الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

عام التسامح

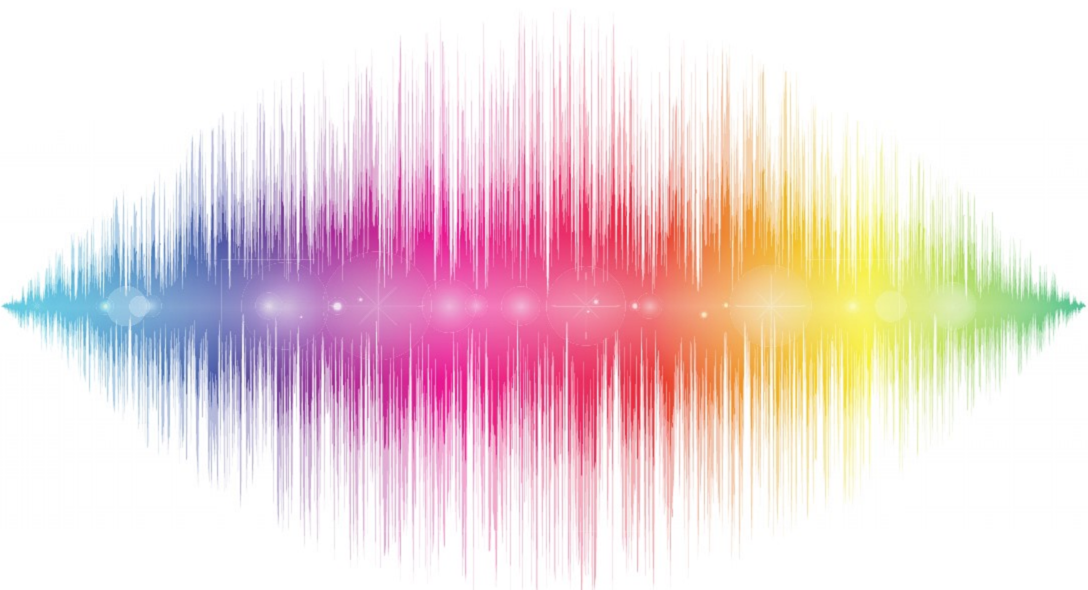
المتقدّم
2018 - 2019

11

McGraw-Hill Education

الفيزياء

نسخة الإمارات العربية المتحدة



Mc Graw Hill Education

McGraw-Hill Education

الفيزياء

نسخة الإمارات العربية المتحدة

للصف 11 المتقدّم

مجلد 3

Mc Graw Hill Education

Project: UAE Science Grade 11 Advanced Physics, Year 3, Volume 3
FM. Front Matter, from University Physics with Modern Physics, 2e by Bauer and Westfall ©2014
8. Systems of Particles and Extended Objects, Chapter 8, from University Physics with Modern Physics, 2e by Bauer and Westfall ©2014
9. Circular Motion, Chapter 9, from University Physics with Modern Physics, 2e by Bauer and Westfall ©2014
10. Rotation, Chapter 10, from University Physics with Modern Physics, 2e by Bauer and Westfall ©2014
11. Static Equilibrium, Chapter 11, from University Physics with Modern Physics, 2e by Bauer and Westfall ©2014
12. Gravitation, Chapter 12, from University Physics with Modern Physics, 2e by Bauer and Westfall ©2014
13. Relativity, Chapter 35, from University Physics with Modern Physics, 2e by Bauer and Westfall ©2014

صورة الغلاف: Mix3r/Shutterstock.com

mheducation.com/prek-12

جميع الحقوق محفوظة © للعام 2019 لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جميع الحقوق محفوظة. لا يجوز إعادة إنتاج أي جزء من هذا المنشور أو توزيعه في أي صورة أو بأي وسيلة كانت أو تخزينه في قاعدة بيانات أو نظام استرداد من دون موافقة خطية مسبقة من McGraw-Hill Education، بما في ذلك، على سبيل المثال لا الحصر، التخزين على الشبكة أو الإرسال عبرها أو البث لأغراض التعليم عن بُعد.

الحقوق الحصرية للتصنيع والتصدير عائدة لمؤسسة McGraw-Hill Education. لا يمكن إعادة تصدير هذا الكتاب من البلد الذي باعته له McGraw-Hill Education. هذه النسخة الإقليمية غير متاحة خارج أوروبا والشرق الأوسط وإفريقيا.

طُبع في دولة الإمارات العربية المتحدة.

رقم النشر الدولي: 8-978-1-52-688400 (نسخة الطالب)
MHID: 1-52-688400-3 (نسخة الطالب)

النسخة الإلكترونية

رقم النشر الدولي: 2-978-1-52-688402 (نسخة الطالب)
MHID: 1-52-688402-X (نسخة الطالب)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 XXX 22 21 20 19 18 17

صاحب السّمو الشّيخ خليفة بن زايد آل نهيان
رئيس دولة الإمارات العربيّة المتّحدة، حفظه الله

"يجب التزوُّد بالعلوم الحديثة والمعارفِ الواسعة، والإقبال عليها
بروح عالية ورغبة صادقة؛ حتى تتمكّن دولة الإمارات خلال
الألفيّة الثّالثة من تحقيق نقلة حضاريّة واسعة."

من أقوال صاحب السّمو الشّيخ خليفة بن زايد آل نهيان

المحتويات الموجزة

الصورة العامة

Chapter Sourced From: FM. Front Matter, from University Physics with Modern Physics, 2e by Bauer and Westfall ©2014
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

نبذة عن المؤلفين

فولف جانج باور وُلد في ألمانيا وحصل على الدكتوراه في الفيزياء النووية النظرية من جامعة غيسن عام 1987. بعد حصوله على منحة لمرحلة ما بعد الدكتوراه في معهد كاليفورنيا للتكنولوجيا، انضم إلى كلية ولاية جامعة ميشيغان عام 1988، كما عمل في الوقت ذاته في المختبر الوطني للمسرع الدوراني فائق التوصيل (NSCL). وقد تضمنت أبحاثه العمل على مجموعة كبيرة من الموضوعات في الفيزياء النظرية والفيزياء الحاسوبية مثل درجة الحرارة العالية فائقة التوصيل وانفجارات المستعر الأعظم. لكنه أولى اهتمامًا خاصًا لموضوع التصادمات النووية النسبوية. ولعل أكثر ما اشتُهر به هو عمله المتعلق بمراحل انتقال المادة النووية في تصادمات الأيونات الثقيلة. في السنوات الأخيرة، ركّز الدكتور باور في أبحاثه ومحاضراته على القضايا المتعلقة بالطاقة، بما في ذلك موارد الوقود الأحفوري وطرق الاستخدام الفعال للطاقة، وخاصةً موارد الطاقة البديلة والطاقة التي لا تزيد من انبعاثات ثاني أكسيد الكربون. وفي عام 2009، أسس معهد البحوث السيبرانية المساعدة وكان أول مدير له حتى عام 2013. وفي الوقت الحالي، يعمل رئيسًا لقسم الفيزياء والفلك ويشغل منصب أستاذ متميز في جامعة ميشيغان.

غراي د. ويستفال بدأ حياته المهنية في مركز الدراسات النووية في جامعة تكساس بمدينة أوستن حيث حصل على درجة الدكتوراه في الفيزياء النووية التجريبية عام 1975. بعد ذلك، انتقل إلى مختبر لورانس بيركلي الوطني (LBNL) في مدينة بيركلي بولاية كاليفورنيا لإكمال عمله في مرحلة ما بعد الدكتوراه في مجال فيزياء الطاقة النووية العالية، وقد ظل بعدها يعمل عالمًا في المختبر. في أثناء عمله في مختبر لورانس بيركلي الوطني، اشتهر الدكتور ويستفال على المستوى الدولي، وذلك لعمله المتعلق بنموذج كرة اللهب النووية واستخدام التجزئة لإنتاج نواة غير مستقرة. في عام 1981، انضم الدكتور ويستفال إلى المختبر الوطني للمسرع الدوراني فائق التوصيل (NSCL) بجامعة ميشيغان (MSU) كأستاذ باحث؛ حيث صمم كاشف جامعة ميشيغان MSU 4*p* وأنشأه وأداره. أنتجت أبحاثه التي استخدم فيها كاشف جامعة ميشيغان 4*p* الكثير من المعلومات المتعلقة باستجابة المادة النووية عند انضغاطها خلال انهيار المستعر الأعظم. وفي عام 1987، انضم د. ويستفال إلى قسم الفيزياء والفلك بجامعة ميشيغان، لكنه لم يتوقف عن متابعة أبحاثه في المختبر الوطني للمسرع الدوراني فائق التوصيل (NSCL). أما في عام 1994، فانضم د. ويستفال إلى مجموعة تعاون المتتبع اللولبي في مصادم الأيونات الثقيلة بسرعات النسبية (STAR Collaboration) في مختبر بروكهافن الوطني في لونغ آيلاند بنيويورك. وفي عام 2003، عُين أستاذًا متميزًا في جامعة ميشيغان.

الشراكة بين ويستفال وباور تعاون الدكتوران باور وويستفال في العمل على أبحاث الفيزياء النووية وأبحاث تدريس الفيزياء لمدة تزيد على عقدين من الزمان. بدأت هذه الشراكة عام 1998. حينها كان كلا المؤلفين يلقي خطابًا في مؤتمر واحد وقررا أن يذهبا إلى التزلج معًا بعد انتهائه. في هذه المناسبة، عيّن ويستفال د. باور لينضم إلى جامعة ميشيغان (وذلك ببعض التهديد بدفعه من الزلاجة إذا رفض). وقد حصلا على تمويل من مؤسسة العلوم الوطنية لتطوير أساليب جديدة للتدريس وأنشطة المختبر، كما أصدرا أقراص مضغوطة عن الفيزياء لطلابهما في مدرسة ليمان بريغز وشاركا في تأليف كتاب مدرسي عن القرص المضغوط يُسمى *cliXX Physik*. في عام 1992، كانا من أوائل الداعمين لاستخدام الإنترنت في التدريس والتعلم من خلال تطوير الإصدار الأول من نظام الواجب المنزلي عبر الإنترنت. وفي السنوات التالية، كان لهما دور فعال في إنشاء شبكة التعلم عبر *الإنترنت* بالاشتراك مع شبكة التعليم العالمية (CAPA)، ويستخدم هذه الشبكة الآن ما يزيد على 70 جامعة وكلية في الولايات المتحدة وجميع أنحاء العالم. وبدايةً من عام 2008، شارك باور وويستفال مع فريق من المدرسين والمهندسين والفيزيائيين ممن يبحثون في استخدام التعلم بمساعدة الأقران في تدريس منهج الفيزياء التمهيدي. تلقى هذا المشروع تمويلًا من مؤسسة العلوم الوطنية وبرنامج توسيع المواهب في العلوم والتقنية والهندسة والرياضيات، ويتضمن هذا الكتاب المدرسي أفضل أساليب المشروع وممارساته.

إهداء إننا نهدي هذا الكتاب إلى عائلاتنا. فلولا صبرهم وتشجيعهم ودعمهم، ما تمكنا من إتمامه.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

رسالة من المؤلفين

يسعدنا أن نقدم لكم الإصدار الثاني من كتاب الفيزياء. إنّ الفيزياء من العلوم المزدهرة والحيوية، فهي تطرح تحديات فكرية والعديد من مسائل البحث بشأن موضوعات مختلفة، بدايةً من أكبر المجرات وحتى أصغر الجسيمات دون الذرية. لقد تمكّن علماء الفيزياء من تزويدنا بالفهم وتوضيح الاتساق والنظام الذي يكمن في عالمنا، كما أنهم وضحوا أنّ العالم يمكن التوقع به، وسيستكملون هذا المسعى الذي سيأخذنا إلى المستقبل المثير.

لكننا عندما نطالع معظم الكتب التمهيدية الحالية في الفيزياء، نجد أنّ كلًا منها يسرد قصة مختلفة؛ حيث تُقدَّم الفيزياء بصفتها علمًا مكتملًا حدثت التطورات المهمة فيه إما في عصر نيوتن أو في بداية القرن العشرين. أمّا الفيزياء "المعاصرة"، فلا نطالعها إلا في نهاية الكتب القياسية، وغالبًا نجد أنّ عرضها يقتصر على تناول الاكتشافات التي ظهرت خلال سبعينيات القرن العشرين.

إنّ دافعنا في كتابة هذا الكتاب هو تغيير ذلك المفهوم من خلال تضمين الفيزياء المعاصرة المثيرة على مدار الكتاب. فالفيزياء من العلوم التي تتسم بالتغير بشكل مدهش؛ حيث يحفل دائمًا بالاكتشافات والتطبيقات الفارقة التي تغير من حياتنا. ولمساعدة الطلاب على إدراك ذلك، يجب أن نخبرهم قصة الفيزياء بالكامل وذلك من خلال تضمين الفيزياء المعاصرة في هذا المقرر الذي يستند إلى حساب التفاضل والتكامل. وقد عملنا على تحقيق ذلك بدايةً من الفصل الدراسي الأول، حيث تتوفر العديد من الفرص لاستكشاف الفيزياء المعاصرة من خلال تضمين النتائج الحديثة من علم الحركة غير الخطية ونظرية الفوضى والتعقيد وأبحاث الفيزياء عالية الطاقة في هذا المنهج التمهيدي. ولأننا نجري العديد من الأبحاث في هذه المجالات، فإننا نعلم أنّه يمكن للطلاب فهم أساسيات العديد من النتائج الحديثة في هذه المجالات؛

فالنتائج الحديثة في الطاقة المتجددة والبيئة والهندسة والطب والتكنولوجيا توضح الإثارة الفكرية التي تتسم بها الفيزياء، مما يشجع الطلاب وينعش الأجواء في الصفوف الدراسية فيسهّل ذلك على المعلم مهمته ويجعلها مهمة ممتعة. وبصفة خاصة، فإننا نعتقد أنّ مناقشة موضوع عام مثل موضوع الطاقة سيكون فرصة جيدة لنجذب انتباه الطلاب واهتمامهم. فالمفاهيم المتعلقة بموارد الطاقة (الوقود الأحفوري والطاقة المتجددة والطاقة النووية وغير ذلك) وكذلك كفاءة الطاقة وتخزين الطاقة وموارد الطاقة البديلة والتأثيرات البيئية التي تترتب على اختيارات أنواع إمدادات الطاقة (مثل الاحترار العالمي وتحمّض المحيطات)، من المفاهيم التي يسهل على الطلاب فهمها في مستوى المنهج التمهيدي في الفيزياء. لقد اتضح لنا أن مناقشة موضوع الطاقة هو أكثر ما يثير اهتمام الطلاب، لذا فقد تناولنا جوانب مختلفة لموضوع الطاقة على مدار هذا الكتاب.

وبالإضافة إلى التعرف على عالم الفيزياء المدهش، سيستفيد الطلاب استفادةً كبيرة، حيث سيكتسبون القدرة على **حل المسائل والتفكير المنطقي في مختلف المواقف.** تقوم الفيزياء على مجموعة من الأفكار الأساسية التي تُعد أساسًا للعلوم جميعها. ونحن نعلم ذلك ولذا فإننا نقدم في هذا الكتاب طريقة مفيدة لحل المسائل (موضحة في الوحدة 1)، وهي تُستخدم على مدار الكتاب بأكمله. تتضمن هذه الطريقة صيغة متعددة الخطوات كنا قد طورناها مع طلابنا في الصفوف الدراسية؛ لكنّ إتقان المفاهيم لا يقتصر على ذلك فحسب، بل يتضمن تطبيقها كذلك. ولهذا السبب، طلبنا من عشرات المساهمين في الكتاب ممن يعملون في جامعات البلد البارزة، أن يبذلوا أفضل ما في وسعهم في التمارين الموجودة في نهاية كل وحدة. وقد أضفنا إلى هذا الإصدار حوالي 400 تمرين بمعطيات متعددة، بحيث تسمح للطلاب بتناول المسألة الواحدة من أكثر من منظور مختلف.

في عام 2012، نشر مجلس البحث الوطني إطارًا لتعليم العلوم من مرحلة رياض الأطفال إلى الثانوية، ويتناول هذا الإطار التطبيقات الأساسية في العلوم والهندسة والمفاهيم التي توجد تطبيقاتها في المجالات والأفكار الأساسية في مجالات التخصصات الأربعة (في الفيزياء، توجد المادة وتفاعلاتها والحركة والاستقرار والطاقة والموجات وتطبيقاتها في نقل المعلومات). وقد صممنا الإصدار الثاني من هذا الكتاب لربط دراسة الطلاب للفيزياء بهذا الإطار. وقدمنا جزء التأكد من مراجعة المفاهيم وأسئلة للاختبار الذاتي في كل وحدة.

مع وضع كل ذلك في الاعتبار، إضافةً إلى رغبتنا في كتابة كتاب شيق، فقد صممنا ما نأمل أن يكون أداةً لكي يستخدم الطلاب مخيلتهم وإعدادهم بشكل أفضل لتلقي دورات في المستقبل في المجالات التي يختارونها (وبالطبع فإننا نأمل أن يتخصص بعض الطلاب في دراسة الفيزياء). إنّ التعقيبات التي قدمها لنا ما يزيد على 400 شخص، بما فيهم مجلس من المستشارين والعديد من المساهمين والمراجعين والمشاركين في مجموعة التركيز وكذلك الاختبار الميداني لأفكارنا مع 6000 طالب تقريبًا من الطلاب الذين يدرسون منهج الفيزياء التمهيدي في جامعة ميشيغان. قد ساعدنا مساعدةً كبيرة في إنجاز هذا المشروع الضخم. فخالص الشكر لكم جميعًا!

—فولف جانج باور وغراي د. ويستفال

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المحتويات

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7 كمية الحركة والتصادمات 188

الجزء 2: الأجسام غير النقطية والمادة والحركة الدائرية

8 الأجسام الجاسئة 225

9 الحركة الدائرية 254

10 الدوران المحوري 284

11 الاتزان السكوني 324

12 الجاذبية 350

13 النسبية 384

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

كيفية استخدام هذا الكتاب

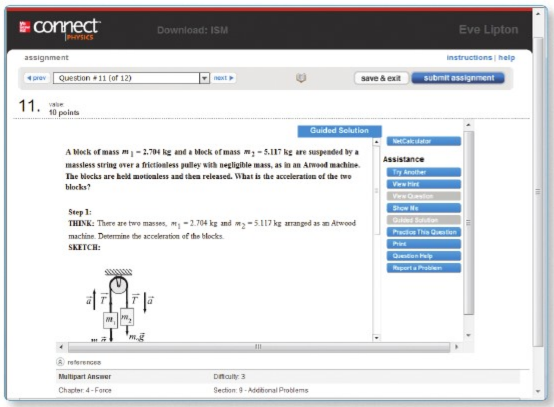
مهارات حل المسائل: تعلم التفكير مثل العلماء

ربما تكون أهم المهارات التي يمكن للطالب أن يتعلمها من منهج الفيزياء هي القدرة على **حل المسائل والتفكير الناقد في أي موقف.** تقوم الفيزياء على أساس مجموعة من الأفكار الأساسية التي يمكن تطبيقها على العديد من المواقف والمشكلات. في *هذا الكتاب* الذي ألفه باور وويستفال، يركز المؤلفان على حل المسائل ويقدمان لها طريقة كانا قد اختبراها في الصفوف الدراسية قبل استخدامها في هذا الكتاب. وهذه الطريقة تتمثل في صيغة متعددة الخطوات.

طريقة حل المسائل

المسائل المحلولة

إنّ **المسائل المحلولة** المرقمة عبارة عن مسائل محلولة بالكامل، ويتبع كل منها طريقة الخطوات السبع الموضحة في القسم 1.5. تبدأ كل مسألة محلولة منها بعبارة المسألة ويليها الحل الكامل، كما تُستخدم طريقة الخطوات السبع في الربط



بالفيزياء. تُوضّح الخطوات السبع المعتادة في إرشادات الحل مع مساعدة إضافية إذا كنت تحتاج إليها.

مسألة محلولة 13.2 الجسيمات الموجودة في المسرِّع

افترض أن لديك إلكترونًا وجسيم ألفا (نواة ذرة هيليوم) يتحركان عبر جزء من أنبوب شعاعي داخل مسرِّع الجسيمات. وتتحرك الجسيمات في الاتجاه نفسه. تبلغ سرعة الإلكترون $0.830c$ وسرعة جسيم ألفا 0.750c، ولقد قاس هاتَين السرعتَين ملاحظ ثابت في المختبر.

المسألة

ما سرعة جسيم ألفا كما لوحظت من الإلكترون، بدلالة سرعة الضوء؟

الحل

فكِّر يتخطى الإلكترون سرعة جسيم ألفا. نظرًا لأنه أسرع. وفقًا لقياس الملاحظ الثابت في المختبر. يمكن أن يميل المرء إلى بناء استدلالات من النوع $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$. ولكن مع توفر تحويل السرعة المتجهة النسبية، أصبح من السهل كثيرًا حل هذه المسألة بهذه الطريقة. افترض أنّ جميع السرعات المتجهة المعلومة تقع في اتجاه x الموجب. كل ما علينا القيام به هو أن نكون حذرين تجاه السرعات التي نحددها بوصفها v وux و$u'x$. يمكننا بعد ذلك استخدام المعادلة 13.17 أو المعادلة 13.18 لإيجاد الإجابة.

ارسم الشكل 13.13 عبارة عن رسم لإلكترون يعبر جسيم ألفا.

ابحث لدينا مناطا إسناد. مناط أصلي F بنقطة أصل على الأرض ومناط F بنقطة أصل على الإلكترون، يتحركان بسرعة متجهة ثابتة $\vec{V}$ بالنسبة إلى المختبر.

إنَّ إيجاد السرعة المتجهة u'_x لجسيم ألفا في مناط الإلكترون يتضمن التحويل النسبي للسرعات المتجهة، حيث إنّ السرعة المتجهة u_x لجسيم ألفا في مناط المختبر معلومة بالفعل. يمكننا بعد ذلك استخدام المعادلة 13.17 لتحقيق هدفنا في إيجاد

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}.$$

بسِّط لا يوجد الكثير لتبسيطه في هذه الحالة. وتمثَّل معظم العمل هنا في تحديد أي كمية يتم قياسها في أي مناط وتحديد السرعة المتجهة النسبية الصحيحة للمناطات.

احسب عند التعويض بالقيم العددية نحصل على

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} = \frac{0.750c - 0.830c}{1 - \frac{(0.830c)(0.750c)}{c^2}} = -0.2119205c.$$

قرِّب سنقرب النتيجة إلى ثلاثة أرقام معنوية:

$$u'_x = -0.212c.$$

تحقَّق ثانية العلامة السالبة للسرعة المتجهة لجسيم ألفا كما يراها الإلكترون منطقية لأن جسيم ألفا سيبدو وكأنه يقترب من الإلكترون في اتجاه x السالب. إذا حسبنا السرعة المتجهة النسبية بين الإلكترون وجسيم ألفا بشكل غير نسبي، فسنحصل على

$$v_{rel} = v_{alpha} - v_{electron} = 0.750c - 0.830c = -0.080c.$$

بالنظر إلى الحل، يمكننا أن نرى أن المعامل $|1/(1 - u_x v/c^2)|$ يُعدِّل فرق السرعة المتجهة غير النسبية. عندما تُصبح السرعات المتجهة للإلكترون وجسيم ألفا جزءًا كبيرًا من سرعة الضوء، سيُصبح هذا المعامل أكبر من 1. وسيكون مقدار فرق السرعة المتجهة النسبية أكبر من مقدار فرق السرعة غير النسبية. ومن ثَمَّ، تبدو النتيجة التي توصلنا إليها منطقية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الأمثلة

أما **الأمثلة** الموجزة (عبارة المسألة والحل فقط)، فتركز على نقطة معينة أو مفهوم معين. كما تمثل هذه الأمثلة حلقة وصل بين الأمثلة المحلولة بالكامل (بالخطوات السبع) ومسائل الواجب المنزلي.

مثال 9.1 تحديد موقع نقطة باستخدام الإحداثيات الديكارتية والقطبية

نقطة موقعها محدّد بالإحداثيات الديكارتية (4,3)، كما هو موضح في الشكل 9.4.

المسألة

كيف يمكننا تمثيل موقع هذه النقطة بالإحداثيات القطبية؟

الحل

باستخدام المعادلة 9.1، يمكننا حساب الإحداثي القطري:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

باستخدام المعادلة 9.2، يمكننا حساب الإحداثي الزاوي:

$$\theta = \tan^{-1}(y/x) = \tan^{-1}(3/4) = 0.64 \text{ rad} = 37°.$$

لذا يمكننا التعبير عن موقع النقطة P بالإحداثيات القطبية بالصيغة التالية $(r, \theta) = (5, 0.64 \text{ rad}) = (5, 37°)$.

لاحظ أنه يمكننا أن نحدد الموقع نفسه عن طريق جمع (أي مضاعفات صحيحة لـ) 2π rad أو $360°$ على θ:

$$(r,\theta) = (5, 0.64 \text{ rad}) = (5, 37°) = (5, 2\pi \text{ rad} + 0.64 \text{ rad}) = (5, 360° + 37°).$$

إرشادات حل المسائل

ترد **إرشادات حل المسائل** قبل مجموعة التمارين الموجودة في نهاية الوحدة وهي تلخص المهارات أو الأساليب المهمة التي يمكن أن تساعدك في حل المسائل المتعلقة بمحتوى الوحدة. إنّ النهج المتمثل في هذا الكتاب، هو أنّ الفيزياء تقوم على أساس مجموعة من الأفكار الأساسية التي يمكن تطبيقها على العديد من المواقف والمشكلات. لذا يؤكد الكتاب على أنه لا توجد طريقة واحدة لحل جميع المسائل ويساعدك على استخدام التفكير الناقد بشأن الطريقة الأكثر فعالية في حل المسائل قبل أن تبدأ في الحل.

إرشادات حل المسائل: قوانين نيوتن

يُعدّ تحليل الموقف من حيث القوى والحركة مهارة مهمة للغاية في الفيزياء. كما أن التطبيق الصحيح لقوانين نيوتن من الأساليب بالغة الأهمية. ستساعدك الإرشادات التالية في حل مسائل الميكانيكا من خلال قوانين نيوتن الثلاثة. كما أنها تشكل جزءًا من استراتيجية الخطوات السبع لحل كل أنواع مسائل الفيزياء، وهي وثيقة الصلة بخطوات ارسم وفكّر وابحث.

1. قد يساعدك الرسم البياني الكلي على التصور المرئي للموقف وتحديد المفاهيم المتضمنة، ولكنك ستحتاج أيضًا إلى مخطط الجسم الحر المنفصل لكل جسم لتحديد القوى المؤثرة في هذا الجسم لا في غيره. ويُعدّ إنشاء مخططات الجسم الحر الصحيحة مفتاحًا لحل كل المسائل في الميكانيكا، سواء أتضمنت أجسامًا ساكنة (غير متحركة) أم أجسامًا متحركة. تذكر أنه يجب ألا يتضمن أي من مخططات الجسم الحر ma الناتجة عن قانون نيوتن الثاني باعتبارها قوة.

2. ويعد اختيار النظام الإحداثي مهمًا، فعادةً ما يُفرّق اختيار النظام الإحداثي بين المعادلات البسيطة جدًا والمعادلات الصعبة للغاية. وفي أغلب الأحيان، يكون من المفيد اختيار محور على طول اتجاه عجلة الجسم نفسه، إن وجدت. وفي مسائل الأجسام الساكنة، سيكون من المفيد عادة توجيه محور على طول سطح، سواء أكان أفقيًا أو مائلًا. ويعد اختيار النظام الإحداثي الأكثر ملاءمة مهارة مكتسبة تحصل عليها عن طريق خبرتك التي تزيد مع حل العديد من المسائل.

3. بمجرد اختيار اتجاهات الإحداثيات، حدد ما إذا كان الموقف يتضمن العجلة في أحد الاتجاهين. فعلى سبيل المثال، إذا لم تحدث عجلة في اتجاه y، فعندئذٍ ينطبق قانون نيوتن الأول في هذا الاتجاه، ويساوي مجموع القوى (محصّلة القوة) صفرًا. إذا حدثت العجلة في اتجاه محدد، على سبيل المثال، في الاتجاه x، فعندئذٍ سينطبق قانون نيوتن الثاني في ذلك الاتجاه، وستساوي محصّلة القوة كتلة الجسم مضروبة في عجلته.

4. عندما تحلل متجه قوة إلى مركّبات على طول اتجاهات الإحداثيات، انتبه إلى الاتجاه الذي يتضمن جيب زاوية محددة والاتجاه الذي يتضمن جيب التمام. لا تعمم بناءً على المسائل السابقة وتعتقد أن كل المركّبات في الاتجاه x تتضمن جيب التمام؛ لأنك ستجد مسائل تتضمن فيها مركّبة x جيب زاوية. اعتمد على التعريفات الواضحة للزوايا واتجاهات الإحداثيات وهندسة الموقف المحدد. حيث تظهر الزاوية نفسها في كثير من الأحيان عند نقاط مختلفة وبين مستقيمات مختلفة في المسألة. ينتج عن هذا عادةً مثلثات متماثلة، تحتوي غالبًا على زوايا قائمة. إذا صممت رسمًا بيانيًا لمسألة تحتوي على زاوية عامة θ، فحاول أن تستخدم زاوية ليست قريبة من $45°$. لأنه سيصعب التمييز بين مثل هذه الزاوية ومتممتها في رسمك.

5. تحقق دائمًا من إجابتك النهائية. هل تبدو الوحدات منطقية؟ هل المقادير معقولة؟ إذا غيرت متغيرًا لتقترب من قيمة حدية، فهل ستقدم إجابتك توقعًا صحيحًا لما سيحدث؟ يمكنك تقدير إجابة المسألة أحيانًا باستخدام تقريبات القيمة الأسية، كما ناقشنا في الوحدة 1؛ فمثل هذا التقدير يكشف غالبًا ما إذا ارتكبت خطأً حسابيًا أو إذا كتبت صيغة غير صحيحة.

6. دائمًا تكون قوة الاحتِكاك مضادة لاتجاه الحركة وتؤثر في اتجاه موازٍ لسطح التلامس؛ وتكون قوة الاحتِكاك السكوني مضادة للاتجاه الذي سيتحرك فيه الجسم. في حالة عدم وجود قوة احتِكاك. لاحظ أن قوة الاحتِكاك الحركي *تساوي* ناتج ضرب معامل الاحتِكاك في القوّة العمودِيّة، بينما تكون قوة الاحتِكاك السكوني *أقل* من ذلك الناتج أو مساوية له.

مجموعات التمارين وأسئلة نهاية الوحدة

إلى جانب توفير إرشادات وأمثلة واستراتيجيات لحل المسائل، يقدم *هذا الكتاب* أيضًا **مجموعة كبيرة من الأسئلة والتمارين في نهاية الوحدة.** وتتضمن كل وحدة أنواعًا عديدة من الأسئلة مثل أسئلة الاختيار من متعدد والأسئلة المفاهيمية والتمارين (في كل قسم) والتمارين الإضافية (ليست حسب الأقسام "مفتاح للحل") وتمارين بمعطيات متعددة. وتوضع على التمرينات الصعبة علامة نقطة واحدة. أما التمرينات الأكثر صعوبة فتوجد عليها علامة نقطتَين.

تمهيد مبادئ التفاضل والتكامل

يفترض الكتاب معرفة الطالب بالفيزياء والرياضيات في مستوى المرحلة الثانوية. من المفضل أن يكون الطلاب قد درسوا مقررًا تمهيديًا في التفاضل والتكامل قبل أن يبدؤوا في دراسة هذه المقرر. ويمكن دراسة المقررين في الوقت ذاته. ولتسهيل ذلك الأمر، يورد الكتاب تمهيدًا لمبادئ التفاضل والتكامل في أحد الملاحق، بحيث يقدم النتائج الأساسية للتفاضل والتكامل بدون ذكر الاشتقاقات الصعبة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

لمحة عامة عن الوحدة

في بداية كل وحدة، توجد لمحة عامة توضح عناوين الأقسام التي ترد في الوحدة. كما تتضمن أيضًا عناوين الأمثلة والمسائل المحلولة في الوحدة. ومن ثمّ، تستطيع في نظرة سريعة، أن تعرف ما إذا كانت الوحدة تتضمن موضوعًا أو مثالًا أو مسألة محددة.

ما ستتعلمه/ما تعلمناه

صُممت كل وحدة من *هذا الكتاب* بتصميم ندوة بحثية جيدة. وقد قيل في ما سبق "أخبرهم ما سوف تخبرهم به، ثم أخبرهم به، ثم أعد عليهم ما أخبرتهم!" تبدأ كل وحدة بفقرة **ما ستتعلمه** — وهي ملخص سريع للنقاط الأساسية بدون أي معادلات. وفي نهاية كل وحدة، ستجد **ما تعلمناه/دليل المذاكرة للاختبار** وهما يتضمنان المفاهيم الأساسية بما في ذلك المعادلات الرئيسة.

ما ستتعلمه

- كمية الحركة لجسم ما هي ناتج ضرب كتلته في سرعته المتجهة. وكمية الحركة كمية متجهة وتكون في اتجاه متجه السرعة المتجهة نفسه.
- يمكن التعبير عن قانون نيوتن الثاني بصيغة عامة كما يلي: محصّلة القوى المؤثرة في جسم ما تساوي مشتقة الزمن لكمية حركة الجسم.
- يطلق على التغير في كمية الحركة *الدفع*، ويُقصد به تكامل محصّلة القوى التي تسبب تغير كمية الحركة بالنسبة إلى الزمن.
- في كل التصادمات، يتم حفظ كمية الحركة.
- بالإضافة إلى حفظ كمية الحركة، تتميز التصادمات المرنة أيضًا بخاصية حفظ الطاقة الحركية الإجمالية.
- في التصادمات اللامرنة تمامًا، يتم التخلص من أقصى قدر من الطاقة الحركية وتلتصق الأجسام المتصادمة معًا. ومن ثَمَّ، لا يتم حفظ الطاقة الحركية الإجمالية، لكن يتم حفظ كمية الحركة.
- التصادمات التي ليست مرنة وليست لامرنة تمامًا هي تصادمات لامرنة جزئيًا، ويتناسب التغيُّر في الطاقة الحركية مع مربع معامل الارتداد.
- ينطبق حفظ كمية الحركة على المجالات بعيدة المدى مثل فيزياء الجسيمات، حيث تُستخدم في اكتشاف الجسيمات الجديدة ونظرية الفوضى التي تُستخدم لإثبات أنه لا يمكن توقع أنماط الطقس على المدى البعيد.

تقديم المفاهيم

تُشرح المفاهيم في النص الذي يسبق أي شروحات رياضية أو صيغ أو اشتقاقات، وذلك لترسيخ السبب في ضرورة وجود المفهوم أو الكمية وأهميتها، إضافة إلى أهمية تحديدها بدقة. وبعد ذلك، ينتقل المؤلفان من شرح المفاهيم والتعريفات إلى الصيغ والمصطلحات الدقيقة.

سؤال الاختبار الذاتي 5.3

الكتلة معلقة عموديًا من الزنبرك عند إزاحة من موضع الاتزان. تُسحب الكتلة إلى أسفل قليلًا وبعد ذلك يتم تحريرها من السكون. ارسم مخطط الجسم الحر للكتلة في كل من الحالات التالية:

a) الكتلة عند إزاحة من موضع الاتزان.

b) الكتلة عند أعلى نقطة عمودية لها.

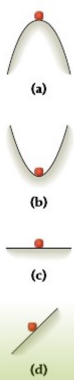
c) الكتلة عند أدنى نقطة عمودية لها.

أسئلة الاختبار الذاتي

في كل وحدة، تركز مجموعة من الأسئلة على المفاهيم الرئيسة في النص، وذلك لتشجيع الطلاب على تنمية حوار داخلي. وهذه الأسئلة ستساعد الطلاب على استخدام التفكير الناقد بشأن ما قرؤوه للتو وتحديد ما إذا كانوا يفهمون المفهوم. إضافةً إلى وضع قائمة بأسئلة للمتابعة يسألونها في الصف. توجد إجابات أسئلة الاختبار الذاتي في نهاية كل وحدة.

مراجعة المفاهيم 6.7

أي من الرسومات الأربعة يمثل نقطة اتزان مستقرة للكرة على السطح الداعم لها؟



مراجعة المفاهيم

صُممت مراجعة المفاهيم كي تُستخدم مع تكنولوجيا نظام الإجابة الشخصية. وسوف تظهر في النص حتى تبدأ في التفكير بشأن المفاهيم، لكنّ الإجابات ستكون متاحةً للمعلمين فقط.

دليل الحلول للطالب

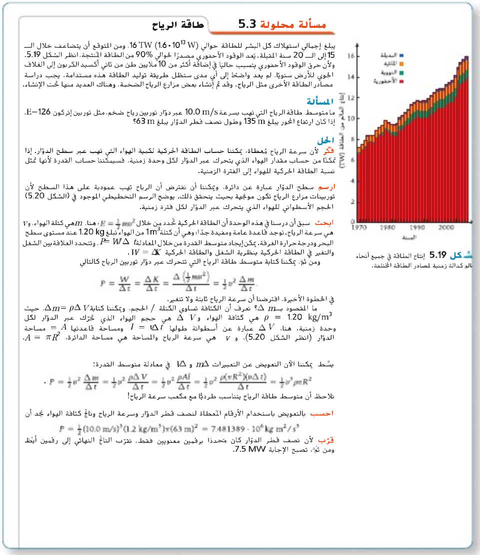
يحتوي *دليل الحلول للطالب* على إجابات وحلول أسئلة معينة من أسئلة نهاية الوحدة والتمارين (المميزة برقم أزرق). وجميع الأسئلة المحلولة في الوحدات من 1 إلى 13، تتبع طريقة الخطوات السبع لحل المسائل، والتي يوضحها القسم 1.5. وفي الوحدات من 14 إلى 40، يقتصر استخدام طريقة الخطوات السبع على التمرينات الصعبة (نقطة واحدة) والتمرينات الصعبة جدًا (نقطتان). أما الأسئلة العادية (بدون نقاط)، فتتوفر لها حلول مختصرة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إدراك الصورة العامة

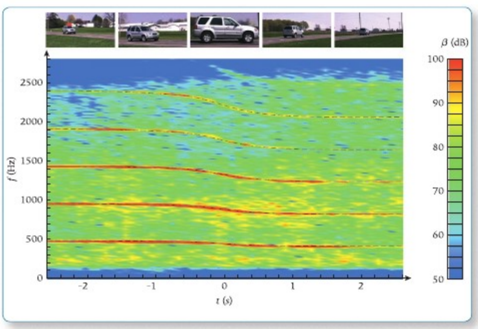
أمثلة معاصرة

دمج المؤلفان في الكتاب نتائج بعض الأبحاث الفيزيائية الحديثة، مثل النتائج المتعلقة بالطاقة المتجددة والبيئة والفضاء الجوي والهندسة والطب والتكنولوجيا، حيث توضح تلك الأمثلة أنّ الفيزياء مجال شيق ويحفز على التفكير. يوفر مركز موارد الطالب المتاح عبر الإنترنت على www.mhhe.com/bauerwestfall2e مجموعة من العناصر التي تعزز من فهمك وتساعدك على الاستعداد لمحاضراتك وتجاربك واختباراتك.



الكتاب الإلكتروني ConnectPlus

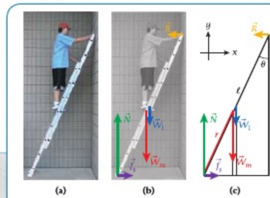
يُزودك الكتاب بالوسائط المتعددة، ومنها مقاطع فيديو للمؤلفين وتطبيقات تمكنك من استكشاف المبادئ الأساسية في الفيزياء وكذلك بعض الصور. ويتيح لك الكتاب الإلكتروني إمكانية تدوين الملاحظات والتظليل. إضافةً إلى إمكانية البحث عن كلمات أو عبارات محددة. كما تتوفر جميع الأشكال ومقاطع الفيديو والمحتوى التفاعلي الموجود في الكتاب المدرسي، مع ذكر السطر والوحدة. لذا يمكنك أن تنتقل إلى الموارد التي تريدها مباشرةً. تتضمن واجبات LearnSmart والواجب المنزلي عبر الإنترنت روابط الكتاب الإلكتروني ConnectPlus، حتى إذا واجهت صعوبة في حل أي من التمارين أو استيعاب المفاهيم، يمكنك الانتقال مباشرةً إلى الجزء المتعلق به في الكتاب.



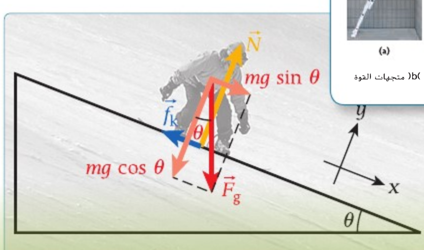
البرنامج البصري

إنّ المعرفة بالمخططات والرسوم المتحركة المتوفرة عبر الإنترنت وألعاب الفيديو، قد رفعت من مستوى وحجم التمثيلات البيانية في الكتب المدرسية، حيث يجب أن تكون متطورة بدرجة كافية لتثير اهتمام الطالب وهيئة التدريس. وفي ما يلي بعض الأفكار والأساليب التي يتضمنها *هذا الكتاب*:

- أُضيفت الرسومات الخطية على الصور الفوتوغرافية لربط بعض المفاهيم الفيزيائية المجردة بواقع الطلاب وخبراتهم الحياتية.
- يضفي المظهر ثلاثي الأبعاد للرسومات الخطية المرونة للعروض التقديمية. أنشأ المؤلفان تمثيلات بيانية رياضية دقيقة باستخدام برامج حاسوبية مثل Mathematica. كما استخدمها أيضًا مصممو الرسوم لضمان الجودة الكاملة والمظهر الشيق.



الشكل 11.12 (a) طالب يقف على سلم. (b) متجهات القوة المتراكبة. (c) مخطط جسم حر للسلم.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education
©W. Bauer and G. D. Westfall

شكر وتقدير

إنّ إنتاج كتاب كالذي تمسكونه بين أيديكم، لم يكن ليتحقق لولا المجهود العظيم الذي بذله عدد هائل من الأفراد المتفانين. أولًا وقبل كل شيء، نود أن نشكر فريق التحرير والتسويق الموهوب من McGraw-Hill، حيث عمل على الإصدار الأول والثاني من هذا الكتاب: مارتي لانج وكينت بيترسون وتوماس تيمب وريان بلانكنشيب وماري هارلي وليز ريكر وداريل بروفلودت وليزا نيكس ودان والاس. ونخص بالشكر، مايكل لانج وإيف ليبتون وبيل ويلش وكيرت رينولدس وديب هاش، فقد قدموا لنا الكثير من المساعدات وبشتى الطرق، كما أنهم حرصوا على تشجيعنا بعد انتهاء كل مرحلة من مراحل المراجعة. إنّ روح الفريق التي يتمتعون بها وحس الدعابة والتفاؤل اللامتناهي، شجعنا على استكمال مسيرتنا وجعل من الساعات الطويلة التي أمضيناها في إنتاج الكتاب، وقتًا ممتعًا.

كما ساعدنا محررو التطوير ريتشارد هاينز ودايفيد تشيلتون وماري هارلي وإيف ليبتون، في العمل على التعليقات والاقتراحات الكثيرة التي تلقيناها من المراجعين من أجل تحسين الكتاب. لذا، فإنهم يستحقون وهم وسائر المراجعين والمستشارين، حظًا كبيرًا من الثناء والتقدير لعملهم على تحسين جودة المخطوطة النهائية وكذلك زملاؤنا في كلية الفيزياء والفلك بجامعة ميشيغان: أليكساندرا جيد وأليكس براون وبرنارد بوب وكارل شميت وتشونغ يو روان وك.ب. يوان ودان ستامب وإد براون وهندريك شاتز وكريس ستاروستا وليزا لابيدوس ومايكل هاريسون ومايكل مور وراينهارد شوينهورست وسلامة أحمد وس.ب. ماهانتي وسكوت برات وستان شرايبر وتيبور ناجي وتوماس دوجيت، فقد ساعدونا مساعدةً عظيمة، حيث درسوا لصفوفهم المحتوى الذي طورناه وأمدونا بتعليقاتهم القيمة بشأن النقاط الجيدة والنقاط التي تحتاج إلى التعديل؛ ولذا فإننا نشكرهم جميعًا. كما نشكر كل من ساهموا في وضع المسائل، فقد بذلوا مجهودات عظيمة، ونخص بالشكر ريتشارد هالشتين الذي تولى مهمة تنظيم عمل جميع المساهمين.

وفي هذه المرحلة، عند تسليم النسخة النهائية إلى الناشر، اضطلع فريق جديد بأكمله من المحترفين بالعمل، وأضاف تعديلات جديدة هي التي حولت هذه النسخة إلى كتاب. أما كيرت نورلين وفريق من LaurelTech (وهي فرع من diacriTech)، فقد اضطلعوا بالعمل على مسائل الواجب المنزلي ومراجعة جميع التمارين والأعداد والمعادلات التي كتبناها. كما نشكر فريق البحث عن الصور، وتحديدًا داني ميلدانغ الذي عمل على تحسين جودة الصور المستخدمة في الكتاب بدرجة كبيرة، وجعلوا من عملية الاختيار وقتًا ممتعًا. ونشكر أيضًا فريق Precision Graphics الذي استخدم رسومنا الأصلية لكنه حسّن جودتها بدرجة كبيرة مع الحفاظ على دقة الحسابات التي أنتجت هذه الرسوم. أما محررة الكتاب جين هوفر، فقد جمعت العمل كله في النهاية، حيث نقّحَت ما كتبناه وجعلته سهل الفهم والقراءة. أما فريق التصميم من McGraw-Hill وفريق الإنتاج الذي يتكون من جين كلين ودايفيد هاش وكاري برغر وساندي لودوفيسي وتامي جوران وجودي دايفيد وماري باورز وشيري بادن وأدنيت دور فقد أشرفوا على الكتاب وملحقاته باحترافية حتى أخرجوه للنشر. وكل فرد منهم يستحق منا خالص التقدير والعرفان.

وأخيرًا، لم نكن لنبذل كل هذا الجهد لولا دعم عائلاتنا الذين ساعدونا على العمل في هذا الكتاب خلال العديد من الأمسيات والعطلات وحتى الأعياد والإجازات. لذا نأمل أن يكون صبرهم وتشجيعهم حقق ثماره، ونشكرهم من قلوبنا لمساندتهم إيانا حتى تَمَكنَّا من إكمال هذا الكتاب.

—فولفجانج باور

—غراي د. ويستفال

المراجعون والمستشارون والمشاركون في الإصدار الثاني

نينا أبرامازون، *جامعة كاليفورنيا للتقنية – بومونا*
رويال ألبريدج، *جامعة فاندربيلت*
ديبتي أماراسوريا *كلية نورثويست*
مايكل ج. أندريسن *جامعة كاليفورنيا – سان دييغو*
روي أروناڤا *كلية يونغ هاريس*
أرليت بالجون، *جامعة سان دييغو*
تشارلز بينيش، *كلية ويسليان*
وارد بيرمان *جامعة كاليفورنيا – ريفرسايد*
أنجيلا بيسلي، *جامعة فيرفيلد*
غاي بليلوك، *جامعة ماساتشوستس*
جيف بودارت، *كلية تشيبولا*
كينيث بولاند، *جامعة أوهايو*
بروس بولون، *جامعة هاملاين*
لوكا بومبيلي، *جامعة ولاية ميسيسيبي*
غراي د. برانوم، *جامعة فريندس*
تشارلز بوركهارت، *كلية سان لويس الأهلية – فلوريسانت فالي*
دانكان كارلسميث، *جامعة ويسكونسن – ماديسون*
ريان كيس، *كلية إليزابيث تاون الأهلية التقنية*
جورج كافيريس، *كلية ولاية فارمينجديل*
سوميترا شاتوبادياي *كلية جورجيا هايلاندز*
شيدونغ تشين، *جامعة سيدارفيل*
سكوت كريتيندن، *جامعة جنوب كارولاينا*
دانيل دالافيف، *كلية نيوجيرسي*
دانيل ديل *جامعة وايومنغ*
ديبانغار دوتا، *جامعة ولاية ميسيسيبي*
س. فيشر، *جامعة جورج ماسون*
جوهان فرانك، *جامعة ولاية لويزيانا*
ستوارت غايسز، *جامعة شيكاغو*
ريتشارد غيلدرمان، *جامعة غرب كنتاكي*
مارغريت غيبيرت، *كلية ويليام ريني هاربر*

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

أواد جرجس جامعة نورث كارولاينا– شارلوت
جيمس غرينغ، معهد فلوريدا للتقنية
باتريك ك. غيبونز، جامعة واشنطن – سانت لويس
جيمس غيلبيرت، جامعة ولاية روز
ك. غولد، جامعة جنوب كاليفورنيا
إدوين إ. هاتش، الثالث، معهد روتشستر للتقنية
مارتن هاكوورث، جامعة ولاية إيداهو
روب هاغوود، كلية واشتيناو الأهلية
جيم هام، كلية بيغ بيند الأهلية
أثولا هيرات، جامعة سليبرى روك– بنسلفانيا
سكوت هيلدريث، كلية شابوت
باربرا هولينغ جامعة كاليفورنيا للتقنية – بومونا
ريتشارد هولاند، جامعة جنوب إلينوي وكلية جنوب شرق إلينوي
جورج إيغو، جامعة كاليفورنيا – لوس أنجليس
ساي ليار، جامعة واشنطن – سانت لويس
هوارد جاكسون، جامعة سينسناتي
أمين جزائري، جامعة جورج ماسون
كريغ جينسن، كلية نورثرن فيرجينيا الأهلية
روبرت جونسون، جامعة كاليفورنيا – سانتا كروز
سكوت كينيدي، جامعة أندرسن
تيموثي كيد، جامعة نورثرن أيوا
يانغسو كيم، جامعة ومعهد فيرجينيا التقنية
يونغ إ. كيم، جامعة بوردو
بريان كوبرلين، معهد روتشستر للتقنية
زالتكو كوينوف، جامعة تكساس – سان أنتونيو
إتشيشيروكونو، جامعة تكساس – سان أنتونيو
إليا كراجنكو، جامعة نبراسكا – لينكولن
راتنابولي كولاسيري، جامعة ثاوزرن التقنية
ألين لانرز، جامعة أوبورن
كوان لي، جامعة سانت لويس الأهلية – ميراميك
تود ر. ليف، جامعة كلاود كاونتي الأهلية
بيدرام ليلابادي، جامعة نورث كارولاينا – شارلوت
ستيف ليبلينغ، جامعة لونغ آيلاند – سي دابليو بوست
مايكليزا، جامعة أوهايو
جورج لوبيز، جامعة تكساس – إلباسو
هونغ لو، جامعة ولاية نيويورك – بافلو
كينغشوك ماجومدار، جامعة ولاية غراند فالي
ليود ماكاروفيتز، كلية ولاية فارمينجديل
بيت ماكاروفيتز، جامعة فلوريدا الدولية
بروس ماسون، جامعة أوكلاهاما – نورمان
كلايستا ماكبرايد، جامعة ناشفيل الأهلية
آرثر ميرز، جامعة ولاية أيوا
رودي ميشالاك، جامعة وايومنغ
جوناثان موريس، جامعة سانت لويس الأهلية – فوريست بارك
ل. كينت موريسون، جامعة نيومكسيكو
ريتشارد موات، جامعة ولاية نورث كارولاينا
راجماني نارايانان، جامعة فلوريدا الدولية
بيتر د. بيرسانس، معهد رينسيلير للتقنية
روبرت فيلبين، كلية ولاية ترينيداد
مايكل بوليتانو، جامعة ماركيت
أمي بوب، جامعة كليمسون
ج. ألبرت بوبسون، الابن كلية ويسليان – ويست فرجينيا
تومي راغلاند، جامعة نيو ميكسيكو– تاوس
روبرتو راموس، جامعة دريكسل
ب. راسموسن، جامعة تكساس – دالاس
دايفيد ريد، جامعة شيكاغو
أدام رينغستورف، جامعة بوردو – كالوميه
مارك ربرايت، كلية بيرمينغهام الجنوبية
جينا سورسي، كلية هيندس الأهلية

ب. شيفيتز، جامعة سليبرى روك – بنسلفانيا
أناندا شاستري، جامعة ولاية مينيسوتا – مورهيد
مارلين سيمون، جامعة أوبورن
دايفيد سليمر، جامعة لاندر
ليه سميث، جامعة سينسناتي
ستيفينستروتش، جامعة جنوب كارولاينا
يوجين سوردوتوفيتش، جامعة أوكلاند
جون ت. تافيرن جامعة سامفورد
مايكل ثاكستون، جامعة ثاوزرن التقنية
كينثيا تريفيزان، أكاديمية كاليفورنيا البحرية – جامعة كاليفورنيا
ماريان تزولوف، جامعة لوك هافن – بنسلفانيا
ك. فيليساريس، جامعة سنترال فلوريدا
دايفيد فيردونك، كلية إلميرا
مارغريت ويسلينغ، كلية بيرس– لوس أنجليس
جوزف ويست، كلية ويسليان– ويست فرجينيا
ويلدون ج. ويلسون جامعة سنترال أوكلاهاما
ماثيو وود، معهد فلوريدا للتقنية
سكوت يوست، ذا سيتادل
تود يونغ، كلية ولاية ويان

المستشارون والمشاركون والمراجعون والمنقحون للإصدار الأول

الحسان العوض جامعة حائل – المملكة العربية السعودية
محمد عبد المنعم، جامعة الملك فهد للبترول والمعادن، ظهران، المملكة العربية السعودية
نينا أبرامازون، جامعة كاليفورنيا للتقنية – بومونا
إدوارد أديلسون، جامعة ولاية أوهايو
موهان أغراوال، جامعة ألاباما الزراعية والميكانيكية
سلامة أحمد، جامعة ولاية ميشيغان
ألبرت ألتمان، جامعة ماساتشوستس في لويل
بول أفيري، جامعة فلوريدا
دايفيد ت. بانون، جامعة ولاية أوريغون
ماركو باتاغليا، جامعة بيركلي – كاليفورنيا ومختبر بيركلي لورانس الوطني
رينيه بيلويد، جامعة ولاية ويان
دوغلاس ر. بيرغمان روتجرز، جامعة ولاية نيوجيرسي
كارلوس برتولاني، جامعة تكساس الزراعية والميكانيكية – كوميرس
لوكا بيرتلو، جامعة كاليفورنيا – لوس أنجليس
بيتر بيرسودورف، جامعة ولاية سان جوزيه
سودب باتاشاريا، معهد ساها للفيزياء النووية، كولكاتا، الهند
هلموت بيريتز، معهد جورجيا للتقنية
كين توماس بولاند، جامعة ولاية أوهايو
ريتشاردبون، جامعة فلوريدا الدولية
ديتر بريل، جامعة ميريلاند – كلية بارك
أليكس براون، جامعة ولاية ميشيغان
إد براون، جامعة ولاية ميشيغان
جيسون براون، جامعة كليمسون
رونالد براون، جامعة كاليفورنيا التقنية– سان لويس أوبيسبو
برانتونج، كامبل، جامعة يونغ بريغام
دانكان كارلسميث، جامعة ويسكونسن – ماديسون
نول كيسن، جامعة نوتردام
جون سيرنيه، جامعة ولاية نيويورك – بافلو
رالف تشامبرلين، جامعة ولاية أريزونا
ك. كيلفن تشانغ، جامعة تكساس التقنية
ك. تشرش، جامعة ميامي بأوهايو– أوكسفورد
يوجينيا شوكان، جامعة كليمسون
روبرت كلير، جامعة كاليفورنيا – ريفرسايد
روي كليرك، جامعة ميشيغان

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ج. م. كولينز، *جامعة ماركيت*
برينت أ. كوربين، *جامعة كاليفورنيا – لوس أنجليس*
ستيفاني كوتو، *جامعة ولاية بنسلفانيا*
ويليام داويك، *كلية ميلواكي للهندسة*
مايك دينين، *جامعة كاليفورنيا – أيرفاين*
جون ديفلين، *جامعة ميشيغان – ديربورن*
جون دينادرو، *جامعة دريكسل*
فيفوس ر. دريميوتيس، *جامعة كليمسون*
مايك دوبسون، *جامعة كولورادو – بولدر*
توماسداجت، *جامعة ولاية ميشيغان*
مايكل دوفرنويس، *جامعة هاواي – مانوا*
دايفيد إلمور، *جامعة بوردو*
روبرت إندورف، *جامعة سينسياتي*
دايفيد إرمر، *جامعة ولاية ميسيسيبي*
هارولد إيفينسن *جامعة ويسكنسن – بلاتفيل*
ليزا ل. إيفريت، *جامعة ويسكنسن – ماديسون*
غاس إيفراد، *جامعة ميشيغان*
مايكل فاميانو، *جامعة ميشيغان الغربية*
فرانك فيرون، *جامعة دريكسل*
ليونارد فاين غولد، *جامعة دريكسل*
راي فراي، *جامعة أوريغون*
أليكساندراجيد، *جامعة ولاية ميشيغان*
ج. ويليام غراي، *جامعة كاليفورنيا – ريفرسايد*
ستوارت غايسز، *جامعة شيكاغو*
ك. غولد، *جامعة جنوب كاليفورنيا*
ب. غرينشتاين، *جامعة كاليفورنيا – سان دييغو*
جون ب. غروبر، *جامعة ولاية سان جوزيه*
شي جان غو، *الجامعة الصينية في هونغ كونغ، شاتن، الأقاليم الجديدة، هونغ كونغ*
إدوين إ. هاتش، الثالث، *معهد روتشستر للتقنية*
ناصر م. حمدان، *الجامعة الأمريكية في الشارقة*
جون هاردي، *جامعة تكساس الزراعية والميكانيكية*
كاثلين أ. هاربر *جامعة دينيسون*
دايفيد هاريسون، *جامعة تورنتو*
مايكل هاريسون، *جامعة ولاية ميشيغان*
ريتشارد هاينز، *جامعة إنديانا*
ساتوشي هيناتا، *جامعة أوبورن*
لورنت هودجز، *جامعة ولاية أيوا*
جون هوبكينز، *جامعة ولاية بنسلفانيا*
جورج ك. هورتون، *جامعة روتجرز*
ت. ويليام هوك، *جامعة ميامي – أوهايو*
إريك هودسون، *معهد ماساتشوستس للتقنية*
يونغ هاه، *جامعة ولاية ساوث داكوتا*
مصطفى حسين، *الأكاديمية العربية للعلوم والهندسة، مصر*
أ. ك. هايدر، *جامعة نوتردام*
دايفيد ك. إنغرام، *جامعة اوهايو – أثينا*
ديان جاكوب، *جامعة ميشيغان الشرقية*
أ.ك جين، *إ.إ.ت. روركي*
رونجينغ جين، *جامعة تينيسي – نوكسفيل*
كيث ل. جونز، *جامعة تينيسي*
ستيفين إ. جونز، *جامعة يونغ بريغام*
تركي كامون، *جامعة تكساس الزراعية والميكانيكية*
ليف كابلان، *جامعة تولين*
جوزيف كابوستا، *جامعة مينيسوتا*
كاثلين كاش، *جامعة كيس وسترن ريسرف*
سانفورد كيرن، *جامعة ولاية كولورادو*
إريك كيناكانون، *جامعة غونزاغا*
إلين كيركباتريك، *معهد روز هالمن للتقنية*
كارستن نودسن، *جامعة الدانمارك التقنية*
بريان د. كوبرلين، *معهد روتشستر للتقنية*

و. دايفيد كالب، الثالث، *معهد جورجيا للتقنية*
أجال كومار، *جامعة جنوب الهادي، فيجي*
فريد كاتنر، *جامعة كاليفورنيا – سانتا كروز*
ديفيد لامب، *جامعة تكساس التقنية*
ليزا لابيدوس، *جامعة ولاية ميشيغان*
أندريه لوكلير، *جامعة كورنيل*
باتريك ر. لوكلير، *جامعة ألاباما*
لويس ليهنر، *جامعة ولاية لويزيانا – باتون روج*
بيدرام ليلابادي، *جامعة نورث كارولاينا – شارلوت*
مايكل ليزا، *جامعة ولاية أوهايو*
م.أ.ك لودهي، *جامعة تكساس التقنية*
صامويل إ. لوفلاند، *جامعة روان*
جيروم لونغ، *جامعة فيرجينيا للتقنية*
س. ب. ماهناتي، *جامعة ولاية ميشيغان*
أ. جيمس مالمان، *كلية ميلواكي للهندسة*
بيت ماكاروفيتز، *جامعة فلوريدا الدولية*
دانيل مارلو، *جامعة برينستون*
بروس ماسون، *جامعة أوكلاهاما*
مارتن ماكهيو *جامعة لويولا*
مايكل مكلنرني، *معهد روز هالمن للتقنية*
دايفيد مكلنتير، *جامعة ولاية أوريغون*
بروس ميلادو، *جامعة ويسكونسن – ماديسون*
مارينا ميلنر-بولوتن، *جامعة ريرسون – تورونتو*
ك. فريد مور، *جامعة تكساس – أوستن*
مايكل مور، *جامعة ولاية ميشيغان*
جيفري مورغان، *جامعة نورثرن أيوا*
كيران مولن، *جامعة أوكلاهاما*
نظير مصطفى، *جامعة الإمام*
تشارلي مايلز، *جامعة تكساس التقنية*
تيبور ناجي، *جامعة ولاية ميشيغان*
ريزا نيجات، *جامعة ماكماستر*
كيرت نيلسون، *جامعة غونزاغا*
مارك نيوباور، *جامعة إلينوي في أوربانا – تشامبين*
سيندي نير، *جامعة ولاية ترابن*
كريغ أوجيلفي، *جامعة ولاية أيوا*
برادفورد ج. أور *جامعة ولاية ميشيغان*
كارور بادمانابهان، *جامعة ولاية وبان*
كيومارس بارفين، *جامعة ولاية سان جوزيه*
جاكلين باو، *جامعة كاليفورنيا – لوس أنجليس*
تود بيدلار، *كلية لوثر*
ليو بيلونين، *فيرجينا التقنية*
أمي بوب، *جامعة كليمسون*
برنارد بوب، *جامعة ولاية ميشيغان*
ك. بورسيجان، *جامعة بونديشيري – بودوتشيري*
سكوت برات، *جامعة ولاية ميشيغان*
إيرل بروهوفسكي، *جامعة بوردو*
كلود برونو، *جامعة ولاية وبان*
وانغ كينغ هاي *جامعة سينغافورة الوطنية*
كورنيليو رابلو، *جامعة كيترينغ*
يوهان رافلسكي، *جامعة أريزونا*
كينيث ج. راغان *جامعة ماكجيل*
روبرتو راموس، *جامعة دريكسل*
أيان ريدماونت، *جامعة سانت لويس*
لورانس ب. ريس، *جامعة يونغ بريغام*
أندرو ج. ريفرز، *جامعة نورثويسترن*
جيمس و. رولف، *جامعة بوسطن*
فيليب روز، *جامعة ميريلاند*
تشونغ يو روان، *جامعة ولاية ميشيغان*
دوبرافاكا روبنيك، *جامعة ولاية لويزيانا*
هوميرا ساداغياني، *جامعة كاليفورنيا للتقنية – بومونا*

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إرتان ساليك، *جامعة كاليفورنيا للتقنية – بومونا*
أوتو سانكي، *جامعة ولاية أريزونا*
سيرجي سافراسوف، *جامعة كاليفورنيا – دايفيس*
هندريك شاتز، *جامعة ولاية ميشيغان*
كارل شميت، *جامعة ولاية ميشيغان*
ستان شرايبر، *جامعة ولاية ميشيغان*
جون شرودر، *معهد رينسيلار للتقنية*
رينهارد شوينهورست، *جامعة ولاية ميشيغان*
كونات سيباستيان، *جامعة ماساتشوستس – لويل*
بيورن سيبل، *جامعة ولاية بورتلاند*
جيري شاكوف، *جامعة تيولين*
رالف شيل، *جامعة ترنت*
عرفان صديقي، *جامعة كاليفورنيا – بيريكلي*
رافيندرا كومار سينها، *كلية دلهي للهندسة*
مارلين ل. سيمون، *جامعة أوبورن*
أليكس سمول، *جامعة كاليفورنيا للتقنية – بومونا*
ليه سميث، *جامعة سينسناتي*
تود سميث، *جامعة دايتون*
شيان نينغ سونغ، *كلية ريتشلاند*
جيف سونير، *جامعة سيمون فريسر – ساري سنترال*
تشاد إ. سوسوليك *جامعة كليمسون*
كريس ستاروستا، *جامعة ولاية ميشيغان*
دونا و. ستوكس *جامعة هيوستن*
جيمس ستون، *جامعة بوسطن*
مايكل ج. ستروس *جامعة أوكلاهاما*
دان ستامب، *جامعة ولاية ميشيغان*
يانغ سان، *جامعة نوتردام*
ستيفن سوينغل، *كلية سيتي سان فرانسيسكو*
مريجسيد، *معهد روز هالمن للتقنية*
غريغوري تارليه، *جامعة ميشيغان*
مارشال تومسن، *جامعة ميشيغان الشرقية*
دوغلاس ك. تاسي، *جامعة ولاية بنسلفانيا*
سومديف تياجي، *جامعة دريكسل*
بريم فيشنافا *جامعة كيترينغ*
إريك و. فارنس *جامعة أريزونا*
جون فاسوت، *جامعة بايلور*
غوتام فيموري، *جامعة إنديانا – جامعة بوردو – إنديانابوليس*
ثاد ووكر، *جامعة ويسكونسن – ماديسون*
فوكيانغ وانغ، *جامعة بوردو*
دايفيد ج. ويب، *جامعة كاليفورنيا – دايفيس*
كيرت ويسنفيلد *جورجيا للتقنية*
فريد ويتفيلد، *جامعة تيولين*
غراي ويليامز، *جامعة كاليفورنيا – لوس أنجليس*
سان يانغ، *جامعة نوتردام*
ل. يو، *جورجيا للتقنية*
بيلي يونغر، *كلية ألبيمارل*
ك. ب. يوان، *جامعة ولاية ميشيغان*
أندرو زانغويل، *معهد جورجيا للتقنية*
جينز زورن، *جامعة ميشيغان – أن أربور*
مايكل زودوف، *جامعة مينيسوتا*

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8 الأجسام الجاسئة

الشكل 8.1 صورة لمحطة الفضاء الدولية التُقطت من المكوك الفضائي ديسكفري.

ما سنتعلمه 226

ما تعلمناه/دليل المذاكرة للاختبار 246

تمثل المحطة الفضائية الدولية (ISS)، الموضحة في الشكل 8.1، إنجازًا هندسيًا استثنائيًا. حيث تُقل علماءَ الفضاء بشكل مستمر منذ عام 2000. تدور هذه المحطة حول الأرض بسرعة تزيد عن 7.5 km/s، في مدار يتراوح بين 320 km و350 km فوق سطح الأرض. عندما يتعقب المهندسون المحطة الفضائية الدولية، فإنهم يتعاملون معها باعتبارها جسيمًا نقطيًا، رغم أن حجمها يساوي 109 m في 73 m في 25 m تقريبًا. ومن المفترض أن هذه النقطة تمثل مركز المحطة، لكن كيف يحدد المهندسون المركز بالضبط؟

لكل جسم نقطة تتركز فيها كتلة الجسم كلها. بل أحيانًا لا تكون هذه النقطة، التي تُسمى *مركز الكتلة*، داخل الجسم. توضح هذه الوحدة كيفية تحديد موقع مركز الكتلة وكيفية استخدامها لتبسيط العمليات الحسابية بما فيها حفظ كمية الحركة. افترضنا في وحدات سابقة أنه يمكن التعامل مع الأجسام باعتبارها جسيمات. وتوضح هذه الوحدة لماذا ينجح هذا الافتراض.

كما تتناول هذه الوحدة مناقشة تغيُّرات كمية الحركة في الحالات التي تختلف فيها كتلة الجسم وسرعته المتجهة أيضًا. يحدث ذلك أثناء الدفع الصاروخي. حيث تكون كتلة الوقود غالبًا أكبر من كتلة الصاروخ نفسه.

Chapter Sourced From: 8. Systems of Particles and Extended Objects, Chapter 8, from University Physics with Modern Physics, 2e by Bauer and Westfall ©2014 McGraw-Hill Education
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

ما سنتعلمه

- إنّ مركز الكتلة هو نقطة على الجسم تتركز فيها كتلة هذا الجسم كلها.
- يُحدَّد موقع مركز الكتلة المشترك بين جسمين أو أكثر بحساب مجموع متجهات مواقع الأجسام مضروبة في كتلها.
- توضح ميكانيكا الحركة الانتقالية لمركز كتلة جسم غير نقطي.
- كمية حركة مركز الكتلة تساوي مجموع متجهات كمية الحركة الخطية لأجزاء النظام. وتساوي مشتقة الزمن لها محصلة القوى الخارجية المؤثرة في النظام، صياغة موسعة من القانون الثاني لنيوتن.
- يجب أن تراعي تحليلات حركة الصاروخ الأنظمة متغيرة الكتلة. حيث يؤدي هذا التغيُّر إلى اعتماد سرعة الصاروخ المتجهة اعتمادًا لوغاريتميًا على نسبة الكتلة الابتدائية إلى النهائية.
- يمكن تحديد موقع مركز كتلة جسم غير نقطي عن طريق تكامل كثافته الكتلية على حجمه الكلي والضرب في المتجه الإحداثي ثم القسمة على الكثافة الكلية.
- إذا كان للجسم مستوى تماثل، فإنّ مركز الكتلة يقع في هذا المستوى. وإذا كان للجسم أكثر من مستوى تماثل واحد، فإنّ مركز الكتلة يقع على الخط المستقيم أو نقطة تقاطع المستويات.

8.1 مركز الكتلة ومركز الثقل

حتى الآن، مثلنا موقع الجسم بإحداثيات نقطة واحدة. لكن ليس بالضرورة أن تعني عبارة مثل "توجد سيارة على بُعد $x = 3.2$ m"، أنّ جسم السيارة كله موجود عند هذه النقطة. إذًا، ماذا يعني استخدام إحداثي نقطة واحدة معينة لتمثيل جسم غير نقطي؟ تعتمد الإجابات عن هذه الأسئلة على الحالة المعينة التي يُستخدم فيها هذا النظام الإحداثي. في سباق السيارات، يُمثَّل موقع السيارة بإحداثيات الجزء الأمامي للسيارة. عندما تعبر هذه النقطة خط النهاية، يُحسم السباق. أما في لعبة كرة القدم، فلا يُحتسب الهدف إلا إذا عبرت الكرة كلها خط المرمى؛ وفي هذه الحالة، يكون من المنطقي تمثيل موقع كرة القدم بإحداثيات الجزء الخلفي للكرة. إلا أن هذه الأمثلة ما هي إلا حالات استثنائية. أما في معظم الحالات، فيكون اختيار نقطة تمثل موقع الجسم غير النقطي أمرًا طبيعيًا. تُسمى هذه النقطة *مركز الكتلة*.

التعريف

إنّ **مركز الكتلة** هو نقطة على الجسم تتركز فيها كتلة هذا الجسم كلها.

ومن ثمَّ، يكون مركز الكتلة أيضًا نقطة على الجسم تتركز عندها قوة الجاذبية التي تؤثر في الجسم كله. إذا كنا نعتقد أن الكتلة كلها تتركز عند هذه النقطة عند حساب القوة الناتجة عن الجاذبية، فمن الممكن تسمية هذه النقطة *مركز الثقل*، وهو مصطلح يمكن استخدامه غالبًا كبديل *لمركز الكتلة*. (تحريًا للدقة، يجب أن نلاحظ أن هذين المصطلحَين يشيران إلى شيء واحد فقط في الحالات التي تكون فيها قوة الجاذبية ثابتة في كل مكان على الجسم. في الوحدة 12، سنرى أن هذا لا ينطبق على الأجسام الكبيرة للغاية).

من المناسب أن نذكر هنا أنه إذا كانت الكثافة الكتلية للجسم ثابتة، فإن مركز الكتلة (مركز الثقل) سيكون في المركز الهندسي للجسم. ومن ثمَّ فمن المنطقي أن نخمن أن مركز الثقل يكون في منتصف الجسم بالنسبة إلى معظم الأجسام التي نراها في حياتنا اليومية. وسوف تثبت الاشتقاقات الواردة في هذه الوحدة صحة هذا التخمين.

مركز الكتلة المشترك بين جسمين

إذا كان لدينا جسمان متماثلان متساويان في الكتلة وأردنا أن نجد مركز الكتلة المشترك بينهما، فمن المنطقي أن نفترض أن مركز الكتلة المشترك لهذا النظام يرتكز تحديدًا، باعتبار التماثل، في منتصف المسافة بين مركزَي الكتلة لهذين الجسمين. وإذا كانت كتلة أحد الجسمين أكبر من الأخرى، فمن المنطقي

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

أيضًا أن نفترض أن مركز الكتلة المشترك يكون أقرب إلى الجسم ذي الكتلة الأكبر. لذا، لدينا صيغة عامة لتحديد موقع مركز الكتلة، $\vec{R}$، للكتلتين m_1 وm_2 ومركز كتلتيهما في الموقعين $\vec{r}_1$ و$\vec{r}_2$ في نظام إحداثي تقريبي (الشكل 8.2):

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{8.1}$$

تنص هذه المعادلة على أن متجه موقع مركز الكتلة هو متوسط متجهات مواقع الأجسام مضروبة في كتلها. يتفق مثل هذا التعريف مع الدليل التجريبي الذي ذكرناه للتو. سنستخدم هذه المعادلة الآن كتعريف عملي ونعمل على تحقيق نتائجها تدريجيًا. وفي موضع آخر من هذه الوحدة وفي الوحدات التالية، سنستخدم أسبابًا أخرى تفسر منطقية هذا التعريف.

لاحظ أنه يمكننا أن نكتب مباشرة معادلة المتجهات 8.1 بالإحداثيات الديكارتية كالتالي:

$$X = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}, \quad Y = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2}, \quad Z = \frac{z_1 m_1 + z_2 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{8.2}$$

في الشكل 8.2، يتركز موقع مركز الكتلة تحديدًا على الخط المستقيم (الخط الأسود المتقطع) الذي يصل بين الكتلتين. هل هذه نتيجة عامة — هل يتركز مركز الكتلة دائمًا على هذا الخط؟ إذا كانت الإجابة نعم، فلماذا؟ وإذا كانت الإجابة لا، فما الشرط المعين اللازم توفره لتحقيق ذلك؟ الإجابة هي أن هذه نتيجة عامة مع كل الأنظمة المكونة من جسمين: يتركز مركز الكتلة لهذا النظام على الخط الذي يصل بين الجسمين دائمًا. لكي نرى ذلك، يمكننا وضع نقطة أصل النظام الإحداثي على إحدى الكتلتين في الشكل 8.2، ولتكن m_1. (كما نعرف، يمكننا دائمًا نقل نقطة أصل النظام الإحداثي دون أن يؤدي ذلك إلى تغيُّر النتائج الفيزيائية). باستخدام المعادلة 8.1، سنرى أن $\vec{R} = \vec{r}_2 m_2/(m_1 + m_2)$. لأنه بسبب هذا الاختيار على النظام الإحداثي، نحدد قيمة $\vec{r}_1$ كصفر. ومن ثمَّ، يشترك المتجهان $\vec{R}$ و$\vec{r}_2$ في الاتجاه نفسه، لكن يكون $\vec{R}$ أقصر بعامل مقداره $1 > m_2/(m_1 + m_2)$. وهذا يوضح أنّ $\vec{R}$ يتركز دائمًا على الخط المستقيم الذي يصل بين الكتلتين.

