50

منتديات مكتبتنا

المملكة العربية السعودية
وزارة التربية والتعليم
وكالة التخطيط والتطوير

الإحصاء والاحتمال

التعليم الثانوي

(البرنامج المشترك)

المملكة العربية السعودية
وزارة التربية والتعليم
وكالة التخطيط والتطوير

الإحصاء والاحتمال

التعليم الثانوي
(البرنامج المشترك)

الطبعة الثانية
١٤٢٩هـ - ١٤٣٠هـ
٢٠٠٨م - ٢٠٠٩م

يوزع مجاناً ولا يباع

الإحصاء والاحتمال   التعليم الثانوي (البرنامج المشترك)   الطبعة الثانية ١٤٢٩هـ - ١٤٣٠هـ / ٢٠٠٨م - ٢٠٠٩م

اسم الطالب : ....

المدرسـة : ....

رقم الإيداع: ١٤٢٩/٢٧٩٢
ردمك: ٦ - ٢٤٢ - ٤٨ - ٩٩٦٠
التصميم والإنتاج الفني : مناهج

المملكة العربية السعودية
وزارة التربية والتعليم
وكالة التخطيط والتطوير

قررت وزارة التربية والتعليم
تدريس هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الإحصاء و الاحتمال

التعليم الثانوي
(البرنامج المشترك)

تعديل وتطوير

نوره بنت سعيد علي باقادر

ابتسام بنت سعيد عمر منسي — نجوى بنت رجب محمد الشوا

لمياء بنت عبدالله يحي خان — سلمى بنت عبود محمد بايزيد

لجنة المراجعة

ثامر بن حمد العيسى — سامي بن أحمد رحيّم

الطباعة

إيمان بنت عبدالله القثمي — مها بنت عبدالعزيز القدير

أشرف على التصميم الفني والتعليمي

أ. محمد بن عبد الله البصيِّص

الطبعة الثانية
١٤٢٩ ـ ١٤٣٠هـ
٢٠٠٨ ـ ٢٠٠٩م

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

وزارة التربية والتعليم

إحصاء واحتمال (التعليم الثانوي) ١- الرياض ، ١٤٢٧هـ

٢٢٠ص ، ٢١ × ٢٧ سم

ردمك : ١-٢٤٢-٤٨-٩٩٦٠

١- الاحصاء الرياضي- كتب مدرسية ٢-الاحتمالات (الرياضيات)- كتب دراسية

٢- التعليم الثانوي- السعودية- كتب دراسية

العنوان

ديوي ٥١٩،٧١٢   ١٤٢٧/٣٧٩٢

رقم الإيداع : ١٤٢٧/٣٧٩٢

ردمك : ١-٢٤٢-٤٨-٩٩٦٠

أشرف على الطباعة والتوزيع

الإدارة العامة للمقررات المدرسية

لهـذا الكتاب قيمـة مهمة وفائدة كبيـرة فحافظ عليه واجعـل نظافته تشهد على حسن سلوكك معه .

إذا لـم تحتفظ بهذا الكتاب في مكتبتك الخاصة في آخر العام للاستفادة فاجعل مكتبة مدرستك تحتفظ به .

موقع وزارة التربية والتعليم

www.moe.gov.sa

موقع البوابة التعليمية للتخطيط والتطوير

http://www.ed.edu.sa

موقع إدارة التعليم الثانوي

www.hs.gov.sa

البريد الإلكتروني لإدارة التعليم الثانوي

Secondary_Education@curriculum.gov.sa

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدّمـة

الحمـد للهِ ربِّ العالميـن، و الصلاة والسلام على سيّد المرسليـن، وعلى آله وصحبه أجمعين، ومن تبعهم بإحسانٍ إلى يوم الدين وبعد ...

هـذا كتاب الإحصـاء والاحتمال في نظام التعليم الثانـوي الجديد الذي نأمل أن يجـيء مُلبِّيًا لخطط التنميـة الطموحة التي تعيشهـا المملكة العربيّة السعوديّة ومتّفقًا مـع تطلُّعاتها في إخراج جيلٍ قادرٍ على مواكبة العصر ومتمشيًّا مع النهضة التي تحياها، كلُّ ذلك وفق أهدافِ وسياسةِ التعليم فيها.

ولقد استُنِد في تنظيم محتوى هذا الكتاب على **المنطلقات العامّة الآتية**:

- الحاجات الأساسيّة للطالب.
- طرائق تعليم وتعلُّم الرياضيّات.
- أساليب التفكير الرياضيّ.
- نوعيّة البناء الرياضيّ من مفهومات ومصطلحات وخوارزميّات ومهارات ومسائل رياضيّة.
- أوجه استخدامات الرياضيّات و الإحصاء في الحياة العمليّة.

وتبرز ملامح الكتاب في التالي:

١- الانطلاق في تنظيم منهاج الإحصاء والاحتمال من الأهداف العامّة للمادّة وأهداف نظام التعليم الثانـوي الجديد، بما يتلاءم وخصائص نمو الطلاب باتّباع أساليب وطرائق تستند إلى نظريّات التعلُّم المختلفة.

٢- روعـي فـي عرض الموضوعات إبـراز المفهومـات والمبادئ العلميـة والنظريّـات ... وتمييزها واستخدامها في مواقف تعليميّة مختلفة بما يُعين على تعميق معناها لدى الطلاب.

٣- الاهتمام ببرهان الحقائق والنظريّات، ومراعاة التوازن بين المفهومات والمهارات.

٤- توظيف أساليب التفكير العلميّ في البحث والاستقصاء والوصول إلى الاستنتاجات والقرارات وحل المشكلات.

٥- الاستمـرار فـي تعزيز بناء المفهومات بالاستناد إلى معلومات الطالب السابقة مع التعمُّق في ذلك بمـا يتّفـق وطبيعة المرحلـة وإيضاح كل مفهوم من خـلال أمثلة متنوعة؛ لمساعـدة الطالب على التعلُّم الذاتيّ.

٦- إبـراز جهـود علمـاء الرياضيّات العـرب والمسلمين وأثرهم فـي بناء وتطوير العلـوم الرياضيّة وتطبيقاتها.

٧- ربط المفهومات الرياضيّة والإحصائية ببيئة الطالب وبالمفهومات التي تقدَّم له في الموادّ الأخرى، وتوظيفها من خلال التطبيقات الحياتيّة المتعدّدة.

٨- تضمين المحتوى مجموعة كافية من الأمثلة والتدريبات تعقب كلّ معلومة رياضيّة.

٩- إثراء المحتوى بمجموعة تمارين عامّة متنوّعة في نهاية كلّ وحدة، إضافة إلى التمارين التي تلي كل درس؛ لتثبيت الحقائق والمهارات وتأكيد استمراريّة التعلُّم.

١٠- استخدام الآلة الحاسبة كلما أمكن ذلك.

١١- تلخيص المفهومات والنظريّات ... التي تضمّنها محتوى كلّ وحدة من الوحدات وذلك في نهايته.

١٢- إدراج قائمة بالإجابات النهائيّة لبعض التمارين لكلّ وحدة بهدف تقويم الطالب لنفسه ذاتياً.

١٣- إدراج الأهداف التعليميّة لكلّ وحدة من وحدات الكتاب في بدايتها.

١٤- الاستعانة بالرسوم التوضيحيّة والأشكال في توضيح المفهومات الرياضيّة كلّما دعت الحاجة لذلك.

١٥- إيراد استبانة تقويم الكتاب المقرّر؛ لتمكين كل من يتعامل مع الكتاب من تدوين الملحوظات والمرئيّات؛ للتعديل والتطوير الهادف المستمرّ بحول الله تعالى.

ولقد اُستفيد حين إعداد الكتاب ممّا يلي:

١- توصيف منهج مادّة الرياضيّات في التعليم الثانوي الجديد من الإدارة العامّة للمناهج بالتطوير التربويّ بوزارة التربية والتعليم.

٢- مقرّرات الرياضيّات والإحصاء بدول مجلس التعاون لدول الخليج العربيّة، وبعض الدول العربيّة وغير العربيّة.

هذا ويقع الكتاب في ثلاث وحدات وهي:

١- الحساب التوافقي ونظرية ذات الحدين. ٢- الاحتمال. ٣- الإحصاء.

وإنّنا لنرجو التوفيق والسداد من الله - تعالى - وأن يُحقّق هذا الكتاب الأهداف المأمولة له.

والله من وراء القصد.

لجنة التأليف

قائمة الموضوعات

الوحدة الأولى: الحساب التوافقي ونظرية ذات الحدين

الوحدة الثانية: الاحتمال

الوحدة الثالثة

الإحصاء

الوحدة الأولى

الحساب التوافقي ونظرية ذات الحدين

Combinatorics and Binomial Theorm

الدروس

(١-١) مبدأ العدّ

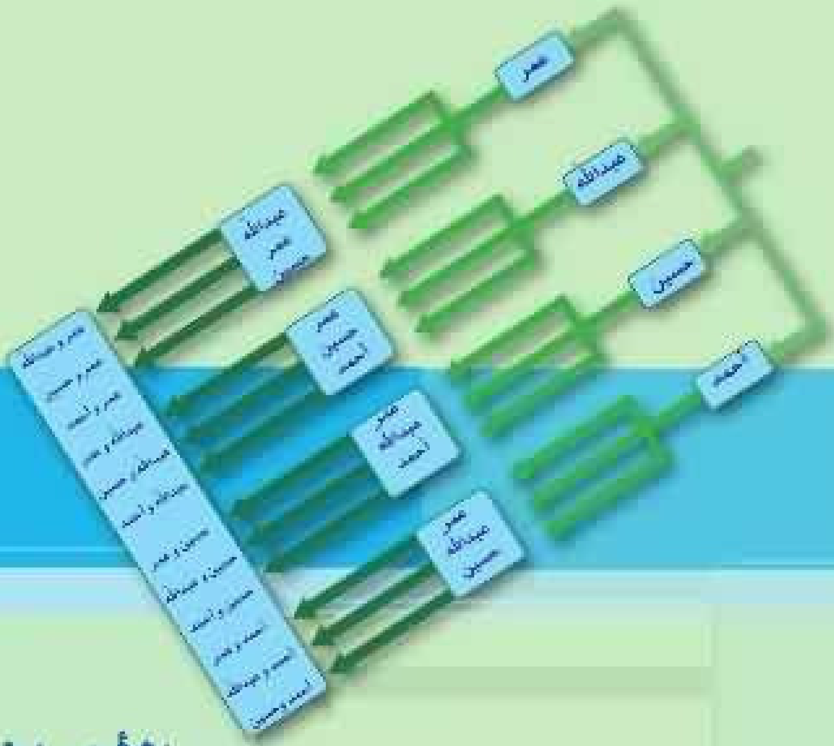
(١-٢) التباديل والتوافيق

(١-٣) رمز المجموع $\sum$

(١-٤) نظرية ذات الحدّين

جاء في مخطوطة "الباهر في الجبر" للسموأل المغربي المتوفى سنة ٥٧٠هـ أن مثلث معاملات نظرية ذات الحدين يجب أن ينسب لصاحبه العالم المسلم الفذ أبو بكر محمد بن الحاسب الكوفي المتوفى في بغداد سنة ٤٢١هـ وليس كما يسميه الغرب مثلث باسكال نسبة إلى العالم الفرنسي بليز باسكال (١٦٢٣-١٦٧٣م) *

* موسوعة نوابغ العرب والمسلمين في العلوم الرياضية - د. علي الدّفاع



الأهداف

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أنْ يكون قادرًا على أنْ:

١- يتعرف مبدأ العد ويحل مسائل تطبيقية عليه.

٢- يتعرّف مفهوم مضروب عددٍ طبيعيٍّ وخصائصه.

٣- يُعرّف التباديل والتوافيق والفرق بينهما.

٤- يوجد عدد تباديل $ر$ من العناصر مأخوذةً راءً راءً في كلّ مرة.

٥- يوجد عدد توافيق $ر$ من العناصر مأخوذةً راءً راءً في كلّ مرة.

٦- يكتب صيغ مجاميع مقادير جبرية أو حسابية باستخدام رمز المجموع.

٧- يستخدم نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك قوّة لمقدار ذي حدّين.

١ـ١

مبـدأ العـد
Principle of Counting

نواجـه فـي حياتنـا الكثيـر مـن المواقـف التـي يُفرض علينـا فيها الاختيـار من بيـن مجموعة اختيـارات متوفـرة وسنتناول في هذا الدرس إحدى الطرق المفيدة فـي حساب عدد الطـرق الممكنة لإجراء اختيار ما.

مثال (١-١)

بكم طريقةٍ يمكن اختيار رئيس ونائب له لمجلس إدارة إحدى الشركات المكوّن من أربعـة أعضـاء : عمـر ، عبدالله ، حسين ، أحمد ؟

الحل

نبدأ بعملية اختيار رئيس:

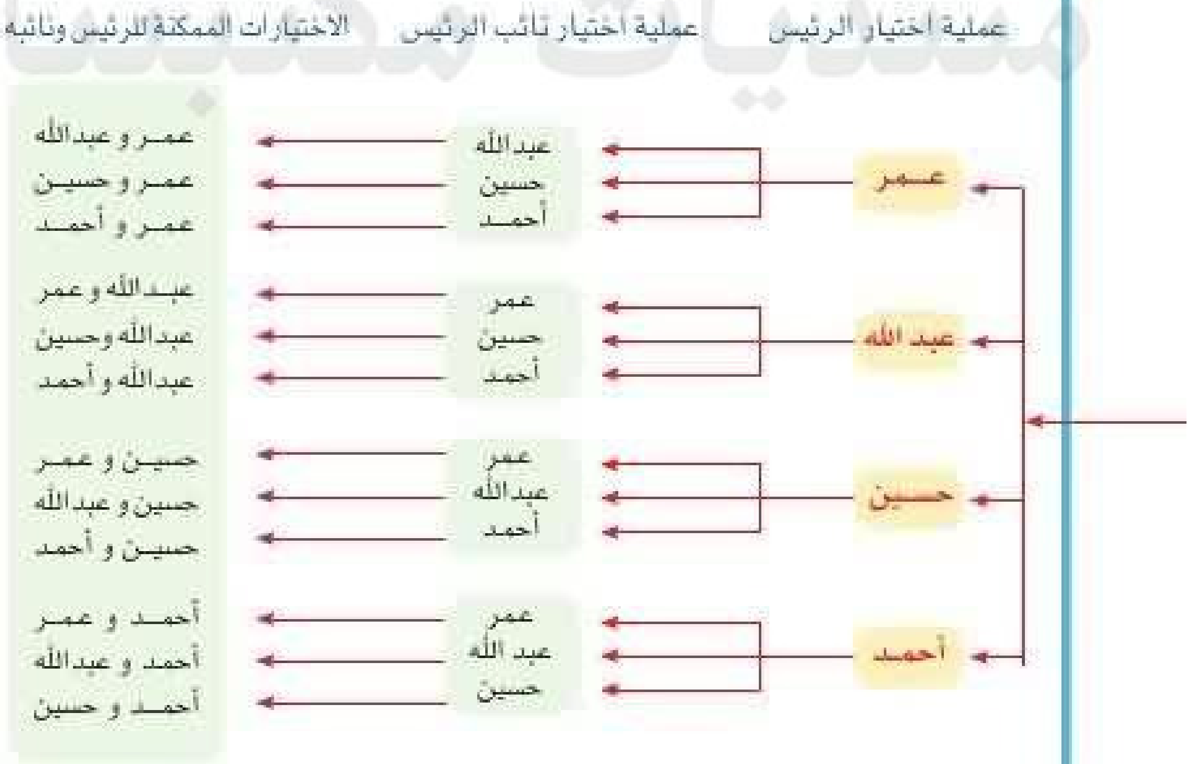
هنــاك أربع إمكانيات لاختيار الرئيس، فيمكـن أن يكون الرئيس عمر أو عبدالله أو حسين أو أحمد.

ويلي ذلك عملية اختيار نائب للرئيس:

فــي حالة اختيــار أحد الأعضاء رئيسًا وليكن عمر - مثلاً - يبقى ثلاثة أعضاء لنختار من بينهم نائبًا للرئيس، فيمكن أن يكون نائب الرئيس عبدالله أو حسين أو أحمد، أي أنَّه توجد ثلاث طرق مختلفة لاختيار نائب الرئيس لكلِّ طريقةٍ من الطرق الأربع لاختيار الرئيس.

إذًا عدد الطرق الممكنة لاختيار الرئيس ونائب له = ٤ × ٣ = ١٢ طريقة .

والمخطط الشجري التالي يوضِّح ذلك:



مثال (١-٢)

ينتج مصنعٌ للأقمشة ثلاثة أصنافٍ: صوف ، قطن ، حرير ، ومن كلِّ صنفٍ ينتج ثلاثة ألوانٍ: أزرق ، أحمر ، أخضر ، ومن كلِّ صنفٍ ولكلِّ لونٍ ينتج قياسين للعرض: مترًا ، مترين.
أوجد عدد الأنواع التي ينتجها المصنع.

الحل

يمكـن الحصـول على عـدد الأنواع برسم المخطط الشجري التالي:

إذًا عدد الأنواع التي ينتجها المصنع ٣ × ٣ × ٢ = ١٨ نوعًا .

في المثالين السابقين و أشباههما من الأمثلة نستطيع أن نقبل مصداقية المبدأ الآتي والذي نسمِّيه **مبدأ العدِّ**.

إذا كان هنـاك عدد ك من الإجراءات المتتالية بحيث يمكـن أن يتمَّ الإجراء الأول بعـدد $ن_1$ من الطـرق والإجـراء الثاني بعدد $ن_2$ من الطرق، والإجراء الثالث بعدد $ن_3$ من الطرق ... وهكـذا إلـى أن تصـل إلى الإجراء الأخير الذي يمكن أن يتمَّ بعـدد $ن_ك$ من الطرق، فإنَّ هذه الإجراءات جميعها يمكن أن تتمَّ على التتابع بعدد $ن_1 \times ن_2 \times ن_3 \times \dots \times ن_ك$ من الطرق.

مثال (١-٣)

كم عددًا مكوّنًا من رقمين يمكن تكوينه باستخدام الأرقام ٥ ، ٦ ، ٧

أ) عندما لا يُسمح بتكرار الرقم ؟ ب) عندما يُسمح بتكرار الرقم ؟

الحل

أ) عندما لا يُسمح بتكرار الرقم فإنَّ:

عدد طرق اختيار رقم الآحاد = ٣ ؛ لأنَّ منزلة الآحاد يمكن أن تكون ٥ أو ٦ أو ٧ .

عدد طرق اختيار رقم العشرات = ٢ (بعد استبعاد الرقم المأخوذ في الآحاد) .

إذًا عدد الأعداد التي يمكن تكوينها = ٣ × ٢ = ٦ أعداد .

ب) عندما يُسمح بتكرار الرقم فإنَّ:

عدد طرق الاختيار لكلِّ رقم في الآحاد أو العشرات يساوي ٣ .

إذًا عدد الأعداد التي يمكن تكوينها = ٣ × ٣ = ٩ أعداد .

تدريب (١-١)

ارسم مخططًا شجريًا يوضّح حل المثال (١-٣) في كلٍّ من الحالتين أ ، ب ثمَّ اكتب جميع الأعداد التي يمكن تكوينها في كلِّ حالة.

مثال (١-٤)

تضمُّ قائمة الطعام الخاصَّة بأحد المطاعم أربعة أنواعٍ من الشوربة، خمسة أطباقٍ مختلفة من اللحوم، ستة أطباقٍ مختلفة من الحلوى، أربعة أنواعٍ من العصير . بكم طريقةٍ يمكن لأحد روّاد هذا المطعم أن يطلب وجبةً تتكوّن من الشوربة واللحم والحلوى والعصير؟

الحل

توجد ٤ طرقٍ ممكنة لاختيار الشوربة،
حيث يوجد أربعة أنواعٍ منها،
وتوجد ٥ طرقٍ ممكنة لاختيار طبق اللحم،
كما توجد ٦ طرقٍ ممكنة لاختيار الحلوى،
وتوجد ٤ طرقٍ ممكنة لاختيار العصير.
إذًا عدد الطرق الممكنة لاختيار الوجبة كاملةً
= ٤ × ٥ × ٦ × ٤ = ٤٨٠ طريقة .

مثال (١-٥)

بكم طريقةٍ يمكن لخمسة أشخاصٍ أن يستخدموا في آنٍ واحدٍ أجهزة الهاتف في دائرة خدماتٍ هاتفية تحتوي ثمانية أجهزة ؟

الحل

بما أنّ كلّ شخصٍ سيستخدم جهازًا، فإنّه يكون أمام الشخص الأول ٨ اختيارات، وأمام الشخص الثاني ٧ اختيارات، وأمام الشخص الثالث ٦ اختيارات، وأمام الشخص الرابع ٥ اختيارات، ويبقى في النهاية أمام الشخص الخامس ٤ اختيارات.
إذًا عدد الطرق المطلوبة = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = ٦٧٢٠ طريقة .

مثال (١-٦)

تخرّج طالبٌ من المرحلة الثانوية وأراد أن يكمل دراسته في الجامعة، فوجد أمامه خمس جامعاتٍ وفي كلّ جامعةٍ منها ثماني كلّياتٍ وفي كلّ كلّيةٍ أربعة أقسام. بكم طريقةٍ يمكن للطالب اختيار دراسته في الجامعة.

الحل

عدد طرق اختيار الدراسة = ٥ × ... × ... = ١٦٠ طريقة   **(أكمل الفراغ).**

تمارين (١ - ١)

١ يريد رجلٌ السفر من الرياض إلى المدينة المنوّرة مارًا بحائل، ويمكنه أن يسافر في كلِّ رحلةٍ بالطائرة أو بالسيارة. كم طريقةً للسفر يمكن أن يتّبعها الرجل لكي يصل من الرياض إلى المدينة المنوّرة ؟ وضّح ذلك بالمخطط الشجري.

٢ بكم طريقةٍ يمكن إهداء طالبةٍ متفوّقةٍ مجموعةً من الكتب مكوّنةً من كتابٍ باللغة الإنجليزيّة وكتاب تاريخٍ وكتاب تفسيرٍ مختارةً من ٥ كتب باللغة الإنجليزيّة و٧ كتب تاريخٍ و ٣ كتب تفسير ؟ علمًا بأنّ كتب كلّ علمٍ مختلفة .

٣ كم كلمةً مكوّنةً من حرفين يمكن تكوينها من مجموعة الأحرف {س ، ص ، ع ، ل}، علمًا بأنّه ليس ضروريًا أن يكون للكلمة معنًى إذا كان:

أ) التكرار غير مسموحٍ به ؟ ب) التكرار مسموحٌ به ؟

وضّح ذلك بمخطّطٍ شجريّ .

٤ كم عددًا مكوّنًا من أربعة أرقامٍ وأكبر من ٣٠٠٠ يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}، إذا كان:

أ) التكرار غير مسموحٍ به ؟ ب) التكرار مسموحٌ به ؟

٥ طُلب من أحد المصانع عمل لوحاتٍ معدنيّةٍ للسيّارات تبدأ رموز كلٍّ منها من اليمين بثلاثة حروفٍ من حروف الهجاء العربية متبوعًا بثلاثة أرقام من مجموعة الأرقام {٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، ٩}،كم لوحةً مختلفةً يمكن صُنعها في كلٍّ من الحالتين التاليتين:

أ) إذا سُمح بتكرار الحروف والأرقام ؟ ب) إذا لم يُسمح بتكرار الحروف والأرقام ؟

٦ كم عدد الطرق التي يمكن بها ترتيب ستّة كتبٍ مختلفةٍ في ستّة أماكن على رفّ المكتبة ؟

٢-١ التباديل والتوافيق

Peremutations and Combinations

$^{٢٥}ل_{٧} = ٢٤٢٢٧٢٨٠٠٠$

أولاً - التباديل

من المفيد قبل دراسة التباديل تقديم التعريف التالي:

تعريف (١-١)

إذا كان ن عددًا طبيعيًا فإنّ حاصل الضرب ن × (ن - ١) × (ن - ٢) × ... × ٣ × ٢ × ١

يُسمّى مضروب ن ويرمز له بالرمز $\underline{|ن}$ أو ن!

أي أنّ: $\underline{|ن}$ = ن × (ن - ١) × (ن - ٢) × ... × ٣ × ٢ × ١

ونقول تعريفًا إنّ $\underline{|٠}$ = ١

لاحظ أنّ:

$\underline{|ن}$ هو حاصل ضرب عوامل عددها ن تبدأ بالعدد ن، وكلٌّ منها ينقص واحدًا عن سابقه وتنتهي دائمًا بالعدد واحد.

مثال (١-٧)

احسب قيمة كلٍّ من: ١| ، ٢| ، ٥|

الحل

١| = ١

٢| = ٢ × ١ = ٢

٥| = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠

تدريب (١-٢)

احسب قيمة كلٍّ من: ٣| ، ٤| ، ٦| ، ٧|

نتيجة (١-١)

من التعريف (١-١) نجد أنّ:

ن| = ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × ... × ٣ × ٢ × ١

وعليه فإنّ: ن| = ن × ن − ١|

= ن × (ن − ١) × ن − ٢| وهكذا...

مثال (١-٨)

احسب $\dfrac{٨|}{٥|}$ ، $\dfrac{١٢|\ ١٥|}{١٠|\ ١٧|}$

الحل

$\dfrac{٨|}{٥|} = \dfrac{٨ \times ٧ \times ٦\ ٥|}{٥|} = ٨ \times ٧ \times ٦ = ٣٣٦$

$\dfrac{١٢|\ ١٥|}{١٠|\ ١٧|} = \dfrac{١٢ \times ١١\ ١٠|\ ١٥|}{١٠| \times ١٧ \times ١٦\ ١٥|} = \dfrac{١٢ \times ١١}{١٧ \times ١٦} = \dfrac{٣٣}{٦٨}$

مثال (١-٩)

بسِّط المقدار $\dfrac{\underline{ن - ٣|}}{(ن - ٣)\ \underline{ن - ٥|}}$ حيث ن ∈ ط ، ن > ٥

الحل

$$\dfrac{\underline{ن - ٣|}}{(ن - ٣)\ \underline{ن - ٥|}} = \dfrac{(ن - ٣) \times (ن - ٤)\ \underline{ن - ٥|}}{(ن - ٣)\ \underline{ن - ٥|}} = ن - ٤$$

مثال (١-١٠)

أوجد قيمة ن التي تحقق المساواة المعطاة في كلٍّ ممَّا يلي:

أ) $\underline{ن|} = ٢٤$ ب) $٣\ \underline{ن|} = ٣٦٠$

جـ) $\underline{٣ن|} = ٧٢٠$ د) $\underline{٢ن - ١|} = ١$

الحل

أ) $\underline{ن|}$ هو حاصل ضرب عوامل متتالية أكبرها ن وأصغرها ١؛ لذلك فإننا لحلِّ هذه الفقرة نقسم العدد ٢٤ على ١ ثمَّ نقسم الناتج على ٢ فنحصل على ناتج آخر نقسمه على ٣ وهكذا ... حتى نحصل على ناتج يساوي الواحد:

$\underline{ن|} = ٢٤$

$= ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤$

$= \underline{٤|}$

إذًا ن = ٤

٢٤	١
٢٤	٢
١٢	٣
٤	٤
١	

ب) ٣ $\underline{ن|}$ = ٣٦٠ ⇐ $\underline{ن|}$ = ١٢٠ **(أكمل الحل)**

ج) $\underline{٣ن|}$ = ٧٢٠

= ١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ × ٦

= $\underline{٦|}$

⇐ ٣ن = ٦

⇐ ن = ٢

٧٢٠	١
٧٢٠	٢
٣٦٠	٣
١٢٠	٤
٣٠	٥
٦	٦
١	

د) بما أنَّ ١ = $\underline{١|}$ = $\underline{٠|}$ فإنَّ :

$\underline{٢ن - ١|}$ = ١ ⇐

- $\underline{٢ن - ١|}$ = $\underline{١|}$ ⇐ ٢ن − ١ = ١ ⇐ ٢ن = ٢ ⇐ ن = ١

أو

- $\underline{٢ن - ١|}$ = $\underline{٠|}$ ⇐ ٢ن − ١ = ٠ ⇐ ٢ن = ١ ⇐ ن = $\frac{١}{٢}$

تباديل ن من العناصر

مثال (١-١١)

إذا اشترك أحمد ومحمد وعبد الله في مسابقة لحفظ القرآن الكريم فإنَّ النتيجة النهائية لهذه المسابقة يمكن أن تكون على إحدى الصور الموضَّحة في الجدول الآتي:

المركز الأول	أحمد	أحمد	محمد	محمد	عبد الله	عبد الله
المركز الثاني	محمد	عبد الله	أحمد	عبد الله	أحمد	محمد
المركز الثالث	عبد الله	محمد	عبد الله	أحمد	محمد	أحمد

جدول (١-١)

لاحظ :

من الجدول (١-١) أنَّ نتيجة المسابقة يمكن أن تظهر على ست صور مختلفة وهي مؤلَّفة من الأشخاص أنفسهم، لكن بترتيبٍ مختلفٍ في كلِّ مرَّة.

