحقّق $Q(0) = Q'(0) = Q'(1) = 0$ وعرّفنا $P = -Q''$، تحقّقنا مباشرة أنّ $h(P) = Q$ أي إنّ

$$\operatorname{Im} h = \left\{Q \in \mathbb{R}[X] : Q(0) = Q'(0) = Q'(1) = 0\right\}$$

ومن جهة أخرى، إذا كان $h(P) = 0$ استنتجنا أنّ المشتق الثاني لكثير الحدود هذا معدومٌ ومن ثَمّ أنّ P ثابتٌ. وبالعكس، نلاحظ مباشرة أنّ $h(1) = 0$. إذن

$$\ker h = \left\{Q \in \mathbb{R}[X] : \deg Q \leq 0\right\}$$

2. نعرّف متتالية كثيرات الحدود $\left(P_n\right)_{n\geq 1}$ بوضع $P_1 = \frac{1}{2}X^2 - X$ ، و $P_n = h(P_{n-1})$ في حالة $2 \leq n$.

2.① عندئذ نجد بالحساب المباشر أنّ

$$h(X^p) = -\frac{X^{p+2}}{(p+2)(p+1)} + \frac{X^2}{2(p+1)}$$

وعليه

$$\begin{aligned} P_2 &= h(P_1) = \frac{1}{2}h(X^2) - h(X) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{X^4}{12} + \frac{X^2}{6}\right) - \left(-\frac{X^3}{6} + \frac{X^2}{4}\right) = -\frac{X^4}{24} + \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 &= h(P_2) = -\frac{1}{24}h(X^4) + \frac{1}{6}h(X^3) - \frac{1}{6}h(X^2) \\ &= -\frac{1}{24}\left(-\frac{X^6}{30} + \frac{X^2}{10}\right) + \frac{1}{6}\left(-\frac{X^5}{20} + \frac{X^2}{8}\right) - \frac{1}{6}\left(-\frac{X^4}{12} + \frac{X^2}{6}\right) \\ &= \frac{X^6}{720} - \frac{X^5}{120} + \frac{X^4}{72} - \frac{X^2}{90} \end{aligned}$$

②.2 لمّا كان $P_n \in \operatorname{Im} h$ في حالة $n \geq 2$ استنتجنا أنّ $P_n(0) = P_n'(0) = P_n'(1) = 0$.

③.2 نعرّف المتتالية $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ بوضع $\lambda_1 = \dfrac{1}{3}$، وفي حالة $2 \leq n$:

$$\lambda_n = \frac{2n}{(2n+1)!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_{n-k}}{(2k+1)!}$$

عندئذ تكون العلاقة

$$P_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{X^{2n}}{(2n)!} - \frac{X^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda_{n-k}}{(2k)!}X^{2k}\right)$$

محقّقة في حالة $n = 2$. لنفترض إذن أنها محقّقة في حالة $n-1$ حيث $n \geq 3$ أي

$$P_{n-1} = (-1)^{n}\left(\frac{X^{2n-2}}{(2n-2)!} - \frac{X^{2n-3}}{(2n-3)!} + \sum_{k=1}^{n-2}\frac{\lambda_{n-1-k}}{(2k)!}X^{2k}\right)$$

فإذا تذكّرنا أنّ

$$h(X^p) = -\frac{X^{p+2}}{\left(p+2\right)\left(p+1\right)} + \frac{X^2}{2\left(p+1\right)}$$

استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}
h(P_{n-1}) &= \frac{(-1)^n}{(2n-2)!}h(X^{2n-2}) - \frac{(-1)^n}{(2n-3)!}h(X^{2n-3}) + (-1)^n\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\lambda_{n-1-k}}{(2k)!}h(X^{2k})\\
&= \frac{(-1)^n}{(2n-2)!}\left(-\frac{X^{2n}}{2n(2n-1)} + \frac{X^2}{2(2n-1)}\right)\\
&\quad - \frac{(-1)^n}{(2n-3)!}\left(-\frac{X^{2n-1}}{(2n-1)(2n-2)} + \frac{X^2}{2(2n-2)}\right)\\
&\quad + (-1)^n\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\lambda_{n-1-k}}{(2k)!}\left(-\frac{X^{2k+2}}{(2k+2)(2k+1)} + \frac{X^2}{2(2k+1)}\right)
\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}
P_n &= (-1)^n\left(-\frac{X^{2n}}{(2n)!} + \frac{X^2}{2(2n-1)!}\right) + (-1)^n\left(\frac{X^{2n-1}}{(2n-1)!} - \frac{X^2}{2(2n-2)!}\right)\\
&\quad + (-1)^n\sum_{k=1}^{n-2}\lambda_{n-1-k}\left(-\frac{X^{2k+2}}{(2k+2)!} + \frac{X^2}{2(2k+1)!}\right)
\end{aligned}$$

أو

$$P_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{X^{2n}}{(2n)!} - \frac{X^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{k=2}^{n-1}\lambda_{n-k}\frac{X^{2k}}{(2k)!}\right) + (-1)^{n-1}\frac{X^2}{2}\underbrace{\left(\frac{2(n-1)}{(2n-1)!} - \sum_{k=1}^{n-2}\frac{\lambda_{n-1-k}}{(2k+1)!}\right)}_{\lambda_{n-1}}$$

أي

$$P_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{X^{2n}}{(2n)!} - \frac{X^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_{n-k}\frac{X^{2k}}{(2k)!}\right)$$

فنكون قد أثبتنا صحّة المساواة المطلوبة أيّاً كانت قيمة n من $\mathbb{N}^*$.

①.3 لنحافظ على رموز السؤال السابق.

- عندئذ نستنتج من المساواة $P_m = h(P_{m-1})$ في حالة m أكبر أو تساوي 2، ومن نتيجة السؤال ①.1 أنّ

$$P_m'' = \int_0^1 P_{m-1}(t)\,\mathrm{d}\,t - P_{m-1}$$

- ليكن m عدداً طبيعيّاً أكبر أو يساوي 2 وليكن k من $\mathbb{N}^*$. عندئذ

$$\begin{aligned}\int_0^1 P_m(t)\cos\big(k\pi t\big)\,\mathrm{d}\,t &= \cancel{\left[P_m(t)\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1} - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 P_m'(t)\sin(k\pi t)\,\mathrm{d}\,t\\ &= \left[P_m'(t)\frac{\cos(k\pi t)}{k^2\pi^2}\right]_0^1 - \frac{1}{k^2\pi^2}\int_0^1 P_m''(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}\,t\\ &= -\frac{1}{k^2\pi^2}\int_0^1 P_m''(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}\,t\\ &= \frac{1}{k^2\pi^2}\int_0^1 P_{m-1}(t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

إذ استفدنا من $P_m'(0) = P_m'(1) = 0$. ومن $\int_0^1 \cos k\pi t\,\mathrm{d}\,t = 0$ ومن النقطة السابقة.

■ لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\int_0^1 P_1(t)\cos(k\pi t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(\frac{t^2-2t}{2}\right)\cos(k\pi t)\mathrm{d}t\\ &= \cancel{\left[\left(\frac{t^2-2t}{2}\right)\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1} - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 (t-1)\sin(k\pi t)\mathrm{d}t\\ &= \left[(t-1)\frac{\cos(k\pi t)}{k^2\pi^2}\right]_0^1 - \cancel{\frac{1}{k^2\pi^2}\int_0^1 \cos(k\pi t)\mathrm{d}t}\\ &= \frac{1}{k^2\pi^2}\end{aligned}$$

■ ليكن m عدداً طبيعيّاً أكبر أو يساوي 1 وليكن k من $\mathbb{N}^*$. عندئذ نبرهن بالتدريج على m مستفيدين من النقطتين السابقتين أنّ

$$\int_0^1 P_m(t)\cos(k\pi t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(\pi k)^{2m}}$$

②.3 لنلاحظ أنّه في حالة t من $]0,\pi]$ و n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\begin{aligned}1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kt &= \sum_{k=-n}^{n} e^{\mathrm{i}kt} = \frac{e^{\mathrm{i}(n+1)t}-e^{-\mathrm{i}nt}}{e^{\mathrm{i}t}-1}\\ &= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin(t/2)}\end{aligned}$$

ومنه

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{2}$$

③.3 وهكذا إذا استفدنا من النتيجتين السابقتين أمكننا ان نكتب

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\pi k)^{2m}} &= \int_0^1 P_m(t)\left(\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 P_m(t)\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi t}{2\sin(\pi t/2)} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

أو

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2m}}=\pi^{2m}\int_0^1 P_m(t)\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(t/2)}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t$$

④.3 وبالاستفادة من نتيجة الطالب 3. في الجزء الأوّل استنتجنا بعد ملاحظة أنّ $P_m(0)=0$ أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2m}}=-\frac{\pi^{2m}}{2}\int_0^1 P_m(t)\mathrm{d}t$$

وأخيراً إذا تذكّرنا أنّ

$$P''_{m+1}=\int_0^1 P_m\left(t\right)\mathrm{d}t-P_m$$

استنتجنا أنّ $\int_0^1 P_m(t)\mathrm{d}t = P''_{m+1}(0)$ أي

$$\int_0^1 P_m(t)\mathrm{d}t=P''_{m+1}(0)=(-1)^m\lambda_m$$

ومنه

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}=\frac{(-1)^{m-1}\lambda_m}{2}\pi^{2m}$$

⑤.3 فإذا استفدنا من العلاقة التدريجيّة التي تحسب الأعداد $\left(\lambda_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ أمكننا أن نحسب

m	1	2	3	4	5
λ_m	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{45}$	$\frac{2}{945}$	$-\frac{1}{4725}$	$\frac{2}{93555}$

ومن ثَمّ

m	1	2	3	4	5
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^4}{90}$	$\frac{\pi^6}{945}$	$\frac{\pi^8}{9450}$	$\frac{\pi^{10}}{93555}$

وهو المطلوب.

التمرين 37. تطبيق حساب التكامل في إثبات متطابقتين

1. أثبت أنّه في حالة $0 \le k \le n$ لدينا

$$I_{n,k} = \int_0^1 t^{n-k}(1-t)^k \,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{(n+1)C_n^k}$$

2. نتأمّل في حالة n من $\mathbb{N}$ كثير الحدود

$$F_n(X) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}X^k$$

أثبت صحّة كلٍّ من المساواتين :

$$\frac{1}{n+1}(1+X)^{n+1}F_n(X) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}(1+X)^k(X^{n-k}+X^{n+1}) \quad ①$$

$$(1+X)^{n+2}F_n(X) = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{C_{n+1}^k}{k}X^{n+1-k}(1-(-1)^kX^k)^2 \quad ②$$

3. استنتج في حالة n من $\mathbb{N}^*$ أنّ

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k} = \frac{n+1}{2^{n+2}}\cdot\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k} \quad ①$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kC_n^k} = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\sum_{\substack{k=1\\ k=1 \bmod 2}}^{n}\frac{C_n^k}{k} \quad ②$$

4. استنتج أيضاً أنّه في حالة n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\frac{2^{n+1}}{n+1}X^{n+2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}T_{|2k-n|}(X)\right) = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}X^kT_k(X)$$

إذ رمزنا بالرمز T_n دلالة على كثير حدود تشبيشيف من النوع الأول والدرجة n. المعرّف بالعلاقة:

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\qquad T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$

الحل

1. في الحقيقة، لدينا في حالة $x \neq 1$ و n من $\mathbb{N}$ ما يلي :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k I_{n,k} &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^{n-k}(1-t)^k x^k \,\mathrm{d}\,t = \int_0^1 \big(t + x(1-t)\big)^n \,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 \big((1-x)t + x\big)^n \,\mathrm{d}\,t = \left[\frac{((1-x)t+x)^{n+1}}{1-x}\right]_{t=0}^{t=1} \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x^k
\end{aligned}$$

أي

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k I_{n,k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} X^k$$

يكفي إذن أن نقارن أمثال X^k في الطرفين حتى نحصل على النتيجة المطلوبة.

2. لنلاحظ، في حالة n من $\mathbb{N}$، و $x \neq -1$ ما يأتي:

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 t^{n-k}(1-t)^k x^k \,\mathrm{d}\,t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} t^{n-k} \big((1-t)x\big)^k \,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 \frac{t^{n+1} - (1-t)^{n+1}x^{n+1}}{t-(1-t)x} \,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 \frac{t^{n+1} - (1-t)^{n+1}x^{n+1}}{t-(1-t)x} \,\mathrm{d}\,t : \qquad ☞ t \leftarrow \frac{u+x}{1+x} \\
&= \frac{1}{1+x}\int_{-x}^{1} \left(\left(\frac{u+x}{1+x}\right)^{n+1} - \left(1 - \frac{u+x}{1+x}\right)^{n+1} x^{n+1} \right) \frac{\mathrm{d}\,u}{u}
\end{aligned}$$

فنكون قد أثبتنا أنّ

$$F_n(x) = \frac{1}{(1+x)^{n+2}} \int_{-x}^{1} \Big((u+x)^{n+1} - (1-u)^{n+1}x^{n+1} \Big) \frac{\mathrm{d}\,u}{u} \qquad ❶$$

وعليه

$$F_n(x)=\frac{1}{(1+x)^{n+2}}\left(\int_{-x}^{1}\frac{(u+x)^{n+1}-x^{n+1}}{u}\,\mathrm{d}\,u+x^{n+1}\int_{-x}^{1}\frac{1-(1-u)^{n+1}}{u}\,\mathrm{d}\,u\right)$$

أو

$$❷\quad F_n(x)=\frac{1}{(1+x)^{n+2}}\left(\underbrace{\int_{0}^{1+x}\frac{t^{n+1}-x^{n+1}}{t-x}\,\mathrm{d}\,t}_{t=x+u}+x^{n+1}\underbrace{\int_{0}^{1+x}\frac{v^{n+1}-1}{v-1}\,\mathrm{d}\,v}_{v=1-u}\right)$$

ولكن

$$\int_{0}^{A}\frac{t^{n+1}-B^{n+1}}{t-B}\,\mathrm{d}\,t=\int_{0}^{A}\left(\sum_{k=0}^{n}t^kB^{n-k}\right)\mathrm{d}\,t=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}A^{k+1}B^{n-k}$$

- إذن، باختيار $B=1$ و $A=1+x$ نستنتج

$$\int_{0}^{1+x}\frac{v^{n+1}-1}{v-1}\,\mathrm{d}\,t=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}(1+x)^{k+1}$$

- وباختيار $B=x$ و $A=1+x$ نجد

$$\int_{0}^{1+x}\frac{t^{n+1}-x^{n+1}}{t-x}\,\mathrm{d}\,t=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}(1+x)^{k+1}x^{n-k}$$

وبالعودة إلى ❷ نجد، في حالة $x\neq-1$، ما يأتي

$$\begin{aligned}F_n(x)&=\frac{1}{(1+x)^{n+2}}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(1+x)^{k+1}}{k+1}x^{n-k}+x^{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{(1+x)^{k+1}}{k+1}\right)\\&=\frac{1}{(1+x)^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(1+x)^{k}(x^{n-k}+x^{n+1})}{k+1}\right)\end{aligned}$$

فنكون قد أثبتنا العلاقة ① التالية :

$$\frac{(1+X)^{n+1}}{n+1}F_n(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(1+X)^k}{k+1}\left(X^{n-k}+X^{n+1}\right)$$

وهذا ويمكننا أن نكتب في حالة $x \neq -1$ وانطلاقاً من ❶ ما يأتي :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{(1+x)^{n+2}} \int_{-x}^{1} \Big((u+x)^{n+1} - (1-u)^{n+1} x^{n+1}\Big) \frac{\mathrm{d}\,u}{u} \\ &= \frac{1}{(1+x)^{n+2}} \int_{-x}^{1} \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^{k} u^{k-1} (x^{n+1-k} - (-1)^k x^{n+1}) \,\mathrm{d}\,u \\ &= \frac{1}{(1+x)^{n+2}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{C_{n+1}^{k}}{k} x^{n+1-k} (1 - (-1)^k x^k)^2 \end{aligned}$$

فنحصل بذلك على المساواة ② الآتية

$$(1+X)^{n+2} F_n(X) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{C_{n+1}^{k}}{k} X^{n+1-k} (1 - (-1)^k X^k)^2$$

3. لنعوّض $X = 1$ في ① فنجد

$$\frac{1}{n+1} 2^{n+2} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{k+1}$$

ومن ثَمّ

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k} = \frac{n+1}{2^{n+2}} \cdot \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}$$

وكذلك بتعويض $X = 1$ في ② واستبدال $n-1$ بالمقدار n نجد

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k C_n^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k=1 \bmod 2}}^{n} \frac{C_n^k}{k}$$

4. لنعوّض $X = e^{2\mathrm{i}\theta}$ في ① فنجد

$$\frac{(1+e^{-2\mathrm{i}\theta})^{n+1}}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{\mathrm{i}2k\theta}}{C_n^k} \right) = e^{-2\mathrm{i}\theta} \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+e^{-2\mathrm{i}\theta})^k}{k+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+e^{2\mathrm{i}\theta})^k}{k+1}$$

وهذا يُكافئ بعد الإصلاح والاستفادة من المساواة $1 + e^{2\mathrm{i}\theta} = 2e^{\mathrm{i}\theta} \cos\theta$ أنّ

$$\frac{2^{n+1}}{n+1} (\cos^{n+1}\theta) \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(2k-n)\theta}{C_n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{k+1} \cos^k\theta \cos(k+1)\theta$$

أو

$$\frac{2^{n+1}}{n+1}(\cos^{n+2}\theta)\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(2k-n)\theta}{C_n^k}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}\cos^k\theta\cos k\theta$$

ولكن إذا كانت $\left(T_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية كثيرات حدود تشبيشيف من النوع الأوّل، المعرّفة بالعلاقة

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall\varphi\in\mathbb{R},\qquad T_n\left(\cos\varphi\right)=\cos n\varphi$$

استنتجنا من المساواة السابقة المتطابقة التالية

$$\frac{2^{n+1}}{n+1}X^{n+2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}T_{|2k-n|}(X)\right)=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}X^kT_k(X)$$

وهو المطلوب. ■

التكاملات المعمَّمة أو المعتلّة
والتكاملات التابعة لوسيط

1. التكاملات المعمَّمة أو المعتلّة

1-1. تعريف. ليكن (a,b) عنصراً من $\mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}}$ يُحقِّق $a<b$. وليكن f تابعاً من $\mathcal{R}^{\text{loc}}([a,b[)$. نقول إنّ **التكامل المعمَّم أو المعتل** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **متقاربٌ** أو موجود إذا وفقط إذا قَبِلَ التابع

$$F:[a,b[\,\to\mathbb{R},\quad x\mapsto F(x)=\int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

نهاية منتهية عندما تسعى x إلى b. و في هذه الحالة نكتب

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x=\lim_{X\to b}\int\limits_a^X f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

أمّا إذا لم يكن التكامل المعمَّم $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ متقارباً قلنا إنّه **متباعدٌ**. ونترك للقارئ مهمّة صياغة تعريفٍ مماثل في حالة المجال $]a,b]$ عوضاً عن $[a,b[$.

2-1. مبرهنة. ليكن (a,b) عنصراً من $\mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}}$ يُحقِّق $a<b$. وليكن التابعان f و g من $\mathcal{R}^{\text{loc}}([a,b[)$؟ إذا تقارب التكاملان المعمَّمان $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ و $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x$ عندئذ يتقارب التكامل المعمم $\int_a^b (f+\lambda g)(x)\,\mathrm{d}\,x$، أيّاً كانت λ من $\mathbb{K}$ ويكون

$$\int_a^b (f+\lambda g)(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x+\lambda\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x$$

الإثبات

الإثبات بسيط ومتروك للقارئ. ❐

1-3. أمثلة.

- لتكن α من $\mathbb{R}$، ولنتأمّل التابع $f_\alpha : [1,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$. إنّ التكامل المعمّم $\int_1^\infty f_\alpha(x)\mathrm{d}x$ متقاربٌ إذا وفقط إذا كان $1 < \alpha$. في الحقيقة لدينا

$$\forall x \geq 1, \quad F_\alpha(x) = \int_1^x f_\alpha(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}\left(1 - \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}\right) & : \quad \alpha \neq 1, \\ \ln x & : \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

ومن ذلك نرى أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} F_\alpha(x)$ موجودة إذا وفقط إذا كانت $0 < \alpha - 1$.

- لتكن α من $\mathbb{R}$، ولنتأمّل التابع $g_\alpha :]0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$. إنّ التكامل المعمّم $\int_0^1 g_\alpha(x)\mathrm{d}x$ متقاربٌ إذا وفقط إذا كان $1 > \alpha$. في الحقيقة لدينا

$$\forall x \in]0,1]\,, G_\alpha(x) = \int_x^1 g_\alpha(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right) & : \quad \alpha \neq 1, \\ -\ln x & : \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

ومن ثَمّ نرى أنّ $\lim\limits_{x\to 0^+} G_\alpha(x)$ موجودة إذا وفقط إذا كانت $0 > \alpha - 1$.

- إنّ التكامل $\int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}\, x$ متقاربٌ وتساوي قيمته -1. ذلك لأنّ

$$\forall x \in]0,1], \quad F(x) = \int_x^1 \ln t \,\mathrm{d}\, t = \big(t \ln t - t\big)\Big]_x^1 = x - 1 - x \ln x$$

ومن ثَمّ $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = -1$.

1-4. مبرهنة. ليكن (a,b) عنصراً من $\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$ يُحقِّق $a < b$. وليكن f تابعاً من $\mathcal{R}^{\text{loc}}([a,b[)$ **يأخذ قيمه في** $\mathbb{R}_+$. عندئذ يتقارب التكامل المعمَّم $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ إذا وفقط إذا وُجِدَ عددٌ موجبٌ M يُحقِّق

$$\forall x \in [a,b[, \quad \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \leq M$$

الإثبات

هذا صحيح لأنّ التابع $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ يكون عندها متزايداً. ❐

1-5. نتيجة: ليكن (a,b) عنصراً من $\mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}}$ يُحقِّق $a<b$. وليكن التابعان f و g من $\mathcal{R}^{\text{loc}}([a,b[)$. لنفترض أنّ $\forall x\in[a,b[,\ \ 0\le f(x)\le g(x)$. عندئذ تتحقق الخاصّتان المتكافئتان الآتيتان:

- إذا كان التكامل المعمم $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ متقارباً كان التكامل $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ متقارباً.
- إذا كان التكامل المعمم $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ متباعداً كان التكامل $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ متباعداً.

1-6. مثال

ليكن (α,β) في $\mathbb{R}^2$ ، ولنتأمّل التابع:

$$h_{\alpha,\beta}:[e,+\infty[\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{1}{x^\alpha\ln^\beta x}$$

عندئذ يكون التكامل المعمّم $\int_e^\infty h_{\alpha,\beta}(x)\mathrm{d}x$ متقارباً إذا وفقط إذا كان $(1<\alpha)\vee\big((\alpha=1)\wedge(1<\beta)\big)$

لنناقش الحالات التالية:

- **حالة $\alpha>1$.**

نختار γ من $]1,\alpha[$. لمّا كان $\lim_{x\to+\infty}x^\gamma h_{\alpha,\beta}(x)=0$ ، يوجد عددٌ $e<c$ يُحقِّق:

$$\forall x\ge c,\ \ h_{\alpha.\beta}(x)\le\frac{1}{x^\gamma}$$

ولكنّ التكامل $\int_c^\infty x^{-\gamma}\mathrm{d}x$ متقاربٌ لأنّ $1<\gamma$، فالتكامل $\int_c^\infty h_{\alpha,\beta}(x)\mathrm{d}x$ متقاربٌ أيضاً وكذلك يكون التكامل $\int_e^\infty h_{\alpha,\beta}(x)\,\mathrm{d}\,x$.

- **حالة $\alpha<1$.**

نختار γ من $]\alpha,1[$. لمّا كان $\lim_{x\to+\infty}x^\gamma h_{\alpha,\beta}(x)=+\infty$ ، يوجد عددٌ $e<c$ يُحقِّق

$$\forall x\ge c,\ \ h_{\alpha.\beta}(x)\ge\frac{1}{x^\gamma}$$

ولكنّ التكامل $\int_c^\infty x^{-\gamma}\mathrm{d}x$ متباعدٌ لأنّ $1>\gamma$، فالتكامل $\int_c^\infty h_{\alpha,\beta}(x)\mathrm{d}x$ متباعدٌ أيضاً وكذلك يكون التكامل $\int_e^\infty h_{\alpha,\beta}(x)\mathrm{d}x$.

▫ **حالة $\alpha = 1$** .

في هذه الحالة لدينا

$$\forall x > e, \quad F_\beta(x) = \int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^\beta t} = \int_1^{\ln x} \frac{\mathrm{d}u}{u^\beta}$$

ومن ثَمّ تكون النهاية $\lim_{x\to+\infty} F_\beta(x)$ موجودة إذا وفقط إذا كان $1 < \beta$.

1-7. مبرهنة. ليكن (a,b) عنصراً من $\mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}}$ يُحقّق $a < b$. وليكن التابعان f و g من $\mathcal{R}^{\text{loc}}([a,b[)$. نفترض أنّ f و g **يأخذان قيمهما في** $\mathbb{R}_+^*$ وأنّ $\lim_{x\to b}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

عندئذ يكون للتكاملين المعمَّمين $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ و $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ الطبيعة نفسها.

الإثبات

في الحقيقة نجد، تِبعاً لتعريف النهاية، ثابتاً c من $[a,b[$ يُحقّق

$$x \in [c,b[\;\Rightarrow \left|f(x) - g(x)\right| < \frac{1}{2}g(x)$$

ومن ثَمّ

$$x \in [c,b[\Rightarrow \frac{1}{2}g(x) \le f(x) \le \frac{3}{2}g(x).$$

وهذا يثبت المطلوب استناداً إلى النتيجة 1-5. ❐

1-8. مبرهنة. ليكن (a,b) عنصراً من $\mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}}$ يُحقّق الشرط $a < b$. وليكن f تابعاً من $\mathcal{R}^{\text{loc}}([a,b[)$. يتقارب التكامل المعمَّم $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ إذا وفقط إذا تحقَّق الشرط

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a,b[, \;\left(c \le u < v < b\right) \Rightarrow \left|\int_u^v f\right| < \varepsilon$$

الإثبات

يكافئ الشرط السابق قولنا إنّ التابع $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ يُحقّقُ شرط كوشي عند b ومن ثَمّ له نهاية منتهية عند b. ❐

1-9. **تعريف**. ليكن (a,b) عنصراً من $\mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}}$ يُحقِّق $a<b$. وليكن f تابعاً من $\mathcal{R}^{\text{loc}}([a,b[)$. نقول إنّ التكامل المعمَّم $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ **متقارب بالإطلاق** إذا وفقط إذا كان التكامل المعمَّم $\int_a^b \left|f(t)\right|\mathrm{d}t$ متقارباً.وعندئذ تتحقَّق المتراجحة التالية:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x\right| \leq \int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x$$

ملاحظة. تُثبت المبرهنة 1-8. أنّ التقارب بالإطلاق لتكاملٍ معمّم يقتضي تقاربَه، ولكنّ العكس خطأ كما سنرى في أمثلة لاحقة.

1-10. **تعريف**. ليكن (a,b) عنصراً من $\mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}}$ يُحقِّق $a<b$. وليكن f تابعاً من $\mathcal{R}^{\text{loc}}([a,b[)$. نقول إنّ التكامل المعمَّم $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ **نصف متقارب** إذا وفقط إذا كان متقارباً، ولم يكن متقارباً بالإطلاق.

1-11. **مثال**. لندرس التكامل المُعمَّم $I=\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

يقبل التابع $t\mapsto\frac{\sin t}{t}$ التمديد إلى تابع مستمرّ عند 0، فالمشكلة ظاهرية في جوار الصفر.

ليكن (x,y) من $\mathbb{R}^2$ يُحقِّق $0<x<y$. نجد بإجراء مُكاملة بالتجزئة أنّ

$$\int_x^y \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\left[-\frac{\cos t}{t}\right]_x^y-\int_x^y\frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{\cos x}{x}-\frac{\cos y}{y}-\int_x^y\frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$$

ومن ثَمّ

$$\left|\int_x^y \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right|\leq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\int_x^y\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\frac{2}{x}$$

نستنتج من ذلك أنّ

$$\frac{2}{\varepsilon}<x<y\Rightarrow\left|\int_x^y\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right|<\varepsilon$$

فالتكامل المُعمَّم I متقارب بناءً على المبرهنة 1-8.

من ناحية أخرى، أيّاً كانت k من $\mathbb{N}^*$، يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned}
\int\limits_{2\pi k}^{4\pi k}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t &= \sum_{p=k}^{2k-1}\int\limits_{2\pi p}^{2\pi(p+1)}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t \\
&= \sum_{p=k}^{2k-1}\int\limits_{0}^{2\pi}\left|\frac{\sin(u+2\pi p)}{u+2\pi p}\right|\mathrm{d}u \\
&= \sum_{p=k}^{2k-1}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\left|\sin u\right|}{u+2\pi p}\mathrm{d}u \\
&\geq \int\limits_{0}^{2\pi}\left|\sin u\right|\mathrm{d}u\cdot\sum_{p=k}^{2k-1}\frac{1}{2\pi(p+1)} \\
&\geq \frac{4}{2\pi}\cdot\frac{k}{2k} = \frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

فالتكامل المعمّم $\int\limits_{0}^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t$ متباعد لأنّه لا يحقّق شرط المبرهنة 1-8. نستنتج أنّ التكامل I تكاملٌ معمّمٌ نصف متقارب.

1-12. تعريف. ليكن (a,b) عنصراً من $\mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}}$ يُحقِّق $a<b$. وليكن f تابعاً من $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}(]a,b[)$. نقول إنّ التكامل المعمَّم $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ متقاربٌ إذا وفقط إذا وُجِد ثابت c في $]a,b[$ يجعل التكاملين المعمَّمين $\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ و $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ متقاربين. وعندئذ نضع بالتعريف:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

لاحظ أنه، بناءً على علاقة شال، لا تتعلّق قيمةُ التكامل المعمَّم $\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ بقيمة c من المجال $]a,b[$.

2. مقارنة تقارب المتسلسلات وتقارب التكاملات المعمّمة

2-1. مبرهنة. لتكن a من $\mathbb{R}$، وليكن f من $\mathcal{R}^{\text{loc}}([a,+\infty[)$. يتقارب التكامل المعمَّم $\int_a^\infty f(t)\mathrm{d}t$ إذا وفقط إذا تقاربت المتسلسلة $\sum_{n\geq 0}\left(\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\mathrm{d}t\right)$ أيّاً كانت $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليةً من عناصر $[a,+\infty[$ تسعى إلى $+\infty$.

الإثبات

لنعرّف $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ في حالة x من $[a,+\infty[$. يكون التكامل $\int_a^\infty f$ متقارباً إذا وفقط إذا وُجِدتْ النهاية $\lim_{x\to\infty} F(x)$. وهذا يكافئ وجود النهاية $\lim_{n\to\infty} F(x_n)$ أيّاً كانت المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $[a,+\infty[$ التي تسعى إلى $+\infty$. ونحصل على التكافؤ المطلوب عند ملاحظة أنّ

$$F(x_n) = F(x_0) + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t\right)$$

وهذا ما يثبت المبرهنة. ❐

2-2. مبرهنة. لتكن a من $\mathbb{R}$، وليكن f من $\mathcal{R}^{\text{loc}}([a,+\infty[)$. نفترض أنه توجد متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $[a,+\infty[$ متزايدة وتسعى إلى $+\infty$، وتحقّق الشرطين:

- المتسلسلة $\sum_{n\geq 0}\left(\int_{u_n}^{u_{n+1}} f(t)\mathrm{d}t\right)$ متقاربة.
- و $\lim_{n\to\infty}\int_{u_n}^{u_{n+1}} \left|f(t)\right|\mathrm{d}t = 0$.

عندئذ يتقارب التكامل المعمَّم $\int_a^\infty f(t)\mathrm{d}t$.

الإثبات

لنعرّف $p(x) = \max\{m \in \mathbb{N}, u_m \leq x\}$ عندما تكون $x \in [u_0, +\infty[$. فيكون

$$\forall x \geq u_0, \quad u_{p(x)} \leq x \leq u_{p(x)+1}$$

لمّا كان التابع $x \mapsto p(x)$ تابعاً متزايداً وغير محدود من الأعلى، كان $\lim_{x\to\infty} p(x) = +\infty$.

ومن ناحية أخرى، نلاحظ أنه أيّاً كانت $a \leq x$ لدينا

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{u_0} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{p(x)-1} \Big(\int_{u_k}^{u_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t\Big) = \int_{u_{p(x)}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

ومن ثَمّ

$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \left(\int_a^{u_0} f(t)\mathrm{d}t + \sum_{k=0}^{p(x)-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t\right)\right| \leq \int_{u_{p(x)}}^{u_{p(x)+1}} \left|f(t)\right|\mathrm{d}t$$

ونحصل على المطلوب بجعل x تسعى إلى $+\infty$. ❐

2-3. نتيجة. لتكن a من $\mathbb{R}$، وليكن f تابعاً من $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}([a, +\infty[)$ **يأخذ قيمه في** $\mathbb{R}_+$.
وأخيراً لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة من $[a, +\infty[$، تسعى إلى $+\infty$. عندئذ يقتضي تقاربُ المتسلسلة $\sum_{n\geq 0}\left(\int_{u_n}^{u_{n+1}} f\right)$ تقاربَ التكامل المعمَّم $\int_a^{\infty} f$.

2-4. مثال. لندرس التكامل المعمّم $\mathcal{I}_\alpha = \int_\pi^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$.

- **حالة $1 < \alpha$**.

في هذه الحالة لدينا $\forall t \geq \pi, \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$ ، ولمّا كان التكامل $\int_\pi^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ متقارباً استنتجنا تقارب التكامل $\mathcal{I}_\alpha$ بالإطلاق، ومن ثَمّ تقاربه.

☜ لنعرّف في حالة $\alpha \leq 1$ ، ما يأتي:

$$a_n = \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{\sin t}{t^\alpha}\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin t}{(t + n\pi)^\alpha}\mathrm{d}t$$

▫ **حالة $\alpha = -\beta \leq 0$.**

عندئذ يكون لدينا، أيّاً كان $1 \leq n$،

$$\left|a_n\right| = \int_0^{\pi}(t+n\pi)^{\beta}\sin t\,\mathrm{d}\,t \geq (n\pi)^{\beta}\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}\,t \geq 2$$

ينتج من ذلك أنّ المتسلسلة $\sum a_n$ متباعدة، ومنه تباعد التكامل $\mathcal{I}_\alpha$ في هذه الحالة.

▫ **حالة $0 < \alpha \leq 1$.**

عندئذ، بوضع $b_n = \left|a_n\right| = (-1)^n a_n$ نجد، في حالة $1 \leq n$،

$$\frac{2}{(1+n)^{\alpha}\pi^{\alpha}} \leq b_n = \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{(t+n\pi)^{\alpha}}\mathrm{d}\,t \leq \frac{2}{n^{\alpha}\pi^{\alpha}}$$

فالمتتالية $(b_n)_{n\geq 1}$ متناقصة وتسعى إلى الصفر، ينتج من ذلك أنّ المتسلسلة المتناوبة $\sum a_n$ متقاربة. وبملاحظة أنّ $b_n = \int_{\pi n}^{\pi(n+1)}\left|\frac{\sin t}{t^{\alpha}}\right|\mathrm{d}t$ نستنتج بالاستفادة من المبرهنة 2-2. تقارب التكامل $\mathcal{I}_\alpha$، وكذلك فإنّ تباعد المتسلسلة $\sum b_n$ في هذه الحالة يبيّن تباعد التكامل $\int_{\pi}^{\infty}\left|\frac{\sin t}{t^{\alpha}}\right|\mathrm{d}t$.

نستخلص من هذه الدراسة أنّ التكامل المعمّم $\mathcal{I}_\alpha$ متقارب بالإطلاق حينما $\alpha > 1$، ونصف متقارب عندما $0 < \alpha \leq 1$، ومتباعد حين يكون $\alpha \leq 0$.

2-5. **مبرهنة.** لتكن a من $\mathbb{R}$، وليكن f تابعاً من $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}([a,+\infty[)$ **يأخذ قيمه في** $\mathbb{R}_+$.

نفترض أنّ f تابعٌ متناقص. ونعرّف المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ كما يلي:

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} f(a+k) - \int_a^{a+n+1} f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$y_n = \sum_{k=0}^{n+1} f(a+k) - \int_a^{a+n+1} f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

عندئذ يكون لدينا $\forall n \geq 0,\ \ x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n$.

وبوجه خاص تكون المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متقاربتين ويكون للمتسلسلة $\sum f(n+a)$ والتكامل المعمّم $\int_a^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t$ الطبيعة نفسها.

الإثبات

يكفي أن نثبت صحة المتراجحات، وهذا أمر ميسور إذا لاحظنا ما يلي:

$$x_{n+1}-x_n=\int_{a+n+1}^{a+n+2}\big(f(a+n+1)-f(t)\big)\mathrm{d}t\geq 0$$

$$y_{n+1}-y_n=\int_{a+n+1}^{a+n+2}\big(f(a+n+2)-f(t)\big)\mathrm{d}t\leq 0$$

$$y_n-x_n=f(a+n+1)\geq 0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة، وكذلك تكون المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة. ❐

6-2. مثال. لتكن $(a_n)_{n\geq 0}$ متتالية متزايدة من $\mathbb{R}_+^*$. ولنعرّف $(b_n)_{n\geq 1}$ بالصيغة

$$b_n=\frac{1}{\sqrt{a_n}}\left(1-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$$

عندئذ تتقارب المتسلسلة $\sum b_n$ التي حدّها العام معرّف بالصيغة.

في الحقيقة إنّ حدود المتسلسلة $\sum b_n$ موجبة، إذن يكفي أن نثبت أنّ متتالية مجاميعها الجزئية محدودة. ولكن، أيّاً كانت $1\leq k$، لدينا

$$t\in[a_{k-1},a_k]\Rightarrow\frac{1}{a_k\sqrt{a_k}}\leq\frac{1}{t\sqrt{t}}$$

ومن ثَمّ

$$\frac{a_k-a_{k-1}}{a_k\sqrt{a_k}}\leq\int_{a_{k-1}}^{a_k}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}$$

ومنه

$$\sum_{k=1}^n b_k=\sum_{k=1}^n\frac{a_k-a_{k-1}}{a_k\sqrt{a_k}}\leq\int_{a_0}^{a_n}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{a_0}}-\frac{2}{\sqrt{a_n}}\leq\frac{2}{\sqrt{a_0}}$$

فالمتسلسلة $\sum b_n$ متقاربة.