مسألة محلولة 8.1 مركز كتلة الأرض والقمر

تبلغ كتلة الأرض 5.97×10^{24} kg، وتبلغ كتلة القمر 7.36×10^{22} kg. ويدور القمر حول الأرض على مسافة تبعد 384,000 km؛ أي أنّ مركز القمر يبعد مسافة مقدارها 384,000 km عن مركز الأرض، كما هو موضَّح في الشكل 8.3a.

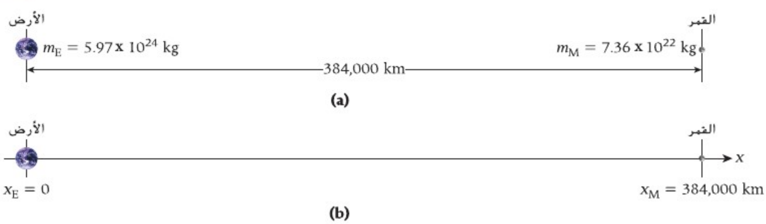
المسألة

ما المسافة التي يبعدها مركز كتلة نظام الأرض والقمر عن مركز الأرض؟

الحل

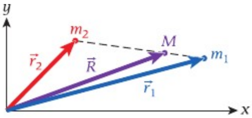
فكِّر يمكن تحديد مركز كتلة نظام الأرض والقمر بوضع مركز الأرض عند النقطة $x = 0$ ووضع مركز القمر عند النقطة $x = 384{,}000$ km. سيتركز مركز كتلة نظام الأرض والقمر على طول الخط الذي يصل بين مركز الأرض ومركز القمر (كما هو موضَّح في الشكل 8.3a).

ارسم يوضح الشكل 8.3b رسمًا بيانيًا كمقياس للأرض والقمر.



الشكل 8.3 (a) يدور القمر حول الأرض على بُعد 384,000 km عنها (الرسم بمقياس نسبي). (b) يوضح الرسم أنّ الأرض تقع عند $x_E = 0$ والقمر يقع عند $x_M = 384{,}000$ km.

يُتبع



الشكل 8.2 موقع مركز الكتلة لنظام مكون من كتلتين m_1 وm_2، حيث $M = m_1 + m_2$.

مراجعة المفاهيم 8.1

في الحالة الموضَّحة في الشكل 8.2، ما المقادير النسبية للكتلتين m_1 وm_2؟

a) $m_1 < m_2$

b) $m_1 > m_2$

c) $m_1 = m_2$

d) لا يمكن تحديد أي الكتلتين أكبر استنادًا إلى المعلومات المتوفرة في الشكل فقط.

مراجعة المفاهيم 8.2

زجاجة أسطوانية لتوابل السلطة المصنوعة من الزيت والخل، نصفها من الخل (بكثافة كتلية 1.01 g/cm^3) والنصف الآخر من الزيت (بكثافة كتلية 0.910 g/cm^3) موضوعة على طاولة. في البداية، كان الزيت منفصلاً عن الخل، حيث كان يطفو فوق الخل. فرُجّت الزجاجة حتى اختلط الزيت بالخل تمامًا ثم وُضعت مرة أخرى على الطاولة. ما مقدار تغيُّر ارتفاع مركز كتلة توابل السلطة نتيجةً للخلط؟

a) أعلى.

b) أقل.

c) عند نفس الارتفاع.

d) لا تتوفر معطيات كافية للإجابة عن هذا السؤال.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ابحث نحدد محور x ونضع الأرض عند النقطة $x_E = 0$ والقمر عند النقطة $x_M = 384{,}000\ \text{km}$.
يمكننا استخدام المعادلة 8.2 للتوصل إلى تعبير للإحداثي x لمركز كتلة نظام الأرض والقمر:

$$X = \frac{x_E m_E + x_M m_M}{m_E + m_M}.$$

بسِّط بما أننا وضعنا نقطة أصل النظام الإحداثي عند مركز الأرض، فإننا حدَّدنا أنّ $x_E = 0$. وينتج عن ذلك أنّ

$$X = \frac{x_M m_M}{m_E + m_M}.$$

احسب عند التعويض بالقيم العددية، نجد أن إحداثي x لمركز كتلة نظام الأرض والقمر يصبح كما يلي:

$$X = \frac{x_M m_M}{m_E + m_M} = \frac{(384{,}000\ \text{km})(7.36\times10^{22}\ \text{kg})}{5.97\times10^{24}\ \text{kg} + 7.36\times10^{22}\ \text{kg}} = 4676.418\ \text{km}.$$

قرِّب كانت كل القيم العددية معطاة بثلاثة أرقام معنوية، لذا سنقرب النتيجة لتصبح

$$X = 4680\ \text{km}.$$

تحقَّق ثانية تظهر النتيجة بوحدة الكيلومتر، وهي الوحدة الصحيحة للتعبير عن الموقع. كما أن مركز كتلة نظام الأرض والقمر قريب من مركز الأرض، وهذه المسافة صغيرة مقارنة بالمسافة بين الأرض والقمر. وهذا منطقي لأن كتلة الأرض أكبر بكثير من كتلة القمر. في الواقع، تقل هذه المسافة عن نصف قطر الأرض، $R_E = 6370\ \text{km}$. ويدور كل من الأرض والقمر بالفعل حول مركز الكتلة المشترك. لذا تبدو الأرض وكأنها تتحرك حركة تذبذبية أثناء دوران القمر حولها.

مركز الكتلة المشترك بين عدة أجسام

يمكن تعميم تعريف مركز الكتلة في المعادلة 8.1 إلى مجموع أجسام n ذات كتل مختلفة، m_i، موجودة في مواقع مختلفة، $\vec{r}_i$. في هذه الحالة العامة، نجد أنّ

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2 + \cdots + \vec{r}_n m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i m_i, \tag{8.3}$$

حيث تمثل M الكتلة المجمعة لكل أجسام n:

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i. \tag{8.4}$$

بكتابة المعادلة 8.3 بالمركَّبات الديكارتية، نحصل على

$$X = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} x_i m_i, \quad Y = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} y_i m_i, \quad Z = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} z_i m_i. \tag{8.5}$$

يكون موقع مركز الكتلة نقطة ثابتة بالنسبة إلى الجسم أو نظام الأجسام ولا يعتمد على موقع النظام الإحداثي المستخدم لتوضيحه. يمكننا توضيح ذلك بأخذ نظام المعادلة 8.3 وتحريكه بمقدار $\vec{r}_0$، وسينتج لنا موضع مركز كتلة جديد، $\vec{R} + \vec{R}_0$ باستخدام المعادلة 8.3، نجد أنّ

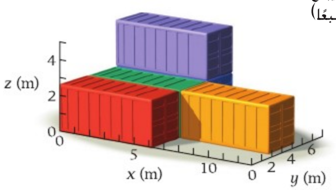
$$\vec{R} + \vec{R}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_0 + \vec{r}_i) m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \vec{r}_0 + \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i m_i$$

لذا، فإن $\vec{R}_0 = \vec{r}_0$، ولا يتغير موقع مركز الكتلة بالنسبة إلى النظام.
يمكننا الآن تحديد مركز كتلة مجموعة من الأجسام في المثال التالي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 8.1 حاويات الشحن

تأتي حاويات الشحنات الكبيرة، التي يمكن نقلها بالشاحنات أو القطارات أو السفن، بأحجام قياسية. من أكثر الحاويات شيوعًا من حيث الحجم الحاوية التي مساحتها ′20 وفقًا للمعيار الدولي ISO، والتي يبلغ طولها 6.1 m وعرضها 2.4 m وارتفاعها 2.6 m. ويُسمح بأن تكون كتلة هذه الحاوية (بما تحويه طبعًا) ما يصل إلى 30,400 kg.



الشكل 8.4 حاويات شحن مرتبة على ظهر سفينة حاويات.

المسألة

ترتكز حاويات الشحن الخمس الموضَّحة في الشكل 8.4 على سطح سفينة حاويات. وتبلغ كتلة كل حاوية 9,000 kg، باستثناء الحاوية الحمراء التي تبلغ كتلتها 18,000 kg. إذا افترضنا أن لكل حاوية مركز كتلة في مركزها الهندسي، فما إحداثي x وإحداثي y لمركز الكتلة المشترك بين الحاويات؟ استخدم النظام الإحداثي المبيَّن في الشكل لتوضيح موقع مركز الكتلة هذا.

الحل

نحتاج إلى حساب المركَّبات الديكارتية الفردية لمركز الكتلة، لذا سنستخدم المعادلة 8.5. ويبدو أنه ليس ثمة طريقة مختصرة يمكننا استخدامها.

لنسمِّ طول كل حاوية ℓ (61 m) وعرض كل حاوية w (2.4 m) وكتلة الحاوية الخضراء m_0 (9,000 kg). عندئذٍ تكون كتلة الحاوية الحمراء $2m_0$ وتكون كتلة كل الحاويات الأخرى هي m_0.

أولًا، نحتاج إلى حساب الكتلة المجمعة، M. وفقًا للمعادلة 8.4، فإن

$$\begin{aligned} M &= m_{\text{red}} + m_{\text{green}} + m_{\text{orange}} + m_{\text{blue}} + m_{\text{purple}} \\ &= 2m_0 + m_0 + m_0 + m_0 + m_0 \\ &= 6m_0. \end{aligned}$$

بالنسبة إلى الإحداثي x لمركز الكتلة المشترك، نجد أنّ

$$\begin{aligned} X &= \frac{x_{\text{red}}m_{\text{red}} + x_{\text{green}}m_{\text{green}} + x_{\text{orange}}m_{\text{orange}} + x_{\text{blue}}m_{\text{blue}} + x_{\text{purple}}m_{\text{purple}}}{M} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\ell 2m_0 + \frac{1}{2}\ell m_0 + \frac{3}{2}\ell m_0 + \frac{1}{2}\ell m_0 + \frac{1}{2}\ell m_0}{6m_0} \\ &= \frac{\ell\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)}{6} \\ &= \frac{2}{3}\ell = 4.1 \text{ m}. \end{aligned}$$

في الخطوة الأخيرة، عوَّضنا بالقيمة 6.1 m عن ℓ.

بالطريقة نفسها، يمكننا حساب الإحداثي y:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{y_{\text{red}}m_{\text{red}} + y_{\text{green}}m_{\text{green}} + y_{\text{orange}}m_{\text{orange}} + y_{\text{blue}}m_{\text{blue}} + y_{\text{purple}}m_{\text{purple}}}{M} \\ &= \frac{\frac{1}{2}w2m_0 + \frac{3}{2}wm_0 + \frac{3}{2}wm_0 + \frac{5}{2}wm_0 + \frac{5}{2}wm_0}{6m_0} \\ &= \frac{w\left(1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\right)}{6} \\ &= \frac{3}{2}w = 3.6 \text{ m}. \end{aligned}$$

قد عوَّضنا مرة أخرى بالقيمة العددية 2.4 m في الخطوة الأخيرة. (لاحظ أننا قمنا بتقريب كل من إحداثيي مركز الكتلة إلى رقمين معنويين ليتوافقا مع القيم المُعطاة).

سؤال الاختبار الذاتي 8.1

حدِّد الإحداثي z لمركز كتلة الحاويات المرتبة في الشكل 8.4.

8.2 كمية حركة مركز الكتلة

يمكننا الآن أخذ مشتقة الزمن لمتجه موضع مركز الكتلة لإيجاد $\vec{V}$، متجه السرعة المتجهة لمركز الكتلة. نأخذ مشتقة الزمن من المعادلة 8.3:

$$\vec{V} \equiv \frac{d}{dt}\vec{R} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i m_i\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt}\vec{r}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i. \qquad (8.6)$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حتى الآن، افترضنا أن الكتلة الكلية، M، والكتل m_i للأجسام الفردية تبقى ثابتة. (في موضع لاحق من هذه الوحدة، سنُهمل هذا الافتراض وندرس نتائج حركة الصاروخ). تمثل المعادلة 8.6 تعبيرًا لمتجه السرعة المتجهة لمركز الكتلة، $\vec{V}$. وبضرب كلا طرفي المعادلة 8.6 في M نحصل على

$$\vec{P} = M\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i. \tag{8.7}$$

وبذلك نجد أنّ كمية حركة مركز الكتلة، $\vec{P}$، هي حاصل ضرب الكتلة الكلية، M، والسرعة المتجهة لمركز الكتلة، $\vec{V}$، وهي مجموع كل المتجهات الفردية لكمية الحركة.

بأخذ مشتقة الزمن لكلا طرفي المعادلة 8.7، نحصل على القانون الثاني لنيوتن لإيجاد مركز الكتلة:

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \frac{d}{dt}(M\vec{V}) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \tag{8.8}$$

في الخطوة الأخيرة، استخدمنا النتيجة من الوحدة 7، وهي أنّ مشتقة الزمن لكمية حركة الجسيم i تساوي القوة المحصلة، $\vec{F}_i$، المؤثرة فيه. لاحظ أنه إذا كانت الجسيمات (الأجسام) في نظام تبذل قوى بعضها على بعض، فإن هذه القوى لا تمثل قوة محصلة أخرى تضاف إلى مجموع القوى في المعادلة 8.8. لماذا؟ طبقًا للقانون الثالث لنيوتن، تكون القوتان اللتان يبذلهما الجسمان بعضهما على بعض متساويتين في المقدار ومتضادتين في الاتجاه. لذا، فإن مجموعهما يساوي صفرًا. وبذلك نحصل على القانون الثاني لنيوتن الخاص بمركز الكتلة:

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}_{\text{net}}, \tag{8.9}$$

حيث $\vec{F}_{\text{net}}$ هي مجموع كل القوى *الخارجية* المؤثرة في نظام الجسيمات.

لمركز الكتلة العلاقات نفسها بين الموقع والسرعة المتجهة وكمية الحركة والقوة والكتلة التي نشأت للجسيمات النقطية. لذا من الممكن اعتبار مركز كتلة الجسم غير النقطي أو مجموعة الأجسام جسيمًا نقطيًا. يبرر هذا الاستنتاج التقريب الذي استخدمناه في الوحدات السابقة التي تناولت تمثيل الأجسام كنقاط.

الارتداد

عند إطلاق رصاصة من بندقية، فإن البندقية **ترتد**؛ أي أنها تتحرك في الاتجاه المعاكس للاتجاه الذي أُطلقت فيه الرصاصة. كما يتضح هذا المبدأ الفيزيائي نفسه عندما تكون جالسًا في قارب ساكن وتلقي جسمًا خارج القارب، حيث يتحرك القارب في الاتجاه المعاكس للاتجاه الذي ألقيت فيه الجسم. كما تشعر بالتأثير نفسه عندما تكون واقفًا على لوح تزلج ثم تلقي كرة (ثقيلة نوعًا ما). يُعرف تأثير الارتداد المعروف هذا بنتيجة القانون الثالث لنيوتن.

مسألة محلولة 8.2 ارتداد المدفع

أُطلقت قذيفة مدفع كتلتها 13.7 kg نحو هدف يبعُد 2.30 km عن مدفع كتلته 249.0 kg. وكان أقصى مدى للمدفع هو المسافة 2.30 km. كما كان الهدف والمدفع عند مستوى ارتفاع واحد، وكان المدفع مرتكزًا على سطح أفقي.

المسألة

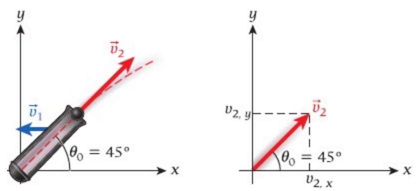
ما السرعة المتجهة التي سيرتد بها المدفع؟

الحل

فكّر أولًا، نعرف أن المدفع لا يرتد إلا في اتجاه أفقي، لأن القوة العمودية التي تبذلها الأرض عليه ستمنعه من اكتساب مركَّبة سرعة متجهة إلى أسفل. ونحن نستخدم الحقيقة التي تنص على أنّ مركَّبة المحور x لكمية حركة مركز كتلة النظام (المدفع والقذيفة) لا تتغير أثناء إطلاق القذيفة لأن انفجار البارود داخل المدفع، الذي يؤدي إلى تحرك المدفع، لا يُنشئ إلا قوى داخل النظام. كما لا تنشأ مركَّبة قوة خارجية في الاتجاه الأفقي لأن كلتا القوتين الخارجيتين (القوة العمودية والجاذبية) رأسية. وتتغير مركَّبة المحور y لسرعة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مركز الكتلة المتجهة لأنه لا تنشأ مركَّبة محصلة قوى خارجية في اتجاه المحور y عندما تزيد القوة العمودية لتمنع المدفع من الانغراس في الأرض. ونظرًا لأن القذيفة والمدفع يكونان في حالة سكون ابتدائية، تكون قيمة كمية حركة مركز الكتلة لهذا النظام صفرًا في البداية، وتبقى مركَّبة المحور x صفرًا بعد إطلاق القذيفة.



(a) (b)

الشكل 8.5 (a) القذيفة أثناء إطلاقها من المدفع. (b) متجه السرعة المتجهة الابتدائية للقذيفة.

ارسم يمثل الشكل 8.5a رسمًا تخطيطيًّا للمدفع قبل إطلاق القذيفة مباشرة. ويوضح الشكل 8.5b متجه السرعة المتجهة للقذيفة، $\vec{v}_2$، بما في ذلك مركَّبة المحور x ومركَّبة المحور y.

ابحث باستخدام المعادلة 8.7 التي يشير فيها الرقم 1 إلى المدفع والرقم 2 إلى القذيفة، نحصل على

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}_2.$$

وبالنسبة إلى المركَّبة الأفقية للسرعة المتجهة، سيكون لدينا

$$v_{1,x} = -\frac{m_2}{m_1}v_{2,x}. \qquad \text{(i)}$$

يمكننا الحصول على المركَّبة الأفقية للسرعة المتجهة الابتدائية للقذيفة (عند الإطلاق) من خلال المعلومة التي تفيد بأن مدى المدفع هو 2.30 km. في الوحدة 3، رأينا أنه يجري الربط بين مدى المدفع والسرعة المتجهة الابتدائية في المعادلة $R = (v_0^2/g)(\sin 2\theta_0)$. أقصى مدى تصل إليه القذيفة عندما $\theta_0 = 45°$ وهو $v_0 = \sqrt{gR} \Leftarrow R = v_0^2/g$. فعندما $\theta_0 = 45°$، نربط بين السرعة الابتدائية ومركَّبة السرعة المتجهة الأفقية في المعادلة $v_{2,x} = v_0 \cos 45° = v_0/\sqrt{2}$. وبجمع هذين الناتجين، يمكننا ربط أقصى مدى بالمركَّبة الأفقية للسرعة المتجهة الابتدائية للقذيفة كما يلي:

$$v_{2,x} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{gR}{2}}. \qquad \text{(ii)}$$

بسِّط بالتعويض من المعادلة (ii) في المعادلة (i)، سنحصل على النتيجة التي نريد التوصل إليها

$$v_{1,x} = -\frac{m_2}{m_1}v_{2,x} = -\frac{m_2}{m_1}\sqrt{\frac{gR}{2}}.$$

احسب بالتعويض عن الرموز بالأرقام المُعطاة في بيان المسألة، نحصل على

$$v_{1,x} = -\frac{m_2}{m_1}\sqrt{\frac{gR}{2}} = -\frac{13.7\text{ kg}}{249\text{ kg}}\sqrt{\frac{(9.81\text{ m/s}^2)(2.30\times10^3\text{ m})}{2}} = -5.84392\text{ m/s}.$$

قرِّب بتقريب الإجابة إلى ثلاثة أرقام معنوية، نحصل على

$$v_{1,x} = -5.84\text{ m/s}.$$

تحقَّق ثانية تعني إشارة السالب أنّ المدفع يتحرك في الاتجاه المعاكس لاتجاه إطلاق القذيفة. وهذا منطقي. يجب أن تكون السرعة المتجهة الابتدائية للقذيفة أكبر بكثير من سرعة المدفع لأن كتلة المدفع أكبر بكثير. كانت السرعة المتجهة الابتدائية للقذيفة

$$v_0 = \sqrt{gR} = \sqrt{(9.81\text{ m/s}^2)(2.3\times10^3\text{ m})} = 150\text{ m/s}.$$

كما أن قيمة الناتج الذي أوجدناه للسرعة المتجهة للمدفع أقل بكثير من السرعة المتجهة الابتدائية للقذيفة، ويبدو هذا منطقيًا أيضًا.

يمكن أن يكون خروج الكتلة من النظام مستمرًا فيؤدي إلى ارتداد مستمر. لنتأمل في اندفاع الماء من خرطوم إطفاء الحريق كمثال على ذلك.

مثال 8.2 خرطوم إطفاء الحريق

المسألة

ما مقدار القوة، F، التي تؤثر في رجل إطفاء يحمل خرطوم إطفاء حريق يُخرج 360 L من الماء في الدقيقة بسرعة ابتدائية $v = 39.0$ m/s، كما هو مبيّن في الشكل 8.6؟

يَتبع

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة المفاهيم 8.3

يستخدم خرطوم إطفاء الحريق في المثال 8.2 لرش رغوة لإطفاء الحرائق (تبلغ كثافتها الكتلية نصف الكثافة الكتلية للماء) بمعدل التدفق نفسه، وهو 360 L/min، وبالسرعة الابتدائية نفسها، وهي 39.0 m/s. يكون مقدار القوة المبذولة على رجل الإطفاء الذي يحمل الخرطوم في هذه الحالة

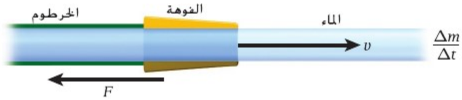
a) أربعة أضعاف القوة التي تم إيجادها في المثال 8.2.

b) ضعف القوة التي تم إيجادها في المثال 8.2.

c) مساويًا لمقدار القوة التي تم إيجادها في المثال 8.2.

d) نصف القوة التي تم إيجادها في المثال 8.2.

e) ربع القوة التي تم إيجادها في المثال 8.2.



الشكل 8.6 تدفق الماء من خرطوم إطفاء الحريق بسرعة متجهة v.

الحل

لنقم أولاً بإيجاد الكتلة الكلية للماء الخارج في الدقيقة. تبلغ الكثافة الكتلية للماء $\rho = 1000.\ \text{kg/m}^3 = 1.000\ \text{kg/L}$. ولأن $\Delta V = 360\ \text{L}$، نحصل على الكتلة الكلية للماء الخارج في الدقيقة من خلال:

$$\Delta m = \Delta V \rho = (360.\ \text{L})(1.000\ \text{kg/L}) = 360.\ \text{kg}.$$

لذا، تكون كمية حركة الماء $\Delta p = v\Delta m$. ومن تعريف متوسط القوة، $F = \Delta p/\Delta t$، نجد أنّ

$$F = \frac{v\Delta m}{\Delta t} = \frac{(39.0\ \text{m/s})(360.\ \text{kg})}{60\ \text{s}} = 234\ \text{N}.$$

تُعد هذه قوة هائلة، ولهذا السبب، يحرص رجال الإطفاء على عدم إفلات الخراطيم أثناء الإطفاء لما يترتب على ذلك من خطورة بالغة؛ فقد تتحرك هنا وهناك بسرعة كبيرة جدًا مما يتسبب في حدوث إصابات.

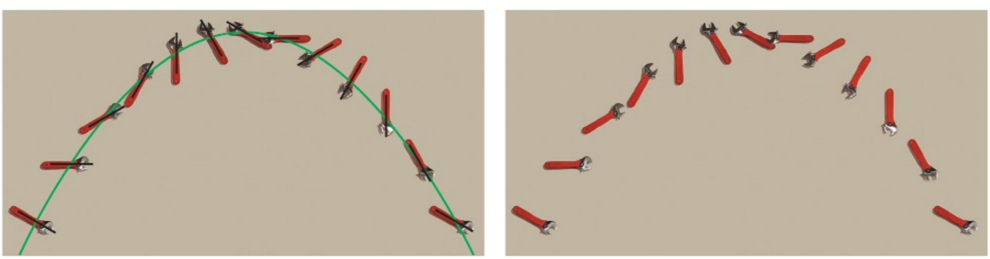
الشكل 8.7 اللاعب الأمريكي ديك فوسبوري لحظة تخطيه عارضة القفز العالي في نهائيات الألعاب الأوليمبية في المكسيك في 20 أكتوبر عام 1968.

الحركة العامة لمركز الكتلة

يمكن أن يكون للأجسام الصلبة غير النقطية حركات تبدو معقدة لأول وهلة. وتُعدّ رياضة القفز العالي مثالاً لهذه الحركات. أثناء الألعاب الأوليمبية في المكسيك عام 1968، فاز البطل الأمريكي ديك فوسبوري لألعاب القوى بالميدالية الذهبية عندما استخدم طريقة جديدة في القفز العالي، والتي أصبحت تُعرف فيما بعد بقفزة فوسبوري (انظر الشكل 8.7). عند تنفيذ هذه الطريقة كما ينبغي، يتمكن اللاعب من تجاوز العارضة مع بقاء مركز كتلته لأسفل، مما يزيد من ارتفاع القفزة بصورة فعلية.

يوضح الشكل 8.8a مفتاح ربط يتحرك بشكل دائري في الهواء، حيث أُخذت له مجموعة من اللقطات المتعددة على فترات زمنية متساوية بين كل لقطة وأخرى. رغم أنّ هذه الحركة تبدو معقدة، فإنه يمكننا أن نستخدم ما نعرفه عن مركز الكتلة لإجراء تحليل بسيط ودقيق لهذه الحركة. إذا افترضنا أن كتلة مفتاح الربط متركزة في نقطة، فإن هذه النقطة ستتحرك في شكل قَطع مكافئ في الهواء تحت تأثير الجاذبية، كما ناقشنا ذلك في الوحدة 3. يدخل في هذه الحركة دوران المفتاح حول مركز كتلته. ترى هذا المسار الذي على شكل قطع مكافئ بوضوح في الشكل 8.8b، حيث يمر خط (أخضر) على شكل قطع مكافئ عبر موقع مركز كتلة المفتاح في كل لقطة. كما يظهر خط مستقيم أسود يتحرك حركة دائرية بمعدل ثابت حول مركز كتلة المفتاح. ترى بوضوح أن مقبض المفتاح يحاذي دائمًا الخط المستقيم الأسود، مما يشير إلى أن المفتاح يدور بمعدل ثابت حول مركز كتلته (سنحلل هذه الحركة الدورانية في الفصل 10).

تمكننا الأساليب الموضحة هنا من تحليل الكثير من المسائل المعقدة بما فيها حركة الأجسام الصلبة من حيث توضيح حركة مركز كتلة الجسم ودورانه حول مركز كتلته.



(b) (a)

الشكل 8.8 (a) مجموعة من الصور الرقمية ناتجة عن لقطات متعددة لمفتاح ربط لحظة إلقائه في الهواء. (b) مجموعة الصور نفسها في الجزء (a)، لكن مع تراكب مسار القطع المكافئ لحركة مركز الكتلة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8.3 حركة الصاروخ

كان المثال 8.2 حول خرطوم إطفاء الحريق أول حالة درسناها تتضمن تغيُّر كمية الحركة بسبب تغيُّر الكتلة لا السرعة المتجهة. لكن تُعدّ حركة الصاروخ من الحالات الأخرى المهمة التي تتضمن تغيُّر كمية الحركة بسبب تغيُّر الكتلة، حيث تتضمن هذه الحركة خروج جزء من كتلة الصاروخ عبر فوهة أو فوهات خلفية. كما أن حركة الصاروخ من الحالات المهمة التي توضح تأثير الارتداد الذي جرت مناقشته في القسم 8.2. حيث لا "يدفع" الصاروخ شيئًا، بل يكتسب دفعَه إلى الأمام بإخراج الوقود المستهلك من الجزء الخلفي وفقًا لقانون حفظ كمية الحركة الكلية.

لكي نتوصل إلى تعبير لعجلة الصاروخ، سنبدأ أولًا بالتفكير في إخراج كميات منفصلة من الكتلة خارج جسم الصاروخ. ثم يمكننا التوصل إلى النهاية المستمرة. لنستخدم نموذج لعبة لصاروخ يتحرك في الفضاء بين النجوم، دافعًا نفسه إلى الأمام عن طريق إطلاق قذائف من الجزء الخلفي (الشكل 8.9). (سنفترض أن هذا الصاروخ يتحرك في الفضاء بين النجوم بحيث يمكننا التعامل معه ومع مركّباته كنظام معزول يمكن أن نهمل القوى الخارجية عنه). في البداية، يكون الصاروخ في حالة سكون. وتكون الحركة كلها في اتجاه المحور x، لذا يمكننا استخدام رمز الحركة في بُعد واحد، بحيث توضح علامتا مركّبتي المحور x للسرعة المتجهة (اللتان سنشير إليهما بالسرعتين المتجهتين للتبسيط) اتجاهَ هاتين السرعتين. لكل قذيفة كتلة مقدارها Δm، وتكون الكتلة الابتدائية للصاروخ شاملةً القذائف m_0. وتُطلق كل قذيفة بسرعة v_c بالنسبة إلى مركز الكتلة المشترك بين الصاروخ والقذائف، فتنتج كمية حركة للقذيفة مقدارها $v_c \Delta m$.

بعد إطلاق القذيفة الأولى، تقل كتلة الصاروخ بمقدار $m_0 - \Delta m$. ولا يغير إطلاق القذيفة من كمية حركة مركز كتلة النظام (الصاروخ والقذيفة). (تذكر أنّ هذا نظام معزول، أي لا توجد محصلة قوى خارجية تؤثر فيه). لذا يكتسب الصاروخ كمية حركة ارتداد في اتجاه معاكس لكمية حركة القذيفة. ومن ثمّ يمكن إيجاد كمية حركة القذيفة بالمعادلة

$$p_c = v_c \Delta m, \tag{8.10}$$

ويمكن إيجاد كمية حركة الصاروخ بالمعادلة

$$p_r = (m_0 - \Delta m) v_1,$$

حيث تمثل v_1 سرعة الصاروخ المتجهة بعد إطلاق القذيفة. ولأن كمية الحركة تكون محفوظة، يمكننا أن نكتب المعادلة $p_r + p_c = 0$. ثم نعوّض عن p_r وp_c من التعبيرين السابقين:

$$(m_0 - \Delta m) v_1 + v_c \Delta m = 0.$$

ونحدد التغيُّر في السرعة المتجهة، Δv_1، للصاروخ بعد إطلاق قذيفة واحدة من خلال التعبير

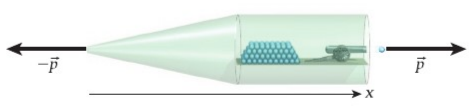
$$v_1 = v_0 + \Delta v = 0 + \Delta v = \Delta v_1, \tag{8.11}$$

حيث إنّ الافتراض بأن الصاروخ كان في حالة سكون في البداية يعني أنّ $v_0 = 0$. وهذا يعطينا السرعة المتجهة لارتداد الصاروخ الناتجة عن إطلاق قذيفة واحدة:

$$\Delta v_1 = -\frac{v_c \Delta m}{m_0 - \Delta m}. \tag{8.12}$$

ثم يمكننا، في نظام الصاروخ المتحرك، أن نطلق قذيفة أخرى. وسيؤدي إطلاق قذيفة أخرى إلى تناقص كتلة الصاروخ من $m_0 - \Delta m$ إلى $m_0 - 2\Delta m$، وسينتج عن ذلك سرعة ارتداد متجهة إضافية يمكن إيجادها من خلال التعبير

$$\Delta v_2 = -\frac{v_c \Delta m}{m_0 - 2\Delta m}.$$



الشكل 8.9 نموذج لعبة للدفع الصاروخي: إطلاق قذائف.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

عندئذ ستزيد السرعة المتجهة الكلية للصاروخ إلى $v_2 = v_1 + \Delta v_2$. بعد إطلاق عدد n من القذائف ، نحصل على التغيُّر في السرعة المتجهة من خلال التعبير

$$\Delta v_n = -\frac{v_c \Delta m}{m_0 - n\Delta m}. \tag{8.13}$$

وهكذا، تكون معادلة إيجاد السرعة المتجهة للصاروخ بعد إطلاق عدد n من القذائف هي

$$v_n = v_{n-1} + \Delta v_n.$$

تُسمى هذه المعادلة، التي حددت الحد n المتتابعة، يُعبِّر فيها عن كل حد في صورة دالة للحدود السابقة، *العلاقة التكرارية*. ويمكن حل هذه المعادلة بطريقة بسيطة باستخدام الكمبيوتر. لكن يمكننا استخدام تقريب مفيد للغاية مع الحالة التي يكون فيها تناقص الكتلة لكل وحدة زمنية ثابتًا وصغيرًا مقارنة بـ m، كتلة الصاروخ الكلية (اعتمادًا على الزمن). وعند هذه النهاية، نحصل عليها من المعادلة 8.13

$$\Delta v = -\frac{v_c \Delta m}{m} \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta m} = -\frac{v_c}{m}. \tag{8.14}$$

تمثل v_c هنا سرعة خروج القذيفة. وعند النهاية $\Delta m \to 0$، نحصل على المشتقة من خلال التعبير

$$\frac{dv}{dm} = -\frac{v_c}{m}. \tag{8.15}$$

وسيكون حل هذه المعادلة التفاضلية كما يلي:

$$v(m) = -v_c \int_{m_0}^{m} \frac{1}{m'}\, dm' = -v_c \ln m' \big|_{m_0}^{m} = v_c \ln\left(\frac{m_0}{m}\right). \tag{8.16}$$

(يمكنك التأكد من أنّ المعادلة 8.16 ستكون بالفعل حل المعادلة 8.15 من خلال حساب اشتقاق المعادلة 8.16 بالنسبة إلى m).

إذا كانت m_i هي القيمة الابتدائية للكتلة الكلية في زمن t_i وكانت m_f هي الكتلة النهائية في زمن لاحق، فيمكننا استخدام المعادلة 8.16 للحصول على $v_i = v_c \ln(m_0/m_i)$ و $v_f = v_c \ln(m_0/m_f)$ للسرعتين المتجهتين الابتدائية والنهائية للصاروخ. ثم باستخدام خاصية اللوغاريتمات، $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$، سنجد الفرق بين هاتين السرعتين المتجهتين:

$$v_f - v_i = v_c \ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right) - v_c \ln\left(\frac{m_0}{m_i}\right) = v_c \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right). \tag{8.17}$$

مثال 8.3 إطلاق صاروخ إلى المريخ

يتضمن أحد المشروعات المقترحة لإرسال رواد الفضاء إلى المريخ تجميع مركبة فضائية في مدار حول الأرض، بحيث لا تضطر المركبة الفضائية إلى التغلب على مقدار كبير من الجاذبية الأرضية عند إطلاقها. افترض أنّ الحمولة الصافية لهذه المركبة الفضائية تبلغ 50,000 kg ، وتحمل 2,000,000 kg من الوقود وتُخرج الوقود المستهلك بسرعة 23.5 km/s. (تُنتج الأنواع الحالية من الوقود المستهلك الكيميائي للصواريخ سرعةً قصوى تبلغ 5 km/s تقريبًا. لكن من المتوقع أن يُنتج الدفع الصاروخي الكهرومغناطيسي سرعةً تبلغ 40 km/s تقريبًا).

المسألة

ما السرعة النهائية التي يمكن أن تصل إليها هذه المركبة الفضائية بالنسبة إلى سرعتها المتجهة الابتدائية في مدارها حول الأرض؟

الحل

باستخدام المعادلة 8.17 والتعويض بالأرقام المعطاة في المسألة، نجد أنّ

$$v_f - v_i = v_c \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right) = (23.5 \text{ km/s}) \ln\left(\frac{2{,}050{,}000 \text{ kg}}{50{,}000 \text{ kg}}\right) = (23.5 \text{ km/s})(\ln 41) = 87.3 \text{ km/s}.$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

على سبيل المقارنة، كان الصاروخ ساتورن 5 متعدد المراحل الذي حمل رواد فضاء إلى القمر في أواخر الستينيات وأوائل السبعينيات قادرًا على الوصول إلى سرعة تبلغ حوالي 12 km/s فقط.
ورغم توفر التقنيات المتقدمة مثل الدفع الكهرومغناطيسي، فما زال وصول رواد الفضاء إلى المريخ يستغرق عدة أشهر، حتى في أفضل الظروف. على سبيل المثال، استغرق *مارس روفر* 207 أيام في رحلته من الأرض إلى المريخ. تقدِّر وكالة ناسا أنّ الإشعاع الذي يتعرض له رواد الفضاء في مثل هذه البعثة يفوق الحد الأقصى للجرعة السنوية المسموح بها للعاملين في مجال الإشعاع بما يعادل 10 إلى 20 مرة، مما يؤدي إلى زيادة احتمال الإصابة بالسرطان وتلف الدماغ. ولم تُقترح أي آلية واقية لحماية رواد الفضاء من هذا الخطر حتى الآن.

مراجعة المفاهيم 8.4

إذا تضاعفت الحمولة الصافية لسفينة الفضاء الواردة في المثال 8.3 من 50,000 kg إلى 100,000 kg، فستكون السرعة النهائية التي تصل إليها سفينة الفضاء

a) مساوية للسرعة التي تم إيجادها في المثال 8.3.

b) أقل قليلًا من السرعة التي تم إيجادها في المثال 8.3 لكن أكثر من نصفها.

c) أعلى قليلًا من السرعة التي تم إيجادها في المثال 8.3.

d) نصف السرعة التي تم إيجادها في المثال 8.3.

e) أقل من نصف السرعة التي تم إيجادها في المثال 8.3.

توجد طريقة أخرى ربما تكون أكثر سهولة للتفكير في حركة الصاروخ. وهي العودة إلى تعريف كمية الحركة بأنها حاصل ضرب الكتلة في السرعة المتجهة وحساب مشتقة الزمن لإيجاد القوة. إلا أن كتلة الجسم الآن يمكن أن تتغير أيضًا:

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}.$$

(تمثل الخطوة الأخيرة في هذه المعادلة استخدام قاعدة حاصل الضرب في التفاضل من حساب التفاضل والتكامل). وإذا لم تؤثر أي قوة خارجية في الجسم $(\vec{F}_{\text{net}} = 0)$ فعندئذٍ سنجد أنّ

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\,\vec{v}\frac{dm}{dt}.$$

في حالة حركة الصاروخ (كما هو موضَّح في الشكل 8.10)، نجد أن معدل تدفق الوقود المستهلك، dm/dt، ثابت ويؤدي إلى تغيُّر كتلة الصاروخ. يتحرك الوقود المستهلك بسرعة متجهة ثابتة، $\vec{v}_c$، بالنسبة إلى الصاروخ. لذا نجد أنّ

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = -\,\vec{v}_c\frac{dm}{dt}.$$

تُسمى الصيغة $v_c(dm/dt)$ **دفع** الصاروخ. وتُقاس بوحدة النيوتن لأنها قوة:

$$\vec{F}_{\text{thrust}} = -\,\vec{v}_c\frac{dm}{dt}. \tag{8.18}$$

بلغ الدفع الذي أنتجته محركات صاروخ المكوك الفضائي ومعززاته ما يقرب من 30.4 MN (30.4 ميجا نيوتن، أو ما يقرب من 3,175,146.59 كيلوجرامًا). كما كانت الكتلة الكلية الابتدائية للمكوك الفضائي، بما في ذلك الحمولة الصافية وخزانات الوقود ووقود الصاروخ، أكبر قليلًا من مليوني kg؛ لذلك، كانت محركات صاروخ المكوك الفضائي ومعززاته قادرةً على إنتاج عجلة ابتدائية مقدارها

$$a = \frac{F_{\text{net}}}{m} = \frac{3.04\times10^{7}\ \text{N}}{2.0\times10^{6}\ \text{kg}} = 15\ \text{m/s}^2.$$

تكفي هذه العجلة لإقلاع المكوك من منصة الإطلاق مقابل عجلة الجاذبية ($-9.81\ \text{m/s}^2$). وبمجرد أن يرتفع المكوك وتقل كتلته، يُنتج عجلة أكبر. وعند استهلاك الوقود، يتم خنق المحركات الرئيسة مرة أخرى لضمان عدم تجاوز العجلة $3g$ (ثلاثة أضعاف عجلة الجاذبية) لتجنب تلف الحمولة أو إصابة رواد الفضاء.

الشكل 8.10 حركة الصاروخ.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مسألة محلولة 8.3 إطلاق صاروخ دافع

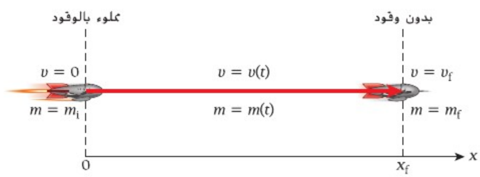
المسألة

افترض أنّ الكتلة الابتدائية لمركبة فضائية هي 1,850,000 kg. وبدون الوقود المستهلك، تبلغ كتلة المركبة الفضائية 50,000 kg. وقد صُمّم الصاروخ المشغِّل للمركبة الفضائية لإخراج الوقود المستهلك بسرعة 25 km/s بالنسبة إلى الصاروخ بمعدل ثابت يبلغ 15,000 kg/s. في البداية، كانت المركبة الفضائية في وضع سكون في الفضاء ثم تحركت في خط مستقيم. ما المسافة التي ستقطعها المركبة الفضائية قبل أن يستهلك صاروخها كمية الوقود المستهلك كلها ويتوقف؟

الحل

فكِّر تساوي الكتلة الكلية للوقود المستهلك كتلة المركبة الفضائية الكلية مطروحًا منها كتلة المركبة الفضائية بعد إخراج الوقود المستهلك كله. ويخرج الصاروخ الوقود المستهلك بمعدل ثابت، لذا يمكننا حساب الزمن الذي يعمل خلاله الصاروخ. عند استهلاك الوقود المستهلك، تقل كتلة المركبة الفضائية وتزداد سرعتها. إذا بدأت المركبة الفضائية من وضع السكون، فيمكن الحصول على السرعة $v(t)$ في أي زمن أثناء عمل الصاروخ من المعادلة 8.17، مع استبدال الكتلة النهائية للمركبة الفضائية بكتلتها عند هذا الزمن. ويمكن إيجاد المسافة المقطوعة قبل استهلاك كمية الوقود المستهلك كلها من خلال تكامل السرعة كدالة للزمن.

ارسم يظهر رسم تخطيطي لرحلة المركبة الفضائية في الشكل 8.11.



الشكل 8.11 المعلمات المختلفة لسفينة الفضاء أثناء تشغيل الصاروخ.

ابحث نرمز لمعدل إخراج الوقود المستهلك بالرمز r_p . إذًا، يمكن إيجاد الزمن t_{max} الذي سيعمل خلاله الصاروخ من خلال المعادلة

$$t_{max} = \frac{(m_i - m_f)}{r_p},$$

حيث m_i هي الكتلة الابتدائية للمركبة الفضائية وm_f هي كتلة المركبة الفضائية بعد إخراج كمية الوقود المستهلك كلها. تساوي المسافة الكلية التي تقطعها المركبة الفضائية في هذه الفترة الزمنية تكامل السرعة على الزمن:

$$x_f = \int_0^{t_{max}} v(t)\,dt. \qquad \text{(i)}$$

أثناء عمل الصاروخ. تُحدَّد كتلة المركبة الفضائية في زمن t من خلال المعادلة

$$m(t) = m_i - r_p t.$$

يتم إيجاد سرعة المركبة الفضائية في أي زمن معين بعد بدء عمل الصاروخ وقبل استهلاك كمية الوقود كلها كما يلي (قارن بالمعادلة 8.17)

$$v(t) = v_c \ln\left(\frac{m_i}{m(t)}\right) = v_c \ln\left(\frac{m_i}{m_i - r_p t}\right) = v_c \ln\left(\frac{1}{1 - r_p t \,/\, m_i}\right) \qquad \text{(ii)}$$

حيث v_c هي سرعة إخراج الوقود المستهلك بالنسبة إلى الصاروخ.

بسِّط نعوّض الآن من المعادلة (ii) الخاصة بتغيُّر سرعة المركبة الفضائية مع الزمن في المعادلة (i) ونحصل على

$$x_f = \int_0^{t_{max}} v(t)\,dt = \int_0^{t_{max}} v_c \ln\left(\frac{1}{1 - r_p t \,/\, m_i}\right) dt = -\,v_c \int_0^{t_{max}} \ln\left(1 - \frac{r_p t}{m_i}\right) dt. \qquad \text{(iii)}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

لأن $\int \ln(1-ax)dx = \frac{ax-1}{a}\ln(1-ax) - x$ (يمكنك البحث عن هذه النتيجة في جدول تكامل).

نجد بحساب التكامل أنّ

$$\int_0^{t_{max}} \ln(1-r_p t/m_i)\,dt = \left[\left(\frac{r_p t/m_i - 1}{r_p/m_i}\right)\ln(1-r_p t/m_i) - t\right]_0^{t_{max}}$$

$$= \left(\frac{r_p t_{max}/m_i - 1}{r_p/m_i}\right)\ln(1-r_p t_{max}/m_i) - t_{max}$$

$$= \left(t_{max} - m_i/r_p\right)\ln(1-r_p t_{max}/m_i) - t_{max}.$$

إذًا، تبلغ المسافة المقطوعة

$$x_f = -v_c\left[\left(t_{max} - m_i/r_p\right)\ln\left(1-r_p t_{max}/m_i\right) - t_{max}\right].$$

احسب يبلغ الزمن الذي يعمل خلاله الصاروخ

$$t_{max} = \frac{m_i - m_f}{r_p} = \frac{1,850,000 \text{ kg} - 50,000 \text{ kg}}{15,000 \text{ kg/s}} = 120 \text{ s}.$$

بالتعويض بالقيم العددية في العامل $1-r_p t_{max}/m_i$ نجد أنّ

$$1 - \frac{r_p t_{max}}{m_i} = 1 - \frac{15,000 \text{ kg/s} \cdot 120 \text{ s}}{1,850,000 \text{ kg}} = 0.027027.$$

وبهذا نجد قيمة المسافة المقطوعة كما يلي

$$x_f = -\left(25\times10^3 \text{ m/s}\right)\left[-(120 \text{ s}) + \left\{(120 \text{ s}) - \left(1.85\times10^6 \text{ kg}\right)/\left(15\times10^3 \text{ kg/s}\right)\right\}\ln(0.027027)\right]$$

$$= 2.69909\times10^6 \text{ m}.$$

قرِّب لأن سرعة الوقود المستهلك مكونة من رقمين معنويين فقط، نحتاج إلى التقريب إلى تلك الدقة:

$$x_f = 2.7\times10^6 \text{ m}.$$

تحقَّق ثانية للتحقق ثانية من قيمة المسافة المقطوعة التي أوجدناها، نستخدم المعادلة 8.17 لحساب السرعة المتجهة النهائية للمركبة الفضائية:

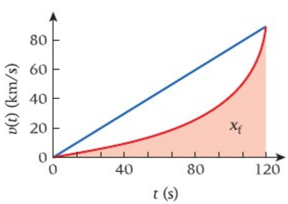
$$v_f = v_c \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right) = (25 \text{ km/s})\ln\left(\frac{1.85\times10^6 \text{ kg}}{5\times10^4 \text{ kg}}\right) = 90.3 \text{ km/s}.$$

إذا تسارعت المركبة الفضائية بمعدل ثابت، فستزداد السرعة خطّيًا مع الزمن، كما هو مبيَّن في الشكل 8.12، وسيكون متوسط السرعة أثناء وقت إخراج الوقود المستهلك $\bar{v} = v_f/2$ وبحساب متوسط السرعة هذا وضربه في ذلك الزمن، نجد أنّ

$$x_{a\text{-const}} \approx \bar{v}t_{max} = (v_f/2)t_{max} = (90.3 \text{ km/s})(120 \text{ s})/2 = 5.4\times10^6 \text{ m}.$$

وهذه المسافة التقريبية أكبر من القيمة التي أوجدناها، لأنه في العملية الحسابية، تزداد السرعة المتجهة مع الوقت حتى تصل إلى القيمة 90.3 km/s. يبلغ التقريب حوالي ضعف المسافة المحسوبة، مما يثبت أننا توصلنا إلى قيمة قريبة على الأقل.

يُبيّن الشكل 8.12 الحل الدقيق لـ $v(t)$ (المنحنى الأحمر). تمثل المسافة المقطوعة، x_f، في المنطقة أسفل المنحنى الأحمر. يُبيّن الخط الأزرق الحالة التي تؤدي فيها العجلة الثابتة إلى السرعة المتجهة النهائية نفسها. كما ترى، تساوي المساحة أسفل الخط الأزرق ضعف المساحة أسفل المنحنى الأحمر تقريبًا. ولأننا حسبنا المساحة أسفل الخط الأزرق، $x_{a\text{-const}}$، ووجدنا أنها تساوي ضعف القيمة التي حسبناها تقريبًا، يمكننا إذًا أن نثق في صحة تفسيرنا.

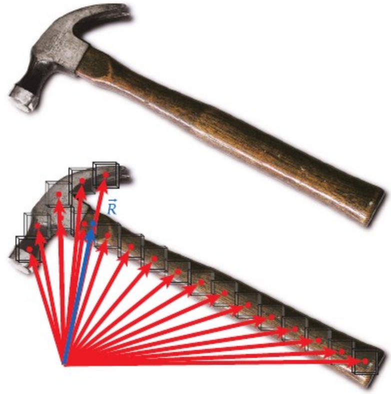


الشكل 8.12 مقارنة الحل الدقيق لـ $v(t)$ (المنحنى الأحمر) بحل العجلة الثابتة (الخط الأزرق).

8.3 حساب مركز الكتلة

حتى الآن، لم نتناول سؤالًا أساسيًا، ألا وهو: كيف نحسب موقع مركز الكتلة لجسم ذي شكل عشوائي؟ للإجابة عن هذا السؤال، لنقم بإيجاد موقع مركز كتلة المطرقة المبيَّنة في الشكل **8.13**. للقيام بذلك، يمكننا تمثيل المطرقة بمكعبات صغيرة متطابقة الحجم، كما هو مبيَّن في الجزء السفلي من الشكل. تكون

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



الشكل 8.13 حساب مركز كتلة المطرقة.

مراكز المكعبات هي نفسها مراكز الكتلة، وهي موضَّحة بنقاط حمراء. وتمثل الأسهم الحمراء متجهات مواقع المكعبات. إذا قبلنا بمجموعة المكعبات كتقريب مناسب للمطرقة، فيمكننا استخدام المعادلة 8.3 لإيجاد مركز كتلة مجموعة المكعبات، ومن ثمَّ مركز كتلة المطرقة.

لاحظ أنه ليس لكل المكعبات الكتلة نفسها، لأن كثافة المقبض الخشبي تختلف كثيرًا عن كثافة الرأس الحديدي. تُحدَّد العلاقة بين الكثافة الكتلية (ρ) والكتلة والحجم بالمعادلة

$$\rho = \frac{dm}{dV}. \qquad (8.19)$$

إذا كانت الكثافة الكتلية منتظمة في كل أنحاء الجسم، فسيكون لدينا

$$\rho = \frac{M}{V} \quad (\text{للثابت } \rho). \qquad (8.20)$$

وحينها يمكننا استخدام الكثافة الكتلية وإعادة كتابة المعادلة 8.3:

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i m_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \rho(\vec{r}_i)V.$$

لقد افترضنا هنا أنّ الكثافة الكتلية لكل مكعب صغير منتظمة (لكن يظل ثمة احتمال بأن تختلف من مكعب إلى آخر) وأنّ لكل مكعب الحجم V (الصغير) نفسه.

يمكننا الحصول على تقريب أفضل بكثير عن طريق تقليص حجم كل مكعب واستخدام عدد أكبر من المكعبات. من المفترض أن هذا الإجراء يبدو مألوفًا للغاية بالنسبة إليك، لأن هذا هو ما نقوم به تمامًا في حساب التفاضل والتكامل للوصول إلى نهاية تكامل. من هذه النهاية، نحصل على موقع مركز الكتلة لجسم ذي شكل عشوائي:

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\rho(\vec{r})\, dV. \qquad (8.21)$$

يمتد تكامل الحجم ثلاثي الأبعاد هنا على الحجم الكلي للجسم محل البحث.

يأتي السؤال التالي، وهو: ما النظام الإحداثي الذي يجب اختياره لحساب هذا التكامل؟ قد لا يكون قد سبق لك أن رأيت تكاملًا ثلاثي الأبعاد من قبل وربما كنت تتعامل فقط مع التكاملات أحادية البعد ذات الصيغة $\int f(x)dx$. لكن يمكن اختزال جميع التكاملات ثلاثية الأبعاد التي سنستخدمها في هذه الوحدة إلى ثلاثة تكاملات (على الأكثر) أحادية البعد متتالية، والتي يمكن حساب معظمها بطريقة بسيطة للغاية، بشرط اختيار نظام الإحداثيات المناسب.

مراجعة المفاهيم 8.5

إذا كان لدينا جسم ذو كثافة كتلية متغيرة $\rho(\vec{r})$ وإحداثي مركز كتلة $\vec{R}$ واستبدلناه بجسم له الشكل نفسه لكن بكثافة كتلية متغيرة ضعف الكثافة الكتلية للجسم الأول عند كل نقطة، فسيكون إحداثي مركز الكتلة الجديد

a) $\vec{R}$

b) $2\vec{R}$.

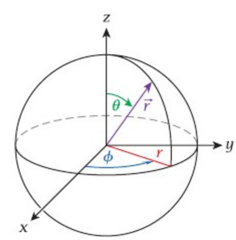
c) $\vec{R}/2$.

d) أي مما سبق، حسب شكل الجسمين.

أنظمة الإحداثيات غير الديكارتية ثلاثية الأبعاد

قدمت الوحدة 1 نظام إحداثيات متعامدة ثلاثي الأبعاد، وهو النظام الإحداثي الديكارتي، بالإحداثيات x وy وz. لكن في بعض التطبيقات، يكون من الأبسط رياضيًا تمثيل متجه الموقع في نظام إحداثي آخر. يقدم هذا القسم باختصار اثنين من الأنظمة الإحداثية ثلاثية الأبعاد شائعة الاستخدام يمكن استخدامهما لتحديد متجه في مساحة ثلاثية الأبعاد: الإحداثيات الكروية والإحداثيات الأسطوانية.

الإحداثيات الكروية في **الإحداثيات الكروية**، يُمثَّل متجه الموقع $\vec{r}$ من خلال تحديد طوله، r؛ وزاويته القطبية بالنسبة إلى المحور z الموجب، (θ)؛ وزاوية السمت لإسقاط المتجه على المستوى xy بالنسبة إلى المحور x الموجب، (ϕ) (الشكل 8.14).



الشكل 8.14 نظام إحداثيات كروي ثلاثي الأبعاد.

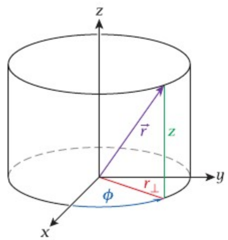
يمكننا الحصول على الإحداثيات الديكارتية للمتجه $\vec{r}$ من إحداثياته الكروية عن طريق التحويل

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi\sin\theta \\ y &= r\sin\phi\sin\theta \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned} \qquad (8.22)$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ويكون التحويل العكسي من الإحداثيات الديكارتية إلى الكروية كما يلي

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \quad (8.23)$$
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right).$$



الشكل 8.15 نظام إحداثي أسطواني ثلاثي الأبعاد.

الإحداثيات الأسطوانية. يمكن اعتبار **الإحداثيات الأسطوانية** وسيطًا بين نظام الإحداثيات الديكارتية والكروية ، حيث يكون الإحداثي الديكارتي z ثابتًا بينما يُستبدل الإحداثيان الديكارتيان x وy بالإحداثيين $r\perp$ وϕ (الشكل 8.15). يُحدّد الإحداثي $r\perp$ هنا طولَ إسقاط متجه الموقع $\vec{r}$ على المستوى xy، حيث يقيس المسافة العمودية إلى المحور z. كما هو الحال في الإحداثيات الكروية، تكون ϕ زاويةَ إسقاط المتجه على المستوى xy بالنسبة إلى المحور x الموجب.

نحصل على الإحداثيات الديكارتية من الإحداثيات الأسطوانية كما يلي

$$x = r_\perp \cos\phi$$
$$y = r_\perp \sin\phi \quad (8.24)$$
$$z = z.$$

ويكون التحويل العكسي من الإحداثيات الديكارتية إلى الأسطوانية كما يلي

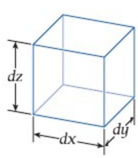
$$r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (8.25)$$
$$z = z.$$

كقاعدة ثابتة، يجب أن تستخدم النظام الإحداثي الديكارتي في محاولتك الأولى لوصف أي حالة فيزيائية. إلا أن النظامين الإحداثيين الأسطواني والكروي يُفضلان غالبًا عند التعامل مع الأجسام التي يكون لها تماثل حول نقطة أو خط. في جزء لاحق من هذه الوحدة، سنستخدم النظام الإحداثي الأسطواني لإجراء تكامل حجم ثلاثي الأبعاد. ستناقش الوحدة 9 الإحداثيات القطبية التي يمكن اعتبارها إحداثيات ثنائية الأبعاد مكافئة لأي من الإحداثيين الأسطواني أو الكروي. وأخيرًا، في الوحدة 10، سنستخدم الإحداثيين الكروي والأسطواني مرة أخرى لحل المسائل التي تكون إلى حد ما أكثر تعقيدًا وتتطلب استخدام التكامل.

التكاملات الحجمية

رغم أن حساب التفاضل والتكامل مطلوب بشكل أساسي في الفيزياء، فإن جامعات كثيرة تسمح للطلاب بأخذ دورات تمهيدية في الفيزياء وحساب التفاضل والتكامل في آن واحد. بوجه عام، ينجح هذا النهج، لكن عندما يواجه الطلاب تكاملات متعددة الأبعاد في الفيزياء، يكتشفون غالبًا أنها المرة الأولى التي يرون فيها هذا الرمز. إذًا، فلنراجع الإجراء الأساسي للقيام بهذه التكاملات.

إذا أردنا تكامل أي دالة على حجم ثلاثي الأبعاد، فإننا نحتاج إلى إيجاد تعبير لعنصر الحجم dV في مجموعة مناسبة من الإحداثيات. ويجب أن تستخدم دائمًا أنظمة إحداثيات متعامدة ما لم يكن هناك سبب قوي لعدم استخدامها. وتُعد الأنظمة، الديكارتية والأسطوانية والكروية، هي أنظمة الإحداثيات المتعامدة ثلاثية الأبعاد الأكثر استخدامًا.



الشكل 8.16 عنصر الحجم بالإحداثيات الديكارتية.

من الأسهل إلى حد كبير التعبير عن عنصر الحجم dV بالإحداثيات الديكارتية؛ فهو ببساطة حاصل ضرب العناصر الإحداثية الثلاثة (الشكل 8.16). حيث يكون تكامل الحجم ثلاثي الأبعاد المكتوب بالإحداثيات الديكارتية كما يلي

$$\int_V f(\vec{r})dV = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}}\left(\int_{y_{\min}}^{y_{\max}}\left(\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(\vec{r})dx\right)dy\right)dz. \quad (8.26)$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

في هذه المعادلة، يمكن أن تكون $f(\vec{r})$ دالة عشوائية للموقع. ويُرمز إلى الحدود السفلى والعليا للإحداثيات الفردية بـ x_{max}، x_{min}، . . . . . الأسلوب المعتاد هو حل التكامل الداخلي الأبعد أولاً ثم الأقرب فالأقرب. وهذا يعني، بالنسبة إلى المعادلة 8.26، أن نحل التكامل على x أولاً ثم التكامل على y ثم التكامل على z. لكن يمكن بدء الحل بأي ترتيب آخر. ومن الطرق الصحيحة أيضًا لكتابة التكامل في المعادلة 8.26 هذه الطريقة

$$\int_V f(\vec{r})\,dV = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(\int_{y_{min}}^{y_{max}} \left(\int_{z_{min}}^{z_{max}} f(\vec{r})\,dz \right) dy \right) dx, \qquad (8.27)$$

وبهذا يكون ترتيب التكامل الآن x، y، z. لماذا قد يُحدث ترتيب التكامل فرقًا؟ إن الحالة الوحيدة التي يكون فيها ترتيب التكامل مهمًا هي عندما تكون حدود التكامل في إحداثي معين معتمدة على أحد الإحداثيين الآخرين أو كليهما. سيتناول المثال 8.4 هذه الحالة.

لأن الزاوية ϕ هي أحد إحداثيات نظام الإحداثيات الأسطوانية، لا يكون عنصر الحجم على شكل مكعب. بالنسبة إلى زاوية تفاضلية معينة، $d\phi$، يعتمد حجم عنصر الحجم على مدى بعد موقع عنصر الحجم عن المحور z. يزيد هذا الحجم خطيًا بمسافة $r_\perp$ من المحور z (الشكل 8.17) ويمكن إيجاده من خلال المعادلة

$$dV = r_\perp dr_\perp d\phi dz. \qquad (8.28)$$

وعندئذٍ يكون تكامل الحجم كما يلي

$$\int_V f(\vec{r})dV = \int_{z_{min}}^{z_{max}} \left(\int_{\phi_{min}}^{\phi_{max}} \left(\int_{r_{min}}^{r_{max}} f(\vec{r}) r_\perp\, dr_\perp \right) d\phi \right) dz. \qquad (8.29)$$

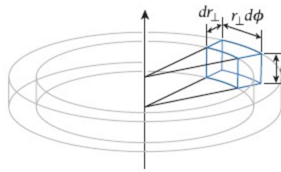
مرة أخرى، يمكن اختيار ترتيب التكامل الذي يُسهِّل الحل إلى أقصى درجة ممكنة.

وأخيرًا، في الإحداثيات الكروية، نستخدم المتغيرين الزاويّين، θ وϕ (الشكل 8.18). في هذه الحالة، يعتمد حجم عنصر الحجم لقيمة معينة للإحداثيات التفاضلية على المسافة r إلى نقطة الأصل وكذا الزاوية بالنسبة إلى المحور $\theta = 0$ (المساوي للمحور z في الإحداثيات الديكارتية أو الأسطوانية). ويُعبَّر عن عنصر الحجم التفاضلي في الإحداثيات الكروية كما يلي

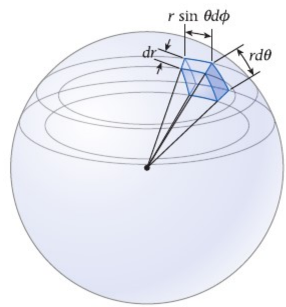
$$dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi \qquad (8.30)$$

ومن ثمَّ يكون التكامل الحجمي بالإحداثيات الكروية هو

$$\int_V f(\vec{r})dV = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \left(\int_{\phi_{min}}^{\phi_{max}} \left(\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} f(\vec{r}) \sin\theta d\theta \right) d\phi \right) r^2\, dr \qquad (8.31)$$



الشكل 8.17 عنصر الحجم بالإحداثيات الأسطوانية.



الشكل 8.18 عنصر الحجم بالإحداثيات الكروية.

مثال 8.4 حجم الأسطوانة

حتى نوضح لماذا قد يكون من الأبسط استخدام إحداثيات غير ديكارتية في حالات معينة، سنستخدم تكاملات حجمية لإيجاد حجم أسطوانة نصف قطرها R وارتفاعها H. نحتاج إلى تكامل الدالة $f(\vec{r}) = 1$ على الأسطوانة كلها للوصول إلى الحجم.

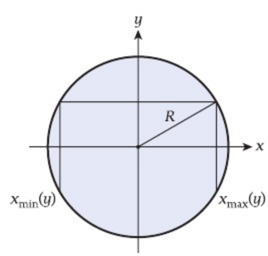
المسألة

استخدم تكاملاً حجميًا لإيجاد حجم أسطوانة قائمة ارتفاعها H ونصف قطرها R.

الحل

في الإحداثيات الديكارتية، نضع نقطة أصل النظام الإحداثي عند مركز القاعدة الدائرية للأسطوانة (السطح السفلي)، بحيث يكون الشكل الذي نحتاج إلى إيجاد التكامل عليه في المستوى xy دائرةً نصف قطرها R (الشكل 8.19). ومن ثمَّ يكون التكامل الحجمي بالإحداثيات الديكارتية هو

$$\int_V dV = \int_0^H \left(\int_{y_{min}}^{y_{max}} \left(\int_{x_{min}(y)}^{x_{max}(y)} dx \right) dy \right) dz. \qquad (i)$$



الشكل 8.19 السطح السفلي لأسطوانة قائمة نصف قطرها R.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يجب إجراء التكامل الداخلي الأبعد أولًا وبطريقة بسيطة:

$$\int_{x_{\min}(y)}^{x_{\max}(y)} dx = x_{\max}(y) - x_{\min}(y). \qquad \text{(ii)}$$

تعتمد حدود التكامل على y: $x_{\max} = \sqrt{R^2 - y^2}$ و $x_{\min} = -\sqrt{R^2 - y^2}$. لذلك، سيكون حل المعادلة (ii) هو $x_{\max}(y) - x_{\min}(y) = 2\sqrt{R^2 - y^2}$. نعوّض بذلك في المعادلة (i) ونحصل على

$$\int_V dV = \int_0^H \left(\int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - y^2}\, dy \right) dz. \qquad \text{(iii)}$$

وتكون قيمة التكامل الداخلي من هذين التكاملين هي

$$\int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - y^2}\, dy = \left(y\sqrt{R^2 - y^2} + R^2 \tan^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}} \right) \right)\Bigg|_{-R}^{R} = \pi R^2.$$

يمكنك التحقق من هذا الناتج بالبحث عن التكامل المحدد في جدول تكامل. وبالتعويض بهذا الناتج في المعادلة (iii)، نصل في النهاية إلى الحل:

$$\int_V dV = \int_0^H \pi R^2\, dz = \pi R^2 \int_0^H dz = \pi R^2 H.$$

كما ترى، كان الوصول إلى حجم الأسطوانة أصعب بالإحداثيات الديكارتية. فماذا عن استخدام الإحداثيات الأسطوانية؟ طبقًا للمعادلة 8.29، يكون التكامل الحجمي هو

$$\int_V f(\vec{r})\, dV = \int_0^H \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r_\perp\, dr_\perp \right) d\phi \right) dz = \int_0^H \left(\int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2} R^2 \right) d\phi \right) dz$$

$$= \tfrac{1}{2} R^2 \int_0^H \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) dz = \tfrac{1}{2} R^2 \int_0^H 2\pi\, dz = \pi R^2 \int_0^H dz = \pi R^2 H.$$

في هذه الحالة، كان من الأسهل كثيرًا استخدام الإحداثيات الأسطوانية، نتيجة لهندسة الجسم الذي احتجنا إلى إيجاد التكامل عليه.

سؤال الاختبار الذاتي 8.2

باستخدام الإحداثيات الكروية، أثبِت أن حجم الكرة V التي نصف قطرها R هو $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

يمكننا الآن العودة إلى مسألة حساب موقع مركز كتلة الجسم. بالنسبة إلى المركَّبات الديكارتية لمتجه الموقع، نجد أنّ، من المعادلة 8.21:

$$X = \frac{1}{M}\int_V x\rho(\vec{r})\, dV, \quad Y = \frac{1}{M}\int_V y\rho(\vec{r})\, dV, \quad Z = \frac{1}{M}\int_V z\rho(\vec{r})\, dV. \qquad \textbf{(8.32)}$$

إذا كانت الكثافة الكتلية للجسم كله عاملًا ثابتًا، $\rho(\vec{r}) \equiv \rho$، فيمكننا حذف هذا العامل الثابت من التكامل والحصول على حالة خاصة من المعادلة 8.21 للكثافة الكتلية الثابتة:

$$\vec{R} = \frac{\rho}{M}\int_V \vec{r}\, dV = \frac{1}{V}\int_V \vec{r}\, dV \quad (\rho \text{ للثابت}), \qquad \textbf{(8.33)}$$

حيث استخدمنا المعادلة 8.20 في الخطوة الأخيرة. في المركَّبات الديكارتية، نحصل لهذه الحالة على:

$$X = \frac{1}{V}\int_V x\, dV, \quad Y = \frac{1}{V}\int_V y\, dV, \quad Z = \frac{1}{V}\int_V z\, dV. \qquad \textbf{(8.34)}$$

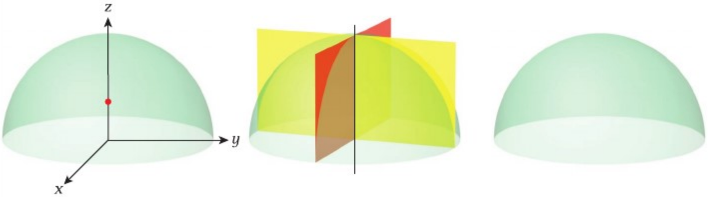
توضح المعادلتان 8.33 و8.34 أن أي جسم له مستوى تماثل يكون مركز كتلته في هذا المستوى. والجسم الذي يكون له ثلاثة مستويات تماثل عمودية بعضها على بعض (مثل أسطوانة أو متوازي مستطيلات أو جسم كروي)، سيقع مركز كتلته عند تقاطع هذه المستويات الثلاثة، وهو المركز الهندسي. ويوضح المثال 8.5 هذه النظرية بشكل أكثر تفصيلا .

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 8.5 مركز الكتلة لجسم نصف كروي

المسألة

افترض أن جسمًا صلبًا نصف كروي كثافته الكتلية ثابتة ونصف قطره R_0 (الشكل 8.20a). أين يقع مركز كتلته؟



الشكل 8.20 تحديد مركز الكتلة: (a) جسم نصف كروي؛ (b) مستويات التماثل ومحور التماثل؛ (c) نظام إحداثي موضح فيه موقع مركز الكتلة بنقطة حمراء.

الحل

كما هو موضَّح في الشكل 8.20b، يمكن أن تقسم مستويات التماثل هذا الجسم إلى أجزاء متساوية ومتماثلة. يوضح الشكل مستويين متعامدين باللونين الأحمر والأصفر. إلا أن أي مستوى يمر عبر محور التماثل الرأسي (الموضَّح بالخط الأسود الرفيع) يكون مستوى تماثل.

نضع الآن النظام الإحداثي بحيث يكون أحد المحورين (المحور z في هذه الحالة) متطابقًا مع محور التماثل هذا. وبهذا نتأكد من أن مركز الكتلة يقع على هذا المحور تمامًا. لأن التوزيع الكتلي متماثل ومكاملات المعادلة 8.33 أو 8.34 قوى فردية لـــ $\vec{r}$، يجب أن تكون قيمة تكامل X أو Y صفرًا. ولا سيما أنّ:

$$\int_{-a}^{a} x\,dx = 0 \text{ لجميع قيم الثابت } a.$$

يضمن وضع النظام الإحداثي، بحيث يكون المحور z هو محور التماثل، أنّ $X = Y = 0$. ويتضح هذا في الشكل 8.20c، حيث تقع نقطة أصل النظام الإحداثي عند مركز السطح السفلي الدائري للجسم نصف الكروي.

نحتاج الآن إلى إيجاد قيمة التكامل الثالث في المعادلة 8.34:

$$Z = \frac{1}{V}\int_V z\,dV.$$

حجم الجسم نصف الكروي يساوي نصف حجم الكرة، أو

$$V = \frac{2\pi}{3}R_0^3. \qquad \text{(i)}$$

لإيجاد قيمة تكامل Z، نستخدم الإحداثيات الأسطوانية، الموضَّح فيها عنصر الحجم التفاضلي (انظر المعادلة 8.28) حيث $dV = r_\perp dr_\perp d\phi\, dz$. ثم يتم إيجاد قيمة التكامل كما يلي:

$$\int_V z\,dV = \int_0^{R_0}\left(\int_0^{\sqrt{R_0^2-z^2}}\left(\int_0^{2\pi} z r_\perp\, d\phi\right)dr_\perp\right)dz = \int_0^{R_0} z\left(\int_0^{\sqrt{R_0^2-z^2}} r_\perp\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right)dr_\perp\right)dz$$

$$= 2\pi\int_0^{R_0} z\left(\int_0^{\sqrt{R_0^2-z^2}} r_\perp\, dr_\perp\right)dz = \pi\int_0^{R_0} z(R_0^2 - z^2)\,dz$$

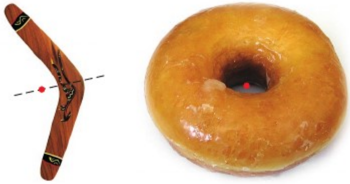
$$= \frac{\pi}{4}R_0^4.$$

من خلال ضرب هذا الناتج في تعبير حجم الجسم نصف الكروي من المعادلة (i)، نحصل على الإحداثي z لمركز الكتلة:

$$Z = \frac{1}{V}\int_V z\,dV = \frac{3}{2\pi R_0^3}\,\frac{\pi R_0^4}{4} = \frac{3}{8}R_0.$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

لاحظ أنه ليس من الضروري أن يقع مركز كتلة الجسم داخل الجسم دائمًا. يتضمن الشكل 8.21 مثالين واضحين لذلك. باعتبار التماثل، نجد أنّ مركز كتلة الكعكة (الشكل 8.21a) يقع في منتصف الفجوة تمامًا، عند نقطة بعيدة عن جسم الكعكة. وبالمثل، نجد أن مركز كتلة خشبة الكيد المرتد (الشكل 8.21b) يقع على محور التماثل المتقطع في نقطة بعيدة عن الجسم.

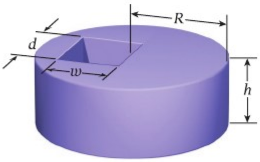

(b) (a)

الشكل 8.21 جسمان مركز كتلة كل منهما (موضح بالنقطة الحمراء) خارج توزيعه الكتلي: (a) كعكة؛ (b) الكيد. يظهر محور تماثل الكيد المرتد في شكل خط متقطع.

مسألة محلولة 8.4 مركز كتلة قرص فيه فجوة

المسألة

أين يقع مركز كتلة قرص فيه فجوة مستطيلة الشكل (الشكل 8.22)؟ علمًا بأن ارتفاع القرص يساوي $h = 11.0$ cm ونصف قطره يساوي $R = 11.5$ cm، ويبلغ عرض الفجوة المستطيلة $w = 7.0$ cm وطولها $d = 8.0$ cm، وأن نقطة منتصف الجانب الأيمن من الفجوة تتطابق مع المحور المركزي للقرص.

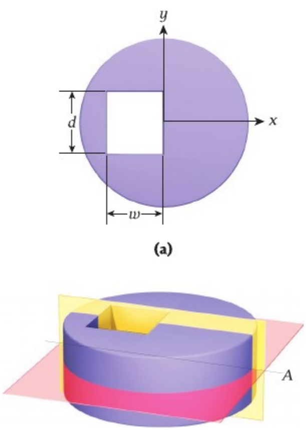


الشكل 8.22 منظر ثلاثي الأبعاد للقرص ذي الفجوة المستطيلة.

