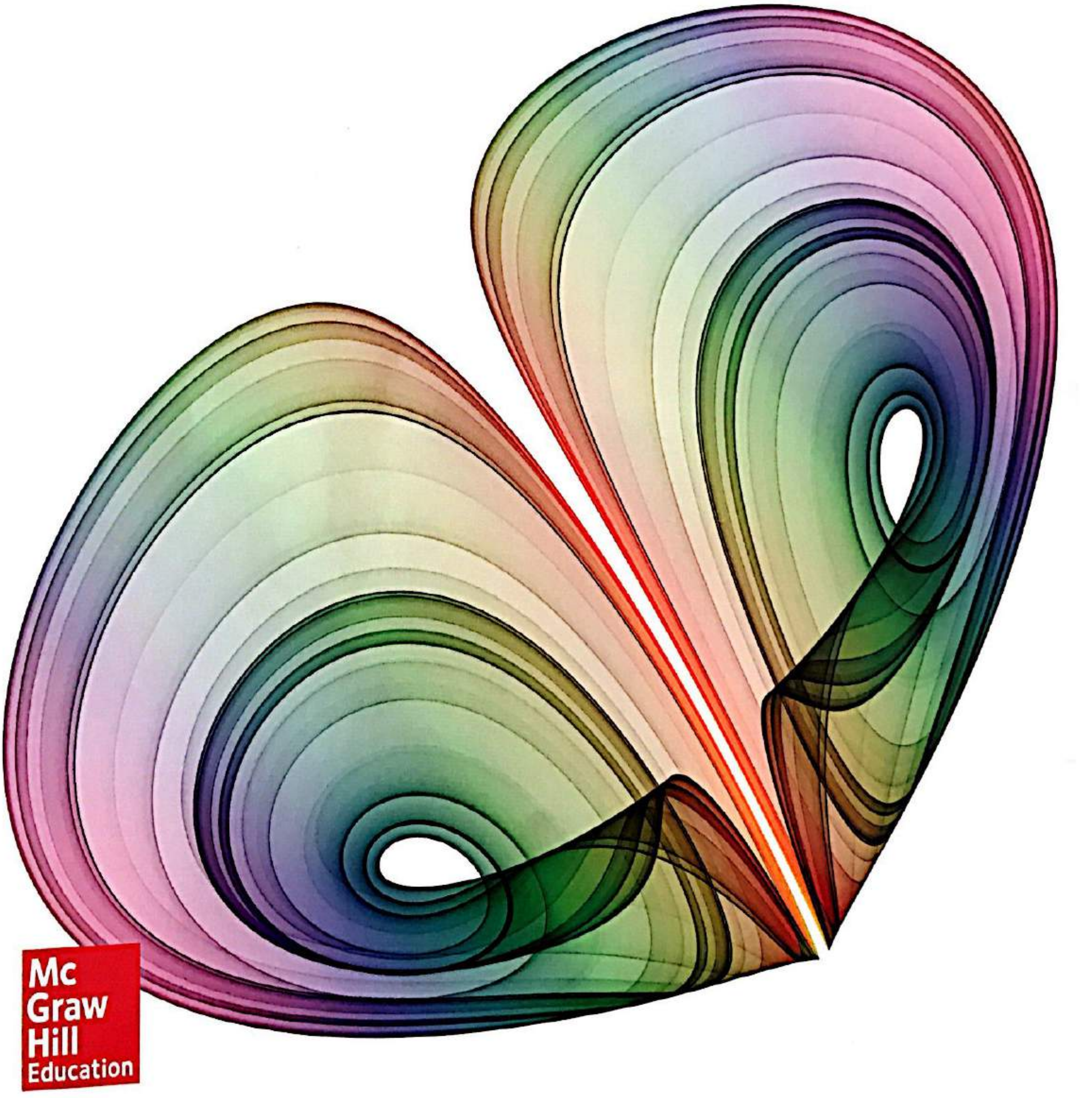
الرياضيات

11

McGraw-Hill Education

الرياضيات المتقدّمة

نسخة الإمارات العربية المتحدة



McGraw Hill Education

الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

رؤية
VISION
2021

McGraw-Hill Education

الرياضيات المتقدّمة

نسخة الإمارات العربية المتحدة

للصف 11 مجلد 2

McGraw Hill Education

Project: McGraw-Hill Education United Arab Emirates Edition Grade 11 Advanced Math Vol.2
FM, Precalculus © 2014
5. Systems of Equations and Matrices, from Precalculus Chapter 6 © 2014
6. Conic Sections and Parametric Equations, from Precalculus Chapter 7 © 2014
7. Vectors, from Precalculus Chapter 8 © 2014
8. Polar Coordinates and Complex Numbers, from Precalculus Chapter 9 © 2014

صورة الغلاف: K-Fractals/Alamy Stock Photo

mheducation.com/prek-12

McGraw Hill Education

طُبع في دولة الإمارات العربية المتحدة.

رقم النشر الدولي: 978-1-52-684356-2 (نسخة الطالب)
MHID: 1-52-684356-0 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 978-1-52-683186-6 (نسخة المعلم)
MHID: 1-52-683186-4 (نسخة المعلم)

النسخة الإلكترونية

رقم النشر الدولي: 978-1-52-684358-6 (نسخة الطالب)
MHID: 1-52-684358-7 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 978-1-52-684361-6 (نسخة المعلم)
MHID: 1-52-684361-7 (نسخة المعلم)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 XXX 22 21 20 19 18 17

صاحب السّمو الشّيخ خليفة بن زايد آل نهيان
رئيس دولة الإمارات العربيّة المتّحدة، حفظه الله

"يجب التزوّد بالعلوم الحديثة والمعارف الواسعة، والإقبال عليها بروح عالية ورغبة صادقة؛ حتّى تتمكّن دولة الإمارات خلال الألفيّة الثّالثة من تحقيق نقلة حضاريّة واسعة."

من أقوال صاحب السّمو الشّيخ خليفة بن زايد آل نهيان

مركز اتصال وزارة التربية والتعليم
اقتراح - استفسار - شكوى

80051115 | 04-2176855 | ccc.moe@moe.gov.ae | www.moe.gov.ae

ملخص المحتويات

المؤلفون

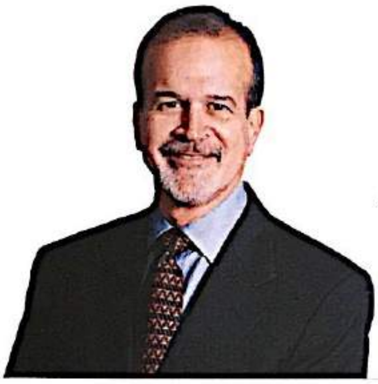
يضمن يضمن مؤلفونا الرئيسون أن تكون برامج McGraw-Hill للرياضيات مخططة بشكل رأسي بطريقة متوافقة من خلال البدء مع الاخذ في الاعتبار الغاية النهائية - ألا وهي تحقيق النجاح واجتياز المرحلة الثانوية ومايليها من مراحل. ونظرًا لعملية "التخطيط العكسي" لمحتوى برامج المدارس الثانوية، فإن جميع برامج الرياضيات لدينا واضحة المعالم من حيث نطاقها وتسلسلها.

المؤلفون الرئيسون

ج. أ. كارتر حاصل على درجة الدكتوراه.

مدير مساعد التدريس والتعليم
مدرسة أدلاي إي ستيفنسون الثانوية
لينكولنشاير، إلينوي

جوانب الخبرة: استخدام التكنولوجيا والوسائل التعليمية لتصوير المفاهيم، تحقيق فهم الرياضيات لدى المتعلمين باللغة الإنجليزية



جلبرت جاي كويفاس، حاصل على درجة الدكتوراه.

أستاذ تعليم الرياضيات
جامعة ولاية تكساس - سان ماركوس
سان ماركوس، تكساس

جوانب الخبرة: تطبيق المفاهيم والمهارات في سياقات رياضية ثرية، عمليات تمثيلية رياضية

روجر داي، حاصل على درجة الدكتوراه في التعليم من المجلس الوطني

رئيس قسم الرياضيات
مدرسة بونتياك تاون شيب الثانوية
بونتياك، إلينوي

جوانب الخبرة: فهم وتطبيق الاحتمالات، والإحصائيات، وتعليم مدرس الرياضيات

كارول مالوي حاصلة على درجة الدكتوراه.

أستاذ مساعد
جامعة نورث كارولينا في تشابيل هيل
تشابيل هيل، نورث كارولينا

جوانب الخبرة: عمليات التمثيل والتفكير النقدي ونجاح الطالب في الجبر 1

مؤلفو البرنامج

لواجين براين
مدرس رياضيات
أفضل معلم بولاية تينيسي لعام 2009
مدرسة ووكر فالي الثانوية
كليفلاند، تينيسي

جوانب الخبرة: المشاريع الهادفة التي تسعى إلى جعل التفاضل والتكامل ومقدمته أقرب إلى الواقع بالنسبة إلى الطلاب

الدكتورة بيرتشي هوليدي، أستاذ التعليم.
المستشار القومي للرياضيات
سيلفر سبرينج، ماريلاند

جوانب الخبرة: استخدام الرياضيات لصياغة وفهم بيانات العالم الفعلي، وتأثير الرسومات على الفهم الرياضي

فايكن هوفيسبيان
أستاذ الرياضيات
كلية ريو هوندو
وايتيه، كاليفورنيا

مؤلف مشارك

جاي مكتاي
مؤلف ومستشار تعليمي
كولومبيا، ميريلاند

الوحدة

1 دوال القوة والدوال كثيرة الحدود والدوال النسبية

الوحدة 2 الدوال الأسية واللوغاريتمية

الوحدة 3 الدوال المثلثية

الوحدة 4 المتطابقات والمعادلات المثلثية

الوحدة 5 أنظمة المعادلات والمصفوفات

الوحدة 6 القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطة

الوحدة

7 المتجهات

الوحدة 8

الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

الوحدة 9 المتتاليات والمتسلسلات

الوحدة 10 الإحصاء الاستقرائي

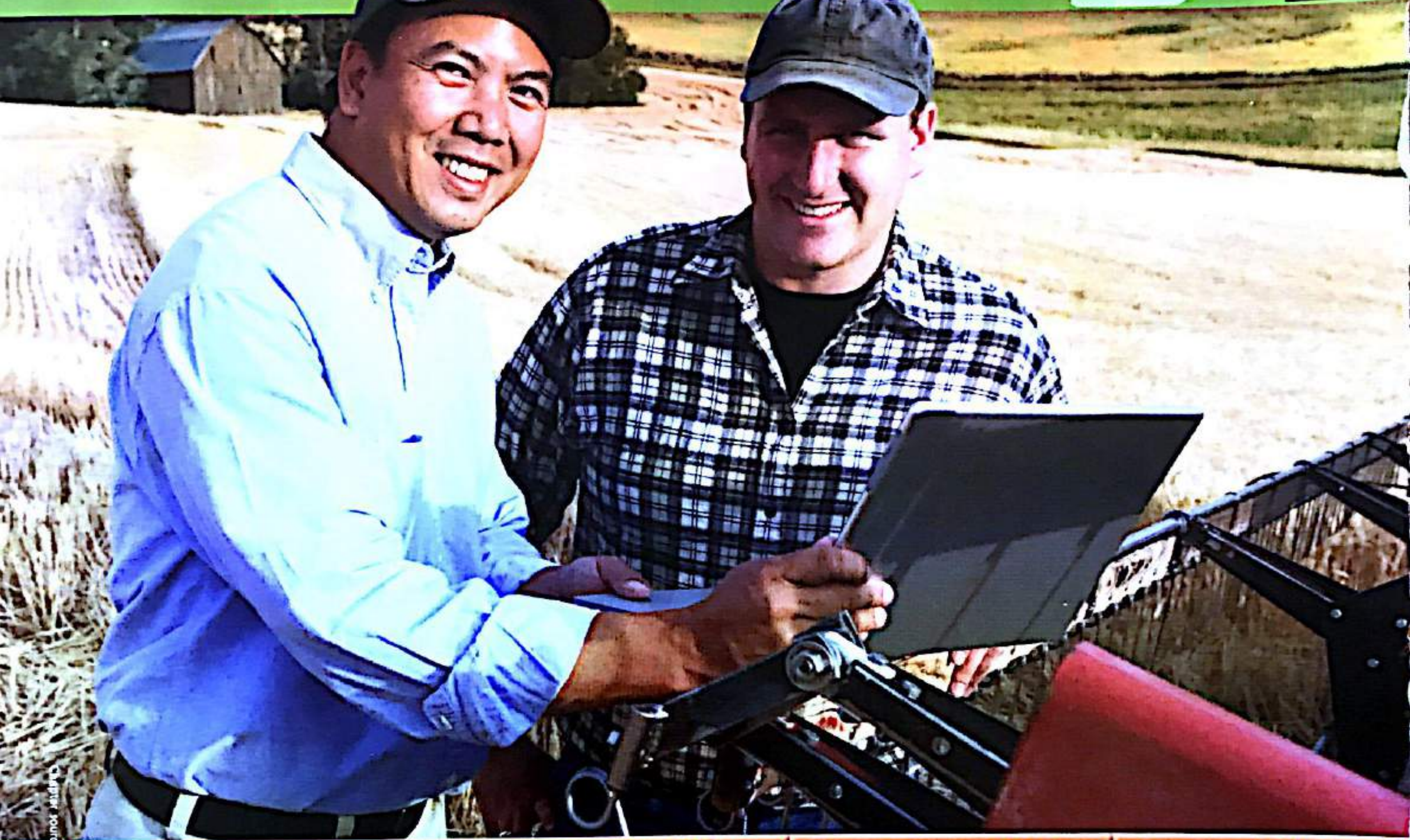
الوحدة 11 النهايات والمشتقات

كتيب الطالب

المراجع

الوحدة

5 أنظمة المعادلات والمصفوفات



السابق

حللت أنظمة المعادلات وأجريت عمليات تتعلق بالمصفوفات.

الحالي

بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:

- ضرب المصفوفات وإيجاد محددات ومعكوسات المصفوفات.
- حل أنظمة المعادلات الخطية.
- كتابة التحليلات الجزئية للكسور الخاصة بالتعابير النسبية.
- استخدام البرمجة الخطية لحل التطبيقات.

لماذا؟ ▲

الأعمال لقد أصبحت البرمجة الخطية أداة قياسية للعديد من الأعمال، مثل الزراعة. فلا بد أن يراعي المزارعون العديد من القيود من أجل زيادة الأرباح لأقصى حد ممكن من بيع المحاصيل أو المواشي، ومن هذه القيود تكلفة العمالة والأرض والأعلاف.

قراءة مسبقة ناقش ما تعرفه بالفعل عن حل المعادلات مع زميل. ثم انظر إلى عناوين الدروس واكتب توقعين أو ثلاثة بشأن ما ستتعلمه في هذه الوحدة.

الاستعداد للوحدة

أجب عن أسئلة التدريب السريع أدناه.

التمرين سريع

استخدم أي طريقة لحل كل نظام من أنظمة المعادلات.

1. $2x - y = 7$
   $3x + 2y = 14$
2. $3x + y = 14$
   $2x - 2y = -4$
3. $x + 3y = 10$
   $-2x + 3y = 16$
4. $4x + 2y = -34$
   $-3x - y = 24$
5. $2x + 5y = -16$
   $3x + 4y = -17$
6. $-5x + 2y = -33$
   $6x - 3y = 42$

7. **الطب البيطري** تفرض طبيبة بيطرية رسومًا مختلفة لتشذيب أظافر الأرانب والقطط. وفي يوم الإثنين، جنت AED 96 من تشذيب أظافر 4 أرانب و 3 قطط. وفي يوم الثلاثاء، جنت AED 126 من تشذيب أظافر 6 أرانب و 3 قطط. فكم كانت تكلفة تشذيب أظافر كل حيوان؟

أوجد قيمة كل مما يلي إذا كان

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -7 & 6 & 4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -2 & -9 & 1 \\ 10 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 11 & -3 \\ 9 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

8. $A + 3C$
9. $2(B - A)$
10. $2A - 3B$
11. $3C + 2A$
12. $A + B - C$
13. $2(B + C) - A$

اقسم.

14. $(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x - 5) \div (x - 1)$
15. $(2x^4 + 4x^3 - x^2 + 2x - 4) \div (x + 2)$
16. $(3x^4 - 6x^3 - 12x - 36) \div (x - 4)$
17. $(2x^5 - x^3 + 2x^2 + 9x + 6) \div (x - 2)$
18. $(2x^6 + 2x^5 + 3x^3 + x^2 - 8x - 6) \div (x + 1)$

المفردات الجديدة

نظام خطي متعدد المتغيرات	multivariable linear system
حذف جاوس	Gaussian elimination
مصفوفة موسعة	augmented matrix
مصفوفة المعاملات	coefficient matrix
نموذج درجة الصف	row-echelon form
نموذج درجة الصف المنخفض	reduced row-echelon form
حذف جاوس-جوردان	Gauss-Jordan elimination
مصفوفة محايدة	identity matrix
مصفوفة عكسية	inverse matrix
معكوس	inverse
قابل للعكس	invertible
مصفوفة منفردة	singular matrix
محدد	determinant
نظام مربع	square system
قاعدة كرامر	Cramer's Rule
كسر جزئي	partial fraction
الأمثل	optimization
برمجة خطية	linear programming
دالة الهدف	objective function
حلول ممكنة	feasible solutions
قيد	constraint
حلول مثلى متعددة	multiple optimal solutions
غير محدودة	unbounded

مراجعة المفردات

نظام المعادلات (system of equations) صفحة P19 مجموعة من معادلتين أو أكثر

مصفوفة (matrix) صفحة P24 تنظيم مستطيل من العناصر

مصفوفة مربعة (square matrix) صفحة P24 مصفوفة لديها نفس العدد من الصفوف والأعمدة

كمية قياسية (scalar) صفحة P25 العدد الثابت الذي يتم ضرب المصفوفة فيه

الدرس
5-1 الأنظمة الخطية متعددة المتغيرات وعمليات الصف الأولية (البسيطة)

السابق

- حلّلت أنظمة المعادلات جبريًا ومثّلت البيانات باستخدام المصفوفات.

الحالي

1 إيجاد حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات وحذف جاوس.

2 إيجاد حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات وحذف جاوس-جوردان.

لماذا؟

- غالبًا ما يتم تصنيع السبائك المعدنية في صناعات السيارات لتحسين أداء السيارات. ويمكنك حل نظام من المعادلات لتحديد النسبة المئوية اللازمة من كل معدن لسبيكة محددة.

1 حذف جاوس

نظام خطي متعدد المتغيرات أو نظام خطي بأكثر من متغير واحد، عبارة عن نظام معادلات خطية ذات متغيرين أو أكثر. وفي المقررات الدراسية السابقة، ربما تكون قد استخدمت طريقة الحذف لحل مثل هذه الأنظمة. وتبدأ إحدى طرق الحذف بإعادة كتابة نظام باستخدام شكل مثلث معكوس يكون فيه المعامل الرئيس يساوي 1.

يمكن استخدام طريقتي التعويض والحذف اللتين تعلمتهما سابقًا في تحويل نظام خطي متعدد المتغيرات إلى نظام مكافئ في صورة مثلث أو **نموذج درجة صف**.

المفردات الجديدة

نظام خطي متعدد المتغيرات
multivariable linear system
نموذج درجة الصف
row-echelon form
حذف جاوس
Gaussian elimination
مصفوفة موسعة
augmented matrix
مصفوفة المعاملات
coefficient matrix
نموذج درجة الصف المنخفض
reduced row-echelon form
حذف جاوس-جوردان
Gauss-Jordan elimination

النظام في صورة نموذج درجة الصف

$$x - y - 2z = 5$$
$$y + 4z = -5$$
$$z = -2$$

وبمجرد أن يكون النظام في صورة هذا النموذج، يمكن إيجاد الحل بالتعويض. وتحدد المعادلة الأخيرة المتغير الأخير. في المثال أعلاه، تحدد المعادلة الأخيرة أن $z = -2$.

عوّض عن قيمة z في المعادلة الثانية لإيجاد قيمة y.

$$y + 4z = -5$$
$$y + 4(-2) = -5$$
$$y = 3$$

عوّض عن قيمة المتغير y والمتغير z في المعادلة الأولى لإيجاد x.

$$x - y - 2z = 5$$
$$x - 3 - 2(-2) = 5$$
$$x = 4$$

إذًا، يصبح حل النظام هو $x = 4$ و $y = 3$ و $z = -2$.

يطلق على الخوارزمية المستخدمة لتحويل نظام المعادلات الخطية إلى نظام مكافئ في صورة نموذج درجة الصف اسم **حذف جاوس** (أو اختزال جاوس)، والذي سُمّي نسبة لاسم عالم الرياضيات الألماني كارل فريدريش جاوس. وتتم الإشارة إلى العمليات المستخدمة لإنتاج أنظمة مكافئة فيما يلي.

المفهوم الأساسي العمليات التي تنتج أنظمة مكافئة

ينتج عن كل من العمليات التالية نظام مكافئ للمعادلات الخطية.
- بدّل بين أي معادلتين.
- اضرب إحدى المعادلتين في عدد حقيقي غير صفري.
- اجمع مضاعف إحدى المعادلات إلى المعادلة الأخرى.

يتم توضيح الخوارزمية المحددة لحذف جاوس في المثال التالي.

مثال 1 حذف جاوس مع نظام

اكتب نظام المعادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم حُلّ النظام.

$5x - 5y - 5z = 35$

$-x + 2y - 3z = -12$

$3x - 2y + 7z = 30$

الخطوة 1 بما أن المعامل الرئيس في المعادلة 1 لا يساوي 1، إذًا يمكنك ضرب هذه المعادلة في المعكوس الضربي لمعاملها الرئيس.

$$\begin{aligned} x - y - z &= 7 \quad \longleftarrow \tfrac{1}{5}(5x - 5y - 5z = 35)\\ -x + 2y - 3z &= -12\\ 3x - 2y + 7z &= 30 \end{aligned}$$

الخطوة 2 احذف الحد x في المعادلة 2. وللقيام بذلك، استبدل المعادلة 1 بـ (المعادلة 1 + المعادلة 2).

$$\begin{aligned} x - y - z &= 7\\ y - 4z &= -5 \quad \longleftarrow \left\{\begin{array}{r} x - y - z = 7\\ (+) -x + 2y - 3z = -12\\ \hline y - 4z = -5 \end{array}\right.\\ 3x - 2y + 7z &= 30 \end{aligned}$$

الخطوة 3 احذف الحد x في المعادلة 3 بالتعويض عن المعادلة 3 بـ [3−(المعادلة 1) + المعادلة 3].

$$\begin{aligned} x - y - z &= 7\\ y - 4z &= -5\\ y + 10z &= 9 \quad \longleftarrow \left\{\begin{array}{r} -3x + 3y + 3z = -21\\ (+) 3x - 2y + 7z = 30\\ \hline y + 10z = 9 \end{array}\right. \end{aligned}$$

الخطوة 4 بما أن المعامل الرئيس في المعادلة 2 يساوي 2، إذًا يمكنك بعدها حذف الحد y من المعادلة 3 بالتعويض عن المعادلة 3 بـ [1−(المعادلة 2) + المعادلة 3].

$$\begin{aligned} x - y - z &= 7\\ y - 4z &= -5\\ 14z &= 14 \quad \longleftarrow \left\{\begin{array}{r} -y + 4z = 5\\ (+) y + 10z = 9\\ \hline 14z = 14 \end{array}\right. \end{aligned}$$

الخطوة 5 بما أن المعامل الرئيس في المعادلة 3 لا يساوي 1، إذًا يمكنك ضرب هذه المعادلة في المعكوس الضربي لمعاملها الرئيس.

$$\begin{aligned} x - y - z &= 7\\ y - 4z &= -5\\ z &= 1 \quad \longleftarrow \tfrac{1}{14}(14z = 14) \end{aligned}$$

يمكنك استخدام التعويض لإيجاد أن $y = -1$ و $x = 7$. إذًا، حل النظام هو $x = 7$ و $y = -1$ و $z = 1$ أو الثلاثي المرتب (7, -1, 1).

تمرين موجّه

اكتب كل نظام معادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم حُلّ النظام.

1A. $x + 2y - 3z = -28$
$3x - y + 2z = 3$
$x + y - z = -5$

1B. $3x + 5y + 8z = -20$
$-x + 2y - 4z = 18$
$-6x + 4z = 0$

ولا يؤثر حل نظام المعادلات الخطية باستخدام حذف جاوس إلا على معاملات المتغيرات بالطرف الأيسر والثوابت الموجودة على طرف المعادلة الأيمن. لذا يكون من الأسهل دائمًا تتبع هذه الأعداد فقط باستخدام مصفوفة.

نصيحة دراسية

التفسير الهندسي يمكن تمثيل مجموعة الحل لنظام من معادلتين في متغيرين بتقاطع زوج من المستقيمات في مستوى، بينما يمكن تمثيل مجموعة حل نظام من ثلاث معادلات في ثلاثة متغيرات متغيرات بتقاطع ثلاثة مستويات في الفراغ.

نصيحة دراسية

تحقق من صحة الحل عند حل نظام معادلات، ينبغي أن تتحقق من صحة حلك باستخدام التعويض في المعادلات الأصلية. ويتم فيما يلي توضيح طريقة التحقق من حل المثال 1.

المعادلة 1:
$5(7) - 5(-1) - 5(1) = 35$ ✓

المعادلة 2:
$-7 + 2(-1) - 3(1) = -12$ ✓

المعادلة 3:
$3(7) - 2(-1) + 7(1) = 30$ ✓

قراءة في الرياضيات

المصفوفة الموسعة لاحظ أنه يوجد خط متقطع يفصل بين معاملات المصفوفة وعمود القيم الثابتة في المصفوفة الموسعة.

المصفوفة الموسعة هي نظام مكون من المعاملات والحدود الثابتة للمعادلات الخطية، والتي تكتب كل منها في صيغة قياسية مع كتابة الحدود الثابتة في الطرف الأيمن لعلامة يساوي. وإذا لم يتم إدراج الحدود الثابتة، تُختزل المصفوفة إلى **مصفوفة المعاملات** الخاصة بالنظام. وستستخدم هذا النوع من المصفوفات في الدرس 3-5.

نظام المعادلات

$$5x - 5y - 5z = 35$$
$$-x + 2y - 3z = -12$$
$$3x - 2y + 7z = 30$$

المصفوفة الموسعة

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -5 & -5 & 35 \\ -1 & 2 & -3 & -12 \\ 3 & -2 & 7 & 30 \end{array}\right]$$

مصفوفة المعاملات

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

مثال 2 كتابة مصفوفة موسعة

اكتب المصفوفة الموسعة لنظام المعادلات الخطية التالي.

$$w + 4x + z = 2$$
$$x + 2y - 3z = 0$$
$$w - 3y - 8z = -1$$
$$3w + 2x + 3y = 9$$

عندما تكون جميع المعادلات الخطية في صيغة قياسية،والمتغيرات الأربعة غير متوفرة للنظام في كل معادلة، لذا فإن الحدود المتشابهة لا تُكوّن محاذاة. أعد كتابة النظام، باستخدام المعامل 0 للحدود غير المعلومة، ثم اكتب المصفوفة الموسعة.

نظام المعادلات

$$w + 4x + 0y + z = 2$$
$$0w + x + 2y - 3z = 0$$
$$w + 0x - 3y - 8z = -1$$
$$3w + 2x + 3y + 0z = 9$$

المصفوفة الموسعة

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 9 \end{array}\right]$$

تمرين موجّه

اكتب المصفوفة الموسعة لكل نظام من المعادلات الخطية التالية.

2A.
$$4w - 5x + 7z = -11$$
$$-w + 8x + 3y = 6$$
$$15x - 2y + 10z = 9$$

2B.
$$-3w + 7x + y = 21$$
$$4w - 12y + 8z = 5$$
$$16w - 14y + z = -2$$
$$w + x + 2y = 7$$

تحتوي العمليات الثلاث المستخدمة لاستنباط أنظمة مكافئة على ثلاث عمليات مصفوفية مقابلة يمكن استخدامها لانتاج مصفوفة موسعة مقابلة. وحيث إنه يقابل كل صف من صفوف المصفوفة الموسعة معادلة من النظام الأصلي، إذا يطلق على هذه العمليات اسم عمليات الصف الأولية.

المفهوم الأساسي عمليات الصف الأولية

تنتج كل عملية من عمليات الصف التالية مصفوفة موسعة مكافئة.

- بدّل بين أي صفين.
- اضرب أحد الصفين في عدد حقيقي غير صفري.
- اجمع مضاعف أحد الصفين إلى الصف الآخر.

ويطلق على عمليات الصف وصف **الأولية** نظرًا لأنها سهلة الحل، ومع ذلك، يسهل ارتكاب أي خطأ بها، لذا ينبغي تسجيل كل خطوة باستخدام الرمز الموضح أدناه.

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -5 & -5 & 35 \\ -1 & 2 & -3 & -12 \\ 3 & -2 & 7 & 30 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ R_3 \to \\ R_2 \to \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -5 & -5 & 35 \\ 3 & -2 & 7 & 30 \\ -1 & 2 & -3 & -12 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \frac{1}{5}R_1 \to \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 3 & -2 & 7 & 30 \\ -1 & 2 & -3 & -12 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ -3R_1 + R_2 \to \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 10 & 9 \\ -1 & 2 & -3 & -12 \end{array}\right]$$

قارن حذف جاوس من المثال **1** بصيغة مصفوفته باستخدام عمليات الصف.

المصفوفة الموسعة	نظام المعادلات
$\frac{1}{5}R_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & -3 & -12 \\ 3 & -2 & 7 & 30 \end{array}\right]$	$\frac{1}{5}(\text{Eqn. }1) \longrightarrow \begin{aligned} x - y - z &= 7 \\ -x + 2y - 3z &= -12 \\ 3x - 2y + 7z &= 30 \end{aligned}$
$R_1 + R_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 3 & -2 & 7 & 30 \end{array}\right]$	$\text{Eqn. }1 + \text{Eqn. }2 \longrightarrow \begin{aligned} x - y - z &= 7 \\ y - 4z &= -5 \\ 3x - 2y + 7z &= 30 \end{aligned}$
$-3R_1 + R_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 10 & 9 \end{array}\right]$	$-3(\text{Eqn. }1) + \text{Eqn. }3 \longrightarrow \begin{aligned} x - y - z &= 7 \\ y - 4z &= -5 \\ y + 10z &= 9 \end{aligned}$
$-R_2 + R_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 14 & 14 \end{array}\right]$	$-(\text{Eqn. }2) + \text{Eqn. }3 \longrightarrow \begin{aligned} x - y - z &= 7 \\ y - 4z &= -5 \\ 14z &= 14 \end{aligned}$
$\frac{1}{14}R_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$	$\frac{1}{14}(\text{Eqn. }3) \longrightarrow \begin{aligned} x - y - z &= 7 \\ y - 4z &= -5 \\ z &= 1 \end{aligned}$

> **نصيحة دراسية**
>
> **متكافئة الصف** إذا أمكن الحصول على مصفوفة واحدة من خلال مجموعة متتالية من عمليات الصف على مصفوفة أخرى، فحينها يقال على المصفوفتين إنهما *متكافئتا الصف*.

يقال على المصفوفة الموسعة التي تقابل نموذج درجة الصف من النظام الأصلي للمعادلات **إنها أيضًا في نموذج درجة الصف**.

المفهوم الأساسي نموذج درجة الصف

تكون المصفوفة في صورة نموذج درجة الصف إذا تم استيفاء الشروط التالية.

- تظهر الصف التي تتكون من أصفار تمامًا (إن وُجدت) في نهاية المصفوفة.
- تكون قيمة المدخلة غير الصفري الأول في الصف هي **1**. ويسمى *المعامل الرئيس* **1**.
- بالنسبة للصفين التاليين اللذين يتمتعان بمدخلات غير صفرية. يكون المعامل الرئيس **1** في الصف الأعلى أبعد إلى اليسار من المعامل الرئيس في الصف الأدنى.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

> **نصيحة دراسية**
>
> **نموذج درجة الصف** لا يعتبر نموذج درجة الصف للمصفوفة فريدًا، نظرًا لأنه يوجد العديد من توافيق عمليات الصف التي يمكن إجراؤها. ومع ذلك سيظل الحل النهائي لنظام المعادلات كما هو دائمًا.

مثال 3 تحديد المصفوفة الموسعة في صورة نموذج درجة الصف

حدد ما إذا كانت كل مصفوفة في صورة نموذج درجة الصف.

a. $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right]$

يوجد صفر أدنى المعامل الرئيس في الصف الأول. لذا، فإن المصفوفة في شكل نموذج درجة الصف.

b. $\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 6 & 2 & -11 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

يوجد صفر أدنى كل من المعاملات الرئيسة في كل صف. لذا، فإن المصفوفة في شكل نموذج درجة الصف.

c. $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 5 & -6 & 10 \\ 0 & 1 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \end{array}\right]$

لا يوجد صفر أدنى المعامل الرئيس في الصف 2. لذا، فإن المصفوفة ليست في شكل نموذج درجة الصف.

تمرين موجّه

3A. $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -6 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \end{array}\right]$

3B. $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -20 \end{array}\right]$

3C. $\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 1 & 0 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & -3 & 10 & -7 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right]$

لحل نظام معادلات باستخدام مصفوفة موسعة وحذف جاوس، استخدم عمليات الصف لتحويل المصفوفة بحيث تكون في شكل نموذج درجة الصف. ثم اكتب نظام المعادلات المقابل واستخدم التعويض لإنهاء حل النظام. تذكر أنه إذا واجهتك معادلة خاطئة، فسيعني ذلك أن النظام ليس له حل.

مثال 4 من الحياة اليومية حذف جاوس مع مصفوفة

السفر ذهب محمد إلى إيطاليا أثناء عطلة الربيع. ويتم فيما يلي توضيح متوسط التكاليف اليومية للفندق والطعام والمواصلات لكل مدينة زارها. اكتب نظامًا للمعادلات وأوجد حلاً له لتحديد عدد الأيام التي قضاها محمد في كل مدينة. فسّر حلك.

النفقات	البندقية	روما	نابولي	الإجمالي
الفنادق	AED 60	AED 120	AED 60	AED 720
الطعام	AED 40	AED 90	AED 30	AED 490
وسائل النقل	AED 15	AED 10	AED 20	AED 130

اكتب المعطيات في صورة نظام معادلات. افترض أن x و y و z تمثل عدد الأيام التي قضاها محمد في البندقية وروما ونابولي على الترتيب.

$$60x + 120y + 60z = 720$$

$$490 = 40x + 90y + 30z$$

$$130 = 15x + 10y + 20z$$

بعد ذلك، اكتب المصفوفة الموسعة وطبق عمليات الصف الأولية للحصول على نموذج درجة الصف للمصفوفة.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 60 & 120 & 60 & 720 \\ 40 & 90 & 30 & 490 \\ 15 & 10 & 20 & 130 \end{array}\right]$$

$$\frac{1}{60}R_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 40 & 90 & 30 & 490 \\ 15 & 10 & 20 & 130 \end{array}\right]$$

$$-40R_1 + R_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \\ 15 & 10 & 20 & 130 \end{array}\right]$$

$$\frac{1}{10}R_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 15 & 10 & 20 & 130 \end{array}\right]$$

$$-15R_1 + R_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -20 & 5 & -50 \end{array}\right]$$

$$20R_2 + R_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -15 & -30 \end{array}\right]$$

$$-\frac{1}{15}R_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

يمكنك استخدام التعويض لإيجاد أن $y = 3$ و $x = 1.4$ إذًا، حل النظام هو $x = 4$، و $y = 3$، و $z = 2$.
أو الثلاثي المرتب (4, 3, 2).

قضى محمد 4 أيام في البندقية و 3 أيام في روما ويومين في نابولي.

الربط بالحياة اليومية

في الأعوام الأخيرة، كانت إيطاليا رابع أكثر الدول التي تحظى بالزيارة عالميًا، حيث بلغ عدد السياح أكثر من 40 مليون سائح.

المصدر: منظمة السياحة العالمية

نصيحة دراسية

أنواع الحلول تذكر أنه يمكن أن يكون لنظام المعادلات حل واحد، وقد لا يكون له حلول، أو يكون له عدد لا نهائي من الحلول.

تمرين موجّه

4. السفر في العام التالي، سافر محمد إلى فرنسا لقضاء عطلة الربيع. ويتم فيما يلي توضيح متوسط التكاليف اليومية للفندق والطعام والمواصلات لكل مدينة زارها في فرنسا. اكتب نظامًا للمعادلات وأوجد حلاً له لتحديد عدد الأيام التي قضاها محمد في كل مدينة. فسّر حلك.

النفقات	باريس	ليون	مارسيليا	الإجمالي
الفنادق	AED 80	AED 70	AED 80	AED 500
الطعام	AED 50	AED 40	AED 50	AED 330
وسائل النقل	AED 10	AED 10	AED 10	AED 70

2 حذف جاوس-جوردان إذا واصلت تطبيق عمليات الصف الأولية على نموذج درجة الصف من مصفوفة موسعة، فيمكنك الحصول على مصفوفة تكون قيمة أول عنصر غير صفري بكل صف فيها هي العدد 1، وتكون قيمة بقية العناصر في نفس العمود الخاص بهذا العنصر هي 0. وهذا ما يُطلق عليه **نموذج درجة الصف المنخفض** بالمصفوفة كما يظهر باليسار. ودائمًا ما يكون نموذج درجة الصف المنخفض للمصفوفة وحيدًا، بغض النظر عن ترتيب العمليات التي تم إجراؤها. ويطلق على حل النظام من خلال تحويل مصفوفة موسعة بحيث تكون في شكل نموذج درجة الصف المنخفض اسم **حذف جاوس-جوردان**. وقد تم تسميته بذلك نسبة إلى العالمين كارل فريدريش جاوس وفيلهلم جوردان.

نموذج درجة الصف المنخفض

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

مثال 5 استخدام طريقة حذف جاوس-جوردان

أوجد حلاً لنظام المعادلات.

$$x - y + z = 0$$
$$-x + 2y - 3z = -5$$
$$2x - 3y + 5z = 8$$

اكتب المصفوفة الموسعة. طبق عمليات الصف الأولية للحصول على نموذج درجة صف منخفض.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & 5 & 8 \end{array}\right]$$

$$R_1 + R_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & -3 & 5 & 8 \end{array}\right]$$

$$-2R_1 + R_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \end{array}\right]$$

$$R_2 + R_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$R_2 + R_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$R_3 + R_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$2R_3 + R_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

إذًا، حل النظام هو $x = -2$ و $y = 1$ و $z = 3$ أو الثلاثي المدتب (3 ,1 ,2-). تحقق من صحة هذا الحل في النظام الأصلي للمعادلات.

تمرين موجّه

حُـلّ كلًّ من أنظمة المعادلات التالية.

5A. $x + 2y - 3z = 7$
$-3x - 7y + 9z = -12$
$2x + y - 5z = 8$

5B. $4x + 9y + 16z = 2$
$-x - 2y - 4z = -1$
$2x + 4y + 9z = -5$

نصيحة دراسية

الأنماط على الرغم من أنه يمكن استخدام مختلف عمليات الصف الأولية لحل نفس نظام المعادلات، فإنه يمكن استخدام نمط عام كدليل للمساعدة في تجنب العمليات المضيعة للوقت. وفيما يتعلق بالنظام الموجود إلى اليسار، ابدأ بالوصول إلى 0 في الحد الأول من الصف الثاني واعمل على حل المصفوفة بالترتيب الموضح. ومن ثم الوصول إلى الأصفار والأعداد 1. وبمجرد أن تنتهي من ذلك، يمكن تحويل الحدود في الصف الأول إلى أصفار وأعداد 1 كذلك.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$$

تلميح تقني

يمكن التحقق من نموذج درجة الصف المنخفض للمصفوفة باستخدام خاصية rref(الموجودة في حاسبة التمثيل البياني.

```
rref([A])
  [[1 0 0 -2]
   [0 1 0 1 ]
   [0 0 1 3 ]]
```

عند حل نظام معادلات، إذا تعذر كتابة المصفوفة في نموذج درجة الصف المنخفض، فسيكون النظام إما بدون حل أو بعدد لا نهائي من الحلول.

مثال 6 بدون حل وبعدد لا نهائي من الحلول

حُـلّ كلًّ من أنظمة المعادلات التالية.

a. $-5x - 2y + z = 2$
$4x - y - 6z = 2$
$-3x - y + z = 1$

اكتب المصفوفة الموسعة، ثم طبق عمليات الصف الأولية للحصول على مصفوفة درجة صف منخفض.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -6 & 2 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$-2R_3 + R_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -6 & 2 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$-4R_1 + R_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$3R_1 + R_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$-2R_3 + R_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_2 + R_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

وفقًا للصف الأخير، $0x + 0y + 0z = 1$. ونظرًا لاستحالة هذا، إذًا فليس للنظام أي حل.

b. $3x + 5y - 8z = -3$
$2x + 5y - 2z = -7$
$-x - y + 4z = -1$

اكتب المصفوفة الموسعة، ثم طبق عمليات الصف الأولية للحصول على مصفوفة درجة الصف المنخفض.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -8 & -3 \\ 2 & 5 & -2 & -7 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

$$R_1 - R_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & -7 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

$$2R_3 + R_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -9 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

$$R_1 + R_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -9 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

$$2R_3 + R_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

$$R_2 + R_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

اكتب نظام المعادلات الخطية المقابل لنموذج درجة الصف المنخفض للمصفوفة الموسعة.

$x - 6z = 4$
$y + 2z = -3$

بما أن قيمة المتغير z غير محددة، يكون لهذا النظام عدد لا نهائي من الحلول. من خلال الحل لإيجاد قيمة x و y بدلالة z، فلديك $x = 6z + 4$ و $y = -2z - 3$.

إذًا، يمكن التعبير عن حل النظام في الصورة $(6z + 4, -2z - 3, z)$، حيث تكون z أي عدد حقيقي.

نصيحة دراسية

عدد لا نهائي من الحلول لا يعتبر حل النظام الموجود في المثال 6b إجابة فريدة نظرًا لأنه يمكن التعبير عن الحل بدلالة أي من المتغيرات في النظام.

تمرين موجّه

حُـلّ كلًّ من أنظمة المعادلات التالية.

6A. $3x - y - 5z = 9$
$4x + 2y - 3z = 6$
$-7x - 11y - 3z = 3$

6B. $x + 3y + 4z = 8$
$4x - 2y - z = 6$
$8x - 18y - 19z = -2$

عندما يكون للنظام عدد أقل من المعادلات مقارنة بالمتغيرات، فسيكون النظام إما بدون حل أو بعدد لا نهائي من الحلول. وعند حل نظام معادلات من ثلاثة متغيرات أو أكثر، فمن المهم التحقق من إجابتك باستخدام جميع المعادلات الأصلية. ويعتبر ذلك ضروريًا لأنه من المحتمل أن يُفلح الحل غير الصحيح مع بعض المعادلات بينما لا يفلح مع الأخرى.

مثال 7 عدد لانهائي من الحلول

أوجد حلاً لنظام المعادلات.

$$3x - 8y + 19z - 12w = 6$$
$$2x - 4y + 10z = -8$$
$$x - 3y + 5z - 2w = -1$$

اكتب المصفوفة الموسعة. ثم طبّق عمليات الصف الأولية للحصول على المعاملات الرئيسة التي تساوي 1 في كل صف والأصفار أسفل هذه المعاملات في كل عمود.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -8 & 19 & -12 & 6 \\ 2 & -4 & 10 & 0 & -8 \\ 1 & -3 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$R_3 \leftrightarrow R_1 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 10 & 0 & -8 \\ 3 & -8 & 19 & -12 & 6 \end{array}\right]$$

$$-2R_1 + R_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -6 \\ 3 & -8 & 19 & -12 & 6 \end{array}\right]$$

$$-3R_1 + R_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 4 & -6 & 9 \end{array}\right]$$

$$\tfrac{1}{2}R_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -6 & 9 \end{array}\right]$$

$$-R_2 + R_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 12 \end{array}\right]$$

$$3R_2 + R_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 4 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 12 \end{array}\right]$$

$$\tfrac{1}{4}R_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 4 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

$$-5R_3 + R_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 14 & -25 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

اكتب النظام المقابل لنظام المعادلات الخطية لنموذج درجة الصف المنخفض للمصفوفة الموسعة.

$$x + 14w = -25$$
$$y + 2w = -3$$
$$z - 2w = 3$$

لهذا النظام من المعادلات عدد لا نهائي من الحلول. حيث إنه لكل قيمة من قيم w هناك ثلاث معادلات، والتي يمكن استخدامها لإيجاد القيم المقابلة للمتغيرات x وy وz. ومن خلال الحل لإيجاد قيمة x و y وz بدلالة w. يكون لديك $x = -14w - 25$ و$y = -2w - 3$ و$z = 2w + 3$.

إذًا، يمكن التعبير عن حل النظام في صورة $(-14w - 25, -2w - 3, 2w + 3, w)$. حيث تعبر w عن أي عدد حقيقي.

التحقق باستخدام القيم المختلفة للمتغير w. احسب بعض الحلول وتحقق من صحتها في النظام الأصلي للمعادلات. فعلى سبيل المثال، إذا كانت $w = 1$، فإن حل النظام يكون $(-39, -5, 5, 1)$. وبتحقق هذا الحل في كل معادلة من النظام الأصلي.

$$3(-39) - 8(-5) + 19(5) - 12(1) = 6 \checkmark$$
$$2(-39) - 4(-5) + 10(5) = -8 \checkmark$$
$$(-39) - 3(-5) + 5(5) - 2(1) = -1 \checkmark$$

تمرين موجّه

حُـلّ كلاً من أنظمة المعادلات التالية.

7A.
$$-5w + 10x + 4y + 54z = 15$$
$$w - 2x - y - 9z = -1$$
$$-2w + 3x + y + 19z = 9$$

7B.
$$3w + x - 2y - 3z = 14$$
$$-w + x - 10y + z = -11$$
$$-2w - x + 4y + 2z = -9$$

الربط بتاريخ الرياضيات

فيلهلم جوردان
(1842-1899)

جيودبستي ألماني ينسب إليه فضل تبسيط طريقة جاوس لحل نظام المعادلات الخطية بحيث يمكن تطبيقها لتقليل الخطأ التربيعي في عمليات المسح.

تمارين

اكتب كل نظام معادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم حُلّ النظام. (مثال 1)

1. $5x = -3y - 31$
$2y = -4x - 22$

2. $4y + 17 = -7x$
$8x + 5y = -19$

3. $12x = 21 - 3y$
$2y = 6x + 7$

4. $4y = 12x - 3$
$9x = 20y - 2$

5. $-3x + y + 6z = 15$
$2x + 2y - 5z = 9$
$4x - 5y + 2z = -3$

6. $8x - 24y + 16z = -7$
$40x - 9y + 2z = 10$
$32x + 8y - z = -2$

7. $3x + 9y - 6z = 17$
$-2x - y + 24z = 12$
$2x - 5y + 12z = -30$

8. $5x - 50y + z = 24$
$2x + 10y + 3z = 23$
$-5x - 20y + 10z = 13$

اكتب المصفوفة الموسعة لكل نظام من المعادلات الخطية التالية. (مثال 2)

9. $12x - 5y = -9$
$-3x + 8y = 10$

10. $-4x - 6y = 25$
$7x + 2y = 16$

11. $3x - 5y + 7z = 9$
$-10x + y + 8z = 6$
$4x - 15z = -8$

12. $4x - z = 27$
$-8x + 7y - 6z = -35$
$12x - 3y + 5z = 20$

13. $w - 8x + 5y = 11$
$7w + 2x - 3y + 9z = -5$
$6w + 12y - 15z = 4$
$3x + 4y - 8z = -13$

14. $14x - 2y + 3z = -22$
$5w - 4x + 11z = -8$
$2w - 6y + 3z = 15$
$3w + 7x - y = 1$

15. **بيع المخبوزات** نظم أعضاء مجموعة شبابية معرضًا لبيع المخبوزات لجمع الأموال لرحلة صيفية. وقد باعوا 30 كعكة و 40 فطيرة و 200 كعكة كوكيز كبيرة وجمعوا مبلغًا قدره AED 684.50. وتكون تكلفة الفطيرة أقل من تكلفة الكعكة بمقدار AED 2 وتكون تكلفة الكعكة 5 أضعاف تكلفة كعكة الكوكيز الكبيرة. (مثال 2)

a. افترض أن المتغير c = عدد الكعك وأن المتغير p = عدد الفطائر والمتغير g = عدد كعكات الكوكيز الكبيرة. اكتب نظامًا من ثلاث معادلات خطية لتمثيل هذه المسألة.

b. اكتب المصفوفة الموسعة لنظام المعادلات الخطية الذي كتبته في الجزء a.

c. أوجد حلاً لنظام المعادلات. فسّر حلك.

حدد ما إذا كانت كل مصفوفة في صورة نموذج درجة الصف. (مثال 3)

16. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

17. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

18. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -8 & 12 \\ 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$

19. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

20. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

21. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

حُلّ كل نظام معادلات باستخدام حذف جاوس أو حذف جاوس-جوردان. (المثالان 4 و 5)

22. $2x = -10y + 11$
$-8y = -9x + 23$

23. $4y + 17 = -7x$
$8x + 5y = -19$

24. $x + 7y = 10$
$3x + 9y = -6$

25. $7y = 9 - 5x$
$8x = 2 - 5y$

26. $3x - 4y + 8z = 27$
$9x - y - z = 3$
$x + 8y - 2z = 9$

27. $x + 9y + 8z = 0$
$5x + 8y + z = 35$
$x - 4y - z = 17$

28. $4x + 8y - z = 10$
$3x - 8y + 9z = 14$
$7x + 6y + 5z = 0$

29. $2x - 10y + z = 28$
$-5x + 11y + 7z = 18$
$6x - y - 12z = 14$

30. **القهوة** يتخصص مقهى محلي في تقديم مشروبات الإسبريسو. ويوضح الجدول أدناه عدد الأكواب لكل مشروب تم بيعه طوال اليوم. اكتب نظام معادلات وأوجد حلاً له لتحديد سعر كل مشروب إسبريسو. فسّر حلك. (مثال 4)

الساعات	كابتشينو	لاتيه	قهوة ماكياتو	الأرباح (AED)
8-11	103	86	79	1040.25
11-2	48	32	26	406.50
2-5	45	25	18	334.00

31. **بائع زهور** يوضح إعلان لمحل زهور أسعار العديد من تنسيقات الزهور وقائمة من الزهور الموجودة في كل تنسيق على النحو الموضح أدناه. اكتب نظام معادلات وأوجد حلاً له لتحديد سعر كل نوع من الزهور. فسّر حلك. (مثال 6)


زهرة الزنبق AED 35.00
4 زهور، 12 زهرة زنبق، 5 زهور السوسن


الحديقة المشمسة AED 50.25
6 زهور، 9 زهور زنبق، 12 زهرة السوسن


نسمات الصيف العليل AED 83.75
10 زهور، 15 زهرة زنبق، 20 زهرة السوسن

حُلّ كلاً من أنظمة المعادلات التالية. (المثالان 6 و7)

32. $-2x + y - 3z = 0$
$3x - 4y + 10z = -7$
$5x + 2 \quad + 8z = 23$

33. $4x - 5y - 9z = -25$
$-6x + y + 7z = -21$
$7x - 3 \quad - 10z = 8$

34. $-x + 3y + 10z = 8$
$4x - 9y - 34z = -17$
$3x + 5 \quad - 2z = 46$

35. $5x - 4y - 7z = -31$
$2x + y - 8z = 11$
$-4x + 3y + 6z = 23$

36. $-3x + 4y - z = -10$
$6x - y - 5z = -29$
$4x - 5y + z = 11$

37. $8x - 9y - 4z = -33$
$-2x + 3y - 2z = 9$
$-7x + 6y + 11z = 27$

38. $2x - 5y + 4z + 4w = 2$
$-3x + 6y - 2z - 7w = 11$
$5x - 4y + 8z - 5w = 29$

39. $x - 4y + 4z + 3w = 2$
$-2x - 3y + 7z - 3w = -9$
$3x - 5y + z + 10w = 15$

حاسبة التمثيل البياني أوجد نموذج درجة الصف ونموذج درجة الصف المنخفض لكل نظام من الأنظمة التالية.

40. $3x + 2.5y = 18$
$6.8x - 4y = 29.2$

41. $\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}y = 8$
$\frac{3}{4}x + \frac{5}{8}y = \frac{5}{2}$

42. $7x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{6}z = -\frac{13}{3}$
$-\frac{3}{5}x + y - \frac{1}{3}z = \frac{11}{10}$
$2x - \frac{2}{5}y - \frac{1}{2}z = -6$

43. $15.9x - y + 4.3z = 14.8$
$-8.2x + 14y = 14.6$
$-11x + 0.5y - 1.6z = -20.4$

44. المعرفة المالية حصلت شركة معدات رياضية على ثلاثة قروض مختلفة من أحد البنوك لشراء أجهزة الجري الكهربائية. ويتم عرض بيان البنك بعد العام الأول أدناه. وقد كان المبلغ المقترض بمعدل فائدة 6.5% أقل بمقدار AED 50,000 من المبلغين المقترضين بالمعدلين الآخرين مجتمعين.

شركة بنك الخليج

ملخص البيان

المبلغ المقترض		AED 350.000
القرض 1	معدل الفائدة	6.5%
القرض 2	معدل الفائدة	7%
القرض 3	معدل الفائدة	9%
الفائدة المدفوعة		AED 24.950

a. اكتب نظامًا من ثلاث معادلات خطية لتمثيل هذه الحالة.

b. استخدم حاسبة التمثيل البياني لحل نظام المعادلات. فسّر الحل.

حدد عملية الصف التي تم القيام بها للحصول على كل مصفوفة.

45. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$

46. $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -5 & 4 \\ 9 & -1 & 4 & -2 \\ 8 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -5 & 4 \\ 9 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 7 & -7 \end{array}\right]$

47. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 15 & 2 & 4 & 14 \\ 0 & 8 & 5 & -5 & 15 \\ 2 & 1 & 0 & 16 & 20 \\ -3 & -11 & -1 & 6 & -4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 15 & 2 & 4 & 14 \\ 0 & 8 & 5 & -5 & 15 \\ 2 & 1 & 0 & 16 & 20 \\ 0 & 34 & 5 & 18 & 38 \end{array}\right]$

48. $\left[\begin{array}{ccccc|c} 8 & -2 & 0 & 2 & 12 & -2 \\ 8 & 5 & -7 & 1 & 6 & 9 \\ -1 & 0 & 9 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 8 & -2 & 0 & 2 & 12 & -2 \\ 0 & 7 & -7 & -1 & -6 & 11 \\ -1 & 0 & 9 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$

49. الطب هناك حاجة إلى محلول ملحي مخفف للإجراءات الطبية الروتينية في المستشفى. وتحتوي غرفة الإمدادات على كمية كبيرة من المحلول الملحي بتركيز 20% والمحلول الملحي بتركيز 40% ولكنها تحتاج إلى 10 لترات من المحلول الملحي بتركيز 25%.

a. اكتب نظام معادلات لتمثيل هذه الحالة.

b. أوجد حلاً لنظام المعادلات. فسّر الحل.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

50. مسألة غير محددة الإجابة ضع نظامًا من 3 معادلات بمتغيرات له عدد لا نهائي من الحلول. اشرح استنتاجك.

51. تحدٍ ادرس نظام المعادلات التالي. ما قيمة k التي تجعل النظام متوافقًا ومستقلاً؟

$2x + 2y = 5$
$5y - kz = -22$
$2x + 5z = 26$
$-2x + ky + z = -8$

52. تحليل الخطأ يكتب يوسف وعبد الله المصفوفة الموسعة للنظام أدناه في صورة نموذج درجة الصف.

$2x - y + z = 0$
$x + y - 2z = -7$
$x - 3y + 4z = 9$

يوسف

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$

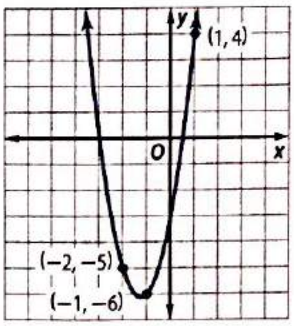
عبد الله

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$

هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

53. التبرير حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة: إذا كانت المصفوفة التربيعية الموسعة والمكتوبة في صورة نموذج درجة الصف وكان صفها الأخير صفًا من الأصفار، فحينها لا يكون لنظام المعادلات المقابل حل. اشرح استنتاجك.

54. تحدٍ يمر قطع مكافئ عبر ثلاث نقاط موضحة في التمثيل البياني أدناه.



a. اكتب نظام معادلات يمكن استخدامه لإيجاد معادلة القطع المكافئ في النموذج $f(x) = ax^2 + bx + c$.

b. استخدم المصفوفات لحل نظام المعادلات الذي كتبته في الجزء a.

c. استخدم الحل الذي أوجدته في الجزء b لكتابة معادلة للقطع المكافئ. ثم تحقق من النتائج باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

55. الكتابة في الرياضيات قارن وقابل بين حذف جاوس وحذف جاوس-جوردان.

مراجعة شاملة

اثبت صحة كل متطابقة.

56. $2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x$

57. $\tan^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

58. $\frac{1}{\sin x \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \tan x$

اوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مثلثي مما يلي.

59. $\cos 105°$

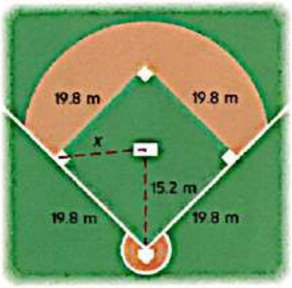
60. $\sin 165°$

61. $\cos \frac{7\pi}{12}$

62. $\sin\frac{\pi}{12}$

63. $\cot\frac{113\pi}{12}$

64. $\sec 1275°$



.65 **الكرة اللينة** في لعبة الكرة اللينة ذات الرميات البطيئة. تعد الماسة مربعًا يبعد 19.8 مترًا عن كل جانب. وتكون المسافة بين مكان الرامي وصفيحة الملعب 15.2 مترًا. فما بعد المسافة التي يحتاج الرامي إليها لرمي الكرة من مكان الرامي إلى القاعدة الثالثة لإيقاف لاعب يحاول الاستيلاء على القاعدة الثالثة؟

.66 **السفر** في أحد مراكب الجولات السياحية الاستطلاعية بالقرب من قاعدة شلالات حدوة الحصان بشلالات نياجرا. قدّر أحد الركاب زاوية الارتفاع إلى أعلى الشلالات بـ °30. فإذا كان ارتفاع شلالات حدوة الحصان 52.7 مترًا. فما المسافة من المركب إلى قاعدة الشلالات؟

.67 **الأرانب** تتكاثر الأرانب بمعدلات ضخمة وتتزايد أعدادها أسيًا في غياب أعدائها الطبيعيين. افترض أنه كان هناك في الأصل 65,000 أرنب في منطقة ما. وبعدها بعامين أصبح العدد 2,500,000 أرنب.

a.اكتب دالة أسية يمكن استخدامها لتمثيل عدد الأرانب y في هذه المنطقة. اكتب الدالة بدلالة *x*. عدد الأعوام منذ العام الأصلي.

b.افترض أن عدد الأرانب استمر في النمو بهذا المعدل. قدّر عدد الأرانب في هذه المنطقة بعد 7 أعوام من العام الأصلي.

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

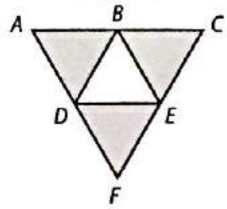
68. $\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} = \frac{17}{12}$

69. $\frac{4}{x+3} - \frac{2}{x+1} = \frac{2}{15}$

70. $\frac{4}{3} - \frac{1}{x-2} = \frac{13}{2x}$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

.71 **SAT/ACT** $\triangle ACF$ عبارة عن متساوي أضلاع له أضلاع طولها 4. فإذا كان B و D و E هي نقاط المنتصف لأضلاعه على التوالي. فما مجموع مساحات المناطق المظللة؟



A $3\sqrt{2}$

B $3\sqrt{3}$

C $4\sqrt{2}$

D $4\sqrt{3}$

E $6\sqrt{3}$

.72 **مراجعة** اشترى متعهد تقديم الطعام عدة جرامات من سلطات الدجاج والتونة لوجبة غداء. وتكلف سلطة الدجاج AED 7.3 لكل 100 جرام، بينما تكلف سلطة التونة AED 4.8 لكل 100 جرام. وقد اشترى إجمالي 6.4 كيلوجرام من السلطة ودفع إجمالي AED 407.70. فما مقدار سلطة الدجاج التي اشتراها متعهد تقديم الطعام؟

F 2.7 كيلوجرام

G 3.2 كيلوجرام

H 3.6 كيلوجرام

J 4.1 كيلوجرام

.73 يبيع محل للألبان قوالب لبن على شكل مخروط، ويبيع الصغير بتكلفة AED 0.89 والمتوسط بتكلفة AED 1.19 والكبير بتكلفة AED 1.39. وفي أحد الأيام، باع سالم 52 قالبًا. وباع عددًا من القوالب المتوسطة أكبر من القوالب الصغيرة بمقدار سبعة. فإذا باع قوالب بمبلغ AED 58.98. فكم عدد القوالب المتوسطة التي باعها؟

A 11

B 17

C 24

D 36

.74 **مراجعة** للتدرُّب في المنزل، اشترى علي كرة سلة وكرة طائرة وكان إجمالي تكلفتهما AED 67. فإذا كانت تكلفة كرة السلة b أكبر من ضعف تكلفة كرة الطائرة v بمقدار AED 4. فأي أنظمة المعادلات الخطية يمكن استخدامها لتحديد تكلفة كل كرة؟

F $b + v = 67$
$b = 2v - 4$

G $b + v = 67$
$b = 2v + 4$

H $b + v = 4$
$b = 2v - 67$

J $b + v = 4$
$b = 2v + 67$

الدرس

5-2 ضرب المصفوفات والمعكوسات والمحددات

:: السابق

- قمت بإجراء عمليات حسابية على المصفوفات.

:: الحالي

1. ضرب المصفوفات.
2. إيجاد محددات ومعكوسات المصفوفة 2×2 والمصفوفة 3×3.

:: لماذا؟

- تستخدم المصفوفات في العديد من الصناعات بصفتها وسيلة يسيرة لتخزين البيانات. بمجال إدارة المطاعم، يستخدم ضرب المصفوفات لتحديد مقدار المواد الخام الضرورية لإنتاج المنتج الأخير المنشود أو الأطباق الموجودة في القائمة.

المفردات الجديدة

مصفوفة محايدة identity matrix
مصفوفة عكسية inverse matrix
معكوس inverse
لها معكوس invertible
مصفوفة منفردة singular matrix
محدد determinant

1 ضرب المصفوفات تتمثل عمليات المصفوفات الأساسية الثلاث في جمع المصفوفات وضربها وضربها بكميات قياسية. وقد رأيت أن جمع المصفوفات يشبه جمع الأعداد الحقيقية وضرب المصفوفات في كمية قياسية يشبه ضرب الأعداد الحقيقية.

جمع المصفوفات

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$$

الضرب بالكميات القياسية

$$k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{bmatrix}$$

ولا يوجد لضرب المصفوفة أي عمليات مشابهة بنظام الأعداد الحقيقية. لضرب المصفوفة A في المصفوفة B، فإن عدد الأعمدة في A يجب أن يكون مساويًا لعدد الصفوف في B. ويمكن تحديد ذلك بدراسة أبعاد A و B. فإذا تحقق الشرط، يكون ناتج الضرب المصفوفة AB ويكون بها نفس عدد صفوف المصفوفة A ونفس عدد أعمدة المصفوفة B.

مصفوفة A	$\times$	مصفوفة B	$=$	AB
3×2		2×4		3×4

المفهوم الأساسي ضرب المصفوفات

الشرح إذا كانت A مصفوفة $m \times r$ وكانت B مصفوفة $r \times n$، فإن ناتج ضربهما AB هو المصفوفة $m \times n$ التي يمكن الحصول عليها بجمع ناتج ضرب مدخلات الصف في المصفوفة A في المدخلات المناظرة لعمود في المصفوفة B.

الرموز إذا كانت A هي المصفوفة $m \times r$ و B هي المصفوفة $r \times n$، فإن ناتج الضرب AB هو المصفوفة $m \times n$ التي يكون فيها

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & \\ c_{i1} & c_{i2} & & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & \\ c_{m1} & c_{m2} & & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

يمكن اعتبار كل مدخلة في ناتج ضرب مصفوفتين على أنه ناتج ضرب مصفوفة صف $r \times 1$ ومصفوفة عمود $1 \times r$. ادرس ناتج ضرب مصفوفة الصف 3×1 ومصفوفة العمود 1×3 الموضحة.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(4) + 1(-6) + 3(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

مثال 1 ضرب المصفوفات

استخدم المصفوفات $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ **و** $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ **لإيجاد كل ناتج ضرب، إن وجد.**

a. ***AB***

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

A هي مصفوفة 2×2 و B هي مصفوفة 3×2. حيث إن عدد الأعمدة للمصفوفة A يساوي عدد الصفوف في المصفوفة B، إذًا فإن ناتج الضرب AB موجود.

لإيجاد المدخل الأول في AB، اكتب مجموع نواتج ضرب المدخلات في الصف **1** للمصفوفة A وفي العمود **1** من المصفوفة B.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{3(-2) + (-1)(3)} & & \\ & & \end{bmatrix}$$

اتبع نفس الإجراء لإيجاد مدخل الصف **1** والعمود **2** من AB.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(-2) + (-1)(3) & \mathbf{3(0) + (-1)(5)} & \\ & & \end{bmatrix}$$

استمر في ضرب كل صف في كل عمود لإيجاد مجموع كل مدخل.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(-2) + (-1)(3) & 3(0) + (-1)(5) & 3(6) + (-1)(1) \\ 4(-2) + 0(3) & 4(0) + 0(5) & 4(6) + 0(1) \end{bmatrix}$$

وأخيرًا، حوّل كل مجموع لأبسط صورة.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -5 & 17 \\ -8 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

b. ***BA***

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة B لا يساوي عدد صفوف المصفوفة A، فإن ناتج الضرب BA ليس موجودًا. BA غير محدد.

تمرين موجّه

أوجد AB و BA، إن أمكن.

1A. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 7 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

1B. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$

تلميح تقني

ضرب المصفوفات يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لضرب المصفوفات. حدد A و B في قائمة المصفوفات ثم اضرب المصفوفات باستخدام حروفها المرجعية. لاحظ أن الحاسبة تظهر صفوف ناتج الضرب في المثال 1a باستخدام مصفوفات 3×1.

```
[A]*[B]
  [[-9  -5  17]
   [-8   0  24]]
```

لاحظ في المثال 1 أن ناتجي الضرب AB و BA مختلفان. وفي معظم الحالات، حتى عند تحديد كل من ناتجي الضرب، تكون $AB \neq BA$. ويعني ذلك أن خاصية التبديل لا تنطبق على ضرب المصفوفات. ومع ذلك، تنطبق بعض من خصائص الأعداد الحقيقية على ضرب المصفوفات.

المفهوم الأساسي خصائص ضرب المصفوفات

بالنسبة لأي مصفوفة A و B و C والتي يكون ناتج ضرب المصفوفات لها معروف وأي كمية قياسية k، تنطبق الخصائص التالية.

خاصية التجميع في ضرب المصفوفات $(AB)C = A(BC)$

خاصية التجميع في ضرب الكميات القياسية $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

خاصية التوزيع إلى اليسار $C(A + B) = CA + CB$

خاصية التوزيع إلى اليمين $(A + B)C = AC + BC$

يمكن استخدام ضرب المصفوفات لحل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 2 من الحياة اليومية ضرب المصفوفات

التصويت توضح نسبة المصوتين من فئات عمرية مختلفة والمسجلين بأحزاب الديموقراطيين أو الجمهوريين أو المستقلين بأحد الانتخابات الأخيرة في مدينة أمريكية. استخدم هذه المعلومات لتحديد إن كان عدد المصوتين من الذكور المسجلين لحزب الديموقراطيين أكبر من عدد الإناث المسجلين بحزب الجمهوريين.

التوزيع حسب الحزب والعمر (%)

الحزب	18-25	26-40	41-50	50+
الديموقراطيون	0.55	0.50	0.35	0.40
الجمهوريون	0.30	0.40	0.45	0.55
المستقلون	0.15	0.10	0.20	0.05

التوزيع حسب العمر والجنس

العمر	أنثى	ذكر
18-25	18,500	16,000
26-40	20,000	24,000
41-50	24,500	22,500
50+	16,500	14,000

افترض أن المصفوفة X تمثل التوزيع حسب الحزب والعمر وافترض أن المصفوفة Y تمثل التوزيع حسب العمر والجنس. ثم أوجد ناتج الضرب XY.

$$XY = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.50 & 0.35 & 0.40 \\ 0.30 & 0.40 & 0.45 & 0.55 \\ 0.15 & 0.10 & 0.20 & 0.05 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 18{,}500 & 16{,}000 \\ 20{,}000 & 24{,}000 \\ 24{,}500 & 22{,}500 \\ 16{,}500 & 14{,}000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35{,}350 & 34{,}275 \\ 33{,}650 & 32{,}225 \\ 10{,}500 & 10{,}000 \end{bmatrix}$$

يمثل ناتج الضرب XY توزيع المصوتين من الذكور والإناث والمسجلين بكل حزب. يمكن استخدام ناتج ضرب المصفوفة لإيجاد عدد المصوتين الذكور المسجلين بحزب الديموقراطيين وعدد المصوتات الإناث المسجلين بحزب الجمهوريين.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \text{أنثى} & \text{ذكر} \end{array} \\ \text{الديموقراطيون} & \\ \text{الجمهوريون} & \begin{bmatrix} 35{,}350 & 34{,}275 \\ 33{,}650 & 32{,}225 \\ 10{,}500 & 10{,}000 \end{bmatrix} \\ \text{المستقلون} & \end{array}$$

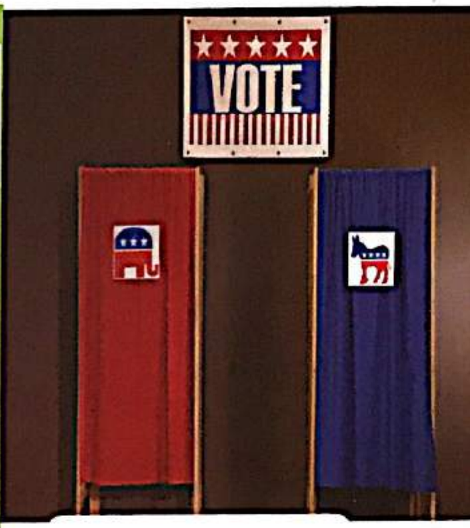
كان عدد المصوتين الذكور المسجلين بحزب الديموقراطيين أكبر من عدد المصوتات الإناث المسجلات بحزب الجمهوريين، حيث إن $34{,}275 > 33{,}650$.

تمرين موجّه

2. **المبيعات** يوضح عدد أجهزة الكمبيوتر المحمولة التي باعتها إحدى الشركات في الأشهر الثلاثة الأولى من العام، وكذلك أسعار كل طراز أثناء هذه الأشهر. استخدم هذه المعطيات لتحديد أي النماذج تنتج أكبر قدر من الدخل للأشهر الثلاثة الأولى.

شهر	الطراز 1	الطراز 2	الطراز 3
يناير	150	250	550
فبراير	200	625	100
مارس	600	100	350

الطراز	يناير	فبراير	مارس
1	AED 650	AED 575	AED 485
2	AED 800	AED 700	AED 775
3	AED 900	AED 1050	AED 925



الربط بالحياة اليومية

في انتخابات عام 2008 في الولايات المتحدة الأمريكية، تلقى الرئيس باراك أوباما 66,882,230 صوتًا أو 53% من أصوات الجمهور.

المصدر: وكالة أنباء CNN

أنت تعلم أن *المحايد الضربي* للأعداد الحقيقية هو العدد 1، حيث إنه لأي عدد حقيقي a، $a \times 1 = a$. ويطلق على المصفوفة المربعة للمحايد الضربي $n \times n$ اسم **المصفوفة المحايدة**.

المفهوم الأساسي المصفوفة المحايدة

الشرح إن المصفوفة المحايدة ذات الـرتبة n، المعبر عنها بواسطة I_n، هي مصفوفة $n \times n$ تكون جميع قيمها 1 على قطرها الرئيس، من أعلى اليسار إلى أدنى اليمين، وجميع قيمها 0 بالنسبة لجميع المُدخلات الأخرى.

الرموز

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

قراءة في الرياضيات

المصفوفة المحايدة يستخدم الترميز I_n لتمثيل المحايد للمصفوفة $n \times n$. يستخدم الرمز I بدلاً من I_2، I_3، I_4، إلى آخره، عندما يكون ترتيب المحايد معروفًا.

إذًا، إذا كانت A مصفوفة $n \times n$، فإن $AI_n = I_nA = A$. وقد تجد المصفوفة المحايدة بالطرف الأيسر لأي مصفوفة موسعة في صورة مستوى صف منخفض. وبشكل عام، إذا كانت A مصفوفة المعاملات لنظام المعادلات، فإن X هي مصفوفة العمود للمتغيرات و B هي مصفوفة العمود للثوابت، فيمكنك كتابة نظام المعادلات كمعادلة من المصفوفات (معادلة مصفوفية)..

نظام المعادلات		معادلة المصفوفة
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$ $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$	$\longrightarrow$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ $A \times X = B$

مثال 3 حل أنظمة المعادلات الخطية

اكتب نظام المعادلات في صورة معادلة مصفوفية $AX = B$. ثم استخدم اختزال جاوس-جوردان على المصفوفة الموسعة لحل النظام.

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$$
$$-2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5$$
$$3x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -1$$

اكتب النظام كمصفوفة بالشكل $AX = B$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad A \ X = B$$

اكتب المصفوفة الموسعة $[A \mid B]$. استخدم اختزال جاوس-جوردان لحل النظام.

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -4 & 7 & -1 \end{array}\right]$$

$$[I \mid X] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

إذًا، فإن حل نظام المعادلة هو $(-13, 1, 6)$.

قراءة في الرياضيات

المصفوفة الموسعة يمثل الرمز $[A \mid B]$، والتي تقرأ *A الموسعة بواسطة B*، المصفوفة الموسعة والتي تنتج عندما تكون المصفوفة B متصلة بالمصفوفة A.

تمرين موجّه

اكتب كل نظام من أنظمة المعادلات في صورة معادلة مصفوفية $AX = B$. ثم استخدم اختزال جاوس-جوردان على المصفوفة الموسعة $[A \mid B]$ لحل النظام.

3A. $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 9$
$-4x_1 + x_2 + 8x_3 = -16$
$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$

3B. $x_1 + x_2 + x_3 = 2$
$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$
$-x_1 + 4x_2 + x_3 = 3$

2 المعكوسات والمحددات أنت تعلم أنه إذا كان a عددًا حقيقيًا غير صفري، فإن $\frac{1}{a}$ أو a^{-1} هو المعكوس الضربي للمتغير a حيث إن $a\left(\frac{1}{a}\right) = a \times a^{-1} = 1$. ويطلق على المعكوس الضربي لمصفوفة مربعة اسم **المصفوفة العكسية**.

المفهوم الأساسي معكوس المصفوفة المربعة

افترض أن A هي المصفوفة $n \times n$. فإذا وجدت مصفوفة B بحيث تكون $AB = BA = I_n$. فيطلق على المصفوفة B حينها **معكوس** المصفوفة A ونكتب بالصورة A^{-1}. إذًا، $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

قراءة في الرياضيات

المصفوفة العكسية يقرأ الرمز A^{-1} على أنه المعكوس.

مثال 4 التحقق من المصفوفة العكسية

حدد إذا كان $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ مصفوفتين متعاكستين.

إذا كانت المصفوفة A والمصفوفة B مصفوفتين متعاكستين، فإن $AB = BA = I$.

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+4 & 6+(-6) \\ -2+2 & 4+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+4 & 2+(-2) \\ -6+6 & 4+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حيث إن $AB = BA = I$، يترتب على ذلك أن $B = A^{-1}$ و $A = B^{-1}$.

تمرين موجّه

حدد إذا كانت المصفوفة A والمصفوفة B مصفوفتين متعاكستين.

4A. $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

4B. $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

نصيحة دراسية

المصفوفة المنفردة إذا كانت المصفوفة منفردة، فإن المعادلة المصفوفية $AB = I$ ليس لها حل.

وإذا كان للمصفوفة A معكوس، يقال إن المصفوفة A **قابلة للعكس أو لها معكوس** أو غير منفردة. أما **المصفوفة المنفردة** فليس لها معكوس. وليست جميع المصفوفات المربعة لها مصفوفة عكسية. ولإيجاد معكوس مصفوفة مربعة A، ستحتاج إلى إيجاد مصفوفة A^{-1}. بافتراض وجود A^{-1} وأن ناتج ضرب A و A^{-1} هو المصفوفة المحايدة. بعبارة أخرى، ستحتاج إلى حل المعادلة المصفوفية $AA^{-1} = I_n$ لإيجاد قيمة B. وبمجرد تحديد B، ستحتاج إلى التأكد أن $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

من إحدى طرق إيجاد معكوس المصفوفة المربعة استخدام نظام معادلات. افترض أن $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.
وافترض وجود A^{-1}. اكتب المعادلة المصفوفية $AA^{-1} = I_2$، حيث إن $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8a-5c & 8b-5d \\ -3a+2c & -3b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$8a - 5c = 1 \qquad 8b - 5d = 0$$
$$-3a + 2c = 0 \qquad -3b + 2d = 1$$

من مجموعة المعادلات الأربع، سترى أن هناك نظامين من المعادلات يحتوي كل منهما على قيمتين مجهولتين. اكتب المصفوفات الموسعة المقابلة.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 8 & -5 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c} 8 & -5 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

بما أن مصفوفة المعاملات للأنظمة متطابقة، يمكننا إجراء عملية خفض الصف على كل من المصفوفتين الموسعتين في نفس الوقت من خلال كتابة مصفوفة موسعة مزدوجة $[A \mid I]$. لإيجاد A^{-1}، استخدم المصفوفة الموسعة المزدوجة
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 8 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

مثال 5 معكوس المصفوفة

أوجد A^{-1}، إن وُجدت. وإن لم توجد A^{-1}، فاكتب منفردة.

a. $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

الخطوة 1 أنشئ المصفوفة الموسعة المزدوجة $[A \,\vdots\, I]$.

$$[A \,\vdots\, I] = \left[\begin{array}{cc:cc} 8 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

الخطوة 2 طبّق عمليات الصف الأولية لكتابة المصفوفة في صورة مستوى صف منخفض.

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 8 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$3R_1 + 8R_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} 8 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{array}\right]$$

$$R_1 + 5R_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} 8 & 0 & 16 & 40 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{array}\right]$$

$$\tfrac{1}{8}R_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{array}\right] = [I \,\vdots\, A^{-1}]$$

العمودان الأولان هما المصفوفة المحايدة. إذًا، A لها معكوس ومعكوسها $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$.

التحقق تأكد أن $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \checkmark$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \checkmark$$

b. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$

الخطوة 1

$$[A \,\vdots\, I] = \left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

الخطوة 2

$$\tfrac{1}{2}R_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & \tfrac{1}{2} & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$3R_1 + R_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \tfrac{3}{2} & 1 \end{array}\right]$$

إذًا، المصفوفة A منفردة.

تمرين موجّه

5A. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

5B. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

5C. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$

تلميح تقني

المعكوس يمكنك استخدام $\boxed{x^{-1}}$ على حاسبة التمثيل البياني لإيجاد معكوس المصفوفة المربعة.

```
[A]
           [[8  -5]
            [-3  2 ]]
[A]-1
           [[2  5]
            [3  8]]
```

وفيما يلي ملخص العملية المستخدمة لإيجاد معكوس المصفوفة المربعة.

ملخص المفهوم إيجاد معكوس المصفوفة المربعة

افترض أن A هي المصفوفة $n \times n$.

1. اكتب المصفوفة الموسعة $[A \,\vdots\, I_n]$.
2. أجرِ عمليات الصف الأولية على المصفوفة الموسعة لخفض المصفوفة A صورة مستوى الصف المنخفض.
3. قرر إن كانت A لها معكوس.
   - إذا أمكن خفض A إلى المصفوفة المحايدة I_n. فإن A^{-1} هي المصفوفة الموجودة على يمين للمصفوفة الموسعة المحولة $[I_n \,\vdots\, A^{-1}]$.
   - إذا لم يتمكن من خفض المصفوفة A إلى مصفوفة محايدة I_n. فإن A مصفوفة منفردة.

تلميح تقني

المصفوفات المنفردة إذا كانت المصفوفة منفردة. فستُظهر حاسبة التمثيل البياني رسالة الخطأ التالية.

ERR: SINGULAR MAT

بالرغم من أن طريقة إيجاد المصفوفة العكسية المستخدمة في المثال 5 تنجح مع أي مصفوفة مربعة، قد تجد القانون التالي مفيدًا عند إيجاد معكوس المصفوفة 2×2.

المفهوم الأساسي محدد ومعكوس المصفوفة 2×2

افترض $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. يكون للمصفوفة A معكوس فقط إن كان $ad - cb \neq 0$، وهو $A^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

العدد $ad - cb$ يُسمى **مُحَدِّد** المصفوفة 2×2 ويُعبَّر عنه بواسطة $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$.

إذًا، يقدم محدد المصفوفة 2×2 اختبارًا لتحديد إن كانت المصفوفة لها معكوس.

لاحظ أن محدد المصفوفة 2×2 هو الفرق بين ناتج ضرب قطري المصفوفة.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

مثال 6 محدد ومعكوس المصفوفة 2×2

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم أوجد معكوس المصفوفة، إن وُجدت.

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4) - 4(-3) = 20$$

حيث إن $\det(A) \neq 0$, A لها معكوس. طبّق الصيغة لمعكوس المصفوفة 2×2.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

التحقق $AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✓

b. $B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 6(6) - 9(4) = 0$$

حيث إن $\det(B) = 0$، فإن B ليس لها معكوس. إذًا، B^{-1} غير موجودة.

تمرين موجّه

6A. $\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}$

6B. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

نصيحة دراسية

معكوس المصفوفة 2×2 تكتب صيغة معكوس المصفوفة 2×2 في الصورة $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

تلميح تقني

المُحدد يمكنك استخدام خاصية det) على حاسبة التمثيل البياني لإيجاد محدد المصفوفة المربعة. إذا حاولت إيجاد محدد مصفوفة بأبعاد غير $n \times n$، فستُظهر حاسبتك رسالة الخطأ التالية.

ERR:INVALID DIM

يعيّن محدد المصفوفة 3×3 باستخدام المحددات 2×2 على النحو المبين.

المفهوم الأساسي محدد مصفوفة 3×3

افترض $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. إذا $\det(A) = |A| = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$.

وكما هو الحال مع المصفوفات 2×2، يكون للمصفوفة A 3×3 معكوس فقط إذا كان $\det(A) \neq 0$. توجد صيغة لحساب معكوس المصفوفة 3×3 والمصفوفات الأعلى درجة. وعلى الرغم من ذلك، بسبب تعقيد هذه الصيغة، سنستخدم حاسبة التمثيل البياني لحساب معكوس المصفوفة 3×3 والمصفوفة المربعة الأعلى رتبة.

مثال 7 محدد ومعكوس مصفوفة 3×3

أوجد محدد $C = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. ثم أوجد C^{-1}، إن وُجدت.

$$\det(C) = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -3[(-1)(0) - 4(2)] - 2[1(0) - (-1)(2)] + 4[1(4) - (-1)(-1)]$$

$$= -3(-8) - 2(2) + 4(3) = 32$$

حيث إن $\det(A)$ لا يساوي الصفر، فإن C^{-1} موجودة. استخدم حاسبة التمثيل البياني لإيجاد قيمة C^{-1}.

```
[C]-1
[[-.25   .5    ...
 [-.0625 .125  ...
 [.09375 .3125 ...
```

```
[C]-1
... .5     .25    ]
... .125   .3125  ]
... .3125  .03125]]
```

يمكن استخدام خاصية Frac◄ تحت قائمة MATH لكتابة المعكوس باستخدام الكسور، على النحو المبين.

```
... .5     .25    ]
... .125   .3125  ]
... .3125  .03125]]
Ans▸Frac
[[-1/4   1/2   1/...
 [-1/16  1/8   5/...
 [3/32   5/16  1/...
```

```
... .5     .25    ]
... .125   .3125  ]
... .3125  .03125]]
Ans▸Frac
.../4   1/2   1/4 ]
.../16  1/8   5/16]
...32   5/16  1/32]]
```

إذًا، $C^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{5}{16} \\ \frac{3}{32} & \frac{5}{16} & \frac{1}{32} \end{bmatrix}$.

تمرين موجّه

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم أوجد معكوسها، إن وُجدت.

7A. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

7B. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

تمارين

أوجد AB و BA، إن أمكن. (مثال 1)

1. $A=\begin{bmatrix}8 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & -7\\ -5 & 2\end{bmatrix}$

2. $A=\begin{bmatrix}2 & 9\\ -7 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}6 & -4\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

3. $A=\begin{bmatrix}3 & -5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & 0 & -2\\ 1 & -3 & 2\end{bmatrix}$

4. $A=\begin{bmatrix}4\\ 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}6 & 1 & -10 & 9\end{bmatrix}$

5. $A=\begin{bmatrix}2\\ 5\\ -6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}6 & 0 & -1\\ -4 & 9 & 8\end{bmatrix}$

6. $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -4 & -3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 6 & -5\\ 2 & -7 & 1\end{bmatrix}$

7. $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -7 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 2 & -8\\ -6 & 0 & 9\end{bmatrix}$

8. $A=\begin{bmatrix}6 & -9 & 10\\ 4 & 3 & 8\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}6 & -8\\ 3 & -9\\ -2 & 5\\ 4 & 1\end{bmatrix}$

9. كرة السلة يتم منح قيم نقاط مختلفة للتسديدات المختلفة في كرة السلة. استخدم المعطيات لتحديد إجمالي مقدار النقاط التي أحرزها كل لاعب. (مثال 2)

اللاعب	رمية حرة	هدف بنقطتين	هدف بثلاث نقاط
أيوب	44	32	25
مازن	37	24	31
سعيد	35	39	29

الضربات	النقاط
رمية حرة	1
هدف بنقطتين	2
هدف بثلاث نقاط	3

10. السيارات يوضح عدد المركبات التي تصنعها إحدى الشركات يوميًا من مصنعين مختلفين. وكذلك سعر المركبة بمبيعات كل ربع سنوي. استخدم المعطيات لتحدد أي المصنعين حقق أعلى مبيعات في الربع السنوي الرابع. (مثال 2)

المصنع	الطراز			
	سيارة كوبيه	سيارة سيدان	سيارة رياضية متعددة الأغراض	سيارة فان صغيرة
1	500	600	150	250
2	250	350	250	400

الطراز	الربع السنوي			
	الأول (AED)	الثاني (AED)	الثالث (AED)	الرابع (AED)
سيارة كوبيه	18,700	17,100	16,200	15,600
سيارة سيدان	25,400	24,600	23,900	23,400
سيارة رياضية متعددة الأغراض	36,300	35,500	34,900	34,500
سيارة فان صغيرة	38,600	37,900	37,400	36,900

اكتب كل نظام من أنظمة المعادلات في صورة معادلة مصفوفة $AX = B$. ثم استخدم اختزال جاوس- جوردان على المصفوفة الموسعة لإيجاد حل النظام. (مثال 3)

11. $2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 9$
$4x_1 + x_2 - 6x_3 = 35$
$-3x_1 + 9x_2 - 7x_3 = -6$

12. $3x_1 - 10x_2 - x_3 = 6$
$-5x_1 + 12x_2 + 2x_3 = -5$
$-4x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 16$

13. $2x_1 - 10x_2 + 7x_3 = 7$
$6x_1 - x_2 + 5x_3 = -2$
$-4x_1 + 8x_2 - 3x_3 = -22$

14. $x_1 + 5x_2 + 5x_3 = -18$
$-7x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3$
$6x_1 + 7x_2 - x_3 = 42$

15. $2x_1 + 6x_2 - 5x_3 = -20$
$8x_1 - 12x_2 + 7x_3 = 28$
$-4x_1 + 10x_2 - x_3 = 7$

16. $3x_1 - 5x_2 + 12x_3 = 9$
$2x_1 + 4x_2 - 11x_3 = 1$
$-5x_1 + 7x_2 - 15x_3 = -28$

17. $-x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 25$
$-5x_1 + 11x_2 + 8x_3 = 33$
$2x_1 + x_2 - 13x_3 = -45$

18. $x_1 - 8x_2 - 3x_3 = -4$
$-3x_1 + 10x_2 + 5x_3 = -42$
$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 20$

حدد إذا كانت المصفوفة A والمصفوفة B مصفوفتين متعاكستين. (مثال 4)

19. $A=\begin{bmatrix}12 & -7\\ -5 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 5 & 12\end{bmatrix}$

20. $A=\begin{bmatrix}4 & -5\\ 5 & -6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-6 & 5\\ -5 & 4\end{bmatrix}$

21. $A=\begin{bmatrix}-5 & 3\\ 6 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 6 & 5\end{bmatrix}$

22. $A=\begin{bmatrix}-8 & 4\\ 6 & -3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix}$

23. $A=\begin{bmatrix}9 & 2\\ 5 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 5 & -9\end{bmatrix}$

24. $A=\begin{bmatrix}7 & 5\\ -6 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-4 & -5\\ 6 & 7\end{bmatrix}$

25. $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-4 & -3\\ -3 & -2\end{bmatrix}$

26. $A=\begin{bmatrix}9 & -7\\ 8 & -5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -6\\ 4 & 10\end{bmatrix}$

أوجد A^{-1}، إن وُجدت. وإن لم توجد A^{-1}، فاكتب منفردة. (مثال 5)

27. $A=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ -6 & 3\end{bmatrix}$

28. $A=\begin{bmatrix}-4 & 8\\ 1 & -2\end{bmatrix}$

29. $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -2 & -3\end{bmatrix}$

30. $A=\begin{bmatrix}8 & 5\\ 6 & 4\end{bmatrix}$

31. $A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -3\\ 3 & 6 & 4\\ 2 & 1 & 8\end{bmatrix}$

32. $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ -2 & 3 & 5\\ 6 & -1 & -4\end{bmatrix}$

33. $A=\begin{bmatrix}5 & 2 & -1\\ 4 & 7 & -3\\ 1 & -5 & 2\end{bmatrix}$

34. $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -4\\ 3 & 6 & -5\\ -2 & -8 & 1\end{bmatrix}$

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم أوجد معكوس المصفوفة، إن وُجد. (المثالان 6 و 7)

35. $\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ **36.** $\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

37. $\begin{bmatrix} -4 & -7 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ **38.** $\begin{bmatrix} 12 & -9 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

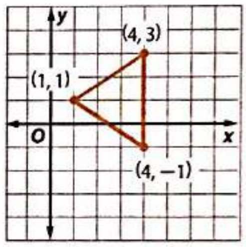
39. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 8 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ **40.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & 9 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

41. $\begin{bmatrix} 9 & 3 & 7 \\ -6 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ **42.** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -5 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

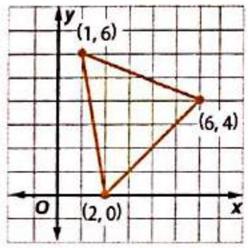
43. $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & -3 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ **44.** $\begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

أوجد المساحة A لكل مثلث بالرؤوس (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، (x_3, y_3)، باستخدام $A = \frac{1}{2}\left|\det(X)\right|$، حيث إن X تساوي $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$.

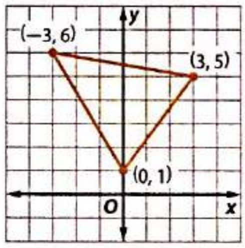
45.



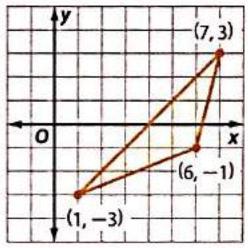
46.



47.



48.



باستخدام A و AB، أوجد B.

49. $A = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 36 & 48 \\ -24 & 48 \end{bmatrix}$

50. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -16 & -6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

أوجد x و y.

51. $A = \begin{bmatrix} 2x & -y \\ -3y & 5x \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} -2 \\ 31 \end{bmatrix}$

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية.

52. $\begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$ **53.** $\begin{bmatrix} c & c & c \\ 0 & c & c \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

54. **جمع التبرعات** تقوم مدرسة عبد الله بن الزبير الثانوية بجمع التبرعات عن طريق بيع الفشار. وقد اشترت المدرسة أربع نكهات من الفشار بحسب الكيس. وتوضح أسعار شراء الأنواع المختلفة من الفشار وأسعار بيعها.

الصف الدراسي	أكياس الفشار			
	زبد	توابل	جبن	كراميل
الصف العاشر	152	80	125	136
الصف الحادي عشر	112	92	112	150
الصف قبل الأخير	176	90	118	122
الصف النهائي	140	102	106	143

النكهة	السعر المدفوع للكيس (AED)	سعر البيع للكيس (AED)	الأرباح بكل كيس (AED)
زبد	18.90	42.00	
توابل	21.00	45.00	
جبن	23.10	48.00	
كراميل	25.20	51.00	

a. أكمل العمود الأخير في الجدول الثاني.

b. أي الصفوف الدراسية حصدت أعلى إجمالي مبيعات؟

c. كم زادت أرباح الصف النهائي عن طلاب الصف الحادي عشر؟

55. افترض أن $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a. أوجد قيم A^2, A^3, A^4. ثم استخدم النمط لكتابة مصفوفة لـ A^n.

b. أوجد قيم B^2, B^3, B^4, B^5. ثم استخدم النمط لكتابة صيغة عامة لـ B^n.

c. أوجد قيم C^2, C^3, C^4, C^5، ... إلى أن تلاحظ نمطًا. ثم استخدم النمط لكتابة صيغة عامة لـ C^n.

d. استخدم الصيغة التي كتبتها في الجزء **c** لإيجاد قيمة C^7.

56. **الخيول** يشتري كل مالك من ملاك إسطبلات الخيول المدرجين أدناه حزم من القش وأكياس من العلف كل شهر. وفي مايو، كانت تكلفة كل حزمة من حزم القش AED 2.50 وتكلفة كل كيس علف AED 7.95. وفي يونيه، كانت تكلفة كل حزمة من حزم القش AED 3.00 وتكلفة كل كيس علف AED 6.75.

الإسطبلات	حزم القش	أكياس العلف
مزارع الخيل البارع	45	5
إسطبل أجياد	75	9
مزارع المُهر	135	16
مزارع الأدهم	90	11

a. اكتب مصفوفة X لتمثيل حزم القش i وأكياس العلف j التي يشتريها كل إسطبل شهريًا.

b. اكتب مصفوفة Y لتمثيل تكاليف كل حزمة قش وكيس علف لشهري مايو ويونيه.

c. أوجد ناتج ضرب YX. وقم بتسمية صفوفه وأعمدته.

d. كم زاد إجمالي التكاليف في شهر يونيه لمزارع المُهر عن إجمالي التكاليف لشهر مايو لمزارع الخيل البارع؟

أوجد قيمة كل تعبير مما يلي.

$$A=\begin{bmatrix}4&1&-3\\0&2&8\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}-1&9&-6\\7&5&0\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}2&1\\0&1\\3&-2\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}7&2\\-4&-1\end{bmatrix}$$

57. $BD+B$

58. $DC-A$

59. $B(A+C)$

60. $AB+CB$

حُــلّ كل معادلة لإيجاد قيمة X، إن وجدت.

$$A=\begin{bmatrix}1&7\\2&0\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}5&3\\-6&-2\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}8&4\\1&-3\\6&7\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}2&1\\0&1\\3&-2\end{bmatrix}$$

61. $A+C=2X$

62. $4X+A=C$

63. $B-3X=D$

64. $DA=7X$

65. محددات 3 × 3 في هذه المسألة، ستكتشف طريقة بديلة لحساب محدد مصفوفة 3 × 3.

a. احسب $\det(A)=\begin{vmatrix}-2&3&1\\4&6&5\\0&2&1\end{vmatrix}$ باستخدام الطريقة الموضحة في هذا الدرس.

b. قم بضم أول عمودين إلى يمين det(*A*) على النحو الموضح. ثم أوجد الفارق بين مجموع نواتج الضرب على طول الأقطار المبينة بالتحرك لأسفل ومجموع نواتج الضرب على طول الأقطار المبينة بالتحرك لأعلى.

$$\begin{vmatrix}-2&3&1\\4&6&5\\0&2&1\end{vmatrix}\begin{matrix}-2&3\\4&6\\0&2\end{matrix}$$

c. قارن بين إجابتيك على الجزأين a و b.

d. وضّح أنه بوجه عام يمكن إيجاد محدد مصفوفة 3 × 3 باستخدام الإجراء الموضح أعلاه.

e. هل تفلح هذه الطريقة مع مصفوفة 4 × 4؟ وإذا كانت كذلك، فاشرح استنتاجك. وإذا لم تكن كذلك، فاضرب مثالاً مضادًا.

66. البرهان افترض أن $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ و $A^{-1}=\begin{bmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{bmatrix}$. استخدم معادلة المصفوفة $AA^{-1}=I_2$ لاشتقاق صيغة معكوس مصفوفة 2 × 2.

67. البرهان اكتب فقرة برهان لتبين إذا كان لمصفوفة مربعة معكوس، يكون هذا المعكوس فريدًا. (تلميح: افترض أن للمصفوفة *A* معكوسين *C* و *B*، ثم بيّن أن $B=C$.)

68. تمثيلات متعددة في هذه المسألة، سوف تكتشف المصفوفات المربعة. يطلق على المصفوفة المربعة مثلثية عليا إذا كانت جميع العناصر تحت قطرها الرئيس تساوي 0. ويطلق عليها مثلثية دنيا إذا كانت جميع العناصر فوق قطرها الرئيسي تساوي 0. إذا لم تكن جميع العناصر على قطر المصفوفة تساوي 0، يطلق على المصفوفة قطرية. في هذه المسألة، سوف تستكشف محدد مصفوفة 3 × 3 من المصفوفات المثلثية العليا والمثلثية الدنيا والقطرية.

a. التحليل اكتب مصفوفة واحدة مثلثية عليا وأخرى مثلثية دنيا وأخرى قطرية بأبعاد 2 × 2 . ثم أوجد محدد كل مصفوفة.

b. التحليل اكتب مصفوفة واحدة مثلثية عليا وأخرى مثلثية دنيا وأخرى قطرية بأبعاد 3 × 3 . ثم أوجد محدد كل مصفوفة.

c. لفظيًا خمّن قيمة محدد أي مصفوفة مثلثية عليا أو مثلثية دنيا أو قطرية بالأبعاد 3 × 3.

d. التحليل أوجد معكوس كل من المصفوفات القطرية التي كتبتها في الجزأين a و b.

e. لفظيًا خمّن معكوس أي مصفوفة قطرية بالأبعاد 3 × 3.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

69. تحدٍ باستخدام *A* و *AB*، أوجد *B*.

$$A=\begin{bmatrix}3&-1&5\\1&0&2\\6&4&1\end{bmatrix},\ AB=\begin{bmatrix}14&6&33\\4&4&13\\1&18&12\end{bmatrix}$$

70. التبرير اشرح سبب أنه لا يمكن أن يكون للمصفوفة معكوس.

71. مسألة غير محددة الإجابة اكتب مصفوفتين *A* و *B* بحيث يكون $AB=BA$. على ألا تكون *A* أو *B* المصفوفة المحايدة.

البرهان بيّن صحة الخصائص التالية لجميع مصفوفات 2 × 2.

72. خاصية التوزيع إلى اليمين

73. خاصية التوزيع إلى اليسار

74. خاصية التجميع في ضرب المصفوفة

75. خاصية التجميع في ضرب الكميات غير المتجهة

76. تحليل الخطأ يناقش علي وناصر المحددات. وقد توصل علي إلى النظرية أن المصفوفة 2 × 2 لا تتغير إذا تم الإبدال بين صفين من المصفوفة. وتوصل ناصر إلى النظرية أن محدد المصفوفة الجديدة سيكون له نفس القيمة المطلقة ولكن ستختلف علامته. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

77. التبرير إذا كانت *AB* ذات أبعاد 8 × 5، وكانت أبعاد *A* تساوي 6 × 5، فما هي أبعاد *B*؟

78. الكتابة في الرياضيات اشرح سبب أهمية الترتيب عند إيجاد ناتج ضرب مصفوفتين *A* و *B*. اضرب بعض الأمثلة العامة لدعم إجابتك.

مراجعة شاملة

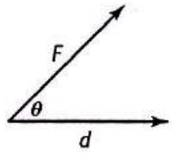
اكتب المصفوفة الموسعة لكل نظام من المعادلات الخطية التالية.

79. $10x - 3y = -12$
$-6x + 4y = 20$

80. $15x + 7y - 2z = 41$
$9x - 8y + z = 32$
$5x + y - 11z = 36$

81. $w - 6x + 14y = 19$
$3w + 2x - 4y + 8z = -2$
$9w + 18y - 12z = 3$
$5x + 10y - 16z = -26$

.82 **الفيزياء** يمثل الجهد المبذول لتحريك أحد الأجسام $W = Fd\cos\theta$، حيث إن θ هي الزاوية بين الإزاحة d والقوة المبذولة F. فإذا بذلت ليلى جهدًا بمقدار 2400 جول عند بذل قوة بمقدار 120 نيوتن في إزاحة قدرها 40 مترًا، ففي أي زاوية قامت ببذل القوة؟



حول قياس الزاوية من الدرجات إلى الراديان كمضاعف لـ π ومن الراديان إلى الدرجات.

83. $-10°$

84. $485°$

85. $\frac{3\pi}{4}$

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

86. $\log_{10} \sqrt[3]{10} = x$

87. $2\log_5 (x-2) = \log_5 36$

88. $\log_5 (x+4) + \log_5 8 = \log_5 64$

89. $\log_4 (x-3) + \log_4 (x+3) = 2$

90. $\frac{1}{2}(\log_7 x + \log_7 8) = \log_7 16$

91. $\log_{12} x = \frac{1}{2}\log_{12} 9 + \frac{1}{3}\log_{12} 27$

.92 **فن الملاحة الجوية** تمثل البيانات أدناه معدل رفع الجناح لأحد طُرز الطائرات في ممر هوائي بزاوية محددة لهبوب الهواء. وتعتبر زاوية الهبوب α للجناح هي الزاوية ما بين الجناح وهبوب الرياح.

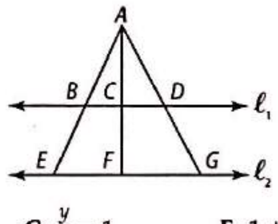
زاوية هبوب الهواء α	0.1	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	5.0	10.0
معدل الرفع (kg)	5.3	107	216	322.8	431	808.6	1081.5	1836.7

.a حدد دالة أسية لتمثيل البيانات.

.b استخدم الدالة لتوقع معدل رفع الجناح عند 4.0 درجات.

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

.93 SAT/ACT في الشكل، $\ell_1 \parallel \ell_2$. إذا كانت $EF = x$، و $EG = y$، فأي مما يلي يمثل نسبة CD إلى BC؟



A $1 - \frac{y}{x}$

B $1 + \frac{y}{x}$

C $\frac{y}{x} - 1$

D $1 - \frac{x}{y}$

E $1 + \frac{x}{y}$

.94 ما أبعاد المصفوفة التي تنتج عن عملية الضرب الموضحة؟

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

F 1×3

G 3×1

H 3×3

J 4×3

.95 **مراجعة** أنفقت مايسة AED 42 على علبة من بطانة الدهان وعلبتين من الدهان على غرفتها. فإذا كان سعر علبة من الدهان p يساوي 150% من سعر علبة من بطانة الدهان r، فأي نظام معادلات يمكن استخدامه لإيجاد سعر الدهان وبطانة الدهان؟

A $p = r + \frac{1}{2}r,\ r + 2p = 42$

B $p = r + 2r,\ r + \frac{1}{2}p = 42$

C $r = p + \frac{1}{2}p,\ r + 2r = 42$

D $r = p + 2p,\ r + \frac{1}{2} = 42$

.96 **مراجعة** للانضمام إلى فريق كرة قدم، يجب أن يكون المعدل التراكمي للطالب 2.0 على الأقل، وأن يكون قد حضر على الأقل خمسة تمارين بعد الدوام المدرسي. أي نظام متباينات يمثل بشكل أفضل هذا الموقف إذا كان x يمثل المعدل التراكمي للطالب، ويمثل y عدد التمارين التي حضرها الطالب بعد الدوام المدرسي؟

F $x \geq 2, y \geq 5$

G $x \leq 2, y \leq 5$

H $x < 2, y < 5$

J $x > 2, y > 5$

مختبر تقنية التمثيل البياني
المحددات ومساحات المضلعات

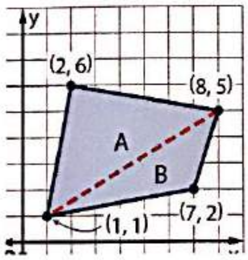
التركيز

- استخدام الحاسبة البيانية لإيجاد مساحات المضلعات باستخدام المحددات.

لقد تعلمت أن مساحة المثلث X ذي الرؤوس (x_1, y_1) و(x_2, y_2) و(x_3, y_3) يمكن إيجادها بحساب $\frac{1}{2}|det(X)|$. ويمكن استخدام هذه العملية لإيجاد مساحة أي مضلع.

نشاط مساحة الشكل الرباعي

a. أوجد مساحة الشكل الرباعي الذي رؤوسه (1، 1)، (2، 6)، (8، 5)، (7، 2).

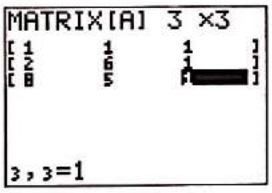


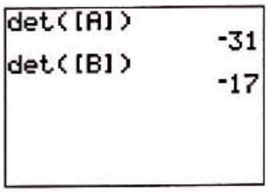
الخطوة 1 ارسم الشكل الرباعي، ثم اقسمه إلى مثلثين.

الخطوة 2 أنشئ مصفوفة لكل مثلث.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

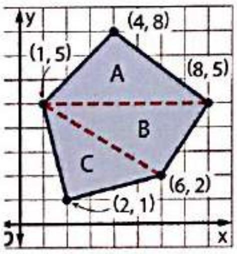
الخطوة 3 أدخل كل مصفوف في حاسبة بيانية، وأوجد det(A) و det(B).





الخطوة 4 اضرب القيمة المطلقة لكل محدد في $\frac{1}{2}$، وأوجد المجموع.
المساحة تساوي $\frac{1}{2}|-31| + \frac{1}{2}|-17|$ أو 24 وحدة مربعة.

b. أوجد مساحة مضلع بالرؤوس (1، 5)، (4، 8)، (8، 5)، (6، 2)، (2، 1).



الخطوة 1 ارسم خماسي الأضلاع، ثم اقسمه إلى ثلاثة مثلثات.

الخطوة 2 أنشئ مصفوفة لكل مثلث.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

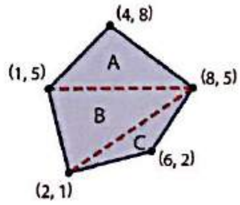
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة 3 أدخل كل مصفوفة في الحاسبة البيانية، وأوجد المحددات. المحددات هي 21− و21− و17−.

الخطوة 4 اضرب القيمة المطلقة لكل محدد في $\frac{1}{2}$ وأوجد المجموع. المساحة تساوي $\frac{1}{2}|-17| + \frac{1}{2}|-21| + \frac{1}{2}|-21|$ أو 29.5 وحدة مربعة.

نصيحة دراسية

قسمة المضلعات قد تكون هناك طرق عديدة لقسمة مضلع محدد إلى مثلثات. فعلى سبيل المثال، يمكن أيضًا تقسيم رباعي الأضلاع الموجود في المثال 2 على النحو المبين أدناه.



تمارين

أوجد مساحة المضلع باستخدام معطيات الرؤوس التالية.

1. (3, 2), (1, 9), (10, 12), (8, 3)
2. (−2, −4), (−11, −1), (−9, −8), (−1, −12)
3. (1, 3), (2, 9), (10, 11), (13, 7), (6, 2)
4. (−7, −6), (−10, 2), (−9, 8), (−5, 10), (8, 6), (13, 2)

الدرس

5-3 حل الأنظمة الخطية باستخدام المعكوسات وقاعدة كرامر

:: السابق

- تعلمتَ إيجاد محددات ومعكوسات المصفوفة 2×2 والمصفوفة 3×3.

:: الحالي

1. حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات العكسية (معكوس المصفوفات).
2. حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر.

:: لماذا؟

- تقوم مها بتنزيل البرامج المفضلة لها على مشغل الوسائط المحمول الخاص بها. ويتطلب برنامج الطبيعة ضعف مساحة الذاكرة اللازمة للمسرحية الهزلية. ويتطلب الفيلم ضعف مساحة الذاكرة اللازمة لبرنامج الطبيعة. وبمعرفة حجم الذاكرة الذي تم استخدامه، يمكنك استخدام المصفوفة العكسية (معكوس المصفوفة) لحل نظام المعادلات لإيجاد عدد كل نوع من البرامج التي قامت مها بتنزيلها.

المفردات الجديدة

نظام مربع square system
قاعدة كرامر Cramer's Rule

1 استخدام المصفوفات العكسية

إذا تساوى عدد المعادلات مع المتغيرات في نظام المعادلات الخطية، فإن مصفوفة المعاملات الخاصة به تكون مربعة ويُقال حينئذ إن النظام **نظام مربع**. وإذا كانت مصفوفة المعاملات المربعة هذه لها معكوس، فحينها يكون للنظام حل وحيد.

المفهوم الأساسي الأنظمة الخطية المربعة التي لها معكوس

لنفرض أن A هو مصفوفة المعاملات لنظام n من المعادلات الخطية في n من المتغيرات تحددها المعادلة $AX = B$. حيث X هو مصفوفة المتغيرات و B هو مصفوفة الثوابت. إذا كانت A لها معكوس، يكون لنظام المعادلات حل وحيد تحدده المعادلة $X = A^{-1}B$.

مثال 1 إيجاد حل نظام 2×2 باستخدام المصفوفة العكسية

استخدم المصفوفة العكسية لحل نظام المعادلات، إن أمكن.

$$2x - 3y = -1$$
$$-3x + 5y = 3$$

اكتب النظام في مصفوفة بالشكل $AX = B$.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

استخدم هذه الصيغة مع معكوس مصفوفة 2×2 لإيجاد المعكوس A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2(5) - (-3)(-3)} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

اضرب A^{-1} في B لحل النظام.

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

لذلك، يكون حل النظام هو $(4, 3)$.

تمرين موجّه

استخدم المصفوفة العكسية لحل نظام المعادلات، إن أمكن.

1A. $6x + y = -8$
$-4x - 5y = -12$

1B. $-3x + 9y = 36$
$7x - 8y = -19$

لحل نظام معادلات 3 × 3 باستخدام المصفوفة العكسية، استخدم الحاسبة.

مثال 2 من الحياة اليومية إيجاد حل نظام 3X3 باستخدام المصفوفة العكسية

المعرفة المالية تستثمر بدرية AED 20,000 بشراء ثلاثة سندات ذات عوائد سنوية متوقعة نسبتها 10% و 8% و 6%. وتكون الاستثمارات ذات العائد المتوقع الأعلى أكثر خطورة غالبًا من الاستثمارات الأخرى. وترغب بدرية في تحقيق متوسط عائد سنوي يبلغ AED 1340. فإذا كانت تريد استثمار مبلغ في السند ذي العائد 6% يساوي ثلاثة أضعاف المبلغ المستثمر في السندين الأخريين مجتمعين، فكم يكون المبلغ اللازم استثماره في كل سند؟

يمكن تمثيل استثمارها بالمعادلات

$$x + y + z = 20{,}000$$
$$3x + 3y - z = 0$$
$$0.10x + 0.08y + 0.06z = 1340.$$

حيث x و y و z تمثل المبالغ المستثمرة في السندات ذات العوائد السنوية 10% و 8% و 6% على التوالي.

اكتب النظام في مصفوفة بالشكل $AX = B$.

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0.10 & 0.08 & 0.06 \end{bmatrix}} \times \overset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \overset{B}{\begin{bmatrix} 20{,}000 \\ 0 \\ 1340 \end{bmatrix}}$$

استخدم حاسبة التمثيل البياني لإيجاد قيمة A^{-1}.

```
[A]-1
[[-3.25  -.25 50…
 [3.5    .5   -5…
 [.75   -.25  0 …
```

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3.25 & -0.25 & 50 \\ 3.5 & 0.5 & -50 \\ 0.75 & -0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

اضرب A^{-1} في B لحل النظام.

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}B \\ &= \begin{bmatrix} -3.25 & -0.25 & 50 \\ 3.5 & 0.5 & -50 \\ 0.75 & -0.25 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 20{,}000 \\ 0 \\ 1340 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2000 \\ 3000 \\ 15{,}000 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

حل النظام هو (2000, 3000, 15,000). إذًا، استثمرت بدرية AED 2000 في السند ذي العائد السنوي 10%، و AED 3,000 في السند ذي العائد السنوي 8%، و AED 15,000 في السند ذي العائد السنوي 6%.

التحقق يمكنك التحقق من الحل بإحلاله في النظام الأصلي.

$$2000 + 3{,}000 + 15{,}000 = 20{,}000$$
$$20{,}000 = 20{,}000 \checkmark$$
$$3(2{,}000) + 3(3{,}000) - 15{,}000 = 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$
$$0.10(2{,}000) + 0.08(3{,}000) + 0.06(15{,}000) = 1{,}340$$
$$1340 = 1340 \checkmark$$

تمرين موجّه

2. **الصناعة** خلال ثلاثة أعوام متتالية، أنتج مصنع لتجميع السيارات إجمالي 720,000 سيارة. فإذا كان عدد السيارات التي أُنتجت في العام الثاني تزيد عن العام الأول بعدد 50,000 سيارة، وكان عدد السيارات التي أُنتجت في العام الثالث تزيد عن الثاني بعدد 80,000، فكم عدد السيارات التي أُنتجت في كل عام؟

الربط بالحياة اليومية

السند بصورة أساسية عبارة عن إقرار بالمديونية تصدره شركة أو حكومة لتمويل عملياتها اليومية أو مشروع معين. فإذا استثمرت في السندات، فإنك تقرض أموالك لجهة إصدار السند لفترة زمنية محددة. وفي المقابل، تستعيد أموالك مضافًا إليها الفوائد.

المصدر: CNN

2 استخدام قاعدة كرامر

استخدام قاعدة كرامر طريقة أخرى لحل الأنظمة المربعة تُعرف باسم **قاعدة كرامر**. وفيها تُستخدم المحددات بدلاً من تقليل الصفوف أو المصفوفات العكسية (معكوس المصفوفات).

فكِّر في نظام 2 × 2 التالي.

$$ax + by = e$$
$$cx + dy = f$$

استخدم طريقة الحذف لإيجاد x.

$$\begin{aligned} adx + bdy &= ed \\ (+)\quad -bcx - bdy &= -fb \\ \hline (ad - bc)x \quad &= ed - fb \end{aligned}$$

إذًا، $x = \dfrac{ed - fb}{ad - bc.}$

وبالمثل، يتضح أن $y = \dfrac{af - ce}{ad - bc}$. ينبغي عليك أن تدرك أن مقام كل كسر بمثابة محدد مصفوفة معامل النظام $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. ويمكن التعبير عن كل من بسط ومقام كل حل باستخدام المحددات.

$$x = \frac{ed - fb}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{|A_x|}{|A|} \qquad y = \frac{af - ce}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{|A_y|}{|A|}$$

لاحظ أن البسطين $|A_x|$ و $|A_y|$ هما محددا المصفوفات التي تتكون باستبدال معامل x أو y على التوالي في مصفوفة المعامل بعمود الحدود الثابتة $\begin{matrix} e \\ f \end{matrix}$

من النظام الأصلي $\left[\begin{array}{cc:c} a & b & e \\ c & d & f \end{array}\right]$.

يمكن تعميم قاعدة كرامر على أنظمة n من المعادلات في n من المتغيرات.

المفهوم الأساسي قاعدة كرامر

لنفرض أن A هو مصفوفة المعاملات في نظام n من المعادلات الخطية في n من المتغيرات، وتحددها المعادلة $AX = B$. فإذا كان $\det(A) \neq 0$. فإن الحل الوحيد للنظام تعبر عنه المعادلة

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ x_3 = \frac{|A_3|}{|A|},\ \ldots,\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

حيث يتم الحصول على A_i باستبدال العمود i^{th} الخاص بـ A بعمود الحدود الثابتة B. وإذا كان المحدد $0 = (A)$، فإن $AX = B$ إما ليس لها حل أو لها عدد لا نهائي من الحلول.

مثال 3 استخدام قاعدة كرامر لحل نظام 2 × 2

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

$$3x_1 + 2x_2 = 6$$
$$-4x_1 - x_2 = -13$$

مصفوفة المعاملات هي $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$. احسب محدد A.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - (-4)(2) = 5$$

نظرًا لأن محدد A لا يساوي صفرًا، فبإمكانك استخدام قاعدة كرامر.

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -13 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{6(-1) - (-13)(2)}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -4 & -13 \end{vmatrix}}{5} = \frac{3(-13) - (-4)(6)}{5} = \frac{-15}{5} = -3$$

إذًا، الحل هو $(4, -3)$ أو $x_2 = -3$ و $x_1 = 4$. تحقق من الحل بالتعويض في النظام الأصلي.

انتبه!

القسمة على صفر تذكر أن قاعدة كرامر لا تنطبق عندما يكون محدد مصفوفة المعامل 0. وذلك لأن هذا قد يتسبب في القسمة على صفر، والتي تكون نتيجتها "غير محددة".

تمرين موجّه

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

3A. $2x - y = 4$
$5x - 3y = -6$

3B. $-9x + 3y = 8$
$2x - y = -3$

3C. $12x - 9y = -5$
$4x - 3y = 11$

مثال 4 استخدام قاعدة كرامر لحل نظام 3×3

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

$-x - 2y = -4z + 12$
$3x - 6y + z = 15$
$2x + 5y + 1 = 0$

مصفوفة المعاملات هي $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$. احسب محدد A.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -1[-6(0) - 5(1)] - (-2)[3(0) - 1(2)] + 4[3(5) - 2(-6)]$$

$$= -1(-5) + 2(-2) + 4(27) = 109$$

نظرًا لأن محدد A لا يساوي صفرًا، فبإمكانك استخدام قاعدة كرامر.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -2 & 4 \\ 15 & -6 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{109} = \frac{12[(-6)(0) - 5(1)] - (-2)[15(0) - (-1)(1)] + 4[15(5) - (-1)(-6)]}{109} = \frac{218}{109} = 2$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 12 & 4 \\ 3 & 15 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{109} = \frac{(-1)[15(0) - 1(-1)] - 12[3(0) - 2(1)] + 4[3(-1) - 2(15)]}{109} = \frac{-109}{109} = -1$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 3 & -6 & 15 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{109} = \frac{(-1)[(-6)(-1) - 5(15)] - (-2)[3(-1) - 2(15)] + 12[3(5) - 2(-6)]}{109} = \frac{327}{109} = 3$$

إذًا، الحل هو $(2, -1, 3)$ = $x = 2,\ y = -1,\ z = 3$.

التحقق تحقق من الحل بالتعويض في النظام الأصلي.

$$-(2) - 2(-1) = -4(3) + 12$$
$$0 = 0 \checkmark$$

$$3(2) - 6(-1) + 3 = 15$$
$$15 = 15 \checkmark$$

$$2(2) + 5(-1) + 1 = 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$

تمرين موجّه

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

4A. $8x + 12y - 24z = -40$
$3x - 8y + 12z = 23$
$2x + 3y - 6z = -10$

4B. $-2x + 4y - z = -3$
$3x + y + 2z = 6$
$x - 3y = 1$

قراءة في الرياضيات

استبدال الأعمدة الرمز $|A_x|$ يُقرأ كالآتي: محدد مصفوفة المعامل A مع عمود المعاملات x المستبدل بعمود الثوابت.

تمارين

استخدم المصفوفة العكسية لحل كل نظام معادلات، إن أمكن. (المثالان 1 و 2)

1. $5x - 2y = 11$
$-4x + 7y = 2$

2. $2x + 3y = 2$
$x - 4y = -21$

3. $-3x + 5y = 33$
$2x - 4y = -26$

4. $-4x + y = 19$
$3x - 2y = -18$

5. $2x + y - z = -13$
$3x + 2y - 4z = -36$
$x + 6y - 3z = 12$

6. $3x - 2y + 8z = 38$
$6x + 3y - 9z = -12$
$4x + 4y + 20z = 0$

7. $x + 2y - z = 2$
$2x - y + 3z = 4$
$3x + y + 2z = 6$

8. $4x + 6y + z = -1$
$-x - y + 8z = 8$
$6x - 4y + 11z = 21$

9. التنزيل قامت هداية بتنزيل بعض البرامج على مشغل الوسائط المحمول الخاص بها. وبشكل عام، تستهلك مسرحية هزلية مدتها 30 دقيقة مساحة 0.3 جيجابايت من الذاكرة، ويستهلك برنامج حواري مدته ساعة 0.6 جيجابايت، وفيلم مدته ساعتان يستهلك 1.2 جيجابايت. وقامت هداية بتنزيل 9 برامج بمجموع 5.4 جيجابايت. فإذا كانت قامت بتنزيل عدد مسرحيات هزلية يزيد عن عدد الأفلام بمقدار اثنين، فكم عدد كل نوع قامت بتنزيله؟ (مثال 2)

10. كرة السلة يعلم طارق أنه قد سجل 37 مرة بإجمالي نقاط يبلغ 70 نقطة حتى الآن في موسم كرة السلة هذا. ويود أن يعرف عدد الرميات الحرة، والرميات ذات النقطتين والثلاث نقاط التي أحرزها. وكان مجموع الرميات ذات النقطتين والثلاث نقاط يساوي ضعف عدد الرميات الحرة ناقص اثنين. فكم عدد الرميات الحرة والرميات ذات النقطتين والثلاث نقاط التي أحرزها طارق؟ (مثال 2)

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل فريد. (المثالان 3 و 4)

11. $-3x + y = 4$
$2x + y = -6$

12. $2x + 3y = 4$
$5x + 6y = 5$

13. $5x + 4y = 7$
$-x - 4y = -3$

14. $4x + \frac{1}{3}y = 8$
$3x + y = 6$

15. $2x - y + z = 1$
$x + 2y - 4z = 3$
$4x + 3y - 7z = -8$

16. $x + y + z = 12$
$6x - 2y - z = 16$
$3x + 4y + 2z = 28$

17. $x + 2y = 12$
$3y - 4z = 25$
$x + 6y + z = 20$

18. $9x + 7y = -30$
$8y + 5z = 11$
$-3x + 10z = 73$

19. رحلة بالسيارة توقفت مايسون مرتين خلال رحلة على الطريق للتزود بالوقود. موضح بالأسفل سعر البنزين لكل محطة. وقد اشترت مايسون إجمالي 33.5 لترًا وأنفقت 134.28 AED. استخدم قاعدة كرامر لتحديد عدد جالونات البنزين التي اشترتها مايسون مقابل 3.96 AED للتر. (مثال 3)

20. تخطيط جماعي تخطط لجنة تكريم دفعة التخرج لاستقبال 400 ضيف في اجتماع الحفل العاشر لها. ويمكن للضيوف اختيار واحد من بين ثلاثة اختيارات من الحلوى الموضحة بالأسفل. ويجب أن يستغرق الطاهي القائم على إعداد الحلوى 5 دقائق لكل فطيرة، و 8 دقائق لكل كعكة، و 12 دقيقة لكل كعكة جُبن. وكانت التكلفة الإجمالية لأصناف الحلوى 1170 AED. كما أمضى الطاهي 45 ساعة بالضبط في إعدادها. استخدم قاعدة كرامر لتحديد عدد الأطباق التي تم إعدادها من كل نوع من الحلوى. (مثال 4)

21. هواتف قامت كل من نهلة ونسرين ونورا بمراجعة أنظمة الهاتف الخاصة بهم. دفعت نهلة 52.90 AED مقابل 30 دقيقة إضافية من الألعاب، و 12 دقيقة من المكالمات، و 40 رسالة نصية. ودفعت نسرين 48.07 AED مقابل 18 دقيقة من الألعاب، و 15 دقيقة من المكالمات، و 55 رسالة نصية. ودفعت نورا 13.64 AED فقط مقابل 6 دقائق من الألعاب، و 7 دقائق من المكالمات. فإذا كان جميعهن يستخدمن النظام نفسه، فأوجد تكلفة كل خدمة. (مثال 4)

حُـلّ كل معادلة مصفوفة.

22. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 17 & -9 \end{bmatrix}$

26. لياقة بدنية تتدرب شيخة على مسافة نصف ماراثون وتستهلك أسبوعيًا جل وبسكويت ومشروبات طاقة. وقد استهلكت هذا الأسبوع 12 منتج طاقة بإجمالي 1450 سعرًا حراريًا و 310 جرامات من الكربوهيدرات. موضح بالأسفل المحتوى الغذائي لكل عنصر.

منتج الطاقة	جل	بسكويت	مشروب
السعرات الحرارية	100	250	50
الكربوهيدرات (g)	25	43	14

فكم عدد جل وبسكويت ومشروبات الطاقة التي استهلكتها شيخة هذا الأسبوع؟

حاسبة التمثيل البياني حُـلّ كل نظام معادلات باستخدام المصفوفات العكسية.

27. $2a - b + 4c = 6$
$a + 5b - 2c = -6$
$3a - 2b + 6c = 8$

28. $3x - 5y + 2z = 22$
$2x + 3y - z = -9$
$4x + 3y + 3z = 1$

29. $r + 5s - 2t = 16$
$-2r - s + 3t = 3$
$3r + 2s - 4t = -2$

30. $-4m + n + 6p = 17$
$3m - n - p = 5$
$-5m - 2n + 3p = 2$

أوجد قيم n بحيث لا يمكن حل النظام الذي تعبر عنه المصفوفة الموسعة المعطاة باستخدام المصفوفة العكسية.

