الوحدة 1 الدوال من منظور التفاضل والتكامل

.. السابق

في **الرياضيات المتكاملة 3**، قمت بتحليل الدوال من منظور تمثيل البياني.

.. الحالي

في **الفصل 1**، ستتمكن من:

- استكشاف أوجه التناظر في تمثيلات البيانية.
- تحديد اتصال الدوال والمعدلات المتوسطة للتغير فيها.
- استخدام النهايات لوصف السلوك الطرفي.
- البحث عن دوال عكسية من ناحية الجبر ومن الناحية البيانية.

.. لماذا ▲

مجال الأعمال غالبًا ما تُستخدم الدالات في عالم الأعمال. تتمثل بعض استخدامات الدوال في تحليل التكاليف والتنبؤ بالمبيعات وحساب الأرباح والتنبؤ بالتكاليف المستقبلية والعائدات وتقدير معدلات الإهلاك وتحديد القوى العاملة الملائمة.

مرحلة ما قبل القراءة أنشئ قائمة تضم أمرين أو ثلاثة أمور تعرفها بالفعل عن الدوال. ثم تنبأ بما ستتعلمه في الفصل 1.

راجع عمل الطلاب.

مشروع الوحدة

اتباع التوجه العام

يستخدم الطلاب ما تعلموه لتقييم الدوال.

- اجعل الطلاب يختارون دالة تحوذ على اهتمامهم. فمثلاً، الطلاب المهتمون بالموسيقى، قد يختاروا إحصائيات تربط بين وقت إصدار أغانيهم المفضلة وبين مبيعاتها.
- بعد اختيار الطلاب للتابع الذي يهمهم. اجعلهم يجمعون لبيانات لكتابة قاعدة التابع.
- اجعل الطلاب يرسمون التابيع بيانياً ويحددون المجال والمدى و القمم و التقاطع مع المحور الرأسي y والأصفار. وفي كل خاصية يحددونها، اجعل الطلاب يكتبون المعنى المتضمن لهذه القيم والخواص.
- اجعل الطلاب يجدون معكوس تابعهم، إذا كان موجوداً، ويكتبون ما إذا كان معكوس التابع مفيد أم لا. يجب على الطلاب تحديد مجال معكوس التابع. ومناقشة ما إذا كان له معنى في سياق المسألة نفسها أم لا.

المفردات الأساسية اعرض المفردات الأساسية في الوحدة باستخدام النظام المذكور أدناه.

التعريف: تعتبر علاقة ما معكوس علاقة أخرى، فقط ما إذا كانت أحداهما تحتوي على العنصر (b, a) بينما تحتوي العلاقة الأخرى على العنصر (a, b).

مثال: معكوس العلاقة $f(x) = x^2 + 1$ هو $y = \pm\sqrt{x - 1}$.

اسأل: ما هي خصائص الرسوم البيانية للدوال ومعكوسها؟ تماثل الرسوم البيانية للتابع ومعكوسه عند الخط $y = x$.

القراءة التمهيدية / الكتابة التمهيدية

شجع الطلاب ليبدءوا دراستهم للفصل عن طريق القراءة التمهيدية لكل درس. يجب أن يتحققوا من معلوماتهم المسبقة ويتوقعوا المحتوى وتفاصيله. امنحهم وقت ليتناقشوا كمجموعات حول قراءاتهم وتبادل أسئلتهم. ابرز لهم خصائص المنهج، مثل عناوين الأقسام وصناديق المفهوم الأساسي وملخص المفهوم.

G12 GEN TE CH01.indb 2 8/22/2016 4:26:36 PM

الاستعداد للفصل

التحقق من الاستعداد أدِّ نقاط التحقق السريع التالية للتحقق من أنك لديك المهارات اللازمة.

التحقق السريع

ارسم كل متباينة على خط أعداد. (مهارة لازمة) **1–6 . انظر الهامش.**

1. $x > -3$
2. $x \le -2$
3. $x \le -5$
4. $x > 1$
5. $7 \ge x$
6. $-4 < x$

حل كل معادلة من معادلات y. (مهارة لازمة)

7. $y - 3x = 2$ **$y = 2 + 3x$**
8. $y + 4x = -5$ **$y = -5 - 4x$**
9. $2x - y^2 = 7$ **$y = \pm\sqrt{2x - 7}$**
10. $y^2 + 5 = -3x$ **$y = \pm\sqrt{-3x - 5}$**
11. $9 + y^3 = -x$ **$y = \sqrt[3]{-x - 9}$**
12. $y^3 - 9 = 11x$ **$y = \sqrt[3]{11x + 9}$**

13. **الدونات** يستخدم أحد المخابز المعادلة $n = 12D$، حيث ترمز D إلى عدد دستات كعك الدونات المباع، وترمز n إلى إجمالي عدد كعك الدونات المباع. لتحديد عدد دستات كعك الدونات التي تم بيعه. حل المعادلة فيما يتعلق بالرمز D، واحسب عدد دستات كعك الدونات التي بيعت إذا ما كان قد تم بيع 306 كعكة دونات. (مهارة لازمة)
$D = \frac{n}{12}$; 25.5 دستة من الدونات

احسب قيمة كل رمز باستخدام قيمة المتغير المحددة. (مهارة لازمة)

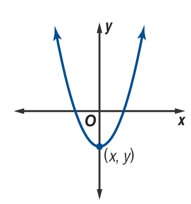
14. $3y - 4,\ y = 2$
15. $2b + 7,\ b = -3$
16. $x^2 + 2x - 3,\ x = -4a$
17. $5z - 2z^2 + 1,\ z = 5x$
18. $-4c^2 + 7,\ c = 7a^2$
19. $2 + 3p^2,\ p = -5 + 2n$

20. **درجة الحرارة** يمكن استخدام المعادلة $C = \frac{5}{9}(F - 32)$، حيث تمثل C إحدى يدراجات الحرارةبالدرجات المئوية وF بدرجاتالفهرنهايت للتحويل بين الوحدتين. إذا كانت درجة الحرارة على أحد مقاييس درجة الحرارة تساوي 73 درجة فهرنهايت، فكم تكون درجة الحرارة بالدرجات المئوية مقربة لأقرب عشرة؟ (مهارة لازمة) **22.8°C**

الأساسي المفهوم

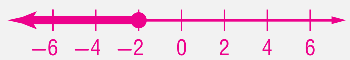
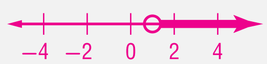
مفردات للمراجعة

parabola القطع المكافئ ص. P9 التمثيل البياني لدالة تربيعية



المنحدر • المهارة اللازمة •نسبة التغير في إحداثيات y إلى التغيير في إحداثيات x

إجابات إضافية

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 

أسئلة هامة

- كيف تُمثل الأفكار الرياضي؟
الإجابة النموذجية: يمكنك تمثيل الأفكار الرياضي شفهياً و جبرياً و رقمياً وبيانياً. فمثلاً يمكن وصف تابع ما بالكلمات، أو على شكل معادلة، أو على شكل جدول التقويم، أو تمثيل بياني.
- ما هي أهمية الرموز في الرياضيات؟
الإجابة النموذجية: تمكنك الرموز من التعبير عن المفاهيم الرياضية بطرق مختصرة.

1 التركيز

المحاذاة **الرأسية**

قبل الدرس 1–1 حل مجموعة من المعادلات مستخدماً خصائص الأعداد الحقيقية.

الدرس 1–1 صف المجموعات الفرعية للأعداد الحقيقية.
عرف واحسب قيمة الدوال وحدد المجال.

بعد الدرس 1–1 حدد المجال و التقاطع مع المحور الرأسي y وأصفار التابع.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اجعل الطلاب يقرأون قسم **لماذا؟** من الدرس.

اسأل:

- متى تتسبب زيادة قيمة في زيادة قيمة أخرى؟
إجابة نموذجية: ازدياد طول غرفة ما سيؤدي إلى ازدياد مساحتها.
- متى تتسبب زيادة قيمة في نقصان قيمة أخرى؟
إجابة نموذجية: ازدياد التكاليف سيؤدي إلى نقصان الأرباح.

الدرس 1–1 الدوال

..قبل ذلك

- استخدمت رمز المجموعة للتدليل على العناصر والمجموعات الجزئية والمجموعات المكملة. (الدرس 1–0)

..الآن

1. ستصف المجموعات الجزئية للأعداد الحقيقية.
2. ستحدد الدوال وتقيمها وتوضح مجالاتها.

..السبب

- يشمل العديد من الأحداث التي تحدث في الحياة اليومية كميتين متصلتين. على سبيل المثال، لتشغيل آلة بيع، تدرج المال وتنتقي خيارًا. تخرج الماكينة العنصر المختار وأي باقي مستحق من المال. بمجرد الاختيار، تعتمد كمية الباقي الذي تحصل عليه على كمية المال التي وضعتها في الماكينة.

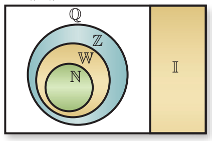
مفردات جديدة
رمز بناء المجموعات (set–builder notation)
رمز الفترة (interval notation)
الدالة (function)
تسمية الدالة (function notation)
متغير مستقل (independent variable)
متغير تابع (dependent variable)
المجال الضمني (implied domain)
الدالة متعددة التعريف (piecewise–defined function)
المجال ذو الصلة (relevant domain)

1 وصف المجموعات الجزئية للأعداد الحقيقية

تُستخدم الأعداد الحقيقية لوصف الكميات مثل المال والمسافة. تشمل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المجموعات الجزئية للأعداد التالية.

المفهوم الأساسي الأعداد الحقيقية

الأعداد الحقيقية ($\mathbb{R}$)



الحرف	المجموعة	أمثلة
$\mathbb{Q}$	الأرقام الحقيقية	$0.125,\ -\frac{7}{8},\ \frac{2}{3} = 0.666...$
$\mathbb{I}$	الأرقام غير الحقيقية	$\sqrt{3} = 1.73205...$
$\mathbb{Z}$	الأعداد الصحيحة	$-5,\ 17,\ -23,\ 8$
$\mathbb{W}$	الأعداد الكلية	$0, 1, 2, 3...$
$\mathbb{N}$	الأعداد الطبيعية	$1, 2, 3, 4...$

يّمكن وصف مجموعات الأعداد الحقيقية هذه ومجموعات الأعداد الحقيقية الأخرى باستخدام رمز بناء المجموعات. **رمز بناء المجموعات** يستخدم خصائص الأعداد الموجودة في المجموعة لتعريف المجموعة.

$$\{x \mid -3 \le x \le 16,\ x \in \mathbb{Z}\}$$

مجموعة الأعداد x بحيث...

x له الخصائص المحددة...

وxهو أحد عناصر مجموعة الأعداد المحددة.

مثال 1 استخدام رمز بناء المجموعات

صف مجموعة الأعداد باستخدام رمز بناء المجموعات.

a. $\{8, 9, 10, 11, ...\}$

تشمل المجموعة جميع الأعداد الكلية الأكبر من أو التي تساوي 8.

$\{x \mid x \ge 8,\ x \in \mathbb{W}\}$ تقرأ كالآتي مجموعة جميع العناصر x بحيث تكون x أكبر من أو تساوي 8 وتكون x هي أحد عناصر مجموعة الأرقام الكلية.

b. $x < 7$

مالم ينص على خلاف ذلك، ينبغي أن نفترض أن المجموعة المحددة تتكون من أعداد حقيقية. لذا، تحتوي المجموعة على جميع الأعداد الحقيقية أقل من 7. $\{x \mid x < 7,\ x \in \mathbb{R}\}$

c. جميع مضاعفات الثلاثة

تشمل المجموعة جميع الأعداد الصحيحة التي تمثل مضاعفات الثلاثة. $\{x \mid x = 3n,\ n \in \mathbb{Z}\}$

تمارين موجهة

1A. $\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$
$\{x \mid x \ge 1,\ x \in \mathbb{N}\}$

1B. $x \le -3$
$\{x \mid x \le -3,\ x \in \mathbb{R}\}$

1C. جميع مضاعفات π
$\{x \mid n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$

نصيحة للدراسة
نظرة إلى الوراء يُمكنك مراجعة رمز المجموعة، بما في ذلك اتحادات وتقاطعات المجموعات في الدرس 0−1.

رمز الفترة يستخدم المتباينات لوصف المجموعات الجزئية للأعداد الحقيقية. تُستخدم الرموز [or] للإشارة إلى أن هناك نقطة نهاية متضمنة في الفترة، بينما تستخدم الرموز (or) للإشارة إلى عدم تضمن نقطة نهاية في الفترة. تستخدم الرموز∞، اللانهاية الموجبة، و∞−، اللانهاية السلبية لوصف إحدى الفترات اللا محدودة. تُعد الفترة لا محدودة إذا كانت تمضي إلى ما لا نهاية.

الفترات اللا محدودة		الفترات المحدودة	
رمز الفترة	المتباينة	رمز الفترة	المتباينة
$[a, \infty)$	$x \geq a$	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$
$(-\infty, a]$	$x \leq a$	(a, b)	$a < x < b$
(a, ∞)	$x > a$	$[a, b)$	$a \leq x < b$
$(-\infty, a)$	$x < a$	$(a, b]$	$a < x \leq b$
$(-\infty, \infty)$	$-\infty < x < \infty$		

مثال 2 استخدام رمز الفترة

دون جميع مجموعات الأعداد باستخدام رمز الفترة.

a. $-8 < x \leq 16$ $(-8,$

b. $x < 11$ $(-\infty, 11)$

c. $x \leq -16$ or $x > 5$ $(-\infty, -16] \cup (5, \infty)$ ∪ تُقرأ اتحاد

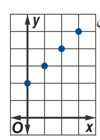
تمارينموجهة

2A. $-4 \leq y < -1$ $[-4, -1)$ **2B.** $a \geq -3$ $[-3, \infty)$ **2C.** $x > 9$ or $x < -2$ $(-\infty, -2) \cup (9, \infty)$

2 تحديد الدوال

تذكر أن *العلاقة* هي قاعدة تربط بين كميتين. تدمج تلك القاعدة العناصر الموجودة في المجموعة A مع العناصر الموجودة في المجموعة B. المجموعة A بجميع المدخلات هي *مجال* العلاقة والمجموعة B تحتوي على جميع المخرجات أو *المدى*.

عادةً ما يتم تمثيل العلاقات بأربعة طرق.

1. **شفويا** جملة تصف كيف ترتبط المدخلات والمخرجات.
   قيمة المخرج أكبر من قيمة المدخل بـ 2.
2. **بالأعداد** يربط جدول قيم أو مجموعة من الأزواج المرتبة كل مدخل (قيمة x) مع قيمة مخرج (قيمة y).
   $\{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$
3. **من ناحية الرسم البياني** النقاط على الرسم البياني على المستوى الإحداثي تمثل الأزواج المرتبة.


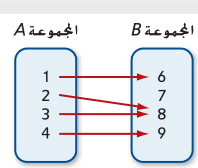
4. **من ناحية الجبر** تربط المعادلة إحداثيي x و y لكل زوج مرتب.
   $y = x + 2$

الدالة هي نوع خاص من العلاقة.

المفهوم الأساسي الدالة

الكلمات دالة f من المجموعة A إلى المجموعة B هي علاقة تحدد لكل عنصر x في المجموعة A عنصر واحد فقط y في المجموعة B.

الرموز العلاقة من المجموعة A إلى المجموعة B هي دالة.
المجموعة A هي المجال. $D = \{1, 2, 3, 4\}$
المجموعة B تحتوي على المدى. $R = \{6, 8, 9\}$



نصيحة للدراسة
المجال والمدى في هذا النص سيكون الرمز للمجال والمدى D = و R = ، على التوالي.

التركيز على المحتوى الرياضي

ترميز الفترات يستخدم الرمزان (أو) مع متباينة مقيدة، أما الرمزان] أو [فيستخدما عندما تتضمن الفترة نقطة النهاية. لاحظ أن كل ما يلي (a, a) ، و $(a, a]$ ، و $[a, a)$ يمثل مجموعة خالية، بينما $[a, a]$ تمثل المجموعة $\{a\}$.

- هل يمكن أن تتسبب في كلًا من زيادة قيمة ما في زيادة ونقصان قيمة أخرى؟ نعم; إجابة نموذجية: تؤدي زيادة الإنتاج لتلبية احتياجات السوق إلى زيادة الأرباح. تؤدي زيادة الإنتاج بعد تلبية احتياجات السوق إلى نقصان الأرباح.

1 وصف المجموعات الفرعية للأعداد الحقيقية.

المثال الأول اعرض كيفية وصف مجموعات الأرقام باستخدام ترميز المجموعات
المثال الثاني اعرض كيفية وصف مجموعات الأرقام باستخدام ترميز الفترات

تقييم التكويني

استخدم تدريبات التمارين الموجهة بعد كل مثال لتحديد مدى فهم الطالب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 صف مجموعات الأرقام مستخدماً ترميز المجموعات.

a. {7 ,6 ,5 ,4 ,3 ,2}
$\{x \mid 2 \leq x \leq 7, x \in \mathbb{N}\}$

b. $x > -17$
$\{x \mid x > -17, x \in \mathbb{R}\}$

c. كل مضاعفات الرقم 7
$\{x \mid x = 7n, n \in \mathbb{Z}\}$

2 صف مجموعات الأرقام مستخدماً ترميز الفترات.

a. $-2 \leq x \leq 12$ $[-2, 12]$

b. $x > -4$ $(-4, \infty)$

c. $x < 3$ or $x \geq 54$
$(-\infty, 3) \cup [54, \infty)$

2 تحديد دوال

المثال الثالث يعرض كيفية تحديد ما إذا كانت العلاقة تابع أم لا. **المثال الرابع** يعرض كيفية حساب قيمة التابع عند قيمة محددة. **المثال الخامس** يعرض كيفية إيجاد مجال التابع جبرياً. **المثال السادس** يعرض كيفية حساب قيمة تابع متعددة التعريف عند قيمة محددة.

نصيحة للدراسة

الطريقة المجدولة عندما تفشل العلاقة في اختبار الخط العمودي يكون لقيمة x أكثر من توافق مع قيمة y على النحو المبين أدناه.

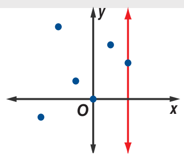
x	y
−2	−4
3	−1
3	4
5	6
7	9

ويمكن تعريف بديل للدالة في أنها مجموعة من الأزواج المرتبة التي لا يمتلك زوجين مختلفين فيها نفس القيمة للعنصر x. وعند التفسير من خلال الرسم البياني، يعني هذا أنه لا يُمكن أن تقع نقطتين من النقاط الموجودة على الرسم البياني لإحدى الدوال على المستوى الإحداثي على نفس الخط العمودي.

المفهوم الأساسي اختبار الخط العمودي

الكلمات مجموعة النقاط الموجودة على المستوى الإحداثي هي الرسم البياني للدالة إذا تقاطع كل خط عمودي ممكن مع الرسم البياني في نقطة واحدة على الأكثر.

نموذج



مثال 3 حدد العلاقات التي تعتبر دوال

حدد إذا ما كانت كل علاقة تمثل y بوصفها دالة x.

a. قيمة المدخل x هو رقم تعريف هوية الطالب، وقيمة المخرج y هي درجة الطالب في اختبار الفيزياء.

لا يُمكن تخصيص كل قيمة x لأكثر من قيمة y واحدة. لا يُمكن أن يتلقى الطالب درجتين مختلفتين للاختبار. لذا تصف الجملة y كدالة لـــ x.

نصيحة للدراسة

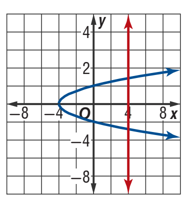
الدوال ذات قيم y المتكررة بينما لا يمكن أن يكون للدالة أكثر من قيمة y واحدة مدمجة مع كل من قيم x، يمكن أن يكونللدالة يُمكن قيمة y واحدة مدمجة مع أكثر من قيمة x واحدة على النحو المبين في المثال **3b**.

.b

x	y
−8	−5
−5	−4
0	−3
3	−2
6	−3

يتم تحديد جميع قيم x لقيمة y واحدة. لذا يمثل الجدول y كدالة لـــ x.

.c



الخط العمودي عند $x = 4$ تقاطعات للرسم البياني عند أكثر من نقطة واحدة. لذا لا يمثل الرسم البياني y كدالة لـــ x.

.d $y^2 - 2x = 5$

لتحديد ما إذا كانت هذه المعادلة تمثل y كدالة لـــ x. حل المعادلة فيما يتعلق بـــ y.

$y^2 - 2x = 5$ المعادلة الأصلية

$y^2 = 5 + 2x$ اجمع $2x$ إلى كل جانب

$y = \pm\sqrt{5 + 2x}$ خذ الجذر التربيعي لكل جانب

لا تمثل هذه المعادلة y كدالة لـــ x حيث سيكون هناك قيمتي y متوافقتين. أحدهما موجبة والأخرى سلبية فيما يتعلق بأي قيمة x أكبر من −2.5.

تمارين موجهة

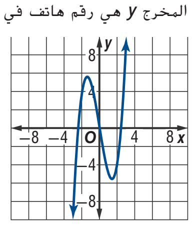
.3A قيمة المدخل x هي رمز المنطقة وقيمة المخرج y هي رقم هاتف في رمز المنطقة هذا. ليست دالة

.3B

x	y
−6	−7
2	3
5	8
5	9
9	22

ليست دالة

.3C



دالة

.3D $3y + 6x = 18$ دالة

مثال إضافي

3 حدد ما إذا كانت كل علاقة تمثل y كتابع في x أم لا.

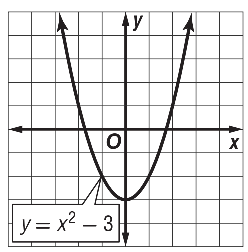
a. قيمة المدخل x هي ارتفاع الطالب بالبوصة، وقيمة المخرج y هي عدد الكتب التي يمتلكها الطالب. كلا. حيث يمكن أن توجد أكثر من قيمة y لنفس قيمة x.

.b

x	y
1	−1
1	1
4	−2
4	2
9	−3

كلا. حيث توجد أكثر من قيمة y لنفس قيمة x.

.c



نعم. حيث توجد قيمة واحدة y لكل قيمة x.

.d $x = 3y^2$ كلا. توجد أكثر من قيمة y لنفس قيمة x.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

اللوحة البيضاء التفاعلية اجعل الطلاب يعملون في مجموعات مكونة من اثنين أو ثلاثة لتحديد علاقتين يمثلا دوال، وعلاقتين لا يمثلا دوال. اجعلهم يرسمون العلاقات الأربعة بيانياً على اللوحة البيضاء التفاعلية لتوضيح أيهم يمثل دوال وأيهم ليس كذلك. لاحظ أن العلاقات التي لا تمثل دوال تظهر بشكل أفضل باستخدام المخطط النقطي.

OL AL DifferentiatedInstruction

المتعلمون بالطبيعة اجعل الطلاب يعثرون على ثلاثة أشياء لكل منهم وجه واحد على الأقل على شكل مربع . اجعل الطلاب يستخدمون الملاحظات اللاصقة لعنونة كل مربع ويكتبوا عليها طول ضلع المربع ومساحته. سجل هذه البيانات على اللوح. ثم تحدي الطلاب في إيجاد تابع تصف العلاقة بينهما $A(s) = s^2$

في **رموز الدالة**، الرمز $f(x)$ يُقرأ f of x ويُفسر على أنه قيمة *الدالة* f عند x. لأن $f(x)$ يتوافق مع قيمة y للدالة f بالنسبة للقيمة x المحددة. يمكنك كتابة $y = f(x)$.

الدالة ذات الصلة	المعادلة
$f(x) = -6x$	$y = -6x$

يسمى الرمز x **المتغير المستقل** بما أنه يمكنه تمثيل أي قيمة في مجال الدالة. يتم تمثيل القيمة في مدى f من خلال **المتغير المستقل** y.

مثال 4 أوجد قيم الدوال

إذا كانت $g(x) = x^2 + 8x - 24$، أوجد قيم جميع المعادلات.

a. $g(6)$

لتجد $g(6)$، استبدل x بـ 6 في $g(x) = x^2 + 8x - 24$.

$g(x) = x^2 + 8x - 24$ الدالة الأصلية

$g(6) = (6)^2 + 8(6) - 24$ عوِّض عن x

$= 36 + 48 - 24$ بسِّط

$= 60$ بسِّط

b. $g(-4x)$

$g(x) = x^2 + 8x - 24$ الدالة الأصلية

$g(-4x) = (-4x)^2 + 8(-4x) - 24$ استبدل x بـ $-4x$

$= 16x^2 - 32x - 24$ بسط

c. $g(5c + 4)$

$g(x) = x^2 + 8x - 24$ الدالة الأصلية

$g(5c + 4) = (5c + 4)^2 + 8(5c + 4) - 24$ استبدل x بـ $5c + 4$

$= 25c^2 + 40c + 16 + 40c + 32 - 24$ مد $(5c + 4)^2$ و $8(5c + 4)$.

$= 25c^2 + 80c + 24$ بسط

تمارين موجهة

إذا كانت $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 2x + 1}$، أوجد قيمة كل دالة.

4A. $f(12)$ $\dfrac{27}{121}$ **4B.** $f(6x)$ $\dfrac{12x+3}{36x^2 - 12x + 1}$ **4C.** $f(-3a + 8)$ $\dfrac{-6a + 19}{9a^2 - 42a + 49}$

عندما تُعرض عليك دالة بمجال غير محدد، يكون **المجال الضمني** هو مجموعة من جميع الأعداد الحقيقية التي يستخدم من أجلها رمز حقيقي لتعريف الدالة. بشكل عام، يجب عليك استثناء القيم من مجال الدالة التي كانت لتؤديإلى القسمة على صفر أو أخذ الجذر الزوجي لرقم سالب.

مثال 5 أوجد المجالات من خلال الجبر

حدد مجال كل دالة.

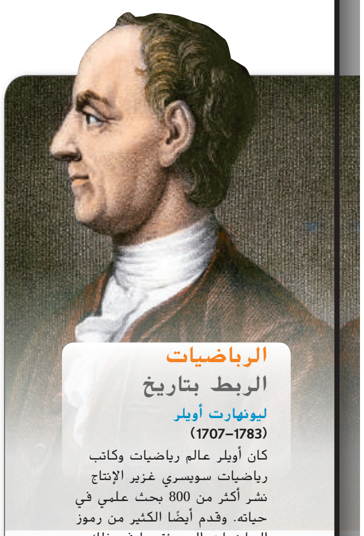
a. $f(x) = \dfrac{2 + x}{x^2 - 7x}$

عندما يكون مقام $\dfrac{2 + x}{x^2 - 7x}$ يساوي صفر، يكون الرمز غير محدد. حل $x^2 - 7x = 0$

القيم المستبعدة لمجال هذه الدالة هي $x = 0$ و $x = 7$. مجال هذه الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية فيما عدا $x = 0$ و $x = 7$، أو $\{x \mid x \neq 0,\ x \neq 7,\ x \in \mathbb{R}\}$.

b. $g(t) = \sqrt{t - 5}$

لأن الجذر التربيعي للعدد السالب لا يُمكن أن يكون حقيقي. $t - 5 \geq 0$. لذا مجال $g(t)$ هو جميع الأعداد الحقيقية t بحيث $t \geq 5$ or $[5, \infty)$.



الرياضيات الربط بتاريخ

ليونهارت أويلر (1707–1783)

كان أويلر عالم رياضيات وكاتب رياضيات سويسري غزير الإنتاج نشر أكثر من 800 بحث علمي في حياته. وقدم أيضًا الكثير من رموز الرياضيات الحديثة بما في ذلك استخدام $f(x)$ للدالة f.

نصيحة للدراسة

تسمية الدوال يُمكنك استخدام حروف أخرى لتسمية الدالة والمتغير المستقل. على سبيل المثال، $f(x) = \sqrt{x - 5}$، و $g(t) = \sqrt{t - 5}$ يسمي نفس الدالة.

أمثلة إضافية

4 إذا كان التابع $f(x) = x^2 - 2x - 8$، اوجد كل التقويم التابع.

a. $f(3)$ -5

b. $f(-3d)$ $9d^2 + 6d - 8$

c. $f(2a - 1)$ $4a^2 - 8a - 5$

5 اذكر مجال كل تابع.

a. $g(x) = \sqrt{4x - 1}$ $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$

b. $h(t) = \dfrac{3t^2}{t^2 - 1}$ $\{t \mid t \neq -1, t \neq 1, t \in \mathbb{R}\}$

c. $f(x) = \dfrac{x - 5}{\sqrt{2x - 3}}$ $\left\{x \,\middle|\, x > \frac{3}{2}, x \in \mathbb{R}\right\}$

G12 GEN TE CH01.indb 7 8/22/2016 4:26:51 PM

c. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$

لا تعرف هذه الدالة إلا عند $x^2 - 9 > 0$. لذا، مجال $h(x)$ is $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

تمارين موجهة

حدد مجال كل دالة.

5A. $f(x) = \dfrac{5x - 2}{x^2 + 7x + 12}$ $(-\infty, -4) \cup (-4, -3) \cup (-3, \infty)$

5B. $h(a) = \sqrt{a^2 - 4}$ 5B. $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

C5. $g(x) = \dfrac{8x}{\sqrt{2x + 6}}$ $(-3, \infty)$

الدالة التي تعرّف باستخدام معادلتين أو أكثر لفترات مختلفة من المجال تسمى **الدالة متعددة التعريف**.

مثال 6 من الحياة اليومية قيم الدالة متعددة التعريف

الارتفاع يُمكن تمثيل متوسط الحد الأقصى لطول الأطفال بالبوصة كدالة للحد الأقصى لطول آبائهم بالبوصة من خلال الدالة متعددة التعريف التالية. أوجد متوسط الحد الأقصى لأطوال الأطفال الذين تبلغ أطوال آبائهم الحد الأقصى المحدد. استخدم $h(x)$، حيث يكون x هو المتغير المستقل الذي يمثل ارتفاع الآباء و $h(x)$ هو المتغير التابع الذي يمثل ارتفاع الطفل.

$$h(x) = \begin{cases} 1.6x - 41.6 & \text{إذا كان } 63 < x < 66 \\ 3x - 132 & \text{إذا كان } 66 \le x \le 68 \\ 2x - 66 & \text{إذا كان } x > 68 \end{cases}$$

a. $h(67)$

بما أن 67 يقع بين 66 و68، استخدم $h(x) = 3x - 132$ لإيجاد $h(67)$.

$h(67) = 3x -$	دالة لــ $66 \le x \le 68$
$= 3(67) -$	استبدل بــ 67 x
$= 201 - 132$ or 69	بسط

وفقًا لهذا النموذج، الأطفال الذين يبلغ طول آبائهم بحد أقصى 67 بوصة سيبلغ متوسط حد أقصى أطوالهم 69 بوصة.

b. $h(72)$

بما أن 72 أكبر من 68، استخدم $h(x) = 2x - 66$.

$h(72) = 2x - 66$	دالة لــ $x > 68$
$= 2(72) - 66$	استبدل بــ 72 x.
$= 144 - 66$ or 78	حلّل.

وفقًا لهذا النموذج، الأطفال الذين يبلغ طول آبائهم بحد أقصى 72 بوصة سيبلغ متوسط حد أقصى أطوالهم 78 بوصة.

تمارين موجهة

6. **السرعة** سرعة v المركبة بالميل/ساعة يُمكن أن تُمثل من خلال الدالة متعددة التعريف التالية حيث تمثل t الوقت بالثواني. أوجد سرعة المركبة عند كل من الأوقات المحددة.

$$v(t) = \begin{cases} 4t & \text{إذا كان } 0 \le t \le 15 \\ 60 & \text{إذا كان } 15 < t < 240 \\ -6t + 1500 & \text{إذا كان } 240 \le t \le 250 \end{cases}$$

A. $v(5)$ 20 mi/h B. $v(15)$ 60 mi/h C. $v(245)$ 30 mi/h

نصيحة للدراسة

المجال ذو الصلة يُعد **المجال ذو الصلة** جزء من المجال المتعلق بالنموذج. خذ بعين الاعتبار الدالة حيث يكون المخرج دالة للطول. لا يعقل أن يكون هناك طول سلبي، لذا المجال ذو الصلة هو مجموعة من الأعداد أكبر من أو تساوي 0.

مثال إضافي

6 **المالية** درس السماسرة العقاريون في منطقة العاصمة متوسط سعر شراء منزل لكل قدم مربع كدالة مساحة كلية. ونتج عن درساتهم هذه التابع متعددة التعريف التالية. اوجد متوسط سعر القدم المربع لمنزل حسب المساحة الكلية المعطاة.

$$p(a) = \begin{cases} \dfrac{a - 1000}{40} + 75 & \text{if } 1000 \le a < 2600 \\ \dfrac{-(a - 2600)}{100} + 110 & \text{if } 2600 \le a < 4000 \\ \dfrac{a - 4000}{25} + 98 & \text{if } a \ge 4000 \end{cases}$$

a. 1400 قدم مربع 85$ لكل قدم مربع

b. 3200 قدم مربع 104$ لكل قدم مربع

إجابات إضافية

1. $\{x \mid x > 50, x \in \mathbb{R}\}; (50, \infty)$
2. $\{x \mid x < -13, x \in \mathbb{R}\}; (-\infty, -13)$
3. $\{x \mid x \le -4, x \in \mathbb{R}\}; (-\infty, -4]$
4. $\{x \mid -4 \le x, x \in \mathbb{Z}\}$
5. $\{x \mid 8 < x < 99, x \in \mathbb{R}\}; (8, 99)$
6. $\{x \mid -31 < x \le 64, x \in \mathbb{R}\}; (-31, 64]$
7. $\{x \mid x < -19$ أو $x > 21, x \in \mathbb{R}\}$; $(-\infty, -19) \cup (21, \infty)$
8. $\{x \mid x < 0$ أو $x \ge 100, x \in \mathbb{R}\}$; $(-\infty, 0) \cup [100, \infty)$
9. $\{x \mid 0.25n = x, n \ge -1, n \in \mathbb{Z}\}$
10. $\{x \mid x \le 61$ أو $x \ge 67, x \in \mathbb{R}\}$; $(-\infty, 61] \cup [67, \infty)$

G12 GEN TE CH01.indb 8 8/22/2016 4:26:53 PM

تمرين 3

تقويم تكويني

استخدم التمارين من 1–53 لتتحقق من فهم الطلاب.

ثم استخدم الجدول بالأسفل لتضع تقييمك للطلبة.

احذر!

خطأ شائع إذا احتاج الطلاب لمساعدة في التمرين 12 و التمرين 13. اكتب التتابع التالي لتمرين 12: $8(0)$, $8(\pm1)$, $8(\pm2)$, $8(\pm3)$, ...

هذا سيوضح لهم أن n ستكون 0, ±1, ±2, ±3, ... أو كل الأعداد الصحيحة.

إجابات إضافية

11. $\{x \mid x \le -45 \text{ or } x > 86, x \in \mathbb{R}\}$; $(-\infty, -45] \cup (86, \infty)$

12. $\{x \mid x = 8n, n \in \mathbb{Z}\}$

13. $\{x \mid x = 5n, n \in \mathbb{Z}\}$

14. $\{x \mid x \ge 32, x \in \mathbb{R}\}$; $[32, \infty)$

32a. $-\frac{13}{79}$

32b. $\frac{16t + 11}{48t^2 + 20t + 1}$

32c. $\frac{-8a + 23}{12a^2 - 46a + 43}$

33a. 12

33b. $\frac{375x^3}{25x^2 + 5x - 4}$

33c. $\frac{-48b^3 + 288b^2 - 576b + 384}{4b^2 - 17b + 17}$

34a. 20

34b. $16 - \frac{4}{4x + 1}$

34c. $16 - \frac{12}{23 - 4c}$

35a. -0.8

35b. $-1 - \frac{1}{8x}$

35c. $-7 + \frac{36y + 25}{6y + 4}$

38b. إجابة نموذجية: أعتقد أن النموذج أقرب للسنوات الأخيرة، التي تحتوي على مبيعات أعلى. لأن 213 داخل 2% من 219. و 9 تمثل 800% من 1.

9

التمارين

اكتب كل من مجموعات الأعداد في رمز بناء المجموعات ورمز الفترة، إن أمكن ذلك. (أمثلة 1 و 2) **14—1. انظر الهامش.**

1. $x > 50$
2. $x <$
3. $x \le -4$
4. $\{-4, -3, -2, -1, ...\}$
5. $8 < x < 99$
6. $-31 < x \le$
7. $x < -19$ or $x >$
8. $x < 0$ or $x \ge 100$
9. $\{-0.25, 0, 0.25, 0.50, ...\}$
10. $x \le 61$ or $x \ge$
11. $x \le -45$ or $x > 86$
12. جميع مضاعفات 8
13. جميع مضاعفات 5
14. $x \ge 32$

حدد ما إذا كانت كل من العلاقات تمثل y دالة لـ x. (مثال 3)

15. قيمة المدخل x هي رقم حساب بنكي وقيمة المخرج y هي رصيد الحساب. **دالة**

16. قيمة المدخل x هي العام وقيمة المخرج y هي يوم الأسبوع. **ليست دالة**

17.

x	y
−50	2.11
−40	2.14
−30	2.16
−20	2.17
−10	2.17
0	2.18

دالة

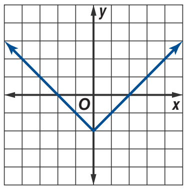
18.

x	y
0.01	423
0.04	449
0.04	451
0.07	466
0.08	478
0.09	482

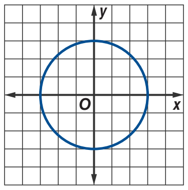
ليست دالة

19. $\frac{1}{x} =$ **دالة**
20. $x^2 = y + 2$ **دالة**
21. $3y + 4x =$ **دالة**
22. $4y^2 + 18 = 96x$ **ليست دالة**
23. $\sqrt{48y} = x$ **دالة**
24. $\frac{x}{y} = y - 6$ **ليست دالة**

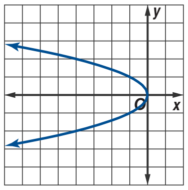
25. **دالة**



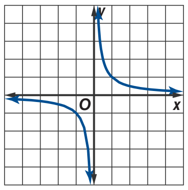
26. **ليست دالة**



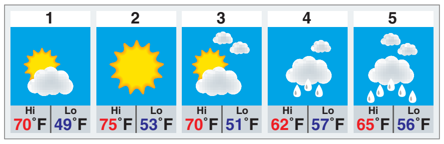
27. **ليست دالة**



28. **دالة**



29. **الأرصاد الجوية** تم عرض التوقعات لمدة خمسة أيام لإحدى المدن. (مثال 3)



a. مثل العلاقة بين يوم الأسبوع ودرجة الحرارة العالية المقدرة كمجموعة من الأزواج المرتبة. **$\{(1, 70), (2, 75), (3, 70), (4, 62), (5, 65)\}$**

b. هل درجة الحرارة العالية المقدرة دالة ليوم الأسبوع؟ درجة الحرارة المنخفضة؟ اشرح الإجابة. **نعم هناك درجة حرارة مرتفعة مقدرة واحدة بالضبط لكل يوم. نعم هناك درجة حرارة منخفضة مقدرة واحدة بالضبط لكل يوم.**

أوجد كل من قيم الدوال. (مثال 4) **35—32. انظر الهامش.**

30. $g(x) = 2x^2 + 18x -$
 a. $g(9)$ **310**
 b. $g(3x)$ **$18x^2 + 54x - 14$**
 c. $g(1 +$

31. $h(y) = -3y^3 - 6y + 9$
 a. $h(4)$ **-207**
 b. $h(-2y)$ **$24y^3 + 12y + 9$**
 c. $h(5b + 3)$ **$-375b^3 - 675b^2 - 435b - 90$**

32. $f(t) = \frac{4t + 11}{3t^2 + 5t + 1}$
 a. $f(-6)$
 b. $f(4t)$
 c. $f(3 - 2a)$

33. $g(x) = \frac{3x^3}{x^2 + x - 4}$
 a. $g(-2)$
 b. $g(5x)$
 c. $g(8 - 4b)$

34. $h(x) = 16 - \frac{12}{2x + 3}$
 a. $h(-3)$
 b. $h(6x)$
 c. $h(10 - 2c)$

35. $f(x) = -7 + \frac{6x + 1}{x}$
 a. $f(5)$
 b. $f(-8x)$
 c. $f(6y + 4)$

36. $g(m) = 3 + \sqrt{m^2 - 4}$
 a. $g(-2)$ **3**
 b. $g(3m)$ **$3 + \sqrt{9m^2 - 4}$**
 c. $g(4m - 2)$ **$3 + 4\sqrt{m^2 - m}$**

37. $t(x) = 5\sqrt{6x^2}$
 a. $t(-4)$ **$20\sqrt{6}$**
 b. $t(2x)$ **$10|x|\sqrt{6}$**
 c. $t(7 + n)$ **$5|7 + n|\sqrt{6}$**

38. **مشغلات الأصوات الرقمية** يُمكن تمثيل مبيعات مشغلات الأصوات الرقمية بملايين الدولارات لمدة خمسة أعوام باستخدام $f(t) = 24t^2 - 93t + 78$, حيث ترمز t إلى العام. بيانات المبيعات الفعلية مبينة في الجدول. (مثال 4)

عام	المبيعات($)
1	1 مليون
2	3 مليون
3	14 مليون
4	74 مليون
5	219 مليون

a. أوجد $f(1)$ و $f(5)$. **9$ ملايين؛ 213$ مليون** **انظر الهامش.**

b. هل تعتقد أن النموذج أكثر دقة للأعوام السابقة أو الأعوام الأخيرة؟ اشرح الإجابة.

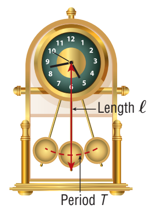
AL BL OL Differentiated Homework Options

المستوى	التقييم	خيار اليومين	
AL بالقرب من المستوى	1–53, 80, 81, 83–110	1–53 odd, 107–110	2–52 زوجي, 80, 81, 83–106
OL في المستوى	1–57 فردي, 58–62, 63–73 فردي, 75–77, 79–81, 83–110	1–53, 107–110	54–81, 83–106
BL المستوى المتقدم	54–110		

حدد مجال كل دالة. (مثال 5)
39–46. انظر الهامش.

39. $f(x) = \frac{8x+12}{x^2+5x+4}$
40. $g(x) = \frac{x+1}{x^2-3x-40}$
41. $g(a) = \sqrt{1+a^2}$
42. $h(x) = \sqrt{6-x^2}$
43. $f(a) = \frac{5a}{\sqrt{4a-1}}$
44. $g(x) = \frac{3}{\sqrt{x^2-16}}$
45. $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x+1}$
46. $g(x) = \frac{6}{x+3} + \frac{2}{x-4}$

47. **الفيزياء** المدة T للبندول هي مدة دورة واحدة، ويُمكن حسابها باستخدام الصيغة $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{9.8}}$ ، حيث ترمز ℓ إلى طول البندول و9.8 هو معدل تسارع الجاذبية بسبب الثقل في الأمتار المربعة في الثانية الواحدة. هل هذه الصيغة دالة لـ ℓ؟ إذا كان الأمر كذلك حدد المجال. إن لم يكن كذلك، فاشرح السبب. (مثال 5)
نعم؛ عينة إجابة: لأن الطول يجب أن يكون موجبًا، مجال الدالة هو $(0, \infty)$.



أوجد $f(-5)$ و$f(12)$ لكل دالة متعددة التعريف. (مثال 6)

48. $f(x) = \begin{cases} -4x+3 & \text{if } x < 3 \\ -x^3 & \text{if } 3 \le x \le 8 \\ 3x^2+1 & \text{if } x > 8 \end{cases}$ **23; 433**

49. $f(x) = \begin{cases} -5x^2 & \text{if } x < -6 \\ x^2+x+1 & \text{if } -6 \le x \le 12 \\ 0.5x^3 - 4 & \text{if } x > 12 \end{cases}$ **21; 157**

50. $f(x) = \begin{cases} 2x^2+6x+4 & \text{if } x < -4 \\ 6-x^2 & \text{if } -4 \le x < 12 \\ 14 & \text{if } x \ge 12 \end{cases}$ **24; 14**

51. $f(x) = \begin{cases} -15 & \text{if } x < -5 \\ \sqrt{x+6} & \text{if } -5 \le x \le 10 \\ \frac{2}{x}+8 & \text{if } x > 10 \end{cases}$ **$1; 8\frac{1}{6}$**

52. **ضريبة الدخل** ضريبة الدخل الفيدرالية لشخص أعزب في الولايات المتحدة الأمريكية في العام الحالي يُمكن تشكيلها باستخدام الدالة التالية، حيث ترمز x إلى الدخل وتمثل $T(x)$ إجمالي الضريبة. (مثال 6)

$T(x) = \begin{cases} 0.10x & \text{إذا كان } 0 \le x \le 7285 \\ 782.5 + 0.15x & \text{إذا كان } 7285 < x \le 31{,}850 \\ 4386.25 + 0.25x & \text{إذا كان } 31{,}850 < x \le 77{,}106 \end{cases}$

a. أوجد $T(7000)$ ، $T(10{,}000)$ and $T(50{,}000)$. **\$700, \$2282.5, \$16,886.25**

b. إذا بلغ دخل الشخص السنوي \$7285، فماذا تكون قيمة الضريبة؟ **\$728.50**

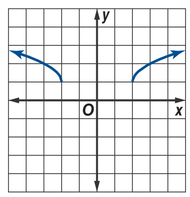
53. **وسائل النقل العام** يُمكن تمثيل استخدام وسائل النقل العام على النطاق الوطني باستخدام الدالة التالية. يُمثل عام 1996 من خلال $t = 0$. ويمثل $P(t)$ رحلات الركاب بالملايين. (مثال 6)

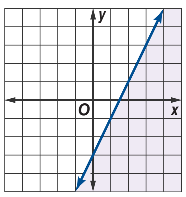
$P(t) = \begin{cases} 0.35t + 7.6 & \text{إذا كان } 0 \le t \le 5 \\ 0.04t^2 - 0.6t + 11.6 & \text{إذا كان } 5 < t \le 10 \end{cases}$

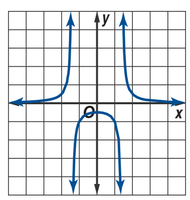
a. كم عدد رحلات الركاب تقريبًا في عام 1999؟ وفي عام 2004؟ **8.85 مليون؛ 9.36 مليون**

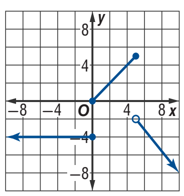
b. حدد مجال الدالة. **القيم الكاملة داخل الفترة [0, 10]**

استخدم اختبار الخط العمودي لتحديد ما إذا كان كل رسم بياني يمثل دالة. اكتب نعم أو لا. اشرح الإجابة. 54–57 انظر الهامش.

54.


55.


56.


57.


58. **الحدث الثلاثي** في الحدث الثلاثي يسبح الرياضيون 2.4 ميلًا ثم يركبون الدراجات لمسافة 112 ميلًا وأخيرًا يركضون 26.2 ميلًا. متوسط معدلات جيسي لكل ساق من الثلاثي مبينة في الجدول.

ساق	معدل
سباحة	4 mph
ركوب الدراجات	20 mph
ركض	6 mph

a. اكتب دالة متعددة التعريف لوصف المسافة D التي قطعتها جيسي في الوقت t. أدر t إلى أقرب عشر، إذا تطلب الأمر ذلك. **انظر الهامش.**

b. حدد مجال الدالة. **[0, 10.6]**

59. **الانتخابات** صف مجموعة أعوام الانتخابات الرئاسية ابتداء من عام 1792 برمز الفترة أو رمز بناء المجموعات. اشرح الإجابة. **انظر الهامش.**

60. **منصات الوجبات الخفيفة** عدد الطلاب الذين يعملون في منصات الوجبات الخفيفة في لعبة كرة القدم يمكن أن يُمثل من خلال $f(x) = \frac{x}{50}$، حيث ترمز x إلى عدد التذاكر المباعة. صف المجال ذو الصلة للدالة.
مجال الدالة هو مجموعة من الأعداد الكلية من 0 إلى القدرة الاستيعابية للملعب .

احذر!
خطأ شائع في التمارين 46–39. ذكر الطلاب بقاعدتين رئيستين.
1. لا يمكن أن يكون المقام صفراً.
2. لا يوجد جذر تربيعي حقيقي لرقم سالب.

تحليل الخطأ في التمرين 80. إجابتها تجاهلت الأرقام بين −2 و 2. ذكر الطلاب أن التقويم x التي تجعل المقام صفر، هي فقط المستثناة من المجال.

نصائح للمعلمين الجدد

العلاقات والدوال في التمرين 77 و 78، يمكن استخدام تحديد الأزواج الإحداثية كطريقة سريعة لتحديد ما إذا كانت التابع علاقة أم لا. ليس من الضروري دوماً رسم كل علاقة بيانياً.

إجابات إضافية

39. $(-\infty, -4) \cup (-4, -1) \cup (-1, \infty)$
40. $(-\infty, -5) \cup (-5, 8) \cup (8, \infty)$
41. $(-\infty, \infty)$
42. $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$
43. $(0.25, \infty)$
44. $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$
45. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$
46. $(-\infty, -3) \cup (-3, 4) \cup (4, \infty)$
54. نعم، لن يقطع خط رأسي الرسم البياني أكثر من مرة.
55. لا. سيمر الخط الرأسي عبر عدد لا نهائي من النقاط.
56. نعم، لن يقطع خط رأسي الرسم البياني أكثر من مرة.
57. لا. المحور الرأسي y هو خط رأسي ويمر عبر نقطتين في الرسم البياني، هما (0 ،0) و (−4 ،0).

59. $\{x \mid x = 4n + 1792, n \in \mathbb{W}\}$؛ إجابة نموذجية: لأن الإنتخابات الرئاسية تقام كل 4 سنوات، ولا يوجد نهاية محددة، ليس من العملي كتابة المجموعة باستخدام ترميز الفترات. أما إذا استخدم ترميز المجموعات، فيمكن اخذ الفترة في الاعتبار. وليس من الضروري استخدام فترة محددة.

63. $-5; -5; 0$

64. $\sqrt{a}; \sqrt{a+h}; \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$

65. $\frac{1}{a+4}; \frac{1}{a+h+4}$; $\frac{}{a^2+ah+8a+4h+16}$

66. $\frac{2}{5-a}; \frac{2}{5-a-h}$; $\frac{}{a^2-10a+ah-5h+25}$

67. $a^2-6a+8; a^2+2ah+h^2-6a-6h+8; 2a-6+h$

68. $-\frac{1}{4}a+6; \frac{-a-h}{4}+6; -\frac{1}{4}$

69. $-a^5; -a^5-5a^4h-10a^3h^2-10a^2h^3-5ah^4-h^5; -5a^4-10a^3h-10a^2h^2-5ah^3-h^4$

58a. $D(t) = \begin{cases} 4t \text{ if } 0 \le t \le 0.6 \\ 20t - 9.6 \text{ if } 0.6 < t \le 6.2 \\ 6t + 77.2 \text{ if } 6.2 < t \le 10.6 \end{cases}$

G12 GEN TE CH01.indb 10 8/22/2016 4:27:01 PM

إجابات إضافية

.70 $a^3 + 9; a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 + 9; 3a^2 + 3ah + h^2$

.71 $7a - 3; 7a + 7h - 3; 7$

.72 $5a^2; 5a^2 + 10ah + 5h^2; 10a + 5h$

.73 $a^3; a^3 + 3a^2h + h^3; 3a^2 + 3ah + h^2$

.74 $11; 11; 0$

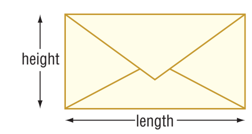
.61 **الحضور** ظهر امتياز شيكاغو كابز منذ 1874. يمكن تمثيل الحضور الإجمالي للموسم للألعاب الرئيسية من خلال $f(x) = 70{,}050x - 137{,}400{,}000$، حيث تمثل x إلى العام. صف المجال ذا الصلة للدالة.
$D = \{x \mid x \geq 1874,\ x \in \mathbb{W}\}$

.62 **المحاسبة** أصول العمل التجاري مثل المعدات أو البلى أو الإهلاك بمرور الزمن. تتمثل إحدى الطرق لحساب الإهلاك في طريقة الخط المستقيم باستخدام قيمة الحياة المقدرة للأصل. افترض أن $v(t) = 10{,}440 - 290t$ تصف القيمة $v(t)$ لماكينة التصوير بعد t شهر. صف المجال ذا الصلة للدالة.
$D = \{t \mid 0 \leq t \leq 36,\ t \in \mathbb{R}\}$

أوجد $f(a)$، $f(a + h)$، و $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ إذا كان $h \neq 0$.
.63–74 انظر الهامش

.63 $f(x) = -5$
.64 $f(x) = \sqrt{x}$
.65 $f(x) = \frac{1}{x + 4}$
.66 $f(x) = \frac{2}{5 - x}$
.67 $f(x) = x^2 - 6x + 8$
.68 $f(x) = -\frac{1}{4}x + 6$
.69 $f(x) = -x^5$
.70 $f(x) = x^3 + 9$
.71 $f(x) = 7x - 3$
.72 $f(x) = 5x^2$
.73 $f(x) = x^3$
.74 $f(x) = 11$

.75 **البريد** تتطلب خدمة البريد الأمريكي أن يكون للمظاريف نسبة أبعاد (الطول مقسوم على الارتفاع) تتراوح بين 1.3 إلى 2.5، بشكل عام. الحد الأدنى المسموح به للطول هو 5 بوصة والحد الأقصى للطول المسموح به هو $11\frac{1}{2}$ بوصة.

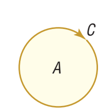


a. اكتب منطقة المظروف A كدالة لطول ℓ إذا كان معدل الارتفاع 1.8. حدد مجال الدالة.
$A(\ell) = \frac{\ell^2}{1.8}$; [5, 11.5]

b. اكتب منطقة المظروف A كدالة لارتفاع h إذا كان معدل الارتفاع 2.1. حدد مجال الدالة.
$A(h) = 2.1h^2$; [2.4, 5.5]

c. أوجد منطقة المظروف مع الحد الأقصى للارتفاع عند الحد الأقصى حول الأبعاد.
52.9 in^2

.76 **الهندسة** خذ بعين الاعتبار الدائرة أدناه بالمنطقة A والمحيط C.



a. مثل مساحة الدائرة كونها دالة عن المحيط.
$A = \frac{C^2}{4\pi}$

b. أوجد $A(0.5)$ و$A(4)$.
0.02, 1.27

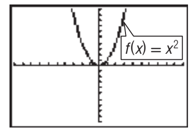
c. ماذا تلاحظ على المساحة عندما يزيد المحيط؟
بينما يتزايد المحيط، تتزايد المساحة أيضًا.

حدد ما إذا كانت جميع المعادلات هي دالة لـــ x. اشرح.

.77 $x = |y|$
.78 $x = y^3$
.77–78 انظر الوحدة 1 ملحق الإجابة.

.79 **تمثيلات متعددة** في هذه المسألة سوف تدرس مدى الدالة.

a. **الرسم البياني** استخدم آلة حاسبة بيانية لرسم $f(x) = x^n$ لقيم الأعداد الكاملة لـــ n من 1 إلى 6 بشكل عام.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

a–c. انظر الوحدة 1 ملحق الإجابة.

b. **المجدول** توقع مدى كل دالة بناء على الرسم البياني وجدولة كل من قيم n والمدى المتوافق.

c. **شفهيًا** قم بفرضية عن مدى $f(x)$ عندما تكون قيمة n زوجية.

d. **شفهيًا** قم بفرضية عن مدى $f(x)$ عندما تكون قيمة n فردية.
الإجابة النموذجية: عندما تكون قيمة n فردية $f(x) = x^n$، يكون المدى هو $(-\infty, \infty)$.

مسائل مهارات التفكير العُليا
استخدم مهارات التفكير العُليا

.80 **تحليل الخطأ** يقيم علي وميسون $f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$. يعتقد على أن مجال الدالة هو $(-\infty, -2)$ أو $(1, 1)$ أو $(2, \infty)$. يعتقد ميسون أن المجال هو $\{x \mid x \neq -2, x \neq 2, x \in \mathbb{R}\}$. هل أصاب أحدهم؟ اشرح.
انظر الوحدة 1 ملحق الإجابة.

.81 **الكتابة في الرياضيات** اكتب مجال ل $f(x) = \left(\frac{}{x + 3}\right)\left(\frac{1}{x + 1}\right)\left(\frac{}{x - 5}\right)$ من خلال رمز الفترة ومن خلال رمز بناء المجموعات. أي رمز تفضل؟ اشرح.
انظر الوحدة 1 ملحق الإجابة.

.82 **التحدي** $G(x)$ هي دالة حيث $G(1) = 1, G(2) = 2, G(3) = 3,$ و $G(3) = 3,$ $G(x + 1) = \frac{G(x - 2)\,G(x - 1) + 1}{G\,x}$ لـــ $x \geq 3$. أوجد $G(6)$.
$\frac{4}{7}$

الاستدلال حدد ما إذا كان كل عبارة *صحيحة* أو *خاطئة* مع دالة من مجموعة X إلى المجموعة Y. إذا كانت العبارة خاطئة، فأعد كتابته للحصول على العبارة الصحيحة.

.83 يجب أن يتوافق كل عنصر في X مع عنصر واحد فقط في Y. **صحيح**

.84 يجب أن يتوافق كل عنصر في Y مع عنصر في X.
انظر الوحدة 1 ملحق الإجابة.

.85 لا يجوز أن يتوافق عنصرين أو أكثر في X مع نفس العنصر في Y.
انظر الوحدة 1 ملحق الإجابة.

.86 لا يجوز أن يتوافق عنصرين أو أكثر في Y مع نفس العنصر في X. **صحيح**

الكتابة في الرياضيات شرح كيف يُمكنك تحديد دالة موصوفة بأنها كل مما يلي:

.87 وصف شفهي للمدخلات والمخرجات
.88 مجموعة من الأزواج المرتبة
.89 جدول قيم
.90 رسم بياني
.91 معادلة

.87–91 انظر الوحدة 1 ملحق الإجابة.

المراجعة الشاملة

أوجد الانحراف القياسي لكل بيانات السكان. (الدرس 0–8)

.92 $\{200, 476, 721, 579, 152, 158\}$ **223.14**

.93 $\{5.7, 5.7, 5.6, 5.5, 5.3, 4.9, 4.4, 4.0, 4.0, 3.8\}$ **0.73**

.94 $\{369, 398, 381, 392, 406, 413, 376, 454, 420, 385, 402, 446\}$ **25.31**

.95 **بيسبول** ما عدد الفرق المختلفة المكونة من 9 لاعبين التي يُمكن تشكيلها إذا كان هناك 3 لاعبين لا يُمكنهم اللعب إلا كماسكين و4 لاعبين لا يُمكنهم اللعب إلا قاعدة أولى و6 لاعبين لا يُمكنهم اللعب إلا كرماه و14 لاعبًا يُمكنهم اللعب في أي من الأماكن 6 المتبقية؟ (الدرس 0–7) **216,216**

أوجد قيم **x** و **y** التي تجعل كل معادلة مصفوفة صحيحة. (الدرس 0–6)

.96 $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x-3 \\ y-2 \end{bmatrix}$ $\left(1\frac{2}{3}, 3\frac{2}{3}\right)$

.97 $\begin{bmatrix} 3y \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27+6x \\ 5y \end{bmatrix}$ $(-3.5, 2)$

.98 $[9 \quad 11] = [3x + 3y \quad 2x +$

استخدم أي طريقة لحل نظام المعادلات. حدد ما إذا كان النظام *متوافقأو تابعأو مستقلأو غير متوافق*. (الدرس 0–5)

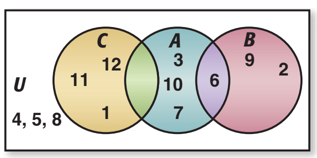
.99 $2x + 3y = 36$
$4x + 2y = 48$
(9, 6)؛ متوافق ومستقل

.100 $5x + y = 25$
$10x + 2y = 50$
العديد من الحلول اللانهائية؛والمتوافق والتابعة

.101 $7x + 8y = 30$
$7x + 16y = 46$
(2, 2)؛ متوافق ومستقل

.102 **العمل التجاري** يبيع متجر للكتب المستعملة 1400 كتاب ورقي في الأسبوع بسعر 2.25$ للكتاب الواحد. يقدر المالك أنه سيبيع 100 كتاب أقل مع كل 0.25$ زيادة في السعر. ما هو السعر الذي سيضاعف دخل المتجر؟ (الدرس 0–3)

استخدم مخطط فِن لإيجاد كل مما يلي. (الدرس 0–1)



.103 A **{1, 2, 4, 5, 8, 9, 11, 12}**

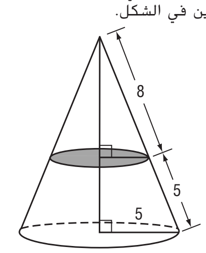
.104 $A \cup B$ **{2, 3, 6, 7, 9, 10}**

.105 $B \cap C$ **∅**

.106 $A \cap B$ **{6}**

مراجعة المهارات للاختبارات القياسية

.107 **SAT/ACT** مخروط دائري بقاعدة نصف قطرها 5 تم قطعه على النحو المبين في الشكل.



ما هو ارتفاع المخروط العلوي الأصغر؟ **B**

A $\frac{8}{13}$ **C** $\frac{96}{12}$ **E** $\frac{104}{5}$

B $\frac{96}{13}$ **D** $\frac{96}{5}$

.108 **المراجعة** أي من الدوال خطية؟ **G**

F $f(x) = x^2$ **H** $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

G $g(x) = 2.7$ **J** $g(x) = \sqrt{x - 1}$

.109 يسافر لويس من دنفر إلى دالاس من أجل اتفاقية. يمكنه أن يترك سيارته في قسم الانتظار لمدة طويلة بمطار دنفر أو في مرفق وقوف السيارات القريب. يتكلف قسم الانتظار لمدة طويلة 1$ بالساعة أو أي جزء منها بحد أقصى 6$ في اليوم. في مرفق وقوف السيارات يتعين عليه سداد 4$ لكل يوم أو جزء من اليوم. أي الموقفين أرخص، إذا عاد لويس بعد يومين و3 ساعات؟ **A**

A المرفق المكوكي

B موقف المطار

C نفس التكلفة.

D لا يُمكن تحديدها بالمعلومات المتاحة

.110 **مراجعة** أي عبارة تصف بشكل أفضل أثر تحريك المخطط $y = 2.24x + 16.45$ للأسفل وحدتين؟ **H**

F تتزايد نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y

G تظل نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x كما هي

H تتزايد نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x

J تظل نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y كما هي.

4 التقويم

سؤال آخر الدرس مُعطى التابع $f(x) = \frac{-4x}{\sqrt{x^2 - 1}}$. احسب قيمة $f(3)$. $-3\sqrt{2}$

تعليم BL متمايز

توسُّع اجعل الطلاب يعملون في مجموعات صغيرة. اطلب من كل مجموعة العثور على مثالين على الدوال التي مجالها كما يلي $(-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup (1, \infty)$. إجابة نموذجية:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}, g(x) = \frac{x - 4}{x^2 + 2x - 3}$$

G12 GEN TE CH01.indb 12 8/22/2016 4:27:05 PM

تحليل الرسوم البيانية للدوال والعلاقات

الدرس 1-2

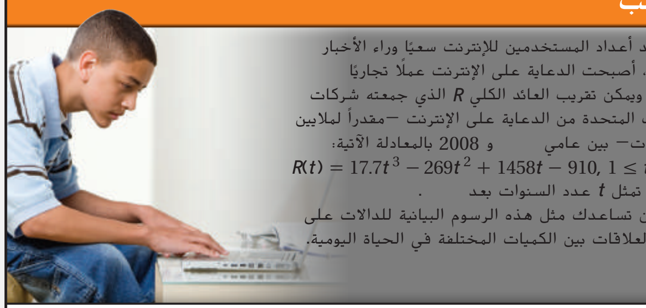
..قبل ذلك

- تعرفت على الدوال.
(الدرس 1-1)

..الآن

1. ستستخدم الرسوم البيانية للدوال لتقدير قيم الدالة وإيجاد المجالات والنطاقات و التقاطعات مع المحور الرأسي y وأصفار الدوال.
2. ستستكشف التناظر في الرسم البياني وتحدد الدوال الزوجية والفردية.