الحل

فكِّر يمكن حل هذه المسألة من خلال كتابة صيغ رياضية تصف الأبعاد الهندسية الثلاثة للقرص ذي الفجوة، ثم إيجاد التكامل الحجمي للحصول على إحداثيات مركز الكتلة. إلا أن ذلك سيعطينا عدة تكاملات معقدة. أو يمكننا حل هذه المسألة بطريقة أسهل من خلال التعامل مع القرص ذي الفجوة على أنه قرص صلب *ينقصه* فجوة مستطيلة الشكل. بمعنى أننا سنتعامل مع الفجوة على أنها جسم صلب له كتلة سالبة. باستخدام تماثل كل من القرص الصلب والفجوة، يمكننا تحديد إحداثيات مركز كتلة كل من القرص الصلب والفجوة. ثم يمكننا الجمع بين هذه الإحداثيات، باستخدام المعادلة 8.1، لإيجاد مركز كتلة القرص ذي الفجوة.

ارسم يوضح الشكل 8.23a منظرًا علويًا للقرص ذي الفجوة، مع تحديد المحورين x وy. يوضح الشكل 8.23b مستويَي التماثل للقرص ذي الفجوة. يتوافق أحدهما مع المستوى x–y، ويقع الآخر على طول المحور xوعموديًا على المستوى x–y. ويظهر خط تقاطع هذين المستويين مميزًا بالحرف A.



(a)
(b)

الشكل 8.23 (a) منظر علوي للقرص ذي الفجوة، وموضح عليه النظام الإحداثي المحدد. (b) مستويات التماثل للقرص ذي الفجوة.

ابحث يجب أن يقع مركز الكتلة على طول خط تقاطع مستويَي التماثل. لذا، فإننا نعلم أنّ مركز الكتلة لا بد أن يقع على طول المحور x فقط. يقع مركز كتلة القرص بدون الفجوة عند نقطة أصل النظام الإحداثي عند $x_d = 0$، وحجم القرص الصلب يساوي $V_d = \pi R^2 h$. إذا كانت الفجوة جسمًا صلبًا له الأبعاد نفسها ($h = 11.0$ cm, $w = 7.0$ cm, $d = 8.0$ cm)، فإن حجم هذا الجسم سيساوي $V_h = hwd$. إذا كان هذا الجسم الصلب التخيلي يقع في موضع الفجوة، فسيقع مركز كتلته في منتصف هذه الفجوة عند $x_h = -3.5$ cm. سنضرب الآن كلًا من الحجمين في r، أي الكثافة الكتلية للمادة المصنوع منها القرص، لإيجاد الكتلتين المقابلتين وتحديد كتلة سالبة للفجوة. ثم سنستخدم المعادلة 8.1 لإيجاد الإحداثي x لمركز الكتلة:

$$X = \frac{x_d V_d \rho - x_h V_h \rho}{V_d \rho - V_h \rho}. \qquad (i)$$

يُعدّ التعامل مع الفجوة على أنها جسم صلب له شكل الفجوة ثم استخدام حجمه في العمليات الحسابية مع تعيين كتلته بالقيمة السالبة من الطرق الشائعة في الفيزياء الذرية ودون الذرية. سنتعرض إلى ذلك مرة أخرى عند استكشاف الفيزياء الذرية (في الوحدة 37) والفيزياء النووية وفيزياء الجسيمات (في الوحدتين 39 و40).

بسِّط يمكننا تبسيط المعادلة (i) إذا كنا نعرف أنّ $x_d = 0$ وأنّ r عامل مشترك:

$$X = \frac{-x_h V_h}{V_d - V_h}.$$

يُتبع

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

عند التعويض بالتعبيرات التي أوجدناها لـ V_d وV_h، نحصل على

$$X = \frac{-x_h V_h}{V_d - V_h} = \frac{-x_h (hwd)}{\pi R^2 h - hwd} = \frac{-x_h wd}{\pi R^2 - wd}.$$

بتحديد مساحة القرص في المستوى $x-y$ لتكون $A_d = \pi R^2$ ومساحة الفجوة في المستوى $x-y$ لتكون $A_h = wd$، سنكتب

$$X = \frac{-x_h wd}{\pi R^2 - wd} = \frac{-x_h A_h}{A_d - A_h}.$$

احسب بالتعويض بالقيم المعطاة، سنجد أنّ مساحة القرص تساوي

$$A_d = \pi R^2 = \pi (11.5 \text{ cm})^2 = 415.475 \text{ cm}^2,$$

وأنّ مساحة الفجوة تساوي

$$A_h = wd = (7.0 \text{ cm})(8.0 \text{ cm}) = 56 \text{ cm}^2.$$

لذا، فإنه عند الأخذ في الاعتبار أنّ $x_h = -3.5$ cm، نجد أن مركز كتلة القرص ذي الفجوة يقع عند

$$X = \frac{-x_h A_h}{A_d - A_h} = \frac{-(-3.5 \text{ cm})(56 \text{ cm}^2)}{(415.475 \text{ cm}^2) - (56 \text{ cm}^2)} = 0.545239 \text{ cm}.$$

قرّب بتقريب الناتج إلى رقمين معنويين، سنجد أنّ الإحداثي x لمركز كتلة القرص ذي الفجوة يساوي

$$X = 0.55 \text{ cm}.$$

تحقّق ثانية تنحاز هذه النقطة إلى يمين مركز القرص الصلب قليلًا، بمسافة تساوي جزءًا صغيرًا من نصف قطر القرص. تبدو هذه النتيجة منطقية، لأنه إذا اقتُطع جزء من القرص يسار النقطة $x = 0$، فسينزاح مركز الثقل إلى اليمين، تمامًا كما نتج لنا.

مركز الكتلة للأجسام أحادية البعد وثنائية الأبعاد

لا تركز كل المسائل التي تتضمن حساب مركز الكتلة على الأجسام ثلاثية الأبعاد. على سبيل المثال، قد تريد حساب مركز كتلة جسم ثنائي الأبعاد مثل لوحة معدنية مسطحة. يمكننا كتابة معادلات إحداثيات مركز كتلة الجسم ثنائي الأبعاد الذي تُمثل $\sigma(\vec{r})$ الكثافة الكتلية لمساحته (أو كتلته لكل وحدة مساحة) من خلال تعديل تعبيرات إيجاد X وY الواردة في المعادلة 8.32:

$$X = \frac{1}{M}\int_A x\sigma(\vec{r})dA, \quad Y = \frac{1}{M}\int_A y\sigma(\vec{r})dA, \tag{8.35}$$

حيث تساوي الكتلة

$$M = \int_A \sigma(\vec{r})dA. \tag{8.36}$$

إذا كانت الكثافة الكتلية لمساحة الجسم ثابتة، فإن $\sigma = M/A$. ومن ثمّ يكون بإمكاننا إعادة كتابة المعادلة 8.35 لإيجاد إحداثيات مركز كتلة الجسم ثنائي الأبعاد بدلالة المساحة A، وإحداثيات x وy:

$$X = \frac{1}{A}\int_A x\,dA, \quad Y = \frac{1}{A}\int_A y\,dA, \tag{8.37}$$

حيث يمكن إيجاد قيمة المساحة الكلية من المعادلة

$$A = \int_A dA. \tag{8.38}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إذا كان الجسم أحادي البعد فعلاً، مثل قضيب طويل ورفيع طوله L وكثافته الكتلية الخطية (أو كتلته لكل وحدة طول) $\lambda(x)$، فإنه يمكن إيجاد إحداثي مركز الكتلة من خلال المعادلة

$$X = \frac{1}{M}\int_L x\lambda(x)dx, \tag{8.39}$$

حيث تساوي الكتلة

$$M = \int_L \lambda(x)dx. \tag{8.40}$$

إذا كانت الكثافة الكتلية الخطية للقضيب ثابتة، فمن المؤكد أن مركز الكتلة يقع عند المركز الهندسي — منتصف القضيب — مما يعني أننا لا نحتاج إلى إجراء المزيد من العمليات الحسابية لإيجاده.

مسألة محلولة 8.5 مركز كتلة قضيب طويل ورفيع

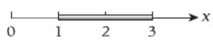
المسألة

يقع قضيب طويل ورفيع على امتداد المحور x. حيث يقع أحد طرفي القضيب عند $x = 1.00$ m ويقع الطرف الآخر عند $x = 3.00$ m. ويمكن إيجاد الكثافة الكتلية الخطية للقضيب من خلال المعادلة $\lambda(x) = ax^2 + b$، حيث $a = 0.300\ \text{kg/m}^3$ و$b = 0.600$ kg/m. أوجد كتلة القضيب والإحداثي x لمركز كتلته.

الحل

فكّر الكثافة الكتلية الخطية للقضيب ليست منتظمة، بل تعتمد على الإحداثي x. ومن ثمّ، فإنه لإيجاد الكتلة نحتاج إلى إيجاد تكامل الكثافة الكتلية الخطية على طول القضيب. لإيجاد مركز الكتلة، نحتاج إلى إيجاد تكامل الكثافة الكتلية الخطية مضروبًا في المسافة في الاتجاه x. ثم نقسم الناتج على كتلة القضيب.

ارسم يوضح الشكل 8.24 القضيب الطويل الرفيع موضوعًا على امتداد المحور x.



الشكل 8.24 قضيب طويل ورفيع على امتداد المحور x.

ابحث يمكن إيجاد قيمة كتلة القضيب من خلال إيجاد تكامل الكثافة الكتلية الخطية l، على طول القضيب بدءًا من $x_1 = 1.00$ m وحتى $x_2 = 3.00$ m (انظر المعادلة 8.40):

$$M = \int_{x_1}^{x_2} \lambda(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(ax^2 + b\right)dx = \left[a\frac{x^3}{3} + bx\right]_{x_1}^{x_2}.$$

لإيجاد الإحداثي x لمركز كتلة القضيب X، نحسب حاصل ضرب تكامل الكتلة التفاضلية في x ثم نقسم الناتج على الكتلة التي أوجدنا قيمتها للتو (انظر المعادلة 8.39):

$$X = \frac{1}{M}\int_{x_1}^{x_2} \lambda(x)\,x\,dx = \frac{1}{M}\int_{x_1}^{x_2} \left(ax^2 + b\right)x\,dx = \frac{1}{M}\int_{x_1}^{x_2} \left(ax^3 + bx\right)dx = \frac{1}{M}\left[a\frac{x^4}{4} + b\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}.$$

بسّط بالتعويض بالنهايتين العلوية والسفلية x_2 وx_1 في المعادلة، نحصل على كتلة القضيب:

$$M = \left[a\frac{x^3}{3} + bx\right]_{x_1}^{x_2} = \left(a\frac{x_2^3}{3} + bx_2\right) - \left(a\frac{x_1^3}{3} + bx_1\right) = \frac{a}{3}\left(x_2^3 - x_1^3\right) + b\left(x_2 - x_1\right).$$

وبالطريقة نفسها، نحصل على الإحداثي x لمركز كتلة القضيب:

$$X = \frac{1}{M}\left[a\frac{x^4}{4} + b\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{M}\left\{\left(a\frac{x_2^4}{4} + b\frac{x_2^2}{2}\right) - \left(a\frac{x_1^4}{4} + b\frac{x_1^2}{2}\right)\right\}$$

والذي يمكن تبسيطه إلى

$$X = \frac{1}{M}\left\{\frac{a}{4}\left(x_2^4 - x_1^4\right) + \frac{b}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)\right\}.$$

يَتبع

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

احسب بالتعويض بالقيم العددية المعطاة، نستطيع حساب كتلة القضيب:

$$M=\frac{0.300\ \text{kg/m}^3}{3}\left((3.00\ \text{m})^3-(1.00\ \text{m})^3\right)+(0.600\ \text{kg/m})(3.00\ \text{m}-1.00\ \text{m})=3.8\ \text{kg}.$$

ومن خلال القيم العددية، نجد أن الإحداثي x للقضيب يساوي

$$X=\frac{1}{3.8\ \text{kg}}\left\{\frac{0.300\ \text{kg/m}^3}{4}\left((3.00\ \text{m})^4-(1.00\ \text{m})^4\right)+\frac{0.600\ \text{kg/m}}{2}\left((3.00\ \text{m})^2-(1.00\ \text{m})^2\right)\right\}$$
$$=2.210526316\ \text{m}.$$

قرِّب تم تحديد كل القيم العددية في المسألة لتتكون من ثلاثة أرقام معنوية فقط، لذا سنقرب النتائج لتصبح

$$M=3.80\ \text{kg}$$

و

$$X=2.21\ \text{m}$$

تحقَّق ثانية للتحقق ثانية من أنّ قيمة كتلة القضيب التي أوجدناها صحيحة، سنفترض أنّ للقضيب كثافة كتلية خطية ثابتة مساوية للكثافة الكتلية الخطية التي أوجدنا قيمتها بتحديد $x = 2$ m (منتصف القضيب) في تعبير إيجاد l المُعطى في المسألة والذي يساوي

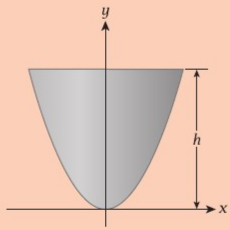
$$\lambda=(0.3\cdot 4+0.6)\ \text{kg/m}=1.8\ \text{kg/m}.$$

ومن ثَمَّ، فإن $m \approx 2\ \text{m} \times 1.8\ \text{kg/m} = 3.6\ \text{kg}$. وهو ناتج قريب إلى حد معقول من الناتج الذي أوجدناه للكتلة سابقًا $M = 3.80$ kg.

للتحقق ثانية من أنّ قيمة الإحداثي x لمركز كتلة القضيب صحيحة، سنفترض مجددًا أنّ الكثافة الكتلية الخطية ثابتة. ومن ثَمَّ، سيقع مركز الكتلة عند منتصف القضيب، أي أنّ $X \approx 2$ m. بينما الإحداثي الذي أوجدناه هو $X = 2.21$ m، أي أنه يقع إلى يمين مركز القضيب قليلًا. بالنظر إلى دالة الكثافة الكتلية الخطية، نجد أنّ الكتلة الخطية للقضيب تزداد جهة اليمين، مما يعني أنّ مركز كتلة القضيب لا بد أن يكون على يمين المركز الهندسي للقضيب. لذا، فإن الناتج الذي توصلنا إليه يبدو منطقيًا.

سؤال الاختبار الذاتي 8.3

اقتُطعت صفيحة ارتفاعها h من لوحة معدنية رقيقة ذات كثافة كتلية منتظمة، كما هو موضَّح في الشكل. ويُحدِّد $y = 2x^2$ الحد السفلي للصفيحة. أثبِت أنّ مركز كتلة هذه الصفيحة يقع عند $x = 0$ و$y = \frac{3}{5}h$.



ما تعلمناه | دليل المذاكرة للاختبار

- إنّ مركز الكتلة هو نقطة على الجسم تتركز فيها كتلة هذا الجسم كلها.
- يمكن تحديد مركز كتلة جسم ذي شكل عشوائي من خلال المعادلة $\vec{R}=\frac{1}{M}\int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV$ حيث تكون الكثافة الكتلية للجسم $\rho=\frac{dm}{dV}$ ويمتد التكامل على حجم الجسم بالكامل V، وM كتلته الكلية.
- عندما تكون الكثافة الكتلية منتظمة عبر الجسم بالكامل، بحيث، $\rho=\frac{M}{V}$، فحينها يقع مركز الكتلة عند $\vec{R}=\frac{1}{V}\int_V \vec{r}\,dV$
- إذا كان للجسم مستوى تماثل، فلا بد أن يقع مركز الكتلة في هذا المستوى.
- يمكن تحديد موقع مركز كتلة مجموعة من الأجسام من خلال حساب المتوسط الكتلي المرجح لمواقع مراكز كتل الأجسام. $\vec{R}=\frac{\vec{r}_1m_1+\vec{r}_2m_2+\cdots+\vec{r}_nm_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_im_i.$
- يمكن وصف حركة جسم صلب غير نقطي بحركة مركز كتلته.
- يمكن إيجاد السرعة المتجهة لمركز الكتلة بواسطة مشتقة متجه موضعه: $\vec{V}\equiv\frac{d}{dt}\vec{R}$
- كمية حركة مركز كتلة مجموعة من الأجسام هو $\vec{P}=M\vec{V}=\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i$ وتخضع كمية الحركة هذه للقانون الثاني لنيوتن:
$$\frac{d}{dt}\vec{P}=\frac{d}{dt}(M\vec{V})=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=\vec{F}_{\text{net}}$$
لا ينتج عن القوى الداخلية بين الأجسام محصلة قوى (فمحصلتها تكون صفرًا لأنها دائمًا تكون متساوية في المقدار ومضادة في الاتجاه)، ومن ثَمَّ فإنها لا تغيِّر كمية حركة مركز الكتلة.
- تُعدّ حركة الصاروخ مثالًا للحركة التي تتغير خلالها كتلة الجسم المتحرك. يمكن إيجاد معادلة حركة الصاروخ في الفضاء بين النجوم من خلال $\vec{F}_{\text{thrust}}=m\vec{a}=-\vec{v}_c\frac{dm}{dt}$ حيث $\vec{v}_c$ هي السرعة المتجهة للوقود المستهلك بالنسبة إلى الصاروخ و$\frac{dm}{dt}$ هو معدل تغيُّر الكتلة نتيجة لتدفق الوقود المستهلك.
- يمكن إيجاد سرعة الصاروخ كدالة لكتلته بواسطة المعادلة $v_f-v_i=v_c\ln(m_i/m_f)$. حيث يعبر الحرف i عن الكتلة والسرعة الابتدائيتين، ويعبر الحرف f عن الكتلة والسرعة النهائيتين.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابات أسئلة الاختبار الذاتي

8.1

$$Z = \frac{z_{\text{red}}m_{\text{red}} + z_{\text{green}}m_{\text{green}} + z_{\text{orange}}m_{\text{orange}} + z_{\text{blue}}m_{\text{blue}} + z_{\text{purple}}m_{\text{purple}}}{M}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}h2m_0 + \frac{1}{2}hm_0 + \frac{1}{2}hm_0 + \frac{1}{2}hm_0 + \frac{3}{2}hm_0}{6m_0}$$
$$= \frac{h\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)}{6} = \frac{2}{3}h = 1.7 \text{ m.}$$

8.2 نستخدم الإحداثيات الكروية وتكامل الزاوية θ من 0 إلى π، والزاوية ϕ من 0 إلى 2π، والإحداثي الشعاعي r من 0 إلى R.

$$V = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \right) d\phi \right) r^2\, dr$$

نحسب أولًا تكامل زاوية السمت:

$$\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = [-\cos\theta]_0^{\pi} = -\left[\cos(\pi) - \cos(0)\right] = 2$$

$$V = 2\int_0^R \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) r^2\, dr$$

ثم نحسب تكامل الزاوية القطبية:

$$\int_0^{2\pi} d\phi = [\phi]_0^{2\pi} = 2\pi$$

وأخيرًا:

$$V = 4\pi\int_0^R r^2\, dr = 4\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

8.3 $dA = 2x(y)dy;\ y = 2x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y/2}$

$$2x(y) = 2\sqrt{y/2} = \sqrt{2y};\ dA = \sqrt{2y}dy$$

$$Y = \frac{\int_0^h y\sqrt{2y}\, dy}{\int_0^h \sqrt{2y}\, dy} = \frac{\sqrt{2}\int_0^h y^{3/2}\, dy}{\sqrt{2}\int_0^h y^{1/2}\, dy} = \frac{\left[\frac{y^{5/2}}{5/2}\right]_0^h}{\left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_0^h}$$

$Y = \frac{3}{5}h.$ ($X = 0$, بالتماثل).

إرشادات حل المسائل: مركز الكتلة وحركة الصاروخ

1. الخطوة الأولى في تحديد موقع مركز كتلة جسم أو نظام يتكون من مجموعة جسيمات هي إيجاد مستويات التماثل. فلا بد أن يقع مركز الكتلة على مستوى التماثل، أو على خط تقاطع مستويَي تماثل، أو عند نقطة تقاطع أكثر من مستوى تماثل.

2. بالنسبة إلى الأشكال المعقدة، يمكنك تفكيك الجسم إلى أشكال هندسية أبسط، ثم تحدد موقع مركز الكتلة لكل شكل على حدة. ثم تجمع بعد ذلك مراكز الكتلة الفردية التي أوجدتها للحصول على مركز كتلة كلي باستخدام المتوسط المرجح للمسافات والكتل، مع معاملة الفجوات كأجسام ذات كتلة سالبة.

3. يمكن التعامل مع حركة أي جسم كتراكب لحركة مركز كتلته (وفقًا للقانون الثاني لنيوتن) ودوران الجسم حول مركز الكتلة. من الطرق المناسبة لتحليل التصادمات تعيين مناط إسناد مع وجود نقطة الأصل عند مركز الكتلة.

4. غالبًا ما يكون من الصعب تفادي استخدام التكامل عند تحديد موقع مركز الكتلة. وفي هذه الحالة، يُفضل التفكير بعناية في أبعاد الجسم المتضمن في الحالة التي لدينا، واختيار النظام الإحداثي المناسب (الديكارتي أو الأسطواني أو الكروي).

5. في المسائل التي تتضمن حركة الصواريخ، لا يمكنك استخدام معادلة $F = ma$، لأن كتلة الصاروخ لا تظل ثابتة.

أسئلة الاختيار من متعدد

8.1 وقف رجل على جليد عديم الاحتكاك وألقى خشبة الكيد فاستدارت وعادت إليه. اختر العبارة الصحيحة:

a) لأن كمية حركة النظام المتكون من الرجل والكيد تكون محفوظة، سيصل الرجل إلى وضع السكون ممسكًا بالكيد عند الموضع نفسه الذي ألقى منه الكيد في البداية.

b) من المستحيل أن يتمكن الرجل من إلقاء الكيد في هذه الحالة.

c) من الممكن أن يتمكن الرجل من إلقاء الكيد، لكن لأنه يقف على جليد عديم الاحتكاك عند إلقاء الكيد، فلن يعود الكيد إليه مرة أخرى.

d) لا تُحفظ كمية الحركة الكلية للنظام المتكون من الرجل والكيد، لذا فإن الرجل سينزلق إلى الوراء عند إمساكه بالكيد عندما يعود إليه مرة أخرى.

8.2 عند انحلال نواة البزموت 208 وهي في وضع السكون، يَنتج الثاليوم 204 وجسيم ألفا (نواة الهيليوم 4) الأعداد الكتلية للبزموت 208 والثاليوم 204 والهيليوم 4 هي 208 و204 و4 على التوالي. (العدد الكتلي هو العدد الكلي للبروتونات والنيوترونات الموجودة في النواة). ستكون الطاقة الحركية لنواة الثاليوم

a) مساوية للطاقة الحركية لجسيم ألفا.

b) أقل من الطاقة الحركية لجسيم ألفا.

c) أكبر من الطاقة الحركية لجسيم ألفا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8.3 جسمان كتلتاهما m_1 و m_2 يتحركان على طول المحور x في الاتجاه الموجب بالسرعتين v_1 وv_2، على التوالي، حيث v_1 أقل من v_2. تكون سرعة مركز كتلة هذا النظام المتكون من جسمين

a) أقل من v_1.

b) مساوية لـــ v_1.

c) مساوية لمتوسط السرعتين v_1 وv_2.

d) أكبر من v_1 وأقل من v_2.

e) أكبر من v_2.

8.4 تحركت قذيفة مدفعية في مسار على شكل قطع مكافئ عند انفجارها في الجو. وتحطمت القذيفة إلى شظايا كثيرة جدًا. أي العبارات التالية صحيحة (حدد كل ما ينطبق)؟

a) ستزيد قوة الانفجار من كمية حركة النظام المتكون من الشظايا، ومن ثمَّ *لن تُحفظ* كمية حركة القذيفة أثناء الانفجار.

b) قوة الانفجار قوة داخلية، ومن ثمَّ لن تغيِّر كمية الحركة الكلية للنظام.

c) سيستمر مركز كتلة النظام المتكون من الشظايا في التحرك في المسار الابتدائي على شكل قطع مكافئ حتى تلامس الشظية الأخيرة الأرض.

d) سيستمر مركز كتلة النظام المتكون من الشظايا في التحرك في المسار الابتدائي على شكل قطع مكافئ حتى تلامس الشظية الأولى الأرض.

e) سيكون لمركز كتلة النظام المتكون من الشظايا مسار يعتمد على عدد الشظايا وسرعاتها المتجهة بعد الانفجار مباشرةً.

8.5 يسبح رائد فضاء كتلته 80 kg بعيدًا عن مركبته الفضائية. وببعد 15.0 m عن المركبة، ويوجد في حالة سكون بالنسبة إليها. وعندما حاول العودة إليها، ألقى جسمًا كتلته 500 g بسرعة 8.0 m/s في اتجاه معاكس لمكان وجود المركبة. ما مقدار الوقت الذي سيستغرقه رائد الفضاء للعودة إلى المركبة؟

a) 1 s
b) 10 s
c) 20 s
d) 200 s
e) 300 s

8.6 وجدت نفسك، في وسط بحيرة، عالقًا في طوف نجاة كتلته 300 kg (بما في ذلك كتلتك). وليس معك أي شيء سوى مجموعة من كرات البولينج كتلتها 7 kg وكرات تنس كتلتها 55 g. باستخدام معرفتك لمفهوم الدفع الصاروخي، قررتَ البدء في قذف الكرات من طوف النجاة لتتحرك في اتجاه الشاطئ. أي من الخيارات التالية سيمكِّنك من الوصول إلى الشاطئ بشكل أسرع؟

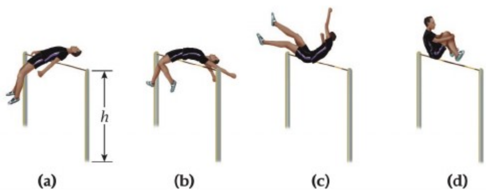
a) قذف كرات التنس بسرعة 35 m/s بمعدل كرة تنس واحدة في الثانية.

a) قذف كرات البولينج بسرعة 0.5 m/s بمعدل كرة بولينج واحدة كل 3 s

c) قذف كرة تنس وكرة بولينج بشكل متزامن، حيث ستتحرك كرة التنس بسرعة 15 m/s وكرة البولينج بسرعة 0.3 m/s، وبمعدل كرة تنس واحدة وكرة بولينج واحدة كل 4 s

d) لا تتوفر معطيات كافية لتحديد ذلك

8.7 توضح الأشكال لاعب قفز عالٍ يستخدم أساليب مختلفة ليتمكن من تخطي العارضة. ما الأسلوب الذي سيمكن اللاعب من تحقيق أعلى قفزة لتخطي العارضة؟



8.8 يقع مركز كتلة الجسم الصلب غير المنتظم *دائمًا*

a) عند المركز الهندسي للجسم.
b) مكان ما داخل الجسم.
c) كلاهما.
d) لا شيء مما سبق

8.9 يقذف منجنيق موجود على أرض مستوية حجرًا كتلته 3 kg مسافة أفقية مقدارها 100 m. وعند قذف حجر آخر كتلته 3 kg بالطريقة نفسها، تحطَّم الحجر في الهواء إلى قطعتين، إحداهما كتلتها 1 kg والأخرى كتلتها 2 kg. فسقطت كلتا القطعتين على الأرض في الوقت نفسه. إذا سقطت القطعة التي كتلتها 1 kg على بعد 180 m من المنجنيق، فكم ستبعد القطعة التي كتلتها 2 kg عن المنجنيق عند سقوطها على الأرض؟ تجاهل مقاومة الهواء.

a) 20 m
b) 60 m
c) 100 m
d) 120 m
e) 180 m

8.10 كتلتان نقطيتان واقعتان في المستوى نفسه. وتبلغ المسافة بين الكتلة 1 ومركز الكتلة 3.0 m، بينما تبلغ المسافة بين الكتلة 2 ومركز الكتلة 1.0 m. أوجد m_2/m_1، نسبة الكتلة 1 إلى الكتلة 2.

a) 4/3
b) 3/4
c) 7/4
d) 4/7
e) 3/1
f) 1/3

8.11 زجاجة أسطوانية لتوابل السلطة المصنوعة من الزيت والخل. يشغل الخل ثلث حجمها ($p = 1.01\ g/cm^3$) ويشغل الزيت الثلثين الآخرين ($p = 0.910\ g/cm^3$). موضوعة على طاولة في وضع السكون. في البداية، كان الزيت منفصلًا عن الخل، حيث كان يطفو فوق الخل. فرُجّت الزجاجة حتى اختلط الزيت بالخل تمامًا، ثم وُضعت مرة أخرى على الطاولة. ما مقدار تغيُّر ارتفاع مركز كتلة توابل السلطة نتيجةً للخلط؟

a) أعلى.
b) أقل.
c) عند الارتفاع نفسه.
d) لا تتوفر معطيات كافية للإجابة عن هذا السؤال.

8.12 قضيب أحادي البُعد تختلف كثافته الخطية حسب الموضع وفقًا للعلاقة $\lambda(x) = cx$ حيث c قيمة ثابتة و$x = 0$ هو موضع الطرف الأيسر من القضيب. أين تتوقع أن يقع مركز كتلة القضيب؟

a) في منتصف القضيب

b) على يسار منتصف القضيب

c) على يمين منتصف القضيب

d) عند الطرف الأيمن من القضيب

e) عند الطرف الأيسر من القضيب

8.13 يُستخدم خرطوم حديقة لملء دلو سعته 20 L خلال 1 min. وتبلغ سرعة تدفق الماء خارج الخرطوم 1.05 m/s. ما مقدار القوة المؤثرة في الشخص الذي يحمل الخرطوم؟

a) 0.35 N
b) 2.1 N
c) 9.8 N
d) 12 N
e) 21 N

8.14 يُستخدم خرطوم حديقة لملء دلو سعته 20 L خلال 1 min. وتبلغ سرعة تدفق الماء خارج الخرطوم 2.35 m/s. وتؤثر القوة F في الشخص الذي يحمل الخرطوم. بينما يوجد خرطوم آخر يمكنه ملء الدلو نفسه خلال 2 min. مع تدفق الماء خارج الخرطوم بالسرعة نفسها. سيكون مقدار القوة المؤثرة في الشخص الذي يحمل هذا الخرطوم هو

a) $4/F$
b) $2/F$
c) F
d) $2F$
e) $4F$

8.15 افترض أنه تم إطلاق صاروخ في فراغ في الفضاء الخارجي. أي العبارات التالية صحيحة؟

a) لن ينتج الصاروخ أي دفع لانعدام مقاومة الهواء.

b) سينتج الصاروخ في الفراغ الدفع نفسه الذي يمكن أن ينتجه في وجود الهواء.

c) سينتج الصاروخ في الفراغ نصف مقدار الدفع الذي يمكن أن ينتجه في وجود الهواء.

d) سينتج الصاروخ في الفراغ ضعف مقدار الدفع الذي يمكن أن ينتجه في وجود الهواء.

8.16 يقع مركز كتلة الشمس وكوكب المشتري

a) عند مركز الشمس تمامًا.

b) بالقرب من مركز الشمس.

c) عند مركز كوكب المشتري تمامًا.

d) بالقرب من مركز كوكب المشتري.

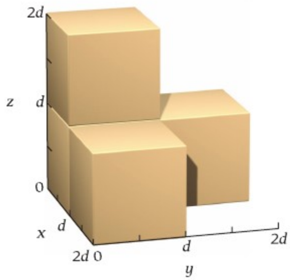
e) في منتصف المسافة بين الشمس وكوكب المشتري.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

أسئلة مفاهيمية

8.17 أُطلِقت قذيفة في الهواء، وانفجرت بعدما قطعت مسافة صغيرة من رحلتها. كيف يؤثر الانفجار في حركة مركز كتلة القذيفة؟

8.18 أوجد مركز كتلة المكعبات المتماثلة منتظمة الشكل الموضوعة بالترتيب الموضَّح في الشكل. يمثل d طول أضلاع كل مكعب.



8.19 تم إطلاق نموذج لصاروخ يبلغ مداه الأفقي 100 m. فانقسم الصاروخ إلى جزأين متساويين بسبب انفجار صغير. ماذا يمكنك أن تقول عن مواضع سقوط الشظايا على الأرض؟

8.20 هل من الممكن أن يقع مركز كتلة جسم عند نقطة خارج الجسم. أي عند نقطة بعيدة عن الجسم نفسه؟ اشرح.

8.21 هل من الممكن أن تتعرض كتلتان لتصادم بحيث تكون الطاقة الحركية للنظام المكون من الكتلتين أكبر من الطاقة الحركية لكل كتلة على حدة؟ اشرح.

8.22 أثبِت أنّ مركز كتلة لوحة معدنية رقيقة على شكل مثلث متساوي الأضلاع يقع عند تقاطع ارتفاعات المثلث من خلال العمليات الحسابية المباشرة والاستنتاج الفيزيائي.

8.23 علبة مياه غازية كتلتها m وارتفاعها L ممتلئة بمياه غازية كتلتها M. تم عمل ثقب في الجزء السفلي من العلبة لتفريغها من المياه الغازية.

a) ما مركز كتلة النظام المكون من العلبة والمياه الغازية المتبقية داخلها إذا كان مستوى المياه الغازية في العلبة هو h، حيث $L > h > 0$؟

b) ما الحد الأدنى لقيمة مركز الكتلة عند تفريغ العلبة من المياه الغازية تمامًا؟

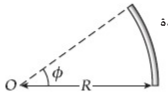
8.24 يسبح رائد فضاء كتلته M في الفضاء على مسافة ثابتة D من مركبته الفضائية فانقطع حبل الأمان الخاص به. ويحمل رائد الفضاء صندوق أدوات كتلته $M/2$ يحتوي على مطرقة كبيرة وثقيلة كتلتها $M/4$. أي أنّ الكتلة الإجمالية هي $3M/4$. يمكن لرائد الفضاء إلقاء الأدوات بالسرعة v التي تتناسب مع سرعته النهائية بعد إلقاء كل من الغرضين. ويريد رائد الفضاء العودة إلى مركبته الفضائية في أسرع وقت ممكن.

a) للوصول إلى السرعة النهائية القصوى، هل ينبغي على رائد الفضاء أن يُلقي الغرضين معًا أم يلقيهما منفصلين، واحداً في كل مرة ؟ اشرح.

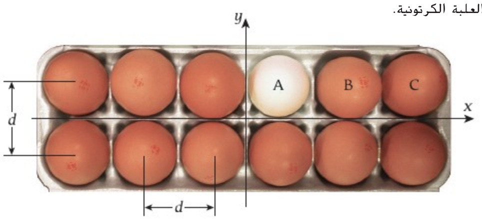
b) للوصول إلى السرعة القصوى، هل سيكون من الأفضل إلقاء المطرقة أولًا أم إلقاء صندوق الأدوات أولاً . أم أنّ الترتيب لن يشكل فرقًا؟ اشرح.

c) أوجد السرعة القصوى التي يمكن أن يبدأ عندها تحركُ رائد الفضاء نحو المركبة؟

8.25 ثُني قضيب معدني كثافته الطولية (كتلته لكل وحدة طول) λ على شكل قوس دائري نصف قطره R ويقابل الزاوية الكلية ϕ، كما هو موضّح في الشكل. ما المسافة بين مركز كتلة هذا القوس والنقطة O كدالة للزاوية ϕ؟ مثِّل إحداثي مركز الكتلة هذا كدالة للزاوية ϕ.



8.26 تحتوي العلبة الكرتونية الموضّحة في الشكل على دزينة من البيض. كتلة كل منها m. ويقع مركز كتلة البيض عند منتصف العلبة الكرتونية. وهو نفس موضع نقطة أصل النظام الإحداثي الديكارتي الموضّح في الشكل. أين يقع مركز كتلة البيض المتبقي. بدلالة المسافة d بين كل بيضتين. في كل من الحالات التالية؟ تجاهل كتلة العلبة الكرتونية.



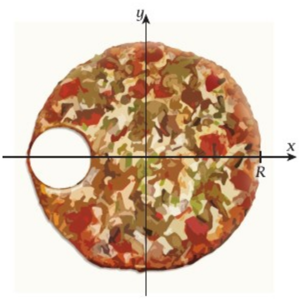
a) عند إزالة البيضة A فقط.

b) عند إزالة البيضة B فقط.

c) عند إزالة البيضة C فقط.

d) عند إزالة البيضات الثلاث A وB وC.

8.27 اقتُطعت قطعة دائرية نصف قطرها $R/4$ من أحد جوانب بيتزا دائرية الشكل نصف قطرها R، كما هو موضّح في الشكل. أين يقع مركز كتلة البيتزا بعد الفجوة الناتجة؟



8.28 افترض أنك وضعتَ ساعة رملية قديمة الطراز، بحيث يكون الرمل في الجزء السفلي من الساعة، على ميزان تحليلي حساس للغاية لتحديد كتلتها. ثم قلبتَ الساعة (مع ارتداء قفازات نظيفة للغاية عند التعامل معها) ووضعتها مرة أخرى على الميزان. وتريد أن تتوقع ما إذا كانت قراءة الميزان أقل من القراءة السابقة أم أكبر منها أم تساويها. ما الذي تحتاج إلى حسابه للإجابة عن هذا السؤال؟ اشرح بعناية ما ينبغي عليك حسابه وما الذي ستشير إليه النتائج. لا داعي إلى إجراء العمليات الحسابية بالفعل.

تمارين

يشير اللون الأزرق لرقم المسألة إلى توفر الإجابة عنها في دليل حلول الطالب. تشير علامة النقطة الواحدة • والنقطتين •• إلى زيادة مستوى صعوبة المسألة.

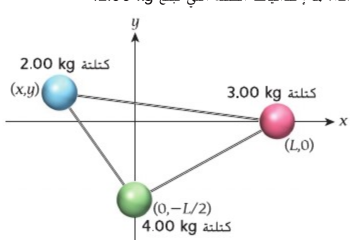
القسم 8.1

8.29 ابحث عن المعلومات الخاصة بمركز كتلة الأجسام في النظام الشمسي فيما يلي. يمكنك البحث عن البيانات اللازمة على الإنترنت أو في الجداول الواردة في الوحدة 12 من هذا الكتاب. افترض تماثل توزيع الكتلة بشكل كروي بالنسبة إلى الأجسام محل البحث.

a) حدّد المسافة بين مركز كتلة النظام المكون من الأرض والقمر والمركز الهندسي للأرض.

b) حدّد المسافة بين مركز كتلة النظام المكون من الشمس وكوكب المشتري والمركز الهندسي للشمس.

•8.30 إحداثيات مركز كتلة الجسم غير النقطي الموضّح في الشكل هي $(L/4, -L/5)$. ما إحداثيات الكتلة التي تبلغ 2.00 kg؟

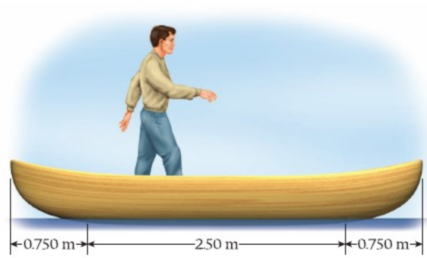


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

•**8.31** يقف بهلوانات صغار في وضع سكون على منصة أفقية دائرية مرتكزة على حامل عند نقطة منتصفها. لذا من المفترض أن تقع نقطة الأصل للنظام الإحداثي الديكارتي ثنائي الأبعاد عند منتصف المنصة. ويقف بهلوان كتلته 30.0 kg عند (4.00 m ،3.00 m). بينما يقف بهلوان آخر كتلته 40.0 kg عند (−2.00 m ،−2.00 m). بافتراض أن البهلوانات يقفون في وضع سكون في مواقعهم، فأين يجب أن يقف بهلوان كتلته 20.0 kg بحيث يكون مركز كتلة النظام المكون من البهلوانات الثلاثة عند نقطة الأصل وتكون المنصة متوازنة؟

القسم 8.2

8.32 يقف رجل كتلته 55.0 kg في زورق يطفو على سطح الماء كتلته 65.0 kg وطوله 4.00 m. فسار هذا الرجل من نقطة تبعد 0.750 m عن مؤخرة الزورق إلى نقطة تبعد 0.750 m عن مقدمة الزورق. إذا افترضنا أن الاحتكاك بين الزورق وسطح الماء ضئيل جدًا، فما مقدار المسافة التي سيتحركها الزورق؟

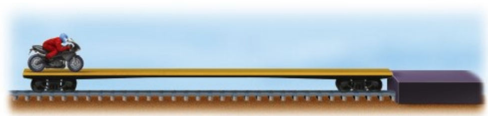


8.33 يدفع طفل شاحنة لعبة كتلتها 3.50 kg مباشرةً نحو سيارة لعبة ثابتة كتلتها 2.00 kg بسرعة 4.00 m/s. فتعرَّض كل من السيارة والشاحنة لتصادم مرن.

a) ما مقدار السرعة المتجهة لمركز كتلة النظام المكون من اللعبتين؟

b) ما السرعتان المتجهتان للشاحنة والسيارة بالنسبة إلى مركز كتلة النظام المكون من اللعبتين قبل التصادم وبعده؟

8.34 يعتزم سائق دراجة نارية مُخاطِر الانطلاق بالدراجة من أحد طرفي عربة قطار مسطحة، والتسارع نحو الطرف الآخر من العربة، ثم القفز من العربة إلى منصة. تبلغ كتلة السائق والدراجة معًا 350. kg ويبلغ طولهما معًا 2.00 m. بينما تبلغ كتلة العربة 1500 kg ويبلغ طولها 20.0 m. افترض أنّ الاحتكاك بين عجلات العربة والقضبان ضئيل جدًا وأنه يمكن أن تنطلق الدراجة بالسائق في الهواء مع وجود مقاومة هواء ضئيلة جدًا. وكانت العربة ملامسة للمنصة في البداية. إذا سألك منظّمو العرض عن المسافة التي ستبعدها العربة عن المنصة عندما يصل سائق الدراجة النارية المُخاطِر إلى الطرف الآخر من العربة، فماذا ستكون إجابتك؟



•**8.35** بدءًا من وضع السكون، يقف طالبان على زلاجتين كتلتاهما 10.0 kg غير مواجهتين لبعضهما على الجليد، ويتبادلان إلقاء كرة طبية كتلتها 5.00 kg بينهما. تبلغ كتلة الطالب الذي على اليسار 50.0 kg ويمكنه إلقاء الكرة بسرعة نسبية مقدارها 10.0 m/s. بينما تبلغ كتلة الطالب الذي على اليمين 45.0 kg ويمكنه إلقاء الكرة بسرعة نسبية مقدارها 12.0 m/s. (افترض انعدام الاحتكاك بين الجليد والزلاجتين وانعدام مقاومة هواء).

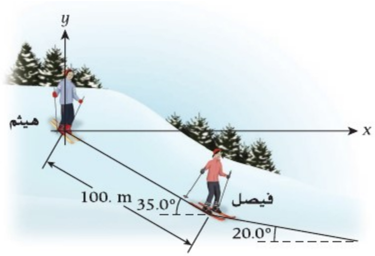
a) إذا ألقى الطالب الذي على اليسار الكرة بشكل أفقي إلى الطالب الذي على اليمين، فما سرعة تحرك الطالب الذي على اليسار نحو اليمين بعد إلقاء الكرة؟

b) ما سرعة تحرك الطالب الذي على اليمين بعد التقاط الكرة مباشرة؟

c) إذا ألقى الطالب الذي على اليمين الكرة مرة أخرى إلى زميله، فما سرعة تحرك الطالب الذي على اليسار بعد التقاط الكرة من زميله؟

d) ما السرعة التي سيتحرك بها الطالب الذي على اليمين بعد إلقاء الكرة؟

•**8.36** بدأ المتزلجان فيصل وهيثم التزلج من وضع السكون من نقطتين مختلفتين على التل في الوقت نفسه. فتزلج هيثم، الذي تبلغ كتلته 88.0 kg، من أعلى التل إلى الأسفل بزاوية ميل مقدارها 35.0°. وبدأ فيصل، الذي كتلته 64.0 kg، التزلج من نقطة أقل انحدارًا بزاوية ميل مقدارها 20.0°. إذا كان طول الجزء المنحدر 100 m. فحدِّد العجلة والسرعة المتجهة ومتجهات الموقع لمركز الكتلة المشترك بين فيصل وهيثم كدالة للزمن قبل أن يصل هيثم إلى الجزء الأقل انحدارًا.



•**8.37** يجري تحليل العديد من التصادمات النووية التي تتم دراستها في المختبرات في مناط إسناد مختبري. إذا تحرك بروتون كتلته $1.6726 \cdot 10^{-27}$ kg بسرعة مقدارها 70.0% من سرعة الضوء، c، واصطدم بنواة قصدير (^{116}Sn) 116 كتلتها $1.9240 \cdot 10^{-25}$ kg. فما سرعة مركز الكتلة بالنسبة إلى مناط الإسناد المختبري؟ أوجد السرعة بدلالة سرعة الضوء c.

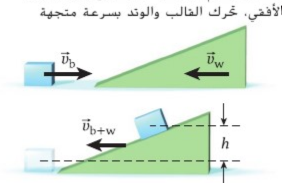
•**8.38** يتكون نظام من جسيمين. يقع الجسيم الأول الذي كتلته 2.00 kg عند (6.00 m ،2.00 m) وتبلغ سرعته المتجهة (4.00 m/s ،2.00 m/s). بينما يقع الجسيم الثاني الذي كتلته 3.00 kg عند (4.00 m ،1.00 m) وتبلغ سرعته المتجهة (4.00 m/s ،0).

a) حدِّد الموقع والسرعة المتجهة لمركز كتلة النظام.

b) ارسم الموقع ومتجهات السرعة المتجهة لكل جسيم على حدة ولمركز الكتلة.

•**8.39** يمكن لخرطوم إطفاء حريق قطره 4.00 cm رش الماء بسرعة متجهة مقدارها 10.0 m/s. لاستمرار تدفق الماء من الخرطوم بشكل أفقي، ما مقدار القوة الأفقية التي يجب أن يبذلها رجل الإطفاء على الخرطوم ليبقى ثابتًا؟

••**8.40** ينزلق قالب كتلته m_b = 1.20 kg نحو اليمين بسرعة مقدارها 2.50 m/s على سطح أفقي عديم الاحتكاك، كما هو موضّح في الشكل. "فاصطدم" بوتد كتلته m_w، يتحرك نحو اليسار بسرعة مقدارها 1.10 m/s. وكان الوتد ذا شكل يسمح بانزلاق القالب بسهولة على سطحه (عديم الاحتكاك) المصنوع من التفلون عند التقائهما. بالنسبة إلى السطح الأفقي، تحرك القالب والوتد بسرعة متجهة مشتركة v_{b+w} في اللحظة التي توقف فيها القالب عن الانزلاق على سطح الوتد.



a) إذا ارتفع مركز كتلة المكعب بمسافة h = 0.370 m. فكم تبلغ كتلة الوتد؟

b) ما المقصود بــ v_{b+w}؟

القسم 8.3

8.41 من الخصائص المهمة لمحركات الصواريخ خاصية الدفع النوعي، المعروفة بالدفع الكلي (التكامل الزمني للدفع) لكل وحدة وزن أرضي للوقود/المؤكسِد المستهلك. (يرجع استخدام الوزن، بدلًا من الكتلة، في هذا التعريف إلى أسباب تاريخية مجردة).

a) إذا كان محرك صاروخ يعمل في فضاء شاسع بسرعة عادم من الفوهة تبلغ v. فاحسب الدفع النوعي لهذا المحرك.

b) تبلغ سرعة العادم العادية لنموذج محرك الصاروخ v_{toy} = 800. m/s. وتبلغ سرعة عادم أفضل محركات الصواريخ الكيميائية حوالي v_{chem} = 4.00 km/s. احسب قيم الدفع النوعي لهذه المحركات وقارن بينها.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8.42• خرج رائد فضاء من محطة الفضاء الدولية ليسير في الفضاء. وكان إجمالي كتلته شاملة كتلة بدلة الفضاء وكتلة كل معداته 115 kg. فحدث تسرب بسيط في نظام الدفع الخاص به. فتسرب 7.00 g من الغاز في كل ثانية في الفضاء بسرعة 800 m/s. وقد لاحظ التسربَ بعد 6.00 s من بدايته. فما مقدار الحركة التي حرّكها رائد الفضاء من موقعه الأصلي في الفضاء نتيجة لتسرب الغاز خلال هذا الوقت؟

8.43• تبلغ الحمولة الصافية لصاروخ في الفضاء الخارجي 5190.0 kg ويحمل $1.551\cdot 10^5$ kg من الوقود. ويمكن أن يُخرِج الصاروخ الوقود المستهلك بسرعة 5.600 km/s. افترض أنّ الصاروخ بدأ من وضع السكون ثم زادت سرعته إلى السرعة المتجهة النهائية ثم بدأ رحلته. فكم الوقت الذي استغرقه لقطع مسافة $3.82\cdot 10^5$ km (المسافة بين الأرض والقمر تقريبًا)؟

8.44•• تمّ لف سلسلة منتظمة الشكل ذات كتلة 1.32 kg لكل متر على طاولة. وتمّ سحب أحد طرفيها لأعلى بمعدل سرعة ثابت 0.470 m/s.

a) احسب القوة المحصلة المبذولة على السلسلة.

b) في حالة رفع جزء من السلسلة طوله 0.150 m عن الطاولة، ما مقدار القوة المبذولة على الطرف المرفوع؟

8.45•• أنتج محرك سفينة فضاء دفعًا يبلغ 53.2 MN بسرعة متجهة للوقود المستهلك تبلغ 4.78 km/s.

a) أوجد معدل خروج (dm/dt) الوقود المستهلك.

b) إذا كانت الكتلة الابتدائية $2.12\cdot 10^6$ kg والكتلة النهائية $7.04\cdot 10^4$ kg. فأوجد السرعة النهائية لسفينة الفضاء (افترض أنّ السرعة الابتدائية صفر وأن أي مجال للجاذبية صغير بحيث يمكن تجاهله).

c) أوجد متوسط العجلة حتى الاحتراق (الوقت الذي ينفد فيه الوقود؛ افترض أنّ معدل تدفق الكتلة ثابت حتى هذا الوقت).

8.46•• انطلقت عربة على مسار هوائي عديم الاحتكاك بفعل تدفق الماء الخارج من آلة غسل تعمل بضغط الغاز مثبتة على العربة. ويوجد خزان ماء سعة 1.00 m^3 على العربة لتزويد آلة الغسل التي تعمل بالضغط بالماء. تبلغ كتلة العربة، التي تشمل كتلة المشغل الموجود عليها وكتلة آلة الغسل التي تعمل بالضغط ووقودها وكتلة خزان الماء الفارغ، 400 kg. ويمكن توجيه المياه بتحويل الصمام إلى الخلف أو إلى الأمام. وفي كلا الاتجاهين، تُخرج آلة الغسل التي تعمل بالضغط 200 L من الماء في الدقيقة بسرعة متجهة ابتدائية تبلغ 25.0 m/s.

a) إذا بدأت العربة من وضع السكون، فكم الوقت المستغرق اللازم حتى يتحول الصمام من الخلف (دفع أمامي) إلى الأمام (دفع خلفي) لتعود العربة إلى وضع السكون؟

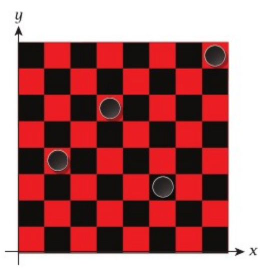
b) كم تبلغ كتلة العربة في هذا الوقت وكم تبلغ سرعتها المتجهة؟ (*تلميح:* يُفضل تجاهل انخفاض الكتلة الناتج عن الغاز المستهلك بواسطة آلة الغسل التي تعمل بضغط الغاز!)

c) ما مقدار دفع هذا "الصاروخ"؟

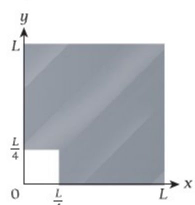
d) كم تبلغ عجلة العربة قبل تحويل الصمام مباشرة؟

القسم 8.4

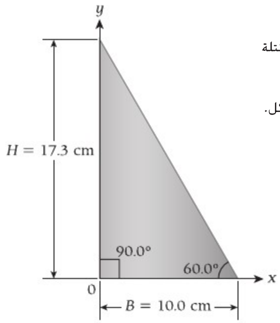
8.47 تبلغ مساحة لوحة شطرنج مربعة 32.0cm في 32.0cm وتبلغ كتلتها 100 g. وتوجد أربع قطع شطرنج كتلتها 20.0g عليها، كما هو موضّح في الشكل. بالنسبة إلى نقطة الأصل الموجودة في الزاوية السفلية اليسرى من اللوحة، أين مركز كتلة النظام المكون من لوحة الشطرنج وقطع الشطرنج؟



8.48• تقع الزاوية اليسرى السفلية للوحة معدنية مربعة الشكل طول ضلعها $L = 5.70$ cm وكتلتها 0.205 kg عند الإحداثيين $(x, y) = (0, 0)$، كما هو موضّح في الشكل. واقتُطع من اللوحة مربع طول ضلعه $L/4$ تقع حافته اليسرى السفلية عند الإحداثيين $(x, y) = (0, 0)$. كم تبلغ المسافة من نقطة أصل مركز كتلة الجزء المتبقي من اللوحة؟

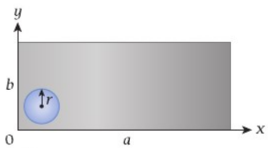


8.49• أوجد الإحداثيين x وy لمركز كتلة لوحة مستوية مثلثة الشكل ارتفاعها $H = 17.3$ cm وطول قاعدتها $B = 10.0$ cm كما هو موضّح في الشكل.



8.50• يمكن وصف كثافة قضيب طويل طوله 1.00 m باستخدام دالة الكثافة الخطية $\lambda(x) = 100.\ g/m + 10.0x\ g/m^2$. يقع أحد طرفي القضيب عند $x = 0$ بينما يقع الطرف الآخر عند $x = 1.00$ m. حدد (a) الكتلة الكلية للقضيب و(b) إحداثي مركز الكتلة.

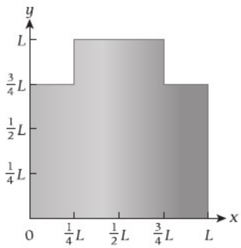
8.51• لوحة رقيقة مستطيلة الشكل ذات كثافة مساحة منتظمة $\sigma_1 = 1.05\ kg/m^2$ طولها $a = 0.600$ m وعرضها $b = 0.250$ m. وتقع الزاوية اليسرى السفلية عند نقطة الأصل $(x, y) = (0, 0)$. فاقتُطع جزء دائري نصف قطره $r = 0.0480$ m ويقع مركزه عند $(x, y) = (0.068\ m, 0.068\ m)$ من اللوحة. وتمّ وضع قرص في هذه الفجوة له نصف القطر نفسه ومصنوع من مادة أخرى ذات كثافة منتظمة $\sigma_2 = 5.32\ kg/m^2$. كم تبلغ المسافة من نقطة أصل مركز كتلة اللوحة بعد هذا الإجراء؟



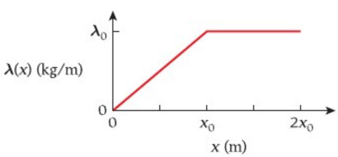
8.52• تقع الزاوية اليسرى السفلية للوحة معدنية مربعة منتظمة الشكل طول ضلعها $L = 5.70$ cm وكتلتها 0.205 kg عند الإحداثيين $(x, y) = (0, 0)$، كما هو موضّح في الشكل. فاقتُطع مربعان طول ضلع كل منهما $L/4$ من اللوحة.

a) أوجد الإحداثي x لمركز الكتلة؟

b) أوجد الإحداثي y لمركز الكتلة؟



8.53•• تمّ تمثيل الكثافة الكلية الخطية $\lambda(x)$ لجسم أحادي البُعد بيانيًا. أين يقع مركز كتلة هذا الجسم في التمثيل البياني؟



تمارين إضافية

8.54 أطلق مدفع كتلته 750 kg قذيفة كتلتها 15.0 kg بسرعة 250 m/s ابتداءً من الفوهة. وكان المدفع مرتكزًا على عجلات بحيث يكون الاحتكاك الناتج عن ارتداده ضئيلًا للغاية. كم تبلغ سرعة القذيفة بالنسبة إلى الأرض بعد إطلاقها من المدفع مباشرة؟

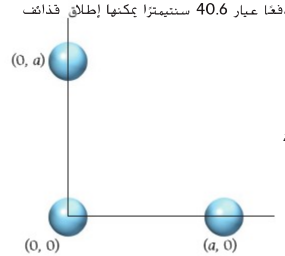
8.55 تبلغ المسافة بين ذرة كربون ($m = 12.0$ u; 1 u = 1 وحدة كتلة ذرية) وذرة أكسجين ($m = 16.0$ u) في جزيء أول أكسيد الكربون (CO) 1.13×10^{-10} m. كم تبلغ المسافة بين ذرة الكربون ومركز كتلة الجزيء؟

8.56 من طرق اكتشاف الكواكب خارج المجموعة الشمسية البحث عن دليل غير مباشر على الكوكب من خلال الحركة التذبذبية لنجمه حول مركز كتلة النظام المكون من النجم والكوكب. افترض أنّ النظام الشمسي يتكون بشكل أساسي من الشمس والمشتري فقط. كم سيكون مقدار الحركة التذبذبية للشمس؟ أي كم ستبلغ المسافة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التي ستحركها إلى الأمام وإلى الخلف بسبب دورانها حول مركز كتلة النظام المكون من الشمس والمشتري. وما مقدار المسافة التي تفصل مركز الكتلة عن مركز الشمس؟

8.57 تُعدّ السفينة الحربية الأمريكية *مونتانا* سفينة ضخمة حيث تبلغ كتلتها $61{,}976{,}139.9\text{ kg}$. وتحمل 12 مدفعًا عيار 40.6 سنتيمترًا يمكنها إطلاق قذائف تصل كتلتها إلى 1224.7 kg بسرعة 701 m/s. إذا أطلقت السفينة الحربية ثلاث قذائف (في الاتجاه نفسه)، فكم ستبلغ السرعة المتجهة لارتداد السفينة؟



8.58 وضِعت ثلاث كرات متماثلة كتلتها m بالترتيب الموضّح في الشكل. أوجد موقع مركز الكتلة.

8.59 يقف كل من حمدان (61.0 kg) وسيف (44.0 kg) على حلبة تزلج ذات سطح عديم الاحتكاك تقريبًا للتزلج عليها. ودفع حمدان سيفًا فتزلج سيف بسرعة 1.20 m/s (بالنسبة إلى حلبة التزلج).

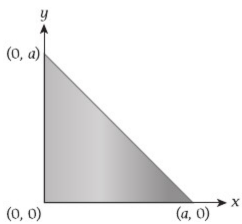
a) كم تبلغ السرعة التي ارتد بها حمدان؟

b) احسب التغيُّر في الطاقة الحركية للنظام المكون من حمدان وسيف.

c) الطاقة لا تفنى ولا تستحدث. ما مصدر الطاقة الحركية النهائية لهذا النظام؟

8.60 استخدم لاعب بيسبول مضربًا كتلته m_{bat} لضرب كرة كتلتها m_{ball}. وقبل أن يضرب الكرة مباشرة، كانت السرعة المتجهة الابتدائية للمضرب 35.0 m/s، والسرعة المتجهة الابتدائية للكرة -30.0 m/s (كان الاتجاه الموجب على طول محور x الموجب). وتعرض المضرب والكرة لتصادم مرن أحادي البُعد. أوجد سرعة الكرة بعد التصادم. إذا افترضنا أن m_{bat} أكبر بكثير من m_{ball}، إذًا سيكون مركز كتلة الجسمين عند المضرب بشكل أساسي.

8.61 يستطيع طالب كتلته 40.0 kg أن يرمي كرة كتلتها 5.00 kg بسرعة نسبية تبلغ 10.0 m/s. وكان الطالب واقفًا في وضع السكون على عربة كتلتها 10.0 kg يمكن أن تتحرك دون أن تُحدث احتكاكًا. إذا رمى الطالب الكرة في اتجاه أفقي، فكم ستكون السرعة المتجهة لها بالنسبة إلى الأرض؟



8.62• أوجد موقع مركز كتلة ورقة ثنائية الأبعاد ذات كثافة ثابتة σ وتأخذ شكل مثلث متساوي الساقين (انظر الشكل).

8.63• تتكون الحمولة الصافية لصاروخ من كتلة 4390.0 kg ووقود كتلته $1.761 \times 10^5\text{ kg}$. افترض أنّ الصاروخ بدأ من وضع السكون في الفضاء الخارجي ثم زادت سرعته إلى السرعة المتجهة النهائية ثم بدأ رحلته. ما السرعة التي يجب أن يخرج بها الوقود المستهلك لقطع رحلة من الأرض إلى القمر، مسافة $3.82 \times 10^5\text{ km}$، في 7.00 h؟

8.64• مدفع كتلته 350 kg يتحرك بحرية على مستوى أفقي عديم الاحتكاك بسرعة 7.50 m/s. وأُطلق قذيفة كتلتها 15.0 kg بزاوية $55.0°$ أعلى المستوى الأفقي. وكانت السرعة المتجهة للقذيفة بالنسبة إلى المدفع بالمقدار الذي لا يتحرك عنده المدفع لحظة الإطلاق. ما مقدار السرعة المتجهة للقذيفة بالنسبة إلى المدفع؟

8.65• تبلغ الكتلة الابتدائية للصاروخ ساتورن 5، الذي استُخدم لإطلاق سفينة الفضاء *أبوللو* أثناء رحلتها إلى القمر $M_0 = 2.80 \times 10^6\text{ kg}$ وتبلغ الكتلة النهائية له $M_1 = 8.00 \times 10^5\text{ kg}$ ويحرق وقودًا بمعدل ثابت لمدة 160 s. وتبلغ سرعة العادم بالنسبة إلى الصاروخ حوالي $v = 2700\text{ m/s}$.

a) أوجد عجلة الصاروخ إلى أعلى، أثناء مغادرته منصة الإطلاق (بينما تكون كتلته هي الكتلة الابتدائية).

b) أوجد عجلة الصاروخ إلى أعلى بمجرد أن ينتهي حرق الوقود (عندما تكون كتلته هي الكتلة النهائية).

c) إذا أُطلق الصاروخ نفسه في الفضاء السحيق، حيث تكون قوة الجاذبية ضئيلة للغاية، فكم سيكون صافي التغيُّر في سرعة الصاروخ وقت احتراق الوقود؟

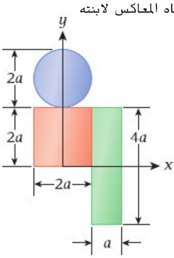
8.66• أوجد موقع مركز كتلة قضيب أحادي البُعد طوله L وكثافته الخطية $\lambda(x) = cx$، حيث c قيمة ثابتة. (*تلميح: ستحتاج إلى حساب c بدلالة L وM*).

8.67• أوجد مركز كتلة لوحة مستطيلة طولها 20.0 cm وعرضها 10.0 cm. علمًا بأن كثافة الكتلة تختلف خطيًا على امتداد الطول. فعند أحد الطرفين، تبلغ 5.00 g/cm^2. وعند الطرف الآخر تبلغ 20.0 g/cm^2.

8.68• تطفو قطعة خشبية منتظمة الشكل طولها 2.50 m وكتلتها 91.0 kg على سطح الماء. ويقف رجل كتلته 72.0 kg على هذه القطعة على مسافة 22.0 cm من أحد الطرفين. وعند الطرف الآخر، تقف ابنته التي تبلغ كتلتها ($m = 20.0\text{ kg}$) على مسافة 1.00 m من هذا الطرف.

a) أوجد مركز كتلة هذا النظام.

b) إذا قفز الأب عن القطعة الخشبية إلى الخلف في الاتجاه المعاكس لابنته (بسرعة متجهة $v = 3.14\text{ m/s}$ بالنسبة إلى الماء)، فكم تبلغ السرعة الابتدائية للقطعة الخشبية والطفلة؟



8.69 كلفك أحد النحاتين بإجراء تحليل هندسي لأحد أعماله الفنية الذي يتكون من صفائح معدنية منتظمة الشكل ومتماثلة السُمك والكثافة وملتحمة ببعضها، كما هو مبيّن في الشكل. باستخدام تقاطع المحورين الموضّح كنقطة أصل للنظام الإحداثي، حدد الإحداثيات الديكارتية لمركز كتلة هذه القطعة الفنية.

8.70• تطير طائرة نفاثة بسرعة 223 m/s في مستوى أفقي. يسحب المحرك الهواء بمعدل 80.0 kg/s ويحرق وقودًا بمعدل 3.00 kg/s. وتخرج غازات العادم بمعدل 600 m/s بالنسبة إلى سرعة الطائرة. أوجد مقدار دفع محرك الطائرة النفاثة.

8.71• تم تثبيت دلو على لوح تزلج يتدحرج على طريق أفقي بدون احتكاك. وسقط المطر رأسيًا في الدلو. فامتلأ الدلو بالماء وبلغت الكتلة الكلية للوح التزلج والدلو والماء $M = 10.0\text{ kg}$. ثم أصبح معدل ماء المطر الذي يسقط في الدلو مساويًا لمعدل الماء الذي يتسرب في الوقت نفسه من ثقب موجود في الجزء السفلي للدلو، وهو $\lambda = 0.100\text{ kg/s}$. في البداية، كانت سرعة حركة الدلو ولوح التزلج v_0. كم الوقت المستغرق قبل أن تنخفض هذه السرعة إلى النصف؟

8.72• أطلق مدفع كتلته 1000 kg قذيفة كتلتها 30.0 kg بزاوية مقدارها $25.0°$ أعلى المستوى الأفقي بسرعة 500 m/s بالنسبة إلى الأرض. كم تبلغ السرعة المتجهة لارتداد المدفع؟

8.73• تحركت كتلتان، $m_1 = 2.00\text{ kg}$ و$m_2 = 3.00\text{ kg}$، في المستوى xy. وتم إيجاد السرعة المتجهة لمركز الكتلة المشترك والسرعة المتجهة للكتلة 1 بالنسبة إلى الكتلة 2 بالمتجهين $\vec{v}_{\text{cm}} = (-1.00, +2.40)\text{ m/s}$ و$\vec{v}_{\text{rel}} = (+5.00, +1.00)\text{ m/s}$. حدّد

a) كمية الحركة الكلية للنظام

b) كمية حركة الكتلة 1

c) كمية حركة الكتلة 2

8.74•• تقود سفينة فضاء كتلتها الكلية 1000 kg محاولًا الالتحام مع محطة فضائية في الفضاء السحيق. للتبسيط، افترض أنّ المحطة ثابتة بينما تتحرك سفينتك بسرعة 1.00 m/s باتجاه المحطة. وأصبح كل منهما في محاذاة الآخر تمامًا للالتحام. ويوجد في مقدمة السفينة صاروخ كابح صغير لتخفيف سرعتها. ويحرق هذا الصاروخ وقودًا بمعدل 1.00 kg/s وبسرعة متجهة للعادم تبلغ 100 m/s بالنسبة إلى الصاروخ. افترض أنه تبقى في السفينة وقود كتلته 20.0 kg وأن السفينة على مسافة كافية للالتحام.

a) ما مقدار الدفع الابتدائي الذي يبذله الصاروخ الكابح على السفينة؟ وما اتجاه الدفع؟

b) لأغراض السلامة أثناء الالتحام، تسمح وكالة ناسا بسرعة قصوى للالتحام مقدارها 0.0200 m/s. إذا افترضنا أنك أطلقت الصاروخ الكابح عند زمن $t = 0$ بدفع واحد مستمر. فما مقدار الوقود (بالكيلوجرام) الذي يجب حرقه لتخفيف سرعة السفينة بالنسبة إلى المحطة الفضائية؟

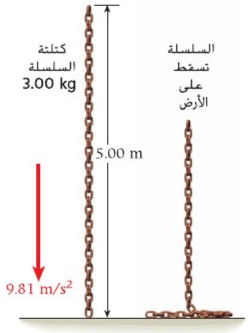
c) لكم من الوقت يجب عليك الاستمرار في تشغيل الصاروخ الكابح؟

d) إذا كانت كتلة محطة الفضاء $5.00 \times 10^5\text{ kg}$ (قريبة من قيمة كتلة المحطة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الفضائية الدولية). فما مقدار السرعة المتجهة النهائية للمحطة بعد التحام سفينة الفضاء بها، التي تصل سرعتها إلى 0.0200 m/s؟

••**8.75** تم إمساك سلسلة كتلتها 3.00 kg وطولها 5.00 m من أحد طرفيها بحيث يكون طرفها السفلي ملامسًا للأرضية (انظر الشكل). ثم أُسقط الطرف العلوي للسلسلة. ما مقدار القوة التي تبذلها السلسلة على الأرضية عند وصول آخر حلقة فيها على الأرض؟



تمارين بمعطيات متعددة

8.76 يستخدم محرك أيوني مثبت في قمر صناعي القوى الكهربائية لطرد أيونات الزينون بسرعة 21.45 km/s. ويُنتج المحرك الأيوني دفعًا بمقدار 1.187×10^{-2} N. ما معدل استهلاك وقود المحرك؟

8.77 يستخدم محرك أيوني مثبت في قمر صناعي القوى الكهربائية لطرد أيونات الزينون بسرعة 23.75 km/s. ويبلغ معدل استهلاك وقود المحرك 5.082×10^{-7} kg/s. فما مقدار الدفع الناتج؟

8.78 يستخدم محرك أيوني مثبت في قمر صناعي القوى الكهربائية لطرد أيونات الزينون ليُنتج دفعًا بمقدار 1.229×10^{-2} N. ويبلغ معدل استهلاك وقود المحرك 4.718×10^{-7} kg/s. ما مقدار سرعة طرد أيونات الزينون من المحرك؟

8.79 يستخدم محرك أيوني مثبت في قمر صناعي كتلته 2149 kg (شاملة كتلة الوقود التي تبلغ 23.37 kg) القوى الكهربائية لطرد أيونات الزينون بسرعة 28.33 km/s. إذا كان المحرك الأيوني يعمل باستمرار أثناء توجيهه في الاتجاه نفسه حتى يستهلك كمية الوقود كلها، فما التغيُّر الذي يطرأ على سرعة القمر الصناعي؟

8.80 يستخدم محرك أيوني مثبت في قمر صناعي كتلته 2161 kg (شاملة كتلة الوقود) القوى الكهربائية لطرد أيونات الزينون بسرعة 20.61 km/s. وكان المحرك الأيوني يعمل باستمرار أثناء توجيهه في الاتجاه نفسه حتى يستهلك كمية الوقود المتوفرة كلها. وبلغ التغيُّر في سرعة القمر الصناعي 236.4 m/s. ما مقدار الوقود المتوفر للمحرك؟

8.81 يستخدم محرك أيوني مثبت في قمر صناعي القوى الكهربائية لطرد أيونات الزينون بسرعة 22.91 km/s. وكان المحرك الأيوني يعمل باستمرار أثناء توجيهه في الاتجاه نفسه حتى يستهلك كمية الوقود المتوفرة كلها التي تبلغ 25.95 kg. وبلغ التغيُّر في سرعة القمر الصناعي 275.0 m/s. ما مقدار كتلة القمر الصناعي والوقود قبل بدء تشغيل المحرك؟

8.82 يجلس صياد كتلته 75.19kg في قارب صيد كتلته 28.09 kg ومعه صندوق أدوات كتلته 13.63 kg. وكان القارب والحمولة في وضع السكون بالقرب من الرصيف. ثم قذف الصياد صندوق الأدوات باتجاه الرصيف بسرعة 2.911 m/s بالنسبة إلى الرصيف. ما مقدار سرعة ارتداد الصياد والقارب؟

8.83 يجلس صياد كتلته 77.49kg في قارب صيد كتلته 28.31 kg ومعه صندوق أدوات كتلته 14.27 kg. وكان القارب والحمولة في وضع السكون بالقرب من الرصيف. ثم قذف الصياد صندوق الأدوات باتجاه الرصيف فارتد هو والقارب بسرعة 0.3516 m/s. ما مقدار السرعة التي قذف بها الصياد صندوق الأدوات عند ملاحظته من الرصيف؟

8.84 يجلس صياد في قارب صيد كتلته 28.51 kg ومعه صندوق أدوات كتلته 14.91 kg. وكان القارب والحمولة في وضع السكون بالقرب من الرصيف. ثم قذف الصياد صندوق الأدوات باتجاه الرصيف، حيث اقترب بسرعة بلغت 3.303 m/s. فارتد هو وقاربه بسرعة 0.4547 m/s. كم تبلغ كتلة الصياد؟

8.85 يتحرك بروتون كتلته 1.673×10^{-27} kg بسرعة 1.823×10^{6} m/s باتجاه جسيم ألفا كتلته 6.645×10^{-27} kg في وضع السكون. ما مقدار سرعة مركز كتلة النظام المكون من البروتون وجسيم ألفا؟

8.86 يتحرك مركز الكتلة لبروتون كتلته 1.673×10^{-27} kg وجسيم ألفا كتلته 6.645×10^{-27} kg بسرعة 5.509×10^{5} m/s. ما مقدار سرعة البروتون في مناط إسناد مختبري إذا كان جسيم ألفا في وضع السكون؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9 الحركة الدائرية

الشكل 9.1 يُعرِّض جهاز الطرد المركزي التابع لوكالة ناسا الذي يولد عجلة مقدارها 20 g رواد الفضاء والمعدات لقوى g مشابهة لتلك القوى التي توجد أثناء إطلاق الصاروخ.

في مركز أميس للأبحاث في مطار موفيت بولاية كاليفورنيا، تشغّل ناسا جهاز طرد مركزي ضخمًا موضحًا في الشكل 9.1. من خلال تحريك الأجسام في مسار دائري، يُنتِج جهاز الطرد المركزي هذا قوى جاذبية اصطناعية أقوى عشرين مرة من القوى التي نشاهدها على الأرض.

في هذه الوحدة، ندرس الحركة الدائرية ونرى كيف تشارك القوة في تكوين دورات مما يجعلنا نفهم كيف يعمل جهاز الطرد المركزي التابع لناسا الذي يولد عجلة مقدارها 20 g. تستند هذه المناقشة إلى مفاهيم القوة والسرعة المتجهة والعجلة الواردة في الوحدتين 3 و4. ستجمع الوحدة 10 هذه الأفكار مع بعض المفاهيم المأخوذة من الوحدات بداية من 5 إلى 8 مثل الطاقة وكمية الحركة. يتشابه الكثير مما ستتعلمه في وحدتي الحركة الدائرية والدوران مع المواد السابقة التي تتناول الحركة الخطية والقوة والطاقة. ونظرًا لأن معظم الأجسام لا تتحرك في خطوط مستقيمة تمامًا، ستُطبق مفاهيم الحركة الدائرية مرات عديدة في الوحدات التالية.

ما سنتعلمه 255

ما تعلمناه/ دليل المذاكرة للاختبار 276

Chapter Sourced From: 9. Circular Motion, Chapter 9, from University Physics with Modern Physics, 2e by Bauer and Westfall ©2014 McGraw-Hill Education
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

ما ستتعلمه

- يمكن وصف حركة الأجسام التي تتحرك في دائرة وليس في خط مستقيم باستخدام إحداثيات قائمة على نصف القطر والزاوية بدلًا من استخدام الإحداثيات الديكارتية.
- توجد علاقة بين الحركة الخطية والحركة الدائرية.
- يمكن وصف الحركة الدائرية بدلالة الإحداثي الزاوي والتردد الزاوي والزمن الدوري.
- أي جسم يتحرك حركة دائرية له سرعة زاويّة وعجلة زاويّة.