31. $\left[\begin{array}{cc|c} n & -8 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$

32. $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & n & 4 \\ n & 2 & -5 \end{array}\right]$

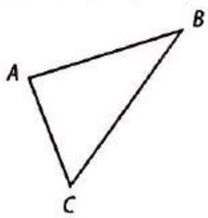
33. $\left[\begin{array}{cc|c} -5 & -9 & 3 \\ n & n & 11 \end{array}\right]$

34. $\left[\begin{array}{cc|c} n & -n & 0 \\ 7 & n & -8 \end{array}\right]$

35. مواد كيميائية تحتوي ثلاث سبائك من النحاس والفضة على 35% من الفضة الخالصة، و 55% من الفضة الخاصة، و 60% من الفضة الخالصة على التوالي. فكم المقدار الواجب خلطه من كل معدن للحصول على سبيكة بوزن 2.5 كيلو جرامات وتحتوي على 4.54% فضة إذا كان هناك 0.5 كيلو جرام زيادة في السبيكة 60% عن السبيكة 55%؟

36. متجر أغذية يبيع متجر أغذية إماراتي وجبات الشاورما الموضحة بالأسفل. في إحدى وجبات الغداء، باع المتجر مجموع 74 وجبة شاورما وكسب AED 320.50. وكان مجموع كمية اللحم المستخدم في إعداد وجبات الشاورما الصغيرة والكبيرة والضخمة الحجم 7.8 كيلوجراماً. وكان عدد وجبات الشاورما كبيرة الحجم المبيعة يزيد عن ضعف عدد وجبات الشاورما الضخمة المبيعة بمقدار واحد. فكم عدد وجبات الشاورما التي باعها المتجر خلال الغداء من كل نوع؟

37. الهندسة يبلغ محيط المثلث $\triangle ABC$ 89 ملليمترًا. وطول القطعة المستقيمة $\overline{AC}$ أقل من طول الضلعين الآخرين بمقدار 47 ملّيمترًا. ويزيد طول القطعة المستقيمة $\overline{BC}$ بمقدار 20 ملّيمترًا عن نصف طول القطعة المستقيمة $\overline{AB}$. استخدم نظام المعادلات لإيجاد طول كل ضلع.



أوجد معكوس كل مصفوفة، إن أمكن.

38. $\begin{bmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ e^{x} & e^{-3x} \end{bmatrix}$

39. $\begin{bmatrix} \frac{1}{x} & \frac{3}{x} \\ x & 2 \end{bmatrix}$

40. $\begin{bmatrix} \pi^{x} & 1 \\ 0 & \pi^{-2x} \end{bmatrix}$

41. $\begin{bmatrix} i & -3 \\ i^2 & 2i \end{bmatrix}$

لنفرض أن A و B مصفوفتان $n \times n$ ونفرض أن C و D و X مصفوفات $n \times 1$. أوجد حلاً لكل معادلة لإيجاد X. افترض وجود جميع المعكوسات.

42. $AX = BX - C$

43. $D = AX + BX$

44. $AX + BX = 2C - X$

45. $X + C = AX - D$

46. $3X - D = C - BX$

47. $BX = AD + AX$

48. حساب التفاضل والتكامل في حساب التفاضل والتكامل، يمكن الحصول على نظام المعادلات باستخدام المشتقات الجزئية. هذه المعادلات تضم λ، والتي تُسمى مضاعف لاجرانج. أوجد قيم x و y بحيث تحقق المعادلات $x + \lambda + 1 = 0;\ 2y + \lambda = 0;\ x + y + 7 = 0$.

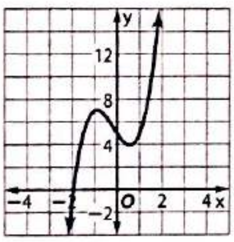
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

49. تحليل الخطأ تحاول عائشة ورنا حل النظام أدناه باستخدام قاعدة كرامر. فهل إجابة أي منهما صواب؟ اشرح استنتاجك.

$2x + 7y = 10$
$6x + 21y = 30$

رنا	عائشة
النظام له حل واحد ولكن لا يمكن إيجاده باستخدام قاعدة كرامر.	النظام ليس له حل لأن محدد مصفوفة المعامل يساوي صفرًا.

50. تحدٍ يمر المنحنى أدناه بالنقاط $(-2, -1)$، $(-1, 7)$، $(1, 5)$، $(2, 19)$. وتتخذ معادلة المنحنى الشكل $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



أوجد معادلة المنحنى من خلال حل نظام المعادلات باستخدام المصفوفة العكسية.

51. التبرير إذا كان $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وكانت A غير منفردة، فهل $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$؟ اشرح استنتاجك.

52. مسألة غير محددة الإجابة أعطِ مثالاً على نظام معادلات في متغيرين ليس له حل وحيد. ووضّح كيف أن النظام المعبر عنه بمعادلة مصفوفة ليس له حل.

53. الكتابة في الرياضيات صف أنواع الأنظمة الممكن حلها باستخدام كل طريقة. اشرح استنتاجك.

a. حذف جاوس-جوردان

b. المصفوفات العكسية

c. قاعدة كرامر

مراجعة شاملة

أوجد AB و BA؛ إن أمكن.

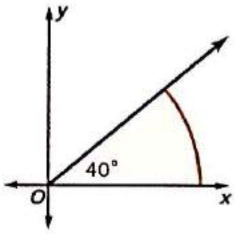
54. $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\5 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4 & 1\\2 & 7\end{bmatrix}$

55. $A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 6\\7 & 8 & 3\\11 & -5 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}17 & 2 & -4\\10 & -9 & 6\\1 & 0 & -8\end{bmatrix}$

حدد ما إذا كانت كل مصفوفة لها نموذج درجة الصف.

56. $\left[\begin{array}{ccc|c}0 & -3 & -6 & 4\\9 & -1 & -2 & -1\\3 & 1 & -2 & -3\\0 & 3 & -1 & 1\end{array}\right]$

57. $\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24\\0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right]$



.58 **ألعاب القوى** يجب أن تسقط الكرة الحديدية في لعبة رمي الجلة داخل القطاع 40°. يقع رأس الزاوية عند نقطة الأصل، ويمتد أحد الضلعين على طول المحور x. فإذا أسقط اللاعب الكرة عند نقطة إحداثياتها (18, 17)، فهل ستسقط الكرة داخل المنطقة المطلوبة؟ اشرح استنتاجك.

.59 **النجوم** تظهر بعض النجوم ساطعة أكثر من غيرها لقربها الشديد منا. والنصوع المطلق (أو القدر المطلق) M هو وحدة قياس مدى السطوع الذي يظهر عليه النجم إذا كان يبعد عن الأرض مسافة 10 فراسخ نجمية أو حوالي 32 سنة ضوئية. وكلما قل النصوع، دل ذلك على زيادة سطوع النجم. والنصوع المطلق تحدده المعادلة $M = m + 5 - 5\log d$، حيث d هو بُعد النجم عن الأرض مقيسًا بالفراسخ و m هو النصوع الظاهري للنجم.

النجم	النصوع الظاهري	المسافة (بالفرسخ النجمي)
سيريوس	−1.44	2.64
فيجا	0.03	7.76

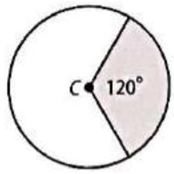
.a سيريوس وفيجا اثنان من النجوم الأكثر سطوعًا. فأيهما أكثر سطوعًا؟

.b أوجد النصوع المطلق لكل من سيريوس وفيجا.

.c أي النجمين أكثر سطوعًا في الحقيقة؟ بعبارة أخرى، أيهما له نصوع مطلق أقل؟

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

.60 **SAT/ACT** تقع النقطة C في مركز الدائرة بالشكل أدناه. تبلغ مساحة المنطقة المظللة 3π سنتيمترات مربعة. فما محيط المنطقة المظللة بالسنتيمترات؟



A $2\pi + 6$

B $2\pi + 9$

C $2\pi + 12$

D $3\pi + 6$

E $3\pi + 12$

.61 اشترت نبيلة في شهر مارس نغمتين عاديتين وأخريين مميزتين من مقدم خدمات الهاتف المحمول الذي تتعامل معه مقابل AED 8.96. وفي مايو، دفعت AED 9.46 مقابل نغمة عادية و 3 نغمات مميزة. فما سعر كل من النغمة العادية والمميزة؟

F AED 1.99, AED 2,49

G AED 2.29, AED 2,79

H AED 1.99, AED 2,79

J AED 2.49, AED 2,99

.62 **مراجعة** كل عام، يدلي طلاب مدرسة الإمارات الثانوية تصويتًا على الموضوع الرئيس لمهرجان الترحيب بالطلاب القدامى. حصل الموضوع "ليلة تحت النجوم" على 225 صوتًا. أما الموضوع "لحظة حياتي" فقد حصل على 480 صوتًا. فإذا كان 40% من طلاب العام قبل الأخير صوّتوا على موضوع النجوم، و 75% من طلاب العام الأخير على موضوع الحياة، وقد أدلى الطلاب كلهم بأصواتهم، فكم عدد طلاب العام قبل الأخير والعام الأخير في مدرسة الإمارات؟

A 854 طالبًا بالعام الأخير و 176 طالبًا بالعام قبل الأخير

B 705 طلاب بالعام الأخير و 325 طالبًا بالعام قبل الأخير

C 395 طالبًا بالعام الأخير و 310 طلاب بالعام قبل الأخير

D 380 طالبًا بالعام الأخير و 325 طالبًا بالعام قبل الأخير

.63 **مراجعة** ما حل $\frac{1}{8}x - \frac{2}{3}y + \frac{5}{6}z = -8$، $\frac{3}{4}x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{3}z = -12$، $\frac{3}{16}x - \frac{5}{8}y - \frac{7}{12}z = -25$؟

F $(-4, 6, 3)$

G $(-8, 12, 6)$

H $(-16, 24, 12)$

J ليس لها حل

5-3 مختبر تقنية التمثيل البياني
المصفوفات وعلم التشفير

:: التركيز

- استخدام حاسبة التمثيل البياني والمصفوفات لتشفير الرسائل وفك شفرتها.

علم التشفير هو دراسة الرسائل المشفرة. ويمكن استخدام المصفوفات لتشفير الرسائل بحيث لا يمكن قراءتها **إلا** بعد فك الشفرة باستخدام ***مفتاح فك الشفرة***.

الخطوة الأولى هي تحديد المفتاح الذي يمكن استخدامه لتشفير المصفوفة. ويجب أن يكون المفتاح مصفوفة **لها معكوس** في صيغة $n \times n$. الخطوة التالية هي تحويل الرسالة إلى أعداد وكتابتها في شكل مصفوفة. فكل حرف أبجدي يمثله عدد. ويستخدم العدد 0 لتمثيل مسافة فارغة.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

أخيرًا، يتم تشفير الرسالة بضربها في المفتاح.

نشاط 1 تشفير الرسالة

استخدم $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ **لتشفير الرسالة** SATURDAY AT NOON.

الخطوة 1 حوّل الرسالة إلى أعداد واكتبها في صورة مصفوفة.

S	A	T	U	R	D	A	Y	_	A	T	_	N	O	O	N
19	1	20	21	18	4	1	25	0	1	20	0	14	15	15	14

المفتاح هو مصفوفة 2×2. لكي نجعل ضرب المصفوفة ممكنًا، اكتب الرسالة على هيئة مصفوفة 2×8.

$$\begin{bmatrix} 19 & 1 \\ 20 & 21 \\ 18 & 4 \\ 1 & 25 \\ 0 & 1 \\ 20 & 0 \\ 14 & 15 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2 اضرب الرسالة المُحوّلة في المفتاح باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

```
[[18   -35]
 [-1   23 ]
 [14   -24]
 [-24  73 ]
 [-1   3  ]
 [20   -40]
 [-1   17 ]↓
```

الخطوة 3 تخلص من علامات ترقيم المصفوفة للكشف عن الرسالة المشفرة.

18 −35 −1 23 14 −24 −24 73 −1 3 20 −40 −1 17 1 12

نصيحة دراسية

التحويل أضف أصفارًا إلى نهاية الرسالة إذا احتجت إلى مدخلات إضافية لملء المصفوفة.

تمارين

استخدم $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ **لتشفير كل من الرسائل التالية.**

1. CALL ME
2. SEE YOU LATER
3. ORDER PIZZA

4. تحدٍ استخدم $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ لتشفير الرسالة MEET ME AT FIVE.

لفك تشفير رسالة ما، يجب إيجاد معكوس المفتاح. بعد ذلك تتم كتابة الرسالة المشفرة على هيئة مصفوفة ليكون الضرب ممكنًا. على سبيل المثال، إذا كان المفتاح مصفوفة $n \times n$، تُكتب الرسالة على هيئة مصفوفة $k \times n$، حيث k هو عدد الصفوف اللازمة لتضمين كل عدد في المصفوفة. وإذا لم توجد أحرف كافية لملء الصف، فأدخل "0" كمسافات. وأخيرًا، يتم ضرب المصفوفة المشفرة في معكوس المفتاح.

نشاط 2 فك تشفير الرسالة

استخدم معكوس $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ **لفك تشفير الرسالة 202 99 77 39 83 38.**

الخطوة 1 استخدم حاسبة التمثيل البياني لإيجاد معكوس المفتاح.

```
[A]-1
  [[-44  -5  -14]
   [16   2   5  ]
   [9    1   3  ]]
```

الخطوة 2 اكتب الرسالة المشفرة على هيئة مصفوفة. ستحتوي المصفوفة المشفرة على 3 أعمدة لأن المفتاح عبارة عن مصفوفة 3×3. وتكون المصفوفة 3×2 نظرًا لوجود أعداد تكفي لملء صفين. أدخل المصفوفة إلى حاسبة التمثيل البياني.

```
MATRIX[B]  2 ×3
[ 38      83      39    ]
[ 77      99      202   ]

2,3=202
```

الخطوة 3 استخدم حاسبة التمثيل البياني لضرب المصفوفة المشفرة في معكوس المفتاح.

```
[B][A]-1
     [[7   15 0 ]
      [14  15 23]]
```

الخطوة 4 تخلص من علامات ترقيم المصفوفة وحوّل الأعداد إلى أحرف.

7	15	0	14	15	23
G	O	_	N	O	W

تمارين

استخدم معكوس $\begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ **لفك شفرة الرسائل التالية.**

5. 128 −73 232 −135 300 −175 99 −56 83 −48 180 −104 300 −175

6. −27 17 38 −21 84 −49 21 −11 131 −76 201 −116 161 −93

7. 151 −88 150 −86 93 −54 −35 22 −5 3 191 −111 −30 18 182 −105

8. 102 −58 45 −26 −48 29 −69 42 39 −21 228 −133 141 −81 −19 12 228 −133

9. تحدٍ استخدم معكوس $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & -4 & -6 \\ 7 & 6 & -5 & 3 \\ 1 & 7 & 9 & 2 \end{bmatrix}$ لفك شفرة

126 265 −49 −34 198 347 193 96 174 239 49 72 177 286 −61 −27 48 200 70 −76 122 162 −21 35 81 190 −37 −63 130 331 214 17 67 267 94 −25 93 161 120 25.

اختبار نصف الوحدة

الدروس من 5-1 إلى 5-3

اكتب كل نظام معادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم أوجد حل النظام. (الدرس 5-1)

1. $2x - y = 13$
$2x + y = 23$

2. $x + y + z = 6$
$2x - y - z = -3$
$3x - 5y + 7z = 14$

حُـلّ كلًّ من أنظمة المعادلات التالية. (الدرس 5-1)

3. $3x + 3y = -8$
$6x - 5y = 28$

4. $-x + 8y - 2z = -37$
$2x + 5y - 11z = -7$
$4x - 7y + 6z = 4$

5. $-2x + 2y + z = 5$
$3x - 2y + 2z = 7$
$5x - y + 4z = 8$

6. $x - 5y + 8z = 7$
$-8x + 3y + 12z = -9$
$5x - 4y - 3z = 9$

7. رعاية الحيوانات اشترت علياء إجمالي 11.34 كيلوجرامات من طعام الأرانب والقطط وحبوب للطيور بمبلغ AED 367.30. ثم اشترت طعام أرانب إضافيًا بزيادة قدرها 4.5 كيلوجرامات عن حبوب الطيور. موضح بالأسفل تكلفة كيلوجرام لكل نوع من الطعام. (الدرس 5-1)

a. اكتب مجموعة من المعادلات الخطية للتعبير عن هذه الحالة.

b. حدد عدد الأرطال لكل نوع طعام اشترته علياء.

8. اختيار من متعدد أي مصفوفة غير منفردة؟ (الدرس 5-2)

A $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -5 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & -7 & 8 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 10 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 5 \\ 7 & 7 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

أوجد AB و BA؛ إن أمكن. (الدرس 5-2)

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -8 & 2 \end{bmatrix}$

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم أوجد معكوس المصفوفة، إن وُجد. (الدرس 5-2)

11. $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} -9 & -5 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

15. التمريض تعمل حفصة ممرضة بغرفة الطوارئ، وتكسب AED 24 في الساعة خلال نوبات العمل العادية، و AED 30 في الساعة عند العمل لوقت إضافي. ويوضح الجدول التالي ساعات العمل لحفصة خلال الأسابيع الثلاثة الماضية. (الدرس 5-2)

الأسبوع	الساعات العادية	الساعات الإضافية
1	35	7
2	38	0
3	40	9

a. استخدم المصفوفات لتحديد المبلغ الذي جنته حفصة خلال كل أسبوع.

b. خلال الأسبوع الرابع، عملت حفصة ساعات عمل عادية أكثر من ساعات العمل الإضافي بأربع مرات. حدد عدد الساعات التي عملتها إذا كانت قد جنت AED 1008.

استخدم مصفوفة عكسية لحل كل نظام معادلات، إن أمكن. (الدرس 5-3)

16. $2x - y = 6$
$3x + 2y = 37$

17. $2x + y + z = 19$
$3x - 2y + 3z = 2$
$4x - 6y + 5z = -26$

18. اختيار من متعدد أي من المصفوفات الموسعة يمثل الحلول لنظام المعادلات؟ (الدرس 5-3)

$$x + y = 13$$
$$2x - 3y = -9$$

F $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$

H $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$

G $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$

J $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد. (الدرس 5-3)

19. $2x - y = 6$
$4x - 2y = 12$

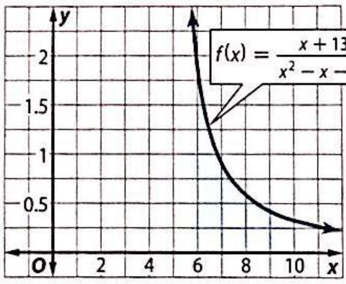
20. $3x - y - z = 13$
$3x - 2y + 3z = 16$
$-x + 4y - 8z = -9$

5-4 الكسور الجزئية

السابق
- قمتَ بتمثيل الدوال النسبية بيانيًا.

الحالي
1. كتابة تحليلات الكسور الجزئية (تجزئة الكسور) للتعابير النسبية ذات العوامل الخطية في المقام.
2. كتابة تحليلات الكسور الجزئية للتعابير النسبية ذات عوامل تربيعية أولية.

لماذا؟
- في حساب التفاضل والتكامل، سوف تتعلم إيجاد المساحة الواقعة تحت التمثيل البياني لدالة خلال فترة محددة. لإيجاد المساحة الواقعة تحت منحنى دالة نسبية مثل $f(x) = \frac{x+13}{x^2-x-20}$، ستحتاج أولاً إلى تحليل التعبير النسبي أو إعادة كتابته على هيئة مجموع تعبيرين أبسط.



المفردات الجديدة
كسر جزئي
partial fraction
تحليل الكسر الجزئي
partial fraction decomposition

1 العوامل الخطية

تعلمت أن العديد من الدوال كثيرة الحدود ذات معاملات حقيقية يمكن التعبير عنها في شكل ناتج ضرب العوامل الخطية والتربيعية. وبالمثل، يمكن التعبير عن العديد من الدوال النسبية في شكل مجموع لدالتين نسبيتين أبسط أو أكثر. بسطهما ثوابت حقيقية ومقامهما عبارة عن قوة لأحد العوامل الخطية أو عامل تربيعي غير قابل للاختزال. على سبيل المثال، يمكن كتابة الدالة النسبية $f(x)$ أدناه في شكل مجموع كسرين مقامهما عوامل خطية للمقام الأصلي.

$$f(x) = \frac{x+13}{x^2-x-20} = \frac{2}{x-5} + \frac{-1}{x+4}$$

وكل كسر في المجموع هو **كسر جزئي**. ومجموع هذه الكسور الجزئية يكوّن **تحليل الكسر الجزئي** للدالة النسبية الأصلية.

مثال 1 المقام ذو العوامل الخطية غير المكررة

أوجد تحليل الكسر الجزئي لـ $\frac{x+13}{x^2-x-20}$.

أعد كتابة التعبير في شكل كسور جزئية ذات بُسط ثابتة، A و B، ومقامات تعتبر عوامل خطية للمقام الأصلي.

$$\frac{x+13}{x^2-x-20} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+4}$$

$$x + 13 = A(x+4) + B(x-5)$$

$$x + 13 = Ax + 4A + Bx - 5B$$

$$1x + 13 = (A+B)x + (4A - 5B)$$

ساوِ بين معاملات الجانبين الأيمن والأيسر من المعادلة للحصول على نظام من معادلتين. لحل النظام، يمكنك كتابته في شكل مصفوفة $CX = D$ وإيجاد قيمة X.

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ 4A - 5B &= 13 \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 13 \end{bmatrix}$$

يمكنك استخدام الحاسبة البيانية لإيجاد قيمة $X = C^{-1}D$. إذًا، $A = 2$ و $B = -1$. استخدم التعويض لإيجاد تحليل الكسر الجزئي.

```
[C]-1*[D]
          [[2 ]
           [-1]]
```

$$\frac{x+13}{x^2-x-20} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+4}$$

$$\frac{x+13}{x^2-x-20} = \frac{2}{x-5} + \frac{-1}{x+4}$$

تمرين موجّه

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي.

1A. $\frac{2x+5}{x^2-x-2}$

1B. $\frac{x+11}{2x^2-5x-3}$

إذا كان التعبير النسبي $\frac{f(x)}{d(x)}$ مركبًا، وكانت درجة $f(x)$ أكبر من $d(x)$ أو تساويها، فيجب عليك استخدام خوارزمية القسمة $\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$ أولاً لإعادة كتابة التعبير على هيئة مجموع تعبير نسبي عادي وكثير الحدود. ثم حلل التعبير النسبي الباقي.

مثال 2 التعبير النسبي المركّب

أوجد تحليل الكسر الجزئي لـ $\frac{2x^2 + 5x - 4}{x^2 - x}$.

نظرًا لأن درجة البسط أكبر من درجة المقام أو تساويها، فإن التعبير النسبي مركّب. لإعادة كتابة التعبير، اقسم البسط على المقام باستخدام القسمة كثيرة الحدود.

$$\begin{array}{r} 2 \\ x^2 - x \overline{)\,2x^2 + 5x - 4} \\ (-)\ \underline{2x^2 - 2x} \\ 7x - 4 \end{array} \qquad \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

إذًا، يساوي التعبير الأصلي $2 + \frac{7x - 4}{x^2 - x}$

نظرًا لأن التعبير النسبي المتبقي عادي الآن، بإمكانك تحديد عوامل المقام في الصورة $x(x - 1)$ وإعادة كتابة التعبير باستخدام الكسور الجزئية.

$$\frac{7x - 4}{x^2 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1}$$
$$7x - 4 = A(x - 1) + B(x)$$
$$7x - 4 = Ax - A + Bx$$
$$7x - 4 = (A + B)x - A$$

اكتب نظام المعادلات التي تحصل عليه بمعادلة المعاملات وأوجد حله.

$$\begin{aligned} A + B &= 7 \\ -A &= -4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= 4 \\ B &= 3 \end{aligned}$$

لذلك، $\frac{2x^2 + 5x - 4}{x^2 - x} = 2 + \frac{7x - 4}{x^2 - x} = 2 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x - 1}$.

التحقق يمكنك التحقق من إجابتك بتبسيط التعبير الموجود بالجانب الأيمن من المعادلة.

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + 5x - 4}{x^2 - x} &= 2 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x - 1} \\ &= \frac{2x(x - 1)}{x(x - 1)} + \frac{4(x - 1)}{x(x - 1)} + \frac{3x}{x(x - 1)} \\ &= \frac{2(x^2 - x) + 4(x - 1) + 3x}{x(x - 1)} \\ &= \frac{2x^2 - 2x + 4x - 4 + 3x}{x^2 - x} \\ &= \frac{2x^2 + 5x - 4}{x^2 - x} \ \checkmark \end{aligned}$$

نصيحة دراسية

طريقة بديلة بشكل مقصود، تكون المعادلة $7x - 4 = A(x - 1) + B(x)$ التي نحصل عليها بعد التخلص من الكسور في المثال 2 حقيقية لجميع قيم x. ولذلك، يمكنك التعويض بأي قيمة مناسبة من قيم x لإيجاد قيم A و B. القيم المناسبة هي تلك القيم التي تجعل قيمة المقام الأصلي صفرًا. إذا كان $x = 0$، فإن $A = 4$. إذا كان $x = 1$، فإن $B = 3$.

تمرين موجّه

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي.

2A. $\frac{3x^2 + 12x + 4}{x^2 + 2x}$

2B. $\frac{x^4 - 3x^3 + x^2 - 9x + 4}{x^2 - 4x}$

إذا كان مقام التعبير النسبي يضم عاملاً خطيًا مكررًا لعدد n من المرات، فيجب أن يحتوي تحليل الكسر الجزئي على كسر جزئي له بسط ثابت مقابل كل قوة أُسيّة من 1 إلى n من العامل الخطي. على سبيل المثال، لإيجاد تحليل الكسر الجزئي لـ $\frac{5x-1}{x^3(x-1)^2}$، فيتعين عليك كتابة

$$\frac{5x-1}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{(x-1)^2}$$

مثال 3 المقام ذو العوامل الخطية المكررة

أوجد تحليل الكسر الجزئي لـ $\frac{-x^2-3x-8}{x^3+4x^2+4x}$.

هذا التعبير النسبي عادي؛ لذا، ابدأ بتحديد عوامل المقام بالشكل $x(x^2+4x+4)$ أو $x(x+2)^2$. نظرًا لأن العامل $(x+2)$ يحمل التعدد 2، قم بتضمين الكسور الجزئية مع مقامات x، و$(x+2)$، و$(x+2)^2$.

$$\frac{-x^2-3x-8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

$$-x^2-3x-8 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$$

$$-x^2-3x-8 = Ax^2 + 4Ax + 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx$$

$$-1x^2 - 3x - 8 = (A+B)x^2 + (4A+2B+C)x + 4A$$

بمجرد إيجاد نظام المعادلات الذي تحصل عليه من معادلة المعاملات، هناك طريقتان يمكن استخدامهما لإيجاد قيم A، وB، وC.

الطريقة 1 يمكنك كتابة نظام المعادلات وحله باستخدام الطريقة ذاتها في المثال 2.

$$\begin{aligned} A + B &= -1 \\ 4A + 2B + C &= -3 \\ 4A &= -8 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} A &= -2 \\ B &= 1 \\ C &= 3 \end{aligned}$$

الطريقة 2 طريقة أخرى لحل هذا النظام هي مساواة x بقيمة مناسبة لحذف أحد متغيرات المعادلة التي تنشأ بضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر.

$$-x^2-3x-8 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$$

$$-(0)^2 - 3(0) - 8 = A(0+2)^2 + B(0)(0+2) + C(0)$$

$$-8 = 4A$$

$$-2 = A$$

$$-x^2-3x-8 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$$

$$-(-2)^2 - 3(-2) - 8 = A(-2+2)^2 + B(-2)(-2+2) + C(-2)$$

$$-6 = -2C$$

$$3 = C$$

عوّض بهذه القيم عن A و C وبأي قيمة عن x في المعادلة لإيجاد قيمة B.

$$-x^2-3x-8 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$$

$$-1^2 - 3(1) - 8 = -2(1+2)^2 + B(1)(1+2) + 3(1)$$

$$-12 = -15 + 3B$$

$$B = 1$$

إذًا، $\frac{-x^2-3x-8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{-2}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^2}$.

تمرين موجّه

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي.

3A. $\frac{x+2}{x^3-2x^2+x}$

3B. $\frac{x+18}{x^3-6x^2+9x}$

نصيحة دراسية

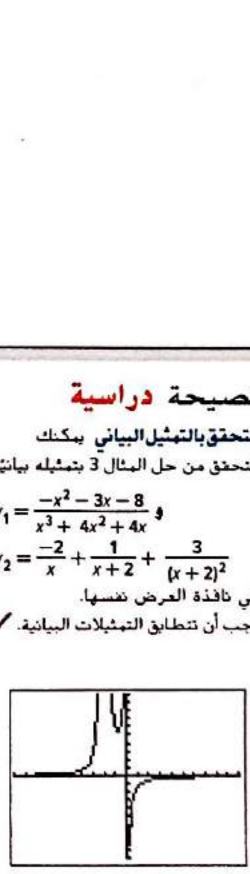
التحقق بالتمثيل البياني يمكنك التحقق من حل المثال 3 بتمثيله بيانيًا

$y_1 = \frac{-x^2-3x-8}{x^3+4x^2+4x}$ و

$y_2 = \frac{-2}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^2}$

في نافذة العرض نفسها.

يجب أن تتطابق التمثيلات البيانية. ✔



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

2 العوامل التربيعية الأولية

العوامل التربيعية الأولية إذا كان مقام التعبير النسبي يحتوي على عامل تربيعي أولي، فيجب أن يحتوي تحليل الكسر الجزئي على كسر جزئي له بسط خطي بالشكل $Bx + C$ لكلٍ من قوى هذا العامل.

مثال 4 المقام ذو العوامل التربيعية الأولية

أوجد تحليل الكسر الجزئي للتعبير $\frac{x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 5x + 16}{x(x^2+4)^2}$.

هذا التعبير عادي. يضم المقام عاملاً خطيًا واحدًا وعاملاً تربيعيًا أوليًا واحدًا يحمل المضاعفة 2.

$$\frac{-x^2-3x-8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

$$x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 5x + 16 = A(x^2+4)^2 + (Bx + C)x(x^2+4) + (Dx + E)x$$

$$x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 5x + 16 = Ax^4 + 8Ax^2 + 16A + Bx^4 + Cx^3 + 4Bx^2 + 4Cx + Dx^2 + Ex$$

$$1x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 5x + 16 = (A + B)x^4 + Cx^3 + (8A + 4B + D)x^2 + (4C + E)x + 16A$$

اكتب نظام المعادلات التي تحصل عليه بمعادلة المعاملات وأوجد حله.

$A + B = 1$	$A = 1$
$C = -2$	$B = 0$
$8A + 4B + D = 8$	$C = -2$
$4C + E = -5$	$D = 0$
$16A = 16$	$E = 3$

لذلك، $\frac{x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 5x + 16}{x(x^2+4)^2} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2+4} + \frac{3}{(x^2+4)^2}$.

انتبه!

العوامل التربيعية الأولية الطريقة البديلة التي قُدّمت في المثالين 2 و 3 ليست فعالة مثل تلك المقدمة في المثال 4 عندما يضم مقام التعبير النسبي عاملاً تربيعيًا أوليًا. وهذا بسبب عدم وجود قيم مناسبة كافية لـ x أو عدم وجود قيم على الإطلاق.

تمرين موجّه

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي.

4A. $\frac{x^3 + 2x}{(x^2+1)^2}$

4B. $\frac{4x^3 - 7x}{(x^2 + x + 1)^2}$

ملخص المفهوم تحليل الكسور الجزئية بالصيغة $f(x)/d(x)$

1. إذا كانت درجة $f(x) \leq$ درجة $d(x)$، استخدم القسمة المطولة كثيرة الحدود وخوارزمية القسمة لكتابة $\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$ ثم طبّق تحليل الكسور الجزئية على $\frac{r(x)}{d(x)}$.

2. إذا كان $\frac{f(x)}{d(x)}$ كسرًا عاديًا، فقم بتحليل $d(x)$ إلى العوامل على شكل ناتج للعوامل الخطية و/أو العوامل التربيعية الأولية.

3. لكل عامل يحمل الصيغة $(ax + b)^n$ في المقام، يجب أن يحتوي تحليل الكسر الجزئي على مجموع n من الكسور

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \ldots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

حيث $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ أعداد حقيقية.

4. لكل عامل تربيعي أولي يتكرر عدد n من المرات في المقام، فيجب أن يحتوي تحليل الكسر الجزئي على مجموع n من العوامل

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2+bx+c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{B_3x + C_3}{(ax^2+bx+c)^3} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

حيث $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ و $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ أعداد حقيقية.

5. تحليل الكسر الجزئي للدالة الأصلية هو مجموع $q(x)$ من الجزء 1 والكسور في الجزأين 3 و 4.

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي. (مثال 1)

1. $\frac{x+1}{x^2+5x+6}$
2. $\frac{x-18}{x^2-13x+42}$
3. $\frac{x+13}{x^2+7x+12}$
4. $\frac{x+12}{x^2+14x+48}$
5. $\frac{x+6}{-2x^2-19x-45}$
6. $\frac{x+7}{2x^2+15x+28}$

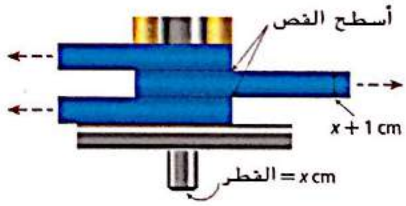
أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مركب. (المثال 2)

7. $\frac{3x^2+x-4}{x^2-2x}$
8. $\frac{-5x^2-30x-21}{x^2+7x}$
9. $\frac{-2x^3+4x^2+22x-32}{x^3+2x^2-8x}$
10. $\frac{x^4-2x^3-2x^2+8x-6}{x^2-2x}$
11. $\frac{x^3+12x^2+33x+2}{x^2+8x+15}$
12. $\frac{x^4-9x^3+24x^2-4x-12}{x^3-6x^2+8x}$

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي به عوامل مكررة في المقام. (المثال 3)

13. $\frac{x^2-3}{x^3+2x^2+x}$
14. $\frac{5x^2-18x+24}{x^3-4x^2+4x}$
15. $\frac{-x^2-22x-50}{x^3+10x^2+25x}$
16. $\frac{-5x^2-6x+16}{x^3+8x^2+16x}$
17. $\frac{17x+256}{x^3-16x^2+64x}$
18. $\frac{-10x-108}{x^3+12x^2+36x}$

19. **الهندسة** يمكن تقريب مجموع متوسط إجهاد الشد والقص في القضيب الموضح بالأسفل بـ $s(x)=\frac{20x+10\pi x+20}{\pi x^3+\pi x^2}$، حيث x هي قطر الوتد. (مثال 3)



a. أوجد تحليل الكسر الجزئي.

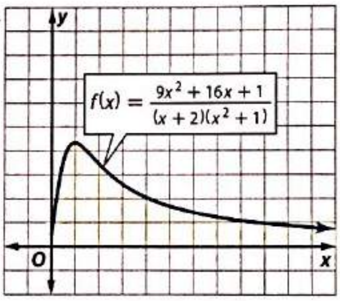
b. مثّل بيانيًا كل من $s(x)$ والإجابة عن الجزء a في نافذة العرض نفسها.

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي به عوامل تربيعية أولية في المقام. (مثال 4)

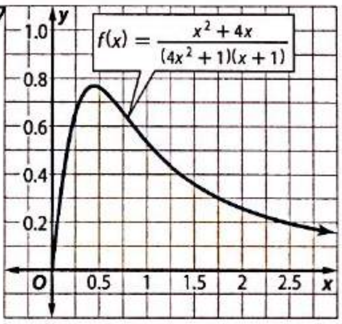
20. $\frac{x^3+5x-5}{(x^2+4)^2}$
21. $\frac{3x^4+4x^2+8x+18}{x(x^2+3)^2}$
22. $\frac{4x^4+x^2-25x+32}{x^5-4x^3+4x}$
23. $\frac{8x^3-48x+7}{(x^2-6)^2}$
24. $\frac{-5x^3-10x^2-6x+4}{(x^2+2x+3)^2}$
25. $\frac{4x^3-12x^2-5x+20}{(x^2-3x+3)^2}$

حساب التفاضل والتكامل في حساب التفاضل والتكامل، يمكنك إيجاد مساحة المنطقة الموجودة بين التمثيل البياني لدالة نسبية والمحور x الواقعة على مجال مقيد. الخطوة الأولى في هذه العملية هي كتابة تحليل الكسر الجزئي للتعبير النسبي. أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي.

26.



27.



أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي. ثم استخدم الحاسبة البيانية للتحقق من إجابتك.

28. $\frac{x+4}{3x^2-x-2}$
29. $\frac{5x^2-2x+8}{x^3-4x}$
30. $\frac{4x^2-3x+3}{4x(x-1)^2}$
31. $\frac{x^2+x+5}{(x^2+3)^2}$
32. $\frac{2x^3}{(x-1)^2(x+1)^2}$
33. $\frac{2x^3+12x^2-3x+3}{x^2+6x+5}$

34. أوجد تعبيرين نسبيين مجموعهما $\frac{x+4}{3x^2-x-2}$.

35. أوجد ثلاثة تعابير نسبية مجموعها $\frac{6-x}{x^3+2x^2+x}$.

أوجد A، وB، وC، وD بدلالة r و t.

36. $\frac{rx-t}{x^2-x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$

37. $\frac{4x^2+rx+2t}{x^2+3x}=4+\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}$

38. $\frac{rx+t}{x^3+x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$

39.

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي.

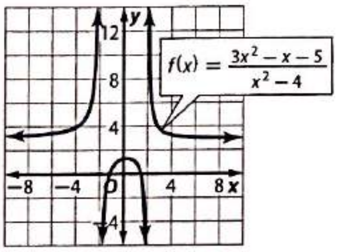
40. $\dfrac{x^3+2x-1}{(x^2-x-2)^2}$

41. $\dfrac{x^3+4}{(x^2-1)(x^2+3x+2)}$

42. $\dfrac{4x^3+x^2-3x+3}{x(x-1)^2}$

43. $\dfrac{7x^7+2x^6-13x^5+32x^4-19x^3+8x^2-7x+2}{x(x-1)^2(x+2)(x^2+1)}$

44. **تمثيلات متعددة** في هذه المسألة، سوف تكتشف العلاقة بين تحليل الكسر الجزئي لدالة نسبية وتمثيلها البياني. تأمل الدالة النسبية الموضحة بالأسفل.



a. **لفظيًا** صف السلوك الطرفي والخط المقارب الأفقي والرأسي للدالة.

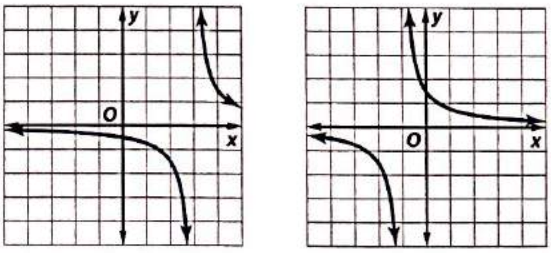
b. **تحليليًا** اكتب تحليل الكسر الجزئي لـ $f(x)$.

c. **بيانيًا** مثّل كل حد مضاف في تحليل الكسر الجزئي الذي كتبته في الجزء b بيانيًا في شكل دالة منفصلة.

d. **لفظيًا** قارن التمثيلات البيانية من الجزء c مع التمثيل البياني لـ $f(x)$ والتحليل الذي كتبته في الجزء b.

e. **تحليليًا** خمن كيف يمكن استخدام تحليل الكسر الجزئي لتمثيل دالة نسبية بيانيًا.

45. **تحليل التمثيل البياني** الدوال النسبية الموضحة تكوّن تحليل الكسر الجزئي لـ $f(x)$.



حدد أي من الدوال الأربع المذكورة بالأسفل قد تكون الدالة الأصلية $f(x)$.

I. $f(x)=\dfrac{6}{x^2-2x-3}$

II. $f(x)=\dfrac{6}{x^2+2x-3}$

III. $f(x)=\dfrac{6}{x^2+4x+3}$

IV. $f(x)=\dfrac{6}{x^2-4x+3}$

مسائل مهارات التفكير العليا — استخدام مهارات التفكير العليا

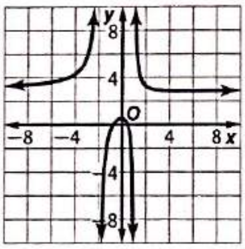
التبرير استخدم تحليل الكسر الجزئي لـ $f(x)$ لشرح كل مما يلي.

46. إذا كان $f(x)=\dfrac{-2x^3-7x^2+13x+43}{(x-2)(x+3)^2}$ فاشرح لما $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-2$.

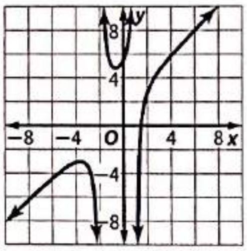
47. إذا كان $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{(x+1)^3}$، إذًا ماذا تكون $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$؟

تحدٍّ صِل التمثيل البياني لكل دالة نسبية بمعادلته.

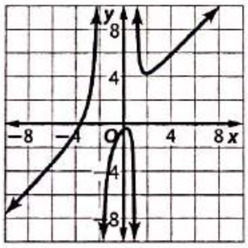
48.



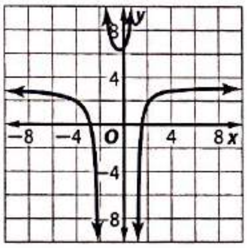
49.



50.



51.



a. $y=x+2+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{-3}{x+2}$

b. $y=x+2+\dfrac{-2}{x-1}+\dfrac{3}{x+2}$

c. $y=3+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{-3}{x+2}$

d. $y=3+\dfrac{-2}{x-1}+\dfrac{3}{x+2}$

التبرير حدد ما إذا كانت العبارات التالية صواب أم خطأ. اشرح استنتاجك.

52. إذا كان $f(x)=\dfrac{x^3+8}{(x^2-1)(x-2)}$، فإن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=8$.

53. تحليل الكسر الجزئي للدالة $f(x)=\dfrac{-4x^4+5x^3+27x^2-11x-45}{x(x^2-3)^2}$ هو $\dfrac{-5}{x}+\dfrac{4+x}{(x^2-3)}+\dfrac{x^2+1}{(x^2-3)^2}$.

54. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب تعبيرًا نسبيًا بالشكل $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ يحتوي فيه تحليل الكسر الجزئي على كل من المقامات التالية.

a. عوامل خطية غير مكررة فقط

b. عامل خطي مكرر واحد على الأقل

55. **الكتابة في الرياضيات** صف الخطوات المستخدمة للحصول على تحليل الكسر الجزئي لتعبير نسبي.

مراجعة شاملة

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

56. $x + y + z = 6$
$2x + y - 4z = -15$

57. $a - 2b + c = 7$
$6a + 2b - 2c = 4$
$5x - 3y + z = -10$

58. $p - 2r - 5t = -1$
$p + 2r - 2t = 5$
$4a + 6b + 4c = 14$
$4p + r + t = -1$

59. **المالية** اشترت شيماء أسهمًا في ثلاث شركات لأحد مشاريع الصف الدراسي. فاشترت 150 سهمًا في شركة مرافق، و 100 سهم في شركة كمبيوتر، و 200 سهم في شركة أغذية. وفي نهاية المشروع، "باعت" كل أسهمها.

الشركة	سعر الشراء للسهم (AED)	سعر البيع للسهم (AED)
المرافق	54.00	55.20
الكمبيوتر	48.00	58.60
الأغذية	60.00	61.10

a. نظّم البيانات في مصفوفتين واستخدم ضرب المصفوفة لإيجاد المبلغ الكلي الذي أنفقته شيماء على الأسهم.

b. اكتب مصفوفتين واستخدم ضرب المصفوفة لإيجاد المبلغ الكلي الذي حصلت عليه مقابل بيع الأسهم.

c. كم المبلغ الذي "جنته" شيماء أو "خسرته" في هذا المشروع؟

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

60. $\csc\theta \cos\theta \tan\theta$

61. $\sec^2\theta - 1$

62. $\frac{\tan\theta}{\sin\theta}$

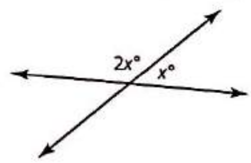
63. **الطب** قد يستخدم الأطباء شوكة رنانة يرتجع صداها بتردد معين كوسيلة مساعدة لتشخيص مشكلات السمع. يمكن عمل نموذج للموجات الصوتية التي تصدر عن الشوكة الرنانة باستخدام دالة sine الزاوية.

a. إذا كانت سعة دالة الـ sine هي 0.25. فاكتب المعادلات الخاصة بالشوكة الرنانة التي يرتجع صداها بترددات 64 و 256 و 512 هرتز.

b. كيف تختلف فترات الشوكات الرنانة؟

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

64. SAT/ACT في الشكل، ما قيمة x؟



A 40
B 45
C 60
D 75
E 90

65. حلل $\frac{3p-1}{p^2-1}$ إلى كسور جزئية.

F $\frac{2}{p+1} + \frac{1}{p-1}$
G $\frac{2}{p-1} + \frac{1}{p+1}$
H $\frac{2}{p+1} - \frac{1}{p-1}$
J $\frac{2}{p-1} - \frac{1}{p+1}$

66. **مراجعة** تقوم آلة رش المياه بسقي قطاع دائري من العشب قطره 20 مترًا تقريبًا. قرر مالك المنزل أن وضع آلة الرش في النقطة (5 ,7) سوف تزيد مساحة العشب المسقي للحد الأقصى. أي معادلة تمثل حد المنطقة التي تسقيها آلة الرش؟

A $(x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 100$
B $(x + 7)^2 - (y + 5)^2 = 100$
C $(x - 7)^2 - (y + 5)^2 = 100$
B $(x + 7)^2 - (y + 5)^2 = 100$

67. **مراجعة** أي مما يلي هو ناتج جمع $\frac{x+2}{x+3}$ و $\frac{4}{x^2+x-6}$؟

F $\frac{-3x-9}{x^2+x-6}$
G $\frac{x^2-3x-24}{x^2+x-6}$
H $\frac{x^2}{x^2+x-6}$
J $\frac{x^2+x-1}{x^2+x-6}$

5-5 البرمجة الخطية

:: السابق	:: الحالي	:: لماذا؟
• قمت بحل أنظمة المتباينات الخطية.	• 1 إستخدام البرمجة الخطية لحل التطبيقات. 2 التعرف على الحالات التي لا يكون لها حلول أو لها أكثر من حل واحد لتطبيق البرمجة الخطية.	• بوجه عام، تسعى الشركات جاهدة إلى تقليل التكاليف إلى أدنى حد ممكن من أجل تعظيم الأرباح. ويُطلق على العوامل التي تتسبب في تكاليف الأعمال أو تؤدي إلى زيادتها والتي تحد أو تقلل من الأرباح اسم قيود الأعمال. بالنسبة لشركة شحن، قد يتمثل أحد القيود في عدد الساعات في اليوم التي يستطيع سائق الشاحنة خلالها القيادة بشكل آمن. أما في حالة مركز رعاية نهارية، فقد تتمثل أحد القيود في لائحة حكومية تحد من عدد الأطفال لكل مقدم للرعاية بالنسبة لفئات عمرية معينة.

المفردات الجديدة
الحل الأمثل optimization
برمجة خطية linear programming
دالة الهدف objective function
قيود constraints
حلول ممكنة feasible solutions
حلول مثلى متعددة multiple optimal solutions
غير محدودة unbounded

1 البرمجة الخطية تنطوي العديد من التطبيقات في مجال الأعمال والاقتصاد على **الأمثلية (البحث عن الحل الأمثل)**؛ وهي عملية إيجاد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى لكمية معينة. وعندما تكون الكمية المطلوب تحقيق الأمثلية لها ممثلةً بدالة خطية، فإن هذه العملية تُسمى **برمجة خطية**.

تتكون مسألة البرمجة الخطية ثنائية الأبعاد من دالة خطية مطلوب تحقيق الأمثلية لها تُسمى **دالة الهدف**. وهي تتألف من الصيغة $f(x, y) = ax + by + c$ ونظام من المتباينات الخطية يُسمى **قيود**. وتكون مجموعة حل نظام المتباينات عبارة عن مجموعة من **الحلول الممكنة أو المحتملة**، والتي تكون نقاطًا تأخذ الصيغة (x, y).

تذكر من الدرس 5-0 أن حل نظام المتباينات الخطية هو مجموعة من الأزواج المرتبة التي تحقق كل متباينة. وبيانيًا، يكون الحل هو تقاطع المناطق التي تمثل مجموعات حل المتباينات في النظام.

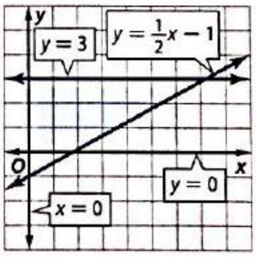
على سبيل المثال، يتمثل حل النظام أدناه في المنطقة المظللة كما هو موضح في التمثيل البياني.

$y \geq \frac{1}{2}x - 1$

$y \leq 3$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

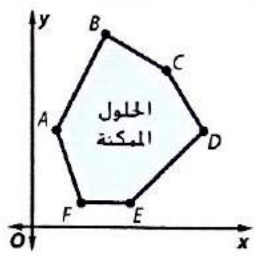


لنفترض أن المطلوب إيجاد القيمة العظمى للدالة $f(x, y) = 3x + 5y$ مع مراعاة القيود الواردة في النظام أعلاه. ونظرًا لأن المنطقة المظللة التي تمثل مجموعة الحلول الممكنة تحتوي على عدد لا نهائي من النقاط، فسيكون من المستحيل إيجاد قيمة $f(x, y)$ لجميعها. ولحسن الحظ، تقدم نظرية الرأس إستراتيجية لإيجاد الحل، إن وُجد.

المفهوم الأساسي نظرية الرأس المتعلقة بالحل الأمثل

الشرح إذا كان من الممكن إيجاد الحل الأمثل لمسألة برمجة خطية، فسوف تظهر القيمة المثلى عند إحدى رؤوس المنطقة التي تمثل مجموعة الحلول الممكنة.

مثال القيمة العظمى أو الصغرى للدالة $f(x, y) = ax + by + c$ عبر مجموعة الحلول الممكنة الممثلة بيانيًا تظهر عند النقطة A أو B أو C أو D أو E أو F.



المفهوم الأساسي البرمجة الخطية

لحل مسألة برمجة خطية، اتبع الخطوات التالية.

الخطوة 1 مثّل منطقة الحل الخاص بنظام القيود بيانيًا.

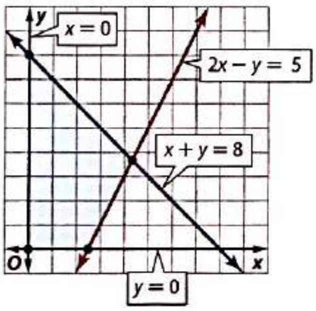
الخطوة 2 أوجد إحداثيات رؤوس المنطقة الناتجة.

الخطوة 3 أوجد قيمة دالة الهدف عند كل رأس لتحديد أي من قيمتي x و y. ، تحقق القيمة عظمى أو صغرى إن وُجدت .

مثال 1 زيادة دالة الهدف وإنقاصها إلى أقصى حد

أوجد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y) = x + 3y$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود التالية.

$x + y \leq 8$
$2x - y \leq 5$
$x \geq 0$
$y \geq 0$



ابدأ بتمثيل النظام المعطى للمتباينات الأربع بيانيًا. ويتمثل حل النظام، الذي يشكل مجموعة الحلول الممكنة لدالة الهدف، في المنطقة المظللة، بما في ذلك القطع الحدودية الخاصة بها.

تتمتع منطقة الحلول الممكنة متعددة الأضلاع بأربع رؤوس. وتوجد إحداها عند النقطة (0, 0).

أوجد حل كل من الأنظمة الثلاثة التالية لإيجاد إحداثيات الرؤوس المتبقية.

نظام المعادلات الحدودية	$x + y = 8$ $2x - y = 5$	$2x - y = 5$ $y = 0$	$x + y = 8$ $x = 0$
الحل (نقطة الرأس)	$\left(\frac{13}{3}, \frac{11}{3}\right)$	$\left(\frac{5}{2}, 0\right)$	$(0, 8)$

أوجد قيمة دالة الهدف $f(x, y) = x + 3y$ عند كل رأس من الرؤوس الأربع.

$f(0, 0) = 0 + 3(0) = 0$ ⟵ **القيمة الصغرى لـ $f(x, y)$**

$f\left(\frac{5}{2}, 0\right) = \frac{5}{2} + 3(0) = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{13}{3}, \frac{11}{3}\right) = \frac{13}{3} + 3\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{46}{3} = 15\frac{1}{3}$

$f(0, 8) = 0 + 3(8) = 24$ ⟵ **القيمة العظمى لـ $f(x, y)$**

إذًا، القيمة العظمى لـ f هي 24 عندما يكون $x = 0$ و $y = 8$. القيمة الصغرى لـ f هي 0 عندما يكون $x = 0$ و $y = 0$.

تمرين موجّه

أوجد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y)$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة.

1A. $f(x, y) = 2x + 5y$
$x + y \geq -3$
$6x + 3y \leq 24$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

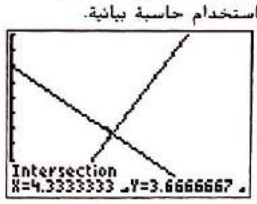
1B. $f(x, y) = 5x - 6y$
$y \leq 6$
$y \geq 2x - 2$
$y \geq -3x - 12$

نصيحة دراسية

مجموعة المضلع المحدب
المجموعة الحدودية من النقاط التي تقع على أو بداخل مضلع محدب مُمثّل بيانيًا على مستوى إحداثي تُسمى مجموعة *المضلع المحدب*.

تلميح تقني

إيجاد الرؤوس تذكر من الوحدة 0 أنه توجد طريقة أخرى لإيجاد الرأس وهي حساب تقاطع الخطوط الحدودية للقيدين باستخدام حاسبة بيانية.



[0, 10] scl: 1 by [0, 10] scl: 1

مثال 2 من الحياة اليومية تعظيم الربح

الأعمال يزرع مركز أشجار بساتين فقط نباتات العرعر والأزالية في دفيئة زراعية تتسع ما يصل إلى 3000 شجيرة. ونظرًا لتكاليف العمالة، يجب أن يكون عدد شجيرات الأزالية المزروعة أقل من أو يساوي 1200 زائد ثلاث مرات عدد شجيرات العرعر. ويشار إلى أن طلب السوق على الأزالية يعادل مرتين على الأقل من الطلب على العرعر. ويحقق المركز ربحًا قدره AED 2 لكل شجيرة عرعر و AED 1.50 لكل شجيرة أزالية.

a. اكتب دالة هدف، وقائمة بالقيود التي تمثل الحالة المبينة.

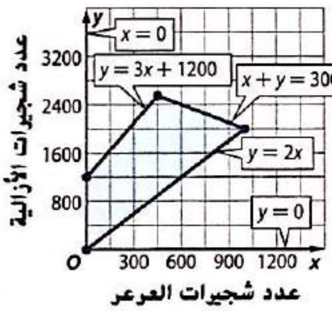
افترض أن x يمثل عدد شجيرات العرعر الناتجة و y يمثل عدد شجيرات الأزالية. إذًا، يتم التعبير عن دالة الهدف عن طريق المعادلة $f(x, y) = 2x + 1.5y$.

ويتم التعبير عن القيود عن طريق التالي.

$$y \geq 2x$$
$$y \leq 3x + 1200$$
$$x + y \leq 3000$$

نظرًا لأن x و y لا يمكن أن يكونا سالبين، فإن القيود الإضافية تتمثل في أن $x \geq 0$ و $y \geq 0$.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا للمنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء (a) لإيجاد عدد الشجيرات لكل نبتة يجب على الشركة زراعتها لتحقيق أقصى ربح ممكن.



تتسم المنطقة المضلعة المظللة بأن لها أربع نقاط رأسية عند (0, 0) و(0, 1200) و(450, 2550) و(1000, 2000).

أوجد قيمة $f(x, y) = 2x + 1.5y$ عند كل رأس من الرؤوس الأربع.

$$f(0, 0) = 2(0) + 1.5(0) = 0$$
$$f(0, 1200) = 2(0) + 1.5(1200) = 1800$$
$$f(450, 2550) = 2(450) + 1.5(2550) = 4725$$
$$f(1000, 2000) = 2(1000) + 1.5(2000) = 5000 \longleftarrow$$ القيمة العظمى لـ $f(x, y)$

نظرًا لأن f أكبر عند (1000, 2000)، فإنه يجب على مركز أشجار البساتين زراعة 1000 شجيرة عرعر و 2000 شجيرة أزالية لتحقيق ربح أقصى قدره AED 5000.

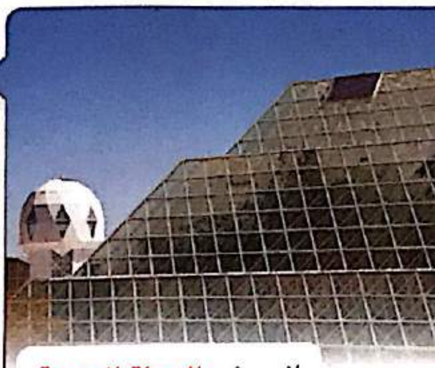
تمرين موجّه

2. **التصنيع** مصنع خشب يستطيع إنتاج ما يصل إلى 600 وحدة من المنتج كل أسبوع. ولتلبية احتياجات عملائه المعتادين، يجب على المصنع أن ينتج على الأقل 150 وحدة من الخشب المنشور و 225 وحدة من الخشب الرقائقي. ويحقق المصنع ربحًا قدره AED 30 لكل وحدة من الخشب المنشور و AED 45 لكل وحدة من الخشب الرقائقي.

A. اكتب دالة هدف وقائمة بالقيود التي تمثل الحالة المبينة.

B. ارسم تمثيلاً بيانيًا للمنطقة المحددة بواسطة القيود لإيجاد عدد الوحدات لكل من نوعي الخشب المنتجَين التي يجب على المصنع إنتاجها لتحقيق الربح الأقصى.

الربط بالحياة اليومية

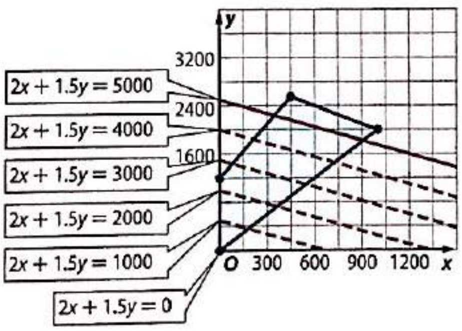


يعد Biosphere 2 في أوراكل بولاية أريزونا مركزًا للأبحاث والتطوير حول تقنية الاكتفاء الذاتي بمستعمرات الفضاء. وتحتوي الدفيئة الزراعية على 203,881.3 متر مكعب من الزجاج المانع للتسرب، و 6500 نافذة، بنقطة ارتفاع تبلغ 27.7 مترًا.

المصدر: جامعة أريزونا

من أجل التوصل إلى فهم أفضل للسبب في أن القيمة العظمى للدالة $f(x, y) = 2x + 1.5y$ يجب أن تقع عند إحدى الرؤوس في المثال 2، قم بتعيين قيم موجبة مختلفة لـ f من 0 إلى 5000 ثم مثّل المجموعة المتوافقة للخطوط المستقيمة المتوازية بيانيًا.

لاحظ أن مسافة الخط المستقيم في هذه المجموعة من نقطة الأصل تزداد مع ازدياد f، وتمتد عبر منطقة الحلول الممكنة.



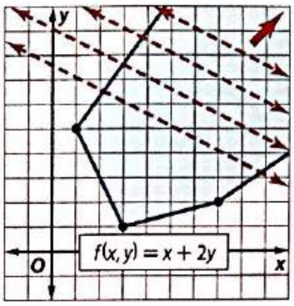
من الناحية الهندسية، لزيادة الدالة f إلى أقصى حد عبر مجموعة من الحلول الممكنة، فإنك تحتاج إلى الخط المستقيم صاحب قيمة f الأكبر، والذي لا يزال يتقاطع مع المنطقة المظللة. من خلال التمثيل البياني، يمكنك رؤية أن مثل هذا الخط المستقيم سيتقاطع مع المنطقة المظللة عند نقطة واحدة، وهي الرأس عند النقطة (1000, 2000).

نصيحة دراسية

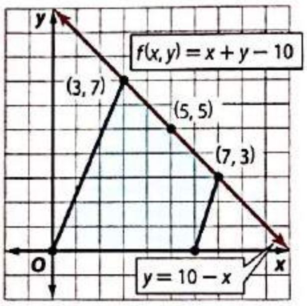
دوال الهدف لإيجاد المعادلة المتعلقة بدالة الهدف، أوجد حل معادلة الهدف من أجل y.

2 عدم وجود حلول مثلى أو تعددها

كما هو الحال مع أنظمة المعادلات الخطية، يمكن أن يكون لمسائل البرمجة الخطية حل أمثل واحد أو حلول مثلى متعددة أو تفتقر إلى هذه الحلول تمامًا. إذا كان التمثيل البياني للمعادلة المتعلقة بدالة الهدف f المطلوب إيجاد حل أمثل لها يقع في المكان نفسه عند أحد جوانب منطقة الحلول الممكنة، فإن الدالة f يكون لها **حلول مثلى متعددة**. وفي الشكل (5.5.1)، فإن أي نقطة على القطعة التي تصل بين الرأسين اللتين تقعان عند (7 ,3) و (3 ,7)، تعتبر حلاً أمثل للدالة f. وإذا كانت المنطقة لا تشكل مضلعًا ولكنها بدلاً من ذلك **غير محدودة**، فقد لا تكون للدالة f أي قيمة صغرى أو عظمى. وفي الشكل (5.5.2)، لا يكون للدالة f أي قيمة عظمى.



الشكل (5.5.2)



الشكل (5.5.1)

مثال 3 الأمثلية عند نقاط متعددة

أوجد القيمة العظمى لدالة الهدف $f(x, y) = 4x + 2y$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحقق عندهما هذه القيمة، مع مراعاة القيود التالية.

$y + 2x \le 18$

$y \le 6$

$x \le 8$

$x \ge 0$

$y \ge 0$

مثّل المنطقة المحدودة بالقيود المذكورة بيانيًا.
تتمتع منطقة الحلول الممكنة المضلعة بخمس رؤوس عند النقاط (0 ,0) و(2 ,8) و(6 ,0) و(0 ,8) و(6 ,6).
أوجد قيمة دالة الهدف $f(x, y) = 4x + 2y$ عند كل رأس.

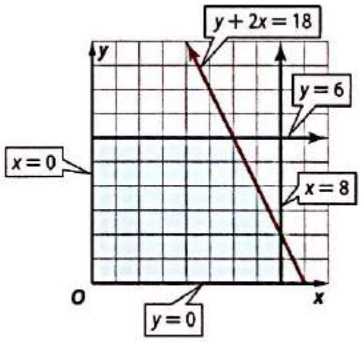
$f(0, 0) = 4(0) + 2(0) = 0$

$f(8, 2) = 4(8) + 2(2) = 36$

$f(0, 6) = 4(0) + 2(6) = 12$

$f(8, 0) = 4(8) + 2(0) = 32$

$f(6, 6) = 4(6) + 2(6) = 36$



نظرًا لأن $f(x, y) = 36$ عند (6 ,6) و(2 ,8)، فإنه توجد نقاط متعددة يتم فيها تحقيق الأمثلية للدالة f. وتكون معادلة الخط المستقيم عبر هاتين الرأسين هي $y = -2x + 18$. لذا، فإن f تكون لها قيمة عظمى تبلغ 36 عند كل نقطة على $y = -2x + 18$ لكي يكون $6 \le x \le 8$.

تمرين موجّه

أوجد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y)$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة.

3A. $f(x, y) = 3x + 3y$

$4x + 3y \ge 12$

$y \le 3$

$y \ge 0$

$x \le 4$

$x \ge 0$

3B. $f(x, y) = 4x + 8y$

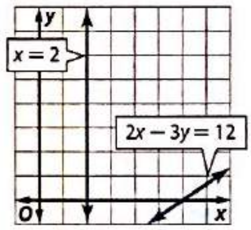
$x + 2y \le 16$

$y \ge 2$

$x \ge 3$

نصيحة دراسية

مسألة البرمجة الخطية غير ممكنة الحل يُقال عن حل مسألة البرمجة الخطية إنه غير ممكن إذا كانت مجموعة القيود لا تحدد منطقة لها نقاط مشتركة. فعلى سبيل المثال، لا يحدد التمثيل البياني أدناه منطقة حلول ممكنة يمكن الاعتماد عليها لتحقيق أمثلية (الوصول إلى حل أمثل) لدالة الهدف.



مثال 4 من الحياة اليومية منطقة الحل الممكنة غير المحدودة

الطب البيطري يوصي أحد الأطباء البيطريين بأن تخضع أرنب صغيرة جديدة لنظام غذائي يتألف على الأقل من 43.66 جراماً من البروتينات و 15.87 جراماً من الدهون يوميًا. استخدم الجدول التالي لتحديد كمية كل طعام للقطط ينبغي استخدامه لتلبية المتطلبات الغذائية بالتكلفة الصغرى.

العلامة التجارية لطعام القطط	البروتينات (جراما/كوب)	الدهون (جراما/كوب)	تكلفة الكوب (AED)
Good Start	23.8	5.95	1.32
Sirius	15.87	13.9	0.81

a. اكتب دالة هدف واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

افترض أن x يمثل عدد أكواب *Good Start* التي تم تناولها و y يمثل عدد أكواب *Sirius* التي تم تناولها. إذًا، يتم التعبير عن دالة الهدف عن طريق $f(x, y) = 0.36x + 0.22y$.

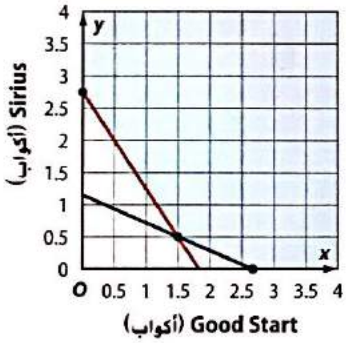
يتم التعبير عن القيود على الدهون والبروتينات اللازمة عن طريق

$$0.84x + 0.56y \geq 1.54$$

$$0.21x + 0.49y \geq 0.56$$

نظرًا لأن x و y لا يمكن أن يكونا سالبين، فهناك أيضًا قيود لكل من $0 \leq x$ و $0 \leq y$.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يمثل المنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء (a) لإيجاد عدد الأكواب التي ينبغي استخدامها لكل نوع من نوعي طعام الأرانب لتلبية المتطلبات الغذائية بالتكلفة المثلى.



تتسم المنطقة المضلعة المظللة بأن لها ثلاث نقاط رأسية عند $(0, 2.75)$ و$(1.5, 0.5)$ و$(2.67, 0)$.

ستكون التكلفة المثلى القيمة الصغرى لـ $f(x, y) = 0.36x + 0.22y$.
أوجد قيمة دالة الهدف عند كل رأس.

$$f(0, 2.75) = 0.36(0) + 0.22(2.75) = 0.605$$

$$f(1.5, 0.5) = 0.36(1.5) + 0.22(0.5) = 0.65$$

$$f(2.67, 0) = 0.36(2.67) + 0.22(0) = 0.9612$$

إذًا، من أجل تلبية متطلبات الطبيب البيطري بأدنى تكلفة تبلغ حوالي AED 2.24 للكوب الواحد، ينبغي أن تأكل الهرة 2.75 كوب فقط من المنتج ذي العلامة التجارية *Sirius*.

مهن في حياتنا

طبيب بيطري يجب أن يتخرج الأطباء البيطريون المستقبليون بدرجة دكتوراه في الطب البيطري من جامعة معتمدة. في أحد الأعوام الأخيرة، شغل الأطباء البيطريون 62,000 وظيفة في الولايات المتحدة الأمريكية، حيث وُظف 3 من أصل 4 أشخاص في عيادة فردية أو جماعية.

تمرين موجّه

4. **الإدارة** وفقًا لمدير أحد متاجر البيتزا، ترتبط الإنتاجية في ساعات عمل الموظفين لديها بمناصبهم. وتعادل ساعة العمل الواحدة كمية العمل الذي ينجزه موظف متوسط في ساعة واحدة. وستحتاج من أجل نوبة العمل التالية البالغة ثماني ساعات إلى اثنين من مشرفي النوبات، وعلى الأقل اثنين من المساعدين، و 10 من الموظفين على الأقل إجمالاً. وينبغي أن تخصص المديرة أيضًا ما لا يقل عن 120 ساعة عمل لتلبية طلب العملاء خلال تلك النوبة.

الموظفون العاملون	الإنتاجية (بساعات العمل)	الأجر (AED)
مساعد	1.5	7.50
موظف	1.0	6.50
مشرف نوبة	2.0	9.00

A. بافتراض أن كل موظف يعمل نوبة عمل الساعات الثماني كاملة، اكتب دالة هدف واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

B. ارسم تمثيلاً بيانيًا للمنطقة المحددة بالقيود لإيجاد عدد الموظفين الذين ينبغي تكليفهم بالعمل لتحسين تكاليف العمالة على النحو الأمثل.

تمارين

أوجد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y)$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة. (مثال 1)

1. $f(x, y) = 3x + y$
$y \le 2x + 1$
$x + 2y \le 12$
$1 \le y \le 3$

2. $f(x, y) = -x + 4y$
$y \le x + 4$
$y \ge -x + 3$
$1 \le x \le 4$

3. $f(x, y) = x - y$
$x + 2y \le 6$
$2x - y \le 7$
$x \ge -2$
$y \ge -3$

4. $f(x, y) = 3x - 5y$
$x \ge 0, y \ge 0$
$x + 2y \le 6$
$2y - x \le 2$
$x + y \le 5$

5. $f(x, y) = 3x - 2y$
$y \le x + 3$
$1 \le x \le 5$
$y \ge 2$

6. $f(x, y) = 3y + x$
$4y \le x + 8$
$2y \ge 3x - 6$
$2x + 2y \ge 4$

7. $f(x, y) = x - 4y$
$x \ge 2, y \ge 1$
$x - 2y \ge -4$
$2x - y \le 7$
$x + y \le 8$

8. $f(x, y) = x - y$
$3x - 2y \ge -7$
$x + 6y \ge -9$
$5x + y \le 13, x - 3y \ge -7$

9. عيادة طبية يعمل عامر موظف استقبال في عيادة طبية. وتتمثل إحدى مهامه في تحديد مواعيد الزيارات. وهو يخصص 20 دقيقة للكشف و 40 دقيقة للفحص البدني. ولا يستطيع الطبيب إجراء أكثر من 6 فحوصات بدنية في اليوم. وتتيح العيادة 7 ساعات لمواعيد الزيارات في العمل. وتبلغ تكلفة الكشف AED 55 وتبلغ تكلفة الفحص البدني AED 125. (مثال 2)

a. اكتب دالة هدف، واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يمثل المنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء a لإيجاد مجموعة الحلول الممكنة لدالة الهدف.

c. كم عدد الزيارات الطبية من كل فئة التي ينبغي أن ينظمها عامر لتحقيق أقصى دخل؟ ما الدخل الأقصى؟

10. الدخل يعمل أحمد بدوام جزئي لدفع بعض نفقات جامعته. ويقوم أحمد بتوصيل البيتزا مقابل AED 5 في الساعة بالإضافة إلى البقشيش. وبالتالي يبلغ إجمالي ما يحصل عليه AED 8 تقريبًا في الساعة. كما يُلقي دروسًا خصوصية في معمل الرياضيات مقابل AED 15 في الساعة. ويتم فتح معمل الرياضيات لمدة ساعتين فقط يوميًا من الاثنين حتى الجمعة. عندما يكون أحمد متاحًا لإلقاء الدروس الخصوصية. ولا يمكن لأحمد أن يعمل أكثر من 20 ساعة في الأسبوع نظرًا لجدول مواعيد الصف لديه. (مثال 2)

a. اكتب دالة هدف، واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يمثل المنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء a لإيجاد مجموعة الحلول الممكنة لدالة الهدف.

c. كيف يمكن لأحمد تحقيق أكبر مبلغ من المال، وكم يساوي هذا المبلغ؟

11. أعمال صغيرة شركة تصميم تنشئ مواقع ويب وألبومات إلكترونية. ويتطلب كل موقع ويب 10 ساعات من التخطيط و 4.5 ساعات من تصميم الصفحات. ويتطلب كل ألبوم عائلي إلكتروني 15 ساعة من التخطيط و 9 ساعات من تصميم الصفحات. وتُتاح 70 ساعة في الأسبوع لكي يقوم الموظفون بعملية التخطيط و 36 ساعة لتصميم الصفحات. (مثال 2)

a. إذا كان الربح المتحقق يبلغ AED 600 لكل موقع ويب و AED 700 لكل ألبوم عائلي إلكتروني، فاكتب دالة هدف واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يمثل المنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء a لإيجاد مجموعة الحلول الممكنة لدالة الهدف.

c. ما العدد الذي يجب أن تنتجه الشركة من كل منتج لتحقيق أقصى ربح؟ كم يبلغ الربح؟

أوجد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y)$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة. (المثالان 3 و 4)

12. $f(x, y) = 4x - 4y$
$2x + y \ge -7$
$y \le x + 2$
$y \le 11 - 2x$

13. $f(x, y) = 3x + 6y$
$y \le -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
$y \le 2, y \ge 0$
$x \le 3, x \ge 0$

14. $f(x, y) = -3x - 6y$
$y \le -\frac{1}{2}x + 5$
$y \le 4, y \ge 0$
$x \le 6, x \ge 0$

15. $f(x, y) = 6x - 4y$
$2x + 3y \ge 6$
$3x - 2y \ge -4$
$5x + y \ge 15$

16. $f(x, y) = 3x + 4y$
$y \le x - 3$
$y \le 6 - 2x$
$2x + y \ge -3$

17. $f(x, y) = 8x + 10y$
$y \le -\frac{4}{5}x + 4$
$y \le 4, y \ge 0$
$x \le 5, x \ge 0$

18. التغذية تريد مها استهلاك المزيد من المواد المغذية. وهي تسعى للحصول على ما لا يقل عن 40 ملّيجرامًا من الكالسيوم و 600 ملّيجرام من البوتاسيوم و 50 ملّيجرامًا من فيتامين "C". وتُفضل مها من الفاكهة كلاً من التفاح والموز. وفيما يلي يتبين متوسط المحتوى الغذائي لكليهما. (مثال 4)

الفاكهة	الكالسيوم	البوتاسيوم	فيتامين "C"
التفاح	9.5 mg	158 mg	9 mg
الموز	7.0 mg	467 mg	11 mg

a. إذا كانت تكلفة كل تفاحة AED 0.55 وتكلفة كل موزة AED 0.35، فاكتب دالة هدف، واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا للمنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء a لإيجاد مجموعة الحلول الممكنة لدالة الهدف.

c. حدد عدد كل نوع من الفاكهة التي يجب على مها تناولها لتحقق أدنى تكلفة بينما تظل تحصل في الوقت نفسه على الحصة الغذائية التي ترغب فيها.

أوجد قيمة a بحيث تكون لكل دالة هدف قيم عظمى عند الرأس المحددة، مع مراعاة القيود التالية.

$$x \geq 0$$
$$y \geq 2$$
$$x + y \leq 9$$
$$-4x + 3y \leq 6$$

19. $f(x, y) = -4x + ay, (0, 2)$

20. $f(x, y) = -4x + ay, (3, 6)$

21. $f(x, y) = x - ay, (3, 6)$

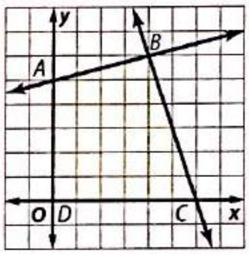
22. $f(x, y) = x - ay, (7, 2)$

23. $f(x, y) = ax + 4y, (7, 2)$

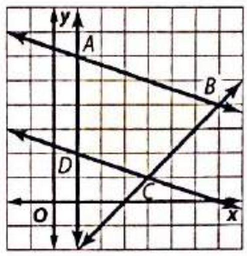
24. $f(x, y) = ax - 3y, (0, 2)$

أوجد دالة هدف لها قيمة عظمى أو صغرى عند كل رأس محددة.

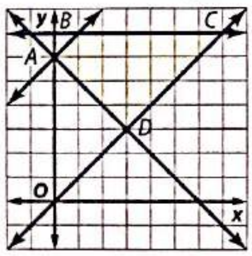
25. الصغرى عند A



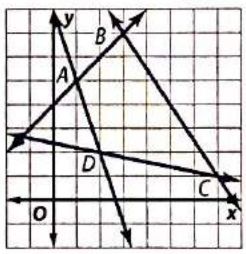
26. العظمى عند C



27. العظمى عند B



28. الصغرى عند D



29. الأعمال يتطلب إعداد دفعة كوكتيل مانجو شروق الشمس 3 لترات من عصير المانجو ولترًا واحدًا من عصير الفراولة. ويتطلب إعداد دفعة كوكتيل "أحلام الواحة" لترين من عصير المانجو ولترًا واحدًا من عصير الفراولة. ويمتلك المتجر 40 لترًا من عصير المانجو و 15 لترًا من عصير الفراولة ويرغب في استهلاكهما بالكامل قبل نهاية اليوم. ويحقق كوكتيل مانجو شروق الشمس ربحًا قدره 16 AED للدفعة الواحدة، بينما يحقق كوكتيل أحلام الواحة ربحًا قدره 12 AED للدفعة الواحدة.

a. اكتب دالة هدف، واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

b. من أجل الوصول إلى أقصى ربح، كم عدد الدفعات من كل مشروب التي يجب على متجر العصير إعدادها؟

أوجد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y)$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة.

30. $f(x, y) = 4x - 8y$
$y \geq x^2 - 8x + 18$
$y \leq -x^2 + 8x - 10$
$y \leq 8 - x$

31. $f(x, y) = -2x + 5y$
$y \geq x^2 + 6x + 3$
$y \leq -x^2 - 4x + 15$
$y \leq x + 9$

أوجد المساحة المُحاطة بمجموعة المضلع المحدب والمُعرَّفة بكل نظام من المتباينات.

32. $x \geq 0$
$x \leq 12$
$2x + 6y \leq 84$
$2x - 3y \leq -3$
$8x + 3y \geq 33$

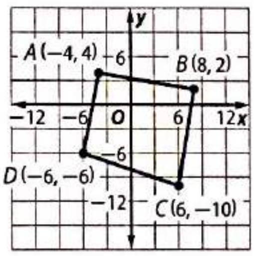
33. $y \leq 9$
$x \geq 2$
$x - y \leq 5$
$2x + y \leq 25$
$3x + 2y \leq 20$

34. $x \geq 0$
$y \geq \frac{1}{2}x$
$3x + 2y \geq 8$
$-3x + 4y \leq 28$
$x + 2y \leq 24$

35. $x \leq 10$
$x + y \leq 14$
$x + 3y \geq 13$
$-x + 5y \leq 40$
$4x + y \geq 8$

مسائل مهارات التفكير العليا — استخدام مهارات التفكير العليا

36. تحدٍ اكتب نظامًا من المتباينات يشكل مجموعة المضلع المحدب الموضحة أدناه.



37. التبرير فكِّر بدالة الربح $P(x, y) = ax + by$. هل سيظل P له قيمة عظمى موجبة إذا كانت منطقة الحلول الممكنة تقع بالكامل بداخل الربع الأول؟ اشرح استنتاجك.

38. تحدٍ أوجد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y) = -6x + 3y$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة.

$y \geq 4$
$3x + 2y \geq 14$
$-2x + 5y \leq 60$
$-x + y \geq -3$
$-7x + 5y \leq 35$
$2x + y \leq 36$

39. مسألة غير محددة الإجابة البرمجة الخطية لها تطبيقات عديدة من الحياة اليومية.

a. اكتب مسألة من الحياة اليومية يمكن حلها باستخدام البرمجة الخطية.

b. باستخدام 4 قيود على الأقل، اكتب دالة هدف مطلوب قيمتها العظمى أو الصغرى.

c. ارسم تمثيلاً بيانيًا للمنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء a لإيجاد مجموعة الحلول الممكنة.

d. أوجد حلاً لهذه المسألة.

40. الكتابة في الرياضيات هل من الممكن ألا يكون لمسألة برمجة خطية أي حلول عظمى أو صغرى؟ اشرح استنتاجك.

مراجعة شاملة

أوجد تحليل الكسور الجزئية لكل تعبير نسبي مما يلي.

41. $\frac{8y+7}{y^2+y-2}$

42. $\frac{x-6}{x^2-2x}$

43. $\frac{5m-4}{m^2-4}$

44. $\frac{-4y}{3y^2-4y+1}$

45. **ألعاب أركيد** اشترى ماجد وبلال بطاقتي لعب لكي يلعبا ألعابًا افتراضية على الأركيد. واستخدم ماجد 47 نقطة من بطاقة اللعب الخاصة به لقيادة سيارة السباق المحاكية وركوب لوح التزلج على الجليد المحاكي بمعدل أربع مرات لكل لعبة. واستخدم بلال 48.25 نقطة من بطاقة اللعب الخاصة به لقيادة سيارة السباق المحاكية خمس مرات وركوب لوح التزلج على الجليد المحاكي ثلاث مرات. كم عدد النقاط التي تتطلبها كل لعبة في المرة الواحدة؟

46. **أمواج** بعد أن نشأت موجة بفعل قارب، يمكن تمثيل ارتفاع الموجة باستخدام $y = \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h \sin \frac{2\pi t}{P}$. حيث h هو الارتفاع الأقصى للموجة بالمتر، و P هو الفترة الزمنية بالثواني، و t هو مدة انتشار الموجة بالثواني.

a. إذا كان $h = 3$ و $P = 2$، فاكتب المعادلة الخاصة بالموجة. مثّل هذه المعادلة بيانيًا على مدى فترة زمنية فاصلة تبلغ 10 ثوانٍ.

b. كم عدد المرات التي يتوقع التمثيل البياني خلالها ارتفاع الموجة لقدم واحد خلال الثواني العشر الأولى؟

47. اثبت أن $\tan\theta \sin\theta \cos\theta \csc^2\theta = 1$ هي مصفوفة وحدة.

أوجد مساحة كل مثلث مقربة إلى أقرب جزء عشري.

48. $\triangle ABC$، إذا كان $A = 127°$، و $b = 12$ m. و $c = 9$ m

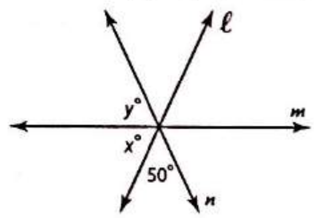
49. $\triangle ABC$، إذا كان $a = 7$ yd. و $b = 8$ yd. و $C = 44°$.

50. $\triangle ABC$، إذا كان $A = 50°$، و $b = 15$ in. و $c = 10$ in.

51. $\triangle ABC$، إذا كان $a = 6$ cm. و $B = 135°$، و $c = 3$ cm.

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

52. SAT/ACT في الشكل أدناه، تتقاطع الخطوط المستقيمة ℓ و m و n في نقطة واحدة. فما قيمة $x + y$؟



A 40
B 70
C 90
D 130
E 260

53. موقف سيارات تبلغ مساحته 600 متر مربع. وتحتاج السيارة إلى 6 أمتار مربعة من المساحة، في حين تحتاج الحافلة إلى 30 مترًا مربعًا من المساحة. ولا يستطيع العامل بالموقف التعامل مع أكثر من 60 مركبة. فإذا كانت تكلفة وقوف السيارة 3 AED ووقوف الحافلة 8 AED. فما عدد كل منهما الذي ينبغي أن يوافق العامل على خدمته لتحقيق أقصى دخل؟

F 20 حافلة و 0 سيارة

G 10 حافلات و 50 سيارة

H 5 حافلات و 55 سيارة

J 0 حافلة و 60 سيارة

54. **إجابة حرة** استخدم نظامي المعادلات للإجابة عن كل مما يلي.

A

$$-5x + 2y + 11z = 31$$
$$2y + 6z = 26$$
$$2x - y - 5z = -15$$

B

$$x + 2y + 2z = 3$$
$$3x + 7y + 9z = 30$$
$$-x - 4y - 7z = -37$$

a. اكتب مصفوفة المعاملات لكل نظام. عَرِّف المصفوفتين A و B.

b. أوجد AB و BA إن أمكن.

c. اكتب مصفوفة موسعة للنظام A في نموذج درجة صف منخفض.

d. أوجد محدد كل مصفوفة معاملات. أي من المصفوفات يكون لها معكوس؟ اشرح استنتاجك.

e. أوجد معكوس المصفوفة B.

f. استخدم معكوس المصفوفة B لحل النظام.

g. أي أنظمة يمكنك أن تستخدم معها قاعدة كرامر لحلها؟ اشرح استنتاجك.

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

الأنظمة الخطية متعددة المتغيرات وعمليات الصف (الدرس 5-1)

- كل عملية من عمليات الصف هذه تنتج مصفوفة موسعة مكافئة.
  - التبديل بين أي صفين.
  - ضرب أحد الصفين في عدد حقيقي غير صفري.
  - جمع مضاعف أحد الصفين مع الصف الآخر.

ضرب المصفوفات (الدرس 5-2)

- إذا كانت A هي المصفوفة $m \times r$ و B هي المصفوفة $r \times n$، فإن ناتج ضرب AB إذًا هو المصفوفة $m \times n$ التي يكون فيها
  $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ir}b_{rj}$
- I_n هي مصفوفة $n \times n$ تكون جميع قيمها 1 على قطرها الرئيس، وجميع قيمها 0 بالنسبة لجميع العناصر الأخرى.
- معكوس A هو A^{-1} حيث $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
- إذا كان $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $ad - cb \neq 0$، إذًا $A^{-1} = \frac{1}{ad - cb}$ $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ العدد $ad - cb$ يُسمى مُحَدّد المصفوفة 2×2 ويُعبّر عنه بواسطة $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |A| = \det(A)$.

حل الأنظمة (الدرس 5-3)

- افترض أن $AX = B$، حيث A هي مصفوفة معاملات النظام الخطي، و X هي مصفوفة المتغيرات، و B هي مصفوفة الحدود الثابتة. إذا كان A لها معكوس، فإن $AX = B$ يكون له إذًا حل فريد يتم التعبير عنه من خلال $X = A^{-1}B$.
- إذا كان $\det(A) \neq 0$، فإن الحل الفريد للنظام إذًا يتم التعبير عنه من خلال $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$. إذا كان $\det(A) = 0$، فإن $AX = B$ يكون إذًا إما ليس له حل أو له عدد لا نهائي من الحلول.

الكسور الجزئية (الدرس 5-4)

- إذا كانت درجة $f(x)$ أكبر من أو تساوي درجة $d(x)$، فاستخدم قسمة مطولة كثيرة الحدود المطولة وخوارزمية القسمة لكتابة $\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$. ثم طبّق تحليل الكسور الجزئية (أو ما يُعرف بتجزئة الكسور) على $\frac{r(x)}{d(x)}$.

البرمجة الخطية (الدرس 5-5)

- القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة الخطية في x و y تُحدّدان بواسطة أساليب البرمجة الخطية.
  الخطوة 1. مثّل حل نظام القيود بيانيًا.
  الخطوة 2. أوجد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.
  الخطوة 3. أوجد قيمة دالة التركيز عند كل رأس لإيجاد القيم التي تُقلل/تزيد الدالة إلى الحد الأدنى/الأقصى.

المفردات الأساسية

مصفوفة موسعة
augmented matrix

مصفوفة المعاملات
augmented matrix

قيد constraint

قاعدة كرامر Cramer's Rule

مُحَدّد determinant

حل ممكن feasible solution

حذف جاوس
Gaussian elimination

المصفوفة المحايدة
identity matrix

معكوس inverse

مصفوفة عكسية inverse matrix

لها معكوس invertible

برمجة خطية linear programming

حلول مثلى متعددة
multiple optimal solutions

نظام خطي متعدد المتغيرات
multivariable linear system

دالة التركيز objective function

الحل الأمثل optimization

كسر جزئي partial fraction

تحليل الكسر الجزئي partial
fraction decomposition

نموذج درجة الصف المنخفض
reduced row–echelon form

نموذج درجة الصف
row-echelon form

مصفوفة منفردة singular matrix

نظام مربع square system

غير محدودة unbounded)

مراجعة المفردات

اختر أفضل كلمة أو عبارة لإكمال الجمل التالية.

1. (المصفوفة الموسعة، مصفوفة المعاملات) هي مصفوفة تتكون من جميع معاملات النظام الخطي وحدوده الثابتة.
2. يختزل/تختزل (حذف جاوس/عمليات الصف الأولية) نظام المعادلات إلى نظام أبسط ومكافئ لتسهيل إيجاد حل له.
3. ناتج حذف جاوس-جوردان هو مصفوفة في صورة (نموذج درجة صف منخفض "أو ما يعرف أيضًا بصورة مستوى صف منخفض"، لها معكوس).
4. ناتج المصفوفة $n \times n$ المتمثل في A مع اعتبار (المصفوفة العكسية، مصفوفة الوحدة) هو A.
5. المصفوفة المحايدة I تكون هي ذاتها (مصفوفتها الموسعة، مصفوفتها العكسية).
6. المصفوفة المربعة التي ليس لها معكوس تكون (غير منفردة، منفردة).
7. (المُحَدّد، النظام المربع) الخاص بـ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $ad - bc$.
8. عند حل نظام خطي مربع، يكون البديل لحذف جاوس هو (قاعدة كرامر، تحليل الكسر الجزئي).
9. تتكون مسألة البرمجة الخطية ثنائية الأبعاد من (قيود، حلول ممكنة)، والتي تكون عبارة عن متباينات خطية.
10. إذا كان التمثيل البياني لدالة التركيز المطلوب إيجاد حلها الأمثل، f، يقع في المكان نفسه عند أحد أطراف منطقة الحلول الممكنة، فحينها قد تكون هناك حلول (مثلى متعددة، غير محدودة).

المراجعة التابعة للدرس

5-1 الأنظمة الخطية متعددة المتغيرات وعمليات الصف الأولية(البسيطة)

اكتب كل نظام معادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم أوجد حلاً للنظام.

11. $3x + 4y = 7$
$2y = -5x + 7$

12. $5x - 3y = 16$
$x + 3y = -4$

13. $x + y + z = 4$
$2x - y - 3z = 4$
$-3x - 4y - 5z = -13$

14. $x + y - z = 5$
$2x - 3y + 5z = -1$
$3x - y + 2z = 10$

15. $2x - 5y = 2z + 11$
$3y + 4z = x - 28$
$3z - x = -18 - 3y$

16. $2x - 3z = y - 1$
$5z - 8 = 3x + 4y$
$x + y + z = 3$

حل كل من أنظمة المعادلات التالية.

17. $2x + 2y = 8$
$3x - 8y = -21$

18. $x - 2y = 13$
$-5x - 6y = 15$

19. $x + y = 4$
$x + y + z = 7$
$x - z = -1$

20. $x + y = 1$
$3x - 7y + z = -7$
$4x + 8y + 3z = -9$

21. $3x - y + z = 8$
$2x - 3y = 3z - 13$
$x + z = 6 - y$

22. $x + y = z - 1$
$2x + 2y + z = 13$
$3x - 5y + 4z = 8$

مثال 1

أوجد حل نظام المعادلات باستخدام حذف جاوس.

$$x + 2y + 3z = 8$$
$$2x - 4y + z = 2$$
$$-3x - 6y + 7z = 8$$

اكتب المصفوفة الموسعة. ثم طبق عمليات الصف الأولية للحصول على نموذج درجة الصف.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & -4 & 1 & 2 \\ -3 & -6 & 7 & 8 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ -2R_1 + R_2 \rightarrow \\ 3R_1 + R_3 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -8 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & 16 & 32 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{16}R_3 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -8 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

يمكنك استخدام التعويض لإيجاد أن $y = 0.5$ و $x = 1$. إذًا، حل النظام هو $x = 1$، و $y = 0.5$، و $z = 2$، أو المجموعة المرتبة ثلاثية العناصر $(1, 0.5, 2)$.

5-2 ضرب المصفوفات والمعكوسات والمحددات

أوجد AB و BA، إن أمكن.

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$B = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$
$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix}$
$B = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$
$B = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$

أوجد A^{-1}، في حالة وجودها. وإن لم تكن A^{-1} موجودة، فاكتب **منفردة**.

27. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$

28. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

29. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -8 & -12 \end{bmatrix}$

30. $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

مثال 2

افترض أن $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$. أوجد A^{-1}، في حالة وجودها. وإن لم تكن A^{-1} موجودة، فاكتب *منفردة*.

اكتب أولاً مصفوفة موسعة مزدوجة. ثم طبّق عمليات الصف الأولية لكتابة المصفوفة في نموذج درجة صف منخفض.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ -2R_1 + R_2 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} -4R_2 + R_1 \rightarrow \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

نظرًا لأن النظام له حل، و $a = 9$، و $b = -4$، و $c = -2$، و $d = 1$، فإن A لها معكوس ومعكوسها $A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

5-3 حل الأنظمة الخطية باستخدام المعكوسات وقاعدة كرامر

استخدم المصفوفة العكسية لحل كل نظام معادلات، إن أمكن.

31. $2x - 3y = -23$
$3x + 7y = 23$

32. $3x - 6y = 9$
$-5x - 8y = -6$

33. $2x + y = 1$
$x - 3y + z = -4$
$y + 8z = -7$

34. $x + y + z = 1$
$x + y - z = -7$
$y + z = -1$

35. $3y + 5z = 25$
$2x - 7y - 3z = 15$
$x + \quad - z = -11$

36. $x - 2y - 3z = 0$
$2x - 3y + 4z = 11$
$x - 8y + 2z = -1$

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

37. $2x - 4y = 30$
$3x + 5y = 12$

38. $2x + 6y = 14$
$x - 3y = 1$

39. $2x + 3y - z = 1$
$x + y - 3z = 12$
$5x - 7y + 2z = 28$

40. $x + 2y + z = -2$
$2x + 2y - 5z = -19$
$3x - 4y + 8z = -1$

41. $-3x - 4y + z = 15$
$x - 5y - z = 3$
$4x - 3y - 2z = -8$

42. $2x + 3y + 4z = 29$
$x - 8y - z = -3$
$2x + y + z = 4$

مثال 3

استخدم المصفوفة العكسية لحل نظام المعادلات، إن أمكن.

$$x - y + z = -5$$
$$2x + 2y - 3z = -27$$
$$-3x - y + z = 17$$

اكتب النظام في صورة مصفوفة.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -27 \\ 17 \end{bmatrix}$$

استخدم الحاسبة البيانية لإيجاد قيمة A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 \\ -1.75 & -1 & -1.25 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

اضرب A^{-1} في B لحل النظام.

$$X = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 \\ -1.75 & -1 & -1.25 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 \\ -27 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5 \\ 14.5 \\ 15 \end{bmatrix}$$

إذًا، الحل هو (5, 14.5, 15.−5).

5-4 الكسور الجزئية

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي.

43. $\dfrac{2x}{x^2 - 4}$

44. $\dfrac{7x - 6}{x^2 - x - 6}$

45. $\dfrac{-2x + 9}{x^2 - 11x + 30}$

46. $\dfrac{6x^2 - 4x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x}$

47. $\dfrac{2x^3 - 14x^2 + 2x + 7}{x^2 - 7x}$

48. $\dfrac{2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 2}{x(x^2 + 1)^2}$

49. $\dfrac{2x^2 + 4}{x^2 - 2x}$

50. $\dfrac{2x^2 - 12x - 20}{x^2 + 4x}$

51. $\dfrac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 3x}$

52. $\dfrac{3x^2 - 10x - 20}{2x^2 + 5x}$

مثال 4

أوجد تحليل الكسر الجزئي لـ $\dfrac{x - 8}{x^2 - 11x + 18}$.

أعد كتابة المعادلة في صورة كسور جزئية ذات بسوط ثابتة، A و B.

$$\frac{x + 12}{x^2 - 11x + 18} = \frac{A}{x - 9} + \frac{B}{x - 2}$$
$$x + 12 = A(x - 2) + B(x - 9)$$
$$x + 12 = Ax - 2A + Bx - 9B$$
$$x + 12 = (A + B)x + (-2A - 9B)$$

ساوِ بين معاملات الطرفين الأيسر والأيمن للمعادلة للحصول على نظام من معادلتين.

$$A + B = 1$$
$$-2A - 9B = 12$$

حل النظام هو $A = 3$ و $B = -2$. إذًا، $\dfrac{x + 12}{x^2 - 11x + 18} = \dfrac{3}{x - 9} + \dfrac{-2}{x - 2}$

5-5 البرمجة الخطية

أوجد القيمتين العظمى والصغرى لدالة التركيز $f(x, y)$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة.

53. $f(x, y) = 2x - y$
$x \geq 0$
$y \leq -x + 7$
$y \geq x + 1$

54. $f(x, y) = 3x + y$
$2x - y \leq 1$
$1 \leq y \leq 9$
$x \geq 1$

55. $f(x, y) = x + y$
$0 \leq x \leq 10$
$x + 2y \geq 8$
$0 \leq y \leq 8$

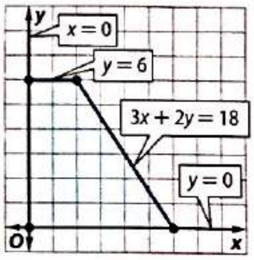
56. $f(x, y) = 2x - 4y$
$x \geq 3$
$y \geq 3$
$4x + 5y \leq 47$

57. $f(x, y) = 4x + 3y$
$3x + y \geq 8$
$2x + y \leq 12$
$y \geq x$

58. $f(x, y) = 2y - 5x$
$2x + y \geq 0$
$x - 5y \leq 0$
$3x + 7y \leq 22$

مثال 5

أوجد القيمة العظمى لدالة التركيز $f(x, y) = 2x + 6y$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحقق عندهما هذه القيمة، مع مراعاة القيود التالية.
$y \geq 0,\ x \geq 0,\ y \leq 6,\ 3x + 2y \leq 18$



مثّل المنطقة المحددة بالقيود المذكورة بيانيًا. أوجد قيمة دالة التركيز $f(x, y) = 2x + 6y$ عند كل رأس.

$f(0, 0) = 0 + 0$ أو 0

$f(0, 6) = 0 + 36$ أو 36

$f(6, 0) = 12 + 0$ أو 12

$f(2, 6) = 4 + 36$ أو 40

إذًا، القيمة العظمى لـ f هي 40 عندما يكون $x = 2$ و $y = 6$.

التطبيقات وحل المسائل

59. **شطائر البرجر البقري** يوضح الجدول التالي عدد شطائر البرجر البقري والبرجر بالجبن والبرجر النباتي المبيعة في مطعم خلال فترة غداء تمتد على مدار 3 ساعات. أوجد سعر كل نوع من أنواع البرجر. (الدرس 5-1)

الساعات	العادي	بالجبن	النباتي	إجمالي المبيعات (AED)
11 صباحًا - 12 مساءً	2	8	2	53
12-1 مساءً	7	12	8	119
1-2 مساءً	1	5	7	64

60. **وضع الدرجات** قررت الأستاذة عبير وضع درجات تقييمية على اختبارات وواجبات منزلية ومشروعات فضلاً عن المشاركة في الصف. وخصصت أوزانًا مئوية مختلفة لكل فئة كما هو موضح. أوجد الدرجة النهائية لكل طالب مع التقريب إلى أقرب نسبة مئوية. (الدرس 5-2)

الفئة	الاختبارات	الواجبات المنزلية	المشروعات	المشاركة
الوزن	40%	30%	20%	10%

الفئة	سامر	أنور	كريم	شوقي
الاختبارات	88	72	78	91
الواجبات المنزلية	95	90	68	71
المشروعات	80	73	75	85
المشاركة	100	95	100	80

61. **الآيس كريم** يبيع كشك آيس كريم 3 نكهات تتمثل في الفراولة والأناناس والكرز. وتُباع كل نكهة بسعر AED 1.25. في أحد الأيام، جنى الكشك مبلغ AED 60 كإجمالي مبيعات. وقد حقق الكشك زيادة تبلغ AED 13.75 في مبيعات الكرز مقارنة بمبيعات الأناناس و AED 16.25 زيادة مقارنة بمبيعات الفراولة. استخدم قاعدة كرامر لتحديد عدد مرات بيع كل نكهة. (الدرس 5-3)

62. **ركوب الدراجات** في رحلة على دراجة، قطع زوجان 240 كيلومترات في اليوم 1 و 270 كيلومترات في اليوم 2. وكان متوسط المعدل المقطوع خلال اليوم 1 هو 5 كيلومترات في الساعة، وهذا أسرع من متوسط المعدل المقطوع خلال اليوم 2. إجمالي عدد الساعات المقضية في قيادة الدراجة $T = \frac{510r - 1200}{r(r - 5)}$. (الدرس 5-4)

a. أوجد تحليل الكسر الجزئي لـ T.

b. كل كسر يمثل المدة الزمنية المنقضية في قيادة الدراجة كل يوم. إذا قاد الزوجان الدراجة بمقدار 6 ساعات أطول في اليوم 2، فما إجمالي عدد الساعات التي أمضياها في قيادة الدراجة؟

63. **إعادة التدوير** قررت شركة إعادة تدوير جمع المخلفات من المواقع الخاصة إذا كان الموقع يخرج على الأقل 27 كيلومترات من عناصر إعادة التدوير في الأسبوع. ويمكن أن تجمع الشركة 22 كيلومترات من الورق و 17 كيلومترات من الزجاج كحد أقصى من كل موقع. وتربح الشركة AED 163.24 على كل رطل من الزجاج و AED 204 على كل رطل من الورق. (الدرس 5-5)

a. اكتب دالة هدف، واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

b. حدد عدد أرطال الزجاج والورق المطلوب لتحقيق الربح الأقصى.

c. ما الربح الأقصى؟

5 تدريب على الاختبار المعياري

اكتب كل نظام معادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم أوجد حلاً للنظام.

1. $-3x + y = 4$
$5x - 7y = 20$

2. $x + 4y - 3z = -8$
$5x - 7y + 3z = -4$
$3x - 2y + 4z = 24$

أوجد حلاً لنظام المعادلات.

3. $5x - 6y = 28$
$6x + 5y = -3$

4. $2x - 4y + z = 8$
$3x + 3y + 4z = 20$
$5x + y - 3z = -13$

5. **المكتبة** استعارت ليلى كتبًا وأسطوانات مضغوطة وأسطوانات DVD من المكتبة. وبلغ إجمالي ما استعارته 16 عنصرًا. وكان إجمالي عدد الأسطوانات المضغوطة وأسطوانات DVD مساويًا لعدد الكتب. واستعارت ليلى أسطوانتين مضغوطتين زيادة عن أسطوانات DVD.

a. افترض أن b = عدد الكتب، و c = عدد الأسطوانات المضغوطة، و d = عدد أسطوانات DVD. اكتب نظامًا من ثلاث معادلات خطية لتمثيل المسألة.

b. أوجد حلاً لنظام المعادلات. فسّر حلك.

أوجد AB و BA، إن أمكن.

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -8 \end{bmatrix}$

8. **الهندسة** يمكن كتابة إحداثيات النقطة (x, y) في صورة مصفوفة 2×1 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. افترض أن $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a. افترض أن P هي النقطة $(-3, 4)$. ناقش كيف يؤثر ضرب A في P على P.

b. مثلث يحتوي على الرؤوس $(0, 0)$ و$(2, 6)$ و$(8, 3)$. أنشئ مصفوفة 2×3 B، لتمثيل المثلث. أوجد AB. ما التأثير الواقع على المثلث؟ هل يتفق مع إجابتك عن الجزء a؟

أوجد A^{-1}، في حالة وجودها. وإن لم تكن A^{-1} موجودة، فاكتب منفردة.

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$

استخدم المصفوفة العكسية لحل كل نظام معادلات، إن أمكن.

11. $2x - 3y = -7$
$5x + 2y = 11$

12. $2x + 2y + 5z = -6$
$2x - 3y + 7z = -7$
$x - 5y + 9z = 4$

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل فريد.

13. $3x - 2y = -2$
$4x - 2y = 2$

14. $3x - 2y - 3z = -24$
$3x + 5y + 2z = 7$
$-x + 5y + 3z = 25$

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي.

15. $\dfrac{4x}{x^2 - 9}$

16. $\dfrac{2x + 10}{x^2 - 4x + 3}$

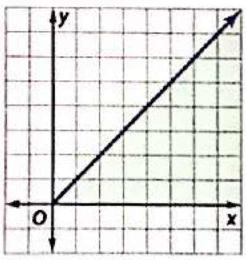
أوجد القيمتين العظمى والصغرى لدالة التركيز $f(x, y)$ وحدد مكان قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة.

17. $f(x, y) = 2x - y$
$x \geq 0$
$y \geq 0$
$y \geq -2x + 8$

18. $f(x, y) = -x + 2y$
$x - 3y \leq 0$
$x \geq 0$
$y \leq 9$

19. **التسعير** تبيع إحدى شركات المكسرات والحلويات مزيج المكسرات حيث يمكن للعملاء اختيار أي تشكيلات يرغبون فيها. ويحتوي المزيج المفضل لدى بدر على الفول السوداني والتوت البري المجفف والمعجنات المغطاة بالخروب. ويتم عرض الأسعار المتعلقة بكل عنصر أدناه. فإذا اشترى بدر مزيجًا من 2.3 كيلوجرامات نظير AED 61.71 وكان يحتوي على معجنات مغطاة بالخروب بأرطال تعادل ضعف كمية التوت البري، فكم عدد كيلوجرامات التي اشتراها من كل عنصر؟

20. **الاختيار من متعدد** يعرض التمثيل البياني قيود دالة التركيز. فأي مما يلي لا يمكن أن يكون أحد هذه القيود؟



A $y \geq 0$

B $x \geq 0$

C $x - y \leq 0$

D $x - y \geq 0$

الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم
الأمثلية غير الخطية

::التركيز

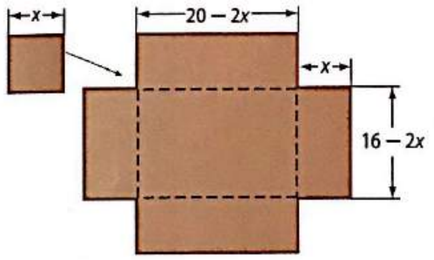
- تقريب حلول مسائل الأمثلية غير الخطية.

لقد تعلّمتَ كيفية حل مسائل الأمثلية باستخدام البرمجة الخطية. فقد كان يتم تمثيل دالة الهدف ونظام القيود باستخدام دوال خطية. غير أنه، لسوء الحظ، لا يمكن تعريف جميع المواقف التي تتطلب أمثلية بالدوال الخطية.

إن مسائل الأمثلية المتقدمة المشتملة على دوال تربيعية وتكعيبية ودوال غير خطية أخرى تتطلب حساب التفاضل والتكامل لإيجاد الحلول الدقيقة. ومع ذلك، يمكننا إيجاد تقريبات جيدة باستخدام الحاسبات البيانية.

نشاط 1 الحجم الأقصى (أكبر حجم ممكن)

تم استخدام قطعة ورق مقوى مقاسها 16 سنتيمتراً × 20 سنتيمتراً لصنع صندوق ليس له قمة عن طريق قطع المربعات المتطابقة من كل ركن وثني الأضلاع لأعلى. ما أبعاد الصندوق مع اعتبار أكبر حجم ممكن؟ ما الحجم الأقصى؟



الخطوة 1 أعد رسم رسمًا تخطيطيًا لهذه الحالة.

الخطوة 2 افترض أن x يمثل طول ضلع أحد المربعات المطلوب إزالتها. اكتب تعابير لطول الصندوق وعرضه وارتفاعه بدلالة x.

الخطوة 3 أوجد معادلة لحجم الصندوق V بدلالة x باستخدام الأبعاد التي حصلت عليها في الخطوة 2.

الخطوة 3 استخدم الحاسبة لتمثيل المعادلة التي حصلت عليها في الخطوة 3 بيانيًا.

تحليل النتائج

1. صف مجال x. اشرح استنتاجك.
2. استخدم الحاسبة لإيجاد إحداثيات النقطة العظمى على التمثيل البياني. فسّر دلالة هذه الإحداثيات.
3. ما أبعاد الصندوق مع اعتبار أكبر حجم ممكن؟ ما الحجم الأقصى؟

يختلف الناتج المطلوب والتعقيد حسب مسألة الأمثلية نفسها. ويمكنك استخدام الخطوات التالية لتحليل كل مسألة وإيجاد حل لها.

المفهوم الأساسي الأمثلية

لحل مسائل الأمثلية، راجع هذه الخطوات.

الخطوة 1 أعد رسمًا تخطيطيًا للحالة مع تسمية جميع الكميات المعروفة وغير المعروفة.

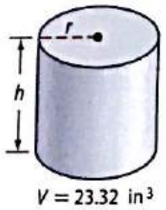
الخطوة 2 حدد الكمية المطلوب اعتبار أقصى أو أدنى حد لها. اختر القيم الضرورية لإيجاد الكمية المطلوبة، ومثّل كل قيمة بعدد أو متغير أو تعبير.

الخطوة 3 اكتب معادلة للكمية المطلوب إيجاد حلها الأمثل بدلالة متغير واحد.

الخطوة 4 مثّل المعادلة بيانيًا مع إيجاد إما القيمة العظمى أو الصغرى. حدد المجال المسموح به للمتغير.

نشاط 2 مساحة السطح الصغرى

عبوة نموذجية تبلغ تقريبًا 2.5 سنتيمتراً عرضًا و 4.75 سنتيمتراً طولاً وتسع حجمًا يساوي 23.32 سنتيمتراً مكعبة تقريبًا. ماذا ستكون أبعاد عبوة مشروب إذا ظل الحجم ثابتًا ولكن تم تقليل كمية المادة المستخدمة في صناعة العبوة إلى الحد الأدنى؟



الخطوة 1 أعد رسمًا تخطيطيًا لهذه الحالة.

الخطوة 2 الكمية المطلوب تقليلها إلى الحد الأدنى هي مساحة السطح. قيمتا نصف قطر العبوة وارتفاعها مطلوبتان. أوجد تعبيرًا لارتفاع h الخاص بالعبوة بدلالة نصف القطر r باستخدام الحجم المُعطى.

الخطوة 3 استخدم التعبير الذي حصلت عليه في الخطوة 2 في كتابة معادلة لمساحة السطح SA.

الخطوة 4 استخدم الحاسبة لتمثيل المعادلة التي حصلت عليها في الخطوة 3 بيانيًا. اذكر مجال r.

تحليل النتائج

4. أوجد إحداثيات النقطة الصغرى. فسّر دلالة هذه الإحداثيات.

5. ما أبعاد مساحة سطح العبوة مع اعتبار أقل مساحة سطح ممكنة؟

6. من المقرر إنشاء أسطوانة قائمة ليس لها قمة بمساحة سطح تبلغ 6π سنتيمتر مربعة. ما الارتفاع ونصف القطر اللذان سيزيدان حجم الأسطوانة إلى الحد الأقصى؟ ما الحجم الأقصى؟

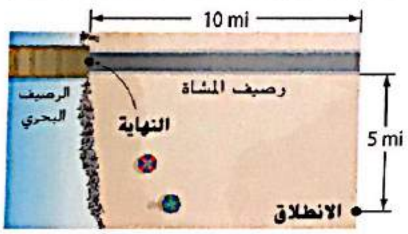
نصيحة دراسية

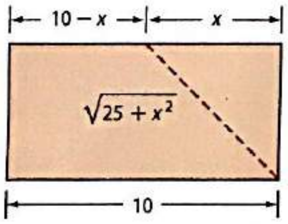
الأسطوانات تذكر أن معادلة حجم الأسطوانة هي $V = \pi r^2 h$، حيث r هو نصف قطر القاعدة وh هو ارتفاع الأسطوانة.

تقليل المواد إلى الحد الأدنى ليس التطبيق الوحيد للأمثلية.

نشاط 3 المسار الأسرع

مشاركون في سباق على الأقدام يركضون على الشاطئ أو على رصيف المشاة وصولاً إلى الرصيف البحري كما هو موضح. ويمكن أن يسلك المتسابقون أي مسار يختارونه. فإذا كان المتسابق يستطيع أن يركض 6 كيلوجرامات في الساعة على الرمال و 7.5 كيلوجرامات في الساعة على رصيف المشاة، فما المسار الذي يتطلب أقصر مدة زمنية؟





الخطوة 1 أعد رسمًا تخطيطيًا لهذه الحالة.

الخطوة 2 لتقليل المدة الزمنية إلى الحد الأدنى، اكتب تعابير للمسافات المقطوعة على كل سطح بكل معدل. افترض أن x يمثل المسافة التي لم يركضها العداء على رصيف المشاة كما هو موضح. أوجد تعابير للمسافات المقطوعة على كل سطح بدلالة x.

الخطوة 3 استخدم التعابير التي حصلت عليها في الخطوة 2 في كتابة معادلة للمدة الزمنية.

الخطوة 4 استخدم الحاسبة لتمثيل المعادلة التي حصلت عليها في الخطوة 3 بيانيًا. اذكر مجال x.

تحليل النتائج

7. أوجد إحداثيات النقطة الصغرى. فسّر دلالة هذه الإحداثيات.

8. ما المسار الذي سوف يتطلب أقصر مدة زمنية؟ ما طول المدة التي سوف يستغرقها؟

9. أوجد متوسط معدل التغير m عند النقطة الصغرى للتمثيل البياني باستخدام ناتج قسمة الفرق. ما الذي تشير إليه هذه القيمة فيما يتعلق بخط مماس التمثيل البياني عند هذه النقطة؟

10. ضع فرضية بشأن معدلات التغير وخطوط المماس للتمثيلات البيانية عند النقاط الصغرى والعظمى. هل تنطبق فرضيتك على أول نشاطين؟ اشرح.

الوحدة 6

القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطة

السابق

- لقد تعلّمت طريقة حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات.

الآن

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - تحليل معادلات قطوعٍ مكافئةٍ ودوائر وقطوعٍ ناقصةٍ وزائدةٍ وتحليلها وتمثيلها بيانيًا.
  - استخدام المعادلات لتحديد أنواع القطوع المخروطية.
  - التمثيل البياني للقطوع المخروطية بالدوران.
  - حلّ المعادلات المتصلة بحركة المقذوفات.

لماذا؟ ▲

- **البيسبول** عند ضرب كرة البيسبول، يمكن تمثيل مسار الكرة وتتبعه باستخدام معادلات وسيطية.

القراءة المسبقة أمعِن النظر في دليل الدراسة والمراجعة واستخدمه للقيام بتنبؤين أو ثلاثة بشأن ما ستتعلمه في هذه الوحدة.

الاستعداد للوحدة

أجرِ التدريب السريع

عمليات تدريب سريع

لكلّ دالّة، أوجد محور التماثل ونقطة التقاطع مع المحور y والرأس.

1. $f(x) = x^2 - 2x - 12$
2. $f(x) = x^2 + 2x + 6$
3. $f(x) = 2x^2 + 4x - 8$
4. $f(x) = 2x^2 - 12x + 3$
5. $f(x) = 3x^2 - 12x - 4$
6. $f(x) = 4x^2 + 8x - 1$

7. **الأعمال التجارية** يمكن تمثيل تكلفة إنتاج x دراجة هوائية من خلال $C(x) = 0.01x^2 - 0.5x + 550$؛ أوجد محور التماثل الخاص بالتمثيل البياني للدالّة ونقطة تقاطعه مع المحور الرأسي y ورأسه.

أوجد مميز كل دالّة تربيعية.

8. $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$
9. $f(x) = 2x^2 + 6x - 9$
10. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$
11. $f(x) = 3x^2 - 8x - 3$
12. $f(x) = 4x^2 - 3x - 7$
13. $f(x) = 4x^2 - 2x + 11$

أوجد معادلات أي خطوط تقارب رأسية أو أفقية.

14. $f(x) = \dfrac{x-2}{x+4}$
15. $h(x) = \dfrac{x^2-4}{x+5}$
16. $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{(x+2)(x-3)}$
17. $g(x) = \dfrac{x+3}{(x-1)(x+5)}$
18. $h(x) = \dfrac{2x^2-5x-12}{x^2+4x}$
19. $f(x) = \dfrac{2x^2-13x+6}{x-4}$

20. **الحياة البرية** يمكن تمثيل عدد الغزلان $D(x)$ بعد x عامًا في إحدى محميات الحياة البرية من خلال $D(x) = \dfrac{12x+50}{0.02x+4}$ حدّد العدد الأقصى من الغزلان التي قد تكون تعيش في المحمية.

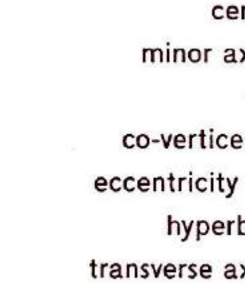
المفردات الجديدة

القطع المخروطي conic section
المخروط المُنحل degenerate conic
المحل الهندسي locus
القطع المكافئ parabola
البؤرة focus
الدليل directrix
محور التماثل axis of symmetry
الرأس vertex
القطعة المستقيمة العمودية على محور القطع عند بؤرته latus rectum
قطع ناقص ellipse
البؤرتان foci
المحور الأكبر major axis
نقطة المركز center
المحور الأصغر minor axis
الرؤوس vertices
الرؤوس المرافقة co-vertices
الاختلاف المركزي eccentricity
القطع الزائد hyperbola
المحور القاطع transverse axis
المحور المرافق conjugate axis
المعادلة الوسيطية parametric equation
بارامتر parameter
التوجيه orientation

مراجعة المفردات

التحويلات الصفحة 48 التغييرات التي تؤثر في شكل دالّة رئيسة

خطوط التقارب الصفحة 46 خطوط أو منحنيات تقارب التمثيلات البيانية



6-1 القطع المكافئ

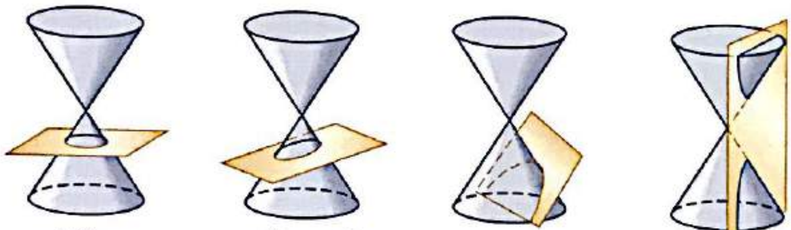
السابق	الآن	لماذا؟
• حددت الدوال التربيعية وحللتها ومثلتها بيانيًا.	• 1 تحليل معادلات القطوع المكافئة وتُمثّلها بيانيًا. 2 كتابة معادلات القطوع المكافئة.	• تستخدم أحواض تجميع الطاقة الشمسية خواص القطوع المكافئة لتركيز الأشعة على مستقبلٍ وتولّد الطاقة الشمسية.

المفردات الجديدة

القطع المخروطي conic section
المخروط المُنحَل degenerate conic
المحل الهندسي locus
القطع المكافئ parabola
البؤرة focus
الدليل directrix
محور التماثل axis of symmetry
الرأس vertex
القطعة المستقيمة العمودية على محور القطع عند بؤرته latus rectum

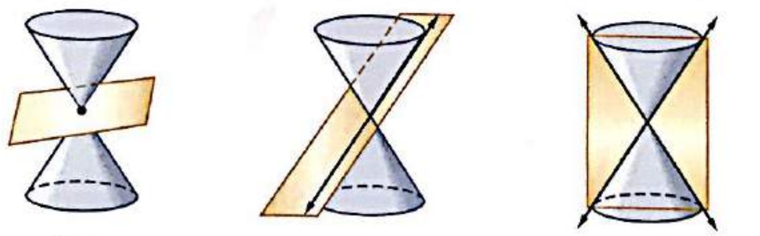
1 تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانيًا

القطوع المخروطية أو المخروطيات هي الأشكال التي تنشأ عندما يقطع مستوى سطحًا مخروطيًا. والسطح المخروطي عبارة عن مخروطين متعاكسين يمتدّان إلى ما لا نهاية إلى الأعلى والأسفل. والقطوع المخروطية الشائعة الأربعة التي سنتناولها في هذه الوحدة هي القطع المكافئ والقطع الناقص والدائرة والقطع الزائد.



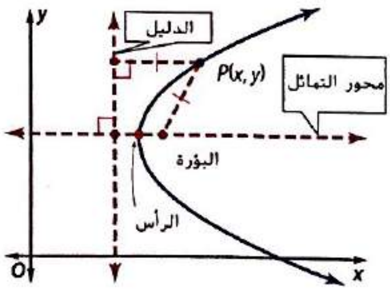
قطع زائد　　قطع مكافئ　　قطع ناقص　　دائرة

حين يقطع المستوى رأس المخروط، فإن الأشكال الناشئة هي **المخاريط المُنحَلة**. قد يكون المخروط المُنحَل نقطةً أو مستقيمًا أو مستقيمين متقاطعين.



مستقيمان متقاطعان (قطع زائد مُنحَل)　　مستقيم (قطع مكافئ مُنحَل)　　نقطة (قطع ناقص مُنحَل)

الصيغة العامة لمعادلات القطوع المخروطية هي $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. A و B و C لا يمكن أن تكون جميعها تساوي الصفر. وسنورد صيغًا جبريةً أكثر تحديدًا لكل نوعٍ من أنواع القطوع المخروطية عندما نقدّمها.



المحلّ الهندسي هو مجموعة جميع النقاط التي تحقق خاصيةً هندسية.

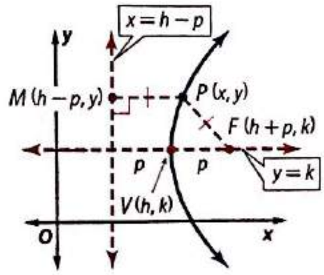
يمثل **القطع المكافئ** المحل الهندسي للنقاط الواقعة في مستوى والتي تقع على المسافة نفسها من نقطة ثابتة تدعى **البؤرة** ومن مستقيم محدّدٍ يطلق عليه **الدليل**.

والقطع المكافئ متماثل بالنسبة للمستقيم العمودي على الدليل والمار بالبؤرة والذي يدعى **محور التماثل**. **الرأس** هو نقطة تقاطع القطع المكافئ ومحور التماثل.

في السابق تعلّمت أن الدالّة التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$، وفيها $a \neq 0$ تمثل قطعًا مكافئًا مفتوحًا إلى الأعلى أو الأسفل. ويمكن استخدام تعريف القطع المكافئ على أنه محلّ هندسيّ مشتق من المعادلة العامة للقطع المكافئ المفتوح إلى الأعلى أو الأسفل أو الجهة اليسرى أو اليمنى.

لتكن $P(x, y)$ أي نقطة على القطع المكافئ رأسه $V(h, k)$ والذي فيه $p = FV$ المسافة بين الرأس والبؤرة. وتبعًا لتعريف القطع المكافئ، فإن المسافة من أي نقطة على القطع المكافئ إلى البؤرة يجب أن تساوي المسافة من تلك النقطة إلى الدليل.

إذًا، إذا كان $FV = p$، فإن $VT = p$. من تعريف القطع المكافئ، تعلم أنّ $PF = PM$. ونظرًا إلى أن M تقع على الدليل، فإن إحداثيي M هما $(h - p, y)$.



يمكنك استخدام قانون المسافة لتحديد معادلة القطع المكافئ.

$$PF = PM$$

$$\sqrt{[x-(h+p)]^2+(y-k)^2} = \sqrt{[x-(h-p)]^2+(y-y)^2}$$

$$[x-(h+p)]^2+(y-k)^2 = [x-(h-p)]^2+0^2$$

$$x^2-2x(h+p)+(h+p)^2+(y-k)^2 = x^2-2x(h-p)+(h-p)^2$$

$$x^2-2xh-2xp+h^2+2hp+p^2+(y-k)^2 = x^2-2xh+2xp+h^2-2hp+p^2$$

$$(y-k)^2 = 4xp-4hp$$

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

تأخذ معادلة القطع المكافئ المفتوح أفقيًا الصيغة $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ وبصورة مشابهة، بالنسبة للقطوع المكافئة المفتوحة رأسيًا، يمكنك اشتقاق المعادلة $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.

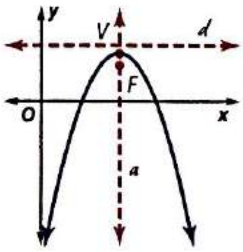
تمثل هاتان المعادلتان المعادلتين بالصيغة القياسية للقطوع المكافئة، حيث $p \neq 0$. تحدّد قيم الثوابت h و k و p خواص القطوع المكافئة كإحداثيي الرأس واتجاه القطع المكافئ.

قراءة في الرياضيات

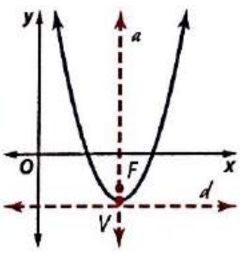
التقعّر ستشير في هذا الدرس إلى القطوع المكافئة على أنها منحنياتٌ مفتوحةٌ للأعلى أو الأسفل أو الجهة اليمنى أو اليسرى. وخلال حساب التفاضل والتكامل، سوف تتعلم استخدام مصطلح التقعّر. وفي هذه الحالة، تتقعّر التمثيلات البيانية إلى الأعلى أو إلى الأسفل أو إلى الجهة اليمنى أو إلى الجهة اليسرى على الترتيب.