3. التكاملات التابعة لوسيط

سنعتمد في دراستنا للتكاملات التابعة لوسيط على النتيجة المهمّة التالية، المسمّاة مبرهنة التقارب للوبيغ Lebesgue، وهي ليست أكثر صيغ هذه النتيجة عموميّة ولكنها تسدّ حاجاتنا القريبة، وسنأتي لاحقاً على دراسة تكامل لوبيغ بوجه عام. يتطلّب إثباتُ هذه المبرهنة الكثيرَ من التمهيد لذلك سنقبلها دون برهان، ولقد أرجأنا البرهان إلى نهاية هذا البحث.

3-1. مبرهنة – لوبيغ Lebesgue. ليكن I مجالاً ما غير تافه من $\mathbb{R}$. ولتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية توابع من $\mathcal{R}^{\text{loc}}(I)$. نفترض أنّ

① المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ببساطة من تابع f ينتمي إلى $\mathcal{R}^{\text{loc}}(I)$.

② يوجد في $\mathcal{R}^{\text{loc}}(I)$ تابعٌ موجب g، تكامله $\int_I g(x)\mathrm{d}x$ متقارب ويحقّق

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|f_n\right| \le g$$

عندئذ تكون جميع التكاملات $\int_I f(x)\mathrm{d}x$ و $\left(\int_I f_n(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ويكون

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\mathrm{d}x \;.$$

سنستثمر هذه المبرهنة المهمة في دراسة التكاملات التابعة لوسيط.

3-2. مبرهنة. ليكن I و J مجالين غير تافهين من $\mathbb{R}$. وليكن التابع

$$f : J \times I \to \mathbb{K}, (x,t) \mapsto f(x,t)$$

نفترض أنّ

① أيّاً كانت x من J، ينتمي التابع $t \mapsto f(x,t)$ إلى $\mathcal{R}^{\text{loc}}(I)$.

② أيّاً كانت t من I، التابع $x \mapsto f(x,t)$ مستمرٌّ على المجال J.

③ يوجد في $\mathcal{R}^{\text{loc}}(I)$ تابعٌ موجب g، تكامله $\int_I g(x)\,\mathrm{d}x$ متقارب ويحقّق

$$\forall (x,t) \in J \times I, \quad \left|f(x,t)\right| \le g(t)$$

عندئذ يكون التكامل $\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ متقارباً أيّاً كانت x من J، ويكون التابع

$$F : J \to \mathbb{K}, x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$$

مستمراً على المجال J.

الإثبات

إنّ تقارب التكامل $\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ بالإطلاق واضح من المتراجحة المذكورة في ③. يكفي إذن إثبات استمرار التابع F.

لتكن $\tilde{x}$ من J، ولتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من J تسعى إلى $\tilde{x}$. نعرّف، أيّاً كان t من I وأيّاً كان n من $\mathbb{N}$ المقدار $f_n(t) = f(x_n,t)$، فيكون

❶ أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$ فالتابع f_n ينتمي إلى $\mathcal{R}^{\text{loc}}(I)$.

❷ أيّاً كان t من I، تتقارب المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ببساطة من التابع $t \mapsto f(\tilde{x},t)$ وهو من $\mathcal{R}^{\text{loc}}(I)$.

❸ أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$، و t من I فلدينا $|f_n(t)| = |f(x_n,t)| \le g(t)$.

نستنتج من ذلك بتطبيق مبرهنة التقارب للوبيغ أنّ $\int_I f(\tilde{x},t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_I f_n$ وهذا يكافئ قولنا إنّ $F(\tilde{x}) = \lim_{n\to\infty} F(x_n)$، و يثبت استمرار F عند $\tilde{x}$. ❐

3-3. مبرهنة. ليكن I و J مجالين غير تافهين من $\mathbb{R}$. وليكن التابع

$$f : J\times I \to \mathbb{K},\ (x,t)\mapsto f(x,t)$$

نفترض ما يأتي:

① أيّاً كان x من J، ينتمي التابع $t\mapsto f(x,t)$ إلى $\mathcal{R}^{\text{loc}}(I)$، ويتقارب التكامل $\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

② أيّاً كان t من I، يقبل التابع $x\mapsto f(x,t)$ الاشتقاق على J ونرمز إلى مشتقّه بالرمز $x\mapsto f'_x(x,t)$.

③ أيّاً كانت x من J، ينتمي التابع $t\mapsto f'_x(x,t)$ إلى $\mathcal{R}^{\text{loc}}(I)$.

④ يوجد في $\mathcal{R}^{\text{loc}}(I)$ تابعٌ موجب g، تكامله $\int_I g(x)\,\mathrm{d}x$ متقارب ويحقّق

$$\forall (x,t)\in J\times I,\quad |f'_x(x,t)| \le g(t)$$

عندئذ يكون التكامل $\int_I f'_x(x,t)\,\mathrm{d}t$ متقارباً أيّاً كان x من J، ويقبل التابع

$$F : J\to\mathbb{K},\ x\mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

الاشتقاق على المجال J، ويعطى مشتقه بالصيغة $F'(x) = \int_I f'_x(x,t)\mathrm{d}t$.

الإثبات

سنفترض أنّ $\mathbb{R} = \mathbb{K}$، إذ تنتج الحالة العامّة بتطبيق النتيجة على كلٍّ من $\operatorname{Re} f$ و $\operatorname{Im} f$.

نلاحظ أوّلاً أنّ تقارب التكامل $\int_I f'_x(x,t)\,\mathrm{d}t$ بالإطلاق واضح من المتراجحة المذكورة في ④ .

لتكن $\tilde{x}$ من J، ولتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $J\setminus\{\tilde{x}\}$ تسعى إلى $\tilde{x}$. نعرّف، أيّاً كان t من I، وأيّاً كانت n من $\mathbb{N}$، المقدار

$$f_n(t) = \frac{f(x_n,t) - f(\tilde{x},t)}{x_n - \tilde{x}}$$

ونتحقّق أنّه:

❶ أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$ فالتابع f_n ينتمي إلى $\mathcal{R}^{\text{loc}}(I)$.

❷ أيّاً كان t من I، تتقارب المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ببساطة من التابع $t \mapsto f'_x(\tilde{x},t)$ وهو من $\mathcal{R}^{\text{loc}}(I)$.

❸ أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$، و t من I، فلدينا

$$|f_n(t)| = |f'_x(c_n,t)| \le g(t)$$

حيث c_n عنصرٌ من J واقعٌ تماماً بين $\tilde{x}$ و x_n، وذلك بناءً على مبرهنة التزايدات المحدودة.

نستنتج من ذلك بتطبيق مبرهنة التقارب للوبيغ أنّ

$$\int_I f'_x(\tilde{x},t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\mathrm{d}x$$

وهذا يكافئ قولنا إنّ

$$\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x},t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \frac{F(x_n) - F(\tilde{x})}{x_n - \tilde{x}}$$

ويثبت أنّ F يقبل الاشتقاق عند $\tilde{x}$ و أنّ مشتقّه يحقّق

$$F'(\tilde{x}) = \int_I f'_x(\tilde{x},t)\,\mathrm{d}t$$ ❐

4. التوابع الأولرية *Eulerian Functions*

1-4. مبرهنة وتعريف. إنّ التكامل $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ متقاربٌ أيّاً كان x من $\mathbb{R}_+^*$. نرمز إلى قيمته بالرمز $\Gamma(x)$، ونسمّي التابع $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \Gamma(x)$ **تابع غامّا لأولر**.

الإثبات

للناقش حالتين:

إذا كان x من المجال $]0,1]$ كان [1]:

$$\forall t > 0, \quad \left|t^{x-1}e^{-t}\right| \leq t^{x-1} \cdot \mathbb{1}_{]0,1]}(t) + e^{-t} \cdot \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(t)$$

والتكامل $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ متقارب في هذه الحالة.

- وإذا كان x من المجال $]1,+\infty[$ كان:

$$\forall t > 0, \quad \left|t^{x-1}e^{-t}\right| \leq M_x \cdot e^{-t/2}$$

حيث

$$M_x = \sup_{t>0} t^{x-1}e^{-t/2} = \left(\frac{2(x-1)}{e}\right)^{x-1}$$

وعليه يتقارب التكامل $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ أيضاً في هذه الحالة. ❐

2-4. مبرهنة. ينتمي التابع Γ إلى الصف C^∞ على $\mathbb{R}_+^*$. ويكون

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x > 0, \quad \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

الإثبات

لنعرّف في حالة n من $\mathbb{N}$ و (x,t) من $\mathbb{R}_+^{*2}$

$$f_n(x,t) = (\ln t)^n t^{x-1}e^{-t}$$

ولتكن (α,β) من $\mathbb{R}^2$ يُحقِّق $0 < \alpha < 1 < \beta$.

---

[1] إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ فإنّ $\mathbb{1}_A$ هو التابع الحقيقي المعرف بأن $\mathbb{1}_A(t) = 1$ عندما $t \in A$ و $\mathbb{1}_A(t) = 0$ عندما $t \notin A$.

- لمّا كان التابع $t^{\alpha/2}\left|\ln t\right|^{n}$ $t \mapsto$ يقبل التمديد إلى تابع مستمرٍّ على $[0,1]$ فهو محدود على هذا المجال ويمكننا أن نعرّف

$$A_n = \sup_{0<t\le 1}\left(\left|\ln t\right|^{n} t^{\alpha/2}\right)$$

- وكذلك لمّا كان التابع $t \mapsto \left|\ln t\right|^{n} t^{\beta-1}e^{-t/2}$ مستمراً على $[1,+\infty[$، ويسعى إلى 0 عند $+\infty$، فهو محدود على هذا المجال ويمكننا أن نعرّف

$$B_n = \sup_{1\le t}\left(\left|\ln t\right|^{n} t^{\beta-1}e^{-t/2}\right)$$

لنعرّف، إذن، التابع g_n بالصيغة

$$\forall t>0,\quad g_n(t) = A_n t^{-1+\frac{\alpha}{2}}\cdot \mathbb{1}_{]0,1]}(t) + B_n e^{-\frac{t}{2}}\cdot \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(t)$$

فيكون لدينا

$$(*)\qquad \forall n\in\mathbb{N}, \forall t>0, \forall x\in[\alpha,\beta],\quad \left|f_n(x,t)\right| \le g_n(t)$$

بتطبيق المبرهنة 3-3. على التابع

$$[\alpha,\beta]\times\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\quad (x,t)\mapsto f_n(x,t)$$

وباستعمال $(*)$ وملاحظة أنّ التابع g_n موجب وينتمي إلى $\mathcal{R}^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+^*)$ وأنّ $\int_0^{+\infty} g_n$ متقارب، وكذلك بملاحظة أنّ $(f_n)'_x(x,t) = f_{n+1}(x,t)$، نستنتج أنّ التكامل التابع لوسيط $x \mapsto \int_0^{+\infty} f_n(x,t)\,\mathrm{d}t$ يقبل الاشتقاق على $[\alpha,\beta]$ ومشتقه هو التابع المعرّف بالتكامل $x \mapsto \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x,t)\,\mathrm{d}t$. ينتج من ذلك أنّ التابع $x\mapsto\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} f_0\left(x,t\right)\mathrm{d}t$ من الصف C^∞ على المجال $[\alpha,\beta]$ وأنّ مشتقه من المرتبة n على هذا المجال هو التابع $x \mapsto \int_0^{+\infty} f_n(x,t)\,\mathrm{d}t$. وأخيراً يتم إثبات المطلوب بملاحظة أنّ α عدد كيفي من $]0,1]$ وأنّ β عدد كيفيّ كذلك من المجال $]1,+\infty[$. ❐

3-4.مبرهنة. يحقّق التابع Γ الخواص التالية:

G_1- $\Gamma(1) = 1$.

G_2- أيّاً كانت $0 < x$ فلدينا $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$.

G_3- التابع $\psi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln \Gamma(x)$ تابع محدّب.

الإثبات

- الخاصّة G_1 واضحة.
- لنثبت الخاصة G_2 . أيّاً كانت $0 < \alpha < A$ لدينا

$$\int_\alpha^A t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^x e^{-t}\right]_\alpha^A + x \cdot \int_\alpha^A t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

وبجعل A تسعى إلى $+\infty$ و α تسعى إلى 0 بقيم موجبة نجد

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = x \cdot \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t = x \cdot \Gamma(x)$$

وخصوصاً نجد، في حالة n من $\mathbb{N}$،

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \times (n-1) \times \cdots \times 1 \cdot \Gamma(1) = n!$$

- لنثبت الخاصّة G_3 . لتكن $0 < x$، لمّا كان

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} (\lambda + \ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \geq 0$$

استنتجنا أنّ

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda^2 \Gamma(x) - 2\lambda \Gamma'(x) + \Gamma''(x) \geq 0$$

ومن ثَمّ يكون

$$\Gamma(x)\Gamma''(x) - (\Gamma'(x))^2 \geq 0$$

أو

$$\psi''(x) \geq 0$$

وهذا يثبت أنّ التابع ψ محدّبٌ، ويكتمل إثبات المبرهنة. ❐

في الحقيقة، إنّ الخواص G_1 و G_2 و G_3 تميّز التابع Γ، كما تبيّن المبرهنة الآتية.

4-4. مبرهنة. ليكن $h:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ تابعاً يحقّق الشروط G_1 و G_2 و G_3. عندئذ يكون $h=\Gamma$.

الإثبات

لتكن x عدداً من $]0,1[$، وليكن g تابعاً يحقّق الشروط G_1 و G_2 و G_3. عندئذ أيّاً كان العدد $1<n$، لدينا

$$n+x=x(n+1)+(1-x)n$$

و

$$n=\frac{x}{1+x}(n-1)+\frac{1}{1+x}(n+x)$$

وباستعمال الخاصّة G_3 نجد

$$g(n+x)\le\big(g(n+1)\big)^x\big(g(n)\big)^{1-x}$$

و

$$g(n)\le\big(g(n-1)\big)^{\frac{x}{1+x}}\big(g(n+x)\big)^{\frac{1}{1+x}}$$

ولكن $g(n)=(n-1)!$ بناءً على G_1 و G_2، إذن

$$(n-1)!\cdot(n-1)^x\le g(n+x)\le(n-1)!\cdot n^x$$

بتطبيق ما سبق على كلٍّ من التابعين Γ و h نجد، في حالة $1<n$ و x من $]0,1[$

$$(n-1)!\cdot(n-1)^x\le\Gamma(n+x)\le(n-1)!\cdot n^x$$
$$(n-1)!\cdot(n-1)^x\le h(n+x)\le(n-1)!\cdot n^x$$

ومن ثَمّ

$$\forall n>1,\ \forall x\in]0,1[,\qquad \left(\frac{n-1}{n}\right)^x\le\frac{\Gamma(n+x)}{h(n+x)}\le\left(\frac{n}{n-1}\right)^x$$

ولكن بحسب الخاصّة G_2 لدينا

$$\frac{\Gamma(1+x)}{h(1+x)}=\frac{\Gamma(x)}{h(x)}$$

وبالتدريج على n ، نستنتج أنّ

$$\frac{\Gamma(n+x)}{h(n+x)} = \frac{\Gamma(x)}{h(x)}$$

إذن

$$\forall n > 1,\ \forall x \in]0,1], \qquad \left(\frac{n-1}{n}\right)^x \le \frac{\Gamma(x)}{h(x)} \le \left(\frac{n}{n-1}\right)^x$$

فإذا جعلنا n تسعى إلى $+\infty$ حصلنا على $\forall x \in]0,1],\ \frac{\Gamma(x)}{h(x)} = 1$.

ولكن في حالة $x > 0$ لدينا

$$\frac{\Gamma(1+x)}{h(1+x)} = \frac{\Gamma(x)}{h(x)}$$

إذن يقبل التابع $x \mapsto \frac{\Gamma(x)}{h(x)}$ العدد 1 دوراً، وهو ثابتٌ ويساوي 1 على المجال $]0,1]$. نستنتج إذن أنّ $\forall x > 0,\ \frac{\Gamma(x)}{h(x)} = 1$. وبذلك نكون قد أثبتنا أنّ $h = \Gamma$. ❐

4-5. **مبرهنة**. أيّاً كان $x > 0$ لدينا

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \qquad : \text{Euler}$$

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x \cdot e^{\gamma x} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-x/k} \qquad : \text{Weierstrass}$$

حيث γ هو ثابت Euler الذي يساوي $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right)$.

الإثبات

لمّا كان التابع الأسي محدباً كان التابع $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ -بعد تمديده بالاستمرار- متزايداً على $\mathbb{R}$. ينتج من ذلك أنّ $\forall x \in \mathbb{R},\ \ 1 + x \le e^x$. ومن ثَمّ

$$t \in [0,n] \Rightarrow 1 - \frac{t}{n} \le e^{-t/n} \Rightarrow \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \le e^{-t} \tag{1}$$

لتكن x من $\mathbb{R}_+^*$. ولنعرّف متتالية التوابع $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كما يأتي:

$$g_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*,\ t \mapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathbb{1}_{[0,n]}(t)$$

ولنضع $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*, t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$. نلاحظ استناداً إلى (1) أنّ

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq g_n \leq g$$

وكذلك نرى أنّ المتتالية $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب ببساطة من g. ولمّا كان $\Gamma(x) = \int_0^\infty g(t)\mathrm{d}t$ تكاملاً متقارباً، فإننا نستنتج من مبرهنة التقارب للوبيغ أنّ

$$(2) \qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t$$

لتكن إذن

$$\gamma_n(x) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}\,t$$

سنثبت بالتدريج على k من $\{1,\ldots,n\}$ أنّ

$$(3) \qquad \gamma_n(x) = n^x\,\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{x(x+1)\cdots(x+k-1)}\int_0^1 (1-u)^{n-k}u^{x+k-1}\,\mathrm{d}\,u$$

ينتج من تعويض $t \mapsto nu$ في تعريف $\gamma_n(x)$ ثُمّ بإجراء مكاملة بالتجزئة أنّ

$$\begin{aligned}\gamma_n(x) &= n^x\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,\mathrm{d}\,u\\ &= n^x\left(\left[\frac{u^x}{x}(1-u)^n\right]_0^1 + \frac{n}{x}\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^{x+1-1}\,\mathrm{d}\,u\right)\end{aligned}$$

وهذا يثبت العلاقة (3) في حالة $k = 1$.

لنفترض صحّة العلاقة عند قيمة $k < n$. نجد بإجراء مكاملة بالتجزئة أنّ

$$\int_0^1 (1-u)^{n-k}u^{x+k-1}\,\mathrm{d}\,u = \left[\frac{(1-u)^{n-k}u^{x+k}}{x+k}\right]_0^1 + \frac{n-k}{x+k}\int_0^1 (1-u)^{n-k-1}u^{x+k}\,\mathrm{d}\,u$$

وهذا يثبت العلاقة (3) في حالة $k+1$، ومن ثمّ صحتها أيّاً كان k من $\{1,\ldots,n\}$. فإذا أخذنا حالة $k=n$ في العلاقة (3) وجدنا

$$\gamma_n(x) = n^x\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

وهذا يثبت المساواة الأولى انطلاقاً من العلاقة (2).

أمّا المساواة الثانية فتنتج بملاحظة أنّ

$$\frac{1}{x\cdot\gamma_n(x)} = \exp\left(x\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-x/k}$$

وبجعل n تسعى إلى $+\infty$. ❐

6-4. مبرهنة وتعريف. أيّاً كان $0<x$ و $0<y$ كان التكامل $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ متقارباً. نرمز إلى قيمته بالرمز $\beta(x,y)$ ونسمّي التابع

$$\beta:\mathbb{R}_+^{*2}\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto\beta(x,y)$$

تابع بيتا لأولر.

الإثبات

لمّا كان التكاملان $\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^{1-x}}$ و $\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^{1-y}}$ متقاربين، استنتجنا مباشرة تقارب التكامل المدروس بالاستفادة من المبرهنة 7-1. ❐

4-7. **مبرهنة.** أيّاً كان $0 < x$ و $0 < y$ لدينا

$$\beta(x,y) = \beta(y,x) \quad \text{و} \quad \beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y)$$

الإثبات

- الخاصّة الأولى واضحة بإجراء تغيير المتحول $t \mapsto 1-u$.
- سنثبت الخاصّة الثانية بإجراء تكامل بالتجزئة

$$\begin{aligned}
\beta(x+1,y) &= \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x (1-t)^{x+y-1}\mathrm{d}t \\
&= \left[-\left(\frac{t}{1-t}\right)^x \frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\right]_0^1 \\
&\qquad + \frac{x}{x+y}\int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} \frac{(1-t)^{x+y}}{(1-t)^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{x}{x+y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t = \frac{x}{x+y}\beta(x,y)
\end{aligned}$$

وهو المطلوب إثباته. ❐

تفيد المبرهنة التالية في التعبير عن التابع β بدلالة التابع Γ.

4-8. **مبرهنة.** أيّاً كان $0 < x$ و $0 < y$ لدينا

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

الإثبات

نجد بالاستفادة من المبرهنة السابقة وبالتدريج على n أنّ

$$\begin{aligned}
\beta(x+n+1,y) &= \frac{(x+n)\cdots(x+1)x}{(x+y+n)\cdots(x+y+1)(x+y)}\beta(x,y) \\
&= \frac{(x+n)\cdots x}{n^x\cdot n!}\cdot\frac{n^{x+y}\cdot n!}{(x+y+n)\cdots(x+y)}\cdot\frac{1}{n^y}\beta(x,y)
\end{aligned}$$

وباستعمال علاقة أولر وجعل n تسعى إلى $+\infty$ نجد أنّ

$$\lim_{n\to+\infty} n^y\beta(x+n+1,y) = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}\beta(x,y) \qquad (*)$$

من ناحية أخرى بإجراء تغيير المتحول $t \mapsto \dfrac{u}{n}$ في التكامل الذي يعرّف $\beta(x+n+1,y)$ نجد أنّ

$$\begin{aligned} n^y\beta(x+n+1,y) &= \int_0^1 (1-t)^{x+n}(nt)^{y-1} n\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^{x+n} u^{y-1}\,\mathrm{d}\,u \end{aligned}$$

لنعرّف إذن متتالية التوابع $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كما يلي:

$$g_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*, t \mapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n+x} t^{y-1}\mathbb{1}_{[0,n]}(t)$$

ولنضع

$$g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*, t \mapsto t^{y-1}e^{-t}$$

نلاحظ، كما في المبرهنة 4-5.، أنّ $0 \le g_n \le g$، أيّاً كان $1 \le n$، وكذلك أنّ المتتالية $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تسعى ببساطة إلى g . ولمّا كان التكامل $\Gamma(y) = \int_0^\infty g(t)\,\mathrm{d}t$ متقارباً، فإنّنا نستنتج من مبرهنة التقارب للوبيغ أنّ

$$\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} n^y\beta(x+n+1,y)$$

وبالعودة إلى $(*)$ نجد $\Gamma(y) = \dfrac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}\beta(x,y)$ وبذلك يتم إثبات العلاقة المطلوبة. ❐

4-9. مثال. لنحسب $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

في الحقيقة لدينا

$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$$

ولكن بتغيير المتحول $t = \sin^2 u$ في التكامل الذي يحسب $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ نجد

$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t\cdot(1-t)}} = 2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}u = \pi$$

ومن ثَمّ

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

ملاحظة. بإجراء تغيير المتحول $t \to x^2$ في التكامل $\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt$ نحصل على قيمة تكامل شهير

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \pi$$

5. تتمّات حول تابع غامّا لأولر

5-1. مبرهنة – علاقة التمام. أيّاً كان x من $]0,1[$ فلدينا $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$.

الإثبات

لنذكّر بأنّه، بمقتضى المبرهنة 4-5. تسعى المتتالية التي حدُّها العام معطى بالعلاقة

$$\gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

إلى $\Gamma(x)$. لنأخذ x من $]0,1[$، ولتكن $0 < n$ عندئذ يكون

$$\begin{aligned}
\gamma_n(x)\cdot\gamma_n(1-x) &= \frac{n^x n^{1-x}(n!)^2}{x(x+1)\cdots(x+n)(1-x)(2-x)\cdots(n+1-x)}\\
&= \frac{(n!)^2}{x(1-x^2)(2^2-x^2)\cdots(n^2-x^2)}\cdot\frac{n}{n+1-x}\\
&= \frac{1}{x\cdot\prod\limits_{k=1}^{n}(1-x^2/k^2)}\cdot\frac{n}{n+1-x}
\end{aligned}$$

ولمّا كان لدينا $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1-x} = 1$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n(x)\gamma_n(1-x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x)$

نرى أنّ النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} x\cdot\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$ موجودة، ونرمز إليها بالرمز $x\cdot\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$ ويكون

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{1}{x\cdot\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^2/k^2)} \tag{1}$$

سنثبت فيما يأتي أنّ:

$$\forall x \in [0,\pi],\ \ \sin x = x \cdot \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \tag{2}$$

ومن ثَمّ يكون

$$\forall x \in [0,1],\ \ \sin \pi x = \pi x \cdot \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$$

وهذا يكفي لإثبات المبرهنة. لنأتِ الآن إلى إثبات (2).

لنعرّف أيّاً كانت $n > 0$، كثير الحدود

$$P_n(X) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,X}\left[\left(1+\frac{\mathrm{i}\,X}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1-\frac{\mathrm{i}\,X}{2n+1}\right)^{2n+1}\right]$$

إنّ P_n كثير حدود من الدرجة $2n$، لأنّ ثابت X^{2n} فيه يساوي $\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2n+1}}$، ثُمّ إنّ $P_n(0) = 1$. ونتحقّق بسهولة أنّ P_n يقبل $2n$ جذراً بسيطاً هي

$$\left\{(2n+1)\tan\frac{\pi k}{2n+1},\ \ k = 1,\ldots,2n\right\}$$

نستنتج من ذلك وجود ثابت λ_n يُحقّق:

$$\begin{aligned}
P_n(X) &= \lambda_n \prod_{k=1}^{2n}\Big((2n+1)\tan\tfrac{\pi k}{2n+1} - X\Big)\\
&= \lambda_n \prod_{k=1}^{n}\Big((2n+1)\tan\tfrac{\pi k}{2n+1} - X\Big)\prod_{k=1}^{n}\Big((2n+1)\tan\tfrac{\pi((2n+1)-k)}{2n+1} - X\Big)\\
&= \tilde{\lambda}_n \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{X^2}{(2n+1)^2\tan^2\frac{\pi k}{2n+1}}\right)
\end{aligned}$$

ويمكننا تعيين الثابت $\tilde{\lambda}_n$ بالشرط $P_n(0) = 1$، وهذا يعطي $\tilde{\lambda}_n = 1$، إذن

$$P_n(X) = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{X^2}{(2n+1)^2\tan^2\frac{\pi k}{2n+1}}\right) \tag{3}$$

ولكن لنضع، أيّاً كانت x من $[0,\pi]$، وأيّاً كانت n من $\mathbb{N}$:

$$\Delta_n(x) = \left| xP_n(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right|$$

فيكون لدينا

$$\begin{aligned}\Delta_n(x) &= \left|\operatorname{Im}\left(\left(1+\frac{\mathrm{i}\,x}{2n+1}\right)^{2n+1} - \sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(\mathrm{i}\,x)^k}{k\,!}\right)\right| \\ &= \left|\operatorname{Im}\left(\sum_{k=3}^{2n+1}\frac{(\mathrm{i}\,x)^k}{k\,!}b_{n,k}\right)\right| \qquad ☞\ b_{n,k} = 1-\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{2n+1}\right) \\ &\le \sum_{k=3}^{2n+1}\frac{|x|^k}{k\,!}b_{n,k} \le \sum_{k=3}^{2n+1}\frac{|x|^k}{k\,!}\,\frac{k(k-1)}{2(2n+1)} \le \frac{|x|^2\,\left(e^{|x|}-1\right)}{2(2n+1)}\end{aligned}$$

إذ استفدنا من المتراجحة

$$0 \le b_{n,k} \le \frac{k(k-1)}{2(2n+1)}$$

وهي متراجحة بسيطة يمكن إثباتها بالتدريج على k. ينتج من ذلك بجعل n تسعى إلى $+\infty$ أنّ

$$\forall x\in[0,\pi],\quad \lim_{n\to\infty} xP_n(x) = \sin x$$

ولكن من جهة أولى، أيّاً كانت k من $\{1,\ldots,n\}$ لدينا $0<\dfrac{\pi k}{2n+1}<\dfrac{\pi}{2}$، ومن ثَمّ تتحقّق المتراجحة $\tan\dfrac{\pi k}{2n+1}\ge\dfrac{\pi k}{2n+1}$، إذن يكون لدينا

$$1-\frac{x^2}{\pi^2k^2} \le 1-\frac{x^2}{(2n+1)^2\tan^2\frac{\pi k}{2n+1}}$$

ومنه

$$\forall n\ge 1, \forall x\in[0,\pi],\qquad \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \le P_n(x) \tag{4}$$

ومن جهة ثانية، إذا كان $n>m$ و x من $[0,\pi]$، فإنّ

$$xP_m(x) = x\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{(2m+1)^2\tan^2\frac{\pi k}{2m+1}}\right) \le \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{(2m+1)^2\tan^2\frac{\pi k}{2m+1}}\right)$$

فإذا جعلنا m تسعى إلى $+\infty$ وجدنا

$$\forall n\ge 1, \forall x\in[0,\pi],\quad \sin x \le x\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2k^2}\right) \tag{5}$$

ينتج من (4) و (5) أنّ

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \left[0, \pi\right],\ \ \sin x \leq x \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \leq x P_n(x)$$

فإذا جعلنا n تسعى إلى $+\infty$ وجدنا أنّ

$$\forall x \in \left[0, \pi\right],\ \ \sin x = x \cdot \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

وهذا يثبت المطلوب. ❐

سنثبت فيما يأتي العلاقة التكامليّة المعروفة باسم **علاقة راب** Raabe .

5-2. **مبرهنة**. أيّاً كان $x > 0$ فلدينا

$$\text{Raabe}:\ \int_x^{x+1} \ln \Gamma(t) \mathrm{d}t = x \ln x - x + \frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

الإثبات

لنضع $H(x) = \int_x^{x+1} \ln \Gamma(t) \mathrm{d}t$. إنّ H قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ويُحقّق

$$H'(x) = \ln \Gamma(x+1) - \ln \Gamma(x) = \ln x$$

إذن يوجد ثابت c في $\mathbb{R}$ يُحقّق

$$H(x) = x \ln x - x + c \qquad (*)$$

نرى من العلاقة $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$ أنّ التكامل $\int_0^1 \ln \Gamma(t)\,\mathrm{d}\,t$ متقارب، لأنّ التكامل $\int_0^1 \left|\ln t\right| \mathrm{d}t$ متقارب و $\ln \Gamma(t) \underset{0}{\sim} \left|\ln t\right|$. فإذا جعلنا x تسعى إلى 0 في $(*)$ وجدنا $c = \int_0^1 \ln \Gamma(t) \mathrm{d}t$.

يسمح لنا تغيير المتحول $t \mapsto 1 - t$ بكتابة

$$\begin{aligned} c &= \int_0^1 \ln \Gamma(t) \mathrm{d}t = \int_0^1 \ln \Gamma(1-t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln\big(\Gamma(t)\Gamma(1-t)\big)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \big(\ln \pi - \ln(\sin \pi t)\big)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln \pi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \ln(\sin t) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

ولكن إذا كان $I=\int_0^\pi \ln(\sin t)\mathrm{d}t$ كان

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\mathrm{d}t+\int_{\pi/2}^{\pi}\ln(\sin t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\mathrm{d}t+\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\left(\frac{\sin t}{2}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}I-\frac{\pi}{2}\ln 2 \end{aligned}$$

ومن ثَمّ $I=-\pi\ln 2$ ، وبالعودة إلى العلاقة التي تحسب c نجد

$$c=\frac{1}{2}\ln\pi+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

ويتم إثبات المطلوب بالاستفادة من $(*)$. ❒

3-5.مبرهنة – علاقة ستيرلينغ Stirling

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Gamma(x)}{x^{x-1/2}e^{-x}\sqrt{2\pi}}=1$$

الإثبات

لتكن $0<x$ ، ولنضع للتسهيل $f(t)=\ln\Gamma(t)$ ، فيكون لدينا

$$\begin{aligned} \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t\\ &= \left[\left(t-\frac{1}{2}\right)f(x+t)\right]_{t=0}^{t=1}-\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)f'(x+t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{f(x)+f(x+1)}{2}-\left[\frac{t^2-t}{2}f'(x+t)\right]_0^1+\int_0^1\frac{t^2-t}{2}f''(x+t)\mathrm{d}t\\ &= f(x)+\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{8}\int_0^1 4t(1-t)f''(x+t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

ولمّا كان التابع f محدّباً، أي $0\le f''$ ، وكان $\forall t\in[0,1],\ \ 4t(1-t)\le 1$ استنتجنا أنّ

$$0<\int_0^1 4t(1-t)f''(x+t)\mathrm{d}t<\int_0^1 f''(x+t)\mathrm{d}t=f'(x+1)-f'(x)=\frac{1}{x}$$

ومنه نستنتج

$$\forall x > 0, \quad 0 < f(x) + \frac{1}{2}\ln x - \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t < \frac{1}{8x}$$

فإذا استفدنا من المبرهنة السابقة وجدنا

$$0 < \ln \Gamma(x) + \ln\sqrt{x} - \ln\left(\left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi}\right) < \frac{1}{8x}$$

وهذا يكافئ المتراجحة

$$x^{x-1/2}e^{-x}\sqrt{2\pi} < \Gamma(x) < x^{x-1/2}e^{-x}\sqrt{2\pi}\cdot\exp\left(\frac{1}{8x}\right)$$

ويثبتُ المطلوب. ❐

5-4. **نتيجة**. مهما تكن $x > 0$ فلدينا المتراجحة

$$x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x} < \Gamma(x+1) < x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}\cdot e^{1/(8x)}$$

إذن يكون لدينا $n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ بتقريب جيّدٍ.

5-5. **مبرهنة**. أيّاً كانت $x > 0$ لدينا

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty}\left(\ln n - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k}\right) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{k(x+k)}$$

إذ يكون التقارب منتظماً على كل مجموعة متراصة في $\mathbb{R}_+^*$.

الإثبات

لنلاحظ أولاً أنّ

$$\begin{aligned}\ln n - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k} &= \ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right)\\ &= \left(\ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k(x+k)}\end{aligned}$$

ولكن من جهة أولى، $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} 1/k - \ln n\right) = \gamma$ حيث γ هو ثابت أويلر Euler . ومن جهة ثانية أيّاً كانت $0 < x$ لدينا $\frac{x}{k(x+k)} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$. إذن نستنتج من المساواة السابقة وجود النهاية وتقارب المتسلسلة والمساواة في العلاقة التالية:

$$\forall x > 0,\ \lim_{n\to\infty}\left(\ln n - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k}\right) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{k(x+k)} \overset{\text{تعريف}}{=} \lambda(x)$$

من جهة أخرى، أيّاً كان $0 < x \le \beta$ و $0 < n$ لدينا

$$\lambda(x) - \left(\ln n - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k}\right) = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \gamma - \ln n\right)}_{\varepsilon_n} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x}{k(x+k)}$$

ومنه

$$\begin{aligned}\sup_{0<x\le\beta}\left|\lambda(x) - \left(\ln n - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k}\right)\right| &\le |\varepsilon_n| + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\beta}{k^2}\\ &\le |\varepsilon_n| + \beta\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)\\ &\le |\varepsilon_n| + \frac{\beta}{n}\end{aligned}$$

إذن تتقارب متتالية التوابع

$$\left(x \mapsto \ln n - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k}\right)_{n\ge 1}$$

بانتظام على كل مجموعة متراصة من $\mathbb{R}_+^*$

وبأسلوب مماثل نثبت النتيجة الموافقة في حالة مجموع المتسلسلة.

وأخيراً إذا وضعنا

$$\gamma_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*,\ \gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

فإنّنا نرى أنّ

- ♦ متتالية التوابع $(\ln \gamma_n)_n$ تتقارب ببساطة من $\ln \Gamma$ بمقتضى المبرهنة 4-5.
- ♦ وأيّاً كان $0 < n$، كان $\ln \gamma_n$ قابلاً للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.
- ♦ والمتتالية $(\ln \gamma_n)'$ تتقارب بانتظام على كل مجموعة متراصة في $\mathbb{R}_+^*$ من التابع λ.

ينتج من ذلك أنّ $(\ln \Gamma)' = \lambda$ أو $\lambda = \dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$، ويتم إثبات المطلوب. ❐

فمثلاً

$$\forall m \geq 1, \quad \Gamma'(m+1) = m! \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \gamma \right) \quad \text{و} \quad \Gamma'(1) = -\gamma$$

5-6. مبرهنة.

1. أيّاً كان x من $]0,1[$ فلدينا $\displaystyle\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{\sin \pi x}$.
2. وكذلك أيّاً كان $1 < \alpha$ فلدينا $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}v}{1+v^\alpha} = \frac{\pi}{\alpha \sin(\pi/\alpha)}$.

الإثبات

1. لتكن x من $]0,1[$، نعلم أنّ $\beta(x,1-x) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1)}$، وذلك بناءً على المبرهنة 4-8. ومن ثَمّ يكون لدينا استناداً إلى علاقة التمام

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

ونحصل على التكامل المطلوب بإجراء تغيير المتحوّل $u = \dfrac{t}{1-t}$.

2. ينتج هذا من التكامل السابق بأخذ $v = u^x$ و $x = \dfrac{1}{\alpha}$. ❐

6. مبرهنة التقارب للوبيغ

سنعرض في هذه الفقرة إثباتاً لمبرهنة التقارب للوبيغ، التي كانت محور دراستنا للتكاملات المتعلّقة بوسيط. يتطلّب هذا الإثبات تمهيداً نستعرض فيه بعض الخواص البسيطة التي سندرجها فيما يأتي، والتي يمكن أن تكون مهمّة بحدّ ذاتها. ولقد أوردنا هذا الإثبات لنُدرته إذ قلّما نجده في الكتب، فتُعْرَضُ هذه المبرهنة ضمن الإطار العامّ لنظرية القياس.

6-1. تمهيد

6-1-1. مبرهنة. ليكن $f:[0,1]\to\mathbb{R}_+$ تابعاً من الصفّ $\mathcal{R}$. عندئذ يكون

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_0^1 \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$$

الإثبات

لنضع $\mu=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ ، فيكون لدينا

$$\begin{aligned}0\le \int_0^1 (f(x)-\mu)^2\mathrm{d}x &= \int_0^1 \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x - 2\mu\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\mu^2\\ &= \int_0^1 \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x-\mu^2\end{aligned}$$

وهذا يثبت المتراجحة المطلوبة، والتي تمثّل حالة خاصّة من المتراجحة المعروفة باسم متراجحة كوشي شوارتز. ❐

6-1-2. مبرهنة. ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ تابعاً من الصف $\mathcal{R}$، ولتكن $0<\varepsilon$. يوجد تابع مستمر $g:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ يحقّق الخاصتين الآتيتين:

- $\forall x\in[a,b],\quad 0\le g(x)\le f(x)$.
- $\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}\,x\le\varepsilon$.