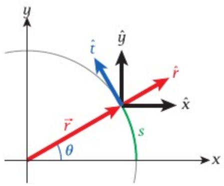
9.1 الإحداثيات القطبية

الشكل 9.2 الحركة الدائرية في المستوى الأفقي والرأسي.

في الوحدة 3، ناقشنا الحركة في بُعدين. وفي هذه الوحدة، نتناول حالة خاصة للحركة في مستوى ثنائي الأبعاد: حركة جسم على طول محيط دائرة. وعلى وجه التحديد، سندرس فقط الحركة الدائرية للأجسام التي يمكن اعتبارها جسيمات نقطية. في الوحدة 10 التي تتناول الدوران المحوري، سنستفيض في شرح هذه الحالة وسندرس أيضًا الأجسام غير النقطية.

تُعد الحركة الدائرية شائعة بصورة مذهلة. يمثل ركوب دوامة الخيل أو أي من ألعاب مدينة الملاهي الأخرى المتعددة حركة دائرية. ينطوي سباق سيارات إندي أيضًا على حركة دائرية، عندما تبدل السيارات بين الحركة على امتداد الأجزاء المستقيمة والأجزاء نصف الدائرية من المضمار. كما تعمل مشغلات الأقراص المضغوطة و DVD أيضًا في حركة دائرية على الرغم من أن هذه الحركة عادة ما تكون مختفية عن العين.

أثناء **الحركة الدائرية لجسم ما**، يتغير الإحداثيان x وy له باستمرار. لكن تظل المسافة من الجسم إلى مركز المسار الدائري نفسها. يمكننا الاستفادة من هذه الحقيقة عن طريق استخدام **الإحداثيات القطبية** لدراسة الحركة الدائرية. يوضح الشكل 9.3 متجه الموقع، $\vec{r}$، لجسم ما في حركة دائرية. يتغير هذا المتجه كدالة زمنية، لكن يتحرك رأسه دائمًا على محيط دائرة معينة. يمكننا أن نحدد $\vec{r}$ عن طريق إيجاد المركبتين x وy له. لكن يمكننا تحديد المتجه نفسه عن طريق إيجاد عددين آخرين: زاوية $\vec{r}$ بالنسبة إلى المحور x، θ، وطول $\vec{r}$، $r = |\vec{r}|$ (الشكل 9.3).



الشكل 9.3 النظام الإحداثي القطبي للحركة الدائرية.

يحدد حساب المثلثات العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية x وy والإحداثيات القطبية θ وr:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{9.1}$$

$$\theta = \tan^{-1}(y/x). \tag{9.2}$$

يتم التحويل العكسي من الإحداثيات القطبية إلى الديكارتية عن طريق

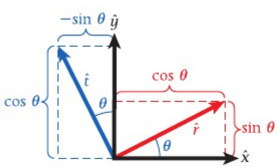
$$x = r\cos\theta \tag{9.3}$$

$$y = r\sin\theta. \tag{9.4}$$

تتمثل الميزة الرئيسة لاستخدام الإحداثيات القطبية لتحليل الحركة الدائرية في عدم تغير r على الإطلاق، حيث يظل كما هو طالما أن رأس المتجه $\vec{r}$ يتحرك على امتداد المسار الدائري. ومن ثَمَّ يمكننا اختزال وصف الحركة ثنائية الأبعاد على محيط دائرة ما إلى مسألة أحادية البُعد تتضمن الزاوية θ.

يوضح الشكل 9.3 أيضًا متجهات الوحدة في الاتجاهين القطري والمماسي، $\hat{r}$ و$\hat{t}$، بالترتيب. وتكون الزاوية بين $\hat{r}$ و$\hat{x}$ هي الزاوية θ مرة أخرى. لذا يمكن كتابة المركبات الديكارتية لمتجه الوحدة القطري كما يلي (راجع الشكل 9.4):

$$\hat{r} = \frac{x}{r}\hat{x} + \frac{y}{r}\hat{y} = (\cos\theta)\hat{x} + (\sin\theta)\hat{y} \equiv (\cos\theta, \sin\theta). \tag{9.5}$$



الشكل 9.4 العلاقة بين متجهات الوحدات القطرية والمماسية الموضحة في الشكل 9.2، ومتجهات الوحدات الديكارتية وجيب الزاوية وجيب تمام الزاوية.

يمكننا الحصول على المركبات الديكارتية لمتجه الوحدة المماسي بالطريقة نفسها (راجع الشكل 9.4 مرة أخرى ولاحظ أن متجهَي الوحدة المماسي والقطري دائمًا ما يكونان متعامدين على بعضهما؛ لذا تكون الزاوية بين متجه الوحدة المماسي والمحور y هي نفسها بين متجه الوحدة القطري والمحور x):

$$\hat{t} = \frac{-y}{r}\hat{x} + \frac{x}{r}\hat{y} = (-\sin\theta)\hat{x} + (\cos\theta)\hat{y} \equiv (-\sin\theta, \cos\theta). \tag{9.6}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

(لاحظ أنه دائمًا يوضع على رمز متجه الوحدة المماسي رأس سهم، $\hat{t}$ ، ومن ثَمَّ يمكن تمييزه بسهولة عن الزمن، t). ويمكن التحقق بشكل مباشر من أن متجهي الوحدة القطري والمماسي متعامدان على بعضهما من خلال إيجاد ناتج الضرب القياسي لهما:

$$\hat{r}\cdot\hat{t} = (\cos\theta, \sin\theta)\cdot(-\sin\theta, \cos\theta) = -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta = 0.$$

يمكننا أيضًا التحقق من أن طول متجهَي الوحدة هذين يساوي 1، على النحو المطلوب:

$$\hat{r}\cdot\hat{r} = (\cos\theta, \sin\theta)\cdot(\cos\theta, \sin\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\hat{t}\cdot\hat{t} = (-\sin\theta, \cos\theta)\cdot(-\sin\theta, \cos\theta) = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

في النهاية، من المهم التأكيد على أنه بالنسبة إلى الحركة الدائرية، يوجد فرق كبير بين متجهات الوحدة للإحداثيات القطبية ومتجهات الوحدة للإحداثيات الديكارتية وهو: تظل متجهات الوحدة الديكارتية ثابتة مع الزمن، بينما يغير متجهَا الوحدة القطري والمماسي اتجاههما أثناء عملية الحركة الدائرية. ويرجع ذلك إلى اعتماد هذين المتجهين على الزاوية θ التي تستند إلى زمن الحركة الدائرية.

9.2 الإحداثيات الزاويّة والإزاحة الزاويّة

تُمكِّننا الإحداثيات القطبية من وصف الحركة الدائرية وتحليلها، حيث يبقى بعد الجسم المتحرك عن نقطة الاصل (r) ثابتة وتختلف الزاوية θ كدالة زمنية، $\theta(t)$. كما أشرنا من قبل، تقاس الزاوية θ بالنسبة إلى محور x الموجب. ويكون لأي نقطة على محور x الموجب زاوية $\theta = 0$. كما يوحي التعريف الوارد في المعادلة 9.2، يَنتج عن أي حركة في عكس اتجاه عقارب الساعة بعيدًا عن محور x الموجب وباتجاه محور y الموجب قيم موجبة للزاوية θ. وبالعكس، يَنتج عن أي حركة في اتجاه عقارب الساعة بعيدًا عن محور x الموجب وباتجاه محور y السالب قيم سالبة للزاوية θ.

تمثل الدرجات (°) والراديان (rad) أكثر الوحدات استخدامًا لقياس الزوايا. تُحدِّد هذه الوحدات أن الزاوية التي تقاس بدائرة واحدة كاملة تساوي 360° وهذا ما يُعادل 2π rad. ومن ثَمَّ، يكون تحويل الوحدة بين قياسيَ الزاوية هو

$$\theta\ (\text{درجات})\frac{\pi}{180} = \theta\ (\text{راديان}) \Leftrightarrow \theta\ (\text{راديان})\frac{180}{\pi} = \theta\ (\text{درجات})$$

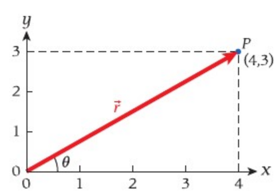
$$1\ \text{rad} = \frac{180°}{\pi} \approx 57.3°.$$

كما هو الحال مع الموقع الخطي x، يمكن أن يكون للزاوية θ قيم موجبة وسالبة. لكن تُعد الزاوية θ دورية، حيث تؤدي دورة كاملة حول الدائرة (2π rad أو 360°) إلى إعادة إحداثي الزاوية θ إلى النقطة نفسها في الفراغ. ومثلما تُعرَّف الإزاحة الخطية، Δx، بأنها الفرق بين الموقعين، x_1 وx_2، فإن الإزاحة الزاويّة، $\Delta\theta$، هي الفرق بين الزاويتين:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1.$$

مثال 9.1 تحديد موقع نقطة باستخدام الإحداثيات الديكارتية والقطبية

نقطة موقعها محدّد بالإحداثيات الديكارتية (4,3)، كما هو موضح في الشكل 9.5.



الشكل 9.5 نقطة عند (4,3) في نظام الإحداثي الديكارتي.

المسألة

كيف يمكننا تمثيل موقع هذه النقطة بالإحداثيات القطبية؟

الحل

باستخدام المعادلة 9.1، يمكننا حساب الإحداثي القطري:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

باستخدام المعادلة 9.2، يمكننا حساب الإحداثي الزاوي:

$$\theta = \tan^{-1}(y/x) = \tan^{-1}(3/4) = 0.64\ \text{rad} = 37°.$$

لذا يمكننا التعبير عن موقع النقطة P بالإحداثيات القطبية بالصيغة التالية

$$(r,\ \theta) = (5,0.64\ \text{rad}) = (5,37°)$$

لاحظ أنه يمكننا أن نحدد الموقع نفسه عن طريق جمع (أي مضاعفات صحيحة لـ) 2π rad أو 360° على θ:

$$(r,\theta) = (5, 0.64\ \text{rad}) = (5, 37°) = (5, 2\pi\ \text{rad} + 0.64\ \text{rad}) = (5, 360° + 37°).$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

طول القوس

يوضح الشكل 9.3 أيضًا (باللون الأخضر) المسار على محيط الدائرة الذي يقطعه رأس المتجه $\vec{r}$ أثناء الانتقال من الزاوية صفر إلى الزاوية θ. يُطلق على هذا المسار *طول القوس*، s. ويرتبط بنصف القطر والزاوية بالعلاقة

$$s = r\theta. \tag{9.7}$$

لحل هذه العلاقة عدديًا، يتعين قياس الزاوية بوحدة الراديان. وتمثل حقيقة أن محيط دائرة يساوي $2\pi r$ حالة خاصة للمعادلة 9.7 حيث $\theta = 2\pi$ rad، وفقًا لدورة واحدة كاملة حول الدائرة. ولطول القوس وحدة نصف القطر نفسها.

بالنسبة إلى الزوايا الصغيرة التي قياسها درجة أو أقل، يكون جيب الزاوية (مقربًا إلى أربعة أرقام معنوية) مساويًا للزاوية المقيسة بالراديان. وبسبب هذه الحقيقة فضلًا عن الحاجة إلى استخدام المعادلة 9.7 لحل المسائل، يمثل الراديان الوحدة المفضلة لقياس الإحداثيات الزاويّة. لكن استخدام وحدة الدرجات شائع، ويستخدم هذا الكتاب كلتا الوحدتين.

سؤال الاختبار الذاتي 9.1

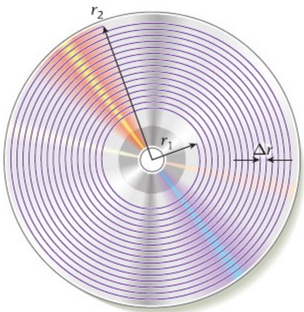
استخدم الإحداثيات القطبية وحساب التفاضل والتكامل لإثبات أنّ محيط دائرة نصف قطرها R يساوي $2\pi R$.

سؤال الاختبار الذاتي 9.2

استخدم الإحداثيات القطبية وحساب التفاضل والتكامل لإثبات أنّ مساحة دائرة نصف قطرها R يساوي πR^2 .

مثال 9.2 مسار على القرص المضغوط

في الشكل 9.5 يمثل مسار على القرص المضغوط. وهو مسار حلزوني يبدأ بنصف قطر داخلي $r_1 = 25$ mm وينتهي بنصف قطر خارجي $r_2 = 58$ mm. والتباعد بين الحلقات المتتالية للمسار ثابتة، $\Delta r = 1.6$ µm.



الشكل 9.6 المسار على قرص مضغوط.

المسألة

كم يبلغ الطول الإجمالي لهذا المسار؟

الحل 1، بدون استخدام حساب التفاضل والتكامل

يكون المسار دائريًا بشكل كامل تقريبًا عند نصف قطر r بين r_1 وr_2 ونظرًا لأن تباعد المسار هو $\Delta r = 1.6$ µm والمسافة بين الأجزاء الداخلية والخارجية $r_2 - r_1 = (58 \text{ mm}) - (25 \text{ mm}) = 33$ mm، نجد أن المسار يدور إلى ما يصل مجموعه

$$n = \frac{r_2 - r_1}{\Delta r} = \frac{3.3\times10^{-2}\text{m}}{1.6\times10^{-6}\text{m}} = 20,625 \text{ times.}$$

(لاحظ أننا لم نقرب هذه النتيجة المتوسطة)! تزداد أنصاف أقطار الـ 20,625 دائرة هذه بشكل خطي من 25 mm إلى 58 mm. ومن ثمَّ تزداد محيطات هذه الدوائر ($c = 2\pi r$) أيضًا بشكل خطي. إذًا متوسط نصف قطر هذه الدوائر يساوي $\bar{r} = \frac{1}{2}(r_2 + r_1) = 41.5$ mm ومتوسط المحيط يساوي

$$\bar{c} = 2\pi\bar{r} = (2\pi)(41.5 \text{ mm}) = 0.2608 \text{ m.}$$

يتعين علينا الآن أن نضرب متوسط المحيط هذا في عدد الدوائر للحصول على النتيجة:

$$L = n\bar{c} = (20,625)(0.2608 \text{ m}) = 5.4 \text{ km}$$

مُقربة إلى رقمين معنويين. وبهذا يكون طول مسار ما على قرص مضغوط أكبر من 3.3 mi!

الحل 2، باستخدام حساب التفاضل والتكامل

بما أن التباعد بين حلقات المسار المتتالية ثابت، $\Delta r = 1.6$ µm، إذًا كثافة المسار (أي عدد دورات المسار في الاتجاه القطري لكل وحدة طول عند تحركه للخارج من النقطة الداخلية) تساوي $1/\Delta r = 625,000 \text{ m}^{-1}$. يكون المسار دائريًا بشكل كامل تقريبًا عند نصف قطر r بين r_1 وr_2. يبلغ طول هذه القطعة من المسار الحلزوني $2\pi r$. لكن تزداد أطوال الحلقات بصورة ثابتة عند الحركة إلى الخارج. نحصل على إجمالي طول المسار عن طريق حساب تكامل طول كل حلقة من r_1 إلى r_2، مضروبًا في عدد الحلقات لكل وحدة طول:

$$L = \frac{1}{\Delta r}\int_{r_1}^{r_2} 2\pi r\, dr = \frac{1}{\Delta r}\pi r^2\Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{\Delta r}\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)$$

$$= (625,000 \text{ m}^{-1})\pi\left((0.058 \text{ m})^2 - (0.025 \text{ m})^2\right) = 5.4 \text{ km.}$$

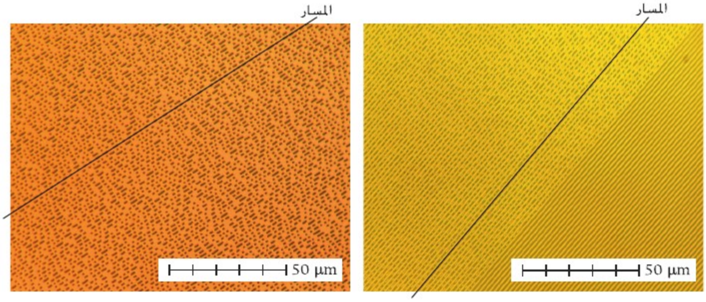
ويكون هذا الحل الذي يستند إلى حساب التفاضل والتكامل مُرضيًا حيث يتوافق مع الحل الذي حصلنا عليه دون استخدام حساب التفاضل والتكامل. قد ترغب في التفكير في الشروط التي يتعين تحقيقها لتجنب استخدام حساب التفاضل والتكامل في هذه الحالة. (بالنسبة إلى قرص DVD، تكون كثافة المسار أعلى بمعامل 2.2، بما يجعل طول المسار 12 km تقريبًا).

يوضح الشكل 9.7 جزءًا صغيرًا من مسارات قرصين مضغوطين بتكبير 500 مرة. يوضح الشكل 9.7a قرصًا مضغوطًا مجهزًا في المصنع به نتوءات ألومنيوم فردية واضحة. يوجد

– يُتبع

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

في الشكل 9.7b قرص مضغوط قابل للقراءة والكتابة يحترق عندما يحفز الليزر تغيّر الطور (ستتناول الوحدة 34 الخاصة بالبصريات الموجية هذه العملية) في المسار المستمر. يوضح الجزء السفلي الأيمن من هذه الصورة جزءًا من القرص المضغوط الذي لم يُكتب عليه شيء حتى الآن.



الشكل 9.7 صور مجهرية (تكبير ×500) لــ (a) قرص مضغوط مجهز في المصنع و(b) قرص مضغوط قابل للقراءة والكتابة. تشير الخطوط المتصلة إلى اتجاه المسارات.

9.3 السرعة الزاويّة والتردد الزاوي والزمن الدوري

عرفنا أن السرعة المتجهة لجسم ما هي تغير الإحداثيات الخطية للجسم مع الزمن. وبالمثل، فإن **السرعة الزاوية لجسم** هي تغير الإحداثي الزاوي للجسم مع الزمن. يحدد متوسط مقدار السرعة الزاويّة من العلاقة

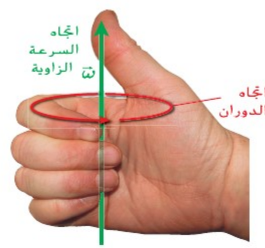
$$\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

يستخدم هذا التعريف الرمز $\theta_1 \equiv \theta(t_1)$ و $\theta_2 \equiv \theta(t_2)$ ويشير الخط الأفقي فوق رمز السرعة الزاوية ω إلى متوسط الزمن مرة أخرى. بحساب نهاية هذه العبارة الرياضية عند اقتراب الفترة الزمنية من الصفر، نصل إلى القيمة اللحظية لمقدار السرعة الزاوية:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \equiv \frac{d\theta}{dt} \qquad (9.8)$$

إن الوحدة الأكثر شيوعًا لقياس السرعة الزاوية هي راديان في الثانية (rad/s)، بينما لا تستخدم وحدة الدرجة في الثانية بشكل عام.

السرعة الزاوية كمية متجهة، وتكون في الاتجاه نفسه لمحور يمر بمركز المسار الدائري وعمودية على مستوى الدائرة. (يُطلق على هذا المحور محور الدوران كما سنناقش ذلك بمزيد من التفصيل في الوحدة 10). يسمح هذا التعريف بوجود احتمالين للاتجاه الذي يمكن أن يشير إليه المتجه $\vec{\omega}$: أعلى أم أسفل، أو موازٍ لمحور الدوران أو موازٍ له ومضاد له في الاتجاه. تساعدنا قاعدة اليد اليمنى في تحديد الاتجاه الصحيح: عندما تشير الأصابع إلى اتجاه الدوران على طول محيط الدائرة، يشير الإبهام إلى اتجاه $\vec{\omega}$، كما هو موضح في الشكل 9.7.



الشكل 9.8 قاعدة اليد اليمنى لتحديد اتجاه متجه السرعة الزاوية.

تقيس السرعة الزاوية مدى سرعة تغير الزاوية θ مع الزمن. وهناك كمية أخرى، تُعرف باسم **التردد**، f، تحدد مدى سرعة تغير هذه الزاوية مع الزمن. على سبيل المثال، يوضح عدد rpm في عدّاد السرعة في سيارتك عدد دورات المحرك في الدقيقة ومن ثمَّ يُحدد تردد لفة المحرك. يوضح الشكل 9.8 عدّاد سرعة وحداته "1/min × 1000". أي يصل المحرك إلى الخط الأحمر عند الدوران 6000 لفة في الدقيقة. إذًا، يقيس التردد، f، عدد الدورات في وحدة زمنية وليس الراديان في وحدة زمنية كما تفعل السرعة الزاوية. يرتبط التردد بمقدار السرعة الزاوية، ω، من خلال العلاقة

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \Leftrightarrow \omega = 2\pi f. \qquad (9.9)$$

هذه العلاقة منطقية حيث تتطلب الدورة الواحدة الكاملة حول دائرة ما تغير الزاوية بمقدار 2π rad. (انتبه إلى أن كلًا من التردد والسرعة الزاوية لهما وحدة معكوس الثواني نفسها ويمكن الخلط بينهما بسهولة).

الشكل 9.9 يقيس عدّاد السرعة في سيارة ما تردد دورات المحرك (عدد الدورات في الدقيقة).

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نظرًا لشيوع استخدام وحدة معكوس الثانية، تمّ إطلاق اسم معين عليها وهو **الهرتز** (Hz)، نسبة إلى عالم الفيزياء الألماني هاينريش رودولف هرتز (1857–1894)؛ $1\ \text{Hz} = 1\ \text{s}^{-1}$. يعرَّف **الزمن الدوري للدوران**، T، بأنه معكوس التردد:

$$T = \frac{1}{f}. \tag{9.10}$$

يقيس الزمن الدوري الفترة الزمنية بين حالتين متتاليتَين تكون للزاوية فيهما القيمة نفسها؛ أي الوقت المُستغرق للمرور مرة واحدة حول الدائرة. ووحدة قياس الزمن الدوري هي وحدة الزمن نفسها وهي الثانية (s). ومن خلال العلاقات بين الزمن الدوري والتردد وبين التردد والسرعة الزاوية، نحصل أيضًا على:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \tag{9.11}$$

السرعة الزاويّة والسرعة الخطية

إذا أوجدنا مشتقة الزمن لمتجه الموقع، فسنحصل على متجه السرعة الخطية. لإيجاد السرعة الزاوية، من الأنسب كتابة متجه الموقع القطري بالإحداثيات الديكارتية وإيجاد مشتقات الزمن لكل مركبة:

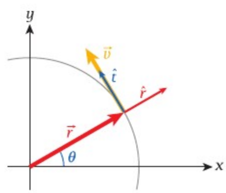
$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} = (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = r(\cos\theta, \sin\theta) = r\hat{r} \Rightarrow$$
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \left(\frac{d}{dt}(r\cos\theta), \frac{d}{dt}(r\sin\theta)\right).$$

بالنسبة إلى الحركة على طول دائرة ما، يمكننا استخدام حقيقة أن المسافة r إلى نقطة الأصل لا تتغير مع الزمن لكنها تظل ثابتة. ينتج عن هذا

$$\vec{v} = \left(\frac{d}{dt}(r\cos\theta), \frac{d}{dt}(r\sin\theta)\right) = \left(r\frac{d}{dt}(\cos\theta), r\frac{d}{dt}(\sin\theta)\right)$$
$$= \left(-r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}, r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)$$
$$= (-\sin\theta, \cos\theta)r\frac{d\theta}{dt}.$$

استخدمنا هنا قاعدة السلسلة في التفاضل بدءًا من الخطوة التالية إلى الأخيرة ثم حللنا باستخراج العامل المشترك $r\,d\theta/dt$. نعرف بالفعل أن مشتقة الزمن للزاوية تساوي السرعة الزاوية (انظر المعادلة 9.8). بالإضافة إلى ذلك، لاحظنا أن المتجه $(-\sin\theta, \cos\theta)$ يمثل متجه الوحدة المماسي (انظر المعادلة 9.6). ومن ثَمَّ، نحصل على العلاقة التالية بين السرعة الزاوية والخطية للحركة الدائرية:

$$\vec{v} = r\omega\hat{t}. \tag{9.12}$$



الشكل 9.10 السرعة الخطية والمتجهات الإحداثية.

(يمثل $\hat{t}$ رمز متجه الوحدة المماسي وليس له علاقة بالزمن، t.)

بما أن متجه السرعة يشير إلى اتجاه المماس للمسار في أي زمن محدد، يكون هذا المتجه مماسًا لمحيط الدائرة دائمًا، ويشير إلى اتجاه الحركة، كما هو موضح في الشكل 9.10. لذا يكون متجه السرعة عموديًا دائمًا على متجه الموقع الذي يشير إلى الاتجاه القطري. إذا كان المتجهان متعامدين على بعضهما، فسيكون ناتج ضربهما القياسي صفرًا. لذا فإنه بالنسبة إلى الحركة الدائرية، يكون دائمًا

$$\vec{r} \bullet \vec{v} = (r\cos\theta, r\sin\theta) \bullet (-r\omega\sin\theta, r\omega\cos\theta) = 0.$$

إذا أوجدنا القيم المطلقة لطرفي المعادلة 9.12 الأيسر والأيمن، فسنحصل على علاقة مهمة بين مقادير السرعات الخطية والزاوية للحركة الدائرية:

$$v = r\omega. \tag{9.13}$$

تذكر أن هذه العلاقة تنطبق فقط على *مقادير* السرعات الخطية والزاوية. لكن تشير متجهاتها إلى اتجاهات مختلفة. وبالنسبة إلى الحركة الدائرية المنتظمة، تكون المتجهات متعامدة على بعضها. وتشير $\vec{\omega}$ إلى اتجاه محور الدوران ويكون $\vec{v}$ مماسًا للدائرة.

مراجعة المفاهيم 9.1

إذا كان نصف قطر عجلات الدراجة R، وتسير الدراجة بسرعة v، فأي من التعبيرات التالية يصف السرعة الزاوية للإطار الأمامي؟

a) $\omega = \frac{1}{2}\text{Rv}^2$

b) $\omega = \frac{1}{2}\text{vR}^2$

c) $\omega = \text{R/v}$

d) $\omega = \text{Rv}$

e) $\omega = \text{v/R}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 9.3 الدوران المداري للأرض والدوران المحوري لها

المسألة

تدور الأرض حول الشمس وكذلك تدور حول محورها الذي يمتد من القطب إلى القطب. أوجد السرعات الزاوية لهذه الحركات وكذلك تردداتها وسرعاتها الخطية.

الحل

تتحرك أي نقطة على سطح الأرض حركة دائرية حول محور الدوران (من القطب إلى القطب) بزمن دوران مدته يوم واحد. ويتم التعبير عن هذه الفترة بالثواني بالعلاقة

$$T_{\text{Earth}} = 1 \text{ day} \cdot \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ day}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 8.64 \cdot 10^4 \text{ s}.$$

تتحرك الأرض حول الشمس في مسار إهليلجي؛ وهو قريب جدًا من الشكل الدائري. لذا سنعامل مدار الأرض كالحركة الدائرية. تساوي الفترة المدارية لحركة الأرض حول الشمس عامًا واحدًا. عندما نعبر عن هذه الفترة بالثواني، نحصل على

$$T_{\text{Sun}} = 1 \text{ year} \cdot \frac{365 \text{ days}}{1 \text{ year}} \cdot \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ day}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 3.15 \times 10^7 \text{ s}.$$

لكلتا الحركتين الدائرتين سرعة زاوية ثابتة. لذا يمكننا أن نستخدم $T = 1/f$ و$\omega = 2\pi f$ للحصول على الترددات والسرعات الزاوية:

$$f_{\text{Earth}} = \frac{1}{T_{\text{Earth}}} = 1.16 \times 10^{-5} \text{ Hz}; \ \ \omega_{\text{Earth}} = 2\pi f_{\text{Earth}} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$f_{\text{Sun}} = \frac{1}{T_{\text{Sun}}} = 3.17 \times 10^{-8} \text{ Hz}; \ \ \omega_{\text{Sun}} = 2\pi f_{\text{Sun}} = 1.99 \times 10^{-7} \text{ rad/s}.$$

لاحظ أن الفترة التي استخدمناها وهي 24 ساعة كطول ليوم واحد تُعادل طول الفترة التي تستغرقها الشمس للوصول إلى الموقع نفسه في السماء. إذا أردنا تحديد الترددات والسرعات الزاوية بمزيد من الدقة، فسيتعين علينا استخدام اليوم الفلكي؛ بما أن الأرض تتحرك حول الشمس كل يوم، فإن الزمن الذي تستغرقه بالفعل لإكمال دورة واحدة وإعادة النجوم إلى الموقع نفسه في سماء الليل هو اليوم الفلكي، ويتكون من 23 h و56 min وأكثر قليلًا من 4 s أو $86{,}400 \text{ s} \cdot (1 - 1/366.242) = 86{,}164.09 \text{ s}$. (لقد استخدمنا حقيقة أن الأرض تستغرق جزءًا من اليوم إضافة إلى 365 يومًا لإكمال دورة حول الشمس، وهذا هو سبب أهمية السنوات الكبيسة).

لنوجد الآن السرعة الخطية التي تدور بها الأرض حول الشمس. ولأننا نفترض أن الحركة دائرية، يتم تحديد العلاقة بين السرعة المدارية والسرعة الزاوية من خلال $v = r\omega$. للحصول على إجابة، نحتاج إلى معرفة نصف قطر المدار. نصف قطر هذا المدار هو المسافة بين الأرض والشمس، $r_{\text{Earth-Sun}} = 1.49 \cdot 1011$ m. لذا تكون السرعة المدارية الخطية، أي السرعة التي تتحرك بها الأرض حول الشمس، هي

$$v = r\omega = (1.49 \times 10^{11} \text{ m})(1.99 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}) = 2.97 \times 10^4 \text{ m/s}.$$

أكثر من 106,216 kph!

نريد الآن إيجاد سرعة نقطة ما على سطح الأرض وهي تدور بالنسبة إلى مركز الأرض. نلاحظ أن النقاط التي توجد عند خطوط عرض مختلفة تتفاوت في مسافاتها عن محور الدوران، كما هو موضح في الشكل 9.11. عند خط الاستواء، يكون نصف قطر الدوران $r = R_{\text{Earth}} = 6380$ km. وبعيدًا عن خط الاستواء، يكون نصف قطر الدوران كدالة لزاوية خط العرض هو $r = R_{\text{Earth}} \cos\vartheta$، انظر الشكل 9.11. (يستخدم الحرف ثيتا، ϑ، للتعبير عن زوايا خط العرض هنا لمنع الخلط بينها وبين الحرف θ الذي يستخدم للتعبير عن الحركة في دائرة). بوجه عام، نحصل على الصيغة التالية لسرعة الدوران:

$$\begin{aligned} v &= \omega r = \omega R_{\text{Earth}} \cos\vartheta \\ &= (7.27 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1})(6.38 \times 10^6 \text{ m})(\cos\vartheta) \\ &= (464 \text{ m/s})(\cos\vartheta). \end{aligned}$$

عند الأقطاب، حيث $\vartheta = 90°$، تكون سرعة الدوران صفرًا، وعند خط الاستواء، حيث $\vartheta = 0°$، تكون السرعة 464 m/s. في سياتل، حيث $\vartheta = 47.5°$، تتحرك النقطة بسرعة $v = 313$ m/s وفي ميامي، حيث $\vartheta = 25.7°$، تكون سرعتها $v = 418$ m/s.

الشكل 9.11 يشير الخط الرأسي إلى محور دوران الأرض. تتحرك النقاط الموجودة على خطوط العرض المختلفة على سطح الأرض بسرعات متفاوتة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9.4 العجلة الزاوية والمركزية

العجلة الزاوية لجسم هي معدل التغير في سرعته الزاوية، ويرمز إليها بالحرف اليوناني α. يتشابه تعريف مقدار العجلة الزاوية مع تعريف العجلة الخطية. ويحدد متوسطها الزمني من العلاقة

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

يتم الحصول على المقدار اللحظي للعجلة الزاوية بحساب النهاية عند اقتراب الفترة الزمنية من الصفر:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \equiv \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}. \tag{9.14}$$

كما أوجدنا العلاقة بين السرعة الخطية والسرعة الزاويّة، يمكننا أيضًا إيجاد العلاقة بين العجلة الماسية والعجلة الزاويّة. نبدأ بتعريف متجه العجلة الخطية بأنه مشتقة الزمن لمتجه السرعة الخطية. ثُمَّ نعوّض بتعبير السرعة الخطية في الحركة الدائرية من المعادلة 9.12:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}(v\hat{t}) = \left(\frac{dv}{dt}\right)\hat{t} + v\left(\frac{d\hat{t}}{dt}\right). \tag{9.15}$$

في الخطوة الأخيرة هنا، استخدمنا قاعدة ناتج الضرب في التفاضل. ومن ثَم يكون للعجلة في الحركة الدائرية مكونان. يَنتِج الجزء الأول من التغير في مقدار السرعة المتجهة، وهذه هي **العجلة الماسية.** ويرجع الجزء الثاني إلى حقيقة أن متجه السرعة دائمًا يشير إلى الاتجاه الماسي ومن ثَمَّ يتعين عليه أن يغير اتجاهه باستمرار مع تحرك رأس متجه الموقع القطري حول الدائرة وهذه هي **العجلة القطرية.**

لنلقِ نظرة على كل مكون على حدة. أولًا، يمكننا حساب مشتقة السرعة الخطية بالنسبة للزمن، v، باستخدام العلاقة بين السرعة الخطية والسرعة الزاوية في المعادلة 9.13، واستخدام قاعدة ناتج الضرب مرة أخرى:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega) = \left(\frac{dr}{dt}\right)\omega + r\frac{d\omega}{dt}.$$

نظرًا لأن r ثابت للحركة الدائرية، $dr/dt = 0$، يكون الحد الأول في الجمع في الطرف الأيمن يساوي صفرًا. ومن خلال المعادلة 9.14، $d\omega/dt = \alpha$. لذا سيكون الحد الثاني في الجمع يساوي $r\alpha$. ومن ثَم، يرتبط التغير في السرعة بالعجلة الزاوية من خلال العلاقة

$$\frac{dv}{dt} = r\alpha. \tag{9.16}$$

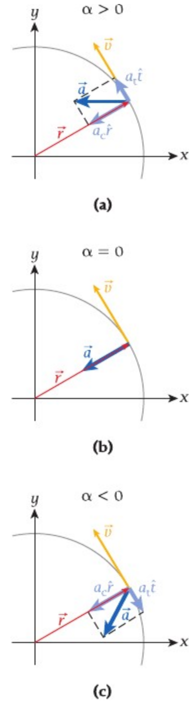
لكن متجه العجلة في المعادلة 9.15 له مركّبة ثانية تتناسب طرديًا مع مشتقة الزمن لمتجه الوحدة المماسي. وفيما يخص هذه الكمية، نجد أن

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{t} &= \frac{d}{dt}(-\sin\theta, \cos\theta) = \left(\frac{d}{dt}(-\sin\theta), \frac{d}{dt}(\cos\theta)\right)\\ &= \left(-\cos\theta\frac{d\theta}{dt}, -\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right) = -\frac{d\theta}{dt}(\cos\theta, \sin\theta)\\ &= -\omega\hat{r}.\end{aligned}$$

ومن ثَم نجد أن مشتقة الزمن لمتجه الوحدة المماسي يعاكس اتجاه متجه الوحدة القطري. ومن خلال هذه النتيجة، يمكننا أخيرًا أن نكتب متجه العجلة الخطية للمعادلة 9.15 بالصورة:

$$\vec{a}(t) = r\alpha\hat{t} - v\omega\hat{r}. \tag{9.17}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



الشكل 9.12 العلاقات بين العجلة الخطية والعجلة المركزية والعجلة الزاوية مع (a) السرعة المتزايدة و(b) السرعة الثابتة و(c) السرعة المتناقصة.

بالنسبة إلى الحركة الدائرية، نلاحظ مرة أخرى أن متجه العجلة له مركبتان فيزيائيتان (الشكل 9.11)؛ تَنتج المركبة الأولى من التغير في السرعة وتكون في الاتجاه المماسي وتَنتج المركبة الثانية من التغير المستمر في اتجاه متجه السرعة وتكون في الاتجاه القطري السالب نحو مركز الدائرة. تكون المركبة الثانية موجودة حتى في حالة استمرار الحركة الدائرية بسرعة ثابتة. إذا كانت السرعة الزاوية ثابتة، فستكون العجلة الزاوية المماسية صفرًا. لكن يستمر تغير اتجاه متجه السرعة مع تحرك الجسم في مساره الدائري. يُطلق على العجلة التي تغير اتجاه متجه السرعة دون تغيير مقداره اسم **العجلة المركزية** (كلمة مركزية تعني أنها "تكون في اتجاه المركز") وتكون في الاتجاه القطري الداخلي. إذًا، يمكننا كتابة المعادلة 9.17 لعجلة جسم يتحرك حركة دائرية على أنها مجموع العجلة المماسية والعجلة المركزية:

$$\vec{a} = a_t\hat{t} - a_c\hat{r}. \tag{9.18}$$

مقدار العجلة المركزية هو

$$a_c = v\omega = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r. \tag{9.19}$$

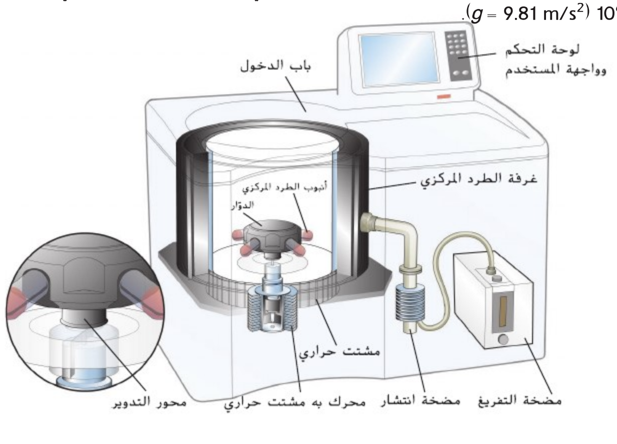
يمكن ببساطة التعويض عن التعبير الأول للعجلة المركزية في المعادلة 9.19 من المعادلة 9.17 حيث يكون معامل متجه الوحدة في الاتجاه القطري السالب. يتم الحصول بعد ذلك على التعبيرين الثاني والثالث للعجلة المركزية من العلاقة بين السرعات الخطية والزاوية ونصف القطر (المعادلة 9.13).

فيما يخص مقدار العجلة في الحركة الدائرية، من المعادلتين 9.17 و9.19، يصبح لدينا

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{(r\alpha)^2 + (r\omega^2)^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}. \tag{9.20}$$

مثال 9.4 جهاز الطرد المركزي فائق السرعة

يعد جهاز الطرد المركزي فائق السرعة من أهم المعدات في مختبرات الطب الأحيائي (الشكل 9.13). تستخدم هذه المُعدَّة لفصل المواد (مثل المواد الغروانية أو البروتينات) التي تتكون من *جسيمات* مختلفة الكتل من خلال عملية الترسيب (تغوص الجسيمات الأكثر ضخامة إلى القاع). بدلًا من الاعتماد على عجلة الجاذبية للقيام بالترسيب، يستخدم جهاز الطرد المركزي فائق السرعة العجلة المركزية الناتجة عن الدوران السريع لتسريع العملية. يمكن أن تصل قيم العجلة المركزية في بعض أجهزة الطرد المركزي فائقة السرعة إلى $10^6 g$ ($g = 9.81\ \text{m/s}^2$).



الشكل 9.13 مخطط مجزّأ لجهاز الطرد المركزي فائق السرعة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المسألة

اذا اردت توليد عجلة مركزيه بمقدار 840,000 مثل عجلة الجاذبية الارضية في عينة تدور على بُعد 23.5 cm من محور دوران جهاز الطرد المركزي فائق السرعة، فما التردد الذي يتعين عليك إدخاله إلى عناصر التحكم؟ ما السرعة الخطية التي تتحرك بها العينة بعد ذلك؟

الحل

تُحدد العجلة المركزية من العلاقة $a_c = \omega^2 r$ وترتبط السرعة الزاوية بالتردد من خلال المعادلة 9.11: $\omega = 2\pi f$. لذا تكون العلاقة بين التردد والعجلة المركزية هي $a_c = (2\pi f)^2 r$. أو

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a_c}{r}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(840{,}000)(9.81\ \text{m/s}^2)}{0.235\ \text{m}}} = 942\ \text{s}^{-1} = 56{,}500\ \text{rpm}.$$

فيما يخص السرعة الخطية للعينة داخل جهاز الطرد المركزي، نجد أن

$$v = r\omega = 2\pi rf = 2\pi(0.235\ \text{m})(942\ \text{s}^{-1}) = 1.39\ \text{km/s}.$$

تُستخدم أنواع أخرى من أجهزة الطرد المركزي يُطلق عليها *أجهزة الطرد المركزي الغازية* في عملية تخصيب اليورانيوم. في هذه العملية، يتم فصل النظيرين ^{235}U و^{238}U المختلفين في الكتلة بما يزيد قليلًا عن 1٪. يحتوي اليورانيوم الطبيعي على ما يزيد عن 99% من النظير ^{238}U غير الضار. لكن في حال تخصيب اليورانيوم ليحتوي على ما يزيد عن 90% من النظير ^{235}U، يمكن استخدامه للأسلحة النووية. يجب أن تدور أجهزة الطرد المركزي الغازية المستخدَمة في عملية التخصيب بمعدل 100,000 rpm تقريبًا، الأمر الذي يتسبب في ضغط ضخم على آليات هذه الأجهزة وموادها ويجعل من الصعب تصميمها وتصنيعها. لمنع انتشار الأسلحة النووية، يحاط تصميم أجهزة الطرد المركزية بكتمان شديد.

مثال 9.5 العجلة المركزية الناتجة عن الدوران المحوري للأرض

نظرًا لدوران الأرض، تتحرك النقاط الموجودة على سطحها بسرعة زاوية ومن المثير حساب العجلة المركزية المقابلة. يمكن لهذه العجلة أن تغير قليلًا القيمة المعروفة للعجلة الناتجة عن الجاذبية على سطح الأرض.

يمكننا التعويض ببيانات الأرض في المعادلة 9.19 لإيجاد مقدار العجلة المركزية:

$$\begin{aligned} a_c &= \omega^2 r = \omega^2 R_{\text{Earth}} \cos\vartheta \\ &= (7.27\times10^{-5}\ \text{s}^{-1})^2(6.38\times10^6\ \text{m})(\cos\vartheta) \\ &= (0.034\ \text{m/s}^2)(\cos\vartheta). \end{aligned}$$

لقد استخدمنا هنا الرمز نفسه كما في المثال 9.3، حيث تشير ϑ إلى زاوية خط العرض بالنسبة إلى خط الاستواء. توضح النتيجة التي حصلنا عليها أن العجلة المركزية الناتجة عن الدوران المحوري للأرض تغير عجلة الجاذبية الفعلية الملاحَظة على سطح الأرض بعامل يتراوح بين 0.34 بالمئة (عند خط الاستواء) وصفر (عند الأقطاب). باستخدام سياتل وميامي كأمثلة، نحصل على عجلة مركزية مقدارها 0.02 m/s^2 لسياتل وعجلة مركزية مقدارها 0.03 m/s^2 لميامي. تُعد هذه القيم صغيرة نسبيًا مقارنة بالقيمة المقدمة لعجلة الجاذبية، 9.81 m/s^2، لكن لا يمكن إهمالها دائمًا.

سؤال الاختبار الذاتي 9.3

أقصى قيمة للعجلة المركزية الناتجة عن الدوران المحوري للأرض هي $300/g$ تقريبًا. هل يمكنك تحديد قيمة العجلة المركزية الناتجة عن دوران الأرض حول الشمس؟

مراجعة المفاهيم 9.2

يولد دوران الأرض حول مركزها عجلة مركزية على سطح الأرض. لنفترض أنك كنت واقفًا على خط الاستواء وتوقفت الأرض عن الدوران المحوري. عند توقف الأرض، فإنك

a) ستشعر بخفة وزنك قليلًا عن ذي قبل.

b) ستشعر بثقل وزنك قليلًا عن ذي قبل.

c) سترتفع عن سطح الأرض.

d) لن تستطيع معرفة ما إذا كانت الأرض لا تزال تدور أم لا.

مثال 9.6 مشغل الأقراص المضغوطة

المسألة

في مثال 9.2، وجدنا أن طول أحد مسارات الأقراص المضغوطة 5.4 km. إذا كان القرص المضغوط يمكنه تخزين 74 min من المقاطع الموسيقية. فما السرعة الزاوية والعجلة الماسية للقرص عندما يدور داخل أحد مشغلات الأقراص المضغوطة، مع افتراض أن السرعة الخطية ثابتة؟

الحل

بما أن طول المسار 5.4 km ويتعين عليه أن يمر بشعاع الليزر الذي يقرؤه في فترة زمنية قدرها Δt = 74 min = 4440 s. تكون سرعة مرور المسار بالقارئ v = (5.4 km)/(4440 s) = 1.216 m/s. من مثال 9.2. علمنا أن المسار حلزوني وبه 20,625 حلقة تبدأ من

– يُتبع

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نصف قطر داخلي $r_1 = 25$ mm وتصل إلى نصف قطر خارجي $r_2 = 58$ mm. عند كل قيمة من قيم نصف القطر r، يمكننا أن نشبّه المسار الحلزوني بدائرة، كما فعلنا في مثال 9.2. ومن ثَمّ يمكننا استخدام العلاقة بين السرعات الخطية والزاوية التي يتم التعبير عنها في المعادلة 9.13 لإيجاد السرعة الزاوية كدالة لنصف القطر:

$$v = r\omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}.$$

بالتعويض بقيم v و r، نحصل على

$$\omega(r_1) = \frac{1.216 \text{ m/s}}{0.025 \text{ m}} = 48.64 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega(r_2) = \frac{1.216 \text{ m/s}}{0.058 \text{ m}} = 20.97 \text{ s}^{-1}.$$

وهذا يعني أن مشغل الأقراص المضغوطة ينبغي أن يبطئ معدل دوران القرص أثناء تشغيله. ويكون متوسط العجلة الزاوية أثناء هذه العملية هو

$$\alpha = \frac{\omega(r_2) - \omega(r_1)}{\Delta t} = \frac{20.97 \text{ s}^{-1} - 48.64 \text{ s}^{-1}}{4440 \text{ s}} = -6.2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-2}.$$

سؤال الاختبار الذاتي 9.4

قارن بين العجلة المركزية لقرص مضغوط يدور في مشغل وعجلته المماسية.

9.5 القوة المركزية

القوة المركزية، $\vec{F}_c$، ليست قوة أساسية في الطبيعة لكنها ببساطة قوة محصلة متجهة نحو الداخل لازمة لتوفير العجلة المركزية اللازمة للحركة الدائرية. وينبغي أن تتجه إلى الداخل نحو مركز الدائرة. ومقدارها يساوي ناتج ضرب كتلة الجسم والعجلة المركزية اللازمة لدفعه إلى مسار دائري:

$$F_c = ma_c = mv\omega = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r. \quad (9.21)$$

للوصول إلى المعادلة 9.21 قمنا ببساطة بكتابة العجلة المركزية بدلالة السرعة الخطية v والسرعة الزاوية ω ونصف القطر r، كما هو الحال في المعادلة 9.19 مع ضربها في كتلة الجسم الذي دفعته القوة المركزية إلى مسار دائري.

يوضح الشكل 9.14 منظرًا علويًا لطاولة دوّارة عليها ثلاث قطع متطابقة في كل شيء (باستثناء اللون). تقع القطعة السوداء بالقرب من المركز وتقع القطعة الحمراء بالقرب من الحافة الخارجية وتقع القطعة الزرقاء في الوسط بين القطعتين الأخريين. إذا قمنا بتدوير الطاولة ببطء كما هو الحال في الجزء (a)، فستكون جميع القطع الثلاث في حركة دائرية. في هذه الحالة، توفر قوة الاحتكاك السكوني بين الطاولة والقطع القوة المركزية اللازمة للحفاظ على القطع في حركة دائرية. في الأجزاء (b) و(c) و(d)، تدور الطاولة أسرع تدريجيًا. وزيادة السرعة الزاوية تعني زيادة القوة المركزية وفقًا للمعادلة 9.21. وتنزلق القطع عندما لا تعود قوة الاحتكاك كبيرة بدرجة تكفي لتوفير القوة المركزية اللازمة. كما ترى، تنزلق القطعة الخارجية أولًا وتنزلق القطعة الداخلية أخيرًا. يشير هذا بوضوح إلى أنه بالنسبة إلى أي سرعة زاوية محددة، تزداد القوة المركزية مع بُعد المسافة عن المركز. يمكن أن تفسر المعادلة 9.21 بالصيغة $F_c = m\omega^2 r$ هذا السلوك الملاحَظ. تكون السرعة الزاوية ω لجميع النقاط على سطح الطاولة الدوارة واحدة. وذلك لأن جميع هذه النقاط تستغرق الوقت نفسه لإكمال لفة واحدة. لذا تتناسب القوة المركزية للقطع الثلاث طرديًا مع البعد عن المركز، الأمر الذي يشرح سبب انزلاق القطعة الحمراء أولاً والقطعة السوداء أخيرًا.

مراجعة المفاهيم 9.3

افترض أنك تجلس على لعبة دوامة الخيل وهي تدور. أين ينبغي أن تجلس بحيث تتعرض لتأثير أكبر قوة مركزية ممكنة؟

a) بالقرب من الحافة الخارجية

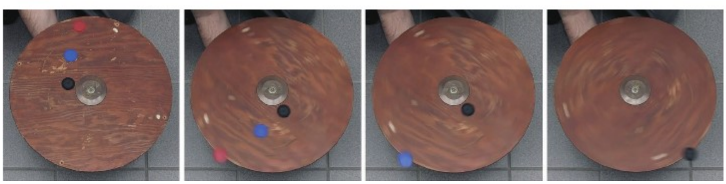
b) بالقرب من المركز

c) في المنتصف

d) القوة واحدة في أي مكان.

البندول المخروطي

يمثل الشكل 9.14 صورة للأرجوحة الدوارة وهي إحدى ألعاب مدينة الملاهي. حيث يجلس الركاب على مقاعد معلقة من قرص صلب بسلاسل طويلة. في بداية اللعبة، تكون السلاسل متدلية إلى أسفل بشكل



(a) (b) (c) (d)

الشكل 9.14 القطع على طاولة دوّارة. يُظهر الشكل من اليسار إلى اليمين المواقع الابتدائية للقطع واللحظات التي تنزلق فيها هذه القطع الثلاث أثناء عملية الحركة الدائرية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مستقيم. لكن عندما تبدأ اللعبة في الدوران، تشكل هذه السلاسل زاوية φ مع المستوى الرأسي، كما ترى. ولا تعتمد هذه الزاوية على كتلة الراكب لكنها تعتمد فقط على السرعة الزاوية للحركة الدائرية. كيف يمكننا إيجاد قيمة هذه الزاوية بدلالة السرعة المتجهة؟

لفهم هذا الأمر، نفكر في موقف مماثل لكنه أبسط إلى حد ما: توجد كتلة معلقة في السقف بحبل طوله l وتقوم بحركة دائرية بحيث تكون الزاوية الواقعة بين الخيط والمستوى الرأسي φ. يمثل الخيط سطح مخروط ما، ولهذا السبب يطلق على هذا التركيب *بندول مخروطي*. انظر الشكل 9.16.

يوضح الشكل 9.16c مخطط الجسم الحر للكتلة. وتوجد قوتان فقط تؤثران فيها. حيث تؤثر قوة الجاذبية، $\vec{F}_g$، رأسيًا إلى أسفل ويشار إليها بالسهم الأحمر في مخطط الجسم الحر. ومقدارها mg كالمعتاد. بينما تتمثل القوة الأخرى المؤثرة في الكتلة في شد الحبل، $\vec{T}$، والتي تؤثر على امتداد اتجاه الحبل بزاوية φ مع المستوى الرأسي. ينقسم شد الحبل هذا إلى المركبتين x وy ($T_x = T\sin\varphi$, $T_y = T\cos\varphi$). لا توجد حركة في الاتجاه الرأسي. ومن ثَمَّ تصبح القوة المحصلة لدينا في هذا الاتجاه صفرًا. $F_{\text{net},y} = T\cos\varphi - mg = 0$، الأمر الذي يَنتِج عنه

$$T\cos\varphi = mg.$$

في الاتجاه الأفقي، تكون المركبة الأفقية لشد الحبل هي مركبة القوة الوحيدة؛ وهي التي توفر القوة المركزية. وفقًا للقانون الثاني لنيوتن، $F_{\text{net},x} = F_c = ma_c$ نحصل على

$$T\sin\varphi = mr\omega^2.$$

كما ترى من الشكل 9.15b، نحصل على نصف قطر الحركة الدائرية من العلاقة $r = \ell\sin\varphi$. وباستخدام هذه العلاقة، نوجد شد الحبل بدلالة السرعة الزاوية:

$$T = m\ell\omega^2. \qquad (9.22)$$

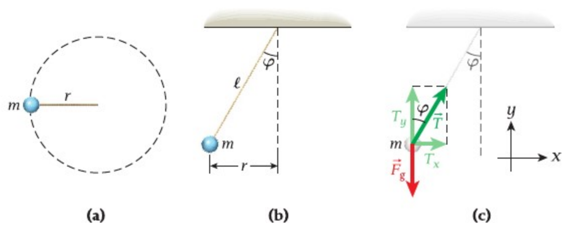
لاحظنا أن $T\cos\varphi = mg$، ويمكننا التعويض بتعبير T من المعادلة 9.22 في هذه المعادلة للحصول على

$$(m\ell\omega^2)(\cos\varphi) = mg$$

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell\cos\varphi}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell\cos\varphi}}. \qquad (9.23)$$

يتم إهمال الكتلة مما يفسر سبب أن جميع السلاسل في الشكل 9.15 لها الزاوية نفسها مع المستوى الرأسي. يتضح أن هناك علاقة فريدة ومثيرة للاهتمام بين زاوية البندول المخروطي وسرعته الزاوية. عندما تقترب الزاوية φ من الصفر، لا تقترب السرعة الزاوية من الصفر لكنها تقترب من قيمة صغرى نهائية، $\sqrt{g/\ell}$ عند النهاية التي تقترب فيها الزاوية φ من $90°$، تصبح ω لانهائية.



الشكل 9.16 البندول المخروطي: (a) منظر علوي. يشير الخط المتقطع إلى المسار الدائري للكتلة. (b) منظر جانبي. (c) مخطط الجسم الحر.

الشكل 9.15 أرجوحة دوارة في مدينة ملاهٍ.

سؤال الاختبار الذاتي 9.5

ارسم تمثيلًا بيانيًا لشد الخيط كدالة للزاوية φ.

مراجعة المفاهيم 9.4

تؤدي سرعة زاويّة معيّنة ω_0 لبندول مخروطي إلى تكوّن زاوية φ_0. إذا أُخِذ هذا البندول المخروطي إلى القمر حيث عجلة الجاذبية تساوي سدس عجلة الجاذبية على الأرض، فكيف ينبغي ضبط السرعة الزاوية للحصول على الزاوية φ_0 نفسها؟

a) $\omega_{\text{Moon}} = 6\omega_0$

b) $\omega_{\text{Moon}} = \sqrt{6}\omega_0$

c) $\omega_{\text{Moon}} = \omega_0$

d) $\omega_{\text{Moon}} = \omega_0/\sqrt{6}$

e) $\omega_{\text{Moon}} = \omega_0/6$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مسألة محلولة 9.1 تحليل عربة أفعوانية

من الألعاب التي ربما تدهشك بشدة في مدينة الملاهي هي العربة الأفعوانية ذات الحلقة الرأسية حيث يشعر الركاب بانعدام الوزن تقريبًا في أعلى هذه الحلقة.

المسألة

افترض أن نصف قطر الحلقة الرأسية يساوي 5.00 m. فما السرعة الخطية المفترضة للعربة الأفعوانية عند أعلى الحلقة لكي يشعر الركاب بانعدام الوزن؟ (افترض أنه يمكن تجاهل الاحتكاك بين العربة الأفعوانية والقضبان).

الحل

فكّر يشعر الشخص بانعدام وزنه عند عدم وجود قوة داعمة من مقعد أو نظام تقييد يؤثر عكسيًا في وزنه. لكي يشعر الشخص بانعدام وزنه في أعلى الحلقة، ينبغي ألا تكون هناك قوّة عموديّة مؤثرة فيه عند هذه النقطة.

ارسم قد تساعد مخططات الجسم الحر في الشكل 9.18 في تصور الحالة. يوضح الشكل 9.18A قوة الجاذبية والقوّة العموديّة المؤثرة في أحد ركاب العربة الأفعوانية عند أعلى الحلقة. ومجموع هاتين القوتين هو محصلة القوى والتي ينبغي أن تعادل القوة المركزية في الحركة الدائرية. إذا كانت محصلة القوى (القوة المركزية هنا) تعادل قوة الجاذبية، فستكون القوّة المتعامدة صفرًا ويشعر الراكب بانعدام وزنه. وتتضح هذه الحالة في الشكل 9.18B.

ابحث ذكرنا للتو أن محصلة القوة تساوي القوة المركزية وأن محصلة القوى هي مجموع القوة المتعامدة وقوة الجاذبية:

$$\vec{F}_c = \vec{F}_{net} = \vec{F}_g + \vec{N}.$$

للشعور بانعدام الوزن عند أعلى الحلقة، يلزم أن تكون $\vec{N} = 0$ ومن ثَمَّ

$$\vec{F}_c = \vec{F}_g \Rightarrow F_c = F_g. \qquad \text{(i)}$$

كما هو الحال دائما، لدينا $F_g = mg$. بالنسبة إلى مقدار القوة المركزية، نستخدم المعادلة 9.21:

$$F_c = ma_c = m\frac{v^2}{r}.$$

بسِّط بعد التعويض عن تعبيرات القوة المركزية وقوة الجاذبية في المعادلة (i)، نوجد السرعة الخطية عند أعلى الحلقة:

$$F_c = F_g \Rightarrow m\frac{v_{top}^2}{r} = mg \Rightarrow v_{top} = \sqrt{rg}.$$

احسب باستخدام $g = 9.81\ m/s^2$ وقيمة 5.00 m المعطاة لنصف القطر، نحصل على

$$v_{top} = \sqrt{(5.00\ m)(9.81\ m/s^2)} = 7.00357\ m/s.$$

قرِّب عند تقريب النتيجة التي توصلنا إليها إلى قيمة مضبوطة مكونة من ثلاثة أرقام، نحصل على

$$v_{top} = 7.00\ m/s.$$

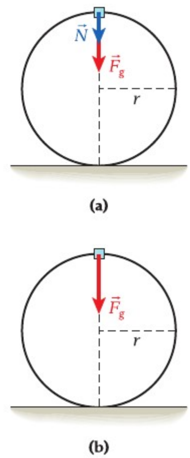
تحقّق ثانية من الواضح أن الإجابة تجتاز أبسط تحقق وهو أن الوحدات هي وحدات السرعة، متر في الثانية. تشير صيغة السرعة الخطية في الجزء العلوي، $v_{top} = \sqrt{rg}$، إلى أن نصف القطر الأكبر يتطلب سرعة أعلى. وهو ما يبدو معقولًا.

هل تُعد القيمة 7.00 m/s للسرعة في الجزء العلوي معقولة؟ عند تحويل هذه القيمة، نحصل على 15.7 mph التي تبدو سرعة بطيئة إلى حد ما للعبة عادة ما تكون سرعتها هائلة. لكن ضع في الاعتبار أن هذه السرعة هي الحد الأدنى للسرعة اللازمة في أعلى الحلقة، ولا يريد مشغلو الألعاب الاقتراب كثيرًا من هذه القيمة.

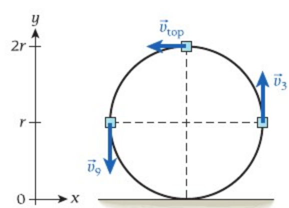
لننتقل إلى خطوة أبعد ونحسب متجهات السرعة عند موضعي الساعة 3 والساعة 9 على الحلقة، مع افتراض أن العربة الأفعوانية تتحرك حول الحلقة في عكس اتجاه عقارب الساعة. دائمًا ما تكون اتجاهات متجهات السرعة في الحركة الدائرية مماسية للدائرة، كما هو موضح في الشكل 9.19.

كيف نحصل على مقادير السرعات المتجهة v_3 (عند الساعة 3) وv_9 (عند الساعة 9)؟ أولًا، تتذكر من الوحدة 6 أن إجمالي الطاقة هو مجموع الطاقة الحركية وطاقة الوضع، $E = K+U$ وأن الطاقة الحركية تساوي $K = \frac{1}{2}mv^2$ وأن طاقة الوضع الجذبية تتناسب طرديًا مع الارتفاع فوق الأرض، $U = mgy$. في الشكل 9.17، يوضع النظام الإحداثي بحيث يكون صفر المحور y في الجزء السفلي من الحلقة. يمكننا بعد ذلك كتابة

الشكل 9.17 عربة أفعوانية حديثة ذات حلقة رأسية.



الشكل 9.18 (a) مخطط الجسم الحر لراكب في أعلى الحلقة الرأسية لعربة أفعوانية. (b) شرط للشعور بانعدام الوزن.



الشكل 9.19 اتجاهات متجهات السرعة عند عدة نقاط على طول حلقة العربة الأفعوانية الرأسية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

معادلة حفظ الطاقة الميكانيكية، مع افتراض أنه لا توجد قوى مؤثرة غير محافظة:

$$E = K_3 + U_3 = K_{top} + U_{top} = K_9 + U_9 \Rightarrow$$

$$\tfrac{1}{2}mv_3^2 + mgy_3 = \tfrac{1}{2}mv_{top}^2 + mgy_{top} = \tfrac{1}{2}mv_9^2 + mgy_9. \quad \text{(ii)}$$

نلاحظ من الشكل أن الإحداثيات y وطاقات الوضع متماثلة عند موضعَي الساعة 3 والساعة 9. ومن ثَمَّ تكون الطاقات الحركية عند كلتا النقطتين متشابهة. وبناءً على ذلك، تكون القيم المطلقة للسرعات عند كلتا النقطتين واحدة: $v_9 = v_3$. عند حل المعادلة (ii) للحصول على v_3، نحصل على

$$\tfrac{1}{2}mv_3^2 + mgy_3 = \tfrac{1}{2}mv_{top}^2 + mgy_{top} \Rightarrow$$

$$\tfrac{1}{2}v_3^2 + gy_3 = \tfrac{1}{2}v_{top}^2 + gy_{top} \Rightarrow$$

$$v_3 = \sqrt{v_{top}^2 + 2g(y_{top} - y_3)}.$$

مرة أخرى، يتم إهمال الكتلة. إضافة إلى ذلك، لا يدخل إلا الفرق في إحداثيات y في صيغة v_3 هذه؛ ومن ثَمَّ يصبح اختيار نقطة أصل النظام الإحداثي غير مناسب. يكون الفرق في إحداثيات y بين النقطتين هو $y_{top} - y_3 = r$. عند التعويض بالقيمة المعطاة $r = 5.00$ m والنتيجة $v_{top} = 7.00$ m/s التي توصلنا إليها سابقًا، نلاحظ أن السرعة عند موضعَي الساعة 3 والساعة 9 في الحلقة تساوي

$$v_3 = \sqrt{(7.00 \text{ m/s})^2 + 2(9.81 \text{ m/s}^2)(5.00 \text{ m})} = 12.1 \text{ m/s}.$$

كما تلاحظ من هذه المناقشة، فإن أي قوة يمكن أن تقوم بدور القوة المركزية من الناحية العملية. قامت قوة الاحتكاك السكوني بهذا الدور للقطع الموجودة على الطاولة الدوارة وقامت المركبة الأفقية للشد في الحبل بهذا الدور للبندول المخروطي. لكن يمكن أن تكون هذه القوة هي قوة الجاذبية التي تدفع الكواكب إلى المدارات الدائرية (تقريبًا) حول الشمس (انظر الوحدة 12) أو قوة كولوم التي تؤثر في الإلكترونات داخل الذرات (انظر الوحدة 21) أو القوة المتعامدة المبذولة من جدار ما (انظر المسألة المحلولة التالية).

مسألة محلولة 9.2 لعبة الملاهي

المسألة

تمثل الأسطوانة الدوارة إحدى الألعاب الموجودة في الملاهي. ويدخل الركاب الأسطوانة الرأسية ويقفون مع توجيه ظهورهم نحو الجدار المنحني. تدور الأسطوانة بسرعة عالية وعند سرعة زاوية معينة، يتم سحب الأرضية. وعندها يصبح الراكبون معلقين على الجدار كالحشرات. فإذا كان نصف قطر الأسطوانة $r = 2.10$ m، وظل محور دوران الأسطوانة رأسيًا ومعامل الاحتكاك السكوني بين الأشخاص والجدار $\mu_s = 0.390$، فما الحد الأدنى للسرعة الزاوية، ω، التي يمكن سحب الأرضية عندها؟

الحل

فكّر عندما تهبط الأرضية، يجب أن يكون مقدار قوة الاحتكاك السكوني بين الراكب وجدار الأسطوانة الدوّارة مساويًا لمقدار قوة الجاذبية التي تؤثر في الراكب. يتوقف الاحتكاك السكوني بين الراكب والجدار على القوة المتعامدة المبذولة على الراكب ومعامل الاحتكاك السكوني. كلما زادت سرعة دوران الأسطوانة، زادت القوة المتعامدة (التي تقوم بدور القوة المركزية) المبذولة على الراكب. عند سرعة زاوية معينة، سيصبح الحد الأقصى لمقدار قوة الاحتكاك السكوني مساويًا لمقدار قوة الجاذبية. وتكون هذه السرعة الزاوية هي الحد الأدنى للسرعة الزاوية التي يمكن سحب الأرضية عندها.

ارسم يوضح الشكل 9.18a منظرًا علويًا للأسطوانة الدوارة. ويوضح الشكل 9.18b مخطط الجسم الحر لأحد الركاب، حيث يُفترَض أن محور الدوران هو المحور y. في هذا الرسم، تمثل $\vec{f}$ قوة الاحتكاك السكوني و$\vec{N}$ القوة المتعامدة المبذولة على الراكب ذي الكتلة m عن طريق جدار الأسطوانة وتمثل $\vec{F}_g$ قوة الجاذبية المؤثرة في الراكب.

– يُتبع

مراجعة المفاهيم 9.5

عندما تكون في حلقة رأسية في عربة أفعوانية عالية السرعة، ما الذي يبقيك في مقعدك؟

a) القوة الطاردة المركزية

b) القوة المتعامدة المتولدة من المسار

c) قوة الجاذبية

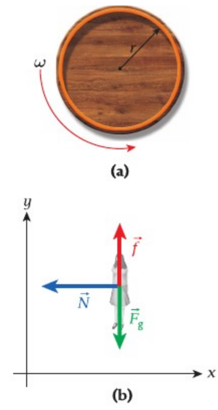
d) قوة الاحتكاك

e) القوة التي يبذلها حزام الأمان

سؤال الاختبار الذاتي 9.6

ما السرعة المطلوب توفرها في أعلى حلقة العربة الأفعوانية المذكورة في المسألة المحلولة 9.1 لتحقيق الشعور نفسه بانعدام الوزن إذا تضاعف نصف قطر الحلقة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



الشكل 9.20 (a) منظر علوي للأسطوانة الدوارة لإحدى ألعاب الملاهي. (b) مخطط الجسم الحر لأحد الركاب.

ابحث عند الحد الأدنى للسرعة الزاوية المطلوبة لمنع سقوط الراكب، يكون مقدار قوة الاحتكاك السكوني بين الراكب والجدار مساويًا لمقدار قوة الجاذبية التي تؤثر في الراكب. لتحليل هذه القوى، نبدأ بمخطط الجسم الحر الموضح في الشكل 9.20b. في مخطط الجسم الحر، يكون اتجاه x على امتداد نصف قطر الأسطوانة ويكون اتجاه y رأسيًا. في الاتجاه x، تُوفر القوة المتعامدة التي يبذلها الجدار على الراكب القوة المركزية التي تجعل الراكب يتحرك في دائرة:

$$F_c = N \qquad \text{(i)}$$

في الاتجاه y، لا يلتصق الراكب بالجدار إلا إذا كانت قوة الاحتكاك السكوني المتجهة إلى أعلى بين الراكب والجدار موازنة لقوة الجاذبية المتجهة إلى أسفل. تكون قوة الجاذبية المؤثرة في الراكب هي وزنه. لذا يمكننا أن نكتب

$$f = F_g = mg. \qquad \text{(ii)}$$

نعرف أنه يتم تحديد القوة المركزية من العلاقة

$$F_c = mr\omega^2, \qquad \text{(iii)}$$

ويتم تحديد قوة الاحتكاك السكوني من العلاقة

$$f \le f_{max} = \mu_s N \qquad \text{(iv)}$$

بسّط يمكننا دمج المعادلتين (II) و(IV) للحصول على

$$mg \le \mu_s N. \qquad \text{(v)}$$

عند التعويض عن F_c من المعادلة (i) في المعادلة (iii)، نجد أن

$$N = mr\omega^2. \qquad \text{(vi)}$$

عند دمج المعادلتين (v) و(vi)، نحصل على

$$mg \le \mu_s mr\omega^2$$

التي يمكننا حلها لإيجاد قيمة ω لها:

$$\omega \ge \sqrt{\frac{g}{\mu_s r}}.$$

إذًا، يتم تحديد الحد الأدنى لقيمة السرعة الزاوية من العلاقة

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{\mu_s r}}.$$

لاحظ أنه تم إهمال كتلة الراكب، وهذا أمر مهم لأن الأشخاص ذوي الكتل المختلفة يريدون الركوب في الوقت نفسه!

احسب عند التعويض بالقيم العددية، نجد أن

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{\mu_s r}} = \sqrt{\frac{9.81 \text{ m/s}^2}{(0.390)(2.10 \text{ m})}} = 3.46093 \text{ rad/s}.$$

قرّب عند تقريب النتيجة التي توصلنا إليها إلى الأرقام المعنوية الثلاث التي تضمنتها الأعداد المذكورة في المسألة، نحصل على

$$\omega_{min} = 3.46 \text{ rad/s}.$$

تحقّق ثانية للتحقق ثانية، دعنا نعبر عن نتيجة السرعة الزاوية بوحدة الدورة في الدقيقة (RPM):

$$3.46 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \left(3.46 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)\left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}\right)\left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}\right) = 33 \text{ rpm}.$$

تبدو السرعة الزاوية التي مقدارها 33 rpm للأسطوانة الدوّارة معقولة لأن هذا يعني أنها تكمل دورة واحدة كاملة تقريبًا كل 2 s. وإذا كنت قد ركبتَ أيًا من هذه الألعاب أو شاهدتها من قبل، فستعرف أن الإجابة ضمن النطاق المعقول.

لاحظ أن معامل الاحتكاك، μ_s، بين ملابس الراكب والجدار ليس متطابقًا في جميع الحالات. تشير الصيغة $\omega_{min} = \sqrt{g/(\mu_s r)}$ إلى أن معامل الاحتكاك الصغير يتطلب سرعة زاوية أكبر. لذا يتعين على مصممي هذا النوع من الألعاب التأكد من أنهم يسمحون بحدوث أصغر معامل احتكاك يمكن توقعه. ومن الواضح أنهم يحتاجون إلى وجود سطح تلامس لزج إلى حد ما على جدار اللعبة للتأكد من ذلك!

النقطة الأخيرة التي سيتم التحقق منها: تشير $\omega_{min} = \sqrt{g/(\mu_s r)}$ إلى أن الحد الأدنى للسرعة الزاوية المطلوب سيقل بوصفه دالة لنصف قطر الأسطوانة. أثبت مثال القطع الموجودة على الطاولة الدوّارة المذكور سابقًا في هذا القسم أن القوة المركزية تزداد مع مسافة نصف القطر وهو ما يتوافق مع هذه النتيجة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

هل توجد قوة طاردة مركزية؟

يُعد هذا وقتًا مناسبًا لتوضيح نقطة مهمة تتعلق باتجاه القوة المسؤولة عن الحركة الدائرية. كثيرًا ما نسمع الأشخاص وهم يتحدثون عن عجلة الطرد المركزي (أو "الابتعاد عن المركز" إلى خارج نصف القطر) أو القوة الطاردة المركزية (الكتلة في العجلة). وقد تشعر وكأنك تُسحب إلى الخارج عند ركوب إحدى الألعاب الدوّارة في مدينة الملاهي مثل اللعبة المذكورة في المسألة المحلولة 9.2. يرجع هذا الشعور إلى قصور جسمك الذي يقاوم العجلة المركزية تجاه المركز. لذا تشعر بقوة غير حقيقية تتجه نحو الخارج، وهي القوة الطاردة المركزية. ضع في اعتبارك أن هذا الشعور يعود إلى تحرك جسمك في مناط إسناد متسارع؛ ولا توجد قوة طاردة مركزية. لكن القوة الحقيقية التي تؤثر في جسمك وتدفعه إلى الحركة في مسار دائري هي القوة المركزية وتتجه نحو الداخل. وعلى الرغم من ذلك، يكون التأثير في الإطار الدوّار هو التأثير نفسه لقوة متجهة للخارج. ولهذا السبب يمكن لجهاز الطرد المركزي التابع لوكالة ناسا الموضح في الشكل 9.1 محاكاة ما يصل إلى $20\,g$ من عجلة الجاذبية لرواد الفضاء والمعدات. ويكون تأثير القوة المتجهة نحو الخارج التي يشعر بها الملاحِظ داخل جهاز الطرد المركزي حقيقيًا، لكنه يحدث بسبب تعرض هذا الملاحظ لعجلة مستمرة في الاتجاه الداخلي. سنستكمل هذه المناقشة في الوحدة 13 التي تتناول النسبية.

لقد تعرضتَ أيضًا لتأثير مماثل في الحركة في خط مستقيم. عندما تجلس في سيارتك بدون حركة ثم تضغط على دواسة الوقود، تشعر كأنك ترتد إلى الخلف في مقعدك. يأتي شعور القوة التي تدفعك إلى الخلف من قصور جسمك الذي يتحرك بعجلة إلى الأمام بفعل السيارة. وهذان الشعوران بالقوى المؤثرة في جسمك – القوة "الطاردة المركزية" وقوة "الدفع" في المقعد – نتيجة تعرض جسمك لعجلة ما في الاتجاه العكسي مع وجود مقاومة ضد هذه العجلة تُعرف بالقصور.

