التفاضل وحساب المثلثات

الصف الثانى الثانوى

2020

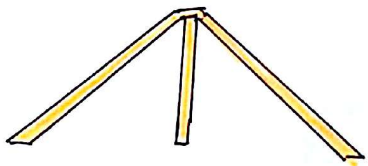
عام وأزهر

هدية مجانية

إعداد أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

الدرس الأول
إيجاد نهاية دالة بيانياً

فى البداية لازم نفهم الفرق بين ٣ أنواع من الكميات وهم الكميات



١ المعينة	٢ غير المعرفة	٣ غير المعينة
٣	أى عدد / صفر	صفر / صفر
٥	٣ / صفر أو ∞	٥ / صفر أو ∞/∞
صفر		∞ - ∞
صفر / ٧		∞ × صفر
صفر / أى عدد = صفر		صفر^صفر
ما عدا صفر		∞^صفر
		(١)^∞

مثال ١ قدر حلاً من النهايات التاليه

١ $\lim_{س \to ٤} (٢س - ٥)$

الحل

بالتعويض المباشر

$= ٢ \times ٤ - ٥ = ٣$

$\therefore \lim_{س \to ٤} (٢س - ٥) = ٣$

٢ $\lim_{س \to ٢} (١ - ٣س)$

الحل

بالتعويض المباشر $= ١ - ٣ \times ٢ = -٥$

٣ $\lim_{س \to ٠} (س^{٢} - ٢)$

الحل

بالتعويض المباشر $= (٠)^{٢} - ٢ = -٢$

٤ $\lim_{س \to ٠} \frac{٢س + ١}{س + ١}$

الحل

بالتعويض المباشر $= \frac{١ + ٠}{١ + ٠}$

$= \frac{١}{١} = ١$

٥ $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س}$

الحل

بالتعويض المباشر

$\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س} = \frac{٢ - ٢}{٢} = \frac{٠}{٢}$

$= صفر$

$\therefore \lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س} = صفر$

الفكرة الثانية

إيجاد النهاية بيانياً

ركز مع شوية الملاحظات دى

١) $د(ا)^{+} = \lim_{س \to ا^{+}} د(س)$
دى معناها النهاية اليمين

٢) $د(ا)^{-} = \lim_{س \to ا^{-}} د(س)$
دى معناها النهاية اليسرى

٣) $د(ا)$ دى معناها دالة (ا)

نسبية أقفلك
إذا كانت النهاية اليمين = النهاية اليسرى
= تكون النهاية موجودة = الناتج

طيب لو لم يساووا بعض
يبقى النهاية غير موجودة
لذة تمام

سؤال مهم ازاى افرق بين النهاية وقيمة الدالة على الرسم

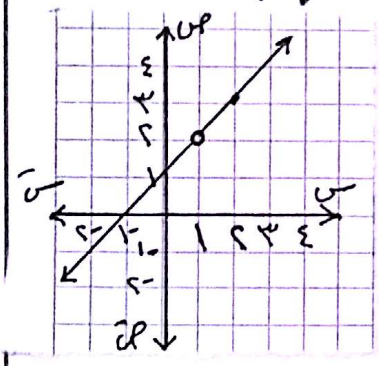
١) النهاية دائماً نبحث عند خط على اليمين [النهاية اليمين]

٢) أو خط على اليسار [النهاية اليسرى]

٣) أما الدالة نبحث عند نقطة فوق الرقم

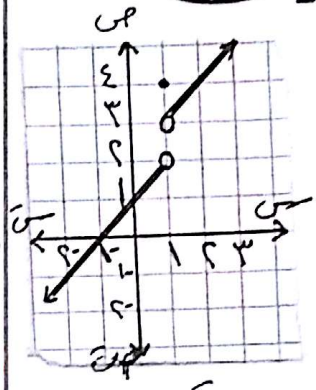
٤) طبعاً الظلام غير مفهوم (انا لسه محلناش بأيدينا نقالوا اخل شوية)

مثال ٢ من الشكل المقابل أكمل



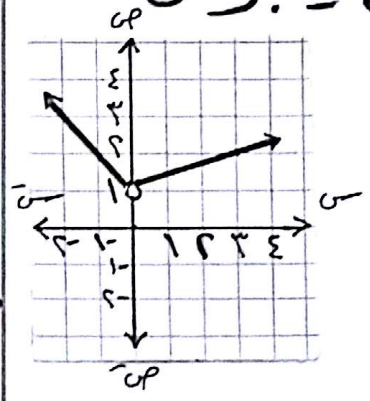
* $د(١)^{+} = ٢$
* $د(١)^{-} = ٢$
* $\lim_{س \to ١} د(س) = ٢$
* $د(١) =$ غير معرفة [لأنه عندها ثقب ومفيش نقطة]
* $د(٢) = ٣$
* $\lim_{س \to ٢} د(س) = ٣$

مثال ٣ أكمل مايلى



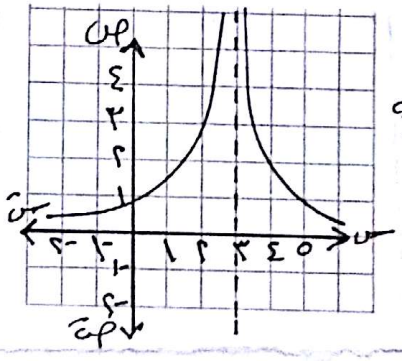
* د(١) = ٤
* $د(١)^{+}$ = ٣
* $د(١)^{-}$ = ٢
* $\lim_{س \to ١} د(س)$ = غير موجودة

مثال ٤ أكمل بالبرهان



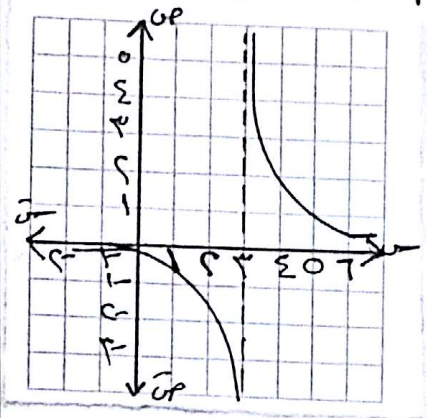
* د(٠) = غير معرفة
* $د(٠)^{-}$ = ١
* $د(٠)^{+}$ = ١
* $\lim_{س \to ٠} د(س)$ = ١
* د(٣) = ؟
* $\lim_{س \to ٣} د(س)$ = ؟

مثال ٥ تعرف تحل دى



* د(٢) = غير معرفة
* $\lim_{س \to ٣} د(س)$ = ∞

مثال ٦ سم اشكل اكل

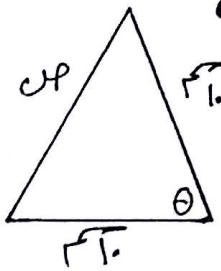


* د(٣) = غير معرفة
* $د(٣)^{+}$ = ∞
* $د(٣)^{-}$ = -∞
* $\lim_{س \to ٣} د(س)$ = غير موجودة

لاحظ أن

الدالة يقال عنها غير معرفة.
والنهاية يقال عنها غير موجودة.

مثال ٧ فكرة أجبتى



عندما $\theta \to \frac{\pi}{٢}$ فإن ص ← ....

بين المثلث ص ك ل قائم

ص = $\sqrt{١٠^{٢} + ١٠^{٢}}$

ص = $١٠\sqrt{٢}$ سم

أبو أدهم واحد بس

الدرس الثانى
إيجاد نهاية الدالة جبرياً

** بسأطلب كرة هتتكلم عن أيه الدرس ده؟؟

هنجيب نهاية الدالة بالتعويض المباشر تمام؟

الحالة الأولى إذا أعطانى ناتج كمية معينة كلها وخلاص

طيب كمية غير معرفة

هنسيبها بعد ما نتعلم رسم الدوال فى الجبر

الحالة الثانية إذا كان كمية غير معينة هنشغل ٣ إجابات

صفر / صفر

التحليل

القسمة المطولة

القرب X البعد

الفكرة الأولى

النهاية بتخلص من التعويض المباشر

مثال ١ أوجد كلاً من النهايات التالية

١ $\lim_{س \to ٢} ٣ = ٣$

لأن الدالة ثابتة مفيش س أعوض عنها

٢ $\lim_{س \to ٠} (-٢) = -٢$

---

٣ $\lim_{س \to ١} ٤ = ٤$

---

٤ $\lim_{س \to ١} س^٤ - س + ٢$

الكل

$= (١)^٤ - (١) + ٢ = ١ - ١ + ٢ = ٢$

---

٥ $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س + ٢}$

الكل

$= \frac{٢-٢}{٢+٢} = \frac{٠}{٤}$ = صفر

$\therefore \lim_{س \to ٢} \frac{س-٢}{س+٢}$ = صفر

الفكرة الثانية التحليل

مثال ٢ أوجد كلاً من النهايات التالية

١ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$

الحل

بالتعويض المباشر

$= \frac{٣^٢ - ٩}{٣ - ٣} = \frac{٩ - ٩}{٣ - ٣} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

كمية غير معينة

هنا نقدر نحلل

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س - ٣)}$

$= ٣ + ٣ = ٦$

٢ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س^٤ - ٥س^٢ + ٦}$

الحل

بالتعويض المباشر $= \frac{٢^٣ - ٨}{٤ - ١٠ + ٦} = \frac{٠}{٠}$

كمية غير معينة

هنا نقدر نحلل

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س - ٢)(س - ٣)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{س - ٣} = \frac{٤ + ٤ + ٤}{٢ - ٣}$

$= \frac{١٢}{-١} = -١٢$

٣ $\lim_{س \to ٠} \frac{(٢س - ١)^٢ - ١}{٥س}$

الحل

بالتعويض المباشر $= \frac{(-١)^٢ - ١}{٠ \times ٥}$

$= \div$ كمية غير معينة

$\lim_{س \to ٠} \frac{(٢س - ١)^٢ - ١}{٥س} = \lim_{س \to ٠} \frac{٤س^٢ - ٤س + ١ - ١}{٥س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٤س^٢ - ٤س}{٥س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س(٤س - ٤)}{س(٥)} = \frac{٤ - ٠}{٥}$

$= \frac{-٤}{٥}$

حل انت

١ $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ **٢** $\lim_{س \to ٥} ٧$

٣ $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ١)^٢ - ٤}{س^٣ + س}$ **٤** $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٢ - ٤}{س + ٢}$

الفكرة الثالثة
القسمة المطولة

فى النوع ده أنا هحل بطريقة أحل احها القسمة التركيبية أحل بكثير جداً من القسمة المطولة

مثال ٣ أوجد كلاً من النهايات التالية

١ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٧س + ٦}{٣س^٤ - ٨س^٢ + ٤}$

الحل

بالتعويض المباشر $= \frac{٨ - ١٤ + ٦}{١٢ - ١٦ + ٤} = \frac{٠}{٠}$

كمية غير معينة بالتعويض

العامل المشترك $(س - ٢)$

	١	٠	٧-	٦
٢	١	٢	٤	٦-
	١	٢	٣-	٠

$س^٢ + ٢س - ٣$ ← خارج القسمة

ده خلصنا بسط

$٣س^٤ - ٨س + ٤$ ← ده خلصنا مقام

$(س - ٢)(س - \frac{٢}{٣})(س - ١)$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س - ٣)}{(س - ٢)(س - \frac{٢}{٣})(س - ١)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{(س - \frac{٢}{٣})(س - ١)} = \frac{٤ + ٤ - ٣}{(٢ - \frac{٢}{٣})(٢ - ١)} = \frac{٥}{\frac{٤}{٣}}$

$= \frac{١٥}{٤}$

---

٢ $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٣ + ٣س + ٤}{س^٣ + ٢س^٢ - ٨س - ١٢}$

الحل

بالتعويض المباشر $= \frac{-٨ + ٦ + ٤}{-٨ + ٨ + ١٦ - ١٢} = \frac{٠}{٠}$

	١	٠	٣	٤
٢-	١	٢-	٧	١٢-
	١	٢-	٧	٠

$س^٢ - ٢س + ٧$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{(س + ٢)(س^٣ + ٣س + ٤)}{(س + ٢)(س^٢ - ٢س + ٧)(س - ٢)}$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{س^٣ + ٣س + ٤}{(س^٢ - ٢س + ٧)(س - ٢)} = \frac{-٨ - ٦ + ٤}{(٤ + ٤ + ٧)(-٤ - ٢)} = \frac{-١٠}{-٦٥}$

لسه مخلصتش

$= \lim_{س \to -٢} \frac{(س + ٢)}{(س - ٣)(س + ٢)(س - ٢)}$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{١}{(س - ٣)(س - ٢)} = \frac{١}{(-٥)(-٤)} = \frac{١}{٢٠}$

الفكرة الرابعة
الضرب فى المرافق

نفس الجزء بس بتغير الإشارة
اللى بين الجزءين

مثال ٤ أوجد النهايات الآتية

١ $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س-١} - ٢}{س - ٥}$

الحل

بالتعويض المباشر $= \frac{\sqrt{٥-١} - ٢}{٥-٥} = \frac{٠}{٠}$ ÷

بالضرب × المرافق بسطاً ومقاماً

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س-١} - ٢}{س - ٥} \times \frac{\sqrt{س-١} + ٢}{\sqrt{س-١} + ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س - ١ - ٤)}{(س-٥)(\sqrt{س-١} + ٢)}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س-٥)}{(س-٥)(\sqrt{س-١} + ٢)}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{١}{(\sqrt{س-١} + ٢)} = \frac{١}{\sqrt{٤} + ٢}$$

$$= \frac{١}{٢+٢} = \frac{١}{٤}$$

٢ $\lim_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt{س+٤} - ٣}$

الحل

بالتعويض المباشر $= \frac{٢٥ - ٢٥}{\sqrt{٩} - ٣} = \frac{٠}{٠}$ ÷

بالضرب × المرافق بسطاً ومقاماً

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt{س+٤} - ٣} \times \frac{\sqrt{س+٤} + ٣}{\sqrt{س+٤} + ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{س(س-٥) \times (\sqrt{س+٤} + ٣)}{(س+٤-٩)}$$

$$= \lim_{س \to ٥} س(\sqrt{س+٤} + ٣)$$

$$= ٥(\sqrt{٩} + ٣) = ٥(٣+٣)$$

$$= ٥ \times ٦ = ٣٠$$

---

٣ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٤+س} - ٢}{\sqrt{٩+س} - \sqrt{٩-س}}$

الحل

بالتعويض $= \frac{٢-٢}{٣-٣} = \frac{٠}{٠}$ ÷

هنضرب × مرافق البسط ومرافق المقام

ضروري جدًا حاول تكملها

انت

مثال ٥ اختر الاجابة الصحيحة

١) $\lim_{س \to ٢} هـ(٥) = ...$

(٢ ، ٧ ، ١٠ ، ٥)

٢) $\lim_{س \to ٠} \sqrt{٤ - س^{٢}} = ...$

(١ ، صفر ، ٢ ، ليس لها وجود)

٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س + ١} - ١}{س} = ...$

(صفر ، $\sqrt{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ليس لها وجود)

٤) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{ظا س}{س}$

(صفر ، ١ ، $\frac{٤}{\pi}$ ، غير موجودة)

٥) إذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{أ}{س + ١} = ٤$

فإن $أ =$

(٤ ، ٢ ، ١٢ ، ٦)

٦) إذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٤أ}{س - ٢}$ لها وجود

فإن $أ = ...$

(١- ، ١ ، ٢ ، ٤)

٧) $\lim_{س \to \pi} \frac{جتا ٢س}{س} = ...$

(π ، $\frac{١-}{\pi}$ ، $\frac{١}{\pi}$ ، غير موجودة)

مثال ٦ إذا كان $\lim_{س \to ٢} \frac{د(س) - ٥}{س - ٢} = ١$

فأوجد $\lim_{س \to ٢} د(س)$

الحل

∵ النهاية لها وجود يبقى البسط يقبل القسمة على المقام والناتج ١

∴ $د(س) - ٥ = س - ٢$

$د(س) = س - ٢ + ٥ = س + ٣$

∴ $\lim_{س \to ٢} د(س) = \lim_{س \to ٢} س + ٣ = ٥$

مثال ٧ إذا كان $\lim_{س \to ٠} \frac{د(س)}{س^{٢}} = ٥$

فأوجد

١) $\lim_{س \to ٠} د(س)$ ٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{د(س)}{س}$

الحل

$د(س)$ تقبل القسمة على $س^{٢}$ والناتج ٥

∴ $د(س) = ٥ س^{٢}$

١) $\lim_{س \to ٠} د(س) = \lim_{س \to ٠} ٥ س^{٢} = ٥ \times ٠ =$ صفر

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{د(س)}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{٥ س^{٢}}{س} = \lim_{س \to ٠} ٥ س = ٥ \times ٠ =$ صفر

الواجب

١ أوجد متى مما يلى

١) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٤ - ٢٥}{س - ٥}$

٢) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ٨}{س^٤ - ١٢ - س}$

٣) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٢ + ٤س + ٣}{٩ - س^٤}$

٤) $\lim_{س \to ١} \frac{٣س^٤ + س - ٤}{س^٤ - ١}$

٢ أوجد $\lim_{س \to ٠}$

١) $\frac{(س + ٢)^٤ - ٤}{س^٤ + س}$

٢) $\frac{(٢س - ١)^٤ - ١}{٥س}$

٣) $\frac{س + ١٢ - \sqrt{س}}{٩ - س}$

٤) $\left(\frac{١}{س - ١} - \frac{٣}{س^٣ - ١}\right)$

٣ أوجد $\lim_{س \to ٤}$

١) $\frac{س^٣ - ١٥س - ٤}{س - ٤}$

٢) $\frac{س^٤ - ٢١س^٢ + ٢٠س}{س - ٤}$

٣) $\frac{س^٢ + ٤س + ٤}{س^٣ + س^٢ - ٨س - ١٢}$

٤ أوجد $\lim_{س \to}$

١) $\frac{\sqrt{٤س + ١} - ٣}{س - ٢}$

٢) $\frac{س + ١}{\sqrt{٥ + س} - ٢}$

٣) $\frac{س^٢ - ٥س}{\sqrt{س + ٤} - ٣}$

٤) $\frac{\sqrt{٨ + س^٢} - ٣}{س + ١}$

"لا تؤجل عمل اليوم إلى الغد"

