الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

كلية العلوم الانسانية و العلوم الاجتماعية

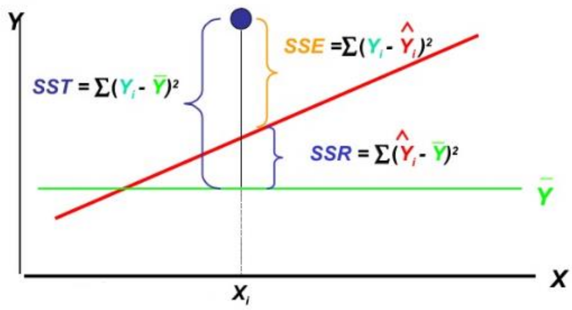
قسم علم الاجتماع

جامعة عمار ثليجي الأغواط
UNIVERSITY OF LAGHOUAT

مطبوعة في مقياس:

الاحصاء الاستدلالي

لطلبة سنة أولى ماستر سكان وتنمية



من إعداد:

الدكتور: محمد بداوي

السنة الدراسية 2016-2017

البرنامج الفصلي:

الارتباط والانحدار البسيط بين متغيرين
1-1- مفاهيم عامة
1-2- التباين المشترك (التغاير)
1-3- معامل الارتباط الخطي
1-3-1- معامل الارتباط لبيرسون
1-3-1-1- اختبار معنوية معامل الارتباط البسيط لبيرسون
1-3-2- معامل الارتباط الرتبي لسبيرمان
1-3-2-1- الاستدلال حول الارتباط الرتبي (اختبار هوتلينغ بابست)
1-4- الانحدار الخطي البسط (التسوية الخطية)
1-4-1- مفهومه
1-4-2- خصائص مقدرات المربعات الصغرى
1-4-3- اختبار معنوية معاملي الانحدار الخطي البسيط
1-4-4- تحليل التباين: مدخل لاختبار معنوية نموذج الانحدار
1-4-5- التحليل الوصفي للبواقي
1-6- التسوية غير الخطية
1-6-1- التسوية بواسطة دالة أسية : $y = \alpha \beta^{x}$
1-6-2- التسوية بواسطة دالة قوة : $y = \alpha x^{\beta}$
1-7- نتائج حول التسويات الثلاثة (الخطية ، الأسية ، القوة)

مقدمة

الحمد لله رب العالمين ، والصلاة والسلام على خاتم النبيئين وسيد المرسلين، نبينا محمد الهادي الامين الذي بعثه الله رحمة للعالمين، وعلى أله وأصحابه وأنصاره وأتباعه ومن أهتدى بهديه وعمل بسنته إلى يوم الدين.

و بعد:

تتضمن هذه المطبوعة دروس موجهة الى طلبة سنة أولى ماستر سكان وتنمية، وشعر الأستاذ بالحاجة لمثل هذا المؤلف من خلال تدريسه لهذا المقياس ، ومن خلال إشرافه على عدد من المذكرات، ويمكن أن تكون هذه المطبوعة بما تحويه من أساليب إحصائية متنوعة ، وبما تتضمنه من أمثلة تطبيقية عديدة، ذو فائدة لقطاع واسع من القراء المهتمين بالإحصاء.

إن هذه المطبوعة كأي نتاج علمي لا تخلو من النواقص والهفوات، وكل أملنا أن تسهم في تطوير البحث العلمي.

ونسأل الله أن يجعل هذا العمل خالصا لوجهه الكريم، ويجعله في ميزان حسناتنا، وأن ينفع به الطلاب والدارسين.

و الله الموفق

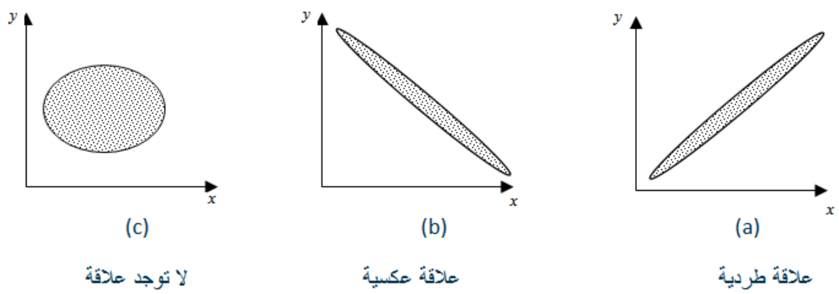
الارتباط والانحدار البسيط بين متغيرين:

1-1- مفاهيم عامة

عند تحليلنا لبعض الظواهر اجتماعية كانت أم اقتصادية....لا نكتفي بالقول بأن هناك علاقة أم عدم وجودها (تحليل نوعي)، بل نرغب كذلك بإجراء دراسته كمية لها، مثلا لدينا متغيرين (x و y) متى نقول أنهما يتغيران في اتجاه واحد؟ (علاقة طردية) ، ومتى نقول أنهما يتغيران عكسيا؟ كيف يمكننا قياس قوة الارتباط.

إذا كان هناك ارتباط بين x و y ، سنمثل كل مشاهدة i بنقطة إحداثيات (x_i, y_i) في معلم كارتيزي، لنلاحظ سحابة النقاط التالية:

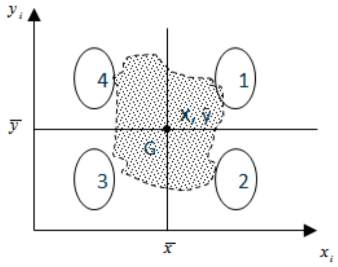
الشكل (1-1): أنواع سحابات النقاط



1-2- التباين المشترك (التغاير) La covariance:

نحاول في هذه الفقرة البحث عن كمية تحدد وجود ارتباط بين المتغيرين ونقيس قوته ونعطي اتجاهه، لنأخذ الشكل البياني التالي: الذي يبين سحابة نقاط، لنأخذ مركز ثقل السحابة **(le centre de gravité du nuage de points)** (المتوسط G)، بإجراء عملية انسحاب المعلم **translation** بوضع مركز على النقطة (G).

الشكل (1-2): تحديد المناطق الأربع



نحصل على أربع مناطق.

لنعتبر الكمية التالية : $\alpha_i = (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ نتحصل على أربع حالات :

1) بالنسبة للمنطقة (1) الجداء α_iيكون موجبا لأن النقطتان $(x_i - \bar{x})$ و $(y_i - \bar{y})$ موجبتين.

2) المنطقة (2) الجداء α_i سالب، 3) المنطقة (3) الجداء α_i موجب.

4) المنطقة (4) الجداء α_i سالب.

لنهتم الآن باجمالي السحابة ونهتم بالكمية $\beta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$ لنرجع إلى تفسير الأشكال السابقة (c,b,a).

بالنسبة للشكل (a) أغلب النقاط موجودة في المنطقة (1) و (3)، إذن علاقة طردية للشكل (b) أغلب النقاط موجودة في المنطقة (2) و (4)، إذن هناك علاقة عكسية.

بالنسبة للشكل (c) تشتت النقاط موزعة على النقاط الأربع تقريبا مما يجعلنا نتوقع قيمة β قريبة من الصفر (لا توجد علاقة). إن قيمة β تعبر عن الارتباط بين المتغيرين x و y، وتعبر عن شدته وعن اتجاهه فخلاصة القول أن قيمة β تدعى بالتباين المشترك بين المتغيرين x و y ونرمز له بـ cov (x,y)، والذي يحسب بالصيغة التالية:

$cov(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ وهذه الحالة تكون فيها كل التكرارات مساوية

للواحد أو الصفر فقط (كل نقطة على البيانات لا تمثل إلا فردا واحدا من المجتمع – الحالة الخاصة –).

مثال1: لدينا الجدول التالي الذي يمثل الوزن (x) و الطول (y):

x_i (kg)	60	80	55	65	40
y_i (cm)	160	200	150	140	130

المطلوب: حساب (x,y) cov بين الطول والوزن.

حل المثال1:نستخدم الجدول التالي بغية تسهيل الحساب:

	x_i	y_i	$x_i\, y_i$	x_i^2	y_i^2
	60	160	9600	3600	25600
	80	200	16000	6400	400000
	55	150	8250	3025	22500
	65	140	9100	4225	19600
	40	130	5200	1600	16900
المجموع	300	780	48150	18850	124600

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{300}{5} = 60\,,\quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{780}{5} = 156$$

$$\operatorname{cov}(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y} = 9630 - (60)(156) = 270$$

أما إذا لم يمكن أن نجمع عدة نقاط في موقع واحد، أي عندما تكون التكرارات n_{ij} أعداد كيفية تختلف عن (0 أو 1) (الحالة العامة) فصيغة التباين المشترك تكون كما يلي:

$$\mathrm{cov}(x,y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}n_{ij}x_iy_j-\overline{x}\,\overline{y}$$

مثال2: أجريت دراسة في شركة ما حول الخبرة (x) والأجر (y) فأختبر 50 عامل عشوائيا، وتم الحصول على البيانات التالية:

الأجر بوحدة نقدية / الخبرة بالسنوات	أقل من 200 ون	200- 400 ون	أكثر من 400 ون	المجموع
أقل من 05 سنوات	2	2	6	10
05-10 سنوات	2	3	8	13
أكثر من 10 سنوات	5	5	17	27
المجموع	9	10	31	50

المطلوب:

حساب $\mathrm{cov}(x,y)$؟

حل المثال 2: نحسب مركز الفئات:

الأجر (y) / الخبرة (x)	100		300		500		المجموع
2.5	2	500	2	1500	6	7500	9500
7.5	2	1500	3	6750	8	30000	38250
12.5	5	6250	5	18750	17	106250	131250
المجموع		8250		27000		143750	17900