المفهوم الأساسي الصيغة القياسيّة لمعادلات القطع المكافئ

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$



$p < 0$



$p > 0$

التوجيه: مفتوح رأسيًا

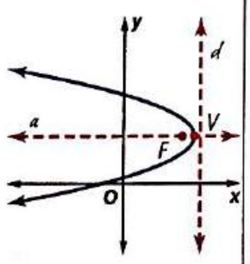
الرأس: (h, k)

البؤرة: $(h, k + p)$

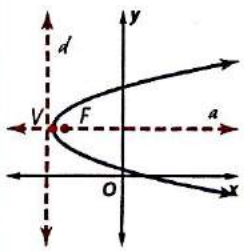
محور التماثل a: $x = h$

الدليل d: $y = k - p$

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$



$p < 0$



$p > 0$

التوجيه: مفتوح أفقيًا

الرأس: (h, k)

البؤرة: $(h + p, k)$

محور التماثل a: $y = k$

الدليل d: $x = h - p$

يمكنك استخدام الصيغة القياسيّة لمعادلة القطع المكافئ لتحديد خواصّه كالرأس والبؤرة والدليل.

المثال 1 تحديد الخواص والتمثيل البياني

للمعادلة $(y+5)^2 = -12(x-2)$، حدّد الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل. ثمّ مثّل القطع المكافئ بيانيًا.

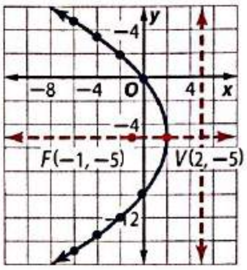
إن المعادلة بالصيغة القياسيّة والمتغير المربّع هو y، ما يعني أن القطع المكافئ مفتوحٌ أفقيًا. المعادلة في الصيغة $(y-k)^2 = 4p(x-h)$. وبالتالي $h = 2$ و$k = -5$.

ونظرًا إلى أن $4p = -12$، فإن $p = -3$ والتمثيل البياني يكون مفتوحًا إلى الجهة اليسرى. استخدم قيم h و k و p لتحديد خواص القطع المكافئ.

الرأس: $(2, -5)$ الدليل: $x = 5$

البؤرة: $(-1, -5)$ محور التماثل: $y = -5$

مثّل الرأس والبؤرة والمحور والدليل للقطع المكافئ. ثمّ شكّل جدولًا بالقيم لتمثيل الشكل العام للمنحنى بيانيًا.



x	y
0	$-0.1, -9.9$
-2	$1.9, -11.9$
-4	$3.5, -13.5$
-6	$4.8, -14.8$

تمرين موجّه

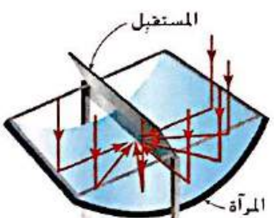
لكل معادلة من المعادلات التالية، حدّد الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل. ثمّ مثل القطع المكافئ بيانيًا.

1A. $8(y+3) = (x-4)^2$

1B. $2(x+6) = (y+1)^2$

مثال 2 من الحياة اليومية خواص القطع المكافئ

الطاقة الشمسية حوض تجميع الطاقة الشمسية هو مرآةٌ ذات قطع مكافئ تركّز الأشعة القادمة من الشمس على مستقبل خطي يقع عند بؤرة القطع المكافئ. يمكن تمثيل المقطع العرضي للحوض الواحد باستخدام العلاقة $x^2 = 3.04y$، والتي فيها x و y تقاسان بالامتار. أين يقع المستقبل الخطي في هذا المقطع العرضي؟



يقع المستقبل الخطي عند بؤرة القطع المكافئ.
ونظرًا إلى أن المتغير x مربّع والحدّ p موجب، فإن القطع المكافئ يكون مفتوحًا إلى الأعلى والبؤرة تقع عند النقطة $(h, k + p)$.

المعادلة معطاةٌ بالصيغة القياسيّة، و h و k كلاهما يساوي الصفر. نظرًا لكون $4p = 3.04$ فإن p تساوي 0.76. إذًا، موقع البؤرة هو $(0, 0 + 0.76)$ أو $(0, 0.76)$.

موقع بؤرة المقطع العرضي للقطع المكافئ المعطى هو $(0, 0.76)$. ولذلك، يقع المستقبل الخطي على بعد 0.76 متر من رأس القطع المكافئ.

تمرين موجّه

2. **علم الفلك** يتألف تلسكوب المرآة السائلة من طبقةٍ رقيقةٍ من المعدن السائل بشكل قطعٍ مكافئ وكاميرا موجودة في النقطة البؤرية. افترض أنه يمكن تمثيل تلسكوب مرآةٍ سائلةٍ باستخدام المعادلة $x^2 = 44.8y - 268.8$ حين يكون $-5 \leq x \leq 5$. إذا كانت x و y تقاسان بالمتر، فما هي أقصر مسافةٍ بين سطح المرآة السائلة وبين الكاميرا؟

مسائل من الحياة اليومية

تُصنع المرآة الأولية 3.0 لمرصد الحطام المداري التابع لوكالة الفضاء الأمريكية ناسا من خلال غزل صفيحةٍ مطليةٍ بطبقةٍ رقيقةٍ من الزئبق لنصبٍ على هيئة مرآة تلسكوب مثالية الشكل.

المصدر: Getty Images

لتحديد خواص قطع مكافئ، فقد نحتاج أحيانًا إلى كتابة معادلةٍ بالصيغة القياسيّة. وفي بعض الأحيان، يمكنك ببساطةٍ إعادة ترتيب المعادلة. ولكن في أحيان أخرى قد يكون من الضروري استخدام المهارات الرياضية كإكمال المربّع.

المثال 3 الكتابة بالصيغة القياسيّة

اكتب $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$ بالصيغة القياسيّة. وحدّد الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل. ثمّ مثّل القطع المكافئ بيانيًا.

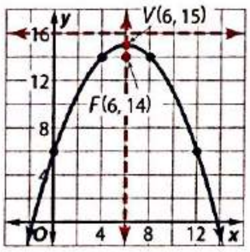
$$y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$$
$$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x) + 6$$
$$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36 - 36) + 6$$
$$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36) + 9 + 6$$
$$y = -\frac{1}{4}(x - 6)^2 + 15$$
$$-4(y - 15) = (x - 6)^2$$

نظرًا إلى أن حدّ المتغير x مربع وأن $p = -1$، فإن التمثيل البياني ينفتح إلى الأسفل. استخدم الصيغة القياسيّة للمعادلة لتحديد خواص القطع المكافئ.

الرأس: $(6, 15)$ الدليل: $y = 16$

البؤرة: $(6, 14)$ محور التماثل: $x = 6$

مثّل الرأس والبؤرة والمحور والدليل للقطع المكافئ. ثمّ شكّل جدولًا بالقيم لتمثيل المنحنى بيانيًا. ينبغي أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.



x	y
0	6
4	14
8	14
12	6

تمرين موجّه

اكتب كل معادلةٍ مما يلي بالصيغة القياسيّة. وحدّد الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل. ثمّ مثّل كل قطعٍ مكافئٍ بيانيًا.

3A. $x^2 - 4y + 3 = 7$

3B. $3y^2 + 6y + 15 = 12x$

2 معادلات القطع المكافئ

يمكن استخدام خواص محددة لتحديد معادلة القطع المكافئ.

المثال 4 كتابة المعادلات بدلالة الخواص المعطاة

اكتب معادلةً لقطعٍ مكافئٍ بالخواص التالية ومثّله بيانيًا.

a. البؤرة $(3, -4)$ والرأس $(1, -4)$

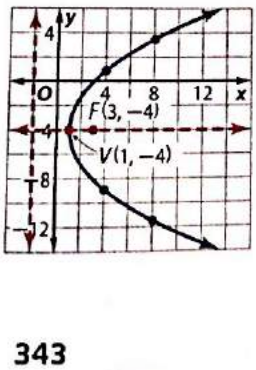
بما أن البؤرة والرأس لهما الإحداثي y نفسه، فالتمثيل البياني أفقي. البؤرة هي $(h + p, k)$، إذًا قيمة p هي $3-1$ أو 2. بما أن إشارة p موجبة، فإن التمثيل البياني يكون مفتوحًا إلى الجهة اليمنى.

اكتب معادلة القطع المكافئ بالصيغة القياسيّة باستخدام قيم h و p و k.

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$
$$[y - (-4)]^2 = 4(2)(x - 1)$$
$$(y + 4)^2 = 8(x - 1)$$

الصيغة القياسيّة للمعادلة هي $(y + 4)^2 = 8(x - 1)$.

مثّل الرأس والبؤرة بيانيًا. ثمّ مثّل القطع المكافئ بيانيًا.



نصيحة دراسية

التوجيه إذا كان للرأس والبؤرة الإحداثي نفسه على المحور الأفقي x، إذًا فإن القطع المكافئ يكون مفتوحًا إلى الأعلى أو الأسفل. وإذا كان للرأس والبؤرة الإحداثي نفسه على المحور الرأسي y، إذًا فإن القطع المكافئ يكون مفتوحًا إلى جهة اليمين أو جهة اليسار.

b. الرأس $(-2, 4)$، الدليل $y = 1$

الدليل مستقيمٌ أفقي، بالتالي يكون القطع المكافئ مفتوحًا رأسيًا. ونظرًا إلى أن الدليل يقع تحت الرأس، فإن القطع المكافئ يكون مفتوحًا إلى الأعلى.

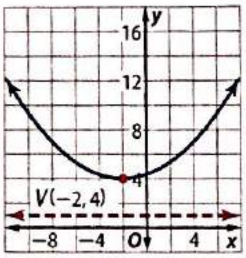
استخدم معادلة الدليل لإيجاد p.

$$y = k - p$$
$$1 = 4 - p$$
$$-3 = -p$$
$$3 = p$$

استبدل قيم h و k و p في المعادلة ذات الصيغة القياسية للقطع المكافئ المفتوح رأسيًا.

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$
$$[x - (-2)]^2 = 4(3)(y - 4)$$
$$(x + 2)^2 = 12(y - 4)$$

مثّل القطع المكافئ بيانيًا.



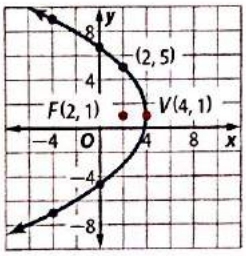
c. البؤرة $(2, 1)$، مفتوح إلى الجهة اليسرى، يمرّ بالنقطة $(2, 5)$

نظرًا إلى أن القطع المكافئ مفتوح إلى الجهة اليسرى، فإن الرأس هو $(2 - p, 1)$. استخدم الصيغة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الأفقي والنقطة $(2, 5)$ لإيجاد المعادلة.

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$
$$(5 - 1)^2 = 4p[2 - (2 - p)]$$
$$16 = 4p(p)$$
$$4 = p^2$$
$$\pm 2 = p$$

نظرًا إلى أن القطع المكافئ مفتوح إلى الجهة اليسرى، فلا بد أن تكون قيمة p سالبة. ولذلك، $p = -2$. الرأس هو $(4, 1)$، والصيغة القياسية للمعادلة هي $(y - 1)^2 = -8(x - 4)$.

مثّل القطع المكافئ بيانيًا.



تمرين موجّه

اكتب معادلةً لقطعٍ مكافئٍ بالخواص التالية مثّله بيانيًا.

4A. البؤرة $(-6, 2)$، الرأس $(-6, -1)$

4B. البؤرة $(5, -2)$، الرأس $(9, -2)$

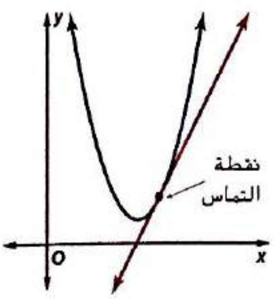
4C. البؤرة $(-3, -4)$، مفتوح إلى الأسفل، يمرّ بالنقطة $(5, -10)$

4D. البؤرة $(-1, 5)$، مفتوح إلى الجهة اليمنى، يمرّ بالنقطة $(8, -7)$

مراجعة المفردات

المماس المستقيم المماس لدائرة يقطع الدائرة في نقطة واحدة فقط، وتدعى نقطة التقاطع نقطة التماس.

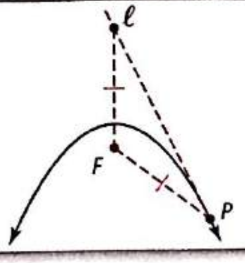
خلال حساب التفاضل والتكامل، سيطلب منك في أغلب الأحيان تحديد معادلات الخطوط المماسة للمنحنيات. ويمكن إيجاد معادلات الخطوط المماسة للقطوع المكافئة بدون استخدام حساب التفاضل والتكامل.



المفهوم الأساسي المستقيم المماس لقطع مكافئ

يشكّل المستقيم ℓ المماس للقطع المكافئ عند النقطة P مثلثًا متساوي الساقين كما يلي:

- تشكّل القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة إحدى ساقي المثلث.
- تشكّل القطعة المستقيمة الممتدة على طول محور التماثل من البؤرة إلى نقطة اخرى على المستقيم المماس الساق الأخرى.



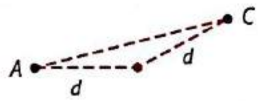
المثال 5 إيجاد مستقيم مماس لنقطة

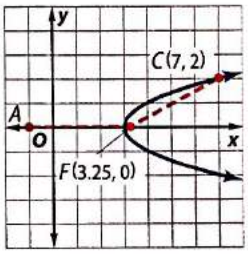
اكتب معادلةَ المماس لـ $x = y^2 + 3$ عند النقطة $C(7, 2)$

التمثيل البياني مفتوحٌ أفقيًا. حدّد الرأس والبؤرة.

$$x = y^2 + 3$$
$$1(x - 3) = (y - 0)^2$$

نظرًا لكون $4p = 1$، فإن $p = 0.25$ الرأس هو $(3, 0)$ والبؤرة هي $(3.25, 0)$. كما هو موضح في الشكلين، فإن علينا تحديد d التي ترمز إلى المسافة بين البؤرة ونقطة التماس C.





وهذه المسافة تمثّل إحدى ساقي المثلث متساوي الساقين.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(7 - 3.25)^2 + (2 - 0)^2}$$
$$= 4.25$$

استخدم d لإيجاد النقطة A، وهي النقطة الطرفية للساق الأخرى للمثلث متساوي الساقين.

$A(3.25 - 4.25, 0)$ أو $A(-1, 0)$

تقع كلا النقطتين A و C على المستقيم المماس للقطع المكافئ. أوجد معادلة هذا المستقيم.

$$m = \frac{2 - 0}{7 - (-1)} \text{ أو } \frac{1}{4}$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 7)$$
$$y - 2 = \frac{x}{4} - \frac{7}{4}$$
$$y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$$

كما هو موضح في الشكل 6.1.1، فإن معادلة المستقيم المماس لـ $x = y^2 + 3$ عند النقطة $(7, 2)$ هي $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$

تمرين موجّه

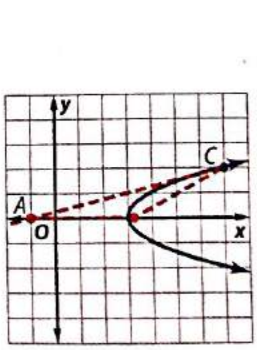
اكتب معادلة المماس لكل من القطوع المكافئة التالية عند كل النقطةِ المعطاة.

5A. $y = 4x^2 + 4; (-1, 8)$

5B. $x = 5 - \frac{y^2}{4}; (1, -4)$

نصيحة دراسية

الأعمدة على القطوع المخروطية إن العمود على قطع مخروطي عند نقطة ما هو المستقيم العمودي على المستقيم المماس للقطع المخروطي عند تلك النقطة. في المثال 5، بما أن معادلة المستقيم المماس للتمثيل البياني الخاص بـ $x = y^2 + 3$ عند النقطة $(7, 2)$ هي $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 7)$. فإن معادلة المستقيم العمودي على القطع المكافئ عند النقطة نفسها هي $y - 2 = -4(x - 7)$



الشكل 6.1.1

التمرين

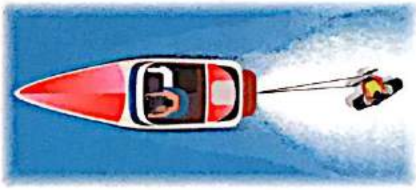
لكل معادلة من المعادلات التالية، حدّد الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل. ثمّ مثّل القطع المكافئ بيانيًا. (المثال 1)

1. $(x-3)^2 = 12(y-7)$
2. $(x+1)^2 = -12(y-6)$
3. $(y-4)^2 = 20(x+2)$
4. $-1(x+7) = (y+5)^2$
5. $(x+8)^2 = 8(y-3)$
6. $-40(x+4) = (y-9)^2$
7. $(y+5)^2 = 24(x-1)$
8. $2(y+12) = (x-6)^2$
9. $-4(y+2) = (x+8)^2$
10. $10(x+11) = (y+3)^2$

11. **التزلج على الألواح** قرّرت مجموعة من طلاب المدرسة الثانوية المشرفة على تصميم نصف أسطوانة التزلّج أنه يمكن الحصول على منحدر التزلّج عبر تقسيم قطع مكافئ إلى نصفين. يمكن تمثيل المقطع العرضي للقطع المكافئ الخاص بمنحدر التزلّج من خلال المعادلة $x^2 = 8(y-2)$. وفيها تقاس x و y بالأمتار. أين تقع بؤرة القطع المكافئ بالنسبة للأرض إذا كانت الأرض تمثل الدليل؟ (المثال 2)

12. **الاتصالات** يأخذ المقطع العرضي لصحن التقاط القنوات الفضائية شكل قطع مكافئ تركز الإشارات الفضائية على مستقبل يقع عند بؤرة القطع المكافئ. يمكن تمثيل المقطع العرضي للقطع المكافئ بالمعادلة $(x-6)^2 = 12(y-10)$. حيث تقاس قيمتا x و y بالسنتيمترات. أين يقع المستقبل بالنسبة لهذا المقطع العرضي بالتحديد؟ (المثال 2)

13. **ركوب القوارب** عند انزلاق القارب السريع من خلال الماء، يخلّف وراءه أثرًا له شكل قطع مكافئ. يلتقي رأس القطع المكافئ مع مؤخرة القارب. يسحب القارب سباحًا يركب لوحًا معلقًا بمؤخرة القارب بواسطة حبل. حين يكون السبّاح خلف القارب مباشرةً، فإنه يقع عند بؤرة القطع المكافئ. يمكن تمثيل القطع المكافئ الذي تشكله مؤخرة القارب باستخدام العلاقة $y^2 - 180x + 10y + 565 = 0$. وفيها x و y تقاسان بالأمتار. (المثال 3)



a. اكتب المعادلة بالصيغة القياسية.
b. ما طول الحبل الذي يربط السباح بمؤخرة القارب؟

14. **البيسبول** خلال مسابقة البيسبول التي نظمتها المدينة، ألقى فريق النسور شطائر للحضور على المدرّجات. تقذف الآلة المستخدمة لرمي الشطائر في الهواء بسرعة ابتدائية تساوي 19.5 مترًا في الثانية. يمكن توضيح مسافة ارتفاع الشطيرة y فوق سطح الأرض بعد مرور x ثانية من خلال العلاقة $y = -16x^2 + 19.5x + 6$. (المثال 3)

a. اكتب المعادلة بالصيغة القياسية.
b. ما هو الارتفاع الأقصى الذي يمكن أن تبلغه الكرة؟

اكتب كل معادلة مما يلي بالصيغة القياسية. حدّد الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل. ثمّ مثّل القطع المكافئ بيانيًا. (المثال 3)

15. $x^2 - 17 = 8y + 39$
16. $y^2 + 33 = -8x - 23$
17. $3x^2 + 72 = -72y$
18. $-12y + 10 = x^2 - 4x + 14$
19. $60x - 80 = 3y^2 + 100$
20. $-33 = x^2 - 12y - 6x$
21. $-72 = 2y^2 - 16y - 20x$
22. $y^2 + 21 = -20x - 6y - 68$
23. $x^2 - 18y + 12x = 126$
24. $-34 = 2x^2 + 20x + 8y$

25. **الإضاءة** يجب على أعمدة الإضاءة في أحد الملاعب أن تعكس الضوء بأقصى شدّة، حيث ينبغي أن توضع بصيلة المصباح في بؤرة المصباح على شكل قطع مكافئ للغطاء المحيط بها. إذا كان شكل الغطاء يعطى عبر العلاقة $x^2 = 36y$. حيث إن x و y تعطيان بالسنتيمترات. ما المسافة اللازمة بين الغطاء والبصيلة للحصول على الإضاءة القصوى؟ (المثال 3)

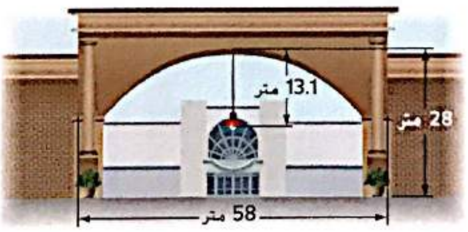
اكتب معادلة قطعٍ مكافئٍ لكل بؤرة F ورأس V مما يلي ومثّله بيانيًا. (المثال 4)

26. $F(-9, -7), V(-9, -4)$
27. $F(2, -1), V(-4, -1)$
28. $F(-3, -2), V(1, -2)$
29. $F(-3, 4), V(-3, 2)$
30. $F(-2, -4), V(-2, -5)$
31. $F(-1, 4), V(7, 4)$
32. $F(14, -8), V(7, -8)$
33. $F(1, 3), V(1, 6)$
34. $F(-4, 9), V(-2, 9)$
35. $F(8, -3), V(8, -7)$

اكتب معادلةً لكل قطعٍ مكافئٍ بؤرته F وخواصّه معطاةٌ وفق ما يلي ومثّله بيانيًا. (المثال 4)

36. $F(3, 3)$؛ مفتوح إلى الأعلى؛ ويمرّ بالنقطة $(23, 18)$
37. $F(1, 2)$؛ مفتوح إلى الأسفل؛ ويمرّ بالنقطة $(7, 2)$
38. $F(11, 4)$؛ مفتوح إلى الجهة اليمنى؛ ويمرّ بالنقطة $(20, 16)$
39. $F(-4, 0)$؛ مفتوح إلى الأسفل؛ ويمرّ بالنقطة $(4, -15)$
40. $F(1, 3)$؛ مفتوح إلى اليسار؛ ويمرّ بالنقطة $(-14, 11)$
41. $F(-5, -9)$؛ مفتوح إلى الجهة اليمنى؛ ويمرّ بالنقطة $(10, -1)$
42. $F(-7, 6)$؛ مفتوح إلى اليسار؛ ويمرّ بالنقطة $(-4, 10)$
43. $F(-5, -2)$؛ مفتوح إلى الأعلى؛ ويمرّ بالنقطة $(-13, -2)$

44. **الهندسة المعمارية** يتألف المدخل الذي يؤدي إلى إحدى ساحات الهواء الطلق من قوس قطعٍ مكافئ يقع فوق عمودين. يقع المصباح الموجود في نقطة المركز عند بؤرة القطع المكافئ. (المثال 4)



a. اكتب معادلةً تمثل القطع المكافئ.
b. مثّل المعادلة بيانيًا.

اكتب معادلة المماس لكل من القطوع المكافئة التالية عند كل النقطة المعطاة. (المثال 5)

45. $(x+7)^2 = -\frac{1}{2}(y-3)$, $(-5, -5)$

46. $y^2 = \frac{1}{5}(x-4)$, $(24, 2)$

47. $(x+6)^2 = 3(y-2)$, $(0, 14)$

48. $(x-3)^2 = y+4$, $(-1, 12)$

49. $-0.25(x-6)^2 = y-9$, $(10, 5)$

50. $-4x = (y+5)^2$, $(0, -5)$

حدّد اتجاه فتحة كل من القطوع المكافئة التالية.

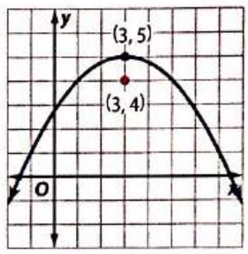
51. الدليل $y = 4$، $p = -2$

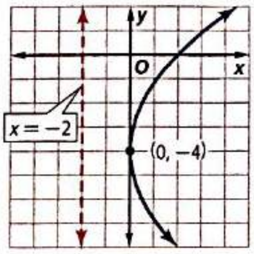
52. $y^2 = -8(x-6)$

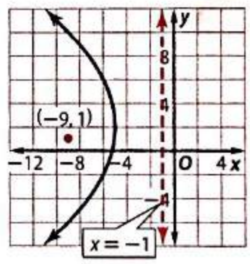
53. الرأس (1 ,5-)، البؤرة (3 ,5-)

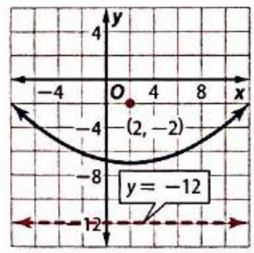
54. البؤرة (10 ,7)، الدليل $x = 1$

اكتب معادلةً لكل من القطوع المكافئة التالية.

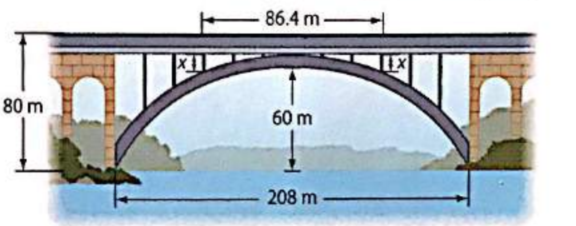
55. 

56. 

57. 

58. 

59. **الجسور** لقوس جسر السكة الحديدية المبين أدناه شكل قطع مكافئ. ويبعد البرجان الرئيسان الحاملان عن بعضهما مسافة 208 أمتار، وارتفاع كل منهما 80 مترًا. تبلغ المسافة بين قمة القطع المكافئ وسطح الماء 60 مترًا.



a. اكتب معادلةً تمثل شكل القوس.
لنعتبر ان مسار السكّة الحديدية يُمثّل المحور الأفقي x.

b. يتساوى بعدا الدعامتين الرأسيتين المربوطتين بالقوس عن مركز القطع المكافئ كما هو موضّح في المخطط. أوجد طولي الدعامتين إذا كانتا تبعدان عن بعضهما مسافة 86.4 مترًا.

اكتب معادلة القطع المكافئ المقابل لكل مجموعةٍ من الخواص المبيّنة ومثّله بيانيًا.

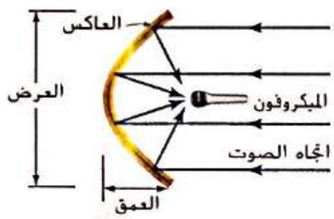
60. الرأس (8 ,1) يمرّ بالنقطة (13 ,11)، مفتوح رأسيًا

61. الرأس (4 ,6-)، يمرّ بالنقطة (8 ,10-)، مفتوح أفقيًا

62. مفتوح رأسيًا، يمر بالنقاط (12- و 14-) و (2- ,0) و (5- ,6)

63. مفتوح افقيا، يمر بالنقاط (1- ,1-) و (3 ,5) و (7 ,15)

64. **الصوت** تستخدم عاكسات صوتيةٌ على شكل قطع مكافئ مزودةٌ بميكروفوناتٍ تقع في البؤرة لالتقاط الأصوات عن بُعد. تدخل الأمواج الصوتية العاكسَ وتركّز باتجاه الميكروفون.



a. عند أي مسافةٍ عن العاكس ينبغي وضع الميكروفون إذا كان عرض العاكس 0.9 متر وعمقه 0.4 متر؟

b. اكتب معادلةً لتمثيل عاكس صوتٍ مختلفٍ عرضه 1.2 متر وعمقه 0.6 متر. إذا كان رأس العاكس يقع عند النقطة (5 ,3) وكان القطع المكافئ مفتوحًا إلى الجهة اليسرى.

c. مثّل المعادلة بيانيًا. حدّد المجال والمدى.

حدّد نقطة التماس لكلّ معادلةٍ مع المستقيمِ المُعطى لكل مما يلي.

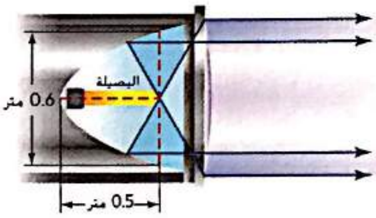
65. $(x+2)^2 = 2y$
$y = 4x$

66. $(y-8)^2 = 12x$
$y = x + 11$

67. $(y+3)^2 = -x + 4$
$y = -\frac{1}{4}x - 1$

68. $(x+5)^2 = -4(y+1)$
$y = 2x + 13$

69. **الإنارة** في الضوء الكاشف، توضع البصيلة عند بؤرة مرآةٍ لقطع مكافئ على مسافة 0.9 متر من الرأس. وهذا يجعل الإشعاعات الضوئية الصادرة عن البصيلة تنعكس عن المرآة على هيئة إشعاعاتٍ متوازية، ما يعطي حزمةً مركزةً من الضوء.

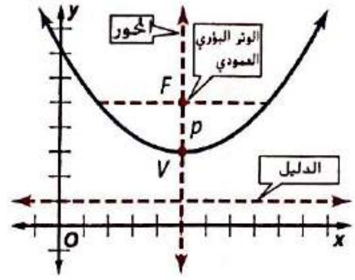


a. اكتب معادلةً للقطع المكافئ إذا كان قطر البصيلة 0.6 مترا. وذلك وفق ما هو موضح في التمثيل البياني.

b. افترض أن القطر البؤري قد زاد إلى 0.9 متر. إذا كان عمق كلا الكشافين 1.1 متر، فبكم يزيد عرض فتحة المصباح الأكبر؟ قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

70. **البرهان** استخدم الصيغة القياسيّة لمعادلة القطع المكافئ لبرهان الصيغة العامة للمعادلة.

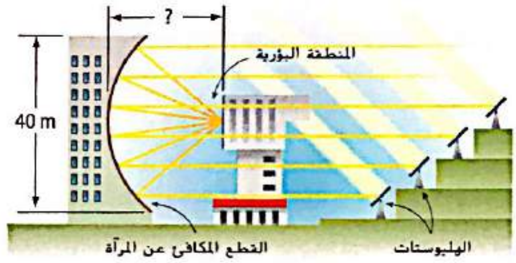
71. **القطعة المستقيمة العمودية** على محور القطع المكافئ عند بؤرته هي قطعة مستقيمة تمرّ بالبؤرة وتتعامد مع محور القطع المكافئ ولها نقطتان طرفيتان عليه. يساوي طول القطعة المستقيمة العمودية على محور القطع عند بؤرته $|4p|$ وحدة، حيث تمثّل p المسافة من الرأس إلى البؤرة.



a. اكتب معادلة قطع مكافئ يقع رأسه عند النقطة (2 ,3-)، ومحور تماثله هو $y = 2$، وطول القطعة المستقيمة العمودية على محور القطع المكافئ عند بؤرته 8 وحدات.

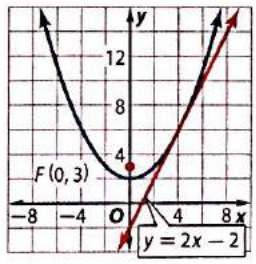
b. برهن أن النقطتين الطرفيتين للقطعة المستقيمة العمودية على محور القطع المكافئ عند بؤرته ونقطة تقاطع محور التماثل مع الدليل تمثلان رؤوس مثلث قائم متساوي الساقين.

72. **الطاقة الشمسية** يستخدم فرنٌ شمسيٌ يقع في شرق بيرينيه في فرنسا مرآةً على شكل قطع مكافئ تضاء بنور الشمس المنعكس عن حقلٍ من الهليوستاتات، وهي أجهزةٌ تتبّع ضوء الشمس وتعيد توجيهه. تجرى تجارب في مجال الأبحاث الشمسية ضمن المنطقة البؤرية من أحد الأبراج. فإذا كان عمق المرآة 6.25 أمتار، فكم طول المنطقة البؤرية أمام القطع المكافئ؟

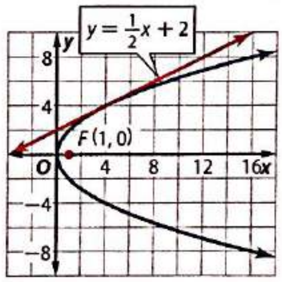


اكتب معادلةً ممكنةً لقطعٍ مكافئٍ بؤرته F حيث إن المستقيم المعطى مماس لذلك القطع.

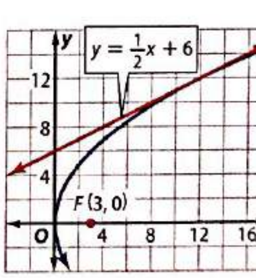
73.



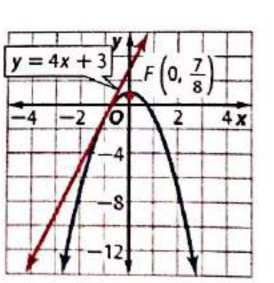
74.



75.



76.



77. **التمثيلات المتعددة** ستستكشف في هذه المسألة طريقة تغيّر شكل القطع المكافئ بتغيّر موقع بؤرته.

a. **سؤال هندسيًا** أوجد المسافة بين رأس كل من القطوع المكافئة التالية وبؤرته.

i. $y^2 = 4(x-2)$ **ii.** $y^2 = 8(x-2)$ **iii.** $y^2 = 16(x-2)$

b. **بيانيًا** مثّل بيانيًا القطوع المكافئة الواردة في الجزء **a** مستخدمًا لونًا مختلفًا لكلٍ منها، وحدّد بؤرة كلّ قطعٍ مكافئ.

c. **لفظيًا** صف العلاقة القائمة بين شكل القطع المكافئ والمسافة بين رأسه وبؤرته.

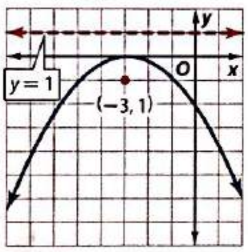
d. **تحليليًا** اكتب معادلةً لقطعٍ مكافئ له رأس القطع المكافئ معادلته $(x + 1)^2 = 20(y + 7)$ ولكنّه أضيق.

e. **تحليليًا** خمّن أشكال التمثيلات البيانية لـ $x^2 = -2(y + 1)$ و $x^2 = -12(y + 1)$ و $x^2 = -5(y + 1)$ تحقّق من تخمينك عبر التمثيل البياني لهذه القطوع.

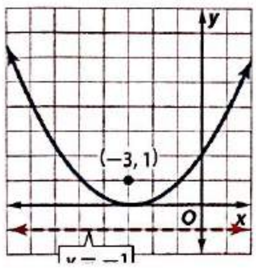
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

78. **تحليل الخطأ** تمثّل هديل وليلى بيانيًا $x^2 + 6x - 4y + 9 = 0$ فأي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

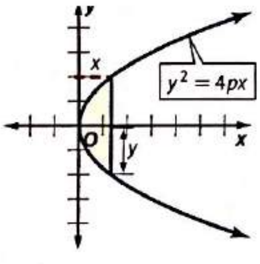
هديل



ليلى



79. **تحدٍّ** تعطى مساحة المقطع المظلل للقطع المكافئ الموجود المبيّن على الجهة اليُسرى من خلال العلاقة $A = \frac{4}{3}xy$ أوجد معادلة القطع المكافئ إذا كانت مساحة المقطع 2.4 وحدةً مربعة، وكان عرض المقطع 3 وحدات.



80. **التبرير** ما النقطة الأقرب في القطع المكافئ إلى البؤرة؟ اشرح استنتاجك.

81. **التبرير** دون إجراء التمثيل البياني، حدّد الأرباع التي لن يكون فيها للتمثيل البياني الخاص بـ $(y - 5)^2 = -8(x + 2)$ أيّ نقاط. اشرح استنتاجك.

82. **الكتابة في الرياضيات** يصف تقعّر التمثيل البياني لدالّةٍ ما إن كان ذلك التمثيل مفتوحًا إلى الأعلى (تقعر إلى الأعلى) أو إلى الأسفل (تقعّر إلى الأسفل). واشرح كيف يمكنك تحديد تقعّر قطع مكافئ أعطيت بؤرته ورأسه.

83. **الكتابة الموجزة** اكتب رسالةً توجز فيها المحتوى الذي تعلمته في هذا الدرس وتشرحه. وشكّل مخططًا يتناول الفرض والجمهور المستهدف والفكرة الرئيسة والتسلسل المنطقي والإطار الزمني للإنجاز.

مراجعة شاملة

أوجد القيمتين العظمى والصغرى للدالّة $f(x, y)$ وقيمتي x و y المقابلتين لهما وفق القيود المعطاة.

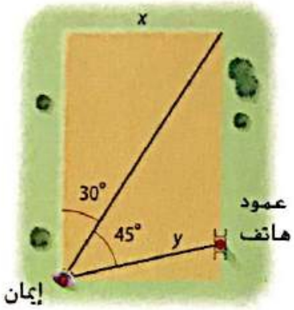
84. $x \le 5$
$y \ge -2$
$y \le x - 1$
$f(x, y) = x - 2y$

85. $y \ge -x + 2$
$2 \le x \le 7$
$y \le \frac{1}{2}x + 5$
$f(x, y) = 8x + 3y$

86. $x \ge -3$
$y \ge 1$
$3x + y \le 6$
$f(x, y) = 5x - 2y$

87. اكتب بصورة كسور جزئية $\frac{2y + 5}{y^2 + 3y + 2}$

88. **مسح الأراضي** تمسح إيمان قطعة أرض مستطيلة من المزمع أن يشيّد عليها بناءٌ لمكتب جديد، حيث تقيس الزاوية المحصورة بين أحد ضلعي قطعة الأرض والمستقيم الممتد من مكان وقوفها إلى الزاوية المقابلة من قطعة الأرض لتجد أنها تساوي $30°$. وبعد ذلك تقيس الزاوية بين ذلك المستقيم والمستقيم الممتد إلى عمود هاتف على حافة قطعة الأرض لتجد أنها تساوي $45°$. فإذا كانت إيمان تقف على مسافة 100 متر من الزاوية المقابلة في قطعة الأرض، فكم تبعد عن عمود الهاتف؟



أوجد قيمة كل من التعابير التالية باستخدام المعلومات المعطاة.

89. $\cot\theta$ و $\csc\theta$:
$\tan\theta = \frac{6}{7}, \sec\theta > 0$

90. $\cos\theta$ و $\tan\theta$:
$\csc\theta = -2, \cos\theta < 0$

حدّد خطوط التقارب الرأسية لكل دالّة مما يلي وشكّل تمثيلها البياني.

91. $y = \tan x + 4$

92. $y = \sec x + 2$

93. $y = \csc x - \frac{3}{4}$

أوجد قيمة كلًا من التعابير التالية.

94. $\log_{16} 4$

95. $\log_4 16^x$

96. $\log_3 27^x$

مثّل كل دالّة مما يلي.

97. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

98. $g(x) = x^4 - 7x^2 + x + 5$

99. $h(x) = x^4 - 4x^2 + 2$

مراجعة المهارات للاختبارات القياسية

100. **مراجعة** ما مجموعة حلول $3(4x + 1)^2 = 48$؟

A $\left\{\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right\}$

B $\left\{-\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right\}$

C $\left\{\frac{15}{4}, -\frac{17}{4}\right\}$

D $\left\{\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right\}$

E $\left\{\frac{7}{4}, -\frac{9}{4}\right\}$

101. **SAT/ACT** إذا كان x عددًا موجبًا، فإن
$\frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = $ ؟

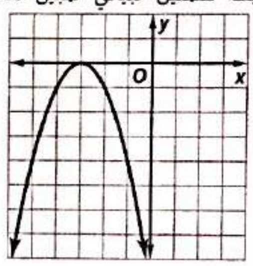
F $x^{-\frac{1}{4}}$

G $\sqrt{x^3}$

H $x^{\frac{3}{4}}$

J $\sqrt{x^5}$

102. ما الدالّة الرئيسة للتمثيل البياني المبيّن أدناه؟



A $y = x$

B $y = \sqrt{x}$

C $y = |x|$

D $y = x^2$

103. **مراجعة** ما نقاط تقاطع التمثيل البياني للدالّة $y = -2x\ 2 - 5x + 12$ مع المحور الأفقي x؟

F $-\frac{3}{2}, 4$

G $-4, \frac{3}{2}$

H $-2, \frac{1}{2}$

J $-\frac{1}{2}, 2$

6-2 القطع الناقص والدوائر

:: سابقًا
- حللت القطوع المكافئة ومثلتها.

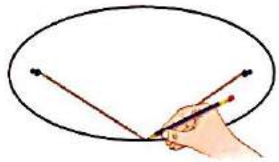
:: الآن
1. تحليل معادلات القطوع الناقصة والدوائر وتمثيلها بيانيًا.
2. استخدام المعادلات لتحديد القطوع الناقصة والدوائر.

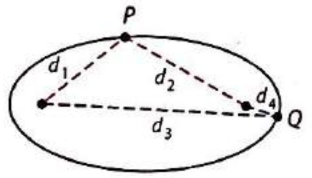
:: لماذا؟
- بسبب العجلة والقصور الذاتي، فإن الشكل الأكثر أمنًا لحلقة الأفعوانية يمكن تقريبه باستخدام القطع الناقص بدلًا من الدائرة، حيث يساعد الشكل البيضاوي على تقليل القوة الممارسة على رؤوس وأعناق الركاب.

مفردات جديدة
- قطع ناقص ellipse
- البؤرتان foci
- المحور الأكبر major axis
- المركز center
- المحور الأصغر minor axis
- الرأسان vertices
- الرأسان المرافقان co-vertices
- الاختلاف المركزي eccentricity

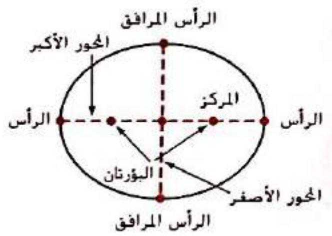
1 تحليل القطع الناقص والدائرة وتمثيلهما بيانيًا

القطع الناقص هو المحل الهندسي للنقاط في مستوى بحيث يكون مجموع المسافات من النقاط الثابتة، المُسماة **البؤرتين**، ثابتًا. للتمعن في هذا المفهوم، ضع في الحسبان طول الخيط المعلق عند بؤرتي القطع الناقص. يمكنك رسم القطع الناقص باستخدام قلم رصاص لتتبع المنحنى مع سحب الخيط جيدًا. بالنسبة لأي نقطتين على القطع الناقص، يكون ناتج جمع أطوال القطع المستقيمة إلى كل بؤرة قيمة ثابتة. بعبارة أخرى، $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$، ويكون ناتج هذا الجمع ثابتًا.



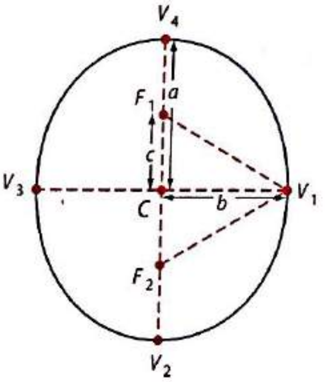


تسمى القطعة المستقيمة التي تمر ببؤرتي القطع الناقص ولها نقاط طرفية على القطع الناقص **المحور الأكبر**. والنقطة منتصف المحور الأكبر هي **المركز**. القطعة المستقيمة التي تمر بنقطة المركز ولها نقاط طرفية على القطع الناقص و المتعامد على المحور الأكبر هي **المحور الأصغر**. تمثل النقطتان الطرفيتان للمحور الأكبر **الرأسان**، وتمثل النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر **الرأسان المرافقان**.



مركز القطع الناقص هو نقطة منتصف المحورين الأكبر والأصغر. من ثم، فإن القطع المستقيمة من نقطة المركز وحتى كل رأس متطابقة، والقطع المستقيمة من نقطة المركز الى كل رأس مرافق متطابقة. المسافة من كل رأس الى نقطة المركز هي a وحدة، والمسافة من نقطة المركز إلى كل رأس مرافق هي b وحدة. المسافة من نقطة المركز إلى كل بؤرة هي c وحدة.

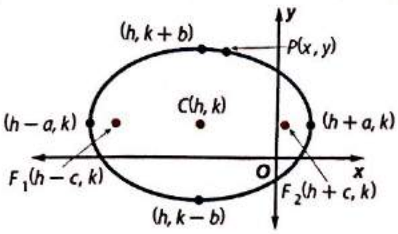
اعتبر أن $\triangle F_1V_1C \cong \triangle F_2V_1C$ لأن $\overline{V_1F_1}$ و $\overline{V_1F_2}$ باستخدام نظرية تساوي الساقين. $V_1F_1 = V_1F_2$ يمكننا استخدام تعريف القطع الناقص لإيجاد الأطوال V_1F_1 و V_1F_2 بدلالة الأطوال المعطاة.



$$V_1F_1 + V_1F_2 = V_2F_1 + V_2F_2$$
$$V_1F_1 + V_1F_2 = V_2F_1 + V_4F_1$$
$$V_1F_1 + V_1F_2 = V_2V_4$$
$$V_1F_1 + V_1F_2 = 2a$$
$$V_1F_1 + V_1F_1 = 2a$$
$$2(V_1F_1) = 2a$$
$$V_1F_1 = a$$

لأن $V_1F_1 = a$ و $\triangle F_1V_1C$ مثلث قائم الزاوية. $b^2 + c^2 = a^2$ باستخدام نظرية فيثاغورس.

لتكن $P(x, y)$ أي نقطة على القطع الناقص الذي مركزه $C(h, k)$. وإحداثيات بؤرتاه ورأساه والرأسان المرافقان موضحة على اليسار. بتعريف القطع الناقص، يكون مجموع المسافات من أي نقطة على القطع الناقص إلى البؤرتين مقدارًا ثابتًا. بناءً عليه، $PF_1 + PF_2 = 2a$

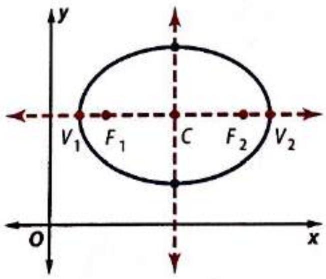


$$PF_1 + PF_2 = 2a$$
$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2} + \sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2} = 2a - \sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}$$
$$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} = 2a - \sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}$$
$$[(x-h)+c]^2+(y-k)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} + [(x-h)-c]^2+(y-k)^2$$
$$(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} + (x-h)^2 - 2c(x-h)+c^2+(y-k)^2$$
$$4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = 4a^2 - 4c(x-h)$$
$$a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = a^2 - c(x-h)$$
$$a^2[(x-h)^2 - 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2] = a^4 - 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$$
$$a^2(x-h)^2 - 2a^2c(x-h) + a^2c^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$$
$$a^2(x-h)^2 - c^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - a^2c^2$$
$$(a^2-c^2)(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2(a^2-c^2)$$
$$b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2$$
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

الصيغة القياسيّة لمعادلة قطع ناقص مركزه (h, k)، حيث $a > b$، معطاة أدناه.

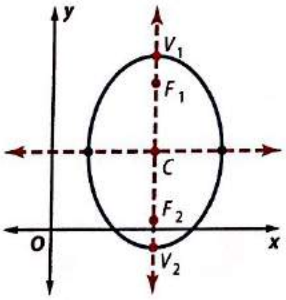
المفهوم الأساسي الصيغ القياسية لمعادلات القطع الناقص

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه: المحور الأكبر أفقي
المركز: (h, k)
البؤرتان: $(h \pm c, k)$
الرأسان: $(h \pm a, k)$
الرأسان المرافقان: $(h, k \pm b)$
المحور الأكبر: $y = k$
المحور الأصغر: $x = h$
العلاقة a, b, c: $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$



الاتجاه: المحور الأكبر رأسي
المركز: (h, k)
البؤرتان: $(h, k \pm c)$
الرأسان: $(h, k \pm a)$
الرأسان المرافقان: $(h \pm b, k)$
المحور الأكبر: $x = h$
المحور الأصغر: $y = k$
العلاقة a, b, c: $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

المثال 1 تمثيل القطوع الناقصة بيانيًا

مثّل بيانيًا القطع الناقص المعطى الذي معادلته.

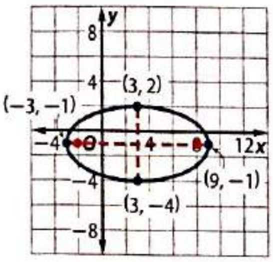
a. $\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

تكون المعادلة ذات صيغة قياسية إذا كانت $h = 3$ و $k = -1$ و $a = \sqrt{36}$ أو 6، و $b = \sqrt{9}$ أو 3 و $c = \sqrt{36-9}$ أو $3\sqrt{3}$. استخدم هذه القيم لتحديد سمات القطع الناقص.

الاتجاه:	أفقي
المركز:	$(3, -1)$
البؤرتان:	$(3 \pm 3\sqrt{3}, -1)$
الرأسان:	$(-3, -1)$ و $(9, -1)$
الرأسان المرافقان:	$(3, -4)$ و $(3, 2)$
المحور الأكبر:	$y = -1$
المحور الأصغر:	$x = 3$

ارسم المركز والرأسين والبؤرتين والمحاور بيانيًا. ثم اصنع جدولًا بالقيم لرسم القطع الناقص.

x	y
0	1.60, −3.60
6	1.60, −3.60



b. $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 24 = 0$

أولًا، اكتب المعادلة في صيغتها القياسية.

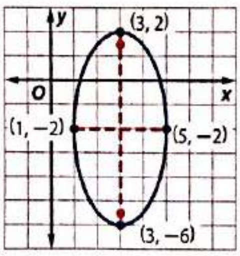
$$4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 24 = 0$$
$$(4x^2 - 24x) + (y^2 + 4y) = -24$$
$$4(x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) = -24$$
$$4(x^2 - 6x + \mathbf{9}) + (y^2 + 4y + \mathbf{4}) = -24 + \mathbf{4(9)} + \mathbf{4}$$
$$4(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$$
$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

تكون المعادلة ذات صيغة قياسية إذا كانت $h = 3$ و $k = -2$ و $a = \sqrt{16}$ أو 4، و $b = \sqrt{4}$ أو 2 و $c = \sqrt{16-4}$ أو $2\sqrt{3}$ استخدم هذه القيم لتحديد سمات القطع الناقص.

الاتجاه:	رأسي
المركز:	$(3, -2)$
البؤرتان:	$(3, -2 \pm 2\sqrt{3})$
الرأسان:	$(3, -6)$ و $(3, 2)$
الرأسان المرافقان:	$(5, -2)$ و $(1, -2)$
المحور الأكبر:	$x = 3$
المحور الأصغر:	$y = -2$

ارسم المركز والرأسين والبؤرتين والمحاور بيانيًا. ثم أعد جدولًا بالقيم لرسم القطع الناقص.

x	y
2	1.46, −5.46
4	1.46, −5.46



تمرين موجّه

1A. $\frac{(x-6)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$

1B. $x^2 + 4y^2 + 4x - 40y + 103 = 0$

نصيحة دراسية

الاتجاه إذا كان إحداثي y هو نفسه لرأسي القطع الناقص، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًا. وإذا كان إحداثي x هو نفسه لرأسي القطع الناقص، فإن المحور الأكبر يكون رأسيًا.

المثال 2 كتابة معادلات من خصائص معطاة

اكتب معادلة القطع الناقص باستخدام مجموعة الخصائص المعطاة.

a. محور الأكبر يمتد من (2 ,6-) إلى (8- ,6-)، ومحور الأصغر يمتد من (3- ,3-) إلى (3- ,9-)

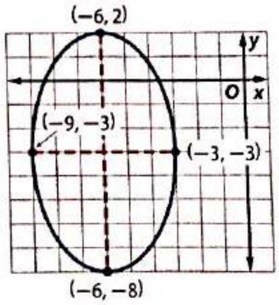
استخدم المحورين الأكبر والأصغر لتحديد a و b.

$a = \dfrac{2-(-8)}{2}$ أو 5 $\qquad$ $b = \dfrac{-3-(-9)}{2}$ أو 3

مركز القطع الناقص هو منتصف المحور الأكبر.

$$(h, k) = \left(\frac{-6+(-6)}{2}, \frac{2+(-8)}{2}\right)$$

$$= (-6, -3)$$



الشكل 6.2.1

إحداثيات x هي إحداثيات النقاط الطرفية للمحور الأكبر نفسها، من ثم يكون المحور الأكبر رأسيًا وقيمة a هي حد y^2. معادلة القطع الناقص $\dfrac{(y+3)^2}{25} + \dfrac{(x+6)^2}{9} = 1$. التمثيل البياني للقطع الناقص موضح في الشكل 6.2.1.

b. رأساه النقطتين (4 ,4-) و (4 ,6)، وبؤرتاه النقطتين (4 ,2-) و (4 ,4)

طول المحور الأكبر، $2a$، هو المسافة بين الرأسين.

$$2a = \sqrt{(-4-6)^2 + (4-4)^2}$$

$$a = 5$$

$2c$ تمثل المسافة بين البؤرتين.

$$2c = \sqrt{(-2-4)^2 + (4-4)^2}$$

$$c = 3$$

أوجد قيمة b

$$c^2 = a^2 - b^2$$

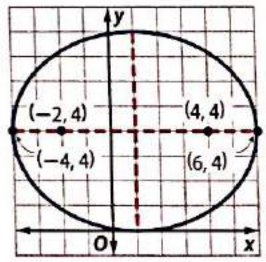
$$3^2 = 5^2 - b^2$$

$$b = 4$$

الرأسان على مسافة متساوية من المركز.

$$(h, k) = \left(\frac{-4+6}{2}, \frac{4+4}{2}\right)$$

$$= (1, 4)$$



الشكل 6.2.2

إحداثيات y هي إحداثيات النقاط الطرفية للمحور الأكبر نفسها، من ثم يكون المحور الأكبر أفقيًا وقيمة a تنتمي إلى حد x^2. معادلة القطع الناقص $\dfrac{(x-1)^2}{25} + \dfrac{(y-4)^2}{16} = 1$

التمثيل البياني للقطع الناقص موضّح في الشكل 6.2.2.

تمرين موجّه

2A. بؤرتاه النقطتين (3 ,19) و (3 ,7-)، وطول المحور الأكبر يساوي 30

2B. رأساه النقطتين (4- ,2-) و (8 ,2-)، وطول المحور الأصغر يساوي 10

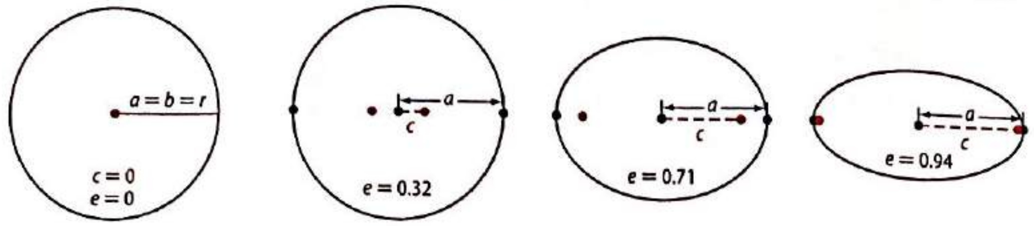
الاختلاف المركزي للقطع الناقص هي نسبة c إلى a. وستتراوح هذه القيمة دائمًا بين 0 و 1 وستحدد مدى "استدارة" أو "انبساط" القطع الناقص.

المفهوم الأساسي الاختلاف المركزي

لأي قطع ناقص، $\dfrac{(y-k)^2}{b^2} + \dfrac{(x-h)^2}{a^2} = 1$ أو $1 = \dfrac{(y-k)^2}{a^2} + \dfrac{(x-h)^2}{b^2}$ حيث $c^2 = a^2 - b^2$

الاختلاف المركزي هو: $e = \dfrac{c}{a}$.

قيمة c تمثل المسافة بين إحدى البؤرتين ومركز القطع الناقص. كلما اقتربت البؤرتان من بعضهما البعض فان c و e كلاهما تقتربان من 0. عند وصول الاختلاف المركزي إلى 0، يصبح القطع الناقص دائرة وكل من a و b يساوي نصف قطر الدائرة.



المثال 3 تحديد الاختلاف المركزي للقطع الناقص

حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي معادلته $\frac{(x-6)^2}{100} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

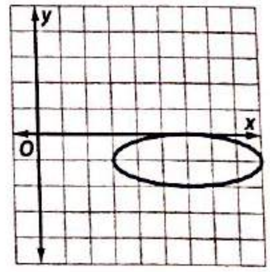
أولًا، حدد قيمة c.

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c\,2 = 100 - 9$$
$$c = \sqrt{91}$$

استخدم قيم c و a لإيجاد الاختلاف المركزي.

$$e = \frac{c}{a}$$
$$e = \frac{\sqrt{91}}{10}$$ أو 0.95 تقريبًا

الاختلاف المركزي للقطع الناقص هو 0.95 تقريبًا، من ثم فسيبدو القطع الناقص منبسطًا، كما هو موضّح في الشكل 6.2.3.



الشكل 6.2.3

تمرين موجّه

حدد الإختلاف المركزي للقطع الناقص المُعطى بواسطة كل معادلة.

3A. $\frac{x^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1$

3B. $\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1$

المثال 4 من واقع الحياة استخدام الاختلاف المركزي

بصريات يمكن تصميم العين على غرار قطع ناقص متطاول، أو ثلاثي الأبعاد. الاختلاف المركزي للمقطع العرضي المركزي للعين ذات الرؤية الطبيعية 0.28 تقريبًا. فإذا كان عمق العين الطبيعية 25 ملم تقريبًا، فما هو الارتفاع التقريبي للعين؟

استخدم الاختلاف المركزي لتحديد قيمة c.

$$e = \frac{c}{a}$$
$$0.28 = \frac{c}{12.5}$$
$$c = 3.5$$

استخدم قيم c و a لتحديد b.

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$3.5^2 = 12.5^2 - b^2$$
$$b = 12$$

لأن قيمة b هي 12 يكون ارتفاع العين $2b$ أو 24 ملم.

تمرين موجّه

4. الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر 0.39. فإذا كان عمق العين 25 ملم، فما هو ارتفاع العين؟

مهنة من واقع الحياة

فني البصريات
يعمل فنيو البصريات مع أطباء العيون لرعاية المرضى الذين يعانون من مرض أو إصابة بالعين، حيث يقومون باختبار الحالة البصرية ويساعدون في الإعدادات الجراحية. يجب أن يقوموا باستكمال برنامج تدريبي لمدة عام بالإضافة إلى شهادة الدراسة الثانوية أو شهادة معادلة الثانوية العامة (GED).

2 تحديد نوع القطع المخروطي

يمكن اشتقاق معادلة الدائرة باستخدام الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$
$$x^2+y^2=a^2$$
$$x^2+y^2=r^2$$

المفهوم الأساسي الصيغة القياسيّة لمعادلة الدائرة

الصيغة القياسيّة لمعادلة دائرة مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

إذا كان لديك معادلة قطع مخروطي، فيمكنك تحديد نوع القطع الممثل باستخدام سمات المعادلة.

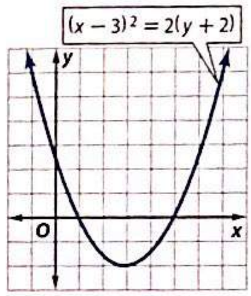
المثال 5 تحديد نوع القطع المخروطي

اكتب المعادلة في صيغتها القياسيّة. حدد شكل القطع المخروطي ذي الصلة.

a. $x^2-6x-2y+5=0$

$$x^2-6x-2y+5=0$$
$$(x^2-6x)-2y=-5$$
$$(x^2-6x+9)-2y=-5+9$$
$$(x-3)^2-2y=4$$
$$(x-3)^2=2y+4$$
$$(x-3)^2=2(y+2)$$

لأن هناك طرف واحد فقط مربع، فإن التمثيل البياني يكون قطعًا مكافئًا برأس $(3, -2)$ كما هو موضّح في الشكل 6.2.4.

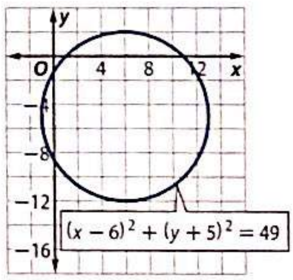


الشكل 6.2.4

b. $x^2+y^2-12x+10y+12=0$

$$x^2+y^2-12x+10y+12=0$$
$$(x^2-12x)+(y^2+10y)=-12$$
$$(x^2-12x+36)+(y^2+10y+25)=-12+36+25$$
$$(x-6)^2+(y+5)^2=49$$

لأن شكل المعادلة $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$، فإن التمثيل البياني يكون دائرة بمركز $(6, -5)$ ونصف قطر 7، كما هو موضّح في الشكل 6.2.5.

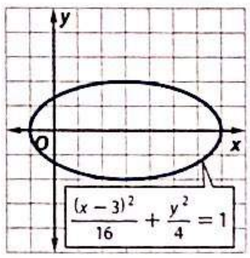


الشكل 6.2.5

c. $x^2+4y^2-6x-7=0$

$$x^2+4y^2-6x-7=0$$
$$(x^2-6x)+4y^2=7$$
$$(x^2-6x+9)+4y^2=7+9$$
$$(x-3)^2+4y^2=16$$
$$\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

لأن شكل المعادلة $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$، فإن التمثيل البياني يكون قطع ناقص بمركز $(3, 0)$، كما هو موضح في الشكل 6.2.6.



الشكل 6.2.6

تمرين موجّه

5A. $y^2-3x+6y+12=0$

5B. $4x^2+4y^2-24x+32y+36=0$

5C. $4x^2+3y^2+36y+60=0$

مثّل بيانيًا القطع الناقص الذي معادلته. (المثال 1)

1. $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$
2. $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$
3. $x^2+9y^2-14x+36y+49=0$
4. $4x^2+y^2-64x-12y+276=0$
5. $9x^2+y^2+126x+2y+433=0$
6. $x^2+25y^2-12x-100y+111=0$

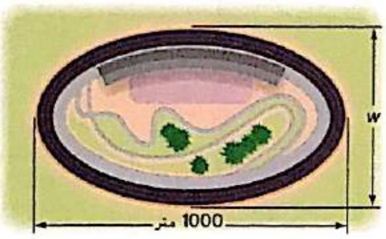
اكتب معادلة القطع الناقص باستخدام كل مجموعة من الخصائص. (المثال 2)

7. رأساه $(13, -3)$, $(-7, -3)$؛ وبؤرتاه $(11, -3)$, $(-5, -3)$
8. رأساه $(4, -9)$, $(4, 3)$؛ وطول المحور الاصغر هو 8
9. رأساه $(-3, 2)$, $(7, 2)$؛ وبؤرتاه $(-2, 2)$, $(6, 2)$
10. المحور الأكبر من $(-13, 2)$ إلى $(1, 2)$؛ المحور الاصغر من $(-6, 4)$ إلى $(-6, 0)$
11. بؤرتاه $(-6, -3)$, $(-6, 9)$؛ وطول المحور الأكبر يساوي 20
12. رأساه المرافقان $(-3, 7)$, $(-13, 7)$؛ وطول المحور الأكبر هو 16
13. بؤرتاه $(14, 8)$, $(-10, 8)$؛ وطول المحور الأكبر يساوي 30

حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي معادلته. (المثال 3)

14. $\frac{(x+5)^2}{72}+\frac{(y-3)^2}{54}=1$
15. $\frac{(x+6)^2}{40}+\frac{(y-2)^2}{12}=1$
16. $\frac{(x-8)^2}{14}+\frac{(y+3)^2}{57}=1$
17. $\frac{(x+8)^2}{27}+\frac{(y-7)^2}{33}=1$
18. $\frac{(x-1)^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$
19. $\frac{(x-11)^2}{17}+\frac{(y+15)^2}{23}=1$
20. $\frac{x^2}{38}+\frac{(y-12)^2}{13}=1$
21. $\frac{(x+9)^2}{10}+\frac{(y+11)^2}{8}=1$

22. **سباق** موضح أدناه تصميم مضمار السباق البيضاوي باختلاف مركزي 0.75. (المثال 4)



a. ما هو أقصى عرض w للمضمار؟

b. اكتب معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل x تقع في منتصف المضمار.

23. **نجارة** صنع نجار لافتة لزبون تتعلق برعاية الحيوانات الأليفة. يريد صاحب اللافتة ان يكون تصميمها ذات شكل بيضاوي اختلافها المركزي 0.60 وطولها 91.5 سنتيمتر. (المثال الرابع)

a. ما أقصى ارتفاع للافتة؟

b. اكتب معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل تقع في منتصف اللافتة.

اكتب المعادلة في الصيغة القياسيّة. حدد شكل القطع المخروطي ذي الصلة. (المثال 5)

24. $x^2+y^2+6x-4y-3=0$
25. $4x^2+8y^2-8x+48y+44=0$
26. $x^2-8x-8y-40=0$
27. $y^2-12x+18y+153=0$
28. $x^2+y^2-8x-6y-39=0$
29. $3x^2+y^2-42x+4y+142=0$
30. $5x^2+2y^2+30x-16y+27=0$
31. $2x^2+7y^2+24x+84y+310=0$

32. **تاريخ** يحتوي الكونغرس الأمريكي على غرفة ذات سقف بيضاوي. يُسمى هذا النوع من الغرف معرض الهمس لأن الصوت الصادر من إحدى بؤر القطع الناقص ينعكس على السقف ويعود إلى البؤرة الأخرى. يبلغ طول الغرفة الموجودة بالكونجرس 29.3 متراً وعرضها 13.7 متراً ويبلغ ارتفاع سقفها 7 متراً.

a. اكتب المعادلة التي تمثل شكل الغرفة. بفرض أنها متمركزة في نقطة الأصل وأن المحور الأكبر أفقي.

b. أوجد موقع البؤرتين.

c. ما المسافة التي يجب أن يبعدها الشخص عن إحدى البؤرتين لسماع الصوت المنعكس من البؤرة الأخرى؟

اكتب معادلة الدائرة التي تحقق كل مجموعة من الشروط. ثم ارسم الدائرة بيانيًا.

33. مركزها عند $(3, 0)$، طول نصف قطرها 2
34. مركزها $(-1, 7)$، طول قطر فيها 6
35. مركزها $(-4, -3)$، مماسة لـ $y = 3$
36. مركزها $(2, 0)$، النقطتان الطرفيتان لقطر فيها $(-5, 0)$ و $(9, 0)$
37. **صيغة** قم باشتقاق الشكل العام لمعادلة القطع الناقص ذي المحور الأكبر الرأسي المتمركز عند نقطة الأصل.

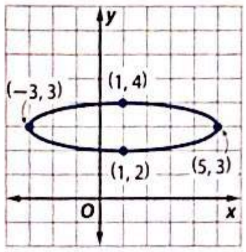
38. **التكنولوجيا الطبية** تستخدم أنظمة تحديد المواقع الداخلية (IPS) الموجات فوق الصوتية لاكتشاف العلامات المرتبطة بالملفات الرقمية التي تحتوي على المعلومات ذات الصلة بشخص أو شيء مراقب. وغالبًا ما تستخدم المستشفيات نظام تحديد المواقع الداخلي لاكتشاف موقع المعدات المتحركة والمرضى المتحركين.

a. إذا كان يجب وضع جهاز استقبال نظام التتبع في مكان مركزي لتشغيله على نحو أمثل، فأين ينبغي وضع جهاز الاستقبال في مجمع المستشفى الذي تبلغ مساحته 800 متر في 942 مترًا؟

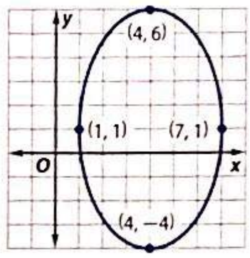
b. اكتب المعادلة التي تمثل نطاق سونار نظام تحديد المواقع الداخلي.

اكتبا معادلة كل قطع ناقص.

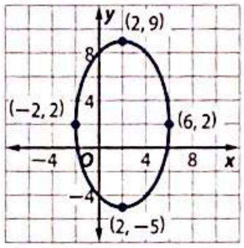
39.



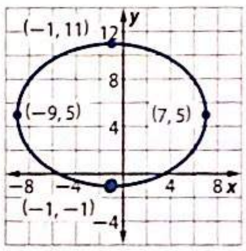
40.



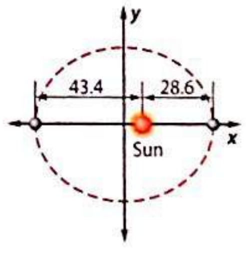
41.



42.



43. **حركة الكواكب** يتحرك كل كوكب بالمجموعة الشمسية حول الشمس في مدار بيضاوي، حيث تُعتبر الشمس البؤرة الوحيدة للقطع الناقص. يبعد المريخ 69.8 مليون كيلو متر عن الشمس عند أبعد نقطة له و 46 مليون كيلو متر عند أقرب نقطة له. كما هو موضح أدناه. يبلغ قطر الشمس 1,400,129.3 كيلو متر.



a. أوجد طول المحور الأصغر.

b. أوجد الإختلاف المركزي المدار البيضاوي.

أوجد إحداثيات المركز والبؤرتين والرؤوس للقطع الناقص الذي معادلته.

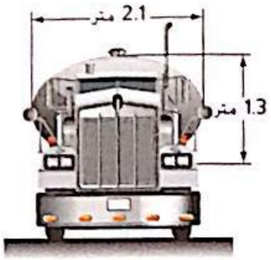
44. $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

45. $\frac{x^2}{100} + \frac{(y+6)^2}{25} = 1$

46. $9y^2 - 18y + 25x^2 + 100x - 116 = 0$

47. $65x^2 + 16y^2 + 130x - 975 = 0$

48. **الشاحنات** كثيرًا ما تُستخدم ناقلات ببضاوية الشكل مثل الموضحة لنقل السوائل لأنها أكثر استقرارًا من الخزانات الدائرية وحركة السوائل بداخلها تكون عند حدها الأدنى.



a. ارسم المقطع العرضي البيضاوي للخزان على مستوى إحداثي وميزه بالعلامات.

b. اكتب المعادلة التي تمثل شكل الخزان البيضاوي.

c. أوجد الإختلاف المركزي القطع الناقص.

اكتب الصيغة القياسية لمعادلة القطع الناقص.

49. رأساه (0 ,10-) و (0 ,10)، وإختلافه المركزي e يساوي $\frac{3}{5}$.

50. رأساه (1 ,0) و (1 ,6)، والإختلاف المركزي e يساوي $\frac{4}{5}$.

51. مركزه (4- ,2)، إحدى بؤرتيه عند $(2, -4 + 2\sqrt{5})$، وإختلافه المركزي e يساوي $\frac{\sqrt{5}}{3}$

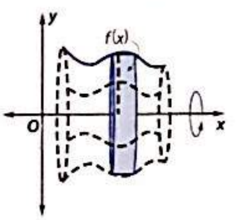
52. **الأفعوانية** يمكن تصميم شكل حلقة الأفعوانية في الملاهي باستخدام $\frac{y^2}{3306.25} + \frac{x^2}{2025} = 1$.

a. ما هو عرض الحلقة على طول المحور الأفقي؟

b. حدد ارتفاع الأفعوانية عن الأرض عندما تصل إلى أعلى الحلقة. إذا كان القضيب السفلي على ارفاع 6.1 مترًا من الأرض.

c. أوجد الإختلاف المركزي القطع الناقص.

53. **حرائق الغابات** يمتد نصف قطر حرائق الغابات بمعدل 4 كيلومترات يوميًا. ويتضح الشكل الحالي للحريق أدناه. حيث تقع المدينة على بعد 20 كيلومتراً جنوب شرق الحريق.

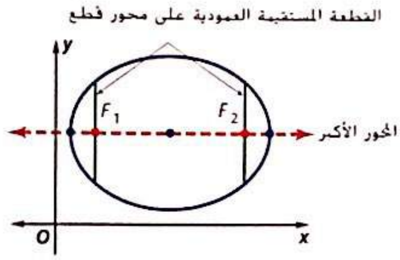


a. اكتب معادلة الدائرة في الوقت الحالي ومعادلة الدائرة وقت وصول الحريق إلى المدينة.

b. ارسم كلتا الدائرتين بيانيًا.

c. إذا استمر انتشار الحريق بنفس المعدل، فكم عدد الأيام التي يستغرقها للوصول إلى المدينة؟

54. الوتر البؤري للقطع الناقص هو الخط المستقيم الذي يمر عبر البؤرة، وهو عمودي على المحور الأكبر للقطع الناقص. وله نقاط طرفية على القطع الناقص. طول كل وتر بؤري هو $\frac{2b^2}{a}$ وحدة حيث a نصف طول المحور الأكبر و b نصف طول المحور الأصغر.



اكتب معادلة القطع الناقص الأفقي بمركز عند $(3, 2)$ ومحور أكبر بطول 16 وحدة ووتر بؤري بطول 12 وحدة.

أوجد إحداثيات النقاط حيث يتقاطع المستقيم مع الدائرة.

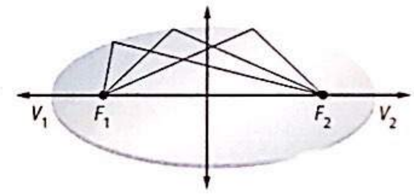
55. $y = x - 8, (x - 7)^2 + (y + 5)^2 = 16$

56. $y = x + 9, (x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 169$

57. $y = -x + 1, (x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 50$

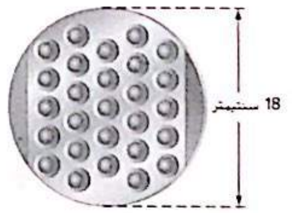
58. $y = -\frac{1}{3}x - 3, (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 25$

59. **الانعكاس** التفضيض هي عملية طلاء الزجاج بمادة عاكسة. ويمكن تفضيض الجزء الداخلي من القطع الناقص لإنتاج مرآة بأشعة توجّه نحو بؤرة القطع الناقص ثم عكسها على البؤرة الأخرى كما هو موضح.



إذا كان القسم V_1F_1 بطول 2 سم والإختلاف المركزي للمرآة هو 0.5. فأوجد معادلة القطع الناقص في شكلها القياسي.

60. **كيمياء** تُستخدم أعمدة التقطير لفصل المواد الكيميائية بناءً على الفروق في معدلات تبخرها. وقد تحتوي الأعمدة على ألواح بها أغطية فقاعية أو فتحات دائرية صغيرة.



a. اكتب معادلة اللوح الموضح. بفرض أن المركز $(-4, -1)$.

b. ما هي مساحة سطح اللوح غير المغطاة بالأغطية الفقاعية إذا كان قطر كل غطاء سنتيمترين؟

61. **هندسة** الرسوم البيانية لـ $x - 5y = -3$, $2x + 3y = 7$ و $4x - 7y = 27$ تحتوي على أضلاع مثلث. اكتب معادلة الدائرة التي تحيط بالمثلث.

اكتب الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة التي تمر عبر كل مجموعة نقاط. ثم حدد مركز ونصف قطر الدائرة.

62. $(2, 3), (8, 3), (5, 6)$

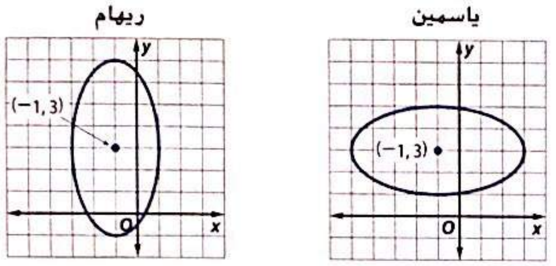
63. $(1, -11), (-3, -7), (5, -7)$

64. $(0, 9), (0, 3), (-3, 6)$

65. $(7, 4), (-1, 12), (-9, 4)$

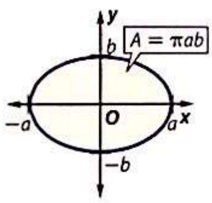
مهارات التفكير العليا مسائل استخدم مهارات التفكير العليا

66. **تحليل الأخطاء** يقوم ياسمين وريهام بإعداد رسم بياني لقطع ناقص له مركز عند $(-1, 3)$، ومحور أكبر بطول 8 ومحور ثانوي بطول 4. أي منهما صحيح؟ وضح تبريرك المنطقي.



67. **التبرير** حدد إذا ما كان هناك قطع ناقص ممثل بـ $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p+r} = 1$ أم لا حيث $r > 0$ سيكون له نفس بؤرتي القطع الناقص الممثل بـ $\frac{x^2}{p+r} + \frac{y^2}{p} = 1$ اشرح إجابتك.

مسألة تحفيزية المساحة A هي مساحة قطع ناقص بالشكل $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ هي $A = \pi ab$. اكتب معادلة القطع الناقص لكل من السمات التالية.



68. $b + a = 12, A = 35\pi$

69. $a - b = 5, A = 24\pi$

70. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيفية إيجاد البؤرتين والرأسين لقطع ناقص إذا أعطيت الصيغة القياسية للمعادلة.

71. **التبرير المنطقي** هل القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ متناظر حول نقطة الأصل؟ وضح تبريرك المنطقي.

72. **مسألة غير محددة الإجابة** إذا كانت معادلة دائرة $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ حيث $h > 0$ و $k < 0$ فما هو نطاق الدائرة؟ تحقق من إجابتك باستخدام مثال، جبريًا وبيانيًا.

73. **الكتابة في الرياضيات** وضح لماذا يصبح القطع الناقص دائريًا عندما تقترب قيمة b من a.

مراجعة شاملة

لكل معادلة، حدد إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة محور التناظر والدليل. ثم ارسم القطع المكافئ بيانيًا.

74. $y = 3x^2 - 24x + 50$

75. $y = -2x^2 + 5x - 10$

76. $x = 5y^2 - 10y + 9$

77. تصنيع تقوم شركة ألعاب بإنتاج دميتين جديدتين لعملائها: لعبة طفلي الأول، التي تتحدث وتضحك وتبكي ولعبة طفلي الحقيقي التي تستخدم الزجاجة وتزحف. يمكن للشركة أن تنتج 8 قطع من لعبة طفلي الأول أو 20 قطعة من طفلي الحقيقي في الساعة. بسبب الطلب، يجب أن تنتج الشركة عددًا من لعبة طفلي الأول يعادل ضعف عدد لعبة طفلي الحقيقي على الأقل. تقضي الشركة ما لا يزيد عن 48 ساعة في الأسبوع لتصنيع الدميتين. أوجد عدد ونوع الدمي الذي يجب إنتاجه لزيادة الأرباح.

أرباح كل دمية (AED)	
طفلي الأول	طفلي الحقيقي
3.00	7.50

اثبت كل متطابقة.

78. $\sin(\theta + 30°) + \cos(\theta + 60°) = \cos\theta$

79. $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\theta$

80. $\sin(3\pi - x) = \sin x$

أوجد كل الحلول لكل معادلة مذكورة في الفترة الفترة $(0, 2\pi)$.

81. $\sin\theta = \cos\theta$

82. $\sin\theta = 1 + \cos\theta$

83. $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$

أوجد حلًا لكل متباينة.

84. $x^2 - 5x - 24 > 0$

85. $x^2 + 2x - 35 \le 0$

86. $-2y^2 + 7y + 4 < 0$

اذكر عدد الأصفار الحقيقية المحتملة ونقاط الدوران لكل دالة. ثم حدد كل الأصفار الحقيقية بالتحليل إلى العوامل.

87. $f(x) = 3x^4 + 18x^3 + 24x^2$

88. $f(x) = 8x^6 + 48x^5 + 40x^4$

89. $f(x) = 5x^5 - 15x^4 - 50x^3$

ضع في أبسط صورة.

90. $(2 + 4i) + (-1 + 5i)$

91. $(-2 - i)^2$

92. $\frac{i}{1 + 2i}$

مراجعة مهارات الاختبارات الموحدة

93. اختبار الكفاءة الدراسية SAT/ACT النقطة B تقع على بعد 10 وحدات من النقطة A، التي هي عبارة عن مركز دائرة نصف قطرها 6. إذا رُسم للدائرة مماس من B، فما هي المسافة من B إلى نقطة التماس؟

A 6 **C** 10 **E** $2\sqrt{41}$

B 8 **D** $2\sqrt{34}$

94. مراجعة ما هي الصيغة القياسية لمعادلة المخروط الموضح أدناه؟

$$2x^2 + 4y^2 - 8x + 24y + 32 = 0$$

F $\frac{(x-4)^2}{3} + \frac{(y+3)^2}{11} = 1$

G $\frac{(x-2)^2}{6} + \frac{(y+3)^2}{3} = 1$

H $\frac{(x+2)^2}{5} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

J $\frac{(x-4)^2}{11} + \frac{(y+3)^2}{3} = 1$

95. يصنع أيمن ترتيباً بيضاويًا. ويرغب في أن يكون عرض الترتيب 27 سنتيمتر وارتفاعه 15 سنتيمتر. ما المعادلة التي ينبغي لأيمن استخدامها لرسم الترتيب؟

A $\frac{x^2}{7.5} + \frac{y^2}{13.5} = 1$

B $\frac{x^2}{56.25} + \frac{y^2}{182.25} = 1$

C $\frac{x^2}{182.25} + \frac{y^2}{56.25} = 1$

D $\frac{x^2}{13.5} + \frac{y^2}{7.5} = 1$

96. مراجعة إذا كانت $m = \frac{1}{x}$ و $n = 7m$ و $p = \frac{1}{n}$ و $q = 14p$ و $r = \frac{1}{\frac{1}{2}q}$، أوجد x.

F r **H** p

G q **J** $\frac{1}{r}$

6-3 القطع الزائد

:: سابقًا

- قمت بتحليل القطوع الناقصة والدوائر ورسمتها.

:: الآن

1. تحليل معادلات القطوع الزائدة ورسمها بيانيًا.
2. استخدام المعادلات لتعريف أنواع القطوع المخروطية.

:: لماذا؟

- تستخدم أجهزة اكتشاف الصواعق العديد من أجهزة الاستشعار لتحويل موجات الصواعق إلى أرقام وتسجيل تفاصيل الصعق باستخدام إشارات توقيت نظام تحديد المواقع (GPS) شديدة الدقة. يقوم جهازي استشعار باكتشاف الإشارة في وقت مختلف قليلًا وينتج نقطة على قطع زائد حيث المسافة من كل جهاز استشعار تتناسب مع الفارق الزمني للوصول. تتمكن أجهزة الاستشعار من نقل الموقع الدقيق للصاعقة في الوقت الفعلي.

مفردات جديدة

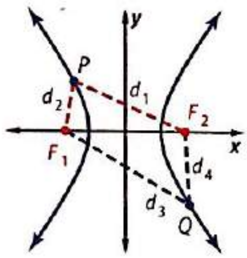
قطع زائد hyperbola

محور قاطع transverse axis

محور مرافق conjugate axis

1 تحليل القطع الزائد وتمثيله

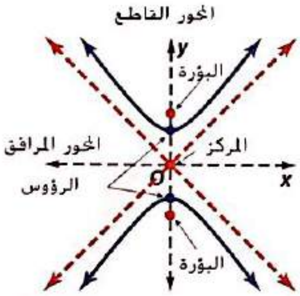
في حين إنّ القطع الناقص هو المحل الهندسي لكل النقاط في مستوى بحيث يكون مجموع المسافات من بؤرتين ثابتًا، فإنّ **القطع الزائد** هو المحل الهندسي لكل النقاط في مستوى بحيث تكون القيمة المطلقة للفرق في المسافات من البؤرتين ثابتة.



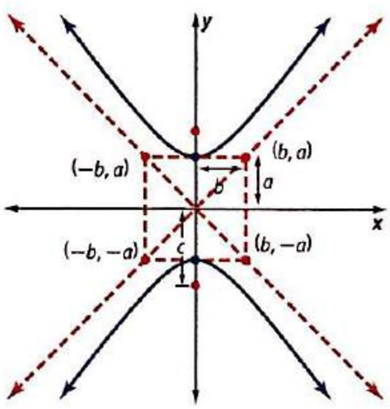
$$|d_1 - d_2| = |d_3 - d_4|$$

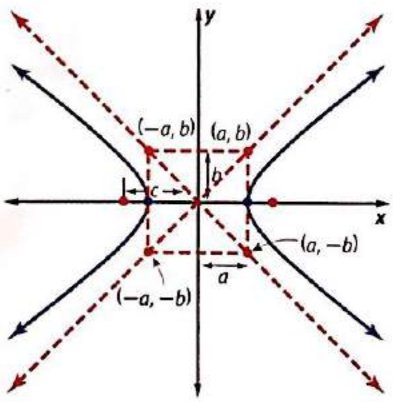
يتكون التمثيل البياني للقطع الزائد من فرعين منفصلين يقتربان من خطي التقارب. نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة ذي النقاط الطرفية عند البؤرتين هي المركز. الرأسان هي تقاطع هذه القطعة المستقيمة وكل فرع من أفرع المنحنى.

مثل القطع الناقص، يكون للقطع الزائد محوري تناظر. **المحور القاطع** بطول $2a$ وحدة ويربط الرأسان. **المحور المرافق** وهو عمودي على المحور القاطع، ويمر عبر المركز، ويبلغ طوله $2b$ وحدة.

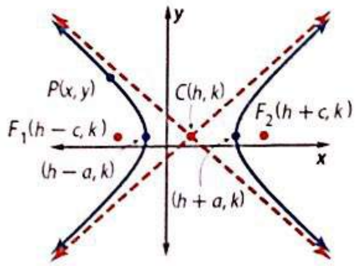


تختلف العلاقة بين قيم a، b، و c بالنسبة للقطع الزائد عن العلاقة بين قيمها للقطع الناقص. فبالنسبة للقطع الزائد، تكون العلاقة $c^2 = a^2 + b^2$. بالإضافة إلى أنه بالنسبة لأي نقطة على القطع الزائد، تكون القيمة المطلقة بين المسافات من النقطة إلى البؤرتين هي $2a$.





وكما هو الحال مع القطوع المخروطية الأخرى، يمكن استخدام تعريف القطع الزائد لاشتقاق معادلته. افترض أن $P(x, y)$ أي نقطة على القطع الزائد مركزه $C(h, k)$. إحداثيات البؤرتان والرأسان موضحة على اليسار. بتعريف القطع الزائد، تكون القيمة المطلقة للفرق في المسافات من أي نقطة على القطع الزائد إلى البؤرتين ثابتة. بناءً عليه، $|PF_1 - PF_2| = 2a$. من ثم، فإما $PF_1 - PF_2 = 2a$ أو $PF_2 - PF_1 = 2a$. للإثبات أدناه، سنفترض أن $PF_1 - PF_2 = 2a$.



$$PF_1 - PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2} - \sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2} = 2a + \sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}$$

$$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} = 2a + \sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}$$

$$[(x-h)+c]^2+(y-k)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} + [(x-h)-c]^2+(y-k)^2$$

$$(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} + (x-h)^2-2c(x-h)+c^2+(y-k)^2$$

$$-4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = 4a^2 - 4c(x-h)$$

$$a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = -a^2 + c(x-h)$$

$$a^2[(x-h)^2-2c(x-h)+c^2+(y-k)^2] = a^4 - 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$$

$$a^2(x-h)^2 - 2a^2c(x-h) + a^2c^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$$

$$a^2(x-h)^2 - c^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2(a^2-c^2)$$

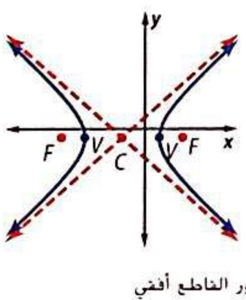
$$-b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2(-b^2)$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

المعادلة العامة لمعادلة قطع زائد مركزه النقطة (h, k) موضحة أدناه.

المفهوم الأساسي الصور القياسية لمعادلات القطع الزائد

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه: المحور القاطع أفقي

المركز: (h, k)

الرأسان: $(h \pm a, k)$

البؤرتان: $(h \pm c, k)$

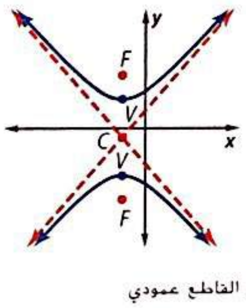
المحور القاطع: $y = k$

المحور المرافق: $x = h$

خطا التقارب: $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$

العلاقة a, b, c: $c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه: المحور القاطع عمودي

المركز: (h, k)

الرأسان: $(h, k \pm a)$

البؤرتان: $(h, k \pm c)$

المحور القاطع: $x = h$

المحور المرافق: $y = k$

خطا التقارب: $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$

العلاقة a, b, c: $c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

المثال 1 تمثيل القطع الزائد في شكله القياسي

مـثّـل بيانيًا القطع الزائد الذي معادلته.

a. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$

المعادلة في شكلها القياسي يكون h و k مساويان لصفر. ولأن $a^2 = 9$ و $b^2 = 25$ و $a = 3$ و $b = 5$. استخدم قيم a و b لإيجاد c.

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 3^2 + 5^2$

$c = \sqrt{34}$ أو تقريبًا 5.83

استخدم هذه القيم لـ h و k و a و b و c لتحديد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه: رأسي

المركز: $(0, 0)$

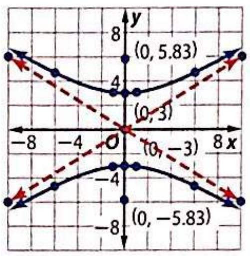
الرأسان: $(0, 3)$ و $(0, -3)$

البؤرتان: $(0, \sqrt{34})$ و $(0, -\sqrt{34})$

خطا التقارب: $y = \frac{3}{5}x$ و $y = -\frac{3}{5}x$

ارسم المركز والرأسين والبؤرتين وخطي التقارب بيانيًا. ثم كوّن جدولًا بالقيم لرسم القطع الزائد.

x	y
−6	−4.69, 4.69
−1	−3.06, 3.06
1	−3.06, 3.06
6	−4.69, 4.69



b. $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

المعادلة في شكلها القياسي كون $h = -1$ و $k = -2$ أو $a = \sqrt{9}$ أو 3. $b = \sqrt{16}$ أو 4. و $c = \sqrt{9 + 16}$ أو 5. استخدم هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه: أفقي

المركز: $(-1, -2)$

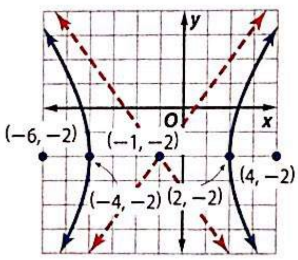
الرأسان: $(2, -2)$ و $(-4, -2)$

البؤرتان: $(4, -2)$ و $(-6, -2)$

خطا التقارب: $y + 2 = \frac{4}{3}(x + 1)$ و $y + 2 = -\frac{4}{3}(x + 1)$ أو

$y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$ و $y = -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$

ارسم المركز والرأسين والبؤرتين وخطي التقارب. ثم اصنع جدولًا بالقيم لرسم القطع الزائد.



x	y
−6	−7.33, 3.33
−5	−5.53, 1.53
3	−5.53, 1.53
4	−7.33, 3.33

الربط بتاريخ الرياضيات

هيباتيا (حوالي 370 ميلادي–415 ميلادي)

كانت هيباتيا رياضية وعالمة وفيلسوفة عملت كمدرسة في جامعة في الإسكندرية في مصر. كتبت هيباتيا كتابًا عن مخاريط أبولونيوس، الذي طور الأفكار المتعلقة بالقطع الزائد والقطع المكافئ والقطع الناقص.

المصدر: كلية أغنيس سكوت

تمرين موجّه

1A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

1B. $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{3} = 1$

إذا كنت تعرف معادلة القطع الزائد في شكلها القياسي، فيمكنك استخدم الخصائص لتمثيل المنحنى بيانيًا. إذا أعطيت المعادلة في شكل آخر، فسنحتاج إلى كتابة المعادلة في شكلها القياسي لتحديد الخصائص.

المثال 2 رسم القطع الزائد بيانيًا

مثّل القطع الزائد الذي معادلته $25x^2 - 16y^2 + 100x + 96y = 444$ بيانيًا.

أولًا. اكتب المعادلة في شكلها القياسي.

$$25x^2 - 16y^2 + 100x + 96y = 444$$
$$(25x^2 + 100x) - (16y^2 - 96y) = 444$$
$$25(x^2 + 4x) - 16(y^2 - 6y) = 444$$
$$25(x^2 + 4x + \mathbf{4}) - 16(y^2 - 6y + \mathbf{9}) = 444 + \mathbf{25(4)} - \mathbf{16(9)}$$
$$25(x + 2)^2 - 16(y - 3)^2 = 400$$
$$\frac{(x + 2)^2}{16} - \frac{(y - 3)^2}{25} = 1$$

نصيحة دراسية

الصيغة القياسية عند التحويل من الشكل العام إلى الصيغة القياسية، تذكر دائمًا أن الفرق بين الحدين الجبريين يجب أن يساوي 1. عندما تقسم على العدد في الطرف الأيمن من المعادلة، ينبغي بناء ثلاثي الحدود المربع الكامل في بسوط المقادير المطروحة.

المعادلة في شكلها القياسي الآن ومنها $h = -2$ و $k = 3$ و $a = \sqrt{16}$ أو 4، $b = \sqrt{25}$ أو 5، و $c = \sqrt{16 + 25}$. وهو $\sqrt{41}$ أو تقريبًا 6.4. استخدم هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه: أفقي

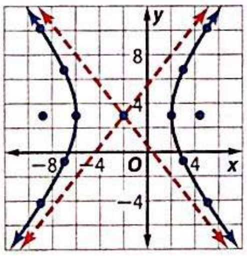
المركز: $(-2, 3)$

الرأسان: $(-6, 3)$ و $(2, 3)$

البؤرتان: $(-8.4, 3)$ و $(4.4, 3)$

خطا التقارب: $y - 3 = \frac{5}{4}(x + 2)$ و $y - 3 = -\frac{5}{4}(x + 2)$ أو $y = \frac{5}{4}x + \frac{11}{2}$ و $y = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$

ارسم المركز والرأسين والبؤرتين وخطي التقارب. ثم كوّن جدولًا بالقيم لرسم القطع الزائد.

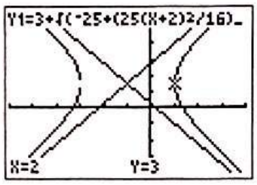


x	y
−9	−4.18, 10.18
−7	−0.75, 6.75
3	−0.75, 6.75
5	−4.18, 10.18

التحقق حل المعادلة من اجل y للحصول على دالتين بالمتغير x،

$$y = 3 + \sqrt{-25 + \frac{25(x+2)^2}{16}} \text{ و } 3 - \sqrt{-25 + \frac{25(x+2)^2}{16}}.$$

ارسم المعادلات بيانيًا في نفس النافذة، مع معادلات خط التقارب وقارنها برسمك البياني، عن طريق اختبار بعض النقاط. ✓



[−12, 8] scl: 1 by [−8, 12] scl: 1

تمرين موجّه

مثّل بيانيًا القطع الزائد الذي معادلته.

2A. $\frac{(y+4)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{81} = 1$

2B. $2x^2 - 3y^2 - 12x = 36$

عند تمثيل القطع الزائد بيانيًا، فتذكر أن التمثيل البياني سيقترب من خطي التقارب عند تحركه بعيدًا عن الرأسان. ارسم بالقرب من الرأسان لتحسين دقة تمثيلك البياني.

يمكنك تحديد معادلة القطع الزائد إذا أعطيت الخصائص التي توفر المعلومات الكافية.

المثال 3 كتابة المعادلة ضمن الخصائص المعطاة

اكتب معادلة القطع الزائد ضمن الخصائص المعطاة.

a. رأساه $(-3, -6)$، $(-3, 2)$؛ وبؤرتاه $(-3, -7)$، $(-3, 3)$

لأن إحداثيات x للرؤوس متشابهة، يكون المحور القاطع رأسيًا. أوجد مركز القطع الزائد وقيم a و b و c.

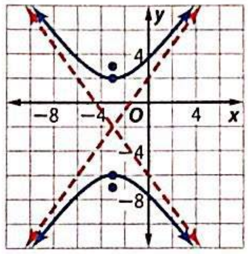
المركز: $(-3, -2)$

$a = 4$

$c = 5$

$b = 3$

لأن المحور القاطع رأسي، يندمج حد a^2 مع حد y^2. معادلة القطع الزائد هي $\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$. التمثيل البياني للقطع الزائد موضح في الشكل 6.3.1.



الشكل 6.3.1

b. رأساه $(-3, 0)$، $(-9, 0)$؛ وخطا التقارب $y = 2x - 12,\ y = -2x + 12$

لأن إحداثيات y للرؤوس متشابهة، يكون المحور القاطع أفقيًا.

المركز: $(-6, 0)$

$a = 3$

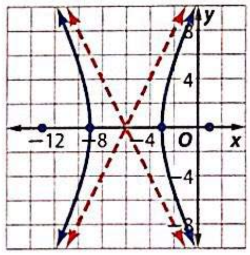
الميل لخطي التقارب $\pm\frac{b}{a}$. استخدم الميل الموجب لإيجاد b.

$\frac{b}{a} = 2$

$\frac{b}{3} = 2$

$b = 6$

لأن المحور القاطع أفقي، يندمج حد a^2 مع حد x^2. معادلة القط الزائد $\frac{(x+6)^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$. التمثيل البياني للقطع الزائد موضح في الشكل 6.3.2.



الشكل 6.3.2

تمرين موجّه

3A. رأساه $(3, 2)$، $(3, 6)$؛ وطول المحور المرافق 10 وحدات

3B. بؤرتاه $(2, -2)$، $(-12, -2)$؛ وخطا التقارب $y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{4},\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$

توجد خاصية أخرى يمكن استخدامها لوصف القطع الزائد وهي الاختلاف المركزي. وصيغة الاختلاف المركزي تشبه صيغة كل القطوع المخروطية، $e = \frac{c}{a}$. تذكر أنه بالنسبة للقطع الناقص، يكون الاختلاف المركزي أكبر من 0 واصغر من 1. أما بالنسبة للقطع الزائد، فإن الاختلاف المركزي دائما اكبر من 1.

المثال 4 إيجاد الاختلاف المركزي للقطع الزائد

حدد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطى بالمعادلة $\frac{(y-4)^2}{48} - \frac{(x+5)^2}{36} = 1$

أوجد c ثم حدد الاختلاف المركزي.

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 48 + 36$

$c = \sqrt{84}$

$e = \frac{c}{a}$

$= \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{48}}$

≈ 1.32

الاختلاف المركزي للقطع الزائد 1.32 تقريبًا.

تمرين موجّه

حدد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطى بالمعادلة.

4A. $\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{80} = 1$

4B. $\frac{(y-2)^2}{15} - \frac{(x+9)^2}{75} = 1$

2 تعريف القطع المخروطي

يمكنك تحديد نوع القطع المخروطي عندما تكون معادلة القطع المخروطي في شكلها العام، $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. المميّز أو $B^2 - 4AC$. يمكن استخدامه لتعريف القطع المخروطي.

المفهوم الأساسي تصنيف القطوع المخروطية باستخدام المُميّز

التمثيل البياني لمعادلة من الدرجة الثانية تأخذ بالشكل: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ هو

- دائرة إذا كانت $B^2 - 4AC < 0$؛ $B = 0$ و $A = C$.
- قطع ناقص إذا كانت $B^2 - 4AC < 0$؛ سواء $B \neq 0$ أو $A \neq C$
- قطع مكافئ إذا كانت $B^2 - 4AC = 0$
- قطع زائد إذا كانت $B^2 - 4AC > 0$.

عندما تكون $B = 0$. سيكون القطع المخروطي إما رأسيًا أو أفقيًا. عندما تكون $B \neq 0$. لن يكون القطع المخروطي رأسيًا ولا أفقيًا.

المثال 5 تحديد نوع القطع المخروطي

استخدم المُميّز لتحديد نوع القطع المخروطي الذي معادلته.

a. $4x^2 + 3y^2 - 2x + 5y - 60 = 0$

A هي 4 و B هي 0 و C هي 3.

أوجد المُميّز.

$B^2 - 4AC = 0^2 - 4(4)(3)$ أو -48

المُميّز اصغر من 0. من ثم يجب أن يكون القطع المخروطي إما دائرة أو قطع ناقص. لأن $A \neq C$. فإن المقطع المخروطي هو قطع ناقص.

b. $2y^2 + 6x - 3y + 4xy + 2x^2 - 88 = 0$

A هي 2 و B هي 4 و C هي 2.

أوجد المُميّز.

$B^2 - 4AC = 4^2 - 4(2)(2)$ أو 0

المُميّز 0. من ثم فإن القطع المخروطي هو قطع مكافئ.

c. $18x - 12y^2 + 4xy + 10x^2 - 6y + 24 = 0$

A هي 10 و B هي 4 و C هي -12.

أوجد المُميّز.

$B^2 - 4AC = 4^2 - 4(10)(-12)$ أو 496

المُميّز أكبر من 0. من ثم فإن القطع المخروطي هو قطع زائد.

تمرين موجّه

5A. $3x^2 + 4x - 2y + 3y^2 + 6xy + 64 = 0$

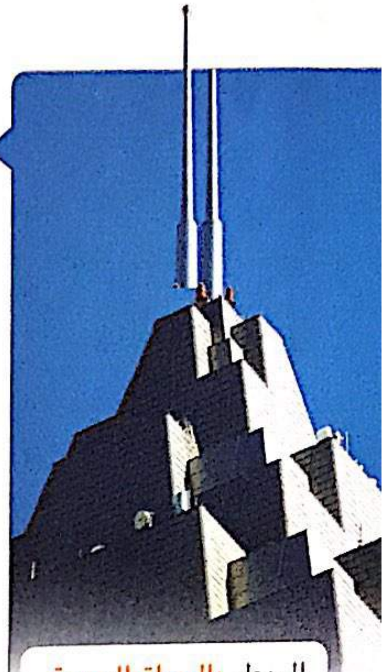
5B. $6x^2 + 2xy - 15x = 3y^2 + 5y + 18$

5C. $4xy + 8x - 3y = 2x^2 + 8y^2$

نصيحة دراسية

تحديد نوع القطع المخروطي عند إدارة قطع مخروطي كما في المثال 5b. فلا يمكن كتابة معادلته في شكلها القياسي. في هذه الحالة، يمكن استخدام المُميّز فقط لتحديد نوع القطع المخروطي دون رسمه بيانيًا. ستعرف المزيد عن المقاطع المخروطية المدارة في الدرس القادم.

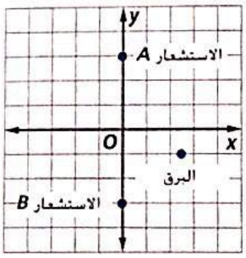
يمكن للباحثين تحديد موقع الصواعق على مسار قطع زائد يتشكل بأجهزة الاستشعار الواقعة عند البؤرتين.



المثال 6 الحياة اليومية تطبيق القطع الزائد

أرصاد جوية يقع جهازا استشعار لاكتشاف الصواعق على بعد 6 كم، حيث جهاز الاستشعار A شمال جهاز الاستشعار B. كمخطط للصواعق، يحدد الباحثون حدوث الصاعقة غرب كلا جهازي الاستشعار وعلى مسافة أبعد من جهاز الاستشعار A عنها من جهاز الاستشعار B بمقدار 1.5 كم.

a. أوجد معادلة القطع الزائد الذي تقع عليه الصاعقة.



أولًا، ضع جهازي الاستشعار على شبكة إحداثيات بحيث تكون نقطة الأصل هي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة بين جهاز الاستشعار A وجهاز الاستشعار B. تقع الصاعقة غرب أجهزة الاستشعار وأقرب إلى جهاز الاستشعار B، بناءً عليه ينبغي أن تكون في الربع الرابع.

يقع جهازا الاستشعار عند بؤرتي القطع الزائد. لذا c تكون 3. تذكر أن القيمة المطلقة للفرق في المسافات من أي نقطة على القطع الزائد إلى البؤرتين هي $2a$.

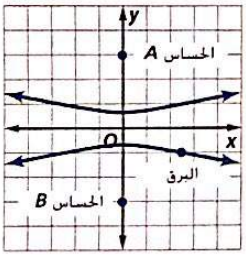
لأن الصاعقة تقع على مسافة أبعد من جهاز الاستشعار A عنها من جهاز الاستشعار B بمقدار 1.5 كم، $2a = 1.5$ و a هي 0.75. استخدم هذه القيم a و c لإيجاد b^2.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$3^2 = 0.75^2 + b^2$$

$$8.4375 = b^2$$

المحور القاطع يكون رأسيًا ومركز القطع الزائد يقع عند نقطة الأصل. من ثم ستكون المعادلة بالشكل $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ باستبدال قيم a^2 و b^2



تكون معادلة القطع الزائد $\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$

حدثت الصاعقة بطول القطع الزائد

$$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$$

b. أوجد إحداثيات الصاعقة إذا حدثت على بعد 2.5 كم شرق أجهزة الاستشعار.

لأن الصاعقة حدثت على بعد 2.5 كم شرق أجهزة الاستشعار، فإن $x = 2.5$. كانت الصاعقة أقرب إلى جهاز الاستشعار B منها إلى جهاز الاستشعار A، من ثم فإنها تقع في الفرع السفلي. استبدل قيمة x في المعادلة وحل للحصول على y.

$$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$$

$$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{2.5^2}{8.4375} = 1$$

$$y \approx -0.99$$

تبلغ قيمة y حوالي -0.99. بناءً عليه تقع الصاعقة عند $(2.5, -0.99)$.

تمرين موجّه

6. **أرصاد جوية** يقع جهاز الاستشعار A على بعد 30 كيلومتراً غرب جهاز الاستشعار B. تحدث الصاعقة على مسافة أبعد من جهاز الاستشعار A عنها من جهاز الاستشعار B بمقدار 9 كيلومترات.

A. أوجد معادلة القطع الزائد الذي تحدث عليه الصاعقة.

B. أوجد إحداثيات موقع الصاعقة إذا حدثت على بعد 8 أميال شمال أجهزة الاستشعار.

الربط بالحياة اليومية

يوفر قضيب الوقاية من الصواعق مسار ذي مقاومة منخفضة إلى الأرض فيما يتعلق بالتيارات الكهربية الصادرة من الصواعق.

المصدر: *How Stuff Works*

تمارين

مثّل بيانيًا القطع الزائد الذي معادلته: (المثال 1)

1. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
2. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{17} = 1$
3. $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{30} = 1$
4. $\frac{y^2}{34} - \frac{x^2}{14} = 1$
5. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{21} = 1$
6. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$
7. $\frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{8} = 1$
8. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{14} = 1$
9. $3x^2 - 2y^2 = 12$
10. $3y^2 - 5x^2 = 15$

11. **الإضاءة** يمكن تمثيل الضوء الساقط على جدار من مصباح المكتب بواسطة قطع زائد. يمكن تمثيل الضوء الصادر من مصباح مكتب محدد بالمعادلة $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{81} = 1$ مثل القطع الزائد بيانيًا. (المثال 1)

مثّل بيانيًا القطع الزائد الذي معادلته: (المثال 2)

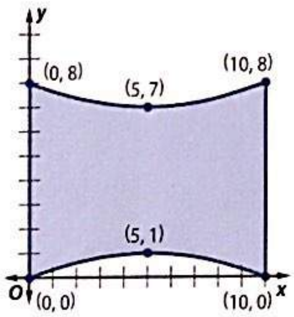
12. $\frac{(x+5)^2}{9} - \frac{(y+4)^2}{48} = 1$
13. $\frac{(y-7)^2}{4} - \frac{x^2}{33} = 1$
14. $\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y-6)^2}{60} = 1$
15. $\frac{(x-5)^2}{49} - \frac{(y-1)^2}{17} = 1$
16. $\frac{(y-3)^2}{16} - \frac{(x-4)^2}{42} = 1$
17. $\frac{(x+6)^2}{64} - \frac{(y+5)^2}{58} = 1$
18. $x^2 - 4y^2 - 6x - 8y = 27$
19. $-x^2 + 3y^2 - 4x + 6y = 28$
20. $13x^2 - 2y^2 + 208x + 16y = -748$
21. $-5x^2 + 2y^2 - 70x - 8y = 287$

22. **زلازل** بعد اكتشاف جهاز رصد الزلازل لزلزال، اكتشف جهاز رصد الزلازل الواقع شمال الجهاز الأول زلزالًا آخر. تقع البؤرة للزلزال الآخر على أحد أفرع القطع الزائد الممثل بالمعادلة $\frac{(y-30)^2}{900} - \frac{(x-60)^2}{1600} = 1$، حيث تقع أجهزة رصد الزلازل عند البؤرتين. ارسم القطع الزائد بيانيًا. (المثال 2)

اكتب معادلة القطع الزائد ضمن الخصائص المعطاة. (المثال 3)

23. بؤرتاه $(-1, 9)$، $(-1, -7)$؛ وطول محوره المرافق 14 وحدة
24. رأساه $(7, 5)$، $(-5, 5)$؛ وبؤرتاه $(11, 5)$، $(-9, 5)$
25. بؤرتاه $(-1, 9)$، $(-1, -3)$؛ وطول محوره المرافق 6 وحدات
26. رأساه $(-1, 9)$، $(-1, 3)$؛ وخطا التقارب له $y = \pm\frac{3}{7}x + \frac{45}{7}$
27. رأساه $(-3, -12)$، $(-3, -4)$؛ وبؤرتاه $(-3, -15)$، $(-3, -1)$
28. بؤرتاه $(9, 7)$، $(-17, 7)$؛ وخطا التقارب له $y = \pm\frac{5}{12}x + \frac{104}{12}$
29. مركزه $(-7, 2)$؛ وخطا التقارب له $y = \pm\frac{7}{5}x + \frac{59}{5}$، وطول محوره القاطع 10 وحدات
30. مركزه $(0, -5)$؛ وخطا التقارب له $y = \pm\frac{\sqrt{19}}{6}x - 5$. وطول محوره المرافق 12 وحدة
31. رأساه $(-3, 0)$، $(-3, -4)$؛ وطول محوره المرافق 12 وحدة
32. رأساه $(10, 2)$، $(-2, 2)$؛ وطول محوره المرافق 16 وحدة

33. **هندسة معمارية** يوضح الرسم البياني أدناه مخطط طابق في مبنى إداري.



a. اكتب المعادلة التي سوف تمثل الجوانب المنحنية للمبنى.

b. تمثل كل وحدة على المستوى الإحداثي 15 مترًا. ما هو أقل عرض للمبنى؟ (المثال 3)

حدد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته: (المثال 4)

34. $\frac{(y-1)^2}{10} - \frac{(x-6)^2}{13} = 1$
35. $\frac{(x+4)^2}{24} - \frac{(y+1)^2}{15} = 1$
36. $\frac{(x-3)^2}{38} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$
37. $\frac{(y+2)^2}{32} - \frac{(x+5)^2}{25} = 1$
38. $\frac{(y-4)^2}{23} - \frac{(x+11)^2}{72} = 1$
39. $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+4)^2}{29} = 1$

حدد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته: (المثال 4)

40. $11x^2 - 2y^2 - 110x + 24y = -181$
41. $-4x^2 + 3y^2 + 72x - 18y = 321$
42. $3x^2 - 2y^2 + 12x - 12y = 42$
43. $-x^2 + 7y^2 + 24x + 70y = -24$

استخدم المُميِّز لتمييز كل قطع مخروطي. (المثال 5)

44. $14y + y^2 = 4x - 97$

45. $18x - 3x^2 + 4 = -8y^2 + 32y$

46. $14 + 4y + 2x^2 = -12x - y^2$

47. $12y - 76 - x^2 = 16x$

48. $2x + 8y + x^2 + y^2 = 8$

49. $5y^2 - 6x + 3x^2 - 50y = -3x^2 - 113$

50. $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$

51. $-56y + 5x^2 = 211 + 4y^2 + 10x$

52. $-8x + 16 = 8y + 24 - x^2$

53. $x^2 - 4x = -y^2 + 12y - 31$

54. فيزياء عادةً ما يحدث القطع الزائد عندما تغمر لوحا زجاج متماثلين تقريبًا متلامسين عند أحد الحواف والمسافة بينهما بمقدار 5 ملم تقريبًا وعند الحافة الأخرى يوجد سائل سميك. حيث سيرتفع السائل بالخاصية الشعرية ليشكل قطعًا زائدًا نتيجة لتوتر السطح. أوجد نموذجًا للقطع الزائد إذا كان المحور المرافق 50 سم والمحور القاطع 30 سم.

55. طيران تقوم إدارة الطيران الفيدرالية برحلات طيران تجريبية لاختبار التقنية الجديدة في الطائرات. وعند تجميع بيانات إحدى طائرات الاختبار، كانت على مسافة أبعد من المطار A عنها من المطار B بمقدار 18 كيلومتر. وكان كلا المطارين على بعد 72 كم من الطريق السريع نفسه، مع كون المطار B جنوب المطار A. (المثال 6)

a. اكتب معادلة القطع الزائد مركزه عند نقطة الأصل التي تواجدت عندها الطائرة عند تجميع البيانات.

b. مثّل المعادلة بيانيًا، مشيرًا إلى فرع القطع الزائد الذي تقع عليه الطائرة.

c. عند تجميع البيانات، كانت الطائرة على بعد 40 ميلًا من الطريق السريع. أوجد إحداثيات الطائرة.

56. فلك بالرغم من أن كل كوكب من الكواكب الموجودة في نظامنا الشمسي يتحرك حول الشمس في مدار بيضاوي، إلا أن المذنبات قد تكون لها مدارات بيضاوية أو قطع مكافئة أو قطع زائدة حيث يكون مركز الشمس هو البؤرة. (المثال 5)

فيما يلي تمثيل لمسارات ثلاثة مذنبات، حيث تُقاس قيم x و y بالجيجا متر. استخدم المُميِّز لتعريف كل قطع مخروطي.

a. $3x^2 - 18x - 580850 = 4.84y^2 - 38.72y$

b. $-360x - 8y = -y^2 - 1096$

c. $-24.88y + x^2 = 6x - 3.11y^2 + 412341$

قم باشتقاق الشكل العام لمعادلة قطع زائد لكل من الخصائص التالية.

57. المحور القاطع الرأسي متمركز عند نقطة الأصل

58. المحور القاطع الأفقي متمركز عند نقطة الأصل

حُـلّ كل نظام من المعادلات. قرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر.

59. $2y = x - 10$ و $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{84} = 1$

60. $y = -\frac{1}{4}x + 3$ و $\frac{x^2}{36} - \frac{(y-4)^2}{4} = 1$

61. $y = 2x$ و $\frac{(y+2)^2}{64} - \frac{(x+5)^2}{49} = 1$

62. $3x - y = 9$ و $\frac{(x-5)^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

63. $\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{25} = 1$ و $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{25} = 1$

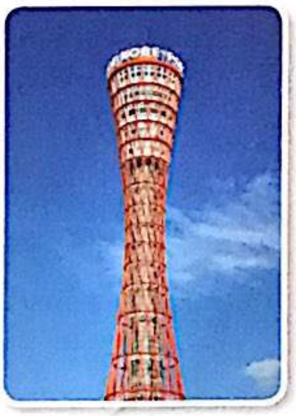
64. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ و $\frac{(x+1)^2}{49} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

65. ألعاب نارية سمع علي و عيسى، اللذين كانا على بعد 3 كيلومترات ويتحدثان في هواتفهما الخلوية، صوت نهائي للألعاب النارية. سمع عيسى النهائي قبل ثانية تقريبًا من سماع علي له. افترض أن الصوت ينتقل بسرعة 335.3 متر في الثانية.

a. اكتب معادلة القطع الزائد الذي تقع عليه الألعاب النارية. ضع مواقع علي وعيسى على المحور x، مع وضع علي على جهة اليسار ونقطة المنتصف بينهما عند نقطة الأصل.

b. صف فرع القطع الزائد الذي وقع عليه عرض الألعاب النارية.

66. هندسة معمارية برج ميناء كوبه عبارة عن هيكل قطع زائد في كوبه، اليابان. هذا يعني أن الشكل ناتج عن دوران القطع الزائد حول محوره المرافق. افترض أن الاختلاف المركزي للقطع الزائد المستخدم لإنتاج نموذج القطع الزائد لشكل البرج هو 19.

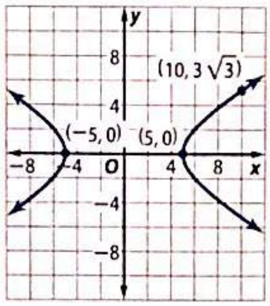


a. إذا كان عرض البرج 8 م عند أقل نقطة، حدد معادلة القطع الزائد المُستخدمة لإنتاج القطع الزائد.

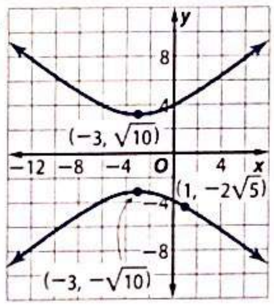
b. إذا كان ارتفاع قمة البرج عن مركز القطع الزائد 32 م وكانت قاعدة البرج أسفل المركز بـ 76 م، فما هي أنصاف أقطار قمة وقاعدة البرج؟

اكتب معادلة كل قطع زائد.

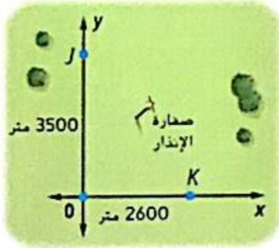
67.



68.



69. **صوت** عند انطلاق صفارة إنذار الإعصار، كان هناك ثلاثة أشخاص عند J و K و O كما هو موضح بالتمثيل البياني أدناه.



يسمع الشخص الموجود عند J صفارة الإنذار قبل الشخص الموجود عند O بثانيتين. يسمع الشخص الموجود عند K صفارة الإنذار قبل الشخص الموجود عند O بثانية. أوجد الموقع المحتمل لصفارة إنذار الإعصار. افترض أن الصوت ينتقل بسرعة 335.3 متر في الثانية. (إرشاد: كل موقع من مواقع صفارة الإنذار هو نقطة تقاطع بين القطع الزائد ذي البؤرتين عند O و J والقطع الزائد ذي البؤرتين عند O و K).

اكتب معادلة القطع الزائد ضمن الخصائص المعطاة.

70. مركزه $(1, 5)$، ورأسه $(9, 5)$، ومعادلة أحد خط التقارب له هي $3y = 4x - 17$

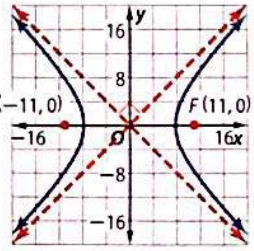
71. مركزه $(3, -4)$ ورأسه $(3, 1)$، ومعادلة أحد خط التقارب له هي $7x + 5y = -13$

72. بؤرتاه $(0, 2\sqrt{6})$ و $(0, -2\sqrt{6})$، واختلاف المركزي يساوي $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

73. اختلاف المركزي يساوي $\frac{7}{6}$ وبؤرتاه $(2-, 1-)$ و $(13, -2)$.

74. بؤرتاه $(-1, 9)$ و $(-1, -7)$ وقيمتي الميلين لخطي التقارب هما $\pm\frac{\sqrt{15}}{7}$

75. الحالة الخاصة للقطع الزائد عندما تكون: $a = b$. خطا التقارب للقطع الزائد في هذه الحاله هما متعامدان والزاويه التي يصنعها كل خط متقارب مع المحور القاطع يساوي قياسها 45 درجه. اكتب معادلة للقطع الزائد أدناه.



76. **تمثيلات متعددة** في هذه المسألة، ستكتشف نوع خاص من القطع الزائد يُسمى القطع الزائد المرافق. ويحدث ذلك عندما يكون المحور المرافق لقطع زائد هو المحور القاطع لقطع زائد آخر.

a. **بيانيًا** قم بإعداد التمثيلات البيانية لـ $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ و $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$ على المستوى الإحداثي نفسه.

b. **تحليليًا** قارن البؤرتين والرأسين وخطي التقارب بالتمثيلات البيانية.

c. **تحليليًا** اكتب معادلة القطع الزائد المرافق لـ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

d. **بيانيًا** قم بإعداد التمثيلات البيانية للقطوع الزائدة المرافقة الجديدة.

e. **لفظيًا** خمّن أوجه التشابه بين القطوع الزائدة المرافقة.

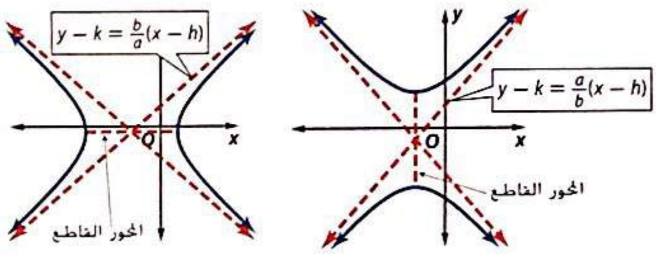
مسائل مهارات التفكير العليا استخدم مهارات التفكير العليا

77. **مسألة مفتوحة** اكتب معادلة لقطع زائد حيث المسافة بين البؤرتين ضعف طول المحور القاطع.

78. **التبرير** اعتبر أن $rx^2 = -sy^2 - t$. صف نوع القطع المخروطي المتشكل لكل مما يلي. وضح تبريرك المنطقي.

a. $rs = 0$	**b.** $rs > 0$
c. $r = s$	**d.** $rs < 0$

79. **الكتابة في الرياضيات** وضح سبب تغير معادلة خطي التقارب للقطع الزائد من $\pm\frac{b}{a}$ إلى $\pm\frac{a}{b}$ بناء على موقع المحور القاطع.



80. **التبرير** افترض أن لديك خاصتين مما يلي: الرأسان أو البؤرتان أو المحور القاطع أو المحور المرافق أو خطا التقارب. هل من الممكن في بعض الأحيان أو دائمًا أو لا يمكن كتابة معادلة للقطع الزائد؟

81. **مسألة تحدي** قطع زائد له بؤرتين عند $F_1(0, 9)$ و $F_2(0, -9)$ ويحتوي على نقطة P. المسافة بين P و F_1 أكبر بمقدار 6 وحدات عن المسافة بين P و F_2. اكتب معادلة القطع الزائد في شكلها القياسي.

82. **إثبات** يتشكل القطع الزائد في الحالة الخاصة عندما تكون $a = b$ في الصيغة القياسيّة لمعادلة القطع الزائد. أثبت أن الاختلاف المركزي لكل قطع زائد في الحالة الخاصة هي $\sqrt{2}$.

83. **الكتابة في الرياضيات** صف خطوات إيجاد معادلة القطع الزائد إذا أعطيت البؤرتين وطول المحور القاطع.

مراجعة شاملة

مثل بيانيًا القطع الناقص الذي معادلته:

84. $(x-8)^2+\frac{(y-2)^2}{81}=1$

85. $\frac{x^2}{64}+\frac{(y+5)^2}{49}=1$

86. $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+5)^2}{36}=1$

87. حركة القذيفة يمكن تمثيل ارتفاع كرة بيسبول عند ضربها بسرعة ابتدائية قدرها 24.4 متراً في الثانية بالمعادلة $h=-16t^2+80t+5$، حيث t الزمن بالثواني.

a. ما هو ارتفاع الرأس عن سطح الأرض؟

b. إذا كان ارتفاع التقاط لاعب الدفاع هو نفس الارتفاع الابتدائي للكرة. فبعد كم من الزمن تقريبًا من ضرب الكرة سيلتقط اللاعب إياها؟

اكتب كل نظام من المعادلات كمعادلة مصفوفية، $AX=B$. ثم استخدم طريقة حذف غاوس–جوردان على المصفوفة المضافة لحل المنظومة.

88. $3x_1+11x_2-9x_3=25$
$-8x_1+5x_2+x_3=-31$
$x_1-9x_2+4x_3=13$

89. $x_1-7x_2+8x_3=-3$
$6x_1+5x_2-2x_3=2$
$3x_1-4x_2+9x_3=26$

90. $2x_1-5x_2+x_3=28$
$3x_1+4x_2+5x_3=17$
$7x_1-2x_2+3x_3=33$

حُـلّ كل معادلة للحصول على جميع قيم θ.

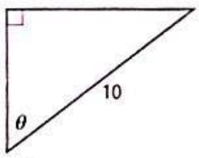
91. $\tan\theta=\sec\theta-1$

92. $\sin\theta+\cos\theta=0$

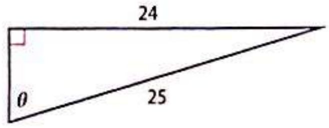
93. $\csc\theta-\cot\theta=0$

أوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست لـ θ.

94.



95.



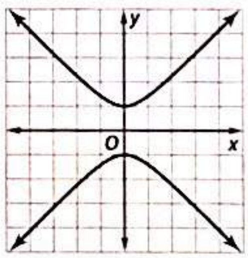
استخدم الصفر المعطى لإيجاد كل الأصفار المركبة لكل دالّة. ثم اكتبها كتحليل إلى العوامل الخطية للدالّة.

96. $f(x)=2x^5-11x^4+69x^3+135x^2-675x;\ 3-6i$

97. $f(x)=2x^5-9x^4+146x^3+618x^2+752x+291;\ 4+9i$

مراجعة مهارات الاختبارات المعيارية

98. مراجعة ما هي معادلة التمثيل البياني؟



A $y=x^2+1$

B $y-x=1$

C $y^2-x^2=1$

D $x^2+y^2=1$

E $xy=1$

99. مراجعة التمثيل البياني للمعادلة $\left(\frac{x}{4}\right)^2-\left(\frac{y}{5}\right)^2=1$ هو قطع زائد. ما هي مجموعة المعادلات التي تمثل خطي تقارب التمثيل البياني للقطع الزائد؟

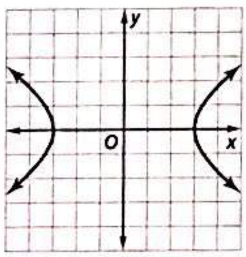
F $y=\frac{4}{5}x, y=-\frac{4}{5}x$

G $y=\frac{1}{4}x, y=-\frac{1}{4}x$

H $y=\frac{5}{4}x, y=-\frac{5}{4}x$

J $y=\frac{1}{5}x, y=-\frac{1}{5}x$

100. بؤرتا التمثيل البياني عند $(\sqrt{13},0)$ و $(-\sqrt{13},0)$. ما هي المعادلة التي يمثلها التمثيل البياني؟



A $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

B $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$

C $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{\sqrt{13}}=1$

D $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{13}=1$

101. اختبار الكفاءة الدراسية (SAT)/ACT إذا كانت $z=\frac{3y}{x^3}$، فما هو تأثير قيمة z عند ضرب y في 4 ومضاعفة x ؟

F z لن تتغير.

G z تقل إلى النصف.