"ذاكر تنجح مفيش ذاكر مفيش تفضحج"

الدرس الثالث
نظرية (٤) "القانون"

نظرية (٤)

$$\text{إذا كان } ن \in \mathbb{ن} \text{ فإن } \lim_{س \to ب} \frac{س^{ن} - ب^{ن}}{س - ب} = ن ب^{ن-١}$$

نتيجة (١)

$$\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ب)^{ن} - ب^{ن}}{س} = ن ب^{ن-١}$$

نتيجة (٢)

$$\lim_{س \to ب} \frac{س^{ن} - ب^{ن}}{س^{م} - ب^{م}} = \frac{ن}{م} ب^{ن-م}$$

الفكرة الأولى
مسائل مباشرة

مثال ١ أوجد نهاية كلاً مما يلى

١ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢}$

الحل

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٢^{٣}}{س - ٢} = ٣ \times ٢^{٣-١} = ٣ \times ٢^{٢} = ١٢$$

٢ $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٥} + ٣٢}{س + ٢}$

الحل

$$= \lim_{س \to -٢} \frac{س^{٥} - (-٢)^{٥}}{س - (-٢)} = ٥ \times (-٢)^{٥-١} = ٥ \times ١٦ = ٨٠$$

٣ $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٥} - ١}{س^{٣} - ١}$

الحل

$$= \lim_{س \to ١} \frac{س^{٥} - ١^{٥}}{س^{٣} - ١^{٣}} = \frac{٥}{٣} \times ١^{٥-٣} = \frac{٥}{٣}$$

٤ $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ٥)^{٤} - ٦٢٥}{س}$

الحل

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{(س + ٥)^{٤} - ٥^{٤}}{س}$$ نتيجة (٢)

$$= ٤ \times ٥^{٤-١} = ٤ \times ٥^{٣} = ٥٠٠$$

٥ $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٧]{س} - ١}{س - ١}$

الحل

الأس / الدليل

$$= \lim_{س \to ١} \frac{س^{\frac{١}{٧}} - ١}{س - ١} = \frac{١}{٧} \times ١^{\frac{١}{٧}-١} = \frac{١}{٧}$$

ملحوظة

١ عندما تحول الجذر إلى أس $\sqrt[ن]{س^{م}} = س^{\frac{م}{ن}}$

نبقول البسط على المقام

$\sqrt[٥]{س^{٣}} = س^{\frac{٣}{٥}}$ وهكذا

---

٢ العدد (١) مرفوع لأى أس يساوى (١) لأنه $(١)^{عدد} = ١$

الفكرة الثانية تعديل النهايات

مثال ١ أوجد قيمة النهايات التالية

١ $\lim_{س \to ٦} \frac{(س-٥)^{٧}-١}{س-٦}$

الحل

بفرض النهاية تؤول لمقدار داخل القوس

$\therefore$ س $\to$ ٦ $\Leftarrow$ س $-$ ٥ $\to$ ٦ $-$ ٥

س $-$ ٥ $\to$ ١

$$\text{نهـا} = \frac{(س-٥)^{٧}-١}{(س-٥)-١} = ٧ \times \frac{١}{١} = ٧$$

$$\text{س} \to ١ + ٥$$

٢ $\lim_{س \to -٢} \frac{(س+٣)^{٥}-١}{س+٢}$

الحل

بفرض النهاية

س $\to -٢$

س $+ ٣ \to -٢ + ٣ = ١$

$$\therefore \text{نهـا} = \frac{(س+٣)^{٥}-١}{(س+٣)-١} = \frac{١}{٤} \times ٥ = ٥$$

$$\text{س} \to ١ + ٣$$

٣ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(١+٤هـ)^{٨}-١}{هـ}$

الحل

$\therefore$ هـ $\to ٠$ $\therefore$ ٤هـ $\to ٠$

١ + ٤هـ $\to$ ١ + ٠ = ١

$$\text{نهـا} = \frac{(١+٤هـ)^{٨}-١}{(١+٤هـ)-١} = \frac{١}{٤} \times ٨ \times ١^{٧} \times ٤ = ٣٢$$

$$\text{هـ} \to ٠$$

نأخذ معامل الحد اللى فوق / معامل الحد اللى تحت

خارج النهاية

٤ $\lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt[٥]{س+٢٥} - ٢}{س - ٧}$

الحل

$= \lim_{س \to ٧} \frac{(س+٢٥)^{\frac{١}{٥}} - ٢}{س - ٧}$

صفقدل $س+٢٥ \leftarrow ٧+٢٥$

$س+٢٥ \leftarrow ٣٢$

$\therefore$ نهـا $\frac{(س+٢٥)^{\frac{١}{٥}} - ٣٢^{\frac{١}{٥}}}{(س+٢٥) - ٣٢}$ $س+٢٥ \leftarrow ٣٢$

$= (٣٢)^{١-\frac{١}{٥}} \times \frac{١}{٥} = \frac{١}{٨٠}$

٥ $\lim_{س \to ٠} \frac{(٩+٢س)^{\frac{٦}{٥}} - ٩^{\frac{٦}{٥}}}{٥س}$

الحل

$س \to ٠ \therefore ٢س \to ٠$

$٢س+٩ \leftarrow ٩$

صفقدل معامل $س$ نوجد $\frac{س \text{ نوجد}}{س \text{ تحت}}$ خارج النهاية

$\frac{٢}{٥}$ نهـا $\frac{(٩+٢س)^{\frac{٦}{٥}} - ٩^{\frac{٦}{٥}}}{(٩+٢س) - ٩}$ $س \to ٠$

$= \frac{٢}{٥} \times ٦ \times ٩^{١-\frac{٦}{٥}} = \frac{١٢}{٥} ٩^{\frac{٥}{٥}}$

٦ $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٤]{٢س+١٤} - ٢}{س - ١}$

الحل

صفقدل $:: س \to ١ \therefore ٢س \to ٢$

$٢س+١٤ \leftarrow ١٦$

نفس س ناخذ المعامل خارج النهاية

$\frac{١}{٢}$ نهـا $\frac{(٢س+١٤)^{\frac{١}{٤}} - ١٦^{\frac{١}{٤}}}{(٢س+١٤) - ١٦}$ $٢س+١٤ \to ١٦$

$= ٢ \times \frac{١}{٤} \times (١٦)^{١-\frac{١}{٤}} = \frac{١}{١٦}$

مثال ٣ إذا كان نهـا $\frac{س^{ن} - ٦٤}{س^{٦} - ٢}$ $س \to ٢ = ل$

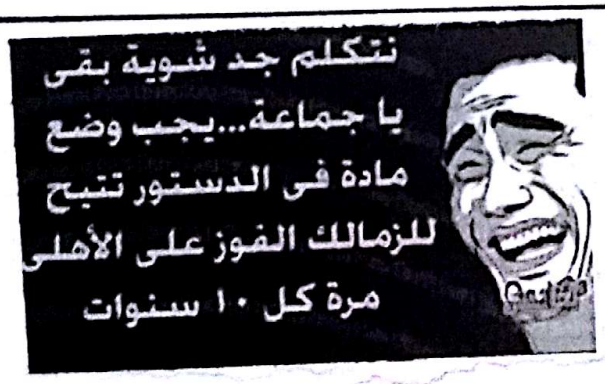
فأوجد قيمتى ن ، ل

الحل

نهـا $\frac{س^{ن} - ٢^{٦}}{س - ٢}$ $س \to ٢$ $= $ نهـا $\frac{س^{٦} - ٢^{٦}}{س - ٢}$ $س \to ٢$

$= ٦ \times ٢^{٦-١} = ٦ \times ٢^{٥} = ١٩٢$

$\therefore ن = ٦ ، ل = ١٩٢$



الفكرة الثالثة
تقييم النهاية الى نهايتين

مثال ٤ أوجد كلاً من النهايات التالية

١ $\lim_{س \to -٢} \frac{(س+٣)^{٥} - ١}{س^{٤} - ٤}$

الحل

$$= \lim_{س \to -٢} \frac{(س+٣)^{٥} - ١}{(س-٢)(س+٢)}$$

$$= \lim_{س \to -٢} \frac{١}{س-٢} \times \lim_{س \to -٢} \frac{(س+٣)^{٥} - ١}{س+٢}$$

$$= \lim_{س+٣ \to ١} \frac{(س+٣)^{٥} - ١}{(س+٣) - ١} \times \frac{١}{-٢-٢}$$

$$= \frac{-٥}{٤} = ١^{٤} \times ٥ \times \frac{١}{-٤} =$$

---

٢ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٤} + ٣س - ١٠}$

الحل

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{(س+٥)(س-٢)}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{١}{س+٥} \times \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س-٢}$$

$$\frac{١}{٧} \times \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٢^{٥}}{س-٢}$$

$$= \frac{١}{٧} \times ٥ \times ٢^{٤} = \frac{٨٠}{٧}$$

---

٣ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س+٤} - ٢}{س^{٢} + س}$

الحل

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س+٤} - ٢}{س(س+١)}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س+١} \times \lim_{س \to ٠} \frac{(س+٤)^{\frac{١}{٢}} - ٢}{س}$$

$$\frac{١}{١} \times \lim_{س+٤ \to ٤} \frac{(س+٤)^{\frac{١}{٢}} - ٤^{\frac{١}{٢}}}{(س+٤) - ٤}$$

$$= ١ \times \frac{١}{٢} \times (٤)^{\frac{١}{٢}-١} = \frac{١}{٤}$$

وممكن تحلها بالقرب × المرافق

---

٤ $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٧} + ١٢٨}{٣س^{٤} - ٤٨}$

الحل

$$\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٧} + ١٢٨}{٣(س^{٤} - ١٦)}$$

$$\frac{١}{٣} = \lim_{س \to -٢} \frac{س^{٧} - (-٢)^{٧}}{س^{٤} - (-٢)^{٤}}$$

$$\frac{١}{٣} \times \frac{٧}{٤} \times (-٢)^{٧-٤} =$$

$$\frac{-١٤}{٣} = -٨ \times \frac{٧}{٤} \times \frac{١}{٣}$$

مثال ٥ آكل مايى

١) $\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^{٧} - ٢^{٧}}{س - ٢} = ٧ ٢^{٦}$

٢) $\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{٧ - ٢س^{٣}}{س - ٢} = \frac{١}{٢٤}$

$= \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^{-\frac{١}{٢}} - ٢^{-\frac{١}{٢}}}{س - ٢} = -\frac{١}{٢} \times ٢^{-\frac{٣}{٢}}$

٣) $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{(س+١)^{٥} - ١}{س} = ٥ \times ١^{٤} = ٥$

٤) إذا كان $\text{نهـا}_{س \to ل} \frac{س^{٥} - ل^{٥}}{س - ل} = ٨٠$

فإن ل = ---

$٥ ل^{٤} = ٨٠ \quad ل^{٤} = ١٦$

$ل = \pm \sqrt[٤]{١٦} = \pm ٢$

٥) $\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{س^{٩} - ٩س}{س^{٩} - ٩س^{٥}} = \frac{٩ - ٩}{٥ - ٩}$

مثال ٦ أوجد قيمة ٩ إذا كانت

$\text{نهـا}_{س \to ٩} \frac{س^{١٢} - ٩^{١٢}}{س^{١٠} - ٩^{١٠}} = ٣٠$

الحل

$٣٠ = {}^{١٠-١٢}٩ \frac{١٢}{١٠}$

$٣٠ = {}^{٢}٩ \frac{١٢}{١٠}$

$\therefore {}^{٢}٩ = ٣٠ \times \frac{١٠}{١٢} = \frac{٣٠٠}{١٢} = ٢٥$

$\therefore ٩ = \pm ٥$

مثال ٧ إذا كانت $د(س) = \frac{١}{س^{٤}}$

أوجد $\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{د(س) - د(٢)}{س - ٢}$

الحل

$د(س) = س^{-٤} \quad د(٢) = ٢^{-٤}$

$\therefore \text{المقدار} = \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^{-٤} - ٢^{-٤}}{س - ٢}$

$= (-٤) \times (٢)^{-٤-١} = -٤ \times ٢^{-٥}$

$= \frac{-٤}{٣٢} = \frac{-١}{٨}$

الواجب

① أوجد كلاً مما يأتي

١) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢}$

٢) $\underset{س \to -٥}{\text{نها}} \frac{س^{٤} - ٦٢٥}{س + ٥}$

٣) $\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{س^{٤} - ٨١}{س^{٥} + ٢٤٣}$

٤) $\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{س^{٦} - ٦٤}{٣س + ٦}$

٥) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{-٧} - (٢)^{-٧}}{س - ٢}$

٦) $\underset{س \to ١٦}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٤]{س^{٧}} - ١٢٨}{س - ١٦}$

٧) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٧]{س} - ١}{س - ١}$

② أوجد كلاً مما يأتي

١) $\underset{س \to ٦}{\text{نها}} \frac{(س - ٥)^{٧} - ١}{س - ٦}$

٢) $\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{(س + ٣)^{٥} - ١}{س + ٢}$

٣) $\underset{هـ \to ٠}{\text{نها}} \frac{(٣ + هـ)^{٤} - ٨١}{٦هـ}$

٤) $\underset{هـ \to ٠}{\text{نها}} \frac{(١ + ٤هـ)^{٨} - ١}{هـ}$

٥) $\underset{س \to ٧}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٥]{س + ٢٥} - ٢}{س - ٧}$

٦) $\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{(س + ٣)^{٥} - ١}{س^{٢} - ٤}$

٧) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{(س - ٤)^{٥} + ٣٢}{س - ٢}$

٨) $\underset{س \to ٥}{\text{نها}} \frac{(س - ٣)^{٥} - ٣٢}{س^{٢} - ٥س}$

من الأخطاء	الصواب
إنشاء الله ⟵	إن شاء الله
اللهم صلي على سيدنا محمد ⟵	اللهم صل على سيدنا محمد
من علمني حرفاً صرت له عبداً ⟵	العبادة لله وحده ولكن من علمني حرفاً كنت له عوناً

"اللهم اغفرلي ولمن علمني"

الدرس الرابع
نهاية الدالة عند اللانهاية

نظرية (٥)

$$\lim_{س \to \infty} \frac{١}{س^{ن}} = \text{صفر}$$

ملاحظات هامة قوى

١) $\infty \times \text{عدد} = \infty$

٢) $\frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$

٣) $\infty \pm \text{عدد} = \infty$

٤) $\text{عدد} - \infty = -\infty$

٥) $\text{عدد} \times -\infty = -\infty \leftarrow$ عدد موجب

٦) $\infty + \infty = \infty$

٧) $\infty \times \infty = \infty$

٨) $(\infty)^{ن} = \infty$ بشرط $ن \neq ٠$

٩) $\infty - \infty \leftarrow$ كمية غير معينة

١٠) $\frac{\infty}{\infty} \leftarrow$ كمية غير معينة

١١) $\infty \times \text{صفر} \leftarrow$ كمية غير معينة

١٢) $(\infty)^{\text{صفر}} \leftarrow$ كمية غير معينة

الفكرة الاولى
النهاية التى ليست على صورة كسر

مثال ١ أوجد ناتج ما يأتى

١) $\lim_{س \to \infty} (\frac{١}{س} + ٢)$

الحل

نهاية مجموع

$= \lim_{س \to \infty} \frac{١}{س} + \lim_{س \to \infty} ٢$

$= \text{صفر} + ٢ = ٢$

٢) $\lim_{س \to \infty} (٥ - \frac{١}{س^{٤}})$

الحل

$\lim_{س \to \infty} ٥ - \lim_{س \to \infty} \frac{١}{س^{٤}}$

$= ٥ - \text{صفر} = ٥$

٣) $\lim_{س \to \infty} (٥س - س^{٤} + ٧)$

الحل

نهاية الحد الأس عامل مشترك

$\lim_{س \to \infty} س^{٤} (\frac{٥س}{س^{٤}} - \frac{س^{٤}}{س^{٤}} + \frac{٧}{س^{٤}})$

$= \lim_{س \to \infty} س^{٤} \left(\frac{٥}{س} - ١ + \frac{٧}{س^{٤}} \right)$

$= \lim_{س \to \infty} س^{٤} \times \lim_{س \to \infty} \left(\frac{٥}{س} - ١ + \frac{٧}{س^{٤}} \right)$

$= (\infty)^{٤} \times -١ = -\infty$

الفكرة الثانية
مسائل الكسور

هنقسم على اكبر أس فى المقام

مثال ١ $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س - ٥}{٣س + ٧}$

الحل

بالقسمة على $س$ بسطاً ومقاماً

$= \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٢س}{س} - \frac{٥}{س}}{\frac{٣س}{س} + \frac{٧}{س}}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{٢ - \frac{٥}{س}}{٣ + \frac{٧}{س}} = \frac{٢ - ٠}{٣ + ٠} = \frac{٢}{٣}$

٤ $\lim_{س \to \infty} (س^{٣} + ٧س^{٢} + ٢)$

الحل

هنأخذ $س^{٣}$ عامل مشترك

$= \lim_{س \to \infty} س^{٣} \left(\frac{س^{٣}}{س^{٣}} + \frac{٧س^{٢}}{س^{٣}} + \frac{٢}{س^{٣}} \right)$

$= \lim_{س \to \infty} س^{٣} \times \lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{٧}{س} + \frac{٢}{س^{٣}} \right)$