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_{i.}x_i=\frac{1}{50}((10*2.5)+(13*7.5)+(27*12.5))=9.2$$

$$\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p}n_{.j}y_j=\frac{1}{50}((9*100)+(10*300)+(31*500))=388$$

$$\mathrm{cov}(x,y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}x_iy_j-\overline{x}\,\overline{y}=\frac{1}{50}(179000)-(9.2)(388)=10.4$$

1-3- معامل الارتباط الخطي **Le coefficient de corrélation linéaire**

في الفقرة السابقة اعتبرنا أن التباين المشترك يعبر عن الارتباط بين متغيرين، وقد بينا أن التباين المشترك يبين اتجاه هذ الارتباط من خلال المناطق الأربعة، لكن السؤال المطروح متى نقول أن قيمة التباين المشترك كبيرة؟ ابتداء من أي قيمة يكون فيها قويا؟ ليكن لدينا مثلا زوجان من المتغيرات (x,y) و (s,t)، لنفترض أن قيمة cov (x,y)= 300 وقيمة cov (s,t)= 0.9، هل يمكن القول أن قيمة cov (x,y) أقوى من cov (s,t) باعتبار أن القيمة (300 < 0.9)؟

إذا أضفنا معلومة جديدة وهي أن x و y قد قيسا باللتر وأن s و t قيسا بالميليلتر، هل يبقى استنتاجنا صحيحا؟ إن قيمة التباين المشترك لها علاقة بوحدة قياس x و y ، إذا تغيرت وحدة وقياس x مثلا، فقيمة cov(x,y) حتما ستتغير.

إذن تحتاج إلى معامل آخر يقيس لنا قوة العلاقة وهو ما يعرف بالارتباط الخطى الذي يأخذ الصيغة التالية: $\rho = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$، وهو محصور دائما بين (1) و (−1) ، $-1 \leq \rho \leq 1$ ، فكلما اقترب من هاتين القيمتين تكون العلاقة قوية. اختلاف الإشارة يحدد العلاقة طردية كانت أم عكسية؟ أما إذا اقترب من الصفر فتكون العلاقة ضعيفة، وإذا كان $\rho = 0$ فلا توجد علاقة.

مثال 3: أحسب معامل الارتباط بالنسبة للمثالين السابقين.

حل المثال 3: بالنسبة لمعامل الارتباط الخاص بالمثال (1) يكون على النحو التالي:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2} = 13.03, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - (\bar{y})^2} = 24.16$$

إذن $$\rho = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{270}{(13.03)(24.16)} = 0.85$$

بالنسبة لمعامل الارتباط الخاص بالمثال (2) فيكون على النحو التالي: نحسب σ_x و σ_y من خلال الصيغتين التاليتين:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_{i.}x_i^2 - (\overline{x})^2 = \frac{1}{50}((10*6.25)+(13*56.25)+(27*156.25)) = 15.61, \quad \sigma_x = \sqrt{15.61} = 3.95$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p} n_{.j}y_j^2 - (\overline{y})^2 = \frac{1}{50}((9*10000)+(10*90000)+(31*250000)) = 24256, \quad \sigma_y = \sqrt{24256} = 155.74$$

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{10.4}{(3.95)(155.74)} = 0.0169$$

1-3-1- معامل الارتباط لبيرسون:

قلنا سابقا أن معامل الارتباط يقيس قوة الارتباط الخطية بين متغيرين كميين، وهو مؤشر إحصائي جد هام لقياس العلاقة بين متغيرين.

مثال 4: دراسة العلاقة بين الدخل والاستهلاك، والطول والوزن.......ويمكن إيجاده بالصيغة التالية (طريقة الانحرافات): $r_p = \frac{S_{xy}}{\sqrt{(S_{xx})(S_{yy})}}$

حيث:

$$S_{xx} = \sum (x_i - \overline{x})^2 = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}$$

$$S_{yy} = \sum (y_i - \overline{y})^2 = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}$$

$$S_{xy} = \sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \sum x_i y_i - n\overline{x}\,\overline{y}$$

وتوجد عدة صيغ لحساب r_p نذكر منها:

$$r_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{(\sum x_i^2 - n(\overline{x})^2)(\sum y_i^2 - n(\overline{y})^2)}}$$

1-3-1-1- اختبار معنوية معامل الارتباط البسيط لبيرسون:

بعد تحديد قيمة r_p الذي يمثل معامل الارتباط لبيرسون بين أزواج المتغيرين x و y وممكن استخدامه أيضا في تقدير معامل الارتباط للمجتمع (ρ)، ومن المفيد ايضا اختبار معنوية هذا المعامل وذلك في الحالات التالية:

تحديد مستوى المعنوية

$$H_0 : \rho = 0$$
$$H_1 : \rho \neq 0 \; ou \quad \rho > 0 \quad ou \quad \rho < 0$$

فإحصاءة الاختبار $T_0 = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$، رفض H_0 إذا كان $|t| \geq t_{\alpha/2, n-2}$

$$H_0 : \rho = \rho_0$$
$$H_1 : \rho \neq \rho_0 \; ou \quad \rho > \rho_0 \quad ou \quad \rho < \rho_0$$

مع حجم عينة ($n \geq 25$) نستخدم تحويلة فيشر $Z = \operatorname{arctan} h \quad r = \frac{1}{2} Ln \frac{1+r}{1-r}$

حيث أنها تتوزع طبيعيا بوسط $\mu_z = \operatorname{arctanh} \rho = \frac{1}{2} Ln \frac{1+\rho}{1-\rho}$ و بتباين $\sigma_z^2 = \frac{1}{n-3}$

أما إحصاءة الاختبار فهي $Z_0 = \frac{Z_r - Z_{\rho_0}}{1/\sqrt{n-3}}$ علما أن $Z_r = \frac{1}{2} Ln \frac{1+r}{1-r}, Z_{\rho_0} = \frac{1}{2} Ln \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}$

رفض H_0 إذا كان $|z| \geq z_{\alpha/2}$

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2$$
$$H_1 : \rho_1 \neq \rho_2 \; ou \quad \rho_1 > \rho_2 \quad ou \quad \rho_1 < \rho_2$$

أما إحصاءة الاختبار فهي $Z_0 = \frac{Z_{r1} - Z_{r2}}{\sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}}}$، رفض H_0 إذا كان $|z| \geq z_{\alpha/2}$

مثال 5:

أخذت عينة حجمها خمسة أسر وذلك بغية قياس العلاقة بين حجم الدخل وحجم الاستهلاك على السلع الضرورية ، فإذا كان معامل الارتباط $r = 0.6$.

المطلوب:

هل ان قيمة معامل الارتباط البسيط المحسوب تدل على وجود علاقة معنوية بين المتغيرين وفقا لمعطيات العينة عند مستوى $\alpha = 0.01$؟

حل المثال 5:

صياغة الفرضية

$$H_0 : \rho = 0$$
$$H_1 : \rho \neq 0$$

$$T_0 = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{(0.6)\sqrt{3}}{\sqrt{1-(0.6)^2}} = 1.3, \quad t_{\alpha/2,n-2} = t_{0.005,3} = 5.841; \quad -t_{0.005,3} = -5.841$$

الاستنتاج: بمأن قيمة T_0 تقع في منطقة قبول H_0 ، يعني لا توجد علاقة معنوية بين المتغيرين أي أن ($\rho \neq 0$) وفقا لبيانات العينة وعند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

1-3-2- معامل ارتباط الرتب لسبيرمان[1] (spearman) :

إذا كانت الظاهرة محل الدراسة تحتوي على متغيرين وصفيين ترتيبين، ومثال على ذلك قياس العلاقة بين تقديرات الطلبة في مادتين ، أو العلاقة بين درجة تفضيل المستهلك لسلعة معينة ، ومستوى الدخل، فإنه يمكن استخدام طريقة" بيرسون "السابقة في حساب معامل ارتباط يعتمد على رتب مستويات المتغيرين كبديل للقيم الأصلية ، ويطلق على هذا المعامل "معامل ارتباط سبيرمان" ويعبر عنه بالعلاقة التالية :

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$$

و يتصف هذا المعامل بالخصائص التالية:

[1]- **شارلز إدوارد سبيرمان (Charles Edward Spearman (1945-1863** ، نفساني إنجليزي له أيضاً مساهمات في علم الإحصاء حيث كان من رواد التحليل العاملي L'Analyse factoriel وقد ابتكر معامل الارتباط الرتبي ، كما كانت له أبحاث رائدة في مجال الذكاء البشري.

قيمة هذا المعامل تقع ضمن المجال $(-1 \le r_s \le 1)$، بحيث انه إذا كانت $6\sum d_i^2 = 0$ فان $r_s = 1$، و إذا كانت $\left(6\sum d_i^2 = 2n(n^2-1)\right)$ فان $r_s = -1$، و إذا كانت ($\left(6\sum d_i^2 = n(n^2-1)\right)$ فان $r_s = 0$.

قيمة هذا المعامل عند حساب العلاقة بين متغيرين كميين لا تساوي بالضبط قيمة معامل بيرسون، وذلك بسبب التعامل مع رتب القيم بدل القيم الاصلية.

1-3-2-1- الاستدلال حول معامل ارتباط الرتب لسبيرمان(اختبار هوتلينغ[2] بابست (test de hotelling- pabst

إن اختبار الرتب لسبيرمان هو من الاختبارات اللامعلمتية ، ويستخدم في اختبار العلاقة بين متغيرين نوعيين او أحدهما نوعي والاخر كمي ، او كليهما كميين، ويستخدم هذا الاختبار عندما يكون عدد أزواج القيم n ما بين ($5 \le r_s \le 30$) وتصاغ الفرضية الصفرية كما يلي:

$$H_0 : \rho_0 = 0$$

ومنطقة رفض H_0 تكون كما يلي:

اختبار أحادي من جهة اليمين H_0 **Reject if** $r_s > r_{s,\alpha}$

اختبار أحادي من جهة اليسار H_0 **Reject if** $r_s < -r_{s,\alpha}$

اختبار من الطرفين $r_s > r_{s,\alpha/2}$ أو $r_s < -r_{s,\alpha/2}$ H_0 **Reject if**

وتوجد جداول خاصة بهذا الاختبار موجودة في الملحق.

