النهـايــات و الاتصال

*** مقدمة النهايات :**

مفاهيـــم وتعاريـــف

مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة $\bar{ح}$ هى ح $\cup$ {-∞ ، ∞}

(أ) ∞ + أ = ∞ (ب) -∞ + أ = -∞ (جـ) $\frac{أ}{\infty} = \frac{أ}{-\infty} =$ صفر

(د) ∞ × أ = { -∞ ، إذا كان أ < ٠ ، ∞ ، إذا كان أ > ٠ }

(هـ) -∞ × أ = { ∞ ، إذا كان أ < ٠ ، -∞ ، إذا كان أ > ٠ }

الكمية المعينة : هى الكمية التى لها ناتج محدد (مثال) ٧ ، -٥ ، ٠ ، ٠

الكمية غير المعينة : هى التى ليس لها قيمة محددة (مثال) $\frac{٠}{٠}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، ∞ - ∞ ، ٠ × ∞

الكمية غير المعرفة : $\frac{س}{٠}$ حيث س ∋ ح – { ٠ } (مثال) $\frac{-٧}{٠}$ ، $\frac{٥}{٠}$

$\frac{س}{\pm\infty} = ٠$ حيث س ∋ ح (مثال) $\frac{٣}{\infty} = ٠$ ، $\frac{-٤}{\infty} = ٠$ ، $\frac{٣}{-\infty} = ٠$

مع تمنياتى للجميع بالنجاح و التفوق
معنا دائما فى القمة
عاشق الرياضيات المنفلوطى

اعداد الاستاذ / خالد المنفلوطى معلم خبير رياضيات ت / ٠١١٥٤٨٠٢٨١١

* بحث نهاية دالة عند نقطة :

مثال توضيحى : ليكن د(س) = س + ٣ ماذا يحدث لقيم د(س) عندما تقترب س من ٥ ؟

(أو ادرس قيم د(س) عندما تقترب س من ٥)

الحل : نكون الجدول الآتى :

س	٥.١	٥.٠١	٥.٠٠١	٥.٠٠٠١	←	٥	→	٤.٩٩٩٩	٤.٩٩٩	٤.٩٩	٤.٩
د(س)	٨.١	٨.٠١	٨.٠٠١	٨.٠٠٠١	←	٨	→	٧.٩٩٩٩	٧.٩٩٩	٧.٩٩	٧.٩

نلاحظ أن قيم د(س) تقترب من ٨ كلما اقتربت س من ٥ من اليمين و اليسار

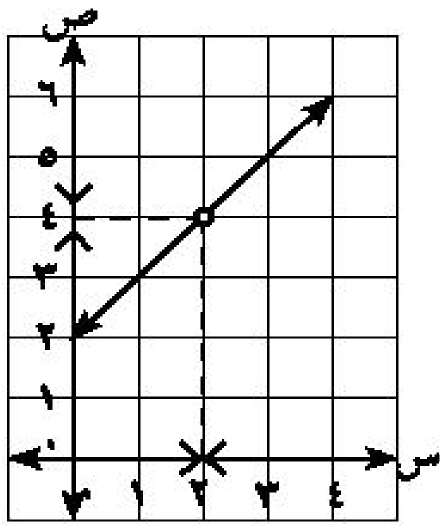
و نعبر عن ذلك بالتالى : $\lim_{س \to ٥}$ د(س) = ٨

تعريف

إذا كانت قيم د(س) تقترب من ل باقتراب س من م
فإن $\lim_{س \to م}$ د(س) = ل　حيث ل عدد حقيقى

مثال : إذا كان د(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ ، س ≠ ٢

أوجدعدديا و بيانيا: (أ) د(٢)　(ب) $\lim_{س \to ٢}$ د(س)



الحل: (أ) د(٢) = $\frac{٢^{٢} - ٤}{٢ - ٢}$ = $\frac{٠}{٠}$ كمية غير معينة

(ب) د(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ = $\frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٢)}$

= س + ٢

∴ $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ٤

نلاحظ أن : من الرسم نجد د(س) ← ٤ عندما س ← ٢ من اليمين و اليسار

د(٢^{+}) = د(٢^{-}) = ٤　∴ ∴ $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ٤

ملاحظة هامة جدا:

وجود نهاية للدالة عندما س ← ٢ لا يعنى بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = ٢

و العكس إذا كانت معرفة عند س = ٢ فهذا لا يعنى وجود نهاية للدالة عندما س ← ٢

مثال : إذا كانت الدالة د : ح – {١} ← ح حيث د(س) = { س + ٢ لكل س > ٣ ، س + ١ لكل س< ٣ }

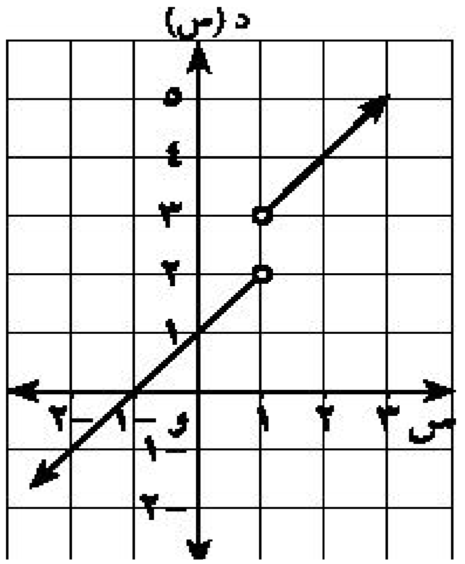
فارسم منحنى هذه الدالة و ادرس قيم د(س) عندما س ← ١

و ابحث وجود نهـا د(س)
س ← ١

الحل: نكون الجدول:　　　س >١　　　　س < ١

س	١.١	١.٠١	١.٠٠١	٠٠٠٠	←	١	١	→	٠.٩٩٩	٠.٩٩	٠.٩
د(س)	٣.١	٣.٠١	٣.٠٠١	٠٠٠٠	←	٣	٢	→	١.٩٩٩	١.٩٩	١.٩

من الجدول و الرسم البيانى نجد :



د(س) ← ٣ عندما س ← ١ من جهة اليمين

د(س) ← ٢ عندما س ← ١ من جهة اليسار

∴ د(١^+) ≠ د(١^-)

∴ نهـا د(س) ليس لهـا وجود
س ← ١

<u>ملحوظة</u> : د(١) غير معرفة حيث مجال د(س) = ح - {١}

مثال : إذا كانت الدالة د : ح – {٢}← ح حيث د(س) = { ـ ٣ عندما س> ٢ ، ٣ عندما س< ٢ }

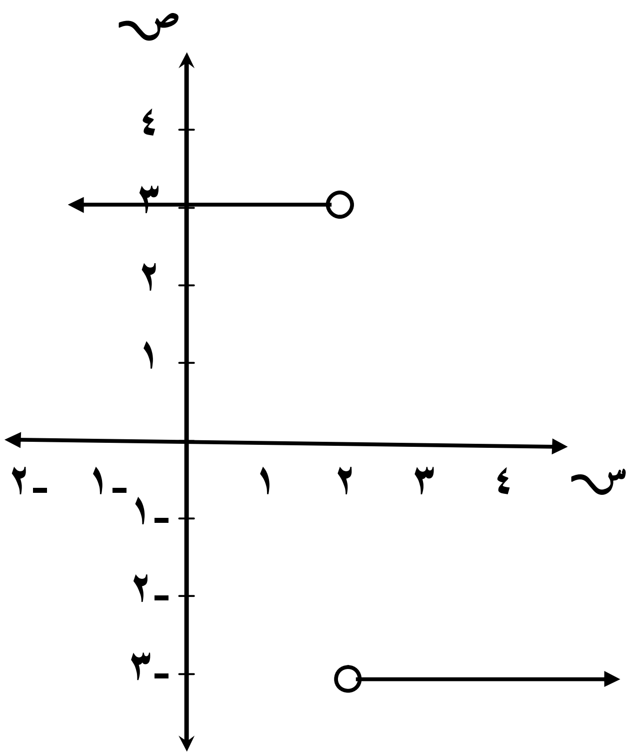
فارسم منحنى هذه الدالة و ادرس قيم د(س) عندما س ← ٢

و ابحث وجود نهـا د(س)
س ← ٢

الحل: نكون الجدول :

س	د(س)
٢.١	ـ ٣
٢.٠١	ـ ٣
٢.٠٠١	ـ ٣
....	....
↓	↓
٢	ـ ٣
س > ٢	$س \leftarrow ٢^{+}$

س	د(س)
١.٩	٣
١.٩٩	٣
١.٩٩٩	٣
....	....
↓	↓
٢	٣
س < ٢	$س \leftarrow ٢^{-}$



∵ د(٢ $^{+}$) ≠ د(٢ $^{-}$) ∴ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ د(س) ليس لها وجود ، د(٢) غير معرفة

مثال : إذا كانت د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٥ & ، س \geq ١ \\ م\ س & ، س < ١ \end{cases}$ وكانت $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}$ د(س) موجودة فما قيمة م

الحل :

د(س)	م س	س² + ٥
س	←	→
	١	

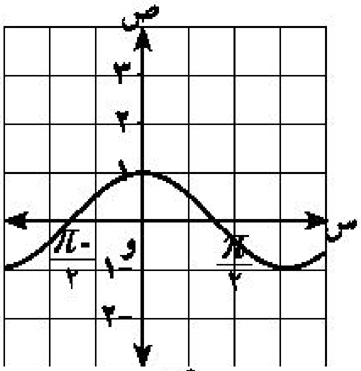
∵ د(١ $^{+}$) = $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نها}}$ د(س) = (١)^{٢} + ٥ = ٦ ، د(١ $^{-}$) = $\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نها}}$ د(س) = م (١) = م

∵ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}$ د(س) موجودة ∴ د(١ $^{+}$) = د(١ $^{-}$) ∴ م = ٦

مع تمنياتى للجميع بالنجاح و التفوق
معنا دائما فى القمة
عاشق الرياضيات المنفلوطى

تمارين على ايجاد النهاية بيانيا وعدديا

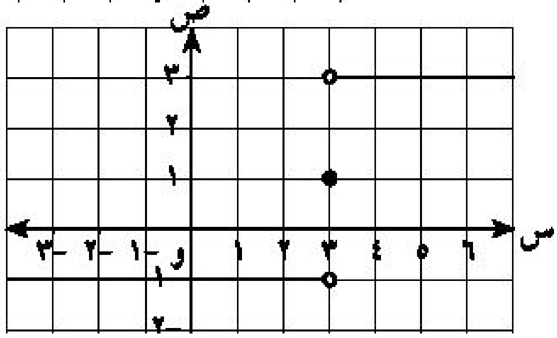
① من الرسم البيانى أوجد:



(أ) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ د(س)

(ب) د(٠)

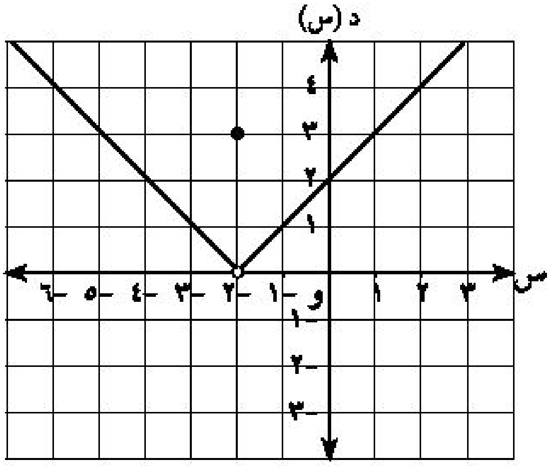
② من الرسم البيانى المقابل أوجد



(أ) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ د(س)

(ب) د(٣)

③ من الرسم البيانى المقابل أوجد:



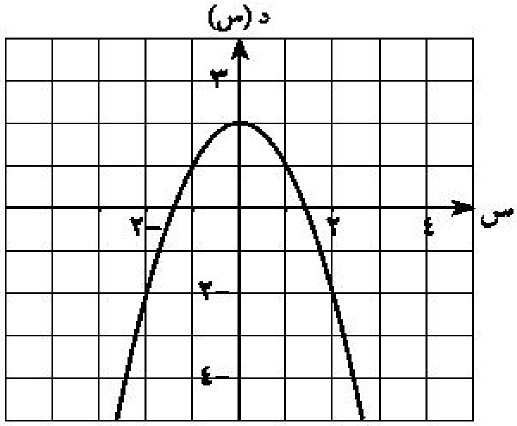
(أ) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}}$ د(س)

(ب) د(-٢)

(ج) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ د(س)

(د) د(٠)

④ من الشكل البيانى المقابل أوجد:



د(س) = ٢ − س^{٢}

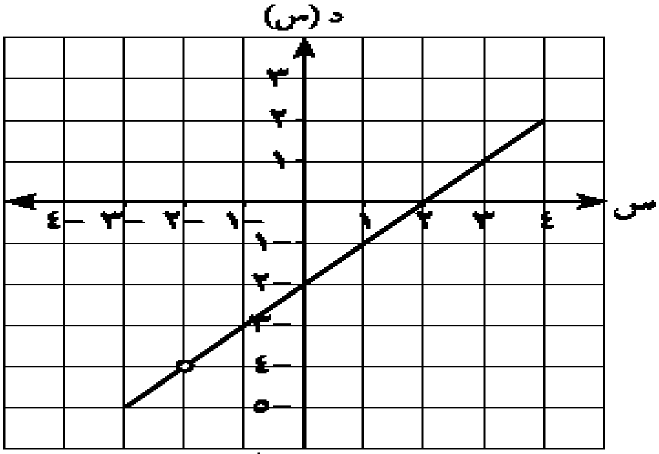
(أ) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ (٢ - س^{٢})

(ب) د(٠)

⑤ من الشكل البياني المقابل أوجد:

(أ) $\underset{س \leftarrow -٢}{نهــا} \frac{س^٢ - ٤}{س + ٢}$

(ب) د(− ٢)



$د(س) = \frac{س^٢-٤}{س+٢}$

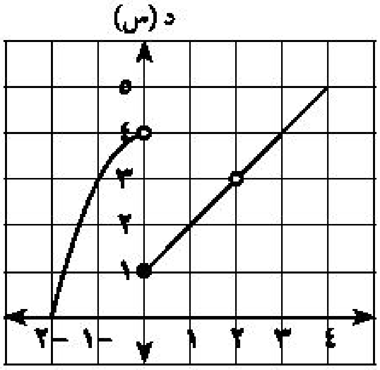
⑥ من الشكل البياني المقابل أوجد:

(أ) د (٠)

(ب) $\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا}$ د(س)

(ج) د (٢)

(د) $\underset{س \leftarrow ٢}{نهــا}$ د(س)



⑦ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\underset{س \leftarrow ٢}{نهــا}$ د(س) حيث د(س) = ٥ س + ٤

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)					؟				

⑧ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\underset{س \leftarrow -١}{نهــا}$ (٣ س + ١)

س	-٠,٩	-٠,٩٩	-٠,٩٩٩	←	-١	→	-١,٠٠١	-١,٠١	-١,١
د(س)					؟				

⑨ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\lim_{س \to -1} \frac{س^2 - 1}{س + 1}$

س	-٠,٩	-٠,٩٩	-٠,٩٩٩	⟵	-١	⟶	-١,٠٠١	-١,٠١	-١,١
د(س)					؟				

⑩ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\lim_{س \to 2} \frac{س - 2}{س^2 - 4}$

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	⟵	٢	⟶	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)					؟				

⑪ إذا كانت الدالة د معرفة على ح حيث د(س) = $\begin{cases} س + 2 & \text{لكل } س \geqslant 0 \\ س - 1 & \text{لكل } س < 0 \end{cases}$ ارسم منحنى هذه الدالة ثم ابحث وجود $\lim_{س \to 0}$ د(س)

⑫ إذا كانت الدالة د معرفة على ح حيث د (س) = $\begin{cases} 2 & \text{عندما } س \geqslant 1 \\ س^2 + 1 & \text{عندما } س < 1 \end{cases}$ ارسم منحنى هذه الدالة ثم ابحث وجود $\lim_{س \to 1}$ د(س)

⑬ إذا كانت الدالة د معرفة كالآتى: د(س) = $\begin{cases} \frac{س^2 - 9}{س + 3} & \text{لكل } س \neq -3 \\ ك & \text{عند } س = -3 \end{cases}$

كون جدولًا لبحث قيم الدالة عندما س تقترب من -٣ ثم أوجد قيمة ك إذا كان د(-٣) = $\lim_{س \to -3} \frac{س^2 - 9}{س + 3}$

نهاية دالة عند نقطة عندما س ← ٢ جبريا

* **مفهوم نهاية دالة عند نقطة :**

مثال : توضيحى : أوجد قيمة د(س) = $\frac{س^2 - 4}{س - 2}$ عندما س = 2 بالتعويض المباشر فى الدالة نحصل على :

د(2) = $\frac{2^2 - 4}{2 - 2}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ (كمية غير معينة)

لذلك نحاول تعيين قيمة الدالة بجوار العدد 2 أى عندما س تقترب من 2 من جهة اليمين أو اليسار و تكتب نها د(س)
س ← ٢

$\lim_{س \to 2} \frac{س^2 - 4}{س - 2} = \lim_{س \to 2} \frac{(س - 2)(س + 2)}{س - 2} = \lim_{س \to 2} (س + 2) = 4$

ملاحظة (1) : علامة (←) (تقرأ تؤول الى أو تقترب من) تعامل معاملة علامة (=) من حيث أى عملية حسابية (ضرب أو قسمة أو أضافة أو طرح)
فمثلا س ← 1 تعنى 2 س ← 2 ، س + 3 ← 4 و هكذا

ملاحظة (2) : إذا كان س ← ٢ فإن س − ٢ ← 0 و يسمى (س − ٢) **العامل الصفرى**

نظرية : (نهاية الدالة كثيرة الحدود)

إذا كانت الدالة كثيرة حدود (غير كسرية) فإننا نحصل على نهايتها بالتعويض المباشر عن س = ٢ فى قاعدة الدالة . $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = د(٢)

فمثلا : $\lim_{س \to -2} (س^2 - 3 س + 1) = (-2)^2 - 3 \times (-2) + 1 = 11$

$\lim_{س \to 1} (5 س^3 - 4)^3 = [5 \times (1)^3 - 4]^3 = (5 \times 1 - 4)^3 = 1^3 = 1$

نتيجة 1 : $\lim_{س \to ٢}$ س = ٢ مثل : $\lim_{س \to 3}$ س = 3 ، $\lim_{س \to -5}$ س = −5

نتيجة ٢ : $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \ \text{حـ} = \text{حـ}$ حيث حـ $\in$ ح مثل : $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \ ٣ = ٣$ ، $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \ -٤ = -٤$

ملاحظة : إذا كانت الدالة ثابتة فإن نهايتها تساوى الثابت نفسه عندما س تؤول الى اى عدد

*** نظـــرية :** إذا كانت $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \ \text{د(س)} = \text{ل}$ ، كان $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \ \text{ر(س)} = \text{م}$ فإن :

(١) $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \ [\ \text{د(س)} \pm \text{ر(س)}\ ] = \underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \ \text{د(س)} \pm \underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \ \text{ر(س)}$

(٢) $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \ [\ \text{ك} \times \text{د(س)}\ ] = \text{ك} \times \underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \ \text{د(س)} = \text{ك} \times \text{ل}$ ، ك $\in$ ح

(٣) $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \ [\ \text{د(س)} \times \text{ر(س)}\ ] = \underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \ \text{د(س)} \times \underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \ \text{ر(س)} = \text{ل} \times \text{م}$

(٤) $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \ \dfrac{\text{د(س)}}{\text{ر(س)}} = \dfrac{\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \ \text{د(س)}}{\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \ \text{ر(س)}} = \dfrac{\text{ل}}{\text{م}}$ ، م $\neq$ ٠

مثال : أوجد كلا من النهايات الآتية :

(أ) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \ \dfrac{\text{س}^٢ - ٣}{٢\text{س} + ١}$ (ب) $\underset{\text{س} \to -٣}{\text{نهـا}} \ \sqrt{٢\text{س}^٢ + ١}$ (جـ) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \ \text{س}\ (\text{س} - ٢)$

الحل :

(أ) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \ \dfrac{\text{س}^٢ - ٣}{٢\text{س} + ١} = \dfrac{٢^٢ - ٣}{٢ \times ٢ + ١} = \dfrac{١}{٥}$

حل آخر : $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \ \dfrac{\text{س}^٢ - ٣}{٢\text{س} + ١} = \dfrac{\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} (\text{س}^٢ - ٣)}{\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} (٢\text{س} + ١)} = \dfrac{٢^٢ - ٣}{٢ \times ٢ + ١} = \dfrac{١}{٥}$

(ب) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \ \sqrt{٢\text{س}^٢ + ١} = \sqrt{٢ \times ٢^٢ + ١} = \sqrt{٩} = ٣$

(جـ) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \ \text{س}\ (\text{س} - ٢) = \underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \ \text{س} \times \underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \ (\text{س} - ٢) = ١ \times (١ - ٢) = ١ \times -١ = -١$

نهاية دالة الكسر الجبرى عندما س ⟵ م

نعوض تعويض مباشر فى الدالة أى نوجد د(م) : فينتج إحدى الاحتمالات الثلاثة التالية :

(١) إذا كان د(م) = عدد حقيقى (ليكن ل مثلا) فإن $\lim_{س \to م}$ د(س) = ل (العدد الحقيقى)

مثال : أوجد $\lim_{س \to ٣} \frac{٢ س^{٢} + ١}{٥ س - ١}$

الحل : د (٣) = $\frac{٢ \times ٣^{٢} + ١}{٥ \times ٣ - ١} = \frac{١٩}{١٤}$ (عدد حقيقى)

$\therefore \lim_{س \to ٣} \frac{٢ س^{٢} + ١}{٥ س - ١} = \frac{١٩}{١٤}$

---

(٢) إذا كان د(م) = $\frac{\text{عدد حقيقى}}{\text{صفر}} = \infty$ أو - ∞ (كمية غير معرفة) فإن الدالة ليس لها نهاية

مثال : أوجد $\lim_{س \to -٣} \frac{س^{٢} - ١}{س + ٣}$

$\because$ د(- ٣) = $\frac{(-٣)^{٢} - ١}{-٣ + ٣} = \frac{٩ - ١}{\text{صفر}} = \frac{٨}{\text{صفر}} = \infty$

$\therefore$ الدالة $\frac{س^{٢} - ١}{س + ٣}$ ليس لها نهاية عندما س ⟵ - ٣

---

(٣) إذا كان د(م) = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (كمية غير معينة)

فأننا يجب أن نتخلص من العامل الصفرى بإحدى الطرق الاتية :

التحليل - القسمة المطولة - الضرب فى المرافق - القانون

ملحوظة هامة : يمكن تعديل المعادلة الرمزية التى توجد أسفل " نها " " س ⟵ ١ " عندما يكون أساس الحد الاول فى البسط و المقام و المقام على شكل قوس لكى تتوفر الشروط السابق ذكرها ثم إيجاد النهاية بعد ذلك

التعويض المباشر :

مثال : أوجد قيمة (١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ٢}{س^٢ - ٢}$ (٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{٢س + ٣}{س - ٣}$

الحل :

(١) $د(٢) = \frac{(٢)^٢ + ٢}{(٢)^٢ - ٢} = \frac{٦}{٢} = ٣$

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ٢}{س^٢ - ٢} = ٣$

(٢) $د(س) = \frac{٢ \times ٣ + ٣}{٣ - ٣} = \frac{٩}{} = \infty$ (كمية غير معرفة)

∴ الدالة ليس لها نهاية

---

* خطوات إيجاد نهاية دالة كسرية باستخدام طريقة التحليل :

١) نحلل كل من البسط و المقام تحليلا كاملا إلى عدة عوامل أحدها العامل الصفرى .