$= (\infty)^{٣} \times ١ = \infty$

٥ $\lim_{س \to \infty} (٣س^{٥} + ٤س^{٢} + ١)$

الحل

$= \lim_{س \to \infty} \left(\frac{٣س^{٥}}{س^{٥}} + \frac{٤س^{٢}}{س^{٥}} + ١ \right)$

$= ٣ + ٠ + ٠ + ١ = ١$

* أى حاصل مقامها $س = ٠$ فى مسائل النهايات

٢ $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^{٢} + ٥س + ١}{٣س^{٢} + ٨س - ٣}$

الحل

بالقسمة على $س^{٢}$ بسطاً ومقاماً

$= \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٢س^{٢}}{س^{٢}} + \frac{٥س}{س^{٢}} + \frac{١}{س^{٢}}}{\frac{٣س^{٢}}{س^{٢}} + \frac{٨س}{س^{٢}} - \frac{٣}{س^{٢}}}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{٢ + \frac{٥}{س} + \frac{١}{س^{٢}}}{٣ + \frac{٨}{س} - \frac{٣}{س^{٢}}} = \frac{٢}{٣}$

٣ $\lim_{س \to \infty} \frac{٥س^{٧} + ٢س - ١}{٦س^{٤} + ١٣}$

الحل

بالقسمة على $س^{٤}$ فوق وتحت

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{٥س^{٧}/س^{٤} + ٢س/س^{٤} - ١/س^{٤}}{٦س^{٤}/س^{٤} + ١٣/س^{٤}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{٥س^{٣} + ٢/س^{٣} - ١/س^{٤}}{٦ + ١٣/س^{٤}}$$

$$= \frac{٥(\infty)^{٣}}{٦} = \infty$$

٤ $\lim_{س \to \infty} \frac{٧س^{٢} + ١}{٤س^{٣} - ٨س + ١}$

الحل

بالقسمة على $س^{٣}$ فوق وتحت

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{٧س^{٢}/س^{٣} + ١/س^{٣}}{٤س^{٣}/س^{٣} - ٨س/س^{٣} + ١/س^{٣}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{٧/س + ١/س^{٣}}{٤ - ٨/س^{٢} + ١/س^{٣}}$$

$$= \frac{٠ + ٠}{٤ - ٠} = \frac{\text{صفر}}{٤} = \text{صفر}$$

ملحوظة مهمة

١ إذا كانت درجة البسط = درجة المقام

ميقص الناتج = معامل س بسط (الأكبر أس) / معامل س مقام

٢ إذا كانت درجة البسط أكبر من المقام

ميقص الناتج = ∞ أو $-\infty$

٣ إذا كانت درجة البسط أقل من المقام

ميقص الناتج = صفر

٤ إذا كانت $س \to \infty$

فإنه $س = |س| = \sqrt{س^{٢}}$

$$= \sqrt{س^{٣}} = \sqrt{س^{٧}} = \cdots$$

الفكرة الثالثة
الأقواس والجذور

مثال ٣

أوجد كلاً من النهايات الآتية

١ $\lim_{س \to \infty} \frac{(س - ١)(س^{٢} + ١)}{س^{٢}(٥س - ١)}$

نقسم على $س^3$ لأن $س^3 \times س$ أقوى س اللى جواه $س$ نقسم على $س$ واللى جواه $س^2$ نقسم على $س^2$

$$= \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{\left(\frac{س}{س} - \frac{1}{س}\right)\left(\frac{س^2}{س^2} + \frac{1}{س^2}\right)}{\frac{س^4}{س^2}\left(\frac{5س}{س} - \frac{1}{س}\right)}$$

$$= \frac{(1-0)\times(1+0)}{1\times(5-0)} = \frac{1}{5}$$

---

٢ $\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{(س+2)^3(3-2س^2)}{3س(س^2+7)^2}$

الحل

نقسم على $س^5 = س^3 \times س^2$

$= س \times س^4$

$$= \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{\left(\frac{س}{س} + \frac{2}{س}\right)^3\left(\frac{3}{س^2} - \frac{2س^2}{س^2}\right)}{\frac{3س}{س}\left(\frac{س^2}{س^2} + \frac{7}{س^2}\right)^2}$$

$$= \frac{(1+0)^3(0-2)}{3(1+0)} = \frac{1\times-2}{3\times1}$$

$$= \frac{-2}{3}$$

---

٣ $\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{س^3 - 4س + 5}{(2س-1)^3}$

الحل

نقسم على $(س)^3$ فوق $س^3$ وداخل أقواس $س$

$$= \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{\frac{س^3}{س^3} - \frac{4س}{س^3} + \frac{5}{س^3}}{\left(\frac{2س}{س} - \frac{1}{س}\right)^3}$$

$$= \frac{1 - 0 + 0}{(2-0)^3}$$

$$= \frac{1}{3(2)} = \frac{1}{8}$$

---

٤ $\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{4 - 3س^3}{\sqrt{س^6 + 9}}$

الحل

لاحظ $\sqrt{س^6} = س^{\frac{6}{2}} = س^3$

يعنى تحت الجزر نقسم على $س^6$

وخارج الجزر على $س^3$

$$= \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{\frac{4}{س^3} - \frac{3س^3}{س^3}}{\sqrt{\frac{9}{س^6} + \frac{س^6}{س^6}}}$$

$$= \frac{0 - 3}{\sqrt{0 + 1}} = \frac{-3}{1} = -3$$

---

٥ $\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{1}{س}\sqrt{3 + 4س^2}$

الحل

$$= \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{\sqrt{3 + 4س^2}}{س}$$

بالقسمة على $س = \sqrt{س^2}$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{\frac{3}{س^2} + \frac{4}{س^2}}}{\frac{س}{س}}$$

$$= \frac{\sqrt{0+4}}{1} = \frac{\sqrt{4}}{1} = 2$$

---

٦ $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س}{2س - 1} \right)^{\frac{1}{س}}$

الحل

$$= \lim_{س \to \infty} 4^{\frac{1}{س}} - \lim_{س \to \infty} \frac{س}{2س - 1}$$

$$= (4)^{\cdot} - \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{س}{س}}{\frac{2س}{س} - \frac{1}{س}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2 - 0} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

---

٧ $\lim_{س \to \infty} \frac{5س^{-3} + 4س^{-2} - 3}{7س^{-3} - 2س^{-2} + 8}$

الحل

انتبه يادكتور انتبه يا ستر
انتبه يا معلم
انتبه يا حاجة

الاس السالب بنخلي البسط عشان
تحوله إلى موجب وخلاص

مثال ٤ لما تلاقي جذور وقيش بط وقام تضرب × المرافق

١ $\lim_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^4 - 2س + 1} - \sqrt{س^4 + 2س + 1} \right)$

الحل

$$= \lim_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^4 - 2س + 1} - \sqrt{س^4 + 2س + 1} \right) \times \frac{\sqrt{س^4 - 2س + 1} + \sqrt{س^4 + 2س + 1}}{\sqrt{س^4 - 2س + 1} + \sqrt{س^4 + 2س + 1}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{(س^4 - 2س + 1) - (س^4 + 2س + 1)}{\sqrt{س^4 - 2س + 1} + \sqrt{س^4 + 2س + 1}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{-4س}{\sqrt{س^4 - 2س + 1} + \sqrt{س^4 + 2س + 1}}$$

بالقسمة على $\sqrt{س^4} = س$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{-4س}{\sqrt{\frac{س^4}{س^4} - \frac{2س}{س^4} + \frac{1}{س^4}} + \sqrt{\frac{س^4}{س^4} + \frac{2س}{س^4} + \frac{1}{س^4}}}$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{-4}{1+1} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{5}{س^3} + \frac{4}{س^2} - 3}{\frac{7}{س^3} - \frac{2}{س^2} + 8}$$

وعوض أى حاجة فيها س = لانهاية تبقى

$$= \frac{0 + 0 - 3}{0 - 0 + 8} = \frac{-3}{8}$$

الواجب

١ الحل

١) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣}{س^{٢}} = ---$

٢) $\lim_{س \to \infty} (٥)^{\frac{١}{س}} = ----$

٣) $\lim_{س \to \infty} (\frac{٣}{س^{٤}} - ٢) = ---$

٤) $\lim_{س \to \infty} (٥س^{-٢} + ٤س^{-١} - ٩) = ---$

٥) $\lim_{س \to \infty} (س^{٣} + ٥س^{٢} + ٩) = ---$

٦) $\lim_{س \to \infty} (٤ - ٢س - س^{٣}) = ---$

٢ أوجد كلاً مما يأتى

١) $\lim_{س \to \infty} \frac{٥س - ٤}{٣س - ٢}$

٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{٥ - ٦س - ٣س^{٢}}{٢س^{٢} + س + ٤}$

٣) $\lim_{س \to \infty} (س^{٣} + ٥س^{٤} + ١)$

٤) $\lim_{س \to \infty} (٥ + س - س^{٢})$

٥) $\lim_{س \to \infty} \frac{٧س^{٤} + ١}{٤س^{٣} - ١٨س + ١}$

٣ أوجد كلاً مما يأتى

١) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٣} - ٤س + ٥}{(٢س - ١)^{٣}}$

٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س^{٢} - ٤س + ٥}{(س + ٢)^{٢}}$

٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{(س + ٢)^{٣} (٣ - ٢س^{٤})}{٣س (س^{٤} + ٧)^{٢}}$

٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{س + ٢}{\sqrt{٩س^{٤} + ٢٥}}$

٥) $\lim_{س \to \infty} \frac{٤ - ٣س^{٣}}{\sqrt{٧س^{٦} + ٩}}$

٦) $\lim_{س \to \infty} [٧ + \frac{٢س^{٢}}{(س + ٣)^{٢}}]$

٧) $\lim_{س \to \infty} [\frac{س}{٢س + ١} + \frac{٣س^{٢}}{(س - ٣)^{٢}}]$

صلاح نام واتباع محمد النجاح

وصلاح سحر الليالى عاد لسنة ٢٠٢٤ فى

علمى بس

الدرس الخامس
نهايات الدوال المثلثية

نظرية إذا كانت س بالدائرى

١) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا س}}{س} = 1$

٢) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا م س}}{\text{ب س}} = \frac{م}{ب}$

٣) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا س}}{س} = 1$

٤) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا م س}}{\text{ب س}} = \frac{م}{ب}$

*** $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا س}}{س} =$ مرفوض

على فكرة $\lim_{س \to 0}$ جتا س = ١

الفكرة الأولى
مسائل مباشرة وسهلة

مثال ١ أوجد كلاً مما يأتى من النهايات الآتية

١) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا ٣س}}{٥س} = \frac{٣}{٥}$

٢) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا ٧س}}{س} = ٧$

٣) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا ٣س}^{٤}}{٥ س^{٤}} = \frac{٣}{٥}$

٤) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا ٥س}}{\text{٢جا ٣س}}$

الحل

بالقسمة على س بسطاً ومقاماً

$= \frac{١}{٢} \lim_{س \to 0} \frac{\frac{\text{جا ٥س}}{س}}{\frac{\text{جا ٣س}}{س}}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٥}{٣} = \frac{٥}{٦}$

٥) $\lim_{س \to 0}$ ٣س قتا ٢س

الحل

$= \lim_{س \to 0} ٣س \times \frac{١}{\text{جا ٢س}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٣س}{\text{جا ٢س}}$ ÷ (س)

$= \lim_{س \to 0} \frac{\frac{٣س}{س}}{\frac{\text{جا ٢س}}{س}} = \frac{٣}{٢}$

٦) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا ٢س ظا ٣س}}{٤ س^{٢}}$

$= \frac{1}{4}$ نهـا $\frac{\frac{\text{ظا}^2 3س}{س} \times \frac{\text{جا}^2 س}{س}}{\frac{س^4}{س^2}}$ ، $س \to 0$

$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{1} \times \frac{3 \times 2}{1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

٧ نهـا $\frac{\text{جا}^2 3س}{5 س^2}$ ، $س \to 0$

الحل

$= \frac{1}{5}$ نهـا $\frac{\left(\frac{\text{جا}3س}{س}\right)^2}{\frac{س^2}{س^2}}$ ، $س \to 0$

$= \frac{1}{5} \times \frac{3^2}{1} = \frac{9}{5}$

٨ نهـا $\frac{س \text{ ظا}^2 س}{س^2 + \text{جا}^2 3س}$ ، $س \to 0$

الحل

بالقسمة على $س^2$ ، $س^2 = س \times س$

$= $ نهـا $\frac{\frac{س}{س} \times \frac{\text{ظا}^2 س}{س}}{\frac{س^2}{س^2} + \left(\frac{\text{جا}3س}{س}\right)^2}$ ، $س \to 0$

$= \frac{1 \times 1^2}{1 + (3)^2} = \frac{1}{9+1} = \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$

٩ نهـا $\frac{س + س \text{ جتا}س}{\text{جا}س \text{ جتا}س}$ ، $س \to 0$

الحل

بالقسمة على $س$

لاحظ أنه جتا مش مضاعفة جا ولا ظا

$= $ نهـا $\frac{\frac{س}{س} + \frac{س \text{ جتا}س}{س}}{\frac{\text{جا}س}{س} \text{ جتا}س}$ ، $س \to 0$

$= $ نهـا $\frac{1 + \text{جتا}س}{\frac{\text{جا}س}{س} \times \text{جتا}س}$ ، $س \to 0$

$= \frac{1+1}{1 \times 1} = \frac{2}{1} = 2$

١٠ نهـا $\frac{3(1 - \text{جتا}س)}{س}$ ، $س \to 0$

الحل

$= 3$ نهـا $\frac{(1 - \text{جتا}س)}{س}$ ، $س \to 0$

$= 3 \times$ صفر $=$ صفر

١١ نهـا $\frac{\text{جتا}س - 1}{\text{جا}س}$ ، $س \to 0$

الحل

بالقسمة على $س$ فوق وتحت

نهـا $\frac{\frac{\text{جتا}س - 1}{س}}{\frac{\text{جا}س}{س}}$ ، $س \to 0$

$= \frac{\text{صفر}}{1} =$ صفر

١٢ نهـا $\frac{2 - \text{جتا}3س - \text{جتا}4س}{س}$ ، $س \to 0$

الحل

فى الصفحة الجاية

العدد ٢ ضخايه ١+١
مرلزوانت تفرح

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{(1 - \text{جتا}٣س) + (1 - \text{جتا}٤س)}{س}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \left(\frac{1 - \text{جتا}٣س}{س}\right) + \text{نهـا}_{س \to 0} \left(\frac{1 - \text{جتا}٤س}{س}\right)$$

$$= \text{نهـا}_{٣س \to 0} ٣\left(\frac{1 - \text{جتا}٣س}{٣س}\right) + \text{نهـا}_{٤س \to 0} ٤\left(\frac{1 - \text{جتا}٤س}{٤س}\right)$$

$$= ٣ \times ٠ + ٤ \times ٠ = \text{صفر}$$

---

٤ $\text{نهـا}_{س \to 0} \dfrac{س - س\,\text{جتا}س}{\text{ظا}^٣ س}$

الحل

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{س(1 - \text{جتا}س)}{\text{ظا}^٣ س}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{س(1 - \text{جتا}س)}{\frac{\text{ظا}^٣ س}{س^٢}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\frac{(1 - \text{جتا}س)}{س}}{\left(\frac{\text{ظا}٣س}{س}\right)^٢}$$

$$= \frac{\text{صفر}}{٩} = \text{صفر}$$

تذكران

١) $\text{جا}^٢ س + \text{جتا}^٢ س = 1$

٢) $1 + \text{ظا}^٢ س = \text{قا}^٢ س$

٣) $1 + \text{ظتا}^٢ س = \text{قتا}^٢ س$

افتكر كويس المعلومه دى

---

١ $\text{نهـا}_{س \to 0} \dfrac{1 - \text{جتا}س}{س} = \text{صفر}$

٢ ولكن $\text{نهـا}_{س \to 0} \dfrac{1 - \text{جتا}س}{س^٢}$

هنضرب × المرافقه

---

١٤ $\text{نهـا}_{س \to 0} \dfrac{1 - \text{جتا}س}{س^٢}$

الحل

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \left(\frac{1 - \text{جتا}س}{س^٢} \times \frac{1 + \text{جتا}س}{1 + \text{جتا}س}\right)$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \left(\frac{1 - \text{جتا}^٢ س}{س^٢(1 + \text{جتا}س)}\right)$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{جا}^٢ س}{س^٢(1 + \text{جتا}س)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{جا}^٢ س}{س^٢} \times \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{1}{1 + \text{جتا}س}$$

$$= 1 \times \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

يعنى اهه مش عارف مدغيرى
كنتو اصتعملوا أيه؟

الفكرة الثانية
هتعمل شوية فى النهايات

تذكر

١) $\text{جا}س = \text{جتا}(\frac{\pi}{2} - س)$

٢) $\text{جتا}س = \text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)$

٣) $\text{ظا}س = \text{ظتا}(\frac{\pi}{2} - س)$

٤) $\text{جا}(\pi - س) = \text{جا}س$

٥) $\text{ظا}(\pi - س) = -\text{ظا}س$

٦) إذا كانت $س \to \infty$

$\therefore \frac{1}{س} \to$ صفر

مثال ٢ أوجد نهاية كلاً مما يلى

١) $\lim_{س \to ٤} \frac{\text{جا}(٣س - ١٢)}{س - ٤}$

الحل

$\because س \to ٤ \quad \therefore س - ٤ \to ٠$

$= \lim_{س-٤ \to ٠} \frac{\text{جا}٣(س-٤)}{(س-٤)} = ٣$

اعتبر $ص = ٣(س-٤)$

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{\text{جا}ص}{ص} = ٣$

---

٢) $\lim_{س \to \pi} \frac{\text{ظا}س}{\pi - س}$

الحل

$\because س \to \pi \quad \therefore \pi - س \to ٠$

$= \lim_{\pi - س \to ٠} \frac{-\text{ظا}(\pi - س)}{(\pi - س)}$

$= -١$

---

٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{س}{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - س)}$

الحل

$\because \text{جتا}(\frac{\pi}{2} - س) = \text{جا}س$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س}{\text{جا}س} = ١$

---

٤) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{٢س - \pi}{\text{جتا}س}$

الحل

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{-(\pi - ٢س)}{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}$

$= \lim_{\frac{\pi}{2} - س \to ٠} \frac{-٢(\frac{\pi}{2} - س)}{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}$

$= -٢$

٥ $\lim_{س \to ٠} س \, جا \frac{١}{س}$

الحل

$\because س \to ٠$

بوضع $\frac{١}{س} \to$ صفر

$\lim_{\frac{١}{س} \to ٠} \frac{جا \frac{١}{س}}{\frac{١}{س}}$ تمام لما تمام بط

$= ١$

آخر ملحوظات

إذا كانت س بالقياس الستينى فإنه

١ $\lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{س} = \frac{\pi}{١٨٠}$

٢ $\lim_{س \to ٠} \frac{ظاس}{س} = \frac{\pi}{١٨٠}$

** نسيت فاكر إنه

القياس الدائرى = الستينى $\times \frac{\pi}{١٨٠}$

مثال ٣ آكل الجبل اللى جاياتى

١ $\lim_{س \to ٠} \frac{ظاه س}{جتاس} = \frac{صفر}{١} =$ صفر

هو بيض مباشر وتذكر إنه جتا مش متحاجه تمام

٢ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{ظاس}{س} = \frac{١}{\frac{\pi}{٤}} = \frac{٤}{\pi}$

٣ $\lim_{س \to ٠} جتا٥س = جتا٠ = ١$

٤ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} جا٢س = جا٩٠° = ١$

٥ $\lim_{س \to ٥} \frac{جا(س-٥)}{٣(س-٥)} = \frac{١}{٣}$

٦ $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا٥س^{٢}}{٤س^{٢}} = \frac{٥}{٤}$

٧ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا^{٢}٥س}{٤س^{٢}} = \frac{(٥)^{٢}}{٤} = \frac{٢٥}{٤}$

٨ $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا^{٣}٢س}{جا٢س^{٣}} = \frac{(٢)^{٣}}{٢} = ٤$

٩ $\lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{س} = \frac{\pi}{١٨٠}$ حيث س ستينى

١٠ $\lim_{س \to \pi} \frac{جاس}{\pi - س}$

$= \lim_{\pi - س \to ٠} \frac{جا(\pi - س)}{\pi - س} = ١$

متناش تصلى على حبيبك النبى

الواجب

١ أكمل

١) $\lim_{س \to 0}$ جتا ٥س = ...

٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}}$ ظا٢س = ...

٣) $\lim_{س \to 0}$ ظاس = ...

٤) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}٧س}{٣س}$ =

٥) $\lim_{س \to ٥} \frac{\text{ظا}(س-٥)}{٣(س-٥)}$ = ...

٦) $\lim_{س \to 0} \frac{١-\text{جتا}س}{٤س}$ = ...

٧) $\lim_{س \to 0}$ ٣س قتا٢س = ...

٢ أوجد قيمة كلاً مما يأتى

١) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}٣س - \text{ظا}٢س}{٥س}$

٢) $\lim_{س \to 0} \frac{س + س \text{جتا}س}{\text{ظا}س \text{جتا}س}$

٣) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^٢ ٣س}{٥س^٢}$

٤) $\lim_{س \to 0} \frac{س \text{ظا}٢س}{س^٢ + \text{ظا}٣س^٢}$

٥) $\lim_{س \to 0} \frac{٢س^٣ + ٥س^٢}{س^٢ - \text{ظا}٣س^٢}$

٦) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}٥س - \text{ظا}^٣ ٥س}{٢س^٣}$

٧) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتا}س}{س^٢}$

٣ أوجد قيمة كلاً مما يأتى

١) $\lim_{س \to 0}$ س(قتا٢س - ظتا٢س)

٢) $\lim_{س \to 0} \frac{س}{\text{جتا}(\frac{\pi}{٢} - س)}$

٣) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢س - \pi}{\text{جتا}س}$

٤) $\lim_{س \to (\frac{\pi}{٢})} \frac{\text{ظا}س}{س - \frac{\pi}{٢}}$

٥) $\lim_{س \to 0} \frac{٣(١ - \text{جتا}س)}{س}$

٦) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جتا}س - ١}{\text{ظا}س}$

علمى نقط

الدرس السادس
بحث وجود نهاية للدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

بأى خطوات

١ إذا كانت نهاية اليمين $د(أ)^+$ = نهاية اليسرى $د(أ)^-$
∴ النهاية موجودة

٢ وإذا كانت ≠ تكون النهاية غير موجودة

وهنطبق كل اللى اتعلمناه قبل كده

الفكرة الأولى مباشرة

مثال ١ إبحث وجود نهاية عند النقط المبينة

١ $د(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & ، س > -١ \\ -١ & ، س < -١ \end{cases}$

عند $س = -١$

---

٢ $د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٧س + ١٢}{س - ٣} & ، س < ٣ \\ ٢س - ٧ & ، س \geq ٣ \end{cases}$

عند $س = ٣$

الحل

* $د(-١)^+ = \lim_{س \to -١^+} ٢س + ١ = -٢ + ١ = -١$
دالة ثابتة

* $د(-١)^- = \lim_{س \to -١^-} س + ١ = -١$

∴ $د(-١)^+ = د(-١)^-$

∴ $\lim_{س \to -١} د(س) = -١$

---

* $د(٣)^+ = \lim_{س \to ٣^+} \frac{س^٢ - ٧س + ١٢}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣^+} \frac{(س - ٣)(س - ٤)}{(س - ٣)} = ٣ - ٤ = -١$

* $د(٣)^- = \lim_{س \to ٣^-} ٢س - ٧ = ٦ - ٧ = -١$

∴ $د(٣)^+ = د(٣)^-$

∴ $\lim_{س \to ٣} د(س) = -١$

٣ $د(س) = \begin{cases} \frac{٥س + ظا٢س}{٦س + ٢جاس} & ، س > ٠ \\ جتاس & ، س \leq ٠ \end{cases}$

عند $س = ٠$ غير

الحل

* $د(٠)^+ = \lim_{س \to ٠^+} \frac{٥س + ظا٢س}{٦س + ٢جاس}$

بالقسمة على $س$ فوق وتحت

$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{٥ + \frac{ظا٢س}{س}}{٦ + ٢\frac{جاس}{س}} = \frac{٥+٢}{٦+١}$

$= \frac{٧}{٧} = ١$

* $د(٠)^- = \lim_{س \to ٠^-} جتاس = ١$

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = ١$

* $\lim_{س \to ٠^+} ١ = ١$

* $\lim_{س \to ٠^-} -١ = -١$

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س)$ غير موجودة

٤ $د(س) = \frac{|س|}{س}$ عند $س = ٠$ فإن $\lim_{س \to ٠} د(س)$

الحل

سنعمل إعادة تعريف للمقياس

زى ما اتعلمنا من الجبر

$د(س) = \begin{cases} \frac{س}{س} & س > ٠ \\ \frac{-س}{س} & س < ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} ١ & س > ٠ \\ -١ & س < ٠ \end{cases}$

٥ $د(س) = \begin{cases} س|س| - ١ & ، س < ٠ \\ \frac{|س|}{س} - ٢ & ، س > ٠ \end{cases}$

أوجد $\lim_{س \to ٠} د(س)$

الحل

نزيل المقياس ونضع قياس إشارته

$د(س) = \begin{cases} -س^٢ - ١ & ، س < ٠ \\ ١ - ٢ = -١ & ، س > ٠ \end{cases}$

نزيل المقياس ونضع قياس إشارته

* $د(٠)^+ = \lim_{س \to ٠^+} -١ = -١$

* $د(٠)^- = \lim_{س \to ٠^-} (-س^٢ - ١) = -١$

$\therefore د(٠)^+ = د(٠)^-$

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = -١$

الفكرة الثانية
الدالة المعرفة على فترة

مثال ٢ أوجد نهايات كلاً من الدوال التالية

١ $د(س) = \begin{cases} \frac{٢س}{ظاس} & س < \frac{\pi}{٢} \\ ٢جتا\frac{٤}{٣}س & س > \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

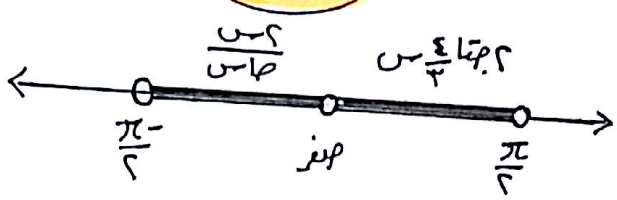
أوجد

أ) $\lim_{س \to -\frac{\pi}{٢}} د(س)$

ب) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} د(س)$

ج) $\lim_{س \to ٠} د(س)$

الحل



أ) $\lim_{س \to -\frac{\pi}{٢}} د(س)$ غير موجودة

لأن الدالة غير معرفة على يسار $س = -\frac{\pi}{٢}$

ب) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} د(س)$ غير موجودة

لأن الدالة غير معرفة على يمين $س = \frac{\pi}{٢}$

ج) $\lim_{س \to ٠} د(س)$

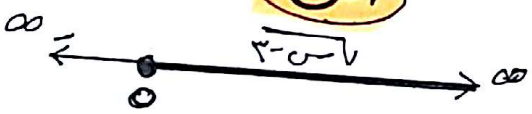
$= \lim_{س \to ٠^+} ٢جتا\frac{٤}{٣}س = ٢جتا٠ = ٢ \times ١ = ٢$

$\lim_{س \to ٠^-} د(س) = \lim_{س \to ٠} \frac{٢س}{ظاس} = ٢$

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = ٢$

٢ ابحث وجود نهاية $د(س) = \sqrt{س - ٥}$ عندما $س \to ٥$

الحل



مجال الدالة $= [٥، \infty[$

$\lim_{س \to ٥} د(س)$ غير موجودة

لأنه الدالة غير معرفة على يسار $س = ٥$

الفكرة الثالثة
مسائل الرموز

الفكرة

إذا كانت $\lim_{س \to ٢} د(س) = ٥$

فإن $\lim_{س \to ٢^+} د(س) = \lim_{س \to ٢^-} د(س)$

مثلاً $= ٥$

---

١ أوجد قيمة م ، ل إذا كان

$$د(س) = \begin{cases} س^٤ + ٣م & ، س < ٢ \\ ٥س + ل & ، س \geq ٢ \end{cases}$$

حيث $\lim_{س \to ٢} د(س) = ٧$

الحل

$\because \lim_{س \to ٢} د(س) = ٧$

$\therefore$ ① $\lim_{س \to ٢^-}$ $س^٤ + ٣م = ٧$

$٤ + ٣م = ٧ \leftarrow ٣م = ٧ - ٤$

$٣م = ٣$ $\therefore$ $\boxed{م = ١}$

② $\lim_{س \to ٢^+}$ $٥س + ل = ٧$

$١٠ + ل = ٧$ $\therefore$ $ل = ٧ - ١٠$

$\therefore$ $\boxed{ل = -٣}$

---

٢ إذا كانت $\lim_{س \to ٠} د(س) = ٢$

حيث $د(س) = \begin{cases} \frac{جا ٢س}{س} & ، س < ٠ \\ م \ جتا ٢س & ، س \geq ٠ \end{cases}$

فأوجد قيمة م

الحل

$\because \lim_{س \to ٠} د(س) = ٢$

$\lim_{س \to ٠^+}$ $م \ جتا ٢س = ٢$

$م \times جتا ٠ = ٢ \times ١ = ٢$

$\therefore م = ٢$

---

٣ أوجد قيمة م التى تجعل للدالة $\lim_{س \to ١}$ نهاية

$$د(س) = \begin{cases} \frac{(س-١)^٢}{|س-١|} & ، س < ١ \\ ٦س - ٣م & ، س \geq ١ \end{cases}$$

الحل

$$د(س) = \begin{cases} \frac{(س-١)^٢}{-(س-١)} & ، س < ١ \\ ٦س - ٣م & ، س \geq ١ \end{cases}$$

$$د(س) = \begin{cases} -(س-١) & ، س < ١ \\ ٦س - ٣م & ، س \geq ١ \end{cases}$$

$\lim_{س \to ١^-}$ $-(س-١) = \lim_{س \to ١^+}$ $(٦س - ٣م)$

صفر $= ٦ - ٣م$ $\quad ٣م = ٦$

$\boxed{م = ٢}$

الواجب

١ إذا كانت $د(س)=\begin{cases} س^{٢}+١ & ، س<٣ \\ ٣س+١ & ، س\geq ٣ \end{cases}$

فأوجد $\lim_{س\to ٣} د(س)$

٢ إذا كانت $د(س)=\begin{cases} \frac{س^{٣}-٧س+١٢}{س-٣} & ، س\neq ٣ \\ ٢س-٧ & ، س=٣ \end{cases}$

ابحث وجود $\lim_{س\to ٣} د(س)$

٣ $د(س)=\begin{cases} \frac{٣س}{ظاس} & ، س<٠ \\ جتا ٣س & ، س>٠ \end{cases}$

ابحث وجود $\lim_{س\to ٠} د(س)$

٤ $د(س)=\begin{cases} \frac{ظا٢س}{٥س} & ، س<٠ \\ \frac{٥س+٦}{س+٣} & ، س>٠ \end{cases}$

ابحث وجود $\lim_{س\to ٠} د(س)$

٥ $د(س)=\begin{cases} س-٢ & ، س<٠ \\ س^{٢} & ، ٠\leq س\leq ٢ \\ ٢س & ، س>٢ \end{cases}$

أ) $\lim_{س\to ٠} د(س)$

ب) $\lim_{س\to ١} د(س)$

ج) $\lim_{س\to ٢} د(س)$

٦ إذا كانت $\lim_{س\to ٢} د(س)=٧$

حيث $د(س)=\begin{cases} س^{٢}+٣م & ، س<٢ \\ ٥س+ل & ، س\geq ٢ \end{cases}$

فأوجد قيمة م ، ل

٧ إذا كان $\lim_{س\to ٠} د(س)=٢$

$د(س)=\begin{cases} \frac{ظا٢س}{س} & ، س<٠ \\ م جتا ٢س & ، س>٠ \end{cases}$

فأوجد قيمة م

٨ أوجد قيمة ل التى تجعل للدالة نهاية وحيدة عند $س=-١$

$د(س)=\begin{cases} س^{٢}+ل & ، س<-١ \\ ٤+س & ، س\geq -١ \end{cases}$

٩ ابحث وجود نهاية للدالة

$د(س)=\begin{cases} \frac{٣س}{ظاس} & ، ٠<س\leq \frac{\pi}{٢} \\ ٣جتاس & ، ٠>س>\frac{\pi}{٣} \end{cases}$

أ) عندما $س\to \frac{\pi}{٣}$ ب) $س\to \frac{\pi}{٣}$

ج) $س\to ٠$

الدرس السابع
الاتصال

على فترة

دكاترة
هندسيه
سواقين ايكاتيك

تكون الدالة متصلة إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية معاً

١ تكون الدالة معرفة بتعويض الدالة عند الفرع اللى فيه =

٢ تكون النهاية موجودة

٣ قيمة الدالة = قيمة النهاية

الفكرة الاولى مباشرة

مثال ١ ابحث اتصال كلاً من الدوال التالية بالقواعد المعرفة بها

١ $د(س) = \begin{cases} س+١ & ، س \leq ١ \\ ٣-س & ، س > ١ \end{cases}$

عند $س = ١$

* $د(١) = س+١ = ١+١ = ٢$

* $\lim_{س \to ١^+} د(١) = \lim_{س \to ١^+} س+١ = ٢$

* $د'(١) = \lim_{س \to ١} س-٣ = ٢$

$\therefore \lim_{س \to ١} د(س) = د(١) = ٢$

$\therefore$ الدالة متصلة عند $س = ١$

---

٢ $د(س) = \begin{cases} ٥س-٦ & ، س \leq ٣ \\ ٣س+٤ & ، س > ٣ \end{cases}$

عند $س = ٣$

الحل

* $د(٣) = ٥ \times ٣ - ٦ = ١٥ - ٦ = ٩$

* $\lim_{س \to ٣^+} د(٣) = \lim_{س \to ٣^+} ٥س-٦ = ٩$

* $\lim_{س \to ٣^-} د(٣) = \lim_{س \to ٣^-} ٣س+٤ = ١٣$

$\therefore د(٣)^+ \neq د(٣)'$

$\therefore \lim_{س \to ٣} د(س)$ غير موجودة

$\therefore$ الدالة غير متصلة عند $س = ٣$

٣ $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ٣ & ، س \leq ١ \\ \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س - ١} & ، س > ١ \end{cases}$

عندما $س = ١$

الحل

* $د(١) = س^٢ + ٣ = ١ + ٣ = ٤$

* $د(١)^+ = \lim_{س \to ١^+} س^٢ + ٣ = ١ + ٣ = ٤$

* $د(١)' = \lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س + ٣)}{(س - ١)} = ٤$

$\therefore د(١)^+ = د(١)' = ٤$

$\therefore \lim_{س \to ١} د(س) = د(١)$

$\therefore$ الدالة متصلة عند $س = ١$

الفكرة الثانية
إعادة تعريف الدالة

سؤال شايع
متى تحتاج اعادة تعريف الدالة
حتى تصبح متصلة

الإجابة

١ إذا كانت النهاية موجودة والدالة معرفة لكن ≠ بعض

٢ إذا كانت النهاية موجودة والدالة غير معرفة

ولكن

إذا كانت النهاية غير موجودة فلا يمكن إعادة تعريف الدالة

مثال ٢

وضح هل يمكن اعادة تعريف كلاً من الدوال الآتية حتى تصبح متصلة ؟

---

١ $د(س) = \frac{٢س^٢ - ٧س - ٤}{س - ٤}$

عند $س = ٤$

الحل

الدالة غير معرفة عند $س = ٤$ فهى غير متصلة

لإعادة التعريف

$\lim_{س \to ٤} \frac{٢س^٢ - ٧س - ٤}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(٢س + ١)}{(س - ٤)} = ٨ + ١ = ٩$

٣ اكتب تعريف أ م أكلت

$$د(س) = \begin{cases} س^{٣} + ٢س & ، س \leq ١ \\ ٥س - ١ & ، س > ١ \end{cases}$$

عند $س = ١$

الحل

* $د(١)$ غير معرفة

* $د'(١)^{+} = \lim_{س \to ١^{+}} (س^{٣} + ٢س) = ١ + ٢ = ٣$

* $د'(١)^{-} = \lim_{س \to ١^{-}} (٥س - ١) = ٥ - ١ = ٤$

$\therefore$ $\lim_{س \to ١} د(س)$ غير موجودة

$\therefore$ لا يمكن اعادة تعريف الدالة.