أ-2) اختبارات أخرى:

اذا كانت n كبيرة (أكبر من حجم جدول الاختبار السابق) نستخدم اختبار t **بحيث** $t = \frac{r_s}{s}$

مع درجة حرية $df = n-2$، t توزيع ستيودنت، s الخطأ المعياري ل r_s ، بحيث $S = (\frac{1-r^2}{n-2})^2$ ، وتوجد صيغة مكافئة لهذه الاحصاءة (t) باستخدام توزيع F ، حيث $F = \frac{1+|r_s|}{1-|r_s|}$ ، **مع** $v_1 = n-2$ و $v_2 = n-2$.

---

[2]- هارلود هوتلينغ **(Harold Hotelling (1973 -1895)** ، اقتصادي و إحصائي أمريكي.

ومع **n كبيرة يمكننا كذلك استخدام التقريب الطبيعي Z بحيث** $Z = r_s (n-1)^{1/2}$

مثال 6: البينات التالية تمثل تقديرات لامتحانين (كتابي، شفهي) لثمانية أشخاص تقدموا لشغل منصب ما

ع.إ.كتابي	16	15	14	10	12	8	13	12
ع.إ.شفهي	ممتاز	جيد جدا	جيد	مقبول	جيد	مقبول	جيد	جيد

المطلوب :أ) احسب معامل ارتباط الرتب (r_s)، بين علامات الامتحانين الكتابي و الشفهي؟

ب) اختبر معنوية معامل ارتباط الرتب (r_s)، للفرض القائل انه لا توجد علاقة معنوية بين الامتحانين (استخدم $\alpha = 0.05$)

حل المثال 6:

حساب معامل ارتباط الرتب (r_s)، نقوم بترتيب كل من الامتحانين في الجدول التالي:

(الترتيب اما تصاعديا أو تنازليا للمتغيرين معا)

رتب y	قيم y للامتحان ش	رقم التسلسل		رتب x	قيم x للامتحان ك	رقم التسلسل
1	ممتاز	1		1	16	1
2	جيد جدا	2		2	15	2
4.5	جيد	3		3	14	3
4.5	جيد	4		4	13	4
4.5	جيد	5		5.5	12	5
4.5	جيد	6		5.5	12	6
7.5	مقبول	7		7	10	7
7.5	مقبول	8		8	8	8

لحساب إحصاءة الاختبار (r_s) نقوم باستخدام الجدول التالي:

قيم x للامتحان ك	قيم y للامتحان ش	رتب x R_x	رتب y R_y	$d_i = R_x - R_y$	d_i^2
16	ممتاز	1	1	0	0
15	جيد جدا	2	2	0	0
14	جيد	3	4.5	1.5-	2.25
10	مقبول	7	7.5	0.5-	0.25
12	جيد	5.5	4.5	1	1
8	مقبول	8	7.5	0.5	0.25
13	جيد	4	4.5	0.5-	0.25
12	جيد	5.5	4.5	1	1
					$\sum_{i=1}^{8} d_i^2 = 5$

إحصاءة الاختبار (r_s) $$r_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6(5)}{8(63)} = 0.94$$

اختبر معنوية معامل ارتباط الرتب (r_s):

صياغة الفرضية تكون كما يلي:

$$H_0 : \rho_0 = 0$$
$$H_1 : \rho_0 \neq 0, \quad \alpha = 0.05$$

من جداول معامل ارتباط لسبيرمان (اختبار من الطرفين)

$r_{s,0.025} = 0.738$, $n = 8$, $\alpha / 2 = 0.025$، منطقة قبول H_0 $[-0.738 \quad , \quad 0.738]$

الاستنتاج:

بمأن احصاءة الاختبار $r_s = 0.94$ تقع ضمن منطقة رفض فرضية العدم(H_0) أي $(r_s > 0.738)$ وبالتالي نستنتج وجود علاقة معنوية بين المتغيرين أي $(\rho_0 \neq 0)$ وفقا لبيانات العينة عند مستوى $\alpha = 0.05$.

1-4- الانحدار الخطي البسط: La Régression linéaire simple

1-4-1- مفهومه

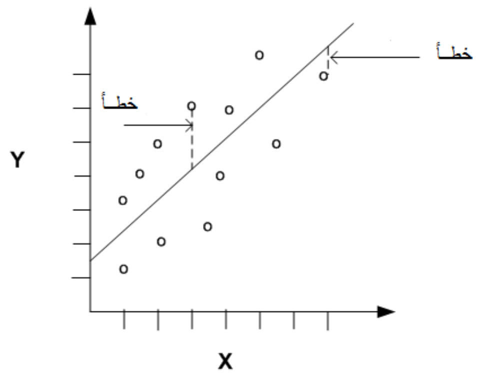
يعد الانحدار من المواضيع المهمة والأكثر تناولا في ميدان الإحصاء الاستدلالي، باستخداماته الواسعة في شتى الميادين العلمية والاجتماعية والاقتصادية.

تعريف 1:

هو أداة رياضية تستخدم لتقدير العلاقة بين متغيرين أو أكثر، أحد هذه المتغيرات يسمى متغيرا تابعا **variable dépendant** وهو الذي تتأثر قيمته في حالة تغير قيمة المتغير المستقل ويسمى بالمتغير الدال، والآخر يسمى بالمتغير المستقل **indépendant variable** وهو يؤثر في قيمة المتغير التابع عند تغيره ويسمى بالمتغير المفسر.

لنأخذ الشكل التالي:

الشكل (1-3): مستقيم التسوية



لتقدير معالم الانحدار (معامل التقاطع α والميل β) نستخدم طريقة المربعات الصغرى **(La Méthode de moindre carrées)**، إذا رمزنا بـ $\hat{y}$ للقيمة التي تنبؤها $y = \mu_{y/x}$

ولكي يمثل خط التنبؤ $\hat{y}$ أفضل ملائمة ممكنة للقيم الملحوظة لابد لنا أن نجعل هذه الانحرافات أصغر ما يمكن ، يعتمد هذا على مبدأ المربعات الصغرى أي نختار $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ بحيث تكون الكمية $Q = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$ في نهايتها الصغرى ، وبتعويض قيمة $\hat{y}_i$ نجد:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i \right)^2 \..............(I)$$

ولحساب $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ نقوم باشتقاق طرفي العلاقة (I) جزئيا بالنسبة ل $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ والمطابقة مع الصفر نجد:

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{\alpha}} = \sum_{i=1}^{n} (-2)\left[y_i - \left(\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i \right) \right] = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{\beta}} = \sum_{i=1}^{n} (-2)\ x_i \left[y_i - \left(\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i \right) \right] = 0$$

وتؤدي هاتان العبارتان الى:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \hat{\alpha} n + \hat{\beta} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \hat{\alpha} \sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{\beta} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

وبحل هذه الجملة نحصل على:

$$\hat{\beta} = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\,\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\left(\overline{x}\right)^2} = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{V(x)}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - \hat{\beta} \sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{y} - \hat{\beta}\,\overline{x}$$

يمكننا استخدام طريقة الانحرافات لحساب $\hat{\beta}$ و هي: $\hat{\beta} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$.

مثال7:

يمثل الجدول التالي عدد ساعات الدراسة التي أمضاها طالب ما للتحضير للامتحان (x) والعلامات التي حصل عليها:

X	4	10	14	4	7	12	22	1	17
Y	6.5	12	13	7.5	9	12	18	4.5	16.5

المطلوب: أوجد معادلة الانحدار الخطي لـy على x.

حل المثال 7:

$$n = 10, \quad \sum x_i = 100 \quad , \quad \sum x_i^2 = 1376 \quad , \quad \sum y_i = 113.5 \quad , \quad \sum y_i^2 = 1463.25 \quad \sum x_i y_i = 1385$$

$$S_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} = 1376 - \frac{(100)^2}{10} = 376$$

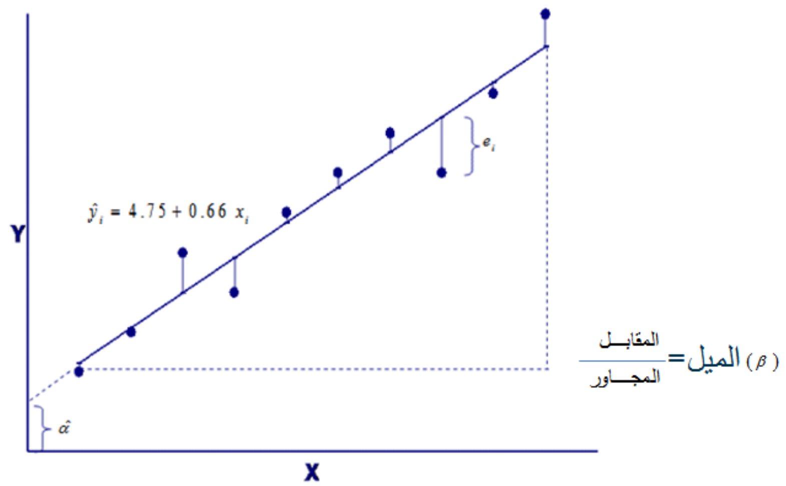
$$S_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = 1385 - \frac{1}{10}(100)(113.5) = 250$$

$$\hat{\beta} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{250}{376} = 0.66, \quad \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = 113.5 - (0.66)(10) = 4.75$$

$$\hat{y} = 4.75 + 0.66x$$

يمكن استخدام هذه المعادلة بغرض التنبؤ بقيمة المتغير y من أجل قيمة معينة لـ x، فلو فرضنا أن هذا الطالب حضر 21 ساعة لهذا الامتحان، فالتنبؤ بالعلامة سيكون كما يلي:

$$\hat{y} = 4.75 + 0.66(21) = 18.61$$



1-4-2- تقدير σ^2:

نقوم بتقدير معلمة غير معلومة في نموذج الانحدار والتي يطلق عليها تباين الخطأ (σ^2)، الانحرافات $e_i = y_i - \hat{y}_i$ نسميها البواقي، حيث تستخدم للحصول على تقدير σ^2، مجموع مربعات البواقي غالبا ما يطلق عليها مجموع مربعات الخطأ حيث:

$$SS_E = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

نستطيع أن ننظر الى القيمة المتوقعة لمجموع مربعات الخطأ وهي: $E(SS_E) = (n-2)\sigma^2$ ، ونتيجة لذلك فأن هذا يعتبر مقدر غير متحيز ل σ^2 ، حيث:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_E}{n-2}$$

يمكننا حساب SS_E كما يلي: $SS_E = SS_T - \hat{\beta}\, S_{xy}$

بحيث أن $SS_T = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}_i)^2$ هو مجموع المربعات الكلي.