..السبب



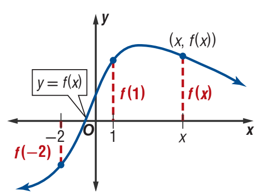
مع تزايد أعداد المستخدمين للإنترنت سعيًا وراء الأخبار والمتعة، أصبحت الدعاية على الإنترنت عملًا تجاريًا ضخمًا. ويمكن تقريب العائد الكلي R الذي جمعته شركات الولايات المتحدة من الدعاية على الإنترنت —مقدراً لملايين الدولارات— بين عامي و 2008 بالمعادلة الآتية:
$R(t) = 17.7t^3 - 269t^2 + 1458t - 910,\ 1 \leq t \leq$
، حيث تمثل t عدد السنوات بعد .
يمكن أن تساعدك مثل هذه الرسوم البيانية للدالات على تصور العلاقات بين الكميات المختلفة في الحياة اليومية.

المفردات الجديدة

أصفار (zeros)
جذور (roots)
تناظر محوري (line symmetry)
تناظر نقطي (point symmetry)
دالة زوجية (even function)
دالة فردية (odd function)

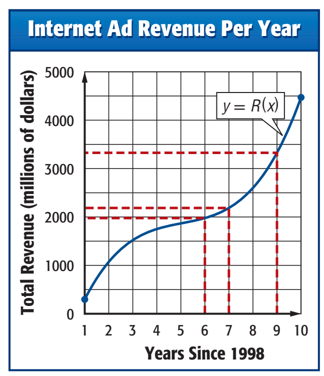
1 تحليل الرسوم البيانية للدوال

الرسم البياني للدالة f عبارة عن مجموعة مرتبة من الأزواج $(x, f(x))$ حيث تقع x في مجال الدالة . أي أن الرسم البياني للدالة f هو الرسم البياني للمعادلة $y = f(x)$. لذا فإن قيمة الدالة هي المسافة الموجهة y للرسم البياني من النقطة x على المحور الأفقي x كما هو موضح.



ويمكنك استخدام الرسم البياني لتقدير قيم الدالة.

مثال من الحياة اليومية 1 تقدير قيم الدوال



الإنترنت انظر الرسم البياني للدالة R المعروضة هنا.

أ. استخدم الرسم البياني لتقدير قيمة العائد الكلي من الدعاية على الإنترنت في عام 2007. تأكد من تقديرك من خلال الجبر.

بأتي العام 2007 بعد العام بتسعة أعوام. قيمة الدالة عند $x = 9$ تبدو حوالي 3300 مليون دولار، أي أن العائد الكلي للدعاية على الإنترنت في العام 2007 كان حاولي 3.3 مليار دولار.

لتأكيد هذه التقديرات من خلال الجبر، احسب $f(9)$.

$$f(9) = 17.7(9)^3 - 269(9)^2 + 1458(9) - 910$$
≈ 3326.3 مليون أو 3.326 مليار

وبالتالي، يعتبر التقدير البياني الذي يساوي 3.3 مليار دولار، تقديرًا معقولًا.

ب. استخدم الرسم البياني لتقدير العام الذي وصل فيه العائد الكلي للدعاية على الإنترنت إلى 2 مليار دولار. تأكد من تقديرك من خلال الجبر.

يظهر من الرسم البياني أن قيمة الدالة تصل إلى 2 مليار دولار أو 2, 000 مليون دولار، عندما تكون قيمة x بين 6 و 7. لذا، فإن العائد الكلي وصل لقيمة 2 مليار دولار في عام + 1998 أي عام 2004، ولكنه تجاوز هذه القيمة في نهاية العام 7 + 1998 أو عام 2005.

ولنتأكد من خلال الجبر، يجب حساب قيمة $f(6)$ و $f(7)$.

$f(6) = 17.7(6)^3 - 269(6)^2 + 1458(6) - 910$ أو مليون تقريباً
$f(7) = 17.7(7)^3 - 269(7)^2 + 1458(7) - 910$ أو 2186 مليون تقريباً

أو أن $f(6) \approx 1.977$ مليار، و $f(7) \approx 2.186$ مليار. لذا يعتبر التقدير البياني أن العائد الكلي للدعاية على الإنترنت وصل إلى 2 مليار دولار في عام 2005 تقديرًا معقولًا.

1 التركيز

المحاذاة **الرأسية**

قبل الدرس 2–1 تحديد الدوال

الدرس 2–1 استخدام الرسوم البيانية للدوال لتقدير التقويم التابع وإيجاد المجال والمدى و التقاطع مع المحور الر y وأصفار الدوال.
استكشاف التناظر في الرسم البياني وتحديدة الدوال الزوجية والفردية.

بعد الدرس 2–1 استكشاف الاستمرار والسلوك الطرفي والنهايات

2 التدريس

أسئلة داعمة

اجعل الطلاب يقرأون قسم لماذا؟ من الدرس.

اسأل:

- الرسم البياني الخطي لتابع الربح/الخسارة الكلية بدلالة عدد الوحدات المباعة x له نقاط الحصر مع المحور الأفقي x عند 200. ماذا يعني هذا؟ لن يكون هناك ربح إلا بعد بيع 200 وحدة.

(تابع في الصفحة التالية)

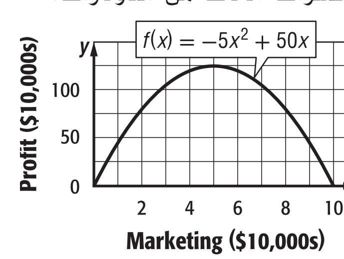
- يتناقص الرسم البياني لأوقات سباق الماراثون، مع تحديد وقت راحة قبل السباق، ثم يتزايد الرسم البياني، بحد أدنى يومين. فإذا كان وقت سباق الماراثون متغير مستقل، وكان وقت الراحة متغير تابع، ماذا يعني هذا؟ أسرع وقت سباق ماراثون هو الذي يحدث مع وقت الراحة الذي يساوي يومين. أوقات الراحة الأطول أو الأقصر من يومين، تزيد من وقت سباق الماراثون.

تقويم تكويني

استخدم تدريبات التمارين الموجهة بعد كل مثال لتحديد مدى فهم الطالب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 **الدعاية** التابع $F(X) = -5X^2 + 50X$ يقرب أرباح شركة ألعاب، حيث X هي التكلفة التسويقية، و $F(X)$ هي الربح. ويقاس كلا من التكلفة والربح بعشرات الآلاف من الدولارات.

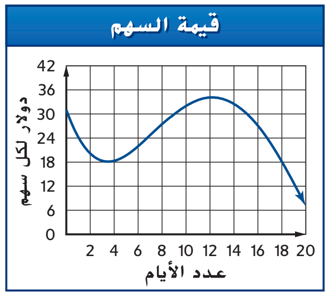


a. استخدم الرسم البياني لتقدير الربح عندما تكون قيمة التكلفة التسويقية 30,000$. تأكد من تقديرك جبرياً. 1,050,000$

b. استخدم الرسم البياني لتقدير التكلفة التسويقية عندما يكون الربح 1,250,000$. تأكد من تقديرك جبرياً. 50,000$

تمارين موجهة

1. **الأسهم المالية** قَيّم مستثمر متوسط القيمة اليومية لسهم ما خلال مدة 20 يوم. ويمكن تقدير بالتقريب قيمة السهم عن طريق الدالة $v(d) = 0.002d^4 - 0.11d^3 + 1.77d^2 - 8.6d + 31,\ 0 \le d \le 20$، حيث تمثل d يوم تقويم.



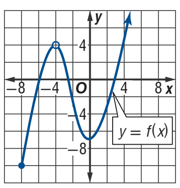
A. استخدم الرسم البياني لتقدير قيمة السهم في اليوم العاشر. تأكد من تقديرك من خلال الجبر. **$32**

B. استخدم الرسم البياني لتقدير عدد الأيام التي تخطت فيها قيمة السهم 30 دولارًا. تأكد من تقديرك من خلال الجبر.
اليوم 0، وبين التاسع والعاشر، وبين الخامس عشر والسادس عشر

ويمكنك أيضا استخدام الرسم البياني لتحديد مجال و نطاق الدالة. إلا إذا كان الرسم البياني محدد بدائرة أو نقطة على اليسار ، ويمك لك أن تفترض أن الدالة تمتد خارج حدود الرسم البياني.

مثال 2 تحديد المجال والنطاق

استخدم الرسم البياني للدالة f لتحديد المجال و نطاق الدالة.



المجال

- النقطة على الرسم البياني عند $(-8, -10)$ تشير إلى أن مجال الدالةf يبدأ من ويضم -8.
- الدائرة عند النقطة $(-4, 4)$ تشير إلى أن -4 ليست جزء من المجال.
- السهم الموجود في الجانب الأيمن من الرسم البياني يشير إلى أن الرسم البياني سيستمر في هذا الجانب بلا حد.

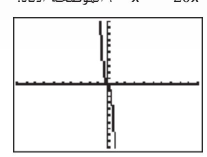
مجال الدالة f هو $[-8, -4) \cup (-4, \infty)$. وباستخدام رمز بناء المجموعات، يكتب هذا المجال كالتالي $\{x \mid -8 \le x,\ x \ne -4,\ x \in \mathbb{R}\}$.

النطاق

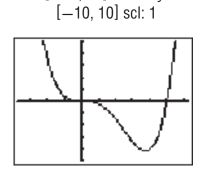
لا يمتد الرسم البياني لأسفل من $f(-8)$ أو -10. ولكن $f(x)$ تزداد بدون حدود لقيم أكبر وأكبر للمتغير x. لذا فإن مدى الدالة f $[-10,$.

نصيحة تكنولوجية

اختيار النافذة الملائمة نافذة العرض لرسم بياني ما عبارة عن صورة لرسم بياني بمجال ونطاق محددين. وبالتالي قد لا تمثل الرسم البياني بالكامل. لاحظ الفرق بين الرسوم البيانية التالية للدالة $f(x) = x^4 - 20x^3$، الموضحة أدناه.



[−10, 10] scl: 1 by
[−10, 10] scl: 1

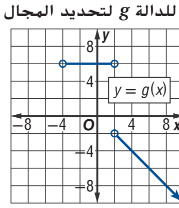


[−15, 25] scl: 4 by
[−20,000, 20,000] scl: 4000

تمارين موجهة

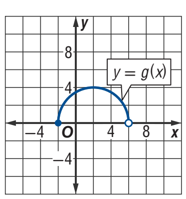
استخدم الرسم البياني للدالة g لتحديد المجال و النطاق لكل دالة.

2A.



D = (−4, 2) ∪ (2, ∞), R = [6] ∪ (−2, −∞)

2B.

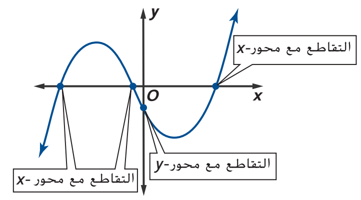


D = [−2, 6), R = [0, 4]

1 تحليل الرسوم البيانية للدوال

المثال الأول يعرض كيفية استخدام الرسم البياني لتقدير التقويم التابع. **المثال الثاني** يعرض كيفية استخدام الرسم البياني لتحديد مجال ومدى التابع. **المثال الثالث** يعرض كيفية إيجاد نقاط التقاطع مع المحور الرأسي y للدوال. **المثال الرابع** يعرض كيفية إيجاد أصفار تابع.

ويطلق على نقطة تلاقي أو تقاطع الرسم البياني مع المحور الرأسي y أو المحور الأفقي x لفظ تقاطع. يحدث التقاطع مع المحور الأفقي x عندما تكون $y = 0$. —y A يحدث التقاطع مع المحور الرأسي y عندما تكون $x = 0$. يمكن لأي رسم بياني لأي دالة أن يكون له نقطة تقاطع مع المحور الأفقي x 0, أو عدة نقاط أو يمكن ألا يكون له أي تقاطع مع المحور الأفقيx—، ولكن لا يمكن أن يكون له أكثر من نقطة تقاطع واحدة مع المحور الرأسي y.

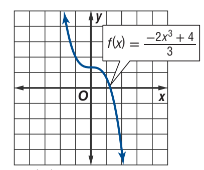


لتحديد نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y لرسم بياني لدالة f من خلال الجبر، عليك تحديد قيمة $f(0)$.

مثال 3 تحديد نقاط التقاطع مع المحور الرأسي y

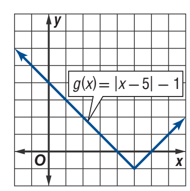
استخدم الرسم البياني لكل دالة لتقدير التقاطع مع المحور الرأسي y. ثم احسب التقاطع مع المحور الرأسي y من خلال الجبر.

.a



$g(0)$

.b



التقدير البياني

يظهر من الرسم أن f(x) تتقاطع مع المحور الرأسي y تقريباً عند $\left(0, 1\frac{1}{3}\right)$، لذا فإن التقاطع مع المحور الرأسي y يقع عند .

قم بحل المسألة من خلال الجبر

حساب قيمة $f(0)$.

$$f(0) = \frac{-2(0)^3 + 4}{3} \text{ أو } \frac{4}{3}$$

يقع التقاطع مع المحور الرأسي y عند

$\frac{4}{3}$ أو .

التقدير البياني

يظهر من الرسم البياني أن g(x) تتقاطع مع المحور الرأسي y عند (0, 4)، لذا فإن التقاطع مع المحور الرأسي y يقع عند 4.

قم بحل المسألة من خلال الجبر

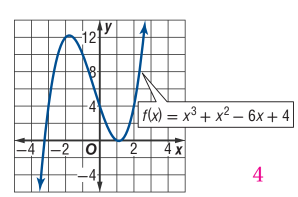
حساب قيمة $g(0)$.

$$g(0) = |0 - 5| - 1 \text{ أو } 4$$

يقع التقاطع مع المحور الرأسي y عند 4.

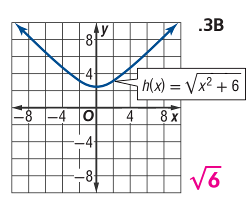
تمارين موجهة

.3A



4

.3B



$\sqrt{6}$

ويُطلق على نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x لدالة ما، اسم **أصفار** الدالة. ويُطلق على حلول معادلة الرسم البياني اسم **جذور** المعادلة. ولتحديد أصفار الدالة f، نساوى الدالة 0 ونحل المعادلة لتحديد قيمة المتغير المستقل.

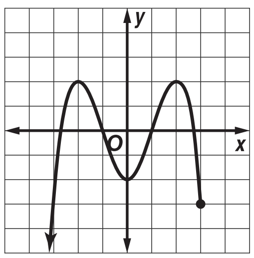
نصيحة للدراسة

تسمية المحاور على الرسم البياني

عند تسمية محور على الرسم البياني، تضع رمز المتغير الخاص بالمجال على المحور الأفقي x، ورمز المتغير الخاص بالنطاق على المحور الرأسي y. ونستخدم خلال هذا الكتاب متغيرات مختلفة لتمثيل المجال والنطاق. ولتحقيق الاتساق، ستجد أن xدائمًا ترمز إلى المحور الأفقي، أما y فترمز دائمًا للمحور الرأسي.

أمثلة إضافية

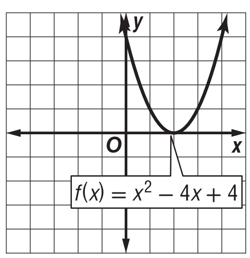
2 استخدم الرسم البياني للتابع f لتحديد المجال و المدى للتابع.



$[D = (-\infty, 3], R = (-\infty, 2$

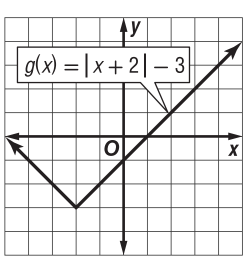
3 استخدم الرسم البياني لكل تابع لتقدير نقاط التقاطع مع المحور الرأسي y. ثم احسب نقاط الحصر مع المحور الرأسي y جبرياً.

.a



4

.b



−1

التدريس باستخدام التكنولوجيا

تقنية الرسم البياني استخدم برنامج تتبع يسمح للطلبة برؤية الإحداثيات كلما تحرك المؤشر فوق الرسم البياني. توفر هذه التقنية للطلبة تصحيح فوري لقيمهم المقدرة.

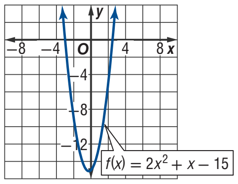
التركيز على المحتوى الرياضي

تمثيل الدوال يحتوي تمثيل الدوال البياني والجبري على العديد من المعلومات حول العلاقة بين المتغيرين.

- يمكننا الرسم البياني من تحديد الحدود القصوى والدنيا والأصفار و نقاط الحصر مع المحور الرأسي yبكل سهولة.
- و معادلة التابع تعطينا نفس المعلومات كذلك.

مثال 4 تحديد الأصفار

استخدم الرسم البياني للدالة $f(x) = 2x^2 + x - 15$ لتقدير أصفارها. ثم احسب أصفارها من خلال الجبر.



التقدير البياني

يظهر من الرسم البياني أن التقاطع مع المحور الأفقي x يقع عند -3 و 2.5.

قم بحل المسألة من خلال الجبر

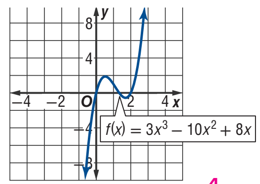
$2x^2 + x - 15 = 0$	لنقل أن $f(x) = 0$.
$(2x - 5)(x + 3) = 0$	حلّل إلى عوامل.
$2x - 5 = 0$ أو $x + 3 = 0$	خاصية الضرب في صفر
$x = 2.5$ $\quad$ $x = -3$	حل المعادلة لتحديد x.

أصفار f هي -3 و 2.5.

تمارين موجهة

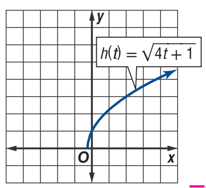
استخدم الرسم البياني لكل دالة لتقدير أصفارها بالتقريب. ثم احسب أصفارها من خلال الجبر.

أ4.



$0, \frac{4}{3}, 2$

ب4.

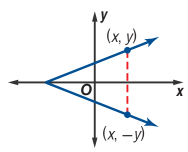
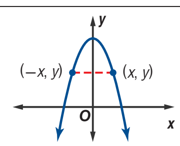
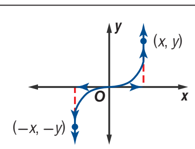


$-\frac{1}{4}$

2 تناظر الرسوم البيانية

الرسوم البيانية للعلاقات يمكن أن تتبع نوعين من التناظر. الرسوم البيانية ذات **التناظر المحوري** يمكن ثنيها على طول خط مستقيم، فيتطابق النصفين تمامًا. أما الرسوم البيانية ذات **التناظر النقطي** يمكن تدويرها حول نقطة ما $180°$ وستبدو كما هي. أكثر ثلاثة أشكال مشهورة من التناظر معروضة بالأسفل.

مفهوم أساسي اختبارات التناظر

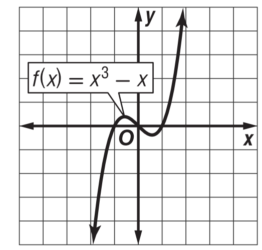
الاختبار البياني	النموذج	الاختباري الجبري
يكون الرسم البياني للعلاقة متناظرًا فيما يتعلق بالمحور الأفقي x فقط إذا كان لكل نقطة (x, y) تقع على الرسم البياني تقع النقطة $(x, -y)$ على الرسم البياني أيضاً.		استبدال y بقيم $-y$ ينتج معادلة مساوية.
يكون الرسم البياني للعلاقة متناظرًا فيما يتعلق بالمحور الرأسي y فقط إذا كان لكل نقطة (x, y) تقع على الرسم البياني تقع النقطة $(-x, y)$ على الرسم البياني أيضاً.		استبدال x بقيم $-x$ ينتج معادلة مساوية.
يكون الرسم البياني للعلاقة متناظرًا فيما يتعلق بنقطة الأصل فقط إذا كان لكل نقطة (x, y) تقع على الرسم البياني تقع النقطة $(-x, -y)$ على الرسم البياني أيضاً.		استبدال x بقيم $-x$ و y بقيم $-y$ ينتج معادلة مساوية.

نصيحة للدراسة

التناظر والعلاقات والدوال توجد العديد من العلاقات المتناظرة حول المحور الأفقي x و المحور الرأسي y و نقطة الأصل. ولكن الدالة الوحيدة التي لها أنواع التناظر الثلاثة، هي الدالة الصفرية، $f(x) = 0$.

مثال إضافي

4 استخدم الرسم البياني للتابع $f(x) = x^3 - x$ لتحديد أصفاره تقريبياً. ثم احسب أصفاره جبرياً.
$-1, 0, 1$



نصائح للمعلمين الجدد

إيجاد القيم بيانياً يجب على الطلاب استخدام مسطرة مدرجة عند محاولة إيجاد التقويم التابع بيانياً، مسطرة تصل لكل محور. هذا سيجعل الأمر أسهل وأكثر دقة.

2 تناظر الرسوم البيانية

المثال الخامس يعرض كيفية اختبار الرسم البياني بحثاً عن التناظر المحوري والنقطي. **المثال السادس** يعرض كيفية تحديد ما إذا كانت التابع زوجياً أم فردياً.

DifferentiatedInstruction

مقارب للمستوى

ضمن المستوى

المتعلمون البصريون أو الحسيون اجعل الطلاب يجدون المتغيرات المستقلة والتابعة التي تجذب انتباههم. وليصفوا هذه المتغيرات ويحددوا مجال ومدى منطقي لكل تابع. مثلاً مجال مكون من أرقام سالبة قد يكون ذو معنى لدرجات حرارة، ولكن ليس لوقت مستغرق في ممارسة لعبة ما. ثم اجعلهم يرسمون هذه الدوال بيانياً.

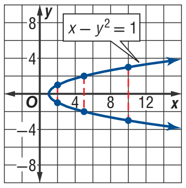
نصيحة للدراسة

التناظر قد تنتمي الدالة لأكثر من نوع من أنواع التناظر.

مثال 5 اختبار التناظر

استخدم الرسم البياني لكل معادلة لتتحقق من التناظر حول المحور الأفقي x و المحور الرأسي y ونقطة الأصل. ادعم إجابتك بالأرقام. ثم تحقق منها من خلال الجبر.

a. $x - y^2 = 1$



التحليل البياني

يبدو من الرسم البياني أنه متناظر فيما يتعلق بالمحور الأفقي x، لأن لكل نقطة (x, y) على الرسم البياني توجد نقطة $(x, -y)$ على الرسم البياني كذلك.

الإثبات الرقمي

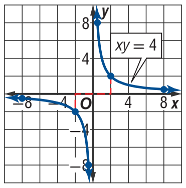
جدول قيم يدعم هذا الاستنتاج.

x	2	2	5	5	10	10
y	1	−1	2	−2	3	−3
(x, y)	(2, 1)	(2, −1)	(5, 2)	(5, −2)	(10, 3)	(10, −3)

اثبت الحل من خلال الجبر.

بما أن قيمة $= x - y^2$ مكافئة لقيمة $= x - y^2$، إذاً الرسم البياني متناظر حول المحور الأفقي x.

b. $xy = 4$



التحليل البياني

يبدو من الرسم البياني أنه متناظر حول نقطة الأصل، لأن لكل نقطة (x, y) على الرسم البياني توجد نقطة $(-x, -y)$ على الرسم البياني كذلك.

الإثبات الرقمي

جدول قيم يدعم هذه الفرضية.

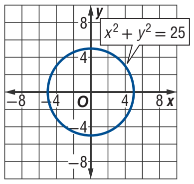
x	−8	−2	−0.5	0.5	2	8
y	−0.5	−2	−8	8	2	0.5
(x, y)	(−8, −0.5)	(−2, −2)	(−0.5, −8)	(0.5, 8)	(2, 2)	(8, 0.5)

اثبت الحل من خلال الجبر.

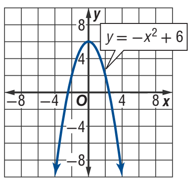
بما أن $(-x)(-y) = 4$ يكافئ $xy = 4$، إذاً الرسم البياني متناظر حول نقطة الأصل.

تمارين موجهة

5A.



5B.



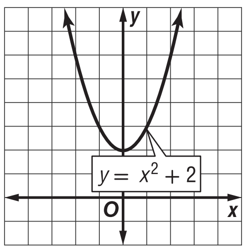
5A. بما أن $y = -(-x)^2 + 6$ يكافئ $y = -x^2 + 6$، إذاً الرسم البياني متناظر حول المحور الرأسي y.

5B. بما أن $x^2 + (-y)^2 = 25$ تكافئ $(-x)^2 + = 25$ و أيضاً تكافئ $y^2 = 25$ $(-x)^2 + (-y)^2 = 25$ وكذلك تكافئ $x^2 + y^2 = 25$، إذاً الرسم البياني متناظر حول المحور الأفقي x وحول المحور الرأسي y وحول نقطة الأصل، على الترتيب.

مثال إضافي

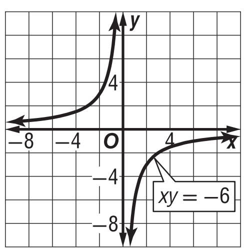
5 استخدم الرسم البياني لكل معادلة لتتحقق من التناظر حول المحور الأفقي x و المحور الرأسي y ونقطة الأصل. ادعم إجابتك بالأرقام. ثم تحقق منها جبرياً.

A.



بما أن $y = (-x)^2 + 2$ مكافئة لـ $y = x^2 + 2$. إذن الرسم البياني متناظر حول المحور الرأسي y.

B.



بما أن $(-x)(-y) = -6$ يكافئ $xy = 6$. إذاً الرسم البياني متناظر حول نقطة الأصل.

قد يكون الرسم البياني للدالة متناظر فيما يتعلق بالمحور الرأسي y أو نقطة الأصل. ويطلق على هذه الدوال أسماء خاصة.

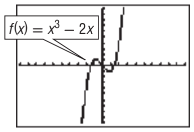
مفهوم أساسي الدوال الزوجية والفردية

نوع الدالة	الاختبار الجبري
الدوال المتناظرة حول المحور الرأسي y تسمى **دوال زوجية**.	لكل قيمة x في مجال الدالة f, $f(-x) = f(x)$.
الدوال المتناظرة حول نقطة الأصل تسمى **دوال فردية**.	لكل قيمة x في مجال الدالة f, $f(-x) = -f(x)$.

مثال 6 حدد الدوال الزوجية والفردية

حاسبة بيانية ارسم الدوال الآتية. حلّل الرسم البياني لتحديد ما إذا كانت الدالة زوجية، أو فردية، أو ليست أياً منهما. اثبت الحل من خلال الجبر. إذا كانت الدالة فردية أو زوجية، فصف تماثل الرسم البياني للدالة.

a. $f(x) = x^3 - 2x$



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

يبدو أن الرسم البياني للدالة متناظر حول نقطة الأصل. اختبار هذه الفرضية.

$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)$ ضع $-x$ بدلاً من x.

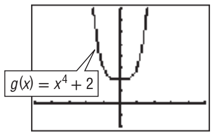
$= -x^3 + 2x$ التبسيط.

$= -(x^3 - 2x)$ خاصية التوزيع

$= -f(x)$ الدالة الأصلية $f(x) = x^3 - 2x$

الدالة فردية حيث أن $f(-x) = -f(x)$. بالتالي، الرسم البياني للدالة متناظر حول نقطة الأصل.

b. $g(x) = x^4 + 2$



[−5, 5] scl: 1 by [−2, 8] scl: 1

يبدو أن الرسم البياني للدالة متناظر حول المحور الرأسي y. اختبار هذه الفرضية.

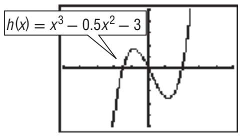
$g(-x) = (-x)^4 + 2$ ضع $-x$ بدلاً من x.

$= x^4 + 2$ التبسيط.

$= g(x)$ الدالة الأصلية $g(x) = x^4 + 2$

الدالة زوجية، حيث أن $g(-x) = g(x)$. بالتالي، الرسم البياني للدالة متناظر حول المحور الرأسي y.

c. $h(x) = x^3 - 0.5x^2 - 3x$



[−5, 5] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

يبدو أن الرسم البياني للدالة قد يكون متناظر حول نقطة الأصل. اختبر هذه الفرضية من خلال الجبر.

$h(-x) = (-x)^3 - 0.5(-x)^2 - 3(-x)$ ضع $-x$ بدلاً من x.

$= -x^3 - 0.5x^2 + 3x$ التبسيط.

بما أن $-h(x) = -x^3 + 0.5x^2 + 3x$ الدالة ليست زوجية أو فردية، لأن $h(-x) \neq h(x)$ و $h(-x) \neq -h(x)$.

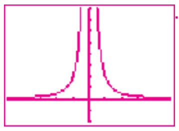
نصيحة تعليمية

الدوال الزوجية والفردية من الهام للغاية التأكد من التناظر من خلال الجبر. فالرسوم البيانية التي تبدو متناظرة قد لا تكون كذلك فعلياً.

تمارين موجهة

6A. $f(x) = \frac{2}{x^2}$ **6B.** $g(x) = 4\sqrt{x}$ **6C.** $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$

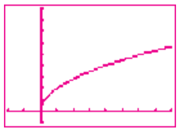
6A.


[−5, 5] scl: 1 by [−2, 8] scl: 1

$f(-x) = \frac{2}{(-x)^2}$
$= \frac{2}{x^2}$
$= f(x)$

الدالة زوجية والرسم البياني متناظر حول المحور الرأسي y.

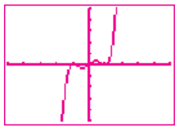
6ب.


[−2, 8] scl: 1 by [−2, 18] scl: 2

$g(-x) = 4\sqrt{(-x)}$
$= 4\sqrt{-x}$

الدالة ليست زوجية أو فردية.

6ج.


[−5, 5] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

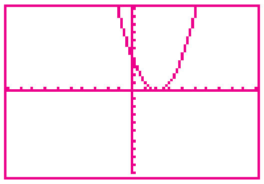
$h(-x) = (-x)^5 - 2(-x)^3 + (-x)$
$= -x^5 + 2x^3 - x$
$= -h(x)$

الدالة فردية والرسم البياني متناظر حول نقطة الأصل.

مثال إضافي

6 ارسم التابع باستخدام الآلة الحاسبة البيانية. حلل الرسم البياني لتحديد ما إذا كانت التابع زوجي، أو فردي، أو *ليست أياً منهما*. اثبت الحل جبرياً. إذا كانت التابع فردياً أو زوجياً، صف تماثل الرسم البياني للتابع.

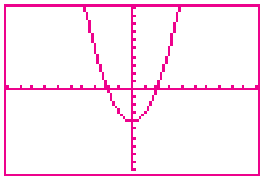
a. $f(x) = x^2 - 4x + 4$


[−10,10] scl: 1 by [−10,10] scl: 1

$f(-x) = (-x)^2 - 4(-x) + 4$
$= x^2 + 4x + 4$

التابع ليست زوجياً أو فردياً.

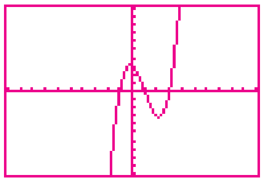
b. $f(x) = x^2 - 4$


[−10,10] scl: 1 by [−10,10] scl: 1

$f(-x) = (-x)^2 - 4$
$= x^2 - 4$
$= f(x)$

التابع زوجي والرسم البياني متناظر حول المحور الرأسي y.

c. $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$


[−10,10] scl: 1 by [−10,10] scl: 1

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 - (-x) + 3$
$= x^3 - 3x^2 + x + 3$

التابع ليست زوجياً أو فردياً.

تعليم متمايز أعلى من المستوى

المتعلمون السمعيون/الموسيقيون وَقِّت مقطوعة موسيقية كلاسيكية لتحديد نقطة منتصف المسافة. اجعل الطلاب يحددون مستوى "الطاقة" لكل 15 ثانية على ورقة رسم بياني. فاجعلهم يضعون علامة تحت المحور الأفقي x كلما سمعوا نغمة بطيئة أو حزينة، وعلامة فوق المحور الأفقي x كلما سمعوا نغمة سريعة أو مبهجة. تأكد من أن رسمهم يوضح نقطة منتصف المسافة على المحور الرأسي y. بعد انتهاء الطلاب من استماعهم ورسمهم، اطلب منهم وصف التشابهات التي قد يرونها وإذا ما كان الرسم البياني زوجي أو فردي أو ليس أي منهما. اسألهم ما إذا كانوا يحبون الموسيقى "زوجية" أم "فردية".

3 تمرّن

تقويم تكويني

استخدم التمارين من 1–41 لتتحقق من فهم الطلاب.

ثم استخدم الجدول بالأسفل لتضع تقييمك للطلبة.

تنبيه للتمرين

المسطرة المدرجة أثناء قيام الطلاب بتقدير التقويم التابع على الرسم البياني في التمارين 1–6، ذكرهم باستخدام المسطرة المدرجة لزيادة دقة نتائجهم.

إجابات إضافية

7a. 36,000 طن، 46,000 طن، 54,000 طن؛ 35,750 طن، 46,082 طن، 53,113 طن

7b. حول عام 2004. $x = 11; f(10) = -0.0013(10)^4 + 0.0513(10)^3 - 0.662(10)^2 + 4.128(10) + 35.75 \approx 49; f(12) = -0.0013(12)^4 + 0.0513(12)^3 - 0.662(12)^2 + 4.128(12) + 35.75 \approx 52$

9. $D = (-\infty, \infty), R = [2, \infty)$

10. $D = (-\infty, \infty), R = [-3, \infty)$

11. $D = (-4, 4], R = [-1, 6]$

12. $D = (-\infty, 7], R = [-1] \cup (1, \infty)$

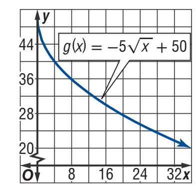
13. $D = [-5, \infty), R = [-2, \infty)$

14. $D = (-\infty, -5) \cup (-5, 3], R = [-5, \infty)$

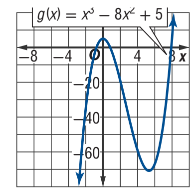
التمارين

استخدم الرسم البياني لكل دالة لتقدير قيم الدالة المشار إليها. ثم تأكد من تقديرك من خلال الجبر. قَرِّب إلى أقرب جزء من مئة، إذا احتجت لذلك. (مثال 1)

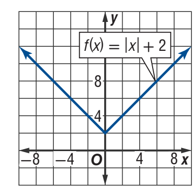
.1



.2

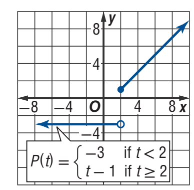


.3



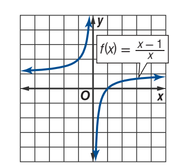
a. $f(-8)$ **10** **b.** $f(-3)$ **5** **c.** $f(0)$ **2**

.4

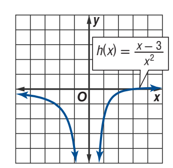


a. $P(-6)$ **−3** **b.** $P(2)$ **1** **c.** $P(9)$ **8**

.5

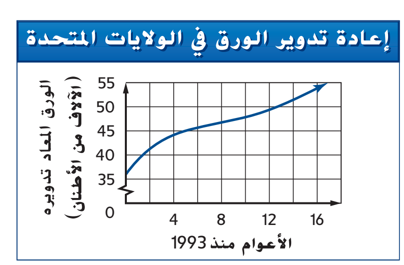


.6



a. $f(-3)$ **$\frac{4}{3}$** **b.** $f(0.5)$ **−1** **c.** $f(0)$ **غير مُعرف**

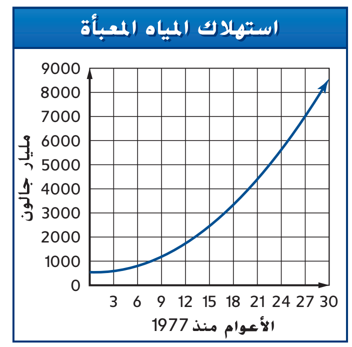
.7 **إعادة التدوير** كمية الورق المعاد تدويره في الولايات المتحدة مقاسة بالألف طن بين عامي 1993 و 2007 يمكن تمثيلها بالمعادلة $p(x) = -0.0013x^4 + 0.0513x^3 - 0.662x^2 + 4.128x + 35.75$، حيث تمثل x عدد الأعوام بعد 1993. (مثال 1) **a–b. انظر الهامش.**



a. استخدم الرسم البياني لتقدير كمية الورق المعاد تدويره في عام 1993 و 1999 و 2006. ثم اوجد كل قيمة من خلال الجبر.

b. استخدم الرسم البياني لتقدير العام الذي وصلت فيه كمية الورق المعاد تدويره إلى 50,000 طن. اثبت الحل من خلال الجبر.

.8 **المياه** يمكن تمثيل استهلاك المياه المعبأة بين عامي 1977 و 2006 باستخدام المعادلة $f(x) = 9.35x^2 - 12.7x + 541.7$، حيث x تمثل عدد الأعوام بعد 1977. (مثال 1)



a. استخدم الرسم البياني لتقدير كمية استهلاك المياه المعبأة في عام 1994. **3 مليار جالون**

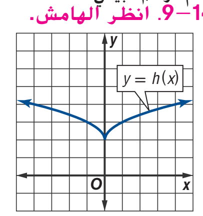
b. احسب كمية الاستهلاك في عام 1994 من خلال. قَرِّب إلى أقرب عشرة مليون جالون. **3.03 مليار جالون**

c. استخدم الرسم البياني لتقدير العام الذي وصلت فيه كمية استهلاك المياه المعبأة إلى 6 مليار جالون. اثبت الحل من خلال الجبر.

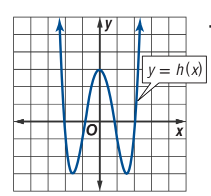
حوالي عام 2002 أو 25 = x; $f(24) = 9.35(24)^2 - 12.7(24) + 541.7 \approx 5623$; $f(26) = 9.35(26)^2 - 12.7(26) + 541.7 \approx 6532$

استخدم الرسم البياني للدالة h لتحديد المجال و النطاق لكل دالة. (مثال 2) **9–14. انظر الهامش.**

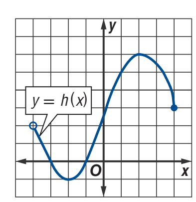
.9



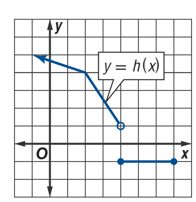
.10



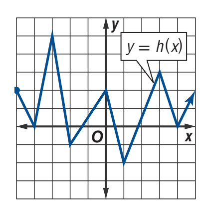
.11



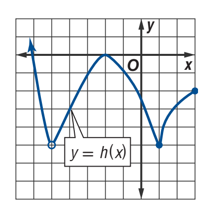
.12



.13



.14

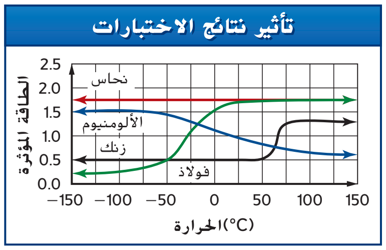


Differentiated Homework Options

مقارب للمستوى · أعلى من المستوى · ضمن المستوى

المستوى	التقييم	خيار اليومين	
مقارب للمستوى — مستوى المعالجة	1–41، 69–73، 75–110	odd, 1–41 107–110	2–40 زوجي، 69، 73–106
ضمن المستوى — في المستوى	1–43، odd، 44–47، 49–53 فردي، 54، 55، 57، 59–61، 63–67 فردي، 69–73، 75–110	1–41، 107–110	42–73، 75–106
أعلى من المستوى — المستوى المتقدم	42–110		

15. **الهندسة** أجريت عدة اختبارات على السلوك الفيزيائي لأربعة نماذج معدنية في درجات حرارة مختلفة، مقاسة بالدرجة المئوية. أما الطاقة المؤثرة أو الطاقة الممتصة بواسطة العينة أثناء الاختبار، فتم قياسها بالجول. ويعرض الشكل نتائج الاختبارات. (مثال 2) **أ–ب انظر الهامش.**



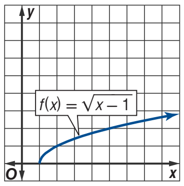
a. اذكر مجال ونطاق كل دالة.

b. استخدم الرسم البياني لتقدير الطاقة المؤثرة لكل معدن عند درجة حرارة صفر مئوية.

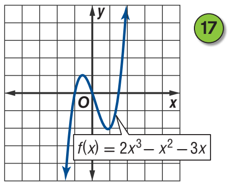
16–23. انظر الهامش.

استخدم الرسم البياني لكل دالة لتقدير التقاطع مع المحور الرأسي *y* والأصفار. ثم اوجد هذه القيم من خلال الجبر. (المثالين 3 و 4)

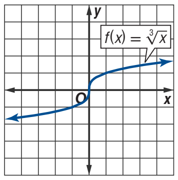
16.



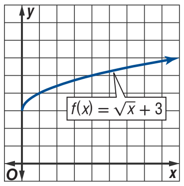
17



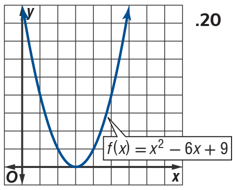
18.



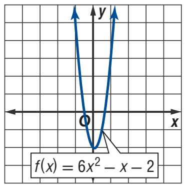
19.



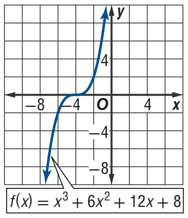
20.



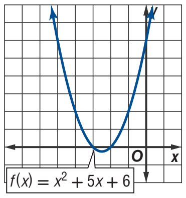
21.



22.

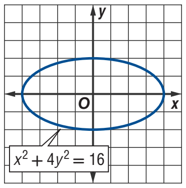


23.

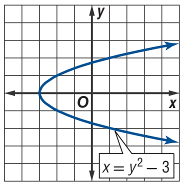


استخدم الرسم البياني لكل معادلة لتتحقق من التناظر حول المحور الأفقي *x* والمحور الرأسي *y* ونقطة الأصل. ادعم إجابتك بالأرقام. ثم تحقق منها من خلال الجبر. (مثال 5)

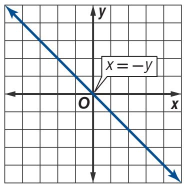
24.



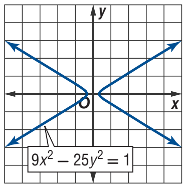
25.



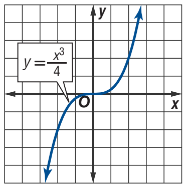
26.



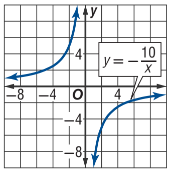
27.



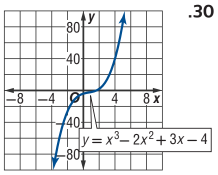
28.



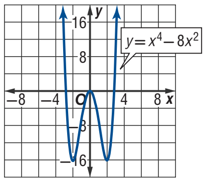
29.



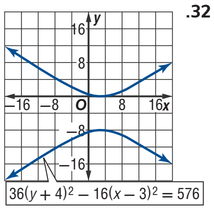
30.



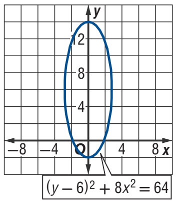
31.



32.



33.



24–33. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

حاسبة بيانية ارسم الدوال الآتية. حلّل الرسم البياني لتحديد ما إذا كانت الدالة زوجية، أو فردية، أو ليست أياً منهما. اثبت الحل من خلال الجبر. إذا كانت الدالة فردية أو زوجية، فصف تماثل الرسم البياني للدالة. (مثال 6)

34. $f(x) = x^2 + 6x + 10$

35. $f(x) = -2x^3 + 5x - 4$

36. $g(x) = \sqrt{x+6}$

37. $h(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

38. $h(x) = |8 - 2x|$

39. $f(x) = |x^3|$

40. $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$

41. $g(x)$

34–41. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

إجابات إضافية

15a. إجابة نموذجية:النحاس: $D = [-150, 150], R = [[1.75$؛ ألومنيوم: $D = [-150, 150],\ R = [0.6, 1.5]$؛ الزنك: $D = [-150, 150], R = [0.5, 1.3]$؛ الصلب: $D = [-150, 150], R = [0.2, 1.75]$

15b. إجابة نموذجية:النحاس:≈ 1.75 J, ألومنيوم ≈ 1.2 J, الزنك≈ 0.5 J, الصلب ≈ 1.5 J

16. لا يوجد تقاطع مع المحور الرأسي *y*، الأصفار: 1;

$$\sqrt{x-1} = 0$$
$$\left(\sqrt{x-1}\right)^2 = (0)^2$$
$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

17. نقاط التقاطع مع المحور الرأسي *y*: 0، الأصفار: $1, 0, \frac{3}{2}$;

$$2x^3 - x^2 - 3x = 0$$
$$x(2x-3)(x+1) = 0$$
$$x = 0 \text{ or } 2x - 3 = 0 \text{ or } x + 1 = 0$$
$$x = -1 \qquad x = \frac{3}{2}$$

18. نقاط الحصر مع المحور الرأسي *y* = 0، الأصفار: 0;

$$\sqrt[3]{x} = 0$$
$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = (0)^3$$
$$x = 0$$

19. نقاط الحصر مع المحور الرأسي *y*= 3، لا توجد أصفار

$$\sqrt{x} + 3 = 0$$
$$\sqrt{x} \neq -3$$

20. نقاط الحصر مع المحور الرأسي *y*=9، الأصفار: 3;

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$(x-3)^2 = 0$$
$$x - 3 = 0$$
$$x = 3$$

21. نقاط الحصر مع المحور الرأسي *y*=− 2، الأصفار: $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}$;

$$x^2 - x - 2 = 06$$
$$x + 1)(3x - 2) = 02)$$
$$2x + 1 = 0 \text{ or } 3x - 2 = 0$$
$$x = \frac{2}{3} \qquad x = -\frac{1}{2}$$

22. نقاط الحصر مع المحور الرأسي *y*= 8، الأصفار: 2−;

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$$
$$(x+2)^3 = 0$$
$$x + 2 = 0$$
$$x = -2$$

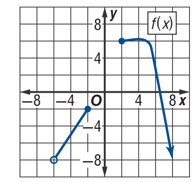
23. نقاط الحصر مع المحور الرأسي *y*= 6، الأصفار: 2−, 3−;

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$
$$(x+2)(x+3) = 0$$
$$x + 2 = 0 \text{ or } x + 3 = 0$$
$$x = -3 \qquad x = -2$$

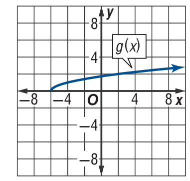
استخدم الرسم البياني لكل دالة لتقدير قيم الدالة المشار إليها.

42b 2– .42a. غير معرف 42c. غير معرف

.42



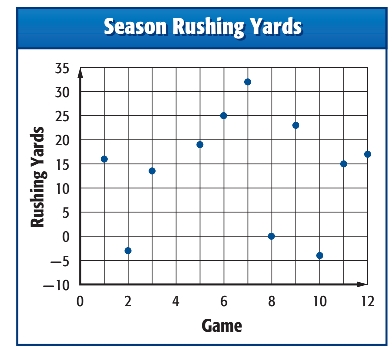
.43



b. $g(-8)$ b. $g(-6)$ c. $g(-2)$

a. $g(-8)$ b. $g(-6)$ c. $g(-2)$

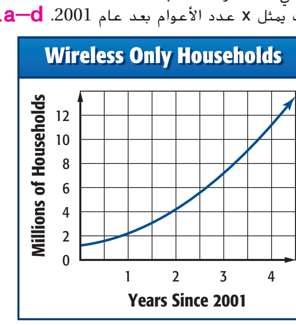
.44 **كرة القدم** يظهر عدد الياردات التي ركضها لاعب الهجوم الخلفي في كل مباراة في الموسم في الشكل الموضح. **a. انظر الهامش.**



a. اذكر مجال ومدى هذه العلاقة.

b. في أية مباراة لم يركض اللاعب على الإطلاق؟ **المباراة 8**

45 **الهواتف** يمكن تمثيل عدد الأسر التي لديها خدمات الهاتف اللاسلكي h بين عامي 2001 و 2005 بالمعادلة $h(x) = 0.5x^2 + 0.5x + 1.2$، حيث يمثل x عدد الأعوام بعد عام 2001. **a–d.انظرالهامش.**



a. اذكر المجال والنطاق التقريبي.

b. استخدم الرسم البياني لتقدير عدد الأسر التي لديها خدمات الهاتف اللاسلكي في عام 2003. ثم احسبها من خلال الجبر.

c. استخدم الرسم البياني لتقدير نقاط التقاطع مع المحور الرأسي y للدالة. ثم احسبها من خلال الجبر. ماذا يمثل التقاطع مع المحور الرأسي y؟

d. هل لهذه الدالة أصفار؟ إذا كانت الإجابة نعم يوجد، فقدِّر هذه الأصفار واشرح المعنى ورائها. إذا كانت الإجابة لا يوجد، فاشرح السبب.

a–d.انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

.46 **الدوال** اعتبر الدالة $f(x) = x^n$.

a. استخدم حاسبة بيانية لرسم الدالة $f(x)$ لقيم المتغير n في النطاق $\leq n \leq 1$ ، حيث $n \in \mathbb{N}$.

b. اذكر مجال ونطاق كل دالة.

c. صف تناظر كل دالة.

d. توقع مجال ونطاق وتناظر الدالة $f(x) = x^{35}$. اشرح إجابتك.

.47 **علم الأدوية** افترض أنه يمكن تمثيل عدد المليجرامات لمسكنات الألم في مجرى الدم بعد عدد ساعات x من أخذ الجرعة الدوائية بالمعادلة التالية $f(x) = 0.5x^4 + 3.45x^3 - 96.65x^2 + 347.7x$

47A–ب انظر الهامش.

a. استخدم حاسبة بيانية لرسم الدالة.

b. اذكر مجال الدالة. اشرح إجابتك.

c. ما هو الحد الأقصى التقريبي لكمية مسكن الألم بالميلليجرامات الموجودة في مجرى الدم؟

346 ميللي جرام تقريباً

حاسبة بيانية ارسم وحدد أصفار كل دالة. تأكد من إجاباتك من خلال الجبر.

.48 $f(x)$ .49 $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x + 3}$

.50 $h(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$ .51 $h(x) = 2\sqrt{x + 12} - 8$

.52 $g(x) = -12 + \dfrac{4}{x}$ .53 $g(x) = \dfrac{6}{x} + 3$

48–53. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

.54 **التليفزيون** يمكن تمثيل عدد الأسر h المشتركة في خدمة الكابل الأساسية بين عامي 1980 و 2006 بالمعادلة التالية $h(x) = -0.115x^2 + 4.43x + 25.6,\ 1980 \leq x \leq 2006$، حيث تمثل x عدد الأعوام بعد 1980. **انظر الهامش.**

a. استخدم الآلة الحاسبة راسمة الدوال لرسم الدالة.

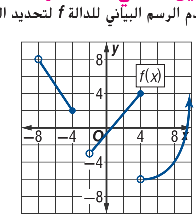
b. ما هي حول الأسر المشتركة في خدمة الكابل الأساسية عام 1999؟ قَرِّب إلى أقرب حول مئوية. **68%**

c. في أي عام/أعوام كانت حول المشتركين أكبر من 65؟

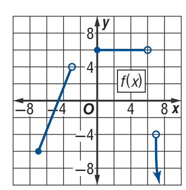
بين عامي 1994 و2004

استخدم الرسم البياني للدالة f لتحديد المجال و النطاق لكل دالة. **55–58. انظر الهامش.**

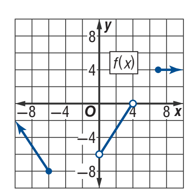
.55



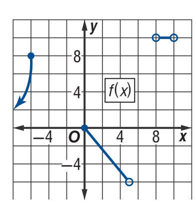
.56



.57



.58



احذر!

خطأ شائع في التمرين 44، قد يصف بعض الطلاب مجال العلاقة كالتالي [1, 12]. ذكر الطلاب أن العلاقة التي لها مجال مكون من نقاط فردية، علاقة *متقطعة*. ولا يمكن وصف مجال تابع متقطعة باستخدام فترة تتضمن عدد لا نهائي من القيم الحقيقية.

إجابات إضافية

.44a D = {1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
R = {16, −3, 13, 19, 25, 32, 0, 23, −4, 15 ,17}

.45a $D = \{x \mid 0 \leq x \leq 4,\ x \in \mathbb{R}\}$, $R = \{y \mid 1.2$ مليون $\leq y \leq 11.2$ مليون $, y \in \mathbb{R}\}$

.45b الإجابة النموذجية: 4.1 مليون ، 4.2 مليون

.45c الإجابة النموذجية: 1.1.1.2. يمثل نقاط الحصر مع المحور الرأسي y عدد الأسر بالملايين التي لديها خدمة الهاتف اللاسلكي فقط في عام 2001.

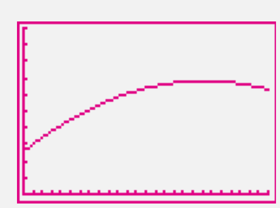
.45d لا; إجابة نموذجية: يحتوي المجال على عدد أسر أكبر من الصفر، لديهم خدمة الهاتف اللاسلكي فقط في كل الأعوام.

.47a

[−5, 15] scl: 2 by [−100, 400] scl: 50

.47b [0, 6]. يمثل المجال المرتبط الفترة الزمنية التي تبدأ عند إعطاء الجرعة لأول مرة ، وتنتهي عند خروج المسكن من مجرى الدم. لأن الزمن لا يمكن أن يكون سلبي. $x \geq 0$. كانت كمية مسكن الألم في مجرى الدم صفر عند إعطاء أول جرعة، عند $x = 0$. وأصبح صفر أيضاً عند $x = 6$. ولهذا، $x \leq 6$. بدمج هذه القيود، يصبح المجال الخاص بهذا الوضع هو $= \{x \mid 0 \leq x \leq 6\}$, $\{x \in \mathbb{R}$ أو [0, 6].

.54a



[0, 26] scl: 2 by [0, 100] scl: 10

.55 $D = (-8, -4] \cup (-2, \infty)$, $R = (-6, \infty)$

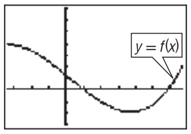
.56 $D = [-7, -3) \cup [0, 6) \cup (7, \infty)$, $R = (-\infty, 4) \cup [6]$

.57 $D = (-\infty, -6] \cup (0, 4) \cup [7, \infty)$, $R = [-8, \infty)$

.58 $D = (-\infty, -6] \cup [0, 5) \cup (8, 10)$, $R = (-\infty, 8] \cup [10]$

G12 GEN TE CH01.indb 21 8/22/2016 4:27:33 PM

59. **التعداد السكاني** يمكن تمثيل تغير حول التعداد السكاني في أعوام 1930 إلى 1940، و1940 إلى 1950 وهكذا لمدينة محددة في الولايات المتحدة، بين عامي 1930 إلى 2000 بالمعادلة $f(x) = 0.0001x^3 - 0.001x^2 - 0.825x + 12.58$، حيث تمثل x عدد الأعوام بعد عام 1930.



[−50, 100] scl: 15 by [−30, 70] scl: 10

a. اذكر المجال والنطاق التقريبي لهذا المجال.

b. استخدم الرسم البياني لتقدير نقاط التقاطع مع المحور الرأسي y. ثم احسب التقاطع مع المحور الرأسي y من خلال الجبر. ماذا يمثل التقاطع مع المحور الرأسي y؟

c. حدد ومثل أصفار الدالة.

d. استخدم المعادلة لتحديد تغير حول التعداد السكاني المتوقعة في عام 2080. هل تبدو هذه الإجابة واقعية؟ اشرح إجابتك.

a–d.انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

60. **البورصة** يمكن تمثيل حول تقلب سعر سهم p في سنة واحدة بالمعادلة التالية $p(x) = 0.0005x^4 - 0.0193x^3 + 0.243x^2 - 1.014x + 1.04$، حيث ترمز xإلى عدد الأشهر التالية لشهر يناير.

a–d. انظر الهامش.

a. استخدم حاسبة بيانية لرسم الدالة.

b. اذكر المجال والنطاق التقريبي.

c. استخدم الرسم البياني لتقدير نقاط التقاطع مع المحور الرأسي y. ثم احسب التقاطع مع المحور الرأسي y من خلال الجبر. ماذا يمثل التقاطع مع المحور الرأسي y؟

d. حدد ومثل أصفار الدالة.

61. **التمثيل المتعدد** في هذه المسألة سوف تتحقق من نطاق قيم الدالة، $f(x) = \frac{1}{x-2}$ مع الاقتراب x من 2.

a. **مُجدوّل** أنسخ واستكمل الجدول أدناه. اجمع قيمة أخرى يسار ويمين قيمة 2.

b–d. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$	100−	1000−	غير محدد	1000	100

a. **تحليلياً** استخدم الجدول من النقطة أ لوصف سلوك الدالة كلما اقتربت x من 2.

b. **بيانياً** ارسم الدالة بيانياً. هل الرسم البياني يدعم فرضيتك في النقطة b؟ اشرح.

c. **كلاميًا** ضع فرضيتك حول سبب اقتراب الرسم البياني للدالة من القيم المستنتجة في النقطة c، واشرح أي تعارضات في الرسم البياني.

62–69. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

حاسبة بيانية ارسم الدوال الآتية. حلّل الرسم البياني لتحديد ما إذا كانت الدالة زوجية، أو فردية، أو ليست أياً منهما. اثبت الحل من خلال الجبر. إذا كانت الدالة فردية أو زوجية، صف تماثل الرسم البياني للدالة.

62. $f(x) = x^2 - x - 6$

63. $g(n) = n^2 - 37$

64. $h(x) = x^6 + 4$

65. $f(g) = g^9$

66. $g(y) = y^4 + 8y^2 + 81$

67. $h(y) = y^5 - 17y^3 +$

68. $h(b) = b^4 - 2b^3 - 13b^2 + 14b + 24$

مسائل التفكير المرتب عالي المستوى

أسئلة مفتوحة **ارسم الرسم البياني الذي يطابق كل وصف.**

69. تمر عبر النقط $(-3, 8)$, $(-4, 4)$, $(-5, 2)$, $(-8, 1)$ ومتناظرة حول المحور الرأسي y

70. تمر عبر النقط $(0, 0)$, $(2, 6)$, $(3, 12)$, $(4, 24)$ ومتناظرة حول المحور الرأسي x

71 تمر عبر النقط $(-3, -18)$, $(-2, -9)$, $(-1, -3)$ ومتناظرة حول نقطة الأصل

72. تمر عبر النقط $(4, -16)$, $(6, -12)$, $(8, -8)$ وتمثل دالة زوجية

69–72. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

73. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لم يمكن لأي رسم بياني لأي دالة أن يكون له نقطة تقاطع مع المحور الأفقي x أو عدة نقاط أو يمكن ألا يكون له أي تقاطع مع المحور الأفقي، ولكن لا يمكن أن يكون له أكثر من نقطة تقاطع وحيدة مع المحور الرأسي y.

انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

74. **تحدي** استخدم حاسبة بيانية لرسم الدالة $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^3 - 4x^2 - 12x}$, وتوقع مجالها. ثم تأكد من المجال من خلال الجبر. اشرح استدلالك.

انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

الاستدلال حدد ما إذا كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة. اشرح استدلالك.

75. نطاق الدالة $f(x) = nx^2$, حيث n تمثل أي عدد صحيح $\{y \mid y \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$.

76. نطاق الدالة $f(x) = \sqrt{nx}$, حيث تمثل n أي عدد صحيح $\{y \mid y \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$.

77. كل الدوال الفردية متناظرة حول الخط $y = -x$.

78. إذا دارت دالة زوجية بزاوية $180n^\circ$ حول نقطة الأصل، حول n عدد صحيح، ستظل دالة زوجية.

75–78. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

الاستدلال إذا كانت $a(x)$ دالة فردية، فحدد ما إذا كان $b(x)$ فردية أو زوجية أو ليست أياً منهما، أو لا يمكن التحديد. اشرح استدلالك.

79–83. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

79. $b(x) = a(-x)$

80. $b(x) = -a(x)$

81. $b(x) = [a(x)]^2$

82. $b(x) = a(|x|)$

83. $b(x) = [a(x)]^3$

84–87. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

الاستدلال **اذكر ما إذا كان الرسم البياني لكل نوع من أنواع التناظر، يمثل دائماً، أو أحياناً دالة أو لا يمثلها أبدًا. اشرح استدلالك.**

84. متناظر حول للخط $x = 4$

85. متناظر حول للخط $y = 2$

86. متناظر حول للخط $y = x$

87. متناظر حول لكلا المحورين x وy

انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

88. **الكتابة في الرياضيات** هل يمكن لدالة ما أن تكون زوجية وفردية في نفس الوقت؟ اشرح استدلالك.

22 | **الدرس 2-1** | تحليل الرسوم البيانية للدوال والعلاقات

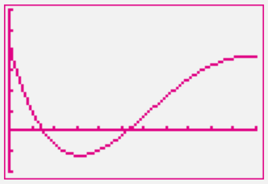
4 قوّم

تسمية الرياضيات اذكر الخطوات المطلوبة للتحقق جبرياً من حالة التابع سواء كانت فردي أو زوجي أو *ليست أيًا منهما.*

1. إذا كان التابع $f(-x) = f(x)$. فإن التابع يكون زوجي.
2. إذا كان التابع $f(-x) = -f(x)$. فإن التابع يكون فردياً.
3- إذا كان التابع $f(-x) \neq f(x)$ أو $-f(x)$ فإن التابع ليست زوجية أو فردية.

إجابات إضافية

.60a



[0, 11] scl: 1 by [−0.5, 1.5] scl: 0.25

.60b $D = [0, 11]$, $R = [-0.3, 1.04]$

.60c 1.04؛ إجابة نموذجية: يمثل نقاط الحصر مع المحور الرأسي y نسبة تأرجح الأسهم الأولية.

.60d 1.5.5.2. يمثل الأصفار الشهور التي عادت فيها الأسهم لقيمتها الأصلية.

