جديد

الرياضيات التطبيقية

فى

الميكانيكا

للثانوية العامة

الاستاتيكا

الفصل الأول : الاحتكاك

الفصل الثانى : العزوم

الفصـل الثالـث : القـوى المتوازيـة المستوية

الفصل الرابع : الاتزان العام

الفصل الخامس : الازدواجات

الفصل الأول : الاحـتكاك

قوة الاحتكاك :

هى قوة كامنة بين سطحين خشنين ولا تظهر إلا عند محاولة تحريك أحدهما على الآخر

قوة الاحتكاك النهائية (ك) :

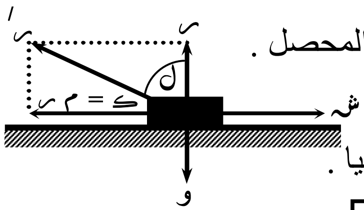
هى القيمة النهائية لقوة الاحتكاك عندما يكون الجسم على وشك الحركة أو متحرك .

معامل الاحتكاك (م) :

هو النسبة بين الاحتكاك النهائى (ك) ورد الفعل العمودى (ر) :

أى أن : م = $\frac{\text{ك}}{\text{ر}}$ ومن ذلك تكون ك = م ر (فى حالة الاحتكاك النهائى فقط)

زاوية الاحتكاك (ل) :



هى الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودى ورد الفعل المحصل .

رد الفعل المحصل (ر/) :

هو محصلة رد الفعل العمودى والاحتكاك عندما يكون نهائيا .

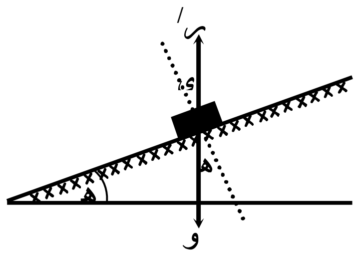
$$\boxed{\text{ر}^{/} = \text{ر}\sqrt{1 + \text{م}^2}}$$

العلاقة بين معامل الاحتكاك وظل زاوية الاحتكاك :

نجد من الشكل السابق أن : ظا ل = $\frac{\text{ك}}{\text{ر}}$ = $\frac{\text{م ر}}{\text{ر}}$ = م

$$\boxed{\text{م} = \text{ظا ل}}$$

أى أن : (معامل الاحتكاك = ظل زاوية الاحتكاك)



قاعدة هامة :

إذا وضع جسم على مستو مائل خشن وكان الجسم على وشك الانزلاق فإن قياس زاوية الاحتكاك يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى .

أى أن : $\boxed{\text{م} = \text{ظا هـ}}$ **(إذا كان الجسم تحت تأثير وزنه فقط)** .

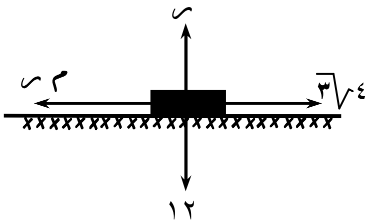
أمثلـــة محلـــولة

مثال (١) : وضع جسم وزنه ١٢ نيوتن على مستوى أفقى خشن ثم شد الجسم بقوة أفقية ماسة للمستوى مقدارها ٤$\sqrt{٣}$ نيوتن فجعلت الجسم على وشك الحركة .

أوجد : أولا : معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى .

ثانيا : قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى .

الحـــل ...



معادلتى الاتزان هما :

$\text{ر} = ١٢$ ، $\text{م ر} = ٤\sqrt{٣}$

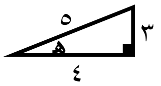
$\therefore \text{م} \times ١٢ = ٤\sqrt{٣}$ $\therefore \text{م} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

$\because \text{م} = \text{ظا ه}$ $\therefore \text{ظا ه} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ $\therefore \text{ه} = ٣٠^\circ$

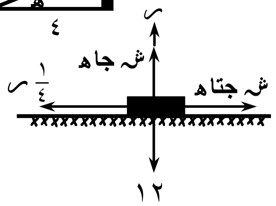
مثال (٢) : وضع جسم وزنه ٣٨ نيوتن على مستو أفقى خشن وكان ظل زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى $\frac{١}{٤}$ ، شد الجسم بقوة تصنع مع الأفقى زاوية جيبها $\frac{٣}{٥}$ جعلت الجسم على وشك الحركة . اوجـد :

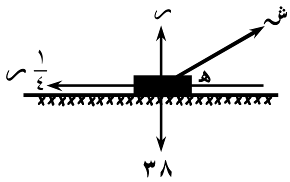
أولا : مقدار قوة الشد .   ثانيا : مقدار قوة رد الفعل العمودى

ثالثا : مقدار قوة رد الفعل المحصل .



الحـــل ...





بتحليل القوة ش فى اتجاه المستوى والعمودى عليه .

$\therefore \text{ش} \times \frac{٤}{٥} = \frac{١}{٤}\text{ر}$

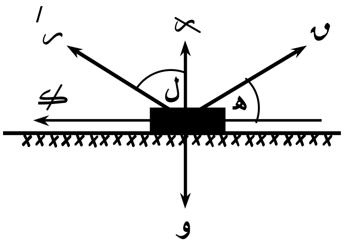
$\therefore \text{ر} = \frac{١٦}{٥}\text{ش}$ .... (١) ، $\text{ر} + \frac{٣}{٥}\text{ش} = ٣٨$ .... (٢)

من (١) ، (٢) ش = ١٠ نيوتن ، ر = ٣٢ نيوتن

$\therefore \text{ر}' = \text{ر}\sqrt{١ + \text{م}^٢} = ٣٢\sqrt{١ + \frac{١}{١٦}} = ٨\sqrt{١٧}$ نيوتن .

مثال (٣) : وضع جسم وزنه و نيوتن على مستوى أفقى خشن وكان قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى ل . شد الجسم بقوة تميل على المستوى الأفقى بزاوية قياسها هـ فأصبح الجسم على وشك الحركة . اثبت أن مقدار هذه القوة يساوى $\frac{\text{و جا ل}}{\text{جتا (هـ - ل)}}$ ، ثم أوجد مقدار أقل قوة تكفى لتحريك الجسم والشرط اللازم لذلك .

الحل ...



∵ ر/ هى محصلة القوتين ر ، ك

∴ الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى فى نقطة وهى (ق ، ر/ ، و)

بتطبيق قاعدة لامى :

∴ $\frac{\text{ق}}{\text{جا}(١٨٠^\circ - \text{ل})} = \frac{\text{و}}{\text{جا}[٩٠^\circ - (\text{هـ} - \text{ل})]}$

∴ $\frac{\text{ق}}{\text{جا ل}} = \frac{\text{و}}{\text{جتا (هـ - ل)}}$ ∴ $\text{ق} = \frac{\text{و جا ل}}{\text{جتا (هـ - ل)}}$

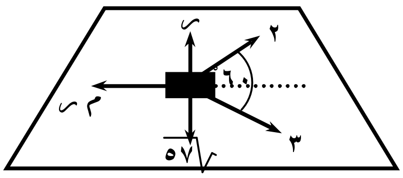
∵ المطلوب هو أقل قوة ، فيكون المقدار جتا (هـ – ل) أكبر ما يمكن

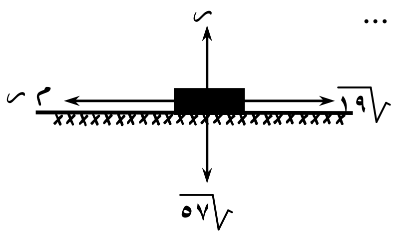
∴ جتا (هـ – ل) = ١ ∴ ق = و جا ل والشرط اللازم هو :

جتا (هـ – ل) = جتا ٠ ∴ ق(هـ – ل) = ٠ ∴ ق(هـ) = ق(ل)

مثال (٤) : وضع جسم وزنه $٥\sqrt{٧}$ ث . كجم على مستوى أفقى خشن وأثرت على الجسم قوتان مقدارهما ٢ ، ٣ ث . كجم ويحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° بحيث كانت القوتان أفقيتان واقعتان فى نفس المستوى الأفقى مع الجسم ، فإذا أصبح الجسم على وشك الحركة فأوجد معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى وكذلك قياس زاوية الاحتكاك .

الحل ...





الجسم على وشك الحركة تحت تأثير محصلة القوتين ٢ ، ٣ نيوتن وهذه المحصلة تعادل قوة الاحتكاك النهائى (م ر)

∵ $ع = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 جتا ى}$

∴ $ع = \sqrt{4 + 9 + 2 \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{19}$ ث . كجم

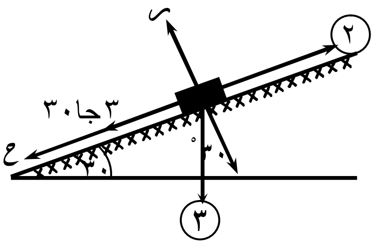
∵ الجسم متزن ∴ $م ر = \sqrt{19}$ ، $ر = \sqrt{57}$

∴ وبقسمة المعادلتين : ∴ $م = \frac{1}{\sqrt{3}}$

∵ م = ظا ل ∴ $ظا ل = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ∴ $ق(\angle ل) = 30°$

مثال (٥) : وضع جسم وزنه ٣ نيوتن على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك بينه وبين الجسم يساوى $\frac{2}{3}$. أثرت على الجسم قوة تعمل فى خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى ومقدارها ٢ نيوتن ، فإذا كان الجسم متزنا . عين قوة الاحتكاك وبين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا ؟

الحل ...



بتحليل وزن الجسم ٣ نيوتن إلى مركبتين فى اتجاه المستوى والعمودى عليه .

∴ $ر = 3 جتا 30° = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ نيوتن ،

المركبة المماسية للوزن وتعمل لأسفل = $3 جا 30° = \frac{3}{2}$ نيوتن

∵ الجسم متزن ∴ $2 = ع + \frac{3}{2}$ ∴ $ع = \frac{1}{2}$

∵ $ك = م ر$ ∴ $ك = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$ نيوتن

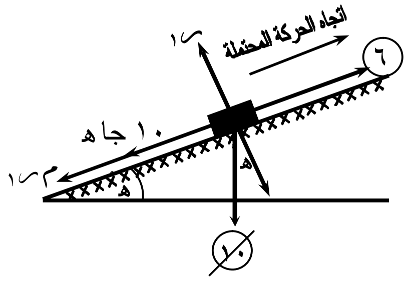
∵ $ك > ع$

∴ الاحتكاك غير نهائى ولا يكون الجسم على وشك الحركة

مثال (٦) : وضع جسم وزنه ١٠ ث . كجم على مستو مائل خشن تؤثر عليه قوة فى اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى ، فإذا علم أن الجسم يكون على

وشك الحركة إلى أعلى المستوى عندما ق = ٦ ث . كجم ويكون على وشك الحركة إلى اسفل المستوى عندما ق = ٤ ث . كجم . اوجد :
أولا : قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى .
ثانيا : معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى .

الحل ...



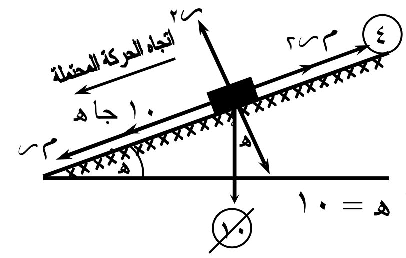
أولا : معادلتى الاتزان هما :

ر١ = ١٠ جتا هـ ،

٦ = ١٠ جا هـ + م ر١

وبحذف ر١

∴ ١٠ جا هـ + ١٠ م جتا هـ = ٦ .... (١)



ثانيا : معادلتى الاتزان هما :

ر٢ = ١٠ جتا هـ ،

٤ + م ر٢ = ١٠ جا هـ ، وبحذف ر٢

∴ ١٠ م جتا هـ = ١٠ جا هـ - ٤ .... (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ٦ = ١٠ جا هـ + ١٠ جا هـ – ٤ ∴ ٢٠ جا هـ = ١٠

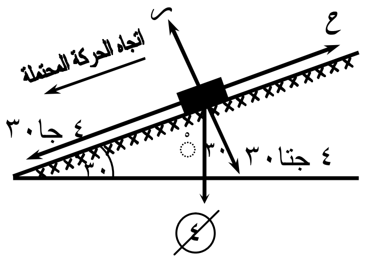
∴ جا هـ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ق(∠ هـ) = ٣٠°

وبالتعويض فى رقم (١) ∴ ١٠ م جتا ٣٠° = ١٠ جا ٣٠° – ٤

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × ١٠ م = ٥ – ٤ ∴ م = $\frac{١}{٥\sqrt{٣}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{١٥}$

مثال (٧) : وضع جسم كتلته ٤ كجم على مستو مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك بينه وبين المستوى $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$. بين ما إذا كان الجسم ينزلق على المستوى أو أن يكون على وشك الانزلاق أو أن الاحتكاك غير نهائى ، ثم اوجد أقل وأكبر قوة تؤثر على الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل بحيث تجعل الجسم على وشك الحركة .

الحـــل ...

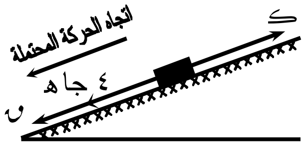


∵ مركبة الوزن = ٤ جا ٣٠° = ٢ ث . كجم

ك = م ر = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × ٤ جتا ٣٠° = ٣ ث . كجم

∴ ك > مركبة الوزن (و جا هـ)

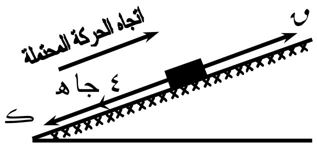
∴ الاحتكاك غير نهائى .



<u>أولا</u> : أقل قوة تجعل الجسم على وشك الحركة لأسفل المستوى :

ق + ٤ جا ٣٠° = ك

ق + ٤ × $\frac{١}{٢}$ = ٣ ∴ ق = ١ ث . كجم



<u>ثانيا</u> : أكبر قوة تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى :

ق = ٤ جا ٣٠° + ك

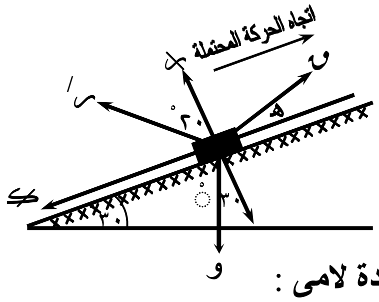
ق = ٢ + ٣ ∴ ق = ٥ ث . كجم

ملاحظة هامة :

- إذا كانت : ك > مركبة الوزن (و جا هـ) ← الاحتكاك غير نهائى .
- إذا كانت : ك < مركبة الوزن (و جا هـ) ← الجسم ينزلق على المستوى .
- إذا كانت : ك = مركبة الوزن (و جا هـ) ← الجسم على وشك الانزلاق .

مثال (٨) : وضع جسم وزنه و على مستو خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° فإذا كانت زاوية الاحتكاك قياسها ٢٠° فأوجد مقدار واتجاه اقل قوة تجعل الجسم على وشك الحركة إلى اعلى المستوى .

الحـــل ...



الجسم متزن تحت تأثير القوى الثلاث :

* وزن الجسم "و" رأسيا لأسفل ـ القوة "ق" التى تميل على المستوى بزاوية قياسها "هـ" ـ
* رد الفعل المحصل "ر/" والذى يصنع مع
* رد الفعل العمودى زاوية قياسها ٢٠° ، **وبتطبيق قاعدة لامى :**

$\frac{\text{ق}}{\text{جا}١٣٠^\circ} = \frac{\text{و}}{\text{جا}(٩٠^\circ - \text{هـ} + ٢٠^\circ)}$ ∴ $\text{ق} = \frac{\text{جا}٥٠^\circ \times \text{و}}{\text{جا}(١١٠^\circ - \text{هـ})}$

واللحصول على اقل قوة نضع : جا (١١٠° − هـ) = جا ٩٠° (أكبر قيمة للجيب)

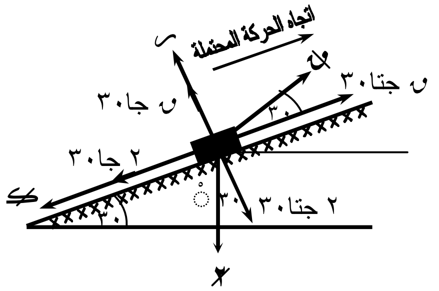
∴ ١١٠° − هـ = ٩٠° ∴ هـ = ٢٠°

وتكون أقل قوة "ق" = و جا ٥٠°

مثال (٩) : وضع جسم وزنه ٢ ث . كجم على مستوى افقى خشن ثم اميل المستوى تدريجيا حتى أصبح الجسم على وشك الانزلاق اسفل المستوى عندما كان قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى ٣٠° . أوجد معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى، وإذا ربط الجسم عندئذ بخيط ثم شد الخيط فى اتجاه يميل بزاوية قياسها ٦٠° على الأفقى حتى أصبح الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى فأوجد : .

أولا : مقدار قوة الشد ثانيا : مقدار قوة الاحتكاك

الحل ...



أولا :

∵ الجسم على وشك الانزلاق لأسفل المستوى تحت تأثير وزنه فقط

∴ $\text{م} = \text{ظا}\ ٣٠^\circ = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

ثانيا : معادلات الاتزان هى :

$\text{ر} + \text{ق جا}\ ٣٠^\circ = ٢\ \text{جتا}\ ٣٠^\circ$ ∴ $\text{ر} = \sqrt{٣} - \frac{١}{٢}\text{ق}$ .... (١) ،

$\text{ق جتا}\ ٣٠^\circ = ٢\ \text{جا}\ ٣٠^\circ + \frac{١}{\sqrt{٣}}\text{ر}$ ∴ $٣\ \text{ق} = ٢\sqrt{٣} + ٢\ \text{ر}$ ...... (٢)

من (١) ، (٢)

$٣\text{ق} = ٢\sqrt{٣} + ٢(\sqrt{٣} - \frac{١}{٢}\text{ق})$ ∴ $٤\ \text{ق} = ٤\sqrt{٣}$ ∴ $\text{ق} = \sqrt{٣}$ ث . كجم

وبالتعويض فى (١) ∴ $\text{ر} = \sqrt{٣} - \frac{١}{٢}\sqrt{٣} = \frac{١}{٢}\sqrt{٣}$ ث . كجم

∴ ك = م ر = $\frac{١}{\sqrt{٣}} \times \frac{١}{٢}\sqrt{٣} = \frac{١}{٢}$ ث . كجم

مثال (١٠) : جسم وزنه ٢٠ نيوتن موضوع على مستو مائل خشن لوحظ أن الجسم يكون على وشك الانزلاق إذا كان جيب زاوية ميل المستوى على الأفقى = $\frac{١}{٢}$

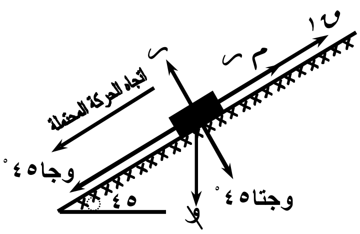
فإذا زيد ميل المستوى بحيث كان جيب زاوية ميل المستوى على الأفقى = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$. أوجد مقدار أقل قوة تؤثر على الجسم موازية لخط أكبر ميل للمستوى : أولا : لتمنعه من الانزلاق

ثانيا : لتجعله على وشك الحركة لأعلى المستوى .

الحـــل ...

∵ الجسم على وشك الانزلاق تحت تاثير وزنه فقط عندما كان قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى = ٣٠° ∴ م = ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

أولا : لإيجاد مقدار أقل قوة تمنع الجسم من الأنزلاق :



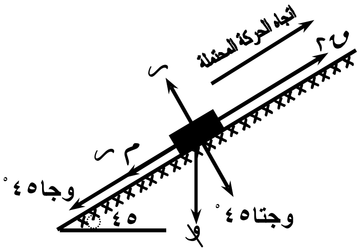
∴ ر=٢٠جتا٤٥° ، ق١+م ر=٢٠جا ٤٥°

∴ ق١+ $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ×(٢٠جتا٤٥°)=٢٠جا ٤٥°

∴ ق١ = ٢٠ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ - ٢٠× $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

= ٢٠ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (١ - $\frac{١}{\sqrt{٣}}$)

≃ ٥.٩٧٧١٦٩٨ نيوتن .



ثانيا : لإيجاد مقدار اقل قوة تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى :

ر=٢٠جتا٤٥° ∴ ر = ١٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن ،

ق٢ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ×١٠ $\sqrt{٢}$ + ٢٠× $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ≃ ٢٢.٣٠٧١ نيوتن

تمـــــارين (١)

أولا : ضع علامة (✓) أو علامة (×) :

(١) يتوقف معامل الاحتكاك بين جسمين على شكليهما وكتلتيهما .

(٢) تسمى النسبة بين مقدارى قوة الاحتكاك النهائى ورد الفعل العمودى بمعامل الاحتكاك .

(٣) ظل زاوية الاحتكاك يساوى النسبة بين قوة الاحتكاك النهائى ورد الفعل العمودى .

(٤) إذا وضع جسم على مستوى خشن يميل على الافقى بزاوية قياسها هـ وكان معامل الاحتكاك يساوى ظا ل ، وكان الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط فإن هـ = ظا ل .

(٥) إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان على وشك الانزلاق فإن معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى .

(٦) إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان على وشك الانزلاق فإن قياس زاوية الاحتكاك يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى .

(٧) زاوية الاحتكاك هى الزاوية بين قوة الاحتكاك النهائى وقوة رد الفعل المحصل .

ثانيا : أجب عن الأسئلة الاتية :

(١) وضع جسم وزنه ٣٩ نيوتن على مستو أفقى خشن وكان ظل زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى $\frac{١}{٣}$ ، شد الجسم بقوة تصنع مع الأفقى زاوية جيبها $\frac{٤}{٥}$ جعلت الجسم على وشك الحركة . اوجـد :

أولا : مقدار قوة الشد . ثانيا : مقدار قوة الاحتكاك

[الإجابة : ١٥ نيوتن ، ٩ نيوتن]

---

(٢) وضع جسم وزنه $٢\sqrt{٢١}$ ث . كجم على مستوى أفقى خشن وأثرت على الجسم قوتان مقدارهما ٤ ، ٦ ث . كجم ويحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° بحيث كانت القوتان أفقيتان واقعتان فى نفس المستوى الأفقى مع الجسم ، فإذا أصبح الجسم على وشك الحركة فأوجد معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى وكذلك قياس زاوية الاحتكاك .

[الإجابة : م = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، ل = ٣٠°]

(٣) جسم وزنه ٣٨ ث . كجم يكون على وشك الحركة تحت تأثير وزنه إذا وضع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{١}{٤}$ ، فإذا وضع هذا الجسم على مستوى أفقى فى نفس خشونة المستوى المائل وأثرت عليه قوة شد إلى أعلى تصنع مع الأفقى زاوية ظلها $\frac{٣}{٤}$ وتقع فى مستوى رأسى فجعلته على وشك الحركة . اوجد مقدار هذه القوة ومقدار رد الفعل العمودى .
[الإجابة : ق = ١٠ ث . كجم ، ر = ٣٢ ث . كجم]

(٤) وضع جسم وزنه ٤٠٠ ث . جم على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك بينه وبين الجسم يساوى $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$. أثرت على الجسم قوة مقدارها ٥٠ ث . جم فى خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى . إذا كان الجسم متزنا فعين قوة الاحتكاك وبين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا .
[الإجابة : ك = ١٥٠ ث . جم ، الجسم على وشك الحركة]

(٥) وضع جسم كتلته ٤ كجم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك بينه وبين المستوى $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$. بين ما إذا كان الجسم ينزلق على المستوى أو يكون على وشك الانزلاق أو أن الاحتكاك غير نهائى ، واوجد مقدار واتجاه قوة الاحتكاك عندئذ . ثم اوجد مقدار القوة التى تؤثر على هذا الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل بحيث يكون الجسم على وشك الحركة إلى اعلى المستوى .
[الإجابة : الاحتكاك غير نهائى ، القوة = ٥ ث . كجم]

(٦) وضع جسم وزنه ٢٠$\sqrt{٣}$ نيوتن على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ثم شد الجسم إلى اعلى بواسطة خيط واقع فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل وفى اتجاه يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع المستوى ، فإذا كان معامل الاحتكاك يساوى ٠.٢٥ فبرهن على أن أقل قيمة للشد فى الخيط تمنع الجسم من الحركة إلى أسفل المستوى تساوى ٧.٧٨ نيوتن تقريبا .

(٧) وضع جسم وزنه (و) على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) فوجد أن أقل قوة توازى خط أكبر ميل للمستوى وتجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى تساوى ٢و جا هـ . اثبت أن :
أولا : قياس زاوية الاحتكاك = هـ ثانيا : مقدار رد الفعل المحصل = و

(٨) وضع جسم وزنه ٢٥ ث . كجم على مستوى مائل خشن تؤثر عليه قوة ق فى اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى . فإذا علم أن الجسم يكون على وشك الحركة إلى أعلى المستوى عندما ق = ١٥ ث . كجم وتكون على وشك الحركة إلى أسفل المستوى عندما ق = ١٠ ث . كجم فأوجد :

أولا : زاوية ميل المستوى على الأفقى   ثانيا : معامل الاحتكاك

[الإجابة : ٣٠° ، $\frac{\sqrt{٣}}{١٥}$]

---

(٩) وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستو مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{٥}{١٣}$ شد الجسم بقوة أفقية مقدارها ٢٢ نيوتن واقعة فى المستوى الرأسى المار بخط اكبر ميل للمستوى جعلت الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى ، فإذا كان معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى هو $\frac{١}{٢}$ ، فأوجد مقدار وزن الجسم (و) .

[الإجابة : ١٩ نيوتن]

---

(١٠) وضع جسم وزنه ٨ ث . كجم على مستوى افقى خشن ثم اميل المستوى تدريجيا حتى أصبح الجسم على وشك الانزلاق اسفل المستوى عندما كان قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى ٣٠° . أوجد معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى، وإذا ربط الجسم عندئذ بخيط ثم شد الخيط فى اتجاه يميل بزاوية قياسها ٣٠° على المستوى حتى أصبح الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى فأوجد :

أولا : مقدار قوة الشد   ثانيا : مقدار رد الفعل العمودى

[الإجابة : م = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، ش = ٤$\sqrt{٣}$ ، ر = ٢$\sqrt{٣}$]

---

(١١) وضع جسم وزنه ٣ ث كجم على مستو خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° وكان معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$ بين مع ذكر السبب أن هذا الجسم لا يمكن أن يبقى ساكنا ثم أوجد قيمة اكبر واصغر قوة أفقية (واقعة فى المستوى الرأسى المار بخط اكبر ميل) تؤثر فى الجسم ويبقى متزنا .

[الإجابة : ٥$\sqrt{٣}$ ث . كجم ، ٢$\sqrt{٣}$ ث . كجم]

---

(١٢) كتلتان ٣ ، ٥ كجم متصلان بخيط خفيف وموضوعتان على مستوى مائل خشن وكان معامل الاحتكاك بين المستوى والجسمين $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٥}$ على الترتيب . بين أى الجسمين يوضع أسفل الجسم الآخر حتى يتحرك الجسمان معاً ، ثم أثبت أن ظل

زاوية ميل المستوى على الأفقى عندما يكون الجسمان على وشك الحركة = $\frac{٣}{٤}$

[الإجابة : يوضع إلى أسفل الجسم الذى معامل احتكاكه أصغر]

(١٣) جسم وزنه (و) موضوع على مستو مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) وزاوية الاحتكاك بينه وبين الجسم قياسها ى . اثرت فى الجسم قوة مقدارها (ق) وتميل على المستوى بزاوية قياسها (ل) . اوجد اصغر مقدار للقوة (ق) بحيث تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى .

[الإجابة : ق = و جا(هـ + ى) ، ل = ى]

ثالثا : مسائل الثانوية العامة :

(١) ٢٠٠١/دور ثان : وضع جسم وزنه ١٢ نيوتن على مستو خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° وكان معامل الاحتكاك بين الجسم المستوى يساوى $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$.

بين (مع ذكر السبب) أن هذا الجسم لا يمكن أن يبقى ساكنا ، ثم أوجد مقدار أقل قوة أفقية تؤثر على الجسم ليبقى متزنا علما بأن القوة واقعة فى المستوى الرأسى المار بحط أكبر ميل للمستوى .

[الإجابة : قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى > قياس زاوية الاحتكاك ، ٨$\sqrt{٣}$ نيوتن]

(٢) ٢٠٠٢/دور أول : وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية جيب تمامها $\frac{٤}{٥}$ وكان قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى ٤٥°

بين أن الجسم يبقى متزنا ثم أوجد مقدار أقل قوة تؤثر على الجسم فى اتجاه خط اكبر ميل للمستوى لأسفل وتجعله على وشك الحركة .

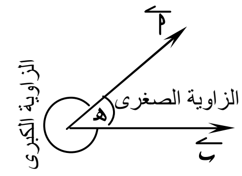
[الإجابة : قياس زاوية الاحتكاك > قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى ، ق = ١.٢ نيوتن]

(٣) ٢٠٠٣/دور أول : وضع جسم وزنه ٢٠٠ ث . جم على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٢}$ وكان معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى يساوى $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$. اثرت على الجسم قوة مقدارها ٢٥ ث . جم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى ، فإذا اتزن الجسم ، فأوجد قوة الاحتكاك ، وبين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا .

[الإجابة : ح = ٧٥ ث . جم ، الاحتكاك غير نهائى ، ويكون الجسم على وشك الحركة لأسفل المستوى

الفصل الثانى : العــزوم

أولا : حاصل الضرب القياسى لمتجهين



تعريف : إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهين غير صفريين ، هـ قياس الزاوية الصغرى التى يحصرها هذان المتجهان عند رسمهما خارجين من نقطة واحدة أو داخلين إلى نفس النقطة فإن : حاصل الضرب القياسى للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ فى المتجه $\overleftarrow{\text{ب}}$ ويرمز له بالرمز : $\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{ب}}$ هو :

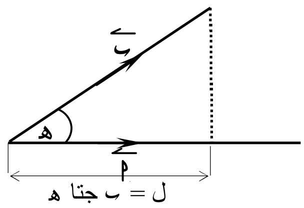
$$\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{ب}} = \text{أ ب جتا هـ}$$

ملاحظات :

(١) $\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{ب}} \odot \overleftarrow{\text{أ}}$ (حاصل الضرب القياسى لمتجهين عملية أبدالية)

(٢) $\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{0} = \overleftarrow{0} \odot \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{0} \odot \overleftarrow{0} = $ صفر

المسقط الجبرى (المركبة الجبرية) لمتجه فى اتجاه آخر :



تعريف : المسقط الجبرى للمتجه $\overleftarrow{\text{ب}}$ فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ هو الكمية القياسية ب جتا هـ .

المسقط الجبرى لمتجه فى اتجاه آخر

$$\underbrace{\text{موجب (∠ هـ حادة)} \qquad \text{سالب (∠ هـ منفرجة)} \qquad \text{صفر : ق(∠هـ) = ٩٠°}}$$

ويلاحظ أن :

مسقط $\overleftarrow{\text{ب}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ}} = \dfrac{\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{ب}}}{\|\overleftarrow{\text{أ}}\|}$ ، مسقط $\overleftarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ب}} = \dfrac{\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{ب}}}{\|\overleftarrow{\text{أ}}\|}$

نظرية (١) : لأى متجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ تتحقق العلاقة : $\boxed{\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{أ}} = \text{أ}^{٢}}$

نتيجة :

إذا كان $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ متجهى وحدة متعامدين فإن :

$$\overleftarrow{\text{س}} \odot \overleftarrow{\text{س}} = \overleftarrow{\text{ص}} \odot \overleftarrow{\text{ص}} = ١ \quad ، \quad \overleftarrow{\text{س}} \odot \overleftarrow{\text{ص}} = \overleftarrow{\text{ص}} \odot \overleftarrow{\text{س}} = \text{صفر}$$

نظرية (٢) : لأى متجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ولأى كمية قياسية م تتحقق العلاقة :

$$(\text{م}\,\overleftarrow{\text{أ}}) \odot \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{أ}} \odot (\text{م}\,\overleftarrow{\text{ب}}) = \text{م}\,(\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{ب}})$$

نظرية (٣) : لأى ثلاث متجهات $\overleftarrow{\text{أ}}$، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ح}}$ تتحقق العلاقة :

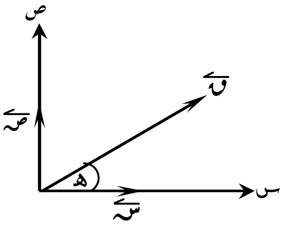
$$(\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}) \odot \overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{ح}} + \overleftarrow{\text{ب}} \odot \overleftarrow{\text{ح}}$$

<u>ملحوظة هامة</u> :

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$ فإن :

$$\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{ب}} = \text{س}_1\text{س}_2 + \text{ص}_1\text{ص}_2$$

التحليل المتعامد لمتجه باستخدام حاصل الضرب القياسى لمتجهين :



نفرض أن المتجه $\overleftarrow{\text{ق}}$ يصنع زاوية قياسها ه
مع $\overleftarrow{\text{وس}}$ وأن $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ متجها الوحدة فى اتجاهى
$\overleftarrow{\text{وس}}$ ، $\overleftarrow{\text{وص}}$ على الترتيب .
وبالتالى يكتب متجه القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى التحليل المتعامد
على الصورة :

$$\overleftarrow{\text{ق}} = (\overleftarrow{\text{ق}} \odot \overleftarrow{\text{س}})\,\overleftarrow{\text{س}} + (\overleftarrow{\text{ق}} \odot \overleftarrow{\text{ص}})\,\overleftarrow{\text{ص}}$$

<u>ملحوظة</u> : المركبة الجبرية للمتجه $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{\text{ق}} \perp \dfrac{\overleftarrow{\text{أ}}}{\|\overleftarrow{\text{أ}}\|}$

مركبة المتجه $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ}} = \left(\overleftarrow{\text{ق}} \odot \dfrac{\overleftarrow{\text{أ}}}{\|\overleftarrow{\text{أ}}\|}\right) \times \dfrac{\overleftarrow{\text{أ}}}{\|\overleftarrow{\text{أ}}\|} = \left(\dfrac{\overleftarrow{\text{ق}} \odot \overleftarrow{\text{أ}}}{\text{أ}^2}\right) \overleftarrow{\text{أ}}$

أمثلة محلولة

مثال (١) : المتجهان $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ يحصران بينهما زاوية قياسها 60° فإذا علم أن أ = ٣ ، ب = ٤ فأوجد حاصل الضرب القياسى للمتجهين ثم أوجد :
<u>أولا</u> : المسقط الجبرى للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ب}}$.
<u>ثانيا</u> : المسقط الجبرى للمتجه $\overleftarrow{\text{ب}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ}}$.