H z تتضاعف.

J z تُضرب في 4.

مراجعة شاملة

مثل بيانيًا القطع الناقص الذي معادلته:

84. $(x-8)^2 + \frac{(y-2)^2}{81} = 1$

85. $\frac{x^2}{64} + \frac{(y+5)^2}{49} = 1$

86. $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+5)^2}{36} = 1$

87. حركة القذيفة يمكن تمثيل ارتفاع كرة بيسبول عند ضربها بسرعة ابتدائية قدرها 24.4 متراً في الثانية بالمعادلة $h = -16t^2 + 80t + 5$. حيث t الزمن بالثواني.

a. ما هو ارتفاع الرأس عن سطح الأرض؟

b. إذا كان ارتفاع التقاط لاعب الدفاع هو نفس الارتفاع الابتدائي للكرة. فبعد كم من الزمن تقريبًا من ضرب الكرة سيلتقط اللاعب إياها؟

اكتب كل نظام من المعادلات كمعادلة مصفوفية، $AX = B$. ثم استخدم طريقة حذف غاوس-جوردان على المصفوفة المضافة لحل المنظومة.

88. $3x_1 + 11x_2 - 9x_3 = 25$
$-8x_1 + 5x_2 + x_3 = -31$
$x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 13$

89. $x_1 - 7x_2 + 8x_3 = -3$
$6x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 2$
$3x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 26$

90. $2x_1 - 5x_2 + x_3 = 28$
$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 17$
$7x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 33$

حُـلّ كل معادلة للحصول على جميع قيم θ.

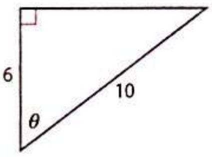
91. $\tan\theta = \sec\theta - 1$

92. $\sin\theta + \cos\theta = 0$

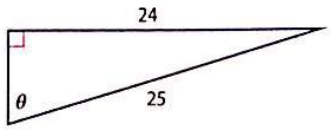
93. $\csc\theta - \cot\theta = 0$

أوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست لــ θ.

94.



95.



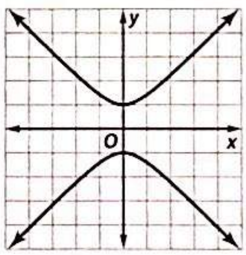
استخدم الصفر المعطى لإيجاد كل الأصفار المركبة لكل دالّة. ثم اكتبها كتحليل إلى العوامل الخطية للدالّة.

96. $f(x) = 2x^5 - 11x^4 + 69x^3 + 135x^2 - 675x; 3 - 6i$

97. $f(x) = 2x^5 - 9x^4 + 146x^3 + 618x^2 + 752x + 291; 4 + 9i$

مراجعة مهارات الاختبارات المعيارية

98. مراجعة ما هي معادلة التمثيل البياني؟



A $y = x^2 + 1$

B $y - x = 1$

C $y^2 - x^2 = 1$

D $x^2 + y^2 = 1$

E $xy = 1$

99. مراجعة التمثيل البياني للمعادلة $\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$ هو قطع زائد. ما هي مجموعة المعادلات التي تمثل خطي تقارب التمثيل البياني للقطع الزائد؟

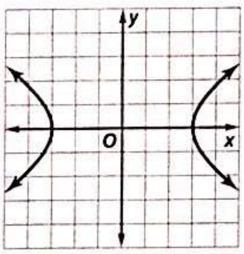
F $y = \frac{4}{5}x, y = -\frac{4}{5}x$

G $y = \frac{1}{4}x, y = -\frac{1}{4}x$

H $y = \frac{5}{4}x, y = -\frac{5}{4}x$

J $y = \frac{1}{5}x, y = -\frac{1}{5}x$

100. بؤرتا التمثيل البياني عند $(\sqrt{13}, 0)$ و $(-\sqrt{13}, 0)$. ما هي المعادلة التي يمثلها التمثيل البياني؟



A $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

B $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$

C $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{\sqrt{13}} = 1$

D $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{13} = 1$

101. اختبار الكفاءة الدراسية (SAT)/ACT إذا كانت $z = \frac{3y}{x^3}$، فما هو تأثير قيمة z عند ضرب y في 4 ومضاعفة x؟

F z لن تتغير.

G z تقل إلى النصف.

H z تتضاعف.

J z تُضرب في 4.

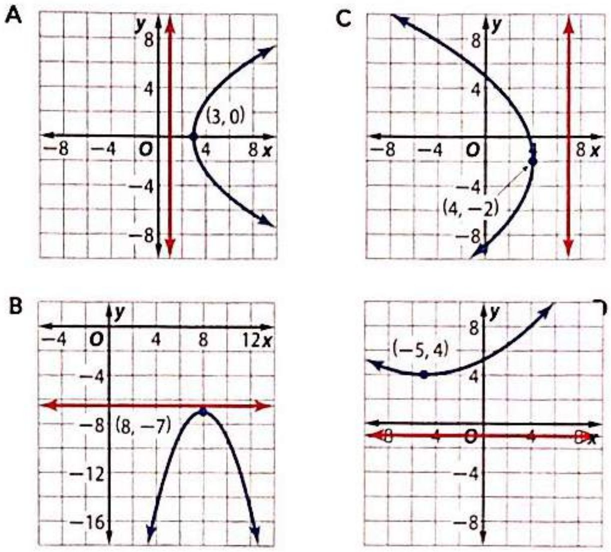
اختبار نصف الوحدة

الدروس 6-1 إلى 6-3

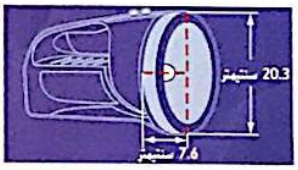
اكتب معادلة قطعٍ مكافئٍ بؤرته *F* و رأسه *V* ومثّلها بيانيًا. (الدرس 6-1)

1. $F(1, 5)$, $V(1, 3)$
2. $F(5, -7)$, $V(1, -7)$

3. **الاختيار من متعدد** نعرض في كلٍ من التمثيلات البيانية التالية قطعًا مكافئًا مع دليله. في أيٍ من القطوع المكافئة تبعد البؤرة المسافة الأكبر عن الرأس؟ (الدرس 6-1)



4. **التصميم** المقطع العرضي للمرآة في تصميم المصباح الكشاف المبيّن أدناه قطعٌ مكافئ. (الدرس 6-1)



a. اكتب معادلةً تمثل القطع المكافئ.

b. مثّل المعادلة بيانيًا.

مثّل القطع الناقص المعطى وفق كل معادلة. (الدرس 6-2)

5. $\frac{(x+4)^2}{81} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

6. $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-6)^2}{36} = 1$

اكتب معادلةً تمثل القطع الناقص المقابل لكل مجموعة من الخواصّ المبينة أدناه. (الدرس 6-2)

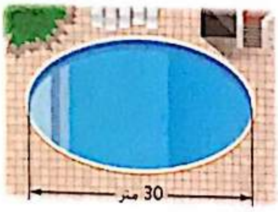
7. الرأسان $(-3, 9)$، $(-3, -3)$؛ البؤرتان $(-3, 7)$، $(-1, -3)$

8. البؤرتان $(1, 3)$، $(7, 3)$؛ يساوي طول المحور الاصغر 8

9. المحور الأكبر يمتد من $(-1, 1)$ إلى $(-13, 1)$؛ المحور الاصغر يمتد من $(-7, -2)$ إلى $(-7, 4)$

10. الرأسان $(5, 8)$، $(-9, 8)$؛ طول المحور الاصغر يساوي 6

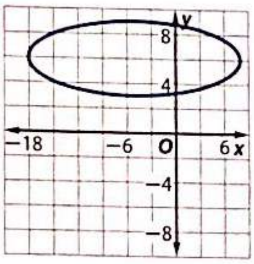
11. **السباحة** تصميم بركة السباحة المبينة أدناه عبارة عن قطع ناقص طوله 30 مترأ واختلافه المركزي 0.68. (الدرس 6-2)



a. ما عرض البركة؟

b. اكتب معادلةً تمثل القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل هي مركز المسبح.

12. **الاختيار متعدد** أي مما يلي هو اختلاف مركزي ممكنٌ للتمثيل البياني؟ (الدرس 6-2)



A 0

B $\frac{1}{4}$

C 1

D $\frac{9}{5}$

مثّل بيانيًا القطع الزائد الذي معادلته: (الدرس 6-3)

13. $\frac{x^2}{81} - \frac{(y+7)^2}{81} = 1$

14. $\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$

اكتب معادلةً تمثل القطع الزائد بالخواص التالية: (الدرس 6-3)

15. رأساه $(0, 5)$، $(0, -5)$؛ وطول محوره المرافق 6

16. بؤرتاه $(10, 0)$، $(-6, 0)$؛ وطول محورهر القاطع 4

17. رأساه $(-11, 0)$، $(11, 0)$؛ وبؤرتاه $(-14, 0)$، $(14, 0)$

18. بؤرتاه $(5, 7)$، $(5, -9)$؛ وطول محوره القاطع 10

استخدم المميز لتحديدنوع كل قطع مخروطي في ما يلي: (الدرس 6-3)

19. $x^2 + 4y^2 - 2x - 24y + 34 = 0$

20. $4x^2 - 25y^2 - 24x - 64 = 0$

21. $2x^2 - y + 5 = 0$

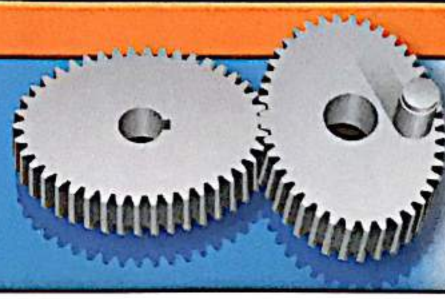
22. $25x^2 + 25y^2 - 100x - 100y + 196 = 0$

6-4 الدوران المحوري للقطوع المخروطية

:: السابق
- حددت ومثلت القطوع المخروطية.

:: الآن
1. إيجاد دوران المحاور لكتابة معادلات دوران القطوع المخروطية.
2. تمثيل دوران القطوع المخروطية بيانيًا

:: لماذا؟
- تقترن التروس بيضاوية الشكل بدورانها حول بؤرتيها. يدور ترس الدوران بسرعة ثابتة، ويغير الترس المدار سرعته باستمرار عند كل دورة.



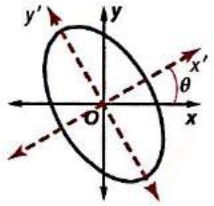
1 دوران القطوع المخروطية تعلمت في الدرس السابق أنه عندما يكون القطع المخروطي رأسي أو أفقي وتكون محاوره موازية لمحوري x و y، فإن $B = 0$ في معادلته العامة. لا تتضمن معادلة هذا القطع المخروطي الحد xy.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ستدرس في هذا الدرس القطوع المخروطية ومحاورها المدارة غير الموازية لمحاور الإحداثيات. في المعادلة العامة لدوران هذه القطوع المخروطية $B \neq 0$، لذلك يوجد هنا الحد xy.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

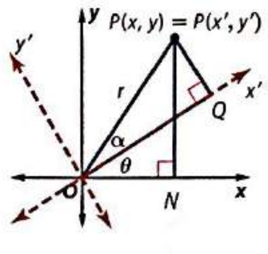
إذا حذف الحد xy، فستكتب معادلة دوران القطع المخروطي بالصيغة القياسيّة من خلال إكمال المربع. ولحذف هذا الحد، نقوم بتدوير محاور الإحداثيات حتى توازي محاور القطع المخروطي.



عند دوران محاور الإحداثيات من خلال الزاوية θ كما هو موضح، تبقى نقطة الأصل ثابتة وتشكل المحاور x' وy' الجديدة. في ما يلي الشكل العام لمعادلة القطع المخروطي في المستوى الجديد $x'y'$.

$$A(x')^2 + C(y')^2 + Dx' + Ey' + F = 0$$

يمكن استخدام حساب المثلثات لوضع المعادلات المتعلقة بالنقطة $P(x, y)$ في المستوى xy و $P(x', y')$ في المستوى $x'y'$.



انظر الشكل على اليسار. لاحظ المثلث القائم الزاوية PNO و $OP = r$ و $ON = x$ و $PN = y$ و $m\angle NOP = \alpha + \theta$ باستخدام $\triangle PNO$، يمكنك إنشاء العلاقات التالية.

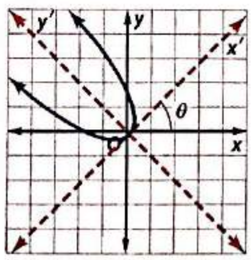
$$= r\cos(\alpha + \theta)$$
$$= \mathbf{r\cos\alpha}\cos\theta - \mathbf{r\sin\alpha}\sin\theta$$

$$= r\sin(\alpha + \theta)$$
$$= \mathbf{r\cos\alpha}\cos\theta - \mathbf{r\sin\alpha}\sin\theta$$

باستخدام المثلث القائم الزاوية POQ. حيث $OP = r$، و $OQ = x'$، و $PQ = y'$ و $m\angle QOP = \alpha$. يمكنك إنشاء علاقة $\mathbf{x' = r\cos\alpha}$ و $\mathbf{y' = r\sin\alpha}$. بالتعويض عن هذه القيم في المعادلات السابقة، يمكنك الحصول على ما يلي.

$$x = \mathbf{x'}\cos\theta - \mathbf{y'}\sin\theta \qquad y = \mathbf{y'}\cos\theta + \mathbf{x'}\sin\theta$$

المفهوم الأساسي دوران محاور القطوع المخروطية



المعادلة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ في المستوى الاحداثي xy يمكن إعادة صياغتها كما يلي $A(x')^2 + C(y')^2 + Dx' + Ey' + F = 0$ في دوران المستوى الاحداثي $x'y'$-.

يمكن إيجاد المعادلة في المستوى $x'y'$-باستخدام المعادلات التالية، حيث θ هي زاوية الدوران.

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \; y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

المثال 1 كتابة معادلة في المستوى xy

استخدم $\theta = \frac{\pi}{4}$ لكتابة $6x^2 + 6xy + 9y^2 = 53$ في المستوى $x'y'$. ثم حدد القطع المخروطي.

أوجد معادلات لـ x و y.

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

عوّض في المعادلة الأساسية.

$$6x^2 + 6xy + 9y^2 = 53$$

$$6\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2}\right) + 9\left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2}\right)^2 = 53$$

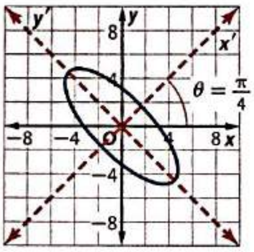
$$\frac{6[2(x')^2 - 4x'y' + 2(y')^2]}{4} + \frac{6[2(x')^2 - 2(y')^2]}{4} + \frac{9[2(x')^2 + 4x'y' + 2(y')^2]}{4} = 53$$

$$3(x')^2 - 6x'y' + 3(y')^2 + 3(x')^2 - 3(y')^2 + \frac{9}{2}(x')^2 + 9x'y' + \frac{9}{2}(y')^2 - 53 = 0$$

$$6(x')^2 - 12x'y' + 6(y')^2 + 6(x')^2 - 6(y')^2 + 9(x')^2 + 18x'y' + 9(y')^2 - 106 = 0$$

$$21(x')^2 + 6x'y' + 9(y')^2 - 106 = 0$$

المعادلة في المستوي $x'y'$ هي $21(x')^2 + 6x'y' + 9(y')^2 - 106 = 0$ في هذه المعادلة، $B^2 - 4AC = 6^2 - 4(21)(9)$ أو -720 حيث إن $-720 < 0$، فإن القطع المخروطي هو القطع الناقص كما هو موضح.



تمرين موجّه

1. استخدم $\theta = \frac{\pi}{6}$ لكتابة $7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2 - 60 = 0$ في المستوي $x'y'$-. ثم حدد القطع المخروطي.

عند اختيار θ بشكل مناسب يمكن حذف الحد $x'y'$ من الشكل العام للمعادلة. وستكون محاور القطع المخروطي موازية لمحاور $x'y'$-المستوى.

بعد التعويض عن $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$ و $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$ في الشكل العام للقطع المخروطي. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$، فإن معامل الحد $x'y'$ هو $B\cos 2\theta + (C - A)\sin 2\theta$ بتحديد هذا مساويًا 0 يمكن حذف الحد $x'y'$-.

$$B\cos 2\theta + (C - A)\sin 2\theta = 0$$

$$B\cos 2\theta = -(C - A)\sin 2\theta$$

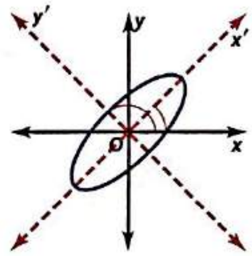
$$B\cos 2\theta = (A - C)\sin 2\theta$$

$$\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{A - C}{B}$$

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}$$

نصيحة دراسية

زاوية الدوران زاوية الدوران θ هي زاوية حادة نظرًا لحقيقة أن إما المحور x' أو المحور y' سيكون في الربع الأول. على سبيل المثال، في حين أنه قد يكون دوران المستوى في الشكل التالي $123°$، فإن الدوران $33°$ هو المطلوب لمحاذاة المحاور.



المفهوم الأساسي زاوية الدوران المستخدمة لحذف الحد xy

زاوية الدوران θ حيث إن $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$، $B \neq 0$، $\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}$ سيحذف الحد xy من معادلة المقطع المخروطي في دوران نظام الإحداثيات $x'y'$

المثال 2 كتابة معادلة بالصيغة القياسيّة

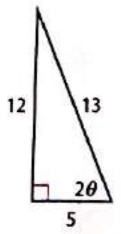
استخدم زاوية مناسبة لدوران القطع المخروطي الذي معادلته $8x^2 + 12xy + 3y^2 = 4$. اكتب معادلة بالصيغة القياسيّة.

القطع المخروطي هو القطع الزائد لأن $B^2 - 4AC > 0$ أوجد θ.

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B}$$
$$= \frac{5}{12}$$

يوضح الشكل مثلثًا فيه $\cot 2\theta = \frac{5}{12}$

إذًا، $\sin 2\theta = \frac{12}{13}$ و $\cos 2\theta = \frac{5}{13}$



استخدم متطابقات نصف الزاوية لتحديد $\sin\theta$ و $\cos\theta$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{2}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{2}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

ثم أوجد معادلات x و y.

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta = \frac{2\sqrt{13}}{13}x' + \frac{3\sqrt{13}}{13}y' = \frac{2\sqrt{13}x' + 3\sqrt{13}y'}{13}$$

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}x' - \frac{2\sqrt{13}}{13}y' = \frac{3\sqrt{13}x' - 2\sqrt{13}y'}{13}$$

نصيحة دراسية

الحد $x'y'$ عند استبدال قيم x' و y' بالحد x و y بشكل صحيح، يصبح معامل الحد $x'y'$ صفر. وإذا لم يكن معامل هذا الحد صفرًا، فهناك خطأ حدث.

عوّض في المعادلة الاساسية.

$$8x^2 + 12xy + 3y^2 = 4$$

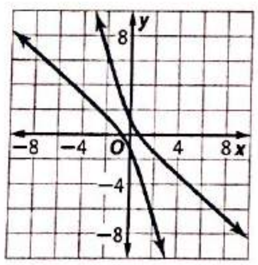
$$8\left(\frac{3\sqrt{13}x' - 2\sqrt{13}y'}{13}\right)^2 + 12\,\frac{3\sqrt{13}x' - 2\sqrt{13}y'}{13}\cdot\frac{2\sqrt{13}x' + 3\sqrt{13}y'}{13} + 3\left(\frac{2\sqrt{13}x' + 3\sqrt{13}y'}{13}\right)^2 = 4$$

$$\frac{72(x')^2 - 96x'y' + 32(y')^2}{13} + \frac{72(x')^2 + 60x'y' - 72(y')^2}{13} + \frac{12(x')^2 + 36x'y' + 27(y')^2}{13} = 4$$

$$\frac{156(x')^2 - 13(y')^2}{13} = 4$$

$$3(x')^2 - \frac{(y')^2}{4} = 1$$

الصيغة القياسيّة للمعادلة في المستوى $x'y'$ هو $\frac{(x')^2}{\frac{1}{3}} - \frac{(y')^2}{4} = 1$ التمثيل البياني لهذا القطع الزائد.



تمرين موجّه

استخدم زاوية مناسبة لدوران القطع المخروطي مع كل معادلة معطاة واكتب معادلة بالصيغة القياسيّة.

2A. $2x^2 - 12xy + 18y^2 - 4y = 2$

2B. $20x^2 + 20xy + 5y^2 - 12x - 36y - 200 = 0$

يمكن استخدام صيغ أخرى تربط x' و y' بـ x و y لإيجاد معادلة المستوى xy- لدوران القطع المخروطي.

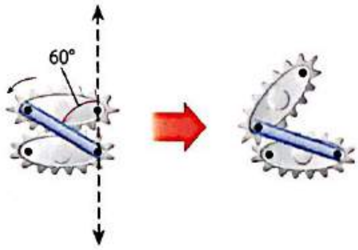
المفهوم الأساسي دوران محاور القطوع المخروطية

عند إعادة كتابة معادلة القطع المخروطي $x'y'$ للمستوى من خلال دوران محاور الإحداثيات من θ. فيمكن إيجاد المستوى xy باستخدام

$$y' = y\cos\theta - x\sin\theta \text{ و } x' = x\cos\theta + y\sin\theta.$$

المثال 3 كتابة معادلة المستوى xy

يمكن استخدام التروس بيضاوية الشكل لتوليد سرعات الإنتاج المتغيرة. بعد الدوران بدرجة $60°$، تكون معادلة دوران الترس في المستوى $x'y'$: $\frac{(x')^2}{36} + \frac{(y')^2}{18} = 1$ اكتب معادلة القطع الناقص التي يشكلها دوران الترس في المستوى xy.



استخدم صيغة دوران x' وy' لإيجاد معادلة دوران القطع المخروطي في المستوى xy.

$$y' = y\cos\theta - x\sin\theta$$
$$= y\cos 60° - x\sin 60°$$
$$= \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$= x\cos 60° + y\sin 60°$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$$

عوّض في المعادلة الاساسية.

$$\frac{(x')^2}{36} + \frac{(y')^2}{18} = 1$$
$$(x')^2 + 2(y')^2 = 36$$
$$\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{y-\sqrt{3}x}{2}\right)^2 = 36$$
$$\frac{x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2}{4} + \frac{2y^2 - 4\sqrt{3}xy + 6x^2}{4} = 36$$
$$\frac{7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2}{4} = 36$$
$$7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 144$$
$$7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 144 = 0$$

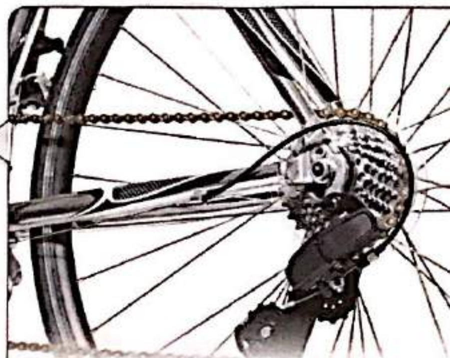
معادلة دوران القطع الناقص في المستوى xy هي $x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 144 = 07$

تمرين موجّه

3. إذا كانت معادلة الترس بعد دورانه بدرجة $30°$ في المستوى $x'y'$ هي $(x')^2 + 4(y')^2 - 40 = 0$. فأوجد معادلة الترس في المستوى xy.

2 تمثيل دوران القطوع المخروطية بيانيًا

عند إعادة كتابة معادلة القطع المخروطي في المستوى $x'y'$ فيمكن تمثيلها بيانيًا من خلال إيجاد النقاط على التمثيل البياني للقطع المخروطي ثم تحويل هذه النقاط إلى المستوى xy



الربط بالحياة اليومية

في نظام التروس حيث تدور كل التروس، مثل الدراجات، ترتبط سرعة التروس في الترابطات بينها بحجمها. إذا كان قطر أحد التروس $\frac{1}{2}$ قطر الترس الآخر، فإن سرعة دوران الترس ستكون ضعف سرعة الآخر.

المصدر: *How Stuff Works*

المثال 4 تمثيل القطع المخروطي باستخدام الدوران

مثّل بيانيًا $(x' - 2)^2 = 4(y' - 3)$ إذا استدار بدرجة $30°$ من موضعه في المستوى xy.

تمثل المعادلة قطعًا مكافئًا حيث إنها في شكل قياسي. استخدم الرأس $(2, 3)$ ومحاور التماثل $x' = 2$ في المستوى $x'y'$ لتحديد رأس ومحور التماثل للقطع المكافئ في المستوى xy.

أوجد معادلات لـ x و y لـ $\theta = 30°$

$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$$
$$= \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$$

$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'$$

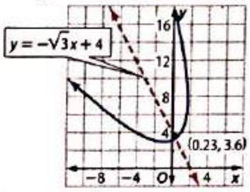
استخدم المعادلات لتحويل إحداثيات $x'y'$ للرأس إلى إحداثيات xy.

$$y = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$$
$$= \frac{1}{2}(2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(3)$$
$$= 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ أو حوالي } 3.60$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(2) - \frac{1}{2}(3)$$
$$= \sqrt{3} - \frac{3}{2} \text{ أو حوالي } 0.23$$

أوجد معادلة محور التماثل.

$$x' = x \cos\theta + y \sin\theta$$
$$2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$$
$$y = -\sqrt{3}x + 4$$



يمكن استخدام الرأس ومحور التماثل الجديد لرسم القطع المكافئ في المستوى xy.

تمرين موجّه **مثّل كل معادلة بيانيًا عند كل زاوية محددة.**

4A. $\frac{(x')^2}{9} - \frac{(y')^2}{32} = 1; 60°$

4B. $\frac{(x')^2}{16} + \frac{(y')^2}{25} = 1; 30°$

نصيحة دراسية

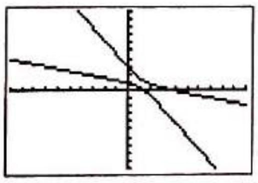
التمثيل البياني حوّل النقاط الأخرى على المقطع المخروطي من الإحداثيات $x'y'$- إلى الإحداثيات xy-. ثم أنشئ جدولًا لهذه القيم لإكمال رسم المقطع المخروطي.

إحدى طرق تمثيل القطوع المخروطية بيانيًا باستخدام الحد xy لحل المعادلة y وتمثيلها بيانيًا باستخدام الآلة الحاسبة. اكتب المعادلة في شكل تربيعي ثم استخدم الصيغة التربيعية.

المثال 5 تمثيل القطع المخروطي بالصيغة القياسيّة

استخدم حاسبة التمثيل البياني لرسم القطع المخروطي المحدد في $4y^2 + 8xy - 60y + 2x^2 - 40x + 155 = 0$

$$4y^2 + 8xy - 60y + 2x^2 - 40x + 155 = 0$$
$$4y^2 + (8x - 60)y + (2x^2 - 40x + 155) = 0$$
$$y = \frac{-(8x - 60) \pm \sqrt{(8x - 60)^2 - 4(4)(2x^2 - 40x + 155)}}{2(4)}$$
$$= \frac{-8x + 60 \pm \sqrt{32x^2 - 320x + 1120}}{8}$$
$$= \frac{-8x + 60 \pm 4\sqrt{2x^2 - 20x + 70}}{8}$$
$$= \frac{-2x + 15 \pm \sqrt{2x^2 - 20x + 70}}{2}$$



[−40, 40] scl: 4 by [−40, 40] scl: 4

التمثيل البياني لهاتين المعادلتين على الشاشة نفسها يعطي القطع الزائد الموضح.

تمرين موجّه

5. استخدم حاسبة التمثيل البياني لرسم القطع المخروطي الناتج من $4x^2 - 6xy + 2y^2 - 60x - 20y + 275 = 0$

نصيحة دراسية

ترتيب الحدود رتّب الحدود بالقوى التنازلية لـ y لتحويل المعادلة إلى الشكل التربيعي.

اكتب المعادلة في المستوى $x'y'$ لقيمة θ المعطاة. ثم حدد القطع المخروطي. (المثال 1)

1. $x^2 - y^2 = 9, \theta = \frac{\pi}{3}$

2. $xy = -8, \theta = 45°$

3. $x^2 - 8y = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$

4. $2x^2 + 2y^2 = 8, \theta = \frac{\pi}{6}$

5. $y^2 + 8x = 0, \theta = 30°$

6. $4x^2 + 9y^2 = 36, \theta = 30°$

7. $x^2 - 5x + y^2 = 3, \theta = 45°$

8. $49x^2 - 16y^2 = 784, \theta = \frac{\pi}{4}$

9. $4x^2 - 25y^2 = 64, \theta = 90°$

10. $6x^2 + 5y^2 = 30, \theta = 30°$

استخدم زاوية مناسبة لدوران القطع المخروطي مع كل معادلة معطاة واكتب معادلة بالشكل القياسي. (المثال 1)

11. $xy = -4$

12. $x^2 - xy + y^2 = 2$

13. $145x^2 + 120xy + 180y^2 = 900$

14. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 5x - 90y + 25 = 0$

15. $2x^2 - 72xy + 23y^2 + 100x - 50y = 0$

16. $x^2 - 3y^2 - 8x + 30y = 60$

17. $8x^2 + 12xy + 3y^2 + 4 = 6$

18. $73x^2 + 72xy + 52y^2 + 25x + 50y - 75 = 0$

اكتب معادلة لكل قطع مخروطي في المستوى xy للمعادلة المحددة في الشكل $x'y'$ والقيمة المعطاة لزاوية الدوران θ. (المثال 3)

19. $(x')^2 + 3(y')^2 = 8, \theta = \frac{\pi}{4}$

20. $\frac{(x')^2}{25} - \frac{(y')^2}{225} = 1, \theta = \frac{\pi}{4}$

21. $\frac{(x')^2}{9} - \frac{(y')^2}{36} = 1, \theta = \frac{\pi}{3}$

22. $(x')^2 = 8y', \theta = 45°$

23. $\frac{(x')^2}{7} + \frac{(y')^2}{28} = 1, \theta = \frac{\pi}{6}$

24. $4x' = (y')^2, \theta = 30°$

25. $\frac{(x')^2}{64} - \frac{(y')^2}{16} = 1, \theta = 45°$

26. $(x')^2 = 5y', \theta = \frac{\pi}{3}$

27. $\frac{(x')^2}{4} - \frac{(y')^2}{9} = 1, \theta = 30°$

28. $\frac{(x')^2}{3} + \frac{(y')^2}{4} = 1, \theta = 60°$

29. علم الفلك افترض أن $144(x')^2 + 64(y')^2 = 576$ يمثل الرسم في المستوى $x'y'$ لانعكاس المرآة في التلسكوب. (المثال 4)

a. في حال دوران المرآة بدرجة 30° فحدد معادلة المرآة في المستوى xy.

b. مثّل المعادلة بيانيًا.

ممارسة موجّهة مثّل كل معادلة بيانيًا عند كل زاوية محددة.

30. $\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{9} = 1; 60°$

31. $\frac{(x')^2}{25} - \frac{(y')^2}{36} = 1; 45°$

32. $(x')^2 + 6x' - y' = -9; 30°$

33. $8(x')^2 + 6(y')^2 = 24; 30°$

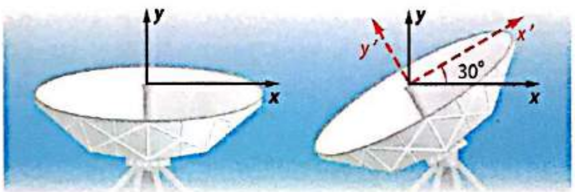
34. $\frac{(x')^2}{4} - \frac{(y')^2}{16} = 1; 45°$

35. $y' = 3(x')^2 - 2x' + 5; 60°$

36. التواصل طبق قمر صناعي يتتبع قمرًا صناعيًا فوقه مباشرة. افترض أن $y = \frac{1}{6}x^2$ تمثل شكل الطبق عندما يوجه في هذا الموقع. وفي وقت لاحق من اليوم نفسه، لوحظ أن الطبق استدار بنحو 30°. (المثال 4)

a. اكتب معادلة تمثل الاتجاه الجديد للطبق.

b. استخدم حاسبة التمثيل البياني لرسم هاتين المعادلتين على الشاشة نفسها. ارسم هذا التمثيل البياني على ورقتك.



حاسبة التمثيل البياني ارسم القطع المخروطي المعطى بكل معادلة. (المثال 5)

37. $x^2 - 2xy + y^2 - 5x - 5y = 0$

38. $2x^2 + 9xy + 14y^2 = 5$

39. $8x^2 + 5xy - 4y^2 = -2$

40. $2x^2 + 4\sqrt{3}xy + 6y^2 + 3x = y$

41. $2x^2 + 4xy + 2y^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = -12$

42. $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 20$

43. $x^2 + 10\sqrt{3}xy + 11y^2 - 64 = 0$

44. $x^2 + y^2 - 4 = 0$

45. $x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 + 18 = 0$

46. $2x^2 + 9xy + 14y^2 - 5 = 0$

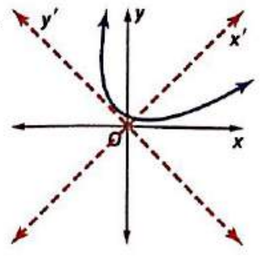
التمثيل البياني لكل معادلة هو حالة مُنحلة. صِف التمثيل البياني.

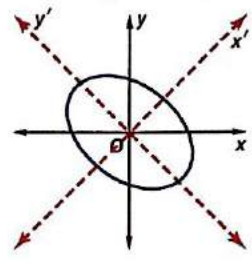
47. $y^2 - 16x^2 = 0$

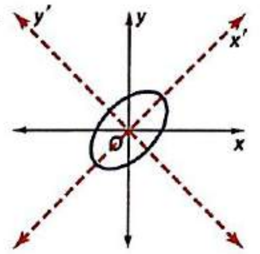
48. $(x + 4)^2 - (x - 1)^2 = y + 8$

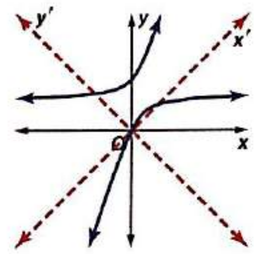
49. $(x + 3)^2 + y^2 + 6y + 9 - 6(x + y) = 18$

صِل التمثيل البياني لكل قطع مخروطي بمعادلته.

50.


51.


52.


53.


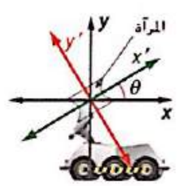
a. $x^2 - xy + y^2 = 2$

b. $145x^2 + 120xy + 180y^2 - 900 = 0$

c. $2x^2 - 72xy + 23y^2 + 100x - 50y = 0$

d. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 5x - 90y + 25 = 0$

54. **علم الفواعل الآليّة** استخدمت المرآة على شكل قطع زائد في أنظمة الفواعل الآليّة في الروبوت بحيث توجه نحو اليمين. بعد استدارتها، يُمثّل موقعها الجديد بالمعادلة $51.75x^2 + 184.5\sqrt{3}xy - 132.75y^2 = 32{,}400$



a. حل المعادلة لأجل لإيجاد قيمة الحد y.

b. استخدم حاسبة التمثيل البياني لرسم المعادلة.

c. حدد الزاوية θ التي من خلالها تستدار المرآة. قرّبها إلى أقرب درجة.

55. **الثوابت** عندما يحوّل دوران معادلة من المستوى xy إلى المستوى $x'y'$-، فإن المعادلة الجديدة تساوي المعادلة الأصلية. تظل بعض القيم ثابتة أثناء الدوران، وهذا يعني أن قيمها لا تتغير عند دوران المحاور. استخدم التعليل لشرح كيف يكون $A + C = A' + C'$ هو دوران ثابت.

حاسبة التمثيل البياني مثّل بيانيًا كل معادلتين وأوجد نقاط التقاطع. إذا لم يكن في التمثيل البياني نقاط تقاطع، فاكتب لا يوجد حل.

56. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x - y = 0$
$8x^2 + 3xy - 5y^2 = 15$

57. $9x^2 + 4xy + 5y^2 - 40 = 0$
$x^2 - xy - 2y^2 - x - y + 2 = 0$

58. $x^2 + \sqrt{3}xy - 3 = 0$
$16x^2 - 20xy + 9y^2 = 40$

59. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستنتج زوايا الدوران التي تعطي التمثيلات البيانية الاساسية.

a. **جدوليًا** في كل معادلة في الجدول، حدد القطع المخروطي ثم أوجد القيمة الصغرى لزاوية الدوران اللازمة لتحويل المعادلة بحيث يتطابق التمثيل البياني المستدار مع التمثيل البياني الأساسي.

المعادلة	القطع المخروطي	الحد الأدنى لزاوية الدوران
$x^2 - 5x + 3 - y = 0$		
$6x^2 + 10y^2 = 15$		
$2xy = 9$		

b. **لفظيًا** صف العلاقة بين خطوط التماثل للقطوع المخروطية والقيمة الصغرى لزوايا الدوران اللازمة لاستنتاج التمثيلات البيانية الاساسية.

c. **تحليليًا** استدار القطع الناقص غير الدائري $50°$ عن نقطة الأصل. واستدار مرة أخرى بعد ذلك حيث استنتج التمثيل البياني الاساسي. فما هي الزاوية الثانية للدوران؟

مهارات التفكير العليا مسائل استخدم مهارات التفكير العليا

60. **تحليل الخطأ** يصف محمود وأحمد الرسم البياني $x^2 + 4xy + 6y^2 + 3x - 4y = 75$ وقال محمود إنه القطع الناقص. ويعتقد أحمد أنه القطع المكافئ. أي منهما صحيح؟ وضح تبريرك المنطقي.

61. **تحدي** اثبت أن معادلة الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ تبقى ثابتة أثناء الدوران θ.

62. **التبرير** صواب أو خطأ: يمكن وصف كل زاوية دوران θ أنها زاوية حادة. اشرح ذلك.

63. **البرهان** برهن أن $x' = x \cos\theta + y \sin\theta$ و $y' = y\cos\theta - x\sin\theta$ (ارشاد: حل المنظومة $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$ و $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$ بضرب أحد المعادلتين في $\sin\theta$ والأخرى في $\cos\theta$).

64. **التعليل** يمكن تحديد زاوية الدوران θ بأنها $\tan 2\theta = \frac{B}{A-C}$، عندما $A \neq C$ أو $\theta = \frac{\pi}{4}$، عندما $A = C$ لماذا لا يتطلب تحديد زاوية الدوران بدلالة ظل التمام شرطًا إضافيًا وقيمة إضافية لـ θ؟

65. **الكتابة في الرياضيات** يمكن استخدام المميز لتصنيف القطع المخروطي $A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ في المستوى $x'y'$-. اشرح لماذا تحدد القيم A' و C' نوع القطع المخروطي. صف العوامل اللازمة للقطع الناقص والدائرة والقطع المكافئ والقطع الزائد.

66. **التعليل** صواب أو خطأ: كلما كان المميز للمعادلة في الشكل $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ مساويًا صفر، فيكون التمثيل البياني للمعادلة قطعًا مكافئًا. اشرح ذلك.

ارسم القطع الزائد المعطى بكل معادلة.

67. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{64}=1$ **68.** $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{49}=1$ **69.** $\frac{(x-3)^2}{64}-\frac{(y-7)^2}{25}=1$

حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطى الذي معادلته:

70. $\frac{(x+17)^2}{39}+\frac{(y+7)^2}{30}=1$ **71.** $\frac{(x-6)^2}{12}+\frac{(y+4)^2}{15}=1$ **72.** $\frac{(x-10)^2}{29}+\frac{(y+2)^2}{24}=1$

73. **استثمار** لدى منصور مبلغ إجمالي قدره AED 5000 في حساب الادخار وشهادة الإبداع. يربح حساب الادخار مرابحة بنسبة 3.5% سنويًا. تربح شهادة الإيداع مرابحة بنسبة 5% إذا استثمرت الأموال لمدة سنة واحدة. حسب منصور أن أرباح المرابحة التي يحصل عليها في العام تبلغ AED 227.50 .

a. اكتب نظام المعادلات لمبلغ كل استثمار.

b. استخدم قاعدة كرامر لتحديد مقدار المال في حساب الادخار وشهادة الإيداع لدى منصور.

74. **البصريات** يطلق على كمية الضوء التي يوفرها المصدر إلى السطح بالاستنارة. الاستنارة E بالمتر- شمعة على أحد الأسطح حيث إن R البُعد بالمتر عن مصدر الضوء من مصدر الضوء بشدة I شمعة هي:

$E=\frac{I\cos\theta}{R^2}$ حيث إن θ هي قياس الزاوية بين اتجاه الضوء و الخط المتعامد على السطح المضاء.

أثبت أن $E=\frac{I\cot\theta}{R^2\csc\theta}$ هي صيغة مكافئة.

حل المعادلات.

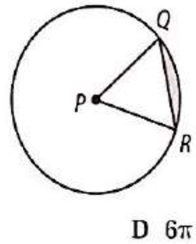
75. $\log_4 8n+\log_4(n-1)=2$ **76.** $\log_9 9p+\log_9(p+8)=2$

استخدم نظرية العوامل لتحديد إذا كانت المعادلات ذات الحدين هي عوامل $f(x)$. استخدم المعادلات ذات الحدين التي هي عوامل لكتابة التحليل الى عوامل للدالة $f(x)$.

77. $f(x)=x^4-x^3-16x^2+4x+48;\ (x-4),\ (x-2)$ **78.** $f(x)=2x^4+9x^3-23x^2-81x+45;\ (x+5),\ (x+3)$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

79. **SAT/ACT** P هي مركز الدائرة و $PQ=QR$. إذا كانت مساحة $\triangle PQR$ تبلغ $9\sqrt{3}$ وحدة مربعة. فما هي المساحة المظللة بالوحدة المربعة؟



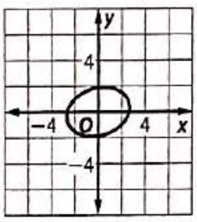
A $24\pi-9\sqrt{3}$ **D** $6\pi-9\sqrt{3}$
B $9\pi-9\sqrt{3}$ **E** $12\pi-9\sqrt{3}$
C $18\pi-9\sqrt{3}$

80. **مراجعة** أي مما يأتي ليست معادلة لقطع مكافئ؟

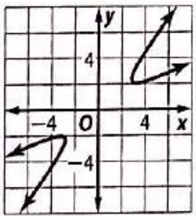
F $y=2x^2+4x-9$
G $3x+2y^2+y+1=0$
H $x^2+2y^2+8y=8$
J $x=\frac{1}{2}(y-1)^2+5$

81. ما هو التمثيل البياني للقطع المخروطي الناتج من المعادلة $4x^2-2xy+8y^2-7=0$؟

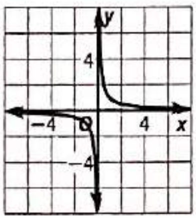
A



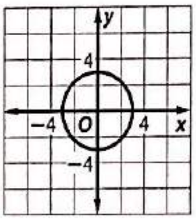
C



B



D



82. **مراجعة** ما عدد طرق حل هذا النظام $\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$ و $(x-3)^2+y^2=9$ ؟

F 0 **H** 2
G 1 **J** 4

توسع 6-4

مختبر تقنية التمثيل البياني
أنظمة المعادلات والمتباينات غير الخطية

الهدف

- استخدام حاسبة التمثيل البياني لتقريب حلول أنظمة معادلات ومتباينات لاخطية.

تمثل التمثيلات البيانية للقطوع المخروطية نظامًا لاخطيًا. ويمكن إيجاد حلول أنظمة المعادلات اللاخطية جبريًا. ولكن، يمكن إيجاد حلولٍ تقريبيةٍ باستخدام حاسبة التمثيل البياني خاصتك. يمكن لحاسبة التمثيل البياني تمثيل دوال فقط. وللتمثيل البياني لقطعٍ مخروطيٍ وهو ليس بدالّة، حلّ المعادلة لإيجاد قيمة y.

النشاط 1 النظام اللاخطي

أوجد حل نظام المتباينات بالتمثيل البياني.

$x^2 + y^2 = 13$

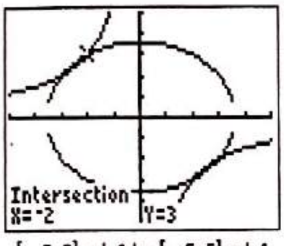
$xy + 6 = 0$

الخطوة 2 حلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد قيمة y.

$y = \sqrt{13 - x^2}$ و $y = -\sqrt{13 - x^2}$ $\qquad y = -\frac{6}{x}$

الخطوة 3 مثّل المعادلات بيانيًا في النافذة الملائمة.

الخطوة 4 استخدم سمة التقاطع (intersect) من القائمة CALC لإيجاد أربع نقاط تقاطع.



[−5, 5] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

الحلول هي $(-3, 2)$ و $(-2, 3)$ و $(2, -3)$ و $(3, -2)$.

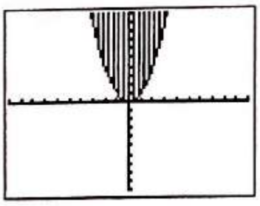
تمارين

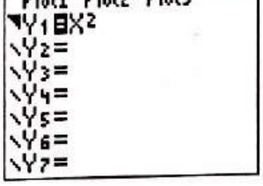
حُـلّ نظام المتباينات بالتمثيل البياني. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

1. $xy = 2$
   $x^2 - y^2 = 3$
2. $49 = y^2 + x^2$
   $x = 1$
3. $x = 2 + y$
   $x^2 + y^2 = 100$
4. $25 - 4x^2 = y^2$
   $2x + y + 1 = 0$
5. $y^2 = 9 - 3x^2$
   $x^2 = 10 - 2y^2$
6. $y = -1 - x$
   $4 + x = (y - 1)^2$

7. **تحدٍّ** يحتوي قصر غرفتين مربعتين اثنتين، وهما غرفة العائلة والمكتب. تبلغ المساحة الكلية للغرفتين 468 متر مربع، ومساحة المكتب أصغر بـ 180 متر مربع من غرفة العائلة.
   a. اكتب نظام معادلات من الدرجة الثانية تمثّل هذه الحالة.
   b. مثّل بيانيًا النظام الذي أوجدته في القسم a. وقدّر طول كل غرفة.

يمكن حلّ أنظمة المتباينات اللاخطية أيضًا باستخدام حاسبة تمثيل بياني. تذكّر من من الوحدة 1 أنه يمكن تمثيل المتباينات بيانيًا باستخدام تعليمتي أكبر من وأصغر من القائمة **Y=** . يمكن العثور على رمز المتباينة عبر التمرير إلى يسار إشارة المساواة وضغط ENTER إلى أن تومض المثلثات المظللة. يمثّل المثلث في الأعلى التعليمة أكبر من ويمثّل المثلث في الأعلى التعليمة أصغر من. التمثيل البياني للدالّة $y \geq x^2$ موضّح أدناه.


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1



```
DRAW POINTS STO
1:ClrDraw
2:Line(
3:Horizontal
4:Vertical
5:Tangent(
6:DrawF
7:Shade(
```

يمكن تمثيل متباينات القطوع المخروطية التي ليست بدوال بيانيًا، كالقطوع الناقصة والدوائر وبعض القطوع الزائدة عبر استخدام تعليمة Shade من قائمة DRAW. المعلومات المفيدة المطلوبة هي .Shade(*lowerfunc, upperfunc, Xleft, Xright, 3, 4*)

ترسم هذه التعليمة دالّة الحد الأدنى *lowerfunc* ودالّة الحد الأعلى *upperfunc* بدلالة *x*. ثم نظلل المنطقة الواقعة فوق *lowerfunc* وتحت *upperfunc* وبين الحدّين الأيسر والأيمن *Xleft* و *Xright*. يحدّد المدخلان الأخيران *3* و *4* نوع التظليل ويمكن أن يبقيا ثابتين.

النشاط 2 نظام البيانات اللاخطية

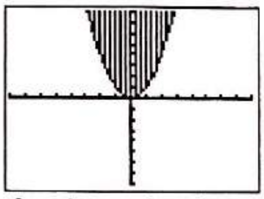
حُـلّ نظام المتباينات بالتمثيل البياني.

$$x^2 + y^2 \le 36$$
$$y - x^2 > 0$$

الخطوة 1 حلّ كل متباينة لإيجاد قيمة y.

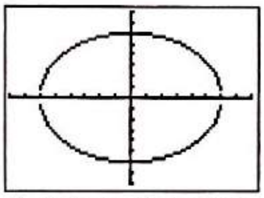
$y > x^2$ $y \le \sqrt{36 - x^2}$ و $y \ge -\sqrt{36 - x^2}$

الخطوة 2 مثّل $y > x^2$ بيانيًا وظلل المنطقة الصحيحة. شكّل رمز كل متباينة عبر التمرير إلى يسار إشارة المساواة واختيار ENTER إلى أن تومض المثلثات المظللة.



[−8, 8] scl: 1 by [−8, 8] scl: 1

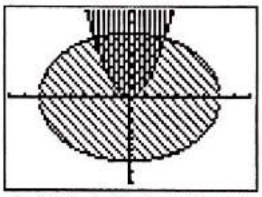
الخطوة 3 لتمثيل $x^2 + y^2 \le 36$ بيانيًا، فإن الحدّ الأدنى هو $y = -\sqrt{36 - x^2}$ والحدّ الأقصى هو $y = \sqrt{36 - x^2}$ يلتقي نصفا الدائرة عند $x = -6$ و $x = 6$ كما هو موضّح.



[−8, 8] scl: 1 by [−8, 8] scl: 1

الخطوة 4 من القائمة DRAW ، اختر 7 :Shade. Enter
$\text{Shade}(-\sqrt{36 - x^2}, \sqrt{36 - x}, -6, 6, 3, 4)$

```
Shade(-√(36-X²),
√(36-X²),-6,6,3,
4)
```



[−8, 8] scl: 1 by [−8, 8] scl: 1

حل النظام ممثل من خلال المنطقة مضاعفة التظليل.

نصيحة تقنية

مسح الشاشة لمسح أي رسومات من شاشة الحاسبة، اختر ClrDraw من القائمة DRAW.

نصيحة دراسية

الحدّان الأيمن والأيسر إذا لم يكن الحدّان الأيمن والأيسر واضحين، أدخل قيمتين للنافذة يفوقان كلا الحدّين. على سبيل المثال، إذا كان الحدّان هما $x = -5$ و $x = 5$ فإن إدخال −10 و 10 سيبقى يعطي التمثيل البياني الصحيح.

تمارين

حُـلّ كل من أنظمة المتباينات الآتية بالتمثيل البياني.

8. $2y^2 \le 32 - 2x^2$
$x + 4 \ge y^2$

9. $y + 5 \ge x^2$
$9y^2 \le 36 + x^2$

10. $x^2 + 4y^2 \le 32$
$4x^2 + y^2 \le 32$

6-5 المعادلات الوسيطية

:: السابق

- لقد قمت بتمثيل الحركة باستخدام دوال تربيعية.

:: الآن

1. تمثيل المعادلات الوسيطية بيانيًا
2. حلّ المعادلات المتصلة بحركة المقذوفات.

:: لماذا؟

- لقد استخدمت معادلاتٍ تربيعيةً لتمثيل مسارات المقذوفات ككرة التنس. ويمكن استخدام المعادلات الوسيطية أيضًا لتمثيل مسار المقذوفات ومداها وتقديرهما.

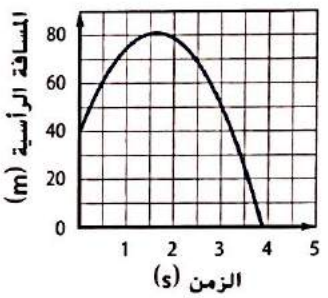
المفردات الجديدة

المعادلة الوسيطية
parametric equation
وسيط parameter
اتجاه orientation
المنحنى الوسيطي
parametric curve

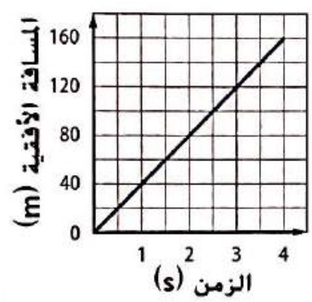
1 تمثيل المعادلات الوسيطية بيانيًا

لقد تناولنا في هذا الكتاب إلى حدّ الآن التمثيل البياني لمنحنىً في المستوى الإحداثي xy باستخدام معادلة واحدة تضم متغيرين هما x و y. في هذا الدرس ستقدّم بعضًا من هذه التمثيلات البيانية نفسها باستخدام معادلتين وعبر إدخال متغيرٍ ثالث.

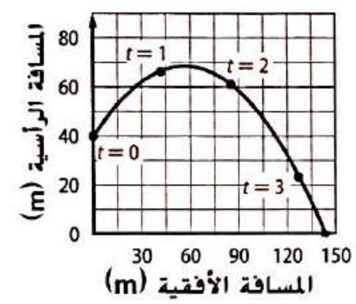
لنأخذ التمثيلين البيانيين المبينين أدناه، حيث يمثّل كلٌّ منهما نواحي مختلفةً حول ما يحدث عند رمي جسمٍ ما في الهواء. يبيّن الشكل 6.5.1 المسافة الرأسية التي يقطعها الجسم كتابعٍ للزمن، في حين يوضح الشكل 6.5.2 المسافة الأفقية التي يقطعها الجسم كتابعٍ للزمن. ويبيّن الشكل 6.5.3 المسافة الرأسية للجسم كتابعٍ لمسافته الأفقية.



الشكل 6.5.1



الشكل 6.5.2



الشكل 6.5.3

حيث يخبرنا كلٌّ من هذه التمثيلات البيانية ومعادلته عن جزءٍ مما يحدث في هذه الحالة، ولكنّه لا يمثّل الحالة بمجملها. للتعبير عن موضع الجسم أفقيًا ورأسيًا بدلالة الزمن، يمكننا استخدام **المعادلات الوسيطية**. تمثل كلتا المعادلتين المبينتين أدناه التمثيل البياني المبيّن في الشكل 6.5.3.

المعادلتان الوسيطيتان

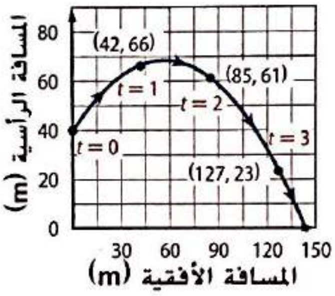
$$x = 30\sqrt{2}t$$
$$y = -16t^2 + 30\sqrt{2}t + 40$$

المعادلة بالصورة الديكارتية في المستوى الاحداثي المتعامد

$$y = -\frac{2}{225}x^2 + x + 40$$

من خلال المعادلتين الوسيطيتين، يمكننا تحديد الموضع الذي كان فيه الجسم عند زمنٍ ما عبر تقدير المركبتين الأفقية والرأسية لـ t. فعلى سبيل المثال، عند $t = 0$، كان الجسم عند النقطة $(0, 40)$. يطلق على المتغير t اسم **وسيط**.

برسم التمثيل البياني الموضح ضمن الفترة الزمنية $0 \leq t \leq 4$
إن التمثيل البياني للنقاط وفق الترتيب المتزايد لقيم t يؤدي إلى رسم منحنىً يأخذ اتجاهًا محددًا يدعى **اتجاه** المنحنى.
ويشار إلى هذا الاتجاه بواسطةِ أسهمٍ على المنحنى كما هو موضح.



المفهوم الأساسي المعادلات الوسيطية

إذا كانت f و g دالّتين متصلتين لـ t في الفترة I، فإن مجموعة الأزواج المرتّبة $(f(t), g(t))$ تمثل **منحنًى وسيطيًا**. والمعادلتان

$$x = f(t)\ ,\ y = g(t)$$

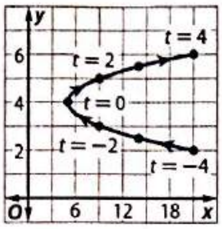
هما المعادلتان الوسيطيتان لهذا المنحنى، و t يرمز للوسيط، بينما I يرمز إلى فترة الوسيط.

المثال 1 التمثيل البياني لمنحنيات المعادلات الوسيطية

مثّل بيانيًا المنحنى المقابل لكل زوج من المعادلات الوسيطية في الفترة المعطاة.

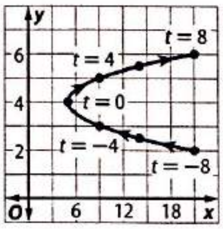
a. $x = t^2 + 5$ و $y = \frac{t}{2} + 4; -4 \leq t \leq 4$

اصنع جدولًا بقيم $-4 \leq t \leq 4$ ثم مثّل الإحداثيات (x, y) المقابلة لكل قيمة من قيم t وصِل النقاط لتشكيل منحنًى منتظم. تشير الأسهم المرافقة للتمثيل البياني إلى توجيه المنحنى مع انتقال t من -4 إلى 4.



t	x	y	t	x	y
−4	21	2	1	6	4.5
−3	14	2.5	2	9	5
−2	9	3	3	14	5.5
−1	6	3.5	4	21	6
0	5	4			

b. $x = \frac{t^2}{4} + 5$ و $y = \frac{t}{4} + 4; -8 \leq t \leq 8$



t	x	y	t	x	y
−8	21	2	2	6	4.5
−6	14	2.5	4	9	5
−4	9	3	6	14	5.5
−2	6	3.5	8	21	6
0	5	4			

تمرين موجّه

1A. $x = 3t$ و $y = \sqrt{t} + 6; 0 \leq t \leq 8$

1B. $x = t^2$ و $y = 2t + 3; -10 \leq t \leq 10 \leq 10$

لاحظ أن المجموعتين المختلفتين من المعادلات الوسيطية الموضحة في المثال 1 تنتجان المنحنى نفسه. يختلف التمثيلان البيانيان من حيث سرعتيهما أو بالأحرى من حيث سرعة رسم كلٍ منهما. إذا كانت t تمثّل الزمن بالثواني، يُرسم المنحنى في الجزء **b** خلال 16 ثانية، في حين يُرسم المنحنى في الجزء **a** خلال 8 ثوانٍ.

وثمّة طريقةٌ أخرى لتحديد المنحنى الممثل بمجموعة من المعادلات الوسيطية، وهي كتابة مجموعة المعادلات بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ويمكن القيام بذلك بالتعويض لحذف الوسيط.

المثال 2 الكتابة بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد

اكتب $x = -3t$ **و** $y = t^2 + 2$ **في المستوى الإحداثي المتعامد.**

لحذف الوسيط t، حل $x = -3t$ لإيجاد قيمة t. وهذا يعطي $t = -\frac{1}{3}x$ ثم عوّض هذه القيمة بدلًا من t في المعادلة الخاصة بـ y.

$$y = t^2 + 2$$
$$= \left(-\frac{1}{3}x\right)^2 + 2$$
$$= \frac{1}{9}x^2 + 2$$

تعطي هذه المجموعة من المعادلات الوسيطية معادلة القطع المكافئ: $y = \frac{1}{9}x^2 + 2$

تمرين موجّه

2. اكتب $x = t^2 - 5$ و $y = 4t$ بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد.

في المثال 2، لاحظ أنّه لم يجرِ تحديد فترة الوسيط الخاص بـ t. وفي حال عدم التحديد، تحدّد فترة الوسيط على أنها جميع قيم t التي تعطي قيمًا حقيقيةً لـ x و y.

نصيحة دراسية

المنحنيات المستوية يمكن استخدام المعادلات الوسيطية لتمثيل المنحنيات التي ليست بدوالّ، كما هو موضح في المثال 1.

نصيحة دراسية

حذف الوسيط عندما تحذف وسيطًا من أجل التحويل الى الصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد، فإنك تستطيع حلّ أيٍ من المعادلتين الوسيطيتين أولًا.

وفي بعض الأحيان يجب أن يكون المجال مُقيّدًا بعد التحويل من الشكل الوسيطي إلى المستوى الإحداثي المتعامد.

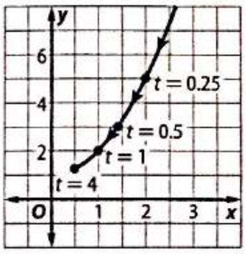
المثال 3 المستوى الإحداثي المتعامد مع قيود المجال

اكتب $x=\frac{1}{\sqrt{t}}$ و $y=\frac{t+1}{t}$ بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ثمّ مثّل المعادلة بيانيًا. واذكر أيّ قيودٍ خاصةٍ بالمجال.

لحذف t، ربّع كل طرف للمعادلة $x=\frac{1}{\sqrt{t}}$ وهذا يعطي $\frac{1}{t}=x^2$. إذًا $t=\frac{1}{x^2}$ عوّض بهذه القيمة بدلًا من t في المعادلة الوسيطية الخاصة بـ y.

$$y=\frac{t+1}{t}$$
$$=\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}}$$
$$=\frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$$
$$=x^2+1$$

في حين أن المعادلة بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد هي $y=x^2+1$. فإن المنحنى معرّف فقط عند قيم $t>0$ من المعادلة الوسيطية $x=\frac{1}{\sqrt{t}}$. القيم الممكنة فقط لـ x هي القيم الأكبر من الصفر. كما هو مبين في التمثيل البياني، فإن مجال المعادلة بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد مقيّد بالقيم $x>0$



تمرين موجّه

3. اكتب $x=\sqrt{t+4}$ و $y=\frac{1}{t}$ في المستوى الإحداثي المتعامد. ومثّل المعادلة بيانيًا. واذكر أيّ قيودٍ على المجال.

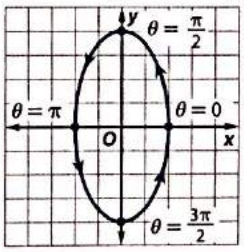
ويمكن أن يكون الوسيط في المعادلات الوسيطية زاوية مثل θ أيضًا.

المثال 4 المعادلات بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد باستخدام الوسيط θ

اكتب $x=2\cos\theta$ و $y=4\sin\theta$ في المستوى الإحداثي المتعامد. ثمّ مثّل المعادلة بيانيًا.

لحذف الوسيط θ. حلّ المعادلتين أولًا لإيجاد قيمة $\cos\theta$ و $\sin\theta$ كي تحصل على $\cos\theta=\frac{x}{2}$ و $\sin\theta=\frac{y}{4}$ ثم استخدم متطابقة فيثاغورس لحذف الوسيط θ.

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$
$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2=1$$
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$



عليك تنظيم هذه المعادلة وفق صيغة معادلة قطع ناقص يقع مركزه في نقطة الأصل ويقع رأساه عند النقطتين $(0,-4)$ و $(0,4)$ ويقع رأساه المرافقان عند النقطتين $(2,0)$ و $(-2,0)$ كما هو موضح. مع تغير قيمة θ من 0 إلى 2π، يُرسَم القطع الناقص باتجاه معاكس لعقارب الساعة.

تمرين موجّه

4. اكتب $x=3\sin\theta$ و $y=8\cos\theta$ بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ثم ارسم التمثيل البياني.

نصيحة تقنية

وسيطات عند التمثيل البياني للمعادلات الوسيطية على الحاسبة، يستخدم الرمزان θ و t بصورةٍ متبادلة.

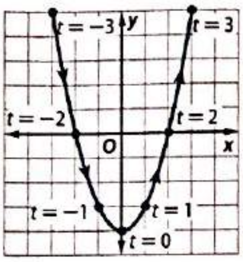
كما رأيت في المثال 1، فإن التمثيلات الوسيطية للتمثيلات البيانية بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد ليست مميزة. حيث إن التبديل في تعريف الوسيط يعطيك معادلات وسيطية تنتج تمثيلاتٍ بيانية تختلف فقط من حيث سرعتها و/أو توجيهها.

المثال 5 كتابة المعادلات الوسيطية من التمثيلات البيانية

استخدم كل وسيط لكتابة المعادلات الوسيطية التي يمكن أن تمثّل $y = x^2 - 4$ ثمّ مثّل المعادلة بيانيًا، مع الإشارة إلى سرعة التمثيل وتوجيهه.

a. $t = x$

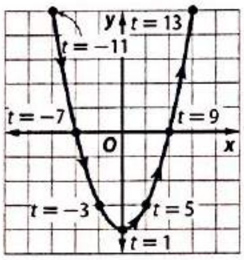
$$y = x^2 - 4$$
$$= t^2 - 4$$



المعادلتان الوسيطيتان هما $x = t$ و $y = t^2 - 4$
السرعة والتوجيه المرافقان للمنحنى مشارٌ إليهما على التمثيل البياني.

b. $t = 4x + 1$

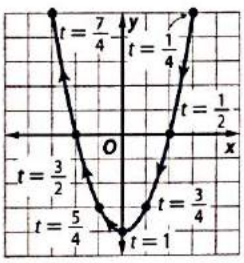
$$x = \frac{t-1}{4}$$
$$y = \left(\frac{t-1}{4}\right)^2 - 4$$
$$= \frac{t^2}{16} - \frac{t}{8} - \frac{63}{16}$$



$x = \frac{t-1}{4}$ و $y = \frac{t^2}{16} - \frac{t}{8} - \frac{63}{16}$ هما المعادلتان الوسيطيتان.
لاحظ أن السرعة أبطأ بكثير منها في القسم a.

c. $t = 1 - \frac{x}{4}$

$$4 - 4t = x$$
$$y = (4 - 4t)^2 - 4$$
$$= 16t^2 - 32t + 12$$



المعادلتان الوسيطيتان هما $x = 4 - 4t$ و $y = 16t^2 - 32t + 12$ لاحظ أن السرعة أكبر بكثير منها في القسم a. كما أن التوجيه معكوسٌ أيضًا كما تشير الأسهم.

تمرين موجّه

استخدم كل وسيط لتحديد المعادلات الوسيطية التي يمكن أن تمثل $x = 6 - y^2$ ثم مثّل المعادلة بيانيًا، مع الإشارة إلى السرعة والتوجيه.

5A. $t = x + 1$

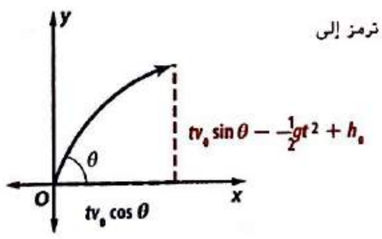
5B. $t = 3x$

5C. $t = 4 - 2x$

2 حركة المقذوفات

حركة المقذوفات تستخدم المعادلات الوسيطية في أغلب الأحيان لمحاكاة حركة المقذوفات. ويمكن تمثيل مسار مقذوفٍ أُطلق بزاوية مغايرة لـ $90°$ مع خط الأفق بمعادلتين وسيطيتين.

المفهوم الأساسي حركة المقذوف



أطلق جسم صانعًا زاوية θ مع خط الأفق وبسرعة متجهة ابتدائية v_0. حيث g ترمز إلى ثابت الجاذبية الأرضية، و t ترمز إلى الزمن و h_0 ترمز إلى الارتفاع الابتدائي.

المسافة الأفقية $x = tv_0 \cos\theta$

الموقع الرأسي $y = tv_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$

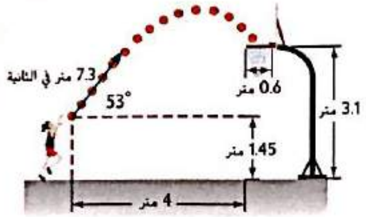
نصيحة دراسية

الصيغة الوسيطية للمعادلات إن الطريقة الأسهل لتحويل معادلة من الصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد إلى الصيغة الوسيطية هي استخدام العلاقة $x = t$ وعند إتمام ذلك، تمثل المعادلة الوسيطية الأخرى المعادلة الأساسية مع إحلال t محلّ x.

مثال 6 من الحياة اليومية حركة المقذوفات

كرة السلة تتمرّن خديجة على الرميات الحرّة من أجل مباراة كرة السلة القادمة. حيث ترمي الكرة بسرعة متجهة ابتدائية تساوي 7.3 متراً في الثانية وبزاوية 53° بالنسبة خط الأفق. تساوي المسافة الأفقية من قوس الرميات الحرة إلى الحافة الأمامية من حلقة السلّة 4 أمتار. والمسافة الرأسية من الأرضية إلى حلقة السلة 3.1 متراً. تبعد الحافّة الأمامية للحلقة مسافة 0.6 متراً عن لوحة الهدف. ترمي خديجة الكرة عن ارتفاع 1.45 متراً عن الأرض. فهل سوف تسجّل؟

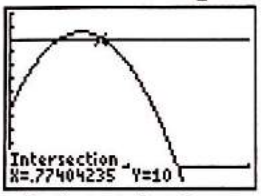
شكّل تمثيلًا بيانيًا للحالة.



لتحديد ما إن كانت خديجة سوف تسجّل الرمية، فإنك بحاجةٍ إلى المسافة الأفقية التي قطعتها الكرة حين كانت عند ارتفاع 10 أمتار. أولًا، اكتب معادلةً وسيطيةً تمثل الموقع الرأسي للكرة.

$$y = tv_0 \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$$
$$= t(24) \sin 53 - \frac{1}{2}(32)t^2 + 4.75$$

مثّل بيانيًا معادلة الموقع الرأسي والمستقيم $y = 10$.
يقطع المنحنى المستقيم في نقطتين. وتمثل نقطة التقاطع الأولى الكرة حين تتحرك هبوطًا باتجاه السلة. استخدم البند 5: التقاطع (Intersect) في القائمة CALC لإيجاد نقطة التقاطع مع $y = 10$. تساوي القيمة تقريبًا 0.77 ثانية.



[0, 2] scl: 1 by [0, 12] scl: 1

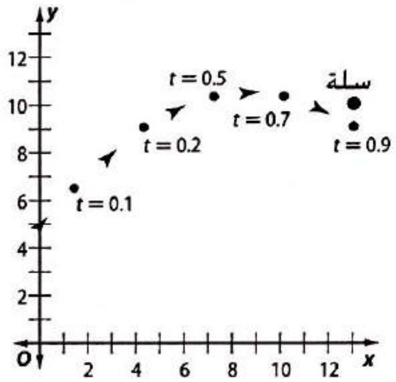
حدّد الموقع الأفقي للكرة عند الزمن 0.77 ثانية.

$$x = tv_0 \cos \theta$$
$$= 0.77(24) \cos 53$$
$$\approx 11.1$$

نظرًا إلى أن الموقع الأفقي الأصغر من 4 متراً عند بلوغ الكرة ارتفاع 3.1 أمتار للمرة الثانية. فلن تبلغ الكرة السلة، ولن تسجّل خديجة الرمية.

التحقق يمكنك التأكّد من حسابك عبر التمثيل البياني للمعادلات الوسيطية وتحديد مسار الكرة بالنسبة للسلة.

t	x	y	t	x	y
0	0	4.75	0.5	7.22	10.33
0.1	1.44	6.51	0.6	8.67	10.49
0.2	2.89	7.94	0.7	10.11	10.32
0.3	4.33	9.06	0.8	11.55	9.84
0.4	5.78	9.86	0.9	13.00	9.04

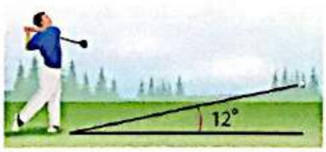


نصيحة دراسية

الجاذبية الأرضية عند سطح الأرض، يبلغ تسارع الجاذبية الأرضية 9.8 أمتار في الثانية للتربيع أو 32 متراً في الثانية للتربيع. وعند حل المسائل، تحقق من استخدام القيمة الصحيحة لتسارع الجاذبية بناءً على الوحدات المستخدمة للسرعة والموقع.

تمرين موجّه

6. لعبة الجولف يضرب سعيد كرة الجولف بسرعة ابتدائية تساوي 56 مترًا في الثانية وبزاوية مقدارها 12° فوق أرضٍ مستوية. عند أي مسافةٍ ستحطّ الكرة على الأرض؟



الربط بالحياة اليومية

في شهر أبريل من عام 2007، أصبحت مورغان بريسل أصغر امرأةٍ على الإطلاق تفوز ببطولة اتحاد الجولف للسيدات المحترفات أو ما يعرف بـ LPGA.

المصدر: بطولة اتحاد الجولف للسيدات المحترفات

تمارين

مثّل بيانيًا المنحنى المعطى لكل زوجٍ من المعادلات الوسيطية في الفترة المعطاة. (المثال 1)

1. $x = t^2 + 3$ و $y = \frac{t}{4} - 5; -5 \le t \le 5$
2. $x = \frac{t^2}{2}$ و $y = -4t; -4 \le t \le 4$
3. $x = -\frac{5t}{2} + 4$ و $y = t^2 - 8; -6 \le t \le 6$
4. $x = 3t + 6$ و $y = \sqrt{t} + 1; 0 \le t \le 9$
5. $x = 2t - 1$ و $y = -\frac{t^2}{2} + 7; -4 \le t \le 4$
6. $x = -2t^2$ و $y = \frac{t}{3} - 6; -6 \le t \le 6$
7. $x = \frac{t}{2}$ و $y = -\sqrt{t} + 5; 0 \le t \le 8$
8. $x = t^2 - 4$ و $y = 3t - 8; -5 \le t \le 5$

اكتب كل زوج من المعادلات الوسيطية بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ثم مثل المعادلة بيانيًا واذكر أيّ قيودٍ على المجال. (المثالان 2 و 3)

9. $x = 2t - 5, y = t^2 + 4$
10. $x = 3t + 9, y = t^2 - 7$
11. $x = t^2 - 2, y = 5t$
12. $x = t^2 + 1, y = -4t + 3$
13. $x = -t - 4, y = 3t^2$
14. $x = 5t - 1, y = 2t^2 + 8$
15. $x = 4t^2, y = \frac{6t}{5} + 9$
16. $x = \frac{t}{3} + 2, y = \frac{t^2}{6} - 7$

17. **الممثلون البدلاء** خلال تصوير أحد الأفلام، يقفز أحد الممثلين البدلاء من حافة أحد المباني. وتؤدي البكرات المربوطة بالممثل البديل إلى سقوطه سقوطًا حرًا يمكن تمثيله بالمعادلة $y = -16t^2 + 15t + 100$ وبحركةٍ أفقيةٍ يمكن تمثيلها بالمعادلة $x = 4t$. وفيها x و y تقاسان بالمتر و t تقاس بالثواني. اكتب معادلةً بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد ومثّلها بيانيًا لتمثيل سقوط الممثل من أجل $0 \le t \le 3$ (المثال 3)

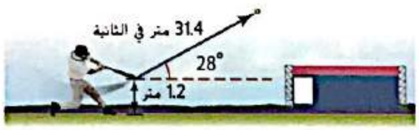
اكتب كل زوج من المعادلات الوسيطية بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ثمّ مثّل المعادلة بيانيًا. (المثال 4)

18. $x = 3\cos\theta$ و $y = 5\sin\theta$
19. $x = 7\sin\theta$ و $y = 2\cos\theta$
20. $x = 6\cos\theta$ و $y = 4\sin\theta$
21. $x = 3\cos\theta$ و $y = 3\sin\theta$
22. $x = 8\sin\theta$ و $y = \cos\theta$
23. $x = 5\cos\theta$ و $y = 6\sin\theta$
24. $x = 10\sin\theta$ و $y = 9\cos\theta$
25. $x = \sin\theta$ و $y = 7\cos\theta$

استخدم كل وسيطٍ لكتابة المعادلات الوسيطية التي يمكن أن تمثل كل معادلة. ثم مثّل المعادلات بيانيًا، مع الإشارة إلى سرعة الرسم البياني وتوجيهه. (المثال 5)

26. $t = 3x - 2; y = x^2 + 9$
27. $t = 8x; y^2 = 9 - x^2$
28. $t = 2 - \frac{x}{3}; y = \frac{x^2}{12}$
29. $t = \frac{x}{5} + 4; y = 10 - x^2$
30. $t = 4x + 7; y = \frac{x^2 - 1}{2}$
31. $t = \frac{1 - x}{2}; y = \frac{3 - x^2}{4}$

32. **البيسبول** يضرب لاعبٌ كرة البيسبول بزاوية 28° وبسرعةٍ ابتدائية تساوي 31.4 مترًا في الثانية. يرتفع موقع ضرب الكرة مسافة 1.2 مترًا عن الأرض في لحظة اصطدام المضرب بالكرة. على فرض أن أحدًا من اللاعبين لم يمسك الكرة، حدّد المسافة التي تقطعها الكرة. (المثال 6)



33. **لعب الكرة** يحاول عبيد إصابة هدف يبعد 39.3 متر. فيركل الكرة بزاوية 41° وبسرعة ابتدائية تساوي 21.3 مترًا في الثانية. ارتفاع الهدف 4.6 مترًا. فهل ركلته طويلةٌ بما يكفي لإصابة الهدف؟ (المثال 6)

اكتب كل زوج من المعادلات الوسيطية بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ثم اذكر أي قيودٍ على المجال.

34. $x = \sqrt{t} + 4$, $y = 4t + 3$
35. $x = \log t$, $y = t + 3$
36. $x = \sqrt{t - 7}$, $y = -3t - 8$
37. $x = \log(t - 4)$, $y = t$
38. $x = \frac{1}{\sqrt{t + 3}}$, $y = t$
39. $x = \frac{1}{\log(t + 2)}$, $y = 2t - 4$

40. **التنس** يضرب مازن كرة مضربٍ عند ارتفاع 55 سنتيمترًا عن الأرض وبزاوية 15° مع خط الأفق. السرعة الابتدائية للكرة 18 مترًا في الثانية.
 a. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل مسار كرة المضرب باستخدام المعادلات الوسيطية.
 b. كم تبقى الكرة في الهواء قبل أن تصل الأرض؟
 c. إذا كان مازن يبعد 10 أمتارٍ عن الشبكة، وكان ارتفاع الشبكة 1.5 متر عن الأرض، فهل ستعبر الكرة فوق الشبكة؟ وإن كان ذلك، بكم مترٍ ستتخطى الكرة الشبكة؟ وإن لم يكن ذلك، فما مسافة اصطدام الكرة بالأرض قبل الشبكة؟

اكتب مجموعة معادلات وسيطية لكل مستقيم أو قطعة مستقيمة مما يلي وفق الخواص التالية.

41. مستقيم ميله 3 يمر بالنقطة $(4, 7)$
42. مستقيم ميله -0.5 يمر بالنقطة $(3, -2)$
43. قطعة مستقيمة طرفاها النقطتان $(-2, -6)$ و $(2, 10)$
44. قطعة مستقيمة طرفاها النقطتان $(7, 13)$ و $(13, 11)$

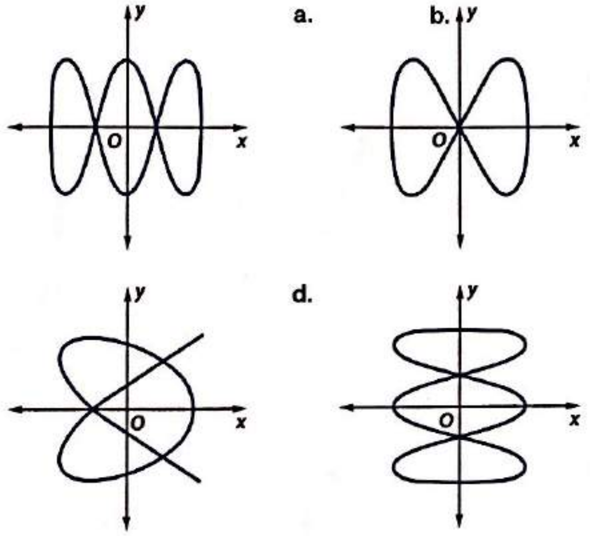
صِل بين كل مجموعة من المعادلات الوسيطية وتمثيلها البياني المقابل.

45. $x = \cos 2t, y = \sin 4t$

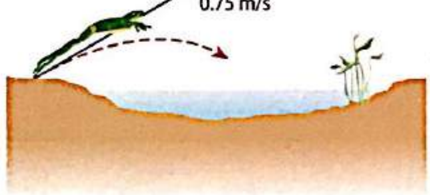
46. $x = \cos 3t, y = \sin t$

47. $x = \cos t, y = \sin 3t$

48. $x = \cos 4t, y = \sin 3t$



49. **علم الأحياء** يقفز ضفدع من ضفة جدولٍ بسرعةٍ ابتدائية تساوي 0.75 متر في الثانية وبزاوية قياسها $45°$ بالنسبة للاتجاه الأفقي. يقع سطح الجدول على بعد 0.3 متر تحت حافة الضفة. إذا كانت g تساوي 9.8 أمتار لكل ثانية مربعة .



a. اكتب المعادلة الوسيطية التي تصف موقع الضفدع عند الزمن t. وافترض أن سطح الماء يقع على المستقيم $y = 0$.

b. إذا كان عرض الجدول 0.5 متر. فهل سيبلغ الضفدع الضفة الثانية التي تقع على مستوى الجدول نفسه؟ وإن لم يكن ذلك، فكم تبعد نقطة اصطدام الضفدع بالماء عن الضفة الأخرى؟

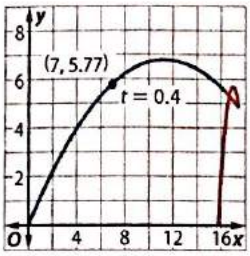
c. إذا استطاع الضفدع أن يقفز على ورقة زنبقٍ تطفو فوق سطح الجدول وتبعد مسافة 0.4 متر عن موقع القفز، واستغرق كي يبلغها 0.38 ثانية، فكم كانت السرعة الابتدائية للضفدع؟

50. **السباق** تتنافس هالة وهداية في سباق 100 متر. وبعد إطلاق رصاصة الانطلاق، تنطلق هالة بسرعة 0.8 متر في الثانية بعد تأخيرٍ لمدة 0.1 ثانية من النقطة $(2, 0)$ وتنطلق هداية بسرعة 8.1 أمتار في الثانية بعد تأخيرٍ لمدة 0.3 ثانية من النقطة $(5, 0)$.

a. باستخدام المحور الرأسي y بمثابة خط البداية وعلى فرض أن الفتاتين تركضان بموازاة المحور الأفقي x. اكتب معادلتين وسيطيتين تمثلان موقع كلٍ منهما بعد t ثوانٍ.

b. من ستفوز بالسباق؟ إذا ركضت الفتاتان مسافة 200 متر بدلًا من 100 متر، فمن ستفوز؟ اشرح إجابتك.

51. **كرة القدم** يمثّل التمثيل البياني المبيّن أدناه مسار كرةٍ ركلها أحد اللاعبين ومن ثمّ ضربها لاعبٌ آخر برأسه. مسار الكرة بعد ركلها من قِبَل اللاعب الأول موضح باللون الأزرق، ومسارها بعد ضربها بالرأس من قِبَل اللاعب الثاني موضح باللون الأحمر.



a. إذا ركل اللاعب الأول الكرة بزاوية $50°$، أوجد سرعتها البدائية.

b. ما هو زمن وصول الكرة إلى اللاعب الثاني إذا كان يقف على بعد 5.3 مترًا؟

c. إذا ضرب اللاعب الثاني الكرة برأسه بزاوية قياسها $75°$ وبسرعةٍ ابتدائية تساوي 8 أمتارٍ في الثانية عند ارتفاع 1.45 مترًا، فكم تبقى الكرة في الهواء على وجه التقريب بدءًا من لحظة ركلها أول مرةٍ وحتى هبوطها إلى الأرض؟

52. **التمثيلات المتعددة** سوف تدرس في هذه المسألة الدويري، وهو المنحنى الذي يرسمه مسارٌ نقطةٍ على محيطِ دائرةٍ نصف قطرها وحدةٌ واحدةٌ أثناء دحرجتها على طول المحور الأفقي x.

a. **بيانيًا** استخدم حاسبةً بيانيةً لتمثيل المعادلتين الوسيطيتين $x = t - \sin t$ و $y = 1 - \cos t$. وفيهما t تقاس بالقياس الدائري (الراديان).

b. **تحليليًا** ما المسافة بين نقطتي التقاطع مع المحور الأفقي x؟ صِف ماذا تمثل نقطتا التقاطع مع المحور الأفقي x وماذا تمثل المسافة بينهما.

c. **تحليليًا** ما القيمة العظمى لـ y؟ صِف ما تمثله هذه القيمة وكيف تتغير بالنسبة لدوائر ذات أنصاف أقطارٍ مختلفة.

مسائل مهارات التفكير العليا — استخدم مهارات التفكير العليا

53. **تحدٍّ** خذ المستقيم ℓ ذا المعادلتين الوسيطيتين $x = 2 + 3t$ و $y = -t + 5$ اكتب مجموعة معادلات وسيطية للمستقيم m الموازي لـ ℓ والذي يضم النقطة $(4, 10)$.

54. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في وجود عددٍ لا نهائي من مجموعات المعادلات الوسيطية لوصف مستقيمٍ في المستوى xy.

55. **التبرير** حدّد إن كانت المعادلات الوسيطية الخاصة بحركة المقذوفات يمكن أن تنطبق على أجسام ترمى بزاوية قياسها $90°$. اشرح استنتاجك.

56. **تحدٍّ** لدينا مستقيمٌ في الفضاء ثلاثي الأبعاد يضم النقطتين $P(2, 3, -8)$ و $Q(-1, 5, -4)$. أوجد مجموعتي المعادلات الوسيطية للمستقيم.

57. **الكتابة في الرياضيات** اشرح أفضلية استخدام المعادلات الوسيطية على استخدام المعادلات بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي عند تحليل المركبتين الأفقية/الرأسية لتمثيلٍ بياني.

مثّل كلّ معادلةٍ عند الزاوية المشار إليها.

58. $\frac{(x')^2}{9} - \frac{(y')^2}{4} = 1$ عند الدوران بزاوية $60°$ من المحور xy

59. $(x')^2 - (y')^2 = 1$ عند الدوران بزاوية $45°$ من المحور xy

اكتب معادلةً تمثل القطع الزائد ضمن الخواص التالية.

60. رأساه $(5, -8)$، $(5, 4)$، وطول محوره المرافق 4

61. طول محوره القاطع 4، وبؤرتاه $(3, -1)$، $(3, 5)$

62. **البيت الأبيض** ثمّة مساحةٌ مفتوحةٌ يطلق عليها القطع الناقص. اكتب معادلة لتمثيل القطع الناقص. افترض أن نقطة الأصل هي مركز القطع الناقص.

حوّل كلًا من التعابير التالية إلى أبسط صورة.

63. $\frac{\sin x}{\csc x - 1} + \frac{\sin x}{\csc x + 1}$

64. $\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x}$

استخدم خواص اللوغاريتمات لإعادة كتابة كل لوغاريتم من اللوغاريتمات المبينة أدناه وفق الصيغة $a \ln 2 + b \ln 3$، حيث a و b ثابتان. ثمّ قدّر قيمة كل لوغاريتم إذا علمت أن $\ln 2 \approx 0.69$ و $\ln 3 \approx 1.10$

65. $\ln 54$

66. $\ln 24$

67. $\ln \frac{8}{3}$

68. $\ln \frac{9}{16}$

لكل دالّة، حدّد أي مستقيماتٍ تقاربية ونقاط تقاطع. ثمّ مثّل الدالّة واذكر مجالها.

69. $h(x) = \frac{x}{x+6}$

70. $h(x) = \frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 7x - 8}$

71. $f(x) = \frac{x^2 + 8x}{x + 5}$

72. $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + x^2 - 6x}$

حُـلّ كلٍ من المعادلات التالية.

73. $\sqrt{3z - 5} - 3 = 1$

74. $\sqrt{5n - 1} = 0$

75. $\sqrt{2c + 3} - 7 = 0$

76. $\sqrt{4a + 8} + 8 = 5$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

77. **SAT/ACT** باستثناء المربعات المظللة، يحوي كل مربع في التمثيل البياني عددًا يساوي مجموع العدد الموجود في المربع الواقع فوقه والعدد الموجود في المربع الواقع إلى يساره. فعلى سبيل المثال، العدد 4 في المربع غير المظلل هو مجموع العدد 2 الموجود في المربع الواقع فوقه والعدد 2 في المربع الواقع إلى يساره مباشرةً. ما قيمة x؟

0	1	2	3	4	5
1	2	4			
2					
3			x		
4					
5					

A 7 **B** 8 **C** 15 **D** 23 **E** 30

78. يقوم صالح و سلطان بتجربةٍ في الفيزياء يطلقان خلالها نموذج صاروخ. من المفروض أن يحرّر الصاروخ مظلةً عند ارتفاع 91.5 متر في الهواء، وبعد 7 ثوانٍ من الإقلاع. يطلق الطالبان الصاروخ عند زاوية قياسها $78°$ بالنسبة للاتجاه الأفقي. ولحماية الطلاب الآخرين من الصاروخ الساقط، يحتاج المعلّم إلى وضع شاراتٍ تحذيريةٍ على بعد 45.7 متر من موضع تحرير المظلة. فكم ينبغي أن تبعد الإشارات التحذيرية عن نقطة إطلاق الصاروخ؟

F 111.6 متر

G 116.2 متر

H 121.6 متر

J 126.2 متر

79. **إجابة حرّة** يتحرّك جسمٌ على طول منحنًى معادلتاه الوسيطيتان $x = \sqrt{t}$ ، $y = \frac{10\sqrt{3t} \pm \sqrt{496 - 2304t}}{62}$

a. حوّل المعادلتين الوسيطيتين إلى معادلتين بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد.

b. حدّد القطع المخروطي الذي يمثّله المنحنى.

c. اكتب معادلةً تمثل المنحنى في المستوى $x\ y$، على فرض أنه تمّ دورانه بزاوية $30°$.

d. حدّد الاختلاف المركزي للقطع المخروطي.

e. حدّد موقع البؤرتين في المستوى $x\ y'$ إن وجدتا.

6-5 مختبر تقنية التمثيل البياني
النمذجة باستخدام المعادلات الوسيطية

الهدف

- استخدام حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدوال بارامتريًا.

كما هو مبيّن في الدرس 5-6، يمثل المتغير المستقل t في المعادلات الوسيطية الزمن. ويعكس هذا الوسيط سرعة رسم التمثيل البياني. إذا أُتمّ تمثيلٌ بيانيٌ خلال زمن $0 \le t \le 10$، في حين استغرق إتمام تمثيلٍ بيانيٍ مطابقٍ له الزمن $0 \le t \le 10$. إذًا فإن التمثيل البياني الأول أسرع.

نصيحة دراسية

ضبط الوسيطات استخدم الحالة الواردة في المعادلة بمثابة دليلٍ إرشاديٍ لضبط مجال قيم x و y و t.

النشاط التمثيل البياني الوسيطي

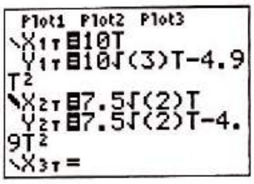
لعب الكرة يقف عمر بجوار شقيقته نورا و يرميان كرةً في الزمن نفسه تمامًا. ترمي نورا الكرة عند سرعة ابتدائية تساوي 20 مترًا في الثانية وبزاوية قياسها °60. ويرمي عمر الكرة عند سرعة ابتدائية تساوي 15 مترًا في الثانية وبزاوية قياسها °45. على فرض أن الكرتين ترميان من الارتفاع الابتدائي نفسه، مثّل الرميتين على حاسبةٍ للتمثيل البياني.

الخطوة 1 المعادلات الوسيطية لكل رميةٍ هي كالتالي.

نورا:
$$x = 20t \cos 60 = 10t \qquad y = 20t \sin 60 - 4.9t^2 = 10\sqrt{3}t - 4.9t^2$$

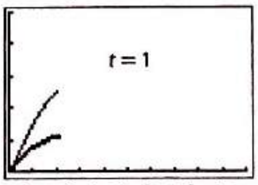
عمر:
$$x = 15t \cos 45 = 7.5\sqrt{2}t \qquad y = 15t \sin 45 - 4.9t^2 = 7.5\sqrt{2}t - 4.9t^2$$

الخطوة 2 ضبط النمط. من القائمة $\boxed{\text{MODE}}$، اختر degree و par و simul. وهذا يتيح تمثيل المعادلات بيانيًا في الوقت نفسه. أدخل المعادلات الوسيطية. في الصيغة الوسيطية، تستخدم $\boxed{\text{X,T,θ,n}}$ الرمز t بدلًا من x. اضبط إظهار المجموعة الثانية من المعادلات على الوضعية المظللة للتمييز بين الرميات.

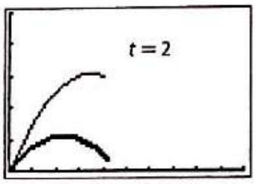


الخطوة 3 اضبط قيم t لتتراوح بين 0 و 8 بمثابة تقديرٍ لمدد الرمي. اضبط tstep على 0.1 لتشاهد الرميات على التمثيل البياني.

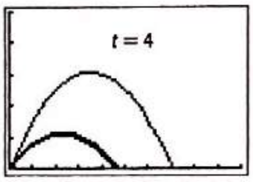
الخطوة 4 مثّل المعادلات بيانيًا.



[0, 50] scl: 5 by [0, 25] scl: 5



[0, 50] scl: 5 by [0, 25] scl: 5



[0, 50] scl: 5 by [0, 25] scl: 5

ترتفع رمية نورا أكثر تقطع مسافةً أكبر في حين تحطّ رمية عمرعلى الأرض أولًا.

تمارين

1. **لعب الكرة** بلغت سرعة رمية عمر التالية 21 مترًا في الثانية عند زاوية قياسها °50. وبعد مرور ثانية واحدة، رمت نورا كرتها بسرعة 24 مترًا في الثانية عند زاوية قياسها °35. مثّل الرميتين على حاسبةٍ للتمثيل البياني وفسّر النتائج.

2. **البيسبول** رمت نورا كرة بيسبول بسرعة 27 مترًا في الثانية وبزاوية قياسها °82. وبعد مرور ثانية واحدة، ضرب عمر كرةً بسرعة 45 مترًا في الثانية وبزاوية قياسها °20. فعلى فرض أن الكرتين لا تزالان متجاورتين وأن الارتفاع الابتدائي لضربة عمر أخفض بمترٍ واحد، مثّل الموقف على حاسبةٍ للتمثيل البياني وفسّر النتائج.

الدليل الدراسي والمراجعة

ملخص الوحدة

المفاهيم الأساسية

القطع المكافئ (الدرس 6-1)

البؤرة	الرأس	الاتجاه	المعادلات
$(h+p, k)$	(h, k)	أفقي	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$
$(h, k+p)$	(h, k)	رأسي	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

- p هي المسافة من الرأس إلى البؤرة.

القطع الناقص والدوائر (الدرس 6-2)

البؤرة	الرأس	المحور الأكبر	المعادلات
$(h \pm c, k)$	$(h \pm a, k)$	أفقي	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
$(h, k \pm c)$	$(h, k \pm a)$	رأسي	$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

- يعطى الاختلاف المركزي لقطع ناقص من خلال العلاقة $e = \frac{c}{a}$، وفيها $a^2 - b^2 = c^2$
- الصيغة القياسية لمعادلة دائرة نقطة مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

القطع الزائد (الدرس 6-3)

البؤرة	الرأس	المحور القاطع	المعادلات
$(h \pm c, k)$	$(h \pm a, k)$	أفقي	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
$(h, k \pm c)$	$(h, k \pm a)$	رأسي	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

- يعطى الاختلاف المركزي للقطع الزائد بالعلاقة $e = \frac{c}{a}$، حيث أن $a^2 + b^2 = c^2$

الدوران المحوري للقطوع المخروطية (الدرس 6-4)

- يمكن تحويل معادلة في المستوى xy إلى معادلة في المستوى $x'y'$ باستخدام العلاقة $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$ و $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$
- يمكن تحويل معادلة في المستوى $x'y'$ إلى معادلة في المستوى xy باستخدام العلاقتين $x' = x \cos \theta + y \sin \theta$ و $y' = y \cos \theta - x \sin \theta$

المعادلات الوسيطية (الدرس 6-5)

- تستخدم المعادلات الوسيطية لوصف المركبتين الأفقية والرأسية لمعادلة على نحو منفصل. وذلك بدلالة المتغير t بصورة عامة.
- بالنسبة لجسم قُذف بزاوية θ مع خط الأفق وبسرعة متجهة ابتدائية v_0، حيث أن g ثابت الجاذبية الأرضية و t الزمن و h_0 الارتفاع الابتدائي. فإن مسافته الرأسية تعطى بالعلاقة $x = tv_0 \cos \theta$. وتعطى مسافته الأفقية بالعلاقة $y = tv_0 \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$

المفاهيم الأساسية

محور التماثل	axis of symmetry	المحل الهندسي	locus
المركز	center	المحور الأكبر	major axis
القطع المخروطي	conic section	المحور الاصغر	minor axis
المحور المرافق	conjugate axis	اتجاه	orientation
الرأسان المرافقان	co-vertices	القطع المكافئ	parabola
المخروط المُنخل	degenerate conic	وسيط	parameter
الدليل	directrix	المنحنى الوسيطي	parametric curve
الاختلاف المركزي	eccentricity	المعادلة الوسيطية	parametric equation
القطع الناقص	ellipse	المحور القاطع	transverse axis
البؤرتان	foci	الرأس	vertex
البؤرة	focus	الرأسان	vertices
القطع الزائد	hyperbola		

مراجعة المفردات

اختر المصطلح الصحيح من بين القائمة الواردة أعلاه لإتمام كل من العبارات التالية.

1. ________ شكلٌ يتشكل عندما يقطع مستوى سطحًا مخروطيًا.
2. الدائرة هي ________ لنقاط توجد في مستوى واحدٍ وتبعد مسافةً واحدةً عن نقطةٍ محددة.
3. ________ القطع المكافئ يوازي محور تماثله.
4. يقع الرأسان المرافقان لـ ________ على محوره الاصغر، في حين تقع الرؤوس على محوره الأكبر.
5. مجموع المسافتين من أي نقطةٍ على القطع الناقص إلى ________ يبقى ثابتًا.
6. إن ________ للقطع الناقص هو النسبة التي تحدد مدى "تمدّد" القطع الناقص أو "دائريته". ويتم إيجادها بالعلاقة $\frac{c}{a}$.
7. ________ الدائرة هو نقطةٌ وحيدة، وجميع النقاط الواقعة على الدائرة متساوية البعد عن تلك النقطة.
8. على غرار القطع الناقص، يملك ________ القطع الزائد رأسين وبؤرتين. ولكن له أيضًا خطي تقارب وليس له تمثيلٌ بيانيٌ متّصل.
9. يمكن كتابة معادلة أي تمثيل بياني بواسطة المتغيرين x و y أو باستخدام المعادلات ________ مع استخدام الرمز t أو الزاوية θ.
10. التمثيل البياني للعلاقة $(\sin t, \cos t) = f(t)$ هو ________ على شكلِ دائرةٍ ترسم باتجاه عقارب الساعة.

مراجعة درس بدرس

6-1 القطع المكافئ

لكل معادلة من المعادلات التالية، حدّد الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل. ثم مثّل القطع المكافئ بيانيًا.

11. $(x+3)^2 = 12(y+2)$

12. $(y-2)^2 = 8(x-5)$

13. $(x-2)^2 = -4(y+1)$

14. $(x-5) = \frac{1}{12}(y-3)^2$

اكتب معادلة قطعٍ مكافئٍ بؤرته F و رأسه V ومثّله بيانيًا.

15. $F(1, 1), V(1, 5)$

16. $F(-3, 6), V(7, 6)$

17. $F(-2, -3), V(-2, 1)$

18. $F(3, -4), V(3, -2)$

اكتب معادلةً لكل قطعٍ مكافئٍ بؤرته F وخواصه معطاةٌ وفق ما يلي ومثّله بيانيًا.

19. $F(-4, -4)$؛ مفتوح إلى اليسار؛ يمر النقطة $(-7, 0)$

20. $F(-1, 4)$؛ مفتوح إلى الأسفل؛ يمر النقطة $(7, -2)$

21. $F(3, -6)$؛ مفتوح إلى الأعلى؛ يمر النقطة $(9, 2)$

المثال 1

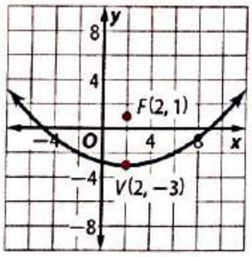
اكتب معادلة قطعٍ مكافئٍ بؤرته $(2, 1)$ ورأسه $(2, -3)$ ومثّله بيانيًا.

بما أن البؤرة والرأس لهما الإحداثي x نفسه. فالتمثيل يكون مفتوحًا رأسيًا. البؤرة هي $(h, k + p)$. وبالتالي فإن p تساوي $1 - (-3)$ أو 4. نظرًا إلى أن إشارة p موجبة. فإن التمثيل البياني يكون مفتوحًا إلى الأعلى.

اكتب معادلة قطع مكافئ بالصيغة القياسيّة باستخدام قيم h و p و k.

$$4p(y-k) = (x-h)^2$$
$$4(4)(y+3) = (x-2)^2$$
$$16(y+3) = (x-2)^2$$

الصيغة القياسيّة للمعادلة هي $(x-2)^2 = 16(y+3)$ مثّل الرأس والبؤرة بيانيًا. واستخدم جدولًا بالقيم لتمثيل المنحنى بيانيًا.



6-2 القطع الناقص والدوائر

مثّل القطع الناقص المعطى وفق كل معادلة مما يلي.

22. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

23. $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+6)^2}{25} = 1$

اكتب معادلةً تمثل القطع الناقص ضمن مجموعة الخواص المبينة أدناه.

24. رأساه $(7, -3)$، $(-3, -3)$؛ وبؤرتاه $(6, -3)$، $(4, -3)$

25. بؤرتاه $(2, 1)$، $(2, 9)$؛ وطول المحور الأصغر يساوي 6

26. محور هاالأكبر يمتدّ من النقطة $(-4, 4)$ إلى النقطة $(6, 4)$؛ ومحوره الاصغر يمتدّ من النقطة $(1, 1)$ إلى $(1, 7)$

اكتب المعادلة بالصيغة القياسيّة. وحدّد نوع القطع المخروطي لكل من:

27. $x^2 - 2x + y^2 - 4y - 25 = 0$

28. $4x^2 + 24x + 25y^2 - 300y + 836 = 0$

29. $x^2 - 4x + 4y + 24 = 0$

المثال 2

اكتب معادلة قطعٍ ناقصٍ يمتدّ محوره الأكبر من النقطة $(-9, 4)$ إلى النقطة $(11, 4)$ ويمتدّ محوره الاصغر من النقطة $(1, 12)$ إلى النقطة $(1, -4)$.

استخدم المحورين الأكبر والاصغر لتحديد a و b.

$$a = \frac{11-(-9)}{2} \text{ أو } 10 \qquad b = \frac{12-(-4)}{2} \text{ أو } 8$$

نقطة مركز القطع الناقص هي نقطة منتصف المحور الأكبر.

$$(h, k) = \left(\frac{11+(-9)}{2}, \frac{4+4}{2}\right)$$
$$= (1, 4)$$

الإحداثيان الرأسيان y متماثلان لكلتا النقطتين الطرفيتين للمحور الأكبر. وبالتالي فإن هذا المحور أفقي وتتبع قيمة a للحد x^2 . ولهذا تأخذ معادلة القطع الناقص الصيغة $\frac{(x-1)^2}{100} + \frac{(y-4)^2}{64} = 1$

6-3 القطع الزائد

مثّل القطع الزائد الذي معادلته:

30. $\frac{(y+3)^2}{30}-\frac{(x-6)^2}{8}=1$

31. $\frac{(x+7)^2}{18}-\frac{(y-6)^2}{36}=1$

32. $\frac{(y-1)^2}{4}-(x+1)^2=1$

33. $x^2-y^2-2x+4y-7=0$

اكتب معادلةً تمثل القطع الزائد ضمن الخواص التالية:

34. الرأسان $(0, 7)$، $(0, -7)$؛ طول المحور المرافق 8

35. البؤرتان $(0, 5)$، $(0, -5)$؛ الرأسان $(0, 3)$، $(0, -3)$

36. البؤرتان $(1, 15)$، $(1, -5)$؛ طول المحور القاطع 16

37. الرأسان $(2, 0)$، $(-2, 0)$؛ الخطان المتقاربان $y=\pm\frac{3}{2}x$

استخدم المميز لتحديد نوع كل قطع مخروطي فيما يلي:

38. $x^2-4y^2-6x-16y-11=0$

39. $4y^2-x-40y+107=0$

40. $9x^2+4y^2+162x+8y+732=0$

المثال 3

مثّل بيانيًا $\frac{(y+3)^2}{16}-\frac{(x+1)^2}{4}=1$

في هذه المعادلة: $h=-1$، $k=-3$، $a=\sqrt{16}$ أو 4، $b=\sqrt{4}$ أو 2، و $c=\sqrt{16+4}$ أو $2\sqrt{5}$

حدّد خواص القطع المكافئ:

الاتجاه: رأسي

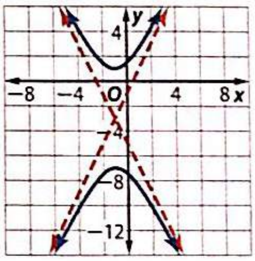
المركز: $(-1, -3)$

الرأسان: $(-1, 1)$، $(-1, -7)$

البؤرتان: $(-1, -3+2\sqrt{5})$
$(-1, -3-2\sqrt{5})$

خطا التقارب: $y+3=2(x+1)$
$y+3=-2(x+1)$

x	y
−6	7.77, −13.77
−2	1.47, −7.47
2	4.21, −10.21
6	11.56, −17.56



6-4 الدوران المحوري للقطوع المخروطية

استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل القطع المخروطي المعطى من خلال كل معادلة مما يلي بيانيًا.

41. $x^2-4xy+y^2-2y-2x=0$

42. $x^2-3xy+y^2-3y-6x+5=0$

43. $2x^2+2y^2-8xy+4=0$

44. $3x^2+9xy+y^2=0$

45. $4x^2-2xy+8y^2-7=0$

اكتب كل معادلة مما يلي في المستوى $x'y'$ لكل قيمة معطاة لـ θ. ثم حدّد القطع المخروطي.

46. $x^2+y^2=4;\ \theta=\frac{\pi}{4}$

47. $x^2-2x+y=5;\ \theta=\frac{\pi}{3}$

48. $x^2-4y^2=4;\ \theta=\frac{\pi}{2}$

49. $9x^2+4y^2=36;\ \theta=90°$

المثال 3

استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل المعادلة التالية بيانيًا $x^2+2xy+y^2+4x-2y=0$

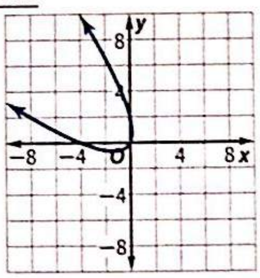
$$x^2+2xy+y^2+4x-2y=0$$
$$1y^2+(2x-2)y+(x^2+4x)=0$$

استخدم الصيغة التربيعية.

$$y=\frac{-(2x-2)\pm\sqrt{(2x-2)^2-4(1)(x^2+4x)}}{2(1)}$$
$$=\frac{-2x+2\pm\sqrt{4x^2-8x+4-4x^2-16x}}{2}$$
$$=\frac{-2x+2\pm2\sqrt{1-6x}}{2}$$
$$=-x+1\pm\sqrt{1-6x}$$

مثّل بيانيًا العلاقتين

$y_1=-x+1+\sqrt{1-6x}$ و
$y_2=-x+1-\sqrt{1-6x}$.



5-6 المعادلات الوسيطية

مثّل المنحنى المعطى بدلالة كل زوجٍ مما يلي من المعادلات الوسيطية في الفترة المعطاة.

50. $x = \sqrt{t}, y = 1 - t; 0 \le t \le 9$

51. $x = t + 2, y = t^2 - 4; -4 \le t \le 4$

اكتب كل زوج من المعادلات الوسيطية بالصورة الديكارتية في مستوى إحداثي متعامد. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

52. $x = t + 5$ و $y = 2t - 6$

53. $x = 2t$ و $y = t^2 - 2$

54. $x = t^2 + 3$ و $y = t^2 - 4$

55. $x = t^2 - 1$ و $y = 2t + 1$

المثال 3

اكتب $x = 5 \cos t$ و $y = 9 \sin t$ بالصيغة الديكارتية في مستوى إحداثي متعامد. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

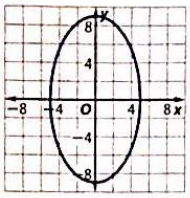
$$x = 5 \cos t \qquad y = 9 \sin t$$

$$\sin t = \frac{y}{9} \qquad \cos t = \frac{x}{5}$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{9}\right)^2 = 1$$

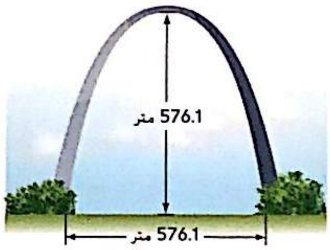
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{81} = 1$$



تمثل المعادلتان الوسيطيتان التمثيل البياني لقطعٍ ناقص.

التطبيقات وحل المسائل

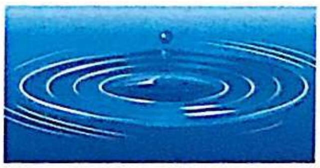
56. **الآثار** تأخذ بوابة القوس شكل منحنًى سلسلي يشبه القطع المكافئ. (الدرس 1-6)



a. اكتب معادلة قطعٍ مكافئ تمثّل على وجه التقريب شكل القوس.

b. أوجد موقع بؤرة هذا القطع المكافئ.

57. **الديناميكا المائية** ينتج عن سقوط حجرٍ في بركة تموجات مكوّنة من دوائر متّحدة المركز تأخذ بالتوسّع تدريجيًا. افترض أن أنصاف أقطار تلك الدوائر تتوسّع بمعدّل 3 سنتيمترات في الثانية. (الدرس 2-6)



a. اكتب معادلة الدائرة بعد 10 ثوانٍ من سقوط الحجر في البركة. افترض أن نقطة سقوط الحجر في الماء تمثل نقطة الأصل.

b. لإحدى الدوائر متحدة المركز المعادلة التالية: $x^2 + y^2 = 225$ كم ثانيةً ستستغرق الدائرة المتوسّعة بعد سقوط الحجر حتى تصبح لها هذه المعادلة؟

58. **الطاقة** تأخذ أبراج التبريد في إحدى محطات القدرة شكل قطعٍ زائد. شكل المقطع العرضي للسطح الزائد قطعٌ زائد. (الدرس 3-6)

a. اكتب معادلة المقطع العرضي لبرجٍ ارتفاعه 50 مترًا وعرضه 30 مترًا.

b. إذا ازدادت نسبة ارتفاع البرج إلى عرضه، فكيف تتأثر المعادلة بذلك؟

59. **طبق تجميع الطاقة الشمسية** خلال بناء الطلاب لجهاز قطعي مكافئ لالتقاط الطاقة الشمسية من أجل طهو أوراق الخبّيزة الموضوعة في بؤرة القطع. كان عليهم تصميم الجهاز بحيث يمكن توجيهه بسهولة. يرفع تدوير الجهاز باتجاه إشعاعات الشمس مباشرةً قدرة التسخين إلى الحدّ الأقصى. (الدرس 4-6)

a. بعد تدوير القطع المكافئ بزاويةٍ قياسها °30 باتجاه الشمس، تأخذ المعادلة المستخدمة لصنع الجهاز في المستوى $x'y'$ الصيغة $y' = 0.25(x')^2$ أوجد معادلة القطع المكافئ في المستوى xy.

b. مثّل القطع المكافئ الذي تم تدويره.

60. **سؤال هندسي** لتأخذ العلاقتان $x_1(t) = 4 \cos t$, $y_1(t) = 4 \sin t$ و $x_2(t) = 4 \cos 2t$ و $y_2(t) = 4 \sin 2t$ (الدرس 5-6)

a. قارن بين التمثيلين البيانيين لمجموعتي المعادلات: x_1 و y_1 و x_2 و y_2

b. اكتب المعادلتين الوسيطيتين لدائرةٍ نصف قطرها 6 يمكن إتمام رسمها خلال نصف زمن رسم الدائرة الخاصة بـ $x_1(t)$ و $y_1(t)$

c. اكتب المعادلتين الناتجتين في القسم b بالصيغة الديكارتية في مستوى إحداثي متعامد.

6 تدريب على الاختبار المعياري

اكتب معادلةً تمثل القطع الناقص ضمن مجموعة من الخواص المبينة أدناه.

1. رأساه $(-4, 7)$، $(-4, -3)$؛ وبؤرتاه $(-4, 6)$، $(-4, -2)$

2. بؤرتاه $(-2, -9)$، $(-2, 1)$؛ وطول محوره الأكبر يساوي 12

3. الاختيار من متعدد ما القيمة التي يجب أن تأخذها c بحيث يكون التمثيل البياني الخاص بـ $4x^2 + cy^2 + 2x - 2y - 18 = 0$ عبارة عن دائرة؟

A -8

B -4

C 4

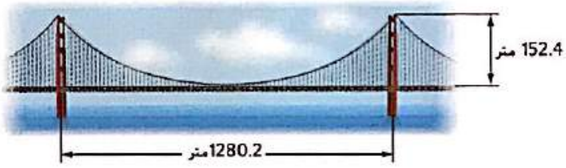
D 8

اكتب كل زوجٍ من المعادلات الوسيطية بالصورة الديكارتية في مستوى إحداثي متعامد. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

4. $x = t - 5$ و $y = 3t - 4$

5. $x = t^2 - 1$ و $y = 2t + 1$

6. الجسور كان جسر البوابة الذهبية بسان فرانسيسكو، والبالغ طوله 2.7 كيلومتر، أطول جسرٍ معلقٍ في العالم حين إنشائه.



a. افترض أنه يمكن تمثيل تصميم الجسر على أنه قطع مكافئ، وأن أدنى نقطةٍ في كابل التعليق ترتفع عن الطريق بمسافة 4.6 مترًا. اكتب معادلةً تمثّل تصميم الجسر.

b. أين تقع البؤرة بالنسبة إلى الرأس؟

اكتب معادلةً تمثل القطع الزائد ضمن الخواص التالية.

7. الرأسان $(0, 3)$، $(0, -3)$؛ الخطان المتقاربان $y = \pm\frac{2}{3}x$

8. البؤرتان $(8, 0)$، $(8, 8)$؛ الرأسان $(8, 2)$، $(8, 6)$

اكتب معادلةً لكل قطعٍ مخروطي في المستوى xy تقابل المعادلة المعطاة وفق الصيغة $x'y'$ وعندَ القيمة المبيّنة لــ θ.

9. $7(x' - 3) = (y')^2, \theta = 60°$

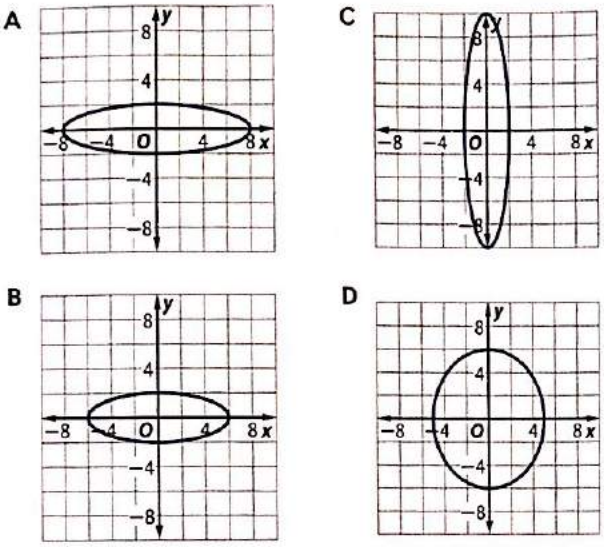
10. $\frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{10} = 1, \theta = \frac{\pi}{6}$

مـثّـل القطع الزائد الذي معادلته:

11. $\frac{x^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{25} = 1$

12. $\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x+6)^2}{36} = 1$

13. الاختيار من متعدد أيّ القطوع الناقصة التالية له الاختلاف المركزي الأكبر؟



اكتب معادلة القطع المكافئ الذي له البؤرة F والرأس V ومثّله بيانيًا.

14. $F(2, 8)$, $V(2, 10)$

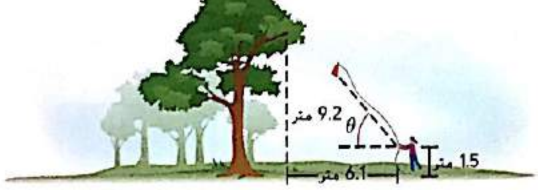
15. $F(2, 5)$, $V(-1, 5)$

مـثّـل بيانيًا القطع الناقص الذي معادلته:

16. $\frac{(x-5)^2}{49} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

17. $(x+3)^2 + \frac{(y+6)^2}{81} = 1$

18. التخييم يجب على المخيّمين في المنتزهات الأمريكية حماية أطعمتهم ومؤنهم من الدّببة والحيوانات الأخرى. وتعتمد إحدى طرق حماية الطعام على استخدام ما يسمّى "كيس الدب"، حيث يرمى كيس مربوط إلى حبل فوق غصن شجرةٍ مرتفعةٍ وبربط الحبل إلى الشجرة. افترض أن ارتفاع الغصن 9.2 متراً فوق سطح الأرض، وأن شخصًا يبعد عن الغصن مسافة 6.1 متراً يرمي الكيس من ارتفاع 1.5 متراً فوق الأرض.



a. إذا رُمِيَ الكيس بسرعة 12.2 متراً في الثانية وبزاويةٍ قياسها 60°، فهل سيرتفع فوق الغصن؟

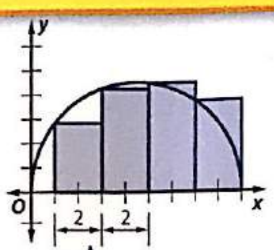
b. إذا رُمِيَ الكيس بسرعة 13.7 متراً في الثانية وبزاويةٍ قياسها 75°، فهل سيرتفع فوق الغصن؟

استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل القطع المخروطي المعطى لكل معادلةٍ مما يلي.

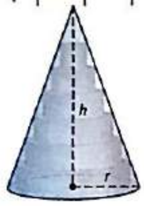
19. $x^2 - 6xy + y^2 - 4y - 8x = 0$

20. $x^2 + 4y^2 - 2xy + 3y - 6x + 5 = 0$

الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: مجسم دوراني



تعلمت أن حساب التفاضل والتكامل هو أحد فروع الرياضيات التي تركز على عمليات إيجاد الأطوال والمساحات والأحجام. واستخدمت المستطيلات لتقريب مساحات الأشكال غير المنتظمة، كالتي تنشأ بمنحنى والمحور x. يمكن استخدام تقنية مشابهة لتقريب أحجام الأشكال غير المنتظمة.



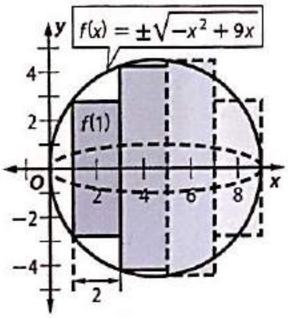
اعتبر أن هناك مخروطًا بارتفاع h وقاعدة نصف قطرها r. إذا لم نكن بالفعل على علم بصيغة حجم المخروط، فيمكننا تقريب الحجم عن طريق رسم عدة أسطوانات بارتفاع مماثل داخل المخروط، ثم يمكننا حساب حجم كل أسطوانة، وإيجاد المجموع.

النشاط 1 جسم كروي

قم بتقريب حجم جسم كروي نصف قطره 4.5 وحدات ودائرة كبيرة محددة $f(x) = \pm\sqrt{-x^2 + 9x}$

الخطوة 1 ارسم مخطط الجسم الكروي.

الخطوة 2 ارسم أسطوانة داخل الجسم الكروي بقاعدة عمودية على المحور x وارتفاع قدره وحدتين. اجعل الحافة اليسرى للأسطوانة تبدأ عند $x = 1$ وتمتد إلى الدائرة الكبيرة. نصف قطر الأسطوانة هو $f(1)$.



الخطوة 3 ارسم 3 أسطوانات أخرى كلها بارتفاع وحدتين. اجعل الحافة اليسرى لكل أسطوانة تمتد إلى الدائرة الكبيرة.

الخطوة 4 احسب حجم كل أسطوانة.

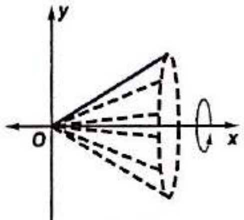
تحليل النتائج

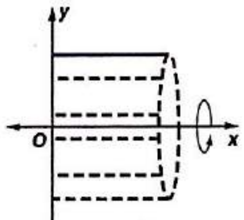
1. ما هو تقريب حجم الجسم الكروي؟
2. احسب الحجم الفعلي للجسم الكروي باستخدام نصف القطر. كيف تقارن التقريب بالحجم الفعلي؟ ما الذي يمكن القيام به لتحسين دقة التقريب؟

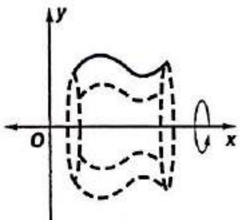
نصيحة دراسية

الحجم صيغة حجم الجسم الكروي هي $V = \pi r^2 h$

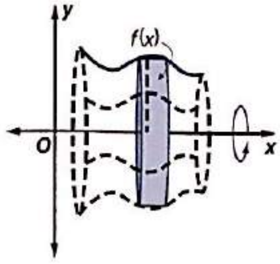
عندما تكون المنطقة بين الرسم البياني والمحور x مستديرة حول المحور x، يتشكل مجسم دوراني. شكل التمثيل البياني يفرض شكل الصورة ثلاثية الأبعاد المتكونة.


المخروط

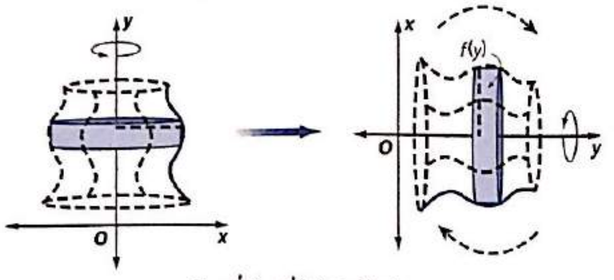

الأسطوانة


مجسّم

قد يتشكل مجسم الدوران بدوران منطقة في المستوى حول أي خط ثابت. يُسمى **محور الدوران**. محور الدوران يفرض اتجاه ونصف قطر الأسطوانات المستخدمة لتقريب المساحة. إذا كان الدوران حول المحور x، ستكون الأسطوانات موازية للمحور y ويُعطى نصف القطر بواسطة $f(x)$. إذا كان الدوران حول المحور y، ستكون الأسطوانات موازية للمحور x ويُعطى نصف القطر بواسطة $f(y)$.



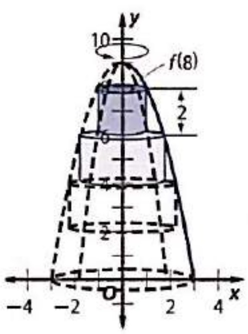
التدوير حول المحور الأفقي x



دوران حول المحور الرأسي y

النشاط 2 القطع المكافئ

قم بتقريب حجم القطع المكافئ الناتج عن دوران المنطقة بين $f(x) = -x^2 + 9$ والمحور x والمحور y حول المحور y.



الخطوة 1 ارسم مخطط القطع المكافئ.

الخطوة 2 ارسم أسطوانة داخل القطع المكافئ بقاعدة موازية للمحور x وارتفاع قدره وحدتين. اجعل الحافة العلوية للأسطوانة تبدأ عند $y = 8$ وتمتد إلى حافة القطع المكافئ.

الخطوة 3 عند الدوران حول المحور y، يُعطى نصف القطر على النحو $f(y)$. لإيجاد $f(y)$، اكتب $f(x)$ على النحو $y = -x^2 + 9$ وقم بالحل للحصول على y.

الخطوة 4 ارسم 3 أسطوانات أخرى كلها بارتفاع وحدتين. اجعل الحافة العلوية لكل أسطوانة تمتد إلى حافة القطع المكافئ.

الخطوة 5 احسب حجم كل أسطوانة.

تحليل النتائج

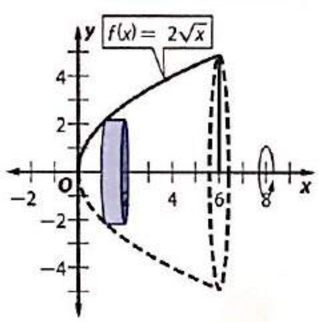
3. ما هو تقريب حجم القطع المكافئ؟

4. أوجد تقريبات حجم القطع المكافئ باستخدام 8 أسطوانات بارتفاعات وحدة واحدة ثم باستخدام 17 أسطوانة بارتفاعات 0.5 وحدة.

5. بما أن ارتفاعات الأسطوانات تقل وتقترب من 0. فما الذي يحدث للتقريبات؟ وضح تبريرك المنطقي.

6. ما الشكل الذي تبدأ الأسطوانة في تمثيله باقتراب h من 0؟ وضح تبريرك المنطقي.