٢) نختصر العامل الصفرى من البسط و المقام

٣) نعوض عن س = ﺃ مع حذف رمز " نهـا "

العامل الصفرى يعتبر قوس هدية من قوسي التحليل و كل الى عليك تجيب القوس الثانى

مثال : أوجد قيمة (١) $\lim_{س \to ١} \frac{٣س^٢ - ٣}{س - ١}$ (٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - س - ٢}{س^٢ - ٢س}$

الحل :

(١) $د(١) = \frac{٣ \times (١)^٢ - ٣}{١ - ١} = \frac{صفر}{صفر}$ (كمية غير معينة)

∴ $د(س) = \frac{٣\ (س^٢ - ١)}{(س - ١)}$

$= \frac{٣\ (س - ١)(س + ١)}{(س - ١)}$

$= ٣\ (س + ١)$

∴ $\lim_{س \to ١} د(س) = ٣\ (١ + ١) = ٦$

(٢) $د(٢) = \frac{٢^٢ - ٢ - ٢}{٢^٢ - ٢ \times ٢} = \frac{صفر}{صفر}$ (كمية غير معينة)

∴ $د(س) = \frac{(س - ٢)(س + ١)}{س\ (س - ٢)}$

$= \frac{(س + ١)}{س}$

∴ $\lim_{س \to ٢} د(س) = \frac{٢ + ١}{٢} = \frac{٣}{٢}$

مثال : أوجد قيمة (١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\sqrt{س} - \sqrt{٢}}$ (٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{(٣س - ٢)^٢ - ٤}{٥س}$

الحل :

(١) د(١) = $\frac{٢ - ٢}{\sqrt{٢} - \sqrt{٢}}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ (كمية غير معينة)

د(س) = $\frac{(\sqrt{س} - \sqrt{٢})(\sqrt{س} + \sqrt{٢})}{(\sqrt{س} - \sqrt{٢})}$ = $\sqrt{س} + \sqrt{٢}$

∴ $\lim\limits_{س \to ٢}$ د(س) = $\sqrt{٢} + \sqrt{٢}$ = ٢ $\sqrt{٢}$ [يراعى الحلول أخرى]

(٢) د(٠) = $\frac{(٣ \times ٠ - ٢)^٢ - ٤}{٥ \times ٠}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ (كمية غير معينة)

د(س) = $\frac{(٣ س - ٢)^٢ - ٤}{٥ س}$ = $\frac{٩ س^٢ - ١٢ س + ٤ - ٤}{٥ س}$ = $\frac{٩ س^٢ - ١٢ س}{٥ س}$

= $\frac{٣ س (٣ س - ٤)}{٥ س}$ = $\frac{٣ (٣ س - ٤)}{٥}$

∴ $\lim\limits_{س \to ٠}$ د(س) = $\frac{٣ (٣ \times ٠ - ٤)}{٥}$ = $\frac{-١٢}{٥}$

[يراعى الحلول الاخرى]

مثال : أوجد قيمة (١) $\lim\limits_{س \to \frac{٣}{٤}} \frac{١٦ س^٢ - ٩}{٨ س - ٦}$ (٢) $\lim\limits_{س \to -١} \frac{(س + ٣)^٣ - ٨}{س^٢ - ٧ س - ٨}$

الحل :

(١) لاحظ أن : س ← $\frac{٣}{٤}$ تعنى ٤ س ← ٣

د($\frac{٣}{٤}$) = $\frac{١٦ \times (\frac{٣}{٤})^٢ - ٩}{٨ \times \frac{٣}{٤} - ٦}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ (كمية غير معينة)

∴ د(س) = $\frac{١٦ س^٢ - ٩}{٨ س - ٦}$ = $\frac{(٤ س - ٣)(٤ س + ٣)}{٢ (٤س - ٣)}$ = $\frac{٤ س + ٣}{٢}$

∴ $\lim\limits_{٤س \to ٣}$ د(س) = $\frac{٣ + ٣}{٢}$ = ٣

(٢) د(- ١) = $\frac{(- ١ + ٣)^٣ - ٨}{(-١)^٢ - ٧ \times (- ١) - ٨}$ = $\frac{٨ - ٨}{١ + ٧ - ٨}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ (كمية غير معينة)

$$\therefore\ \text{د(س)} = \frac{[(\text{س} + \text{٣}) - \text{٢}]\,[(\text{س} + \text{٣})^{\text{٢}} + \text{٢}\,(\text{س} + \text{٣}) + \text{٤}]}{(\text{س} + \text{١})(\text{س} - \text{٨})}$$

$$= \frac{(\text{س} + \text{١})\,[\text{س}^{\text{٢}} + \text{٦ س} + \text{٩} + \text{٢س} + \text{٦} + \text{٤}]}{(\text{س} + \text{١})(\text{س} - \text{٨})}$$

$$= \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٨ س} + \text{١٩}}{\text{س} - \text{٨}} \qquad \therefore\ \lim_{\text{س} \to -\text{١}} \text{د(س)} = \frac{(-\text{١})^{\text{٢}} + \text{٨} \times (-\text{١}) + \text{١٩}}{-\text{١} - \text{٨}}$$

$$= \frac{\text{١٢}}{-\text{٩}} = \frac{-\text{٤}}{\text{٣}}$$

مثال : أوجد قيمة $\lim_{\text{س} \to \text{١}} \left(\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{س} - \text{١}} - \frac{\text{٣} - \text{٢ س}}{\text{س} - \text{١}} \right)$

الحل : $\text{د(١)} = \frac{\text{١}}{\text{٠}} - \frac{\text{١}}{\text{٠}} = \infty - \infty$ **(كمية غير معينة)**

وحد المقامات ثم حلل و اختصر العامل الصفرى

$$\text{د(س)} = \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣} + \text{٢ س}}{(\text{س} - \text{١})} = \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢ س} - \text{٣}}{(\text{س} - \text{١})} = \frac{(\text{س} - \text{١})(\text{س} + \text{٣})}{(\text{س} - \text{١})} = \text{س} + \text{٣}$$

$$\therefore\ \lim_{\text{س} \to \text{١}} \text{د(س)} = \text{١} + \text{٣} = \text{٤}$$

طريقة القسمة الطولة : [قسمة ثم ضرب ثم طرح]

لا نلجأ لهذه الطريقة إلا إذا تعذر علينا التحليل و خطوات القسمة هى : يجب ترتيب حدود المقسوم و المقسوم عليه تنازليا ثم نقوم (بالقسمة ، الضرب ، الطرح)

مثال : أوجد قيمة $\lim_{\text{س} \to -\text{٢}} \frac{\text{٢ س}^{\text{٣}} + \text{٣ س}^{\text{٢}} + \text{٤}}{\text{س}^{\text{٣}} + \text{٨}}$

الحل : البسط $= \text{٢ س}^{\text{٣}} + \text{٣ س}^{\text{٢}} + \text{٤}$

$$\begin{array}{l|l}
\text{٢ س}^{\text{٣}} + \text{٣ س}^{\text{٢}} + \quad + \text{٤} & \text{س} + \text{٢} \\
\mp \text{٢ س}^{\text{٣}} \mp \text{٤ س}^{\text{٢}} & \hline \text{٢ س}^{\text{٢}} - \text{س} + \text{٢} \\
\hline
-\text{س}^{\text{٢}} + \quad + \text{٤} & \\
\pm \text{س}^{\text{٢}} \pm \text{٢ س} & \\
\text{٢ س} + \text{٤} & \\
\mp \text{٢ س} \mp \text{٤} & \\
\hline
\text{٠} \quad \text{٠} &
\end{array}$$

البسط = (س + ٢) (٢ س^{٢} ـ س + ٢)

المقام = (س + ٢) (س^{٢} ـ ٢ س + ٤)

∵ $د(س) = \frac{٢ س^{٢} - س + ٢}{س^{٢} - ٢ س + ٤}$ ∴ $\lim\limits_{س \to -٢} د(س) = \frac{٢(-١)^{٢} - (-١) + ٢}{(-١)^{٢} - ٢ \times -١ + ٤} = ١$

مثال : أوجد قيمة $\lim\limits_{س \to -٣} \frac{س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٣ س - ٩}{س^{٣} + ٦ س^{٢} + ٩ س}$

الحل :

$د(-٣) = \frac{صفر}{صفر}$ (كمية غير معينة)

سنلجا لقسمة البسط قسمة مطولة على العامل الصفرى أما المقام فيمكن تحليله بأخذ العامل المشترك س ثم نحلل المقدار الثلاثى .

البسط = س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٣ س - ٩ | س + ٣

س^{٣} + ٣ س^{٢} | س^{٢} + ٢ س ـ ٣

- -

٢ س^{٢} + ٣ س ـ ٩

٢ س^{٢} + ٦ س

- -

- ٣ س ـ ٩

- ٣ س ـ ٩

+ +

٠ ٠

∴ البسط = (س + ٣)(س^{٢} + ٢ س ـ ٣) = (س + ٣)(س + ٣)(س ـ ١)

= (س + ٣)^{٢} (س ـ ١)

المقام = س (س^{٢} + ٦ س + ٩) = س (س + ٣)(س + ٣)

= س (س + ٣)^{٢}

∴ $د(س) = \frac{(س + ٣)^{٢}(س - ١)}{س (س + ٣)^{٢}} = \frac{(س - ١)}{س}$

∴ $\lim\limits_{س \to -٣} د(س) = \frac{(-٣ - ١)}{-٣} = \frac{-٤}{-٣} = \frac{٤}{٣}$

حل آخر : عن طريق القسمة التركيبية : (الطريقة الاسهل)

	معامل $\text{س}^{٣}$	معامل $\text{س}^{٢}$	معامل س	ثابت
ـ ٣	١	٥	٣	ـ ٩
		ـ ٣	ـ ٦	٩
	١	٣	ـ ٣	صفر

الناتج : $\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} - ٣$ و هى نفس الاجابة فى الحل السابق بالقسمة المطولة .

*** الضرب فى المرافق :**

فى حالة الجذور التربيعية (فقط لا غير) نضرب بسطا و مقاما الكسر فى المرافق و ذلك عند وجود أى صورة من الصور الاتية : جذر ـ عدد ، عدد ـ جذر ، جذر ـ جذر

ملاحظات هامة :

١ـ تستخدم هذه الطريقة إذا كان البسط أو المقام أو كلاهما يحتوى على جذر تربيعى

٢ـ نضرب بسطا و مقاما فى مرافق المقدار المحتوى على الجذر التربيعي ثم نحذف العامل الصفرى ثم نعوض بقيمة س

٣ـ ناتج ضرب أى مقدار × المقدار المرافق له = فرق بين مربعين من المقدار السالب

مثال : أوجد النهايات الاتية : (١) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٩ + \text{س}^{٢}} - ٣}{\text{س}}$ (٢) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ١} - ٢}{\sqrt{٦ + \text{س}} - ٣}$

الحل :

(١) د(٠) = $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (كمية غير معينة)

$$\text{د(س)} = \frac{\sqrt{٩ + \text{س}^{٢}} - ٣}{\text{س}} \times \frac{\sqrt{٩ + \text{س}^{٢}} + ٣}{\sqrt{٩ + \text{س}^{٢}} + ٣} = \frac{(٩ + \text{س}^{٢}) - ٩}{\text{س}\,(\sqrt{٩ + \text{س}^{٢}} + ٣)}$$

$$= \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}\,(\sqrt{٩ + \text{س}^{٢}} + ٣)} = \frac{\text{س}}{\sqrt{٩ + \text{س}^{٢}} + ٣}$$

$$\therefore \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}}\ \text{د(س)} = \frac{\text{صفر}}{\sqrt{٩ + ٠^{٢}} + ٣} = \frac{\text{صفر}}{٦} = \text{صفر}$$

---

(٢) $\text{د}(٣) = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (كمية غير معينة)

$$\text{د(س)} = \frac{\sqrt{\text{س}+١} - ٢}{\sqrt{٦+\text{س}} - ٣} \times \frac{\sqrt{\text{س}+١} + ٢}{\sqrt{\text{س}+١} + ٢} \times \frac{\sqrt{\text{س}+٦} + ٣}{\sqrt{\text{س}+٦} + ٣}$$

$$= \frac{(\sqrt{\text{س}+١} - ٢)(\sqrt{\text{س}+١} + ٢)(\sqrt{\text{س}+٦} + ٣)}{(\sqrt{٦+\text{س}} - ٣)(\sqrt{\text{س}+١} + ٢)(\sqrt{\text{س}+٦} + ٣)}$$

$$= \frac{[(\sqrt{\text{س}+١})^{٢} - ٤](\sqrt{\text{س}+٦} + ٣)}{[(\sqrt{٦+\text{س}})^{٢} - ٩](\sqrt{\text{س}+١} + ٢)} = \frac{(\text{س}+١-٤)(\sqrt{\text{س}+٦} + ٣)}{(٦+\text{س}-٩)(\sqrt{\text{س}+١} + ٢)}$$

$$= \frac{(\text{س}-٣)(\sqrt{\text{س}+٦} + ٣)}{(\text{س}-٣)(\sqrt{\text{س}+١} + ٢)} = \frac{\sqrt{\text{س}+٦} + ٣}{\sqrt{\text{س}+١} + ٢}$$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to ٣} \text{د(س)} = \frac{\sqrt{٣+٦} + ٣}{\sqrt{٣+١} + ٢} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$$

*** طريقة القانون :**

نظرية :

إذا كانت الدالة د على الصورة د(س) = $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ن} \times \text{أ}^{\text{ن}-١}$

مثلا : $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س} - ٢} = \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٣} - ٢^{٣}}{\text{س} - ٢} = ٣ \times ٢^{٣-١} = ٣ \times ٢^{٢} = ١٢$

نتائج هامة

١) $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}} = \text{ن}\,\text{أ}^{\text{ن}-١}$

٢) $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}\,\text{أ}^{\text{ن}-\text{م}}$

*** الشروط التى يجب توافرها فى الدالة لإيجاد نهايتها باستخدام القانون حيث س ← أ :**

١) كلا من البسط و المقام يتكون من حدين فقط (لا غير) هما طرفى علامة (تؤول إلى)
٢) أسس البسط متساوية
٣) أسس المقام متساوية
٤) إشارتى البسط و المقام متشابهان و كلاهما سالبة
٥)الاشارة الوسطى فى كل من البسط و المقام سالبة و هى سالبة بمعنى إذا وجدت + نحولها إلى ـ (ـ) و هى لا تأتى إلا مع الأسس الفردية

*** حالات خاصة :**

$$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{ن} - ١}{س - ١} = ن$$

مثلا : $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ ———— $= ٨$

$$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{ن} - ١}{س^{م} - ١} = \frac{ن}{م}$$

مثلا : $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٧} - ١}{س^{٤} - ١} = \frac{٧}{٤}$

مثال :أوجد قيمة النهايات الاتية : (١) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ٢٤٣}{س - ٣}$ (٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س - ٢}{\sqrt{س} - \sqrt{٢}}$

الحل :

(١) المقدار = $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ٣^{٥}}{س - ٣} = ٥ \times ٣^{٥-١} = ٥ \times ٣^{٤} = ٤٠٥$

(٢) المقدار = $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س - ٢}{س^{\frac{١}{٢}} - ٢^{\frac{١}{٢}}} = (١ \div \frac{١}{٢}) \times ٢^{١ - \frac{١}{٢}} = ٢ \times ٢^{\frac{١}{٢}} = ٢\sqrt{٢}$

مثال : أوجد النهايات الاتية :

(١) $\underset{س \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٣٢س^{٥} - ١}{٢س - ١}$ (٢) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{٤س^{٢} - ٣٦}{س - ٣}$ (٣) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٧} - ١٢٨}{٢س - ٤}$

(٤) $\underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}\sqrt{س} - ٢٤٣}{س - ٩}$ (٥) $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{٢}س^{٤} - ١٢٨}{س - ٤}$ (٦) $\underset{س \to \sqrt{٣}}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ٩\sqrt{٣}}{س - \sqrt{٣}}$

(٧) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٦} - ٦٤}{س^{٤} - ١٦}$ (٨) $\underset{س \to \sqrt{٣}}{\text{نهـا}} \frac{س^{٦} - ٢٧}{س^{٢} - ٣}$ (٩) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س+٢)^{٦} - ٦٤}{س}$

الحل : (١) $\text{نها}_{\text{س}\to\frac{١}{٢}} \frac{٣٢\text{س}^{٥} - ١}{٢\text{س} - ١} = \text{نها}_{٢\text{س}\to ١} \frac{(٢\text{س})^{٥} - ١^{٥}}{٢\text{س} - ١} = ٥ \times ١^{٥-١} = ٥$

(٢) $\text{نها}_{\text{س}\to ٣} \frac{٤\text{س}^{٢} - ٣٦}{\text{س} - ٣} = \text{نها}_{\text{س}\to ٣} \frac{٤(\text{س}^{٢} - ٩)}{\text{س} - ٣} = ٤ \times \text{نها}_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{س}^{٢} - ٣^{٢}}{\text{س} - ٣}$

$= ٤ \times ٢ \times ٣ = ٢٤$

حل أخر : بالتحليل و التعويض المباشر

(٣) $\text{نها}_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}^{٧} - ١٢٨}{٢\text{س} - ٤} = \text{نها}_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}^{٧} - ١٢٨}{٢(\text{س} - ٢)} = \frac{١}{٢} \times \text{نها}_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}^{٧} - ٢^{٧}}{\text{س} - ٢}$

$= \frac{١}{٢} \times ٧ \times ٢^{٧-١} = \frac{١}{٢} \times ٧ \times ٢^{٦} = ٢٢٤$

(٤) $\text{نها}_{\text{س}\to ٩} \frac{\text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}} - ٢٤٣}{\text{س} - ٩} = \text{نها}_{\text{س}\to ٩} \frac{\text{س}^{٢} \times \text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٢٤٣}{\text{س} - ٩} = \text{نها}_{\text{س}\to ٩} \frac{\text{س}^{\frac{٥}{٢}} - ٩^{\frac{٥}{٢}}}{\text{س} - ٩}$

$= \frac{٥}{٢} \times ٩^{\frac{٥}{٢} - ١} = \frac{٥}{٢} \times ٩^{\frac{٣}{٢}} \simeq ٦٧.٥$

(٥) $\text{نها}_{\text{س}\to ٤} \frac{\frac{١}{٢}\text{س}^{٤} - ١٢٨}{\text{س} - ٤} = \text{نها}_{\text{س}\to ٤} \frac{\frac{١}{٢}(\text{س}^{٤} - ٢٥٦)}{\text{س} - ٤} = \frac{١}{٢} \times \text{نها}_{\text{س}\to ٤} \frac{\text{س}^{٤} - ٤^{٤}}{\text{س} - ٤}$

$= \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٤^{٣} = ١٢٨$

(٦) $\text{نها}_{\text{س}\to \sqrt{٣}} \frac{\text{س}^{٥} - ٩\sqrt{٣}}{\text{س} - \sqrt{٣}} = \text{نها}_{\text{س}\to \sqrt{٣}} \frac{\text{س}^{٥} - (\sqrt{٣})^{٥}}{\text{س} - \sqrt{٣}} = ٥ \times (\sqrt{٣})^{٥-١} = ٥ \times ٩ = ٤٥$

(٧) $\text{نها}_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}^{٦} - ٦٤}{\text{س}^{٤} - ١٦} = \text{نها}_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}^{٦} - ٢^{٦}}{\text{س}^{٤} - ٢^{٤}} = \frac{٦}{٤} \times ٢^{٢} = ٦$

(٨) $\text{نها}_{\text{س}\to \sqrt{٣}} \frac{\text{س}^{٦} - ٢٧}{\text{س}^{٢} - ٣} = \text{نها}_{\text{س}\to \sqrt{٣}} \frac{\text{س}^{٦} - (\sqrt{٣})^{٦}}{\text{س}^{٢} - (\sqrt{٣})^{٢}} = \frac{٦}{٢} \times (\sqrt{٣})^{٤} = ٢٧$

(٩) $\text{نها}_{\text{س}\to ٠} \frac{(\text{س}+٢)^{٦} - ٦٤}{\text{س}} = \text{نها}_{\text{س}+٢\to ٢} \frac{(\text{س}+٢)^{٦} - ٢^{٦}}{(\text{س}+٢) - ٢} = ٦ \times ٢^{٥} = ١٩٢$

مثال : أوجد (أ) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{(س + ٥)^٤ - ٦٢٥}{س}$ (ب) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س - ٤)^٥ + ٣٢}{س - ٢}$

الحل :

(أ) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{(س + ٥)^٤ - ٥^٤}{س} = ٤ \times ٥^٣ = ٥٠٠$ [باستخدام النتيجة]

حل آخر (أ) : $\lim\limits_{س \to 0} \frac{(س + ٥)^٤ - ٥^٤}{(س + ٥) - ٥} = ٤ \times ٥^٣ = ٥٠٠$

(ب) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س - ٤)^٥ + ٣٢}{س - ٢} = \lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س - ٤)^٥ - (-٢)^٥}{(س - ٤) - (-٢)}$

$= ٥ (-٢)^٤ = ٨٠$

مثال : أوجد قيمة $\lim\limits_{هـ \to 0} \frac{(٢ + ٣ هـ)^٥ - ٣٢}{٤ هـ}$

الحل:

$\frac{٣}{٤} \times \lim\limits_{٢ + ٣ هـ \to ٢} \frac{(٢ + ٣ هـ)^٥ - ٢^٥}{(٢ + ٣ هـ) - ٢} = \frac{٣}{٤} \times ٥ \times ٢^٤ = ٦٠$

مثال : إذا كان $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^ن - ٦٤}{س - ٢} = ل$ فما قيمة ن ، ل

الحل : $\because$ س $\to$ ٢ $\therefore$ ٦٤ = $٢^٦$ $\therefore$ ن = ٦

$\therefore \lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٦ - ٢^٦}{س - ٢} = ٦ \times ٢^٥ = ١٩٢$ $\therefore$ ل = ١٩٢

انت معنا دائما فى القمة

حافظ على الصبر و الجد

عاشق الرياضيات المنفلوطى

ثانيا : نهاية الدالة عند اللانهاية

الشـــرط : هذه الدالة لابد أن تكون دالة كسرية جبـــرية .

طريقة الحل :

نقسم بسطاً و مقاماً على س مرفوعة لأعلى أس فى المقام ثم نستخدم القاعدة التالية :

$$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{أى عدد}}{س^{ن}} = \text{صفر} \quad ، \quad \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}}\ س^{ن} = \infty \quad \text{حيث } ن \in ح^{*} \text{ ، م ثابت}$$

مثال : أوجد $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(٣ + \frac{٥}{س}\right) = \underset{س \to \infty}{\text{نها}}\ ٣ + \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٥}{س} = ٣ + ٠ = ٣$

مثال : أوجد $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(س^{٣} + ٥ س^{٢} - ٢\right)$ [بأخذ العامل المشترك $س^{٣}$]

الحل : $\underset{س \to \infty}{\text{نها}}\ س^{٣} \left(١ + \frac{٥}{س} - \frac{٢}{س^{٣}}\right) = \text{نها}\ س^{٣} \times \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(١ + \frac{٥}{س} - \frac{٢}{س^{٣}}\right) = \infty \times ١ = \infty$

مثال : أوجد النهايات الاتية :

(١) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣ س^{٢} + ٥ س + ٧}{٤ س^{٢} - ١}$ (٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥ س^{٢} + ٣}{س^{٤} - ١}$ (٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} + ٢}{س^{٢} - ١}$

الحل :

(١) بالقسمة على $س^{٢}$ $\therefore$ المقدار = $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣ + \frac{٥}{س} + \frac{٧}{س^{٢}}}{٤ - \frac{١}{س^{٢}}} = \frac{٣ + ٠ + ٠}{٤ - ٠} = \frac{٣}{٤}$

(٢) بالقسمة على $س^{٤}$ $\therefore$ المقدار = $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\frac{٥}{س^{٢}} + \frac{٣}{س^{٤}}}{١ - \frac{١}{س^{٤}}} = \frac{٠ + ٠}{١ - ٠} = \frac{٠}{١} = \text{صفر}$

(٣) بالقسمة على ٢ $\therefore$ المقدار = $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س + \frac{٢}{س^{٢}}}{١ - \frac{١}{س^{٢}}} = \frac{\infty + ٠}{١ - ٠} = \frac{\infty}{١} = \infty$

*** ملاحظات هامة :**

(١) إذا كان أعلى أس بالمقام = أعلى أس بالبسط فإن النهاية = $\frac{\text{معامل أعلى أس بالبسط}}{\text{معامل أعلى أس بالمقام}} \neq ٠$

(٢) إذا كان أعلى أس بالمقام > أعلى أس بالبسط فإن النهاية = صفر

(٣) إذا كان أعلى أس بالمقام < أعلى أس بالبسط فإن النهاية غير موجودة (∞)

(٤) للتخلص من الاسس السالبة (إذا أحتوت المسألة عليها) نضرب بسطا ومقاما × س مرفوعة لأكبر أس عدديا .

فمثلا : إذا كان د(س) = $\frac{٥\,س^{-٣} + ٢\,س^{-١} - ٧}{٣\,س^{-٢} + س^{-٣} - ١}$ (بالضرب × $\frac{س^{٣}}{س^{٣}}$) نكمل الحل ...