الحـــل :

∵ $\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{ب}}$ = أ ب جتا هـ

∴ $\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{ب}}$ = ٣ × ٤ جتا ٦٠° = ٣ × ٤ × $\frac{١}{٢}$ = ٦

<u>أولا</u> : المسقط الجبرى للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $\frac{\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{ب}}}{\text{ب}}$ = $\frac{٦}{٤}$ = $\frac{٣}{٢}$

<u>ثانيا</u> : المسقط الجبرى للمتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أ}}$ = $\frac{\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{ب}}}{\text{أ}}$ = $\frac{٦}{٣}$ = ٢

مثال (٢) : أوجد حاصل الضرب القياسى للمتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ حيث :

$\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٤ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٨ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٦ $\overrightarrow{\text{ص}}$

ثم أوجد قياس الزاوية بينهما .

<u>الحل</u> :

$\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٤ $\overrightarrow{\text{ص}}$) ⊙ (٨ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٦ $\overrightarrow{\text{ص}}$) = (٣ ، - ٤) ⊙ (٨ ، - ٦)

= ٣ × ٨ + ٤ × ٦ = ٢٤ + ٢٤ = ٤٨

، أ = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ ، ب = $\sqrt{٦٤ + ٣٦}$ = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠

∵ جتا هـ = $\frac{\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{ب}}}{\text{أ ب}}$ ∴ جتا هـ = $\frac{٤٨}{٥ \times ١٠}$ = $\frac{٢٤}{٢٥}$ = ٠.٩٦

∴ ق(∠ هـ) = ١٦° ١٥′ ٣٧″

مثال (٣) : أوجد المركبة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{\text{ح}}$ = ٥ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ١٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ حيث
$\overrightarrow{\text{أ}}$ = (- ٢ ، - ٣) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٤ ، ٥) .

<u>الحل</u>

∵ $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ = $\overrightarrow{\text{ب}}$ − $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٤ ، ٥) - (- ٢ ، - ٣) = (٤ ، ٥) + (٢ ، ٣)

= (٤ + ٢ ، ٥ + ٣) = (٦ ، ٨)

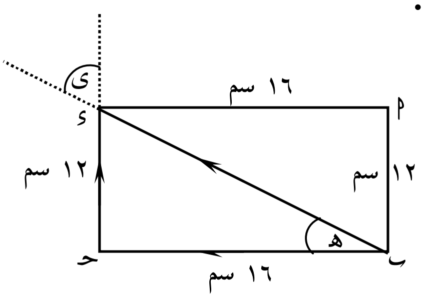
∴ المركبة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{\text{ح}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ = $\frac{\overrightarrow{\text{ح}} \odot \overrightarrow{\text{أ ب}}}{\text{أ ب}}$

= $\frac{(٥ ، - ١٢) \odot (٦ ، ٨)}{\sqrt{٣٦ + ٦٤}}$ = $\frac{٣٠ - ٩٦}{١٠}$ = $\frac{-٦٦}{١٠}$ = - ٦.٦

والإشارة السالبة للمركبة تعنى أن المركبة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{ب أ}}$.

مثال (٤) : أ ب حـ ء مستطيل فيه أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٦ سم . عين المسقط الجبرى للمتجه $\overrightarrow{بء}$ فى اتجاهى $\overrightarrow{بحـ}$ ، $\overrightarrow{حـء}$.

الحـــل :



ب ء = $\sqrt{(١٢)^٢ + (١٦)^٢}$ = ٢٠ سم

المسقط الجبرى $\overrightarrow{بء}$ فى اتجاه $\overrightarrow{بحـ}$ = ب ء جتا هـ .

= ٢٠ × $\frac{١٦}{٢٠}$ = ١٦ سم

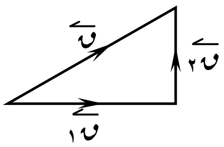
، المسقط الجبرى $\overrightarrow{بء}$ فى اتجاه $\overrightarrow{حـء}$ = ب ء جتا ى

= حـ ء × جتا (٩٠° – هـ) = حـ ء × جا هـ = ٢٠ × $\frac{١٢}{٢٠}$ = ١٢ سم

مثال (٥) : يراد تحليل قوة $\overrightarrow{ق}$ إلى مركبتين $\overrightarrow{ق}_١$ ، $\overrightarrow{ق}_٢$. فإذا كانت $\overrightarrow{ق}_١$ توازى متجها معطى $\overrightarrow{ب}$ بينما $\overrightarrow{ق}_٢$ عمودية على $\overrightarrow{ب}$. أثبت أن $\overrightarrow{ق}_١$ = ($\frac{\overrightarrow{ق} \odot \overrightarrow{ب}}{ب^٢}$) $\overrightarrow{ب}$.

ثم أوجد $\overrightarrow{ق}_٢$.

الحـــل :



المركبة الجبرية للقوة $\overrightarrow{ق}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$ = $ق_١$ = $\frac{\overrightarrow{ق} \odot \overrightarrow{ب}}{ب}$

∵ مركبة القوة $\overrightarrow{ق}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$ = $ق_١$. $\frac{\overrightarrow{ب}}{ب}$

∴ $\overrightarrow{ق}_١$ = ($\frac{\overrightarrow{ق} \odot \overrightarrow{ب}}{ب}$) . $\frac{\overrightarrow{ب}}{ب}$ = ($\frac{\overrightarrow{ق} \odot \overrightarrow{ب}}{ب^٢}$) $\overrightarrow{ب}$.

∵ $\overrightarrow{ق}$ = $\overrightarrow{ق}_١$ + $\overrightarrow{ق}_٢$ ∴ $\overrightarrow{ق}_٢$ = $\overrightarrow{ق}$ – $\overrightarrow{ق}_١$ = $\overrightarrow{ق}$ – ($\frac{\overrightarrow{ق} \odot \overrightarrow{ب}}{ب^٢}$) $\overrightarrow{ب}$.

ثانيا : حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين

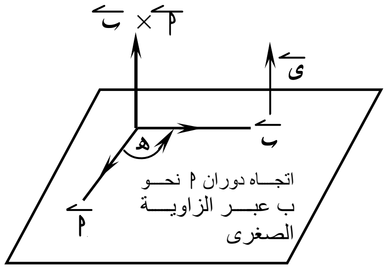
ليكن $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين غير صفريين ، هـ قياس الزاوية الصغرى التى يحصرها هذان المتجهان عند رسمهما خارجين من نقطة واحدة .

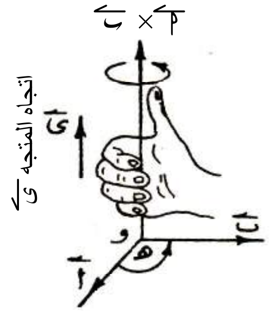
تعريف : يعرف حاصل الضرب الاتجاهى للمتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$ ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{أ}$ × $\overrightarrow{ب}$ كالآتى :

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (أ \, ب \text{ جا } هـ) \, \overrightarrow{ى}$$

حيث $\vec{ى}$ متجه وحدة عمودى على المستوى الذى يجمع المتجهين م ، ب ويتحدد اتجاهه **<u>بقاعدة اليد اليمنى والتى تنص على الآتى</u> :**

إذا كانت الأصابع المنحنية لليد اليمنى تشير إلى دوران المتجه $\vec{م}$ نحو المتجه $\vec{ب}$ عبر الزاوية الصغرى المحصورة بينهما فإن الإبهام يشير إلى اتجاه المتجه $\vec{ى}$ كما بالشكل





<u>نتيجة</u> : إذا كان أحد المتجهين $\vec{م}$ ، $\vec{ب}$ (أو كلاهما) هو المتجه الصفرى فإن :

$$\boxed{\vec{م} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{ب} = \vec{0} \times \vec{0} = \vec{0}}$$

<u>خصائص</u> :

(١) $\vec{م} \times \vec{ب} = -(\vec{ب} \times \vec{م})$

(٢) إذا كان المتجهان $\vec{م}$ ، $\vec{ب}$ <u>متوازيان</u> فإن : $\vec{م} \times \vec{ب} = \vec{0}$

(٣) $\vec{م} \times \vec{م} = \vec{0}$

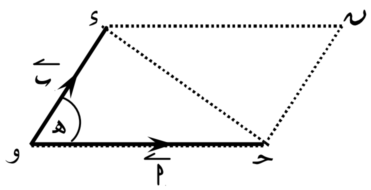
<u>نظرية</u> (١) : لأى متجهين $\vec{م}$ ، $\vec{ب}$ ولأى كمية قياسية م يكون :

$$\boxed{(م\,\vec{م}) \times \vec{ب} = \vec{م} \times (م\,\vec{ب}) = م\,(\vec{م} \times \vec{ب})}$$

<u>نظرية</u> (٢) : لأى ثلاث متجهات $\vec{م}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{حـ}$ تتحقق خاصية التوزيع الآتية :

$$\boxed{(\vec{م} + \vec{ب}) \times \vec{حـ} = \vec{م} \times \vec{حـ} + \vec{ب} \times \vec{حـ}}$$

المعنى الهندسى لمعيار حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين :



∵ $\|\vec{م} \times \vec{ب}\| = (م\ ب\ جا\ هـ)$

وبفرض أن : $\overrightarrow{وحـ}$ **تمثل المتجه $\vec{م}$ ،**

$\overrightarrow{وء}$ **تمثل $\vec{ب}$:**

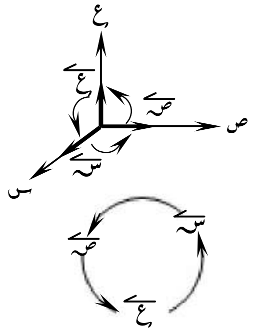
∴ $\|\vec{م} \times \vec{ب}\| = \|\overrightarrow{وحـ}\| . \|\overrightarrow{وء}\|$ **جا هـ .**

= مساحة سطح متوازى الأضلاع وحـرء .

= ضعف مساحة سطح المثلث وحـء .

المجموعة اليمينية لمتجهات الوحدة :

بفرض أن : $\overrightarrow{\text{وس}}$ ، $\overrightarrow{\text{وص}}$ ، $\overrightarrow{\text{وع}}$ متعامدة مثنى مثنى كما بالشكل المرسوم ، يقال عندئذ أن متجهات الوحدة { $\vec{\text{س}}$ ، $\vec{\text{ص}}$ ، $\vec{\text{ع}}$ } تكون مجموعة يمينية من متجهات الوحدة وعلى ذلك نجد أن :



اتجاه الدوران مضاد لعقارب الساعة

$\vec{\text{س}} \times \vec{\text{ص}} = \vec{\text{ع}}$ ، $\vec{\text{ص}} \times \vec{\text{ع}} = \vec{\text{س}}$ ، $\vec{\text{ع}} \times \vec{\text{س}} = \vec{\text{ص}}$

$\vec{\text{ص}} \times \vec{\text{س}} = -\vec{\text{ع}}$ ، $\vec{\text{ع}} \times \vec{\text{ص}} = -\vec{\text{س}}$ ، $\vec{\text{س}} \times \vec{\text{ع}} = -\vec{\text{ص}}$

$\vec{\text{س}} \times \vec{\text{س}} = \vec{0}$ ، $\vec{\text{ص}} \times \vec{\text{ص}} = \vec{0}$ ، $\vec{\text{ع}} \times \vec{\text{ع}} = \vec{0}$

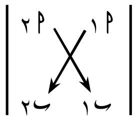
مركبات المتجه $\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}$ فى التحليل المتعامد :

إذا كان $\vec{\text{أ}} = \text{أ}_1 \vec{\text{س}} + \text{أ}_2 \vec{\text{ص}}$ ، $\vec{\text{ب}} = \text{ب}_1 \vec{\text{س}} + \text{ب}_2 \vec{\text{ص}}$ فى التحليل المتعامد فإن

$$\boxed{\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = (\text{أ}_1 \text{ب}_2 - \text{أ}_2 \text{ب}_1)\, \vec{\text{ع}}}$$

ويمكن توضيحها على النحو الآتي :

$$\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = (\text{أ}_1 ، \text{أ}_2) \times (\text{ب}_1 ، \text{ب}_2) = (\text{أ}_1 \text{ب}_2 - \text{أ}_2 \text{ب}_1)\, \vec{\text{ع}}$$



تابع – أمثلة محلولة

مثال (٦) : إذا كان $\vec{\text{أ}} = ٥\vec{\text{س}} + ٦\vec{\text{ص}}$ ، $\vec{\text{ب}} = ٤\vec{\text{س}} - \vec{\text{ص}}$ ، $\vec{\text{ح}} = ٢\vec{\text{س}} + ٣\vec{\text{ص}}$

فأوجد كلا من المتجهات الآتية :

أولا : $(٢\vec{\text{أ}} - ٣\vec{\text{ب}}) \times \vec{\text{ح}}$ **ثانيا :** $(\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}) \times \vec{\text{ح}}$.

ثالثا : $(\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}) \odot \vec{\text{ح}}$.

الحل :

أولا : $٢\vec{\text{أ}} - ٣\vec{\text{ب}} = ٢(٥ ، ٦) - ٣(٤ ، -١)$

$= (١٠ ، ١٢) + (-١٢ ، ٣) = (-٢ ، ١٥)$

$(٢\vec{\text{أ}} - ٣\vec{\text{ب}}) \times \vec{\text{ح}} = (-٢ ، ١٥) \times (٢ ، ٣)$

$= (-٢ \times ٣ - ١٥ \times ٢)\, \vec{\text{ع}}$

$= (-٦ - ٣٠)\, \vec{\text{ع}} = -٣٦\, \vec{\text{ع}}$.

ثانيا : $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = (\text{٥} ، \text{٦}) \times (\text{٤} ، -\text{١})$

$= (\text{٥} \times -\text{١} - \text{٤} \times \text{٦})\, \overrightarrow{\text{ع}} = (-\text{٥} - \text{٢٤})\, \overrightarrow{\text{ع}} = -\text{٢٩}\, \overrightarrow{\text{ع}}$.

$(\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}) \times \overrightarrow{\text{ج}} = -\text{٢٩}\, \overrightarrow{\text{ع}} \times (\text{٢}\, \overrightarrow{\text{س}} + \text{٣}\, \overrightarrow{\text{ص}})$

$= -\text{٥٨}\, (\overrightarrow{\text{ع}} \times \overrightarrow{\text{س}}) - \text{٨٧}\, (\overrightarrow{\text{ع}} \times \overrightarrow{\text{ص}})$

$= -\text{٥٨}\, \overrightarrow{\text{ص}} + \text{٨٧}\, \overrightarrow{\text{س}} = \text{٨٧}\, \overrightarrow{\text{س}} - \text{٥٨}\, \overrightarrow{\text{ص}}$

ثانيا : $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = (\text{٥} ، \text{٦}) \times (\text{٤} ، -\text{١})$

$= (\text{٥} \times -\text{١} - \text{٤} \times \text{٦})\, \overrightarrow{\text{ع}} = (-\text{٥} - \text{٢٤})\, \overrightarrow{\text{ع}} = -\text{٢٩}\, \overrightarrow{\text{ع}}$.

$(\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}) \odot \overrightarrow{\text{ج}} = -\text{٢٩}\, \overrightarrow{\text{ع}} \times (\text{٢}\, \overrightarrow{\text{س}} + \text{٣}\, \overrightarrow{\text{ص}})$

$= -\text{٥٨}\, (\overrightarrow{\text{ع}} \odot \overrightarrow{\text{س}}) - \text{٨٧}\, (\overrightarrow{\text{ع}} \odot \overrightarrow{\text{س}})$

$= -\text{٥٨} \times \text{٠} - \text{٨٧} \times \text{٠} =$ صفر .

مثال (٧) : إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = \text{٤}\, \overrightarrow{\text{س}} + \text{٢}\, \overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = \text{٣}\, \overrightarrow{\text{س}} - \text{٤}\, \overrightarrow{\text{ص}}$ فأوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$ ثم عين مساحة سطح المثلث المنشأ على القطعتين المستقيمتين الممثلتين لهذين المتجهين كضلعين متجاورين .

الحل :

بفرض أن $\{ \overrightarrow{\text{س}} ، \overrightarrow{\text{ص}} ، \overrightarrow{\text{ع}} \}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة .

$\because \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = (\text{أ}_{\text{١}}\, \text{ب}_{\text{٢}} - \text{أ}_{\text{٢}}\, \text{ب}_{\text{١}})\, \overrightarrow{\text{ع}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = (\text{٤} ، \text{٢}) \times (\text{٣} ، -\text{٤}) = (-\text{٤} \times \text{٤} - \text{٢} \times \text{٣})\, \overrightarrow{\text{ع}}$.

$= (-\text{١٦} - \text{٦})\, \overrightarrow{\text{ع}} = -\text{٢٢}\, \overrightarrow{\text{ع}}$.

$\therefore \| \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} \| = | -\text{٢٢} | = \text{٢٢}$

$\therefore$ مساحة سطح المثلث المنشأ على القطعتين المستقيمتين الممثلتين لهذين المتجهين كضلعين متجاورين $= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \text{٢٢} = \text{١١}$ وحدة مساحة .

مثال (٨) : أثبت أنه لأى ثلاث متجهات غير صفرية $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ج}}$ يكون :

$(\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}) \times \overrightarrow{\text{ج}} = \overrightarrow{\text{ج}} \times (\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{أ}})$.

الحل :

$(\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}) \times \overrightarrow{\text{ج}} = -\overrightarrow{\text{ج}} \times (\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}) = -\overrightarrow{\text{ج}} \times (-\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{أ}}) = \overrightarrow{\text{ج}} \times (\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{أ}})$

مثال (٩) : $\overrightarrow{\text{ق}}_{\text{١}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_{\text{٢}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_{\text{٣}}$ ثلاث متجهات قوة تحقق العلاقة :

$\overrightarrow{\text{ق}}_{\text{١}} + \overrightarrow{\text{ق}}_{\text{٢}} + \overrightarrow{\text{ق}}_{\text{٣}} = \overrightarrow{\text{٠}}$ أثبت أن :

$\overrightarrow{\text{ق}}_{\text{١}} \times \overrightarrow{\text{ق}}_{\text{٢}} = \overrightarrow{\text{ق}}_{\text{٢}} \times \overrightarrow{\text{ق}}_{\text{٣}} = \overrightarrow{\text{ق}}_{\text{٣}} \times \overrightarrow{\text{ق}}_{\text{١}}$. فسر ذلك هندسيا .

الحـــل :

$\because \overrightarrow{ق}_1 + \overrightarrow{ق}_2 + \overrightarrow{ق}_3 = \overrightarrow{0}$ $\quad \therefore \overrightarrow{ق}_3 = -(\overrightarrow{ق}_1 + \overrightarrow{ق}_2)$

$\therefore \overrightarrow{ق}_2 \times \overrightarrow{ق}_3 = \overrightarrow{ق}_2 \times -(\overrightarrow{ق}_1 + \overrightarrow{ق}_2)$

$= -\overrightarrow{ق}_2 \times \overrightarrow{ق}_1 - \overrightarrow{ق}_2 \times \overrightarrow{ق}_2 = \overrightarrow{ق}_1 \times \overrightarrow{ق}_2 - \overrightarrow{0}$ .... (١)

وبالمثل : $\overrightarrow{ق}_3 \times \overrightarrow{ق}_1 = -(\overrightarrow{ق}_1 + \overrightarrow{ق}_2) \times \overrightarrow{ق}_1$

$= -\overrightarrow{ق}_1 \times \overrightarrow{ق}_1 - \overrightarrow{ق}_2 \times \overrightarrow{ق}_1 = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{ق}_1 \times \overrightarrow{ق}_2$ ...... (٢)

من (١) ، (٢)

$\therefore \overrightarrow{ق}_1 \times \overrightarrow{ق}_2 = \overrightarrow{ق}_2 \times \overrightarrow{ق}_3 = \overrightarrow{ق}_3 \times \overrightarrow{ق}_1$

<u>التفسير الهندسى</u> :

معيار كل طرف مما سبق يساوى ضعف مساحة سطح المثلث الذى أضلاعه تمثل المتجهات الثلاثة .

مثال (١٠) : إذا كان $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{ن}$ متجهين غير صفريين فأثبت أن :

$\| \overrightarrow{م} \times \overrightarrow{ن} \|^2 = م^2 ن^2 - (\overrightarrow{م} \odot \overrightarrow{ن})^2$.

الحـــل :

$\| \overrightarrow{م} \times \overrightarrow{ن} \|^2 = \| \overrightarrow{م} \|^2 \| \overrightarrow{ن} \|^2$ جا^2 هـ حيث هـ قياس الزاوية بين المتجهين

$= م^2 ن^2 (1 -$ جتا^2 هـ$) = م^2 ن^2 - م^2 ن^2$ جتا^2 هـ

$= م^2 ن^2 - (م\ ن$ جتا هـ$)^2 = م^2 ن^2 - (\overrightarrow{م} \odot \overrightarrow{ن})^2$.

تمارين (٢)

(١) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = 4\overrightarrow{س} + 3\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = 5\overrightarrow{س} - 2\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ح} = 3\overrightarrow{س} - 2\overrightarrow{ص}$

فأوجد :

أ) $\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب}$ ب) $\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{ح}$ جـ) $(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) \odot \overrightarrow{ح}$

د) $(\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ح}) \times \overrightarrow{أ}$ هـ) $(\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}) \odot \overrightarrow{ح}$ و) $(\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}) \times \overrightarrow{ح}$

(٢) <u>فى المثال السابق</u> أوجد :

أ) المركبة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$

ب) المركبة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{ب ح}$ فى اتجاه $\overrightarrow{أ}$

جـ) متجه وحدة عمودى على المتجه $(2\overrightarrow{أ} - 3\overrightarrow{ب})$.

(٣) إذا كان $\overrightarrow{أ} = (3 ، 2)$ ، $\overrightarrow{ب} = (1 ، -1)$ فأوجد المتجه $\overrightarrow{ح}$ حيث :

$\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ح} = 8$ ، $\overrightarrow{ح} \times \overrightarrow{ب} = -3\overrightarrow{ع}$ [الإجابة : $\overrightarrow{س} + 2\overrightarrow{ص}$]

(٤) إذا كان $\overrightarrow{أ} = ٥\,\overrightarrow{س} - ١٢\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٣\,\overrightarrow{س} - ٤\,\overrightarrow{ص}$ فأوجد $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ ثم عين مساحة سطح المثلث المنشأ على القطعتين المستقيمتين الممثلتين لهذين المتجهين كضلعين متجاورين . [الإجابة : $١٦\,\overrightarrow{ع}$ ، ٨ وحدات مساحة]

(٥) إذا كانت أ = (١ ، ١) ، ب = (٥ ، ٤) ، حـ = (٣ ، - ١) فأوجد $\overrightarrow{حـأ} \times \overrightarrow{حـب}$ ثم عين مساحة سطح المثلث حـأب . [الإجابة : $- ١٤\,\overrightarrow{ع}$ ، ٧ وحدات مساحة]

(٦) إذا كانت أ = (-٥ ، ٤) ، ب = (٢ ، ٣) ، حـ = (٦ ، - ٧) فأوجد $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أحـ}$ ثم عين مساحة سطح المثلث أ ب حـ . [الإجابة : $- ٦٦\,\overrightarrow{ع}$ ، ٣٣ وحدات مساحة]

(٧) أوجد المركبة الجبرية للقوة $\overrightarrow{ق} = ٣\,\overrightarrow{س} + ٤\,\overrightarrow{ص}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{أب}$ حيث أ = (٠ ، ٢) ، ب = (٣ ، - ٢) . [الإجابة : - ١.٤]

(٨) $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{ن}$ متجهان غير صفريين بحيث كان : $\overrightarrow{م} \times \overrightarrow{ن} = ٤\,\overrightarrow{ع}$.
أوجد قيمة : $(\overrightarrow{م} + ٣\,\overrightarrow{ن}) \times (٢\,\overrightarrow{م} - ٥\,\overrightarrow{ن})$ [الإجابة : $- ٤٤\,\overrightarrow{ع}$]

(٩) إذا كان $\overrightarrow{أ} = ٢\,\overrightarrow{س} - ٣\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٣\,\overrightarrow{س} + ٤\,\overrightarrow{ص}$ وكان $\overrightarrow{حـ} \,//\, \overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{حـ} \times \overrightarrow{ب} = ٣٤\,\overrightarrow{ع}$. فأوجد $\overrightarrow{حـ}$. [الإجابة : $٤\,\overrightarrow{س} - ٦\,\overrightarrow{ص}$]

(١٠) <u>السودان ١٩٩١</u> : إذا كان : $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{أ} \times (\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب})$. أوجد المسقط الجبرى للمتجه $\overrightarrow{حـ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$ حيث $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ متجهى وحدة متعامدين . [الإجابة : $- ٢\sqrt{٢}$]

(١١) <u>مصر ١٩٩١</u> : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهان غير صفريين حيث $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{م}$. أوجد : $(\overrightarrow{أ} + ٢\,\overrightarrow{ب}) \times (٣\,\overrightarrow{أ} - ٢\,\overrightarrow{ب})$ بدلالة م . [الإجابة : $- ٨\,\overrightarrow{م}$]

(١٢) <u>مصر ١٩٨٩</u> : إذا كان $\overrightarrow{أ} = ٣\,\overrightarrow{س} - ٢\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٦\,\overrightarrow{س} + ٥\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ فعين :
<u>أولا</u> : $\|\, \overrightarrow{ب} + (٣\,\overrightarrow{أ} \perp ٢\,\overrightarrow{حـ})\, أ \,\|$
<u>ثانيا</u> : $\overrightarrow{ب} \times \{ -\overrightarrow{حـ} + \overrightarrow{س} + (\overrightarrow{ب} \odot (-٢\,\overrightarrow{أ}))\, \overrightarrow{حـ} \}$
[الإجابة : ٢٥ ، $- ٢٢\,\overrightarrow{ع}$]

(١٣) إذا كان $\overrightarrow{أ} = ٣\,\overrightarrow{س} - ٤\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = م\,\overrightarrow{س} + ٢\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = - ١٠\,\overrightarrow{ع}$ ، فأوجد قيمة م . [الإجابة : - ٤]

(١٤) إذا كان $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{س} + ٢\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٣\,\overrightarrow{س} - ٤\,\overrightarrow{ص}$ فأوجد متجه $\overrightarrow{حـ}$ فى مستوى $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ بحيث يكون $\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{حـ} = - ٩$ ، $\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{حـ} = - \overrightarrow{ع}$. [$٥\,\overrightarrow{س} - ٧\,\overrightarrow{ص}$]

(١٥) إذا كان $\|\overrightarrow{أ}\| = ٢$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{٣}$ ، $(٣\,\overrightarrow{أ} - ٢\,\overrightarrow{ب}) \odot (\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) = ٩$ ، أوجد $\|\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}\|$. [الإجابة : ١]

(١٦) <u>مصر ١٩٩٠</u> : أ ب حـ مثلث ، م $\in \overline{أب}$ ، ن $\in \overline{أحـ}$ بحيث كان :

$$\frac{أم}{مب} = \frac{حـن}{نأ} = \frac{٢}{٣}$$ فإذا كان $\overrightarrow{أن} \times \overrightarrow{من} = \overrightarrow{أحـ} \times (ل \,.\, \overrightarrow{بحـ})$ فأوجد ل

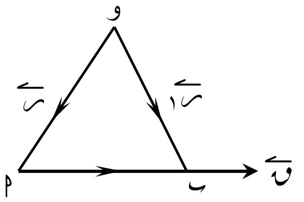
عـزم قـوة بالنسبة لنقطة

تعريف :

عزم القوة ق بالنسبة للنقطة (و) هو الكمية المتجهة $\overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق}$ حيث $\overrightarrow{ر}$ متجه موضع نقطة تأثير القوة بالنسبة للنقطة (و) ، فإذا رمزنا لعزم القوة بالنسبة لنقطة (و) بالرمز $ج_و$ فإن :

$$\overrightarrow{ج}_و = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق}$$

نتائج :



(١) لا يتغير عزم القوة إذا نقلنا نقطة تأثيرها إلى أى نقطة أخرى على خط عملها .

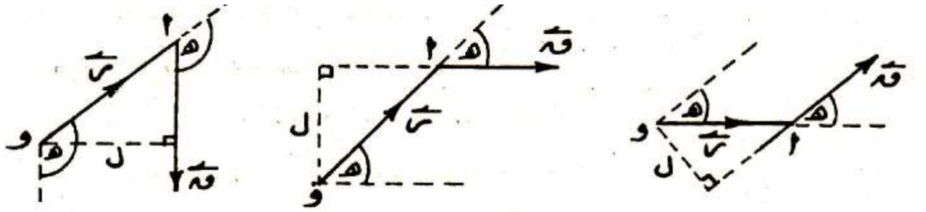
ففى الشكل المقابل :

$\overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق} = \overrightarrow{ر_١} \times \overrightarrow{ق}$.

(٢) ينعدم عزم القوة ق (غير الصفرية) إذا كان :

$\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{٠}$ أو $\overrightarrow{ر} \,//\, \overrightarrow{ق}$ ، وفى كلتا الحالتين فإن خط عمل القوة $\overrightarrow{ق}$ يمر بالنقطة و

تعيين الزاوية المحصورة بين $\overrightarrow{ر}$ ، $\overrightarrow{ق}$ عند حساب عزم قوة بالنسبة لنقطة :



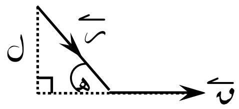
لتحديد الزاوية هـ المحصورة بين المتجهين $\overrightarrow{ر}$ ، $\overrightarrow{ق}$ يتطلب أن يكون هذين المتجهين خارجين أو داخلين من نقطة واحدة ، وعلى ذلك نتصور نقل متجه القوة ق موازيا لنفسه حتى تنطبق نقطة بدايته أ على النقطة و . وتكون الزاوية بين $\overrightarrow{ر}$ ، $\overrightarrow{ق}$ هى الزاوية التى قياسها هـ ورأسها نقطة و ، كما فى الأشكال المرسومة .

وفى جميع الحالات السابقة يكون طول العمود الساقط من النقطة و على خط عمل القوة ق يعطى من العلاقة .

$$ل = ر \,.\, جا\, هـ$$

حيث : $ر = \|\overrightarrow{ر}\|$

معيار واتجاه عزم قوة بالنسبة لنقطة :



ليكن ق = || $\overleftarrow{ق}$ || ، طول العمود الساقط من مركز العزم على خط عمل القوة $\overleftarrow{ق}$ هو ل فإن :

معيار العزم = || $\overleftarrow{ج}_و$ || = || $\overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق}$ || = ر ق جا هـ

= ق(ر جا هـ) = ق ل .

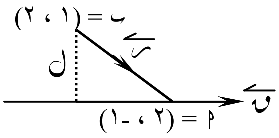
|| $\overleftarrow{ج}_و$ || = ق ل

ويكون متجه العزم الذى معياره = ق ل واتجاهه هو اتجاه $\overleftarrow{ى}$ يساوى :

$\overleftarrow{ج}_و$ = (ق ل) $\overleftarrow{ى}$

أمثلة محلولة

مثال (١) : تؤثر القوة $\overleftarrow{ق}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ فى النقطة أ = (٢ ، - ١) . أوجد متجه عزم هذه القوة بالنسبة للنقطة ب = (١ ، ٢) ، ثم أحسب طول العمود الساقط من ب على خط عمل ق .



الحـــل :

$\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{ب أ}$ = $\overleftarrow{أ}$ − $\overleftarrow{ب}$

= (٢ ، - ١) − (١ ، ٢) = (١ ، - ٣)

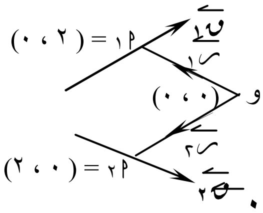
$\overleftarrow{ج}_ب$ = $\overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق}$ = (١ ، - ٣) × (٣ ، ١) = (١ + ٩) $\overleftarrow{ع}$ = ١٠ $\overleftarrow{ع}$.