تُسمَّى التراتيب المختلفة لمجموعة الأشخاص الثلاثة تباديل ثلاثة عناصر وكلُّ ترتيبٍ منها يُسمَّى تبديلة ثلاثة عناصر.

تعريف (١ - ٢)

كلُّ ترتيبٍ لعدد ن من العناصر يُسمَّى تبديلة ن من العناصر.

لاحظ :

أنه يمكن معرفة عدد تراتيب الأشخاص الثلاثة في المثال السابق (عدد تباديل ثلاثة عناصر) باستخدام مبدأ العدّ كما يأتي:

هناك ثلاث عمليات اختيار يمكن إجراؤها، الأولى لتحديد الفائز بالمركز الأول وتتمُّ بثلاث طرق، والثانية لتحديد الفائز بالمركز الثاني وتتمُّ بطريقتين، والثالثة لتحديد الفائز بالمركز الثالث وتتمُّ بطريقة واحدة.

وحسب مبدأ العدّ يكون:

عدد تباديل ٣ عناصر = ٣ × ٢ × ١ = ٦ = $\underline{3|}$

وبالمثل يمكن استنتاج أنَّ:

عدد تباديل ٤ عناصر = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = $\underline{4|}$

عدد تباديل ٥ عناصر = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = $\underline{5|}$

وهكذا ...

ويمكن تعميم ذلك بالنظرية التالية:

نظرية (١-١)

عدد تباديل ن من العناصر = ن × (ن - ١) × (ن - ٢) × ... × ٣ × ٢ × ١ = $\underline{ن|}$

مثال (١-١٢)

كم عددًا مكونًا من خمسة أرقامٍ مختلفة يمكن تكوينه باستخدام الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧؟

الحل

بما أنّ عدد أرقام العدد المطلوب = ٥ ، عدد الأرقام المسموح تكوين العدد منها = ٥

إذًا عدد الأعداد المكوّن كلٌّ منها من خمسة أرقامٍ مختلفة يساوي عدد تباديل ٥ عناصر وهو

$\underline{|٥}$ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ عددًا .

تباديل ن من العناصر مأخوذة راءً راءً

مثال (١-١٣)

إذا كان لدينا أربعة أرقام : ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ وأردنا الحصول منها على الأعداد المكوّنة من رقمين مختلفين، لوجدنا بسهولةٍ أنّ هذه الأعداد هي:

٣٢ ، ٤٢ ، ٥٢ ، ٤٣ ، ٥٣ ، ٥٤

٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٤٥

كلُّ عددٍ من هذه الأعداد ناتجٌ من اختيار رقمين مختلفين من الأرقام الأربعة ثمَّ ترتيبها على نحوٍ معيّنٍ . وتُسمّى هذه الأعداد تباديل الأرقام الأربعة مأخوذةً مثنى مثنى.

وهذا يقودنا إلى توسيع مفهوم التباديل الذي ورد في التعريف (١-٢) على النحو التالي:

تعريف (١-٣)

كلُّ ترتيبٍ لعددٍ ر من العناصر المأخوذة من ن عنصرًا يُسمّى تبديلة ن من العناصر مأخوذٌ منها ر عنصرًا حيث ر ≥ ن

من الواضح أنه عندما ن = ر يكون التعريف (١-٣) موافقًا للتعريف (١-٢).

نرمز لعدد تباديل ن من العناصر مأخوذةً راءً راءً بالرمز $^{ن}ل_{ر}$ ويُقرأ (نون لام راء) أو (نون تباديل راء).

نظرية (١-٢)

عدد تباديل ن من العناصر مأخوذةً راءً راءً هو:

$^{ن}ل_{ر} = ن \times (ن - ١) \times (ن - ٢) \times ... \times (ن - ر + ١)$ ، حيث $ر \leqslant ن$.

البرهان

حيث أنَّ عدد تباديل ن من العناصر مأخوذةً راءً راءً يساوي عدد طرق اختيار ر عنصرًا من بين ن من العناصر مع مراعاة الترتيب ، فإنَّه استنادًا إلى مبدأ العدّ يمكن حساب هذا العدد على النحو التالي:

عدد طرق اختيار العنصر الأول = ن

عدد طرق اختيار العنصر الثاني = ن - ١

عدد طرق اختيار العنصر الثالث = ن - ٢

.

.

.

عدد طرق اختيار العنصر الرائي = ن - ر + ١

فيكون:

$$^{ن}ل_{ر} = ن \times (ن - ١) \times (ن - ٢) \times ... \times (ن - ر + ١)$$

ملحوظة (١-١)

١) من النظرية (١-٢) نستنتج أنَّ $^{ن}ل_{ر}$ يساوي حاصل ضرب عوامل عددها ر تبدأ بالعدد ن وكلُّ عاملٍ منها ينقص واحدًا عن سابقه.

٢) بالرجوع إلى المثال (١-١٣) نجد أنَّ عدد تباديل الأرقام الأربعة مأخوذة مثنى مثنى هو :

$^{٤}ل_{٢} = ٤ \times ٣ = ١٢$

نتيجة (١-٢)

$$^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!} \quad ، \quad ر \leqslant ن$$

البرهان

$$^{ن}ل_{ر} = ن \times (ن-١) \times (ن-٢) \times \dots \times (ن-ر+١)$$

$$= ن \times (ن-١) \times (ن-٢) \times \dots \times (ن-ر+١) \times \frac{(ن-ر)!}{(ن-ر)!}$$

$$= \frac{ن \times (ن-١) \times (ن-٢) \times \dots \times (ن-ر+١) \times (ن-ر) \times \dots \times ١}{(ن-ر)!}$$

$$= \frac{ن!}{(ن-ر)!}$$

نتيجة (١-٣)

من النتيجة (١-٢) يمكننا بسهولة استنتاج أنّ:

١) $^{ن}ل_{ن} = ن!$

٢) $^{ن}ل_{١} = ن$

٣) $^{ن}ل_{٠} = ١$

تدريب (١-٣)

أ) أثبت صحة كلٍّ من العلاقات الثلاث في النتيجة (١-٣) .

ب) أعط تفسيرًا لكلٍّ من $^{ن}ل_{ن}$ ، $^{ن}ل_{١}$.

جـ) احسب قيمة كلٍّ من $^{٦}ل_{٥}$ ، $^{٧}ل_{١}$.

مثال (١-١٤)

أوجد قيمة كلٍّ ممَّا يأتي:

أ) $^{٧}\text{ل}_{٣}$ ب) $^{٥٢}\text{ل}_{٢}$ جـ) $\frac{^{١٠}\text{ل}_{٢}}{\lfloor ٢}$

الحل

أ) $^{٧}\text{ل}_{٣} = ٧ \times ٦ \times ٥ = ٢١٠$

ب) $^{٥٢}\text{ل}_{٢} = ٥٢ \times ٥١ = ٢٦٥٢$

جـ) $\frac{^{١٠}\text{ل}_{٢}}{\lfloor ٢} = \frac{١٠ \times ٩}{٢ \times ١} = ٤٥$

مثال (١-١٥)

ما عدد الكلمات المكوَّن كلٌّ منها من أربعة أحرفٍ مختلفةٍ مأخوذةٌ من ستة أحرفٍ مختلفةٍ؟ علمًا بأنَّه ليس ضروريًا أن يكون للكلمة معنى.

الحل

إنَّ عدد الكلمات المكوَّن كلٌّ منها من أربعة أحرفٍ مختلفةٍ مأخوذةٌ من ستة أحرفٍ مختلفةٍ يساوي عدد طرق اختيار أربعة أحرفٍ مختلفةٍ من ستة أحرفٍ مختلفةٍ مع مراعاة الترتيب.

إذًا عدد الكلمات الممكن تكوينها = $^{٦}\text{ل}_{٤} = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = ٣٦٠$ كلمة.

مثال (١-١٦)

أثبت أنَّ: $^{\text{ن}+١}\text{ل}_{\text{ر}+١} \div {}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \text{ن} + ١$

الحل

$$ل^{ن+1}_{ر+1} \div ل^{ن}_{ر} = \frac{\lfloor ن+1}{\lfloor ن+1-(ر+1)} \div \frac{\lfloor ن}{\lfloor ن-ر}$$

$$= \frac{\lfloor ن+1}{\lfloor ن-ر} \times \frac{\lfloor ن-ر}{\lfloor ن}$$

$$= \frac{\lfloor ن+1}{\lfloor ن} = \frac{(ن+1)\ \lfloor ن}{\lfloor ن} = ن+1$$

ملحوظة (١-٢)

في البراهين النظرية تستخدم النتيجة (١-٢) للتعويض عن $ل^{ن}_{ر}$ بينما يُفضَّل استخدام النظرية (١-٢) لحساب القيمة العدديَّة لـ $ل^{ن}_{ر}$.

مثال (١-١٧)

إذا كان $ل^{م+ن}_{٢} = ٢١٠$ ، $ل^{م-ن}_{٢} = ٧٢$ ، فما قيمة كلٍّ من م ، ن ؟

الحل

$ل^{م+ن}_{٢} = (م+ن)\ (م+ن-١) = ٢١٠$

وهذا يعني أنَّ ٢١٠ هو حاصل ضرب عددين طبيعيين متتاليين،

ومن تحليل العدد ٢١٠ نجد أنَّ: $٢١٠ = ١٥ \times ١٤$

إذاً $م + ن = ١٥$ ①

$ل^{م-ن}_{٢} = (م-ن)\ (م-ن-١) = ٧٢$

وبما أنَّ $٧٢ = ٩ \times ٨$

إذاً $م - ن = ٩$ ②

وبجمع المعادلتين ① وَ ② يكون: $٢م = ٢٤ \Leftarrow م = ١٢$

وبالتعويض عن قيمة م في ① ينتج أنَّ: $١٢ + ن = ١٥ \Leftarrow ن = ٣$

٢١٠	٢
١٠٥	٣
٣٥	٥
٧	٧
١	

ثانياً - التوافيق

مثال (١-١٨)

إذا أردنا كتابة المجموعات الجزئيّة جميعها والتي يتكوّن كلٌّ منها من ثلاثة عناصر من عناصر المجموعة س = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ستجد بسهولة أنّ هذه المجموعات أربعة وهي:

{ ٢ ، ٣ ، ٤ } ، { ٢ ، ٣ ، ٥ } ، { ٢ ، ٤ ، ٥ } ، { ٣ ، ٤ ، ٥ } .

ويمكن النظر إلى هذه المجموعات الجزئيّة على أنّ كلاً منها تمثّل اختيارًا لثلاثة عناصر من س بصرف النظر عن ترتيب هذه العناصر الثلاثة في كلّ مجموعة .

إنّ كلاً من هذه الاختيارات أي (المجموعات الجزئيّة) يُسمّى **توفيقة**.

تعريف (١-٤)

كلُّ مجموعةٍ جزئيّةٍ عدد عناصرها ر مأخوذةٌ من مجموعةٍ عدد عناصرها ن تُسمّى توفيقة ن من العناصر مأخوذٌ منها ر عنصرًا.

وتجدر الإشارة هنا إلى أنّ توافيق العناصر الأربعة للمجموعة س مأخوذةٌ ثلاثةً ثلاثةً في المثال السابق تختلف عن تباديل العناصر الأربعة للمجموعة س مأخوذةً ثلاثةً ثلاثةً والتي يمكن كتابتها على النحو التالي:

٤٣٢	٥٣٢	٥٤٢	٥٤٣
٣٤٢	٣٥٢	٤٥٢	٤٥٣
٤٢٣	٥٢٣	٥٢٤	٥٣٤
٢٤٣	٢٥٣	٢٥٤	٣٥٤
٣٢٤	٣٢٥	٤٢٥	٤٣٥
٢٣٤	٢٣٥	٢٤٥	٣٤٥

فرغم أنَّ كلاً من هذه التوافيق والتباديل ناتجٌ عن اختيار ثلاثة عناصر من أربعة عناصر إلاَّ أنَّ التوافيق والتباديل تختلفان في مضمونٍ أساسيٍّ هو الترتيب. فبينما في التباديل نهتمُّ بالترتيب الذي نختار به العناصر نجد أنَّنا في التوافيق لا نهتمُّ بالترتيب .

فالتوفيقة {٢ ، ٣ ، ٤} هي ذاتها التوفيقة {٢ ، ٤ ، ٣} ، بينما ٤٣٢ ، ٢٤٣ تبديلتان مختلفتان.

ومن جهةٍ أخرى نجد أنَّ عدد تباديل العناصر الأربعة للمجموعة سہ مأخوذةً ثلاثةً ثلاثةً يساوي ٢٤ وهو يقابل أربع توافيق للعناصر الأربعة للمجموعة سہ مأخوذةً ثلاثةً ثلاثةً أي أنَّ كلَّ ستِّ تباديل يقابلها توفيقةٌ واحدةٌ .

فالتوفيقة {٢ ، ٣ ، ٤} - مثلاً - يقابلها ستُّ تباديلٍ مختلفةٍ هي:

٢٣٤	٣٢٤	٢٤٣	٤٢٣	٣٤٢	٤٣٢

لاحظ أنْ:

هذه التباديل الستُّ هي تباديل العناصر الثلاثة للتوفيقة {٢ ، ٣ ، ٤} . وحاول أن تكتشف العلاقة بين عدد تباديل وعدد توافيق العناصر الأربعة للمجموعة سہ مأخوذةً ثلاثةً ثلاثةً.

العلاقة بين عدد تباديل وعدد توافيق ن من العناصر مأخوذةً راءً راءً

حيث أنَّ تباديل ن من العناصر مأخوذةً راءً راءً تنتج من عمليتين متتاليتين هما عملية اختيار ر من العناصر من بين ن من العناصر (وتتمُّ بطرقٍ عددها يساوي عدد توافيق ن من العناصر مأخوذةً راءً راءً) ، ثمَّ عملية ترتيب هذه العناصر المختارة (وتتمُّ بطرقٍ عددها يساوي $\lfloor ر$) ، فإنَّه حسب مبدأ العدِّ يكون :

عدد تباديل ن من العناصر مأخوذةً راءً راءً = عدد توافيق ن من العناصر مأخوذةً راءً راءً × $\lfloor ر$

وإذا رمزنا لعدد توافيق ن من العناصر مأخوذةً راءً راءً بالرمز ${}^{ن}ق_{ر}$ ويُقرأ (نون قاف راء) أو (نون توافيق راء)

فإنَّه يمكننا كتابة صيغة العلاقة السابقة على النحو التالي:

$${}^{ن}ل_{ر} = {}^{ن}ق_{ر} \times \lfloor ر \qquad (١-١)$$

ومن هنا نجد انَّه يمكننا حساب ${}^{ن}ق_{ر}$ دون اللجوء إلى تكوين المجموعات الجزئيَّة وذلك وفق النظريَّة التالية:

نظرية (١-٣)

عدد توافيق ن من العناصر مأخوذة ر راءً هو:

$$^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\underline{|\,\text{ر}}} \quad ، \quad \text{حيث } \text{ر} \leqslant \text{ن} \;.$$

مثال (١-١٩)

أوجد عدد المجموعات الجزئية من المجموعة {أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و ، ز} والتي يتكون كلٌّ منها من أربعة عناصر.

الحل

العدد المطلوب هو عدد توافيق ٧ عناصر مأخوذةً أربعةً أربعةً وهو:

$$^{٧}\text{ق}_{٤} = \frac{^{٧}\text{ل}_{٤}}{\underline{|\,٤}} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٣٥ \text{ مجموعة .}$$

مثال (١-٢٠)

بكم طريقةٍ يمكن لطالبةٍ اختيار ثلاثة أسئلةٍ من ورقة اختبارٍ بها خمسة أسئلة ؟

الحل

$$\text{عدد طرق الاختيار } = {}^{٥}\text{ق}_{٣} = \frac{^{٥}\text{ل}_{٣}}{\underline{|\,٣}} = \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٣ \times ٢ \times ١} = ١٠ \text{ طرق .}$$

نتيجة (١-٤)

من النظرية (١-٣) وباستخدام النتيجة (١-٢) يمكن استنتاج العلاقة التالية:

$$^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{\underline{|\,\text{ن}}}{\underline{|\,\text{ر}}\;\underline{|\,\text{ن} - \text{ر}}}$$

نتيجة (١-٥)

من النتيجة (١-٤) نتوصل بسهولة إلى أنَّ:

١) $ق^{ن}_{ن} = ١$

٢) $ق^{ن}_{٠} = ١$

٣) $ق^{ن}_{١} = ن$

تدريب (١-٤)

أ) أثبت صحة العلاقات الثلاث في النتيجة السابقة.

ب) أعطِ تفسيرًا لكلٍّ من $ق^{ن}_{ن}$ ، $ق^{ن}_{٠}$ ، $ق^{ن}_{١}$

مثال (١-٢١)

أثبت أنَّ $\dfrac{ق^{ن}_{ر}}{ق^{ن}_{ر-١}} = \dfrac{ن - ر + ١}{ر}$

الحل

$$\frac{ق^{ن}_{ر}}{ق^{ن}_{ر-١}} = \frac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!} \div \frac{ن!}{(ر-١)!\,(ن-ر+١)!}$$

$$= \frac{ن!}{ر\,(ن-ر)!} \times \frac{(ر-١)!\,(ن-ر+١)!}{ن!}$$

$$= \frac{(ر-١)! \times (ن-ر+١)\,(ن-ر)!}{ر!\,(ر-١)!\,(ن-ر)!}$$

$$= \frac{ن - ر + ١}{ر}$$

ملحوظة (١-٣)

في البراهين النظرية تستخدم النتيجة (١-٤) للتعويض عن $ق^{ن}_{ر}$ ، بينما يُفضَّل استخدام النظرية (١-٣) لحساب القيمة العدديّة لـ $ق^{ن}_{ر}$.

نتيجة (١-٦)

$$ق^{ن}_{ر} = ق^{ن}_{ن-ر}$$

البرهان

$$ق^{ن}_{ن-ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!\,(ن-(ن-ر))!} = \frac{ن!}{(ن-ر)!\,ر!} = ق^{ن}_{ر}$$

ملحوظة (١-٤)

يتَّضح من القانون السابق أنَّ عدد المجموعات الجزئية ذات $ر$ عنصرًا يساوي عدد المجموعات الجزئية ذات ($ن - ر$) عنصرًا ، أي أنَّ عدد طرق اختيار $ر$ من العناصر من بين $ن$ من العناصر يساوي عدد طرق اختيار العناصر الباقية وهو ($ن - ر$) عنصرًا .

وهذا القانون يُعرف بقانون التبسيط حيث يفيدنا بصورةٍ خاصَّةٍ في تبسيط العمليات الحسابية عند حساب قيمة $ق^{ن}_{ر}$ مع كون $ر > \frac{ن}{٢}$ ،

فمثلاً: يمكن بسهولة حساب قيمة $ق^{١٠٠}_{٩٨}$ على النحو التالي:

$$ق^{١٠٠}_{٩٨} = ق^{١٠٠}_{٢} = \frac{١٠٠ \times ٩٩}{٢ \times ١} = ٤٩٥٠$$

نتيجة (١-٧)

إذا كان $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{هـ}$ فإنَّ ر = هـ أو ر + هـ = ن وهذه النتيجة نحصل عليها مباشرة من النتيجة (١-٦).

مثال (١-٢٢)

إذا كان $^{ن}ق_{٩} = {}^{ن}ق_{٨}$ ، فأوجد قيمة ن .

الحل

بما أنَّ $^{ن}ق_{٩} = {}^{ن}ق_{٨}$

إذًا ن = ٩ + ٨ = ١٧

مثال (١-٢٣)

إذا كان $^{١٦}ق_{س+٥} = {}^{١٦}ق_{٢س-١٠}$ فأوجد قيمة س .

الحل

بما أنَّ $^{١٦}ق_{س+٥} = {}^{١٦}ق_{٢س-١٠}$

إذًا
س + ٥ = ... ⇐ س = ١٥
أو
س + ٥ + ... = ١٦ ⇐ ٣س = ٢١ ⇐ س = ٧

(أكمل الفراغ)

ولكن س = ١٥ مرفوضة لأنَّها لا تحقق الشرط س + ٥ ⩽ ١٦

إذًا س = ٧

مسائل وتطبيقات على التباديل والتوافيق

في هذا البند نتناول بعض المسائل الحياتيَّة التي يمكن حلُّها باستخدام مفهوميْ التباديل والتوافيق. وقبل ذلك سنوضِّح كيفية استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلٍّ من $\underline{|ن}$ ، $^{ن}ل_{ر}$ ، $^{ن}ق_{ر}$ وذلك توفيرًا للوقت والجهد لا سيَّما عندما تكون قيم ن ، ر كبيرة.

استخدام الآلة الحاسبة:

يوجد في الآلة الحاسبة العلميَّة المفاتيح التالية:

١) مفتاحٌ مكتوبٌ أعلاه الرمز **X!** ويستخدم لإيجاد مضروب أيِّ عددٍ وذلك بإدخال العدد ثمَّ الضغط على مفتاح $\boxed{}$ (SHIFT) يليه الضغط على المفتاح $\boxed{}$ (X!)

فمثلًا: لحساب $\underline{|١٢}$ نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي:

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{}$ (SHIFT) $\boxed{}$ (X!) $\boxed{=}$ ⟶ $\boxed{479\ 001\ 6\ 00}$

فيكون : $\underline{|١٢}$ = ٤٧٩ ٠٠١ ٦٠٠

٢) مفتاحٌ مكتوبٌ أعلاه الرمز $^{n}P_{r}$ والذي يعني $^{ن}ل_{ر}$ حيث حرف **P** هو اختصار كلمة **Permutation** والتي تعني تباديل ، ولإيجاد قيمة $^{ن}ل_{ر}$ نقوم بإدخال العدد ن ثمَّ الضغط على مفتاح $\boxed{}$ (SHIFT) يليه الضغط على المفتاح $\boxed{}$ ($^{n}P_{r}$) ثمَّ إدخال العدد ر .

فمثلًا: لحساب $^{٢٥}ل_{٧}$ نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي:

$\boxed{2}$ $\boxed{5}$ $\boxed{}$ (SHIFT) $\boxed{}$ ($^{n}P_{r}$) $\boxed{7}$ $\boxed{=}$ ⟶ $\boxed{2422728\ 000}$

فيكون : $^{٢٥}ل_{٧}$ = ٢ ٤٢٢ ٧٢٨ ٠٠٠

٣) مفتاحٌ مكتوبٌ عليه الرمز ${}^{n}C_{r}$ والذي يعني ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$ ، حيث حرف C هو اختصار كلمة Combination والتي تعني توافيق ، ولإيجاد قيمة ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$ نقوم بإدخال العدد ن ثمَّ الضغط على مفتاح على $\boxed{{}^{n}C_{r}}$ ثم إدخال العدد ر **فمثلاً**: لحساب ${}^{\text{٤٣}}\text{ق}_{\text{٩}}$ نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي:

$\boxed{4}\ \boxed{3}\ \boxed{{}^{n}C_{r}}\ \boxed{9}\ \boxed{=} \longrightarrow \boxed{563\,921\,995}$

فيكون: ${}^{\text{٤٣}}\text{ق}_{\text{٩}}$ = ٥٦٣ ٩٢١ ٩٩٥

مثال (١-٢٤)

ماعدد الأعداد التي يتكوَّن كلٌّ منها من أربعة أرقامٍ مختلفةٍ من المجموعة { ٠ ، ١ ، ٤ ، ٧ } ؟

الحل

حيث أنَّ كلاً من الأعداد المطلوب عددها يتكوَّن من ٤ أرقامٍ فإنَّ الصفر لا يمكن أن يشغل منزلة الألوف ، لاحظ أنَّ العدد ٠٧٤١ - **مثلا** - يتكوَّن من ٣ أرقام ؛ لذا نشغل أولاً منزلة الألوف بأحد الأرقام ١ ، ٤ ، ٧ أي (بطرقٍ عددها ٣) ويبقى بعد ذلك ٣ أرقام لترتيبها في المنازل الثلاث (المئات والعشرات والآحاد) ، وذلك بطرقٍ عددها يساوي عدد تباديل ٣ عناصر .

وحسب مبدأ العدِّ يكون :

عدد الأعداد المطلوب = ٣ × ٣⌋ = ١٨ عددًا.

مثال (١-٢٥)

بكم طريقةٍ يمكن ترتيب ستَّة كتبٍ في رفٍّ بحيث تظلُّ ثلاثة كتبٍ معيَّنةٍ منها متجاورةً ؟

الحل

يمكننا أنْ نعدَّ الكتب الثلاثة المتجاورة كتابًا واحدًا ، ونوجد عدد طرق ترتيب ٤ كتبٍ على الرفِّ وهو ٤⌋ ثمَّ نضرب الناتج في عدد طرق ترتيب الكتب الثلاثة المتجاورة وهو ٣⌋ ، فيكون :

عدد الطرق المختلفة لترتيب هذه الكتب = ٤⌋ × ٣⌋ = ٢٤ × ٦ = ١٤٤ طريقة.

مثال (١-٢٦)

بكم طريقة يمكن اختيار عشرة عمّالٍ للتعيين في أحد المصانع من بين اثني عشر متقدّمٍ للعمل في هذا المصنع؟ وما عدد الطرق الممكنة في كلٍّ من الحالتين التاليتين :

أ) إذا توجّب اختيار شخصٍ معيّنٍ من المتقدّمين؟

ب) إذا توجّب استبعاد شخصٍ معيّنٍ من المتقدّمين؟

الحل

عدد طرق اختيار ١٠ عمّالٍ من بين ١٢ متقدّمٍ $= {}^{12}\text{ق}_{10} = {}^{12}\text{ق}_{2} = \frac{12 \times 11}{2} = 66$ طريقة.

أ) إذا توجّب اختيـار شخصٍ معيّنٍ فإننا نحتاج إلى اختيار ٩ أشخاصٍ آخرين من المتقدّمين الباقين وعددهم ١١ فيكون :

عدد طرق الاختيار $= {}^{11}\text{ق}_{9} = {}^{11}\text{ق}_{2} = \frac{11 \times 10}{2} = 55$ طريقة.

ب) إنّ استبعاد شخصٍ معيّنٍ من المتقدّمين يعني اختيار ١٠ أشخاصٍ من بين المتقدّمين الباقين وعددهم ١١ فيكون :

عدد طرق الاختيار $= {}^{11}\text{ق}_{10} = {}^{11}\text{ق}_{1} = 11$ طريقة.

تدريب (١-٥)

بكم طريقةٍ يمكن لطالبٍ اختيار ثلاثة أسئلةٍ من ورقة اختبارٍ بها خمسة أسئلةٍ إذا توجّب اختيار السؤال الأوّل؟

مثال (١-٢٧)

مجموعةٌ مكوّنةٌ من عشرة طلابٍ . أوجد عدد طرق اختيـار ثلاثة طلابٍ من هذه المجموعة في كلٍّ من الحالتين التاليتين :

أ) للقيام بأعمالٍ مختلفة .   ب) للقيام بالعمل نفسه .

الحل

إنَّ الاختيار مع تمييز الأعمال يعني الاهتمام بترتيب الاختيار، بينما لا يكون للترتيب معنىً في حالة الاختيار دون تمييز الأعمال.