مراجعة شاملة

اوجد قيمة كل دالة. (الدرس 1−1)

.89 $g(x) = x^2 - 10x + 3$
a. $g(2)$ **−13**
b. $g(-4x)$ $16x^2 + 40x + 3$
c. $g(1 +$ $9n^2 - 24n - 6$

.90 $h(x) = 2x^2 + 4x - 7$
a. $h(-9)$ **119**
b. $h(3x)$ $18x^2 + 12x - 7$
c. $h(2 + m)$ $2m^2 + 12m + 9$

.91 $p(x) = \frac{2x^3 + 2}{x^2 - 2}$
a. $p(3)$ **8**
b. $p(x^2)$ $\frac{2x^6 + 2}{x^4 - 2}$
c. $p(x +$ $\frac{2x^3 + 6x6 + {}^2x + 4}{x^2 + {}^2x - 1}$

.92 **الدرجات** درجات أعمال السنة لمادة الكيمياء لعدد 25 طالب هي كما يلي. أوجد مقياس الانتشار لمجموعة البيانات. (الدرس 8−0)

درجات منتصف الوحدة				
89	76	91	72	81
81	65	74	80	74
73	92	76	83	96
66	61	80	74	70
97	78	73	62	72

النطاق = 36، التباين ≈ 92.57، الانحراف القياسي ≈ 9.62

.93 **أوراق اللعب** كم عدد مجموعات أوراق اللعب (5 بطاقات) المحتملة − من مجموعة كاملة 52 بطاقة − التي تناسب كل وصف تالي. (الدرس 7−0)
a. 3 قلوب و 2 سَّباتي **22,308**
b. ورقة رقم 1 و 2 ولد و 2 ملك **144**
c. كل أوراق الشخصيات **792**

اوجد قيم التالي، إذا كان $A = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -5 & 11 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. (الدرس 6−0)

.94 $4A - 2B$ $\begin{bmatrix} -30 & 26 \\ -24 & 50 \end{bmatrix}$

.95 $3C + 2A$ **لا يوجد حل**

.96 $(B - 3A)-2$ $\begin{bmatrix} -42 & 32 \\ -34 & 72 \end{bmatrix}$

احسب كل رمز. (الدرس 4−0)

.97 $27^{\frac{1}{3}}$ **3**

.98 $64^{\frac{5}{6}}$ **32**

.99 $49^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{7}$

.100 1

.101 $25^{\frac{3}{2}}$ **125**

.102 $36^{-\frac{3}{2}}$ $\frac{1}{216}$

.103 **علم الوراثة** افترض أن R و W يمثلان 2 من الجينات التي يمكن أن يرثها نبات ما من والديه. تمثل حدود التوسع $(R + W)^2$ الأزواج المحتملة للجينات في الذرية. اكتب $(R + W)^2$ كمعادلة كثيرة الحدود. (الدرس 3−0) $R^2 + 2RW + W^2$

التبسيط. (الدرس 2−0)

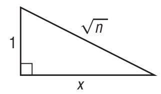
.104 $(2 + i)(4 + 3i)$ $5 + 10i$

.105 $(1 + 4i$

.106 $(2 - i)(3 + 2i)(1 - 4i)$ $12 - 31i$

مراجعة القدرات للاختبارات القياسية

.107 **SAT/ACT** في الشكل المجاور، إذا كان n رقم حقيقي أكبر من 1، ما هي قيمة x بدلالة n؟ **B**



A
B
C
D $n - 1$
E $n +$

.108 مراجعة أي متباينة تصف النطاق للدالة $f(x) = x^2 +$ ذات المجال $-2 < x < 3$؟ **J**

F $5 \leq y < 9$
G $2 < y < 10$
H $1 < y <$
J $1 \leq y <$

.109 أياً من الدوال الآتية دالة زوجية؟ **B**

a $f(x) = 2x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 8$
b $g(x) = 3x^6 + x^4 - 5x^2 + 15$
c $m(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 35x$
d $h(x) = 4x^6 + 2x^4 + 6x - 4$

.110 أي من الآتي يعتبر مجال للدالة $g(x)$؟ **F**

a $(-\infty, 0) \cup (0, 16) \cup (16,$
b $(-\infty, 0] \cup [16,$
c $(-\infty, -1) \cup (-1,$
d $(-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, \infty)$

تعليم متمايز

أعلى من المستوى

توسُّع افترض أن التابع $f(x)$ زوجي و أن التابع $g(x)$ فردي. فإذا كان $h(x) = f(x) \cdot g(x)$، هل التابع $h(x)$ زوجي أم فردي أم ليس أيًا منهما؟ برر إجابتك. فردي؛ إجابة نموذجية:

$$h(-x) = f(-x) \cdot g(-x)$$
$$= f(x) \cdot -(g(x))$$
$$= f(x) \cdot g(x)$$
$$= -h(x)$$

G12 GEN TE CH01.indb 23 8/22/2016 4:27:42 PM

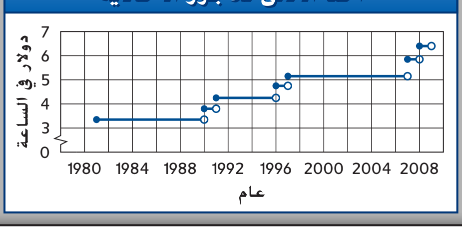
الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات 1-3

قبل ذلك:
- قمت بإيجاد المجال والنطاق للدالة باستخدام الرسم البياني لها. (الدرس 2–1)

الآن:
1. ستستخدم النهايات لتحديد اتصال دالة ما، وتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
2. ستستخدم النهايات لوصف السلوك الطرفي للدوال.

السبب؟
- منذ بدايات الثمانينات، ارتفع الحد الأدنى الحالي للأجور عدة مرات.ويعرض الرسم البياني الحد الأدنى للأجور كدالة مع الزمن هذه التغيرات في القيمة كأنها انقطاعات في الرسم البياني، مثل النقاط التالية $x = 1990$ و $x =$ و $x = 2008$.

الحد الأدنى للأجور الاتحادية

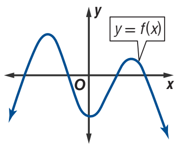


المفردات الجديدة
الدالة المتصلة (continuous function)
النهاية (limit)
الدالة المتقطعة (discontinuous function)
انقطاع لا نهائي (infinite discontinuity)
انقطاع القفزة (jump discontinuity)
انقطاع قابل للإزالة (removable discontinuity)
غير قابل للإزالة (nonremovable)
انقطاع (discontinuity)
السلوك الطرف (end behavior)

1 الاتصال

الرسم البياني **لدالة متصلة** لا يوجد به انقطاعات أو فجوات أو فراغات. يمكنك تتبع الرسم البياني لدالة متصلة بدون رفع قلمك عن الرسم.

أحد شروط اتصال دالة ما $f(x)$ عند النقطة $x = c$ هو أنه يجب أن تقترب الدالة من قيمة مميزة كلما اقتربت قيم x من القيمة c من اليسار واليمين. ويعرف الاقتراب من قيمة ما بغض النظر عن الوصول إليها فعلياً **بالنهاية**.

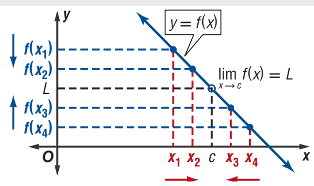


$f(x)$ is continuous for all x.

مفهوم أساسي النهايات

الكلمات إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من القيمة الفريدة L بينما تصل x لقيمة c من كلا الجانبين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

الرموز $\lim_{x \to c} f(x) = L$ والتي تُقرأ كما يلي نهاية الدالة $f(x)$ كلما اقتربت x من c هي L.

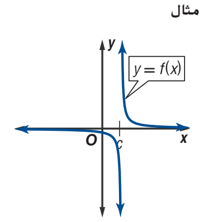


ويساعد في فهم المقصود بالدالة المتصلة من وجهة النظر الجبرية الاطلاع على الرسومات البيانية **للدوال المنقطعة**، أي الدوال غير المتصلة. وللدوال المنقطعة لعدة أنواع مختلفة.

مفهوم أساسي أنواع الانقطاع

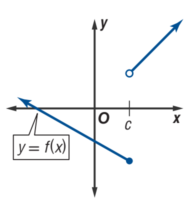
يكون للدالة **انقطاع لا نهائي** عند $x = c$ إذا كانت قيمة الدالة تزداد أو تقل بشكل لا نهائي كلما اقتربت x من قيمة c من اليمين واليسار.

مثال



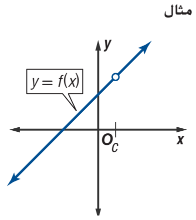
ويكون للدالة **انقطاع القفزة** عند $x = c$ إذا كانت نهايات الدالة عندما تقترب x من قيمة c من اليسار واليمين ذات قيم مختلفة.

مثال



ويكون للدالة **انقطاع قابل للإزالة** إذا كانت الدالة متصلة عند كل القيم، ما عدا فجوة عند $x = c$.

مثال



1 التركيز

المحاذاة الرأسية

قبل الدرس 1–3 أوجد المجال والمدى لتابع باستخدام الرسم البياني لها.

الدرس 1–3 استخدم النهايات لتحديد اتصال تابع ما. وتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة. استخدم النهايات لوصف السلوك الطرفي للدوال.

بعد الدرس 1–3 أوجد قمم وقيعان تابع ما.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اجعل الطلاب يقرأون قسم لماذا؟ من الدرس ويدرسوا الرسم البياني.

اسأل:
- ما هو قيمة صُغرى للأجور في عام 1984؟ تقريباً 3.50$.
- ما هو قيمة صُغرى للأجور في بداية عام 1996؟ تقريباً 5$

- إلام تشير الدائرة المغلقة الموجودة في الرسم البياني؟ إلام تشير الدائرة المفتوحة الموجودة في الرسم البياني؟ الدائرة المغلقة يوضح أن التابع لها نقطة نهاية متضمنة عند هذه النقطة. الدائرة المفتوحة يوضح أن التابع لها نقطة نهاية ليست متضمنة عند هذه النقطة.

1 الإتصال

المثال 1 و 2 يعرضا كيفية تحديد نقاط الإتصال والإنقطاع للدوال. **المثال الثالث** يعرض كيفية تقريب أصفار تابع على فترة محددة.

تقويم تكويني

استخدم تدريبات التمارين الموجهة بعد كل مثال لتحديد مدى فهم الطالب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 حدد ما إذا كان التابع $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ متصلة عند $x = \frac{1}{2}$. وضح مستخدماً اختبار الاتصال.

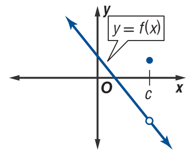
متصلة عند

$x = \frac{1}{2}$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{2}$ ، و $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

نصيحة دراسية

النهايات لا يوجد أي ارتباط بين وجود قيمة للدالة $f(x)$ عند $x = c$، وبين وجود قيمة لنهاية $f(x)$ عند اقتراب قيمة x من c.

لاحظ أنه في الرسوم البيانية للدوال ذات الانقطاع القابل للإزالة ستجد أن نهاية $f(x)$ عند النقطة c موجودة، ولكن إما قيمة الدالة عند النقطة c غير محددة أو — كما هو موضح بالرسم المجاور — قيمة الدالة $f(c)$ ليست كقيمة النهاية عند نفس النقطة c.



ويطلق على الانقطاع المتنقل واللا نهائي **الانقطاع غير القابل للإزالة**. حيث لا يمكن إزالة الانقطاع غير القابل للإزالة عن طريق إعادة تعريف الدالة عند هذه النقطة، إما لأن الدالة تصل لقيمتين مختلفتين من اليمين واليسار ، أو لا تصل لقيمة محددة على الإطلاق. ولكنها تزداد أو تقل بشكل لا نهائي.

تلك الملاحظات تؤدي إلى اختبار الاتصال التالي لدالة ما.

ملخص المفهوم اختبار الاتصال

تعتبر الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا كانت تحقق الشروط التالية.

- الدالة $f(x)$ معرفة عند النقطة c. أي أن $f(c)$ ذات قيمة محددة.
- تصل $f(x)$ لنفس القيمة من كلا جانبي c. أي أنها $\lim_{x\to c} f(x)$ لها قيمة محددة.
- القيمة التي تصل إليها $f(x)$ من كل جانب حول c هي $f(c)$. أي أن نها $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

مثال 1 تحديد اتصال نقطة

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة عند النقطة $x = 2$. وضح مستخدماً اختبار الاتصال.

تحقق من الشروط الثلاثة في اختبار الاتصال.

1. هل الدالة $f(2)$ لها قيمة؟

بما أن $= f(2)$، فإن الدالة معرفة ولها قيمة محددة عند $x = 2$.

2. هل $\lim_{x\to 2} f(x)$ ذات قيمة محددة؟

ضع جدول يعرض قيم $f(x)$ عندما تقترب قيمة x من 2 من الاتجاهين.

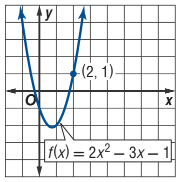
x تقترب من 2 ⟶ ⟵ x تقترب من 2

x	1.9	1.99	1.999	2.0	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.52	0.95	0.995		1.005	1.05	1.52

وتظهر المخرجات أن قيمة x تقترب من 2 من اليسار واليمين، وكذلك تقترب قيمة $f(x)$ من 1. ولذا نقدر أن قيمة $\lim_{x\to 2} f(x) =$.

3. هل $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$؟

بما أن قيمة $\lim_{x\to 2}(2x^2 - 3x - 1)$ مقدرة بـ 1، وبما أن $= f(2)$. نستنتج أن $f(x)$ متصلة عند $x = 2$.
ويدعم الرسم البياني للدالة $f(x)$ في الشكل هذا الاستنتاج.



الشكل 1.3.1

تمارين موجهة

حدد ما إذا كانت كل دالة من الدوال الآتية متصلة عند $x = 0$ أم لا . وضح مستخدماً اختبار الاتصال.

1A. $f(x) = x^3$

1B. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{if } x < 0 \\ x & \text{if } x \ge 0 \end{cases}$

1A. متصلة عند $x = 0$؛ $f(0) = 0$، $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$، و $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

1B. غير متصلة عند $x = 0$ ، حيث تصل قيمة $f(x)$ إلى $-\infty$ عندما تقترب قيمة x من الصفر من اليسار وتصل إلى صفر عندما تقترب قيمة x من الصفر من اليمين.

G12 GEN TE CH01.indb 25 8/22/2016 4:27:52 PM

إذا لم يتحقق شرط واحد فقط من الشروط، تصبح الدالة منقطعة عند $x = c$. وبفحص الدالة يمكن تحديد نوع الانقطاع عند هذه النقطة.

مثال 2 تحديد انقطاع نقطة

حدد ما إذا كانت كل دالة متصلة عند قيم x المحددة. علل مستخدمًا اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة منقطعة، حدد نوع الانقطاع، سواء كان لا نهائي أو متنقل أو قابل للإزالة.

a. $f(x)=\begin{cases}3x-2 & \text{if } x>-3\\ 2-x & \text{if } x\le -3\end{cases}$؛ **عند** $x = -3$

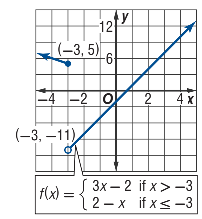
1. بما أن $f(-3) = 5$، فإن $f(-3)$ موجودة.

2. تحقق من قيم الدالة بالقرب من $f(-3)$.

x تقترب من -3 ← | → x تقترب من -3

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	5.1	5.01	5.001		-10.997	-10.97	10.7

وتظهر المخرجات أن قيمة $f(x)$ تقترب من 5 كلما اقتربت x من -3 من اليسار، وتقترب من كلما اقتربت $f(x)$ من -3 من اليمين. ولأن القيمتين ليستا متطابقتين، فإن $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ ليست موجودة. ولهذا فإن $f(x)$ منقطعة عند $x = -3$. ولأن $f(x)$ تقترب من قيمتين مختلفتين عند $x = -3$، فإن $f(x)$ دالة ذات انقِطاعٌ قافِز عند $x = -3$. ويدعم الرسم البياني للدالة $f(x)$ في الشكل هذا الاستنتاج.



الشكل 1.3.2

b. $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-9}$؛ **عند** $x = -3$ **و** $x = 3$

1. بما أن $f(-3)=\frac{0}{0}$ و$f(3)=\frac{6}{0}$، وكلاهما غير معرف، إذاً $f(-3)$ و $f(3)$ غير موجودين. ولذا فإن الدالة $f(x)$ منقطعة عند $x = -3$ وعند $x = 3$.

2. تحقق من قيم الدالة بالقرب من $f(-3)$.

x تقترب من -3 ← | → x تقترب من -3

x	−3.1	−3.01	−3.001	−3.0	−2.999	−2.99	−2.9
$f(x)$	−0.164	−0.166	−0.167		−0.167	−0.167	−0.169

تظهر المخرجات أن $f(x)$ تقترب من نهاية قريبة من -0.167 كلما اقتربت x من -3 من كلا الجانبين، لذا فإن $\lim\limits_{x\to -3} f(x) \approx -0.167$ أو $-\frac{1}{6}$.

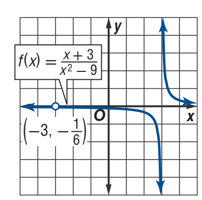
تحقق من قيم الدالة بالقرب من $f(3)$.

x تقترب من 3 ← | → x تقترب من 3

x	2.9	2.99	2.999	3.0	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	−10	−100	−1000		1000	100	10

تظهر المخرجات أن قيمة $f(x)$ تزداد في الاتجاه السالب كلما اقتربت قيمة x من 3 من اليسار. وكلما اقتربت قيمة x من 3 من اليمين، تزداد قيمة $f(x)$ في الاتجاه الموجب. لذا فإنه لا توجد قيمة لنهاية $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

3. ولأن $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ لها قيمة محددة ولكن $f(-3)$ غير محددة القيمة، تعتبر الدالة $f(x)$ ذات انقطاع قابل للإزالة عند $x = -3$. وبما أن $f(x)$ تقل بدون أي قيود كلما اقتربت x من 3 من اليسار وتزداد بدون أي قيود كلما اقتربت x من 3 من اليمين، تعتبر الدالة $f(x)$ ذات انقطاع لا نهائي عند $x = 3$. ويدعم الرسم البياني للدالة $f(x)$ في الشكل هذا الاستنتاج.



الشكل 1.3.3

تمارين موجهة

2A. $f(x)$؛ عند $x = 0$

2B. $f(x)=\begin{cases}5x+4 & \text{if } x>2\\ 2-x & \text{if } x\le 2\end{cases}$؛ عند $x = 2$

2A. منقطعة، لأن $f(0)$ غير محددة، و $f(x)$ تتصاعد بشكل لا نهائي كلما اقتربت x من الصفر من اليسار واليمين، لذا فإن الدالة $f(x)$ ذات انقطاع لا نهائي عند $x = 0$.

2B. منقطعة، لأن $f(x)$ تقترب من الصفر كلما اقتربت x من 2 من اليسار و من 14 كلما اقتربت x من 2 من اليمين، لذا فإن الدالة $f(x)$ ذات انقطاع القفزة عند $x = 2$.

مثال إضافي

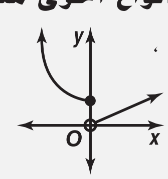
1 حدد ما إذا كانت كل تابع متصل عند التقويم x المعطاة. وضح مستخدماً اختبار الاتصال. وإذا كان التابع منقطع, حدد نوع الانقطاع، سواء كان *لا نهائي* أو *قافز* أو *قابل للإزالة*.

A. $f(x)=\frac{1}{x-1}$; at $x = 1$ منقطعة، لأن $f(1)$ غير محددة و كذلك تنقص قيمة $f(x)$ بلا نهاية كلما اقتربت قيمة x من 1 من اليسار وتزداد بلا نهاية كلما اقتربت قيمة x من 1 من اليمين. **لذا فالتابع** $f(x)$ ذات إنقطاع لا نهائي عند $x = 1$.

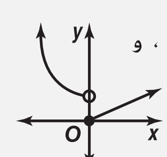
B. التابع $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$; at $x = 2$ منقطعة لأن $f(2)$ غير محددة وتقترب قيمة $f(x)$ من 0.25 كلما اقتربت قيمة x من 2 من اليمين واليسار، إذن التابع $f(x)$ ذو انقِطاعٌ قابلٌ للإزالة عند $x = 2$.

التركيز على المحتوى الرياضي

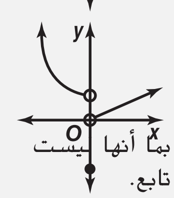
الاتصال يتضمن الانقِطاعٌ القافِز أنواع أخرى مثل



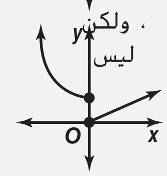
،



، و



بما أنها ليست تابع.



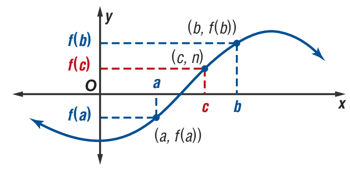
، ولكن ليس

وبالمثل، إذا كان الانقطاع قابل للإزالة، يمكن أن تعرف التابع عند ههذ النقطة، أو قد لا تعرف.

إذا كانت دالة ما متصلة، يمكنك تقريب موقع أصفارها باستخدام نظرية القيمة المتوسطة ونتيجتها نظرية تقريب أصفار الدالة.

مفهوم أساسي نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة و كانت $a < b$ وهناك قيمة n حيث تقع n بين $f(a)$ و ، إذاً هناك رقم c حيث $a < c < b$، و $f(c) = n$.



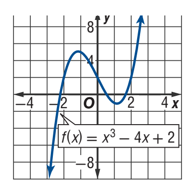
النتيجة: تقريب أصفار الدالة إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة، وكانت قيم كلاً من $f(a)$ و $f(b)$ ذواتا إشارات متضادة، إذاً فهناك على الأقل قيمة واحدة على الأقل c، حيث إن $a < c < b$ و . أي أن صفر الدالة يقع بين a و b.

مثال 3 الأصفار التقريبية

حدد بين أية أرقام متتابعة صحيحة تقع الأصفار الحقيقية لكل دالة في الفترة المحددة.

a. $f(x) = x^3 - 4x + 2$؛ $[-4, 4]$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	**-13**	**2**	5	**2**	**-1**	**2**	17	50

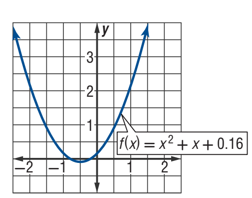


بما أن قيمة $f(-3)$ سالبة وقيمة $f(-2)$ موجبة، وطبقاً لنظرية تقريب أصفار الدالة، فإن الدالة $f(x)$ لها صفر يقع بين -3 و -2.
وقيمة $f(x)$ تتغير أيضًا إشارتها في $\le x \le 0$ و $\le x \le 1$.
وهذا يدل على وجود الأصفار الحقيقية في كل من الفترتين.

ويدعم الشكل المعروض للدالة $f(x)$ إلى اليمين الاستنتاج بأن هناك أصفار حقيقية بين -3 و -2، وبين 0 و ، وبين و2.

b. $f(x) = x^2 + x + 0.16$؛ $[-3, 3]$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	



قيم الدالة $f(x)$ لا تتغير إشارتها لقيم x المستخدمة.
وعلى الرغم من ذلك، عند اقتراب قيم x من -1 من اليسار فإن قيم $f(x)$ تتنازل، ثم تبدأ في التصاعد عندما تصل عند $x = 0$. لذا فيمكن وجود أصفار حقيقية بين الرقمين -1 و 0.
مثِّل الدالة بالرسم البياني للتأكد.

يتقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحور الأفقي x مرتين في الفترة $[-1,\ \ ]$، لذا فيوجد بالفعل أصفار حقيقية بين و 0.

تمارين موجهة

3A. $f(x) = \frac{x^2 - 6}{x + 4}$؛ $[-3, 4]$ **3 و -2, 2 و -3**

3B. $f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1$؛ $[-5, 0]$ **0 و -1**

27

نصيحة للدراسة

تقريب الأصفار عندما لا تتغير إشارة القيم على الرغم من أن تغيير إشارة القيم يشير *إلى* موقع صفر حقيقي، فإن عدم تغيير إشارة القيم لا يشير إلى عدم وجود أصفار حقيقية في هذه الفترة. وتعد أفضل طريقة للتحقق هي تتبع الرسم البياني للدالة.

مثال إضافي

3 حدد بين أية أرقام متتابعة صحيحة تقع الأصفار الحقيقية لكل تابع في الفترة المعطاة.

a. $f(x) = x^2 - x - \frac{3}{4}; [-2, 2]$
-1 و $0, 1$ و 2

b. $f(x) = x^3 + 2x + 5; [-2, 2]$
-2 و -1

نصائح للمعلمين الجدد

تغيرات الإشارة وضح للطلبة أنه لا يوجد تغيير في الإشارة في $f(x) = (x-1)^2$، ولكن يوجد صفر حقيقي مضاعف مرتين عند $x = 1$.

احذر!

النوافذ يظهر في نافذة العرض القياسية تقاطع واحد فقط في المثال الرابع. استخدم خيار Zoom In أو ZDecimal لضبط نافذة العرض لتنظر عن كثب للأصفار.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

الآلة الحاسبة راسمة الدوال اخبر الطلاب أنه يمكنهم إيجاد أصفار تابع ما عن طريق اختيار **zero** من قائمة **CALC** . سيسألهم التطبيق عن الحد الأيسر والذي يكون أي قيمة للمتغير x أقل من الصفر، والحد الأيمن، والذي يكون أي قيمة للمتغير x أعلى من الصفر. اشرح أن الآلة الحاسبة تستخدم مبدأ تقريب أصفار التابع لتحديد إذا كان هناك تغير في الإشارة، وبالتالي وجود صفر بين التقويم التابع المقابلة.

2 السلوك الطرفي

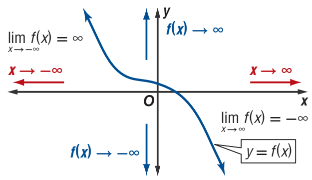
يصف **السلوك الطرفي** الدالة سلوكها عند أياً من طرفي الرسم البياني لها. أي أن السلوك الطرفي هو ما يحدث لقيمة الدالة $f(x)$ كلما ازدادت قيمة x أو نقصت بدون أي حدود — أي ازدادت للغاية أو نقصت حتى أصبحت سالبة أكثر وأكثر. ولوصف السلوك الطرفي لرسم بياني ما، يمكنك استخدام مبدأ النهاية.

قراءة الرياضيات

النهايات التعبير $\lim_{x\to\infty} f(x)$ يُقرأ كما يلي:
نهاية الدالة $f(x)$ كلما اقتربت x من اللانهاية الموجبة. التعبير $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ يُقرأ كما يلي:
نهاية الدالة $f(x)$ كلما اقتربت x من اللانهاية السالبة.

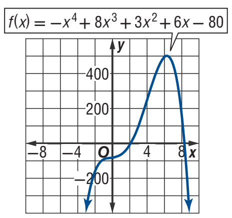
سلوك الطرف الأيمن	سلوك الطرف الأيسر
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$	$\lim_{x\to\infty} f(x)$

أحد احتمالات السلوك الطرفي للرسم البياني لدالة ما لقيمة $f(x)$ هي أن تزداد أو تنقص بدون أي حد أو قيد. ويوصف هذا السلوك الطرفي بأن $f(x)$ تصل إلى اللانهاية الموجبة أو السالبة.



مثال 4 الرسوم التي تصل إلى اللانهاية

استخدم الرسم البياني للدالة $f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$ لوصف السلوك الطرقي الخاص بها. أثبت فرضيتك بالأرقام.



التحليل البياني

يتضح في الرسم البياني للدالة $f(x)$ أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

الإثبات الرقمي

أنشئ جدول بقيم الدالة كلما ازدادت قيمة $|x|$. أي تحقق من قيم الدالة $f(x)$ كلما ازدادت قيمة x جداً أو نقصت بالسالب جداً.

تقترب x من $-\infty$ ← | → تقترب x من ∞

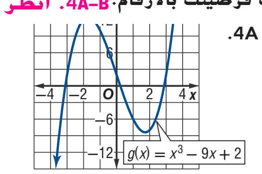
x	-10,000	-1000	-100	0	100	1000	10,000
$f(x)$	-1×10^{16}	-1×10^{12}	-1×10^{8}	-80	-1×10^{8}	-1×10^{12}	-1×10^{16}

تظهر المخرجات أن كلما اقتربت قيمة x من $-\infty$، تقترب $f(x)$ من $-\infty$، وكلما اقتربت قيمة x من ∞. تقترب $f(x)$ من $-\infty$ أيضاً. وهذا يثبت الفرضية السابقة.

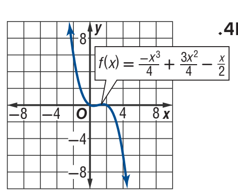
تمارين موجهة

استخدم الرسم البياني لكل دالة لوصف السلوك الطرفي الخاص بها. أثبت فرضيتك بالأرقام. 4A–B. انظر الهامش.

.4A



.4B



هناك دوال تقترب من قيمة محددة — ولكن لا تصل إليها— كلما ازدادت قيمة $|x|$، على العكس من الدوال — مثل $f(x)$ —التي تقترب من ∞ أو $-\infty$.

OL AL Differentiated Instruction

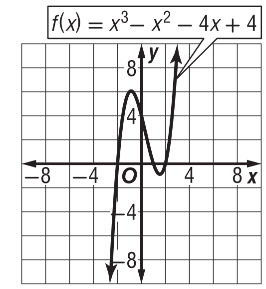
المتعلمون المنطقيون اطلب من الطلاب تطوير أو تذكر قواعد عامة لرسم الدوال بيانياً. اجعل الطلاب تختبر قواعدهم عن طريق رسم الدوال بدون آلة الرسم، ثم مرة أخرى باستخدام آلة الرسم لاختبار افتراضاتهم. اطلب منهم الأخذ في الاعتبار ما يحدد الخط المقارب الرأسي و الأفقي.

2 تطبيق السلوك الطرفي

المثال الرابع يعرض كيفية وصف السلوك الطرفي عندما تقترب تابع من اللانهاية. **المثال الخامس والسادس** يعرض كيفية وصف السلوك الطرفي عندما تقترب تابع من قيمة محددة.

مثال إضافي

4 استخدم الرسم البياني للتابع $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ لوصف سلوكها الطرفي. اثبت فرضيتك بالأرقام.



من الرسم البياني، يظهر أنه كلما $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$ وكلما $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$.

x	$f(x)$
$-10,000$	$-1 \cdot 10^{12}$
-1000	$-1 \cdot 10^{9}$
0	4
1000	$1 \cdot 10^{9}$
10,000	$1 \cdot 10^{12}$

تمرين محلول

4A. من الرسم البياني، يظهر أنه كلما $x \to -\infty$, $g(x) \to -\infty$ و كلما $x \to \infty$, $g(x) \to -\infty$.

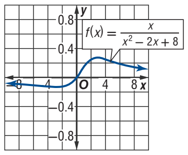
x	$g(x)$
$-10,000$	$-1 \cdot 10^{12}$
-1000	$-1 \cdot 10^{9}$
0	2
1000	$1 \cdot 10^{9}$
10,000	$1 \cdot 10^{12}$

4B. من الرسم البياني، يظهر أنه كلما $x \to -\infty$, $f(x) \to \infty$ وكلما $x \to \infty$, $f(x) \to -\infty$.

x	$f(x)$
$-10,000$	$2.5 \cdot 10^{11}$
-1000	$2.5 \cdot 10^{8}$
0	0
1000	$-2.5 \cdot 10^{8}$
10,000	$-2.5 \cdot 10^{11}$

G12 GEN TE CH01.indb 28 8/22/2016 4:28:07 PM

مثال 5 الرسوم التي تقترب من قيمة محددة



استخدم الرسم البياني للدالة $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 8}$ لوصف سلوكها الطرفي. أثبت فرضيتك بالأرقام.

التحليل البياني

يتضح في الرسم البياني للدالة $f(x)$ أن $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

الإثبات الرقمي

تقترب x من $-\infty$ ← | → تقترب x من ∞

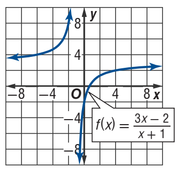
x	$-10{,}000$	-1000	-100	0	100	1000	$10{,}000$
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{-4}$	-0.001	-0.01	0	0.01	0.001	$1 \cdot 10^{-4}$

تظهر المخرجات أن كلما اقتربت قيمة x من $-\infty$، تقترب $f(x)$ من 0، وكلما اقتربت قيمة x من ∞، تقترب $f(x)$ من 0 أيضاً. وهذا يثبت الفرضية.

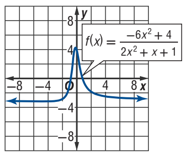
تمارين موجهة

استخدم الرسم البياني لكل دالة لوصف السلوك الطرفي الخاص بها. أثبت فرضيتك بالأرقام. **5A–B. انظر الهامش.**

.5A

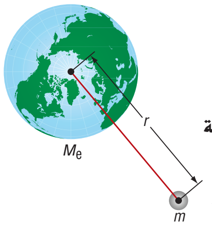


.5B



تساعدك معرفة السلوك الطرفي لدالة ما في حل مشاكل في الحياة اليومية.

مثال واقعي 6 تطبيق السلوك الطرفي



الفيزياء تحسب طاقة الجذب الكامنة لجسم ما بالمعادلة الآتية $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ حيث إن G هي ثابت نيوتن للجاذبية، و m هي كتلة الجسم، و M هي كتلة الكرة الأرضية، و r هي المسافة بين الجسم ومركز الكرة الأرضية كما هو موضح. ماذا يحدث لطاقة الجذب الكامنة للجسم كلما ابتعد عن الكرة الأرضية أكثر وأكثر؟

إجابة هذا السؤال هي وصف السلوك الطرفي للدالة $U(r)$ للقيم الكبيرة من المتغير r. أي أنه مطلوب تحديد قيمة $\lim_{r \to \infty} U(r)$. وبما أن G, m, M_e قيم ثابتة، إذن حاصل ضرب GmM_e قيمة ثابتة أيضًا. كلما ازدادت قيمة r تقترب قيمة الكسر $-\frac{GmM_e}{r}$ للصفر، لذا فإن $\lim_{r \to \infty} U(r) = 0$. وبالتالي، كلما تحرك جسم بعيداً عن الأرض تقترب طاقة الجذب الكامنة به من الصفر.

تمارين موجهة

.6 الفيزياء الضغط الديناميكي هو الضغط المتولد عن سرعة تحرك السائل، وتحسب بالمعادلة $q(v) = \frac{\rho v^2}{2}$. حيث إن ρ هي كثافة السائل، وv هي سرعة تحرك السائل. ماذا سيحدث للضغط الديناميكي للسائل إذا استمرت سرعة السائل في الازدياد؟ **سيصل الضغط الديناميكي إلى ∞.**

الربط بالحياة الواقعية

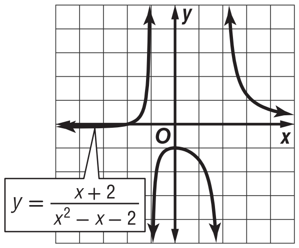
تستخدم صيغة طاقة الجذب الكامنة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ لحساب السرعة اللازمة للهروب من جاذبية الكرة الأرضية. وهي 25,000 ميل في الساعة.

المصدر: *The Mechanical Universe*

29

أمثلة إضافية

5 استخدم الرسم البياني للتابع $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - x - 2}$ لوصف سلوكها الطرفي. اثبت فرضيتك بالأرقام.



من الرسم البياني، يظهر أنه كلما $x \to -\infty, f(x) \to 0$ و كلما $x \to \infty, f(x) \to 0$.

x	$f(x)$
$-10{,}000$	$-1 \cdot 10^{-6}$
-1000	$-1 \cdot 10^{-5}$
0	-1
1000	$1 \cdot 10^{-3}$
10,000	$1 \cdot 10^{-4}$

6 الفيزياء تابع الطاقة التناظرية هي $E = \frac{X^2 + Y^2}{2}$. إذا ثُبتت قيمة Y. ماذا سيحدث لقيمة الطاقة التناظرية عندما تقترب قيمة X من $-\infty$، $\lim_{x \to -\infty} E = \infty$

تمرين محلول

.5a من الرسم البياني، يظهر أنه كلما $x \to -\infty, f(x) \to 3$ و كلما $x \to \infty$، $f(x) \to 3$.

x	$f(x)$
$-10{,}000$	3.0005
-1000	3.005
0	-2
1000	2.995
10,000	2.9995

.5b من الرسم البياني، يظهر أنه كلما $x \to -\infty, f(x) \to -3$ و كلما $x \to \infty$، $f(x) \to -3$.

x	$f(x)$
$-10{,}000$	-3.0001
-1000	-3.001
0	4
1000	-2.998
10,000	-2.9998

تعليم متمايز AL

المتعلمون البصريون أو الحسيون اجعل الطلاب يعملون في مجموعات لإنشاء شبكة على ورقة كبيرة. اجعلهم يضعوا علامات على المحاور بدءاً من 50- إلى 50. اطلب منهم اختيار تابع منقطعة من الدرس، وارسم النقاط عند كل خمس علامات على المحور الأفقي x. ثم ليختاروا تابع ثانية. سلوكها الطرفي ذو نهاية محددة، وارسم مجموعة ثانية من النقاط على نفس الشبكة. ثم اجعلهم يشرحوا الانقِطاعٌ و السلوك الطرفي على رسمهم الكبير.

3 تمرين

تقويم تكويني

استخدم التمارين من 1–41 لتتحقق من فهم الطلاب.

ثم استخدم الجدول بالأسفل لتضع تقييمك للطلبة.

إجابات إضافية

.1 متصلة ; $f(-5) = \sqrt{21}$ أو حوالي 4.58, $\lim_{x\to-5}$ 4.58, $\lim_{x\to-5} f(x) \approx 4.58$, و $\lim_{x\to-5} f(x) = f(-5)$.

.2 متصلة ; $f(8) = \sqrt{13}$ أو حوالي 3.61, $\lim_{x\to8} f(x) \approx 3.61$, و $\lim_{x\to8} f(x) = f(8)$..

3– منقطعة عند $x = -6; h(-6)$ غير معرفة و $\lim_{x\to-6} 6(x) =$, بالتالي $h(x)$ ذات انقِطاعٌ قابلٌ للإزالة عند $x = -6$. متصلة عند $x = 6$. $h(6) = 0$, $\lim_{x\to6} h(x) = 0$, و $\lim_{x\to6} h(x) = 0$, and $\lim_{x\to6} h(x) = h(6)$.

.4 منقطعة عند $(x = -5; h(-5)$ غير معرفة و $\lim_{x\to-5} h(x) = -10$, so $h(x)$ ذات انقِطاعٌ قابلٌ للإزالة عند $x = -5$. متصلة عند $x = 5$. $h(5) = 0$, $\lim_{x\to5} h(x) = 0$, and $\lim_{x\to5} (h(x) = h(5)$.

5– منقطعة; $g(1)$ غير معرفة و $g(x)$ تقترب من $-\infty$ كلما اقتربت قيمة x من 1 من جهة اليسار و من ∞ كلما اقتربت قيمة x من 1 من جهة اليمين ، لذا فإن التابع $g(x)$ ذات إنقطاع لا نهائي عند $x = 1$.

.6 منقطعة عند $(x = -2; g(-2)$ غير معرفة و $g(x)$ تقترب من $-\infty$ كلما اقتربت قيمة x من -2 من جهة اليسار و من ∞ كلما اقتربت قيمة x من -2 من جهة اليمين، لذا فإن التابع $g(x)$ ذات إنقطاع لا نهائي عند $x = -2$. متصلة عند $x = 2$; $g(2) = 0$, $\lim_{x\to2} g(x) = 0$, and $\lim_{x\to2} g(x) = g(2)$

التمارين

حدد ما إذا كانت كل دالة متصلة عند قيم x المحددة. علل مستخدمًا اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة منقطعة، فحدد نوع الانقطاع، سواء كان *لا نهائي* أو *متنقل* أو *قابل للإزالة*. (المثالين 1 و 2) **1–6. انظر الهامش.**

.1 $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$؛ عند $x = -5$

.2 $f(x) = \sqrt{x + 5}$؛ عند $x = 8$

.3 $h(x) = \frac{x^2 - 36}{x + 6}$؛ عند $x = -6$ و $x = 6$

.4 $h(x) = \frac{x^2 - 25}{x + 5}$؛ عند $x = -5$ و $x = 5$

.5 $g(x)$؛ عند $x =$

.6 $g(x) = \frac{2 - x}{2 + x}$؛ عند $x = -2$ و $x = 2$

.7 $h(x) = \frac{x - 4}{x^2 - 5x + 4}$؛ عند $x =$ و $x = 4$

.8 $h(x) = \frac{x(x - 6)}{x^3}$؛ عند $x = 0$ و $x = 6$

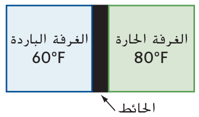
.9 $f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & \text{if } x \le -6 \\ -x + 2 & \text{if } x > -6 \end{cases}$ عند $x = -6$

.10 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{if } x > -2 \\ x - 5 & \text{if } x \le -2 \end{cases}$؛ عند $x = -2$

7–10. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

11 **الفيزياء** يفصل حائط بين غرفتين، لكل منهما درجة حرارة مختلفة. يُمثل انتقال الحرارة (يقاس بالوات) بين الغرفتين بالمعادلة $f(w) = \frac{7.4}{w}$، حيث تمثل w سُمك الحائط بالمتر. (المثالين 1 و 2)

a–c. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.



a. حدد ما إذا كانت الدالة متصلة عند $w = 0.4$ أم لا . علل إجابتك باستخدام اختبار الاتصال.

b. هل الدالة متصلة؟ علل إجابتك باستخدام اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة منقطعة، حدد نوع الانقطاع، سواء كان *لا نهائي* أو *متنقل* أو *قابل للإزالة*.

c. ارسم الدالة لتتأكد من استنتاجك في النقطة **b**.

12a–c. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

.12 **الكيمياء** يجب تخفيف أي محلول قبل استخدامه في تجربة ما. عند إضافة 4 مول من محلول NaCl لمحلول تركيزه 10 مول، سيقل تركيز المحلول. يمكن تمثيل تركيز المحلول C بالمعادلة التالية $C(x) = \frac{500 + 4x}{50 + x}$، حيث تكون x هي عدد اللترات في المحلول المضاف ذو التركيز 4 مول. (المثالين 1 و 2)

a. حدد ما إذا كانت الدالة متصلة عند $x = 10$ أم لا . علل إجابتك باستخدام اختبار الاتصال.

b. هل الدالة متصلة؟ علل إجابتك باستخدام اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة منقطعة، فحدد نوع الانقطاع، سواء كان *لا نهائي* أو *متنقل* أو *قابل للإزالة*، و صِف تأثير أي نوع من الانقطاع على تركيز المحلول، إن وجد.

c. ارسم الدالة لتتأكد من استنتاجك في النقطة **b**.

حدد بين أية أرقام متتابعة صحيحة تقع الأصفار الحقيقية لكل دالة في الفترة المعطاة. (مثال 3)

.13 $f(x) = x^3 - x^2 - 3; [-2, 4]$ **1 و 2**

.14 $g(x) = -x^3 + 6x + 2; [-4, 4]$ **3– و 2–، 1– و 0، 2 و 3**

.15 $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 3; [-3, 3]$ **1– و 0، 1 و 2**

.16 $h(x) = -x^4 + 4x^3 - 5x - 6; [3, 5]$ **3 و 4**

.17 $f(x) = 3x^3 - 6x^2 - 2x + 2; [-2, 4]$ **1– و 0، 0 و 1، 2 و 3**

.18 $g(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x^2 + 1}; [-4, 3]$ **4– و 3–، 0 و 1**

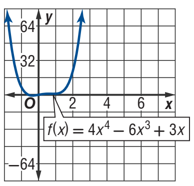
.19 $h(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 5}; [-2, 4]$ **لا توجد أصفار في تلك الفترة**

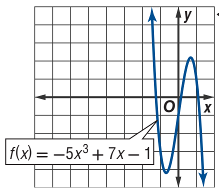
.20 $f(x) = \sqrt{x^2 - 6} - 6; [3, 8]$ **6 و 7**

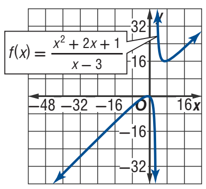
.21 $g(x) = \sqrt{x^3 + 1} - 5; [0, 5]$ **2 و 3**

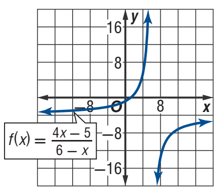
22–29. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

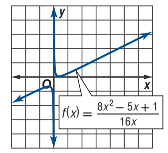
استخدم الرسم البياني لكل دالة لوصف السلوك الطرفي الخاص بها. اثبت فرضيتك بالأرقام. (المثالين 4 و 5)

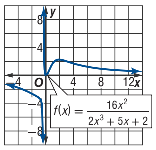
.22


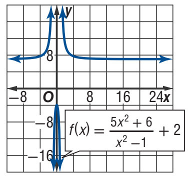
.23


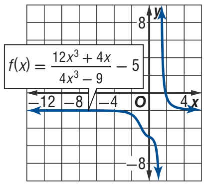
.24


.25


.26


.27


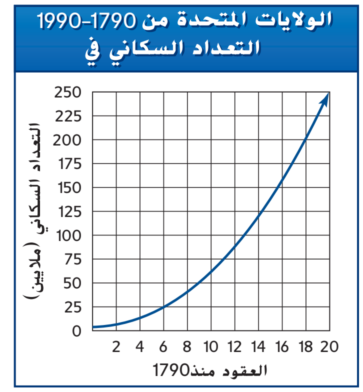
.28


.29


AL BL OL Differentiated Homework Options

المستوى	التقييم	خيار اليومين	
AL مستوى المعالجة	1–41, 58–60, 62–83	odd, 80–82 1–41	2–40 زوجي, 58, 60–, 62–79
OL في المستوى	1–43 فردي, 44, 45–49, فردي 50, 51, 53, 55–60, 62–83	1–41, 80–83	42–60, 62–79
BL المستوى المتقدم	42–83		

30. التعداد السكاني يمكن تمثيل التعداد السكاني في الولايات المتحدة بين 1790 و 1990 بالمعادلة التالية $p(x) = 0.0057x^3 + 0.4895x^2 + 0.3236x + 3.8431$، حيث تمثل x عدد العقود التالية لعام 1790. استخدم السلوك الطرفي للرسم البياني لوصف اتجاه تغير التعداد السكاني. أثبت فرضيتك بالأرقام. هل يبدو هذا الاتجاه منطقيًا؟ اشرح استدلالك. (مثال 4) **انظر الهامش.**

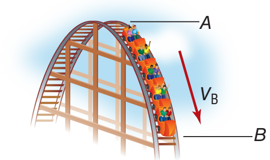


31. الكيمياء يستخدم العامل المحفز لزيادة معدل التفاعل الكيميائي. ويحسب معدل التفاعل R – سرعة حدوث التفاعل الكيميائي – بالمعادلة التالية $R(x) = \frac{0.5x}{x + 12}$، حيث x هي تركيز المحلول المذاب بالميللي جرام لكل لتر من المحلول. (مثال 5) **انظر الهامش.**

a. ارسم الدالة باستخدام الآلة الحاسبة راسمة الدوال.

b. ماذا يمثل السلوك الطرفي للرسم البياني في هذه التجربة؟ أثبت فرضيتك بالأرقام.

32. قطار الموت تحسب سرعة قطار الموت بعد هبوطه من ارتفاع A إلى ارتفاع B بالمعادلة $f(h_A) = \sqrt{2g(h_A - h_B)}$ ، حيث يمثل h_A ارتفاع النقطة A، و h_B ارتفاع النقطة B،و g عجلة الجاذبية. ماذا سيحدث للدالة $f(h_A)$ كلما نقصت h_B في اتجاه الصفر 0؟ (مثال 6) **انظر الهامش.**



استخدم الاستدلال المنطقي لتحديد السلوك الطرفي أو النهايات للدوال الآتية كلما اقتربت x من اللا نهاية. اشرح استدلالك. (مثال 6) **33–40. انظر الهامش.**

33. $q(x) = -\frac{24}{x}$

34. $f(x) = \frac{0.8}{x^2}$

35. $p(x) = \frac{x+1}{x-2}$

36. $m(x) = \frac{4+x}{2x+6}$

37. $c(x) = \frac{5x^2}{x^3+2x+1}$

38. $k(x) = \frac{4x^2-3x-1}{11x}$

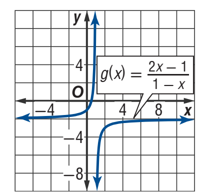
39. $h(x) = 2x^5 + 7x^3 + 5$

40. $g(x) = x^4 - 9x^2 + \frac{x}{4}$

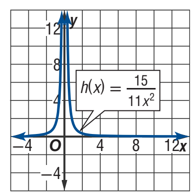
41. الفيزياء تُحسب الطاقة الحركية لجسم متحرك بالمعادلة $E(m) = \frac{p^2}{2m}$، حيث تمثل p كمية التحرك، وتمثل m كتلة الجسم. إذا أُضيفت الرمال لعربة قطار متحركة، ماذا سيحدث كلما ازدادت m؟ (مثال 6) **انظر الهامش.**

استخدم كل رسم بياني لتحديد قيم x التي تنقطع عندها كل دالة. وحدد نوع الانقطاع. ثم استخدم الرسم البياني لوصف السلوك الطرفي. وبرر إجاباتك.
42–43. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

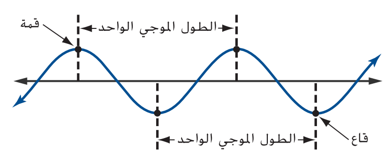
42.



43



44. الفيزياء الطول الموجي لموجة دورية هو المسافة بين نقطتين متناظرتين متتابعتين على الموجة، مثل قمتين أو قاعين.



ويُحسب التردد f، أو عدد القمم التي تمر بنقطة ما خلال فترة زمنية محددة عن طريق المعادلة $f(\lambda) = \frac{c}{\lambda}$، حيث تكون c هي سرعة الضوء أو $2.99 \cdot 10^8$ متر في الثانية.
a–b.انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

a. ارسم الدالة باستخدام الآلة الحاسبة راسمة الدوال.

b. استخدم الرسم البياني لوصف السلوك الطرفي للدالة. أثبت فرضيتك بالأرقام.

c. هل الدالة متصلة؟ إذا لم تكن متصلة، حدد نقاط عدم الاتصال ونوعها.
كلا، يوجد انقطاع لا نهائي عند $\lambda = 0$.

الآلة الحاسبة راسمة الدوال ارسم الدوال الآتية وحدد ما إذا كانت متصلة أم لا. إذا كانت منقطعة، فحدد نقاط الانقطاع ونوعها. ثم صف السلوك الطرفي وحدد مواقع أي الأصفار.
45–49. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

45. $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$

46. $g(x) = \frac{x^2 - 9}{x^3 - 5x^2 - 18x + 72}$

47. $h(x) = \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 3x - 18}$

48. $h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - 29x - 24}{x^2 - 2x - 15}$

49. $h(x) = \frac{x^3 - 5x^2 - 26x + 120}{x^2 + x - 12}$

31

احذر!

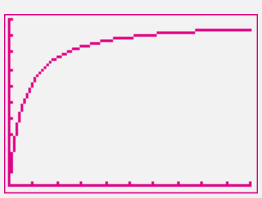
خطأ شائع في التمارين 49–45. قد ينسى الطلاب استخدام الهلالين الفاصلين حول كل كثيرة حدود، عند إدخال الدوال إلى الآلة الحاسبة. ذكرهم أن الهلالين الفاصلين ضروريان لتتمكن الآلة الحاسبة من رسم التابع بشكل سليم.

إجابات إضافية

30– يظهر من الرسم البياني، أنه كلما ازداد عدد العقود منذ عام 1790 بدون أي حد، يزداد التعداد السكاني بدون أي حد. هذا التوجه لا يبدو منطقياً، لأنه لا يوجد أي طريقة لضمان أن تعداد الولايات المتحدة سيزداد بلا حد في المستقبل.

x	0	العاشر	100	1000	10,000
$f(x)$	3.8	61.7	$1.1 \cdot 10^4$	$6.2 \cdot 10^6$	$5.8 \cdot 10^9$

.31a



[0, 200] scl: 20 by [0, 0.5] scl: 0.05

.31b إجابة نموذجية: يشير السلوك الطرفي للرسم البياني أنه كلما ازداد تركيز العامل الحفاز، يقترب معدل التفاعل الكيميائي من 0.5.

x	0	العاشر	100	1000	10,000
$R(x)$	0	0.2273	0.4464	0.4941	0.4994

.32 إجابة نموذجية: كلما قل الإرتفاع h_B تقترب السرعة عند النقطة B من $\sqrt{2gh_A}$.

33– إجابة نموذجية: كلما اقتربت قيمة $x \to \infty$، سيقل الكسر وستصل قيمة $q(x)$، للصفر .

34– إجابة نموذجية: كلما اقتربت قيمة $x \to \infty$، سيقل الكسر وستصل قيمة $f(x)$، للصفر .

35– إجابة نموذجية: كلما اقتربت قيمة $x \to \infty$، سيقترب الكسر من $\frac{x}{x}$ وستقترب قيمة $q(x)$، إلى 1.

.36 إجابة نموذجية: كلما اقتربت قيمة $x \to \infty$، سيقترب الكسر من $\frac{x}{2x}$ ، وستقترب قيمة $m(x)$ من $\frac{1}{2}$.

37– إجابة نموذجية: كلما اقتربت قيمة $x \to \infty$، سيقل الكسر وستصل قيمة $c(x)$، للصفر .

.38 إجابة نموذجية: كلما اقتربت قيمة $x \to \infty$، ستزداد قيمة البسط جداً نسبة إلى المقام، وبالتالي ستقترب قيمة $k(x)$ من ∞.

.39 إجابة نموذجية: كلما اقتربت قيمة $x \to \infty$، ستزداد قيمة $h(x)$ بلا حد وستصل إلى ∞.

.40 إجابة نموذجية: كلما اقتربت قيمة $x \to \infty$، ستزداد قيمة $g(x)$ بلا حد وستصل إلى ∞.

.41 إجابة نموذجية: كلما استمرت كتلة عربة القطار في الازدياد، ستقترب الطاقة الحركية لعربة القطار من الصفر.

إجابات إضافية

.58 قابل للإزالة ؛ $f(0)$ غير معرفة، و $\lim_{x\to0} f(x) = 1$.

.59 لا نهائي؛ $f(0)$ غير معرفة، و $f(x)$ تقترب من $-\infty$ كلما اقتربت x من الصفر من اليسار، وتقترب من ∞ كلما اقتربت x من الصفر من اليمين.

.50 **المركبات** عدد المركبات المسيرة بالوقود البديل A في الولايات المتحدة، بين عامي 1995 و 2004 يمكن تمثيله بالمعادلة $f(t) = 2044t^2 - 3388t + 206{,}808$، حيث تمثل t السنة. فحين تكون $t = 5$ فهي تكافئ عام 1995.

a. ارسم الدالة. **انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.**

b. كم كان عدد المركبات المسيرة بالوقود البديل في الولايات المتحدة تقريباً في عام 1998؟ **310,520 مركبة**

c. كم سيصبح عدد المركبات المسيرة بالوقود البديل مع مرور الزمن، طبقاً لهذه المعادلة؟ هل تظن أن هذه المعادلة تصلح لما بعد عام 2004؟ اشرح. **انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.**

الآلة الحاسبة راسمة الدوال ارسم الدوال الآتية، وصف السلوك الطرفي الخاص بها. أثبت فرضيتك بالأرقام، وارسم جزء مناسب من كل رسم بياني.

51–54 انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

.51 $f(x) = -x^4 + 12x^3 + 4x^2 - 4$

.52 $g(x) = x^5 - 20x^4 + 2x^3 - 5$

.53 $f(x) =$

.54 $g(x) = \dfrac{8x - 24x^3}{14 + 2x^3}$

.55a-c انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

.55 **إدارة الأعمال** يؤسس جبريل لشركة صغيرة في مجال تصميم وطباعة وبيع القمصان. تكلفة إنتاج كل قميص $3. استثمر في البداية $4000 لشراء طابعة وبعض الاحتياجات الأساسية.

a. اكتب دالة تمثل متوسط التكلفة لكل قميص، كدالة لعدد القمصان المباعة n.

b. استخدم الآلة الحاسبة راسمة الدوال لرسم الدالة.

c. ما هي القيمة التي ستقترب منها متوسط تكلفة القميص، عند استمرار زيادة القمصان المباعة؟

.56 **التمثيل المتعدد** ستتعامل في هذه المسألة مع النهايات. انظر في الدالة $f(x) = \dfrac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$، حيث تكون a و c أرقام صحيحة ليست صفرية، و b و d أرقام صحيحة.

a. **مُجدوَل** افترض أن $c = 1$. واختر 3 مجموعات من القيم للمتغيرات a, b, d. اكتب الدالة مع كل مجموعة من القيم. انسخ وكمل الجدول بالأسفل.

a-c انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

c = 1				
a	b	d	$\lim_{x\to\infty} f(x)$	$\lim_{x\to-\infty} f(x)$
3	2	4	3	3
−1	5	7	−1	−1
9	−6	8	9	9

b. **مُجدوَل** اختر 3 مجموعات مختلفة من القيم لكل متغير: مجموعة فيها $a > c$، ومجموعة فيها $a < c$، والأخيرة فيها $a = c$. اكتب كل دالة، وأنشئ جدول كما فعلت في النقطة **a**.

c. **تحليلياً** ضع فرضية حول نهاية الدالة $f(x) = \dfrac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$. كلما اقتربت x من اللا نهاية والسالبة.

.57 **الآلة الحاسبة راسمة الدوال** ارسم عدة دوال مختلفة من الصيغة $f(x) = x^n + ax^{n-1} + b$، حيث n, a, b أرقام صحيحة غير سالبة.

a. ضع فرضية حول السلوك الطرفي للدالة عندما تكون قيمة n موجبة وزوجية. استخدم الرسم البياني لدعم فرضيتك.

b. ضع فرضية حول السلوك الطرفي للدالة عندما تكون قيمة n موجبة وفردية. استخدم الرسم البياني لدعم فرضيتك.

.57a-b انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

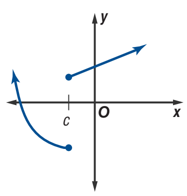
مسائل التفكير المرتب عالي المستوى استخدام مهارات التفكير العليا

الاستدلال حدد ما إذا كانت كل دالة ذات انقطاع لا نهائي أو متنقل أو قابل للإزالة عند $x = 0$. اشرح.

.58 $f(x) = \dfrac{x^5 + x^6}{x^5}$ .59 $f(x) = \dfrac{x^4}{x^5}$

58–59 انظر الهامش.

.60 **تحليل الأخطاء** يحاول أحمد وخالد ما إذا كانت العلاقة الممثلة بالأسفل متصلة عند النقطة c أم لا. يظن أحمد أن هذا الرسم البياني خاص بدالة $f(x)$ منقطعة عند النقطة c لأن $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ من ناحية واحدة للمتغير c. أما خالد فيظن أن هذا الرسم البياني لا يمثل دالة أصلاً، لأنه عندما تكون $x = c$، توجد قيمتين مختلفتين للإحداثي y. أي رأي هو الصحيح؟ اشرح استدلالك. **انظر الهامش.**



.61 **تحدٍ** حدد قيم كل من a و b حيث تكون الدالة f متصلة.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{if } x \geq 3 \\ bx + a & \text{if } -3 < x < 3 \\ \sqrt{-b - x} & \text{if } x \leq -3 \end{cases}$$

$a = 9$, $b = 3$

الاستدلال أوجد قيمة $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ لكل مما يلي. اشرح استدلالك. **62–65 انظر الهامش.**

.62 $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ و f دالة زوجية.

.63 $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ و f دالة فردية.

.64 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ والرسم البياني للدالة f متناظر حول نقطة الأصل.

.65 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ والرسم البياني للدالة f متناظر حول المحور الرأسي y.

انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

.66 **الكتابة في الرياضيات** أعطي مثالاً لدالة ذات انقطاع قابل للإزالة. اشرح كيفية إزالة هذا الانقطاع. كيف تؤثر إزالة الانقطاع على الدالة؟

G12 GEN TE CH01.indb 32 8/22/2016 4:28:27 PM

احذر!

خطأ شائع قد يسبب الجزء **ج** في التمرين 56 لبساً لبعض الطلاب بسبب ما يبدو على أنه عدد كبير من المتغيرات. ذكرهم بأن *x* هو المتغير المستقل الوحيد، وأن *a*، *b*، *c*، *d* عبارة عن ثوابت.

تحليل الخطأ في التمرين 60. يجب أن يقوم الطلاب بثلاث خطوات لتحديد الاتصال. توجد قيمة للتابع $f(c)$ (الخطوة الأولى) ولكن قيمة $f(c)$ تختلف عند اقترابنا من *c* من اليسار ، عن قيمتها عند اقترابنا من *c* من اليمين. رأي جورج صحيح حيث أن الرسم البياني للعلاقة لا يجتاز اختبار المستقيم الرأسي. توجد قيمتين للمتغير *y* عندما تكون *x* تساوي *c*. لا يمثل الرسم البياني تابع.

4 التقويم

أخبار الأمس اطلب من الطلاب شرح كيف ساعدهم تحليل الرسم البياني للعلاقات والدوال في فهم الاتصال و السلوك الطرفي.

إجابات إضافية

60– جورج ; إجابة نموذجية: العلاقة في الرسم البياني ليست تابع، لأنه يوجد قيمتين *y* مرتبطان بنفس قيمة *x*.

.62 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; لأن التابع *f* زوجية, $f(-x) = f(x)$.

63– $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$; لأن التابع *f* فردية, $f(-x) = -f(x)$.

.64 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; لأن الرسم البياني للتابع *f* متناظر حول نقطة الأصل ($f(-x) = -f(x)$).

.65 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$; متناظر حول المحور الرأسي *y*، $f(x) = f(-x)$.

مراجعة شاملة

الآلة الحاسبة راسمة الدوال ارسم الدوال الآتية. حلّل الرسم البياني لتحديد ما إذا كانت الدالة زوجية، أوفردية، أوليست أياً منهما. اثبت الحل من خلال الجبر. إذا كانت الدالة فردية أو زوجية، فصف تماثل الرسم البياني للدالة. (الدرس 1-2) 67–69. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

.67 $h(x)$ .68 $f(x)$ .69 $g(x) = x^5 - 5x^3 + x$

اذكر مجال كل دالة. (الدرس 1–1)

.70 $f(x) = \dfrac{4x+6}{x^2+3x+2}$ $D = (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, \infty)$

.71 $g(x)$

.72 $g(a) = \sqrt{2 - a^2}$ $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

.73 **خدمة البريد** تستخدم هيئة البريد في الولايات المتحدة أكواد بريدية ZIP من خمسة أرقام للمناطق، لتحديد مسار الخطابات والطرود لوجهاتها. (الدرس 7–0)

a. كم عدد الأكواد ZIP التي يمكن الحصول عليها إذا كان يمكن استخدام الأرقام من 0 إلى 9 في كل من الخمسة أرقام المكونة للكود؟ **100,000**

b. بافتراض أنه في حالة كون الرقم الأول 0، فإن الرقم الثاني والثالث والرابع لا يمكن أن يكونوا أصفار. كم عدد الأكواد ZIP التي يمكن الحصول عليها إذا كان الرقم الأول صفرًا 0؟ **7290**

c. في عام 1983، استخدمت هيئة البريد في الولايات المتحدة أكواد ZIP+4، والتي أضافت أربعة أرقام للخمسة أرقام الأصلية في أكواد ZIP. باستخدام الأرقام من 0 إلى 9، كم عدد الأكواد ZIP التي يمكن الحصول عليها؟ **999,900,000**

لنقل أن $A = \begin{bmatrix} -4 & 10 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 8 & -5 & 4 \\ 4 & 9 & -3 \end{bmatrix}$**، حل كل معادلة تالية لمعرفة قيمة** *X*. (الدرس 0-6)

.74 $3X - B = A$ $\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} & 2 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

.75 $2B + X = 4A$ $\begin{bmatrix} -32 & 50 & -16 \\ 4 & -30 & 10 \end{bmatrix}$

.76 $A - 5X = B$ $\begin{bmatrix} -\frac{12}{5} & 3 & -\frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{12}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

حل كل مجموعة من المعادلات الآتية. (الدرس 5–0)

.77 $4x - 6y + 4z = 12$
$6x - 9y + 6z = 18$
$5x - 8y + 10z = 20$ **حلول لا نهائية**

.78 $x + 2y + z = 10$
$2x - y + 3z = -5$
$2x - 3y - 5z = 27$ **(7, 4, −5)**

.79 $2x - y + 3z = -2$
$x + 4y - 2z = 16$
$5x + y - z =$ **(2, 3, −1)**

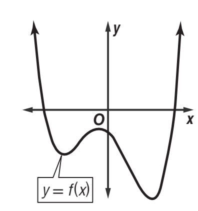
مراجعة القدرات للاختبارات القياسية

.80 **SAT/ACT** في مدرسة مقاطعة لينكولن الثانوية، يوجد 36 طالبًا يدرسون التفاضل والتكامل أو الفيزياء أو كلاهما، و 10 طلاب يدرسون كلاً من التفاضل والتكامل والفيزياء. فإذا كان هناك 31 طالبًا في فصل التفاضل والتكامل، كم يكون عدد الطلاب في فصل الفيزياء؟ **D**

A 5   C 11   E 21

B 8   D 15

.81 أي من العبارات التالية يمكن استخدامها لوصف السلوك الطرفي للدالة $f(x)$؟ **J**



F $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

G $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

H $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

J $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

.82 **مراجعة** كود قفل إيمي يحتوي على 3 أرقام تبدأ من 1 وتنتهي عند 45. ولا يمكن تكرار أي رقم منهم. كم عدد التباديل المحتملة لكود القفل؟ **85,140**

.83 **مراجعة** افترض شكل مكون من 3 دوائر متحدة المركز، أنصاف أقطارها كالتالي 1 قدم، و 2 قدم، و 3 أقدام. احسب احتمالية وقوع نقطة مختارة عشوائياً في المنطقة الخارجية (بين الدائرة الثانية والثالثة). **D**

a   c $\frac{4}{9}$

b $\frac{\pi}{9}$ d $\frac{5}{9}$

تعليم BL متمايز

توسُّع اوجد التقويم *m* و *b* حيث يحققا ما يلي

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{إذا كان } x \le 0 \\ mx + b & \text{إذا كان } 0 < x < 1 \\ x^2 & \text{إذا كان } x \ge 1 \end{cases}$$

متصلة.   إجابة نموذجية: $m = 1,\ b = 0$

1 التركيز

محاذاة رأسية

قبل الدرس 1–4 إيجاد التقويم التابع.