، ∵ || $\overleftarrow{ج}_ب$ || = ق × ل

∴ ل = $\frac{\|\overleftarrow{ج}_ب\|}{ق}$ = $\frac{١٠}{\sqrt{٩ + ١}}$ = $\frac{١٠}{\sqrt{١٠}}$ = $\sqrt{١٠}$ وحدة طول

مثال (٢) : تؤثر القوتان $\overleftarrow{ق_١}$ = $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = م $\overleftarrow{س}$ - ٢ $\overleftarrow{ص}$ عند النقطتين أ$_١$ = (٢ ، ٠) ، أ$_٢$ = (٠ ، ٢) على الترتيب . عين قيمة الثابت م بحيث ينعدم مجموع عزمى هاتين القوتين بالنسبة لنقطة الأصل .

الحـــل :



ر١ = و أ١ = (- ٢ ، ٠)

ر٢ = و أ٢ = (٠ ، ٢)

∵ ج١ + ج٢ = ٠

∴ ر١ × ق١ + ر٢ × ق٢ = ٠

∴ (٢ ، ٠) × (١ ، ١) + (٠ ، ٢) × (م ، - ٢) = ٠

٢ ع - ٢ م ع = ٠ ، بأخذ القياس الجبرى للطرفين

∴ ٢ - ٢ م = ٠ ∴ م = ١

مثال (٣) : تؤثر القوى ق١ = ٣ س - ٢ ص ، ق٢ = ٢ س + ٣ ص ، ق٣ = س - ص فى نقطة أ (٢ ، - ٣) . أوجد عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنقطة الأصل (و) ومن ثم أوجد طول العمود الساقط من نقطة الأصل على خط عمل المحصلة .

الحل :

نفرض أن ق محصلة القوى ق١ ، ق٢ ، ق٣ .

∴ ق = ق١ + ق٢ + ق٣ .

∴ ق = (٣ ، - ٢) + (٢ ، ٣) + (١ ، - ١) = (٦ ، ٠)

، ر = و أ = (٢ ، - ٣)

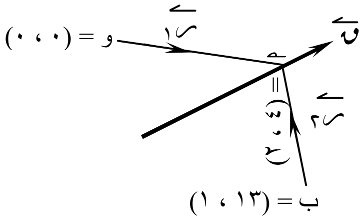
∵ ج و = ر × ق

∴ ج و = (٢ ، - ٣) × (٦ ، ٠) = ١٨ ع .

∴ || ج و || = ١٨

∵ ل = || ج ب || / ق ∴ ل = ١٨ / √(٣٦ + ٠) = ١٨ / ٦ = ٣ وحدة طول

مثال (٤) : تؤثر القوى ق = ل س + م ص فى نقطة أ = (٤ ، ٢) وكان متجه عزم ق بالنسبة لنقطة الأصل هو - ٢٢ ع ، بالنسبة لنقطة ب = (١٣ ، ١) هو ٢٢ ع . أوجد قيمتى ل ، م .



الحل :

ر١ = و أ = (٤ ، ٢)

ر٢ = ب أ = أ - ب = (٤ ، ٢) - (١٣ ، ١)

= (- ٩ ، ١)

∵ ر١ × ق = - ٢٢ ع .

∴ (٤ ، ٢) × (ل ، م) = - ٢٢ ع

∴ ٤ م – ٢ ل = - ٢٢ ∴ ل – ٢ م = ١١ .... (١)

، $\overrightarrow{\text{ر}_٢} \times \overrightarrow{\text{ق}}$ = - ٢٢ $\overrightarrow{\text{ع}}$.

∴ (- ٩ ، ١) × (ل ، م) = ٢٢ $\overrightarrow{\text{ع}}$.

∴ - ٩ م - ل = ٢٢ .... (٢)

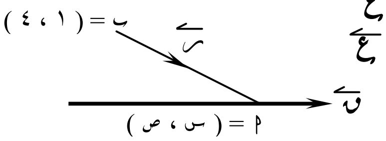
بحل المعادلتين (١) ، (٢)

∴ - ١١ م = ٣٣ ∴ م = - ٣

ومن المعادلة (١) ∴ ل + ٦ = ١١ ∴ ل = ٥

مثال (٥) : إذا كانت $\overrightarrow{\text{ق}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ وكان متجه عزم $\overrightarrow{\text{ق}}$ بالنسبة لنقطة ب = (١ ، ٤) يساوى ١٦ $\overrightarrow{\text{ع}}$. فأوجد معادلة خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}}$.

الحل :



∵ $\overrightarrow{\text{ر}}$ = $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ = $\overrightarrow{\text{أ}}$ – $\overrightarrow{\text{ب}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (س ، ص) – (١ ، ٤) = (س – ١ ، ص – ٤)

∵ $\overrightarrow{\text{ج}_\text{ب}}$ = ١٦ $\overrightarrow{\text{ع}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ر}} \times \overrightarrow{\text{ق}}$ = ١٦ $\overrightarrow{\text{ع}}$

∴ (س – ١ ، ص – ٤) × (٢ ، - ٣) = ١٦ ع

∴ [- ٣ (س – ١) - ٢ (ص – ٤)] $\overrightarrow{\text{ع}}$ = ١٦ $\overrightarrow{\text{ع}}$

وبأخذ القياس الجبرى للطرفين

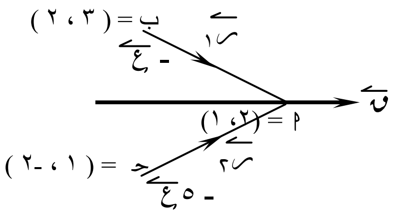
∴ - ٣س + ٣ - ٢ص + ٨ = ١٦

∴ <u>معادلة خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}}$ هو</u> : ٣ س + ٢ ص + ٥ = ٠

مثال (٦) : تؤثر القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ فى النقطة أ = (٢ ، ١) ، فإذا كان عزمها بالنسبة للنقطة ب = (٣ ، ٢) يساوى – $\overrightarrow{\text{ع}}$ ، عزمها بالنسبة للنقطة حـ = (١ ، - ٢) يساوى – ٥ $\overrightarrow{\text{ع}}$. أوجد :

<u>أولا</u> : $\overrightarrow{\text{ق}}$ <u>ثانيا</u> : المركبة الجبرية للقوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أ ب}}$.

الحل :



نفرض أن : $\overrightarrow{\text{ق}}$ = م $\overrightarrow{\text{س}}$ + ن $\overrightarrow{\text{ص}}$

∵ $\overrightarrow{\text{ر}_١}$ = $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ = $\overrightarrow{\text{أ}}$ – $\overrightarrow{\text{ب}}$

= (٢ ، ١) – (٣ ، ٢) = (- ١ ، - ١)

، $\overrightarrow{\text{ر}_٢}$ = $\overrightarrow{\text{حـ أ}}$ = $\overrightarrow{\text{أ}}$ – $\overrightarrow{\text{حـ}}$

= (٢ ، ١) – (١ ، - ٢) = (١ ، ٣)

∵ $\overrightarrow{\text{ج}_\text{ب}}$ = - $\overrightarrow{\text{ع}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ر}_١} \times \overrightarrow{\text{ق}}$ = - $\overrightarrow{\text{ع}}$

∴ (- ١ ، - ١) × (م ، ن) = - ع

∴ - ن + م = - ١ ∴ ن - م = ١ .... (١)

∵ $\overrightarrow{ج}_{ح}$ = - ٥ $\overrightarrow{ع}$ ∴ $\overrightarrow{ر}_{حم} \times \overrightarrow{ق}$ = - ٥ $\overrightarrow{ع}$

∴ (١ ، ٣) × (م ، ن) = - ٥ ع

∴ (ن - ٣ م) $\overrightarrow{ع}$ = - ٥ $\overrightarrow{ع}$

∴ - ن + ٣ م = ٥ .... (٢)

وبجمع (١) ، (٢)

∴ ٢ م = ٦ ∴ م = ٣ ، وبالتعويض فى (١) ∴ ن = ٤

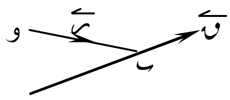
∴ $\overrightarrow{ق}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$

، ∵ $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ - $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ٢) - (٢ ، ١) = (١ ، ١)

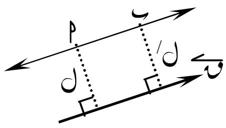
∴ المركبة الجبرية للقوة ق فى اتجاه أب = $\dfrac{\overrightarrow{ق} \odot \overrightarrow{أب}}{\|\overrightarrow{أب}\|}$

= $\dfrac{(٣ ، ٤) \odot (١ ، ١)}{\sqrt{١ + ١}}$ = $\dfrac{٣ + ٤}{\sqrt{٢}}$ = $\dfrac{٧}{٢}\sqrt{٢}$

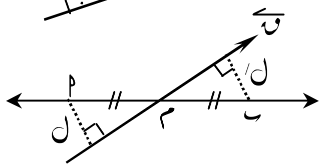
نتائج هامة :



(١) إذا انعدم عزم قوة $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة و ، فإن خط عمل $\overrightarrow{ق}$ يمر بالنقطة و ، والعكس صحيح .



(٢) إذا كان عزم $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة أ = عزم $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة ب حيث أ ، ب نقطتان فى نفس المستوى الذى يحوى $\overrightarrow{ق}$ فإن خط عمل $\overrightarrow{ق}$ // $\overrightarrow{أب}$ ، والعكس صحيح .



(٣) إذا كان عزم $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة أ = - عزم $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة ب ، فإن خط عمل $\overrightarrow{ق}$ ينصف $\overline{أب}$ ، والعكس صحيح .

مثال (٧) : إذا كانت $\overrightarrow{ق}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ - ٤ $\overrightarrow{ص}$ تؤثر فى نقطة أ = (٠ ، ٢) وكانت النقط ب = (٣ ، - ٢) ، حـ = (٢ ، ٣) ، ء = (- ٢ ، ١) ، هـ = (- ٥ ، ٥)

فاثبت أن خط عمل $\overrightarrow{ق}$:

أولا : يمر بنقطة ب

ثانيا : ينصف $\overline{حـ ء}$ ثالثا : يوازى $\overleftrightarrow{ء هـ}$

الحـــل :

أولا : $\overrightarrow{ر}$ = $\overrightarrow{بأ}$ = $\overrightarrow{أ}$ - $\overrightarrow{ب}$ = (٠ ، ٢) - (٣ ، - ٢) = (- ٣ ، ٤)

∴ $\overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ر}} \times \overrightarrow{\text{ق}} = (-٣ ، ٤) \times (٣ ، -٤)$

$= (١٢ - ١٢)\ \overrightarrow{\text{ع}} = \overrightarrow{٠}$

∴ خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}}$ يمر بنقطة ب .

ثانيا : $\overrightarrow{\text{ر}}_{١} = \overrightarrow{\text{حـ أ}} = \overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{حـ}} = (٠ ، ٢) - (٢ ، ٣) = (-٢ ، -١)$

$\overrightarrow{\text{ر}}_{٢} = \overrightarrow{\text{ء أ}} = \overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ء}} = (٠ ، ٢) - (-٢ ، ١) = (٢ ، ١)$

∴ $\overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{حـ}} = \overrightarrow{\text{ر}}_{١} \times \overrightarrow{\text{ق}} = (-٢ ، -١) \times (٣ ، -٤)$

$= (٨ + ٣)\ \overrightarrow{\text{ع}} = ١١\ \overrightarrow{\text{ع}}$.

، $\overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{ء}} = \overrightarrow{\text{ر}}_{٢} \times \overrightarrow{\text{ق}} = (٢ ، ١) \times (٣ ، -٤)$

$= (-٨ - ٣)\ \overrightarrow{\text{ع}} = -١١\ \overrightarrow{\text{ع}}$.

∴ $\overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{حـ}} = -\overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{ء}}$ ∴ خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}}$ ينصف $\overline{\text{حـ ء}}$.

ثالثا : $\overrightarrow{\text{ر}}_{١} = \overrightarrow{\text{ء أ}} = \overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ء}} = (٠ ، ٢) - (-٢ ، ١) = (٢ ، ١)$

$\overrightarrow{\text{ر}}_{٢} = \overrightarrow{\text{هـ أ}} = \overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{هـ}} = (٠ ، ٢) - (-٥ ، ٥) = (٥ ، -٣)$

∵ $\overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{ء}} = -١١\ \overrightarrow{\text{ع}}$.

، $\overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{هـ}} = (٥ ، -٣) \times (٣ ، -٤)$

$= (-٢٠ + ٩)\ \overrightarrow{\text{ع}} = -١١\ \overrightarrow{\text{ع}}$.

∴ $\overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{ء}} = \overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{هـ}}$ ∴ خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$.

تمارين (٣)

(١) ١٩٩٩ / دور أول : تؤثر القوة $\overrightarrow{\text{ق}} = ٣\overrightarrow{\text{س}} + ٤\overrightarrow{\text{ص}}$ عند النقطة أ = (٣ ، - ١) أوجد متجه عزم هذه القوة بالنسبة ب = (- ٢ ، ٤) . [الإجابة : ٣٥ $\overrightarrow{\text{ع}}$]

(٢) ١٩٩٨ / دور أول : قوتان $\overrightarrow{\text{ق}}_{١} = \overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_{٢} = ٣\overrightarrow{\text{س}} + ٢\overrightarrow{\text{ص}}$ تؤثران عند النقطة أ = (٢ ، ٣) . أوجد متجه عزم محصلة هاتين القوتين بالنسبة للنقطة ب = (١ ، ١) . [الإجابة : - ٥ $\overrightarrow{\text{ع}}$]

(٣) ١٩٩٩ / دور ثان : تؤثر القوتان $\overrightarrow{\text{ق}}_{١} = \overrightarrow{\text{س}} + ٦\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_{٢} = ٣\overrightarrow{\text{س}} - ٢\overrightarrow{\text{ص}}$ عند النقطة أ = (- ١ ، ٢) . أوجد متجه عزم محصلة هاتين القوتين بالنسبة للنقطة ب = (٠ ، ٧) . [الإجابة : ١٦ ع]

(٤) القوة $\overrightarrow{\text{ق}} = ٣\overrightarrow{\text{س}} + ٤\overrightarrow{\text{ص}}$ تؤثر فى النقطة أ = (٢ ، ١) . أوجد متجه عزمها بالنسبة للنقطة ب = (١ ، ٤) ، ثم أوجد طول العمود المرسوم من النقطة ب على خط عمل القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$. [الإجابة : ١٣ $\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\frac{١٣}{٥}$]

(٥) مصر ١٩٩٥ أثرت القوة $\overrightarrow{ق} = ٤\overrightarrow{س} + ٥\overrightarrow{ص}$ فى النقطة أ = (١ ، ٢) . أوجد
أولا : عزم $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة ب = (٣ ، ٢)
ثانيا : المركبة الجبرية للقوة $\overrightarrow{ق}$ فى اتجاه $\overrightarrow{أب}$. [الإجابة : - ٢٠ $\overrightarrow{ع}$ ، ٤]

(٦) ١٩٩٧ / دور أول : أثرت القوة $\overrightarrow{ق} = ٦\overrightarrow{س} + ٨\overrightarrow{ص}$ فى النقطة أ = (- ١ ، ٢)
أوجد :
أولا : عزم $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة ب = (٢ ، ٥)
ثانيا : المركبة الجبرية للقوة $\overrightarrow{ق}$ فى اتجاه $\overrightarrow{أب}$. [الإجابة : - ٦ $\overrightarrow{ع}$ ، ٧ $\sqrt{٢}$]

(٧) مصر ١٩٩٢ : ثلاث قوى $\overrightarrow{ق}_١$ ، $\overrightarrow{ق}_٢$ ، $\overrightarrow{ق}_٣$ تؤثر فى (٢ ، ٣) ، فإذا كانت :
$\overrightarrow{ق}_١ = ٢\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_٢ = \overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_٣ = -٣\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص}$
أوجد مجموع عزوم هذه القوى حول نقطة الأصل ، وكذلك بعد خط عمل المحصلة عن نقطة الأصل . [الإجابة : ١٢ $\overrightarrow{ع}$ ، ٢]

(٨) ١٩٩٨ / دور ثان : تؤثر القوة $\overrightarrow{ق} = ل\overrightarrow{س} - ٦\overrightarrow{ص}$ عند النقطة أ = (٧ ، ٤)
وكان عزمها بالنسبة للنقطة ب = (٩ ، - ٢) يساوى – ٦ $\overrightarrow{ع}$.أوجد قيمة الثابت ل
[الإجابة : ل = ٣]

(٩) ١٩٩٧ / دور ثان : تؤثر القوتان $\overrightarrow{ق}_١ = \overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص}$ عند النقطة (٢ ، ١) ،
$\overrightarrow{ق}_٢ = ٢\overrightarrow{س} - م\overrightarrow{ص}$ عند النقطة (١ ، ٢) عين قيمة الثابت م بحيث ينعدم مجموع عزمى هاتين القوتين بالنسبة لنقطة الأصل . [الإجابة : م = - ١]

(١٠) ١٩٩٦ / دور أول : تؤثر القوى $\overrightarrow{ق}_١ = \overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_٢ = \overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص}$ ،
$\overrightarrow{ق}_٣ = \overrightarrow{س} - ٤\overrightarrow{ص}$ عند النقطة أ = (- ١ ، ١) . أوجد عزم محصلة هذه القوى بالنسبة للنقطة ب = (٠ ، ٨) ، ثم أحسب طول العمود المرسوم من النقطة ب على خط عمل المحصلة . [الإجابة : ٢٠ $\overrightarrow{ع}$ ، ٢ $\sqrt{١٠}$]

(١١) مصر ١٩٩٤ : تؤثر القوة $\overrightarrow{ق} = ل\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$ عند النقطة أ = (٥ ، ٢)
وكان عزمها بالنسبة للنقطة ب = (٧ ، - ٤) يساوى – ٢٠ $\overrightarrow{ع}$ أوجد قيمة الثابت ل
[الإجابة : ل = ٤]

(١٢) أثرت القوة $\overrightarrow{ق}_١ = ٧\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$ فى النقطة أ = (٣ ، ٣) ، وأثرت القوة $\overrightarrow{ق}_٢ = \overrightarrow{س} + م\overrightarrow{ص}$ فى النقطة ب = (٥ ، - ١) . اوجد الثابت م ، بحيث ينعدم مجموع عزمى هاتين القوتين بالنسبة للنقطة حـ = (٦ ، ٣) [الإجابة : م = ١٠]

(١٣) ٢٠٠٠ / دور أول : القوتان $\overrightarrow{ق}_١ = ٥\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_٢ = -\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص}$
تؤثران عند النقطة أ = (٢ ، ٥) . أوجد متجه عزم محصلة هاتين القوتين بالنسبة للنقطة ب = (١ ، ١) ، ثم أوجد طول العمود المرسوم من النقطة ب على خط عمل المحصلة . [الإجابة : - ١٣ $\overrightarrow{ع}$ ، ٢.٦]

(١٤) <u>٢٠٠٠ / دور ثان</u> **: القوتان $\overline{ق}_١$ = ٥$\overline{س}$ - ٤$\overline{ص}$ ، $\overline{ق}_٢$ = $\overline{س}$ - ٤$\overline{ص}$ تؤثران عند نقطة الأصل . أثبت أن خط عمل المحصلة يمر بالنقطة م = (- ٣ ، ٤) ثم أوجد متجه عزم المحصلة بالنسبة للنقطة ب = (٢ ، - ٥) . [الإجابة : - ١٤$\overline{ع}$]**

(١٥) <u>٢٠٠١ / دور ثان</u> **: تؤثر القوى $\overline{ق}_١$ = $\overline{س}$ + ٦$\overline{ص}$ ، $\overline{ق}_٢$ = ٣$\overline{س}$+ ٥$\overline{ص}$ ، $\overline{ق}_٣$ = $\overline{س}$ + $\overline{ص}$ عند النقطة م = (٢ ، ٣) . أوجد متجه عزم محصلة هذه القوى بالنسبة للنقطة ب = (- ١ ، ٢) ، ثم أوجد طول العمود المرسوم من النقطة ب على خط عمل المحصلة . [الإجابة : - ٣١$\overline{ع}$ ، $\frac{٣١}{١٣}$]**

(١٦) <u>٢٠٠١ / دور أول</u> **: تؤثر القوة $\overline{ق}$ = م$\overline{س}$ + ن$\overline{ص}$ (حيث م ، ن ثابتين) فى النقطة م = (٤ ، ٢) ، فإذا كان عزمها بالنسبة لنقطة الأصل و = (٠ ، ٠) يساوى – ١٥$\overline{ع}$ ، عزمها بالنسبة للنقطة ب = (٠ ، ٥) يساوى ١٥$\overline{ع}$ ، فأوجد قيمتى م ، ن . [الإجابة : م = ٦ ، ن = $\frac{-٣}{٤}$]**

(١٧) <u>٢٠٠٢ / دور أول</u> **: تؤثر القوة $\overline{ق}$ = ٣ $\overline{س}$ + ٢ $\overline{ص}$ عند النقطة م = (٢ ، -١) أوجد :**
<u>أولا</u> : متجه عزم $\overline{ق}$ بالنسبة للنقطة ب = (٦ ، ٢) .
<u>ثانيا</u> : المركبة الجبرية للقوة $\overline{ق}$ فى اتجاه $\overline{مب}$. [الإجابة : ١$\overline{ع}$ ، ٣.٦]

(١٨) <u>٢٠٠٣ / دور أول</u> **: تؤثر القوة $\overline{ق}$ = $\overline{س}$ – $\overline{ص}$ فى النقطة م = (٠ ، ٣) وكانت النقط ب ، ح ، ء هى (٣ ، ٠) ، (٤ ، ٣) ، (- ٢ ، ١) على الترتيب . أثبت أن خط عمل $\overline{ق}$ يمر بنقطة ب وينصف $\overline{حء}$.**

(١٩) <u>٢٠٠٥ / دور أول</u> **: خط عمل القوة $\overline{ق}$ = م $\overline{س}$ + ٢ $\overline{ص}$ يمر بالنقطتين م = (٢ ، - ١) ، ب = (٥ ، - ٣) أوجـد :**
<u>أولا</u> : قيمة الثابت م .
<u>ثانيا</u> : المركبة الجبرية للمتجه $\overline{ق}$ فى اتجاه $\overline{وم}$ حيث و نقطة الأصل (٠ ، ٠)
[الإجابة : - ٣ ، $\frac{-٨}{\sqrt{٥}}$]

(٢٠) القوتان $\overline{ق}_١$ = م $\overline{س}$ + ن $\overline{ص}$ ، $\overline{ق}_٢$ = ٢$\overline{س}$ + ٣$\overline{ص}$ تؤثران فى نقطة م = (٢ ، - ٤) ، فإذا كان متجه عزم محصلتهما بالنسبة للنقطة ب = (- ١ ، ٣) يساوى ٣٣ $\overline{ع}$ ، حيث $\overline{ع}$ متجه وحدة عمودى على مستوى متجهى الوحدة المتعامدين $\overline{س}$ ، $\overline{ص}$ ، وكذلك عزم محصلتهما بالنسبة للنقطة ح = (٢ ، - ١) هو - $\overline{ع}$ فأوجد $\overline{ق}$.

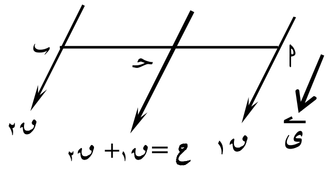
[الإجابة : $\overline{ق}$ = $\frac{-٧}{٣}$ $\overline{س}$ + $\frac{٧٩}{٩}$ $\overline{ص}$]

الفصل الثالث ... القوى المتوازية المتساوية

أولا : محصلة قوتين متوازيتين :

إذا أثرت قوتان متوازيتان ق١ ، ق٢ فى النقطتين ء ، ب على الترتيب وكانت محصلتهما ع تؤثر فى نقطة حـ فإن :

الحالة الأولى : إذا كانت القوتان متحدتان فى الاتجاه :

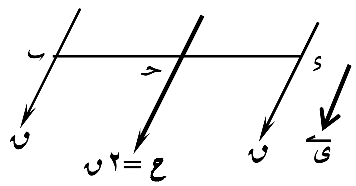


- **مقدار المحصلة** : ع = ق١ + ق٢
- **اتجاه المحصلة** : هو نفس اتجاه القوتين
- **خط عمل المحصلة** : يقسم المسافة بين خطى عمل القوتين من الداخل بنسبة عكسية لمعياريهما أى :

ق١ × بعد خط عملها عن خط عمل المحصلة = ق٢ × بعد خط عملها عن خط عمل المحصلة

أى أن : ق١ × ء حـ = ق٢ × ب حـ

نتيجة :

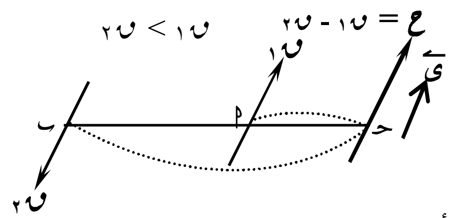


إذا كانت ق١ = ق٢ = ق فإن :

ع = ٢ ق ويكون : حـ ب = حـ ء

أى أن : محصلة قوتين متوازيتين ومتساويتين فى المقدار ومتحدتى الاتجاه هى قوة معيارها ضعف معيار احدى القوتين وفى اتجاههما وخط عملها ينصف المسافة بين القوتين .

الحالة الثانية : إذا كانت القوتان متضادتين فى الاتجاه :



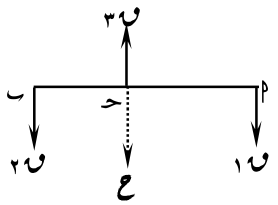
- **مقدار المحصلة** : ع = ق١ - ق٢
- **اتجاه المحصلة** : فى اتجاه القوة الكبرى
- **خط عمل المحصلة** : يقسم المسافة بين خطى عمل القوتين من الخارج ناحية القوة الكبرى بنسبة عكسية لمعياريهما أى أن :

ق١ × بعد خط عملها عن خط عمل المحصلة = ق٢ × بعد خط عملها عن خط عمل المحصلة

أى أن : ق١ × ء حـ = ق٢ × ب حـ

نظرية : مجموع عزوم أى عدد محدود من القوى المتوازية المستوية بالنسبة لأى نقطة فى مستويها يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة .

توازن ثلاث قوى متوازية :

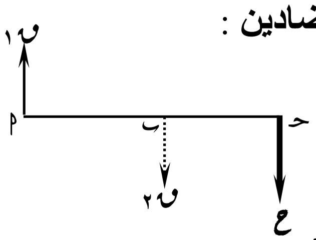


إذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير ثلاث قوى متوازية فإن إحدى القوى يجب أن تساوى فى المقدار وتضاد فى الاتجاه محصلة القوتين الأخريين ويكون لها نفس خط العمل .

ملاحظة هامة :

إذا عُلمت إحدى القوتين المتوازيتين ولتكن $\overleftarrow{ق_1}$ ، وعلمت محصلتهما $\overleftarrow{ع}$، فلتعيين $\overleftarrow{ق_2}$ نجد أحد الاحتمالين الآتيين :

- **القوة المعلومة ق١ ، المحصلة ع فى اتجاهين متضادين :**

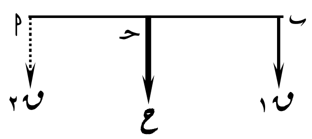


فتكون : ق٢ = ع + ق١

ويكون خط عمل $\overleftarrow{ق_2}$ يقع بين خطى عمل $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ع}$ وفى اتجاه $\overleftarrow{ع}$.

- **القوة المعلومة ق١ ، المحصلة ع فى اتجاه واحد :**

<u>الحالة الأولى</u> :

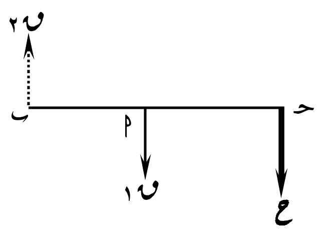


عندما تكون : ع > ق١

فتكون ق٢ = ع − ق١

ويكون خط عمل $\overleftarrow{ق_2}$ يقع فى الجهة الأخرى من خط عمل $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ع}$ كما بالشكل الموضح .

<u>الحالة الثانية</u> :



عندما تكون : ع < ق١

فتكون ق٢ = ق١ − ع

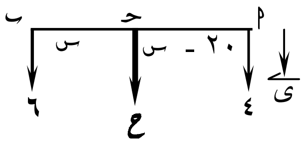
ويكون خط عمل $\overleftarrow{ق_2}$ يقع خارج خطى عمل $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ع}$ ناحية $\overleftarrow{ق_1}$ وفى اتجاه مضاد لاتجاه $\overleftarrow{ق_1}$ كما بالشكل الموضح .

أمثلـة محلـولـة

مثال (١): قوتان متوازيتان ٤ ، ٦ نيوتن والمسافة بين خطى عملهما ٢٠ سم ، عين محصلتهما إذا كانت :

أولا : القوتان فى اتجاه واحد   ثانيا : القوتان فى اتجاهين متضادين

الحـــل :



أولا : نفرض أن متجه الوحدة $\overrightarrow{ى}$ فى اتجاه القوتين :

∵ القوتان فى اتجاه واحد

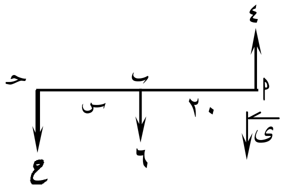
∴ $\overrightarrow{ق}_١ = ٤\,\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق}_٢ = ٦\,\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ع} = ١٠\,\overrightarrow{ى}$

∴ ع = ٤ + ٦ = ١٠ نيوتن

وتوازى القوتين وتعمل فى نفس اتجاههما

وتؤثر فى نقطة حـ ∈ $\overline{أب}$ حيث ب حـ = س سم

∴ ٦ × س = ٤ (٢٠ - س)   ∴ س = ٨ سم



ثانيا : نفرض أن متجه الوحدة $\overrightarrow{ى}$ فى اتجاه القوة الأكبر معيارا

∵ القوتان فى اتجاهين متضادين

∴ $\overrightarrow{ق}_٢ = ٦\,\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق}_١ = -٤\,\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ع} = ٢\,\overrightarrow{ى}$

∴ ع = ٢ نيوتن وتوازى القوتين وتعمل فى اتجاه القوة الكبرى ٦ نيوتن ، وتؤثر فى نقطة حـ ∈ $\overleftarrow{أب}$

، حـ ∉ $\overline{أب}$ حيث ب حـ = س سم

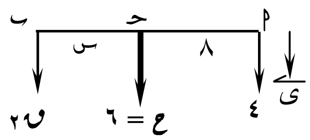
∴ ٦ × س = ٤ (٢٠ + س)   ∴ س = ٤٠ سم

مثال (٢) : قوتان متوازيتان $\overrightarrow{ق}_١$ ، $\overrightarrow{ق}_٢$ معيار الأولى ٤ ث . كجم ومعيار محصلتهما ٦ ث . كجم والبعد بين خطى عمل القوة الأولى والمحصلة ٨ سم . عين معيار واتجاه خط عمل $\overrightarrow{ق}_٢$ والبعد بين خطى عمل القوتين فى الحالتين :

أولا : $\overrightarrow{ق}_١$ ، $\overrightarrow{ع}$ فى اتجاه واحد

ثانيا : $\overrightarrow{ق}_١$ ، $\overrightarrow{ع}$ فى اتجاهين متضادين

الحـــل :



أولا : ∵ المحصلة والقوة المعلومة تعملان فى اتجاه واحد

ومعيار المحصلة > معيار القوة المعلومة

∴ القوتان متحدتان فى الاتجاه .

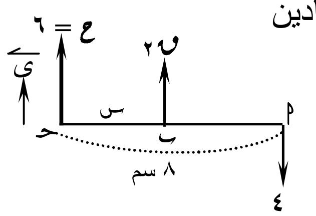
وبفرض أن $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه المحصلة

∴ $\overline{ق_١} = ٤ \overline{ى}$ ، $\overline{ح} = ٦ \overline{ى}$

∴ $\overline{ق_٢} = \overline{ح} - \overline{ق_١} = ٢ \overline{ى}$ ∴ $\overline{ق_٢} = ٢$ نيوتن

وتؤثر فى نقطة ب ∈ ‎$\overleftarrow{أ ح}$‎ ، ب ∉ ‎$\overline{أ ح}$‎ حيث ب ح = س سم

∴ ٤ × ٨ = ٢ × س ∴ س = ١٦ سم



ثانيا : ∵ القوة المعلومة والمحصلة تعملان فى اتجاهين متضادين

∴ القوتان متضادتان فى الاتجاه .

∴ ٦ $\overline{ى} = \overline{ق_٢} - ٤ \overline{ى}$ ∴ $\overline{ق_٢} = ١٠ \overline{ى}$

∴ $ق_١ = ١٠$ نيوتن وتؤثر فى ب ∈ ‎$\overline{أ ح}$‎

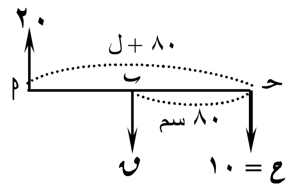
حيث ب ح = س سم .

∴ ١٠ × س = ٤ × ٨ ∴ س = ٣٫٢ سم

∴ البعد بين خطى عمل القوتين ٤٫٨ سم .

مثال (٣) : قوتان متوازيتان أصغرهما ٢٠ نيوتن وتؤثر فى الطرف أ من قضيب خفيف أ ب والكبرى تؤثر فى الطرف الآخر ب ، فإذا كان مقدار محصلتهما ١٠ نيوتن وتبعد عن الطرف ب بمقدار ٨٠ سم فما طول القضيب

الحل :



∵ مقدار المحصلة أصغر من مقدار إحدى القوتين

∴ القوتان متضادتان فى الاتجاه .