الإثبات

نعلم أنه أيّاً كانت $\varepsilon > 0$ يوجد عدد موجب تماماً $\eta > 0$ بحيث يكون

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - S(f,\sigma)\right| \le \frac{\varepsilon}{3} \tag{1}$$

وذلك أيّاً كانت التقسيمة المنقوطة $\sigma = (t_0,\ldots,t_n,\lambda_0,\ldots,\lambda_{n-1})$ التي تحقّق $h(\sigma) < \eta$.

《نذكّر أنّ $S(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} f(\lambda_i)(t_{i+1}-t_i)$ و $h(\sigma) = \max_{0\le i<n}(t_{i+1}-t_i)$.》

لنثبّتْ إذن N يُحقِّق $N > (b-a)/\eta$، ولنضع $t_i = a + i(b-a)/N$ في حالة i من المجموعة $\{0,1,\ldots,N\}$، ولنعرّف التابع $h : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ كما يأتي: نضع $h(t_i) = 0$، أيّاً كان i من $\{0,1,\ldots,N\}$، ونضع $h(x) = m_i = \inf\left\{f(t) : t_i < t < t_{i+1}\right\}$ أيّاً كان x من $]t_i,t_{i+1}[$.

استناداً إلى تعريف h، نجد أيّاً كان i من $\{0,1,\ldots,N-1\}$، عدداً λ_i من $]t_i,t_{i+1}[$ بحيث

$$m_i \le f(\lambda_i) \le m_i + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

فإذا عرّفنا التقسيمة المنقوطة: $\tilde\sigma = (t_0,\ldots,t_N,\lambda_0,\ldots,\lambda_{N-1})$ ولاحظنا أنّ

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{N-1}(t_{i+1}-t_i)m_i$$

صار لدينا

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x \le S(f,\tilde\sigma) \le \frac{\varepsilon}{3} + \int_a^b h(x)\mathrm{d}x$$

فإذا استعملنا (1)، واستفدنا من كون $h(\tilde\sigma) = \dfrac{b-a}{N} < \eta$، أمكننا أن نكتب:

$$\int_a^b \big(f(x)-h(x)\big)\mathrm{d}x \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} \tag{2}$$

ومن ناحية أخرى، من الواضح أنّ

$$\forall x \in [a,b], \qquad 0 \le h(x) \le f(x) \tag{3}$$

تكمن المشكلة في عدم كون التابع h مستمراً. سنقوم إذن باستبدال تابع مستمر g بالتابع h بحيث يحقّق التابع الجديد خواصَّ مشابهة للخاصتين (2) و (3).

لنضع $\max_{0\le i<N} m_i = \sup_{[a,b]} h = M$ ، ولنختر عدداً α يحقّق

$$\alpha > N\cdot \max\left(\frac{2M}{b-a},\frac{6M^2}{\varepsilon}\right)$$

ثمّ لنضع

$$g:[a,b]\to\mathbb{R}, g(x)=\min\left(h(x),\alpha\min_{0\le i\le N}\left|x-t_i\right|\right)$$

من الواضح أنّ

$$\forall x\in[a,b],\quad 0\le g(x)\le h(x)\le f(x) \tag{4}$$

ومن ناحية أخرى g مستمر على $[a,b]$ لأنّ $\lim_{x\to t_i} g(x)=0=g(t_i)$ أيّاً كانت i . ولـمّا كان $M/\alpha<(b-a)/(2N)=h(\tilde{\sigma})/2$ كانت المجالات

$$\left\{[a,b]\cap\left[t_i-M/\alpha,t_i+M/\alpha\right]\right\}_{0\le i\le N}$$

منفصلة مثنى مثنى. لنضع

$$J=[a,b]\cap\left(\bigcup_{i=0}^{N}\left[t_i-M/\alpha,t_i+M/\alpha\right]\right)$$

ولنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} x\in[a,b]\backslash J \quad &\Rightarrow \left(x\in[a,b]\right)\wedge\left(\forall i,\ \left|x-t_i\right|>\frac{M}{\alpha}\right)\\ &\Rightarrow \left(x\in[a,b]\right)\wedge\left(\alpha\min_{0\le i\le N}\left|x-t_i\right|>M\right)\\ &\Rightarrow g(x)=h(x)\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}\int_a^b\left(h(x)-g(x)\right)\mathrm{d}\,x &= \int_J\left(h(x)-g(x)\right)\mathrm{d}\,x\\ &\le\int_J h(x)\,\mathrm{d}\,x\le M\int_J\mathrm{d}\,x=\frac{2M^2N}{\alpha}<\frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

فإذا استعملنا العلاقة (2) وجدنا أنّ $\int_a^b(f(x)-g(x))\mathrm{d}x\le\varepsilon$. وهذا، بالإضافة إلى العلاقة (4)، يُكمِل إثبات المطلوب. ❐

3-1-6. مبرهنة. لتكن $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ متتالية متزايدة من التوابع المستمرة من المجال $[0,1]$ إلى $\mathbb{R}_+$،
وليكن φ تابعاً مستمراً من $[0,1]$ إلى $\mathbb{R}_+$. نفترض أنّ

$$\forall x \in [0,1], \;\; \varphi(x) \leq \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \leq +\infty$$

عندئذ
$$\int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\mathrm{d}x \text{ .}$$

الإثبات

لتكن $\varepsilon > 0$، ولنضع

$$F_n = \left\{x \in [0,1] : \varphi(x) \geq \varphi_n(x) + \varepsilon\right\}$$

من الواضح أنّ F_n مجموعة جزئية من $[0,1]$، وأنّ $F_{n+1} \subset F_n$ أيّاً كانت n، بسبب المتراجحة $\varphi_{n+1} \geq \varphi_n$. لنثبت بطريقة نقض الفرْض أنه يوجد N يُحقّق $F_N = \varnothing$.
في الحقيقة، إذا لم يكن ذلك صحيحاً وجدنا، أيّاً كانت $n \geq 0$، عنصراً x_n من F_n. وعندئذ تكون المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ متتالية من عناصر المجموعة المتراصّة $[0,1]$، يوجد إذن تابع متزايد تماماً $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ يجعل المتتالية الجزئية $(x_{\lambda(n)})_{n\geq 0}$ تتقارب من عنصر ℓ ينتمي إلى $[0,1]$. إذا كانت m من $\mathbb{N}$، و $n > m$ كان $\lambda(n) > m$ و من ثَمّ

$$x_{\lambda(n)} \in F_{\lambda(n)} \subset F_m$$

أي

$$\forall n > m, \;\; \varphi(x_{\lambda(n)}) \geq \varphi_m(x_{\lambda(n)}) + \varepsilon$$

ولمّا كان كل من φ و φ_m تابعاً مستمراً عند ℓ استنتجنا، بجعل n تسعى إلى $+\infty$، أنّ $\varphi(\ell) \geq \varphi_m(\ell) + \varepsilon$، و لكنّ العدد m عددٌ اختياري في $\mathbb{N}$ إذن

$$\forall m \in \mathbb{N}, \;\; \varphi(\ell) \geq \varphi_m(\ell) + \varepsilon$$

فإذا جعلنا m تسعى إلى $+\infty$ وجدنا

$$\varphi(\ell) \geq \varepsilon + \lim_{m\to\infty} \varphi_m(\ell)$$

وهذا يناقض الفرْض، ويثبت وجود N يُحقّق $F_N = \varnothing$. أي:

$$\forall x \in [0,1], \quad \varphi(x) < \varphi_N(x) + \varepsilon$$

ومن ثَمّ

$$\int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x \le \varepsilon + \int_0^1 \varphi_N(x)\mathrm{d}x \le \varepsilon + \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\mathrm{d}x$$

وأخيراً، لمّا كان $\varepsilon > 0$ عدداً اختيارياً، استنتجنا أنّ

$$\int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x \le \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\mathrm{d}x$$ ❐

4-1-6. نتيجة: لتكن $(\varphi_n)_{n\ge 0}$ متتالية من التوابع المستمرة من $[0,1]$ إلى $\mathbb{R}_+$، وليكن φ تابعاً مستمراً من $[0,1]$ إلى $\mathbb{R}_+$. نفترض أنّ

$$\forall x \in [0,1], \quad \varphi(x) \le \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \le +\infty$$

عندئذ $\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}\,x \le \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\,\mathrm{d}\,x$.

الإثبات

يكفي أن نطبّق المبرهنة السابقة على متتالية المجاميع الجزئيّة. ❐

2-6. مبرهنة التقارب للوبيغ Lebesgue

1-2-6. مبرهنة. لتكن $(f_n)_{n\ge 0}$ متتالية من التوابع المعرّفة على المجال $[0,1]$. نفترض أنّ

① أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$، التابع f_n مستمرّ على $[0,1]$.

② أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$، وأيّاً كانت x من $[0,1]$، فلدينا $0 \le f_n(x) \le 1$.

③ أيّاً كانت x من $[0,1]$، فلدينا $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

④ المتتالية $\left(\int_0^1 f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ونهايتها ℓ.

عندئذ $\ell = 0$.

الإثبات

- لنذكّر بأنّ $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ هو فضاء المتتاليات الحقيقية $(a_n)_{n\geq 0}$ شبه المعدومة، أي التي تحقّق

$$\operatorname{card}(\{k \geq 0 : a_k \neq 0\}) < +\infty$$

ولنعرّف المجموعة

$$\Delta = \left\{(a_k)_{k\geq 0} \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} : (\forall k \geq 0,\ a_k \geq 0) \wedge (\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1)\right\}$$

ولنعرّف

$$K_n = \left\{\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_{n+k} : (a_k)_{k\geq 0} \in \Delta\right\}$$

و

$$d_n = \inf\left\{\int_0^1 g^2 : g \in K_n\right\}$$

من الواضح أنّ $\forall n \geq 0, K_{n+1} \subset K_n$، ومن ثَمّ فإنّ المتتالية $(d_n)_{n\geq 0}$ متتالية متزايدة وهي محدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة، ويوجد λ يُحقّق $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \lambda$.

- إذا عُدنا إلى تعريف العدد d_n، وجدنا، أيّاً كان $n \geq 0$، عنصراً g_n في K_n يُحقّق

$$\int_0^1 \left(g_n(x)\right)^2 \mathrm{d}x \leq d_n + \frac{1}{n+1}$$

لتكن $\varepsilon > 0$ و لنختر n_0 يحقّق الاقتضاء

$$n > n_0 \Rightarrow \left(\left|d_n - \lambda\right| < \frac{\varepsilon^2}{8}\right) \wedge \left(\frac{1}{n+1} < \frac{\varepsilon^2}{8}\right)$$

ثُمّ لنأخذ (n,m) من $\mathbb{N}^2$ تُحقّق $n_0 < m < n$. فيكون

$$\int_0^1 (g_n - g_m)^2 + 4\int_0^1 \left(\frac{1}{2}(g_n + g_m)\right)^2 = 2\int_0^1 \left|g_n\right|^2 + 2\int_0^1 \left|g_m\right|^2 \mathrm{d}x$$

ولمّا كان $K_n \subset K_m$ كان g_n و g_m عنصرين من K_m، ومن ثَمّ ينتمي $\frac{1}{2}(g_m + g_n)$ إلى K_m، إذن

$$\int_0^1 \left|g_n - g_n\right|^2 + 4d_m \leq 2d_n + \frac{2}{n+1} + 2d_m + \frac{2}{m+1}$$

ومن ذلك نستنتج أنّ

$$\int_0^1 \left|g_n - g_n\right|^2 \mathrm{d}\,x \le 2\Big((d_n - \lambda) - (d_m - \lambda)\Big) + \frac{2}{n+1} + \frac{2}{m+1}$$
$$\le \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4} < \varepsilon^2$$

وأخيراً استناداً إلى المبرهنة 6-1-1. يكون

$$\int_0^1 \left|g_n - g_m\right| \mathrm{d}\,x < \varepsilon$$

نكون بذلك قد أثبتنا أنّ

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \quad \left.\begin{matrix} (n,m) \in \mathbb{N}^2 \\ n_0 < m < n \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int_0^1 \left|g_n - g_m\right| \mathrm{d}\,x < \varepsilon \tag{1}$$

- يمكننا انطلاقاً من (1) أن ننشئ تابعاً متزايداً تماماً $\delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \delta(n)$ يُحقّق

$$\forall n \ge 0, \quad \int_0^1 \left|g_{\delta(n+1)} - g_{\delta(n)}\right| \le 2^{-n-1} \tag{2}$$

في الحقيقة نختار $\delta(0)$ كما يلي:

$$\delta(0) = \min\left\{k : \forall m > k, \int_0^1 \left|g_m - g_k\right| < 2^{-1}\right\}$$

ومن ثمّ نعرّف $\delta(n)$ تدريجيّاً بالعلاقة:

$$\delta(n) = \min\left\{k > \delta(n-1) : \forall m > k, \int_0^1 \left|g_m - g_k\right| < 2^{-n-1}\right\}$$

- لنلاحظ أنّ الشرط $g_{\delta(n)} \in K_{\delta(n)}$ يعني وجود $(b_k^{(n)})_{k\ge 0}$ في Δ تُحقّق

$$g_{\delta(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(n)} f_{k+\delta(n)} \tag{3}$$

- وأيّاً كانت x من $[0,1]$ فلدينا

$$\lim_{n\to\infty} g_{\delta(n)}(x) = 0 \tag{4}$$

في الحقيقة، لتكن x من $[0,1]$، ولتكن $\varepsilon > 0$. عندئذ يوجد n_0 في $\mathbb{N}$ يُحقّق

$$m > n_0 \Rightarrow 0 \le f_m(x) \le \varepsilon$$

وذلك بناءً على الفرْض ③، ولكن

$$n > n_0 \Rightarrow (\forall k \geq 0, \quad k + \delta(n) \geq k + n > n_0)$$

ومنه

$$n > n_0 \Rightarrow 0 \leq g_{\delta(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(n)} f_{k+\delta(n)}(x) \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(n)} = \varepsilon$$

❑ من ناحية أخرى لدينا

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_{\delta(n)}(x)\mathrm{d}x = \ell \tag{5}$$

لأنه بالاستفادة من الفرْض ④ أيّاً كانت $\varepsilon > 0$ نجد n_0 في $\mathbb{N}$ يُحقّق

$$m > n_0 \Rightarrow \left| \ell - \int_0^1 f_m(x)\,\mathrm{d}\,x \right| < \varepsilon$$

ومنه، في حالة $n > n_0$، يكون

$$\begin{aligned}\left| \ell - \int_0^1 g_{\delta(n)}(x)\,\mathrm{d}\,x \right| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(n)} \left| \ell - \int_0^1 f_{k+\delta(n)}(x)\,\mathrm{d}\,x \right| \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(n)} = \varepsilon\end{aligned}$$

❑ و أخيراً أيّاً كانت x من $[0,1]$ و $m > n$ لدينا

$$g_{\delta(n)}(x) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \left| g_{\delta(k+1)}(x) - g_{\delta(k)}(x) \right| + g_{\delta(m)}(x)$$

ومن ثَمّ يكون لدينا، بناءً على (4)،

$$\forall n \geq 0, \forall x \in [0,1], \quad g_{\delta(n)}(x) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left| g_{\delta(k+1)}(x) - g_{\delta(k)}(x) \right|$$

وإذا استعملنا المبرهنة 4-1-6 والعلاقة (2) صار لدينا، مهما تكن $0 \leq n$،

$$0 \leq \int_0^1 g_{\delta(n)} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \int_0^1 \left| g_{\delta(k+1)} - g_{\delta(k)} \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k-1} = 2^{-n}$$

وهذا يقتضي أنّ $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_{\delta(n)}(x)\mathrm{d}x = 0$. ومن ثَمّ $\ell = 0$ استناداً إلى (5). ❐

6-2-2. نتيجة. ليكن $a < b$ عددين حقيقيين. ولتكن $(f_n)_{n\geq 0}$ متتالية توابع من $[a,b]$ إلى $\mathbb{R}_+$. نفترض ما يلي:

① يوجد في $\mathbb{R}_+^*$ عدد M يُحقّق $f_n(x) \leq M \quad \forall n \geq 0, \forall x \in [a,b],$.

② أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$، فالتابع f_n مستمر على $[a,b]$.

③ المتتالية $(f_n)_{n\geq 0}$ تتقارب ببساطة من الصفر على $[a,b]$.

عندئذ $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = 0$.

الإثبات

لنعرّف $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}^+, x \to f_n(a + x(b-a))/M$. نلاحظ أنّ التابع g_n تابع مستمر على $[0,1]$، ويأخذ قيمه في $[0,1]$، وأنّ المتتالية $(g_n)_{n\geq 0}$ تسعى ببساطة إلى الصفر على المجال $[0,1]$.

لنضع $u_n = \int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t$. إنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية من المجال $[0,1]$ فهي محدودة، ولنعرّف $\ell = \overline{\lim_{n\to\infty}} u_n \in [0,1]$، توجد متتالية جزئية $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ تُحقّق $\lim_{n\to\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$. واستناداً إلى المبرهنة 6-2-1. مطبقةً على المتتالية $(g_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ نجد أنّ $\ell = 0$، ومنه

$$0 \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} u_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} u_n = \ell = 0$$

أي $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. ولمّا كان

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}\,t = (b-a)\int_0^1 Mg_n(x)\,\mathrm{d}\,x = M(b-a)u_n$$

(إذ وضعنا $t = a + x(b-a)$)، كان لدينا $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$. ❒

6-2-3.تعميم. ليكن $a < b$ عددين حقيقيين. ولتكن $(f_n)_{n\geq 0}$ متتالية توابع من $[a,b]$ إلى $\mathbb{R}_+$. نفترض أنّ:

① يوجد في $\mathbb{R}_+^*$ عدد M يُحقّق $f_n(x) \leq M \quad \forall n \geq 0, \forall x \in [a,b],$.

② أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$، ينتمي التابع f_n إلى الصف $\mathcal{R}$.

③ المتتالية $(f_n)_n$ تسعى ببساطة إلى 0 .

عندئذ $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$.

الإثبات

يوجد بمقتضى المبرهنة 6-1-2.، وأيّاً كانت $0 \leq n$، تابع مستمر $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ يحقق الشرطين:

- $\forall x \in [a,b], \quad g_n(x) \leq f_n(x)$.
- $\int_a^b \big(f_n(x) - g_n(x)\big)\mathrm{d}x \leq \dfrac{1}{n+1}$.

من الواضح أنّ المتتالية $(g_n)_{n\geq 0}$ تحقق شروط المبرهنة 6-2-2. ومن ثَمّ

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x = 0$$

ولدينا من ناحية أخرى

$$\forall n \geq 0, \quad 0 \leq \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n+1} + \int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x$$

نستنتج إذن أنّ $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = 0$. ❐

نصل هنا إلى المبرهنة الأساسية ، التي تسمّى مبرهنة التقارب للوبيغ.

6-2-4. مبرهنة -Lebesgue . ليكن I مجالاً غير تافه في $\mathbb{R}$ ، ولتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية توابع من الصف $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}(I)$. نفترض أنّ

① المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب ببساطة من تابع $f{:}I \to \mathbb{K}$ من الصف $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}(I)$.

② يوجد تابع $g : I \to \mathbb{R}_+$ من الصف $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}(I)$ يُحقّق $\forall n \geq 0, \ \left|f_n\right| \leq g$.

③ التكامل $\int_I g(x)\mathrm{d}x$ متقارب.

عندئذ تكون التكاملات $\left(\int_I f_n(x)\mathrm{d}x\right)_{n\geq 0}$ و $\int_I f(x)\mathrm{d}x$ متقاربة ويكون لدينا

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\mathrm{d}x = \int_I f(x)\mathrm{d}x$$

الإثبات

من الواضح أنّ التكامل $\int_I f(x)\mathrm{d}x$ متقارب بالإطلاق، وأنه، أيّاً كانت $n \geq 0$، كان التكامل $\int_I f_n(x)\mathrm{d}x$ متقارباً بالإطلاق أيضاً. لأنّ $|f_n| \leq g$ و $|f| \leq g$. لنعرّف إذن المقدار

$$\Delta_n = \left|\int_I \big(f_n(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}\,x\right|$$

ولنضع $\alpha = \inf I \in \overline{\mathbb{R}}$ و $\beta = \sup I \in \overline{\mathbb{R}}$.

لمّا كان التكامل $\int_I g(x)\mathrm{d}x$ متقارباً استنتجنا أنّ

$$\lim_{a\to\alpha}\int_\alpha^a g(t)\mathrm{d}t = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{b\to\beta}\int_b^\beta g(t)\mathrm{d}t = 0$$

لتكن $\varepsilon > 0$، نجد استناداً إلى ما سبق عدداً A من I يُحقّق

$$\int_\alpha^A g(t)\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{8}$$

ونجد كذلك عدداً B من I يُحقّق

$$A < B \quad \text{و} \quad \int_B^\beta g(t)\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{8}$$

ومنه يكون

$$\begin{aligned}\Delta_n &\leq \left|\int_A^B \big(f_n(t) - f(t)\big)\mathrm{d}t\right| + 2\int_\alpha^A g(t)\mathrm{d}t + 2\int_B^\beta g(t)\mathrm{d}t\\ &\leq \int_A^B \big|f_n(t) - f(t)\big|\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

ولكن المتتالية $\left(\left|f_n - f\right|_{[A,B]}\right)_{n\geq 0}$ متتالية توابع من $[A,B]$ إلى $\mathbb{R}_+$، وهي تنتمي إلى الصف $\mathcal{R}$ وتسعى ببساطة إلى الصفر على المجال $[A,B]$، ويتحقّق كذلك الشرط:

$$\forall n \geq 0, \forall x \in [A,B], \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leq 2 \sup_{t\in[A,B]} g(t) = M$$

إذن بمقتضى المبرهنة السابقة نجد n_0 تُحقّق

$$n > n_0 \Rightarrow \int_A^B \big|f_n(x) - f(x)\big|\mathrm{d}\,x < \frac{\varepsilon}{2}$$

ومن ثمّ يكون $\Delta_n < \varepsilon$ أيّاً كانت $n_0 < n$. وهذا يثبت أنّ $\lim_{n\to\infty}\Delta_n = 0$. وبذا يتمّ إثبات المطلوب. □

تمرينات

التمرين 1. ادرس طبيعة التكاملات المعمّمة التالية من حيث تقاربها وتباعدها.

$$I_1 = \int_1^\infty \frac{x^\alpha}{\sqrt{1+e^x}}\,\mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int_1^\infty \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,$$

$$I_3 = \int_1^\infty \left(1+x-\sqrt{x^2+2x+a}\right)\mathrm{d}x, \qquad I_4 = \int_1^\infty (\sqrt{\ln(1+x)}-\sqrt{\ln x})\mathrm{d}x,$$

$$I_5 = \int_e^\infty \frac{1}{x^a \ln^b x}\,\mathrm{d}x \qquad I_6 = \int_{e^e}^\infty \frac{1}{x^a (\ln^b x)\ln^c(\ln x)}\,\mathrm{d}x,$$

$$I_7 = \int_1^\infty \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x, \qquad I_8 = \int_1^\infty \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x,$$

$$I_9 = \int_1^\infty \ln\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\,x, \qquad I_{10} = \int_1^\infty \ln\cos\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x,$$

$$I_{11} = \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x, \qquad I_{12} = \int_0^\infty \frac{(\sin x)^2}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

الحل

- لنتأمّل التابع $f(x) = \dfrac{x^\alpha}{\sqrt{1+e^x}}$. نلاحظ ببساطة أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x/3}f(x) = 0$. إذن يوجد عددٌ $1 \le x_0$ بحيث يكون $0 \le f(x) \le e^{-x/3}$ في حالة $x \ge x_0$، ولأنّ التكامل $\int_{x_0}^\infty e^{-x/3}\,\mathrm{d}\,x$ متقارب استنتجنا أنّ $\int_{x_0}^\infty f$ متقاربٌ أيضاً وعليه يكون I_1 متقارباً.
- لنتأمّل التابع $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$. نلاحظ ببساطة أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} 3x^{7/6}f(x) = 1$. إذن للتكامل المعمّم I_2 طبيعة التكامل $\int_1^\infty \dfrac{1}{x^{7/6}}\,\mathrm{d}\,x$ نفسها، ولكنّ هذا الأخير متقاربٌ إذن I_2 متقاربٌ أيضاً.

■ ليكن $f(x)=1+x-\sqrt{x^2+2x+a}$. من الواضح أنّه في حالة $a=1$ يكون I_3 متقارباً لأنّ $f=0$ عندئذ. أمّا في حالة $a\neq 1$ فإنّ $\lim\limits_{x\to\infty} x\,f(x)=\dfrac{1-a}{2}$ وهذا يقتضي تباعد التكامل I_3، لأنّ التكامل $\int_1^{\infty} x^{-1}\,\mathrm{d}\,x$ متباعدٌ.

■ ليكن $f(x)=\sqrt{\ln(1+x)}-\sqrt{\ln x}$، نلاحظ أنّ

$$f(x)=\frac{\ln\bigl(1+1/x\bigr)}{\sqrt{\ln(1+x)}+\sqrt{\ln x}}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

■ إذن I_4 متباعدٌ لأنّ $\int_e^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}\,x}{2x\sqrt{\ln x}}$ متباعدٌ أيضاً، انظر التكامل التالي.

■ ليكن $f(x)=\dfrac{1}{x^a\ln^b x}$، ولنناقش الحالات التالية:

♦ **حالة $a>1$**. نختار γ من $]1,a[$. لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\gamma}f(x)=0$، يوجد $e<c$ يُحقّق:

$$\forall x\geq c,\quad f(x)\leq\frac{1}{x^{\gamma}}$$

ولكن $\int_c^{+\infty} x^{-\gamma}\mathrm{d}x$ متقارب لأنّ $\gamma>1$، إذن التكامل $\int_c^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ متقاربٌ، وكذلك يكون التكامل $\int_e^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

♦ **حالة $1>a$**. نختار γ من $]a,1[$. لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\gamma}f(x)=+\infty$، يوجد $e<c$ يُحقّق:

$$\forall x\geq c,\quad f(x)\geq\frac{1}{x^{\gamma}}$$

ولكن $\int_c^{+\infty} x^{-\gamma}\mathrm{d}x$ متباعد لأنّ $1>\gamma$، إذن التكامل $\int_c^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ متباعدٌ، وكذلك يكون التكامل $\int_e^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

♦ **حالة** $a = 1$. هنا يكون: $\int_1^{\ln x} u^{-b}\,\mathrm{d}\,u = \int_e^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x)$ في حالة $x > e$، ومن ثَمّ تكون النهاية $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ موجودة إذا وفقط إذا كانت $b > 1$.

وعليه :

$$\text{التكامل } \int_e^{\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^a \ln^b x} \text{ متقاربٌ } \Leftrightarrow (a > 1) \vee ((a = 1) \wedge (b > 1))$$

▪ ليكن $I_6 = \int_{e^e}^{\infty} \frac{1}{x^a(\ln^b x)\ln^c(\ln x)}\mathrm{d}x$. نجد بأسلوب مماثل للتمرين السابق أنّ التكامل I_6 يكون متقارباً إذا وفقط إذا تحقّق الشرط:

$$(a > 1) \vee ((a = 1) \wedge (b > 1)) \vee ((a = b = 1) \wedge (c > 1))$$

▪ ليكن $f(x) = \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ، هذا تابع موجب على المجال $[1, +\infty[$ ، وهو يُحقّق

$$f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$$

إذن لا بُد أن يكون التكامل $I_7 = \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ متقارباً.

▪ ليكن $f(x) = \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. يمكننا أن نكتب $f = h + g$ حيث

$$h(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$
$$g(x) = \sin(x)\cdot\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right)$$

وعندئذ نرى بسهولة أنّه يوجد ثابتٌ $0 < c$ يُحقّق: $\left|g(x)\right| \le \frac{c}{x^3}$ في حالة $x \ge 1$، إذن التكامل $\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}\,x$ متقاربٌ بالإطلاق. ولمّا كان التكامل $\int_1^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}\,x$ متقارباً أيضاً استنتجنا أنّ $I_8 = \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ متقاربٌ.

■ ليكن $f(x)=\ln\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. نتيقّن بسهولة أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left|f(x)\right|=\frac{1}{2}$. وعليه، يكون التكامل $I_9=\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ متقارباً بالإطلاق.

■ ليكن $f(x)=\ln\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. نتيقّن بسهولة أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left|f(x)+\ln x\right|=\frac{1}{6}$. وعليه يكون التكامل

$$\int_1^{\infty}\big(f(x)+\ln x\big)\,\mathrm{d}\,x$$

متقارباً بالإطلاق، ولكنّ التكامل $\int_1^{+\infty}\ln x\,\mathrm{d}\,x$ متباعدٌ، إذن $I_{10}=\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ متباعدٌ أيضاً.

■ ليكن $f(x)=\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x(1-x)}}$. نتيقّن بسهولة أنّ :

$$\lim_{x\to 0^+} x^{2/3}f(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=0$$

ولمّا كان $\int_0^1 x^{2/3}\,\mathrm{d}\,x$ متقارباً استنتجنا أنّ $I_{11}=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x$ متقاربٌ أيضاً.

■ ليكن $f(x)=\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}$.

♦ نلاحظ أنّ التكامل $\int_0^1\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}\,x$ يكون متقارباً إذا وفقط إذا كان $3>\alpha$،

♦ كما نلاحظ أنّ التكامل $\int_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}\,x$ يكون متقارباً إذا وفقط إذا كان $1<\alpha$.

نستنتج من ذلك أنّ التكامل $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}\,x$ يكون متقارباً إذا وفقط إذا تحقّقت المتراجحة $1<\alpha<3$.

■

التمرين 2. احسب التكاملات المعمّمة التالية بعد أن تعلّل تقاربها.

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} (\cos x)\ln(\tan x)\mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int_0^{\infty} x^n e^{-x}\mathrm{d}x,$$

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\mathrm{d}x, \qquad I_4 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\mathrm{d}x,$$

$$I_5 = \int_0^{\pi} \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\cos nx\,\mathrm{d}x, \qquad I_6 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x, (a,b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$$

$$I_7 = \int_0^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\mathrm{d}x, \qquad I_8 = \int_0^{\infty}\left(\int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

الحل

- دراسة التكامل $I_1 = \int_0^{\pi/2} (\cos x)\ln(\tan x)\,\mathrm{d}\,x$. لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
\cos x\ln(\tan x) &= \big(\sin x\ln(\tan x)\big)' - \frac{1}{\cos x}\\
&= \big(\sin x\ln(\tan x)\big)' - \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x} + \frac{\cos x}{1+\sin x}\right)\\
&= \left(\sin x\ln(\tan x) - \ln\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)'
\end{aligned}$$

إذن التابع $x \mapsto F(x) = \sin x\ln\big(\tan x\big) - \ln\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$ تابعٌ أصليٌّ على المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ للتابع $x \mapsto \cos x\ln(\tan x)$. ولمّا كان

$$\lim_{x\to\pi/2} F(x) = -\ln 2 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+} F(x) = 0$$

استنتجنا أنّ التكامل I_1 متقارب وأنّ

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} (\cos x)\ln(\tan x)\,\mathrm{d}\,x = -\ln 2$$

- دراسة التكامل $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = I_2$. هذا سهل ويبرهن بالتدريج على n أنّه يساوي $n!$، أو يمكننا أن نلاحظ أنّ $I_2 = \Gamma(n+1)$.

- دراسة التكاملين $I_3 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}\,x$ و $I_4 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}\,x$. لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}0 < x \le \frac{\pi}{2} &\Rightarrow \frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x\\ &\Rightarrow \ln\frac{2}{\pi} + \ln x \le \ln(\sin x) \le \ln x\\ &\Rightarrow -\ln x \le |\ln(\sin x)| \le \ln\frac{2}{\pi} - \ln x\end{aligned}$$

ولأنّ التكامل $\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}\,x$ متقاربٌ استنتجنا التقارب بالإطلاق للتكامل I_3. ولكن

$$\begin{aligned}I_3 &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}\,x \underset{t\leftarrow\frac{\pi}{2}-x}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{-\varepsilon+\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}\,t\\ &= \lim_{\alpha\to\pi/2}\int_0^\alpha \ln(\cos x)\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

إذن I_4 متقاربٌ أيضاً و $I_3 = I_4$. لنحسب إذن:

$$\begin{aligned}2I_3 &= I_3 + I_4 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x\cos x)\,\mathrm{d}\,x\\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}\,x - \frac{\pi}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}\,x - \frac{\pi}{2}\ln 2\\ &= -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}\,x + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}\,x}_{x\leftarrow\pi-x}\\ &= -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}\,x = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + I_3\end{aligned}$$

وعليه يكون $I_3 = I_4 = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

▪ دراسة التكامل $J_n = \int_0^\pi \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\cos nx\,\mathrm{d}\,x$. التقارب واضح كما في الحالة السابقة. وكذلك فإنّ $J_0 = 2I_3 + \pi\ln 2 = 0$.

لنفترض إذن أنّ $n \geq 1$. عندئذ

$$\begin{aligned} nJ_n &= \left[\sin nx \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin nx \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}\mathrm{d}\,x \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin nx \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}\mathrm{d}\,x \end{aligned}$$

ينتج من هذا مباشرة أنّ

$$J_1 = -\int_0^\pi \cos^2(x/2)\,\mathrm{d}\,x = -\frac{\pi}{2}$$

كما ينتج أيضاً أنّ

$$\begin{aligned} nJ_n - (n+1)J_{n+1} &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \big(\sin(n+1)x - \sin nx\big)\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}\mathrm{d}\,x \\ &= \int_0^\pi \cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x \cdot \cos\left(\tfrac{1}{2}x\right)\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \big(\cos(n+1)x + \cos nx\big)\mathrm{d}\,x \\ &= 0 \end{aligned}$$

يبرهن هذا على أنّ المتتالية $(nJ_n)_{n\geq 1}$ ثابتة ومن ثَمّ

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^\pi \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}\,x = 0 \\ \forall n \geq 1, \quad J_n &= \int_0^\pi \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\cos nx\,\mathrm{d}\,x = -\frac{\pi}{2n} \end{aligned}$$
.

- دراسة التكامل $I_6=\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}\,x$ ، في حالة $0<a<b$. لنتأمّل عددين A و ε يحققان $0<\varepsilon<A$ عندئذ نلاحظ أنّ :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}\,x &= \int_\varepsilon^A \frac{e^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}\,x-\int_\varepsilon^A \frac{e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \int_{a\varepsilon}^{aA} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}\,t-\int_{b\varepsilon}^{bA} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}\,t\\ &= \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}\,t+\int_{bA}^{aA} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}\,t\\ &= \ln\frac{b}{a}-\underbrace{\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}\,t}_{g(\varepsilon)}-\underbrace{\int_{aA}^{bA} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}\,t}_{h(A)}\end{aligned}$$

ولكن

$$0\le g(\varepsilon)\le(b-a)\varepsilon \quad \text{و} \quad 0\le h(A)\le e^{-aA}\ln\frac{b}{a}$$

إذن

$$\lim_{\varepsilon\to0} g(\varepsilon)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{A\to\infty} h(A)=0$$

وهذا يثبت تقارب التكامل I_6 ويبرهن على أنّ

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}\,x=\ln\frac{b}{a}$$

- دراسة التكامل $I_7=\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$. لنعرّف، في حالة x من $]0,1[$ ، المقدار

$$F(x)=\int_{1/2}^x \frac{\ln t}{\sqrt{t}\,(1-t)^{3/2}}\,\mathrm{d}\,t$$

عندئذ

$$\begin{aligned} F(x) &\underset{u=\arcsin\sqrt{t}}{=} \int_{\pi/4}^{\arcsin\sqrt{x}} \frac{2\ln(\sin u)}{\sin u\cdot\cos^3 u} 2\sin u\cdot\cos u \,\mathrm{d}\, u \\ &= 4\int_{\pi/4}^{\arcsin\sqrt{x}} \frac{\ln(\sin u)}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}\, u \\ &= \Big[4\tan u\cdot\ln(\sin u)\Big]_{\pi/4}^{\arcsin\sqrt{x}} - 4\int_{\pi/4}^{\arcsin\sqrt{x}} \mathrm{d}\, u \end{aligned}$$

وعليه نجد أنّ

$$F(x) = 2\sqrt{\frac{x}{1-x}}\ln x + 2\ln 2 - 4\arcsin\sqrt{x} + \pi$$

وهكذا نرى أنّ

$$\lim_{x\to 1} F(x) = -\pi + 2\ln 2 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0} F(x) = \pi + 2\ln 2$$

إذن التكامل I_7 متقاربٌ، ولدينا

$$I_7 = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = -2\pi$$

- دراسة التكامل $I_8 = \int_0^\infty \left(\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$ ، لنعرّف التابع

$$x \mapsto G(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\, t$$

فنرى أنّه من جهة أولى لدينا:

$$\int_0^X G(u)\,\mathrm{d}\, u = \Big[uG(u)\Big]_0^X + \int_0^X \sin u\,\mathrm{d}\, u = 1 + XG(X) - \cos X$$

ومن جهة ثانية:

$$G(X) = \left[\frac{\sin t}{t}\right]_X^\infty - \int_X^\infty \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}\, t = \frac{\cos X}{X} - \int_X^\infty \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}\, t$$

وعليه فإنّ

$$XG(X)-\cos X=-X\int_X^{\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t=\int_1^{\infty}\frac{\cos(uX)}{u^2}\,\mathrm{d}\,u$$

وبإجراء مُكاملة بالتجزئة نجد

$$\begin{aligned}XG(X)-\cos X&=\frac{\sin(uX)}{u^2X}\bigg]_1^{\infty}+\frac{2}{X}\int_1^{\infty}\frac{\sin(uX)}{u^3}\,\mathrm{d}\,u\\&=\frac{\sin X}{X}+\frac{2}{X}\int_1^{\infty}\frac{\sin(uX)}{u^3}\,\mathrm{d}\,u\end{aligned}$$

إذن

$$\left|XG(X)-\cos X\right|\leq\frac{1}{X}+\frac{1}{X}\int_1^{\infty}\frac{2}{u^3}\,\mathrm{d}\,u=\frac{2}{X}$$

ينتج من هذا أنّ

$$\forall X\in\mathbb{R}_+^*,\qquad\left|\int_0^{X}G(x)\,\mathrm{d}\,x-1\right|\leq\frac{2}{X}$$

وهذا يبرهن تقارب التكامل I_8 ويثبت أنّ

$$\int_0^{\infty}\left(\int_x^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{d}x=1\ .$$

التمرين 3. ليكن $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمراً **بانتظام** على $\mathbb{R}_+$. نفترض أنّ التكامل المعمّم $\int_0^{\infty}f$ متقاربٌ. أثبت أنّ $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$.