مثال : أوجد قيمة النهايات الاتية :

(١) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{س^{٢} + س + ٢}}{س - ٢}$ **(٢)** $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س^{٣} + ٢}}{\sqrt[٤]{س^{٦} - ١}}$

(٣) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^{٢} + س - ١} - \sqrt{س^{٢} - س - ١} \right)$

الحل :

(١) بالقسمة على س = $\sqrt[٣]{س^{٣}}$ ∴ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{١ + \frac{١}{س} + \frac{٢}{س^{٢}}}}{١ - \frac{١}{س}} = \frac{١}{١} = ١$

(٢) بالقسمة على $\sqrt{س^{٣}} = \sqrt[٣]{س^{٦}}$ ∴ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt{١ + \frac{٢}{س^{٢}}}}{\sqrt{١ - \frac{١}{س^{٦}}}} = \frac{١}{١} = ١$

(٣) يجب أن تكون الدالة كسرية و لذلك نضرب × المرفق

$$د(س) = \left(\sqrt{س^{٢} + س - ١} - \sqrt{س^{٢} - س - ١} \right) \times \frac{\left(\sqrt{س^{٢} + س - ١} + \sqrt{س^{٢} - س - ١} \right)}{\left(\sqrt{س^{٢} + س - ١} + \sqrt{س^{٢} - س - ١} \right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{س^{٢} + س - ١} \right)^{٢} - \left(\sqrt{س^{٢} - س - ١} \right)^{٢}}{\left(\sqrt{س^{٢} + س - ١} + \sqrt{س^{٢} - س - ١} \right)}$$

$$= \frac{(\text{س}^{٢} + \text{س} - ١) - (\text{س}^{٢} - \text{س} - ١)}{(\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{س} - ١} + \sqrt{\text{س}^{٢} - \text{س} - ١})}$$

$$= \frac{٢\,\text{س}}{(\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{س} - ١} + \sqrt{\text{س}^{٢} - \text{س} - ١})}$$

بالقسمة على $\sqrt{\text{س}^{٢}} = \text{س}$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} = \frac{٢}{\sqrt{١ + \frac{١}{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}^{٢}}} + \sqrt{١ - \frac{١}{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}^{٢}}}} = \frac{٢}{١ + ١} = \frac{٢}{٢} = ١$$

ثالثا : نهاية الدوال المثلثية للزاوية س عندما س ← ٠

* **نستخدم القواعد الآتية :**

(١) $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا س}}{\text{س}} = ١$ ، $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا } ا\text{س}}{\text{س}} = ا$ ، $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا } ا\text{س}}{\text{ب س}} = \frac{ا}{\text{ب}}$

(٢) $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = ١$ ، $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{ظا } ا\text{س}}{\text{س}} = ا$ ، $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{ظا } ا\text{س}}{\text{ب س}} = \frac{ا}{\text{ب}}$

* **نتائج هامة :** (١) $\lim_{\text{س} \to ٠} \text{حتا س} = ١$ (٢) $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س} - \text{حتا س}}{\text{س}} = \text{صفر}$

* **ملاحظات هامة :**

(١) $\lim_{\text{س} \to ٠} \text{حتا } ا\text{س} = \text{حتا } ٠ = ١$ (أى نعوض عنها تعويض مباشر)

$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حتا س}}{\text{س}} \neq ١$ لان عند التعويض المباشر عن س = ٠

∵ $د(\,٠\,) = \frac{حتا\,٠}{٠} = \frac{١}{٠} = \infty$ ∴ $\frac{حتا\,س}{س}$ ليس لها نهاية عند س ← ٠

لذلك لا نقسم النسبة المثلثية (حتا) على س دائما نعوض عنها بالواحد الصحيح

(٢) $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{حا^٢ م س}{س^٢} = \underset{س \to ٠}{نهـا} \left(\frac{حا\,م س}{س}\right)^٢ = م^٢$ ، بينما $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{حا\,م س^٢}{س^٢} = م$

(٣) $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{حا^٢ م س}{ب\,س^٢} = \frac{١}{ب} \times \underset{س \to ٠}{نهـا} \left(\frac{حا\,م س}{س}\right)^٢ = \frac{١}{ب} \times م^٢ = \frac{م^٢}{ب}$

مثال : أوجد قيمة النهايات الاتية :

(١) $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{حا\,٢ س}{٥\,س}$ (٢) $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{ظا^٢\,٣ س}{س^٢}$ (٣) $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{حا^٢\,٢ س}{٥\,س^٢}$

(٤) $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{حا\,س\,حتا\,س}{س}$ (٥) $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{ظا\,٣ س - حا\,٢ س}{٥\,س}$

الحل: (١) $\frac{٢}{٥}$ (٢) $(\,٣\,)^٢ = ٩$ (٣) $\left(\frac{٢}{٥}\right)^٢ = \frac{٤}{٥}$

(٤) المقدار = $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{حا\,س}{س} \times حتا\,س = ١ \times ١ = ١$

(٥) المقدار = $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{ظا\,٣ س}{٥\,س} - \underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{حا\,٢ س}{٥\,س} = \frac{٣}{٥} - \frac{٢}{٥} = \frac{١}{٥}$

مثال : أوجد قيمة النهايات الاتية :

(١) $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{٣ س + حا\,س}{٢\,س + ظا\,٣ س}$ (٢) $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{س^٢ - حا^٢\,٣ س}{٣\,س^٢ - ظا\,٢ س^٢}$

الحل:

(١) بالقسمة على س ∴ المقدار = $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{٣ + \frac{حا\,س}{س}}{٢ + \frac{ظا٣س}{س}} = \frac{٣ + ١}{٢ + ٣} = \frac{٤}{٥}$

(٢) بالقسمة على س^{٢} ∴ المقدار = $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \dfrac{\text{حا}^{٢}\ ٣\text{س}}{\text{س}^{٢}}}{٣ - \dfrac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}}}$

$$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \left(\dfrac{\text{حا}\ ٣\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢}}{٣ - \dfrac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}}} = \dfrac{١ - ٩}{٣ - ٢} = \dfrac{-٨}{١}$$

مثال : أوجد قيمة (١) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٣\text{حتا}^{٢}\ ٥\text{س} - ٣}{٥\ \text{ظا}\ ١٠\text{س}^{٢}}$ (٢) $\underset{\text{س} \to \frac{\text{ط}}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{٣\text{حتا س}}{\text{ظا}\ ٢\text{س}}$

الحل :

(١) د(س) = $\dfrac{٣(١ - \text{حا}^{٢}\ ٥\text{س}) - ٣}{٥\ \text{ظا}\ ١٠\text{س}^{٢}} =$

بالقسمة على س^{٢} ∴ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}}$ د(س) = $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{-٣\text{حا}^{٢}\ ٥\text{س}}{\text{س}^{٢}}}{\dfrac{٥\ \text{ظا}\ ١٠\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}}} = \dfrac{-٣ \times ٢٥}{٥ \times ١٠} = \dfrac{-٣}{٢}$

(٢) الزاوية فى هذا السؤال $\left(\dfrac{\text{ط}}{٢} - \text{س}\right)$

د(س) = $\dfrac{٣\text{حا}\left(\dfrac{\text{ط}}{٢} - \text{س}\right)}{-\ \text{ظا}\left(\text{ط} - ٢\text{س}\right)} = \dfrac{٣\text{حا}\left(\dfrac{\text{ط}}{٢} - \text{س}\right)}{-\ \text{ظا}٢\left(\dfrac{\text{ط}}{٢} - \text{س}\right)}$

بالقسمة على $\left(\dfrac{\text{ط}}{٢} - \text{س}\right)$ ∴ $\underset{\text{س} \to \frac{\text{ط}}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{٣\text{حا}\left(\dfrac{\text{ط}}{٢} - \text{س}\right)}{\left(\dfrac{\text{ط}}{٢} - \text{س}\right)} \div \underset{\text{س} \to \frac{\text{ط}}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{-\text{ظا}٢\left(\dfrac{\text{ط}}{٢} - \text{س}\right)}{\left(\dfrac{\text{ط}}{٢} - \text{س}\right)}$

$$= ٣ \div (-٢) = \dfrac{-٣}{٢}$$

مثال : أوجد قيمة (١) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}}$ ٣ س قتا ٢ س (٢) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{\text{س}^{٢}\ \text{ظتا}^{٢}\ ٥\ \text{س}}$

(٣) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا}\ (٢\ \text{س} - ٦)}{\text{س}^{٢} - ٩}$ (٤) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا}^{٢}\dfrac{\text{س}}{٢}}{\text{س ظا}٢\ \text{س}}$

الحل :

(١) $\lim_{س \to ٠} \frac{٣س}{حا ٢ س} = \lim_{س \to ٠} \frac{٣}{\frac{حا ٢ س}{س}}$ (بالقسمة على س) $= \frac{٣}{٢}$

(٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س^٢ ظتا^٢ ٥ س} = \lim_{س \to ٠} \frac{ظا^٢ ٥ س}{س^٢} = \lim_{س \to ٠} (\frac{ظا ٥ س}{س})^٢ = ٥^٢ = ٢٥$

(٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{ظا (٢ س - ٦)}{س^٢ - ٩} = \lim_{س - ٣ \to ٠} \frac{ظا ٢ (س - ٣)}{(س - ٣) (س + ٣)}$

$= \lim_{س - ٣ \to ٠} \frac{ظا ٢ (س - ٣)}{(س - ٣)} \times \lim_{س - ٣ \to ٠} \frac{١}{س + ٣}$

$= ٢ \times \frac{١}{٣ + ٣} = ٢ \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{٣}$

(٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{حا^٢ \frac{س}{٢}}{س ظا ٢س}$ $\div س^٢$ بالقسمة على $س^٢$

$= \lim_{س \to ٠} [\frac{حا^٢ \frac{س}{٢}}{س^٢} \div \frac{س ظا ٢ س}{س^٢}] \div \lim ١$

$= \lim_{س \to ٠} [\left(\frac{حا \frac{١}{٢} س}{س}\right)^٢ \div \lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٢ س}{س}] \div ١ = (\frac{١}{٢})^٢ \div ٢ \times ١ = \frac{١}{٤} \div ٢ = \frac{١}{٨}$

مثال : أوجد قيمة $\lim_{س \to ٤} \frac{حا (س - ٤)}{س^٢ - ١٦}$

الحل :

$\lim_{س \to ٤} \frac{حا (س - ٤)}{(س - ٤)(س + ٤)} = \lim_{س \to ٤} \frac{حا (س - ٤)}{(س - ٤)} \times \lim_{س \to ٤} \frac{١}{(س + ٤)}$

$= ١ \times \frac{١}{٨} = \frac{١}{٨}$

مثال : إذا كانت $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٢ + (٣ + ب) س + ٣ ب}{س + ٣} = ١٠$ أوجد قيمة ب

الحل :

$$\lim_{س \to -٣} \frac{(س + ٣)(س + ب)}{(س + ٣)} = \lim_{س \to -٣} (س + ب) = ١٠$$

∴ $-٣ + ب = ١٠$ ∴ $ب = ١٠ + ٣ = ١٣$

مثال : أوجد قيمة $\lim_{و \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{١ + و} - ١}{و}$

الحل :

∵ $د(٠) = \frac{صفر}{صفر}$ (كمية غير معينة)

∴ $\lim_{١ + و \to ١} \frac{(١ + و)^{\frac{١}{٣}} - ١^{\frac{١}{٣}}}{(١ + و) - ١} = \frac{١}{٣} \times ١^{\frac{-٢}{٣}} = \frac{١}{٣}$

حل أخر : نضع $١ + و = ص$ ∴ $و = ص - ١$ [عندما $و \to ٠$ ∴ $ص \to ١$]

$$\lim_{ص \to ١} \frac{ص^{\frac{١}{٣}} - ١^{\frac{١}{٣}}}{ص - ١} = \frac{١}{٣} \times ١^{\frac{-٢}{٣}} = \frac{١}{٣}$$

مثال : إذا كانت $د(س) = ٣ س + ٥$ فأوجد $\lim_{و \to ٠} \frac{د(س + و) - د(س)}{و}$

الحل :

$$\lim_{و \to ٠} \frac{٣(س + و) + ٥ - (٣ س + ٥)}{و} = \lim \frac{٣ س + ٣و + ٥ - ٣ س - ٥}{و}$$

$$= \lim_{و \to ٠} \frac{٣و}{و} = \lim_{و \to ٠} ٣ = ٣$$

انت معنا دائما فى القمة
حافظ على المذاكرة دائما
عاشق الرياضيات المنفلوطى

تمارين عامة على النهايات

المجموعة الاولى :

[١] أوجد كلا من النهايات الآتية :

(١) $\lim_{\text{س} \to -٢} (\text{س}^٢ + \text{س} + ١)$

(٢) $\lim_{\text{س} \to ٢} (٢\,\text{س}^٢ - ٧\,\text{س} + ٦)$

(٣) $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^٢ + ٢\,\text{س} + ١}{\text{س}^٢ + ١}$

(٤) $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س} - ٣}{\text{س} + ١}$

(٥) $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س} - ٢}$

(٦) $\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^٣ - ٢٧}{\text{س} - ٣}$

(٧) $\lim_{\text{س} \to -١} \frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢}$

(٨) $\lim_{\text{س} \to \frac{١}{٢}} \frac{٢\text{س}^٢ - ٥\,\text{س} + ٢}{٢\,\text{س} - ١}$

[٢] أوجد قيمة النهايات الآتية :

(١) $\lim_{\text{س} \to ٤} \frac{٤\text{س}^٢ - ٦٤}{\text{س} - ٤}$

(٢) $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٣ - ٨}{٣\text{س}^٢ - ١٢}$

(٣) $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{(\text{س} + ٢)^٢ - ٤}{\text{س}^٢ + \text{س}}$

(٤) $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{(٢\text{س} - ١)^٢ - ١}{٥\,\text{س}}$

(٥) $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{(\text{س} - ٣)^٢ - ١}{٢\text{س}^٢ - ٣\,\text{س} - ٢}$

(٦) $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{(\text{س}^٢ - ٤)^٢}{\text{س} - ٢}$

(٧) $\lim_{\text{س} \to ٣} \left(\frac{\text{س}^٢}{\text{س}^٢ - ١} - \frac{\text{س}^٢ - ٣\,\text{س}}{\text{س} - ٣} \right)$

(٨) $\lim_{\text{س} \to -٢} \frac{٢\text{س}^٣ + ٣\,\text{س}^٢ + ٤}{\text{س}^٣ + ٨}$

[٣] أوجد النهايات الآتية :

(١) $\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\sqrt{\text{س} + ١} - ٢}{\sqrt{\text{س} - ٢} - ١}$

(٢) $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س} - ٢}{\sqrt{٣\text{س} - ٢} - \sqrt{\text{س}}}$

(١١) $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^{١٧} - ١}{٣\text{س}^٢ + ٢\,\text{س} - ٥}$

(١٢) $\lim_{\text{س} \to ٤} \frac{(\text{س} - ٣)^٦ - ١}{\text{س} - ٤}$

(٣) $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٥} - \text{أ}^{٥}}{\text{س} - \text{أ}}$

(٤) $\underset{\text{س} \to -\sqrt{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٨} - ١٦}{\text{س}^{٥} + ٤\sqrt{٢}}$

(٥) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-٥} - \frac{١}{٣٢}}{\text{س}^{-٧} - \frac{١}{١٢٨}}$

(٦) $\underset{\text{س} \to -\frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٣٢\text{س}^{٥} + ١}{٦٤\text{س}^{٦} - ١}$

(٧) $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}^{٣}} - ٨}{\text{س}^{٢} - ١٦}$

(٨) $\underset{\text{س} \to ٨}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}^{٥}} - ٣٢}{\text{س} - ٨}$

(٩) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}\sqrt[٥]{\text{س}} - ١}{\text{س}^{٢} - ١}$

(١٠) $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٤} - \frac{١}{\text{س}^{٤}}}{\text{س}^{٣} - \frac{١}{\text{س}^{٣}}}$

(١٣) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١ - ٢\text{س})^{٥} - ١}{٥\text{س}}$

(١٤) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(\sqrt[٣]{\text{س}} - ١)(\sqrt[٥]{\text{س}^{٣}} - ١)}{(\text{س} - ١)^{٢}}$

(١٥) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥\text{س}^{٢} - ٢}{٢\text{س}^{٢} + \text{س} - ١}$

(١٦) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ١}{\text{س}^{٤} + ٢\text{س}^{٢} + ٣}$

(١٧) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا } ٢\text{س}}{\text{ظا}٥\text{س}}$

(١٨) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا } ٣\text{س}}{\text{حا } \frac{\text{س}}{٢}}$

(١٩) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{س} - \text{حا س}}{٢\text{س} + \text{ظا } ٣\text{س}}$

(٢٠) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا س} - ٣\text{ظا س}}{٥\text{ س حتا س}}$

[٤] أوجد النهايات الآتية :

(١) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣} \text{ ظا } ٢\text{س}}{\text{حا}^{٤} ٢\text{س}}$

(٢) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}^{٢}\text{س} + \text{حا}^{٢}\text{س}}{٣\text{س}^{٢}}$

(٣) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س ظا } ٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + \text{حا}^{٢} ٣\text{س}}$

(٥) $\underset{(\text{س} - \text{ط}) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا س}}{\text{س} - \text{ط}}$

(٦) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{حتا } ٢\text{س}}{\text{س ظا } ٢\text{س}}$

(٧) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا } ٢\text{س} + \text{س حتا س}}{\text{ظا } ٣\text{س}}$

(٤) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا}(\text{س} - ٣)}{\text{س}^{٣} - ٢٧}$ ‖ (٨) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٣\text{س} - ٤\ \text{ظا س}}{\text{حا}\ ٥\ \text{س}}$

[٥] إذا كانت د(س) = $\dfrac{\text{س} + ١}{\text{س} + ٢}$ أوجد : $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{د}(٢ + \text{هـ}) - \text{د}(٢)}{\text{هـ}}$

[٦] إذا كانت د(س) = $\dfrac{٢}{\text{س}}$ أوجد : $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$

[٧] إذا كان $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٥\text{ن}} + \text{س}^{\text{ن}} - ٢}{\text{س} - ١} = ١٢$ أوجد قيمة ن

[٨] إذا كانت $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{ب س}^{٣} + ٣\ \text{س}^{٢} - ١}}{\sqrt{٤\text{س}^{٢} + ٧}} = -١$ فما قيمة ب

[٩] أوجد النهايات الاتية :

(١) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{حتا س}}{\text{س}^{٢}}$

(٢) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{(٢\ \text{س} - ١)^{٢}\ (٣\ \text{س}^{٢} + ٢)}{\text{س}^{٤} + ١}$

(٣) $\underset{(\text{س} - \text{ط}) \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا س}}{\text{س} - \text{ط}}$

(٤) نها $(٤\ \text{س} - \text{س}^{٣} + ٥)$

المجموعة الثانية :

أوجد قيمة النهايات الآتية :

(١) $\underset{\text{س} \to -٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٤} - ٨١}{\text{س}^{٥} + ٢٤٣}$

(٢) $\underset{\text{س} \to -٠.٥}{\text{نها}} \dfrac{١٦\text{س}^{٤} - ١}{٢\ \text{س} + ١}$

(١١) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{٣\ \text{س}^{٢} - ٥\ \text{س} + ٧}{٤\ \text{س}^{٢} + ٢\ \text{س} - ٣}$

(١٢) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{(٢\ \text{س} - ٣)(\text{س} + ١)}{\text{س}^{٣} - ٥\ \text{س} + ٢}$

(٣) $\lim\limits_{س \to -٤} \frac{(س + ٣)^{٧} + ١}{س + ٤}$

(٤) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س + ١)^{٥} - ٢٤٣}{س^{٤} - ١٦}$

(٥) $\lim\limits_{و \to ٠} \frac{(٢ + و)^{٥} - ٣٢}{و}$

(٦) $\lim\limits_{و \to ٠} \frac{(٢ + و)^{٥} - ٣٢}{٧ و}$

(٧) $\lim\limits_{و \to ٠} \frac{(٢ + ٣و)^{٥} - ٣٢}{و}$

(٨) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{س - ٣}$

(٩) $\lim\limits_{س \to -١} \frac{س^{٣} + ١}{٤ - \sqrt{س^{٣} + س + ١٦}}$

(١٠) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{\sqrt{٧ - س} - ٣}$

(١٣) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^{٢} - ٥ س^{٣} + ٢}{س(٢ س - ١)}$

(١٤) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{٢س^{٢}}{س + ١} - (٢ س - ٣) \right)$

(١٥) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٥ س^{٢} - ٧ س}{٣ \text{ حا } س}$

(١٦) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{حا } س - ٤ \text{ ظا } س}{٥ س \text{ حتا} ٣ س}$

(١٧) $\lim\limits_{س \to ٠} \left(\frac{٥}{س^{٣}} + ٢ \right) \text{ حا } ٤ س$

(١٨) $\lim\limits_{\frac{١}{س} \to ٠} \frac{س}{ب} \text{ حا } \frac{م}{س}$

(١٩) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{ظا } ٧ \sqrt[٥]{س}}{٤ \sqrt[٥]{س}}$

(٢٠) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{حا } ٥ \sqrt[٣]{س}}{\text{ظا } ٢ \sqrt[٣]{س}}$

عليك بحل مسائل متنوعة
حتى تفهم و تفرق بين المسائل
انت دائما فى القمة معنا
عاشق الرياضيات

* تمارين متنوعة على النهايات من كتاب المدرسة *

أكمل ما يأتي:

(١) $\lim\limits_{س \to ٢} (٣س - ١) = $ ______ (٢) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س - ٣}{س + ١} = $ ______ (٣) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{س^٢ - س}{س} = $ ______

(٤) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} = $ ______ (٥) $\lim\limits_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = $ ______ (٦) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{س} - \sqrt[٣]{٢}}{س - ٢} = $ ______

(٧) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{\frac{١}{س^٢} - ١}{س^٤ - ١} = $ ______ (٨) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^{-١} - ٢^{-١}}{س^{-٢} - ٢^{-٢}} = $ ______

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٩) $\lim\limits_{س \to -١} \frac{س^٢ - ١}{س + ١}$ تساوى

(أ) -٣ (ب) -٢ (ج) ٣ (د) ليس للدالة نهاية

(١٠) $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جا س}{س}$ تساوى

(أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (ج) $\frac{٢}{\pi}$ (د) ليس للدالة نهاية

(١١) $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{طا س}{س}$ تساوى

(أ) ٠ (ب) ١ (ج) $\frac{٤}{\pi}$ (د) ليس للدالة نهاية

(١٢) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٥ - ٢٤٣}{س^٣ - ٢٧}$ تساوى

(أ) ٠ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (ج) ١٥ (د) ٩

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن وجدت)

(١٣) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} (س^{٢} - ٣س + ٢)$

(١٤) $\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{س^{٢} + ١}{س - ٣}$

(١٥) $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} (٢س - \text{جا}\, س)$

(١٦) $\underset{س \to \pi}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}\, ٢س}{س}$

(١٧) $\underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{س + ١}{س^{٣} + ١}$

(١٨) $\underset{س \to ٩}{\text{نها}} \frac{٩ - س}{س^{٢} - ٨١}$

(١٩) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{٢} - ٧س + ١٠}{س^{٢} - ٢س}$

(٢٠) $\underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{س^{٢} + ٦س + ٥}{س^{٢} - ٣س - ٤}$

(٢١) $\underset{س \to ٩}{\text{نها}} \frac{س + \sqrt{س} - ١٢}{س - ٩}$

(٢٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{١}{٢ + س} - \frac{١}{٢}}{س}$

(٢٣) $\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{س + ٢}{س^{٤} - ١٦}$

(٢٤) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \left(\frac{٢}{س} + \frac{س^{٢} - س}{س - ١}\right)$

(٢٨) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س - ٢}$

(٢٩) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{-٨} - (١٦)^{-٢}}{س - ٢}$

(٣٠) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٧]{س} - ١}{س - ١}$

(٣١) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{-٩} - \frac{١}{٥١٢}}{س - ٢}$

(٣٢) $\underset{س \to \sqrt{٥}}{\text{نها}} \frac{س^{٧} - ١٢٥\sqrt{٥}}{س^{٤} - \sqrt{٢٥}}$

(٣٣) $\underset{س \to ٨١}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٤]{س} - ٣}{س - ٨١}$

(٣٤) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{٧} - ١٢٨}{س^{٥} - ٣٢}$

(٣٥) $\underset{س \to ٦}{\text{نها}} \frac{(س - ٥)^{٧} - ١}{س - ٦}$

(٣٦) $\underset{س \to ٧}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٥]{س + ٢٥} - ٢}{س - ٧}$

(٣٧) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{(س - ٣)^{٦} - ١}{س - ٢}$

(٣٨) $\underset{هـ \to ٠}{\text{نها}} \frac{(س - ٢هـ)^{١٧} - س^{١٧}}{٥١\, هـ}$

(٣٩) $\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{س^{٤} - ٨١}{س^{٥} + ٢٤٣}$

(٤٠) $\underset{هـ \to ٠}{\text{نها}} \frac{(٣ + هـ)^{٤} - ٨١}{٦هـ}$

(٤١) $\underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^{٢} + ٨} - ٣}{س + ١}$

(٤٢) $\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س + ٧} - ٢}{س + ٣}$

(٤٣) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{\sqrt{س + ٦} - ٣}$

(٤٤) $\underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{س^{٢} - س - ٢}{س + ١}$

(٤٥) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(٢س - ١)^{٢} - ١}{٥س}$

(٤٦) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \left(\frac{١}{س - ١} - \frac{٣}{س^{٣} - ١}\right)$

(٤٧) $\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{س^{٢} + ٤س + ٤}{س^{٣} + س^{٢} - ٨س - ١٢}$

(٤٨) $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٢س + ١} - ٣}{س - ٤}$

(٤٩) إذا كان $\lim_{س \to ٢} \frac{د(س) - ٥}{س - ٢} = ١$ فأوجد: $\lim_{س \to ٢} د(س)$

(٥٠) إذا كان $\lim_{س \to ٠} \frac{د(س)}{س^٢} = ٥$ فأوجد:

أ) $\lim_{س \to ٠} د(س)$ ب) $\lim_{س \to ٠} \frac{د(س)}{س}$

أكمل ما يأتى:

(١) $\lim_{س \to \infty} (١ + \frac{٣}{س}) =$ ....

(٢) $\lim_{س \to \infty} (\frac{٣}{س^٢} - ٢) =$ ....

(٣) $\lim_{س \to \infty} (-٧) =$ ....

(٤) $\lim_{س \to \infty} (س^٢ - ٣) =$ ....

(٥) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س + ١}{س}$ ....

(٦) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٢ - ٥}{س^٢ + ١} =$ ....

(٧) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٥ + ٣}{س^٢ - ٥} =$ ....

(٨) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س}{\sqrt{س^٢ - ١}} =$ ....

(٩) $\lim_{س \to \infty} (٣ - \frac{٧}{س} + \frac{٤}{س^٢}) =$ ....

(١٠) $\lim_{س \to \infty} (\sqrt{س^٢ + ١} - س) =$ ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١١) $\lim_{س \to \infty} \frac{٦س}{٢س + ٣}$ تساوى

أ) صفر ب) ٢ ج) ٣ د) ∞

(١٢) $\lim_{س \to \infty} \sqrt{\frac{٤}{س} + ١}$

أ) صفر ب) ١ ج) ٢ د) ∞

(١٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{س + ٣}{٢ - س^٢}$

أ) صفر ب) $\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{٣}{٢}$ د) ∞

إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية

(١٦) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٣}{س^{٢}}$ (١٧) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} (س^{٣} + ٥س^{٢} + ١)$ (١٨) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢ - ٧س}{٢ + ٣س}$

(١٩) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{س^{٢}}{س + ٣}$ (٢٠) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٤س^{٢}}{س^{٢} + ٣}$ (٢١) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٥ - ٦س - ٣س^{٢}}{٢س^{٢} + س + ٤}$

(٢٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢س - ١}{س^{٢} + ٤س + ١}$ (٢٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{س^{٢} - ٢}{٣س^{٢} + ٤س - ١}$ (٢٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢س^{٢} - ١}{٤س^{٣} - ٥س - ١}$

(٢٥) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢س^{٢} - ٦}{(س - ١)^{٢}}$ (٢٦) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(٧ + \frac{٢س^{٢}}{(س + ٣)^{٢}}\right)$ (٢٧) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(\frac{١}{٣س^{٢}} - \frac{٥س}{٢ + س}\right)$

(٢٨) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(\frac{س}{٢س^{٢} + ١} + \frac{٣س^{٢}}{(س - ٣)^{٢}}\right)$ (٢٩) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{-س}{\sqrt{٤ + س^{٢}}}$ (٣٠) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{س^{٢} - ٤س + ٥}{(٢س - ١)^{٣}}$

(٣١) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(\sqrt{٤س^{٢} - ٢س + ١} - ٢س\right)$ (٣٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(\sqrt{٥س^{٢} + ٤س + ٧} - \sqrt{٥س^{٢} + س + ٣}\right)$

(٣٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} س\left(\sqrt{٤س^{٢} + ١} - ٢س\right)$ (٣٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{س^{٢} + س - ١}{٨س^{٢} - ٣}$ (٣٥) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٤ - ٣س^{٣}}{\sqrt{س^{٦} + ٩}}$

(٣٦) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(س + ٢)^{٣}(٣ - ٢س^{٢})}{٣س(س^{٢} + ٧)^{٢}}$ (٣٧) إذا كان $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(\sqrt{أس^{٢} + ٣ب س + ٥} - ٢س\right) = ٣$ فما قيمة كل من أ ، ب.