مراجعة المفاهيم 9.6

في أعلى الحلقة الرأسية للعربة الأفعوانية، ما الشرط الذي يجب تحقيقه كي تبقى العربة على المسار؟

a) يجب أن تكون القوة الطاردة المركزية المؤثرة في العربة مساوية للقوة المركزية.

b) يجب أن تكون القوة المتعامدة التي يبذلها المسار على العربة مساوية لقوة الجاذبية.

c) يجب أن تكون القوة المتعامدة التي يبذلها المسار على العربة في الاتجاه المقابل لقوة الجاذبية.

d) يجب أن تكون القوة المركزية المطلوبة للحفاظ على حركة العربة في دائرة مساوية لقوة الجاذبية أو أكبر منها.

e) يجب أن تكون القوة المتعامدة التي يبذلها المسار على العربة صفرًا.

9.6 الحركة الدائرية والخطية

يلخص الجدول 9.1 العلاقات بين الكميات الخطية والزاوية للحركة الدائرية. تربط العلاقات الموضحة في الجدول الكميات الزاوية (θ و ω و α) بالكميات الخطية (s و v و a). يكون نصف قطر r المسار الدائري ثابتًا ويربط بين مجموعتَي الكميات. (في الوحدة 10، ستتم إضافة نظائر الكتلة والطاقة الحركية وكمية الحركة والقوة المتعلقة بالدوران إلى هذه القائمة).

كما لاحظنا للتو، يوجد توافق صوري بين الحركة في خط مستقيم بسرعة متجهة ثابتة والحركة الدائرية بسرعة زاوية ثابتة. لكن هناك فرق واحد كبير. كما لاحظنا في القسم 3.6 الذي يتناول الحركة النسبية، لا يمكنك دائمًا التمييز بين الحركة بسرعة متجهة ثابتة في خط مستقيم وكونك في وضع سكون. وهذا لأنه يمكن وضع نقطة أصل النظام الإحداثي عند أي نقطة – حتى إذا كانت نقطة تتحرك بسرعة متجهة ثابتة. ولا تتغير فيزياء الحركة الانتقالية في تحويل جاليليو هذا. وعلى العكس، في الحركة الدائرية، تتحرك دائمًا في مسار دائري حول مركز محدد جيدًا. يُعد التعرض لقوة "طاردة مركزية" علامة مؤكدة على الحركة الدائرية ويكون مقدار هذه القوة مقياسًا لمقدار السرعة الزاوية. قد تذكر أنك في حركة دائرية ثابتة حول مركز الأرض وحول مركز النظام الشمسي وحول مركز مجرة درب التبانة لكنك لا تشعر بتأثيرات هذه الحركات الدائرية. وهذا صحيح، لكن مقادير السرعات الزاوية الصغيرة جدًا التي تشارك في هذه الحركات جعلت تأثيراتها الملموسة لا تكاد تُذكر.

الجدول 9.1 مقارنة بين المتغيرات الكينماتيكية للحركة الدائرية

الكمية	خطية	زاوية	العلاقة
الإزاحة	s	θ	$s = r\theta$
السرعة المتجهة	v	ω	$v = r\omega$
العجلة	a	α	$a_t = r\alpha$
			$a_c = r\omega^2$
			$\vec{a} = r\alpha\hat{t} - r\omega^2\hat{r}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

العجلة الزاوية الثابتة

ناقشت الوحدة 2 باستفاضة الحالة الخاصة للعجلة الثابتة. في ظل هذا الافتراض، قمنا باشتقاق خمس معادلات ثبتت فائدتها في حل جميع أنواع المسائل. ولسهولة الرجوع إليها، فيما يلي تلك المعادلات الخمس للحركة الخطية بعجلة ثابتة:

$$\text{(i)}\quad x = x_0 + v_{x0}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

$$\text{(ii)}\quad x = x_0 + \bar{v}_x t$$

$$\text{(iii)}\quad v_x = v_{x0} + a_x t$$

$$\text{(iv)}\quad \bar{v}_x = \tfrac{1}{2}(v_x + v_{x0})$$

$$\text{(v)}\quad v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0).$$

سنتخذ الآن الخطوات نفسها كما في الوحدة 2 لاشتقاق المعادلات المكافئة للعجلة الزاوية الثابتة. نبدأ بالمعادلة 9.14 ثم نحسب التكامل، باستخدام الرمز العادي $\omega_0 \equiv \omega(t_0)$:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow$$

$$\int_{t_0}^{t} \alpha(t')\,dt' = \int_{t_0}^{t} \frac{d\omega(t')}{dt'}\,dt' = \omega(t) - \omega(t_0) \Rightarrow$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t')\,dt'.$$

تمثل هذه العلاقة معكوس المعادلة 9.14 وتنطبق هذه العلاقة بوجه عام. إذا افترضنا أن العجلة الزاوية، α، ثابتة مع الزمن، فسيمكننا حساب التكامل والحصول على

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha\int_0^t dt' = \omega_0 + \alpha t. \tag{9.24}$$

للتيسير، قمنا بتعيين $t_0 = 0$ كما فعلنا في الوحدة 2 في هذه المرحلة. ثم نستخدم المعادلة 9.8 التي تعبر عن السرعة الزاوية كمشتقة للزاوية بالنسبة إلى الزمن مع الرمز $\theta_0 = \theta(t = 0)$:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t) = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega(t')\,dt' = \theta_0 + \int_0^t (\omega_0 + \alpha t')\,dt' \Rightarrow$$

$$= \theta_0 + \omega_0\int_0^t dt' + \alpha\int_0^t t'\,dt' \Rightarrow$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2. \tag{9.25}$$

عند مقارنة المعادلتين 9.24 و9.25 بالمعادلتين (iii) و(i) للحركة الخطية يتضح أن هاتين المعادلتين هما المكافئات الخاصة بالحركة الدائرية لمعادلات الكينماتيكا للحركة الخطية في بُعد واحد في خط مستقيم. ومن خلال التعويضات المباشرة $x \to \theta$ و$v_x \to \omega$ و$a_x \to \alpha$، يمكننا كتابة معادلات الكينماتيكا الخمس للحركة الدائرية بعجلة زاوية ثابتة:

$$\text{(i)}\quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\text{(ii)}\quad \theta = \theta_0 + \bar{\omega} t$$

$$\text{(iii)}\quad \omega = \omega_0 + \alpha t \tag{9.26}$$

$$\text{(iv)}\quad \bar{\omega} = \tfrac{1}{2}(\omega + \omega_0)$$

$$\text{(v)}\quad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0).$$

سؤال الاختبار الذاتي 9.7

تم اشتقاق معادلتين من بين معادلات الكينماتيكا الخمس الخاصة بالحركة الدائرية. هل يمكنك اشتقاق المعادلات المتبقية؟ (*تلميح:* تمتد سلسلة الاستنتاج على المنوال نفسه مثل الاشتقاق 2.1 في الوحدة 2).

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 9.7 رمي المطرقة

يُعد رمي المطرقة أحد الأحداث الأكثر إثارة في سباقات ألعاب القوى. ويتمثل النشاط في رمي "المطرقة"، وهي كرة من الحديد قطرها 12 cm متصلة بمقبض بواسطة سلك من الصلب، إلى أقصى مسافة. يبلغ إجمالي طول المطرقة 121.5 cm وإجمالي كتلها 7.26 kg. يتعين على اللاعب رمي المطرقة من دائرة نصف قطرها (2.13 m (7 ft وتتمثل أفضل طريقة لرمي المطرقة في دوران اللاعب حول نفسه، الأمر الذي يسمح للمطرقة بالحركة في دائرة حول اللاعب قبل أن يقوم بتحريرها. في دورة الألعاب الأولیمبية عام 1988 في سيول، فاز الرامي الروسي سيرجي ليتفينوف بالميدالية الذهبية حيث سجل مسافة قياسية قدرها 84.80 m. دار اللاعب سبع دورات حول نفسه قبل تحرير المطرقة وتمت معرفة الفترة المستغرقة لإكمال كل دورة من خلال فحص تسجيل الفيديو لقطة بعد لقطة: 1.52 s و 1.08 s و 0.72 s و 0.56 s و 0.44 s و 0.40 s و 0.36 s.

المسألة 1

ما متوسط العجلة الزاوية أثناء الدورات السبع؟ افترض عجلة زاوية ثابتة معينة لإيجاد الحل ثم تحقق من وجود ما يبرر هذا الافتراض.

الحل 1

لإيجاد متوسط العجلة الزاوية، نجمع جميع الفترات الزمنية للدورات السبع للحصول على إجمالي الزمن:

$$t_{\text{all}} = 1.52 \text{ s} + 1.08 \text{ s} + 0.72 \text{ s} + 0.56 \text{ s} + 0.44 \text{ s} + 0.40 \text{ s} + 0.36 \text{ s} = 5.08 \text{ s}.$$

أثناء هذا الوقت، أكمل ليتفينوف سبع دورات كاملة، الأمر الذي نتج عنه زاوية قيمتها الكلية

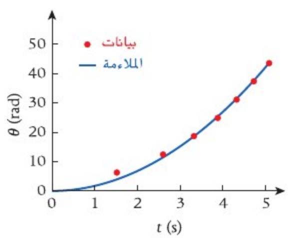
$$\theta_{\text{all}} = 7(2\pi \text{ rad}) = 14\pi \text{ rad}.$$

نظرًا لأننا نفترض أن العجلة ثابتة، يمكننا بسهولة إيجاد قيمة العجلة الزاوية والتعويض بالأعداد المعطاة للوصول إلى الإجابة:

$$\theta = \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow \alpha = \frac{2\theta_{\text{all}}}{t^2} = 2\frac{14\pi \text{ rad}}{(5.08 \text{ s})^2} = 3.41 \text{ rad/s}^2.$$

مناقشة

بما أننا نعرف المدة المستغرقة لإكمال كل دورة، يمكننا رسم تمثيل بياني لزاوية المطرقة في المستوى الأفقي كدالة للزمن. يوضح الشكل 9.19 هذا التمثيل البياني، حيث تمثل النقاط الحمراء نقاط البيانات. يفترض الخط الأزرق المطابق لنقاط البيانات في الشكل 9.19 عجلة زاوية ثابتة $\alpha = 3.41 \text{ rad/s}^2$. كما تلاحظ، فإن افتراض العجلة الزاوية الثابتة له ما يبرره بدرجة كبيرة لكن ليس تمامًا.



الشكل 9.19 تمثيل الزاوية كدالة زمن لرمية المطرقة التي جعلت سيرجي ليتفينوف يفوز بالميدالية الذهبية عام 1988.

المسألة 2

إذا افترضنا أن نصف قطر الدائرة التي تتحرك فيها المطرقة 1.67 m (طول المطرقة بالإضافة إلى ذراعَي اللاعب)، فما السرعة الخطية التي يتم تحرير المطرقة بها؟

الحل 2

مع وجود عجلة زاوية ثابتة بعد السكون لمدة 5.08 s، فإن السرعة الزاوية النهائية تساوي

$$\omega = \alpha t = (3.41 \text{ rad/s}^2)(5.08 \text{ s}) = 17.3 \text{ rad/s}.$$

باستخدام العلاقة بين السرعة الخطية والسرعة الزاوية، نحصل على السرعة الخطية عند تحرير المطرقة:

$$v = r\omega = (1.67 \text{ m})(17.3 \text{ rad/s}) = 28.9 \text{ m/s}.$$

المسألة 3

ما القوة المركزية التي يتعين على رامي المطرقة بذلها على المطرقة قبل تحريرها مباشرة؟

الحل 3

يتم تحديد العجلة المركزية قبل تحرير المطرقة مباشرة من خلال العلاقة

$$a_c = \omega^2 r = (17.3 \text{ rad/s})^2 (1.67 \text{ m}) = 501. \text{ m/s}^2.$$

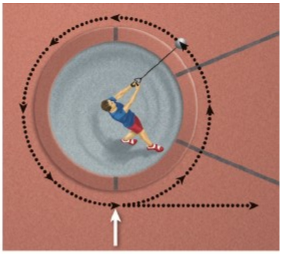
إذا كانت كتلة المطرقة 7.26 kg، فستكون القوة المركزية المطلوبة

$$F_c = ma_c = (7.26 \text{ kg})(501. \text{ m/s}^2) = 3640 \text{ N}.$$

وهذه قوة كبيرة جدًا تعادل وزن جسم كتلته 371 kg! ولهذا السبب يجب أن يكون اللاعبون العالميون لرمي المطرقة أقوياء جدًا.

– يُتبع

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



الشكل 9.20 منظر علوي لمسار المطرقة (نقاط سوداء تتخللها أسهم تشير إلى اتجاه متجه السرعة) خلال الوقت الذي يمسك فيه اللاعب بالمطرقة (المسار الدائري) وبعد تحريره لها (الخط المستقيم). يشير السهم الأبيض إلى نقطة التحرير.

المسألة 4
بعد تحرير المطرقة، ما الاتجاه الذي تتحرك فيه؟

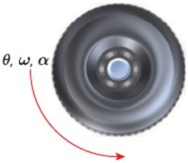
الحل 4
من المفاهيم الخاطئة الشائعة أن المطرقة "تلف حلزونيًا" في حركة دائرية نوعًا ما مع تزايد نصف قطرها باستمرار بعد تحريرها. وهذه فكرة خاطئة لأنه لا توجد مركبة أفقية للقوة بمجرد تحرير اللاعب للمطرقة. يخبرنا القانون الثاني لنيوتن أنه ليست هناك مركبة أفقية للعجلة ومن ثَمَّ لا توجد عجلة مركزية. لكن تتحرك المطرقة في اتجاه مماسي للدائرة عند نقطة تحريرها. وإذا نظرت على الملعب من منطاد، فستلاحظ أن المطرقة تتحرك في خط مستقيم، كما هو موضح في الشكل 9.20. وعند النظر من الجانب، يكون شكل مسار المطرقة على هيئة قطع مكافئ، كما هو موضح في الوحدة 3.

مسألة محلولة 9.3 الحدافة

المسألة
تبدأ حدافة المحرك البخاري في الدوران من السكون بعجلة زاوية ثابتة مقدارها $\alpha = 1.43\ \text{rad/s}^2$. لمدة $t = 25.9\ \text{s}$، ثم تستكمل الدوران بسرعة زاوية ثابتة، ω. بعد دوران الحدافة لمدة 59.5 s، ما القيمة الكلية للزاوية التي دارتها الحدافة منذ بدء دورانها؟

الحل
فكّر نحاول هنا تحديد إجمالي الإزاحة الزاويّة، θ، بالنسبة إلى الفترة الزمنية للعجلة الزاوية للحدافة، يمكننا استخدام المعادلة 9.26(i) مع $\theta_0 = 0$ و$\omega_0 = 0$. عندما تدور الحدافة بسرعة زاوية ثابتة، نستخدم المعادلة 9.26(i) مع $\theta_0 = 0$ و$\alpha = 0$. للحصول على إجمالي الإزاحة الزاوية، نجمع هاتين الإزاحتين الزاويتين.

ارسم يوضح الشكل 9.21 منظرًا علويًا للحدافة وهي تدور.



الشكل 9.21 منظر علوي للحدافة الدوّارة.

ابحث لنفترض أن زمن العجلة الزاوية للزاوية هو t_a وإجمالي زمن دوران الحدافة هو t_b. إذًا تدور الحدافة بسرعة زاوية ثابتة لمدة زمنية تساوي $t_b - t_a$. يتم تحديد الإزاحة الزاوية، θ_a، التي تحدث أثناء تحرك الحدافة بعجلة زاوية من خلال

$$\theta_a = \tfrac{1}{2}\alpha t_a^2. \quad \text{(i)}$$

يتم تحديد الإزاحة الزاوية، θ_b، التي تحدث أثناء دوران الحدافة بعجلة زاوية ثابتة، ω، من خلال

$$\theta_b = \omega(t_b - t_a). \quad \text{(ii)}$$

يتم تحديد السرعة الزاوية، ω، التي تصل إليها الحدافة بعد تحركها بعجلة زاوية α لمدة t_a من خلال

$$\omega = \alpha t_a. \quad \text{(iii)}$$

يتم تحديد إجمالي الإزاحة الزاوية من خلال

$$\theta_{\text{total}} = \theta_a + \theta_b. \quad \text{(iv)}$$

بسّط يمكننا أن نجمع المعادلتين (ii) و (iii) للحصول على الإزاحة الزاوية أثناء دوران الحدافة بسرعة زاوية ثابتة:

$$\theta_b = (\alpha t_a)(t_b - t_a) = \alpha t_a t_b - \alpha t_a^2. \quad \text{(v)}$$

يمكننا جمع المعادلات (v) و(iv) و(i) للحصول على إجمالي الإزاحة الزاوية للحدافة:

$$\theta_{\text{total}} = \theta_a + \theta_b = \tfrac{1}{2}\alpha t_a^2 + \left(\alpha t_a t_b - \alpha t_a^2\right) = \alpha t_a t_b - \tfrac{1}{2}\alpha t_a^2.$$

احسب عند التعويض بالقيم العددية، نحصل على

$$\theta_{\text{total}} = \alpha t_a t_b - \tfrac{1}{2}\alpha t_a^2 = \left(1.43\ \text{rad/s}^2\right)(25.9\ \text{s})(59.5\ \text{s}) - \tfrac{1}{2}\left(1.43\ \text{rad/s}^2\right)(25.9\ \text{s})^2$$
$$= 1724.07\ \text{rad}.$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

قرِّب عند تقريب النتيجة التي توصلنا إليها إلى ثلاثة أرقام معنوية، نحصل على

$$\theta_{\text{total}} = 1720 \text{ rad.}$$

تحقّق ثانية من المشجّع أن الإجابة بالوحدة الصحيحة وهي rad. تعطي الصيغة. $\theta_{\text{total}} = \alpha t_a t_b - \frac{1}{2}\alpha t_a^2 = \alpha t_a (t_b - \frac{1}{2} t_a)$. قيمة تزداد بشكل خطي مع قيمة العجلة الزاوية. وهي دائمًا أكبر من الصفر، كما هو متوقع، لأن $t_b > t_a$.

لإجراء مزيد من التحقق، نحسب الإزاحة الزاوية في خطوتين. تتمثل الخطوة الأولى في حساب الإزاحة الزاوية أثناء تسارع الحدافة

$$\theta_a = \tfrac{1}{2}\alpha t_a^2 = \tfrac{1}{2}\left(1.43 \text{ rad/s}^2\right)(25.9 \text{ s})^2 = 480 \text{ rad.}$$

تكون السرعة الزاوية للحدافة بعد انتهاء العجلة الزاوية

$$\omega = \alpha t_a = \left(1.43 \text{ rad/s}^2\right)(25.9 \text{ s}) = 37.0 \text{ rad/s.}$$

بعد ذلك نحسب الإزاحة الزاوية أثناء دوران الحدافة بسرعة متجهة ثابتة:

$$\theta_b = \omega(t_b - t_a) = (37.0 \text{ rad/s})(59.5 \text{ s} - 25.9 \text{ s}) = 1240 \text{ rad.}$$

إذًا يكون إجمالي الإزاحة الزاوية

$$\theta_{\text{total}} = \theta_a + \theta_b = 480 \text{ rad} + 1240 \text{ rad} = 1720 \text{ rad,}$$

وهذا يتوافق مع إجابتنا.

9.7 أمثلة أخرى على الحركة الدائرية

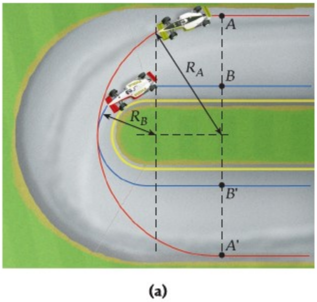
لنلق نظرة على مثال آخر ومسألة محلولة يوضحان مدى فائدة مفاهيم الحركة الدائرية التي ناقشناها للتو.

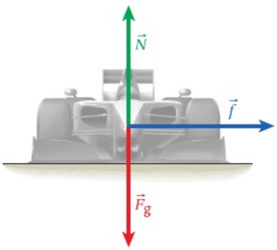
مثال 9.8 سباق فورمولا 1

إذا شاهدت أحد سباقات فورمولا 1، فستلاحظ أن سيارات السباق تقترب من المنحنيات من الخارج ثم تخترق إلى الداخل، ثم تنحرف مرة أخرى إلى الخارج، كما هو موضح من خلال المسار الأحمر في الشكل 9.22a. والمسار الأزرق أقصر. لكن لماذا لا يتبع السائقون أقصر مسار؟

المسألة

لنفترض أن السيارات تتحرك عبر المسار المنحني الموضح في الشكل 9.22a بسرعة ثابتة وأن معامل الاحتكاك السكوني بين الإطارات والطريق هو $\mu_s = 1.2$. (كما ذُكر في الوحدة 4، يمكن أن يكون لإطارات سيارات السباق الحديثة معامل احتكاك يتجاوز 1 عندما تُسخن هذه الإطارات إلى درجة حرارة السباق ومن ثَمَّ تصبح شديدة الالتصاق). إذا كان نصف قطر المنحنى الداخلي الموضَّح في الشكل هو $R_B = 10.3$ m ونصف قطر المنحنى الخارجي هو $R_A = 32.2$ m وكانت السيارات تسير بأقصى سرعة لها، فما الزمن الذي ستستغرقه السيارة للانتقال من النقطة A إلى A' ومن النقطة B إلى B'؟





الشكل 9.22 (a) مسارات سيارات السباق لاجتياز منعطف على مضمار بيضاوي بطريقتين. (b) مخطط الجسم الحر لسيارة سباق تسير في منحنى.

– يُتبع

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الحل

نبدأ برسم مخطط الجسم الحر، كما هو موضح في الشكل 9.22b. يوضح المخطط جميع القوى التي تؤثر في السيارة وتبدأ سهام القوى من مركز كتلة السيارة. قوة الجاذبية، التي تؤثر إلى أسفل بمقدار $F_g = mg$، موضحة باللون الأحمر. وهذه القوة موازنة تمامًا للقوة المتعامدة، التي يبذلها الطريق على السيارة، وموضحة باللون الأخضر. عند دوران السيارة، يلزم وجود قوة محصلة لتغيير متجه سرعة السيارة وللعمل كقوة مركزية تدفع السيارة إلى مسار دائري. تنشأ هذه القوة المحصلة من قوة الاحتكاك (الموضحة باللون الأزرق) بين إطارات السيارة والطريق. يتجه سهم هذه القوة أفقيًا نحو الداخل، في اتجاه مركز المنحنى. وكالعادة، يكون مقدار قوة الاحتكاك هو ناتج ضرب القوة المتعامدة في معامل الاحتكاك: $f_{max} = \mu_s mg$. (*ملاحظة:* في هذه الحالة، نستخدم علامة يساوي، لأن سائقي سيارات السباق يدفعون سياراتهم وإطاراتهم إلى أقصى حد، ومن ثَمَّ يصلون إلى أقصى قوة احتكاك سكوني ممكنة). يكون سهم قوة الاحتكاك أطول من سهم القوة المتعامدة بمعامل مقداره 1.2، وذلك لأن $\mu_s = 1.2$.

أولًا، نحتاج إلى حساب أقصى سرعة متجهة يمكن أن تصل إليها سيارة سباق على كل مسار. بالنسبة إلى كل نصف قطر للمنحنى، R، تتوفر القوة المركزية الناتجة، $F_c = mv^2/R$، من قوة الاحتكاك، $f_{max} = \mu_s mg$:

$$m\mu_s g = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\mu_s g R}.$$

إذًا بالنسبة إلى المنحنيين الأحمر والأزرق، نحصل على

$$v_{\text{red}} = \sqrt{\mu_s g R_A} = \sqrt{(1.2)(9.81 \text{ m/s}^2)(32.2 \text{ m})} = 19.5 \text{ m/s}$$

$$v_{\text{blue}} = \sqrt{\mu_s g R_B} = \sqrt{(1.2)(9.81 \text{ m/s}^2)(10.3 \text{ m})} = 11.0 \text{ m/s}.$$

تصل هذه السرعات إلى حوالي 43.6 mph و24.6 mph فقط، على التوالي! لكن المنحنى الموضَّح ضيق جدًا، وعادة ما تجده في سباق المدينة فقط.

على الرغم من أن السيارة تتحرك بسرعة أكبر بكثير على المنحنى الأحمر، فإن المنحنى الأزرق أقصر من الأحمر. بالنسبة إلى طول مسار المنحنى الأحمر، لدينا ببساطة المسافة على طول نصف الدائرة، $\ell_{red} = \pi R_A = 101.$ m. بالنسبة إلى طول مسار المنحنى الأزرق، يتعين علينا أن نجمع القطعتين المستقيمتين والمنحنى شبه الدائري ذا نصف القطر الأصغر:

$$\ell_{\text{blue}} = \pi R_B + 2(R_A - R_B) = 76.2 \text{ m}.$$

ثم نحصل على زمن الانتقال من A إلى A' على المسار الأحمر:

$$t_{\text{red}} = \frac{\ell_{\text{red}}}{v_{\text{red}}} = \frac{101. \text{ m}}{19.5 \text{ m/s}} = 5.20 \text{ s}.$$

يستغرق التحرك على طول المنحنى الأزرق من B إلى B'

$$t_{\text{blue}} = \frac{\ell_{\text{blue}}}{v_{\text{blue}}} = \frac{76.2 \text{ m}}{11.0 \text{ m/s}} = 6.92 \text{ s}.$$

عند افتراض أن السيارات يلزمها استخدام سرعة ثابتة، يتضح أن اختراق المنحنى يُعد ميزة كبيرة، كما هو موضَّح من خلال المسار الأحمر.

مناقشة

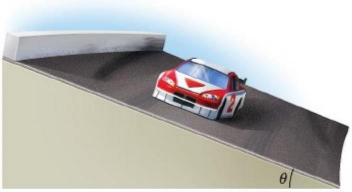
في حالة السباق، ليس من المعقول توقُّع أن تتحرك السيارة الموجودة على المسار الأزرق على طول أجزاء المسار المستقيمة بسرعة متجهة ثابتة. لكن سيصل السائق إلى النقطة B بأقصى سرعة تسمح له بالتباطؤ إلى 11.0 m/s عند دخول الجزء الدائري. إذا حللنا ذلك بالتفصيل، فسنجد أن المسار الأزرق لا يزال أبطأ قليلاً. بالإضافة إلى ذلك، يمكن للسيارة التي تتبع المسار الأزرق الوصول إلى النقطة B بسرعة أعلى قليلًا من السرعة التي يمكن للسيارة الحمراء الوصول بها إلى النقطة A. بعبارة أخرى، لدينا مفاضلة يجب مراعاتها قبل الإعلان عن السيارة الفائزة في هذه الحالة. في السباقات الحقيقية، تتباطأ السيارات عندما تقترب من منحنى ما ثم تزيد سرعتها عندما تخرج منه. لا يُعد مسار نصف الدائرة الأحمر هو المسار الأنسب لاختراق المنحنى، لكن المسار الأنسب هو المسار الذي يبدو أقرب إلى الشكل البيضاوي، ويبدأ من خارج المنحنى ثم يخترقه وصولًا إلى أقصى الداخل عند منتصف المنحنى، ثم ينحرف للخارج مرة أخرى مع التسارع أثناء الخروج من المنحنى.

يشتمل سباق فورمولا 1 بشكل عام على مضامير مستوية ومنحنيات ضيقة. تتم سباقات السيارات السريعة إندي وناسكار على مضامير أنصاف أقطار الانعطاف بها أكبر إلى جانب منحنيات مائلة. لدراسة القوى المشاركة في هذا النوع من السباق، يجب علينا الجمع بين مفاهيم الاتزان السكوني على مستوى مائل ومفاهيم الحركة الدائرية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مسألة محلولة 9.4 سباق ناسكار

عندما يسير متسابق مشارك في سباق ناسكار في منحنى مائل، يساعد هذا الميل السائق في تحقيق سرعات أعلى. لنر كيف يكون ذلك. يوضح الشكل 9.23 سباق سيارات على منحنى مائل.



الشكل 9.23 سيارة سباق على منحنى مائل.

المسألة

إذا كان معامل الاحتكاك السكوني بين سطح المضمار وإطارات السيارة هو $\mu_s = 0.620$ ونصف قطر المنحنى $R = 110.\ \text{m}$. فما أقصى سرعة يمكن للسائق التحرك بها على منحنى مائل بزاوية $\theta = 21.1°$؟ (هذه زاوية مائلة نموذجية إلى حد ما لمضامير ناسكار. لكن الميل في إنديانابوليس 9° فقط. لكن توجد بعض المضامير التي لها زوايا ميل تزيد عن 30°. ومنها دايتونا (31°) وتالاديجا (33°) وبرستل (36°)).

الحل

فكّر هناك ثلاث قوى تؤثر في سيارة السباق وهي الجاذبية $\vec{F}_g$ والقوة المتعامدة $\vec{N}$ والاحتكاك، $\vec{f}$ يميل المنحنى بزاوية θ. وهي أيضًا الزاوية بين القوة المتعامدة على سطح المضمار ومتجه قوة الجاذبية، كما هو موضّح في الشكل 9.24a. لرسم مُتَّجه قوة الاحتكاك، افترضنا أن السيارة دخلت المنحنى بسرعة عالية، لذا يكون اتجاه قوة الاحتكاك نحو أسفل الميل. على عكس حالة الاتزان السكوني، لا يكون مجموع هذه القوى الثلاث صفرًا. لكن مجموعها هو قوة محصّلة، $\vec{F}_{\text{net}}$ كما هو موضّح في الشكل 9.24b. يجب أن توفر القوة المحصّلة هذه القوة المركزية، $\vec{F}_c$ التي تدفع السيارة إلى السير في دائرة. ولذا يجب أن تؤثر القوة المحصّلة في الاتجاه الأفقي لأنه اتجاه مركز الدائرة التي تتحرك فيها السيارة.

ارسم يوضح الشكل 9.24c مخطط الجسم الحر لسيارة السباق على المنحنى المائل، والذي يوضّح مركبات القوى x وy. تم اختيار اتجاه النظام الإحداثي ليعطي محور x الأفقي ومحور y الرأسي.

ابحث كما هو الحال في المسائل التي تشتمل على حركة خطية، يمكننا حل المسائل التي تشتمل على حركة دائرية بالبدء بالقانون الثاني لنيوتن المعروف: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ وكما هو الحال في الحالة الخطية، يمكننا بشكل عام حل المسائل بالمركّبات الديكارتية. من مخطط الجسم الحر في الشكل 9.24c، يمكننا ملاحظة أن مركبات x للقوى المؤثرة في سيارة السباق هي

$$N \sin\theta + f\cos\theta = F_{\text{net}}. \qquad \text{(i)}$$

بالمثل، القوى المؤثرة في الاتجاه y هي

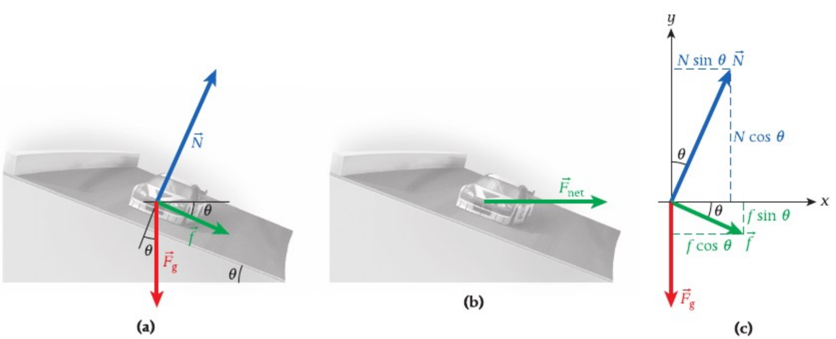
$$N\cos\theta - F_g - f\sin\theta = 0. \qquad \text{(ii)}$$

وكالمعتاد، يتم الحصول على أكبر قوة احتكاك من ناتج ضرب معامل الاحتكاك في القوة المتعامدة: $f = \mu_s N$. وقوة الجاذبية هي ناتج ضرب الكتلة في عجلة الجاذبية: $F_g = mg$.

يتمثل مفتاح حل هذه المسألة في إدراك أن القوة المحصّلة يجب أن تكون هي القوة التي تجعل سيارة السباق تسير في المنحنى، بمعنى أنها توفر القوة المركزية. إذًا، باستخدام تعبير القوة المركزية من المعادلة 9.21، نحصل على

$$F_{\text{net}} = F_c = m\frac{v^2}{R},$$

حيث R هي نصف قطر المنحنى.



الشكل 9.24 (a) القوى المؤثرة في سيارة سباق تتحرك على منحنى مائل على مضمار السباق. (b) القوة المحصلة، مجموع القوى الثلاث في الجزء (a). (c) مخطط الجسم الحر الذي يوضح المركبتين x وy للقوى المؤثرة في السيارة.

– يُتبع

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

بسّط نعوض بتعبيرات أقصى قوة احتكاك وقوة الجاذبية والقوة المحصلة في المعادلتين (i) و(ii) لمركبات القوى x وy:

$$N\sin\theta + \mu_s N\cos\theta = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow N(\sin\theta + \mu_s\cos\theta) = m\frac{v^2}{R}$$

$$N\cos\theta - mg - \mu_s N\sin\theta = 0 \Rightarrow N(\cos\theta - \mu_s\sin\theta) = mg.$$

هذا نظام مكوَّن من معادلتين لكميتين مجهولتين: مقدار القوة المتعامدة N وسرعة السيارة v. من السهل حذف N عن طريق قسمة المعادلة الأولى المذكورة أعلاه على المعادلة الثانية:

$$\frac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta} = \frac{v^2}{gR}.$$

ثم نوجد قيمة v:

$$v = \sqrt{\frac{Rg(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}}. \quad \text{(iii)}$$

لاحظ أنه تم إهمال كتلة السيارة، m. إذًا، المهم في هذه الحالة هو معامل الاحتكاك بين الإطارات وسطح المضمار ونصف قطر المنحنى وزاوية الميل.

احسب عند التعويض بالأعداد، نحصل على

$$v = \sqrt{\frac{(110.\text{ m})(9.81\text{ m/s}^2)[\sin 21.1° + 0.620(\cos 21.1°)]}{\cos 21.1° - 0.620(\sin 21.1°)}} = 37.7726\text{ m/s}.$$

قرّب عند تقريب النتيجة التي توصلنا إليها إلى ثلاثة أرقام معنوية، نحصل على

$$v = 37.8\text{ m/s}.$$

تحقّق ثانية للتحقق ثانية من النتيجة التي حصلنا عليها، نقارن سرعة منحنى مائل بأقصى سرعة يمكن أن تصل إليها سيارة سباق على منحنى له نصف القطر نفسه لكن دون ميل. بدون وجود ميل، تكون القوة الوحيدة التي تُبقي سيارة السباق في المسار الدائري هي قوة الاحتكاك. ثم نختصر النتيجة إلى المعادلة $v = \sqrt{\mu_s gR}$ التي توصلنا إليها في المثال 9.8. ويمكننا التعويض بالقيم العددية المعطاة هنا للحصول على أقصى سرعة حول منحنى مستوٍ له نصف القطر نفسه:

$$v = \sqrt{\mu_s gR} = \sqrt{(0.620)(9.81\text{ m/s}^2)(110.\text{ m})} = 25.9\text{ m/s}.$$

تُعد النتيجة التي توصلنا إليها لأقصى سرعة حول منحنى مائل، 37.8 m/s، أكبر بكثير من هذه النتيجة الخاصة بمنحنى مستوٍ، 25.9 m/s. وتبدو هذه النتيجة معقولة.

لاحظ أن متجه قوة الاحتكاك في الشكل 9.24 يكون على امتداد سطح المضمار نحو داخل المنحنى، مثلما يفعل متجه قوة الاحتكاك للمنحنى غير المائل في الشكل 9.22a. لكن يمكنك ملاحظة أنه عندما تزداد زاوية الميل، فإنها تصل إلى قيمة يقترب عندها مقام صيغة السرعة المتجهة، المعادلة (iii)، من الصفر. يحدث هذا عندما تكون $\cot\theta = \mu_s$. بالنسبة إلى القيمة المعطاة، $\mu_s = 0.620$، تساوي هذه الزاوية 58.2°. بالنسبة إلى الزوايا الأكبر، يحتاج السائق إلى الحفاظ على أدنى حد من السرعة أثناء القيادة على المنحنى لمنع السيارة من الانزلاق إلى أسفل الجزء المائل.

ما تعلمناه | دليل المذاكرة للاختبار

- يتم التحويل بين الإحداثيات الديكارتية، x وy، والإحداثيات القطبية، r وθ، من خلال العلاقة
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}(y/x).$$
- يتم التحويل بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية من خلال العلاقة
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta.$$
- بالنسبة إلى الحركة الدائرية، ترتبط الإزاحة الخطية، s، بالإزاحة الزاويّة، θ، من خلال العلاقة $s = r\theta$، حيث r هي نصف قطر المسار الدائري وتقاس θ بالراديان.
- يتم تحديد مقدار السرعة الزاويّة اللحظية، ω، من خلال العلاقة
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$
- يرتبط مقدار السرعة الزاويّة بمقدار السرعة الخطيّة، v، من خلال العلاقة $v = r\omega$.
- يتم تحديد مقدار العجلة الزاويّة اللحظية، α، من خلال العلاقة
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$
- يرتبط مقدار العجلة الزاويّة بمقدار العجلة المماسّية، a_t، من خلال العلاقة $a_t = r\alpha$.

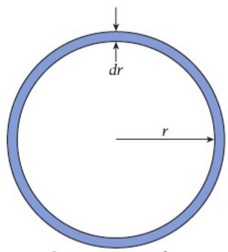
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

- يتم تحديد مقدار العجلة المركزية، a_c، اللازمة للحفاظ على حركة جسم ما في دائرة بسرعة زاويّة ثابتة من خلال العلاقة
$$a_c = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$
- مقدار العجلة الكليّة لجسم ما في حالة حركة دائرية هو
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$
- معادلات الكينماتيكا للحركة الدائرية هي
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$
$$\theta = \theta_0 + \bar{\omega} t$$
$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$
$$\bar{\omega} = \tfrac{1}{2}(\omega + \omega_0)$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0).$$

إجابات أسئلة الاختبار الذاتي

9.1 الطول التفاضلي للقوس هو $Rd\theta$ لدائرة نصف قطرها R، وتكامل لطول القوس حول الدائرة هو المحيط C:
$$C = \int_0^{2\pi} r\,d\theta = r\int_0^{2\pi} d\theta = r[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi r.$$

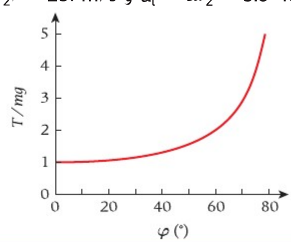
9.2 المساحة التفاضلية موضحة في الرسم. المساحة التفاضلية هي $2\pi r dr = dA$. مساحة الدائرة تساوي
$$\int_0^R 2\pi r\,dr = 2\pi\int_0^R r\,dr$$
$$= 2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \pi R^2.$$



9.3 $\omega^2 r = (2\pi/\text{yr})^2\ (1\ \text{au}) = 5.9\cdot 10^{-3}\ \text{m/s}^2 \approx g/1700$.

9.4 عندما يكون $r_1 = 25\ \text{mm}$، يكون مقدار العجلة المماسيّة $a_t = \alpha r_1 = 1.6\cdot 10^{-4}\ \text{m/s}^2$، ومقدار العجلة المركزية $a_c = v\omega(r_1) = 59.\ \text{m/s}^2$، أي أنه أكبر بما يزيد عن أربع قيم أُسيّة. عندما يكون $r_2 = 58\ \text{mm}$، تكون قيم العجلات $a_c = v\omega(r_2) = 25.\ \text{m/s}^2$ و $a_t = \alpha r_2 = 3.6\cdot 10^{-4}\ \text{m/s}^2$.

9.5



9.6 إذا تضاعف نصف القطر، فيتعين زيادة السرعة في أعلى الحلقة بعامل مقداره $\sqrt{2}$. ومن ثَمّ، تصبح السرعة المطلوبة هي $(7.00\ \text{m/s})(\sqrt{2}) = 9.90\ \text{m/s}$.

9.7 (iv)
$$\bar{\omega} = \frac{1}{t}\int_0^t \omega(t')\,dt' = \frac{1}{t}\int_0^t (\omega_0 + \alpha t')dt'$$
$$= \frac{\omega_0}{t}\int_0^t dt' + \frac{\alpha}{t}\int_0^t t'dt' = \omega_0 + \tfrac{1}{2}\alpha t$$
$$= \tfrac{1}{2}\omega_0 + \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \alpha t)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$$

(ii)
$$\bar{\omega} = \omega_0 + \tfrac{1}{2}\alpha t$$
$$\Rightarrow \bar{\omega} t = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = \theta_0 + \bar{\omega} t$$

(v)
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$
$$= \theta_0 + \omega_0\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right) + \tfrac{1}{2}\alpha\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)^2$$
$$= \theta_0 + \frac{\omega\omega_0 - \omega_0^2}{\alpha} + \tfrac{1}{2}\frac{\omega^2 + \omega_0^2 - 2\omega\omega_0}{\alpha}$$

الآن نطرح θ_0 من طرفي المعادلة ثم نضرب في α:
$$\alpha(\theta - \theta_0) = \omega\omega_0 - \omega_0^2 + \tfrac{1}{2}(\omega^2 + \omega_0^2 - 2\omega\omega_0)$$
$$\Rightarrow \alpha(\theta - \theta_0) = \tfrac{1}{2}\omega^2 - \tfrac{1}{2}\omega_0^2$$
$$\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

إرشادات حل المسائل: الحركة الدائرية

1. تشتمل الحركة في دائرة دائمًا على القوة المركزية والعجلة المركزية. لكن تذكر أن القوة المركزية ليست نوعًا جديدًا من القوة لكنها ببساطة القوة المحصّلة التي تسبب الحركة؛ وتتكون من مجموع القوى التي تؤثر في الجسم المتحرك أيًا كانت. وهذه القوة المحصلة تساوي الكتلة مضروبة في العجلة المركزية؛ واحذر الوقوع في الخطأ الشائع الذي يتمثل في اعتبار الكتلة المضروبة في العجلة قوة يجب جمعها مع القوة المحصّلة الموجودة في أحد طرفي معادلة الحركة.

2. تأكد من ملاحظة ما إذا كانت الحالة تحتوي على زوايا مقيسة بوحدة الدرجات أم بالراديان. والراديان ليس وحدة من الضروري وجودها أثناء عملية الحساب، لكن تحقق من منطقية نتيجتك بدلالة الوحدات الزاويّة.

3. تكون صيغة معادلات الحركة بعجلة زاوية ثابتة مماثلة لمعادلات الحركة بعجلة خطية ثابتة. لكن لا تنطبق أي من مجموعتي المعادلات إذا كانت العجلة غير ثابتة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

أسئلة الاختيار من متعدد

9.1 جسم يتحرك في مسار دائري. فإذا انعدمت القوة المركزية فجأة، فكيف سيتحرك الجسم؟

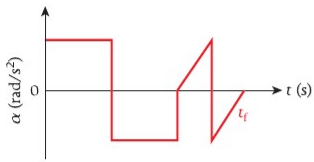
a) سيتحرك باتجاه نصف القطر إلى الخارج.

b) سيتحرك باتجاه نصف القطر إلى الداخل.

c) سيتحرك عموديًا إلى أسفل.

d) سيتحرك في الاتجاه الذي يشير إليه متجه السرعة في لحظة انعدام القوة المركزية.

9.2 موضح في الشكل العجلة الزاويّة لجسم يتحرك حركة دائرية مقابل الزمن. إذا بدأ الجسم من السكون عند $t = 0$. فستكون محصلة الإزاحة الزاويّة للجسم عند $t = t_f$



a) في اتجاه عقارب الساعة.

b) في عكس اتجاه عقارب الساعة.

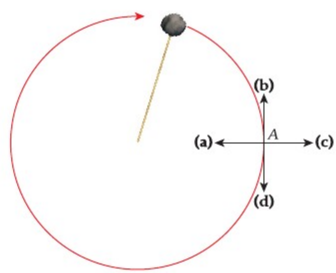
c) تساوي صفرًا.

d) لا يمكن تحديدها.

9.3 إذا كان خط العرض لمدينة لوبوك بولاية تكساس (المعروفة بالمدينة المحورية للسهول الجنوبية) يبلغ 33° N، فما سرعة الدوران المحوري لها، على افتراض أن نصف قطر الأرض عند خط الاستواء يساوي 6380 km؟

a) 464 m/s	d) 0.464 m/s
b) 389 m/s	e) 0.389 m/s
c) 253 m/s	

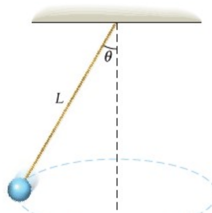
9.4 يتحرك حجر معلق بخيط حركة دائرية منتظمة في اتجاه عقارب الساعة. في أي اتجاه من النقطة A يسقط الحجر عند انقطاع الخيط؟



9.5 تدور العجلة الدوّارة ببطء حول محور أفقي. فإذا كان الركاب يجلسون على المقاعد التي تظل أفقية على العجلة الدوارة أثناء دورانها، فما نوع القوة التي توفر العجلة المركزية للركاب عندما يكونون في أعلى العجلة الدوّارة؟

a) الطرد المركزي	c) الجاذبية
b) المتعامدة	d) الشدّ

9.6 في بندول مخروطي، يتحرك ثقل في دائرة أفقية، كما هو مبيَّن في الشكل. يكون الزمن الدوري للبندول (الزمن الذي يستغرقه الثقل لعمل دورة كاملة)



a) $T = 2\pi\sqrt{L\cos\theta/g}$

b) $T = 2\pi\sqrt{g\cos\theta/L}$

c) $T = 2\pi\sqrt{Lg\sin\theta}$

d) $T = 2\pi\sqrt{L\sin\theta/g}$

e) $T = 2\pi\sqrt{L/g}$

9.7 تتأرجح كرة مربوطة في طرف خيط في مسار دائري نصف قطره r. فإذا تضاعف نصف القطر وظلت السرعة الخطية ثابتة، فإن العجلة المركزية

a) تظل كما هي.	d) تزيد بمقدار 4 أمثال.
b) تزيد بمقدار المثل.	e) تقل بمقدار الربع.
c) تقل بمقدار النصف.	

9.8 السرعة الزاويّة لعقرب الساعة (بوحدة الراديان في الثانية)

a) $\dfrac{\pi}{21,600}$	c) $\dfrac{\pi}{3600}$	e) $\dfrac{\pi}{60}$
b) $\dfrac{\pi}{7200}$	d) $\dfrac{\pi}{1800}$	

9.9 ضع ثلاث قطع نقد معدنية متماثلة على قرص دوّار على مسافات مختلفة من المركز ثم شغِّل المحرك. عندما تزداد سرعة القرص الدوار، تنزلق قطعة النقد المعدنية الأبعد عن المركز أولاً تليها قطعة النقد المعدنية الموجودة في منتصف المسافة إلى المركز وأخيرًا قطعة النقد المعدنية الأقرب من المركز وذلك عندما يدور القرص بأقصى سرعة له. ما سبب ذلك؟

a) بالنسبة إلى المسافات الأكثر بُعدًا عن المركز، تكون العجلة المركزية أعلى، ومن ثمَّ لا تستطيع قوة الاحتكاك إبقاء قطعة النقد المعدنية في مكانها.

b) يتسبب وزن قطعة النقد المعدنية في ميل القرص الدوار إلى أسفل، ومن ثمَّ تسقط قطعة النقد الأقرب إلى الحافة أولاً.

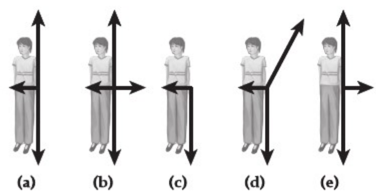
c) بسبب المسار الذي يصنعه القرص الدوّار، يقل معامل الاحتكاك السكوني عند الابتعاد عن المركز.

d) بالنسبة إلى المسافات الأقل بُعدًا عن المركز، تكون العجلة المركزية أعلى.

9.10 توجد نقطة ما على قرص Blu-Ray على مسافة $R/4$ من محور الدوران. كم تبعد نقطة ثانية عن محور الدوران إذا كانت سرعتها الخطيّة في أي لحظة تساوي مثلي السرعة الخطية للنقطة الأولى؟

a) $R/16$	c) $R/2$
b) $R/8$	d) R

9.11 يوضح الشكل راكبًا مستندًا إلى حائط لعبة ترفيهية في الملاهي دون أن يلمس الأرض. ما المخطط الذي يوضح القوى المؤثرة في الراكب بشكل صحيح؟



9.12 يوجد حجر مربوط في خيط ويتحرك الحجر في مسار دائري بسرعة ثابتة. إذا تم تجاهل الجاذبية ومضاعفة مدة الحركة الدائرية، فإن مقدار الشد في الخيط

a) سيقلّ إلى $\frac{1}{4}$ قيمته الأصلية.

b) سيقلّ إلى $\frac{1}{2}$ قيمته الأصلية.

c) لن يتغيَّر.

d) يزيد إلى ضعف قيمته الأصلية.

e) يزيد إلى أربعة أضعاف قيمته الأصلية.

9.13 توجد دراجة نصف قطر عجلتها 33.0 cm وتتحرك بسرعة تصل إلى 6.5 m/s. فما السرعة الزاويّة للإطار الأمامي؟

a) 0.197 rad/s	c) 5.08 rad/s	e) 215 rad/s
b) 1.24 rad/s	d) 19.7 rad/s	

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9.14 تبلغ مدة دوران الأرض حول محورها 24 h. وعند هذه السرعة الزاويّة، تكون العجلة المركزية عند سطح الأرض صغيرة مقارنة بالعجلة الناتجة عن الجاذبية. ما مدة دوران الأرض اللازمة ليصبح مقدار العجلة المركزية على سطحها عند خط الاستواء مساويًا لمقدار العجلة الناتجة عن الجاذبية؟ (مع مدة الدوران هذه، يمكنك الارتفاع قليلًا عن سطح الأرض)!

a) 0.043 h
b) 0.340 h
c) 0.841 h
d) 1.41 h
e) 3.89 h
f) 12.0 h

9.15 في المسألة المحلولة 9.1. ما السرعة التي يجب أن تكون عليها العربة الأفعوانية في أسفل الحلقة لتسبب الشعور بانعدام الوزن في أعلى الحلقة؟

a) 7.00 m/s
b) 12.1 m/s
c) 13.5 m/s
d) 15.7 m/s
e) 21.4 m/s

9.16 يوضح الشكل 9.16a مخطط الجسم الحر للقوى المؤثرة في أحد ركاب العربة الأفعوانية في أعلى الحلقة. حيث يكون مقدار القوة المتعامدة التي يبذلها المسار أقل من مقدار قوة الجاذبية. إذا كانت سرعة العربة 7.00 m/s. فكم يكون نصف قطر الحلقة اللازم لكي يصبح مخطط الجسم الحر صحيحًا؟

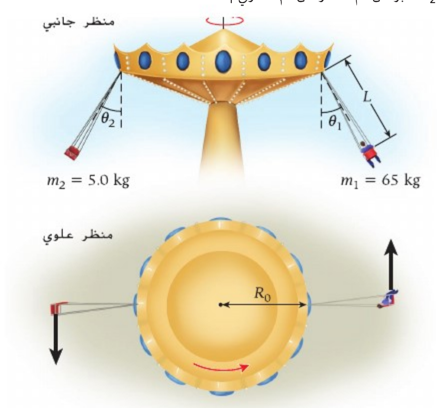
a) أقل من 5 m
b) 5 m
c) أكثر من 5 m

أسئلة مفاهيمية

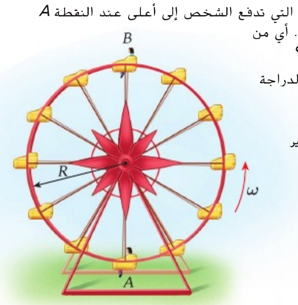
9.17 تدور مروحة سقف في اتجاه عقارب الساعة (عند النظر إليها من أسفل). لكنها تتباطأ. ما اتجاهات $\vec{\omega}$ و$\vec{\alpha}$؟

9.18 يوجد خطاف معلق أعلى خشبة المسرح يتحمل 150 kg. رُبط به حبل كتلته 3.00 kg. وسيحاول ممثل وزنه 66.7 kg التأرجح على هذا الحبل فوق خشبة المسرح. هل سيتحمل الحبلُ الممثلَ أثناء التأرجح؟

9.19 تتكوّن إحدى ألعاب الملاهي من مقاعد متصلة بقرص مركزي بواسطة كبلات، كما هو موضّح في الشكل. ويتحرك الركاب في حركة دائرية منتظمة. تبلغ كتلة أحد الركاب (بما في ذلك المقعد الذي يجلس عليه) 65 kg؛ وكتلة مقعد فارغ على الجانب المقابل من القرص المركزي 5.0 kg. إذا كانت θ_1 وθ_2 هما الزاويتان اللتان يكوّنهما الكبلان المتصلان بالمقعدين مع المستوى الرأسي. فقارن بين هاتين الزاويتين نوعيًا؟ هل θ_2 أكبر من أم أصغر من أم تساوي θ_1؟



9.20 شخص يركب عجلة دوّارة نصف قطرها R، وتدور بسرعة زاويّة ثابتة ω. قارن بين القوة المتعامدة للمقعد التي تدفع الشخص إلى أعلى عند النقطة A والقوة عند النقطة B في الشكل. أي من القوتين أكبر، أم أنهما متساويتان؟



9.21 يتراوح مقدار قطر إطار الدراجة بين 25 cm و70 cm تقريبًا. لماذا يُعد تصميم إطار قطره أصغر بكثير من 25 cm أمرًا غير عملي؟ (ستعرف السبب في أنه لا يمكن لإطارات الدراجة أن تكون كبيرة جدًا في الوحدة 10).

9.22 يبدأ قرص مضغوط حركته من السكون ثم تزداد سرعته إلى التردد الزاويّ لتشغيل مشغّل الأقراص المضغوطة. قارن بين السرعة الزاويّة والعجلة الزاوية لنقطة ما على حافة القرص المضغوط والسرعة الزاويّة والعجلة الزاوية لنقطة ما في منتصف المسافة بين المركز وحافة القرص المضغوط. كرر الأمر مع السرعة الخطيّة والعجلة الخطية.

9.23 تتحرك سيارة على منحنى غير مائل بأقصى سرعة. ما القوة (القوى) المسؤولة عن الحفاظ على بقائها على الطريق؟

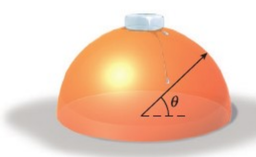
9.24 تتدلى كتلتان من خيطين لهما الطول نفسه مثبتين في سقف سيارة. توجد إحدى الكتلتين فوق مقعد السائق والأخرى فوق مقعد الراكب. عندما تنعطف السيارة بشدة، تتأرجح كلتا الكتلتين بعيدًا عن مركز المنحنى. في مواضعهما الناتجة عن الانعطاف، هل ستزيد المسافة بينهما أم ستقل أم ستظل كما هي قبل انعطاف السيارة؟

9.25 تبدأ كتلة نقطية m الانزلاق من ارتفاع h على طول السطح عديم الاحتكاك الموضح في الشكل. ما الحد الأدنى لقيمة h اللازم لتكمل الكتلةُ حلقة نصف قطرها R؟

9.26 في بندول مخروطي، يتحرك الثقل المثبت في الخيط (يمكن اعتباره عديم الكتلة) في دائرة أفقية بسرعة ثابتة. يتحرك الخيط في شكل مخروط مع دوران الثقل. ما القوى المؤثرة في الثقل؟

9.27 هل يمكن أرجحة كتلة متصلة بخيط في مسار دائري أفقي تمامًا (مع جعل الكتلة والخيط موازيين للأرض)؟

9.28 تبدأ قطعة ثلج صغيرة كتلتها m، الحركة من السكون من أعلى وعاء مقلوب على شكل نصف كرة، كما هو موضّح في الشكل. والوعاء الذي على شكل نصف كرة مثبت على الأرض وتنزلق قطعة الثلج بدون احتكاك على طول سطح الوعاء نصف الكروي. أوجد القوة المتعامدة التي تبذلها قطعة الثلج على الوعاء نصف الكروي عندما يشكّل الخط بين الكتلة ومركز الجسم الكروي زاوية θ مع المستوى الأفقي. ناقش النتيجة.

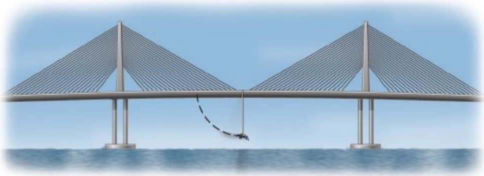


9.29 افترض أنك تركب إحدى العربات الأفعوانية التي تتحرك في حلقة دائرية رأسية. أثبت أن وزنك الظاهري عند الجزء السفلي من الحلقة يساوي ستة أضعاف وزنك عندما تشعر بانعدام الوزن في الجزء العلوي، بغض النظر عن حجم الحلقة، وإهمال الاحتكاك.

9.30 وقع الحدث التالي بالفعل على جسر صن شاين سكاي واي بالقرب من سانت بطرسبرغ في فلوريدا، في عام 1997. ربط خمسة أشخاص كبلًا طوله 55 m بمركز الجسر. وكانوا يريدون التأرجح للأمام والخلف أسفل الجسر عند طرف هذا الكبل. ربط الأشخاص الخمسة أنفسهم (الوزن الكلي = W) بطرف الكبل، عند المستوى نفسه وبعيدًا عن المكان الذي رُبطوا فيه الكبل بالجسر بمسافة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

قدرها 55 m وسقطوا مباشرة من الجسر. واتبعوا المسار الدائري المتقطع الموضّح في الشكل. لسوء الحظ، لم يكن هؤلاء الأشخاص على دراية جيدة بقوانين الفيزياء وانقطع الكبل (من نقطة ارتباطه بمقاعدهم) عند الجزء السفلي من أرجوحتهم. حدد مدى قوة الكبل (وجميع الوصلات التي تربط المقاعد والجسر) التي يتعين أن يكون عليها لتحمُّل الأشخاص الخمسة في الجزء السفلي من الأرجوحة. عبِّر عن نتيجتك بدلالة الوزن الكليّ لهم، W.



تمارين

يشير رقم المسألة الأزرق إلى توفر حل في دليل حلول الطالب. تشير علامة النقطة الواحدة • والنقطتين •• إلى زيادة مستوى صعوبة المسألة.

القسم 9.2

9.31 ما الزاوية التي تتحركها الأرض في مدارها أثناء الشتاء بالراديان؟

9.32 مع افتراض أن الأرض كروية، وتذكُّر أن نطاق خطوط العرض يتراوح بين 0° عند خط الاستواء و90° N عند القطب الشمالي، ما المسافة بين دوبوك وآيوا (خط عرض 42.50° N) ومدينة غواتيمالا (خط عرض 14.62° N) عند قياسها على سطح الأرض؟ تقع المدينتان على خط الطول نفسه تقريبًا. لا تُهمل انحناء الأرض عند تحديد هذه المسافة.

•**9.33** ارجع إلى المعلومات الواردة في المسألة 9.32. إذا كان بإمكان شخص الاختباء داخل الأرض وحفْر نفق مستقيم من دوبوك إلى مدينة غواتيمالا، فكم سيبلغ طول هذا النفق؟ من وجهة نظر الحفّار، عند أي زاوية أسفل المستوى الأفقي سيتم توجيه النفق؟

القسم 9.3

9.34 تم رمي كرة بيسبول بسرعة مقدارها 141.6 kph تقريبًا وبمعدل دوران 110. rpm. إذا كانت المسافة بين نقطة إطلاق اللاعب للكرة وقفاز ملتقط الكرة تساوي 18.3 m، فكم عدد الدورات الكاملة التي تصنعها الكرة بين الإطلاق والالتقاط؟ يمكنك تجاهل أي تأثير للجاذبية أو مقاومة الهواء المبذولة أثناء طيران الكرة.

9.35 يدور مسجل فينيل بمعدل 33.3 rpm. افترض أنه يستغرق 5.00 s ليصل إلى السرعة الكاملة، بدءًا من السكون.

a) ما مقدار العجلة الزاويّة له خلال 5.00 s؟

b) كم عدد الدورات التي يقوم بها المسجل قبل وصوله إلى السرعة الزاويّة النهائية له؟

9.36 في أحد الملاهي، أخذ صبي دميته معه عند ركوب العجلة الدوّارة العملاقة. لكن لسوء الحظ، عند الجزء العلوي من اللعبة، سقطت منه الدمية دون قصد. فإذا كان قطر العجلة 12.0 m ويرتفع الجزء السفلي منها بمقدار 2.00 m عن الأرض وتتحرك حافتها بسرعة 1.00 m/s، فكم سيكون البُعد بين قاعدة العجلة الدوارة والمكان الذي ستسقط فيه الدمية؟

•**9.37** قام الصبي في المسألة 9.36، بعد أن اعتاد الأمر، بدعوة اثنين من أصدقائه وطلب من كل واحد منهم أخذ دميته معه وركبوا العجلة الدوارة نفسها. جلس الصبية في مقاعد يبعد كل منها عن الآخر بزاوية 45.0°. عندما يصل الصبي الثاني في العجلة الدوارة إلى أقصى ارتفاع، يُسقط الصبية الثلاث دُماهم. ما المسافة بين الدُمى الثلاث عندما تسقط؟

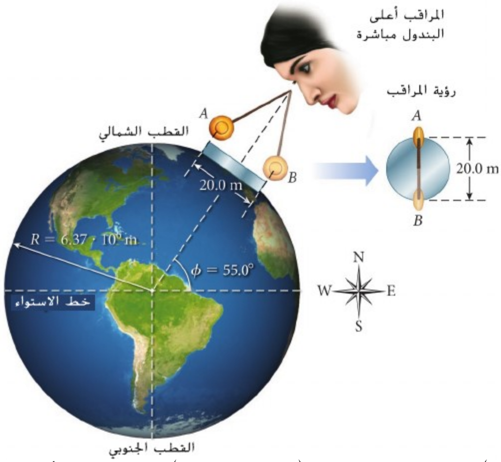
•**9.38** يدور المريخ حول الشمس على بُعد 228 مليون km، خلال 687 يومًا، وتدور الأرض حولها على بُعد 149.6 مليون km، خلال 365.26 يومًا.

a) افترض أنه تم تحديد موقع الأرض والمريخ بحيث تقع الأرض على خط مستقيم بين المريخ والشمس. فبعد مرور 365.26 يومًا بالضبط، عندما تُكمل الأرض دورة واحدة، ما مقدار الزاوية بين خط الأرض والشمس وخط المريخ والشمس؟

b) تعتبر الحالة الأولى في الجزء (a) هي أقرب طريق للمريخ إلى الأرض. ما مقدار الوقت، بالأيام، بين الطريقين الأكثر قربًا؟ افترض أن كلًا من الأرض والمريخ يتحرك بسرعة ثابتة وفي مدارات دائرية.

c) هناك طريقة أخرى للتعبير عن إجابة الجزء (b) بدلالة الزاوية بين الخطوط المرسومة بين الشمس والأرض والمريخ في حالة الطريقين الأكثر قربًا. فما هذه الزاوية؟

••**9.39** افترض وجود بندول بسيط كبير عند خط عرض 55.0° N ويتأرجح من الشمال إلى الجنوب حيث النقطتان A وB نقطتا التأرجح في أقصى الشمال وأقصى الجنوب بالترتيب. ينظر مراقب ثابت (بالنسبة إلى النجوم الثابتة) مباشرة إلى أسفل على البندول في اللحظة الموضّحة في الشكل. تدور الأرض حول محورها مرة واحدة كل 23 h و56 min.



a) ما اتجاهات السرعات المتجهة (بدلالة N وE وW وS) ومقاديرها لسطح الأرض عند النقطتين A وB كما يراها المراقب؟ *ملاحظة:* ستحتاج إلى حساب الإجابات وتقريبها إلى سبعة أرقام معنوية على الأقل لملاحظة الفرق.

b) ما السرعة الزاويّة التي تدور بها دائرة قطرها 20.0 m أسفل البندول؟

c) ما مدة هذا الدوران؟

d) ما الذي سيحدث لبندول يتأرجح عند خط الاستواء؟

القسم 9.4

9.40 ما العجلة المركزية للقمر؟ تبلغ مدة دوران القمر حول الأرض 27.3 يومًا، مقيسة بالنسبة إلى مواقع النجوم الثابتة. نصف قطر مدار القمر يساوي $R_M = 3.85 \cdot 10^8$ m.

9.41 إذا كنت تمسك محور عجلة دراجة نصف قطرها 35.0 cm وكتلتها 1.00 kg. وقمت بتدوير العجلة بمعدل 75.0 rpm ثم أوقفتها بضغط الإطار على الرصيف، ولاحظت أن العجلة تستغرق 1.20 s لتتوقف تمامًا. فما مقدار العجلة الزاويّة للعجلة؟

9.42 يستخدم علماء الحياة أجهزة الطرد المركزي فائقة السرعة لفصل المكونات البيولوجية أو لإزالة الجزيئات من المُعلّقات. يتم تدوير العينات الموجودة في مجموعة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

متماثلة من الحاويات بسرعة حول محور مركزي. تُمثّل العجلة المركزية التي تتعرض لها العينات في مناط الإسناد المتحرك الخاص بها "جاذبية اصطناعية" لإحداث فصل سريع. إذا كانت حاويات العينات تقع على بُعد 10.0 cm من محور الدوران. فما مقدار تردد الدوران اللازم لإنتاج عجلة مقدارها $1.00 \times 10^5 g$؟

9.43 يدور جهاز طرد مركزي في مختبر طبي بسرعة زاويّة مقدارها 3600. rpm (دورة في الدقيقة). وعند إيقاف تشغيله. يدور 60.0 مرة قبل التوقف. أوجد العجلة الزاوية الثابتة لجهاز الطرد المركزي.

9.44 يبدأ رامي قرص معدني (طول ذراعه 1.20 m) من السكون ثم يدور في عكس اتجاه عقارب الساعة بعجلة زاويّة مقدارها $2.50\ rad/s^2$.

a) ما المدة التي تستغرقها سرعة رامي القرص المعدني لتصل إلى 4.70 rad/s؟

b) كم عدد الدورات التي يقوم بها الرامي للوصول إلى السرعة 4.70 rad/s؟

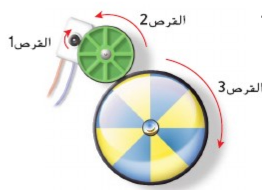
c) ما مقدار السرعة الخطية للقرص المعدني عند 4.70 rad/s؟

d) ما مقدار العجلة الخطيّة لرامي القرص المعدني عند هذه النقطة؟

e) ما مقدار العجلة المركزية للقرص المعدني الذي تم رميه؟

f) ما مقدار العجلة الكلية للقرص المعدني؟

•9.45 في أحد معارض الألعاب بمتجر كبير، يدور قرص صغير (القرص 1) نصف قطره 0.100 m بواسطة محرك ثم يعمل على تدوير قرص أكبر (القرص 2) نصف قطره 0.500 m. ويعمل القرص 2 بدوره على تدوير القرص 3 الذي يبلغ نصف قطره 1.00 m. وتكون الأقراص الثلاث متصلة ولا يوجد انزلاق. يُلاحَظ أن القرص 3 يُتِم دورة كاملة كل 30.0 s.



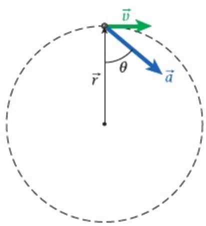
a) ما السرعة الزاويّة للقرص 3؟

b) ما نسبة السرعات المتجهة المماسية لحوافّ الأقراص الثلاثة؟

c) ما السرعات الزاويّة للقرصين 1 و2؟

d) إذا حدث خلل في المحرك مما تسبب في توليد عجلة زاويّة مقدارها $0.100\ rad/s^2$ للقرص 1، فما مقدار العجلات الزاويّة للقرصين 2 و3؟

•9.46 يتحرك جسيم ما في اتجاه عقارب الساعة في دائرة نصف قطرها 1.00 m. وعند لحظة معينة، يكون مقدار عجلته يساوي $a = |\vec{a}| = 25.0\ m/s^2$ ويصنع متجه العجلة زاوية $\theta = 50.0°$ مع متجه الموقع، كما هو موضّح في الشكل. في هذه اللحظة، أوجد السرعة $v = |\vec{v}|$ لهذا الجسيم.



•9.47 في جهاز تسجيل شريطي، يتحرك الشريط المغناطيسي بسرعة خطيّة ثابتة مقدارها 5.60 cm/s. وللحفاظ على هذه السرعة الخطيّة الثابتة، يجب تغيير السرعة الزاويّة لبكرة التشغيل (بكرة السحب) وفقًا لذلك.

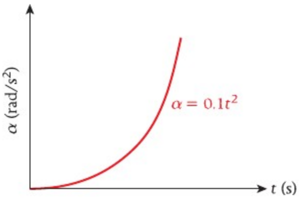
a) ما مقدار السرعة الزاويّة لبكرة السحب عندما تكون فارغة، إذا كان نصف قطرها $r_1 = 0.800\ cm$؟

b) ما مقدار السرعة الزاويّة عندما تكون البكرة ممتلئة، إذا كان نصف قطرها $r_2 = 2.20\ cm$؟

c) إذا كان إجمالي طول الشريط 100.80 m، فما متوسط العجلة الزاويّة لبكرة السحب أثناء تشغيل الشريط؟

••9.48 تم تثبيت حلقة بدون إحكام (لا يوجد احتكاك) حول قضيب طويل أملس طوله $L = 0.500\ m$. والقضيب مثبت من أحد طرفيه في حين يدور الطرف الآخر في مسار دائري أفقي بسرعة زاويّة ثابتة مقدارها $\omega = 4.00\ rad/s$. تبلغ السرعة المتجهة القطرية للحلقة صفرًا عند موقعها الابتدائي. وهو على بُعد $r_0 = 0.300\ m$ من الطرف المثبّت. حدّد السرعة المتجهة القطرية للحلقة عندما تصل إلى طرف القضيب المتحرك.

••9.49 حدافة قطرها 1.00 m كانت في وضع السكون في البداية. وموضح في الشكل تمثيل العجلة الزاويّة لها مقابل الزمن.



a) ما مقدار الانفصال الزاوي بين الموقع الابتدائي لنقطة ثابتة على حافة الحدافة وموقع النقطة بعد مرور 8.00 s من بدء دوران العجلة؟

b) تبدأ النقطة حركتها عند $\theta = 0$. احسب الموقع الخطي ومتجه السرعة ومتجه العجلة بعد مرور 8 s من بدء دوران العجلة وارسمهم.

القسم 9.5

9.50 احسب القوة المركزية المبذولة على مركبة كتلتها $m = 1500.\ kg$ وتتحرك بسرعة 15.0 m/s حول منحنى نصف قطره $R = 400.\ m$. ما القوة التي تؤدي دور القوة المركزية في هذ الحالة؟

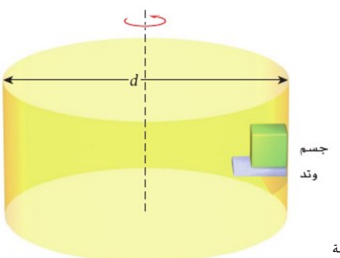
9.51 في المسألة المحلولة 9.1. كم يساوي الوزن الظاهري لراكب العربة الأفعوانية في *الجزء السفلي* من الحلقة؟

9.52 يتحرك المتزلجان، A وB اللذان لهما الكتلة نفسها، حركة دائرية منتظمة في اتجاه عقارب الساعة على الجليد. والفترات الزمنية لحركتهما متساوية. لكن نصف قطر دائرة المتزلج B يساوي ضعف نصف قطر دائرة المتزلج A.

a) ما النسبة بين سرعتَي المتزلجَين؟

b) ما النسبة بين مقادير القوى المؤثرة في كل متزلج؟

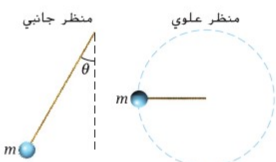
•9.53 يُلامس جسم صغير كتلته m الجدار الداخلي لأسطوانة جوفاء كبيرة. لنفترض أن معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم وجدار الأسطوانة هو μ_s. في البداية، تكون الأسطوانة في وضع سكون. ويُثبّت الجسم في مكانه عن طريق وتد يدعم وزنه. ثم تبدأ الأسطوانة في الدوران حول محورها المركزي، كما هو موضّح في الشكل، بعجلة زاوية α. أوجد الحد الأدنى الفترة الزمنية بعد أن تبدأ الأسطوانة في الدوران، قبل أن يصبح من الممكن إزالة الوتد دون انزلاق الجسم على الجدار.



•9.54 تتحرك سيارة سباق عبر مسار منحنٍ بسرعة ثابتة. ومعامل الاحتكاك بين الإطارات والمضمار $\mu_s = 1.20$. إذا كان نصف قطر المنحنى 10.0 m. فما أقصى سرعة يمكن أن تنعطف بها السيارة دون أن تنزلق؟ افترض أن السيارة تسير بحركة دائرية منتظمة.

•9.55 تتحرك سيارة بسرعة فوق قمة أحد التلال. إذا كان نصف قطر انحناء قمة التل 9.00 m. فما السرعة التي يمكن أن تتحرك بها السيارة مع الحفاظ على ملامستها للأرض بصورة مستمرة؟

•9.56 توجد كرة كتلتها $m = 0.200\ kg$ متصلة بخيط (عديم الكتلة) طوله $L = 1.00\ m$ وتتحرك حركة دائرية في المستوى الأفقي، كما هو موضّح في الشكل.



a) ارسم مخطط الجسم الحر للكرة.

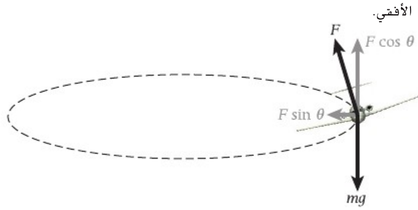
b) ما القوة التي تلعب دور القوة المركزية؟

c) ما سرعة الكتلة المطلوبة لكي يصل قياس θ إلى 45.0°؟

d) ما مقدار الشد المؤثر في الخيط؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

•**9.57** تُسافر بالطائرة إلى شيكاغو لقضاء عطلة نهاية الأسبوع بعيدًا عن الكتب المدرسية. وتعلمتَ في حصة الفيزياء الأخيرة أن تدفق الهواء على جناحي الطائرة يولّد *قوة رفع*. تؤثر بشكل عمودي في الجناحين. عندما تكون الطائرة في مستوى الطيران. يكون هناك توازن تام بين قوة الرفع المتجهة إلى أعلى *وقوة الوزن* المتجهة إلى أسفل. ونظرًا لأن مطار أوهير من المطارات الأكثر ازدحامًا في العالم. فلن تشعر بالدهشة عندما يُعلن قائد الطائرة أن الرحلة دخلت دائرة الانتظار بسبب كثافة الرحلات. ويُبلغ القائد المسافرين بأن الطائرة ستُحلّق في دائرة نصف قطرها 11.3 km بسرعة 579.4 kph على ارتفاع 609.6 m. من خلال الاطلاع على بطاقة معلومات السلامة. يمكن أن تعرف أن الطول الكلي لامتداد جناحي الطائرة يساوي 83.9 m. واستنادًا إلى هذه المعلومات. احسب زاوية ميل الطائرة بالنسبة إلى المستوى الأفقي.