الدرس 1–4 حدد الفترات حيث تتزايد القواعد أو تظل ثابتة أو تتناقص وحدد الحد الاقصى للقواعد والحد الأدنى. حدد معدل تغير القاعدة.

بعد الدرس 1–4 ارسم الدوال الأصلية وصفها.

2 تدريس

أسئلة موسعة

اجعل الطلاب يقرأون جزء لماذا؟ من الدرس.

اسأل:

- يقوم صاحب عمل بتحسين عملية التصنيع بعد التدهور الكبير في الأرباح. تبدأ التغييرات في يونيو ويوليو وأغسطس. متى يجب رسم تغير الربح من النقصان إلى الزيادة؟ أمثلة الإجابة: أثناء يوليو ويونيو وأغسطس أو بعدها بمدة قصيرة

الدرس 1–4

القيم القصوى ومتوسط معدلات التغير

قبل ذلك:

- أوجدت قيم الدالة. (الدرس 1–1)

الآن:

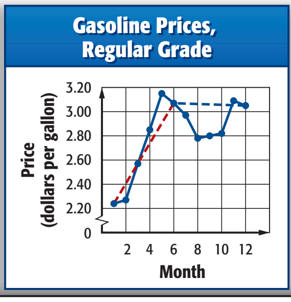
1. تحديد الفترات التي تتصاعد فيها الدوال، أو تثبت أو تتنازل، وتحديد القيم العظمى والصغرى للدوال.
2. تحديد متوسط معدل التغير لدالة.

السبب:

- يظهر الرسم البياني متوسط سعر البنزين العادي في الولايات المتحدة الأمريكية من يناير إلى ديسمبر.

وصل أعلى متوسط لسعر البنزين إلى AED 3.15 للجالون في شهر مايو.

منحدرات الخطوط المتقطعة الحمراء والزرقاء تُظهر أن سعر البنزين تغير بسرعة أكبر في النصف الأول من العام عن النصف الثاني منه.



المفردات الجديدة

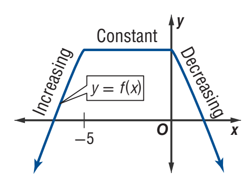
تصاعدية (increasing)
تنازلية (decreasing)
ثابتة (constant)
نقطة حرجة (critical point)
القيم القصوى (extrema)
القيمة العظمى (maximum)
القيمة الصغرى (minimum)
نقطة الانعطاف (point of inflection)
متوسط معدل التغير (average rate of change)
الخط القاطع (secant line)

1 سلوك التزايد والتناقص

يمكن أن يشتمل تحليل الدالة على وصف للفترات التي تكون الدالة على أساسها تصاعدية أو تنازلية أو ثابتة.

انظر في الرسم البياني الموضح لــ $f(x)$ أثناء تحركك من اليسار إلى اليمين، $f(x)$ ،تكون

- ترتفع أو تتصاعد عند. on $(-\infty, -5)$
- ثابتة أو مستوية عند $(-5, 0)$, و
- تقل أوتنحدر عند $(0, \infty)$.

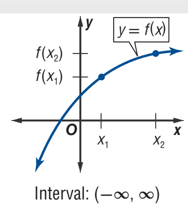


يمكن لهذه التفسيرات للرسم البياني أن توصف من خلال الجبر.

المفهوم الأساسيالدوال المتزايدة المتناقصة والثابتة.

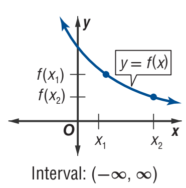
كلمات الدالة f **تكون تصاعدية** عند الفترة / على سبيل المثال، فقط إن كانت هناك أي نقطتين عند /، ينتج تغير في نتائج قيم x بتغير موجب في $f(x)$.

الرموز لكل x_1 و x_2 في أحد الفترات/، $f(x_1) < f(x_2$ عندما يكون $< x_1$.



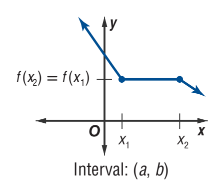
كلمات الدالة f تكون **تنازلية** عند الفترة / على سبيل المثال، إن كانت هناك أي نقطتين عند/، ينتج تغير مو جب في قيم x بتغير سالب في $f(x)$.

الرموز لكل x_1 و x_2 في إحدى الفترات/، $f(x_1) < f(x_2$ عندما يكون $< x_1$.



كلمات الدالة f تكون **ثابتة** عند الفترة / على سبيل المثال، إن كانت هناك أي نقطتين عند /، ينتج تغير موجب في قيم x بتغير صفري في $f(x)$.

الرموز لكل x_1 و x_2 في إحدى الفترات/، $f(x_1) < f(x_2$ عندما يكون $< x_1$.



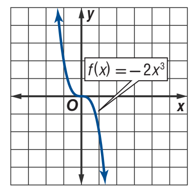
34 | الدرس 1–4

مثال 1 حلّل سلوك التصاعد والتنازل

استخدم الرسم البياني لكل دالة لتقدير فترات أقرب إلى 0.5 وحدة والتي تتصاعد أو تتنازل أو تثبُت فيها الدالة. ادعم الإجابة عدديًا

انتبه!
فترات الدالة ليست تصاعدية ولا تنازلية عند نقطة محددة، لذا فإن الرموز (و) لابد وأن تُستخدم عند وصف الفترات التي تكون فيها الدالة تصاعدية أو تنازلية.

a. $f(x) = -2x^3$



حلّل بالرسم البياني

عندالعرض من اليسار إلى اليمين، ينحدر الرسم البياني لـــ f لكل القيم الحقيقية لـــx. لذلك يمكن أن نخمن أن fتتنازل في $(-\infty, \infty)$.

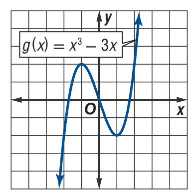
ادعم عدديًا.

أنشئ جدولًا مستخدماً القيم في الفترات .

x	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8
$f(x)$	1024	432	128	16	0	−16	−128	−432	−1024

يوضح الجدولأن x تتصاعد، و $f(x)$ تتنازل. وهذا يثبت الفرضية.

b. $g(x) = x^3 - 3x$



نصيحة للدراسة
الدوال التصاعدية والتنازلية والثابتة الدوال التي تتصاعد أو تتنازل أو تظل ثابتة عند كل قيم x في مجالهم تسمى *دوال تصاعدية أو تنازلية* أو *ثابتة*، على التوالي. الدالة في مثال 1أ دالة تنازلية في حين أن الدالة في مثال 1ب لا يمكن تصنيفها بأنها تصاعدية أو تنازلية لأن لديها فترة تكون فيها تتصاعد وأخرى تكون فيها تتنازل.

حلّل بالرسم البياني

من خلال الرسم البياني، يمكننا أن نُقدّر أن fتتصاعد في $(-\infty,$ ، وتتنازل في $,-1)$، وتتصاعد في $,1)$.

ادعم عدديًا.

أنشئ جدول القيم مستخدماً قيم x لكل فترة على حدة.

$(-\infty,$

x	−13	−11	−9	−7	−5	−3
$f(x)$	−2158	−1298	−702	−322	−110	−18

$(-1, 1)$:

x	−0.75	−0.5	0	0.5	0.75
$f(x)$	1.828	1.375	0	−1.375	−1.828

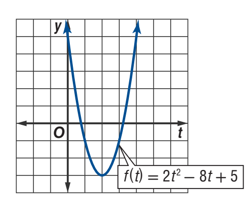
$(1, \infty)$:

x	3	5	7	9	11	13
$f(x)$	18	110	322	702	1298	2158

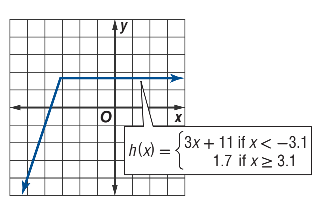
يوضح الجدول أن xتتصاعد إلى ، و$f(x)$ تتصاعد؛ xلأن —تزيد من إلى ، و$f(x)$ تتنازل، وكلما زادتx عن ، $f(x)$ تتصاعد. وهذا يثبت الفرضية.

التمارين الموجهة **1A–B. انظر الهامش.**

1A



1B



بينما تُحدد طريقة الرسم البياني الفترات التي تكون فيها الدالة تصاعدية أو تنازلية أو ثابتة عددياً. إلا أن حساب التفاضل والتكامل مطلوب للتأكيد على هذا السلوك وكذلك التأكيد على أن الدالة لا تغير سلوكها خارج المجال الموضح.

35

- تراوحت معدلات تأييد أحد أعضاء مجلس الشيوخ لأعلى أو أسفل خلال العام الماضي. كيف يمكنها البحث عن متوسط معدل التغيير على مدار شهرين؟ يمكنها طرح تقدير الشهر الأول من تقدير الشهر الثاني وقسمته على 2.

1 زيادة ونقص السلوك

مثال 1 يعرض كيفية البحث عن الفترات حيث يزيد تابع أو يتناقص أو يظل ثابتاً. **الأمثلة 2–4** عرض كيفية البحث عن قيمة عُظمى واستخدامه.

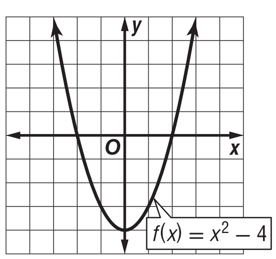
تقييم المفاهيم

استخدم تدريبات الممارسة المنتظمة بعد كل مثال لتحديد فهم الطالب للمبادئ.

أمثلة إضافية

1 استخدم رسم كل قاعدة لتقدير الفترات إلى أقرب 0.5 وحدة حيث تتوايد القاعدة أو تتناقص أو تظل ثابتة. دعم الإجابة بالأرقام.

a. $f(x) = x^2 - 4$



$f(x)$ تقل في $(-\infty, 0)$ وتزيد في $(0, \infty)$.

$(-\infty, 0)$

x	−20	−15	−10	−5
$f(x)$	396	221	96	21

$(0, \infty)$

x	5	10	15	20
$f(x)$	21	96	221	396

(يتبع في الصفحة التالية)

إجابات إضافية (ممارسة منتظمة)

1A. f تقل في $(-\infty, 2)$ تزيد في $(2, \infty)$.

$(-\infty, 2)$

x	−10	−8	−6	−4	−2	0
$f(x)$	285	197	125	69	29	5

$(2, \infty)$

x	4	6	8	10	12	14
$f(x)$	5	29	69	125	197	285

1B. h تزيد في $(-\infty, -3)$ تكون ثابتة في $(-3, \infty)$.

$(-\infty, -3)$

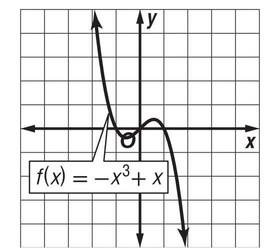
x	−9	−8	−7	−6	−5	−4
$f(x)$	−16	−13	−10	−7	−4	−1

$(-3, \infty)$

x	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	1.7	1.7	1.7	1.7	1.7	1.7

أمثلة إضافية

$f(x) = -x^3 + x$.b



f تقل في $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$، تزيد في $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$، وتقل في $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

x	-10	-8	-6	-4	-2
$f(x)$	990	504	210	60	6

$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

x	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4
$f(x)$	-0.34	-0.19	0	0.19	0.34

$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

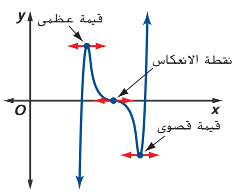
x	2	4	6	8	10
$f(x)$	-6	-60	-210	-504	-990

التركيز على المحتوى الرياضي

قيمة قصوى النسبية والمطلقة

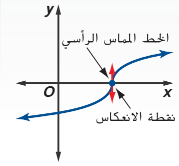
لا تُحدد القيم الصغرى والعُظمى المطلقة بفترة، حيث تمثل تلك القيم القيمة القصوى لمجال الدالة بالكامل وهناك قيمة عظمى مطلقة واحدة وكذلك قيمة صغرى مطلقة واحدة على الأكثر للدالة.

النقاط الحرجة للدالة هي النقاط التي يُرسم عليها خط مماس للمنحنى أفقياً أو رأسياً **النقاط** القصوى تعتبر نقاط حرجة تتغير الدالة فيها من ناحية سلوك التصاعد والتنازل. عند هذه النقاط تكون لدى الدالة **قيمة عظمى** أو قيمة صغرى، وكلاهما إما نسبيّ أو مطلق. **نقطة انعطاف** يمكن أن تشكل كذلك نقطة حرجة. عند هذه النقاط يُغير الرسم البياني شكله، دون إحداث تغير في التصاعد أو التنازل. عوضاً عن ذلك، فإن المنحنى يتغير من ناحية كونه منحنياً لأعلى ليكون منحنياً لأسفل أو العكس.



نصيحة للدراسة

خط المماس تذكر من الهندسة أن الخط يعتبر مماسًا لمنحنى إذا تقاطع مع المنحنى في نقطة محددة.



مفهوم أساسي القيم القصوى النسبية والمطلقة

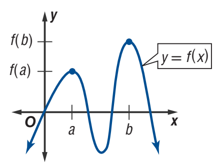
كلمات A *القيمة العظمى النسبية* لدالة f هي القيمة العظمى التي يمكن أن تحققها $f(x)$ عند بعض فتراتها في المجال.

الرموز $f(a)$ هي القيمة العظمى النسبية لـ f إن كانت هناك فترات للدالة (x_1, x_2) والتي تحتوي على قيم مثل a $f(a) > f(x)$ لكل $x \neq a$ في (x_1, x_2).

كلمات إذا كانت القيمة العظمى النسبي أكبر قيمة لدالة f يمكن أن تحققها في مجالها, إذا فهي *القيمة العظمى المطلقة*.

رموز $f(b)$ هي القيمة العظمى المطلقة f إذا $f(b) > f(x)$ لكل $x \neq b$, في مجال f.

النموذج



$f(a)$ is a relative maximum of f.
$f(b)$ is the absolute maximum of f.

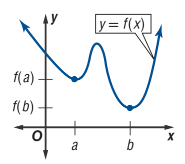
كلمات *القيمة الصغرى* لدالة f هي القيمة الأصغر لـ $f(x)$ والتي يمكن أن تحققها عند فترة معينة في المجال.

الرموز $f(a)$ هي قيمة صغرى لـ f إن كانت هناك فترة (x_1, x_2) تحتوي على قيم مثل a $f(a) > f(x)$ لكل $x \neq a$ في (x_1, x_2).

كلمات إذا كانت القيمة الصغرى هي أقل قيمة يمكن لدالة f تحققها على مدى مجالها، فهي *القيمة الصغرى المطلقة*.

رموز $f(b)$ هي القيمة الصغرى المطلقة f إذا $f(b) < f(x)$ لكل $x \neq b$, في مجال f.

النموذج



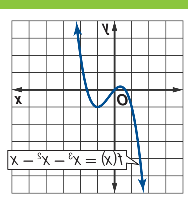
$f(a)$ is a relative minimum of f.
$f(b)$ is the absolute minimum of f.

قراءة الرياضيات

صيغ الجمع في اللاتينية، *maxima* (القيم العظمى) هي صيغة الجمع لمصطلح *maximum* (القيمة العظمى). و*minima* (القيم الصغرى) هي صيغة الجمع لمصطلح *minimum* (القيمة الصغرى)، و*extrema* (القيم القصوى) هي صيغة الجمع لمصطلح *extremum* (القيمة القصوى).

مثال 2 قدّر وعرّف القيم القصوى لدالة

حدد وصنف القيم القصوى للرسم البياني لـ $f(x)$. ادعم الإجابات عدديًا.



حلّل بالرسم البياني

يبدو واضحًا أن $f(x)$ لها قيمة قصوى نسبية عند $x = -0.5$ وقيمة صغرى نسبية عند $x =$. كما يبدو أيضًا أن $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ لذا فنحن نفترض أن الدالة ليس لها أي قيم قصوى مطلقة.

ادعم عدديًا.

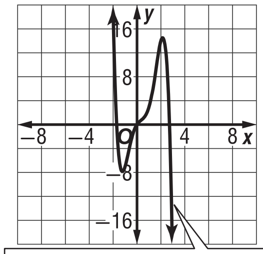
اختر قيم x في فترات نصف وحدة على جانبي القيمة المقدرة لـ x لكل قيمة قصوى. كذلك قيمة واحدة كبيرة جدًا وقيمة واحدة صغيرة جدًا لـ x.

x	-100	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	100
$f(x)$	$-1.0 \cdot 10^6$	-1.00	0.125	0	-0.63	-1	-0.38	$9.9 \cdot 10^5$

لأن $f(-0.5) > f(-1)$ و $f(-0.5) > f(0)$، توجد قيمة عظمى نسبية في الفترة $(-1,$ بالقرب من -0.5. القيمة التقريبية للقيمة العظمى النسبية هي $f(-0.5)$ أو حوالي .

أمثلة إضافية

2 قم بالتقدير إلى أقرب 0.5 وحدة وقم بتصنيف قيمة عُظمى لرسم $f(x)$. اثبت إجاباتك عدديًا.



$f(x) = -x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 3x$

إلى أقرب 0.5 وحدة فهناك حد أدنى مرتبط في $x = -1$ وحد أقصى مرتبط في $x = 2$. لا يوجد حد أقصى مطلق.

3 **الآلة الحاسبة البيانية**

قم بالتقريب إلى أقرب مئة مرتبطة أو حد أقصى مطلق من $f(x) = x^4 - 5x^2 - 2x + 4$. حدد التقويم x حيثما تحدث.

قيمة صُغرى النسبي: $(-1.47,$ $0.80)$؛ قيمة عُظمى النسبي: $(-0.20, 4.20)$؛ abs. قيمة صُغرى: $(1.67, -5.51)$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

جداول البيانات توفر مميزات القاعدة للجدول البيانات طريق سريع وسهل لعمل الجداول. أجعل جميع الطلاب تعمل في مجموعات صغيرة باستخدام صيغ في جداول البيانات لعمل جداول القيم لإيجاد قيمة عُظمى والأدنى النسبي.

وكذلك لأن $f(1) <$ و $f(1) <$، توجد قيمة قصوى نسبية في الفترة(0.5, 1.5) بالقرب من 1. القيمة التقريبية للقيمة القصوى النسبية هي .

$f(100) > f(-0.5)$ and $f(-100) <$، والذي يدعم الفرضية بأن f ليس لديها قيم قصوى مطلقة.

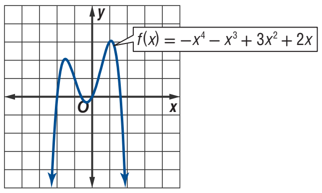
نصيحة للدراسة
القيم القصوى المحلية القيم القصوى النسبية تُسمى أيضًا القيم القصوى *المحلية* والقيم القصوى المطلقة.تُسمى أيضًا *القيم القصوى الشاملة*.

تمارين موجهة

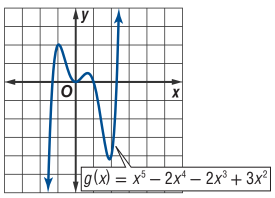
حدد وصنف القيم القصوى للرسم البياني الخاص بكل دالة. ادعم الإجابات عدديًا.

2A–2B. النظر إلى الهامش.

.2A



.2B

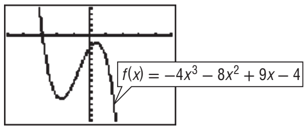


لأن هناك حاجة للتفاضل والتكامل لتأكيد السلوك التصاعدي والتنازلي للدالة. هناك حاجة أيضا للتفاضل والتكامل لتأكيد القيم القصوى النسبية والمطلقة للدالة. الآن، مع ذلك، يمكنك استخدام آلة حاسبة بيانية لمساعدتك على تقريب أفضل لموقع وقيمة القيم القصوى للدالة.

مثال 3 استخدم آلة حاسبة بيانية لتقريب القيم القصوى.

آلة حاسبة بيانية قرّب إلى أقرب مئة القيم القصوي المطلقة والنسبية $f(x) = -4x^3 - 8x^2 + 9x - 4$. اذكر قيم x في موقعها.

ارسم الدالة بيانيًا وعدّل النافذة بالشكل المطلوب حتي يكون كل سلوك الرسم البياني مرئي.

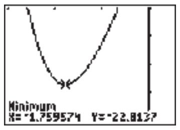


[−5, 5] scl: 1 by [−30, 10] scl: 4

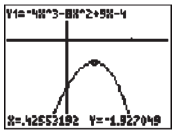
نصيحة تكنولوجية
تكبير العرض عند تحديد أماكن القيم العظمى والصغرى، تأكد من التقريب والبعد بشكل كاف لرؤية التفاصيل والشكل الكلي للرسم البياني. النافذة القياسية قد لا تظهر القصة كاملة.

من الرسم البياني لـــ f، يبدو أن الدالة لديها قيمة صغرى واحدة في الفترة $(-2, -1)$ وقيمة قصوى نسبية واحدة عند الفترة $(0,$ $)$ في المجال. السلوك الطرفي للرسم البياني يشير إلى أن هذه الدالة ليس لها قيم قصوى.

من خلال استخدام خيارات القيم الصغرى والعظمى المتاحة في قائمة التفاضل والتكامل (CALC) في آلتك الحاسبة البيانية، يمكنك تقدير أن الدالة $f(x)$ لها قيمة صغرى نسبية تساوي -22.81 عند $x \approx$ وقيمة عظمى نسبية تساوي عند $x \approx 0.43$.



[−3, 0.5] scl: 1 by [−28, 12] scl: 4



[−0.9, 1.6] scl: 1 by [−7.3, 2.7] scl: 4

3A. القيمة العظمى المطلقة: (−0.42, 8.04)
3B. القيمة العظمى النسبية: (−0.12, 5.06)؛ القيمة الصغرى النسبية: (1.45, 1.24)

تمارين موجهة

آلة حاسبة بيانية قرّب إلى أقرب مئة القيم القصوى المطلقة والنسبية. اذكر قيم x في موقعها.

.3A $h(x) = 7 - 5x - 6x^2$ .3B $g(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 5$

إجابات إضافية (تمارين موجهة)

2A–B. يجب أن تكون إجابات الطلاب قريبة للحد الأقصى من القيم التقريبية المُعطاة.

2A. قيمة عُظمى النسبي: $(-1.52, 2.07)$؛ قيمة صُغرى النسبي: $(-0.31, -0.31)$؛ قيمة عُظمى المطلق: $(1.08, 3.04)$

2B. قيمة عُظمى النسبي: $(-0.96, 2.02)$، $(0, 0)$؛ قيمة صُغرى النسبي: $(0.66, 0.48)$، $(1.90, -4.19)$

G12 GEN TE CH01.indb 37 8/22/2016 4:28:48 PM

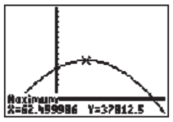
التحسين هو تطبيق للرياضيات حيث يقوم المرء بالبحث عن كمية عظمى أو كمية صغرى مُعطاة كمجموعة من القيود. إذا كانت هناك إمكانية لتصميم مجموعة من الكميات من الحياة اليومية عن طريق أحد الدوال، فإن القيم القصوى للدالة سوف تشير إلى القيم المثلى.

مثال 4 من الواقع استخدم القيم القصوى للأمثلية

الزراعة افترض أن كل واحدة من 75 شجرة برتقال في بستان فلوريدا تُنتج 400 برتقالة في الموسم الواحد. ولنفترض أيضًا أن لكل شجرة إضافية زرعت في البستان انخفض عائد كل شجرة بمعدل برتقالتين. كم عدد الأشجار الإضافية التي ينبغي زراعتها لتحقيق أكبر عائد كلي؟

اكتب الدالة $P(x)$ لوصف عائد المزرعة كدالةx، وهي العدد الإضافي من الأشجار المزروعة في المزرعة.

عدد ثمار فاكهة البرتقال الناتجة من المزرعة.	•	عدد الأشجار	=	المزرعة
$(400 - 2x)$	•	$(75 + x)$	=	$P(x)$



[−100, 221.3] scl: 1 by [−12270.5, 87900] scl: 5000

ونحن نود الوصول إلى أقصى قيمة ناتجة من المزرعة $P(x)$. ارسم هذه الدالة بيانيًا باستخدام آلة حاسبةبيانية. ثم استخدم اختيار القيمة القصوى من قائمة CALC لتقريب قيمة x والتي سينتج عنها أكبر قيمة لــ $P(x)$.

مثل بيانيًا القيمة العظمى لــ 37,812.5 لــ $x \approx 62.5$. إذن، من خلال زراعة 62 شجرة إضافية، يُمكن للمزرعة إنتاج حد أقصى للعائد بقيمة 37,812 برتقالة.

الربط بالحياة اليومية

تُنتج فلوريدا 95% من محصول البرتقال المستخدم لصناعة العصير في الولايات المتحدة. في العام الحالي، استهلك أكثر من 880,000 طن من البرتقال في الولايات المتحدة.

المصدر: وزارة الزراعة الامريكية

تمارين موجهة

4. **الأعمال اليدوية** مساحة أحد حاملات الشموع التي تتخذ شكل أسطوانة دائرية قائمة ذات قعر ودون سطح بوصة مربعة. احسب نصف قطر وارتفاع حامل الشمعة الذي ينتج أقصى حجم.
$r \approx 1.83$ in.; $h \approx 1.83$ in.

2 متوسط معدل التغير

تعلمت مسبقًا في الجبر، أن المنحدر بين أي نقطتين في الرسم البياني لدالة خطية يُمثل معدل تغير ثابت. يتغير الميل لدالة غير خطية بين أزواج مختلفة من النقاط. لذلك يمكننا فقط التحدث عن *متوسط* معدل التغير بين أي نقطتين.

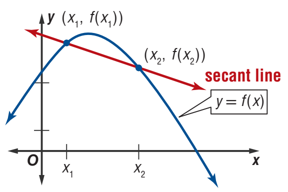
مفهوم أساسي متوسط معدل التغير

كلمات متوسط **معدل التغير** بين أي نقطتين على الرسم البياني لــ f هو منحدر الخط المار عبر هاتين النقطتين.

هندسة يُدعى الخط المار بنقطتين على منحنى **الخط القاطع**. يُرمز إلى منحدر الخط القاطع بوحدة m_{sec}.

رموز متوسط معدل التغير خلال الفترة $[x_1, x_2]$ $m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

النموذج



عندما يكون متوسط معدل التغير خلال أحد فترات الدالة موجبًا، تزيد الدالة بمتوسط القيم خلال تلك الفترة. عندما يكون متوسط معدل التغير خلال أحد فترات الدالة سالبًا، تتناقص الدالة بمتوسط القيم خلال تلك الفترة.

Purestock/Getty Images

أمثلة إضافية

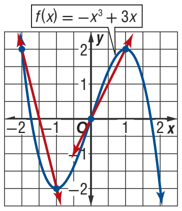
4 اقتصاد البترول تزعم إعلانات السيارات الجديدة أن صفحة الوقود تكفي السائق وثلاثة ركاب لحوالي 360 ميل. وبعد البحث على الإنترنت، ستجد أن التابع للأميال لكل صفحة وقود للسيارة هو $F(X) = -0.025X^2 + 3.5X + 240$, حيث X **هي سرعة السيارة** بالأميال لكل ساعة. ما هي السرعة التي تقوم بتحسين مسافة السيارة التي تستطيع السفر في صفحة الوقود؟ ما هي المسافة التي تستيرها السيارة بالسرعة الأفضل؟ هناك حد أقصى حوالي 70 ميل في الساعة. ستنتقل السيارة 362.5 ميل عند السير بالسرعة الأفضل.

2 متوسط معدل التغيير

الأمثلة 5 و 6 يوضح كيفية البحث عن متوسط معدلات التغيير.

التركيز على المحتوى الرياضي

متوسط معدل التغيير البحث عن متوسط معدل التغيير بين نقطتين للتابع الغير طولي المماثل لتحديد منحدر الخط. على الرغم من ذلك، يمكن تغيير معدل التغيير بين نقطتين لتابع غير طولي مع كل زوج نقاط. عند حساب منحدر الخط فكر $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. عند حساب متوسط معدل التغير للتابع. فكر $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.



الشكل 1.4.1

مثال 5 أوجد متوسط معدلات التغير

أوجد متوسط معدل التغير $f(x) = -x^3 + 3x$ في كل فترة.

a. $[-2, -1]$

استخدم معادلة المنحدر لإيجاد متوسط معدل التغير f خلال الفترة $[-2, -1]$.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)}$$ بديل -1 لـــ x_2 و-2 لـــ x_1

$$= \frac{[-(-1)^3 + 3(-1)] - [-(-2)^3 + 3(-2)]}{-1 - (-2)}$$ تقييم $f(-1)$ و$f(-2)$

$$= \frac{-2 - 2}{-1 - (-2)} \text{ or } -4$$ بسّط

متوسط معدل التغير عند فترة للدالة $[-2, -1]$ هو -4. الشكل 1.4.1 يدعم هذا الاستنتاج.

b. $[0, 1]$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$ بديل 1 لـــ x_2 و0 ل x_1.

$$= \frac{2 - 0}{1 - 0} \text{ أو } 2$$ تقييم $f(1)$ و $f(0)$ وبسّط

متوسط معدل التغير عند فترة للدالة $[0, 1]$ هو 2. الشكل 1.4.1 يدعم هذا الاستنتاج.

تمارين موجهة

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة عند الفترات المحددة.

5A. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2; [2, 3]$ **6**

5B. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x; [-5, -3]$ **−220**

لدى متوسط معدل التغير العديد من التطبيقات في عالم الواقع. وأحد تلك التطبيقات المعروفة يتضمن السرعة المتوسطة لجسم يقطع مسافة d أو من ارتفاع h في فترة زمنية محددة t. لأن السرعة هي المسافة المقطوعة خلال وحدة من الزمن، متوسط سرعة جسم ما لا يمكن أن تكون سلبية.

الربط بالحياة اليومية

بسبب مقاومة الهواء، فإن أي جسم متساقط سيصل في النهاية إلى سرعة ثابتة تسمى *السرعة النهائية*. تصل السرعة النهائية للاعب قفز بالمظلات عندما تكون مظلته مغلقة إلى 120 إلى ميلًا في الساعة.

المصدر: *MSN Encarta*

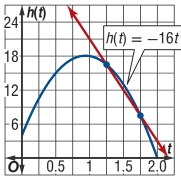
مثال 6 من الحياة اليومية أوجد متوسط السرعة

الفيزياء يُمثل ارتفاع أحد الأجسام التي قُذفت من مكان بارتفاع 4 أقدام فوق سطح الأرض من خلال الدالة $h(t) = -16t^2 + 30t + 4$، حيث تمثل t الوقت بالثواني الذي، تطلب وصول الجسم إلى الأرض بعد قذفه. أوجد وفسر متوسط سرعة الجسم من 1.25 إلى 1.75 ثانية.

$$\frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{h(1.75) - h(1.25)}{1.75 - 1.25}$$ بديل 1.75 ل t_2 و1.25 لـــ t_1.

$$= \frac{[-16(1.75)^2 + 30(1.75) + 4] - [-16(1.25)^2 + 30(1.25) + 4]}{0.5}$$ تقييم $h(1.75)$ و$h(1.25)$

$$= \frac{7.5 - 16.5}{0.5} \text{ or } -18$$ تبسط



متوسط معدل التغير عند فترة للدالة . لذلك، فإن متوسط سرعة الجسم من إلى ثواني هو قدمًا في الثانية، ومسافة بعد الجسم عن الأرض تقل بمتوسط القيم عند تلك الفترة، كما هو موضح في الشكل الموجود على اليمين.

تمارين موجهة

6. **فيزياء** إذا تم تجاهل مقاومة الرياح، فإن المسافة $d(t)$ بالقدم والتي يقطعها الجسم عندما يسقط من مكان مرتفع محدد هي $d(t) = 16$، حيث تمثل t الوقت بعد إسقاط الجسم. أوجد وفسر متوسط سرعة الجسم من 2 إلى 4 ثانية.

96 قدمًا في الثانية، من 2 إلى 4 ثواني، وقد زادت المسافة التي قطعها الجسم بمتوسط القيم عند تلك الفترة.

أمثلة إضافية

5 ابحث عن المعدل المتوسط لـــ $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$ في كل فترة.

A. $[-3, -1]$ 12

B. $[2, 5]$ −10

6 **الجاذبية** تعتبر صيغة المسافة التي تقطعها الأشياء لتسقط على القمر هي $D(T) = 2.7T^2$، حيث $D(T)$ هو المسافة بالقدم و T هو الوقت بالثواني. ابحث عن متوسط سرعة الشيء لكل فترة زمنية وفسره.

A. 1 إلى 2 ثانية 8.1 قدم لكل ثانية

B. 2 إلى 3 ثانية 13.5 قدم في الثانية

المتابعة

اكتشف الطلاب خصائص الدوال.

اسأل:

- كيف يساعدك فهم الدوال الأصلية والتحويلات في تمثيل الأفكار الرياضية وتحليل مواقف العالم الحقيقي؟ الإجابة النموذجية: افهم العلاقة بين الدوال الأصلية التي تسمح لك باختيار تابع مناسبة يمكن استخدامها لتمثيل موقف من الحياة اليومية.
- ما هي خصائص الدوال التي يمكن أن تساعدك على تحليل مواقف الحياة اليومية؟ اشرح. الإجابة النموذجية: يمثل السلوك الأخير سلوك مستقبلي وتمثل النقاط الهامة قيمة عُظمى والأدنى من القيم ويمثل متوسط معدلات التغيير السرعات والتغيرات الأخرى.

Differentiated Instruction

قريب من المستوى — ضمن المستوى

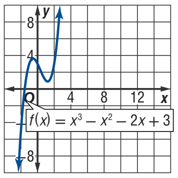
المتعلمين المرئيين/المكانيين يستخدم الطلاب الإنترنت للبحث عن صور نطاق تيتون في حديقة تيتون الوطنية الكبيرة. يجب أن يُبرز كل طالب الخط الأفقي للصورة التي قامت بتحديدها. اطلب من الطلاب تحديد القمم وصنفها إما قيمة عُظمى النسبيأو المطلق.

G12 GEN TE CH01.indb 39 8/22/2016 4:28:57 PM

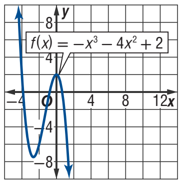
التمارين

استخدم الرسم البياني لكل دالة لتقدير فترات أقرب إلى 0.5 وحدة والتي تتصاعد أو تتنازل أو تثبُت فيها الدالة. ادعم الإجابة عدديًا. (مثال 1) **مراجعة الهامش.**

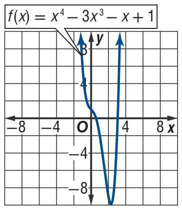
.1



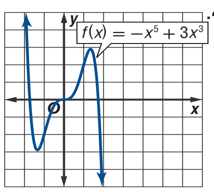
.2



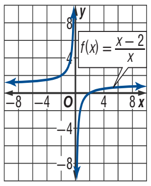
.3



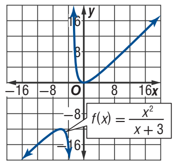
.4



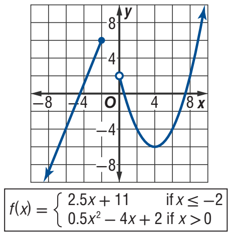
.5



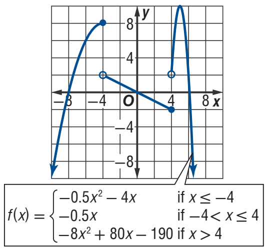
.6



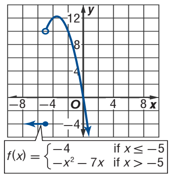
.7



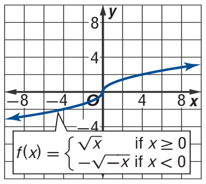
.8



.9



.10



.11 **كرة السلة** يمكن تمثيل ارتفاع أحد الرميات الحرة في الملعب من خلال المعادلة $f(t) = -16t^2 + 23.8t + 5$ حيث تمثل t الوقت محسوب بالثانية، و $f(t)$ هو الارتفاع بالقدم. (مثال 2)

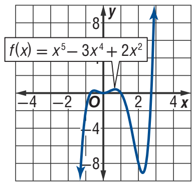
.a مثل بيانيًا ارتفاع الكرة عن الأرض. **مراجعة الهامش.**

.b قدّر أعلى ارتفاع تصل إليه الكرة. ادعم الإجابة عدديًا. **حوالي 13.9 ft**

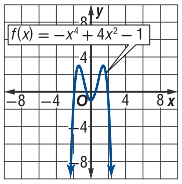
انظر ملحق الإجابات للوحدة 1 .

حدد وصنف القيم القصوى للرسم البياني الخاص بكل دالة. ادعم الإجابة عدديًا. (مثال 2)

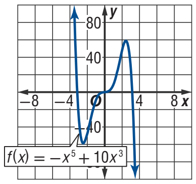
.12



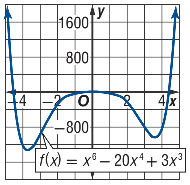
13



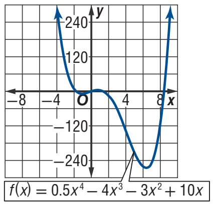
.14



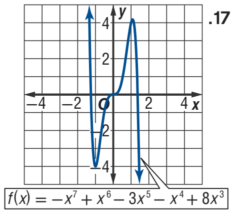
.15



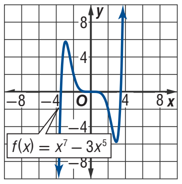
.16



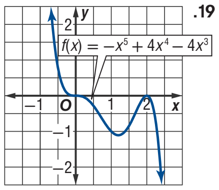
.17



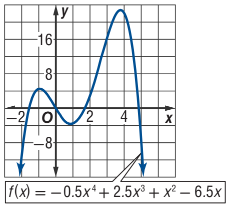
.18



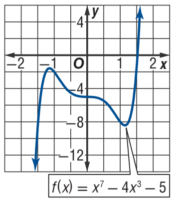
.19



.20



.21



Differentiated Homework Options

ضمن المستوى · أعلى من المستوى · قريب من المستوى

مستوى	مهمة	خيار ليومين	
قريب من المستوى — مستوى الوصول	1–47, 68–72, 74–93	147 فردي, 9497	2–46 زوجي, 68–72, 74–93
ضمن المستوى — في المستوى	1–47 فردي, 48–53, 55–67 فردي, 68–72, 74–97	1–47, 94–97	48–72, 74–93
أعلى من المستوى — ما بعد المستوى	48–97		

3 تمرّن

تقييم المفاهيم

استخدم التدريبات 1–47 للتحقق من الفهم.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص تعيينات الطلاب.

إجابة إضافية

.1 f تزيد في $(-\infty, -0.5)$، تنقص في $(-0.5, 1)$، وتزيد في $(1, \infty)$

.2 f تنقص في $(-\infty, -2.5)$، تزيد في $(-2.5, 0)$، وتنقص في $(0, \infty)$

.3 f تقل في $(-\infty, 2.5)$ تزيد في $(2.5, \infty)$.

.4 f تنقص في $(-\infty, -1.5)$، تزيد في $(-1.5, 1.5)$، وتنقص في $(1.5, \infty)$.

.5 f تزيد في $(-\infty, 0)$ تزيد في $(0, \infty)$.

.6 f تزيد في $(-\infty, -6)$، تقل في $(-6, -3)$، تقل في $(-3, 0)$، تزيد في $(0, \infty)$.

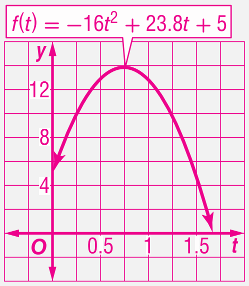
.7 f تزيد في $(-\infty, -2)$، تقل في $(0, 4)$، تزيد في $(4, \infty)$.

.8 f تزيد في $(-\infty, -4)$، تقل في $(-4, 4)$، تزيد في $(4, 5)$، وتقل في $(5, \infty)$.

.9 f تكون ثابتة في $(-\infty, -5)$، تزيد في $(-5, -3.5)$، وتقل في $(-3.5, \infty)$.

.10 f تزيد في $(-\infty, \infty)$.

.11a



آلة حاسبة بيانية

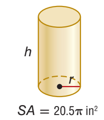
قرّب إلى أقرب مئة القيم القصوى المطلقة والنسبية لكل دالة. اذكر قيم x في موقعها. (مثال 3) **مراجعة الهامش.**

22. $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 8$
23. $g(x) = -2x^3 + 7x - 5$
24. $f(x) = -x^4 + 3x^3 - 2$
25. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5x$
26. $f(x) = x^5 - 2x^3 - 6x - 2$
27. $f(x) = -x^5 + 3x^2 + x - 1$
28. $g(x) = x^6 - 4x^4 + x$
29. $g(x) = x^7 + 6x^2 - 4$
30. $f(x) = 0.008x^5 - 0.05x^4 - 0.2x^3 + 1.2x^2 - 0.7x$
31. $f(x) = 0.025x^5 - 0.1x^4 + 0.57x^3 + 1.2x^2 - 3.5x - 2$

32. **تصميم الجرافيك** يود أحد مصممي الجرافيك إنشاء رسم على شكل مستطيل يتضمن هامش قياسه بوصتين على كل جانب، وهامش آخر بحجم 4 بوصات في الجزء العلوي والسفلي. ويجب أن يكون إجمالي مساحة التصميم متضمنا الهوامش 392 بوصة مربعة. ما هي الأبعاد الكلية التي ستزيد من قياس التصميم إلى الحد الأقصى، فيما عدا الهوامش؟ (*لمحة*: إذا كان أحد أضلع التصميم هو x، فسيتم قسمة الضلع الآخر 392 على x.) (مثال 4) **.28 in في .14 in**

33. **الهندسة** احسب نصف القطر والارتفاع الذي سيزيد حجم الأسطوانة الموضحة إلى أقصى حد. قرب إلى أقرب واحد على مئة من البوصة إذا لزم الأمر. (مثال 4)

$r = 1.85$ In.;
$h = 3.70$ In.



أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة عند الفترات المحددة. (مثال 5)

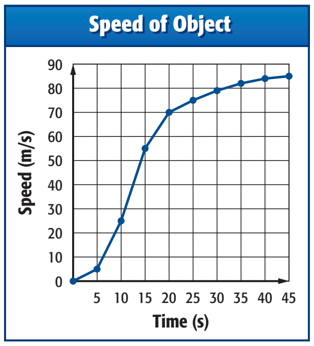
34. $g(x) = -4x^2 + 3x - 4$; $[-1, 3]$ **−5**
35. $g(x) = 3x^2 - 8x + 2$; $[4, 8]$ **28**
36. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 6$; $[2, 6]$ **140**
37. $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 2x - 8$; $[-2, 3]$ **−16**
38. $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 6x - 1$; $[5, 9]$ **4430**
39. $f(x) = -2x^4 - 5x^3 + 4x - 6$; $[-1, 5]$ **−309**
40. $h(x) = -x^5 - 5x^2 + 6x - 9$; $[3, 6]$ **−2550**
41. $h(x) = x^5 + 2x^4 + 3x - 12$; $[-5, -1]$ **472**
42. $f(x) = \frac{x-3}{x}$; $[5, 12]$ **0.05**
43. $f(x) = \frac{x+5}{x-4}$; $[-6, 2]$ **−0.45**
44. $f(x) = \sqrt{x+8}$; $[-4, 4]$ **≈0.183**
45. $f(x) = \sqrt{x-6}$; $[8, 16]$ **≈0.219**

46. **الطقس** يمكن تمثيل متوسط درجات الحرارة المرتفعة خلال الشهر في دبي من خلال الدالة التالية $f(x) = -0.9x^2 + 13x + 43$، حيث تمثل x الشهر $x =$ تمثل شهر يناير. أوجد متوسط معدل التغير لكل فترة زمنية، واشرح ماذا يمثل هذا المعدل. (مثال 6)
   a. إبريل إلى مايو
   b. يوليو إلى نوفمبر
   A–B 1 . النظر إلى الهامش.

47. **القهوة** يمكن تمثيل استهلاك العالم من القهوة في الفترة ما بين عامي 1990 و 2000 من خلال الدالة $f(x) = -0.004x^4 + 0.077x^3 - 0.38x^2 + 0.46x + 12$، حيث يعبر x عن العام. $x = 0$ والذي يتطابق مع عام 1990. ويتم قياس الاستهلاك بوحدة المليون رطل. أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة عند الفترات المحددة. (مثال 6) **0.735 مليون رطل في العام**
   a. 1990 إلى 2000
   b. 1995 إلى 2000 **0.36 مليون رطل في العام**

48. **سياحة** يمكن تمثيل السياحة في إمارة دبي في عام محدد من خلال الدالة $f(x) = 0.0635x^6 - 2.49x^5 + 37.67x^4 - 275.3x^3 + 986.6x^2 - 1547.1x + 1390.5$، حيث يكون x $1 \le x \le$ يمثل الشهر. $x =$ وهو ما يتوافق مع اليوم الأول من شهر مايو، و $f(x)$ يُمثل عدد السائحين بالآلاف.
   a. مثِّل المعادلة بالرسم البياني. **مراجعة الهامش.**
   b. خلال أي شهر وصل عدد السائحين إلى القيمة العظمى المطلقة؟ **يوليو**
   c. خلال أي شهر وصل عدد السائحين إلى القيمة القصوى النسبية؟ **ديسمبر**

49. استخدم الرسم البياني لإكمال ما يلي.



   a. أوجد متوسط معدل التغير [5, 15]، و[15, 20]، و[25, 45].
   [5, 15]: 5; [15, 20]: 3; [25, 45]: 0.5
   b. قارن وقابل بين طبيعة سرعة الجسم خلال هذه الفترات الزمنية. **مراجعة الهامش.**
   c. ما هي الاستنتاجات التي تستطيع استنتاجها حول مقدار معدل التغيير، وشدة انحدار الرسم البياني وطبيعة الدالة؟ **مراجعة الهامش.**

50. **تقنية** حدد فريق البحث في أحد شركات الكمبيوتر أن ربح أحد رقائق المعالجات الجديدة يُمكن تمثيلها من خلال الدالة $P(x) = -x^3 + 5x^2 + 8x$، حيث تكون x هو سعر بيع الرقاقة بمئات الدراهم.
   a. مثل الدالة بيانيًا. **مراجعة الهامش.**
   b. ما هو السعر المثالي للرقاقة الواحدة؟ **$400**
   c. ما هو هامش ربح الرقاقة الواحدة عند السعر المثالي؟ **$48**

انتبه!

خطأ شائع في التدريبات 32 و33 و53 قد يكافح الطلاب للإيجاد تابع مع متغير واحد مستقل فقط. حذرهم من أن استخدام أنظمة المعادلات والاستبدال يمكنه تقليل عدد المتغيرات المستقلة.

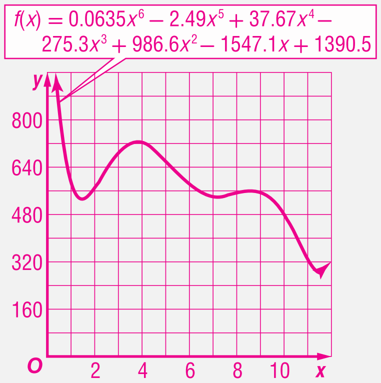
إجابة إضافية

22. قيمة عُظمى النسبي: (0, 8)؛ قيمة صُغرى النسبي: (1.33, 4.44)
23. قيمة عُظمى النسبي: (1.08, 0.04)؛ قيمة صُغرى النسبي: (-1.08, -10.04)
24. قيمة عُظمى المطلق: (2.25, 6.54)
25. abs قيمة صُغرى: (-1.38, -7.08)
26. قيمة عُظمى النسبي: (-1.36, 6.54)؛ قيمة صُغرى النسبي: (1.36, -10.54)
27. قيمة عُظمى النسبي: (1.11, 2.12)؛ قيمة صُغرى النسبي: (-0.17, -1.08)
28. قيمة عُظمى النسبي: (0.41, 0.30)؛ قيمة صُغرى المطلق: (1.62, -7.85)؛ قيمة صُغرى المطلق: (-1.64, -11.12)
29. قيمة عُظمى النسبي: (-1.11, 1.32)؛ قيمة صُغرى النسبي: (0, -4)
30. قيمة عُظمى النسبي: (2.49, 1.45)، (-3.72, 14.23)؛ قيمة صُغرى النسبي: (0.32, -0.11)، (5.90, -6.83)
31. قيمة عُظمى النسبي: (-1.66, 3.43)؛ قيمة صُغرى النسبي: (0.93, -3.82)

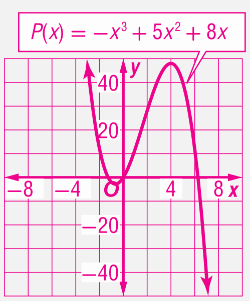
46أ. كل شهر يزيد متوسط درجة الحرارة من بداية الربيع وحتى منتصفه. 4.9°

46ب. كل شهر يقل متوسط درجة الحرارة من الصيف وحتى أواخر الشتاء. −3.2°

48أ.



50a.



49ب. يزيد الكائن بالسرعة أو التسارع على طول الثلاث فترات. تتسارع بأسرع معدل للفترة [5, 15]. بينما يكون التسارع بطيء جدًا في [25, 45]، فإنه *لا يزال* يزيد من السرعة.

49ج. الرسم شديد الانحدار = المعدل المرتفع للتغيير = الزيادة المتسارعة أو تناقص الرسم المسطح = معدل الحجم المنخفض للتغيير = قيمة صُغرى المتزايد أو المتناقص.

إجابة إضافية

76. مستمر; $f(-3) = \sqrt{7}$ أو حوالي ≈ 2.65, $\lim_{x \to -3} f(x) \approx 2.65$, و $\lim_{x \to -3} f(x) = f(-3)$.

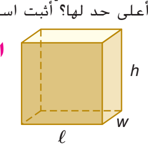
77. مستمر; $\lim_{x \to 3} f(x) = 2$, $f(3) = 2$, و $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$.

---

51. **الدخل** يمكن تمثيل صافي الدخل للأفراد بالإمارات العربية المتحدة من عام وحتى عام 2007 من خلال الدالة التالية $I(x) = -1.465x^5 + 35.51x^4 - 277.99x^3 + 741.06x^2 + 847.8x + 25362,\ 0 \le x \le 10$, حيث x يُمثل عدد السنوات منذ عام .
   - **a.** مثّل المعادلة بالرسم البياني.
   - **b.** ما هو متوسط معدل التغير من عام 2000 وحتى عام 2007؟ ماذا تُمثل هذه القيمة؟
   - **c.** أين وصل متوسط معدل التغير إلى أقصى قيمة له في فترة 4 سنوات؟ وأين وصل إلى أدنى قيمة له؟

52. **تجارة وأعمال** صنعت أحد الشركات حوض للمياه بسعة 12 قدم مكعب، وكان ثمن الزجاج المستخدم في كل قدم مربعة من قاعدة الحوض .
وكان ثمن الزجاج المستخدم في كل قدم مربعة من جوانب الحوض .
   - **a.** إذا كان طول وعرض الحوض متساويان، فأوجد الأبعاد التي ستقلل تكلفة صناعة الحوض إلى أدنى حد. **$w \approx 1.98$ ft, $h \approx 1.98$ ft, $l \approx 3.06$ ft**
   - **b.** ما هي أدنى تكلفة لصناعة الحوض؟ **\$40.99**
   - **c.** إذا قامت الشركة كذلك بصناعة حوض على شكل مكعب بنفس السعة، ما هي الاختلافات في تكاليف الصناعة؟ **\$0.94**

53. **التعبئة** يحتاج كريم إلى تصميم صندوق مغلق له قاعدة مربعة، وحجمه 3024 بوصة مكعبة. ما هي الأبعاد التي تجعل مساحة السطح للصندوق تصل إلى أعلى حد لها؟ أثبت استنتاجك. **انظر ملحق الإجابات للفصل 1**



ارسم بيانيًا الدالة الخاصة بكل مجموعة من الخصائص.

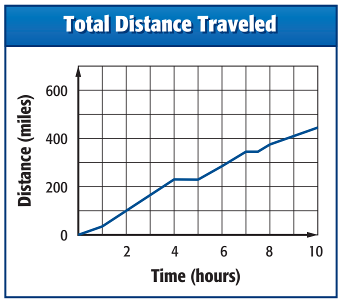
54. $f(x)$ متصلة وتصاعدية دائمًا.
55. $f(x)$ متصلة وتنازلية دائمًا.
56. $f(x)$ متصلة وتصاعدية دائمًا $f(x) > 0$ لجميع قيم x.
57. $f(x)$ متصلة وتنازلية دائمًا $f(x) > 0$ لجميع قيم x.
58. $f(x)$ متصلة وتصاعدية عند $x < -2$ وتنازلية عند $x > -2$.
59. $f(x)$ متصلة وتنازلية عند $x < 0$ وتصاعدية عند $x > 0$.

54–59. انظر ملحق الإجابات للفصل 1

حدد إحداثيات القيم القصوى المطلقة للدوال. حدد ما إذا كانت القيمة القصوى قيمة عظمى أمقيمة صغرى.

60. $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$ **الحد الأدنى (3, 5);**
61. $f(x) = -0.5(x+5)^2 - 1$ **أقصى (−5, −1);**
62. $f(x) = -4|x-22| + 65$ **أقصى (22, 65);**
63. $f(x) = 4(3x-7)^4 + 8$ **الحد الأدنى (2.3, 8);**
64. $f(x) = (36 - x^2)^{0.5}$ **أقصى (0, 6);**
65. $f(x) = -(25 - x^2)^{0.5}$ **الحد الأدنى (0, −5);**
66. $f(x) = x^3 + x$ **لا القيم القصوى**

67. **السفر** دون محمد ومثل بيانيًا إجمالي المسافة التي تقطعها سيارة عائلته في كل ساعة من رحلتهم. علل سبب تغير متوسط معدل التغير عند بعض الفترات، وثباته عند فترتين. **انظر ملحق الإجابات للفصل 1.**



68. **نقاط الانعطاف** حدد أي من الرسوم البيانية الواردة في تمرين 1−10 و12−21 لديها نقاط انعطاف تعتبر نقاط حرجة، وقدر مواقع هذه النقاط على كل رسم بياني. **تمرين 3: (0, 0.5)، تمرين 4: (0, 0)، تمرين 10: (0, 0)، تمرين 14: (0, 0)، تمرين 17: (0, 0)، تمرين 18: (0, 0)، تمرين 19: (0, 0)، تمرين 21: (0, −5)**

تحتاج مهارات ذهنية مرتبة بشكل أكبر

أسئلة مفتوحة ارسم بيانيًا الدالة الخاصة بكل مجموعة من الخصائص. 69–70. **انظر ملحق الإجابات للفصل 1.**

69. انقطاع انهائي عند $x = -2$
زيادة على $(-\infty, -2)$
زيادة على $(-2, \infty)$
$f(-6) = -6$

70. متصلة
متوسط معدل التغير عند فترة للدالة $[3, 8]$ هو 4
تنازلية عند $(8, \infty)$
$f(-4) = 2$

71. **الاستدلال** ما هو منحدر الخط القاطع من $(a, f(a))$ to $(b, f(b))$ عندما تكون $f(x)$ ثابتة عند الفترة $[a, b]$؟ اشرح استدلالك. **انظر ملحق الإجابات للفصل 1.**

72. **منطق** إذا كان متوسط معدل تغير $f(x)$ على الفاصلة $[a, b]$ هو إيجابي,هو $f(x)$في بعض الأحيان, دائما أو اشرح استدلالك ?$[a, b]$ عدم المتزائد على

73. **تحدي** استخدم الآلة الحاسبة البيانية $f(x) = \sin x$ في وضع الدرجات. صف القيم القصوى النسبية للدالة، والنافذة المستخدمة في رسمك البياني. **انظر ملحق الإجابات للفصل 1.**

74. **الاستدلال** لدى إحدى الدوال المتصلة f قيمة نسبية دنيا عند c، كما أنها تزيد بزيادة x عن c. صف سلوك الدالة عندما تزيد x إلى c. اشرح استدلالك. **انظر ملحق الإجابات للفصل 1.**

75. **الكتابة في مادة الرياضيات** صف كيف يرتبط متوسط معدل التغير للدالة بالتصاعد أو التنازل أو الثبات عند الفترة. **انظر ملحق الإجابات للفصل 1.**

المراجعة الحلزونية

حدد ما إذا كانت كل دالة هي دالة متصلة عند قيمة (قيم) x المحددة. علل مستخدمًا اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة منقطعة، فحدد نوع الانقطاع، سواء كان *لا نهائي* أو *متنقل* أو *قابل للإزالة*. (الدرس) **76–78. مراجعة الهامش.**

.76 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2};\ x = -3$

.77 $f(x) = \sqrt{x + 1};\ x = 3$

.78 $h(x) = \frac{x^2 - 25}{x + 5};\ x = -5$ and $x = 5$

الآلة الحاسبة البيانية مثّل كل من الدوال. حلّل الرسم البياني لتحديد ما إذا كانت كل دالة زوجية، أم فردية، أم ليست أي منهما. أثبت الحل من خلال الجبر. إذا كانت الدالة فردية أو زوجية، فصف تماثل الرسم البياني للدالة. (الدرس) **79–81. مراجعة الهامش.**

.79 $f(x) = |x^5|$

.80 $f(x) = \frac{x + 8}{x - 4}$

.81 $g(x) = \frac{x^2}{x + 3}$

حدد مجال كل دالة. (الدرس)

.82 $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 5}$ **$\{x / x \neq \pm\sqrt{5},\ x \in \mathbb{R}\}$**

.83 $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ **$(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$**

.84 $h(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 7}}$ **$(-\infty, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, \infty)$**

.85 أوجد قيم x، y، و z لـ $3 \begin{bmatrix} x & y - 1 \\ 4 & 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 6z & 3x + y \end{bmatrix}$. (الدرس 0–6) **(5, 3, 2)**

.86 إذا كان ذلك ممكنًا، فأوجد حل $y = x + 2z,\ z = -1 -$ ، و $x = y -$. (الدرس 0–5) **(−4, 10, 7)**

حل كل معادلة. (الدرس 0–3)

.87 $x^2 + 3x - 18 = 0$ **−6, 3**

.88 $2a^2 + 11a - 21 = 0$ **$-7, \frac{3}{2}$**

.89 $z^2 - 4z - 21 = 0$ **7, −3**

بسّط. (الدرس 0–2)

.90 i^{19} **$-i$**

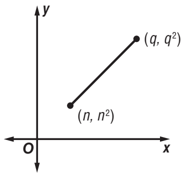
.91 $(7 - 4i) + (2 - 3i)$ **$9 - 7i$**

.92 $\left(\frac{1}{2} + i\right) - (2 - i)$ **$-\frac{3}{2} + 2i$**

.93 **كهرباء** كان لبطاريات أحد السيارات التي قوتها مقاومة تساوي 0.02 ohm في أحد أيام الشتاء الباردة. وقد مُثلت القوة المتاحة لإدارة المحرك من خلال المعادلة $P = 12I - 0.02I^2$، حيث تكون I هي قيمة المقاومة. ما هي قيمة الشحنة الضرورية لإنتاج 1600 واط من القوة لتشغيل المحرك؟ (الدرس 0–2) **200 or 400 amps**

مراجعة المهارات للاختبارات القياسية

.94 **SAT/ACT** في الشكل، إذا كان $q \neq n$، ما هو منحدر الخط المستقيم؟ **A**



A $q + n$

B $q - n$

C $\frac{q^2 + q}{n^2 - n}$

D $\frac{1}{q + n}$

E

.95 **مراجعة** عندما يكون عدد أيام إحدى السنوات يقبل القسمة على 4، فهي سنة كبيسة. بالرغم من ذلك، عندما يكون العام قابلًا للقسمة على 100، فلن يكون هناك سنة كبيسة إلا إذا كانت السنة تقبل القسمة على 400. ما هي التي لا تُعد مثالًا للعام الكبيس؟ **G**

F 1884

G 1900

H 1904

J 1940

.96 الدالة $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 6$ لها حدود عظمى نسبية وصغرى نسبية تقع عند القيم التالية ? لـ $x-$ **C**

A قيمة عظمى نسبية عند $x \approx -0.7$، قيمة صغرى نسبية عند $x \approx 2$

B قيمة عظمى نسبية عند $x \approx -0.7$. قيمة صغرى نسبية عند $x \approx -2$

C قيمة قصوى نسبية عند $x \approx -2$. قيمة صغرى نسبية عند $x \approx 0.7$

D قيمة عظمى نسبية عند $x \approx 2$، قيمة صغرى نسبية عند $x \approx 0.7$

.97 **مراجعة** نافذة على شكل مثلث متساوي الأضلاع. طول كل ضلع من أضلاع المثلث 8 أقدام. النافذة مقسمة إلى نصفين من خلال دعامة تبدأ من رأس زاوية إلى منتصف ضاع المثلث المقابل لرأس الزاوية. تقريبًا ما هو طول الدعامة؟ **G**

F 5.7 ft

G 6.9 ft

H 11.3

J 13.9

43

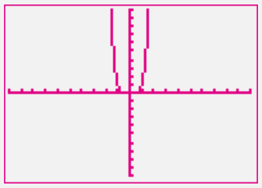
4 تقييم

الكرة الكريستالية اسأل الطلاب حول رأيهم في درس اليوم واتصاله مع الدرس التالي في الدوال الأصلية والتحويلات.

إجابة إضافية

.78 تم التوقف في $x = -5;\ h(-5)$ غير معرف و $\lim_{x \to -5} h(x) = -10$, so $h(x)$ يحتوي على قابل لحذف قطع الاتصال في $x = -5$. يستمر في $x = 5;\ h(5) = 0,\ \lim_{x \to 5} h(x) = 0$, and $\lim_{x \to 5} h(x) = h(5)$.

.79

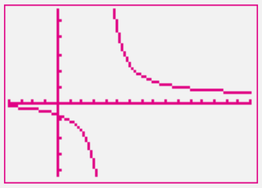


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

زوجي؛ رسم $f(x)$ هو التماثل مع الأخذ في الاعتبار محور y.