∴ ح = $ق_١ - ق_٢$ (حيث $ق_١ > ق_٢$)

∴ ١٠ = ق − ٢٠ ∴ ق = ٣٠ نيوتن

، ∵ ق × ٨٠ = ٢٠ (٨٠ + ل) حيث ل طول القضيب

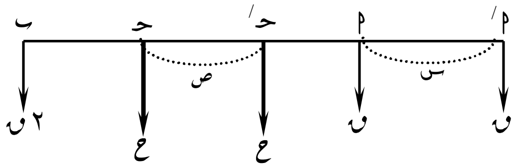
∴ ٣٠ × ٨٠ = ٢٠ (٨٠ + ل)

∴ ٨٠ + ل = ١٢٠ ∴ ل = ١٢٠ − ٨٠ = ٤٠ سم

مثال (٤) : قوتان متوازيتان وفى اتجاه واحد مقداراهما ق ، ٢ق تؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب ، فإذا تحركت القوة ق بحيث تظل موازية لنفسها مسافة قدرها س على الشعاع ‎$\overrightarrow{ب أ}$‎ ، فاثبت أن محصلة القوتين تتحرك مسافة قدرها $\frac{١}{٣}$س فى نفس الاتجاه .

الحل :

نفرض أن نقطة تأثير المحصلة تحركت مسافة قدرها ص نتيجة تحرك القوة ق مسافة قدرها س .



أولا : عندما تؤثر المحصلة فى نقطة حـ .

∵ ق × أ حـ = ٢ ق × ب حـ

∴ ق (أ حـ/ + ص) = ٢ق × ب حـ .

∴ أ حـ/ + ص = ٢ ب حـ .... (١)

ثانيا: عندما تؤثر المحصلة فى نقطة حـ/ .

∴ ق(أأ/ + أ حـ/) = ٢ ق (ب حـ + ص)

∵ س + أ حـ/ = ٢ ب حـ + ٢ ص .... (٢)

ومن (١) ، (٢)

∴ س + أ حـ/ = أ حـ/ + ص + ٢ ص .

∴ س = ٣ ص ∴ ص = $\frac{١}{٣}$ س

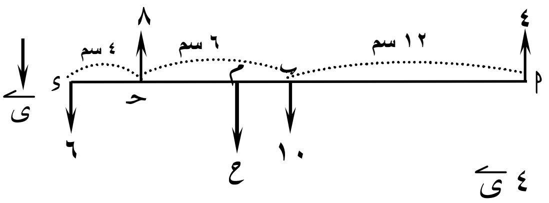
مثال (٥) : أ ، ب ، حـ ، ء أربع نقط على مستقيم واحد أفقى ومأخوذة بهذا الترتيب بحيث أ ب = ٢ ب حـ = ٣ حـ ء = ١٢ سم . أثرت القوتان ٤ ، ٨ ث.جم رأسيا لأعلى فى أ ، حـ وأثرت القوتان ١٠ ، ٦ فى ب ، ء رأسيا لأسفل على الترتيب . عين محصلة هذه القوى .

الحل :

أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ٦ سم

حـ ء = ٤ سم .

نأخذ متجه وحدة ى فى اتجاه المحصلة .



ع = ١٠ى + ٦ ى − ٤ ى − ٨ ى = ٤ ى

∴ ع = ٤ ث . جم وخط عملها يمر بنقطة م حيث أ م = س سم

∵ القياس الجبرى لعزم المحصلة حول أ = مجموع القياسات الجبرية لعزم القوى حول أ

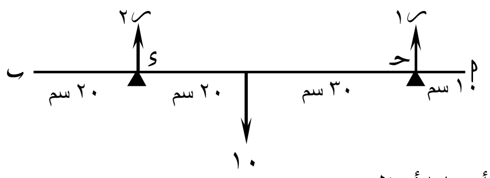
∴ ٤ × س = ١٠ × ١٢ − ٨ × ١٨ + ٦ × ٢٢

∴ س = ٢٧ سم

∴ م تقع على بعد ٢٧ سم على اليسار من أ .

مثال (٦) : $ٮ ٮ$ ساق من الحديد طولها ٨٠ سم ووزنها ١٠ ث . كجم يؤثر عند منتصفها ترتكز فى وضع أفقى على حاملين حـ ، ء حيث ٮ حـ = ١٠ سم ، ٮ ء = ٢٠ سم . أوجد الضغط على كل من الحاملين . أوجد أيضا الثقل الذى يعلق من ٮ حتى يكون القضيب على وشك الانقلاب .

الحـــل :



أولا : القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى :

- وزنه ١٠ ث . كجم عند منتصف $\overline{ٮ ٮ}$ رأسيا لأسفل
- رد افعل $ر_{١}$ عند حـ رأسيا لأعلى
- رد الفعل $ر_{٢}$ عند ء رأسيا لأعلى

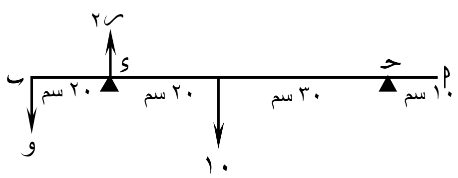
∴ محصلة $ر_{١}$ ، $ر_{٢}$ تتزن مع الوزن وخط عملها هو نفس خط عمل الوزن .

∴ $ر_{١} + ر_{٢} = ١٠$ .... (١)

، $ر_{١} \times ٣٠ = ر_{٢} \times ٢٠$ ∴ $ر_{١} = \frac{٢}{٣} ر_{٢}$ وبالتعويض فى (١)

∴ $\frac{٢}{٣} ر_{٢} + ر_{٢} = ١٠$ ∴ $\frac{٥}{٣} ر_{٢} = ١٠$

∴ $ر_{٢} = ٦$ ث . كجم ، $ر_{١} = \frac{٢}{٣} \times ٦ = ٤$ ث . كجم

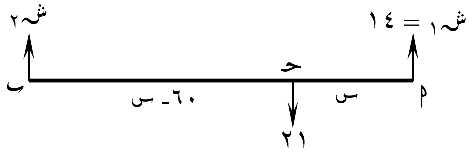


ثانيا : عندما يكون القضيب على وشك الانقلاب فإن رد رد الفعل عند حـ يتلاشى ويكون رد الفعل عند ء مساويا لمحصلة وزن القضيب والثقل و .

∴ $١٠ \times ٢٠ = و \times ٢٠$ ∴ و = ١٠ ث . كجم

مثال (٧) : قضيب خفيف طوله ٦٠ سم معلق من طرفيه بواسطة خيطين رأسيين لا يتحمل أى منهما شدا يزيد عن ١٤ نيوتن . علق من إحدى نقط القضيب ثقل قدره ٢١ نيوتن . أوجد المواضع التى يمكن تعليق الثقل منها دون أن ينقطع أى من الخيطين .

الحـــل :



نفرض أن القضيب هو ﺃ ب وأن نقطة حـ هى نقطة تعليق الثقل حيث ﺃ حـ = س ، وأن الشد فى الخيط عند ﺃ هو شـ١ ، والشد فى الخيط عند ب هو شـ٢ ، عندما تكون حـ أقرب إلى الطرف ﺃ يكون شـ١ > شـ٢ ويكون الخط على وشك الانقطاع عندما تكون شـ١ = ١٤ نيوتن .

∵ شـ١ + شـ٢ = ٢١ ∴ ١٤ + شـ٢ = ٢١ ∴ شـ٢ = ٧ نيوتن

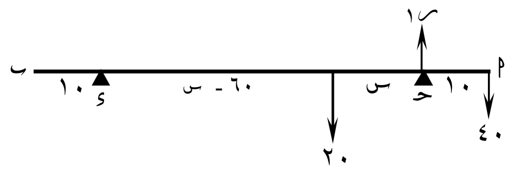
، ∵ شـ١ × س = شـ٢ (٦٠ – س) ∴ ١٤ س = ٧ (٦٠ – س)

∴ ١٤ س = ٤٢٠ – ٧ س ∴ ٢١ س = ٤٢٠ ∴ س = ٢٠ سم

أى أن الثقل الذى يجب أن يعلق من أى موضع على القضيب دون أن ينقطع الخيط لا يقل بعدها عن الطرف ﺃ أو ب بمقدار ٢٠ سم .

مثال (٨) : ﺃ ب قضيب غير منتظم (وزنه لا يؤثر فى منتصفه) طوله ٨٠ سم ووزنه ٢٠ ث.كجم يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند حـ ، ء حيث ﺃ حـ = ب ء = ١٠ سم . علق من ﺃ ثقل قدره ٤٠ ث . كجم فأصبح القضيب على وشك الدوران حول حـ . أوجد بعد نقطة تأثير وزن القضيب عن ﺃ ، ثم أوجد أكبر ثقل يمكن تعليقه من ب دون أن يختل التوازن مع رفع الثقل المعلق من ﺃ .

الحـــل :



أولا :

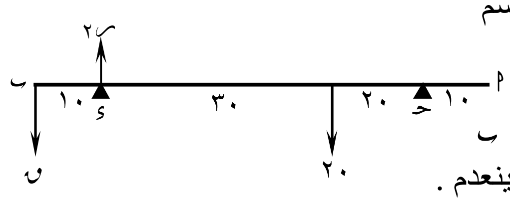
∵ القضيب على وشك الدوران حول حـ .

∴ ينعدم الضغط عند ء .

بأخذ العزوم عند حـ .

∴ ٢٠ × س = ٤٠ × ١٠ ∴ س = ٢٠ سم

نقطة تأثير الوزن تبعد ٣٠ سم عن ﺃ .



ثانيا :

إذا كانت و ث . كجم هو أكبر ثقل يعلق عند ب دون أن يختل التوازن ، فإن الضغط عند حـ ينعدم .

بأخذ العزوم عند ء .

∴ ٢٠ × ٤٠ = و × ١٠

∴ و = ٨٠ ث . كجم

تمارين (٣)

(١) قوتان متوازيتان مقدارهما ٥ ، ٨ نيوتن والمسافة بين خطى عملهما ٢٤ سم . أوجد محصلتهما عندما تكون :
اولا : القوتان فى اتجاه واحد
ثانيا : القوتان فى اتجاهين متضادين .
[الإجابة : أولا : ع = ١٣ نيوتن ، بعد نقطة تأثير ع عن القوة ق٢ = $\frac{١٢٠}{١٣}$ سم ،
ثانيا : ع = ٣ نيوتن ، بعد نقطة تأثير ع عن ق٢ = ٤٠ سم]

(٢) قوتان متوازيتان $\overrightarrow{ق}_١$ ، $\overrightarrow{ق}_٢$ متحدتان فى الاتجاه والبعد بين خطى عملهما ٤٠ سم ، فإذا كان مقدار محصلتهما ١٢ ث . كجم ويبعد خط عملها عن خط عمل ق١ مسافة ١٠ سم فأوجد مقدار كلا من القوتين .
[الإجابة : ٣ ، ٩ ث . كجم]

(٣) قوتان متوازيتان وفى اتجاه واحد تؤثران فى نقطتين أ ، ب حيث أ ب = ٤٠ سم ، فإذا كان مقدار محصلتهما ٢٥ ث . جم وتؤثر فى النقطة حـ ∈ $\overline{أ ب}$ حيث أ حـ = ١٦ سم . أوجد مقدار كل من القوتين .
[الإجابة : ١٥ ، ١٠ ث . جم]

(٤) مصر / ١٩٩٢ : قوتان متوازيتان مقدارهما ق ، ٣٦ نيوتن ومحصلتهما ٨٤ نيوتن تعمل فى اتجاه مضاد للقوة الثانية وعلى بعد ٣٠ سم منها . أوجد ق والبعد بين خطى عمل القوتين .
[الإجابة : ١٢٠ نيوتن ، ٢١ سم]

(٥) قوتان متوازيتان $\overrightarrow{ق}_١$ ، $\overrightarrow{ق}_٢$ مقدار محصلتهما ٧٠ نيوتن ومقدار القوة الأولى ٥٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن خط عمل المحصلة ٣٠ سم . عين مقدار واتجاه خط عمل $\overrightarrow{ق}_٢$ فى الحالتين :
أولا : $\overrightarrow{ق}_١$ ، $\overrightarrow{ع}$ فى اتجاه واحد .
ثانيا : $\overrightarrow{ق}_١$ ، $\overrightarrow{ع}$ فى اتجاهين متضادين .
[الإجابة : ٢٠ ، على بعد ٧٥ سم من ع ، ١٢٠ نيوتن على بعد ١٢.٥ سم من ع]

(٦) مصر / ١٩٩١ : ق١ ، ق٢ قوتان متوازيتان ومتضادين فى الاتجاه تؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب حيث ق١ > ق٢ . إذا كان محصلة ق١ ، ق٢ قوة معيارها ٩٠ ث. كجم وتؤثر فى النقطة حـ ∈ $\overrightarrow{ب أ}$ حيث أ ب = ٣٦ سم ، أ حـ = ١٦ سم . أوجد ق١ ، ق٢ .
[الإجابة : ١٣٠ ، ٤٠ ث . كجم]

(٧) قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ١٢ ث . جم ومقدار إحدى القوتين ١٥ ث . جم وتعمل على بعد ١٠ سم من المحصلة . أوجد مقدار القوة الثانية والبعد بين خطى عمل القوتين إذا كانت القوة المعلومة والمحصلة تعملان :
أولا : فى اتجاه واحد .
ثانيا : فى اتجاهين متضادين .
[الإجابة : أولا : ٣ ث.جم ، ٤٠ سم ، ثانيا : ٢٧ ث.جم ، $\frac{٤٠}{٩}$ سم]

(٨) محصلة قوتين متوازيتين تساوى ٣٠ نيوتن ، وإحدى القوتين ٥٠ نيوتن وتعمل على بعد ١٢ سم من المحصلة . اوجد مقدار واتجاه القوة الثانية والبعد بين القوتين إذا كانت :
أولا : المحصلة تعمل فى اتجاه القوة المعلومة .
ثانيا : المحصلة تضاد القوة المعلومة .
[الإجابة أولا : ٢٠ نيوتن ، ١٨ سم ، ثانيا : ٨٠ نيوتن ، ٤.٥ سم]

(٩) مصر/١٩٩٠ : قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٤٠ نيوتن ومقدار إحدى القوتين ٦٠ نيوتن وخط عملها يبعد عن خط عمل المحصلة بمقدار ٢٤ سم . أوجد القوة الثانية والبعد بين خطى عمل القوتين إذا كانت المحصلة والقوة المعلومة تعملان فى اتجاه واحد . [الإجابة : ٢٠ نيوتن ، ٤٨ سم]

(١٠) مصر/١٩٩٥ : قوتان متوازيتان مقدارهما ١٥ ، ق نيوتن حيث ق > ١٥ وتؤثران فى النقطتين ا ، ب على الترتيب ، إذا كان مقدار المحصلة يساوى ٥ نيوتن وتؤثر فى نقطة حـ ∈ $\overleftrightarrow{اب}$ حيث ب حـ = ٤٥ سم فأوجد ا ب .
[الإجابة : ٢٠ نيوتن ، ١٥ سم]

(١١) قوتان متوازيتان مقداراهما ٣ ، ٤ ث . كجم تؤثران فى النقطتين ا ، ب على الترتيب وفى اتجاه واحد ، فإذا تحركت القوة الأولى بحيث تظل موازية لنفسها مسافة قدرها ل على الشعاع $\overleftarrow{با}$. أثبت أن محصلة القوتين تتحرك مسافة قدرها $\frac{٣}{٧}$ ل سم فى نفس الاتجاه .

(١٢) قوتان متوازيتان فى اتجاه واحد مقدارهما $\overleftarrow{ق_{١}}$ ، $\overleftarrow{ق_{٢}}$ تؤثران فى النقطتين ا ، ب على الترتيب فإذا تحركت ق٢ بحيث تظل موازية لنفسها مسافة قدرها س على الشعاع $\overleftarrow{اب}$ فاثبت أن محصلة القوتين تتحرك مسافة قدرها $\frac{ق_{٢}}{ق_{١} + ق_{٢}}$ س فى نفس الاتجاه .

(١٣) ٮ ، ٮ ، حـ ، ء تقع على خط مستقيم واحد أفقى بحيث ٮ ٮ = ٥ سم ، ٮ حـ = ١٠ سم ، حـ ء = ١٥ سم . أثرت قوى مقاديرها ٤ ، ٦ ، ٢ ، ٨ ث . كجم فى النقط ٮ ، ٮ ، حـ ، ء رأسيا إلى أسفل . عين محصلة المجموعة .

[الإجابة : ع = ٢٠ ، وتبعد عن ٮ ١٥ سم]

(١٤) ٮ ، ٮ ، حـ ، ء ، هـ تقع على خط مستقيم واحد أفقى بحيث ٮ ٮ = ٢ ٮ حـ = حـ ء = ٢ ء هـ = ١٠ سم ، أثرت القوى ٣ ، ٥ ، ٤ ث . كجم رأسيا إلى أعلى فى النقط ٮ ، حـ ، هـ والقوتان ٦ ، ١٠ ث . كجم رأسيا إلى أسفل فى النقطتين ٮ ، ء . عين محصلة المجموعة .

[الإجابة : ع = ٤ ، وتبعد عن ٮ ٢٨.٧٥ سم]

(١٥) ٮ ، ٮ ، حـ ، ء أربع نقط على مستقيم واحد بحيث ٮ ٮ = ٢ ٮ حـ = حـ ء = ٤٠ سم . أثرت قوى متوازية مقاديرها ٢٠ ، ٣٠ ، $ق_١$ ، $ق_٢$ نيوتن فى النقط ٮ ، ٮ ، حـ ، ء على الترتيب بحيث كانت القوتان ٢٠ ، $ق_٢$ نيوتن فى اتجاه واحد مضاد لاتجاه القوتين ٣٠ ، $ق_١$ وكانت محصلتهما ٢٠ نيوتن وفى اتجاه $ق_١$ وخط عملها ينصف $\overline{\text{ٮ ء}}$ فأوجد $ق_١$ ، $ق_٢$. [الإجابة : ٣٠ ، ٢٠ نيوتن]

(١٦) ثلاث قوى متوازية ومتساوية تؤثر عند الرؤوس ٮ ، ٮ ، حـ للمثلث ٮ ٮ حـ .
أوجد نقطة تأثير محصلة هذه القوى فى كل من الحالتين :
<u>أولا</u> : القوى الثلاث فى اتجاه واحد .
<u>ثانيا</u> : القوة عند ٮ فى اتجاه مضاد للقوتين عند ٮ ، حـ .

[الإجابة : أولا : نقطة تلاقى المتوسطات ، ثانيا : تؤثر عند ى ∈ $\overleftrightarrow{\text{ٮ هـ}}$ ، ه منتصف $\overline{\text{ٮ حـ}}$ حيث ى تقسم $\overline{\text{ٮ هـ}}$ من الخارج بنسبة ٢ : ١ أى : ٮ هـ = هـى]

(١٧) إذا أثرت ٤ قوى مستوية ومتوازية فى رءوس المربع ٮ ٮ حـ ء فى اتجاه واحد .
أثبت أن خط عمل المحصلة يمر بمركز المربع ، وإذا أزيلت القوة المؤثرة فى نقطة ء فأوجد نقطة تأثير محصلة القوى الثلاث الباقية .

[الإجابة : نقطة تأثير القوى الثلاث هى هـ حيث هـ ∈ $\overline{\text{ٮ م}}$ (م نقطة تلاقى القطرين) ، هـ تقسم $\overline{\text{ٮ م}}$ بنسبة ١ : ٢]

(١٨) ٮ ٮ قضيب من الحديد طوله ٦٠ سم ووزنه ٩٠ نيوتن يؤثر عند منتصفه يرتكز فى وضع أفقى على حاملين البعد بينهما ٣٠ سم ، فإذا كان الضغط على أحد الحاملين ضعف الضغط على الحامل الآخر فأوجد بعد كل من الحاملين عن طرف القضيب القريب منه .

[الإجابة : ٢٠ ، ٦٠ سم]

(١٩) مسطرة خفيفة مدرجة معلقة فى وضع أفقى بخيطين رأسيين أحدهما عند التدريج ١٠ والآخر عند التدريج ٧٠ ، علق ثقل قدره ١٢ ث . كجم عند التدريج ٢٥ ، أوجد الشد فى كل من الخيطين .

[الإجابة : ٩ ، ٣ ث . كجم]

(٢٠) قضيب خفيف طوله ٦٠ سم معلق من طرفيه بواسطة خيطين رأسيين لا يتحمل أى منهما شدا يزيد عن ١٠٠ ث . جم ، علق من أحد نقط القضيب ثقل قدره ١٦٠ث.جم أوجد المواضع التى يمكن تعليق الثقل منها دون أن ينقطع أى الخيطين .

[الإجابة : لا يمكن تعليق الثقل على أقل من ٢٢.٥ سم من أحد طرفى القضيب]

(٢١) قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ١٢ ث . كجم يرتكز فى وضع أفقى على حاملين حـ ، ء يبعدان ١٢ سم ، ٦ سم عن طرفى القضيب ، أوجد أكبر ثقل يمكن تعليقه من طرفى القضيب كل مرة على حده دون أن يختل توازن القضيب ، ثم أوجد رد الفعل فى كل مرة .

[الإجابة : أكبر ثقل هو : ١٨ ، ٤٨ ث . كجم ، رد الفعل يساوى ٦٠ ، ٣٠ ث كجم]

(٢٢) يرتكز قضيب منتظم طوله ٦٤ سم ووزنه ٧٠ نيوتن فى وضع أفقى على حاملين أحدهما يبعد ٨ سم عن أحد الطرفين والآخر يبعد ١٤ سم عن الطرف الآخر . أوجد الضغط على كل حامل . ثم أوجد الثقل الذى يعلق من الطرف الآخر حتى يكون القضيب على وشك الانقلاب .

[الإجابة : ٣٠ ، ٤٠ نيوتن ، ٩٠ نيوتن]

(٢٣) ٩ ٮ قضيب منتظم طوله ٥٠ سم . يرتكز فى وضع أفقى على حاملين حـ ، ء حيث على بعدى ١٠ ، ٤٠ سم من الطرف ٩ . إذا علق من الطرف ٩ ثقل قدره ٦٠ نيوتن يصبح القضيب على وشك الدوران حول حـ . أوجد وزن القضيب ورد فعل كل من الحاملين عندئذ .

[الإجابة : ٤٠ نيوتن ، ١٠٠ نيوتن ، صفر]

(٢٤) ٩ ٮ قضيب غير منتظم طوله ٢٤ سم ووزنه ١٠ نيوتن يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند حـ ، ء حيث ٩ حـ = ٮء = ٥ سم ، علق من ٩ ثقل قدره ٢٠ نيوتن فأصبح القضيب على وشك الدوران حول حـ أوجد بعد نقطة تأثير وزن القضيب عن ٩ ، ثم أوجد أكبر ثقل يمكن تعليقه من ٮ دون أن يختل التوازن مع رفع الثقل المعلق عند ٩ .

[الإجابة : ١٥ سم ، ٨ نيوتن]

ثانيا : اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية :

قاعدة

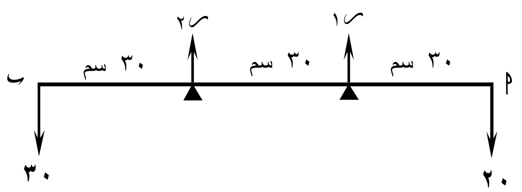
إذا اتزن جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية فإن :

- مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى يساوى صفراً
- مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أى نقطة فى مستويها يساوى صفراً .

أمثلة محلولة

مثال (١) : يرتكز قضيب مهمل الوزن طوله ٩٠ سم فى وضع أفقى على حاملين عند نقطتى تثليثه وعلق من طرفيه ثقلان مقدارهما ٢٠ ، ٣٠ نيوتن . عين الضغط على كل من الحاملين .

الحل :



القضيب متزن تحت تأثير القوتين ٢٠ ، ٣٠ نيوتن وتعملان رأسيا لأسفل ، وردى الفعل ر١ ، ر٢ ويعملان رأسيا لأعلى .

∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = صفراً

∴ ر١ + ر٢ - ٢٠ - ٣٠ = ٠

∴ ر١ + ر٢ = ٥٠ .... (١)

، مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أ = صفراً

∴ ٣٠ × ٩٠ – ر١ × ٦٠ – ر٢ × ٣٠ = ٠

∴ ٢ ر١ + ر٢ = ٩٠ .... (٢)

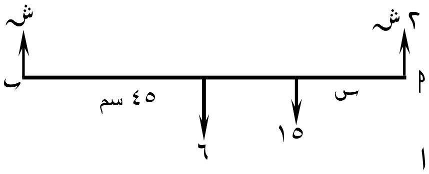
وبحل المعادلتين (١) ، (٢) ∴ ٢ ر١ + (٥٠ – ر١) = ٩٠

∴ ر١ = ٩٠ – ٥٠ = ٤٠ نيوتن

وبالتعويض فى (١) ∴ ر٢ = ٥٠ – ٤٠ = ١٠ نيوتن

مثال (٢) : ؋ ٮ قضيب طوله ٩٠ سم ووزنه ٦ نيوتن يؤثر فى منتصفه ، علق فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين عند طرفيه . أين يعلق ثقل مقداره ١٥ نيوتن حتى يكون الشد فى أحد الخيطين مساويا ضعف قيمته فى الخيط الآخر

الحــــل :



نفرض أن الثقل ١٥ نيوتن يبعد عن الطرف ؋ بمسافة قدرها س

∵ الساق متزنة

∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = صفرا

∴ ٢ ش + ش - ١٥ – ٦ = ٠

∴ ٣ ش = ٢١ ∴ ش = ٧ نيوتن

، مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول ؋ = صفراً

∴ ١٥ × س + ٦ × ٤٥ – ش × ٩٠ = ٠ وبالتعويض عن قيمة ش

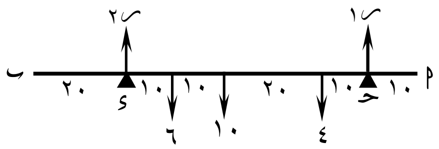
∴ ١٥ س + ٢٧٠ - ٩٠ × ٧ = ٠

∴ ١٥ س = ٦٣٠ – ٢٧٠ = ٣٦٠ ∴ س = ٢٤ سم

∴ يمكن تعليق الثقل ١٥ نيوتن على بعد ١٥ سم من أحد طرفى القضيب .

مثال (٣) : ؋ ٮ قضيب منتظم طوله ٨٠ سم ووزنه ١٠ ث . كجم يؤثر عند منتصفه يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند حـ ، ء حيث ؋ حـ = ١٠ سم ، ٮء = ٢٠ سم ، علق فى القضيب ثقلان مقدارهما ٤ ، ٦ ث . كجم ، الأول يبعد ٢ سم عن ؋ والثانى يبعد ٣٠ سم عن ٮ . أوجد الضغط على كل من الحاملين .

الحــــل :



∵ القضيب متزن تحت تأثير وزنه عند منتصفه والثقلين المعلقين ورد الفعل عند كل من الحاملين

∴ ر١ + ر٢ – (٤ + ١٠ + ٦) = ٠

∴ ر١ + ر٢ = ٢٠ .... (١)

بأخذ العزوم حول نقطة حـ (حتى ينعدم عزم ر١)

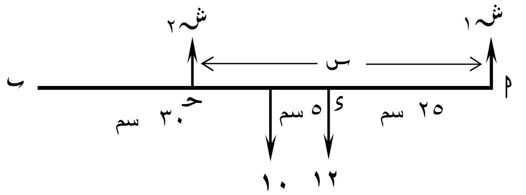
∴ ٤ × ١٠ + ١٠ × ٣٠ + ٦ × ٤٠ – ر٢ × ٥٠ = ٠

∴ ٥٠ ر٢ = ١١.٦ ث . كجم ، وبالتعويض فى (١) ر١ = ٨.٤ ث . كجم

∴ الضغط على الحاملين حـ ، ء هما ٨.٤ ، ١١.٦ ث . كجم رأسيا لأسفل .

مثال (٤) : قضيب منتظم ؋ ب طوله ٦٠ سم ووزنه ١٠ ث . جم ويؤثر عند منتصفه معلق فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين أحدهما مربوط فى نقطة ؋ والآخر فى نقطة حـ حيث ؋ حـ = س سم ، علق ثقل قدره ١٢ ث . جم فى نقطة ء حيث ؋ ء = ٢٥ سم . فإذا كان أقصى شد يتحمله كل خيط هو ١٥ ث . جم ، فأوجد القيم التى تقع بينها س ، وأوجد أيضا أكبر وأقل قيمة للشد فى كل من الخيطين .

الحـــل :



<u>أولا</u> : نفرض أن ش$_{١}$ وصلت قيمتها إلى الحد الأقصى ١٥ ث . جم

∴ ش$_{١}$ + ش$_{٢}$ = ٢٢

∴ ش$_{٢}$ = ٧ ث . جم (فى هذه الحالة)

وبأخذ العزوم حول ؋

∴ ١٢ × ٢٥ + ١٠ × ٣٠ – ٧ × س = ٠

∴ ٧ س = ٣٠٠ + ٣٠٠ = ٦٠٠ ∴ س = $\frac{٦٠٠}{٧}$ > طول القضيب

∴ لا يمكن أن يصل ش$_{١}$ إلى القيمة ١٥ ث . جم

نبدأ فى البحث عن أقصى قيمة تأخذها ش$_{١}$ وذلك بجعل س = ٦٠ سم وهى أقصى قيمة تأخذها س .

وبأخذ العزوم حول ؋ .

∴ ١٢ × ١٥ + ١٠ × ٣٠ – ش$_{٢}$ × ٦٠ = ٠

∴ ٦٠٠ = ٦٠ × ش$_{٢}$ ∴ ش$_{٢}$ = ١٠ ث . جم وتكون ش$_{١}$ = ١٢ ث . جم

<u>ثانيا</u> : نفرض أن ش$_{٢}$ وصلت قيمتها إلى الحد الأقصى ١٥ ث . جم

وبأخذ العزوم حول ؋

∴ ٦٠٠ = ١٥ × س ∴ س = ٤٠ سم

تكون ش$_{١}$ = ٧ ث . جم فى هذه الحالة

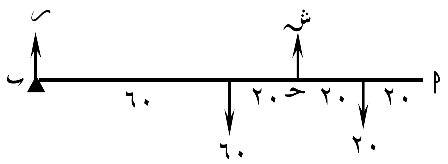
∴ أكبر قيمة للشد عند ؋ هى ١٢ ث . جم ، وأقل قيمة ٧ ث . جم

وأكبر قيمة للشد عند ب هى ١٥ ث . جم ، وأقل قيمة ١٠ ث . جم

، س تقع بين ٤٠ سم ، ٦٠ سم .

مثال (٥) : ٢ ب قضيب طوله ١٢٠ سم ووزنه ٦٠ نيوتن يؤثر عند نقطة منتصفه ، يرتكز القضيب فى وضع أفقى على حامل عند طرفه ب ويحفظ فى حالة توازن بواسطة خيط رأسى مثبت من نقطة فيه تبعد ٤٠ سم عن الطرف ٢ ويحمل ثقلا مقداره ٢٠ نيوتن عند نقطة تبعد ٢٠ سم من ٢ . عين قيمة كل من الشد فى الخيط والضغط على الحامل ، وما هو مقدار الثقل الذى يجب تعليقه فى الطرف ٢ حتى يصبح القضيب على وشك الانفصال عن الحامل ، وما هى قيمة الشد فى الخيط عندئذ .

الحل :



أولا : القضيب متزن تحت تأثير وزنه ٦٠ نيوتن ، والثقل ٢٠ نيوتن رأسيا لأسفل ، والشد فى الخيط عند حـ ، رد الفعل عند ب رأسيا لأعلى .

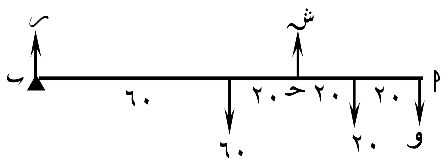
∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = صفرا

∴ ش + ر = ٢٠ + ٦٠ = ٨٠ نيوتن

، بأخذ العزوم حول نقطة حـ (حتى ينعدم عزم ش)

∴ ٦٠ × ٢٠ – ر × ٨٠ – ٢٠ × ٢٠ = ٠

∴ ر = ٨٠٠ ÷ ٨٠ = ١٠ نيوتن ∴ ش = ٨٠ – ١٠ = ٧٠ نيوتن



ثانيا : نفرض أن الثقل المعلق عند ٢ هو (و) نيوتن ، حتى يصبح القضيب على وشك الانفصال عن الحامل عند حـ ، وتكون قيمة ر فى هذه الحالة = صفر

، بأخذ العزوم حول نقطة حـ (حتى ينعدم عزم ش)

∴ ٦٠ × ٢٠ – ٢٠ × ٢٠ – و × ٤٠ = ٠

∴ و = ٨٠٠ ÷ ٤٠ = ٢٠ نيوتن

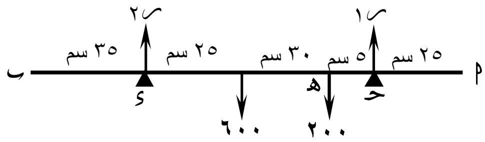
∴ ش = ٢٠ + ٢٠ + ٦٠ = ١٠٠ نيوتن

مثال (٦) : قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم ووزنه ٦٠٠ نيوتن ، يرتكز على حاملين حـ ، ء المسافة بينهما ٦٠ سم حيث ﻡ حـ = ٢٥ سم ، علق فى القضيب ثقل عند هـ حيث ﻡ هـ = ٣٠ سم . أوجد :

أولا : رد الفعل عند كل من حـ ، ء ، إذا كان الثقل المعلق عند هـ = ٢٠٠ نيوتن

ثانيا : مقدار الثقل المعلق عند هـ إذا كان مقدار رد الفعل عند حـ ضعف مقدار رد الفعل عند ء .