أعطِ مثالاً عن تابع مستمرٍّ $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ ، ليس له نهاية عند $+\infty$ ، ومع ذلك فإنّ تكاملَه المعمّم $\int_0^{\infty}g$ متقاربٌ. ماذا تستنتج؟

الحل

سنحتاج إلى الخاصّة البسيطة الآتية :

خاصة. ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً، ولتكن $0<\lambda$. عندئذ

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t\right|\le\lambda\Rightarrow\exists t_0\in[a,b],\quad\left|f(t_0)\right|\le\lambda$$

لنفترض جدلاً أنّ هذا غير صحيح أي $\forall t\in[a,b],\left|f(t)\right|>\lambda$. لمّا كان f مستمرّاً ولا ينعدم على $[a,b]$، استنتجنا أنّه لا يغيّر إشارته على هذا المجال، إذن توجد σ من المجموعة $\{-1,1\}$ تُحقّق $\forall t\in[a,b],\ \sigma f(t)>\lambda$. ومن ثَمّ يكون $\frac{\sigma}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t>\lambda$، وهذا يناقض الفرْض.

لنأتِ الآن إلى إثبات التمرين. لتكن $0<\varepsilon$ إذن نجد بسبب الاستمرار المنتظم $0<\eta$ تُحقّق

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}_+^{*2},\quad\left|x-y\right|<\eta\Rightarrow\left|f(x)-f(y)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\tag{1}$$

كما يوجد استناداً إلى معيار كوشي لتقارب التكاملات المعمّمة $0<x_\varepsilon$ تُحقّق

$$y>x>x_\varepsilon\Rightarrow\left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}\,t\right|<\eta\,\varepsilon\tag{2}$$

نعرّف إذن $\tilde{x}_\varepsilon=x_\varepsilon+\eta$ ونختار $\tilde{x}_\varepsilon<x$ ثُمّ نطبّق (2) على $x-\eta$ و $x+\eta$ فنستنتج:

$$x>\tilde{x}_\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{1}{2\eta}\int_{x-\eta}^{x+\eta}f(t)\,\mathrm{d}\,t\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

وبالاستفادة من الخاصّة التي أثبتناها أوّلاً نجد أنّ

$$\forall x>\tilde{x}_\varepsilon,\exists t_x\in\left[x-\eta,x+\eta\right],\quad\left|f(t_x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

وبالعودة إلى (1) نجد بسبب كون $\left|x-t_x\right|<\eta$ أنّ

$$\forall x>\tilde{x}_\varepsilon,\quad\left|f(x)\right|\le\left|f(t_x)\right|+\left|f(x)-f(t_x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

أي $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

يبيّنُ مثال التابع المستمرّ $g:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x^2$ خطأ عكس النتيجة السابقة.

إذ ليس لهذا التابع نهاية عند $+\infty$، في حين تبيّن المساواة $\int\limits_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}\,t = \int\limits_0^{x^2} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}\,u$

تقارب التكامل المعمّم $\int_0^\infty g(t)\,\mathrm{d}\,t$.

التمرين 4. ليكن $f:]0,1] \to \mathbb{R}$ تابعاً متناقصاً، تكامله المعمّم $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ متقاربٌ.

احسب النهاية $\lim\limits_{x\to 0^+} xf(x)$.

الحل

لتكن x من المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right[$. عندئذ يكون لدينا بسبب تناقص التابع f:

$$\int\limits_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}\,t \le x\,f(x) \le 2\int\limits_{x/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

إذن تقارب التكامل المعمّم $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x$ يقتضي أنّ $\lim\limits_{x\to 0^+} xf(x) = 0$.

التمرين 5. ليكن $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ تابعاً مستمراً ومحدوداً على $\mathbb{R}_+$. أثبت أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} f(0)$$

الحل

هذا تطبيق مباشر لمبرهنة التقارب للوبيغ على متتالية التوابع $\left(f_n\right)_{n\ge 1}$ حيث

$$f_n:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f_n(t) = \frac{1}{1+t^2} f\left(\frac{t}{n}\right)$$

فهي تتقارب ببساطة من التابع المستمرّ $h:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ h(t) = \frac{f(0)}{1+t^2}$. وتُحقّق

$$\forall n \ge 1, \forall t \ge 0,\quad \left|f_n(t)\right| \le g(t)$$

و g هو التابع $t \mapsto Mh(t)$ حيث $M = \sup\limits_{t\ge 0}\left|f(t)\right|$. نستنتج إذن من تقارب التكامل $\int_0^\infty g$، أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n = \int_0^\infty h = \frac{\pi}{2} f(0)$.

التمرين 6. ادرس وفقاً لقيم (α,β) من $\mathbb{R}^2$ ، تقارب التكامل المعمَّم

$$I(\alpha,\beta)=\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

الحل

التابع المُكامَل موجبٌ فله طبيعة المتسلسلة $\sum a_n$ التي حدّها العام معرّفٌ بالصيغة :

$$a_n=\int_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta\sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{\pi}\frac{(\pi n+t)^\alpha}{1+(\pi n+t)^\beta\sin^2 t}\,\mathrm{d}\,t$$

لنعرّف إذن، أيّاً كانت $1\le n$، المقادير التالية :

$$\begin{aligned}\lambda_n^+&=\pi^\alpha\max\left(n^\alpha,(n+1)^\alpha\right), &\lambda_n^-&=\pi^\alpha\min\left(n^\alpha,(n+1)^\alpha\right).\\ \mu_n^+&=\pi^\beta\max\left(n^\beta,(n+1)^\beta\right), &\mu_n^-&=\pi^\beta\min\left(n^\beta,(n+1)^\beta\right).\end{aligned}$$

فيكون لدينا عندئذ

$$\lambda_n^-\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\,t}{1+\mu_n^+\sin^2 t}\le a_n\le\lambda_n^+\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\,t}{1+\mu_n^-\sin^2 t}$$

ونرى بسهولة أنّ

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\,t}{1+\ell\sin^2 t}=2\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\,t}{1+\ell\sin^2 t}=\frac{\pi}{\sqrt{1+\ell}}$$

إذ أجرينا تغيير المتحوّل $\operatorname{cotan} t=\sqrt{1+\ell}\,\tan\theta$ لحساب هذا التكامل.

نستنتج إذن أنّ

$$\frac{\pi\lambda_n^-}{\sqrt{1+\mu_n^+}}\le a_n\le\frac{\pi\lambda_n^+}{\sqrt{1+\mu_n^-}}$$

وعليه :

- **في حالة** $0<\beta$. يكون لدينا $n^{\alpha-\beta/2}\cdot\pi^{1+\alpha-\beta/2}\underset{+\infty}{\sim}a_n$ ، وعليه تتقارب المتسلسلة $\sum a_n$ إذا وفقط إذا كان $\alpha-\dfrac{\beta}{2}<-1$ أو $\alpha+1<\dfrac{\beta}{2}$.

■ **في حالة** $0 > \beta$. يكون لدينا $a_n \underset{+\infty}{\sim} \pi^{1+\alpha} \cdot n^{\alpha}$ ، وعندئذ تتقارب المتسلسلة $\sum a_n$ إذا وفقط إذا كان $\alpha + 1 < 0$. وتبقى هذه النتيجة صحيحة في حالة $\beta = 0$.

نستنتج أنّ المتسلسلة $\sum a_n$ تكون متقاربة إذا وفقط إذا كان $2(\alpha+1) < \max(0,\beta)$. أو

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x^{\beta}\sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x = I(\alpha,\beta) \text{ متقارب } \Leftrightarrow 2(\alpha+1) < \max(0,\beta) \quad ■$$

التمرين 7.

1. أثبت تقارب التكامل المعمّم $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$.
2. أثبت أنّ $\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda^2\sin^2 x}\mathrm{d}x = I$.
3. ادرس وفق قيم (α,β) من $\mathbb{R}_+^{*2}$ ، تقارب التكامل

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} x^{\beta} e^{-x^{\alpha}\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

الحل

1. تقارب التكامل أمرٌ واضح لأنّ $\lim_{x\to\infty}(x^2+1)e^{-x^2} = 0$ ، والتكامل $\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^2}$ متقاربٌ.
2. لنتأمّل متتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من المجال $[1,+\infty[$ تسعى إلى $+\infty$. ولنعرّف

$$f_n(t) = \mathbb{1}_{[0,a_n\pi/2]}(t)\cdot\exp\left(-a_n^2\cdot\sin\frac{t^2}{a_n^2}\right)$$

■ التابع f_n ينتمي إلى الصف $\mathcal{R}^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+^*)$.

■ أيّاً كانت t من $\mathbb{R}_+^*$ فلدينا $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)\cdot e^{-t^2}$.

■ أيّاً كانت t من $\mathbb{R}_+^*$ وأيّاً كانت n من $\mathbb{N}$ ، فلدينا

$$\left|f_n(t)\right| \le \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)e^{-4t^2/\pi^2} = g(t)$$

والتكامل $\int_0^\infty g(t)\,\mathrm{d}\,t$ متقاربٌ. لإثبات ذلك نلاحظ أنّ :

$$\begin{aligned} 0 \le t \le \frac{a_n \pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad 0 \le \frac{t}{a_n} \le \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow \quad 0 \le \frac{2}{\pi} \cdot \frac{t}{a_n} \le \sin \frac{t}{a_n} \\ &\Rightarrow \quad \frac{4}{\pi^2} t^2 \le a_n^2 \sin^2\left(\frac{t}{a_n}\right) \\ &\Rightarrow \quad f_n(t) \le \exp\left(-\frac{4t^2}{\pi^2}\right) = g(t) \end{aligned}$$

وعليه، نستنتج استناداً إلى مبرهنة التقارب للوبيغ أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(t)\,\mathrm{d}\,t = I = \int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t$$

وذلك مهما تكن المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من المجال $[1,+\infty[$ التي تسعى إلى $+\infty$. هذا يعني أنّ

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{\lambda\pi/2} \exp\left(-\lambda^2 \sin^2\left(\frac{t}{\lambda}\right)\right)\mathrm{d}\,t = I$$

ويتيح لنا تغيير المتحوّل $t \mapsto \lambda x$ أن نستنتج بسهولة أنّ

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot \int_0^{\pi/2} \exp(-\lambda^2 \sin^2 x)\,\mathrm{d}\,x = I$$

3. التابع المُكامَل موجب إذن له طبيعة المتسلسلة $\sum a_n$ التي حدّها العام معرّف بالصيغة التالية :

$$a_n = \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} x^\beta e^{-x^\alpha \sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^\pi (\pi n + t)^\beta e^{-(\pi n+t)^\alpha \sin^2 t}\,\mathrm{d}\,t$$

عندئذ نرى بسهولة أنّ

$$\pi^\beta n^\beta \cdot \int_0^\pi e^{-\pi^\alpha (n+1)^\alpha \sin^2 t}\,\mathrm{d}\,t \le a_n \le \pi^\beta (n+1)^\beta \cdot \int_0^\pi e^{-\pi^\alpha n^\alpha \sin^2 t}\,\mathrm{d}\,t$$

فإذا وضعنا $F(\lambda)=\lambda\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\exp(-\lambda^2\sin^2 x)\,\mathrm{d}\,x$ ، وجدنا

$$\frac{2\pi^\beta n^\beta}{\sqrt{\pi^\alpha(n+1)^\alpha}}\cdot F\left(\sqrt{\pi^\alpha(n+1)^\alpha}\right)\le a_n\le\frac{2\pi^\beta(n+1)^\beta}{\sqrt{\pi^\alpha n^\alpha}}\cdot F\left(\sqrt{\pi^\alpha n^\alpha}\right)$$

وهذا يبرهن على أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n^{\beta-\alpha/2}}\right)=2\pi^{\beta-\alpha/2}I$$

وعليه تتقارب المتسلسلة $\sum a_n$ إذا وفقط إذا كان $\frac{\alpha}{2}-\beta>1$ ، إذن

$$I(\alpha,\beta)=\int\limits_0^{+\infty}x^\beta e^{-x^\alpha\sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x \text{ متقارب } \Leftrightarrow (\alpha>2+2\beta)$$ ■

التمرين 8. احسب التكامل المعمّم $I=\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}$ بعد التوثُّق من تقاربه.

الحل

التقارب واضح لأنّ التابع المُكامَل يُكافئ $\frac{1}{x^{2/3}}$ في جوار 0 ويكافئ $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$ في جوار 1.

لحساب هذا التكامل نجري تغيير المتحوّل $x\mapsto\frac{1}{1+t^3}$ فنجد أنّ

$$I=\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}=\int\limits_0^\infty\frac{3t}{1+t^3}\mathrm{d}\,t$$

وإذا أجرينا مجدّداً تغيير المتحوّل $t\mapsto\frac{1}{u}$ في التكامل الأخير وجدنا أيضاً أنّ

$$I=\int\limits_0^\infty\frac{3t}{1+t^3}\mathrm{d}\,t=\int\limits_0^\infty\frac{3}{1+u^3}\mathrm{d}\,u=\int\limits_0^\infty\frac{3}{1+t^3}\mathrm{d}\,t$$

وعليه فإنّ

$$2I=\int\limits_0^\infty\frac{3t}{1+t^3}\mathrm{d}\,t+\int\limits_0^\infty\frac{3}{1+t^3}\mathrm{d}\,t=3\int\limits_0^\infty\frac{t+1}{1+t^3}\mathrm{d}\,t=3\int\limits_0^\infty\frac{1}{1-t+t^2}\mathrm{d}\,t$$

وأخيراً، إذا أجرينا تغيير المتحوِّل $t \mapsto \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} v$ في التكامل الأخير وجدنا أنّ

$$I = \sqrt{3} \cdot \int_{-1/\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\, v}{1 + v^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

وهذه هي النتيجة المطلوبة.

التمرين 9. احسب التكاملين المعمّمين التاليين بعد التوثُّق من تقاربهما:

$$I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^4}, \qquad J = \int_0^\infty \frac{x^2 \mathrm{d}x}{1 + x^4}$$

الحل

إنّ تقارب التكاملين واضح، وكذلك فإنّ تغيير المتحوِّل $x \mapsto \frac{1}{x}$ يُثبتُ أنّ $I = J$. وعليه:

$$2I = I + J = \int_0^\infty \frac{1 + x^2}{1 + x^4} \mathrm{d}\, x = \int_0^\infty \frac{1 + \dfrac{1}{x^2}}{x^2 + \dfrac{1}{x^2}} \mathrm{d}\, x$$

$$= \int_0^\infty \frac{\left(x - \dfrac{1}{x}\right)'}{\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + 2} \mathrm{d}\, x \qquad x - \frac{1}{x} \mapsto \sqrt{2}\, t$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\, t}{1 + t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

وعليه فإنّ

$$I = J = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

وهذه هي النتيجة المطلوبة.

التمرين 10. نهدف إلى حساب التكامل المعمّم $I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. لنتأمّل التكاملات الآتية:

$$W_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x,\ I_n=\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x,\ J_n=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$$

1. احسب $(I_n)_{n\geq 1}$ و $(J_n)_{n\geq 1}$ بدلالة $(W_n)_{n\geq 1}$.
2. أثبت أنّ :

$$\forall x\in[0,1],\quad 1-x^2\leq e^{-x^2}$$

و

$$\forall x\in[0,+\infty[,\quad e^{-x^2}\leq\frac{1}{1+x^2}$$

3. استنتج أنّ $\forall n\geq 1,\quad I_n\leq\frac{I}{\sqrt{n}}\leq J_n$.
4. أوجد علاقة تدريجيّة بين W_{n+2} و W_n ، واستنتج أنّ

$$\forall n\geq 1,\quad nW_nW_{n-1}=\frac{\pi}{2}$$

ثُمّ استنتج قيمة I .

الحل

1. تغيير المتحوّل $x\leftarrow\cos\theta$ في I_n يسمح لنا أن نستنتج أنّ $I_n=W_{2n+1}$. أمّا تغيير المتحوّل $x\leftarrow\operatorname{cotan}\theta$ فيجعلنا نستنتج أنّ $J_n=W_{2n-2}$.

2. نستنتج من تحدّب التابع الأسّي أنّ منحنيه البياني يقع فوق مماسه عند المبدأ أي

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad 1+x\leq e^x$$

تنتج المتراجحة الأولى من استبدال $-x^2$ بالمتحول x ، وتنتج الثانية من استبدال x^2 بالمتحول x .

3. إذن، تثبت المتراجحة الأولى في 2.، أنّ

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x\leq\int_0^1 e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x$$

أو

$$I_n \le \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, \mathrm{d}\, t \le \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}\, t = \frac{I}{\sqrt{n}}$$

وكذلك، تثبت المتراجحة الثانية في 2.، أنّ

$$\int_0^{\infty} e^{-nx^2}\, \mathrm{d}\, x \le \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\, x}{(1+x^2)^n}$$

ومنه $J_n \le \dfrac{I}{\sqrt{n}}$ ، وهذا يثبت المتراجحة المطلوبة.

4. نجد بإجراء مُكاملة بالتجزئة أنّ

$$\begin{aligned} W_n - W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} (\cos\theta \sin^n \theta) \cos\theta\, \mathrm{d}\, \theta \\ &= \left[\frac{\sin^{n+1}\theta}{n+1} \cos\theta \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{n+2}\theta}{n+1} \mathrm{d}\, \theta = \frac{1}{n+1} W_{n+2} \end{aligned}$$

أو

$$(n+1)W_n = (n+2)W_{n+2}$$

وهذا يقتضي أنّ المتتالية $\left((n+1)W_{n+1}W_n\right)_{n\ge 0}$ متتالية ثابتة، وعليه نستنتج أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n\, W_n W_{n-1} = W_1 W_0 = \frac{\pi}{2}$$

وبملاحظة أنّ $\left(W_n\right)_{n\ge 0}$ متتالية متناقصة نرى

$$\begin{aligned} I_n &= W_{2n+1} = \sqrt{W_{2n+1} W_{2n+1}} \\ &\ge \sqrt{W_{2n+1} W_{2n+2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+2)}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} J_n &= W_{2n-2} = \sqrt{W_{2n-2} W_{2n-2}} \\ &\le \sqrt{W_{2n-2} W_{2n-3}} = \sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{n-1}} \end{aligned}$$

وبالاستفادة من 3. نستنتج أنّ

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}} \leq I \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

وبجعل n تسعى إلى $+\infty$، نجد $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

التمرين 11.

1. لتكن n من $\mathbb{N}^*$. أثبت أنّ التكامل $I(n) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}^n t}$ متقارب. ثُمّ احسب $I(1)$ و $I(2)$.
2. جِدْ علاقة تدريجيّة بين $I(n-2)$ و $I(n)$. واستنتج $I(n)$.
3. لتكن (n,m) من $\mathbb{N}^2$ تُحقّق $0 \leq m < n$. أثبت تقارب التكامل

$$J(n,m) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sh}^m t}{\mathrm{ch}^n t} \mathrm{d}t .$$

4. جِدْ علاقة بين $J(n-2,m-2)$ و $J(n,m)$ في حالة $3 \leq n$ و $2 \leq m$.
5. احسب $J(n,0)$ و $J(n,1)$ و $J(n,2)$.
6. استنتج قيمة $J(n,m)$ عندما يكون $0 \leq m < n$.

الحل

1. تقارب $I(n)$ واضح.

$$I(1) = \int_0^{\infty} \frac{2e^t}{1+e^{2t}} \mathrm{d}t = \int_1^{\infty} \frac{2}{1+x^2} \mathrm{d}x = \Big[\arctan x\Big]_1^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

$$I(2) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}^2 t} = \Big[\mathrm{th}\, t\Big]_0^{\infty} = 1$$

2. نفترض أنّ $n \geq 3$، عندئذ

$$\begin{aligned} I(n-2) - I(n) &= \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sh}\, t}{\mathrm{ch}^n t} \mathrm{sh}\, t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \left(\frac{-1}{(n-1)\,\mathrm{ch}^{n-1} t}\right)' \mathrm{sh}\, t \,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{-\mathrm{sh}\, t}{(n-1)\,\mathrm{ch}^{n-1} t}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{n-1} \int_0^{\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}^{n-2} t} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

وعليه نجد أنّ

$$\forall n \geq 3, \quad I(n) = \frac{n-2}{n-1} I(n-2)$$

إذن

$$\begin{aligned} I(2n) &= \frac{2(n-1)}{2n-1} \cdot \frac{2(n-2)}{2n-3} \cdots \frac{2}{3} I(2) &= \frac{2^{2n-1}}{n} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} \\ I(2n+1) &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdots \frac{1}{2} I(1) &= \frac{\pi}{2^{2n+1}} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \end{aligned}$$

3. تقارب التكامل $J(n,m)$ واضح.

4. نفترض أنّ $n \geq 3$ و $m \geq 2$. عندئذ

$$\begin{aligned} J(n,m) &= \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^n t} \operatorname{sh}^{m-1} t \, \mathrm{d}\, t = \int_0^\infty \left(\frac{-1}{(n-1)\operatorname{ch}^{n-1} t} \right)' \operatorname{sh}^{m-1} t \, \mathrm{d}\, t \\ &= \left[\frac{-\operatorname{sh}^{m-1} t}{(n-1)\operatorname{ch}^{n-1} t} \right]_0^\infty + \frac{m-1}{n-1} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^{m-2} t}{\operatorname{ch}^{n-2} t} \mathrm{d}\, t \\ &= \frac{m-1}{n-1} J(n-2, m-2) \end{aligned}$$

5. من الواضح أنّ $J(n,0) = I(n)$.

$$\begin{aligned} J(n,1) &= \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}\, u}{u^n} = \frac{1}{n-1} : \quad n > 1 \\ J(n,2) &= \frac{1}{n-2} J(n-2,0) = \frac{1}{n-2} I(n-2) : \quad n > 2 \end{aligned}$$

6. تكفي الاستفادة من العلاقات التدريجيّة، كما يمكن بإجراء تغيير المتحوِّل $u \leftarrow \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$ أن نرى أنّ $J(n,m) = \dfrac{1}{2}\beta\left(\dfrac{m+1}{2}, \dfrac{n-m}{2}\right)$، و β هو تابع بيتا لأولر. ■

التمرين 12. ليكن التابعان $f(x,t)=\ln(1+t^x)$ و $F(x)=\int_0^1 f(x,t)\,\mathrm{d}\,t$. أثبت أنّ F معرّف على مجموعة الأعداد الحقيقيّة الموجبة وأنّه مستمرٌّ عليها. هل يمكن القول إنّ $F'(x)$ موجود على مجموعة الأعداد الحقيقيّة الموجبة ؟

الحل

لنلاحظ أنّ

$$f:\mathbb{R}_+\times\left]0,1\right]\to\mathbb{R},\ (x,t)\mapsto\ln(1+t^x)=\ln(1+e^{x\ln t})\ .$$

- أيّاً كانت x من $\mathbb{R}_+$ فالتابع $t\mapsto f(x,t)$ تابع مستمرٌّ على $\left]0,1\right]$.
- أيّاً كانت t من $\left]0,1\right]$ فالتابع $x\mapsto f(x,t)$ تابع مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+$.
- وأخيراً لدينا المتراجحة الواضحة: $\forall(x,t)\in\mathbb{R}_+\times\left]0,1\right],\ 0\le f(x,t)\le\ln 2$.

إذن استناداً إلى مبرهنة استمرار التكاملات التابعة لوسيط نستنتج أنّ F مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+$.

ومن جهة أخرى

- أيّاً كان x من $\mathbb{R}_+$ فالتابع $t\mapsto f(x,t)$ تابع مستمرٌّ على $\left]0,1\right]$، والتكامل $F(x)$ متقاربٌ.
- أيّاً كان t من $\left]0,1\right]$ فالتابع المشتق $x\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\dfrac{t^x\ln t}{1+t^x}$ موجود وهو بصفته تابعاً للمتحوّل t ينتمي إلى الصف $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}$ على $\left]0,1\right]$.
- وأخيراً من الواضح أنّ

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}_+\times\left]0,1\right],\quad\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\le\left|\ln t\right|$$

والتكامل $\int\limits_0^1\left|\ln t\right|\mathrm{d}\,t$ مُتقاربٌ.

نستنتج إذن من مبرهنة قابلية اشتقاق التكاملات التابعة لوسيط، أنّ التابع F قابلٌ للاشتقاق على $\mathbb{R}_+$، وأنّ

$$\forall x\ge 0,\quad F'(x)=\int\limits_0^1\frac{t^x\ln t}{1+t^x}\,\mathrm{d}\,t$$

■

التمرين 13. ليكن a و b عددين حقيقيّين يُحقّقان $a<b$، وليكن g تابعاً حقيقيّاً مستمرّاً على $[a,b]$. نضع

$$f(x,t)=g(t)\cos xt \quad \text{و} \quad F(x)=\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$$

أثبت أنّ F ينتمي إلى الصف C^∞، واحسب $F^{(n)}$ في حالة n من $\mathbb{N}^*$. وأثبت أخيراً أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0$.

الحل

لنضع

$$f_n:\mathbb{R}\times[a,b]\to\mathbb{R},\ f_n(x,t)=t^n g(t)\cos\left(xt+\frac{\pi}{2}n\right)$$

ولنعرّف

$$H_n(x)=\int\limits_a^b f_n(x,t)\,\mathrm{d}\,t$$

عندئذ نبرهن ببساطة بالاستفادة من مبرهنة اشتقاق التكاملات التابعة لوسيط أنّ H_n قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأنّ $H'_n=H_{n+1}$.

يتيح لنا هذا أن نستنتج أنّ $F=H_0$ يقبل الاشتقاق عدداً لانهائيّاً من المرّات وأنّ مشتقّه من المرتبة n هو H_n. ■

التمرين 14. ليكن التابع $f(t,x)=\dfrac{1}{1+x\cos t}$.

1. جِدْ قيم x التي تجعل $t\mapsto f(t,x)$ قابلاً للمكاملة على $[0,\pi]$، ثمّ احسب $\int_0^\pi f(x,t)\,\mathrm{d}\,t$.

2. استنتج قيمة التكامل $\int\limits_0^\pi \dfrac{\cos t}{(1+x\cos t)^2}\mathrm{d}t$.

3. احسب $\int\limits_0^\pi \dfrac{\cos^k t}{(1+x\cos t)^3}\mathrm{d}t$ في حالة k من $\{0,1,2\}$.

الحل

1. من الواضح أنّ $\int_0^\pi f(t,x)\,\mathrm{d}\,t$ معرّف إذا وفقط إذا كانت x تنتمي إلى $]-1,+1[$.

وعندئذ يفيدنا تغيير المتحوّل $t = 2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\,u\right)$ في أن نكتبَ

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\,t}{1+x\cos t} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,u}{1+u^2} = \frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. يمكن تطبيق نظريّة اشتقاق التكاملات التابعة لوسيط، حيث نترك تفاصيل التوثّق من تحقّق الشروط للقارئ، فنجد أنّ

$$\int_0^\pi \frac{\cos t\,\mathrm{d}\,t}{(1+x\cos t)^2} = \left(\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = -\frac{\pi x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

ونستنتج من هذا أيضاً أنّ

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\,t}{(1+x\cos t)^2} &= \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\,t}{1+x\cos t} - x\int_0^\pi \frac{\cos t}{(1+x\cos t)^2}\mathrm{d}\,t\\ &= \frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\pi x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\\ &= \frac{\pi}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

2. يمكن تطبيق نظريّة اشتقاق التكاملات التابعة لوسيط، إذ نترك تفاصيل التوثّق من تحقّق الشروط للقارئ، فنجد باشتقاق التابعين السابقين أنّ

$$\int_0^\pi \frac{\cos^2 t\,\mathrm{d}\,t}{(1+x\cos t)^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1+2x^2}{(1-x^2)^2\cdot\sqrt{1-x^2}}$$

و

$$\int_0^\pi \frac{\cos t\,\mathrm{d}\,t}{(1+x\cos t)^3} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\right)' = -\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{x}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$$

وبملاحظة أنّ

$$\frac{1}{(1+x\cos t)^3}=\frac{1}{(1+x\cos t)^2}-x\frac{\cos t}{(1+x\cos t)^3}$$

نجد بسهولة قيمة التكامل الأخير:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}\,t}{(1+x\cos t)^3}&=\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}\,t}{(1+x\cos t)^2}-x\int_0^\pi\frac{\cos t}{(1+x\cos t)^3}\mathrm{d}\,t\\&=\frac{\pi}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}+\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}\\&=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2+x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

وبذا يتم الحل. ■

التمرين 15. ادرس تحوّلات التابع $F(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(x^2-t^2)}}$ ، ثمّ جِدْ مُكافئاً لقيمة $F(x)$ في جوار 1^+، وفي جوار $+\infty$.

الحل

التابع F معرّف على $\mathbb{R}\backslash[-1,1]$ وهو زوجي ومتناقص وضوحاً على المجال $]1,+\infty[$. ونلاحظ أنه مهما تكن $x>1$ يكن

$$\frac{1}{x}\int_0^1\frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{1-t^2}}\leq F(x)\leq\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{1-t^2}}$$

وعليه نجد

$$\forall x>1,\quad 1\leq\frac{2x}{\pi}F(x)\leq\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{1-1/x^2}}$$

ومن ثَمّ

$$F(x)=\frac{\pi}{2x}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$ في جوار $+\infty$.

المسألة أعقد في جوار 1^+، لنعرّف إذن

$$\forall x > 1, \quad J(x) = \int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}\,t}{\sqrt{(1-t^2)(x^2-t^2)}}$$

بإجراء تغيير المتحوّل : $u \sqrt{\frac{1+x^2}{2} - \frac{x^2-1}{2}u} \mapsto t$ في التكامل السابق نجد

$$J(x) = \frac{1}{2}\int_1^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \frac{\mathrm{d}\,u}{\sqrt{u^2-1}} = \left[\frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{u^2-1})\right]_1^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$$

ولنعرّف من جهة ثانية

$$\forall x > 1, \quad H(x) = F(x) - J(x) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{(1+t)(x^2-t^2)}}\,\mathrm{d}\,t$$

و

$$h : [1,+\infty[\times [0,1] \to \mathbb{R}, \quad h(x,t) = \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{(1+t)(x^2-t^2)}}$$

فنجد ما يأتي:

- مهما تكن $x > 1$ يكن التابع $t \mapsto h(x,t)$ مستمراً على $[0,1]$ ويقبل المكاملة على هذا المجال.
- مهما تكن t من $[0,1]$، يكن التابع $x \mapsto h(x,t)$ مستمراً على $[1,+\infty[$.
- وإذا عرّفنا

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, \; g(t) = \frac{1}{1+t}$$

لاحظنا أنّ

$$\forall (x,t) \in [1,+\infty[\times [0,1], \quad \left|h(x,t)\right| \le \frac{1}{1+t} = g(t)$$

والتكامل $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}\,t$ متقاربٌ.

نستنتج إذن أنّ التابع

$$x \mapsto H(x) = \int_0^1 h(x,t)\,\mathrm{d}\,t$$

تابعٌ مستمرٌّ على $[1,+\infty[$، وبوجه خاص

$$\lim_{x\to 1^+} H(x) = H(1) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,t}{1+t} = \ln 2$$

وبالعودة إلى تعريف H نرى أنّ

$$\lim_{x\to 1^+}\left(F(x) + \frac{1}{2}\ln(x-1)\right) = \frac{3}{2}\ln 2$$

أو

$$F(x) = -\frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{3}{2}\ln 2 + o(x-1)$$

في جوار 1^+. ■

التمرين 16. ليكن f تابعاً حقيقيّاً معرّفاً ومستمرّاً ومتناقصاً على $\mathbb{R}_+$، ولنفترض أنّ التّكامل المعمّم $\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t$ متقارب. نعرّف أيّاً كانت n من $\mathbb{N}^*$، متتالية التوابع $(u_n)_{n\ge 1}$ بالعلاقة: $u_n(x) = f(nx)$.

1. أثبت أنّ المتسلسلة $\sum u_n(x)$ متسلسلة ذات حدود موجبة ومتقاربة أيّاً كانت $0 < x$، وأنّ :

$$\int_1^\infty f(tx)\,\mathrm{d}\,t \le \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \le \int_0^\infty f(tx)\,\mathrm{d}\,t$$

2. أثبت أنّ S، مجموع المتسلسلة ذات الحدّ العامّ u_n، مستمرّ على $\mathbb{R}_+^*$.

3. أثبت أنّ $\lim_{x\to 0} xS(x) = \int_0^\infty f(u)\mathrm{d}u$. متى يكون مجموع المتسلسلة ذات الحدّ العامّ $x \mapsto xu_n(x)$ مستمرّاً على $\mathbb{R}_+$؟

الحل

1. نلاحظ أنّ $f((n+1)x) \leq f(tx) \leq f(nx)$ وذلك مهما تكن t من $[n, n+1]$، وعليه يكون لدينا

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}(x) \leq \int_n^{n+1} f(tx)\,\mathrm{d}\,t \leq u_n(x) \qquad ❶$$

وعليه يكون

$$\int_1^{n+1} f(tx)\,\mathrm{d}\,t \leq \sum_{m=1}^{n} u_m(x) \leq \int_0^{n} f(tx)\,\mathrm{d}\,t$$

وهذا يثبت تقارب المتسلسلة $\sum u_n(x)$ وذلك أيّاً كانت $0 < x$. ونجد أيضاً أنّ

$$\int_1^{\infty} f(tx)\,\mathrm{d}\,t \leq \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \leq \int_0^{\infty} f(tx)\,\mathrm{d}\,t \qquad ❷$$

2. ونجد بأسلوب مماثل، انطلاقاً من ❶،

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \int_{n+1}^{\infty} f(tx)\,\mathrm{d}\,t \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} u_m(x) \leq \int_n^{\infty} f(tx)\,\mathrm{d}\,t$$

وعليه يكون

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq S(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{x} \int_{nx}^{\infty} f(u)\,\mathrm{d}\,u$$

إذن

$$\forall a > 0, \quad \sup_{x > a} \left| S(x) - S_n(x) \right| \leq \frac{1}{a} \cdot \int_{na}^{\infty} f(u)\,\mathrm{d}\,u$$

وهذا يثبتُ التقارب المنتظم لمتسلسلة التوابع $\sum u_n$ على كلِّ مجموعة متراصّة من $\mathbb{R}_+^*$. ويبرهن استمرار المجموع S على $\mathbb{R}_+^*$.

3. بالاستفادة من ❷ نجد أنّ

$$\int_x^{(n+1)x} f(u)\,\mathrm{d}\,u \leq \sum_{m=1}^{n} x u_m(x) \leq \int_0^{nx} f(u)\,\mathrm{d}\,u$$

وعليه يكون

$$0 \leq \int_0^\infty f(u)\,\mathrm{d}\,u - xS(x) \leq \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}\,u$$

وهذا يبرهن على أنّ $\lim_{x\to 0^+} xS(x) = \int_0^\infty f(u)\,\mathrm{d}\,u$.

ومن الواضح أنّ المجموع $x \mapsto \sum_{n=1}^\infty x u_n(x)$ يكون مستمرّاً عند الصفر إذا كانت نهايته عندما تسعى x إلى 0 مساوية قيمته عند 0، أي إذا وفقط إذا كان $\int_0^\infty f(u)\,\mathrm{d}\,u = 0$. وهذا يكافئ، بسبب كون f تابعاً مستمرّاً وموجباً، أن يكون $f = 0$. ■

التمرين 16. ليكن p من $]1,+\infty[$. نضع $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^p}\,\mathrm{d}\,t$. أثبت أنّ g معرّف على مجموعة الأعداد الحقيقيّة الموجبة وأنّه من الصف C^∞ على مجموعة الأعداد الحقيقيّة الموجبة تماماً.

الحل

من الواضح أنّ التابع g معرّف على $\mathbb{R}_+$. لتكن $0 < a$، ولنضع $J = [a,+\infty[$، ثُمّ لنتأمّل التابع

$$f_n : J \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : (x,t) \mapsto \frac{(-t)^n e^{-tx}}{1+t^p}$$

نلاحظ ما يلي:

- أيّاً كان x من J، كان التابع $t \mapsto f_n(x,t)$ مستمرّاً على $\mathbb{R}_+$ وهو يقبل المكاملة على $\mathbb{R}_+$ لأنّ

$$\forall (x,t) \in J \times \mathbb{R}_+, \quad \left| f_n(x,t) \right| \leq M_n e^{-ta/2}$$

حيث

$$M_n = \sup_{t\geq 0} \left(\frac{t^n e^{-ta/2}}{1+t^p} \right) \leq \left(\frac{2n}{ea} \right)^n$$

يمكننا أن نعرّف إذن

$$H_n(x)=\int_0^\infty f_n(x,t)\,\mathrm{d}\,t$$

- أيّاً كانت t من $\mathbb{R}_+$، كان التابع $x\mapsto f_n(x,t)$ قابلاً للاشتقاق على J، ونلاحظ أنّ

$$\forall(x,t)\in J\times\mathbb{R}_+,\quad \frac{\partial}{\partial x}f_n(x,t)=f_{n+1}(x,t)$$

وهو تابع مستمرٌّ بالنسبة إلى t وتكامله $H_{n+1}(x)=\int_0^\infty f_{n+1}(x,t)\,\mathrm{d}\,t$ متقاربٌ.

- وأخيراً نرى مباشرة أنّ

$$\forall(x,t)\in J\times\mathbb{R}_+,\quad \left|\frac{\partial}{\partial x}f_n(x,t)\right|\le M_{n+1}\cdot e^{-ta/2}$$

والتكامل $\int_0^\infty e^{-ta/2}\,\mathrm{d}\,t$ متقاربٌ.

إذن استناداً إلى مبرهنة اشتقاق التكاملات التابعة لوسيط، نجد أنّ H_n قابلٌ للاشتقاق على J وأنّ مشتقّه هو H_{n+1}.

نستنتج من ذلك، بالتدريج على n، أنّ التابع $x\mapsto g(x)=H_0(x)$ قابلٌ للاشتقاق عدداً لانهائيّاً من المرات على J وأنّ

$$\forall x\in J,\quad g^{(n)}(x)=\int_0^\infty\frac{(-t)^n e^{-tx}}{1+t^p}\,\mathrm{d}\,t$$

ولمّا كان $0<a$ عدداً كيفيّاً استنتجنا أنّ g ينتمي إلى الصف C^∞ على $\mathbb{R}_+$ وأنّ

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\forall n\in\mathbb{N},\quad g^{(n)}(x)=\int_0^\infty\frac{(-t)^n e^{-tx}}{1+t^p}\,\mathrm{d}\,t$$ ■

التمرين 18. ليكن $f(x)=\int_0^\infty e^{-t^2}\cos(2xt)\,\mathrm{d}\,t$. أثبت أنّ f ينتمي إلى الصف C^1 على $\mathbb{R}$. ثُمّ أثبت أنّ $f'(x)+2xf(x)=0$ واستنتج عبارة f .