$f(-x) = |(-x)^5|$
$= |x^5|$
$= f(x)$

.80

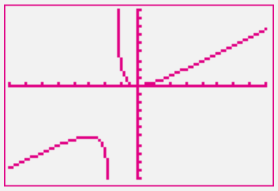


[−4, 16] scl: 1 by [−13, 17] scl: 3

لاهذا ولا ذاك

$f(-x) = \frac{(-x) + 8}{(-x) - 4}$ أو $\frac{8 - x}{-x - 4}$

.81



[−16, 16] scl: 2 by [−22, 18] scl: 2

لاهذا ولا ذاك

$g(-x) = \frac{(-x)^2}{-x + 3}$ or $\frac{x^2}{-x + 3}$

التعليم المتمايز

أعلى من المستوى

الامتداد يعتبر خط التلامس إلى رسم تابع متعددة الحدود في قيمة صُغرى والأقصى والأفقي. افترض أن النقطتين يعرفان الخط القاطع لرسم التابع المتعددة الحدود التي تتقارب عن الارتباط بالحد الأقصى. ماذا يحدث لميل الخط القاطع حيث تتقارب النقاط إلى قيمة عُظمى؟ كيف يمكن أن تتصل بخط التلامس في قيمة عُظمى المرتبط؟ يصل ميل الخط القاطع 0. حين تتقارب النقاط إلى قيمة عُظمى المرتبط فإن الخط القاطع يتقارب إلى التلامس الأفقي.

الدروس 1-1 و 1-4

التقييم التكويني

استخدم اختبار منتصف الفصل في تقويم تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة

فيما يتعلق بمشكلة الإجابات الخاطئة, أجعل الطلاب يراجعون الدروس المشار أليها بين الأقواس

إجابات إضافية

6b [0,3.22] مثال على الأجابة: يمثل المجال النسبي الفترة الزمنية الزمنية التي تبدأ من لحظة ركل الكرة وتنتهي بوصولها الى الأرض. لأن الوقت لا يمكن أن يكون سالبًا و ارتفاع الكرة يكون 0 عندما $t = 3.22$, $0 \le t \le 3.22$.

7. نقاط حصر0 y- أصفار -4, 0, 4;

$$x^3 - 16x = 0$$
$$x(x^2 - 16) = 0$$
$$x(x + 4)(x - 4) = 0$$
$$x = 0 \text{ or } x + 4 = 0 \text{ أو } x - 4 = 0$$
$$x = -4 \qquad x = 4$$

8. نقاط حصر5 y-: صفر: 25:

$$5 - \sqrt{x} = 0$$
$$5 = \sqrt{x}$$
$$25 = x$$

9. $D = [0, \infty), R = [0, \infty)$

10. $D = \{x | x \in \mathbb{R}\}, R = \{y | y \in \mathbb{Z}\}$

12. مستمر عند $x = 5$; $f(5) = 2.5$, $\lim_{x\to 5} f(x) = 2.5$, و $\lim_{x\to 5} f(x) = f(5)$.

13. من الرسم البياني, يبدو أن $f(x)\to -\infty$ ك $x\to\infty$, و $f(x)\to\infty$ كا $x\to -\infty$.

14. من الرسم البياني, يبدو أن $f(x)\to 5$ كا $x\to\infty$, و $f(x)\to 5$ كا $x\to -\infty$.

16. f تنخفض على $(-\infty, 3)$ و ترتفع على $(3, \infty)$.

17. f يرتفع على $(-\infty, -2)$, ينخفض على $(-2, 1.5)$, و يرتفع على $(1.5, \infty)$.

سؤال منتصف الوحدة

الدروس 1-1 حتى 1-4

حدد ما إذا كانت كل علاقة تمثل y على أنها دالة لـــ x. (الدرس 1-1)

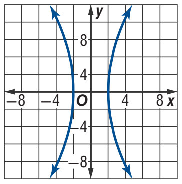
.1 $3x + 7y = 21$ **دالة**

.2

x	-1	1	3	5	7
y	-1	3	7	11	15

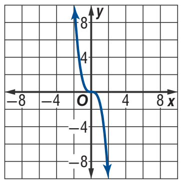
دالة

.3



دالة

.4



ليست دالة

.5 قدِّر قيمة $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{if } x < 2 \\ x + 10 & \text{if } x \ge 2 \end{cases}$ لـ $f(2)$ (الدرس 1-1) **12**

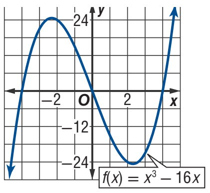
.6 **الرياضات** أثناء لعب كرة البيسبول، ضرب المضرب الكرة إلى داخل الملعب. بعد t ثانية يمكن تمثيل ارتفاع الكرة بالأقدام بـــ $h(t) = -16t^2 + 50t + 5$. (الدرس 1-1)

a. كم يبلغ ارتفاع كرة البيسبول بعد 3 ثواني؟ **11 قدم**

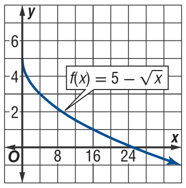
b. ما هو المجال المناسب لهذه الدالة؟ اشرح استدلالك. **انظر الهامش.**

استخدم الرسم الخاص بكل دالة لمعرفة الجزء المقطوع من التقاطع مع المحور الرأسي y والصفر(الأصفار). ثم أوجد القيم من خلال الجبر. (الدرس 1-2)

.7



.8

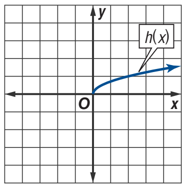


7–8. انظر الهامش.

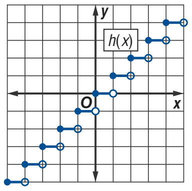
استخدم الرسم البياني لـــ h لمعرفة مجال ونطاق كل دالة. (الدرس 1-2)

9–10. انظر الهامش.

.9



.10



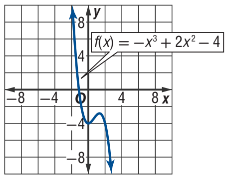
قرر ما إذا كانت كل دالة متصلة عند . علل إجابتك مستخدمًا اختبار الاتصال. (الدرس 1-3)

.11 $f(x) = \sqrt{x^2 - 36}$ **.12** $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 5}$ **انظر الهامش.**

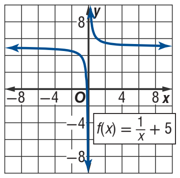
منقطعة عند $x = 5$; $f(x)$ تكون غير محددة عندما تكون $x = 5$.

استخدم الرسم البياني لكل دالة لتصف سلوكها الطرفي. (الدرس 1-3) **13–14. انظر الهامش.**

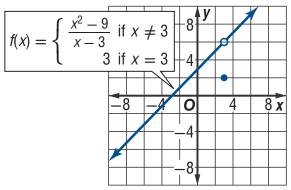
.13



.14



.15 **الاختيار من المتعدد** الرسم البياني لـــ $f(x)$ يحتوي على a(n) ________ انقطاع عند $x = 3$. (الدرس 1-3) **د**



A غير محدد

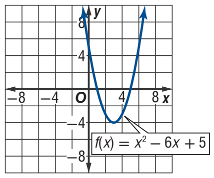
B لا نهائي

C قاطع

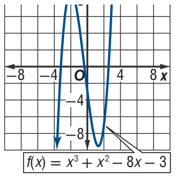
D قابل للإزالة

استخدم الرسم البياني لكل دالة لتقدير الفترات وتقريبها لأقرب 0.5 وحدة تتصاعد عندها الدالة أو تتنازل أو تظل ثابتة. (الدرس 1-4) **16–17. انظر الهامش.**

.16



.17



.18 **الفيزياء** يبلغ ارتفاع جسم ما سقط من مسافة 80 قدمًا أعلى مستوى الأرض بعد t ثانية $f(t) = -16t^2 + 80$. ما هو متوسط سرعة الجسم خلال الثانيتين الأوليتين بعد السقوط؟ (الدرس 1-4) **32 ft/s**

ا التركيز

محاذاة رأسية

قبل الدروس من I–5 حلل الرسم البياني للدوال.

الدروس من I–5 حدد الرسم البياني و صف التابع الأب.
حدد و أرسم بيانيا التحويلات في الدالة الأصلية.

بعد الدروس من I–5 نفذ العمليات و أوجد تركيبة الدوال.

2 علّم

الأسئلة المعلقة

جعل الطلاب يقرأون قسم لماذا؟ من الدرس .

اسأل:

- ما هي أوجه التشابهات و الإختلافات بين $f(x) = x$ و $g(x) = x +$ 2؟ إنحناء الخطوط يكون مطابقًا مع $g(x)$ تحرك الى أعلى بمقدار وحدتين.
- إشرح كيفية إختلاف التقويم ال a سوف يؤثر على الرسم البياني ل$f(x)$ $= x + a$. قيمة التحرك الخط الى أعلى أو أسفل $|a|$ وحدات.

(يُتبع في الصفحة التالية)

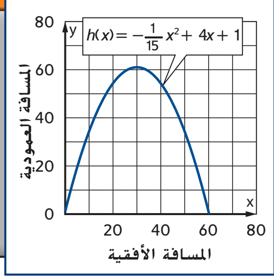
الدرس 1–5 الدوال الرئيسية والتحويلات

قبل ذلك
- قمت بتحليل الرسوم البيانية للدوال. الدروس من 1–2 إلى 1–4

الآن
1. تحديد ورسم ووصف الدوال الرئيسية.
2. تحديد ورسم تحويلات الدوال الرئيسية.

السبب
- يمكن تمثيل مسار كرة القدم المقذوفة من خلال الدالة على اليمين. هذه الدالة مرتبطة بالدالة التربيعية الأساسية $f(x) = x^2$.

مسير كرة القدم



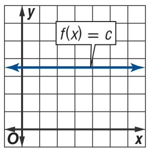
المفردات الجديدة
- الدالة الرئيسية (parent function)
- الدالة الثابتة (constant function)
- الدالة الصفرية (zero function)
- الدالة المحايدة (identity function)
- الدالة التربيعية (quadratic function)
- الدالة التكعيبية (cubic function)
- دالة الجذر التربيعي (square root function)
- الدالة التبادلية (reciprocal function)
- دالة القيمة المطلقة (absolute value function)
- الدالة الدرجية (step function)
- دالة أكبر عدد صحيح (greatest integer function)
- التحويل (transformation)
- الإزاحة (translation)
- الانعكاس (reflection)
- تغيير الأبعاد بمقياس (dilation)

1 الدوال الرئيسية

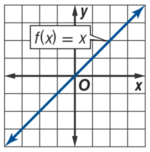
تتكون *عائلة الدوال* من مجموعة من الدوال التي تشترك رسومها البيانية في خاصية أو أكثر. وتعتبر **الدالة الرئيسية** هي أبسط دالة في عائلة الدوال. وهي الدالة التي تتحول فتصبح دالة أخرى من ضمن عائلة الدوال. في هذا الدرس، ستتعرف على أشهر ثماني دوال رئيسة. ولابد أنك الآن ألفت بالفعل الرسوم البيانية للدوال الخطية وكثيرة الحدود التالية.

مفهوم أساسي الدوال الرئيسة الرئيسية وكثيرة الحدود

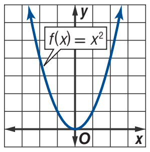
تأخذ **الدالة الثابتة** الصيغة $f(x) = c$، حيث تمثل c أي عدد حقيقي. رسمها البياني عبارة عن خط أفقي. وعندما تكون قيمة $c = 0$، تصبح الدالة $f(x)$ **دالة صفرية**.



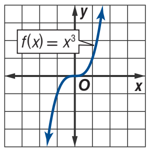
تمر **الدالة المحايدة** $f(x) = x$ عبر كل النقاط ذات الإحداثيات (a, a).



الدالة التربيعية $f(x) = x^2$ رسمها البياني يأخذ شكل حرف U.



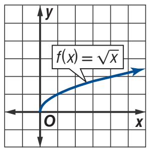
الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$ متناظرة حول نقطة الأصل.



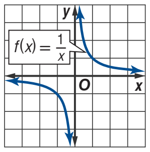
ولابد أنك الآن ألفت بالفعل الرسومات البيانية لدالة الجذر التربيعي و العكسية.

مفهوم أساسي دوال الجذر التربيعي و العكسية الرئيسية

تأخذ **دالة الجذر التربيعي** الصيغة $f(x) = \sqrt{x}$



تأخذ **الدالة العكسية** الصيغة $f(x)$



G12 GEN TE CH01.indb 45 8/22/2016 4:29:21 PM

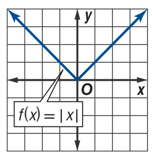
وهناك دالة رئيسة أخرى هي الدالة متعددة التعريف دالة القيمة المطلقة.

مفهوم أساسي دالة القيمة المطلقة الرئيسية

التعريف **دالة القيمة المطلقة** معادلتها $f(x) = |x|$، وتأخذ الشكل V، وتعرف كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{اذا كان } x < 0 \\ x & \text{اذا كان } x \geq 0 \end{cases}$$

نموذج



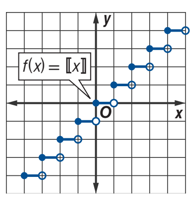
أمثلة $|-5| = 5,\ |0| = 0,\ |4| = 4$

أما الدالة متعددة التعريف التي يظهر فيها الرسم البياني كأنه درجات سلم، فتسمى **الدالة الدرجية**. وأشهر شكل من أشكال الدالة الدَرَجيّة هي دالة أكبر عدد صحيح.

مفهوم أساسي دالة أكبر عدد صحيح الرئيسية

التعريف **دالة أكبر عدد صحيح** معادلتها $f(x) = [\![x]\!]$. ومعرفة على أنها تمثل أكبر عدد صحيح أقل أو يساوي x.

النموذج



أمثلة $[\![-4]\!] = -4,\ [\![-1.5]\!] = -2,\ \left[\!\!\left[\frac{1}{3}\right]\!\!\right] = 0$

نصيحة للدراسة
دالة الجزء الصحيح تعرف دالة أكبر عدد صحيح أيضاً باسم دالة الجزء الصحيح.

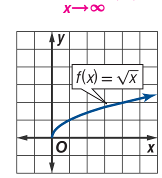
باستخدام الأدوات التي تعلمتها خلال الدروس حتى ، يمكنك وصف خصائص كل دالة رئيسة. تساعدك معرفة خصائص الدوال الرئيسة في تحليل أشكال الرسوم البيانية الأكثر تعقيداً في هذه العائلة.

مثال 1 صف خصائص الدالة الرئيسة

صف الخصائص التالية للرسم البياني للدالة الرئيسية $f(x) = \sqrt{x}$: المجال، والنطاق، ونقاط التقاطع، والتناظر، والاتصال، والسلوك الطرفي، وفترات تزايد أو تناقص الرسم البياني.

يتصف الرسم البياني لدالة الجذر التربيعي (الشكل 1.5.1) بالخصائص التالية.

- مجال الدالة $[0, \infty)$، والنطاق $[0, \infty)$.
- الرسم البياني له نقطة تقاطع وحيدة هي $(0, 0)$.
- الرسم البياني ليس متناظرًا. بالتالي، الدالة $f(x)$ ليست زوجية أو فردية.
- الدالة متصلة على كل قيم مجالها.
- يبدأ الرسم البياني عند النقطة $x = 0$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
- الرسم البياني يتصاعد في الفترة $(0, \infty)$.



الشكل 1.5.1

1. $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$، والنطاق $R = \{y \mid 0 \leq y, y \in \mathbb{R}\}$، للرسم نقطة تقاطع واحدة عند نقطة الأصل، ومتناظر حول المحور الرأسي y، وبالتالي الدالة $f(x)$ زوجية، الرسم البياني متصل على كل قيم مجاله، وفي تناقص على طول الفترة $(-\infty, 0)$، وفي ازدياد على طول الفترة $(0, \infty)$، و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$، و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

تمارين موجهة

1. صف الخصائص التالية للرسم البياني للدالة الرئيسية $f(x) = |x|$: المجال، والنطاق، و نقاط التقاطع، و التناظر، و الاتصال، و السلوك الطرفي، و فترات تصاعد أو تنازل الرسم البياني.

2 التحويلات

قد تؤثر **تحويلات** الدوال الرئيسة في شكل الرسم البياني للدالة الرئيسة. تغير *التحويلات القياسية* موقع الرسم البياني فقط، بدون أن تغير حجم وشكل الرسم البياني. *أما التحويلات غير القياسية* فتشوه شكل الرسم البياني.

- ما هي أوجه التشابه والاختلاف بين $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^2 + 2$؟ شكل القطع الهندسية المكافئة متشابهة، مع $g(x)$ تتحرك بمقدار 2 وحدات إلى أعلى.

الدالة الأصلية

المثال 1 يعرض كيفية وصف الخصائص المهمة للتابع.

التقييم التكويني

استخدم دليل التدريب على التمارين بعد كل مثال لتحديد فهم الطلاب لهذه المفاهيم.

مثال اضافي

1 اشرح الخصائص المهمة الآتية للرسم البياني للتابع الأب $f(x) = \frac{1}{x}$: المجال و المدى، و قراءتها، و التماثل، و الاستمرارية، والسلوك النهائي، و فترات الرسم البياني آخذة في الازدياد / النقصان. D و R : $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$؛ بدون اعتراض. الرسم البياني متطابق تماما مع الأصل. اذا فهو فردي. الرسم البياني مستمر لجميع القيم في مجاله مع انقطاع لانهائي في $x = 0$. الرسم البياني ينخفض في كلا الفترات في مجاله.

التركيز على المحتوى الرياضي

الدوال الأرضية والمعلقة أكبر عدد صحيح للتابع أو التابع الأرضية من الممكن أن يكون رمزا. $f(x) = \lfloor x \rfloor$. التابع المتشابه يعرف ب *التابع المعلق*، رمزها $f(x) = \lceil x \rceil$، تكون محددة كأكبر عدد صحيح وأكبر أو تساوي x. على سبيل المثال، $\lceil 2.1 \rceil = 3$، $\lceil 2 \rceil = 2$، و $\lceil 2.9 \rceil = 3$.

G12 GEN TE CH01.indd 46 8/22/2016 4:29:25 PM

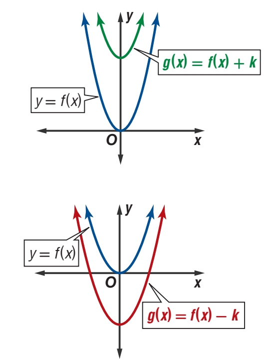
تعتبر **الإزاحة** تحويل قياسي، عبارة عن تحريك الرسم البياني لدالة. *الإزاحة الرأسية* للدالة f عبارة عن تحريك الرسم البياني للدالة f لفوق أو إلى أسفل، بينما *الإزاحة الأفقية*، تحرك الرسم البياني يميناً أو يساراً. الإزاحة الرأسية والأفقية أمثلة للتحولات القياسية.

مفهوم أساسي الإزاحة الأفقية والرأسية

الإزاحة الرأسية

الرسم البياني للدالة $g(x) = f(x) + k$ هو نفس الرسم البياني للدالة $f(x)$ ولكن مُزاحاً

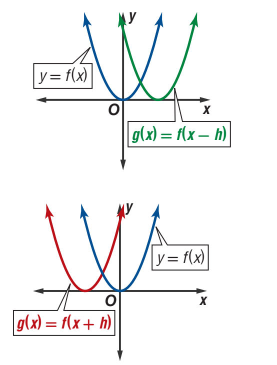
- تُحرِك k الرسم للأعلى، عندما تكون $k > 0$، و
- تُحرِك k الرسم للأسفل، عندما $k < 0$.



الإزاحات الأفقية

الرسم البياني للدالة $g(x) = f(x - h)$ هو نفس الرسم البياني للدالة $f(x)$ ولكن مُزاحاً

- تُحرِك h الرسم لليمين، عندما تكون $h > 0$.
- تُحرِك h الرسم لليسار، عندما تكون $h < 0$.



مثال 2 إزاحة الرسم البياني

استخدم الرسم البياني للدالة $f(x) = |x|$ لرسم كل دالة آتية.

a) $g(x) = |x| + 4$

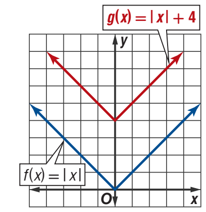
هذه الدالة تأخذ الصيغة $g(x) = f(x) + 4$. لذا، فإن الرسم البياني للدالة $g(x)$ هو نفس الرسم البياني للدالة $f(x) = |x|$ مزاحاً 4 وحدات للأعلى، كما هو موضح بالشكل 1.5.2.

b) $g(x) = |x + 3|$

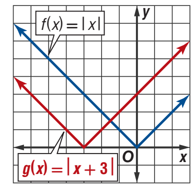
هذه الدالة تأخذ الصيغة $g(x) = f(x + 3)$ أو $g(x) = f[x - (-3)]$. لذا، فإن الرسم البياني للدالة $g(x)$ هو نفس الرسم البياني للدالة $f(x) = |x|$ مزاحاً 3 وحدات للأعلى، كما هو موضح بالشكل 1.5.3.

c) $g(x) = |x - 2| - 1$

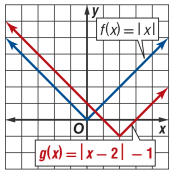
هذه الدالة تأخذ الصيغة $g(x) = f(x - 2) -$. لذا، فإن الرسم البياني للدالة $g(x)$ هو نفس الرسم البياني للدالة $f(x) = |x|$ مزاحاً وحدتين للأعلى، ووحدة واحدة للأسفل، كما هو موضح بالشكل 1.5.4.



الشكل 1.5.2



الشكل 1.5.3



الشكل 1.5.4

نصيحة تكنولوجية

الإزاحة يمكنك إزاحة رسم بياني باستخدام الآلة الحاسبة راسمة الدوال. تحت [Y=] ضع معادلة في المتغير Y1. تحرك للسطر Y2 ثم اضغط [VARS] [▶] [ENTER] [ENTER]. هذا سيضع Y1 على الخط Y2. ادخل عدد لإزاحة الدالة. اضغط [Graph]. ستجد أن المعادلتين رُسموا في نفس النافذة.

تمارين موجهة استخدم الرسم البياني للدالة $f(x) = x^3$ لرسم الرسم البياني لكل دالة. **2A–C. انظر الهامش.**

2A. $h(x) = x^3 - 5$ **2B.** $h(x) = (x - 3)^3$ **2C.** $h(x) = (x + 2)^3 + 4$

47

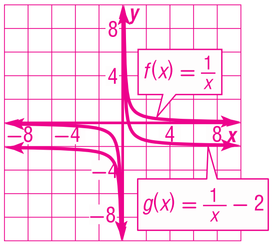
2 التحويلات

مثال 2 يبين كيفية نقل الرسم البياني. **المثال 3** يبين كيفية كتابة معادلات التحويلات. **المثال 4** يبين كيفية وصف تحويلات الرسم البياني. **المثال 5** يبين كيفية الرسم البياني لتابع معرفة من قبل تابع متعددة التعريف. **المثال 6 و7** يبين كيفية استخدام و وصف و رسم معادلة التحويلات بيانيا.

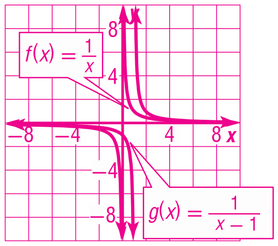
مثال اضافي

2 استخدم الرسم البياني ل $f(x) = \frac{1}{x}$ لتمثيل كل تابع بيانيا.

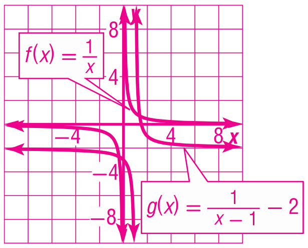
a. $g(x) = \frac{1}{x} - 2$



b. $g(x) = \frac{1}{x - 1}$



c. $g(x) = \frac{1}{x - 1} - 2$

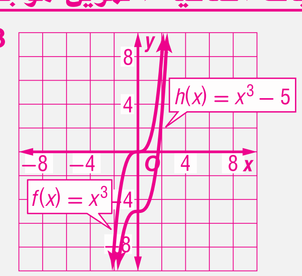


التدريس مع التكنولوجيا

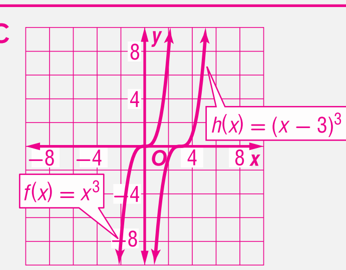
الحاسبة البيانية اطلب من الطلاب استخدام الآلات الحاسبة البيانية لضبط عوامل التغيير في كل التابع الأب وملاحظة آثار تغير كل كل عامل من عوامل التجربة . اطلب من الطلاب أن يعملو مع زملائهم لمقارنة نتائجهم.

إجابات اضافية (تمرين موجه)

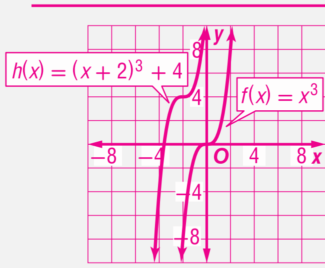
2A.



2B.



2C.

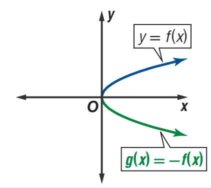


الانعكاس نوع آخر من التحويلات الثابتة، حيث ينتج صورة معكوسة من الرسم البياني للدالة نسبة إلى خط معين.

مفهوم أساسي الانعكاس في المحاور الإحداثية

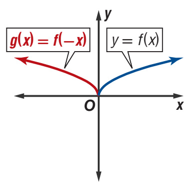
الإنعكاس في المحور الأفقي x

الرسم البياني للدالة $g(x) = -f(x)$ يمثل الرسم البياني للدالة $f(x)$ **منعكساً في المحور الأفقي x**.

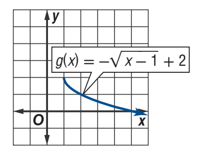


الانعكاس في المحور الرأسي y

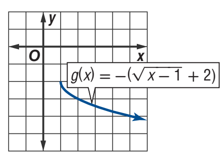
الرسم البياني للدالة $g(x) = f(-x)$ يمثل الرسم البياني للدالة $f(x)$ **منعكساً في المحور الرأسي y**.



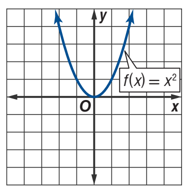
عند كتابتك لمعادلة دالة مُحولة، احرص على توضيح التحويلات بدقة. فالرسم البياني للدالة $g(x) = -\sqrt{x-1} +$ مختلف عن الرسم البياني للدالة $g(x) = -$.



انعكاس الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ في المحور الأفقي x، ثم إزاحة بمقدار وحدة واحدة لليمين ووحدتين للأعلى



إزاحة الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ وحدة واحدة لليمين ووحدتين للأعلى، ثم انعكاس في المحور الأفقي x

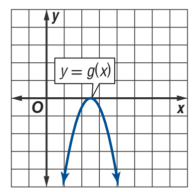


الشكل 1.5.5

مثال 3 اكتب معادلات التحويلات

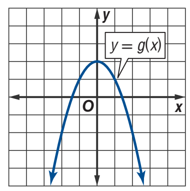
اوصف علاقة الرسوم البيانية للدوال $f(x) = x^2$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$.

a.



الرسم البياني للدالة $g(x)$ هو نفس الرسم البياني للدالة $f(x) = x^2$ ولكن مزاحاً 5 وحدات لليمين ومنعكس في المحور الأفقي x. لذا، $g(x) = -(x-5)^2$.

b.

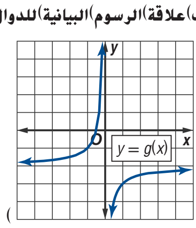


الرسم البياني للدالة $g(x)$ هو نفس الرسم البياني للدالة $f(x) = x^2$ ولكن منعكس في المحور الأفقي x ومزاح وحدتين للأعلى. لذا، $g(x) = -x^2 + 2$.

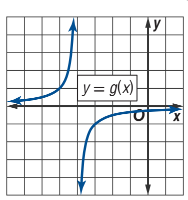
تمارين موجهة

اوصف علاقة الرسوم البيانية للدوال $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$.

3A.



2B.

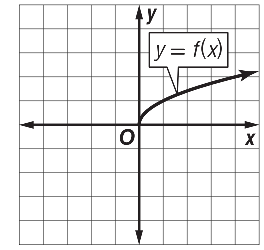


A3. الرسم البياني للدالة $g(x)$ هو نفس الرسم البياني للدالة $f(x)$ ولكنه منعكس في المحور الأفقي x ومزاح وحدتين للأسفل. لذا، $g(x) = -\frac{1}{x} - 2$.

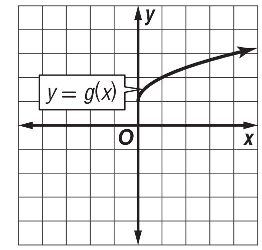
B3. الرسم البياني للدالة $g(x)$ هو نفس الرسم البياني للدالة $f(x)$ ولكنه مزاح 4 وحدات لليسار ومنعكس حول المحور الأفقي x، لذا، $g(x) = -\frac{1}{x+4}$

مثال اضافي

3 صف كيف أن الرسم البياني لـ $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x)$ مرتبطين. ثم اكتب معادلة ال $g(x)$.

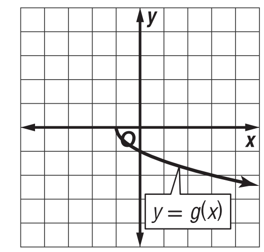


a.



الرسم البياني ل $g(x)$ هو الرسم البياني ل $f(x)$ نقل 1 وحدة الى أعلى; $g(x) = \sqrt{x} + 1$.

b.



الرسم البياني ل $g(x)$ هو الرسم البياني ل $f(x)$ نقل 1 وحد الى الأسف و تنعكس في x–المحور; $g(x) = -\sqrt{x+1} + 1$.

التركيز على المحتوى الرياضي

الدوال المتحولة عندما يتم نقل أو عكس الرسم البياني للتابع, فانه يبقى على نفس الشكل. عندما يتم توسيع الرسم البياني, فان شكله يتغير. من وجهة نظر هندسية، نقل وانعكاسات الرسوم البيانية للمحافظة على الشكل، وبالتالي فإن الصورة تكون متطابقة مع الرسم البياني للتابع الأب. ومع ذلك، عندما يتمدد الرسم البياني ، فإنه لا يحافظ على نفس المنحنيات. لذا. فإن الرسم البياني للتابع ليست مشابها لرسم التابع الأب.

Differentiated Instruction

ضمن المستوى — الاقتراب من المستوى

المتعلمون بصريًا اسأل الطلاب لتوفير الملصقات التي تعرض الدوال الأب الثمانية التي درسوها في هذا الدرس وكيفية تحويلها.

تغيير الأبعاد بمقياس هو تحويل غير ثابت للدالة، ينتج عنه ضغط (تقليص) أو توسع (تضخيم) الرسم البياني للدالة رأسياً أو أفقياً.

نصيحة للدراسة

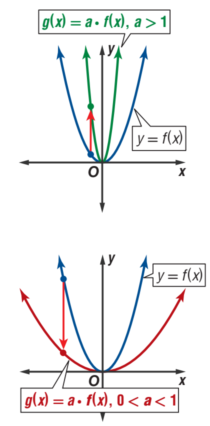
تغيير الأبعاد بمقياس قد يبدو في بعض الأحيان زوج من حالات التمدد متشابهين، مثل التوسع الرأسي والانضغاط الأفقي. فلا يمكن تحديد نوع التحويل من الرسم البياني. يجب أن تقارن معادلة الدالة المحولة بالدالة الرئيسية.

مفهوم أساسي الإزاحة الأفقية والرأسية

تغيير الأبعاد بمقياس بشكل رأسي

إذا كان a عدد حقيقي موجب، و $g(x) = a \cdot f(x)$، فإن

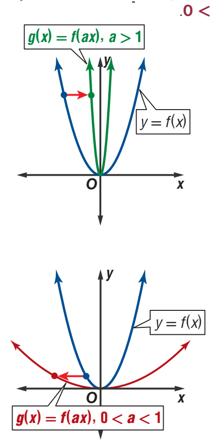
- الرسم البياني للدالة $f(x)$ سيتوسع رأسياً **إذا كان** $a > 1$.
- سينضغط الرسم البياني للدالة $f(x)$ رأسيًا **إذا كان** $0 < a < 1$.



تغيير الأبعاد بمقياس بشكل الأفقي

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا، و $g(x) = f(ax)$، فإن

- الرسم البياني للدالة $f(x)$ سينضغط أفقيًا **إذا كان** $a > 1$
- سيتوسع الرسم البياني أفقياً للدالة $f(x)$ **إذا كان** $0 < a < 1$.

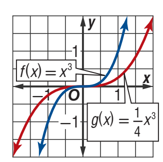


مثال 4 صف وارسم التحويلات

حدد الدالة الرئيسية $f(x)$ للدالة $g(x)$، وصف علاقة الرسم البياني لكل دالة $g(x)$ و $f(x)$. ثم ارسم $g(x)$ و $f(x)$ على نفس المحاور.

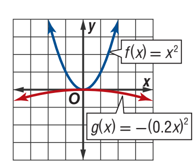
a) $g(x) = \frac{1}{4}x^3$

الرسم البياني للدالة $g(x)$ هو نفس الرسم البياني للدالة $f(x) = x^3$ و لكن مضغوط رأسياً، لأن $g(x) = \frac{1}{4}x^3 = \frac{1}{4}$ و $0 < \frac{1}{4} <$.



b) $g(x) = -(0.2x)^2$

الرسم البياني للدالة $g(x)$ هو نفس الرسم البياني للدالة $f(x) = x^2$ ولكنه متمدد أفقياً ومنعكس في المحور الأفقي x، لأن $g(x) = -(0.2x)^2 = -f(0.2x)$ و $0 < 0.2 < 1$.



التمارين موجهة **4A–B. انظر الهامش.**

4A. $g(x) = [\![x]\!] - 4$　　**4B.** $g(x) = \frac{15}{x} +$

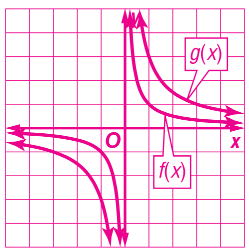
يمكنك استخدام ما تعلمته حول تحويلات الدوال، لرسم دالة متعددة التعريف.

مثال اضافي

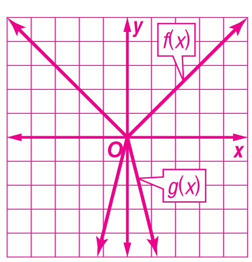
4 تحديد التابع الأب $f(x)$ of $g(x)$, صف كيف أن الرسم البياني ل $g(x)$ و $f(x)$ مرتبطين. ثم ان الرسم البياني ل $f(x)$ و $g(x)$ على نفس المحاور.

a. $g(x) = \frac{3}{x}$

$f(x) = \frac{1}{x}$; الرسم البياني ل $g(x)$ هو الرسم البياني ل$f(x)$ يتمدد عموديا بالعامل 3.

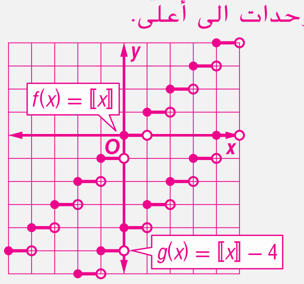


b. $g(x) = -|4x|$ $f(x) = |x|$; الرسم البياني ل $g(x)$ هو الرسم البياني ل $f(x)$ مضغوط أفقيا بالعامل 4 ومعكوس في ال x–المحور.

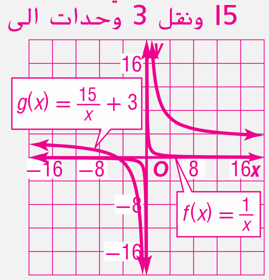


إجابات اضافية (تمرين موجه)

4A. $f(x) = [\![x]\!]$; الرسم البياني ل $g(x)$ هو الرسم البياني ل $f(x)$ نقل 4 وحدات الى أعلى.

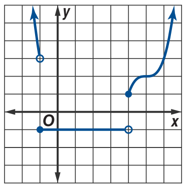


4B. $f(x) = \frac{1}{x}$; الرسم البياني ل $g(x)$ هو الرسم البياني ل $f(x)$ e تمدد عموديا بالعامل 15 ونقل 3 وحدات الى أعلى.



مثال 5 ارسم بيانياً دالة متعددة التعريف

Graph $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{إذا كان } x < -1 \\ -1 & \text{إذا كان } -1 \le x < 4 \\ (x-5)^3 + 2 & \text{إذا كان } x \ge 4 \end{cases}$.



على الفترة $(-\infty,$ ، ارسم الدالة $y = 3x^2$.
على الفترة $[-1,$ ، ارسم الدالة الثابتة $y =$.
على الفترة $[4, \infty)$، ارسم الدالة $y = (x-5)^3 + 2$.

ارسم دوائر عند $(-1,$ و $(4,$، وضع نقاط عند $(-1,$ و $(4,$، لأن $f(-1) =$ و $f(4) =$.

تمرين موجه

ارسم كل دالة. **5A–B. انظر الهامش.**

$g(x) = \begin{cases} x - 5 & \text{اذا كان } x \le 0 \\ x^3 & \text{اذا كان } 0 < x \le 2 \\ \frac{2}{x} & \text{اذا كان } x > 2 \end{cases}$

5B. $h(x) = \begin{cases} (x+6)^2 & \text{اذا كان } x < -5 \\ 7 & \text{اذا كان } -5 \le x \le 2 \\ |4 - x| & \text{اذا كان } x > 2 \end{cases}$

يمكنك أيضاً استخدام ما تعلمته حول التحويلات لتحويل دالة تمثل بيانات واقعية من الحياة أو ظاهرة حياتية.

رابط من الواقع

حطم ستيف أونل الرقم القياسي لأطول رمية في تاريخ الدوري الوطني لكرة القدم الأمريكية، حيث امتدت إلى 98 ياردة؛ وذلك في 21 سبتمبر 1969.

المصدر: *الدوري الوطني لكرة القدم الأمريكية*

مثال 6 من الواقع تحويلات الدوال

كرة القدم يمكن تمثيل مسار كرة القدم المقذوفة بالدالة $g(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$، حيث تكون $g(x)$ هي المسافة الرأسية بالياردة بين الكرة والأرض، و x تمثل المسافة الأفقية بالياردة حيث $x = 0$ تمثل خط 20 ياردة للفريق ضارب الكرة.

a. صف تحويلات الدالة الرئيسية $f(x) = x^2$ المستخدمة لرسم $g(x)$.

أعد صياغة الدالة بحيث تكون على الشكل $g(x) = a(x-h)^2 + k$، عن طريق إكمال المربع.

$g(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x +$ — الدالة الأصلية

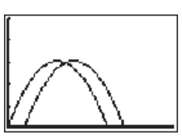
$= -\frac{1}{15}(x^2 - 60x) +$ — عامل $-\frac{1}{15}x^2 +$

$= -\frac{1}{15}(x^2 - 60x + 900) + 1 + \frac{1}{15}(900)$ — إكمال المربع

$= -\frac{1}{15}(x - 30)^2 +$ — كتابة $x^2 - 60x + 900$ كمربع كامل وتبسيطه

لذا فالدالة $g(x)$ هي الرسم البياني للدالة $f(x)$ مُزاحاً 30 وحدة لليمين ومضغوطة رأسياً ومعكوسة على المحور الأفقي x ثم أزيحت 61 وحدة للأعلى.

b. افترض أن الكرة ضربت من خط 30 ياردة. أعد كتابة $g(x)$ لتمثل هذا التغيير. **ارسم كلا الدالتين على نفس شاشة الآلة الحاسبة الراسمة للدوال.**



[0, 100] scl: 1 by [0, 100] scl: 20

يمثل تغيير خط ضربة الكرة من 20 ياردة إلى 30 ياردة إزاحة أفقية بمقدار 10 ياردات لليمين، لذا يجب طرح 10 ياردات إضافية من داخل تعبير المربع.

$g(x) = -\frac{1}{15}(x - 30 - 10)^2 +$ أو $g(x) = -\frac{1}{15}(x - 40)^2 +$

تمارين موجهة

6. الكهرباء يمثل التيار –مقاساً بالأمبير– في مشغل DVD بالدالة $I(x) =$ ، حيث تمثل x القوة بالواط، و 11 هي قيمة المقاومة بالأوم.

A. صف تحويلات الدالة الرئيسية $f(x) = \sqrt{x}$ المستخدمة لرسم الدالة $I(x)$. **تمددت أفقياً**

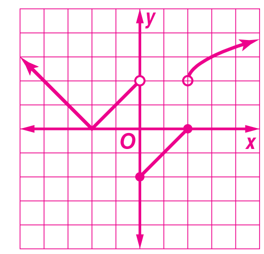
B. إذا كانت مقاومة المصباح 15 ohms، اكتب دالة تصف التيار المار عبر المصباح. $I(x) = \sqrt{\frac{x}{15}}$

C. ارسم كلًا من مقاومة مشغل DVD و المصباح على نفس شاشة الآلة الحاسبة الراسمة للدوال. **انظر الهامش.**

أمثلة اضافية

5 ارسم بيانياً

$f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{if } x < 0 \\ |x| - 2 & \text{if } 0 \le x \le 2 \\ \sqrt{x-2} + 2 & \text{if } x > 2 \end{cases}$.

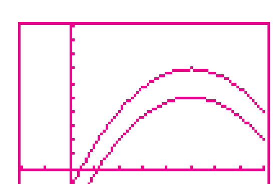


6 **ملاهي** "السباق البري" السفينة الدوارة لديها مقطع مثل التابع. $G(X) = = \frac{-X^2}{30} + \frac{10X}{3} - \frac{100}{3}$, حيث $G(X)$ هو المسافة العمودية في مساحات السفينة الدوارة تكون من الأرض و X هو المسافة الأفقية في المساحات من بداية السباق.

a. صف تحويلات التابع الأب $f(x) = x^2$ التي استخدمت في الرسم البياني $g(x)$. $g(x)$ هو الرسم البياني ل $f(x)$ نقل 50 وحدة الى اليمين، مضغوطة عموديا، ومعكوسة على المحور x، ثم نقل 50 وحدة الى أعلى.

b. افترض أن مصممي السباق قررو زيادة أعلى نقطة في السباق الى 70 ياردة. أعد كتابة $g(x)$ لإظهار هذا التغير. الرسم البياني على حد سواء للدوال يكون على نفس نسق المحاور باستخدام آلة حاسبة بيانية.

$g(x) = -\frac{1}{30}(x - 50)^2 + 70$



[−20, 80] scl: 10 by [−20, 100] scl: 10

Differentiated Instruction

الاقتراب من المستوى | ضمن المستوى | مابعد المستوى

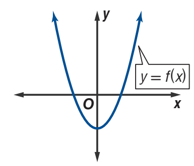
المتعلمون المتفاعلون دع الطلاب يعملون في مجموعات لتحديد ما إذا كان عائلات الدوال لديها نفس التماثل مثل التابع الأب. تشجيع الطلاب على استخدام أجهزة الكمبيوتر أو الحاسبة البيانية لاختبار التخمينات الخاصة بهم.

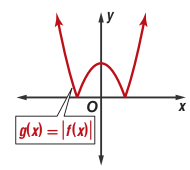
تحويل غير قياسي آخر، هو القيمة المطلقة.

مفهوم أساسي التحويلات بالقيمة المطلقة

$g(x) = |f(x)|$

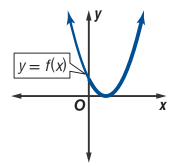
يعكس هذا التحويل كل جزء من الرسم البياني للدالة $f(x)$ تحت المحور الأفقي x فيصبح فوق المحور الأفقي x.

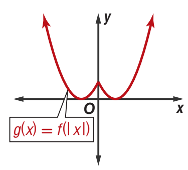




$g(x) = f(|x|)$

يستبدل هذا التحويل الجزء من الرسم البياني للدالة $f(x)$ لليسار من المحور الرأسي y بانعكاس الجزء الموجود لليمين من المحور الرأسي y.

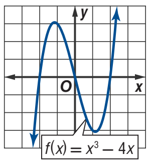




نصيحة تكنولوجية

تحويلات القيمة المطلقة

يمكنك التحقق من رسمك لدالة محولة بالقيمة المطلقة باستخدام الآلة الحاسبة الراسمة للدوال. ويمكنك أيضاً رسم كلا الدالتين على نفس محاور الإحداثيات.



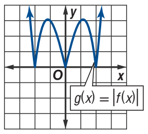
الشكل 1.5.6

مثال 7 صف وارسم التحويلات

استخدم الرسم البياني للدالة $f(x) = x^3 - 4x$ في الشكل 1.5.6 لرسم كل دالة آتية.

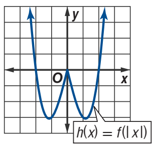
a) $g(x) = |f(x)|$

يقع الرسم البياني للدالة $f(x)$ أسفل المحور الأفقي x على الفترات $(0, 2)$ و $(-\infty, -2)$. اعكس هذين الجزءين من الرسم البياني حول المحور الأفقي x واترك بقية الرسم كما هو.



b) $h(x) = f(|x|)$

استبدل الجزء من الرسم البياني للدالة $f(x)$ لليسار من المحور الرأسي y بانعكاس الجزء إلي يمين المحور الرأسي y.

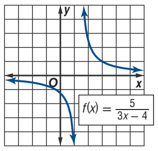


تمارين موجهة

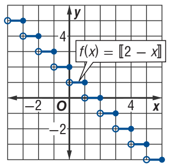
A–B7. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

استخدم الرسم البياني المعروض للدالة $f(x)$ لرسم الدالة $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$.

.7A

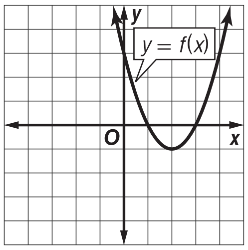


.7B

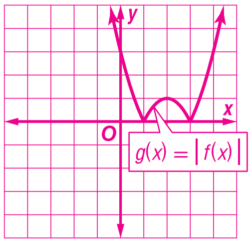


مثال اضافي

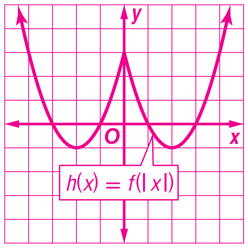
7 استخدم الرسم البياني ل $f(x) = x^2 - 4x + 3$ لرسم كل تابع بيانيا.



a. $g(x) = |f(x)|$

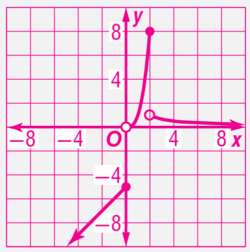


b. $h(x) = f(|x|)$

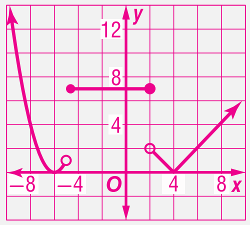


إجابات اضافية (تمرين موجه

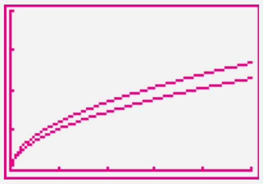
.5A



.5B



.6C



[0, 5] scl: 1 by [0, 1] scl: 0.25

التمارين

صف الخصائص التالية للرسم البياني لكل دالة رئيسة: المجال، والنطاق، ونقاط التقاطع، والتناظر، والاتصال، والسلوك الطرفي، وفترات تصاعد أو تنازل الرسم البياني. (مثال 1) **1–6. انظر الهامش.**

1. $f(x) = [\![x]\!]$
2. $f(x)$
3. $f(x) = x^3$
4. $f(x) = x^4$
5. $f(x) = c$
6. $f(x) = x$

استخدم الرسم البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ لرسم كل دالة آتية. (مثال 2)

7. $g(x) = \sqrt{x-4}$
8. $g(x) = \sqrt{x+3}$
9. $g(x) = \sqrt{x+6} - 4$
10. $g(x) = \sqrt{x-7} + 3$

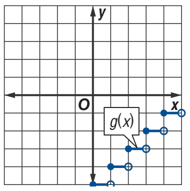
7–10. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

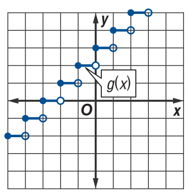
استخدم الرسم البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ لرسم كل دالة آتية. (مثال 2)

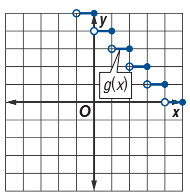
11. $g(x) = \frac{1}{x} +$
12. $g(x) = \frac{1}{x} -$
13. $g(x) = \frac{1}{x-6} +$
14. $g(x) = \frac{1}{x+7} - 4$

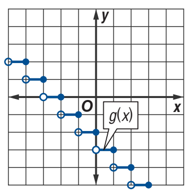
11–14. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

اوصف علاقة الرسوم البيانية للدوال $f(x) = [\![x]\!]$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$. (مثال 3)

15.


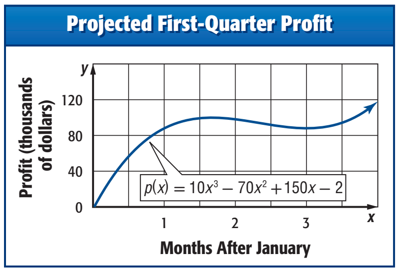
16.


17.


18.


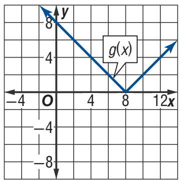
15–18. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

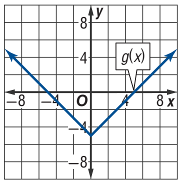
19. **الربح** عانت شركة سيارات من تأخير غير متوقع مدته شهرين في تصنيع سيارة جديدة. وكان الربح المتوقع لمبيعات السيارة قبل التأخير $p(x)$ كما هو موضح أدناه. صف العلاقة بين الرسم البياني للدالة $p(x)$ وبين الرسم البياني المتضمن التأخير $d(x)$. ثم اكتب معادلة الدالة $d(x)$. (مثال 3) **انظر الهامش.**

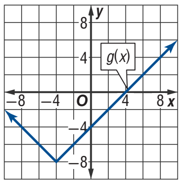


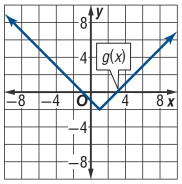
20–23. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

اوصف علاقة الرسوم البيانية للدوال $f(x) = |x|$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$. (مثال 3)

20.


21.


22.


23.


24–31. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

حدد الدالة الرئيسة $f(x)$ للدالة $g(x)$، وصف علاقة الرسم البياني لكل دالة $g(x)$ و $f(x)$. ثم ارسم $f(x)$ و $g(x)$ على نفس المحاور. (مثال 4)

24. $g(x) = 3|x| - 4$
25. $g(x) = 3\sqrt{x+8}$
26. $g(x)$
27. $g(x) = 2[\![x-6]\!]$
28. $g(x) = -5[\![x-2]\!]$
29. $g(x) = -2|x+5|$
30. $g(x) = \frac{1}{6x} +$
31. $g(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{4}$

32–37. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

ارسم كل دالة. (مثال 5)

32. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{إذا كان } x < -2 \\ 3 & \text{إذا كان } -2 \le x < 7 \\ (x-5)^2 + 2 & \text{إذا كان } x \ge 7 \end{cases}$

33. $g(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{إذا كان } x < -6 \\ \frac{1}{x} & \text{إذا كان } -6 \le x < 4 \\ 6 & \text{إذا كان } x \ge 4 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{إذا كان } x < -5 \\ x^3 & \text{إذا كان } -2 \le x \le 2 \\ \sqrt{x+3} & \text{إذا كان } x > 3 \end{cases}$

35. $h(x) = \begin{cases} |x-5| & \text{إذا كان } x < -3 \\ 4x - 3 & \text{إذا كان } -1 \le x < 3 \\ \sqrt{x} & \text{إذا كان } x \ge 4 \end{cases}$

36. $g(x) = \begin{cases} 2 & \text{إذا كان } x < -4 \\ x^4 - 3x^3 + 5 & \text{إذا كان } -1 \le x < 1 \\ [\![x]\!] + 1 & \text{إذا كان } x \ge 3 \end{cases}$

37. $f(x) = \begin{cases} -3x - 1 & \text{إذا كان } x \le -1 \\ 0.5x + 5 & \text{إذا كان } -1 < x \le 3 \\ -|x-5| + 3 & \text{إذا كان } x > 3 \end{cases}$

3 التدريب

التقييم التكويني

استخدام تمارين 1–46 للتأكد من الفهم.

ثم استخدم الجدول أدناه لتخصيص المهام الخاصة بك للطلاب.

اجابات اضافية

1. $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$, $R = \{y \mid y \in \mathbb{Z}\}$. الرسم البياني لديه تقاطع-y عند $(0, 0)$ وتعارض-x و $\{x \mid 0 \le x < 1, x \in \mathbb{R}\}$. الرسم البياني ليس متناظرًا. الرسم البياني لديه قفزة متقطعة ل $\{x \mid x \in \mathbb{Z}\}$. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ and $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. الرسم البياني هو ثابت ل $\{x \mid x \notin \mathbb{Z}\}$. الرسم البياني يزداد $\{x \mid x \in \mathbb{Z}\}$.
2. $D = \{x \mid x \neq 0, x \in \mathbb{R}\}$, $R = \{y \mid y \neq 0, y \in \mathbb{R}\}$. الرسم البياني لا يوجد به تقاطع. الرسم البياني متشابه تماما مع الأصل. الرسم البياني لديه انقطاع لانهائي في $x = 0$. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ and $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. الرسم البياني يكون ينخفض في $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$.
3. $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$, $R = \{y \mid y \in \mathbb{R}\}$. الرسم البياني لديه تقاطع عند $(0, 0)$. الرسم البياني متشابه تماما مع الأصل. بالتالي فهو فردي. الرسم البياني مستمر. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ and $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. الرسم البياني يزيد على $(-\infty, \infty)$.
4. $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$, $R = \{y \mid y \ge 0, y \in \mathbb{R}\}$. الرسم البياني لديه تقاطع عند $(0, 0)$. الرسم البياني متناظر تماما بالنسبة المحور -y. الرسم البياني مستمر. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. الرسم البياني يكون ينخفض عند $(-\infty, 0)$ ويرتفع عند $(0, \infty)$.

Differentiated Instruction

الاقتراب من المستوى · ضمن المستوى · مابعد المستوى

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
الاقتراب من المستوى	1–46، 73–78، 80–96	1–45 فردي 93–96	2–46 زوجي، 73–78، 80–92
ضمن المستوى	1–45 فردي، 47، 48، 49–71 فردي، 72–78، 80–96	1–46، 93–96	47–78، 80–92
ما بعد المستوى	47–96		

38) **طوابع البريد** تكلفة طوابع البريد في الولايات المتحدة بين عامي 1988 و 2008 معروضة بالجدول التالي. استخدم البيانات لرسم دالة دَرَجيَّة. (مثال 5) **انظر الهامش.**

العام (y)	السعر (x)
1988	25
1991	29
1995	32
1999	33
2001	34
2002	37
2006	39
2007	41
2008	42

39a. الرسم البياني للدالة $c(x)$ هو نفس الرسم البياني للدالة $f(x)$ ولكن مضغوط رأسياً ومزاح 1.99 وحدة للأعلى.

39) **إدارة الأعمال** شركة خدمات اتصال للهاتف المحمول تحاسب عملاءها بسعر ثابت كل يوم، بالإضافة إلى $0.10\$$ لكل دقيقة. يمكن تمثيل حساب التكلفة بالدالة $c(x) = 1.99 + 0.1$، حيث تمثل x عدد الدقائق المستهلكة. (مثال 6)

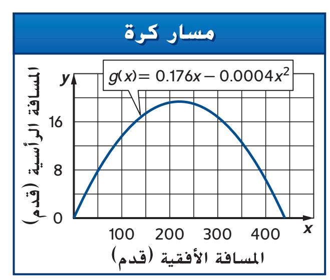
a) صف تحويلات الدالة الرئيسة $f(x) = [\![x]\!]$ المستخدمة لرسم الدالة $c(x)$.

b) تعرض الشركة نظام تكلفة آخر فيه التكلفة اليومية الثابتة هي $2.49\$$ وتكلفة الدقيقة $0.05\$$. أي دالة $c(x)$ قد تمثل الخطة الثانية؟ **$c(x) = 2.49 + 0.05[\![x]\!]$**

c) ارسم كلا الدالتين على نفس شاشة الآلة الحاسبة الراسمة للدوال. **انظر الهامش.**

d) هل يمكن أن تتساوى التكلفة يوماً ما في النظامين المختلفين؟ إذا كانت الإجابة بنعم، ما هو عدد الدقائق اللازم لتساوي التكلفة في النظامين؟ **نعم، ستتساوى الخطط عند عدد دقائق 10.**

40) **الجولف** يمكن تمثيل مسار كرة بالدالة الموضحة، حيث تكون $g(x)$ هي المسافة الرأسية مقاسة بالقدم بين الكرة والأرض، وتمثل x المسافة الأفقية بالقدم فعندما تكون $x = 0$ فهي تمثل نقطة الانطلاق. (مثال 6) **a–d. انظر الهامش.**



a) صف تحويلات الدالة الرئيسة $f(x) = x^2$ المستخدمة لرسم الدالة $g(x)$.

b) إذا ضرب لاعب ثاني الكرة ضربة مشابهة ولكن من على بعد 30 قدمًا من اللاعب الأول، ما هي الدالة $h(x)$ التي يمكن استخدامها لوصف الضربة الثانية؟

c) ارسم كلا الدالتين على نفس شاشة الآلة الحاسبة الراسمة للدوال.

d) إذا ضرب كلا اللاعبين ضربتهما في نفس الوقت، في أي نقطة سيتقاطع المساران، حدد المسافة الأفقية و الرأسية؟

استخدم الرسم البياني المعروض للدالة $f(x)$ لرسم الدالة $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$. (مثال 7)

41–46. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

41. $f(x) = \frac{2}{x}$

42. $f(x) = \sqrt{x - 4}$

43. $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2$

44. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 8x - 2$

45. $f(x) = \frac{1}{x - 3} +$

46. $f(x) = \sqrt{x + 2} - 6$

47) **المواصلات** يعرض الشكل التكلفة القياسية لسيارة الأجرة في مدينة نيويورك. الوحدة الواحدة تكافئ مسافة 0.2 ميل أو وقت انتظار 60 ثانية في حالة ثبات السيارة.

a) اكتب دالة أكبر عدد صحيح $f(x)$ التي تمثل تكلفة وحدات استخدام سيارة الأجرة، حيث تكون $x > 0$. قَرِّب إلى أقرب وحدة.

b) ارسم الدالة. **a–c. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.**

c) كيف يمكن أن يتغير الرسم البياني $f(x)$ إذا زادت تكلفة أجرة الوحدة الأولى لتصبح $3.70\$$؟ ارسم الدالة الجديدة.

48) **الفيزياء** تمثل طاقة الوضع لزنبرك بالجول أثناء ضغطه أو تمديده بالدالة $p(x) = \frac{cx^2}{2}$، حيث تمثل c ثابت الزنبرك، و تمثل x المسافة لنقطة اتزان الزنبرك . إذا كانت قيمة x سالبة، يكون الزنبرك مضغوطاً، وإذا كانت قيمة x موجبة، يكون الزنبرك ممدوداً.

a) صف تحويلات الدالة الرئيسة $f(x) = x^2$ المستخدمة لرسم الدالة $p(x)$. **توسع رأسي**

b) يمر الرسم البياني لدالة طاقة الوضع لزنبرك ثاني عبر النقطة $(3, 315)$. أوجد ثابت الزنبرك واكتب الدالة. **70; $p(x) = 35x^2$**

اكتب وارسم الدالة باستخدام خصائص الدالة الرئيسة وخصائصها.

49–50. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

49) $f(x)$، تمددت رأسياً بالمعامل 2، وأزيحت 7 وحدات لليسار و5 وحدات للأعلى

50) $f(x) = [\![x]\!]$، تمددت رأسياً بالمعامل 3 وانعكست حول المحور الأفقي x وأزيحت 4 وحدات للأسفل

51-54. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

الفيزياء تمثل المسافة التي يحركها جسم مع الزمن بالدالة $f(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$، حيث تمثل a العجلة، و v_0 بالسرعة الأولية وتمثل x_0 الموضع الابتدائي للجسم. صف تحويلات الدالة الرئيسة $f(t) = t^2$ المستخدمة في الدالة $f(t)$ لكل من الدوال الآتية.

51. $a = 2, v_0 = 2, x_0 = 0$

52. $a = 2, v_0 = 0, x_0 = 10$

53. $a = 4, v_0 = 8, x_0 = 1$

54. $a = 3, v_0 = 5, x_0 = 3$

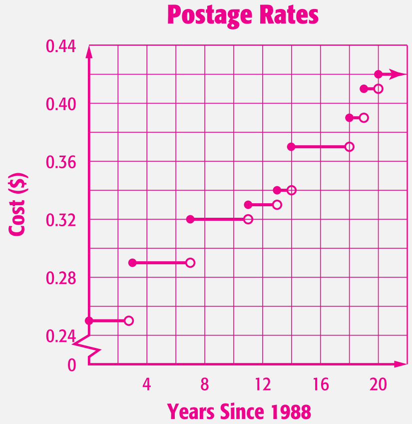
انتبه!

الخطأ الشائع في تمارين 41–46. قد يجد الطلاب صعوبة في تتبع التغييرات التي أحدثتها القيم المطلقة. اقترح أن يقوم الطلاب بتمثيل الدالة بيانيًا دون القيم المطلقة أولًا. ثم يمكنهم عكس أجزاء من الدالة على المحور المناسب.

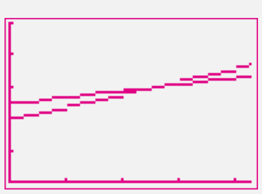
اجابات اضافية

19. الرسم البياني لـ $d(x)$ هو الرسم البياني لـ $p(x)$ منقولًا وحدتين الى اليمين؛ $d(x) = 10(x - 2)^3 - 70(x - 2)^2 + 150(x - 2) - 2$.

38. **Postage Rates**



39c.



[0, 17] scl: 4 by [0, 5] scl: 1

40a. الرسم البياني لـ $g(x)$ هو الرسم البياني لـ $f(x)$ منقولًا 220 وحدة إلى اليمين، مضغوطة عموديا، و معكوس على المحور x، ونقل 19.36 وحدة الى أعلى.

40b. $h(x) = -0.0004(x - 250)^2 + 19.36$

40c.

[0, 500] scl: 50 by [0, 20] scl: 2

40d. الطلقات سوف تتقاطع عبر مسارات في المسافة الأفقية من 235 قدم والمسافة العمودية من 19.27 قدم.

اجابات اضافية

5. $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$, $R = \{y \mid y = c$, $c \in \mathbb{R}\}$ لكل الأرقام الحقيقة. If $c = 0$ تكون x–تتقاطع. لو أن $c \neq 0$، هناك لا يوجد x–تقاطع. الرسم البياني لديه y–يتقاطع عند $(c, 0)$. لو أن $c \neq 0$، الرسم البياني متناظر بالنسبة للمحور y. لو أن $c = 0$، الرسم البياني متناظر بالنسبة للمحور x, y–المحور، و الأصل. الرسم البياني مستمر. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$. الرسم البياني ثابت على $(-\infty, \infty)$.

6. $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$, $R = \{y \mid y \in \mathbb{R}\}$. الرسم البياني لديه تقاطع عند $(0,0)$. الرسم البياني متشابه تماما مع الأصل. الرسم البياني مستمر. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. الرسم البياني يزداد على $(-\infty, \infty)$.

اجابات اضافية

72b. مثال على الإجابة: $h(x)$ المجموع هو $f(x)$ و $g(x)$.

72c. $h(x) = f(x) + g(x)$

$x^2 + 6x + 10 \stackrel{?}{=} x^2 + 2x + 7 + 4x + 3$

$x^2 + 6x + 10 = x^2 + 6x + 10$

73. مثال على الأجابة: على حد سواء، لتابع العدد الصحيح الأكبر، من الوحدات a التحرك تجاه اليسار وحدة لأعلى يطابق التحرك a.