(٣٨) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{س^{-١} + ٣س^{-٢} + ٥}{٢س^{-٢} - س^{-٢} + ١}$ (٣٩) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢س^{-١} - ٣س^{-٢} + س^{-٣}}{٤س^{-٢} + س^{-١}}$

تنتج إحدى الشركات بطاقات معايدة بتكلفة ابتدائية قدرها ٥٠٠٠ جنيه وتكلفة لكل كارت نصف جنيه فكانت التكلفة الإجمالية $جـ = \frac{١}{٢}س + ٥٠٠٠$ حيث س عدد البطاقات المنتجة.

أوجد:

(١) تكلفة إنتاج الكارت عند إنتاج:

(أ) ١٠٠٠٠ كارت (ب) ١٠٠٠٠٠ كارت

(٢) أوجد تكلفة إنتاج الكارت عندما تنتج الشركة عددًا لانهائى من الكروت.

أكمل مايأتي:

(١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \; \text{جتا } ٣\text{ س} =$ ____________

(٢) $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \; \text{حا } ٢\text{ س} =$ ____________

(٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \; \text{طا س} =$ ____________

(٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \; \frac{\text{حا } ٧\text{ س}}{\text{س}} =$ ____________

(٥) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \; \text{طا } \frac{٣\text{س}}{٤\text{س}} =$ ____________

(٦) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \; \frac{\text{حا (س - ٥)}}{٣\text{ (س - ٥)}} =$ ____________

(٧) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \; \frac{\text{حا } \pi\text{س}}{٢\text{ س}} =$ ____________

(٨) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \; \frac{\text{حا}^{٢}\text{ س}}{\text{س}^{٢}} =$ ____________

(٩) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \; \frac{٣ + ٢\text{ س}}{\text{جتا } ٤\text{ س}} =$ ____________

(١٠) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \; \frac{١ - \text{جتا س}}{٣\text{ س}} =$ ____________

(١١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \; \frac{٢\text{ س}}{\text{طا } ٣\text{ س}} =$ ____________

(١٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \; ٣\text{ س قتا } ٢\text{ س} =$ ____________

(١٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \; \frac{\text{حا}^{٢}\text{ } ٢\text{ س}}{٣\text{ س}^{٢}} =$ ____________

(١٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \; \frac{\text{حا}^{٢}\text{ س طا } ٣\text{س}}{٤\text{س}^{٢}} =$ ____________

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١٥) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \; \frac{\text{حا } ٣\text{ س}}{\text{س}}$ تساوى

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ١ (د) ٣

(١٦) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \; \frac{\text{ظا } ٤\text{س}}{٥\text{س}}$ تساوى

(أ) صفر (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) ١ (د) $\frac{٥}{٤}$

(١٧) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \; \frac{\text{حا } ٢\text{ س} + ٣\text{ طا س}}{٥\text{س}}$ تساوى

(أ) ١ (ب) $\frac{٥}{٦}$ (جـ) $\frac{٦}{٥}$ (د) ٢

(١٨) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \; \frac{\text{طا}^{٢}\text{ } ٢\text{ س}}{\text{س حا } ٣\text{ س}}$ تساوى

(أ) $\frac{٤}{٩}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(١٩) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \; \frac{\text{حا } \frac{١}{٢}\text{ س}}{\text{حا } \frac{٣}{٤}\text{ س}}$ تساوى

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{٣}{٨}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٢٠) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا س}}{\text{س}}$ حيث س بالتقدير الستينى

(أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{١٨٠}$ (ج) $\frac{١٨٠}{\pi}$ (د) π

إيجاد نهاية الدوال المثلثية

(٢١) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا س}}{\text{٥س}}$

(٢٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا س}}{\text{طا س}}$

(٢٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا ٢س}}{\text{س}}$

(٢٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{٣(١ - حتا س)}}{\text{س}}$

(٢٥) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا س (١ - حتا س)}}{\text{س}^{٢}}$

(٢٦) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حتا س طا س}}{\text{س}}$

(٢٧) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا}^{٢}\text{ س}}{\text{س}}$

(٢٨) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا س}}{\text{س}^{٢}}$

(٢٩) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{(١ - جتا}^{٢}\text{ س)}}{\text{س}^{٢}}$

(٣٠) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حتا س - ١}}{\text{حا س}}$

(٣١) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س - س حتا س}}{\text{حا}^{٢}\text{ ٣س}}$

(٣٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{١ - طا س}}{\text{حاس - حتا س}}$

(٣٣) $\underset{س \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س جتا (-٢س+١)}}{\text{س}^{٢}\text{+س}}$

(٣٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢}\text{ - ٣ حا س}}{\text{س}}$

(٣٥) $\underset{س \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \text{(١ + حتا س)} \times \frac{\text{١ - حتا س}}{\text{س}^{٢}}$

(٣٦) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا ٣س}^{٢}\text{ + حا}^{٢}\text{ ٥س}}{\text{س}^{٢}}$

(٣٧) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا ٥س}^{٢}\text{+حا٥٦س}}{\text{٢ س}^{٢}}$

(٣٨) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{٢س}^{٢}\text{ + حا ٣ س}}{\text{٢س}^{٢}\text{ +طا ٦ س}}\right)^{٤}$

(٣٩) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢س}^{٢}\text{ +س حا ٥س}}{\text{س}^{٢}\text{ - طا ٣ س}^{٢}}$

(٤٠) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{١ - جتاس + حا س}}{\text{١ - جتا س - حا س}}$

(٤١) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا ٢س +٥ حا ٣ س}}{\text{٢ حا ٣ س - طا ٥س}}$

(٤٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س طا ٢ س}}{\text{س}^{٢}\text{ + حا}^{٢}\text{ ٣س}}$

(٤٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{١ - جتا ٣س}}{\text{حتا}^{٢}\text{ ٢س - ١}}$

(٤٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢ - حتا ٣ س - حتا ٤ س}}{\text{س}}$

بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة

*** نهاية دالة معرفة بأكثر من قاعدة :**

اذا كانت الدالة معرفة على يمين (م) بقاعدة تختلف عن القاعدة التى على يسارها فلبحث نهاية الدالة عندما س ← م لابد من حساب :

النهاية اليمنى عند م اى د(م)$^+$ ، النهاية اليسرى عند م اى د(م)$^-$ ثم مقارنتهما

فاذا كان د(م)$^+$ = د(م)$^-$ = ل فان نهـا د(س) = ل
س ← م

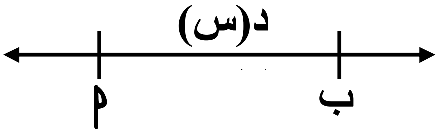
، إذا كان د(م)$^+$ $\neq$ د(م)$^-$ فإن نهـا د(س) ليست موجودة
س ← م

ملاحظات:

(١) إذا كانت الدالة معرفة على يمين و يسار النقطة بقاعدة واحدة فإن نها د(س) تحسب بقواعد النهايات السابق شرحها .

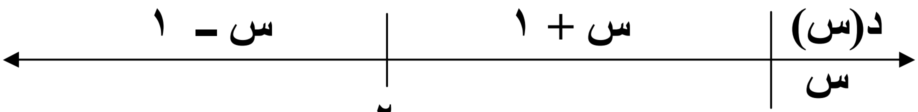
(٢) اذا كانت الدالة معرفة فقط على يمين م (او على يسار م) فعند بحث النهاية يكتفى ببحث د(م)$^+$ أو د(م)$^-$ فقط وان وجدت تكون هى نهاية الدالة

(٣) إذا كانت الدالة معرفة على [م، ب] أو] م، ب [فلبحث نهاية الدالة عند م نبحث النهاية اليمنى فقط و إن وجدت تكون هى نهاية الدالة عند م ، و لبحث نهاية الدالة عند ب نبحث النهاية اليسرى فقط و إن وجدت تكون هى نهاية الدالة عند ب



مثال : إذا كانت د(س) = { س + ١ عندما س > ٢ ، س − ١ عندما س < ٢ } ابحث وجود نهـا د(س)
س ← ٢

الحل :



د(٢$^+$) = نهـا د(س) = نهـا (س + ١) = ٢ + ١ = ٣
س ← ٢$^+$ س ← ٢$^+$

$\text{د}(٢^{-}) = \underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ (\text{س} - ١) = ٢ - ١ = ١$

$\because\ \text{د}(٢^{+}) \neq \text{د}(٢^{-}) \qquad \therefore\ \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}$ ليس لها وجود

مثال : إذا كانت $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} & \text{عندما } \text{س} \leqslant ١ \\ ٣ - ٢\text{س} & \text{عندما } \text{س} > ١ \end{cases}$ ابحث وجود $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}$

الحل :

د(س)	س²	٣ − ٢ س
س		١

$\text{د}(١^{+}) = \underset{\text{س} \to ١^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \underset{\text{س} \to ١^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{س}^{٢} = ١^{٢} = ١$

$\text{د}(١^{-}) = \underset{\text{س} \to ١^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \underset{\text{س} \to ١^{-}}{\text{نهـا}}\ (٣ - ٢\text{س}) = ٣ - ٢ = ١$

$\therefore\ \text{د}(١^{+}) = \text{د}(١^{-}) \qquad \therefore\ \underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = ١$

مثال: إذا كانت $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{حا } ٣\text{س}}{\text{س}} & \text{لكل س} > ٠ \\ \text{حتا } ٣\text{س} + ٢ & \text{لكل س} < ٠ \end{cases}$ ابحث وجود $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}$

الحل :

د(س)	$\dfrac{\text{حا } ٣\text{س}}{\text{س}}$	حتا ٣ س + ٢
س		٠

$\text{د}(٠^{+}) = \underset{\text{س} \to ٠^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \underset{\text{س} \to ٠^{+}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{حا } ٣\text{س}}{\text{س}} = ٣$

$\text{د}(٠^{-}) = \underset{\text{س} \to ٠^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \underset{\text{س} \to ٠^{-}}{\text{نهـا}}\ (\text{حتا } ٣\text{س} + ٢) = \text{حتا } ٠ + ٢ = ١ + ٢ = ٣$

$\therefore\ \text{د}(٠^{+}) = \text{د}(٠^{-}) \qquad \therefore\ \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = ٣$

مثال : إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^2 + ٢ س}{س} & \text{لكل } س < ٠ \\ قا (\pi - س) + ٣ & \text{لكل } س > ٠ \end{cases}$ أوجد $\lim\limits_{س \to ٠}$ د(س) إن أمكن

الحل :

د(س)	$\dfrac{س^2 + ٢ س}{س}$	٠	قا $(\pi - س)$ + ٣
س			

د(٠ $^-$) = $\lim\limits_{س \to ٠^-}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to ٠^-} \dfrac{س^2 + ٢ س}{س}$ = $\lim\limits_{س \to ٠^-} \dfrac{س(س + ٢)}{س}$

= $\lim\limits_{س \to ٠^-}$ (س + ٢) = ٠ + ٢ = ٢

د(٠ $^+$) = $\lim\limits_{س \to ٠^+}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to ٠^+}$ قا (π − س) + ٣ = $\lim\limits_{س \to ٠^+}$ قا π + ٣

= − ١ + ٣ = ٢

∴ د(٠ $^+$) = د(٠ $^-$) ∴ $\lim\limits_{س \to ٠}$ د(س) = ٢

مثال : إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \dfrac{حا س}{س - \pi} & \text{لكل } س < \pi \\ حتا س & \text{لكل } س > \pi \end{cases}$ ابحث وجود $\lim\limits_{س \to \pi}$ د(س)

الحل : د(π^-) = $\lim\limits_{س \to \pi^-}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to \pi^-} \dfrac{حا س}{س - \pi}$ = $\lim\limits_{س \to \pi^-} \dfrac{حا (\pi - س)}{- (\pi - س)}$ = − ١

د(π^+) = $\lim\limits_{س \to \pi^+}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to \pi^+}$ حتا س = حتا π = − ١

∵ د(π^-) = د(π^+) ∴ $\lim\limits_{س \to \pi}$ د(س) = − ١

مثال : إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{حا ٣س}}{\text{س}} & \text{لكل س} < ٠ \\ \text{حتا ٣س} & \text{لكل س} > ٠ \end{cases}$ أوجد $\lim\limits_{\text{س} \to ٠}$ د(س) إن أمكن

الحل : د(٠^-) = $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^-}$ د(س) = $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \dfrac{\text{حا ٣س}}{\text{س}}$ = ٣

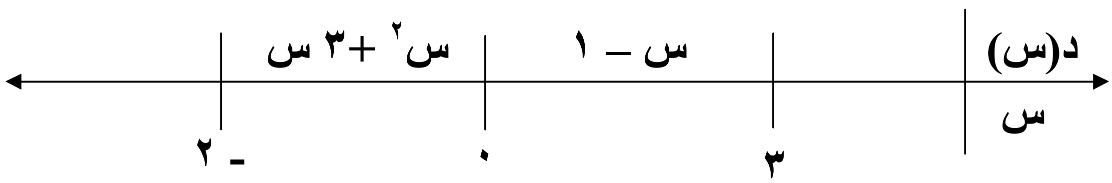
د(٠^+) = $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^+}$ د(س) = $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^+}$ حتا ٣ س = حتا ٠ = ١

∵ د(٠^+) $\neq$ د(٠^-) ∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠}$ د(س) ليس لها وجود

مثال : إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ + ٣\text{ س} & ، \ -٢ < \text{س} < ١ \\ \text{س} - ١ & ، \ ٠ < \text{س} < ٣ \end{cases}$

أوجد كلا من : (١) $\lim\limits_{\text{س} \to -٢}$ د(س) (٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣}$ د(س) (٣) نهـا د(س)

الحل :



∵ الدالة معرفة على يمين س = - ٢ فيكفى بحث النهاية اليمنى

∴ د(-٢^+) = $\lim\limits_{\text{س} \to -٢^+}$ د(س) = $\lim\limits_{\text{س} \to -٢^+}$ ($\text{س}^٢$ + ٣ س) = $(-٢)^٢$ + ٣ (-٢) = - ٢

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to -٢}$ د(س) = - ٢ (أولا)

∵ الدالة معرفة على يسار س = ٣ فيكفى بحث النهاية اليسرى

∴ د(٣^-) = $\lim\limits_{\text{س} \to ٣^-}$ د(س) = $\lim\limits_{\text{س} \to ٣^-}$ (س – ١) = ٣ – ١ = ٢

∴ $\lim_{س \to ٣}$ د(س) = ٢　　(ثانيا)

∵ الدالة معرفة على يمين و يسار س = صفر و لذلك نوجد النهاية من اليمين و اليسار

∴ د(٠ $^+$) = $\lim_{س \to ٠^+}$ د(س) = $\lim_{س \to ٠^+}$ (س – ١) = ٠ – ١ = - ١

∴ د(٠ $^-$) = $\lim_{س \to ٠^-}$ د(س) = $\lim_{س \to ٠^-}$ (س^٢ + ٣ س) = ٠ + ٠ = ٠

∴ ∴ د(٠$^+$) ≠ د(٠$^-$)　　∴ $\lim_{س \to ٠}$ د(س) ليس لها وجود

مثال : إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \dfrac{(س – ١)^٢}{|س – ١|} & \text{عندما } س < ١ \\ ٦ س – ٣ م & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$

أوجد قيمة م حتى تكون للدالة نهاية عندما س ← ١

الحل : باعادة تعريف الدالة :

د(س) = $\begin{cases} \dfrac{(س – ١)^٢}{- س + ١} & \text{عندما } س < ١ \\ ٦ س – ٣ م & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$

= $\begin{cases} \dfrac{(س – ١)^٢}{- (س - ١)} & \text{عندما } س < ١ \\ ٦ س – ٣ م & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$ = $\begin{cases} - (س – ١) & \text{عندما } س < ١ \\ ٦ س – ٣ م & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$

∵ الدالة لها نهاية عندما س ← ١　∴ د(١ $^+$) = د(١ $^-$)

∴ $\lim_{س \to ١^+}$ د(س) = $\lim_{س \to ١^-}$ د(س)　∴ $\lim_{س \to ١^+}$ (٦ س – ٣ م) = $\lim_{س \to ١^-}$ - (س – ١)

∴ ٦ – ٣ م = - (١ – ١)　∴ ٦ – ٣ م = ٠　∴ ٣ م = ٦　∴ م = ٢

مثال : إذا كانت د(س) = س | س – ١ | + ٣ أوجد كلا من :

(١) نها د(س) (س ← - ١) (٢) نها د(س) (س ← ١) (٣) نها د(س) (س ← ٣)

الحل :

د(س) = { س (س – ١) + ٣ ، س ⩾ ١ ؛ - س (س – ١) + ٣ ، س < ١ }

= { س^{٢} - س + ٣ ، س ⩾ ١ ؛ - س^{٢} + س + ٣ ، س < ١ }

د(س)	- س^{٢} + س + ٣	١	س^{٢} – س + ٣
س	س = - ١		س = ٣

(١) الدالة معرفة على يسار س = - ١ فيكفى بحث النهاية اليسرى

نها د(س) (س ← – ١$^{-}$) = نها (س ← – ١$^{-}$) (- س^{٢} + س + ٣) = - (- ١)^{٢} + (-١) + ٣ = ١

∴ نها د(س) (س ← - ١) = ١

(٢) الدالة معرفة على يمين و يسار س = ١ فنبحث النهاية من اليمين و اليسار

نها د(س) (س ← ١$^{+}$) = نها (س ← ١$^{+}$) (س^{٢} – س + ٣) = ١ – ١ + ٣ = ٣

نها د(س) (س ← ١$^{-}$) = نها (س ← ١$^{-}$) (- س^{٢} + س + ٣) = - ١ + ١ + ٣ = ٣

∴ د(١$^{+}$) = د(١$^{-}$) ∴ نها د(س) (س ← ١) = ٣

(٣) الدالة معرفة على يمين س = ١ فيكفى بحث النهاية من اليمين

∴ نها د(س) (س ← ٣) = نها (س ← ٣) (س^{٢} – س + ٣) = ٩ – ٣ + ٣ = ٩

مثال : إذا كان للدالة د(س) نهاية تساوى ٣ عندما س ← ٢ حيث

د(س) = { ٩ س^{٢} – ب عندما س > ٢ ؛ ٩ س + ب عندما س < ٢ } أوجد قيمتى ٩ ، ب

الحل :

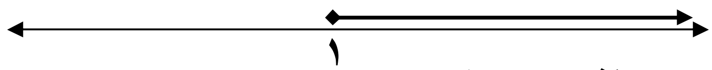
∵ نها د(س) = ٣ (س ← ٢) ∴ د(٢ $^{+}$) = د(٢ $^{-}$) = ٣

∴ نها (ϸس^{٢} – ب) (س ← ٢ $^{+}$) = نها (ϸس + ب) (س ← ٢ $^{-}$) ∴ ٤ ϸ - ب = ٢ϸ + ب = ٣

∴ بحل المعادلتين جبريا : ٤ ϸ - ب = ٣ ، ٢ϸ + ب = ٣ نجد : ϸ = ١ ، ب = ١

مثال : ابحث وجود نهاية للدالة د عندما س ← ١ حيث د(س) = √(س - ١)

الحل :



∵ د(س) معرفة لجميع قيم س – ١ ⩾ ٠ ∴ مجال الدالة د(س) = [١ ، ∞ [

∴ د(١ $^{+}$) = نها د(س) (س ← ١ $^{+}$) ∴ د(١ $^{+}$) = نها √(س - ١) (س ← ١ $^{+}$) = صفر

، د(١ $^{-}$) غير معرفة لان الدالة غير معرفة على يسار ١

∴ د(س) ليس لها نهاية عندما س ← ١

مثال : إذا كانت د(س) = { (ϸس^{٢} + ٢ س - ٥) / (س – ١) ، س > ١ ؛ ٣ س + ٥ ، س < ١ } لها نهاية عند س = ١ أوجد قيمة ϸ

الحل : ∵ د(س) معرفة عند س = ١ ∴ د(١ $^{+}$) = د(١ $^{-}$) .... أكمل

∴ ٨ = ϸ + ٥ ∴ ϸ = ٨ – ٥ = ٣

ما اجمل الرياضيات عندما تكون محب لها
عندما تكون محب تصنع كل مايريد الحبيب
عاشق الرياضيات المنفلوطى

تمارين على بحث وجود نهاية عند نقطة

أكمل ماياتى:

(١) الدالة د معرفة على ح حيث د(س) = { ٢ لكل س ⩽ ٠ ؛ ٢ - س لكل س > ٠ }

(أ) نهـا د(س) = ـــــــــــــــــ (س ← ٠$^{-}$) (ب) نهـا د(س) = ـــــــــــــــــ (س ← ٠$^{+}$)

(٢) الدالة د معرفة على ح حيث د(س) = { ٣ لكل س > ٠ ؛ ٣- س لكل س ⩾ ٠ }

(أ) نهـا د(س) = ـــــــــــــــــ (س ← ٠$^{+}$) (ب) نهـا د(س) = ـــــــــــــــــ (س ← ٠$^{-}$)

(٣) إذا كانت د(س) = { س لكل س ⩽ ٠ ؛ $\frac{١}{س}$ لكل س > ٠ }

(أ) نهـا د(س) = ـــــــــــــــــ (س ← ٠$^{+}$) (ب) نهـا د(س) = ـــــــــــــــــ (س ← ٠$^{-}$)

ابحث نهاية الدوال الآتية « إن وجدت»

(٧) نهـا د(س) (س ← ٢) حيث د(س) = { ٢ س لكل س < ٢ ؛ س^{٢} لكل س ⩽ ٢ }

(٨) نهـا د(س) (س ← ٣) حيث د(س) = { س^{٢} +١ لكل س < ٣- ؛ ٣ س + ١ لكل س ⩽ ٣- }

(٩) نهـا د(س) (س ← ٠) حيث د(س) = { س^{٢} + ٢ لكل س < ٠- ؛ ٣س + ١ لكل س ⩽ ٠- }

(١٠) نهـا د(س) (س ← ١-) حيث د(س) = { ٢ س + ١ لكل س < ١- ؛ ١- لكل س > ١- }

(١١) أوجد قيمة م حتى تكون د(س) لها نهاية حيث عندما س ⟵ ١ د(س) =

- (س-١)² / |س-١| لكل س < ١
- ٦س - ٣ م لكل س>١

(١٢) ابحث وجود نهاية للدالة د حيث عندماس ⟵ ١ د(س) =

- ٢حا س / (π - س) لكل س < π
- ١ + حتا س لكل س > π

عندما س ⟵ π

(١٣) أوجد قيمة كل من م، ك إذا كان نهـــا (س ⟵ ٢) د(س) = ٧ ، د(س) =

- س² + ٣م لكل س < ٢
- ٥س + ك لكل س > ٢

(١٤) أوجد قيمة ك التى تجعل للدالة د(س) نهاية عندما س ⟵ -١ حيث، د(س) =

- س²+ك لكل س < -١
- س+٤ لكل س> -١

(١٥) ابحث وجود نهاية للدالة د عندما س ⟵ ٠ حيث، د(س) =

- (٥س + طا٢س) / (٦ س + حا س) لكل س >٠
- جتا س لكل س < ٠

(١٦) ابحث وجود نهاية للدالة د حيث د(س) =

- ٣ س / طا س لكل - $\frac{\pi}{٣}$ < س < ٠
- ٣ جتا س لكل ٠ <س < $\frac{\pi}{٣}$

(أ) عندما س ⟵ $\frac{-\pi}{٣}$ (ب) س ⟵ $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) س ⟵ ٠

(١٧) ابحث وجود نهاية للدالة د ، د(س) = |س² - ٤س + ٣| عندما:

(أ) س ⟵ ١ (ب) س ⟵ ٣

(١٨) ابحث وجود نهاية للدالة د (س) = ١ / (س - ٢) عندما س ⟵ ٢

(١٩) إذا كان د(س) =

- **٣ س + ٢ عندما س < ٤**
- **٥ س + ك عندما س ⩾٤**

أوجد قيمة ك التى تجعل للدالة د نهاية عند س = ٤

[ارشاد : الدالة لها نهاية عند س = ٤ ∴ د(٤ ⁺) = د(٤ ⁻) ...... أكمل]

الاتصــال

أولا : اتصال الدالة عند نقطة

تعريف

يقال أن الدالة د متصلة عند النقطة ؟ إذا تحققت الشروط الآتية معا :

١) د(؟) لها وجود أى د(س) معرفة عند س = ؟

٢) $\lim\limits_{س \to ؟}$ د(س) لها وجود أى د($؟^+$) = د($؟^-$)

٣) $\lim\limits_{س \to ؟}$ د(س) = د (؟)

* <u>خطوات بحث اتصال الدالة د عند النقطة س = ؟ نتبع الخطوات الآتية :</u>

١) نوجد د(؟) [إذا لم يكن لها وجود كانت الدلة غير متصلة عند ؟]

٢) نوجد $\lim\limits_{س \to ؟}$ د(س) [إذا لم يكن لها وجود كانت الدالة غير متصلة عند ؟]

٣) نقارن $\lim\limits_{س \to ؟}$ د(س) بالعدد د(؟) [فإذا حدث التساوى كانت الدالة متصلة عند ؟ ، إلافانها تكون غير متصلة عند ؟]