وعليه يكون:

أ) عدد طرق الاختيار للقيام بأعمالٍ مختلفة $= {}^{١٠}\text{ل}_{٣} = ١٠ \times ٩ \times ٨ = ٧٢٠$ طريقة

ب) عدد طرق الاختيار للقيام بالعمل نفسه $= {}^{١٠}\text{ق}_{٣} = \dfrac{{}^{١٠}\text{ل}_{٣}}{\underline{|٣}} = \dfrac{٧٢٠}{٦} = ١٢٠$ طريقة

مثال (١-٢٨)

مجموعةٌ من طالبات الصفِّ الأوَّل الثانويِّ مكوَّنةٌ من تسع طالبات ومجموعةٌ أخرى من طالبات الصفِّ الثاني الثانويِّ مكوَّنةٌ من سبع طالبات. كم عدد الطرق التي يمكن بها تكوين لجنةٍ خماسيةٍ من هؤلاء الطالبات في كلٍّ من الحالات الآتية:

أ) تتكوَّن اللجنة من أيِّ طالباتٍ من المجموعتين.

ب) تتكوَّن اللجنة من ثلاث طالباتٍ من الصفِّ الأوَّل الثانويِّ، وطالبتين من الصفِّ الثاني الثانويِّ.

جـ) رئيسة اللجنة وأمينة السرِّ من الصفِّ الثاني الثانويِّ، وباقي الأعضاء من الصفِّ الأوَّل الثانويِّ.

الحل

أ) حيث أنَّ عدد طالبات المجموعتين معًا هو ١٦ طالبة

فإنَّ عدد طرق تكوين اللجنة الخماسيَّة من أيِّ طالبات من المجموعتين هو:

$${}^{١٦}\text{ق}_{٥} = \frac{{}^{١٦}\text{ل}_{٥}}{\underline{|٥}} = \frac{١٦ \times ١٥ \times ١٤ \times ١٣ \times ١٢}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٤٣٦٨ \text{ طريقة}$$

ب) عدد طرق اختيار ٣ طالبات من الصفِّ الأوَّل الثانويِّ

$= ق^{٩}_{٣} = \frac{ل^{٩}_{٣}}{\underline{|٣}} = \frac{٩ \times ٨ \times ٧}{٣ \times ٢ \times ١} = ٨٤$ طريقة

عدد طرق اختيار طالبتين من الصفِّ الثاني الثانويِّ $= ق^{٧}_{٢} = \frac{٧ \times ٦}{٢} = ٢١$ طريقة

وحسب مبدأ العدِّ يكون :

عدد طرق تكوين اللجنة الخماسيَّة $= ٨٤ \times ٢١ = ١٧٦٤$ طريقة

جـ) لاختيار طالبتين من الصفِّ الثاني الثانويِّ بحيث تكون إحداهما رئيسة اللجنة و الأخرى أمينة السرِّ، لابد لنا من الاهتمام بالترتيب، وبالتالي يكون:

عدد طرق هذا الاختيار $= ل^{٧}_{٢} = ٧ \times ٦ = ٤٢$ طريقة

بينما عدد طرق اختيار باقي الأعضاء من الصفِّ الأوَّل الثانويِّ $= ق^{٩}_{٣} = ٨٤$ طريقة

وحسب مبدأ العدِّ فإنَّ:

عدد طرق تكوين اللجنة الخماسية $= ٤٢ \times ٨٤ = ٣٥٢٨$ طريقة

مثال (١-٢٩)

يوجد في مكتبةٍ عشرة كتبٍ مختلفةٍ في الرياضيَّات وسبعة كتبٍ مختلفةٍ في الفيزياء. بكم طريقةٍ يمكن ترتيب ستة كتبٍ منها مكوَّنةٍ من أربعة كتب رياضيات، وكتابين في الفيزياء على رفِّ المكتبة ؟

الحل

إنَّ هذا الوضع يتمُّ بإجراء ثلاث خطواتٍ هي :

اختيار كتب الرياضيَّات ، اختيار كتب الفيزياء ثمَّ ترتيب الكتب المختارة.

عدد طرق اختيار كتب الرياضيَّات $= ق^{١٠}_{٤} = ٢١٠$ طريقة

عدد طرق اختيار كتب الفيزياء $= ق^{٧}_{٢} = ٢١$ طريقة

عدد طرق ترتيب الكتب المختارة على الرفِّ $= \underline{|٦} = ٧٢٠$ طريقة

وحسب مبدأ العدِّ نجد أنَّ:

عدد الترتيبات المختلفة $= ٢١٠ \times ٢١ \times ٧٢٠ = ٣١٧٥٢٠٠$ طريقة

تمارين (١ - ٢)

١ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كلٍ من:

أ) $|\underline{٨}$ ب) $|\underline{٥} - ٥\,|\underline{٤}$ جـ) $\dfrac{|\underline{١٣}}{|\underline{١١}}$ د) $\dfrac{|\underline{٥}}{|\underline{٢}\;|\underline{٣}}$

هـ) ${}^{٦}\text{ل}_{٤}$ و) $\dfrac{{}^{٨}\text{ل}_{٤}}{{}^{٨}\text{ل}_{٣}}$ ز) $\dfrac{{}^{٩}\text{ل}_{٣}}{|\underline{٤}}$ ح) $\dfrac{|\underline{٥}}{|\underline{٢}\;{}^{٥}\text{ل}_{٣}}$

ط) ${}^{٦}\text{ق}_{٤}$ ي) ${}^{٦}\text{ق}_{٢}$ ك) ${}^{١٢٠}\text{ق}_{١}$ ل) ${}^{١٢٠}\text{ق}_{١١٩}$

م) ${}^{١٢٠}\text{ق}_{١٢٠}$ ن) ${}^{١٢٠}\text{ق}_{٠}$ س) ${}^{١٢٠}\text{ل}_{١}$ ع) ${}^{١٢٠}\text{ل}_{٠}$

٢ باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كلٍ من:

$|\underline{٩}$ ، $|\underline{١١}$ ، ${}^{٢٠}\text{ل}_{٨}$ ، ${}^{٤٢}\text{ل}_{٥}$ ، ${}^{١٨}\text{ق}_{٧}$ ، ${}^{٢٩}\text{ق}_{١٢}$

٣ ضع ما يأتي في أبسط صورة بدلالة ن :

أ) $\dfrac{|\underline{ن+٢}\;\;|\underline{ن-١}}{(|\underline{ن})^{٢}}$ ب) ${}^{ن}\text{ق}_{ن-١}$ جـ) ${}^{ن}\text{ق}_{٢}$

٤ **في كلٍّ ممّا يلي أوجد قيمة ن التي تحقّق المساواة المعطاة :**

أ) $٤٢ = \frac{|\underline{ن+١}}{|\underline{ن-١}}$ ب) $٢٥٢٠ = {}_{ن}ل^{٧}$

جـ) $١٢ = \frac{{}_{٣}ل^{ن}}{{}_{٢}ل^{ن}}$ د) $٧ = \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ن-٢}} \div {}_{٣}ل^{ن+١}$

٥ إذا كان ${}_{٢}ل^{ن+م} = ٩٠$ ، ${}_{٢}ل^{ن-م} = ١٢$ ، فما قيمة كلٍّ من م ، ن ؟

٦ إذا علمت أنّ $\frac{|\underline{ن-١}}{|\underline{ن+١}} = \frac{١}{٧٢}$ ، فأوجد قيمة ${}_{١}ل^{ن} + {}_{٠}ل^{ن}$

٧ إذا كان ${}_{٣}ق^{ن} = ١٦٥$ ، فاحسب قيمة ${}_{٣}ل^{ن}$.

٨ إذا كان ${}_{٢س-١}ق^{٢٤} = {}_{س+٤}ق^{٢٤}$ فأوجد قيمة س .

٩ أثبت أنّ $\frac{{}_{ر}ق^{ن}}{{}_{ر-١}ق^{ن-١}} = \frac{ن}{ر}$ ثمّ استخدم ذلك في إيجاد قيمة ${}_{١٢}ق^{٣٦} \div {}_{١١}ق^{٣٥}$.

١٠ أثبت أنّ ${}_{ر}ق^{ن} + {}_{ر-١}ق^{ن} = {}_{ر}ق^{ن+١}$ (تُعرف هذه العلاقة بعلاقة الكرخي)*

ثمّ استخدم ذلك في إيجاد قيمة ${}_{٩}ق^{١٢} + {}_{٨}ق^{١٢}$.

* الكرخي هو العالم المسلم الفذّ أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي المتوفّى سنة ٤٢١ هـ .

١١ شركة استشارات إدارية لديها أربعة عقود لأربعة خبراء ، ما عدد الطرق الممكنة لترتيب لقاءات معهم ؟

١٢ بكم طريقة يمكن أن يقف سبعة طلاب في صفٍّ واحدٍ ؟

١٣ لدى شركةٍ عشرون مخزنًا ويراد اختيار ثلاثة مخازن منها لإجراء فحوصات على ثلاثة منتجات مختلفة، على أن يجري فحص كلِّ نوعٍ في مخزنٍ خاصٍّ به. فما عدد الطرق المختلفة لترتيب ذلك ؟

١٤ ما عدد الطرق المختلفة لجلوس أربعة أشخاصٍ على سبعة كراسي موضوعةٍ في صفٍّ واحدٍ ؟

١٥ كم لجنة ثلاثية يمكن تكوينها من تسعة أشخاص ؟

١٦ بكم طريقةٍ يمكن توزيع ثلاث جوائز مختلفةٍ على ثلاثةٍ من ثمانية مرشَّحين إذا كان لا يجوز منح المرشَّح أكثر من جائزةٍ واحدة ؟

١٧ مجلس إدارةٍ مكوَّن من ثلاثة عشر عضوًا ، بكم طريقةٍ يمكن أخذ قرارٍ باتفاق تسعة أعضاء ضدَّ أربعة أعضاء؟

١٨ كم عدد الطرق التي يمكن بها ترتيب حروف كلمة مكتب ؟

١٩ كم كلمةً رباعيةً يمكن تكوينها من الأحرف {س ، ص ، ع ، ل ، م ، ن ، هـ ، و} شريطة عدم تكرار أيِّ حرفٍ في الكلمة، ولا يشترط أن يكون للكلمة معنى ؟

٢٠ إذا كانت س = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ..... ، ٩ }

أ) كم عددًا مكوّنًا من ثلاثة أرقامٍ مختلفةٍ يمكن تكوينه من عناصر المجموعة س ؟

ب) كم عددًا مكوّنًا من أربعة أرقامٍ مختلفةٍ يمكن تكوينه من عناصر المجموعة س شريطة أن يكون الرقم ٧ في منزلة المئات ؟

٢١ كم عدد الطرق التي يمكن بها أن يرتّب طفلٌ خمسة أشكالٍ هي:
مربّع ، مثلث ، مستطيل ، معين ، دائرة بحيث يظلُّ المربّع و المثلّث متجاورين ؟

٢٢ إذا كان هناك ستّة طرقٍ تؤدّي من الموقع أ إلى الموقع ب، وأربعة طرقٍ تؤدّي من الموقع ب إلى الموقع جـ، فبكم طريقةٍ يمكن الانتقال من الموقع أ إلى الموقع جـ مرورًا بالموقع ب ؟

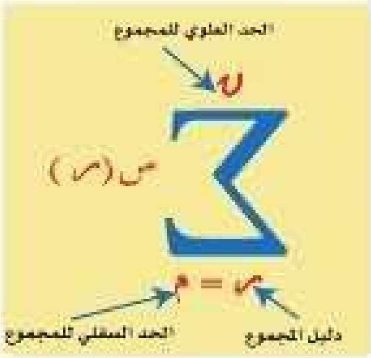
٢٣ بكم طريقةٍ يمكن اختيار عشر كُراتٍ منها ثلاث حمراء ، اثنتان بيضاوان، خمس خضراء من خمس كراتٍ حمراء، أربع كراتٍ بيضاء ، سبع كراتٍ خضراء ؟

٢٤ يُراد اختيار هيئـةٍ لتحرير مجلةٍ مدرسيّةٍ بحيث يُختـار ثلاث طالباتٍ من الصـفّ الثالث واثنتان من الصفّ الثاني وواحدة من الصفّ الأوّل علمًا بأن أعداد الطالبات في الصفوف الثلاثة هي:
١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ علـى التوالـي، فبكم طريقةٍ يمكـن اختيار هذه الهيئة ؟ وبكم طريقـةٍ يمكن أن يتمّ هذا الاختيار إذا كانت الرئيسة والمساعدة وأمينة السرّ من الصفّ الثالث ؟

٢٥ من قائمةٍ تتضمن ١٤ طبيباً وطبيبة يتمُّ اختيار ٤ للمقابلة في اليوم الأوّل، ٤ للمقابلة في اليوم الثاني، ٦ للمقابلة في اليوم الثالث.فبكم طريقةٍ يمكن ذلك ؟

٢٦ لدينا ٥ كتبٍ مختلفةٍ في الرياضيّات ، ٤ كتبٍ مختلفةٍ في الفيزياء ، كتابان مختلفان في الأحياء ، بكم طريقةٍ يمكن ترتيب هذه الكتب بحيث تكون كتب كلّ علم على حدة ؟

١-٣ رمز المجموع $\sum$
Sigma Symbol



في كثيرٍ من المسائل الرياضيّة تظهر مجاميع لمقادير حسابيّة أو جبريّة مثل:

١) $١ + ٢ + ٣ + \dots + ١٠٠$

٢) $١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + \dots + ن^٢$

٣) $أ^٣ + أ^٤ + أ^٥ + أ^٦ + أ^٧$

ولتجنُّب الجهد المبذول في كتابة مثل هذه المجاميع نستخدم رمز المجموع $\sum$ لوضع صيغةٍ مختصرةٍ لكلِّ مجموعٍ من هذه المجاميع وذلك وفق التعريف الآتي:

تعريف (١-٥)

إذا كانت س (ر) عبارةٌ رياضيّةٌ معيّنةٌ، وكان م ، ن عددين صحيحين حيث م $\leqslant$ ن فإنَّ:

$$\sum_{ر=م}^{ن} س(ر) = س(م) + س(م+١) + س(م+٢) + \dots + س(ن)$$

ويُقرأ الطرف الأيمن مجموع س (ر) من ر = م إلى ر = ن

ويُسمّى متغير المجموع ر بدليل المجموع، م بالحد السفلي للمجموع، ن بالحد العلوي للمجموع، كما يُسمّى الطرف الأيسر مفكوك المجموع.

على ضوء هذا التعريف يمكن التعبير عن المجاميع السابقة كما يلي:

١) $١ + ٢ + ٣ + \dots + ١٠٠ = \sum_{ر=١}^{١٠٠} ر$

٢) $١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + \dots + ن^٢ = \sum_{ر=١}^{ن} ر^٢$

٣) $أ^٣ + أ^٤ + أ^٥ + أ^٦ + أ^٧ = \sum_{ر=٣}^{٧} أ^ر$

ملحوظة (١-٥)

لكتابة مجموع مقادير حسابيةٍ أو جبريةٍ بدلالة رمز المجموع نحددُ أولاً س (ر) ويتمُّ ذلك بتحديد الأعداد أو الرموز التي لا تتغيّر من حدٍّ لآخر، ثُمَّ التي تتغيّر من حدٍّ لآخر وقاعدة تغيُّرها بدلالة العدد الصحيح ر، وأخيرًا نُحدّدُ أوّل قيمة وآخر قيمة يأخذها العدد ر اعتمادًا على الحدِّ الأوّل والحدِّ الأخير في المجموع.

مثال (١-٣٠)

اكتب المجاميع التالية باستخدام الرمز $\sum$:

أ) $٣ \times ١^٢ + ٣ \times ٢^٢ + ٣ \times ٣^٢ + ... + ٣ \times ٧٥^٢$

ب) $س_١ ص_١ + س_٢ ص_٢ + س_٣ ص_٣ + ... + س_ن ص_ن$

جـ) $^{٦}ن_{٠} + {}^{٦}ن_{١} + {}^{٦}ن_{٢} + ... + {}^{٦}ن_{٦}$

الحل

أ) $٣ \times ١^٢ + ٣ \times ٢^٢ + ٣ \times ٣^٢ + ... + ٣ \times ٧٥^٢ = \sum_{ر=١}^{٧٥} ٣ ر^٢$

ب) $س_١ ص_١ + س_٢ ص_٢ + س_٣ ص_٣ + ... + س_ن ص_ن = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر ص_ر$

جـ) $^{٦}ن_{٠} + {}^{٦}ن_{١} + {}^{٦}ن_{٢} + ... + {}^{٦}ن_{٦} = \sum_{ر=٠}^{٦} {}^{٦}ن_{ر}$

مثال (١-٣١)

اُكتب مفكوك المجموع في كلٍّ ممّا يلي:

أ) $\sum_{ر=١}^{٦} ر^٣$ ب) $\sum_{ر=١}^{٧} ٣$

جـ) $\sum_{ر=٢}^{٤} س^{ر} ص^{٤-ر}$ د) $\sum_{ر=٠}^{ن} \frac{٥^{ر}}{ر!}$

الحل

أ) $\sum_{ر=١}^{٦} ر^{٣} = ١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + ٤^{٣} + ٥^{٣} + ٦^{٣}$

ب) $\sum_{ر=١}^{٧} ٣ = ٣ + ٣ + ٣ + ٣ + ٣ + ٣ + ٣$

جـ) $\sum_{ر=٢}^{٤} س^{ر} ص^{٤-ر} = س^{٢} ص^{٢} + س^{٣} ص + س^{٤}$

د) $\sum_{ر=٠}^{ن} \frac{٥^{ر}}{ر!} = \frac{٥^{٠}}{٠!} + \frac{٥^{١}}{١!} + \frac{٥^{٢}}{٢!} + \frac{٥^{٣}}{٣!} + \cdots + \frac{٥^{ن}}{ن!}$

خواصُ الرمز $\sum$

إذا كان ك ثابتًا، م، ن عددين صحيحين حيث م $\leqslant$ ن فإنَّ:

- $\sum_{ر=م}^{ن} [س(ر) + ص(ر)] = \sum_{ر=م}^{ن} س(ر) + \sum_{ر=م}^{ن} ص(ر)$ ——— (١-٢)
- $\sum_{ر=م}^{ن} ك\, س(ر) = ك \sum_{ر=م}^{ن} س(ر)$ ——— (١-٣)
- $\sum_{ر=١}^{ن} ك = ك\, ن$ ——— (١-٤)
- $\sum_{ر=م}^{ن} ك = ك\,(ن - م + ١)$ ——— (١-٥)
- $\sum_{ر=م}^{ن+١} س(ر) = س(ن + ١) + \sum_{ر=م}^{ن} س(ر)$ ——— (١-٦)

ويمكن برهنة هذه الخواصِّ من التعريف (١-٥) بسهولة، ونتركها للطالب كتدريب.

مثال (١-٣٢)

أوجد قيمة كلٍّ ممّا يلي:

أ) $\sum_{ر=١}^{٤} ر$ ب) $\sum_{ر=١}^{٤} ر^{٢}$ جـ) $\sum_{ر=١}^{٤} (ر + ر^{٢})$

ثُمَّ تحقّق من صحة الخاصّة (١-٢).

الحل

أ) $\sum_{ر=١}^{٤} ر = ١ + ٢ + ٣ + ٤ = ١٠$

ب) $\sum_{ر=١}^{٤} ر^{٢} = ١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + ٤^{٢} = ٣٠$

جـ) $\sum_{ر=١}^{٤} (ر + ر^{٢}) = (١ + ١^{٢}) + (٢ + ٢^{٢}) + (٣ + ٣^{٢}) + (٤ + ٤^{٢}) = ٤٠$

إذًا $\sum_{ر=١}^{٤} (ر + ر^{٢}) = \sum_{ر=١}^{٤} ر + \sum_{ر=١}^{٤} ر^{٢}$

مثال (١-٣٣)

احسب قيمة كلٍّ من المجاميع التالية:

أ) $\sum_{ر=١}^{٩} ٤$ ب) $\sum_{ر=٣}^{١٠} ٦$ جـ) $\sum_{ر=١}^{ن} س(ر)$ ، حيث $س(ر) = ١$ لجميع قيم ر

الحل

أ) $\sum_{ر=١}^{٩} ٤ = ٤ \times ٩ = ٣٦$ استخدمنا الخاصّة (١-٤)

ب) $\sum_{ر=٣}^{١٠} ٦ = ٦ (١٠ - ٣ + ١) = ٤٨$ استخدمنا الخاصّة (١-٥)

جـ) $\sum_{ر=١}^{ن} س(ر) = \sum_{ر=١}^{ن} ١ = ن$ استخدمنا الخاصّة (١-٤)

تمارين (١-٣)

١ أكتب مفكوك المجموع في كلٍّ ممّا يأتي:

أ) $\sum_{ر=١}^{٥} ٢ر^{٢}$ ب) $\sum_{ر=٣}^{٩} \frac{ر}{ر-١}$ جـ) $\sum_{ر=٠}^{٧} أ^{ر} ب^{٧-ر}$

د) $\sum_{ر=١}^{ن} (٢^{ر} - ١)$ هـ) $\sum_{ر=٢}^{٦} ٦ك$ و) $\sum_{ر=٠}^{٤} (-١)^{ر} س^{٤-ر}$

٢ أكتب المجاميع التالية باستخدام الرمز $\sum$:

أ) $\frac{١}{١!} + \frac{١}{٢!} + \frac{١}{٣!} + \cdots + \frac{١}{ن!}$

ب) $(٣ + ٤ \times ١) + (٣ + ٤ \times ٢) + (٣ + ٤ \times ٣) + \cdots + (٣ + ٤ \times ٢٠٠)$

جـ) $١ + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٥} + \frac{١}{٧} + \frac{١}{٩} + \frac{١}{١١}$

٣ بيّن أنّ $\sum_{ر=١}^{٣} ر^{٢} \neq \left(\sum_{ر=١}^{٣} ر\right)^{٢}$

٤ أثبت صحة ما يأتي:

أ) $\sum_{ر=٠}^{ن} \frac{س^{ر}}{ر!} = ١ + س + \sum_{ر=٠}^{ن-٢} \frac{س^{ر+٢}}{(ر+٢)!}$

ب) $\sum_{ر=٠}^{ن} س_{ر} = \sum_{ر=٠}^{ن} س_{ن-ر}$

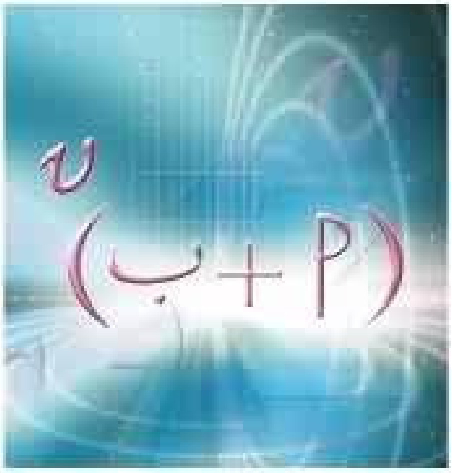
جـ) $\sum_{ر=٠}^{ن} ق^{ن}_{ر} أ^{ن-ر} ب^{ر} = \sum_{ر=٠}^{ن} ق^{ن}_{ر} أ^{ر} ب^{ن-ر}$

٥ أوجد قيمة كلٍّ ممّا يلي:

أ) $\sum_{ر=٤}^{٧} ١٢$ ب) $\sum_{ر=١}^{٥} \frac{١}{ر}$

جـ) $\sum_{ر=٢}^{٤} ر!$ د) $\sum_{ر=١}^{٦} ٥ر + \sum_{ر=٢}^{٦} (٢ - ٥ر)$

١ ـ ٤ نظريّة ذات الحدّين
The Binomial Theorem



إذا كان لدينا مقدارٌ جبريٌّ مكوّنٌ من حدّين ومرفوعٌ لأسٍّ صحيحٍ موجبٍ فإنّه بإمكاننا الحصول على مفكوك هذا المقدار بضربه في نفسه عدّة مرّاتٍ بقدر الأسّ المرفوع إليه. إلاّ أنّ ذلك يستغرق الكثير من الوقت والجهد لا سيّما عندما يكون هذا الأسُّ كبيرًا ويمكننا بواسطة نظريّة ذات الحدّين كتابة مفكوك أيّ مقدارٍ ذي حدّين مهما كان الأسُّ المرفوع إليه كبيرًا بيسرٍ وسهولة.

وحتى نستنتج مضمون هذه النظريّة نأخذ المقدار ذي الحدّين أ + ب حيث أ ترمز للحدّ الأوّل ، ب ترمز للحدّ الثاني ونوجد مفكوكه عندما يكون مرفوعًا للأس ٢ ، ٣ ، ٤ وذلك بالضرب المباشر فنجد أنّ:

$(أ + ب)^{٢} =$	$أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢}$
$(أ + ب)^{٣} =$	$أ^{٣} + ٣ أ^{٢} ب + ٣ أ ب^{٢} + ب^{٣}$
$(أ + ب)^{٤} =$	$أ^{٤} + ٤ أ^{٣} ب + ٦ أ^{٢} ب^{٢} + ٤ أ ب^{٣} + ب^{٤}$

إنّ الأطراف اليسرى فيما سبق هي نماذجُ لمفكوك ذات الحدّين. وبالتأمّل في هذه المفكوكات نلاحظ ما يلي:

١) عدد الحدود في كلّ مفكوك يزيد واحدًا عن الأسّ في الطرف الأيمن.

٢) الحدُّ الأوّل في المفكوك هو العدد أ مرفوعًا لنفس الأسّ في الطرف الأيمن ثمّ ينقص الأسُّ للعدد أ في الحدود التالية بمقدار الوحدة على التوالي.

٣) العدد ب يبدأ ظهوره في الحدّ الثاني ثمّ يزيد أسُّ العدد ب بمقدار الوحدة على التوالي حتى نصل إلى الحدّ الأخير في المفكوك وهو العدد ب مرفوعًا لنفس الأسّ في الطرف الأيمن.

٤) مجموع الأسّين للعددين أ ، ب في أيّ حدٍّ من حدود المفكوكات ثابت ويساوي الأسّ في الطرف الأيمن.

٥) معامل الحدّ الأوّل في المفكوك يساوي معامل الحدّ الأخير يساوي الواحد ، ومعامل الحد الثاني يساوي معامل الحدّ قبل الأخير وهكذا ...

ممّا سبق نجد أنّه يمكننا كتابة مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ ، حيث $ن \in ط$ على الشكل التالي:

$$(أ + ب)^{ن} = أ^{ن} + {}^{ن}ق_{1}\, أ^{ن-1} ب + {}^{ن}ق_{2}\, أ^{ن-2} ب^{2} + \cdots + {}^{ن}ق_{ر}\, أ^{ن-ر} ب^{ر} + \cdots + {}^{ن}ق_{ن-1}\, أ ب^{ن-1} + ب^{ن}$$

وحيث أنّ $(أ + ب)^{ن} = \underbrace{(أ + ب)(أ + ب)(أ + ب)(أ + ب) \cdots (أ + ب)}_{ن \text{ من العوامل}}$

وأنّه يمكن الحصول على الرمز $أ^{ن-ر} ب^{ر}$ خلال إجراء عملية الضرب عدد ${}^{ن}ق_{ر}$ من المرات؛ (وذلك لأنّ هـذا الرمـز ينتـج من اختيار الرمز ب من ر من العوامل والتي عددها ن، واختيار الرمز أ من كلّ عاملٍ من العوامل المتبقيّة وعددها ن − ر ومن ثم ضرب هذه الرموز جميعها).

تستنتج أنّ معامل $أ^{ن-ر} ب^{ر}$ في مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ وهو م$_{ر}$ يساوي ${}^{ن}ق_{ر}$.

وهذا يقودنا إلى النظرية التالية والتي تُعرف **بنظرية ذات الحدّين** للكرخيّ:

نظرية (١-٤)

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين، ن عدد صحيح موجب فإنّ:

$$(أ + ب)^{ن} = أ^{ن} + {}^{ن}ق_{1}\, أ^{ن-1} ب + {}^{ن}ق_{2}\, أ^{ن-2} ب^{2} + \cdots + {}^{ن}ق_{ر}\, أ^{ن-ر} ب^{ر} + \cdots + {}^{ن}ق_{ن-1}\, أ ب^{ن-1} + ب^{ن}$$

تدريب (١-٦)

طبّق النظرية (١-٤) لإيجاد مفكوكات $(أ + ب)^{2}$ ، $(أ + ب)^{3}$ ، $(أ + ب)^{4}$.