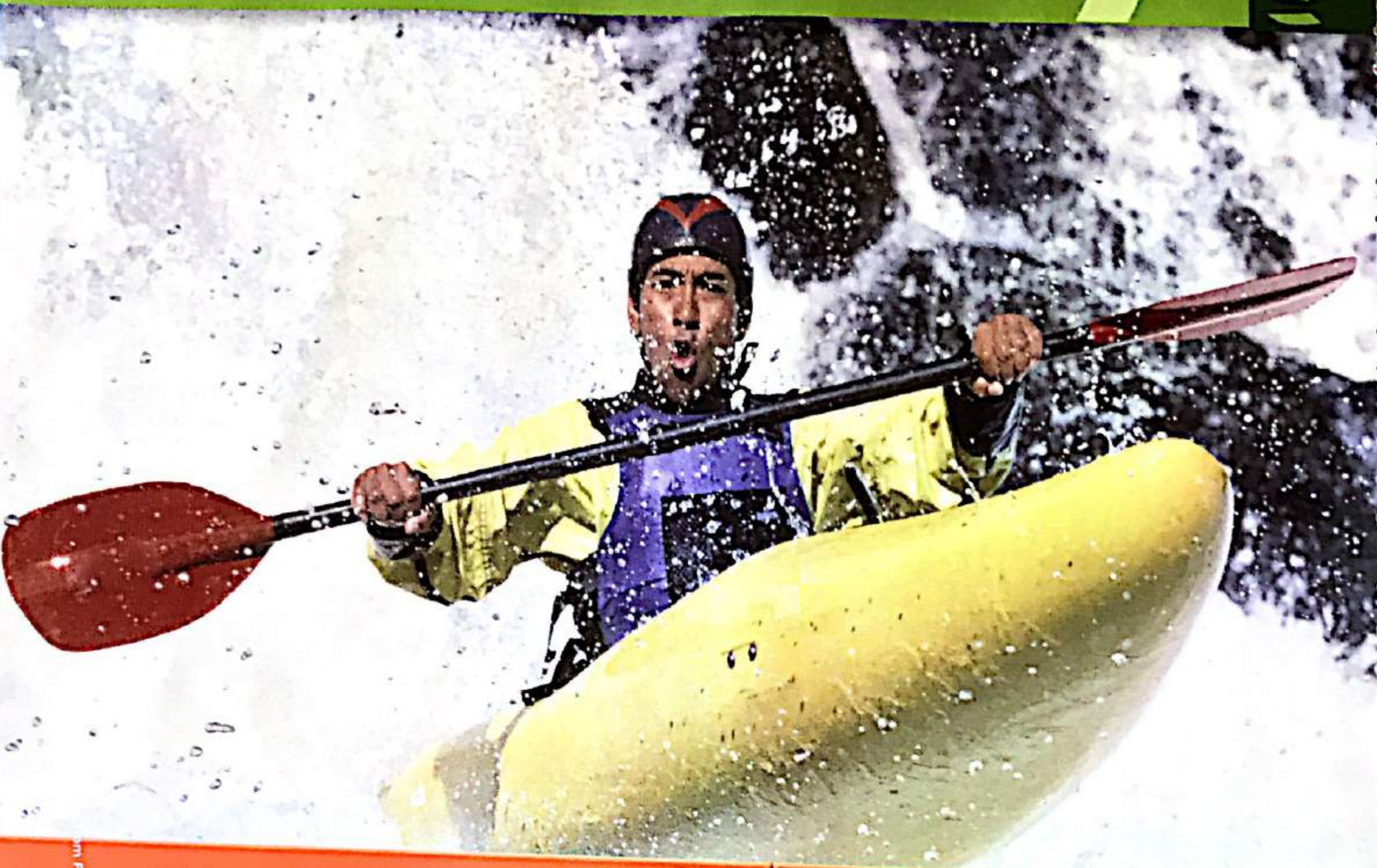
النمذجة والتطبيق



7. قم بتقريب حجم القطع المكافئ الناتج عن دوران المنطقة بين $f(x) = 2\sqrt{x}$، المحور x، والخط $x = 6$ حول المحور x. استخدم 5 أسطوانات بارتفاعات تبلغ وحدة واحدة. افترض أن الأسطوانة الأولى تبدأ عند $x = 1$ والحافة اليسرى لكل أسطوانة تمتد إلى حافة القطع المكافئ.

الوحدة 7

المتجهات



:: السابق

- في **الوحدات السابقة،** استخدمت حساب المثلثات لحل المثلثات.

:: الحالي

بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:

- تمثيل المتجهات واستخدامها جبريًا في الأنظمة الإحداثية ثنائية وثلاثية الأبعاد.
- إيجاد مسقط متجه على آخر.
- إيجاد نواتج الضرب المتجهي للمتجهات في الفراغ وإيجاد أحجام متوازيات السطوح.
- إيجاد نواتج الضرب النقطي للمتجهات والزوايا بينها.

:: لماذا؟ ▲

التجديف كثيرًا ما يتم استخدام المتجهات لتمثيل التغيرات في الاتجاه بفعل التيارات المائية والهوائية. على سبيل المثال، يمكن استخدام متجه لتحديد السرعة والاتجاه الناتجين لزورق يتحرك بسرعة 12.9 كيلو متر في الساعة في عكس اتجاه تيار النهر الذي تبلغ سرعته 4.8 أميال في الساعة.

القراءة المسبقة اقرأ سريعًا عناوين الدروس ومربعات المفاهيم الأساسية في الوحدة 7. واستخدم هذه المعلومات لتوقع ما ستتعلمه في هذه الوحدة.

الاستعداد للوحدة

أجب عن أسئلة التدريب السريع أدناه.

تدريب سريع

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط ونقطة منتصف القطعة المستقيمة التي تربط النقطتين المذكورتين. (المهارات المطلوبة)

1. $(1, 4), (-2, 4)$

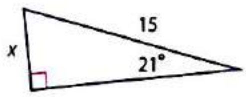
2. $(-5, 3), (-5, 8)$

3. $(2, -9), (-3, -7)$

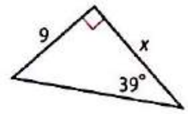
4. $(-4, -1), (-6, -8)$

أوجد قيمة x. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر. (الدرس 4-1)

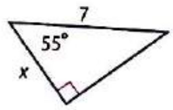
5.



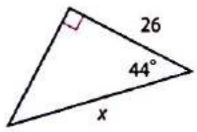
6.



7.



8.



9. المنطاد يتم تثبيت منطاد يعمل بالهواء الساخن في مكانه بواسطة شخصين يمسكان بحبلين ويقفان على مسافة 35 متر من بعضهما. تبلغ الزاوية بين الأرض والحبل الذي يمسكه كل شخص 40°. حدد طول كل حبل بالمتر مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

أوجد جميع الحلول للمثلث المعطى إن أمكن. إن لم يكن له حل، فاكتب لا يوجد حل. حوّل طول الضلع لأقرب جزء من عشرة. وحوّل قياس الزاوية إلى أقرب درجة.

10. $a = 10, b = 7, A = 128°$

11. $a = 15, b = 16, A = 127°$

12. $a = 15, b = 18, A = 52°$

13. $a = 30, b = 19, A = 91°$

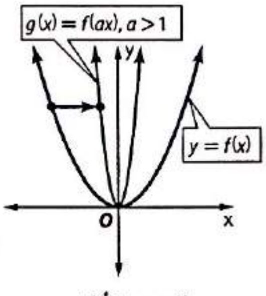
المفردات الجديدة

متجه	vector
نقطة البداية	initial point
نقطة النهاية	terminal point
الوضع القياسي	standard position
اتجاه	direction
مقدار	magnitude
اتجاه ربعي	quadrant bearing
اتجاه حقيقي	true bearing
متجهات موازية	parallel vectors
متجهات متكافئة	equivalent vectors
متجهات متعاكسة	opposite vectors
ناتج	resultant
متجه صفري	zero vector
صيغة مركبة	component form
متجه وحدة	unit vector
ناتج الضرب النقطي	dot product
متعامد	orthogonal
محور z	z-axis
أثمان	octants
ثلاثي مُرتب	ordered triple
الضرب المتجهي	cross product
ناتج ضرب قياسي لثلاثة متجهات	triple scalar product

مراجعة المفردات

كمية عددية صفحة P25 كمية ذات مقدار فقط

التمدد صفحة 49 تحول يتم فيه انضغاط أو توسع التمثيل البياني للدالة رأسيًا أو أفقيًا.



التمدد الأفقي

7-1 مقدمة عن المتجهات

::السابق	::الحالي	::لماذا؟
• استخدام حساب المثلثات لحل المثلثات.	1 • تمثيل المتجهات واستخدامها هندسيًا. 2 حل مسائل المتجهات، وتحليل المتجهات إلى مركباتها المتعامدة.	• يعتمد إحراز هدف في كرة القدم على عدة عوامل. بينما سرعة الكرة بعد ركلها هامة بالتأكيد، لكن اتجاه الكرة هام كذلك. يمكننا وصف هذين العاملين باستخدام كمية واحدة تُسمى *المتجه*.

المفردات الجديدة
متجه vector
نقطة البداية nitial point
نقطة النهاية terminal point
الوضع القياسي standard position
اتجاه direction
مقدار magnitude
اتجاه ربعي quadrant bearing
اتجاه حقيقي true bearing
متجهات موازية parallel vectors
متجهات متكافئة equivalent vectors
متجهات متعاكسة opposite vectors
ناتج resultant
طريقة المثلث triangle method
طريقة متوازي الأضلاع parallelogram method
متجه صفري zero vector
مركبات components
مركبات متعامدة rectangular components

1 المتجهات
يمكن وصف العديد من الكميات الفيزيائية، مثل السرعة، بشكل كامل بواسطة عدد حقيقي واحد يُسمى كمية عددية. ويشير هذا العدد إلى مقدار أو حجم الكمية. **المتجهات** هي كمية لها مقدار واتجاه. سرعة الكرة متجه يصف سرعة الكرة واتجاهها.

مثال 1 تحديد كميات المتجهات

اذكر ما إذا كانت كل كمية موصوفة هي متجه أو كمية عددية.

a. يسير قارب بسرعة 15 كيلومتر في الساعة.

لهذه الكمية مقدار، ولكن لم يتم ذكر الاتجاه. السرعة كمية عددية.

b. متجول يسير 25 خطوة باتجاه الغرب

لهذه الكمية مقدار هو 25 خطوة، واتجاهها نحو الغرب. هذه المسافة الموجهة هي متجه.

c. وزن شخص على ميزان الحمّام

الوزن متجه يتم حسابه باستخدام كتلة الشخص والسحب لأسفل بفعل الجاذبية. (التسارع بفعل الجاذبية متجه.)

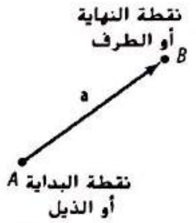
تمرين موجّه

1A. تسير سيارة بسرعة 60 كيلومتر في الساعة بزاوية °15 جنوب شرق

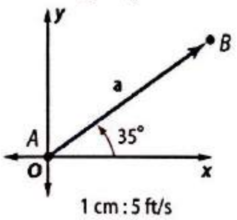
1B. يهبط قافز بالمظلات لأسفل مباشرة بسرعة 20.2 كيلومتر في الساعة

1C. يسحب طفل زلّاجة بقوة تبلغ 40 نيوتن

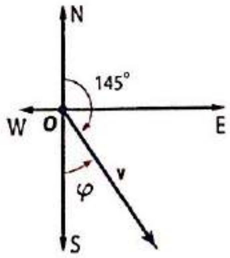
يمكن تمثيل متجه هندسيًا بواسطة قطعة مستقيمة موجهة أو رسم تخطيطي سهمي، يوضح المقدار والاتجاه. فكر في القطعة المستقيمة الموجهة الموضحة حيث **نقطة البداية** A (تُسمى أيضًا الذيل) و**نقطة النهاية** B (تُسمى أيضًا الرأس أو الطرف). يتم التعبير عن المتجه بواسطة $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{a}$، أو **a**.



إذا كانت نقطة بداية المتجه عند نقطة الأصل، فالمتجه في **الوضع القياسي**. **اتجاه** المتجه هو الزاوية الموجهة بين المتجه والمستقيم الأفقي الذي يمكن استخدامه لتمثيل محور x الموجب. اتجاه **a** هو °35.



طول القطعة المستقيمة يمثل ويتناسب مع **مقدار** المتجه. إذا كان مقياس الرسم التخطيطي السهمي لـ **a** هو 1 cm = 5 ft/s، إذا مقدار **a**، المُعبر عنه بواسطة |a|، هو 5 × 2.6 أو 13 قدمًا في الثانية.



يمكن كذلك ذكر اتجاه المتجه في صورة اتجاه.
الاتجاه الربعي φ، أو phi، هو قياس اتجاه بين الزاويتين 0° و 90° شرق أو غرب المستقيم شمال-جنوب. الاتجاه الربعي للمتجه v الموضح هو 35° شرق اتجاه الجنوب أو جنوب شرق، ويُكتب بالصورة S35°E.

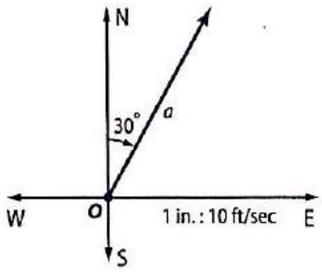
الاتجاه الحقيقي هو قياس اتجاه يتم فيه قياس الزاوية حسب اتجاه عقارب الساعة من الشمال. ويتم ذكر الاتجاهات الحقيقية دائمًا في صورة ثلاثة أرقام. إذًا، اتجاه قياسه 25° باتجاه عقارب الساعة من الشمال تتم كتابته كاتجاه حقيقي بالصورة 025°.

نصيحة دراسية

الاتجاه الحقيقي عند ذكر قياس درجة بدون أي مركبات اتجاه، يُفترض أنه اتجاه حقيقي. اتجاه v الحقيقي هو 145°.

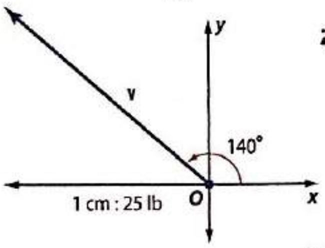
مثال 2 تمثيل المتجهات هندسيًا

استخدم مسطرة ومنقلة لعمل رسم تخطيطي سهمي لكل كمية موصوفة. أرفق مقياسًا مع كل رسم تخطيطي.



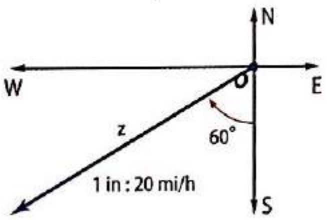
a. a = 20 متر في الثانية باتجاه 030°

باستخدام مقياس 1 cm: 10 m/sec.
ارسم وميّز سهمًا بطول 10 ÷ 20 أو 2 سنتيمتر بزاوية 30° في اتجاه عقارب الساعة من الشمال.



b. v = 75 كيلو جرام من القوة بزاوية 140° مع المركّبة الأفقية

باستخدام مقياس 1 cm: 25 kg. ارسم وميّز سهمًا بطول 25 ÷ 75 أو 3 سنتيمترات في الوضع القياسي بزاوية 140° مع المحور x.



c. z = 30 كيلو متر في الساعة باتجاه S60°W

باستخدام مقياس 1 cm: 20 mi/h. ارسم وميّز سهمًا بطول 20 ÷ 30 أو 1.5 سنتيمتر بزاوية 60° جنوب غرب.

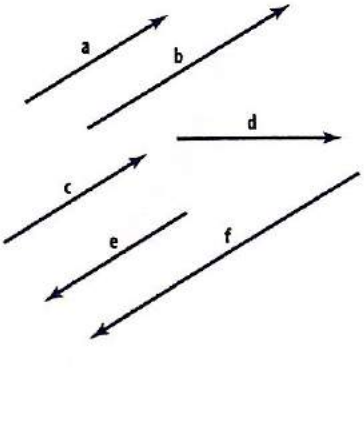
تمرين موجّه

2A. t = 20 مترًا في الثانية باتجاه 065°

2B. u = 15 كيلومتر في الساعة باتجاه S25°E

2C. m = 60 كيلوجرام من القوة بزاوية 80° مع المركّبة الأفقية

في العمليات باستخدام المتجهات، يجب أن تكون على دراية بأنواع المتجهات التالية.



- **المتجهات الموازية** يكون لها الاتجاه ذاته أو اتجاه معاكس، ولكن ليس بالضرورة المقدار ذاته. في الشكل، a || b || c || e || f.
- **المتجهات المتكافئة** لها نفس المقدار والاتجاه. في الشكل، a = c لأن لهما نفس المقدار والاتجاه. لاحظ أن a ≠ b، حيث |a| ≠ |b|، و a ≠ d، حيث a و d ليس لهما الاتجاه ذاته.
- **المتجهات المتعاكسة** لها المقدار ذاته ولكن في اتجاهين متعاكسين. المتجه المقابل للمتجه a يُكتب بالصورة −a. في الشكل، e = −a.

انتبه!

المقدار مقدار المتجه يمكن أن يمثل المسافة أو السرعة أو القوة. عندما يمثل متجه السرعة، لا يشير طول المتجه إلى المسافة المقطوعة.

عند إضافة متجهين أو أكثر، يكون مجموعها متجهًا واحدًا يُسمى **الناتج**.
المتجه الناتج له تأثير يماثل تطبيق كل متجه على حدة. هندسيًا، يمكن إيجاد الناتج باستخدام إما **طريقة المثلث** أو **طريقة متوازي الأضلاع**.

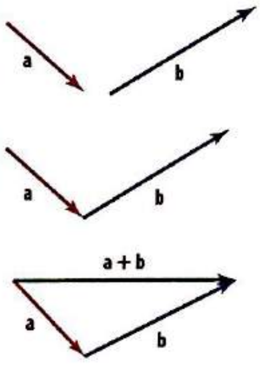
المفهوم الأساسي إيجاد النواتج

طريقة المثلث (الطرف إلى الذيل)

لإيجاد ناتج a و b، اتبع هذه الخطوات.

الخطوة 1 قم بإزاحة b بحيث يلامس ذيل b طرف a.

الخطوة 2 الناتج هو المتجه من ذيل a إلى طرف b.



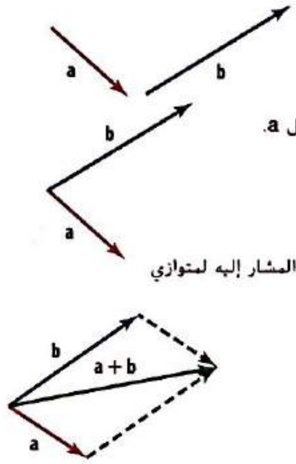
طريقة متوازي الأضلاع (الذيل إلى الذيل)

لإيجاد ناتج a و b، اتبع هذه الخطوات.

الخطوة 1 قم بإزاحة b بحيث يلامس ذيل b ذيل a.

الخطوة 2 أكمل متوازي الأضلاع الذي يحتوي على a و b كضلعين من أضلاعه.

الخطوة 3 الناتج هو المتجه الذي يشكل القطر المشار إليه لمتوازي الأضلاع.

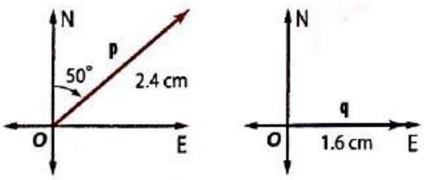


مثال 3 من الحياة اليومية إيجاد ناتج متجهين

تحديد الاتجاه في إحدى منافسات تحديد الاتجاه، سارت أماني باتجاه N50°E لمسافة 120 متراً ثم سارت لمسافة 80 متراً باتجاه الشرق. كم تبعد أماني عن وضع البدء وفي أي اتجاه ربعي هي؟

افترض أن p = السير لمسافة 120 قدمًا باتجاه N50°E و q = السير لمسافة 80 قدمًا باتجاه الشرق.
قم بعمل رسم تخطيطي لتمثيل p و q باستخدام مقياس 1cm: 50 ft.

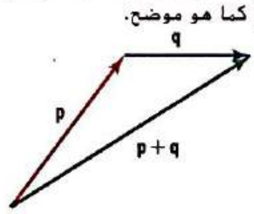
استخدم مسطرة لرسم سهم بطول 50 ÷ 120 أو 2.4 سنتيمترات باتجاه 50° شمال شرق لتمثيل p وسهم بطول 50 ÷ 80 أو 1.6 سنتيمترات باتجاه الشرق لتمثيل q.



1 cm : 50 ft

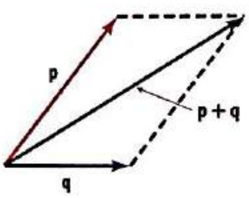
الطريقة 1 طريقة المثلث

قم بإزاحة q بحيث يلمس ذيله طرف p. ثم ارسم المتجه الناتج p + q كما هو موضح.

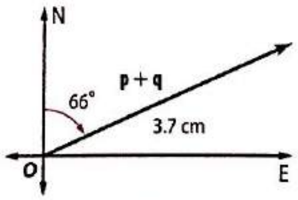


الطريقة 2 طريقة متوازي الأضلاع

قم بإزاحة q بحيث يلمس ذيله ذيل p. ثم أكمل متوازي الأضلاع وارسم القطر، الناتج p + q، كما هو موضح.



نحصل من الطريقتين على المتجه الناتج ذاته p + q. قم بقياس طول p + q ثم قياس زاوية هذا المتجه مع مستقيم شمال-جنوب كما هو موضح. طول المتجه 3.7 سنتيمترات تقريبًا يمثل 50 × 3.7 أو 185 قدمًا. إذًا، تبعد عائشة 185 مترأ تقريبًا باتجاه 66° شمال شرق أو N66°E عن موضع البدء.



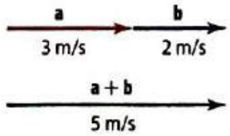
1 cm : 50m

نصيحة دراسية

النواتج يجب تكرار طريقة متوازي الأضلاع لإيجاد ناتج أكثر من متجهين. لكن طريقة المثلث أسهل استخدامًا عند إيجاد ناتج ثلاثة متجهات أو أكثر. واصل وضع نقطة بداية المتجه التالي عند نقطة نهاية المتجه السابق.

نصيحة دراسية

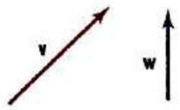
المتجهات الموازية في الاتجاه ذاته لجمع متجهين موازيين في *الاتجاه ذاته*، اجمع مقداريهما. يكون للناتج نفس اتجاه المتجهات الأصلية.



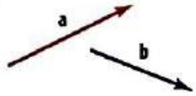
تمرين موجّه

أوجد ناتج كل زوج من المتّجهات باستخدام إما طريقة المثلّث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج مع التقريب لأقرب سنتيمتر واتجاهه بالنسبة إلى المركّبة الأفقية.

3A.

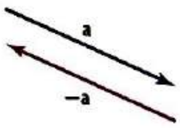


3B.



3C. لعبة الكرة والدبابيس تم دفع الكرة بواسطة النافر بزاوية 310° وسرعة 7 سنتيمتر في الثانية. ثم ارتدت الكرة عن المصدّ وانطلقت بزاوية 055° وسرعة 4 سنتيمتر في الثانية. أوجد الاتجاه الناتج للكرة وسرعتها.

عند إضافة متجهين متقابلين، يكون الناتج هو **متجه صفري** أو متجه صفر، ويُعبر عنه بواسطة $\vec{0}$ أو **0**. ويكون مقداره 0 وبدون اتجاه محدد. طرح المتجهات مشابه لطرح الأعداد الصحيحة. لإيجاد $\mathbf{p} - \mathbf{q}$، اجمع مقابل **q** مع **p**. بمعنى، $\mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{p} + (-\mathbf{q})$.



$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

يمكن كذلك ضرب متجه في كمية عددية.

المفهوم الأساسي ضرب المتجهات في كمية عددية

إذا تم ضرب المتجه **v** في الكمية العددية الحقيقية k، فيكون للكمية العددية $k\mathbf{v}$ المقدار $|k|\,|\mathbf{v}|$. ويتم تحديد اتجاهها حسب علامة k.

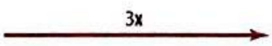
- إذا كان $k > 0$، فإن $k\mathbf{v}$ لها نفس اتجاه **v**.
- إذا كان $k < 0$، فإن $k\mathbf{v}$ في اتجاه معاكس لـــ **v**.

مثال 4 العمليات على المتجهات

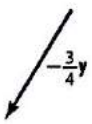
قم بتصميم رسم تخطيطي لـــ $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y}$.

أعد كتابة التعبير في صورة جمع متجهين. $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y} = 3\mathbf{x} + \left(-\frac{3}{4}\mathbf{y}\right)$

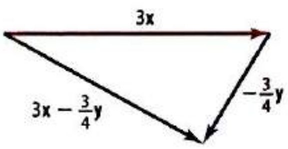
لتمثيل $3\mathbf{x}$، ارسم متجهًا يبلغ طوله ثلاثة أضعاف طول **x** في نفس اتجاه **x** (الشكل 7.1.1). لتمثيل $-\frac{3}{4}\mathbf{y}$، ارسم متجهًا يبلغ طوله $\frac{3}{4}$ طول **y** في الاتجاه المعاكس لـــ **y** (الشكل 7.1.2). ثم استخدم طريقة المثلث لرسم المتجه الناتج (الشكل 7.1.3).



الشكل 7.1.1



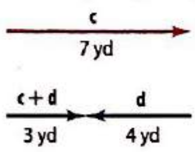
الشكل 7.1.2



الشكل 7.1.3

نصيحة دراسية

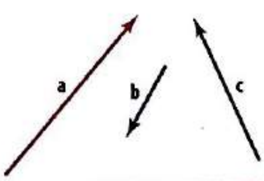
المتجهات الموازية في اتجاهين متعاكسين لجمع متجهين موازيين في *اتجاهين متعاكسين*، أوجد القيمة المطلقة للفرق بين المقدارين. يكون للناتج نفس اتجاه المتجه الأكبر مقدارًا.



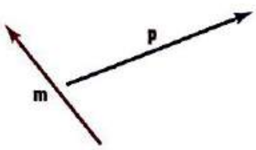
تمرين موجّه

قم بتصميم رسم تخطيطي لمتجه لكل تعبير.

4A. $\mathbf{a} - \mathbf{c} + 2\mathbf{b}$



4B. $\mathbf{m} - \frac{1}{4}\mathbf{p}$



2 استخدامات المتجهات

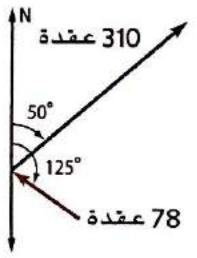
استخدامات المتجهات يمكن استخدام جمع وحساب مثلثات المتجهات لحل مسائل المتجهات التي تتضمن المثلثات التي كثيرًا ما تكون مائلة.

في الملاحة، الاتجاه هو اتجاه توجيه مركبة، مثل طائرة أو سفينة، للتغلب على القوى الأخرى، مثل الرياح أو التيار. السرعة النسبية للمركبة هي الناتج عند دمج سرعة الاتجاه والقوى الأخرى.

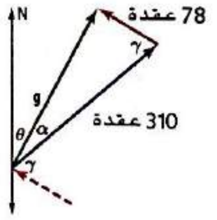
مثال 5 من الحياة اليومية استخدام المتجهات لحل مسائل الملاحة

الملاحة الجوية تطير طائرة بسرعة مقدارها 310 عقدة باتجاه 050°. إذا كانت الرياح تهب بسرعة 78 عقدة من الاتجاه الحقيقي 125°، فحدّد سرعة الطائرة واتجاهها بالنسبة إلى الأرض.

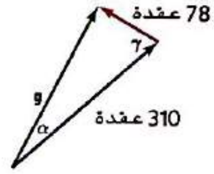
الخطوة 1 قم بتصميم رسم تخطيطي لتمثيل سرعتي الاتجاه والرياح (الشكل 7.1.4). قم بإزاحة متجه الرياح كما هو موضح في الشكل 7.1.5، واستخدام طريقة المثلث للحصول على المتجه الناتج الذي يمثل سرعة الطائرة بالنسبة للأرض g. في المثلث المنشكل بواسطة هذه المتجهات (الشكل 7.1.6)، $\gamma = 125° - 50°$ أو $75°$.



الشكل 7.1.4



الشكل 7.1.5



الشكل 7.1.6

الخطوة 2 استخدم قانون الـ cosine لإيجاد |g|، سرعة الطائرة بالنسبة للأرض.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$|g|^2 = 78^2 + 310^2 - 2(78)(310)\cos 75°$$

$$|g| = \sqrt{78^2 + 310^2 - 2(78)(310)\cos 75°}$$

$$\approx 299.4$$

سرعة الطائرة بالنسبة للأرض هي 299.4 عقدة تقريبًا.

الخطوة 3 اتجاه الناتج g تمثله الزاوية θ، كما هو موضح بالشكل 7.1.5. لإيجاد θ، احسب أولاً α باستخدام قانون الـ sin.

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin\alpha}{78} = \frac{\sin 75°}{299.4}$$

$$\sin\alpha = \frac{78\sin 75°}{299.4}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\frac{78\sin 75°}{299.4}$$

$$\approx 14.6°$$

قياس θ هو $50° - \alpha$، أي $50° - 14.6°$ أو $35.4°$.

إذًا، سرعة الطائرة بالنسبة إلى الأرض هي 299.4 عقدة تقريبًا بزاوية 035° تقريبًا.

تمرين موجّه

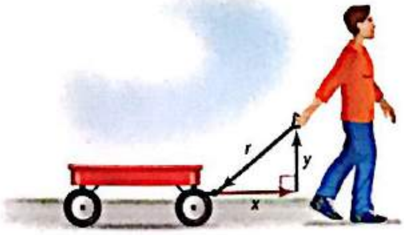
5. **السباحة** يسبح علي باتجاه الشرق بسرعة 3.5 متر في الثانية عبر نهر باتجاه الضفة المتعاكسة مباشرة. في الوقت ذاته، يحمله تيار النهر باتجاه الجنوب بمعدل مترين في الثانية. أوجد سرعة علي واتجاهه بالنسبة إلى الشاطئ.

نصيحة دراسية

الزوايا الداخلية البديلة إزاحة ذيل متجه الرياح إلى طرف المتجه الممثل لاتجاه الطائرة ينتج عنها متجهين موازيين يقطعهما قاطع. حيث إن الزوايا الداخلية البديلة لمستقيمين متوازيين يقطعهما قاطع تكون متطابقة، فالزوايا الناشئة عن هذه المتجهين في كلا المكانين في الشكل 7.1.5 لهما نفس القياس.

انتبه!

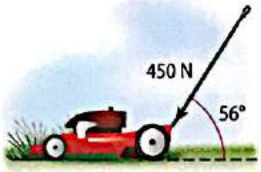
اتجاه الرياح في المثال 5، لاحظ أن الرياح تهب من اتجاه 125° وأن المتجه مرسوم بحيث يتجه طرفه نحو مستقيم الشمال-الجنوب. لو كانت الرياح تهب من اتجاه 125°، كان المتجه سيبتعد عن هذا الخط.



عندما يوجد متجهين أو أكثر مجموعها المتجه r، يُطلق عليها **مركبات r**. بينما يمكن أن تكون المركبات بأي اتجاه، كثيرًا ما يكون من المفيد تحليل المتجه أو التعبير عنه بمركبتين متعامدتين. تكون **المركبات المتعامدة** لمتجه أفقية أو رأسية.

في الرسم التخطيطي، يمكن النظر إلى القوة r المبذولة لسحب عربة باعتبارها مجموع قوة المركبة الأفقية **x** التي تحرك العربة للأمام وقوة المركبة الرأسية **y** التي تسحب العربة لأعلى.

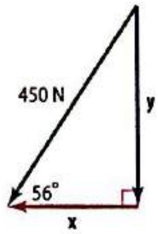
مثال 6 من الحياة اليومية تحليل قوة إلى مركبات متعامدة



العناية بالحديقة تدفع هالة مقبض آلة جز العشب بقوة مقدارها 450 نيوتن بزاوية 56° مع الأرض.

a. قم بتصميم رسم تخطيطي يوضح تحليل القوة التي تبذلها هالة إلى مركبات متعامدة.

يمكن تحليل قوة الدفع التي تبذلها هالة إلى دفع أفقي **x** للأمام ودفع رأسي **y** لأسفل كما هو موضح.



b. أوجد مقداري المركبتين الأفقية والرأسية للقوة.

تشكل المركبتان الأفقية والرأسية للقوة مثلثًا قائم الزاوية. استخدم نسبة الـ **sin** و الـ **cosine** لإيجاد مقدار كل قوة.

$\cos 56° = \frac{|x|}{450}$

$|x| = 450 \cos 56°$

$|x| \approx 252$

$\sin 56° = \frac{|y|}{450}$

$|y| = 450 \sin$ 56°

$|y| \approx 373$

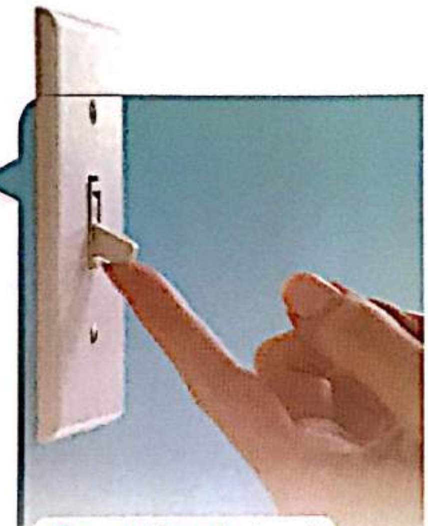
مقدار المركبة الأفقية 252 نيوتن تقريبًا، ومقدار المركبة الرأسية 373 نيوتن تقريبًا.

تمرين موجّه

6. كرة القدم ركل اللاعب كرة القدم بحيث انطلقت من الأرض بسرعة 13.4 متر في الثانية بزاوية 33° مع الأرض.

A. قم بتصميم رسم تخطيطي يوضح تحليل هذه القوة إلى مركبات متعامدة.

B. أوجد مقداري المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة.



الربط بالحياة اليومية

يتطلب تشغيل مفتاح الإضاءة قوة مقدارها 3 نيوتن تقريبًا.
القوة المبذولة على شخص بفعل الجاذبية هي 600 نيوتن تقريبًا.
القوة التي يبذلها رافع الأثقال 2000 نيوتن تقريبًا.

المصدر: كونتيمبوراري كوليدج فيزكس

التمارين

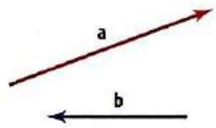
اذكر ما إذا كانت كل كمية موصوفة هي متجه أو كمية عددية. (مثال 1)

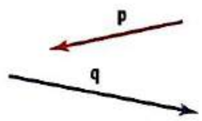
1. صندوق يتم دفعه بقوة مقدارها 125 نيوتن
2. الرياح تهب بسرعة 20 عقدة
3. غزال يركض بسرعة 15 مترًا في الثانية باتجاه الغرب
4. كرة قاعدة تم قذفها بسرعة 85 كيلومتر في الساعة
5. إطار يزن 15 كيلوجرام يتدلى من حبل
6. حجر تم قذفه في مسار مستقيم لأعلى بسرعة 50 متراً في الثانية

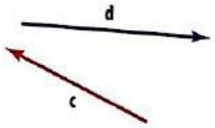
استخدم مسطرة ومنقلة لعمل رسم تخطيطي سهمي لكل كمية موصوفة. أرفق مقياسًا مع كل رسم تخطيطي. (مثال 2)

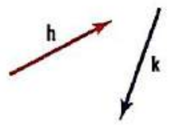
7. $h = 13$ سنتيمتر في الثانية باتجاه $205°$
8. $g = 6$ كيلومترات في الساعة باتجاه N70°W
9. $j = 5$ متر في الدقيقة بزاوية $300°$ مع المركبة الأفقية
10. $k = 28$ كيلومترات بزاوية $35°$ مع المركبة الأفقية
11. $m = 40$ مترًا باتجاه S55°E
12. $n = 32$ متر في الثانية باتجاه $030°$

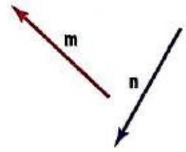
أوجد ناتج كل زوج من المتّجهات باستخدام إما طريقة المثلّث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر واتجاهه بالنسبة إلى المركّبة الأفقية. (مثال 3)

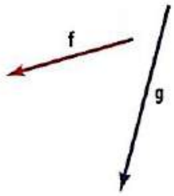
13.


14.


15.


16.


17.


18.


19. **الجولف** أثناء لعب لعبة فيديو عن الجولف، ضرب عمر الكرة بزاوية $35°$ فوق المركبة الأفقية بسرعة 64.4 كيلومتر في الساعة مع هبوب الرياح بسرعة 8 كيلومتر في الساعة، كما هو موضح. أوجد الاتجاه الناتج للكرة وسرعتها. (مثال 3)

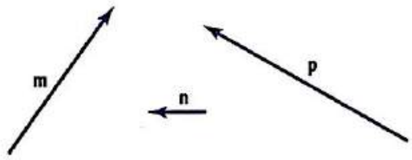
20. **التوارب** غادر قارب مستأجر الميناء باتجاه N60°W لمسافة 12 ميلاً بحريًا. غيّر القبطان المسار إلى اتجاه N25°E لمسافة 15 ميلاً بحريًا إضافية. حدد مسافة واتجاه السفينة من الميناء إلى موقعها الحالي. (مثال 3)

21. **السير على الأقدام** سار مازن وأيوب لمسافة 3.75 كيلومترات إلى بحيرة بزاوية $55°$ جنوب شرق موقع التخييم. ثم سارا مسافة 3.75 كيلومترات إلى بحيرة بزاوية $33°$ شمال غرب إلى مركز الحياة الطبيعية الذي يبعد مسافة 5.6 كيلومترات عن البحيرة. فأين مركز الحياة الطبيعية من موقع التخييم؟ (مثال 3)

حدد مقدار واتجاه ناتج مجموع كل متجه. (مثال 3)

22. 18 نيوتن للأمام مباشرة ثم 20 نيوتن للخلف مباشرة
23. 100 متر باتجاه الشمال ثم 350 مترًا باتجاه الجنوب
24. 10 كيلوجرام من القوة باتجاه $025°$ ثم 15 كيلوجرام من القوة باتجاه $045°$
25. 17 كيلومتر شرقًا ثم 16 كيلومتر جنوبًا
26. 15 مترًا في الثانية المربعة بزاوية $60°$ مع المركبة الأفقية ثم 9.8 أمتار في الثانية المربعة لأسفل

استخدم مجموعة المتجهات لتصميم رسم تخطيطي للمتجهات لكل تعبير. (مثال 4)



27. $m - 2n$
28. $n - \frac{3}{4}m$
29. $\frac{1}{2}p + 3n$
30. $4n + \frac{4}{5}p$
31. $p + 2n - m$
32. $-\frac{1}{3}m + p - 2n$
33. $3n - \frac{1}{2}p + m$
34. $m - 3n + \frac{1}{4}p$

35. **العدو** السرعةالناتجة لعداء هي 12.9 كيلومتر في الساعة باتجاه الغرب مع هبوب الرياح بسرعة 4.8 كيلومتر في الساعة باتجاه N28°W. فما سرعة العداء، مع التقريب لأقرب كيلومتر في الساعة، بدون تأثير الرياح؟ (المثال 5)

36. **الطيران الشراعي** تطير طائرة شراعية بسرعة 15 كيلومتر في الساعة باتجاه الغرب. إذا كانت الرياح تهب بسرعة 5 كيلومترات في الساعة باتجاه N60°E، فما سرعة الطائرة بالنسبة إلى الأرض؟ (المثال 5)

37. **التيار** تسبح سالي باتجاه الغرب بمعدل 1.5 متر في الثانية. يتدفق تيار قوي باتجاه S20°E بمعدل متر في الثانية. أوجد السرعة والاتجاه الناتجين لسالي. (المثال 5)

قم بتصميم رسم تخطيطي يوضح تحليل كل متجه إلى مركبات متعامدة. ثم أوجد مقادير المركبات الأفقية والرأسية للمتجه. (المثال 6)

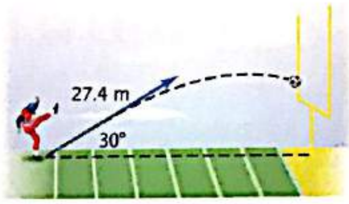
38. $2\frac{1}{8}$ سنتيمتر بزاوية °310 مع المركبة الأفقية

39. 1.5 سنتيمتر باتجاه N49°E

40. 3.2 سنتيمترات في الساعة باتجاه S78°W

41. $\frac{3}{4}$ سنتيمتر في الدقيقة باتجاه °255

42. كرة القدم في محاولة تهديف، تم ركل الكرة بالسرعة الموضحة بالرسم التخطيطي أدناه.



a. قم بتصميم رسم تخطيطي يوضح تحليل هذه القوة إلى مركبات متعامدة.

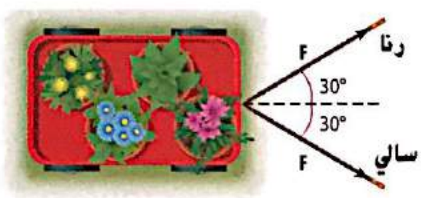
b. أوجد مقادير المركبات الأفقية والرأسية. (مثال 6)

43. التنظيف تم دفع مكنسة بقوة مقدارها 190 نيوتن وزاوية مقدارها °33 مع الأرض. (المثال 6)

a. قم بتصميم رسم تخطيطي يوضح تحليل هذه القوة إلى مركبات متعامدة.

b. أوجد مقادير المركبات الأفقية والرأسية.

44. العناية بالحدائق تسحب رنا وسالي عربة مليئة بالنباتات. تسحب كل منهما العربة بقوة متساوية وزاوية °30 مع محور العربة. القوة الناتجة هي 120 نيوتن.



a. ما مقدار القوة التي تبذلها كل منهما؟

b. إذا بذلت كل منهما قوة مقدارها 75 نيوتن، فما مقدار القوة الناتجة؟

c. ما تأثير اقتراب رنا وسالي من بعضهما على القوة الناتجة؟

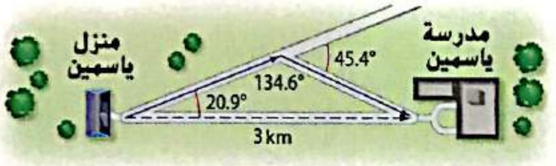
تم ذكر المقدار والاتجاهات الحقيقية للقوى الثلاث المؤثرة على جسم. أوجد مقدار القوة الناتجة عن هذه القوى واتجاهها.

45. 50 kg بزاوية °30، و 80 lb بزاوية °125، و 100 kg بزاوية °220

46. 8 نيوتن بزاوية °300، و 12 نيوتن بزاوية °45، و 6 نيوتن بزاوية °120.

47. 18 kg بزاوية °190، و 3 kg بزاوية 20 °، و 7 kg بزاوية °320

48. القيادة تبعد مدرسة ياسمين عن منزلها بمقدار ثلاثة كيلومتر في مسار مستقيم. تقود السيارة في شارعين مختلفين في طريقها إلى المدرسة. تتحرك بزاوية °20.9 مع المسار في الشارع الأول ثم تلتف بزاوية °45.4 في الشارع الثاني.



a. ما المسافة التي تقطعها ياسمين في الشارع الأول؟

b. ما المسافة التي تقطعها ياسمين في الشارع الثاني؟

c. إذا استغرق منها الوصول إلى المدرسة 10 دقائق وكان متوسط سرعتها في الشارع الأول 25 كيلومتر في الساعة، فما متوسط سرعتها في الشارع الثاني؟

49. التزلّج يسحب حماد أخته على زلاجة. اتجاه هذه القوة الناتجة هو °31 والمركبة الأفقية لهذه القوة هي 86 نيوتن.

a. ما المركبة الرأسية للقوة؟

b. ما مقدار القوة الناتجة؟

50. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستستكشف ضرب متجه في كمية عددية.

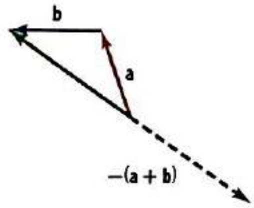
a. التمثيل البياني على مستوى إحداثي، ارسم المتجه **a** بحيث يقع الذيل عند نقطة الأصل. اختر قيمة للكمية العددية k. ثم ارسم المتجه الناتج في حالة ضرب المتجه الأصلي في k على المستوى الإحداثي ذاته. كرر العملية لأربع متجهات إضافية **b** و **c** و **d** و **e**. استخدم نفس قيمة k كل مرة.

b. التمثيل الجدولي انسخ وأكمل الجدول أدناه لكل متجه ترسمه في الجزء **a**.

متجه	نقطة نهاية متجه	نقطة نهاية المتجه $k \times$
a		
b		
c		
d		
e		

c. التمثيل التحليلي إذا كانت نقطة نهاية المتجه **a** تقع عند النقطة (a, b)، فما موقع نقطة نهاية المتجه **ka**؟

المتجه *الموازن* عكس المتجه الناتج.
فهو يوازن توفيق المتجهات بحيث يكون مجموع المتجهات والموازن هو المتجه الصفري. المتجه الموازن لـ a + b هو −(a + b).



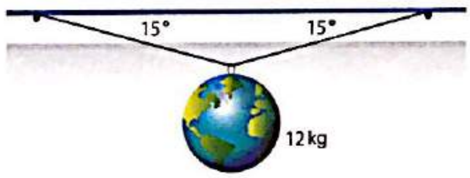
أوجد مقدار واتجاه المتجه الموازن لكل مجموعة من المتجهات.

.51 a = 15 كيلومتر في الساعة باتجاه °125
b = 12 كيلومتر في الساعة باتجاه °045

.52 a = 4 أمتار باتجاه N30W°
b = 6 أمتار باتجاه N20E°

.53 a = 23 قدمًا في الثانية باتجاه °205
b = 16 قدمًا في الثانية باتجاه °345

.54 **المقدار** تم تعليق جسم مستدير من السقف بواسطة سلكين متساويين في الطول كما هو موضح.

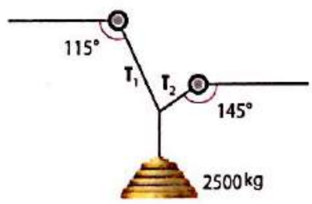


.a قم بتصميم رسم تخطيطي للمتجهات في الموقف للإشارة إلى أن متجهي التوتر T_1 و T_2 متساويان في المقدار ويحافظان على الجسم في حالة ثبات أو توازن.

.b قم بإعادة تصميم الرسم التخطيطي باستخدام طريقة المثلث لإيجاد $T_1 + T_2$.

.c استخدم الرسم التخطيطي من الجزء b وحقيقة أن موازن الناتج $T_1 + T_2$ والمتجه الممثل لوزن الجسم هما متجهان متكافئان لحساب مقداري T_1 و T_2.

.55 **دعم الكابلات** تم ربط كابلين بالتوترين T_1 و T_2 معًا لدعم حمولة تزن 2500 رطل في حالة توازن.



.a اكتب تعبيرين لتمثيل المركبتين الأفقية والرأسية T_1 و T_2.

.b إذا علمت أن موازن الناتج $T_1 + T_2$ والمتجه الممثل لوزن الحمولة متجهان متكافئان. فاحسب مقداري T_1 و T_2 لأقرب جزء من عشرة من الرطل.

.c استخدم إجاباتك من الجزأين a و b لإيجاد مقداري المركبتين الأفقية والرأسية T_1 و T_2 لأقرب جزء من عشرة من الرطل.

أوجد مقدار واتجاه كل متجه إذا علمت مركبتيه الرأسية والأفقية ومدى قيم زاوية الاتجاه θ مع المركبة الأفقية.

.56 الأفقية: 0.32 cm. الرأسية: 2.28 cm, $90° < \theta < 180°$

.57 الأفقية: 3.1 m. الرأسية: 4.2 m, $0° < \theta < 90°$

.58 الأفقية: 2.6 cm. الرأسية: 7.9 mc, $270° < \theta < 360°$

.59 الأفقية: 2.9 m. الرأسية: 1.8 m. $180° < \theta < 270°$

ارسم أي ثلاثة متجهات a و b و c. وضح هندسيًا تحقق كل من خواص المتجهات التالية باستخدام هذه المتجهات.

.60 خاصية التبديل: a + b = b + a

.61 خاصية التجميع: (a + b) + c = a + (b + c)

.62 خاصية التوزيع: k(a + b) = ka + kb. حيث $k = 2, 0.5, -2$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

.63 **مسألة غير محددة الإجابة** فكر في متجه من 5 وحدات موجّه على امتداد المحور x الموجب. حلل المتجه إلى مركبتين متعامدتين لا تتضمنان مركبة أفقية أو رأسية.

.64 **التبرير** هل من الممكن أحيانًا أو دائمًا أو مطلقًا إيجاد مجموع متجهين موازيين باستخدام طريقة متوازي الأضلاع؟ وضّح استنتاجك.

.65 **التبرير** ما أهمية وضع مرجع مشترك لقياس اتجاه متجه، على سبيل المثال، من المحور x الموجب؟

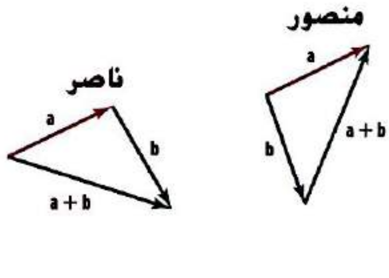
.66 **التحدي** ناتج a + b يساوي ناتج a − b. إذا كان مقدار a هو $4x$. فما مقدار b؟

.67 **التبرير** فكر في العبارة |a| + |b| ≥ |a + b|.

.a عبّر عن هذه العبارة باستخدام الشرح.

.b هل هذه العبارة صحيحة أم خاطئة؟ علل إجابتك.

.68 **تحليل الخطأ** يعمل منصور وناصر على إيجاد ناتج المتجهين a و b. هل أي منهما على صواب؟ وضّح استنتاجك.



.69 **التبرير** هل من الممكن أن يساوي مجموع متجهين أحدهما؟ اشرح.

.70 **الكتابة في الرياضيات** قارن وبيّن الفرق بين طريقتي متوازي الأضلاع والمثلث لإيجاد ناتج متجهين أو أكثر.

مراجعة شاملة

71. كرة الركل افترض أن أحد لاعبي كرة الركل قام بركل الكرة بزاوية $32°$ مع المركبة الأفقية بسرعة ابتدائية مقدارها 20 مترًا في الثانية. فعلى أي مسافة ستهبط الكرة؟

72. مثّل بيانيًا $(x')^2 + y' - 5 = 1$ إذا تم تدويره بزاوية $45°$ من موقعه الأصلي في المستوى xy.

اكتب معادلة للدائرة التي تحقق كل مجموعة من الشروط. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.

73. يقع المركز عند $(4, 5)$، نصف القطر 4

74. يقع المركز عند $(-4, 1)$، القطر 7

حدد المعادلة ومثّل بيانيًا القطع المكافئ بالبعد البؤري F والرأس V.

75. $F(2, 4)$, $V(2, 3)$

76. $F(1, 5)$, $V(-7, 5)$

77. الصناعات اليدوية يبيع ماجد المنحوتات الخشبية. يبيع التماثيل الكبيرة مقابل AED 60 والساعات مقابل AED 40 والأثاث المُصغَّر مقابل AED 25 وقطع الشطرنج مقابل AED 5. اصطحب معه الأغراض التالية إلى المعرض: 12 تمثالاً كبيرًا و 25 ساعة و 45 قطعة أثاث مُصغَّر و 50 قطعة شطرنج.

a. اكتب مصفوفة مخزون للعدد المتاح
من كل عنصر ومصفوفة تكلفة لسعر كل عنصر.

b. أوجد الدخل الإجمالي لماجد إذا باع جميع العناصر.

حُـلّ كل معادلة لجميع قيم x.

78. $4 \sin x \cos x - 2 \sin x = 0$

79. $\sin x - 2 \cos^2 x = -1$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

80. SAT/ACT إذا كانت المدينة A تبعد مسافة 12 ميلاً عن المدينة B والمدينة C تبعد مسافة 18 ميلاً عن المدينة A، فأي مما يلي لا يمكن أن تكون المسافة من المدينة B إلى المدينة C؟

A 5 كيلومتر

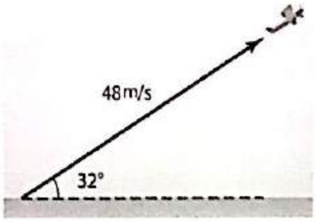
B 7 كيلومتر

C 10 كيلومتر

D 12 كيلومتر

E 18 كيلومتر

81. حلقت طائرة بالتحكم عن بُعد على طول مسار مبدئي بزاوية $32°$ مع المركبة الأفقية بسرعة 48 متراً في الثانية كما هو موضح. أي مما يلي يمثل مقداري المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة؟



F 25.4 m/s, 40.7 m/s

G 40.7 m/s, 25.4 m/s

H 56.6 ft/s, 90.6 m/s

J 90.6 ft/s, 56.6 m/s

82. مراجعة المثلث ABC له الرؤوس $A(-4, 2)$ و $B(-4, -3)$ و $C(3, -3)$. بعد التمدد، أصبح للمثلث $A'B'C'$ الرؤوس $A'(-12, 6)$ و $B'(-12, -9)$ و $C'(9, -9)$. كم ضعفًا تبلغ مساحة $\triangle A'B'C'$ بالنسبة لمساحة $\triangle ABC$؟

A $\frac{1}{9}$

B $\frac{1}{3}$

C 3

D 9

83. مراجعة ترسم حليمة خريطة للحي الذي تعيش به. تم تمثيل منزلها بواسطة شبه منحرف $ABCD$ رؤوسه $A(2, 2)$ و $B(6, 2)$ و $C(6, 6)$ و $D(2, 6)$. تريد استخدام النظام الإحداثي ذاته لرسم خريطة أخرى بنصف حجم الخريطة الأصلية. فما الرؤوس الجديدة المحتملة لمنزل حليمة؟

F $A'(0, 0)$, $B'(2, 1)$, $C'(3, 3)$, $D'(0, 3)$

G $A'(0, 0)$, $B'(3, 1)$, $C'(2, 3)$, $D'(0, 2)$

H $A'(1, 1)$, $B'(3, 1)$, $C'(3, 3)$, $D'(1, 3)$

J $A'(1, 2)$, $B'(3, 0)$, $C'(2, 2)$, $D'(2, 3)$

7-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

:: السابق

- فمت بإجراء العمليات على المتجهات باستخدام الرسومات ذات المقاييس.

:: الحالي

1. تمثيل وإجراء العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي.
2. كتابة متجه كتوفيق خطي لمتجهات الوحدة.

:: لماذا؟

- يمكن أن تؤثر الرياح على اتجاه الطائرة وسرعتها بالنسبة إلى الأرض. يستطيع الطيارون استخدام الرسومات ذات المقاييس لتحديد الاتجاه المطلوب للطائرة لتعويض الانحراف الناتج عن الرياح. ويتم إجراء هذه الحسابات في الغالب باستخدام المتجهات في المستوى الإحداثي.

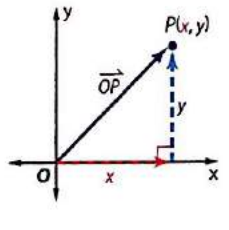
المفردات الجديدة

صورة مركبة component form
متجه وحدة unit vector
توفيق خطي linear combination

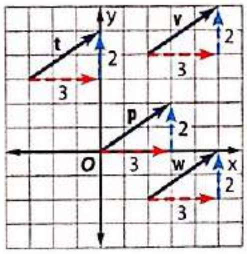
1 المتجهات في المستوى الإحداثي

في الدرس 7-1، قمت بإيجاد مقدار واتجاه ناتج قوتين أو أكثر هندسيًا باستخدام الرسومات ذات المقاييس. نظرًا لأن الرسومات يمكن أن تكون غير دقيقة، هناك حاجة إلى أسلوب جبري باستخدام نظام إحداثي متعامد للمواقف التي تتطلب المزيد من الدقة أو في أنظمة المتجهات المعقدة.

يمكن وصف متجه $\overrightarrow{OP}$ في الوضع القياسي في نظام إحداثي متعامد (كما في الشكل 7.2.1) بشكل فريد بواسطة إحداثيات نقطة انتهائه $P(x, y)$. نقوم بالإشارة إلى $\overrightarrow{OP}$ على مستوى إحداثي بواسطة $\langle x, y\rangle$. لاحظ أن x و y مركبتين متعامدتين لـ $\overrightarrow{OP}$. لهذا السبب، تُسمى $\langle x, y\rangle$ **صورة مُركّبة** للمتجه.



الشكل 7.2.1

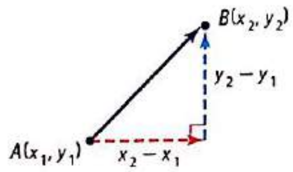


الشكل 7.2.2

نظرًا لأن المتجهات التي لها نفس المقدار والاتجاه متكافئة، فيمكن تمثيل العديد من المتجهات بواسطة الإحداثيات ذاتها. على سبيل المثال، المتجهات **p** و **t** و **v** و **w** في الشكل 7.2.2 متكافئة لأنه يمكن الإشارة إلى كل منها بواسطة $\langle 3, 2\rangle$. لإيجاد صورة مركبة لمتجه ليس في الوضع القياسي، يمكنك استخدام إحداثيات نقطتي البداية والنهاية.

المفهوم الأساسي الصورة المُركّبة للمتجه

الصورة المركّبة للمتّجه $\overrightarrow{AB}$ نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ معطاة بواسطة $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$.



مثال 1 التعبير عن متجه بصورة مركبة

أوجد الصورة المُركّبة للمتّجه $\overrightarrow{AB}$ نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$$
$$= \langle 3 - (-4), -5 - 2\rangle$$
$$= \langle 7, -7\rangle$$

تمرين موجّه

أوجد الصورة المُركّبة للمتجه $\overrightarrow{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين.

1A. $A(-2, -7), B(6, 1)$

1B. $A(0, 8), B(-9, -3)$

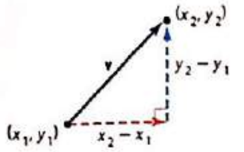
يتم إيجاد مقدار متجه في المستوى الإحداثي باستخدام صيغة المسافة.

المفهوم الأساسي مقدار متجه في المستوى الإحداثي

إذا كان v متجهًا نقطة بدايته (x_1, y_1) ونقطة نهايته (x_2, y_2)، فيتم تقديم مقدار v بواسطة

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

إذا كان v صورة مركبته $\langle a, b\rangle$، إذا $|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



قراءة في الرياضيات

المعيار مقدار المتجه يُسمى أحيانًا معيار المتجه.

مثال 2 إيجاد مقدار متجه

أوجد مقدار $\overrightarrow{AB}$ بنقطة البداية $A(-4, 2)$ ونقطة النهاية $B(3, -5)$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{[3 - (-4)]^2 + (-5 - 2)^2}$$
$$= \sqrt{98} \approx 9.9 \text{ تقريبًا}$$

التحقق من المثال 1، تعلم أن $\overrightarrow{AB} = \langle 7, -7\rangle$. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + (-7)^2}$ أو $\sqrt{98}$ ✔

تمرين موجّه

أوجد مقدار $\overrightarrow{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين.

2A. $A(-2, -7), B(6, 1)$

2B. $A(0, 8), B(-9, -3)$

جمع المتجهات في المستوى الإحداثي وطرحها وضربها في كمية عددية مشابه لتلك العمليات مع المصفوفات.

المفهوم الأساسي العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ متجهان و k كمية عددية، فإن ما يلي صحيح.

جمع المتجهات	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$
طرح المتجهات	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2\rangle$
الضرب في كمية عددية	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2\rangle$

مثال 3 العمليات على المتجهات

أوجد كل مما يلي لـ $\mathbf{w} = \langle -4, 1\rangle$، $\mathbf{y} = \langle 2, 5\rangle$، و $\mathbf{z} = \langle -3, 0\rangle$.

a. $\mathbf{w} + \mathbf{y}$

$$\mathbf{w} + \mathbf{y} = \langle -4, 1\rangle + \langle 2, 5\rangle$$
$$= \langle -4 + 2, 1 + 5\rangle = \langle -2, 6\rangle$$

b. $\mathbf{z} - 2\mathbf{y}$

$$\mathbf{z} - 2\mathbf{y} = \mathbf{z} + (-2)\mathbf{y}$$
$$= \langle -3, 0\rangle + (-2)\langle 2, 5\rangle$$
$$= \langle -3, 0\rangle + \langle -4, -10\rangle = \langle -7, -10\rangle$$

تمرين موجّه

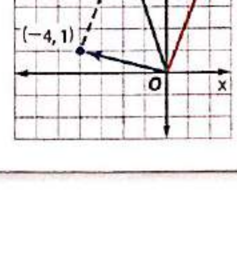
3A. $4\mathbf{w} + \mathbf{z}$

3B. $-3\mathbf{w}$

3C. $2\mathbf{w} + 4\mathbf{y} - \mathbf{z}$

نصيحة دراسية

التحقق البياني كما هو موضح أدناه، تم التحقق من المثال 3a باستخدام طريقة متوازي الأضلاع.



2 متجه الوحدة

متجه الوحدة المتجه الذي يكون مقداره وحدة واحدة يُسمى **متجه وحدة**. من المفيد أحيانًا وصف متجه غير صفري $\mathbf{v}$ في صورة مضاعف كمية عددية لمتجه وحدة $\mathbf{u}$ له نفس اتجاه $\mathbf{v}$. لإيجاد $\mathbf{u}$، اقسم $\mathbf{v}$ على مقداره $|\mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

الربط بتاريخ الرياضيات

ويليام روان هاملتون (1805-1865)

عالم رياضيات أيرلندي، طور هاملتون نظرية المرباعيات ونشر محاضرات عن *المرباعيات*. تتضمن هذه النظرية أسس العديد من المفاهيم الأساسية لتحليل المتجهات.

مثال 4 إيجاد متّجه وحدة له نفس اتجاه متجه معلوم

أوجد متّجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتّجاه $\mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$.

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

$$= \frac{1}{|\langle -2, 3\rangle|}\langle -2, 3\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}}\langle -2, 3\rangle \qquad |\langle a, b\rangle| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}}\langle -2, 3\rangle$$

$$= \left\langle -\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right\rangle$$

$$= \left\langle -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right\rangle$$

التحقق نظرًا لأن $\mathbf{u}$ مضاعف كمية عددية لـ $\mathbf{v}$، فإن له نفس اتجاه $\mathbf{v}$. تحقق من أن مقدار $\mathbf{u}$ هو 1.

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{52}{169} + \frac{117}{169}}$$

$$= \sqrt{1} = 1 \checkmark$$

تمرين موجّه

أوجد متّجه وحدة له نفس اتجاه المتجه المعلوم.

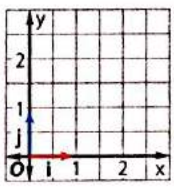
4A. $\mathbf{w} = \langle 6, -2\rangle$

4B. $\mathbf{x} = \langle -4, -8\rangle$

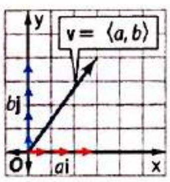
تم الإشارة إلى متجهات الوحدة في اتجاه محور x الموجب ومحور y الموجب بواسطة $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ و $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ على التوالي (الشكل 7.2.3). المتجهان $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ يُطلق عليهما متجهي الوحدة القياسيين.

انتبه!

متجه الوحدة $\mathbf{i}$ لا تخلط بين متجه الوحدة $\mathbf{i}$ والعدد التخيلي i. تتم الإشارة إلى المتجه بالحرف الغامق غير المائل $\mathbf{i}$. تتم الإشارة إلى العدد التخيلي بالحرف الغامق المائل i.



الشكل 7.2.3



الشكل 7.2.4

يمكن استخدام هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ في صورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما هو موضح بالشكل 7.2.4.

$$\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$$
$$= \langle a, 0\rangle + \langle 0, b\rangle$$
$$= a\langle 1, 0\rangle + b\langle 0, 1\rangle$$
$$= a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

مجموع المتجهين $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ يُسمى **التوفيق الخطي** للمتجهين **i** و **j**.

مثال 5 كتابة متجه كتوفيق خطي لمتجهات الوحدة

افترض أن $\overrightarrow{DE}$ متجه نقطة بدايته $D(-2, 3)$ ونقطة نهايته $E(4, 5)$. اكتب $\overrightarrow{DE}$ في صورة توفيق خطي للمتجهين i و j.

أولاً. أوجد الصورة المركبة للمتجه $\overrightarrow{DE}$.

$$\overrightarrow{DE} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$$
$$= \langle 4 - (-2), 5 - 3\rangle$$
$$= \langle 6, 2\rangle$$

ثم أعد كتابة المتجه في صورة توفيق خطي لمتجهات وحدة قياسية.

$$\overrightarrow{DE} = \langle 6, 2\rangle$$
$$= 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

تمرين موجّه

افترض أن $\overrightarrow{DE}$ هو المتجه بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. اكتب $\overrightarrow{DE}$ في صورة توفيق خطي للمتّجهين i و j.

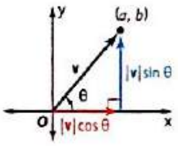
5A. $D(-6, 0), E(2, 5)$

5B. $D(-3, -8), E(-7, 1)$

نصيحة دراسية

متجه الوحدة من العبارة $\mathbf{v} = \langle|\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \theta\rangle$. يترتب أن متجه الوحدة في اتجاه **v** له الصورة
$\mathbf{v} = \langle 1 \cos \theta, 1 \sin \theta\rangle$
$= \langle\cos \theta, \sin \theta\rangle$.

إحدى طرق تحديد اتجاه متجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ هي ذكر زاوية الاتجاه θ التي يصنعها **v** مع محور **x** الموجب. من الشكل 7.2.5. يترتب على ذلك أن **v** يمكن كتابته في صورة مركبة أو توفيق خطي لـ **i** و **j** باستخدام مقدار وزاوية اتجاه المتجه.

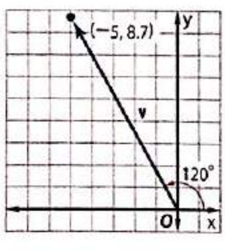


$$\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$$
$$= \langle|\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \theta\rangle$$
$$= |\mathbf{v}| (\cos \theta)\mathbf{i} + |\mathbf{v}| (\sin \theta)\mathbf{j}$$

مثال 6 إيجاد صورة مُركّبة

أوجد الصورة المُركّبة لمتجه v مقداره 10 وزاوية اتجاهه 120°.

$$\mathbf{v} = \langle|\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \theta\rangle$$
$$= \langle 10 \cos 120°, 10 \sin 120°\rangle$$
$$= \left\langle 10\left(-\frac{1}{2}\right), 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\rangle \qquad \cos 120° = -\frac{1}{2} \text{ و } \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \langle -5, 5\sqrt{3}\rangle$$



التحقق مثّل بيانيًا $\mathbf{v} = \langle -5, 5\sqrt{3}\rangle \approx \langle -5, 8.7\rangle$. قياس الزاوية التي يصنعها **v** مع محور x الموجب هي تقريبًا 120° كما هو موضح و $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{3})^2}$ أو 10. ✔

تمرين موجّه

أوجد الصورة المركبة للمتجه v بالمقدار وزاوية الاتجاه المذكورتين.

6A. $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 45°$

6B. $|\mathbf{v}| = 24, \theta = 210°$

يترتب كذلك على معطيات الشكل 7.2.5 في الصفحة السابقة أنه يمكن إيجاد زاوية الاتجاه θ للمتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ من خلال حل المعادلة المثلثية $\tan \theta = \frac{|\mathbf{v}| \sin \theta}{|\mathbf{v}| \cos \theta}$ أو $\tan \theta = \frac{b}{a}$

مثال 7 زوايا اتجاه المتجهات

حدّد زاوية اتّجاه كل متجه مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة.

a. $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

$$\tan \theta = \frac{7}{3}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{7}{3}$$

$$\theta \approx 66.8^\circ$$

إذًا، زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{p}$ هي تقريبًا 67.8° كما موضح بالشكل 7.2.6.

b. $\mathbf{r} = \langle 4, -5 \rangle$

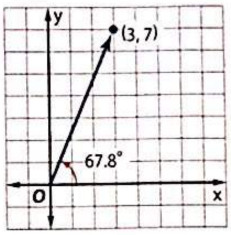
$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

$$\tan \theta = \frac{-5}{4}$$

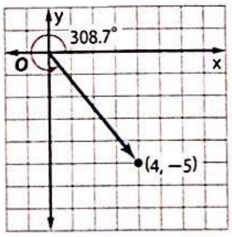
$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$\theta \approx -51.3^\circ$$

نظرًا لأن $\mathbf{r}$ تقع في الربع الرابع كما هو موضح بالشكل 7.2.7. فإن $\theta = 360 + (-51.3)$ أو 308.7°.



الشكل 7.2.6



الشكل 7.2.7

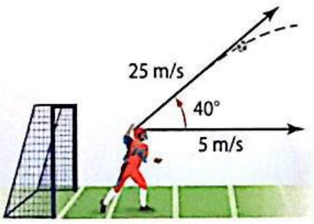
تمرين موجّه

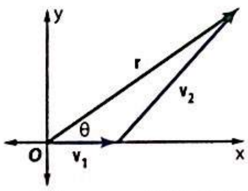
7A. $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

7B. $\langle -3, -8 \rangle$

مثال 8 من الحياة اليومية تطبيق العمليات على المتجهات

كرة القدم يركض حارس المرمى للأمام بسرعة 5 أمتار في الثانية ويرمي الكرة بسرعة 25 مترًا في الثانية وزاوية 40° مع المركبة الأفقية. ما مقدار السرعة الناتجة للكرة واتّجاهها؟





ملاحظة: الشكل غير مرسوم للقياس.

نظرًا لأن الحارس يتحرك للأمام مباشرة، فصورة مركبة سرعته $\mathbf{v_1}$ هي $\langle 5, 0 \rangle$.
استخدم مقدار واتجاه سرعة الكرة $\mathbf{v_2}$ لكتابة هذا المتجه في صورة مركبة.

$$\mathbf{v_2} = \langle |\mathbf{v_2}| \cos \theta, |\mathbf{v_2}| \sin \theta \rangle$$
$$= \langle 25 \cos 40^\circ, 25 \sin 40^\circ \rangle$$
$$\approx \langle 19.2, 16.1 \rangle$$

اجمع المتجهين الجبريين الممثلين لـ $\mathbf{v_1}$ و $\mathbf{v_2}$ لإيجاد السرعة الناتجة، المتجه $\mathbf{r}$.

$$\mathbf{r} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$$
$$= \langle 5, 0 \rangle + \langle 19.2, 16.1 \rangle$$
$$= \langle 24.2, 16.1 \rangle$$

مقدار هذا الناتج هو $|\mathbf{r}| = \sqrt{24.2^2 + 16.1^2}$ أو تقريبًا 29.1. بعد ذلك، أوجد زاوية اتجاه الناتج θ.

$$\tan \theta = \frac{16.1}{24.2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{16.1}{24.2} = 33.6^\circ \text{ تقريبًا}$$

إذًا، السرعة الناتج للكرة هي تقريبًا 29.1 مترًا في الثانية بزاوية 33.6° تقريبًا مع المركبة الأفقية.

تمرين موجّه

8. كرة القدم ماذا ستكون السرعة الناتجة للكرة إذا ألقى حارس المرمى الرمية ذاتها وهو يركض للخلف بسرعة 5 أمتار في الثانية؟

تمارين

أوجد الصورة المُركّبة والمقدار للمتجه $\overrightarrow{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. (المثالان 1 و 2)

1-10. انظر الهامش.

1. $A(-3, 1), B(4, 5)$
2. $A(2, -7), B(-6, 9)$
3. $A(10, -2), B(3, -5)$
4. $A(-2, 7), B(-9, -1)$
5. $A(-5, -4), B(8, -2)$
6. $A(-2, 6), B(1, 10)$
7. $A(2.5, -3), B(-4, 1.5)$
8. $A(-4.3, 1.8), B(9.4, -6.2)$
9. $A\left(\frac{1}{2}, -9\right), B\left(6, \frac{5}{2}\right)$
10. $A\left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right), B(-1, 7)$

أوجد كل مما يلي حيث $\mathbf{f} = \langle 8, 0 \rangle$ و $\mathbf{g} = \langle -3, -5 \rangle$ و $\mathbf{h} = \langle -6, 2 \rangle$. (مثال 3)

11. $4\mathbf{h} - \mathbf{g}$
12. $\mathbf{f} + 2\mathbf{h}$
13. $3\mathbf{g} - 5\mathbf{f} + \mathbf{h}$
14. $2\mathbf{f} + \mathbf{g} - 3\mathbf{h}$
15. $\mathbf{f} - 2\mathbf{g} - 2\mathbf{h}$
16. $\mathbf{h} - 4\mathbf{f} + 5\mathbf{g}$
17. $4\mathbf{g} - 3\mathbf{f} + \mathbf{h}$
18. $6\mathbf{h} + 5\mathbf{f} - 10\mathbf{g}$

19. **الفيزياء** في الفيزياء، يتم استخدام الرسوم التخطيطية للقوى لعرض تأثيرات القوى المختلفة المؤثرة على جسم. يمكن للرسم التخطيطي التالي للقوى تمثيل القوى المؤثرة على طفل ينزلق لأسفل على زحلوقة. (مثال 3)

a. باستخدام النقطة الزرقاء الممثلة للطفل كنقطة أصل. عبر عن كل قوة كمتجه في صورة مركبة.

b. أوجد صورة مركبة المتجه الناتج الممثل للقوة المتسببة في حركة الطفل لأسفل على الزحلوقة.

أوجد متّجه الوحدة u الذي له نفس اتّجاه v. (مثال 4)

20. $\mathbf{v} = \langle -2, 7 \rangle$
21. $\mathbf{v} = \langle 9, -3 \rangle$
22. $\mathbf{v} = \langle -8, -5 \rangle$
23. $\mathbf{v} = \langle 6, 3 \rangle$
24. $\mathbf{v} = \langle -2, 9 \rangle$
25. $\mathbf{v} = \langle -1, -5 \rangle$
26. $\mathbf{v} = \langle 1, 7 \rangle$
27. $\mathbf{v} = \langle 3, -4 \rangle$

افترض أن $\overrightarrow{DE}$ هو المتجه بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. اكتب $\overrightarrow{DE}$ في صورة توفيق خطي للمتّجهين i و j. (المثال 5)

28. $D(4, -1), E(5, -7)$
29. $D(9, -6), E(-7, 2)$
30. $D(3, 11), E(-2, -8)$
31. $D(9.5, 1), E(0, -7.3)$
32. $D(-3, -5.7), E(6, -8.1)$
33. $D(-4, -6), E(9, 5)$
34. $D\left(\frac{1}{8}, 3\right), E\left(-4, \frac{2}{7}\right)$
35. $D(-3, 1.5), E(-3, 1.5)$

36. **طريق المدرسة** من أجل أن تذهب لميس إلى المدرسة، تغادر منزلها وتقود السيارة شمالاً في شارع النصر لمسافة 2.4 كيلومتر، ثم تنعطف يسارًا إلى شارع الحرية وتقطع مسافة 3.1 كيلومتر ثم تنعطف يمينًا إلى شارع الأمل وتقطع مسافة 5.8 كيلومتر. عبّر عن طريق لميس في صورة توفيق خطي لمتّجهي الوحدة i و j. (المثال 5)

$-3.1\mathbf{i} + 8.2\mathbf{j}$

37. **التجديف** تجدف نجاة عبر النهر بسرعة 5 كيلومتر في الساعة بشكل متعامد على الشاطئ، يبلغ تيار النهر 3 كيلومتر في الساعة باتجاه التيار. (المثال 5)

a. ما سرعة حركتها؟

b. بأي زاوية مع الشاطئ تتحرك؟

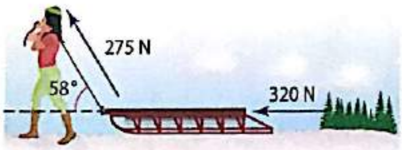
أوجد صورة مُركّبة المتّجه v بالمقدار وزاوية الاتجاه المذكورتين. (المثال 6)

38. $|\mathbf{v}| = 12, \theta = 60°$
39. $|\mathbf{v}| = 4, \theta = 135°$
40. $|\mathbf{v}| = 6, \theta = 240°$
41. $|\mathbf{v}| = 16, \theta = 330°$
42. $|\mathbf{v}| = 28, \theta = 273°$
43. $|\mathbf{v}| = 15, \theta = 125°$

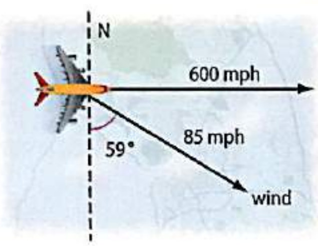
حدّد زاوية اتّجاه كل متجه مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة. (المثال 7)

44. $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$
45. $-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
46. $8\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
47. $-4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
48. $\langle -5, 9 \rangle$
49. $\langle 7, 7 \rangle$
50. $\langle -6, -4 \rangle$
51. $\langle 3, -8 \rangle$

52. **التزلج** تسحب هيام زلاجة بقوة 275 نيوتن من خلال إمساك حبلها بزاوية 58°. سوف يساعدها أخاها من خلال دفع الزلاجة بقوة 320 نيوتن. حدد مقدار واتجاه القوة الإجمالية الناتجة المؤثرة على الزلاجة. (المثال 8)



53. **الملاحة** تطير طائرة باتّجاه الشرق بسرعة 600 كيلومتر في الساعة. وتهب الرياح بسرعة 85 كيلومتر في الساعة بزاوية S59°E. (المثال 8)



a. حدّد سرعة طيران الطائرة.

b. حدّد زاوية طيران الطائرة.

54. الاتجاه يحتاج طيار إلى تعيين مسار يؤدي إلى سرعة 500 كيلومتر في الساعة باتجاه الغرب. إذا كانت الرياح تهب بسرعة 100 كيلومتر في الساعة من زاوية 192°، فأوجد الاتجاه والسرعة التي يجب على الطيار اتخاذهما لتحقيق هذا الناتج.

حدد ما إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ بنقاط البداية والنهاية المذكورة متكافئين. وإذا كانا كذلك، فأثبت أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. وإن لم يكونا كذلك، فاشرح السبب.

55. $A(3, 5)$, $B(6, 9)$, $C(-4, -4)$, $D(-2, 0)$

56. $A(-4, -5)$, $B(-8, 1)$, $C(3, -3)$, $D(1, 0)$

57. $A(1, -3)$, $B(0, -10)$, $C(11, 8)$, $D(10, 1)$

58. القوارب تتحرك عائلة هناء في قارب عبر نهر. افترض أنهم في منطقة من النهر عرضها 150 مترًا تتدفق باتجاه الجنوب بمعدل متر في الثانية. في المياه الراكدة، يتحرك القارب بسرعة 0.5 متر في الثانية.

a. ما سرعة القارب؟

b. بعد أي مسافة سيجنح القارب إلى الشاطئ؟

c. كم يستغرق عبور النهر في مسار مباشر من ضفة لأخرى؟

59. الملاحة تطير طائرة نفاثة بسرعة 480 كيلومتر في الساعة باتجاه N82°E. بسبب الرياح، تبلغ سرعة الطائرة بالنسبة إلى الأرض 518 كيلومتر في الساعة باتجاه N79°E.

a. قم بتصميم رسم تخطيطي يمثل هذه الحالة.

b. ما سرعة الرياح واتّجاهها؟

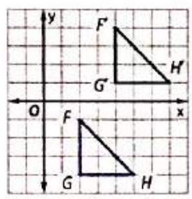
c. إذا زاد الطيار سرعة الطائرة في الهواء إلى 500 كيلومتر في الساعة، فكم ستكون السرعة الناتجة للطائرة بالنسبة إلى الأرض؟

60. الإزاحات يمكنك إزاحة شكل على طول متجه إزاحة $\langle a, b\rangle$ من خلال جمع a مع كل إحداثي x وجمع b مع كل إحداثي y. فكر في المثلثات الموضحة أدناه.

a. صف الإزاحة من $\triangle FGH$ إلى $\triangle F'G'H'$ باستخدام متجه إزاحة.

b. مثّل بيانيًا $\triangle F'G'H'$ وصورته المزاحة $\triangle F''G''H''$ على طول $\langle -3, -6\rangle$.

c. صف الإزاحة من $\triangle FGH$ إلى $\triangle F''G''H''$ باستخدام متجه إزاحة.

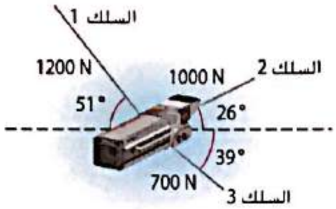


إذا علمتَ مقدار ونقطة بداية كل متجه، فحدد نقطة نهايته المحتملة.

61. $(-1, 4)$; $\sqrt{37}$

62. $(-3, -7)$; 10

63. الكاميرا يتم دعم كاميرا فيديو ترصد الأحداث المثيرة في فعالية رياضية بواسطة ثلاثة أسلاك. يمكن تمثيل التوتر في كل سلك بواسطة متجه.

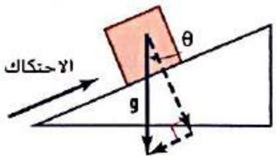


a. أوجد الصورة المركبة لكل متجه.

b. أوجد الصورة المركبة للمتجه الناتج المؤثر على الكاميرا.

c. أوجد مقدار القوة الناتجة واتّجاهها.

64. القوة يوجد صندوق ثابت على منحدر. تؤثر الجاذبية **g** والاحتكاك على الصندوق. مركبات الجاذبية موضحة في الرسم التخطيطي. ما الذي يجب أن يكون صحيحًا بشأن قوة الاحتكاك حتى يكون هذا السيناريو ممكنًا؟



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

65. الاستنتاج إذا كان المتجهان **a** و **b** متوازيين، فاكتب معادلة متجهات تربط **a** و **b**.

66. التحدي لسحب الأمتعة، يبذل أحمد قوة تبلغ 150 نيوتن بزاوية 58° مع المركّبة الأفقية. إذا كانت القوة الناتجة المؤثرة على الأمتعة هي 72 نيوتن بزاوية 56.7° مع المركبة الأفقية، فما مقدار ناتج $F_{\text{الاحتكاك}}$ و $F_{\text{الوزن}}$؟

67. التبرير إذا علمتَ نقطة بداية متجه ومقداره، فصف المحل الهندسي للنقاط التي تمثل المواقع المحتملة لنقطة النهاية.

68. الكتابة في الرياضيات اشرح كيفية إيجاد زاوية اتجاه متجه في الربع الرابع.

69. التحدي زاوية اتجاه $\langle x, y\rangle$ هي $(4y)°$. أوجد x بدلالة y.

الإثبات أثبت كل خاصية متجهات. افترض أن $\mathbf{a} = \langle x_1, y_1\rangle$، و $\mathbf{b} = \langle x_2, y_2\rangle$، و $\mathbf{c} = \langle x_3, y_3\rangle$.

70. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

71. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

72. $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$، حيث k كمية عددية

73. $|k\mathbf{a}| = |k|\,|\mathbf{a}|$، حيث k كمية عددية

مراجعة شاملة

74. **الألعاب** يسحب فهد لعبة من خلال بذل قوة مقدارها 1.5 نيوتن على خيط مربوط باللعبة.

a. يصنع الخيط زاوية °52 مع الأرض. أوجد المركبتين الأفقية والرأسية للقوة.

b. إذا رفع فهد الخيط بحيث يصنع زاوية °78 مع الأرض، فما مقداري المركبتين الأفقية والرأسية للقوة؟

اكتب كل زوج من المعادلات الوسيطية في صورة متعامدة.

75. $y = t^2 + 2, x = 3t - 6$

76. $y = t^2 - 5, x = 2t + 8$

77. $y = 7t, x = t^2 - 1$

78. **المظلات** مظلة شاطئ لها قوس على شكل قطع مكافئ.
اكتب معادلة لتمثيل القوس، مع افتراض أن نقطة الأصل والرأس عند نقطة التقاء عمود وقماش المظلة. عبّر عن y بدلالة x.

حلل كل تعبير إلى كسور جزئية.

79. $\frac{5z - 11}{2z^2 + z - 6}$

80. $\frac{7x^2 + 18x - 1}{(x^2 - 1)(x + 2)}$

81. $\frac{9 - 9x}{x^2 - 9}$

أثبت صحة كل متطابقة.

82. $\sin(\theta + 180°) = -\sin\theta$

83. $\sin(60° + \theta) + \sin(60° - \theta) = \sqrt{3}\cos\theta$

عبّر عن كل لوغاريتم بدلالة ln 3 وln 7 .

84. $\ln 189$

85. $\ln 5.\overline{4}$

86. $\ln 441$

87. $\ln \frac{9}{343}$

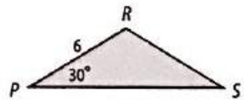
أوجد $f(c)$ باستخدام التعويض.

88. $f(x) = 6x^6 - 9x^4 + 12x^3 - 16x^2 + 8x + 24; c = 6$

89. $f(x) = 8x^5 - 12x^4 + 18x^3 - 24x^2 + 36x - 48, c = 4$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

90. **SAT/ACT** إذا كان $PR = RS$، فما مساحة المثلث PRS؟



A $9\sqrt{2}$
B $9\sqrt{3}$
C $18\sqrt{2}$
D $18\sqrt{3}$
E $36\sqrt{3}$

91. **مراجعة** صنع فالح لعبة احتفالاً بتخرج أخته الصغيرة. لوحة اللعب عبارة عن دائرة مقسمة بالتساوي إلى 8 قطاعات. إذا كان نصف قطر الدائرة 18 سنتيمتر، فما المساحة التقديرية للقطاع؟

F 4 cm
G 32 cm
H 127 cm
J 254 cm

92. المسعفون ينقل إبراهيم وإسماعيل أحد الأشخاص على نقالة. يدفع إبراهيم النقالة من الخلف بقوة 135 نيوتن بزاوية °58 مع المركبة الأفقية، بينما يسحب إسماعيل النقالة من الأمام بقوة 214 نيوتن بزاوية °43 مع المركبة الأفقية. ما مقدار القوة الأفقية المبذولة على النقالة؟

A 228 نيوتن
B 260 نيوتن
C 299 نيوتن
D 346 نيوتن

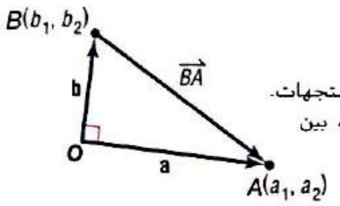
93. **مراجعة** أوجد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها $(x - 4)^2 + y^2 - 16 = 0$.

F 4 وحدات؛ $C(-4, 0)$؛ $r =$
G 16 وحدة؛ $C(-4, 0)$؛ $r =$
H 4 وحدات؛ $C(4, 0)$؛ $r =$
J 16 وحدة؛ $C(4, 0)$؛ $r =$

7-3 الضرب النقطي ومساقط المتجهات

:: السابق	:: الحالي	:: لماذا؟
● قمتُ بإيجاد مقادير المتجهات الجبرية وإجراء العمليات عليها.	1 إيجاد ناتج الضرب النقطي لمتجهين، واستخدام ناتج الضرب النقطي لإيجاد الزاوية بينهما. 2 إيجاد مسقط متجه على آخر.	● كلمة الشغل يمكن أن يكون لها معانٍ مختلفة في الحياة اليومية، ولكن في الفيزياء، تعريفها محدد للغاية. الشغل هو مقدار القوة المبذولة على جسم مضروبة في المسافة التي يتحرك الجسم خلالها بالتوازي مع هذه القوة. يمكن كذلك حساب الشغل، مثل ذلك المبذول لدفع سيارة لمسافة محددة، باستخدام عملية على متجه تُسمى ناتج الضرب النقطي.

المفردات الجديدة
الضرب النقطي dot product
متعامد orthogonal
مسقط المتجه vector projection
الشغل work



1 الضرب النقطي

في الدرس 7-2، درستَ عمليتي جمع المتجهات وضربها في كمية عددية. في هذا الدرس، سوف تستخدم عملية ثالثة على المتجهات. فكر في متجهين متعامدين في الوضع القياسي **a** و **b**. افترض أن $\overrightarrow{BA}$ هو المتجه بين نقطتي نهايتهما كما هو موضح بالشكل. من خلال نظرية فيثاغورس، نعلم أن

$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.

باستخدام تعريف مقدار متجه، يمكننا إيجاد $|\overrightarrow{BA}|^2$.

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$$

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2$$

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$$

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$$

لاحظ أن التعبيرين $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$ و $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ متكافئان فقط في حالة $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. التعبير $a_1b_1 + a_2b_2$ يُسمى **ناتج الضرب النقطي** لـ **a** و **b**. يُشار إليهما بالصورة **a . b** ويكتبان بالصورة a نقطة b.

المفهوم الأساسي الضرب النقطي للمتجهات في مستوى

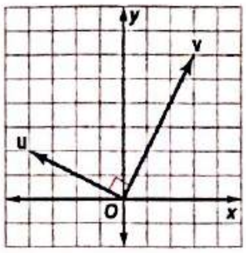
ناتج الضرب النقطي لـ $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ و $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ يعرف على أنه $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

لاحظ أنه بخلاف جمع المتجهات وضربها في كمية عددية، ناتج الضرب النقطي لمتجهين يُنتج كمية عددية، وليس متجهًا. كما هو موضح أعلاه، يكون المتجهان غير الصفريين متعامدين فقط إذا كان ناتج الضرب النقطي لهما يساوي 0. إذا كان ناتج الضرب النقطي لمتجهين يساوي 0، فيُقال أنهما **متعامدان**.

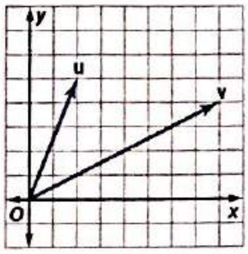
المفهوم الأساسي المتجهات المتعامدة

يكونان المتجهان **a** و **b** متعامدين فقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

المصطلحان متعامد وعمودي لهما المعنى ذاته بشكل أساسي إلا إذا كان **a** أو **b** هو المتجه الصفري. المتجهه الصفري متعامد على أي متجه **a**. حيث $\langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle 0, 0 \rangle = 0a_1 + 0a_2$ أو 0. على الرغم من ذلك، حيث إن المتجه الصفري ليس له مقدار أو اتجاه، فلا يمكن أن يكون متعامدًا على **a**.



الشكل 7.3.1



الشكل 7.3.2

مثال 1 إيجاد ناتج الضرب النقطي لتحديد المتجهات المتعامدة

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثمّ حدّد ما إذا كان u و v متعامدين.

a. $\mathbf{u} = \langle 3, 6\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 2\rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(-4) + 6(2)$$
$$= 0$$

حيث إن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. فإن **u** و **v** متعامدان كما هو موضح بالشكل 7.3.1.

b. $\mathbf{u} = \langle 2, 5\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 8, 4\rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2(8) + 5(4)$$
$$= 36$$

حيث إن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$. فإن **u** و **v** غير متعامدين كما هو موضح بالشكل 7.3.2.

تمرين موجّه

1A. $\mathbf{u} = \langle 3, -2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -5, 1\rangle$

1B. $\mathbf{u} = \langle -2, -3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 9, -6\rangle$

نواتج الضرب النقطي لها الخواص التالية.

المفهوم الأساسي خواص الضرب النقطي

إذا كان u و v و w متجهات و k كمية عددية. فإن الخواص التالية متحققة.

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$	**خاصية التبديل**
$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$	**خاصية التوزيع**
$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$	**خاصية الضرب في كمية عددية**
$\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$	**خاصية ناتج الضرب النقطي للمتجهات الصفرية**
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$	**العلاقة بين ناتج الضرب النقطي ومقدار المتجه**

البرهان

البرهان $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

افترض أن $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2$$
$$= \left(\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)}\right)^2$$
$$= \lvert\mathbf{u}\rvert^2$$

قراءة في الرياضيات

نواتج الضرب الداخلية ونواتج ضرب كمية عددية ناتج الضرب النقطي يُسمى أيضًا ناتج الضرب *الداخلي* أو ناتج ضرب كمية عددية.

مثال 2 استخدام الضرب النقطي لإيجاد المقدار

استخدم ناتج الضرب النقطي لإيجاد مقدار $\mathbf{a} = \langle -5, 12\rangle$.

حيث إن $\lvert\mathbf{a}\rvert^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$. إذًا $\lvert\mathbf{a}\rvert = \sqrt{\mathbf{a} \times \mathbf{a}}$.

$$\lvert\langle -5, 12\rangle\rvert = \sqrt{\langle -5, 12\rangle \times \langle -5, 12\rangle}$$
$$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$$

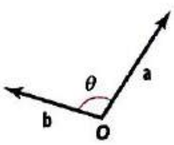
تمرين موجّه

استخدم ناتج الضرب النقطي لإيجاد مقدار المتجه المذكور.

2A. $\mathbf{b} = \langle 12, 16\rangle$

2B. $\mathbf{c} = \langle -1, -7\rangle$

الزاوية θ بين المتجهين غير الصفريين **a** و **b** هي الزاوية المناظرة بين هذين المتجهين عند وضعهما في الوضع القياسي، كما هو موضح. يتم قياس هذه الزاوية دائمًا بحيث $0° \leq \theta \leq 180°$ أو $0 \leq \theta \leq \pi$. يمكن استخدام ناتج الضرب النقطي لإيجاد الزاوية بين متجهين غير صفريين.

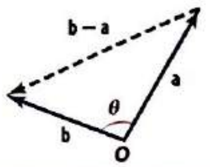


نصيحة دراسية

المتجهات الموازية والمتعامدة يكون المتجهان متعامدين إذا كانت الزاوية بينهما 90°. يكون المتجهان متوازيين إذا كانت الزاوية بينهما 0° أو 180°.

المفهوم الأساسي الزاوية بين متجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهين غير الصفريين a و b، إذا $\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|}$.



البرهان

فكر في المثلث المحدد بواسطة a و b و b − a في الشكل أعلاه.

$$|a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta = |b - a|^2$$

$$|a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta = (b - a) \cdot (b - a)$$

$$|a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta = b \cdot b - b \cdot a - a \cdot b + a \cdot a$$

$$|a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta = |b|^2 - 2a \cdot b + |a|^2$$

$$-2|a||b|\cos\theta = -2a \cdot b$$

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$

مثال 3 إيجاد الزاوية بين متجهين

أوجد الزاوية θ بين المتجهين u و v مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من الدرجة.

a. $u = \langle 6, 2\rangle$ و $v = \langle -4, 3\rangle$

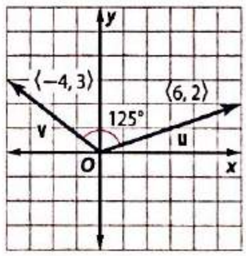
$$\cos\theta = \frac{u \times v}{|u|\,|v|}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle 6, 2\rangle \times \langle -4, 3\rangle}{|\langle 6, 2\rangle|\,|\langle -4, 3\rangle|}$$

$$\cos\theta = \frac{-24 + 6}{\sqrt{40}\,\sqrt{25}}$$

$$\cos\theta = \frac{-9}{5\sqrt{10}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-9}{5\sqrt{10}} = 124.7°\ \text{تقريبًا}$$



يساوي قياس الزاوية بين u و v حوالي 124.7°.

b. $u = \langle 3, 1\rangle$ و $v = \langle 3, -3\rangle$

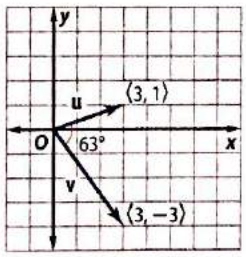
$$\cos\theta = \frac{u \times v}{|u|\,|v|}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle 3, 1\rangle \times \langle 3, -3\rangle}{|\langle 3, 1\rangle|\,|\langle 3, -3\rangle|}$$

$$\cos\theta = \frac{9 + (-3)}{\sqrt{10}\,\sqrt{18}}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = 63°.4\ \text{تقريبًا}$$



يساوي قياس الزاوية بين u و v حوالي 63.4°.

تمرين موجّه

3A. $u = \langle -5, -2\rangle$ و $v = \langle 4, 4\rangle$

3B. $u = \langle 9, 5\rangle$ و $v = \langle -6, 7\rangle$

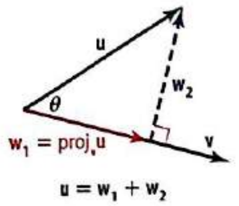
2 مسقط المتجه

مسقط المتجه في الدرس 7-1، تعلمتَ أنه يمكن تحليل منجه إلى مركبتين متعامدتين. بينما تكون هذه المركبات أفقية ورأسية في كثير من الأحيان، لكن من المفيد أحيانًا أن تكون إحداهما موازية للأخرى.

المفهوم الأساسي مسقط u على v

افترض أن u و v متجهان غير صفريين، وافترض أن w_1 و w_2 مركبتي المتجه u بحيث w_1 توازي v كما هو موضح. إذًا، المتجه w_1 يُسمى **مسقط المتجه** u على v، المشار إليه بالعبارة $proj_v u$، و

$$proj_v u = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right)v.$$



نصيحة دراسية

المركبة المتعامدة المتجه w_2 يُسمى مركبة u المتعامدة على v.

البرهان

حيث إن $proj_v u$ يوازي v، فيمكن كتابته في صورة مضاعف كمية عددية لـ v. كمضاعف كمية عددية لمتجه الوحدة v_x بنفس اتجاه v. $proj_v u = |w_1| v_x$. استخدم المثلث القائم الزاوية المكون بواسطة w_1 و w_2 و u ونسبة جيب التمام لإيجاد تعبير لـ $|w_1|$.

$$\cos\theta = \frac{|w_1|}{|u|}$$

$$|u||v|\cos\theta = \cancel{|u|}|v|\frac{|w_1|}{\cancel{|u|}}$$

$$u \cdot v = |v|\,|w_1| \qquad |u|\,|v|\cos\theta = u\ \ v \qquad \cos\theta = \frac{u\ \ v}{|u|\,|v|}$$

$$|w_1| = \frac{u X v}{|v|}$$

الآن استخدم $proj_v u = |w_1|\, v_x$ لإيجاد $proj_v u$ في صورة مضاعف كمية عددية لـ v.

$$proj_v u = |w_1|\, v_x$$

$$= \frac{u \cdot v}{|v|} \cdot \frac{v}{|v|}$$

$$= \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right)v$$

مثال 4 إيجاد مسقط u على v

أوجد مسقط $u = \langle 3, 2\rangle$ على $v = \langle 5, -5\rangle$. ثمّ اكتب u باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه u على v.

الخطوة 1 أوجد مسقط u على v.

$$proj_v u = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right)v$$

$$= \frac{\langle 3, 2\rangle \cdot \langle 5, -5\rangle}{|\langle 5, -5\rangle|^2}\langle 5, -5\rangle$$

$$= \frac{5}{50}\langle 5, -5\rangle$$

$$= \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

الخطوة 2 أوجد w_2.

حيث $u = w_1 + w_2$، فإن $w_2 = u - w_1$.

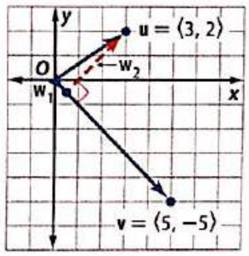
$$w_2 = u - w_1$$

$$= u - proj_v u$$

$$= \langle 3, 2\rangle - \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle$$

إذًا، $proj_v u$ هو $w_1 = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ كما هو موضح بالشكل 7.3.5، و $u = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle + \left\langle \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle$

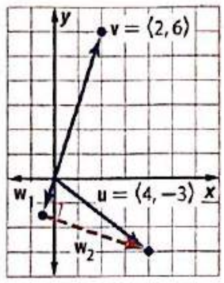


الشكل 7.3.5

تمرين موجّه

4. أوجد مسقط $u = \langle 1, 2\rangle$ على $v = \langle 8, 5\rangle$. ثم اكتب u باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه u على v.

بينما مسقط **u** على **v** متجه يوازي **v**. لا يكون لهذا المتجه بالضرورة نفس اتجاه **v**، كما هو موضح في المثال التالي.



الشكل 7.3.6

مثال 5 المسقط في عكس اتجاه v

أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle 4, -3\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 2, 6\rangle$. ثمّ اكتب u باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه u على v.

لاحظ أن الزاوية بين **u** و **v** منفرجة. إذًا مسقط **u** على **v** يقع على المتجه المعاكس لـ **v** أو **v−**. كما هو موضح بالشكل 7.3.6.

الخطوة 1 أوجد مسقط **u** على **v**.

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$

$$= \frac{\langle 4, -3\rangle \cdot \langle 2, 6\rangle}{|\langle 2, 6\rangle|^2}\langle 2, 6\rangle$$

$$= \frac{-10}{40}\langle 2, 6\rangle = \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$$

الخطوة 2 أوجد $\mathbf{w}_2$.

حيث $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$، $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$ أو $\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.

$$\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \langle 4, -3\rangle - \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$$

إذًا، $\mathbf{w}_1 = \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$ و $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$، $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle + \left\langle \frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$.

تمرين موجّه

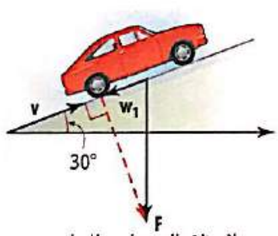
5. أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle -3, 4\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 6, 1\rangle$. ثمّ اكتب **u** باعتباره مجموع متّجهين متعامدين. أحدهما هو مسقط المتّجه **u** على **v**.

إذا كان المتجه **u** يمثل قوة، فإن $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ يمثل تأثير تلك القوة في اتجاه **v**. على سبيل المثال، إذا قمت بدفع صندوق لأعلى التل (في اتجاه **v**) بالقوة **u** (الشكل 7.3.7)، القوة المؤثرة هي في دفع المركبة في اتجاه **v**، $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.

الشكل 7.3.7

مثال 6 من الحياة اليومية استخدام مسقط متجه لإيجاد قوة

السيارات تقف سيارة تزن 1360 كيلوجرام على تل مائل بزاوية °30 كما هو موضح. إذا تم تجاهل قوة الاحتكاك، فما القوة اللازمة لمنع تدحرج السيارة لأسفل التل؟



ملاحظة: الرسم ليس للقياس.

وزن السيارة هو القوة المبذولة بفعل الجاذبية، $\mathbf{F} = \langle 0, -3000\rangle$. لإيجاد القوة $-\mathbf{w}_1$ اللازمة لمنع تدحرج السيارة لأسفل التل، أسقط **F** على متجه الوحدة **v** في اتجاه جانب التل.

الخطوة 1 أوجد متجه الوحدة **v** في اتجاه التل.

$$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}|(\cos\theta), |\mathbf{v}|(\sin\theta)\rangle$$

$$= \langle 1(\cos 30°), 1(\sin 30°)\rangle = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$$

الخطوة 2 أوجد $\mathbf{w}_1$، مسقط **F** على متجه الوحدة **v**، $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{F}$.

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{F} = \left(\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$

$$= (\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}$$

$$= \left(\langle 0, -3000\rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle\right)\mathbf{v} \qquad \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$$

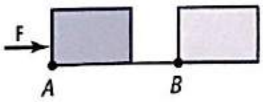
$$= -1500\mathbf{v}$$

القوة اللازمة هي $-\mathbf{w}_1 = -(-1500\,\mathbf{v})$ أو $1500\mathbf{v}$. حيث **v** هو متجه وحدة، يعني هذا أن هذه القوة مقدارها 680.4 كيلوجرام وفي اتجاه جانب التل.

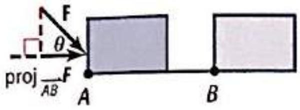
تمرين موجّه

6. **التزلج** تجلس نسرين على زلاجة على جانب تل مائل بزاوية °60. ما القوة اللازمة لمنع انزلاق الزلاجة لأسفل التل إذا علمت أن وزن نسرين والزلاجة 125 كيلوجرام؟

من التطبيقات الأخرى لمسقط المتجه حساب الشغل المبذول بواسطة قوة. فكر في قوة ثابتة **F** تؤثر على جسم لتحريكه من النقطة A إلى النقطة B كما هو موضح بالشكل 7.3.8. إذا كان **F** يوازي $\overrightarrow{AB}$، فإن **الشغل** W المبذول بواسطة **F** هو مقدار القوة في المسافة من A إلى B أو $W = |\mathbf{F}||\overrightarrow{AB}|$.



الشكل 7.3.8



الشكل 7.3.9

لحساب الشغل المبذول بواسطة قوة ثابتة **F** في أي اتجاه لتحريك جسم من النقطة A إلى B، كما هو موضح بالشكل 7.3.9 يمكنك استخدام مسقط المتجه **F** على $\overrightarrow{AB}$.

$$W = |\text{proj}_{\overrightarrow{AB}} \mathbf{F}|\,|\overrightarrow{AB}|$$

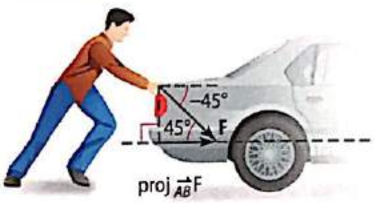
$$= |\mathbf{F}|\,(\cos\theta)\,|\overrightarrow{AB}| \qquad |\text{proj}_{\overrightarrow{AB}} \mathbf{F}| = |\mathbf{F}|\cos\theta \qquad \cos\theta = \frac{|\text{proj}_{\overrightarrow{AB}} \mathbf{F}|}{|\mathbf{F}|}$$

$$= \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB} \qquad |\mathbf{F}|\,|\overrightarrow{AB}|\cos\theta = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB} \qquad \cos\theta = \frac{\mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\mathbf{F}|\,|\overrightarrow{AB}|}$$

إذًا، يمكن حساب هذا الشغل من خلال إيجاد ناتج الضرب النقطي للقوة الثابتة **F** والمسافة الموجهة $\overrightarrow{AB}$.

مثال 7 من الحياة اليومية حساب الشغل

المساعدة على جانب الطريق **يدفع شخص سيارة بقوة ثابتة 120 نيوتن بزاوية ثابتة °45 كما هو موضح. أوجد مقدار الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة مسافة 10 أمتار.**



الخطوة 1 استخدم صيغة المسقط للشغل.

مقدار مسقط **F** على $\overrightarrow{AB}$ هو $|\mathbf{F}|\cos\theta = 120$ $\cos 45°$. مقدار المسافة الموجهة $\overrightarrow{AB}$ هو 10.

$$W = |\text{proj}_{\overrightarrow{AB}} \mathbf{F}||\overrightarrow{AB}|$$

$$= (120 \cos 45°)(10) = 848.5 \text{ تقريبًا}$$

الخطوة 2 استخدم صيغة ناتج الضرب النقطي للشغل.

الصورة المركبة لمتجه القوة **F** بدلالة المقدار وزاوية الاتجاه المعلومتين هي $\langle 120\cos(-45°), 120\sin(-45°)\rangle$. الصورة المركبة للمسافة الموجهة لحركة السيارة هي $\langle 10, 0\rangle$.

$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= \langle 120\cos(-45°), 120\sin(-45°)\rangle \cdot \langle 10, 0\rangle$$

$$= [120\cos(-45°)](10) = 848.5 \text{ تقريبًا}$$

إذًا، يبذل الشخص شغلاً مقداره 848.5 جول تقريبًا لدفع السيارة.

تمرين موجّه

7. **التنظيف** يدفع فارس مكنسة كهربائية بقوة 38.5 كيلوجرام. مقبض المكنسة يصنع زاوية °60 مع الأرضية. ما مقدار الشغل، بالقدم-رطل، الذي يبذله عند دفع المكنسة لمسافة 1.8 متر؟

نصيحة دراسية

وحدات الشغل يتم قياس الشغل بالقدم-رطل في النظام العرفي للقياس وبالنيوتن-متر (N·m) أو الجول (J) في النظام المتري.

تمارين

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثم حدّد ما إذا كان u و v متعامدين. (مثال 1)

1. $\mathbf{u} = \langle 3, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 2\rangle$
2. $\mathbf{u} = \langle -10, -16\rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 5\rangle$
3. $\mathbf{u} = \langle 9, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3\rangle$
4. $\mathbf{u} = \langle 4, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 5\rangle$
5. $\mathbf{u} = \langle 1, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 8\rangle$
6. $\mathbf{u} = 11\mathbf{i} + 7\mathbf{j}; \mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$
7. $\mathbf{u} = \langle -4, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -2\rangle$
8. $\mathbf{u} = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}; \mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

9. **المستلزمات الرياضية** يوضح المتجه $\mathbf{u} = \langle 406, 297\rangle$ أعداد كرات السلة للرجال والنساء على التوالي في مخزون متجر مستلزمات رياضية. يوضح المتجه $\mathbf{v} = \langle 27.5, 15\rangle$ أسعار نوعي الكرات بالدرهم على التوالي. (مثال 1)
   a. أوجد ناتج الضرب النقطي $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
   b. فسر الناتج في سياق المسألة.

استخدم ناتج الضرب النقطي لإيجاد مقدار المتجه المذكور. (مثال 2)

10. $\mathbf{m} = \langle -3, 11\rangle$
11. $\mathbf{r} = \langle -9, -4\rangle$
12. $\mathbf{n} = \langle 6, 12\rangle$
13. $\mathbf{v} = \langle 1, -18\rangle$
14. $\mathbf{p} = \langle -7, -2\rangle$
15. $\mathbf{t} = \langle 23, -16\rangle$

أوجد الزاوية θ بين u و v لأقرب جزء من عشرة من الدرجة. (مثال 3)

16. $\mathbf{u} = \langle 0, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, -4\rangle$
17. $\mathbf{u} = \langle 7, 10\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -4\rangle$
18. $\mathbf{u} = \langle -2, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -10\rangle$
19. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
20. $\mathbf{u} = \langle -9, 0\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -1\rangle$
21. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -7\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
22. $\mathbf{u} = \langle 6, 0\rangle, \mathbf{v} = \langle -10, 8\rangle$
23. $\mathbf{u} = -10\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{v} = 10\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

24. **التخييم** انطلق عمر وعلي من موقع التخييم للبحث عن حطب. يمكن تمثيل المسار الذي اتخذه عمر بواسطة $\mathbf{u} = \langle 3, -5\rangle$. يمكن تمثيل المسار الذي اتخذه علي بواسطة $\mathbf{v} = \langle -7, 6\rangle$. أوجد الزاوية بين زوج المتجهات. (مثال 3)

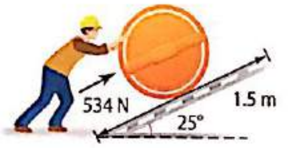
أوجد مسقط u على v. ثمّ اكتب u باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه u على v. (المثالان 4 و 5)

25. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
26. $\mathbf{u} = \langle 5, 7\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 4\rangle$
27. $\mathbf{u} = \langle 8, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 1\rangle$
28. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$
29. $\mathbf{u} = \langle 2, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 8\rangle$
30. $\mathbf{u} = \langle -5, 9\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 4\rangle$
31. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - 8\mathbf{j}, \mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
32. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}, \mathbf{v} = 9\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

33. **العربة** يسحب عيسى أخته في عربة لأعلى منحدر صغير بميل °15. إذا كان مجموع وزني أخت عيسى والعربة 78 كيلوجرام. فما القوة اللازمة لمنع تدحرجها لأسفل المنحدر؟ (مثال 6)

34. **الزحلوقة** تنزلق نجلاء لأسفل على زحلوقة ولكن توقفت عندما لاحظت طالبًا آخر يرقد مصابًا في أسفل الزحلوفة. ما القوة اللازمة لمنعها من الانزلاق لأسفل الزحلوقة إذا كانت زاوية الميل °53 ووزنها 62 كيلوجرام؟ (المثال 6)

35. **الفيزياء** يدفع علي برميل إنشاءات لأعلى منحدر طوله 1.5 متر لإدخاله في صندوق شاحنة. يستخدم قوة 534 نيوتن وزاوية المنحدر °25 مع المركبة الأفقية. ما مقدار الشغل بالجول الذي يبذله علي؟ (المثال 7)

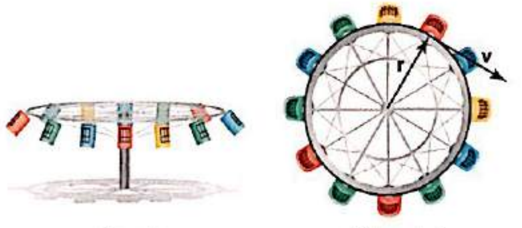


36. **التسوق** تدفع سها عربة تسوق بقوة 125 نيوتن وزاوية انخفاض °52. ما مقدار الشغل بالجول الذي ستبذله سها لو دفعت عربة التسوق لمسافة 200 متر؟ (المثال 7)

أوجد متجهًا متعامدًا لكل متجه.

37. $\langle -2, -8\rangle$
38. $\langle 3, 5\rangle$
39. $\langle 7, -4\rangle$
40. $\langle -1, 6\rangle$

41. **الأراجيح** لأرجوحة متنزه ترفيهي دائرية. متجه الوضع r متعامد على متجه السرعة المماس v عند أي نقطة على الدائرة، كما هو موضح أدناه.



المشهد الأمامي — المشهد من الأعلى

   a. إذا كان نصف قطر الأرجوحة 20 متراً وسرعتها ثابتة عند 40 متراً في الثانية. فاكتب صور مركبات متجه الوضع r ومتجه السرعة المماس v عندما تكون r بزاوية موجهة °35.
   b. ما الطريقة التي يمكن استخدامها لإثبات أن متجه الوضع ومتجه السرعة من الجزء a متعامدان؟ وضّح أن المتجهين متعامدان.

إذا علمتَ v و u . v، فأوجد u.

42. $v = \langle 3, -6 \rangle$, $u \cdot v = 33$

43. $v = \langle 4, 6 \rangle$, $u \cdot v = 38$

44. $v = \langle -5, -1 \rangle$, $u \cdot v = -8$

45. $v = \langle -2, 7 \rangle$, $u \cdot v = -43$

46. **المدرسة** تسحب طالبة حقيبتها من صف الكيمياء إلى صف اللغة الإنجليزية بقوة 175 نيوتن.

a. إذا بذلت 3060 جول لسحب حقيبتها لمسافة 31 مترًا، فما زاوية القوة؟

b. إذا بذلت 1315 جول بزاوية 60°، فما مسافة سحب الحقيبة؟

حدد ما إذا كان كل زوج من المتجهات *موازيًا* أو *متعامدًا* أو *ليس أيًا منهما*. وضح استنتاجك.

47. $u = \left\langle -\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right\rangle$, $v = \langle 9, 8 \rangle$

48. $u = \langle -1, -4 \rangle$, $v = \langle 3, 6 \rangle$

49. $u = \langle 5, 7 \rangle$, $v = \langle -15, -21 \rangle$

50. $u = \langle \sec\theta, \csc\theta \rangle$, $v = \langle \csc\theta, -\sec\theta \rangle$

أوجد الزاوية بين المتجهين بالراديان.

51. $u = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)i + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)j$, $v = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)i + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)j$

52. $u = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)i + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)j$, $v = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)i + \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)j$

53. $u = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)i + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)j$, $v = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)i + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)j$

54. $u = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)i + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)j$, $v = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)i + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)j$

55. **الشغل** يرفع عدنان ابن أخيه الذي يزن 16 كيلوجرامًا لمسافة 0.9 متر. يمكن حساب قوة الوزن بالنيوتن باستخدام $F = mg$، حيث يمثل m الكتلة بالكيلوجرام هي g و 9.8 أمتار في الثانية المربعة. ما مقدار الشغل الذي بذله عدنان لرفع ابن أخيه؟

تم تحديد رؤوس مثلث على المستوى الإحداثي. أوجد مقاييس زوايا كل مثلث باستخدام المتجهات. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة.

56. $(2, 3), (4, 7), (8, 1)$

57. $(-3, -2), (-3, -7), (3, -7)$

58. $(-4, -3), (-8, -2), (2, 1)$

59. $(1, 5), (4, -3), (-4, 0)$

إذا علمتَ u و |v| و θ، الزاوية بين u و v، فأوجد القيم المحتملة لـ v. قرِّب إلى أقرب جزء من مئة.

60. $u = \langle 4, -2 \rangle$, $|v| = 10$, $45°$

61. $u = \langle 3, 4 \rangle$, $|v| = \sqrt{29}$, $121°$

62. $u = \langle -1, -6 \rangle$, $|v| = 7$, $96°$

63. $u = \langle -2, 5 \rangle$, $|v| = 12$, $27°$

64. **السيارات** تقف سيارة على سطح مائل بزاوية 9°. بافتراض أن القوتين الوحيدتين المؤثرتين على السيارة هما الجاذبية وقوة الضغط على المكابح ومقدارها 275 نيوتن. فكم تزن السيارة تقريبًا؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

65. **التبرير** حدّد إذا ما كانت العبارة التالية صحيحة أم *خاطئة*. اشرح.
إذا كانت |d| و|e| و|f| تشكل ثلاثية فيثاغورس، والزاويتان بين d و e وبين e و f حادتان، إذًا يجب أن تكون الزاوية بين d و f قائمة. اشرح استنتاجك.

66. **تحليل الخطأ** يدرس محمود ومحمد خواص ناتج الضرب النقطي. يستنتج محمود أن ناتج الضرب النقطي يتسم بخاصية التجميع لأنه تبديلي، بمعنى أن $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$. يختلف محمد معه. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ وضّح استنتاجك.

67. **التبرير** حدّد إذا ما كانت العبارة التالية صحيحة أم *خاطئة*.
إذا كان a و b متعامدين على v في المستوى، إذًا a و b متوازيان. اشرح استنتاجك.

68. **التحدي** إذا كان u و v متعامدين، فما مسقط u على v؟ **0**

69. **البرهان** برهن على أنه إذا كانت الزاوية بين u و v هي 90°، فإن $u \cdot v = 0$ باستخدام صيغة الزاوية بين المتجهات غير الصفرية.

البرهان أثبت كل خاصية لناتج الضرب النقطي. افترض أن $u = \langle u_1, u_2 \rangle$، $v = \langle v_1, v_2 \rangle$، $w = \langle w_1, w_2 \rangle$.

70. $u \cdot v = v \cdot u$

71. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$

72. $k(u \cdot v) = ku \cdot v = u \cdot kv$

73. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيفية إيجاد ناتج الضرب النقطي لمتجهين غير صفريين.

مراجعة شاملة

أوجد كل مما يلي لـ $a = \langle 10, 1\rangle, b = \langle -5, 2.8\rangle, c = \left\langle \frac{3}{4}, -9\right\rangle$.

74. $b - a + 4c$

75. $c - 3a + b$

76. $2a - 4b + c$

77. الجولف يدفع يوسف كرة جولف بسرعة 62.5 متر في الثانية بزاوية °32 مع الأرض. في نفس الحفرة، يدفع سعيد كرة جولف بسرعة 57.9 متر في الثانية بزاوية °41 مع الأرض. أوجد مقداري المركبتين الأفقية والرأسية لكل قوة.

مثّل بيانيًا القطع الزائد الممثل بكل معادلة.

78. $\frac{(x-5)^2}{48} - \frac{y^2}{5} = 1$

79. $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{49} = 1$

80. $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{4} = 1$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير، إن وُجِدت.

81. $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{6}\right)$

82. $\arctan\left(\tan \frac{1}{2}\right)$

83. $\sin\left(\cos^{-1} \frac{3}{4}\right)$

حُـــلّ كل من المعادلات التالية.

84. $\log_{12}(x^3 + 2) = \log_{12} 127$

85. $\log_2 x = \log_2 6 + \log_2 (x - 5)$

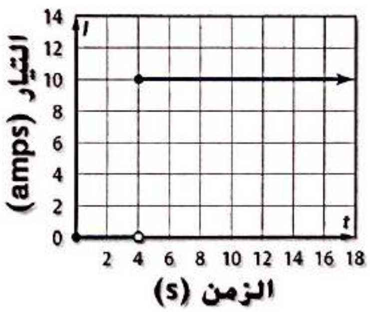
86. $e^{5x-4} = 70$

87. الكهرباء تحتوي الدائرة الكهربائية البسيطة على مصدر طاقة ومقاومة فقط. عند إيقاف تشغيل مصدر الطاقة، لا يوجد تيار في الدائرة. عند تشغيل مصدر الطاقة، يصبح التيار قيمة ثابتة على الفور تقريبًا. يمكن تمثيل هذه الحالة بتمثيل بياني كالموضح. I يمثل التيار بالأمبير، و t يمثل الزمن بالثانية.

a. عند أي من قيم t تكون الدالة غير متصلة؟

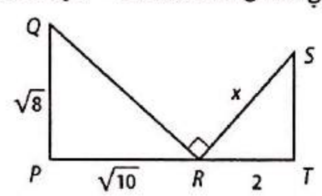
b. متى تم تشغيل مصدر الطاقة؟

c. إذا غادر من قام بتشغيل مصدر الطاقة وعاد بعد ساعات، فكم سيكون قياس التيار في الدائرة؟



مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

88. SAT/ACT في الشكل أدناه، $\triangle PQR \sim \triangle TRS$. ما قيمة x؟



A $\sqrt{2}$ **B** $\sqrt{5}$ **C** 3 **D** $3\sqrt{2}$ **E** 6

89. مراجعة فكر في $C(-9, 2)$ و $D(-4, -3)$. أي مما يلي صورة مركبة ومقدار $\overrightarrow{CD}$؟

F $\langle 5, -5\rangle, 5\sqrt{2}$

G $\langle 5, -5\rangle, 6\sqrt{2}$

H $\langle 6, -5\rangle, 5\sqrt{2}$

J $\langle 6, -6\rangle, 6\sqrt{2}$

90. يتم سحب زلاجة ثلوج من خلال بذل قوة 25 كيلوجرام على حبل يصنع زاوية °20 مع المركبة الأفقية. كما هو موضح بالشكل. ما المقدار التقريبي للشغل المبذول لسحب الزلاجة لمسافة 50 متر؟

A 428 متر-كيلوجرام

B 1093 متر-كيلوجرام

C 1175 متر-كيلوجرام

D 1250 متر-كيلوجرام

91. مراجعة إذا كانت $t = \langle -6, 2\rangle$ و $s = \langle 4, -3\rangle$، فأي مما يلي يمثل $t - 2s$؟

F $\langle 14, 8\rangle$

G $\langle 14, 6\rangle$

H $\langle -14, 8\rangle$

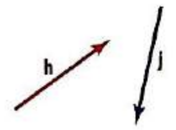
J $\langle -14, -8\rangle$

7 اختبار نصف الوحدة

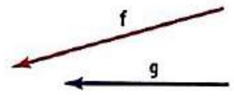
الدروس من 7-1 إلى 7-3

أوجد ناتج كل زوج من المتّجهات باستخدام إما طريقة المثلّث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج بالسنتيمتر واتجاهه بالنسبة إلى المركّبة الأفقية. (الدرس 7-1)

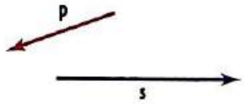
1.



2.



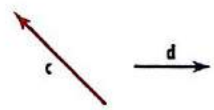
3.



4.

5. **التزلّج** يسحب علي زلّاجة عبر الثلوج بقوة تبلغ 50 نيوتن بزاوية $35°$ مع المركّبة الأفقية. أوجد مقداري المركبتين الأفقية والرأسية للقوة. (الدرس 7-1)

6. قم بتصميم رسم تخطيطي للمتجهات لما يلي $\frac{1}{2}\mathbf{c} - 3\mathbf{d}$. (الدرس 7-1)



افترض أن $\overrightarrow{BC}$ هو المتجه بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. اكتب $\overrightarrow{BC}$ في صورة توفيق خطي للمتّجهين i و j. (الدرس 7-2)

7. $B(3, -1)$, $C(4, -7)$

8. $B(10, -6)$, $C(-8, 2)$

9. $B(1, 12)$, $C(-2, -9)$

10. $B(4, -10)$, $C(4, -10)$

11. **الاختيار من متعدد** أي مما يلي صورة مركبة للمتجه $\overrightarrow{AB}$ بنقطة البداية $A(-5, 3)$ ونقطة النهاية $B(2, -1)$؟ (الدرس 7-2)

A $\langle 4, -1\rangle$

B $\langle 7, -4\rangle$

C $\langle 7, 4\rangle$

D $\langle -6, 4\rangle$

12. **كرة السلة** بينما يقترب الوقت من الانتهاء في إحدى المباريات، يركض فارس نحو السلة بسرعة 2.5 أمتار في الثانية ويرمي الكرة من منتصف الملعب بسرعة 8 أمتار في الثانية بزاوية $36°$ مع المركّبة الأفقية. (الدرس 7-2)

a. اكتب صورة مركبة للمتجهات التي تمثل سرعة فارس ومسار الكرة.

b. ما مقدار السرعة الناتجة للكرة واتّجاهها؟

أوجد الصورة المُركّبة ومقدار المتجه لكل نقطة بداية ونهاية. (الدرس 7-2)

13. $A(-4, 2)$, $B(3, 6)$

14. $Q(1, -5)$, $R(-7, 8)$

15. $X(-3, -5)$, $Y(2, 5)$

16. $P(9, -2)$, $S(2, -5)$

أوجد الزاوية θ بين u و v لأقرب جزء من عشرة من الدرجة. (الدرس 7-3)

17. $\mathbf{u} = \langle 9, -4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, -2\rangle$

18. $\mathbf{u} = \langle 5, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 10\rangle$

19. $\mathbf{u} = \langle 8, 4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, 4\rangle$

20. $\mathbf{u} = \langle 2, -2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, 8\rangle$

21. **الاختيار من متعدد** إذا كان $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -1, 4\rangle$ و $\mathbf{w} = \langle 8, -5\rangle$. فأوجد $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$. (الدرس 7-3)

F -18

G -2

H 15

J 38

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثم حدّد ما إذا كانت النقطتان u و v متعامدتين. (الدرس 7-3)

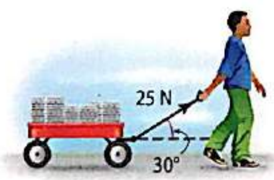
22. $\langle 2, -5\rangle \cdot \langle 4, 2\rangle$

23. $\langle 4, -3\rangle \cdot \langle 7, 4\rangle$

24. $\langle 1, -6\rangle \cdot \langle 5, 8\rangle$

25. $\langle 3, -6\rangle \cdot \langle 10, 5\rangle$

26. **العربة** يستخدم حمد عربة لحمل الصحف لتوزيعها. ويسحب العربة بقوة تبلغ 25 نيوتن بزاوية $30°$ مع المركّبة الأفقية. (الدرس 7-3)



a. ما مقدار الشغل الذي يبذله حمد بالجول عند سحب العربة لمسافة 150 مترًا؟

b. إذا كان مقبض العربة يميل بزاوية $40°$ مع الأرض ويسحب سمير العربة لنفس المسافة وبنفس القوة. فهل يبذل شغلاً أكثر أم أقل؟ اشرح إجابتك.

أوجد مسقط u على v. ثم اكتب u باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه u على v. (الدرس 7-3)

27. $\mathbf{u} = \langle 2, -3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 5\rangle$

28. $\mathbf{u} = \langle 2, 4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 3\rangle$

29. $\mathbf{u} = \langle 3, 4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -9, 2\rangle$

30. $\mathbf{u} = \langle -1, 4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -6, 1\rangle$

7-4 المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

:.السابق
- مثلت المتجهات هندسيًا وجبريًا في الأبعاد الثنائية.