<u>ملاحظة</u> : يكفى عدم تحقق شرط واحد من الشروط الثلاثة السابقة لعدم اتصال الدالة عند ؟

---

[١] ابحث اتصال الدالة د(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ عند س = ٢

الحل:

∵ د(٢) غير معرفة ∴ د(س) غير متصلة عند س = ٢

[٢] ابحث اتصال الدالة د(س) = | س – ١ | + ٣ عند س = ١

الحل : باعادة تعريف الدالة :

$$د(س) = \begin{cases} س - ١ + ٣ &، س \geqslant ١ \\ -س + ١ + ٣ &، س < ١ \end{cases} = \begin{cases} س + ٢ &، س \geqslant ١ \\ -س + ٤ &، س < ١ \end{cases}$$

∵ الدالة د معرفة عند س = ١ ∴ د(١) = ١ + ٢ = ٣

$د(١^+) = \lim\limits_{س \to ١^+} نها (س + ٢) = ١ + ٢ = ٣$ ، $د(١^-) = \lim\limits_{س \to ١^-} نها (-س + ٤) = -١ + ٤ = ٣$

∴ $د(١^+) = د(١^-)$ ∴ $\lim\limits_{س \to ١} نها د(س) = ٣$

∵ $د(١) = \lim\limits_{س \to ١} نها د(س)$ ∴ د متصلة عند س = ١

---

[٣] بين أن الدالة د حيث
$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٤}{س - ٢} &، س \neq ٢ \\ ٤ &، س = ٢ \end{cases}$$
متصلة عند س = ٢

الحل : ∵ د(٢) = ٤

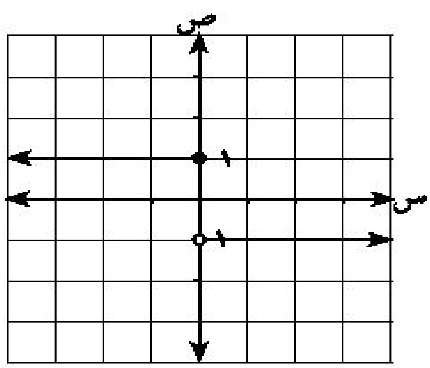
، $\lim\limits_{س \to ٢} نها د(س) = \lim\limits_{س \to ٢} نها \dfrac{س^٢ - ٤}{س - ٢} = \lim\limits_{س \to ٢} نها \dfrac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٢)}$

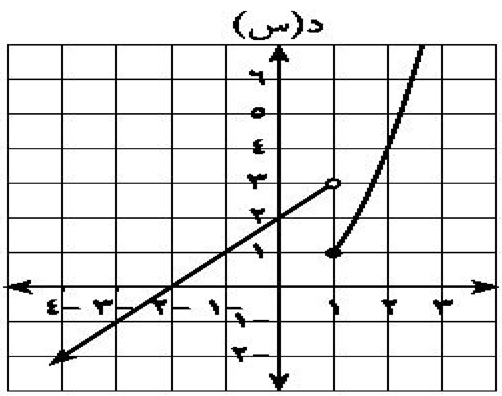
$= \lim\limits_{س \to ٢} نها (س + ٢) = ٢ + ٢ = ٤$

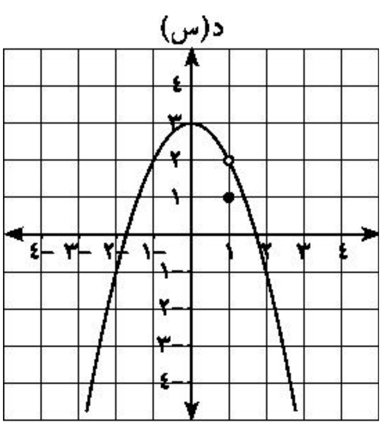
∴ $د(٢) = \lim\limits_{س \to ٢} نها د(س)$ ∴ الدالة متصلة عند س = ٢

---

[٤]: بين اى من الاشكال الاتية يمثل دوال متصلة و لماذا ؟







[٥] إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^2 + 2س - 15}{س - 3} & ، س \neq 3 \\ هـ & ، س = 3 \end{cases}$ متصلة عند س = ٣ فأوجد قيمة هـ

الحل : ∵ الدالة د متصلة عند س = ٣ ∴ د(٣) = $\lim_{س \to 3}$ د(س)

∵ د(٣) = هـ

، $\lim_{س \to 3}$ د(س) = $\lim_{س \to 3} \dfrac{(س - 3)(س + 5)}{(س - 3)}$ = $\lim_{س \to 3}$ (س + ٥) = ٣ + ٥ = ٨

∴ هـ = ٨

---

[٦] : إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \dfrac{حا 2س}{س} - حتا س & ، س \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & ، س = 0 \end{cases}$

ابحث اتصال الدالة د(س) عند س = صفر

الحل : ∵ د(٠) = $\dfrac{1}{2}$ ∴ الدالة معرفة عند س = ٠

، $\lim_{س \to 0}$ د(س) = $\lim_{س \to 0}$ [$\dfrac{حا 2س}{س}$ - حتا س] = ٢ – ١ = ١

∵ د(٠) ≠ $\lim_{س \to 0}$ د(س) ∴ الدالة غير متصلة عند س = ٠

---

* **إعادة تعريف الدالة بحيث تكون متصلة (إن كان ذلك ممكنا) :**

ملاحظة هامة :

إذا كانت د(س) معرفة عند س = ؟، نها د(س) لها وجود و كانت الدالة غير متصلة عند س= ؟

و ذلك لاختلاف د(؟) عن $\lim_{س \to ؟}$ د(س) فيمكن فى هذه الحلة إعادة تعريف الدالة د(س) بحيث ت

تكون متصلة عند س = ؟ بجعل د(؟) = $\lim_{س \to ؟}$ د(س)

مثال : أعد تعريف الدالة د حيث $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١٠}{\text{س} - ٢}$ حيث $\text{س} \neq ٢$

بحيث تكون متصلة عند س = ٢

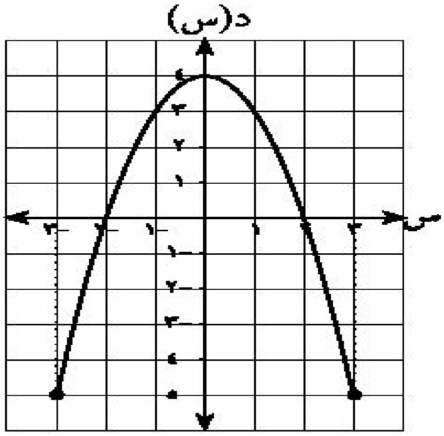
الحل : لكى تكون الدالة متصلة عند س = ٢ فإن $\text{د(٢)} = \lim_{\text{س} \to ٢} \text{د(س)}$

$$\lim_{\text{س} \to ٢} \text{د(س)} = \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١٠}{\text{س} - ٢} = \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٥)}{\cancel{(\text{س} - ٢)}} = ٢ + ٥ = ٧$$

∴ د(٢) = ٧ ، باعادة تعريف الدالة

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١٠}{\text{س} - ٢} & \text{، س} \neq ٢ \\ ٧ & \text{، س} = ٢ \end{cases}$$

ثانيا : اتصال الدالة على فترة



الشكل المقابل : يمثل منحنى الدالة $\text{د(س)} = ٤ - \text{س}^{٢}$

فى الفترة [- ٣ ، ٣] متصلة عند جميع نقاط الفترة

أى $\lim_{\text{س} \to \text{ا}} \text{د(س)} = \text{د(ا)}$ لكل ا ∈] − ٣ ، ٣ [

تعريف

إذا كانت د(س) معرفة على الفترة [ا ، ب] تكون متصلة على الفترة [ا ، ب] إذا كانت :

١) د(س) متصلة على الفترة] ا ، ب [

٢) $\lim_{\text{س} \to \text{ا}^{+}} \text{د(س)} = \text{د(ا)}$

٣) $\lim_{\text{س} \to \text{ب}^{-}} \text{د(س)} = \text{د(ب)}$

* **ملاحظات هامة :**

أولا : إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة] ؟، ب [و للدالة قاعدة واحدة فإن :

١) دوال كثيرات الحدود : متصلة على ح أو فترة جزئية من ح

٢) الدوال الكسرية الجبرية : متصلة على ح أو فترة جزئية من ح ما عدا أصفارالمقام

٣) الدوال المثلثية :

(أ) دالة الجيب (حا) و دالة جيب التمام (حتا) : كل منهما متصلة على ح أو اى فترة جزئية من ح

(ب) دالة الظل (ظا) : متصلة على ح ما عدا النقط $\frac{٢ن + ١}{٢}\pi$ ، ن ∈ ص

مثال : ابحث اتصال الدوال الآتية :

١) د(س) = س^{٢} + ٥ س – ٣ كثيرة حدود متصلة على ح

٢) د(س) = ٦ كثيرة حدود متصلة على ح

٣) د(س) = س ^{٢} + ٥ س $^{-١}$ دالة كسرية متصلة على ح – { ٠ }

٤) د(س) = $\frac{س + ٢}{٢ س + ١}$ دالة كسرية متصلة على ح – { $\frac{١}{٢}$ }

٥) د(س) = $\frac{س + ٣}{س^{٢} + ٩}$ دالة كسرية متصلة على ح

٦) د(س) = $\frac{س^{٢} – ٤}{س^{٢} + ٥ س – ٦}$ دالة كسرية متصلة على ح – { ١ ، – ٥ }

٧) د(س) = س^{٣} + ١ كثيرة حدود متصلة على ح

٨) د(س) = حا ٤ س دالة مثلثية متصلة على ح

٩) د(س) = حتا س + ٥ دالة متصلة على ح

١٠) د(س) = ظا ٧ س دالة مثلثية متصلة على ح

١١) د(س) = $\frac{حا ٢ س}{س^{٢} – ٩}$ دالة كسرية متصلة على ح – { – ٣ ، ٣ }

تابع الملاحظات الهامة :

ثانيا : إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة] أ ، ب [و للدالة أكثر من قاعدة فإن :

١) نبحث اتصال الدالة فى الفترة المفتوحة لكل قاعدة على حدة

٢) نبحث الاتصال عند النقطة التى يتغير على جانبيها قاعدة الدالة

ملاحظة : إذا كانت الدالة غير متصلة عند هذه النقطة نقول أن الدالة متصلة فى الفترة المفتوحة ما عدا هذه النقطة .

مثال : ابحث اتصال الدالة الآتية على الفترة [٠ ، ∞ [حيث

د(س) = { حا س ـ حتا س لكل ٠ ≤ س ≤ π
حتا ٢ س لكل س > π }

الحل :

حتا ٢ س | حا س ـ حتا س
π صفر

الدالة د(س) معرفة على الفترة [٠ ، ∞ [

د(س) = حا س ـ حتا س متصلة على الفترة] ٠ ، π [

د(س) = حتا ٢ س متصلة على الفترة] π ، ∞ [

نبحث اتصال الدالة د(س) عند فواصل الفترات :

عند س = صفر :

د(٠) = حا ٠ ـ حتا ٠ = ٠ ـ ١ = ـ ١

، نها د(س) = نها (حا س ـ حتا س) = ٠ ـ ١ = ـ ١
س ← ٠+ س ← ٠+

∴ د(٠) = نها د(س) = ـ ١ فالدالة متصلة من جهة اليمين عند س = ٠
س ← ٠+

عند س = π : د(π) = حا π ـ حتا π = ٠ ـ (ـ ١) = ١

، د(π^-) = $\lim\limits_{س \to \pi^-}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to \pi^-}$ (حا س ـ حتا س) = ١

، د(π^+) = $\lim\limits_{س \to \pi^+}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to \pi^+}$ (حتا ٢ س) = ١

∴ د(π) = د(π^+) = د(π^-) ∴ الدالة متصلة عند س = π

و مما سبق نجد أن الدالة د(س) متصلة على الفترة [٠ ، ∞ [

تدريب : ابحث اتصال الدالة د(س) = $\begin{cases} ١ + \text{حا س} & ، \; ٠ \leqslant س < \frac{\pi}{٢} \\ ٢ + (س - \frac{\pi}{٢})^٢ & ، \; س \geqslant \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

[ارشاد : الدالة متصلة على الفترة [٠ ، ∞ [......]

تابع الملاحظات الهامة:

ثالثا : إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المغلقة [أ ، ب] فإن د تكون متصلة إذا تحققت الشروط الآتية :

١) د متصلة على الفترة المفتوحة] أ ، ب [

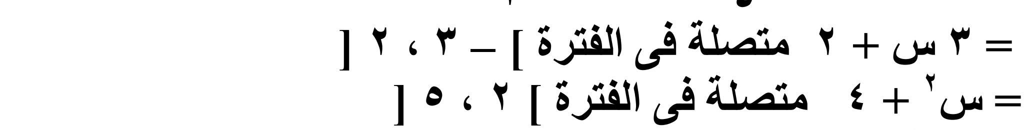
٢) د متصلة من اليمين عند أ أى د(أ$^+$) = $\lim\limits_{س \to أ^+}$ د(س)

٣) د متصلة من اليسار عند ب أى د(ب$^-$) = $\lim\limits_{س \to ب^-}$ د(س)

مثال : ابحث اتصال الدالة د حيث

د(س) = $\begin{cases} ٣ \text{ س} + ٢ & \text{عندما } -٣ \leqslant س \leqslant ٢ \\ س^٢ + ٤ & \text{عندما } ٢ \leqslant س \leqslant ٥ \end{cases}$

الحل :



د(س) = ٣ س + ٢ متصلة فى الفترة] ـ ٣ ، ٢ [

، د(س) = س^٢ + ٤ متصلة فى الفترة] ٢ ، ٥ [

∴ د(س) متصلة فى] ـ ٣ ، ٥ [(١)

بحث الاتصال عند س = - ٣ :

د(- ٣) = ٣ × (- ٣) + ٢ = - ٧

$د(- ٣ ^{+}) = \lim_{س \to -٣^{+}}$ (٣ س + ٢) = ٣ × (- ٣) + ٢ = - ٧

∴ د(- ٣) = د(- ٣ ^+^) 　∴ الدالة متصلة عند س = - ٣ من جهة اليمين (٢)

بحث الاتصال للدالة عند س = ٢ :

د(٢) = ٣ × ٢ + ٢ = ٨

$د(٢ ^{+}) = \lim_{س \to ٢^{+}}$ (س^{٢} + ٤) = ٤ + ٤ = ٤ ، $د(٢ ^{-}) = \lim_{س \to ٢^{-}}$ (٣ س + ٢) = ٦ + ٢ = ٨

∵ د(٢) = د(٢ ^+^) = د(٢ ^-^) 　∴ الدالة متصلة عند س = ٢ (٣)

بحث الاتصال للدالة عند س = ٥ :

د(٥) = ٢٥ + ٤ = ٢٩ ، $د(٥ ^{-}) = \lim_{س \to ٥^{-}}$ (س^{٢} + ٤) = ٢٥ + ٤ = ٢٩

∵ د(٥) = د(٥ ^-^) 　∴ الدالة متصلة عند س = ٥ من اليسار (٤)

من ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ نجد أن الدالة متصلة على [- ٣ ، ٥]

نظرية :

إذا كانت د ~١~ ، د ~٢~ متصلتين على ح فإن :

١) د ~١~ ± د ~٢~ متصل على ح

٢) د ~١~ × د ~٢~ متصل على ح

٣) $\frac{د_{١}}{د_{٢}}$ تكون متصلة على ح ماعدا اصفار دالة المقام

مثال : ابحث اتصال كل من الدوال الآتية :

١) د(س) = $\frac{حا س + حتا س}{س^{٢} - ١}$

٢) د(س) = $\frac{طا س}{س^{٢} + ١}$

٣) د(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} + ٤}$

٤) د(س) = $\frac{س - ٢}{س^{٢} - ٥ س + ٦}$

٥) د(س) = $\frac{س^{٣} + ١}{حا س}$

٦) د(س) = (س + ١) حتا س

الحل :

١) د(س) = $\frac{\text{حا س + حتا س}}{\text{س}^{٢} - ١}$

دالة البسط : حا س + حتا س متصلة على ح

دالة المقام : س^{٢} ـ ١ متصلة على ح

، س^{٢} ـ ١ = ٠ عند (س- ١)(س + ١) =٠

اصفار المقام { ١ ، - ١ }

∴ الدالة متصلة على ح ـ { ١ ، - ١ }

٢) د(س) = $\frac{\text{طا س}}{\text{س}^{٢} + ١}$

البسط : طا س دالة متصلة على ح

المقام : س^{٢} + ١ دالة متصلة على ح

، س^{٢}+ ١ > ٠ لجميع قيم س

∴ لا يوجد اصفار للمقام

∴ الدالة متصلة على ح

٣) د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س}^{٢} + ٤}$

البسط : س^{٢} ـ ٤ متصلة على ح

المقام : س^{٢} + ٤ > ٠ لجميع قيم س

لا يوجد اصفار للمقام

∴ الدالة متصلة على ح

٤) د(س) = $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ٥\text{ س} + ٦}$

البسط : س ـ ٢ متصلة على ح

المقام : س^{٢} ـ ٥ س + ٦ متصلة على ح

، (س ـ ٣)(س ـ ٢) = ٠

∴ الدالة متصلة على ح ـ { ٣ ، ٢ }

٥) د(س) = $\frac{\text{س}^{٣} + ١}{\text{حا س}}$

البسط : س^{٣} + ١ متصلة على ح

المقام : حا س متصلة على ح

، حا س = ٠ عندما س = ٠

∴ الدالة متصلة على ح ـ { ٠ }

٦) د(س) = (س + ١) حتا س

الدالة د$_{١}$: س + ١ متصلة على ح

الدالة د$_{٢}$: حتا س متصلة على ح

∴ د(س) = د$_{١}$× د$_{٢}$ متصلة على ح

مثال : أوجد قيمة ك التى تجعل الدالة د متصلة على ح حيث

$$\text{د(س)} = \begin{cases} ٣\text{ س + ك} & \text{عندما س} \leqslant ٢ \\ ١ - \text{ك س}^{٢} & \text{عندما س} > ٢ \end{cases}$$

الحل : ∵ الدالة متصلة على ح ∴ د(٢) = د(٢ $^{+}$) = د(٢ $^{-}$)

∴ د(٢) = ٣ × ٢ + ك = ٦ + ك

، د(٢ $^{+}$) = نها$_{س \to ٢^{+}}$ (٣ س + ك) = ٦ + ك

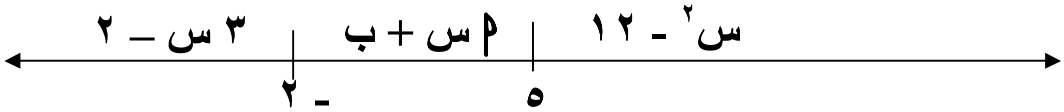
، د(٢ $^{-}$) = نها$_{س \to ٢^{-}}$ (١ – ك س^{٢}) = ١ – ٤ ك

∴ ٦ + ك = ١ – ٤ ك ∴ ٥ ك = - ٥ ∴ ك = - ١

مثال : إذا كانت د متصلة على ح أوجد قيمة م ، ب حيث

د(س) = $\begin{cases} \text{٣ س – ٢} & \text{، س} \leqslant \text{– ٢} \\ \text{م س + ب} & \text{، - ٢ < س < ٥} \\ \text{س}^{٢} \text{ - ١٢} & \text{، س} \geqslant \text{٥} \end{cases}$

الحل :



∵ د متصلة على ح ∴ د متصلة عند س = - ٢

∴ د(- ٢) = د(- ٢ $^{+}$) = د(- ٢ $^{-}$)

∴ د(- ٢) = ٣ × (- ٢) – ٢ = - ٨

، د(- ٢ $^{-}$) = نها$_{س \to -٢^{-}}$ (٣ س – ٢) = -٦ – ٢ = - ٨

، د(- ٢ $^{+}$) = نها$_{س \to -٢^{+}}$ (م س + ب) = - ٢ م + ب

∴ - ٢ م + ب = - ٨ ..... (١)

∵ د متصلة على ح ∴ د متصلة عند س = ٥ ∴ د(٥) = د(٥ $^{+}$) = د(٥ $^{-}$)

∴ د(٥) = ٢٥ – ١٢ = ١٣

، د(٥ $^{+}$) = نها$_{س \to ٥^{+}}$ (س^{٢} - ١٢) = ٢٥ – ١٢ = ١٣

، د(٥ $^{-}$) = نها$_{س \to ٥^{-}}$ (م س + ب) = ٥ م + ب

∴ ٥ م + ب = ١٣ .... (٢)

بحل المعادلتين ١ ، ٢ نجد : م = ٣ ، ب = - ٢

تمارين متنوعة على الاتصال

ادرس اتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المعطاة:

(١) $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^٢ + ٢ & ، \text{س} \leqslant ١ \\ ٣\text{س} & ، \text{س} > ١ \end{cases}$ عند س = ١

(٢) $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^٢ - ١ & ، \text{س} \leqslant ٢ \\ ٢\text{س} - ١ & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

(٣) $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢ & ، \text{س} \leqslant ٣ \\ \text{س}^٢ - ٢\text{س} - ١ & ، \text{س} > ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

(٤) $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س} + ٤ & ، \text{س} < -٢ \\ ١ & ، -٢ \leqslant \text{س} < -١ \\ ٢\text{س} + ٣ & ، \text{س} \geqslant -١ \end{cases}$ عند س = -٢، عند س = -١

(٥) $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}(\text{س} - ٢)}{\text{س}^٢ - ٤} & ، \text{س} < ٢ \\ ١ - \dfrac{٣}{\text{س}^٢} & ، \text{س} \geqslant ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

(٦) $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}} & ، \text{س} < ٠ \\ ٢ \text{ جا س} & ، \text{س} \geqslant ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

ابحث اتصال كل من الدوال الآتية على ع

(٧) $\text{د(س)} = \text{س}^٣ - ٢\text{س}^٢ + ١$

(٨) $\text{د(س)} = \dfrac{-\text{س}}{\text{س}^٢ + ١}$

(٩) $\text{د(س)} = \dfrac{٣\text{س} + ٢}{\text{س}^٢ - ٢\text{س}}$

(١٠) $\text{د(س)} = \dfrac{٢\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ١٥}$

(١١) $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}}{|\text{س}| - ٢}$

(١٢) $\text{د(س)} = \dfrac{|\text{س} + ٢|}{(\text{س} + ٢)^٢}$

(١٣) $\text{د(س)} = \text{جا س} - ٣ \text{ جتا } (\text{س} + ١)$

(١٤) $\text{د(س)} = \text{س}^٢ + \text{جتا}^٢ \text{ س}$

(١٥) $\text{د(س)} = \text{س}^٢ \text{ جا } ٢ \text{ س}$

(١٦) $\text{د(س)} = \text{طا}^٢ \text{ س} - ١$

(١٧) $\text{د(س)} = \dfrac{\text{جا}^٢\text{س} + \text{جتا س}}{\text{س}^٢ - ٩}$

(١٨) $\text{د(س)} = \dfrac{\text{ظا س}}{\text{س}^٢ - ٩}$

ابحث اتصال كل الدوال الآتية على الفترة المعطاة:

(١٩) $$\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س طاس} + \text{جا}^{٢}\,\text{٣س}}{\text{٥س}^{٢}} & ، \quad -\dfrac{\pi}{٤} < \text{س} < ٠ \\ \text{٢ جتا ٢ س} & ، \quad ٠ \leqslant \text{س} < \dfrac{\pi}{٤} \end{cases}$$ على الفترة $]-\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٤}[$

(٢٠) $$\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٦} - ١}{\text{س}^{٣} - ١} & ، \quad -٤ < \text{س} < ١ \\ \text{٣س} - ١ & ، \quad ١ \leqslant \text{س} < ٤ \\ \text{س}^{٢} & ، \quad ٤ \leqslant \text{س} < ٦ \end{cases}$$ على الفترة $]-٤ ، ٦[$

أوجد قيم أ في كل مما يأتي إذا كان:

(٢١) $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} + \text{أس} + ٩}$ متصلة على ح

(٢٢) $$\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{(\text{س} + ٣)^{٤} - ٨١}{\text{س}} & \text{حيث س} \neq ٠ \\ \text{أ} & \text{عندما س} \neq ٠ \end{cases}$$ متصلة على ح

أوجد قيمتي الثابتين ب ، جـ في كل مما يأتي:

(٢٣) $$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س} + ١ & ، \quad ١ < \text{س} < ٣ \\ \text{س}^{٢} + \text{ب س} + \text{جـ} & ، \quad \text{س} \in \text{ح} -]١ ، ٣[\end{cases}$$ متصلة على ح

(٢٤) $$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س} + \text{٢ب} & ، \quad \text{س} < -٢ \\ \text{٣ ب س} + \text{جـ} & ، \quad -٢ \leqslant \text{س} \leqslant ١ \\ \text{٣س} - \text{٢ب} & ، \quad \text{س} > ١ \end{cases}$$ متصلة على ح

أعد تعريف كل من الدوال الآتية حتى تصبح متصلة عند النقط المبينة إذا كان ممكنًا:

(٢٥) $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & ، \text{س} \geq ٢ \\ \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢} & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

(٢٦) $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{٣\text{س} + ١ - \text{جتا س}}{٥\text{س}} & ، \text{س} > ٠ \\ \dfrac{٣}{٥}\,\text{جا س} & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

(٢٧) $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{(\text{س} - ٣)^{٥٠} + (\text{س} - ٣)}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} > ٣ \\ \text{جتا}\,(٣ - \text{س}) & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

(٢٨) $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦}{\text{س} - ٣}$ عند س = ٣

(٢٩) أوجد قيمة جـ التي تجعل الدالة د متصلة عند جـ حيث: $\text{د(س)} = \begin{cases} ٢ - \text{س}^{٢} & \text{س} \leq \text{جـ} \\ \text{س} & \text{س} > \text{جـ} \end{cases}$

---

٣٠ إذا كانت $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{٣\text{س}}{\text{حا س}} & \text{لكل س} < ٠ \\ \text{حتا ٣س} & \text{لكل س} > ٠ \end{cases}$ فابحث وجود $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د(س)}$

٣١ إذا كان $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{حا (س - ١)}}{\text{س - ١}} & \text{لكل س} > ١ \\ \text{طا} \dfrac{\pi\,\text{س}}{٤} & \text{لكل س} < ١ \end{cases}$ فابحث وجود $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{د(س)}$

٣٢ أوجد قيمة الثابت أ لكى يكون للدالة د نهاية عندما س ⟵ ٠

حيث $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{أ + جتا س} & \text{عندما س} < ٠ \\ \dfrac{\text{طا ٢س}}{\text{أس}} & \text{عندما س} > ٠ \end{cases}$

٣٣ ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = ٥ - |س - ٣| عند س = ٣

للدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ٣} - ٢}{\text{س}^{٢} - ١} & \text{حيث س} \neq ١ \\ \text{ك} & \text{عندما س} = ١ \end{cases}$ أوجد قيمة ك؛ لكى تكون الدالة متصلة عند س = ١

٣٤ أعد تعريف الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٣} + ٢\text{س} & \text{لكل س} > ١ \\ ٥\text{س} - ١ & \text{لكل س} < ١ \end{cases}$ بحيث تصبح متصلة عندما س = ١ إذا كان ذلك ممكنًا.