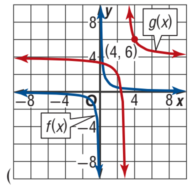
---

55. $g(x) = \frac{2}{x-3} + 4$

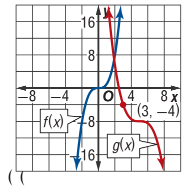
اكتب معادلة لكل دالة $g(x)$

$g(x) = -0.5(x-5)^3 - 8$

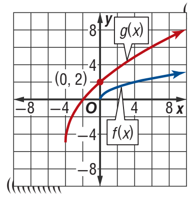
55.



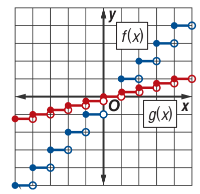
56.



57.



58.



عينة من الإجابات: $g(x) = 4\sqrt{x+4} - 6$ ، $g(x) = \frac{1}{4}[\![x]\!]$

59. **التسوق** توقعت إدارة مركز تجاري جديد للتسوق أن تمثل الدالة عدد الحضور $f(x) = \sqrt{7x}$ بالآلاف لأول 60 يومًا من التشغيل، حيث تمثل x عدد الأيام التالية ليوم الافتتاح، وتتطابق $x =$ مع يوم الافتتاح. اكتب الدالة $g(x)$ بدلالة الدالة $f(x)$ لكل موقف من المواقف الآتية.

a) كان عدد الحضور أعلى من المتوقع بنسبة 12% $g(x) = 1.12f(x)$

b) تأخر موعد الافتتاح 30 يوماً بسبب أعمال البناء.

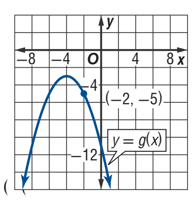
c) كان عدد الحضور أقل من المتوقع بعدد 450.

b. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

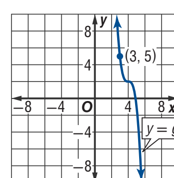
c. $g(x) = f(x) - 0.45$

حدد الدالة الرئيسية $f(x)$ للدالة $g(x)$ وصف التحويلات على الدالة $f(x)$ لرسم الدالة $g(x)$.

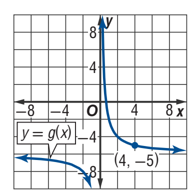
60.



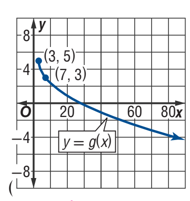
61.



62.

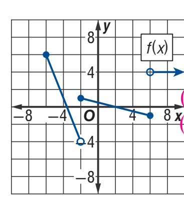


63.



60–63. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

استخدم $f(x)$ لرسم $g(x)$.



64. $g(x) = 0.25f(x) + 4$

65. $g(x) = 3f(x) - 6$

66. $g(x) = f(x - 5) + 3$

67. $g(x) = -2f(x) + 1$

64–67. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

استخدم $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x+6}} - 4$ لرسم كل دالة.

68. $g(x) = 2f(x) + 5$

69. $g(x) = -3f(x) + 6$

70. $g(x) = f(4x) - 5$

71. $g(x) = f(2x + 1) +$

68–71. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

72. **التمثيل المتعدد** ستتعامل في هذه المسألة مع العمليات على الدوال. انظر في الآتي

$f(x) = x^2 + 2x + 7$,

$g(x) = 4x + 3$,

$h(x) = x^2 + 6x + 10$.

a) **مُجدوَل** انسخ واكمل الجدول بالأسفل بثلاث قيم للمتغير a.

a	$f(a)$	$g(a)$	$f(a) + g(a)$	$h(a)$
3	22	15	37	37
−4	15	−13	2	2
15	262	63	325	325

b) **كلاميا** ما علاقة الدوال الثلاثة $h(x)$، $g(x)$، $f(x)$

c) **من ناحية الجبر** أثبت العلاقات المذكورة في النقطة السابقة ب.

b–c. انظر الهامش.

م.ذ.أ مسائل تحتاج مهارات ذهنية أعلى

73. **تحليل الأخطاء** يحاول دانيال وميراندا وصف التحويلات $g(x) = [\![x + 4]\!]$. يقول دانيال أن الرسم البياني مزاح 4 وحدات لليسار بينما تقول ميراندا أن الرسم البياني مزاح 4 وحدات للأعلى. أي رأي هو الصحيح؟ اشرح. انظر الهامش.

74. **الاستدلال** افترض أن الدالة $f(x)$ فردية. إذا كانت $g(x)$ انعكاسا للدالة $f(x)$ في المحور الأفقي x والدالة $h(x)$ انعكاسا للدالة $g(x)$ في المحور الرأسي y. فما هي العلاقة بين $f(x)$ و $h(x)$؟ اشرح. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

75. **الكتابة في الرياضيات** اشرح أهمية الترتيب عند تحويل دالة في الانعكاس والإزاحة. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

الاستدلال حدد ما إذا كانت الجمل التالية دوماً صحيحة أو أحياناً أو ليست صحيحة أبدًا. اشرح استدلالك.

76. إذا كانت الدالة $f(x)$ زوجية. فإن $f(x) = |f(x)|$.

77. إذا كانت الدالة $f(x)$ فردية . فإن $f(-x) = -|f(x)|$.

78. إذا كانت الدالة $f(x)$ زوجية. فإن $f(-x) = -|f(x)|$.

76–78. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

79. **تحدٍ** صف تحويلات الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ إذا كانت النقطة $(-2, -6)$ تقع على المنحنى. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

80. **الاستدلال** افترض أن النقطة (a, b) تقع على الرسم البياني للدالة $f(x)$. صف الفرق بين تحويلات (a, b) إذا توسع الرسم البياني للدالة $f(x)$ رأسياً بالمعامل 4. وبين الرسم البياني للدالة $f(x)$ إذا كان منضغطًا أفقياً بالمعامل 4. انظر ملحق الإجابات للفصل الأول.

81. **الكتابة في الرياضيات** استخدم الكتابة والرسوم البيانية والجداول والمعادلات للربط بين الدوال الرئيسية والتحويلات. اعرض هذه العلاقة عبر مثال محدد. انظر كتاب الطالب

مراجعة شاملة

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة عند الفترات المحددة. (الدرس 1–4)

.82 $g(x) = -2x^2 + x - 3;\ [-1, 3]$ **-3**

.83 $g(x) = x^2 - 6x + 1;\ [4, 8]$ **6**

.84 $f(x) = -2x^3 - x^2 + x - 4;\ [-2, 3]$ **-14**

استخدم الرسم البياني لكل دالة لوصف السلوك الطرفي الخاص بها. اثبت فرضيتك بالأرقام. (الدرس 1–3) **85–87. انظر الهامش.**

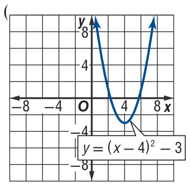
.85 $q(x) = -\frac{12}{x}$

.86 $f(x) = \frac{0.5}{x^2}$

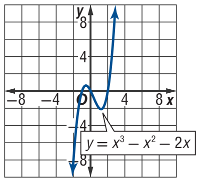
.87 $p(x) = \frac{x + 2}{x - 3}$

استخدم الرسم البياني لكل دالة لتقدير التقاطع مع المحور الرأسي y والأصفار. ثم أوجد هذه القيم من خلال الجبر. (الدرس 1–2) **88–90. انظر الهامش.**

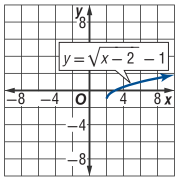
.88



.89



.90



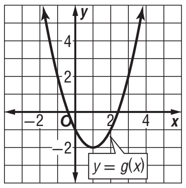
.91 **الحكومة** المرات التي رفض فيها الرؤساء الاثنان والأربعون قوانين مذكورة بالأسفل. ما هي قيمة الانحراف المعياري لهذه البيانات؟ (الدرس 0–8) **حوالي 118.60**

9,	0,	0,	3,	10,	0,	1,	12,	0,	1,	7,	0,	0,	2,
44,	39,	82,	42,	170,	44,	414,	12,	0,	13,	93,	29,	6,	7,
25	44,	78,	31,	66,	43,	30,	21,	181,	250,	635,	37,	50,	6,

.92 **ألعاب** يلعب عمر وفهد لعبة فيها كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 49، والكرات الحمراء مرقمة من 1 إلى 42، وكل الكرات موضوعة في حقيبة واحدة. سيسحب فهد 5 كرات من الكرات البيضاء، وسيخمن عمر أي كرات هي. ولا يهم ترتيب سحب الكرات. سيسحب فهد كذلك كرة حمراء واحدة من الحقيبة ويجب أن يخمن عمر أي كرة هي. ما هو عدد المرات التي سيصيب فيها تخمين عمر؟ (الدرس 0–7) **80,089,128**

مراجعة المهارات للاختبارات القياسية

.93 **SAT/ACT** يعرض الشكل الرسم البياني للدالة $y = g(x)$، حيث تقع القيمة الصغرى لها عند $(1,\ )$. ما هي القيمة العظمى للدالة $h(x) = -3g(x) -$



A 0

B 1

C 2

D 3

E لا يمكن التحديد بناء على المعلومات المعطاة.

.94 **مراجعة** ما هي الصيغة المبسطة للمعادل $\left(\frac{4x^3y^2z^{-1}}{x^{-2}y^3z^2}\right)^2$? **$\frac{4x^7}{y^4z^5}$**

.95 ما هو مدى $y = \frac{x^2 + 8}{2}$? **G**

F $\{y \mid y \neq \pm 2\sqrt{2}\}$

G $\{y \mid y \geq 4\}$

H $\{y \mid y \geq 0\}$

J $\{y \mid y \leq 0\}$

.96 **مراجعة** ما هو تأثير انخفاض قيمة k من 3 إلى 2، على الرسم البياني للدالة $y = kx^2$ ؟

A الرسم البياني للدالة $y = 2x^2$ هو انعكاس للرسم البياني للدالة $y = 3x^2$ حول المحور الرأسي y. **D**

B سيدور الرسم البياني $90°$ حول نقطة الأصل.

C سيصبح الرسم البياني أضيق.

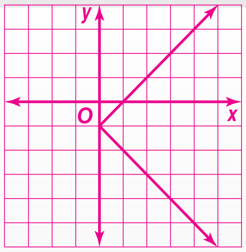
D سيصبح الرسم البياني أعرض.

التعليم المتمايز

مابعد المستوى

تمديد الرسم البياني $|y + 1| = |x|$. صف كيف تكون التحويلات الخاصة بالتابع الأب $y = |x|$.

الرسم البياني $|y + 1| = |x|$ هو الرسم البياني ل $|y = |x$ استدارة 90 درجة في اتجاه عقارب الساعة حول الأصل. وترجم 1 وحدة الى أسفل.



انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 73. كلا التفسيرين صحيحين. اطلب من الطلاب أن يتحققوا من ذلك من خلال نقل أول التابع الأب 4 وحدات الى أعلى ومن ثم نقل التابع الأب 4 وحدات إلى اليمين. وسوف نرى ان نتيجة كلا من الخطوتين هي نفسها.

4 قوّم

تذكرة خارج البيت جعل الطلاب يصفون طيف أن الرسم البياني ل$g(x) = -\frac{1}{4}(x + 3)^2 + 4$ يكون مرتبط التابع. انه الرسم البياني ل $f(x) = x^2$، نقل 3 وحدات بسارية، مضغوطة بعامل 1 الى 4، معكوسة بالنسبة للمحور $x-$، ونقل 4 وحدات علوية.

اجابات اضافية

.85 0؛ أجابة نموذجية بما ان $x \to \infty$، ومقام الكسر سوف يزيد و قيمة الكسر سوف تقترب الى 0، اذا so $q(x)$ سوف يقترب من 0.

.86 0؛ أجابة نموذجية بما ان $x \to \infty$، ومقام كسر سوف يزيد و قيمة الكسر سوف تقترب الى 0، إذا $f(x)$ ستصل إلى ال 0.

.87 1؛ الأجابة النموذجية وبما أن $x \to \infty$، الكسر سوف يقترب أكثر فأكثر الى $\frac{x}{x}$، إذا $p(x)$ سوف يقترب 1.

.88 نقاط حصر13 y؛ اصفار: 5.73، 2.27؛

$(x - 4)^2 - 3 = 0$

$(x - 4)^2 = 3$

$x - 4 = \pm\sqrt{3}$

$x = 4 \pm \sqrt{3}$

$x \approx 2.27$ أو $x \approx 5.73$

.89 نقاط حصر0 y؛ اصفار: -1، 0، 2؛

$x^3 - x^2 - 2x = 0$

$x(x^2 - x - 2) = 0$

$x(x - 2)(x + 1) = 0$

$x = 0$ أو $x - 2 = 0$ أو $x + 1 = 0$

$x = 2 \qquad x = -1$

.90 لا نقاط جصر $-y$؛ صفر: 3؛

$\sqrt{x - 2} - 1 = 0$

$\sqrt{x - 2} = 1$

$x - 2 = 1$

$x = 3$

1 التركيز

الهدف استخدام الحاسب الآلي للرسم البياني لحل المتباينات غير الخطية

نصائح تدريسية

قبل أن يبدأ الطلاب في تشغيل أجهزة الحاسوب، اشرح لهم الخطوة الأولى في العمل. المتباينة الأولى حصلنا عليها من تبديل الجانب الأيمن للمتباينة مع y. المتباينة الثانية حصلنا عليها من تبديل الجانب الأيسر للمتباينة مع y.

2 درّس

العمل في مجموعات تعاونية

كوّن مجموعات ثُنائية تتضمن واحدًا من الطلاب الذين يجيدون استعمال آلة حاسبة بيانية مع واحدًا من الطلاب الذين ليسوا كذلك. اطلب من كل فردين أن يتناوبوا على إدخال المعلومات الى آلة حاسبة.

التدريب اطلب من الطلاب استكمال التمارين 1 و 3 و 5 و 7 و 8.

3 قوّم

التقييم التكويني

اطلب من الطلاب أن يعملو بشكل مستقل لاستكمال تمارين 2 و 4 و 6. اطلب من الطلاب رسم رسومهم البيانية على ورقة، جنبا إلى جنب مع مجموعة الحل.

من المقدمة الى الخاتمة

اطلب من الطلاب تلخيص كيفية العثور على حل لأثنين أو أكثر من التفاوت غير الخطية.

المتواليات 5–1

مختبر تقنية التمثيل البياني
المتباينات غير الخطية

الهدف..

- استخدام آلة حاسبة خاصة بالرسوم البيانية لحل المتباينات غير الخطية.

المتباينة غير الخطية بمتغير واحد يمكن حلها من خلال الرسم البياني عن طريق تحويلها إلى متباينتين بمتغيرين وإيجاد التقاطع. يمكنك استخدام آلة حاسبة خاصة بالرسوم البيانية لإيجاد هذا التقاطع.

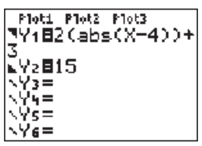
النشاط 1 قم بحل متباينة من خلال رسم بياني.

قم بحل $2|x-4|+3<15$.

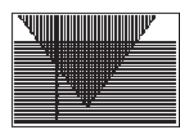
الخطوة1 قسِّم هذه المتباينة إلى متباينتين واحدة لكل جانب من رمز المتباينة. استبدل كل جانب بـــ y لصياغة المتباينات الجديدة.

$2|x-4|+3<Y_1;\ Y_2<15$

الخطوة 2 قم بتمثيل كل متباينة في رسم بياني. اذهب يسار رمز "يساوي" واختر ENTER حتى تومض المثلثات المظللة لتمثل كل رمز متباينة. يمثل المثلث أعلاه أكبر من ويمثل المثلث أدناه أقل من. لـــabs اضغط) MATH ▶ .



الخطوة 3 ارسم المتباينات في النافذة الصحيحة. إما أن تستخدم خاصية التكبير أو تقوم بتعديل النافذة يدويًا لعرض الرسمين كليهما. أي نافذة تعرض نقطتي التقاطع ستكون مناسبة.



[−5, 15] scl: 1 by [0, 20] scl: 1

الخطوة4 تشير المنطقة المظللة بلون داكن إلى تقاطع الرسوم البيانية وحل نظام المتباينات. استخدم خاصية التقاطع لتكتشف أن هناك رسمتين يتقاطعان عند (−2, و (10,.

[−5, 15] scl: 1 by [0, 20] scl: 1

الخطوة5 يقع الحل في الجزء من الرسم حيث $-2<x<10$. وبالتالي يكون الحل لــ $2|x-4|+3<15$ هو مجموعة قيم بحيث تكون $-2<x<10$ x–v–x. تأكد من الحل من خلال الجبر عن طريق تأكيد أن قيمة x في هذا الفاصل هي حل المتباينة.

> **نصيحة للدراسة**
> **بتعديل النافذة** يمكنك استخدام خيارات ZoomFit أو ZoomOut أو تعديل النافذة يدويًا بحيث تتضمن الرسمين البيانيين كليهما.

تمارين

قم بحل كل متباينة من خلال رسم بياني.

1. $3|x+2|-4>8$ **$(-\infty,-6)\cup(2,\infty)$**
2. $-2|x+4|+6\le 2$ **$(-\infty,\infty)$**
3. $5|2x+1|>15$ **$(-\infty,-6]\cup[-2,\infty)$**
4. $-3|2x-3|+1\le 10$ **$(-\infty,2)$**
5. $|x-6|>x+2$ **$(-\infty,-2)\cup(1,\infty)$**
6. $|2x+1|\ge 4x-3$ **$(-\infty,2]$**

امتداد

7. **الاستدلال** صف شكل الرسم البياني لمتباينة بدون حل.
8. **التحدي** قم بحل $-10x-32<|x+3|-2<-|x+4|+8$ عن طريق الرسم البياني. **$[-3, 1.5]$**

7. الإجابة النموذجية : بينما سيكون لكل متباينة واحدة منطقة مظللة، لن يكون هناك تقاطع بين المنطقتين المظللتين.

1 ركّز

المحاذاة الرأسية

قبل الدرس 1–6 قيّم التوابع.

الدرس 1–6 قم بتنفيذ عمليات باستخدام التوابع. أوجد تراكيب التوابع.

بعد الدرس 1–6 أوجد معكوس العلاقات والتوابع جبريًا ورسوميًا.

2 درّس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** في الدرس.

اطرح السؤال:

- على حسب الشهر، يتم بيع منتجين بأسعار مختلفة. كيف يُمكننا مقارنة الأسعار؟ اطرح مبيعات منتج واحد من مبيعات المنتج الآخر.
- تهتم الشركة بالنسبة الشهرية التي تُباع في المنازل. ما التعبير الذي يُمثل هذه النسبة؟ قسّم المنازل المباعة حسب منازل للبيع..

الدرس 6–1 عمليات الدوال وتركيب الدوال

:: قبل ذلك

- أنت قيّمت الدوال. (الدرس 1–1)

:: الآن

1 إجراء العمليات مع الدوال.

2 إيجاد تركيبات الدوال.

:: السبب

- في إبريل من عام 2008، تجاوز عدد مستخدمي موقع التواصل الاجتماعي الأبرز، لمؤسسه كريس ديوولف وتوم أندرسون، 60.4 مليون مستخدم. وقدّر عدد مستخدمي الموقع الذي حلّ في المرتبة الثانية في ذلك الوقت 24.9 مليون مستخدم، أو 35.5 مليونًا أقل في عدد المستخدمين.

بافتراض أن $A(t)$ و$B(t)$ يمثلا عددي مستخدمي موقعي التواصل الاجتماعي الموجودين في المرتبة الأولى والثانية، على التوالي، حيث يشير t إلى عدد الأعوام منذ عام 2000. يمثّل $A(t) - B(t)$ الفارق في عدد المستخدمين بين الموقعين لعدد t من الأعوام بعد عام 2000.

WENN Ltd/Alamy©

مفردات جديدة

تركيب (composition)

1 العمليات مع الدوال

مثلما تستطيع دمج عددين حقيقيين باستخدام عملية الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة، تستطيع دمج دالتين.

المفهوم الرئيسي العمليات على الدوال

افترض أن f وg دالتان لهما مجالين متقاطعين. إذن بالنسبة إلى كل القيم x الموجودة داخل التقاطع، يعد حاصل جمع f وg وحاصل ضربهما والفرق بينهما وناتج قسمتهما دوالاً جديدة تُعرف على النحو التالي.

حاصل الجمع $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

حاصل الطرح $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

حاصل الضرب $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

ناتج القسمة $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$

في كل دالة جديدة، يتكون المجال من تلك القيم لـــ x والمشتركة لمجالات f وg. ينحصر مجال دالة ناتج القسمة في استبعاد أي قيم تجعل المقام، $g(x)$ ، يساوي صفرًا.

مثال 1 العمليات على الدوال

بافتراض أن $f(x) = x^2 + 4x$ و $g(x) = \sqrt{x+2}$, و $h(x) = 3x - 5$، أوجد كل دالة ومجالها.

a. $(f + g)(x)$

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= (x^2 + 4x) + \left(\sqrt{x+2}\right)\\ &= x^2 + 4x + \sqrt{x+2}\end{aligned}$$

مجال f هو $(-\infty, \infty)$ ومجال g هو $[-2, \infty)$. إذن، مجال $(f + g)$ هو تقاطع هذه المجالات أو $[-2, \infty)$.

b. $(f - h)(x)$

$$\begin{aligned}(f - h)(x) &= f(x) - h(x)\\ &= (x^2 + 4x) - (3x - 5)\\ &= x^2 + 4x - 3x + 5\\ &= x^2 + x + 5\end{aligned}$$

مجالا f وh هما $(-\infty, \infty)$. إذن، مجال $(f - h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

c. $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$

$$\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{h(x)}{f(x)} \text{ أو } \frac{3x-5}{x^2+4x}$$

مجالا h وf هما $(-\infty, \infty)$. لكن $x = 0$ أو $x = -4$ حيث يُعطي صفرًا في مقام $\left(\frac{h}{f}\right)$. إذن، مجال $\left(\frac{h}{f}\right)$ هو $(-\infty, -4) \cup (-4, 0) \cup (0, \infty)$.

d. $(f \cdot h)(x)$

$$\begin{aligned}(f \cdot h)(x) &= f(x) \cdot h(x)\\ &= (x^2 + 4x)(3x - 5)\\ &= 3x^3 - 5x^2 + 12x^2 - 20x\\ &= 3x^3 + 7x^2 - 20x\end{aligned}$$

مجالا f وh هما $(-\infty, \infty)$.
إذن مجال $(f \cdot h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

العمليات والتوابع

المثال 1 يوضّح كيفية الجمع والطرح والضرب والتقسيم للتوابع.

التقييم المرحلي

استخدم تدريبات التمارين الموجهة بعد كل مثال لتحديد مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 مع وجود $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = 3x - 4$, و $h(x) = -2x^2 + 1$, أوجد كل تابع ومجاله.

a. $(f + g)(x)$ $(f + g)(x) = x^2 + x - 4;\ D = (-\infty, \infty)$

b. $(f - h)(x)$ $(f - h)(x) = 3x^2 - 2x - 1;\ D = (-\infty, \infty)$

c. $(f \cdot g)(x)$ $(f \cdot g)(x) = 3x^3 - 10x^2 + 8x;\ D = (-\infty, \infty)$

d. $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$ $\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{-2x^2 + 1}{x^2 - 2x};\ (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$

2 تراكيب التوابع

تمارين) موجهة

أوجد $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل من $f(x)$, $g(x)$. حدد مجال كل دالة جديدة. **1A–B. انظر الهامش.**

1A. $f(x) = x - 4,\ g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

1B. $f(x) = x^2 - 6x - 8,\ g(x) = \sqrt{x}$

2 تركيب الدوال

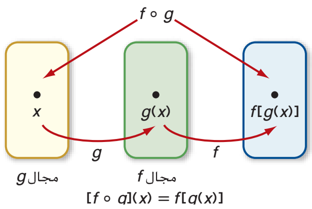
تدمج الدالة $y = (x - 3)^2$ الدالة الخطية $y = x - 3$ مع الدالة التربيعية $y = x^2$، لكن لا تتضمن عملية الدمج الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة. دمج الدوال هذا، الذي يُعرف باسم **التركيب**، هو نتيجة استخدام دالة واحدة لتقييم دالة ثانية.

المفهوم الرئيسي تركيب الدوال

يُحدد **تركيب** الدالة f مع الدالة g بواسطة

$$[f \circ g](x) = f[g(x)].$$

يتضمن مجال $f \circ g$ كل القيم على المحور x في مجال g المُعيّن إلى قيم $g(x)$ في مجال g على النحو الموضح.



في التركيب $f \circ g$، التي تُقرأ f تركيب g أو f من g، تستخدم الدالة g أولاً ثم f.

مثال 2 تركيب دالتين

بافتراض أن $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = x - 4$، أوجد كلاً مما يلي.

a. $[f \circ g](x)$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$ تعريف $f \circ g$

$= f(x - 4)$ استبدل $g(x)$ بـــ $x - 4$.

$= (x - 4)^2 + 1$ اجعل $x - 4$ مكان x في $f(x)$

$= x^2 - 8x + 16 + 1$ أو $x^2 - 8x + 17$ حوّل لأبسط صورة

b. $[g \circ f](x)$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$ تعريف $g \circ f$

$= g(x^2 + 1)$ استبدل $f(x)$ بـــ $x^2 + 1$.

$= (x^2 + 1) - 4$ أو $x^2 - 3$ اجعل $x^2 + 1$ مكان x في $g(x)$.

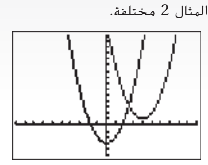
c. $[f \circ g](2)$

أوجد قيمة التعبير $[f \circ g](x)$ الذي كتبته في الجزء **a** لـــ $x = 2$.

$[f \circ g](2) = (2)^2 - 8(2) + 17$ أو 5 اجعل 2 محل x في $x^2 - 8x + 17$.

انتبه!

ترتيب التركيب في الكثير من الحالات، $f \circ g$ و $g \circ f$ دالتان مختلفتان. وهذا يعني أن تركيب الدوال غير تبادلي. لاحظ أن الرسوم البيانية لـــ $[f \circ g](x)$ $= x^2 - 8x + 17$ و $[g \circ f](x) = x^2 - 3$ من المثال 2 مختلفة.



[−10, 10] scl: 1 by [−5, 15] scl: 1

تمارين) موجهة

في كل زوج من الدوال، أوجد $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$ و $[f \circ g](3)$.

2A. $f(x) = 3x + 1,\ g(x) = 5 - x^2$ **$-3x^2 + 16,\ -9x^2 - 6x + 4,\ -11$**

2B. $f(x) = 6x^2 - 4,\ g(x) = x + 2$ **$6x^2 + 24x + 20,\ 6x^2 - 2,\ 146$**

المثالان 2 و3 يوضّحان كيفية تكوين توابع وإيجاد تابع مركب بمجال مقيد. **المثال 4** يبين كيفية تحليل تابع مركب. **المثال 5** يبين كيفية استخدام تابع مركب.

إجابات إضافية (تمارين موجهة)

1A. $(f + g)(x) = x - 4 + \sqrt{9 - x^2}$, $D = [-3, 3]$; $(f - g)(x) = x - 4 - \sqrt{9 - x^2}$, $D = [-3, 3]$; $(f \cdot g)(x) = x\sqrt{9 - x^2} - 4\sqrt{9 - x^2}$, $D = [-3, 3]$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x - 4}{\sqrt{9 - x^2}}$, $D = (-3, 3)$

1B. $(f + g)(x) = x^2 - 6x - 8 + \sqrt{x}$, $D = [0, \infty)$; $(f - g)(x) = x^2 - 6x - 8 - \sqrt{x}$, $D = [0, \infty)$; $(f \cdot g)(x) = x^2\sqrt{x} - 6x\sqrt{x} - 8\sqrt{x}$, $D = [0, \infty)$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 6x - 8}{\sqrt{x}}$, $D = (0, \infty)$

أمثلة إضافية

2 مع وجود $f(x) = 2x^2 - 1$ و $g(x) = x + 3$، أوجد كل مما يلي.

a. $[f \circ g](x)$ $\quad [f \circ g](x) = 2x^2 + 12x + 17$

b. $[g \circ f](x)$ $\quad [g \circ f](x) = 2x^2 + 2$

c. $[f \circ g](2)$ $\quad [f \circ g](2) = 49$

3 أوجد $f \circ g$.

a. $f(x) = \sqrt{x - 1}$, $g(x) = (x - 1)^2$

$[f \circ g](x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ لـ $x \geq 2$ أو $x \leq 0$

b. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$[f \circ g](x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 1}$ لـ $x < -1$ or $x > 1$

التركيز على المحتوى الرياضي

تراكب التوابع تراكب التوابع ليس تراكميًا بشكل عام. ومع ذلك، توجد بعض أزواج التوابع حيث $f[g(x)] = g[f(x)]$. عندما $f[g(x)] = g[f(x)] = x$، f و g يكونان معكوسان لبعضهما البعض.

درّس مستخدمًا التكنولوجيا

جدول البيانات باستخدام جدول بيانات ومثال من الدرس، سيعمل الطلاب في فرق لإنشاء قائمة من الإدخال أو المجال، أو القيم والإخراج أو النطاق للتابع الأولي. ثم اطلب من الطلاب استخدام الإخراج كإدخال للتابع المركب. ينبغي للطلاب وضع تمييز على أي قيود مجال في جدول البيانات.

لأن مجالي f وg في المثال 2 يتضمنا كل الأعداد الحقيقية، يساوي مجال $f \circ g$ كل الأعداد الحقيقية، $\mathbb{R}$.

عندما يكون مجال f أو g مقيدًا، ينحصر مجال $f \circ g$ على كل القيم على المحور x في مجال g التي تكون قيم مداها، $g(x)$ في مجال f.

مثال 3 أوجد دالة مركبة ذات مجال مقيد

أوجد $f \circ g$.

a. $f(x) = \frac{1}{x + 1}$, $g(x) = x^2 - 9$

لإيجاد $f \circ g$، يجب أن تتمكن أولاً من إيجاد $g(x) = x^2 - 9$، الذي يمكن أن تفعله في كل الأعداد الصحيحة. إذن يجب أن تتمكن من تقييم $f(x) = \frac{1}{x+1}$ لكل قيمة من قيم $g(x)$ هذه، ويتم ذلك فقط عندما $g(x) \neq -1$. استبعاد تلك القيم من المجال الذي يكون فيه $x^2 - 9 = -1$، تحديدًا عندما $x = \pm\sqrt{8}$ أو $\pm 2\sqrt{2}$، مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in \mathbb{R}\}$.

الآن أوجد $[f \circ g](x)$.

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$	تعريف $f \circ g$
$= f(x^2 - 9)$	استبدل $g(x)$ بـ $x^2 - 9$
$= \frac{1}{x^2 - 9 + 1}$ أو $\frac{1}{x^2 - 8}$	اجعل $x^2 - 9$ مكان x في $f(x)$

لاحظ أنه يتم تحديد $\frac{1}{x^2 - 8}$ عندما $x^2 - 8 = 0$، والذي يحدث عندما $x = \pm 2\sqrt{2}$. لأن المجال الضمني هو نفسه المجال المحدد بواسطة الرجوع إلى مجالي f وg، يمكن كتابة التركيب في الصورة $[f \circ g](x) = \frac{1}{x^2 - 8}$ عندما $x \neq \pm 2\sqrt{2}$.

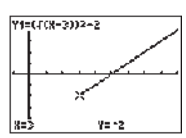
b. $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = \sqrt{x - 3}$

لإيجاد $f \circ g$ يجب أن تتمكن أولاً من إيجاد $g(x)$، والذي يمكن إتمامه فقط عندما $x \geq 3$. بعد ذلك يجب أن تتمكن من تربيع كل قيمة من قيم $g(x)$ هذه وطرح العدد 2، والذي يمكن فعله في كل الأعداد الحقيقية. لذلك، مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \geq 3, x \in \mathbb{R}\}$. الآن أوجد $[f \circ g](x)$.

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$	تعريف $f \circ g$
$= f(\sqrt{x - 3})$	استبدل $g(x)$ بـ $\sqrt{x-3}$
$= (\sqrt{x - 3})^2 - 2$	اجعل $\sqrt{x-3}$ مكان x في $f(x)$
$= x - 3 - 2$ أو $x - 5$	حوّل لأبسط صورة

بمجرد تحويل التركيب لأبسط صورة، يتضح أن الدالة محددة لكل الأعداد الحقيقية، والذي يعرف بأنه غير صحيح. لذلك، اكتب التركيب في الصورة $[f \circ g](x) = x - 5$ لـ $x \geq 3$.

تحقق استخدم حاسبة الرسوم البيانية للتحقق من هذا الناتج. أدخل الدالة في صورة $y = (\sqrt{x - 3})^2 - 2$. يظهر الرسم البياني كجزء من الخط $y = x - 5$. إذن فإن استخدم خاصية الرسم للمساعدة على تحديد أن مجال الدالة المركبة يبدأ عند $x = 3$ ويمتد إلى ∞.



$[-1, 9]$ scl: 1 by $[-5, 5]$ scl: 1

نصيحة للدراسة

مجالات الدوال المركبة من المهم جدًا إكمال تحليل المجال قبل إجراء التركيب. قد تكون قيود المجال غير واضحة بعد تحويل التركيب لأبسط صورة.

تمارين موجهة

3A. $f(x) = \sqrt{x + 1}$, $g(x) = x^2 - 1$ $\qquad$ 3B. $f(x) = \frac{5}{x}$, $g(x) = x^2 + x$

3A. $[f \circ g](x) = |x|$; $x \neq \pm 2\sqrt{2}$.

3B. $[f \circ g](x) = \frac{5}{x^2 + x}$. عندما $x \neq 0$ أو $x \neq -1$

نصيحة للدراسة

استخدام القيمة المطلقة تذكّر من الدرس 0–4 أنه عندما تجد جذرًا زوجيًا لأس زوجي ويكون الناتج أسًا فرديًا، يجب أن تستخدم القيمة المطلقة للناتج لضمان أن الإجابة غير سالبة. على سبيل المثال، $\sqrt{x^2} = |x|$.

مهارة مهمة في التفاضل والتكامل وهي القدرة على تحليل إحدى الدوال إلى دوال أبسط. لتحليل الدالة h، أوجد دالتين يكون تركيبهما h.

OL AL DifferentiatedInstruction

المتعلمون ذاتيًا اطلب من الطلاب العمل في مجموعات مكونة من اثنين. وكل طالب يفكر في تابع. يعمل الطالبين معًا على إيجاد المجموع والفرق والنتائج وحاصل التوابع ومركبات التابعين.

مثال 4 تحليل الدالة المركبة

أوجد الدالتين f و g بحيث تكون $h(x) = [f \circ g](x)$. لا توجد دالة يمكن اعتبارها دالة محايدة x.

a. $h(x) = \sqrt{x^3 - 4}$

لاحظ أنه يتم تعريف h باستخدام الجذر التربيعي لـــ $x^3 - 4$. إذن توجد طريقة واحدة لكتابة h في صورة تركيب دالتين وهي افتراض أن $g(x) = x^3 - 4$ و $f(x) = \sqrt{x}$. إذن
$h(x) = \sqrt{x^3 - 4} = \sqrt{g(x)} = f[g(x)]$ or $[f \circ g](x)$.

b. $h(x) = 2x^2 + 20x + 50$

$h(x) = 2x^2 + 20x + 50$ لاحظ أن $h(x)$ قابلة للتحليل إلى عوامل

$= 2(x^2 + 10x + 25)$ أو $2(x + 5)^2$ حلّل إلى عوامل

طريقة واحدة لكتابة $h(x)$ في صورة تركيب وهي افتراض أن $f(x) = 2x^2$ و $g(x) = x + 5$.
$h(x) = 2(x + 5)^2 = 2[g(x)]^2 = f[g(x)]$ or $[f \circ g](x)$.

تمارين موجهة

4A. $h(x) = x^2 - 2x + 1$ $g(x) = x - 1,\ f(x) = x^2$

4B. $h(x) = \frac{1}{x + 7}$ $g(x) = x + 7,\ f(x) = \frac{1}{x}$

يمكنك استخدام تركيب الدوال لحل مسائل من واقع الحياة.

مهن الحياة اليومية

اختصاصيو الرسوم المتحركة بالحاسوب

يعمل اختصاصيو الرسوم المتحركة في العديد من الصناعات لابتكار صور متحركة تُستخدم في الأفلام والعروض التلفزيونية وألعاب الفيديو. يجب أن يكون اختصاصيو الرسوم المتحركة بالحاسوب مبتكرين، ويتلقى الكثير منهم تدريبًا بعد مرحلة الثانوية في مدارس متخصصة.

مثال 5 من الحياة اليومية تركيب دوال من عالم الواقع

الرسوم المتحركة الحاسوبية لتحريك الرسوم لتصبح قريبة من الخصم مباشرة أمام أحد اللاعبين، يبدأ اختصاصي الرسوم المتحركة في لعبة الكمبيوتر بطرح صورة على شكل مستطيل دقتها 20 بكسل في 60 بكسل.
يزيد بعد ذلك اختصاصي الرسوم المتحركة كل بُعد للمستطيل بدقة 15 بكسل في الثانية.

a. أوجد الدوال اللازمة لنمذجة البيانات.

يزيد طول L طول المستطيل بمعدل 15 بكسل في الثانية. إذن $L(t) = 20 + 15t$، حيث تشير t إلى الزمن بالثواني و$t \geq 0$. مساحة المستطيل الذي يبلغ طوله L مرة ضعف عرضه. ويبلغ العرض 40 بكسل أكثر من طوله أو $L + 40$. إذن، مساحة المستطيل تساوي $A(L) = L(L + 40)$ أو $L^2 + 40L$ و$L \geq 20$.

b. أوجد $A \circ L$. ما الذي تُمثّله هذه الدالة؟

$A \circ L = A[L(t)]$ تعريف $A \circ L$

$= A(20 + 15t)$ استبدل $L(t)$ بـــ $20 + 15t$.

$= (20 + 15t)^2 + 40(20 + 15t)$ اجعل $20 + 15t$ محل L في $A(L)$

$= 225t^2 + 1200t + 1200$ حوّل لأبسط صورة

تُشكّل هذه الدالة المركبة مساحة المستطيل في صورة دالة زمنية.

c. كم من الوقت يستغرقه المستطيل حتى يتضاعف حجمه الأصلي إلى ثلاث مرات؟

تساوي المساحة الابتدائية للمستطيل $60 \cdot 20$ أو 1200 بكسل. سيتضاعف المستطيل إلى ثلاثة أضعاف حجمه الأصلي عندما تكون $[A \circ L](t) = 225t^2 + 1200t + 1200 = 3600$. أوجد t لاستنتاج أن $t \approx 1.55$ أو -6.88. لأن قيمة t السالبة لا تعد جزءًا من مجال $L(t)$، لا تعد أيضًا جزءًا من مجال الدالة المركبة. ستتضاعف المساحة إلى ثلاث مرات بعد مضي 1.55 ثانية تقريبًا.

تمارين موجهة

5. عمل تجاري يقدم أحد متاجر بيع أجهزة الكمبيوتر خصمًا لطلاب الجامعة يصل إلى 15% عند شراء أي كمبيوتر محمول. أعلن أيضًا المتجر عن 100 درهم إماراتي في صورة قسائم.

A. أوجد الدوال اللازمة لنمذجة البيانات. $d(x) = 0.85x;\ c(x) = x - 100$

B. أوجد $[c \circ d](x)$ و$[d \circ c](x)$. ما الذي تُمثّله كل دالة مركبة؛ 5ب–ج. انظر الهامش.

C. اذكر التركيب بين القسيمة والخصم الذي يؤدي إلى الحصول على أقل سعر؟ اشرح ذلك.

أمثلة إضافية

4 أوجد التابعين f و g حيث $h(x) = [f \circ g](x)$. قد لا تكون أي من التابعين التابع الهوية $f(x) = x$. تم تقديم إجابات نموذجية.

a. $h(x) = \frac{1}{(x + 2)^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$ و $g(x) = x + 2$

b. $h(x) = 3x^2 - 12x + 12$
$g(x) = x - 2$ و $f(x) = 3x^2$

5 الرسوم المتحركة في الكمبيوتر يبدأ صانع رسوم متحركة بصورة لدائرة نصف قطرها 25 بكسل. يقوم بعد ذلك بزيادة نصف القطر 10 بكسل في الثانية.

a. أوجد التوابع لصياغة البيانات.
$R(t) = 25 + 10t$; $A(R) = \pi R^2$

b. أوجد $A \circ R$. ما الذي يمثله التابع؟
$[A \circ R](t) = 100\pi t^2 + 500\pi t + 625\pi$; يقوم التابع بصياغة مساحة الدائرة كتابع وقت

c. ما الوقت المستغرق لتكبير الدائرة أربع أضعاف حجمها الأصلي؟ 2.5 ثانية

إجابات إضافية (تمارين موجّهة)

5B. $[c \circ d](x) = 0.85x - 100$; $[d \circ c](x) = 0.85x - 85$; $[c \circ d](x)$ تمثل سعر الكمبيوتر باستخدام الخصم ثم الكوبون و $[d \circ c](x)$ تمثل سعر الكمبيوتر باستخدام الكوبون ثم الخصم.

5C. إجابة نموذجية: استخدام الخصم ثم الكوبون، أو $[c \circ d](x)$، ينتج عنه السعر الأدنى. على سبيل المثال، إذا كان الطالب يرغب في شراء جهاز كمبيوتر بسعر 1000 دولار، فسيدفع هو أو مبلغ هو 750 دولار باستخدام الخصم ثم الكوبون وسيدفع 765 باستخدام الكوبون ثم الخصم.

التعليم المتمايز AL

المتعلمون الحركيون اجعل الطلاب يعملون في مجموعات مكونة من شخصين أو أربعة. اكتب أعداد صحيحة من −10 إلى 10 في بطاقات فهرسة منفصلة. اطلب من طالب واحد من كل مجموعة أن يكون الحارس في التابع الأولى لتابع مركب. يقوم الطلاب الآخرون في المجموعة بتمرير بطاقات الفهرسة إلى الحارس الذي يرفض البطاقات أو يقبلها، على حسب ما إذا كان الرقم في مجال التابع. بعد المراجعة، يكون طالب آخر هو الحارس للتابع الثانية. يُمكن للطلاب استخدام هذه العملية لتحديد مجال تابع التراكب.

تمارين

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x)$, و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل من $f(x)$ و$g(x)$. حدد مجال كل دالة جديدة. (مثال 1) **1–4. انظر الهامش.**

.1 $f(x) = x^2 + 4$, $g(x) = \sqrt{x}$

.2 $f(x) = 8 - x^3$, $g(x) = x - 3$

.3 $f(x) = x^2 + 5x + 6$, $g(x) = x + 2$

.4 $f(x) = x - 9$, $g(x) = x + 5$

5. $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = 9x$

.6 $f(x) = x - 7$, $g(x) = x + 7$

.7 $f(x) = \frac{6}{x}$, $g(x) = x^3 + x$

.8 $f(x) = \frac{x}{4}$, $g(x) = \frac{3}{x}$

.9 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = 4\sqrt{x}$

.10 $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = x^4$

.11 $f(x) = \sqrt{x+8}$, $g(x) = \sqrt{x+5} - 3$

.12 $f(x) = \sqrt{x+6}$, $g(x) = \sqrt{x-4}$

5–12. انظر الوحدة 1 ملحق الإجابات.

.13 **وضع الميزانية** افترض أن ميزانية أحد الأشخاص بالدولار ولمدة شهر واحد تقترب من $f(x) = 25x + 350$ و $g(x) = 15x + 200$، حيث يُمثّل f تكلفة الإيجار ومصروفات البقالين ويُمثّل g تكلفة الغاز وجميع النفقات الأخرى ويُمثّل $x = 1$ إجمالي التكلفة في نهاية الأسبوع الأول.

(مثال 1) **a–c. انظر الوحدة 1 ملحق الإجابات.**

a. أوجد $(f+g)(x)$ والمجال ذا الصلة.

b. ما الذي تُمثّله $(f+g)(x)$؟

c. أوجد $(f+g)(4)$. ما الذي تُمثّله هذه القيمة؟

.14 **فيزياء** قوتان مختلفتان تؤثران في جسم ما يتم دفعه على الأرض وهما: قوة ناتجة عن الشخص الذي يدفع الجسم وقوة ناتجة عن الاحتكاك. إذا كان W يُمثّل الشغل بوحدة الجول و F يُمثّل القوة بوحدة نيوتن وd يُمثّل إزاحة الجسم بوحدة المتر، تصف $W_p(d) = F_pd$ الشغل الذي يقوم به الشخص وتصف $W_f(d) = F_fd$ الشغل الناتج عن الاحتكاك. تُمثّل الزيادة في الطاقة الحركية للجسم الفرق بين الشغل الذي يقوم به الشخص W_p والشغل الناتج عن الاحتكاك W_f. (مثال 1)

a. أوجد $(W_p - W_f)(d)$. **$d(F_p - F_f)$ or $F_pd - F_fd$**

b. أوجد إجمالي الشغل الناتج عندما يدفع شخص صندوقًا لمسافة 50 مترًا بقوة تصل إلى 95 نيوتن ويصل الاحتكاك المؤثر في القوة إلى 55 نيوتن. **200 نيوتن في المتر**

15–20. انظر الوحدة 1 ملحق الإجابات.

في كل زوج من الدوال، أوجد $[f \circ g](x), [g \circ f](x)$ و $[f \circ g](6)$. (مثال 2)

.15 $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = 4x - 8$

.16 $f(x) = -2x^2 - 5x + 1$, $g(x) = -5x + 6$

.17 $f(x) = 8 - x^2$, $g(x) = x^2 + x + 1$

.18 $f(x) = x^2 - 16$, $g(x) = x^2 + 7x + 11$

.19 $f(x) = 3 - x^2$, $g(x) = x^3 + 1$

.20 $f(x) = 2 + x^4$, $g(x) = -x^2$

21–28. انظر الوحدة 1 ملحق الإجابات.

أوجد $f \circ g$. (مثال 3)

.21 $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = x^2 - 4$

.22 $f(x) = \frac{2}{x-3}$, $g(x) = x^2 + 6$

.23 $f(x) = \sqrt{x+4}$, $g(x) = x^2 - 4$

.24 $f(x) = x^2 - 9$, $g(x) = \sqrt{x+3}$

.25 $f(x) = \frac{5}{x}$, $g(x) = \sqrt{6-x}$

.26 $f(x) = -\frac{4}{x}$, $g(x) = \sqrt{x+8}$

.27 $f(x) = \sqrt{x+5}$, $g(x) = x^2 + 4x - 1$

.28 $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = x^2 + 8$

29 **النسبية** في النظرية النسبية، $m(v) = \frac{100}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$، حيث يُمثّل c سرعة الضوء، 300 مليون متر في الثانية، ويُمثّل m كتلة جسم يزن 100 كيلوجرام بسرعة v بوحدة المتر في الثانية.

(مثال 4) **a–d. انظر الوحدة 1 ملحق الإجابات**

a. هل توجد أي قيود على مجال الدالة؟ وضّح دلالتها.

b. أوجد $m(10), m(10{,}000), m(1{,}000{,}000)$.

c. صف سلوك $m(v)$ عندما تقترب v من c.

d. حلّل الدالة إلى دالتين منفصلتين.

30–39. انظر الفصل 1 ملحق الإجابات.

أوجد الدالتين f وg بحيث $h(x) = [f \circ g](x)$. لا توجد دالة يمكن اعتبارها دالة محايدة $f(x) = x$. (مثال 4)

.30 $h(x) = \sqrt{4x+2} + 7$

.31 $h(x) = \frac{6}{x+5} - 8$

.32 $h(x) = |4x + 8| - 9$

.33 $h(x) = [\![-3(x-9)]\!]$

.34 $h(x) = \sqrt{\frac{5-x}{x+2}}$

.35 $h(x) = (\sqrt{x} + 4)^3$

.36 $h(x) = \frac{6}{(x+2)^2}$

.37 $h(x) = \frac{8}{(x-5)^2}$

.38 $h(x) = \frac{\sqrt{4+x}}{x-2}$

.39 $h(x) = \frac{x+5}{\sqrt{x-1}}$

40 d, b. انظر الوحدة 1 ملحق الإجابات.

.40 **ميكانيكا الكم** الطول الموجي λ لجسيم كتلته m بالكيلوجرامات يتحرك بسرعة v بالأمتار في الثانية وتُمثل بواسطة $\lambda = \frac{h}{mv}$، حيث تمثل h قيمة ثابتة تساوي $6.626 \cdot 10^{-34}$.

a. أوجد دالة لتمثيل الطول الموجي لجسم يزن 25 كيلوجرامًا كدالة لسرعته. $f(v) = \frac{h}{25v}$

b. هل توجد أي قيود على مجال الدالة؟ وضح دلالتها.

c. إذا كان الجسم يقطع مسافة 8 أمتار في الثانية، فأوجد الطول الموجي فيما يتعلق بـ h. $\lambda = \frac{h}{200}$

d. حلّل الدالة إلى دالتين منفصلتين.

3 تمرّن

التقييم المرحلي

استخدم التمارين 1–42 للتحقق من الفهم.

بعد ذلك استخدم الجدول أدناه لتخصيص الواجبات الخاصة بالطلاب.

انتبه جيدًا!

أخطاء شائعة في التمارين 15–28. إذا كان الطلاب يقومون بتقييم التوابع المركبة بشكل غير صحيح عن طريق القيام بعمليات الاستبدال الخاطئة، فأكد على أن التابع الثاني هو المستبدل بالثاني.

أخطاء شائعة في التمارين 30–39. ذكّر الطلاب بأن هناك الكثير من الحلول. ولمساعدتهم في التحقق من إجاباتهم، اطلب منهم تحديد المركب وإظهار عملهم.

إجابات إضافية

1. $(f+g)(x) = x^2 + \sqrt{x} + 4$; D $= [0, \infty)$; $(f-g)(x) = x^2 - \sqrt{x} + 4$; D $= [0, \infty)$; $(f \cdot g)(x) = x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}}$; D $= [0, \infty)$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x}}$; D $= (0, \infty)$

2. $(f+g)(x) = -x^3 + x + 5$; D $= (-\infty, \infty)$; $(f-g)(x) = -x^3 - x + 11$; D $= (-\infty, \infty)$; $(f \cdot g)(x) = -x^4 + 3x^3 + 8x - 24$; D $= (-\infty, \infty)$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{8 - x^3}{x - 3}$; D $= (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$

3. $(f+g)(x) = x^2 + 6x + 8$; D $= (-\infty, \infty)$; $(f-g)(x) = x^2 + 4x + 4$; D $= (-\infty, \infty)$; $(f \cdot g)(x) = x^3 + 7x^2 + 16x + 12$; D $= (-\infty, \infty)$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x + 3$; D $= (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$

4. $(f+g)(x) = 2x - 4$; D $= (-\infty, \infty)$; $(f-g)(x) = -14$; D $= (-\infty, \infty)$; $(f \cdot g)(x) = x^2 - 4x - 45$; $(-\infty, \infty)$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x-9}{x+5}$; D $= (-\infty, -5) \cup (-5, \infty)$

AL BL OL Differentiated Homework Options

المستوى	الواجب	خيار لمدة يومين	
AL تقارب المستوى	1-42, 87-90, 93, 94, 96-108	1-41 فردي، 106-108	2-42 عدد زوجي، 87-90, 93, 94, 96-105
OL ضمن المستوى	1-59, 61-81 odd عدد فردي، 60, 82, 83, 85, 87-90, 93, 94, 96-108	1-42, 106-108	43-90, 93, 94, 96-105
BL دون المستوى	43-108		

G12 GEN TE CH01.indb 61 8/22/2016 4:30:38 PM

41. **وظائف** يتقاضى مندوب المبيعات لشركة التأمين راتبًا سنويًا بالإضافة إلى حوافز تصل نسبتهما إلى 4% من المبيعات التي تجاوزت 300,000. افترض أن $f(x) = x - 300{,}000$ و $h(x) = 0.04x$، حيث x يُمثّل إجمالي المبيعات. (مثال 5)

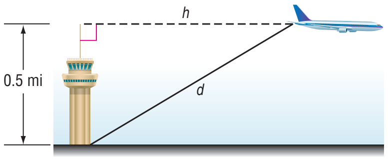
a. انظر الهامش.

a. إذا كان x أكبر من 300,000، فهل تُمثّل الحوافز بواسطة $f[h(x)]$ أو بواسطة $h[f(x)]$؟ اشرح استدلالك.

b. أوجد قيمة الحوافز لسنة واحدة مع مبيعات تصل إلى 450,000.

$6000

42. **السفر** تمر طائرة تحلق فوق مهبط الطائرات بسرعة 275 ميلاً في الساعة على برج المراقبة بسرعة أقل 0.5 ميل عندما يكون الوقت $t = 0$ من الساعات. (مثال 5)



a. أوجد المسافة d بين الطائرة وبرج المراقبة في صورة دالة تُمثّل المسافة الأفقية h من برج المراقبة وحتى الطائرة.

$d(h) = \sqrt{h^2 + 0.25}$

b. أوجد h في صورة دالة زمنية t.

$h(t) = 275t$

c. أوجد $d \circ h$. ما الذي تُمثّله هذه الدالة؟

d. إذا واصلت الطائرة في التحليق على المسافة نفسها من الأرض، فكم ستبعد الطائرة من برج المراقبة بعد مضي 10 دقائق؟

45.8 ميل

أوجد الدالتين f وg بحيث تكون $h(x) = [f \circ g](x)$. لا توجد دالة يمكن اعتبارها دالة محايدة $f(x) = x$.

43-. انظر الهامش.

43. $h(x) = \sqrt{x-1} - \frac{4}{x}$

44. $h(x) = \sqrt{2x+6} + \frac{6}{x}$

45. $h(x) = \frac{8}{x^2+2} + 5|x|$

46. $h(x) = \sqrt{-7x} + 9x$

47. $h(x) = \frac{x}{2x-1} + \sqrt{\frac{4}{x}}$

48. $h(x) = \frac{x^2-4}{x} + \frac{3x-5}{5x}$

استخدم المعلومات المعطاة لإيجاد $f(0.5), f(-6), f(x+1)$. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

49–52. انظر الهامش.

49. $f(x) - g(x) = x^2 + x - 6, g(x) = x + 4$

50. $f(x) + g(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{3}, g(x) = 2x$

51. $g(x) - f(x) + \frac{3}{5} = 9x^2 + 4x, g(x) = \frac{x}{10}$

52. $g(x) = f(x) - 18x^2 + \frac{\sqrt{2}}{x}, g(x) = \sqrt{1-x}$

53–56. انظر الوحدة 1 ملحق الإجابات.

أوجد $[f \circ g \circ h](x)$.

53. $f(x) = x + 8$
$g(x) = x^2 - 6$
$h(x) = \sqrt{x} + 3$

54. $f(x) = x^2 - 2$
$g(x) = 5x + 12$
$h(x) = \sqrt{x} - 4$

55. $f(x) = \sqrt{x+5}$
$g(x) = x^2 - 3$
$h(x) = \frac{1}{x}$

56. $f(x) = \frac{3}{x}$
$g(x) = x^2 - 4x + 1$
$h(x) = x + 2$

57. بما أن $f(x) = x + 2$، فأوجد $g(x)$ بحيث:

a. $(f+g)(x) = x^2 + x + 6$ **$g(x) = x^2 + 4$**

b. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{4}$ **$g(x) = 4x + 8$**

58. بما أن $f(x) = \sqrt{4x}$، فأوجد $g(x)$ بحيث:

a. $[f \circ g](x) = |6x|$ **$g(x) = 9x^2$**

b. $[g \circ f](x) = 200x + 25$ **$g(x) = 50x^2 + 25$**

59. بما أن $f(x) = 4x^2$، فأوجد $g(x)$ بحيث:

a. $(f \cdot g)(x) = x$ **$g(x) = \frac{1}{4x}$**

b. $(f \cdot g)(x) = \frac{1}{8}x^{\frac{7}{3}}$ **$g(x) = \frac{1}{32}x^{\frac{1}{3}}$**

60 a–b. انظر الهامش.

60. **الفائدة** حساب استثماري يجني فائدة مركبة كل ثلاثة شهور. إذا استثمر عدد x من الدراهم في حساب ما، فسيكون الاستثمار $I(x)$ بعد مضي ثلاثة شهور عبارة عن الاستثمار الابتدائي بالإضافة إلى الفائدة المستحقة أو $I(x) = 1.016x$.

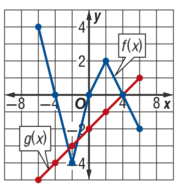
a. أوجد $[I \circ I](x), [I \circ I \circ I](x)$ $[I \circ I \circ I \circ I](x)$.,

ما الذي تمثله التركيبات؟

c. كم تبلغ النسبة المئوية للعائد السنوي على الحساب؟

6.6% تقريبا

استخدم الرسوم البيانية لـ $f(x)$ $g(x)$, لإيجاد قيمة كل دالة.



61. $(f+g)(2)$ **1**

62. $(f-g)(-6)$ **9**

63. $(f \cdot g)(4)$ **0**

64. $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$ **$\frac{4}{3}$**

65. $[f \circ g](-4)$ **0**

66. $[g \circ f](6)$ **−3**

67 a, d. انظر الهامش.

67. **كيمياء** يمكن تمثيل متوسط سرعة $v(m)$ جزيئات الغاز عند 30°C درجة مئوية بوحدة المتر في الثانية بواسطة $v(m) = \sqrt{\frac{(24.9435)(303)}{m}}$, حيث يُمثّل m كتلة الغاز بوحدة الكيلوجرام لكل مول.

a. هل توجد أي قيود على مجال الدالة؟ وضح دلالتها.

b. أوجد متوسط سرعة 145 كيلوجرامًا لكل مول من جزيئات الغاز عند 30 درجة مئوية. **7.22 م/ث تقريبًا**

c. كيف سيتغير متوسط السرعة عندما تزيد كتلة الغاز المولية؟

d. حلّل الدالة إلى دالتين منفصلتين. **ستنخفض السرعة.**

68–71. انظر الهامش.

أوجد الدوال f وg وh بحيث تكون $a(x) = [f \circ g \circ h](x)$.

68. $a(x) = (\sqrt{x-7} + 4)^2$

69. $a(x) = \sqrt{(x-5)^2 + 8}$

70. $a(x) = \frac{3}{(x-3)^2 + 4}$

71. $a(x) = \frac{4}{(\sqrt{x}+3)^2 + 1}$

نصائح للمعلمين الجدد

الصيغ في التمرين 42، ذكّر الطلاب بأنه ينبغي لهم استخدام نظرية فيثاغورس للجزء a و صيغة المسافة $d = rt$ للجزء b.

إجابات إضافية

41a. $h[f(x)]$؛ تم العثور على المكافأة بعد طرح 300.000 من إجمالي المبيعات.

42c. $[d \circ h](t) = \sqrt{75{,}625t^2 + 0.25}$؛ $d \circ h$ تمثل مسافة السطح من برج المراقبة كتابع وقت.

43-48. الإجابات النموذجية المعطاة

43. $f(x) = x - \frac{4}{x^2+1}$; $g(x) = \sqrt{x-1}$

44. $f(x) = x + \frac{12}{x^2-6}$, $g(x) = \sqrt{2x+6}$

45. $f(x) = \frac{8}{x+2} + 5\sqrt{x}$; $g(x) = x^2$

46. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{9x}{7}$; $g(x) = -7x$

47. $f(x) = \frac{x-4}{2x-9} + \sqrt{\frac{4}{x-4}}$; $g(x) = x + 4$

48. $f(x) = \frac{x^2-4x}{x-2} + \frac{3x-11}{5x-10}$; $g(x) = x + 2$

49. $f(0.5) = -0.75$, $f(-6) = 22$, $f(x+1) = x^2 + 4x + 1$

50. $f(0.5) = 8\frac{2}{3}$, $f(-6) = 11\frac{5}{9}$, $f(x+1) = \frac{2}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x+1} - 2x - \frac{7}{3}$

51. $f(0.5) = -3.6$, $f(-6) = -300$, $f(x+1) = -9x^2 - 22x + \frac{x+1}{10} - \frac{62}{5}$

52. $f(0.5) \approx 2.4$, $f(-6) \approx 650.9$, $f(x+1) = \sqrt{-x} + 18x^2 + 36x + 18 - \frac{\sqrt{2}}{x+1}$

60a. $[I \circ I](x) \approx 1.0323x$, $[I \circ I \circ I](x) \approx 1.0488x$, $[I \circ I \circ I \circ I](x) \approx 1.0656x$

60b. التراكيب تمثل الفائدة المركبة لمدة 6 أشهر و9 أشهر وعام واحد.

67a. $\{m \mid m > 0, m \in \mathbb{R}\}$؛ لا يُمكن للكتلة المولية للغاز أن تكون سالبة أو صفر.

BL OL **Differentiated**Instruction

المتعلمون الذاتيون اطلب من الطلاب استخدام المكتبة أو الإنترنت للعثور على تطبيقات لاستخدام العمليات والتوابع وتركيب التوابع. وبعد قيامهم بتحديد الأمثلة، ينبغي لهم تطوير الأمثلة الواقعية لديهم. ينبغي على كل طالب تطوير مثالاً باستخدام عملية ومثالاً لتابع مركب.

إجابات إضافية

67d. إجابة نموذجية:

$v(m) = f[g(x)]$;
$f(m) = \sqrt{m}$;
$g(m) = \frac{(303)(24.9435)}{m}$

71-68. الإجابات النموذجية المعطاة

68. $f(x) = x^2$; $g(x) = \sqrt{x} + 4$; $h(x) = x - 7$

69. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x8 + {}^2$; $h(x) = x - 5$

70. $f(x) = \frac{3}{x}$; $g(x) = x4 + {}^2$; $h(x) = x - 3$

71. $f(x) = \frac{4}{x}$; $g(x) = x1 + {}^2$; $h(x) = \sqrt{x} + 3$

72–77. انظر ملحق الإجابات للفصل 1.

في كل زوج من الدوال، أوجد $f \circ g$ **و** $g \circ f$.

72. $f(x) = x^2 - 6x + 5$, $g(x) = \sqrt{x+4} + 3$

73. $f(x) = x^2 + 8x - 3$, $g(x) = \sqrt{x+19} - 4$

74. $f(x) = \sqrt{x+6}$, $g(x) = \sqrt{16 + x^2}$

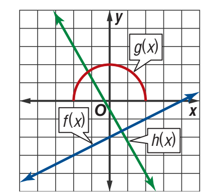
75. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

76. $f(x) = -\frac{8}{5-4x}$, $g(x) = \frac{2}{3+x}$

77. $f(x) = \frac{6}{2x+1}$, $g(x) = \frac{4}{4-x}$

78–81. انظر ملحق الإجابات للفصل 1.

ارسم كلاً مما يلي بيانيًا.



78. $(f+h)(x)$
79. $(h-f)(x)$
80. $(f+g)(x)$
81. $(h+g)(x)$

82. **تمثيلات متعددة** في هذه المسألة. ستتحقق من معكوسات الدوال.

a. **من ناحية الجبر** أوجد تركيب f مع g و g مع f لكل زوجين من الدوال.

For each function, $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$.