الحل :



أولا : القضيب متزن تحت تأثير وزنه ٦٠٠ نيوتن ، والثقل ٢٠٠ نيوتن رأسيا لأسفل ، وردى الفعل ر١ ، ر٢ رأسيا لأعلى .

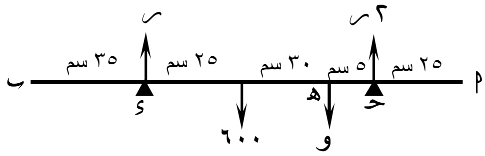
∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = صفرا

∴ ر١ + ر٢ = ٢٠٠ + ٦٠٠ = ٨٠٠ نيوتن

، بأخذ العزوم حول نقطة حـ (حتى ينعدم عزم ر١)

∴ ٢٠٠ × ٥ + ٦٠٠ × ٣٥ – ر٢ × ٦٠ = ٠

∴ ر٢ = ٣٦٦ $\frac{٢}{٣}$ نيوتن ، ر١ = ٤٣٣ $\frac{١}{٣}$ نيوتن



ثانيا : نفرض أن الثقل المعلق عند عند هـ هو و نيوتن .
بأخذ العزوم حول نقطة هـ (حتى ينعدم عزم و)

∴ ٦٠٠ × ٣٠ – ر × ٥٥ + ٢ ر × ٥ = ٠

ومنها : ر = ٤٠٠ نيوتن ،

∵ مجموع القياسات الجبرية للقوى = صفرا

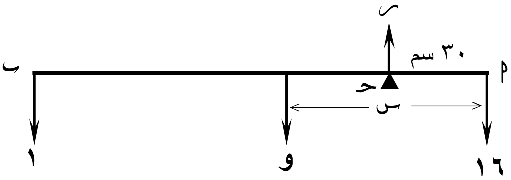
∴ ٢ ر + ر = و + ٦٠٠

∴ ٣ ر = و + ٦٠٠ ∴ و = ٣ ر – ٦٠٠

∴ و = ٣ × ٤٠٠ – ٦٠٠ = ١٢٠٠ – ٦٠٠ = ٦٠٠ نيوتن

مثال (٧) : ٢ ب قضيب غير منتظم طوله ١٢٠ سم ، إذا ثبت عند طرفه ب ثقل قدره ١ نيوتن وعلق من ٢ ثقل قدره ١٦ نيوتن فإن القضيب يتزن فى هذه الحالة عند نقطة تبعد ٣٠ سم من ٢ ، وإذا أُنقص الثقل الموجود عند ٢ وصار ٨ نيوتن فإن القضيب يتزن عند نقطة تبعد ٤٠ سم من ٢ . أوجد وزن القضيب وبعد نقطة تأثير وزنه عن ٢ .

الحـــل :

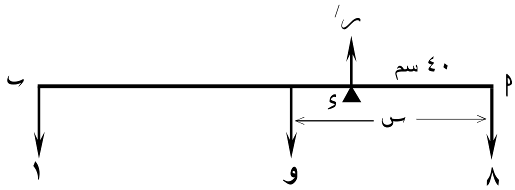


أولا : القضيب متزن تحت تأثير وزنه (و) ، الثقلين المعلقين عند ٢ ، ء ورد الفعل عند حـ .

بأخذ العزوم حول نقطة حـ (حتى ينعدم عزم ر)

∴ ١ × ٩٠ + و (س – ٣٠) – ١٦ × ٣٠ = ٠

∴ و (س – ٣٠) = ٣٩٠ .... (١)



أولا : القضيب متزن تحت تأثير وزنه ، الثقلين المعلقين عند ٢ ، ء ورد الفعل عند ء .

بأخذ العزوم حول نقطة ء (حتى ينعدم عزم ر)

∴ ١ × ٨٠ + و (س – ٤٠) – ٨ × ٤٠ = ٠

∴ و (س – ٤٠) = ٢٤٠ .... (٢)

بقسمة (١) على (٢)

∴ و(س – ٣٠) / و (س – ٤٠) = ٣٩٠ / ٢٤٠

∴ ١٣ س – ٥٢٠ = ٨ س – ٢٤٠

∴ ١٣ س – ٨ س = ٥٢٠ – ٢٤٠

∴ ٥ س = ٢٨٠ ∴ س = ٥٦ سم

وبالتعويض فى رقم (١)

∴ و (٥٦ – ٣٠) = ٣٩٠

∴ ٢٦و = ٣٩٠ ∴ و = ١٥ نيوتن

مثال (٨) : تؤثر القوى المستوية المتزنة والمتوازية $\overrightarrow{ق}_{١}$ ، $\overrightarrow{ق}_{٢}$ ، $\overrightarrow{ق}_{٣}$ ، $\overrightarrow{ق}_{٤}$ فى النقط أ = (٢ ، - ١) ، ب = (- ٤ ، - ٣) ، حـ = (٣ ، ٥) ، ء = (-١ ، ٠) على الترتيب ، فإذا كانت $\overrightarrow{ق}_{١} = ٣\,\overrightarrow{س} + ٤\,\overrightarrow{ص}$ ، $\|\overrightarrow{ق}_{٢}\| = ٢٠$ نيوتن فى نفس اتجاه $\overrightarrow{ق}_{١}$. أوجد كلا من $\overrightarrow{ق}_{٣}$ ، $\overrightarrow{ق}_{٤}$ إذا كانتا تعملان فى اتجاه مضاد لاتجاه $\overrightarrow{ق}_{١}$.

الحـــل :

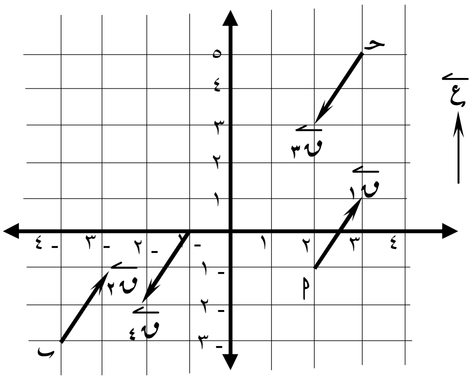
نفرض أن $\overrightarrow{ق}_{٢} = ك\,\overrightarrow{ق}_{١} = ك\,(٣\,\overrightarrow{س} + ٤\,\overrightarrow{ص})$

$\therefore \|\overrightarrow{ق}_{٢}\| = \sqrt{٩\,ك^{٢} + ١٦\,ك^{٢}}$ $\therefore$ ٢٠ = ± ٥ ك $\therefore$ ك = ± ٤

$\because$ $\overrightarrow{ق}_{٢}$ فى نفس اتجاه $\overrightarrow{ق}_{١}$ $\therefore$ ك = ٤

$\therefore \overrightarrow{ق}_{٢} = ٤\,(٣\,\overrightarrow{س} + ٤\,\overrightarrow{ص})$

$= ١٢\,\overrightarrow{س} + ١٦\,\overrightarrow{ص}$



، نفرض أن :

$\overrightarrow{ق}_{٣} = -\,ل\,(٣\,\overrightarrow{س} + ٤\,\overrightarrow{ص})$ ،

$\overrightarrow{ق}_{٤} = -\,م\,(٣\,\overrightarrow{س} + ٤\,\overrightarrow{ص})$

حيث ل > ٠ ، م > ٠

$\because$ القوى متزنة : $\therefore \overrightarrow{ح} = \overrightarrow{٠}$

$\therefore \overrightarrow{ق}_{١} + \overrightarrow{ق}_{٢} + \overrightarrow{ق}_{٣} + \overrightarrow{ق}_{٤} = \overrightarrow{٠}$

$\therefore (٣\,\overrightarrow{س} + ٤\,\overrightarrow{ص}) + (١٢\,\overrightarrow{س} + ١٦\,\overrightarrow{ص}) +$
$(-\,٣\,ل\,\overrightarrow{س} + -\,٤\,ل\,\overrightarrow{ص}) + (-\,٣\,م\,\overrightarrow{س} + -\,٤\,م\,\overrightarrow{ص}) = \overrightarrow{٠}$

$\therefore (١٥ - ٣ل - ٣م)\,\overrightarrow{س} + (٢٠ - ٤ل - ٤م)\,\overrightarrow{ص} = \overrightarrow{٠}$

$\therefore$ ل + م = ٥ .... (١)

$\because$ المجموعة متزنة $\therefore \overrightarrow{ح}_{و} = ٠$

$\therefore$ (٢ ، - ١) × (٣ ، ٤) + (- ٤ ، - ٣) × (١٢ ، ١٦) +
(٣ ، ٥) × (- ٣ل ، - ٤ل) + (- ١ ، ٠) × (- ٣م ، - ٤ م) $= \overrightarrow{٠}$

$\therefore ١١\,\overrightarrow{ع} + (-\,٢٨)\,\overrightarrow{ع} + ٣\,ل\,\overrightarrow{ع} + ٤\,م\,\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{٠}$

$\therefore$ ٣ ل + ٤ م = ١٧ .... (٢)

وبحل المعادلتين (١) ، (٢) $\therefore$ م = ٢ ، ل = ٣

$\therefore \overrightarrow{ق}_{٣} = -\,٣\,(٣\,\overrightarrow{س} + ٤\,\overrightarrow{ص}) = -\,٩\,\overrightarrow{س} - ١٢\,\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ق}_{٤} = -\,٢\,(٣\,\overrightarrow{س} + ٤\,\overrightarrow{ص}) = -\,٦\,\overrightarrow{س} - ٨\,\overrightarrow{ص}$

تمارين (٤)

(١) ١٩٩٩/دور ثان : ؟ ب مسطرة طولها ٥٠ سم ووزنها ٥٠٠ ث . جم يؤثر فى منتصفها ، علقت فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين عند طرفيها وعلقت فى المسطرة ثلاثة أثقال مقدار كل منه ١٠٠ ث . جم على أبعاد ١٠ سم ، ٢٠ سم ، ٣٠ سم من نقطة ؟ . أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين .
[الإجابة : ٤٣٠ ، ٣٧٠ ث . جم]

(٢) ٢٠٠١/دور أول : ؟ ب قضيب طوله ١٤٠ سم ووزنه ١٦ نيوتن (يؤثر فى منتصفه) عُلقَ فى وضع أفقى بواسطة خيطين رفيعين رأسيين من طرفيه ، على أى بعد من طرفه ؟ يمكن تعليق ثقل مقداره ١٤ نيوتن من إحدى نقط القضيب لكى يكون الشد فى الخيط عند ؟ ضعف مقداره عند ب .
[الإجابة : ٢٠ سم من ؟]

(٣) ٢٠٠٠/دور ثان : ؟ ب قضيب طوله ١٨٠ سم ووزنه ٧٠ نيوتن (يؤثر فى منتصفه) يرتكز فى وضع أفقى على حامل عند طرفه ب ويحفظ القضيب فى حالة توازن بواسطة خيط خفيف رأسى مثبت من نقطة فيه تبعد ٦٠ سم عن طرفه ؟ ويحمل القضيب ثقلا مقداره ٢٠ نيوتن عن نقطة تبعد ١٥ سم من ؟ . عين مقدار كل من الشد فى الخيط والضغط على الحامل .
[الإجابة : ٨٠ ، ١٠ نيوتن]

(٤) ٢٠٠١/دور أول : ؟ ب قضيب منتظم طوله ١٠٥ سم ووزنه ١٢ نيوتن يؤثر عند منتصفه ، فإذا ارتكز القضيب أفقيا على حاملين عند حـ ، ء بحيث ؟ حـ = ٢٥ سم ، وعلق من طرفيه ؟ ، ب ثقلان مقدارهما ٤٨ ، ٢٤ نيوتن على الترتيب . عين مواضع النقطة ء ليكون مقدار الضغط عند حـ ضعف مقدار الضغط عند ء .
[الإجابة : ء على بعد ٦٢.٥ سم من ؟]

(٥) ٢٠٠٠/دور ثان : ؟ ب قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ٣٠ نيوتن (يؤثر فى منتصفه) معلق فى وضع أفقى بواسطة خيطين راسيين من طرفيه ويحمل القضيب ثقلين مقدارهما ١٠ نيوتن على بعد ١٠ سم من الطرف ؟ ، ٢٠ نيوتن على بعد ٢٠ سم من الطرف ب . أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين .
[الإجابة : ٣٠ ، ٣٠ نيوتن]

(٦) مصر/١٩٩٢ : ؟ ب قضيب طوله ١٢٠ سم ووزنه ٣٠٠ ث . جم يؤثر عند منتصفه يرتكز فى وضع أفقى على دعامتين عند حـ ، ء حيث ؟ حـ = بء = ٢٠ سم ، ويحمل ثقلا قدره ٢٠٠ ث . جم عند نقطة هـ من القضيب حيث ؟ هـ = ٣٠ سم .
أوجد مقدار الضغط على كل من الدعامتين . [الإجابة : ٣٢٥ ، ١٧٥ ث . جم]

(٧) ﻫ ب قضيب طوله ١٢٠ سم ووزنه ٦٠٠ ث . جم يؤثر فى منتصفه ، علق القضيب فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين عند النقطتين حـ ، ء عليه حيث ﻫ حـ = ٢٥ سم ، ب ء = ٣٥ سم وعلق ثقل قدره ن ث . جم عند النقطة هـ عليه حيث ﻫ هـ = ٣٠ سم وكان الشد فى الخيط عند حـ ضعف الشد فى الخيط عند ء . أوجد ن .
[الإجابة : ن = ٦٠٠ ث . جم]

(٨) ١٩٩٨/دور أول : قضيب منتظم طوله ١٨٠ سم ووزنه ٦٠ نيوتن (يؤثر عند منتصفه) معلق فى وضع أفقى بواسطة خيطين خفيفين رأسيين من طرفيه ﻫ ، ب ويحمل القضيب ثقلا مقداره ١٥٠ نيوتن عند حـ من القضيب ، إذا كان مقدار الشد فى الخيط عند ﻫ ضعف مقدار الشد فى الخيط عند ب . فأوجد ﻫ حـ . [الإجابة : ٤٨ سم]

(٩) ١٩٩٧/دور ثان : ﻫ ب قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ١٢٠ نيوتن (يؤثر فى منتصفه) يرتكز فى وضع أفقى على حاملين أحدهما يبعد ٣٠ سم من ﻫ والثانى يبعد ١٠ سم عن ب ، أوجد رد فعل كل من الحاملين ، ثم اوجد مقدار الثقل الذى يجب أن يعلق عند ب حتى يتساوى الضغط على كل الحاملين .
[الإجابة : ٨٠ ، ٤٠ نيوتن ، و = ٣٠ نيوتن]

(١٠) ﻫ ب مسطره طولها ١٠٠ سم ووزنها (و) نيوتن يؤثران فى منتصفها ، علقت فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين عند طرفيها . أين يعلق ثقل مقداره (٥ و) نيوتن حتى يكون مقدار الشد فى أحد الخيطين ضعف مقداره فى الخيط الآخر.
[الإجابة : على بعد ٣٠ سم من أحد طرفيها حيث يكون الشد عند ب ضعف الشد عند ﻫ]

(١١) ﻫ ء قضيب غير منتظم يرتكز أفقيا على وتدين عند النقطتين ب ، حـ حيث ﻫ ب = ب حـ = حـ ء ، وجد أنه إذا علق من ﻫ ثقل قدره ٥ ث . كجم فإن القضيب يصبح على وشك الدوران حول ب ، وإذا علق من ء ثقل قدره ١٠ ث . كجم فإنه يصبح على وشك الدوران حول حـ . أوجد وزن القضيب وأثبت أنه يؤثر فى نقطة تقسم $\overline{\text{ﻫ ء}}$ بنسبة ٤ : ٥ . [الإجابة : ١٥ ث . كجم]

(١٢) ﻫ ب ساق حديدية طولها ٩٠ سم ووزنها ١.٢ ث . كجم يؤثر فى منتصفها ، ترتكز فى وضع أفقى على حاملين أحدهما عند الطرف ﻫ ، إذا كان مقدار الضغط على الحامل عند ﻫ يساوى ٠.٣ ث . كجم فبين أن الحامل الآخر يجب أن يوضع على بعد ٣٠ سم من الطرف ب ، ثم أوجد مقدار الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف ب حتى تكون الساق على وشك الدوران . [الإجابة : و = ٠.٦ ث . كجم]

(١٣) ١٩٩٧/دور أول : ﻫ ب قضيب غير منتظم وزنه ٤ ث . كجم وطوله ١٠٠ سم يرتكز فى وضع أفقى على حاملين حـ ، ء بحيث كان ﻫ حـ = ب ء = ٢٠ سم ، فإذا كان مقدار الضغط على الحامل عند حـ يساوى ضعف مقدار الضغط على

الحامل عند ء . عين بعد نقطة تأثير وزن القضيب عن ا ، ثم أوجد مقدار الثقل الذى يجب أن يعلق عند ب بحيث يكون القضيب على وشك الدوران .
[الإجابة : البعد عن ا = ٤٠ سم ، و = ٨ ث . كجم]

(١٤) ا ب قضيب غير منتظم وزنه (و) نيوتن وطوله ١٥٠ سم ، يرتكز على وتدين حـ ، ء بحيث كان ا حـ = ٢٠ سم ، ب ء = ٣٠ سم ، لوحظ أن القضيب يكون على وشك الدوران حول حـ إذا علق من الطرف ا ثقل مقداره ٧ نيوتن ، ويكون على وشك الدوران حول ء إذا علق من الطرف ب ثقل مقداره ٢ نيوتن . أوجد وزن القضيب ونقطة تأثيره . [الإجابة : ٢ نيوتن ، ٩٠ سم من ا]

(١٥) ٢٠٠٠/دور أول : ا ب قضيب غير منتظم طوله ٣٠ سم ، يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند حـ ، ء حيث ا حـ = حـ ء = ء ب ، وجد أنه إذا علق من ا ثقل قدره ٦ ث . كجم فإن القضيب يصبح على وشك الدوران حول حـ ، وإذا علق من ب ثقل قدره ٩ ث . كجم لأصبح القضيب على وشك الدوران حول ء . أوجد وزن القضيب وبعد نقطة تأثيره عن ا . [الإجابة : ١٥ ث . كجم ، ٤ سم]

(١٦) س ل قضيب غير منتظم طوله ٤٦ سم ، يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند ص ، ع على القضيب حيث س ص = ٦ سم ، ع ل = ٧ سم ، وُجد أن القضيب يكون على وشك الدوران إذا عُلق من الطرف س كتلة مقدارها ١٢٠ جم أو من الطرف ل كتلة مقدارها ١٨٠ جم . أوجد وزن القضيب وبعد نقطة تأثير وزنه عن الطرف س . [الإجابة : ٦٠ نيوتن ، ١٨ سم]

(١٧) ا ب قضيب غير منتظم طوله ٦٤ سم ووزنه ٩ نيوتن يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند حـ ، ء بحيث كان ا حـ = ٨ سم ، ب ء = ١٥ سم ، علق من ا ثقل قدره ١٨ نيوتن فأصبح القضيب على وشك الدوران حول حـ . أوجد بعد نقطة تأثير وزن القضيب عن حـ ، ثم أوجد أيضا أكبر ثقل يمكن تعليقه من الطرف ب دون أن يختل التوازن مع عدم رفع الثقل المعلق عند ا .
[الإجابة : ١٦ سم ، ٧٣.٨ نيوتن]

(١٨) ١٩٩٨/دور ثان : ا ب قضيب غير منتظم طوله ١٢٠ سم يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند النقطتين حـ ، ء من القضيب بحيث ا حـ = ٣٠ سم ، ب ء = ٤٠ سم ، إذا عُلق من ا ثقل قدره ١٦٠ ث . جم يصبح القضيب على وشك الدوران حول حـ ، وإذا علق من ب ثقل قدره ٥٠٠ ث . جم مع بقاء الثقل الأول فإن القضيب يصبح على وشك الدوران حول ء . أوجد وزن القضيب وبعد نقطة تأثيره عن ا . [الإجابة : ٢٤٠ ث . جم ، ٥٠ سم]

(١٩) ا ب قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ووزنه ٤ ث كجم ، يرتكز أفقيا على حاملين أحدهما عند حـ حيث ا حـ = ٩ سم والثانى عند ء ، علق من طرفيه ا ، ب الثقلين ١٤ ، ٦ ث كجم على الترتيب . أوجد موضع النقطة ء إذا كان الضغط على

الحامل عند حـ ضعف الضغط على الحامل عند ء ، أوجد أيضا اكبر ثقل يضاف إلـى الثقـل المعلـق عنـد م دون أن يختـل تـوازن القـضيب .

[الإجابة : المسافة بين الحاملين ١٣ سم ، $١١\frac{٥}{٩}$ ث كجم]

(٢٠) م ب قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ٤٠ نيوتن (يؤثر فى منتصفه) يرتكز فى وضع أفقى على حاملين أحدهما عند الطرف م والآخر عند نقطة من القضيب تبعد ٢٠ سم عن الطرف ب ويحمل القضيب ثقلا قدره ١٢ نيوتن عند نقطة تبعد ١٥ سم من ب . عين قيمة الضغط على كل من الحاملين ، وأوجد أيضا مقدار الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف ب بحيث يصبح القضيب على وشك الدوران .

[الإجابة : ١٤.٢٥ ، ٣٧.٧٥ ، و ٥٧ نيوتن]

(٢١) ١٩٩٦/دور ثان : يرتكز قضيب م ب طوله ٦٠ سم ووزنه ٤٠٠ ث . جم يؤثر فى منتصفه على وتد يبعد ٢٠ سم من م ، حفظ القضيب أفقيا فى حالة اتزان بواسطة خيط خفيف رأسى يتصل بطرفه ب . أوجد :

أولا : مقدار كل من الشد فى الخيط ورد فعل الوتد .

ثانيا : مقدار الثقل الذى يلزم تعليقه عند الطرف م ليجعل الشد فى الخيط على وشك الانعدام .

[الإجابة : ش = ١٠٠ ث . جم ، ر = ٣٠٠ ث . جم ، ن = ٢٠٠ ث . جم]

(٢٢) ١٩٩٦/دور أول : م ب قضيب طوله ١٢٠ سم ووزنه ٨٠ ث . جم يؤثر فى منتصفه ، يرتكز القضيب فى وضع أفقى على حامل عند طرفه ب ويحُفظ فى حالة توازن بخيط خفيف رأسى مثبت من نقطة تبعد عن طرفه م بمقدار ٢٠ سم ويحمل ثقلا قدره ٢٥ ث . جم من نقطة تبعد ١٥ سم عن م . أوجد كلاً من الشد فى الخيط والضغط على الحامل ، أوجد أيضاً الثقل الذى يجب أن يعلق من م حتى يصبح القضيب على وشك الانفصال عن الحامل .

[الإجابة : ٧٤.٢٥ ، ٣٠.٧٥ ، ١٥٣.٧٥ ث . جم]

(٢٣) ٢٠٠٢/دور أول : م ب قضيب طوله متر واحد ووزنه ٧٠٠ ث . جم (يؤثر فى منتصفه) يرتكز على حامل عند طرفه ب وحفظ فى حالة توازن فى وضع أفقى بواسطة خيط رأسى مثبت فى نقطة على القضيب تبعد عن طرفه م بمقدار ٣٠ سم ويحمل ثقلا مقداره ٣٥٠ ث . جم من نقطة تبعد ١٠ سم عن م . أوجد كلاً من الشد فى الخيط والضغط على الحامل ، وإذا علق من م ثقلاً جعل القضيب على وشك الانفصال عن الحامل . أوجد مقدار الثقل والشد فى الخيط .

[الإجابة : ر = ١٠٠ ث . جم ، ش = ٩٥٠ ، ش = ١٢٨٣.٣ ث . جم ، و = ٢٣٣.٣ ث . جم]

(٢٤) يحمل رجلان م ، ب جسما كتلته ٩٠ كجم معلق من قضيب معدنى متين وخفيف ، فإذا كانت المسافة بين الرجلين ٦٠ سم وكانت نقطة تعليق الجسم تبعد ٢٠ سم من

ﻡ ، فما مقدار ما يتحمله كل من الرجلين من هذا الثقل ؟ وإذا كان الرجل ب لا يمكنه أن يحمل أكثر من ٥٠ ثقل كجم ، فعين أكبر مسافة من ﻡ يمكن تعليق الثقل عندها حتى يتمكن الرجل ب من الاستمرار فى حمل القضيب .

[الإجابة : ٣٠ ، ٦٠ ث . كجم ، $\frac{1}{3}$٣٣ سم]

(٢٥) ﻡ ب قضيب غير منتظم طوله ٢ متر يرتكز فى وضع أفقى على وتدين حـ ، ى أملسين حيث ﻡ حـ = ب ى = $\frac{1}{4}$ متر ، وجد أنه لو علق من ﻡ ثقل قدره ٢٤ نيوتن يصبح القضيب على وشك الدوران حول حـ ، وإذا علق من ب ثقل قدره ١٦ نيوتن يصبح القضيب على وشك الدوران حول ى . أوجد وزن القضيب وبُعد نقطة تأثيره عن ﻡ . [الإجابة : $\frac{2}{3}$٦ نيوتن ، ١.١٥ متر]

(٢٦) <u>٢٠٠٤/دور أول</u> : ﻡ ب قضيب غير منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ٤٠ نيوتن معلق من منتصفه بواسطة خيط خفيف رأسى . إذا اتزن القضيب أفقيا عندما علق ثقل مقداره ١٠ نيوتن عند ﻡ فأوجد بعد نقطة تأثير الوزن عن ﻡ . وإذا رفع الثقل المعلق فأوجد مقدار القوة الرأسية التى تؤثر عند ب بحيث يظل القضيب متزنا فى وضع أفقى . [الإجابة : ٦٢.٥ سم ، ١٠ نيوتن]

(٢٧) <u>٢٠٠٥/دور أول</u> : ﻡ ب قضيب منتظم طوله ١.٥ متراً ووزنه ١٤٠ نيوتن يؤثر فى نقطة منتصفه ويرتكز فى وضع أفقى على حاملين أحدهما عند الطرف ﻡ والثانى عند نقطة حـ من القضيب ، فإذا كان مقدار رد فعل الحامل عند ﻡ يساوى ثلثى مقدار رد فعل الحامل عند حـ . أوجد :

<u>أولا</u> : مقدار رد فعل الحامل عند كل من الحاملين .

<u>ثانيا</u> : بعد حـ عن الطرف ب . [الإجابة : ٥٦ ، ٨٤ نيوتن ، ٢٥ سم]

(٢٨) ﻡ ب قضيب غير منتظم طوله ٧٠ سم ووزنه ٤.٥ ث . كجم يرتكز فى وضع أفقى على حاملين أملسين عند حـ ، ى حيث ﻡ حـ = = ١٢ سم ، ب ى = ١٤ سم وقد وجد أنه لو علق من الطرف ﻡ ثقل مقداره ٦ ث . كجم فإن القضيب يكون على وشك الدوران . أوجد بعد مركز ثقل القضيب عن نقطة حـ . وإذا بقى الثقل المعلق عند الطرف ﻡ وعلق ثقل مقداره (و) ث . كجم عند الطرف الآخر ب فأوجد قيمة (و) التى تجعل القضيب على وشك الدوران حول نقطة ى .

[الإجابة : ١٦ سم من حـ ، ٣٣ ث . كجم]

الفصل الرابع : الاتزان العام

الشروط الكافية واللازمة لاتزان مجموعة من القوى :

(١) ينعدم متجه مجموع القوى .

(٢) ينعدم عزم المجموعة بالنسبة لنقطة واحدة .

صياغة مكافئة للشروط الكافية واللازمة لاتزان مجموعة من القوى :

(١) ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى فى اتجاهين متعامدين واقعين فى مستويها

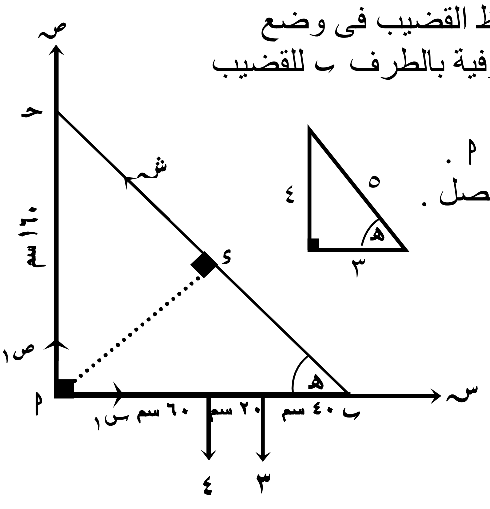
(٢) ينعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة فى مستويها .

والتعبير الرياضى عن الشروط الكافية والازمة للاتزان هو :

س = ٠ ، ص = ٠ ، ج = ٠

أمثلة محلولة

مثال (١) : ٩ ب قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم ومقدار وزنه ٤ نيوتن يتصل طرفه ٩ بمفصل مثبت فى حائط رأسى ، علق ثقل قدره ٣ نيوتن فى نقطة من القضيب تبعد ٨٠ سم عن ٩ وحفظ القضيب فى وضع افقى بواسطة حبل يتصل أحد طرفية بالطرف ب للقضيب ويتصل طرفه الآخر بنقطة على الحائط تبعد ١٦٠ سم رأسيا أعلى ٩ . اوجد الشد فى الخيط ورد فعل المفصل .



الحـــل ...

القضيب متزن تحت تأثير أربع قوى هى :

- وزن القضيب ٤ نيوتن رأسيا لأسفل .
- الثقل ٣ نيوتن رأسا لأسفل .

- قوة الشد اخيط ش وتعمل فى اتجاه $\overleftarrow{ـبـحـ}$ ويصنع خط عملها مع الأفقى زاوية قياسها هـ .
- قوة رد فعل المفصل ويمثلها المركبتين المتعامدتين $س_١$ ، $ص_١$ كما بالشكل .

بكتابة شروط الاتزان : $\sum س = ٠$ ، $\sum ص = ٠$ ، $\sum ج = ٠$

$\therefore$ $س_١$ = ش جتا هـ $\therefore$ $س_١ = \frac{٣}{٥}$ ش .... (١)

، $ص_١$ + ش جا هـ = ٣ + ٤ $\therefore$ $ص_١ + \frac{٤}{٥}$ ش = ٧ .... (٢)

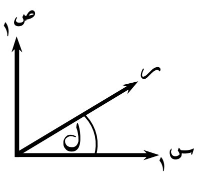
، $ج_م = ٠$ $\therefore$ ش × $\frac{١٦٠ \times ١٢٠}{٢٠٠}$ − ٤×٦٠ − ٣×٨٠ = ٠

$\therefore$ ٩٦ ش = ٤٨٠ $\therefore$ ش = ٥ نيوتن وبالتعويض فى (١) ، (٢)

$\therefore$ $س_١ = \frac{٣}{٥} \times ٥ = ٣$ نيوتن ، $ص_١ + \frac{٤}{٥} \times ٥ = ٧$ $\therefore$ $ص_١ = ٣$ نيوتن

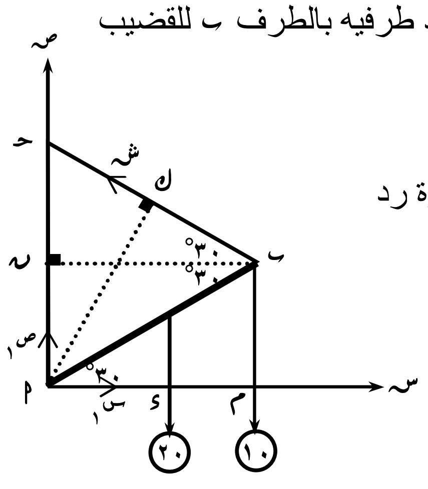
$\because$ $ر = \sqrt{س_١^٢ + ص_١^٢} = \sqrt{٩ + ٩} = ٣\sqrt{٢}$ نيوتن

، ظا ل = $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{٣}{٣} = ١$ $\therefore$ ل = ٤٥°



أى أن : مقدار قوة رد فعل المفصل = $٣\sqrt{٢}$ نيوتن وتصنع زاوية قياسها ٤٥° مع $\overleftarrow{م س}$

مثال (٢) : م ـب قضيب منتظم وزنه ٢٠ نيوتن يتصل بطرفه م بمفصل مثبت فى حائط رأسى ويحمل عند طرفه ـب ثقلا قدره ١٠ نيوتن ، حفظ القضيب فى وضع يميل فيه على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠° بواسطة حبل مساو للقضيب فى الطول ويتصل أحد طرفيه بالطرف ـب للقضيب ويتصل طرفه الآخر بنقطة حـ من الحائط تقع رأسيا أعلى م وعلى بعد منها يساوى طول القضيب .
أوجد مقدار الشد فى الحبل ومقدار قوة رد فعل المفصل عند م واتجاهه .



الحـــــل ...

القضيب متزن تحت تأثير أربع قوى هى :

وزنه ٢٠ نيوتن ، والثقل ١٠ نيوتن رأسيا لأسفل ، والشد فى الحبل ش ويعمل فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ب ح}}$ ، ورد فعل المفصل الذى مركبتيه $\text{س}_{١}$ ، $\text{ص}_{١}$.