٣٥ للدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{حتا} ٢\text{س} - ١}{\text{س}^{٢}} & \text{حيث س} \neq ٠ \\ \text{ك} & \text{عندما س} = ٠ \end{cases}$ أوجد قيمة ك التى تجعل الدالة د متصلة عندما س = ٠

٣٦ ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} ١ + \text{حا س} & \text{حيث } ٠ \leqslant \text{س} \leqslant \dfrac{\pi}{٢} \\ ١ - \text{حتا } ٢ \text{ س} & \text{حيث س} \geqslant \dfrac{\pi}{٢} \end{cases}$ على ع

٣٧ إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} ٤\text{س} & \text{حيث س} \leqslant -١ \\ \text{أ س} + \text{ب} & \text{حيث } -١ < \text{س} < ٣ \\ -٢\text{س} & \text{حيث س} \geqslant ٣ \end{cases}$

متصلة على ع فما قيمة كل من أ ، ب؟

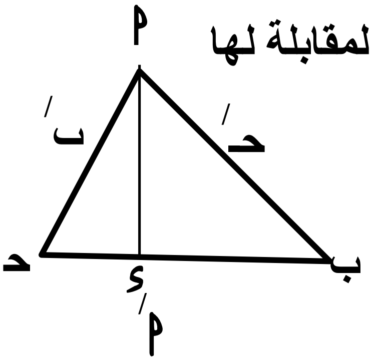
٣٨ **ابحث اتصال كل من الدوال الآتية:**

د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢} & \text{لكل س} \neq ٢ \\ \text{حا}(\pi - \text{س}) & \text{لكل س} = ٢ \end{cases}$

(أ) عند س = ٢ (ب) على ع

حســـاب المثـلثـات

قانون الجيب (قاعدة الجيب)



فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها

أى أنه : في أي مثلث أ ب جـ يكون :

$$\frac{ٵ'}{\text{حا } ٵ} = \frac{ب'}{\text{حا } ب} = \frac{حـ'}{\text{حا } حـ}$$

حيث الرموز : ٵ ، ب ، حـ تعبر عن قياسات زوايا المثلث ٵ ب حـ

، ٵ/ ، ب/ ، حـ/ تعبر عن أطوال الأضلاع $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{ٵ حـ}}$ ، $\overline{\text{ٵ ب}}$ على الترتيب

البرهان لا يمتحن فيه:

مساحة Δ ٵ ب حـ = $\frac{1}{2}$× ب حـ × ٵ ء ، ∵ ٵ ء = حـ/ جا ب(من مساحة Δ ٵ ب ء)

∴ مساحة Δ ٵ ب حـ = $\frac{1}{2}$ × ب/جـ/ حا ٵ = $\frac{1}{2}$ × ٵ/جـ/حاب = $\frac{1}{2}$× ٵ/ب/حا جـ

بالضرب × ٢ ثم القسمة على ٵ/ب/جـ/ ينتج المطلوب

$$\frac{ٵ'}{\text{حا } ٵ} = \frac{ب'}{\text{حا } ب} = \frac{حـ'}{\text{حا } حـ}$$

ملحوظة : عناصر المثلث ثلاث زوايا $\widehat{ٵ}$ ، $\widehat{ب}$ ، $\widehat{جـ}$ ، ثلاث أضلاع ٵ/ ، ب/ ، جـ/

ملاحظات :

١) محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

٢) محيط المثلث = ٵ/ + ب/ + جـ/

٣) مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$× طول القاعدة × الارتفاع

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$× ٵ/ب/ جا جـ = $\frac{1}{2}$× ب/جـ/جا ٵ = $\frac{1}{2}$×ٵ/جـ/جا ب

محيط الدائرة = ٢ ط نق ، مساحة الدائرة = ط نق٢

٤) $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}}$ = إحدى النسب إذا كان $\frac{س}{ص}=\frac{ع}{ل}=\frac{م}{ن}$ فإن $\frac{س+ع+م}{ص+ل+ن}=\frac{س}{ص}=\frac{ع}{ل}=\frac{م}{ن}$

٥) أكبر ضلع في المثلث يقابل أكبر زاوية في المثلث
أصغر ضلع في المثلث يقابل أصغر زاوية في المثلث

مثال : أوجد طول أصغر ضلع فى المثلث ﻫ ب جـ الذى فيه ق$(\angle$ ﻫ$)$ = ٤٣ °، ق$(\angle$ب$)$= ٦٥ ° ، جـ $^/$ = ٨٫٤ سم .

الحل :
أصغر ضلع فى المثلث هو المقابل لأصغر زاوية
ق($\angle$جـ) = ١٨٠ - [٤٣ + ٦٥] = ٧٢ °
∴ أصغر ضلع هو ﻫ$^/$ لانه يقابل أصغر زاوية ﻫ
و استخدام قاعدة الجيب : $\frac{ﻫ^/}{\text{حا ﻫ}}=\frac{جـ^/}{\text{حا جـ}}$

∴ $\frac{\text{حا ﻫ}}{ﻫ^/}=\frac{\text{حا جـ}}{جـ^/}$ ∴ $\frac{\text{حا٤٣}}{ﻫ^/}=\frac{\text{حا٧٢}}{٨٫٤}$

∴ ﻫ$^/$ = $\frac{\text{٨٫٤ حا ٤٣}}{\text{حا ٧٢}}$ ≃ ٦٫٠٢ سم

* **حل المثلث باستخدام قانون الجيب :**

حل المثلث يعنى إيجاد أطوال أضلاعه وقياسات زواياه المجهولة إذا علم ثلاثة عناصر من عناصره الستة (إحداها على الأقل ضلع)

الحالة الأولى : حل المثلث إذا علم فيه قياسا زاويتين وطول ضلع فى Δ ﻫ ب حـ إذا علم : ق $(\widehat{ﻫ})$ ، ق$(\widehat{ب})$ ، ﻫ$^/$ نوجد أولاً : ق$(\widehat{حـ})$ حيث : ق$(\widehat{حـ})$ = ١٨٠° − [ق $(\widehat{ﻫ})$ + ق$(\widehat{ب})$] ثانياً: نستخدم قانون الجيب لإيجاد كلا من : ب$^/$ ، حـ$^/$

مثال : حل Δ ﻫ ب حـ الذى فيه ق $(\widehat{ﻫ})$ = ٤٥° ، ق$(\widehat{ب})$ =٦٠° ، ﻫ$^/$ = ١٠ سم

الحل: ∵ ق$(\widehat{حـ})$ = ١٨٠ − (٤٥ + ٦٠) = ٧٥°

∴ $\frac{ﻫ^/}{\text{حا ﻫ}}=\frac{ب^/}{\text{حا ب}}=\frac{جـ^/}{\text{حا جـ}}$ ∴ $\frac{١٠}{\text{حا٤٥}}=\frac{ب^/}{\text{حا٦٠}}=\frac{حـ^/}{\text{حا ٧٥}}$

∴ ب$^/$ = $\frac{\text{١٠ حا ٦٠}}{\text{حا ٤٥}}$ ≈ ١٢٫٢ سم ، جـ$^/$ = $\frac{\text{١٠ حا ٧٥}}{\text{حا ٤٥}}$ ≈١٣٫٧ سم

مثال : حل Δ أ ب حـ الذى فيه ق (أ) = ٢٤/ ١٠٢° ، ق(ب) = ٣٤ / ٢٦°
، ب/ = ٦٤.٨٨سم

الحل :

ق(حـ) = ١٨٠ - (٢٤/ ١٠٢° + ٣٤ / ٢٦°) = ٢ / ٥١ °

∴ أ/ ÷ حا أ = ب/ ÷ حا ب = حـ/ ÷ حا حـ ∴ أ/ ÷ حا ٢٤/ ١٠٢° = ٦٤.٨٨ ÷ حا ٣٤ / ٢٦° = حـ/ ÷ حا ٢ / ٥١

∴ أ/ = (٦٤.٨٨ حا ٢٤/ ١٠٢°) ÷ (حا ٣٤ / ٢٦°) ≈ ١٤٢ سم ، جـ/ = (٦٤.٨٨ حا ٢ / ٥١) ÷ (حا ٣٤ / ٢٦°) ≈ ١١٣ سم

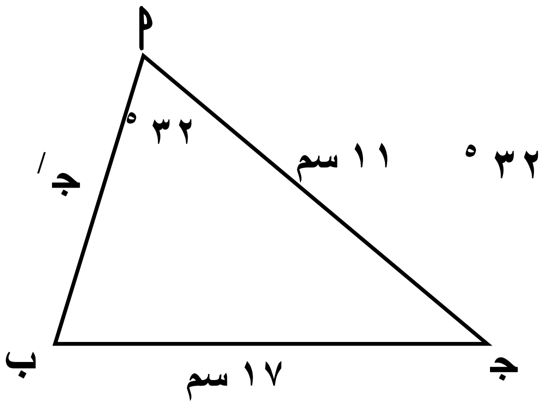
الحالة الثانية : حل المثلث إذا علم فيه طولا ضلعين و قياس زاوية ليست محصورة بينهما

فى Δ أ ب حـ إذا علم : أ/ ، ب / ، ق(جـ)

نوجد باستخدم قانون ا كلا من : حـ/ ، ق (أ) ، ق(ب)

مثال : حل المثلث أبجـ حيث أ/ = ١٧ سم ، ب / = ١١ سم ، ق (أ) = ٣٢ °

الحل :



باستخدام قاعدة الجيب : أ/ ÷ حا أ = ب/ ÷ حا ب

∴ ١٧ ÷ حا ٣٢ = ١١ ÷ حا ب و يلاحظ أن : ق(ب) < ٣٢ °

∴ حا ب = (١١ حا ٣٢) ÷ ١٧ = ٠.٣٤٢٨٨٨

∴ ق(ب) = ٦.٨٦ °

∴ ق(جـ) = ١٨٠ - [٦.٨٦ + ٣٢] = ١٤١.١٢ °

و باستخدام قاعدة الجيب : أ/ ÷ حا أ = جـ/ ÷ حا جـ ∴ ١٧ ÷ حا ٣٢ = جـ/ ÷ حا ١٤١.١٢

∴ جـ/ = (١٧ حا ١٤١.١٢°) ÷ (حا ٣٢) ≃ ٢٠ سم

*** الحالة الغامضة فى قانون (قاعدة) الجيب :**

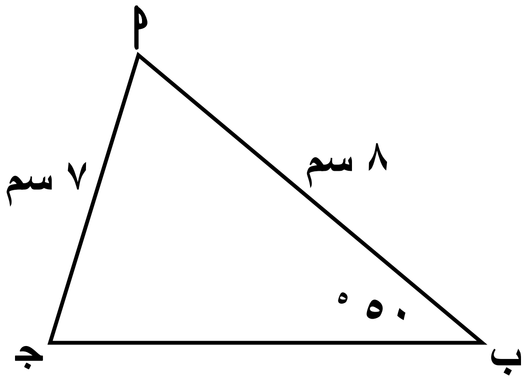
إذا كنت تحاول رسم مثلث من معلومات معطاة فإنه من المحتمل أن تجد أكثر من مثلث يمكن رسمه و هذا ما يسمى الحالة الغامضة لقاعدة الجيب .

ملحوظة هامة :

يجب التركيز عند استخدام قانون الجيب لايجاد زاوية مجهولة إمكانية وجود حل وحيد أو حلين كما سوف يأتى فى الامثلة الآتية .

مثال : إذا كان ءبجـ مثلث فيه ءب = ٨ سم ، ءجـ = ٧ سم ، ق ($\widehat{ءبجـ}$) = ٥٠° استخدم قانون الجيب لايجاد ق ($\widehat{ءجـب}$) مقربا الناتج لاقرب جزء من عشرة من الدرجة

الحل: باستخدام قانون الجيب :



$\frac{ب^{/}}{حا ب} = \frac{جـ^{/}}{حا جـ}$ ∴ $\frac{٧}{حا ٥٠} = \frac{٨}{حا جـ}$

و يلاحظ أن : ق ($\widehat{جـ}$) > ٥٠°

∴ حا جـ = $\frac{٨ \text{ حا } ٥٠}{٧}$ = ٠.٨٧٥٤٧٩

∴ ق ($\widehat{جـ}$) = ٦١.١٠١٧٦

القيمة الاولى ق ($\widehat{جـ}$) ≃ ٦١.١ (لاقرب جزء من عشرة من الدرجة)

، القيمة الآخرى = ١٨٠ ـ ٦١.١ = ١١٨.٩°

، وتكون ق ($\widehat{جـ}$) هو ٦١.١° أو ١١٨.٩°

تدريب : [على حل المثلث فى حالة وجود حلين لزاوية مجهولة]

مثال : حل المثلث ءبجـ الذى فيه ء/ = ٦ سم ، ب/ = ٧ سم ، ق ($\widehat{ء}$) = ٣٠°

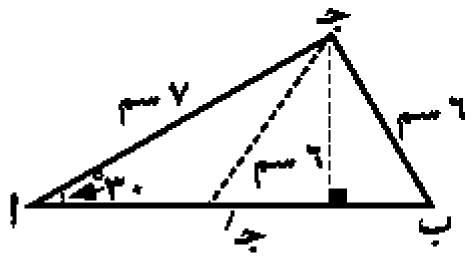
الحل : الشكلان التاليان يوضحان أن هناك مثلثان ممكنان [حلان للسؤال]

فى الشكل (١) : الزاوية ب هى زاوية حادة

و فى الشكل (٢) : الزاوية ب هى زاوية منفرجة .

حيث ب/ > ء/ لذلك ق ($\widehat{ب}$) > ق ($\widehat{ء}$) أى ق ($\widehat{ب}$) > ٣٠°

أولًا: حل المثلث أ ب جـ حيث ∠ب حادة



شكل (١)

∵ $\frac{\text{حا أ}}{\text{أَ}} = \frac{\text{حا ب}}{\text{بَ}}$ **(قانون الجيب)**

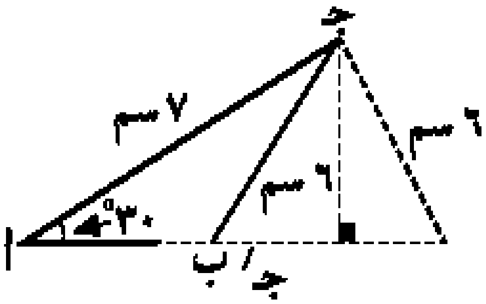
∵ $\frac{\text{حا ٣٠°}}{\text{٦}} = \frac{\text{حا ب}}{\text{٧}}$ ∴ حا ب = $\frac{\text{٧ حا ٣٠°}}{\text{٦}}$

ق(∠ب) = حا$^{-1}$ $\left(\frac{\text{٧ حا ٣٠°}}{\text{٦}}\right)$ ، ٠° < ق(∠ب) < ٩٠°

≃ ٣٥,٦٨٥° ≃ ٣٥° ٤١َ ٦ً

ق(∠جـ) ≃ ١٨٠° - [٣٥,٦٨٥° + ٣٠°]

= ١١٤,٣١٤° ≃ ١١٤° ١٨َ ٥٠ً



شكل (٢)

∵ $\frac{\text{حا أ}}{\text{أَ}} = \frac{\text{حا جـ}}{\text{جـَ}}$ **(قانون الجيب)**

∵ $\frac{\text{حا ٣٠°}}{\text{٦}} = \frac{\text{حا ١١٤,٣١٤°}}{\text{جـَ}}$ ∴ جـَ = $\frac{\text{٦ حا ١١٤,٣١٤°}}{\text{حا ٣٠°}}$ = ١٠,٩٣٥سم

ثانيًا: حل ∆ أ ب جـ حيث ∠ ب منفرجة؛ المعادلات مشابهة للسابقة وهذا يؤدى إلى:

حا ب = $\frac{\text{٧ حا ٣٠°}}{\text{٦}}$

ق(∠ب) = ١٨٠° - حا$^{-1}$ $\left(\frac{\text{٧ حا ٣٠°}}{\text{٦}}\right)$ حيث ٩٠° < ق(∠ب) < ١٨٠°

≃ ١٤٤,٣١٤ ≃ ١٤٤° ١٨َ ٥٠ً

ق(∠جـ) = ١٨٠° - (١٤٤,٣١٤° + ٣٠°) = ٥,٦٨٥° ≃ ٥° ٤١َ ٦ً

جـَ = $\frac{\text{أَ حا جـ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{٦ حا ٥,٦٨٥°}}{\text{حا ٣٠°}}$ = ١,١٨٨سم

أى أن فى المثلث أ ب جـ: جـَ = ١٠,٩٤ ، ق(∠ب) = ٣٥° ٤١َ ٦ً ، ق(∠جـ) = ١١٤° ١٨َ ٥٠ً

حيث ٠° < ق(∠ب) < ٩٠°

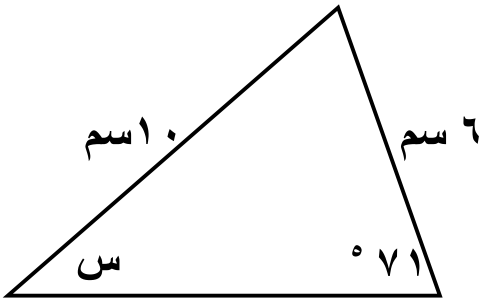
أو بالمثل جـَ = ١,١٨٨سم ، ق(∠ب) = ١١٤° ١٨َ ٥٠ً ، ق(∠جـ) = ٥° ٤١َ ٦ً

حيث ٩٠° < ق(∠ب) < ١٨٠°

[ويوجد حل آخر للمسألة باستخدام قانون جيب التمام فى الدرس القادم]

مثال : أوجد قيمة س فى المثلث المقابل لآقرب جزء من عشرة

الحل : باستخدام قاعدة الجيب :



$$\frac{١٠}{\text{حا } ٧١} = \frac{٦}{\text{حا س}}$$ و يلاحظ أن س < ٧١°

$\therefore$ حا س = $\frac{\text{٦ حا ٧١°}}{١٠}$ = ٠.٦٠٣٢٣٧

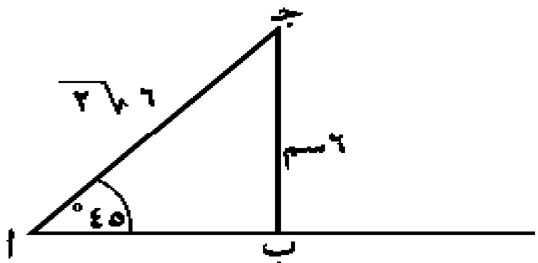
$\therefore$ س $\simeq$ ٣٤.٦° القيمة الاولى

، القيمة الاخرى = ١٨٠ – ٣٤.٦ = ١٤٥.٤ غير ممكنة

لان ٧١° + ١٤٥.٤ = ٢١٦.٤ > ١٨٠° فيكون الحل وحيد و هو ٣٤.٦°

مثال : حل المثلث ٵبجـ الذى فيه ٵ/ = ٦ سم ، ب/ = ٦$\sqrt{٢}$ سم ، ق($\widehat{ٵ}$) = ٤٥°

الحل :



$\because$ $\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}}$

$\therefore$ $\frac{٦}{\text{حا ٤٥°}} = \frac{٦\sqrt{٣}}{\text{حا ب}}$

$\therefore$ حا ب = $\frac{\text{٦}\sqrt{٢}\text{ حا ٤٥°}}{٦}$ = ١

$\therefore$ ق($\angle$ب) = ٩٠° $\therefore$ ق($\angle$جـ) = ٤٥° $\therefore$ أَ = جـَ = ٦سم

$\therefore$ المثلث أ ب جـ أَ = جـَ = ٦سم، ق($\angle$جـ) = ٤٥°

ويلاحظ أن في هذه الحالة يكون الحل وحيدًا

تدريب :

١)حل المثلث أ ب جـ الذي فيه : ق($\angle$أ) = ٦٤ ، أَ = ١٦سم ، بَ = ١٧سم. (يوجد حلان)

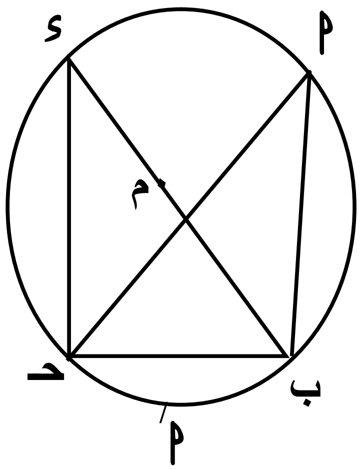
٢)حل المثلث أ ب جـ حيث أَ = ٦ سم، بَ = ١٢ سم، ق($\angle$أ) = ٣٠°

* تطبيقات هندسية لقانون الجيب :

تمرين مشهور:

في أي مثلث ٩ ب جـ يكون :

$$\frac{٩'}{\text{حا } ٩} = \frac{ب'}{\text{حا ب}} = \frac{جـ'}{\text{حا جـ}} = ٢ \text{ نق}$$



حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث ٩ ب جـ

البرهان لا يمتحن فيه :

نرسم الدائرة م المارة برؤوس Δ ٩ ب جـ

ثم نرسم القطر $\overline{\text{ب ء}}$ ، الوتر $\overline{\text{جـ ء}}$

فيكون : ق(ب $\widehat{\text{جـ}}$ ء) = ٩٠° " محيطية مرسومة فى نصف دائرة "

، ق($\widehat{٩}$) = ق($\widehat{ء}$) " محيطيتان تحصران نفس القوس "

فى Δ ء ب جـ : حا ء = $\frac{٩'}{\text{ب ء}} = \frac{٩'}{٢ \text{ نق}}$ $\therefore$ حا ٩ = $\frac{٩'}{٢ \text{ نق}}$

$\therefore$ $\frac{٩'}{\text{حا } ٩} = ٢$ نق $\therefore$ $\frac{٩'}{\text{حا } ٩} = \frac{ب'}{\text{حا ب}} = \frac{جـ'}{\text{حا جـ}} = ٢$ نق

ملحوظات هامة :

١) ٩' : ب' : جـ' = حا ٩ : حا ب : حا جـ (تستخدم فى بعض التمارين)

٢) تستخدم كل من قاعدة الجيب والتمرين المشهور إذا علم :

- قياسا زاويتين وطول ضلع
- قياسا زاويتين وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث
- قياسا زاويتين وطول محيط المثلث

٣) ٩' = ٢ نق جا ٩ ، ب' = ٢ نق جاب ، جـ' = ٢ نق جا جـ

جا ٩ = $\frac{٩'}{٢ \text{ نق}}$ ، جا ب = $\frac{ب'}{٢ \text{ نق}}$ ، جا جـ = $\frac{جـ'}{٢ \text{ نق}}$

مثال: في المثلث ٩ ب جـ إذا كان ٩ / = ١٠سم ، ق(بَ) = ٤٥ ° ، ق(جـَ) = ٦٠ °

فأوجد محيط الدائرة الخارجة للمثلث ٩ ب جـ

الحل :

∵ ق(٩َ) = ١٨٠ − (٤٥ + ٦٠) = ٧٥ °

∴ $\frac{٩ /}{حا ٩} = \frac{ب /}{حا ب} = \frac{جـ /}{حا جـ}$ = ٢ نق ∴ $\frac{١٠}{حا ٧٥} = \frac{ب /}{حا ٤٥} = \frac{جـ /}{حا ٦٠}$ = ٢ نق

∴ ٢ نق = $\frac{١٠}{حا ٧٥}$ = ١٠.٣ سم ∴ نق = ٥.٢ سم

∴ محيط الدائرة = ٢ ط نق = ٢ × ط × ٥.٢ = ٣٢.٥ سم

مثال : في المثلث ٩ ب جـ إذا كان ٩ / = ١٥سم ، ق(بَ) = ٤٥ ° ، ق(٩َ) = ٦٠ ° أوجد قيمة ب / و كذلك طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ٩ ب جـ

الحل:

∵ $\frac{٩ /}{حا ٩} = \frac{ب /}{حا ب}$ ∴ $\frac{١٥}{حا ٦٠} = \frac{ب /}{حا ٤٥}$ ∴ ب / = $\frac{١٥ \text{ حا } ٤٥}{حا ٦٠}$ = ١٢.٣٢ سم

∴ ٢ نق = $\frac{٩ /}{حا ٩}$ ∴ ٢ نق = $\frac{١٥}{حا ٦٠}$ = ١٧.٣٢ ∴ نق = ٨.٦٦ سم

مثال : فى أى مثلث ٩ ب جـ أثبت أن : مساحة Δ ٩ ب جـ = ٢ نق ^{٢} حا ٩ حا ب حا جـ

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ٩ ب جـ

الحل :