$f(x)$	$g(x)$
$x+3$	$x-3$
$4x$	$\frac{x}{4}$
x^3	$\sqrt[3]{x}$

b–e. انظر ملحق الإجابات للفصل 1.

b. **لفظي** صف العلاقة بين تركيب كل زوجين من الدوال.

c. **بياني** ارسم كل زوج من الدوال بيانيًا على المستوى الإحداثي. ارسم خط الانعكاس بيانيًا عن طريق إيجاد نقطة المنتصف على القطعة المستقيمة الواصلة بين النقاط المتناظرة.

d. **لفظي** أنشئ فرضية عن خط الانعكاس الموجود بين الدوال.

e. **تحليلي** هل تركيبات $[f \circ g](x)$ و$[g \circ f](x)$ متكافئة مع الدالة الأصلية؟

f. **تحليليًا** أوجد $g(x)$ لكل $f(x)$ بحيث $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$.

i. $f(x) = x - 6$ — $g(x) = x + 6$

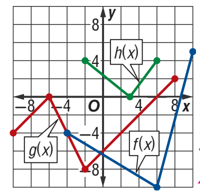
ii. $f(x) = \frac{x}{3}$ — $g(x) = 3x$

iii. $f(x) = x^5$ — $g(x) = \sqrt[5]{x}$

iv. $f(x) = 2x - 3$ — $g(x) = \frac{x+3}{2}$

v. $f(x) = x^3 + 1$ — $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$

حدد مجال كل دالة مركبة.



83. $[f \circ g](x)$ — $\{x \mid -10 \le x \le -4$ أو $2 \le x \le 8, x \in \mathbb{R}\}$

84. $[g \circ f](x)$ — $\{x \mid -4 \le x \le 10, x \in \mathbb{R}\}$

85. $[h \circ f](x)$ — $\{x \mid 8 \le x \le 10, x \in \mathbb{R}\}$

86. $[h \circ g](x)$ — $\{x \mid -8 \le x \le -5$ أو $4 \le x \le 8, x \in \mathbb{R}\}$

مسائل التفكير المرتب عالي المستوى تحتاج مهارات ذهنية مرتبة بشكل أكبر

الاستدلال المنطقي حدد هل $[f \circ g](x)$ **زوجية أم فردية أم غير ذلك أو لا تتوفر معلومات كافية لكل مما يلي.**

87. f وg دالتان فرديتان. **فردي**

88. f وg دالتان زوجيتان. **زوجي**

89. f دالة زوجية وg دالة فردية. **زوجي**

90. f دالة فردية وg دالة زوجية. **زوجي**

تحدٍ أوجد الدالة f **مع اعتبار أن** $f(x) = x$ **بحيث يكون ما يلي صحيحًا.**

91. $[f \circ f](x) = x$ — **الإجابة النموذجية:** $f(x) = \frac{1}{x}, x \ne 0$

92. $[f \circ f \circ f](x) = f(x)$ — **عينة إجابة:** $f(x) = \frac{1}{x}$

93. **كتابات في الرياضيات** اشرح كيف يمكن أن تضع $f(x)$ قيودًا على المجال عندما لا تتمكن $[f \circ g](x)$ من ذلك. قدّم مثالاً لتبرير استدلالك. **انظر ملحق الإجابات للفصل 1.**

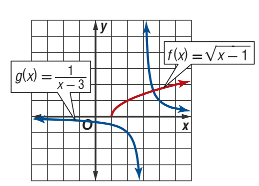
94. **الاستدلال** حدد هل العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. اشرح استدلالك.

إذا كانت f دالة جذر تربيعي وكانت g دالة من الدرجة الثانية، فإذن تكون $f \circ g$ دائمًا دالة خطية. **انظر ملحق الإجابات للفصل 1.**

95. **تحدي** حدد مجال $[f \circ g \circ h](x)$ عندما $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $g(x) = \sqrt{x+1}$, and $h(x) = \frac{4}{x}$.

$(-\infty, -4] \cup \left(0, \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$

96. **كتابات في الرياضيات** صف الكيفية التي ستجد بها مجال of $[f \circ g](x)$. **انظر ملحق الإجابات للفصل 1.**



97. **كتابات في الرياضيات** اشرح سبب أهمية الترتيب عند إيجاد تركيب دالتين.

المراجعة الحلزونية

.98 المعرفة المالية تُعرض تكلفة العمل نظير تقديم صيانة للسيارات في مركز B & B Automotive في الإعلان. (الدرس 5–1)

.a مثّل الدالة التي تصف التكلفة نظير عدد x من ساعات العمل بيانيًا. **.a–b انظر الهامش.**

.b مثّل الدالة التي من شأنها أن تعرض **25 $** في هيئة رسوم إضافية إذا قررت التزويد بالزيت وفحص السوائل كذلك.

.c كم ستكون تكلفة صيانة السيارة التي تتطلب **3** ساعات و**45** دقيقة من العمل إذا طلب صاحبها تغيير الزيت وفحص السوائل؟ **225 $**

قرّب لأقرب جزء من المائة القيمة النسبية أو القصوى لكل دالة.
حدد القيم على المحور x حيث تقع. (الدرس 4–1) **.99–101 انظرالوحدة 1 ملحق الإجابات للرسوم البيانية.**

.99 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$ **الأقصى النسبي: (0, 4)؛ الأدنى النسبي: (1, 3)**

.100 $g(x) = -x^3 + 5x - 3$ **القيمة العظمى النسبية: (1.29, 1.30)؛ القيمة الصغرى النسبية: (−1.29, −7.30)**

.101 $f(x) = x^4 + x^3 - 2$ **القيمة الصغرى المطلقة: (−0.75, −2.11)**

قرّب الأصفار الحقيقية في كل دالة لفترة معينة. (الدرس 3–1)

.102 $g(x) = 2x^5 - 2x^4 - 4x^2 - 1; [-1, 3]$ **1.73**

.103 $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 4}; [-3, 3]$ **−1.73, 1.73**

.104 $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 3x}; [1, 5]$ **2.41**

.105 الرياضات يوضح الجدول أدناه الضربة التي وصلت لخط النهاية وإجمالي عدد الضربات الأخرى في الدوري الأمريكي للفترة 2008–2004. (الدرس 1–1)

العام	2004	2005	2006	2007	2008
HR	43	48	54	54	48
RBI	150	148	137	156	146

المصدر: World Almanac

.a أنشئ رسمًا بيانيًا للبيانات يتناول الضربات التي وصلت لخط النهاية على المحور الأفقي وعدد الضربات بالمضرب على المحور الرأسي. **انظر الهامش.**

.b حدد المجال والنطاق. **D: {43، 48, 54}, R: {137, 146, 148, 150, 156}**

.c هل يُمثل الرسم البياني الدالة؟ اشرح استدلالك. **لا؛ تقترن كل قيمة من القيمتين 48 و54 على المجال مع قيمتين مختلفتين على المدى.**

مراجعة المهارات للاختبارات القياسية

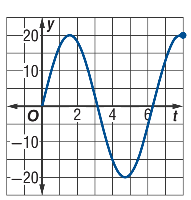
.106 SAT/ACT يحتوي مرطبان على كرات زجاجية حمراء وخضراء وزرقاء فقط. يعادل احتمال أن تلتقط عشوائيًا كرة زجاجية حمراء وكرة زجاجية خضراء ثلاث مرات، وخمس مرات لأن تلتقط كرة واحدة خضراء وأخرى زرقاء. كم عدد الكرات الزجاجية في المرطبان؟ **D**

A 39   **C** 41   **E** 63
B 40   **D** 42

.107 إذا كان $g(x) = x^2 + 9x + 21$ و $h(x) = 2(x - 5)^2$. إذن فإن $h[g(x)] =$ **G**

F $x^4 + 18x^3 + 113x^2 + 288x + 256$
G $2x^4 + 36x^3 + 226x^2 + 576x + 512$
H $3x^4 + 54x^3 + 339x^2 + 864x + 768$
J $4x^4 + 72x^3 + 452x^2 + 1152x + 1024$

.108 إجابة مفتوحة يظهر التغيير في درجة حرارة إحدى المواد بالدرجات المئوية في صورة دالة زمنية عندما يكون $0 \le t \le 8$ في الرسم البياني. **انظر ملحق الإجابات للفصل 1.**



.a يُمثل هذا الرسم البياني دالة. اشرح السبب.

.b حدد المجال والنطاق. **D = [0, 8]; R = [−20, 20]**

.c إذا كانت درجة الحرارة الابتدائية تبلغ 25 درجة مئوية، فكم تكون درجة الحرارة التقريبية للمادة عندما $t = 7$؟ **about 37.5°C**

.d حلّل الرسم البياني للتناظر والأصفار. حدد هل الدالة زوجية أم فردية أو غير ذلك. **انظر ملحق الإجابات للفصل 1.**

.e هل الدالة متصلة عند $t = 2$؟ اشرح ذلك. **انظر ملحق الإجابات للفصل 1.**

.f حدد فترات تصاعد الدالة أو تنازلها. **تصاعدية عند (0, 1.5) و(4.75, 8)؛ تنازلية عند (1.5 ،4.75)**

.g احسب متوسط معدل التغير للفترة [2, 5]. **12.3− تقريبًا**

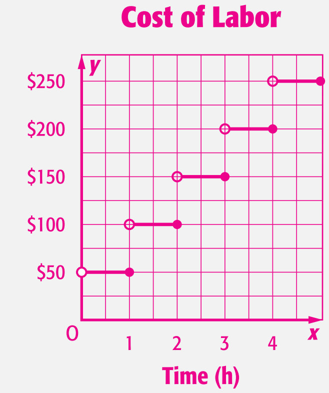
.h ما أهمية إجاباتك للأجزاء f وg في سياق الوضع؟ **انظر ملحق الإجابات للفصل 1.**

4 قيّم

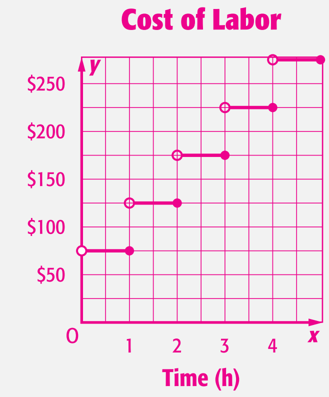
أخبار الأمس اطلب من الطلاب كتابة ما تعلموه في الدرس 1–5 حول التوابع الرئيسية والتحويلات وكيف ساعدتهم المعلومات مع العمليات والتوابع.

إجابات إضافية

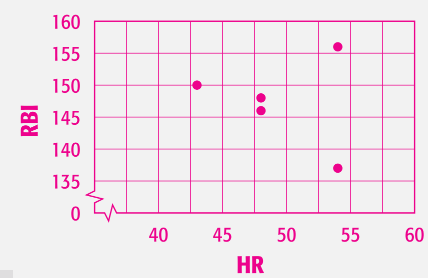
.98a



.98b



.105a



التعليم المتمايز BL

الملحق اطلب من الطلاب استخدام تابع واحد لإيجاد تركيب التابع به ذاته. هذا يُطلق عليه التكرار. مع وجود تابع $f(x)$، تكون القيمة الأوليّة x_0، $f(x_0) = x_1$ هي التكرار الأول، $f[f(x_0)] = f(x_1) = x_2$ هي التكرار الثاني وهكذا. اطلب من كل طالب العثور على التكرار الثالث لدالته أو دالتها.

G12 GEN TE CH01.indb 64 8/22/2016 4:30:48 PM

1 تركيز

محاذاة رأسية

قبل الدرس 7–1 ايجاد مجموعة التابعين.

الدرس 7–1 استخدام رسومات الدوال لتحديد إذا ما كان لديك دوال عكسية.
ايجاد الدوال العكسية جبريًا وبالرسم.

بعد الدرس 7–1 تحليل رسومات الدوال متعددة الحدود والمنطقية.

2 علّم

ما قبل القراءة/ما قبل الكتابة

دفتر الدراسة ص. 15

اطلب من الطلاب استكمال قسم ماذا ستتعلم في دفتر الدراسة.

أسئلة موسعة

اجعل الطلاب يقرأون جزء **لماذا؟** من الدرس. اطلب من الطلاب التفكير حول العلاقات وانعكساتها.

أسأل:

- ما هو تابع مساحة المربع؟ $A(s) = s^2$
- ما هي مساحة المربع عندما يكون جانب المربع بقياس 5؟ 25

(يتبع في الصفحة التالية)

الدرس 7–1 العلاقات العكسية والدوال

:: قبل ذلك

- تناولت بالدراسة تركيب الدالتين. (الدرس 6–1)

:: الآن

1 استخدم اختبار المستقيم الأفقي لتحديد الدوال العكسية.

2 أوجد الدوال العكسية من خلال الجبر ومن خلال الرسم البياني.

:: السبب

- يبيع باند بوسترز في المدرسة الثانوية التي تنتظم بها هناء تذاكر اليانصيب. يربط الجدول أ بين التكلفة بالدراهم وعدد التذاكر التي تم شراؤها. ويربط الجدول ب بين عدد التذاكر التي يمكن شراؤها وعدد الدراهم المدفوعة. عن طريق التبادل بين المدخلات والمخرجات من الجدول أ، تحصل هناء على الجدول ب.

مفردات جديدة

علاقة عكسية inverse relation
دالة عكسية inverse function
أحادية one–to–one

الجدول A

تذاكر	1	2	3	4	6
التكلفة (درهم إماراتي)	2	4	6	8	10

الجدول B

المال المدفوع ((درهم إماراتي)	2	4	6	8	10
تذاكر	1	2	3	4	6

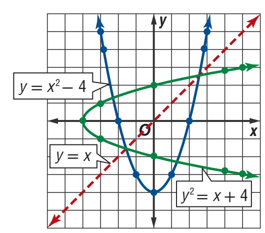
1 الدوال العكسية

العلاقة الموضحة في الجدول A عبارة عن *علاقة عكسية* للعلاقة الموضحة في الجدول B. توجد **العلاقات العكسية** إذا كانت علاقة واحدة تتضمن $(b، a)$ حينما تتضمن العلاقة الأخرى $(a، b)$. عند التعبير عن دالة في صورة معادلة، يمكن إيجاد العلاقة العكسية لها عن طريق التبادل بين المتغيرات المستقلة والتابعة. لاحظ ما يلي.

العلاقة

$y = x^2 - 4$

x	y
5	−3
0	−2
−3	−1
−4	0
−3	1
0	2
5	3



علاقة عكسية

$x = y^2 - 4$ أو $y^2 = x + 4$

x	y
−3	5
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0
3	5

لاحظ أن هذه العلاقات العكسية تمثل انعكاسات لبعضها البعض في الخط $y = x$. تكون هذه العلاقة حقيقية للرسومات البيانات المحددة لجميع العلاقات والعلاقات العكسية لها. نهتم أكثر *بالدوال* ذات العلاقات العكسية التي تمثل أيضًا دوالاً. إذا كانت العلاقة العكسية للدالة f تمثل أيضًا دالة، فيطلق عليها اسم **الدالة العكسية** f ويرمز لها بالرمز f^{-1}، وتقرأ على النحو التالي *f العكسية*.

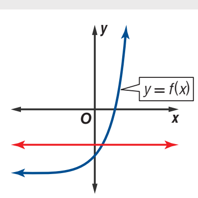
ليس لكل الدوال دوالاً عكسية. في الرسم البياني الموضح أعلاه، لاحظ أن العلاقة الأصلية تمثل دالة نظرًا لاجتيازها اختبار المستقيم الرأسي. لكن علاقتها العكسية أخفقت في تجاوز هذ الاختبار، لذلك لا تمثل العلاقة دالة. تقودنا العلاقة الانعكاسية بين الرسم البياني للدالة والعلاقة العكسية لها إلى إجراء الاختبار البياني التالي لتحديد هل العلاقة العكسية للدالة موجودة أم لا.

مفهوم أساسي اختبار الخط الأفقي

الشرح الدالة f لها دالة عكسية f^{-1} فقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع الرسم البياني للدالة في نقطة واحدة على الأكثر.

مثال نظرًا لعدم وجود مستقيم أفقي يتقاطع مع الرسم البياني للدالة f لأكثر من مرة، تحتفظ الدالة العكسية f^{-1} بوجودها.

استخدم النماذج



- اكتب تابع تمثل جانب المربع المُعطى بالمنطقة. ما هو طول جانب المربع إذا كانت مساحة المربع 100؟
$S = \sqrt{A}$ ؛ 10
- اكتب تابع المسافة إذا كان المعدل ثابت والوقت متغير. اكتب تابع الوقت إذا كانت المسافة والمعدل ثابت.
$d = f(t) = rt$ ؛ $t = f(d) = \frac{d}{r}$

1 الدوال العكسية

مثال 1 يعرض كيفية تحديد إذا كانت التابع العكسية للتابع موجودة بالرسم.

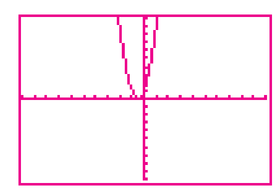
تقييم المفاهيم

استخدم تدريبات التمرين الموجه بعد كل مثال لتحديد فهم الطالب للمبادئ.

أمثلة إضافية

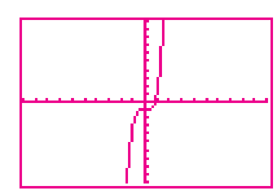
1 ارسم كل تابع باستخدام الآلة الحاسبة البيانية وقم بتطبيق الخط الأفقي لتحديد ما إذا كانت التابع العكسي موجوداً. اكتب **نعم** أو **لا**.

A. $y = 4x^2 + 4x + 1$



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1 لا

ب. $f(x) = x^5 + x^3 - 1$



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1 نعم

مثال 1 تطبيق اختبار الخط الأفقي

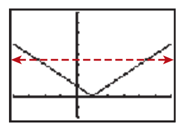
مثل بالرسم البياني كل دالة باستخدام حاسبة الرسم البياني وقم بتطبيق اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كانت تتواجد دالتها العكسية أم لا. اكتب نعم أو لا.

a. $f(x) = |x - 1|$

يوضح الرسم البياني للدالة $f(x)$ في الشكل 1.7.1 أنه من الممكن إيجاد المستقيم الأفقي الذي يتقاطع مع الرسم البياني للدالة $f(x)$ لأكثر من مرة. لذلك، يمكنك استنتاج أن f^{-1} غير موجودة.

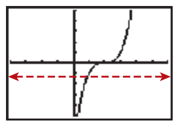
b. $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

يوضح الرسم البياني للدالة $g(x)$ في الشكل 1.7.2 أنه من غير الممكن إيجاد الخط الأفقي الذي يتقاطع مع الرسم البياني للدالة $g(x)$ في أكثر من نقطة واحدة. لذلك، يمكنك استنتاج أن g^{-1} موجودة.



[−4, 6] scl: 1 by [−2, 8] scl: 1

الشكل 1.7.1



[−4, 6] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

الشكل 1.7.2

انتبه!

اختبار الخط الأفقي عند استخدام حاسبة الرسوم البيانية، افحص عن كثب المواقع التي تُظهر أن الدالة قد تخفق في اجتياز اختبار الخط الأفقي. استخدم خاصيتي التكبير والتصغير، أو عدّل النافذة للتأكد.

تمارين موجهة

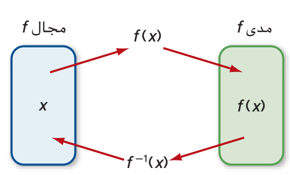
1A. $h(x) = \frac{4}{x}$ نعم

1B. $f(x) = x^2 + 5x - 7$ لا

2 إيجاد الدوال العكسية

إذا اجتازت إحدى الدوال اختبار المستقيم الأفقي، فعندئذٍ تعرف بأنها دالة **تقابلية**، لعدم تطابق أي قيمة على المحور x مع أكثر من قيمة واحدة على المحور y وعدم تطابق أي قيمة على المحور y – مع أكثر من قيمة واحدة على المحور x.

إذا كانت الدالة f تقابلية، فسيكون لها دالة عكسية f^{-1} بحيث يكون مجال f متساويًا مع مدى f^{-1}، ويكون مدى f متساويًا مع مجال f^{-1}.



قراءة الرياضيات

رمز الدالة العكسية ينبغي ألا يكون هناك خلط بين الرمز $f^{-1}(x)$ ورمز الدالة التبادلية $\frac{1}{f(x)}$. إذا كانت f دالة، فإنه يمكن تفسير الرمز f^{-1} فقط في صورة دالة f العكسية للدالة x.

لإيجاد دالة عكسية من خلال الجبر، اتبع الخطوات المذكورة أدناه.

مفهوم أساسي إيجاد دالة عكسية

الخطوة 1 حدد هل الدالة لها دالة عكسية عن طريق التحقق من معرفة إذا كانت تقابلية باستخدام اختبار الخط الأفقي.

الخطوة 2 في معادلة الدالة $f(x)$. استبدل $f(x)$ بـــ y ثم بدّل بين x وy.

الخطوة 3 أوجد حل y ثم استبدل y بـــ $f^{-1}(x)$ في المعادلة الجديدة.

الخطوة 4 وضح أي قيود موجودة على مجال f^{-1}. ثم وضح أن مجال f يتساوى مع مدى f^{-1} ونطاق f يتساوى مع مجال f^{-1}.

تُفيد الخطوة الأخيرة أن جزءًا واحدًا من الدالة التي تجدها من خلال الجبر قد يمثل الدالة العكسية f. لذلك، تأكد من تحليل مجال f عند إيجاد f^{-1}.

2 البحث عن الدوال العكسية

مثال 2 يعرض كيفية البحث عن التابع العكسية جبريًا. **مثال 3** يعرض كيفية التحقق من الدوال العكسية. **مثال 4** يعرض كيفية البحث عن التابع العكسية بالرسم. **مثال 5** يعرض كيفية استخدام الدوال العكسية.

أمثلة إضافية

2 حدد ما إذا كان f يحتوي على تابع عكسي. إذا كان يحتوي عليها ابحث عن التابع العكسي وحدد أي حدود في المجال.

A. f^{-1} $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$

يوجد في؛ $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2x-1}, x \neq \dfrac{1}{2}$

B. f^{-1} $f(x) = 2\sqrt{x-1}$

يوجد مع المجال $[0, \infty)$؛ $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2}{4} + 1$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

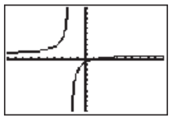
الآلة الحاسبة البيانية اطلب من الطلاب العمل في مجموعات ثنائية واستخدم مع كل زوج آلة حاسبة بيانية واحدة. يحدد أحدهما الدالة. يرسم الآخر التابع. إذا مرت التابع اختبار الخط الأفقي يُحدد الشريك الأول جبريًا التابع العكسية. يرسم الشريك الآخر العكسي للتأكد من أن العكسي والتابع متناظران بالنسبة خط $y = x$. يأخذ كل زوج دوره. يجب أن يجد الأزواج أربعة دوال على الأقل والتي تحتوي على تابع عكسي.

قراءة الرياضيات
دوال قابلة للعكس يُشار إلى الدالة التي يكون لها دالة عكسية بأنها قابلة للعكس.

مثال 2 أوجد الدوال العكسية من خلال المبين

حدد ما إذا كانت f لها دالة عكسية. إن كان لديها دالة عكسية، فأوجد الدالة العكسية وحدد أي قيود في مجالها.

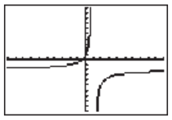
a. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

يجتاز الرسم البياني للدالة f الموضحة اختبار المستقيم الأفقي.
لذلك، تعد الدالة f دالة تقابلية ويكون لها دالة
عكسية. من الرسم البياني، يمكنك معرفة أن الدالة f لها مجال هو
$(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ ونطاق $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. الآن
أوجد f^{-1}.

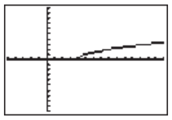
$f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$	دالة أصلية
$y = \dfrac{x-1}{x+2}$	استبدل $f(x)$ بـ y.
$x = \dfrac{y-1}{y+2}$	بدّل بين x وy.
$xy + 2x = y - 1$	اضرب كل طرف في $y + 2$. ثم استخدم خاصية التوزيع.
$xy - y = -2x - 1$	افصل بين فترات المحور y.
$y(x - 1) = -2x - 1$	خاصية التوزيع
$y = \dfrac{-2x-1}{x-1}$	أوجد y.
$f^{-1}(x) = \dfrac{-2x-1}{x-1}$	استبدل y بـ $f^{-1}(x)$. لاحظ أن $x \neq 1$.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

من الرسم البياني الموجود في الجانب الأيمن، يمكنك معرفة أن الدالة f^{-1} لها
مجال هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ ونطاق هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$.
مجال الدالة f ونطاقها متساويان مع نطاق الدالة f^{-1} ومجالها، على
التوالي. إذن، $f^{-1}(x) = \dfrac{-2x-1}{x-1}$ عندما تكون $x \neq 1$.

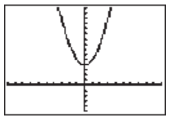
b. $f(x) = \sqrt{x-4}$



[−5, 15] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

يجتاز الرسم البياني للدالة f الموضحة اختبار الخط الأفقي.
لذلك، تعد الدالة f دالة تقابلية ويكون لها دالة
عكسية. من الرسم البياني، يمكنك معرفة أن الدالة f لها المجال
$[4, \infty)$ والنطاق $[0, \infty)$. الآن أوجد f^{-1}.

$f(x) = \sqrt{x-4}$	دالة أصلية
$y = \sqrt{x-4}$	استبدل $f(x)$ بـ y.
$x = \sqrt{y-4}$	بدّل بين x وy.
$x^2 = y - 4$	ربّع كل طرف.
$y = x^2 + 4$	أوجد y.
$f^{-1}(x) = x^2 + 4$	استبدل y بـ $f^{-1}(x)$.



[−10, 10] scl: 1 by [−5, 15] scl: 1

من الرسم البياني للدالة $y = x^2 + 4$ الموضحة، يمكنك معرفة أن العلاقة
العكسية لها المجال $(-\infty, \infty)$ والمدى $[4, \infty)$.
عن طريق تقييد مجال العلاقة العكسية للدالة $[0, \infty)$.
يكون مجال الدالة f ونطاقها متساويين مع مدى
الدالة f^{-1} ومداها، على التوالي. إذن، $f^{-1}(x) = x^2 + 4$، عندما يكون $x \geq 0$.

تمارين موجهة

2A. $f(x) = -16 + x^3$

2B. $f(x) = \dfrac{x+7}{x}$

2C. $f(x) = \sqrt{x^2 - 20}$

نعم؛ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+16}$ نعم؛ $f^{-1}(x) = -\dfrac{7}{1-x}, x \neq 1$

الدالة العكسية f^{-1} لها تأثير يتمثل في تعطيل عمل الدالة f. لهذا السبب، يمكن أيضًا تحديد الدوال العكسية من حيث تركيبها مع بعضها البعض.

مفهوم أساسي تركيبات الدوال العكسية

تكون الدالتان، f وg، عكسيتين فقط إذا كان
- $f[g(x)]=x$ لكل x في مجال g(x) و
- $g[f(x)]=x$ لكل x في مجال f(x).

نصيحة دراسية
الدوال العكسية تعني العبارة ثنائية الشرط "إذا وفقط إذا" في تعريف الدوال العكسية أنه إذا كانت الدالة g عكسية للدالة f، فعندئذٍ يكون من الصحيح أيضًا أن الدالة f عكسية للدالة g.

لاحظ أن تركيب الدالة مع دالة عكسية يمثل دائمًا دالة محايدة. يمكنك استخدام هذه الحقيقة للتحقق من أن الدالتين دالتان عكسيتان لبعضهما البعض.

مثال 3 تحقق من وظائف معكوس

وضح أن $f(x) = \frac{6}{x-4}$ و $g(x) = \frac{6}{x} + 4$ دالتان عكسيتان.

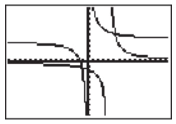
وضح أن $f[g(x)] = x$ وأن $g[f(x)] = x$.

$$f[g(x)] = f\left(\frac{6}{x} + 4\right) \qquad g[f(x)] = g\left(\frac{6}{x-4} + 4\right)$$

$$= \frac{6}{\frac{6}{x} + 4 - 4} \qquad = \frac{6}{\frac{6}{x-4}} + 4$$

$$= \frac{(6)}{\frac{6}{x}} \text{ أو } x \qquad = x - 4 + 4 \text{ أو } x$$

نظرًا لأن $f[g(x)] = g[f(x)] = x$، تعد $f(x)$ و$g(x)$ دالتين عكسيتين. يدعم الرسم البياني هذا لأن $f(x)$ و$g(x)$ تنعكسان على بعضهما البعض في الخط $y = x$.


[−15.16, 15.16] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

تمارين موجهة

وضح أن f وg دالتان عكسيتان.

3A. $f(x) = 18 - 3x,\ g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

3B. $f(x) = x^2 + 10,\ x \geq 0;\ g(x) = \sqrt{x - 10}$

3A.
$$f[g(x)] = 18 - 3\left(6 - \frac{x}{3}\right) = 18 - 18 + x = x;$$
$$g[f(x)] = 6 - \frac{18 - 3x}{3} = 6 - 6 + x = x$$

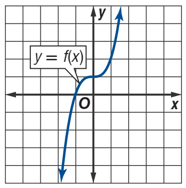
3B.
$$f[g(x)] = \left(\sqrt{x-10}\right)^2 + 10 = x - 10 + 10 = x;$$
$$g[f(x)] = \sqrt{x^2 + 10 - 10} = x$$

يصعب غالبًا إيجاد الدوال العكسية لمعظم الدوال التقابلية من خلال الجبر. ومع ذلك، يمكن رسم الدالة العكسية بيانيًا عن طريق عكس الرسم البياني للدالة الأصلية في الخط $y = x$.

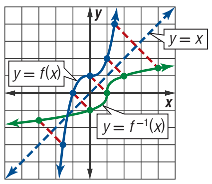
مثال 4 أوجد الدوال العكسية من خلال الرسم البياني

استخدم الرسم البياني للدالة f(x) في الشكل 1.7.3 لرسم $f^{-1}(x)$ بيانيًا.

ارسم الخط $y = x$ بيانيًا. حدد موقع عدد قليل من النقاط على الرسم البياني للدالة $f(x)$. اعكس هذه النقاط في $y = x$. ثم وصلها بمنحنى بسيط يعكس انحناء الدالة $f(x)$ في الخط $y = x$ (الشكل 1.7.4).



الشكل 1.7.3



الشكل 1.7.4

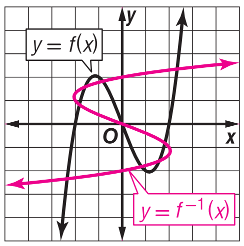
نصيحة دراسية
الدوال العكسية والقيم القصوى
يكون للدالة المتصلة دالة عكسية فقط إذا لم يكن لها أي قيمة عظمى أو قيمة صغرى محلية. إذا كانت الدالة لها بالفعل قيمة عظمى أو صغرى محلية، فعندئذٍ لن تجتاز اختبار الخط الأفقي، ولن تكون دالة تقابلية.

أمثلة إضافية

3 بين أن $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ و $g(x) = \frac{3}{2}(x - 2)$ هي دوال عكسية.

$$f[g(x)] = f\left(\frac{3}{2}(x-2)\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}(x-2) + 2\right) = x - 2 + 2 = x$$
$$g[f(x)] = g\left(\frac{2}{3}x + 2\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x + 2 - 2\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x\right) = x$$

4 استخدم رسم العلاقة أ لرسم الرسم البياني وانعكاسه.

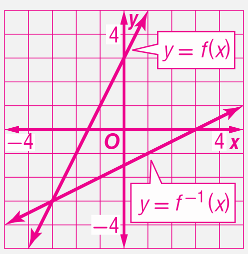


التركيز على المحتوى الرياضي

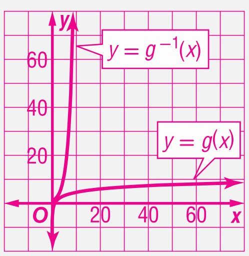
اختبار الخط الأفقي يعتبر رسم التابع العكسي هو إنعكاس التابع الأصلية في الخط $y = x$. بما أن اختبار الخط الرأسي يعرض علاقة التابع فيمكنها أيضًا أن تنعكس في الخط $y = x$. ينتج ذلك عن الخط الأفقي الذي يستخدم مع الرسم العكسي.

إجابات إضافية (تمارين موجهة)

4A.



4B.



G12 GEN TE CH01.indb 68 8/22/2016 4:31:04 PM

أمثلة إضافية

5 **التصنيع** تكون الأسعار الثابتة لتصميع نوع واحد من نظام مجسم 96.000$ مع متغير بقدر 80$ لكل وحدة. إجمالي التكلفة $f(x)$ لعدد مجسمات x التي يعطيها $f(x) = 96,000 + 80x$.

A. اشرح سبب وجود التابع العكسي $f^{-1}(x)$. ثم ابحث عن $f^{-1}(x)$. يجتاز رسم $f(x)$ اختبار الخط الأفقي. $f^{-1}(x) = \frac{x - 96,000}{80}$

B. ماذا تمثل $f^{-1}(x)$ و x التابع العكسي؟ في التابع العكسي، تمثل x إجمالي التكلفة و تمثل $f^{-1}(x)$ عدد المجسمات.

C. ما هي الحدود التي يجب وضعها في مجال $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ إذا تواجدت؟ اشرح. يحتوي مجال $f(x)$ على ارقام صحيحه غير سلبية. يكون مجال $f^{-1}(x)$ هو حاصل ضرب 80 الأكبر من 96,000.

D. ابحث عن عدد المجسمات إن كانت التكلفة الإجمالية $216,000. 1500 مجسم

المتابعة

اكتشف الطلاب الدوال والدوال العكسية.

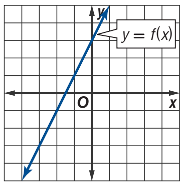
أسأل:

- كيف يمكن عكس التابع المستخدم للمساعدة في تفسير أحداث الحياة اليومية أو حل مشكلة؟ الإجابة النموذجية: العلاقات العكسية "استعادة" مع بعضها البعض. احصل على انعكاس التابع التي تسمح بنمذجة العلاقة باستخدام إما الكمية باعتبارها متغير مستقل.

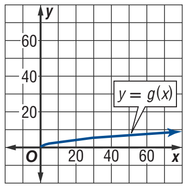
تمارين موجهة

استخدم الرسم البياني لكل دالة لرسم الدالة العكسية لها بيانيًا. 4A–B. انظر الهامش.

4A.

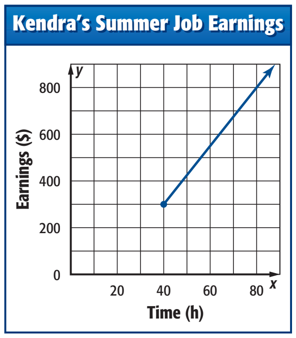


4B.



مثال 5 من عالم الواقع استخدام الدالة العكسية

الأرباح الصيفية **تجني فاطمة $8 راهم في الساعة وتعمل 40 ساعة على أقل تقدير في الأسبوع وتحصل على أجر إضافي يساوي 1.5 ضعف أجر ساعة العمل العادية نظير أي ساعة إضافية بعد مضي 40 ساعة. يمكن إيجاد إجمالي الأرباح التي تحققها f(x) في الأسبوع الذي عملت فيه عدد x من الساعات بواسطة $f(x) = 320 + 12(x - 40)$.**



a. اشرح سبب وجود الدالة العكسية $f^{-1}(x)$. ثم أوجد $f^{-1}(x)$.

يتم تبسيط الدالة لتصبح $f(x) = 320 + 12x - 480$ أو $12x - 160$. يجتاز الرسم البياني للدالة $f(x)$ اختبار الخط الأفقي. لذلك، تعد الدالة $f(x)$ دالة تقابلية ويكون لها دالة عكسية. أوجد $f^{-1}(x)$.

$f(x) = 12x - 160$	دالة أصلية
$y = 12x - 160$	استبدل f(x) بـ y.
$x = 12y - 160$	بدّل بين x وy.
$x + 160 = 12y$	اجمع 160 على كل طرف.
$y = \frac{x + 160}{12}$	أوجد y.
$f^{-1}(x) = \frac{x + 160}{12}$	استبدل y بـ $f^{-1}(x)$.

b. ما الذي تمثله $f^{-1}(x)$ وx في الدالة العكسية؟

في الدالة العكسية، يُمثّل x الأرباح التي حققتها فاطمة لأسبوع معيّن وتُمثّل $f^{-1}(x)$ عدد الساعات التي قضتها فاطمة في العمل في ذلك الأسبوع.

c. ما القيود، إن وجدت، التي ينبغي وضعها في مجال f(x) و $f^{-1}(x)$؟ اشرح ذلك.

تفترض الدالة $f(x)$ أن فاطمة تعمل 40 ساعة في الأسبوع على أقل تقدير. يوجد في الأسبوع 24 • 7 أو 168 ساعة. إذن مجال $f(x)$ هو [40, 168]. لأن $f(40) = 320$ و$f(168) = 1856$، يكون مدى $f(x)$ هو [320, 1856]. ولأن نطاق $f(x)$ يجب أن يساوي مجال $f^{-1}(x)$، يكون مجال $f^{-1}(x)$ هو [320, 1856].

d. أوجد عدد الساعات التي قضتها في العمل الأسبوع الماضي إذا كانت أرباحها تبلغ 380 درهمًا.

لأن $f^{-1}(380) = \frac{380 + 160}{12}$ أو 45. تكون فاطمة قد قضت في عملها 45 ساعة الأسبوع الماضي.

التمارين موجهة

5. **المدخرات** تبلغ نسبة الأجر الصافي لمريم 65% من إجمالي الراتب، وتضع ميزانية تساوي $600 درهم شهريًا لتغطية نفقات المعيشة. تذكر بأنها تستطيع ادخار 20% من المال المتبقي معها، إذن يتم إيجاد مدخراتها لمدة شهر واحد $f(x)$ لإجمالي الأجر نظير عدد x من الدراهم بواسطة $f(x) = 0.2(0.65x - 600)$.

A. اشرح سبب وجود الدالة العكسية $f^{-1}(x)$. ثم أوجد $f^{-1}(x)$.

B. ما الذي تمثله $f^{-1}(x)$ وx في الدالة العكسية؟

C. ما القيود، إن وجدت، التي ينبغي وضعها على مجالي $f(x)$ و$f^{-1}(x)$؟ اشرح ذلك.

D. حدد إجمالي الأجر الذي تتقاضاه مريم في الشهر الواحد إذا كانت مدخراتها لذلك الشهر تبلغ $120 درهمًا.

رابط عالم الواقع

في الفترة من عام 1999 إلى عام 2006، تأثر عدد من الأشخاص الذين تتراوح أعمارهم من 16 إلى 19 عامًا في الولايات المتحدة والذين لديهم وظائف صيفية بانخفاض تراوح من نسبة 48% إلى 37%

المصدر: مكتب إحصائيات العمل في الولايات المتحدة

John hill/Alamy

5A. توجد الدالة f^{-1} بسبب اجتياز f لاختبار الخط الأفقي وبالتالي تصبح تقابلية؛ $f^{-1}(x) = \frac{100x}{13} + \frac{12,000}{13}$.

5B. تُمثّل $f^{-1}(x)$ إجمالي الأجر الذي تتقاضاه مريم في الشهر، ويُمثّل x مدخراتها في كل شهر.

5C. $x \geq 923.08$

5D. $1846.15 درهمًا

OL AL DifferentiatedInstruction

متعلمون نشطون في شبكة الإحداثيات الكبيرة يرسم الطلاب دالة محايدة $f(x) = x$ باستخدام لون مميز أو طول السلسلة أو شيء مماثل. اجعلهم يرسمون النقاط في التابع $f(x) = x^3$ لقيم x −3، −2، −1، 0، 1، 2، و 3. اجعلهم يرسمون التابع العكسي عن طريق عكس النقاط في خط $y = x$. اجعلهم يكتبون جدول مع زوج إحداثيات لكلا الدوال. ثم يستخدمون الجداول لشرح أول خطوة لحساب تابع عكسي جبريًا عند تبديل y و x في المعادلة الحقيقية.

G12 GEN TE CH01.indb 69 8/22/2016 4:31:07 PM

3 تمرّن

تقييم المفاهيم

استخدم التدريبات 1–45 للتحقق من الفهم.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص تعيينات الطلاب.

احذر!

خطأ شائع قد يحاول الطلاب خطأً البحث عن $f^{-1}(x)$ عن طريق البحث عن $\frac{1}{f(x)}$. R ذكرهم أن f^{-1} هو رمز وليس متغير التيار 1−. بطريقة أخرى، f^{-1} هو انعكاس f، بينما $\frac{1}{f}$ هو متبادل f.

خطأ شائع في التدريبات 27–36 يساعد الطلاب عبر الاستبدال والتبسيط عن طريق تذكيرهم باستخدام الأقواس بشكل صحيح عند الاستبدال.

إجابات إضافية

16. نعم؛ $f^{-1}(x) = x^2 - 8$؛ $x \geq 0$

19. نعم؛ $f^{-1}(x) = \frac{4}{x+1}$؛ $x \neq -1$

20. نعم؛ $g^{-1}(x) = \frac{-6}{x-1}$؛ $x \neq 1$

21. نعم؛ $f^{-1}(x) = 8 - \frac{36}{x^2}$؛ $x > 0$

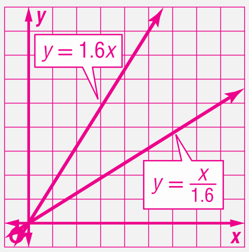
22. نعم؛ $g^{-1}(x) = -3 + \frac{49}{x^2}$؛ $x > 0$

23. نعم؛ $f^{-1}(x) = \frac{8x+3}{x-6}$؛ $x \neq 6$

24. yes; $h^{-1}(x) = \frac{5x+4}{3x-1}$؛ $x \neq \frac{1}{3}$

26a. $y = \frac{x}{1.6}$؛ $y =$ السرعة في ميل\ساعة، $x =$ سرعة في كم\سا

26b.



تمارين

مثل بالرسم البياني كل دالة باستخدام حاسبة الرسم البياني وقم بتطبيق اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كانت تتواجد دالتها العكسية أم لا. اكتب نعم أو لا. (مثال 1)

1. $f(x) = x^2 + 6x + 9$ لا
2. $f(x) = x^2 - 16x + 64$ لا
3. $f(x) = x^2 - 10x + 25$ لا
4. $f(x) = 3x - 8$ نعم
5. $f(x) = \sqrt{2x}$ نعم
6. $f(x) = 4$ لا
7. $f(x) = \sqrt{x+4}$ نعم
8. $f(x) = -4x^2 + 8$ لا
9. $f(x) = \frac{5}{x-6}$ نعم
10. $f(x) = \frac{8}{x+2}$ نعم
11. $f(x) = x^3 - 9$ نعم
12. $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ نعم

حدد ما إذا كانت كل دالة لها دالة عكسية. إن كان لديها دالة عكسية، فأوجد الدالة العكسية وحدد أي قيود في مجالها. (مثال 2) 16، 19–24. انظر الهامش.

13. $g(x) = -3x^4 + 6x^2 - x$ لا
14. $f(x) = 4x^8 + x^4$ لا
15. $h(x) = x^7 + 2x^3 - 10x^2$ لا
16. $f(x) = \sqrt{x+8}$
17. $f(x) = \sqrt{6 - x^2}$ لا
18. $f(x) = |x - 6|$ لا
19. $f(x) = \frac{4-x}{x}$
20. $g(x) = \frac{x-6}{x}$
21. $f(x) = \frac{6}{\sqrt{8-x}}$
22. $g(x) = \frac{7}{\sqrt{x+3}}$
23. $f(x) = \frac{6x+3}{x-8}$
24. $h(x) = \frac{x+4}{3x-5}$
25. $g(x) = |x+1| + |x-4|$ لا

26. **السرعة** سرعة الجسم بالكيلومترات في الساعة y تساوي $y = 1.6x$ حيث يُمثّل x سرعة الجسم بالأميال في الساعة. (مثال 2) a–b. انظر الهامش.

a. أوجد معادلة معكوس الدالة. ما الذي يمثله كل متغير؟

b. ارسم كل معادلة بيانيًا على المستوى الإحداثي نفسه.

وضح من خلال الجبر أن f وg دالتان عكسيتان. (مثال 3) 27–36. انظر ملحق الإجابات للفصل 1.

27. $f(x) = -6x + 3$، $g(x) = \frac{3-x}{6}$
28. $f(x) = 4x + 9$، $g(x) = \frac{x-9}{4}$
29. $f(x) = -3x^2 + 5, x \geq 0$، $g(x) = \sqrt{\frac{5-x}{3}}$
30. $f(x) = \frac{x^2}{4} + 8, x \geq 0$، $g(x) = \sqrt{4x - 32}$
31. $f(x) = 2x^3 - 6$، $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+6}{2}}$
32. $f(x) = (x+8)^{\frac{3}{2}}$، $g(x) = x^{\frac{2}{3}} - 8, x \geq 0$
33. $g(x) = \sqrt{x+8} - 4$، $f(x) = x^2 + 8x + 8, x \geq -4$
34. $g(x) = \sqrt{x-8} + 5$، $f(x) = x^2 - 10x + 33, x \geq 5$
35. $f(x) = \frac{x+4}{x}$، $g(x) = \frac{4}{x-1}$
36. $f(x) = \frac{x-6}{x+2}$، $g(x) = \frac{2x+6}{1-x}$

37. **الفيزياء** يمكن وصف الطاقة الحركية لجسم ما في حالة حركة بوحدة الجول بواسطة $f(x) = 0.5mx^2$. حيث يُمثّل m كتلة الجسم بالكيلوجرامات ويُمثّل x سرعة الجسم بالأمتار في الثانية. (مثال 3) a–c انظر ملحق الإجابات للفصل 1

a. أوجد معكوس الدالة. ما الذي يمثله كل متغير؟

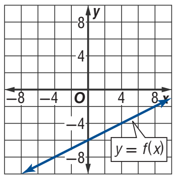
b. وضح أن $f(x)$ والدالة التي توصلت إليها في الجزء a عكسيتان.

c. ارسم $f(x)$ و$f^{-1}(x)$ على شاشة حاسبة الرسوم البيانية نفسها إذا كانت كتلة الجسم تساوي كيلوجرامًا واحدًا.

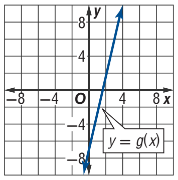
38–43. انظر ملحق الإجابات للفصل 1.

استخدم الرسم البياني لكل دالة لرسم الدالة العكسية لها بيانيًا. (مثال 4)

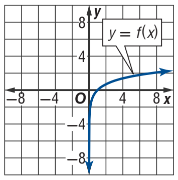
38.



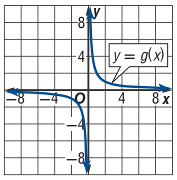
39.



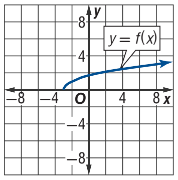
40.



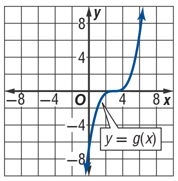
41.



42.



43.



44. **وظائف** يبيع خالد الأحذية في مركز تجاري بعد المدرسة. يبلغ راتبه الأسبوعي 140\$ رهمًا، ويجني 10% عمولة على كل زوج من الأحذية يبيعه. يبلغ إجمالي ربحه $f(x)$ في أسبوع باع فيه أحذية تصل قيمتها إلى x عدد من الدراهم $f(x) = 140 + 0.1x$. (مثال 5) أ–ج انظر ملحق الإجابات للفصل 1

a. اشرح سبب وجود الدالة العكسية $f^{-1}(x)$. ثم أوجد $f^{-1}(x)$.

b. ما الذي تمثله $f^{-1}(x)$ وx في الدالة العكسية؟

c. ما القيود، إن وجدت، التي ينبغي وضعها على مجالي $f(x)$ و$f^{-1}(x)$؟ اشرح ذلك.

d. أوجد إجمالي المبيعات التي حققها خالد في الأسبوع الماضي إذا كانت أرباحه في ذلك الأسبوع تبلغ 220 \$. **\$ 800**

AL BL OL Differentiated Homework Options

مستوى	مهمة	خيار ليومين	
AL قريب من المستوى	1-45، 83-85، 87-104	1-45 فردي، 101-104	2-42 زوجي، 83-85، 87-100
OL في المستوى	1-53 فردي، 54، 55-63 فردي، 79-، 85-، 87-104	1-45، 101-104	46-85، 87-100
BL ما بعد المستوى	46-104		

45. العملة يمكن وصف معدل سعر الصرف بين الدينار والدرهم الإماراتي في الشهور الأربعة الأخيرة بواسطة $f(x) = 0.66x$، حيث يمثل x قيمة العملة بالدينار. (مثال 5) **a–b. انظر الهامش.**

a. اشرح سبب وجود الدالة العكسية $f^{-1}(x)$. ثم أوجد $f^{-1}(x)$.

b. ما الذي تمثله $f^{-1}(x)$ وx في الدالة العكسية؟

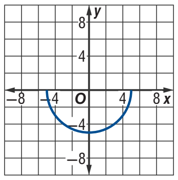
c. ما القيود، إن وجدت، التي ينبغي وضعها على مجالي $f(x)$ و$f^{-1}(x)$؟ اشرح ذلك.

d. كم تساوي قيمة 100 درهم إماراتي بالدينار؟ **151.52**

ج. $x \geq 0$؛ لا يمكنك تبديل المال السالب.

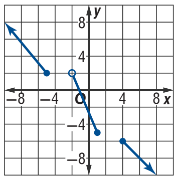
حدد ما إذا كانت f لها دالة عكسية.

.46



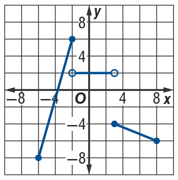
f^{-1} غير موجودة.

.47



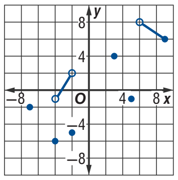
f^{-1} موجودة.

.48



f^{-1} غير موجودة.

.49



f^{-1} موجودة.

حدد إذا كانت f^{-1} موجودة. إذا كان الأمر كذلك، فأنشئ جدول للدالة f^{-1}.

50–53. انظر الهامش.

.50

x	−6	−4	−1	3	6	10
$f(x)$	−4	0	3	5	9	13

.51

x	−3	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	14	11	8	10	11	16

.52

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	8	16	54	27	16

.53

x	−10	−9	−8	−7	−6	−5
$f(x)$	8	7	6	5	4	3

54. درجة الحرارة تُستخدم الصيغة $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ لتحويل x درجة مئوية إلى درجة فهرنهايت. لتحويل x درجة فهرنهايت إلى كلفن، تُستخدم الصيغة $k(x) = \frac{5}{9}(x + 459.67)$. **a–c. انظر الهامش.**

a. أوجد f^{-1}. ما الذي تُمثّله هذه الدالة؟

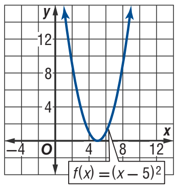
b. وضح أن f وf^{-1} دالتان عكسيتان. ارسم كل دالة على شاشة حاسبة الرسوم البيانية نفسها.

c. أوجد $[k \circ f](x)$. ما الذي تُمثّله هذه الدالة؟

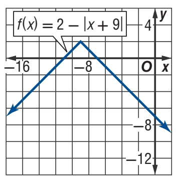
d. إذا كانت درجة الحرارة تساوي 60°C مئوية، فكم ستساوي درجة الحرارة بالكلفن؟

ضع قيودًا على مجال كل دالة بحيث تكون الدالة الناتجة تقابلية. ثم أوجد معكوس الدالة. 55–58. انظر الهامش.

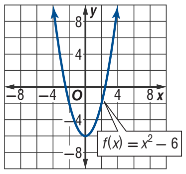
55



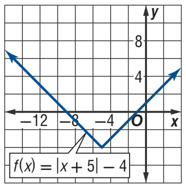
.56



.57



.58



59–62. انظر الهامش.

وضح مجال ونطاق f وf^{-1}. إذا كانت f^{-1} موجودة.

.59 $f(x) = \sqrt{x - 6}$

.60 $f(x) = x^2 + 9$

.61 $f(x) = \frac{3x + 1}{x - 4}$

.62 $f(x) = \frac{8x + 3}{2x - 6}$

63. البيئة بمجرد اعتباره من الفصائل المهددة بالانقراض، أدرج العقاب الأصلع في قائمة الحالات المهددة بالانقراض في عام 1995. يوضح الجدول عدد الأزواج التي تبني أعشاشًا كل عام.

العام	أزواج تبني أعشاشًا
1984	1757
1990	3035
1994	4449
1998	5748
2000	6471
2005	7066

a–b. انظر ملحق الإجابات للفصل 1.

a. استخدم الجدول لإدراج دالة خطية تربط عدد الأزواج التي تبني أعشاشًا بالعام. افترض أن 0 يُمثّل عام 1984.

b. أوجد معكوس الدالة التي أنشأتها في الجزء **أ**. ما الذي يُمثّله كل متغير؟

c. باستخدام الدالة العكسية، ما العام التقريبي الذي يُمثّل عدد 5094 من الأزواج التي تبني أعشاشًا؟ **1997**

64. الزهور تحتاج شيماء إلى شراء 75 جذعًا من الزهور لتزيين المأدبة. يمكنها الاختيار من بين أزهار الزنبق والكوبية، التي تبلغ تكلفة الجذع منها 5.00 دراهم و3.50 دراهم، على التوالي.

a–c انظر ملحق الإجابات للفصل 1

a. اكتب دالة لإجمالي تكلفة الزهور.

b. أوجد معكوس الدالة التي توضح التكلفة. ما الذي يمثله كل متغير؟

c. أوجد مجال الدالة التي توضح التكلفة ومعكوسها.

d. إذا كان إجمالي تكلفة الزهور 307.50 دراهم، فكم عدد زهور الزنبق التي اشترتها شيماء؟ **30**

احذر!

خطأ شائع في التدريبات 50–54 قد يجد الطلاب صعوبة لأنه لا يوجد رسم. يرسم الطلاب رسم f(x) يقومون بتطبيق اختبار الخط الأفقي.

إجابة إضافية

45a. نموذج الإجابة: يكون رسم التابع طولي حيث يمر باعتباره اختبار خط أفقي. لذلك، فإنها تابع واحد إلى واحد ويحتوي على انعكاس: $f^{-1}(x) = \frac{x}{0.66}$

45b. x يمثل قيمة العملة في الدولار الأمريكي و $f^{-1}(x)$ يمثل قيمة العملة في اليورو.

50. f^{-1} متواجدة.

x	−4	0	3	5	9	13
$f^{-1}(x)$	−6	−4	−1	3	6	10

51. f^{-1} غير موجودة.

52. f^{-1} غير موجودة.

53. f^{-1} متواجدة.

x	8	7	6	5	4	3
$f^{-1}(x)$	−10	−9	−8	−7	−6	−5

54a. $f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$؛ f^{-1} يمثل قاعدة مستخدمة لتحويل الدرجات من فهرنهايت إلى سيلزيوس.

54b. $f[f^{-1}(x)] = \frac{9}{5}\left[\frac{5}{9}(x - 32) + 32\right]$

$= \frac{9}{5}\left(\frac{5}{9}x - \frac{160}{9}\right) + 32$

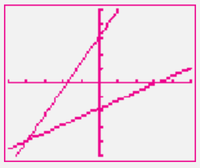
$= x - 32 + 32$

$= x$

$f^{-1}[f(x)] = \frac{5}{9}\left[\left(\frac{9}{5}x + 32\right) - 32\right]$

$= \frac{5}{9}\left(\frac{9}{5}x\right)$

$= x$



[−50, 50] scl: 10 by [−50, 50] scl: 10

54c. $k[f(x)] = x + 273.15$؛ يمثل قاعدة مستخدمة لتحويل الدرجات من سيلزيوس إلى كيلفن.

54d. 333.15 كيلفن

55. الإجابة النموذجية: $x \geq 5$؛ $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 5$

56. الإجابة النموذجية: $x \leq -9$؛ $f^{-1}(x) = x - 11$، $x \leq 2$

57. الإجابة النموذجية: $x \geq 0$، $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 6}$

58. الإجابة النموذجية: $x \geq -5$؛ $f^{-1}(x) = x - 1$، $x \geq -4$

59. f: $D = \{x \mid x \geq 6, x \in \mathbb{R}\}$, $R = \{y \mid y \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$
f^{-1}: $D = \{x \mid x \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$, $R = \{y \mid y \geq 6, x \in \mathbb{R}\}$

60. f^{-1} لا يوجد.

61. f: $D = \{x \mid x \neq 4, x \in \mathbb{R}\}$, $R = \{y \mid y \neq 3, x \in \mathbb{R}\}$
f^{-1}: $D = \{x \mid x \neq 3, x \in \mathbb{R}\}$, $R = \{y \mid y \neq 4, x \in \mathbb{R}\}$

62. f: $D = \{x \mid x \neq 3, x \in \mathbb{R}\}$, $R = \{y \mid y \neq 4, x \in \mathbb{R}\}$
f^{-1}: $D = \{x \mid x \neq 4, x \in \mathbb{R}\}$, $R = \{y \mid y \neq 3, x \in \mathbb{R}\}$

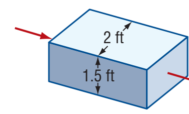
G12 GEN TE CH01.indb 71 8/22/2016 4:31:18 PM

أوجد معادلة معكوس كل دالة، إن وجد. ثم ارسم البيانات بيانيًا على المستوى الإحداثي نفسه. ضمِّن أي قيود على المجال.

.65 $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } -4 \geq x \\ -2x + 5 & \text{if } -4 < x \end{cases}$ **انظر ملحق الإجابات للفصل 1.**

.66 $f(x) = \begin{cases} -4x + 6 & \text{if } -5 \geq x \\ 2x - 8 & \text{if } -5 < x \end{cases}$ **$f^{-1}(x)$ غير موجودة.**

.67 **معدل التدفق** معدل تدفق الغاز هو حجم الغاز الذي يمر بمنطقة ما خلال فترة زمنية معينة. يمكن إيجاد سرعة v لتدفق الهواء من خلال إحدى الفتحات باستخدام $v(r) = \frac{r}{A}$ ، حيث يُمثّل r معدل التدفق بالقدم المكعب في الثانية ويُمثّل A مساحة المقطع العرضي لفتحة التهوية بوحدة القدم المربعة.



a. $v^{-1}(x) = 3x$؛ صيغة معدل تدفق الغاز

a. أوجد v^{-1} لفتحة التهوية الموضحة. ما الذي تُمثّله هذه الدالة؟

b. أوجد سرعة الهواء المتدفق من خلال فتحة التهوية بالقدم في الثانية إذا كان معدل التدفق يبلغ 15,000 قدم مكعب في الثانية. **5000 ft/s**

c. أوجد معدل تدفق الغاز من فتحة التهوية المستديرة التي يبلغ نصف قطرها 5 أقدام مع تدفق الغاز المتحرك بسرعة 1.8 قدم في الثانية. **$\approx 35.3\ ft^3/s$**

.68 **التواصل** تعرض شركة هواتف خلوية مخططات البيع على النحو الموضح. افترض وجود تخفيض يصل إلى 50 $ فقط بعد الحصول على خصم يقدّر بنسبة 10%.

a. اكتب دالة r توضح سعر الهاتف في صورة دالة السعر الأصلي فقط في حالة تطبيق تخفيض. **$r(x) = x - 50$**

b. اكتب دالة d توضح سعر الهاتف في صورة دالة السعر الأصلي فقط في حالة تطبيق خصم. **$d(x) = 0.9x$**

c. أوجد صيغة $T(x) = [r \circ d](x)$ في حالة تطبيق الخصم والتخفيض كليهما. **$T(x) = 0,9x - 50$**

d. أوجد T^{-1} واشرح ما الذي يُمثّله المعكوس. **انظر الهامش.**

e. إذا كان إجمالي تكلفة الهاتف بعد الخصم والتخفيض 49 $. فما السعر الأصلي للهاتف؟ **110 $**

استخدم $f(x) = 8x - 4$ و $g(x) = 2x + 6$ لإيجاد كل مما يلي.
.69–74. انظر ملحق الإجابات للفصل 1.

.69 $[f^{-1} \circ g^{-1}](x)$	.70 $[g^{-1} \circ f^{-1}](x)$
.71 $[f \circ g]^{-1}(x)$	.72 $[g \circ f]^{-1}(x)$
.73 $(f \cdot g)^{-1}(x)$	.74 $(f^{-1} \cdot g^{-1})(x)$

استخدم $f(x) = x^2 + 1$ مع المجال $[0, \infty)$ و $g(x) = \sqrt{x - 4}$ لإيجاد كل مما يلي. **.75، 77، 79. انظر الهامش.**

.75 $[f^{-1} \circ g^{-1}](x)$	.76 $[g^{-1} \circ f^{-1}](x)$ **$x + 3$ عندما $x \geq 1$**
.77 $[f \circ g]^{-1}(x)$	.76 $[g \circ f]^{-1}(x)$ **$\sqrt{x^2 + 3}$ عندما $x \geq 0$**
.79 $(f \cdot g^{-1})(x)$	.80 $(f^{-1} \cdot g)(x)$ **$\sqrt{x^2 - 5x + 4}$ عندما $x \geq 1$**

.81 **النسخ** تُكلف نسخ مروة $0.40 الدرهم لكل دقيقة أو جزء من الدقيقة لاستخدام جهاز المسح الضوئي المرفق بالكمبيوتر. بافتراض أنك تستخدم جهاز المسح الضوئي لعدد x دقيقة، حيث يمثل x أي عدد حقيقي أكبر من 0.

a. ارسم رسمًا بيانيًا للدالة، $C(x)$ التي توضح تكلفة استخدام جهاز المسح الضوئي لعدد x من الدقائق.

b. ما مجال $C(x)$ ونطاقها؟

c. ارسم رسمًا بيانيًا للدالة العكسية $C(x)$.

d. ما مجال الدالة العكسية ونطاقها؟

e. ما الموقف الواقعي الذي تمثله الدالة العكسية؟

a–e. انظر ملحق الإجابات للفصل 1.

.82 **تمثيلات متعددة** في هذه المسألة. ستتحقق من معكوسات الدوال الزوجية والفردية.

a. **بياني** ارسم رسومًا بيانية لثلاث دوال زوجية مختلفة. هل تجتاز الرسوم البيانية اختبار الخط الأفقي؟

b. **تحليلي** ما النمط الذي يمكن تمييزه بخصوص معكوسات الدوال الزوجية؟ أكد النمط أو ارفضه من خلال الجبر.

c. **بياني** ارسم رسومًا بيانية لثلاث دوال فردية مختلفة. هل تجتاز الرسوم البيانية اختبار الخط الأفقي؟

d. **تحليلي** ما النمط الذي يمكن تمييزه بخصوص معكوسات الدوال الفردية؟ أكد النمط أو ارفضه من خلال الجبر.

a–d. انظر ملحق الإجابات للفصل 1.

مسائل التفكير المرتب عالي المستوى
تحتاج مهارات ذهنية مرتبة بشكل أكبر

83 **الاستدلال** إذا كان للدالة f دالة عكسية وصفرية عند 6، فما الذي يمكنك تحديده بشأن الرسم البياني لـ f^{-1}؟
الإجابة النموذجية: $f^{-1}(x)$ لها نقطة تقاطع مع المحور y عند (0 ,6).

.84 **كتابات في الرياضيات** اشرح نوع القيد الموجود على المجال المطلوب لتحديد معكوس دالة من الدرجة الثانية وسبب الحاجة إلى وجود قيد. اذكر مثالًا.
انظر ملحق الإجابات للفصل 1.

.85 **الاستدلال** صواب أم خطأ. اشرح استدلالك.
يوجد لكل الدوال الخطية دوالًا عكسية.
انظر ملحق الإجابات للفصل 1.

.86 **تحدٍ** إذا كان $f(x) = x^3 - ax + 8$ و $f^{-1}(23) = 3$، فأوجد قيمة a. **4**

.87 **الاستدلال** هل يمكن أن تجتاز $f(x)$ اختبار المستقيم الافقي عندما $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$؟ اشرح ذلك.
انظر ملحق الإجابات للفصل 1.