وبتطبيق شروط الاتزان وهى :

$\text{س} = ٠$ ، $\text{ص} = ٠$ ، $\text{ج}_{\text{م}} = ٠$

(بفرض أن طول القضيب = ٢ ل) $\because \text{ج}_{\text{م}} = ٠$

$\therefore \text{ش} \times \text{م ك} - ٢٠ \times \text{م ء} - ١٠ \times \text{م م} = ٠$

$\therefore \text{ش} \times \sqrt{٣}\,\text{ل} = ٢٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,\text{ل} + ١٠ \times \sqrt{٣}\,\text{ل}$ $\qquad \therefore \text{ش} = ٢٠$ نيوتن

، $\text{س}_{١} = \text{ش جتا } ٣٠^{\circ} = ٢٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ١٠\sqrt{٣}$

، $\text{ص}_{١} + \text{ش جا } ٣٠^{\circ} = ١٠ + ٢٠$ $\quad \therefore \text{ص}_{١} = ٣٠ - ٢٠ \times \frac{١}{٢} = ٢٠$ نيوتن

$\because \text{ر} = \sqrt{\text{س}_{١}^{٢} + \text{ص}_{١}^{٢}}$ $\qquad \therefore \text{ر} = \sqrt{٣٠٠ + ٤٠٠} = ١٠\sqrt{٧}$ نيوتن

$\because \text{ظا ل} = \frac{\text{ص}_{١}}{\text{س}_{١}} = \frac{٢}{\sqrt{٣}} = ١.١٥٤٧$

$\therefore \text{ل} = ٤٩^{\circ}\ ٦'$ $\qquad$ (حيث ل هى زاوية ميل رد فعل المفصل مع الأفقى)

مثال (٣) : م ب ساق منتظمة وزنها ٢٠ نيوتن ترتكز بطرفها م على أرض أفقية خشنة وتستند بطرفها ب على حائط رأسى أملس بحيث تكون الساق فى مستو رأسى عمودى على الحائط وتميل على الأرض الأفقية بزاوية قياسها ٤٥° . أوجد مقدار اقل قوة أفقية تؤثر عند الطرف م للساق لكى تجعلها على وشك الانزلاق بعيدا عن الحائط علما بأن معامل الاحتكاك بين الساق والأرض $\frac{٣}{٤}$.

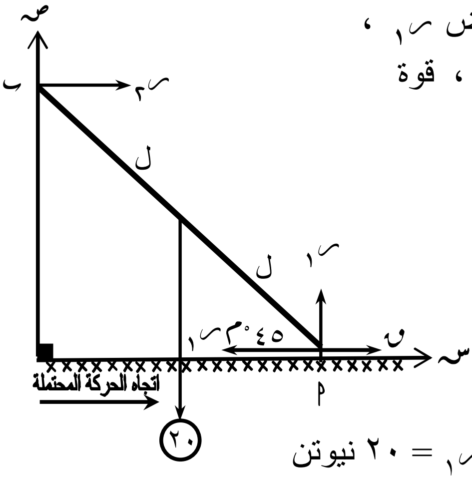
الحل ...

الساق متزنة تحت تأثير القوى الآتية :

وزنها ٢٠ نيوتن رأسيا لأسفل ، رد فعل الأرض $ر_{١}$ ،

رد فعل الحائط العمودى $ر_{٢}$ ، القوة الأفقية ق ، قوة

الاحتكاك $\frac{٣}{٤}$ $ر_{١}$ كما فى الشكل المجاور .



وبتطبيق شروط الاتزان وهى :

س = ٠ ، ص = ٠ ، $ج_{م}$ = ٠

(بفرض أن طول الساق = ٢ ل) ∵ $ج_{م}$ = ٠

∴ ٢٠ ل جتا ٤٥° − $ر_{٢}$ × ٢ ل جا ٤٥° = ٠

∴ ٢ $ر_{٢}$ = ٢٠ ∴ $ر_{٢}$ = ١٠ نيوتن ، $ر_{١}$ = ٢٠ نيوتن

، ق + $ر_{٢}$ = $\frac{٣}{٤}$ $ر_{١}$ ∴ ق + ١٠ = $\frac{٣}{٤}$ × ٢٠ ∴ ق = ٥ نيوتن

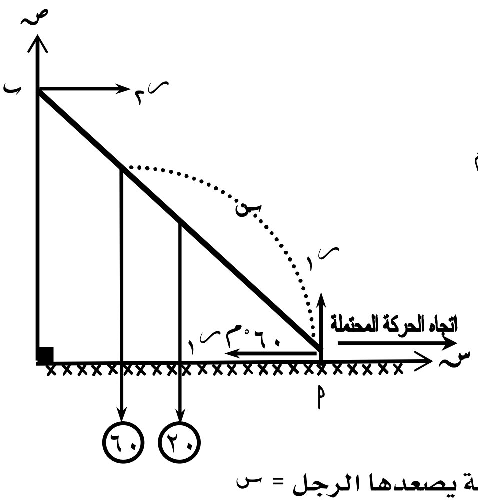
مثال (٤) : سلم منتظم وزنه وزنه ٢٠ ث . كجم يرتكز بأحد طرفيه على أرض أفقية خشنه وبالطرف الآخر على حائط رأسى أملس ، أتزن السلم فى مستو رأسى وكان قياس زاوية ميله على الأفقى ٦٠° ، فإذا علم أن معامل الاحتكاك بين السلم والأرض يساوى $\frac{١}{٢\sqrt{٣}}$. اثبت أن أقصى مسافة يستطيع رجل وزنه ٦٠ ث . كجم أن يصعدها على السلم تساوى نصف طول السلم .

الحــــل ...

السلم متزن تحت تأثير القوى :

وزنه ٢٠ ث . كجم ، ووزن الرجل ٦٠ ث.كجم رأسيا لأسفل ، ورد فعل الأرض $ر_{١}$ ، ورد فعل الحائط $ر_{٢}$ ، وقوة الاحتكاك م$ر_{١}$

كما هو موضح بالشكل الجانبى .



وبتطبيق شروط الاتزان وهى :

س = ٠ ، ص = ٠ ، $ج_{م}$ = ٠

وبفرض أن طول القضيب = ل ، وأن أقصى مسافة يصعدها الرجل = س

∵ $ر_{١} = ٢٠ + ٦٠ = ٨٠$ ث . كجم ، $ر_{٢} = \frac{١}{٢\sqrt{٣}} ر_{١}$

∴ $ر_{٢} = \frac{١}{٢\sqrt{٣}} \times ٨٠ = \frac{٤٠}{\sqrt{٣}}$ .... (١)

∵ $ج_{أ} = ٠$

∴ $٢٠ \times \frac{ل}{٢}$ جتا $٦٠^\circ + ٦٠ \times س$ جتا $٦٠^\circ - ر_{٢} \times ل$ جا $٦٠^\circ = ٠$ ...... (٢)

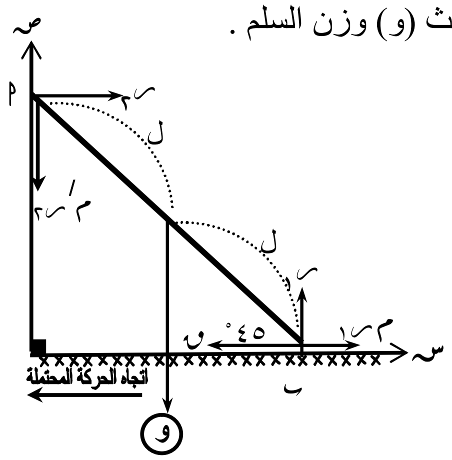
من (١) ، (٢)

∴ $٥ ل + ٣٠ س - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ل \times \frac{٤٠}{\sqrt{٣}} = ٠$

∴ $٣٠ س - ١٥ ل = ٠$ ∴ $س = \frac{١٥}{٣٠} ل = \frac{١}{٢} ل$

∴ المسافة التى يصعدها الرجل تساوى نصف طول السلم .

مثال (٥) : أب سلم منتظم متزن بحيث يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° ، يرتكز بطرفه أ على حائط رأسى خشن وبطرفه ب على أرض أفقية خشنه ، فإذا كان م ، م′ هما معاملى الاحتكاك النهائى بين السلم والأرض والحائط على الترتيب . أثبت أن اقل قوة تدفع الطرف ب نحو الحائط هى $\frac{١}{٢} و \left(\frac{١ + ٢م - م م'}{١ - م'}\right)$ حيث (و) وزن السلم .



الحـــل ...

السلم متزن تحت تأثير القوى الآتية :

وزنه (و) ، رد الفعل $ر_{١}$ عند ب ، رد الفعل $ر_{٢}$ عند أ ، قوة الاحتكاك $م ر_{١}$ عند ب ، قوة الاحتكاك $م' ر_{٢}$ عند أ ، القوة الأفقية ق عند ب .

وبتطبيق شروط الاتزان وهى : س~ = ٠ ، ص~ = ٠ ، جـ ب = ٠

(بفرض أن طول الساق = ٢ ل)

∵ جـ ب = ٠ ∴ ل× و جتا٤٥° − ر٢ × ٢ل جا٤٥° + م/ ر٢ × ٢ل جتا٤٥° = ٠

∴ و = ٢ ر٢ − ٢ م/ ر٢ ∴ $\text{ر}_٢ = \frac{\text{و}}{٢\,(١ - \text{م}^/)}$ .... (١)

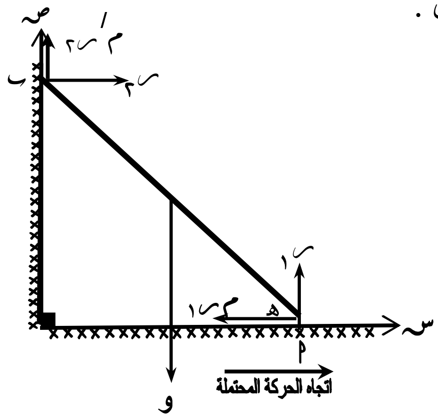
، $\text{ر}_١ = \frac{\text{م}^/\ \text{و}}{٢ - ٢\,\text{م}^/} + \text{و} = \frac{\text{و}}{٢}\left(\frac{٢ - \text{م}^/}{١ - \text{م}^/}\right)$ .... (٢)

∵ س~ = ٠ ∴ ن = ر٢ + م ر١ .... (٣)

بالتعويض من (١) ، (٢) فى (٣)

∴ $\text{ن} = \frac{\text{و}}{٢\,(١ - \text{م}^/)} + \text{م} \times \frac{\text{و}}{٢}\left(\frac{٢ - \text{م}^/}{١ - \text{م}^/}\right) = \frac{١}{٢}\,\text{و}\left(\frac{١ + ٢\,\text{م} - \text{م}\,\text{م}^/}{١ - \text{م}^/}\right)$

مثال (٦) : قضيب منتظم يرتكز بطرفه العلوى على حائط رأسى معامل الاحتكاك بينه وبين القضيب يساوى $\frac{١}{٢}$ وبطرفه السفلى على مستوى أفقى معامل الاحتكاك بينه وبين القضيب يساوى $\frac{٣}{٤}$. أوجد زاوية ميل القضيب على الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق .



الحـــل ...

نفرض أن وزن القضيب و ، طوله ل ويميل على الأفقى بزاوية هـ .

وبتطبيق شروط الاتزان وهى :
س~ = ٠ ، ص~ = ٠ ، جـ أ = ٠

∵ $\text{ر}_٢ = \frac{٣}{٤}\,\text{ر}_١$ ، $\text{ر}_١ + \frac{١}{٢}\,\text{ر}_٢ = \text{و}$

∴ $\text{ر}_٢ = \frac{٣}{٤}\,(\text{و} - \frac{١}{٢}\,\text{ر}_٢)$ ∴ $\text{ر}_٢ = \frac{٣}{٤}\,\text{و} - \frac{٣}{٨}\,\text{ر}_٢$

∴ $\frac{١١}{٨}$ ر$_٢$ = $\frac{٣}{٤}$ و ∴ ر$_٢$ = $\frac{٦}{١١}$ و .... (١)

∵ ج$_م$ = ٠ ∴ و − ٢ ر$_٢$ ظا هـ − ر$_٢$ = ٠

∴ ر$_٢$ (٢ ظا هـ + ١) = و .... (٢)

من (١) ، (٢)

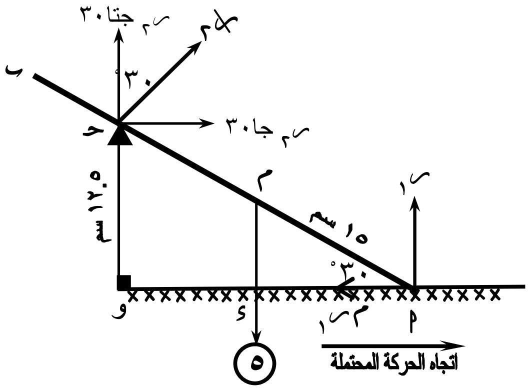
∴ $\frac{٦}{١١}$ و × (٢ ظا هـ + ١) = و ∴ ٢ ظا هـ + ١ = $\frac{١١}{٦}$ ∴ ظا هـ = $\frac{٥}{١٢}$

مثال (٧) : ٮ ب ساق منتظمة وزنها ٥ ث كجم وطولها ٣٠ سم ترتكز بطرفها ٮ على أرض أفقية خشنة وترتكز عند إحدى نقطها حـ على وتد أملس يعلو عن سطح الأرض بمقدار ١٢.٥ سم فإذا كانت الساق على وشك الانزلاق عندما كانت تميل على الأرض الأفقية بزاوية قياسها ٣٠°. أوجد :

أولا : مقدار قوة رد فعل الوتد .

ثانيا : معامل الاحتكاك بين الطرف ٮ والأرض .

الحل ...



الساق متزنه تحت تأثير القوى :

ر$_١$ عند ٮ ، ر$_٢$ عند حـ ،

ووزنها ٥ ث كجم عند م ،

وقوة الاحتكاك م ر$_١$ فى اتجاه $\overrightarrow{ٮ و}$

وبتطبيق شروط الاتزان وهى :

س = ٠ ، ص = ٠ ، ج$_ٮ$ = ٠

∵ ج$_ٮ$ = ٠

∴ ٥ × ١٥ جتا ٣٠° − ر$_٢$ × ٢٥ = ٠ ∴ ر$_٢$ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ .... (١)

ومن معادلتى الاتزان :

∴ ر$_٢$ جا ٣٠° − م ر$_١$ = ٠ ∴ ر$_٢$ = ٢ م ر$_١$ وبالتعويض من (١)

∴ ٢ م ر$_١$ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ م ر$_١$ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ .... (٢)

، ر$_١$ + ر$_٢$ جتا ٣٠° = ٥ ∴ ر$_١$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ر$_٢$ = ٥ وبالتعويض من (١)

$\therefore$ $ر_١ + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} = ٥$ $\therefore$ $ر_١ = ٥ - \frac{٩}{٤} = \frac{١١}{٤}$ ث كجم .

وبالتعويض عن قيمة $ر_١$ فى المعادلة (٢) لإيجاد قيمة م .

$\therefore$ $م \times \frac{١١}{٤} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ $\therefore$ $م = \frac{٣\sqrt{٣}}{١١}$

تمـــــارين (٥)

أولا : ضع علامة (✓) أو علامة (×) :

(١) لكى تتزن مجموعة من القوى المستوية غير المتلاقية فى نقطة يلزم ويكفى أن ينعدم متجه مجموع القوى .

(٢) لكى تتوازن مجموعة من القوى المستوية المؤثرة على جسم ما ، يلزم ويكفى أن ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى فى كل من اتجاهين متعامدين واقعين فى مستويها

(٣) إذا أنعدم مجموع القوى لمجموعة ما وانعدم عزمها بالنسبة لنقطة واحدة فإنه ينعدم عزمها بالنسبة لأى نقطة اخرى فى المستوى .

(٤) إذا أنعدم مجموع القوى لمجموعة ما وانعدم عزمها بالنسبة لنقطة واحدة فى مستواها كانت هذه المجموعة متزنة .

(٥) إذا لم ينعدم مجموع القوى لمجموعة ما وانعدم عزمها بالنسبة لنقطة واحدة ، كانت هذه المجموعة متزنة .

(٦) يتزن السلم إذا ارتكز بأحد طرفيه على أرض أفقية ملساء وبطرفه الآخر على حائط رأسى خشن .

ثانيا : اجب عن الأسئلة الآتية :

(١) ٢ ب قضيب منتظم وزنه ٤ نيوتن وطوله ١٢٠ سم يتصل بأحد طرفيه بمفصل مثبت عند طرفه ٢ والمفصل مثبت فى حائط رأسى . علق ثقل قدره ٦ نيوتن من نقطة على القضيب تبعد ٢٠ سم عن طرفه ٢ ثم حفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة ربطه من ب بحبل رفيع ب حـ مثبت طرفه حـ بنقطة على الحائط تقع رأسيا فوق ٢ تماما وتبعد عن ٢ مسافة ٩٠ سم . أوجد مقدار الشد فى الحبل ومقدار واتجاه رد فعل المفصل . [الإجابة : ٥ نيوتن ، ١.٧٥ نيوتن ، ١٤َ ٦٠ْ]

(٢) ساق منتظمة وزنها ٤ ث كجم يتصل طرفها ٩ بمفصل مثبت فى حائط رأسى وتحمل عند طرفها الآخر ب ثقلا قدره ٢ ث كجم . حفظت الساق فى وضع تميل فيه على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠° بواسطة حبل مساو لها فى الطول ويتصل أحد طرفيه بالطرف ب للساق ويتصل طرفه الآخر بنقطة حـ من الحائط تقع رأسيا أعلى ٩ وعلى بعد منها يساوى طول الساق . أوجد مقدار الشد فى الحبل ومقدار قوة رد فعل المفصل . [الإجابة : ٤ ث كجم ، ٢ $\sqrt{٧}$ ث كجم]

(٣) سلم منتظم وزنه ٦٤ ث كجم يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسى وبطرفه الآخر على مستوى أفقى أملس وحفظ السلم فى مستوى رأسى فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل مثبت فى قاعدة السلم وفى نقطة من المستوى تقع رأسيا أسفل قمة السلم . وقف رجل وزنه يساوى وزن السلم على موضع من السلم يبعد $\frac{٣}{٤}$ طول السلم من ناحية القاعدة . عين قوة الشد فى الحبل وردى فعل الحائط والمستوى . [الإجابة : ٨٠ ث كجم ، ٨٠ ث كجم ، ١٢٨ ث كجم]

(٤) يرتكز سلم منتظم وزنه ١٠ ث كجم بطرفه على مستوى أملس وبطرفه ب على حائط رأسى املس . حفظ السلم فى مستوى رأسى وفى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل افقى يصل الطرف ٩ بنقطة من المستوى الأفقى راسيا أسفل ب . يصعد رجل وزنه ٨٠ ث كجم هذا السلم . أوجد :

أولا : قوة الشد فى الحبل عندما يكون الرجل قد قطع $\frac{٣}{٤}$ طول السلم .

ثانيا : أقصى قيمة للشد التى يتحملها الحبل علما بأنه يكون على وشك الانقطاع عندما يصل الرجل على قمة السلم . [الإجابة : ٦٥ ث كجم ، ٨٥ ث كجم]

(٥) يرتكز قضيب منتظم وزنه ٤٠ نيوتن بطرفه ٩ على أرض أفقية خشنه وبطرفه ب على حائط رأسى أملس بحيث يكون القضيب فى مستوى رأسى عمودى على الحائط ويميل على الأرض الأفقية بزاوية قياسها ٤٥° . أوجد مقدار أقل قوة افقية تؤثر عند الطرف ٩ للقضيب لكى تجعلها على وشك الانزلاق بعيدا عن الحائط علما بأن معامل لاحتكاك بين القضيب والأرض ٠.٧٥ . [الإجابة : ١٠ نيوتن]

(٦) قضيب منتظم يرتكز فى مستوى رأسى بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس وبطرفه السفلى على مستوى خشن أفقى بحيث كان يصنع القضيب مع الأفقى زاوية ظلها $\frac{٣}{٢}$. اوجد معامل الاحتكاك بين القضيب والمستوى الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق . [الإجابة : م = $\frac{١}{٣}$]

(٧) ؍ ٮ قضيب منتظم ونـه ٥٦ نيوتن يرتكز بأحد بطرفه ؍ على حائط رأسى املس وبطرف ٮ على أرض أفقية خشنه بحيث يقع فى مستوى رأسى ويميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° . أثبت أنه فى حالة اتزان القضيب بأن معامل الاحتكاك ≤ ٠.٥ ، وإذا كان معامل الاحتكاك = ٠.٧٥ فعين القوة الأفقية التى تؤثر عند ٮ وتجعله على وشك الحركة :

أولا : نحو الحائط **ثانيا : بعيدا عن الحائط** [الإجابة : ٧٠ نيوتن ، ١٤ نيوتن]

---

(٨) ؍ ٮ قضيب منتظم مقدار وزنه ٤٠ نيوتن يرتكز بطرفه ؍ على حائط رأسى معامل الاحتكاك بينه وبين القضيب يساوى $\frac{١}{٢}$ وبطرفه ٮ على ارض أفقية معامل الاحتكاك بينها وبين القضيب تساوى $\frac{١}{٣}$ فإذا كانت أقل قوة أفقية تجعل الطرف ٮ للقضيب على وشك الحركة نحو الحائط تساوى ٦٠ نيوتن ، فأوجد فى وضع الاتزان قياس زاوية ميل القضيب على الأفقى ، علما بأن القضيب يتزن فى مستوى رأسى . [الإجابة : ٤٥°]

---

(٩) قضيب منتظم وزنه "و" يتصل أحد طرفيه بمفصل ويتصل طرفه الآخر بخيط مربوط فى نقطة فى نفس المستوى الأفقى المار بالمفصل بحيث كان قياس زاوية ميل كل من القضيب والخيط على الأفقى مساوٍ هـ . أثبت أن رد فعل المفصل يساوى $\frac{و}{٤}\sqrt{ظتا^{٢} هـ + ٩}$.

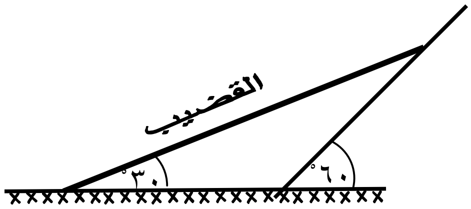
---

(١٠) ؍ ٮ قضيب منتظم طوله "ل" ومقدار وزنه "و" ويرتكز بطرفه ؍ على مستوى أفقى خشن وبطرفه ٮ على حائط رأسى املس وكان القضيب يميل بزاوية قياسها "ى" على الرأسى أثرت قوة أفقية "ٯ" على القضيب عند نقطة حـ حيث ؍ حـ = $\frac{١}{٤}$ ل فكان الطرف ؍ على وشك الحركة نحو الحائط فإذا كان معامل الاحتكاك بين القضيب والمستوى الأفقى يساوى $\frac{١}{٢}$ فاثبت أن

$$ظاى = \frac{٣ ٯ}{٢ و} - ١ .$$

ثالثا : مسائل الثانوية العامة :

(١) مصر/١٩٩٣ : **فى الشكل المقابل :**



يرتكز قضيب منتظم وزنه ٢٤ ث كجم بأحد طرفيه على ارض أفقية وبطرفه الآخر على مستوٍ املس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° . إذا كان القضيب على وشك الانزلاق عندما كان قياس زاوية ميله على الأفقى ٣٠° ، فأوجد معامل الاحتكاك بين القضيب والأرض ورد فعل كل من المستوى والأرض . [الإجابة : $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، ١٢، ١٢$\sqrt{٣}$ ث كجم]

(٢) مصر/١٩٩٤ : يرتكز قضيب غير منتظم ؍ ب طوله ١٤٠ سم بطرفه ب على أرض أفقية وبطرفه ؍ على حائط رأسى ، إذا كان معاملا الاحتكاك بين القضيب وكل من الأرض والحائط يساوى $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ على الترتيب وكان القضيب على وشك الانزلاق عندما كان قياس زاوية ميله على الأفقى ٤٥° فأوجد بعد مركز ثقل القضيب عن الطرف ب . (القضيب يقع فى مستوى رأسى عمودى على خط تقاطع الحائط مع الأرض) . [الإجابة : ٨٠ سم]

(٣) مصر/١٩٩٥ : ؍ ب قضيب منتظم طوله ٢٦٠ سم ومقدار وزنه ٤٣ نيوتن يرتكز بطرفه ؍ على حائط رأسى وبطرفه ب على أرض افقية وكان معاملا الاحتكاك بين القضيب وكل من الحائط والأرض يساويان $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ على الترتيب وكان الطرف ب يبعد ١٠٠ سم عن الحائط . أوجد مقدار القوة الأفقية التى إذا اثرت فى الطرف ب جعلت القضيب على وشك الحركة نحو الحائط . (القضيب يقع فى مستوى رأسى عمودى على خط تقاطع الحائط والأرض) .
[الإجابة : **٤٥.٥ نيوتن**]

(٤) قديم/١٩٩٦ : قضيب منتظم وزنه و يرتكز بطرفه العلوى على حائط راسى معامل الاحتكاك بينه وبين القضيب يساوى $\frac{١}{٢}$ وبطرفه السفلى على مستوى افقى

معامل الاحتكاك بينه وبين القضيب يساوى $\frac{٣}{٤}$. أوجد ظل الزاوية التى يصنعها القضيب مع الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق . [الإجابة : $\frac{٥}{١٢}$]

(٥) قديم/١٩٩٧ : ٩ ب قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ٨ نيوتن يتصل طرفه ٩ بمفصل مثبت فى حائط رأسى علق ثقل قدره ٦ نيوتن فى نقطة من القضيب تبعد ٤٠ سم عن الطرف ٩ . اتزن القضيب فى وضع أفقى بواسطة خيط خفيف يتصل احد طرفيه بالطرف ب من القضيب وثبت الطرف الآخر للخيط بنقطة على الحائط تبعد ٨٠ سم رأسيا أعلى ٩ . اوجد الشد فى الخيط ورد فعل المفصل . .

(٦) ١٩٩٧/دور أول : قضيب منتظم مقدار وزنه ١٠٠ نيوتن برتكز بأحد طرفيه على حائط رأسى معامل الاحتكاك بينه وبين القضيب يساوى $\frac{١}{٣}$ ، وبطرفه الآخر على أرض افقية معامل الاحتكاك بينها وبين القضيب يساوى $\frac{١}{٢}$ وكان القضيب فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{٣}{٥}$. (القضيب يقع فى مستوى رأسى عمودى على خط تقاطع الحائط والأرض) . [الإجابة : ١٩ نيوتن]

(٧) ١٩٩٧/دور ثان : قضيب منتظم يرتكز فى مستوى رأسى بطرفه العلوى على حائط رأسى املس وبطرفه السفلى على مستوى أفقى معامل الاحتكاك بينه وبين القضيب يساوى $\frac{١}{٤}$. اوجد ظل الزاوية التى يصنعها للقضيب مع الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق . [الإجابة : ٢]

(٨) ١٩٩٨/دور أول : ٩ ب قضيب منتظم وزنه ٢٠ نيوتن وطوله ٦٠ سم يرتكز بطرفه ٩ على مستوى أفقى خشن ويرتكز عند إحدى نقطه حـ على وتد أفقى أملس يعلو ٢٥ سم عن المستوى الأفقى فإذا كان القضيب فى مستوى رأسى عمودى على الوتد وكان القضيب على وشك الانزلاق عندما كانت زاوية ميله على الأفقى ٣٠° . أوجد رد فعل الوتد وكذلك معامل الاحتكاك بين القضيب والمستوى . [الإجابة : ١١ نيوتن ، $\frac{٣\sqrt{٣}}{١١}$]

(٩) ١٩٩٨/دور ثان : يرتكز سلم منتظم وزنه ٤٠ ث كجم بأحد طرفيه على حائط رأسى أملس وبطرفه الآخر على ارض أفقية خشنه بحيث يقع فى مستوى رأسى عمودى على الحائط ويميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° . صعد ولد وزنه

يساوى وزن السلم فأصبح السلم على وشك الانزلاق عندما يقطع الولد مسافة $\frac{٣}{٤}$ طول السلم ، أوجد معامل الاحتكاك بين الأرض والسلم . وإذا اراد الولد أن يتم صعود السلم ، فأوجد أقل قوة افقية تؤثر على الطرف السفلى للسلم حتى يتمكن الولد من ذلك . [الإجابة : $\frac{٥}{٨}$ ، ١٠ ث كجم]

(١٠) ١٩٩٩/دور أول : ﺃ ﺏ قضيب منتظم وزنه ١٥ ث كجم يرتكز بطرفه ﺃ على ارض أفقية خشنه وبطرفه ﺏ على حائط رأسى أملس بحيث يقع القضيب فى مستوى رأسى عمودى على الحائط ويميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥ ° ، أثرت قوة افقية ق عند نقطة ﺣ من القضيب حيث ﺃ ﺣ يساوى $\frac{١}{٤}$ طول القضيب فأصبح الطرف ﺃ على وشك الحركة نحو الحائط . إذا كان معامل الاحتكاك بين القضيب والأرض يساوى $\frac{١}{٢}$ أوجد القوة ق ورد فعل الحائط .

[الإجابة : ٢٠ ، ١٢.٥ ث كجم]

(١١) ٢٠٠٠/دور أول : ﺃ ﺏ سلم منتظم وزنه ١٤ ث كجم يرتكز بطرفه ﺃ على أرض أفقية خشنه ويرتكز بطرفه ﺏ على حائط رأسى خشن ، وكان معامل الاحتكاك بين السلم والأرض $\frac{٣}{٧}$ ومعامل الاحتكاك بين السلم والحائط $\frac{١}{٣}$ ، فإذ اتزن السلم فى مستوى رأسى عمودى على الحائط عندما كان يميل على الأفقى بزاوية ٤٥ ° فأوجد مقدار أقل قوة أفقية تؤثر عند الطرف ﺃ من السلم لتجعله على وشك الحركة نحو الحائط . [الإجابة : ١٨ ث كجم]

(١٢) ٢٠٠٠/دور ثان : سلم منتظم يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسى خشن وبطرفه الآخر على أرض أفقية خشنه ، وكان معامل الاحتكاك بين السلم وكل من الحائط والأرض يساوى $\frac{١}{٣}$. فإذا اتزن السلم فى مستوى رأسى عمودى على الحائط فى وضع يميل فيه على الحائط بزاوية ظلها $\frac{١}{٢}$. برهن أن رجلا وزنه يساوى وزن السلم لا يمكنه الصعود اكثر من $\frac{٩}{١٠}$ طول السلم دون ان يختل التوازن .

(١٣) ٢٠٠١/دور أول : قضيب منتظم وزنه (و) يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى خشن وبطرفه الآخر على أرض أفقية خشنه وكان معامل الاحتكاك بين القضيب والحائط يساوى $\frac{١}{٤}$ ومعامل الاحتكاك ين القضيب والأرض يساوى $\frac{١}{٣}$ فإذا اتزن القضيب فى مستوى رأسى عمودى على الحائط فأوجد ظل زاوية ميل القضيب على الرأسى عندما يكون القضيب على وشك الانزلاق . [الإجابة : $\frac{٨}{١١}$]

(١٤) ٢٠٠١/دور ثان : قضيب غير منتظم ﻡ ﺏ طوله ٧٠ سم يرتكز بطرفه ﻡ على حائط رأسى وبطرفه ﺏ على أرض أفقية وكان معامل الاحتكاك بين القضيب والحائط يساوى $\frac{١}{٣}$ ومعامل الاحتكاك بين القضيب والأرض يساوى $\frac{١}{٢}$ فإذا كان القضيب يقع فى مستوى رأسى عمودى على خط تقاطع الحائط مع الأرض وكان القضيب على وشك الانزلاق عندما كان قياس زاوية ميله على الأفقى ٤٥° فأوجد بعد مركز ثقل القضيب عن الطرف ﺏ . [الإجابة : ٤٠ سم]

(١٥) ٢٠٠٢/دور اول : ﻡ ﺏ قضيب منتظم وزنه ١٠ ث كجم يستند بطرفه ﻡ على أرض أفقية خشنه وبطرفه ﺏ على حائط رأسى املس بحيث يكون القضيب فى مستوى رأسى عمودى على الحائط ويميل على الأرض الأفقية بزاوية قياسها ٤٥° فإذا كان معامل الاحتكاك بين القضيب والأرض يساوى $\frac{٣}{٤}$. أوجد مقدار أقل قوة أفقية تؤثر عند الطرف ﻡ للقضيب وتجعله على وشك الانزلاق بعيدا عن الحائط ، ومقدار رد فعل الحائط . [الإجابة : ق = ٢.٥ ث كجم ، ر = ٥ ث كجم]

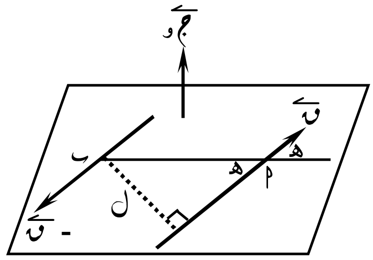
(١٦) ٢٠٠٣/دور أول : ﻡ ﺏ سلم منتظم وزنه ٩ ث كجم يستند بطرفه ﻡ على أرض أفقية خشنه وبطرفه ﺏ على حائط رأسى خشن فإذا كان معاملا الاحتكاك عند ﻡ ، ﺏ هما $\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{١}{٢}$ على الترتيب ثم شد الطرف ﻡ للسلم بقوة أفقية $\overleftarrow{ق}$ جعلت السلم على وشك الانزلاق بعيدا عن الحائط وكان السلم يصنع مع الأفقى زاوية قياسها ٤٥° . اوجد مقدار القوة $\overleftarrow{ق}$ (السلم فى مستوى رأسى عمودى على الحائط) .
[الإجابة : ق = ٣.٢٥ ث كجم]

(١٧) ٢٠٠٣/دور ثان : ﻡ ﺏ سلم منتظم طوله ١٠ متر ووزنه ٢٠ ث كجم يستند بطرفه ﻡ على أرض أفقية خشنه معامل الاحتكاك بينها وبين السلم $\frac{١}{٤}$ ويرتكز بطرفه ﺏ على حائط رأسى املس . اثبت أن السلم لا يمكن ان يتزن عندما يكون الطرف ﺏ على بعد ٨ متر من سطح الأرض (السلم فى مستوى رأسى عمودى على الحائط)

الفصل الخامس : الازدواجات

الازدواج :

هو مجموعة قوى تتكون من قوتين متساويتين فى المعيار ومتضادتان فى الاتجاه ولا يجمعهما خط عمل واحد .