نقبل أنّ $\int_0^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}/2$.

الحل

لنعرّف التابع

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x,t) = e^{-t^2} \cos(2xt)$$

ولنلاحظ ما يلي :

- مهما يكن x من $\mathbb{R}$ فالتابع $t \mapsto f(x,t)$ مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+$ وتكامله الذي يعرّف F متقاربٌ.
- مهما تكن t من من $\mathbb{R}$ فالتابع $x \mapsto f(x,t)$ يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ويحقّق
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2te^{-t^2} \sin(2xt)$$
وهو تابع مستمرٌّ بالنسبة إلى t.
- وأخيراً نلاحظ أنّ التكامل $\int_0^\infty te^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t$ متقاربٌ وأنّ
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \le 2te^{-t^2}$$

إذن استناداً إلى مبرهنة اشتقاق التكاملات التابعة لوسيط نستنتج أنّ F يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$، وأنّ

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\int_0^\infty 2te^{-t^2} \sin(2xt)\,\mathrm{d}\,t \\ &= \left[e^{-t^2} \sin(2xt)\right]_0^\infty - \int_0^\infty 2xe^{-t^2} \cos(2xt)\,\mathrm{d}\,t \\ &= -2xF(x) \end{aligned}$$

نستنتج من ذلك أنّ $\forall x \in \mathbb{R},\ (e^{x^2} F(x))' = 0$، أي إنّ التابع $x \mapsto e^{x^2} F(x)$ تابعٌ ثابتٌ على $\mathbb{R}$. وعليه

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F(x) = F(0)e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}$$ ■

التمرين 19. نعرّف في حالة $x \geq 0$، المقدار $F(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) \mathrm{d}t$. أثبت أنّ F مستمرّ ومحدود على مجموعة الأعداد الحقيقيّة الموجبة، وأنّه من الصف C^1 على $\mathbb{R}_+^*$. ثُمّ أثبت أنّ $F' = -2F$ واستنتج عبارة F .

الحل

لنعرّف التابع $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right)$.

- مهما يكن x من $\mathbb{R}$، فالتابع $t \mapsto f(x,t)$ مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+^*$.
- مهما تكن t من $\mathbb{R}_+^*$، يكن التابع $x \mapsto f(x,t)$ مستمرّاً على $\mathbb{R}$.
- وأخيراً التكامل $\mathrm{d}t \int_0^\infty e^{-t^2}$ متقاربٌ ولدينا

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \left|f(x,t)\right| \leq e^{-t^2}$$

نستنتج من ذلك أنّ التابع $F(x) = \int_0^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t$ مستمرٌّ على $\mathbb{R}$. كما نلاحظ مباشرة أنّه تابع زوجي ويُحقِّق المتراجحة

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq F(x) \leq \int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

لتكن $0 < a$، وليكن $J_a = [a, +\infty[$، ثُمّ لنعرّف

$$g : J_a \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right)$$

- مهما يكن x من J_a فالتابع $t \mapsto g(x,t)$ مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+^*$ وتكامله الذي يعرّف $F(x)$ متقاربٌ.
- مهما تكن t من $\mathbb{R}_+^*$ فالتابع $x \mapsto g(x,t)$ يقبل الاشتقاق على J_a ويحقّق

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,t) = -\frac{2x}{t^2} e^{-t^2} e^{-x^2/t^2}$$

وهو تابع مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+^*$ بالنسبة إلى t .

■ وأخيراً نلاحظ أنّ التكامل $\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t$ متقاربٌ وأنّ $\sup_{u>0}(ue^{-u}) = e^{-1}$، إذن

$$\forall (x,t) \in J_a \times \mathbb{R}_+^*, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{2}{x}e^{-t^2} \cdot \left(\frac{x^2}{t^2}\right)e^{-x^2/t^2} \le \frac{2}{ae} \cdot e^{-t^2}$$

إذن استناداً إلى مبرهنة اشتقاق التكاملات التابعة لوسيط نستنتج أنّ F يقبل الاشتقاق على J_a، وأنّ مشتقّه هو $\int_0^{\infty} \frac{-2x}{t^2} e^{-t^2 - x^2/t^2}\,\mathrm{d}\,t$. ولمّا كان $0 < a$ عدداً كيفيّاً استنتجنا أنّ F يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$، وأنّ

$$\begin{aligned}\forall x > 0, \ F'(x) &= \int_0^{\infty} \frac{-2x}{t^2} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right)\mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^{\infty} -2\exp\left(-\frac{x^2}{u^2} - u^2\right)\mathrm{d}\,u = -2F(x) \qquad u \leftarrow x/t\end{aligned}$$

ومنه $\forall x > 0, \ (e^{2x}F(x))' = 0$، وهذا يثبت وجود λ في $\mathbb{R}$ يُحقّق

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \lambda e^{-2x}$$

ولكنّ F مستمرٌّ عند 0 إذن $\lambda = F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$، وبالاستفادة من كون التابع F زوجياً نستنتج أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|x|}$$ ■

التمرين 20. ليكن $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً، ولنفترض وجود عددين حقيقيّين موجبين تماماً a و b وعدد طبيعيّ m بحيث يتحقّق $\forall t \in \mathbb{R}_+, \left|f(t)\right| \le at^m + b$.

نضع $g(x) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-tx}\mathrm{d}\,t$ ، أيّاً كانت $0 < x$.

1. أثبت أنّ هذا التّكامل متقارب على مجموعة الأعداد الحقيقيّة الموجبة تماماً.
2. أثبت أنّ g من الصّفّ C^{∞} على مجموعة الأعداد الحقيقيّة الموجبة تماماً. احسب $g^{(n)}$ في حالة $n \in \mathbb{N}^*$. وأثبت أنّ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$.

فيما يأتي نفترض أنّ f هو التابع الآتي:

$$. f(t)=\begin{cases}(1-\cos t)/t^2 & : \quad t>0\\ 1/2 & : \quad t=0\end{cases}$$

3. احسب g'' واستنتج عبارة g عندما $x>0$. أثبت أنّ g مستمرّ على مجموعة الأعداد الحقيقيّة الموجبة. احسب $g(0)$ واستنتج قيمة $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

الحل

لنعرّف العدد

$$. M(n,c)=\sup_{t>0} t^n e^{-tc/2}=\left(\frac{2n}{ce}\right)^n$$

1. لنلاحظ أنّه أيّاً كانت $0<x$ فلدينا

$$\forall t\in\mathbb{R}_+,\quad \left|f(t)e^{-tx}\right|\le\big(aM(m,x/2)+b\big)e^{-xt/2}$$

وهذا يثبت تقارب التكامل $g(x)=\int_0^\infty f(t)e^{-tx}\,\mathrm{d}t$ وذلك أيّاً كانت $0<x$.

2. لتكن $0<c$ ، وليكن $J_c=[c,+\infty[$ ، ثمّ لنعرّف، في حالة n من $\mathbb{N}$ ، التابع

$$h_n:J_c\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\ h_n(x,t)=(-t)^n f(t)e^{-tx}$$

- مهما يكن x من J_c ، فالتابع $t\mapsto h_n(x,t)$ مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+$ وتكامله متقاربٌ لأنّ

$$\forall(x,t)\in J_c\times\mathbb{R}_+,\quad \left|h_n(x,t)\right|\le A_n e^{-ct/2}$$

حيث $A_n=aM(n+m,c/2)+bM(n,c/2)$.

- مهما تكن t من $\mathbb{R}_+$ ، فالتابع $x\mapsto h_n(x,t)$ يقبل الاشتقاق على J_c ويحقّق

$$\frac{\partial h_n}{\partial x}(x,t)=h_{n+1}(x,t)$$

وهو تابع مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+$ بالنسبة إلى t .

- وأخيراً نلاحظ أنّ التكامل $\int_0^\infty e^{-ct/2}\,\mathrm{d}t$ متقاربٌ وأنّ

$$\forall(x,t)\in J_c\times\mathbb{R}_+,\quad \left|\frac{\partial h_{n+1}}{\partial x}(x,t)\right|\le A_{n+1}\cdot e^{-ct/2}$$

نستنتج إذن أنّ $H_n : x \mapsto \int_0^\infty h_n(x,t)\,\mathrm{d}\,t$ قابل للاشتقاق على J_c وأنّ التابع المشتق هو التابع المعطى بالعلاقة $x \mapsto \int_0^\infty h_{n+1}(x,t)\,\mathrm{d}\,t$. ولمّا كان العدد $c > 0$ كيفيّاً استنتجنا أنّ H_n يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ وأنّ التابع المشتق هو H_{n+1} . وأخيراً بملاحظة أنّ $H_0 = g$ نرى أنّ g ينتمي إلى الصف C^∞ على $\mathbb{R}_+^*$ ، وأنّ

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g^{(n)}(x) = \int_0^\infty (-t)^n f(t) e^{-tx}\,\mathrm{d}\,t$$

ونلاحظ من جهة أخرى أنّه في حالة $x > 0$ و n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\int_0^\infty t^n e^{-tx}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^\infty u^n e^{-u}\,\mathrm{d}\,u$$

وعليه نرى أنّ

$$.\ \forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to\infty} \int_0^\infty t^n e^{-tx}\,\mathrm{d}\,t = 0$$

وهكذا، بملاحظة أنّ

$$\left|g(x)\right| \le a \int_0^\infty t^m e^{-tx}\,\mathrm{d}\,t + b \int_0^\infty e^{-tx}\,\mathrm{d}\,t$$

$$\left|g'(x)\right| \le a \int_0^\infty t^{m+1} e^{-tx}\,\mathrm{d}\,t + b \int_0^\infty t e^{-tx}\,\mathrm{d}\,t$$

نستنتج أنّ

$$.\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$$

3. يُحقِّق التابع

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos t}{t^2} & : \quad t > 0 \\ \dfrac{1}{2} & : \quad t = 0 \end{cases}$$

الخواص المطلوبة من التابع f في نص المسألة لأنّه تابع محدود.

ومن ثَمَّ يكون لدينا

$$g''(x) = \int_0^\infty (1-\cos t)e^{-xt}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\int_0^\infty e^{(i-x)t}\,\mathrm{d}\,t\right)$$

$$= \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i-x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

وبملاحظة أنّ $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$ ، وبحساب التابع الأصلي نجد أنّ

$$g'(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}$$

ومجدداً، بملاحظة أنّ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ ، وبحساب التابع الأصلي نجد

$$g(x) = \frac{x}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + \arctan\frac{1}{x}$$

أو

$$\forall x > 0, \quad \int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-tx}\,\mathrm{d}\,t = \frac{x}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + \arctan\frac{1}{x}$$

وبالاستفادة من مبرهنة استمرار التكاملات التابعة لوسيط وملاحظة أنّ

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad \left|\frac{1-\cos t}{t^2} e^{-tx}\right| \le \frac{1-\cos t}{t^2}$$

وأنّ التكامل $g(0) = \int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t$ متقارب، نستنتج أنّ $g(0) = \lim_{x\to 0^+} g(x)$. أي

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\pi}{2}$$

ولكن

$$\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t = \left[-\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t$$
$$= \frac{\cos x - 1}{x} + \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t$$

إذن بجعل x تسعى إلى $+\infty$، نجد أنّ التكامل $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t$ متقاربٌ وأنّ

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\pi}{2}$$

التمرين 21. نعرّف في حالة $(t,x) \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2$ المقدارين :

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} f(x,t)\mathrm{d}\,t \quad \text{و} \quad f(x,t) = \frac{\ln(1+\cos x \cos t)}{\cos t}$$

1. أثبت أنّ F مستمرّ وقابل للاشتقاق على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. ثم احسب F'.
2. استنتج عبارة مبسّطة لصيغة $F(x)$ في حالة x من $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
3. استفدْ مما سبق لحساب التكامل : $\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}\,u$.

الحل

1. نعلم أنّ التابع $u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$ قابل للتمديد إلى تابع مستمرٍّ h على $\mathbb{R}$. وعليه

- مهما يكن x من $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$، فالتابع $t \mapsto \cos x\, h(\cos x \cos t) = f(x,t)$ تابعٌ مستمرٌّ على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ وتكامله متقاربٌ.
- مهما تكن t من $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$، فالتابع $x \mapsto f(x,t)$ يقبل الاشتقاق على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ويُحقّق :

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,t) = \frac{-\sin x}{1+\cos x \cos t}$$

وهو تابع مستمرٌّ على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ بالنسبة إلى t.

■ وأخيراً نلاحظ أنّ

$$\forall (x,t)\in \left[0,\tfrac{\pi}{2}\right]^2,\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\le 1$$

نستنتج إذن أنّ التابع $x\mapsto F(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+\cos x\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}\,t$ يقبل الاشتقاق على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$، وأنّه مهما تكن x من $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$، فلدينا

$$F'(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{-\sin x}{1+\cos x\cos t}\,\mathrm{d}\,t\underset{v=\tan\frac{x}{2}\tan\frac{t}{2}}{=}-2\int_0^{\tan(x/2)}\frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}\,v=-x$$

2. نستنتج من ذلك أنّ

$$\forall x\in\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right],\qquad F(x)=\frac{\pi^2}{8}-\frac{x^2}{2}$$

إذ استفدنا من أنّ $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. وعليه نكون قد برهنّا أنّ

$$\forall x\in\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right],\qquad \int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+\cos x\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}\,t=\frac{\pi^2}{8}-\frac{x^2}{2}$$

يقتضي هذا في حالة $x=0$ أنّ

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}\,t=\frac{\pi^2}{8}$$

وعندئذ يسمح تغيير المتحوّل $u=\cos t$ أن نستنتج أنّ

$$\int_0^{1}\frac{\ln(1+u)}{u\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}\,u=\frac{\pi^2}{8}$$

وهي قيمة التكامل المطلوب حسابه. ■

التمرين 22. ليكن التابع $x \mapsto f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^x(t+1)}$.

1. أوجد مجموعة تعريف f و أعط مكافئاً لقيمة $f(x)$ بجوار $x=0$.

2. أثبت أن f يقبل تناظراً يطلب تعيينه.

3. أثبت أنّ f مستمرّ على مجموعة تعريفه و احسب الحدّ الأدنى للتابع f .

الحل

1. من الواضح أنّ التكامل يتقارب عند 0 وعند $+\infty$ إذا وفقط إذا كان x من $]0,1[$ ، وعليه تكون مجموعة تعريف التابع f هي $]0,1[$. لنجرِ تغيير المتحوّل $u = \frac{t}{1+t}$. نجد عندئذ أنّ

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^{+\infty} t^{-x}(1+t)\frac{\mathrm{d}\,t}{(1+t)^2} = \int_0^1 \left(\frac{u}{1-u}\right)^{-x}\frac{\mathrm{d}\,u}{1-u}\\
&= \int_0^1 u^{-x}(1-u)^{x-1}\,\mathrm{d}\,u = \beta(1-x,x)\\
&= \Gamma(1-x)\Gamma(x)
\end{aligned}$$

حيث Γ و β هما التابعان الأولريّان المعروفان. وعليه نرى مباشرة أنّ

$$\forall x \in\ ]0,1[,\quad xf(x) = \Gamma(1-x)\Gamma(1+x)$$

إذن $\lim_{x\to 0} xf\big(x\big) = 1$.

2. يتّضح من العلاقة $f(x) = \Gamma(1-x)\Gamma(x)$ أنّ $f(1-x) = f(x)$ ، وعليه يكون المنحني البياني للتابع f متناظراً بالنسبة إلى المستقيم الذي مُعادلته $x = \frac{1}{2}$.

3. لمّا كان التابع Γ مستمرّاً استنتجنا أنّ f مستمرٌّ أيضاً على مجموعة تعريفه. ونحن نعلم أنّ $\ln\Gamma$ تابع محدّبٌ، إذن نستنتج من ذلك أنّ التابع $x \mapsto \ln f(x)$ تابع محدّب على المجال $]0,1[$. وعليه يكون التابع f نفسه محدّباً على هذا المجال.

ومن ثَمَّ، مهما تكن x من $]0,1[$ ، يكن

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) \le \tfrac{1}{2}\Big(f(x) + f(1-x)\Big) = f(x)$$

إذن

$$\inf_{x\in]0,1[} f(x) = f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \pi$$

في الحقيقة، نعلم أنّ استناداً إلى مادرسناه عن التوابع الأولية أنّ

$$\forall x \in \,]0,1[, \quad f(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

التمرين 23. ادرس وجود التابع $x \mapsto f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} \mathrm{d}t$ وقابليّة اشتقاقه، ثمّ جِدْ عبارة بسيطة للتابع f.

الحل

عندما تكون t في جوار $+\infty$ يكون لدينا

$$\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} \sim \frac{2\ln t}{t^2}$$

وهذا يقتضي تقارب التكامل في جوار $+\infty$.

أمّا في جوار $t = 0$، فالتكامل يكون غير معمّم في حالة $x \neq 0$، ويُكافئ التابع المُكامل $2\left|\ln t\right|$ في حالة $x = 0$. وفي جميع الأحوال يكون التكامل الذي يُعرّف التابع f متقارباً أيّاً كان x من $\mathbb{R}$. إذن مجموعة تعريف التابع f هي $\mathbb{R}$. والتابع f زوجي وضوحاً.

لتكن $0 < a$، ولنعرّف التابع :

$$h : [-a,a] \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \; (x,t) \mapsto \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$$

- مهما يكن x من $[-a,a]$، فالتابع $t \mapsto h(x,t)$ مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+^*$.
- مهما تكن t من $\mathbb{R}_+^*$، يكن التابع $h(x,t) \mapsto t$ مستمرّاً على $[-a,a]$.
- وأخيراً لدينا في حالة (x,t) من $[-a,a] \times \mathbb{R}_+^*$ ما يأتي

$$\begin{aligned}\left|h(x,t)\right| &\leq \frac{2\left|\ln t\right| + \ln(1+x^2/t^2)}{1+t^2} \\ &\leq \frac{2\left|\ln t\right| + \ln(1+a^2/t^2)}{1+t^2} = g(t)\end{aligned}$$

والتكامل $\int_0^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ متقاربٌ. يبرهن هذا على استمرار التابع f على كلِّ مجال من النمط $[-a,a]$، فهو إذن مستمرٌّ على $\mathbb{R}$، لأنّ العدد $a > 0$ كيفي.

لتكن $c > 0$ ، وليكن $J_c = \left[c, +\infty\right[$ ، ثُمّ لنعرّف، التابع

$$k : J_c \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ k(x,t) = \frac{\ln(x^2 + t^2)}{1 + t^2}$$

- مهما يكن x من J_c ، فالتابع $t \mapsto k(x,t)$ مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+$ وتكامله متقاربٌ.
- مهما تكن t من $\mathbb{R}_+$ ، فالتابع $x \mapsto k(x,t)$ يقبل الاشتقاق على J_c ويحقّق

$$\frac{\partial}{\partial x} k(x,t) = \frac{2x}{x^2 + t^2} \cdot \frac{1}{1 + t^2}$$

وهو تابع مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+$ بالنسبة إلى t .

- وأخيراً نلاحظ أنّ التكامل $\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t$ متقاربٌ وأنّ

$$\forall (x,t) \in J_c \times \mathbb{R}_+, \quad \left|\frac{\partial k}{\partial x}(x,t)\right| \le \frac{2}{c} \cdot \frac{1}{1 + t^2}$$

نستنتج إذن أنّ التابع $f : x \mapsto \int_0^\infty k(x,t)\,\mathrm{d}\,t$ قابل للاشتقاق على J_c وأنّ التابع المشتق هو

$$x \mapsto \int_0^\infty \frac{2x}{x^2 + t^2} \cdot \frac{1}{1 + t^2}\,\mathrm{d}\,t$$

ولمّا كان العدد $c > 0$ كيفيّاً استنتجنا أنّ f يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ وأنّ التابع المشتق هو :

$$f'(x) = \int_0^\infty \frac{2x}{x^2 + t^2} \cdot \frac{1}{1 + t^2}\,\mathrm{d}\,t$$

لنفترض مؤقّتاً أنّ $1 \ne x$ عندئذ يكون لدينا

$$\frac{2x}{(x^2 + t^2)(1 + t^2)} = \frac{2x}{1 - x^2}\left(\frac{1}{x^2 + t^2} - \frac{1}{1 + t^2}\right)$$

وعليه يكون

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{1-x^2}\int_0^{\infty}\frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}\,t - \frac{2x}{1-x^2}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \frac{2}{1-x^2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(1-x) = \frac{\pi}{1+x} \end{aligned}$$

وتبقى هذه النتيجة صحيحة في حالة $x = 1$ أيضاً بسبب استمرار التابع f' . وعليه يوجد ثابت c يُحقِّق

$$\forall x > 0,\ f(x) = \pi \ln(1+x) + c$$

ولكنّ التابع f مستمرٌّ على $\mathbb{R}$ ، إذن

$$c = f(0) = 2\int_0^{\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t$$

ولكنّ تغيير المتحوّل $t \mapsto \frac{1}{u}$ يسمح لنا أن نستنتج أنّ $c = -c$ ، فيكون $c = 0$. إذن

$$\forall x > 0,\ f(x) = \pi \ln(1+x)$$

وبالاستفادة من كوْن التابع f زوجيّاً نرى أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \pi \ln\big(1+|x|\big)$$

التمرين 24. ليكن التابع g المعرّف بالعلاقة : $g(a) = \int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax)}{1+x}\mathrm{d}x$.

1. أثبت أنّ g معرّف على $\mathbb{R}^*$ وأنّه تابع زوجيّ.

نفترض حتّى نهاية المسألة أنّ a عدد حقيقيّ موجب تماماً. ليكن n عدداً طبيعيّاً موجباً تماماً وليكن التطبيق g_n المعرّف بالعلاقة : $g_n(a) = \int_0^{n}\frac{\cos(ax)}{1+x}\mathrm{d}x$.

2. أثبت أنّ g_n مستمرّ وأنّه في حالة عدد حقيقيّ موجب تماماً a_0 تكون متتالية التوابع g_n متقاربة بانتظام من g على المجال $[a_0, +\infty[$.

3. أثبت صحّة العلاقتين الآتيتين:

$$g(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{a+u}\,\mathrm{d}u \tag{1}$$

$$g(a)=\cos a\int_a^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u+\sin a\int_a^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \tag{2}$$

معلّلاً تقارب التكاملين الواردين في العلاقة (2).

4. استنتج أنّ للمقدار $g(a)+\ln(a)$ نهاية منتهية عندما تسعى a إلى الصفر، ثُمّ جِدْ مُكافئاً للمقدار $g(a)$ في جوار $a=0$.

5. أثبت أنّ $a\left|g(a)\right|$ محدود عندما تتناهى a إلى $+\infty$. ماذا بشأن تقارب التكامل $\int_0^{\infty} g^2(a)\mathrm{d}a$ ؟

الحل

1. لتكن $a\neq 0$، عندئذ نرى بسهولة أنّ

$$\begin{aligned}\int_0^A\frac{\cos ax}{1+x}\,\mathrm{d}x&=\left[\frac{\sin ax}{a(1+x)}\right]_0^A+\int_0^A\frac{\sin ax}{a(1+x)^2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\sin aA}{a(1+A)}+\int_0^A\frac{\sin ax}{a(1+x)^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

ولمّا كان التكامل $\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{a(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$ متقارباً بالإطلاق، و $\lim\limits_{A\to\infty}\frac{\sin aA}{a(1+A)}=0$، استنتجنا تقارب التكامل الذي يعرّف $g(a)$. ومن ثَمّ

$$\forall a\in\mathbb{R}^*,\quad g(a)=\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{1+x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{a(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

ومن الواضح أنّ $g(a)\ a\mapsto$ تابع زوجي على $\mathbb{R}^*$. لذلك سنفترض من الآن فصاعداً أنّ a تنتمي إلى $\mathbb{R}_+^*$.

2. بالاستفادة من مبرهنة استمرار التكاملات التابعة لوسيط نرى بسهولة أنّ متتالية التوابع $\left(g_n\right)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالصيغة $g_n(a) = \int_0^n \frac{\cos ax}{1+x}\,\mathrm{d}\,x$ هي متتالية من التوابع المستمرّة على $\mathbb{R}$.

لتكن $0 < a_0$ ولنبرهن أنّ متتالية التوابع $\left(g_n\right)_{n\geq 0}$ تتقارب بانتظام من التابع g على $J_{a_0} = [a_0, +\infty[$. في الحقيقة، مهما تكن a من J_{a_0} يكن:

$$\begin{aligned} g(a) - g_n(a) &= \int_n^\infty \frac{\cos ax}{1+x}\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{\sin ax}{a(1+x)}\right]_n^\infty + \int_n^\infty \frac{\sin ax}{a(1+x)^2}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{\sin an}{a(1+n)} + \int_n^\infty \frac{\sin ax}{a(1+x)^2}\,\mathrm{d}\,x \end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\left|g(a) - g_n(a)\right| \leq \frac{1}{a(1+n)} + \int_n^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{a(1+x)^2} = \frac{2}{a(1+n)}$$

وعليه يكون

$$\forall n \geq 1, \quad \sup_{a \in J_{a_0}} \left|g(a) - g_n(a)\right| \leq \frac{2}{a_0(n+1)}$$

وهذا يثبت التقارب المنتظم على J_{a_0} للمتتالية $\left(g_n\right)_{n\geq 0}$ من التابع g . فالتابع g مستمرٌّ على J_{a_0} ، وذلك مهما تكن $0 < a_0$. إذن g تابع مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+^*$ ، ومن ثَمّ على $\mathbb{R}^*$ لأنّ g زوجي.

3. نذكّر هنا أنّ $0 < a$ ، تنتج العلاقة (1) بإجراء تغيير المتحوّل $ax = u$ ، فنجد أنّ

$$g(a) = \int_0^\infty \frac{\cos u}{a+u}\,\mathrm{d}\,u$$

وعليه نرى أنّ

$$\forall a > 0, \quad g(a) = \int_a^\infty \frac{\cos(t-a)}{t}\,\mathrm{d}\,t = \int_a^\infty \frac{\cos a \cos t + \sin a \sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t$$

ولكن نعلم أنّ

$$\begin{aligned}\int_a^A \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t &= \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_a^A + \int_a^A \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t\\ \int_a^A \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}\,t &= \left[\frac{\sin t}{t}\right]_a^A + \int_a^A \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

إذن، بجعل A تسعى إلى $+\infty$، نرى أنّ التكاملين $\int_a^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t$ و $\int_a^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}\,t$ متقاربان وأنّ

$$\begin{aligned}\int_a^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t &= -\frac{1-\cos a}{a} + \int_a^\infty \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t\\ \int_a^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}\,t &= -\frac{\sin a}{a} + \int_a^\infty \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

إذن

$$\forall a>0,\quad g(a) = \cos a\cdot\int_a^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}\,t + \sin a\cdot\int_a^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t$$

4. لنلاحظ أنّ

$$\int_a^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}\,t = \int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}\,t - \int_a^1 \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}\,t - \int_1^a \frac{\mathrm{d}\,t}{t}$$

ولكنّ التابع $t\mapsto \frac{1-\cos t}{t}$ يقبل التمديد إلى تابع مستمرٍّ على $\mathbb{R}$، وعليه يكون التكامل المُعمّم $\int_0^1 \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}\,t$ متقارباً، إذن

$$\lim_{a\to 0^+}\left(\ln a + \int_a^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}\,t\right) = \int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}\,t - \int_0^1 \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}\,t$$

وبملاحظة أنّه مهما تكن $a>0$ فلدينا

$$g(a)+\ln a = (1-\cos a)\ln a + \cos a\Big(\ln a + \int_a \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}\,t\Big) + \sin a\int_a \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t$$

نستنتج أنّ

$$\lim_{a\to 0^+}\big(g(a)+\ln a\big)=\int_1^{\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}\,t-\int_0^1\frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}\,t$$

وعليه يكون

$$g(a)\underset{0}{\sim}\ln\frac{1}{|\,a\,|}$$

5. استناداً إلى العلاقة التي أثبتناها في 1. نرى أنّ

$$\forall a\in\mathbb{R}^*,\quad ag(a)=\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}\,x$$

ومن ثَمّ يكون لدينا

$$\forall a\in\mathbb{R}^*,\quad \big|ag(a)\big|\leq\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}\,x=1$$

وعليه فالتابع $g(a)\mapsto a$ يُحقّق في جوار $+\infty$ الخاصّة $g^2(a)=O\Big(\frac{1}{a^2}\Big)$ ويُحقّق في جوار 0 الخاصّة $g^2(a)=O\Big(\ln^2 a\Big)$. ولأنّ التكاملين $\int_0^1\ln^2 a\,\mathrm{d}\,a$ و $\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,a}{a^2}$ متقاربان نستنتج أنّ التكامل $\int_0^{\infty}g^2(a)\,\mathrm{d}\,a$ متقارب أيضاً. ■

التمرين 25. ليكن $a>b>0$. وليكن

$$I(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\cos xt\ \mathrm{d}t$$

أثبت أنّ $I(x)$ معرّف على مجموعة الأعداد الحقيقيّة.احسب $I(x)$.

مساعدة. يمكن اشتقاق ما داخل التكامل.

الحل

لنعرّف

$$f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\ f(x,t)=\begin{cases}\dfrac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}\cos xt & : \quad t>0\\ a-b & : \quad t=0\end{cases}$$

لمّا كان التكامل $\int_0^\infty \frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}\,\mathrm{d}\,t$ متقارباً، استنتجنا أنّ $I(x)$ $x\mapsto$ معرّف على $\mathbb{R}$.

وكذلك نلاحظ ما يأتي :

- مهما يكن x من $\mathbb{R}$، فالتابع $f(x,t)$ $t\mapsto$ مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+$، وتكامله متقاربٌ.
- مهما تكن t من $\mathbb{R}_+$، فالتابع $f(x,t)$ $x\mapsto$ يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$، ويحقّق

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=(e^{-at}-e^{-bt})\sin xt$$

وهو تابع مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+$ بالنسبة إلى t.

- وأخيراً نلاحظ أنّ التكامل $\int_0^\infty (e^{-bt}-e^{-at})\,\mathrm{d}\,t$ متقاربٌ وأنّ

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\le e^{-bt}-e^{-at}$$

نستنتج إذن أنّ $I(x)=\int_0^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}\,t$ $x\mapsto$ قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأنّ المشتق هو:

$$\begin{aligned}I'(x)&=\int_0^\infty (e^{-at}-e^{-bt})\sin tx\,\mathrm{d}\,t=\operatorname{Im}\int_0^\infty\left(e^{(-a+ix)t}-e^{(-b+ix)t}\right)\mathrm{d}\,t\\&=\operatorname{Im}\left(\frac{1}{a-ix}-\frac{1}{b-ix}\right)=\frac{x}{a^2+x^2}-\frac{x}{b^2+x^2}\end{aligned}$$

وعلى هذا، يوجد في $\mathbb{R}$ ثابت k يُحقّق

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad I(x)=k+\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+x^2}{b^2+x^2}$$

وباستعمال مبرهنة ريمان Riemann نستنتج مباشرة أنّ $\lim_{x\to\infty} I(x)=0$ ، إذن لا بُدّ أن يكون $k=0$ ، وعلى هذا نرى أنّ

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad I(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+x^2}{b^2+x^2}\qquad\blacksquare$$

التمرين 26. نعرّف، أيّاً كان $x \geq -1$ ، المقدار $G(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + x\sin^2 t)\mathrm{d}t$.

1. أثبت أنّ G مستمرّ على $[-1,+\infty[$ وقابل للاشتقاق على $]-1,+\infty[$.
2. احسب $G'(x)$ عندما $-1 < x$.
3. استنتج عبارة $G(x)$ عندما $-1 \leq x$.

الحل

لتكن $0 \leq a$. نلاحظ مباشرة أن التابع $(x,t) \mapsto \ln(1 + x\sin^2 t)$ مستمرٌّ بالنسبة إلى كلٍّ من x و t على $\left[-1,a\right] \times \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ ، وأنّ

$$\left|\ln(1 + x\sin^2 t)\right| \leq \ln(1 + a\sin^2 t) - \ln(\cos^2 t)$$

وذلك مهما تكن (x,t) من $\left[-1,a\right] \times \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. نستنتج إذن أنّ التابع G معرّف ومستمرٌّ على $[-1,a]$ ، ومن ثَمّ على $[-1,+\infty[$ ، لأنّ a عددٌ كيفي.

ليكن α عنصراً من $]-1,0[$ ، ولنتأمّل التابع

$$f : [\alpha,+\infty[\times [0,\tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto \ln(1 + x\sin^2 t)$$

نلاحظ ما يلي :

- مهما يكن x من $[\alpha,+\infty[$ ، فالتابع $t \mapsto f(x,t)$ مستمرٌّ على $[0,\frac{\pi}{2}]$.
- مهما تكن t من $[0,\frac{\pi}{2}]$ ، فالتابع $x \mapsto f(x,t)$ يقبل الاشتقاق على $[\alpha,+\infty[$ ويحقّق

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\sin^2 t}{1 + x\sin^2 t}$$

وهو تابع مستمرٌّ على $[0,\frac{\pi}{2}]$ بالنسبة إلى t .

- وأخيراً نلاحظ أنّ

$$\forall (x,t) \in [\alpha,+\infty[\times [0,\tfrac{\pi}{2}],\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{1}{1+\alpha}$$

نستنتج إذن أنّ G قابل للاشتقاق على $[\alpha,+\infty[$ وأنّ التابع المشتق هو:

$$G'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{1 + x\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

ولأنّ العدد α اختياري من المجال $]-1,0[$ ، نستنتج أنّ هذا يبقى صحيحاً على $]-1,+\infty[$.

لنفترض بهدف الحساب فقط أنّ $x \neq 0$ ، ولنجرِ تغيير المتحوّل $u = \cot t$ في $G'(x)$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{1 + x\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)(1+x+u^2)} \\ &= \frac{1}{x}\left(\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} - \int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+x+u^2}\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{1+x}}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+x+\sqrt{1+x}} \end{aligned}$$

والنتيجة الأخيرة صحيحة أيضاً في حالة $x = 0$ بالحساب المباشر في هذه الحالة.

ولمّا كان $G(0) = 0$ استنتجنا أنّه مهما تكن $-1 \leq x$ يكن لدينا :

$$\begin{aligned} G(x) &= \pi \cdot \int_0^{x} \frac{1}{1+\sqrt{1+t}} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{1+t}} \\ &= \Big[\pi \ln(1+\sqrt{1+t})\Big]_0^x \\ &= \pi \ln \frac{1+\sqrt{1+x}}{2} \end{aligned}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

التمرين 27. احسب قيمة التكامل المعمّم الآتي بعد أن تثبت تقاربه :

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x$$

الحل

- نلاحظ أنّ التابع المُكامل $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ مستمرٌّ على $[0,1[$، وأنّه يُحقّق في جوار 1^- ما يأتي:

$$f(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} \ln \frac{1}{1-x}\right)$$

فالتكاملُ $\mathcal{I}$ متقاربٌ.

▪ بإجراء تغيير المتحوّل $t = x^2$ نرى أنّ التابع $x \mapsto -\frac{2+x^2}{3}\sqrt{1-x^2}$ تابعٌ أصلي للتابع $x \mapsto \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ وعليه فإنّ

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}\,x &= \left[-\frac{2+x^2}{3}\sqrt{1-x^2}\,\ln\frac{1+x}{1-x}\right]_0^T + \frac{2}{3}\int_0^T \frac{2+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x\\ &= -\frac{2+T^2}{3}\sqrt{1-T^2}\,\ln\frac{1+T}{1-T} + \frac{2}{3}\int_0^T \frac{2+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

وبجعل T تسعى إلى 1 نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}\,x &= \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{2+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \underbrace{2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x - \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x}_{x\leftarrow\sin\theta}\\ &= 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\,\theta - \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} 2\cos^2\theta\,\mathrm{d}\,\theta\\ &= \pi - \left[\frac{2\theta+\sin 2\theta}{6}\right]_0^{\pi/2} = \frac{5\pi}{6}\end{aligned}$$

إذن

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}\,x = \frac{5\pi}{6}$$

وهي قيمة التكامل المرجوة. ■

التمرين 28. تهدف هذه المسألة إلى حساب المقدار

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x>0}\frac{1}{x^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k-1}{k}\right)$$

الجزء الأوّل

1. بالاستفادة من المتراجحة $\forall x\in\mathbb{R},\ 1+x\leq e^x$. برهن أنّ التابع

$$x\mapsto F(x)=\int_0^x\frac{e^u-1-u}{u^2}\,\mathrm{d}\,u$$

معرّفٌ على كامل $\mathbb{R}$ ، ثُمَّ ادرس تحولاته.

2. استنتج أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد ℓ ينتمي إلى $\mathbb{R}_+^*$ ويحقّق $F(\ell)=1$.

3. ليكن n عدداً طبيعيّاً يُحقّق $2\leq n$، ولنعرّف على $\mathbb{R}_+$ التابع Δ_n بالصيغة

$$\Delta_n(x)=1-\int_0^x\left(\left(1+\frac{u}{n}\right)^n-1-u\right)\frac{\mathrm{d}\,u}{u^2}$$

① اكتب $\Delta_n(x)$ بصيغة تابع كثير الحدود بالمتحوّل x .

② ادرس تحوّلات التابع Δ_n ، وبرهن أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد ε_n ينتمي إلى $\mathbb{R}_+^*$ ، ويُحقّق $\Delta_n(\varepsilon_n)=0$.

③ عيِّن إشارة $\Delta_n(x)$ تبعاً لكون $0\leq x<\varepsilon_n$ أو $\varepsilon_n<x$.

4. برهن أنّ التابع $x\mapsto\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ متناقص تماماً على $\mathbb{R}_+^*$ ، واستنتج من ذلك أنّ

$$\forall n\geq 2,\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad \Delta_{n+1}(x)<\Delta_n(x)$$

وبيِّن أنّ المتتالية $(\varepsilon_n)_{n\geq2}$ متناقصة، فهي من ثَمَّ متقاربة. نضع $\Lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n$ ، بيِّن أنّه مهما تكن $2\leq n$ فلدينا $\Lambda\leq\varepsilon_n\leq 4$.