ملحوظة (١-٦)

يمكننا باستخدام رمز المجموع كتابة مفكوك ذات الحدّين $(أ + ب)^{ن}$ على الصورة المختصرة التالية:

$$(أ + ب)^{ن} = \sum_{ر=0}^{ن} {}^{ن}ق_{ر}\, أ^{ن-ر} ب^{ر} \qquad \text{———} \quad (١-٧)$$

مثال (١-٣٤)

أوجد مفكوك $(أ + ٢)^{٥}$

الحل

بتطبيق القانون (١-٧) يكون:

$$(أ + ٢)^{٥} = \sum_{ر=٠}^{٥} {}^{٥}ق_{ر}\, أ^{٥-ر} \times ٢^{ر}$$

$$= أ^{٥} + {}^{٥}ق_{١}\, أ^{٤} \times ٢ + {}^{٥}ق_{٢}\, أ^{٣} \times ٢^{٢} + {}^{٥}ق_{٣}\, أ^{٢} \times ٢^{٣} + {}^{٥}ق_{٤}\, أ \times ٢^{٤} + ٢^{٥}$$

$$= أ^{٥} + ١٠ أ^{٤} + ٤٠ أ^{٣} + ٨٠ أ^{٢} + ٨٠ أ + ٣٢$$

مثال (١-٣٥)

أوجد مفكوك $(٢ س^{٢} - ٣)^{٤}$

الحل

بتطبيق القانون (١-٧) يكون:

$$(٢ س^{٢} - ٣)^{٤} = \sum_{ر=٠}^{٤} {}^{٤}ق_{ر}\, (٢ س^{٢})^{٤-ر} (-٣)^{ر}$$

$$= (٢ س^{٢})^{٤} + {}^{٤}ق_{١} (٢ س^{٢})^{٣} (-٣) + {}^{٤}ق_{٢} (٢ س^{٢})^{٢} (-٣)^{٢} + {}^{٤}ق_{٣} (٢ س^{٢}) (-٣)^{٣} + (-٣)^{٤}$$

$$= ١٦ س^{٨} - ٩٦ س^{٦} + ٢١٦ س^{٤} - ٢١٦ س^{٢} + ٨١$$

تدريب (١-٧)

تحقق من أنَّ $(١ + ب)^{ن} = \sum_{ر=٠}^{ن} {}^{ن}ق_{ر}\, ب^{ر}$ ، ثمَّ أوجد مفكوك $(١ + س)^{٦}$.

مثال (١-٣٦)

باستخدام مفكوك ذات الحدّين احسب قيمة $(١,٠٢)^{١٠}$ ، مقربًا الجواب لثلاثة أرقام عشرية.

الحل

$$(١,٠٣)^{١٠} = (١ + ٠,٠٣)^{١٠} = \sum_{ر=٠}^{١٠} {}^{١٠}ق_{ر} \left(\frac{٣}{١٠٠}\right)^{ر}$$

$$= ١ + {}^{١٠}ق_{١} \times \frac{٣}{١٠٠} + {}^{١٠}ق_{٢} \times \frac{٩}{١٠^{٤}} + {}^{١٠}ق_{٣} \times \frac{٢٧}{١٠^{٦}} + {}^{١٠}ق_{٤} \times \frac{٨١}{١٠^{٨}} + \dots + \frac{٣^{١٠}}{١٠^{٢٠}}$$

$$\approx ١ + ٠,٣ + ٠,٠٤٠٥ + ٠,٠٠٣٢٤ + ٠,٠٠٠١٧٠١ + \dots$$

$$\approx ١,٣٤٣٩١٠١ \approx ١,٣٤٤$$

لاحظ:

أننا توقفنا عند الحدّ الخامس لظهور ثلاثة أصفار عن يمين الفاصلة العشرية حيث أنّ المطلوب التقريب لثلاثة أرقام عشرية.

الحدُّ العامُّ في مفكوك $(أ + ب)^{ن}$

من النظرية (١-٤) نجد أن:

الحدُّ الأوّل $= {}^{ن}ق_{٠}\ أ^{ن}\ ب^{٠}$

الحدُّ الثاني $= {}^{ن}ق_{١}\ أ^{ن-١}\ ب^{١}$

الحدُّ الثالث $= {}^{ن}ق_{٢}\ أ^{ن-٢}\ ب^{٢}$

وعامّةً الأمر فإنّ ${}^{ن}ق_{ر}\ أ^{ن-ر}\ ب^{ر}$ هو الحدُّ الذي ترتيبه $ر + ١$ ويرمز له بالرمز $ح_{ر+١}$ أي أنّ:

$$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\ أ^{ن-ر}\ ب^{ر} \qquad \text{——— (١-٨)}$$

يُسمّى هذا الحدُّ بالحدّ العامّ في المفكوك؛ لأنّه بوضع $ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، \dots ، ن$ يمكننا الحصول على أيّ حدّ في المفكوك دون الحاجة إلى إجراء عملية الفكّ كلّها.

مثال (١-٣٧)

أوجد الحدّ السادس في مفكوك $\left(\text{٢ ص} + \frac{١}{٢}\right)^{٩}$

الحل

الحدّ العامّ $\text{ح}_{\text{ر}+١} = \text{ق}^{٩}_{\text{ر}} \left(\text{٢ص}\right)^{٩-\text{ر}} \left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{ر}}$

وبوضع $\text{ر} + ١ = ٦$ تكون $\text{ر} = ٥$

إذاً $\text{ح}_{٦} = \text{ق}^{٩}_{٥} \left(\text{٢ص}\right)^{٩-٥} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥}$

$= ١٢٦ \times ٢^{٤}\text{ص}^{٤} \times \frac{١}{٢^{٥}}$

$= \frac{١٢٦}{٢} \text{ص}^{٤}$

$= ٦٣ \text{ ص}^{٤}$

مثال (١-٣٨)

أوجد معامل $\text{س}^{٥}$ في مفكوك $\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}^{٣}}\right)^{١٧}$ ، $\text{س} \neq ٠$

الحل

نفرض أنّ الحدّ الذي فيه س مرفوعة للأسّ ٥ هو:

$\text{ح}_{\text{ر}+١} = \text{ق}^{١٧}_{\text{ر}} \left(\text{س}\right)^{١٧-\text{ر}} \left(\frac{١}{\text{س}^{٣}}\right)^{\text{ر}}$

$= \text{ق}^{١٧}_{\text{ر}} \text{ س}^{١٧-\text{ر}-٣\text{ر}}$

$= \text{ق}^{١٧}_{\text{ر}} \text{ س}^{١٧-٤\text{ر}}$

إذاً $\text{س}^{١٧-٤\text{ر}} = \text{س}^{٥}$

$١٧ - ٤\text{ر} = ٥ \Leftarrow \text{ر} = ٣$

إذاً معامل $\text{س}^{٥} = \text{ق}^{١٧}_{٣} = ٦٨٠$

مثال (١-٣٩)

أوجد الحدَّ الخالي من س في مفكوك $(٣س^{٢} - \frac{١}{س})^{٨}$ ، س $\neq$ ٠

الحل

إنَّ الحدَّ الخالي من س هو الحدُّ الذي فيه س مرفوعةٌ للأسِّ صفر وبفرض أنَّ هذا الحدَّ هو $ح_{ر+١}$ نجد أنَّ :

$$ح_{ر+١} = ق^{٨}_{ر}\ (٣س^{٢})^{٨-ر}\ (-\frac{١}{س})^{ر}$$

$$= ق^{٨}_{ر} \times ٣^{٨-ر} \times س^{٢٤-٢ر} \times (-١)^{ر} \times س^{-ر}$$

إذًا $س^{٢٤-٤ر} = س^{٠}$

$\Leftarrow$ $٢٤ - ٤ر = ٠$ $\Leftarrow$ $ر = ٦$

إذًا الحدُّ الخالي من س هو:

$$ح_{٧} = ق^{٨}_{٦} \times ٣^{٢} \times (-١)^{٦} = ٢٨ \times ٩ = ٢٥٢$$

ملحوظة (١-٧)

وجدنا فيما سبق أنَّ عدد حدود مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ هو $ن + ١$ وبذلك نكون أمام أحد أمرين:

١) إذا كانت ن زوجية، يكون عدد حدود المفكوك فرديًا ويتعيَّن حدٌّ أوسطٌ واحدٌ في المفكوك ترتيبه $\frac{ن}{٢} + ١$ أي أنَّ الحدَّ الأوسط في هذه الحالة هو $ح_{\frac{ن}{٢}+١}$

٢) إذا كانت ن فرديَّة، يكون عدد حدود المفكوك زوجيًا ويتعيَّن في هذه الحالة حدَّان أوسطان ترتيبا هما

$$\frac{ن+١}{٢} \quad ، \quad \frac{ن+٣}{٢}$$

أي أنَّ الحدين الأوسطين هما $ح_{\frac{ن+١}{٢}}$ والحدُّ الذي يليه مباشرةً.

مثال (١-٤٠)

أوجد الحدَّ الأوسط في مفكوك $\left(٣س - \frac{١}{٦}\right)^{٨}$

الحل

بما أنّ $ن = ٨$ إذاً ترتيب الحدِّ الأوسط هو $\frac{ن}{٢} + ١ = ٥$

إذاً الحدُّ الأوسط هو $ح_{٥} = {}^{٨}ق_{٤} \; (٣س)^{٨-٤} \left(- \frac{١}{٦}\right)^{٤}$

$= ٧٠ \times ٣^{٤} \times س^{٤} \times \frac{١}{٣^{٤} \times ٢^{٤}}$

$= \frac{٣٥}{٨} \; س^{٤}$

مثال (١-٤١)

أوجد الحدَّين الأوسطين في مفكوك $\left(١ + \frac{١}{٢س}\right)^{٧}$ ، س ≠ ٠

الحل

ترتيب الحدِّ الأوسط الأوَّل هو $\frac{ن + ١}{٢} = ٤$

إذاً الحدَّان الأوسطان هما: $ح_{٤}$ ، $ح_{٥}$

(أكمل الحل بإيجاد قيمة كلٍّ منهما)

تدريب (١-٨)

أوجد النسبة بين معاملي الحدَّين الأوسطين في مفكوك $(٣س + ٥)^{١٧}$

تمارين (١ – ٤)

١ **أكتب مفكوك كلٍ ممّا يلي:**

أ) $(١ + ب)^{٦}$

ب) $(س + ٢ص)^{٤}$

جـ) $(س - ص)^{٥}$

د) $(س - ٣)^{٣}$

هـ) $(١ - \frac{س}{٢})^{٨}$

و) $(\frac{٢}{س} - \frac{س}{٢})^{٧}$ ، س ≠ ٠

ز) $(\frac{أ}{ب} + \frac{ب}{أ})^{٦}$ ، أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠

ح) $(٣ص - \frac{١}{٣})^{٥}$

ط) $(\frac{أ^{٢}}{٢} - \frac{٤}{أ})^{٤}$ ، أ ≠ ٠

٢ **أوجد دون فكّ ذات الحدين كلاً مما يأتي:**

أ) الحدُّ السابع في مفكوك $(أ + س)^{٨}$

ب) الحدُّ الخامس في مفكوك $(١ - \frac{٢}{٣}س)^{١٠}$

جـ) الحدُّ الخامس في مفكوك $(٤ - \frac{س}{٢})^{٧}$

د) الحدُّ السادس في مفكوك $(س^{٣} - \frac{٢}{س^{٢}})^{٩}$ ، س ≠ ٠

هـ) الحدُّ الخالي من س في مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}})^{٦}$ ، س ≠ ٠

و) الحدُّ الذي يحوي $س^{٤}$ في مفكوك $(٣س^{٢} - \frac{١}{س})^{٨}$ ، س ≠ ٠

ز) الحدُّ الأوسط في مفكوك $(٢س^{٢} - \frac{١}{٢س})^{١٠}$ ، س ≠ ٠

ح) الحدَّين الأوسطين في مفكوك $(٥س - \frac{١}{٥})^{٩}$

٣ **أوجد كلاً ممّا يأتي:**

أ) معامل س٤ في مفكوك $\left(س - \frac{١}{س^{٢}} \right)^{١١}$

ب) معامل س٢ ص٤ في مفكوك $\left(٢س + ٣ص \right)^{٦}$

٤ استعمل عددًا مناسبًا من حدود مفكوك ذات الحدّين لإيجاد قيمة كلٍّ مما يأتي مقرّبًا لرقمين عشريين:

أ) $(١,٠٢)^{٥}$

ب) $(٠,٩٧)^{١٠}$

٥ إذا كان معامل الحدِّ الرابع في مفكوك $(١ + س)^{ن} = ١٠$ ، فأوجد قيمة ن .

تعلمت في هذه الوحدة

١ قدّمنا مبدأ العدّ واستخدمناه لإيجاد عدد طرق إجراء عمليةٍ متعدّدة الخطوات.

٢ التبديلة هي أيُّ ترتيب يمكن تكوينه من ن من العناصر بأخذها كلّها أو بعضها أمّا التوفيقة فهي مجموعة جزئيّة عدد عناصرها ر مأخوذةٌ من مجموعةٍ عدد عناصرها ن .

٣ عدد طرق اختيار ر من العناصر من بين ن من العناصر المختلفة هو ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$ (عدد توافيق ن من العناصر مأخوذة راءً راءً) ، بينما عدد طرق اختيار ر من العناصر من بين ن من العناصر المختلفة ثمّ ترتيبها أي (مع مراعاة الترتيب) هو ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}$ (عدد تباديل ن من العناصر مأخوذة راءً راءً) ، وعدد طرق ترتيب ن من العناصر هو $\lfloor \text{ن}$ (عدد تباديل ن من العناصر).

٤ قوانين التباديل والتوافيق:

- ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \text{ن} \times (\text{ن} - ١) \times (\text{ن} - ٢) \times \dots \times (\text{ن} - \text{ر} + ١)$.
- ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}} = \text{ن} \times (\text{ن} - ١) \times (\text{ن} - ٢) \times \dots \times ٣ \times ٢ \times ١ = \lfloor \text{ن}$ و يُسمّى مضروب ن
- $\lfloor \text{ن} = \text{ن} \lfloor \text{ن} - ١$
- ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \dfrac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor \text{ن} - \text{ر}}$
- ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\lfloor \text{ر}}$
- ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \dfrac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor \text{ر} \; \lfloor \text{ن} - \text{ر}}$

- ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

- ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{هـ} \Leftarrow ر = هـ$ أو $ر + هـ = ن$

- $\lfloor ٠ = {}^{ن}ل_{٠} = {}^{ن}ق_{٠} = {}^{ن}ق_{ن} = ١$

- ${}^{ن}ل_{١} = {}^{ن}ق_{١} = ن$

٥ استخدمنا الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة أيٍّ من $\lfloor ن$ ، ${}^{ن}ل_{ر}$ ، ${}^{ن}ق_{ر}$.

٦ قمنا بحلِّ بعض المسائل التطبيقية معتمدين على مفهومَي التباديل والتوافيق.

٧ مفكوك ذات الحدَّين $(أ + ب)^{ن} = \sum_{ر=٠}^{ن} {}^{ن}ق_{ر}\, أ^{ن-ر}\, ب^{ر}$

٨ الحدُّ العامُّ في مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ هو: $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\, أ^{ن-ر}\, ب^{ر}$

ويستخدم لإيجاد أيِّ حدٍّ في المفكوك دون فكِّه.

٨ في مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ يتعيَّن:

- حدٌّ أوسطٌ واحدٌ هو $ح_{\frac{ن}{٢}+١}$ إذا كان ن زوجية
- حدّان أوسطان هما $ح_{\frac{ن+١}{٢}}$ ، $ح_{\frac{ن+٣}{٢}}$ إذا كانت ن فردية

تمارين عامة

١ ضع علامة (✓) أو علامة (✗) عن يمين ما يلي:

- [ ] ${}^{٩}ل_{٠} = \underline{|٠} = {}^{٩}ق_{٠} = ١$
- [ ] ${}^{٥}ل_{ر} = {}^{٥}ق_{ر} \times \underline{|ر}$ ، $ر \in \{٠،١،٢،٣،٤،٥\}$.
- [ ] ${}^{ن}ل_{١} = {}^{ن}ق_{١}$ ، $\forall\ ن \in ط$
- [ ] ${}^{ن}ق_{٠} = {}^{ن}ق_{١}$ ، $\forall\ ن \in ط$
- [ ] ${}^{٧}ق_{٣} = {}^{٧}ق_{٤}$
- [ ] ${}^{١٠}ق_{٢} = {}^{١٠}ل_{٢} \times \underline{|٢}$
- [ ] ${}^{٧}ق_{٠} = {}^{٢٥}ق_{٠}$
- [ ] ${}^{١٠}ق_{١} = {}^{١٥}ق_{١}$
- [ ] ${}^{٥}ق_{٥} = {}^{٧}ق_{٢}$

٢ ضع خطًا تحت الإجابة الصحيحة فيما يلي:

أ) عدد طرق اختيار رئيس ومساعدٍ له لإحدى الشركات من بين ٦ مرشَّحين هو:

☐ $٦^{٢}$ ☐ ٦×٢

☐ ${}^{٦}ق_{٢}$ ☐ ٦×٥

ب) عدد طرق اختيار ٤ كتب من بين ٩ كتب مختلفة بحيث يشمل الاختيار كتابًا معيَّنًا هو:

☐ ${}^{٩}ق_{٤}$ ☐ ${}^{٨}ق_{٤}$

☐ ${}^{٨}ق_{٣}$ ☐ ${}^{٨}ق_{٤} + {}^{١}ق_{١}$

جـ) $^{ن}ق_{ر}$ يمكن أن يساوي:

☐ -٦ ☐ ١

☐ ٠ ☐ $\frac{٧}{٢}$

د) $^{٧}ق_{٥} =$

☐ $^{٧}ل_{٥}$ ☐ $^{٧}ق_{٢}$

☐ $^{٧}ل_{٢}$ ☐ $^{٧}ل_{٥} \times ٥$

هـ) $^{ن}ق_{ر} =$

☐ $\frac{ن!}{ر!}$ ☐ $\frac{ن!}{ن!\ ر!}$

☐ $\frac{ن!}{(ر - ن)!}$ ☐ $\frac{ن!}{ر!\ (ن - ر)!}$

و) إذا كان $^{ن}ل_{٣} = ١٢٠$ فإن $^{ن}ق_{٣} =$

☐ $\frac{١٢٠}{٣}$ ☐ ١٢٠×٣

☐ $\frac{١٢٠}{٦}$ ☐ ١٢٠×٦

ز) معامل $ح_{١}$ + معامل $ح_{٨}$ في
مفكوك $(س + ص)^{٨}$ يساوي :

☐ ٢ ☐ ٨

☐ ٩ ☐ ٠

٢ لكلّ فقرةٍ ممّا يلي اختر من القائمة الثانية ما يكمل كلّ عبارة من القائمة الأولى لتحصل على عبارة صحيحة :

	القائمة الأولى	القائمة الثانية
أ)	• إذا كان $ق^{٥}_{٢} = ق^{٥}_{ر}$ فإنّ $ر =$ .... • إذا كان $ق^{٣}_{ر} = ١$ فإنّ $ر =$ .... • إذا كان $\underline{ن|} = ٦$ فإنّ $ن =$	▪ ١ ▪ ٣ ▪ ٠ أو ٣ ▪ ٢ أو ٣
ب)	إذا كانت س مجموعة عدد عناصرها ن فإنّ : • عدد تباديل عناصر س = ... • عدد المجموعات الجزئية الثنائية من س = ... • عدد تباديل عنصرين من س = ...	▪ $ل^{ن}_{٢}$ ▪ $ق^{ن}_{٢}$ ▪ $\underline{٢|}$ ▪ $\underline{ن|}$
جـ)	• $ل^{ن}_{ر} =$ .... • $ق^{ن}_{ر} =$ .... • $\underline{ن|} =$	▪ $\frac{\underline{ن|}}{\underline{ر|}}$ ▪ $\frac{\underline{ن|}}{\underline{ر|}\ \underline{ن-ر|}}$ ▪ $\frac{\underline{ن|}}{\underline{ن-ر|}}$ ▪ $ن \times (ن-١) \times \cdots \times ٢ \times ١$

القائمة الثانية		القائمة الأولى
▪ ${}^{٧}\text{ق}_{٤}$ ▪ ${}^{٧}\text{ل}_{٢}$ ▪ ${}^{٧}\text{ق}_{٢}$ ▪ $\lfloor\underline{\,٣\,}$	د)	• عدد طرق اختيار لجنة مؤلّفة من طالبين من بين ٧ طلاب = ... • عـدد طـرق اختيار لجنة مؤلّفـة من ٣ طلاب من بين ٧ طلاب = ... • عدد طرق جلوس شخصين على ٧ مقاعد في صف = ...
▪ ${}^{ن}\text{ق}_{ن}$ ▪ $\text{ن}\ \lfloor\underline{\,\text{ن} - \text{ر}\,}$ ▪ $\lfloor\underline{\,\text{ن}\,}$ ▪ ن	هـ)	• ${}^{ن}\text{ق}_{٠}$ = ... • ${}^{ن}\text{ق}_{١}$ = ... • ${}^{ن}\text{ل}_{ن}$ = ...

٤ إذا كان $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = ٨٤٠$ ، $\underline{|\text{ر}}\ ٢ = ٤٨$ فأوجد $^{\text{ن}}\text{ل}_{٢}$

٥ إذا كان $^{٢٧}\text{ق}_{٢\text{ر}+١٠} = {}^{٢٧}\text{ق}_{٥\text{ر}-٨}$ فأوجد $^{٥}\text{ق}_{\text{ر}}$

٦ بكم طريقةٍ يمكن خروج ٧ أطفال من حديقةٍ لها خمسة أبوابٍ ؟

٧ كم عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها ٨ أشخاص في ١٣ مقعدًا ؟ علمًا بأنّه يلزم جلوس شخص معيّنٍ منهم في المقعد الأوسط.

٨ إذا كان معاملا الحدّين العاشر والسابع عشر في مفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{\text{ن}}$ متساويين. فما قيمة ن ؟

٩ أثبت أنّ $\sum_{\text{ر}=٠}^{\text{ن}} (-١)^{\text{ر}}\ {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = ٠$

١٠ بإعطاء قيمة معيّنة لكلٍّ من ﺃ ، ب في مفكوك $(\text{ﺃ} + \text{ب})^{\text{ن}}$ أوجد قيمة المقدار:

$$^{\text{ن}}\text{ق}_{٠} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢} + \dots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}.$$

واستنتج من ذلك قاعدةً لإيجاد عدد المجموعات الجزئية لمجموعة عدد عناصرها ن .

الوحدة الثانية

الاحتمال

Probability

لنظرية الاحتمال تطبيقات كثيرة ومهمة في مجال التخطيط للتنمية الاجتماعية والاقتصادية، والتصنيع والبحث العلمي والكثير من ميادين العمل اليومي.

الدروس

الأهداف

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أنْ يكون قادرًا على أنْ :

١- يفسّر مفهوم التجربة العشوائية وفضاء العيّنة والحادثة.

٢- يكتب الفضاء العيني لتجربة عشوائية.

٣- يُجري بعض العمليات على الحوادث.

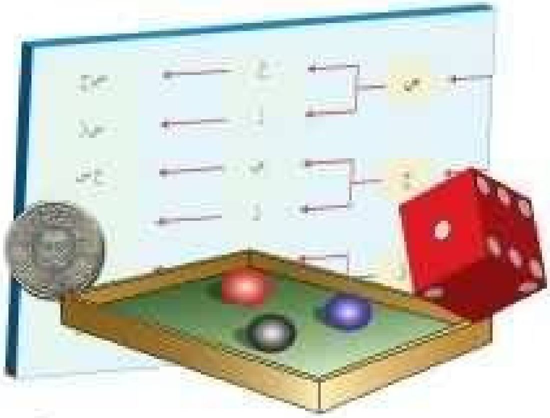
٤- يوجد احتمالات وقوع حوادث بسيطة وأخرى مركّبة.

٥- يوظّف مسلّمات ونظريات الاحتمال لإيجاد احتمالات وقوع حوادث معيّنة.

٦- يحلّ مسائل تطبيقية على الاحتمال.

٢ – ١ فضاء العينة والحوادث
Sample Space and Events

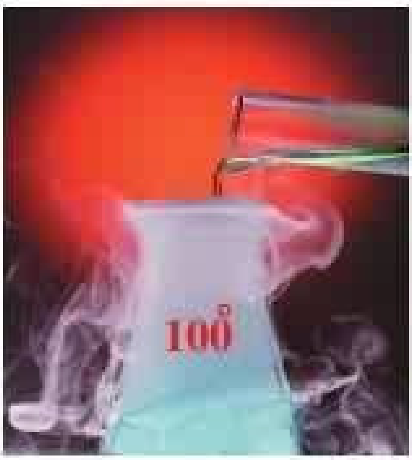
مفاهيم أساسية



الاحتمال فرعٌ من فروع الرياضيات له أهمية كبيرة في حياتنا اليومية. فكثيرًا ما نضطر إلى اتخاذ القرارات بناءً على معلومات غير كاملة، فنعتمد على الاحتمالات لتساعدنا على الاختيار – فمثلاً – قد تقرّر شركة طيران إيقاف رحلاتها الخارجية ليوم معيّن؛ لأنَّ احتمال أن يكون الجوُّ غير مناسبٍ للطيران في ذلك اليوم احتمالٌ كبيرٌ، وأحيانًا نجد أننا نعبّر عن هذه الاحتمالات بتقديرٍ عدديٍ كأن نقول إنَّ احتمال سقوط الأمطار غدًا ٢٠٪ ، واحتمال نجاح الطالب أحمد ٩٠٪ وهكذا ... ، وهذه التقديرات العددية للاحتمالات لا تستند إلى أساسٍ رياضي، ولكن قد تعتمد على أحداث وخبرات سابقة عن الطقس، وعن تتبّع الحالة التعليمية للطالب أحمد وهكذا...

التجربة العشوائية

التجربة هي أيُّ إجراءٍ يمكن وصفه وصفًا دقيقًا وملاحظة ما ينتج عنه ويمكن تقسيم التجارب من حيث نتائجها إلى نوعين:



١) **التجارب المحدّدة**: وهي ذلك النوع من التجارب الذي يعطي النتيجة نفسها عند تكرار التجربة تحت الظروف نفسها، **فمثلاً**: إذا ألقيت كرةً في الهواء فإنَّها لابد وأن تسقط على الأرض مهما تكررت هذه التجربة، كذلك إذا تمّ تسخين الماء إلى ١٠٠ درجة مئوية – في ظروف الضغط الجويّ العادي – فإنه يتحوّل إلى بخار بغضّ النظر عن عدد مرات إجراء التجربة، هذا وإنَّ الكثير من التجارب العلميَّة هي تجارب محدَّدة.

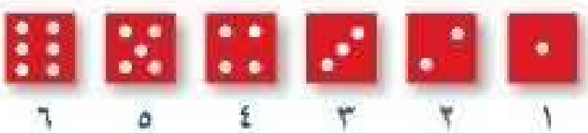
٢) **التجارب العشوائية** : وهي ذلك النوع من التجارب الذي قد تتغير نتيجتها مع تكرار التجربة ومن الأمثلة التقليديَّة على التجارب العشوائية تجربة رمي قطعة نقودٍ وتجربة رمي مكعبٍ وضع على أوجهه الستة نقاطٌ تمثِّل الأعداد: ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ .

فعند رمي قطعة نقودٍ لا نستطيع أن نتنبأ ما إذا كان الوجه الذي سيظهر هو شعارٌ أو كتابة، وعند رمي مكعبٍ لا نعلم أيُّ الأوجه الستة للمكعب سيظهر فعلاً.