مثال 8:

إذا كانت لدينا المعلومات الأتية:

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 48 \;,\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 460.5 \;, \sum_{i=1}^{n} y_i = 40.5 \;,\; \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 250.6 \;,\; n = 20 \;,\; \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1705.2$ نفترض أن المتغيرين (x، y) مرتبطين وفقا لنموذج انحدار المطلوب:

وفقا لطريقة المربعات الصغرى، قدر كل من α و β؟ (معاملي الانحدار).

استخدم المعادلة للتنبؤ إذا كان $x = 8.2$.

إيجاد التقدير النقطي للوسط إذا كانت $x = 9.5$.

بافتراض أن قيمة المشاهدة لـ $x = 9.5$ هي $y = 36.23$.

أحسب القيمة المناظرة للبواقي (e_i)؟

حل المثال 8:

نجري الحسابات الأتية:

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 460.5 - \frac{1}{20}(48)^2 = 345.3$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 1705.2 - \frac{1}{20}(48)(40.5) = 1608$$

$$\hat{\beta} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{1608}{345.3} = 4.65$$

$$\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\,\overline{x} = 2.025 - (4.65)(2.4) = -9.135$$

$$\hat{y}_i = -9.135 + 4.65 x_i$$

استخدام المعادلة للتنبؤ إذا كان $x = 8.2$

$$\hat{y} = -9.135 + 4.65(8.2) = 28.995$$

إيجاد التقدير النقطي للوسط إذا كانت $x = 9.5$

$$\hat{y} = -9.135 + 4.65(9.5) = 35.04$$

د) أحسب القيمة المناظرة للبواقي (e_i)

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = 36.23 - 35.04 = 1.19$$

1-4-3- خصائص مقدرات المربعات الصغرى:

الخصائص الاحصائية لمقدرات المربعات الصغرى $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ بسيطة الوصف، إن الخطأ العشوائي (ε) للنموذج $y = \alpha + \beta x + \varepsilon$ هو متغير عشوائي بوسط صفر، وتباين (σ^2) نرمز له باختصار $NID(0,\sigma^2)$ ، حيث ε_i هو عبارة عن خطأ وليس عن انحراف مقصود وتوقعه يدور حوا الصفر بمعنى $E(\varepsilon_i) = 0$.

بمأن x [3]ثابتة y بوسط $\mu_{y/x} = \alpha + \beta x$ وتباين σ^2، لذلك فقيم $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ تتبع المشاهدة y ، إذن ملخص مقدر المربعات لمعامل الانحدار هو متغير عشوائي ، سنتحقق من تحيز وخصائص تباين مقدر المربعات الصغرى ل $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$.

قضية 1:

– إن المقدرين $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ الناتجين بواسطة طريقة المربعات الصغرى هما مقدرين غير متحيزين للمعلمتين α و α أي : $E(\hat{\alpha}) = \alpha \; , \; E(\hat{\beta}) = \beta$.

– أما تباين المقدرين $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ فهو كما يلي:

$$V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2} \quad , \quad V(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2} \right)$$

– بينما تغاير المقدرين $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ يكتب كما يلي:

$$\mathrm{cov}(\hat{\alpha} \, , \, \hat{\beta}) = - \frac{\overline{x}\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$$

الاثبات:

نتذكر بعض الخواص و هي:

$$E(e_i) = 0 \quad , \quad V(e_i) = \sigma^2 \; , \; E(y_i) = \alpha + \beta x_i \quad , \quad V(e_i) = \sigma^2$$

نبدأ بتوقع المقدر $\hat{\beta}$ فهو كما يلي:

[3] في الاحصاء نشاهد قيما عديدة للمتغير y ، نفرض أن هذه القيم ترجع الى توزيع احتمالي ل y ، ولكننا نفرض أن x عددا معروفا لم يتوزع بكيفية عشوائية بل نحدد له قيمة معينة في التجربة ، مثلا إذا كان y هو عدد مبيعات منتوج ما ، و x هو عدد الأشهر، فأن التجربة تحتوي على إعطاء x قيمة معينة (شهر معين) ومشاهدة النتيجة العشوائية y (قيمة المبيعات في ذلك الشهر) ، إذا كان الزوج (x, y) يتوزع طبيعيا لكانت دالة الانحدار خطية كما رأينا سابقا، يعني أن $\mu_{y/x} = \alpha + \beta x$.

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0$$

و بالتالي:

$$E\left(\hat{\beta}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) E(y_i)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) E(\alpha + \beta x_i)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$= \frac{\alpha \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$E\left(\hat{\beta}\right) = \beta \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} = \beta$$

و منه $E\left(\hat{\beta}\right) = \beta$

أما توقع المقدر $\hat{\alpha}$ فهو كالتالي:

من العلاقة $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$ فالتوقع يكون :

$$E(\hat{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{E(y_i)}{n} - \bar{x}\, E\left(\hat{\beta}\right)$$

$$E(\hat{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\alpha + \beta x_i)}{n} - \bar{x}\,\beta = \alpha + \bar{x}\beta - \bar{x}\beta = \alpha$$

و منه $E(\hat{\alpha}) = \alpha$

أما تباين المقدر $\hat{\beta}$ فهو كما يلي:

$$V\left(\hat{\beta}\right)=\frac{V\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i\right)\right]}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right)^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(V\left[\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i\right)\right]\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right)^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2V\left(y_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right)^2}=\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$$

بينما تباين المقدر $\hat{\alpha}$ فهو كما يلي:

من العلاقة $\hat{\alpha}=\overline{y}-\hat{\beta}\,\overline{x}$ فالتباين يكون :

$$V\left(\hat{\alpha}\right)=V\left(\overline{y}\right)+V\left(\hat{\beta}\,\overline{x}\right)-2\overline{x}\operatorname{cov}\left(\overline{y},\hat{\beta}\right)$$

$$V\left(\overline{y}\right)=V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)=\frac{\sigma^2}{n}$$

$$V\left(\hat{\beta}\,\overline{x}\right)=\overline{x}^2V\left(\hat{\beta}\right)=\overline{x}^2\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}_i\right)^2}$$

$$\operatorname{cov}\left(\overline{y}\ ,\ \hat{\beta}\right)=\operatorname{cov}\left(\overline{y}\ ,\ \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)y_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}_i\right)^2}\right)$$

نستخدم خصائص التباين المشترك (التغاير):

$$\operatorname{cov}\left(ax+b\ ,\ cy+d\right)=ac\operatorname{cov}\left(x\ ,\ y\right)\ ,\ \operatorname{cov}\left(x\ ,\ x\right)=V\left(x\right)$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}_i\right)^2}\operatorname{cov}\left(\overline{y}\ ,\ y_i\right)$$

$$\operatorname{cov}\left(\frac{1}{n}y_i\ ,\ y_i\right)=\frac{\sigma^2}{n}\quad ,\quad \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)=0$$

$$\operatorname{cov}\left(\overline{y}\ ,\ \hat{\beta}\right)=0$$

و بالتالي:

$$V(\hat{\alpha}) = V(\overline{y}) - V(\hat{\beta}\overline{x}) - 2\overline{x}\,\mathrm{cov}(\overline{y}, \hat{\beta})$$

$$V(\hat{\alpha}) = \frac{\sigma^2}{n} + \overline{x}^2 \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

$$V(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \right)$$

وأخيرا تغاير المقدرين $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ هو كما يلي:

$$\mathrm{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \mathrm{cov}(\overline{y} - \hat{\beta}\overline{x}, \hat{\beta})$$

من خصائص التباين المشترك نجد: $\mathrm{cov}(x+z, y) = \mathrm{cov}(x, y) + \mathrm{cov}(z, y)$

و منه $\mathrm{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \mathrm{cov}(\overline{y} - \hat{\beta}\overline{x}, \hat{\beta}) = \mathrm{cov}(\overline{y}, \hat{\beta}) - \overline{x}\,\mathrm{cov}(\hat{\beta}, \hat{\beta})$

وقد تم إثبات $\mathrm{cov}(\overline{y}, \hat{\beta}) = 0$ ، ونجد أيضا $\mathrm{cov}(\hat{\beta}, \hat{\beta}) = V(\hat{\beta})$ ، إذن :

$$\mathrm{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = 0 - \overline{x}\, V(\hat{\beta})$$

$$\mathrm{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = -\frac{\overline{x}\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

1-4-4- اختبار معنوية معاملي الانحدار الخطي البسيط:

لاختبار معنوية ميل خط الانحدار (أو معامل الانحدار) ومعامل التقاطع، رأينا سابقا أن الخطأ العشوائي (ε)أنه يتوزع توزيعا طبيعيا بوسط صفر، وتباين (σ^2) نرمز له باختصار $NID(0, \sigma^2)$.