••**9.58** توضع أسطوانة معدنية كتلتها 20.0 g على قرص دوار. بحيث يبعد مركزها مسافة قدرها 80.0 cm عن مركز القرص الدوار. ومعامل الاحتكاك السكوني بين الأسطوانة وسطح القرص الدوار $\mu_s = 0.800$ ويوجد خيط رفيع عديم الكتلة طوله 80.0 cm يربط مركز القرص الدوار بالأسطوانة. *وفي البداية*. كان شد الحبل صفرًا. تحرك القرص الدوار من السكون ووصل ببطء شديد إلى سرعات زاوية أعلى. لكن يمكن افتراض أن القرص الدوار والأسطوانة في حركة دائرية منتظمة في أي لحظة. احسب مقدار الشد في الخيط عندما تكون السرعة الزاوية للقرص الدوار 60.0 rpm (دورة في الدقيقة).

••**9.59** منعطف على مضمار السباق نصف قطر انحنائه R. ويميل بزاوية θ فوق المستوى الأفقي.

a) ما السرعة المثلى التي يتم اجتياز المنعطف بها إذا كان سطح المضمار مغطى بالجليد (أي هناك احتكاك بسيط للغاية بين الإطارات والمسار)؟

b) إذا كان سطح المضمار خاليًا من الجليد وكان هناك معامل احتكاك μ_s بين الإطارات والمضمار. فما الحد الأقصى والحد الأدنى للسرعات التي يمكن اجتياز هذا المنعطف بها؟

c) احسب ناتج الجزء (a) وناتج الجزء (b) عندما يكون $R = 400.$ m و$\theta = 45.0°$ و$\mu_s = 0.700$.

تمارين إضافية

9.60 تدور إحدى العجلات الدوّارة بالركاب في دائرة رأسية نصف قطرها 9.00 m مرة واحدة كل 12.0 s.

a) احسب سرعة الركاب. مع افتراض أنها ثابتة.

b) ارسم مخطط الجسم الحر لإحدى الراكبات عندما تكون في الجزء السفلي من الدائرة. احسب القوّة العموديّة التي يبذلها المقعد على الراكبة عند هذه النقطة من اللعبة.

c) أجر التحليل نفسه كما في الجزء (b) لنقطة ما في الجزء العلوي من اللعبة.

9.61 يركب فتى عجلة دوّارة تلف به في دائرة رأسية نصف قطرها 9.00 m مرة واحدة كل 12.0 s.

a) ما السرعة الزاوية للعجلة الدوّارة؟

b) افترض أن العجلة تتوقف بمعدل منتظم أثناء الربع الأول من الدورة. فما العجلة الزاوية للعبة خلال هذا الوقت؟

c) احسب العجلة المماسية للفتى خلال الفترة الزمنية المحددة في الجزء (b).

9.62 افترض أنّ شفرة جزازة العشب التي طولها 53.0 cm تدور حول مركزها بسرعة 3400 rpm.

a) احسب السرعة الخطية لطرف الشفرة.

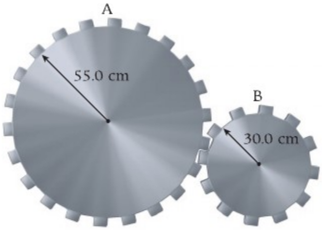
b) إذا كانت لوائح السلامة تشترط إمكانية إيقاف الشفرة في غضون 3.00 s. فما الحد الأدنى للعجلة الزاويّة الذي سيتحقق هذا عنده؟ مع افتراض أن العجلة الزاوية ثابتة.

9.63 تتحرك سيارة بعجلة منتظمة من السكون وتصل إلى السرعة 22.0 m/s في غضون 9.00 s. وقطر إطار هذه السيارة يساوي 58.0 cm.

a) أوجد عدد اللفات التي يقوم بها الإطار أثناء حركة السيارة، مع افتراض عدم حدوث أي انزلاق.

b) ما السرعة الزاوية النهائية للإطار بوحدة الدورة في الثانية؟

9.64 يلامس الترس A، الذي كتلته 1.00 kg ونصف قطره 55.0 cm. الترس B، الذي كتلته 0.500 kg ونصف قطره 30.0 cm. ولا ينزلق الترسان فوق بعضهما أثناء دورانهما. إذا كان الترس A يدور بسرعة 120 rpm وتنخفض إلى 60.0 rpm في غضون 3.00 s. فكم عدد دورات الترس B خلال هذه الفترة الزمنية؟



9.65 تلف نحلة دوارة لمدة 10.0 min. وتبدأ بسرعة زاوية 10.0 rev/s. أوجد العجلة الزاوية لها. مع افتراض أنها ثابتة. وكذلك إجمالي الإزاحة الزاوية لها.

9.66 توجد قطعة نقد معدنية على حافة قرص فونوغراف قديم يدور بسرعة 33.0 rpm وقطره 30.5 cm ما الحد الأدنى لمعامل الاحتكاك السكوني بين قطعة النقد المعدنية وسطح القرص لضمان عدم سقوط قطعة النقد المعدنية؟

9.67 يدور مسجل فينيل في البداية بمعدل $33\frac{1}{3}$ rpm ثم يتباطأ بانتظام حتى يتوقف خلال 15.0 s. فكم عدد دورات المسجل حتى يتوقف؟

9.68 أوجد السرعتين والعجلتين الخطية والزاوية لبُقعة من الأتربة توجد على بُعد 2.00 cm من مركز قرص مضغوط يدور داخل مُشغّل أقراص مضغوطة بسرعة 250. rpm.

9.69 ما عجلة الأرض في مدارها؟ (مع افتراض أنّ المدار دائري).

9.70 يبلغ طول اليوم على كوكب المريخ 24.6 ساعة على كوكب الأرض. ويبلغ طول العام على كوكب المريخ 687 يومًا على كوكب الأرض. كيف يمكن المقارنة بين السرعات الزاوية للدوران المحوري لكوكب المريخ ومداره والسرعات الزاوية للدوران المحوري لكوكب الأرض ومداره؟

9.71 شاحنة عملاقة قطر إطاراتها 1.10 m وتسير بسرعة 35.8 m/s. بعد استخدام المكابح. تنخفض سرعة الشاحنة بشكل منتظم وتتوقف تمامًا بعدما تدور الإطارات 40.2 لفة.

a) ما السرعة الزاوية الابتدائية للإطارات؟

b) ما العجلة الزاوية للإطارات؟

c) ما المسافة التي تقطعها الشاحنة قبل أن تتوقف تمامًا؟

•**9.72** يُدير محرّك المروحة عجلة صغيرة نصف قطرها $r_m = 2.00$ cm. وتعمل هذه العجلة على تدوير حزام مربوط في عجلة نصف قطرها $r_f = 3.00$ cm مُثبّتة على محور ريش المروحة. عند القياس من مركز هذا المحور. تكون أطراف ريش المروحة على مسافة $r_b = 15.0$ cm. عند تشغيل المروحة. يدور المحرك بسرعة زاوية قدرها $\omega = 1200.$ rpm. ما السرعة المماسية لأطراف ريش المروحة؟

•**9.73** تتحرك سيارة كتلتها 1000 kg فوق تل بسرعة ثابتة قدرها 60.0 m/s. يمكن تقدير قمة التل بطول قوس في دائرة نصف قطر انحنائها 370. m. ما القوة التي تبذلها السيارة على التل وهي تعبر القمة؟

•**9.74** على عكس السفينة. لا تستخدم الطائرة دفة التوجيه الخاصة بها للانعطاف. لكنها تنعطف عن طريق إمالة جناحيها: لقوة الرفع المتعامدة على الجناحين مُركّبة أفقية توفر العجلة المركزية عند الانعطاف ومُركّبة رأسية تدعم وزن الطائرة. (تقاوم دفة التوجيه زاوية الانحراف ومن ثَمّ تحافظ على بقاء الطائرة في الاتجاه الذي تتحرك فيه). تطير طائرة التجسس الشهيرة، Blackbird 71-SR. بسرعة 4800 km/h ونصف قطر انعطافها 290 km. أوجد زاوية الميل.

•**9.75** طيار كتلته 80.0 kg في طائرة تسير بسرعة ثابتة 500 m/s. يعمل على استعادة وضع الطيران بعد هبوط عمودي على طول قوس دائرة نصف قطرها 4000 m.

a) أوجد العجلة المركزية والقوة المركزية المؤثرة في الطيار.

b) ما الوزن الظاهري للطيار عند أدنى مستوى للهبوط؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9.76• كرة كتلتها 1.00 kg متصلة بخيط طوله 1.00 m وتدور في دائرة رأسية بسرعة ثابتة 10.0 m/s.

a) حدد مقدار الشَّد في الخيط عندما تصبح الكرة عند أعلى الدائرة.

b) حدد مقدار الشَّد في الخيط عندما تصبح الكرة عند أسفل الدائرة.

c) افترض أن الكرة في نقطة ما بخلاف الجزء العلوي والسفلي. ماذا يمكنك قوله عن مقدار الشد في الخيط عند هذه النقطة؟

9.77• تبدأ سيارة حركتها من السكون وتتحرك بعجلة حول منحنى مستوٍ نصف قطره $R = 36.0$ m. وتظل المُركَّبة الماسية لعجلة السيارة ثابتة عند $a_t = 3.30$ m/s^2، بينما تزيد العجلة المركزية لإبقاء السيارة على المنحنى لأطول فترة ممكنة. ومعامل الاحتكاك بين الإطارات والطريق $\mu = 0.950$. ما المسافة التي تقطعها السيارة حول المنحنى قبل انزلاقها؟ (تأكد من تضمين المركبات الماسية والمركزية للعجلة).

9.78• تحمل فتاة راكبة في لعبة دوامة الخيل بندولاً في يدها. يبعد البندول عن محور دوران اللعبة بمقدار 6.00 m. وسرعة دوران اللعبة 0.0200 rev/s. فإذا كان البندول يتدلى بزاوية θ على المستوى الرأسي، فأوجد θ.

9.79•• يبلغ قطر لعبة دوامة الخيل في الملاهي 6.00 m. وتبدأ اللعبة من السكون ثم تتحرك بعجلة زاوية ثابتة حتى تصل إلى سرعة زاوية مقدارها 0.600 rev/s في 8.00 s.

a) ما قيمة العجلة الزاوية؟

b) ما العجلات المركزية والزاوية لمقعد ما على دوامة الخيل يبعد عن محور الدوران مسافة قدرها 2.75 m؟

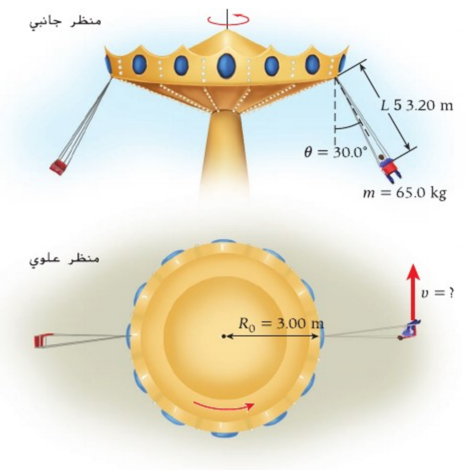
c) ما إجمالي العجلة ومقدارها واتجاهها بعد مرور 8.00 s من بدء العجلة الزاوية ؟

9.80• تنعطف سيارة وزنها $W = 10.0$ kN على طريق مائل بزاوية $\theta = 20.0°$. توجد حلية داخل السيارة تتدلى من خيط قصير مربوط في المرآة الخلفية. عند انعطاف السيارة، تتأرجح الحلية بزاوية $\varphi = 30.0°$ تم قياسها من المستوى الرأسي داخل السيارة. ما قوة الاحتكاك السكوني بين السيارة والطريق؟

9.81•• تتكوّن إحدى ألعاب الملاهي الشهيرة من مقاعد متصلة بقرص مركزي بواسطة كبلات. ويتحرك الركاب في حركة دائرية منتظمة. وكما يتضح من الشكل، يبلغ نصف قطر القرص المركزي $R_0 = 3.00$ m وطول الكبل $L = 3.20$ m وكتلة أحد الركاب (بما في ذلك المقعد الذي يجلس عليه) هي 65.0 kg.

a) إذا كانت الزاوية θ التي يكوّنها الكبل مع المستوى الرأسي 30.0°، فما سرعة، v، هذا الراكب؟

b) ما مقدار القوة التي يبذلها الكبل على المقعد؟



تمارين بمعطيات متعددة

9.82 في "ثاندر إسفير"، تتحرك دراجة نارية داخل جسم كروي وتسير في مسار دائري أفقي على طول خط استواء هذا الجسم الكروي. نصف القطر الداخلي لهذا الجسم الكروي 12.61 m. ومعامل الاحتكاك السكوني بين إطارات الدراجة النارية والسطح الداخلي للجسم الكروي هو 0.4601. ما الحد الأدنى للسرعة الذي يجب أن تحافظ عليه الدراجة النارية لتفادي السقوط؟

9.83 في "ثاندر إسفير"، تتحرك دراجة نارية داخل جسم كروي وتسير في مسار دائري أفقي على طول خط استواء هذا الجسم الكروي. يبلغ نصف القطر الداخلي لهذا الجسم الكروي 13.75 m. وتحافظ الدراجة النارية على سرعة مقدارها 17.01 m/s. ما أدنى قيمة لمعامل الاحتكاك السكوني بين إطارات الدراجة النارية والسطح الداخلي للجسم الكروي لضمان عدم سقوط الدراجة النارية؟

9.84 في "ثاندر إسفير"، تتحرك دراجة نارية داخل جسم كروي وتسير في مسار دائري أفقي على طول خط استواء هذا الجسم الكروي. تحافظ الدراجة النارية على سرعة مقدارها 15.11 m/s. ومعامل الاحتكاك السكوني بين إطارات الدراجة النارية والسطح الداخلي للجسم الكروي يساوي 0.4741. ما أقصى نصف قطر يمكن أن يصل إليه الجسم الكروي بحيث لا تسقط الدراجة النارية؟

9.85 عندما تكون السرعة الخطية لأطراف الريشة الدوارة لمروحة طائرة أكبر من سرعة الصوت، تُصدر المروحة ضوضاء كثيرة غير مرغوب فيها. إذا دارت الريشة بمعدل 2403 rpm. فما أقصى طول يمكن أن تصل إليه بدون أن تتجاوز الأطراف سرعة الصوت؟ افترض أنَّ سرعة الصوت تساوي 343.0 m/s وأنَّ الريشة تدور حول مركزها.

9.86 عندما تكون السرعة الخطية لأطراف الريشة الدوارة لمروحة طائرة أكبر من سرعة الصوت، تُصدر المروحة ضوضاء كثيرة غير مرغوب فيها. إذا كان طول الريشة من طرف إلى آخر يساوي 2.601 m. فما أقصى تردد زاوي (بوحدة الدورة في الدقيقة) يمكن أن تدور به الريشة؟ افترض أنَّ سرعة الصوت تساوي 343.0 m/s وأنَّ الريشة تدور حول مركزها.

9.87 إذا كان طول نصف قطر العجلات الخلفية لسيارة رياضية يساوي 46.65 cm. وتبدأ السيارة الرياضية حركتها من السكون حتى تصل إلى سرعة 29.13 m/s خلال 3.945 s بعجلة ثابتة. فما العجلة الزاوية للعجلات الخلفية للسيارة؟ افترض أن العجلات تدور دون أن تنزلق.

9.88 طول نصف قطر العجلات الخلفية لسيارة رياضية يساوي 48.95 cm. وتتحرك السيارة الرياضية من السكون بعجلة ثابتة لمدة 3.997 s. والعجلة الزاوية للعجلات الخلفية هي 14.99 s^{-2}. ما السرعة الخطية النهائية للسيارة؟ افترض أن العجلات تدور دون أن تنزلق.

9.89 إذا كانت هناك سيارة رياضية تتحرك بعجلة ثابتة من السكون حتى تصل إلى سرعة 29.53 m/s خلال 4.047 s. والعجلة الزاوية للعجلات الخلفية هي 17.71 s^{-2}. فما نصف قطر العجلات الخلفية؟ افترض أن العجلات تدور دون أن تنزلق.

9.90 إذا كانت هناك حدّافة نصف قطرها 27.01 cm وتدور بتردد 4949 rpm. فما العجلة المركزية عند نقطة ما على حرف الحدّافة؟

9.91 حدّافة نصف قطرها 31.59 cm وتدور بتردد ثابت. فإذا كانت العجلة المركزية عند نقطة ما على حافة الحدّافة هي 8.629×10^4 m/s^2. فما تردد دوران الحدّافة (rpm)؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10 الحركة الدورانية

الشكل 10.1 محرك نفاث حديث.

ما سنتعلمه

تسحب المراوح الضخمة المثبتة في الجزء الأمامي من المحركات النفاثة الحديثة، كتلك الموضحة في الشكل 10.1، الهواء إلى غرفة ضغط حيث يمتزج الهواء بالوقود ويشتعل. يدفع الاشتعال الغازات خارج الجزء الخلفي من المحرك، منتجًا بذلك الدفعة التي تحرك الطائرة إلى الأمام. تدور هذه المراوح بسرعة 7000–9000 rpm ويجب فحصها باستمرار، فلا أحد يرغب في أن تنكسر شفرة مروحة على ارتفاع 9.66 km.

تحتوي معظم المحركات تقريبًا على أجزاء دوارة تنقل الطاقة إلى جهاز الإخراج، الذي يكون دوارًا أيضًا في الغالب. في الحقيقة، فإن معظم الأجسام في هذا الكون تدور، بداية من الجزيئات وحتى النجوم والمجرات. يوضح الشكل 10.2 الدوران المحوري على نطاق كبير (إعصار) وعلى نطاق هائل (مجرة حلزونية). علاوةً على ذلك، ففي عام 2011 قام فريق من خمسة طلاب جامعيين بجامعة ميتشيغان بتحليل عينة كبيرة من المجرات ووجدوا أدلة على أن الكون كله يدور. ولذلك فإن القوانين التي تحكم الدوران المحوري مهمة للغاية كأي جزء آخر في علم الميكانيكا.

قدمت الوحدة 9 بعض المفاهيم الأساسية للحركة الدائرية. وتتناول هذه الوحدة بعضًا من تلك الأفكار مثل السرعة الزاوية والعجلة الزاوية ومحور الدوران. وفي هذه الوحدة، نستكمل المقارنة بين الكميات الانتقالية والدورانية، ونتعرف على قانون آخر لحفظ الطاقة له أهمية كبيرة: قانون حفظ كمية الحركة الزاوية.

Chapter Sourced From: 10. Rotation, Chapter 10, from University Physics with Modern Physics, 2e by Bauer and Westfall ©2014 McGraw-Hill Education
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

ما سنتعلمه

- يجب حساب الطاقة الحركية الناتجة عن الحركة الدورانية للجسم عند دراسة حفظ الطاقة.
- عند دوران جسم دائري حول محور ما عبر مركز كتلته، فإن عزم القصور الذاتي يتناسب مع ناتج كتلة الجسم ومربع أكبر مسافة عمودية بداية من أي جزء من الجسم إلى محور الدوران. وتتراوح قيمة ثابت التناسب بين صفر وواحد اعتمادًا على شكل الجسم.
- عند الدوران حول محور مواز لمحور آخر عبر مركز كتلة جسم ما، فإن عزم القصور الذاتي يساوي عزم القصور الذاتي لمركز الكتلة بالإضافة إلى ناتج كتلة الجسم ومربع المسافة بين المحورين.
- بالنسبة إلى الأجسام المتدحرجة، تكون الطاقات الحركية للدوران والإزاحة مرتبطة ببعضها.
- عزم الدوران هو ناتج الضرب الاتجاهي لمتجه الموقع ومتجه القوة.
- ينطبق قانون نيوتن الثاني أيضًا على الحركة الدورانية.
- تُعرف كمية الحركة الزاوية بأنها ناتج الضرب الاتجاهي لمتجه الموقع ومتجه كمية الحركة.
- توجد علاقات مشابهة لتلك الموجودة في الكميات الخطية بين كمية الحركة الزاوية وعزم الدوران وعزم القصور الذاتي والسرعة الزاوية والعجلة الزاوية.
- يوجد قانون آخر أساسي لحفظ الطاقة وهو قانون حفظ كمية الحركة الزاوية.

10.1 الطاقة الحركية للدوران المحوري

تعلمنا في الوحدة 8 أنه يمكن وصف حركة جسم غير نقطي بدلالة المسار الذي يتبعه مركز كتلته والدوران المحوري للجسم حول مركز كتلته. ولكن على الرغم من أننا قد درسنا الحركة الدائرية للجسيمات النقطية في الوحدة 9 فإننا لم نتطرق بعد إلى دوران الأجسام غير النقطية. ومن ثم فإن تحليل هذه الحركة هو الهدف من هذه الوحدة.

الحركة الدائرية للجسيم النقطي

تناولت الوحدة 9 الكميات الكينماتيكية للحركة الدائرية. وقد درسنا تعريف السرعة الزاوية، ω، والعجلة الزاوية، α، بدلالة المشتقات الزمنية للإزاحة الزاوية، θ:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

وجدنا أن الكميات الزاوية مرتبطة بالكميات الخطية على النحو التالي:

$$s = r\theta, \quad v = r\omega,$$

$$a_t = r\alpha, \quad a_c = \omega^2 r, \quad a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2},$$

حيث s هو طول القوس وv هو السرعة الخطية لمركز الكتلة وa_t هو العجلة المماسيّة وa_c هو العجلة المركزية وa هو العجلة الخطية.

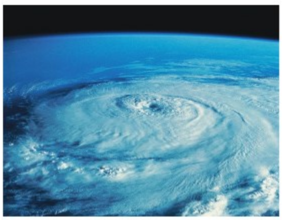
إن أقصر طريق لتقديم الكميات المادية لوصف الدوران المحوري هو الطاقة الحركية للدوران لجسم غير نقطي. في الوحدة 5 المتعلقة بالشغل والطاقة، تم تعريف الطاقة الحركية لجسم متحرك بأنها

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2. \tag{10.1}$$

إذا كانت حركة هذا الجسم دائرية، فيمكننا استخدم العلاقة بين السرعة الخطية الزاوية للحصول على

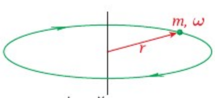
$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m(r\omega)^2 = \tfrac{1}{2}mr^2\omega^2, \tag{10.2}$$

وهي **الطاقة الحركية للدوران المحوري** لحركة جسيم نقطي على محيط دائرة نصف قطرها r حول محور ثابت، كما هو موضح في الشكل 10.3.


(a)


(b)

الشكل 10.2 (a) كتلة هوائية دوارة تكوّن إعصارًا بحريًا. (b) دوران محوري على نطاق هائل. المجرة الحلزونية M74.



الشكل 10.3 جسيم نقطي يتحرك في دائرة حول محور الدوران.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الحركة الدائرية لعدة جسيمات نقطية

كما فعلنا في الوحدة 8 عند إيجاد موقع مركز الكتلة في نظام الجسيمات، سنبدأ بمجموعة من الأجسام الدوارة المنفردة ثم نتناول النهاية المستمرة. تحدد الطاقة الحركية لمجموعة من الأجسام الدوارة من خلال

$$K=\sum_{i=1}^{n}K_i=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_iv_i^2=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_ir_i^2\omega_i^2.$$

هذه النتيجة ببساطة هي نتاج استخدام معادلة 10.2 مع عدة جسيمات نقطية وتسجيل الطاقة الحركية الكلية كمجموع للطاقات الحركية الفردية. وهنا ω_i هي السرعة الزاوية للجسيم i وr_i هي المسافة العمودية من i إلى محور ثابت. هذا المحور الثابت هو **محور الدوران** لهذه الجسيمات. ويوضح الشكل 10.4 مثالًا لنظام مكون من خمسة جسيمات نقطية دوارة.

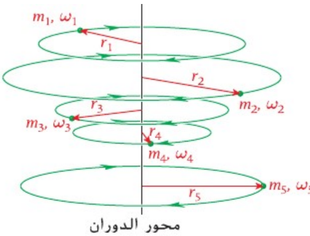
الآن يمكننا افتراض أن كل الجسيمات النقطية التي قمنا بجمع طاقاتها الحركية تحتفظ بمسافات ثابتة في ما بينها ومسافات بينها وبين محور الدوران. بعد ذلك ستمرّ جميع الجسيمات النقطية الموجودة في النظام بحركة دائرية حول محور الدوران المشترك بالسرعة الزاوية نفسها. ومع هذا القيد، يصبح مجموع الطاقات الحركية للجسيمات

$$K=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_ir_i^2\omega^2=\tfrac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}m_ir_i^2\right)\omega^2=\tfrac{1}{2}I\omega^2. \qquad (10.3)$$

تسمى الكمية I المقدمة في معادلة 10.3 **عزم القصور الذاتي**، وتعرف أيضًا باسم *القصور الدوراني*. ويعتمد هذا فقط على كتل الجسيمات الفردية والمسافات التي تفصلها عن محور الدوران:

$$I=\sum_{i=1}^{n}m_ir_i^2. \qquad (10.4)$$

تعلمنا في الوحدة 9 أن كل الكميات المرتبطة بالحركة الدائرية لها مكافئات في الحركة الخطية. وتشكل السرعة الزاوية ω والسرعة الخطية v ذلك الزوج. بمقارنة تعبيرات الطاقة الحركية للدوران المحوري (في المعادلة 10.3) والطاقة الحركية للحركة الخطية (المعادلة 10.1)، نجد أن عزم القصور الذاتي I يلعب الدور نفسه مع الحركة الدائرية مثلما تفعل الكتلة m مع الحركة الخطية.

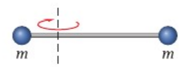


الشكل 10.4 تتحرك خمسة جسيمات نقطية في دوائر حول محور دوران مشترك.

مراجعة المفاهيم 10.1

فكّر في كتلتين متساويتين، m، متصلتين بساق رفيع عديم الكتلة. كما توضّح الأشكال، تدور الكتلتان في مستوى أفقي حول محور رأسي يُمثَّل بخط متقطّع. ما النظام الذي يحظى بأعلى عزم قصور ذاتي؟

(a)



(b)

(c)

10.2 حساب عزم القصور الذاتي

يمكننا استخدام عزم القصور الذاتي للعديد من الجسيمات النقطية، كما هو موضح في المعادلة 10.4، كنقطة بداية لإيجاد عزم القصور الذاتي لجسم غير نقطي. سوف نسلك النهج نفسه الذي سلكناه لإيجاد موقع مركز الكتلة في الوحدة 8. وسوف نمثل جسمًا غير نقطي مرة أخرى عن طريق مجموعة من المكعبات الصغيرة المتماثلة للحجم V ولكثافة الكتلة ρ (التي قد تكون مختلفة). ثم تصبح المعادلة 10.4

$$I=\sum_{i=1}^{n}\rho(\vec{r}_i)r_i^2V. \qquad (10.5)$$

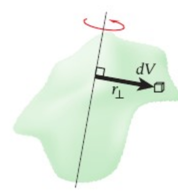
مرة أخرى، وكما فعلنا في الوحدة 8، سنتبع نهج حساب التفاضل والتكامل التقليدي، ليقترب حجم المكعبات من الصفر، $V\to 0$. وعند هذه النهاية، يقترب المجموع في المعادلة 10.5 من التكامل، للتوصل إلى تعبير عزم القصور الذاتي لجسم غير نقطي:

$$I=\int_V r_\perp^2\rho(\vec{r})\,dV. \qquad (10.6)$$

يمثل الرمز $r_\perp$ المسافة العمودية لعامل الحجم المتناهي من محور الدوران (الشكل 10.5).

نعرف أيضًا أنه يمكن الحصول على الكتلة الكلية لجسم ما عن طريق تكامل كثافة الكتلة مع إجمالي حجم الجسم.

$$M=\int_V \rho(\vec{r})\,dV. \qquad (10.7)$$



الشكل 10.5 تعريف $r_\perp$ بأنه المسافة العمودية لعنصر حجم متناهي الصغر من محور الدوران.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تعتبر المعادلتان 10.6 و10.7 أكثر التعبيرات عمومية لعزم القصور الذاتي وكتلة جسم غير نقطي. ولكن كما هو الحال مع معادلات مركز الكتلة، فبعض الحالات الأكثر أهمية من الناحية الفيزيائية هي التي تكون فيها كثافة الكتلة ثابتة مع اختلاف الحجم. في هذه الحالة، تُختصر المعادلتان 10.6 و10.7 إلى

$$I = \rho \int_V r_\perp^2 \, dV \quad (\text{للكثافة الكتلية الثابتة، } \rho),$$

و

$$M = \rho \int_V dV = \rho V \quad (\text{للكثافة الكتلية الثابتة، } \rho).$$

ومن ثَمَّ، يُحدد عزم القصور الذاتي لجسم ذي كثافة كتلية ثابتة من خلال

$$I = \frac{M}{V} \int_V r_\perp^2 \, dV \quad (\text{للكثافة الكتلية الثابتة، } \rho). \tag{10.8}$$

يمكننا الآن حساب عزم القصور الذاتي لبعض الأجسام ذات الأشكال المحددة. أولًا، سنفترض أن محور الدوران يمرّ عبر مركز كتلة الجسم. ثم سنشتق نظرية تربط هذه الحالة الخاصة بالحالة العامة بطريقة بسيطة، حيث لا يمرّ محور الدوران عبر مركز الكتلة.

الدوران حول محور ما عبر مركز الكتلة

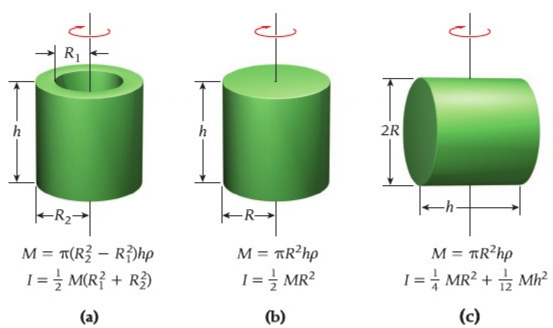
بالنسبة إلى أي جسم ذي كثافة كتلية ثابتة، يمكننا استخدام المعادلة 10.8 لحساب عزم القصور الذاتي بدلالة الدوران حول محور ثابت يمرّ عبر مركز كتلة الجسم. بطريقة بسيطة، يتم اختيار موقع مركز الكتلة عادةً كنقطة أصل النظام الإحداثي. ولأن التكامل في المعادلة 10.8 تكامل حجم ثلاثي الأبعاد، فإن اختيار النظام الإحداثي يكون عادةً في غاية الأهمية لحساب التكامل بأقل قدر ممكن من العمل الحسابي.

سندرس في هذا القسم حالتين، وهما أسطوانة جوفاء وجسم كروي صلب. وتمثل هاتان الحالتان الفئتين الأكثر شيوعًا للأجسام التي يمكنها الدوران، كما يوضحان استخدام نظامين إحداثيين مختلفين للتكامل.

يوضح الشكل 10.6a أسطوانة جوفاء تدور حول محور تماثلها. وعزم القصور الذاتي لها هو

$$I = \tfrac{1}{2} M\left(R_1^2 + R_2^2\right) \quad (\text{أسطوانة جوفاء}). \tag{10.9}$$

هذه هي النتيجة العامة لعزم القصور الذاتي لأسطوانة جوفاء تدور حول محور تماثلها، حيث M هو الكتلة الكلية للأسطوانة وR_1 هو نصف قطرها الداخلي وR_2 هو نصف قطرها الخارجي.



الشكل 10.6 عزم القصور الذاتي لـ (a) أسطوانة جوفاء و(b) أسطوانة صلبة تدور حول محور التماثل. (c) عزم القصور الذاتي لأسطوانة تدور حول محور عبر مركز كتلتها ولكنها عمودية على محور تماثلها.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

وباستخدام المعادلة 10.9 يمكن الحصول على عزم القصور الذاتي لأسطوانة صلبة تدور حول محور تماثلها (انظر الشكل 10.6b) بتحديد $R_2 = 0$ و $R_1 = R$:

$$I = \tfrac{1}{2}MR^2 \quad (\text{أسطوانة صلبة}).$$

يمكن أيضًا الحصول على حالة التقييد لحاوية أو طوق أسطواني رقيق، حيث تتركز كل الكتلة على المحيط، بتحديد $R_1 = R_2 = R$. وفي هذه الحالة، يكون عزم القصور الذاتي

$$I = MR^2 \quad (\text{طوق أو هيكل أسطواني رقيق}).$$

وفي النهاية، يُحدد عزم القصور الذاتي لأسطوانة صلبة بارتفاع h تدور حول محور عبر مركز الكتلة ولكنها عمودية على محور تماثلها (انظر الشكل 10.6c) من خلال

$$I = \tfrac{1}{4}MR^2 + \tfrac{1}{12}Mh^2 \quad (\text{أسطوانة صلبة، عمودية على محور الدوران}).$$

إذا كان نصف القطر R صغيرًا للغاية مقارنة بالارتفاع h، كما هو الحال في ساق طويل ورفيع، يُحدد عزم القصور الذاتي عند هذه النهاية من خلال إسقاط الحد الأول من المعادلة السابقة:

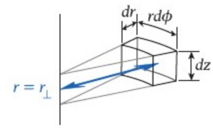
$$I = \tfrac{1}{12}Mh^2 \quad (\text{ساق رفيع طوله } h\text{، عمودي على محور الدوران}).$$

سوف نشتق صيغة عزم القصور الذاتي لأسطوانة جوفاء باستخدام تكامل حجم من النوع الموضح في القسم 8.4. ويتضمن هذا التكامل عمليات تكامل أحادية الأبعاد منفصلة على كل إحداثي من الإحداثيات الثلاثة. ويُظهر هذا الاشتقاق والذي يليه كيفية إجراء عمليات التكامل هذه للإحداثيات الأسطوانية والكروية. ومع أنها ليست ضرورية للمفاهيم الفيزيائية المعروضة في هذه الوحدة، فإنها قد تكون معلومة مهمة بالنسبة إليك.

الاشتقاق 10.1 عزم القصور الذاتي لعجلة

لاشتقاق عزم القصور الذاتي لأسطوانة جوفاء ذات كثافة ثابتة ρ وارتفاع h ونصف قطر داخلي R_1 ونصف قطر خارجي R_2، ومحور تماثل مماثل لمحور الدوران (انظر الشكل 10.6a)، سوف نستخدم الإحداثيات الأسطوانية. بالنسبة إلى معظم المسائل التي تتضمن أسطوانات أو أقراصًا، يجب أن يكون النظام الإحداثي المستخدم أسطوانيًا بوجه عام. ففي هذا النظام (انظر مناقشة التكاملات الحجمية في القسم 8.4)، يحدد عنصر الحجم عن طريق (انظر الشكل 10.7)

$$dV = r_\perp\, dr_\perp\, d\phi\, dz.$$



الشكل 10.7 عنصر الحجم بالإحداثيات الأسطوانية.

في الإحداثيات الأسطوانية (وفقط في الإحداثيات الأسطوانية)، تكون المسافة العمودية $r_\perp$، مماثلة للإحداثي القطري، r. وبوضع هذا في الاعتبار، يمكن حساب تكاملات الأسطوانة الجوفاء. بالنسبة إلى الكتلة، نحصل على

$$\begin{aligned} M = \rho \int_V dV &= \rho \int_{R_1}^{R_2}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_{-h/2}^{h/2} dz\right) d\phi\right) r_\perp\, dr_\perp \\ &= \rho h \int_{R_1}^{R_2}\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right) r_\perp\, dr_\perp \\ &= \rho h 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r_\perp\, dr_\perp \\ &= \rho h 2\pi \left(\tfrac{1}{2}R_2^2 - \tfrac{1}{2}R_1^2\right) \\ &= \pi\left(R_2^2 - R_1^2\right) h\rho. \end{aligned}$$

وبالمثل، يمكن التعبير عن الكثافة كدالة للكتلة:

$$M = \pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)h\rho \Leftrightarrow \rho = \frac{M}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)h}. \qquad \text{(i)}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

قد لا يكون سبب أداء هذه الخطوة الأخيرة واضحًا تمامًا حاليًا، ولكنه سيتضح بعد حساب التكامل لعزم القصور الذاتي:

$$I = \rho \int_V r_\perp^2 \, dV = \rho \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{-h/2}^{h/2} dz \right) d\phi \right) r_\perp^3 \, dr_\perp$$

$$= \rho h \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) r_\perp^3 \, dr_\perp$$

$$= \rho h 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r_\perp^3 \, dr_\perp$$

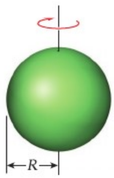
$$= \rho h 2\pi \left(\tfrac{1}{4} R_2^4 - \tfrac{1}{4} R_1^4 \right).$$

والآن يمكن أن نعوّض عن الكثافة من المعادلة (i):

$$I = \tfrac{1}{2} \rho h \pi \left(R_2^4 - R_1^4 \right) = \frac{M}{\pi \left(R_2^2 - R_1^2 \right) h} \tfrac{1}{2} h \pi \left(R_2^4 - R_1^4 \right).$$

وأخيرًا، نستخدم المتطابقة $(a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$ للحصول على المعادلة 10.9:

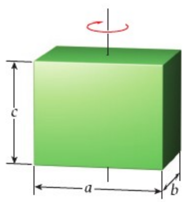
$$I = \tfrac{1}{2} M \left(R_1^2 + R_2^2 \right).$$



$M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$

$I = \frac{2}{5} M R^2$

(a)



$M = abc\rho$

$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$

(b)

الشكل 10.8 عزم القصور الذاتي لـ (a) جسم كروي و(b) قالب.

بالنسبة إلى الأجسام بخلاف تلك الأجسام قرصية الشكل، قد لا يكون استخدام الإحداثيات الأسطوانية مفيدًا. والأهم أن هذه الأجسام هي أجسام كروية وقوالب مستطيلة. ويُحدد عزم القصور الذاتي لجسم كروي يدور حول أي محور عبر مركز كتلته (انظر الشكل 10.8a) عن طريق

$$I = \tfrac{2}{5} M R^2 \quad \text{(جسم كروي صلب).} \tag{10.10}$$

وعزم القصور الذاتي لهيكل كروي رقيق يدور حول أي محور عبر مركز كتلته هو

$$I = \tfrac{2}{3} M R^2 \qquad \text{(هيكل كروي رقيق).}$$

عزم القصور الذاتي لقالب مستطيل بأطوال أضلاع a وb وc يدور حول محور ما عبر مركز الكتلة وبشكل موازٍ للضلع c (انظر الشكل 10.8b)

$$I = \tfrac{1}{12} M (a^2 + b^2) \quad \text{(قالب مستطيل الشكل).}$$

ومرة أخرى، سوف نشتق صيغة الجسم الكروي الصلب فقط لكي نوضح العمل في نظام إحداثي مختلف.

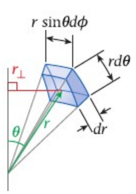
الاشتقاق 10.2 عزم القصور الذاتي لجسم كروي

عند حساب عزم القصور الذاتي لجسم كروي صلب (الشكل 10.8a) ذي كثافة كتلية ثابتة ρ ونصف قطر R يدور حول محور ما عبر مركزه، لا يُفضل استخدام الإحداثيات الأسطوانية، وتكون الإحداثيات الكروية الاختيار الأفضل. ففي الإحداثيات الكروية، يُحدد عنصر الحجم عن طريق (انظر الشكل 10.9)

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

لاحظ أنه في الإحداثيات الكروية لا يكون الإحداثي القطري r والمسافة العمودية $r_\perp$ متطابقين، ولكنهما يرتبطان عن طريق (انظر الشكل 10.9)

$$r_\perp = r \sin\theta.$$



الشكل 10.9 عنصر الحجم بالإحداثيات الكروية.

–يُتبع

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

(من الأخطاء الشائعة للغاية في هذه الأنواع من الحسابات أن يتم حذف جيب الزاوية. فيجب عليك مراعاة ذلك عند استخدام الإحداثيات الكروية).

ومرة أخرى، يجب أن نحسب تكامل الكتلة أولًا:

$$M = \rho \int_V dV = \rho \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \right) d\phi \right) r^2\, dr$$

$$= 2\rho \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) r^2\, dr = 4\pi\rho \int_0^R r^2\, dr$$

$$= \frac{4\pi}{3} R^3 \rho.$$

ومن ثَمَّ،

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}. \qquad \text{(i)}$$

ثم نحسب التكامل لعزم القصور الذاتي بشكل مماثل:

$$I = \rho \int_V r_\perp^2\, dV = \rho \int_V r^2 \sin^2\theta dV$$

$$= \rho \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \right) d\phi \right) r^4\, dr = \rho \frac{4}{3} \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) r^4\, dr$$

$$= \rho \frac{8\pi}{3} \int_0^R r^4\, dr.$$

ومن ثَمَّ،

$$I = \rho \frac{8\pi}{15} R^5. \qquad \text{(ii)}$$

بالتعويض بتعبير الكثافة من المعادلة (i) في المعادلة (ii) نحصل على

$$I = \rho \frac{8\pi}{15} R^5 = \frac{3M}{4\pi R^3} \frac{8\pi}{15} R^5 = \tfrac{2}{5} MR^2.$$

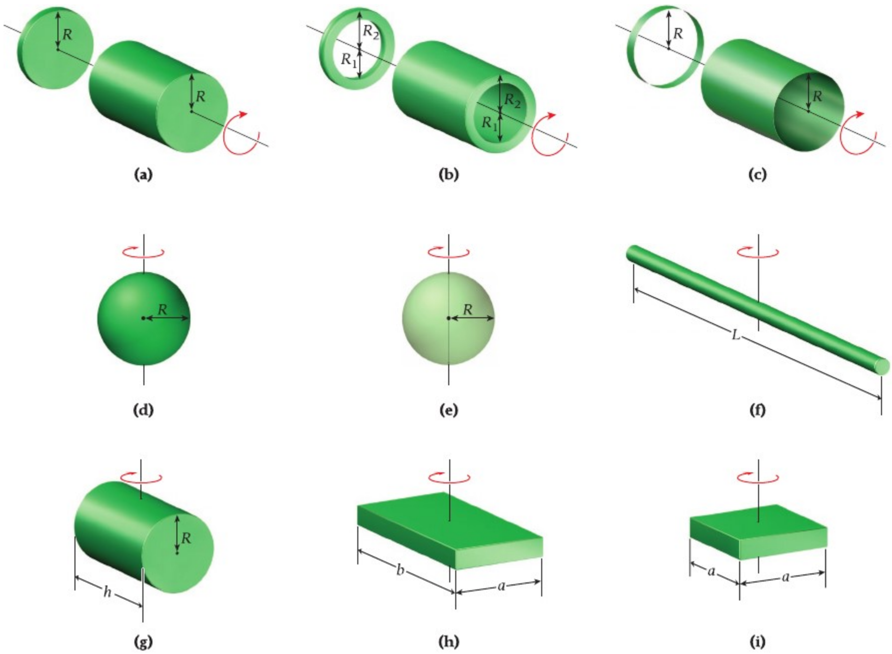
وأخيرًا، توجد ملاحظة عامة مهمة وهي: إذا كان R أكبر مسافة عمودية لأي جزء في الجسم الدوار من محور الدوران، إذًا فإن عزم القصور الذاتي يكون دائمًا مرتبطًا بكتلة الجسم عن طريق المعادلة

$$I = cMR^2, \text{ with } 0 < c \leq 1. \qquad \textbf{(10.11)}$$

يمكن حساب الثابت c من الشكل الهندسي للجسم الدوار، وتتراوح قيمته دائمًا بين صفر وواحد. وكلما زاد دفع حجم الكتلة نحو محور الدوران قلت قيمة الثابت c. وإذا وقعت الكتلة كلها على الحافة الخارجية للجسم، كما هو الحال في الطوق مثلًا، فإن c تقترب من القيمة 1. (من الناحية الرياضية، هذه المعادلة هي نتيجة لنظرية القيمة المتوسطة، التي ربما درستها في التفاضل والتكامل). وبالنسبة إلى أسطوانة تدور حول محور تماثلها، فإن $c_{\text{cyl}} = \frac{1}{2}$، وبالنسبة إلى جسم كروي، فإن $c_{\text{sph}} = \frac{2}{5}$، كما رأينا.

يوضح الشكل 10.10 أجسامًا مختلفة تدور حول محور يمرّ عبر مركز الكتلة. ويوضح الجدول 10.1 عزم القصور الذاتي لكل جسم فضلاً عن الثابت c من المعادلة 10.11 حيثما أمكن.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



الشكل 10.10 اتجاه محور الدوران الذي يمرّ عبر مركز الكتلة وتحديد أبعاد الأجسام الواردة في الجدول 10.1.

الجدول 10.1 عزم القصور الذاتي وقيمة الثابت c للأجسام الموضحة في الشكل 10.10. جميع الأجسام لها كتلة M

الجسم	I	c
a) أسطوانة صلبة أو قرص	$\frac{1}{2}MR^2$	$\frac{1}{2}$
b) أسطوانة سميكة جوفاء أو عجلة	$\frac{1}{2}M(R_1^2+R_2^2)$	
c) أسطوانة جوفاء أو طوق	MR^2	1
d) جسم كروي صلب	$\frac{2}{5}MR^2$	$\frac{2}{5}$
e) جسم كروي أجوف	$\frac{2}{3}MR^2$	$\frac{2}{3}$
f) ساق رفيع	$\frac{1}{12}ML^2$	
g) أسطوانة صلبة عمودية على محور التماثل	$\frac{1}{4}MR^2+\frac{1}{12}Mh^2$	
h) لوحة مستطيلة مسطحة	$\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$	
i) لوحة مربعة مسطحة	$\frac{1}{6}Ma^2$	

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 10.1 الطاقة الحركية الدورانية للأرض

افترض أن الأرض جسم كروي صلب ذو كثافة ثابتة، كتلته 5.98×10^{24} kg ونصف قطره 6370 km.

المسألة

ما عزم القصور الذاتي للأرض، مع اعتبار أنها تدور حول محورها، وما الطاقة الحركية لهذا الدوران المحوري؟

الحل

بما أنه سيتم تقريب الأرض باستخدام جسم كروي ذي كثافة ثابتة، فإن عزم القصور الذاتي لها سيكون $I = \frac{2}{5}MR^2$.

بالتعويض بقيم الكتلة ونصف القطر، نحصل على

$$I = \tfrac{2}{5}MR^2 = \tfrac{2}{5}(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})(6.37 \times 10^{6}\ \text{m})^2 = 9.71 \times 10^{37}\ \text{kg m}^2.$$

التردد الزاوي لدوران الأرض هو

$$\omega = \frac{2\pi}{1\ \text{day}} = \frac{2\pi}{86,164\ \text{s}} = 7.29 \times 10^{-5}\ \text{rad/s}.$$

(لاحظ أننا استخدمنا اليوم الفلكي هنا، انظر المثال 9.3).

باستخدام نتيجة قيمة عزم القصور الذاتي والتردد الزاوي، يمكننا إيجاد الطاقة الحركية لدوران الأرض:

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = 0.5(9.71 \times 10^{37}\ \text{kg m}^2)(7.29 \times 10^{-5}\ \text{rad/s})^2 = 2.58 \times 10^{29}\ \text{J}.$$

والآن سنقارن هذا بالطاقة الحركية لحركة الأرض حول الشمس. في الوحدة 9، حسبنا السرعة المدارية للأرض وكانت $v = 2.97 \times 10^{4}$ m/s ومن ثم، فإن الطاقة الحركية لحركة الأرض حول الشمس هي

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = 0.5(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})(2.97 \times 10^{4}\ \text{m/s})^2 = 2.64 \times 10^{33}\ \text{J},$$

وهي أكبر من الطاقة الحركية للدوران المحوري بمعامل يزيد عن 10,000.

نظرية المحور الموازي

لقد حددنا عزم القصور الذاتي لمحور دوران محوري عبر مركز كتلة جسم ما، ولكن ما عزم القصور الذاتي للدوران حول محور لا يمرّ عبر مركز الكتلة؟ تجيب **نظرية المحور الموازي** عن هذا السؤال. توضح النظرية أنه يمكن تحديد عزم القصور الذاتي $I_{\|}$ لدوران جسم ذي كتلة m حول محور يقع على مسافة d من مركز كتلة الجسم وموازٍ لمحور يمرّ عبر مركز الكتلة، حيث يكون عزم القصور الذاتي I، عن طريق

$$I_{\|} = I_{cm} + Md^2. \tag{10.12}$$

الاشتقاق 10.3 نظرية المحور الموازي

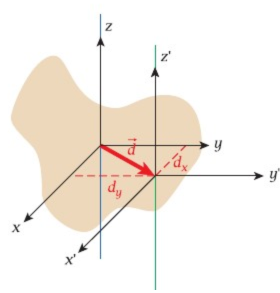
في هذا الاشتقاق، فكّر في الجسم الموجود في الشكل 10.11. افترض أننا حسبنا بالفعل عزم القصور الذاتي لدوران هذا الجسم حول المحور z، والذي يمرّ عبر مركز كتلة هذا الجسم. فإن نقطة الأصل للنظام الإحداثي xyz توجد عند مركز الكتلة، ويكون المحور z هو محور الدوران. ويمكن وصف أي محور موازٍ لمحور الدوران عن طريق إجراء تحويل بسيط في المستوى xy المشار إليه في الشكل بالمتجه $\vec{d}$ مع المكونات d_x وd_y.

إذا قمنا بنقل نظام الإحداثيات في المستوى xy، بحيث يكون المحور الرأسي الجديد، وهو المحور z' متزامنًا مع محور الدوران الجديد، فإن التحول من الإحداثيات xyz إلى الإحداثيات الجديدة $x'y'z'$ يُحدد من خلال

$$x' = x - d_x, \quad y' = y - d_y, \quad z' = z.$$

لحساب عزم القصور الذاتي للجسم الذي يدور حول المحور الجديد في النظام الإحداثي الجديد، يمكننا استخدام المعادلة 10.6، والتي تعتبر أكثر المعادلات عمومية، والتي تنطبق على حالة عدم ثبات الكثافة الكتلية:

$$I_{\|} = \int_V (r_{\perp}')^2 \rho\, dV. \tag{i}$$



الشكل 10.11 الإحداثيات والمسافات لنظرية المحور الموازي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

بناء على التحول الإحداثي،

$$\begin{aligned}(r_\perp')^2 &= (x')^2 + (y')^2 = (x-d_x)^2 + (y-d_y)^2\\ &= x^2 - 2xd_x + d_x^2 + y^2 - 2yd_y + d_y^2\\ &= (x^2+y^2) + (d_x^2 + d_y^2) - 2xd_x - 2yd_y\\ &= r_\perp^2 + d^2 - 2xd_x - 2yd_y.\end{aligned}$$

(ضع في اعتبارك أن $\vec{r}_\perp$ يقع في المستوى xy بسبب الطريقة التي أنشأنا بها النظام الإحداثي). والآن يمكننا التعويض بهذا التعبير عن $(r_\perp')^2$ في المعادلة (i) والحصول على

$$\begin{aligned}I_\parallel &= \int_V (r_\perp')^2\,\rho\,dV\\ &= \int_V r_\perp^2 \rho\,dV + d^2\int_V \rho\,dV - 2d_x\int_V x\rho\,dV - 2d_y\int_V y\rho\,dV.\end{aligned} \tag{ii}$$

يحدد التكامل الأول في المعادلة (ii) عزم القصور الذاتي للدوران حول مركز الكتلة، والذي نعرفه بالفعل. ويكون التكامل الثاني مساويًا للكتلة (قارن مع المعادلة 10.7). أما التكاملان الثالث والرابع فقد تم تقديمهما في الوحدة 8 ويحددان مواقع الإحداثيين x وy لمركز الكتلة عند قسمتهما على الكتلة. ولكن من حيث التركيب، فإنهما سيساويان صفرًا، لأننا وضعنا نقطة الأصل للنظام الإحداثي xyz في مركز الكتلة. ومن ثَمّ، نحصل على نظرية المحور الموازي:

$$I_\parallel = I_{cm} + d^2M.$$

حيث M هي كتلة الجسم الكلية و Icm هو عزم القصور الذاتي للجسم حول مركز الكتلة .

لاحظ أنه بناء على المعادلتين 10.11 و10.12 يمكن كتابة عزم القصور الذاتي بدلالة الدوران حول محور تقريبي موازٍ لمحور يمرّ عبر مركز الكتلة بالشكل التالي

$$I = (cR^2 + d^2)M, \text{ with } 0 < c \le 1.$$

هنا R هي المسافة العمودية القصوى لأي جزء في الجسم من محور دورانه حتى مركز الكتلة، وd هي مسافة محور الدوران من محور موازٍ حتى مركز الكتلة.

سؤال الاختبار الذاتي 10.1

وضّح أن عزم القصور الذاتي لساق رفيع كتلته m وطوله L يدور حول أحد طرفيه هو $I = \frac{1}{3}mL^2$.

10.3 التدحرج دون انزلاق

حركة التدحرج هي حالة خاصة للحركة الدورانية تقوم بها أجسام دائرية نصف قطرها R وتتحرك عبر سطح من دون انزلاق. وفي حركة التدحرج، يمكننا ربط الكميات الخطية والزاوية من خلال معرفة أن المسافة الخطية التي يقطعها مركز الكتلة مماثلة لطول القوس المقابل لمحيط الجسم، كما يوضّح الجدول 9.1. ومن ثَمّ، تكون العلاقة بين المسافة الخطية، r، التي قطعها مركز الكتلة وزاوية الدوران هي

$$r = R\theta.$$

مع تحديد مشتقة الزمن ومراعاة أن نصف القطر R يبقى ثابتًا، يمكننا الحصول على العلاقات بين السرعات والعجلات الخطية والزاوية:

$$v = R\omega$$

و

$$a = R\alpha.$$

الطاقة الحركية الكلية لجسم في حركة التدحرج هي مجموع طاقاته الحركية الانتقالية (الحركة الخطية لمركز كتلته) والدورانية (الدوران حول مركز الكتلة):

$$K = K_{trans} + K_{rot} = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2. \tag{10.13}$$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مراجعة المفاهيم 10.2

جسم كروي صلب وأسطوانة صلبة وأسطوانة جوفاء متماثلة من حيث الكتلة ونصف القطر وتتدحرج بالسرعة نفسها. ما العبارة الصحيحة مما يلي؟

a) الجسم الكروي الصلب به أعلى طاقة حركية.

b) الأسطوانة الصلبة بها أعلى طاقة حركية.

c) الأسطوانة الجوفاء بها أعلى طاقة حركية.

d) جميع الأجسام الثلاثة لها طاقة حركية مماثلة.

يمكن التعويض عن ω من $v = R\omega$ وعن I من المعادلة 10.11:

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$
$$= \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}(cR^2m)\left(\frac{v}{R}\right)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}mv^2c \Rightarrow$$
$$K = (1+c)\tfrac{1}{2}mv^2, \qquad (10.14)$$

حيث $0 < c \leq 1$ هو الثابت المحدد في المعادلة 10.11. توضح المعادلة 10.14 أن الطاقة الحركية لجسم متدحرج تكون دائمًا أكبر من تلك الخاصة بجسم منزلق، بشرط أن يكون لهما الكتلة والسرعة الخطية أنفسهما.

مع تعبير للطاقة الحركية التي تتضمن المساهمة الناتجة عن الدوران، يمكننا تطبيق مفهوم حفظ الطاقة الميكانيكية الكلية (مجموع الطاقة الحركية وطاقة الوضع) التي طبقناها في الوحدة 6.

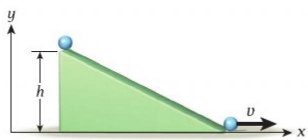
مسألة محلولة 10.1 تدحرج جسم كروي على مستوى مائل

المسألة

جسم كروي صلب كتلته 5.15 kg ونصف قطره 0.340 m يبدأ الحركة من السكون على ارتفاع 2.10 m فوق قاعدة مستوى مائل ويتدحرج لأسفل دون انزلاق تحت تأثير الجاذبية. ما السرعة الخطية لمركز كتلة الجسم الكروي عندما يغادر المستوى المائل ويتدحرج على سطح أفقي؟

الحل

فكِّر كان الجسم الكروي ساكنًا في أعلى المستوى المائل. وعند تلك النقطة، يكون للجسم الكروي طاقة وضع جذبية ولا تكون له طاقة حركية. وعندما يبدأ الجسم الكروي في التدحرج يخسر طاقة الوضع ويكسب طاقة حركية من الحركة الخطية وطاقة حركية من الدوران. وعند بلوغ قاع المستوى المائل، تكون قد تحولت طاقة الوضع الأصلية بأكملها إلى طاقة حركية. وترتبط الطاقة الحركية للحركة الخطية بالطاقة الحركية للدوران من خلال نصف قطر الجسم الكروي.



الشكل 10.12 جسم كروي يتدحرج إلى الأسفل على مستوى مائل.

ارسم يوضح الشكل 10.12 رسمًا للمسألة بحيث يكون صفر الإحداثي y في قاع المستوى المائل.

ابحث في قمة المستوى المائل، يكون الجسم الكروي ساكنًا ومن دون طاقة حركية. في القمة، تكون طاقته طاقة وضع، mgh:

$$E_{\text{top}} = K_{\text{top}} + U_{\text{top}} = 0 + mgh = mgh,$$

حيث m هي كتلة الجسم الكروي، وh هو ارتفاع الجسم الكروي فوق السطح الأفقي، وg هي العجلة الناتجة عن الجاذبية. وفي قاع المستوى المائل، حيث يبدأ الجسم الكروي في التدحرج على السطح الأفقي، تكون طاقة الوضع صفرًا. وبناء على المعادلة 10.14 يكون للجسم الكروي طاقة حركية كلية (مجموع الطاقة الحركية الانتقالية والدورانية) مقدارها $(1+c)\frac{1}{2}mv^2$. ومن ثَمّ، تكون الطاقة الكلية في قاع المستوى المائل هي

$$E_{\text{bottom}} = K_{\text{bottom}} + U_{\text{bottom}} = (1+c)\tfrac{1}{2}mv^2 + 0 = (1+c)\tfrac{1}{2}mv^2.$$

لأن عزم القصور الذاتي للجسم الكروي هو $I = \frac{2}{5}mR^2$ (انظر المعادلة 10.10)، فإن قيمة الثابت c تساوي $\frac{2}{5}$ في هذه الحالة.

بسِّط بسبب حفظ الطاقة، فإن الطاقة في قمة المستوى المائل تساوي الطاقة الموجودة في القاع:

$$mgh = (1+c)\tfrac{1}{2}mv^2$$

بحل السرعة الخطية المتجهة نحصل على

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+c}}.$$

بالنسبة إلى جسم كروي، $c = \frac{2}{5}$ كما هو موضح أعلاه، ولذا فإن سرعة الجسم المتدحرج في هذه الحالة هي

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{2}{5}}} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}.$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

احسب عند التعويض بالقيم العددية، نحصل على

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}(9.81 \text{ m/s}^2)(2.10 \text{ m})} = 5.42494 \text{ m/s}.$$

قرّب عند تقريب النتيجة التي توصلنا إليها بثلاثة أرقام مهمة نحصل على

$$v = 5.42 \text{ m/s}.$$

تحقّق ثانية إذا لم يتدحرج الجسم الكروي، ولكن انزلق على المستوى المائل دون احتكاك، فإن السرعة النهائية ستكون

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(2.10 \text{ m})} = 6.42 \text{ m/s},$$

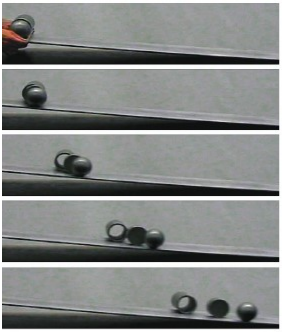
وهي أكبر من السرعة التي وجدناها للجسم الكروي المتدحرج. يبدو من المعقول أن القيمة النهائية للسرعة الخطية للجسم الكروي المتدحرج أقل بعض الشيء من القيمة النهائية للسرعة الخطية للجسم الدوار المنزلق، وذلك لأن بعض طاقة الوضع الأولية الخاصة بالجسم الكروي المتدحرج تحولت إلى طاقة حركية دورانية. ولا تكون هذه الطاقة متاحة بعد ذلك لتصبح طاقة حركية للحركة الخطية لمركز كتلة الجسم الكروي. لاحظ أنه لم تكن هناك حاجة إلى الكتلة أو نصف قطر الجسم الكروي في هذا الحساب.

الصيغة المشتقة في المسألة المحلولة 10.1 لإيجاد سرعة جسم كروي متدحرج في قاع المستوى المائل.

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+c}} \quad (10.15)$$

هي نتيجة عامة إلى حد ما. ويمكن تطبيقها على مواقف مختلفة، حيث يتم تحويل طاقة الوضع الجذبية إلى طاقة حركية انتقالية ودورانية لجسم متدحرج.

أوضح العالم جاليليو جاليلي أن عجلة جسم في السقوط الحرّ تعتمد على كتلته. وينطبق هذا أيضًا على جسم يتدحرج على مستوى مائل. كما رأينا في المسألة المحلولة 10.1 والتي تقودنا إلى المعادلة 10.15 وفي حين أن الكتلة الكلية للجسم المتدحرج غير مهمة، نجد أن توزيع الكتلة بداخله مهمة. من الناحية الرياضية، ينعكس ذلك في المعادلة 10.15 من خلال معرفة أن الثابت c من المعادلة 10.11، الذي تم حسابه من التوزيع الهندسي للكتلة، يظهر في المقام. يُظهر المثال التالي بوضوح أن توزيع الكتلة في الأجسام المتدحرجة له أهمية.



الشكل 10.13 سباق بين جسم كروي وأسطوانة صلبة وأسطوانة جوفاء لها الكتلة ونصف القطر أنفسهما إلى الأسفل على مستوى مائل. أُخذت هذه اللقطات على فواصل زمنية قدرها 0.5 s.

مراجعة المفاهيم 10.3

افترض أنّنا أعدنا السباق الموضح في المثال 10.2، مع إضافة علبة صودا غير مفتوحة. في أي ترتيب ستكون العلبة؟

a) الأول
b) الثاني
c) الثالث
d) الرابع

مثال 10.2 سباق التدحرج على سطح مائل

المسألة

جسم كروي صلب وأسطوانة صلبة وأسطوانة جوفاء (أنبوب)، كلها بالكتلة m نفسها ولها نصف القطر الخارجي نفسه R، تم تحريرها من وضع السكون في قمة السطح المائل وبدأت في التدحرج دون انزلاق. فما ترتيب وصولها إلى قاع السطح المائل؟

الحل

يمكن الإجابة عن هذا السؤال باستخدام قوانين الطاقة فقط. حيث إنه تم حفظ الطاقة الميكانيكية الكلية لكل من الأجسام الثلاثة خلال حركة التدحرج. يمكننا أن نكتب لكل جسم

$$E = K + U = K_0 + U_0.$$

تم ترك الأجسام من وضع السكون. لذلك $K_0 = 0$ وبالنسبة إلى طاقة الوضع، يمكننا استخدام $U = mgh$ مرة أخرى. وللحصول على الطاقة الحركية، نستخدم المعادلة 10.14 ومن ثَمّ نحصل على

$$K_{\text{bottom}} = U_{\text{top}} \Rightarrow (1+c)\tfrac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+c}},$$

وهي نفسها صيغة المعادلة 10.15.

نعلم أنه تم شطب كتلة الجسم ونصف قطره من المعادلة. ومع ذلك، يمكننا أخذ ملاحظة مهمة أخرى. يظهر الثابت c الذي تم تحديده عن طريق

– يُتبع

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

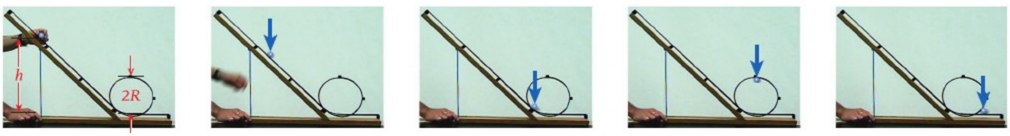
توزيع الكتلة في المقام. ونعلم بالفعل قيمة c للأجسام المتدحرجة الثلاثة: $c_{\text{sphere}}=\frac{2}{5}$ و $c_{\text{cylinder}}=\frac{1}{2}$، و $c_{\text{tube}}\approx 1$. وبما أن ثابت الجسم الكروي هو الأصغر، فإن سرعة الجسم الكروي لأي ارتفاع معين h ستكون الأكبر، بما يعني أن الجسم الكروي سيفوز بالسباق. في الفيزياء، بما أن الأجسام الثلاثة لها الكتلة نفسها فإنه سيحدث لها التغير نفسه في طاقة الوضع. وستكون الطاقات الحركية النهائية متساوية. وبناءً على ذلك، فإن الجسم الذي له قيمة c أعلى سيكون له طاقة حركية أعلى نسبيًا في الدوران المحوري. ومن ثمّ يكون له طاقة حركية انتقالية أقل وسرعة خطية أقل. وستأتي الأسطوانة الصلبة في المرتبة الثانية في السباق، ويليها الأنبوب. يوضح الشكل 10.13 لقطات من تجربة مسجلة بالفيديو تثبت الخلاصات التي توصلنا إليها.

سؤال الاختبار الذاتي 10.2

هل يمكنك شرح سبب انتهاء علبة المياه الغازية في المرتبة المحدّدة في مراجعة المفاهيم 10.3؟

مسألة محلولة 10.2 تدحرج كرة عبر طوق

حُرر جسم كروي صلب من وضع السكون وتدحرج على سطح مائل ثم في طوق دائري نصف قطره R (انظر الشكل 10.14). افترض أن نصف قطر الجسم الكروي أصغر بكثير من نصف قطر الطوق.



الشكل 10.14 يتدحرج جسم كروي إلى الأسفل على مستوى مائل وداخل طوق. أُخذت هذه اللقطات على فواصل زمنية قدرها $0.25\ s$.

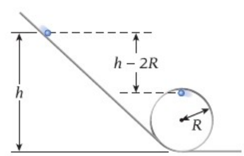
المسألة

ما أدنى ارتفاع h يجب تحرير الجسم الكروي من عنده حتى لا يخرج عن المسار عندما يكون داخل الطوق؟

الحل

فكِّر عند تحرير الجسم الكروي من وضع السكون على ارتفاع h على السطح المائل، ستكون له طاقة وضع جذبية ولن تكون له طاقة حركية. وكلما تدحرج الجسم الكروي لأسفل على السطح المائل وحول الطوق، تتحول طاقة الوضع الجذبية إلى طاقة حركية. وفي قمة الطوق، أسقط الجسم الكروي مسافة $h-2R$. يتمثل مفتاح حل هذه المسألة في إدراك أنه في قمة الطوق يجب أن تكون العجلة المركزية مساوية للعجلة الناتجة عن الجاذبية أو أكبر منها. (عندما تكون هذه العجلات متساوية، يحدث "انعدام وزن" كما هو موضح في المسألة المحلولة 9.1. وعندما تكون العجلة المركزية أكبر، يجب وجود قوة داعمة إلى الأسفل، والتي يمكن أن يوفرها المسار. وعندما تكون العجلة المركزية أقل، يجب وجود قوة داعمة إلى الأعلى، والتي لا يمكن أن يوفرها المسار، ومن ثَمّ يخرج الجسم الكروي عن المسار). العنصر المجهول هنا هو السرعة v في قمة الطوق. ومرة أخرى، يمكننا استخدام قوانين حفظ الطاقة لحساب أدنى سرعة متجهة مطلوبة، ومن ثمّ نحصل على أدنى ارتفاع مطلوب للبدء لكي يظل الجسم الكروي في المسار.

ارسم يوضّح الشكل 10.15 رسمًا للجسم الكروي وهو يتدحرج على السطح المائل وفي الطوق.



الشكل 10.15 يتدحرج شكل كروي على مستوى مائل وفي حلقة.

ابحث عند تحرير الجسم الكروي، يكون لديه طاقة وضع $U_0 = mgh$ وتكون الطاقة الحركية له صفرًا. في قمة الطوق، تكون طاقة الوضع $U_0 = mg2R$، وتكون الطاقة الحركية الكلية، بناءً على المعادلة 10.14، $K=(1+c)\frac{1}{2}mv^2$، حيث $c_{\text{sphere}}=\frac{2}{5}$. إذًا، نعلم من قانون حفظ الطاقة الميكانيكية أنه

$$E = K + U = (1+c)\tfrac{1}{2}mv^2 + mg2R = K_0 + U_0 = mgh. \qquad \text{(i)}$$

في قمة الطوق، يجب أن تكون العجلة المركزية a_c، مساوية أو أكبر من العجلة الناتجة عن الجاذبية، g:

$$g \le a_c = \frac{v^2}{R}. \qquad \text{(ii)}$$

بسِّط يمكننا حل المعادلة (i) الخاصة بـ v^2:

$$v^2 = \frac{2g(h-2R)}{1+c}.$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

وإذا عوّضنا بهذا التعبير عن v^2 في المعادلة (ii)، نحصل على

$$g \leq \frac{2g(h-2R)}{R(1+c)}.$$

ويؤدي ضرب طرفي هذه المعادلة في مقام الكسر على الجانب الأيمن إلى

$$R(1+c) \leq 2h - 4R.$$

ومن ثَمّ نحصل على

$$h \geq \frac{5+c}{2}R.$$

احسب هذه النتيجة صالحة لأي جسم متدحرج، له الثابت c الذي تم تحديده من الشكل الهندسي للجسم. في هذه المسألة، لدينا جسم كروي صلب، لذلك فإن $c = \frac{2}{5}$. ومن ثمّ، تكون النتيجة

$$h \geq \frac{5+\frac{2}{5}}{2}R = \frac{27}{10}R.$$

قرِّب وُصفت حالة المسألة هذه بدلالة المتغيرات لا القيم العددية. لذا يمكننا اقتباس النتيجة تمامًا على أنها

$$h \geq 2.7R.$$

تحقّق ثانية إذا لم يكن الجسم الكروي يتدحرج ولكنه ينزلق دون احتكاك، فيمكننا أن نساوي الطاقة الحركية للجسم الكروي في قمة الطوق مع التغير الذي حدث في طاقة الوضع الجذبية:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mg(h-2R).$$

يمكننا حينئذ التعبير عن عدم التساوي بين عجلة الجاذبية والعجلة المركزية الموضحة في المعادلة (ii) كما يلي:

$$g \leq a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{2g(h-2R)}{R}.$$

وبحل معادلة h هذه نحصل على

$$h \geq \frac{5}{2}R = 2.5R.$$

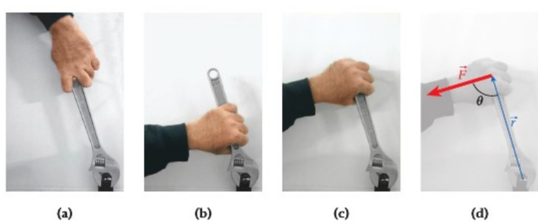
هذا الارتفاع المطلوب لجسم كروي منزلق يكون أقل قليلًا من الارتفاع الذي توصلنا إليه لجسم كروي متدحرج. ويجب أن نتوقع الحاجة إلى طاقة أقل، في صورة طاقة وضع جذبية، لبقاء الجسم الكروي في المسار في حال عدم تدحرجه لأن طاقته الحركية ستكون قد تحولت بالكامل إلى طاقة انتقالية. لذلك فإن النتيجة التي توصلنا إليها لبقاء الجسم الكروي المتدحرج في مساره تبدو معقولة.

10.4 عزم الدوران

تعلمنا حتى الآن في دراسة القوى أن القوة قد تتسبب في حركة خطية للجسم، والتي يمكن وصفها بدلالة حركة مركز كتلة الجسم. ومع ذلك، لم نتطرق بعد إلى أحد الأسئلة العامة وهو: أين تقع متجهات القوة العاملة على جسم غير نقطي في مخطط لجسم حر؟ يُمكن بذل قوة على جسم غير نقطي في نقطة بعيدة عن مركز كتلته، مما قد يتسبب في دوران الجسم وكذلك تحركه خطيًا.

ذراع العزم

انظر إلى اليد التي تحاول استخدام مفتاح ربط لفكّ المسمار الموضح في الشكل 10.16. من الواضح أنه سيكون من الأسهل لفّ المسمار في الشكل 10.16c، وأصعب قليلًا في الشكل 10.16b ومستحيلًا تمامًا في الشكل 10.16a. يوضّح هذا المثال أن مقدار القوة ليس الكميّة الوحيدة ذات الصلة. فالمسافة العمودية



الشكل 10.16 (a)–(c) ثلاث طرق لاستخدام مفتاح الربط لفك مسمار. (d) القوة $\vec{F}$ وذراع العزم $\vec{r}$، وزاوية θ بينهما.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

من خط حركة القوة إلى محور الدوران، التي تسمى **ذراع العزم**، مهمة أيضًا. بالإضافة إلى ذلك، فإن زاوية استخدام القوة بالنسبة إلى ذراع العزم مهمة كذلك. في الجزأين (b) و(c) في الشكل 10.16، تساوي هذه الزاوية 90°. (سيكون لزاوية تساوي 270° التأثير نفسه، لكن عندئذ ستعمل القوة في الاتجاه المقابل). لن تؤدي زاوية تساوي 180° أو 0° (الشكل 10.16a) إلى لفّ المسمار.

تُقاس هذه الاعتبارات من خلال مفهوم عزم الدوران، τ. **عزم الدوران** (ويسمى أيضًا *العزم*) هو ناتج الضرب الاتجاهي لمتجه القوة $\vec{F}$ ومتجه الموقع $\vec{r}$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{10.16}$$

يُقاس متجه الموقع $\vec{r}$ عندما تكون نقطة الأصل عند محور الدوران. يُشير الرمز × إلى **الضرب الاتجاهي**، أو *ناتج الضرب التبادلي*. (قدّمنا نواتج الضرب الاتجاهي في الوحدة 1، وقد ترغب في الرجوع إليها للمراجعة).

وحدة النظام الدولية لعزم الدوران هي N m، ويجب عدم خلطها مع وحدة الطاقة، وهي الجول (J = N m)

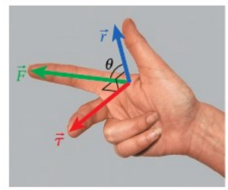
$$[\tau] = [F] \cdot [r] = \text{N m}.$$

في الوحدات الإنجليزية، يُعبر عن عزم الدوران غالبًا بالقدم-الرطل (ft-lb).

مقدار عزم الدوران هو حاصل مقدار القوة والمسافة إلى محور الدوران (مقدار متجه الموقع أو ذراع العزم) مضروبًا في جيب الزاوية بين متجه القوة ومتجه الموقع (انظر الشكل 10.17):

$$\tau = rF \sin\theta. \tag{10.17}$$

يُمكن أيضًا أن تكون الكميات الزاوية متجهات، وتُسمى *المتجهات المحورية*. (المتجه المحوري هو متجه يُشير إلى محور الدوران). ويُعد عزم الدوران مثالًا على المتجه المحوري ونحصل على مقداره بالمعادلة 10.17. ونحصل على اتجاه عزم الدوران باستخدام قاعدة اليد اليُمنى (الشكل 10.17). لاحظ أنّ قواعد اليد اليُمنى تنطبق على كافة نواتج الضرب الاتجاهي! يُشير عزم الدوران في الاتجاه العمودي إلى المستوى الذي يقطعه متجه القوة ومتجه الموقع. ومن ثَمّ إذا كان متجه الموقع يُشير باتجاه إصبع الإبهام ومتجه القوة يشير باتجاه إصبع السبابة، فإن اتجاه متجه عزم الدوران المحوري هو اتجاه الإصبع الوسطى، كما يوضّح الشكل 10.17. لاحظ أن متجه عزم الدوران يكون عموديًا على كل من متجه القوة ومتجه الموقع.