٢ اكتب تعريف الدالة لأ م أمكن

$$د(س) = \begin{cases} ٤س - ١ & ، س \leq ١ \\ س^{٢} + ٢ & ، س > ١ \end{cases}$$

لكى تكون م متصلة عند $س = ١$

الحل

* $د(س)$ غير معرفة عند $س = ١$

(لأنه مقام = صفر فى أى معنى لغوى عندنا)

* $د'(١)^{-} = \lim_{س \to ١^{-}} ٤س - ١ = ٣$

* $د'(١)^{+} = \lim_{س \to ١^{+}} س^{٢} + ٢ = ٣$

$\therefore$ النهاية موجودة

$\therefore$ يمكن اعادة تعريف الدالة

بوضع $د(١) = ٣$

$$د(س) = \begin{cases} ٤س - ١ & ، س \leq ١ \\ ٣ & ، س = ١ \\ س^{٢} + ٢ & ، س > ١ \end{cases}$$

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{٢س^{٢} - ٧س - ٤}{س - ٤} & ، س \neq ٤ \\ ٩ & ، س = ٤ \end{cases}$$

الفكرة الثالثة
اتصال دالة على فترة

توضيح ملاحظات

١) كثيرات الحدود متصلة على مجالها "ح"

٢) الدالة النسبية متصلة ح - {أصفار المقام}

٣) جا س متصلة على ح

٤) جتا س متصلة على ح

٥) ظا س متصلة على $ح - \{ن\pi + \frac{\pi}{٢} : ن \in ص\}$

مثال ٣ ابحث اتصال كلاً من الدوال الآتية على مجالها

١ $د(س) = (س+١)^{٢} - جا س$

متصلة على ح

٢ $د(س) = \frac{جتا س + جا س}{س + ٢}$

متصلة على ح $- \{-٢\}$

٣ $د(س) = \sqrt[٣]{٥ - س^{٢}}$

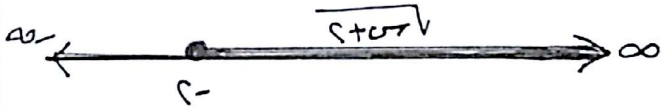
متصلة على ح ، دليل الجذر فردى

٤ $د(س) = \sqrt{س + ٢}$

الحل

بوضع $س + ٢ \geq ٠$ $\Leftarrow$ $س \geq -٢$

المجال $[-٢ ، \infty[$



الدالة متصلة فى $[-٢ ، \infty[$

وذلك بوضع $ل \in]-٢ ، \infty[$

فإن $د(ل) = \sqrt{ل+٢}$

$\because$ نهـا $_{س \to ل}$ $\sqrt{س+٢} = \sqrt{ل+٢}$

$\therefore$ الدالة متصلة على $]-٢ ، \infty[$ ①

لبحث اتصال الدالة عند $س = -٢$

$د(-٢) = \sqrt{-٢+٢} = ٠$

نهـا $^{+}_{س \to -٢}$ $د(س) = \sqrt{س+٢} = ٠$

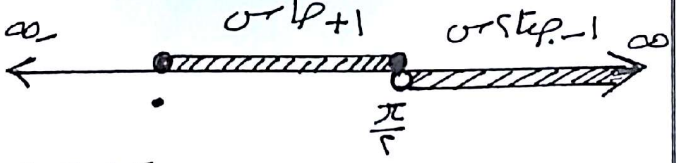
نهـا $^{-}_{س \to -٢}$ $د(س) = \sqrt{س+٢} = ٠$

$\therefore$ الدالة متصلة عند $س = -٢$ ②

من ① ، ② $\therefore$ الدالة متصلة على $[-٢ ، \infty[$

٥ $د(س) = \begin{cases} ١ + جا س & ، ٠ \leq س \leq \frac{\pi}{٢} \\ ١ - جتا ٢س & ، س > \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

الحل



أولاً $د(س) = ١ + جا س$ متصلة على $[٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

$د(س) = ١ - جتا ٢س$ متصلة على $]\frac{\pi}{٢} ، \infty[$

$\because$ $١ + جا س$ متصلة على مجالها ح

$\therefore$ متصلة على $[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$

ثانياً

لبحث الاتصال عند $س = \frac{\pi}{٢}$

$د(\frac{\pi}{٢}) = ١ + جا \frac{\pi}{٢} = ٢$

نهـا $^{+}_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ $د(س) = ١ - جتا ٢س = ٢$

نهـا $^{-}_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ $د(س) = ١ + جا س = ٢$

$\therefore$ الدالة متصلة عند $س = \frac{\pi}{٢}$

$\therefore$ الدالة متصلة على $[٠ ، \infty[$

من أولاً وثانياً

الكتاب الرابعة
الدموث

١ إذا كانت د(س) متصلة عند س = -٣ فأوجد قيمة ب

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س^2+٢س-٣}{س+٣} & ، س \neq -٣ \\ س+ب & ، س = -٣ \end{cases}$$

الحل

∵ الدالة متصلة ∴ د(-٣) = نهـا د(س)
س ← -٣

نهـا $\frac{س^2+٢س-٣}{س+٣}$ = نهـا $\frac{(س+٣)(س-١)}{(س+٣)}$
س ← -٣ س ← -٣

= -٣ - ١ = -٤

∴ د(-٣) = -٣ + ب = -٤

∴ ب = -٤ + ٣ = -١

---

٢ إذا كانت د(س) متصلة عند س = ٢ وكانت د(٢) = ٤ فأوجد قيمتى ب ، ج

$$د(س) = \begin{cases} س^2+ب س-٢ & ، س \leq ٢ \\ ٢ب+ج س & ، س > ٢ \end{cases}$$

الحل

∵ الدالة متصلة ، د(٢) = ٤

∴ نهـا $س^2+ب س-٢$ = ٤
س ← ٢+

∴ $٢^2+٢ب-٢ = ٤$

$٤+٢ب-٢ = ٤$

$٢ب = ٢$ ∴ ب = ١

وكذلك نهـا $٢ب+ج س = ٤$
س ← ٢-

$٢ب+٢ج = ٤$

$٢+٢ج = ٤$

$٢ج = ٢$ ∴ ج = ١

---

٣ أوجد قيمة ب التى تجعل الدالة

$$د(س) = \frac{س+٣}{س^2+ب س+٩}$$ متصلة على ح

الحل

لازم المقام ≠ صفر على ح

يبقى ممتحن المميز أصغر من الصفر

حتى لا يكون لها حل فى ح

$ب^2-٤ج < ٠$

حيث ج = ١ ، ب = ب ، د = ٩

$ب^2-٤×١×٩ < ٠$

$ب^2-٣٦ < ٠$

$ب^2 < ٣٦$

نأخذ √

$|ب| < ٦$

$-٦ < ب < ٦$

∴ ب ∈]-٦ ، ٦[

الواجب

١ اجب اتصال د(س) عند س = ١

$$د(س) = \begin{cases} ٤س - ١ & ، س \leq ١ \\ س^{٣} + ٢ & ، س > ١ \end{cases}$$

٢ اجب اتصال د عند س = ١

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٣ & ، س \geq ١ \\ \dfrac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س - ١} & ، س < ١ \end{cases}$$

٣ اجب اتصال د عند س = ٣

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} + س - ١٢}{س^{٢} - ٩} & ، س > ٣ \\ \dfrac{٧}{٦} & ، س \leq ٣ \end{cases}$$

٤ إذا كانت د(س) متصلة عند س = ٣ فأوجد أ

$$د(س) = \begin{cases} ١ - ٣س & ، س \leq ٣ \\ س^{٢} + أ & ، س > ٣ \end{cases}$$

٥ إذا كانت أ متصلة عند س = ١ فأوجد ب

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٤} - ١}{س - ١} & \text{عندما } س \neq ١ \\ ب & \text{عندما } س = ١ \end{cases}$$

٦ إذا كانت د(س) متصلة عند س = أ

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{(س+٣)^{٥} - ٢٤٣}{س} & س \neq ب \\ أ & س = ب \end{cases}$$

فأوجد قيمة أ

٧ أعد تعريف الدالة حتى تصبح متصلة ثم أوجد

أ $د(س) = \dfrac{س^{٣} - ٦س + ٢}{س - ٣}$ عند س = ٣

ب $د(س) = \begin{cases} س^{٣} + ٢س^{٢} & ، س \geq ١ \\ ٥س - ١ & ، س < ١ \end{cases}$

٨ أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة متصلة على ح

أ $د(س) = \dfrac{س + ٣}{س^{٣} + أ س + ٩}$

ب $د(س) = \dfrac{٢س + ١}{س^{٤} + ٦س + أ}$

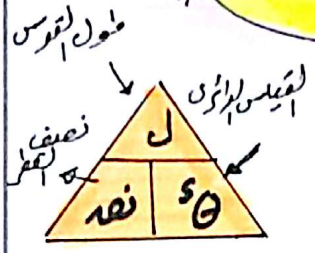
ثانياً " حساب المثلثات "

الدرس الأول : قاعدة الجيب .

الدرس الثانى : قاعدة جيب التمام .

الدرس الثالث : حل المثلث .

مراجعة على اللى فات



١ $\theta^{\circ} = \frac{ل}{نصف}$

٢ $\theta^{ج} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{180}$

٣ $س^{\circ} = \theta^{ج} \times \frac{180}{\pi}$

٤ $جا(90 + \theta) = جتا\theta$

٥ $جا(90 - \theta) = جتا\theta$

٦ $جا(180 - \theta) = جا\theta$

٧ $جتا(180 - \theta) = -جتا\theta$

٨ $ظا(180 - \theta) = -ظا\theta$

٩ $جا^{٢}س + جتا^{٢}س = 1$

$جا^{٢}س = 1 - جتا^{٢}س$

$جتا^{٢}س = 1 - جا^{٢}س$

١٠ $1 + ظا^{٢}س = قا^{٢}س$

$قا^{٢}س - ظا^{٢}س = 1$

$قا^{٢}س - 1 = ظا^{٢}س$

١١ $1 + ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س$

$قتا^{٢}س - ظتا^{٢}س = 1$

$قتا^{٢}س - 1 = ظتا^{٢}س$

١٢ $جا\theta \, قتا\theta = 1$

١٢ $جتا\theta \, قا\theta = 1$

١٤ $ظا\theta \, ظتا\theta = 1$

١٥ $ظا\theta = \frac{جا\theta}{جتا\theta}$

١٦ $ظتا\theta = \frac{جتا\theta}{جا\theta}$

١٧ مساحة القطاع المنتظم $= \frac{ن}{٤} س^{٢} ظتا\frac{\pi}{ن}$

١٨ مساحة الدائرة $= \pi نصف^{٢}$

١٩ محيط الدائرة $= 2\pi$ نصف

٢٠ مساحة المثلث $= \sqrt{ع(ع-أ)(ع-ب)(ع-جـ)}$

حيث ع = نصف المحيط

$= \frac{1}{2} أ ب جا\theta$

الدرس الأول
قاعدة الجيب
جيب = البنطلون

- فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها

$$\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ} = ٢ نـ$$

حيث نـ نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث

الفكرة الأولى
مسائل مباشرة

مثال ١

Δ أ ب جـ فيه جـ = ١٩ سم ،

ق(أ) = ١١٢° ، ق(ب) = ٣٣°

أوجد ب ثم أوجد طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن Δ أ ب جـ لأقرب رقمين عشريين ومساحة ومحيط الدائرة

الحل

ق(أ) = ١١٢° ، ق(ب) = ٣٣°

$$\therefore ق(جـ) = ١٨٠ - [١١٢ + ٣٣]$$

$$= ٣٥°$$

$$٢ نـ = \frac{جـ}{جا جـ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{أ}{جا أ}$$

$$٢ نـ = \frac{١٩}{جا ٣٥°} = \frac{ب}{جا ٣٣°} = \frac{أ}{جا ١١٢°}$$

$$\therefore ب = \frac{١٩ \times جا ٣٣°}{جا ٣٥°} = ١٨,٠٤ سم$$

$$٢ نـ = \frac{١٩}{جا ٣٥°} \quad ، \quad نـ = \frac{١٩}{٢ جا ٣٥°} \approx \frac{١٩}{٣٥ جا ٢}$$

$$نـ = ١٦,٥٦ سم$$

مساحة الدائرة = $\pi نـ^٢ = \pi (١٦,٥٦)^٢$

$= ٨٦١,٨٢ سم^٢$

محيط الدائرة = $٢ \pi نـ = \pi \times ١٦,٥٦ \times ٢$

$= ١٠٤,٠٥ سم$

مثال ٢

Δ أ ب جـ فيه ب = ١٠ سم

ق(أ) = ٤٠° ، ق(جـ) = ٨٠°

أوجد طول أكبر الأضلاع طولاً لأقرب سم

الحل

أكبر الأضلاع يقابل أكبر الزوايا

$$ق(ب) = ١٨٠ - [٤٠° + ٨٠°] = ٦٠°$$

$$\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ}$$

$$\frac{ق}{\text{جا}٤٠^\circ} = \frac{١٠}{\text{جا}٦٠^\circ} = \frac{ص}{\text{جا}٨٠^\circ}$$

أكبر الأضلاع هو ص

$$ص = \frac{١٠ \text{ جا}٨٠^\circ}{\text{جا}٦٠^\circ} = ١١,٤ \approx ١١ \text{ سم}$$

مثال ٣

فى الشكل المقابل

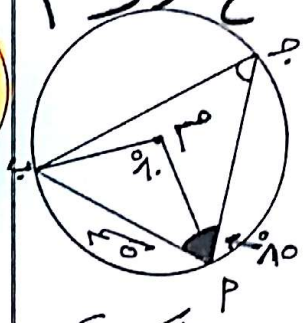
م دائرة $ق(\overline{أب}) = ٥$ سم

$ق(\angle أمب) = ٨٠^\circ$

، $ق(\angle ص أب) = ٨٥^\circ$

أوجد (أ) محيط $\triangle$ أ ب جـ

(ب) مساحة سطح الدائرة م



الحل

فى $\triangle$ أ ب جـ

$ق(\angle جـ) = ٤٠^\circ$

لأنه قياس المحيطية $= \frac{1}{2}$ المركزية المشتركة معها فى نفس القوس

$\therefore ق(\angle أ) = ٨٥^\circ$ ، $ق(\angle جـ) = ٤٠^\circ$

$\therefore ق(\angle ب) = ١٨٠ - (٨٥ + ٤٠) = ٥٥^\circ$

$$\frac{أ ب}{\text{جا}أ} = \frac{ب جـ}{\text{جا}ب} = \frac{أ جـ}{\text{جا}جـ} = ٢نق$$

$$\frac{ق}{\text{جا}٨٥^\circ} = \frac{ب جـ}{\text{جا}٥٥^\circ} = \frac{٥}{\text{جا}٤٠^\circ} = ٢نق$$

(أ) محيط $\triangle$ أ ب جـ $= ق + ب جـ + أ جـ$

$= ٥ + ٧,٧٥ + ٧,٣٦ \approx ١٩,١٢$ سم

(ب) $نق = \frac{٥}{\text{جا}٤٠^\circ} = ٧,٧٨$ سم

مساحة الدائرة $= \pi (نق)^2$

$= \pi (٧,٧٨)^2 = ٤٧,٥$ سم^2

$$\frac{ق}{\text{جا}٨٥^\circ} = \frac{٥}{\text{جا}٤٠^\circ}$$

$$ق = \frac{٥ \text{ جا}٨٥^\circ}{\text{جا}٤٠^\circ} = ٧,٧٥ \text{ سم}$$

$$ب = \frac{٥ \text{ جا}٥٥^\circ}{\text{جا}٤٠^\circ} = ٦,٣٧ \text{ سم}$$

مثال ٤

$\triangle$ أ ب جـ مساحته $= ٤٥$ سم^2

فيه $ق(\angle ب) = ٨٢^\circ$

$ق(\angle جـ) = ٥٦^\circ$ أوجد طول $\overline{أ ب}$

الحل

$ق(\angle أ) = ١٨٠^\circ - [٨٢^\circ + ٥٦^\circ] = ٤٢^\circ$

مساحة $\triangle$ أ ب جـ $= \frac{1}{2}$ أ ب $\times$ ب جـ جا جـ

ولكن أ ب مجهول ، ب جـ مجهول

$$\therefore \frac{أ ب}{\text{جا}جـ} = \frac{ب جـ}{\text{جا}أ}$$

$$\therefore ب جـ = \frac{أ ب \text{ جا}أ}{\text{جا}جـ} = \frac{أ ب \text{ جا}٤٢^\circ}{\text{جا}٥٦^\circ}$$

$\therefore \frac{1}{2}$ أ ب $\times$ ب جـ جا جـ $= ٤٥$ بالضرب $\times ٢$

أ ب $\times \frac{أ ب \text{ جا}٤٢^\circ}{\text{جا}٥٦^\circ} \times \text{جا}٥٦^\circ = ٩٠$

$$\frac{ق^2}{جا^2 ٨٢^\circ} = \frac{٩٠٠}{جا^2 ٥٦^\circ} = \frac{٤٢ جا^2}{جا^2 ٥٦^\circ}$$

$$\therefore ق = \sqrt{٣٣,٥} \approx ٢٧$$

الفكرة الثانية
مجموعة من مسائل أخرى

مثال ٥ اختر الاجابة الجميلة من بين الاجابات الوحشة

١ س ص ع مثلث متساوى الاضلاع طول ضلعه ١٠ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة عنه = ---- سم

(٥ ، ١٠ ، ١٥ ، **٢٠**)

الفكرة: $\frac{ق}{جا هـ} = ٢$ نق

$\therefore ٢$ نق $= \frac{١٠}{جا ٦٠} = ٢٠$

لو طلب نق $= ١٠\sqrt{٣}$

لانه متساوى الاضلاع

٢ فى Δ س ص ع يكون ٢ نق جا س = ...