سنطبق اختبار t و اختبار F لفحص معنوية معاملي الانحدار (تحليل التباين).

1-4-4-1- اختبار معنوية معامل الانحدار $\hat{\beta}$:

صياغة الفرضية تكون على النحو التالي
$$H_0 : \beta = \beta_0$$
$$H_1 : \beta \neq \beta_0$$

أما عن إحصاءة الاختبار فتكون كما يلي $T_0 = \dfrac{\hat{\beta} - \beta_0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 / S_{xx}}} = \dfrac{\hat{\beta} - \beta_0}{Se(\hat{\beta})}$، تتبع توزيع t مع n-2 درجة حرية رفض H_0 إذا كان $|t| \geq t_{\alpha/2, n-2}$

وهناك حالة خاصة جدا وهي كثيرة الاستخدام وهي :
$$H_0 : \beta = 0$$
$$H_1 : \beta \neq 0$$

1-4-4-2- اختبار معنوية معامل التقاطع $\hat{\alpha}$:

صياغة الفرضية تكون على النحو التالي
$$H_0 : \alpha = \alpha_0$$
$$H_1 : \alpha \neq \alpha_0$$

أما عن إحصاءة الاختبار فتكون كما يلي $T_0 = \dfrac{\hat{\alpha} - \alpha_0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[\dfrac{1}{n} + \dfrac{(\bar{x})^2}{S_{xx}} \right]}} = \dfrac{\hat{\alpha} - \alpha_0}{Se(\hat{\alpha})}$،

تتبع توزيع t مع n-2 درجة حرية رفض H_0 إذا كان $|t| \geq t_{\alpha/2, n-2}$

وهناك حالة خاصة جدا وهي كثيرة الاستخدام و هي:
$$H_0 : \alpha = 0$$
$$H_1 : \alpha \neq 0$$

مثال 9:

نرجع لبيانات المثال رقم() الخاص بعدد ساعات تحضير الطالب للامتحان (x) والعلامات التي حصل عليها (y)، (نستخدم $\alpha = 0.01$)

المطلوب:

اختبار معنوية معلمات نموذج الانحدار $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$

حل المثال 9:

$$n = 10 \quad , \quad \hat{\beta} = 0.66 \quad , \quad S_{xx} = 376 \quad , \quad \bar{x} = 10$$

$$\sum y_i = 113.5 \quad , \quad \sum x_i y_i = 1385 \quad , \quad \sum y_i^2 = 1463.25$$

1-4-4-3- إيجاد الخطأ المعياري للتقدير $\hat{\sigma}$

يمكن إيجاده بطرقتين و هي:

الطريقة الأولى: حساب $\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_E}{n-2}$ **حيث:** $SS_E = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$.

	x_i	y_i	$\hat{y}_i$	$e_i = y_i - \hat{y}_i$	e_i^2
	4	6.5	7.39	−0.89	0.7921
	9	12	10.69	1.31	1.7161
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
المجموع					8.8106

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{SS_E}{n-2}} = \sqrt{\frac{8.8106}{8}} = 1.049$$

الطريقة الثانية: يمكن استخدام الصيغة التالية:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \hat{\alpha}\sum_{i=1}^{n} y_i - \hat{\beta}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n-2}} = \sqrt{\frac{1463.25 - (4.75)(113.5) - (0.66)(1385)}{8}} = 1.10$$

اختبار معنوية معامل الانحدار $\hat{\beta}$:

$$\alpha = 0.01 \ ، \quad \begin{aligned} H_0 &: \beta = 0 \\ H_1 &: \beta \neq 0 \end{aligned}$$

$$T_0 = \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 / S_{xx}}} = \frac{0.66}{\sqrt{1.22/376}} = 11.60 \quad , \quad t_{0.005,8} = 2.355$$

بمأن t المحسوبة (12.19) أكبر من القيمة الجدولية (2.355)، وهذا يعني رفض فرض العدم (H_0) مما يدل على معنوية معامل الانحدار ($\hat{\beta}$).

ج) اختبار معنوية معامل التقاطع $\hat{\alpha}$:

$$H_0 : \alpha = 0 \quad H_1 : \alpha \neq 0 \quad ، \quad \alpha = 0.01$$

$$T_0 = \frac{\hat{\alpha}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x})^2}{S_{xx}} \right]}} = \frac{4.75}{\sqrt{1.22 \left[\frac{1}{10} + \frac{(10)^2}{376} \right]}} = 7.10 \text{ ، } t_{0.005,8} = 2.355$$

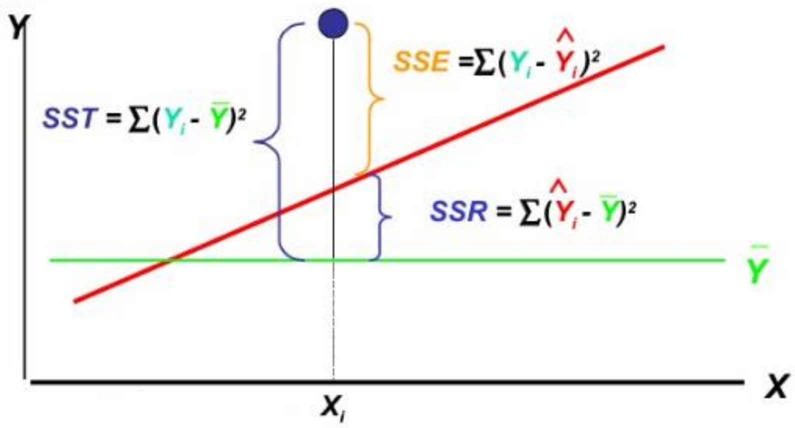
بمأن t المحسوبة (7.1) أكبر من القيمة الجدولية (2.355)، وهذا يعني رفض فرض العدم (H_0) مما يدل على معنوية معامل التقاطع ($\hat{\alpha}$).

1-4-5- تحليل التباين: مدخل لاختبار معنوية الانحدار:

تدعى هذه الطريقة بتحليل التباين ونستطيع استخدامها لاختبار معنوية معامل الانحدار، حيث تكون الصيغة المستخدمة كما يلي:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

ونوضح ذلك وفق الشكل الاتي:



بحيث أن $SS_T = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_i)^2$ هو : إجمالي مجموع المربعات.

$SS_R = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$ هو : مجموع مربعات الانحدار.

$SS_E = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$ هو : مجموع مربعات الخطأ.

حيث أن: $SS_T = SS_R + SS_E$ ، $SS_R = \hat{\beta} S_{xy}$ ، $SS_E = SS_T - \hat{\beta} S_{xy}$.

صياغة الفرضيات تكون على النحو الاتي:

$$\begin{cases} H_0: & \text{نموذج الانحدار غير معنوي} \\ H_1: & \text{نموذج الانحدار معنوي} \end{cases}$$

احصاءة الاختبار (فيشر) تكون كما يلي:

$$F_0 = \frac{SS_R / 1}{SS_E / (n-2)} = \frac{MS_R}{MS_E}$$

SS_T له درجة حرية $(n-1)$ و SS_R و SS_E لهما 1 و $(n-2)$ درجات حرية على التوالي، يمكننا أن نلاحظ: $E(SS_R) = \hat{\beta} S_{xx}$, $E\left(\frac{SS_E}{n-2}\right) = \sigma^2$ ، و SS_E / σ^2 , SS_R / σ^2 هما متغيران عشوائيان يتبعان توزيع كي مربع مع $(n-2)$ و 1 درجات حرية على التوالي.

ويمكننا أيضا كتابة احصاءة الاختبار (فيشر) على الشكل الاتي:

$$F_0 = \frac{r^2}{(1-r^2)/(n-2)}$$

يتم رفض H_0 إذا كانت: $F_0 > F_{\alpha,1,n-2}$

أما جدول تحليل التباين الأحادي (ANOVA) هو كما يلي:

مصدر الاختلاف	مربعات الأخطاء	درجات الحرية	متوسط المربعات	F_0
الانحدار	$SS_R = \hat{\beta} S_{xy}$	1	MS_R	$\frac{MS_R}{MS_E}$
الخطأ (البواقي)	$SS_E = SS_T - SS_R$	$n-2$	MS_E	
الكلي	SS_T	$n-1$		

مثال 10:

استخدم بيانات المثال السابق لاختبار معنوية نموذج الانحدار وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$ ؟

حل المثال 10:

$$SS_T = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2$$

$$S_{xy} = 250 \quad , \quad MS_E = \hat{\sigma}^2 = 1.10$$

$$SS_T = 1463 - 10(11.35)^2 = 174.775$$

$$SS_R = \hat{\beta} S_{xy} = 0.66(250) = 165$$

$$SS_E = SS_T - SS_R = 174.775 - 165 = 9.775$$

$$MS_R = SS_R / 1 = 165$$

$$MS_E = SS_E / (n-2) = 9.775 / 8 = 1.22$$

$$F_0 = \frac{MS_R}{MS_E} = \frac{165}{1.22} = 135.03 \quad , \quad F_{0.01,1,8} = 11.26$$

الاستنتاج:

بمأن قيمة F_0 المحسوبة أكبر من قيمة F الجدولية ، نرفض الفرضية الصفرية H_0 ، مما يدل على معنوية نموذج الانحدار الخطي البسيط، وبالتالي فأن النموذج يمثل العلاقة بين x و y المتغيرين أفضل تمثيل.