∵ مساحة Δ ٩ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب / جـ / حا ٩ حيث ب / = ٢ نق حا ب ، جـ / = ٢ نق حا جـ

∴ مساحة Δ ٩ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ نق حا ب × نق حا جـ × حا ٩ = ٢ نق ^{٢} حا ٩ حا ب حا جـ

مثال : ٩ ب جـ مثلث فيه : $\frac{١}{٢}$ حا ٩ = $\frac{١}{٣}$ حا ب = $\frac{١}{٤}$ حا جـ أوجد أطوال أضلاعه

إذا علم أن محيطه = ١٨ سم

الحل : ∵ $\frac{\text{حا أ}}{٢} = \frac{\text{حا ب}}{٣} = \frac{\text{حا جـ}}{٤}$ ∴ $\frac{٢}{\text{حا أ}} = \frac{٣}{\text{حا ب}} = \frac{٤}{\text{حا جـ}}$

∴ أ′ : ب′ : جـ′ = ٢ : ٣ : ٤

و بفرض أ′ = ٢ ك ، ب′ = ٣ ك ، جـ′ = ٤ ك

∵ محيط △ أ ب جـ = ١٨ سم ∴ ٢ ك + ٣ ك + ٤ ك = ١٨

∴ ٩ ك = ١٨ ∴ ك = ٢ ∴ أ′ = ٤ ، ب′ = ٦ ، جـ′ = ٨

مثال : إذا كان محيط △ أ ب جـ يساوى ٢٤ سم ، ق(ب̂) = ٣٠ ° ، ق(جـ̂) = ٤٨ ° أوجد ب′

الحل :

∵ ق(أ̂) = ١٨٠ − (٣٠ + ٤٨) = ١٠٢ °

∴ $\frac{\text{أ}'}{\text{حا أ}} = \frac{\text{ب}'}{\text{حا ب}} = \frac{\text{جـ}'}{\text{حا جـ}}$ ∴ $\frac{\text{أ}'}{\text{حا١٠٢}} = \frac{\text{ب}'}{\text{حا٣٠}} = \frac{\text{جـ}'}{\text{حا ٤٨}}$

∵ $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}}$ = إحدى النسب ∴ $\frac{\text{أ}' + \text{ب}' + \text{جـ}'}{\text{حا ١٠٢ + حا ٣٠ + حا ٤٨}} = \frac{\text{ب}'}{\text{حا٣٠}}$

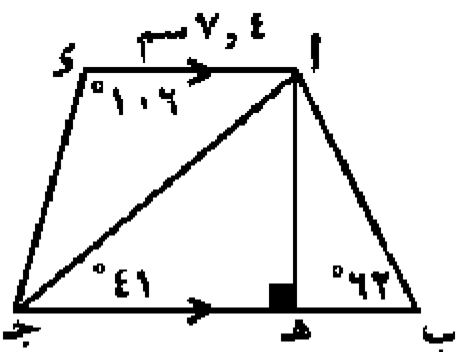
∴ $\frac{٢٤}{\text{حا ١٠٢ + حا ٣٠ + حا ٤٨}} = \frac{\text{ب}'}{\text{حا٣٠}}$ ∴ ب′ = $\frac{\text{٢٤ حا ٣٠}}{\text{حا ١٠٢ + حا ٣٠ + حا ٤٨}}$ = ٥.٤

مثال: أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{\text{أء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أء = ٧,٤سم ، ق(∠ب) = ٦٢° ، ق(∠ء) = ١٠٦° ، ق(∠أ جـ ب) = ٤١°. أوجد **أولًا:** طول كل من $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$

ثانيًا: مساحة سطح شبه المنحرف أ ب جـ ء لأقرب سنتيمتر مربع

الحل : فى المثلث أ جـ ء

∵ ق(∠ء أ جـ) = ق(∠أ جـ ب) = ٤١° **(بالتبادل)**



، ق(∠أ جـ ء) = ١٨٠° - (٤١° + ١٠٦°) = ٣٣°

∵ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{حا١٠٦°}} = \frac{٧,٤}{\text{حا٣٣°}}$

∴ أ جـ = $\frac{\text{٧,٤ × حا١٠٦°}}{\text{حا٣٣°}}$ = ١٣,٠٦سم

في المثلث ا ب جـ

ق(∠ب ا جـ) = ١٨٠° - (٦٢° + ٤١°) = ٧٧°

∵ ب جـ / حا ٧٧° = ١٣,٠٦ / حا ٦٢° ∴ ب جـ = (١٣,٠٦ × حا ٧٧°) / حا ٦٢° = ١٤,٤١سم

∵ اهـ / اجـ = حا ٤١° ∴ اهـ = ١٣,٠٦ × حا ٤١° = ٨,٥٦٨سم

∵ مساحة سطح شبه المنحرف = طول القاعدة المتوسطة × الارتفاع.

= (اد + ب جـ) / ٢ × اهـ = ((١٤,٤١ × ٧,٤) / ٢) × ٨,٥٦٨ = ٩٢,٤٣٤سم² ≈ ٩٣سم²

تمارين على قانون الجيب
و تطبيقات عليه

أكمل كل مما يأتي:

(١) فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع ....

(٢) فى المثلث ا ب جـ إذا كان ٢ حا ا = ٣ حا ب = ٤ حا جـ فإن اَ : بَ : جـَ = ...

(٣) ا ب جـ مثلث متساوى الأضلاع، طول ضلعه ١٠√٣ سم، فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث = ...

(٤) مثلث ا ب جـ فيه ق(∠ا) = ٦٠°، ق(∠جـ) = ٤٠° و جـَ = ٨,٤سم فإن اَ = ... سم

(٥) في المثلث ا ب جـ يكون ٢ بَ / حا ب = ... نق

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:-

(٦) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ا ب جـ الذى فيه ق(∠ا) = ٣٠°، اَ = ١٠سم هو ....

(أ) ١٠سم (ب) ٢٠سم (جـ) ٥سم (د) ٤٠سم

(٧) إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ا ب جـ يساوى ٤سم ، ق(∠ا) = ٣٠° فإن اَ هو

(أ) ٤سم (ب) ٢سم (جـ) ٤√٣ (د) ١/١٦

(٨) فى المثلث ا ب جـ يكون المقدار ٢ نق حا ا مساويًا

(أ) اَ (ب) بَ (جـ) حـَ (د) مـ(∆ا ب جـ)

(٩) إذا كان نق نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث س ص ع فإن $\frac{٢ ص َ}{حا ص}$ يساوى

(أ) نق (ب) ٢نق (جـ) $\frac{١}{٢}$ نق (د) ٤نق

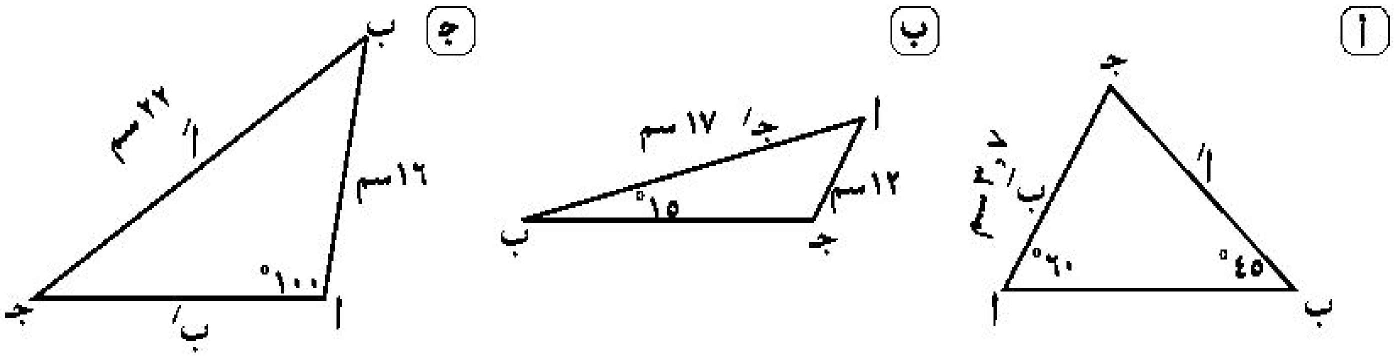
(١٠) △ل م ن فيه، ق(∠ل) = ٣٠°، م ن = ٧سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه تساوى

(أ) ٧سم (ب) ٣,٥سم (جـ) ١٤سم (د) $\frac{١٤}{\sqrt{٣}}$

(١١) فى المثلث س ص ع إذا كان ٢ حا س = ٣ حا ص = ٤ حا ع فإن سَ : صَ : عَ تساوى

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٦ : ٤ : ٣ (جـ) ٣ : ٤ : ٦ (د) ٤ : ٣ : ٢

حل كل مثلث مما يلى:



(١٢) حل المثلث أ ب جـ في كل مما يأتي

(أ) ق(∠أ) = ٤٠°، ق(∠ب) = ٣٠°، بَ = ١٠سم

(ب) ق(∠أ) = ٥٠°، أَ = ٤سم، بَ = ٣ سم (جـ) ق(∠ب) = ٣٣°، بَ = ٧سم، جـَ = ١٠ سم

(د) ق(∠جـ) = ١١٦°، جـَ = ١٢سم، أَ = ١٠ سم

(١٣) حل المثلث أ ب جـ في كل مما يأتي:

(أ) ق(∠أ) = ٣٢°، أَ = ١٧سم، بَ = ١١سم (ب) ق(∠أ) = ٤٩°، أَ = ٣٢سم، بَ = ٣٨سم

(جـ) ق(∠ب) = ٧٠°، بَ = ١٤سم، جـَ = ١٤سم (د) ق(∠جـ) = ١٠٣°، بَ = ٤٦سم، جـَ = ٦١سم

(١٤) في كل من أ، ب هل يمكن تكوين مثلثا باستخدام القياسات المعطاة؟ حل هذا المثلث:

(أ) ق(∠ب) = ٣٨°، بَ = ٢١سم، جَ = ٢٥سم

(ب) ق(∠جـ) = ٦٨°، أَ = ١٩سم، جَ = ١٨سم

(١٥) اب جـ مثلث فيه ق(∠أ) = ٦٠°، ق(∠ب) = ٤٥°، أثبت أن: أَ : بَ : جَ = $\sqrt{٦}$: ٢ : $\sqrt{٣}$ + ١

(١٦) اب جـ متوازى أضلاع فيه اب = ١٩,٧٧سم وقطراه $\overline{\text{اجـ}}$، $\overline{\text{بء}}$ يصنعان مع ضلعه $\overline{\text{اب}}$ زاويتين مقدارهما ٣٦° ٤٢َ ، ٤٤° ٥٨َ ، أوجد طولى القطرين.

(١٧) اب جـ مثلث فيه اب = ٨,٣٥٦سم، ق(∠أ) = ٤١° ٢٠َ، ق(∠ب) = ٥٩° ٩٧َ أوجد:

(أ) بَ (ب) طول العمود النازل من جـ على $\overline{\text{اب}}$

(١٨) اب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{\text{اء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$، اء = ١٠,٧سم، ق(∠ء) = ١٠٠° ، ق(∠ب) = ٦١° ٦٩َ، ق(∠جـ اء) = ٣٣° ٥٠َ، أوجد طول كل من $\overline{\text{اجـ}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$

(١٩) اب جـ ء شكل رباعي فيه ق(∠ب جـ ء) = ٨٥°، ق(∠جـ ء ا) = ٨٧°، ق(∠ب جـ ا) = ٣٦°، ق(∠ب ء ا) = ٥٥°
جـ ء = ١٠٠٠ متر أوجد طول كل من $\overline{\text{ب ء}}$، $\overline{\text{اب}}$ لأقرب متر.

(٢٠) اب جـ مثلث فيه حا جـ = ٠,٣، جَ = ١٤سم، أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث من الخارج (اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

(٢١) اب جـ مثلث فيه أَ = ٥٨، ق(∠ب) = ٣٨°، (∠جـ) = ٦٢° أوجد طول العمود النازل من ا على أَ.

(٢٢) اب جـ مثلث فيه ∠ا منفرجة، ظا ب = $\frac{١}{٢\sqrt{٦}}$ ، بَ = ٣سم، أَ = ٧,٥سم أوجد ق(∠ا)

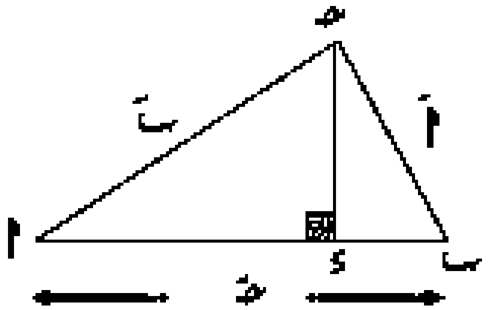
(٢٣) اب جـ مثلث فيه ق(∠ا) = ٦٠°، ق(∠ب) = ٤٥°، فإذا كان أَ + بَ = ($\sqrt{٦}$ + ٢) سم فأوجد كل من أَ، بَ

(٢٤) اب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة طول قطرها ٢٠سم، إذا كان ق(∠ا) = ٤٢°، ق(∠ب) = ٧٤° ٤٨َ، أوجد أطوال أضلاع المثلث اب جـ

(٢٥) اب جـ مثلث فيه جَ = ١٩سم، ق(∠ا) = ١١٢°، ق(∠ب) = ٣٣°، أوجد لأقرب رقمين عشريين كل من بَ، طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث.

(٢٦) إذا كانت مـ هى مساحة سطح المثلث اب جـ أثبت أن مـ = أَ^{٢} $\left(\frac{\text{حا ب حا جـ}}{\text{٢ حا ا}}\right)$

قانون جيب التمام (قاعدة جيب التمام)



في ∆ أ ب حـ يكون :

أ′^{2} = ب′^{2} + حـ′^{2} − ٢ ب′ حـ′ حتا أ

ب′^{2} = أ′^{2} + حـ′^{2} − ٢ أ′ حـ′ حتا ب

حـ′^{2} = أ′^{2} + ب′^{2} − ٢ أ′ ب′ حتا حـ

البرهان لا يمتحن فيه :

∵ ∆ حـ ء ب قائم الزاوية فى ء

∴ أ′^{2} = (ب حـ)^2 = (ء حـ)^2 + (ء ب)^2 ، ∵ ء ب = ب أ − ء أ

∴ أ′^{2} = (ب حـ)^2 = (ء حـ)^2 + (ب أ − ء أ)^2

= (ء حـ)^2 + (ب أ)^2 + (ء أ)^2 − ٢ ب أ × ء أ

، ∵ ∆ حـ ء أ قائم الزاوية فى ء ∴ (حـ أ)^2 = (ء حـ)^2 + (ء أ)^2

، حتا أ = $\frac{\text{ء أ}}{\text{حـ أ}}$ ∴ ء أ = حـ أ حتا أ

∴ أ′^{2} = (حـ أ)^2 + (ب أ)^2 − ٢ حـ أ × ب أ حتا أ

∴ أ′^{2} = ب′^{2} + حـ′^{2} − ٢ ب′ حـ′ حتا أ

ملحوظة : عند الحل يفضل عند كتابة القوانين الخاصة بجيب تمام الزاوية أن تؤخذ أضلاع المثلث أ′ ، ب′ ، جـ′ فى ترتيب دورى واحد حتى إذا عرفت إحدى الصور أمكن استنتاج الصور الاخرى .

مثال : أ ب جـ مثلث فيه ق ($\widehat{\text{أ}}$) = ٧٠° ، ب′ = ١١.٣ سم ، جـ′ = ١٥.٢ سم أوجد أ′

الحل :

∵ أ′^{2} = ب′^{2} + حـ′^{2} − ٢ ب′ حـ′ حتا أ

= (١١.٣)^2 + (١٠.٢)^2 − ٢ × ١١.٣ × ١٠.٢ حتا ٧٠ = ٢٤١.٢٤

∴ أ′ = $\sqrt{٢٤١.٢٤}$ = ١٥.٥ سم

$أ^2 = ب^2 + جـ^2 - 2 ب جـ$ حتا أ ومنها حتا أ $= \frac{ب^2 + جـ^2 - أ^2}{2 ب جـ}$

$ب^2 = أ^2 + جـ^2 - 2 أ جـ$ حتا ب ومنها حتا ب $= \frac{أ^2 + جـ^2 - ب^2}{2 أ جـ}$

$جـ^2 = أ^2 + ب^2 - 2 أ ب$ حتا جـ ومنها حتا جـ $= \frac{أ^2 + ب^2 - جـ^2}{2 أ ب}$

تستخدم هذه الصورة من قانون جيب التمام إذا علم طولا ضلعين فى مثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما

تستخدم هذه الصورة من قانون جيب التمام إذا علمت أطوال أضلاع مثلث أو النسبة بينها

---

* **ملاحظات هامة** :

١- لإيجاد قياس إحدى زوايا مثلث يفضل إستخدام قانون جيب التمام لأنه يحدد نوع الزاوية
فإذا كانت حتا أ موجبة كانت $\hat{أ}$ حادة أما إذا كانت حتا أ سالبة كانت $\hat{أ}$ منفرجة
، إذا كانت حتا أ = صفر (لا موجب و لا سالب) كانت الزاوية قائمة

٢- أكبر زوايا المثلث قياساً تقابل أكبر الأضلاع طولاً ، أصغرها قياساً تقابل أصغر الأضلاع

٣- إذا كان : أ : ب : جـ = ٣ : ٤ : ٥ نفرض أن : أ = ٣ل ، ب = ٤ ل ، جـ = ٥ل
ثم نعوض فى قانون جيب التمام لإيجاد قياسات زوايا Δ أ ب جـ

٤- جيب تمام زاوية ما = سالب جيب تمام الزاوية المكملة لها
(حتا أ = - حتاب ، أ + ب = ١٨٠)

مثال:أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث أ ب جـ الذي فيه أ = ٣سم ، ب = ٥سم ، جـ = ٧سم

الحل: أكبر زاوية هى $\hat{جـ}$ لأنها تقابل أكبر الأضلاع طولا : جـ = ٧سم

$\therefore$ حتا جـ $= \frac{أ^2 + ب^2 - جـ^2}{2 أ ب} = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 5} = -\frac{1}{2}$ $\therefore$ ق$(\hat{جـ}) = 120$

مثال : مثلث ٢ ب حـ فيه ٢/ = ١٣سم ، ب/ = ١٥سم ، ى(حـ^) = ٨٧° أوجد جـ/ لأقرب سم

الحل :

حـ/٢ = ٢/٢ + ب/٢ − ٢ ٢/ ب/ حتا حـ

= (١٣)٢ + (١٥)٢ − ٢ × ١٣ × ١٥ × حتا ٨٧

= √٣٧٤ ∴ حـ/ = √٣٧٤ = ١٩ سم

مثال : احسب قياس أصغر زاوية فى المثلث ٢ ب جـ فيه ٢/ = ٣٦سم ، ب/ = ٢٨ سم ، جـ/ = ٦٠ سم

الحل :

∵ أصغر زاوية فى المثلث تقابل أصغر الأضلاع ∴ ∠ ب أصغر زاوية

حتا ب = (٢/٢ + جـ/٢ − ب/٢) / (٢ ٢/ جـ/) = ((٣٦)٢ + (٦٠)٢ − (٢٨)٢) / (٢ × ٣٦ × ٦٠) = − = ٤١١٢ / ٤٣٥٠

∴ ى(ب^) = ٢١° ١٧/

مثال : مثلث ٢ب جـ فيه ٢/ = ٢٠سم ، ب/ = ١٦ سم ، حتا جـ = ٠.٤ أثبت أن المثلث ٢ب جـ متساوى الساقين .

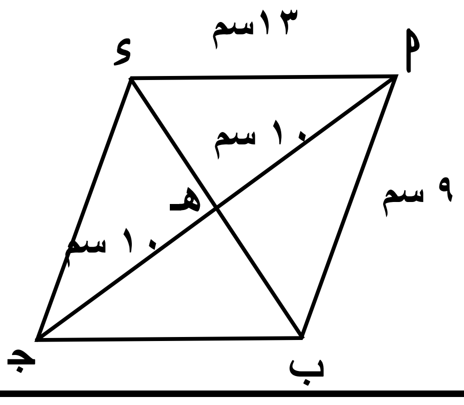
الحل :

∵ حـ/٢ = ٢/٢ + ب/٢ − ٢ ٢/ ب/ حتا حـ

= (٢٠)٢ + (١٦)٢ − ٢ × ٢٠ × ١٦ × ٠.٤ = ٤٠٠

∴ حـ/ = ٢٠ سم ∴ ٢/ = جـ/ ∴ المثلث ٢ب جـ متساوى الساقين .

مثال : ٢ب جـ ى متوازى أضلاع فيه ٢جـ = ٢٠سم ، ب جـ = ١٣ سم ، ٢ب = ٩ سم أوجد طول قطره $\overline{\text{ب ى}}$



الحل : فى Δ ٢ب جـ :

حتا (٢جـ ب^) = ((٢جـ)٢ + (جـ ب)٢ − (٢ب)٢) / (٢ × (٢جـ) × (جـ ب))

= ((٢٠)٢ + (١٣)٢ − (٩)٢) / (٢ × ٢٠ × ١٣) = ٦١ / ٦٥

فى Δ ب هـ جـ :

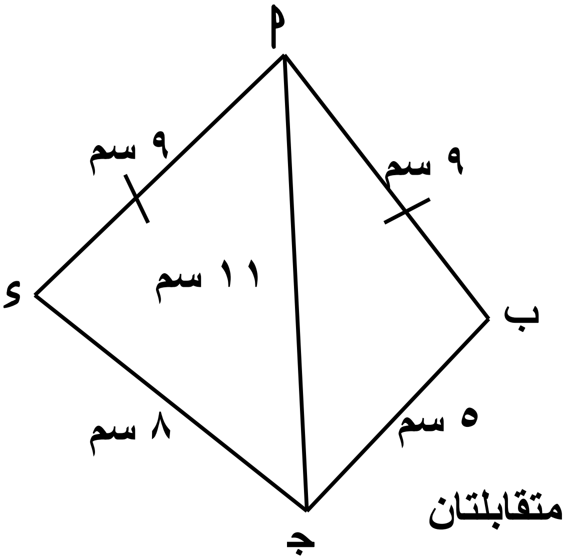
$$(\text{ب هـ})^2 = (\text{هـ جـ})^2 + (\text{ب حـ})^2 - ٢ \times \text{هـ جـ} \times \text{ب حـ} \; \text{حتا} \; (\widehat{\text{ب جـ هـ}})$$

$$= (١٠)^2 + (١٣)^2 - ٢ \times ١٠ \times ١٣ \times \frac{٦١}{٦٥} = ٢٥ \; \text{سم}^2$$

∴ ب هـ = ٥ سم ∴ ب ء = ٢ × ٥ = ١٠ سم

مثال : ا ب جـ ء شكل رباعى فيه ا ب = ا ء = ٩ سم ، ب جـ = ٥ سم ، جـ ء = ٨ سم ، ا جـ = ١١ سم أثبت أن الشكل ا ب جـ ء رباعى دائرى . **[تطبيق هندسي]**

الحل :



فى Δ ا ب جـ :

$$\text{حتا ب} = \frac{(٩)^2 + (٥)^2 - (١١)^2}{٢ \times ٩ \times ٥} = \frac{-١}{٦}$$

فى Δ ا ء جـ :

$$\text{حتا ء} = \frac{(٩)^2 + (٨)^2 - (١١)^2}{٢ \times ٩ \times ٨} = \frac{١}{٦}$$

∵ حتا ب = ـ حتا ء ∴ الزاويتان متكاملتان و هما متقابلتان

∴ الشكل ا ب جـ ء رباعى دائرى .