(ع ، ص ، **س** ، جا هـ)

الفكرة: $\frac{س}{جا س} = ٢$ نق

$\therefore$ س $= ٢$ نق جا س

٣ فى Δ س ص ع المقدار $\frac{ص}{جا ص} = $ ---

(نق ، ٢ نق ، $\frac{١}{٢}$ نق ، ٤ نق)

الفكرة: $\frac{ص}{جا ص} = ٢$ نق صح ؟

هو قسم الأولى على ٢ تقسم أنت الثانية ÷ ٢

يعنى $\frac{ص}{٢ جا ص} = \frac{٢ نق}{٢} =$ نق

٤ فى أى مثلث أ ب جـ يكون

$$\frac{جا(أ+ب)}{جا أ + جا ب} = \text{----}$$

(١ ، $\frac{أ}{ب+جـ}$ ، **$\frac{جـ}{أ+ب}$** ، $\frac{ب}{أ+جـ}$)

الفكرة: $جا(أ+ب) = جا(١٨٠-جـ) = جا جـ$

$$\therefore \frac{جا جـ}{جا أ + جا ب} = \frac{جـ}{أ+ب}$$

٥ فى Δ أ ب جـ إذا كان

$$\frac{جا أ}{٢} = \frac{جا ب}{٣} = \frac{جا جـ}{٥}$$

فإن أ : ب : جـ = ٢ : ٣ : ٥

دى حلت بس أنا بدلت الشبه عشان الدور مش عرفت ؟ فاهمين ؟

٦ فى Δ س ص ع إذا كان
٣ جا س = ٤ جا ص = ٢ جا ع
فإن س : ص : ع = ... : ... : ...
(٢ : ٣ : ٤ ، ٤ : ٣ : ٢ ، ٣ : ٤ : ٦ ، ٦ : ٤ : ٣)

الفكرة: عايزين مقام يقبل على كلهم
يبقى مضاعف لـ ١٢

$\frac{٣ جا س}{١٢} = \frac{٤ جا ص}{١٢} = \frac{٢ جا ع}{١٢}$

$\frac{جا س}{٤} = \frac{جا ص}{٣} = \frac{جا ع}{٦}$

∴ س : ص : ع = ٤ : ٣ : ٦

٧ Δ أ ب جـ فيه
$\frac{جا أ}{٣} = \frac{٢ جا ب}{٥} = \frac{جا جـ}{٤}$

فإن أ : ب : جـ = ... : ... : ...
(٨ : ٥ : ٦ ، ٦ : ٥ : ٨ ، ٧ : ٢ : ٤ ، ٣ : ٥ : ٤)

الفكرة: حكاها مظبوط بس عايزين نتخلص من ٢ اللى فى البسط يبقى نضرب كل مقام × ٢

$\frac{جا أ}{٣×٢} = \frac{٢ جا ب}{٥×٢} = \frac{جا جـ}{٤×٢}$

يبقى ٦ : ٥ : ٨

٨ فى Δ أ ب جـ فيه
٢ نق جا أ جا ب جا جـ = ...

Δ مساحته ، محيط Δ ، Δ محاط ، Δ محيط

الفكرة: مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ ق × نق جا جـ

$\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ} = ٢ نق$ ∴ ق = ٢ نق جا ب ، ب = ٢ نق جا ب

∴ مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ نق جا ب × ٢ نق جا جـ × جا ب
= ٢ نق جا أ جا ب جا جـ

٩ فى Δ أ ب جـ فيه $\frac{أ ب جـ}{٤ نق} = ...$

الفكرة: دى أكمل

$\frac{أ ب جـ}{٤ نق} = \frac{أ ب جـ}{٢ نق} \times \frac{١}{٢}$

∴ نق = $\frac{أ}{٢ جا أ}$

∴ المقدار = $\frac{أ ب جـ}{أ}$ ← مقام المقام بسط

= $\frac{١}{٢} \frac{أ ب جـ جا أ}{أ}$

= $\frac{١}{٢}$ ب جـ جا أ = مساحة المثلث

الفكرة الثالثة
مسائل النسب

تذكر إذا كان

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ت}}{\text{ب}} = \frac{\text{ث}}{\text{ج}}$$

فإن $\frac{\text{أ}}{\text{أ}+\text{ب}} = \frac{\text{ت}}{\text{ت}+\text{ب}} = \frac{\text{ث}}{\text{ث}+\text{ج}}$

وهكذا $\frac{\text{مجموع مقدمات}}{\text{مجموع تواليها}} =$ أحد النسب

مثال ٦

Δ أ ب ج مثلث محيطه = ١٨ سم

وفيه $\frac{1}{2}$ ق(∠أ) = $\frac{1}{3}$ ق(∠ب) = $\frac{1}{4}$ ق(∠ج)

أوجد أطوال أضلاعه

الحل

$\therefore \frac{\text{ق(∠أ)}}{2} = \frac{\text{ق(∠ب)}}{3} = \frac{\text{ق(∠ج)}}{4}$

$\therefore \frac{\text{ق(∠أ)}}{2} = \frac{\text{ق(∠ب)}}{3} = \frac{\text{ق(∠ج)}}{4}$

$\therefore$ أ : ب : ج = ٢ : ٣ : ٤

نفرض أن

أ = ٢ك ، ب = ٣ك ، ج = ٤ك

$\therefore$ المحيط = ١٨ سم أ + ب + ج = ١٨ سم

$\therefore$ ٢ك + ٣ك + ٤ك = ١٨

---

١٠ فى Δ س ص ع إذا كان $\frac{\text{٢س}}{\text{ص س}} = 8$ فإن مساحة الدائرة الخارجية = ... سم^2

(١٦ ، ٨ ، **٤** ، ٦٤)

الفكرة

$\frac{\text{س}}{\text{ص س}} = 2$ نصف صح ؟

س ص ضعف ضرب ×٢ يبقى نصف ×٢

بعض $\frac{\text{٢س}}{\text{ص س}} = 4$ نصف

أرسم دائرة نصف قطرها ٤ نصف = ٨

$\therefore$ نصف = $\frac{8}{4} = 2$ سم

مساحة الدائرة = π نصف^2 = $\pi \times 2^2 = 4\pi$

---

١١ فى Δ س ص ع فيه ق(∠س) : ق(∠ص) : ق(∠ع) = ٢ : ٣ : ٤

(ص س : ص ع ، ص ع : ع س ، ع س : ص س)

الفكرة

س ص = ع ، ص ع = س

$\therefore$ ع : س = ص ع : ع س

$\therefore 9 ل = 18$

$\therefore ل = \frac{18}{9} = 2$

$\therefore أ ب = 2 ل = 2 \times 2 = 4$ سم

$ب ج = 3 ل = 3 \times 2 = 6$ سم

$أ ج = 4 ل = 4 \times 2 = 8$ سم

مثال ٧

إذا كان محيط $\triangle أ ب ج = 40$ سم

$ق(\hat{أ}) = 33°$ ، $ق(\hat{ب}) = 44°$

أوجد أطوال أضلاع $\triangle أ ب ج$

الحل

$ق(\hat{ج}) = 180° - (33° + 44°) = 103°$

$$\frac{أ}{جا 33°} = \frac{ب}{جا 44°} = \frac{ج}{جا 103°} = \frac{أ + ب + ج}{جا 33° + جا 44° + جا 103°}$$

$$\frac{أ}{جا 33°} = \frac{ب}{جا 44°} = \frac{ج}{جا 103°} = \frac{40}{جا 33° + جا 44° + جا 103°}$$

$أ = \frac{40 \, جا 33°}{جا 33° + جا 44° + جا 103°} = 10,9$ سم

$ب = \frac{40 \, جا 44°}{جا 33° + جا 44° + جا 103°} = 14,3$ سم

$ج = \frac{40 \, جا 103°}{جا 33° + جا 44° + جا 103°} = 14,8$ سم

حيث تبسطها مرة واحدة على الآلة
وكل مرة تعدل لبسط فقط

مثال ٨

$\triangle أ ب ج$ فيه $ق(\hat{أ}) = 60°$

$ق(\hat{ب}) = 45°$ فإذا كان

$أ ج + ب ج = (\sqrt{6} + 2)$ سم

فأوجد طول $أ ب$

الحل

$$\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{أ + ب}{جا أ + جا ب}$$

$$\frac{أ}{جا 60°} = \frac{ب}{جا 45°} = \frac{\sqrt{6} + 2}{جا 60° + جا 45°}$$

$\therefore أ = \frac{(\sqrt{6} + 2) \times جا 60°}{جا 60° + جا 45°} = \sqrt{4}$ سم

$\therefore أ + ب = \sqrt{6} + 2$

$\therefore ب = 2$ سم

بدل ما تحل القانون الطويل

مثال ٩

$\triangle أ ب ج$ فيه $ق(\hat{أ}) : ق(\hat{ب}) : ق(\hat{ج}) = 3 : 4 : 5$

فإذا كان $أ ب = 5\sqrt{3}$ سم فأوجد محيط المثلث

الحل

نفرض أن $ق(\hat{أ}) = 3س$ ، $ق(\hat{ب}) = 4س$

$ق(\hat{ج}) = 5س$

$\therefore ق(\hat{أ}) + ق(\hat{ب}) + ق(\hat{ج}) = 180°$

$\therefore 3س + 4س + 5س = 180°$

$12س = 180°$ $\therefore س = 15°$

وبجيب قياسات $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ ، $\hat{ج}$

الواجب

السؤال الأول أكمل الجمل التالية

١) فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاعه مع ----

٢) فى $\triangle ABC$ إذا كان $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} =$ ----

٣) دائرة طول قطرها ٢٠ سم تمر برؤوس $\triangle ABC$ فإذا كان قياس الزاوية التى فيها $m(\hat{A}) = 30^\circ$ فإن $a =$ ----

٤) ABC مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه $3\sqrt{8}$ سم فإن
* طول قطر الدائرة الخارجة = ---- سم
* محيط الدائرة الخارجة = ---- سم
* مساحة الدائرة الخارجة = ---- سم^2

٥) $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ فإن $A : B : C =$ -- : -- : --
= -- : -- : --

٦) $\frac{1}{3} a = \frac{1}{4} b = \frac{1}{5} c$
فإن $A : B : C =$ -- : -- : --

٧) $3a = 4b = 2c$
فإن $A : B : C =$ -- : -- : --

٨) $\frac{a+b}{a+b+c} = \frac{\text{---}}{A+B+C}$

٩) $\frac{A+B+C}{a+b+c} = \frac{\text{---}}{\text{---}}$

السؤال الثانى أجب مقرباً الأطوال لأقرب واحدة والزوايا لأقرب دقيقة

١) $\triangle ABC$ فيه $a = 24$ سم
$m(\hat{A}) = 100^\circ$ ، $m(\hat{B}) = 15^\circ$
أوجد محيط ومساحة $\triangle ABC$

٢) $\triangle ABC$ فيه $m(\hat{B}) = 45^\circ$
$m(\hat{C}) = 60^\circ$ وطول قطر الدائرة الخارجة = 40 سم
أوجد محيطه ومساحته

٣) ABC مثلث فيه $a = 12$ سم
$m(\hat{B}) = 3\, m(\hat{A}) = 60^\circ$
أوجد C ثم أوجد مساحة $\triangle$

٤) $\triangle ABC$ فيه $b = 5$ سم
طا $C = \frac{4}{3}$ ، $m(\hat{B}) = 30^\circ$
أوجد A ، c ومساحة $\triangle ABC$

اللهم علمنا ما ينفعنا وانفعنا بما علمتنا

الدرس الثانى
قاعدة جيب التمام

هوشى تمام قوى

الصورة الأولى

إذا علم طولا الضلعين وقياس زاوية محصورة

* $أ^2 = ب^2 + ح^2 - 2ب ح \ جتا أ$
* $ب^2 = أ^2 + ح^2 - 2أ ح \ جتا ب$
* $ح^2 = أ^2 + ب^2 - 2أ ب \ جتا ج$

متنساش تحافظ الجزم

الصورة الثانية

إذا علمت الأضلاع الثلاثة أو النسبة بينهم

* $جتا أ = \frac{ب^2 + ح^2 - أ^2}{2ب ح}$
* $جتا ب = \frac{أ^2 + ح^2 - ب^2}{2أ ح}$
* $جتا ج = \frac{أ^2 + ب^2 - ح^2}{2أ ب}$

وفى الآخر تعمل shift cos
علشان تجيب الزاوية

الفكرة الأولى
مسائل مباشرة

مثال ١

$\Delta أ ب ج$ فيه $أ = 3\sqrt{2}$ سم
$ب = 5$ سم ، $ح = \sqrt{7}$ سم

أوجد $ق(\hat{ج})$

الحل

$$جتا ج = \frac{أ^2 + ب^2 - ح^2}{2أ ب} = \frac{(3\sqrt{2})^2 + 5^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \times 3\sqrt{2} \times 5}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore ق(\hat{ج}) = 135°$

مثال ٢

$أ ب ج \Delta$ فيه $ق(\hat{ج}) = 96°\ 23'$
$أ = \sqrt{7}$ سم ، $ب = 9$ سم أوجد

١) $ح$ ٢) مساحة $\Delta أ ب ج$
٣) طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث

الحل

$ح^2 = أ^2 + ب^2 - 2أ ب \ جتا ج$

$= 7 + 81 - 2 \times \sqrt{7} \times 9 \times جتا 96°\ 23'$

$= 144$ بأخذ $\sqrt{}$

$\therefore ح = 12$ سم

٢) مساحة Δ أ ب جـ = ½ أ ب × أ جـ × جا أ

= ½ × ٧ × ٩ × جا ٩٦° ٢٣′

= ٣١,٣ ≈ ٣١ سم²

٣) ∵ ق / جا أ = ٢ نصـ

نصـ = ق / ٢ جا أ = ١٢ / ٢ جا ٩٦° ٢٣′

= √٦ سم

مثال ٣

Δ أ ب جـ فيه

¼ جا أ = ½ جا ب = ⅓ جا جـ

أوجد ق (∠جـ) وإذا كان

محيط Δ = ٢٤ سم أوجد مساحته

الحل

∵ أ / ٣ = ب / ٤ = جـ / ٥

∴ أ : ب : جـ = ٣ : ٤ : ٥

نفرض أن أ = ٣ك

ب = ٤ك

جـ = ٥ك

جتا جـ = (أ² + ب² − جـ²) / (٢ × أ × ب)

= ((٣ك)² + (٤ك)² − (٥ك)²) / (٢ × ٣ك × ٤ك)

= صفر / ٢٤ = صفر

∴ ق (∠جـ) = ٩٠°

المطلوب الأول ⟸

المحيط = ٢٤ سم ∴ أ + ب + جـ = ٢٤

∴ ٣ك + ٤ك + ٥ك = ١٢ك = ٢٤

∴ ك = ٢٤ / ١٢ = ٢

∴ أ = ٦ سم ، ب = ٨ سم ، جـ = ١٠ سم

مساحة Δ = ½ أ ب جا جـ

= ½ × ٦ × ٨ × جا ٩٠° = ٢٤ سم²

مثال ٤

أ ب جـ مثلث فيه

جتا أ = ٤/٥ ، ب جـ = ٢٥ سم

ق (∠جـ) = ٤٥° أثبت أن

Δ أ ب جـ متساوى الرجلين

الحل

أ² = ب² + جـ² − ٢ ب جـ جتا أ

= (٥√٢)² + (٢)² − ٢ × ٥√٢ × ٢ × ٤/٥

= ٥٠ + ٤ − ٨√٢

= ٥٤ − ٨√٢

= ٥٤ − ٨ × ١,٤١ = ٥٤ − ١١,٢٨

= ٤٢,٧٢ ∴ أ = √٤٢,٧٢ = ٦,٥ سم

∴ Δ أ ب جـ فيه

أ = ب

∴ Δ أ ب جـ متساوى الساقين

(جتا ٤/٥ أوجد بالآلة الحاسبة)

خصوصية ملاحظات هامة

خواص متوازى الأضلاع

١ كل ضلعين متقابلين متساويين فى الطول

٢ كل زاويتين متقابلتين متساويتين فى القياس

٣ كل زاويتين متجاورتين متكاملتين
مجموعهما = ١٨٠°
يعنى جتا أ = - جتا ب

٤ القطر ينصف كل منهما الآخر

لإثبات أن الشكل رباعياً دائرياً

١ كل زاويتين متقابلتين متكاملتين
مجموعهما = ١٨٠°
جتا (.....) = - جتا (المقابلة)

أو

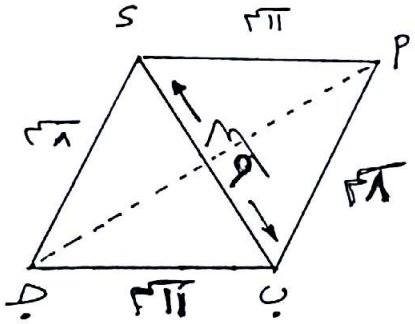
٢ أى زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها متساويتان فى القياس