ملاحظة 1: نلاحظ أن: $F_0 = T_0^2$

1-4-6- التحليل الوصفي للبواقي L'Analyse descriptive des résidus

إن الأخطاء تقدر ب $\hat{e}_i$ حيث $i = 1,\dots,n$ ، تدعى هذه بالبواقي، تجريبيا لها متوسط يحسب كما يلي:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{e}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = 0$$

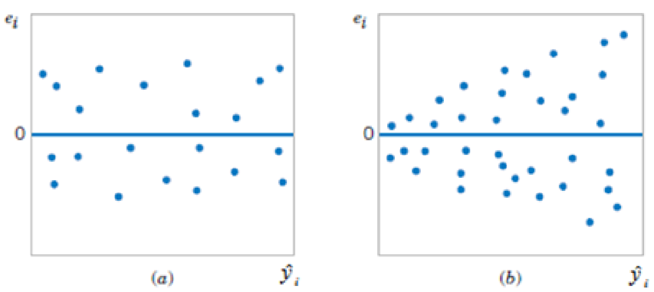
لكن تمثيل $\hat{e}_i$ بدالة ل x_i قد تكشف لنا طبيعة النموذج (سيئ/ جيد)، وقبل تقديم أمثلة حول تمثيل الأخطاء العشوائية يجب التحقق من الفرضيات التالية:

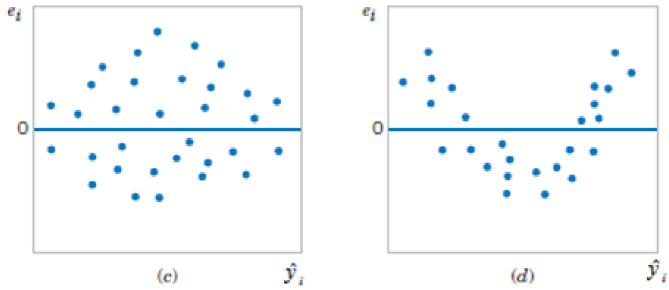
- وجود علاقة خطية بين x و y .
- توزيع الأخطاء طبيعي بوسط صفر وتباين ثابت σ^2 (فرضية تجانس تباين الخطأ العشوائي **Homoscedasticity**).
- عدم وجود ارتباط ذاتي **Autocorrélation** بين الأخطاء العشوائية.

وكما قلنا أن تمثيل الخطأ يكون في المحور العمودي (y) و $\hat{y}$ على المحور الأفقي (x).

للتوضيح أكثر نبين ذلك وفق الأشكال الأتية:

الشكل (1-4): التمثيل البياني للبواقي





a): عدم وجود مشكلة.

b): زيادة تباين الخطأ العشوائي بزيادة $\hat{y}$.

c): زيادة وتناقص في تباين الخطأ العشوائي (مشكلة عدم تجانس تباين الخطأ العشوائي).

d): عدم ملائمة العلاقة الخطية (يجب استخدام نماذج أخرى غير خطية).

1-5- التسوية غير الخطية L'ajustement non linéaire:

في الفقرة السابقة كانت هناك إلزامية الخطية بين المتغيرين x و y، هذا الشرط يمكننا من إجراء التسوية الخطية وإيجاد مستقيم التسوية، لكن كثير من الظواهر الاقتصادية لا يتوفر هذا الشرط، أي هنا علاقة غير خطية بين المتغيرين.

سنطرق الى نموذجين:

- التسوية بواسطة دالة أسية وهي من الشكل: $y = \alpha \beta^x$.
- التسوية بواسطة دالة قوة و هي من الشكل: $y = \alpha x^\beta$.

1-5-1- التسوية بواسطة دالة أسية : $y = \alpha \beta^x$

نورد المثال الاتي لتوضيح هذه التسوية.

مثال 11:

كان انتاج إحدى الدول من البترول(الانتاج بألاف البراميل) في ستة سنوات الأخيرة كما يلي:

السنوات	1	2	3	4	5	6
كمية الانتاج	2	4	7.8	15	29	55

نلاحظ في هذا المثال سرعة تطور المتغير y ، حيث لا يمكن تسويته بواسطة دالة خطية (مستقيم)، قيم y تضرب في 2 في كل سنة تقريبا (متتالية هندسية أساسها 2).

المطلوب: ما هي احسن تسوية في هذه الحالة؟

حل المثال 11:

التسوية المناسبة في هذه الحالة تتم وفق دالة أسية من الشكل: $y = \alpha\beta^{x}.....(I)$

لحل هذا المثال يجب إرجاع الصيغة (I) الى شكل خطي من خلال ادخال اللوغاريتم من الطرفين.

$$Ln\ y = Ln\left(\alpha\beta^{x}\right)$$

$$\underbrace{Ln\ y}_{y'} = \underbrace{Ln\ \alpha}_{\alpha'} + x\underbrace{Ln\ \beta}_{\beta'}$$

وبهذه تكون معادلة مستقيم من الشكل: $y' = \beta' x$

نضع $\begin{cases} \alpha' = Ln\ \alpha \\ \beta' = Ln\ \beta \end{cases} ....(II)$

بعد تحديد α' و β' نرجع (II) الى الحالة السابقة وفق التحويل الاتي:

$$\begin{cases} \alpha = e^{\alpha'} \\ \beta = e^{\beta'} \end{cases}$$

	x_i	y_i	$y'_i = Ln\, y_i$	x_i^2	$x_i y'$
	1	2	0.693	1	0.693
	2	4	1.386	4	2.742
	3	7.8	2.054	9	6.162
	4	15	2.708	16	10.832
	5	29	3.367	25	16.835
	6	55	4.007	36	24.042
$\sum$	21		14.215	91	61.336
Σ / n	3.5		2.369	15.16	10.22

نجري الحسابات التالية:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 3.5 \quad , \quad \overline{y'} = \frac{\sum y'_i}{n} = 2.369$$

$$\operatorname{cov}(x, y') = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y'_i - (\bar{x})(\overline{y'}) = 10.22 - (3.5)(2.369) = 1.928$$

$$V(x) = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 = 15.16 - (3.5)^2 = 2.91$$

$$\beta' = \frac{\operatorname{cov}(x, y')}{V(x)} = \frac{1.928}{2.91} = 0.662$$

$$\alpha' = \overline{y'} - \beta'\bar{x} = 2.369 - (0.662)(3.5) = 0.049$$

الخطوة الاتية نرجع المعاملين α' و β' الى الحالة السابقة وفق التحويل الاتي:

$$\begin{cases} \alpha = e^{\alpha'} = e^{0.662} = 1.938 \\ \beta = e^{\beta'} = e^{0.049} = 1.05 \end{cases}$$

وهكذا تكون التسوية الأسية وفق الشكل الاتي:

$$\hat{y}_i = \hat{\alpha}\hat{\beta}^{x_i} = 1.05(1.938)^{x_i}$$

1-5-2- التسوية بواسطة دالة قوة : $y = \alpha x^{\beta}$

نورد المثال الاتي لتوضيح هذه التسوية.

مثال 12:

لدينا 5 مشاريع مبينة فيها حجم الاستثمار مع قيمة الايراد (الوحدة بمليون دج) في كل مشروع.

حجم الاستثمار	6	10	18	34	60
قيمة الايرادات	10	28	85	240	730

نلاحظ في هذا المثال سرعة تطور المتغير x، كانت وفقا لأساس متتالية هندسية أساسها 2(القيمة مضروبة في 2 تقريبا)، أما سرعة تطور المتغير y، كانت وفقا لأساس متتالية هندسية أساسها 3(القيمة مضروبة في 3 تقريبا).

المطلوب: ما هي احسن تسوية في هذه الحالة؟

حل المثال 12:

التسوية المناسبة في هذه الحالة تتم وفق دالة قوة من الشكل: $y = \alpha x^{\beta} .....(I)$

لحل هذا المثال يجب إرجاع الصيغة (I) الى شكل خطي من خلال ادخال اللوغاريتم من الطرفين.

$$Ln\ y = Ln\left(\alpha x^{\beta}\right)$$

$$\underbrace{Ln\ y}_{y'} = \underbrace{Ln\ \alpha}_{\alpha'} + \beta \underbrace{Ln\ x}_{x'}$$

وبهذه تكون معادلة مستقيم من الشكل: $y' = \beta x'$

نضع
$$\begin{cases} \alpha' = Ln\ \alpha \\ x' = Ln\ x \end{cases}$$

بعد تحديد α' نجري التحويل الاتي:

$$\{\alpha = e^{\alpha'}$$

	x_i	y_i	$x'_i = Ln\, x_i$	$y'_i = Ln\, y_i$	$x_i^{2\prime}$	$x'_i y'$
	6	10	1.791	2.302	3.207	4.122
	10	28	2.302	3.332	5.299	7.670
	18	85	2.890	4.442	8.352	12.837
	34	240	3.526	5.480	12.432	19.322
	60	730	4.094	6.593	16.76	26.991
Σ			14.603	22.149	46.05	70.942
Σ / n			2.920	4.429	9.21	14.188

نجري الحسابات التالية:

$$\operatorname{cov}(x', y') = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x'_i y'_i - (\overline{x'})(\overline{y'}) = 14.188 - (2.920)(4.429) = 1.25$$

$$V(x') = \frac{\sum x_i'^2}{n} - (\overline{x'})^2 = 9.21 - (2.920)^2 = 0.68$$

$$\beta = \frac{\operatorname{cov}(x', y')}{V(x')} = \frac{1.25}{0.68} = 1.838$$

$$\alpha' = \overline{y}' - \beta\,\overline{x}' = 4.429 - (1.838)(9.92) = -0.937$$

الخطوة الاتية نرجع α' الى الحالة السابقة وفق التحويل الاتي:

$\beta = 1.838$ مع ، $\{\alpha = e^{\alpha'} = e^{-0.937} = 0.391$

وهكذا تكون التسوية وفق دالة قوة من الشكل الاتي:

$$\hat{y}_i = \hat{\alpha}\, x_i^{\hat{\beta}} = (0.391)\, x_i^{1.838}$$

6-1- نتائج حول التسويات الثلاثة (الخطية ، الأسية ، القوة):

إذا كان معامل الارتباط بين المتغيرين x و y يتجاوز 0.8 فأن التسوية الخطية تكون مناسبة في هذه الحالة.