مثال : أوجد قياسات زوايا المثلث ا ب جـ إذا علم أن : ا/ : ب/ : جـ/ = ٤ : ٥ : ٦

الحل :

بفرض أن : ا/ = ٤ ك ، ب/ = ٥ ك ، جـ/ = ٦ ك

$$\text{حتا ا} = \frac{\text{ب}'^2 + \text{حـ}'^2 - \text{ا}'^2}{٢ \, \text{ب}' \, \text{حـ}'} = \frac{(٥\text{ك})^2 + (٦\text{ك})^2 - (٤\text{ك})^2}{٢ \times ٥\text{ك} \times ٦\text{ك}}$$

$$= \frac{٢٥\text{ك}^2 + ٣٦\text{ك}^2 - ١٦\text{ك}^2}{٦٠\text{ك}^2} = \frac{٤٥ \, \text{ك}^2}{٦٠ \, \text{ك}^2} = \frac{٣}{٤}$$

$$\therefore \; \text{ق}(\widehat{\text{ا}}) = ٤١^\circ \, ٢٥'$$

$$\text{حتا ب} = \frac{\text{ا}'^2 + \text{حـ}'^2 - \text{ب}'^2}{٢ \, \text{ا}' \, \text{حـ}'} = \frac{(٤\text{ك})^2 + (٦\text{ك})^2 - (٥\text{ك})^2}{٢ \times ٤\text{ك} \times ٦\text{ك}}$$

$= \frac{١٦ل^٢ + ٣٦ل^٢ - ٢٥ل^٢}{٤٨ل^٢} = \frac{٢٧ ل^٢}{٤٨ ل^٢} = \frac{٩}{١٦}$ ∴ $ق(\widehat{ب}) = ٤٦ / ٥٥°$

∴ $ق(\widehat{جـ}) = ١٨٠° - [ق(\widehat{أ}) + ق(\widehat{ب})] = ١٨٠ - [٢٥ / ٤١° + ٤٦ / ٥٥°]$

$= ٤٩ / ٨٢°$

---

* **استخدام قانون جيب التمام فى حل المثلث :**

* **الحالة الاولى : حل المثلث إذا علم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما:**

فى Δ أ ب حـ إذا علم : أ/ ، ب/ ، $ق(\widehat{حـ})$

نوجد أولاً : حـ/ حيث : $حـ^{/٢} = أ^{/٢} + ب^{/٢} - ٢\,أ/\,ب/$ حتا حـ

ثانياً : نوجد $ق(\widehat{أ})$ حيث : $حتا أ = \frac{ب^{/٢} + حـ^{/٢} - أ^{/٢}}{٢\,ب/\,حـ/}$

ثالثاً : نوجد $ق(\widehat{ب})$ حيث : $ق(\widehat{ب}) = ١٨٠° - [ق(\widehat{أ}) + ق(\widehat{حـ})]$

مثال : حل Δ أ ب حـ الذى فيه أ/ = ١٣سم ، ب/ = ١٥سم ، $ق(\widehat{جـ}) = ٨٧°$

الحل:

$حـ^{/٢} = أ^{/٢} + ب^{/٢} - ٢\,أ/\,ب/$ حتا حـ

$= (١٣)^٢ + (١٥)^٢ - ٢ \times ١٣ \times ١٥ \times$ حتا ٨٧ = ٣٧٤

∴ $حـ/ = \sqrt{٣٧٤} = ١٩$ سم

$حتا أ = \frac{ب^{/٢} + حـ^{/٢} - أ^{/٢}}{٢\,ب/\,حـ/} = \frac{١٥^٢ + ١٩^٢ - ١٣^٢}{٢ \times ١٥ \times ١٩} \approx ٠.٧٣١٥$

∴ $ق(\widehat{أ}) = ٥٩ / ٤٢°$

، $ق(\widehat{ب}) = ١٨٠° - [٨٧° + ٥٩ / ٤٢°] = ٥٠°$

مثال : حل △ ٲ ب حـ الذى فيه ٲ/ = ٢٥٣سم ، حـ/ = ١٤٧سم ، ق(ب̂) = ٣٨ / ٦٦ °

الحل:

ب/٢ = ٲ/٢ + حـ/٢ − ٢ ٲ/ حـ/ حتا ب

= (٢٥٣)٢ + (١٤٧)٢ − ٢ × ٢٥٣ × ١٤٧ حتا ٣٨ / ٦٦ ° = ٥٦١١٧

∴ ب/ ≈ ٢٣٧ سم

حتا ٲ = (ب/٢ + حـ/٢ − ٲ/٢) ÷ (٢ ب/ حـ/) = (٢٣٧٢ + ١٤٧٢ − ٢٥٣٢) ÷ (٢ × ٢٣٧ × ١٤٧) ≈ ٠.١٩٧٦٠٩

∴ ق(ٲ̂) = ٣٦ / ٧٨°

، ق(ج̂) = ١٨٠° − [٣٨ / ٦٦ ° + ٣٦ / ٧٨°] = ٤٦ / ٣٤ °

الحالة الثانية : حل المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة

فى △ ٲ ب حـ إذا علم : ٲ/ ، ب/ ، حـ/

نوجد أولاً : نوجد ق (ٲ̂) حيث : حتا ٲ = (ب/٢ + حـ/٢ − ٲ/٢) ÷ (٢ ب/ حـ/)

ثانياً : نوجد ق (ب̂) حيث : حتا ب = (ٲ/٢ + حـ/٢ − ب/٢) ÷ (٢ ٲ/ حـ/)

ثالثا : نوجد ق (ج̂) = ١٨٠ − [ٲ̂ + ب̂]

مثال : حل △ ٲ ب حـ الذى فيه ٲ/ = ٥ سم ، ب/ = ٧ سم ، حـ/ = ١١ سم

الحل:

حتا ٲ = (ب/٢ + حـ/٢ − ٲ/٢) ÷ (٢ ب/ حـ/) = (٧٢ + ١١٢ − ٥٢) ÷ (٢ × ٧ × ١١) ∴ ق (ٲ̂) = ٤١ / ١٩°

حتا ب = (ٲ/٢ + حـ/٢ − ب/٢) ÷ (٢ ٲ/ حـ/) = (٥٢ + ١١٢ − ٧٢) ÷ (٢ × ٥ × ١١) ∴ ق (ب̂) = ٨ / ٢٨°

ق(حـ̂) = ١٨٠° − [٤١ / ١٩° + ٨ / ٢٨°] = ١١ / ١٣٢°

مثال : حل Δ أ ب حـ الذى فيه أ/ = ٣٤٥.٦ سم ، ب/ = ٤٥٦.٦سم ، حـ/ = ٥٦٧.٨ سم

الحل :

$$حتا\ أ = \frac{ب'^2 + حـ'^2 - أ'^2}{٢\ ب'\ حـ'} = \frac{٣٤٥{,}٦^2 + ٤٥٦.٦^2 - ٥٦٧.٨^2}{٢ \times ٤٥٦.٦ \times ٥٦٧.٨} = ٠.٠١٠٦٥٧٥١$$

$\therefore$ ق ($\hat{أ}$) = ٢٣ / ٨٩°

$$حتا\ ب = \frac{أ'^2 + حـ'^2 - ب'^2}{٢\ أ'\ حـ'} = \frac{٣٤٥{,}٦^2 + ٥٦٧.٨^2 - ٤٥٦.٦^2}{٢ \times ٣٤٥.٦ \times ٥٦٧.٨} = ٠.٥٩٤٨٤٥٢٣$$

$\therefore$ ق ($\hat{ب}$) = ٣٠ / ٥٣°

$\therefore$ ق($\hat{حـ}$) = ١٨٠° - [٢٣ / ٨٩° + ٣٠ / ٥٣°] = ٧ / ٣٧°

* <u>ملحوظة هامة</u> :

يمكن استخدام قانون جيب التمام لحل الحالة الغامضة فى قانون الجيب ذلك بايجاد طول الضلع الثالث باستخدام قانون جيب التمام فنحصل على معادلة تربيعية (من الدرجة الثانية) وبحلها يكون عدد المثلثات هو عدد الحلول الموجبة الناتجة .

مثال : حل المثلث أبجالذى فيه أ/ = ٦ سم ، ب/ = ٧ سم ، ق ($\hat{أ}$) = ٣٠°

<u>ملحوظة</u> : لهذا السؤال إجابتين الاولى باستخدام الحالة الغامضة و الثانية قانون جيب التمام

<u>الحل</u> : باستخدام قانون جيب التمام :

المطلوب إيجاد حـَ ، ق (∠ ب) ، ق (∠ حـ)

$\because$ أَ^٢ = بَ^٢ + حـَ^٢ - ٢بَحـَ حتا أ (قانون جيب التمام)

٦^٢ = ٧^٢ + حـَ^٢ - ٢ × ٧ حـَ حتا ٣٠°

٠ = حـَ^٢ - ٧ $\sqrt{٣}$ حـَ + ١٣ أي حـَ^٢ - ٧ $\sqrt{٣}$ حـَ + ١٣ = ٠

$\therefore$ حـَ = $\frac{١}{٢}$ (٧ $\sqrt{٣}$ ± $\sqrt{(-٧\sqrt{٣})^٢ - ٤ \times ١ \times ١٣}$) (القانون العام لحل المعادلة التربيعية)

$\therefore$ حـَ = ١٠,٩٣٥ أو ١,١٨٨

كل قيمة موجبة لـ حـَ تقابل مثلثًا واحدًا، ولذلك لدينا مثلثان ولإيجاد حتا ب فإنه:

$$حتا\ ب = \frac{حـَ^٢ + أَ^٢ - بَ^٢}{٢حـَ أَ}$$

عندما $\text{حـ}' = ١٠,٩٣٥$

$$\text{حتا ب}_١ = \frac{(١٠,٩٣٥)^٢ + (٦)^٢ - (٧)^٢}{٢\,(١٠,٩٣٥)\,(٦)}$$

$\text{حتا ب}_١ = ٠,٨١٢$

$\text{ق}(\angle \text{ب}_١) = ٣٥,٦٨٥^\circ$

$\simeq ٣٥^\circ\,٤١'\,٦''$

$\text{ق}(\angle \text{حـ}_١) = ١٨٠^\circ - [\text{ق}(\angle \text{أ}) + \text{ق}(\angle \text{ب}_١)]$

$\simeq ١١٤,٣١٤^\circ$

$\simeq ١١٤^\circ\,١٨'\,٥٠''$

عندما $\text{حـ}' = ١,١٨٨$

$$\text{حتا ب}_٢ = \frac{(١,١٨٨)^٢ + (٦)^٢ - (٧)^٢}{٢\,(١,١٨٨)\,(٦)}$$

$\text{حتا ب}_٢ = -٠,٨١٢$

$\text{ق}(\angle \text{ب}_٢) = ١٤٤,٣١٤^\circ$

$\simeq ١٤٤^\circ\,١٨'\,٥٠''$

$\text{ق}(\angle \text{حـ}_٢) = ١٨٠^\circ - [\text{ق}(\angle \text{أ}) + \text{ق}(\angle \text{ب}_٢)]$

$\simeq ٥,٦٨٥^\circ$

$\simeq ٥^\circ\,٤١'\,٦''$

* <u>تطبيقات هندسية على قانون (قاعدة) جيب التمام</u> :

مثال : أ ب حـ مثلث فيه $\text{أ}' = ٦٣$سم ، $\text{ب}' - \text{حـ}' = ٢٧$ سم، ومحيط المثلث يساوي ١٤٠ سم، أوجد كلّا من $\text{ب}'$ ، $\text{حـ}'$ وقياس أصغر زوايا المثلث، ومساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل

$\because \text{أ}' + \text{ب}' + \text{حـ}' = ١٤٠$ **(محيط المثلث)** ، $\text{أ}' = ٦٣$

$\therefore \text{ب}' + \text{حـ}' = ١٤٠ - ٦٣$ **أي** $\text{ب}' + \text{حـ}' = ٧٧$ **(١)**

$\because \text{ب}' - \text{حـ}' = ٢٧$ **(معطى)** **(٢)**

من (١) ، (٢) بالجمع ينتج أن:

$٢\,\text{ب}' = ١٠٤$ **أي أن** $\text{ب}' = ٥٢$ **سم**

بالتعويض في ١ ينتج أن $\text{حـ}' = ٢٥$**سم**

ونلاحظ أن $\text{حـ}'$ هو أصغر أضلاع المثلث أ ب حـ

$\therefore \angle$ حـ هي أصغر زوايا المثلث أ ب حـ

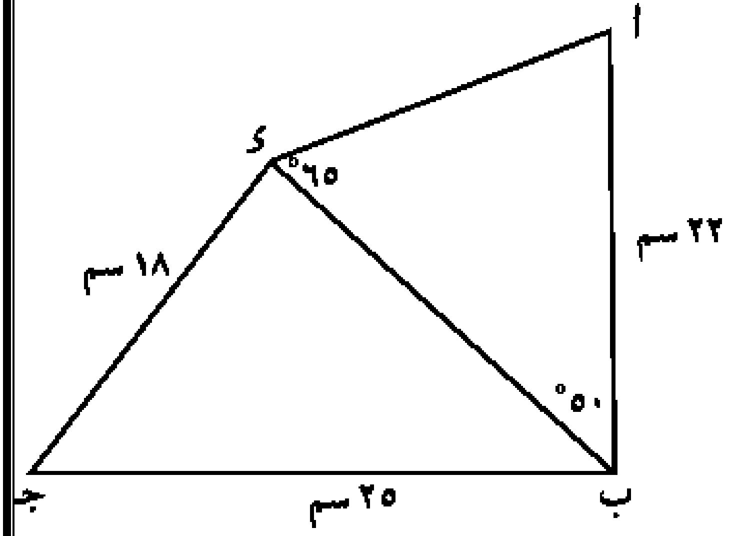
$$\therefore \text{حتا حـ} = \frac{\text{أ}'^٢ + \text{ب}'^٢ - \text{حـ}'^٢}{٢\,\text{أ}'\,\text{ب}'} = \frac{(٦٣)^٢ + (٥٢)^٢ - (٢٥)^٢}{٢ \times ٦٣ \times ٥٢} = ٠,٩٢٣٠٧٦٩$$

$\therefore \text{ق}(\angle \text{حـ}) = ٢٢^\circ\,٣٧'$

مساحة المثلث أ ب حـ $= \frac{١}{٢}\,\text{أ}'\,\text{ب}'\,\text{حا حـ} = \frac{١}{٢} \times ٦٣ \times ٥٢ \times \text{حا}\, ٢٢^\circ\,٣٧' \simeq ٦٣٠$سم^٢

مثال : أ ب حـ ء شكل رباعي فيه أ ب = ٢٢سم ، ق (∠ أ ء ب) = ٦٥° ، ق (∠ ء ب أ) = ٥٠°
ء حـ = ١٨سم، ب حـ = ٢٥سم أوجد: ق (∠ حـ ب ء) ، ق (∠ ب حـ ء)

الحل :



في △ أ ب ء

ق (∠ أ) = ١٨٠° - (٥٠° + ٦٥°)

= ١٨٠° - ١١٥° = ٦٥°

∵ ق (∠ أ) = ق (∠ ء) = ٦٥°

∴ أ ب = ب ء = ٢٢سم

في △ ء ب حـ

حتا(∠ ء ب حـ) = $\dfrac{(\text{ب ء})^2 + (\text{ب حـ})^2 - (\text{ء حـ})^2}{2\,(\text{ب ء})\,(\text{ب حـ})}$

= $\dfrac{(٢٢)^2 + (٢٥)^2 - (١٨)^2}{٢ \times ٢٢ \times ٢٥}$ ≃ ٠,٧١٣٧

∴ ق (∠ ء ب حـ) ≃ ٤٤° ٢٨′ ٦″

حتا(∠ ب حـ ء) = $\dfrac{(\text{ب حـ})^2 + (\text{حـ ء})^2 - (\text{ب ء})^2}{2\,(\text{ب حـ})\,(\text{حـ ء})}$ = $\dfrac{(٢٥)^2 + (١٨)^2 - (٢٢)^2}{٢ \times ٢٥ \times ١٨}$ ≃ ٠,٥١٦٧

∴ ق (∠ ب حـ ء) ≃ ٥٨° ٥٢′ ٢٨″

مثال : أ ب حـ ء شكل رباعى فيه أ ب = ٣سم ، أ حـ = ٨سم ، ب حـ = ٧سم
، حـ ء = ٥سم ، ب ء = ٨سم ، أثبت أن الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري.

الحل : في △ أ ب حـ

حتا أ = $\dfrac{\text{ب}^2 + \text{حـ}^2 - \text{أ}^2}{٢\,\text{ب حـ}}$ = $\dfrac{(٨)^2 + (٣)^2 - (٧)^2}{٢ \times ٨ \times ٣}$ = $\dfrac{١}{٢}$

∴ ق (∠ أ) = ٦٠° (١)

في △ ب ى حـ

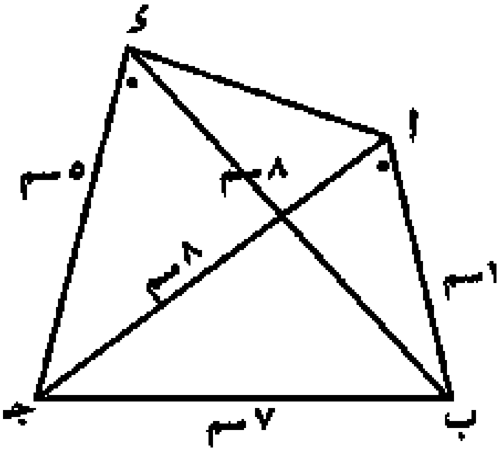
$$\text{حتا ى} = \frac{(\text{حـ ى})^2 + (\text{ى ب})^2 - (\text{ب حـ})^2}{2\,(\text{حـ ى})\,(\text{ى ب})} = \frac{(٥)^2 + (٨)^2 - (٧)^2}{٢ \times ٥ \times ٨} = \frac{١}{٢}$$

∴ ق(∠ ى) = ٦٠° (٢)

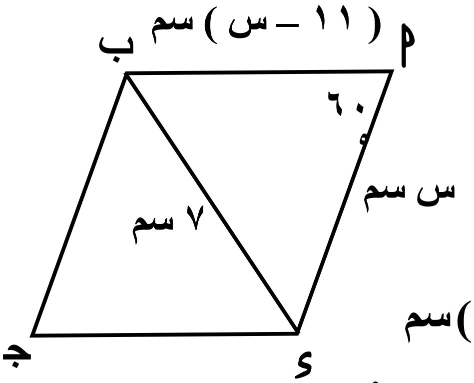
∵ ق(∠ ب أ حـ) = ق(∠ ب ى حـ) وهما مرسومتان على $\overline{\text{ب جـ}}$

وفي جهة واحدة منها فيكون الشكل

أ ب حـ ى رباعي دائري. (وهو المطلوب).



مثال : م ب جـ ى متوازى أضلاع فيه ق($\hat{م}$) = ٦٠° و محيطه ٢٢ سم و طول القطر الأصغر فيه ٧ سم أوجد طول $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$



الحل :

∵ نصف المحيط = مجموع طولى ضلعين متجاورين

∴ م ى + ى ب = ١١ سم

نفرض أن : م ى = س سم ، م ب = ١١ - م ى = (١١ – س) سم

∵ $(\text{ب ى})^2 = (\text{م ى})^2 + (\text{م ب})^2 - ٢ \times \text{م ى} \times \text{م ب}$ حتا ٦٠°

∴ ٤٩ = $\text{س}^2 + (١١ - \text{س})^2 - ٢ \times \text{س} \times (١١ - \text{س})$ حتا ٦٠

∴ ٤٩ = $\text{س}^2 + ١٢١ - ٢٢\,\text{س} + \text{س}^2 - ٢ \times (١١ - \text{س}) \times \frac{١}{٢}$

∴ $٣\,\text{س}^2 - ٣٣\,\text{س} + ٧٢ = ٠ \Leftarrow \text{س}^2 - ١١\,\text{س} + ٢٤ = ٠$

∴ (س – ٣)(س – ٨) = ٠ ⟸ س = ٣ أ، س = ٨

∴ م ى = ب جـ = ٣ سم ، م ب = ١١ – ٣ = ٨ سم و بالعكس

تمارين على قانون جيب التمام و تطبيقات عليه

أكمل كلّا ممايأتي:

① فى أى مثلث ل م ن يكون: ل^٢ = م^٢ + ن^٢ - ......، حتا ل = $\frac{\text{م}^٢ + \text{ن}^٢ - ....}{......}$

② في المثلث أ ب جـ ، أطوال أضلاعه ١٣، ١٧، ١٥ من السنتيمترات فإن قياس أكبر زواياه يساوي ......°

③ مثلث س ص ع أطوال أضلاعه ٧,٥سم ، ٤,٧سم، ٣,٤سم فإن قياس أصغر زواياه يساوي ......°

④ $\triangle$ س ص ع فيه سَ = ١٠ سم ، صَ = ٦سم ، ق ($\angle$ع) = ٦٠° فإن عَ = ...

⑤ فى $\triangle$ ل ك م يكون كَ^{٢} + مَ^{٢} - لَ^{٢} = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

⑥ قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣، ٥، ٧ هى:

(أ) ١٥٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

⑦ فى أى مثلث ل م ن يكون المقدار $\frac{\text{لَ}^٢ + \text{مَ}^٢ - \text{نَ}^٢}{٢ \text{ لَ مَ}}$ مساويًا:

(أ) حتا ل (ب) حتا م (جـ) حتا ن (د) لاشئ مما سبق

⑧ في المثلث س ص ع يكون صَ^{٢} + عَ^{٢} - سَ^{٢} = ٢ صَ عَ ...

(أ) حتا س (ب) حا ع (جـ) حتا ع (د) حا س

⑨ فى المثلث أ ب جـ ، أَ : بَ : جـَ = ٣ : ٢ : ٢ فإن حتا أ تساوى

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $-\frac{١}{٨}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

أجب عن الاسئلة الآتيه:

⑩ فى المثلث أ ب جـ إذا كان:

(أ) أَ = ٥سم ، بَ = ٧سم ، جـَ = ٨سم فأثبت أن ق($\angle$ب) = ٦٠°

(ب) أَ = ٣سم ، بَ = ٥سم ، جـَ = ٧سم فأثبت أن ق($\angle$جـ) = ١٢٠°

(جـ) أَ = ١٣سم ، بَ = ٧سم ، جـَ = ١٣سم فأوجد ق(∠جـ)

(د) أَ = ١٣سم ، بَ = ٨سم ، جـَ = ٧سم فأوجد ق(∠أ)

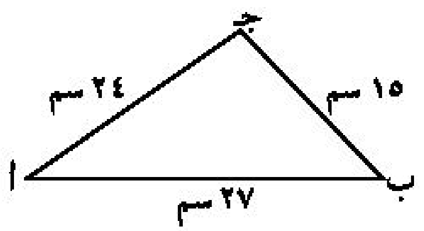
(هـ) أَ = ١٠سم ، بَ = ١٧سم ، جـَ = ٢١سم فأوجد قياس أصغر زاوية فى المثلث

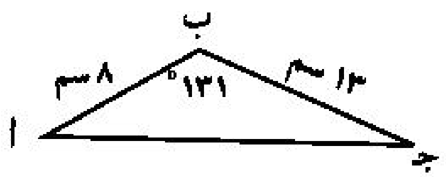
(و) أَ = ٥سم ، بَ = ٦سم ، جـَ = ٧سم فأوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث

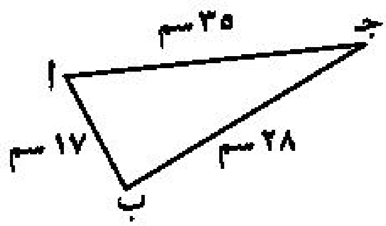
(ز) أَ = ١٧سم ، بَ = ١١سم ، ق(∠جـ) = ٤٢° فأوجد جـَ مقربًا لأقرب رقمين عشريين

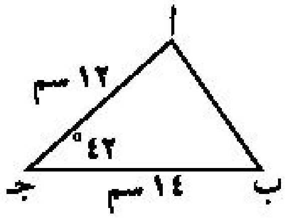
(ح) بَ = ١٦ ، جـَ = ١٤ ، ق(∠أ) = ٧٢° فأوجد أَ مقربًا لأقرب رقمين عشريين

(١١) في التمارين من ((أ) - (د)) حل المثلث:









(١٢) في التمارين من ((أ) - (هـ)) هل يمكن تكوين مثلث أ ب جـ ؟ إذا كان ممكنًا حل هذا المثلث:

(أ) ق(∠أ) = ٥٥° ، بَ = ١٢سم ، جـَ = ٧سم

(ب) أَ = ٣,٢سم ، بَ = ٧,٦٣سم ، جـَ = ٦,٤سم

(جـ) أَ = ١٢سم ، بَ = ٢١سم ، ق(∠جـ) = ٩٥°

(د) أَ = ١سم ، بَ = ٥سم ، جـَ = ٤سم

(هـ) ق(∠أ) = ٤٢° ، أَ = ٧سم ، بَ = ١٠سم

تطبيقات هندسية:

(١٣) متوازى أضلاع طولا ضلعيه المتجاورين ١٨سم، ٢٦سم، وقياس الزاوية بينهما ٣٩°، أوجد طول أصغر قطر له مقربًا لأقرب رقمين عشريين.

(١٤) أ ب جـ ى شكل رباعى فيه أ ب = ٩سم، ب جـ = ٥سم، جـ ى = ٨سم، أ ى = ٩سم، أ جـ = ١١ سم، أثبت أن الشكل أ ب جـ ى رباعى دائرى.

(١٥) أ ب جـ ى متوازى أضلاع فيه أ ب = ٩سم ، ب جـ = ١٢سم ، أ جـ = ٢٠ سم، أوجد طول ب ى

(١٦) أ ب جـ مثلث محيطه ٧٠سم ، أَ = ٢٦سم ، ق(∠أ) = ٦٠° ، أوجد مساحة سطحه.

(١٧) أ ب جـ مثلث فيه ى منتصف ب جـ، أثبت أن:

(أ ب)^2 + (أ جـ)^2 = ٢ (أ ى)^2 + ٢ (ب ى)^2 ، وإذا كان:

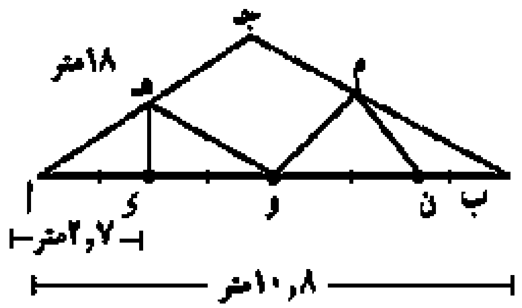
أ ب = ٥سم ، أ جـ = ٨سم ، ب جـ = ١٢ سم أوجد أ ى .

(١٨) في المثلث أ ب جـ إذا كان : (أَ + بَ + جـَ) (أَ + بَ - جـَ) = ك • أَ بَ

فاثبت أن: ك ∈]٠ ، ٤[، ثم أوجد ق(∠جـ) عندما ك = ١

تطبيقات حياتية:

(١٩) صمم مهندس معمارى سقف مصنع كما فى الشكل المقابل:

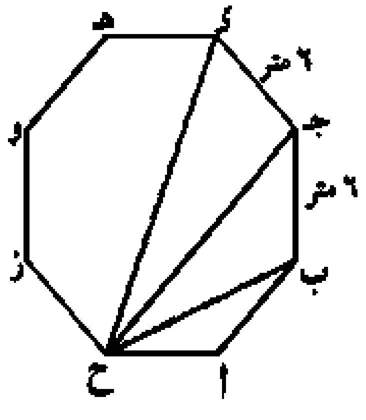


أ جـ = ب جـ ، أ ى = ى و = و م = م ب = ٢,٧ سم

(أ) أوجد ق(∠جـ أ و)

(ب) إذا كان أ هـ = ٣,٦ أمتار ، أوجد طول ى هـ .

(جـ) أوجد طول و هـ.



(٢٠) صمم مهندس معمارى مبنى على شكل مثمن منتظم، طول كل ضلع من أضلاعه ٦ أمتار، أوجد أطوال الأقطار ح ب ، ح جـ ، ح ى .