الشكل 10.17 قاعدة اليد اليمنى لاتجاه عزم الدوران لمتجه قوة وموقع محدد.

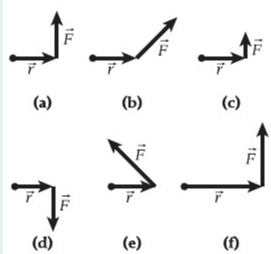
من خلال التعريف الرياضي لعزم الدوران ومقداره وعلاقته بمتجه القوة ومتجه الموقع والزاوية النسبية لهما، يُمكننا فهم السبب في أن النهج الموضح في الجزء (c) من الشكل 10.16 ينتج عنه أقصى عزم دوران لمقدار قوة محدد، بينما ينتج عن النهج الموضح في الجزء (a) عزم دوران قيمته صفر. ومن ثَمّ نعلم أن مقدار عزم الدوران هو العامل الحاسم في تحديد مدى سهولة أو صعوبة فك (أو ربط) المسمار.

إن عزم الدوران حول أي محور دوران ثابت قد يكون في اتجاه عقارب الساعة أو عكس اتجاه عقارب الساعة. كما يوضح متجه القوة في الشكل 10.16d، فإن عزم الدوران المتولّد من اليد التي تسحب مفتاح الربط سيكون في عكس اتجاه عقارب الساعة. تُعرّف **محصّلة الدوران** بأنها الفرق بين مجموع كل قيم العزم في اتجاه عقارب الساعة ومجموع كل قيم العزم في عكس اتجاه عقارب الساعة:

$$\tau_{\text{net}} = \sum_i \tau_{\text{counterclockwise},i} - \sum_j \tau_{\text{clockwise},j}$$

مراجعة المفاهيم 10.4

اختر مزيجًا من متجه الموقع، $\vec{r}$، ومتجه القوة، $\vec{F}$ ينتج عزم الدوران لأعلى مقدار حول النقطة التي تشير إليها النقطة السوداء.



10.5 قانون نيوتن الثاني للدوران المحوري

في القسم 10.1، تعلمنا أن عزم القصور الذاتي I هو المكافئ الدوراني للكتلة. وتعلمنا من الوحدة 4 أن ناتج الكتلة والعجلة الخطية هو محصلة القوة المؤثرة في الجسم، بحسب تعبير قانون نيوتن الثاني، $F_{\text{net}} = ma$. ما المكافئ لقانون نيوتن الثاني للحركة الدورانية؟

سنبدأ بجسيم نقطي للكتلة M متحركًا في دائرة حول محور ما على مسافة R من المحور. إذا ضربنا عزم القصور الذاتي للدوران حول المحور بموازاة مركز الكتلة في العجلة الزاوية، فسنحصل على

$$I\alpha = (R^2 M)\alpha = RM(R\alpha) = RMa = RF_{\text{net}}.$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

للحصول على هذه النتيجة، استخدمنا أولًا المعادلة 10.11 حيث $c = 1$، ثم العلاقة بين العجلة الزاوية والخطية للحركة في دائرة، ثم قانون نيوتن الثاني. ومن ثَمّ، يكون ناتج ضرب عزم القصور الذاتي والعجلة الزاوية متناسبًا مع ناتج ضرب كمية المسافة وكمية القوة. تعلمنا في القسم 10.4 أن ناتج الضرب هذا هو عزم الدوران، τ. وبهذا، يُمكننا كتابة الصيغة التالية من قانون نيوتن الثاني للحركة الدورانية:

$$\tau = I\alpha. \qquad (10.18)$$

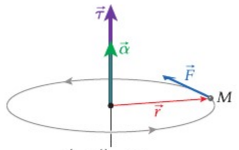
بجمع المعادلتين 10.16 و10.18 نحصل على

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{net}} = I\vec{\alpha}. \qquad (10.19)$$

معادلة الحركة الدورانية هذه مشابهة لقانون نيوتن الثاني، $\vec{F} = m\vec{a}$ للحركة الخطية. يُظهر الشكل 10.18 العلاقة بين القوة والموقع وعزم الدوران والعجلة الزاوية لجسيم نقطي يتحرك حول محور دوران. لاحظ أن المعادلة 10.19 تنطبق فقط على جسيم نقطي في مدار دائري. ويبدو معقولًا أن هذه المعادلة تنطبق على عزم القصور الذاتي لجسم غير نقطي بوجه عام، لكننا لم نثبت ذلك بعد. سنعود لاحقًا في هذه الوحدة إلى هذه المعادلة.

يشترط قانون نيوتن الأول أنه في غياب محصِّلة القوة، لا يمرّ الجسم بأي عجلة ومن ثَمّ لا يحدث تغير في السرعة المتجهة. ومكافئ قانون نيوتن الأول للحركة الدورانية أن الجسم الذي تنعدم محصلة عزم دورانه لا توجد له عجلة زاوية وبهذا لا يحدث تغير في السرعة الزاوية. ويعني هذا بقاء الأجسام ثابتة، فينبغي أن تساوي محصّلة عزم الدوران صفرًا. سنعود إلى تلك العبارة في الوحدة 11، حيث نستكشف التحرك بسرعة الاتزان السكوني.

والآن يُمكننا استخدام الصيغة الدورانية لقانون نيوتن الثاني (المعادلة 10.19) لحل المسائل المهمة للحركة الدورانية، مثل المسألة التالية.



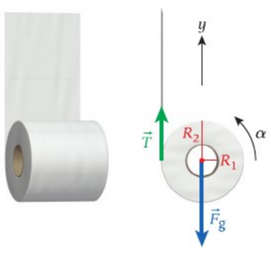
الشكل 10.18 القوة المبذولة على جسيم نقطي تنتج عزم دوران.

مثال 10.3 ورق المرحاض

قد يحدث معك الموقف التالي: تحاول أن تضع لفة جديدة من ورق المرحاض داخل حاملها. ولكن تسقط منك اللفة، وتتمكن من الإمساك بالورقة الأولى فقط. وفي طريقها إلى الأرضية، تنفك لفة ورق المرحاض، كما يوضّح الشكل 10.19a.

المسألة

كم من الوقت تستغرق لفة ورق المرحاض للاصطدام بالأرض، إذا سقطت من ارتفاع 0.73 m؟ اللفة نصف قطرها الداخلي $R_1 = 2.7$ cm، ونصف قطرها الخارجي $R_2 = 6.1$ cm وكتلتها 274 g.



(a) (b)

الشكل 10.19 (a) بسط ورق المرحاض. (b) مخطط جسم حر للفة ورق مرحاض.

الحل

بالنسبة إلى لفة ورق المرحاض الساقطة، العجلة هي $a_y = -g$. وفي الوحدة 2، تعلمنا أنه في السقوط الحر من السكون، يُحدَّد الموضع كدالة زمنية بشكل عام عن طريق $y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$. في هذه الحالة، تساوي السرعة الابتدائية صفرًا؛ إذًا $y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$. إذا وضعنا نقطة الأصل في مستوى الأرضية، فينبغي أن نجد الزمن الذي يكون عنده $y = 0$. يتضمّن هذا $y_0 = \frac{1}{2}gt^2$ للزمن الذي تستغرقه اللفّة للاصطدام بالأرض. ومن ثَمّ، فإن الزمن الذي تستغرقه اللفّة للاصطدام بالأرض في السقوط الحر هو

$$t_{\text{free}} = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2(0.73 \text{ m})}{9.81 \text{ m/s}^2}} = 0.386 \text{ s}. \qquad (i)$$

وبما أنك أمسكت بأول ورقة وانفكّ ورق المرحاض في طريقه إلى الأرض، فإن لفّة ورق المرحاض تتدحرج دون انزلاق (بالمعنى الذي عرّفناه سابقًا). لذا فإن العجلة ستكون مختلفة عن حالة السقوط الحر. بمجرد أن نعرف قيمة هذه العجلة، فإنه يُمكننا استخدام الصيغة التي تربط الارتفاع الابتدائي وزمن السقوط المماثلة للمعادلة (i).

كيف نحسب العجلة التي تحدث مع ورق المرحاض؟ مرةً أخرى، سنبدأ بمخطط للجسم الحر. يوضح الشكل 10.19b منظرًا جانبيًا للفّة ورق المرحاض كما يوضح قوة الجاذبية، $\vec{F}_g = mg(-\hat{y})$ والشد من الورقة التي تمسكها اليد، $\vec{T} = T\hat{y}$ ويسمح لنا قانون نيوتن الثاني بربط محصّلة القوة المؤثرة في ورق المرحاض بعجلة اللفّة:

$$T - mg = ma_y. \qquad (ii)$$

يتبع –

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الشد والعجلة مجهولان. لذا فإننا نحتاج إلى إيجاد معادلة ثانية لربط هاتين الكميتين يُمكن الحصول على المعادلة الثانية من الحركة الدورانية للفّة، حيث تكون محصّلة عزم الدوران هي ناتج ضرب عزم القصور الذاتي والعجلة الزاوية: $\tau = I\alpha$. عزم القصور الذاتي للفّة ورق المرحاض هو ذلك الخاص بالأسطوانة الجوفاء، $I = \frac{1}{2}m(R12 + R22)$، ويكون في المعادلة 10.9.

يُمكننا أيضًا ربط العجلات الخطيّة والزاوية عبر $a_y = R_2\alpha$. حيث R_2 نصف القطر الخارجي للفّة ورق المرحاض. نحتاج إلى تحديد الاتجاه الموجب للعجلة الزاوية، وإلا فسوف نحصل على العلامة الخاطئة ومن ثمّ نحصل على نتيجة خاطئة. للتوافق مع اختيار الاتجاه لأعلى باعتباره اتجاه y الموجب، فإننا نحتاج إلى اختيار الدوران في عكس اتجاه عقارب الساعة باعتباره الاتجاه الزاوي الموجب، كما يوضّح الشكل 10.19b.

في ما يتعلق بعزم دوران محور التماثل الخاص بلفّة ورق المرحاض، نحصل على $\tau = -R_2T$. مع اصطلاح إشارة العجلة الزاوية الموجبة التي حددناها للتوّ. لا تساهم قوة الجاذبية في عزم الدوران حول محور التماثل، لأن ذراع العزم طولها يساوي صفرًا. ويؤدي قانون نيوتن الثاني للحركة الدورانية إلى

$$\tau = I\alpha$$

$$-R_2T = \left[\tfrac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)\right]\frac{a_y}{R_2}$$

$$-T = \tfrac{1}{2}m\left(1 + \frac{R_1^2}{R_2^2}\right)a_y. \qquad \text{(iii)}$$

تشكل المعادلتان (ii) و (iii) مجموعة من معادلتين للكميّتين المجهولتين، T و a_y. وبجمعهما نحصل على

$$-mg = \tfrac{1}{2}m\left(1 + \frac{R_1^2}{R_2^2}\right)a_y + ma_y.$$

نشطب كتلة لفّة ورق المرحاض، ونجد للعجلة

$$a_y = -\frac{g}{\dfrac{3}{2} + \dfrac{R_1^2}{2R_2^2}}.$$

باستخدام القيم المُعطاة لنصف القطر الداخلي، $R_1 = 2.7\ cm$، ونصف القطر الخارجي، $R_2 = 6.1$ cm، نحصل على قيمة العجلة:

$$a_y = -\frac{9.81\ \text{m/s}^2}{\dfrac{3}{2} + \dfrac{(2.7\ \text{cm})^2}{2(6.1\ \text{cm})^2}} = -\,6.14\ \text{m/s}^2.$$

بالتعويض بهذه القيمة عن العجلة في معادلة زمن السقوط المماثل للمعادلة (i) نحصل على الإجابة

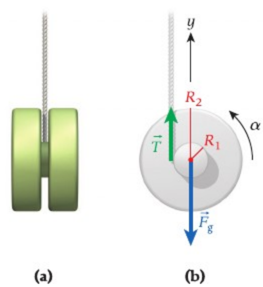
$$t = \sqrt{\frac{2y_0}{-a_y}} = \sqrt{\frac{2(0.73\ \text{m})}{6.14\ \text{m/s}^2}} = 0.488\ \text{s}.$$

وهذا أطول بمقدار 0.1 s تقريبًا من زمن السقوط الحر للفّة ورق المرحاض التي تم تحريرها من الارتفاع نفسه.

مناقشة

لاحظ أننا افترضنا عدم تغيُّر نصف القطر الخارجي للفّة ورق المرحاض أثناء فكّ الورق. بالنسبة إلى المسافة القصيرة الأقل من 1 m، فإنه قد تمت برهنة ذلك. إذا أردنا حساب الزمن الذي يستغرقه ورق المرحاض لينتشر على مسافة، 10 m مثلًا، فإننا سنحتاج إلى مراعاة التغير الذي طرأ على نصف القطر الخارجي. وبالطبع، سنحتاج إلى مراعاة تأثير مقاومة الهواء.

وتوسعًا في المثال 10.3، يُمكننا دراسة لعبة اليويو. تتكون لعبة اليويو من قرصين صلبين نصف قطرهما R_2، بينهما قرص رفيع أصغر نصف قطره R_1، مع خيط ملفوف حول القرص الأصغر (انظر الشكل 10.20). لغرض هذا التحليل، يُمكننا اعتبار أن عزم القصور الذاتي للعبة اليويو هو ذلك الخاص بالقرص الصلب البالغ نصف قطره R_2: $I = \frac{1}{2}mR^2{}_2$. مخططات الجسم الحر في الشكل 10.19b والشكل 10.20b متطابقة تقريبًا، في ما عدا نقطة واحدة: في لعبة اليويو، يؤثر شد الحبل في السطح في نصف القطر الداخلي R_1، في مقابل نصف القطر الخارجي R_2، كما هو الحال في لفة ورق المرحاض. يقتضي ذلك أن تكون العجلات الزاوية



الشكل 10.20 (a) لعبة اليويو. (b) مخطط الجسم الحر للعبة اليويو.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

والخطيّة لليويو متناسبة بعضها مع بعض، مع ثابت التناسب R_1 (بدلًا من R_2 في اللفّة). ومن ثَمّ، يكون عزم الدوران لليويو المتدحرج دون انزلاق على طول الحبل هو

$$\tau = I\alpha \Rightarrow -TR_1 = \left(\tfrac{1}{2}mR_2^2\right)\frac{a_y}{R_1}$$

$$-T = \tfrac{1}{2}m\frac{R_2^2}{R_1^2}a_y.$$

من المفيد مقارنة هذه المعادلة مع $-T = \frac{1}{2}m(1 + R_1^2/R_2^2)a_y$، التي قمنا باشتقاقها في المثال 10.3 للفّة ورق المرحاض. كلتاهما تبدو متشابهة للغاية، لكن نسبة نصفي القطر مختلفة. على الجانب الآخر، لا تتغير المعادلة المشتقة من قانون نيوتن الثاني (للإزاحة) كلتا الحالتين:

$$T - mg = ma_y.$$

بجمع هذه المعادلة إلى معادلة عزم الدوران لليويو نحصل على عجلة اليويو:

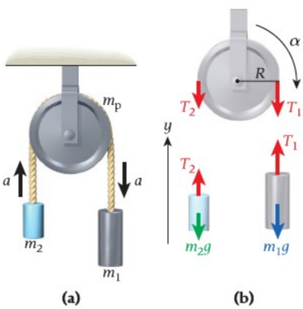
$$-mg = ma_y + \tfrac{1}{2}m\frac{R_2^2}{R_1^2}a_y \Rightarrow$$

$$a_y = -\frac{g}{1 + \frac{1}{2}\frac{R_2^2}{R_1^2}} = -\frac{2R_1^2}{2R_1^2 + R_2^2}g.$$

على سبيل المثال، إذا كان $R_2 = 5R_1$، فإن عجلة اليويو هي

$$a_y = \frac{-g}{1 + \frac{1}{2}(25)} = \frac{-g}{13.5} = -0.727\ \text{m/s}^2.$$

آلة آتوود



الشكل 10.21 آلة آتوود: (a) بيئة فيزيائية؛ (b) مخططات الجسم الحر.

تناولت الوحدة 4 آلة آتوود، التي تتكون من وَزنين لهما الكتلتان m_1 وm_2 ومتصلين بخيط أو حبل يتم توجيهه عبر بكرة. كانت الآلات التي قمنا بتحليلها في الوحدة 4 موضوعًا للحالة التي ينزلق فيها الحبل دون حدوث احتكاك على البكرة بحيث لا تدور البكرة (أو تكون البكرة عديمة الكتلة). في هذه الحالات، تكون العجلة المشتركة للكتلتين هي $a = g(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)$. ومع مفاهيم الديناميكية الدورانية، يُمكننا إلقاء نظرة أخرى على آلة آتوود ودراسة الحالة التي يُمكن فيها حدوث الاحتكاك بين الحبل والبكرة، بحيث يعمل الحبل على لفّ البكرة من دون انزلاق.

تعلمنا في الوحدة 4 أن مقدار الشد، T، لا يتغير على طول الحبل. والآن تتدخل قوى الاحتكاك للحفاظ على الحبل ملتصقًا بالبكرة، ولا يُمكننا افتراض أن الشد ثابت. بدلًا من ذلك، يُحدد شد الحبل بشكل منفصل في كل قطاع من الحبل الذي تتعلق منه إحدى الكتلتين. ومن ثَمّ توجد شدتان مختلفتان للحبل، T_1 وT_2، في مخططي الجسم الحر للكتلتين (كما يوضح الشكل 10.21b). وكما تعلمنا في الوحدة 4، يؤدي تطبيق قانون نيوتن الثاني على كل مخطط للجسم الحر على حدة إلى

$$-T_1 + m_1g = m_1a \tag{10.20}$$

$$T_2 - m_2g = m_2a. \tag{10.21}$$

استخدمنا هنا مجددًا اصطلاح الإشارة (التقريبي) بأن العجلة الموجبة ($a > 0$) هي التي تتحرك فيها m_1 إلى الأسفل وm_2 إلى الأعلى. يُشار إلى هذا الاصطلاح في مخطط الجسم الحر بواسطة اتجاه محور y الموجب.

يوضح الشكل 10.21b أيضًا مخطط جسم حر للبكرة، لكنه يتضمن فقط القوى التي يُمكن أن تتسبب في حدوث عزم دوران: وهما شدتا الحبل، T_1 وT_2. ولا تظهر قوى الجاذبية إلى الأسفل وقوى هيكل الدعم إلى الأعلى على البكرة. لا تحتوي البكرة على حركة انتقالية، لذا يكون مجموع كل القوى المؤثرة في البكرة صفرًا. ومع ذلك، لا تؤثر محصّلة عزم الدوران في البكرة. طبقًا للمعادلة 10.17، يُحدد مقدار عزم الدوران الناتج عن شد الحبل من خلال

$$\tau = \tau_1 - \tau_2 = RT_1 \sin 90° - RT_2 \sin 90° = R(T_1 - T_2). \tag{10.22}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يحتوي عزما الدوران على إشارات مختلفة، والسبب في ذلك أن أحدهما يؤثر في اتجاه عقارب الساعة والآخر في عكس اتجاه عقارب الساعة. وفقًا للمعادلة 10.18، ترتبط محصِّلة عزم الدوران بعزم القصور الذاتي للبكرة وعجلتها الزاوية بواسطة $\tau = I\alpha$. عزم القصور الذاتي للبكرة (كتلة m_p) هو ذلك الخاص بالقرص: $I = \frac{1}{2}m_pR^2$. بما أن الحبل يتحرّك عبر البكرة دون انزلاق، فإن عجلة الحبل (والكتلتين m_1 و m_2) ترتبط بالعجلة الزاوية عن طريق $\alpha = a/R$، تمامًا مثل التوافق الذي توصلنا إليه في الوحدة 9 بين العجلة الخطية والزاوية لجسيم نقطي يتحرك على محيط دائرة. بالتعويض بالتعبيرين عن عزم القصور الذاتي والعجلة الزاوية نحصل على النتيجة $\tau = I\alpha = (\frac{1}{2}m_pR^2)(a/R)$. بالتعويض بهذا التعبير عن عزم الدوران في المعادلة 10.22، نجد

$$R(T_1 - T_2) = \tau = \left(\tfrac{1}{2}m_pR^2\right)\left(\frac{a}{R}\right) \Rightarrow$$

$$T_1 - T_2 = \tfrac{1}{2}m_pa. \qquad (10.23)$$

تكوّن المعادلات 10.20 و10.21 و10.23 مجموعة من ثلاث معادلات لثلاث كميات مجهولة: قيمتي شدّ الحبل، T_1 و T_2، والعجلة، a. وأسهل طريقة لحل هذا النظام للحصول على العجلة هي جمع المعادلات. عندها نحصل على

$$m_1g - m_2g = (m_1 + m_2 + \tfrac{1}{2}m_p)a \Rightarrow$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_p}g. \qquad (10.24)$$

لاحظ أنّ المعادلة 10.24 تتطابق مع معادلة حالة البكرة عديمة الكتلة (أو الحالة التي ينزلق فيها الحبل على البكرة من دون احتكاك)، باستثناء الحد الإضافي $\frac{1}{2}m_p$ في المقام، والذي يُمثّل مساهمة البكرة في إجمالي القصور الذاتي للنظام. يعكس المعامل $\frac{1}{2}$ شكل البكرة القرصي، لأن $c = \frac{1}{2}$ في العلاقة بين عزم القصور الذاتي والكتلة ونصف القطر (المعادلة 10.11).

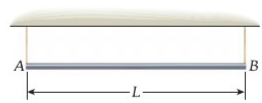
ومن ثمّ، فإننا قد أجبنا عن السؤال عما يحدث عند بذل قوة على جسم غير نقطي على مسافة بعيدة عن مركز كتلته: تنتج القوة عزم دوران وحركة خطيّة. يؤدي عزم الدوران هذا إلى الدوران المحوري، والذي أسقطناه من اعتباراتنا الأصلية لنتيجة بذل قوة على جسم ما لأننا افترضنا أن جميع القوى أثّرت في مركز كتلة الجسم.

مسألة محلولة 10.3 سقوط ساق أفقي

ساق رفيع طوله $L = 2.50$ m وكتلته $m = 3.50$ kg يتدلّى أفقيًا بواسطة زوج الحبال العمودية المربوطة بالطرفين (الشكل 10.22). بعد ذلك، يُقطع الحبل الذي يدعم الطرف B.

المسألة

ما العجلة الخطيّة للطرف B في الساق بعد قطع الحبل؟

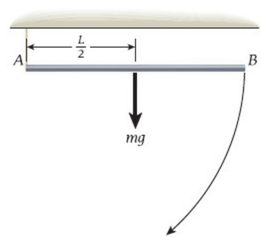


الشكل 10.22 ساق رفيع مدعوم في موضع أفقي بخيط عمودي في كلا الطرفين.

الحل

فكِّر قبل قطع الحبل، يكون الساق في حالة سكون. عند قطع الحبل الذي يدعم الطرف B، تؤثر محصّلة عزم دوران في الساق، مع وجود نقطة محوريّة في الطرف A. وعزم الدوران هذا ناتج عن قوة الجاذبية المؤثرة في العمود. يمكننا اعتبار أن كتلة الساق ستتركز في مركز كتلته، الموجود في $L/2$. يكون عزم الدوران الابتدائي حينئذ مساويًا لوزن الساق مضروبًا في ذراع العزم، وهو $L/2$. يمكن ربط العجلة الزاوية الابتدائية الناتجة بالعجلة الخطية للطرف B في الساق.

ارسم يوضح الشكل 10.23 رسمًا للساق بعد قطع الحبل.



الشكل 10.23 الساق الرفيع مباشرة بعد قطع طرف الخيط الداعم B.

ابحث عند قطع الحبل الذي يدعم الطرف B، يكون عزم الدوران، τ، على الساق ناتجًا عن قوة الجاذبية، F_g، المؤثرة في الساق مضروبة في ذراع العزم، $r_\perp = L/2$:

$$\tau = r_\perp F_g = \left(\frac{L}{2}\right)(mg) = \frac{mgL}{2}. \qquad \text{(i)}$$

تُحدد العجلة الزاوية، α، من خلال

$$\tau = I\alpha, \qquad \text{(ii)}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

بينما يُحدد عزم القصور الذاتي، I، للساق الرفيع الذي يدور حول الطرف A من خلال

$$I = \tfrac{1}{3} mL^2. \tag{iii}$$

يُمكن ربط العجلة الخطية، a، للطرف B بالعجلة الزاوية من خلال

$$a = L\alpha, \tag{iv}$$

لأن الطرف B للساق يخضع لحركة دائرية عند دوران الساق حول الطرف A.

بسِّط يُمكننا جمع المعادلتين (I) و(II) للحصول على

$$\tau = I\alpha = \frac{mgL}{2}. \tag{v}$$

بالتعويض عن I وa من المعادلتين (iii) و(iv) في المعادلة (v) نحصل على

$$I\alpha = \left(\tfrac{1}{3} mL^2\right)\left(\frac{a}{L}\right) = \frac{mgL}{2}.$$

بتقسيم المعاملات المشتركة، نحصل على

$$\frac{a}{3} = \frac{g}{2}$$

أو

$$a = 1.5g.$$

احسب بالتعويض بالقيمة العددية عن عجلة الجاذبية نحصل على

$$a = 1.5\left(9.81 \text{ m/s}^2\right) = 14.715 \text{ m/s}^2.$$

قرِّب بتقريب النتيجة إلى ثلاثة أرقام معنوية نحصل على

$$a = 14.7 \text{ m/s}^2.$$

تحقّق ثانية قد تكون هذه الإجابة مفاجئة إلى حد ما، لأنك ربما افترضت أن العجلة لا يُمكن أن تتجاوز عجلة السقوط الحر، g. إذا قُطع الحبلان في الوقت نفسه، فستكون عجلة الساق بالكامل هي $a = g$. تبدو نتيجتنا للعجلة الابتدائية للطرف B من $a = 1.5\,g$ معقولة لأن القوة الكاملة للجاذبية المؤثرة في العمود والطرف A من العمود تظل ثابتة. ومن ثَمّ، لا تكون عجلة الأطراف المتحركة ناجمة عن السقوط الحر فحسب، إذ توجد عجلة إضافية بسبب دوران الساق.

10.6 الشغل المبذول من عزم دوران

تعلمنا في الوحدة 5 أن الشغل W المبذول من قوة ما $\vec{F}$ نحصل عليه بالتكامل

$$W = \int_{x_0}^{x} F_x(x')\,dx'.$$

والآن يمكننا دراسة الشغل المبذول من عزم دوران $\vec{\tau}$.

عزم الدوران هو المكافئ الزاوي للقوة. المكافئ الزاوي للإزاحة الخطية، $d\vec{r}$، هو الإزاحة الزاوية، $d\vec{\theta}$. وبما أن كلًا من عزم الدوران والإزاحة الزاوية متجهان محوريان ويشيران في اتجاه محور الدوران، فإنه يُمكننا كتابة ناتج الضرب القياسي لهما في صورة $\vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} = \tau\, d\theta$. ومن ثمّ يكون الشغل المبذول من عزم دوران

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau(\theta')\,d\theta'. \tag{10.25}$$

في الحالة الخاصة التي يكون فيها عزم الدوران ثابتًا ولا يعتمد على θ، يُحسب تكامل المعادلة 10.25 من خلال

$$W = \tau(\theta - \theta_0) \tag{10.26}$$

قدّمت الوحدة 5 أيضًا النسخة الأولى من نظرية الشغل والطاقة الحركية: $\Delta K \equiv K - K_0 = W$. يمكن كتابة المكافئ الدوراني لعلاقة الشغل والطاقة الحركية بواسطة المعادلة 10.3 كما يلي:

$$\Delta K \equiv K - K_0 = \tfrac{1}{2} I\omega^2 - \tfrac{1}{2} I\omega_0^2 = W \tag{10.27}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

في حالة عزم الدوران الثابت، يُمكننا استخدام المعادلة 10.26 وإيجاد نظرية الشغل والطاقة الحركية لعزم الدوران الثابت:

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2-\tfrac{1}{2}I\omega_0^2=\tau(\theta-\theta_0). \qquad (10.28)$$

الشكل 10.24 ربط مسمار.

مثال 10.4 ربط مسمار

المسألة

ما إجمالي الشغل اللازم لربط المسمار الموضح في الشكل 10.24 بالكامل؟ إجمالي عدد اللفات يساوي 30.5، وقطر المسمار يساوي 0.860 cm. وقوى الاحتكاك بين الصامولة والمسمار هي ثابت 14.5 N.

الحل

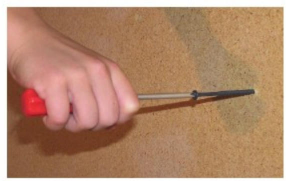
بما أن قوة الاحتكاك ثابتة وقطر المسمار ثابت، فإنه يمكننا حساب عزم الدوران اللازم للف الصامولة مباشرة:

$$\tau=Fr=\tfrac{1}{2}Fd=\tfrac{1}{2}(14.5\text{ N})(0.860\text{ cm})=0.0623\text{ N m}.$$

لحساب الشغل الكلي اللازم لربط المسمار بالكامل، فإننا نحتاج إلى معرفة الزاوية الكليّة. تتطابق كل لفة مع زاوية قدرها 2π rad. لذا فإن الزاوية الكلية في هذه الحالة تكون $\Delta\theta = 30.5(2\pi) = 191.6$ rad.
حينئذ نحصل على الشغل الكلي اللازم باستخدام المعادلة 10.26:

$$W=\tau\Delta\theta=(0.0623\text{ N m})(191.6)=11.9\text{ J}.$$

كما ترى، فإن إيجاد الشغل المبذول ليس صعبًا للغاية مع عزم دوران ثابت. ولكن في عدة حالات فيزيائية، لا يُمكن اعتبار عزم الدوران ثابتًا. ويشرح المثال التالي إحدى هذه الحالات.



الشكل 10.25 إدخال برغي في قطعة من الخشب.

مثال 10.5 تثبيت بُرغي

قوة الاحتكاك بين بُرغي والخشب تناسبية مع منطقة الاتصال بين البرغي والخشب. بما أن البرغي له قطر ثابت، فيعني ذلك أن عزم الدوران اللازم للف البرغي يزداد خطيًا بزيادة العمق الذي اخترقه البرغي داخل الخشب.

المسألة

افترض أنه يلزم 27.3 لفة لتثبيت برغي بالكامل داخل قطعة من الخشب (الشكل 10.25). يزداد عزم الدوران اللازم للف البرغي خطيًا من الصفر عند البداية إلى حد أقصى 12.4 N m عند النهاية. ما الشغل الكلي اللازم لتثبيت البرغي؟

الحل

من الواضح أن عزم الدوران هو وظيفة الزاوية في هذا الحالة، ولم يعد ثابتًا. لذا، علينا استخدام تكامل المعادلة 10.25 للوصول إلى الإجابة. سنحسب أولاً الزاوية الكلية، θ_{total}، التي يلف البرغي خلالها: $\theta_{\text{total}} = 27.3(2\pi) = 171.5$ rad. والآن نحتاج إلى إيجاد تعبير لـ $\tau(\theta)$. وتعني الزيادة الخطية بمقدار u من الصفر حتى 12.4 N m

$$\tau(\theta)=\theta\,\frac{\tau_{\max}}{\theta_{\text{total}}}.$$

والآن يُمكننا حسان التكامل كما يلي:

$$W=\int_0^{\theta_{\text{total}}}\tau(\theta')\,d\theta'=\int_0^{\theta_{\text{total}}}\theta'\frac{\tau_{\max}}{\theta_{\text{total}}}\,d\theta'=\frac{\tau_{\max}}{\theta_{\text{total}}}\int_0^{\theta_{\text{total}}}\theta'\,d\theta'=\frac{\tau_{\max}}{\theta_{\text{total}}}\,\frac{1}{2}\,\theta^2\Big|_0^{\theta_{\text{total}}}=\tfrac{1}{2}\tau_{\max}\theta_{\text{total}}.$$

وبالتعويض بالأرقام، نحصل على

$$W=\tfrac{1}{2}\tau_{\max}\theta_{\text{total}}=\tfrac{1}{2}(12.4\text{ N m})(171.5\text{ rad})=1.06\text{ kJ}.$$

مراجعة المفاهيم 10.5

إذا كنت تريد تقليل عزم الدوران المطلوب لإدخال البرغي، فيمكنك دهن صابون مسبقًا على سن اللولب. افترض أن الصابون يقلل معامل الاحتكاك بين البرغي والخشب بمقدار النصف ومن ثَمَّ يقلل عزم الدوران المطلوب بمقدار النصف. إلى أي مدى يُغيّر ذلك من الشغل الكلي المطلوب للف البرغي داخل الخشب؟

a) يُبقي الشغل كما هو.

b) يُقلل الشغل بمقدار النصف.

c) يُقلل الشغل بمقدار الربع.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مسألة محلولة 10.4 آلة آتوود

المسألة

ثقلان كتلتاهما $m_1 = 3.00$ kg و $m_2 = 1.40$ kg متصلان بحبل خفيف للغاية يلف دون انزلاق على بكرة (قرص صلب) كتلتها $m_p = 2.30$ kg. تتدلى الكتلتان في البداية عند الارتفاع نفسه وتكونان في حالة سكون. بمجرد تحريرهما، تسقط الكتلة الأثقل، m_1، وترفع الكتلة الأخف m_2. كم تبلغ سرعة m_2 عند ارتفاع $h = 0.16$ m؟

الحل

فكِّر يُمكننا محاولة حساب عجلة الكتلتين ثم استخدام معادلات الكينماتيكا لربط هذه العجلة بالإزاحة العمودية. ويُمكننا أيضًا استخدام قوانين الطاقة، التي ستقود إلى حل مباشر. في البداية، تكون الكتلتان المعلقتان والبكرة في حالة سكون، لذا تساوي الطاقة الحركية الكلية صفرًا. ويُمكننا اختيار نظام إحداثي بحيث تكون طاقة الوضع الابتدائية صفرًا، وبهذا تساوي الطاقة الكلية صفرًا. ومع رفع إحدى الكتلتين، فإنها تكتسب طاقة وضع جذبية، وتفقد الكتلة الأخرى طاقة الوضع. تكتسب كلتا الكتلتين طاقة حركية انتقالية، وتكتسب البكرة طاقة حركية دورانية. بما أن الطاقة الحركية تناسبية مع مربع السرعة، فإنه يُمكننا استخدام قانون حفظ الطاقة للحصول على السرعة.

ارسم يُوضح الشكل 10.26A الحالة الابتدائية لآلة آتوود مع تعلق الكتلتين على الارتفاع نفسه. نقرر تعيين الارتفاع كنقطة الأصل للمحور الرأسي، ومن ثم نضمن أن طاقة الوضع الابتدائية وكذلك الطاقة الابتدائية الكلية تساوي صفرًا. يوضح الشكل 10.26B آلة آتوود مع إزاحة الكتلتين من خلال h.

ابحث الكسب في طاقة الوضع الجذبية لـــ m_2 هو $U_2 = m_2gh$. وفي الوقت نفسه، يتم خفض m_1 للمسافة نفسها، لذا تساوي طاقة الوضع $U_1 = -m_1gh$. والطاقة الحركية لـــ m_1 هي $K_1 = \frac{1}{2}m_1v^2$، والطاقة الحركية لـــ m_2 هي $K_2 = \frac{1}{2}m_2v^2$. لاحظ استخدام السرعة نفسها، v، في تعبيرات الطاقة لكلتا الكتلتين. هذا التساوي مؤكد لأنهما متصلان بحبل. (نفترض أن الحبل لا يتمدد).

كم تبلغ الطاقة الحركية الدورانية للبكرة؟ البكرة هي قرص صلب له عزم قصور ذاتي محدد بواسطة $I = \frac{1}{2}m_pR^2$ وطاقة حركية دورانية محددة بواسطة $K_r = \frac{1}{2}I\omega^2$. بما أن الحبل يلف على البكرة دون انزلاق كما أنه يتحرك بسرعة الكتلتين نفسها، فإن النقاط الموجودة على سطح البكرة يجب أن تتحرك أيضًا بتلك السرعة الخطيّة نفسها، v. ومثل القرص الصلب المتدحرج، فإن السرعة الخطية ترتبط بالسرعة الزاوية عبر $v = \omega R$. لذا، تكون الطاقة الحركية الدورانية لهذه البكرة

$$K_r = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_pR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{4}m_pR^2\omega^2 = \frac{1}{4}m_pv^2.$$

يمكننا الآن التعبير عن الطاقة الكلية بأنها مجموع الطاقات الحركية الدورانية والانتقالية والوضع. ويجب أن يكون هذا المجموع الإجمالي صفرًا، لأن ذلك كان القيمة الابتدائية للطاقة الكلية وينطبق قانون حفظ الطاقة:

$$0 = U_1 + U_2 + K_1 + K_2 + K_r$$
$$= -m_1gh + m_2gh + \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{4}m_pv^2.$$

بسِّط يمكننا إعادة ترتيب المعادلة السابقة لعزل السرعة، v:

$$(m_1 - m_2)gh = (\tfrac{1}{2}m_1 + \tfrac{1}{2}m_2 + \tfrac{1}{4}m_p)v^2 \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2)gh}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_p}}. \quad \text{(i)}$$

احسب يمكننا الآن التعويض بالأعداد:

$$v = \sqrt{\frac{2(3.00\text{ kg} - 1.40\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)(0.16\text{ m})}{3.00\text{ kg} + 1.40\text{ kg} + \frac{1}{2}(2.30\text{ kg})}} = 0.951312\text{ m/s}.$$

قرِّب تم تحديد الإزاحة h بأقل ضبط، إلى رقمين، ومن ثم نقرّب النتيجة إلى

$$v = 0.95\text{ m/s}.$$

– يُتبع

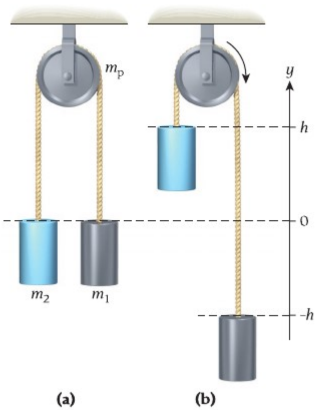
مراجعة المفاهيم 10.6

إذا شعرت بالإجهاد قبل الانتهاء من إدخال البرغي ولم تستطع إدخاله إلى نصف المسافة، فكيف سيغير ذلك كامل الشغل المبذول بالنسبة إلى الشغل المبذول في إدخال البرغي بالكامل؟

a) يُبقي الشغل كما هو.

b) يُقلل الشغل بمقدار النصف.

c) يُقلل الشغل بمقدار الربع.



الشكل 10.26 آلة آتوود أخرى: (a) المواقع الابتدائية؛ (b) المواقع بعد تحرّك الأوزان للمسافة h.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تحقّق ثانية تُحدد عجلة الكتلتين من خلال المعادلة 10.24، التي وضعناها في القسم 10.5 أثناء مناقشة آلة آتوود:

$$a=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m_{\rm p}}g. \qquad \text{(ii)}$$

قدّمت الوحدة 2 معادلات الكينماتيكا للحركة الخطية أحادية البعد. إحدى هذه المعادلات، التي تربط السرعتين الابتدائية والنهائية والإزاحة والعجلة، مفيدة هنا:

$$v^2=v_0^2+2a(y-y_0).$$

هنا $v_0=0$ و $y-y_0=h$. إذًا، يؤدي التعويض بالتعبير عن a من المعادلة (ii) إلى النتيجة

$$v^2=2ah=2\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m_{\rm p}}gh \Rightarrow v=\sqrt{\frac{2(m_1-m_2)gh}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m_{\rm p}}}.$$

ومعادلة السرعة هذه مماثلة للمعادلة (i)، التي حصلنا عليها باستخدام قوانين الطاقة. يتضح من الجهد الذي بذلناه لتطوير معادلة العجلة أن طريقة الطاقة هي أسرع وسيلة.

10.7 كمية الحركة الزاوية

رغم أننا درسنا المكافئات الدورانية للكتلة (عزم القصور الذاتي) والسرعة (السرعة الزاوية) والعجلة (العجلة الزاوية) والقوة (عزم الدوران)، فإننا لم نتطرق بعد إلى النظير الدوراني لكمية الحركة الخطية. بما أن كمية الحركة الخطية هي ناتج ضرب سرعة الجسم وكتلته، فبالمثل ينبغي أن تكون كمية الحركة الزاوية ناتج ضرب السرعة الزاوية وعزم القصور الذاتي. سنعمل في هذا القسم على إيجاد أن تلك العلاقة حقيقية لأي جسم غير نقطي له عزم قصور ذاتي ثابت. وللوصول إلى تلك النتيجة، نحتاج إلى البدء من تعريف كمية الحركة الزاوية للجسيم النقطي ثم نتابع من تلك النقطة.

الجسيم النقطي

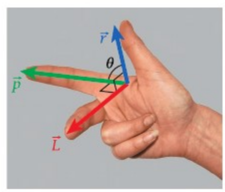
كمية الحركة الزاوية، $\vec{L}$ للجسيم النقطي هي الضرب الاتجاهي لمتجه الموقع ومتجه كمية الحركة:

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}. \qquad (10.29)$$

بما أن تعريف كمية الحركة الزاوية هو $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ وتعريف عزم القصور الذاتي هو $\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$، فإنه يمكن صياغة عبارات حول كمية الحركة الزاوية تكون مشابهة لتلك الخاصة بعزم الدوران في القسم 10.4. على سبيل المثال، يُحدّد مقدار كمية الحركة الزاوية بواسطة

$$L=rp\sin\theta, \qquad (10.30)$$

حيث θ هي الزاوية بين متجه الموقع ومتجه كمية الحركة. ومثل اتجاه متجه عزم الدوران، يُحدّد اتجاه متجه كمية الحركة الزاوية بواسطة قاعدة اليد اليُمنى. اجعل إبهام اليد اليُمنى يشير إلى متجه الموقع، $\vec{r}$، لجسيم نقطي وسبابة اليد اليُمنى تُشير إلى متجه كمية الحركة، $\vec{p}$، ثم تشير الإصبع الوسطى في اتجاه متجه كمية الحركة الزاوية $\vec{L}$ (الشكل 10.27). على سبيل المثال، يوضح الشكل 10.28متجه كمية الحركة الزاوية لجسيم نقطي في المستوى xy.



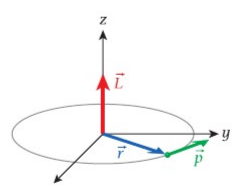
الشكل 10.27 قاعدة اليد اليمنى لاتجاه متجه كمية الحركة الزاوية: إصبع الإبهام محاذ لمتجه الموقع وإصبع السبابة محاذ لمتجه كمية الحركة؛ وتشير نقاط متجه كمية الحركة الزاوية بامتداد الإصبع الوُسطى.

وبتعريف كمية الحركة الزاوية في المعادلة 10.29، يمكننا الحصول على مشتقة الزمن:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})=\left[\left(\frac{d}{dt}\vec{r}\right)\times\vec{p}\right]+\left(\vec{r}\times\frac{d}{dt}\vec{p}\right)=(\vec{v}\times\vec{p})+(\vec{r}\times\vec{F}).$$

للحصول على المشتقة من الضرب الاتجاهي، نستخدم قاعدة ناتج الضرب الخاصة بحساب التفاضل والتكامل. يساوي الحد $\vec{v}\times\vec{p}$ صفرًا دائمًا، لأن $\vec{v}\parallel\vec{p}$. ومن المعادلة 10.16، نعرف أنّ $\vec{r}\times\vec{F}=\vec{\tau}$. ومن ثم نحصل على مشتقة الزمن لمتجه كمية الحركة الزاوية:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}=\vec{\tau}. \qquad (10.31)$$



الشكل 10.28 كمية الحركة الزاوية لجسيم نقطي.

مراجعة المفاهيم 10.7

استخدمنا قانون حفظ الطاقة في المسألة المحلولة 10.4. لكن قوة الاحتكاك، وهي قوة غير محافظة، تمنع الحبل من الانزلاق على البكرة وتتسبب في دوران البكرة. أي من العبارات التالية تبرر استخدامنا لحفظ الطاقة في هذه الحالة؟

a) بما أن قوة الاحتكاك تؤثر في جانبي البكرة، فإنه يتم شطبها.

b) بما أن نقاط قوة الاحتكاك في اتجاه الشد نفسه في الحبل، فإنها لا تساهم في الشغل المبذول.

c) بما أن قوة الاحتكاك لا تسبب إزاحة الحبل بالنسبة إلى البكرة، فإنها لا تبذل أي شغل ولذا لا تُغيّر الطاقة الميكانيكية الكلية.

d) بما أن البكرة تدور بحرية، فإن قوة الاحتكاك لا تؤثر في البكرة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مشتقة الزمن لمتجه كمية الحركة الزاوية للجسيم النقطي هي متجه عزم الدوران المؤثر في ذلك الجسيم النقطي. هذه النتيجة مناظرة لحالة الحركة الخطية، حيث تكون مشتقة الزمن لمتجه كمية الحركة الخطية مساوية لمتجه القوة.

يسمح لنا الضرب الاتجاهي بالعودة إلى العلاقة بين متجه السرعة الخطية والمتجه الإحداثي ومتجه السرعة الزاوية، التي تناولتها الوحدة 9. (سندرس مرة أخرى الحالة الخاصة الموضّحة في الشكل 10.28، حيث يوجد متجه الموقع ومتجه كمية الحركة في مستوى ثنائي الأبعاد). في الحركة الدائرية، يكون مقدار تلك المتجهات مرتبطًا عبر $\omega = v/r$ ويُحدّد اتجاه $\vec{\omega}$ باستخدام قاعدة اليد اليُمنى. باستخدام تعريف الضرب الاتجاهي، يمكننا كتابة $\vec{\omega}$ في شكل

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{r}\times\vec{v}}{r^2}. \qquad (10.32)$$

وبمقارنة المعادلتين 10.29 و10.32 نكتشف أن كمية الحركة الزاوية ومتجهات السرعة الزاوية للجسيم النقطي متوازية، بواسطة

$$\vec{L} = \vec{\omega}\cdot(mr^2). \qquad (10.33)$$

الكمية mr^2 هي عزم القصور الذاتي لجسيم نقطي يدور حول محول الدوران عند مسافة r.

نظام الجسيمات

من السهل تعميم مفهوم كمية الحركة الزاوية على نظام مكون من عدد n من الجسيمات النقطية. كمية الحركة الزاوية الكلية لنظام الجسيمات هي مجموع كمية الحركة الزاوية للجسيمات الفردية.

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i\times\vec{v}_i. \qquad (10.34)$$

ومرةً أخرى، نأخذ مشتقة الزمن لمجموع كمية الحركة الزاوية للحصول على العلاقة بين كمية الحركة الزاوية الكلية لهذا النظام وعزم الدوران:

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{p}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(\vec{r}_i\times\vec{p}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\underbrace{\left(\frac{d}{dt}\vec{r}_i\right)}_{\text{تساوي } \vec{v}_i}\times\vec{p}_i}_{\text{تساوي صفرًا، لأن } \vec{v}_i\|\vec{p}_i} + \vec{r}_i\times\underbrace{\left(\frac{d}{dt}\vec{p}_i\right)}_{\vec{F}_i} = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{\tau}_i = \vec{\tau}_{\text{net}}.$$

كما توقعنا، فإن مشتقة الزمن لكمية الحركة الزاوية الكلية لنظام الجسيمات تُحدّد من خلال محصلة عزم الدوران الخارجي الكلي المؤثر في النظام. ومن الضروري معرفة أن عزم الدوران *الخارجي* الكلي هذا ناتج عن القوى *الخارجية* $\vec{F}_i$.

الأجسام الصلبة

سوف يدور الجسم الصلب حول محور تماثل ثابت بسرعة زاوية $\vec{\omega}$ لا تتغير لكل جزء من الجسم. وفي هذه الحالة، تكون كمية الحركة الزاوية تناسبية مع السرعة الزاوية، ويكون ثابت التناسب هو عزم القصور الذاتي:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \qquad (10.35)$$

سؤال الاختبار الذاتي 10.3

هل يمكنك توضيح أن عزوم الدوران الداخلية (تلك الناتجة عن القوى الداخلية بين الجسيمات في النظام) لا تساهم في محصلة عزم الدوران الكلي؟ (*تلميح*: استخدم قانون نيوتن الثالث، $\vec{F}_{i\rightarrow j} = -\vec{F}_{j\rightarrow i}$)

الاشتقاق 10.4 كمية الحركة الزاوية لجسم صلب

من خلال تمثيل الأجسام الصلبة بمجموعة من الجسيمات النقطية نستطيع استخدام النتائج التي توصلنا إليها في القسم الفرعي السابق كنقطة بداية. ولكي تُمثّل الجسيمات النقطية الجسم الصلب، يجب أن تظل المسافات النسبية بينها ثابتة (صلبة). بعد ذلك، تدور كل تلك الجسيمات النقطية بسرعة زاوية ثابتة، $\vec{\omega}$، حول محور الدوران المشترك.

– *يتبع*

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

من المعادلة 10.34، نحصل على

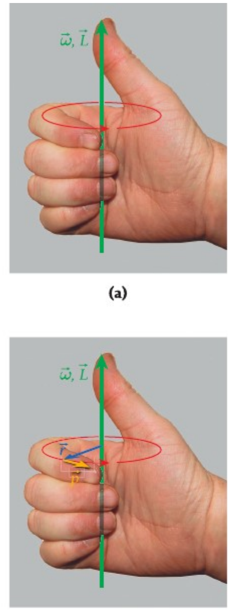
$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i r_{i\perp}^2 \vec{\omega}.$$

في الخطوة الأخيرة، استخدمنا العلاقة بين السرعة الزاوية والضرب الاتجاهي لمتجه الموقع ومتجه السرعة الخطيّة للجسيمات النقطية، المعادلة 10.32، حيث $r_{i\perp}$ هو نصف القطر المداري للجسيم النقطي i. ولاحظ أنّ متجه السرعة الزاوية هو نفسه لجميع الجسيمات النقطية في هذا الجسم الصلب. ومن ثَمّ يمكننا إخراجه من المجموع باعتباره معاملًا مشتركًا:

$$\vec{L} = \vec{\omega} \sum_{i=1}^{n} m_i r_{i\perp}^2 .$$

يمكننا تحديد هذا المجموع باعتباره عزم القصور الذاتي لمجموعة من الجسيمات النقطية، انظر المعادلة 10.4. ومن ثَمّ، نحصل على النتيجة:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}.$$



(a)

(b)

الشكل 10.29 (a) قاعدة اليد اليمنى لاتجاه كمية الحركة الزاوية (بامتداد إصبع الإبهام) كدالة لاتجاه الدوران (بامتداد الأصابع). (b) كمية الحركة ومتجهات الموقع لجسيم نقطي في حركة دائرية.

بالنسبة إلى الأجسام الصلبة التي تدور حول محور تماثل، تمامًا مثل الجسيمات النقطية، يكون اتجاه كمية الحركة الزاوية هو نفسه اتجاه متجه السرعة الزاوية. يوضح الشكل 10.29 قاعدة اليد اليمنى المستخدمة لتحديد اتجاه متجه كمية الحركة الزاوية (السهم في اتجاه إصبع الإبهام) باعتبارها وظيفة للإحساس بالدوران (اتجاه الأصابع). ماذا يحدث إذا لم يكن محور الدوران محور تماثل للجسم الصلب؟ في هذه الحالة، لا يشير متجه كمية الحركة الزاوية بالضرورة في اتجاه متجه السرعة الزاوية. وتصبح العمليات الرياضية أكثر تعقيدًا، وفوق نطاق هذا الكتاب. يحدث مثال شائع لهذه الحالة عندما تخرج عجلة سيارة عن المحاذاة (بعد اصطدام الإطار بحافة مثلًا). ستبدأ العجلة في الاضطراب، وهو ما يعد خطيرًا، بسبب إلقاء ضغط ميكانيكي كبير على كل من العجلة والمحور.

مثال 10.6 كرة الجولف

المسألة

ما مقدار كمية الحركة الزاوية لكرة جولف ($m = 4.59 \cdot 10^{-2}$ kg, $R = 2.13 \cdot 10^{-2}$ m) تدور بسرعة 4250 rpm (دورة في الدقيقة) بعد ضربة موفقة بالمضرب؟

الحل

نحتاج أولًا إلى إيجاد السرعة الزاويّة لكرة الجولف، والتي تتضمن استخدام المفاهيم المقدمة في الوحدة 9:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(4250\ \text{min}^{-1}) = 2\pi(4250/60\ \text{s}^{-1}) = 445.1\ \text{rad/s}.$$

عزم القصور الذاتي لكرة الجولف هو

$$I = \tfrac{2}{5} mR^2 = 0.4(4.59 \times 10^{-2}\ \text{kg})(2.13 \times 10^{-2}\ \text{m})^2 = 8.33 \times 10^{-6}\ \text{kg m}^2.$$

مقدار كمية الحركة الزاوية لكرة الجولف هو ناتج ضرب هذين العددين:

$$L = (8.33 \times 10^{-6}\ \text{kg m}^2)(445.1\ \text{s}^{-1}) = 3.71 \times 10^{-3}\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-1}.$$

باستخدام المعادلة 10.35 لكمية الحركة الزاوية للجسم الصلب، يمكننا توضيح أنّ العلاقة بين معدل تغيّر كمية الحركة الزاوية وعزم الدوران لا تزال صالحة. بأخذ مشتقة الزمن من المعادلة 10.35، وبفرض أن الجسم الصلب الذي له عزم قصور ذاتي ثابت في الزمن، نحصل على

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = I\frac{d}{dt}\vec{\omega} = I\vec{\alpha} = \vec{\tau}_{\text{net}}. \quad (10.36)$$

لاحظ إضافة الدلالة "net" إلى رمز عزم الدوران، مما يشير إلى أن هذه المعادلة تنطبق أيضًا في حالة وجود عزوم دوران مختلفة. في وقت سابق، كان الاعتقاد أن المعادلة 10.19 تنطبق فقط على الجسيم النقطي. ولكن توضح المعادلة 10.36 أنّ المعادلة 10.19 تنطبق على أي جسم له عزم قصور ذاتي ثابت (ثابت في الزمن).

تتساوى مشتقة الزمن لكمية الحركة الزاوية مع عزم الدوران، تمامًا كما تتساوى مشتقة الزمن لكمية الحركة الخطية مع القوة. المعادلة 10.31 هي صيغة أخرى لقانون نيوتن الثاني للدوران كما أنها أكثر شمولًا من المعادلة 10.19 إذ إنها تستوعب أيضًا حالة عزم القصور الذاتي غير الثابتة في الزمن.

حفظ كمية الحركة الزاوية

إذا كانت محصّلة عزم الدوران الخارجي صفرًا، فإن مشتقة الزمن لكمية الحركة الزاوية تساوي صفرًا أيضًا وفقًا للمعادلة 10.36. وإذا كانت مشتقة الزمن للكمية تساوي صفرًا، عندها تكون الكمية ثابتة في الزمن. لذا، يُمكننا كتابة قانون **حفظ كمية الحركة الزاوية:**

$$\text{If } \vec{\tau}_{\text{net}} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{constant} \Rightarrow \vec{L}(t) = \vec{L}(t_0) \equiv \vec{L}_0 \quad (10.37)$$

هذا هو القانون الثالث الأساسي لحفظ الطاقة الذي تناولناه، وينطبق الاثنان الأوليان على الطاقة الميكانيكية (الوحدة 6) وكمية الحركة الخطية (الوحدة 7). ومثل قوانين حفظ الطاقة الأخرى، يُمكن استخدام هذا القانون لحل المسائل التي يكون من الصعب حلها من دون هذا القانون.

إذا وُجدت عدة أجسام في نظام تكون محصلة عزم الدوران الخارجي فيه صفرًا، تصبح معادلة حفظ كمية الحركة الزاوية

$$\sum_i \vec{L}_{\text{initial}} = \sum_i \vec{L}_{\text{final}}. \quad (10.38)$$

في ما يتعلق بالحالة الخاصة للجسم الصلب الذي يدور حول محور دوران ثابت، نجد أن (بما أنّه في هذه الحالة $\vec{L} = I\vec{\omega}$):

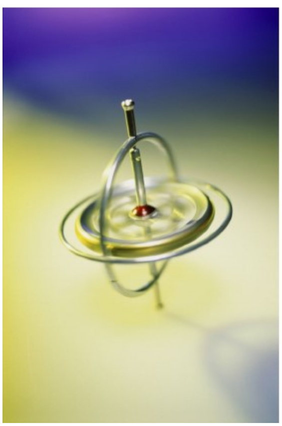
$$I\vec{\omega} = I_0\vec{\omega}_0 \quad (\text{for } \vec{\tau}_{\text{net}} = 0), \quad (10.39)$$

أو بشكل مكافئ،

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{I_0}{I} \quad (\text{for } \vec{\tau}_{\text{net}} = 0)$$

إن قانون حفظ الطاقة هذا هو الأساس في عمل الجيروسكوبات. والجيروسكوبات أجسام (أقراص عادة) تدور حول محور تماثل بسرعة زاوية عالية. يستطيع محور الدوران أن يدور على محامل الكرات، من دون احتكاك تقريبًا، ونظام الاحتكاك قادر على الدوران بحرية في جميع الاتجاهات. تضمن حرية الحركة هذه عدم تأثير محصلة عزم الدوران الخارجي في الجيروسكوب. ومن دون عزم الدوران الخارجي، تظل كمية الحركة الزاوية للجيروسكوب ثابتة ومن ثمّ تشير في الاتجاه نفسه، بغض النظر عما يفعله الجسم الذي يحمل الجيروسكوب. تعتمد الطائرات والأقمار الصناعية على الجيروسكوبات لأغراض الملاحة. فتلسكوب هابل الفضائي مثلًا مجهّز بستة جيروسكوبات، ويجب أن تعمل ثلاثة منها على الأقل لكي يتمكن التلسكوب من توجيه نفسه في الفضاء.

تظهر أهمية المعادلة 10.39 أيضًا في عدة رياضات، أهمها الجمباز والغطس والتزحلق على الجليد. وفي تلك الرياضات الثلاثة، يقوم اللاعبون بإعادة ترتيب أجسامهم ومن ثمّ تعديل عزم القصور الذاتي لديهم للتأثير في معدلات دورانهم.

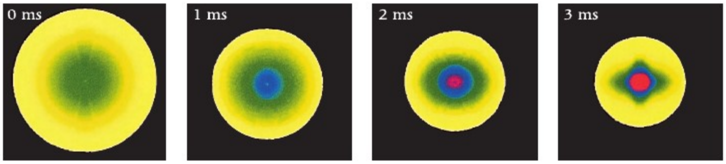


الشكل 10.30 جيروسكوب لعبة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 10.7 موت نجم

في نهاية حياة نجم عملاق يبلغ خمسة أضعاف حجم الشمس، يكون لُب النجم بالكامل تقريبًا من فلز الحديد. وبمجرد الوصول إلى هذه المرحلة، يصبح اللّب غير مستقر وينهار (كما يوضّح الشكل 10.31) خلال عملية تستغرق حوالي ثانية فقط وتكون بمثابة المرحلة الأولى لانفجار المستعِر الأعظم. من بين أكبر الأحداث التي تُطلق الطاقة العظمى في الكون. يعتبر انفجار المستعر الأعظم مصدر أغلب العناصر الأثقل من الحديد. يطلق هذا الانفجار الحطام، بما فيه العناصر الثقيلة، في الفضاء الخارجي. وقد يترك خلفه نجمًا نيوترونيًا يتكوّن من مواد نجمية مضغوطة إلى كثافة أثقل بملايين المرات من أكبر الكثافات التي تم اكتشافها على الأرض.



الشكل 10.31 محاكاة حاسوبية للمراحل الأولية لانهيار لُب نجم هائل. تمثل الألوان المختلفة الكثافة المتغيرة لِلُب النجم، والتي تتزايد من الأصفر إلى الأخضر والأزرق ثم إلى الأحمر.

المسألة

إذا كان اللب الحديدي يدور بمعدل 9.00 دورات في اليوم وإذا تناقص نصف قطره خلال الانهيار بمعامل 700، فكم تبلغ السرعة الزاوية للب في نهاية الانهيار؟ (لا يُمكن تبرير الافتراض بأن اللب الحديدي له كثافة ثابتة. وتُظهر محاكاة الكمبيوتر أنه يتناقص أسيًّا في الاتجاه القطري. ومع ذلك، تُظهر المحاكاة نفسها أن عزم القصور الذاتي للب الحديدي لا يزال تناسبيًا تقريبًا مع مربع نصف قطره أثناء عملية الانهيار).

الحل

بسبب حدوث انهيار اللب الحديدي تحت تأثير قوة السحب الناتجة عن جاذبيته، لا تؤثر محصلة العزم الخارجي في اللب. لذا، يتم حفظ كمية الحركة الزاوية وفقًا للمعادلة 10.31. من المعادلة 10.39 نحصل على

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{I_0}{I} = \frac{R_0^2}{R^2} = 700^2 = 4.90 \cdot 10^5.$$

مع $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi[(9 \text{ rev})/(24 \cdot 3600 \text{ s})] = 6.55 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$، نحصل على مقدار السرعة الزاوية النهائية:

$$\omega = 4.90 \cdot 10^5 \omega_0 = 4.90 \times 10^5 (6.55 \times 10^{-4} \text{ rad/s}) = 321 \text{ rad/s}.$$

إذًا، يدور النجم النيوتروني الناتج عن هذا الانهيار مع تردد دوراني يساوي 51.0 rev/s.

مناقشة

يُمكن لروّاد الفضاء ملاحظة دوران النجوم النيوترونية، التي يُطلق عليها اسم *النباضات الإشعاعية*. ويُقدّر أن أقصى سرعة يدور بها النباض الإشعاعي عند تشكله من انفجار المستعر الأعظم لنجم فردي حوالي 60 rev/s. وأسرع ترددات دورانية محورية معروفة للنباض الإشعاعي هي

$$f = 716 \text{ rev/s},$$

والتي تساهم بسرعة زاويّة مقدارها

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \left(716 \text{ s}^{-1}\right) = 4500 \text{ rad/s}.$$

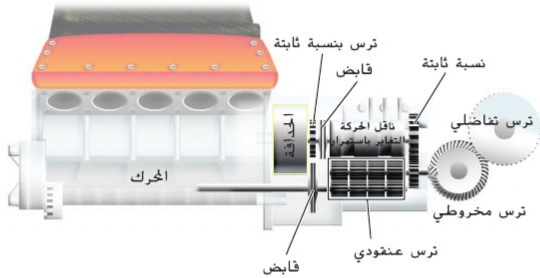
بعد تكوّن النباض الإشعاعي سريع الدوران من انهيار نجمي، يزيد من تردده الدوراني من خلال أخذ المادة من نجم مرافق يدور في مدار قريب.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ينهي المثال التالي القسم من خلال تطبيق هندسي حديث، يربط بين مفاهيم عزم القصور الذاتي والطاقة الحركية الدورانية وعزم الدوران وكمية الحركة الزاوية.

مثال 10.8 الحدافة

تؤدي عملية الكبح لإبطاء السيارة إلى تقليل الطاقة الحركية للسيارة وتشتيتها بفعل قوة الاحتكاك بين بطانة المكابح والأسطوانات. تحوّل المركبات الهجينة التي تعمل بالبنزين والكهرباء بعض أو معظم تلك الطاقة الحركية إلى طاقة كهربائية قابلة لإعادة الاستخدام مخزنة داخل بطارية كبيرة. ولكن توجد طريقة لتخزين الطاقة دون الحاجة إلى بطارية كبيرة وذلك عبر تخزينها بشكل مؤقت في حدافة (الشكل 10.32). كانت شركة فلابرد سيستمز أول من ابتكرت أنظمة استعادة الطاقة الحركية باستخدام الحدافة، وتُستخدم الآن هذه الأنظمة في سباقات الفورمولا 1 وسباقات التحمل مثل لو مان.



الشكل 10.32 مخطط لدمج حدافة في مجموعة نقل الحركة بسيارة. يستخدم ناقل الحركة التغاير باستمرار (CVT) لتخزين الطاقة في الحدافة ولاستخراج الطاقة من الحدافة.

المسألة

حدافة مصنوعة من الصلب الكربوني وكتلتها تساوي 5.00 kg، ونصف قطرها الداخلي يساوي 8.00 cm ونصف قطرها الخارجي يساوي 14.2 cm. فإذا كان من المفترض أن تخزّن 400.0 kJ من الطاقة الدورانية، فما سرعة الدوران (بوحدة rpm) المطلوبة؟ إذا أمكن تخزين الطاقة الدورانية أو سحبها خلال 6.67 s، فكم يبلغ متوسط الطاقة وعزم الدوران الذي يمكن أن توفره هذه الحدافة خلال هذا الزمن؟

الحل

يُحدّد عزم القصور الذاتي للحدافة بواسطة المعادلة (10.9: $I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$). والطاقة الحركية الدورانية (المعادلة 10.3) هي $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ نحل هذا للحصول على السرعة الزاوية:

$$\omega = \sqrt{\frac{2K}{I}} = \sqrt{\frac{4K}{M(R_1^2 + R_2^2)}}.$$

والنسبة إلى التردد الدوراني، نحصل على

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{K}{\pi^2 M(R_1^2 + R_2^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{400.0 \text{ kJ}}{\pi^2(5.00 \text{ kg})[(0.0800 \text{ m})^2 + (0.142 \text{ m})^2]}}$$

$$= 552 \text{ s}^{-1} = 33{,}100 \text{ rpm}.$$

بما أنه يُمكن تحديد متوسط الطاقة بواسطة التغير في الطاقة الحركية مقسومًا على الزمن (انظر الوحدة 5)، فإننا نحصل على

$$P = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{400.0 \text{ kJ}}{6.67 \text{ s}} = 60.0 \text{ kW}.$$

نحصل على متوسط عزم الدوران من المعادلة 10.36 ونعلم أن متوسط العجلة الزاوية هو التغير الحادث في السرعة الزاوية $\Delta\omega$، مقسومًا على الفاصل الزمني، Δt:

$$\tau = I\alpha = I\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)\frac{1}{\Delta t}\sqrt{\frac{4K}{M(R_1^2 + R_2^2)}} = \frac{1}{\Delta t}\sqrt{M(R_1^2 + R_2^2)K}$$

$$= \frac{1}{6.67 \text{ s}}\sqrt{(400.0 \text{ kJ})(5.00 \text{ kg})[(0.0800 \text{ m})^2 + (0.142 \text{ m})^2]}$$

$$= 34.6 \text{ N m}.$$

مراجعة المفاهيم 10.8

تدور الحدافة بصورة أسرع عندما تتحرك سيارة فورميولا 1 بشكل أبطأ، أثناء عملية الانعطاف في نطاق ضيق. فإذا علمت أنها تبذل عزم دوران لتغيير متجه كمية الحركة الزاوية، فكيف توجّه محور الدوران إلى الحدافة حتى تتعرض لأقل تأثير في توجيه السيارة عبر المنحنى؟

a) ينبغي أن تكون الحدافة محاذية للمحور الأساسي لسيارة السباق.

b) ينبغي أن تكون الحدافة في مستوى رأسي.

c) ينبغي أن تكون الحدافة محاذية لمحاور العجل.

d) لا يحدث أي اختلاف، حيث إن جميع الاتجاهات الثلاثة صعبة بالقدر نفسه.

e) الاتجاهان (a) و(c) كلاهما جيد بدرجة متساوية وأفضل من (b).

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مسألة محلولة 10.5 اصطدام رصاصة بعمود

المسألة

أُطلقت رصاصة عيار 22 كتلتها $m = 2.59\ g$ من بندقية أثناء تدريب شارة الجودة لفتيان الكشافة وتتحرك بسرعة 374.5 m/s عند اصطدامها بعمود كتلته $M = 3.00$ kg وطوله $\ell = 2.00\ m$. في البداية، يكون العمود في حالة سكون وفي وضع رأسي ويدور حول محور يمر عبر مركز كتلته. انغرست الرصاصة في العمود عند نقطة $\frac{1}{3}$ من طول العمود فوق النقطة المحورية. نتيجة لذلك، يبدأ نظام الرصاصة والعمود في الدوران.

a) أوجد كمية الحركة الزاوية لنظام الرصاصة والعمود بعد الاصطدام.

b) ما الطاقة الحركية الدورانية للعمود والرصاصة بعد الاصطدام؟

الحل

فكِّر أولًا، توجد ملاحظة تبدو بسيطة: إذا اصطدمت الرصاصة بالعمود في المنتصف تمامًا، فلن يحدث دوران على الإطلاق، لأنه في هذه الحالة لن تحتوي الرصاصة على كمية حركة زاوية بالنسبة إلى النقطة المحورية عند مركز العمود. ولكن هنا اصطدمت الرصاصة بعيدًا عن المركز، كما أن كمية الحركة الزاوية هي المسافة إلى المركز مضروبة في كمية حركة الرصاصة. يتم حفظ كمية الحركة الزاوية أثناء اصطدام الرصاصة بالعمود (لأنه لا يوجد عزم دوران خارجي أثناء الاصطدام). لذا، كل ما علينا فعله للإجابة عن الجزء (A) هو حساب كمية الحركة الزاوية الابتدائية للرصاصة.

ارسم يتضمن الشكل 10.32 رسمًا يوضح المسافة من النقطة المحورية إلى النقطة التي تصطدم فيها الرصاصة بالعمود.

ابحث تُحدّد كمية حركة الرصاصة من خلال $p = mv$. عندما تصطدم بالعمود على مسافة $\ell/3$ من مركز كتلة العمود. فإن كمية الحركة الزاوية تساوي $p\ell/3$. عزم القصور الذاتي للعمود هو $M\ell^2/12$ وللرصاصة الموجودة في العمود هو $m(\ell/3)^2$. الطاقة الحركية للرصاصة والعمود معًا دورانية بالكامل. $K_r = I\omega^2/2$. وتُحدّد العلاقة بين كمية الحركة الزاوية وعزم القصور الذاتي والسرعة الزاوية من خلال $L = I\omega$.

بسِّط

a) كمية الحركة الزاوية الابتدائية هي $L_i = mv\ell/3$. كمية الحركة الزاوية النهائية هي نفسها، $L_f = L_i = mv\ell/3$.

b) عزم القصور الذاتي الكلي هو $I = (M\ell^2/12) + (m\ell^2/9)$. الطاقة الحركية الدورانية هي

$$K_r = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}I^2\omega^2/I = \tfrac{1}{2}L^2/I = \frac{L^2}{2((M/12)+(m/9))\ell^2}.$$

احسب

a) $L_f = (2.59\times10^{-3}\ \text{kg})(374.5\ \text{m/s})(2.00\ \text{m})/3 = 0.6466367\ \text{kg m}^2/\text{s}$.

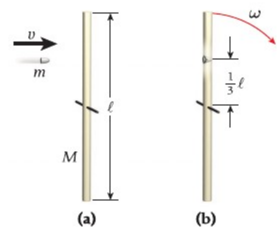
b) $$K_r = \frac{\left(0.6466367\ \text{kg m}^2/\text{s}\right)^2}{2\left((3.00\ \text{kg})/12 + \left(2.59\times10^{-3}\ \text{kg}\right)/9\right)(2.00\ \text{m})^2} = 0.2088291\ \text{J}.$$

قرِّب تم تحديد العدد المدخل الأقل ضبطًا في ثلاثة أرقام معنوية، والتي نقرّب إليها النتيجة النهائية أيضًا:

a) $L_f = 0.647\ \text{kg m}^2/\text{s}$

b) $K_r = 0.209$ J

تحقّق ثانية نجحت نتائجنا في اختبار الحد الأدنى إذ إن الوحدات تعمل بشكل سليم. إذا قارنت الطاقة الحركية الانتقالية الابتدائية للرصاصة بالطاقة الحركية الدورانية التي تم تحديدها، فسوف تجد أن $K_i = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(2.59\times10^{-3}\ \text{KG})(374.5\ \text{m/s})^2 = 182$ J. قيمة أكبر من إجابتنا للجزء (B) من العامل ~280. يشير ذلك إلى فقدان معظم الطاقة الحركية خلال هذا التصادم غير المرن. مسألة أخيرة يلزم التأمل فيها: ذكرنا أن العلاقة $L = I\omega$ تنطبق فقط على الجسم الذي يدور حول محور عبر مركز كتلته، وهو محور تماثل. وبصورة محددة، لا تنطبق العلاقة هنا تمامًا لأن إضافة الرصاصة إلى الجزء العلوي من العمود تنقل مركز الكتلة المشترك لنظام الرصاصة والعمود إلى الأعلى قليلًا. وبما أن كتلة الرصاصة تساوي فقط ~0.1% من كتلة العمود، يمكن تجاهل هذا التأثير.



الشكل 10.33 رصاصة تصطدم بعمود وتلتصق به.

مراجعة المفاهيم 10.9

إذا كان العمود الوارد في المسألة المحلولة 10.5 مصنوعًا من الصلب بحيث ترتد الرصاصة إلى الخلف بدلًا من التصاقها بالعمود، فإن السرعة الدورانية للعمود ستكون

a) أعلى من السرعة التي تم الحصول عليها في المسألة المحلولة 10.5.

b) مماثلة للسرعة التي تم الحصول عليها في المسألة المحلولة 10.5.

a) أقل من السرعة التي تم الحصول عليها في المسألة المحلولة 10.5.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10.8 المبادرة

كانت لعبة النحلة من الألعاب الشائعة عندما كان أبواك أو أجدادك أطفالًا. عند وضعها في حركة دورانية سريعة، فإنها تقف باعتدال دون سقوط. علاوة على ذلك، عند انحرافها بزاوية نسبية للمستوى الرأسي، فإنها لا تسقط أيضًا، وإنما يتحرّك المحور الدوراني على سطح المخروط كدالة للزمن. وتُسمى هذه الحركة **المبادرة**. ما الذي يتسبب فيها؟

نلاحظ أولًا أن لعبة النحلة لها متجه كمية حركة زاوية $\vec{L}$ يتوافق مع محور تماثله، ويشير إلى الأعلى أو الأسفل تبعًا لما إن كانت تدور في اتجاه عقارب الساعة أو عكس اتجاه عقارب الساعة (الشكل 10.34). ولأن النحلة تميل، لا يكون مركز كتلتها (تميز بنقطة سوداء في الشكل 10.34) فوق نقطة الاتصال مع سطح الدعم. تتسبب قوّة الجاذبيّة المؤثرة في مركز الكتلة في عزم دوران، $\vec{\tau}$، حول نقطة الاتصال، كما يوضّح الشكل؛ وفي هذه الحالة، يشير متجه عزم الدوران مباشرةً إلى خارج الصفحة. ويكون متجه الموقع، $\vec{r}$، الخاص بمركز الكتلة والذي يساعد في تحديد عزم الدوران، محاذيًا تمامًا لمتجه كمية الحركة الزاوية. أما زاوية محور التماثل للنحلة بالنسبة إلى المستوى الرأسي فمميزة بعلامة ϕ في الشكل. وحينئذ تكون الزاوية بين متجه قوة الجاذبية ومتجه الموقع $\pi - \phi$ (انظر الشكل 10.34). بما أن $\sin(\pi - \phi) = \sin\phi$، فإنه يمكننا كتابة مقدار عزم الدوران كدالة للزاوية ϕ:

$$\tau = rF\sin\phi = rmg\sin\phi$$

حيث $d\vec{L}/dt = \vec{\tau}$ ، فإن التغير في متجه كمية الحركة الزاوية، $d\vec{L}$، يُشير إلى الاتجاه نفسه الخاص بعزم الدوران ومن ثمّ يكون عموديًا على متجه كمية الحركة الزاوية. يجبر هذا التأثير متجه كمية الحركة الزاوية على الامتداد على سطح مخروطي للزاوية ϕ كدالة للزمن، بحيث يتبع طرف متجه كمية الحركة الزاوية دائرة في المستوى الأفقي، كما هو موضح باللون الرمادي في الشكل 10.33.