إذا افترضنا أننا لم نحسب قيمة هذا المعامل، ما هي أحسن تسوية نقوم بها في هذه الحالة؟ هل تكون بواسطة مستقيم (تسوية خطية)؟ أم بواسطة دالة أسية ؟ أم بواسطة دالة قوة ؟

الجواب يكون كما يلي:

في هذه الحالة نبدأ بالتسوية الخطية، نفترض أن x و y متغيران مرتبطان بواسطة دالة خطية من الشكل $y_i = \alpha + \beta x_i$، فإذا تزايد x وفقا لمتتالية حسابية q، أي أنه من أجل كل i لدينا $x_{i+1} = x_i + q$ فإن:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= \alpha + \beta x_{i+1} \\ &= \alpha + \beta (x_i + q) = \underbrace{\alpha + \beta x_i}_{y_i} + \beta q \end{aligned}$$

$$y_{i+1} = y_i + \beta q$$

إذن نستخلص إذا تزايد x وفقا لمتتالية حسابية (أساسها q) قابله زيادة في y وفقا لمتتالية حسابية (أساسها βq)، فأن التسوية الخطية تكون مناسبة ومقبولة في هذه الحالة.

نفترض أن x و y متغيران مرتبطان بواسطة دالة أسية من الشكل $y_i = \alpha \beta^{x_i}$، فإذا تزايد x وفقا لمتتالية حسابية q، أي أنه من أجل كل i لدينا $x_{i+1} = x_i + q$ فإن:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= \alpha \beta^{x_{i+1}} \\ &= \alpha \beta^{x_i + q} \\ &= \underbrace{\alpha \beta^{x_i}}_{y_i} . \beta^{q} = y_i \beta^{q} \end{aligned}$$

إذن نستخلص إذا تزايد x وفقا لمتتالية حسابية (أساسها q) قابله زيادة في y وفقا لمتتالية هندسية (أساسها βq)، فأن أفضل تسوية في هذه الحالة تكون وفقا دالة أسية.

نفترض أن x و y متغيران مرتبطان بواسطة دالة قوة من الشكل $y_i = \alpha x_i^{\beta}$، فإذا تزايد x وفقا لمتتالية هندسية أساسها q، أي أنه من أجل كل i لدينا $x_{i+1} = x_i q$ فإن:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= \alpha \left(x_{i+1} \right)^{\beta} \\ &= \alpha \left(x_i q \right)^{\beta} \\ &= \underbrace{\alpha x_i^{\beta}}_{y_i} . q^{\beta} = y_i q^{\beta} \end{aligned}$$

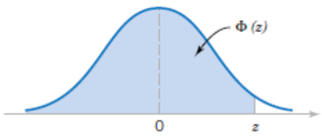
إذن نستخلص إذا تزايد x وفقا لمتتالية هندسية (أساسها q) قابله زيادة في y وفقا لمتتالية هندسية (أساسها q^{β})، فأن أفضل تسوية في هذه الحالة تكون وفقا دالة قوة.

ملاحق

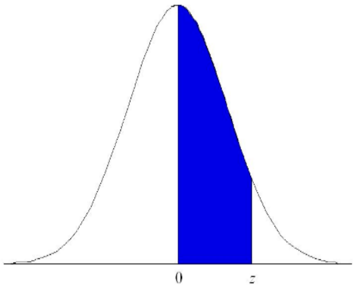
جداول إحصائية

ملحق 1: جدول التوزيع الطبيعي

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du$$

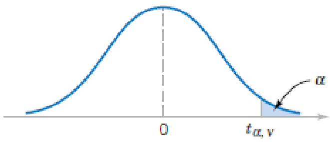


Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998



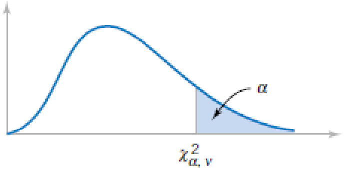
ملحق 2: جدول التوزيع الطبيعي

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000



ملحق 3: جدول توزيع student $t_{\nu,\alpha}$

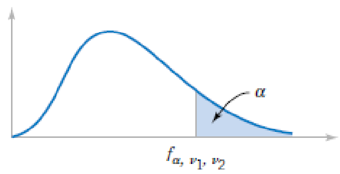
ν	α													
	0.40	**0.30**	**0.20**	**0.15**	**0.10**	**0.05**	**0.025**	**0.02**	**0.015**	**0.01**	**0.0075**	**0.005**	**0.0025**	**0.0005**
1	0.325	0.727	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	15.895	21.205	31.821	42.434	63.657	127.322	636.590
2	0.289	0.617	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	5.643	6.965	8.073	9.925	14.089	31.598
3	0.277	0.584	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	3.896	4.541	5.047	5.841	7.453	12.924
4	0.271	0.569	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.298	3.747	4.088	4.604	5.598	8.610
5	0.267	0.559	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.003	3.365	3.634	4.032	4.773	6.869
6	0.265	0.553	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	2.829	3.143	3.372	3.707	4.317	5.959
7	0.263	0.549	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.715	2.998	3.203	3.499	4.029	5.408
8	0.262	0.546	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.634	2.896	3.085	3.355	3.833	5.041
9	0.261	0.543	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.574	2.821	2.998	3.250	3.690	4.781
10	0.260	0.542	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.527	2.764	2.932	3.169	3.581	4.587
11	0.260	0.540	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.491	2.718	2.879	3.106	3.497	4.437
12	0.259	0.539	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.461	2.681	2.836	3.055	3.428	4.318
13	0.259	0.538	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.436	2.650	2.801	3.012	3.372	4.221
14	0.258	0.537	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.415	2.624	2.771	2.977	3.326	4.140
15	0.258	0.536	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.397	2.602	2.746	2.947	3.286	4.073
16	0.258	0.535	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.382	2.583	2.724	2.921	3.252	4.015
17	0.257	0.534	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.368	2.567	2.706	2.898	3.222	3.965
18	0.257	0.534	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.356	2.552	2.689	2.878	3.197	3.922
19	0.257	0.533	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.346	2.539	2.674	2.861	3.174	3.883
20	0.257	0.533	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.336	2.528	2.661	2.845	3.153	3.850
21	0.257	0.532	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.189	2.328	2.518	2.649	2.831	3.135	3.819
22	0.256	0.532	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.183	2.320	2.508	2.639	2.819	3.119	3.792
23	0.256	0.532	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.177	2.313	2.500	2.629	2.807	3.104	3.768
24	0.256	0.531	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.172	2.307	2.492	2.620	2.797	3.091	3.745
25	0.256	0.531	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.167	2.301	2.485	2.612	2.787	3.078	3.725
26	0.256	0.531	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.162	2.296	2.479	2.605	2.779	3.067	3.707
27	0.256	0.531	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.158	2.291	2.473	2.598	2.771	3.057	3.690
28	0.256	0.530	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.154	2.286	2.467	2.592	2.763	3.047	3.674
29	0.256	0.530	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.150	2.282	2.462	2.586	2.756	3.038	3.659
30	0.256	0.530	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.147	2.278	2.457	2.581	2.750	3.030	3.646
40	0.255	0.529	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.123	2.250	2.423	2.542	2.704	2.971	3.551
60	0.254	0.527	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.099	2.223	2.390	2.504	2.660	2.915	3.460
120	0.254	0.526	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.076	2.196	2.358	2.468	2.617	2.860	3.373
∞	0.253	0.524	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.054	2.170	2.326	2.432	2.576	2.807	3.291



ملحق 4: جدول توزيع كي مربع $\chi^2_{\alpha,\nu}$

	α														
ν	**0.001**	**0.005**	**0.010**	**0.025**	**0.050**	**0.100**	**0.250**	**0.500**	**0.750**	**0.900**	**0.950**	**0.975**	**0.990**	**0.995**	**0.999**
1	10.83	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.45	0.10	0.02					
2	13.82	10.60	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	0.58	0.21	0.10	0.05	0.02	0.01	
3	16.27	12.84	11.34	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	0.58	0.35	0.22	0.11	0.07	0.02
4	18.47	14.86	13.28	11.14	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	0.71	0.48	0.30	0.21	0.09
5	20.52	16.75	15.09	12.83	11.07	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	0.83	0.55	0.41	0.21
6	22.46	18.55	16.81	14.45	12.59	10.64	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	0.87	0.68	0.38
7	24.32	20.28	18.48	16.01	14.07	12.02	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	0.99	0.60
8	26.12	21.95	20.09	17.53	15.51	13.36	10.22	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34	0.86
9	27.88	23.59	21.67	19.02	16.92	14.68	11.39	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73	1.15
10	29.59	25.19	23.21	20.48	18.31	15.99	12.55	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16	1.48
11	31.26	26.76	24.72	21.92	19.68	17.28	13.70	10.34	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60	1.83
12	32.91	28.30	26.22	23.34	21.03	18.55	14.85	11.34	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07	2.21
13	34.53	29.82	27.69	24.74	22.36	19.81	15.98	12.34	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57	2.62
14	36.12	31.32	29.14	26.12	23.68	21.06	17.12	13.34	10.17	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07	3.04
15	37.70	32.80	30.58	27.49	25.00	22.31	18.25	14.34	11.04	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60	3.48
16	39.25	34.27	32.00	28.85	26.30	23.54	19.37	15.34	11.91	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14	3.94
17	40.79	35.72	33.41	30.19	27.59	24.77	20.49	16.34	12.79	10.09	8.67	7.56	6.41	5.70	4.42
18	42.31	37.16	34.81	31.53	28.87	25.99	21.60	17.34	13.68	10.86	9.39	8.23	7.01	6.26	4.90
19	43.82	38.58	36.19	32.85	30.14	27.20	22.72	18.34	14.56	11.65	10.12	8.91	7.63	6.84	5.41
20	45.31	40.00	37.57	34.17	31.41	28.41	23.83	19.34	15.45	12.44	10.85	9.59	8.26	7.43	5.92
21	46.80	41.40	38.93	35.48	32.67	29.62	24.93	20.34	16.34	13.24	11.59	10.28	8.90	8.03	6.45
22	48.27	42.80	40.29	36.78	33.92	30.81	26.04	21.34	17.24	14.04	12.34	10.98	9.54	8.64	6.98
23	49.73	44.18	41.64	38.08	35.17	32.01	27.14	22.34	18.14	14.85	13.09	11.69	10.20	9.26	7.53