5. نتأمّل متتالية التوابع $(f_n)_{n\geq2}$:

$$f_n\,:\,]0,4]\to\mathbb{R},\ f_n(u)=\begin{cases}\dfrac{(1+u/n)^n-1-u}{u^2} & :\quad 0<u\leq\varepsilon_n\\ 0 & :\quad \varepsilon_n<u\leq 4\end{cases}$$

والتابع

$$f\,:\,]0,4]\to\mathbb{R},\; f(u)=\begin{cases}\dfrac{e^{u}-1-u}{u^2} & : \quad 0<u\leq\Lambda\\ 0 & : \quad \Lambda<u\leq 4\end{cases}$$

① أثبت أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^4 f_n(u)\,\mathrm{d}\,u=\int_0^4 f(u)\,\mathrm{d}\,u$.

② استنتج من ذلك أنّ $\Lambda=\ell$.

الجزء الثاني

في هذا الجزء نتأمّل متتالية التوابع $(A_n)_{n\geq1}$ المعرّفة على $\mathbb{R}_+^*$ كما يأتي :

$$A_n(x)=\frac{1}{x^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k-1}{k}$$

كما نتأمّل متتالية $(v_n)_{n\geq1}$ **متناقصة** من الأعداد الحقيقيّة تحقّق $0<v=\lim\limits_{n\to\infty}v_n$.

1. لتكن متتالية التوابع $(h_n)_{n\geq1}$ المعرّفة على $\mathbb{R}_+^*$ كما يأتي:

$$h_n(u)=\begin{cases}\dfrac{(1+u/n)^n-1}{u} & : \quad 0<u\leq v_n\\ 0 & : \quad v_n<u\end{cases}$$

والتابع h المعرّف على $\mathbb{R}_+^*$ بالصيغة :

$$h(u)=\begin{cases}\dfrac{e^{u}-1}{u} & : \quad 0<u\leq v\\ 0 & : \quad v<u\end{cases}$$

① أثبت أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty h_n(u)\,\mathrm{d}\,u=\int_0^\infty h(u)\,\mathrm{d}\,u$.

② بملاحظة أنّ

$$\frac{1}{k}\left(x^k-1\right)=\int_1^x t^{k-1}\,\mathrm{d}\,t$$

أثبت أنّ

$$\lim_{n\to\infty}A_n\left(1+\frac{v_n}{n}\right)=e^{-v}\int_0^v\frac{e^{u}-1}{u}\,\mathrm{d}\,u$$

2. ليكن $n \geq 2$، نهدف الآن إلى دراسة تغيرات التابع A_n على المجال $[1,+\infty[$.

① أثبت أنّ $A'_n(x) = \dfrac{n}{x^{n+1}} B_n(x)$، وبيِّن أنّ

$$B'_n(x) = -\frac{x^n - 1 - n(x-1)}{n(x-1)^2}$$

② استنتج من ذلك، بإجراء تكامل بالتجزئة، أنّ

$$\forall x > 0,\ B_n(x) = \Delta_n(n(x-1))$$

حيث Δ_n هو التابع المعرّف في الجزء الأوّل.

③ استنتج من ذلك جدول تغيرات التابع A_n. وبيِّن أنّ

$$\sup_{x>0} A_n(x) = A_n\left(1 + \frac{\varepsilon_n}{n}\right)$$

3. استنتج من الدراسة السابقة أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x>0}\left(\frac{1}{x^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k - 1}{k}\right)\right) = \frac{1-e^{-\ell}}{\ell}$$

حيث ℓ هو العدد الحقيقي الوحيد الذي يُحقّق $\displaystyle\int_0^\ell \frac{e^u - 1 - u}{u^2}\,\mathrm{d}\,u = 1$.

الحل

الجزء الأوّل

1. بملاحظة أنّ التابع الأسّي محدّبٌ نستنتج أنّ خطّه البياني يقع فوق مماسّه في النقطة $(0,1)$، وهذا يعني أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ 1 + x < e^x$$

ولمّا كان $\displaystyle\lim_{u\to 0}\frac{e^u - 1 - u}{u^2} = \frac{1}{2}$ استنتجنا أنّ التابع $u \mapsto \dfrac{e^u - 1 - u}{u^2}$ يقبل التمديد إلى تابع مستمرٍّ على كامل $\mathbb{R}$. فله تابع أصلي وحيد F معرّفٌ على كامل $\mathbb{R}$، وينعدم عند 0 هو

$$x \mapsto F(x) = \int_0^x \frac{e^u - 1 - u}{u^2}\,\mathrm{d}\,u$$

ولمّا كان $F'(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} > 0$ أيّاً كانت x من $\mathbb{R}^*$، استنتجنا أنّ F متزايدٌ تماماً.

2. في الحقيقة، لمّا كان $e^u = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k}{k!}$ استنتجنا أنّ

$$\forall u \geq 0, \quad \frac{e^u - 1 - u}{u^2} = \frac{1}{2} + \frac{u}{6} + \sum_{k=4}^{\infty}\frac{u^{k-2}}{k!} \geq \frac{1}{2} + \frac{u}{6}$$

ومن ثَمّ

$$\forall x \geq 0, \quad F(x) \geq \int_0^x \left(\frac{1}{2} + \frac{u}{6}\right) \mathrm{d}\, u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12}$$

وبوجه خاص، لدينا $F(0) = 0$ و $F(2) \geq \frac{4}{3}$. إذن استناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطى يوجد عددٌ ℓ ينتمي إلى المجال $]0,2[$ يُحقّق $F(\ell) = 1$. وبسبب التزايد التام للتابع F على $\mathbb{R}$ يكون ℓ الجذر الحقيقي الوحيد للمعادلة $F(\ell) = 1$.

3. ليكن n عدداً طبيعيّاً يُحقّق $2 \leq n$، ولنعرّف على $\mathbb{R}_+$ التابع Δ_n بالصيغة

$$\Delta_n(x) = 1 - \int_0^x \left(\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n - 1 - u\right)\frac{\mathrm{d}\, u}{u^2}$$

①.3 عندئذ لمّا كان

$$\frac{1}{u^2}\left(\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n - 1 - u\right) = \sum_{k=2}^{n}\frac{C_n^k}{n^k}u^{k-2}$$

استنتجنا أنّ Δ_n هو تابعٌ كثير الحدود يُعطى بالصيغة الآتية:

$$\Delta_n(x) = 1 - \sum_{k=2}^{n}\frac{C_n^k}{n^k(k-1)}x^{k-1}$$

②.3 التابع Δ_n تابعٌ مستمرٌ ومتناقصٌ تماماً على $\mathbb{R}_+$، لأنّ مشتقّه سالبٌ. وهو يُحقّق $\Delta_n(0) = 1$ و $\lim_{x\to\infty}\Delta_n(x) = -\infty$. إذن يوجد عددٌ وحيدٌ ε_n ينتمي إلى $\mathbb{R}_+^*$ يُحقّق $\Delta_n(\varepsilon_n) = 0$.

③.3 واستناداً إلى التناقص التام للتابع Δ_n يكون لدينا جدول الإشارات الآتي للتابع Δ_n :

x	$0 \qquad \varepsilon_n \qquad +\infty$
$\Delta_n(x)$	$+ \qquad 0 \qquad -$

4. لمّا كان التابع $x \mapsto -\ln(1+x)$ محدّباً تماماً، استنتجنا أنّ تابع نسبة التزايد $x \mapsto -\frac{1}{x}\ln(1+x)$ تابعٌ متزايدٌ تماماً على $]-1,+\infty[$ ونستنتج من ثَمّ أنّ التابع $x \mapsto \frac{1}{x}\ln(1+x)$ متناقص تماماً على $\mathbb{R}_+^*$. وعليه يكون لدينا في حالة $n \geq 2$ و u من $\mathbb{R}_+^*$ ما يأتي :

$$\frac{n}{u}\cdot\ln\left(1+\frac{u}{n}\right) < \frac{n+1}{u}\cdot\ln\left(1+\frac{u}{n+1}\right)$$

وبالاستفادة من كون التابع الأسّي متزايداً تماماً، نجد

$$\left(1+\frac{u}{n}\right)^n < \left(1+\frac{u}{n+1}\right)^{n+1}$$

ولمّا كان

$$\Delta_n(x) - \Delta_{n+1}(x) = \int_0^x\left(\left(1+\frac{u}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{u}{n}\right)^n\right)\frac{\mathrm{d}\,u}{u^2}$$

استنتجنا أنّ

$$\forall n \geq 2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Delta_{n+1}(x) < \Delta_n(x)$$

وبوجه خاص يكون لدينا في حالة $n \geq 2$ ما يأتي:

$$0 = \Delta_{n+1}(\varepsilon_{n+1}) < \Delta_n(\varepsilon_{n+1})$$

فإذا استفدنا من جدول إشارات Δ_n استنتجنا أنّ $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$ ، فالمتتالية $(\varepsilon_n)_{n\geq 2}$ متناقصة تماماً وموجبة، وهي من ثَمّ متقاربة. نضع $\Lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n$ ، عندئذ يكون لدينا

$$\forall n \geq 2, \quad \Lambda \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon_2 = 4$$

لأنّ $\Delta_2(X) = 1 - \frac{1}{4}X$.

①.5 من الواضح أنّ التوابع f_n و f تنتمي إلى صف التوابع المستمرّة قِطَعيّاً، ومن الواضح أيضاً أنّ متتالية التوابع $(f_n)_{n\geq 2}$ تتقارب ببساطة من التابع f . ومن جهة أخرى لدينا

$$\forall n \geq 2, \forall u \in\ ]0,4], \quad 0 \leq f_n(u) \leq \frac{e^u - 1 - u}{u^2}$$

والتكامل $\int_0^4 \frac{e^u-1-u}{u^2}\,\mathrm{d}\,u$ تكاملٌ متقاربٌ. إذن عملاً بمبرهنة التقارب للوبيغ يكون لدينا

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^4 f_n(u)\,\mathrm{d}\,u=\int_0^4 f(u)\,\mathrm{d}\,u$$

②.5 أو

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\varepsilon_n}\left(\left(1+\frac{u}{n}\right)^n-1-u\right)\frac{\mathrm{d}\,u}{u^2}=\int_0^{\Lambda}\frac{e^u-1-u}{u^2}\,\mathrm{d}\,u=F(\Lambda)$$

ولكن

$$\int_0^{\varepsilon_n}\left(\left(1+\frac{u}{n}\right)^n-1-u\right)\frac{\mathrm{d}\,u}{u^2}=1-\Delta_n(\varepsilon_n)=1$$

إذن $F(\Lambda)=1$، ومن ثَمّ $\Lambda=\ell$ استناداً إلى نتيجة السؤال 2.

الجزء الثاني

①.1 من الواضح أنّ التوابع h_n و h تنتمي إلى صف التوابع المستمرّة قِطَعيّاً، ومن الواضح أيضاً أنّ متتالية التوابع $(h_n)_{n\geq 1}$ تتقارب ببساطة من التابع h. ومن جهة أخرى لدينا

$$\forall n\geq 1,\forall u\in\mathbb{R}_+^*,\quad 0\leq h_n(u)\leq g(u)$$

وقد عرّفنا التابع g بالصيغة :

$$g:\,]0,+\infty[\,\to\mathbb{R},\ g(u)=\begin{cases}\dfrac{e^u-1}{u} & : \ 0<u\leq v_1\\ 0 & : \ v_1<u\end{cases}$$

ولمّا كان التكامل $\int_0^{\infty} g\big(u\big)\,\mathrm{d}\,u$ تكاملاً متقارباً استنتجنا عملاً بمبرهنة التقارب للوبيغ أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} h_n(u)\,\mathrm{d}\,u=\int_0^{\infty} h\ (u)\,\mathrm{d}\,u$$

②.1 أو

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{v_n}\left(\left(1+\frac{u}{n}\right)^n-1\right)\frac{\mathrm{d}\,u}{u}=\int_0^{v}\frac{e^u-1}{u}\mathrm{d}\,u$$

ولكن، بملاحظة أنّ $\int_1^x t^{k-1}\,\mathrm{d}\,t=\frac{x^k-1}{k}$ ، نرى في حالة x من $\mathbb{R}_+^*$ و n من $\mathbb{N}^*$ أنّ :

$$\begin{aligned}A_n(x)&=\frac{1}{x^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k-1}{k}=\frac{1}{x^n}\sum_{k=1}^{n}\int_1^x t^{k-1}\,\mathrm{d}\,t=\frac{1}{x^n}\int_1^x\frac{t^n-1}{t-1}\mathrm{d}\,t\\&=\frac{1}{x^n}\int_0^{n(x-1)}\left(\left(1+\frac{u}{n}\right)^n-1\right)\frac{\mathrm{d}\,u}{u}\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$A_n\left(1+\frac{v_n}{n}\right)=\left(1+\frac{v_n}{n}\right)^{-n}\int_0^{v_n}\left(\left(1+\frac{u}{n}\right)^n-1\right)\frac{\mathrm{d}\,u}{u}$$

ولكن نستنتج من كون $\lim_{n\to\infty}v_n=v$ أنّ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{v_n}{n}\right)^{-n}=e^{-v}$ ولقد أثبتنا أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{v_n}\left(\left(1+\frac{u}{n}\right)^n-1\right)\frac{\mathrm{d}\,u}{u}=\int_0^{v}\frac{e^u-1}{u}\mathrm{d}\,u$$

إذن لا بُدّ أن يكون

$$\lim_{n\to\infty}A_n\left(1+\frac{v_n}{n}\right)=e^{-v}\int_0^{v}\frac{e^u-1}{u}\mathrm{d}\,u$$

.2 ليكن $n\geq 2$، نهدف الآن إلى دراسة تحولات التابع A_n على المجال $[1,+\infty[$.

①.2 نلاحظ أنّه في حالة n من $\mathbb{N}^*$ و x من $\mathbb{R}_+^*$ لدينا

$$\begin{aligned}A_n'(x)&=\frac{-n}{x^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k-1}{k}+\frac{1}{x^n}\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}\\&=\frac{n}{x^{n+1}}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^k}{n}-\frac{x^k-1}{k}\right)}_{B_n(x)}\end{aligned}$$

حيث

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^k}{n} - \frac{x^k - 1}{k}\right) = \frac{x^{n+1} - x}{n(x-1)} - \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k - 1}{k}$$

إذن

$$\begin{aligned} B_n'(x) &= \frac{((n+1)x^n - 1)(x-1) - x^{n+1} + x}{n(x-1)^2} - \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} \\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{n(x-1)^2} - \frac{x^n - 1}{x-1} \\ &= \frac{1 - x^n + n(x-1)}{n(x-1)^2} \end{aligned}$$

②.2 ولكن، بإجراء تغيير المتحوّل $t \leftarrow 1 + \frac{u}{n}$ في التكامل التالي

$$\Delta_n(x) = 1 - \int_0^x \left(\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n - 1 - u\right)\frac{\mathrm{d}\,u}{u^2}$$

نستنتج أنّه، في حالة $x > 0$ لدينا

$$\begin{aligned} \Delta_n(x) &= 1 + \int_1^{1+x/n} \frac{1 - t^n + n(t-1)}{n(t-1)^2}\mathrm{d}\,t \\ &= 1 + \int_1^{1+x/n} B_n'(t)\,\mathrm{d}\,t = B_n\left(1 + \frac{x}{n}\right) + 1 - B_n(1) \end{aligned}$$

ولكن نستنتج من الصيغة $B_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^k}{n} - \frac{x^k - 1}{k}\right)$ أنّ $B_n(1) = 1$ ومنه

$$\Delta_n(x) = B_n\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

أو

$$\Delta_n(n(x-1)) = B_n(x)$$

③.2 نستنتج من المساواة السابقة أنّ إشارة $A_n'(x)$ على $\left[1, +\infty\right[$ هي من إشارة $\Delta_n(n(x-1))$،

وعليه

x	1		$1+\frac{\varepsilon_n}{n}$		$+\infty$
$A'_n(x)$		$+$	0	$-$	
$A_n(x)$	0	$\nearrow$	$A_n\left(1+\frac{\varepsilon_n}{n}\right)$	$\searrow$	

ولمّا كان $A_n(x) < 0$ على المجال $]0,1[$ استنتجنا من الدراسة السابقة أنّ

$$\sup_{x>0} A_n(x) = A_n\left(1+\frac{\varepsilon_n}{n}\right)$$

3. ولمّا كانت المتتالية $\left(\varepsilon_n\right)_{n\geq 2}$ متتالية متناقصة وتسعى إلى العدد ℓ استنتجنا من نتيجة السؤال 1.② أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x>0} A_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(A_n\left(1+\frac{\varepsilon_n}{n}\right)\right) = e^{-\ell}\int_0^\ell \frac{e^u-1}{u}\,\mathrm{d}\,u$$

و ℓ هو العدد الحقيقي الوحيد الذي يُحقّق

$$\int_0^\ell \frac{e^u-1-u}{u^2}\,\mathrm{d}\,u = 1$$

ولكن

$$\begin{aligned}\int_0^\ell \frac{e^u-1}{u}\,\mathrm{d}\,u &= \left[\frac{e^u-u-1}{u}\right]_0^\ell + \int_0^\ell \frac{e^u-1-u}{u^2}\,\mathrm{d}\,u\\ &= \frac{e^\ell-\ell-1}{\ell}+1 = \frac{e^\ell-1}{\ell}\end{aligned}$$

إذن

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x>0} A_n(x)\right) = \frac{1-e^{-\ell}}{\ell}$$

و ℓ هو العدد الحقيقي الوحيد الذي يُحقّق $\int_0^\ell \frac{e^u-1-u}{u^2}\,\mathrm{d}\,u = 1$. ونجد بحساب تقريبي أنّ

$$\frac{1-e^{-\ell}}{\ell} \approx 0.517\,351\,436\,894 \quad \text{و} \quad \ell \approx 1.502\,861\,017\,335$$

وهو المطلوب.

التمرين 29. تهدف هذه المسألة إلى إثبات تعميمٍ لمبرهنة قسمة التوابع من الصف C^∞.

1. ليكن $a > 0$، وليكن التابعان المستمرّان

$$h : [-a,a] \to \mathbb{R} \quad \text{و} \quad \omega : [0,1] \to \mathbb{R}$$

نعرّف في حالة x من $[-a,a]$ المقدار

$$H(x) = \int_0^1 \omega(t) h(xt)\,\mathrm{d}\,t$$

① بيّن أنّ H مستمرٌّ على $[-a,a]$.

② بيّن أنّه إذا انتمى h إلى الصف C^1 على $[-a,a]$ انتمى H أيضاً إلى الصف C^1 على $[-a,a]$.

2. لتكن $a > 0$، وليكن $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^n حيث $n \in \mathbb{N}^*$، ثُمّ لتكن k من $\mathbb{N}_n$. نفترض أنّ $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(k-1)}(0) = 0$. ثُمّ نعرّف :

$$\forall x \in [-a,a], \quad g(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 (1-t)^{k-1} f^{(k)}(xt)\,\mathrm{d}\,t$$

① أثبت أنّ $\forall x \in [-a,a], \quad f(x) = x^k g(x)$.

② أثبت بالتدريج على p من $\{0,1,\ldots,n-k\}$ أنّ g ينتمي إلى الصف C^p وأنّ

$$\forall x \in [-a,a],\ g^{(p)}(t) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 t^p (1-t)^{k-1} f^{(p+k)}(xt)\,\mathrm{d}\,t$$

3. استنتج من الدراسة السابقة صحة الخاصّة التالية:

” ليكن I مجالاً مفتوحاً من $\mathbb{R}$ ينتمي إليه العدد 0، وليكن $f : I \to \mathbb{R}$ تابعاً من الصف C^∞. ثُمّ لتكن k من $\mathbb{N}^*$، عندئذ يوجد تابع $g : I \to \mathbb{R}$ من الصف C^∞ على I يُحقّق

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{p=0}^{k-1} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p + x^k g(x).$$ “

الحل

①.1 هذا تطبيق مباشر على مبرهنة استمرار التكاملات المتعلّقة بوسيط. في الحقيقة لدينا

- التابعان $t \mapsto \omega(t)h(xt)$ و $x \mapsto \omega(t)h(xt)$ تابعان مستمرّان على المجالين $[0,1]$ و $[-a,a]$ بالترتيب.
- إذا وضعنا $M = \sup_{[0,1]} |\omega| \times \sup_{[-a,a]} |h|$ وعرّفنا $g(t) = M$ في حالة t من $[0,1]$ كان لدينا

$$\forall t \in [0,1], \forall x \in [-a,a], \quad \left|\omega(t)h(xt)\right| \leq g(t)$$

وكان التكامل $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}\,t$ متقارباً وضوحاً.

إذن استناداً إلى مبرهنة استمرار التكاملات التابعة لوسيط نستنتج أنّ H مستمرٌّ على $[-a,a]$.

②.1 هذا تطبيق مباشر على مبرهنة اشتقاق التكاملات المتعلّقة بوسيط. في الحقيقة لدينا

- مهما تكن x من $[-a,a]$ يكن التابع $t \mapsto \omega(t)h(xt)$ مستمراً على $[0,1]$.
- مهما تكن t من $[0,1]$ يقبل التابع $x \mapsto \omega(t)h(xt)$ الاشتقاق على $[-a,a]$. ومشتقه يساوي $x \mapsto t\omega(t)h'(xt)$. والتابع $t \mapsto t\omega(t)h'(xt)$ تابعٌ مستمرٌّ على المجال $[0,1]$.
- إذا وضعنا $M = \sup_{[0,1]} |\omega| \times \sup_{[-a,a]} |h'|$ وعرّفنا $g(t) = M$ في حالة t من $[0,1]$ استنتجنا أنّ

$$\forall t \in [0,1], \forall x \in [-a,a], \quad \left|t\omega(t)h'(xt)\right| \leq g(t)$$

وكان التكامل $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}\,t$ متقارباً وضوحاً.

إذن، استناداً إلى مبرهنة اشتقاق التكاملات التابعة لوسيط، نستنتج أنّ H ينتمي إلى الصف C^1 على $[-a,a]$.

①.2 لنعرّف، في حالة $1 \leq p \leq k$،

$$I_p(x) = \frac{x^p}{(p-1)!}\int_0^1 (1-t)^{p-1} f^{(p)}(xt)\,\mathrm{d}\,t \,.$$

نلاحظ أنّه في حالة $1 \le p < k$ لدينا

$$\begin{aligned} I_p(x) &= \frac{x^p}{(p-1)!}\int_0^1 (1-t)^{p-1} f^{(p)}(xt)\,\mathrm{d}\,t \\ &= \left[-\frac{x^p(1-t)^p}{p!} f^{(p)}(xt)\right]_0^1 + \frac{x^{p+1}}{p!}\int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(xt)\,\mathrm{d}\,t \\ &= I_{p+1}(x) \end{aligned}$$

إذن $I_k(x) = I_1(x)$ أو

$$I_k(x) = \int_0^1 xf'\big(xt\big)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^x f'(u)\,\mathrm{d}\,u = f(x)$$

وهذا يُكافئ القول $\forall x \in [-a,a],\ f(x) = x^k g(x)$.

②.2 في حالة $0 \le p < n-k$ نعلم أنّ $f^{(p+k)}$ ينتمي لى الصف C^1 على $[-a,a]$ وأنّ التابع $t \mapsto t^p(1-t)^{k-1}$ تابعٌ مستمرٌّ على المجال $[0,1]$ إذن، بالاستفادة من الخاصّة ②.1، نستنتج أنّ التابع

$$x \mapsto \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 t^p(1-t)^{k-1} f^{(p+k)}(xt)\,\mathrm{d}\,t$$

يقبل الاشتقاق على المجال $[-a,a]$ وأنّ مشتقّه هو التابع

$$x \mapsto \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{k-1} f^{(p+1+k)}(xt)\,\mathrm{d}\,t$$

وهذا يثبتُ أنّ التابع g ينتمي إلى الصف C^{n-k} على $[-a,a]$ وأنّه في حالة p من $\{0,\ldots,n-k\}$ و x من $[-a,a]$ لدينا

$$g^{(p)}(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 t^p(1-t)^{k-1} f^{(p+k)}(xt)\,\mathrm{d}\,t$$

.3 بتطبيق ما سبق على التابع

$$x \mapsto f(x) - \sum_{p=0}^{k} \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$$

المعرّف في جوارٍ $[-a,a]$ للصفر، محتوىً في I، نستنتج صحّة الخاصّة المطلوبة. ∎

التمرين 30. نعرّف عندما (t,x) من $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ المقدارين:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}t \quad \text{و} \quad f(t,x) = \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}$$

1. أثبت أنّ F معرّف ومستمرّ على $\mathbb{R}$.
2. أثبت أنّ F من الصف C^1 على $\mathbb{R}$ واحسب F'.
3. استنتج عبارة مبسّطة للمقدار $F(x)$ عندما ينتمي x إلى $\mathbb{R}$. واستفدْ مما سبق لحساب التكامل $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan u}{u}\right)^2 \mathrm{d}u$.

الحل

1. لنتأمّل التابع

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(u) = \begin{cases} \dfrac{\arctan u}{u} & : \ u \neq 0 \\ 1 & : \ u = 0 \end{cases}$$

نعلم أنّ التابع h ينتمي إلى الصف C^1 على مجال تعريفه، وهو يسعى إلى 0 عند اللانهاية، إذن يوجد عددٌ M يُحقّق $\forall u \in \mathbb{R}, \left|h(u)\right| \leq M$. ونلاحظ أنّ

$$f(t,x) = \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} = \frac{x}{1+t^2} h(tx)$$

في حالة $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. لنتأمّل مجالاً ما $I = [-A, A]$، عندئذ

- أيّاً كانت x من I كان التابع $t \mapsto f(t,x)$ تابعاً مستمرّاً على $\mathbb{R}_+$.
- مهما تكن t من $\mathbb{R}_+$ يكن التابع $x \mapsto f(t,x)$ تابعاً مستمرّاً على I.
- وأخيراً أيّاً كانت (t,x) من $\mathbb{R}_+ \times I$ تتحقّق المتراجحة

$$\left|f(t,x)\right| \leq \frac{M}{1+t^2}$$

والتكامل $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ تكاملٌ متقاربٌ وضوحاً.

إذن التابع $x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}t$ تابعٌ مستمرٌّ على المجال الكيفي I فهو مستمرٌّ على كامل $\mathbb{R}$.

2. ومن جهة أخرى،

- أيّاً كانت x من $\mathbb{R}$ كان التابع $t \mapsto f(t,x)$ تابعاً مستمرّاً على $\mathbb{R}_+$، وتكامله متقاربٌ.
- مهما تكن t من $\mathbb{R}_+$ يكن التابع $x \mapsto f(t,x)$ تابعاً قابلاً للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \frac{1}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}$$

والتابع $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ تابعٌ مستمرٌّ على كامل $\mathbb{R}$ أيّاً كانت قيمة t من $\mathbb{R}_+$، وكذلك مهما تكن قيمة x من $\mathbb{R}$ يكن التابع $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ تابعاً مستمرّاً على $\mathbb{R}_+$.

- وأخيراً أيّاً كانت (t,x) من $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},$ تتحقّق المتراجحة

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

والتكامل $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,t}{1+t^2}$ تكاملٌ متقاربٌ وضوحاً.

إذن ينتمي التابع $x \mapsto F(x) = \int_0^\infty f(t,x)\,\mathrm{d}\,t$ إلى الصف C^1 على كامل $\mathbb{R}$. ويكون لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}$$

فإذا افترضنا أنّ $x^2 \neq 1$ أمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{1-x^2}\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+t^2x^2}\right)\mathrm{d}\,t \\ &= \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\,|x|\right) \\ &= \frac{\pi}{2\big(1+|x|\big)} \end{aligned}$$

وهذه النتيجة تبقى صحيحة في حالة $x^2 = 1$ بسبب استمرار التابع F'.

3. وبملاحظة أنّ $F(0)=0$ نستنتج أنّ

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F(x)=\int_0^\infty \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}\,t=\operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2}\ln\bigl(1+|x|\bigr)$$

وبوجه خاص، في حالة $x=1$ نجد

$$\int_0^\infty \frac{\arctan t}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}\,t=\frac{\pi}{2}\ln 2$$

ولكن

$$\int_0^\infty \frac{\arctan t}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}\,t=\left[\frac{\arctan^2 t}{2t}\right]_0^\infty+\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\arctan^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t$$

إذن

$$\int_0^\infty \frac{\arctan^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t=\pi\ln 2$$

وهي النتيجة المطلوبة. ∎

التمرين 31.

I. ليكن $h:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{C}$ تابعاً من الصف $\mathcal{R}^{\text{loc}}$. نفترض أن التكامل $\int_0^\infty h$ متقارب وأنّ $\int_0^\infty h(t)\,\mathrm{d}\,t=\ell$. نهدف في هذا الجزء إلى إثبات أنه مهما تكن $0<\lambda$ يكن التكامل $\int_0^\infty e^{-t/\lambda}h(t)\mathrm{d}t$ متقارباً، وتتحقّق المساواة التالية:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty e^{-t/\lambda}h(t)\mathrm{d}t=\ell$$

لنعرّف إذن $H(x)=\int_0^x h(t)\mathrm{d}t$، وذلك عندما تكون $0\le x$.

1. أثبت أنه يوجد عدد $0\le M$ يُحقّق $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \bigl|H(x)\bigr|\le M$.

2. أثبت في حالة $A>0$ و $\lambda>0$ صحة المساواة

$$\int_0^A e^{-t/\lambda}h(t)\mathrm{d}t=e^{-A/\lambda}H(A)+\int_0^{A/\lambda} e^{-u}H(\lambda u)\mathrm{d}u$$

3. استنتج أنه مهما تكن $0 < \lambda$ ، يكن التكامل $\int_0^\infty e^{-t/\lambda}h(t)\mathrm{d}t$ متقارباً ويساوي $\int_0^\infty e^{-u}H(\lambda u)\mathrm{d}u$.

4. لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية ما من $\mathbb{R}_+^*$ تسعى إلى $+\infty$. نعرّف في حالة (n,u) من $\mathbb{N}\times\mathbb{R}_+$ المقدار $f_n(u) = e^{-u}H(x_n u)$. أثبت تقارب المتتالية التي حدّها العام $\int_0^\infty f_n(u)\,\mathrm{d}\,u$ ، وعيّن نهايتها.

5. استنتج أنّ $\int_0^\infty h(t)\mathrm{d}t = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty e^{-t/\lambda}h(t)\mathrm{d}t$.

II. ليكن α من $\mathbb{R}_+^*$. نعرّف، في حالة (x,t) من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ ، المقدار

$$f_\alpha(x,t) = e^{\mathrm{i}\,xt}\,t^{\alpha-1}\,e^{-t}$$

1. أثبت أن $\int_0^\infty f_\alpha(x,t)\,\mathrm{d}\,t$ متقارب بالإطلاق أيّاً كانت x من $\mathbb{R}$. نعرّف إذن

$$F_\alpha(x) = \int_0^\infty f_\alpha(x,t)\,\mathrm{d}\,t$$

2. أثبت أنّ F_α يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ثُمّ اكتب F_α' تكاملاً متعلّقاً بوسيط.

3. أوجد تابعاً أصليّاً معرّفاً على $\mathbb{R}$ للتابع $t\mapsto e^{\mathrm{i}xt}e^{-t}$. ثُمّ أثبت بإجراء مكاملة بالتجزئة أنّ

$$F_\alpha'(x) = \alpha\frac{\mathrm{i}-x}{1+x^2}F_\alpha(x)$$

4. مهما تكن x من $\mathbb{R}$ ، نعرّف

$$G_\alpha(x) = (1+x^2)^{\alpha/2}\exp(-\mathrm{i}\,\alpha\arctan x)F_\alpha(x)$$

احسب G_α' ، و استنتج أنّ

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \ G_\alpha(x) = \Gamma(\alpha)$$

5. أوجد عبارة لا تحوي على توابع مثلثية، أو على التابع Γ للمقدارين

$$\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t}}e^{-t}\mathrm{d}t \quad \text{و} \quad \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}}e^{-t}\mathrm{d}t$$

6. عيّن، في حالة (α,x) من $(\mathbb{R}_+^*)^2$ قيمة كل من التكاملين :

$$\int_0^\infty (\cos t)t^{\alpha-1}e^{-t/x}\mathrm{d}t \quad \text{و} \quad \int_0^\infty (\sin t)t^{\alpha-1}e^{-t/x}\mathrm{d}t$$

III. نهدف إلى حساب $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^\beta}\mathrm{d}t$ و $\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^\beta}\mathrm{d}t$ في حالة β من $]0,1[$.

1. أثبت تقارب التكامل $J_\alpha = \int_0^\infty e^{\mathrm{i}t}t^{\alpha-1}\mathrm{d}t$ في حالة α من $]0,1[$. يمكن إجراء مكاملة بالتجزئة.

2. نضع $J_\alpha(x) = \int_0^\infty e^{-t/x}e^{\mathrm{i}t}t^{\alpha-1}\mathrm{d}t$ في حالة $0 < x$. احسب قيمة النهاية $\lim_{x\to\infty} J_\alpha(x)$، واستنتج قيمة J_α في حالة α من $]0,1[$.

3. احسب قيمة التكاملين المطلوبين بدلالة $\Gamma(\beta)$ وتوابع مثلثيّة.

IV. ليكن λ من $\mathbb{R}_+^*$. نعرّف، في حالة (x,t) من $(\mathbb{R}_+^*)^2$ المقدار

$$k_\lambda(x,t) = (\sin t)t^{x-1}e^{-t/\lambda}$$

1. استعمل نتائج III. لكتابة قيمة التكامل $K_\lambda(x) = \int_0^\infty k_\lambda(x,t)\mathrm{d}t$.

2. احسب بطريقتين مختلفتين قيمة

$$\lim_{n\to\infty} n\left(K_\lambda\left(1+\frac{1}{n}\right) - K_\lambda(1)\right)$$

واستنتج بدلالة λ، عبارة، تحوي التابع Γ'، للتكامل $\int_0^\infty \ln t\cdot\sin t\cdot e^{-t/\lambda}\mathrm{d}t$.

3. استفدْ مما سبق لإثبات أنّ

$$\Gamma'(1) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty \ln t\cdot\sin t\cdot e^{-t/\lambda}\mathrm{d}t$$

- أثبت أن

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^1 \ln t\cdot\sin t\cdot e^{-t/\lambda}\mathrm{d}t = \int_0^1 \ln t\cdot\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\cos t - 1}{t}\mathrm{d}t$$

- بإجراء مكاملة بالتجزئة أثبت أنّ

$$\int_1^\infty \ln t \cdot \sin t \cdot e^{-t/\lambda} \mathrm{d}t = \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\int_1^\infty \frac{\cos t}{t} e^{-t/\lambda}\mathrm{d}t + \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\int_1^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-t/\lambda}\mathrm{d}t$$

- استنتج أنّ $\Gamma'(1) = \int_0^1 \frac{\cos t - 1}{t}\mathrm{d}t + \int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$.
- ليكن γ ثابت أويلر Euler. أثبت أنّ

$$\forall x > 0, \quad \int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\mathrm{d}t = \gamma + \ln x + \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$$

- أثبت أيضاً أنّ

$$\forall x > 0, \quad \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t = \gamma + \ln x + \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$$

الحل

I.1 لمّا كان التابع H تابعاً مستمرّاً على $\mathbb{R}_+$ وله نهاية منتهية تساوي ℓ عند $+\infty$ استنتجنا أنّه تابعٌ محدودٌ على $\mathbb{R}_+$. فيوجد عددٌ M يُحقّق $\forall x \in \mathbb{R}_+, \left|H(x)\right| \leq M$.

I.2. لنفترض أنّ $A > 0$ و $\lambda > 0$ عندئذ نجد بإجراء مُكاملة بالتجزئة أنّ

$$\int_0^A e^{-t/\lambda} h(t)\mathrm{d}t = e^{-A/\lambda}H(A) + \frac{1}{\lambda}\int_0^A e^{-t/\lambda}H(t)\,\mathrm{d}t$$

وبإجراء تغيير المتحوّل $t \leftarrow \lambda u$ في التكامل الأخير نجد

$$\int_0^A e^{-t/\lambda} h(t)\mathrm{d}t = e^{-A/\lambda}H(A) + \int_0^{A/\lambda} e^{-u}H(\lambda u)\mathrm{d}u$$

3.I. لتكن $\lambda > 0$. نستنتج من كون التابع H محدوداً أنّ التكامل $\int_0^\infty e^{-u}H(\lambda u)\mathrm{d}u$ متقاربٌ بالإطلاق ولأنّ $\lim_{A\to\infty} e^{-A/\lambda}H(A) = 0$ استنتجنا أنّ التكامل $\int_0^\infty e^{-t/\lambda}h(t)\mathrm{d}t$ متقاربٌ وأنّ

$$\int_0^\infty e^{-t/\lambda}h(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-u}H(\lambda u)\mathrm{d}u$$

4.I.لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية ما من $\mathbb{R}_+^*$ تسعى إلى $+\infty$. نعرّف في حالة (n,u) من $\mathbb{N}\times\mathbb{R}_+$ المقدار

$$f_n(u) = e^{-u}H(x_n u)$$

- إنّ $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من التوابع المستمرّة على $\mathbb{R}_+$.
- تتقارب متتالية التوابع $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ببساطة من التابع f المعرّف على $\mathbb{R}_+$ بالصيغة $f(u) = e^{-u}\ell$ في حالة $u > 0$ ، و $f(0) = 0$.
- أيّاً كانت n من $\mathbb{N}$ ، و u من $\mathbb{R}_+$ ، كان $\left|f_n(u)\right| \leq Me^{-u}$ ، والتكامل $\int_0^\infty e^{-u}\,\mathrm{d}\,u$ متقاربٌ.

إذن استناداً إلى مبرهنة التقارب للوبيغ يكون لدينا

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(u)\,\mathrm{d}\,u = \ell\int_0^\infty e^{-u}\,\mathrm{d}\,u = \ell$$

5.I. نستنتج إذن أنّ

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty e^{-u}H(\lambda u)\mathrm{d}u = \ell = \int_0^\infty h(t)\,\mathrm{d}\,t$$

وهذا يُكافئ، بناءً على 3.I، قولنا

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty e^{-t/\lambda}h(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^\infty h(t)\,\mathrm{d}\,t$$

II.1. لنلاحظ أنّه في حالة x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\left|f_\alpha(x,t)\right| = t^{\alpha-1}e^{-t}$$

وعليه في جوار 0، لدينا $\left|f_\alpha(x,t)\right| = O(t^{\alpha-1})$ والتكامل $\int_0^1 t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\,t$ متقارب، وفي جوار $+\infty$ لدينا $\left|f_\alpha(x,t)\right| = O(e^{-t/2})$ والتكامل $\int_1^\infty e^{-t/2}\,\mathrm{d}\,t$ متقاربٌ أيضاً. إذن $\int_0^\infty f_\alpha(x,t)\,\mathrm{d}\,t$ تكاملٌ متقاربٌ بالإطلاق أيّاً كانت x من $\mathbb{R}$ و α من $\mathbb{R}_+^*$.