الفكرة الثانية
مسائل الأشكال

مثال ٥

▱ أ ب جـ ء فيه أ ب = ٨ سم
ب جـ = ١١ سم ، ب ء = ٩ سم
أوجد طول قطره أجـ

الحل



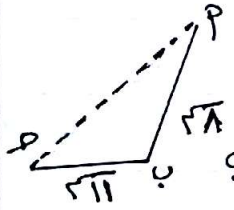
نعتبر أ ب ء ∆ نجيب منه جتا أ
ونعوض بها فى ∆ أ ب جـ علشان نجيب أجـ

الخطوات ←

فى ∆ أ ب ء : جتا أ = $\frac{٨^٢ + ١١^٢ - ٩^٢}{٢ \times ٨ \times ١١} = \frac{١٣}{٢٢}$

∵ (أ) ، (ب) متكاملتان

∴ جتا ب = $\frac{-١٣}{٢٢}$



فى ∆ أ ب جـ

(أجـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢ - ٢ × أ ب × ب جـ × جتا ب

(أجـ)^٢ = $٨^٢ + ١١^٢ - ٢ \times ٨ \times ١١ \times (\frac{-١٣}{٢٢})$

= ٢٨٩

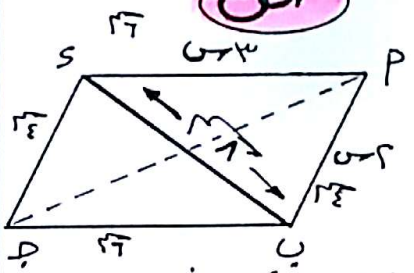
∴ أجـ = ١٧ سم

مثال ٦

أ ب ج د ▱ محيطه ٢٠ سم
فإذا كانت النسبة بين طولى
ضلعين متجاورين ٣ : ٢
وكان ب د = ٨ سم فأوجد طول أ ج

الحل

على فكرة



محيط المتوازى
= ضعف مجموع أى ضلعين متجاورين

∴ مجموع أى ضلعين متجاورين = $\frac{1}{2}$ × المحيط

∴ ٢س + ٣س = ١٠
∴ ٥س = ١٠
∴ س = ٢

∴ ب م = ٤ سم ، م د = ٦ سم

فى Δ أ ب ج
$جتا أ = \frac{٤^٢ + ٦^٢ - ٨^٢}{٢ \times ٤ \times ٦} = \frac{-١}{٤}$

فى Δ أ ب م
$جتا(ب) = \frac{١}{٤}$
نرفعها متكاملتا ∼

∴ $ج^٢ = أ^٢ + ج^٢ - ٢ أ ج جتا ب$

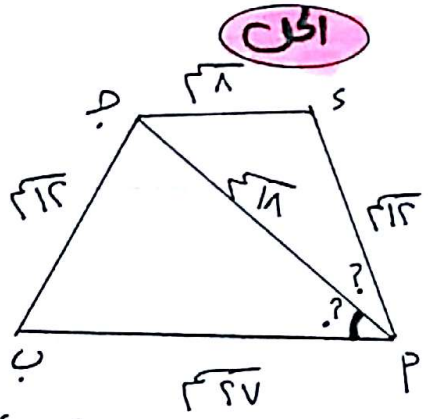
$(أ م)^٢ = ٤^٢ + ٦^٢ - ٢ \times ٤ \times ٦ \times \frac{١}{٤}$
$= ٤٠$

∴ أ م = $\sqrt{٤٠} = ٦,٣$ سم

مثال ٧

أ ب ج د شكل رباعى فيه أ ب = ٢٧ سم
ب ج = ١٢ سم ، ج د = ٨ سم
د أ = ١٢ سم ، أ ج = ١٨ سم
اثبت أن أ ج ينصف (ب أ د)
ثم أوجد مساحة الشكل أ ب ج د

الحل



أولاً :

فى Δ أ ب ج
$جتا(\hat{ج}) = \frac{(١٨)^٢ + (٢٧)^٢ - (١٢)^٢}{٢ \times ١٨ \times ٢٧}$

$= \frac{١٠٨}{١٠١}$ ∴ ق(∠ أ ب ج) = ٢٠° ٤٥′ ← ①

فى Δ أ د ج
$جتا(\hat{د}) = \frac{(١٢)^٢ + (١٨)^٢ - (٨)^٢}{٢ \times ١٢ \times ١٨}$

$= \frac{١٠٨}{١٠١}$ ∴ ق(∠ د أ ج) = ٢٠° ٤٥′ ← ②

من ① ، ② ∴ أ ج ينصف (ب أ د)

ثانياً :

مساحة الشكل أ ب ج د = مساحة Δ أ ب ج + مساحة Δ أ د ج

$= \frac{١}{٢} \times ١٨ \times ٢٧ \times جا ٤٥° ٢٠° + \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ١٨ \times جا ٤٥° ٢٠°$

$= ١٢٤ \sqrt{٢}$ سم^٢

"اللهم صل وسلم على سيدنا محمد
وعلى آله وأصحابه وسلم"

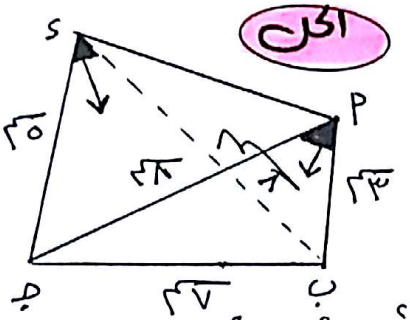
مثال ٨

$\overline{أب}$ ب جـ د شكل رباعى فيه $أب = ٣$ سم ، $ب جـ = ٧$ سم

$جـ د = ٥$ سم ، $د أ = ٨$ سم ، $ق(\hat{ب}) = ق(\hat{د}) = ٩٠°$

أثبت أن $أب جـ د$ رباعى دائرى

الحل



* فى $\triangle أ ب جـ$

$$\text{جتا}(ب\hat{أ}جـ) = \frac{(٣)^٢ + (٨)^٢ - (٧)^٢}{٢ \times ٣ \times ٨} = \frac{١}{٢}$$

$\therefore$ ق$(ب\hat{أ}جـ) = ٦٠°$ ← ①

* فى $\triangle ب د جـ$

$$\text{جتا}(ب\hat{د}جـ) = \frac{(٨)^٢ + (٥)^٢ - (٧)^٢}{٢ \times ٨ \times ٥} = \frac{١}{٢}$$

$\therefore$ ق$(ب\hat{د}جـ) = ٦٠°$ ← ②

$\therefore$ ق$(ب\hat{أ}جـ)$ = ق$(ب\hat{د}جـ)$ وهما زاويتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها

$\therefore$ الشكل $أب جـ د$ رباعى دائرى.

مثال ٩

$\overline{أب}$ ب جـ د شكل رباعى فيه $أب = أد = ٩$ سم ، $ب جـ = ٥$ سم

$جـ د = ٨$ سم ، $ق(\hat{ب}) = ق(\hat{د}) = ٩٠°$

أثبت أن الشكل $أب جـ د$ رباعى دائرى

الحل

* فى $\triangle أ ب جـ$:

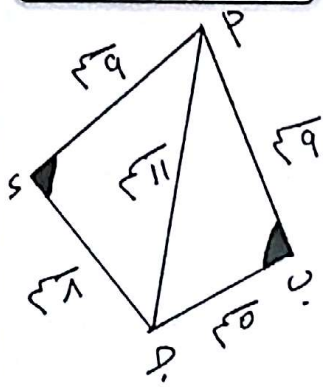
$$\text{جتا}(ب\hat{أ}جـ) = \frac{(٩)^٢ + (٥)^٢ - (١١)^٢}{٢ \times ٩ \times ٥}$$

$$= \frac{١}{٦}$$

* وفى $\triangle أ د جـ$:

$$\text{جتا}(د\hat{أ}جـ) = \frac{(٩)^٢ + (٨)^٢ - (١١)^٢}{٢ \times ٩ \times ٨}$$

$$= \frac{١}{٦}$$



$\therefore$ ق$(ب\hat{أ}جـ)$ = ق$(د\hat{أ}جـ)$

$\therefore$ ق$(\hat{ب}) + ق(\hat{د}) = ١٨٠°$

وهما زاويتان متقابلتان متكاملتان

$\therefore$ الشكل $أب جـ د$ رباعى دائرى #

مثال ١٠

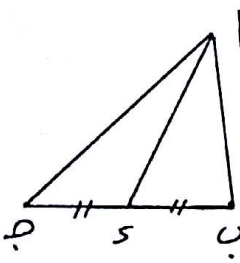
$\triangle أ ب جـ$ فيه د منتصف $\overline{ب جـ}$

اثبت أن $(أب)^٢ + (أجـ)^٢ = ٢(أد)^٢ + ٢(ب د)^٢$

وإذا كان $أب = ٥$ سم ، $أجـ = ٨$ سم

و $ب جـ = ١٢$ سم أوجد $أد$

الحل



* فى $\triangle أ ب د$:

$$(أب)^٢ = (أد)^٢ + (ب د)^٢ - ٢(أد)(ب د) \times \text{جتا}(أ\hat{د}ب)$$ ①

* فى $\triangle أ د جـ$:

$$(أجـ)^٢ = (أد)^٢ + (د جـ)^٢ - ٢(أد)(د جـ) \times \text{جتا}(أ\hat{د}جـ)$$ ②

و $\because ب د = د جـ$

و جتا$(أ\hat{د}ب) = -$ جتا$(أ\hat{د}جـ)$ متكاملتان

$\therefore$ بجمع ① و ②

$$(أب)^٢ + (أجـ)^٢ = ٢(أد)^٢ + ٢(ب د)^٢$$

أولاً

$\therefore (٥)^{٢} + (٨)^{٢} = ٢(ف د)^{٢} + ٢(٦)^{٢}$

$٨٩ = ٢(ف د)^{٢} + ٧٢$

$٢(ف د)^{٢} = ٨٩ - ٧٢ = ١٧$

$(ف د)^{٢} = \frac{١٧}{٢}$

$\therefore ف د = \sqrt{\frac{١٧}{٢}} = \frac{\sqrt{٣٤}}{٢} \approx ٤٫١$ سم

مثال ١١

$\triangle ا ب ج$ مثلث محيطه ٧٠ سم

$ا ب = ٢٦$ سم ، $ق(\hat{ب}) = ٦٠°$

أوجد مساحته سطحه .

الحل

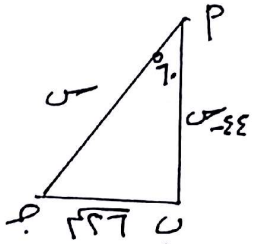
$\therefore$ محيط المثلث $= ٧٠$ سم ، $ا ب = ٢٦$ سم

$\therefore ا ب + ب ج + ج ا = ٧٠$ سم

$\therefore ب ج + ج ا = ٧٠ - ٢٦ = ٤٤$ سم

نفرض أن $ب ج = س$

$\therefore ج ا = ٤٤ - س$



$\therefore ا ب^{٢} = ب ج^{٢} + ج ا^{٢} - ٢ ب ج \times ج ا \times$ جتا ا

$(٢٦)^{٢} = س^{٢} + (٤٤-س)^{٢}$

$- ٢ \times س (٤٤-س)$ جتا $٦٠°$

بعد التجميع

$س^{٢} - ٤٤ س + ٤٢٠ = ٠$ حل بالآلة

$\therefore س = ٣٠$ أو ١٤

$\therefore$ مساحة $\triangle ا ب ج = \frac{١}{٢} ب ج \times ج ا$ جا ا

$= \frac{١}{٢} \times ٣٠ \times ١٤$ جا $٦٠° = ١٨٠ \sqrt{٣}$ سم^{٢}

مجموعة مسائل اختر

مثال ١٢ اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات الاقواس

١ فى $\triangle س ص ع$ فإن مقدار $\frac{س^{٢} + ص^{٢} - ع^{٢}}{٢ س ص}$ = ...

(جتا س ، جتا ص ، جتا ع ، جا ع)

٢ فى $\triangle س ص ع$ إذا كان $ن^{٢} + ع^{٢} - س^{٢} = ٢ ص ع \times$ ....

(جتا س ، جا ع ، جتا ع ، جا س)

٣ فى $\triangle س ص ع$ إذا كان $س = ص$

فإن جتا س = ...

$\left(\frac{ع}{٢ ص} ، \frac{ع}{٤ س} ، \frac{ع}{٢ ص} ، \frac{ع}{٢ س} \right)$

جتا س $= \frac{ص^{٢} + ع^{٢} - ص^{٢}}{٢ ص ع} = \frac{ع^{٢}}{٢ ص ع} = \frac{ع}{٢ ص}$

٤ فى $\triangle ا ب ج$ جتا $(ا + ب) =$ ....

جتا $(ا + ب) = -$ جتا ج $= -\left[\frac{ا^{٢} + ب^{٢} - ج^{٢}}{٢ ا ب}\right]$ الحل

$= \frac{-ا^{٢} - ب^{٢} + ج^{٢}}{٢ ا ب} = \frac{ج^{٢} - ا^{٢} - ب^{٢}}{٢ ا ب}$

الواجب

السؤال الأول: أكمل الجمل التالية

١) $\overline{أ ب}^{2} = \ldots\ldots$ حيث $أ = \ldots\ldots$

٢) قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٦ ، ١٠ ، ١٤ سم = ...

٣) فى $\triangle$ س ص ع المقدار $\frac{س^{2} + ع^{2} - ص^{2}}{2 س ع} = \ldots$

٤) فى $\triangle$ أ ب جـ جتا $(أ + ب) = \ldots$

٥) فى $\triangle$ أ ب جـ $أ (ب جتا د + د جتا ب)$
$= \ldots\ldots$

٦) فى $\triangle$ س ص ع س = ٨ سم ، ق(ص) = ٣٠° ، ص = ٥ سم
، جتا ع = $\frac{٤}{٥}$ فإن ع = ...

السؤال الثانى: أجب عما يلى مستعيناً بالرسم

١) $\triangle$ س ص ع فيه ق(ع) = ٩٠°
، س = ١٣ سم ، ص = ١٢ سم أوجد ع

٢) $\triangle$ أ ب جـ فيه $أ = ٤$ سم ، $ب = ٦$ سم
ق(د) = ٥٧° أوجد محيط $\triangle$ أ ب جـ

٣) أوجد قياس أكبر زوايا المثلث س ص ع الذى فيه س = ٣ سم
ص = ٦ سم ، ع = ٧ سم

٤) أوجد قياسات زوايا $\triangle$ أ ب جـ الذى فيه $أ = ٧٫٦$ سم ، $ب = ٨٫٥$ سم
، د = ٤٫٣ سم

٥) $\triangle$ أ ب جـ فيه $أ = ٤$ سم ، $ب = ٥$ سم
، جتا جـ = $\frac{١}{٢}$ أوجد د ($\triangle$ أ ب جـ)

٦) أ ب ء د متوازى أضلاع فيه
أ ء = ١٦ سم ، ء د = ٢٠ سم ، ق(أ ء د) = ٥٠°
أوجد ب ء ، ء د لأقرب سم

٧) أ ب ء د شكل رباعى فيه ب ء = ٩ سم
ق(أ ب ء) = ٥ ق ، ق(ء د) = ٨ ق ، أ د = ٩ سم
، أ ء = ١١ سم اثبت أنه شكل
أ ب ء د رباعى دائرى.