يمكننا أيضًا حساب مقدار السرعة الزاوية، ω_p، لحركة المبادرة هذه. يوضّح الشكل 10.33 أن نصف قطر الدائرة التي يشكلها طرف متجه كمية الحركة الزاوية كدالة للزمن يُحدد بواسطة $L\sin\phi$. ومقدار التغير التفاضلي في كمية الحركة الزاوية، dL، هو طول قوس هذه الدائرة، ويمكن حسابه كناتج ضرب نصف قطر الدائرة والزاوية التفاضلية المزاحة بواسطة نصف القطر، $d\theta$:

$$dL = (L\sin\phi)d\theta.$$

بناء على ذلك، فإنه بالنسبة إلى مشتقة الزمن لكمية الحركة الزاوية، dL/dt، نحصل على

$$\frac{dL}{dt} = (L\sin\phi)\frac{d\theta}{dt}.$$

مشتقة الزمن لزاوية الانعكاس θ، هي السرعة الزاوية للمبادرة ω_p. بما أن $dL/dt = \tau$، فإننا نستخدم المعادلة السابقة وتعبير عزم الدوران، $\tau = rmg\sin\phi$، للحصول على

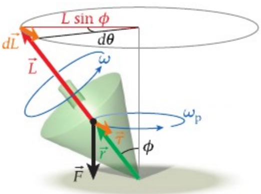
$$rmg\sin\phi = \tau = \frac{dL}{dt} = (L\sin\phi)\frac{d\theta}{dt} = (L\sin\phi)\omega_p \Rightarrow$$

$$\omega_p = \frac{rmg\sin\phi}{L\sin\phi}.$$

نجد أن الحد $\sin\phi$ يشطب التعبير الأخير، للحصول على $\omega_p = rmg/L$. التردد الزاوي للمبادرة لا يتغير لجميع قيم ϕ، وهي زاوية الميل لمحور الدوران. قد تبدو هذه النتيجة مفاجئة قليلًا، لكن التجارب تؤكد أنها صحيحة. في الخطوة الأخيرة، نستخدم معرفتنا بأن كمية الحركة الزاوية للجسم الصلب، L، هي ناتج ضرب عزم القصور الذاتي، I، والسرعة الزاوية، ω. لذا، بالتعويض بـــ $I\omega$ عن L في تعبير السرعة الزاوية للمبادرة ω_p، نحصل على النتيجة النهائية:

$$\omega_p = \frac{rmg}{I\omega}. \quad (10.40)$$

تعكس هذه الصيغة الخاصيّة المهمة المتمثلة في أن السرعة الزاوية للمبادرة تتناسب عكسيًا مع السرعة الزاوية للنحلة. مع تباطؤ النحلة بسبب الاحتكاك، تتناقص سرعتها الزاوية تدريجيًا، ومن ثم تزداد السرعة الزاوية للمبادرة تدريجيًا. وكلما زادت سرعة المبادرة فإنها تؤدي في النهاية إلى تمايل النحلة وسقوطها.



الشكل 10.34 مبادرة لعبة النحلة.

الشكل 10.35 قد تميل لعبة النحلة عن الخط الرأسي لكنها لا تسقط

مراجعة المفاهيم 10.10

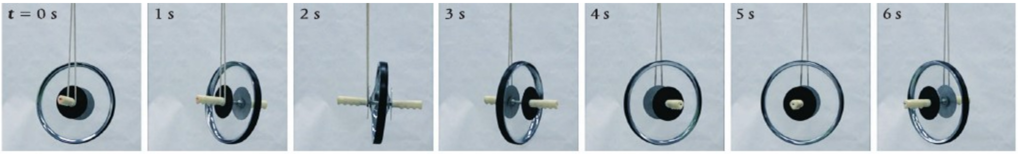
احسب السرعة الزاوية البدارية للعجلة الموضحة في الشكل 10.34.

a) 0.01 rad/s
b) 0.6 rad/s
c) 5 rad/s
d) 10 rad/s

سؤال الاختبار الذاتي 10.4

العجلة الموضحة في الشكل 10.34 كتلتها 2.5 kg، ويرتكز معظمها تقريبًا على الإطار المعدني، ونصف قطرها 22 cm والمسافة الواقعة بين نقطة نظام التعليق ومركز الكتلة هي 5.0 cm. احسب السرعة الزاوية لدورانها.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



الشكل 10.36 مبادرة عجلة سريعة الدوران معلقة بحبل.

تم عرض المبادرة بشكل بارع في سلسلة الصور التي تظهر في الشكل 10.36. وفيه تظهر عجلة سريعة الدوران معلقة من خارج المركز في حبل مربوط بالسقف. وكما ترى، لا تسقط العجلة، مثلما يُتوقع لعجلة عديمة الدوران في الموقف نفسه، لكنها تدور ببطء حول نقطة التعليق.

10.9 كمية الحركة الزاوية المكماة

لكي نُنهي مناقشتنا حول كمية الحركة الزاوية والدوران المحوري، سندرس أصغر مقدار لكمية الحركة الزاوية التي يمكن أن توجد في جسم ما. ومن تعريف كمية الحركة الزاوية لجسيم نقطي (المعادلة 10.29) $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ أو $L = rp \sin\theta$، يتضح عدم وجود المقدار الأصغر لكمية الحركة الزاوية، لأنه يمكن خفض المسافة إلى محور الدوران، r، أو كمية الحركة، p، بمعامل يتراوح بين 0 و1. وستنخفض كمية الحركة الزاوية المقابلة بالعامل نفسه.

ومع ذلك، لا تنطبق فكرة كمية الحركة الزاوية المتغيرة باستمرار على الذرات أو الجسيمات دون الذرية. ولكن يمكن ملاحظة الكمّ الخاص بكمية الحركة الزاوية. ويُسمى هذا الكمّ الخاص بكمية الحركة الزاوية **ثابت بلانك**، $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J s. ويظهر ثابت بلانك عادةً في المعادلات المقسومة على المعامل $2p$ وأعطى الفيزيائيون لهذه النسبة الرمز $\hbar$: $\hbar \equiv h/2\pi = 1{,}055 \cdot 10^{-34}$ J s. ستتناول الوحدة 36 مناقشة كاملة للملاحظات التجريبية التي أدت إلى تقديم هذا الثابت الأساسي. وهنا نلاحظ حقيقة مدهشة: كل الجسيمات الأولية لها كمية حركة زاوية أساسية، تسمى غالبًا *الدوران المغزلي*. وهي إما ناتج ضرب عدد صحيح ($0, 1\hbar, 2\hbar, \ldots$) أو ناتج ضرب عدد نصف صحيح ($\frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar, \ldots$) من كمّ بلانك لكمية الحركة الزاوية. وما يدعو إلى الدهشة أن قيم الدوران المغزلي الصحيحة أو نصف الصحيحة للجسيمات تُحدث اختلافًا كبيرًا في طرق تفاعلها بعضها مع بعض. وتتضمن الجسيمات ذات القيم الصحيحة للدوران المغزلي البروتونات، وهي الجسيمات الأولية للضوء. وتتضمن الجسيمات ذات القيم نصف الصحيحة للدوران المغزلي الإلكترونات والبروتونات والنيوترونات، وهي الجسيمات التي تشكّل وحدات بناء المادة .

ما تعلمناه | دليل المذاكرة للاختبار

- تُحدَّد الطاقة الحركية للدوران الخاصة بجسم ما عن طريق $K = \frac{1}{2}I\omega^2$. وتنطبق هذه العلاقة على الجسيمات النقطية وكذلك الأجسام الصلبة.
- يُعرَّف عزم القصور الذاتي لدوران جسم حول محوره عبر مركز الكتلة بأنه $I = \int_V r_\perp^2 \rho(\vec{r})dV$، حيث $r_\perp$ هي المسافة العمودية لعنصر الحجم dV إلى محور الدوران و$\rho(\vec{r})$ هي الكثافة الكتلية.
- إذا كانت الكثافة الكتلية ثابتة، فإن عزم القصور الذاتي هو $I = \frac{M}{V}\int_V r_\perp^2 dV$، حيث M هي الكتلة الكلية للجسم الدوّار و V هي حجمه.
- عزم القصور الذاتي لجميع الأجسام المستديرة هو $I = cMR^2$، حيث $c \in [0,1]$.
- تقول نظرية المحور الموازي إن عزم القصور الذاتي، $I_\parallel$، للدوران المحوري حول محور موازٍ لآخر عبر مركز الكتلة يُحدَّد من خلال $I_\parallel = I_{cm} + Md^2$، حيث d هي المسافة بين المحورين وI_{cm} هي عزم القصور الذاتي للدوران المحوري حول المحور عبر مركز الكتلة.
- بالنسبة إلى جسم يتدحرج دون انزلاق، فإن إحداثي مركز الكتلة، r، وزاوية الدوران المحوري، θ، يرتبطان بواسطة $r = R\theta$، حيث R هي نصف قطر الجسم.
- تُعرف الطاقة الحركية لجسم متدحرج بأنها مجموع طاقاته الحركية الانتقالية والدورانية: $K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2}mv^2_{cm} + \frac{1}{2}I_{cm}v^2 = \frac{1}{2}(1+c)mv^2_{cm}$، مع $c \in [0,1]$ ومع c بالاعتماد على شكل الجسم.
- يُعرف عزم الدوران بأنه ناتج الضرب الاتجاهي لمتجه الموقع ومتجه القوة: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

- تُعرّف كمية الحركة الزاوية لجسيم نقطي بأنها $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$.
- معدل تغير كمية الحركة الزاوية يساوي عزم الدوران: $\frac{d}{dt}\vec{L}=\vec{\tau}$. وهذا هو المكافئ الدوراني لقانون نيوتن الثاني.
- بالنسبة إلى الأجسام الصلبة التي تدور حول محور تماثلها، فإن كمية الحركة الزاوية هي $\vec{L}=I\vec{\omega}$ وعزم الدوران هو $\vec{\tau}=I\vec{\alpha}$.
- في حالة عدم وجود محصلة عزم دوران خارجي، تُحفظ كمية الحركة الزاوية: $I\vec{\omega}=I_0\vec{\omega}_0$ (لأن $\vec{\tau}_{\text{net}}=0$).
- يلخص الجدول الكميات المقابلة للحركة الخطية والدورانية.

الكمية	خطية	دائرية	العلاقة
الإزاحة	$\vec{s}$	$\vec{\theta}$	$\vec{s}=r\vec{\theta}$
السرعة المتجهة	$\vec{v}$	$\vec{\omega}$	$\vec{\omega}=\vec{r}\times\vec{v}\ /\ r^2$
العجلة	$\vec{a}$	$\vec{\alpha}$	$\vec{a}=r\alpha\,\hat{t}-r\omega^2\hat{r}$ $a_t=r\alpha$ $a_c=\omega^2 r$
كمية الحركة	$\vec{p}$	$\vec{L}$,	$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$
الكتلة/عزم القصور الذاتي	m	I	
الطاقة الحركية	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}Iw^2$	
القوة/عزم الدوران	$\vec{F}$	$\vec{\tau}$	$\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$

إجابات أسئلة الاختبار الذاتي

10.1 $I_{\parallel}=\frac{1}{12}mL^2+m\left(\frac{L}{2}\right)^2=mL^2\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{3}mL^2.$

10.2 علبة الصودا الكاملة ليست جسمًا صلبًا ولذا فإنها لا تدور كأسطوانة صلبة. فمعظم السائل الموجود داخل العلبة لا يشارك في الدوران المحوري حتى عندما تصل العلبة إلى قاع المستوى المائل، كما أن كتلة العلبة نفسها ضئيلة للغاية مقارنة بكتلة السائل الموجود بداخلها. ومن ثم، فإن علبة الصودا التي تتدحرج على مستوى مائل تقترب من كتلة تنزلق على مستوى مائل دون احتكاك. ويكون الثابت c المستخدم في المعادلة 10.15 قريبًا من الصفر، ولذا تربح العلبة السباق.

10.3 ينص قانون نيوتن الثالث على أن القوى الداخلية تحدث في الأزواج المتساوية والمعاكسة التي تؤثر في الخط الفاصل بين كل جسمين. ومن ثم يكون عزم الدوران صفرًا بسبب كل زوج من القوى. وبجمع عزوم الدوران من جميع القوى الداخلية نحصل على محصلة عزم داخلي تساوي صفرًا.

10.4 بما أن الكتلة تتركز على إطار العجلة، فإن عزم القصور الذاتي للعجلة هو $I=mR^2$. وبمساعدة المعادلة 10.40، نحصل على

$$\omega_{\text{p}}=\frac{rmg}{mR^2\omega}=\frac{rg}{R^2\omega}=\frac{(0.050\text{ m})(9.81\text{ m/s}^2)}{(0.22\text{ m})^2(0.62\text{ rad/s})}=16\text{ rad/s}.$$

إرشادات حل المسائل: الحركة الدورانية

1. قانون نيوتن الثاني ونظرية الشغل والطاقة الحركية هما وسيلتان قويتان ومتمّمتان لحل مجموعة كبيرة ومتنوعة من مسائل ميكانيكا الدوران. وبوجه عام، ينبغي أن تجرب طريقة قائمة على قانون نيوتن الثاني ومخططات الجسم الحر عندما تنطوي المسألة على حساب العجلة الزاوية. ويكون استخدام طريقة تستند إلى نظرية الشغل والطاقة الحركية أكثر فائدة عند الحاجة إلى حساب السرعة الزاوية.

2. تصلح العديد من مفاهيم الحركة الانتقالية للحركة الدورانية أيضًا. على سبيل المثال، ينطبق قانون حفظ كمية الحركة الخطية في حالة عدم وجود قوى خارجية؛ كما ينطبق قانون حفظ كمية الحركة الزاوية في حالة عدم وجود عزوم دوران خارجية. تذكر أوجه التطابق بين الكميات الانتقالية والدورانية.

3. من الضروري تذكّر أن شكل الجسم مهم في الحالات التي تشتمل على الحركة الدورانية. تأكد من استخدامك الصيغة الصحيحة لعزم القصور الذاتي، والتي تعتمد على موقع محور الدوران وكذلك الشكل الهندسي للجسم. ويعتمد عزم الدوران أيضًا على موقع محور التماثل؛ فتأكد أنه متوافق عند حساب العزوم في اتجاه عقارب الساعة وعكس اتجاه عقارب الساعة.

4. تعتمد العديد من علاقات الحركة الدورانية على هندسة الحالة، مثل علاقة السرعة الخطية لوزن معلّق بالسرعة الزاوية لحبل يتحرك على بكرة. وتتغير هندسة الحالة أحيانًا في المسألة، على سبيل المثال، كأن يوجد قصور دوراني مختلف بين نقطتي البدء والانتهاء لدوران محوري. تأكد من فهمك للكميات التي تتغير أثناء الحركة الدورانية.

5. تشتمل العديد من الحالات الفيزيائية على أجسام دوّارة يمكنها أن تتدحرج مع انزلاق أو بدونه. وإذا كان التدحرج من دون انزلاق، فإنه يمكنك ربط الإزاحات الخطية والزاوية والسرعات المتجهة والعجلات بعضها مع بعض في نقاط على المحيط الخارجي للجسم المتدحرج.

6. قانون حفظ كمية الحركة الزاوية لا يقل أهمية للمسائل التي تتضمن حركة دائرية أو دورانية عن قانون حفظ كمية الحركة الخطية للمسائل التي تتضمن حركة في خط مستقيم. والتفكير في حالة المسألة بدلالة كمية الحركة الزاوية المحفوظة يوفر مسارًا واضحًا لحلها في الغالب، والذي سيصعب الحصول عليه دون هذه الطريقة. لكن تذكر أن كمية الحركة الزاوية تُحفظ فقط إذا كانت محصلة عزم الدوران الخارجي صفرًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

أسئلة الاختيار من متعدد

10.1 يبدأ جسم دائري من حالة السكون ويتدحرج دون انزلاق على مستوى مائل، عبر مسافة رأسية تساوي 4.0 m. وعند وصول الجسم إلى القاع فإن سرعته الانتقالية تكون 7.0 m/s. ما الثابت c الذي يربط عزم القصور الذاتي بكتلة هذا الجسم ونصف قطره (راجع المعادلة 10.11)؟

a) 0.80
b) 0.60
c) 0.40
d) 0.20

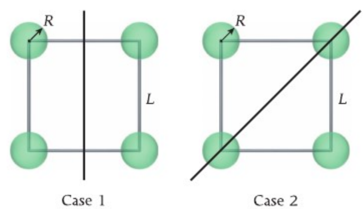
10.2 كرتان من الفولاذ الصلب، إحداهما صغيرة والأخرى كبيرة، على مستوى مائل. قطر الكرة الكبيرة أكبر مرتين من قطر الكرة الصغيرة. ومع البدء من السكون، تتدحرج الكرتان دون انزلاق على المستوى المائل حتى يكون مركزا كتلتيهما 1 m أسفل موضعي البدء. ما سرعة الكرة الكبيرة (v_L) مقارنة بسرعة الكرة الصغيرة (v_S) بعد التدحرج لمسافة 1 m؟

a) $v_L = 4v_S$
b) $v_L = 2v_S$
c) $v_L = v_S$
d) $v_L = 0.5v_S$
e) $v_L = 0.25v_S$

10.3 حدافة مولِّد، وهي أسطوانة متجانسة نصف قطرها R وكتلتها M، تدور حول محورها الطولي. والسرعة الخطية لنقطة ما على حافة (جانب) الحدافة هي v. ما مقدار الطاقة الحركية للحدافة؟

a) $K = \frac{1}{2}Mv^2$
b) $K = \frac{1}{4}Mv^2$
c) $K = \frac{1}{2}Mv^2/R$
d) $K = \frac{1}{2}Mv^2 R$
e) لا تتوفر معلومات كافية للإجابة

10.4 أربعة أجسام كروية جوفاء كتلة كل منها 1 kg ونصف قطرها $R = 10$ cm، متصلة بقضبان عديمة الكتلة لتشكل مربعًا بأضلاع طولها $L = 50$ cm. في الحالة الأولى تدور الكتل حول محور يُنصّف ضلعَين من أضلاع المربع. وفي الحالة الثانية، تدور الكتل حول محور يمرّ عبر الخط القطري للمربع، كما هو موضح في الشكل. احسب نسبة عزم القصور الذاتي، I_1/I_2، في الحالتين.



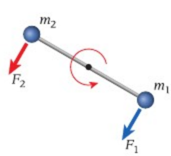
a) $I_1/I_2 = 8$
b) $I_1/I_2 = 4$
c) $I_1/I_2 = 2$
d) $I_1/I_2 = 1$
e) $I_1/I_2 = 0.5$

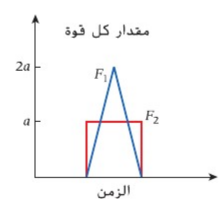
10.5 إذا استبدلنا بالأجسام الكروية الجوفاء في السؤال 10.4 أجسامًا كروية صلبة لها الكتلة ونصف القطر أنفسهما، فإن نسبة عزم القصور الذاتي في الحالتين سوف

a) تزيد.
b) تقل.
c) تظل كما هي.
d) تكون صفرًا.

10.6 جسم غير نقطي يتألف من كتلتين نقطيتين، m_1 وm_2، متصلتين عبر ساق صلب عديم الكتلة طوله L، كما هو موضح في الشكل. يدور الجسم بسرعة زاوية ثابتة حول محور متعامد على الصفحة عبر نقطة منتصف الساق. وتُستخدم قوتان تماسّان متفاوتتان في الزمن، F_1 وF_2، في m_1 وm_2 على التوالي. وبعد استخدام القوتين؛ ما الذي سيحدث للسرعة الزاوية للجسم؟

a) سوف تزيد.
b) سوف تقل.
c) سوف تظل دون تغيير.
d) لا توجد معلومات كافية للتحديد.





10.7 توجد أسطوانة صلبة وأخرى جوفاء تدوران حول محور يمر عبر مركز الكتلة بهما. إذا كان الجسمان متماثلين من حيث الكتلة ونصف القطر، فما الجسم الذي سيحظى بأكبر عزم قصور ذاتي؟

a) سيكون عزم القصور الذاتي متماثلًا في الجسمين.
b) ستحظى الأسطوانة الصلبة بأكبر عزم قصور ذاتي لأن كتلتها موزعة بانتظام.
c) ستحظى الأسطوانة الجوفاء بأكبر عزم قصور ذاتي لأن كتلتها تقع بعيدًا عن محور الدوران.

10.8 كرة سلة كتلتها 610 g ومحيطها 76 cm تتدحرج دون انزلاق على أرضية صالة ألعاب رياضية. عند التعامل مع الكرة على أنها جسم كروي أجوف، ما الجزء الذي يرتبط بحركتها الدورانية من طاقتها الحركية الكلية؟

a) 0.14
b) 0.19
c) 0.29
d) 0.40
e) 0.67

10.9 جسم كروي صلب يتدحرج دون انزلاق على مستوى مائل، ويبدأ من حالة السكون. في الوقت نفسه، يبدأ صندوق من حالة السكون على الارتفاع نفسه وينزلق على المستوى المائل نفسه، مع احتكاك ضئيل. ما الجسم الذي سيصل إلى القاع أولًا؟

a) سيصل الجسم الكروي الصلب أولاً.
b) سيصل الصندوق أولاً.
c) كلاهما سيصل في الوقت نفسه.
d) من المستحيل تحديد ذلك.

10.10 تتدحرج أسطوانة لأسفل دون انزلاق على مستوى يميل بزاوية θ بالنسبة إلى المستوى الأفقي. ما مقدار الشغل المبذول من قوة الاحتكاك أثناء انتقال الأسطوانة مسافة s على امتداد المستوى (μ_s هو معامل الاحتكاك السكوني بين المستوى والأسطوانة)؟

a) $+\mu_s mgs \sin\theta$
b) $-\mu_s mgs \sin\theta$
c) $+mgs \sin\theta$
d) $-mgs \sin\theta$
e) لا يُبذل شغل.

10.11 تتصل كرة بطرف حبل متأرجح في دائرة رأسية. وكمية الحركة الزاوية للكرة في أعلى المسار الدائري

a) أكبر من كمية الحركة الزاوية في أسفل المسار الدائري.
b) أقل من كمية الحركة الزاوية في أسفل المسار الدائري.
c) مماثلة لكمية الحركة الزاوية في أسفل المسار الدائري.

10.12 لنفترض أنك تبسط بكرة كابل كبيرة. إذا سحبت الكابل باستخدام شد ثابت، فماذا سيحدث للعجلة الزاوية والسرعة الزاوية للبكرة، مع افتراض بقاء نصف القطر الذي تسحب منه الكابل ثابتًا وانعدام قوة الاحتكاك؟

a) يزداد كلاهما عند بسط البكرة.
b) يقل كلاهما عند بسط البكرة.
c) تزداد العجلة الزاوية بينما تقل السرعة الزاوية.
d) تقل العجلة الزاوية بينما تزداد السرعة الزاوية.
e) يستحيل معرفة ذلك.

10.13 قرص من الصلصال يدور بسرعة زاوية ω. وتلتصق قطرة صلصال بالحافة الخارجية للقرص، كتلتها $\frac{1}{10}$ من ذلك القرص. إذا انفصلت القطرة وتطايرت خارج مماس الحافة الخارجية للقرص، فما السرعة الزاوية للقرص بعد انفصال القطرة؟

a) $\frac{5}{6}\omega$
b) $\frac{10}{11}\omega$
c) ω
d) $\frac{11}{10}\omega$
e) $\frac{6}{5}\omega$

10.14 تدور متزلجة جليدية باسطة ذراعيها ثم تضمهما مما يجعلها تدور بشكل أسرع. ما العبارة الصحيحة مما يلي؟

a) لا تتغير الطاقة الحركية للدوران لديها لأن الجزء الذي تزيده سرعتها الزاوية مماثل للجزء الذي يقلله قصورها الدوراني، وذلك بسبب حفظ كمية الحركة الزاوية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

b) تزداد الطاقة الحركية للدوران لديها بسبب الشغل الذي تبذله لضم ذراعيها.

c) تقل الطاقة الحركية للدوران لديها بسبب انخفاض قصورها الدوراني؛ إذ تفقد الطاقة لأنها تُجهد بصورة تدريجية.

10.15 تقوم متزلجة تدور على جليد عديم الاحتكاك بضم يديها إلى جسمها حتى تتمكن من الدوران بشكل أسرع. ما قوانين الحفظ التي تنطبق على هذه الحالة، إن وجدت؟

a) حفظ الطاقة الميكانيكية وحفظ كمية الحركة الزاوية

b) حفظ الطاقة الميكانيكية فقط

c) حفظ كمية الحركة الزاوية فقط

d) لا حفظ الطاقة الميكانيكية ولا حفظ كمية الحركة الزاوية

10.16 إذا دار لُب حديدي لنجم منهار في البداية بتردد دوراني $f_0 = 3.20\ \text{s}^{-1}$، وإذا انخفض نصف قطر اللُّب أثناء الانهيار بمعامل 22.7. فما التردد الدوراني لِلُّب الحديدي في نهاية الانهيار؟

a) 10.4 kHz

b) 1.66 kHz

c) 65.3 kHz

d) 0.460 kHz

e) 5.20 kHz

10.17 تسير دراجة بسرعة 4.02 m/s. فإذا كان نصف قطر العجلة الأمامية 0.450 m. فما المدة التي تستغرقها هذه العجلة للقيام بدورة كاملة؟

a) 0.703 s

b) 1.23 s

c) 2.34 s

d) 4.04 s

e) 6.78 s

10.18 ما العبارة الصحيحة حول عزم القصور الذاتي لجسم صلب غير نقطي مما يلي؟

a) عزم القصور الذاتي مستقل عن محور الدوران.

b) عزم القصور الذاتي يعتمد على محور الدوران.

c) عزم القصور الذاتي يعتمد على كتلة الجسم فقط.

d) عزم القصور الذاتي يعتمد فقط على أكبر بُعد عمودي للجسم.

10.19 يمكن رؤية عين لندن (عجلة دوّارة كبيرة للغاية) باعتبارها تضم 32 حجرة كتلة كل منها m_p، وتتباعد بالتساوي بطول حافة قرص كتلته m_d ونصف قطره R. ما التعبير الذي يحدد عزم القصور الذاتي لعين لندن حول محور تماثل القرص مما يلي؟

a) $(m_p + m_d)R^2$

b) $(m_p + \frac{1}{2}m_d)R^2$

c) $(32m_p + \frac{1}{2}m_d)R^2$

d) $(32m_p + m_d)R^2$

e) $(16m_p + \frac{1}{2}m_d)R^2$

10.20 تدور أسطوانة صلبة وأسطوانة جوفاء وجسم كروي صلب وجسم كروي أجوف دون انزلاق. الأجسام الأربعة متماثلة من حيث الكتلة ونصف القطر وتتنقل بالسرعة الخطية نفسها. ما العبارة الصحيحة مما يلي؟

a) الأسطوانة الصلبة بها أعلى طاقة حركية.

b) الأسطوانة الجوفاء بها أعلى طاقة حركية.

c) الجسم الكروي الصلب به أعلى طاقة حركية.

d) الجسم الكروي الأجوف به أعلى طاقة حركية.

e) الأجسام الأربعة لها طاقة حركية مماثلة.

أسئلة مفاهيمية

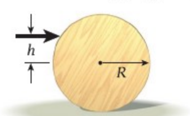
10.21 يتدحرج جسم كروي صلب منتظم نصف قطره R وكتلته M وعزم قصوره الذاتي $I = \frac{2}{5}MR^2$ دون انزلاق على سطح أفقي. وطاقته الحركية الكلية هي مجموع الطاقات المرتبطة بإزاحة مركز الكتلة والدوران حول مركز الكتلة. أوجد جزء الطاقة الحركية الكلية للجسم الكروي الناتج عن الدوران المحوري.

10.22 وُضعت حلقة رفيعة وجسم كروي صلب وهيكل كروي أجوف وقرص ذو سمك منتظم بعضها بجانب بعض على منحدر واسع طوله ℓ ومائل بزاوية θ إلى المستوى الأفقي. في الزمن $t = 0$، حُرّرت جميع الأجسام وتدحرجت دون انزلاق في مسارات متوازية على المنحدر إلى القاع. وكان مقدار الاحتكاك ومقاومة الهواء ضئيلًا للغاية. حدد ترتيب نهاية السباق.

10.23 في سباق آخر، يتدحرج جسم كروي صلب وحلقة رفيعة دون انزلاق من السكون على منحدر بزاوية θ مع المستوى الأفقي. أوجد نسبة العجلات، $a_{\text{ring}}/a_{\text{sphere}}$.

10.24 وُضع جسم كروي صلب منتظم كتلته m ونصف قطره r على منحدر مائل بزاوية θ إلى المستوى الأفقي. معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم الكروي والمنحدر هو μ_s. أوجد أقصى قيمة لـ θ سيتدحرج خلالها الجسم الكروي دون انزلاق، بداية من السكون، بدلالة الكميات الأخرى.

10.25 جسم مستدير كتلته M ونصف قطره R وعزم قصوره الذاتي I دُفع عند مركز كتلته دفعة أفقية حادة بامتداد خط عند ارتفاع h فوق مركزه (مع $0 \leq h \leq R$، بالطبع). يتدحرج الجسم بعيدًا دون انزلاق فور دفعه. احسب النسبة $I/(MR^2)$ لهذا الجسم.



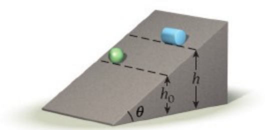
10.26 أُطلق مقذوف كتلته m من نقطة الأصل بسرعة v_0 وزاوية θ_0 فوق المستوى الأفقي. وكانت مقاومة الهواء ضئيلة للغاية.

a) احسب كمية الحركة الزاوية للمقذوف حول نقطة الأصل.

b) احسب معدل التغير في كمية الحركة الزاوية.

c) احسب عزم الدوران المؤثر في المقذوف، حول نقطة الأصل، أثناء رحلته.

10.27 وُضع جسم دائري صلب نصف قطره R وكتلته M عند ارتفاع h_0 بمستوى مائل من الميل θ. وعند تحريره، تدحرج دون انزلاق إلى قاع المستوى المائل. وبعدها، حُررت أسطوانة مماثلة من حيث الكتلة ونصف القطر على المستوى المائل نفسه. من أي ارتفاع يجب تحرير h حتى يكون لها سرعة الجسم الكروي نفسه في القاع؟



10.28 من الأصعب تحريك باب إن استندت إليه (بامتداد مستوى الباب) تجاه المفصلة عنما إذا استندت إلى الباب متعامدًا على مستواه. ما سبب ذلك؟

10.29 تفرد متزلجة جليد ذراعيها في اللفة النهائية. ونظرًا لحفظ كمية الحركة الزاوية، ستزداد سرعتها الزاوية. هل تُحفظ طاقتها الحركية الدورانية أثناء هذه العملية؟ إذا لم تكن كذلك، فما المصدر الذي تأتي منه الطاقة الإضافية أو تستهلك فيه؟

10.30 هل يكون للجسيم الذي يتحرك في خط مستقيم كمية حركة زاوية؟ اشرح.

10.31 تتدحرج أسطوانة كتلتها M ونصف قطرها R دون انزلاق خلال مسافة s بامتداد مستوى مائل يصنع زاوية θ بالنسبة إلى المستوى الأفقي. احسب الشغل المبذول من (a) الجاذبية و(b) القوة العمودية و(c) قوة الاحتكاك.

10.32 باستخدام قانون حفظ الطاقة الميكانيكية، احسب السرعة النهائية والعجلة لجسم أسطواني كتلته M ونصف قطره R بعدما يتدحرج مسافة s دون انزلاق على امتداد مستوى مائل يصنع زاوية θ بالنسبة إلى المستوى الأفقي.

10.33 *الزوج* مجموعة من قوتين متساويتين في المقدار ومتضادتين في الاتجاه. خطا حركتهما متوازيان ولكنهما غير متماثلين. أثبت أن محصلة عزم دوران زوج القوى مستقلة عن النقطة المحورية التي تم حساب عزم الدوران حولها وعن النقاط بطول خطوط العمل حيث تؤثر القوتان.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10.34 لماذا تضمّ متزلجة الجليد ذراعيها عند زيادة سرعتها الزاوية في دورة ضيقة؟

10.35 لانعطاف دراجة نارية تسير بسرعة عالية إلى اليمين، فإنك تدير مقود الدراجة للحظة إلى اليسار لبدء الانعطاف. وبعد أن يبدأ الانعطاف، تتوجه وتميل ناحية اليمين حتى يكتمل الانعطاف. اشرح بدقة قدر استطاعتك كيف يبدأ هذا التوجيه المعاكس الانعطاف في الاتجاه المرغوب. (*تلميح:* تتمتع عجلات الدراجة النارية أثناء الحركة بقدر كبير من كمية الحركة الزاوية).

10.36 يؤدي تأثير المد والجزر للقمر في الأرض إلى إبطاء الدوران المحوري للأرض بصورة تدريجية، بسبب احتكاك المد والجزر. وتُظهر دراسات المرجان من العصر الديفوني أن السنة كانت 400 يوم في هذه الفترة. ما الذي يشير إليه ذلك، إن وجد، بخصوص كمية الحركة الزاوية للقمر في العصر الديفوني مقارنة بقيمتها في الوقت الحاضر؟

10.37 يمر حبل خفيف عبر بكرة خفيفة عديمة الاحتكاك. وقد تم ربط أحد طرفيه في حزمة من الموز كتلتها M ويوجد قرد له الكتلة نفسها يُمسك بالطرف الآخر. يتسلق القرد الحبل محاولًا الوصول إلى ثمار الموز. نصف قطر البكرة هو R.

a) عند التعامل مع القرد والموز والحبل والبكرة كنظام، احسب محصلة عزم الدوران حول محور البكرة.

b) باستخدام نتيجة الجزء (a)، حدد إجمالي كمية الحركة الزاوية حول محور البكرة كدالة للزمن.

تمارين

يشير اللون الأزرق لرقم المسألة إلى توفر الإجابة عنها في دليل حلول الطالب. تشير علامة النقطة الواحدة • والنقطتين •• إلى زيادة مستوى صعوبة المسألة.

القسمان 10.1 و10.2

10.38 أسطوانة صلبة منتظمة كتلتها $M = 5.00$ kg تتدحرج دون انزلاق على طول سطح أفقي. سرعة مركز كتلتها 30.0 m/s. احسب طاقتها.

10.39 حدد عزم القصور الذاتي لثلاثة مراهقين وزنهم 60.0 kg و45.0 kg و80.0 kg يجلسون في نقاط مختلفة على حافة منصة دوارة. نصف قطرها 12.0 m.

•10.40 أُلقي قلم طوله 24.0–cm في الهواء. ليصل إلى أقصى ارتفاع يساوي 1.20 m فوق نقطة الإلقاء. وفي طريقه إلى الأعلى، يُنشئ القلم 1.80 دورة. بالتعامل مع القلم على أنه ساق رفيع منتظم، احسب النسبة بين الطاقة الحركية الدورانية والطاقة الحركية الانتقالية عند ثابت إطلاق القلم. افترض أن سرعة الدوران لا تتغير أثناء الإلقاء.

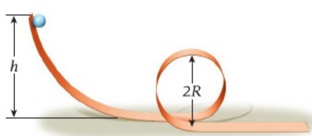
•10.41 تبدأ كرة صلبة وكرة جوفاء، كتلة كل منهما 1.00 kg ونصف قطرهما 0.100 m، من السكون وتتدحرجان في منحدر طوله 3.00 m بميل 35.0°. ينزلق مكعب ثلج له كتلة مماثلة دون احتكاك إلى أسفل المنحدر نفسه.

a) ما الكرة التي ستصل إلى القاع أولًا؟ اشرح!

b) هل يتحرك مكعب الثلج أسرع أم أبطأ من الكرة الصلبة في المستوى المائل؟ اشرح استنتاجك.

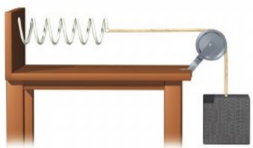
c) ما سرعة الكرة الصلبة في أسفل المستوى المائل؟

•10.42 تتدحرج كرة صلبة كتلتها m ونصف قطرها r دون انزلاق خلال حلقة نصف قطرها R، كما هو موضح في الشكل. من أي ارتفاع h ينبغي أن تنطلق الكرة حتى تمر خلال الحلقة دون الخروج عن المسار؟



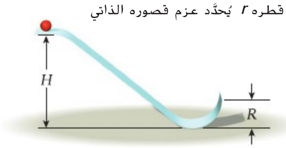
••10.43 نباض السرطان ($m \approx 2 \times 10^{30}$ kg, $R = 12$ km) هو نجم نيوتروني يقع في سديم السرطان. تصل سرعة دوران نباض السرطان في الوقت الحالي إلى قرابة 30 دورة في الثانية أو 60π rad/s، ولكن تنخفض سرعة دوران النباض سنويًا، وتزداد فترة الدوران بمقدار 10^{-5} s. علّل العبارة التالية: فقدان الطاقة الدورانية للنباض تعادل 100,000 ضعف من ناتج طاقة الشمس. (إجمالي الطاقة التي تنبعث من الشمس حوالي 4×10^{26} W).

••10.44 يتصل قالب كتلته $m = 4.00$ kg بزنبرك ($k = 32.0$ N/m) بواسطة حبل معلق على بكرة كتلتها $M = 8.00$ kg ونصف قطرها $R = 5.00$ cm، كما هو موضح في الشكل. بالتعامل مع البكرة على أنها قرص صلب متجانس وتجاهل الاحتكاك في محور البكرة وافتراض أن النظام يبدأ من السكون عندما يكون الزنبرك بطوله الطبيعي، أوجد (a) سرعة القالب بعد سقوطه مسافة 1.00 m و(b) أقصى تمدد للنابض.



القسم 10.3

•10.45 جسم دائري صغير كتلته m ونصف قطره r يُحدَّد عزم قصوره الذاتي من خلال $I = cmr^2$. يتدحرج الجسم دون انزلاق بامتداد المسار الموضح في الشكل. وينتهي المسار بمنحدر ارتفاعه $R = 2.50$ m والذي يدفع الجسم رأسيًا. يبدأ الجسم من ارتفاع $H = 6.00$ m. فما أقصى ارتفاع سيصل إليه بعد مغادرة المنحدر إذا كان $c = 0.400$؟



•10.46 يتدحرج جسم كروي صلب منتظم كتلته M ونصف قطره R دون انزلاق بامتداد سطح مستوٍ بسرعة $v = 3.00$ m/s عندما يواجه منحدرًا بزاوية $\theta = 23.0°$ أعلى المستوى الأفقي. أوجد أقصى مسافة يقطعها الجسم الكروي على المنحدر في كل حالة:

a) المنحدر عديم الاحتكاك، ولذا يواصل الجسم الكروي دورانه بسرعته الزاوية الابتدائية حتى يصل إلى أقصى ارتفاع له.

b) يوفر المنحدر ما يكفي من الاحتكاك لمنع الجسم الكروي من الانزلاق. ولذا تتوقف الحركة الخطية والدورانية عندما يصل الجسم إلى أقصى ارتفاع له.

القسم 10.4

•10.47 قرص كتلته 30.0 kg ونصف قطره 40.0 cm مُثبت في محور أفقي عديم الاحتكاك. وقد لُف حبل عدة مرات حول القرص ثم رُبط في قالب 70.0 kg. كما هو موضح في الشكل. أوجد عجلة القالب، مفترضًا عدم انزلاق الحبل.

•10.48 تُبذل قوة $\vec{F} = (2\hat{x} + 3\hat{y})$ N على جسم في نقطة يكون متجه الموقع الخاص بها بالنسبة إلى النقطة المحورية هو $\vec{r} = (4\hat{x} + 4\hat{y} + 4\hat{z})$ m. احسب عزم الدوران الذي أوجدته القوة حول هذه النقطة المحورية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

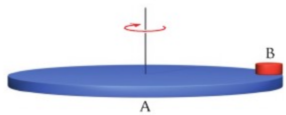
••10.49 تم تثبيت قرص كتلته 14.0 kg وقطره 30.0 cm وسُمكه 8.00 cm على محور أفقي صلب كما يوضّح الجانب الأيسر في الشكل. (توجد قوة احتكاك بين المحور والقرص). يكون القرص ساكنًا في بادئ الأمر. وتُبذل قوة ثابتة، $F = 70.0$ N، في حافة القرص بزاوية 37.0°، كما يوضح الجانب الأيمن من الشكل. بعد مرور 2.00 s، تنخفض القوة إلى $F = 24.0$ N ويدور القرص بسرعة زاوية ثابتة.

a) ما مقدار عزم الدوران الناتج عن الاحتكاك بين القرص والمحور؟
b) ما مقدار السرعة الزاوية للقرص بعد 2.00 s؟
c) ما مقدار الطاقة الحركية للقرص بعد 2.00 s؟

القسم 10.5

10.50 ساق رفيع منتظم (الطول = 1.00 m، الكتلة = 2.00 kg) يدور على محور حول قطعة خشبية أفقية عديمة الاحتكاك بأحد طرفيه. وعزم القصور الذاتي للساق خلال هذا المحور هو $\frac{1}{3}mL^2$. يُطلق الساق عندما يكون 60.0° أسفل المستوى الأفقي. ما العجلة الزاوية للساق لحظة إطلاقه؟

10.51 يدور جسم مكوّن من جزأين على شكل قرص، A وB، كما هو موضح في الشكل، حول محور عبر مركز القرص A. وتبلغ كُتلتا القرصين A وB ونصفا قطريهما 2.00 kg و0.200 kg و25.0 cm و2.50 cm، على التوالي.

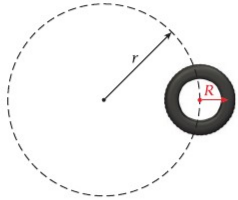


a) احسب عزم القصور الذاتي للجسم.
b) إذا كان عزم الدوران المحوري الناتج عن الاحتكاك هو 0.200 N m، فما المدة التي يستغرقها الجسم حتى يتوقف إذا كان يدور بسرعة زاوية ابتدائية تساوي -2π rad/s؟

•10.52 تعمل مستشارًا فنيًا في فيلم مغامرات حركية حيث يتطلب عمل مثير خلاله أن يقفز البطل من مبنى طوله 20.0 m ويهبط على الأرض بطريقة آمنة بسرعة رأسية نهائية قدرها 4.00 m/s. في حافة سقف المبنى، توجد أسطوانة وزنها 100.-kg ملفوف عليها حبل طويل بدرجة كافية (كتلة ضئيلة للغاية)، ونصف قطرها 0.500 m ويمكنها الدوران بحُرية حول محورها الأسطواني بعزم قصور ذاتي I_0. يتطلب السيناريو من ممثل بديل وزنه 50.0-kg أن يربط الحبل حول خصره ويقفز من أعلى السطح.

a) حدّد تعبيرًا للعجلة الخطية الخاصة بالممثل البديل بدلالة كتلته m ونصف قطر الأسطوانة r وعزم القصور الذاتي I_0.
b) حدّد القيمة اللازمة لعجلة الممثل البديل إن أراد الهبوط بأمان بسرعة 4.00 m/s، ثم استخدم هذه القيمة لحساب عزم القصور الذاتي للأسطوانة حول محورها.
c) ما العجلة الزاويّة للأسطوانة؟
d) ما عدد اللفات التي تدورها الأسطوانة أثناء السقوط؟

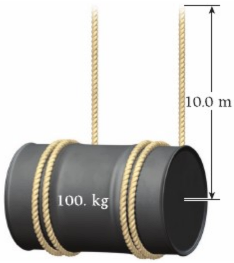
•10.53 في مسابقة لرمي الإطارات، أمسك رجل إطار سيارة كتلته 23.5 kg وأداره ثلاث مرات مكتملة بسرعة ورماه، مثل رامي القرص. يبدأ الإطار من حالة سكون ثم يتعجل في مسار دائري. نصف القطر المداري r لمركز كتلة الإطار هو 1.10 m والمسار أفقي على الأرض.



يوضح الشكل منظرًا علويًا للمسار الدائري للإطار، وتحدد النقطة الموجودة في المركز محور الدوران. يبذل الرجل عزم دوران ثابتًا يساوي 20.0 N m لتعجيل الإطار في عجلة زاوية ثابتة. افترض أن كتلة الإطار بأكملها نصف قطرها $R = 0.350$ m من مركزها.

a) ما الزمن، t_{throw}، اللازم حتى يكمل الإطار ثلاث لفات مكتملة؟
b) ما السرعة الخطية النهائية لمركز كتلة الإطار (بعد ثلاث لفات مكتملة)؟
c) بدلًا من افتراض أن كتلة الإطار بأكملها على مسافة 0.350 m من مركزها، إذا تعاملت مع الإطار وكأنه قرص أجوف نصف قطره الداخلي 0.300 m ونصف قطره الخارجي 0.400 m. فكيف يغير هذا من إجاباتك للجزأين (a) و(b)؟

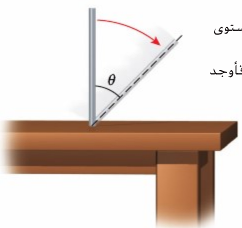
•10.54 برميل كتلته 100 kg ونصف قطره 50.0 cm وبه حبلان ملفوفان حوله، كما هو موضح في الشكل. يُحرَّر البرميل من السكون، مما ينتج عنه بسط الحبلين وسقوط البرميل في حالة دوران باتجاه الأرض. ما سرعة البرميل بعد سقوطه مسافة 10.0 m؟ ما مقدار الشد في كل حبل؟ افترض أن كتلة البرميل موزعة بالتساوي وأنه يدور وكأنه أسطوانة صلبة.



•10.55 عجلة بها $c = \frac{4}{9}$ وكتلتها 40.0 kg ونصف قطر إطارها 30.0 cm ومثبتة بشكل رأسي على محور أفقي. وتعلّق كتلة قدرها 2.00 kg من العجلة باستخدام حبل ملفوف حول الإطار. أوجد العجلة الزاوية للعجلة عند تحرير الكتلة.

•10.56 يقف ساق منتظم كتلته $M = 250.0$ g وطوله $L = 50.0$ cm بشكل رأسي على طاولة أفقية. وقد حُرر من السكون إلى السقوط.

a) ما القوى التي تؤثر في الساق؟
b) احسب السرعة الزاوية للساق والعجلة الرأسية للطرف المتحرك من الساق والقوة العمودية التي تبذلها الطاولة على الساق عندما يشكل زاوية $\theta = 45.0°$ بالنسبة إلى المستوى الرأسي.



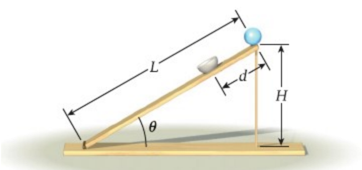
c) إذا سقط الساق على الطاولة دون انزلاق، فأوجد العجلة الخطية لنقطة نهاية الساق عندما يصطدم بالطاولة وقارنها مع g.

•10.57 A يتألف إعداد عرض توضيحي من لوح منتظم طوله L، معلق بالطرف السفلي ومرفوع بزاوية θ باستخدام عصا داعمة. وتستقر كرة بالطرف المرتفع، وأُلصق كوب خفيف باللوح على مسافة d من الطرف المرتفع حتى يحتجز الكرة عند إزالة العصا الداعمة للوح بشكل مفاجئ. وتريد أنت استخدام لوح رفيع معلق طوله 1.00 m وعرضه 10.0 cm، وتخطط لوضع العصا الداعمة الرأسية في طرفه المرتفع.

a) ما الحد الأقصى لطول العصا الداعمة الذي يمكنك الحصول عليه حتى تحظى الكرة بفرصة احتجازها؟
b) افترض أنك تختار استخدام أطول عصا داعمة ممكنة في الطرف المرتفع للوح. ما مسافة d التي ينبغي وضع الكوب عندها من هذا الطرف لتضمن أن الكرة ستحتجز في الكوب؟

القسم 10.6

•10.58 حدافة المحرك البخاري القديم عبارة عن قرص فلزي متجانس وصلب كتلته M = 120 kg ونصف قطره $R = 80.0$ cm. ويدير المحرك العجلة بسرعة 500 rpm. في حالة الطوارئ، تُفصل الحدافة من المحرك لإيقافه وتُستخدم وسادة المكبح في الحافة لتوفير طاقة داخلية قطريًا F = 100 N. إذا كان معامل الاحتكاك الحركي بين الوسادة والحدافة هو $\mu_k = 0.200$.



فما عدد لفات الحدافة قبل توقفها؟ ما الزمن الذي تستغرقه الحدافة حتى تتوقف؟ احسب الشغل الذي يبذله عزم الدوران أثناء هذا الوقت.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10.59• يحظى التوربين والأجزاء الدوّارة المرتبطة في محرك نفاث بعزم قصور ذاتي كلي يساوي $25.0\ kg\ m^2$. ويتعجّل التوربين بصورة منتظمة من السكون إلى سرعة زاوية تساوي $150.\ rad/s$ في فترة زمنية تساوي $25.0\ s$. أوجد

a) العجلة الزاوية.

b) محصلة عزم الدوران اللازم.

c) الزاوية التي دار خلالها في $25.0\ s$.

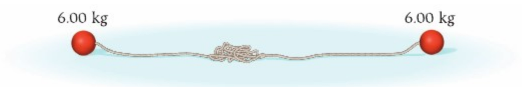
d) الشغل الذي بذله عزم الدوران.

e) الطاقة الحركية للتوربين في نهاية الفترة الزمنية $25.0\ s$.

القسم 10.7

10.60 كتلتان صغيرتان وزنهما $6.00\ kg$ مرتبطتان بحبل، والذي يمكن افتراض أنه عديم الكتلة. ويوجد تشابك في الحبل، كما هو موضح في الشكل. بعد تشابك الحبل، تصبح الكتلتان منفصلتين بمقدار $1.00\ m$، ثم يتم تدوير الكتلتين حول مركز كتلتيهما على طاولة عديمة الاحتكاك بسرعة $5.00\ rad/s$. وأثناء دورانهما، يتفكك الحبل ويتمدد ليصبح طوله $1.40\ m$. فما السرعة الزاوية للكتلتين بعدما تفكك الحبل؟

10.61• يُعتقد أحيانًا أنه إذا وقف جميع سكان الصين على كراسٍ وقفزوا في آن



واحد، فسيغير ذلك من دوران كوكب الأرض. ولحسن الحظ، فإن الفيزياء توفر لنا أدوات للتحقق من هذه التخمينات.

a) احسب عزم القصور الذاتي لكوكب الأرض حول محورها. وللتبسيط، تعامل مع كوكب الأرض باعتباره جسمًا كرويًا منتظمًا كتلته $m_E = 5.977 \times 10^{24}\ kg$ ونصف قطره $6371\ km$.

b) احسب الحد الأعلى لمساهمة سكان الصين في عزم القصور الذاتي لكوكب الأرض، بافتراض أن المجموعة بأكملها في خط الاستواء. اعتبر أن سكان الصين 1.30 مليار نسمة، متوسط كتلهم $70.0\ kg$.

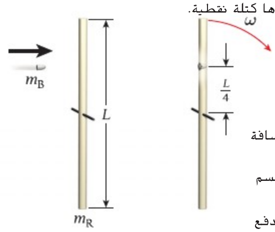
c) احسب التغير في المساهمة في الجزء (b) المرتبط بتغير متزامن قدره $1.00\text{-}m$ في الموقع القطري للمجموعة بأكملها.

d) حدّد التغير الجزئي في طول اليوم الذي سيحدثه التغير في الجزء (c).

10.62• رصاصة كتلتها $m_B = 1.00 \times 10^{-2}\ kg$ تتحرك بسرعة $100\ m/s$ عند اصطدامها بساق كتلته $m_R = 5.00\ kg$ وطوله $L = 1.00\ m$ (موضح في الشكل). يكون الساق في حالة سكون في البداية وفي موقع رأسي ويدور حول محور يمرّ عبر مركز كتلته. تنغرس الرصاصة في الساق على مسافة $L/4$ من النقطة المحورية. ونتيجة لذلك، يبدأ نظام الرصاصة والساق في الدوران.

a) أوجد السرعة الزاوية، ω، لنظام الرصاصة والساق بعد الاصطدام. يمكنك تجاهل عرض الساق ومعاملة الرصاصة باعتبارها كتلة نقطية.

b) ما مقدار الطاقة الحركية المفقودة في الاصطدام؟



10.63•• يستقر جسم كروي صلب ومنتظم نصف قطره R وكتلته M على سطح طاولة أفقية. ويصل دفع موجّه أفقيًا مقداره J إلى نقطة على الكرة بمسافة رأسية h فوق سطح الطاولة.

a) حدّد السرعة الزاويّة والانتقالية للجسم الكروي مباشرة بعد وصول الدفع.

b) حدّد المسافة h_0 التي يتم توصيل الدفع خلالها والذي ينتج عنه دوران الكرة دون انزلاق في الحال.

10.64• منصة دائرية نصف قطرها $R_p = 4.00\ m$ وكتلتها $M_p = 400.\ kg$ تدور على محامل هوائية حول محورها الرأسي بسرعة $6.00\ rpm$. ويوجد رجل كتلته $80.0\text{-}kg$ يقف عند مركز المنصة ويبدأ في السير (في $t = 0$) قطريًا إلى الخارج بسرعة $0.500\ m/s$ على المنصة. بالاقتراب من الرجل بأسطوانة رأسية نصف قطرها $R_m = 0.200\ m$، حدّد معادلة (تعبيرًا محددًا) للسرعة الزاوية للمنصة في صورة دالة للزمن. ما السرعة الزاوية عندما يصل الرجل إلى حافة المنصة؟

10.65• يقف صبي وزنه $25.0\ kg$ على بعد $2.00\ m$ من مركز ملعب عديم الاحتكاك للعبة دوامة الخيل. عزم قصوره الذاتي $200\ kg\ m^2$. ويبدأ الصبي في الجري بمسار دائري بسرعة $0.600\ m/s$ بالنسبة إلى الأرض.

a) احسب السرعة الزاوية للعبة دوامة الخيل.

b) احسب سرعة الصبي بالنسبة إلى سطح لعبة دوامة الخيل.

10.66• السرعة الزاوية لكوكب الأرض هي $7.272 \times 10^{-5}\ rad/s$ أثناء دورانها حول محورها. أوجد السرعة الزاويّة الجديدة إذا اصطدم كويكب ($m = 1.00 \times 10^{22}\ kg$) بكوكب الأرض بينما تتحرك بسرعة $1.40 \times 10^{3}\ m/s$ (افترض أن الكويكب عبارة عن كتلة نقطية مقارنة بنصف قطر الأرض) في كل حالة مما يلي:

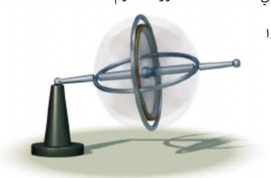
a) يصطدم الكويكب بالنقطة الميتة لكوكب الأرض.

b) يصطدم الكويكب بكوكب الأرض بشكل مماسي تقريبًا في اتجاه الدوران المحوري لكوكب الأرض.

c) يصطدم الكويكب بكوكب الأرض بشكل مماسي تقريبًا في اتجاه معاكس لاتجاه الدوران المحوري للأرض.

القسم 10.8

10.67 جيروسكوب للعرض التوضيحي يتألف من قرص منتظم نصف قطره $40.0\text{-}cm$، ومثبت بنقطة منتصف بمحور يساوي $60.0\ cm$. المحور مدعوم في طرف واحد عندما يكون في موضع أفقي. ما سرعة معالجة الجيروسكوب، بوحدات rad/s، إذا دار القرص حول المحور بسرعة $30.0\ rev/s$؟



تمارين إضافية

10.68 تحتفظ معظم النجوم بحجم اتزان من خلال توازن قوتين، قوة جاذبية داخلية وقوة خارجية ناتجة عن التفاعلات النووية للنجم. عند نفاد وقود النجم، ينعدم الثقل الموازن لقوة الجاذبية. وأيًا كانت المادة المتبقية فإنها تنهار في نفسها. إضافة إلى ذلك، تصبح النجوم التي لها حجم مماثل للشمس أقزامًا بيضاء، والتي تتوهج من الحرارة المتبقية. وتتعرض النجوم التي تبلغ كتلتها ثلاثة أضعاف كتلة الشمس للانضغاط لتصبح نجومًا نيوترونية. والنجم الذي تزيد كتلته عن ثلاثة أضعاف كتلة الشمس ينهار إلى نقطة واحدة/تسمى *الثقب الأسود*. في معظم الحالات، تندمج البروتونات والإلكترونات بعضها مع بعض لتكوين نيوترونات. وهذا هو سبب الاسم نجم نيوتروني. وتدور النجوم النيوترونية بسرعة كبيرة نتيجة لحفظ كمية الحركة الزاوية. تخيل أن نجمًا كتلته $5.00 \times 10^{30}\ kg$ ونصف قطره $9.50 \times 10^{8}\ m$ يدور مرة واحدة في غضون 30.0 يومًا. افترض أن هذا النجم يتحمل انهيار الجاذبية ليكوّن نجمًا نيوترونيًا نصف قطره $10.0\ km$. حدّد مدة دورانه حول محوره.

10.69 في تجارب بمختبر برنستون لفيزياء البلازما، تم تسخين بلازما ذرات الهيدروجين إلى أكثر من 500 مليون درجة مئوية (أكثر سخونة من مركز الشمس بمقدار 25 ضعفًا تقريبًا) في فترة زمنية لا تتجاوز عشرات المللي ثوانٍ باستخدام مجالات مغناطيسية قوية (أكبر من المجال المغناطيسي لكوكب الأرض بمقدار 100,000 ضعف). بالنسبة إلى كل عملية تشغيل تجريبي، فإنها تتطلب كمية هائلة من الطاقة في جزء من الثانية، والتي تتحول إلى متطلبات طاقة ستتسبب في إطفاء الإضاءة إذا كانت الكهرباء من شبكة عادية مستخدمة لتزويد التجربة بالطاقة. بدلًا من ذلك، تُخزن الطاقة الحركية في حدافة ضخمة، وهي أسطوانة صلبة دوارة نصف قطرها $3.00\ m$ وكتلتها $1.18 \times 10^{6}\ kg$. تبدأ الطاقة الكهربائية من شبكة الكهرباء بتدوير الحدافة، والتي تستغرق $10.0\ min$ للوصول إلى سرعة زاوية تساوي $1.95\ rad/s$. وبمجرد وصول الحدافة إلى هذه السرعة الزاوية، فإنه يمكن سحب جميع طاقتها بسرعة كبيرة لتزويد عملية التشغيل التجريبي بالطاقة. ما الطاقة الميكانيكية المخزنة في الحدافة عند دورانها بسرعة $1.95\ rad/s$؟ ما متوسط عزم الدوران اللازم لتسريع الحدافة من السكون إلى $1.95\ rad/s$ في غضون $10.0\ min$؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10.70 يتدحرج طوق رفيع وزنه 2.00–kg ونصف قطره 50.0–cm باتجاه منحدر 30.0° دون انزلاق. إذا بدأ الطوق من السكون في قمة المنحدر، فما سرعته الانتقالية بعدما يتدحرج مسافة 10.0 m على طول المنحدر؟

10.71 يدور جزيء أكسجين (O_2) في المستوى xy حول المحور z. يمر محور الدوران عبر مركز الجزيء، متعامدًا على طوله. وتبلغ كتلة كل ذرة أكسجين 2.66×10^{-26} kg. ومتوسط الفصل بين الذرتين هو $d = 1.21 \times 10^{-10}$ m.

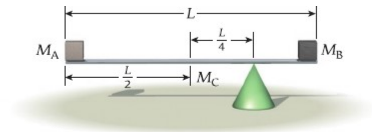
a) احسب عزم القصور الذاتي للجزيء حول المحور z.

b) إذا كانت السرعة الزاوية للجزيء حول المحور z تساوي 4.60×10^{12} rad/s، فما مقدار الطاقة الحركية الدورانية له؟

10.72 تنزلق خرزة 0.0500 kg في سلك مثني على شكل دائرة نصف قطرها 0.400 m، وأنت تدفع الخرزة بقوة مماسية للدائرة. ما القوة اللازمة لإعطاء الخرزة عجلة زاوية تساوي $6.00\ rad/s^2$؟

10.73 يعمل أستاذ على تقديم عرض توضيحي لمحاضرة بينما يقف بمركز طاولة دوّارة عديمة الاحتكاك، ويُمسك بكتل 5.00–kg في كل يد باسطًا ذراعيه حتى تكون كل كتلة على بعد 1.20 m من خط منتصفه. يدور طالب (محدد بعناية) حول الأستاذ بما يصل إلى تردد دوراني يساوي 1.00 rpm. إذا ضم ذراعيه إلى جانبيه فإن كل كتلة ستكون على بعد 0.300 m من خط منتصفه. فما السرعة الزاوية الجديدة لديه؟ افترض أن قصوره الدوراني دون الكتل هو $2.80\ kg\ m^2$ وتجاهل التأثير في القصور الدوراني لموقع ذراعيه، نظرًا لصغر كتلتيهما مقارنة بكتلة الجسم.

•10.74 أُعِدّ النظام الموضح بالشكل في حالة سكون في البداية. احسب العجلة الزاوية للنظام بمجرد تحريره. يمكنك أن تعامل M_A (1.00 kg) وM_B (10.0 kg) باعتبارهما كتلتين نقطيتين بأحد طرفي الساق الذي تساوي كتلته M_C (20.0 kg) وطوله L (5.00 m).



•10.75 يصمم طفل عربة بسيطة تتألف من 60.0 cm باستخدام ورقة من الخشب الرقائقي طولها 1.20 m وكتلتها 8.00 kg وأربع عجلات قطر كل منها 20.0 cm وكتلتها 2.00 kg. وقد حُررت من قمة منحدر 15.0° طوله 30.0 m. أوجد السرعة في أسفل المنحدر. افترض أن العجلات تدور دون انزلاق بطول المنحدر ويمكن تجاهل الاحتكاك بين العجلات ومحاورها.

•10.76 قرص مدمج كتلته 15.0 g وقطره الداخلي 1.50 cm وقطره الخارجي 11.9 cm؛ افترض أنك ألقيته ليدور بسرعة 4.30 دورات في الثانية.

a) حدِّد عزم القصور الذاتي للقرص المدمج، مع تقريب كثافته على أنها منتظمة.

b) إذا لمست أصابعك القرص المدمج بمقدار 0.250 دورة حين اكتسابه لسرعته الزاوية وبذلت عزم دوران ثابتًا عليه، فما مقدار عزم الدوران هذا؟

•10.77 تستخدم ورقة من الخشب الرقائقي سُمكها 1.30 cm لإنشاء باب خزانة عرضه 55.0 cm وطوله 79.0 cm، مع مفصلات مثبتة بالحافة الرأسية. وقد تم تثبيت مقبض صغير 150.g على مسافة 45.0 cm من المفصلة السفلية بارتفاع مماثل لارتفاع هذه المفصلة. إذا كانت كثافة الخشب الرقائقي هي $550\ kg/m^3$، فما عزم القصور الذاتي للباب حول المفصلات؟ لا تهتم بمساهمة مكونات المفصلة في عزم القصور الذاتي.

•10.78 صُنع جزء آلة من قرص صلب منتظم نصف قطره R وكتلته M. وتم ثقب فجوة نصف قطرها $R/2$ في القرص، وكان مركز الفجوة على مسافة $R/2$ من مركز القرص (يمتد قطر الفجوة من مركز القرص إلى حافته الخارجية). ما عزم القصور الذاتي لجزء الآلة هذا حول مركز القرص بدلالة R وM؟

•10.79 محطة فضائية لتوفير جاذبية صناعية لدعم *إقامة* طويلة لرواد الفضاء. وقد صممت على شكل عجلة كبيرة، جميع حجراتها في الحافة، وتدور بسرعة ستوفر عجلة مماثلة لعجلة الجاذبية الأرضية لرواد الفضاء (ستكون أقدامهم داخل الجدار الخارجي للمحطة الفضائية وستتجه رؤوسهم نحو المحور). بعد تجميع المحطة الفضائية في المدار، سيبدأ دورانها المحوري بإشعال محرك صاروخي مثبت في الحافة الخارجية، والذي يشتعل بشكل مماسي للحافة. نصف قطر المحطة الفضائية هو $R = 50.0$ m وكتلتها هي $M = 2.40 \times 10^5$ kg. إذا كان ضغط المحرك الصاروخي هو $F = 1.40 \times 10^2$ N. فما مدة إشعال المحرك؟

•10.80 العديد من النباضات الإشعاعية ينبعث منها تردد راديو أو انبعاث آخر بطريقة دورية ومرتبطة بنجم مرافق فيما يعرف بأنه *نظام ثنائي النابض*. في 2003، اكتشف رواد الفضاء في مرصد جودريل بانك بالمملكة المتحدة نظام نباض إشعاعي ثنائي، PSR J0737–3039A وJ0737–3039B. وفي هذا النظام، *كلا* النجمين نباض إشعاعي. يدور النباض الإشعاعي الذي له فترة دوران محوري أسرع مرة واحدة كل 0.0230 s. بينما يدور الآخر خلال فترة دوران تساوي 2.80 s. كما أن كتلة النباض الإشعاعي الأسرع أكبر من كتلة الشمس بمقدار 1.337 ضعفًا، في حين أن كتلة النباض الإشعاعي الأبطأ تتجاوز كتلة الشمس بمقدار 1.250 ضعفًا.

a) إذا كان كل نجم نابض نصف قطره 20.0 km. فعبّر عن نسبة طاقتيهما الحركية الدورانية. اعتبر أن كل نجم عبارة عن جسم كروي منتظم له فترة دوران ثابتة.

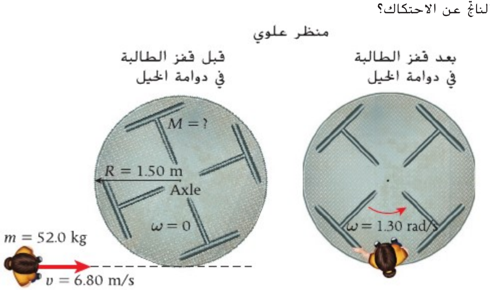
b) مدارات النباضين الإشعاعيين حول مركز كتلتيهما المشترك مختلفة المركز (مدارات بيضاوية مسحوقة بشدة)، ولكن يمكن الحصول على تقدير متوسط الطاقة الحركية الانتقالية بالتعامل مع كل مدار وكأنه مدار دائري بنصف قطر يساوي متوسط المسافة من مركز كتلة النظام. نصف القطر هذا يساوي 4.23×10^8 m بالنسبة إلى النجم الأكبر، و4.54×10^8 m للنجم الأصغر. إذا كان الزمن الدوري 2.40 h. فاحسب نسبة الطاقات الحركية الدورانية إلى الانتقالية لكل نجم.

•10.81 تود طالبة كتلتها 52.0 kg قياس كتلة ملعب لعبة دوامة الخيل، والذي يتألف من قرص معدني صلب نصف قطره $R = 1.50$ m مثبت في موضع أفقي على محور منخفض الاحتكاك. وتحاول إجراء تجربة: تجري بسرعة $v = 6.80$ m/s باتجاه الحافة الخارجية للعبة دوامة الخيل وتقفز على الحافة الخارجية، كما هو موضح في الشكل. كانت لعبة دوامة الخيل في حالة سكون قبل أن تقفز الطالبة عليها وتدور بسرعة 1.30 rad/s فور قفزها عليها. يمكنك افتراض أن كتلة الطالبة تتركز في نقطة.

a) ما كتلة لعبة دوامة الخيل؟

b) إذا استغرقت لعبة دوامة الخيل 35.0 s حتى تتوقف بعد أن قفزت الطالبة عليها، فما متوسط عزم الدوران الناتج عن الاحتكاك في المحور؟

c) ما عدد مرات دوران لعبة دوامة الخيل قبل توقفها، بافتراض ثبات عزم الدوران الناتج عن الاحتكاك؟



•10.82 بندول قذفي يتألف من ذراع كتلتها M وطولها $L = 0.480$ m ويتمحور أحد طرفي الذراع حتى تدور الذراع بحرية في مستوى أفقي. في البداية، لا تتحرك الذراع وتُعلّق بشكل رأسي من النقطة المحورية. يصطدم مقذوف بكتلة M نفسها بالطرف السفلي للذراع بسرعة أفقية $V = 3.60$ m/s. يظل المقذوف ملتصقًا بالطرف الحر للذراع أثناء حركتها اللاحقة. أوجد أقصى زاوية ستتأرجح خلالها الذراع والكتلة المرفقة في كل حالة:

a) تعامل الذراع باعتبارها بندولًا مثاليًا، تتركز كتلتها بالكامل ككتلة نقطية في الطرف الحر.

b) تُعامل الذراع كساق صلب رفيع، والتي تُوزع كتلتها بالتساوي بامتداد طولها.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10.83•• عجلة عربة مصنوعة بالكامل من الخشب. تتألف مكوناتها من إطار و12 ساقًا ومحورًا. الإطار كتلته 5.20 kg ونصف قطره الخارجي 0.900 m ونصف قطره الداخلي 0.860 m. والمحور عبارة عن أسطوانة صلبة كتلتها 3.40 kg ونصف قطرها 0.120 m. والقضبان رفيعة كتلتها 1.10 kg تمتد من المحور إلى الجانب الداخلي للإطار. حدّد الثابت $c = I/MR^2$ لعجلة العربة هذه.

10.84•• يوضح الشكل كرة صلبة متجانسة نصف قطرها R، وقبل سقوطها على الأرض، يكون مركز كتلتها في حالة سكون، ولكنها تدور بسرعة زاويّة ω_0 حول محور أفقي عبر مركزه. أقل نقطة للكرة تقع على ارتفاع h فوق الأرض. وعندما تُحرر الكرة فإنها تتأثر بالجاذبية وترتد إلى ارتفاع جديد بحيث تكون أقل نقطة لها ah فوق الأرض. يمكن اعتبار أن تشويه الكرة والأرض بسبب التصادم ضئيل للغاية؛ رغم أن وقت التصادم غير صفري. كتلة الكرة هي m ومعامل الاحتكاك الحركي بين الكرة والأرض هو μ_k. تجاهل مقاومة الهواء.

بالنسبة إلى الحالة التي انزلقت فيها الكرة أثناء التصادم، أوجد كلًا مما يلي:

a) $\tan\theta$، حيث θ هي زاوية الارتداد الموضحة في الرسم التخطيطي.

b) المسافة الأفقية التي انتقلت خلالها الكرة في الهواء بين التصادمين الأول والثاني.

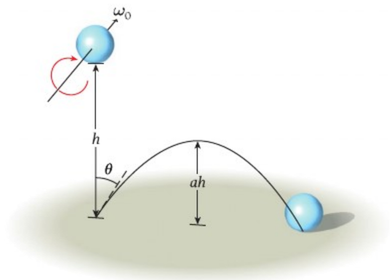
c) الحد الأدنى لقيمة ω_0 في هذه الحالة.

بالنسبة إلى الحالة التي توقفت خلالها الكرة عن الانزلاق قبل انتهاء التصادم، أوجد كلًا مما يلي:

d) $\tan\theta$.

e) المسافة الأفقية التي انتقلت خلالها الكرة في الهواء بين التصادمين الأول والثاني.

بأخذ كلتا الحالتين في الاعتبار، ارسم اختلاف $\tan\theta$ مع ω_0.



تمارين بمعطيات متعددة

10.85 مروحة طائرة خفيفة طولها 2.012 m ونصف قطرها 17.36 kg. تدور المروحة بتردد 3280. rpm. ما مقدار الطاقة الحركية الدورانية لهذه المروحة؟ يمكنك أن تتعامل مع المروحة على أنها ساق رفيع يدور حول مركزه.

10.86 مروحة طائرة خفيفة طولها 2.092 m وكتلتها 17.56 kg. طاقة الدوران المحوري للمروحة هي 422.8 kJ. ما التردد الدوراني للمروحة (بوحدة rpm)؟ يمكنك أن تتعامل مع المروحة على أنها ساق رفيع يدور حول مركزه.

10.87 مروحة طائرة خفيفة طولها 1.812 m وتدور بسرعة 2160. rpm. الطاقة الحركية للمروحة هي 124.3 kJ. ما كتلة المروحة؟ يمكنك أن تتعامل مع المروحة على أنها ساق رفيع يدور حول مركزه.

10.88 تُضرب كرة جولف كتلتها 45.90 g وقطرها 42.60 mm بحيث تتحرك بسرعة 51.85 m/s وتدور بتردد 2857 rpm. ما مقدار الطاقة الحركية لكرة الجولف؟

10.89 تُضرب كرة جولف كتلتها 45.90 g وقطرها 42.60 mm بحيث تتحرك بسرعة 54.15 m/s أثناء الدوران المحوري. الطاقة الحركية لكرة الجولف هي 67.67 J. ما التردد الدوراني لكرة الجولف (بوحدة rpm)؟

10.90 تُضرب كرة جولف كتلتها 45.90 g وقطرها 42.60 mm بحيث تدور بتردد 2875 rpm وتكون طاقتها الحركية 73.51 J عندما تتحرك. ما السرعة الخطية لكرة الجولف؟

10.91 حبل ملفوف حول بكرة عدة مرات ومتصل بقالب كتلته $m_b = 4.243$ kg. ويتدلّى بشكل رأسي. تتألف البكرة من عجلة نصف قطرها 46.21 cm وكتلتها $m_p = 5.907$ kg. بأسلاك لها كتلة ضئيلة للغاية. ما مقدار عجلة القالب؟

10.92 حبل ملفوف حول بكرة عدة مرات ومتصل بقالب كتلته $m_b = 4.701$ kg. ويتدلّى بشكل رأسي. تتكون البكرة من عجلة نصف قطرها 47.49 cm بأسلاك ذات كتلة ضئيلة للغاية. يتسارع القالب إلى الأسفل بسرعة $4.330\ m/s^2$. ما كتلة البكرة، m_p؟

10.93 حبل ملفوف حول بكرة عدة مرات ومتصل بقالب معلّق بشكل رأسي. تتألف البكرة من عجلة نصف قطرها 48.77 cm وكتلتها $m_p = 5.991$ kg. بأسلاك لها كتلة ضئيلة للغاية. يتسارع القالب إلى الأسفل بسرعة $4.539\ m/s^2$. فما كتلة القالب، m_b؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education