24	51.18	45.56	42.98	39.36	36.42	33.20	28.24	23.34	19.04	15.66	13.85	12.40	10.86	9.89	8.08
25	52.62	46.93	44.31	40.65	37.65	34.38	29.34	24.34	19.94	16.47	14.61	13.12	11.52	10.52	8.65
30	59.70	53.67	50.89	46.98	43.77	40.26	34.80	29.34	24.48	20.60	18.49	16.79	14.95	13.79	11.59
40	73.40	66.77	63.69	59.34	55.76	51.81	45.62	39.34	33.66	29.05	26.51	24.43	22.16	20.71	17.92
50	86.66	79.49	76.15	71.42	67.50	63.17	56.33	49.33	42.94	37.69	34.76	32.36	29.71	27.99	24.67
60	99.61	91.95	88.38	83.30	79.08	74.40	66.98	59.33	52.29	46.46	43.19	40.48	37.48	35.53	31.74
70	112.32	104.21	100.43	95.02	90.53	85.53	77.58	69.33	61.70	55.33	51.74	48.76	45.44	43.28	39.04
80	124.84	116.32	112.33	106.63	101.88	96.58	88.13	79.33	71.14	64.28	60.39	57.15	53.54	51.17	46.52
90	137.21	128.30	124.12	118.14	113.15	107.57	98.65	89.33	80.62	73.29	69.13	65.65	61.75	59.20	54.16
100	149.45	140.17	135.81	129.56	124.34	118.50	109.14	99.33	90.13	82.36	77.93	74.22	70.06	67.33	61.92



ملحق 5: جدول توزيع فيشر $F_{0.01, v1, v2}$

α = 0.01	درجات حرية البسط (ν_1)																		
درجة حرية المقام (ν_2)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
1	4052.2	4999.5	5403.4	5624.6	5763.7	5859.0	5928.4	5981.1	6022.5	6055.9	6106.3	6157.3	6208.7	6239.8	6260.7	6286.8	6313.0	6339.4	6365.9
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.58	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.91	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.45	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.30	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.06	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.26	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.71	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.31	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.01	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.76	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.57	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.41	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.28	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.16	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.07	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	2.98	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57

	19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.91	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
	20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.84	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
	21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.79	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
	22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.73	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
	23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.69	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
	24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.64	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
	25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.60	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
	26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.57	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
	27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.54	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
	28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.51	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
	29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.48	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
	30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.45	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
	40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.27	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
	60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.10	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
	120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.93	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
	∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.77	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

جدول توزيع فيشر (تابع) $F_{0.025, v1, v2}$

α = 0.025	درجات حرية البسط (v_1)																		
درجة حرية المقام (v_2)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.9	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	976.7	984.9	993.1	998.1	1001.4	1005.6	1009.8	1014.0	1018.3
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.50	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.27	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.11	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.40	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.94	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.60	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.35	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.16	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.01	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.88	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.78	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.69	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.61	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.55	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.49	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.44	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.40	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.36	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.32	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.29	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.26	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.23	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.21	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.18	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.16	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.14	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.12	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	1.99	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.87	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.75	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.63	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

جدول توزيع فيشر (تابع) $F_{0.05, v1, v2}$

$\alpha = 0.05$	درجات حرية البسط (v_1)																		
درجة حرية المقام (v_2)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**60**	**120**	∞
1	161.5	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.6	241.9	243.9	246.0	248.0	249.3	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.52	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.83	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.40	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.11	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.89	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.73	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.60	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.50	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.41	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.34	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.28	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.23	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.18	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.14	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.07	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.02	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.97	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.94	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.92	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.89	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.88	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.78	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.69	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.60	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.51	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

جدول توزيع فيشر (تابع) $F_{0.10, v1, v2}$

$\alpha = 0.10$		درجات حرية البسط (v_1)																		
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**60**	**120**	∞
درجة حرية المقام (v_2)	**1**	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.05	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
	2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
	3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.17	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
	4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
	5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
	6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.81	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
	7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.57	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
	8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
	9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
	10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.17	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
	11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
	12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.03	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
	13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
	14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.93	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
	15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.89	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
	16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
	17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.83	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
	18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.80	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
	19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.78	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
	20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
	21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
	22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
	23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.71	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
	24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
	25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.68	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
	26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.67	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
	27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.66	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
	28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.65	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
	29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.64	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
	30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.63	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
	40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
	60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.50	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
	120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.44	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
	∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

جدول توزيع فيشر (تابع) $F_{0.25,\, v1,\, v2}$

$\alpha = 0.25$	درجات حرية البسط (v_1)																		
درجة حرية المقام (v_2)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
1	5.83	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.26	9.32	9.41	9.49	9.58	9.63	9.67	9.71	9.76	9.80	9.85
2	2.57	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.37	3.38	3.39	3.41	3.43	3.44	3.44	3.45	3.46	3.47	3.48
3	2.02	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.44	2.45	2.46	2.46	2.46	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47
4	1.81	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
5	1.69	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.88	1.88	1.88	1.88	1.87	1.87	1.87
6	1.62	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.77	1.76	1.76	1.75	1.75	1.75	1.74	1.74	1.74
7	1.57	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69	1.69	1.68	1.68	1.67	1.67	1.66	1.66	1.65	1.65	1.65
8	1.54	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.63	1.63	1.62	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.58
9	1.51	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.55	1.55	1.54	1.54	1.53	1.53
10	1.49	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.52	1.51	1.51	1.50	1.49	1.48
11	1.47	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.47	1.46	1.45
12	1.46	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.45	1.44	1.43	1.42
13	1.45	1.55	1.55	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.41	1.40
14	1.44	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.39	1.38
15	1.43	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.40	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36
16	1.42	1.51	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34
17	1.42	1.51	1.50	1.49	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33
18	1.41	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32
19	1.41	1.49	1.49	1.47	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.30
20	1.40	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.29
21	1.40	1.48	1.48	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28
22	1.40	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39	1.37	1.36	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28
23	1.39	1.47	1.47	1.45	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28	1.27
24	1.39	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.38	1.36	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26
25	1.39	1.47	1.46	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.34	1.33	1.31	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25
26	1.38	1.46	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.37	1.35	1.34	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26	1.25
27	1.38	1.46	1.45	1.43	1.42	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.33	1.32	1.30	1.30	1.28	1.27	1.26	1.24
28	1.38	1.46	1.45	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.34	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24
29	1.38	1.45	1.45	1.43	1.41	1.40	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.32	1.31	1.30	1.29	1.27	1.26	1.25	1.23
30	1.38	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.32	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26	1.24	1.23
40	1.36	1.44	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.31	1.30	1.28	1.26	1.25	1.24	1.22	1.21	1.19
60	1.35	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.27	1.25	1.23	1.22	1.21	1.19	1.17	1.15
120	1.34	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26	1.24	1.22	1.20	1.19	1.18	1.16	1.13	1.10
∞	1.32	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24	1.22	1.19	1.17	1.16	1.14	1.12	1.08	1.00

المراجع المعتمدة:

I) الكتب باللغة العربية:.

1- بن يخلف مصطفى ، الاحتمالات والإحصاء الرياضي، دار النشر المغربية، ط1، المغرب، 1975.

2- عمر قاسم عزات ، مبادئ الاحتمالات والإحصاء، منشورات جامعة دمشق، 1995.

3-بداوي محمد، دوة محمد، الاحصاء المطبق في العلوم الاجتماعية، دار اليازوري، عمان، 2015.

II) الكتب باللغة الفرنسية:

1- Pierre Boulay Jean, Staistique mathématique ellipses, paris 2010.

2- Saporta Gilbert, probabilité, Analyse des données et statistique, 2 édition, technique , Paris 2006.

3-Charles pupion Pierre, statistique pour la gestion, 3éme édition, Duno, Paris, 2012.

4-Tribout Brigitte, statistique pour économistes et gestionnaires, pearson Education, Paris, 2007.

5-Lejeune Michel, Statistique : La théorie et ses applications , Deuxième édition, Springer-Verlag, Paris, 2010.

6-Stephan Morgenthaler , Introduction à la statistique ,press polytechnique et universitaires romandes , Lausanne , 2007.

III) الكتب باللغة الانجليزية:

1-Miller Irwin, Jhon Preund , probability and statistics for engineers, 2nd édition, prentice-Hall, New jersey.

2-New bold Paul, Statistics for Business and economics, fourth edition, prentice-Hall International .Inc , New jersey, 1995.

3-Montgomery Douglas, George Runger, Applied Statistics and probability for Engineers, third edition, Jhon Wiley and Sons, Inc, New york T1, T2, 2002.

.