:.الحالي
1. تحديد النقاط والمتجهات في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد.
2. التعبير الجبري للمتجهات في الفضاء وعملياتها.

:.لماذا؟
- يعرف اتجاه الصاروخ بعد انطلاقه بدلالة اتجاه ثنائي الأبعاد وزاوية ثلاثية الأبعاد بالنسبة للمحور الأفقي. حيث إن المسافة والسرعات والقوى الموجهة لا تتقيد بالمستوى، فلا بد أن يتوسع مفهوم المتجهات من الفضاء ثنائي الأبعاد إلى ثلاثي الأبعاد.

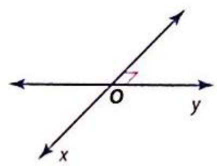
المفردات الجديدة

نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد
three-dimensional coordinate system
محور z-axis z
ثمن octant
مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر
ordered triple

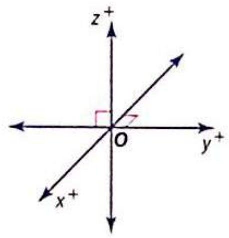
1 الإحداثيات في الأبعاد الثلاثية

يعد المستوى الديكارتي نظام إحداثي ثنائي الأبعاد يتكون من المحورين x و y مما يسمح لك بتحديد وتعيين النقاط في مستوى. ونحتاج إلى **نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد** لتمثيل نقطة في الفضاء.

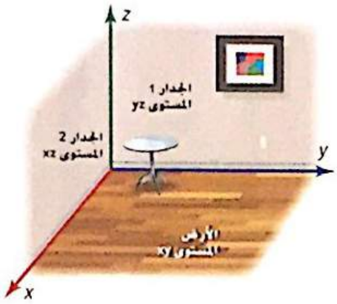
ابدأ بالمستوى xy وضعه بحيث يقدم مظهر عمق (الشكل 7.4.1). ثم أضف محورًا ثالثًا باسم المحور **z** يمر عبر نقطة الأصل ويكون متعامدًا على كل من المحورين x و y (الشكل 7.4.2). ويقسّم المحور الإضافي الفضاء إلى ثمانية أقسام تدعى **الأثمان**. وللمساعدة في تخيل الثمن الأول، انظر إلى ركن غرفة (الشكل 7.4.3). تمثل الأرض المستوى xy وتمثل الجدران المستويين xz و yz.



الشكل 7.4.1



الشكل 7.4.2



الشكل 7.4.3

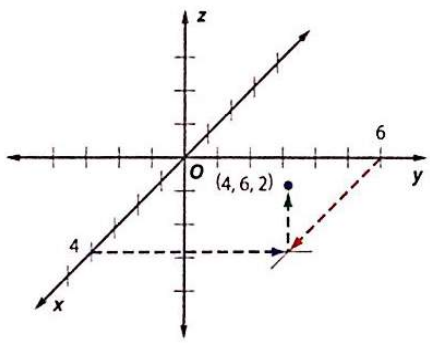
وتمثل النقطة في الفضاء **ثلاثي مُرتب** من الأعداد الحقيقية (x, y, z). ولتعيين هذه النقطة، عليك أولاً تحديد موقع النقطة (x, y) في المستوى xy والتحرك لأعلى أو أسفل موازيًا المحور z وفقًا للمسافة المتجهة التي توضحها z.

مثال 1 تحديد موقع نقطة في الفضاء

عيّن كل نقطة في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد.

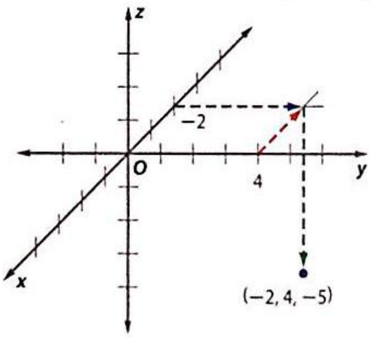
a. (4, 6, 2)

حدد موقع $(4, 6)$ في المستوى xy وضع عليها علامة X. ثم عيّن نقطة على بعد وحدتين أعلى هذا الموقع وموازية للمحور z.



b. (-2, 4, -5)

حدد موقع $(-2, 4)$ في المستوى xy وضع عليها علامة X. ثم عيّن نقطة على بعد 5 وحدات أسفل هذا الموقع وموازية للمحور z.



تمرين موجّه

1A. $(-3, -4, 2)$ 1B. $(3, 2, -3)$ 1C. $(5, -4, -1)$

بعد إيجاد المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء مماثلاً لإيجاد المسافة ونقطة المنتصف في المستوى الإحداثي.

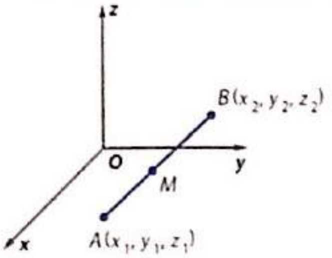
المفهوم الأساسي قوانين المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

يتم الحصول على المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ من خلال

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

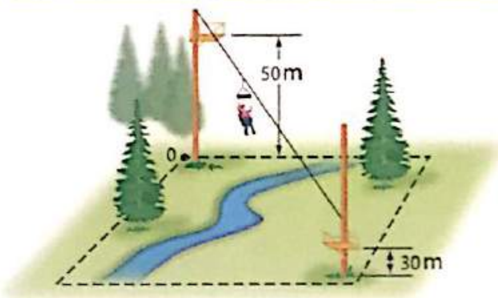
ويتم الحصول على نقطة المنتصف M للنقطتين $\overline{AB}$ من خلال

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$



مثال 2 من الحياة اليومية المسافة ونقطة المنتصف للنقاط في الفضاء

حبل انزلاق تسمح جولة بجبال سيرا مادري للنزلاء بالاستمتاع بالطبيعة من خلال النزول بحبل انزلاق من منصة إلى أخرى أعلى مشاهد الطبيعة الخلابة المحيطة. ويربط حبل انزلاق بين منصتين تمثلان بالإحداثيات (10, 12, 50) و(70, 92, 30) حيث تكون الإحداثيات بالمتر.



a. أوجد طول حبل الانزلاق اللازم لربط المنصتين.

استخدم قانون المسافة للنقاط في الفضاء.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(70 - 10)^2 + (92 - 12)^2 + (30 - 50)^2}$$

$$\approx 101.98$$

لا بد أن يكون طول حبل الانزلاق نحو 102 قدم ليربط بين المنصتين.

b. تم بناء منصة إضافية بحيث تكون في منتصف المسافة بين المنصتين الموجودتين. أوجد إحداثيات المنصة الجديدة.

استخدم قانون نقطة المنتصف للنقاط في الفضاء.

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{10 + 70}{2}, \frac{12 + 92}{2}, \frac{50 + 30}{2}\right) = (40, 52, 40)$$

ستكون إحداثيات المنصة الجديدة (40, 52, 40).

تمرين موجه

2. **الطائرات** تشترط لوائح السلامة على الطائرات أن يكون بينها مسافة نصف كيلومتر على الأقل عندما تكون محلقة في الهواء. تحلق طائرتان أعلى سماء دبي بالإحداثيات (300, 150, 30000) و(450, −250, 28000)، حيث توضح الإحداثيات بالمتر.

A. هل الطائرتان تنتهكان لوائح السلامة؟ اشرح.

B. إذا تم إطلاق ألعاب نارية وانفجرت بين الطائرتين مباشرة. فما إحداثيات نقطة انفجار الألعاب النارية؟

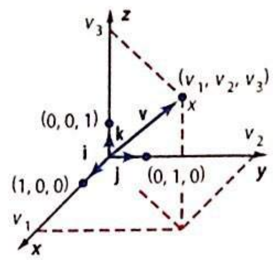
الربط بالحياة اليومية

تسمح جولة في مونتي فيردي في كوستاريكا للزوار برؤية الطبيعة باستخدام نظام دروب وجسور معلقة وحبال انزلاق. وتسمح حبال الانزلاق للضيوف رؤية المناظر الطبيعية المحيطة من ارتفاع يصل إلى 456 قدما فوق مستوى الأرض.

المصدر: Monteverde Info

2 المتجهات في الفضاء

في الفضاء، يعبر عن متجه $\mathbf{v}$ في الوضع القياسي بنقطة نهاية تقع عند (v_1, v_2, v_3) من خلال $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$. ويكون المتجه الصفري $\langle 0, 0, 0\rangle = \mathbf{0}$. وتكون متجهات الوحدة القياسية هي $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle, \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle, \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$ كما هو موضح في الشكل 7.4.4. ويمكن التعبير عن الصورة المركبة لـ $\mathbf{v}$ كتوفيق خطي لمتجهات الوحدة $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.



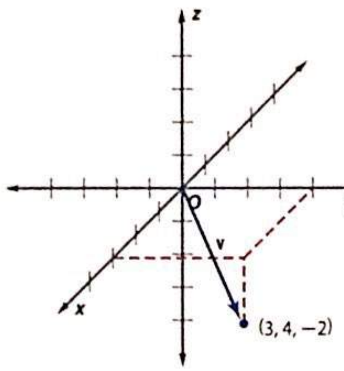
الشكل 7.4.4

مثال 3 تحديد موقع متجه في الفضاء

حدد موقع $\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2\rangle$ ومثله بيانيًا.

عيّن النقطة $(3, 4, -2)$.

ارسم المتجه $\mathbf{v}$ بنقطة نهاية عند $(3, 4, -2)$.



تمرين موجّه

حدد موقع كل متجه في الفضاء ثم مثله بيانيًا.

3A. $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3\rangle$

3B. $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

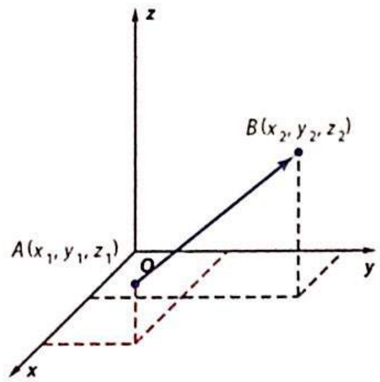
وكما هو الحال مع المتجهات ثنائية الأبعاد، لإيجاد الصورة المركبة للقطعة المستقيمة الموجهة من $A(x_1, y_1, z_1)$ إلى $B(x_2, y_2, z_2)$، فسيتعين عليك طرح إحداثيات نقطة بدايتها من نقطة نهايتها.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$$

إذًا، $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

أو إذا كان $\overrightarrow{AB} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ إذًا $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

بذلك فإن متجه الوحدة $\mathbf{u}$ في الاتجاه $\overrightarrow{AB}$ لا يزال يساوي $\mathbf{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$.



مثال 4 التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًا

أوجد الصورة المركّبة والمقدار للمتّجه $\overrightarrow{AB}$ الذي تكون نقطة بدايته $A(-4, -2, 1)$ ونقطة نهايته $B(3, 6, -6)$. ثم أوجد متجه الوحدة في الاتجاه $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$$
$$= \langle 3 - (-4), 6 - (-2), -6 - 1\rangle = \langle 7, 8, -7\rangle$$

باستخدام الصورة المركبة، فإن مقدار المتجه $\overrightarrow{AB}$ يساوي

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + 8^2 + (-7)^2} = 9\sqrt{2}.$$

باستخدام هذا المقدار والصورة المركبة، أوجد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ في اتجاه $\overrightarrow{AB}$.

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$
$$= \frac{\langle 7, 8, -7\rangle}{9\sqrt{2}}\ 7 = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{18}, \frac{4\sqrt{2}}{9}, -\frac{7\sqrt{2}}{18}\right\rangle \qquad \sqrt{2}$$

تمرين موجّه

أوجد الصورة المركبة ومقدار المتّجه $\overrightarrow{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. ثم أوجد متجه الوحدة في الاتجاه $\overrightarrow{AB}$.

4A. $A(-2, -5, -5), B(-1, 4, -2)$ **4B.** $A(-1, 4, 6), B(3, 3, 8)$

كما هو حال المتجهات في المستوى. عندما تكون المتجهات في الفضاء في صورة مركبة أو معبر عنها في صورة توفيق خطي لمتجهات الوحدة، يمكنك حينها جمعها أو طرحها أو ضربها في كمية غير متجهة.

المفهوم الأساسي عمليات المتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$، $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، وأي كمية غير متجه k، فإن

جمع المتجه	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$
طرح المتجه	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$
ضرب كمية عددية	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$

نصيحة دراسية

عمليات المتجهات تكون خصائص عمليات المتجهات في الفضاء نفس الخصائص للعمليات في المستوى.

مثال 5 عمليات المتجهات في الفضاء

أوجد قيمة كل مما يلي لكل من $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle$ و $\mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle$ و $\mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$.

a. $4\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$

$$4\mathbf{y} + 2\mathbf{z} = 4\langle 3, -6, 2 \rangle + 2\langle -2, 0, 5 \rangle$$
$$= \langle 12, -24, 8 \rangle + \langle -4, 0, 10 \rangle = \langle 8, -24, 18 \rangle$$

b. $2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y}$

$$2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y} = 2\langle -1, 4, -4 \rangle - \langle -2, 0, 5 \rangle + 3\langle 3, -6, 2 \rangle$$
$$= \langle -2, 8, -8 \rangle + \langle 2, 0, -5 \rangle + \langle 9, -18, 6 \rangle$$
$$= \langle 9, -10, -7 \rangle$$

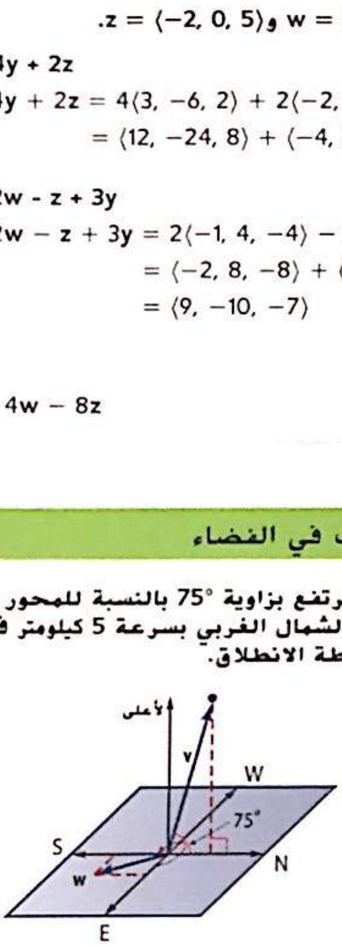
تمرين موجّه

5A. $4\mathbf{w} - 8\mathbf{z}$

5B. $3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w}$

مثال 6 من الحياة اليومية استخدام المتجهات في الفضاء

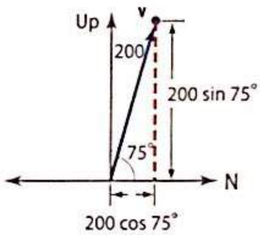
الصواريخ بعد الانطلاق، يتجه صاروخ نموذجي نحو الشمال ويرتفع بزاوية $75°$ بالنسبة للمحور الأفقي بسرعة 200 كيلومتر في الساعة. فإذا هبت الرياح من الشمال الغربي بسرعة 5 كيلومتر في الساعة، فأوجد متجه السرعة الناتجة للصاروخ بالنسبة لنقطة الانطلاق.



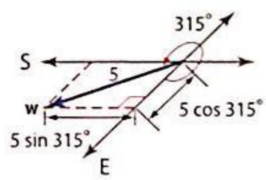
افترض أن النقطة **i** في الغرب، والنقطة **j** في الشمال والنقطة **k** لأعلى. ويوضح المتجه **v** الذي يمثل سرعة الصاروخ والمتجه **w** الذي يمثل سرعة الرياح. لاحظ اتجاه **w** نحو الجنوب الشرقي. حيث إن الرياح تهب من الشمال الغربي.

حيث إن المتجه **v** له مقدار 200 وزاوية اتجاه $75°$. يمكننا إيجاد الصورة المركبة من المتجه **v**، كما هو موضح في الشكل 7.4.5.

$\mathbf{v} = \langle 0, 200 \cos 75°, 200 \sin 75° \rangle$ أو حوالي $\langle 0, 51.8, 193.2 \rangle$



الشكل 7.4.5



الشكل 7.4.6

نظرًا لأن الشرق هو محور x الموجب، تكون زاوية اتجاه **w** تساوي $315°$. حيث إن $|\mathbf{w}| = 5$، فإن الصورة المركبة لهذا المتجه هي $\mathbf{w} = \langle 5 \cos 315°, 5 \sin 315°, 0 \rangle$ أو حوالي $\langle 3.5, -3.5, 0 \rangle$، على النحو الموضح في الشكل 7.4.6.

السرعة الناتجة للصاروخ عبارة عن $\mathbf{v} + \mathbf{w}$.

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle 0, 51.8, 193.2 \rangle + \langle 3.5, -3.5, 0 \rangle$$
$$= \langle 3.5, 48.3, 193.2 \rangle = 3.5\mathbf{i} + 48.3\mathbf{j} + 193.2\mathbf{k}$$

تمرين موجّه

6. **الملاحة الجوية** بعد إقلاع طائرة، اتجهت شرقًا واستمرت في الارتفاع بزاوية $18°$ بالنسبة للمحور الأفقي. وكانت سرعتها في الهواء 250 كيلومتر في الساعة. فإذا هبت الرياح من الشمال الشرقي بسرعة 10 كيلومتر في الساعة، فأوجد المتجه الذي يمثل السرعة الناتجة للطائرة بالنسبة لنقطة الإقلاع. افترض أن النقطة **i** في الغرب، والنقطة **j** في الشمال والنقطة **k** لأعلى.

عيّن كل نقطة في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد. (مثال 1)

1. $(1, -2, -4)$
2. $(3, 2, 1)$
3. $(-5, -4, -2)$
4. $(-2, -5, 3)$
5. $(-5, 3, 1)$
6. $(2, -2, 3)$
7. $(4, -10, -2)$
8. $(-16, 12, -13)$

أوجد طول القطعة المستقيمة ونقطة المنتصف لها باستخدام نقطتي طرفيها المبينتين. (مثال 2)

9. $(-4, 10, 4), (1, 0, 9)$
10. $(-6, 6, 3), (-9, -2, -2)$
11. $(6, 1, 10), (-9, -10, -4)$
12. $(8, 3, 4), (-4, -7, 5)$
13. $(-3, 2, 8), (9, 6, 0)$
14. $(-7, 2, -5), (-2, -5, -8)$

15. **العطلات** تستخدم أسرة من أبوظبي جهاز نظام تحديد المواقع العالمي (GPS) للتخطيط لعطلة في إمارة العين. ووفقًا للجهاز، فإن إحداثيات منزل الأسرة هي $(37.7°, 97.2°, 433\text{ m})$ وإحداثيات إمارة العين هي $(39.4°, 104.8°, 1981\text{ m})$. حدد خطي الطول والعرض والارتفاع لنقطة المنتصف بين أبوظبي والعين. (مثال 2)

16. **الطيارون الحربيون** أثناء جلسة تدريب، يُمثل موقع الطائرتين الحربيتين F-18 من خلال الإحداثيات $(675, -121, 19{,}300)$ و$(-289, 715, 16{,}100)$، حيث تكون الإحداثيات بوحدة القدم. (مثال 2)
    a. حدد المسافة بين الطائرتين.
    b. لأي موقع يحتاج أحد الطائرين الطيران بالطائرة F-18 ليقلل المسافة بين الطائرتين إلى النصف؟

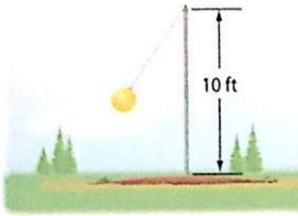
حدد موقع كل متجه في الفضاء ثم مثله بيانيًا. (مثال 3)

17. $\mathbf{a} = \langle 0, -4, 4 \rangle$
18. $\mathbf{b} = \langle -3, -3, -2 \rangle$
19. $\mathbf{c} = \langle -1, 3, -4 \rangle$
20. $\mathbf{d} = \langle 4, -2, -3 \rangle$
21. $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
22. $\mathbf{w} = -10\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$
23. $\mathbf{m} = 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
24. $\mathbf{n} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

أوجد الصورة المُركّبة ومقدار المتّجه $\overline{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. ثم أوجد متجه الوحدة في الاتجاه $\overline{AB}$ (مثال 4)

25. $A(-5, -5, -9), B(11, -3, -1)$
26. $A(-4, 0, -3), B(-4, -8, 9)$
27. $A(3, 5, 1), B(0, 0, -9)$
28. $A(-3, -7, -12), B(-7, 1, 8)$
29. $A(2, -5, 4), B(1, 3, -6)$
30. $A(8, 12, 7), B(2, -3, 11)$
31. $A(3, 14, -5), B(7, -1, 0)$
32. $A(1, -18, -13), B(21, 14, 29)$
33. $A(-5, 12, 17), B(6, -11, 4)$
34. $A(9, 3, 7), B(-5, -7, 2)$

35. **كرة السرعة** في مباراة كرة سرعة، تثبت الكرة في عمود طوله 10 متر بطول حبل. ويضرب لاعبان الكرة في اتجاهين متعاكسين في محاولة للف الطول الكامل للحبل حول العمود. وللعب يمسك أحد اللاعبين الكرة بحيث تكون إحداثياتها $(4.7, 3.6, 5)$ وتكون إحداثيات طرف الحبل المربوط بالعمود $(0, 0, 9.8)$. حيث تكون الإحداثيات بوحدة القدم. حدد مقدار المتجه الذي يمثل طول الحبل. (مثال 4)



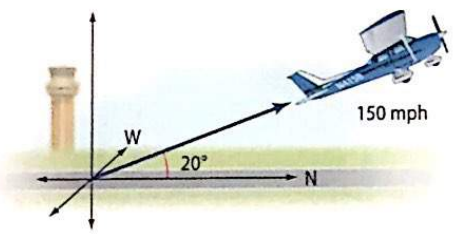
أوجد كل مما يلي لكل من $\mathbf{a} = \langle -5, -4, 3 \rangle$ و$\mathbf{b} = \langle 6, -2, -7 \rangle$ و$\mathbf{c} = \langle -2, 2, 4 \rangle$. (مثال 5)

36. $6\mathbf{a} - 7\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$
37. $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$
38. $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$
39. $6\mathbf{b} + 4\mathbf{c} - 4\mathbf{a}$
40. $8\mathbf{a} - 5\mathbf{b} - \mathbf{c}$
41. $-6\mathbf{a} + \mathbf{b} + 7\mathbf{c}$

أوجد كل مما يلي لكل من $\mathbf{x} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و$\mathbf{y} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ و$\mathbf{z} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. (مثال 5)

42. $7\mathbf{x} + 6\mathbf{y}$
43. $3\mathbf{x} - 5\mathbf{y} + 3\mathbf{z}$
44. $4\mathbf{x} + 3\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$
45. $-8\mathbf{x} - 2\mathbf{y} + 5\mathbf{z}$
46. $-6\mathbf{y} - 9\mathbf{z}$
47. $-\mathbf{x} - 4\mathbf{y} - \mathbf{z}$

48. **الطائرات** تقلع طائرة متجهة ناحية الشمال بسرعة في الهواء 150 كيلومتر في الساعة بزاوية 20° بالنسبة إلى المحور الأفقي. وتهب الرياح بسرعة 8 كيلومتر في الساعة من اتجاه الجنوب الغربي. أوجد المتجه الذي يمثل السرعة الناتجة للطائرة بالنسبة إلى نقطة الإقلاع. افترض أن النقطة **i** في الغرب، والنقطة **j** في الشمال والنقطة **k** لأعلى. (مثال 6)



49. **ألعاب القوى** ترمي مايسة رمحًا في اتجاه الجنوب بسرعة 18 كيلومتر في السعاة وبزاوية 48° بالنسبة إلى المحور الأفقي. إذا كانت الرياح تهب بسرعة 19.3 كيلومتر في الساعة بزاوية S15°E. فأوجد المتجه الذي يمثل السرعة الناتجة للرمح. افترض أن النقطة **i** في الغرب، والنقطة **j** في الشمال والنقطة **k** لأعلى. (مثال 6)

50. الغواصات تغوص غواصة منطلقة في اتجاه الغرب بسرعة 25 عقدة بحرية وبزاوية ميلان 55°. ويتحرك التيار بسرعة 4 عقدات بحرية بزاوية S20°W. أوجد المتجه الذي يمثل السرعة الناتجة للغواصة بالنسبة لنقطة بداية الغوص. افترض أن النقطة **i** في الغرب، والنقطة **j** في الشمال والنقطة **k** لأعلى. (مثال 6)

إذا كانت N هي نقطة منتصف $\overline{MP}$، فأوجد P.

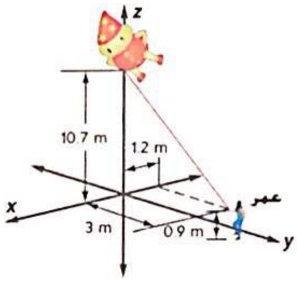
51. $M(3, 4, 5)$; $N\left(\frac{7}{2}, 1, 2\right)$

52. $M(-1, -4, -9)$; $N(-2, 1, -5)$

53. $M(7, 1, 5)$; $N\left(5, -\frac{1}{2}, 6\right)$

54. $M\left(\frac{3}{2}, -5, 9\right)$; $N\left(-2, -\frac{13}{2}, \frac{11}{2}\right)$

55. التطوع يتطوع عمر للمساعدة في توجيه بالون في استعراض. فإذا كان البالون على ارتفاع 10.7 متر ويمسك عمر بشريط ربطه على ارتفاع 0.9 متر أعلى مستوى الأرض كما هو موضح. فكم طول شريط الربط لأقرب قدم؟



حدد إن كان المثلث بالرؤوس المذكورة *متساوي الساقين* أم *مختلف الأضلاع*.

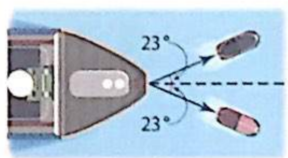
56. $A(3, 1, 2)$, $B(5, -1, 1)$, $C(1, 3, 1)$

57. $A(4, 3, 4)$, $B(4, 6, 4)$, $C(4, 3, 6)$

58. $A(-1, 4, 3)$, $B(2, 5, 1)$, $C(0, -6, 6)$

59. $A(-2.2, 4.3, 5.6)$, $B(0.7, 9.3, 15.6)$, $C(3.6, 14.3, 5.6)$

60. مراكب قطر السفن يسحب مركبي قطر سفن ناقلة عملاقة معطلة. ويشكل أحد حبلي القطر زاوية 23° غرب الشمال بينما يشكل الآخر زاوية 23° شرق الشمال. وتبذل كل عملية جر قوة ثابتة مقدارها 2.5×10^6 نيوتن بزاوية انخفاض 15° أسفل النقطة التي ترتبط فيها الحبال بالناقلة العملاقة. وقد جروا الناقلة ميلين باتجاه الشمال.



a. اكتب متجه ثلاثي الأبعاد يصف القوة المبذولة من كل مركب قطر سفن.

b. أوجد المتجه الذي يصف إجمالي القوة المبذولة على الناقلة العملاقة.

c. إذا بلغ طول كل حبل قطر 300 متر، فكم يبعد كل من المركبين عن الآخر تقريبًا؟

61. الأشكال الكروية استخدم قانون المسافة لنقطتين لإثبات أن الصيغة القياسية لمعادلة شكل كروي مركزه (h, k, ℓ) ونصف قطره r يساوي $r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - \ell)^2$

استخدم القانون من التمرين 61 لكتابة معادلة للشكل الكروي باستخدام المركز ونصف القطر المذكورين.

62. المركز = $(3, -2, -4)$، نصف القطر = 4

63. المركز = $(1, -0, 6)$، نصف القطر = $\frac{1}{2}$

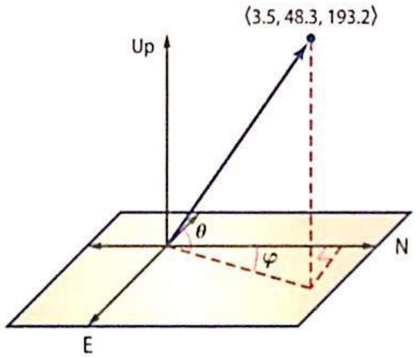
64. المركز = $(4, -3, 5)$، نصف القطر = $\sqrt{3}$

65. المركز = $(1, -7, 0)$، نصف القطر = 12

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

66. الاستنتاج أثبت قانون المسافة في الفضاء. (إرشاد: استخدم نظرية فيثاغورس مرتين.)

67. التحدي راجع المثال 6

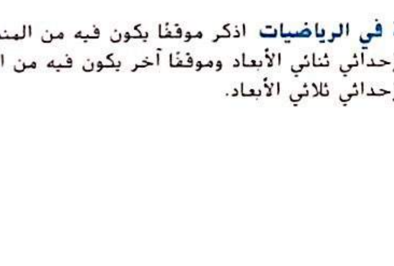


a. احسب السرعة الناتجة للصاروخ.

b. أوجد الاتجاه الربعي φ للصاروخ.

c. احسب زاوية الميل θ الناتجة للصاروخ بالنسبة للمحور الأفقي.

68. التحدي تقف منى في حقل مفتوح متجهة بوجهها نحو N50°E. وتمسك بطائرة ورقية من خلال حبله طوله 10.7 متر يطير مكونًا زاوية 20° مع الحقل. أوجد مركبات المتجه من منى إلى الطائرة الورقية. (إرشاد: استخدم النسب المثلثية ومثلثين قائمي الزاوية لإيجاد **x** و**y** و**z**.)



69. الكتابة في الرياضيات اذكر موقفًا يكون فيه من المنطقي استخدام نظام إحداثي ثنائي الأبعاد وموقفًا آخر يكون فيه من المنطقي استخدام نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد.

مراجعة شاملة

أوجد مسقط u على v. ثمّ اكتب u باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه u على v.

70. $\mathbf{u} = \langle 6, 8 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -1 \rangle$

71. $\mathbf{u} = \langle -1, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1 \rangle$

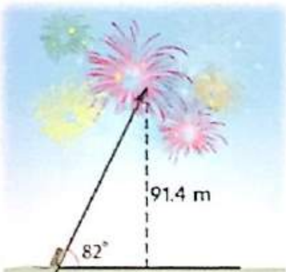
72. $\mathbf{u} = \langle 5, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -2 \rangle$

أوجد الصورة المُركّبة ومقدار المتّجه $\overrightarrow{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين.

73. $A(6, -4), B(-7, -7)$

74. $A(-4, -8), B(1, 6)$

75. $A(-5, -12), B(1, 6)$



ملاحظة: الرسم ليس للقياس

76. **الترفيه** أطلقت الألعاب النارية لليوم الوطني لدولة الإمارات من برج خليفة بزاوية 82° بالنسبة للمحور الأفقي. وقد توقع الفني الذي أطلق قذيفة الألعاب النارية أن تنفجر على بعد حوالي 91.4 متر في الهواء بعد 4.8 ثوانٍ من إطلاقها.

a. أوجد السرعة الابتدائية لقذيفة تم إطلاقها من مستوى الأرض.

b. سيتم وضع حواجز سلامة حول منطقة إطلاق الألعاب النارية لحماية المشاهدين. إذا تم وضع الحواجز على بعد 91.4 متر من نقطة التي تقع أسفل انفجار القذائف مباشرة، فكم ستبعد الحواجز عن النقطة التي تم إطلاق الألعاب النارية منها؟

77. **الإنشاء** مدفأة حجرية صممت كقوس على شكل نصف قطع ناقص سيكون لها فتحة بارتفاع 3 متر في المنتصف وعرض 8 متر عند القاعدة. ولرسم مخطط للمدفأة، يستخدم المقاول حبلاً مربوطًا بدبوسين.

a. ما الموقعين الذي يجب وضع الدبوسين بهما؟

b. ما الطول اللازم للحبل الذي سيستخدم؟ وضّح استنتاجك.

حُـلّ كل معادلة لجميع قيم θ.

78. $\csc \theta + 2 \cot \theta = 0$

79. $\sec^2 \theta - 9 = 0$

80. $2 \csc \theta - 3 = 5 \sin \theta$

مثّل كل دالة بيانيًا.

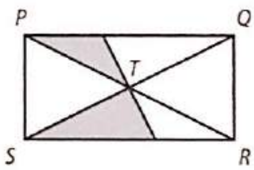
81. $y = \cos^{-1}(x - 2)$

82. $y = 3 +$ قوس جيب الزاوية x

83. $y = \sin^{-1} 3x$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

84. **SAT/ACT** ما النسبة المئوية للجزء المظلل من مساحة المستطيل $PQRS$؟



A 22%　B 25%　C 30%　D $33\frac{1}{3}\%$　E 35%

85. **مراجعة** تغادر سفينة الميناء مبحرة مسافة 75 كيلومتر في اتجاه 35° الشمال الشرقي. عند هذه النقطة، كم تبعد السفينة في اتجاه الشمال عن نقطة بدايتها؟

F 43 كيلومتر　G 55 كيلومتر　H 61 كيلومتر　J 72 كيلومتر

86. أثناء هبوب عاصفة، يمكن التعبير عن القوة التي تبذلها الرياح العاتية على ناطحة سحاب بالمتجه $\langle 132, 3454, -76 \rangle$، حيث تقاس قوة الرياح بالنيوتن. ما المقدار التقريبي لهذه القوة؟

A 3457 N　B 3568 N　C 3692 N　D 3717 N

87. **مراجعة** تحلق طائرة في اتجاه الغرب بسرعة 100 متر في الثانية. وتهب الرياح من اتجاه الجنوب بسرعة 30 مترًا في الثانية. ما المقدار التقريبي لسرعة الطائرة الناتجة؟

F 4 m/s　G 95.4 m/s　H 100 m/s　J 104.4 m/s

مختبر تقنية التمثيل البياني
التحويلات باستخدام المصفوفات

الهدف

- استخدم حاسبة التمثيل البياني لتحويل المتجهات باستخدام المصفوفات.

في الدرس 7-4، تعلمت أنه يمكن تحويل المتجه في الفضاء بكتابته في الصورة المركبة أو عند التعبير عنه في صورة توفيق خطي. ويمكن تحويل المتجه في الفضاء كذلك عند كتابته في صورة مصفوفة 3×1 أو مصفوفة 1×3.

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x\ y\ z]$$

وما أن يكتب في صيغة مصفوفة، يمكن تحويل المتجه باستخدام ضرب المصفوفات-المتجهات.

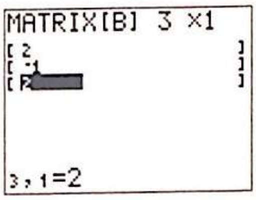
نشاط ضرب المصفوفات-المتجهات

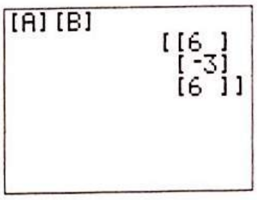
اضرب المتجه $B = 2i - j + 2k$ في مصفوفة التحويل $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ثم مثل كلا المتجهين بيانيًا.

الخطوة 1 اكتب B في صورة مصفوفة.

$$B = 2i - j + 2k = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2 أدخل B و A في حاسبة التمثيل البياني وأوجد AB. حوّل إلى صيغة المتجه.

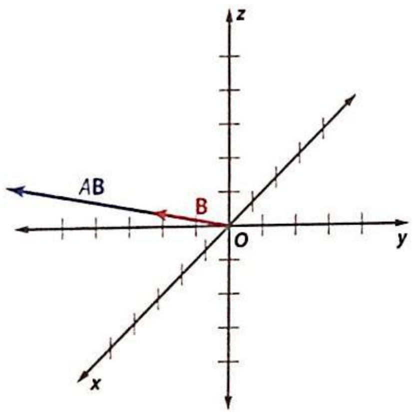




$AB = 6i - 3j + 6k$

الخطوة 3 مثّل B و AB بيانيًا على المستوى الإحداثي.

AB هي تمدد لـــ B بعامل 3.



تمارين

اضرب كل متجه في مصفوفة التحويل. مثّل كلا المتجهين بيانيًا.

1. $h = 4i + j + 8k$

$$B = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

2. $e = 5i + 3j - 9k$

$$V = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. $f = i + 7j - 3k$

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. **الاستنتاج** اضرب $v = 3i - 2j + 4k$ في مصفوفة التحويل $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ثم مثّل كلا المتجهين بيانيًا. وضّح نوع التحويل الذي تم.

الدرس 7-5 الضرب النقطي والضرب المتجهي للمتجهات في الفضاء

السابق	الحالي	لماذا؟
وجدت قيمة ناتج الضرب النقطي لمتجهين في المستوى	1 إيجاد قيمة ناتج الضرب النقطي والزوايا بين المتجهات في الفضاء. 2 إيجاد قيمة ناتج الضرب المتجهي للمتجهات في الفضاء، واستخدام ناتج الضرب المتجهي في إيجاد المساحة والحجم.	يتأثر ميل باب مزود بمفصلة للدوران بالمسافة بين موقع الدفع والمفصلة؛ ومقدار الدفع؛ واتجاه الدفع. وتقيس الكمية التي يطلق عليها *العزم* مدى فاعلية القوة المبذولة على رافعة في التسبب في دوران الشيء حول محوره.

المفردات الجديدة

ناتج الضرب المتجهي
cross product

العزم
torque

متوازي السطوح
parallelepiped

ناتج ضرب قياسي لثلاثة متجهات
triple scalar product

1 الضرب النقطي في الفضاء

حساب نواتج الضرب النقطي لمتجهين في الفضاء، يشبه حساب نواتج الضرب النقطي لمتجهين في مستوى. وكما هو الحال مع المتجهات في المستوى، تكون المتجهات غير الصفرية في الفضاء، متعامدة فقط إن كان ناتج ضربهم النقطي يساوي صفرًا.

المفهوم الأساسي ناتج الضرب النقطي والمتجهات المتعامدة في الفضاء

ناتج الضرب النقطي لـ $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ نعرف على أنها $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ يكون المتجهان **a** و **b** متعامدين فقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

مثال 1 إيجاد ناتج الضرب النقطي لتحديد المتجهات المتعامدة في الفضاء

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثم حدّد ما إذا كانت النقطتان u و v متعامدتين.

a. $\mathbf{u} = \langle -7, 3, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 17, 5 \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -7(5) + 3(17) + (-3)(5)$$
$$= -35 + 51 + (-15) = 1$$

حيث إن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$، فإن **u** و **v** ليسا متعامدين.

b. $\mathbf{u} = \langle 3, -3, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 7, 3 \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(4) + (-3)(7) + 3(3)$$
$$= 12 + (-21) + 9 = 0$$

حيث إن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$، فإن **u** و **v** متعامدان.

تمرين موجّه

1A. $\mathbf{u} = \langle 3, -5, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7, 5 \rangle$

1B. $\mathbf{u} = \langle 4, -2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3, -2 \rangle$

كما هو الحال مع المتجهات في المستوى، إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهات غير الصفرية **a** و **b**، فإن $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$

مثال 2 الزاوية بين متجهين في الفضاء

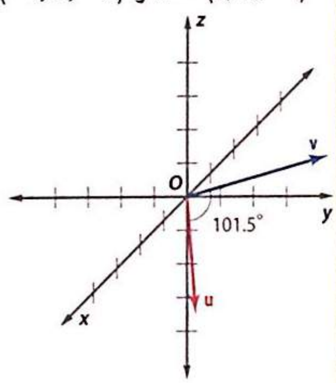
أوجد الزاوية θ المحصورة بين u و v مقربة إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة إذا كان $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -4, 3, -2 \rangle$.

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$$

$$\cos \theta = \frac{\langle 3, 2, -1 \rangle \cdot \langle -4, 3, -2 \rangle}{|\langle 3, 2, -1 \rangle|\,|\langle -4, 3, -2 \rangle|}$$

$$\cos \theta = \frac{-4}{\sqrt{14}\,\sqrt{29}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-4}{\sqrt{406}} \text{ حوالي } = 101.5^\circ$$

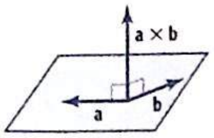


يساوي قياس الزاوية بين **u** و **v** حوالي 101.5°.

تمرين موجّه

2. أوجد قياس الزاوية المحصورة بين $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة.

2 **الضرب المتجهي** من نواتج الضرب الأخرى الهامة المرتبطة بالمتجهات في الفضاء هو الضرب المتجهي. وبخلاف الضرب النقطي، فإن **الضرب المتجهي** للمتجهين **a** و **b** في الفضاء، والمشار إليه في الصورة **a × b** ويقرأ a ضرب b، هو متجه وليس كمية عددية. ويكون المتجه **a × b** متعامدًا على المستوى الذي يحتوي على المتجهين **a** و **b**.



المفهوم الأساسي الضرب المتجهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$، فإن ناتج الضرب المتجهي لـ **a** و **b** هو المتجه
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

مراجعة المفردات

محدد 2 × 2 محدد المصفوفة 2 × 2
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ is $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

إذا طبقنا قانون حساب محدد مصفوفة 3 × 3 على صيغة المحدد التالية والتي تتضمن **i, j, k** ومركبات **a** و **b**، فسنتوصل إلى نفس قانون **a × b**.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

مثال 3 إيجاد ناتج الضرب المتجهي لمتجهين

أوجد ناتج الضرب المتجهي لكلٍ من $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -3, 3, 1\rangle$. ثم برهن أن u × v متعامد على كل من u و v.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

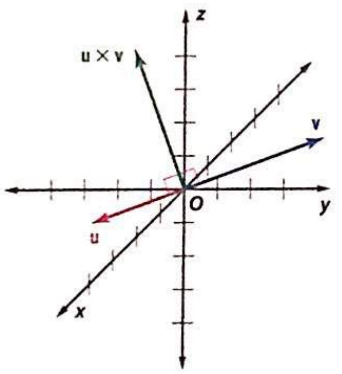
$$= (-2 - 3)\mathbf{i} - [3 - (-3)]\mathbf{j} + (9 - 6)\mathbf{k}$$

$$= -5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$= \langle -5, -6, 3\rangle$$

انتبه!

الضرب المتجهي ينطبق تعريف الضرب المتجهي فقط على المتجهات في فضاء ثلاثي الأبعاد. ولا يعرّف الضرب المتجهي المتجهات في النظام الإحداثي ثنائي الأبعاد.



في التمثيل البياني **u** و **v** و **u × v**. **u × v** متعامد على **u** و **u × v** متعامد على **v**.

لإثبات أن **u × v** متعامد على كل من **u** و **v**، أوجد ناتج الضرب النقطي لـ **u × v** مع **u** و **u × v** مع **v**.

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$	$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle -5, -6, 3\rangle \cdot \langle 3, -2, 1\rangle$	$= \langle -5, -6, 3\rangle \cdot \langle -3, 3, 1\rangle$
$= -5(3) + (-6)(-2) + 3(1)$	$= -5(-3) + (-6)(3) + 3(1)$
$= -15 + 12 + 3 = 0$ ✓	$= 15 + (-18) + 3 = 0$ ✓

حيث إن كل من ناتجي الضرب النقطي مساويين للصفر. إذًا المتجهات متعامدة.

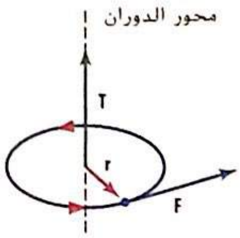
تمرين موجه

أوجد ناتج الضرب المتجهي لـ u و v. ثم برهن أن u × v متعامد على كل من u و v.

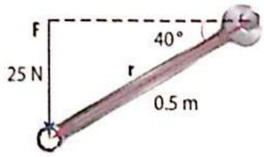
3A. $\mathbf{u} = \langle 4, 2, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4\rangle$

3B. $\mathbf{u} = \langle -2, -1, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4\rangle$

يمكنك استخدام ناتج الضرب المتجهي لإيجاد كمية المتجه المسمى **العزم**. ويقيس العزم مدى فاعلية القوة المبذولة على رافعة في التسبب في دوران الشيء حول محوره. يكون متجه العزم **T** عموديًا على المستوى الذي يحتوي على المسافة الموجّهة **r** من محور الدوران إلى نقطة القوة المبذولة والقوة المبذولة **F** كما هو موضح. وبالتالي يساوي متجه العزم **T = r × F** ويقاس بالنيوتن متر (N • m).



مثال 4 من الحياة اليومية العزم باستخدام ناتج الضرب المتجهي

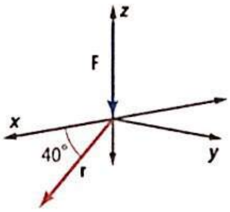


إصلاح السيارات يستخدم عبد الكريم مفتاح ربط الصواميل لإحكام صامولة العروة. ويبلغ طول مفتاح الربط الذي يستخدمه 50 سنتيمترًا أو 0.5 متر. أوجد مقدار واتجاه العزم على صامولة العروة إذا بذل قوة قدرها 25 نيوتن لأسفل لنهاية ذراع التوجيه عندما تكون °40 أسفل محور x الموجب كما هو موضح.

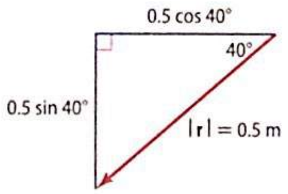
الخطوة 1 مثّل كل متجه في الموقع القياسي بيانيًا (الشكل 7.5.1).

الخطوة 2 حدد الصورة المُركّبة لكل متجه.

يمكن إيجاد الصورة المُركّبة للمتجه التي تمثل المسافة المتجهة من محور الدوران إلى نهاية ذراع التوجيه مباشرة باستخدام المثلث في الشكل 7.5.2 وحساب المثلثات. يكون المتجه **r** بالتالي ⟨0.5 cos 40°, 0, −0.5 sin 40°⟩ أو حوالي ⟨0.38, 0, −0.32⟩. ويساوي المتجه الذي يمثل القوة المبذولة على نهاية ذراع التوجيه 25 نيوتن مباشرة لأسفل. إذًا ⟨0, 0, −25⟩ = **F**.



الشكل 7.5.1



الشكل 7.5.2

الخطوة 3 استخدم ناتج الضرب المتجهي لهذه المتجهات لإيجاد المتجه الذي يمثل العزم على صامولة العروة.

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

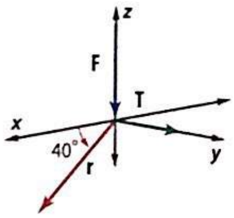
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.38 & 0 & -0.32 \\ 0 & 0 & -25 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -0.32 \\ 0 & -25 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 0.38 & -0.32 \\ 0 & -25 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0.38 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= 0\mathbf{i} - (-9.5)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

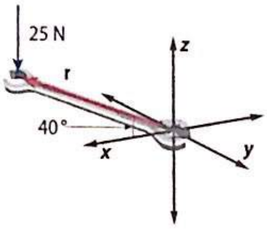
$$= \langle 0, 9.5, 0 \rangle$$

الخطوة 4 أوجد مقدار متجه العزم واتّجاهه. الصورة المُركّبة لمتجه العزم ⟨0, 9.5, 0⟩ تخبرنا بأن مقدار المتجه يساوي حوالي 9.5 نيوتن-متر ويوازي محور **y** الموجب كما هو موضح.



تمرين موجّه

4. **إصلاح السيارات** أوجد مقدار العزم إذا بذل عبد الكريم نفس مقدار القوة على نهاية ذراع التوجيه لأسفل مباشرةً عندما يكوّن ذراع التوجيه زاوية °40 أعلى محور x الموجب كما هو موضح في الشكل 7.5.3.

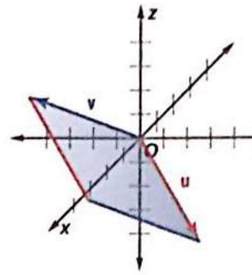


الشكل 7.5.3

مهنة من الحياة اليومية

ميكانيكي السيارات يقوم ميكانيكي السيارات بأعمال الإصلاح التي تتنوع بين المشاكل الميكانيكية البسيطة وحتى عمليات الإصلاح عالية المستوى المتعلقة بالتكنولوجيا. ولا بد أن يتمتع بمهارات جيدة لحل المشكلات والموهبة الميكانيكية والمعرفة بالإلكترونيات والرياضيات. ويكمل الكثير من الميكانيكيين برنامج تدريب مهني في تكنولوجيا خدمات السيارات.

يُستخدم ناتج الضرب المتجهي لمتجهين في تطبيقات هندسية كثيرة. وأحد هذه التطبيقات أن مقدار **u × v** يمثل مساحة متوازي الأضلاع الذي يحتوي على الضلعان المتجاوران **u** و **v** (الشكل 7.5.4).



الشكل 7.5.4

مثال 5 مساحة متوازي أضلاع في الفضاء

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي يحتوي على الضلعين المتجاورين u = 2i + 4j − 3k و v = i − 5j + 3k.

الخطوة 1 أوجد **u × v**.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$$

الخطوة 2 أوجد مقدار **u × v**.

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + (-14)^2}$$

$$= \sqrt{286} \text{ تقريبًا } = 16.9$$

تساوي مساحة متوازي الأضلاع في الشكل 7.5.4 حوالي 16.9 وحدة مربعة.

تمرين موجّه

5. أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي يحتوي على الضلعين المتجاورين $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

تحدد ثلاثة متجهات تقع في مستويات مختلفة ولكن تتشارك في نفس نقطة بداية الأضلاع المتجاورة **لمتوازي سطوح**. متعدد الوجوه بوجوه جميعها متوازيات سطوح (الشكل 7.5.5).
وتمثل القيمة المطلقة **لناتج الضرب القياسي لثلاثة متجهات** لهذه المتجهات حجم متوازي سطوح.

المفهوم الأساسي الضرب القياسي لثلاثة متجهات

إذا كان $\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}, \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$. فيتم الحصول على ناتج الضرب القياسي لثلاثة متجهات من خلال

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

نصيحة دراسية

الضرب القياسي لثلاثة متجهات لاحظ أنه لإيجاد ناتج الضرب القياسي لثلاثة متجهات **t** و **u** و **v** سنحتاج إلى كتابة المحدد الذي يمثل **u × v** واستبدال الصف الأعلى بالقيم للمتجه **t**.

مثال 6 حجم متوازي السطوح

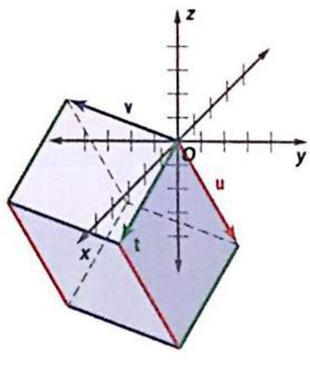
أوجد حجم متوازي السطوح الذي يحتوي على الأضلاع المتجاورة t = 4i − 2j − 2k و u = 2i + 4j − 3k و v = i − 5j + 3k.

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}(4) - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}(-2) + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}(-2)$$

$$= -12 + 18 + 28 = 34$$

يساوي حجم متوازي السطوح الموضح في الشكل 7.5.5 $|\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|$ أو 34 وحدة مكعبة.



الشكل 7.5.5

تمرين موجّه

6. أوجد حجم متوازي السطوح الذي يحتوي على الأضلاع المتجاورة $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{t} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

تمارين

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثمّ حدّد ما إذا كان u و v متعامدين. (مثال 1)

1. $\mathbf{u} = \langle 3, -9, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 2, 7 \rangle$
2. $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -1, 4 \rangle$
3. $\mathbf{u} = \langle 2, -8, -7 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 9, -7 \rangle$
4. $\mathbf{u} = \langle -7, -3, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 5, -13 \rangle$
5. $\mathbf{u} = \langle 11, 4, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 3, 8 \rangle$
6. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
7. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
8. $\mathbf{u} = 9\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

9. **الكيمياء** يحتوي أحد جزيئات المياه، التي تكون فيها ذرة الأكسجين عند نقطة الأصل، على ذرة هيدروجين عند $\langle 55.5, 55.5, -55.5 \rangle$ بينما تقع ذرة الهيدروجين الثانية عند $\langle -55.5, -55.5, -55.5 \rangle$. حدد زاوية الربط بين المتجهات المتكونة من روابط الأكسجين والهيدروجين. (مثال 2)

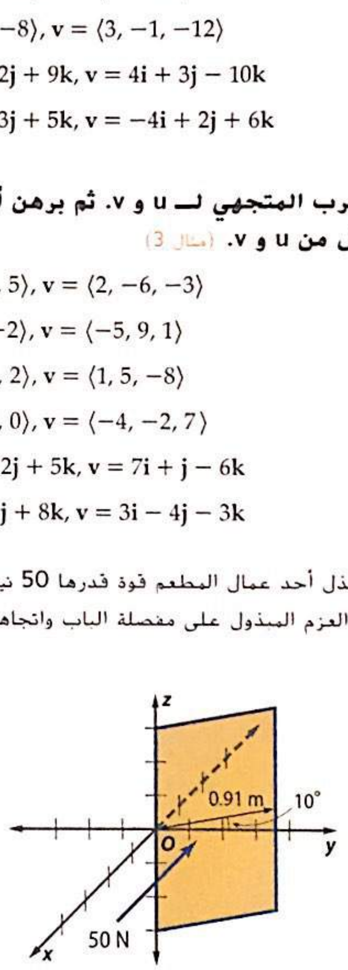
أوجد الزاوية θ بين المتجهين u و v مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من الدرجة. (مثال 2)

10. $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 4, -7 \rangle$
11. $\mathbf{u} = \langle 6, -5, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -8, -9, 5 \rangle$
12. $\mathbf{u} = \langle -8, 1, 12 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 4, 2 \rangle$
13. $\mathbf{u} = \langle 10, 0, -8 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -1, -12 \rangle$
14. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$
15. $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

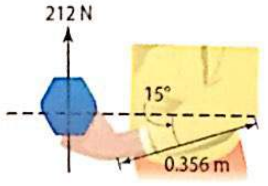
أوجد ناتج الضرب المتجهي لـ u و v. ثم برهن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ متعامد على كل من u و v. (مثال 3)

16. $\mathbf{u} = \langle -1, 3, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -6, -3 \rangle$
17. $\mathbf{u} = \langle 4, 7, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 9, 1 \rangle$
18. $\mathbf{u} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 5, -8 \rangle$
19. $\mathbf{u} = \langle 5, -8, 0 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, -2, 7 \rangle$
20. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$
21. $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

22. **المطاعم** يبذل أحد عمال المطعم قوة قدرها 50 نيوتن لفتح باب. أوجد مقدار العزم المبذول على مفصلة الباب واتجاهه. (مثال 4)



23. **رفع الأثقال** تبذل إحدى لاعبات رفع الأثقال تقوم بتمارين لعضلة الذراع الأمامية ذات الرأسين قوة قدرها 212 نيوتن لرفع ثقل رياضي. ويبلغ طول ساعد لاعبة رفع الأثقال 0.356 متر وقد بدأ تمرين الذراع وكوعها منحنٍ بزاوية 15° أسفل المحور الأفقي في اتجاه محور x الموجب. (مثال 4)



a. أوجد المتجه الذي يمثل العزم المبذول على كوع لاعبة رفع الأثقال في الصورة المُركّبة.

b. أوجد مقدار العزم واتّجاهه.

أوجد مساحة متوازي السطوح الذي يحتوي على الضلعين المتجاورين u و v. (مثال 5)

24. $\mathbf{u} = \langle 2, -5, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 6, -1 \rangle$
25. $\mathbf{u} = \langle -9, 1, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -5, 3 \rangle$
26. $\mathbf{u} = \langle 4, 3, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 2, -2 \rangle$
27. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$
28. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$
29. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

أوجد حجم متوازي السطوح الذي يحتوي على الأضلاع المتجاورة t و u و v. (مثال 6)

30. $\mathbf{t} = \langle -1, -9, 2 \rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -7, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -2, 6 \rangle$
31. $\mathbf{t} = \langle -6, 4, -8 \rangle, \mathbf{u} = \langle -3, -1, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 5, -7 \rangle$
32. $\mathbf{t} = \langle 2, -3, -1 \rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -6, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 5, -4 \rangle$
33. $\mathbf{t} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{u} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5$
34. $\mathbf{t} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$
35. $\mathbf{t} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

أوجد متجهًا متعامدًا على كل متجه.

36. $\langle 3, -8, 4 \rangle$
37. $\langle -1, -2, 5 \rangle$
38. $\left\langle 6, -\frac{1}{3}, -3 \right\rangle$
39. $\langle 7, 0, 8 \rangle$

إذا علمتَ v و $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$، فأوجد u.

40. $\mathbf{v} = \langle 2, -4, -6 \rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -22$
41. $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}, 0, 4 \right\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{31}{2}$
42. $\mathbf{v} = \langle -2, -6, -5 \rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 35$

حدد ما إذا كانت النقاط تقع على مستقيم واحد.

43. $(-1, 7, 7), (-3, 9, 11), (-5, 11, 13)$
44. $(11, 8, -1), (17, 5, -7), (8, 11, 5)$

حدد ما إذا كان كل زوجين من المتجهات متوازيين.

45. $\mathbf{m} = \langle 2, -10, 6 \rangle, \mathbf{n} = \langle 3, -15, 9 \rangle$

46. $\mathbf{a} = \langle 6, 3, -7 \rangle, \mathbf{b} = \langle -4, -2, 3 \rangle$

47. $\mathbf{w} = \left\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{9}{8} \right\rangle, \mathbf{z} = \langle -4, 2, -3 \rangle$

اكتب الصورة المُركّبة لكل متجه.

48. يقع $\mathbf{u}$ في المستوى yz ومقداره 8، ويكوّن زاوية $60°$ أعلى محور y الموجب.

49. يقع $\mathbf{v}$ في المستوى xy ومقداره 11، ويكوّن زاوية أعلى $30°$ إلى يسار محور x السالب.

إذا علمتَ المتجهات الأربعة، فحدّد ما إذا كان رباعي الأضلاع $ABCD$ متوازي سطوح أم لا. وإذا كانت الإجابة نعم، فحدد ما إذا كان مستطيل الشكل أم لا.

50. $A(3, 0, -2), B(0, 4, -1), C(0, 2, 5), D(3, 2, 4)$

51. $A(7, 5, 5), B(4, 4, 4), C(4, 6, 2), D(7, 7, 3)$

52. **استعراضات الطائرات** بأحد استعراضات الطائرات، انطلقت طائرتان في نفس الوقت. وقد بدأت الطائرة الأولى من الموقع $(0, -2, 0)$ ووصلت للموقع $(6, -10, 15)$ بعد ثلاث ثوان. وبدأت الطائرة الثانية من الموقع $(0, 2, 0)$ ووصلت للموقع $(6, 10, 15)$ بعد ثلاث ثوان. فهل مسار كلتا الطائرتين متوازيان؟ اشرح.

لكل من $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -2 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -4, 4, 5 \rangle$، أوجد كلاً مما يلي إن أمكن.

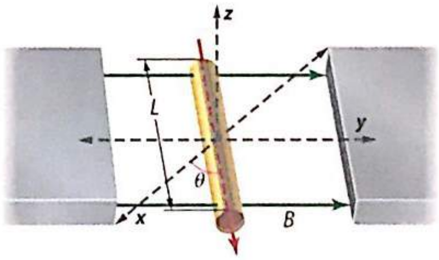
53. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

54. $\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

55. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} \times \mathbf{v}$

56. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

57. **الكهرباء** عند وضع سلك ينقل تيارًا كهربيًا في مجال مغناطيسي، فإن القوة المبذولة على السلك بوحدات النيوتن موضحة بـ $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$، حيث I تمثل التيار الذي يسري عبر السلك بوحدات الأمبير، و $\vec{L}$ تمثل طول المتجه على السلك الذي يشير إلى اتجاه التيار بالأمتار، و $\vec{B}$ هو القوة المبذولة على المجال المغناطيسي بوحدات التسلا. وفي الشكل أدناه، تم تدوير السلك بزاوية θ في المستوى xy.

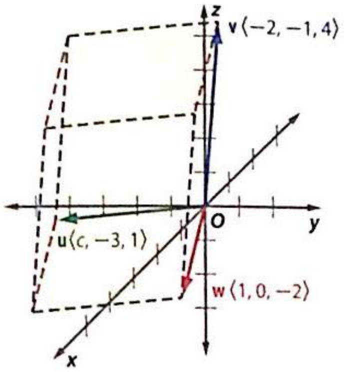


a. إذا كانت قوة المجال المغناطيسي 1.1 تسلا، فأوجد مقدار القوة المبذولة على سلك في المستوى xy يبلغ طوله بالمتر 1.5 ويحمل تيارًا بشدة 25 أمبير ويكون زاوية $60°$.

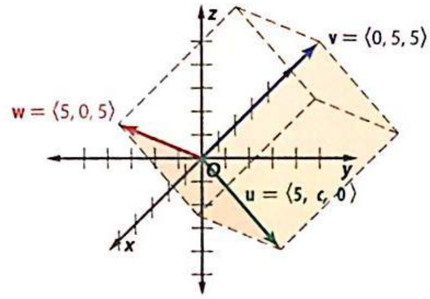
b. إذا كانت القوة المبذولة على السلك $\vec{F} = \langle 0, 0, -0.63 \rangle$، فما زاوية السلك؟

إذا علمتَ v و w وحجم متوازي السطوح الذي يحتوي على الأضلاع المتجاورة u و v و w، فأوجد c.

58. $\mathbf{v} = \langle -2, -1, 4 \rangle$ و $\mathbf{w} = \langle 1, 0, -2 \rangle$ و $\mathbf{u} = \langle c, -3, 1 \rangle$ و $V = 7$ وحدات مربعة

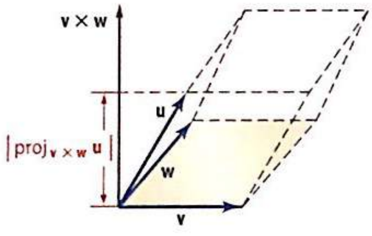


59. $\mathbf{v} = \langle 0, 5, 5 \rangle$ و $\mathbf{w} = \langle 5, 0, 5 \rangle$ و $\mathbf{u} = \langle 5, c, 0 \rangle$ و $V = 250$ وحدة مربعة



مسائل مهارات التفكير العليا — استخدام مهارات التفكير العليا

60. **البرهان** تحقق من صحة قانون حجم متوازي السطوح. (*إرشاد:* استخدم مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.)



61. **التبرير** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحةً *أحيانًا* أم *دائمًا* ليست صحيحة على أم *الإطلاق*. اشرح.

لأي متجهين غير صفريين غير متوازيين في الفضاء، يوجد متجه عموديًا على كلاهما.

62. **التبرير** إذا كان $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متوازيين في الفضاء، فكم عدد المتجهات المتعامدة على كليهما؟ اشرح.

63. **التحدي** بافتراض أن $\mathbf{u} = \langle 4, 6, c \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -3, -2, 5 \rangle$. أوجد قيمة c التي تجعل $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 34\mathbf{i} - 26\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$.

64. **التبرير** اشرح السبب الذي يجعل ناتج الضرب المتجهي لا يعرّف المتجهات في النظام الإحداثي ثنائي الأبعاد.

65. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبيّن الفرق بين طرق تحديد ما إذا كانت المتجهات في الفضاء متوازية أم متعامدة.

مراجعة شاملة

أوجد طول القطعة المستقيمة ونقطة المنتصف لها باستخدام نقطتي طرفيها المبينتين.

66. $(1, 10, 13), (-2, 22, -6)$

67. $(12, -1, -14), (21, 19, -23)$

68. $(-22, 24, -9), (10, 10, 2)$

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثم حدّد ما إذا كانت النقطتان u و v متعامدتين.

69. $\langle -8, -7\rangle \cdot \langle 1, 2\rangle$

70. $\langle -4, -6\rangle \cdot \langle 7, 5\rangle$

71. $\langle 6, -3\rangle \cdot \langle -3, 5\rangle$

72. **مخبز** يحتوي مخبز عبد العزيز على أرفف يمكنها استيعاب حتى 900 رغيف من الخبز الفرنسي والمافن. ونظرًا للتكاليف، يجب أن يكون عدد أرغفة الخبز الفرنسي المنتجة أقل من أو يساوي 300 زائد ضعفي عدد المافن المنتج. ويشار إلى أن الطلب على أرغفة الخبز الفرنسي يعادل على الأقل ضعفي الطلب على المافن. ويجني عبد العزيز ربحًا قيمته AED 3 لكل قطعة مافن مبيعة و AED 1.25 لكل رغيف خبز فرنسي. كم عدد المنتجات التي ينبغي عليه إنتاجها من كل نوع لتحقيق أقصى أرباح؟

73. فكك $\dfrac{2m + 16}{m^2 - 16}$ إلى كسور جزئية.

أثبت صحة كل متطابقة.

74. $\tan^2\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta = \sec^2\theta$

75. $\sec^2\theta\cot^2\theta - \cot^2\theta = 1$

76. $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$

حُـلّ كل مثلث. حوّل طول الضلع لأقرب جزء من عشرة، وحوّل قياس الزاوية إلى أقرب درجة.

77. $a = 20, c = 24, B = 47^\circ$

78. $A = 25^\circ, B = 78^\circ, a = 13.7$

79. $a = 21.5, b = 16.7, c = 10.3$

اكتب كل مقياس درجة عشرية في صيغة DMS (درجة، دقيقة وثانية) وكل مقياس DMS في صيغة درجة عشرية لأقرب جزء من مئة.

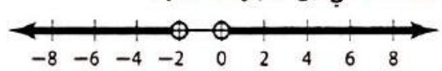
80. -72.775°

81. $29^\circ\, 6'\, 6''$

82. $132^\circ\, 18'\, 31''$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

83. **SAT/ACT** يعبّر هذا التمثيل البياني عن مجموعة كافة الحلول المحتملة لأي من العبارات التالية؟



A $|x - 1| > 1$

B $|x - 1| < 1$

C $|x + 1| < 1$

D $|x + 1| > 1$

84. ما ناتج الضرب المتجهي لكلٍ من $\mathbf{u} = \langle 3, 8, 0\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -4, 2, 6\rangle$؟

F $48\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

G $48\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

H $46\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

J $46\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

85. **إجابة حرة** يضرب لاعب الكرة بزاوية 30° بالنسبة لمستوى الأرض وبسرعة مبدئية قدرها 27.4 متر في الثانية.

a. أوجد مقداري المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة.

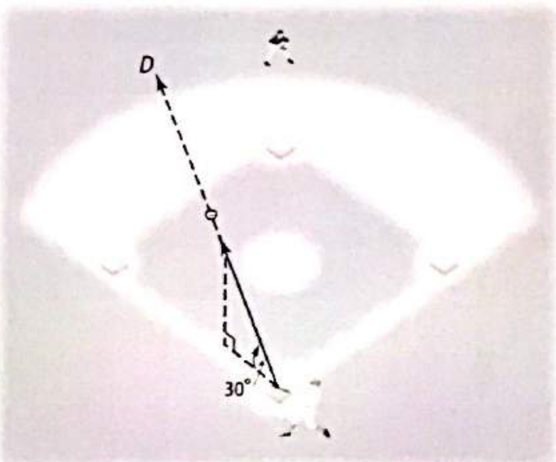
b. هل القيم الناتجة في الجزء **a** متجهات أو كميات عددية؟

c. افترض أنه لم يتم إمساك الكرة وأن اللاعب قذفها مبتعدة بارزة عن الأرض. فما المسافة التي ستقطعها بالإجمال في الهواء؟

d. افترض أن القاعدة الرئيسة تقع في نقطة الأصل وتقع القاعدة الثانية في اتجاه الشمال. وإذا ضربت الكرة في اتجاه N20°W ثم سقطت عند النقطة D فأوجد الصورة المركّبة لـ $\overline{CD}$.

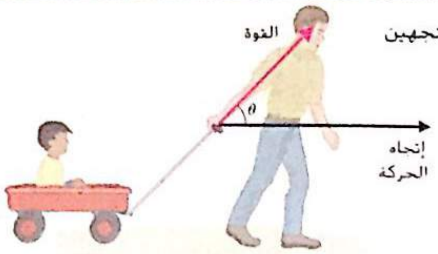
e. حدد متجه الوحدة لـ $\overline{CD}$.

f. يقف لاعب الوسط عند (0, 150) عند ضربه الكرة. فلأي اتجاه ربعي يجب أن يجري لاعب الوسط ليلاقي الكرة في النقطة التي ستسقط فيها على الأرض؟



7-6 بعض خصائص الضرب النقطي والضرب المتجهي

..السابق	..الحالي	..لماذا؟
• تعرفت إلى الضرب النقطي والضرب المتجهي.	1 التعرف على بعض خصائص الضرب النقطي. 2 التعرف على بعض خصائص الضرب المتجهي.	• نقارن قياس متجهات في الفضاء والعلاقة بين متجهين وخاصة إمكانية كونهما متوازيين أو متعامدين.



في الدرسين 1-7 و2-7، عرّفنا المتجهات في $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ ودرسنا العديد من خصائص المتجهات، بما في ذلك كيفية جمع أو طرح متجهين. وقد تبيّن أنّ نوعين من نواتج الضرب التي تتضمّن المتجهات أثبتت فائدتها: الضرب النقطي (أو ناتج الضرب القياسي) وناتج الضرب المتجهي (أو ناتج الضرب التقاطعي). سنوضّح بعض خصائص ناتجي الضرب هذين في هذا الدرس.

1 خصائص الضرب النقطي

التعريف 1-7

يعرّف ناتج الضرب النقطي لمتّجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ في $\mathbb{R}^3$ بواسطة

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \qquad (7.1)$$

وبالمثل، يعرّف ناتج الضرب النقطي لمتّجهين في $\mathbb{R}^2$ بواسطة

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle = a_1b_1 + a_2b_2$$

تأكد من ملاحظة أنّ ناتج الضرب النقطي لمتجهين هو كمية عددية (أي، عدد وليس متجهًا). لهذا السبب، يُطلق على ناتج الضرب النقطي اسم ناتج **الضرب القياسي**.

مثال 1-7 حساب ناتج ضرب نقطي في $\mathbb{R}^3$

احسب ناتج الضرب النقطي $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ لـ $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle 5, -3, 4 \rangle$.

الحلّ لدينا

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle 1, 2, 3 \rangle \cdot \langle 5, -3, 4 \rangle = (1)(5) + (2)(-3) + (3)(4) = 11$$

بالتأكيد، يكون من السهل جدًا حساب نواتج الضرب النقطية، سواء كان المتجه مكتوبًا في الصورة الإحداثية أو مكتوبًا بدلالة المتجهات الأساسية المعيارية، كما في المثال 2-7.

مثال 2-7 حساب ناتج ضرب نقطي في $\mathbb{R}^2$

أوجد ناتج الضرب النقطي للمتجهَيْن $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$.

الحلّ لدينا

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2)(3) + (-5)(6) = 6 - 30 = -24$$

يحقّق ناتج الضرب النقطي في $\mathbb{R}^2$ أو $\mathbb{R}^3$ الخصائص البسيطة التالية.

النظرية 1-7

للمتجهات $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$، وأي عدد d، لدينا ما يأتي:

(i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (التبادل)
(ii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ (قانون التوزيع)
(iii) $(d\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (d\mathbf{b})$
(iv) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$
(v) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$.

ملحوظة 1-7

بما أنّه يمكن التفكير في المتجهات في $\mathbb{R}^2$ باعتبارها حالات خاصة من المتجهات في $\mathbb{R}^3$ (حيث تكون المركّبة الثالثة صفرًا)، فإنّ جميع النتائج التي نثبتها للمتجهات في $\mathbb{R}^3$ تنطبق بالدرجة نفسها على المتجهات في $\mathbb{R}^2$.

البرهان

نثبت (i) و (v) لـ a، $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. نترك الأجزاء المتبقية كتمارين.

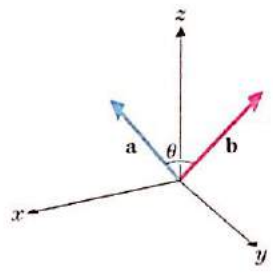
(i) لأجل $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ لدينا من (7.1) أنّ

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ &= b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}\end{aligned}$$

بما أنّ ضرب الأعداد الحقيقية تبادلي.

(v) لـ $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ لدينا أنّ

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\mathbf{a}|^2$$



الشكل 7.6.1

لاحظ أنّ الخصائص (i)-(iv) للنظرية 1-7 هي أيضًا خصائص ضرب الأعداد الحقيقية. لهذا السبب، نستخدم كلمة ناتج ضرب في ناتج الضرب النقطي. إلا أنّه ثمة بعض الخصائص لضرب الأعداد الحقيقية غير مشتركة مع ناتج الضرب النقطي. فعلى سبيل المثال، سنرى أنّ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ لا تشير إلى أنّ $\mathbf{a} = 0$ أو $\mathbf{b} = 0$ لمتجهَيْن غير صفريين **a** و **b** في $\mathbb{R}^3$، نحدد **الزاوية** θ ($0 \le \theta \le \pi$) **بين المتجهين** لتكون هي الزاوية الأصغر بين **a** و **b**، والتي تكوّنت من وضع نقاطيهما الإبتدائية عند النقطة نفسها. على النحو المُبيّن في الشكل 7.6.1.

لاحظ أنّه إذا كان **a** و **b** لهما الاتجاه نفسه، فإنّ $\theta = 0$. إذا كان **a** و **b** لهما اتجاه معاكس، فإنّ $\theta = \pi$. نقول إنّ a و b **متعامدان** (أو **عموديان**) إذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$. نعتبر المتجه الصفري **0** متعامدًا على كل المتجهات. إنّ الحالة العامة مذكورة في النظرية 2-7.

النظرية 2-7

لتكن θ هي الزاوية بين المتجهين غير الصفريين **a** و **b**. إذًا،

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta \qquad (7.2)$$

البرهان

يجب أن نثبت النظرية لثلاث حالات منفصلة.

(i) إذا كان **a** و **b** لهما الاتجاه نفسه، فإنّ $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$، لعدد ما $c > 0$ والزاوية بين **a** و **b** هي $\theta = 0$. يشير هذا إلى أنّ

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{a}) = c\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = c|\mathbf{a}|^2$$

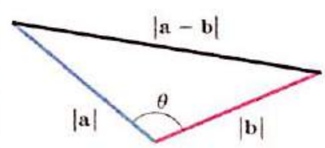
علاوة على ذلك،

$$|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta = |\mathbf{a}||c|\,|\mathbf{a}| \cos 0 = c|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

بما أنّ $c > 0$، لدينا $|c| = c$.

(ii) إذا كان **a** و **b** لهما اتجاه معاكس. يكون البرهان مطابقًا تقريبًا للحالة (i) أعلاه، ونترك التفاصيل كتمرين.

(iii) إذا كان **a** و **b** غير متوازيين، فيكون لدينا أنّ $0 < \theta < \pi$، كما هو مبيّن في الشكل 7.6.2. تذكّر أنّ قانون الـ Cosines يسمح لنا بربط أطوال أضلاع المثلثات مثل ذلك المُبيّن في الشكل 7.6.2. لدينا



الشكل 7.6.2

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta \qquad (7.3)$$

لاحظ الآن أنّ

$$\begin{aligned}|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 &= |\langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle|^2 \\ &= (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 \\ &= \left(a_1^2 - 2a_1 b_1 + b_1^2\right) + \left(a_2^2 - 2a_2 b_2 + b_2^2\right) + \left(a_3^2 - 2a_3 b_3 + b_3^2\right) \\ &= \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) + \left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \qquad (7.4)\end{aligned}$$

بمساواة الطرف الأيمن في كل من (7.3) و(7.4)، نحصل على (7.2).

يمكننا استخدام (7.2) لإيجاد الزاوية بين متجهين، كما في المثال 3-7.

مثال 3-7 إيجاد الزاوية بين متجهين

أوجد الزاوية بين المتجهين $\mathbf{a} = \langle 2, 1, -3\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle 1, 5, 6\rangle$.

الحلّ من (7.2)، يكون لدينا

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|} = \frac{-11}{\sqrt{14}\sqrt{62}}$$

يُستنتج من ذلك أنّ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-11}{\sqrt{14}\sqrt{62}}\right) \approx 1.953$ (راديان) (أو حوالي $112°$)، بما أنّ $0 \le \theta \le \pi$ وبعيد معكوس cosine الزاوية في هذا المدى.

النتيجة التالية هي إستنتاج مباشر ومهم للنظرية 7.2.

النتيجة 1-7

يكون المتجهان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ متعامدين إذا وفقط إذا $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$.

البرهان

أولًا، لاحظ أنّه إذا كان أي من $\mathbf{a}$ أو $\mathbf{b}$ هو المتجه الصفري، فإنّ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ و $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ متعامدان، حيث يعتبر المتجه الصفري متعامدًا على كل المتجهات. إذا كان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ متجهين غير صفريين وإذا كانت θ هي الزاوية بين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، يكون لدينا من النظرية 2-7 أنّ

$$|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|\cos\theta = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$$

إذا وفقط إذا كان $\cos\theta = 0$ (بما أنّه ليس أي من $\mathbf{a}$ أو $\mathbf{b}$ هو المتجه الصفري). يحدث هذا فقط إذا كان $\theta = \frac{\pi}{2}$، والذي يكافئ وجود $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ متعامدين وما إلى ذلك، تترتب النتيجة على ذلك.

مثال 4-7 تحديد ما إذا كان متجهان متعامدين

برهن إذا كانت أزواج المتجهات الآتية متعامدة: (a) $\mathbf{a} = \langle 1, 3, -5\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle 2, 3, 10\rangle$ و (b) $\mathbf{a} = \langle 4, 2, -1\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle 2, 3, 14\rangle$.

الحل للجزء (a)، لدينا:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 2 + 9 - 50 = -39 \neq 0$$

لذا $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ غير متعامدين.

للجزء (b)، لدينا

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 8 + 6 - 14 = 0$$

لذا $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ متعامدان، في هذه الحالة.

توفّر لنا النظريتان التاليتان بعض الأدوات القوية لمقارنة مقادير المتجهات.

النظرية 3-7 (متباينة كوشي-شفارز)

لأي متجهين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$،

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \qquad (7.5)$$

البرهان

إذا كان أي من $\mathbf{a}$ أو $\mathbf{b}$ هو المتجه الصفري، فلاحظ أنّ (7.5) يخبرنا ببساطة أنّ $0 \le 0$، وهو أمر صحيح بالتأكيد. من ناحية أخرى، إذا لم يكن أي من $\mathbf{a}$ أو $\mathbf{b}$ هو المتجه الصفري، يكون لدينا من (7.2) أنّ

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\cos\theta| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

بما أنّ $|\cos\theta| \le 1$ لجميع قيم θ.

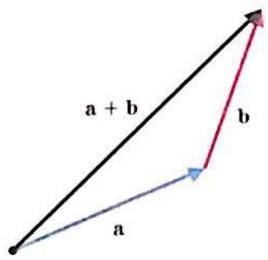
تتمثّل إحدى فوائد متباينة كوشي-شفارز بأنّها تتيح لنا إثبات النظرية التالية كنظرية مفيدة للغاية. إذا كنت ستتعلم متباينة واحدة فقط في حياتك، فهذه هي المتباينة التي سترغب في تعلمها على الأرجح.

النظرية 7-4 (متباينة المثلث)

لأي متجهين a و b،

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}| \qquad (7.6)$$

قبل أن نثبت النظرية، لنأخذ المثلث المكوّن من المتجهات a وb و a + b، المبيّن في الشكل 7.6.3. لاحظ أنّ متباينة المثلث تقول إنّ طول المتجه a + b لا يتعدى مطلقًا ناتج جمع الأطوال الإفرادية لكلٍ من a و b.



الشكل 7.6.3

البرهان

من النظرية 1-7 (i) و (ii) و (v)، لدينا

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\\ &= |\mathbf{a}|^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+|\mathbf{b}|^2\end{aligned}$$

من متباينة كوشي-شفارز (7.5)، لدينا $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \le |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ وهكذا لدينا

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 &= |\mathbf{a}|^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+|\mathbf{b}|^2\\ &\le |\mathbf{a}|^2+2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|+|\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|)^2\end{aligned}$$

بأخذ الجذر التربيعي يعطبنا: (7.6).

2 خصائص الضرب المتجهي

التعريف 2-7

للمتّجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ في $\mathbb{R}^3$. نعرّف **ناتج الضرب المتجهي** لـ a و b بأنّه

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\mathbf{k} \qquad (7.7)$$

لاحظ أنّ a × b هو أيضًا متجه في $\mathbb{R}^3$. لحساب a × b، يجب عليك كتابة مركّبات a في الصف الثاني ومركّبات b في الصف الثالث؛ فالترتيب مهم! لاحظ أيضًا أنّه عندما استخدمنا مفهوم المحدّد، لا يكون المحدّد 3 × 3 المشار إليه في (7.7) محدّدًا في الحقيقة، بالطريقة التي عرفناها بها، نظرًا إلى أنّ المدخلات في الصف الأول تكون متجهات بدلًا من الأعداد. ومع ذلك، نجد أنّ هذا الاستغلال الطفيف للمفهوم مناسب لحساب نواتج الضرب المتجهي ونحن نستخدمه بشكل روتيني.

مثال 7-5 حساب ناتج ضرب متجهي

احسب $\langle 1,2,3\rangle \times \langle 4,5,6\rangle$.

الحل من (7.7)، يكون لدينا

$$\begin{aligned}\langle 1,2,3\rangle \times \langle 4,5,6\rangle &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}\mathbf{k}\\ &= -3\mathbf{i}+6\mathbf{j}-3\mathbf{k} = \langle -3, 6, -3\rangle\end{aligned}$$

النظرية 7-5

لأي متجه $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$، $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ و $\mathbf{a} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

البرهان

نثبت أول نتيجة من هاتين النتيجتين، ونترك الثانية كتمرين. لـ $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، يكون لدينا من (7.7) أنّ

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= (a_2 a_3 - a_3 a_2)\mathbf{i} - (a_1 a_3 - a_3 a_1)\mathbf{j} + (a_1 a_2 - a_2 a_1)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

ملحوظة 7-2

يتم تعريف ناتج الضرب المتجهي فقط للمتجهات في $\mathbb{R}^3$. لا توجد عملية مناظرة للمتجهات في $\mathbb{R}^2$.

النظرية 7-6

لأي متجهين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ في $\mathbb{R}^3$، $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ هو متّجه متعامد على كلٍ من $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$.

البرهان

تذكّر أنّ أي متجهين يكونان متعامدين فقط إذا كان ناتج ضربهما النقطي يساوي صفرًا. والآن، باستخدام (7.7)، يكون لدينا

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \left[\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right]$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1[a_2 b_3 - a_3 b_2] - a_2[a_1 b_3 - a_3 b_1] + a_3[a_1 b_2 - a_2 b_1]$$

$$= a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 - a_1 a_2 b_3 + a_2 a_3 b_1 + a_1 a_3 b_2 - a_2 a_3 b_1$$

$$= 0$$

ومنه $\mathbf{a}$ و $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ متعامدان. ونترك توضيح أنّ $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ أيضًا كتمرين.

الملاحظات التاريخية

جوزيه ويلارد جيبس (1839 - 1903)

عالم الفيزياء والرياضيات الأمريكي الذي قام بتعريف وتسمية ناتج الضرب النقطي وناتج الضرب المتجهي. فبعد تخرّجه من جامعة ييل، نشر جيبس مقالات مهمة في الديناميكا الحرارية والميكانيكا الإحصائية ونظرية الكهرومغناطيسية للضوء. كما قد استخدم جيبس المتجهات لتحديد مدار مذنب من ثلاث مشاهدات فقط. وساهم نظام المتجهات الذي وضعه جيبس، والذي أنتج في الأصل كملاحظات مطبوعة لطلابه، في تبسيط النظام الأصلي الذي وضعه هاملتون إلى حد كبير. وقد كان جيبس محبوبًا ولكنه لم يكن مشهورًا في حياته. حيث كتب أحد كتّاب السير عن جيبس قائلًا إنّ "عظمة إنجازاته الفكرية لن تلقي بظلالها أبدًا على جمال ومهابة حياته".

لاحظ أنّه، للمتّجهين غير الصفريين وغير المتوازيين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، بما أن $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ متعامد على كل من $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، فإنّه يكون أيضًا متعامدًا على كل متجه يقع في المستوى الذي يحتوي على $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$. (نقول أيضًا إنّ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ متعامد على المستوى، في هذه الحالة). ولكن، عند إعطاء مستوى، من أي جانب من المستوى يشير $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ؟ يمكننا الحصول على فكرة عن طريق حساب بعض نواتج الضرب المتجهية البسيطة.

لاحظ أنّ

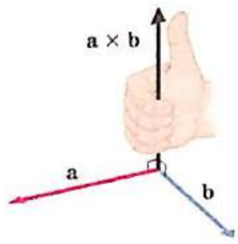
$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \mathbf{k}$$

وبالمثل، $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$

هذه رسوم توضيحية **لقاعدة اليد اليمنى**: إذا قمت بمحاذاة أصابع يدك اليمنى على طول المتجه **a** وثني أصابعك في اتجاه الدوران المحوري من **a** باتجاه **b** (عبر زاوية أصغر من $180°$)، فسيشير إبهامك في اتجاه **a × b**، كما في الشكل 7.6.4a. والآن، باتباع قاعدة اليد اليمنى، سيشير **b × a** في الاتجاه المعاكس لـ **a × b**. (انظر الشكل 7.6.4b).

بالأخص، لاحظ أنّ

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{k}$$



الشكل 7.6.4a

نترك توضيح ما يلي كتمرين

$$\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \text{ ، } \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \text{ و } \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

خذ وقتك للتفكير في قاعدة اليد اليمنى لكلٍ من نواتج الضرب المتجهي هذه.

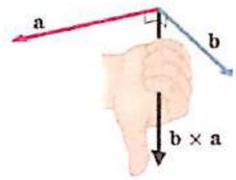
$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \neq -\mathbf{k} = \mathbf{j} \times \mathbf{i}$$

يوجد العديد من الأشياء الأخرى غير المعتادة لملاحظتها هنا. لاحظ أنّ

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$

في حين أنّ،

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$$



الشكل 7.6.4b

مما يوضّح أنّ ناتج الضرب المتجهي ليس تبادليًا. علاوة على ذلك، لاحظ أنّ

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

ما يعني أن ناتج الضرب المتجهي لا يحقّق خاصيّة التجميع. أي أنّه، بوجه عام، بما أنّ ناتج الضرب المتجهي لا يتبع العديد من القواعد التي قد تتوقع أن يستوفيها أي ناتج ضرب، فقد نسأل عن القواعد التي يستوفيها ناتج الضرب المتجهي. نلخّص ذلك في النظرية 7-7.

النظرية 7-7

لأي متجهات **a** و **b** و **c** في $\mathbb{R}^3$ وأي عدد d، لدينا ما يأتي:

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ (غير تبادلية)

(ii) $(d\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = d(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (d\mathbf{b})$

(iii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (قانون التوزيع)

(iv) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ (قانون التوزيع)

(v) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ (ناتج ضرب ثلاثي قياسي ومتّجه)

(vi) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ (ناتج الضرب الثلاثي للمتجه).

البرهان

نثبت الجزأين (i) و(iii) فقط. نترك الأجزاء المتبقية كتمارين.

(i) للمتّجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$، نجد استنادًا إلى (4.3) أنّ

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= -\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} + \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} = -(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$$

بما أنّ التبديل بين صفين في مصفوفة 2×2 (أو في مصفوفة 3×3، لهذه المسألة) يغيّر إشارة المحدّد الخاص بها.

(iii) للمتّجه $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$، لدينا

$$\mathbf{b}+\mathbf{c} = \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3 \rangle$$

وهكذا فإنّ

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \end{vmatrix}$$

بالنظر فقط إلى المركّبة $\mathbf{i}$ لدينا

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2+c_2 & b_3+c_3 \end{vmatrix} = a_2(b_3+c_3) - a_3(b_2+c_2)$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2) + (a_2c_3 - a_3c_2)$$
$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

والذي ينبغي عليك ملاحظته أيضًا هو المركّبة $\mathbf{i}$ لـ $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$. على غرار ذلك، يمكنك أن تبيّن أنّ المركّبتين $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ تتطابقان أيضًا، الأمر الذي يثبت النتيجة.

تذكّر دائمًا أنّه يتم تحديد المتجهات بعاملين: المقدار والاتجاه. وقد سبق أن وضّحنا أنّ $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ متعامد على كل من $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$. في النظرية 7.8، ندلي بتصريح عام (ومفيد للغاية) بشأن $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$.

النظرية 7-8

للمتجهين غير الصفريين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ في $\mathbb{R}^3$، إذا كانت θ هي الزاوية بين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ $(0 \le \theta \le \pi)$، فإنّ

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\theta \tag{7.8}$$

البرهان

من (7.8)، نحصل على

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 = [a_2b_3 - a_3b_2]^2 + [a_1b_3 - a_3b_1]^2 + [a_1b_2 - a_2b_1]^2$$
$$= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_3^2b_1^2$$
$$+ a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2$$
$$= \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$
$$= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$$
$$= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2\theta$$
$$= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1-\cos^2\theta)$$
$$= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2\theta$$

بأخذ الجذور التربيعية، نحصل على

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\theta$$

بما أنّ $\sin\theta \ge 0$، حيث $0 \le \theta \le \pi$.

التوصيف التالي للمتجهات المتوازية هو نتيجة مباشرة للنظرية 7.8.

النتيجة 7-2

يُعدّ متجهان غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ متوازيين إذا وفقط إذا $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

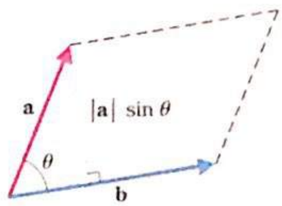
البرهان

تذكّر أنّ $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ يكونان متوازيين إذا وفقط إذا كانت الزاوية θ بينهما تساوي إما 0 أو π. في كلتا الحالتين، $\sin \theta = 0$ وهكذا، من النظرية 7.8،

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}| \sin \theta = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|\,(0) = 0$$

ثم نستنتج بعد ذلك حقيقة أنّ المنجه الوحيد الذي له المقدار صفر هو المتجه الصفري.

تقدّم لنا أيضًا النظرية 7.8 التفسير الهندسي التالي المثير للاهتمام لناتج الضرب المتجهي. لأي متجهين غير صفريين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، إذا كان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ غير متوازيين، فإنّهما يشكلان ضلعين متجاورين لمتوازي أضلاع، كما نرى في الشكل 7.6.5. لاحظ أنّ مساحة متوازي الأضلاع تُحدّد من ناتج ضرب القاعدة والارتفاع. لدينا



الشكل 7.6.5

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{b}|\ |\mathbf{a}| \sin \theta \tag{7.9}$$

من النظرية 7.8. إن مقدار ناتج الضرب المتجهي لمتجهين يعطي مساحة متوازي الأضلاع الذي له ضلعان متجاوران يشكلهما المتجهان.

تمارين 7-6

تمارين كتابية

1. حدّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة. إذا كانت صحيحة، اشرح السبب باختصار؛ وإذا كانت خاطئة، فأعطِ مثالًا عكسيًا.

(a) إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$، فإنّ $\mathbf{b} = \mathbf{c}$.

(b) إذا كان $\mathbf{b} = \mathbf{c}$، فإنّ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$.

(c) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$.

(d) إذا كان $|\mathbf{a}| > |\mathbf{b}|$ فإنّ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} > \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

(e) إذا كان $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ فإنّ $\mathbf{a} = \mathbf{b}$

2. حسب متباينة كوشي-شفارز، $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$. ما العلاقة التي يجب أن توجد بين $\mathbf{a}$ و$\mathbf{b}$ ليكون لدينا $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ ؟

3. من المتباينة المثلثية، $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$. ما هي العلاقة التي يجب أن توجد بين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ليكون لدينا $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$؟

4. استخدم متباينة المثلث لإثبات أنّ $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \ge |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$.

5. للمتجهين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، استخدم متباينة كوشي-شفارز لإيجاد القيمة العظمى لـ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ إذا كانت $|\mathbf{a}| = 3$ و $|\mathbf{b}| = 5$.

في التمارين 10-6، حدّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة. إذا كانت صحيحة، اشرح السبب بإيجاز. إذا كانت خاطئة، أعطِ مثالًا عكسيًا.

6. إذا كان $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$، فإنّ $\mathbf{b} = \mathbf{c}$.

7. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

8. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

9. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

10. إذا تضاعفت القوة، يتضاعف العزم.

---

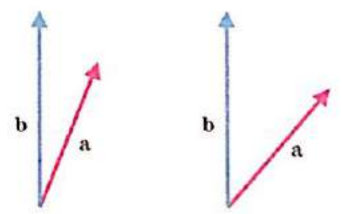
11. أثبت أنّ $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$

12. أثبت أنّ $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

13. أثبت أنّ $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}$.

14. أثبت الأجزاء (ii) و(iv) و(v) و(vi) من النظرية 7.7.

15. في كل من الحالات الموضّحة هنا، $|\mathbf{a}| = 3$ و $|\mathbf{b}| = 4$. في أي حالة يكون $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ أكبر؟ ما أقصى قيمة ممكنة لـ $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$؟



الشكل A　　الشكل B

16. في الشكلين A و B، إذا كانت الزاويتان بين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هي $50°$ و $20°$، على الترتيب، أوجد القيم الدقيقة لـ$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. اذكر أيضًا ما إذا كان $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ يشير باتجاه داخل أو خارج الصفحة.

17. حدّد التعابير غير المعرفة.

(a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$　(b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

(c) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$　(d) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

7 الدليل الدراسي والمراجعة

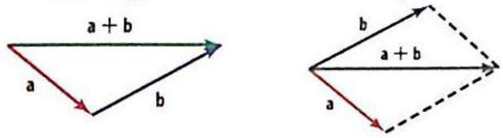
ملخص الوحدة

المفاهيم الأساسية

مقدمة عن المتجهات (الدرس 7-1)

- يعتبر اتجاه المتجه هو الزاوية الموجهة المحصورة بين المتجه ومستقيم أفقي. ويعتبر مقدار المتجه طوله.
- عند الجمع بين متجهين أو أكثر يكون المجموع متجه واحد يسمى الناتج، ويمكن إيجاده باستخدام طريقة المثلث أو طريقة متوازي الأضلاع.

طريقة متوازي الأضلاع | طريقة المثلث



المتجهات في المستوى الإحداثي (الدرس 7-2)

- تعتبر الصورة المُركّبة لمتجه يحتوي على المركبات المتعامدة x و y هي $\langle x, y\rangle$
- يتم الحصول على الصورة المُركّبة لمتجه ليس في الوضع القياسي، ويحتوي على نقطة البداية $A(x_1, y_1)$ ونقطة النهاية $B(x_2, y_2)$ من خلال $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$.
- يتم الحصول على مقدار متجه $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ من خلال $|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ هما متجهان و k هي كمية عددية، إذا $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$، $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2\rangle$، $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2\rangle$.
- يمكن استخدام متجهات الوحدة القياسية i و j للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ في الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

الضرب النقطي (الدرس 7-3)

- يحدد ناتج الضرب النقطي لـ $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ على أنه $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$
- إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهات غير الصفرية a و b، فإن $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|}$

المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد (الدرس 7-4)

- يتم الحصول على المسافة بين $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ من خلال $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.
- يتم الحصول على نقطة منتصف $\overline{AB}$ من خلال $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

الضرب النقطي والضرب المتجهي للمتجهات في الفضاء (الدرس 7-5)

- يحدد ناتج الضرب النقطي لـ $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ على أنه $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.
- إذا كان $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$، فإن ناتج الضرب المتجهي لـ a و b هو المتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$.

بعض خصائص الضرب النقطي والضرب المتجهي (الدرس 7-6)

- للمتجهات a و b و c، وأي عدد d، لدينا ما يأتي:

(i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (التبادل)

(ii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ (قانون التوزيع)

(iii) $(d\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (d\mathbf{b})$

(iv) $0 \cdot \mathbf{a} = 0$

(v) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

- يكون المتجهان a و b متعامدين إذا وفقط إذا $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.
- لتكن θ هي الزاوية بين المتجهين غير الصفريين a و b. إذا،

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta$$

- يُعد متجهان غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ متوازيين إذا وفقط إذا $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$.
- لأي متجهين a و b،

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

- لأي متجهين a و b،

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

- لأي متجه $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$، $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$ و $\mathbf{a} \times 0 = 0$.
- لأي متجهين a و b في $\mathbb{R}^3$، $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ هو متجه متعامد على كلٍ من a و b.
- للمتجهين غير الصفريين a و b في $\mathbb{R}^3$، إذا كانت θ هي الزاوية بين a و b $(0 \le \theta \le \pi)$، فإن

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|\ \sin\theta$$

7 الدليل الدراسي والمراجعة تابع

المفردات الأساسية

صورة مُركّبة component form

مُركّبات components

ناتج الضرب المتجهي cross product

اتجاه direction

ناتج الضرب النقطي dot product

متجهات متكافئة equivalent vectors

نقطة البداية initial point

توفيق خطي linear combination

مقدار magnitude

أثمان octants

متجهات متعاكسة opposite vectors

ثلاثي مُرتب ordered triple

متعامد orthogonal

متوازي السطوح parallelepiped

طريقة متوازي الأضلاع parallelogram method

متجهات موازية parallel vectors

اتجاه ربعي quadrant bearing

مُركّبات متعامدة rectangular components

ناتج resultant

الوضع القياسي standard position

نقطة النهاية terminal point

نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد three-dimensional coordinate system

العزم torque

طريقة المثلث triangle method

الضرب القياسي لثلاثة متجهات triple scalar product

اتجاه حقيقي true bearing

متجه وحدة unit vector

متجه vector

مسقط المتجه vector projection

الشغل work

محور z z-axis

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة*. فإذا كانت خاطئة، فاستبدل الكلمة أو العبارة التي تحتها خط بحيث تكون الجملة صحيحة.

1. نقطة النهاية للمتجه هي النقطة التي <u>يبدأ</u> منها المتجه.
2. إذا كان $\mathbf{a} = \langle -4, 1 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle 3, 2 \rangle$، فيتم حساب ناتج الضرب النقطي من خلال $\underline{-4(1) + 3(2)}$.
3. يتم الحصول على نقطة منتصف $\overline{AB}$ التي تحتوي على $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ من خلال $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.
4. <u>مقدار</u> $\mathbf{r}$ إذا كانت نقطة البداية هي $A(-1, 2)$ ونقطة النهاية هي $B(2, -4)$ يساوي $\langle 3, -6 \rangle$.
5. يكون المتجهان <u>متساويين</u> فقط إن كانا يتساويان في الاتجاه والمقدار.
6. عندما يكون المتجهان متعامدين يكون قياس الزاوية المحصورة بينهما $\underline{180°}$.
7. يعتبر <u>مركب</u> $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$ هو المتجه الذي يكون تجاهه موازيًا لـ $\mathbf{v}$ وطوله مركب $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.
8. لإيجاد متجه واحد على الأقل عمودي على أي متجهين آخرين في الفضاء، احسب <u>ناتج الضرب المتجهي</u> للمتجهين الأصليين.
9. عند طرح متجه، فالأمر يكافئ جمع متجه معاكس.
10. إذا كان $\mathbf{v}$ متجه وحدة في نفس اتجاه $\mathbf{u}$، فإن $\underline{\mathbf{v} = \frac{|\mathbf{u}|}{\mathbf{u}}}$.

مراجعة درس بدرس

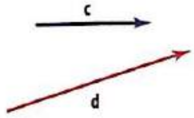
7-1 مقدمة عن المتجهات

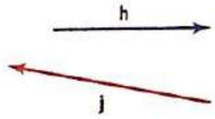
اذكر ما إذا كانت كل كمية موصوفة هي كمية متجهة أم كمية عددية.

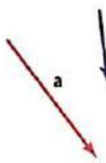
11. تسير سيارة بسرعة 50 كيلومتر في الساعة في اتجاه الشرق

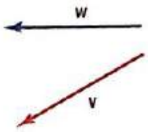
12. تهب نسمة هواء بسرعة 5 أمتار في الثانية

أوجد ناتج كل زوج من المتّجهات باستخدام إما طريقة المثلّث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر واتجاهه بالنسبة إلى المحور الأفقي.

13.


14.


15.


16.


حدد مقدار واتجاه ناتج مجموع كل متجه.

17. 70 مترًا باتجاه الغرب ثم 150 مترًا باتجاه الشرق

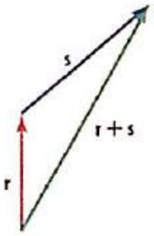
18. 8 نيوتن للأمام مباشرة ثم 12 نيوتن للخلف مباشرة

مثال 1

أوجد ناتج المتجهين r و s باستخدام إما طريقة المثلّث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج بالسنتيمتر واتجاهه بالنسبة إلى المركّبة الأفقية.

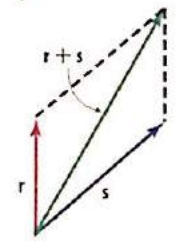
طريقة المثلث

قم بإزاحة r بحيث يلامس طرف r ذيل s.
الناتج هو المتجه من ذيل r إلى طرف s.



طريقة متوازي الأضلاع

قم بإزاحة s بحيث يلامس ذيل s طرف r.
أكمل متوازي الأضلاع الذي يحتوي على r و s كضلعين من أضلاعه. الناتج هو المتجه الذي يشكل القطر المشار إليه لمتوازي الأضلاع.



يكون مقدار الناتج 3.4 cm واتجاهه 59°.

7-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

أوجد الصورة المُركّبة ومقدار المتّجه $\overrightarrow{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين.

19. $A(-1, 3), B(5, 4)$

20. $A(7, -2), B(-9, 6)$

21. $A(-8, -4), B(6, 1)$

22. $A(2, -10), B(3, -5)$

أوجد كل مما يلي لكل من $p = \langle 4, 0\rangle$ و $q = \langle -2, -3\rangle$ و $t = \langle -4, 2\rangle$.

23. $2q - p$

24. $p + 2t$

25. $t - 3p + q$

26. $2p + t - 3q$

أوجد متّجه الوحدة u الذي له نفس اتّجاه v.

27. $v = \langle -7, 2\rangle$

28. $v = \langle 3, -3\rangle$

29. $v = \langle -5, -8\rangle$

30. $v = \langle 9, 3\rangle$

مثال 2

أوجد الصورة المركّبة والمقدار للمتّجه $\overrightarrow{AB}$ الذي تكون نقطة بدايته $A(3, -2)$ ونقطة نهايته $B(4, -1)$.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$$
$$= \langle 4 - 3, -1 - (-2)\rangle$$
$$= \langle 1, 1\rangle$$

أوجد المقدار باستخدام قانون المسافة.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{[(4 - 3)]^2 + [-1 - (-2)]^2}$$
$$= \sqrt{2} \approx 1.4$$

الدليل الدراسي والمراجعة تابع

7-3 الضرب النقطي ومساقط المتجهات

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثمّ حدّد ما إذا كان u و v متعامدين أم لا.

31. $u = \langle -3, 5 \rangle, v = \langle 2, 1 \rangle$
32. $u = \langle 4, 4 \rangle, v = \langle 5, 7 \rangle$
33. $u = \langle -1, 4 \rangle, v = \langle 8, 2 \rangle$
34. $u = \langle -2, 3 \rangle, v = \langle 1, 3 \rangle$

أوجد الزاوية θ بين u و v لأقرب جزء من عشرة من الدرجة.

35. $u = \langle 5, -1 \rangle, v = \langle -2, 3 \rangle$
36. $u = \langle -1, 8 \rangle, v = \langle 4, 2 \rangle$

مثال 3

أوجد ناتج الضرب النقطي لكل من $x = \langle 2, -5 \rangle$ و $y = \langle -4, 7 \rangle$. ثمّ حدّد ما إذا كان x و y متعامدين أم لا.

$$\begin{aligned} x \cdot y &= x_1y_1 + x_2y_2 \\ &= 2(-4) + -5(7) \\ &= -8 + (-35) = -43 \end{aligned}$$

حيث إن $x \cdot y \neq 0$، فإن x و y غير متعامدين.

7-4 المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

عيّن كل نقطة في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد.

37. $(1, 2, -4)$
38. $(3, 5, 3)$
39. $(5, -3, -2)$
40. $(-2, -3, -2)$

أوجد طول القطعة المستقيمة ونقطة المنتصف لها باستخدام نقطتي طرفيها المبينتين.

41. $(-4, 10, 4), (2, 0, 8)$
42. $(-5, 6, 4), (-9, -2, -2)$
43. $(3, 2, 0), (-9, -10, 4)$
44. $(8, 3, 2), (-4, -6, 6)$

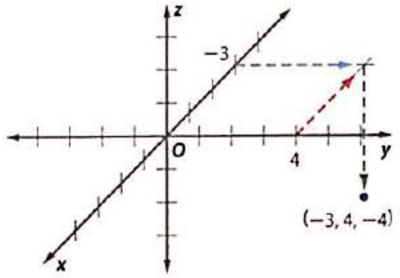
حدد موقع كل متجه في الفضاء ثم مثله بيانيًا.

45. $a = \langle 0, -3, 4 \rangle$
46. $b = -3i + 3j + 2k$
47. $c = -2i - 3j + 5k$
48. $d = \langle -4, -5, -3 \rangle$

مثال 4

عيّن $(-3, 4, -4)$ في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد.

حدد موقع النقطة $(-3, 4)$ في المستوى xy وضع عليها علامة X. ثم عيّن نقطة على بعد 4 وحدات أسفل هذا الموقع وموازية للمحور z.



7-5 الضرب النقطي والضرب المتجهي للمتجهات في الفضاء

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثمّ حدّد ما إذا كان u و v متعامدين أم لا.

49. $u = \langle 2, 5, 2 \rangle, v = \langle 8, 2, -13 \rangle$
50. $u = \langle 5, 0, -6 \rangle, v = \langle -6, 1, 3 \rangle$

أوجد ناتج الضرب المتجهي لـ u و v. ثم برهن أن $u \times v$ متعامد على كل من u و v.

51. $u = \langle 1, -3, -2 \rangle, v = \langle 2, 4, -3 \rangle$
52. $u = \langle 4, 1, -2 \rangle, v = \langle 5, -4, -1 \rangle$

مثال 5

أوجد ناتج الضرب المتجهي لـ $u = \langle -4, 2, -3 \rangle$ و $v = \langle 7, 11, 2 \rangle$. ثم برهن أن $u \times v$ متعامد على كل من u و v.

$$u \times v = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} k$$

$$= \langle 37, -13, -58 \rangle$$

$$\begin{aligned} (u \times v) \cdot u &= \langle 37, -13, -58 \rangle \cdot \langle -4, 2, -3 \rangle \\ &= -148 - 26 + 174 = 0 \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u \times v) \cdot v &= \langle 37, -13, -58 \rangle \cdot \langle 7, 11, 2 \rangle \\ &= 259 - 143 - 116 = 0 \checkmark \end{aligned}$$

7-6 بعض خصائص الضرب النقطي والمتجهي

حدّد ما إذا كان المتجهان متعامدين.

$\mathbf{a} = \langle 4, -1, 1 \rangle, \mathbf{b} = \langle 2, 4, 4 \rangle$

أوجد متجهي وحدة متعامدين على متجهين معطيين.

$\mathbf{a} = \langle 1, 0, 4 \rangle, \mathbf{b} = \langle 1, -4, 2 \rangle$

أوجِد صيغة لـ a بدلالة b إذا كانت

$|\mathbf{a}| = 3$، $|\mathbf{b}| = 5$ و $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ هي القيمة العظمى.

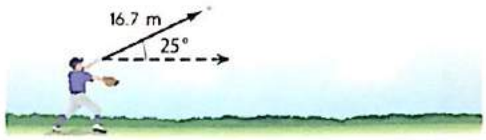
اشرح سبب كون كل معادلة صحيحة.

(a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$

(b) $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) = 0$

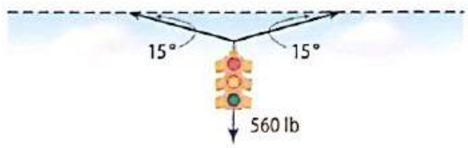
التطبيقات وحل المسائل

53. البيسبول يرمي لاعب بيسبول الكرة بسرعة مبدئية قدرها 16.7 متر في الثانية وبزاوية 25° أعلى المحور الأفقي، كما هو موضح في الشكل أدناه. أوجد مقدار المركبات الأفقية والرأسية. (الدرس 1-7)

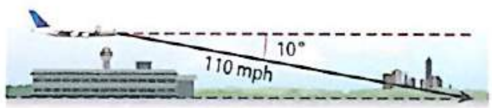


54. عربة أطفال تدفع ليلى عربة أطفال بقوة تبلغ 200 نيوتن بزاوية 20° أسفل المحور الأفقي. أوجد مقدار المركبتين الأفقية والرأسية للقوة. (الدرس 1-7)

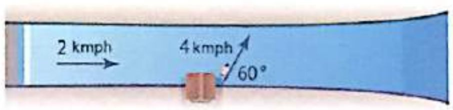
55. الأضواء تُعلّق إشارة مرور عند تقاطع من سلكين لهما نفس الطول بزاوية 15° أسفل المحور الأفقي كما هو موضح. فإذا كانت إشارة المرور تزن 254 كيلوجرام، فما مقدار الشد الذي يبذله السلكان لتظل إشارة المرور متزنة؟ (الدرس 1-7)



56. الطائرات تهبط طائرة بسرعة 110 كيلوجرام في الساعة وبزاوية 10° أسفل المحور الأفقي. أوجد الصورة المُركّبة للمتجه الذي يمثل سرعة الطائرة. (الدرس 2-7)



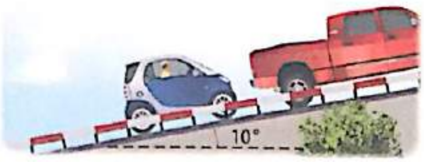
57. المنقذ يسبح منقذ في أحد حمامات السباحة بسرعة 4 كيلوجرام في الساعة وبزاوية 60° إلى جانب الحمام كما هو موضح. (الدرس 2-7)



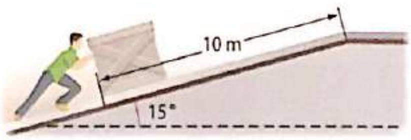
a. ما السرعة التي يتحرك بها المنقذ إذا كان التيار في حمام السباحة يساوي 2 كيلومتر في الساعة وبموازاة جانب الحمام كما هو موضح؟

b. ما الزاوية التي يتحرك بها المنقذ بالنسبة لجانب بداية حمام السباحة؟

58. المرور توقفت سيارة تزن 680.4 كيلوجرام وسط المرور على تل زاويه انحداره 10°. حدد القوة اللازمة لمنع تدحرج السيارة لأسفل التل. (الدرس 3-7)



59. الشغل في أحد المخازن، يدفع جاسم صندوقًا موضوعًا على مزلقة بقوة ثابتة قدرها 80 نيوتن لأعلى منحدر بزاوية انحدار 15° بالنسبة للمحور الأفقي. حدد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله جاسم إذا دفع المنصة المتحركة 10 أمتار. (الدرس 3-7)



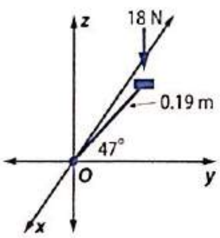
60. الأقمار الصناعية يمكن تمثيل موقع قمرين صناعيين يدوران في مدار بالإحداثيات (28,625, 32,461, −38,426) و (−31,613, −29,218, 43,015)، حيث تمثل (0, 0, 0) مركز الأرض وتذكر الإحداثيات بالأميال. ويبلغ نصف قطر الأرض حوالي 3963 ميلًا. (الدرس 4-7)

a. حدد المسافة بين القمرين.

b. إذا وضع قمر ثالث بين القمرين مباشرة، فكم ستكون إحداثياته؟

c. هل يمكن وضع قمر ثالث بالإحداثيات التي تم التوصل إليها في الجزء **b**؟ وضّح استنتاجك.

61. الدراجات يبذل قائد دراجة قوة قدرها 18 نيوتن لأسفل على الدواسة لتتحرك الدراجة. وقد كان موضع الدواسة المبدئي 47° أعلى محور *y* ومسافة طول 0.19 مترًا بالنسبة لمحور دوران الدواسة. (الدرس 5-7)

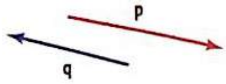


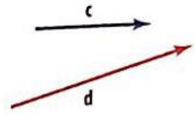
a. أوجد المتجه الذي يمثل العزم المبذول على محور دوران دواسة الدراجة في الصورة المُركّبة.

b. أوجد مقدار العزم واتّجاهه.

7 التدريب على الاختبار المعياري

أوجد ناتج كل زوج من المتّجهات باستخدام إما طريقة المثلّث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر واتجاهه بالنسبة إلى المحور الأفقي.

1. 

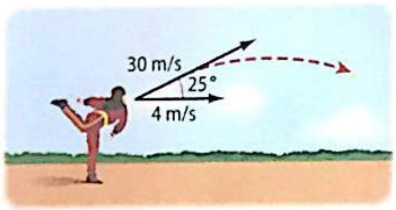
2. 

أوجد الصورة المُركّبة ومقدار المتّجه $\overrightarrow{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين.

3. $A(1, -3), B(-5, 1)$

4. $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), B(-1, 7)$

5. **السوفتبول** تضرب لاعبة السوفتبول في الفريق الخصم كرة على الأرض فتتدحرج إلى لميا بيسار الملعب. تجري ليلى إلى الكرة بسرعة 4 أمتار في الثانية وتلتقطها ثم تتقدم لترميها إلى ملتقطة الكرة بسرعة 30 مترًا في الثانية وبزاوية 25° بالنسبة للمحور الأفقي في محاولة لتسجيل نقاط. ما مقدار السرعة الناتجة للكرة واتّجاه الرمية؟



أوجد متّجه الوحدة الذي له نفس اتّجاه u.

6. $u = \langle -1, 4 \rangle$

7. $u = \langle 6, -3 \rangle$

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثمّ حدّد ما إذا كان u و v متعامدين أم لا.

8. $u = \langle 2, -5 \rangle, v = \langle -3, 2 \rangle$

9. $u = \langle 4, -3 \rangle, v = \langle 6, 8 \rangle$

10. $u = 10i - 3j, v = i + 8j$

11. **الاختيار من متعدد** اكتب **u** في صورة مجموع المتجهين المتعامدين، بحيث يكون أحدهما مسقط **u** على **v** إذا كان $\mathbf{u} = \langle 1, 3 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -4, 2 \rangle$.

A $u = \left\langle \frac{2}{5}, -\frac{3}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{18}{5} \right\rangle$

B $u = \left\langle \frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{12}{5} \right\rangle$

C $u = \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{2}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{9}{5}, \frac{13}{5} \right\rangle$

D $u = \left\langle -\frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{7}{5}, \frac{14}{5} \right\rangle$

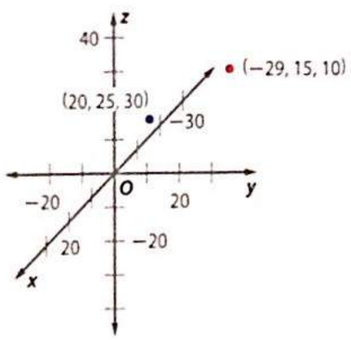
12. **الحركة** تدفع لميس صندوقًا على مستوى الأرض بقوة قدرها 54.4 كيلومتر وبزاوية انخفاض 20°. حدد مقدار الشغل المبذول إذا تم تحريك الصندوق 25 قدمًا.

أوجد كل مما يلي لكل من $a = \langle 2, 4, -3 \rangle$ و $b = \langle -5, -7, 1 \rangle$ و $c = \langle 8, 5, -9 \rangle$.

13. $2a + 5b - 3c$

14. $b - 6a + 2c$

15. **منطاد الهواء الساخن** أثناء أحد المهرجانات انطلق اثنا عشر منطادًا، وبعدها بدقائق، كانت إحداثيات أول منطادين هي $(20, 25, 30)$ و $(-29, 15, 10)$ كما هو موضح، حيث تذكر الإحداثيات بالقدم.



a. حدد المسافة بين أول منطادين انطلقا.

b. يقع منطاد ثالث في منتصف المسافة بين أول منطادين. أوجد إحداثيات المنطاد الثالث.

c. أوجد متجه الوحدة للمنطاد الأول إذا انطلق من النقطة $(0, 0, 0)$.

أوجد الزاوية θ بين المتجهين u و v مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من الدرجة.

16. $u = \langle -2, 4, 6 \rangle, v = \langle 3, 7, 12 \rangle$

17. $u = -9i + 5j + 11k, v = -5i - 7j - 6k$

أوجد ناتج الضرب المتجهي لـ u و v. ثم برهن أن $u \times v$ متعامد على كل من u و v.

18. $u = \langle 1, 7, 3 \rangle, v = \langle 9, 4, 11 \rangle$

19. $u = -6i + 2j - k, v = 5i - 3j - 2k$

20. **القوارب** يعتبر ذراع الدفة رافعة تتحكم في موقع دفة توجيه القارب وعندما تبذل قوة على ذراع الدفة سيدور المركب. افترض أن طول ذراع الدفة لقارب ما 0.75 مترًا ويستقر في المستوى xy بزاوية 15° من محور x الموجب. أوجد مقدار العزم المبذول على محور دوران ذراع الدفة إذا تم بذل قوة قدرها 50 نيوتن في اتجاه مواز لمحور y الموجب.

7 الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم
مجالات المتجهات

الهدف

- تمثيل المتجهات بيانيًا وتحديد التمثيل البياني لمجالات المتجهات.

في الوحدة 7، درست آثار تيارات الرياح والمياه على الأجسام المتحركة. وقد تم تمثيل القوة التي تبذلها الرياح أو التيارات بمتجه واحد.
ولكننا نعلم جميعًا أن التيار الموجود في مسطح مائي أو القوة التي يبذلها لا تكون بالضرورة ثابتة؛ بل تتغير من منطقة لأخرى. وإذا أردنا تمثيل التيار بأكمله أو تدفق الهواء في منطقة، فسنحتاج إلى تعيين متجه لكل نقطة في الفضاء. وبذلك نشكل *مجال متجه*.

ويشيع استخدام مجالات المتجهات في الهندسة والفيزياء لتمثيل مقاومة الهواء، والقوى المغناطيسية والجاذبية وحركة السوائل. وبالرغم من أن هذه التطبيقات لمجالات المتجهات تتطلب عدة أبعاد، إلا أننا سنحلل مجالات المتجهات في بعدين فقط.

ومجال المتجه $F(x, y)$ هو دالة تحول الإحداثيات ثنائية الأبعاد إلى مجموعات من المتجهات ثنائية الأبعاد.

$F(x, y) = \langle f_1(x, y), f_2(x, y)\rangle$، حيث إن $f_1(x, y)$ و $f_2(x, y)$ دالتين عدديتين.

ولتمثيل مجال المتجه، أوجد قيمة $F(x, y)$ عند (x, y) ومثّل المتجه بيانيًا باستخدام (x, y) كنقطة البداية. ويتم ذلك مع عدة نقاط.

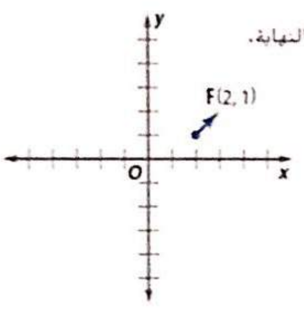
النشاط 1 مجالات المتجهات

أوجد قيمة $F(2, 1)$ و $F(-1, -1)$ و $F(1.5, -2)$ و $F(-3, 2)$ لمجال المتجه $F(x, y) = \langle y^2, x - 1\rangle$. ومثّل كل متجه بيانيًا مستخدمًا (x, y) كنقطة بداية.

الخطوة 1 لإيجاد قيمة $F(2, 1)$، افترض أن $x = 2$ و $y = 1$.

$$\langle y^2, x - 1\rangle = \langle 1^2, 2 - 1\rangle$$
$$= \langle 1, 1\rangle$$

الخطوة 2 للتمثيل البياني، افترض أن $(2, 1)$ تمثل نقطة البداية للمتجه، وبجعل ذلك النقطة $(2 + 1, 1 + 1)$ أو $(3, 2)$ نقطة النهاية.

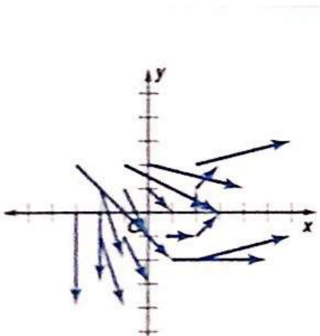


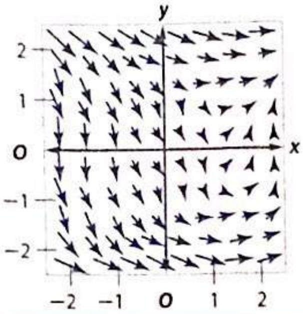
الخطوة 3 كرر الخطوتين 1-2 للدوال $F(-1, -1)$ و $F(1.5, -2)$ و $F(-3, 2)$.

تحليل النتائج

1. هل مقدار المتجهات وطولها *متماثل* أم *مختلف*؟
2. خمّن السبب في أنه يمكن تعريف مجال المتجه كدالة.
3. هل يمكن تمثيل كل متجه في مجال المتجه بيانيًا؟ اشرح استنتاجك.

ينبغي أن يتضمن التمثيل البياني لمجال متجه $F(x, y)$ عددًا من المتجهات التي تكون نقطة بدايتها (x, y). وتستخدم أجهزة التمثيل البياني لتمثيل مجالات المتجهات حيث إن رسمها باليد يعد أمرًا صعبًا.





لمنع تداخل المتجهات مع بعضها البعض وتجنب أن يبدو التمثيل البياني مختلطًا، تقلل أجهزة التمثيل البياني من أطوال المتجهات بشكل تناسبي ولا تضع المتجهات إلا بفترات محددة. فعلى سبيل المثال، إذا واصلنا تمثيل العديد من المتجهات بيانيًا لمجال المتجه الموجود في النشاط 1، ستكون النتيجة هي التمثيل البياني الموجود إلى اليسار.

حلل دوال المركبات لمجال متجه لتحديد نوع التمثيل البياني الناتج عنها.

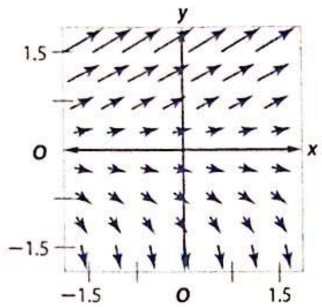
نصيحة دراسية

التمثيل البياني لمجالات المتجهات لكل نقطة في المستوى متجه مقابل، وتوضح التمثيلات البيانية لمجالات المتجهات مجموعة مختارة من النقاط

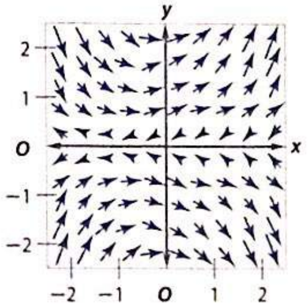
النشاط 2 مجالات المتجهات

صل بين كل مجال متجه وتمثيله البياني.

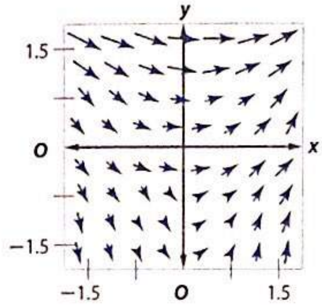
$F(x, y) = \langle 2, 1 + 2xy \rangle$ $\quad G(x, y) = \langle e^y, x \rangle$ $\quad H(x, y) = \langle e^y, y \rangle$



الشكل 1



الشكل 2



الشكل 3

الخطوة 1 ابدأ بتحليل المركبات التي تكوّن $F(x, y)$. سينتج عن المركب الثاني $(1 + 2xy)$ نتيجة موجبة عندما يكون لكل من x و y نفس العلامة. يكون المركب الرأسي للمتجهات في الربع الأول والثالث موجبًا، مما يجعل المتجهات في هذين الربعين متجهين لأعلى.

الخطوة 2 التمثيل البياني الذي يحتوي على متجهات متجهة لأعلى في الربعين الأول والثالث هو الشكل 2.

الخطوة 3 كرر الخطوتين 2-1 مع بقية مجالات المتجهات.

تحليل النتائج

4. افترض أن المتجهات في مجال المتجه تمثل قوة. ما العلاقة بين القوة ومقدار المتجه وطوله؟

5. بتمثيل الرياح بمتجه واحد وافتراض أن القوة الناشئة ظلت ثابتة بمنطقة بأكملها. إذا كانت القوة الناشئة عن الرياح ممثلة بعدة متجهات في مجال متجه، فما الافتراض الذي ينبغي التوصل إليه بشأن البعد الثالث؟

استخدام النماذج والتطبيق

6. أكمل الجدول لمجال المتجه $F(x, y) = \langle -y, x \rangle$. ثم مثّل كل متجه بيانيًا.

(x, y)	$\langle -y, x \rangle$	(x, y)	$\langle -y, x \rangle$
(2, 0)		(−2, 1)	
(1, 2)		(−2, 0)	
(2, 1)		(−1, −2)	
(0, 2)		(0, −2)	
(−1, 2)		(1, −2)	
(−2, −1)		(2, −1)	

الوحدة 8

الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

:: السابق

- في السابق، قمت بتحديد المعادلات الديكارتية للقطوع المخروطية وتمثيلها بيانيًا.

:: الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - تمثيل الإحداثيات القطبية بيانيًا.
  - التحويل بين المعادلات والإحداثيات القطبية والديكارتية.
  - تحديد المعادلات القطبية للقطوع المخروطية.
  - تحويل الأعداد المركبة بين الصورة القطبية والديكارتية.

:: لماذا؟ ▲

- **الحفلات** يمكن استخدام المعادلات القطبية لتمثيل أنماط الأصوات للمساعدة في تحديد ترتيب المسرح ومواضع مكبرات الصوت والميكروفون ومستويات الصوت والتسجيل. يمكن استخدام المعادلات القطبية أيضًا في ضبط زوايا الإضاءة والكاميرات عند تصوير الحفلات.