عزم الازدواج :

هو متجه ثابت لا يعتمد على النقطة التى تنسب إليها عزمى قوتيه ويساوى عزم إحدى قوتى الازدواج بالنسبة لنقطة على خط عمل القوة الأخرى .

$\overrightarrow{ج} = \overrightarrow{ب أ} \times \overrightarrow{ق} = \overrightarrow{أ ب} \times (-\overrightarrow{ق})$

ملاحظة :

لا يتغير عزم الازدواج إذا استبدلت بالنقطة أ أى نقطة أخرى على خط عمل القوة ق وبالنقطة ب على أى نقطة أخرى على خط عمل القوة (- ق) .

نظرية :

عزم الازدواج هو متجه ثابت ، لا يعتمد على النقطة التى ننسب إليها عزمى قوتيه ويساوى عزم إحدى قوتى الازدواج بالنسبة لنقطة على خط عمل القوة الأخرى .

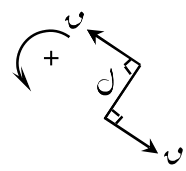
معيار واتجاه عزم الازدواج :

$\|\overrightarrow{ج}\| =$ ب أ × ق جا هـ = ق (ب أ جا هـ) = ق ل .

حيث ل هو البعد العمودى بين خطى عمل قوتى الازدواج ، ويسمى ذراع الازدواج .

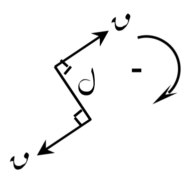
واتجاه عزم الازدواج يكون عموديا على المستوى الذى يجمع قوتيه ويتحدد طبقا لقاعدة اليد اليمنى .

قاعدة :



ج > ٠

الازدواج يعمل على الدوران فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة



ج < ٠

الازدواج يعمل على الدوران فى اتجاه دوران عقارب الساعة

نتائج :

إذا كان $\overline{ج_١}$ ، $\overline{ج_٢}$ عزمى ازدواجين مستويين ، وكان $ج_١$ ، $ج_٢$ القياسين الجبريين لعزمى الإزدواجين فإن :

- يكون الإزدواجان متوازيان إذا كان : $\overline{ج_١} + \overline{ج_٢} = ٠$ أ، $ج_١ + ج_٢ = ٠$
- يكون الإزدواجان متكافئان إذا كان : $\overline{ج_١} = \overline{ج_٢}$ أ، $ج_١ = ج_٢$

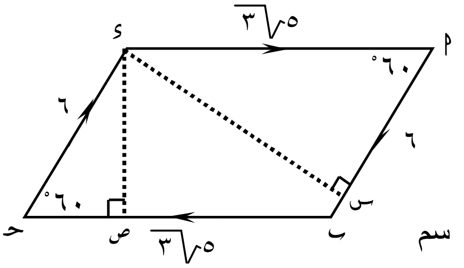
أمثلة محلولة

مثال (١) : ﻫ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه ﻫ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٠ سم ، ق(∠ﻫ ب حـ) = ١٢٠° ، أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ٥ $\sqrt{٣}$ ، ٦ ، ٥ $\sqrt{٣}$ ث كجم فى $\overleftarrow{ﻫ ب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{ء ﻫ}$ على الترتيب . أوجد :

أولا : القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين ٦ ، ٦ ث كجم .

ثانيا : القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين ٥ $\sqrt{٣}$ ، ٥ $\sqrt{٣}$

الحل :



نرسم $\overline{ء س} \perp \overline{ﻫ ب}$ ، $\overline{ء ص} \perp \overline{ب حـ}$

من هندسة الشكل :

ءس = ﻫ ء جا ٦٠° = ١٠ جا ٦٠° = ٥ $\sqrt{٣}$ سم

، ءص = ء حـ جا ٦٠° = ٨ جا ٦٠° = ٤ $\sqrt{٣}$ سم

أولا : القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين ٦ ، ٦ ث كجم

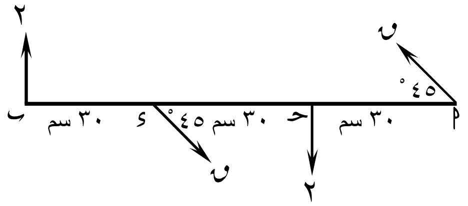
= - ٦ × ءس = - ٦ × ٥ $\sqrt{٣}$ = - ٣٠ $\sqrt{٣}$ ث كجم . سم

ثانيا : القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين ٥ $\sqrt{٣}$ ، ٥ $\sqrt{٣}$

= - ٥ $\sqrt{٣}$ × ءص = - ٥ $\sqrt{٣}$ × ٤ $\sqrt{٣}$ = - ٦٠ ث كجم . سم

ملاحظة : إشارة عزم الازدواج تتوقف على الاتجاه المأخوذ فيه القوى إذا كان مع حركة عقارب الساعة أو عكس اتجاه حركة عقارب الساعة .

مثال (٢) : في الشكل المقابل :



ٮ حـ = حـ ء = ء ٮ = ٣٠ سم ،
ٮ ، ٮ ث كجم تؤثران فى النقطتين ٮ ، ء وتميلان على القضيب بزاوية قياسها ٤٥ ْ ، ٢ ، ٢ ث كجم تؤثران فى النقطتين حـ ، ٮ وعموديتين على القضيب . أوجد قيمة ٮ التى تجعل الإزدواجان يتزنان .

الحــل :

$ج_1$ (القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من ٮ ، ٮ)

= ٮ × ٦٠ جا ٤٥ ْ = ٣٠ $\sqrt{٢}$ ٮ ث كجم . سم ،

$ج_2$ (القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من ٢ ، ٢)

= - ٢ × ٦٠ = - ١٢٠ ث كجم . سم

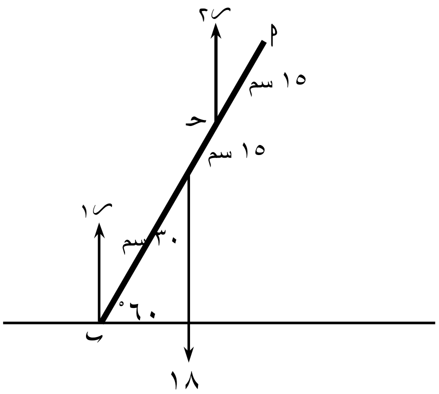
∵ الإزدوجان متزنان ∴ $ج_1 + ج_2 = ٠$

∴ ٣٠ $\sqrt{٢}$ ٮ - ١٢٠ = ٠ ∴ $\sqrt{٢}$ ٮ - ٤ = ٠

∴ ٮ = ٢ $\sqrt{٢}$ ث . كجم

مثال (٣) : $\overline{ٮ ٮ}$ قضيب طوله ٦٠ سم ووزنه ١٨ نيوتن يؤثر عند منتصفه ويمكنه الدوران بسهوله فى مستوى رأسى حول مسمار أفقى ثابت يمر بثقب صغير فى القضيب عند النقطة حـ التى تبعد ١٥ سم من ٮ ، فإذا استند القضيب بطرفه ٮ على نضد أفقى أملس فأوجد مقدار واتجاه رد فعل المسمار ، وإذا شد الطرف ٮ أفقيا بحبل حتى أصبح رد فعل النضد مساويا لوزن القضيب فأوجد الشد فى الحبل ورد فعل المسمار حينئذ علما بأن القضيب يتزن فى الحالتين فى مستوى رأسى يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠ ْ

الحــل :



أولا : القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى :

- الوزن (١٨ نيوتن) رأسيا لأسفل
- رد الفعل $ر_1$ عند ٮ رأسيا لأعلى
- رد الفعل $ر_2$ عند حـ رأسيا لأعلى

ومن اتزان المجموعة .

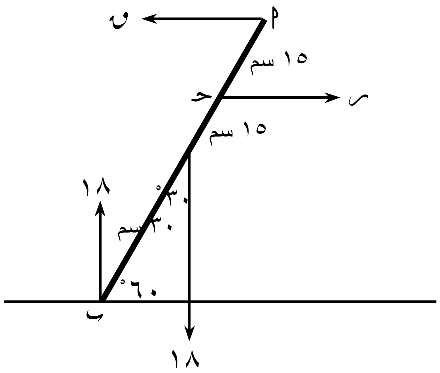
$\therefore$ $ر_١ + ر_٢ = ١٨$ .... (١)

، $ر_١ \times ٣٠ = ر_٢ \times ١٥$ $\therefore$ $ر_٢ = ٢ ر_١$ .... (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) :

$\therefore$ $ر_١ + ٢ ر_١ = ١٨$ $\therefore$ $٣ ر_١ = ١٨$

$\therefore$ $ر_١ = ٦$ نيوتن ، $ر_٢ = ١٢$ نيوتن



ثانيا : القوتان ١٨ ، ١٨ نيوتن تكونان إزدواجا القياس الجبرى لعزمه :

$ج_١ = - ١٨ \times ٣٠$ جا $٣٠°$

$= - ٢٧٠$ نيوتن . سم

$\because$ القضيب متزن

$\therefore$ القوتان ق ، ر يكونان ازدواجا يتزن مع الازدواج الأول

$\therefore$ ق = ر وتضادها فى الاتجاه

، بفرض ان القياس الجبرى لعزم الازدواج الثانى $ج_٢$

$\therefore$ $ج_١ + ج_٢ = ٠$

$\therefore$ $- ٢٧٠ + ج_٢ = ٠$ $\therefore$ $ج_٢ = ٢٧٠$ نيوتن . سم

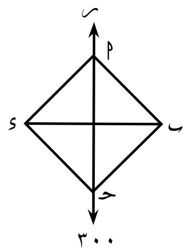
$\therefore$ ق $\times ١٥$ جا $٦٠° = ٢٧٠$

$\therefore$ ق $\times ١٥ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٢٧٠$

$\therefore$ ق $= ١٢ \sqrt{٣}$ نيوتن $\therefore$ ر $= ١٢ \sqrt{٢}$ نيوتن

مثال (٤) : أ ب حـ ء صفيحة رقيقة على هيئة مربع طول ضلعه ٥٠ سم ووزنها ٣٠٠ ث جم يؤثر فى نقطة تلاقى القطرين ، ثقبت الصفيحة ثقبا صغيرا بالقرب من أ وعلقت من هذا الثقب فى مسمار أفقى رفيع بحيث أتزنت فى مستوى رأسى . أوجد الضغط على المسمار ، وعندما اثر على الصفيحة إزدواج معيار عزمه ٧٥٠٠ ث جم . سم واتجاهه عمودى على مستوى الصفيحة . اثبت أن الضغط على المسمار لا يتغير ثم أوجد ميل القطر $\overline{أ حـ}$ على الراسى فى وضع الاتزان .

الحـــل :

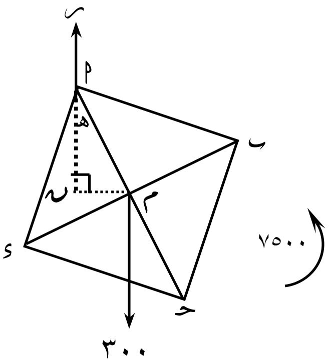


أولا : <u>قبل التأثير على الصفيحة بازدواج</u>

الصفيحة متزنة تحت تأثير القوتين :

- وزن الصفيحة ٣٠٠ ث جم رأسيا لأسفل
- رد فعل المسمار (ر) رأسيا لأعلى

∴ ر = ٣٠٠ ث جم



ثانيا : <u>بعد التأثير على الصفيحة بازدواج عزمه</u>
٧٥٠٠ ث جم . سم يكون ر = ٣٠٠ ث جم

أيضا ولا يتغير لأن محصلة قوتى الازدواج تساوى صفراً .

وبفرض أن $\overline{\text{ا حـ}}$ يميل على الرأسى بزاوية قياسها هـ ، الصفيحة متزنة تحت تأثير إزدواجين

ج١ + ج٢ = ٠

٧٥٠٠ – ٣٠٠ × م ل = ٠ ∴ م ل = ٢٥ سم

ومن خواص المربع : طول قطره ا حـ = ٥٠ $\sqrt{٢}$ سم

ويكون طول نصف القطر ا م = ٢٥ $\sqrt{٢}$ سم

∴ جا هـ = $\frac{٢٥}{٢٥\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ ق(∠ هـ) = ٤٥°

∴ $\overline{\text{ا ء}}$ يكون فى وضع رأسى

مثال (٥) : ا ب حـ ء صفيحة رقيقة على هيئة مستطيل فيه ا ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٦ سم ووزنها ٤ نيوتن ويؤثر فى نقطة تلاقى القطرين . علقت الصفيحة على مسمار افقى رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس ا فاتزنت فى مستوى رأسى . أوجد الضغط على المسمار ، وإذا أثر على الصفيحة إزدواج معيار عزمه ٢٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن سم واتجاهه عمودى على مستوى الصفيحة . أوجد زاوية ميل $\overline{\text{ا حـ}}$ على الرأسى فى وضع الاتزان .

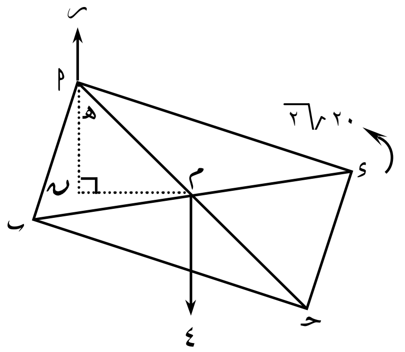
الحـــل :

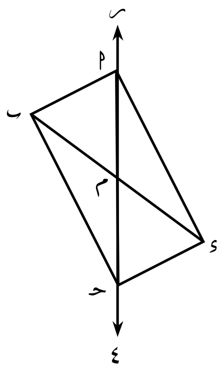
من فيثاغورث : ا حـ = $\sqrt{(١٢)^٢ + (١٦)^٢}$ = ٢٠ سم ∴ ا م = ١٠ سم

أولا : <u>قبل التأثير على الصفيحة بازدواج</u>

الصفيحة متزنة تحت
تأثير قوتين :

- وزن الصفيحة ٤ نيوتن رأسيا لأسفل
- رد فعل المسمار (ر) رأسيا لأعلى
حيث ر = ٤ نيوتن





ثانيا : <u>بعد التأثير على الصفيحة بازدواج :</u>

تكون الصفيحة متزنة تحت تأثير ازدواج مكون من وزنها ٤ ورد فعل المسمار ر ، وازدواج آخر القياس الجبرى لعزمه يساوى ٢٠ $\sqrt{2}$ نيوتن . سم .

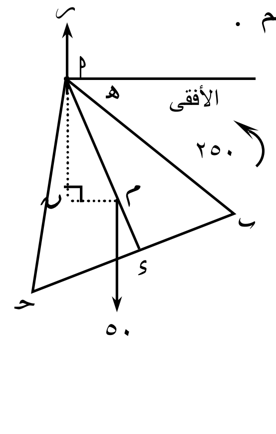
$\therefore$ ج$_1$ + ج$_2$ = ٠

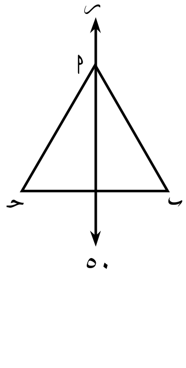
$\therefore$ ٢٠ $\sqrt{2}$ - ٤ × م ن = ٠ $\therefore$ ٤ م ن = ٢٠ $\sqrt{2}$ $\therefore$ م ن = ٥ $\sqrt{2}$

$\therefore$ جا هـ = $\frac{\text{م ن}}{\text{أ م}}$ = $\frac{٥\sqrt{2}}{١٠}$ = $\frac{\sqrt{2}}{٢}$ $\therefore$ ق(∠ هـ) = ٤٥°

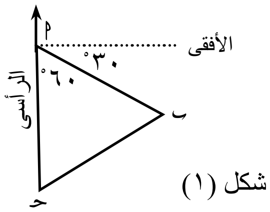
مثال (٦) : أ ب حـ صفيحة على شكل مثلث متساوى الأضلاع ووزنها ٥٠ ث جم ويؤثر عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث ، علقت الصفيحة فى مسمار أفقى رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس أ بحيث كان مستواها رأسيا ، أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه يساوى ٢٥٠ ث جم . سم واتجاهه عمودى على مستويها فاتزنت . أوجد ميل $\overline{\text{أ ب}}$ على الأفقى إذا علم أن ارتفاع المثلث يساوى ١٥ سم .

الحل :





الصفيحة متزنة تحت تاثير ازدواجين الأول مكون من وزن الصفيحة (٥٠ ث جم) رأسيا لأسفل ورد فعل المسار ر رأسيا لأعلى ، الآخر معيار عزمه يساوى ٢٥٠ ث جم . سم ويعمل فى الاتجاه المضاد ويتزن مع الازدواج الأول .



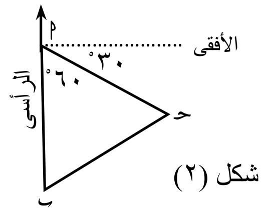
شكل (١)

وبفرض أن $\overline{\text{أ ب}}$ يصنع مع الأفقى زاوية قياسها هـ

∴ ٢٥٠ − ٥٠ × م ن = ٠ ∴ م ن = ٥ سم

∵ أ ء = ١٥ سم ∴ أ م = $\frac{٢}{٣}$ × ١٥ = ١٠ سم

∴ جا (∠ م أ ن) = $\frac{\text{م ن}}{\text{أ م}}$ = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$



شكل (٢)

∴ ق(∠ م أ ن) = ٣٠° أى أن $\overline{\text{أ حـ}}$ يكون رأسيا

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°

كما هو موضح بشكل (١)

، إذا كان ترتيب أضلاع المثلث أ ب حـ ضد حركة عقارب الساعة كما بشكل (٢)

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٩٠° .

تمـــارين (١٢)

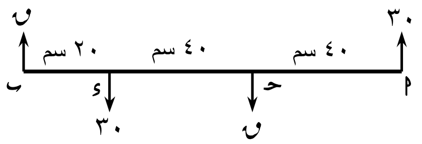
(١) فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ب}}$ قضيب خفيف طوله ١٠٠ سم ،

فإذا علم أن القضيب متزن تحت

تأثير القوى الأربع الموضحه بالشكل .

فأوجد قيمة ق .



[الإجابة : ٤٠ نيوتن]

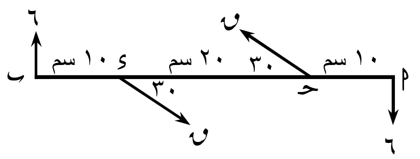
(٢) فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ب}}$ قضيب خفيف طوله ٤٠ سم ،

فإذا علم أن القضيب متزن تحت

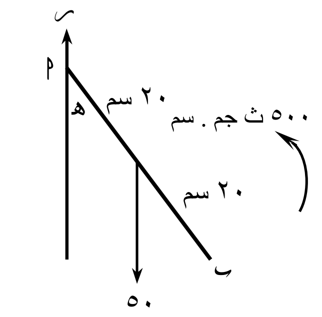
تأثير القوى الأربع الموضحه بالشكل .

فأوجد قيمة ق .



[الإجابة : ٢٤ نيوتن]

(٣) في الشكل المقابل :



ﻣ ب قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ووزنه ٥٠ ث جم يرتكز عند منتصفه ، يمكنه الدوران بسهوله فى مستوى رأسى حول مفصل عند ا ، أثر على القضيب ازدواج معيار عزمه ٥٠٠ ث جم . سم . أوجد فى وضع الاتزان رد فعل المفصل وقياس زاوية ميله مع الرأسى .
[الإجابة : ٥٠ ث جم ، ٣٠°]

(٤) ﻣ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه ﻣ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٠ سم ، ق(∠ﻣ ب حـ) = ١٢٠° ، أثرت قوى مقاديرها ٣ ، ٢ √٣ ، ٣ ، ٢ √٣ ث كجم فى $\overleftarrow{ﻣ ب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{ء ﻣ}$ على الترتيب . أوجد :
أولا : القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين ٦ ، ٦ ث كجم .
ثانيا : القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين ٥ √٣ ، ٥ √٣
[الإجابة : ١٥ √٣ ، ٢٤ ث كجم . سم]

(٥) ﻣ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم طول ضلعه ١٠ سم ، أثرت قوى مقاديرها ٥ ، ١٠ √٣ ، ٥ ، ١٠ ، ١٠ √٣ ث كجم فى $\overleftarrow{ﻣ ب}$ ، $\overleftarrow{ب ء}$ ، $\overleftarrow{ء هـ}$ ، $\overleftarrow{هـ ﻣ}$ على الترتيب أوجد :
أولا : القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين ٥ ، ٥ ث كجم
ثانيا : القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين ١٠ √٣ ، ١٠ √٣ ث كجم

(٦) أثر ازدواجان مستويان فى قضيب ﻣ ب مهمل الوزن طوله ٩٠ سم ، وكان الازدواج الأول يتكون من قوتين معيارهما ق ، ق ث كجم يؤثران فى نقطتى ﻣ ، حـ من القضيب حيث ب حـ = ٣٠ سم ويميلان على القضيب بزاوية قياسها ٤٥° ويتكون الازدواج الثانى من قوتين معياريهما ٢ ، ٢ ث كجم وتؤثران فى نقطتى ب ، م من القضيب عموديتين عليه حيث ﻣ م = ٣٠ سم . عين قيمة ق التى تجعل الازدواجين يتزنان .
[الإجابة : ٢ √٢ ث كجم]

(٧) ﻣ ب قضيب منتظم طوله ٢٠ سم يدور حول مسمار فى ثقب صغير عند نقطة حـ ∈ ﻣ ب حيث ﻣ حـ = ٥ سم فاتزن القضيب فى وضع أفقى بتأثير قوتين مقدار كل منهما ٥٠ نيوتن تؤثران عند طرفيه ﻣ ، ب فى اتجاهين متضادين وتصنعان مع القضيب زاوية قياسها ٣٠° . أوجد وزن القضيب .
[الإجابة : ١٠٠ نيوتن]

(٨) ١٩٩٩/دور أول : $\overline{\text{أ ب}}$ قضيب طوله ٥٠ سم ووزنه ٢٠ نيوتن يؤثر فى منتصفه ، يتحرك فى مستوى رأسى حول مفصل ثابت عند طرفه أ ، أثر على القضيب ازدواج معيار عزمه ٢٥٠ نيوتن . سم . اوجد رد فعل المفصل وزاوية ميل القضيب على الرأسى فى وضع التوازن . [الإجابة : ٢٠ نيوتن ، ٣٠° إلى أعلى]

(٩) $\overline{\text{أ ب}}$ قضيب طوله ١٠٠ سم ووزنه ٣ ث كجم يؤثر فى منتصفه ، يتحرك فى مستوى رأسى حول مفصل ثابت عند طرفه أ ، فإذا اتزن القضيب نتيجة التأثير عليه بازدواج معيار عزمه ٧٥ ث كجم . سم ويعمل فى المستوى الرأسى المار بالقضيب . أوجد رد فعل المفصل ، وكذلك قياس الزاوية الحادة التى يصنعها القضيب مع الرأسى .

[الإجابة : ٣ ث كجم ، ٣٠°]

(١٠) $\overline{\text{أ ب}}$ قضيب طوله ٢٤ سم ووزنه ٥ نيوتن يؤثر عند منتصفه ويمكنه الدوران بسهوله فى مستوى رأسى حول مسمار أفقى ثابت يمر بثقب صغير فى القضيب عند النقطة حـ التى تبعد ٤ سم من ب ، فإذا استند القضيب بطرفه أ على نضد أفقى أملس فأوجد مقدار واتجاه رد فعل المسمار ، وإذا شد الطرف ب أفقيا بحبل حتى أصبح رد فعل النضد مساويا لوزن القضيب فأوجد الشد فى الحبل ورد فعل المسمار حينئذ علما بأن القضيب يتزن فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° .

[الإجابة : ٣ ث كجم رأسيا لأعلى ، ى = ر = ١٥ $\sqrt{٣}$]

(١١) $\overline{\text{أ ب}}$ قضيب منتظم طوله ١٤٠ سم ووزنه ٦ ث كجم يؤثر عند منتصفه ، يمكنه الدوران بسهوله حول مسمار أفقى ثابت يمر بثقب صغير فى القضيب عند نقطة حـ التى تبعد ٣٥ سم عن الطرف ب . فإذا استند القضيب بطرفه أ على نضد أفقى أملس فأوجد رد فعل النضد على القضيب . وإذا شد الطرف ب أفقيا بحبل حتى أصبح رد فعل النضد مساويا وزن القضيب فأوجد الشد فى الحبل ومقدار واتجاه رد فعل المسمار علما بأن زاوية ميل القضيب على الأفقى تساوى ٣٠° .

[الإجابة : ر = ٢ ث كجم ، ش = ر = ١٢ $\sqrt{٣}$]

(١٢) أ ب حـ صفيحة رقيقة على هيئة مثلث قائم الزاوية فى ب وزنها ٦ نيوتن يؤثر فى نقطة تلاقى المتوسطات ، وفيه أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٥ سم ، علقت فى مسمار من ثقب صغير بالقرب من الرأس أ بحيث كان مستواها رأسيا ، ثم اثر عليها ازدواج فى مستويها فاتزنت عندما كان $\overline{\text{أ ب}}$ رأسيا . أوجد رد فعل المسمار ومعيار عزم الازدواج . [الإجابة : ر = ٦ نيوتن ، ٣٠ نيوتن . سم]

(١٣) ٢ ب حـ صفحة على شكل مثلث متساوى الساقين فيه ٢ ب = ٢ حـ = ١٣ سم ، ب حـ = ١٠ سم تدور بسهوله فى مستو رأسى حول مفصل ثبت عند ٢ ، فإذا أثر على الصفيحة وفى مستواها ازدواج معيار عزمه ٢٠٠ ث جم . سم فاتزنت فى وضع كان فيه احد الساقين رأسيا ، فأوجد وزن الصفيحة علما بأنه يؤثر فى نقطة تلاقى متوسطات المثلث . [الإجابة : ٦٥ ث جم]

(١٤) ٢٠٠٥/دور ثان : ٢ ب حـ صفيحة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه $١٨\sqrt{٣}$ سم ووزنها ١٠٠ ث جم يؤثر عند نقطة تلاقى المتوسطات للمثلث . علقت الصفيحة فى مسمار أفقى رفيع عمودى على مستوى الصفيحة فى ثقب صغير بالقرب من الرأس ٢ بحيث كان مستوى الصفيحة رأسيا ، فإذا أثر على الصفيحة ازدواجا فى مستواها فاتزنت عندما كان $\overline{٢ ب}$ أفقيا . أوجد مقدار الضغط على المسمار ومعيار عزم الازدواج .
[الإجابة : $٩٠٠\sqrt{٣}$ ث جم . سم]

(١٥) ٢ ب حـ ء صفيحة رقيقة منتظمة مربعة الشكل طول ضلعها ٢٠ سم ووزنها ٢٠٠ ث جم ويؤثر عند مركزها الهندسى ، معلقة بمسمار يمر فى ثقب صغير بالقرب من ٢ بحيث يكون مستواها رأسيا ، أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه ١٠٠٠ ث جم . سم فى اتجاه عمودى على مستواها فاتزنت . أوجد :
أولا : رد فعل المسمار ثانيا : قياس زاوية ميل $\overline{٢ حـ}$ على الرأسى
[الإجابة : ٢٠٠ ث . جم ، ٢٠° ٤٢َ]

(١٦) ٢٠٠٣/دور أول : ٢ ب حـ ء صفيحة رقيقة على هيئة مربع طول ضلعها ٥٠ سم ووزنها ٣٠٠ ث جم يؤثر عند مركز المربع ، علقت الصفيحة من ثقب صغير بالقرب من الرأس ٢ فى مسمار أفقى بحيث يكون مستواها رأسيا ، أثر على الصفيحة فى مستواها ازدواج القياس الجبرى لعزمه ٧٥٠٠ ث جم . سم . أوجد ميل القطر $\overline{٢ حـ}$ على الرأسى فى وضع التوازن .
[الإجابة : ٤٥° أ، ١٣٥°]

(١٧) ٢ ب حـ ء صفيحة رقيقة منتظمة مستطيلة الشكل فيها ٢ ب = ١٨ سم ، ب حـ = ٢٤ سم ووزنها ٢٠ نيوتن يؤثر عند نقطة تقاطع القطرين ، علقت فى مسمار رفيع من ثقب صغير عند الرأس ء بحيث كان مستواها رأسيا وأثر عليها ازدواج معيار عزمه ١٥٠ نيوتن . سم . أوجد قياس زاوية ميل $\overleftarrow{ء ب}$ على الأفقى فى وضع الاتزان.
[الإجابة : ٦٠°]

مجموع أى عدد محدود من الازدواجات المستوية

تعريف : مجموع أى عدد محدود من الإزدواجات المستوية هو ازدواج عزمه يساوى مجموع عزوم هذه الإزدواجات .

$$\vec{ج} = \vec{ج}_١ + \vec{ج}_٢ + \vec{ج}_٣ + \ldots\ldots\ldots\ldots + \vec{ج}_ن$$

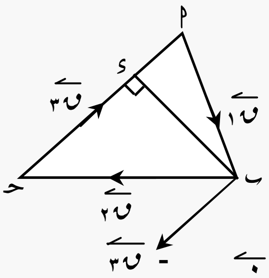
نتيجة : القياس الجبرى لعزم مجموع عدة ازدواجات مستوية يساوى مجموع القياسات الجبرية لعزومها .

$$ج = ج_١ + ج_٢ + ج_٣ + \ldots\ldots\ldots\ldots + ج_ن$$

قاعدة :

إذا أثرت ثلاث قوى مستوية فى جسم متماسك ومثلها تمثيلا تاما أضلاع مثلث مأخوذة فى ترتيب دورى واحد كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجا معيار عزمه يساوى خارج قسمة ضعف مساحة سطح المثلث على الطول الممثل لوحدة القوة (مقياس الرسم) .

البرهان :



القطع المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بحـ}$ ، $\overrightarrow{حـأ}$ تمثل القوى الثلاث $\vec{ق}_١$ ، $\vec{ق}_٢$ ، $\vec{ق}_٣$ تمثيلا تاما (فى المقدار والاتجاه وخط العمل) ، ونفرض أن مقدار القوة يمثل بمقياس رسم ١ وحدة طول لكل (م) وحدة مقدار قوة .

$\because \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بحـ} + \overrightarrow{حـأ} = \vec{0}$ $\therefore \vec{ق}_١ + \vec{ق}_٢ + \vec{ق}_٣ = \vec{0}$

$\therefore \vec{ق}_١ + \vec{ق}_٢ = -\vec{ق}_٣$

أى أن محصلة القوتين $\vec{ق}_١$ ، $\vec{ق}_٢$ هى قوة $(-\vec{ق}_٣)$ والتى تمر بنقطة ب

$\therefore$ مجموعة القوى الثلاث $\vec{ق}_١$ ، $\vec{ق}_٢$ ، $\vec{ق}_٣$ تكافئ القوتين : $\vec{ق}_٣$ وتؤثر فى حـ ، $(-\vec{ق}_٣)$ وتؤثر فى ب أى أنها تكافئ ازدواجا

$\therefore$ معيار عزم الازدواج $= \|\vec{ق}_٣\| \times ب ء$ ، $\because \|\vec{ق}_٣\| = أ حـ \times م$

$\therefore$ معيار عزم الازدواج $= أ حـ \times م \times ب ء = ٢ \times م(\Delta أ ب حـ) \times م$

$= ضعف مساحة سطح \Delta أ ب حـ \div \frac{١}{م} = \frac{\text{ضعف مساحة سطح المثلث}}{\text{الطول الممثل لوحدة الطول}}$

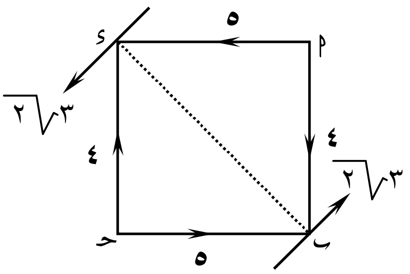
تعميم

إذا أثرت عدة قوى مستوية فى جسم متماسك ومثلها تمثيلا تاما أضلاع مضلع مقفل مأخوذة فى ترتيب دورى واحد كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجاً يساوى معيار عزمه خارج القسمة لضعف مساحة سطح المضلع على مقياس الرسم المستخدم لتمثيل مقدار القوى .