فضاء العيِّنة

بالرغم من عدم مقدرتنا على تحديد نتيجة التجربة العشوائية قبل إجرائها إلا أنَّنا نستطيع تحديد مجموعة النتائج الممكنة لتلك التجربة، وتسمَّى هذه المجموعة فضاء العينة وسنرمز لها بالرمز ف . ففي تجربة رمي قطعة نقود يكون فضاء العيِّنة هو ف = {ش ، ك} ، حيث ش ترمز لظهور الشعار، ك ترمز لظهور الكتابة.

وفي تجربة رمي المكعب يكون فضاء العيِّنة ف = {١،٢،٣،٤،٥،٦} .



مثال (٢-١)

اكتب فضاء العينة لتجربة اختيار طالبٍ عشوائيًا من قائمة أسماء طلاب فصلٍ فيه ٢٥ طالبًا.

الحل

ف = { ١، ٢، ٣، ...، ٢٥ }.

حيث يرمز كلُّ عددٍ من الأعداد من ١ إلى ٢٥ لطالبٍ من طلاب الفصل البالغ عددهم ٢٥ طالبًا.

مثال (٢-٢)

اكتب فضاء العينة لتجربة إلقاء المكعب مرتين متتاليتين وقراءة العددين اللذين سيظهران في الرميتين.

الحل

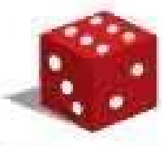
حيث أنَّ عدد النواتج في الرمية الأولى = ٦ ، عدد النواتج في الرمية الثانية = ٦ ،فإن عدد نواتج هذه التجربة = ٦ × ٦ = ٣٦

ونكتب فضاء العينة ف لهذه التجربة كما يلي:

ف = { (١،١) ، (١،٢) ، (١،٣) ، (١،٤) ، (١،٥) ، (١،٦) ،
(٢،١) ، (٢،٢) ، (٢،٣) ، (٢،٤) ، (٢،٥) ، (٢،٦) ،
(٣،١) ، (٣،٢) ، (٣،٣) ، (٣،٤) ، (٣،٥) ، (٣،٦) ،
(٤،١) ، (٤،٢) ، (٤،٣) ، (٤،٤) ، (٤،٥) ، (٤،٦) ،
(٥،١) ، (٥،٢) ، (٥،٣) ، (٥،٤) ، (٥،٥) ، (٥،٦) ،
(٦،١) ، (٦،٢) ، (٦،٣) ، (٦،٤) ، (٦،٥) ، (٦،٦) }.

حيث الزوج المرتب (٢،٦) - مثلاً - يعبِّر عن ظهور العدد ٢ في الرمية الأولى والعدد ٦ في الرمية الثانية.

(الرمية الأولى)



(الرمية الثانية)

ملحوظة (٢-١)

فضـاء العيّنـة للتجربة في المثال السابق هو نفسه فضاء العينة لتجربة إلقاء مكعبين متمايزين مرّة واحدة وقراءة العدد الظاهر على كلٍّ منهما ويقصد بالتمايز هنا أنّنا نستطيع التمييز بين المكعبين أي أنّهما ليسا متماثلين.

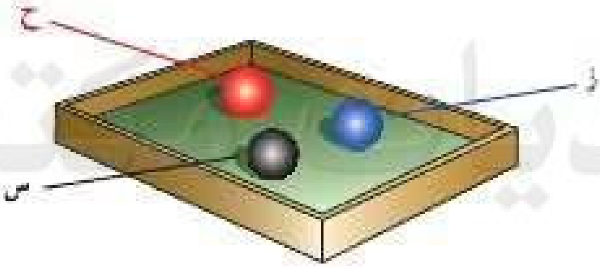
مثال (٢-٣)

يحتوي صندوقٌ على ثلاث كراتٍ متماثلة إلاّ من حيث اللون: كرة سوداء، وكرة حمراء، وكرة زرقاء، اكتب فضاء العيّنة لتجربة سحب كرتين الواحدة تلو الأخرى في كلٍّ من الحالتين التاليتين:

أ) إرجاع الكرة المسحوبة أولاً إلى الصندوق قبل سحب الكرة الثانية.

ب) عدم إرجاع الكرة المسحوبة أولاً إلى الصندوق قبل سحب الكرة الثانية.

الحل



إذا استخدمنا الرموز س، ح، ز للدلالة على الكرات السوداء والحمراء والزرقاء على التوالي نجد أنّه:

أ) عند إرجاع الكرة المسحوبة أولاً إلى الصندوق قبل سحب الكرة الثانية يكون فضاء العيّنة:

ضـ = { س س، س ح، س ز، ح س، ح ح، ح ز، ز س، ز ح، ز ز }.

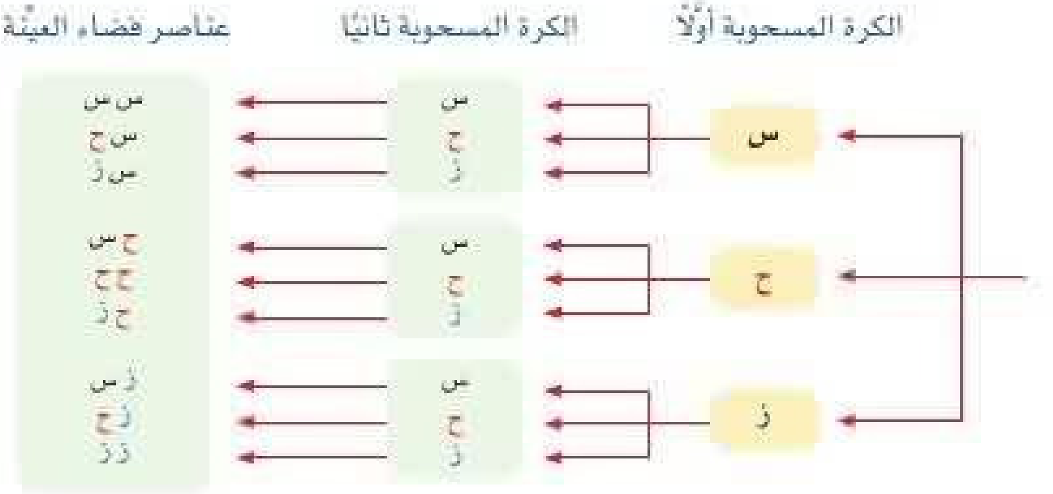
حيث س ز – **مثلاً** – يعني أنّ الكرة المسحوبة أولاً سوداء والكرة المسحوبة ثانيًا زرقاء.

لاحظ أنّنا لم نستخدم الأزواج المرتبة لكتابة عناصر فضاء العينة: توخيًا للسهولة وسنتّبع هذا الأسلوب مالم نخش الالتباس.

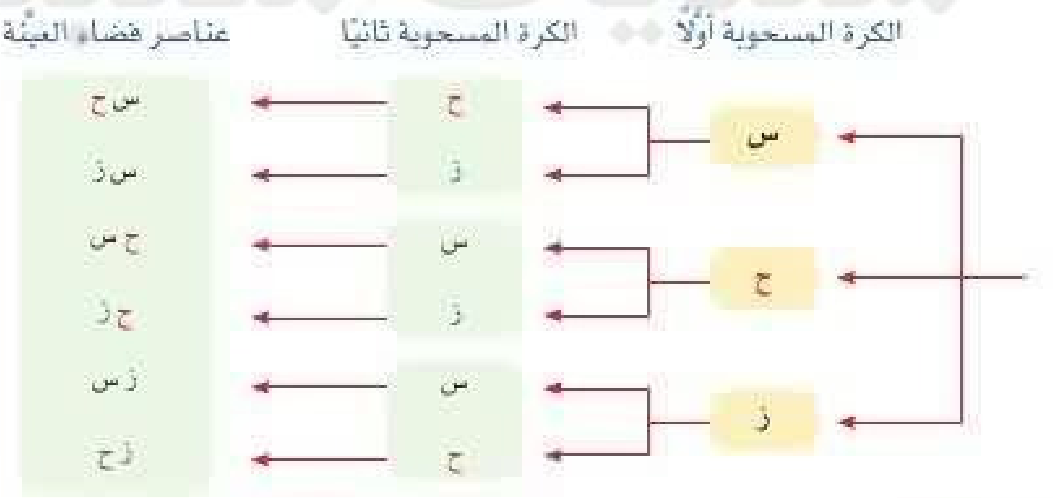
ب) عند عدم إرجاع الكرة المسحوبة أولاً إلى الصندوق قبل سحب الكرة الثانية يكون فضاء العيّنة:

ضـ = { س ح، س ز، ح س، ح ز، ز س، ز ح }.

ومـن الجدير ذكره أنه يمكن استخدام المخطط الشجري لكتابـة فضاء العيِّنة لبعض التجارب العشوائية.
فمثلاً المخطط الشجري لمثال (٢-٣) فقرة ﻫ هو:



و المخطط الشجري لفقرة ب هو:



لاحظ أنّ:

عدد عناصر فضاء العينة = عدد طرق سحب الكرة الأولى × عدد طرق سحب الكرة الثانية

فيكون عدد عناصر فضاء العينة في فقرة ﻫ : ٣ × ٣ = ٩

وَ عـدد عناصــر فضـاء العينة فـي فقـرة ب : ٣ × ٢ = ٦

مثال (٢-٤)

اكتب فضاء العيّنة لتجربة إلقاء ثلاث قطع نقود متمايزة وملاحظة الأوجه الثلاثة الظاهرة.

الحل

ض = {ش ش ش ، ش ش ك ، ش ك ش ، ش ك ك ، ك ش ش ، ك ش ك ، ك ك ش ، ك ك ك}
حيث العنصر ش ك ك – مثلاً – يعني ظهور شعار على القطعة الأولى وكتابة على كلٍّ من القطعتين الثانية والثالثة.

وننبّه هنا إلى أنّ الرمز ش ك ك يعدُّ اختصارًا لما يُسمّى بالثلاثية المرتبة (ش، ك، ك)، والمخطط الشجري التالي يوضّح فضاء العيّنة:

لاحظ :

عدد عناصر ض = عدد نواتج رمي القطعة الأولى × عدد نواتج رمي القطعة الثانية × عدد نواتج رمي القطعة الثالثة

الحادثة

عنـد القيام بتجربةٍ مـا، فإنّنا نهتم غالبًا بمجموعة معيّنة من النتائج. وفـي هذه الحالة ينحصر اهتمامنا على عناصر فضاء العيّنة المناظرة لهذه النتائج وهذه العناصر تُكوّن مجموعة جزئية من فضاء العيّنة.

تُسمّى كلُّ مجموعةٍ جزئية من فضاء العيّنة حادثة. ونقول: إن الحادثة **بسيطة** إذا كانت مكونة من عنصر واحد فقط. وتُسمّى الحادثة ضـ بالحادثة **المؤكدة** لأنها حادثة تقع دائمًا عند إجراء التجربة. أما الحادثة

ϕ فتسمّى بالحادثة **المستحيلة** لأنها حادثة لا تقع أبدًا عند إجراء التجربة، وأيُّ حادثةٍ غير بسيطة وغير مستحيلة فإنّها تُسمّى حادثة **مركّبة**.

مثال (٢-٥)

في تجربة إلقاء مكعب كُتب على أوجهه الستة الأعداد: ٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ١٣

يكون فضاء العيّنة هو ضـ = {٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ١٣}.

وتكون:

أ١ = {٣} حادثة بسيطة وهي حادثة ظهور العدد ٣.

أ٢ = {٣، ٥، ٧، ١١، ١٣} حادثة مركبة وهي حادثة ظهور عدد فردي.

أ٣ = {١١، ١٣} حادثة مركبة وهي حادثة ظهور عدد أكبر من ٩.

ضـ حادثة مؤكدة كأن نقول – مثلاً – حادثة ظهور عدد أوّلي أقل من ١٤.

ϕ حادثة مستحيلة كأن نقول – مثلاً – حادثة ظهور عدد أكبر من ١٣.

ملحوظة (٢-٢)

إذا كان لدينـا فضـاء عيّنـة ضـ يحتـوي علـى م من العناصر فإنّ عدد المجموعـات الجزئية من فضاء العيّنة ضـ هو ٢^م، ومن ثمّ فإنّ عدد الحوادث المعرّفة على ضـ هو ٢^م حادثـة. وعليه فإنّ عدد الحوادث المعرّفة على ضـ في المثال السابق = ٢^٦ = ٦٤

نقول إنّ الحادثة قد وقعت إذا ظهر أحد عناصرها عند إجراء التجربة. ففي المثال السابق نقول إنّ الحادثة أ٣ = {١١، ١٣} – **مثلاً** – قد وقعت إذا ظهر العدد ١١ أو العدد ١٣ عند إجراء التجربة.

مثال (٢-٦)

في المثال (٢-٢) اكتب كلاً من الحوادث الآتية:

أ١ : حادثة ظهور عددين مجموعهما يساوي ٥.

أ٢ : حادثة ظهور العدد نفسه في الرميتين.

أ٣ : حادثة ظهور عدد أصغر من ٤ في الرمية الأولى وظهور العدد ٦ في الرمية الثانية.

الحل

أ١ = {(١،٤) ، (٢،٣) ، (٣،٢) ، (٤،١)}.

أ٢ = {(١،١) ، (٢،٢) ، (٣،٣) ، (٤،٤) ، (٥،٥) ، (٦،٦)}.

أ٣ = {(١،٦) ، (٢،٦) ، (٣،٦)}.

مثال (٢-٧)

في المثال (٢-٤) اكتب كلاً من الحوادث الآتية:

أ١ : حادثة ظهور شعارين فقط.

أ٢ : حادثة ظهور شعارين متتالين.

أ٣ : حادثة ظهور شعارين على الأكثر.

أ٤ : حادثة ظهور شعارين على الأقل.

الحل

أ١ = {ش ش ك ، ش ك ش ، ك ش ش}.

أ٢ = {ش ش ش ، ش ش ك ، ك ش ش}.

أ٣ = {ش ش ك ، ش ك ش ، ك ش ش ، ش ك ك ، ك ش ك ، ك ك ش ، ك ك ك}.

أ٤ = {ش ش ش ، ش ش ك ، ش ك ش ، ك ش ش}.

العمليات على الحوادث

عرفنا أنّ الحادثة هي مجموعة جزئية من فضاء العيّنة وعليه فإنّ العمليات على الحوادث هي في الواقع عمليات على المجموعات ونوضّح ذلك فيما يلي:

أولاً- إذا كانت م حادثة في ضـ فإنّ:

$\text{م}'$ هي الحادثة التي عناصرها تنتمي إلى ضـ ولا تنتمي إلى م ، ووقوعها يعني عدم وقوع الحادثة م وتسمّى متمّمة الحادثة م بالنسبة إلى ضـ واختصارًا متمّمة الحادثة م.

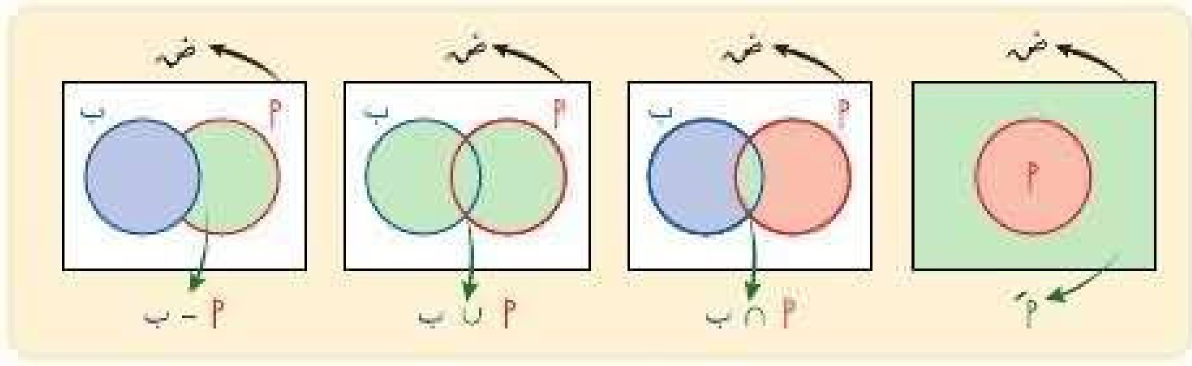
ثانيًا- إذا كانت م ، ب حادثتين في ضـ فإنّ:

١) $\text{م} \cap \text{ب}$ هي الحادثة التي عناصرها تنتمي إلى م وإلى ب، ووقوعها يعني وقوع الحادثتين م ، ب معًا.

٢) $\text{م} \cup \text{ب}$ هي الحادثة التي عناصرها تنتمي إلى م أو إلى ب أو كليهما، ووقوعها يعني وقوع م أو ب أو كليهما (أي وقوع إحدى الحادثتين م أو ب على الأقل).

٣) $\text{م} - \text{ب}$ هي الحادثة التي عناصرها تنتمي إلى م ولا تنتمي إلى ب، ووقوعها يعني وقوع م وعدم وقوع ب.

ويمكننا استخدام أشكال (فن) لتوضيح العمليات على الحوادث حيث نمثّل فضاء العينة ضـ بمستطيل، انظر شكل (٢-١)



شكل (٢-١)

مما سبق نستنتج أنّ:

$\text{م} \cap \phi = \phi$ ، $\text{م} \cap \text{ضـ} = \text{م}$ ، $\text{م} \cap \text{م} = \text{م}$ ، $\text{م} \cap \text{م}' = \phi$ ، $\text{ضـ}' = \phi$

$\text{م} \cup \phi = \text{.....}$ ، $\text{م} \cup \text{ضـ} = \text{.....}$ ، $\text{م} \cup \text{م} = \text{.....}$ ، $\text{م} \cup \text{م}' = \text{.....}$ ، $\phi' = \text{.....}$ **(أكمل الفراغ)**

مستخدمًا أشكال (ڤن)، أقنع نفسك بصحة القانونين التاليين:

$(\text{أ} \cap \text{ب})' = \text{أ}' \cup \text{ب}'$ ——— (٢-١)

$(\text{أ} \cup \text{ب})' = \text{أ}' \cap \text{ب}'$ ——— (٢-٢)

يسمى القانونان السابقان بقانوني دي مورجان.

ملحوظة (٢-٣)

إذا كان لدينا ن من الحوادث : أ_1، أ_2، أ_3، ...، $\text{أ}_ن$ فإنّ:

١) وقوع الحادثة $\text{أ}_1 \cap \text{أ}_2 \cap \text{أ}_3 \cap ... \cap \text{أ}_ن$ يعني وقوع جميع هذه الحوادث معًا.

٢) وقوع الحادثة $\text{أ}_1 \cup \text{أ}_2 \cup \text{أ}_3 \cup ... \cup \text{أ}_ن$ يعني وقوع حادثة واحدة على الأقل من هذه الحوادث.

مثال (٢-٨)

في تجربة إلقاء مكعب كُتب على أوجهه الستة الأعداد: ١،٢،٣،٤،٥،٦

حيث فضاء العينة $ض = \{١،٢،٣،٤،٥،٦\}$.

إذا كانت: $\text{أ}_1 = \{٢،٤،٦\}$ هي حادثة ظهور عدد زوجي.

$\text{أ}_2 = \{١،٣،٥\}$ هي حادثة ظهور عدد فردي.

$\text{أ}_3 = \{٥،٦\}$ هي حادثة ظهور عدد أكبر من ٤.

$\text{أ}_4 = \{٣،٦\}$ هي حادثة ظهور عدد يقبل القسمة على ٣.

فإنه يمكن تكوين الحوادث الآتية:

$\text{أ}_4' = \{١،٢،٤،٥\}$ وهي حادثة ظهور عددٍ لا يقبل القسمة على ٣.

$\text{أ}_1 \cap \text{أ}_4 = \{٦\}$ وهي حادثة ظهور عددٍ زوجي يقبل القسمة على ٣.

$\text{أ}_2 \cap \text{أ}_3 = \{٥\}$ وهي حادثة ظهور عددٍ فردي أكبر من ٤.

$\text{أ}_2 \cup \text{أ}_3 = \{١،٣،٥،٦\}$ وهي حادثة ظهور عددٍ فردي أو عددٍ أكبر من ٤.

$\text{أ}_1 \cup \text{أ}_2 = \{١،٢،٣،٤،٥،٦\} = ض$ وهي حادثة ظهور عددٍ فردي أو عددٍ زوجي.

$\text{أ}_1 - \text{أ}_3 = \{٢،٤\}$ وهي حادثة ظهور عددٍ زوجي أقل من أو يساوي ٤.

الحوادث المتنافية والشاملة

تعريف (٢ - ١)

يقال للحادثتين أ ، ب أنَّهما متنافيتان إذا كان وقوع إحداهما يمنع وقوع الأخرى.

أي إذا كان $أ \cap ب = \phi$

إنَّ هذا التعريف يعني أن الحادثتين المتنافيتين لا تقعان معًا.

فمثلًا : الحادثتان $أ_١$ ، $أ_٢$ في المثال (٢-٨) متنافيتان ؛لأن $أ_١ \cap أ_٢ = \phi$

ملحوظة (٢-٤)

تكون الحوادث $أ_١$ ، $أ_٢$ ، ... ، $أ_ن$ متنافية، إذا كانت متنافيةً مثنى مثنى، (أي إذا كانت كلُّ حادثتين منها متنافيتان)

مثال (٢-٩)

في تجربة إلقاء مكعب كُتب على أوجهه الستة الأعداد ٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ١٣ فإنَّ الحوادث

$أ_١ = \{٢ ، ٧\}$ ، $أ_٢ = \{٥ ، ١١\}$ ، $أ_٣ = \{١٣\}$ حوادث متنافية **(لماذا ؟)**

تعريف (٢ - ٢)

تسمَّى الحوادث المتنافية $أ_١$ ، $أ_٢$ ، ... ، $أ_ن$ حوادث متنافية وشاملة، إذا كان :

$أ_١ \cup أ_٢ \cup ... \cup أ_ن = ض$

وبعبارةٍ أخرى نقول:

إنَّ الحوادث $أ_١$ ، $أ_٢$ ، ... ، $أ_ن$ حوادثٌ متنافيةٌ وشاملةٌ إذا كانت هذه الحوادث متنافيةً مثنى مثنى وكان اتحادها يساوي فضاء العيِّنة ض .

مثال (٢-١٠)

في تجربة المثال (٢-٩) نجد أنَّ الحوادث:

{٢} ، {١٣} ، {٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١} حوادثُ متنافية وشاملةً؛ لأنَّ:

١) {٢} ∩ {١٣} = ϕ ، {٢} ∩ {٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١} = ϕ ،

{١٣} ∩ {٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١} = ϕ

٢) {٢} ∪ {١٣} ∪ {٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١} = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣} = ضـ

لاحظ أنْ:

التعريف (٢-٢) لا يتطبق على الحوادث $م_{١}$ ، $م_{٢}$ ، $م_{٣}$ في المثال (٢-٩). (لماذا ؟)

ملحوظة (٢-٥)

١) في أيِّ تجربة عشوائية تكون الحادثتان م ، $م'$ متنافيتان وشاملتان.

٢) إذا كانت ضـ = {$م_{١}$ ، $م_{٢}$ ، $م_{٣}$ ، ... ، $م_{ن}$ }، فإنَّ الحوادث البسيطة {$م_{١}$}، {$م_{٢}$}، {$م_{٣}$}، ... ، {$م_{ن}$} متنافيةً وشاملة.

تدريب (٢-١)

بالرجوع إلى مثال (٢-٨) ، ضع علامة ☑ أو علامة ☒ عن يمين ما يلي:

☐ الحوادث $م'_{٤}$ ، $م_{٢} \cap م_{٣}$ ، $م_{١} \cap م_{٤}$ متنافية.

☐ الحادثتان $م_{٢}$ ، $م_{١} - م_{٢}$ متنافيتان وشاملتان.

☐ الحادثتان $م_{٢} \cup م_{٣}$ ، $م_{١} - م_{٣}$ متنافيتان وشاملتان.

تمارين (٢-١)

١ سُحب رقمٌ عشوائيًا من أرقام العدد ٦٩٧٥١٢ ، اكتب فضاء العينة لهذه التجربة.

٢ صُمِّم مكعبٌ متجانس بحيث يكون له وجهان يحملان الرقم ١ ، وجهان يحملان الرقم ٣ ، وجهان يحملان الرقم ٥ ، اكتب فضاء العيّنة لتجربة إلقاء هذا المكعب مرةً واحدة وملاحظة العدد الظاهر.

٣ **سُحبت بطاقتان عشوائيًا من صندوق يحتوي على أربع بطاقات كُتبت عليها الأحرف أ ، ب ، جـ ، د. اكتب فضاء العيّنة في كلٍّ من الحالات الآتية:**

أ) سُحبت البطاقتان واحدةً بعد الأخرى مع الإرجاع.

ب) سُحبت البطاقتان واحدةً بعد الأخرى دون إرجاع.

جـ) سُحبت البطاقتان معًا.

٤ **كيسٌ غير شفاف يحوي ١٠ كرات متماثلة مرقمة بالأعداد من ١ إلى ١٠، سُحبت منه كرةٌ عشوائيًا، اكتب فضاء العيّنة وكلاً من الحوادث التالية:**

أ١ : حادثة سحب كرةٍ تحمل عددًا أوليًا.

أ٢ : حادثة سحب كرةٍ تحمل عددًا يقبل القسمة على ٢ أو ٥ .

أ٣ : حادثة سحب كرةٍ تحمل عددًا أقل من ٩ ويقبل القسمة على ٤ .

أ٤ : حادثة سحب كرةٍ تحمل عددًا فرديًا أكبر من ٨ .

أ٥ : حادثة سحب كرةٍ تحمل العدد ١٢ .

٥ **في تجربة رمي قطعتي نقودٍ متمايزتين، اكتب فضاء العيّنة ثم اكتب كلاً من الحوادث التالية:**

أ : حادثة ظهور كتابةٍ على القطعة الأولى.

ب : حادثة ظهور كتابةٍ على إحدى القطعتين.

جـ : حادثة ظهور كتابةٍ واحدةٍ على الأكثر.

د : حادثة ظهور كتابةٍ على إحدى القطعتين وشعارٍ على القطعة الأخرى.

٦ **لأحمد الحقُّ أن يختار حبتين من الفاكهة في مطعم واحدةً بعد الأخرى، وكان في المطعم برتقالٌ وتفاح. اكتب فضاء العينة وكلاً من الحوادث التالية:**

$ح_{١}$: أن يختار تفاحًا مرّةً واحدةً على الأكثر.

$ح_{٢}$: أن يختار برتقالاً أو تفاحًا مرتين.

$ح_{٣}$: أن يختار برتقالاً مرّةً واحدةً على الأقل.

٧ **قام عبد الرحمن برحلةٍ من الظهران إلى جدة على ثلاث مراحل هي:**

الظهران – الرياض، الرياض – المدينة ، المدينة – جدة ، فإذا كانت وسيلة المواصلات في كلِّ مرحلةٍ إمّا طائرة أو سيارة فاكتب فضاء العينة لهذه الرحلة وكذلك كلاً من الحوادث التالية:

$ح_{١}$: استخدام الطائرة في جميع مراحل الرحلة.

$ح_{٢}$: استخدام السيارة في رحلةٍ واحدةٍ فقط.

$ح_{٣}$: استخدام الطائرة في رحلةٍ واحدةٍ على الأقل.

٨ من بين خمسة موظفين ﺃ ، ب ، جـ ، د ، هـ نريد اختيار لجنةٍ من ثلاثة أعضاء، اكتب فضاء العينة الذي يعبِّر عن جميع اللجان الممكنة ثم اكتب كلاً من الحوادث التالية:

$ح_{١}$: حادثة ﺃ ، ب ليسا في اللجنة.

$ح_{٢}$: حادثة ب ليس في اللجنة.

$ح_{٣}$: حادثة ﺃ ، ب في اللجنة.

$ح_{٤}$: حادثة ﺃ أو ب في اللجنة.

٩ إذا كانت $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ ، $ح_{٣}$ حوادث من فضاء العينة ف فعبِّر رمزيًا عن كلٍّ من الحوادث الآتية.

ﺃ : حادثة وقوع ($ح_{٢}$ و $ح_{٣}$) وعدم وقوع $ح_{١}$.

ب : حادثة وقوع ($ح_{٢}$ أو $ح_{١}$) وعدم وقوع $ح_{٣}$.

جـ : حادثة وقوع $ح_{١}$ فقط من هذه الحوادث الثلاثة (أي حادثة وقوع $ح_{١}$ وعدم وقوع $ح_{٢}$ و $ح_{٣}$) .