قراءة مسبقة استخدم مقدمات دروس الوحدة 8 للتوصل إلى توقعين أو ثلاثة بشأن الدروس المستفادة من هذه الوحدة.

الاستعداد للوحدة

أجب عن أسئلة التدريب السريع أدناه.

تدريب سريع

مثّل كل دالة بيانيًا باستخدام حاسبة التمثيل البيانية. حلل التمثيل البياني لتحديد ما إذا كانت كل دالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. أثبت إجابتك جبريًا. إذا كانت الدالة زوجية أو فردية، فوضح تماثل التمثيل البياني للدالة.

1. $f(x) = x^2 + 10$

2. $f(x) = -2x^3 + 5x$

3. $g(x) = \sqrt{x + 9}$

4. $h(x) = \sqrt{x^2 - 3}$

5. $g(x) = 3x^5 - 7x$

6. $h(x) = \sqrt{x^2} - 5$

7 . **المنطاد** يمكن تمثيل المسافة بالمتر بين منطاد وشخص بواسطة $d(t) = \sqrt{t^2 + 3000}$ ، حيث يمثل t الزمن بالثانية. حلل التمثيل البياني لتحديد ما إذا كانت كل دالة زوجية أم فردية أم غير ذلك.

قرّب إلى أقرب جزء من مئة القيم القصوى النسبية أو المطلقة لكل دالة. أذكر قيم x حيث تظهر.

8. $f(x) = 4x^2 - 20x + 24$

9. $g(x) = -2x^2 + 9x - 1$

10. $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

11. $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$

12 . **الصاروخ** تم إطلاق صاروخ في الهواء. تمثل الدالة $h(t) = -16t^2 + 35t + 15$ ارتفاع الصاروخ h بالمتر بعد t ثانية. أوجد القيم القصوى لهذه الدالة.

حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة. ثم أوجد مع الرسم زاوية موجبة وزاوية سالبة مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة.

13. $165°$

14. $205°$

15. $-10°$

16. $\frac{\pi}{6}$

17. $\frac{4\pi}{3}$

18. $-\frac{\pi}{4}$

المفردات الجديدة

نظام إحداثي قطبي	polar coordinate system
قطب	pole
المحور القطبي	polar axis
الإحداثيات القطبية	polar coordinates
معادلة قطبية	polar equation
تمثيل بياني قطبي	polar graph
منحنى قلبي الشكل	limaçon
قلبي الشكل	cardioid
بدر	rose
منحنى ذو عروتين	lemniscate
حلزون أرشميدس	spiral of Archimedes
مستوى مركب	complex plane
محور حقيقي	real axis
محور تخيلي	imaginary axis
مستوى أرجاند	Argand plane
قيمة مطلقة لعدد مركب	absolute value of a complex number
صورة قطبية	polar form
صيغة مثلثية	
معامل	modulus
فرضية	argument

مراجعة المفردات

ضلع ابتداء زاوية في الوضع القياسي للشعاع

ضلع الانتهاء لزاوية وضع الشعاع بعد الدوران

قياس الزاوية كمية واتجاه الدوران الضروري لتتحرك من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء للزاوية

الدرس

8-1 الإحداثيات القطبية

السابق
- فهمت برسم الزوايا الموجبة والسالبة المعطاة بالدرجة والرادبان في الوضع القياسي.

الحالي
1. تمثيل النقاط بيانيًا بالإحداثيات القطبية.
2. تمثيل معادلات قطبية بسيطة بيانيًا.

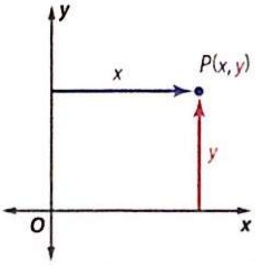
لماذا؟
- لتوفير الطرق والسفر الآمن، يستخدم مراقبو الحركة الجوية أنظمة رادار متقدمة لتوجيه حركة الطائرات. وبضمن هذا إبقاء الطائرات على مسافة كافية من بعضها البعض ومن المعالم على الأرض. يستخدم الرادار قياس الزوايا والمسافة الموجهة لتعيين مواقع الطائرات. ويستطيع المراقبون حينها نقل هذه المعلومات إلى الطيارين.

المفردات الجديدة
نظام إحداثي قطبي polar coordinate system
قطب pole
المحور القطبي polar axis
الإحداثيات القطبية polar coordinates
معادلة قطبية polar equation
تمثيل بياني قطبي polar graph

1 التمثيل البياني للإحداثيات القطبية

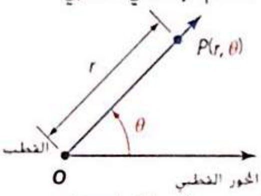
حتى الآن، رسمت المعادلات بنظام إحداثي ديكارتي. عندما يسجل مراقبو الحركة الجوّية مواقع الطائرات باستخدام المسافات والزوايا، فهم يقومون باستخدام **نظام إحداثي قطبي** أو مستوى قطبي.

النظام الإحداثي الديكارتي



في النظام الإحداثي الديكارتي، المحوران x و y مستقيمان أفقي ورأسي على التوالي، ونقطة تقاطعهما O تُسمى نقطة الأصل. يتم تحديد موقع النقطة P بواسطة إحداثيات ديكارتية بالصورة (x, y)، حيث x و y هما *المسافتان الموجهتان* أفقيًا ورأسيًا على التوالي من النقطة. على سبيل المثال، تقع النقطة $(3, -4)$ على مسافة 3 وحدات يمين المحور y و4 وحدات أسفل المحور x.

النظام الإحداثي القطبي



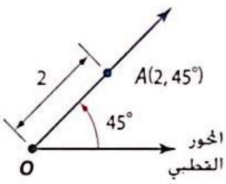
في النظام الإحداثي القطبي، نقطة الأصل نقطة ثابتة O تُسمى **القطب**. **المحور القطبي** هو شعاع ابتداء من القطب، وهو في العادة أفقي وموجه لليمين. يمكن تحديد موقع النقطة P في النظام الإحداثي القطبي بواسطة **الإحداثيات القطبية** بالصورة (r, θ)، حيث r هي المسافة الموجهة من القطب إلى النقطة وθ هي *الزاوية الموجهة* من المحور القطبي إلى $\overrightarrow{OP}$.

للتمثيل البياني لنقطة معطاة بالإحداثيات القطبية، تذكر أن قيمة θ الموجبة تشير إلى التدوير بعكس اتجاه عقارب الساعة من المحور القطبي، بينما القيمة السالبة تشير إلى التدوير باتجاه عقارب الساعة. إذا كانت r موجبة، فإن P تقع على ضلع الانتهاء لـ θ. إذا كانت r سالبة، فإن P تقع على الشعاع المقابل لضلع الانتهاء لـ θ.

المثال 1 التمثيل البياني للإحداثيات القطبية

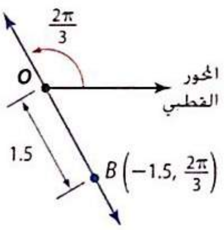
مثّل كل نقطة بيانيًا.

a. $A(2, 45°)$



لأن $\theta = 45°$، ارسم ضلع الانتهاء لزاوية $45°$ بحيث يكون ضلع الابتداء لها هو المحور القطبي. لأن $r = 2$، عيّن نقطة على مسافة وحدتين من القطب على طول ضلع الانتهاء لهذه الزاوية.

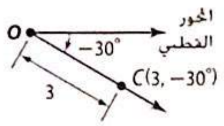
b. $B\left(-1.5, \frac{2\pi}{3}\right)$



لأن $\theta = \frac{2\pi}{3}$، ارسم ضلع الانتهاء لزاوية $\frac{2\pi}{3}$ بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها. لأن r سالبة، قم بمد ضلع الانتهاء للزاوية في الاتجاه *المقابل* وعيّن نقطة على مسافة 1.5 وحدة من القطب على طول هذا الشعاع الممتد.

c. $C(3, -30°)$

لأن $\theta = -30°$، ارسم ضلع الانتهاء لزاوية $-30°$ بحيث يكون ضلع الابتداء لها هو المحور القطبي. لأن $r = 3$، عيّن نقطة على مسافة 3 وحدات من القطب على طول ضلع الانتهاء لهذه الزاوية.



تمرين موجّه

مـثّـل كل نقطة بيانيًا.

1A. $D\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ **1B.** $E(2.5, 240°)$ **1C.** $F\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$

تمامًا كما يتم التمثيل البياني للإحداثيات الديكارتية على شبكة ديكارتية، يتم التمثيل البياني للإحداثيات القطبية على شبكة دائرية أو قطبية تمثل المستوى القطبي.

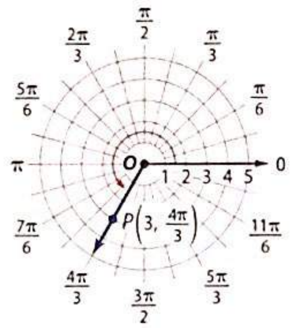
المثال 2 التمثيل البياني للنقاط على شبكة قطبية

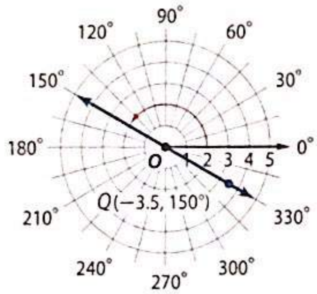
مـثّـل كل نقطة بيانيًا على شبكة قطبية.

a. $P\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$

لأن $\theta = \frac{4\pi}{3}$، ارسم ضلع الانتهاء لزاوية $\frac{4\pi}{3}$ بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها.

لأن $r = 3$، عيّن نقطة على مسافة 3 وحدات من القطب على طول ضلع الانتهاء للزاوية.





b. $Q(-3.5, 150°)$

لأن $\theta = 150°$، ارسم ضلع الانتهاء لزاوية $150°$ بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها. لأن r سالبة، قم بمد ضلع الانتهاء للزاوية في الاتجاه *المقابل* وعيّن نقطة على مسافة 3.5 وحدات من القطب على طول هذا الشعاع الممتد.

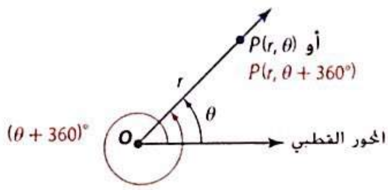
تمرين موجّه

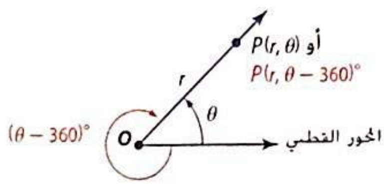
2A. $R\left(1.5, -\frac{7\pi}{6}\right)$ **2B.** $S(-2, -135°)$

نصيحة دراسية

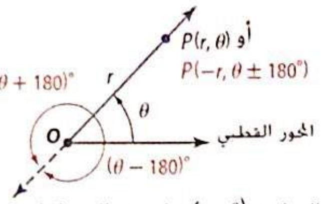
القطب يمكن تمثيل القطب بواسطة $(0, \theta)$، حيث θ هي أي زاوية.

في النظام الإحداثي الديكارتي، لكل نقطة مجموعة فريدة من الإحداثيات. لا ينطبق هذا على النظام الإحداثي القطبي. في الدرس 2-4، تعلمت أن الزاوية المعطاة لها عدد لانهائي من الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء. وبالتالي، إذا كانت الإحداثيات القطبية لنقطة ما هي (r, θ)، فإن لها أيضًا الإحداثيات القطبية $(r, \theta \pm 360°)$ أو $(r, \theta \pm 2\pi)$ كما هو موضح.





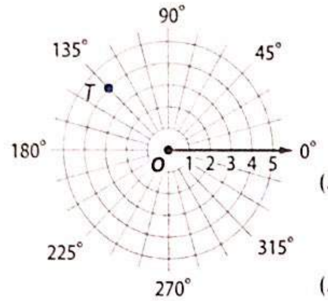
بالإضافة إلى ذلك، لأن r مسافة موجهة، تمثل (r, θ) و $(-r, \theta \pm 180°)$ أو $(-r, \theta \pm \pi)$ النقطة ذاتها كما هو موضح.



بوجه عام، إذا كان n أي عدد صحيح، فيمكن كذلك تمثيل النقطة ذات الإحداثيات القطبية (r, θ) بواسطة الإحداثيات القطبية بالصورة $(r, \theta + 360n°)$ أو $(-r, \theta + (2n + 1)180)$. وبالمثل، إذا كانت θ بالراديان و n أي عدد صحيح، تكون التمثيلات الأخرى لـ (r, θ) بالصورة $(r, \theta + 2n\pi)$ أو $(-r, \theta + (2n + 1)\pi)$.

المثال 3 التمثيلات المتعددة للإحداثيات القطبية

أوجد أربعة أزواج مختلفة من الإحداثيات القطبية التي تعيّن النقطة T إذا علمتَ أن $-360° \leq \theta \leq 360°$.



زوج من الإحداثيات القطبية التي تعيّن النقطة T هو $(4, 135°)$.
التمثيلات الثلاثة الأخرى هي كما يلي.

$$(4, 135°) = (4, 135° - 360°)$$
$$= (4, -225°)$$

$$(4, 135°) = (-4, 135° + 180°)$$
$$= (-4, 315°)$$

$$(4, 135°) = (-4, 135° - 180°)$$
$$= (-4, -45°)$$

تمرين موجّه

أوجد ثلاثة أزواج إضافية من الإحداثيات القطبية التي تعيّن النقطة المعطاة إذا كان $-360° \leq \theta \leq 360°$ أو $-2\pi \leq \theta \leq \pi$.

3A. $(5, 240°)$

3B. $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

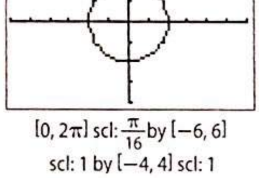
2 التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية

المعادلة التي يتم التعبير عنها بدلالة الإحداثيات القطبية تُسمى **معادلة قطبية**. على سبيل المثال، $r = 2 \sin \theta$ هي معادلة قطبية. **التمثيل البياني القطبي** هو مجموعة كل النقاط التي لها الإحداثيات (r, θ) والتي تحقق معادلة قطبية مُعطاة.

تعلمتَ في السابق كيفية التمثيل البياني للمعادلات بالنظام الإحداثي *الديكارتي*. التمثيلات البيانية للمعادلات التي تشتمل على ثوابت مثل $x = 2$ و $y = -3$ تُعتبر أساسية في النظام الإحداثي الديكارتي. وبالمثل، التمثيلات البيانية للمعادلتين القطبيتين $r = k$ و $\theta = k$، حيث k ثابت، تُعتبر أساسية في النظام الإحداثي القطبي.

تلميح تقني

التمثيل البياني للمعادلات القطبية للتمثيل البياني للمعادلة القطبية $r = 2$ على حاسبة التمثيل البياني، اضغط أولاً على MODE وغيّر إعداد التمثيل البياني من FUNC إلى POL. عند الضغط على Y=، لاحظ تغير المتغير التابع من Y إلى r وتغير المتغير المستقل من X إلى θ. مثّل بيانيًا $r = 2$.



$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{16}$ by $[-6, 6]$ scl: 1 by $[-4, 4]$ scl: 1

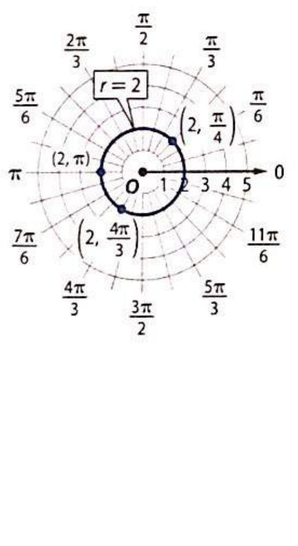
المثال 4 تمثيل المعادلات القطبية بيانيًا

مثّل كل معادلة قطبية بيانيًا.

a. $r = 2$

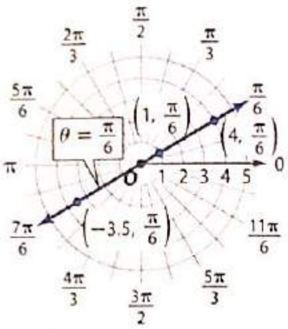
حلول $r = 2$ هما الزوجان المرتبان بالصورة $(2, \theta)$، حيث θ أي عدد حقيقي.

يتكون التمثيل البياني من جميع النقاط التي تبعد وحدتين عن القطب، بحيث يكون التمثيل البياني دائرة مركزها عند نقطة الأصل ونصف قطرها 2.



b. $\theta = \frac{\pi}{6}$

حلول $\theta = \frac{\pi}{6}$ هما الزوجان المرتبان بالصورة $\left(r, \frac{\pi}{6}\right)$، حيث r أي عدد حقيقي. يتكون التمثيل البياني من جميع النقاط على المستقيم والتي تصنع الزاوية $\frac{\pi}{6}$ مع المحور القطبي الموجب.



تمرين موجّه

مـثّـل كل معادلة قطبية بيانيًا.

4A. $r = 3$

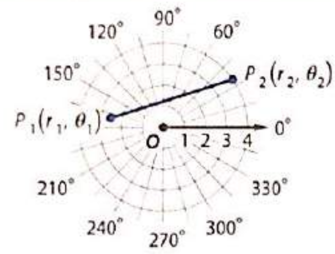
4B. $\theta = \frac{2\pi}{3}$

يمكن إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى القطبي باستخدام الصيغة التالية.

المفهوم الأساسي صيغة المسافة القطبية

إذا كانت $P_1(r_1, \theta_1)$ و $P_2(r_2, \theta_2)$ نقطتين في المستوى القطبي، فإن المسافة P_1P_2 معطاة بواسطة

$$\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$



انتبه!

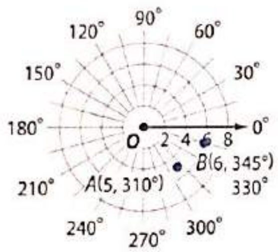
الوضع عند استخدام صيغة المسافة القطبية، إذا تم كانت θ بالدرجة، فتأكد من ضبط حاسبة التمثيل البياني على وضع الدرجات.

مثال 5 من الحياة اليومية إيجاد المسافة بين الإحداثيات القطبية

الحركة الجوية **يتتبع مراقب حركة جوية طائرتين تطيران على الارتفاع ذاته. إحداثيات الطائرتين هي $A(5, 310°)$ و $B(6, 345°)$، حيث يتم قياس المسافة الموجهة بالكيلومترات.**

a. ارسم تمثيلًا بيانيًا لهذا الموقف.

تقع الطائرة A على مسافة 5 كيلومترات من القطب على ضلع الانتهاء للزاوية 310°. وتقع الطائرة B على مسافة 6 كيلومترات من القطب على ضلع الانتهاء للزاوية 345°، كما هو موضح.



b. **إذا كانت اللوائح تحظر على الطائرات المرور ضمن مسافة 3 كيلومترات من بعضها البعض، فهل تنتهك الطائرتان اللوائح؟ اشرح.**

استخدم صيغة المسافة القطبية.

$$AB = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

$$= \sqrt{5^2 + 6^2 - 2(5)(6)\cos(345° - 310°)} \qquad (r_2, \theta_2) = (6, 345°),\ (r_1, \theta_1) = (5, 310°)$$

$= 3.44$ تقريبًا

يفصل بين الطائرتين مسافة 3.44 كيلومترات. إذًا فهما لا تنتهكان هذه اللائحة.

تمرين موجّه

5. **السفن** يتتبع رادار بحري حاملتي طائرات. إحداثيات الحاملتين هي $(8, 150°)$ و $(3, 65°)$، حيث r بالكيلومترات.

A. ارسم تمثيلاً بيانيًا لهذا الموقف.

B. ما المسافة بين حاملتي الطائرات؟

الربط بالحياة اليومية

طورت ألمانيا جهاز رادار في 1936 يمكنه اكتشاف الطائرات في نطاق نصف قطره 128 كيلومتر. وفي العام التالي، حازت ألمانيا على الفصل في تزويد بارجة، جراف سبي، بأول نظام رادار.

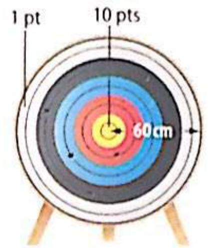
المصدر: تاريخ صناعة أنشاء الموصلات العالمية

تمارين

مثّل كل نقطة بيانيًا على شبكة قطبية. (المثالان 1, 2)

1. $R(1, 120°)$
2. $T(-2.5, 330°)$
3. $F\left(-2, \frac{2\pi}{3}\right)$
4. $A\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$
5. $Q\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$
6. $B(5, -60°)$
7. $D\left(-1, -\frac{5\pi}{3}\right)$
8. $G\left(3.5, -\frac{11\pi}{6}\right)$
9. $C(-4, \pi)$
10. $M(0.5, 270°)$
11. $P(4.5, -210°)$
12. $W(-1.5, 150°)$

13. **الرماية** يتكون الهدف في منافسة الرماية على الأهداف من 10 دوائر متحدة المركز على مسافات متساوية مدرجة من 1 إلى 10 نقاط من الدائرة الخارجية إلى المركز. افترض أن أحد الرماة يستخدم هدفًا نصف قطره 60 سنتيمترًا ويطلق السهام عند $(45, 57°)$ و$(315, 41°)$، و$(240, 15°)$. (المثالان 1, 2)



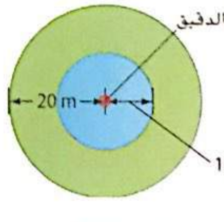
a. عيّن نقاط إصابة الهدف التي يحققها الرامي على شبكة قطبية.

b. كم عدد النقاط التي يحرزها الرامي؟

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة من الإحداثيات القطبية التي تعيّن النقطة المعطاة إذا كان $-360° \le \theta \le 360°$ أو $-2\pi \le \theta \le 2\pi$. (المثال 3)

14. $(1, 150°)$
15. $(-2, 300°)$
16. $\left(4, -\frac{7\pi}{6}\right)$
17. $\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$
18. $\left(5, \frac{11\pi}{6}\right)$
19. $\left(-5, -\frac{4\pi}{3}\right)$
20. $(2, -30°)$
21. $(-1, -240°)$

22. **القفز الحر** في منافسات الهبوط الدقيق، يحاول لاعبو القفز الحر الهبوط في أقرب نقطة ممكنة من "المركز الدقيق". مركز هدف علامته قرص قطره متران. (المثال 4)



a. اكتب المعادلات القطبية التي تمثل الحدود الثلاثة للهدف.

b. مثّل المعادلات بيانيًا على شبكة قطبية.

مثّل كل معادلة قطبية بيانيًا. (المثال 4)

23. $r = 4$
24. $\theta = 225°$
25. $r = 1.5$
26. $\theta = -\frac{7\pi}{6}$
27. $\theta = -15°$
28. $r = -3.5$

29. **لوحة السهام** نصف قطر إحدى لوحات السهام 225 ملّيمترًا. نقطة الهدف لها قسمان. قسم 50 نقطة نصف قطره 6.3 ملّيمترًا. قسم 25 نقطة يحيط بقسم 50 نقطة بمقدار 9.7 ملّيمترًا إضافية. (المثال 4)

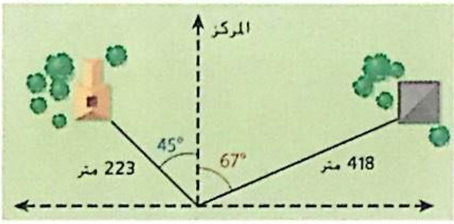
a. اكتب مع التمثيل البياني المعادلات القطبية التي تمثل حدود لوحة السهام وهذين القسمين.

b. ما النسبة المئوية لمساحة نقطة الهدف من مساحة لوحة السهام؟

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط. (المثال 5)

30. $(2, 30°), (5, 120°)$
31. $\left(3, \frac{\pi}{2}\right), \left(8, \frac{4\pi}{3}\right)$
32. $(6, 45°), (-3, 300°)$
33. $\left(7, -\frac{\pi}{3}\right), \left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$
34. $\left(-5, \frac{7\pi}{6}\right), \left(4, \frac{\pi}{6}\right)$
35. $(4, -315°), (1, 60°)$
36. $(-2, -30°), (8, 210°)$
37. $\left(-3, \frac{11\pi}{6}\right), \left(-2, \frac{5\pi}{6}\right)$
38. $\left(1, -\frac{\pi}{4}\right), \left(-5, \frac{7\pi}{6}\right)$
39. $(7, -90°), (-4, -330°)$
40. $\left(8, -\frac{2\pi}{3}\right), \left(4, -\frac{3\pi}{4}\right)$
41. $(-5, 135°), (-1, 240°)$

42. **المسح** يعمل أحد المساحين على وضع خريطة لقطعة أرض سيتم بناء مشروع إسكان جديد عليها ويحدد أحد المعالم على مسافة 223 مترًا من المركز وبزاوية 45° على يسار المركز. يوجد معلم آخر على مسافة 418 مترًا من المركز وبزاوية 67° على يمين المركز. حدد المسافة بين المعلمين. (المثال 5)



43. **المراقبة** تتحرك كاميرا مراقبة مثبتة وتراقب أحد أجزاء منطقة دائرية محددة بواسطة $-60° \le \theta \le 150°$ و $0 \le r \le 40$، حيث تُقاس r بالمتر.

a. ارسم تمثيلاً بيانيًا لمنطقة تغطية الكاميرا الأمنية على شبكة قطبية.

b. أوجد مساحة المنطقة.

أوجد زوجًا مختلفًا للإحداثيات القطبية لكل نقطة بحيث تكون $0 \le \theta \le 180°$ أو $0 \le \theta \le \pi$.

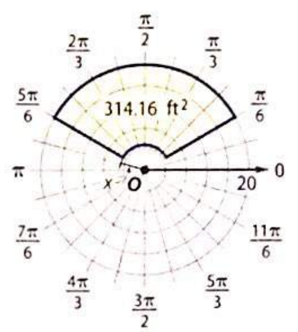
44. $(5, 960°)$
45. $\left(-2.5, \frac{5\pi}{2}\right)$
46. $\left(4, \frac{11\pi}{4}\right)$
47. $(1.25, -920°)$
48. $\left(-1, -\frac{21\pi}{8}\right)$
49. $(-6, -1460°)$

50. المسرح المدرج افترض أن مغنيًا يغني على مسرح مدرج. يمكننا تمثيل هذا الموقف بالإحداثيات القطبية من خلال افتراض أن المغني يقف عند القطب ويواجه اتجاه المحور القطبي. ويمكن حينها وصف المقاعد على أنها تشغل المساحة المحددة بواسطة $-45° \le \theta \le 45°$ و $30 \le r \le 240$، حيث تقاس r بالمتر.

a. ارسم تمثيلاً بيانيًا لهذه المنطقة على شبكة قطبية.

b. إذا كان كل شخص يحتاج إلى مساحة 5 أمتار مربعة، فكم عدد المقاعد التي يمكن للمسرح المدرج استيعابها؟

51. الأمن يعمل مصباح أمني تم تركيبه فوق منزل على إضاءة جزء من مساحة دائرة محددة بواسطة $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$ و $x \le r \le 20$، حيث تقاس r بالمتر. إذا كانت المساحة الإجمالية للمنطقة هي تقريبًا 314.16 مترًا مربعًا، فأوجد x.



أوجد قيمة للإحداثي الناقص تحقق الشرط التالي.

52. $P_1 = (3, 35°); P_2 = (r, 75°); P_1P_2 = 4.174$

53. $P_1 = (5, 125°); P_2 = (2, \theta); P_1P_2 = 4; 0 \le \theta \le 180°$

54. $P_1 = (3, \theta); P_2 = \left(4, \frac{7\pi}{9}\right); P_1P_2 = 5; 0 \le \theta \le \pi$

55. $P_1 = (r, 120°); P_2 = (4, 160°); P_1P_2 = 3.297$

56. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سنقوم باستقصاء العلاقة بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية.

a. بيانيًا عيّن النقطتين $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ و $B\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ على شبكة قطبية. ثم ارسم نظام إحداثي ديكارتي على الشبكة القطبية بحيث تتطابق نقطتي الأصل ويحاذي المحور x المحور القطبي. يجب أن يحاذي المحور y المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$. اصنع زاوية قائمة واحدة من خلال توصيل النقطة A بنقطة الأصل بشكل متعامد على المحور x. اصنع زاوية قائمة أخرى من خلال توصيل النقطة B بنقطة الأصل بشكل متعامد على المحور x.

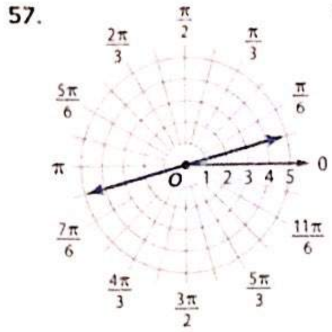
b. عدديًا احسب أطوال أضلاع كل مثلث.

c. تحليليًا ما العلاقة بين أطوال الأضلاع والإحداثيات الديكارتية لكل نقطة؟

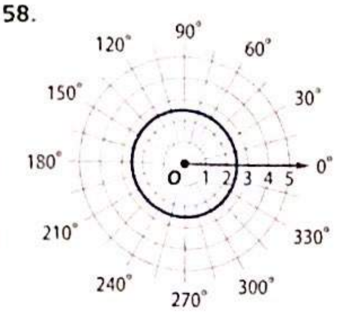
d. تحليليًا اشرح العلاقة بين الإحداثيات القطبية (r, θ) والإحداثيات الديكارتية (x, y).

اكتب معادلة لكل تمثيل بياني قطبي.

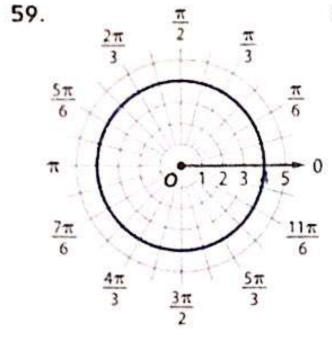
57.



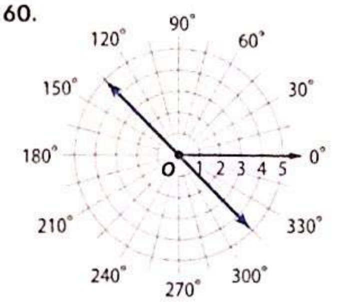
58.



59.



60.



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

61. التبرير اشرح سبب عدم أهمية ترتيب النقاط المستخدمة في صيغة المسافة القطبية. بمعنى، لماذا يمكنك اختيار أن تكون نقطة P_1 والأخرى P_2؟

62. التحدي قم بإيجاد زوج مرتب من إحداثيات قطب لتمثيل نقطة بالإحداثيات الديكارتية $(-3, -4)$. قرّب الزاوية لأقرب درجة.

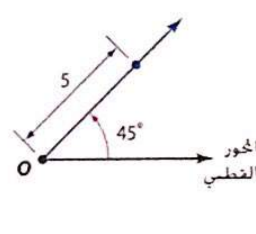
63. الإثبات أثبت أن المسافة بين نقطتين بالإحداثيات القطبية $P_1(r_1, \theta_1)$ و $P_2(r_2, \theta_2)$ هي

$$P_1P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}.$$

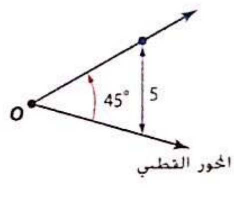
64. الاستنتاج صف ما يحدث لصيغة المسافة القطبية عندما تكون $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}$. اشرح هذا التغير.

65. تحليل الخطأ رسمت ريهام وسالي التمثيل البياني للإحداثيات القطبية $(5, 45°)$. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

سالي



ريهام



66. الكتابة في الرياضيات خمّن سبب عدم كفاية الحصول على الإحداثيات القطبية لطائرة لتحديد موقعها بدقة.

مراجعة شاملة

أوجد ناتج الضرب النقطي لكل من u و v. ثم حدد ما إذا كان u و v متعامدين.

67. $\mathbf{u} = \langle 4, 10, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1, 7 \rangle$

68. $\mathbf{u} = \langle -5, 4, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, -9, 8 \rangle$

69. $\mathbf{u} = \langle -8, -3, 12 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -6, 0 \rangle$

إذا كان $\mathbf{a} = \langle -4, 3, -2 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle 2, 5, 1 \rangle$ و $\mathbf{c} = \langle 3, -6, 5 \rangle$، فأوجد كل مما يلي:

70. $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$

71. $-2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 5\mathbf{c}$

72. $5\mathbf{a} - 9\mathbf{b} + \mathbf{c}$

لكل معادلة، حدد الرأس والبؤرة ومعادلة محور التماثل والدليل. ثم مثّل القطع المكافئ بيانيًا.

73. $-14(x - 2) = (y - 7)^2$

74. $(x - 7)^2 = -32(y - 12)$

75. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{19}{2}$

76. **المعرض الوطني** إذا اشترى كل من عمر وعلي العدد الموضح أدناه من تذاكر الألعاب والأراجيح. فما سعر كل نوع من التذاكر؟

الشخص	نوع التذكرة	التذاكر	الإجمالي (AED)
عمر	لعبة أرجوحة	6 15	93
علي	لعبة أرجوحة	7 12	81

اكتب المصفوفة الموسعة لنظام المعادلات الخطية.

77.
$12w + 14x - 10y = 23$
$4w - 5y + 6z = 33$
$11w - 13x + 2z = -19$
$19x - 6y + 7z = -25$

78.
$-6x + 2y + 5z = 18$
$5x - 7y + 3z = -8$
$y - 12z = -22$
$8x - 3y + 2z = 9$

79.
$x + 8y - 3z = 25$
$2x - 5y + 11z = 13$
$-5x + 8z = 26$
$y - 4z = 17$

حُـلّ كل معادلة لجميع قيم x.

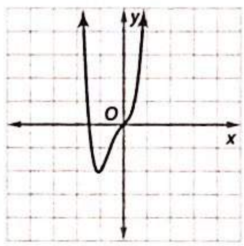
80. $2\cos^2 x + 5\sin x - 5 = 0$

81. $\tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0$

82. $\cos^2 x + 3\cos x = -2$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

83. **SAT/ACT** إذا كان الشكل يوضح أحد أجزاء التمثيل البياني لـ $f(x)$. فأي مما يلي يمكن أن يكون مدى $f(x)$؟



A $\{y \mid y \geq -2\}$

B $\{y \mid y \leq -2\}$

C $\{y \mid -2 < y < 1\}$

D $\{y \mid -2 \leq y \leq 1\}$

E $\{y \mid y > -2\}$

84. **مراجعة** أي مما يلي الصورة المركّبة لـ $\overrightarrow{RS}$ بنقطة البداية $R(-5, 3)$ ونقطة النهاية $S(2, -7)$؟

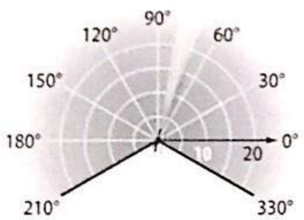
F $\langle 7, -10 \rangle$

G $\langle -3, 10 \rangle$

H $\langle -7, 10 \rangle$

J $\langle -3, -10 \rangle$

85. رشاش العشب الموضح يمكنه تغطية جزء من منطقة دائرية تحدده المتباينتان القطبيتان $-30° \leq \theta \leq 210°$ و $0 \leq r \leq 20$، حيث تُقاس r بالمتر. ما المقدار التقريبي لمساحة هذه المنطقة؟



A 821 متراً مربعًا

B 838 متراً مربعًا

C 852 متراً مربعًا

D 866 متراً مربعًا

86. **مراجعة** ما نوع المخروط الذي يمثله $25y^2 = 400 + 16x^2$؟

F دائرة

G قطع ناقص

H قطع زائد

J قطع مكافئ

8-2 مختبر تقنية التمثيل البياني استكشاف التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية

الهدف

- استخدام حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف أشكال التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية وتماثلها.

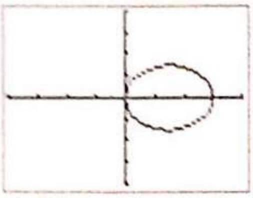
في الدرس 1-8، قمت بتمثيل الإحداثيات القطبية والمعادلات القطبية المسجلة بيانيًا على النظام الإحداثي القطبي. والآن سوف تستكشف شكل التمثيلات البيانية الأكثر تعقيدًا للمعادلات القطبية وتماثلها عبر استخدام حاسبة التمثيل البياني.

النشاط تمثيل المعادلات القطبية بيانيًا

مثّل كل معادلة بيانيًا. ثم صِف شكل التمثيل البياني وتماثله.

a. $r = 3\cos\theta$

أولاً، غيّر نمط التمثيل البياني إلى النمط القطبي ونمط الزاوية إلى الرادیان. بعد ذلك، أدخل $r = 3\cos\theta$ من أجل r_1 في قائمة Y= . استخدم نافذة العرض المبيّنة أدناه.

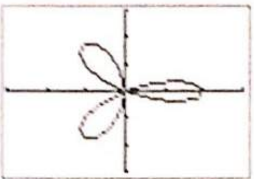


$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{24}$ by $[-4, 4]$ scl: 1 by $[-4, 4]$ scl: 1

التمثيل البياني لـ $r = 3\cos\theta$ هو دائرة مركزها (1.5, 0) ونصف قطرها 1.5 وحدة. التمثيل البياني متماثل بالنسبة للمحور القطبي.

b. $r = 2\cos 3\theta$

امسح المعادلة الواردة في القسم a في القائمة Y = وأدخل $r = 2\cos 3\theta$. استخدم النافذة المبيّنة.

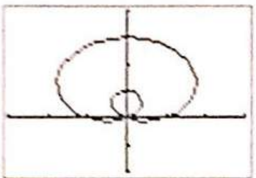


$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{24}$ by $[-3, 3]$ scl: 1 by $[-3, 3]$ scl: 1

التمثيل البياني لـ $r = 2\cos 3\theta$ منحنى قطبي كلاسيكي يدعى منحنى الوردة، وسنتناوله في الدرس 2-8.
للتمثيل البياني 3 بتلات، وهو متماثل بالنسبة للمحور القطبي.

c. $r = 1 + 2\sin\theta$

امسح المعادلة الواردة في القسم b في القائمة Y =. وأدخل $r = 1 + 2\sin\theta$. اضبط النافذة لتعرض التمثيل البياني بكامله.



$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{24}$ by $[-3, 3]$ scl: 1 by $[-2, 4]$ scl: 1

التمثيل البياني لـ $r = 1 + 2\sin\theta$ منحنى قطبي كلاسيكي يدعى المنحنى قلبي الشكل، وسنتناوله في الدرس 2-8.

للتمثيل البياني منحنى ذو حلقة داخلية.
وهو متماثل بالنسبة للمستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$.

> **نصيحة دراسية**
> **حوّل النافذة إلى الشكل المربّع** لعرض التمثيلات البيانية في هذا النشاط دون أيّ تشوبه، حوّل النافذة إلى الشكل المربع عبر اختيار ZSquare تحت القائمة ZOOM .

تمارين

مثّل كل معادلة بيانيًا. ثم صِف شكل التمثيل البياني وتماثله.

1. $r = -3\cos\theta$
2. $r = 3\sin\theta$
3. $r = -3\sin\theta$
4. $r = 2\cos 4\theta$
5. $r = 2\cos 5\theta$
6. $r = 2\cos 6\theta$
7. $r = 2 + 4\sin\theta$
8. $r = 1 - 3\sin\theta$
9. $r = 1 + 2\sin(-\theta)$

تحليل النتائج

10. **سؤال تحليلي** اشرح كيف تؤثر كل قيمةٍ في التمثيل البياني للمعادلة المعطاة.
  a. قيمة n في $r = a\cos n\theta$
  b. قيمة $|a|$ في $r = b \pm a\sin n\theta$

11. **التخمين** صف دون التمثيل البياني للمتباينة $r = 10\cos 24\theta$. شكل التمثيل البياني لها وتماثله. وضّح استنتاجك.

8-2 التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية

..السابق	..الحالي	..لماذا؟
• فمت بتمثيل الدوال بيانيًا في النظام الإحداثي الديكارتي.	• 1 تمثيل المعادلات القطبية بيانيًا. 2 تحديد المنحنيات الكلاسيكية وتمثيلها بيانيًا.	• لتقليل الضجيج في الخلفية. تستخدم الشكبات التي تذيع الأحداث الرياضية مكبرات صوت اتجاهية لالتقاط أصوات المباراة. وتتسم مكبرات الصوت الاتجاهية بقدرتها على التقاط الصوت الصادر من اتجاه أو منطقة معينة بشكل أساسي. ويمكن التعبير عن الأصوات التي تستطيع مكبرات الصوت هذه التقاطها على هيئة دوال قطبية.

المفردات الجديدة

منحنى حلزون بسكال limaçon
قلبي الشكل cardioid
منحنى الوردة rose
منحنى ذو عروتين lemniscate
حلزون أرشميدس spiral of Archimedes

1 التمثيلات البيانية للدوال القطبية

عندما مثلت المعادلات بيانيًا على نظام إحداثي ديكارتي. بدأت باستخدام معادلة للحصول على مجموعة من الأزواج المرتبة. بعد ذلك حددت موضع النقاط على هذه الإحداثيات ووصلت بينها بمنحنى بسيط. في هذا الدرس. سوف نتناول تمثيل المعادلات القطبية بيانيًا بطريقة مشابهة.

المثال 1 تمثيل المعادلات القطبية بتحديد النقاط

مثّل كل معادلة بيانيًا.

a. $r = \cos\theta$

اصنع جدول قيم لإيجاد قيم r المتوافقة مع قيم θ المختلفة على الفترة $[0, 2\pi]$. وقرّب كل قيمة من قيم r إلى أقرب جزء من عشرة.

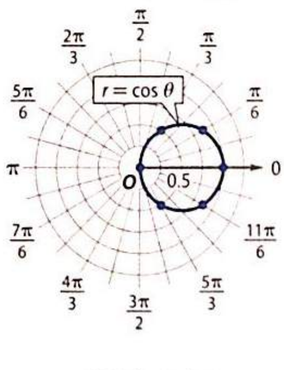
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$r = \cos\theta$	1	0.9	0.5	0	-0.5	-0.9	-1	-0.9	-0.5	0	0.5	0.9	1

مثّل الأزواج المرتبة (r, θ) بيانيًا ووصل بينها بمنحنى بسيط. يظهر أن التمثيل البياني الموضح في الشكل 8.2.1 عبارة عن دائرة مركزها عند $(0.5, 0)$ ونصف قطرها مقداره 0.5 وحدة.

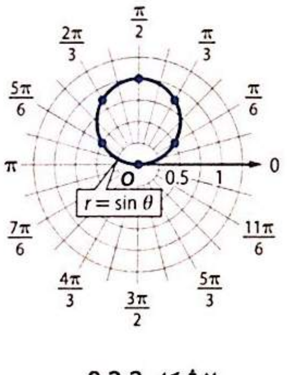
b. $r = \sin\theta$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$r = \sin\theta$	0	0.5	0.9	1	0.9	0.5	0	−0.5	−0.9	−1	−0.9	−0.5	0

مثّل الأزواج المرتبة بيانيًا ووصل بينها بمنحنى بسيط. يظهر أن التمثيل البياني الموضح في الشكل 8.2.2 عبارة عن دائرة مركزها عند $\left(0.5, \frac{\pi}{2}\right)$ ونصف قطرها مقداره 0.5 وحدة.



الشكل 8.2.1



الشكل 8.2.2

تمرين موجّه

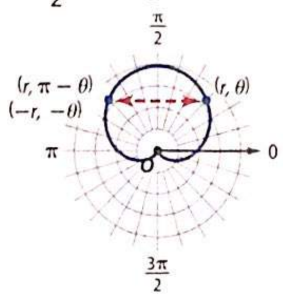
1A. $r = -\sin\theta$ 1B. $r = 2\cos\theta$ 1C. $r = \sec\theta$

لاحظ أنه مع تزايد θ في الفترة $[0, 2\pi]$. تم رسم كل تمثيل بياني مرتين. وهذا لأن الإحداثيات القطبية التي حصلنا عليها عند الفترة $[0, \pi]$ تمثل النقاط نفسها التي حصلنا عليها عند الفترة $[\pi, 2\pi]$.

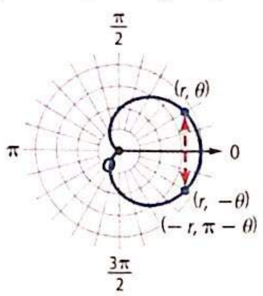
مثلما تساعد معرفة ما إذا كان التمثيل البياني في النظام الإحداثي الديكارتي متماثلاً على المحور x أو المحور y أو نقطة الأصل، فإن معرفة ما إذا كان التمثيل البياني للمعادلة القطبية متماثلاً يمكن أن يساعد على تقليل عدد النقاط اللازمة لرسم التمثيل البياني للمعادلة. يمكن أن تكون التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية متماثلة على الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$ أو المحور القطبي، أو القطب، مثلما موضح بالأسفل.

المفهوم الأساسي تماثل التمثيلات البيانية القطبية

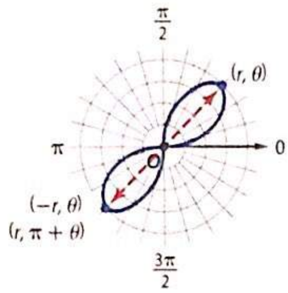
تماثل على الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$



تماثل على المحور القطبي



تماثل على القطب



تقدم التحديدات البيانية بالأعلى طريقة لاختبار المعادلة القطبية للتحقق من وجود تماثل. على سبيل المثال، إذا نتج عن استبدال (r, θ) في معادلة قطبية ما بـ $(r, -\theta)$ أو $(-r, \pi - \theta)$ معادلة مكافئة، فإن تمثيلها البياني متماثل على المحور القطبي. وإذا اجتازت المعادلة أحد اختبارات التماثل، فهذا كافٍ لضمان أن المعادلة لها هذا النوع من التماثل. ولكن العكس ليس صحيحًا. فإذا فشلت معادلة قطبية في اجتياز جميع هذه الاختبارات، فقد لا يزال التمثيل البياني متماثلاً.

المثال 2 التماثل على المحور القطبي

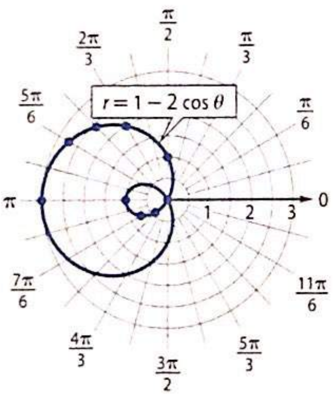
استخدم التماثل لتمثيل $r = 1 - 2\cos\theta$ بيانيًا.

استبدال (r, θ) بـ $(r, -\theta)$ ينتج عنه $r = 1 - 2\cos(-\theta)$. نظرًا لأن جيب التمام دالة زوجية، $\cos(-\theta) = \cos\theta$. إذا يتم تبسيط هذه المعادلة إلى $r = 1 - 2\cos\theta$. ونظرًا لأن الاستبدال نتج عنه معادلة مكافئة للمعادلة الأصلية، فإن التمثيل البياني لهذه المعادلة متماثل على المحور القطبي.

بسبب هذا التماثل، نحتاج فقط إلى عمل جدول قيم لإيجاد قيم r المتوافقة مع θ في الفترة $[0, \pi]$.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$r = 1 - 2\cos\theta$	−1	−0.7	−0.4	0	1	2	2.4	2.7	3

بتحديد موضع هذه النقاط واستخدام التماثل على المحور القطبي، نحصل على التمثيل البياني الموضح.



يطلق على هذا النوع من المنحنيات اسم **حلزون بسكال**. تحتوي بعض منحنيات حلزون بسكال على حلقة داخلية مثل هذا المنحنى. والبعض الآخر يصل إلى نقطة معينة أو تكون له نقرة، أو مجرد منحنى للخارج.

نصيحة دراسية

تمثيل المعادلات القطبية بيانيًا
من المألوف تمثيل الدوال القطبية بيانيًا بوحدات الراديان بدلاً من الدرجات

تمرين موجّه

استخدم التماثل لتمثيل كل معادلة بيانيًا.

2A. $r = 1 - \cos\theta$

2B. $r = 2 + \cos\theta$

في المثالين 1 و 2، لاحظ أن التمثيلين البيانيين $r = \cos \theta$ و $r = 1 - 2\cos \theta$ متماثلان على المحور القطبي. بينما التمثيل البياني $r = \sin \theta$ متماثل على الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$. يمكن تعميم هذه الملاحظات كالآتي.

المفهوم الأساسي اختبارات سريعة على التماثل في التمثيلات البيانية القطبية

الشرح

يكون التمثيل البياني لدالة قطبية متماثلاً على

- المحور القطبي إذا كانت الدالة $\cos \theta$
- الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا كانت الدالة $\sin \theta$.

مثال

التمثيل البياني لـ $r = 3 + \sin \theta$ متماثل على الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$.

يمكن استخدام التناظر لتمثيل الدوال القطبية التي تعبر عن مواقف من الحياة اليومية بيانيًا.

مثال 3 من الحياة اليومية تماثل على الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$

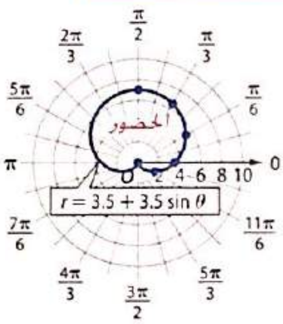
تكنولوجيا الصوتيات خلال إحدى الحفلات، وُضِع مكبر صوت اتجاهي في مواجهة الحضور بمنتصف خشبة المسرح من أجل التقاط ضجيج الحشد في تسجيل حي. يمكن تمثيل مجال الصوت الذي يلتقطه مكبر الصوت بالمعادلة $r = 3.5 + 3.5 \sin \theta$. افترض أن واجهة خشبة المسرح في اتجاه الشمال تمامًا.

a. مثّل النمط القطبي لمكبر الصوت بيانيًا.

نظرًا لأن هذه المعادلة القطبية دالة لدالة جيب التمام، فإنها متماثلة عند الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$. لذلك، ارسم جدولاً واحسب قيم r عند $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$r = 3.5 + 3.5 \sin \theta$	0	0.5	1.0	1.8	3.5	5.25	6.0	6.5	7

بتحديد موقع هذه النقاط واستخدام التماثل عند الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$، تحصل على التمثيل البياني الموضح. ويسمى هذا النوع من المنحنيات باسم **المنحنى القلبي**. والمنحنى القلبي عبارة عن حلزون "بسكال" خاص له شكل القلب.



b. صف ما يخبرك به النمط القطبي عن مكبر الصوت.

يشير النمط القطبي أن مكبر الصوت سوف يلتقط أصواتًا تبعد حتى 7 وحدات عن واجهة مكبر الصوت المباشرة، وحتى تبعد 3.5 وحدات للأصوات على يمين مكبر الصوت أو يساره مباشرة.

تمرين موجّه

3. **تصوير فيديو** تقوم مدرسة بالمدرسة الثانوية بتصوير العروض التقديمية التي تلقيها طالباتها مستخدمة كاميرا فيديو ثابتة موضوعة في آخر الحجرة. يمكن تمثيل مجال الصوت الذي يلتقطه مكبر الصوت بالكاميرا بالمعادلة $r = 5 + 2 \sin \theta$. افترض أن مقدمة الصف الدراسي تواجه شمال الكاميرا تمامًا.

A. مثّل النمط القطبي لمكبر الصوت بيانيًا.

B. صف ما يخبرك به النمط القطبي عن مكبر الصوت.

الربط بالحياة اليومية

أقيمت حفلة "لايف إيد" لموسيقى الروك في عام 1985 بهدف جمع 3.6 مليون درهم إماراتي لمساعدة إثيوبيا. تم بث الحفلات التي أقيمت في لندن وفيلادلفيا ومدن أخرى على التلفاز وشاهدها 1.9 مليار متفرج في 150 بلدًا. جمع هذا الحدث 514 مليون درهم إماراتي.

المصدر: وكالة أنباء CNN

انتبه!

التمثيل البياني على الفترة

عادة ما يكون استخدام فترة الدالة المثلثية في المعادلة القطبية كافيًا لرسم التمثيل البياني كاملاً. ولكن ليس دائمًا. إن أفضل طريقة لمعرفة ما إذا كنت رسمت تمثيلاً بيانيًا كافيًا لتمييز نمط هو رسم مزيد من النقاط.

في السابق، استخدمت النقاط العظمى والدنيا إلى جانب الأصفار لمساعدتك على تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا. في التمثيل البياني للدالة القطبية، تبلغ r ذروتها بالنسبة لقيمة θ عندما تصل المسافة بين هذه النقطة (r, θ) والقطب إلى أقصى بعد لها. لإيجاد النقطة (النقاط) العظمى على التمثيل البياني للمعادلة القطبية، أوجد قيم θ التي تصل عندها $|r|$ إلى ذروتها. بالإضافة إلى ذلك، إذا كانت $r = 0$ لبعض قيم θ، فإنك تعلم أن التمثيل البياني يتقاطع مع القطب.

المثال 4 التماثل، والأصفار، وقيم r العظمى

استخدم التماثل والأصفار وقيم r العظمى لتمثيل $r = 2 \cos 3\theta$ بيانيًا.

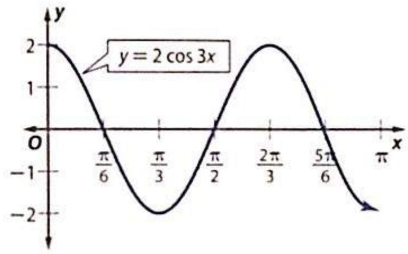
حدد تماثل التمثيل البياني.

هذه الدالة متماثلة على المحور القطبي، لذا يمكنك إيجاد النقاط في الفترة $[0, \pi]$ ثم استخدام التماثل على المحور القطبي لإكمال التمثيل البياني.

أوجد الأصفار وقيم r العظمى.

ارسم التمثيل البياني للدالة المستطيلة $y = 2 \cos 3x$ في الفترة $[0, \pi]$.

من التمثيل البياني، يمكنك رؤية أن $|y| = 2$ عندما تكون $x = 0$، و $\frac{\pi}{3}$، و $\frac{2\pi}{3}$، و π و $y = 0$ عندما تكون $x = \frac{\pi}{6}$، و $\frac{\pi}{2}$، و $\frac{5\pi}{6}$.



> **نصيحة دراسية**
>
> **طريقة بديلة**
>
> بحل الدالة المستطيلة $y = 2 \cos 3x$، نجد أن الدالة لها قيم عظمى عندما تكون $x = 0$، أو $\frac{\pi}{3}$، أو $\frac{2\pi}{3}$، أو π وبالمثل تحتوي الدالة على أصفار عندما تكون $x = \frac{\pi}{6}$، أو $\frac{\pi}{2}$، أو $\frac{5\pi}{6}$.

بتفسير هذه النتائج بدلالة المعادلة القطبية $r = 2 \cos 3\theta$، يمكننا قول إن $|r|$ تصل لقيمتها العظمى 2 عندما تكون $\theta = 0$، أو $\frac{\pi}{3}$، أو $\frac{2\pi}{3}$، أو π و $r = 0$ عندما تكون $\theta = \frac{\pi}{6}$، أو $\frac{\pi}{2}$، أو $\frac{5\pi}{6}$.

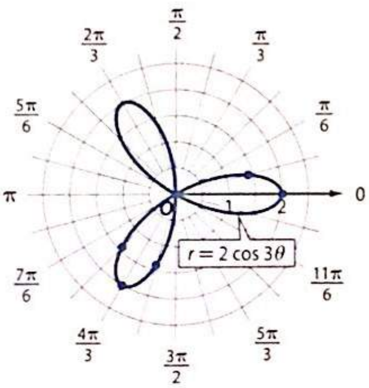
مثّل الدالة بيانيًا.

استخدم هذه النقاط وبعض النقاط الإضافية لرسم التمثيل البياني للدالة.

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$r = 2 \cos 3\theta$	2	1.4	0	−1	−2	−1.4	0	1.4	2	1.4	0	−1.4	−2

لاحظ أن التماثل على المحور القطبي يمكن استخدامه لإكمال التمثيل البياني بعد تحديد موضع النقاط على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ويسمى هذا النوع من المنحنيات باسم **الوردة**. ويمكن أن تحتوي منحنيات الوردة على ثلاث حلقات متساوية أو أكثر.



تمرين موجّه

استخدم التماثل والأصفار وقيم r العظمى لتمثيل كل دالة بيانيًا.

4A. $r = 3 \sin 2\theta$

4B. $r = \cos 5\theta$

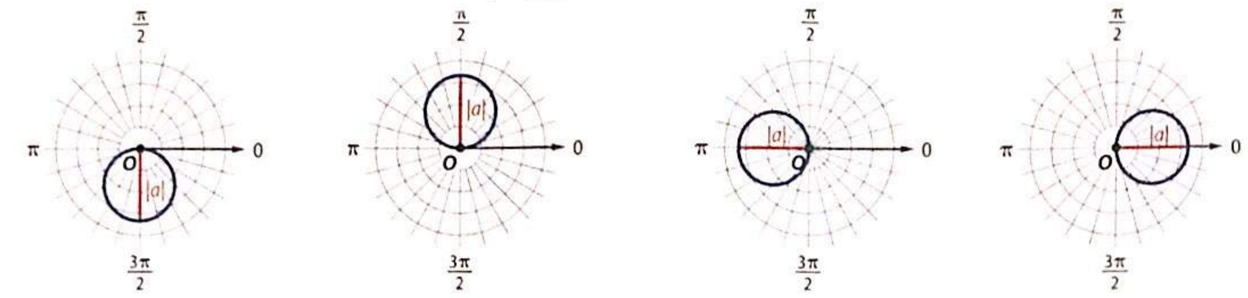
2 المنحنيات القطبية الكلاسيكية

المنحنيات الدائرية وحلزون باسكال والقلبية الشكل ومنحنيات الوردة عبارة عن أمثلة للمنحنيات الكلاسيكية. بالأسفل ملخص لأشكال هذه المنحنيات الكلاسيكية وغيرها وتمثيلاتها البيانية النموذجية.

ملخص المفهوم أنواع خاصة من التمثيلات البيانية القطبية

منحنيات دائرية

$r = a\cos\theta$ or $r = a\sin\theta$



$a > 0$, $r = a\cos\theta$

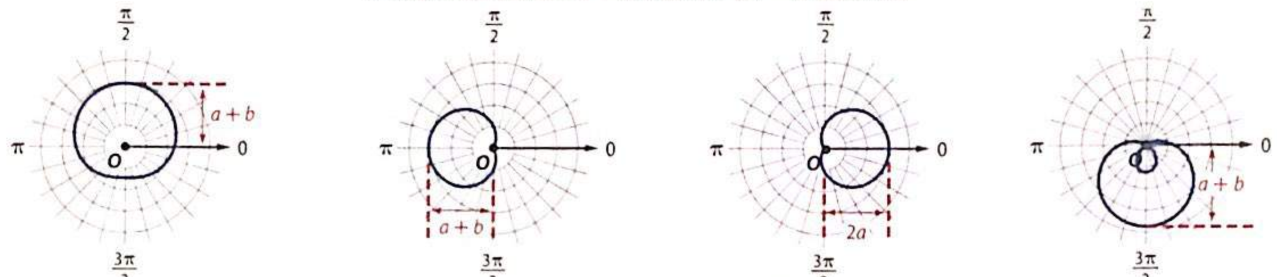
$a < 0$, $r = a\cos\theta$

$a > 0$, $r = a\sin\theta$

$a < 0$, $r = a\sin\theta$

منحنيات حلزون باسكال

$r = a \pm b\cos\theta$ أو $r = a \pm b\sin\theta$، حيث a و b كلاهما موجب



منحنى حلزون باسكال مع حلقة داخلية
$a < b$
$r = a - b\sin\theta$

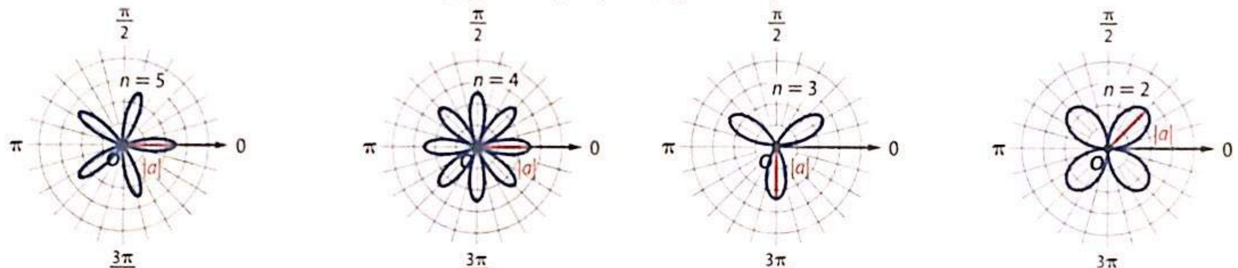
منحنى حلزون باسكال قلبي الشكل
$a = b$
$r = a + b\cos\theta$

منحنى حلزون باسكال المقعّر
$b < a < 2b$
$r = a - b\cos\theta$

منحنى حلزون باسكال المحدب
$a \ge 2b$
$r = a + b\sin\theta$

منحنيات الوردة

$r = a\cos n\theta$ أو $r = a\sin n\theta$، حيث $n \ge 2$ عدد صحيح يكون لمنحنى الوردة عدد n من البتلات إذا كان n عددًا فرديًا، وعدد $2n$ من البتلات إذا كان n عددًا زوجيًا.



$n = 2$, $r = a\sin n\theta$

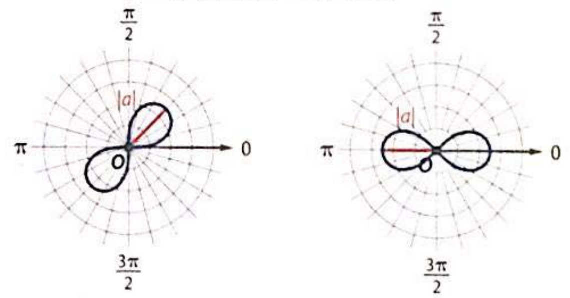
$n = 3$, $r = a\sin n\theta$

$n = 4$, $r = a\cos n\theta$

$n = 5$, $r = a\cos n\theta$

منحنيات ذات عروتين

$r^2 = a^2\cos 2\theta$ أو $r^2 = a^2\sin 2\theta$

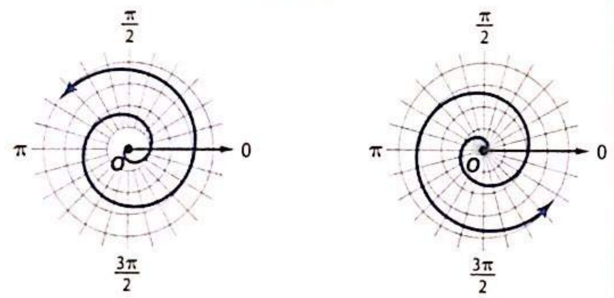


$r^2 = a^2\sin 2\theta$

$r^2 = a^2\cos 2\theta$

حلزون أرشميدس

$r = a\theta + b$



$\theta < 0, r = a\theta + b$

$\theta > 0, r = a\theta + b$

المثال 5 تحديد المنحنيات الكلاسيكية وتمثيلها بيانيًا

حدد نوع المنحنى الذي تقدمه كل معادلة. ثم استخدم التماثل والأصفار وقيم r العظمى لتمثيل كل دالة بيانيًا.

a. $r^2 = 16 \sin 2\theta$

نوع المنحنى والتماثل

المعادلة تأخذ الصورة $r^2 = a^2 \sin 2\theta$. لذا تمثيلها البياني عبارة عن منحنى ذي عروتين. وباستبدال (r, θ) مع $(-r, \theta)$ ينتج $(-r)^2 = 16 \sin 2\theta$ أو $r^2 = 16 \sin 2\theta$. وبناء عليه فإن الدالة متماثلة على القطب.

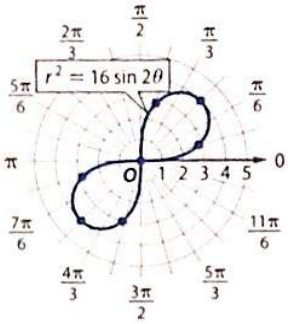
قيم r العظمى والأصفار

المعادلة $r^2 = 16 \sin 2\theta$ مكافئة لـ $r = \pm 4\sqrt{\sin 2\theta}$. وهي غير معرفة عندما تكون $\sin 2\theta < 0$. وبالتالي، فإن مجال الدالة مقيد بالفترات $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ أو $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ نظرًا لأنك تستطيع استخدام التماثل على القطب. فإنك لا تحتاج إلا لتمثيل النقاط بيانيًا في الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ تصل الدالة إلى قيمة r عظمى مقدارها $|a|$ أو 4 عندما تكون $\theta = \frac{\pi}{4}$ وقيمة r صفرية عندما تكون $x = 0$ و $\frac{\pi}{2}$.

التمثيل البياني

استخدم هذه النقاط والتماثل المشار إليه لرسم التمثيل البياني للدالة.

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
r	0	±2.8	±3.7	±4	±3.7	±2.8	0



b. $r = 3\theta$

نوع المنحنى والتماثل

المعادلة تأخذ الشكل $r = a\theta + b$. ولذلك فإن تمثيلها البياني عبارة عن حلزون أرشميدس. وباستبدال (r, θ) مع $(-r, -\theta)$ ينتج $(-r) = 3(-\theta)$ أو $r = 3\theta$. ولذلك، الدالة متماثلة على الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$.

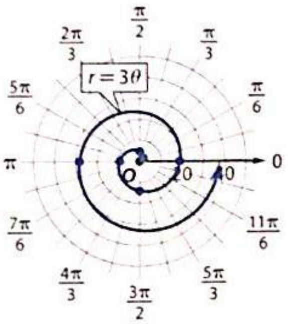
قيم r العظمى والأصفار

المنحنيات الحلزونية غير مقيدة. ولذلك، ليس للدالة قيم r عظمى ولكن لها صفر وحيد عندما تكون $\theta = 0$.

التمثيل البياني

استخدم النقاط في الفترة $[0, 4\pi]$ لرسم التمثيل البياني للدالة.
لإظهار التماثل، ينبغي أيضًا تمثيل النقاط في الفترة $[-4\pi, 0]$ بيانيًا.

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	3π	4π
r	0	2.4	4.7	9.4	14.1	18.8	28.3	37.7



تلميح تقني

إعدادات النافذة تحدد θmin و θmax قيم θ التي سيتم تمثيلها بيانيًا. الإعدادات العادية لهما هي θmin=0 و θmax=2π. على الرغم من أنه قد يكون تغيير هذه القيم ضروريًا للحصول على التمثيل البياني الكامل. تحدد θstep الفترات التي تُرسم فيها النقاط. كلما قلت هذه القيمة، كان التمثيل البياني أبسط.

تمرين موجّه

5A. $r^2 = 9 \cos 2\theta$

5B. $r = 3 \sin 5\theta$

تمارين

مـثـل كل معادلة بيانيًا بتحديد النقاط. (المثال 1)

1. $r = -\cos\theta$
2. $r = \csc\theta$
3. $r = \frac{1}{2}\cos\theta$
4. $r = 3\sin\theta$
5. $r = -\sec\theta$
6. $r = \frac{1}{3}\sin\theta$
7. $r = -4\cos\theta$
8. $r = -\csc\theta$

استخدم التماثل لرسم كل معادلة بيانيًا. (المثالان 2 و 3)

9. $r = 3 + 3\cos\theta$
10. $r = 1 + 2\sin\theta$
11. $r = 4 - 3\cos\theta$
12. $r = 2 + 4\cos\theta$
13. $r = 2 - 2\sin\theta$
14. $r = 3 - 5\cos\theta$
15. $r = 5 + 4\sin\theta$
16. $r = 6 - 2\sin\theta$

استخدم التماثل والأصفار وقيم r العظمى لتمثيل كل دالة بيانيًا. (المثال 4)

17. $r = \sin 4\theta$
18. $r = 2\cos 2\theta$
19. $r = 5\cos 3\theta$
20. $r = 3\sin 2\theta$
21. $r = \frac{1}{2}\sin 3\theta$
22. $r = 4\cos 5\theta$
23. $r = 2\sin 5\theta$
24. $r = 3\cos 4\theta$

25. **علم الأحياء البحرية** يمكن ملاحظة منحنيات الوردة في الحياة البحرية. حدد التماثل والأصفار وقيم r العظمى لكل دالة تمثل فصيلة بحرية عندما تكون $0 \le \theta \le \pi$. ثم استخدم المعلومات لتمثيل الدالة بيانيًا. (المثال 4)

   a. يمكن تمثيل المسام التي تشكل نمط البتلة في أحافير دولار الرمل (الشكل 8.2.3) بـ $r = 3\cos 5\theta$.

   b. يمكن تمثيل إطار جسم نجم البحر الشوكي (الشكل 8.2.4) بـ $r = 20\cos 8\theta$.

الشكل 8.2.4

الشكل 8.2.3

حدد نوع المنحنى الذي تقدمه كل معادلة. ثم استخدم التماثل والأصفار وقيم r العظمى لتمثيل كل دالة بيانيًا. (المثال 5)

26. $r = \frac{1}{3}\cos\theta$
27. $r = 4\theta + 1;\ \theta > 0$
28. $r = 2\sin 4\theta$
29. $r = 6 + 6\cos\theta$
30. $r^2 = 4\cos 2\theta$
31. $r = 5\theta + 2;\ \theta > 0$
32. $r = 3 - 2\sin\theta$
33. $r^2 = 9\sin 2\theta$

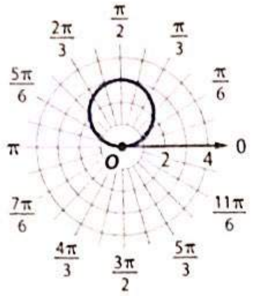
34. **التزلج الفني على الجليد** كان الموضوع الأصلي للتزلج الفني على الجليد هو حفر أشكال تعرف باسم الأشكال الإجبارية على الجليد. يمكن تمثيل أحد هذه الأشكال بـ $r^2 = 25\cos 2\theta$. (المثال 5)

   a. ما المنحنى الكلاسيكي الذي يمثله الشكل؟

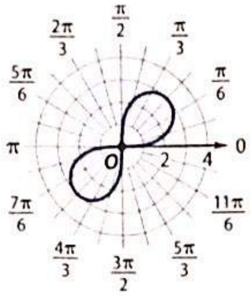
   b. مثّل النموذج بيانيًا.

اكتب معادلة لكل تمثيل بياني.

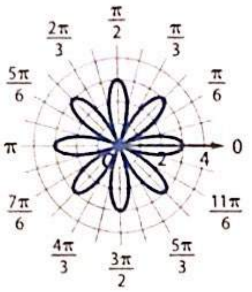
35.



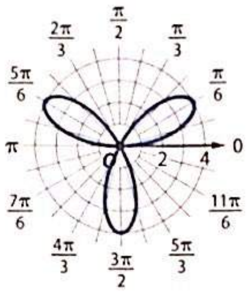
36.



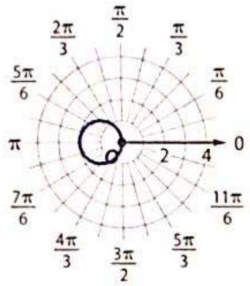
37.



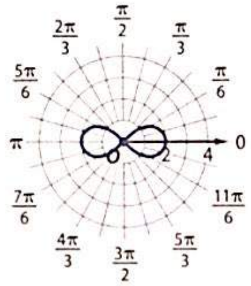
38.



39.



40.



41. **مروحة** لمروحة سقف محرك في المركز وخمس شفرات تبعد كل منها 4 وحدات عن المركز. يمكن تمثيل شكل المروحة بمنحنى وردة.

   a. اكتب معادلتين قطبيتين يمكن استخدامهما لتمثيل المروحة.

   b. ارسم تمثيلين بيانيين للمروحة باستخدام المعادلتين اللتين كتبتهما.

استخدم أحد الاختبارات الثلاثة لإثبات التماثل المحدد.

42. $r = 3 + \sin\theta$. متماثل على الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$
43. $r^2 = 4\sin 2\theta$. متماثل على القطب
44. $r = 3\sin 2\theta$. متماثل على المحور القطبي
45. $r = 5\cos 8\theta$. متماثل على الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$
46. $r = 2\sin 4\theta$. متماثل على القطب

47. **نبتة برسيم رباعية الأوراق** يمكن تمثيل نوع معين من نبتة البرسيم باستخدام منحنى وردة. اكتب معادلة قطبية لنبتة البرسيم إذا كان:

   a. لديها 5 بتلات بطول 2 وحدة لكل بتلة.

   b. لديها 4 بتلات بطول 7 وحدات لكل بتلة.

   c. لديها 8 بتلات بطول 6 وحدات لكل بتلة.

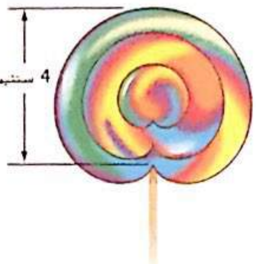
48. **حفل موسيقي** تم إنشاء خشبة مسرح دائرية من أجل حفلة موسيقية. ووضع المسرح في المركز بحيث يحيط المعجبون بالعارفين من جميع الجوانب. ولتسجيل صوت الحشد، وُضع مكبرا صوت اتجاهيان على حافتي خشبة المسرح، أحدهما يواجه الشرق تمامًا والآخر يواجه الغرب تمامًا. يمكن تمثيل نمطي مكبري الصوت بالمعادلتين القطبيتين $r = 2.5 + 2.5 \cos \theta$ و $r = -2.5 - 2.5 \cos \theta$.

a. حدد نوع المنحنى الذي تقدمه كل معادلة قطبية.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا لكل نمط مكبر صوت على الشكلة القطبية ذاتها.

c. صف ما يخبرك به التمثيل البياني عن المساحة التي يغطيها مكبرا الصوت.

49. **حلوى** اكتب معادلة يمكنها تمثيل هذه المصاصة في شكل حلزون باسكال إذا كانت متماثلة على الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$ وكان طرف المصاصة يبعد 4 سنتيمترات عن نقطة التقاء الحلوى بالعصا.



صل كل معادلة بتمثيلها البياني.

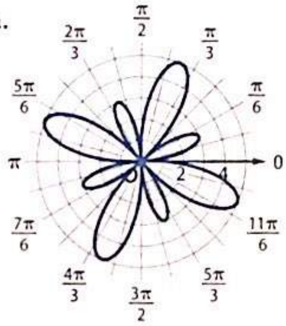
50. $r = 1 + 4 \cos 3\theta$

51. $r = 1 - 4 \sin 4\theta$

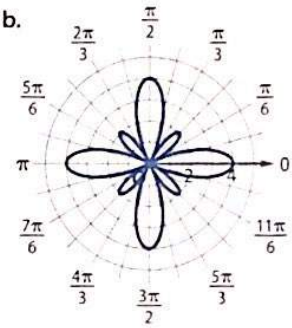
52. $r = 1 - 3 \sin 3\theta$

53. $r = 1 + 3 \cos 4\theta$

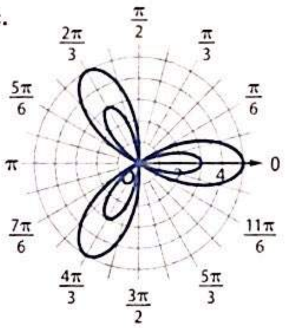
a.



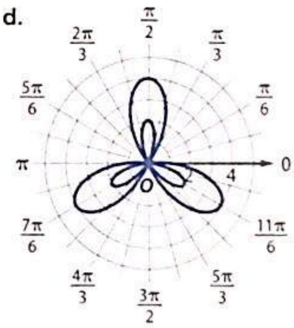
b.



c.



d.



أوجد x في الفترة $0 \le \theta \le x$ بحيث تكون x قيمة صغرى والتمثيل البياني مكتمل.

54. $r = 3 + 2 \cos \theta$

55. $r = 2 - \sin 2\theta$

56. $r = 1 + \cos \frac{\theta}{3}$

صل كل معادلة بالمعادلة التي تنتج تمثيلاً بيانيًا مكافئًا.

57. $r = 5 + 4 \cos \theta$	a. $r = 5 + 4 \sin \theta$
58. $r = -5 + 4 \sin \theta$	b. $r = -5 + 4 \cos \theta$
59. $r = 5 - 4 \sin \theta$	c. $r = 5 - 4 \cos \theta$
60. $r = -5 - 4 \cos \theta$	d. $r = -5 - 4 \sin \theta$

61. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سنستكشف حلزون أرشميدس.

a. **بيانيًا** ارسم تمثيلات بيانية منفصلة لـ $r = \theta$ للفترات $0 \le \theta \le 3\pi$، و $-3\pi \le \theta \le 0$، و $-3\pi \le \theta \le 3\pi$.

b. **لفظيًا** خمّن ماهية تماثل $r = \theta$. اشرح استنتاجك.

c. **تحليليًا** اثبت تخمينك في الجزء b باستخدام أحد اختبارات التماثل التي نوقشت في هذا الدرس.

d. **لفظيًا** كيف يؤثر تغيير الفترة لـ θ على المنحنيات الكلاسيكية الأخرى؟ وكيف يختلف ذلك عن الطريقة التي تؤثر بها الفترة على حلزون أرشميدس؟ اشرح استنتاجك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

62. **تحليل الخطأ** ترسم حليمة وإيمان تمثيلات بيانية للمعادلات القطبية. تقول إيمان إن $r = 7 \sin 2\theta$ ليست دالة لأنها لم تجتز اختبار الخط الرأسي. وتقول حليمة إن اختبار الخط الرأسي لا ينطبق على الشكلة القطبية. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ وضّح استنتاجك.

63. **التبرير** ارسم التمثيلات البيانية لـ $r_1 = \cos \theta$، و $r_2 = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$، و $r_3 = \cos(\theta - \pi)$ على الشكلة القطبية ذاتها. صف العلاقة بين التمثيلات البيانية الثلاثة. خمّن التعبير الذي يطرأ على التمثيل البياني عند طرح قيمة d من θ.

64. **تحدٍ** حل نظام المعادلات القطبية التالي جبريًا في الفترة $[0, 2\pi)$. مثّل النظام بيانيًا وقارن بين نقاط التقاطع والحل الذي خلصت إليه. وضح أي اختلافات.

$$r = 1 + 2 \sin \theta$$
$$r = 4 \sin \theta$$

65. **الإثبات** أثبت أن التمثيل البياني لـ $r = a + b \cos 2\theta$ متماثل على الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$.

66. **الإثبات** أثبت أن التمثيل البياني لـ $r = a \sin 2\theta$ متماثل على المحور القطبي.

67. **الكتابة في الرياضيات** صف تأثير a على التمثيل البياني $r = a \cos \theta$.

68. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم التمثيل البياني لمنحنى وردة بـ 8 بتلات. ثم اكتب معادلة لتمثيلك البياني.

مراجعة شاملة

مــثّــل كل معادلة قطبية بيانيًا.

69. $r = 3.5$

70. $\theta = -\frac{\pi}{3}$

71. $\theta = 225°$

أوجد الزاوية θ بين المتجهين u و v مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من الدرجة.

72. $\mathbf{u} = \langle 4, -3, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 6, -8\rangle$

73. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$

74. $\mathbf{u} = \langle -1, 1, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 7, -6, 9\rangle$

افترض أن $\overrightarrow{DE}$ هو المتجه بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. اكتب $\overrightarrow{DE}$ على هيئة توفيق خطي للمتجهين i و j.

75. $D\left(-5, \frac{2}{3}\right), E\left(-\frac{4}{5}, 0\right)$

76. $D\left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{7}\right), E\left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{7}\right)$

77. $D(9.7, -2.4), E(-6.1, -8.5)$

78. **ساحة العمل** يدفع أحمد عربة يدوية مليئة بورق الشجر بقوة 525 نيوتن وزاوية 48° مع الأرض.

a. ارسم مخططًا يوضح تحليل القوة التي يبذلها سالم إلى مُركبات متعامدة.

b. أوجد مقدار المركبين الأفقي والرأسي للقوة.

مــثّــل بيانيًا القطع الزائد الممثل بكل معادلة.

79. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$

80. $\frac{(y-4)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$

81. $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

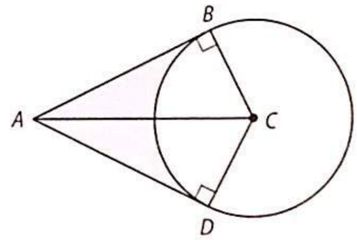
اكتب معادلة لكل قطع زائد له البؤرة F والخصائص المعطاة ومثّله بيانيًا.

82. $F(-5, 8)$؛ مفتوح ناحية اليمين، يضم $(-5, 12)$

83. $F(-1, -5)$؛ مفتوح ناحية اليسار، يضم $(-1, 5)$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

84. **SAT/ACT** في الشكل، C هي مركز الدائرة، و $AC = 12$ و $m\angle BAD = 60°$، فما محيط المنطقة المظللة؟



A $12 + 3\pi$

B $6\sqrt{3} + 4\pi$

C $6\sqrt{3} + 3\pi$

D $12\sqrt{3} + 3\pi$

E $12\sqrt{3} + 4\pi$

85. **مراجعة** أثناء تخطيط موقع مستو، حدد مسّاح أراضي علامة بارزة على بُعد 450 متراً بزاوية 30° على يسار المركز، وعلامة بارزة أخرى على بُعد 600 متراً بزاوية 50° على يمين المركز. ما المسافة التقريبية بين العلامتين البارزتين؟

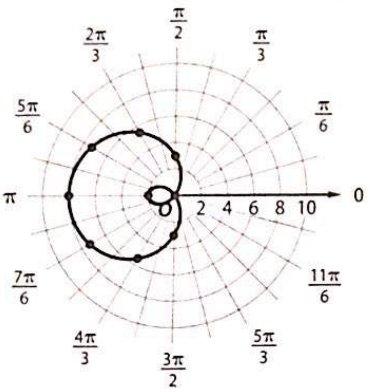
F 672 متراً

G 685 متراً

H 691 متراً

J 703 متراً

86. ما نوع المنحنى الذي يمثله الشكل؟



A منحنى ذو عروتين

B منحنى حلزون باسكال

C منحنى وردة

D منحنى قلبي الشكل

87. **مراجعة** يتتبع مراقب حركة جوية طائرتين على الارتفاع نفسه. إحداثيات الطائرتين هي $(5, 310°)$ و $(6, 345°)$، حيث r بالكيلومترات. ما المسافة التقريبية بين الطائرتين؟

F 2.97 كيلومتراً

G 3.25 كيلومتراً

H 3.44 كيلومتراً

J 3.71 كيلومتراً

الدرس 8-3 الصور القطبية والديكارتية للمعادلات

:: السابق

- لقد استخدمت نظام الإحداثيات القطبية لتمثيل النقاط والمعادلات بيانيًا.

:: الحالي

1. التحويل بين الإحداثيات القطبية والديكارتية.
2. التحويل بين المعادلات القطبية والديكارتية.

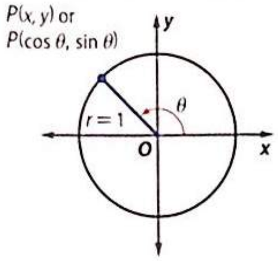
:: لماذا؟

- يبعث مستشعر موجات فوق صوتية مثبت بإنسان آلي شعاعًا خارجًا يدور في دائرة كاملة. ويستقبل المستشعر إشارة عائدة عندما يصطدم الشعاع بجسم ما. فيحسب موضع الجسم بدلالة المسافة r وزاوية القياس θ بالنسبة إلى واجهة الإنسان الآلي. بعد ذلك ينقل المستشعر هذه الإحداثيات القطبية إلى الإنسان الآلي، والذي يحولها إلى إحداثيات ديكارتية بحيث يستطيع تحديد موضع الجسم على خريطة داخلية.

1 الإحداثيات القطبية والديكارتية

تذكر من الوحدة 4 أن إحداثيات نقطة $P(x, y)$ المقابلة لزاوية θ على دائرة وحدة لها نصف قطر يساوي 1 يمكن كتابتها بدلالة θ بالشكل $P(\cos\theta, \sin\theta)$ لأن

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} \text{ أو } x \qquad \text{و} \qquad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} \text{ أو } y.$$



إذا اكتسبت r أي قيمة حقيقية، فيمكننا كتابة النقطة $P(x, y)$ بدلالة كل من r و θ.

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \text{و} \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$r\cos\theta = x \qquad\qquad r\sin\theta = y$$

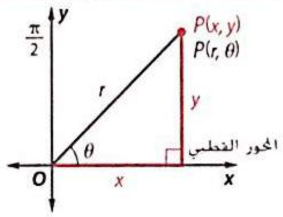
إذا افترضنا أن المحور القطبي وقطب نظام الإحداثيات القطبية يتطابقان مع محور x الموجب ونقطة الأصل في النظام الإحداثي الديكارتي، على التوالي، فقد أصبح لدينا الآن وسيلة لتحويل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية.

المفهوم الأساسي تحويل الإحداثيات القطبية إلى الديكارتية

إذا كان للنقطة P الإحداثيات (r, θ)، فإن الإحداثيات الديكارتية (x, y) للنقطة P يتم التعبير عنها كالآتي

$$x = r\cos\theta \quad \text{و} \quad y = r\sin\theta.$$

أي أن $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.



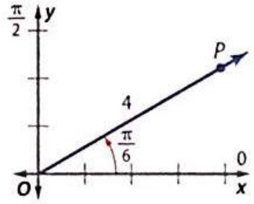
المثال 1 تحويل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية

أوجد الإحداثيات الديكارتية لكل نقطة من خلال الإحداثيات القطبية المعطاة.

a. $P\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$

بالنسبة إلى $P\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$، فإن $r = 4$ و $\theta = \frac{\pi}{6}$.

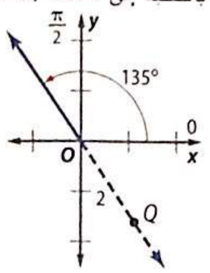
$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ &= 4\cos\frac{\pi}{6} \\ &= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} y &= r\sin\theta \\ &= 4\sin\frac{\pi}{6} \\ &= 4\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$



الإحداثيات الديكارتية للنقطة P هي $(2\sqrt{3}, 2)$ أو تقريبًا $(3.46, 2)$ مثلما موضح.

b. $Q(-2, 135°)$

بالنسبة إلى $Q(-2, 135°)$. فإن $\theta = 135°$ و $r = -2$.



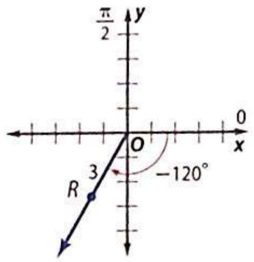
$$x = r\cos\theta = -2\cos 135° = -2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

$$y = r\sin\theta = -2\sin 135° = -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

الإحداثيات الديكارتية للنقطة Q هي $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ أو تقريبًا $(1.41, -1.41)$ كما هو موضح.

c. $V(3, -120°)$

بالنسبة إلى $V(3, -120°)$. فإن $\theta = -120°$ و $r = 3$.



$$x = r\cos\theta = 3\cos -120° = 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$y = r\sin\theta = 3\sin -120° = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

الإحداثيات الديكارتية للنقطة V هي $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ أو تقريبًا $(-1.5, -2.6)$ كما هو موضح.

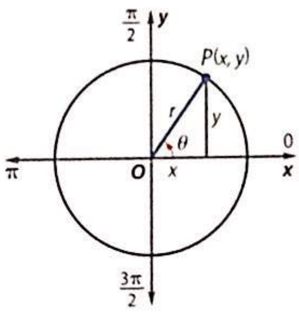
تمرين موجّه

1A. $R(-6, -120°)$　　1B. $S\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$　　1C. $T(-3, 45°)$

نصيحة دراسية

تحويلات الإحداثيات إن عملية تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى إحداثيات قطبية هي نفسها العملية المستخدمة لتحديد مقدار المتجهات واتجاهها.

لكتابة زوج من الإحداثيات الديكارتية بالصورة القطبية، عليك إيجاد المسافة r التي تبعدها نقطة (x, y) عن نقطة الأصل أو القطب، وزاوية القياس θ المقاسة لهذه النقطة من المحور x أو المحور القطبي.



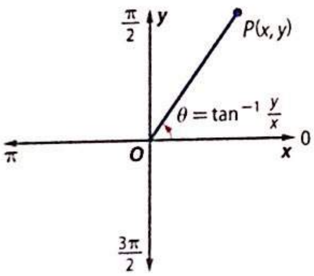
لإيجاد المسافة r بين النقطة (x, y) ونقطة الأصل، استخدم نظرية فيثاغورس.

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ترتبط الزاوية θ بكل من x و y عن طريق دالة ظل الزاوية.

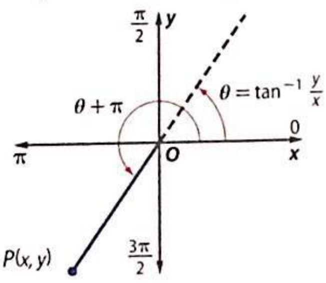
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

تذكر أن دالة الظل العكسية تكون معرفة فقط عند الفترة $[-90°, 90°]$ أو $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. في النظام الإحداثي الديكارتي، يشير ذلك إلى قيم θ في الربعين الإحداثيين IV و I أو عندما تكون $x > 0$، مثلما هو موضح في الشكل 8.3.1. إذا كانت النقطة تقع في الربع II أو III، وهو ما يحدث عندما تكون $x < 0$، فيجب عليك جمع π أو $180°$ إلى قياس الزاوية المعطى بدالة الظل العكسية، مثلما هو موضح في الشكل 8.3.2.



عندما تكون $x > 0$، فإن $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$.

الشكل 8.3.1



عندما تكون $x < 0$، فإن $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + 180°$ أو $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$.

الشكل 8.3.2

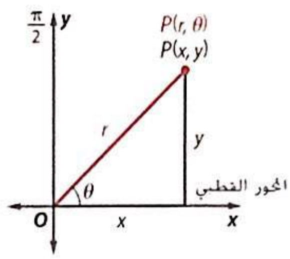
المفهوم الأساسي تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى قطبية

إذا كان للنقطة P إحداثيات ديكارتية (x, y) فإن الإحداثيات القطبية (r, θ) للنقطة P يتم التعبير عنها بالآتي

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$، عندما $x > 0$

أو $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$

$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + 180°$، عندما $x < 0$.



تذكر أن الإحداثيات القطبية ليست فريدة. فالتحويل من إحداثيات ديكارتية إلى قطبية ينتج عنه تمثيل *واحد* فقط للإحداثيات القطبية. ولكن هناك عدد لا نهائي من التمثيلات القطبية لنقطة معطاة بالصورة الديكارتية.

المثال 2 تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى إحداثيات قطبية

أوجد زوجين من الإحداثيات القطبية لكل نقطة من خلال الإحداثيات الديكارتية المعطاة.

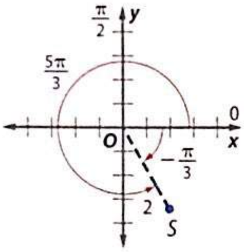
a. $S(1, -\sqrt{3})$

بالنسبة إلى $S(x, y) = (1, -\sqrt{3})$. فإن $y = -\sqrt{3}$ و $x = 1$. نظرًا لأن $x > 0$. استخدم $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ لإيجاد θ.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$= \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} \qquad = \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1}$$

$$= \sqrt{4} = 2 \qquad = -\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$



أحد مجموعات الإحداثي القطبي للنقطة S هي $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$.

تمثيل آخر يستخدم قيمة θ موجبة هو $\left(2, -\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$ أو $\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$، مثلما موضح.

b. $T(-3, 6)$

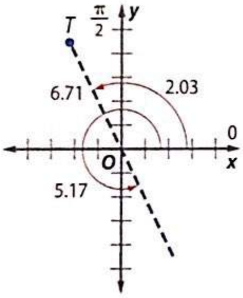
بالنسبة إلى $T(x, y) = (-3, 6)$. فإن $y = 6$ و $x = -3$.

لأن $x < 0$. استخدم $\tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ لإيجاد θ.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + 6^2} \qquad = \tan^{-1}\left(-\frac{6}{3}\right) + \pi$$

$= \sqrt{45}$ أو حوالي 6.71 $\qquad = \tan^{-1}(-2) + \pi$ أو حوالي 2.03



أحد مجموعات الإحداثيات القطبية للنقطة T هي تقريبًا $(6.71, 2.03)$. تمثيل آخر يستخدم قيمة r سالبة هو $(-6.71, 2.03 + \pi)$ أو $(-6.71, 5.17)$، مثلما موضح.

تمرين موجّه

أوجد زوجين من الإحداثيات القطبية لكل نقطة من خلال الإحداثيات الديكارتية المعطاة. وقرّب إلى أقرب مئة إذا لزم الأمر.

2A. $V(8, 10)$

2B. $W(-9, -4)$

تلميح تقني

تحويلات الإحداثيات

لتحويل الإحداثيات الديكارتية إلى إحداثيات قطبية باستخدام الآلة الحاسبة، اضغط 2nd APPS لعرض قائمة ANGLE حدد R▸Pr (وأدخل الإحداثيات. سيؤدي هذا لحساب قيمة r. لحساب قيمة θ. كرر هذه العملية ولكن حدد R▸Pθ).

في بعض ظواهر الحياة اليومية، يكون من المفيد التحويل بين الإحداثيات القطبية والديكارتية.

مثال 3 من الحياة اليومية تحويل الإحداثيات

الروبوتية ارجع إلى بداية الدرس، افترض أن الإنسان الآلي يقف مواجهًا للشرق تمامًا، وأن المستشعر المثبت له اكتشف جسمًا عند $(5, 295°)$.

a. ما الإحداثيات الديكارتية التي سيتعين على الإنسان الآلي حسابها؟

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$
$$= 5\cos 295° \qquad = 5\sin 295°$$
$$\approx 2.11 \qquad \approx -4.53$$

يقع الجسم عند الإحداثيات الديكارتية $(2.11, -4.53)$.

b. إذا كان لجسم تم اكتشافه من قبل الإحداثيات الديكارتية $(3, 7)$، فكم يبعد الجسم وما قياس زاويته بالنسبة إلى الجانب الأمامي للإنسان الآلي؟

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$
$$= \sqrt{3^2 + 7^2} \qquad = \tan^{-1}\frac{7}{3}$$
$$\approx 7.62 \qquad \approx 66.8°$$

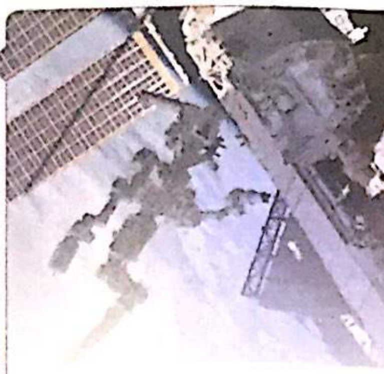
يقع الجسم عند الإحداثيات القطبية $(7.62, 66.8°)$.

تمرين موجّه

3. **الصيد** "محدد موقع الأسماك" عبارة عن أحد أنواع الرادارات المستخدمة في تحديد أماكن الأسماك بالمياه. افترض أن قاربًا يواجه الشرق تمامًا، وأن محدد موقع الأسماك قدّم إحداثيات قطبية لسرب من الأسماك هي $(6, 125°)$.

A. ما الإحداثيات الديكارتية لسرب الأسماك؟

B. إذا كان لسرب أسماك تم اكتشافه من قبل الإحداثيات الديكارتية $(-2, 6)$ فكم يبعد السرب وما قياس زاويته بالنسبة إلى الجهة الأمامية من القارب؟



الربط بالحياة اليومية

يبلغ وزن الإنسان الآلي لناسا "المناور البارع محدد الغرض"، أو دبكستر" 1542 كيلومتراً، ويصل طوله إلى 3.7 متراً وذراع تمتد 3.4 متراً و"ديكستر" مسؤول عن أداء مهام في الفضاء التي كانت تتطلب رواد فضاء فيما سبق

المصدر: جريدة *New York Times*

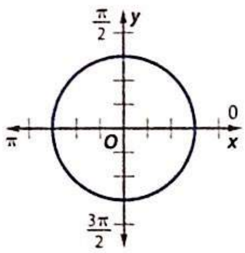
2 المعادلات القطبية والديكارتية

في حساب التفاضل والتكامل، سوف تحتاج في بعض الأحيان إلى التحويل من الصورة الديكارتية للمعادلة إلى الصورة القطبية لها والعكس لتسهيل إجراء بعض العمليات الحسابية. فبعض المعادلات الديكارتية المعقدة يكون لها معادلات قطبية أبسط بكثير.

تأمل المعادلتين الديكارتية والقطبية للدائرة الممثلة بيانيًا أدناه.

المعادلة القطبية

$$r = 3$$



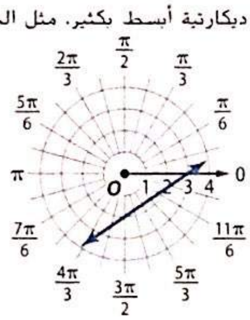
المعادلة الديكارتية

$$x^2 + y^2 = 9$$

وبالمثل، بعض المعادلات القطبية لها معادلات ديكارتية أبسط بكثير، مثل الخط الممثل بيانيًا أدناه.

المعادلة الديكارتية

$$2x - 3y = 6$$



المعادلة القطبية

$$r = \frac{6}{2\cos\theta - 3\sin\theta}$$

إن التحويل من معادلة ديكارتية إلى معادلة قطبية مباشر إلى حد ما. استبدل x بـ $r \cos \theta$ و y بـ $r \sin \theta$، ثم حول المعادلة الناتجة إلى أبسط صورة باستخدام التغييرات الجبرية والمتطابقات المثلثية.

المثال 4 تحويل المعادلات الديكارتية إلى معادلات قطبية

حدد التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية. ثم اكتب المعادلة في الصورة القطبية. ادعم إجابتك بتمثيل الصورة القطبية للمعادلة بيانيًا.

a. $(x - 4)^2 + y^2 = 16$

التمثيل البياني للمعادلة $(x - 4)^2 + y^2 = 16$ عبارة عن دائرة لها نصف قطر 4 ومركزها عند النقطة $(4, 0)$. لإيجاد الصورة القطبية لهذه المعادلة، استبدل x بـ $r \cos \theta$ و y بـ $r \sin \theta$. ثم حوّل لأبسط صورة.

$$(x - 4)^2 + y^2 = 16$$
$$(r \cos \theta - 4)^2 + (r \sin \theta)^2 = 16$$
$$r^2 \cos^2 \theta - 8r \cos \theta + 16 + r^2 \sin^2 \theta = 16$$
$$r^2 \cos^2 \theta - 8r \cos \theta + r^2 \sin^2 \theta = 0$$
$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = 8r \cos \theta$$
$$r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 8r \cos \theta$$
$$r^2(1) = 8r \cos \theta$$
$$r = 8 \cos \theta$$

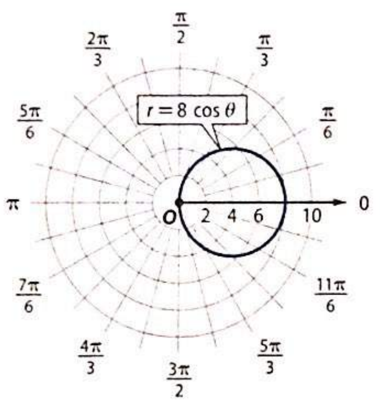
التمثيل البياني لهذه المعادلة القطبية (الشكل 8.3.3) عبارة عن دائرة لها نصف قطر 4 ومركزها عند النقطة $(4, 0)$.

b. $y = x^2$

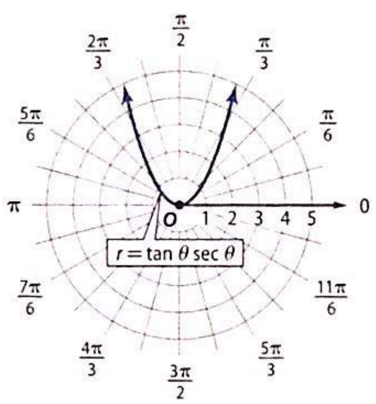
التمثيل البياني للمعادلة $y = x^2$ عبارة عن قطع مكافئ رأسه عند نقطة الأصل المفتوحة لأعلى.

$$y = x^2$$
$$r \sin \theta = (r \cos \theta)^2$$
$$r \sin \theta = r^2 \cos^2 \theta$$
$$\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} = r$$
$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} = r$$
$$\tan \theta \sec \theta = r$$

التمثيل البياني للمعادلة القطبية $r = \tan \theta \sec \theta$ (الشكل 8.3.4) عبارة عن قطع مكافئ رأسه عند القطب ثم الذي يفتح لأعلى.



الشكل 8.3.3



الشكل 8.3.4

تمرين موجّه

4A. $x^2 + (y - 3)^2 = 9$

4B. $x^2 - y^2 = 1$

نصيحة دراسية

المتطابقات المثلثية
سيكون من المفيد مراجعة المتطابقات المثلثية التي درستها لمساعدتك على تحويل الصور القطبية للمعادلات الديكارتية لأسط صورة. يوجد داخل الغلاف الخلفي لهذا الكتاب ملخص بهذه المتطابقات.

لكتابة معادلة قطبية في صورة ديكارتية، فإنك تستخدم أيضًا العلاقات $y = r\sin\theta$ و $x = r\cos\theta$، و $r^2 = x^2 + y^2$،
إلى جانب العلاقة $\tan\theta = \frac{y}{x}$. إلا أن العملية ليست بالشكل المباشر مثل التحويل من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية.

المثال 5 تحويل المعادلات القطبية إلى معادلات ديكارتية

اكتب كل معادلة في الصورة الديكارتية ثم حدد تمثيلها البياني. ادعم إجابتك بتمثيل الصورة القطبية للمعادلة بيانيًا.

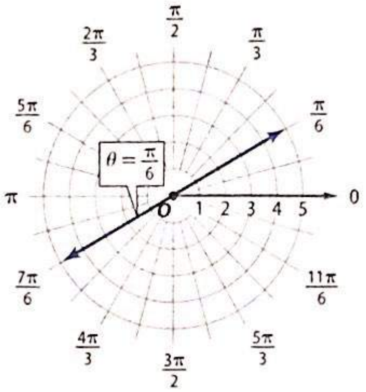
a. $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$



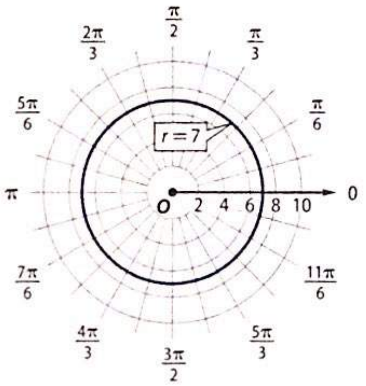
التمثيل البياني لهذه المعادلة عبارة عن خط يمر عبر نقطة الأصل وله ميل $\frac{\sqrt{3}}{3}$ أو حوالي $\frac{2}{3}$، مثلما يبين التمثيل البياني $\theta = \frac{\pi}{6}$ الموضح.

b. $r = 7$

$$r = 7$$

$$r^2 = 49$$

$$x^2 + y^2 = 49$$



التمثيل البياني لهذه المعادلة الديكارتية عبارة عن دائرة مركزها نقطة الأصل ولها نصف قطر 7، كما يبين التمثيل البياني $r = 7$ الموضح.

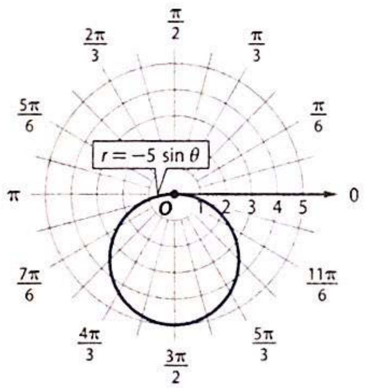
c. $r = -5\sin\theta$

$$r = -5\sin\theta$$

$$r^2 = -5r\sin\theta$$

$$x^2 + y^2 = -5y$$

$$x^2 + y^2 + 5y = 0$$



نظرًا لأنه في الصورة القياسية، $x^2 + (y + 2.5)^2 = 6.25$، فبإمكانك تحديد التمثيل البياني لهذه المعادلة على هيئة دائرة مركزها عند النقطة $(0, -2.5)$ ولها نصف قطر 2.5، مثلما يبين التمثيل البياني $r = -5\sin\theta$.

تمرين موجّه

5A. $r = -3$

5B. $\theta = \frac{\pi}{3}$

5C. $r = 3\cos\theta$

نصيحة دراسية

طريقة بديلة نقطتان على الخط $\theta = \frac{\pi}{6}$ هما $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ و $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$. في الصورة الديكارتية هذه النقط هي $(\sqrt{3}, 1)$ و $(2\sqrt{3}, 2)$. معادلة الخط المار بهاتين النقطتين هي $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

نصيحة دراسية

التحويل إلى الصورة الديكارتية هناك استبدالات أخرى مفيدة وهي عبارة عن أشكال مختلفة للمعادلات $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ مثل $r = \frac{y}{\sin\theta}$ و $r = \frac{x}{\cos\theta}$.

تمارين

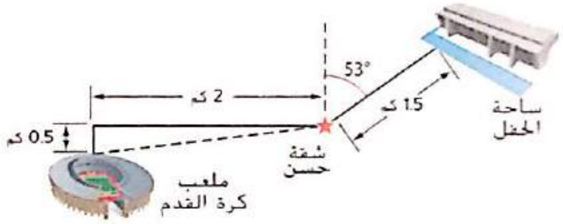
أوجد الإحداثيات الديكارتية لكل نقطة من خلال الإحداثيات القطبية المعطاة. وقرّب إلى أقرب مئة إذا لزم الأمر. (المثال 1)

1. $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$
2. $\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$
3. $(5, 240°)$
4. $(2.5, 250°)$
5. $\left(-2, \frac{4\pi}{3}\right)$
6. $(-13, -70°)$
7. $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$
8. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$
9. $(-2, 270°)$
10. $(4, 210°)$
11. $\left(-1, -\frac{\pi}{6}\right)$
12. $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$

أوجد زوجين من الإحداثيات القطبية لكل نقطة من خلال الإحداثيات الديكارتية المعطاة إذا كان $0 \le \theta \le 2\pi$. قرّب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر. (المثال 2)

13. $(7, 10)$
14. $(-13, 4)$
15. $(-6, -12)$
16. $(4, -12)$
17. $(2, -3)$
18. $(0, -173)$
19. $(a, 3a)$, $a > 0$
20. $(-14, 14)$
21. $(52, -31)$
22. $(3b, -4b)$, $b > 0$
23. $(1, -1)$
24. $(2, \sqrt{2})$

25. **مسافة** وقف حسن أعلى البناية التي تضم شقته. وحدد أن ساحة الحفل تقع $53°$ شمال شرق. افترض أن الساحة تبعد عن شقة حسن 1.5 كيلومتر بالضبط. (المثال 3)



a. كم عدد الكيلومترات التي يجب أن يقطعها حسن شرقًا وشمالاً حتى يبلغ الساحة؟

b. إذا كان هناك ملعب كرة قدم على بعد 2 كيلومتر غربًا و 0.5 كيلومتر جنوبًا من شقة حسن. فما الإحداثيات القطبية للملعب إذا كانت شقة حسن عند القطب؟

حدد التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية. ثم اكتب المعادلة في الصورة القطبية. ادعم إجابتك بتمثيل الصورة القطبية للمعادلة بيانيًا. (المثال 4)

26. $x = -2$
27. $(x + 5)^2 + y^2 = 25$
28. $y = -3$
29. $x = y^2$
30. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$
31. $(x - 1)^2 - y^2 = 1$
32. $x^2 + (y + 3)^2 = 9$
33. $y = \sqrt{3}x$
34. $x^2 + (y + 1)^2 = 1$
35. $x^2 + (y - 8)^2 = 64$

اكتب كل معادلة في الصورة الديكارتية ثم حدد تمثيلها البياني. ادعم إجابتك بتمثيل الصورة القطبية للمعادلة بيانيًا. (المثال 5)

36. $r = 3 \sin \theta$
37. $\theta = -\frac{\pi}{3}$
38. $r = 10$
39. $r = 4 \cos \theta$
40. $\tan \theta = 4$
41. $r = 8 \csc \theta$
42. $r = -4$
43. $\cot \theta = -7$
44. $\theta = \frac{3\pi}{4}$
45. $r = \sec \theta$

46. **زلزال** يمكن تمثيل الموجات الزلزالية بالمعادلة $r = 12.6 \sin \theta$، حيث تقاس r بالكيلومترات. (المثال 5)

a. مثّل النمط القطبي للزلزال بيانيًا.

b. اكتب معادلة بالصورة الديكارتية لتمثيل الموجات الزلزالية بيانيًا.

c. أوجد الإحداثيات الديكارتية للبؤرة الزلزالية ووضح المساحة المتضررة من الزلزال.

47. **مكبر صوت** تعبر المعادلة $r = 2 + 2 \cos \theta$ عن النمط القطبي لمكبر الصوت الاتجاهي في مباراة كرة قدم. (المثال 5)

a. مثّل النمط القطبي بيانيًا.

b. هل سيكتشف المكبر الصوت الناشئ من النقطة ذات الإحداثيات الديكارتية $(-2, 0)$؟ اشرح.

اكتب كل معادلة في الصورة الديكارتية ثم حدد تمثيلها البياني. ادعم إجابتك بتمثيل الصورة القطبية للمعادلة بيانيًا.

48. $r = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}$
49. $r = 10 \csc \left(\theta + \frac{7\pi}{4}\right)$
50. $r = 3 \csc \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$
51. $r = -2 \sec \left(\theta - \frac{11\pi}{6}\right)$
52. $r = 4 \sec \left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)$
53. $r = \frac{5 \cos \theta + 5 \sin \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$
54. $r = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$
55. $r = 4 \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

56. **علم الفلك** تستخدم المعادلات القطبية لتمثيل مسارات الأقمار الصناعية أو الأجسام الأخرى التي تدور في الفضاء. افترض أن مسار قمر صناعي قد تم تمثيله بالمعادلة $r = \frac{4}{4 + 3 \sin \theta}$، حيث تقاس r بعشرات الآلاف من الكيلومترات، وأن الأرض في القطب.

a. ارسم تمثيلاً بيانيًا لمسار القمر الصناعي.

b. حدد أدنى وأقصى مسافة يبعدها القمر الصناعي عن الأرض في أي وقت.

c. افترض أن قمرًا صناعيًا آخر يمر عبر نقطة لها الإحداثيات الديكارتية $(-3, 1.5)$. هل هناك خطر لاصطدام القمرين الصناعيين عند هذه النقطة؟ اشرح.

حدد التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية. ثم اكتب المعادلة في الصورة القطبية. ادعم إجابتك بتمثيل الصورة القطبية للمعادلة بيانيًا.

57. $6x - 3y = 4$

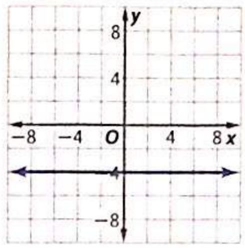
58. $2x + 5y = 12$

59. $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 100$

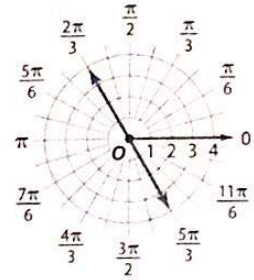
60. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$

اكتب معادلة قطبية وديكارتية لكل تمثيل بياني.

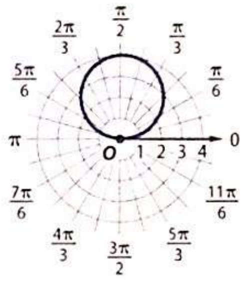
61.



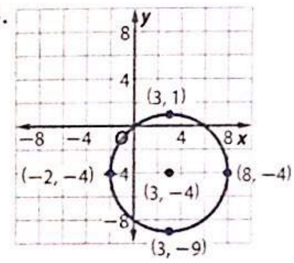
62.



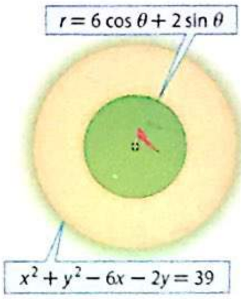
63.



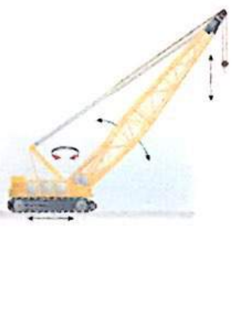
64.

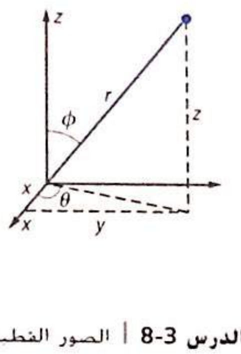


65. **الجولف** في الحفرة رقم 18 بملعب جولف دبي، تحاط المساحة الخضراء الدائرية بحلقة رملية كما هو موضح بالشكل. أوجد مساحة المنطقة المغطاة بالرمال مع افتراض أن الحفرة تمثل قطب كلا المعادلتين والوحدات معطاة بالمتر.



66. **التشييد** تعمل الرافعات الذراعية على نظائر ثلاثة الأبعاد من الإحداثيات القطبية تسمى *الإحداثيات الكروية*. نقطة في الفضاء لها الإحداثيات الكروية (r, θ, ϕ)، حيث r تمثل البعد عن القطب، و θ تمثل زاوية الدوران حول المحور الرأسي، و ϕ تمثل الزاوية القطبية من المحور الرأسي الموجب. مع مراعاة نقطة لها الإحداثيات الكروية (r, θ, ϕ) أوجد الإحداثيات الديكارتية (x, y, z) بدلالة r، و θ، و ϕ.





67. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف العلاقة بين الأعداد المركبة والإحداثيات القطبية.

a. **بيانيًا** يمكن تحديد موضع العدد المركب $a + bi$ على مستوى مركب باستخدام الزوج المرتب (a, b)، حيث المحور x هو المحور الحقيقي R والمحور y هو المحور التخيلي i. مثّل بيانيًا العدد المركب $6 + 8i$.

b. **عدديًا** أوجد الإحداثيات القطبية للعدد المركب باستخدام الإحداثيات الديكارتية المحددة في الجزء a إذا كان $0 < \theta < 360°$. مثّل الإحداثيات على شبكة قطبية بيانيًا.

c. **بيانيًا** مثّل العدد المركب $-3 + 3i$ بيانيًا على نظام إحداثي ديكارتي.

d. **بيانيًا** أوجد الإحداثيات القطبية للعدد المركب باستخدام الإحداثيات الديكارتية المحددة في الجزء c إذا كان $0 < \theta < 360°$. مثّل الإحداثيات على شبكة قطبية بيانيًا.

e. **تحليليًا** بالنسبة للعدد المركب $a + bi$، أوجد تعبيرًا ليتم تحويله للإحداثيات القطبية.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

68. **تحليل الخطأ** يكتب راشد وزياد المعادلة القطبية $r = \sin\theta$ بالصورة الديكارتية. يعتقد زياد أن الإجابة هي $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. ويعتقد راشد أن الإجابة ببساطة هي $y = \sin x$. فأيهما على صواب؟ وضّح استنتاجك.

69. **تحدٍ** معادلة إحدى الدوائر هي $r = 2a\cos\theta$. اكتب هذه المعادلة في صورة ديكارتية. أوجد مركز الدائرة ونصف قطرها.

70. **التبرير** مع مراعاة مجموعة الإحداثيات الديكارتية (x, y) وقيمة r، اكتب تعابير لإيجاد θ بدلالة جيب الزاوية وبدلالة جيب التمام. (*إرشاد*: قد يتعين عليك كتابة عدة تعابير لكل دالة، مثلما هو الأمر مع التعابير المعطاة في هذا الدرس باستخدام ظل الزاوية.)

71. **الكتابة في الرياضيات** خمّن متى يكون التمثيل البياني للمعادلة أسهل عند تمثيل المعادلة بالصورة القطبية بدلاً من الديكارتية والعكس.

72. **الإثبات** استخدم $y = r\sin\theta$ و $x = r\cos\theta$ لإثبات أن $r = x\sec\theta$ و $r = y\csc\theta$.

73. **تحدٍ** اكتب $r^2(4\cos^2\theta + 3\sin^2\theta) + r(-8a\cos\theta + 6b\sin\theta) = 12 - 4a^2 - 3b^2$ بالصورة الديكارتية. (*إرشاد*: وزّع قبل التعويض بقيم r^2 و r. ينبغي أن تكون المعادلة الديكارتية مخروطية.)

74. **الكتابة في الرياضيات** استخدم تعريف المحور القطبي المقدم في الدرس 8-1 لشرح السبب وراء ضرورة ذكر أن الإنسان الآلي في المثال 3 كان مواجهًا للشرق تمامًا. وكيف يمكن أن يساعد استخدام الاتجاه الربعي في التخلص من تلك الحاجة؟

مراجعة شاملة

استخدم التماثل لرسم كل معادلة بيانيًا.

75. $r = 1 - 2\sin\theta$
76. $r = -2 - 2\sin\theta$
77. $r = 2\sin 3\theta$

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة من الإحداثيات القطبية تحدد النقطة المعطاة إذا كان $-360° < \theta \leq 360°$ أو $-2\pi < \theta \leq 2\pi$.

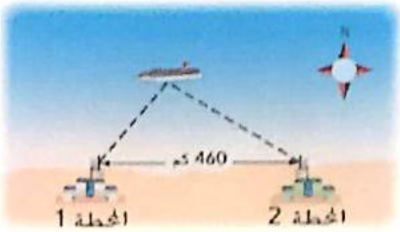
78. $T(1.5, 180°)$
79. $U\left(-1, \frac{\pi}{3}\right)$
80. $V(4, 315°)$

أوجد الزاوية θ بين u و v لأقرب جزء من عشرة من الدرجة.

81. $\mathbf{u} = \langle 6, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -7\rangle$
82. $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 6\rangle$
83. $\mathbf{u} = \langle 1, 10\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, -2\rangle$

اكتب كل زوج من المعادلات الوسيطة في صورة ديكارتية. ثم مثلهما واذكر أية قيود على المجال.

84. $y = t + 6$ ، $x = \sqrt{t}$
85. $y = \frac{t}{2} + 1$ ، $x = \frac{t^2}{4}$
86. $y = -3\sin t$ ، $x = 3\cos t$



87. **الإبحار** تقع المحطتان لوران للبث الإذاعي على بعد 460 كيلومتراً. تلقت سفينة إشارات من كلتا المحطتين وحددت بعدها عن المحطة 2 بمسافة تزيد عن المحطة 1 بمقدار 108 كيلومتراً

a. حدد معادلة القطع الزائد الذي يقع مركزه عند نقطة الأصل التي توجد فيها السفينة

b. مثّل المعادلة بيانيًا، مع توضيح فرع القطع الزائد الذي توجد فيه السفينة

c. أوجد إحداثيات موقع السفينة على الشبكة الإحداثية إذا كانت تبعد عن المحور x بمقدار 110 كيلومتر

88. **دراجات** تصنع شركة الإمارات للصناعات الوطنية طرازين من دراجات الطرق الوعرة، المغامرات، والتي تُباع بمبلغ AED 250، والمخاطرة الكبرى، والتي تُباع بمبلغ AED 350. يستخدم الطرازان الإطار نفسه. يستغرق وقت تجميع دراجة "المغامرات" وطلائها ساعتين، بينما تستغرق دراجة "المخاطرة الكبرى" 3 ساعات. إذا كان هناك 175 إطارًا و 450 ساعة من العمل متوفرين للإنتاج، فكم العدد الذي ينبغي إنتاجه من كل طراز لزيادة الربح للحد الأقصى؟ ما الحد الأقصى للربح؟

حُـلّ كل نظام من المعادلات باستخدام اختزال جاوس-جوردان.

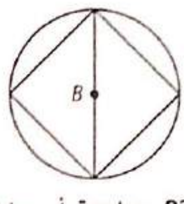
89. $3x + 9y + 6z = 21$
$4x - 10y + 3z = 15$
$-5x + 12y - 2z = -6$

90. $x + 5y - 3z = -14$
$2x - 4y + 5z = 18$
$-7x - 6y - 2z = 1$

91. $2x - 4y + z = 20$
$5x + 2y - 2z = -4$
$6x + 3y + 5z = 23$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

92. **SAT/ACT** مربع محاط بالدائرة B. إذا كان محيط الدائرة 50π. فما طول قطر المربع؟



A $10\sqrt{2}$
B 25
C $25\sqrt{2}$
D 50
E $50\sqrt{2}$

93. **مراجعة** أي مما يلي قد يكون معادلة لزهرة بثلاث بتلات؟

F $r = 3\sin\theta$
G $r = \sin 3\theta$
H $r = 6\sin\theta$
J $r = \sin 6\theta$

94. ما الصورة القطبية لـ $x^2 + (y - 2)^2 = 4$؟

A $r = \sin\theta$
B $r = 2\sin\theta$
C $r = 4\sin\theta$
D $r = 8\sin\theta$

95. **مراجعة** أي مما يلي يمكن أن يكون معادلة لحلزون أرشميدس الذي يمر عبر $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$؟

F $r = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}\cos\theta$
G $r = \theta$
H $r = \frac{3}{4}$
J $r = \frac{\theta}{2}$

8 اختبار نصف الوحدة
الدروس من 8-1 إلى 8-3

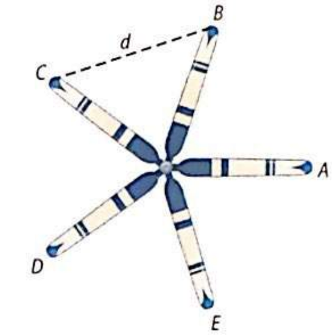
مثّل كل نقطة بيانيًا على الشبكة القطبية. (الدرس 8-1)

1. $A(-2, 45°)$
2. $D(1, 315°)$
3. $C\left(-1.5, -\frac{4\pi}{3}\right)$
4. $B\left(3, -\frac{5\pi}{6}\right)$

مثّل كل معادلة قطبية بيانيًا. (الدرس 8-1)

5. $r = 3$
6. $\theta = -\frac{3\pi}{4}$
7. $\theta = 60°$
8. $r = -1.5$

9. **طائرات مروحية** يتكون دوار الطائرة المروحية من خمس شفرات على بُعد متساوٍ. يبلغ طول كل شفرة 11.5 سنتيمتر. (الدرس 8-1)



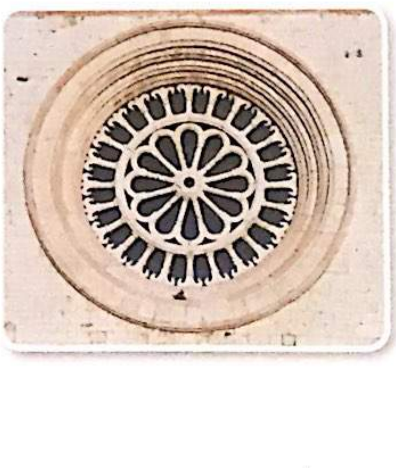
a. إذا كانت الزاوية التي تصنعها الشفرة A مع المحور القطبي تساوي $3°$، فاكتب زوجًا مرتبًا لتمثيل طرف كل شفرة على الشبكة القطبية. افترض أن الدوار متمركز عند القطب.

b. ما المسافة d بين أطراف شفرات الطائرة المروحية مقربًا لأقرب جزء من السنتيمتر؟

مثّل كل معادلة بيانيًا. (الدرس 8-2)

10. $r = \frac{1}{4}\sec\theta$
11. $r = \frac{1}{3}\cos\theta$
12. $r = 3\csc\theta$
13. $r = 4\sin\theta$

14. **زجاج ملون** نافذة الوردة عبارة عن نافذة دائرية يمكن رؤيتها في الفن المعماري القوطي. يتشعب نمط النافذة من المركز. يمكن مقاربة النافذة الموضحة بالمعادلة $r = 3\sin 6\theta$. استخدم التماثل والأصفار وقيم r العظمى بالدالة لتمثيلها بيانيًا. (الدرس 8-2)

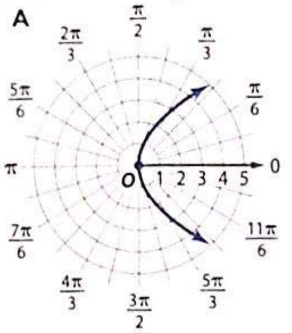


حدد كل منحنى كلاسيكي ومثله بيانيًا. (الدرس 8-2)

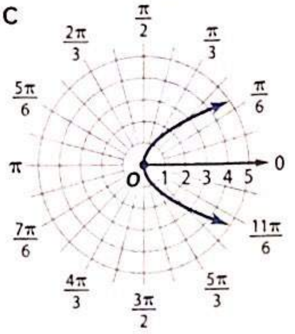
15. $r = \frac{1}{2}\sin\theta$
16. $r = \frac{1}{3}\theta + 3,\ \theta \geq 0$
17. $r = 1 + 2\cos\theta$
18. $r = 5\sin 3\theta$

19. **الاختيار من متعدد** حدد التمثيل البياني القطبي لـ $y^2 = \frac{1}{2}x$. (الدرس 8-3)

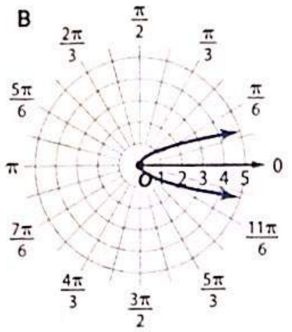
A



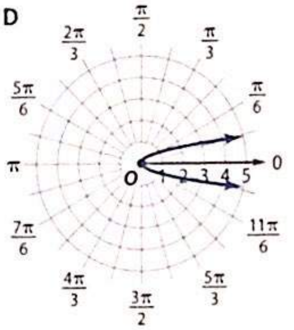
C



B



D



أوجد الإحداثيات الديكارتية لكل نقطة من خلال الإحداثيات القطبية المعطاة. (الدرس 8-3)

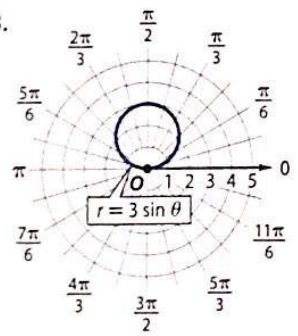
20. $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$
21. $\left(-2, -\frac{\pi}{4}\right)$
22. $(-1, 210°)$
23. $(3, 30°)$

أوجد زوجين من الإحداثيات القطبية لكل نقطة من خلال الإحداثيات الديكارتية المعطاة إذا كان $0 \leq \theta \leq 2\pi$. قرّب إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 8-3)

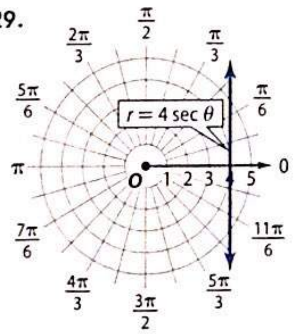
24. $(-3, 5)$
25. $(8, 1)$
26. $(7, -6)$
27. $(-4, -10)$

اكتب معادلة ديكارتية لكل تمثيل بياني. (الدرس 8-3)

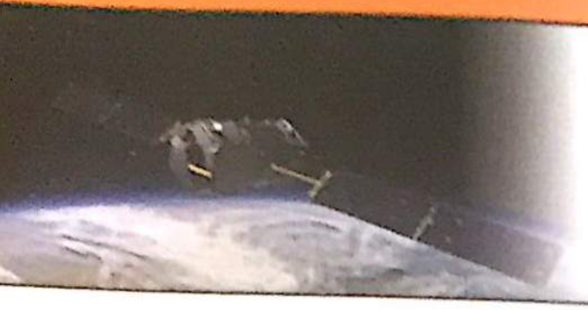
28.