II.1. لنلاحظ ما يأتي:

- مهما تكن x من $\mathbb{R}_+^*$ فالتابع $t \mapsto f_\alpha(x,t)$ تابعٌ مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+^*$ وتكامله متقاربٌ.
- مهما تكن t من $\mathbb{R}_+^*$ فالتابع $x \mapsto f_\alpha(x,t)$ ينتمي إلى الصف C^1 ولدينا

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(x,t) = \mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\,xt}t^\alpha e^{-t}$$

ومهما تكن t من $\mathbb{R}_+^*$ فالتابع $x \mapsto \frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(x,t)$ تابعٌ مستمرٌّ على كامل $\mathbb{R}$، ومهما تكن x من $\mathbb{R}$ فالتابع $t \mapsto \frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(x,t)$ تابعٌ مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+^*$.

- وأخيراً مهما تكن t من $\mathbb{R}_+^*$، و مهما تكن x من $\mathbb{R}_+^*$ فلدينا

$$\left|\frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(x,t)\right| \le t^\alpha e^{-t}$$

والتكامل $\int_0^\infty t^\alpha e^{-t}\,\mathrm{d}\,t$ تكاملٌ متقاربٌ.

إذن، استناداً إلى مبرهنة اشتقاق التكاملات المتعلّقة بوسيط، نستنتج أنّ التابع

$$x \mapsto F_\alpha(x) = \int_0^\infty f_\alpha(x,t)\,\mathrm{d}\,t$$

ينتمي إلى الصف C^1 على $\mathbb{R}$، وأنّ

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ F_\alpha'(x) = \mathrm{i}\int_0^\infty e^{\mathrm{i}\,xt}t^\alpha e^{-t}\,\mathrm{d}\,t$$

II.3. بملاحظة أنّ

$$e^{\mathrm{i}\,xt}e^{-t} = e^{(-1+\mathrm{i}\,x)t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{1}{-1+\mathrm{i}\,x}e^{(-1+\mathrm{i}\,x)t}\right)$$

نستنتج بإجراء مُكاملة بالتجزئة ما يلي :

$$\begin{aligned} F'_\alpha(x) &= \mathrm{i}\int_0^\infty e^{\mathrm{i}\,xt}t^\alpha e^{-t}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \left[\frac{\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}\,x}e^{(-1+\mathrm{i}\,x)t}t^\alpha\right]_{t=0}^\infty - \frac{\mathrm{i}\,\alpha}{-1+\mathrm{i}\,x}\int_0^\infty e^{(-1+\mathrm{i}\,x)t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \frac{\mathrm{i}\,\alpha}{1-\mathrm{i}\,x}\int_0^\infty e^{\mathrm{i}\,xt}t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \alpha\frac{-x+\mathrm{i}}{1+x^2}F_\alpha(x) \end{aligned}$$

II.4. مهما تكن x من $\mathbb{R}$ ، نعرّف

$$G_\alpha(x) = (1+x^2)^{\alpha/2}\exp(-\mathrm{i}\,\alpha\arctan x)F_\alpha(x)$$

عندئذ نلاحظ أنّ

$$G'_\alpha(x) = \frac{\alpha x}{1+x^2}G_\alpha(x) - \frac{\mathrm{i}\,\alpha}{1+x^2}G_\alpha(x) + \alpha\frac{-x+\mathrm{i}}{1+x^2}G_\alpha(x) = 0$$

وذلك مهما تكن x من $\mathbb{R}$ ، وهذا يُثبتُ أنّ التابع G_a تابعٌ ثابتٌ على كامل $\mathbb{R}$.

ولمّا كان $G_\alpha(0) = \Gamma(\alpha)$ استنتجنا أنّ $\forall x \in \mathbb{R},\ G_\alpha(x) = \Gamma(\alpha)$. وعليه

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F_\alpha(x) = \int_0^\infty e^{\mathrm{i}\,xt}t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\Gamma(\alpha)}{(1+x^2)^{\alpha/2}}e^{\mathrm{i}\,\alpha\arctan x}$$

II.5. ففي حالة $\alpha = \frac{1}{2}$ نجد

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \int_0^\infty e^{\mathrm{i}\,xt}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt[4]{1+x^2}}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\arctan x}{2}\right)$$

ولكن نعلم أنّ $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ وأنّ

$$\exp\left(\mathrm{i}\frac{\arctan x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{1+x^2}}\left(\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + \mathrm{i}\frac{x}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}\right)$$

إذن

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^\infty \cos(xt)\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^\infty \sin(xt)\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$$

II.6. في حالة (α,x) من $(\mathbb{R}_+^*)^2$ لدينا

$$\int_0^\infty e^{\mathrm{i}xu}u^{\alpha-1}e^{-u}\,\mathrm{d}\,u = \frac{\Gamma(\alpha)}{(1+x^2)^{\alpha/2}}\exp\big(\mathrm{i}\,\alpha\arctan x\big)$$

فإذا أجرينا تغيير المتحوّل $xu \leftarrow t$ استنتجنا أنّ

$$\int_0^\infty e^{\mathrm{i}\,t}t^{\alpha-1}e^{-t/x}\,\mathrm{d}\,t = \frac{x^\alpha\Gamma(\alpha)}{(1+x^2)^{\alpha/2}}\exp\big(\mathrm{i}\,\alpha\arctan x\big)$$

أو

$$\int_0^\infty \big(\cos t\big)t^{\alpha-1}e^{-t/x}\,\mathrm{d}\,t = \frac{x^\alpha\Gamma(\alpha)}{(1+x^2)^{\alpha/2}}\cos\big(\alpha\arctan x\big)$$
$$\int_0^\infty \big(\sin t\big)t^{\alpha-1}e^{-t/x}\,\mathrm{d}\,t = \frac{x^\alpha\Gamma(\alpha)}{(1+x^2)^{\alpha/2}}\sin\big(\alpha\arctan x\big)$$

III.1. لتكن α من $]0,1[$. عندئذ

$$\int_0^A e^{\mathrm{i}\,t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\,t = \left[\frac{e^{\mathrm{i}\,t}-1}{\mathrm{i}}t^{\alpha-1}\right]_0^A + \frac{\mathrm{i}}{\alpha-1}\int_0^A (e^{\mathrm{i}\,t}-1)t^{\alpha-2}\,\mathrm{d}\,t$$

وهنا نلاحظ أنّ التكامل $\int_0^\infty (e^{\mathrm{i}\,t}-1)t^{\alpha-2}\,\mathrm{d}\,t$ متقاربٌ بالإطلاق في حالة α من $]0,1[$.

فإذا استفدنا من كون $\lim_{A\to\infty}((e^{\mathrm{i}A}-1)A^{\alpha-1}) = 0$ استنتجنا أنّ $J_\alpha = \int_0^\infty e^{\mathrm{i}\,t}\,t^{\alpha-1}\mathrm{d}t$

متقاربٌ في حالة α من $]0,1[$.

III.2. نضع $J_\alpha(x) = \int\limits_0^\infty e^{-t/x} e^{\mathrm{i}\,t} t^{\alpha-1} \mathrm{d}t$ في حالة $0 < x$. عندئذ بالاستفادة من نتيجة الجزء I نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} J_\alpha(x) = J_\alpha$، ولكن وجدنا في II أنّ

$$J_\alpha(x) = \int\limits_0^\infty e^{\mathrm{i}\,t} t^{\alpha-1} e^{-t/x}\,\mathrm{d}\,t = \frac{x^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)}{(1+x^2)^{\alpha/2}} \exp\left(\mathrm{i}\,\alpha \arctan x\right)$$

فإذا جعلنا x تسعى إلى $+\infty$ استنتجنا أنّ

$$J_\alpha = \int\limits_0^\infty e^{\mathrm{i}\,t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\,t = \Gamma(\alpha)\cdot \exp\left(\mathrm{i}\frac{\alpha\pi}{2}\right) = \Gamma(\alpha)\left(\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)$$

III.3. فإذا عرّفنا $\beta = 1-\alpha$ من $]0,1[$ وجدنا أنّ

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{\mathrm{i}\,t}}{t^\beta}\,\mathrm{d}\,t = \Gamma(1-\beta)\cdot\left(\sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

ثُمّ إذا استفدنا من علاقة التمام $\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta) = \dfrac{\pi}{\sin\beta\pi}$ استنتجنا أنّ

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{\mathrm{i}\,t}}{t^\beta}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\pi}{2\Gamma(\beta)}\cdot\left(\frac{1}{\cos(\beta\pi/2)} + \mathrm{i}\frac{1}{\sin(\beta\pi/2)}\right)$$

ومنه، في حالة $0 < \beta < 1$، لدينا

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos t}{t^\beta}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\pi}{2\Gamma(\beta)\cos(\beta\pi/2)}$$

و

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t^\beta}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\pi}{2\Gamma(\beta)\sin(\beta\pi/2)}$$

وبوجه خاص نجد قيمة تكامُلَيْ فرنل Fresnel:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}\,t = \int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}\,t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

IV. ليكن λ من $\mathbb{R}_+^*$. نعرّف، في حالة (x,t) من $(\mathbb{R}_+^*)^2$ المقدار $k_\lambda(x,t) = (\sin t)t^{x-1}e^{-t/\lambda}$.

IV.1. في الحقيقة، إنّ $K_\lambda(x) = \operatorname{Im} J_x(\lambda)$، ومنه

$$\operatorname{Im} J_x(\lambda) = \int_0^\infty (\sin t)t^{x-1}e^{-t/\lambda}\,\mathrm{d}\,t = \operatorname{Im}\left(\frac{\lambda^x\cdot\Gamma(x)}{(1+\lambda^2)^{x/2}}e^{\mathrm{i}\,x\arctan\lambda}\right)$$

أو

$$K_\lambda(x) = \int_0^\infty (\sin t)t^{x-1}e^{-t/\lambda}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\lambda^x\cdot\Gamma(x)}{(1+\lambda^2)^{x/2}}\sin\big(x\arctan\lambda\big)$$

IV.2. نلاحظ من جهة أولى أنّ

$$n\left(K_\lambda\left(1+\frac{1}{n}\right)-K_\lambda(1)\right) = \int_0^\infty n(\sqrt[n]{t}-1)(\sin t)e^{-t/\lambda}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^\infty \varphi_n(t)\,\mathrm{d}\,t$$

وقد رمزنا $\varphi_n(t) = n(\sqrt[n]{t}-1)(\sin t)e^{-t/\lambda}$. وهنا نلاحظ ما يأتي:

- المتتالية $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ هي متتالية من التوابع المستمرّة على $\mathbb{R}_+^*$.
- المتتالية $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ تتقارب ببساطة من التابع $\varphi(t) = \ln t\cdot\sin t\cdot e^{-t/\lambda}$ المعرّف على $\mathbb{R}_+^*$. وذلك لأنّ $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{t}-1) = \ln t$.
- وبملاحظة أنّ $\left|e^x-1\right| \leq x\max(1,e^x)$ استناداً إلى مبرهنة التزايدات المحدودة نستنتج أنّ

$$\forall n>0,\ \forall u>0,\quad \left|n(\sqrt[n]{u}-1)\right| \leq \left|\ln u\right|\cdot\max(1,u)$$

ومن ثَمّ، مهما تكن t من $\mathbb{R}_+^*$ و n من $\mathbb{N}^*$ يكن

$$\left|\varphi_n(t)\right| \leq \left|\ln t\right|\max(1,t)e^{-t/\lambda}$$

والتكامل $\int_0^\infty \left|\ln t\right|\max(1,t)e^{-t/\lambda}\,\mathrm{d}\,t$ متقاربٌ وضوحاً.

إذن استناداً إلى مبرهنة التقارب للوبيغ نستنتج أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \varphi_n(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^\infty \varphi(t)\,\mathrm{d}\,t$$

أو

$$\lim_{n\to\infty} n\left(K_\lambda\left(1+\frac{1}{n}\right)-K_\lambda(1)\right)=\int_0^\infty \ln t\cdot\sin t\cdot e^{-t/\lambda}\,\mathrm{d}\,t$$

ولكن، من جهة ثانية، لدينا

$$\lim_{n\to\infty} n\left(K_\lambda\left(1+\frac{1}{n}\right)-K_\lambda(1)\right)=K'_\lambda(1)$$

فإذا استفدنا من الصيغة

$$K_\lambda(x)=\frac{\lambda^x\cdot\Gamma(x)}{(1+\lambda^2)^{x/2}}\sin\left(x\arctan\lambda\right)$$

استنتجنا أنّ

$$K'_\lambda(x)=\left(\ln\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}+\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}+\frac{\cos\left(x\arctan\lambda\right)}{\sin\left(x\arctan\lambda\right)}\arctan\lambda\right)\cdot K_\lambda(x)$$

ومن ثَمّ

$$K'_\lambda(1)=\left(\ln\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}+\Gamma'(1)+\frac{\arctan\lambda}{\lambda}\right)\cdot\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}$$

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\int_0^\infty \ln t\cdot\sin t\cdot e^{-t/\lambda}\,\mathrm{d}\,t=\left(\ln\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}+\Gamma'(1)+\frac{\arctan\lambda}{\lambda}\right)\cdot\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}$$

.3.IV نستنتج مما سبق أنّ

① $$\Gamma'(1)=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty \ln t\cdot\sin t\cdot e^{-t/\lambda}\mathrm{d}t$$

- بتطبيق نتيجة I على التابع h الآتي

$$t\mapsto\begin{cases}\ln t\cdot\sin t & : \quad 0<t<1\\ 0 & : \quad 1<t\end{cases}$$

نستنتج أنّ

② $$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^1 \ln t\cdot\sin t\cdot e^{-t/\lambda}\mathrm{d}t=\int_0^1 \ln t\cdot\sin t\cdot\mathrm{d}\,t$$

ونجد بإجراء مُكاملة بالتجزئة أنّ

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln t\cdot\sin t\,\mathrm{d}t &= \Big[(1-\cos t)\ln t\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos t - 1}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \frac{\cos t - 1}{t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

- وكذلك بملاحظة أنّ التابع

$$t \mapsto -\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\cos t\, e^{-t/\lambda} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\sin t\, e^{-t/\lambda}$$

تابعٌ أصلي للتابع $t \mapsto \sin t\, e^{-t/\lambda}$ نجد بالمُكاملة بالتجزئة ما يأتي :

$$\int_1^\infty \ln t \sin t\, e^{-t/\lambda}\mathrm{d}t = \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\int_1^\infty \frac{\cos t}{t}e^{-t/\lambda}\mathrm{d}t + \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}e^{-t/\lambda}\mathrm{d}t$$

وعليه بالاستفادة من I بعد ملاحظة تقارب التكاملين $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$ و $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ نستنتج أنّ

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_1^\infty \ln t\,\sin t\, e^{-t/\lambda}\mathrm{d}t = \int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t \qquad ③$$

وبتعويض ② و ③ في ① نستنتج أنّ

$$\Gamma'(1) = \int_0^1 \frac{\cos t - 1}{t}\mathrm{d}t + \int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$$

- ولمّا كان γ (ثابت Euler) يُحقق $\gamma = -\Gamma'(1)$ استنتجنا أنّ

$$-\gamma = \int_0^1 \frac{\cos t - 1}{t}\mathrm{d}t + \int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$$

لتكن إذن x من $\mathbb{R}_+^*$ عندئذ يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \gamma + \int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \gamma + \int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t + \ln x - \int_1^x \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \gamma + \ln x + \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

- ومن جهة أخرى، نعلم أنّ $\forall x > 0,\quad \Gamma'(x) = \int_0^\infty (\ln t)\,t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ ، ومن ثَمّ

$$-\gamma = \Gamma'(1) = \int_0^\infty (\ln t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

ولكن

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln t\, e^{-t}\,\mathrm{d}t &= \Big[(1-e^{-t})\ln t\,\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \ln t\, e^{-t}\,\mathrm{d}t &= \Big[-e^{-t}\ln t\,\Big]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

إذن

$$-\gamma = \Gamma'(1) = \int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

إذن في حالة x من $\mathbb{R}_+^*$ يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \gamma + \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}\,t + \int_1^x \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \gamma + \ln x + \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

وبذا يتمّ إثبات المطلوب. ∎

التمرين 32.

I. ليكن f تابعاً من الصف C^1 موجباً ومتناقصاً تماماً على $[a,+\infty[$. وليكن H تابعاً محدوداً ومن الصف C^1 على $[a,+\infty[$.

1. أثبت باستعمال مكاملة بالتجزئة أنّه في حالة $a \le \alpha < \beta$ لدينا

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)H'(t)\mathrm{d}t\right| \le 2f(\alpha)\sup_{\alpha\le t\le\beta}\left|H(t)\right|$$

2. استنتج أنّه في حالة x من $\mathbb{R}_+^*$ و $1 \le \alpha < \beta$ لدينا

$$\left|\int_\alpha^\beta \frac{t\sin(xt)}{1+t^2}\mathrm{d}t\right| \le \frac{2}{\alpha x}$$

II. نضع، في حالة x من $\mathbb{R}$، $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}\,t$.

1. أثبت تقارب التكامل السابق وذلك مهما تكن x من $\mathbb{R}$.

2. أثبتْ أنّ : $\forall x \in \mathbb{R}, \left|F(x)\right| \le \dfrac{\pi}{2}\left|x\right|$.

3. أثبتْ أنّ F يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$. احسب F' واستنتج أنه مستمر ومحدود على $\mathbb{R}$.

III. في حالة $0 < x$ و $0 < n$ نضع

$$K_n(x) = \int_0^n \frac{t\sin(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{و} \quad K(x) = \int_0^\infty \frac{t\sin(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. أثبت تقارب التكامل $K(x)$.

2. أثبت تقارب المتتالية $(K_n)_{n\geq 1}$ بانتظام على كل مجموعة من النمط $[a,+\infty[$، حيث $0<a$، من التابع K.

3. في حالة $0<x$ و $0<n$ نضع $L_n(x) = \int_0^n \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. أثبت أنّ التابع L_n يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$، واحسب مشتقه بدلالة K_n، ثُمّ استنتج أنّ التابع F' المعرّف في II. يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$، وعبّر عن F'' بدلالة K.

4. استنتج تقارب التكامل $C = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$، وأثبت أنّ

$$\forall x>0,\quad F(x) - F''(x) = C$$

IV. في حالة $0<x$، نعرّف $G(x) = \big(F(x)+F'(x)\big)e^{-x}$. احسب G'، وأثبت أنّ $\lim_{x\to\infty} G(x) = 0$، واستنتج أنّ :

$$\forall x>0,\quad G(x) = Ce^{-x}$$

أخيراً استنتج في حالة $0<x$ قيمة المقدار $F(x)+F'(x)$ وقيمة الثابت C.

نعرّف عندها المقدار $H(x) = F(x)e^x$. احسب H' واستنتج قيمة H، ثُمّ احسب $F(x)$ أيّاً كانت x من $\mathbb{R}$.

الحل

I.1. ليكن f تابعاً من الصف C^1 موجباً ومتناقصاً تماماً على $[a,+\infty[$. وليكن H تابعاً محدوداً ومن الصف C^1 على $[a,+\infty[$. باستعمال مكاملة بالتجزئة نجد أنّه في حالة $a\leq\alpha<\beta$ لدينا

$$\int_\alpha^\beta f(t)H'(t)\,\mathrm{d}t = f(\beta)H(\beta) - f(\alpha)H(\alpha) - \int_\alpha^\beta f'(t)H(t)\,\mathrm{d}t$$

ومن ثَمّ

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(t)H'(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \leq f(\beta)\big|H(\beta)\big| + f(\alpha)\big|H(\alpha)\big| + \int_{\alpha}^{\beta}\big(-f'(t)\big)\big|H(t)\big|\mathrm{d}\,t$$
$$\leq \left(f(\beta)+f(\alpha)+\int_{\alpha}^{\beta}\big(-f'(t)\big)\mathrm{d}\,t\right)\sup_{\alpha\leq t\leq\beta}\big|H(t)\big|$$
$$\leq 2f(\alpha)\cdot\sup_{\alpha\leq t\leq\beta}\big|H(t)\big|$$

.2.I لنتأمّل في حالة x من $\mathbb{R}_+^*$، التابعين $H(t)=-\dfrac{\cos(xt)}{x}$ و $f(t)=\dfrac{t}{1+t^2}$ المعرّفين على المجال $[1,+\infty[$. بتطبيق النتيجة السابقة على هذين التابعين نجد في حالة $1\leq\alpha<\beta$ ما يلي :

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\times\frac{1}{x}\leq\frac{2}{\alpha x}$$

تتيح لنا هذه النتيجة أن نثبت، اعتماداً على شرط كوشي، تقارب التكامل $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ وذلك مهما كانت قيمة x من $\mathbb{R}_+^*$.

.1.II لتكن x من $\mathbb{R}$. عندئذ، بالاستفادة من المتراجحة

$$\forall u\in\mathbb{R},\ \big|\sin u\big|\leq|u|$$

يمكننا أن نكتب

$$\forall t\in\mathbb{R}_+,\quad \left|\frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}\right|\leq\frac{|x|}{1+t^2}$$

ولأنّ التكامل $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,t}{1+t^2}$ متقاربٌ ويساوي $\dfrac{\pi}{2}$ استنتجنا أنّ التابع F المعطى بالصيغة

$$x\mapsto F(x)=\int_0^{\infty}\frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}\,t$$

معرّفٌ على كامل $\mathbb{R}$، لأنّ التكامل متقاربٌ بالإطلاق.

.2.II كما نرى مباشرة أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|F(x)\right| \leq \int_0^{\infty} \left|\frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}\right| \mathrm{d}\, t \leq \int_0^{\infty} \frac{|\,x\,|}{1+t^2} \mathrm{d}\, t = \frac{\pi}{2} |\,x\,|$$

.3.II لنضع $f(x,t) = \dfrac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}$، عندئذ

- مهما تكن x من $\mathbb{R}_+$ فالتابع $t \mapsto f(x,t)$ تابعٌ مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+$ وتكامله متقاربٌ.
- مهما تكن t من $\mathbb{R}_+$ فالتابع $x \mapsto f(x,t)$ ينتمي إلى الصف C^1 ولدينا

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\cos(xt)}{1+t^2}$$

ومهما تكن t من $\mathbb{R}_+$ فالتابع $x \mapsto f'_x(x,t)$ تابعٌ مستمرٌّ على كامل $\mathbb{R}$، ومهما تكن x من $\mathbb{R}$ فالتابع $t \mapsto f'_x(x,t)$ تابعٌ مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+$.

- وأخيراً مهما تكن t من $\mathbb{R}_+$، و مهما تكن من فلدينا

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

والتكامل $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\, t}{1+t^2}$ تكاملٌ متقاربٌ.

إذن، استناداً إلى مبرهنة اشتقاق التكاملات المتعلّقة بوسيط، نستنتج أنّ التابع

$$x \mapsto F(x) = \int_0^{\infty} f(x,t) \mathrm{d}\, t$$

ينتمي إلى الصف C^1 على $\mathbb{R}$، وأنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} \mathrm{d}\, t$$

وأخيراً، بالاستفادة من كون $\left|\cos(xt)\right| \leq 1$ نستنتج أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|F'(x)\right| \leq \frac{\pi}{2} \,.$$

.1.III نعلم بناءً على نتيجة الطلب .2.I أنّه في حالة $x > 0$ يتقارب التكامل الآتي:

$$K(x)=\int_0^{\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

III.2. نعرّف في حالة $x>0$ و $n>0$ التكامل $K_n(x)=\int_0^n\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. فنحصل على متتالية التوابع $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. لتكن $a>0$، عندئذ في حالة $x\geq a$ و $n\geq m>0$ يكون لدينا

$$\left|K_n(x)-K_m(x)\right|=\left|\int_m^n\frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\right|\leq\frac{2}{mx}\leq\frac{2}{ma}$$

وبجعل n تسعى إلى اللانهاية نستنتج أنّه في حالة $m>0$ يكون لدينا

$$\sup_{x\geq a}\left|K(x)-K_m(x)\right|\leq\frac{2}{ma}$$

وعليه فإنّ متتالية التوابع $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تتقارب بانتظام على كلّ مجموعة متراصّة من $\mathbb{R}_+^*$ نحو التابع K.

III.3. في حالة $x>0$ و $n>0$ نضع

$$L_n(x)=\int_0^n\frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{و} \quad g(x,t)=\frac{\cos(xt)}{1+t^2}$$

- مهما تكن x من $\mathbb{R}_+^*$ فالتابع $t\mapsto g(x,t)$ مستمرٌّ على $[0,n]$ وتكامله متقاربٌ.
- مهما تكن t من $[0,n]$ فالتابع $x\mapsto g(x,t)$ ينتمي إلى الصف C^1 ولدينا

$$\forall t\in[0,n],\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad g'_x(x,t)=-\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}$$

  ومهما تكن t من $[0,n]$ فالتابع $x\mapsto g'_x(x,t)$ تابعٌ مستمرٌّ على كامل $\mathbb{R}_+^*$، ومهما تكن x من $\mathbb{R}_+^*$ فالتابع $t\mapsto g'_x(x,t)$ تابعٌ مستمرٌّ على $[0,n]$.
- وأخيراً مهما تكن t من $[0,n]$، ومهما تكن x من $\mathbb{R}_+^*$، فلدينا $\left|g'_x(x,t)\right|\leq 1$، وكذلك فإنّ التكامل $\int_0^n \mathrm{d}t$ تكاملٌ متقاربٌ !.

إذن، استناداً إلى مبرهنة اشتقاق التكاملات المتعلّقة بوسيط، نستنتج أنّ التابع

$$x \mapsto L_n(x) = \int_0^n g(x,t)\,\mathrm{d}\,t$$

ينتمي إلى الصف C^1 على $\mathbb{R}_+^*$ ، وأنّ $L_n' = -K_n$.

إذن نستنتج بشأن متتالية التوابع $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ما يأتي:

- تتقارب المتتالية $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ببساطة على $\mathbb{R}_+^*$ من التابع F' .
- تنتمي التوابع L_n إلى الصف C^1 على $\mathbb{R}_+^*$.
- المتتالية $(L_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة بانتظام على كلِّ مجموعة متراصّة من $\mathbb{R}_+^*$ من التابع $-K$.

إذن التابع F' تابعٌ قابلٌ للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ولدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F''(x) = -K(x) \; .$$

III.4. ولكن في حالة $0 < x$ لدينا

$$F(x) + K(x) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{t} + t\right)\frac{\sin(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$$

إذن التكامل $C = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ متقاربٌ لأنّه يساوي $F(1)+K(1)$ ، وإذا أجرينا تغيير المتحوّل $tx = u$ في هذا التكامل استنتجنا أنّ

$$F(x) + K(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t = C$$

وعليه

$$\forall x > 0, \quad F(x) - F''(x) = C$$

IV. في حالة $0 < x$ ، نعرّف $G(x) = (F(x) + F'(x))e^{-x}$. عندئذ نلاحظ أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G'(x) = (F''(x) - F(x))e^{-x} = -Ce^{-x}$$

كما نعلم بناءً على دراستنا السابقة أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left|G(x)\right| \le \frac{\pi}{2}(1+x)e^{-x}$$

إذن $\lim_{x\to\infty} G(x) = 0$.

وهكذا نرى أنّ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; G(x) = Ce^{-x}$ ، ومن ثَمّ

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) + F'(x) = C$$

ولمّا كان التابع F' ينتمي إلى الصف C^1 على كامل $\mathbb{R}$ استنتجنا أنّ

$$C = F(0) + F'(0) = \frac{\pi}{2}$$

لنعرّف إذن، في حالة $x > 0$، المقدار $H(x) = F(x)e^x$، ولنلاحظ أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad H'(x) = (F(x) + F'(x))\, e^x = \frac{\pi}{2} e^x$$

إذن

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad H(x) = \frac{\pi}{2}(e^x - 1)$$

لأنّ $\lim\limits_{x \to 0^+} H(x) = 0$.

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّه في حالة $x \geq 0$ يكون لدينا $F(x) = \dfrac{\pi}{2}(1 - e^{-x})$ ولكنّ التابع F تابعٌ فردي إذن

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x)(1 - e^{-|x|})$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

التمرين 33. نهدف إلى دراسة بعض خواص التابع المعروف باسم تابع بِسِل Bessel من النوع الأول. في حالة x من $\mathbb{R}$، نضع

$$J(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta$$

I. توطئات.

1. مهما تكن $0 \leq n$، نضع $W_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n\theta\,\mathrm{d}\,\theta$. ادرس المتتالية $(W_n)_{n\geq 0}$ واحسب بوجه خاص W_{2n} بدلالة التابع "عاملي" و بيّن أنّ

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq W_{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

2. ليكن f تابعاً من الصف C^{n+1} على مجال I يحوي 0. ولتكن a من I. أثبت أنّ

$$f(a)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}a^k+\frac{a^{n+1}}{n\,!}\int_0^1(1-t)^n f^{(n+1)}(ta)\,\mathrm{d}\,t$$

3. استنتج، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، ما يلي :

– مهما تكن a من $\mathbb{R}$ فلدينا

$$\left|\cos a-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2k)\,!}a^{2k}\right|\leq\frac{|\,a\,|^{2n}}{(2n)\,!}\tag{1}$$

– مهما تكن $a > 0$ فلدينا

$$\left|\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{a^{2k}}W_{2k}\right|\leq\frac{W_{2n}}{a^{2n}}\tag{2}$$

يمكن الاستفادة من السؤال السابق في حالة التابع $t\mapsto(1+t)^{-1/2}$.

II. التابع J بصفته مجموع متسلسلة، وتحويلٌ تكامليٌّ متعلق به.

1. استعمل العلاقة (1) لتثبت أنّه في حالة $n\geq 1$ و x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\left|J(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2k)\,!}W_{2k}x^{2k}\right|\leq\frac{W_{2n}}{(2n)\,!}x^{2n}\tag{3}$$

2. أثبت أنّ $\forall x\in\mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(x/2)^{2n}}{(n\,!)^2}=0$.

3. استنتج أنّ

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad J(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k\,!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\tag{4}$$

4. أثبت أنه مهما تكن $p>0$ يكن التكامل $L(p)=\int_0^\infty e^{-px}J(x)\,\mathrm{d}\,x$ متقارباً.

5. أثبت أنّ

$$\left|L(p)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{p^{2k+1}}W_{2k}\right|\leq\frac{W_{2n}}{p^{2n+1}}$$

ثُمّ احسب $L(p)$ في حالة $p\geq 1$.

III. مشتقات التابع J، والمعادلة التفاضلية التي يحققها.

مهما تكن $n \geq 0$ و x من $\mathbb{R}$، نضع

$$K_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^n \cos\left(x\sin\theta + \frac{n\pi}{2}\right) \mathrm{d}\,\theta$$

1. أثبت أنّ التابع $x \mapsto K_n(x)$ قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأنّ $K_{n+1} = K_n'$. ثم استنتج أنّ J ينتمي إلى الصف C^∞ على $\mathbb{R}$ و أنّ $J^{(n)} = K_n$.
2. أثبت أنّ متتالية التوابع $(J^{(n)})_{n\geq 0}$ تتقارب بانتظام على $\mathbb{R}$ من تابع يطلب تعيينه.
3. احسب مشتق التابع $\theta \mapsto \sin(x\sin\theta)$ و استنتج أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x\,J(x) + x\,J''(x) = -J'(x) \tag{5}$$

IV. تقارب التكامل $\int_0^\infty J(x)\mathrm{d}x$ وحساب قيمته.

1. ليكن f من الصف C^1 على $[a,b]$ أثبت أنّ $\lim\limits_{x\to\infty}\int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}\,t = 0$.
2. أثبت أنه في حالة a من $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$، و x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$J'(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\sin a} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(xt)\,\mathrm{d}\,t - \frac{2}{\pi}\int_a^{\pi/2}\sin(x\sin\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\,\theta$$

3. استنتج أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} J'(x) = 0$. ثم احسب $J'(0)$، واستنتج قيمة $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{J'(x)}{x}$.
4. نقبل أنّ التكامل $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}\,t$ متقارب وقيمته $\dfrac{\pi}{2}$. نعرف $G(x) = \displaystyle\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}\,t$.

- أثبت أنّ $\forall x > 0, \left|G(x)\right| \leq \dfrac{2}{x}$.
- أثبت أنّ التابع $x \mapsto F(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} G(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta$ يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$، وأنّ $F'(x) = \dfrac{J'(x)}{x}$ في حالة $x \neq 0$، ثم استنتج أنّ

$$\forall A > 0,\quad \left|1 + \int_0^A \frac{J'(x)}{x}\mathrm{d}\,x\right| \leq \left|F(A)\right|$$

- استعمل ما سبق لإثبات تقارب التكامل $\int_0^\infty J'(x)\frac{\mathrm{d}\,x}{x}$ واحسب قيمته.

5. استفدْ مما سبق لإثبات تقارب التكامل $\int_0^\infty J(x)\,\mathrm{d}\,x$ واحسب قيمته.

V. جذور التابع J.

1. في حالة $0 < x$ نضع $H(x) = \sqrt{x}\,J(x)$. أثبت أنّ

$$\forall x > 0, \quad H''(x) + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)H(x) = 0$$

2. لتكن $0 \leq a$، ولنضع $h(x) = \sin(x-a)$. بحساب مشتق المقدار $H'h - Hh'$ أثبت أنّ

$$H(a) + H(a+\pi) = -\int_0^\pi \frac{H(x+a)}{4(x+a)^2}\sin x\,\mathrm{d}\,x$$

3. أثبت باستعمال ما سبق أن H ينعدم بالضرورة على المجال $]a, a+\pi[$، واستنتج أنّ التابع J يقبل عدداً لانهائياً من الجذور في المجال $]0, +\infty[$.

الحل

I.1. مهما تكن $0 \leq n$، نضع $W_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^n\theta\,\mathrm{d}\,\theta$.

- من الواضح أنّ المتتالية $(W_n)_{n\geq 0}$ متناقصة، لأنّ المتراجحة $0 \leq \sin x \leq 1$ في حالة x من المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ تقتضي

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right], \quad 0 \leq \sin^{n+1} x \leq \sin^n x$$

- لنفترض أنّ $2 \leq n$، عندئذ

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\left(W_{n-2} - W_n\right) &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[\frac{\sin^{n-1} x}{n-1}\cos x\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{n-1}\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

أو $\frac{1}{n-1}W_n = W_{n-2} - W_n$، وهذا يُكافئ

$$\forall n \geq 2, \quad nW_n = (n-1)W_{n-2}$$

فإذا ضربنا طرفي المساواة السابقة بالمقدار W_{n-1} استنتجنا أنّ

$$\forall n \geq 2, \quad nW_nW_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2}$$

وهذا يثبتُ أنّ المتتالية التي حدها العام nW_nW_{n-1} ثابتة وتساوي

$$W_1W_0 = \frac{2}{\pi}$$

- ومن جهة أخرى نستنتج من العلاقة التدريجيّة نفسها أنّ

$$\forall n \geq 1, \quad W_{2n} = \frac{2n-1}{2n}W_{2(n-1)}$$

ومن ثَمّ

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}W_{2n} = \frac{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2}{(2(n-1))!}W_{2(n-1)}$$

وهذا يثبتُ أنّ $\forall n \geq 1, \quad W_{2n} = \frac{1}{2^{2n}}C_{2n}^n$.

- وكذلك نلاحظ أنّه في حالة n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$2nW_{2n}^2 \leq 2nW_{2n}W_{2n-1} = \frac{2}{\pi}$$

إذن

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq W_{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

I.2. لنثبت أنّه إذا كان f تابعاً من الصف C^{n+1} على مجال I يحوي 0، وكان a من I. عندئذ

$$f(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}a^k + \frac{a^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(ta)\,\mathrm{d}t$$

في الحقيقة، هذه النتيجة صحيحة وضوحاً في حالة $n = 0$. لنفترض إذن صحّتها عند قيمة $n-1$، ولنتأمّل تابعاً f من الصف C^{n+1} على مجال I يحوي 0، ونقطة a من I .

عندئذ يكون لدينا

$$f(a)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}a^k+\frac{a^n}{(n-1)!}R_n$$

حيث

$$\begin{aligned}R_n&=\int_0^1(1-t)^{n-1}f^{(n)}(ta)\,\mathrm{d}\,t\\&=\left[-\frac{(1-t)^n}{n}f^{(n)}(ta)\right]_0^1+\frac{a}{n}\int_0^1(1-t)^n f^{(n+1)}(ta)\,\mathrm{d}\,t\\&=\frac{1}{n}f^{(n)}(0)+\frac{a}{n}\int_0^1(1-t)^n f^{(n+1)}(ta)\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

وهذا يثبت العلاقة المطلوبة في حالة n . وهي تسمّى علاقة تايلور مع باقٍ تكامليّ.

.3.I لنطبّق علاقة تايلور مع باق تكاملي على التابع $\cos$ وحتّى المرتبة $2n-1$ فنجد

$$\cos a=\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{\cos^{(k)}(0)}{k!}a^k+\frac{a^{2n}}{(2n-1)!}\int_0^1(1-t)^{2n-1}\cos^{(2n)}(ta)\,\mathrm{d}\,t$$

ولكن $\cos^{(2m)}(0)=(-1)^m$ و $\cos^{(2m+1)}(0)=0$ ، إذن

$$\cos a=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2k)!}a^{2k}+\frac{a^{2n}}{(2n-1)!}\int_0^1(1-t)^{2n-1}\cos^{(2n)}(ta)\,\mathrm{d}\,t$$

ومن ثَمّ

$$\left|\cos a-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2k)!}a^{2k}\right|\le\frac{a^{2n}}{(2n-1)!}\int_0^1(1-t)^{2n-1}\,\mathrm{d}\,t=\frac{a^{2n}}{(2n)!}$$

وهي العلاقة (1) المطلوبة.