د : حادثة عدم وقوع أيٍّ من هذه الحوادث الثلاثة .

١٠ **في تجربة إلقاء المكعب مرتين متتاليتين ، إذا كان :**

$\text{أ}_{١}$: حادثة الفرق الموجب بين العددين الظاهرين ٢ .

$\text{أ}_{٢}$: حادثة أحد العددين الظاهرين يقبل القسمة على ٣ .

$\text{أ}_{٣}$: حادثة مجموع العددين الظاهرين يزيد عن ٩ .

فاكتب كلاً من الحوادث التالية:

$\text{أ}'_{١}$ ، $\text{أ}_{١} - \text{أ}_{٢}$ ، $\text{أ}_{٢} \cup \text{أ}_{٣}$ ، $\text{أ}_{١} \cap \text{أ}_{٢}$ ، $\text{أ}_{١} \cap \text{أ}_{٣}$

١١ **في التجربة المعطاة في تمرين (٤) :**

أ) اكتب كلاً من الحوادث التالية:

أ : حادثة عدم وقوع $\text{أ}_{١}$.

ب : حادثة وقوع $\text{أ}_{١}$ أو $\text{أ}_{٢}$.

جـ: حادثة وقوع $\text{أ}_{١}$ و $\text{أ}_{٢}$.

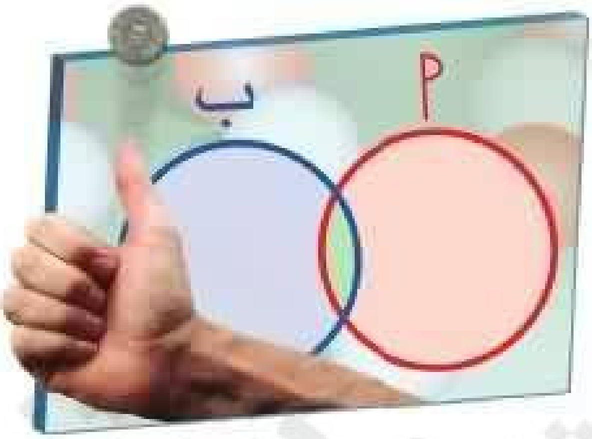
د : حادثة وقوع $\text{أ}_{١}$ وعدم وقوع $\text{أ}_{٢}$.

ب) أيٌّ من الحوادث أ ، ب ، جـ ، د يتنافى مع الآخر؟ وهل الحوادث أ ، ب ، جـ ، د متنافية؟

جـ) من بين الحوادث أ ، ب ، جـ ، د اختر ثلاث حوادث تكون متنافية وشاملة.

٢ـ٢ نظريات الاحتمال
Probabiltiy Theorems

المقصود بكلمة احتمال هو التعبير العددي عن مدى توقُّعنا لحدوث حادثةٍ معيَّنة، وفيما يلي نقدِّم مفهومين لاحتمال حادثة.



المفهوم التجريبي للاحتمال

إنَّ الظروف المحيطة بتجربةٍ ما كثيرةٌ ومعقَّدة، ففي حالة إلقاء قطعة النقود أو المكعب فإنَّ الوجه الذي يظهر بعد الإلقاء يعتمد على ظروفٍ كثيرة، بعضها معروف وبعضها نجهله تمامًا، فهو يعتمد على طريقة وقوة الإلقاء ونقطة الاصطدام الأولى بالمستوي الأفقي وغير ذلك من الأمور التي لا يعلمها إلاَّ الذي كلُّ شيءٍ عنده بمقدار - جلَّت قدرته - والتي تتسبب في ظهور ذلك الوجه دون الآخر وبالتالي فإنَّ وقوع حادثةٍ في ظرفٍ ما قد لا يعاد ذاته في ظرفٍ آخر مما يدعو إلى البحث عن احتمال حادثةٍ بتكرار التجربة عددًا كبيرًا من المرات.

فلو كرَّرنا تجربةً ما مراتٍ عددها ن ووجدنا أنَّ الحادثة أ تحقَّقت م من المرات فإنَّ النسبة $\frac{م}{ن}$ تسمَّى التكرار النسبي للحادثة أ وتعدُّ قيمةً تقريبيةً لاحتمال وقوع أ. ومن المتوقَّع أن تكبر م إذا كبرت ن، ولكن ليس من الضروري أن تبقى النسبة $\frac{م}{ن}$ ثابتةً، إلاَّ أنَّه عند زيادة عدد مرات إجراء التجربة زيادةً كبيرةً فإنَّ النسبة $\frac{م}{ن}$ تستقر وتقترب من عددٍ محدَّدٍ يسمَّى احتمال الحادثة أ.

مثال (٢-١١)

في تجربة رمي قطعة نقود، أُلقيت قطعة نقودٍ من قِبل أحد الأشخاص ٥٠ مرّةً ،
فظهر الشعار ٢٦ مرّةً.
وعندما قام هذا الشخص بالتجربة نفسها وألقى قطعة النقود ٢٥٠ مرّةً،
ظهر الشعار ١٢٧ مرّةً.
أوجد القيمة التقريبية لاحتمال ظهور الشعار في كلّ حالة.

الحل

في الحالة الأولى، احتمال ظهور الشعار $\approx \frac{٢٦}{٥٠} \approx ٠,٥٢$

في الحالة الثانية، احتمال ظهور الشعار $\approx \frac{١٢٧}{٢٥٠} \approx ٠,٥٠٨$

لاحظ أنّ:

القيمتين التقريبيتين لاحتمال ظهور الشعار مختلفتان، إلاّ أنّهما قريبتان من العدد $\frac{١}{٢}$ ، وأنّ القيمة الأخيرة (الناتجة عن زيادة عدد مرات تكرار التجربة) هي الأقرب إلى العدد $\frac{١}{٢}$.

ومن المتوقّع أن تقترب القيمة التقريبية للاحتمال شيئًا فشيئًا من العدد $\frac{١}{٢}$ بزيادة عدد مرّات إجراء التجربة، وإذا أصبح عدد مرّات إجراء التجربة كبيرًا جدًا، فإنّ هذه القيمة التقريبية للاحتمال تثبت عند العدد $\frac{١}{٢}$ ، ويسمّى العدد $\frac{١}{٢}$ حينئذٍ احتمال حادثة ظهور شعارٍ في تجربة رمي قطعة نقود.

ولمّا كان حساب احتمال حادثةٍ ما عن طريق إجراء التجربة عددًا كبيرًا من المرات أمرًا صعبًا فإنّنا سنتعامل مع مفهومٍ آخر للاحتمال يسمّى الاحتمال المنتظم. ونقدّمه فيما يلي:

المفهوم النظري للاحتمال المنتظم

يعتمد هذا المفهوم على افتراض أنّ فضاء العيّنة هو فضاءٌ متساوي الاحتمالات أي أنّ لجميع حوادثه البسيطة الاحتمال نفسه، فإذا كان فضاء العيّنة ف يتألف من ن عنصرًا وكانت أ حادثةً بسيطةً في ف ورمزنا لاحتمال الحادثة أ بالرمز ح (أ) ، فإنّ ح (أ) = $\frac{١}{ن}$.

أمّا إذا كانت الحادثة أ مكوّنةً من ل عنصرًا فإن ح (أ) = $\frac{ل}{ن}$ أي أنّ:

$$ح (أ) = \frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ف}} \qquad (٢-٣)$$

وبعبارة أخرى فإنّ: ح (أ) = $\frac{\text{عدد طرق وقوع الحادثة أ}}{\text{عدد طرق وقوع فضاء العيّنة ف}}$

فضاء العيّنة

ملحوظة (٢-٦)

من الواضح أنّه إذا كانت أ هي الحادثة المستحيلة (أي أنّ أ = ϕ) فإنّ عدد عناصر أ يساوي الصفر ويكون ح (أ) = $\frac{٠}{ن}$ = ٠ .

وإذا كانت أ هي الحادثة المؤكدة (أي أنّ أ = ف) فإنّ عدد عناصر أ = ن ويكون في هذه الحالة ح (أ) = $\frac{ن}{ن}$ = ١

أمّا إذا لم تكن أ الحادثة المستحيلة ولا المؤكّدة فإنّ ٠ < عدد عناصر أ < ن ويكون ٠ < ح (أ) < ١ ، وعليه يمكننا القول: أنّه إذا كانت أ أيّ حادثةٍ فإنّ ٠ ≤ ح (أ) ≤ ١

مثال (٢-١٢)

إذا أُلقي مكعبٌ كُتب على أوجهه الستة الأعداد ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ فما احتمال ظهور عددٍ أوّليّ.

الحل

ض = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}.

وبفرض أنَّ ٩ هي حادثة ظهور عددٍ أوّليّ.

فإنَّ ٩ = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧}.

ويكون ح (٩) = $\frac{\text{عدد عناصر ٩}}{\text{عدد عناصر ض}}$ = $\frac{٤}{٦}$ = $\frac{٢}{٣}$

مثال (٢-١٣)

في المثال (٢-٣) أوجد احتمال ظهور عددين مجموعهما ٨.

الحل

بالرجوع إلى حل المثال (٢-٣) نجد أنَّ عدد عناصر ض = ٣٦ .

وإذا كانت ٩ هي حادثة ظهور عددين مجموعهما ٨ فإنَّ :

٩ = {(٢،٦) ، (٣،٥) ، (٤،٤) ، (٥،٣) ، (٦،٢)}.

إذًا ح (٩) = $\frac{\text{عدد عناصر ٩}}{\text{عدد عناصر ض}}$ = $\frac{٥}{٣٦}$

تدريب (٢-٢)

٩) أوجد احتمال سحب كرةٍ حمراء من كيسٍ يحوي ثلاث كراتٍ متماثلة اثنتين حمراوين وواحدة زرقاء.

ب) ضــع في كيسٍ غير شفافٍ ثــلاث كراتٍ متماثلة اثنتين حمراوين وواحدة زرقاء ثم قم عمليًا بسحب كرةٍ من الكيس وسجِّل لونها. أعد التجربة مئة مرة ثُمَّ أوجد قيمة النسبة: $\frac{\text{عدد مرات ظهور كرة حمراء}}{\text{عدد مرات إجراء التجربة}}$

كرِّر التجربة السابقة ١٥٠ مرَّة ثم أوجد قيمة النسبة السابقة.

جـ) قارن بين النتيجتين التي حصلت عليها في فقرة ب ثم قارنهما مع ما نتج لديك في فقرة ٩ . ماذا تلاحظ ؟

ملحوظة (٢-٧)

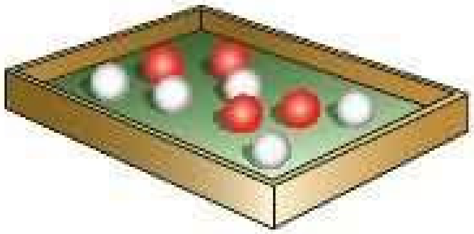
يمكننا تعيين عدد عناصر فضاء العينة ض (أو أيّ حادثة م) دون كتابة جميع عناصر ض (أو عناصر الحادثة م) وذلك باستخدام مبدأ العدّ وقوانين التباديل والتوافيق.

مثال (٢-١٤)

صندوقٌ به ٥ كرات بيضاء، ٤ كرات حمراء، سُحبت منه كرتان معًا، فما احتمال أن تكون:

م) الكرتان بيضاوين.

ب) واحدة بيضاء والأخرى حمراء.



الحل

عدد عناصر فضاء العينة ض = عدد طرق سحب كرتين من بين ٩ كرات

$$= ق^{٩}_{٢} = ٣٦$$

م) نفرض أنّ م$_1$ هي حادثة سحب كرتين بيضاوين.

إذًا عدد عناصر م$_1$ = عدد طرق سحب كرتين بيضاوين من بين ٥ كرات بيضاء

$$= ق^{٥}_{٢} = ١٠$$

ويكون ح (م$_1$) = $\frac{\text{عدد عناصر م}_1}{\text{عدد عناصر ض}}$ = $\frac{١٠}{٣٦}$ = $\frac{٥}{١٨}$

ب) نفرض أن م$_2$ هي حادثة سحب كرتين واحدة بيضاء والأخرى حمراء وحسب مبدأ العدّ فإنّ:

عدد عناصر م$_2$ = عدد طرق سحب كرة بيضاء من بين ٥ كرات بيضاء × عدد طرق سحب كرة حمراء من ٤ كرات حمراء

$$= ٥ \times ٤ = ٢٠$$

إذًا ح (م$_2$) = $\frac{\text{عدد عناصر م}_2}{\text{عدد عناصر ض}}$ = $\frac{٢٠}{٣٦}$ = $\frac{٥}{٩}$

مثال (٢-١٥)

صنـدوقٌ به ١٢ تفاحةً منها ٤ تالفـة. اُختير عشوائيًا ثلاث تفاحاتٍ واحـدةً بعد الأخرى بدون إرجاع. احسب احتمال أن تكون جميعها جيدة.

الحل

عـدد عناصـر فضـاء العيِّنة ف = عدد طرق اختيار ثلاث تفاحاتٍ واحدةً بعد الأخرى من بين ١٢ تفاحة (أي مع مراعاة الترتيب).

$= {}^{١٢}ل_{٣}$

$= ١٢ \times ١١ \times ١٠ = ١٣٢٠$.

وبفرض أنَّ أ هي حادثة أن تكون التفاحات الثلاث جيدة، فإنَّ

عدد عناصر أ = عدد طرق اختيار ثلاث تفاحات واحدة بعد الأخرى من بين ٨ تفاحات

$= {}^{٨}ل_{٣}$

$= ٨ \times ٧ \times ٦ = ٣٣٦$

ويكون ح (أ) $= \frac{٣٣٦}{١٣٢٠} = \frac{١٤}{٥٥}$

تدريب (٢-٣)

مجموعـةٌ مكوَّنةٌ من ١٠ أطباء امرأتين وثمانيـة رجال. اختيرت منهم لجنةٌ من ثلاثة أطباء بطريقةٍ عشوائية.

أوجد احتمال أن تكون هذه اللجنة:

أ) جميعها من الرجال.

ب) رجلين وامرأة.

جـ) رجلًا وامرأتين.

نظريات أساسية في الاحتمال

سنقدّم فيما يلي نظرياتٍ خاصّةً بالاحتمال معتمدين في برهنتها على مسلّماتٍ ثلاث تُعرف بمسلّمات الاحتمال وهي:

١) لكلّ حادثةٍ أ فإنّ: $٠ \leqslant ح(أ) \leqslant ١$

٢) $ح(ضـ) = ١$

٣) إذا كانت أ ، ب حادثتين متنافيتين (أي أنّ $أ \cap ب = \phi$) ، فإنّ:

$$ح(أ \cup ب) = ح(أ) + ح(ب)$$

ويمكننا تعميم المسلّمة ٣ على النحو التالي:

إذا كانت $أ_١ ، أ_٢ ، \dots ، أ_ن$ حوادث متنافية فإنّ:

$$ح(أ_١ \cup أ_٢ \cup \dots \cup أ_ن) = ح(أ_١) + ح(أ_٢) + \dots + ح(أ_ن)$$

ملحوظة (٢-٨)

سنرمز – بهدف التبسيط – لاحتمال الحادثة البسيطة المكوّنة من عنصرٍ واحدٍ م – مثلاً – من فضاء العينة بالرمز ح (م) بدلاً من ح ({ م }) ونقول إنّ ح (م) هو احتمال العنصر م .

نتيجة (٢-١)

لأيّ حادثةٍ $أ = \{ م_١ ، م_٢ ، م_٣ ، \dots ، م_ن \}$ فإنّ:

$$ح(أ) = ح(م_١) + ح(م_٢) + ح(م_٣) + \dots + ح(م_ن)$$

أي أنّ احتمال أيّ حادثةٍ أ يساوي مجموع احتمالات العناصر المكوّنة لها.

البرهان

بما أنّ $\{م_1\}$ ، $\{م_2\}$ ، $\{م_3\}$ ، ..... ، $\{م_ن\}$ حوادثٌ متنافية،

وأنّ $\{م_1\} \cup \{م_2\} \cup \{م_3\} \cup ..... \cup \{م_ن\} =$ ....

إذاً ح (أ) = ...

= .... **(أكمل الفراغ)**

تدريب (٢-٤)

في تجربةٍ ما، إذا كانت أ = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، وكان ح (١) = $\frac{١}{٩}$ ، فما قيمة ح (أ) ؟

نتيجة (٢-٢)

إذا كانت $أ_1$ ، $أ_2$ ، ... ، $أ_ن$ حوادث متنافية وشاملة، فإنّ:

ح ($أ_1$) + ح ($أ_2$) + ... + ح ($أ_ن$) = ١

البرهان

$أ_1 \cup أ_2 \cup ... \cup أ_ن =$ ضه تعريف (٢-٢)

$\Leftarrow$ ح ($أ_1 \cup أ_2 \cup ... \cup أ_ن$) = ح (ضه)

$\Leftarrow$ ح ($أ_1$) + ح ($أ_2$) + ... + ح ($أ_ن$) = ١ المسلّمة (٢) ، (٣)

- لعلّك توصلت إلى أنّه في تجربةٍ ما يكون:

١) مجموع احتمالات جميع الحوادث البسيطة يساوي الواحد.

٢) مجموع احتمالات الحوادث المتنافية أقل من أو يساوي الواحد.

نظرية (٢-١)

إذا كانت أَ هي الحادثة المتممة للحادثة أ فإنّ : ح (أَ) = ١ - ح (أ)

البرهان

بما أنّ أ ، أَ حادثتان متنافيتان وشاملتان ملحوظة (٢-٥)

إذًا ح (أ) + ح (أَ) = ١ نتيجة (٢-٢)

⇐ ح (أَ) = ١ - ح (أ)

تدريب (٢-٥)

استخدم نظرية (٢-١) للتحقق من أنّ ح (Φ) = ٠

مثال (٢-١٦)

إذا كان ح (أ) = $\frac{١}{٢}$ ح (أَ) ، فأوجد ح (أ)

الحل

بما أنّ ح (أ) = $\frac{١}{٢}$ ح (أَ)

إذًا ح (أَ) = ٢ ح (أ)

ولكن ح (أَ) = ١ - ح (أ) نظرية (٢-١)

⇐ ٢ ح (أ) = ١ - ح (أ)

⇐ ٣ ح (أ) = ١

⇐ ح (أ) = $\frac{١}{٣}$

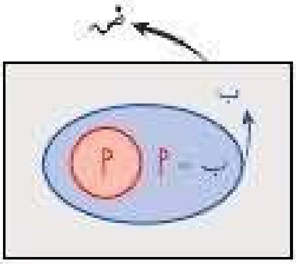
نظرية (٢-٢)

إذا كانت أ ، ب أيّ حادثتين بحيث أ ⊂ ب فإنّ ح (أ) ≤ ح (ب)

البرهان

بما أنّ أ ⊂ ب ،

إذًا يمكن التعبير عن ب باتحاد الحادثتين المتنافيتين : أ ، ب − أ



شكل (٢-٢)

فنكتب ب = أ ∪ (ب − أ)   انظر شكل (٢-٢)

⟸ ح (ب) = ح (أ ∪ (ب − أ))

⟸ ح (ب) = ح (أ) + ح (ب − أ)   من المسلمة (٢)

⟸ ح (ب) − ح (أ) = ح (ب − أ)

ولكن ح (ب − أ) ≥ ٠   من المسلمة (١)

إذًا ح (ب) − ح (أ) ≥ ٠

⟸ ح (ب) ≥ ح (أ)

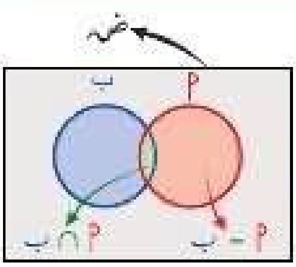
تدريب (٢-٦)

استخدم نظرية (٢-٢) للتحقق من أنّه : لأيّ حادثةٍ أ يكون ح (أ) ≤ ١

نظرية (٢-٣)

إذا كانت أ ، ب أيّ حادثتين فإنّ: ح (أ − ب) = ح (أ) − ح (أ ∩ ب)

البرهان



شكل (٢-٣)

يمكن التعبير عن أ باتحاد الحادثتين المتنافيتين : أ − ب ، أ ∩ ب ،

فنكتب أ = (أ − ب) ∪ (أ ∩ ب)   انظر شكل (٢-٣)

⟸ ح (أ) = ح (أ − ب) + ح (أ ∩ ب)   من المسلمة (٢)

⟸ ح (أ − ب) = ح (أ) − ح (أ ∩ ب)

مثال (٢-١٧)

إذا كان أ ⊃ ب ، وكان ح (أ) = ٠,٢ ، ح (ب) = ٠,٦ فأوجد ح (ب - أ) .

الحل

ح (ب - أ) = ح (ب) - ح (أ ∩ ب)   من نظرية (٢-٣)

= ح (ب) - ح (أ)   ، لأنّ أ ⊃ ب ⇐ أ ∩ ب = أ

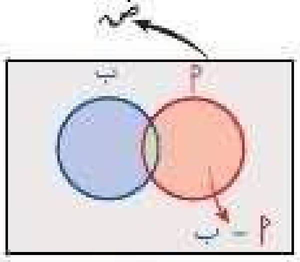
= ٠,٦ - ٠,٢ = ٠,٤

نظرية (٢-٤)

إذا كانت أ ، ب أيَّ حادثتين فإنَّ:

ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) - ح (أ ∩ ب)

البرهان



شكل (٢-٤)

من الشكل (٢-٤) نلاحظ أنّه يمكن التعبير عن الحادثة أ ∪ ب باتحاد الحادثتين المتنافيتين : أ - ب ، ب فيكون:

أ ∪ ب = (أ - ب) ∪ ب

⇐ ح (أ ∪ ب) = ح (أ - ب) + ح (ب)

⇐ ح (أ ∪ ب) = ح (أ) - ح (أ ∩ ب) + ح (ب)   من نظرية (٢-٣)

⇐ ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) - ح (أ ∩ ب)

تدريب (٢-٧)

تحقق من أنَّ المسلَّمة (٣) هي حالة خاصَّة من النظرية (٢-٤)

مثال (٢-١٨)

إذا كان ح (ب) = $\frac{١}{٤}$ ، ح (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$ ، ح (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٢}$ ،
فأوجد ح (أ).

الحل

ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) - ح (أ ∩ ب)

$\frac{١}{٢}$ = ح (أ) + $\frac{١}{٤}$ - $\frac{١}{٨}$

إذاً ح (أ) = $\frac{١}{٢}$ - $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٨}$ = $\frac{٣}{٨}$

تدريب (٢-٨)

إذا كان ح (أ) = ٠,٥ ، ح (ب′) = ٠,٢ ، ح (أ ∩ ب) = ٠,٤ ، فأوجد:

أ) ح (أ ∪ ب)

ب) ح (أ - ب)

جـ) ح ((أ ∪ ب)′)

وفيما يلي نتناول أمثلةً متنوعةً وتطبيقاتٍ من الحياة على حساب احتمالات حوادث معيَّنة مفترضين أنَّ فضاء العيِّنة هو فضاءٌ متساوي الاحتمالات ما لم نذكر خلاف ذلك.

مثال (٢-١٩)

قطعة نقـودٍ صُمِّمت بحيث إنَّ احتمال ظهور الشعار هو ضعف احتمال ظهور الكتابة. أُلقيت القطعة مرَّةً واحدة. اكتب فضاء العيِّنة، وأوجد احتمالات الحوادث البسيطة.

الحل

ضـ = {ش ، ك}.

وبفرض أنَّ ح (ك) = س يكون ح (ش) = ٢س

ولكن ح (ضـ) = ح (ش) + ح (ك) **(لماذا ؟)**

⇐ ١ = ٢س + س

إذًا س = $\frac{١}{٣}$

وعليه فإنَّ: ح (ش) = $\frac{٢}{٣}$ ، ح (ك) = $\frac{١}{٣}$

مثال (٢-٢٠)

أُلقيت قطعة نقود مرتين متتاليتين. أوجد احتمال أن يظهر الشعار مرّةً واحدة على الأقل.

الحل

ضـ = {(ش ، ش) ، (ش ، ك) ، (ك ، ش) ، (ك ، ك)}.

بفرض أنَّ أ هي حادثة ظهور الشعار مرّةً واحدة على الأقل

إذًا أ = {(ش ، ش) ، (ش ، ك) ، (ك ، ش)}.

$$\text{ح (أ)} = \frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ضـ}} = \frac{٣}{٤}$$

لاحظ أنَّه :

يمكن إيجاد ح (أ) باستخدام نظرية (٢-١) وذلك على النحو التالي:

أَ = {(ك ، ك)}

⇐ ح (أَ) = $\frac{١}{٤}$ ،

⇐ ح (أ) = ١ − ح (أَ) = ١ − $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٤}$

مثال (٢-٢١)

مكعبٌ غيـر متجانسٍ كُتب على أوجهه الأعداد: ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ صُمّم بحيث إذا أُلقي كان احتمال ظهور أيّ عددٍ يتناسب مع ذلك العدد. احسب احتمالات الحوادث البسيطة واستخدمها في حساب احتمال:

أ) ظهور عدد زوجي.

ب) ظهور عدد فردي.

جـ) ظهور عدد زوجي أو عدد فردي.

الحل

$\text{ض} = \{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ \}$.

وبمـا أنّ احتمـال ظهور العدد يتناسـب مع هذا العدد فإنّـه بفـرض أنّ ثابـت التناسب هوس نحصل على

$$\frac{\text{ح}(١)}{١} = \frac{\text{ح}(٢)}{٢} = \cdots = \frac{\text{ح}(٦)}{٦} = \text{س}$$

فيكون $\text{ح}(١) = \text{س}$ ، $\text{ح}(٢) = ٢\text{س}$ ، $\text{ح}(٣) = ٣\text{س}$ ، $\text{ح}(٤) = ٤\text{س}$ ، $\text{ح}(٥) = ٥\text{س}$ ، $\text{ح}(٦) = ٦\text{س}$

ولكن $\text{ح}(\text{ض}) = \text{ح}(١) + \text{ح}(٢) + \text{ح}(٣) + \text{ح}(٤) + \text{ح}(٥) + \text{ح}(٦)$

$\Leftarrow \quad ١ = \text{س} + ٢\text{س} + ٣\text{س} + ٤\text{س} + ٥\text{س} + ٦\text{س}$

$\Leftarrow \quad ٢١\text{س} = ١$

$\Leftarrow \quad \text{س} = \frac{١}{٢١}$

وعليه يكون:

$\text{ح}(١) = \frac{١}{٢١}$ ، $\text{ح}(٢) = \frac{٢}{٢١}$ ، $\text{ح}(٣) = \frac{٣}{٢١} = \frac{١}{٧}$

$\text{ح}(٤) = \frac{٤}{٢١}$ ، $\text{ح}(٥) = \frac{٥}{٢١}$ ، $\text{ح}(٦) = \frac{٦}{٢١}$

أ) نفرض أنَّ أ هي حادثة ظهور عدد زوجي

إذًا أ = {٢ ، ٤ ، ٦}.

وبالتالي ح (أ) = ح (٢) + ح (٤) + ح (٦)

$= \frac{٢}{٢١} + \frac{٤}{٢١} + \frac{٦}{٢١} = \frac{١٢}{٢١} = \frac{٤}{٧}$

ب) نفرض أنَّ ب هي حادثة ظهور عدد فردي

إذًا ب = {١ ، ٣ ، ٥}.

وبالتالي ح (ب) = ح (١) + ح (٣) + ح (٥)

$= \frac{١}{٢١} + \frac{٣}{٢١} + \frac{٥}{٢١} = \frac{٩}{٢١} = \frac{٣}{٧}$

جـ) نفرض أنَّ جـ هي حادثة ظهور عدد زوجي أو عدد فردي

إذًا جـ = أ ∪ ب

⇐ ح (جـ) = ح (أ ∪ ب)

= ح (أ) + ح (ب)   لأن الحادثتان أ ، ب متنافيتان

$= \frac{٤}{٧} + \frac{٣}{٧}$

= ١   **(ماذا يعني ذلك؟)**

لاحظ أنَّه :

يمكننا إيجاد ح (أ ∪ ب) بإيجاد أ ∪ ب ثم حساب احتمالها.