الدرس الثالث
حل المثلث

المقصود بحل المثلث
هو إيجاد أطوال الأضلاع المجهولة
وقياسات الزوايا المجهولة

الحالة الاولى

زاويتين وضلع ⟸ قاعدة الجيب

مثال ١ حل المثلث ل م ن الذى فيه
م = ١٧ سم ، ق(∠ل) = ١٦ ٣٣°
، ق(∠ن) = ١٩ ٤٤°

الحل

ق(∠م) = ١٨٠° − (١٦ ٣٣° + ١٩ ٤٤°)
= ١٠٢ ٢٥°

∵ ل / جا ل = م / جا م = ن / جا ن

ل / جا ١٦ ٣٣° = ١٧ / جا ١٠٢ ٢٥° = ن / جا ١٩ ٤٤°

∴ ل = ١٧ جا ١٦ ٣٣° / جا ١٠٢ ٢٥° ≈ ٩,٥ سم

ن = ١٧ جا ١٩ ٤٤° / جا ١٠٢ ٢٥° ≈ ١٢,٢ سم

الحالة الثانية

ضلعين وزاوية محصورة ⟸ جيب التمام

م ، ن ، ق(∠ب)

مثال ٢ حل المثلث ا ب جـ الذى فيه
ا ب = ٨ سم ، ب جـ = ٥ سم
ق(∠ب) = ٦٠°

الحل

ا جـ² = ا ب² + ب جـ² − ٢ ا ب × ب جـ × جتا ب
= ٨² + ٥² − ٢ × ٨ × ٥ × جتا ٦٠°
= ٤٩ ، ٠٤ =
∴ ا جـ = ٧ سم

جتا ا = (ب جـ² + ا جـ² − ا ب²) / (٢ ب جـ × ا جـ) = (٥² + ٧² − ٨²) / (٢ × ٥ × ٧)
= ١/٧

∴ ق(∠ا) ≈ ٤٧ ١٨°

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠ − (٦٠° + ٤٧ ١٨°)
= ١١ ٥٣°

ملحوظة هامة

* أى مثلث لابد أنه يحتوى على
أكثر من زاوية حادة أو منفرجة

الحالة الثالثة

أطوال الأضلاع الثلاثة ← جيب التمام

مثال ٣ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه
أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، جـ = ٨ سم

الحل

أ = ٥ سم ، ب = ٨ ، جـ = ٧

ق(أ) = ٦٠° ∴ م(∠أ) = ٦٠° ٣٠′ ٤٥″

جتا ب = (أ² + جـ² − ب²) / (٢ أ جـ) = (٢٥ + ٤٩ − ٦٤) / (٢ × ٥ × ٧) = ١٠ / ٧٠

ق(ب) = ٨١° ٤٦′ ٢٤″ ∴ م(∠ب) = ١٨٠° − (٦٠° ٣٠′ ٤٥″ + ٨١° ٤٦′ ٢٤″)

= ٣٨° ٢٣′ ٥١″

الحالة الرابعة

على فقط

الحالة المبهمة

ضلعين وزاوية مقابلة لاحدهما

أ ، ب ، م(∠أ)

كيف كويس جداً فى الطريقة دى

إذا الحالة عندنا أ ، ب ، م(∠أ)

∴ أ / جا أ = ب / جا ب

∴ جا ب = ب جا أ / أ = الناتج

النتائج جا ب

- الناتج أكبر من واحد ← لا يوجد حل
- الناتج يساوى واحد ← حل واحد ، ق(ب) = ٩٠°
- الناتج أقل من واحد ← يحتمل حلين
  - أ < ب ← حل واحد
  - أ > ب ← حل واحد

أ ← الضلع المقابل للزاوية المعلومة

وباقى الحل بيكمله من قاعدة الجيب

مثال ٤ بين عدد الحلول ثم حل كلاً من المثلثات التالية

١ Δ أ ب جـ فيه م(∠أ) = ١١٢°
أ = ٤ سم ، ب = ٧ سم

الحل

أ / جا أ = ب / جا ب ⇒ ٤ / جا ١١٢ = ٧ / جا ب

جا ب = ٧ جا ١١٢ / ٤ ≈ ١٫٦٣ ∴ لا يوجد حل

٢ Δ أ ب جـ فيه $أ = ٢\sqrt{٧,٥}$ سم ، $ب = ٥\sqrt{٣}$ سم ، $ق(\hat{أ}) = ٦٠°$

الحل

$$\frac{أ}{\text{جا}أ} = \frac{ب}{\text{جا}ب} \leftarrow \frac{٢\sqrt{٧,٥}}{\text{جا}٦٠°} = \frac{٥\sqrt{٣}}{\text{جا}ب}$$

$$\text{جا}ب = \frac{٥\sqrt{٣} \times \text{جا}٦٠°}{٢\sqrt{٧,٥}} = ١$$

$\therefore$ يوجد حل وحيد ابد القوسين

وتكون $ق(\hat{ب}) = ٩٠°$ *

$$ق(\hat{جـ}) = ١٨٠° - (٦٠° + ٩٠°) = ٣٠°$$

$$\frac{أ}{\text{جا}أ} = \frac{ب}{\text{جا}ب} = \frac{جـ}{\text{جا}جـ}$$

$$\frac{٢\sqrt{٧,٥}}{\text{جا}٦٠°} = \frac{جـ}{\text{جا}٣٠°}$$

$$\therefore جـ = \frac{٢\sqrt{٧,٥} \times \text{جا}٣٠°}{\text{جا}٦٠°} \approx ٢\sqrt{٤,٣}$$

٣ Δ أ ب جـ فيه $ق(\hat{أ}) = ٤٠°$ ، $أ = ٢\sqrt{٨,٥}$ سم ، $ب = ٧$ سم

الحل

$$\frac{أ}{\text{جا}أ} = \frac{ب}{\text{جا}ب} \leftarrow \frac{٢\sqrt{٨,٥}}{\text{جا}٤٠°} = \frac{٧}{\text{جا}ب}$$

$$\text{جا}ب = \frac{٧ \text{جا}٤٠°}{٢\sqrt{٨,٥}} = ٠,٥٢$$

يوجد زاويتان

يبقى عندى احتمالين

إذا كانت $أ < ب$ يبقى حل واحد

$أ > ب$ يبقى حلان

فى المثال بتاعنا $٢\sqrt{٨,٥} > ٧$

$\therefore$ يوجد حل واحد $أ > ب$

$ق(\hat{ب}) = ٣٢°$ نعمل shift sin

$$ق(\hat{جـ}) = ١٨٠° - (٤٠° + ٣٢°)$$

$$= ١٠٨°$$

$$\frac{أ}{\text{جا}أ} = \frac{جـ}{\text{جا}جـ} \leftarrow \frac{أ}{\text{جا}أ} = \frac{ب}{\text{جا}ب}$$

$$\frac{٢\sqrt{٨,٥}}{\text{جا}٤٠°} = \frac{جـ}{\text{جا}١٠٨°}$$

$$\therefore جـ = \frac{٢\sqrt{٨,٥} \times \text{جا}١٠٨°}{\text{جا}٤٠°} \approx ٥\sqrt{١٢,٥١}$$

٤ Δ أ ب جـ فيه $ق(\hat{أ}) = ٣٠°$ ، $أ = ٦$ سم ، $ب = ٩$ سم

الحل

$$\frac{أ}{\text{جا}أ} = \frac{ب}{\text{جا}ب} \leftarrow \frac{٦}{\text{جا}٣٠°} = \frac{٩}{\text{جا}ب}$$

$$\text{جا}ب = \frac{٩ \text{جا}٣٠°}{٦} \approx ٠,٧٥ < ١$$

نبدأ ننظر للضلع المقابل للزاوية المعلومة

$أ < ب$ $\therefore$ يوجد حلان

$ق(\hat{ب}) = ٣٥°٤٨'$ * $ق(\hat{ب}) = ١٨٠° - ٣٥°٤٨' = ١٣١°٢٥'$ *

$ق(\hat{جـ}) = ١٨٠° - [٣٠° + ٣٥°٤٨'] = ١٠١°٢٥'$ *

$$\frac{جـ}{\text{جا}١٠١°٢٥'} = \frac{٦}{\text{جا}٣٠°} \quad *$$

$$\therefore جـ = ١١,٧٦ \text{ سم}$$

$$ق(\hat{جـ}) = ١٨٠° - (٣٠° + ١٣١°٢٥') = ١٨°٣٥'$$

$$\frac{جـ}{\text{جا}١٨°٣٥'} = \frac{٦}{\text{جا}٣٠°} \quad *$$

$$جـ = ٣,٨٣ \text{ سم}$$

مجموعة مسائل بأفكار متنوعة

٥ حل Δ أ ب جـ المتساوى الساقين الذى فيه $م(\hat{أ}) = 110^\circ$ ، أ ب = ٨ سم

الحل

الفكرة Δ المتساوى الساقين بيكون م زواياه القاعدة متساوية طيب وأنا أعرفهم مش زوايا القاعدة بتكون م أكبر زاوية $(\hat{أ})$ دى زاوية الرأس

$\therefore م(\hat{ب}) = م(\hat{جـ}) = \frac{180^\circ - 110^\circ}{2} = 35^\circ$

$\frac{أ}{ا(\hat{أ})} = \frac{ب}{ا(\hat{ب})} = \frac{جـ}{ا(\hat{جـ})}$

$\frac{8}{ا 110^\circ} = \frac{ب}{ا 35^\circ} = \frac{جـ}{ا 35^\circ}$

$\therefore ب = جـ = \frac{8 \times ا 35^\circ}{ا 110^\circ} \approx 4,9$ سم

٦ أ = ١٢ سم ، جتا ب = $\frac{3}{5}$

ظا جـ = $\frac{5}{12}$

الحل

$م(\hat{ب}) \Leftarrow$ shift cos هتطلع

$\therefore م(\hat{ب}) \approx 53^\circ\ 8'$

$م(\hat{جـ}) = 36^\circ\ 52'$ shift tan

وتكمل انت بقاعدة الجيب

٧ أ = ٥ سم ، $م(\hat{ب}) = 120^\circ$

ومساحة $\Delta = 10\sqrt{3}$ سم^2

الحل

مساحة المثلث = $\frac{1}{2} أ \times جـ \times ا ب$

$\therefore \frac{1}{2} \times 5 \times جـ \times ا 120^\circ = 10\sqrt{3}$

$\therefore جـ = 8$ سم

أصبح عندك أ ، جـ ، $م(\hat{ب})$ استخدم جيب التمام

٨ Δ أ ب جـ فيه

$م(\hat{أ}) : م(\hat{ب}) : م(\hat{جـ}) = 4 : 5 : 6$

ومحيطه = ٥٠ سم

الحل

$م(\hat{أ}) = 4س$ ، $م(\hat{ب}) = 5س$

$م(\hat{جـ}) = 6س$

$\therefore 4س + 5س + 6س = 180$

$15س = 180$ $\therefore س = 12$

$\therefore م(\hat{أ}) = 48^\circ$ ، $م(\hat{ب}) = 60^\circ$

$م(\hat{جـ}) = 72^\circ$

$\therefore \frac{أ}{ا(\hat{أ})} = \frac{ب}{ا(\hat{ب})} = \frac{جـ}{ا(\hat{جـ})} = \frac{\text{المحيط}}{ا(\hat{أ}) + ا(\hat{ب}) + ا(\hat{جـ})}$

$\frac{أ}{ا 48^\circ} = \frac{ب}{ا 60^\circ} = \frac{جـ}{ا 72^\circ} = \frac{50}{ا 48^\circ + ا 60^\circ + ا 72^\circ}$

$\therefore أ \approx 14,5$ سم

$ب \approx 16,9$ سم

$جـ \approx 18,7$ سم

٩ Δ أ ب جـ فيه ق(أ) : ق(ب) : ق(جـ) = ٣ : ٤ : ٦
ومحيطه = ٥٢ سم

الحل

أ : ب : جـ = ٣ : ٤ : ٦

أ = ٣ك ، ب = ٤ك ، جـ = ٦ك

٣ك + ٤ك + ٦ك = ٥٢

١٣ك = ٥٦ ∴ ك = ٤

∴ أ = ١٢ سم ، ب = ١٦ سم ، جـ = ٢٤ سم

وتكمل بقاعدة جيب التمام

١٠ Δ أ ب جـ اكمل الزوايا فيه
أ = ٢١ سم ، ب = ٣٥ سم وطول
قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٢٨ سم

الحل

$\frac{أ}{ق(أ)} = \frac{ب}{ق(ب)} = \frac{جـ}{ق(جـ)} = ٢ نق$

$\frac{٢١}{ق(أ)} = \frac{٣٥}{ق(ب)} = \frac{جـ}{ق(جـ)} = \frac{٢٨}{١}$

$\frac{٢١}{ق(أ)} = ٢٨$ ∴ ق(أ) = ٤٨° ٣١′

ق(ب) = ٣٥ / ٢٨ ∴ ق(ب) = ٥٣° ٤١′

∴ ق(جـ) = ١٨٠ − (٤٨° ٣١′ + ٥٣° ٤١′)

= ١١° ٧٨′

∴ جـ = ٢٨ جا ١١° ٧٨′ ≈ ٦,٢ سم

١١ Δ أ ب جـ فيه ق(أ) = ٣٠°
ق(ب) = ٧٥°
أ + ٣جـ = ٢٥ سم

الحل

ق(جـ) = ١٨٠ − (٣٠° + ٧٥°) = ٧٥°

$\frac{أ}{جا ٣٠°} = \frac{ب}{جا ٧٥°} = \frac{جـ}{جا ٧٥°} = \frac{أ + ٣جـ}{جا ٣٠° + ٣ جا ٧٥°}$

∴ أ = $\frac{٢٥ جا ٣٠°}{جا ٣٠° + ٣ جا ٧٥°}$ ≈ ٢,٤ سم

ب = ١٧ سم

جـ = ٩,٦ سم

١٢ Δ أ ب جـ فيه أ = ٥ سم
ب = ٧ سم ، ق(أ) = ٤٠°
أوجد ق(ب)

الحل

دى حالة صعبة تاكد الخطوات ؟

$\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب}$ ⟸ $\frac{٥}{جا ٤٠°} = \frac{٧}{جا ب}$

جا ب = $\frac{٧ جا ٤٠°}{٥}$ ≈ ٠,٩

ينتج أصغر من الواحد الصحيح

ننظر لـ أ < ب ∴ يوجد حلان

ق(ب) = ٦٤° ١٧′ ٤٣″

أو ق(ب) = ١٨٠° − (٦٤° ١٧′ ٤٣″)

= ١١٥° ١٠′ ١٧″

ده النموذج الأول

١٣ Δ أ ب جـ فيه أ ن = ١٥ سم ، ن ء = ٢٠ سم ، ء أ = ١٢ سم

أوجد محيط Δ أ ب جـ

الحل

بضرب الطرفين أطراف

أ ن × ن ء × ء أ = أ ن × ن ء × ء أ

١٥ × ٢٠ × ١٢ = ٣٦٠٠

(أ ن × ن ء)^{٢} = ٣٦٠٠ بأخذ √

∴ أ ن × ن ء = ٦٠

∴ ١٥ ء = ٦٠ ∴ ء = ٤ سم

∴ ن ء = ٢٠ ∴ ن = ٥ سم

∴ أ ن = ١٥ ∴ أ = ٣ سم

∴ محيط Δ أ ب ء = أ + ن + ء = ١٢ سم

١٤ فى Δ أ ب جـ $\sin$ أ (ن جتا أ + ء جتا ب) = ...

الحل

$$\left[\frac{أ^{٢}+جـ^{٢}-ب^{٢}}{٢أجـ}\times ب + \frac{أ^{٢}+ب^{٢}-جـ^{٢}}{٢أب}\times جـ\right] أ$$

$$= \left[\frac{أ^{٢}+ب^{٢}-جـ^{٢}+أ^{٢}+جـ^{٢}-ب^{٢}}{٢أ^{٢}}\right] أ$$

$$= \left[\frac{٢أ^{٢}}{٢أ}\right] أ = أ^{٢}$$

١٥ خماسى منتظم محيطه = ٣٠ سم

أوجد مساحة سطحه

الحل

طول الضلع = $\frac{\text{المحيط}}{٥} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$ سم

مساحة المضلع المنتظم = $\frac{١}{٤} ن$ س^{٢} $\cot\frac{\pi}{ن}$

$= \frac{١}{٤} \times ٥ \times (٦)^{٢} \times \cot\frac{١٨٠}{٥}$ ظا $\approx \frac{١}{(\frac{١٨٠}{٥})}$ سم^{٢}

١٦ هل المثلث أ ب جـ الذى فيه أ = ٣ سم ، ن = ٤ سم ، ء = ٨ سم

الحل

من متباينة المثلث

مجموع أصغر ضلعين > من الضلع الثالث

ولكن أ + ن < ء

∴ لا يمكن عمل المثلث

ولو مش مصدقنى أرسمه

* إذا أخذ الله منك ما لم تتوقع فهيأت فسوف يعطيك ما لم تتوقع أنه تملكه

* لا تقل يا رب عندى هم كبير ولكن قل يا هم عندى رب كبير

الواجب

السؤال الأول: حل كلاً من المثلثات التاليه

١) $\overline{أب} = ٨$ سم ، $ق(\hat{أ}) = ٦٠°$ ، $ق(\hat{ب}) = ٤٠°$

٢) $\overline{أب} = ٩$ سم ، $ق(\hat{أ}) = ٨٢°$ ، $ق(\hat{ب}) = ٨٠°$

٣) $\overline{أ} = ٥$ سم ، $ب = ٧$ سم ، $ق(\hat{ج}) = ٥٦°$

٤) $ل(\triangle) = ٢٤,٥$ سم^٢ ، $ن = ٧$ سم ، $ق(\hat{ج}) = ٩٠°$

٥) $\overline{أ} = ١٣$ سم ، $ب = ١٤$ سم ، $ق(\hat{ج}) = ١٥°$

٦) $س = ١٥$ سم ، $ص = ٢٥$ سم ، $ق(\hat{ع}) = ٣٠°$

السؤال الثانى: بين عدد الحلول ثم حل إن أمكن

١) $\overline{أ} = ١٢$ سم ، $ب = ١٥$ سم ، $ق(\hat{أ}) = ١٠٠°$

٢) $\overline{أ} = ٥$ سم ، $ب = ٧$ سم ، $ق(\hat{أ}) = ٦٠°$

٣) $\overline{أ} = ٤$ سم ، $ب = ٦$ سم ، $ق(\hat{ب}) = ٣٠°$

٤) $\overline{أ} = ٤$ سم ، $ب = ٣$ سم ، $ق(\hat{أ}) = ٥٠°$

٥) $\overline{أ} = ١٢$ سم ، $ص = ٧$ سم ، $ق(\hat{أ}) = ٢٧°$

٦) $\overline{أ} = ١٠$ سم ، $ب = ٩$ سم ، $ق(\hat{ب}) = ٥٧°$

٧) $\overline{أ} = ٦$ سم ، $ب = ٨$ سم ، $ق(\hat{أ}) = ٤٧°$

٨) $س = ٥$ سم ، $ص = ٧$ سم ، $ع = ١٢$ سم

السؤال الثالث: حل المسائل دى كمان

١) $\triangle أبج$ متساوى الساقين فيه $ق(\hat{أ}) = ١٢٠°$ ، $\overline{أ} = \overline{ب} = ٧$ سم. حل المثلث

٢) حل $\triangle أبج$ الحاد الزوايا الذى فيه $\overline{أ} = ٨$ سم ، $ب = ١٤$ سم ، وطول قطر الدائرة الخارجية $= ٢٠$ سم

٣) $\overline{أ} = ٥$ سم ، $ق(\hat{ج}) = ١٢٠°$ ومساحته $= ٨,٦٦$ سم^٢

لقد انتهى منهاج الفصل الدراسى الأول

أسأل الله العظيم رب العرش الكريم أن يوفقكم جميعاً وأن يكتب لكم النجاح والفلاح فى الدنيا والآخرة.

وفى النهاية لا تنسونى من دعوة صالحة

محمد أدهم