أمّا إذا طبّقنا علاقة تايلور مع باق تكاملي على التابع $f:t\mapsto(1+t)^{-1/2}$ وحتّى المرتبة $n-1$ لوجدنا

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}u^k+\frac{u^n}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}f^{(n)}(tu)\,\mathrm{d}\,t$$

ولكن

$$\begin{aligned} f^{(k)}(u) &= \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{-1}{2}-k+1\right)(1+u)^{-\frac{1}{2}-k} \\ &= (-1)^k\,\frac{(2k)!}{2^{2k}\,k!}(1+u)^{-\frac{1}{2}-k} \end{aligned}$$

إذن

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k W_{2k}u^k + (-1)^n W_{2n}u^n\int_0^1 \frac{n(1-t)^{n-1}}{(1+tu)^{n+1/2}}\,\mathrm{d}\,t$$

إذن في حالة $0 \le u$ يكون لدينا

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{\sqrt{1+u}} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k W_{2k}u^k\right| &\le W_{2n}u^n\int_0^1 \frac{n(1-t)^{n-1}}{(1+tu)^{n+1/2}}\,\mathrm{d}\,t \\ &\le W_{2n}u^n\int_0^1 n(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}\,t = W_{2n}u^n \end{aligned}$$

وعليه بإجراء التعويض $u \leftarrow 1/a^2$ في حالة $0 < a$ نجد

$$\left|\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\,\frac{W_{2k}}{a^{2k}}\right| \le \frac{W_{2n}}{a^{2n}}$$

وهي العلاقة (2) المطلوبة.

.1.II استناداً إلى العلاقة (1) يمكننا أن نكتب في حالة $n \ge 1$ و x من $\mathbb{R}$ و θ من $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ما يأتي:

$$\left|\cos(x\sin\theta) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\sin^{2k}\theta\right| \le \frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin^{2n}\theta$$

وبالمكاملة على المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ نجد، في حالة $n \ge 1$ و x من $\mathbb{R}$، المتراجحة الآتية :

$$\left|J(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2k)!}W_{2k}x^{2k}\right| \le \frac{W_{2n}}{(2n)!}x^{2n} \tag{3}$$

II.2. لمّا كانت المتسلسلة $\sum \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n$ متقاربة، سعى حدّها العام إلى الصفر ومن ثَمّ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(x/2)^{2n}}{(n!)^2} = 0$$

II.3. ولمّا كان $\frac{W_{2n}}{(2n)!}x^{2n} = \frac{(x/2)^{2n}}{(n!)^2}$ استنتجنا بجعل n تسعى إلى $+\infty$ في (3)، أنّ:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{4}$$

II.4. استناداً إلى العلاقة $J(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta$ نستنتج مباشرة أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|J(x)\right| \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left|\cos(x\sin\theta)\right|\mathrm{d}\,\theta \leq 1$$

إذن التكامل $L(p) = \int_0^{\infty} e^{-px}J(x)\,\mathrm{d}\,x$ متقاربٌ بالإطلاق أيّاً كانت قيمة p من $\mathbb{R}_+^*$.

II.5. لنلاحظ أنّه في حالة $p > 0$ و k من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\int_0^{\infty} e^{-px}x^{2k}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{p^{2k+1}}\int_0^{\infty} u^{2k}e^{-u}\,\mathrm{d}\,u = \frac{\Gamma(2k+1)}{p^{2k+1}} = \frac{(2k)!}{p^{2k+1}}$$

وعليه نستنتج من العلاقة (3)، أنّه في حالة $p > 0$ لدينا :

$$\left|\int_0^{\infty} e^{-xp}J(x)\,\mathrm{d}\,x - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}\int_0^{\infty} e^{-px}x^{2k}\,\mathrm{d}\,x\right| \leq \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_0^{\infty} e^{-px}x^{2k}\,\mathrm{d}\,x$$

ومنه

$$\left|L(p) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{p^{2k+1}}W_{2k}\right| \leq \frac{W_{2n}}{p^{2n+1}}$$

ولمّا كان $\lim_{n\to\infty}(W_{2n}/p^{2n+1}) = 0$ في حالة $p \geq 1$ استنتجنا، استناداً إلى العلاقة (2)، أنّ

$$\forall p \geq 1, \quad L(p) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p^{2k+1}}W_{2k} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$$

III.1. مهما تكن $0 \leq n$، و x من $\mathbb{R}$، و θ من $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$، نضع

$$k_n(x,\theta) = \frac{2}{\pi}(\sin\theta)^n \cos\left(x\sin\theta + \frac{n\pi}{2}\right)$$

و
$$K_n(x) = \int_0^{\pi/2} k_n(x,\theta)\,\mathrm{d}\,\theta$$

عندئذ نلاحظ ما يأتي :

- أيّاً كانت x من $\mathbb{R}$، كان التابع $\theta \mapsto k_n(x,\theta)$ مستمرّاً ومحدوداً على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
- أيّاً كانت θ من $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$، كان التابع $x \mapsto k_n(x,\theta)$ قابلاً للاشتقاق على $\mathbb{R}$، وكان
$$\frac{\partial k_n}{\partial x}(x,\theta) = k_{n+1}(x,\theta)$$
- وأخيراً مهما تكن x من $\mathbb{R}$، و θ من $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ يكن
$$\left|\frac{\partial k_n}{\partial x}(x,\theta)\right| \leq 1$$

وتكامل التابع الثابت على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ متقاربٌ. إذن التابع $x \mapsto K_n(x)$ تابعٌ قابلٌ للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومشتقّه هو التابع $x \mapsto K_{n+1}(x)$. ولمّا كان $J = K_0$ استنتجنا مما سبق أنّ التابع J ينتمي إلى الصف C^∞ على $\mathbb{R}$، وأنّ

$$\forall n \in \mathbb{N},\ J^{(n)} = K_n$$

III.2. في الحقيقة، نستنتج من المساواة

$$J^{(n)}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^n \cos\left(x\sin\theta + \frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{d}\,\theta$$

أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\quad \left|J^{(n)}(x)\right| \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^n\,\mathrm{d}\,\theta = W_n$$

ولكنّ المتتالية $\left(W_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصة وتسعى إلى 0. إذن تسعى متتالية التوابع $(J^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ بانتظام إلى التابع الثابت الصفري.

III.3. لنلاحظ أوّلاً أنّ

$$J(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta$$
$$J'(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin\theta\sin(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta$$
$$J''(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta$$

إذن، في حالة x من $\mathbb{R}$، لدينا

$$\begin{aligned} xJ(x) + xJ''(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cos^2\theta\cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\big(\sin(x\sin\theta)\big)\,\mathrm{d}\,\theta \\ &= \left[\frac{2}{\pi}\cos\theta\sin(x\sin\theta)\right]_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin\theta\sin(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta \\ &= -J'(x) \end{aligned}$$

فنكون بذلك قد أثبتنا أنّ

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad xJ''(x) + J'(x) + xJ(x) = 0 \tag{5}$$

IV.1. ليكن f من الصف C^1 على $[a,b]$ عندئذ، في حالة $x>0$، لدينا :

$$\int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}\,t = \left[-\frac{\cos(xt)}{x}f(t)\right]_{t=a}^b + \frac{1}{x}\int_a^b f'(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}\,t$$

وعليه،

$$\forall x>0,\ \left|\int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}\,t\right| \le \frac{1}{x}\left[\left|f(a)\right| + \left|f(b)\right| + \int_a^b\left|f'(t)\right|\mathrm{d}\,t\right]$$

إذن $\lim\limits_{x\to\infty}\int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}\,t = 0$.

.2.IV لتكن a من $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ ، ولتكن x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\begin{aligned} J'(x) &= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin\theta \sin(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta \\ &= -\frac{2}{\pi}\int_0^{a} \sin\theta \sin(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta - \frac{2}{\pi}\int_a^{\pi/2} \sin\theta \sin(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta \end{aligned}$$

ولكن

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{a} \sin\theta \sin(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta \underset{\theta\leftarrow\arcsin t}{=} -\frac{2}{\pi}\int_0^{\sin a} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(xt)\,\mathrm{d}\,t$$

إذن

$$J'(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\sin a} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(xt)\,\mathrm{d}\,t - \frac{2}{\pi}\int_a^{\pi/2} \sin(x\sin\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\,\theta$$

.3.IV نستنتج إذن أنّ

$$\left|J'(x)\right| \leq \frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\sin a} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(xt)\,\mathrm{d}\,t\right| + \left(1-\frac{2a}{\pi}\right)$$

لتكن $0 < \varepsilon$ ، ولنختر a من $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ يُحقّق $\left|1-\frac{2a}{\pi}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ عندئذ بالاستفادة من .1.IV نجد x_0 تُحقّق

$$x \geq x_0 \Rightarrow \frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\sin a} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(xt)\,\mathrm{d}\,t\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

وعليه نكون قد أثبتنا أنّ

$$x \geq x_0 \Rightarrow \left|J'(x)\right| \leq \varepsilon$$

ومنه $\lim\limits_{x\to\infty} J'(x) = 0$.

ومن جهة أخرى لدينا $J'(0) = 0$. نستنتج إذن أنّ

$$\lim_{x\to 0}\frac{J'(x)}{x} = J''(0) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\,\mathrm{d}\,\theta = -\frac{1}{2}$$

4.IV. نعلم أنّ التكامل $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t$ متقارب ويساوي $\frac{\pi}{2}$. لنعرّف $G(x)=\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t$.

- لتكن x من $\mathbb{R}_+^*$ عندئذ

$$G(x)=\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t=\left[\frac{\cos x-\cos t}{t}\right]_x^\infty+\int_x^\infty \frac{\cos x-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t$$
$$=\int_x^\infty \frac{\cos x-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t$$

ومن ثَمّ

$$\left|G(x)\right|\le\int_x^\infty \frac{\left|\cos x-\cos t\right|}{t^2}\,\mathrm{d}\,t<2\int_x^\infty \frac{\mathrm{d}\,t}{t^2}=\frac{2}{x}$$

- ليكن التابع $F(x)=\int_0^{\pi/2} f(x,\theta)\,\mathrm{d}\,\theta$ $x\mapsto$ حيث $f(x,\theta)=\frac{2}{\pi}G(x\sin\theta)$. عندئذ
  - مهما تكن x من $\mathbb{R}$، فالتابع $\theta\mapsto f(x,\theta)$ تابع مستمرٌّ على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
  - مهما تكن θ من $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$، فالتابع $x\mapsto f(x,\theta)$ يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$، ويُحقّق

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\theta)=\begin{cases}-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin(x\sin\theta)}{x} & : \quad x\ne 0\\ -\frac{2}{\pi}\cdot\sin\theta & : \quad x=0\end{cases}$$

والتابع $\theta\mapsto f'_x(x,\theta)$ تابعٌ مستمرٌّ على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$، وذلك مهما كانت x من $\mathbb{R}$.

  - وأخيراً

$$\forall x\in\mathbb{R},\forall\theta\in\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right],\quad \left|f'_x(x,\theta)\right|\le\tfrac{\pi}{2}$$

وتكامل التابع الثابت متقاربٌ على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

إذن، استناداً إلى مبرهنة اشتقاق التكاملات التابعة لوسيط، نستنتج أنّ التابع F قابلٌ للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأنّ

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad F'(x)=\frac{1}{x}\left(-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta\right)=\frac{J'(x)}{x}$$

وعلى هذا يكون $F(A) = F(0) + \int_0^A F'(x)\,\mathrm{d}\,x$ ، أو

$$\forall A > 0, \quad F(A) = 1 + \int_0^A \frac{J'(x)}{x}\,\mathrm{d}\,x$$

- لنثبت أنّ $\lim_{A\to\infty} F(A) = 0$. لتحقيق ذلك نتأمّل متتالية ما $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathbb{R}_+^*$ تسعى إلى $+\infty$ ، ولنعرّف $f_n(\theta) = \frac{2}{\pi}G(a_n \sin\theta)$.
    - مهما تكن n من $\mathbb{N}$ فالتابع f_n تابعٌ مستمرٌّ على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
    - المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ببساطة من التابع ℓ المعرّف على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ كما يأتي: $\ell(0) = 1$ و $\ell(\theta) = 0$ في حالة $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. وذلك بسبب تقارب التكامل $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t$.
    - التابع G تابعٌ محدود على $\mathbb{R}_+$ لأنّه مستمرٌّ ويقبل نهاية منتهية عند $+\infty$ ، وعلى هذا يوجد ثابتٌ M يُحقّق $\forall n \in \mathbb{N}, \forall\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], \quad \left|f_n(\theta)\right| \le M$.

إذن، اعتماداً على مبرهنة التقارب للوبيغ، يكون لدينا

$$\lim_{n\to\infty} F(a_n) = \int_0^{\pi/2} \ell(\theta)\,\mathrm{d}\,\theta = 0$$

ولأنّ المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كيفيّة نستنتج أنّ $\lim_{A\to\infty} F(A) = 0$.

- وبالعودة إلى المساواة $F(A) = 1 + \int_0^A J'(x)\frac{\mathrm{d}\,x}{x}$ وجعل A تسعى إلى اللانهاية نستنتج أنّ التكامل $\int_0^\infty J'(x)\frac{\mathrm{d}\,x}{x}$ متقارب وأنّ $\int_0^\infty J'(x)\frac{\mathrm{d}\,x}{x} = -1$.

.5.IV بالعودة إلى المعادلة التفاضليّة نستنتج أنّ

$$\int_0^\infty (J(x) + J''(x))\,\mathrm{d}\,x = 1$$

ولمّا كان $J'(0) = 0$ ، و $\lim_{x\to\infty} J'(x) = 0$ ، استنتجنا أنّ $\int_0^\infty J''(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$ ومن ثَمّ

$$\int_0^\infty J(x)\,\mathrm{d}\,x = 1$$

V.1. في حالة $x > 0$ نضع $H(x) = \sqrt{x}\,J(x)$. عندئذ

$$\begin{aligned} H''(x) &= (\sqrt{x})''J(x) + 2(\sqrt{x})'J'(x) + \sqrt{x}J''(x) \\ &= -\frac{1}{4x\sqrt{x}}J(x) + \frac{1}{\sqrt{x}}J'(x) + \sqrt{x}J''(x) \\ &= -\frac{1}{4x\sqrt{x}}J(x) + \frac{1}{\sqrt{x}}\big(J'(x) + xJ''(x)\big) \\ &= -\frac{1}{4x\sqrt{x}}J(x) - \frac{1}{\sqrt{x}}\big(xJ(x)\big) \\ &= -\left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)\sqrt{x}J(x) \end{aligned}$$

وهذا يثبتُ أنّ

$$\forall x > 0, \quad H''(x) + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)H(x) = 0$$

V.2. لتكن $0 \le a$، ولنضع $h(x) = \sin(x-a)$. عندئذ نستنتج من المساواة

$$(H'h - Hh')' = H''h - Hh''$$

أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (H'h - Hh')'(x) = -\frac{H(x)}{4x^2}\sin(x-a)$$

وعليه

$$\int_a^{a+\pi} (H'h - Hh')'(x)\,\mathrm{d}\,x = -\int_a^{a+\pi} \frac{H(x)}{4x^2}\sin(x-a)\,\mathrm{d}\,x$$

ومنه

$$\Big[H'(x)\sin(x-a) - H(x)\cos(x-a) \Big]_a^{a+\pi} = -\int_0^{\pi} \frac{H(x+a)}{4(x+a)^2}\sin x\,\mathrm{d}\,x$$

أو

$$H(a) + H(a+\pi) = -\int_0^{\pi} \frac{H(x+a)}{4(x+a)^2}\sin x\,\mathrm{d}\,x \qquad (6)$$

$3.$V. لنفترض أنّ H لا ينعدم على المجال $]a,a+\pi[$ ، فهو إذن يُحافظ على إشارة ثابتة ولتكن ε على هذا المجال. عندئذ نستنتج بسبب استمرار H أنّ المقدارين $\varepsilon H(a)$ و $\varepsilon H(a+\pi)$ ينتميان إلى $\mathbb{R}_+$. ونستنتج أيضاً من العلاقة (6) أنّ المجموع $\varepsilon H(a)+\varepsilon H(a+\pi)$ سالبٌ تماماً وهذا تناقض واضح. إذن لا بُدّ أن ينعدم H ، ومن ثَمّ J ، في المجال $]a,a+\pi[$.

إذن يقبل التابع J جذراً في كلٍّ من المجالات $]2n\pi,(2n+1)\pi[$ حيث n من $\mathbb{N}^*$. وهذا يبرهن على أنّ التابع J يقبل عدداً لانهائيّاً من الجذور في $\mathbb{R}_+^*$. ∎

التمرين 34. نهدف في هذه المسألة إلى دراسة ما يسمّى بالمتوسّط **"الحسابي–الهندسي"**.

I. ليكن (a,b) من $(\mathbb{R}_+^*)^2$. نعرّف المتتاليتين $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تدريجيّاً كما يلي :

$$x_0=a,\qquad y_0=b,$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n},\ y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$$

1. أثبت أنّ $\forall n\geq 1,\quad x_n\leq y_n$.

2. أثبت أيضاً أنّ $\forall n\geq 1,\quad x_n\leq x_{n+1},\quad y_{n+1}\leq y_n$.

3. أثبت أنّ المتتاليتين $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربتان من النهاية نفسها. نسمّي هذه النهاية المتوسّط "الحسابي–الهندسي" للعددين a و b ، ونرمز إليها $\mathcal{M}(a,b)$.

4. أثبت صحة الخواص الآتية:

$$\forall(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\qquad \mathcal{M}(a,b)=\mathcal{M}(b,a)$$

$$\forall(a,b,\lambda)\in(\mathbb{R}_+^*)^3,\quad \mathcal{M}(\lambda a,\lambda b)=\lambda\mathcal{M}(a,b)$$

$$\forall(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\qquad \sqrt{ab}\leq\mathcal{M}(a,b)\leq\frac{a+b}{2}$$

5. نعرّف التابع Ω بالعلاقة : $\Omega:\ ]0,1]\to\mathbb{R}_+^*,\ \Omega(x)=\mathcal{M}(x,1)$ ، عبّر عن المقدار $\mathcal{M}(a,b)$ بدلالة Ω و a و b .

II. في حالة (a,b) من $(\mathbb{R}_+^*)^2$ نضع

$$\mathcal{D}(a,b)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}$$

1. أثبت صحة الخواص الآتية:

$$\forall(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\qquad \mathcal{D}(a,b)=\mathcal{D}(b,a)$$

$$\forall(a,b,\lambda)\in(\mathbb{R}_+^*)^3,\qquad \mathcal{D}(\lambda a,\lambda b)=\frac{1}{\lambda}\mathcal{D}(a,b)$$

$$\forall(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\qquad a\le b\Rightarrow\frac{\pi}{2b}\le\mathcal{D}(a,b)\le\frac{\pi}{2a}$$

2. عيِّن تغيير المتحوِّل $\theta=\varphi(t)$ الذي يفيد في إثبات صحة المساواة الآتية:

$$\forall(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\quad \mathcal{D}(a,b)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2t^2}}$$

3. نجري تغيير المتحوِّل $t=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\,e^x$ في التكامل السابق. عيّن α و β بدلالة a و b حتى يكون

$$\forall(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\quad \mathcal{D}(a,b)=2\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{\alpha\,\mathrm{ch}(2x)+\beta}}$$

4. أخيراً نقوم بإجراء تغيير المتحوِّل $x=\mathrm{argsh}(u)$ في التكامل السابق. استنتج أنّ

$$\forall(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\quad \mathcal{D}(a,b)=\mathcal{D}\left(\sqrt{ab},\frac{a+b}{2}\right)$$

5. ليكن (a,b) من $(\mathbb{R}_+^*)^2$، ولتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتاليتين المعرّفتين في I. جِدْ علاقة بسيطة بين $\mathcal{D}(x_{n+1},y_{n+1})$ و $\mathcal{D}(x_n,y_n)$، ثُمّ برهن أنّ:

$$\mathcal{D}(a,b)=\frac{\pi}{2\mathcal{M}(a,b)}$$

III. لتكن z_0 من $]0,1[$، ثُمّ لنعرِّف المتتالية $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بالعلاقة:

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad z_{n+1}=\frac{2\sqrt{z_n}}{1+z_n}$$

1. ادرس تقارب المتتالية $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مبيِّناً أنّها متزايدة وتسعى إلى العدد 1.
2. أوجد علاقة بين $\mathcal{D}(z_{n+1},1)$ و $\mathcal{D}(z_n,1)$.

3. استنتج أنّ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Omega(z_0) \leq \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1+z_k}{2}\right) \leq \frac{\Omega(z_0)}{z_{n+1}}$$

حيث Ω هو التابع المعرّف في I. ثُمّ استنتج من ذلك طريقة لحساب $\Omega(z_0)$ تقريبياً.

4. نريد دراسة سرعة تقارب المتتالية $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من العدد 1.

① احسب النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-z_{n+1}}{(1-z_n)^2}$.

② أثبت صحة المتراجحة $\forall n \in \mathbb{N},\ 1-z_{n+1} \leq \dfrac{(1-z_n)^2}{(1+z_0)(1+\sqrt{z_0})^2}$.

③ نعرّف العدد $K_{z_0} = \dfrac{1-z_0}{(1+z_0)(1+\sqrt{z_0})^2}$. بيّن أنّ $0 < K_{z_0} < 1$، ثمّ أثبت أنّ : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1-z_n \leq (1-z_0)K_{z_0}^{2^n-1}$.

④ نفترض أنّ $z_0 = \frac{1}{4}$. أعطِ تقديراً لعدد الحدود $z_1, z_2, \ldots, z_p$ الكافي لحساب $\Omega(1/4)$ بخطأ أصغر من 10^{-10}.

IV.

1. جِدْ علاقة تدريجيّة تفيد في حساب $\lambda_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}\theta \,\mathrm{d}\theta$، ثُمّ عيِّن λ_n بدلالة n مُستعملاً التابع عاملي.

2. لتكن α من $[0,1[$، ولنعرِّف $f_n(\theta) = \alpha^{2n}\cos^{2n}\theta$. أثبت التقارب المنتظم للمتسلسلة $\sum f_n$، ثُمّ استنتج قيمة المجموع $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\alpha^{2n}$.

3. لتكن α من $[0,1[$، ولنعرِّف $g_n(\theta) = \lambda_n\alpha^{2n}\cos^{2n}\theta$. أثبت التقارب المنتظم للمتسلسلة $\sum g_n$ ثُمّ استنتج صحة المساواة

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^2\alpha^{2n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\cos^2\theta}}$$

4. استنتج من الدراسة السابقة أنّ

$$\forall x \in]0,1], \quad \frac{1}{\Omega(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(C_{2n}^n)^2}{2^{4n}}(1-x^2)^n$$

الحل

I. ليكن (a,b) من $(\mathbb{R}_+^*)^2$. ولنعرّف المتتاليتين $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تدريجيّاً كما يأتي:

$$x_0 = a, \qquad y_0 = b,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \ y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

I.1. لمّا كان $\frac{\alpha+\beta}{2} - \sqrt{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2 \geq 0$ استنتجنا مباشرة أنّ

$$\forall n \geq 1, \quad x_n \leq y_n$$

I.2. نستنتج مما سبق، ومن كون كلٍّ من المتوسطين الحسابي والهندسي لعددين محصورين بين أصغرهما وأكبرهما أنّ

$$\forall n \geq 1, \quad x_n \leq x_{n+1}, \quad y_{n+1} \leq y_n$$

I.3. إذن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد y_1 فهي متقاربة من عددٍ λ، والمتتالية $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد 0 فهي متقاربة أيضاً من عددٍ Λ . ونستنتج من جعل n تسعى إلى اللانهاية في العلاقات التدريجيّة أنّ $\Lambda = \frac{\lambda+\Lambda}{2}$ ، ومنه $\Lambda = \lambda$. وهذا يثبت تقارب المتتاليتين $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من النهاية نفسها والتي سنرمز إليها بالرمز $\mathcal{M}(a,b)$.

I.4. لنرمز بالرمز $(x_n(a,b), y_n(a,b))_{n\in\mathbb{N}}$ إلى المتتالية المعرّفة تدريجيّاً كما يأتي :

$$x_0(a,b) = a, \qquad y_0(a,b) = b,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ x_{n+1}(a,b) = \sqrt{x_n(a,b) y_n(a,b)}, \ y_{n+1}(a,b) = \frac{x_n(a,b)+y_n(a,b)}{2}$$

- عندئذ نلاحظ مباشرة أنّ

$$y_1(a,b) = \frac{a+b}{2} = y_1(b,a) \text{ و } x_1(a,b) = \sqrt{ab} = x_1(b,a)$$

ومن ثَمّ أيّاً كان $n \geq 1$ كان $x_n(a,b) = x_n(b,a)$ و $y_n(a,b) = y_n(b,a)$ ، وهذا يثبتُ أنّ $\mathcal{M}(a,b) = \mathcal{M}(b,a)$.

- ونبرهن بالتدريج على n أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n(\lambda a, \lambda b) = \lambda x_n(a,b),\ y_n(\lambda a, \lambda b) = \lambda y_n(a,b)$$

وهذا يثبتُ أنّ $\mathcal{M}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathcal{M}(a,b)$.

- وأخيراً لـمّا كان $x_1(a,b) \leq x_n(a,b) \leq y_1(a,b)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,$ استنتجنا أنّ

$$\sqrt{ab} \leq \mathcal{M}(a,b) \leq \frac{a+b}{2}$$

I.5. نعرِّف التابع Ω بالعلاقة : $\Omega :]0,1] \to \mathbb{R}_+^*, \Omega(x) = \mathcal{M}(x,1)$، عندئذ نتوثَّق مباشرة، بالاستفادة من الخواص السابقة، أنّ

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \mathcal{M}(a,b) = \max(a,b) \cdot \Omega\left(\frac{\min(a,b)}{\max(a,b)}\right)$$

II. في حالة (a,b) من $(\mathbb{R}_+^*)^2$ نضع

$$\mathcal{D}(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} .$$

II.1. بإجراء تغيير المتحوّل $\theta \leftarrow \frac{\pi}{2} - \varphi$ في التكامل $\mathcal{D}(a,b)$ نستنتج مباشرة أنّه يساوي $\mathcal{D}(a,b)$. وكذلك فإنّه من الواضح أنّ $\mathcal{D}(\lambda a, \lambda b) = \frac{1}{\lambda}\mathcal{D}(a,b)$. وأخيراً، في حالة $a \leq b$ يكون لدينا

$$a^2 \leq a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta \leq b^2$$

وهذا يثبت أنّ

$$a \leq b \Rightarrow \frac{\pi}{2b} \leq \mathcal{D}(a,b) \leq \frac{\pi}{2a}$$

II.2. بإجراء تغيير المتحوّل $\theta = \tan t$ نجد مباشرة أنّ

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \mathcal{D}(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2t^2}}$$

.3.II ثمّ نجري تغيير المتحوّل $t=\sqrt{\frac{a}{b}}\,e^x$ في التكامل السابق، فنجد

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(a,b) &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2t^2}} = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^x\,\mathrm{d}\,x}{\sqrt{b+ae^{2x}}\cdot\sqrt{a+be^{2x}}}\\
&= \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{a+be^{-2x}}\cdot\sqrt{a+be^{2x}}} = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{a+be^{-2x}}\cdot\sqrt{a+be^{2x}}}\\
&= 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\operatorname{ch}2x}} = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{\alpha\operatorname{ch}2x+\beta}}
\end{aligned}$$

حيث $\alpha=2ab$ و $\beta=a^2+b^2$.

.4.II أخيراً بإجراء تغيير المتحوّل $x=\operatorname{argsh}(u)$ في التكامل السابق، نجد

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(a,b) &= 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{\alpha\operatorname{ch}(2x)+\beta}} = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{2\alpha\operatorname{sh}^2x+\beta+\alpha}}\\
&= 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,u}{\sqrt{1+u^2}\cdot\sqrt{2\alpha u^2+\beta+\alpha}}\\
&= 2\mathcal{D}\left(\sqrt{\alpha+\beta},\sqrt{2\alpha}\right)\\
&= \mathcal{D}\left(\sqrt{ab},\frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned}$$

فنكون قد أثبتنا العلاقة المهمّة الآتية :

$$\forall(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\quad \mathcal{D}(a,b)=\mathcal{D}\left(\sqrt{ab},\frac{a+b}{2}\right)$$

.5.II ليكن (a,b) من $(\mathbb{R}_+^*)^2$، ولتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتاليتين المعرّفتين .I
عندئذ نستنتج انطلاقاً من العلاقة السابقة أنّ

$$\forall\in\mathbb{N},\quad \mathcal{D}(x_{n+1},y_{n+1})=\mathcal{D}(x_n,y_n)$$

فجميع حدود المتتالية $\left(\mathcal{D}(x_n,y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متساوية وتساوي $\mathcal{D}(a,b)$. ونستنتج من المتراجحة

$$\forall\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{\pi}{2y_n}\le\mathcal{D}(x_n,y_n)\le\frac{\pi}{2x_n}$$

أنّ

$$\forall\in \mathbb{N}^*,\quad \frac{\pi}{2y_n}\le \mathcal{D}(a,b)\le \frac{\pi}{2x_n}$$

فإذا جعلنا n تسعى إلى $+\infty$ وجدنا أنّ

$$\mathcal{D}(a,b)=\frac{\pi}{2\mathcal{M}(a,b)}$$

III. لتكن z_0 من $]0,1[$، ثُمّ لنعرّف المتتالية $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بالعلاقة :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad z_{n+1}=\frac{2\sqrt{z_n}}{1+z_n}$$

III.1. من الواضح أنّ $0<z_0<1$. لنفترض أنّ $0<z_n<1$ عندئذ

$$\begin{aligned}z_{n+1}-z_n&=\frac{2\sqrt{z_n}}{1+z_n}-z_n=\frac{\sqrt{z_n}}{1+z_n}\left(2-\sqrt{z_n}(1+z_n)\right)\\&=\frac{\sqrt{z_n}}{1+z_n}\left(1-\sqrt{z_n}\right)\left(2+\sqrt{z_n}+z_n\right)>0\end{aligned}$$

و

$$1-z_{n+1}=1-\frac{2\sqrt{z_n}}{1+z_n}=\frac{\left(\sqrt{z_n}-1\right)^2}{1+z_n}>0$$

وهذا يثبتُ أنّ $z_n<z_{n+1}<1$. إذن لقد أثبتنا أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0<z_n<z_{n+1}<1$$

فالمتتالية $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي إذن متقاربة من عدد ℓ ينتمي إلى المجال $]0,1[$. وهذا العدد يُحقّق $\ell=\dfrac{2\sqrt{\ell}}{1+\ell}$ أو

$$\sqrt{\ell}\left(1-\sqrt{\ell}\right)\left(2+\sqrt{\ell}+\ell\right)=0$$

وهذا يقتضي أن $\ell=1$. فالمتتالية $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة وتسعى إلى العدد 1.

III.2. نعلم استناداً إلى العلاقة $\mathcal{D}(a,b)=\mathcal{D}\left(\sqrt{ab},\frac{a+b}{2}\right)$ أنّ

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(z_n,1)&=\mathcal{D}\left(\sqrt{z_n},\frac{1+z_n}{2}\right)\\&=\mathcal{D}\left(\frac{1+z_n}{2}z_{n+1},\frac{1+z_n}{2}\right)=\frac{2}{1+z_n}\mathcal{D}(z_{n+1},1)\end{aligned}$$

III.3. نستنتج إذن أنّ

$$\frac{\pi}{2\mathcal{D}(z_n,1)}=\frac{1+z_n}{2}\cdot\frac{\pi}{2\mathcal{D}(z_{n+1},1)}$$

أو

$$\mathcal{M}(z_n,1)=\frac{1+z_n}{2}\cdot\mathcal{M}(z_{n+1},1)$$

وهذا يُكافئ $\Omega(z_n)=\frac{1+z_n}{2}\cdot\Omega(z_{n+1})$، نستنتج من ذلك أنّ

$$\Omega(z_0)=\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1+z_k}{2}\right)\cdot\Omega(z_{n+1})$$

ولكن نستنتج من المتراجحة $z_{n+1}\le 1$ أنّ $z_{n+1}\le\Omega(z_{n+1})\le 1$ ومن ثَمّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \Omega(z_0)\le\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1+z_k}{2}\right)\le\frac{\Omega(z_0)}{z_{n+1}}$$

وهذا يوفّر طريقة لحساب المقدار $\Omega(z_0)$ حساباً تقريبيّاً، انطلاقاً من الصيغة

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1+z_k}{2}\right)=\Omega(z_0)$$

III.4. نريد دراسة سرعة تقارب المتتالية $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من العدد 1.

① في الحقيقة لدينا

$$\frac{1-z_{n+1}}{(1-z_n)^2}=\frac{(\sqrt{z_n}-1)^2}{(1+z_n)(1-z_n)^2}=\frac{1}{(1+z_n)(1+\sqrt{z_n})^2}$$

إذن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-z_{n+1}}{(1-z_n)^2}=\frac{1}{8}$$

فتقارب المتتالية $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هو تقاربٌ تربيعي.

② في الحقيقة إذا استفدنا من تزايد المتتالية $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ استنتجنا مما سبق أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 - z_{n+1} \leq \frac{(1-z_n)^2}{(1+z_0)(1+\sqrt{z_0})^2}$$

③ لنعرّف العدد

$$K_{z_0} = \frac{1-z_0}{(1+z_0)(1+\sqrt{z_0})^2}$$

من الواضح أنّ $0 < K_{z_0} < 1$، وأنّ المتراجحة

$$1 - z_n \leq (1-z_0)K_{z_0}^{2^n-1}$$

صحيحة في حالة $n = 0$. فإذا افترضنا صحّتها في حالة n استنتجنا مما سبق أنّ

$$\begin{aligned} 1 - z_{n+1} &\leq \frac{(1-z_n)^2}{(1+z_0)(1+\sqrt{z_0})^2} \\ &\leq \frac{(1-z_0)^2}{(1+z_0)(1+\sqrt{z_0})^2} K_{z_0}^{2^{n+1}-2} = (1-z_0)K_{z_0}^{2^{n+1}-1} \end{aligned}$$

وهي المتراجحة المطلوبة في حالة $n+1$. إذن

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 - z_n \leq (1-z_0)K_{z_0}^{2^n-1}$$

④ فعلى سبيل المثال في حالة $z_0 = \frac{1}{4}$. لدينا $\kappa = K_{1/4} = \frac{4}{15}$. ويكون

$$0 \leq \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1+z_k}{2}\right) - \Omega(z_0) \leq \left(1 - z_{n+1}\right)\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1+z_k}{2}\right) < 1 - z_{n+1}$$

ولكن تتحقّق المتراجحة $\frac{3}{4}\kappa^{2^{n+1}-1} < 10^{-10}$ بدءاً من قيمة $n = 4$، وفي هذه الحالة يكون لدينا

$$1 - z_5 \leq 1.3 \times 10^{-18}$$

ومن ثَمّ

$$0 \leq \prod_{k=0}^{4}\left(\frac{1+z_k}{2}\right) - \Omega\left(\frac{1}{4}\right) < 1.3 \times 10^{-18}$$

إذن يكفي حساب z_1 و z_2 و z_3 و z_4 ليتحقّق المطلوب.

.1.IV لحساب $\lambda_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta$ يمكننا مثلاً إجراء تغيير المتحول $\cos^2\theta = t$ لنجد

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{1} t^{n-1/2}(1-t)^{-1/2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\beta\left(n+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi\Gamma\left(n+1\right)} = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}\left(k-\tfrac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} = \frac{C_{2n}^n}{4^n}
\end{aligned}$$

.2.IV لتكن α من $[0,1[$، ولنعرِّف $f_n(\theta) = \alpha^{2n}\cos^{2n}\theta$. المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ متقاربة بالنظيم على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$، فهي متقاربة بانتظام ومجموعها يساوي $\theta \mapsto \dfrac{1}{1-\alpha^2\cos^2\theta}$. إذن

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-\alpha^2\cos^2\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{2n}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta\right)$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\alpha^{2n} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-\alpha^2\cos^2\theta} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1-\alpha^2+u^2}, && u \leftarrow \tan\theta \\
&= \frac{2}{\pi\sqrt{1-\alpha^2}}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}, && u \leftarrow \sqrt{1-\alpha^2}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}
\end{aligned}$$

IV.3. لتكن α من $]0,1[$، ولنعرِّف $g_n(\theta) = \lambda_n \alpha^{2n} \cos^{2n} \theta$. من الواضح أنّ المتسلسلة $\sum_0^\infty g_n$ متقاربة بالنظيم على المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ وذلك استناداً إلى النتيجة السابقة، فهي إذن متقاربة بانتظام ومجموعها يساوي $\theta \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha^2\cos^2\theta}}$. وعلى هذا فإنّ

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\cos^2\theta}} = \sum_{n=0}^\infty \lambda_n \alpha^{2n}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta\right) = \sum_{n=0}^\infty \lambda_n^2\alpha^{2n}$$

IV.4. وبوجه خاص لدينا في حالة x من $]0,1]$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^\infty \lambda_n^2(1-x^2)^n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{x^2\cos^2\theta+\sin^2\theta}}\\ &= \frac{2}{\pi}\mathcal{D}(x,1) = \frac{1}{\mathcal{M}(x,1)} = \frac{1}{\Omega(x)}\end{aligned}$$

فنكون قد أثبتنا

$$\forall x \in\ ]0,1],\quad \frac{1}{\Omega(x)} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(C_{2n}^n)^2}{2^{4n}}(1-x^2)^n$$

وهي النتيجة المطلوبة. ∎

دليل مفردات الجزء الثاني

يشير العدد إلى رقم الصفحة التي يظهر فيها المفهوم المشار إليه ظهوراً معنوياً.

احتلَّ الدكتور عمران قوبا المركز الثاني في مسابقة انتقاء أساتذة التعليم العالي على مستوى الجمهورية الفرنسية "أغرغاسيون" في عام 1985، وحصل على شهادة الدكتوراه في الرياضيات البحتة في اختصاص التحليل التابعي من جامعة بيير وماري كوري في باريس عام 1990.

يدرّس الدكتور قوبا الرياضيات في المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا منذ عام 1990. وقد وضع في هذه السلسلة من الكتب العلميّة أغلب الموضوعات التي درّسها في المعهد العالي في مجالات الجبر العام، والجبر الخطّي، والتحليل، والمعادلات التفاضلية، والتحليل العقدي، والتحويلات التكامليَّة وغيرها، وقد أغنى السلسلة بالعديد من الأمثلة والتطبيقات والمسائل والتمرينات.

تمثّل هذه السلسلة أداة مهمّة لكلِّ الراغبين في دراسة الرياضيّات بصفتها علماً وفنّاً قائمَيْن بذاتهما، أو لأولئك الراغبين في استعمال الرياضيّات بصفتها أداة مهمّة ومفيدة في جميع العلوم الحديثة.

في هذا الجزء الثاني من سلسلة التحليل الرياضي، يتابع القارئ ما بدأه في الجزء الأوّل فيدرس التوابع المألوفة، والنشر المحدود، ومتتاليات التوابع ومتسلسلاتها، والتكامل بمعنى ريمان، والتكاملات المعمّمة وتلك التابعة لوسيط.

ISBN 978-9933-9228-0-1

9 789933 922801

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

Higher Institute for Applied Sciences and Technology

www.hiast.edu.sy