مثال (٢-٢٢)

مؤتمر عالمي ضمَّ ١٥٠ عضوًا ، وُجد أنَّ ١٠٠ عضو منهم يتحدثون اللغة الإنجليزية، ٦٠ عضوًا يتحدثون اللغة الفرنسية، ٢٠ عضوًا يتحدثون اللغتين معًا. اختير عضو عشوائيًا. أوجد احتمال أن يكون هذا العضو:

أ) يتحدث اللغة الإنجليزية أو الفرنسية.

ب) لا يتحدث أيًّا من اللغتين.

جـ) يتحدث اللغة الإنجليزية فقط.

الحل

أ) عدد عناصر ض = ١٥٠

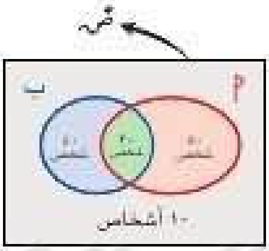
وبفرض أنّ أ هي حادثة أن يكون هذا العضو يتحدث اللغة الإنجليزية،

ب هي حادثة أن يكون هذا العضو يتحدث اللغة الفرنسية،

تكون: أ $\cap$ ب هي حادثة أن يكون هذا العضو يتحدث اللغتين معًا،

أ $\cup$ ب هي حادثة أن يكون هذا العضو يتحدث اللغة الإنجليزية أو الفرنسية،

وبالتالي: ح (أ $\cup$ ب) = ح (أ) + ح (ب) − ح (أ $\cap$ ب)



شكل (٢-٥)

ولكن ح (أ) = $\dfrac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ض}} = \dfrac{١٠٠}{١٥٠} = \dfrac{٢}{٣}$ ،

ح (ب) = $\dfrac{\text{عدد عناصر ب}}{\text{عدد عناصر ض}} = \dfrac{٦٠}{١٥٠} = \dfrac{٢}{٥}$ ،

ح (أ $\cap$ ب) = $\dfrac{\text{عدد عناصر (أ} \cap \text{ب)}}{\text{عدد عناصر ض}} = \dfrac{٢٠}{١٥٠} = \dfrac{٢}{١٥}$ ،

إذًا ح (أ $\cup$ ب) = $\dfrac{٢}{٣} + \dfrac{٢}{٥} - \dfrac{٢}{١٥} = \dfrac{١٤}{١٥}$

ب) حادثة أن يكون هذا العضو لا يتحدث أيًا من اللغتين هي :

أَ $\cap$ بَ = (أ $\cup$ ب)َ **قانون** (٢-٢)

ح (أَ $\cap$ بَ) = ح ((أ $\cup$ ب)َ) = ١ − ح (أ $\cup$ ب) = ١ − $\dfrac{١٤}{١٥} = \dfrac{١}{١٥}$

جـ) حادثة أن يكون هذا العضو يتحدث اللغة الإنجليزية فقط هي أ − ب

ح (أ − ب) = ح (أ) − ح (أ $\cap$ ب)

= $\dfrac{٢}{٣} - \dfrac{٢}{١٥} = \dfrac{٨}{١٥}$

- باستخدام شكل (٢-٥) تحقق من صحة الإجابات السابقة.

مثال (٢-٢٣)

سُحبت بطاقتان عشوائياً من بين ١٥ بطاقة مرقّمة من ١ إلى ١٥ . أوجد احتمال أن يكون مجموع العددين على البطاقتين المسحوبتين فردياً في كلٍّ من الحالات الآتية:

أ) سُحبت البطاقتان معًا.

ب) سُحبت البطاقتان واحدةً بعد الأخرى مع الإرجاع.

الحل

أ) عدد عناصر $ف$ = عدد طرق سحب بطاقتين معًا من بين ١٥ بطاقة

$$= {}^{١٥}ق_{٢} = \frac{{}^{١٥}ل_{٢}}{\lfloor ٢} = ١٠٥$$

نفرض أنّ أ هي حادثة سحب بطاقتين معًا مجموعهما فردي، ولكي يكون المجموع فردياً فلابدّ أن تكون إحدى البطاقتين فردية والأخرى زوجية.

إذًا عدد عناصر أ =

عدد طرق سحب بطاقة فردية من بين ٨ بطاقات فردية × عدد طرق سحب بطاقة زوجية من بين ٧ بطاقات زوجية.

$$= {}^{٨}ق_{١} \times {}^{٧}ق_{١}$$

$$= ٨ \times ٧ = ٥٦$$

وعليه فإنّ: $ح(أ) = \frac{٥٦}{١٠٥} = \frac{٨}{١٥}$

ب) عدد عناصر فضاء العيّنة $ف$ = عدد طرق سحب بطاقتين واحدةً بعد الأخرى مع الإرجاع.

$$= ١٥ \times ١٥ = ٢٢٥$$

نفرض أنّ ب هي حادثة سحب بطاقتين واحدةً بعد الأخرى مع الإرجاع مجموعهما فردي.

أي أنّ ب هي حادثة سحب بطاقة فردية ثم بطاقة زوجية أو سحب بطاقة زوجية ثم فردية،

وبفرض أنّ جـ هي حادثة سحب بطاقة فردية ثم بطاقة زوجية.

د هي حادثة سحب بطاقة زوجية ثم بطاقة فردية.

تكون ب = جـ ∪ د

إذاً ح (ب) = ح (جـ) + ح (د) (لماذا ؟)

ولكن ح (جـ) = $\frac{\text{عدد عناصر جـ}}{\text{عدد عناصر ضـ}}$ = $\frac{٨ \times ٧}{٢٢٥}$ = $\frac{٥٦}{٢٢٥}$

ح (د) = $\frac{\text{عدد عناصر د}}{\text{عدد عناصر ضـ}}$ = $\frac{٧ \times ٨}{٢٢٥}$ = $\frac{٥٦}{٢٢٥}$

إذاً ح (ب) = $\frac{٥٦}{٢٢٥}$ + $\frac{٥٦}{٢٢٥}$ = $\frac{١١٢}{٢٢٥}$

تدريب (٢-٩)

أعد حل المثال (٢-٢٣) إذا سُحبت البطاقتان واحدةً بعد الأخرى دون إرجاع.

تمارين (٢-٢)

١ ألقى أحد الطلبة مكعبًا كُتب على أوجهه الأعداد: ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ مئة مرةٍ فظهر العدد ٤ خمس عشرة مرةً. ما الاحتمال التجريبي لحادثة ظهور العدد ٤ ؟

٢ في إحصائية إحدى المستشفيات، أجرى طبيبٌ ١٠٠٠ عمليةٍ جراحيةٍ من النوع نفسه، نجحت منها ٩٨٠ عمليةً فما احتمال نجاح العملية - بإذن الله - على يد هذا الطبيب ؟

٣ صندوقٌ به ٣ كرات حمراء، ٦ كرات زرقاء، ٥ كرات بيضاء. سُحبت كرةً واحدةً بطريقةٍ عشوائية. إذا كانت جميع الكرات متماثلةً فاحسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:

أ) حمراء   ب) زرقاء   جـ) بيضاء

د) ليست حمراء   هـ) ليست زرقاء   و) ليست بيضاء

ز) حمراء أو زرقاء   ح) حمراء أو زرقاء أو بيضاء   ط) ليست حمراء ولا زرقاء

ي) ليست حمراء ولا زرقاء ولا بيضاء

٤ أُلقي مكعبٌ كُتب على أوجهه الأعداد: ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ احسب احتمال كلٍّ من الحوادث الآتية:

أ) ظهور عددٍ فردي   ب) ظهور عددٍ يقبل القسمة على ٣

جـ) ظهور عددٍ زوجي   د) ظهور عددٍ سالب

هـ) ظهور عددٍ أقل من أو يساوي ١٥   و) ظهور عددٍ أكبر من ١٤

٥ ألقيت ثلاث قطع نقود متمايزة، احسب مايأتي:

أ) احتمال ظهور شعارٍ واحدٍ أو شعارين.

ب) احتمال ظهور شعارٍ واحدٍ أو ثلاث شعارات.

جـ) احتمال ظهور شعارٍ واحدٍ على الأقل.

د) احتمال ظهور شعارٍ أو عدم ظهور كتابة.

٦ أختير عددٌ من العشرين عددًا الصحيحة الموجبة الأولى بطريقةٍ عشوائية، احسب احتمال أن يكون العدد:

أ) زوجيًا أو يقبل القسمة على ٣ .

ب) فرديًا أو يقبل القسمة على ٥ .

جـ) يقبل القسمة على ٢ أو على ٣ .

د) لا يقبل القسمة على ٢ أو لا يقبل القسمة على ٣ .

هـ) لا يقبل القسمة على ٣ أو زوجيًا.

٧ إذا أُلقي مكعبان متمايزان من النوع الموصوف في تمرين (٤) ، فما احتمال أن يكون مجموع العددين على الوجهين العلويين ٢٤ أو ٢٩ .

٨ إذا كان أ ⊃ ب، وكان ح (أ) = ٠٫٤ ، ح (ب) = ٠٫٧ فأوجد:

أ) ح (أَ)

ب) ح (ب − أ)

جـ) ح ((أ ∩ ب)َ)

٩ إذا كان ح(أ ∪ ب) = ٠٫٦ ، وكان ح(أ) = ٠٫٣ ، ح (ب) = ٠٫٥ فأوجد احتمال كلٍّ من :

أ) وقوع أ وَ ب معًا .

ب) عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب .

١٠ إذا كان احتمال نجاح طالبٍ ما في مادة الرياضيات هو $\frac{٢}{٣}$ ، احتمال نجاح الطالب نفسه في مادةِ الفيزياء هو $\frac{٣}{٤}$ ، واحتمال نجاحه في المادتين معًا هو $\frac{١}{٢}$ ، فما احتمال نجاحه في مادةٍ واحدةٍ منهما على الأقل.

١١ يوجد في صندوق ١٠ مصابيح، ٣ مصابيح منها غير صالحة ونريد سحب مصباحين عشوائياً واحدًا بعد الآخر دون إرجاع. احسب احتمال كلٍّ من الحوادث الآتية:

أ) المصباحان غير صالحين.

ب) المصباحان صالحان.

جـ) أحد المصباحين على الأقل غير صالح.

١٢ في عيّنة عشوائية من ٧٥ شخصًا وُجد أنّ ٢٧ شخصًا يقرؤون جريدة عكاظ فقط، ٢٢ شخصًا يقرؤون جريدة الجزيرة فقط، ١٨ شخصًا يقرؤون الجريدتين معًا. فإذا اُختير شخصٌ من هذه العيّنة فأوجد:

أ) احتمال أن يكون من قرّاء جريدة الجزيرة.

ب) احتمال أن يكون ممن لا يقرأ أيًا من الجريدتين.

جـ) احتمال أن يكون من قرّاء إحدى الجريدتين دون الأخرى.

١٣ في كلية العلوم بإحدى الجامعات ٧٣ طالبًا موزّعين على النحو الآتي: ٤٠ طالبًا يدرسون الرياضيات، ٣٥ طالبًا يدرسون الفيزياء، ٢٥ طالبًا يدرسون الكيمياء، إلاّ أنّ ١١ طالبًا يدرسون الرياضيات والفيزياء فقط، ٦ طلاب يدرسون الكيمياء والفيزياء فقط، ٤ طلاب يدرسون الرياضيات والكيمياء فقط، ٣ طلاب يدرسون المواد الثلاث.

اُختير طالبٌ منهم عشوائيًا. احسب احتمال أن يكون هذا الطالب من بين الذين:

أ) يدرسون الرياضيات

ب) يدرسون الكيمياء

جـ) يدرسون الفيزياء

د) يدرسون الرياضيات أو الكيمياء

هـ) يدرسون الرياضيات أو الفيزياء

و) يدرسون الفيزياء أو الكيمياء

ز) يدرسون الرياضيات فقط

ح) يدرسون الفيزياء و الكيمياء

ط) يدرسون الكيمياء فقط

ي) لا يدرسون الرياضيات ولا الكيمياء

ك) لا يدرسون الرياضيات ويدرسون الكيمياء

تعلمت في هذه الوحدة

١ عرفنــا التجربة العشوائية بأنها كلُّ إجراءٍ نعلم مسبقًا جميع النواتج الممكنة له وإن كنّا لا نستطيع أن نتنبأ بالضبط أيُّ هذه النواتج سيتحقق فعلاً.

٢ عرفنا فضاء العيّنة لتجربةٍ ما بأنّه مجموعة جميع النواتج الممكنة لهذه التجربة ورمزنا له بالرمز ف.

٣ عرفنا أنّ الحادثة هي مجموعة جزئية من فضاء العيّنة، ودرسنا العمليات على الحوادث.

٤ عرفنــا أنّ الحــوادث $أ_١ ، أ_٢ ، أ_٣ ، \dots ، أ_ن$ تكــون متنافيــة إذا كانــت متنافيــة مثنــى مثنــى (أي أنّ $أ_م \cap أ_ل = \phi$) حيــث $م ، ل \in \{١ ، ٢ ، ٣ ، \dots ، ن\}$، وتكــون هــذه الحــوادث متنافية وشاملة ، إذا كانت متنافية وكان $أ_١ \cup أ_٢ \cup \dots \cup أ_ن = ف$

٥ قدّمنــا المفهــوم التجريبــي للاحتمال والذي يعتمد على إجراء التجربة عــددًا كبيرًا جداً من المرات، كما قدّمنا المفهوم النظري للاحتمال المنتظم والذي يعتمد على افتراض أنّ لجميع النواتج المختلفة في فضاء العيّنة احتمالات متساوية ومن ذلك استنتجنا أنّ احتمال أيّ حادثةٍ أ هو:

$$ح (أ) = \frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ف}} \quad \text{حيث} \quad ٠ \leqslant ح (أ) \leqslant ١$$

٦ قدّمنا مسلّمات الاحتمال الثلاث وهي:

أ) لكلّ حادثة أ فإنّ $٠ \leqslant ح (أ) \leqslant ١$

ب) $ح (ف) = ١$

جـ) إذا كانت أ ، ب حادثتين متنافيتين فإنّ $ح (أ \cup ب) = ح (أ) + ح (ب)$

٧ قدمنا نظريات الاحتمالات الأساسية وهي :

أ) إذا كانت $\acute{أ}$ هي الحادثة المتممة للحادثة أ فإن ح ($\acute{أ}$) = ١ - ح (أ)

ب) إذا كانت أ ، ب أي حادثتين بحيث أ $\subset$ ب فإن ح (أ) $\leqslant$ ح (ب)

جـ) إذا كانت أ ، ب أي حادثتين فإن ح (أ - ب) = ح (أ) - ح (أ $\cap$ ب)

د) إذا كانت أ ، ب أي حادثتين فإن ح (أ $\cup$ ب) = ح (أ) + ح (ب) - ح (أ $\cap$ ب)

ومنها ح (أ $\cup$ ب) = ح (أ) + ح (ب) إذا كان أ $\cap$ ب = ϕ

٨ قدمنا تطبيقات من الحياة وتطبيقات على إيجاد احتمال حادثة باستخدام مبدأ العد وقوانين التباديل والتوافيق.

تمارين عامة

١ ضع علامة ☑ أو علامة ☒ عن يمين ما يلي:

☐ فراغ العينة في تجربة حقن ٧ فئران بسمٍّ معيَّن وملاحظة عدد الفئران التي تموت بفعل هذا السمّ هو: {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}.

☐ عدد عناصر فراغ العيِّنة في تجربة إلقاء قطعة نقود ٤ مرّات متتالية وملاحظة الوجه الظاهر هو ٨

☐ في تجربة إلقاء المكعب تكون حادثة ظهور عددٍ أوليٍّ زوجيٍّ حادثةً مستحيلة.

☐ لأيِّ حادثتين متنافيتين أ ، ب تكون $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ متنافيتين أيضًا.

☐ لأيِّ حادثتين أ ، ب ، حيث أ ⊃ ب فإنَّ $\overline{أ}$ ⊃ $\overline{ب}$.

☐ إذا كان ح ($أ_{١}$) = ح ($أ_{٢}$) ، فإنَّ $أ_{١}$ = $أ_{٢}$

☐ إذا كان ح ($أ_{١}$) = ح ($أ_{٢}$) ، فإنَّ عدد عناصر $أ_{١}$ = عدد عناصر $أ_{٢}$

☐ إذا كان ح ($أ_{١}$) = ٠,٥ ، ح ($أ_{٢}$) = ٠,٦ ، فإنَّ $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ غير متنافيتين.

☐ إذا كان ح ($أ_{١}$) = ٠,٣ ، ح ($أ_{٢}$) = ٠,٤ ، فإنَّ ح ($أ_{١}$ ∪ $أ_{٢}$) = ٠,٨

٢ اختر الإجابة الصحيحة لكلٍّ ممّا يلي:

أ) حادثة ظهور عددٍ أوّليٍّ في تجربة رمي مكعبٍ كُتب على أوجهه الأعداد ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ هي حادثةٌ :(بسيطة ، مستحيلة ، مؤكّدة)

ب) حادثة ظهور شعارٍ أو كتابةٍ في تجربة إلقاء قطعة نقودٍ هي حادثةٌ: (بسيطة ، مستحيلة ، مؤكّدة)

جـ) إذا تسابق ٣ طلاب أ ، ب ، جـ في السباحة وكان احتمال فوز الطالب أ يساوي احتمال فوز الطالب جـ ، واحتمال فوز الطالب ب ضعف احتمال فوز الطالب أ فإنّ احتمال فوز الطالب أ أو الطالب ب هو: ($\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$)

د) في تجربة تكوين عددٍ من رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } ، فإنّ احتمال أن يكون العدد المكوَّن زوجياً ورقم عشراته زوجياً هو : ($\frac{١}{٩}$ ، $\frac{٥}{٩}$ ، $\frac{٢}{٩}$)

هـ) يوجّه صيادان بندقيتيهما نحو غزالٍ فإذا كان احتمال أن يصيب الصياد الأول الغزال هو $\frac{١}{٢}$ واحتمال أن يصيب الصياد الثاني الغزال هو $\frac{٢}{٣}$ واحتمال أن يصيب الاثنان معًا الغزال هو $\frac{١}{٣}$ ، فإنّ احتمال أن يُصاب الغزال هو : ($\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{٣}$)

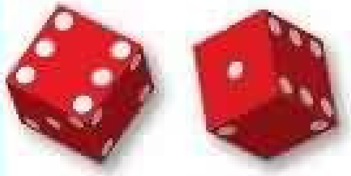
و) في دراسةٍ لعدد ركّاب مصعدٍ خلال دقيقةٍ أثناء وقوفه بالدور الأرضي، إذا وُجد ما يلي:

عدد الركّاب	٠	١	٢	٣	٤ فأكثر
الاحتمال	٠,٠٦	٠,١٨	٠,٢٢	٠,٢٤	٠,٣

فإنّ احتمال أن يكون عدد الركّاب راكبان فأكثر هو:

(٠,٢٢ ، ٠,٧٦ ، ٠,٤٦)

٣ تقضي تجربةٌ برمي مكعبين متجانسين مرقمي الوجوه من ١ إلى ٦، وحساب مجموع العددين الظاهرين. اكتب فضاء العيِّنة.



٤ حديقةٌ لها ثلاثة أبوابٍ : $ب_{١}$ ، $ب_{٢}$ ، $ب_{٣}$ لدخول وخروج روّادها.

أ) اكتب فضاء العيِّنة لتجربة الدخول ثم الخروج من الحديقة باستخدام هذه الأبواب ثم اكتب الحوادث الآتية:

$أ_{١}$: حادثة استخدام نفس الباب في الدخول أو الخروج.

$أ_{٢}$: حادثة استخدام $ب_{١}$ في الدخول.

$أ_{٣}$: حادثة عدم استخدام $ب_{١}$ في الدخول أو الخروج.

ب) أيٌّ من الحوادث $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، $أ_{٣}$ يتنافى مع الآخر. وهل الحوادث $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، $أ_{٣}$ متنافية ؟

٥ في تجربة رمي قطعة نقودٍ مرتين متتاليتين، أوجد:

أ) احتمال ظهور كتابةٍ في الرميتين.

ب) احتمال ظهور شعارٍ في الرميتين.

جـ) احتمال ظهور شعارٍ في الرميتين على الأكثر.

د) احتمال ظهور الوجه نفسه في الرميتين.

٦ مكعبٌ غير متجانسٍ كُتب على أوجهه الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، صُمِّم بحيث إذا أُلقي يكون احتمال ظهور كلٍّ من الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ متساوٍ، واحتمال ظهور العدد ٦ يساوي ثلاثة أمثال احتمال ظهور العدد ١ ، احسب احتمال ظهور عددٍ زوجي.

٧ إذا كانت أ ، ب حادثتين في فضاء عيِّنةٍ لتجربةٍ عشوائية ما وكان:

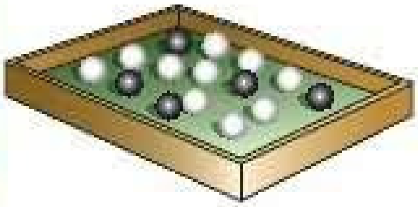
$$ح(أ) = \frac{١}{٢} \quad ، \quad ح(\bar{ب}) = \frac{١}{٤} \quad ، \quad ح(أ \cap ب) = \frac{٣}{٨}$$ فأوجد:

أ) احتمال وقوع حادثةٍ واحدةٍ على الأقل من الحادثتين أ ، ب.

ب) احتمال وقوع إحدى الحادثتين فقط.

٨ صندوقٌ به ١٥ كرةً متماثلة ، ١٠ كراتٍ منها بيضاء ، ٥ كراتٍ سوداء.

أ) سُحبت كرةٌ عشوائيًا من الصندوق. احسب احتمال أن تكون هذه الكرة بيضاء.



ب) سُحبت كرةٌ ووُضعت جانبًا وظهر أنَّها بيضاء ، بعد ذلك سُحبت كرةٌ أخرى. احسب احتمال أن تكون هذه الكرة بيضاء أيضًا.

جـ) سُحبت كرتان واحدةً بعد الأخرى مع الإرجاع ، احسب احتمال أن تكون الكرتان بيضاوين.

د) سُحبت خمس كراتٍ معًا ، احسب احتمال أن يكون بين الكرات الخمس المسحوبة كرتان بيضاوين وثلاث كرات سوداء.

هـ) سُحبت ثلاث كراتٍ واحدةً بعد الأخرى بدون إرجاع. احسب احتمال أن تكون ألوان الكرات الثلاث مختلفةً على التتابع.

٩ تتألَّف جمعية تحفيظ القرآن الكريم في إحدى المدارس الثانوية من ٢٤ طالبًا (١٦ من المستوى الثاني، ٨ من المستوى الثالث) ، فإذا أراد المشرف على الجمعية تشكيل لجنةٍ منهم للتوعية الإسلامية تتألَّف من ثلاثة طلابٍ، فما احتمال:

أ) أن تكون اللجنة من المستوى الثاني.

ب) أن تضمَّ اللجنة اثنين فقط من المستوى الثاني.

جـ) أن تضمَّ اللجنة اثنين فقط من المستوى الثالث.

د) أن تضمَّ اللجنة اثنين على الأكثر من المستوى الثاني.

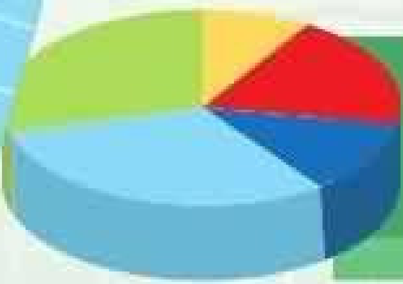
الوحدة الثالثة

الإحصاء

Statistics

الدروس

عرف الإحصاء قديماً ، وحديثاً ، وتتعدد استخداماته لتشمل مجالات عدة في الحياة . وهو يهتم بجمع البيانات وتنظيمها وتحليلها واستخلاص النتائج منها ، ومن ثم اتخاذ القرارات المبنية عليها.



الأهداف

يتوقع منَ الطالب بعدَ دراسة هذه الوحدة أنْ يكونَ قادرًا علَى أنْ :

١- يجمع البيانات اللازمة لدراسةٍ إحصائية و ينظّمها في جداول تكرارية .

٢- يُمثل توزيعات تكرارية باستخدام : القطاعات الدائريّة،المدرّج التكراري، المضلّع التكراري.

٣- يحسب كلاً من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لبيانات مبوبة وغير مبوبة.

٤- يوجد كلاً منَ الوسيط والمنوال بالرسم.

٥- يحسب الانحرافَ المعياريَ لبيانات مبوّبة وغير مبوّبة.

٦- يوجد معامل الارتباط بين متغيرين ويوظّف ذلك في تحديد نوع الارتباط وشدّته.

٧- يستعمل شكل الانتشار لتحديد نوع الارتباط وشدته.

٨- يوجد الدرجة المعيارية لدرجةٍ معطاة في ظاهرةٍ معيّنة.

مقدّمة

إنّ تقدُّم الأمم ورقيّها يعتمد على التخطيط السليم الذي يعتمد على نتائج علميّة نتوصل إليها بالتجريب والمشاهـدة في كثيرٍ من العلوم مثل علم الاقتصـاد وعلم الاجتماع وعلم النفس وغيرها، ويُسمّى الأسلوب الـذي نتّبعه في تعميم التجربة ومعالجة النتائـج للحصول على قوانين ونظريّات علميّة جديدة **بالأسلوب الإحصائيّ للبحث**.فالإحصـاء من أهم وسائل البحث العلميّ ولاسيّما فـي العلوم التي يعتمد البحث فيها علـى دراسة المشاهدات والتوصل إلـى نتائج وقوانين.والنتائج المختلفة للقياس، كالدرجات التي حصل عليها مجموعة من الطلاب في اختبارٍ ما، أو أسعار السلع، أو مقادير الإنتاج، كلُّ هذه النتائج وغيرها تظلُّ إلى حدٍّ كبير عديمة الفائدة والمعنى ما لم يرد تفسير لها.

إنّ العلم الذي نلجأ إليه لتفسير النتائج واستنتاج ما يمكن أن نستنبطه منها هو **علم الإحصاء**.
ويمكن تعريف الإحصاء بأنّه الأسلوب العلمي للبحث الذي يهتم بدراسة ظاهرةٍ كونيّة أو تجريبيّة وذلك عن طريق جمع البيانات اللازمة عنها، وتصنيفها وعرضها جدوليًا أو بيانيًا وتلخيصها بغرض تفسير الظاهرة المدروسـة واستنتاج أو تقدير العلاقات الرياضيّة التي تحكـم تصرفها لاتخاذ القرار المناسب بشأن أيٍّ مـن هذه الظواهر. وقد استخدم الإحصـاء منذ زمن بعيد، وكان استخدامه قاصـرًا على الحكومات التي كانت تهدف من جمع الإحصاءات السكانيّة أو الاقتصاديّة، في الغالب لمعرفة قدرتها على خوض الحروب أو كميّة الضرائب التي يمكن جمعها مثل إحصائيّات قدماء المصريّين من الفراعنة، وإحصاء السكان في اليونان في عام ٥٩٠ قبل الميلاد (تقريبًا).

وقد ورد ذكر الإحصاء في كتاب اللهّ عز وجل في إحدى عشرة آية ، تُذكِّر الإنسان بعجزه وقصوره عن التوصلُّ إلى إحصاء أمورٍ كثيرة كقوله تعالى ﴿ ... وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَى كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا ﴾[1]
وقوله جلّ من قائل: ﴿ ... وَإِن تَعُدُّواْ نِعْمَتَ اللّهِ لاَ تُحْصُوهَا ... ﴾[2]
كما تُذكِّر هذه الآيات البيّنات الإنسان أنّ أعماله محصاة عليه:
﴿ وَوُضِـعَ الْكِتَـابُ فَتَرَى الْمُجْرِمِينَ مُشْفِقِيـنَ مِمَّا فِيهِ وَيَقُولُونَ يَا وَيْلَتَنَا مَالِ هَذَا الْكِتَـابِ لَا يُغَادِرُ صَغِيرَةً وَلَا كَبِيرَةً إِلَّا أَحْصَاهَا ... ﴾[3]

(١) سورةُ الجن، من الآية (٢٨).
(٢) سورةُ إبراهيم، من الآية (٣٤).
(٣) سورةُ الكهف، من الآية (٤٩).