29.

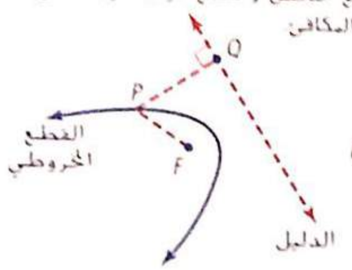


الدرس 8-4 الصور القطبية للقطوع المخروطية



السابق	الحالي	لماذا؟
• لقد قمت بتحديد القطوع المخروطية	• 1 تحديد المعادلات القطبية للقطوع المخروطية 2 كتابة المعادلة القطبية لقطع مخروطي أعطي اختلافه المركزي وأعطيت معادلة دليله وتمثيلها بيانيا	• يمكن استخدام المعادلات القطبية للقطوع المخروطية لتمثيل الحركة المدارية، كمدار كوكب حول الشمس أو مدار قمر صناعي حول كوكب

1 استخدام المعادلات القطبية للقطوع المخروطية لقد حددت القطوع المخروطية بدلالة المسافة بين البؤرة والدليل (في القطع المكافئ) أو المسافة بين البؤرتين (القطع الناقص والقطع الزائد) وبدلاً عن ذلك يمكنك تحديد هذه المنحنيات باستخدام تعريف البؤرة الدليل في القطع المكافئ.



وبصورة عامة، يمكن تعريف القطع المخروطي على أنه المحلّ الهندسي لمجموعة نقاط، بحيث يتحقق أن نسبة المسافة من نقطة ما على القطع P إلى البؤرة إلى المسافة من النقطة نفسها إلى مستقيم ثابت لا يحتوي P (الدليل) هي نسبةٌ ثابتة. تمثل النسبة الثابتة $\frac{PF}{PQ}$ الاختلاف المركزي للقطع المخروطي ويرمز لها e.

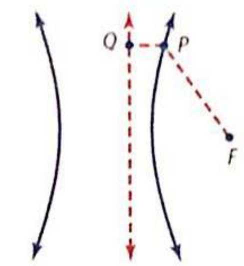
e بمثابة مضاعف ثابت		e بمثابة نسبةٍ ثابتة
$PF = e \times PQ$	أو	$e = \frac{PF}{PQ}$

تذكّر أنه من أجل القطع المكافئ، يكون $PF = PQ$ ولذلك للقطع المكافئ اختلافٌ مركزي $\frac{PQ}{PQ}$ أو 1. تعطينا القيم الأخرى لـ e قطوعًا مخروطية أخرى. وفيما يلي تلخيص لهذه الاختلافات المركزية.

ملخص المفهوم الاختلاف المركزي

قطع زائد

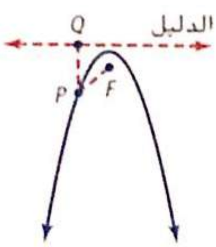
$e > 1$



$\frac{PF}{PQ} > 1$

قطع مكافئ

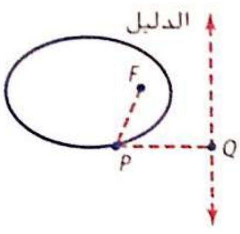
$e = 1$



$\frac{PF}{PQ} = 1$

قطع ناقص

$0 < e < 1$



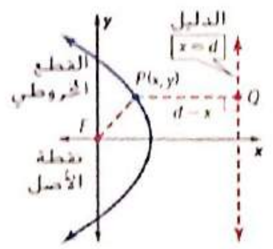
$0 < \frac{PF}{PQ} < 1$

تذكّر أيضًا أنه حين يقع مركز قطعٍ مخروطي عند نقطة الأصل، فإن المعادلات الديكارتية للقطوع المخروطية تأخذ صورة أبسط.

القطع الزائد	القطع المكافئ	القطع الناقص
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	$x^2 = 4py$ أو $y^2 = 4px$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

باستخدام تعريف البؤرة-الدليل، نبسّط معادلة القطع المخروطي بالصورة القطبية إذا كانت إحدى بؤر القطع تقع عند نقطة الأصل.

إذا فكّرنا في قطع مخروطي تقع بؤرته عند نقطة الأصل ويقع دليله إلى اليمين عند $x = d$ من أجل أي نقطة $P(x, y)$ واقعة على المنحنى، فإن المسافة PF تعطى من خلال $\sqrt{x^2 + y^2}$، وتعطى المسافة PQ من خلال $d - x$. يمكننا استبدال هذين التعبيرين في تعريف القطع المخروطي.



$$PF = e \times PQ$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e(d - x)$$

نصيحة دراسية

القطوع المخروطية الأخرى عند تحديد القطوع المخروطية بدلالة اختلافها المركزي، فإن e يكون ثابتًا موجبًا قطعًا ولا توجد دوائر أو مستقيمات أو مخاريط منحسرة أخرى.

ينبغي أن يجعلك التعبير $\sqrt{x^2 + y^2}$ تفكّر في الإحداثيات القطبية. وفي الحقيقة، للمعادلة الواردة أعلاه صورةٌ أبسطُ في النظام الإحداثي القطبي.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e(d - x)$$

$$r = e(d - r \cos \theta)$$

$$r = ed - er \cos \theta$$

$$r + er \cos \theta = ed$$

$$r(1 + e \cos \theta) = ed$$

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

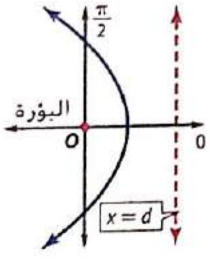
هذه المعادلة الأخيرة هي الصورة القطبية لمعادلة للقطوع المخروطية التي تقع بؤرتها عند القطب ويقع دليلها الرأسي ومركزها أو رأسها إلى يمين القطب. يمكن أن تؤدي التوجيهات المختلفة للبؤرة والدليل صورًا مختلفةً لهذه المعادلة القطبية، وفق ما نوجز أدناه.

المفهوم الأساسي المعادلات القطبية للقطوع المخروطية

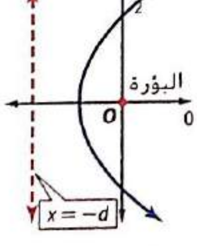
يأخذ القطع المخروطي الذي اختلافه المركزي $e > 0$، وفيه $d > 0$، وتقع بؤرته عند القطب، المعادلة القطبية التالية :

- $r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$ إذا كان الدليل هو المستقيم الرأسي $x = d$ (الشكل 8.4.1).
- $r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$ إذا كان الدليل هو المستقيم الرأسي $x = -d$ (الشكل 8.4.2).
- $r = \frac{ed}{1 + e \sin \theta}$ إذا كان الدليل هو المستقيم الأفقي $y = d$ (الشكل 8.4.3)، و
- $r = \frac{ed}{1 - e \sin \theta}$ إذا كان الدليل هو المستقيم الأفقي $y = -d$ (الشكل 8.4.4).

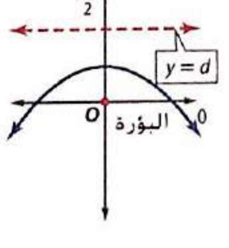
في كلٍ من الأمثلة أدناه، يكون $e = 1$، وبالتالي يأخذ القطع المخروطي صورة قطعٍ مكافئ.



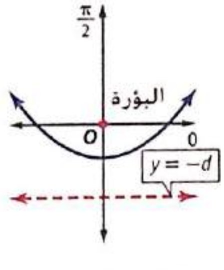
الشكل 8.4.1



الشكل 8.4.2



الشكل 8.4.3



الشكل 8.4.4

قراءة في الرياضيات

الاختلاف المركزي في كلٍ من هذه المعادلات القطبية، e متغيّر يمثل الاختلاف المركزي للقطع المخروطي. وينبغي عدم الخلط بينه وبين العدد المتسامي e، والذي يعدّ ثابتًا.

لاحظ أنه من أجل $r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$، يقع دليل القطع المخروطي إلى يسار القطب. من أجل $r = \frac{ed}{1 + e \sin \theta}$، يقع الدليل فوق القطب. من أجل $r = \frac{ed}{1 - e \sin \theta}$، يقع الدليل تحت القطب.

لتحليل المعادلة القطبية، ابدأ بكتابة المعادلة بالصورة القياسية $r = \frac{ed}{1 \pm e \sin \theta}$ أو $r = \frac{ed}{1 \pm e \cos \theta}$. وفي هذه الصورة، حدّد الاختلاف المركزي واستخدم هذه القيمة لتحديد نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة. ثم حدّد معادلة الدليل واستخدمها لوصف توجيه القطع المخروطي.

المثال 1 تحديد نوع القطع المخروطي من المعادلات القطبية

حدد الاختلاف المركزي ونوع القطع ومعادلة الدليل لكل معادلة قطبية.

a. $r = \frac{9}{3 + 2.25 \cos \theta}$

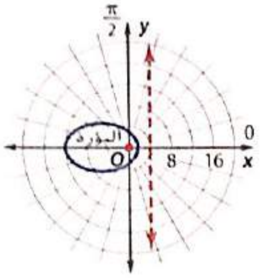
اكتب المعادلة بالصورة القياسية. $r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$.

$$r = \frac{9}{3 + 2.25 \cos \theta}$$

$$r = \frac{3(3)}{3(1 + 0.75 \cos \theta)}$$

$$r = \frac{3}{1 + 0.75 \cos \theta}$$

في هذه الصورة، يمكن أن نلاحظ من خلال المقام أن $e = 0.75$. ولذلك فإن القطع المخروطي هو قطع ناقص. بالنسبة للمعادلات القطبية بهذه الصورة، معادلة الدليل هي $x = d$. من البسط، نعلم أن $ed = 3$. إذاً $d = 3 \div 0.75 = 4$. إذاً، معادلة الدليل هي $x = 4$.



التحقق ارسم التمثيل البياني لـ $r = \frac{9}{3 + 2.25 \cos \theta}$ ودليله $x = 4$ وذلك إما باستخدام التقنيات المعروضة في الدرس 2-8 أو باستخدام حاسبة التمثيل البياني. التمثيل البياني هو قطعٌ ناقصٌ يقع دليله إلى يمين القطب. ✓

b. $r = \frac{-16}{4 \sin \theta - 2}$

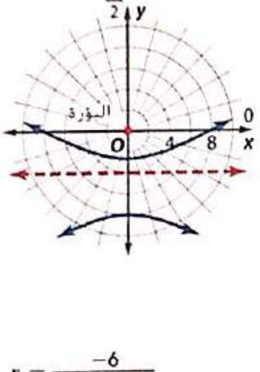
اكتب المعادلة بالصيغة القياسية.

$$r = \frac{-16}{4 \sin \theta - 2}$$

$$r = \frac{-2(8)}{-2(1 - 2 \sin \theta)}$$

$$r = \frac{8}{1 - 2 \sin \theta}$$

المعادلة من الصيغة $r = \frac{ed}{1 - e \sin \theta}$. إذاً $e = 2$. ولذلك فإن القطع المخروطي هو قطعٌ زائد. بالنسبة للمعادلات القطبية من هذه الصورة، فإن معادلة الدليل هي $y = -d$. نظراً إلى أن $ed = 8$ فإن $d = 8 \div 2$ أو 4. ولذلك، معادلة الدليل هي $y = -4$.



التحقق ارسم التمثيل البياني لـ $r = \frac{-16}{4 \sin \theta - 2}$ ودليله $y = -4$. التمثيل البيانيّ قطعٌ زائدٌ تقع بؤرته عند نقطة الأصل، وفوق الدليل. ✓

تمرين موجّه

1A. $r = \frac{-6}{3 \cos \theta - 1}$

1B. $r = \frac{9}{3 + 3 \sin \theta}$

1C. $r = \frac{1}{6 + 1.2 \cos \theta}$

نصيحة دراسية

أزواج البؤر-الأدلّة في حين أن القطع المكافئ يضم بؤرةً واحدةً ودليلاً واحدًا، فإن لكلٍّ من القطع الناقص والقطع الزائد بؤرتين ودليلين. ويمكن استخدام أيٍّ من زوجي البؤرة-الدليل لتحديد القطع المخروطي.

2 كتابة المعادلات القطبية للقطوع المخروطية

كتابة المعادلات القطبية للقطوع المخروطية يمكنك كتابة المعادلة القطبية لقطعٍ مخروطي عند إعطائك دليله أو اختلافه المركزي إضافةً إلى بعض الخواص الأخرى.

المثال 2 كتابة المعادلات القطبية للقطوع المخروطية

اكتب معادلةً قطبيةً للقطع المخروطي ذي الخواصّ المعطاة ومثّله مع دليله بيانيًا.

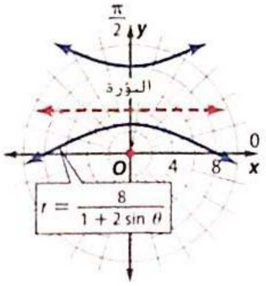
a. $e = 2$; **الدليل:** $y = 4$

نظرًا إلى أن $e = 2$، فالمخروط قطعٌ زائد. يقع الدليل $y = 4$ فوق القطب، وبالتالي فإن للمعادلة الصورة $r = \frac{ed}{1 + e\sin\theta}$. استخدم قيمتي e و d لكتابة المعادلة.

$$r = \frac{ed}{1 + e\sin\theta}$$

$$r = \frac{2(4)}{1 + 2\sin\theta} \text{ أو } \frac{8}{1 + 2\sin\theta}$$

ارسم التمثيل البياني للمعادلة القطبية التالية مع دليله.
التمثيل البياني هو قطعٌ زائدٌ دليله فوق القطب.



b. $e = 0.5$; **الرأسان عند** $(-4, 0)$ **و** $(12, 0)$

نظرًا إلى أن $e = 0.5$، فالمخروط قطعٌ زائد. يقع مركز القطع الناقص عند النقطة $(4, 0)$. وهي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين المعطيين. تقع هذه النقطة إلى يمين القطب. ولذلك سيقع الدليل إلى يسار القطب عند $x = -d$. المعادلة القطبية لقطعٍ مخروطي له هذا الدليل هي $r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$.

استخدم قيمة e والصورة القطبية لنقطةٍ تقع على القطع المخروطي لإيجاد قيمة d. لنقطة الرأس $(12, 0)$ الإحداثيان القطبيان $(12, 0)$ أو $(r, \theta) = \left(\sqrt{12^2 + 0^2}, \tan^{-1}\frac{0}{12}\right)$

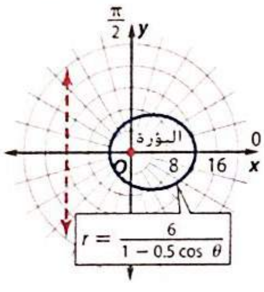
$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$$

$$12 = \frac{0.5d}{1 - 0.5\cos 0}$$

$$12 = \frac{0.5d}{0.5}$$

$$12 = d$$

ولذلك، فمعادلة القطع الناقص هي $r = \frac{0.5 \times 12}{1 - 0.5\cos\theta}$ أو $r = \frac{6}{1 - 0.5\cos\theta}$. نظرًا إلى أنّ $d = 12$، فإن معادلة الدليل هي $x = -12$. والتمثيل البياني قطعٌ ناقصٌ يقع رأساه عند النقطتين $(-4, 0)$ و $(12, 0)$.



نصيحة دراسية

آثار تعدد الاختلافات المركزية
سوف تستكشف آثار تعدّد الاختلافات المركزية مقابل وجود دليل ثابت وآثار تعدد الأدلة مقابل وجود اختلاف مركزي ثابت في التمرين 49

تمرين موجّه

2A. $e = 1$; الدليل: $x = 2$

2B. $e = 2.5$; الرأسان عند $(0, -3)$ و $(0, -7)$

لقد حلّلت المعادلات الديكارتية للقطوع المخروطية بالصورة القياسية لوصف الخواصّ الهندسية للقطوع المكافئة والقطوع الناقصة والقطوع الزائدة. ويمكنك استخدام التحليل الهندسي للتمثيل البياني لقطعٍ مخروطيّ معطًى بالصورة القطبية لكتابة المعادلة بالصورة الديكارتية.

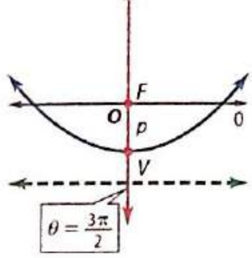
المثال 3 كتابة الصورة القطبية لقطوع مخروطية بالصورة الديكارتية

اكتب كل معادلة قطبية بالصورة الديكارتية.

a. $r = \frac{4}{1 - \sin \theta}$

الخطوة 1 حلّل المعادلة القطبية.

من أجل هذه المعادلة، يكون $d = 4$ و $e = 1$. إن الاختلاف المركزي وصورة المعادلة يحددان أن هذا قطعٌ مكافئٌ مفتوحٌ رأسيًا تقع بؤرته عند المحور ودليله $y = -4$. المعادلة العامة لهذا القطع المكافئ بالصورة الديكارتية هي $(x - h)^2 = 4p(y - k)$.



الشكل 8.4.5

الخطوة 2 حدّد قيم h و k و p.

يقع الرأس بين بؤرة القطع المكافئ F ودليله. ويحدث ذلك عندما $\theta = \frac{3\pi}{2}$، كما هو موضح في الشكل 8.4.5. بإيجاد قيمة الدالة عند هذه القيمة، فإننا نتوصل إلى أن الرأس يقع عند الإحداثي القطبي $\left(2, \frac{3\pi}{2}\right)$، والذي يقابل الإحداثي الديكارتي $(0, -2)$. إذًا، $(h, k) = (0, -2)$.
المسافة p من الرأس الواقع عند النقطة $(0, -2)$ إلى البؤرة الواقعة عند النقطة $(0, 0)$ تساوي 2.

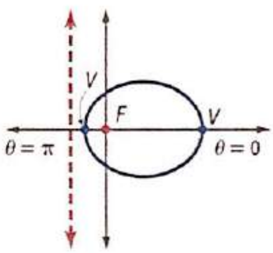
الخطوة 3 عوّض قيم h و k وp في الصورة القياسية لمعادلة قطع مكافئ.

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$
$$(x - 0)^2 = 4(2)[y - (-2)]$$
$$x^2 = 8y + 16$$

b. $r = \frac{3.2}{1 - 0.6 \cos \theta}$

الخطوة 1 حلّل المعادلة القطبية.

من أجل هذه المعادلة، $d \approx 5.3$ و $e = 0.6$. إن الاختلاف المركزي وصورة المعادلة يحددان أن هذا قطعٌ ناقصٌ دليله $x = -5.3$. ولذلك، يقع المحور الأكبر للقطع الناقص على طول القطب أو المحور الأفقي x.
المعادلة العامة لهذا القطع المكافئ بالصورة الديكارتية هي $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$.



الشكل 8.4.6

الخطوة 2 حدّد قيم h و k و a وb.

الرأسان هما النقطتان الطرفيتان للمحور الأكبر، وتتشكلان عند $\theta = 0$ و π كما هو موضح في الشكل 8.4.6. بإيجاد قيمة الدالة عند هاتين القيمتين، نتوصل إلى أن للرأسين الإحداثيين القطبيين $(2, \pi)$ و $(8, 0)$، واللذين يقابلان الإحداثيين الديكارتيين $(-2, 0)$ و $(8, 0)$. مركز القطع الناقص هو نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين. إذًا $(h, k) = (3, 0)$.

تساوي المسافة a بين المركز وكل رأس 5. المسافة c من المركز إلى البؤرة الواقعة عند النقطة $(0, 0)$ تساوي 3. من علاقة فيثاغورس، يكون لدينا $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ أو $b = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

الخطوة 3 عوّض قيم h و k و a وb في الصورة القياسية لمعادلة قطع ناقص.

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{(x - 3)^2}{5^2} + \frac{(y - 0)^2}{4^2} = 1$$
$$\frac{(x - 3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

تمرين موجّه

3A. $r = \frac{2.5}{1 - 1.5 \cos \theta}$

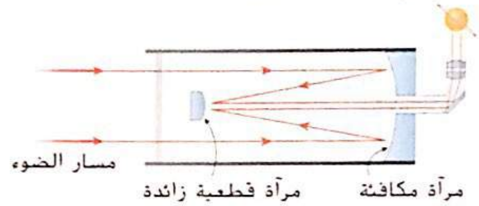
3B. $r = \frac{5}{1 + \sin \theta}$

تمارين

حدد الاختلاف المركزي ونوع القطع ومعادلة الدليل لكل معادلة قطبية. (المثال 1)

1. $r = \frac{20}{4 + 4 \sin \theta}$
2. $r = \frac{18}{2 - 6 \cos \theta}$
3. $r = \frac{21}{3 \cos \theta + 1}$
4. $r = \frac{24}{4 \sin \theta + 8}$
5. $r = \frac{-12}{6 \cos \theta - 6}$
6. $r = \frac{9}{4 - 3 \sin \theta}$
7. $r = \frac{-8}{\sin \theta - 0.25}$
8. $r = \frac{10}{2.5 + 2.5 \cos \theta}$

9. **التلسكوبات** ينتج تلسكوب كاسيغران، والذي اخترع عام 1692، الصورة عبر انعكاس الضوء عن مرايا قطعية مكافئة وقطعية زائدة. حدّد الاختلاف المركزي ونوع القطع المخروطي ومعادلة الدليل لكلّ معادلةٍ ممثلةٍ لمرآةٍ في التلسكوب. (المثال 1)



a. $r = \frac{7}{2 \sin \theta + 2}$
b. $r = \frac{28}{12.5 \cos \theta + 5}$

اكتب مع التمثيل البياني معادلةً قطبيةً ودليلاً لمخروط بالخصائص المعطاة. (المثال 2)

10. $e = 1$؛ الدليل: $y = 6$
11. $e = 0.75$؛ الدليل: $x = -8$
12. $e = 5$؛ الدليل: $x = 2$
13. $e = 0.1$؛ الدليل: $y = 8$
14. $e = 6$؛ الدليل: $y = -7$
15. $e = 1$؛ الدليل: $x = -1.5$
16. $e = 0.8$؛ الرأسان عند $(-36, 0)$ و $(4, 0)$
17. $e = 1.5$؛ الرأسان عند $(-3, 0)$ و $(-15, 0)$

اكتب كل معادلة قطبية بالصورة الديكارتية. (المثال 3)

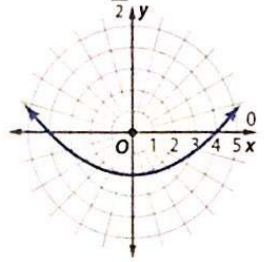
18. $r = \frac{4.8}{1 + \sin \theta}$
19. $r = \frac{30}{4 + \cos \theta}$
20. $r = \frac{5}{1 - 1.5 \cos \theta}$
21. $r = \frac{5.1}{1 + 0.7 \sin \theta}$
22. $r = \frac{12}{1 - \cos \theta}$
23. $r = \frac{6}{0.25 - 0.75 \sin \theta}$
24. $r = \frac{4.5}{1 + 1.25 \sin \theta}$
25. $r = \frac{8.4}{1 - 0.4 \cos \theta}$

الآلة الحاسبة البيانية **حدّد نوع القطع المخروطي لكلّ معادلةٍ قطبيةٍ مما يلي. ثم مثّل كل معادلة بيانيًا.**

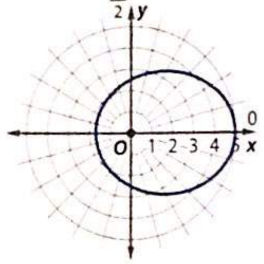
26. $r = \frac{2}{2 + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}$
27. $r = \frac{3}{1 + \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$
28. $r = \frac{2}{1 - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)}$
29. $r = \frac{4}{1 + 2 \sin\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right)}$

صل كل معادلة قطبية بتمثيلها البياني.

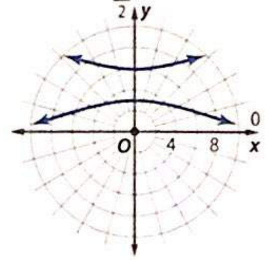
a.



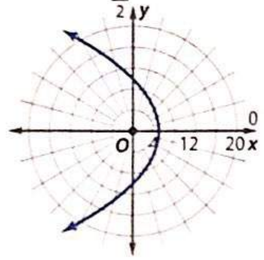
b.



c.



d.



30. $r = \frac{10}{1 + \cos \theta}$
31. $r = \frac{4}{1 - \sin \theta}$
32. $r = \frac{5}{2 - \cos \theta}$
33. $r = \frac{12}{1 + 3 \sin \theta}$

حدد الاختلاف المركزي ونوع القطع ومعادلة الدليل لكل معادلة قطبية مما يلي. ثم ارسم التمثيل البياني للمعادلة، وحدّد الدليل.

34. $r = \frac{12}{2 - 0.75 \cos \theta}$
35. $r = \frac{1}{0.2 - 0.2 \sin \theta}$
36. $r = \frac{6}{1.2 \sin \theta + 0.3}$
37. $r = \frac{8}{\cos \theta + 5}$

38. **علم الفلك** يسير مذنّب بوريلّي حول الشّمس بمسارٍ قطعيٍّ ناقصٍ اختلافه المركزيّ $e = 0.624$. تعرّف أقرب نقطةٍ إلى الشّمس في مدار مذنّبٍ باسم *الحضيض* بينما تعرّف أبعد نقطةٍ عن الشّمس باسم *الأوج*. يتشكّل الأوج عند مسافة 5.83 AU (وحدة شمسية، على أساس المسافة بين الأرض والشمس) عن الشمس ويتشكّل الحضيض عند مسافة 1.35 AU. ويبلغ قطر الشمس 0.0093 AU تقريبًا.

a. اكتب معادلةً قطبيةً للمسار القطعي الناقص لمذنّب بوريلّي. ومثّل تلك المعادلة بيانيًا.

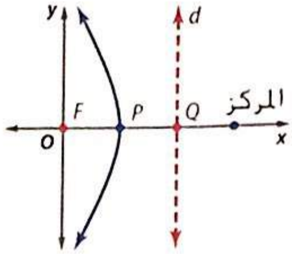
b. حدّد المسافة بالكيلومترات بين مذنّب بوريلّي وبين الشّمس عند الأوج والحضيض إذا كانت كل $1\ \text{AU} \approx 149.7$ مليون كيلومتراً.

البرهان **برهن كلّا مما يلي.**

39. $b = a\sqrt{1 - e^2}$ من أجل القطع الناقص

40. $b = a\sqrt{e^2 - 1}$ من أجل القطع الزائد

41. البرهان استخدم تعريف الاختلاف المركزي لقطع مخروطي، $PF = ePQ$ ورسم القطع الزائد المبيّن أدناه للتحقق من أن $d = \frac{a(e^2 - 1)}{e}$ من أجل أي قطعٍ زائد.



اكتب كل معادلة ديكارتية بالصورة القطبية.

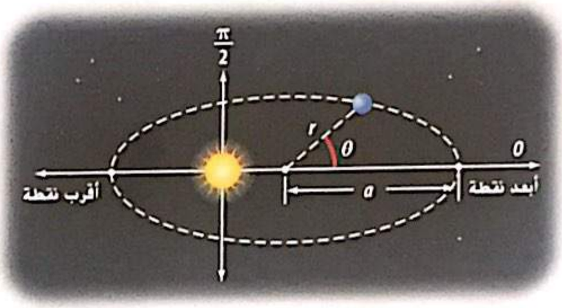
42. $x^2 = 4y + 4$

43. $-10y + 25 = x^2$

44. $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

45. $\frac{(x+4)^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$

46. علم الفلك تدور الكواكب حول الشمس بمداراتٍ قطعيةٍ ناقصةٍ تقريبًا تقع الشمس عند إحدى البؤرتين، وذلك وفق ما هو موضّح أدناه.



a. بيّن أن المعادلة القطبية لمسار الكواكب يمكن أن تكتب بالصيغة $r = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e\cos\theta)}$.

b. أثبت أن مسافة أقرب نقطةٍ ممكنةٍ لأيّ كوكبٍ إلى الشمس (الحضيض الشمسي) هي $a(1 - e)$ وأنّ مسافة أبعد نقطة عن الشمس (أوج المدار) هي $a(1 + e)$.

c. استخدم الصيغتين الواردتين في القسم **a** لإيجاد مسافتي الحضيض والأوج لكلٍ من الكواكب.

الكوكب	a	e	الكوكب	a	e
الأرض	1.000	0.017	ستون	30.06	0.009
المشتري	5.203	0.048	زحل	9.539	0.056
المريخ	1.524	0.093	أورانوس	19.18	0.047
عطارد	0.387	0.206	الزهرة	0.723	0.007

d. ما الكوكب الذي يتمتع بأصغر مسافةٍ بين الحضيض والرأس؟ وما الكوكب الذي يتمتع بأكبر مسافةٍ بينهما؟

اكتب كل معادلةٍ بالصورةِ القطبية. (إرشاد: أزح كل قطعٍ مخروطيٍ بحيث تقع بؤرةٌ على القطب.)

47. $\frac{(x-2)^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

48. $3(x+5)^2 + 4y^2 = 192$

49. التمثيلات المتعددة سوف تستكشف في هذه المسألة آثار تغيير الاختلاف المركزي والدليل على التمثيلات البيانية للقطوع المخروطية.

a. عدديًا اكتب معادلة قطع مخروطي بؤرته (0, 0) ودليله $x = 3$ من أجل 2 و 1.6 و 1 و 0.6 و $e = 0.4$. ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله كلّ معادلة.

b. بيانيًا مثّل الاختلاف المركزي وسمّه لكلٍّ من المعادلات التي توصلت إليها في القسم **a** على المستوى الإحداثي نفسه.

c. لفظيًا صف التغيرات التي تحدث في التمثيلات البيانية في القسم **b** مع اقتراب e من 2.

d. عدديًا اكتب معادلة قطعٍ مخروطي بؤرته (0, 0) واختلافه المركزي $e = 0.5$ من أجل 4 و 1 و $d = 0.25$.

e. بيانيًا مثّل كلاً من المعادلات بيانيًا على المستوى الإحداثي نفسه.

f. لفظيًا صف العلاقة بين قيمة d والمسافة بين الرأسين والبؤرتين في التمثيلات البيانية في القسم **e**.

اشتقّ كلاً من المعادلات القطبية التالية لقطوعٍ مخروطيةٍ وفق ما هو واردٌ في الصفحة 562 بالنسبة للمعادلة $r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$. واشتمل على تمثيلٍ بيانيٍ في كل اشتقاق.

50. $r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$

51. $r = \frac{ed}{1 + e\sin\theta}$

52. $r = \frac{ed}{1 - e\sin\theta}$

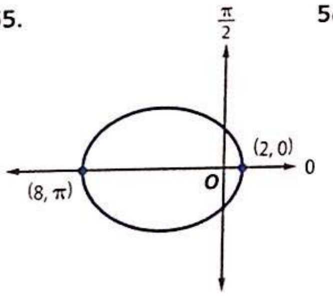
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

53. الكتابة في الرياضيات صف تعريفين يمكن استخدامهما لتحديد قطعٍ مخروطي.

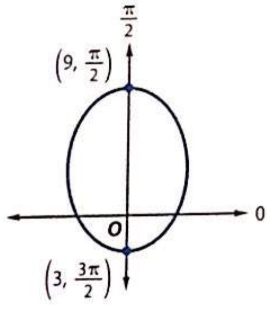
54. التبرير اشرح السبب في أن $r = \frac{ed}{1 + e\sin\theta}$ لا تعطي دائرةً حقيقيةً من أجل أي قيمة لـ e.

تحدٍّ حدّد معادلةً قطبيةً للقطع المكافئ ذي الرأسين المعطيين إذا كانت إحدى البؤرتين تقع عند القطب.

55.



56.



57. الكتابة في الرياضيات اشرح كيف تستطيع إيجاد المسافة من البؤرة الواقعة عند النقطة (0, 0) إلى أيّ نقطةٍ على القطع المخروطيّ عند إعطاء الإحداثيات الديكارتية أو الإحداثيات القطبية أو θ.

مراجعة شاملة

أوجد زوجين من الإحداثيات القطبية لكل نقطة من خلال الإحداثيات الديكارتية المعطاة إذا كان $0 \le \theta \le 2\pi$. وعند الضرورة، قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

58. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

59. $(-2, -5)$

60. $(8, -12)$

حدد كل منحنى كلاسيكي ومثله بيانيًا.

61. $r = 3 + 3\cos\theta$

62. $r = -2\sin 3\theta$

63. $r = \frac{5}{2}\theta,\ \theta \ge 0$

حدّد معادلة القطع الناقص المقابل لكل مجموعة من الخواص مما يلي.

64. الرأسان المرافقان $(0, 5)$ و $(8, 5)$، البؤرتان $(4, 2)$ و $(4, 8)$.

65. المحور الأكبر يمتد من $(-2, 4)$ إلى $(8, 4)$، المحور الأصغر يمتد من $(3, 1)$ إلى $(3, 7)$.

66. البؤرتان $(-1, 9)$ و $(-1, 1)$، يساوي طول المحور الأصغر 6

67. **الألعاب الأولمبية** تحدّد مراكز الفرق في الألعاب الأولمبية بناءً على العدد الإجمالي من النقاط التي يحرزها كل فريق، حيث يمنح كلّ نوع من أنواع الميداليات الأولمبية الفريق عددًا محدّدًا من النقاط. استخدم هذه المعلومات لتحدّد الدورة الأولمبية التي حققت خلالها الولايات المتحدة أكبر عددٍ من النقاط.

الدورة الأولمبية	ذهبية	فضية	برونزية
1996	44	32	25
2000	37	24	31
2004	35	39	29
2008	36	38	36

الميدالية	النقاط
ذهبية	3
فضية	2
برونزية	1

أوجد قِيمَ $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ و$\tan 2\theta$ للمقدار والفترة الموضحين.

68. $\sin\theta = \frac{2}{3}, (0°, 90°)$

69. $\tan\theta = -\frac{24}{7}, \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

70. $\sin\theta = -\frac{4}{5}, \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

حدد الخطوط المقاربة الرأسية، ومثل كل دالة بيانيًا.

71. $y = \sec\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

72. $y = 4\cot\frac{x}{2}$

73. $y = 2\cot\left[\frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] + 0.75$

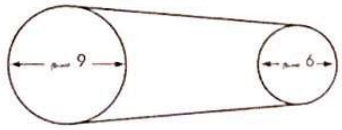
أوجد القيم الدقيقة للخمس دوال المثلثية المتبقية لـ θ.

74. $\sec\theta = 2$، حيث $\sin\theta > 0$ و $\cos\theta > 0$

75. $\csc\theta = \sqrt{5}$، حيث $\sin\theta > 0$ و $\cos\theta > 0$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

76. **SAT/ACT** تُربط بكرةٌ قطرها 9 سنتيمترات بكرةٍ أخرى قطرها 6 سنتيمترات، كما هو موضح في الشكل. فإذا كانت البكرة الكبرى تدور بسرعة 120 rpm (دورة في الدقيقة)، فما سرعة البكرة الصغرى؟



A 80 rpm
B 120 rpm
C 160 rpm
D 180 rpm
E 200 rpm

77. ما نوع القطع المخروطي المعطى بالمعادلة $r = \frac{3}{2 - 0.5\cos\theta}$؟

F دائرة
G قطع ناقص
H قطع مكافئ
J قطع زائد

78. **مراجعة** أي من الخيارات التالية يحتوي على الصورة المركّبة والمقدار للمتّجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(3, 4, -2)$ ونقطة نهايته $B(-5, 2, 1)$؟

A $\langle -8, -2, 3\rangle, \sqrt{77}$
B $\langle 8, -2, 3\rangle, \sqrt{77}$
C $\langle -8, -2, 3\rangle, \sqrt{109}$
D $\langle 8, -2, 3\rangle, \sqrt{109}$

79. **مراجعة** ما الاختلاف المركزي للقطع الناقص الموصوف من خلال $\frac{y^2}{47} + \frac{(x-12)^2}{34} = 1$؟

F 0.38
G 0.41
H 0.53
J 0.62

8-5 الأعداد المركبة ونظرية دي موافر

السابق

- أجريت العمليات بالأعداد المركبة المكتوبة في الصورة الديكارتية

الحالي

1. تحويل الصورة الديكارتية للأعداد المركبة إلى الصورة القطبية والعكس
2. إيجاد ناتج ضرب الأعداد المركبة وناتج قسمتها وأسسها والجذور في الصورة القطبية

لماذا؟

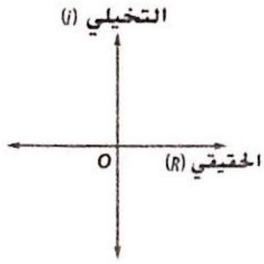
- يستخدم المهندسون الكهربائيون الأعداد المركبة لوصف العلاقات الكهربائية. يمثل كل من الجهد الكهربائي E والمعاوقة Z، والتيار I الكميات الثلاث المربوطة بالمعادلة $E = I \times Z$ المستخدمة في وصف التيار المتردد. يمكن كتابة كل متغير في شكل أعداد مركبة في الصورة $a + bj$، حيث j هو عدد تخيلي (ويستخدم المهندسون الرمز j كي لا يختلط برمز التيار I) للمعاوقة. يمثل الجزء الحقيقي a المعاوقة التي يلاقيها تدفق التيار بسبب أجهزة المقاومة. ويتعلق الجزء التخيلي b بالمعاوقة بسبب المكثفات والمستحثات.

المفردات الجديدة

مستوى مركب complex plane
محور حقيقي real axis
محور تخيلي imaginary axis
مستوى أرجاند Argand plane
القيمة المطلقة لعدد مركب absolute value of a complex number
صورة قطبية polar form
صيغة مثلثية trigonometric form
معامل modulus
فرضية argument
جذور الوحدة pth roots of unity

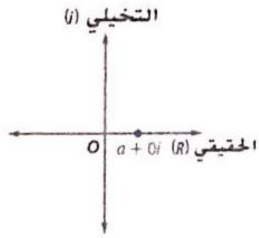
1 الصور القطبية للأعداد المركبة

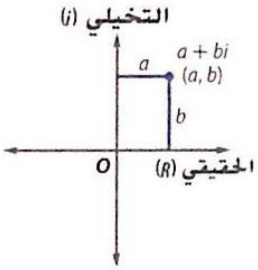
يكون للأعداد المركبة المكتوبة في الصورة الديكارتية $a + bi$ المركب الحقيقي a والمركب التخيلي bi. يمكنك تمثيل العدد المركب بيانيا على **المستوى المركب** بتمثيلها بالنقطة (a, b). وكما هو الحال مع المستوى الإحداثي، نحتاج إلى محورين لتمثيل العدد المركب. يطلق على المركب الحقيقي المعيّن على المحور الأفقي **المحور الحقيقي**، ويطلق على المركب التخيلي المعين على المحور الرأسي **المحور التخيلي**. وقد يشار إلى المستوى المركب بالمصطلح **مستوى أرجاند**.



المستوى المركب

افترض عددا مركبا حيث $b = 0, a + 0i$. وتكون النتيجة عددا حقيقيا a يمكن تمثيله بيانيا باستخدام خط أعداد حقيقية أو المحور الحقيقي. وعندما يكون $b \neq 0$، نحتاج إلى المحور التخيلي لتمثيل المركب التخيلي.



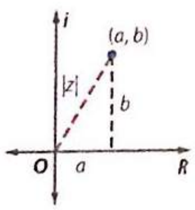


تذكر أن القيمة المطلقة لعدد حقيقي هي مقدار المسافة بينه وبين الصفر على خط الأعداد. وبالمثل، فإن **القيمة المطلقة لعدد مركب** هي مقدار المسافة بينه وبين الصفر على المستوى المركب. عندما يتم تمثيل $a + bi$ بيانيا في المستوى المركب، يمكن حساب المسافة باستخدام نظرية فيثاغورث.

المفهوم الأساسي قيمة مطلقة لعدد مركب

تكون القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

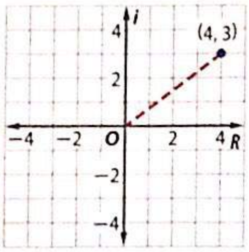


المثال 1 التمثيلات البيانية والقيم المطلقة للأعداد المركبة

مثل كل عدد بيانيًا في المستوى المركب وأوجد قيمته المطلقة.

a. $z = 4 + 3i$

$(a, b) = (4, 3)$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

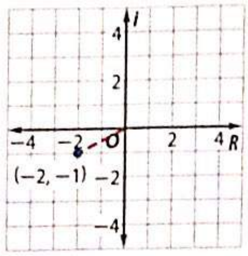
$= \sqrt{4^2 + 3^2}$

$= \sqrt{25}$ أو 5

القيمة المطلقة لـ $4 + 3i = 5$.

b. $z = -2 - i$

$(a, b) = (-2, -1)$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{5}$ or 2.24

القيمة المطلقة لـ $-2 - i \approx 2.24$.

تمرين موجّه

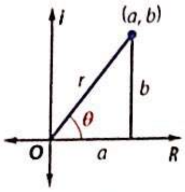
1A. $5 + 2i$

1B. $-3 + 4i$

انتبه!

الصورة القطبية ينبغي عدم الخلط بين الصورة القطبية لعدد مركب والإحداثيات القطبية للعدد المركب. فالصورة القطبية للعدد المركب هي طريقة أخرى لتمثيل العدد المركب. أما الإحداثيات القطبية للعدد المركب فسيتم مناقشتها لاحقًا في هذا الدرس

وكما يمكن كتابة الإحداثيات الديكارتية (x, y) في الصورة القطبية. يمكن كتابة الإحداثيات التي تمثل التمثيل البياني لعدد مركب في المستوى المركب في الصورة القطبية أيضًا. ويمكن تطبيق نفس النسب المثلثية التي استخدمت لإيجاد قيم x وy لتمثيل قيم a وb.



$\cos\theta = \frac{a}{r}$ و $\sin\theta = \frac{b}{r}$

$r\cos\theta = a$ $\quad$ $r\sin\theta = b$

بالتعويض عن تمثيلات الصورة القطبية بـ a وb، يمكننا حساب **الصيغ القطبية** أو **الصيغة المثلثية** لعدد مركب.

$$z = a + bi$$
$$= r\cos\theta + (r\sin\theta)i$$
$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

في حالة العدد المركب، يمثل r القيمة المطلقة أو **معامل**. العدد المركب ويمكن إيجاد قيمته باستخدام نفس العملية التي استخدمتها عند إيجاد القيمة المطلقة. $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. الزاوية θ تسمى **زاوية** العدد المركب. كما هو الحال مع إيجاد الزاوية θ بالإحداثيات الديكارتية (x, y). عند استخدام عدد مركب. $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$ أو $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ إذا كانت $a < 0$.

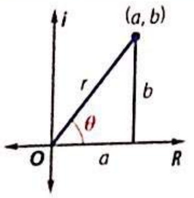
نصيحة دراسية

الزاوية يطلق على زاوية العدد المركب أيضًا السعة. كما هو الحال مع الإحداثيات القطبية. لا تعتبر θ فريدة بالرغم من أنه يتم الحصول عليها في الفترة $-2\pi < \theta < 2\pi$

المفهوم الأساسي الصورة القطبية لعدد مركب

تكون الصورة القطبية أو الصيغة المثلثية للعدد المركب $z = a + bi$ هي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. حيث

$a = r\cos\theta$، $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$، $b = r\sin\theta$، و $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$ لـ $a > 0$ أو $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ لـ $a < 0$.



المثال 2 الأعداد المركبة في الصورة القطبية

عبّر عن كل عدد مركب بالصورة القطبية.

a. $-6 + 8i$

أوجد المعامل r والزاوية θ.

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi \qquad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= \tan^{-1} -\frac{8}{6} + \pi \text{ أو حوالي } 2.21 \qquad = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$$

تساوي الصورة القطبية $-6 + 8i$ حوالي $10(\cos 2.21 + i \sin 2.21)$.

b. $4 + \sqrt{3}i$

أوجد المعامل r والزاوية θ.

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} \qquad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4} \qquad = \sqrt{4^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$\approx 0.41 \qquad = \sqrt{19} \text{ أو حوالي } 4.36$$

تساوي الصورة القطبية $4 + \sqrt{3}i$ حوالي $4.36(\cos 0.41 + i \sin 0.41)$.

تمرين موجّه

2A. $9 + 7i$ **2B.** $-2 - 2i$

قراءة في الرياضيات

الصورة القطبية

$r(\cos\theta + i\sin\theta)$ تختصر في كثير من الأحيان في الصورة $r \text{ cis } \theta$. ففي المثال 2a، يمكنك أيضًا التعبير عن $-6 + 8i$ في الصورة $10 \text{ cis } 2.21$، حيث $10 = \sqrt{(-6)^2 + 8^2}$ و $2.21 = \tan^{-1} -\frac{8}{6}$.

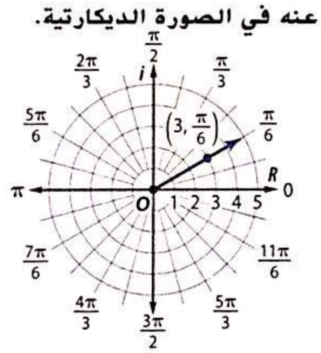
يمكنك استخدام الصورة القطبية للعدد المركب لتمثيله بيانيًا على الشبكة القطبية باستخدام قيم r وθ في صورة الإحداثيات القطبية (r, θ). يمكنك أيضًا أن تأخذ العدد المركب المكتوب في الصورة القطبية وتحويله إلى الصورة الديكارتية بإيجاد القيمة.

المثال 3 تمثيل الصورة القطبية للعدد المركب بيانيًا وتحويلها

مثّل $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ بيانيًا على شبكة قطبية. ثم عبّر عنه في الصورة الديكارتية.

قيمة r تساوي 3. وقيمة θ تساوي $\frac{\pi}{6}$.

عيّن الإحداثيات القطبية $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$.



للتعبير عن العدد في الصورة الديكارتية، أوجد القيم المثلثية وحوّلها لأبسط صورة.

$$3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 3\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

تكون الصورة الديكارتية لـ $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ هي $z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

تمرين موجّه

مثّل كل عدد مركب بيانيًا على الشبكة القطبية. ثم عبّر عنه في الصورة الديكارتية.

3A. $5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ **3B.** $4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

تلميح تقني

تحويلات العدد المركب

يمكنك تحويل العدد المركب في الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية بإدخال التعبير في الصورة القطبية، ثم تحديد ENTER. لتكون في الوضع القطبي، حدد MODE ثم $a + bi$.

```
3(cos(π/6)+isin(
π/6))
2.598076211+1.5i
```

2 نواتج ضرب الأعداد المركبة ونواتج قسمتها وأسسها وجذورها

تساعد الصورة القطبية للعدد المركب بالإضافة إلى قوانين المجموع والفارق لجيب التمام وجيب الزاوية بشكل كبير في ضرب الأعداد المركبة وقسمتها. ويمكن اقتباس قانون ناتج ضرب عددين مركبين في الصورة القطبية من خلال إجراء عملية الضرب.

$$z_1z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2)$$

$$= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + (i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2)]$$

$$= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]$$

$$= r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

المفهوم الأساسي ناتج ضرب الأعداد المركبة وناتج قسمتها وأسسها وجذورها في الصورة القطبية

بافتراض الأعداد المركبة $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$،

قانون ناتج الضرب $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

قانون ناتج القسمة $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$، حيث z_2 و $r_2 \neq 0$

قراءة في الرياضيات
صيغ الجمع *المعاملات هي صيغة الجمع من المعامل.*

لاحظ أنه عند ضرب الأعداد المركبة، تقوم بضرب المعاملات وجمع الزوايا. وعند القسمة، تقوم بقسمة المعاملات وطرح الزوايا.

المثال 4 ناتج ضرب الأعداد المركبة في الصورة القطبية

أوجد $2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) \times 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ في الصورة القطبية. ثم عبّر عن ناتج الضرب في الصورة الديكارتية.

$$2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) \times 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2(4)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

والآن أوجد الصورة الديكارتية لناتج الضرب.

$$8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$= 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

$$= 4\sqrt{3} - 4i$$

الصورة القطبية عبارة عن $8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$. تساوي الصورة الديكارتية لناتج الضرب يكون $4\sqrt{3} - 4i$.

تمرين موجّه

أوجد كل ناتج ضرب بالصورة القطبية. ثم عبّر عن ناتج الضرب في الصورة الديكارتية.

4A. $3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \times 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

4B. $-6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \times 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

كما ذكرنا في بداية هذا الدرس، يمكن استخدام نواتج قسمة الأعداد المركبة لتوضيح العلاقات في الكهرباء.

مثال 5 من الحياة اليومية ناتج قسمة الأعداد المركبة في الصورة القطبية

الكهرباء دائرة كهربائية يبلغ جهدها الكهربائي E مقدار 150 فولت وتبلغ معاوقتها Z مقدار $6 - 3j$ أوم. أوجد التيار I بالأمبير في الدائرة في الصورة الديكارتية. استخدم $E = I \times Z$.

عبّر عن كل عدد بالصورة القطبية.

$$150 = 150(\cos 0 + j \sin 0)$$

$$6 - 3j = 3\sqrt{5}[\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]$$

حل لإيجاد قيمة التيار I في $I \times Z = E$.

$$I \times Z = E$$

$$I = \frac{E}{Z}$$

$$I = \frac{150(\cos 0 + j \sin 0)}{3\sqrt{5}[\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]}$$

$$I = \frac{150}{3\sqrt{5}}\{\cos[0 - (-0.46)] + j \sin[0 - (-0.46)]\}$$

$$I = 10\sqrt{5}(\cos 0.46 + j \sin 0.46)$$

والآن حوّل التيار إلى الصورة الديكارتية.

$$I = 10\sqrt{5}(\cos 0.46 + j \sin 0.46)$$

$$= 10\sqrt{5}(0.90 + 0.44j)$$

$$= 20.12 + 9.84j$$

يساوي التيار حوالي $20.12 + 9.84j$ amps.

تمرين موجّه

5. الكهرباء دائرة كهربائية يبلغ جهدها الكهربائي 120 فولت وتبلغ شدة تيارها $8 + 6j$ amps. أوجد معاوقة الدائرة في الصورة الديكارتية.

مهنة من الحياة اليومية

المهندسون الكهربائيون يصمم المهندسون الكهربائيون ويخترعون التكنولوجيا الجديدة المستخدمة في تصنيع نظام تحديد المواقع العالمي والمولدات العملاقة التي تزود مدنا بأكملها بالطاقة والمحركات التوربينية المستخدمة في الطائرات وأنظمة الرادار والملاحة. ويعمل المهندسون كذلك على تحسين المنتجات السابقة مثل الهواتف الخلوية والسيارات والإنسان الآلي.

قبل حساب أسس الأعداد المركبة وجذورها، قد يساعدك التعبير عن الأعداد المركبة في الصورة القطبية. ويعود الفضل إلى أبراهام دي موافر في اكتشاف النمط المفيد لإيجاد قيمة أسس الأعداد المركبة.

ويمكننا استخدام القانون لناتج ضرب الأعداد المركبة للمساعدة في تخيل النمط الذي اكتشفه دي موافر.

أولاً، أوجد z^2 بأخذ ناتج ضرب $z \times z$.

$$z \times z = r(\cos\theta + i \sin\theta) \times r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

$$z^2 = r^2[\cos(\theta + \theta) + i \sin(\theta + \theta)]$$

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

والآن أوجد z^3 بحساب $z^2 \times z$.

$$z^2 \times z = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \times r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

$$z^3 = r^3[\cos(2\theta + \theta) + i \sin(2\theta + \theta)]$$

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

لاحظ أنه عند حساب هذه الأسس للعدد المركب، تأخذ الأس النوني للمعاملات وضرب الزوايا في n.

يلخص هذا النمط أدناه.

المفهوم الأساسي نظرية دي موافر

إذا كانت الصيغة القطبية لعدد مركب هي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، فللأعداد الصحيحة الموجبة n

$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n$ أو $r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

الربط بتاريخ الرياضيات

أبراهام دي موافر (1667-1754)

عالم رياضيات فرنسي اشتهر بنظريته التي سميت على اسمه وكتابه حول نظرية الاحتمالات *مذهب الفرص*.

ويعرف العالم بكونه أحد روّاد الهندسة التحليلية والاحتمالات.

المثال 6 نظرية دي موافر

أوجد $(4 + 4\sqrt{3}i)^6$، وعبر عنه في الصورة الديكارتية.

أولاً، اكتب $4 + 4\sqrt{3}i$ في الصورة القطبية.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 48} = 8$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} = \tan^{-1}\frac{4\sqrt{3}}{4} = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

الصورة القطبية لـ $4 + 4\sqrt{3}i$ هي $8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

والآن استخدم نظرية دي موافر لإيجاد الأس من الدرجة السادسة.

$$(4 + 4\sqrt{3}i)^6 = \left[8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^6$$

$$= 8^6\left[\cos 6\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin 6\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 262{,}144(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$$

$$= 262{,}144(1 + 0i)$$

$$= 262{,}144$$

إذًا، $(4 + 4\sqrt{3}i)^6 = 262{,}144$.

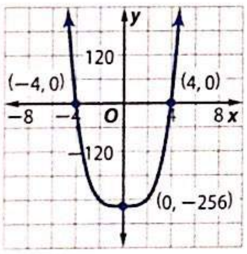
تمرين موجّه

أوجد كل مقدار أسي، وعبر عنه في الصورة الديكارتية.

6A. $(1 + \sqrt{3}i)^4$

6B. $(2\sqrt{3} - 2i)^8$

في نظام الأعداد الحقيقية، $x^4 = 256$ لها حلان وهما 4 و-4. ويوضح التمثيل البياني لـ $y = x^4 - 256$ أنه يوجد صفران حقيقيان عند $x = 4$ و -4. إلا أنه في نظام الأعداد المركبة، يوجد حلان حقيقيان وحلان مركبان.



في الدرس 4-2، تعلمت من خلال النظرية الأساسية للجبر أن كثيرات الحدود من الدرجة n يوجد بها n من الأصفار بالضبط في نظام الأعداد المركبة. وبالتالي، فإن المعادلة $x^4 = 256$، والمعاد كتابتها في الصورة $x^4 - 256 = 0$، لها بالضبط أربعة حلول أو جذور: 4 و-4 و$4i$ و$-4i$. بوجه عام، يكون للأعداد المركبة غير الصفرية p من الجذور p الفريدة. أي أن لكليهما جذرين تربيعيين وثلاثة جذور تكعيبية وأربعة من جذور الدرجة الرابعة وهكذا.

مراجعة المفردات

نظرية الحد الأساسي إن دالة كثيرة الحدود من الدرجة n والتي يكون فيها $n > 0$ بها صفر واحد على الأقل (حقيقي أو تخيلي) في نظام الأعداد المركبة

لإيجاد قيمة جميع الجذور لكثيرة الحدود، يمكننا استخدام نظرية دي موافر للوصول إلى التعبير التالي

المفهوم الأساسي الجذور المختلفة

للعدد الصحيح الموجب p، يكون للعدد المركب $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عدد p فريد من الجذور p. ويمكن إيجاد الجذور من خلال

$$r^{\frac{1}{p}}\left(\cos\frac{\theta + 2n\pi}{p} + i\sin\frac{\theta + 2n\pi}{p}\right)$$

حيث $n = 0, 1, 2, \ldots, p - 1$.

يمكننا استخدام هذا القانون للقيم المختلفة لـ n. ولكننا يمكننا التوقف عندما تكون $n = p - 1$ وعندما n تساوي p أو تزيد عنها، تتكرر الجذور كما هو موضح فيما يلي.

$$\frac{\theta + 2\pi p}{p} = \frac{\theta}{p} + 2\pi$$

المثال 7 الجذور p لعدد مركب

أوجد الجذر من الدرجة الرابعة لـ $-4 - 4i$.

أولاً اكتب $-4 - 4i$ في الصورة القطبية.

$$-4 - 4i = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$\frac{5\pi}{4}$

والآن اكتب تعبيرًا للجذر من الدرجة الرابعة.

$$(4\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4} + 2n\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{4} + 2n\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

افترض أن $n = 0$ و1 و2 و3 بالتسلسل لإيجاد الجذور من الدرجة الرابعة.

$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(0)\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(0)\pi}{2}\right)\right]$$ **افترض أن $n = 0$.**

$$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{5\pi}{16} + i\sin\frac{5\pi}{16}\right) 1.28 + 0.86 = i$$

$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(1)\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(1)\pi}{2}\right)\right]$$ **افترض أن $n = 1$.**

$$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{13\pi}{16} + i\sin\frac{13\pi}{16}\right) \quad -1.28 + 0.86 = i$$

$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(1)\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(2)\pi}{2}\right)\right]$$ **افترض أن $n = 2$**

$$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{21\pi}{16} + i\sin\frac{21\pi}{16}\right) 1.28 - 0.86 - = i$$

$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(1)\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{16} + \frac{(3)\pi}{2}\right)\right]$$ **افترض أن $n = 3$**

$$= \sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{29\pi}{16} + i\sin\frac{29\pi}{16}\right) 0.86 - 1.28 \ = i$$

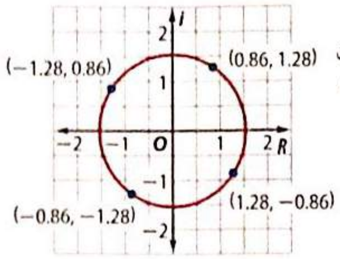
تكون الجذور من الدرجة الرابعة لـ $-4 - 4i$ هي تقريبًا $0.86 + 1.28i$ و$-1.28 + 0.86i$ و$-0.86 - 1.28i$، و $1.28 - 0.86i$.

تمرين موجّه

7A. أوجد الجذور التكعيبية لـ $2 + 2i$.

7B. أوجد الجذور من الدرجة الخامسة لـ $4\sqrt{3} - 4i$.

يمكننا استخلاص ملاحظات حول الجذور المختلفة لعدد ما من خلال التمثيل البياني للجذور على المستوى الإحداثي. وكما هو موضح على اليسار، يقع الجذر من الدرجة الرابعة الموجود في المثال 7 في دائرة. إذا نظرنا إلى الصورة القطبية لكل عدد مركب، فسنجد أن لكل منه نفس المعامل $\sqrt[8]{32}$ والذي يعتبر بمثابة نصف قطر الدائرة. وتكون الجذور على مسافات متساوية حول الدائرة نتيجة للزاوية المختلفة بمقدار $\frac{\pi}{2}$



ونحدث بعض الحالات الخاصة لإيجاد الجذور عند إيجاد الجذور p للعدد 1. عند كتابة 1 في الصورة القطبية $r = 1$. كما ذكرنا في الفقرة السابقة، يكون المعامل للجذور هو نصف قطر الدائرة التي تتشكل من تعيين الجذور على المستوى الإحداثي. ومن ثم، تقع الجذور p للعدد 1 على دائرة الوحدة. ويشار إلى إيجاد الجذور p للعدد 1 بإيجاد **جذور الوحدة p**.

المثال 8 جذور الوحدة pth

أوجد جذور الوحدة من الدرجة الثامنة.

أولاً اكتب 1 في الصورة القطبية.

$$1 = 1 \times (\cos 0 + i \sin 0)$$

والآن اكتب تعبيرًا للجذر من الدرجة الثامنة.

$$1\left(\cos \frac{0 + 2n\pi}{8} + i \sin \frac{0 + 2n\pi}{8}\right)$$
$$= \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4}$$

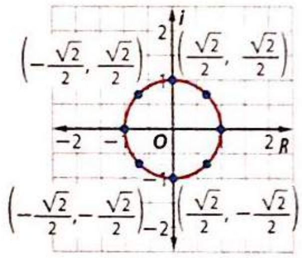
افترض أن $n = 0$ لإيجاد الجذر الأول من 1.

$$n = 0 \qquad \cos \frac{(0)\pi}{4} + i \sin \frac{(0)\pi}{4}$$
$$= \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

لاحظ أن معامل كل عدد مركب يساوي 1. ويتم إيجاد الزوايا من خلال $\frac{n\pi}{4}$ مما يؤدي إلى زيادة θ بمقدار $\frac{\pi}{4}$ لكل جذر متتالٍ. إذًا، يمكننا حساب الجذور المتبقية عن طريق جمع $\frac{\pi}{4}$ لكل θ سابقة.

$$\cos 0 + i \sin 0 = 1$$
$$\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$
$$\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$\cos \pi + i \sin \pi = -1$$
$$\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$
$$\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

الجذور من الدرجة الثامنة للعدد 1 هي $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -i$ كما هو موضح في الشكل 8.5.1.



الشكل 8.5.1

تمرين موجّه

8A. أوجد جذور الوحدة التكعيبية.

7a. أوجد جذور الوحدة من الدرجة السابعة.

نصيحة دراسية

الجذور p لعدد مركب سيكون لكل جذر نفس المعامل $r^{\frac{1}{p}}$. تساوي زاوية الجذر من الدرجة الأولى $\frac{\theta}{p}$ ويتم إيجاد كل جذر متتالٍ من خلال تكرار جمع $\frac{2\pi}{p}$ على الزاوية.

تمارين

مثل كل عدد بيانيًا في المستوى المركب وأوجد قيمته المطلقة. (مثال 1)

1. $z = 4 + 4i$
2. $z = -3 + i$
3. $z = -4 - 6i$
4. $z = 2 - 5i$
5. $z = 3 + 4i$
6. $z = -7 + 5i$
7. $z = -3 - 7i$
8. $z = 8 - 2i$

9. **المتجهات** تُمثل القوة المبذولة على أحد الأجسام بالعدد المركّب $z = 10 + 15i$. حيث تُقاس المركّبات بوحدة النيوتن (N). (مثال 1)
   a. مثّل z كمتجه في المستوى المركب.
   b. أوجد مقدار المتجه وزاوية اتّجاهه.

عبّر عن كل عدد مركب بالصورة القطبية. (مثال 2)

10. $4 + 4i$
11. $-2 + i$
12. $4 - \sqrt{2}i$
13. $2 - 2i$
14. $4 + 5i$
15. $-2 + 4i$
16. $-1 - \sqrt{3}i$
17. $3 + 3i$

مثّل كل عدد مركب بيانيًا على الشبكة القطبية. ثم عبّر عنه في الصورة الديكارتية. (مثال 3)

18. $10(\cos 6 + i \sin 6)$
19. $2(\cos 3 + i \sin 3)$
20. $4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$
21. $3\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$
22. $\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right)$
23. $2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$
24. $-3(\cos 180° + i \sin 180°)$
25. $\frac{3}{2}(\cos 360° + i \sin 360°)$

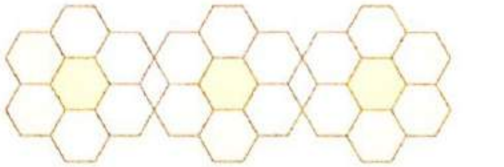
أوجد كل مقدار أسي أو ناتج قسمة وعبر عنه في الصورة الديكارتية. (المثالان 4، 5)

26. $3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \times 4\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$
27. $5(\cos 135° + i \sin 135°) \times 2(\cos 45° + i \sin 45°)$
28. $3\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \div \frac{1}{2}(\cos \pi + i \sin \pi)$
29. $2(\cos 90° + i \sin 90°) \times 2(\cos 270° + i \sin 270°)$
30. $3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \div 4\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$
31. $4\left(\cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$
32. $\frac{1}{2}(\cos 60° + i \sin 60°) \times 6(\cos 150° + i \sin 150°)$
33. $6\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$
34. $5(\cos 90° + i \sin 1800°) \times 2(\cos 270° + i\ \mathrm{si}13570°)$
35. $\frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \div 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$

أوجد كل أس، وعبر عنه في الصورة الديكارتية. (المثال 6)

36. $(2 + 2\sqrt{3}i)^6$
37. $(12i - 5)^3$
38. $\left[4\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)\right]^4$
39. $(\sqrt{3} - i)^3$
40. $(3 - 5i)^4$
41. $(2 + 4i)^4$
42. $(3 - 6i)^4$
43. $(2 + 3i)^2$
44. $\left[3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)\right]^3$
45. $\left[2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right]^4$

46. **التصميم** تعمل سهي لدى وكالة دعاية، وترغب في دمج تصميم يتكون من أشكال سداسية منتظمة ليكون العمل الفني لأحد مشاريعها المقترحة. وتستطيع سهي تحديد موقع رؤوس لأحد الأشكال السداسية المنتظمة المركزية بالتمثيل البياني لحلول $x^6 - 1 = 0$ في المستوى المركب. أوجد رؤوس هذا الشكل السداسي. (المثال 7)



أوجد جميع الجذور p المختلفة للعدد المركب. (المثالان 7، 8)

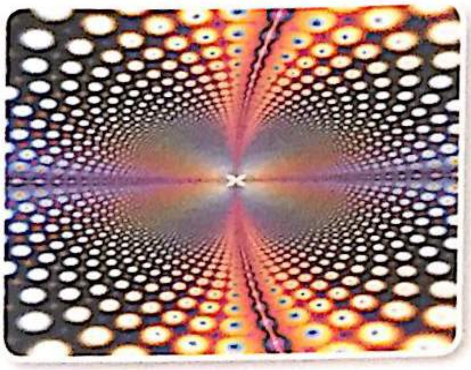
47. الجذر من الدرجة السادسة لـ i
48. الجذر من الدرجة الخامسة لـ $-i$
49. الجذر من الدرجة الرابعة لـ $4\sqrt{3} - 4i$
50. الجذر التكعيبي لـ $-117 + 44i$
51. الجذر من الدرجة الخامسة لـ $1 + 11\sqrt{2}i$
52. الجذر التربيعي لـ $-3 - 4i$
53. أوجد جذور الوحدة التربيعية
54. أوجد جذور الوحدة من الدرجة الرابعة

55. **الكهرباء** تبلغ المعاوقة في جزء من الدائرة لدائرة كهربائية موصلة على التوالي $5(\cos 0.9 + j \sin 0.9)$ أوم. وفي الجزء الثاني من الدائرة الكهربائية، تبلغ المعاوقة $8(\cos 0.4 + j \sin 0.4)$ أوم.
   a. حوّل كل تعبير إلى الصورة الديكارتية.
   b. اجمع إجاباتك التي توصلت إليها في الجزء a لإيجاد إجمالي نسبة المعاوقة في الدائرة.
   c. حوّل إجمالي المعاوقة إلى الصورة القطبية ثانية.

أوجد كل ناتج ضرب مما يلي. ثم كرر العملية بضرب الصور القطبية لكل زوج من الأعداد المركبة باستخدام قانون ناتج الضرب.

56. $(1 - i)(4 + 4i)$
57. $(3 + i)(3 - i)$
58. $(4 + i)(3 - i)$
59. $(-6 + 5i)(2 - 3i)$
60. $(\sqrt{2} + 2i)(1 + i)$
61. $(3 - 2i)(1 + \sqrt{3}i)$

62. **الأنماط الهندسية المتكررة** يعتبر *النمط الهندسي* المتكرر هي أشكال هندسية تتكون من نمط متكرر بشكل لا نهائي على مقياس متسلسل أصغر كما هو موضح في الأسفل.



في هذه المسألة، ستنشئ نمطًا هندسيًا متكررًا من خلال تكرارية $f(z) = z^2$. افترض أن $z_0 = 0.8 + 0.5i$.

a. احسب z_1 وz_2 وz_3 وz_4 وz_5 وz_6 وz_7 حيث $z_1 = f(z_0)$ و $z_2 = f(z_1)$ وهكذا.

b. مثّل كلاً من الأعداد على المستوى المركب.

c. توقع مكان z_{100}. اشرح.

63. **التحويلات** يوجد بعض عمليات الأعداد المركبة والتي تقابل التحويلات الهندسية في المستوى المركب. اذكر التحويل المطبق على النقطة z للحصول على نقطة w في المستوى المركب لكل من العمليات التالية.

a. $w = z + (3 - 4i)$

b. w هو المرافق المركب لـ z.

c. $w = i \times z$

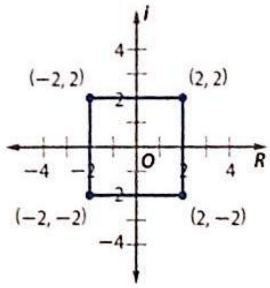
d. $w = 0.25z$

أوجد z والجذور p للنقطة z بافتراض كل مما يلي.

64. $p = 3$. يساوي أحد الجذور التكعيبية لـ $\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

65. $p = 4$. يساوي أحد الجذور من الدرجة الرابعة لـ $-1 - i$

66. **التمثيلات البيانية** تمثيل كل رأس بعدد مركب في الصورة القطبية. يوسّع المبرمج ويقوم بتدوير المربع أدناه بمقدار $45°$ عكس اتجاه عقارب الساعة بحيث تقع الإحداثيات الجديدة في نقطة منتصف أضلاع المربع الأصلي.



a. ما العدد المركب الذي ينبغي على المبرمج ضربه في كل عدد لينتج هذا التحويل؟

b. ماذا سيحدث إذا ضربت الأعداد الممثلة للرؤوس الأصلية في مربع إجابتك التي حصلت عليها في الجزء a؟

استخدم قانون الجذور المختلفة لإيجاد جميع الحلول لكل معادلة. عبّر عن الحلول في الصورة الديكارتية.

67. $x^3 = i$

68. $x^3 + 3 = 128$

69. $x^4 = 81i$

70. $x^5 - 1 = 1023$

71. $x^3 + 1 = i$

72. $x^4 - 2 + i = -1$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

73. **تحليل الخطأ** تعمل كل من علياء وعبير على إيجاد قيمة وتستخدم علياء نظرية دي موافر وتحصل على النتيجة $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^5$ وتخبرها عبير أنها أكملت جزءًا واحدًا فقط من المسألة. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

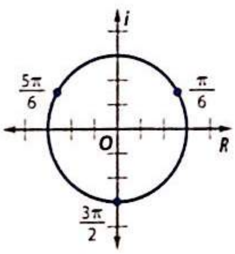
74. **الاستنتاج** افترض أن $z = a + bi$ هو الجذور من الدرجة 29 للعدد 1.

a. ما القيمة العظمى لـ a؟

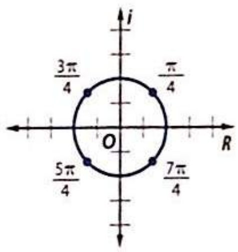
b. ما القيمة العظمى لـ b؟

تحدٍ أوجد الجذور الموضحة على كل تمثيل بياني واكتبها في الصورة القطبية. ثم حدد العدد المركب للجذور المذكورة.

75.



76.



77. **البرهان** بافتراض أن $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$، حيث $r_2 \neq 0$. برهن أن $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$

التبرير حدد إذا ما كانت كل عبارة صحيحة *أحيانًا* أم *دائمًا* أو *غير صحيحة على الإطلاق*. اشرح استنتاجك.

78. تقع الجذور p لعدد مركب z على مسافات متساوية حول الدائرة التي يقع مركزها عند نقطة الأصل ويبلغ نصف قطره $r^{\frac{1}{p}}$.

79. إن المرافق المركب لـ $z = a + bi$ هو $\bar{z} = a - bi$. لأي z يكون كل من $z, z + \bar{z}$ أعدادًا حقيقية.

80. **مسألة غير محددة الإجابة** أوجد عددين مركبين $a + bi$ بحيث يكون $a \neq 0$ و $b \neq 0$ بالقيمة المطلقة $\sqrt{17}$.

81. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في أن مجموع الأجزاء التخيلية لعدد p مختلف من الجذور p لأي عدد حقيقي موجب يجب أن يكون صفرًا. (إرشاد: الجذور هي رؤوس مضلع منتظم.)

مراجعة شاملة

اكتب كل معادلة قطبية في الصورة الديكارتية.

82. $r = \dfrac{15}{1 + 4\cos\theta}$

83. $r = \dfrac{14}{2\cos\theta + 2}$

84. $r = \dfrac{-6}{\sin\theta - 2}$

حدد التمثيل البياني لكل معادلة الديكارتية. ثم اكتب المعادلة في الصورة القطبية. دعّم إجابتك بتمثيل الصورة القطبية للمعادلة بيانيًا.

85. $(x - 3)^2 + y^2 = 9$

86. $x^2 - y^2 = 1$

87. $x^2 + y^2 = 2y$

مثل بيانيًا القطع المخروط الممثل بكل معادلة.

88. $y = x^2 + 3x + 1$

89. $y^2 - 2x^2 - 16 = 0$

90. $x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 33 = 0$

أوجد مركز وبؤرتا ورأسا كل قطع ناقص.

91. $\dfrac{(x + 8)^2}{9} + \dfrac{(y - 7)^2}{81} = 1$

92. $25x^2 + 4y^2 + 150x + 24y = -161$

93. $4x^2 + 9y^2 - 56x + 108y = -484$

حُـلّ كل نظام من المعادلات باستخدام حذف جاوس-جوردان.

94. $x + y + z = 12$
$6x - 2y - z = 16$
$3x + 4y + 2z = 28$

95. $9g + 7h = -30$
$8h + 5j = 11$
$-3g + 10j = 73$

96. $2k - n = 2$
$3p = 21$
$4k + p = 19$

97. **التعداد السكاني** في بداية عام 2008، كان تعداد سكان العالم نحو 6.7 مليارات. إذا كان تعداد سكان العالم ينمو باستمرار بمعدل 2%، فيمكن توقع تعداد السكان المستقبلي P، بالمليارات، من خلال $P = 6.5e^{0.02t}$، حيث تمثل t الزمن بالأعوام منذ 2008.

a. وفقًا لهذا النموذج، كم سيكون تعداد سكان العالم في عام 2018؟

b. قدّر بعض العلماء أن موارد الغذاء العالمية يمكنها دعم تعداد سكان من 18 مليارًا بحد علوي. وفقًا لهذا النموذج، كم عدد الأعوام التي ستستطيع موارد الغذاء العالمية فيها دعم الاتجاه في نمو تعداد سكان العالم؟

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

98. **SAT/ACT** إن التمثيل البياني على المستوى xy للدالة التربيعية g هو قطع مكافئ يقع رأسه عند $(3, -2)$. إذا كان $g(0) = 0$، فأي مما يلي يجب أن يساوي 0؟

A $g(2)$

B $g(3)$

C $g(4)$

D $g(6)$

E $g(7)$

99. أي مما يلي يعبر عن العدد المركب $20 - 21i$ في الصورة القطبية؟

F $29(\cos 5.47 + i \sin 5.47)$

G $29(\cos 5.52 + i \sin 5.52)$

H $32(\cos 5.47 + i \sin 5.47)$

J $32(\cos 5.52 + i \sin 5.52)$

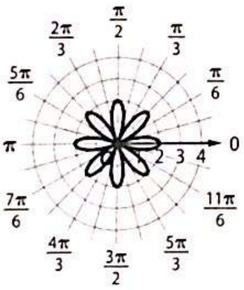
100. **إجابة حرة** راجع التمثيل البياني الموجود على اليسار.

a. اذكر معادلة محتملة للدالة.

b. اذكر تماثلات التمثيل البياني.

c. اذكر أصفار الدالة في المجال $0 \le \theta \le 2\pi$.

d. ما القيمة الصغرى لـ r في المجال $0 \le \theta \le 2\pi$؟



8 الدليل الدراسي والمراجعة

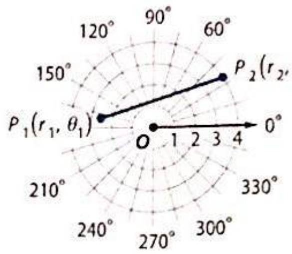
ملخص الوحدة

المفاهيم الأساسية

الإحداثيات القطبية (الدرس 8-1)

- في النظام الإحداثي القطبي، يتم تحديد موقع النقطة (r, θ) باستخدام المسافة الموجهة r والزاوية الموجهة θ.
- المسافة بين $P_1(r_1, \theta_1)$ و $P_2(r_2, \theta_2)$ في المستوى القطبي

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}.$$



التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية (الدرس 8-2)

- دائرة: $r = a \cos \theta$ أو $r = a \sin \theta$
- منحنى قلبي الشكل: $r = a \pm b \cos \theta$ أو $r = a \pm b \sin \theta,\ a > 0,\ b > 0$
- الوردة: $r = a \cos n\theta$ أو $r = a \sin n\theta,\ n \geq 2,\ n \in \mathbb{Z}$
- منحنى ذو عروتين: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ أو $r^2 = a^2 \sin 2\theta$
- حلزون أرشميدس: $r = a\theta + b,\ \theta \geq 0$

الصور القطبية والديكارتية للمعادلات (الدرس 8-3)

- النقطة $P(r, \theta)$ لها الإحداثيات الديكارتية $(r \cos \theta, r \sin \theta)$.
- لتحويل النقطة $P(x, y)$ من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية، استخدم المعادلة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$، حيث $x > 0$ أو $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} + \pi$، حيث $x < 0$.

الصور القطبية للقطوع المخروطية (الدرس 8-4)

- تكون المعادلة القطبية للقطع المخروطي بالصورة

$r = \dfrac{ed}{1 \pm e \sin \theta}$ أو $r = \dfrac{ed}{1 \pm e \cos \theta}$، حسب موقع واتجاه الدليل.

الأعداد المركبة ونظرية دي موافر (الدرس 8-5)

- الصيغة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $a + bi$ هي $r(\cos \theta + i \sin \theta)$.
- صيغة ناتج ضرب العددين المركبين z_1 وz_2 هي $z_1z_2 = r_1r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$.
- صيغة ناتج قسمة العددين المركبين z_1 وz_2 هي $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$، حيث $z_2 \neq 0$ و $r_2 \neq 0$.
- تنص نظرية دي موافر على أنه إذا كانت الصورة القطبية لعدد مركب هي $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$، إذًا $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ للأعداد الصحيحة الموجبة n.

المفردات الأساسية

- قيمة مطلقة لعدد مركب absolute value of a complex number
- مستوى أرجاند Argand plane
- فرضية Argand plane
- قلبي الشكل cardioid
- مستوى مركب complex plane
- محور تخيلي imaginary axis
- منحنى ذو عروتين lemniscate
- منحنى قلبي الشكل limaçon
- معامل modulus
- المحور القطبي polar axis
- نظام إحداثي قطبي polar coordinate system
- الإحداثيات القطبية polar coordinates
- معادلة قطبية polar equation
- صورة قطبية polar form
- تمثيل بياني قطبي polar graph
- قطب pole
- جذور الوحدة pth roots of unity
- محور حقيقي real axis
- وردة rose
- حلزون أرشميدس spiral of Archimedes
- صيغة مثلثية trigonometric form

مراجعة المفردات

اختر المصطلح الصحيح من قائمة المفردات الواردة أعلاه لإكمال كل جملة.

1. ________ هي مجموعة كل النقاط التي لها الإحداثيات (r, θ) والتي تحقق معادلة قطبية مُعطاة.

2. المستوى الذي له محور للمركبة الحقيقية ومحور للمركبة التخيلية هو ________

3. يتم تحديد موقع نقطة في ________ باستخدام المسافة الموجهة من نقطة ثابتة والزاوية من محور ثابت.

4. نوع خاص من المنحنى على شكل قلب معادلته بالصورة $r = a + b \cos \theta$ حيث $a = b$ يُسمى ________

5. ________ هي الزاوية θ لعدد مركب مكتوب بالصورة $r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

6. نقطة أصل نظام إحداثي قطبي تُسمى ________

7. يُطلق على القيمة المطلقة لعدد مركب أيضًا ________

8. ________ اسم آخر للمستوى المركب.

9. التمثيل البياني لمعادلة قطبية بالصورة $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ أو $r^2 = a^2 \sin 2\theta$ يُسمى ________

10. ________ هو شعاع ابتداء من القطب، وهو في العادة أفقي وموجه لليمين.

مراجعة درس بدرس

8-1 الإحداثيات القطبية

مثّل كل نقطة بيانيًا على شبكة قطبية.

11. $W(-0.5, 210°)$
12. $X\left(1.5, \frac{7\pi}{4}\right)$
13. $Y(4, -120°)$
14. $Z\left(-3, \frac{5\pi}{6}\right)$

مثّل كل معادلة قطبية بيانيًا.

15. $\theta = -60°$
16. $r = \frac{9}{2}$
17. $r = 7$
18. $\theta = \frac{11\pi}{6}$

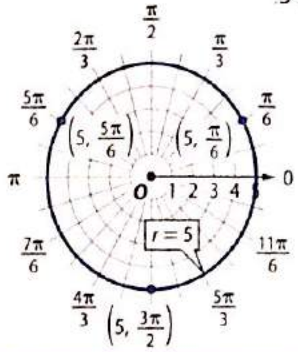
أوجد المسافة بين كل زوجين من النقاط.

19. $\left(5, \frac{\pi}{2}\right), \left(2, -\frac{7\pi}{6}\right)$
20. $(-3, 60°), (4, 240°)$
21. $(-1, -45°), (6, 270°)$
22. $\left(7, \frac{5\pi}{6}\right), \left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$

مثال 1

مثّل بيانيًا $r = 5$.

حلول $r = 5$ هما الزوجان المرتبان بالصورة $(5, \theta)$ حيث θ أي عدد حقيقي. يتكون التمثيل البياني من جميع النقاط التي تبعد 5 وحدات عن القطب. بحيث يكون التمثيل البياني دائرة مركزها عند القطب ونصف قطرها 5.



8-2 التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية

استخدم التماثل والأصفار وقيم r العظمى لتمثيل كل دالة بيانيًا.

23. $r = \sin 3\theta$
24. $r = 2 \cos \theta$
25. $r = 5 \cos 2\theta$
26. $r = 4 \sin 4\theta$
27. $r = 2 + 2 \cos \theta$
28. $r = 1.5\theta, \theta \geq 0$

استخدم التماثل لتمثيل كل معادلة بيانيًا.

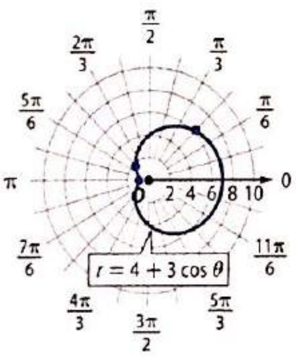
29. $r = 2 - \sin \theta$
30. $r = 1 + 5 \cos \theta$
31. $r = 3 - 2 \cos \theta$
32. $r = 3.5 + 4\text{in}\ \theta$
33. $r = -3 \sin \theta$
34. $r = -5 + 3 \cos \theta$

مثال 2

استخدم التماثل لتمثيل التالي بيانيًا $r = 4 + 3 \cos \theta$.

التعويض عن (r, θ) باستخدام $(r, -\theta)$ ينتج عنه $r = 4 + 3 \cos(-\theta)$. وأبسط صورة هي $r = 4 + 3 \cos \theta$ لأن جيب التمام زوجي. المعادلات متكافئة. إذًا التمثيل البياني لهذه المعادلة متماثل على المحور القطبي. ولذلك، يمكنك عمل جدول قيم لإيجاد قيم r المتناظرة مع θ في الفترة $[0, \pi]$.

θ	r
0	7
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{8 + 3\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{8 - 3\sqrt{2}}{2}$
π	1



بتحديد موضع هذه النقاط واستخدام التماثل على المحور القطبي، تحصل على التمثيل البياني الموضح.

8-3 الصور القطبية والديكارتية للمعادلات

أوجد زوجين من الإحداثيات القطبية لكل نقطة من خلال الإحداثيات الديكارتية المعطاة إذا كان $0 \leq \theta \leq 2\pi$. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

35. $(-1, 5)$

36. $(3, 7)$

37. $(2a, 0),\ a > 0$

38. $(4b, -6b),\ b > 0$

اكتب كل معادلة في الصورة الديكارتية ثم حدد تمثيلها البياني. ادعم إجابتك بتمثيل الصورة القطبية للمعادلة بيانيًا.

39. $r = 5$

40. $r = -4 \sin \theta$

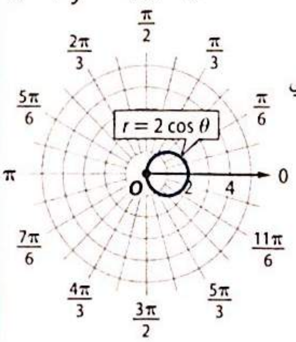
41. $r = 6 \sec \theta$

42. $r = \frac{1}{3} \csc \theta$

مثال 3

اكتب $r = 2\cos\theta$ في الصورة الديكارتية ثم حدد تمثيلها البياني. ادعم إجابتك بتمثيل الصورة القطبية للمعادلة بيانيًا.

$$r = 2\cos\theta$$
$$r^2 = 2r\cos\theta$$
$$x^2 + y^2 = 2x$$
$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$



$(x - 1)^2 + y^2 = 1$ في الصورة القياسية. يمكنك تحديد التمثيل البياني لهذه المعادلة كدائرة مركزها عند $(1, 0)$ ونصف قطرها 1. كما يدعم ذلك التمثيل البياني لـ $r = 2\cos\theta$.

8-4 الصور القطبية للقطوع المخروطية

حدد الاختلاف المركزي ونوع المخروط ومعادلة الدليل لكل معادلة قطبية.

43. $r = \frac{3.5}{1 + \sin\theta}$

44. $r = \frac{1.2}{1 + 0.3\cos\theta}$

45. $r = \frac{14}{1 - 2\sin\theta}$

46. $r = \frac{6}{1 - \cos\theta}$

اكتب مع التمثيل البياني معادلة قطبية ودليلاً لمخروط بالخصائص المعطاة.

47. $e = 0.5$؛ الرأسان عند $(0, -2)$ و$(0, 6)$

48. $e = 1.5$؛ الدليل: $x = 5$

اكتب كل معادلة قطبية بالصورة الديكارتية.

49. $r = \frac{1.6}{1 - 0.2\sin\theta}$

50. $r = \frac{5}{1 + \cos\theta}$

مثال 4

حدد الاختلاف المركزي ونوع المخروط ومعادلة الدليل لـ $r = \frac{7}{3.5 - 3.5\cos\theta}$.

اكتب المعادلة بالصورة القياسية. $r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$.

$$r = \frac{7}{3.5 - 3.5\cos\theta}$$

$$r = \frac{3.5(2)}{3.5(1 - \cos\theta)}$$

$$r = \frac{2}{1 - \cos\theta}$$

في هذه الصورة، تدرك من المقام أن $e = 1$. إذًا المخروط قطع مكافئ. بالنسبة إلى المعادلات القطبية بهذه الصورة، معادلة الدليل هي $x = -d$. من البسط، نعلم أن $ed = 1$. إذًا، $d = 2 \div 2 = 1$. إذًا، معادلة الدليل هي $x = -2$.

مثّل كل عدد في المستوى المركب بيانيًا، وأوجد قيمته المطلقة.

51. $z = 3 - i$
52. $z = 4i$
53. $z = -4 + 2i$
54. $z = 6 - 3i$

عبّر عن كل عدد مركب بالصورة القطبية.

55. $3 + \sqrt{2}i$
56. $-5 + 8i$
57. $-4 - \sqrt{3}i$
58. $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

مثّل كل عدد مركب بيانيًا على شبكة قطبية. ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

59. $z = 3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$
60. $z = 5\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$
61. $z = -2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$
62. $z = 4\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$

أوجد كل ناتج ضرب أو ناتج قسمة وعبر عنه بالصورة الديكارتية.

63. $-2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right) \times -4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$
64. $8(\cos 225° + i \sin 225°) \times \frac{1}{2}(\cos 120° + i \sin 120°)$
65. $5\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \div \frac{1}{3}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$
66. $6(\cos 210° + i \sin 210°) \div 3(\cos 150° + i \sin 150°)$

أوجد كل أس، وعبر عنه بالصورة الديكارتية.

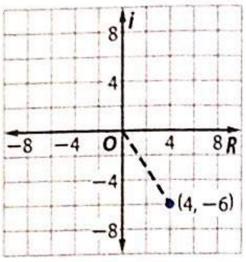
67. $(4 - i)^5$
68. $(\sqrt{2} + 3i)^4$

أوجد جميع جذور p المختلفة للعدد المركب.

69. الجذور التكعيبية لـ $6 - 4i$
70. جذور الدرجة الرابعة لـ $1 + i$

مثال 5

مثل بيانيًا $4 - 6i$ في المستوى المركب وعبر عنه بالصورة القطبية.



أوجد المعامل.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$= \sqrt{4^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{13}$$

أوجد الفرضية.

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$
$$= \tan^{-1}\left(-\frac{6}{4}\right)$$
$$= -0.98$$

الصورة القطبية لـ $4 - 6i$ هي تقريبًا $2\sqrt{13}\,[\cos(-0.98) + i \sin(-0.98)]$.

مثال 6

أوجد $-3\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \times 5\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$ بالصورة القطبية.

ثم عبّر عن ناتج الضرب بالصورة الديكارتية.

$$-3\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \times 5\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$$
$$= (-3 \times 5)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right)\right]$$
$$= -15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$$

والآن أوجد الصورة الديكارتية لناتج الضرب.

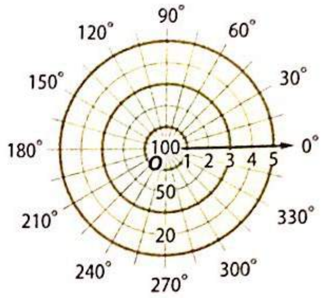
$$-15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$$
$$= -15[-0.26 + i(-0.97)$$
$$= 3.9 + 14.5i$$

الصورة القطبية لناتج الضرب هي $-15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$

الصورة الديكارتية لناتج الضرب هي $3.9 + 14.5i$.

التطبيقات وحل المسائل

71. الألعاب تتكون لعبة صالة ألعاب من دحرجة كرة لأعلى منحدر على هدف. تحدد منطقة سقوط الكرة عدد النقاط المكتسبة. يوضح النموذج قيم النقاط لكل منطقة. (الدرس 8-1)



a. إذا دحرج اللاعب الكرة في أحد الأدوار إلى النقطة $(3.5, 165°)$، فكم عدد النقاط التي سيحصل عليها؟

b. اذكر موقعين محتملين يحصل منهما اللاعب على 50 نقطة.

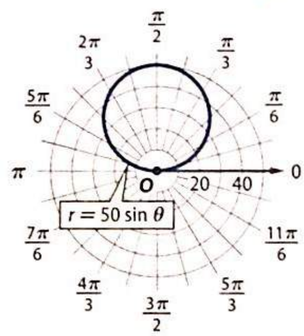
72. المناظر الطبيعية تستخدم إحدى شركات المناظر الطبيعية رشاش أعشاب يمكن تعديله ويمكنه الدوران بزاوية $360°$ وتغطية منطقة دائرية نصف قطرها 20 متراً. (الدرس 8-1)

a. مثل بيانياً أبعاد المنطقة التي يمكن للرشاش تغطيتها على شبكة قطبية إذا تم ضبط الرشاش على الدوران بزاوية $360°$.

b. أوجد مساحة المنطقة التي يمكن للرشاش تغطيتها إذا تم ضبط الدوران على $-30° \le \theta \le 210°$.

73. الأحياء يمكن تمثيل نمط صدفة حلزون باستخدام $r = \frac{1}{3}\theta + \frac{1}{2}$، $\theta \ge 0$. حدد مع التمثيل البياني المنحنى الكلاسيكي الذي يمثل هذا النمط. (الدرس 8-2)

74. الأراجيح يمكن تمثيل مسار عجلة دوارة بواسطة $r = 50 \sin \theta$. حيث r بالمتر. (الدرس 8-3)



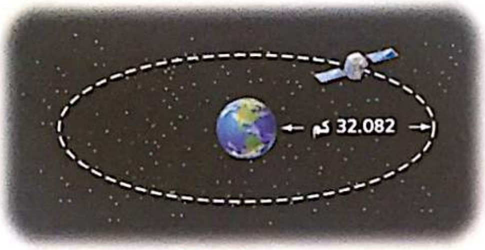
a. ما الإحداثيات القطبية لراكب يتواجد عند $\theta = \frac{\pi}{12}$؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

b. ما الإحداثيات الديكارتية لموقع الراكب؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

c. كم يرتفع الراكب عن الأرض إذا كان المحور القطبي يمثل الأرض؟

75. تحديد الاتجاه يتطلب تحديد الاتجاه من المشاركين شق طريقهم عبر منطقة باستخدام خريطة للتضاريس. ينطلق أحد المشاركين في تحديد الاتجاه من نقطة المراقبة A ويسير لمسافة 5000 متر بزاوية $35°$ تم قياسها باتجاه عقارب الساعة من اتجاه الشرق. وينطلق مشارك آخر في تحديد الاتجاه من نقطة المراقبة A ويسير لمسافة 3000 متر ثم 2000 متر باتجاه الشمال. بالتقريب لأقرب متر، كم يبعد المشاركان عن بعضهما؟ (الدرس 8-3)

76. القمر الصناعي الاختلاف المركزي لمدار قمر صناعي حول الأرض هو 0.05. والمسافة من رأس المسار إلى مركز الأرض هي 32,082 كيلومتراً. اكتب معادلة قطبية يمكن استخدامها لتمثيل مسار القمر الصناعي إذا كانت الأرض تقع عند بؤرته الأقرب إلى الرأس المعطى. (الدرس 8-4)

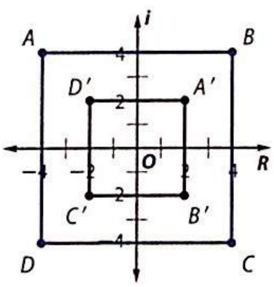


77. الكهرباء تم تصميم معظم الدوائر في أوروبا لاستيعاب 220 فولت. بالنسبة إلى الجزأين a وb. استخدم $E = I \times Z$، حيث يُقاس الجهد الكهربي E بالفولت، والمقاومة Z بالأوم، وشدة التيار I بالأمبير. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 8-5)

a. إذا كانت شدة تيار الدائرة $2 + 5j$ أمبير، فما المقاومة؟

b. إذا كانت مقاومة الدائرة $1 - 3j$ أوم، فما التيار؟

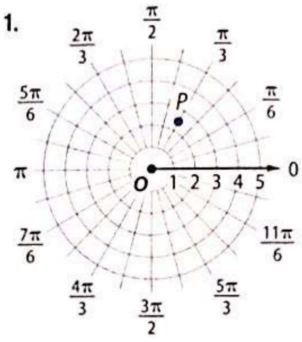
78. رسومات الحاسوب يمكن تنفيذ التحويل الهندسي للأشكال باستخدام الأعداد المركبة. إذا بدأ المبرمج بالمربع $ABCD$، كما هو موضح أدناه. فيمكن تمثيل كل رأس بعدد مركب بالصورة القطبية. وحينها يمكن استخدام الضرب لتدوير المربع وتغيير أبعاده لإنتاج المربع $A'B'C'D'$. ما العدد المركب الذي ينبغي على المبرمج ضربه في كل عدد لينتج هذا التحويل؟ (الدرس 8-5)



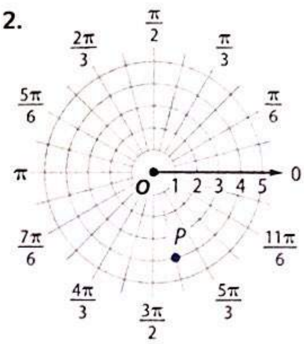
8 تدريب على الاختبار المعياري

أوجد أربعة أزواج مختلفة من الإحداثيات القطبية التي تعين النقطة P إذا كان $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

1.



2.



مـثّـل كل معادلة قطبية بيانيًا.

3. $\theta = 30°$

4. $r = 1$

5. $r = 2.5$

6. $\theta = \frac{5\pi}{3}$

7. $r = \frac{2}{3} \sin \theta$

8. $r = -\frac{1}{2} \sec \theta$

9. $r = -4 \csc \theta$

10. $r = 2 \cos \theta$

حدد كل منحنى كلاسيكي ومثله بيانيًا.

11. $r = 1.5 + 1.5 \cos \theta$

12. $r^2 = 6.25 \sin 2\theta$

13. **الرادار** يتتبع أحد مراقبي الحركة الجوية طائرة موقعها الحالي $(66, 115°)$. قيمة r بالكيلومترات.

a. ما الإحداثيات الديكارتية للطائرة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة من الكيلومتر.

b. إذا كانت هناك طائرة أخرى عند النقطة $(-75, 50)$، فما الإحداثيات القطبية للطائرة إذا علمت أن $r > 0$ و $0 \le \theta \le 360°$؟ قرّب إلى أقرب كيلومتر وأقرب جزء من عشرة من الدرجة إذا لزم الأمر.

c. ما المسافة بين الطائرتين؟ قرّب إلى أقرب كيلومتر.

حدد التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية. ثم اكتب المعادلة بالصورة القطبية. ادعم إجابتك بتمثيل الصورة القطبية للمعادلة بيانيًا.

14. $(x - 7)^2 + y^2 = 49$

15. $y = 3x^2$

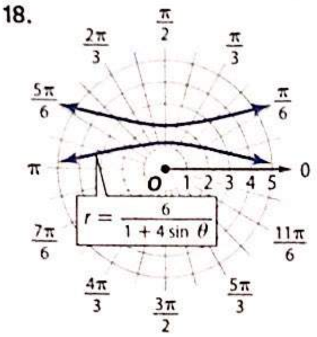
حدد الاختلاف المركزي ونوع المخروط ومعادلة الدليل لكل معادلة قطبية.

16. $r = \frac{2}{1 - 0.4 \sin \theta}$

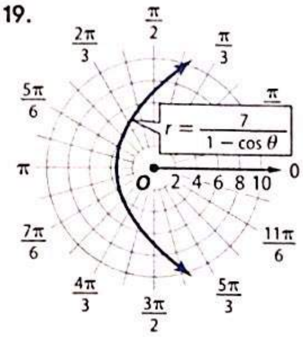
17. $r = \frac{6}{2 \cos \theta + 1}$

اكتب معادلة كل تمثيل بياني قطبي بالصورة الديكارتية.

18.



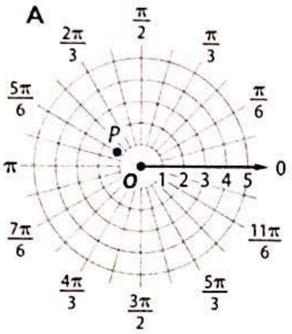
19.



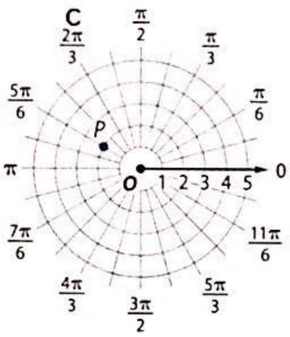
20. **الكهرباء** دائرة كهربائية يبلغ جهدها الكهربائي E 135 فولت وشدة تيارها I $3 - 4j$ أمبير. أوجد المقاومة Z للدائرة بالأوم بالصورة الديكارتية. استخدم المعادلة $E = I \times Z$.

21. **الاختيار من متعدد** حدد التمثيل البياني للنقطة P ذات الإحداثيات المركبة $(-\sqrt{3}, -1)$ على المستوى الإحداثي القطبي.

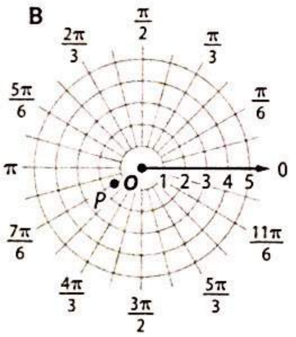
A



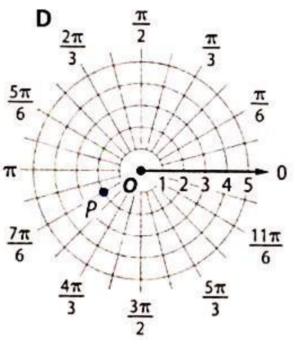
C



B



D



أوجد كل مقدار أسي، وعبر عنه بالصورة الديكارتية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

22. $(-1 + 4i)^3$

23. $(-7 - 3i)^5$

24. $(6 + i)^4$

25. $(2 - 5i)^6$

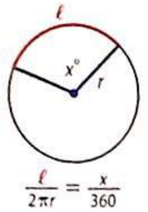
تهيئة 8

الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم

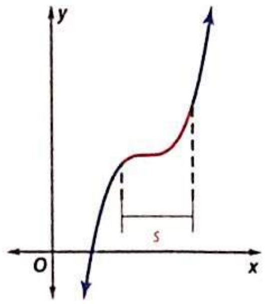
طول القوس

:: الهدف

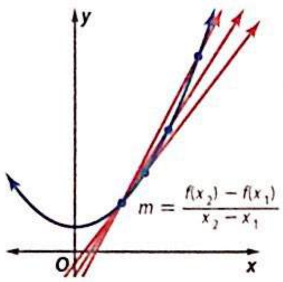
- تقريب طول قوس المنحنى.



بمكنك إيجاد طول القطعة المستقيمة باستخدام صيغة المسافة. بمكنك إيجاد طول أي قوس باستخدام الأجزاء. في حساب التفاضل والتكامل، سنحتاج إلى حساب عدد الأطوال التي لم يتم تمثيلها بالقطع المستقيمة أو أقسام الدائرة.

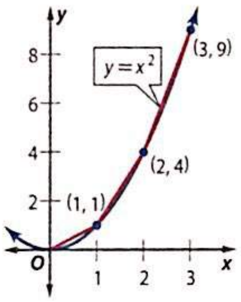


يركز حساب *التكامل* على المساحات والأحجام والأطوال. ويمكن استخدامه لإيجاد طول منحنى ليس له معادلة قياسية، مثل منحنى محدد بدالة تربيعية أو تكعيبية أو قطعية. وسوف نحتاج إلى *مجموع ريمان والتكامل المحدد*. مفهومان سوف نتعرف عليهما في الوحدات التالية، لحساب الطول الدقيق للمنحنى أو *طول القوس*، الذي يرمز إليه بالحرف s.



في هذا الدرس، سوف نقوم بتقريب طول قوس المنحنى باستخدام عملية شبيهة بالطريقة التي استخدمنها لتقريب معدل التغير عند نقطة ما. تذكر أنه في الوحدة 1 قمت بحساب ميل الخط القاطع لتقريب معدلات تغير التمثيلات البيانية عند نقطة محددة. وقد أدى تقليل المسافة بين نقطتين على الخط القاطع إلى زيادة دقة التقريب، مثلما هو موضح في التمثيل البياني على اليسار.

النشاط 1 تقريب طول القوس



قرّب طول قوس التمثيل البياني $y = x^2$ عندما تكون $0 \le x \le 3$.

الخطوة 1 مثّل بيانيًا $y = x^2$ عندما تكون $0 \le x \le 3$ كما هو موضح.

الخطوة 2 مثّل النقاط بيانيًا على المنحنى عندما تكون $x = 1$، و2، و3. وصّل النقاط باستخدام قطع مستقيمة كما هو موضح.

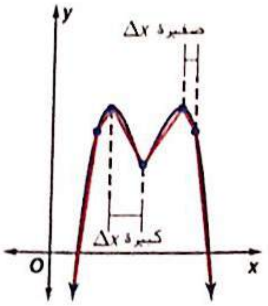
الخطوة 3 استخدم صيغة المسافة لإيجاد طول كل قطعة مستقيمة.

الخطوة 4 قرّب طول القوس بإيجاد مجموع أطوال القطع المستقيمة.

تحليل النتائج

1. هل التقريب الذي قمت به أكبر أم أقل من الطول الفعلي؟ اشرح استنتاجك.
2. قرّب طول القوس مرة ثانية باستخدام 6 قطع مستقيمة كونتها النقاط $x = 0$، و0.5، و1.0، و1.5، و2.0، و2.5، و3.0. وارسم تمثيلاً بيانيًا للتقريب الذي قمت به.
3. صف ما يحدث لتقريب طول القوس عند استخدام قطع مستقيمة أقصر.
4. بالنسبة لعمليتي التقريب، كانت نقاط النهاية للقطع المستقيمة تقع على مسافات متساوية على طول المحور x. فهل تعتقد أن ذلك سيؤدي دائمًا إلى أدق عملية تقريب؟ اشرح استنتاجك.

لاحظ أنه في النشاط الأول كانت نقاط النهاية بالقطعة المستقيمة تقع على مسافات متساوية مقدارها 0.5 وحدة على طول المحور x. عند استخدام طرق حساب التفاضل والتكامل المتقدمة لإيجاد طول القوس *الدقيق*، يلزم وجود فارق ثابت بين نقطتي نهاية على طول المحور x. ويُرمز إلى هذا الفارق بـ Δx.



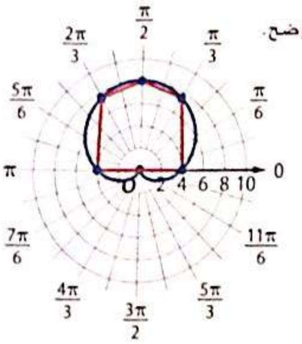
قد لا يكون التقريب الدقيق لطول القوس باستخدام Δx ثابت من أجل عمل قطع مستقيمة الطريقة الأكثر فعالية دائمًا.

سيحدد شكل القوس المسافة بين نقطتي النهاية، وبالتالي يعطي قيمًا مختلفة لـ Δx. على سبيل المثال، إذا أظهر تمثيل بياني زيادة أو انخفاضًا في فترة كبيرة من x، فقد تُستخدم قطعة مستقيمة كبيرة للتقريب. وإذا تضمن التمثيل البياني نقطة تحول، فمن الأفضل استخدام قطع مستقيمة صغيرة لحساب المنحنى في التمثيل البياني.

في السابق، تعلمت طريقة حساب المسافة بين الإحداثيات القطبية.
يمكن استخدام هذه الصيغة لتقريب طول قوس المنحنى الذي تمثله معادلة قطبية.

النشاط 2 تقريب طول القوس

قرّب طول قوس التمثيل البياني $r = 4 + 4\sin\theta$ عندما تكون $0 \le x \le 2\pi$.



الخطوة 1 مثّل بيانيًا $r = 4 + 4\sin\theta$ عندما تكون $0 \le x \le 2\pi$ مثلما هو موضح.

الخطوة 2 ارسم 6 نقاط على المنحنى عند $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$.
وصّل النقاط باستخدام قطع مستقيمة كما هو موضح.

الخطوة 3 استخدم صيغة المسافة القطبية لإيجاد طول كل قطعة مستقيمة.

الخطوة 4 قرّب طول القوس بإيجاد مجموع أطوال القطع المستقيمة.

نصيحة دراسية
التمثيلات البيانية القطبية اصنع جدولاً بقيم r وθ عند حساب طول قوس التمثيل البياني القطبي. فهذا سوف يساعد على تقليل الأخطاء التي تنشأ عن الدوال التي تنتج قيمًا سالبة لـ r.

تحليل النتائج

5. اشرح كيف يمكن استخدام التماثل لتقليل عدد العمليات الحسابية في الخطوة 3.

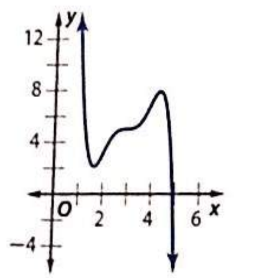
6. قرّب طول القوس باستخدام 10 قطع على الأقل. وارسم التمثيل البياني.

7. افترض أن n هو عدد القطع المستقيمة المستخدمة في تقريب ما وأن $\Delta\theta$ هو الفارق الثابت في θ بين نقاط النهاية لقطعة مستقيمة. خمّن العلاقة بين n، وθ، وتقريب طول القوس.

النموذج والتطبيق

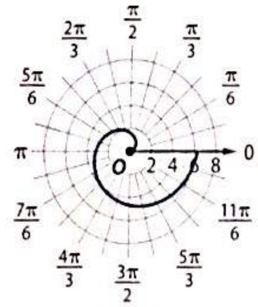
قرّب طول قوس كل تمثيل بياني. وارسم تمثيلك البياني.

8.



$y = -(x-3)^5 + 3(x-3)^3 + 5$
من أجل $1 \le x \le 5$

9.



$r = \theta$ من أجل $0 \le \theta \le 2\pi$

كتيب الطالب

يمكن أن يساعد **كتيب الطالب** هذا في الإجابة على الأسئلة التالية.

ماذا لو نسيت مفردة لغوية؟

القاموس
G-2

يقدم **القاموس** تعريفات للكلمات الصعبة أو المهمة المستخدمة عبر هذا الكتيب.

ماذا لو نسيت صيغة؟

الدوال والمحايدات، والمعادلات والرموز المثلثية
TF-1

يوجد العديد من **القواعد والمتطابقات والرموز** داخل الغلاف الخلفي لكتاب الرياضيات والمستخدمة في هذا الكتاب.

الرموز

الرمز	المعنى	الرمز	المعنى
$\neq$	لا يساوي	AB	قياس $\overline{AB}$
$\approx$	تقريبًا يساوي	$\angle$	زاوية
$\sim$	يشابه	$\triangle$	مثلث
$>, \geq$	أكبر من، أو أكبر من أو يساوي	$^\circ$	درجة
$<, \leq$	أصغر من، أو أصغر من أو يساوي	π	باي
$-a$	المعكوس أو المعكوس الجمعي لـ a	$\sin x$	جيب الزاوية x
$\lvert a \rvert$	القيمة المطلقة لـ a	$\cos x$	جيب تمام الزاوية x
$\sqrt{a}$	الجذر التربيعي الأساسي لـ a	$\tan x$	ظل الزاوية x
$a : b$	نسبة a إلى b	$!$	مضروب
(x, y)	زوج مرتّب	$P(a)$	احتمال a
$f(x)$	f حسب x، قيمة f حسب x	$P(n, r)$	تباديل عدد n من العناصر المأخوذة من المجموعة r في كل مرة
$\overline{AB}$	القطعة المستقيمة AB	$C(n, r)$	توافيق عدد n من العناصر المأخوذة من المجموعة r في كل مرة

الخصائص الجبرية والمفاهيم الأساسية

المحايد	لأي عدد a، $a + 0 = 0 + a = a$ و $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
التعويض (=)	إذا كان $a = b$، إذًا يمكن التعويض عن a باستخدام b.
الانعكاس (=)	$a = a$
التماثل (=)	إذا كان $a = b$، إذًا $b = a$.
التعدي (=)	إذا كان $a = b$ و $b = c$، إذًا $a = c$.
التبديل	لأي عددين a و b، $a + b = b + a$ و $a \cdot b = b \cdot a$.
التجميع	لأي أعداد a و b و c، $(a + b) + c = a + (b + c)$ و $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
التوزيع	لأي أعداد a و b و c، $a(b + c) = ab + ac$ و $a(b - c) = ab - ac$.
المعكوس الجمعي	لأي عدد a، يوجد فقط عدد واحد $-a$ بحيث $a + (-a) = 0$.
المعكوس الضربي	لأي عدد $\frac{a}{b}$، حيث a و $b \neq 0$، يوجد فقط عدد واحد $\frac{a}{b}$ بحيث $1 = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}$.
الضرب (0)	لأي عدد a، $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
الجمع (=)	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a = b$، إذًا $a + c = b + c$.
الطرح (=)	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a = b$، إذًا $a - c = b - c$.
الضرب والقسمة (=)	لأي أعداد a و b و c، حيث $c \neq 0$، إذا كان $a = b$، إذًا $ac = bc$ و $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
الجمع (>)*	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a > b$، إذًا $a + c > b + c$.
الطرح (>)*	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a > b$، إذًا $a - c > b - c$.
الضرب والقسمة (>)*	لأي أعداد a و b و c، 1. إذا كان $a > b$ و $c > 0$، إذًا $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. 2. إذا كان $a > b$ و $c < 0$، إذًا $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
ناتج الضرب الصفري	لأي عددين حقيقيين a و b، إذا كان $ab = 0$، إذًا $a = 0$ أو $b = 0$ أو a و b يساويان 0.
مربع الجمع بين حدّين	$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
مربع فرق بين حدّين	$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
ناتج جمع وطرح	$(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

* *تنطبق هذه الخواص كذلك على < و ≥ و ≤.*

معادلات

المنحنى	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
المسافة على مستوى إحداثي	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
نقطة المنتصف على مستوى إحداثي	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
القاعدة التربيعية	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
محيط المستطيل	$P = 2\ell + 2w$ أو $P = 2(\ell + w)$
محيط الدائرة	$C = 2\pi r$ أو $C = \pi d$

المساحة

مستطيل	$A = \ell w$	شبه منحرف	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$
متوازي أضلاع	$A = bh$	دائرة	$A = \pi r^2$
مثلث	$A = \frac{1}{2}bh$		

مساحة السطح

مكعب	$S = 6s^2$	هرم منتظم	$S = \frac{1}{2}P\ell + B$
منشور	$S = Ph + 2B$	مخروط	$S = \pi r\ell + \pi r^2$
أسطوانة	$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$		

الحجم

مكعب	$V = s^3$	هرم منتظم	$V = \frac{1}{3}Bh$
منشور	$V = Bh$	مخروط	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
أسطوانة	$V = \pi r^2 h$		

القياسات

متري	اعتيادي
الطول	
1 كيلو متر (km) = 1000 متر (m)	1 ميل (mi) = 1760 ياردة (yd)
1 متر = 100 سنتيمتر (cm)	1 ميل = 5280 قدمًا (ft)
1 سنتيمتر = 10 مللي متر (mm)	1 ياردة = 3 أقدام
	1 قدم = 12 بوصة (.in)
	1 ياردة = 36 بوصة
الحجم والسعة	
1 لتر (L) = 1000 مللي لتر (mL)	1 جالون (gal) = 4 أرباع (qt)
1 كيلو لتر (kL) = 1000 لتر	1 جالون = 128 أونصة سائلة (fl oz)
	1 كوارت = 2 باينت (pt)
	1 باينت = 2 كوب (c)
	1 كوب = 8 أونصات سائلة
الوزن والكتلة	
1 كيلو جرام (kg) = 1000 جرام (g)	1 طن (T) = 2000 رطل (lb)
1 جرام = 1000 مللي جرام (mg)	1 رطل = 16 أونصة (oz)
1 طن متري (t) = 1000 كيلو جرام	

الهندسة الإحداثية

الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
المسافة على خط الأعداد:	$d = \lvert a - b \rvert$
المسافة بين نقطتين:	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
المسافة في الفضاء:	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
طول قوس المسافة:	$\ell = \frac{x}{360} \cdot 2\pi r$
نقطة المنتصف على خط الأعداد:	$M = \frac{a + b}{2}$
نقطة المنتصف في المستوى::	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
نقطة المنتصف في الفضاء:	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

المحيط

مربع	$P = 4s$	مستطيل	$P = 2\ell + 2w$	دائرة	$C = 2\pi r$ أو $C = \pi d$

المساحة

مربع	$A = s^2$	مثلث	$A = \frac{1}{2}bh$
مستطيل	$A = \ell w$ أو $A = bh$	مُضلع منتظم	$A = \frac{1}{2}Pa$
مثلث	$A = bh$	دائرة	$A = \pi r^2$
متوازي الأضلاع	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$	قطاع من دائرة	$A = \frac{x}{360} \cdot \pi r^2$
معين	$A = \frac{1}{2}d_1d_2$ أو $A = bh$		

مساحة السطح الجانبية

منشور	$L = Ph$	هرم منتظم	$L = \frac{1}{2}P\ell$
إسطوانة	$L = 2\pi rh$	مخروط	$L = \pi r\ell$

مساحة السطح الكلية

منشور	$S = Ph + 2B$	مخروط	$S = \pi r\ell + \pi r^2$
إسطوانة	$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$	كرة	$S = 4\pi r^2$
هرم	$S = \frac{1}{2}P\ell + B$		

الحجم

مكعب	$V = s^3$	هرم	$V = \frac{1}{3}Bh$
منشور مستطيل	$V = \ell wh$	مكعب	$V = \frac{1}{3}\pi r^2h$
منشور	$V = Bh$	كروي	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
أسطوانة	$V = \pi r^2h$		

معادلات الأشكال على مستوى إحداثي

صيغة الميل والمقطع	$y = mx + b$	دائرة	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
صيغة النقطة والميل	$y - y_1 = m(x - x_1)$		

حساب المثلثات

قانون الجيب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	قانون جيب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$		

الرموز

$\neq$	لا يساوي	$\parallel$	يوازي	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	مقدار متجه من A إلى B
$\approx$	تقريبًا يساوي	$\nparallel$	لا يوازي	A'	صورة الصورة الأصلية A
$\cong$	متطابق	$\perp$	متعامد على	$\rightarrow$	موضوع على
$\sim$	متشابه له	$\triangle$	مثلث	$\odot A$	دائرة مركزها A
$\angle, \measuredangle$	درجة، درجات	$>, \geq$	أكبر من، أو أكبر من أو يساوي	π	باي
$m\angle A$	قياس درجة $\angle A$	$<, \leq$	أصغر من، أو أصغر من أو يساوي	$\widehat{AB}$	قوس أصغر نقطتاه الطرفيتان A و B
$^\circ$	درجة	$\square$	متوازي أضلاع	$\widehat{ABC}$	قوس أكبر نقطتاه الطرفيتان A و C
$\overleftrightarrow{AB}$	مستقيم يحتوي على النقطتين A و B	n-gon	مضلع عدد أضلاعه n	$m\widehat{AB}$	قياس درجة القوس AB
$\overline{AB}$	مستقيم نقطتاه الطرفيتان A و B	$a:b$	نسبة a إلى b	$f(x)$	f حسب x؛ قيمة f حسب x
$\overrightarrow{AB}$	شعاع تحتوي نقطته الطرفية A على B	(x, y)	زوج مرتّب	$!$	مضروب
AB	قياس $\overline{AB}$؛ المسافة بين A و B	(x, y, z)	مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر	nPr	تباديل عدد n من العناصر المأخوذة من المجموعة r في كل مرة
$\sim p$	نفي p؛ ليس p	$\sin x$	جيب الزاوية x	nCr	توافيق عدد n من العناصر المأخوذة من المجموعة r في كل مرة
$p \wedge q$	ربط p و q	$\cos x$	جيب تمام الزاوية x	$P(A)$	احتمال A
$p \vee q$	فصل p أو q	$\tan x$	ظل الزاوية x	$P(A\mid B)$	احتمال A إذا علمت أن B حدث بالفعل
$p \rightarrow q$	العبارة الشرطية. إذا كان p فإن q	$\vec{a}$	متجه a		
$p \leftrightarrow q$	العبارة ثنائية الشرط. p إذا وفقط كان q	$\overrightarrow{AB}$	المتجه من A إلى B		

القياسات

متري	عرفي
الطول	
1 كيلو متر (km) = 1000 متر (m)	1 ميل (mi) = 1760 ياردة (yd)
1 متر = 100 سنتيمتر (cm)	1 ميل = 5280 قدمًا (ft)
1 سنتيمتر = 10 مللي متر (mm)	1 ياردة = 3 أقدام
	1 ياردة = 36 بوصة
	1 قدم = 12 بوصة (in.)
الحجم والسعة	
1 لتر (L) = 1000 مللي لتر (mL)	1 جالون (gal) = 4 أرباع (qt)
1 كيلو لتر (kL) = 1000 لتر	1 جالون = 128 أونصة سائلة (fl oz)
	1 ربع = 2 باينت (pt)
	1 باينت = 2 كوب (c)
	1 كوب = 8 أونصات سائلة
الوزن والكتلة	
1 كيلو جرام (kg) = 1000 جرام (g)	1 طن (T) = 2000 رطل (lb)
1 جرام = 1000 مللي جرام (mg)	1 رطل = 16 أونصة (oz)
1 طن متري (t) = 1000 كيلو جرام	

الصيغ

الهندسة الإحداثية

نقطة المنتصف	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$	المسافة	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
		الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$

المصفوفات

الجمع	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$	الضرب في كمية عددية	$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$
الطرح	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$	الضرب	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab+bg & af-bh \\ ce+dg & cf-dh \end{bmatrix}$

كثيرات الحدود

القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$	مربع فرق	$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$
مربع مجموع	$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$	ناتج ضرب مجموع وفرق	$(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

اللوغاريتمات

خاصية ناتج الضرب	$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$	خاصية الأس الثابت	$\log_b m^p = p \log_b m$
خاصية ناتج القسمة	$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b, b \neq 0$	تغيير الأساس	$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

القطوع المخروطية

قطع مكافئ	$y = a(x-h)^2 + k$ أو $x = a(y-k)^2 + h$	قطع ناقص	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, a, b \neq 0$
دائرة	$x^2 + y^2 = r^2$ أو $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	قطع زائد	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, a, b \neq 0$

المتتاليات والمتسلسلات

الحد النوني، لمتتالية حسابية	$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحد النوني، لمتتالية هندسية	$a_n = a_1 r^{n-1}$
مجموع متسلسلة حسابية	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)$ أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$	مجموع متسلسلة هندسية	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$ أو $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}, r \neq 1$

حساب المثلثات

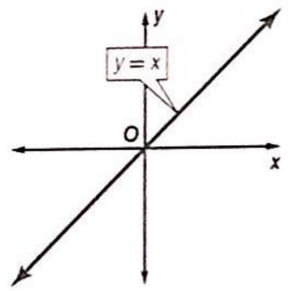
قانون الجيب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, a, b, c \neq 0$		
قانون جيب التمام	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
النسب المثلثية	$\tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	$\cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$	$\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$
	$\cot \theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$	$\sec \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{1}{\cos \theta}$	$\csc \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{1}{\sin \theta}$
متطابقات فيثاغورس	$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

الرموز

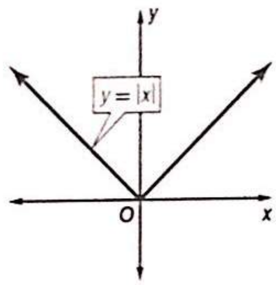
الرمز	المعنى
$f(x) = \{$	دالة متعددة التعريف
$f(x) = \lvert x \rvert$	دالة القيمة المطلقة
$f(x) = [\![x]\!]$	دالة أكبر عدد صحيح ليس أكبر من a
$f(x, y)$	f لـ x و y: دالة متغيراها x وy
$\overrightarrow{AB}$	المتجه AB
i	الوحدة التخيلية
$[f \circ g](x)$	f لـ g لـ x: تركيب الدالتين f وg
$f^{-1}(x)$	معكوس $f(x)$
$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$	الجذر النوني لـ b
$\log_b x$	أساس اللوغاريتم b من x
$\log x$	اللوغاريتم العادي x
$\ln x$	اللوغاريتم الطبيعي x
$\sum$	سيغما، المجموع
$\bar{x}$	متوسط عينة
μ	متوسط مجتمع إحصائي
s	الانحراف المعياري لعينة
σ	الانحراف المعياري لمجتمع إحصائي
$P(B \mid A)$	احتمال B إذا علمت أن A حدث بالفعل
nPr	تباديل عدد n من العناصر المأخوذة من المجموعة r في كل مرة
nCr	توافيق عدد n من العناصر المأخوذة من المجموعة r في كل مرة
$\mathrm{Sin}^{-1}\, x$	Arcsin x
$\mathrm{Cos}^{-1}\, x$	Arccos x
$\mathrm{Tan}^{-1}\, x$	Arctan x

الدوال الأصلية

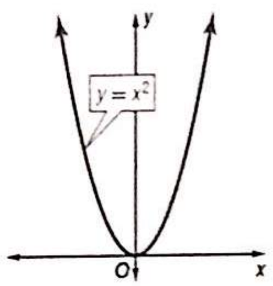
الدوال الخطية



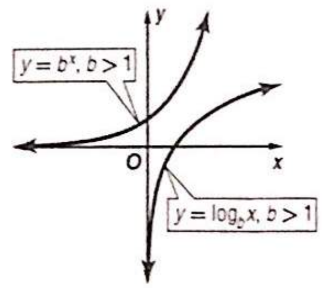
دوال القيمة المطلقة



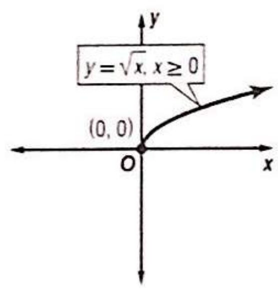
الدوال التربيعية



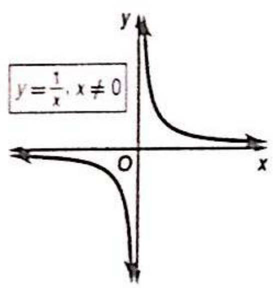
الدوال الأسية واللوغاريتمية



دوال الجذر التربيعي



الدوال العكسية والنسبية



رؤية
VISION
2021

المدرسة
الإماراتية

mheducation.com/prek-12

978-1-52-684356-2
MHID 1-52-684356-0

EAN

99701

9 781526 843562

Mc
Graw
Hill
Education