.88 **الاستدلال** لماذا لا تُستخدم $\pm$ عند إيجاد الدالة العكسية لـ $f(x) = \sqrt{x + 4}$ **انظر ملحق الإجابات للفصل 1.**

.89 **كتابات في الرياضيات** اشرح كيف يمكن أن يكون معكوس f موجودًا. اذكر مثالاً يفيد بأن مجال f مقيدًا وليس للدالة f دالة عكسية عندما يكون المجال غير مقيد. **انظر ملحق الإجابات للفصل 1.**

إجابة إضافية

.68d $T^{-1}(x) = \frac{x + 50}{0.9}$ ؛ يمثل انعكاس السعر الأصلي للهاتف باعتباره تابع سعر الهاتف بعد التكرار والخصم.

.75 $\sqrt{x^2 + 3}$ for $x \geq 0$

.77 $x + 3$ for $x \geq 1$

.79 $x^4 + 5x^2 + 4$ لـ $x \geq 0$

مراجعة شاملة

في كل زوج من الدوال، أوجد $f \circ g$ و $g \circ f$. ثم وضِّح مجال كل دالة مركبة. (الدرس 6–1) **92–90. انظر الهامش.**

90. $f(x) = x^2 - 9$
$g(x) = x + 4$

91. $f(x) = \frac{1}{2}x - 7$
$g(x) = x + 6$

92. $f(x) = x - 4$
$g(x) = 3x^2$

استخدم الرسم البياني للدالة الأصلية المعطاة لوصف الرسم البياني لكل دالة ذات صلة. (الدرس 5–1) **95–93. انظر الهامش.**

93. $f(x) = x^2$
a. $g(x) = (0.2x)^2$
b. $h(x) = (x - 5)^2 - 2$
c. $m(x) = 3x^2 + 6$

94. $f(x) = x^3$
a. $g(x) = |x^3 + 3|$
b. $h(x) = -(2x)^3$
c. $tm(x) = 0.75(x + 1)^3$

95. $f(x) = |x|$
a. $g(x) = |2x|$
b. $h(x) = |x - 5|$
c. $m(x) = |3x| - 4$

96. الإعلان أجرت إحدى الصحف استطلاعًا حول الشركات التي تنفق مبلغ من المال سنويًا على الإعلانات التجارية المعروضة في التلفاز وقدّرت عدد الأشخاص الذين يتذكرون مشاهدة تلك الإعلانات التجارية كل أسبوع. تنفق إحدى الشركات المصنّعة للمشروبات الغازية مبلغ 40,1 $ درهم في العام وتقدّر أن حوالي 78,6 $ شخص يتذكرون إعلاناتها التجارية. فيما يخص بخدمة تسليم العبوات، تبلغ الميزانية 22.9 $ درهم مقابل 21,9 مليون شخص. تصل شركة الاتصالات إلى 88.9 مليون شخص من خلال إنفاق 154.9 مليون درهم. استخدم مصفوفة لتمثيل هذه البيانات. (الدرس 6–0) **انظر الهامش.**

أوجد حل كل نظام من أنظمة المعادلات التالية. (الدرس 5–0)

97. $x + 2y + 3z = 5$
$3x + 2y - 2z = -13$
$5x + 3y - z = -11$ **(1, −4, 4)**

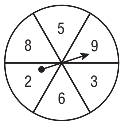
98. $7x + 5y + z = 0$
$-x + 3y + 2z = 16$
$x - 6y - z = -18$ **(−2, 2, 4)**

99. $x - 3z = 7$
$2x + y - 2z = 11$
$-x - 2y + 9z = 13$ **(10, −7, 1)**

100. البيسبول يضرب لاعب الكرة. بافتراض أن الكرة كانت على ارتفاع 3,5 أقدام من الأرض عندما ضرب الكرة مباشرة لأعلى بسرعة ابتدائية تبلغ 80 قدمًا في الثانية. تُمكّن الدالة $d(t) = 80t - 16t^2 + 3.5$ من معرفة ارتفاع الكرة عن الأرض بالقدم وذلك في صورة دالة زمنية t بالثواني. ما الوقت الذي استغرقه ماسك الكرة حتى حدد موقع الكرة والتقطها بعد ضربها؟ (الدرس 3–0) **5 توان تقريبًا**

مراجعة المهارات للاختبارات القياسية

101. SAT/ACT ما احتمالية وقوف المؤشر عند عدد زوجي أو عدد أكبر من 5؟ **د**



A $\frac{1}{6}$
B $\frac{1}{3}$
C $\frac{1}{2}$
D $\frac{2}{3}$
E $\frac{5}{6}$

102. مراجعة إذا كان كل من m وn عددين طبيعيين فرديين، فأي مما يلي يجب أن يكون صحيحًا؟ **ي**

I. $m^2 + n^2$ زوجية.
II. $m^2 + n^2$ تقبل القسمة على 4.
III. $(m + n)^2$ تقبل القسمة على 4.

F لا شيء
G I فقط
H 1 وII فقط
J 1 وIII فقط

103. أي مما يلي يعد معكوسًا للدالة $f(x) = \frac{3x - 5}{2}$ ؟ **أ**

A $g(x) = \frac{2x + 5}{3}$
B $g(x) = \frac{3x + 5}{2}$
C $g(x) = 2x + 5$
D $g(x) = \frac{2x - 5}{3}$

104. مراجعة قطار يقطع مسافة d ميلاً في t من الساعات ويصل إلى وجهته متأخرًا 3 ساعات. ما متوسط السرعة، بالأميال في الساعة، التي ينبغي على القطار التحرك بها للوصول في الوقت المحدد؟ **ح**

F $t - 3$
G $\frac{t - 3}{d}$
H $\frac{d}{t - 3}$
J $\frac{d}{t} - 3$

التعليم المتمايز BL

تمديد هل التابع $f(x) = [\![x]\!]$ يحتوي على انعكاس التابع؟ اشرح. لا لا يجتاز الرسم اختبار الخط الأفقي. لذلك، يحتوي على انعكاس العناصر في المجال المزدوج مع أكثر من عنصر في النطاق.

4 قوّم

ذكر المصطلح الرياضي اطلب من الطلاب لوصف كيفية تعريف ما إذا كانت التابع يحتوي على انعكاس. استخدم اختبار الخط الأفقي.

إجابة إضافية

90. $[f \circ g](x) = x^2 + 8x + 7$ f أو $\{x | x \in \mathbb{R}\}$, $[g \circ f](x) = x^2 - 5$ من أجل $\{x | x \in \mathbb{R}\}$

91. $[f \circ g](x) = \frac{1}{2}x - 4$ لـ $\{x | x \in \mathbb{R}\}$, $[g \circ f](x) = \frac{1}{2}x - 1$ لـ $\{x | x \in \mathbb{R}\}$

92. $[f \circ g](x) = 3x^2 - 4$ لـ $\{x | x \in \mathbb{R}\}$, $[g \circ f](x) = 3x^2 - 24x + 48$ من أجل $\{x | x \in \mathbb{R}\}$

93a. ممدود أفقيًا
93b. منقول 5 وحدات لليمين وأثنين أسفل
93c. ممدود رأسيًا، ومنقول ست وحدات لأعلى
94a. ثلاثة واحدات لأعلى وجزء من الرسم أسفل محور x المعكوس في محور x
94b. الضغط الافقي، معكوس في محور x
94c. منقول وحدة لليسار ومضغوطة رأسيًا
95a. مضغوط أفقيًا
95b. منقول خمس وحدات لليمين
95c. منقول أربعة واحدات أفقية مضغوطة لأسفل

96.

$$\begin{array}{l c} & \begin{array}{cc} \text{ميزانية (\$ ملايين)} & \text{عارضين (ملايين)} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{مشروب بارد} \\ \text{توصيل العبوة} \\ \text{اتصالات} \end{array} & \begin{bmatrix} 40.1 & 78.6 \\ 22.9 & 21.9 \\ 154.9 & 88.9 \end{bmatrix} \end{array}$$

G12 GEN TE CH01.indb 73 8/22/2016 4:31:30 PM

1 التركيز

الهدف إستخدام ألة حساب الرسم البياني و المعادلات الحدودية الى الرسم البياني المعكوس غلى الألة الحاسبة.

نصائح تدريسية

لمساعدة الطلاب على التفكير في المعادلات الحدودية، مراجعة مفهوم المعادلات الحدودية و بعدها إستكمال الأمثلة التالية. بفرض $y = t^3$ و $x = t$. إصنع مجسم مع ثلاث أعمدة الأولى لـــــ t، و الثانية x، و الثالثة y. اطلب من الطلاب أن يكتبوا عدة نقط عن $t =$

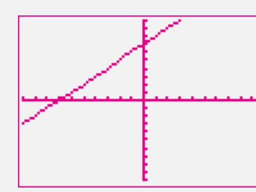
2 علّم

العمل في مجموعات تعاونية

وذلك بجعل كل فردين من الطلاب لديهم مهارة استخدام الألة الحاسبة البيانية مع فردين أخرين من الطلاب ليست لديهم هذه المهارة. ولأن الطلاب يعملون من خلال أمثلة، فاجعلهم يتبادلون فيما بينهم أدوار مشغل الحاسبة البيانية ومدرب الجاسبة البيانية.

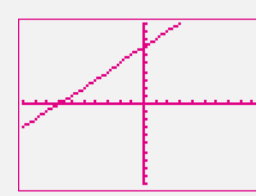
إجابات إضافية

2a.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

2b.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

معمل تكنولوجيا الرسم البياني

7–1 رسم الدوال العكسية باستخدام المعادلات الوسيطية

::الهدف

- استخدام آلة حاسبة خاصة بالرسومات البيانية ومعادلات وسيطية لرسم الدالة المعكوسة على الآلة الحاسبة.

مفردات جديدة

المعادلات الوسيطية (parametric equations)

المعادلات الوسيطية هي معادلات تعبر عن موقع جسم ما كدالة زمنية. القاعدة الأساسية للمعادلات الوسيطية هي تقديم متغير إضافي t، يسمى *المعامل*. على سبيل المثال، $y = x + 4$ يمكن التعبير عنها بمعادلات وسيطية باستخدام $x = t$ و $y = t + 4$.

النشاط 1 رسم بياني وسيطي

مثل بيانيًا $x = t, y = 0.1t^2 - 4$.

الخطوة 1 اضبط الوضعية. من MODE القائمة، اختر par وsimul. يسمح ذلك بتمثيل المعادلات في رسوم بيانية في نفس الوقت.

```
NORMAL  SCI  ENG
FLOAT  0123456789
RADIAN  DEGREE
FUNC  PAR  POL  SEQ
CONNECTED  DOT
SEQUENTIAL  SIMUL
REAL  a+bi  re^θi
FULL  HORIZ  G-T
SETCLOCK 10/27/08 2:09PM
```

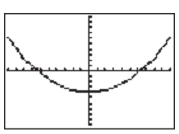
الخطوة 2 أدخل المعادلة الوسيطية. في الشكل الوسيطي، X,T,θ,n سنستخدم t بدلًا من x.

```
Plot1 Plot2 Plot3
\X1T ■T
 Y1T ■.1T²−4■
\X2T =
 Y2T =
\X3T =
 Y3T =
\X4T =
```

الخطوة 3 اضبط النافذة كما يظهر.

```
WINDOW
 Tmin=-10
 Tmax=10
 Tstep=1
 Xmin=-10
 Xmax=10
 Xscl=1
↓Ymin=-10
```

الخطوة 4 مثل المتباينات في رسوم بيانية. لاحظ أن الرسم البياني يشبه $y = 0.1x^2 - 4$ ولكن يتم تتبعه من $t = -10$ إلى $t = 10$.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [−10, 10]; $t$step: 1

نصيحة للدراسة
النافذة القياسية يمكنك استخدام zoomstandard لضبط النافذة في الوضع القياسي.

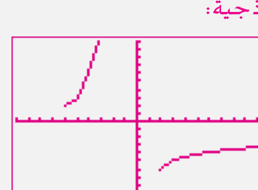
تمارين

1. **الاستدلال** قم بتمثيل المعادلات من خلال رسم بياني مستخدمًا Tstep = 10, 5 و0.5 و0.1. كيف يؤثر ذلك على طريقة عرض الرسم البياني؟
الإجابة النموذجية: مع انخفاض مستوى Tstep، يتخذ الرسم البياني شكل منحنى أكثر سلاسة.
2. في هذه المسألة ستدرس العلاقة بين x، وy، وt.
   a. قم بتمثيل $X_{1T} = t - 3, Y_{1T} = t + 4$ من خلال رسم بياني في نافذة العرض القياسية. **a–b. انظر الهامش.**
   b. استبدل المعادلات في القسم أ بـــ $X_{1T} = t, Y_{1T} = t + 7$ ومثلها من خلال رسم بياني.
   c. ما الذي تلاحظه في الرسمين البيانيين؟ **إنهما متشابهان.**
   d. **للاستدلال** ما النتائج التي تستخلصها عن العلاقة بين x، وy، وt؟ بمعنى آخر، كيف في اعتقادك تم تكوين المجموعة الثانية من المعادلات الوسيطية باستخدام المجموعة الأولى؟

2d. الإجابة النموذجية: تكونت المجموعة الثانية من المعادلات الوسيطية عن طريق التعويض عن t.

---

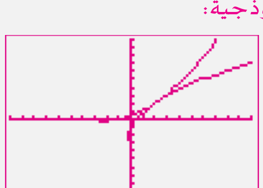
5. الإجابة النموذجية:



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [0, 10]; $t$step: 1

$D = \{t \mid t \geq 0\}$

6. الإجابة النموذجية:



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [−0.5, 10]; $t$step: 1

$D = \{t \mid t \geq -0.5\}$

G12 GEN TE CH01.indb 74 8/22/2016 4:31:40 PM

التدريب وذلك اجعل الطلاب يستكملون التمارين من 5–1، 8، و 11

3 تقويم

التقييم التكويني

استخدم التمارين 6، 7، 9، و 10 لمساعدة الطلاب في فهم المعادلات الحدودية.

من البداية الى الخلاصة

اعطِ الطلاب المجموعات التالية من المعادلات الحدودية ، واجعلهم يحددون النقطة من الزمن التي تصبح فيها قيمة y–أكبر من الأخرى.

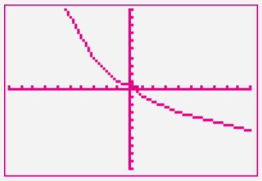
$y_1 = t^2$ ؛ $x_1 = t$

$y_2 = 2t + 2$ ؛ $x_2 = t$

حدد y_1 تعادل y_2 وحل لـــ t. الحل يكون $t = \sqrt{3} + 1$. وبالتالي لـ t في الفترة الفاصلة $(0، 1 + \sqrt{3})$، $y_1 < y_2$. من أجل t في الفترة الفاصلة $(\sqrt{3} + 1، \infty)$، $y_1 > y_2$. التغير في العلاقة بين القيمة y تحدث $t = \sqrt{3} + 1$.

إجابات إضافية

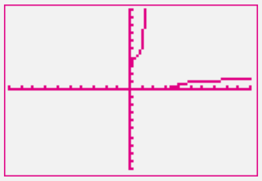
.7 الإجابة النموذجية



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [1, 10]; $t$step: 1

D = {t | $t \geq 1$}

.8



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [0, 10]; $t$step: 1

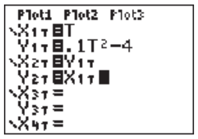
D: {t | $t \geq 0$}

أحد فوائد المعادلات الوسيطية هي القدرة على تمثيل الدوال العكسية في رسوم بيانية دون قياسها.

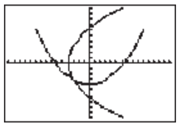
النشاط 2 مثل دالة عكسية في رسم بياني

مثل في رسم بياني الدالة العكسية لـــ $x = t, y = 0.1t^2 - 4$.

الخطوة 1 أدخل المعادلات المعطاة مثل X_{1T} وY_{1T}. لتمثيل الدالة العكسية في رسم بياني، اجعل $X_{2T} = Y_{1T}$ و $Y_{2T} = X_{1T}$. وهي تتواجد في القائمة VARS . اختر Y−Vars، وسيطي، X_{1T}.



الخطوة 2 مثل العلاقة والدالة العكسية في رسم بياني. يمكنك استخدام ZSquare لمعرفة التناظر بين الرسمين بصورة أوضح.



[−15, 15] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [−10, 10]; $t$step: 1

تمارين **الإجابة النموذجية: $(x، y)$ لأحد الرسومات البيانية مشابهة لـــ $(y, -x)$ للرسم الآخر.**

.3 **الاستدلال** ما الذي يجب أن يكون صحيحًا بشأن الزوج المرتب لكل رسم بياني في النشاط 2؟

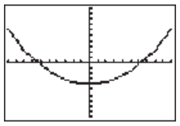
.4 **الاستدلال** هل يمثل الرسم البياني $x = t, y = 0.1t^2 - 4$ دالة تقابلية؟ اشرح.

لا؛ عينة إجابة: فشلت الدالة في اختبار الخط الأفقي.

النشاط 3 المجالات والدوال التقابلية

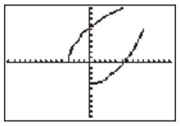
ضع حدًا لمجال $x = t, y = 0.1t^2 - 4$ حتى تجعلها دالة تقابلية.

الخطوة 1 الرسم البياني لـــ $4x = t, y = 0.1t^2 - 4$ متناظر بالنسبة للمحور الرأسي y. يمكننا إنشاء دالة تقابلية لقيم $0 \leq t \leq 10$.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [−10, 10]; $t$step: 1

الخطوة 2 غير Tmin من −10 إلى 0 من أجل تحديد المجال. مثل الدالة التقابلية ومعكوسها في رسم بياني.



[−15, 15] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [0, 10]; $t$step: 1

نصيحة للدراسة
التناظر قد تحتاج لاستخدام خاصية التتبع وضبط Tstep لتحديد موقع محور التناظر.

تمارين

مثل كل دالة في رسم بياني. ثم مثل الدوال العكسية وأشر إلى المجال المحدود إذا لزم الأمر. **10–5. انظر الهامش.**

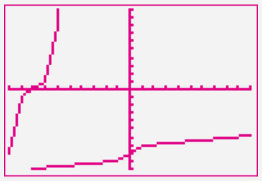
.5 $x = t - 6, y = t^2 + 2$ **.6** $x = 3t - 1, y = t^2 + t$ **.7** $x = 3 - 2t, y = t^2 - 2t + 1$

.8 $x = 2t^2 + 3, y = \sqrt{t}$ **.9** $x = 4t, y = \sqrt{t + 2}$ **.10** $x = t - 8, y = t^3$

.11 **التحدي** فكر في دالة خماسية بها قيمتين عظمتين نسبيتين وقيمتين صغرتين نسبيتين. إلى كم دالة تقابلية مختلفة يمكن فصل هذه الدالة إذا تم استخدام أكبر فترة ممكنة في كل دالة؟ **5**

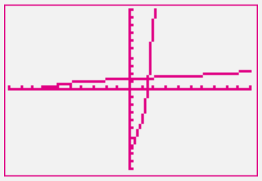
75

.10



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [−10, 10]; $t$step: 1

.9



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1
t: [−2, 10]; $t$step: 1

D: {t | $t \geq -2$}

الوحدة 1 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

الدوال (الدرس 1-1)

- تشمل المجموعات الفرعية للأعداد الحقيقية الأعداد الصحيحة والأعداد النسبية والأعداد غير النسبية والأعداد الكلية والأعداد الطبيعية.
- الدالة : f علاقة تعين كل عنصر في المجال بالضبط لكل عنصر واحد في النطاق.
- نجح الرسم البياني للدالة باختبار الخط العمودي.

تحليل الرسوم البيانية للدوال والعلاقات (ص. 1-2)

- قد تكون الرسوم البيانية متناظرة فيما يتعلق بالمحور الرأسي y والمحور الأفقي x ونقطة الأصل .
- تتناظر الدالة الزوجية مع المحور الرأسي y. تتناظر الدالة الفردية مع نقطة الأصل.

الاتصال و السلوك الطرفي والنهايا (ص. 1-3)

- إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من قيمة فريدة L حين تقترب x من c من أي جانب، إذن فنهاية $f(x)$ حين تقترب x من c تكون L. تُكتب نها $\lim_{x \to c} f(x) = L$
- قد تكون الدالة متقطعة بسبب الانقطاع اللانهائي، أو الانقطاع المتنقل أو الانقطاع القابل للإزالة.

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير (ص. 1-4)

- يمكن وصف الدالة بأنها تصاعدية أو تنازلية أو ثابتة.
- القيم القصوى للدالة تشمل القيم العظمى والقيم الصغرى النسبية والقيم العظمى والقيم الصغرى المطلقة.
- يمكن تمثيل متوسط معدل التغير بين نقطتين من خلال $m_{\text{sec}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

الدوال الرئيسية و التحويلات (الدرس 1-5)

تشمل تحويلات الدوال الرئيسية الإزاحات والانعكاسات وتغييرات الأبعاد بمقياس.

عمليات الدوال وتركيبها (ص. 1-6)

يشكل جمع وطرح وحاصل ضرب وحاصل وتركيب دالتين دوال جديدة.

العلاقات والدوال العكسية (ص. 1-7)

- تعد علاقتان عكسيتين في حالة فقط أن إحداهما تحتوي على العنصر (b, a) بينما تحتوي الأخرى على العنصر (a, b).
- الدالتان، f و f^{-1}، هما دالتان عكسيتان في حالة فقط أن $f[f^{-1}(x)] = x$ و $f^{-1}[f(x)] = x$

المفردات الأساسية

التركيب (ص. 58)
ثابتة (ص. 34)
دالة متصلة (ص.24)
دالة تنازلية (ص. 34)
تغيير الأبعاد بمقياس (ص. 49)
دالة متقطعة (ص. 24)
السلوك الطرفي للرسم البياني (ص. 28)
دالة زوجية (ص. 18)
القيم القصوى (ص. 36)
دالة (ص. 5)
تصاعدية (ص. 34)
رمز الفترة (ص. 5)
دالة عكسية (ص. 65)
علاقة عكسية (ص. 65)
نهاية (ص. 24)
تناظر محوري (ص. 16)
القيمة العظمى (ص. 36)
القيمة الصغرى (ص. 36)
انقطاع غير قابل للإزالة (ص. 25)
دالة فردية (ص. 18)
تقابلية (ص. 66)
دالة رئيسية (ص. 45)
دالة متعددة التعريف (ص. 8)
تناظر النقطة (ص. 16)
انعكاس (ص. 48)
الجذور (ص. 15)
الإزاحة (ص. 47)
دالة صفرية (ص. 45)
أصفار (ص. 15)

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل جملة صحيحة أم خاطئة. في حالة أنها خاطئة، استبدل المصطلح الذي تحته خط بمصطلح آخر لتصبح جملة صحيحة.

1. الدالة تعين كل عنصر في مجالها لعنصر واحد بالضبط في نطاقها. **صحيحة**
2. الرسوم البيانية التي بها تناظر نقطة يمكن أن تُدار 180° فيما يتعلق بنقطة وتبدو غير متغيرة. **صحيحة**
3. الدالة الفردية لها نقطة تناظر. **صحيحة**
4. لا يملك الرسم البياني للدالة المتصلة فجوات أو فواصل. **صحيحة**
5. تصف نهاية الرسم البياني الاقتراب من قيمة بدون الوصول إليها بالضرورة. **خاطئة؛ السلوك الطرفي**
6. الدالة $f(x)$ التي تتنازل قيمتها كلما تتصاعد x تسمى الدالة التنازلية. **صحيحة**
7. القيم القصوى للدالة يمكن أن تشمل القيم العظمى والصغرى النسبية. **صحيحة**
8. تنتج إزاحة الرسم البياني صورة عكسية للرسم البياني فيما يتعلق بخط ما. **خاطئة؛ الانعكاس**
9. تمر الدالة التقابلية باختبار الخط الأفقي. **صحيحة**

خاطئة؛ الدوال العكسية

10. الدوال التقابلية لها تناظر محوري.

المراجعة درس بدرس

1-1 الدوال

حدد ما إذا كانت كل علاقة تمثل y كدالة لـــ x.

.11 $3x - 2y = 18$ **دالة**

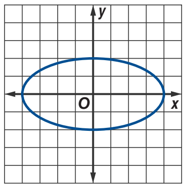
.12 $y^3 - x = 4$ **دالة**

.13

x	y
5	7
7	9
9	11
11	13

دالة

.14



ليست دالة

لنقل أن $f(x) = x^2 - 3x + 4$. أوجد كل من قيم الدوال.

.15 $f(5)$ **14**

.16 $f(-3x))$ $\mathbf{9x^2 + 9x + 4}$

حدد مجال كل دالة.

.17 $f(x) = 5x^2 - 17x + 1$
$\mathbf{D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}}$

.18 $g(x) = \sqrt{6x - 3}$

.19 $h(a) = \frac{5}{a+5}$
$\mathbf{D = \{a \mid a \neq -5, a \in \mathbb{R}\}}$

.20 $v(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$
$\mathbf{D = \{x \mid x \neq \pm 2, x \in \mathbb{R}\}}$

المثال 1

حدد ما إذا كانت $x = y^2 - 8$ تمثل y كدالة لـــ x.

حل المسالة لإيجاد y.

$y^2 - 8 = x$ المعدلة الأصلية

$y^2 = x + 8$ أضف 8 إلى كل جانب

$y = \pm\sqrt{x + 8}$ أضف الجذر التربيعي لكل جانب

لا تمثل المعادلة y كدالة لـــ x لأن أي قيمة x أكبر من -8. سوف تتواجد قيمتين متماثلتين لـــ y.

المثال 2

لنقل أن $g(x) = -3x^2 + x - 6$. أوجد $g(2)$.

استبدل 2 بـــ x في هذه المعادلة $-3x^2 + x - 6$.

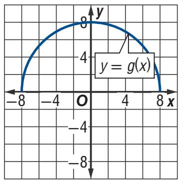
$g(2) = -3(2)^2 + 2 - 6$ $x = 2$

أو $= -12 + 2 - 6$ or -16 قم بالتبسيط.

1-2 تحليل الرسوم البيانية للدوال والعلاقات

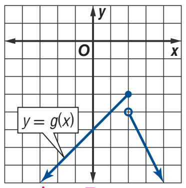
استخدم الرسم البياني لـــ g لمعرفة مجال ونطاق كل دالة.

.21



$\mathbf{D = [-8, 8], R = [0, 8]}$

.22



$\mathbf{D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}, R = (-\infty, -3)}$

أوجد التقاطع مع المحور الرأسي y وأصفار كل دالة.

.23 $f(x) = 4x - 9$ $\mathbf{-9; \frac{9}{4}}$

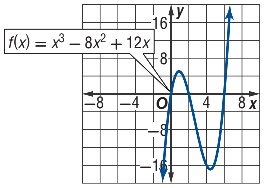
.24 $f(x) = x^2 - 6x - 27$ $\mathbf{-27; -3, 9}$

.25 $f(x) = x^3 - 16x$ $\mathbf{0; 0, 4, -4}$

.26 $f(x) = \sqrt{x + 2} - 1$ $\mathbf{\sqrt{2} - 1; -1}$

المثال 3

استخدم الرسم البياني لـــ $f(x) = x^3 - 8x^2 + 12x$ لإيجاد التقاطع مع المحور الرأسي y والأصفار. ثم أوجد القيم من خلال الجبر.



Estimate Graphically

يبدو أن $f(x)$ تتقاطع مع المحور الرأسي y عند $(0, 0)$. لذلك فإن التقاطع مع المحور الرأسي y هو 0.

يبدو أن تقاطع المحور الأفقي x يتم عند 0، 2، 6.

قم بحل المسألة من خلال الجبر

أوجد $f(0)$.

$f(0) = (0)^3 - 8(0)^2 + 12(0)$ أو 0

يتم تقاطع المحور الرأسي y عند 0.

حلّل عوامل المعادلة ذات الصلة.

$x(x^2 - 8x + 12) = 0$

$x(x - 6)(x - 2) =$

أصفار f هي 0، و6، و2.

الفصل 1 دليل الدراسة والمراجعة تابع

الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات

حدد ما إذا كانت كل دالة هي دالة متصلة عند قيمة (قيم) x المحددة. علل مستخدمًا اختبار الاتصال. في حالة كانت متقطعة، حدد نوع الانقطاع سواء كان لانهائي أو متنقل أو قابل للإزالة.

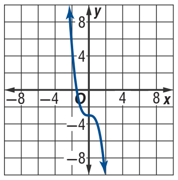
27–31. راجع الهامش.

27. $f(x) = x^2 - 3x;\ x = 4$.
28. $f(x) = \sqrt{2x - 4};\ x = 10$.
29. $f(x) = \frac{x}{x+7};\ x = 0$ و $x = 7$
30. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4};\ x = 2$ و $x = 4$
31. $f(x) = \{$

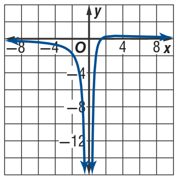
32–33. راجع الهامش.

استخدم الرسم البياني لكل دالة لوصف السلوك الطرفي.

32.



33.



المثال 4

حدد ما إذا كانت $f(x)$ متصلة عند $x = 0$ و $x =$. علل إجابتك باستخدام اختبار الاتصال. إذا كانت منقطعة، فحدد نوع الانقطاع لانهائي, أو متنقل أو قابل للإزالة.

$= f(0)$، إذن f تتحدد عند صفر. تشير قيم الدالة إلى أنها كلما كانت f تقترب من فإن x تقترب من .

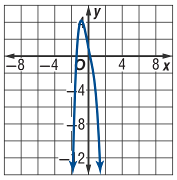
x	−0.1	−0.01	0	0.01	0.1
$f(x)$	−0.244	−0.249	−0.25	−0.251	−0.256

ولأننها $\lim_{x\to 0}$ تُقدر أن تكون و $= f(0)$, نستنتج أن تستمر حتى $x =$.

لأن f لا تتحدد عند ، f غير متصلة عند .

المثال 5

استخدم الرسم البياني لــ $f(x) = -2x^4 - 5x +$ لوصف السلوك الطرفي.



افحص الرسم البياني لــ .

بما أن $x \to \infty,\ f(x) \to$.

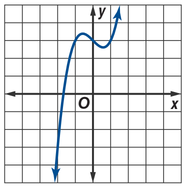
بما أن $x \to -\infty,\ f(x) \to$.

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

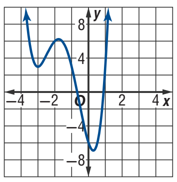
استخدم الرسم البياني لكل دالة لتقدير الفترات لأقرب 0.5 وحدة التي تكون عندها الدالة تصاعدية أو تنازلية أو ثابتة. قدر إلى أقرب وحدة وصنف القيم القصوى للرسم البياني بكل دالة.

34–35. راجع الهامش.

34.



35.

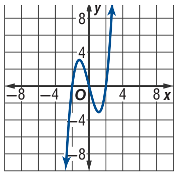


أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة على الفترة المحددة.

36. $f(x) = -x^3 + 3x + 1;$
37. $f(x) = x^2 + 2x + 5;$

المثال 6

استخدم الرسم البياني لــ $f(x) = x^3 -$ لتقدير الفترات لأقرب وحدة والتي تكون عندها الدالة تصاعدية أو تنازلية أو ثابتة. قدر إلى أقرب وحدة وصنف القيم القصوى للرسم البياني بكل دالة.



من خلال الرسم البياني، يمكننا تقدير أن f تصاعدية عند $(-\infty,$,
وتنازلية عند $(-1,$,
وتصاعدية عند $(1,$.

يمكننا تقدير أن f بها قيمة قصوى نسبية عند $(-1,$ وقيمة صغرى عند $(1,$.

إجابات إضافية

27. مستمر عند$x = 4$; التابع يحدد عندما $x = 4$. التابع يقترب 4 عندما x التقريب 4 من الجانبين, و $f(4) = 4$.

28. مستمر عند$x = 10$; التابع يحدد عندما $x = 10$. التابع يقترب 4 عندما x تقارب 10 من كلا الجانبين

29. مستمر عند$x = 0$; التابع يحدد عندما $x = 0$. التابع يقارب 0 عندما x تقارب 0 من كلا الجانبين, و $f(0) = 0$. تستمر الى $x = 7$; التابع يحدد عندما $x = 7$. التابع يقارب 0.5 عندما x تقارب 7 من كلا الجانبين, و $f(7) = 0.5$.

30. متقطع عند$x = 2$; التابع غير معرف عندما $x = 2$. انه الانقطاع اللانهائي التابع مستمر عند $x = 4$; التابع متواجد عندما $x = 4$. التابع يقارب $\frac{1}{3}$ عندما x تقارب 4 من كلا الجانبين الجوانب, و $f(4) = \frac{1}{3}$.

31. مستمر عند$x = 1$; التابع يحدد عندما $x = 1$. التابع يقترب 2 عندما x التقريب 1 من الجانبين, و $f(1) = 2$.

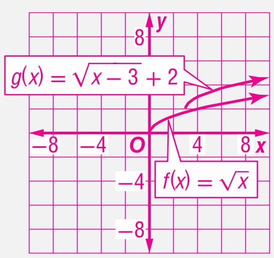
32. من الرسم البياني يبدو أن $x \to \infty,\ f(x) \to -\infty$; كا $x \to -\infty$, $f(x) \to \infty$.

33. من الرسم البياني يبدو أن $x \to \infty,\ f(x) \to 0$; as $x \to -\infty$, $f(x) \to 0$.

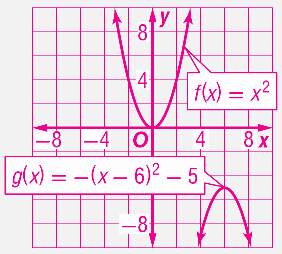
34. f يرتفع في $(-\infty, -0.5)$, ينخفض في $(-0.5, 0.5)$, و يرتفع عند $(0.5, \infty)$; قيمة عُظمَى النسبي $(-0.5, 3.5)$ والحد الأدنى النسبي $(0.5, 2.5)$.

35. f تنخفض في $(-\infty, -3)$, ترتفع في $(-3, -1.5)$, ترتفع في $(-1.5, 0.5)$, و ترتفع في $(0.5, \infty)$; قيمة صُغرى النسبي $(-3, 3)$, قيمة عُظمى النسبي $(-1.5, 6)$ والحد الأدنى النسبي $(0.5, -7)$.

38. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x)$ يكون الرسم البياني $f(x)$ منقول 3 وحدات الى اليمين و 2 وحدات الى أعلى.

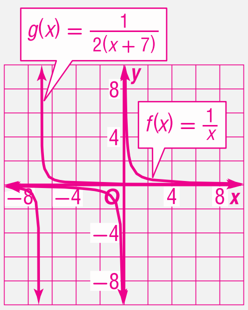


39. $f(x) = x^2$; $g(x)$ يكون الرسم البياني $f(x)$ معكوس على الـ x-المحور و منقول 6 وحدات الى اليمين و 5 وحدات الى أسفل

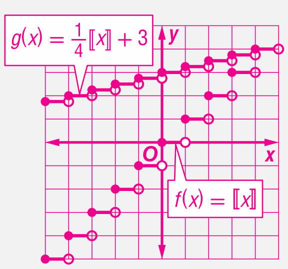


إجابات إضافية

40. $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x)$ يكون الرسم البياني ل $f(x)$ منقول 7 وحدات الى اليسار، وتكون مضغوطة بشكل عمودي بعامل ال $\frac{1}{2}$ of .



41. $f(x) = [\![x]\!]$; $g(x)$ يكون الرسم البياني ل $f(x)$ مضغوطة بشكل عمودي بعامل ال $\frac{1}{4}$ ومنقول 3 وحدات الى أعلى.



44. $(f + g)(x) = 2x^2 + 5x - 3$; $D = (-\infty, \infty)$; $(f - g)(x) = -2x^2 - 3x + 9$; $D = (-\infty, \infty)$;
$(f \cdot g)(x) = 2x^3 + 10x^2 + 6x - 18$;
$D = (-\infty, \infty)$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{2(x-1)}$;
$D = (-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup (1, \infty)$

45. $(f + g)(x) = 4x^2 + 5x - 2$; $D = (-\infty, \infty)$; $(f - g)(x) = 4x^2 - 5x$; $D = (-\infty, \infty)$;
$(f \cdot g)(x) = 20x^3 - 4x^2 - 5x + 1$;
$D = (-\infty, \infty)$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{4x^2 - 1}{5x - 1}$;
$D = \left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}, \infty\right)$

الدوال الرئيسية والتحويلات

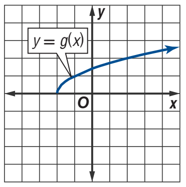
حدد الدالة الرئيسية $f(x)$ الخاصة بـ ، وصف كيف تكون الرسوم البيانية لـ و مرتبطة. ثم مثل في رسم بياني على نفس المحاور. **38–41. راجع**

.38 $g(x) = \sqrt{x - 3}$ **.39** $g(x) = -(x - 6)^2$

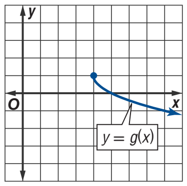
.40 $g(x)$ **.41** $g(x) = \frac{1}{4}[\![x]\!]$

صف كيف تكون الرسوم البيانية لكل من $f(x)$ و مرتبطة. ثم قم بكتابة المعادلة لـ .

.42



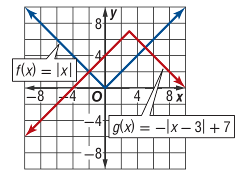
.43



المثال 7

حدد الدالة الرئيسية لـ $g(x) = -|x - 3| +$. وصف كيف تكون الرسوم البيانية لـ و مرتبطة. ثم مثل من خلال الرسم البياني و على نفس المحاور.

الدالة الرئيسية لـ هي $f(x) =$. الرسم البياني لـ g يكون هو الرسم البياني ذاته لـ f منعكس في المحور الأفقي x، ومُزاح بـ وحدات إلى اليمين و وحدات إلى الأعلى.



.42 الرسم البياني مُزاح بوحدتين يسارًا $g(x)$.

.43 الرسم البياني منعكس في المحور الأفقي x ومُزاح بـ وحدات لليمين ووحدة واحدة للأعلى؛ $g(x) = -\sqrt{x - 4}$.

عمليات الدوال وتركيبها

أوجد، $(f + g)(x), (f - g)(x), (f \cdot g)(x)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل $f(x)$ و $g(x)$. حدد مجال كل دالة جديدة. **44–47. راجع الهامش.**

.44 $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x^2 + 4x$ **.45** $f(x) = 4x^2$, $g(x) = 5x$

.46 $f(x) = x^3 - 2x^2$, $g(x) = 4x^2 -$ **.47** $f(x)$, $g(x)$

لكل زوج من الدوال، أوجد $[f \circ g](x), [g \circ f]$ و $[f \circ g]$.

.48 $f(x) = 4x - 11$; $g(x) = 2$

.49 $f(x) = x^2 + 2x + 8$; $g(x) = x$

.50 $f(x) = x^2 - 3x + 4$; $g(x)$

أوجد $f \circ g$. **51–52. راجع الهامش.**

.51 $f(x)$, $g(x) = 2x -$ **.52** $f(x)$, $g(x) = 6x -$

المثال 8

مع معرفة أن $f(x) = x^3 -$ و $g(x) = x +$. أوجد $(f + g)$، $(f - g)(x), (f \cdot g)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)$. حدد مجال كل دالة جديدة.

$(f + g) = f(x) +$
$= (x^3 - 1) + (x$
$= x^3 + x +$

مجال $(f + g)$ هو $(-\infty,$.

$(f - g) = f(x) -$
$= (x^3 - 1) - (x$
$= x^3 - x -$

مجال $(f - g)$ هو $(-\infty,$.

$(f \cdot g) = f(x) \cdot$
$= (x^3 - 1)(x$
$= x^4 + 7x^3 - x$

مجال $(f \cdot g)$ هو $(-\infty,$.

$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{x^3 - 1}{x + 7}$

مجال $\left(\frac{f}{g}\right)$ هو $D = (-\infty, -7) \cup (-7,$.

79 ((

46. $(f + g)(x) = x^3 + 2x^2 + 2$; $D = (-\infty, \infty)$;
$(f - g)(x) = x^3 - 6x^2 + 8$; $D = (-\infty, \infty)$;
$(f \cdot g)(x) = 4x^5 - 8x^4 - 3x^3 + 26x^2 - 15$;
$D = (-\infty, \infty)$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 5}{4x^2 - 3}$;
$D = \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty\right)$

47. $(f + g)(x) = \frac{x + 1}{x^2}$; $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;
$(f - g)(x) = \frac{x - 1}{x^2}$; $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;
$(f \cdot g)(x) = \frac{1}{x^3}$; $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x$; $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

51. $[f \circ g](x) = \frac{1}{2x - 9}$ لـ $x \neq \frac{9}{2}$

52. $[f \circ g](x) = \sqrt{6x - 9}$ لـ $x \geq \frac{3}{2}$

إجابات إضافية

57. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}$

58. $g^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x + 2$

59. $h^{-1}(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3,\ x \geq 0$

60. $f^{-1}(x) = \frac{-2x}{x-1},\ x \neq 1$

64a. مثال على الإجابة: عدد الضربات الناجحة انخفض، ثم ازداد ولأن 23 ليس الرقم الأصغر للضربات النّاجحة.

64c. مثال على الإجابة: كان هناك عدد أقل من الضربة الناجحة في عام 2012 عنه في 2007.

67a. $A(x) = 6.4516x$ cm^2

67b. $A^{-1}(x) = \frac{1}{6.4516}$ x في ^{2}

الوحدة 1 دليل الدراسة والمراجعة تابع

العلاقات والدوال العكسية

مثل بالرسم البياني كل دالة باستخدام حاسبة الرسم البياني وقم بتطبيق اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كانت تتواجد دالتها العكسية أم لا. اكتب نعم أو لا.

53. $f(x) = |x| + 6$ **لا**

54. $f(x) =$ **نعم**

55. $f(x) =$ **نعم**

56. $f(x) = x^3 - 4x^2$ **لا**

أوجد الدالة العكسية وحدد أي قيود في المجال.

57–60. راجع الهامش.

57. $f(x) = x^3 -$

58. $g(x) = -4x +$

59. $h(x) =$

60. $f(x)$

المثال 9

أوجد الدالة العكسية لـ $f(x) = \sqrt{x} -$ وحدد أي قيود على المجال الخاص بها.

لاحظ أن f لها مجال $[0,$ ونطاق $[-3,$. أوجد الآن العلاقة العكسية لـ f.

$y = \sqrt{x} -$ استبدل بـ y.

$x = \sqrt{y} -$ بدّل بين x و y.

$x + 3 =$ اجمع إلى كل جانب

$(x+3)^2$ تربيع كل جانب. لاحظ أن $D = (-\infty,$ و $R = [0,$.

مجال $y = (x + 3$ لا يساوي نطاق f إلا إذا كان متقيدًا بـ $[-3,$.

إذن، $f^{-1}(x) = (x +$ لـ $x \geq$.

التطبيقات وحل المسائل

a، ج. راجع الوحدة 1، ملحق الإجابات.

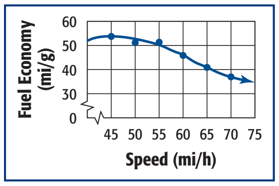
61. **الهواتف الخلوية** يوفر الهاتف الخلوي مبدئيًا خطة هاتف تكلفتها $39.99 شهريًا. تشمل الخطة 500 دقيقة يمكن استخدامهم بالنهار من الأحد للخميس بين 7 صباحًا و7 مساءً. يدفع المستخدم $0.20 للدقيقة الواحدة لكل دقيقة يتم استخدامها بالنهار على مدى 500 دقيقة مستخدمة. (الدرس 1−1)

a. اكتب دالة $p(x)$ بتكلفة خدمة شهرية يمكنك خلالها استخدام x دقائق النهار.

b. ما التكلفة التي ستدفعها إذا استهلكت 450 دقيقة بالنهار؟ 550 دقيقة بالنهار؟ **$39.99; $49.99**

c. مثل بالرسم البياني $p(x)$.

62. **السيارات** يظهر هنا استهلاك الوقود لسيارة هجينة على مستويات سرعة مختلفة على الطريق السريع. (الدرس 1−2)



الإجابة النموذجية: تقريبًا 51 mi/g

a. تقريبًا ما هو قدر الوقود المستهلك للسيارة التي تسافر 50 ميلًا في الساعة؟

b. تقريبًا ما هي السرعة التي سيكون عندها استهلاك الوقود للسيارة أقل من 40 ميلًا للجالون؟

الإجابة النموذجية: تقريبًا 67 mph أو أسرع

63. **الرواتب** بعد عمل السيدة فاطمة في الشركة لمدة خمس سنوات، تمت ترقيتها. فهي تحصل الآن على راتب يزيد عن راتبها السابق بمبلغ $1500 في الشهر. هل ستكون الدالة التي تمثل دخلها الشهري دالة متصلة؟ اشرح (الدرس 1-3)

لا: الإجابة النموذجية: في وقت ترقيتها، كان لدخلها انقطاع متنقل.

64. **البيسبول** يوضح الجدول عدد الضربات السليمة التي أحرزها لاعب بايسبول في كل عام من الأعوام الخمسة الأولى التي لعب فيها بصورة احترافية. (الدرس 1−4)

سنة	2004	2005	2006	2007	2008
عدد الضربات السليمة	5	36	23	42	42

a. اشرح سبب تمثيل 2006 لقيمة صغرى نسبية.

b. افترض أن متوسط معدل التغير لضربات السليمة بين عامي 2008 و هو 5 ضربات سليمة في العام. كم عدد الضربات السليمة في ؟ **57 ضربة سليمة**

c. افترض أن متوسط معدل التغيير للضربات السليمة بين عامي 2007 و2012 سالب. قارن بين عدد الضربات السليمة في 2007 و2012. **ج. راجع الهامش.**

65. **الفيزياء** رُمي الحجر أفقيًا من أعلى جرف. سرعة الحجر التي تم قياسها بالأمتار لكل ثانية بعد t ثوان من الممكن تمثيلها من خلال $v(t) = -\sqrt{(9.8t)^2 + 49}$. سرعة الحجر هي القيمة المطلقة لسرعتها. ارسم رسمًا بيانيًا لسرعة الحجر خلال أول 6 ثوانٍ. (الدرس 1−5)

راجع الوحدة 1 ملحق الإجابات.

66. **العلم** بالأمور المالية يعلن متجر كبير عن خصم AED على أي سروال جينز. ما هي تكلفة الجينز إذا كان السعر الأصلي AED 55 وهناك 8.5% ضريبة المبيعات؟ (الدرس 1−6) **AED 48.83**

A-B67. راجع الهامش.

67. **القياس** تعادل بوصة واحدة 2.54 سم تقريبًا. (الدرس 1−7)

a. اكتب دالة $A(x)$ تحول المساحة x لمستطيل من بوصة مربعة لسم مربع.

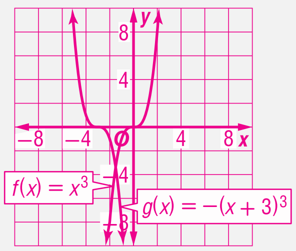
b. اكتب دالة A^{-1} تحول المساحة x للمستطيل من سم مربع لبوصة مربعة.

إجابات إضافية

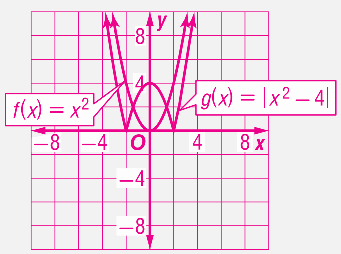
14. f يكون مرتفع في $(-\infty, 2.5)$ و منخفض في $(2.5, \infty)$.

15. f يكون منخفض في $(-\infty, -1.5)$، مرتفع في $(-1.5, 0)$، منخفض في $(0, 1.5)$، و مرتفع في $(1.5, \infty)$.

17. $f(x) = x^3$



18. $f(x) = x^2$



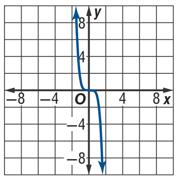
19. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{x+6}$ لـ $x \neq -6$ أو $x \neq 6$

20. $[f \circ g](x) = x^2 - 12x$ لـ $x \in \mathbb{R}$

الوحدة 1 اختبار تدريبي

حدد ما إذا كانت العلاقة المبينة تمثل y كدالة لـ x.

1. $x = y^2 - 5$ **ليست دالة**
2. **دالة**



3. $y = \sqrt{x^2 + 3}$ **دالة**

4. **انتظار السيارات** تبلغ تكلفة انتظار السيارة في منطقة وسط البلد $0.75\$$ لكل 30 دقيقة بحد أقصى $4.50\$$. تحسب تكلفة انتظار السيارات لكل ثانية.

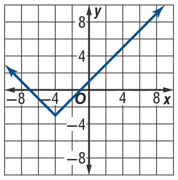
a. اكتب دالة لـ $c(x)$. تكلفة انتظار سيارة لـ x ساعات. $c(x) = \{$

b. أوجد $c(2.5)$.

c. ما هو مجال $c(x)$؟ اشرح استنتاجك. **الإجابة النموذجية: $D = [0, 3]$؛ تكون عدد الساعات أكبر من أو تساوي 0.**

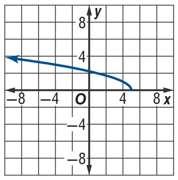
حدد مجال كل دالة ونطاقها.

5.



$D = (-\infty, \infty)$, $R = [-3, \infty)$

6.



$D = (-\infty, 5]$, $R = [0, \infty)$

أوجد التقاطع (التقاطعات) مع المحور الرأسي y و أصفار كل دالة.

7. $f(x) = 4x^2 - 8x + 12$ **$-12; -1, 3$**

8. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$ **$0; -3, -1, 0$**

9. **اختيار من متعدد** أي علاقة تتشابه مع x المحور الأفقي؟ **D**

A $x^2 - yx = 2-$

B $x^3y = 8$

C $|y = |x$

D $y^2 = -4x-$

حدد ما إذا كانت كل دالة متصلة عند $x = 3$. إذا كانت منقطعة، فحدد نوع الانقطاع لانهائي، أو متنقل أو قابل للإزالة.

10. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } x < 3 \\ 9 - x & \text{if } x \geq 3 \end{cases}$ **متصلة**

11. $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ **غير متصلة، انقطاع قابل للإزالة**

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة في الفترة $[-2, 6]$.

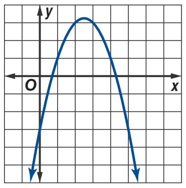
12. $f(x) = -x^4 + 3x$ **-157**

13. $f(x) = \sqrt{x+3}$ **$\frac{1}{4}$**

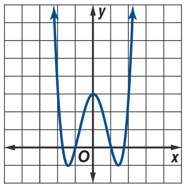
استخدم الرسم البياني لكل دالة لتقدير الفترات لأقرب 0.5 وحدة التي تكون عندها الدالة تصاعدية أو تنازلية أو ثابتة.

14–15. راجع الهامش.

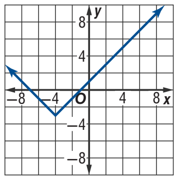
14.



15.



16. **اختيار من متعدد** أي دالة موضحة في الرسم البياني؟ **H**



F. $f(x) = |x - 4| - 3$

G. $f(x) = |x - 4| + 3$

H. $f(x) = |x + 4| - 3$

J. $f(x) = |x + 4| + 3$

حدد الدالة الرئيسية $f(x)$ لـ $g(x)$. ثم ارسم الرسم البياني لـ $g(x)$.

17. $g(x) = -(x+3)^3$

18. $g(x) = |x^2 - 4|$

17–18. راجع الهامش.

مع معرفة أن $f(x) = x - 6$ و $g(x) = x^2 - 36$. أوجد كل دالة ومجالها.

19. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

20. $[g \circ f](x)$

19–20. راجع الهامش.

21. **الحرارة** في أغلب البلدان تقاس درجة الحرارة بالدرجة المئوية. المعادلة التي تربط بين درجات الفهرنهايت والدرجة المئوية هي $F = \frac{9}{5}C + 32$.

a. اكتب C كدالة لـ F. **$C = \frac{5}{9}(F - 32)$**

b. أوجد دالتين f و g بحيث تكون $C = [f \circ g](F)$.

الإجابة النموذجية: $f(x) = \frac{5}{9}x$, $g(x) = x - 32$

حدد ما إذا كان للدالة دالة عكسية. إذا كان لها دالة عكسية، فأوجد الدالة العكسية وحدد أي قيود في مجالها.

22. $f(x) = \frac{x+3}{x-8}$ **نعم؛ $f^{-1}(x) = \frac{8x+3}{x-1}$؛ $x \neq 1$**

23. $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ **نعم؛ $f^{-1}(x) = x^3 + 2$**

24. $f(x) = \sqrt{4-x}$ **نعم؛ $f^{-1}(x) = 4 - x^2$؛ $x \geq 0$**

25. $f(x) = x^2 - 16$ **لا**

1 التركيز

الهدف تقريب معدل التغير في التابع عند نقطة.

نصائح تدريسية

قم برسم التقاطع المكافئ على اللوحة حيث يقوم الطلاب بتحديد خط التماس في قمة الرأس. بعد رسم الخط، و اختيار زوج من النقاط على كل جانب من جانبي الرأس و استخدام مسطرة لرسم خط تقاطع. أطلب من الطلاب أن يصفوا التغيير في التقاطع كألتقاط النقاط على قمة الرأس. و التقاطع يبدو في نهاية المطاف مثل خط التماس.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

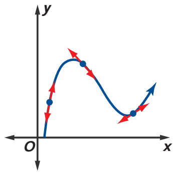
اطلب من الطلاب الذين يملكون مهارات مختلفة العمل في مجموعات تتكون من ثلاثة أو أربعة، مع خلط قدراتهم . أطلب من هذه المجموعات أن تنجز نشاطات 1–3 و تحليل نتائج تمارين 1–9.

الوحدة

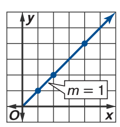
الربط بمنهج التفاضل والتكامل المتقدم
معدل التغير عند نقطة ما

الهدف..

- تقريب معدل التغير لدالة ما عند نقطة ما.



حساب التفاضل هو فرع من فروع التفاضل والتكامل يركز على معدلات التغير للدوال في النقاط الفردية. لقد تعلمت كيفية حساب معدل التغير الثابت، أو المنحدر، للدوال الخطية ومتوسط معدل التغير للدوال غير الخطية. باستخدام حساب التفاضل، *يمكنك* تحديد معدل التغير المضبوط لأي دالة في نقطة واحدة، كما تمثل منحدرات خطوط المماس في الرسم الذي على اليمين.

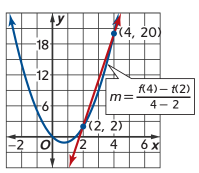


معدل التغير الثابت لدالة خطية لا يمثل فقط منحدر الرسم البياني بين نقطتين ولكن أيضًا *معدل التغير المضبوط للدالة في كل نقطة من النقاط*. مثال، لاحظ في الرسم الموجود على اليمين أن المنحدر m للدالة يساوي 1. هذ القيمة تشير أيضًا إلى المعدل *المضبوط* الذي تتغير فيه الدالة عند أي نقطة في المجال الخاص بها. وهذا هو ما يركز عليه حساب التفاضل.

متوسط معدل التغير للدوال غير الخطية يمثله منحدر خط تم إنشاؤه بين أي نقطتين على الرسم البياني للدالة. وهذا ما يسمى *بالخط القاطع*. وهذا الميل ليس معدل التغير *المضبوط* للدالة في أي نقطة واحدة. وعلى الرغم من ذلك، يمكننا استخدام هذه العملية لإعطائنا النتيجة التقريبية لهذا المعدل من التغير اللحظي.

النشاط 1 تقريب معدل التغير

قرّب معدل التغير لـ $f(x) = 2x^2 - 3x$ عند $x = 2$



الخطوة 1 مثِّل في رسم بياني $f(x) = 2x^2 - 3x$، وعين النقطة $P = (2, f(2))$.

الخطوة 2 ارسم الخط القاطع من خلال $P = (2, f(2))$ و $Q = (4, f(4))$.

الخطوة 3 احسب متوسط معدل التغير m لــ $f(x)$ باستخدام P و Q، كما هو موضح في الرسم.

الخطوة 4 أعد الخطوات من 1–3 أربع مرات أخرى. استخدم $Q = (3, f(3))$, $Q = (2.5, f(2.5))$, $Q = (2.25, f(2.25))$, and $Q = (2.1, f(2.1))$.

حلّل النتائج

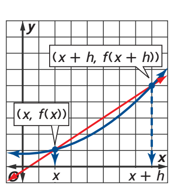
1. بما أن Q يقترب من P، ما هي النقطة التي يبدو أن متوسط معدل تغير m يقترب منها؟ **5**
2. استخدام الخط القاطع لحساب معدل التغير التقريبي عند نقطة ما يمكن أن ينتج نتائج متفاوتة. استخدام الفرضية في هذه العملية سينتج تقريبات دقيقة.

2. الإجابة النموذجية: ستنتج الخطوط القاطعة تقريبات دقيقة عندما تكون النقطتان على الرسم البياني قريبتين نسبيًا من بعضهما البعض.

نعبر في حساب التفاضل عن قاعدة متوسط معدل التغير من ناحية x والمسافة الأفقية h بين نقطتين تحددان الخط القاطع.

النشاط 2 تقريب معدل التغير

اكتب القاعدة العامة لإيجاد منحدر m لأي خط قاطع. استخدم القاعدة لتقريب معدل التغير لـ $f(x) = 2x^2 - 3x$ لـ $x = 2$.



الخطوة 1 أنشئ رمزًا لإيجاد متوسط معدل التغير للقياس الشكل على اليمين. هذا الرمز يسمى *فارق الحاصل*.

الخطوة 2 استخدم فارق الحاصل الخاص بك لتقريب معدل تغير $f(x)$ عند $x = 2$. لنقل أن $h = 0.4$، 0.25 و 0.1.

التدريب أطلب من الطلاب إكمال تمارين 9–1.

3 قوّم

التقييم التكويني

إستخدام نموذج و تطبيق التمرين 10 لمساعدة فهم الطلاب لكيفية العثور على معدل التغير في نقطة الدوال الغير خطية.

من البداية الى الخلاصة

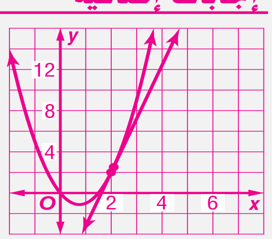
اطلب من الطلاب تلخيص ما درسوه عن معدل التغير في النقطة. أطلب منهم وصفا لكيفية أن تصبح التقريبات أكثر دقة مثل نقطة على الرسم البياني للتابع فهما أقرب معا.

توسع المفهوم

اطلب من الطلاب ملاحظة التغييرات في معدل التغير كنقاط قيمة صُغرى و الأقصى.. يجب على الطلاب تحديد أن معدل التغير قد يصبح أصغر في الحجم حيث أن نقطة خط التقاطع للحصول على أقرب إلى القيم القصوى. أطلب من الطلاب أن يرسموا بيانياً $y = x^3 - 2x + 1$. عند أي نقطة من النقاط على الرسم البياني ستكون معدلات التغيير صفر؟ قيمة عُظمى و قيمة صُغرى نسبيا ما هي العلاقة بين معدلات التغيير التي تساوي صفر و القيم النسبية القصوى؟ معدل التغير في الحدود النسبية القصوى و الدنيا دائما يكون صفر.

إجابات إضافية

4.



حلّل النتائج

3. بما أن قيمة h اقتربت من 0، فما هي النقطة التي يبدو أن متوسط معدل التغير يقترب إليها؟ **الإجابة النمو**
4. مثِّل $f(x)$ والخط القاطع الذي تم إنشاؤه عند $h = 0.1$ في رسم بياني. **مراجعة الهامش.**
5. كيف يبدو الخط القاطع عندما تصل h من 0؟
6. ضع فرضية حول معدل التغير لدالة ما في نقطة ما من استنادًا إلى إجابتك على السؤال السابق.

5. عينة إجابة: يظهر الخط القاطع ليصبح خط المماس على الرسم البياني لـ f..

6. الإجابة النموذجية: معدل التغير لدالة ما عند نقطة ما يتساوى مع منحدر خط المماس على الرسم البياني للدالة في تلك النقطة.

7. الإجابة النموذجية: معدل التغير الدقيق يساوي 5 وهذا ما يعادل قيم أخرى يبدو أنها تقترب.

8. الإجابة النموذجية: خط التقاطع يصبح خط المماس لـ $f(x)$..

9. الإجابة النموذجية: لإيجاد معدل التغير لـ $f(x)$ عند النقطة x، قم بإيجاد حصل الفارق، وتبسيط الرمز. عوض عن 0 = h في الرمز المبسط، والناتج هو معدل تغير الدالة عند x.

يستخدم حاصل الفارق لإيجاد معدل التغير *المضبوط* لدالة ما في نقطة واحدة.

النشاط 3 حساب معدل التغير

استخدم حاصل الفارق لحساب معدل *التغير* المضبوط لـ $f(x) = 2x^2 - 3x$ عند النقطة $x = 2$.

الخطوة 1 عوِّض عن $x = 2$ في حاصل الفارق كما هو موضح.

$$m = \frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$$

الخطوة 2 اكتب الصيغة الموسعة لـ ناتج الفارق من خلال إيجاد قيمة $f(2 + h)$ و$f(2)$.

$$m = \frac{[2(2 + h)^2 - 3(2 + h)] - [2(2)^2 - 3(2)]}{h}$$

الخطوة 3 تبسيط التعبير في نقطة ما، سوف تحتاج إلى تحليل عامل h من الكسر العشرية وبعد ذلك التقليل.

الخطوة 4 قم بإيجاد معدل *التغير* لـ $x = 2$ في $f(x)$ عن طريق تعويض $h = 0$ في رمزك.

حلّل النتائج

7. قارن بين معدل التغير *دقيقة* الموجود في الخطوة 4 بمعدلات التغير التي وجدتها.
8. ما الذي يحدث للخط القاطع لـ $f(x)$ عند $x = 2$ عندما تكون $h = 0$؟
9. اشرح عملية حساب معدل التغير المضبوط لدالة ما في نقطة ما باستخدام حاصل الفارق.

النموذج والتطبيق

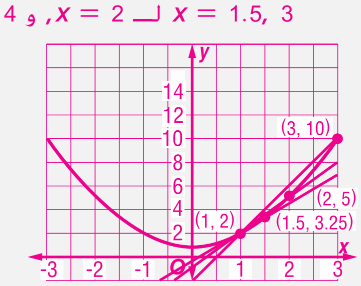
10. في هذه المسألة، سوف تقرب معدل التغير وتحسب المعدل *المضبوط* لـ $f(x) = x^2 + 1$ **عند** $x = 1$.

أ) قرِّب معدل التغير لـ $f(x)$ عند $x = 1$ عن طريق حساب متوسط معدل التغير لثلاثة خطوط قاطعة، $f(3)$، $f(2)$، و$f(1.5)$. مثِّل $f(x)$ والخطوط القاطعة الثلاثة بالرسم البياني على نفس المستوى الإحداثي. **مراجعة الهامش.**

ب) قرِّب معدل التغير لـ $f(x)$ عند $x = 1$ باستخدام حاصل الفارق والقيم الثلاثة المختلفة لـ h. لنقل أن $h = 0.4$، 0.25، و0.1. **مراجعة الهامش.**

ج) احسب معدل التغير المضبوط لـ $f(x)$ عند $x = 1$ عن طريق تقييم حاصل الفارق لـ $f(1 + h)$ و$f(1)$ ثم استبدال $h = 0$. اتبع الخطوات في نشاط رقم 3. **2**

10a. إجابة نموذجية: معدل التغيير: 2.5 لـ $x = 1.5, 3$ لـ $x = 2$، و 4 $x = 3$



10b. لـ $h = 0.4$، معدل التغيير هو 2.4. لـ $h = 0.25$، معدل التغيير هو 2.25. لـ $h = 0.1$، معدل التغيير هو 2.1.

G12 GEN TE CH01.indb 83 8/22/2016 4:32:21 PM