أمثلة محلولة

مثال (١) : ٢ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم ، أثرت القوى ٤ ، ٥ ، ٤ ، ٥ نيوتن فى $\overleftarrow{٢ب}$ ، $\overleftarrow{حـب}$ ، $\overleftarrow{حـء}$ ، $\overleftarrow{٢ء}$ على الترتيب كما أثرت فى النقطتين ب ، ء قوتان كل منهما $٣\sqrt{٢}$ نيوتن فى اتجاهى $\overleftarrow{حـ٢}$ ، $\overleftarrow{٢حـ}$ على الترتيب . أثبت أن هذه القوى تكافئ ازدواجا وأوجد القياس الجبرى لعزمه .

الحل :



ب ء = $\sqrt{(١٠)^٢ + (١٠)^٢} = ١٠\sqrt{٢}$

∵ القوتان ٤ ، ٤ نيوتن تكونان ازدواجا
القياس الجبرى لعزمه
= - ٤ × ١٠ = - ٤٠ نيوتن . سم

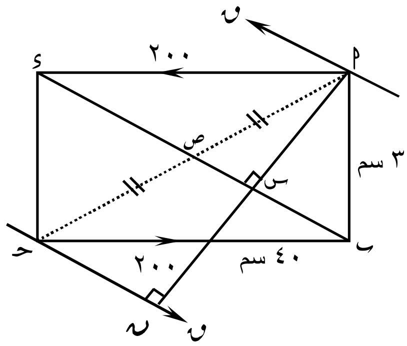
∵ القوتان ٥ ، ٥ نيوتن تكونان ازدواجا
القياس الجبرى لعزمه = ٥ × ١٠ = ٥٠ نيوتن . سم

∵ القوتان $٣\sqrt{٢}$ ، $٣\sqrt{٢}$ نيوتن تكونان ازدواجا
القياس الجبرى لعزمه = $٣\sqrt{٢} \times ١٠\sqrt{٢}$ = ٦٠ نيوتن . سم

∴ مجموعة القوى تكافئ ازدواجا
القياس الجبرى لعزمه = - ٤٠ + ٥٠ + ٦٠ = ٧٠ نيوتن . سم

مثال (٢) : ﻫ ب حـ ء مستطيل فيه ﻫ ب = ٤٠ سم ، ب حـ = ٣٠ سم ، أثرت قوتان مقدار كل منهما ٢٠٠ نيوتن فى $\overleftarrow{ﻫ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ وقوتان $\overleftarrow{ق}$ ، $-\overleftarrow{ق}$ عند ﻫ ، حـ وتوازيان $\overline{ب ء}$. عين قيمة ق حتى يتكافأ الازدواجان الناتجان .

الحـــل :



∵ القوتان ٢٠٠ ، ٢٠٠ نيوتن تكونان ازدواجا

∴ القياس الجبرى لعزمه

$ج_١ = ٢٠٠ \times ٣٠ = ٦٠٠٠$ نيوتن . سم

∵ القوتان ق ، ق نيوتن تكونان ازدواجا

ومن هندسة الشكل : نحسب طول $\overline{ﻫ ن}$ كالآتى :

نرسم $\overline{ﻫ ن}$ عمودى على كل من $\overline{ب ء}$

وخط عمل ق .

∵ ص منتصف $\overline{ﻫ حـ}$ من خواص المستطيل

∴ س منتصف $\overline{ﻫ ن}$ لأن $\overline{س ص}$ // $\overline{ن حـ}$

∴ ﻫ ن = ٢ ﻫ س = $٢ \times \frac{ﻫ ب \times ﻫ ء}{ب ء}$ (من إقليدس)

∴ ﻫ ن = $\frac{٣٠ \times ٤٠}{٥٠} = ٤٨$ سم

∴ القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين $\overleftarrow{ق}$ ، $-\overleftarrow{ق}$

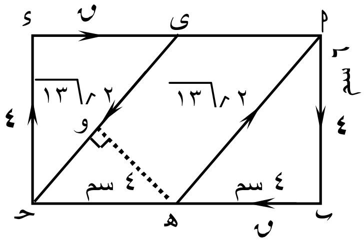
$ج_٢ = ق \times ٤٨ = ٤٨$ ق نيوتن . سم

∵ الإزدواجان متكافئان : ∴ $ج_١ = ج_٢$

∴ ٦٠٠٠ = ٤٨ ق ∴ ق = ١٢٥ نيوتن

مثال (٣) : ﻫ ب حـ ء مستطيل فيه ﻫ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، ﻫ ، ى منتصفا $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{ﻫ ء}$ على الترتيب ، أثرت القوى ٤ ، ق ، $٢\sqrt{١٣}$ ، ٤ ، ق ، $٢\sqrt{١٣}$ ث . جم فى $\overleftarrow{ﻫ ب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{ﻫ ﻫ}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{ء ﻫ}$ ، $\overleftarrow{ى حـ}$ على الترتيب . أحسب ق لكى تكافئ المجموعة ازدواجا معيار عزمه ٢٠ ث جم . سم يعمل على الدوران فى الاتجاه ﻫ ب حـ ء .

الحـــل :



م هـ = $\sqrt{(٤)^٢ + (٦)^٢}$ = ٢ $\sqrt{١٣}$ سم

القوتان ٤ ، ٤ ث جم تكونان ازدواجا

القياس الجبرى لعزمه = ـ ٤ × ٨ = ـ ٣٢ ث جم . سم

القوتان ع ، ع ث جم تكونان ازدواجا

القياس الجبرى لعزمه = ـ ع × ٦

= ـ ٦ ع ث جم . سم

القوتان ٢ $\sqrt{١٣}$ ، ٢ $\sqrt{١٣}$ ث جم تكونان ازدواجا ويمثلها $\overleftarrow{هـ م}$ ، $\overleftarrow{ى حـ}$.

ومن هندسة الشكل : نحسب طول $\overline{هـ و}$ كالآتى :

∵ ع(∠ حـ هـ و) = ع(∠ ءحـى) لأن كل منهم متمم لزاوية هـ حـ ى .

∴ جتا (∠ حـ هـ و) = $\frac{٦}{٢\sqrt{١٣}}$ = $\frac{هـ و}{٤}$ ∴ هـ و = $\frac{١٢}{\sqrt{١٣}}$ سم

القياس الجبرى لعزمه = ٢ $\sqrt{١٣}$ × $\frac{١٢}{\sqrt{١٣}}$ = ٢٤ ث جم . سم

∵ القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل = ـ ٢٠

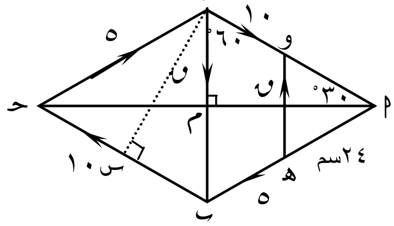
∴ ـ ٣٢ – ٦ ع + ٢٤ = ـ ٢٠

∴ ٦ ع = ـ ٣٢ + ٢٤ + ٢٠

∴ ٦ ع = ١٢ ∴ ع = ٢ ث جم

مثال (٤) : م ب حـ ء معين فيه ع(∠م) = ٦٠° ، طول ضلعه ٢٤ سم هـ ، و منتصفات $\overline{م ب}$ ، $\overline{م ء}$ على الترتيب ، أثرت قوى مقاديرهما ٥ ، ١٠ ، ٥ ، ١٠ ، ع ، ع نيوتن فى $\overleftarrow{م ب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{ء م}$ ، $\overleftarrow{ء ب}$ ، $\overleftarrow{هـ و}$ على الترتيب ، فإذا كانت مجموعة القوى متزنة ، فأوجد قيمة ع .

الحـــل :



من خواص المعين نجد أن :

Δ م مء القائم الزاوية ثلاثينى ستينى

ءم = ١٢ سم ، ام = ١٢ $\sqrt{3}$ سم

، احـ = ٢٤ $\sqrt{3}$ سم ، اس = ءحـ جا ٦٠° = ٢٤ جا ٦٠° = ١٢ $\sqrt{3}$ سم

القوتان ٥ ، ٥ نيوتن يكونان ازدواجا معيار عزمه :

$ج_1$ = - ٥ × احـ جا ٣٠° = - ٥ × ٢٤ $\sqrt{3}$ × $\frac{1}{2}$ = - ٦٠ $\sqrt{3}$ نيوتن . سم

، القوتان ١٠ ، ١٠ نيوتن يكونان ازدواجا معيار عزمه :

$ج_2$ = - ١٠× ٢٤ جا ٦٠° = - ٢٤٠ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = - ١٢٠ $\sqrt{3}$ نيوتن . سم

، القوتان ىو ، ىو نيوتن يكونان ازدواجا معيار عزمه :

$ج_3$ = ىو × ءو جا ٦٠° = ىو × ١٢ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ٦ $\sqrt{3}$ ىو نيوتن . سم

∵ مجموعة القوى متزنة :

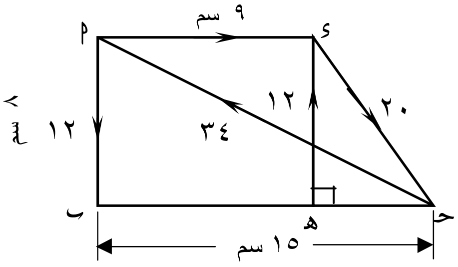
∴ مجموع القياسات الجبرية لعزوم الازدواجات الثلاثة = صفر

∴ – ٦٠ $\sqrt{3}$ - ١٢٠ $\sqrt{3}$ + ٦ ق $\sqrt{3}$ = ٠

∴ ٦ ىو = ١٨٠ ∴ ىو = ٣٠ نيوتن

مثال (٥) : ا ب حـ ء شبه منحرف فيه $\overline{اء}$ // $\overline{بحـ}$ ، $\overline{اب}$ عمودى عليهما ، هـ مسقط ء على $\overline{بحـ}$ ، حـب = ١٥ سم ، با = ٨ سم ، اء = ٩ سم . أثرت قوى مقاديرها ١٢ ، ١٨ ، ٢٠ ، ١٢ ، ٣٤ نيوتن فى ا ب ، ا ء ، ء حـ ، هـ ء ، حـ ا على الترتيب . اثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجا وأوجد معيار عزمه .

الحـــل :



من هندسة الشكل :

به = ٩ سم ، هـ حـ = ١٥ – ٩ = ٦ سم

ءحـ = $\sqrt{64 + 36}$ = ١٠ سم

، $\text{ح}\text{م} = \sqrt{(٨)^٢ + (١٥)^٢} = ١٧$ سم

، $م(\Delta\, \text{م ء ح}) = \frac{١}{٢}\, \text{م ء} \times \text{م ب} = \frac{١}{٢} \times ٩ \times ٨ = ٣٦$ سم^٢ .

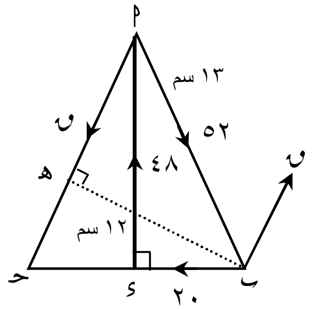
- القوتان ١٢ ، ١٢ تكونان ازدواجا :
  $ج_١ = ١٢ \times ٩ = ١٠٨$ نيوتن . سم
- القوى ١٨ ، ٢٠ ، ٣٤ نيوتن مأخوذة فى ترتيب دورى واحد فى Δ م ء ح وممثلة تمثيلا تاما بأطوال أضلاع Δ م ء ح حيث $\frac{١٨}{٩} = \frac{٢٠}{١٠} = \frac{٣٤}{١٧} = ٢$ (مقياس الرسم)
  فهى تكافئ ازدواجا :
  $ج_٢ = -\,٢\, \Delta$ م ء ح (مقياس الرسم) = - ٢ × ٣٦ × ٢ = - ١٤٤ نيوتن . سم

الازدواج المحصل $ج = ج_١ + ج_٢ = ١٠٨ - ١٤٤ = -\,٣٦$ نيوتن . سم

مثال (٦) : م ب ح مثلث متساوى الساقين فيه م ب = م ح = ١٣ سم ، ب ح = ١٠ سم ، ء منتصف $\overline{\text{ب ح}}$ ، أثرت القوى ٥٢ ، ٢٠ ، ٤٨ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{م ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء م}}$ على الترتيب . أثبت أن مجموعة القوى تكافئ ازدواجا وأوجد القياس الجبرى لعزمه . أوجد مقدار قوتين تؤثر إحداهما فى $\overleftarrow{\text{م ح}}$ والأخرى تؤثر عند ب فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ح م}}$ بحيث تصبح المجموعة فى حالة توازن

الحــــل :

<u>من هندسة الشكل</u> :



$\text{م ء} = \sqrt{(١٣)^٢ - (٥)^٢} = ١٢$ سم

$م(\Delta\, \text{م ب ح}) = \frac{١}{٢}\, \text{ب ح} \times \text{م ء} = \frac{١}{٢}\, \text{م ح} \times \text{ب هـ}$

$\therefore$ $\text{ب هـ} = \frac{\text{ب ح} \times \text{م ء}}{\text{م ح}} = \frac{١٠ \times ١٢}{١٣} = \frac{١٢٠}{١٣}$ سم ،

$\because$ القوى ٥٢ ، ٢٠ ، ٤٨ تمثلها أضلاع Δ م ب ء ، ومأخوذة فى ترتيب دورى واحد حيث :

$\frac{٥٢}{١٣} = \frac{٢٠}{٥} = \frac{٤٨}{١٢} = ٤$ (مقياس الرسم)

∴ مجموعة القوى السابقة تكافئ إزدواجاً .

القياس الجبرى لعزم الازدواج = ٢ × م(Δ ﻡ ﺏ ﺀ) × (مقياس الرسم)

$= - ٢ \times \frac{١}{٢} \times ٥ \times ١٢ \times ٤ = - ٢٤٠$ نيوتن . سم

∵ القوتان اللتان تؤثران فى $\overleftrightarrow{ﻡ ﺣ}$ ، عند ﺏ فى اتجاه $\overleftarrow{ﺣ ﻡ}$ (ولتكن كل منهما ﻕ)
تكونان ازدواجا القياس الجبرى لعزمه = ٢٤٠ نيوتن . سم

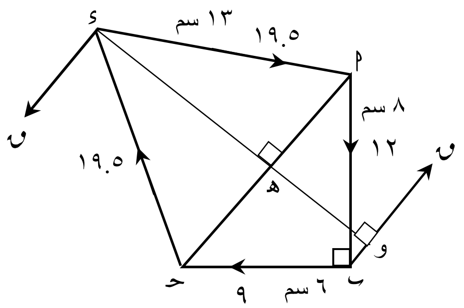
∴ $ج_١ + ج_٢ = ٠$ ∴ ﻕ × ﺏ ﻫ − ٢٤٠ = ٠

∴ ﻕ × $\frac{١٢٠}{١٣} = ٢٤٠$ ∴ ﻕ = ٢٤٠ × $\frac{١٣}{١٢٠} = ٢٦$ نيوتن

∴ القوتان ٢٦ ، ٢٦ نيوتن

مثال (٧) : ﻡ ﺏ ﺣ ﺀ شكل رباعى فيه ﻡ ﺏ = ٨ سم ، ﺏ ﺣ = ٦ سم ، ﺣ ﺀ = ﺀ ﻡ = ١٣ سم ، ﻕ(∠ ﻡ ﺏ ﺣ) = ٩٠° ، أثرت قوى مقاديرها ١٢ ، ٩ ، ١٩.٥ ، ١٩.٥ نيوتن فى $\overleftrightarrow{ﻡ ﺏ}$ ، $\overleftrightarrow{ﺏ ﺣ}$ ، $\overleftrightarrow{ﺣ ﺀ}$ ، $\overleftrightarrow{ﺀ ﻡ}$ على الترتيب . أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجا ، وأوجد معيار عزمه ، ثم أوجد مقدار قوتين تؤثران عند ﺏ ، ﺀ وتوازيان $\overleftrightarrow{ﺣ ﻡ}$ ، $\overleftrightarrow{ﻡ ﺣ}$ على الترتيب بحيث تصبح المجموعة فى حالة توازن

الحـــل :



<u>من هندسة الشكل</u> :

نرسم $\overline{ﻡ ﺣ}$ ثم نرسم $\overleftrightarrow{ﺀ ﻫ} \perp \overline{ﻡ ﺣ}$ فيقطع $\overline{ﻡ ﺣ}$ فى ﻫ وخط عمل القوة ﻕ المؤثرة عند ب فى و .

فى Δ ﻡ ﺏ ﺣ القائم الزاوية :

∵ $(ﻡ ﺣ)^٢ = ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠$

∴ ﻡ ﺣ = ١٠ سم

∵ Δ ءٯحـ متساوى الساقين ، $\overline{ءهـ} \perp \overline{ٯحـ}$

∴ هـ منتصف $\overline{ٯحـ}$

∴ $(ءهـ)^٢ = (١٣)^٢ - (٥)^٢ = ١٤٤$

∴ ءهـ = ١٢ سم

ولإيجاد البعد العمودى بين المستقيمين $\overline{وب}$ ، $\overline{ٯحـ}$ نستخدم إقليدس :

∴ وهـ = طول القطعة المستقيمة المرسومة من ب على $\overline{ٯحـ}$

$$= \frac{ٯب \times بحـ}{ٯحـ} = \frac{٦ \times ٨}{١٠} = ٤.٨ \text{ سم}$$

∴ ءو = ءهـ + هـب = ١٢ + ٤.٨ = ١٦.٨ سم

<u>أولا</u> : لإيجاد عزم الازدواج الذى يعمل فى الشكل الرباعى ٯبحـء :

∵ القوى ١٢ ، ٩ ، ١٩.٥ ، ١٩.٥ نيوتن مأخوذه فى ترتيب دورى واحد ، ممثلة تمثيلا تاما بأطوال أضلاع الشكل حيث :

$$\frac{١٢}{٨} = \frac{١٩,٥}{١٣} = \frac{١٩,٥}{١٣} = \frac{٣}{٢} \quad \text{مقدار ثابت (مقياس الرسم)}$$

∴ مجموعة القوى تكافئ ازدواجاً عزمه =
ضعف مساحة الشكل الرباعى ٯبحـء × مقياس الرسم

$$\text{عزم الازدواج} = ٢ \,(م \text{ الشكل } ٯبحـء) \times \frac{٣}{٢}$$

$$= -٢ \,[\, (م \,\Delta\, ٯبحـ) + (م \,\Delta\, ٯحـء) \,] \times \frac{٣}{٢}$$

$$= -٢ \,[\, \frac{١}{٢}\, ٯب \times ٯحـ + \frac{١}{٢}\, ٯحـ \times ءهـ \,] \times \frac{٣}{٢}$$

$$= -(٨ \times ٦ + ١٠ \times ١٢) \times \frac{٣}{٢} = -٢٥٢ \text{ نيوتن . سم}$$

<u>ثانيا</u> : ∴ $جـ_١ + جـ_٢ = ٠$ ∴ ق × ءو − ٢٥٢ = ٠

∴ ق × ١٦.٨ = ٢٥٢ ∴ ق = ٢٥٢ ÷ ١٦.٨ = ١٥ نيوتن

∴ مقدار قوتين تؤثران عند ب ، ء وتوازيان $\overleftarrow{حـٯ}$ ، $\overleftarrow{ٯحـ}$ على الترتيب بحيث تصبح المجموعة فى حالة توازن هما ١٥ ، ١٥ نيوتن .

تمارين (٦)

(١) ١٩٩٧/دور أول : ﻡ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه ﻡ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ٨ سم ، ق(∠ ء ﻡ ب) = ٦٠° ، أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ١٠ ، ٦ ، ١٠ ث جم فى ﻡ ب ، حـ ب ، حـ ء ، ﻡ ء على الترتيب . أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجا وأوجد معيار عزمه . (الإجابة : ٣٦ √٣ ث جم . سم)

(٢) ٢٠٠١/دور أول: ﻡ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه ﻡ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، ق(∠ ﻡ) = ٦٠° ، أثرت قوى مقاديرها ٨ ، ١٠ ، ٨ ، ١٠ نيوتن فى ﻡ ب ، حـ ب ، حـ ء ، ﻡ ء على الترتيب . أوجد معيار عزم الازدواج الذى يكافئ المجموعة . (الإجابة : ٢ √٣ نيوتن . سم)

(٣) ١٩٩٩/دور ثان : ﻡ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٦ سم ، أثرت القوى ٤٠ ، ق ، ٤٠ ، ق ث جم فى ب ﻡ ، ب حـ ، ء حـ ، ء ﻡ على الترتيب ، فإذا كانت هذه القوى الأربع تكافئ ازدواجا معيار عزمه يساوى ٤٨٠ ث جم . سم فى الاتجاه ﻡ ء حـ ب أوجد ق . (الإجابة : ١٠ ث جم)

(٤) ١٩٩٩/دور أول : ﻡ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم ، أثرت قوتان مقدارهما ٢٠ ، ٢٠ نيوتن فى ﻡ ب ، حـ ء على الترتيب ، كما أثرت فى ﻡ ، حـ قوتان مقدار كل منهما ١٥ √٢ نيوتن فى اتجاهى ب ء ، ء ب على الترتيب . اثبت أن المجموعة تكافئ ازدواج وأوجد معيار عزمه ، ثم أوجد مقدار واتجاه قوتين تؤثران فى ب ، ء وتوازيان ﻡ حـ وتجعلان المجموعة فى حالة توازن . (الإجابة : ١٠٠ نيوتن . سم ، ٥ √٢ نيوتن)

(٥) ﻡ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم ، أثرت قوى مقاديرها ٤ ، ٩ ، ٤ ، ٩ نيوتن فى ﻡ ب ، حـ ب ، حـ ء ، ﻡ ء على الترتيب ، كما أثرت فى ﻡ ، حـ قوتان مقدار كل منهما ٥ √٢ نيوتن فى اتجاهى ب ء ، ء ب على الترتيب . أثبت أن مجموعة القوى تكافئ ازدواجا وأوجد معيار عزمه . (الإجابة : ١٥٠ نيوتن . سم)

(٦) ﻡ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٥ سم ، أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ٣ ، ٢ ، ٣ نيوتن فى ﻡ ب ، حـ ب ، حـ ء ، ﻡ ء على الترتيب ، كما أثرت قوتان مقدار كل منهما √٢ نيوتن عند النقطتين ﻡ ، حـ فى الاتجاهين ب ء ، ء ب على الترتيب . أوجد :
أولا : القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى يكافئ المجموعة .

ثانيا : قوتين تعملان عند النقطتين ب ، ء وتوازيان ٩ حـ وتجعلان المجوعة فى حالة توازن . (الإجابة : ٤٥ نيوتن . سم ، $\frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$ ، $\frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$ نيوتن)

(٧) ٢٠٠١/دورثان : ٩ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٣ سم ، أثرت قوى مقاديرها ١٠ ، ١٥ ، ١٠ ، ١٥ نيوتن فى $\overleftarrow{٩ب}$ ، $\overleftarrow{حـب}$ ، $\overleftarrow{حـء}$ ، $\overleftarrow{٩ء}$ على الترتيب ، كما أثرت قوتان مقدار كل منهما $٥\sqrt{٢}$ نيوتن عند النقطتين ٩ ، حـ فى الاتجاهين $\overleftarrow{بء}$ ، $\overleftarrow{ءب}$ على الترتيب . أوجد :
أولا : معيار عزم الازدواج الذى يكافئ المجموعة .
ثانيا : قوتين تعملان عند النقطتين ب ، ء وتوازيان $\overline{٩حـ}$ وتجعلان المجموعة فى حالة توازن . (الإجابة : ٤٥ نيوتن . سم ، $\frac{١٥\sqrt{٢}}{٢}$ ، $\frac{١٥\sqrt{٢}}{٢}$ نيوتن)

(٨) ٢٠٠٢/دور أول : ٩ ب حـ ء مستطيل فيه ٩ ب = ٩ سم ، ب حـ = ٢٤ سم ، س ، ص منتصفا $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{٩ء}$ على الترتيب . أثرت قوى مقاديرها ٢٧ ، ٣٦ ، ٤٥ نيوتن فى $\overleftarrow{٩ب}$ ، $\overleftarrow{بس}$ ، $\overleftarrow{س٩}$ على الترتيب . أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجا وأوجد معيار عزمه ، ثم أوجد قوتين تؤثران فى $\overleftrightarrow{بص}$ ، $\overleftrightarrow{ءس}$ حتى تتزن المجموعة
(الإجابة : ٣٢٤ نيوتن . سم ، (٤٥ ، ٤٥) نيوتن)

(٩) ١٩٩٨/دور ثان : ٩ ب حـ ء مستطيل فيه ٩ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ٧ ، ٦ ، ٧ ث جم فى $\overleftarrow{٩ب}$ ، $\overleftarrow{بحـ}$ ، $\overleftarrow{حـء}$ ، $\overleftarrow{ء٩}$ على الترتيب . أثبت أن مجموعة القوى تكافئ ازدواجا وأوجد معيار عزمه . ثم أوجد مقدار واتجاه قوتين تعملان عند النقطتين ٩ ، حـ عموديتين على $\overline{٩حـ}$ بحيث تتزن المجموعة .
(الإجابة : ٩٠ ث جم ، (٩ ، ٩) ث جم)

(١٠) ٩ ب حـ ء مستطيل فيه ٩ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ٥ سم ورءوسه ٩ ، ب ، حـ ، ء فى ترتيب دورى واحد عكس اتجاه دوران عقارب الساعة . أثرت قوتان ٢٤٠ ، ٢٤٠ ث جم فى $\overleftarrow{٩ب}$ ، $\overleftarrow{حـء}$. أوجد قوتان متساويتان تؤثران فى حـ ، ٩ وتوازيان القطر $\overleftrightarrow{بء}$ وتكافئان القوتين السابقتين .
(الإجابة : ١٣٠ ث جم ، ١٣٠ ث جم)

(١١) مصر/١٩٩٣ : ٩ ب حـ ء مستطيل فيه ٩ ب = ١٢٠ سم ، ب حـ = ٥٠ سم ، أثرت قوى مقاديرها ٥٠ ، ١٠ ، ٥٠ ، ١٠ نيوتن فى $\overleftarrow{٩ب}$ ، $\overleftarrow{حـب}$ ، $\overleftarrow{حـء}$ ، $\overleftarrow{٩ء}$ على الترتيب . أوجد قوتين تؤثران فى ب ، ء عموديا على $\overline{بء}$ بحيث تتزن المجموعة
(الإجابة : ١٠ ، ١٠ نيوتن)

(١٢) ٩ ب حـ ء مستطيل فيه ٩ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، هـ ، و منتصفا $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{٩ء}$ على الترتيب ، أثرت قوى مقاديرها ٢٤ ، ٣٦ ، ٣٠ ، ١٨ نيوتن فى $\overleftarrow{٩ب}$ ، $\overleftarrow{بحـ}$ ، $\overleftarrow{حـو}$ ، $\overleftarrow{و٩}$ على الترتيب :

أولا : أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجا وأوجد معيار عزمه .
ثانيا : أوجد القوتين اللتين تؤثران عند هـ ا ، و حـ حتى تتزن المجموعة .
(الإجابة : ٤٣٢ نيوتن . سم ، ٩٠ ، ٩٠ نيوتن)

(١٣) ا ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم طول ضلعه ٨ سم ، أثرت قوى مقاديرها ٣ ، ٨ ، ٣ ، ٨ ث . كجم فى ا ب ، حـ ب ، ء هـ ، و هـ على الترتيب . أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجا وأوجد معيار عزمه . (الإجابة : ٤٠ √٣ ث كجم . سم)

(١٤) ا ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم طول ضلعه ٢٠ سم ، أثرت قوى مقاديرها ٧ ، ٤ ، ٧ ، ٤ ث جم فى ب ا ، ب حـ ، هـ ء ، هـ و على الترتيب ، كما أثرت قوتان مقدار كل منهما ق ث جم فى حـ ء ، و ا ، أوجد قيمة ق إذا علم أن مجموعة القوى متزنة . (الإجابة : ٣ ث جم)

(١٥) ا ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ا ، فيه ا ب = ا حـ = ٥ سم . أثرت قوى مقاديرها ٤٠ ، ٤٠ ، ٤٠ √٢ نيوتن فى ب ا ، ا حـ ، حـ ب على الترتيب . أوجد القوتين اللتين تؤثران عند النقطتين ب ، حـ وعموديتين على ب حـ حتى تتزن مع المجموعة . (الإجابة : ٢٠٠ نيوتن . سم ، ٢٠ √٢ ، ٢٠ √٢ نيوتن)

(١٦) ا ب حـ مثلث أطوال أضلاعه ا ب ، ب حـ ، حـ ا هى على الترتيب ١٥ ، ١٨ ، ٢١ من السنتيمترات ، أثرت القوى ٧٥٠ ، ٩٠٠ ، ١٠٥٠ ث جم فى ب ا ، حـ ب ، ا حـ على الترتيب . أثبت أن مجموعة القوى تكافئ ازدواجا وأوجد معيار عزمه ، ثم أوجد مقدار كل من القوتين اللتين تؤثران فى كل من ا ، حـ عموديتان على ا حـ لكى تتزن المجموعة . (الإجابة : ١٣٢٢٨ ث جم . سم ، ٦٣٠ ، ٦٣٠ ث جم)

(١٧) ا ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه ا ب = ا حـ = ١٠ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، ء منتصف ب حـ ، أثرت القوى ٣٠ ، ١٨ ، ٢٤ نيوتن فى ا ب ، ب ء ، ء ا على الترتيب . أثبت أن مجموعة القوى تكافئ ازدواجا وأوجد معيار عزمه ، ثم أوجد مقدار قوتين إحداهما تعمل فى ا حـ والأخرى تؤثر عند ب فى اتجاه حـ ا بحيث تصبح المجوعة فى حالة اتزان . (الإجابة : ١٤٤ نيوتن . سم ، ١٥ نيوتن)

(١٨) ٢٠٠٠/دور أول : ا ب حـ مثلث فيه ا ب = ا حـ = ١٣ سم ، ب حـ = ٢٤ سم ، أثرت قوى مقاديرها ٣٩ ، ٧٢ ، ٣٩ نيوتن فى ا ب ، ب حـ ، حـ ا على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً وأوجد معيار عزمه ثم أوجد قوتين تؤثران فى ب ، حـ وعموديتين على ب حـ وتجعلان المجموعة فى حالة توازن .
(الإجابة : ٣٦٠ نيوتن . سم ، ١٥ ، ١٥ نيوتن)

(١٩) ا ب حـ ء معين طول ضلعه ١٢ سم ، ق(∠ا) = ٦٠° ، أثرت قوى مقاديرها ٥٠ ، ٨٠ ، ٥٠ ، ٨٠ ث جم فى ب ا ، ب حـ ، ء حـ ، ء ا على الترتيب . اثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجا وأوجد معيار عزمه ، ثم أوجد القوتين اللتين تؤثران عند ا ، حـ وتوازيان ب ء وتتزنان مع المجموعة السابقة .

(الإجابة : ١٨٠ √٣ ث جم ، ١٥ ، ١٥ نيوتن)

(٢٠) ا ب حـ ء معين طول ضلعه ١٢ سم ، ق(∠ا ب حـ) = ٦٠° ، أثرت قوى مقاديرها ٤ ، ٦ ، ٤ ، ٦ ث كجم فى ا ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء ا على الترتيب . أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجا وأوجد معيار عزمه ثم أوجد القوتين اللتين تؤثران فى ب ، ء عموديتين على ب ء بحيث تكافئان المجموعة .

(الإجابة : ٦٠ √٣ ث كجم . سم ، ٥ ، ٥ ث كجم)

(٢١) ا ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية فى ب ، ا ء // ب حـ ، ا ب = ٩ سم ، ب حـ = ٢ ا ء = ٢٤ سم ، نقطة هـ منتصف ب حـ ، أثرت قوى مقاديرها ٢٧ ، ٧٢ ، ٤٥ ، ٣٦ نيوتن فى ا ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء ا على الترتيب . أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواج وأوجد معيار عزمه . أوجد مقدار كل من القوتين اللتين تؤثران فى هـ ا ، ء حـ حتى تتزن المجموعة .

(الإجابة : ٩٧٢ نيوتن . سم ، ١٣٥ ، ١٣٥ نيوتن)

(٢٢) ١٩٩٧/دور ثان : ا ب حـ ء شبه منحرف فيه ا ء // ب حـ ، ق(∠ا ب حـ) = ٩٠° ، ا ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٧ سم ، ا ء = ١١ سم . أثرت قوى مقاديرها ٢٢ ، ١٦ ، ٣٤ ، ٢٠ ث جم فى ء ا ، ا ب ، ب حـ ، حـ ء على الترتيب . أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجا وأوجد معيار عزمه ثم أوجد القوتين اللتين تؤثران فى ا ء ، حـ ب حتى تتزن المجموعة .

(الإجابة : ٤٨٨ ث جم . سم ، ٥٦ ، ٥٦ ث جم)

(٢٣) ا ب حـ ء شبه منحرف فيه ا ء // ب حـ ، ق(∠ا ء حـ) = ٩٠° ، ب حـ = ١٨ سم ، حـ ء = ٨ سم ، ء ا = ١٢ سم . أثرت قوى مقاديرها ١٥ ، ٢٧ ، ١٢ ، ١٨ ث كجم فى ا ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء ا على الترتيب . أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجا وأوجد معيار عزمه ، ثم أوجد قوتين تؤثران فى ا ، حـ عموديتين على ا حـ وتتزنان مع المجموعة السابقة .

(الإجابة : ٣٦٠ ث كجم . سم ، ٩٠ / √١٣ ، ٩٠ / √١٣ ث كجم)