وأنّ الإنسان إن نسي ما قدّمت يداه فإنّ اللهَ تعالى قد أحصاه:

﴿ يَوْمَ يَبْعَثُهُمُ اللَّهُ جَمِيعًا فَيُنَبِّئُهُم بِمَا عَمِلُوا أَحْصَاهُ اللَّهُ وَنَسُوهُ وَاللَّهُ عَلَى كُلِّ شَيْءٍ شَهِيدٌ ﴾[1]

فالإحصاء ليس غريبًا علينا إذن- نحن المسلمين- وليس بدعًا بالنسبة لنا الاستفادة من علم الإحصاء في بناء مجتمعنا وتنميته والعمل على سدّ حاجاته، وعلى تقدّمه وازدهاره، إذ إنّ إجراء الإحصاءات واتّباع الأساليب الإحصائيّة، وجمع المعلومات، بهدف اتخاذ القرارات بدأت في وقت مبكّر منذ بدء بناء المجتمع الإسلامي وتأسيس دولة الإسلام الحنيف.ونورد ما يلي من الحوادث على سبيل المثال لا الحصر:

- عن حذيفة بن اليمان رضي اللهُ تعالى عنه، قال: "كنّا مع رسول اللهِ ﷺ قال: أحصوا لي كم يلفظ بالإسلام[2]، قال: فقلنا: يا رسول اللهُ أتخاف علينا ونحن بين الستمائة والسبعمائة؟، قال: إنكم لا تدرون لعلّكم تبتلوا، قال: فابتُلينا، حتى جعل الرجل لا يصلّي إلاّ سرًا."
- وفي غزوة بدر الكبرى، عندما وجد المسلمون رجلين يسقيان لقريش سألهما رسول اللهُ ﷺ أخبراني عن قريش، قالا: هم واللهُ وراء هذا الكثيب الذي ترى بالعُدوة القصوى، فقال لهما رسول اللهُ ﷺ: كم القوم؟ قالا: كثير، قال: ما عدتهم؟ قالا: لا ندري، قال: كم ينحرون كلّ يوم، قالا: يومًا تسعًا ويومًا عشرًا، فقال رسول اللهُ ﷺ: "القوم بين التسعمائة والألف". فاتّبع ﷺ هذا الأسلوب لإحصاء جُند العدوّ، ليكون المسلمون على بيّنة من الأمر.
- وعندما أراد الفاروق عمر رضي اللهُ عنه، إبأن خلافته تقدير ما يجب عليه أن يفرض للمسلمين، جمع ستين مسكينًا وأطعمهم الخبز، فأحصوا ما أكلوا فوجدوه يخرج من جريبين، ففرض لكلّ إنسانٍ منهم ولعياله جريبين في الشهر، لأنّ الجريبين تكفي ستين أكلة، فكأنّه قدّر لكلّ إنسانٍ أكلتين في اليوم، كما أمر رضي اللهُ عنه، بكتابة أسماء الناس في قوائم حسب أسبقيتهم للإسلام.
- وعندما دخلت العراق نطاق الخلافة الإسلامية، قيست مساحات الأراضي الصالحة للزراعة وجرى تعيينها حسب مُلاّكها وما تنتجه من محاصيل، كما تمّ ذلك بالنسبة للأراضي الزراعية في بلاد الشام ومصر.

---

(1) سورةُ المجادلة، الآيةُ (٦).
(2) يلفظ الإسلام أي ينطق به- رواه مسلم/ باب ٦٧.

وفـي أيام الخليفة الزاهد عمر بن عبد العزيـز، جرى إحصاءٌ للفقراء والمعاقين في الدولة الإسلامية المترامية الأطراف، لدفع رواتب منتظمة لهم من بيت مال المسلمين.

ومـع تقدُّم الحضـارة الإنسانيَّة تعدَّدت استخدامات الإحصاء لتشمل مجـالات متعدِّدة من النشاطات الإنسانيَّـة، كالصحـة والصناعـة والتجـارة والتعليم وكافـة جـوانب التنميـة. كما استخدمت كثيرٌ من المؤسسـات - حتى غير الحكوميـة - الحديثة الإحصائيين لإعـداد الدراسات والبحـوث لتوضيح مقدار الخدمات التي تقوم بها ومدى أهميَّتها، وكذلك التخطيط للتوسُّع في الخدمات التي تقدِّمها أو لترشيدها، ولولا علم الإحصاء لما استطعنا أن نربط الإنتاج بالاستهلاك ولعمَّت الفوضى في الاقتصاد العالمي.

والجديـر بالذكـر أنَّه عندما يُراد بحث ظاهرةٍ من الظواهر أو مشكلـةٍ من المشكلات فإن الباحث يلجأ إلى الدراسة الإحصائية والتي تتلخص خطواتها فيما يلي :

خطوات الدراسة الإحصائية

١) تحديد المشكلة (أو هدف البحث) بدقَّة.

٢) جمع البيانات اللازمة لدراسة المشكلة بعناية.

٣) عرض البيانات ملخصةً بالطرق الجدوليَّة، أو البيانيَّة المناسبة.

٤) اختصار البيانات بحساب بعض المتوسِّطات أو خلافها.

٥) استنتاج أسباب المشكلة أو مقارنتها مع غيرها أو اقتراح حلول لها.

٣ـ١ الجداول التكرارية
The Frequency Tables

جمع البيانات

عند القيام بأيِّ دراسةٍ إحصائيّة يتمُّ أولاً تحديد مشكلة البحث تحديداً تاماً، كما يتمُّ تحديد مجتمع البحث أو ما يُسمّى بالمجتمع الإحصائي والذي هو عبارة عن مجموعة المفردات التي لها علاقة بالمشكلة موضوع البحث. فمثلاً إذا كان موضوع البحث هو دراسة أعمار الطلاب في مدرسة ثانوية فإنّ المجتمع الإحصائي هو مجموعة طلاب تلك المدرسة . و بعد ذلك ننتقل إلى المرحلة الثانية من خطوات الدراسة الإحصائية و هي جمع البيانات الإحصائية و التي يقصد بها الحصول على معلومات تتّصف بالصّحة و الدّقة عن ظاهرةٍ معيّنةٍ من مصدرٍ معيّنٍ في فترةٍ زمنيةٍ محدّدةٍ و بطريقةٍ سليمة .

مصادر جمع البيانات :

تنقسم مصادر جمع البيانات اللازمة لأيِّ دراسةٍ إحصائية إلى نوعين :

١) مصادر تاريخية : وهي بيانات جاهزة للاستخدام و مدوّنة في سجلاتٍ سابقة مثل نشرات مصلحة الإحصاءات العامة بوزارة المالية و الاقتصاد الوطني ، و الكتاب السنوي لإحصاءات التعليم الذي تصدره وزارة التربية و التعليم ، و الكتاب الإحصائي لوزارة الداخلية ، أو إنجازات التنمية التي تصدرها وزارة التخطيط ، و يساعد استخدام هذه المصادر في توفير الوقت و الجهد البشري و التكاليف المادية .

٢) مصادر ميدانية : أما في حالة عدم توافر البيانات الإحصائية في المصادر التأريخية ، فلا بد من اتّباع أسلوب جمع البيانات من الميدان أو حقل الدراسة و ذلك عن طريق إعداد بطاقة (استبانة) إحصائية تتضمن مجموعة من الأسئلة و الاستفسارات حول موضوع الدراسة . و تجمع البيانات من المصادر الميدانية بعدّة طرق منها : المقابلة الشخصية ، المراسلة بالبريد ، الهاتف .

أسلوب جمع البيانات :

١) **الحصر الشامل** : و يكون فيه جمع البيانات من جميع أفراد مجتمع الدراسة . و يستخدم في حالة كون المجتمع صغيرًا مثل طلاب مدرسة ثانوية أو في حالة تباعد الأزمنة التي فيها الدراسة كالتعداد الشامل للسكان و الذي يفضل إجراؤه كلّ عشر سنوات . و يمتاز الحصر الشامل في إعطاء الباحث صورة كاملة عن مجتمع الدراسة . و من عيوبه تكاليفه الباهظة ، و طول الوقت اللازم لإجرائه و خاصةً في المجتمعات ذات الكثافة السكّانية الكبيرة .

٢) **العيّنة** : يتمّ في هذا الأسلوب جمع البيانات من مجموعة جزئية من مجتمع إحصائي تسمى عيّنة . و يتمّ اختيارها بحيث تكون ممثّلة للمجتمع الإحصائي . بمعنى أن تكون كلّ خصائص المجتمع ممثّلة في العيّنة المختارة و ذلك من أجل تعميم النتائج التي نحصل عليها من دراسة العيّنة على المجتمع الإحصائي جميعه . و يستخدم أسلوب العيّنة في دراسة المجتمعات الكبيرة جدًا كما يساعد في توفير الجهود و التكاليف . و تكون أحيانًا هي الأسلوب الوحيد لدراسة مجتمع ما فلو أردنا ــ مثلاً ــ معرفة عدد كريات الدم الحمراء في المليمتر المكعب لمجموعة من المرضى . عندئذ يستحيل استخدام أسلوب الحصر الشامل لكلّ دم المريض . حيث نلجأ في هذه الحالة إلى أخذ عيّنة أو كميّة صغيرة من الدم و فحصها .

وسنعرض فيما يلي مجموعة من البيانات الإحصائية المختلفة:

١) كُلّف أحد الطلاب بتسجيل تقديرات ٤٨ طالبًا في اختبار مادة الرياضيات للصف الأول الثانوي فحصل على البيانات التالية:

جيد	جيد جدًا	ضعيف	ممتاز	ممتاز	جيد	جيد	ممتاز
جيد جدًا	مقبول	ضعيف	جيد جدًا	جيد	مقبول	جيد	جيد
مقبول	جيد	مقبول	جيد	جيد جدًا	جيد	جيد	جيد جدًا
ممتاز	جيد	ضعيف	جيد جدًا	ممتاز	جيد	ممتاز	جيد
جيد جدًا	ضعيف	جيد جدًا	جيد	ضعيف	ضعيف	مقبول	جيد
جيد	جيد جدًا	جيد	جيد	جيد	ضعيف	جيد جدًا	مقبول

بيانات (٣ - ١)

٢) أراد وكيل إحدى شـركات السيّارات معرفة الألوان المفضّلة لنوع معيّنٍ من السيّارات عند سكان إحدى المدن ، فكلّف أحد موظفيه بالوقوف في أحد الميادين الرئيسية في المدينة خلال فترةٍ محدّدة وتسجيل لون كلّ سيّارةٍ تمرُّ أمامه من هذا النوع فحصل على البيانات التالية:

أبيض	أحمر	أزرق	أبيض	أبيض	أحمر	أصفر	أبيض
أحمر	أبيض	أحمر	أزرق	أحمر	أزرق	أصفر	أزرق
أبيض	أبيض	أبيض	أبيض	أزرق	أحمر	أصفر	أحمر
أزرق	أصفر	أحمر	أبيض	أحمر	أبيض	أبيض	أحمر
أزرق	أبيض	أزرق	أبيض				

بيانات (٢ - ٢)

٣) أراد معلّمٌ معرفة عدد أفراد أسرة كلّ طالبٍ من طلاب فصله فجعل كلّ طالبٍ يسجّل عدد أفراد أسرته على السبورة و حصل بذلك على البيانات التالية:

٥	٧	٢	٥	٤	٢	٧	٣	٤	٣
٢	٥	٤	٣	٦	٧	٣	٥	٦	٦
٣	٦	٥	٤	٥	٤	٧	٣	٥	٧

بيانات (٢ - ٣)

٤) البيانات التالية تُمثّل عدد الفصول في ٢٥ مدرسة متوسطة للبنات بجدة في أحد الأعوام :

٢٠	١٨	١٧	١٤	١٥	١٨	١٧	١٦	١٦
١٤	١٩	١٩	١٨	١٦	١٥	١٨	١٢	١٥
١٢	١٥	١٤	١٧	٢٠	١٨	١٥	١٤	١٧
١٢	١٥	١٨	١٥	١٥	١٥	١٤	١٩	

بيانات (٢ - ٤)

حاول أن تصنّف البيانات الإحصائية السابقة ؟

لعلك توصلت إلى أن البيانات الإحصائية تصنف إلى نوعين :

١) **بيانات نوعية (وصفية) :** وهي البيانات التي لا يمكن التعبير عن مفرداتها بأرقام عدديّة مثل التقدير في الامتحان ، لون السيّارة ، لون العينين ، الجنس ، الحالة الاجتماعية ، ... إلخ

٢) **بيانات كمية (عددية) :** وهي البيانات التي يمكن التعبير عن مفرداتها بقيم عدديّة مثل عدد أفراد الأسرة ، الأعمار ، الأطوال ، الأوزان ، درجات الحرارة ، ... إلخ

تدريب (٣-١)

١) اجمع البيانات التي تُمثّل الهوايات المفضّلة لثلاثين فردًا من جيرانك أو أقاربك الذين تتراوح أعمارهم بين ١٥ - ٢٠ عامًا .

٢) اجمع البيانات التي تُمثّل عدد الساعات التي يستغرقها كلُّ طالبٍ من صفّك في المذاكرة يوميًا .

٣) صنّف البيانات في كلٍّ من (١) ، (٢) .

التوزيعات (الجداول) التكرارية

بعد جمع البيانات وتسجيلها فإنّه يلزم تنظيمها وتبويبها في جداول لتبسيط دراستها واستخلاص النتائج منها ، وتُسمّى هذه الجداول **بالجداول (أو التوزيعات) التكراريّة**. وسنعرض في هذا البند كيفية وضع البيانات الإحصائية في جداول تكرارية حسب نوع البيانات من حيث كونها نوعيّة أو كميّة .

تبويب البيانات النوعيّة :

يتمُّ تبويب البيانات النوعيّة في جدولٍ يُسمّى **جدولاً تكراريًا بسيطًا** والمثال التالي يوضّح ذلك .

مثال (٣-١)

سنقوم بتفريغ بيانات (٣ - ١) في جدول (٣ - ١) و الذي يُسمّى **بجدول التفريغ** لتوزيع التقديرات و يتكوّن من ثلاثة أعمدة كما يلي :

العمود الأول ويُسمَّى في هذا المثال عمود التقدير ، نسجِّل فيه التقديرات التي حصل عليها الطلاب وهي : ممتاز ، جيد جدًا ، جيد ، مقبول ، ضعيف .

العمود الثاني ويُسمَّى عمود العلامات ، نسجِّل فيه علامات تدل على تكرار كلِّ تقدير وذلك بأن نقرأ التقديرات الموجودة في بيانات (٣ - ١) وليكن ذلك أفقيًا - مثلاً - ، ونضع خطًّا مائلا (/) أمام أيِّ تقدير كلَّما ظهر ، وفي حالة الحصول على أربعة خطوط (////) فإنَّنا نضع الخط الخامس في الاتجاه الآخر (~~////~~) عند ظهور ذلك التقدير للمرَّة الخامسة . ويُسمَّى (~~////~~) **بالحزمة** .

العمود الثالث ويُسمَّى عمود التكرار ، نسجِّل فيه عدد العلامات أمام كلِّ تقدير وتُسمَّى هذه الأعداد بالتكرارات ، ويجب ملاحظة أن يكون مجموع التكرارات مساويًا لعدد مفردات بيانات (٣ - ١)

جدول التفريغ

التقدير	العلامات	التكرار (عدد الطلاب)
ممتاز	~~////~~ /	٦
جيد جدًا	~~////~~ ~~////~~	١٠
جيد	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ////	١٩
مقبول	~~////~~ /	٦
ضعيف	~~////~~ //	٧
المجموع		٤٨

جدول (٣ - ١)

وبحذف عمود العلامات من جدول التفريغ نحصل على الجدول التكراري البسيط لتوزيع التقديرات المجاور :

الجدول التكراري البسيط

التقدير	التكرار (عدد الطلاب)
ممتاز	٦
جيد جدًا	١٠
جيد	١٩
مقبول	٦
ضعيف	٧
المجموع	٤٨

جدول (٣ - ٢)

ويمكننا كتابة هذا الجدول أفقيًا كما يلي :

التقدير	ممتاز	جيد جدًا	جيد	مقبول	ضعيف	المجموع
التكرار (عدد الطلاب)	٦	١٠	١٩	٦	٧	٤٨

تدريب (٣-٢)

أنشئ الجدول التكراري البسيط لبيانات (٣ - ٢) ومنه حدّد لون السيّارة المفضّل لدى أكبر عددٍ من السكّان.

تبويب البيانات الكميّة :

يتمُّ تبويب البيانات الكميّة بإحدى الطريقتين التاليتين :

١) تبويب البيانات الكميّة في جدولٍ تكراريٍّ بسيط :

نتّبع في هذه الطريقة ما اتّبعناه في تبويب البيانات النوعيّة

مثال (٣-٢)

أنشئ الجدول التكراري البسيط لتوزيع عدد أفراد الأسر الموضّح في بيانات (٣ - ٢). ومنه أوجد ما يلي:

١) عدد الأسر المكوّنة من ثلاثة أفراد.

٢) عدد الأسر التي يقلُّ عدد أفرادها عن ٥

٣) عدد الأسر التي يزيد عدد أفرادها عن ٤

الحل

نرتّب أعداد أفراد الأسر الواردة في بيانات (٣ - ٢) تصاعديًّا كما يلي: ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ونسجّلها في العمود الأول بهذا الترتيب. وفيما يلي جدول التفريغ لتوزيع عدد أفراد الأسر.

جدول التفريغ

عدد أفراد الأسرة	العلامات	التكرار (عدد الأسر)
٢	/	١
٣	~~////~~ ///	٨
٤	~~////~~	٥
٥	~~////~~ //	٧
٦	////	٤
٧	~~////~~	٥
المجموع		٣٠

جدول (٣-٢)

و بحذف عمود العلامات تحصل على الجدول التكراري البسيط لتوزيع عدد أفراد الأسر التالي :

الجدول التكراري البسيط

عدد أفراد الأسرة	التكرار (عدد الأسر)
٢	١
٣	٨
٤	٥
٥	٧
٦	٤
٧	٥
المجموع	٣٠

جدول (٣ - ٤)

ومنه نجد أنَّ :

١) عدد الأسر المكونة من ثلاثة أفراد = ٨ .

٢) عدد الأسر التي يقلُّ عدد أفرادها عن ٥ = ١+٨+٥ = ١٤ .

٣) عدد الأسر التي يزيد عدد أفرادها عن ٤ = ٧+٤+٥ = ١٦ .

تدريب (٣-٣)

أنشئ جدولاً تكرارياً بسيطاً للبيانات التالية التي تُمثّل أعمار ٤٠ زائراً لأحد المصانع مقدّرة بالسنوات :

١٦	٢٠	٣٨	٣٥	٤٠	١٧	١٥	٣٢	٣٢	٣١
٣٥	٣٧	٣٩	٢٨	٢٩	١٧	٣٣	٢١	٤٣	٣٠
٣٤	٢٤	٢٦	٢٨	٢٧	١٨	٤٤	٢٤	٢٠	٢٢
٢٢	٢١	١٩	٣٩	٤٠	٤١	٣٨	٢٣	١٦	٣٨

٢) تبويب البيانات الكميّة في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئات :

إذا كانت البيانات كثيرةً وتحتوي على عددٍ كبيرٍ من القيم غير المتساوية ، فإنّه من غير المناسب وضعها في جدولٍ تكراري بسيط ، حيث أنّ مثل هذا الجدول سيكون طويلاً جدًا وتصعب دراسته إحصائيًا ولذلك نلجأ إلى تبويبها فيما يُسمّى **بالجدول التكراري ذي الفئات** ، و المثال التالي يوضّح ذلك :

مثال (٣-٣)

لعلّك لاحظت عند تبويب البيانات في تدريب (٣ - ٣) في جدولٍ تكراري بسيط أنّ الجدول الذي حصلت عليه طويل وليس من السهل استخلاص النتائج منه ، و لتبويب مثل هذه البيانات في جدولٍ تكراري ذي فئات نتّبع الخطوات التالية :

١) نبدأ بالبحث عن أصغر قيمة وأكبر قيمة في البيانات وهما هنا ١٥ ، ٤٤ توالياً ، ثم نحدّد عدد عناصر المجموعة { ١٥، ١٦، ١٧، ....، ٤٤ } (مجموعة الأعداد الطبيعية المتتالية التي تبدأ بالعدد ١٥ وتنتهي بالعدد ٤٤) ويسمّى عدد عناصر هذه المجموعة **بالمدى** ، ويتم حساب المدى من القاعدة التالية :

المدى= أكبر قيمة - أصغر قيمة + ١ (٣ - ١)

فيكون المدى هنا = ٤٤ - ١٥ + ١ = ٣٠

٢) نقسّم المجموعة { ١٥، ١٦، ١٧، ....، ٤٤ } إلى مجموعات جزئية منفصلة ومتساوية في عدد عناصرها تسمّى كلُّ واحدةٍ منها **فئة** . ويسمّى عدد عناصر الفئة **بطول الفئة** . ويتم ذلك بأن نختار طول مناسب للفئة ثمّ بقسمة المدى على طول الفئة نحصل على عدد الفئات . و لا توجد قاعدة معيّنة لاختيار طول الفئة بل يعتمد ذلك على الخبرة في المقام الأول إلاّ أنّه لا بد من مراعاة ما يلي :

- ألاّ يكون طول الفئة كبيرًا وبالتالي يكون عدد الفئات صغيرًا لا يعبّر عن خصائص انتشار البيانات.

- ألاّ يكون طول الفئة صغيرًا وبالتالي يكون عدد الفئات كبيرًا فينتفي الهدف من تلخيص البيانات في فئات.

(من المناسب ألاّ يقلّ عدد الفئات عن ستة ولا يزيد عن اثني عشر)

و في هذا المثال نختار طول الفئة = ٥ وعليه فإنَّ عدد الفئات = ٣٠ ÷ ٥ = ٦ فئات حيث:
الفئة الأولى تحوي الأعمار من ١٥ إلى ما هو أصغر من ٢٠ وتُكتب ١٥–٢٠ واختصارًا ١٥–
الفئة الثانية تحوي الأعمار من ٢٠ إلى ما هو أصغر من ٢٥ و تُكتب ٢٠ –٢٥ واختصارًا ٢٠–
... و هكذا إلى أن نصل إلى الفئة الأخيرة و تحوي الأعمار من ٤٠ إلى ما هو أصغر من ٤٥ و تُكتب ٤٠–٤٥

لاحظ أنْ:

الفئة الأولى لابد أن تشتمل أو تبدأ بأصغر قيمة والفئة الأخيرة لابد أن تشتمل على أكبر قيمة.

٢) نكوّن جدولاً تفريغياً (جدول (٢ – ٥)) من ثلاثة أعمدة حيث نسجّل في العمود الأول فئات الأعمار ،وفي العمود الثاني العلامات كما فعلنا في الأمثلة السابقة مع ملاحظة أنّنا هنا نضع علامة لكل مفردة أمام الفئة التي تنتمي إليها ، ونسجّل في العمود الثالث (عمود التكرار) عدد العلامات في كلّ فئة والذي يسمّى **تكرار الفئة**.

جدول التفريغ

فئات الأعمار	العلامات	عدد الزوار (التكرار)
١٥–	//// //	٧
٢٠–	//// ////	٩
٢٥–	////	٥
٣٠–	//// /	٦
٣٥–	//// ///	٨
٤٠–٤٥	////	٥
المجموع		٤٠

جدول (٢ - ٤)

٤) نحذف عمود العلامات من جدول التفريغ فنحصل على الجدول التكراري ذي الفئات لتوزيع أعمار الزوّار التالي :

فئات الأعمار	عدد الزوّار (التكرار)
١٥-	٧
٢٠-	٩
٢٥-	٥
٣٠-	٦
٣٥-	٨
٤٠-٤٥	٥
المجموع	٤٠

جدول (٣-٦)

وفيما يلي نقدّم بعض المفهومات الإحصائية التي ستفيدنا لاحقاً :

١) في الجدول (٣ - ٦) نسمّي العددين ١٥ و ٢٠ **حدّي الفئة الأولى ١٥-** حيث ١٥ هو **الحدُّ الأدنى** للفئة الأولى ، ٢٠ هو **الحدُّ الأعلى** للفئة الأولى، والعددين ٢٠ و ٢٥ هما حدّا الفئة الثانية ٢٠- حيث ٢٠ هو **الحدُّ الأدنى** للفئة الثانية ، ٢٥ هو **الحدُّ الأعلى** للفئة الثانية، ... وهكذا .

٢) نستنتج من (١) أنّ :

طول الفئة = الحد الأعلى للفئة - الحد الأدنى للفئة (٣ - ٢)

٣) القيمة الواقعة في منتصف الفئة تسمّى **مركز الفئة** . و نلاحظ أنّه بعد توزيع المفردات على الفئات داخل الجدول التكراري تختفي هذه المفردات وتضيع معالمها ، وكلُّ ما يمكن معرفته عن أيٍّ منها أنّها واحدةٌ من مفردات فئة معيّنة في الجدول وللسهولة نفرض أنّها تأخذ قيمة مركز هذه الفئة . ويتمُّ حساب مركز الفئة باستخدام إحدى الصيغتين :

مركز الفئة = $\frac{\text{الحد الأدنى للفئة + الحد الأعلى للفئة}}{٢}$ (٢ − ٣)

مركز الفئة = الحد الأدنى للفئة + $\frac{١}{٢}$ طول الفئة (٢ − ٤)

ففي المثال السابق :مركز الفئة الأولى = $\frac{١٥ + ٢٠}{٢}$ = $\frac{٣٥}{٢}$ = ١٧,٥ (باستخدام الصيغة (٢-٣))

- أوجد مراكز الفئات الأخرى في المثال السابق (باستخدام الصيغة (٢-٤)) .

مثال (٣-٤)

البيانات الآتية توضح كمية الأمطار التي سقطت على مدينة ما خلال ١٠٠ يوم بالمليمتر المكعب.

٧١	١٠٠	٨٠	٩٣	٧٠	١١٥	٦٢	١١٦	٧٨	٩٦
٨٣	٩٤	٧٠	٩٧	٩٥	٩٥	٩٣	٩٦	٩٧	١٢٨
٩٨	٨٤	٦٦	١٠٧	٨٢	٩٧	٧٣	١١٨	٩٨	١٠١
٨٣	١١٠	٩٩	٩٨	٩٢	١٢٥	١١٧	٩٣	٧٣	١١٩
٩٩	٨٥	٨٤	٦٥	١٠٦	٧٧	١٠٨	١١٣	٩٤	٧١
٨٠	٩٠	٧٢	١٢٠	١١١	٩٢	١٠٢	٧٤	٩٩	١١٤
٩١	٩٢	٨٥	١٠١	٨١	٦٧	٩١	١١٢	١٢٢	١٠٩
٨٦	٩٠	٨٦	٨٨	٧٧	٩٥	٧٢	١٠٥	٨٩	٧٥
١٢٩	١٠٢	٨٧	٩١	١٠٣	١٠٣	٨٨	٦٩	٨٦	١٠٤
٧٥	٩٠	٨٧	١٠٩	٩٦	٧٩	٨٢	٨٩	١٠٥	٩٧

أنشئ جدولاً تكرارياً ذا فئات يُمثّل هذه البيانات.

الحل

١) نحددُ المدى :

المدى = أكبر قيمة − أصغر قيمة + ١ = ١٢٩−٦٢+١ = ٦٨

٢) نختار طولاً مناسبًا للفئة ، وفي هذا المثال يكون أنسب طول للفئة هو (١٠) ، وحيث إنَّ ٦٨ ÷ ١٠ = ٦٫٨ يكون عدد الفئات = ٧ فئات وهي : ٦٠− ، ٧٠− ، ٨٠− ، ٩٠− ، ... ، ١٢٠− ١٣٠

٣) نكوّن جدول التفريغ (٣ − ٧) التالي :

جدول التفريغ

فئات كمية الأمطار بالملم٣	العلامـــات	عدد الأيام (التكرار)
٦٠−	𝍸	٥
٧٠−	𝍸 𝍸 𝍸	١٥
٨٠−	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	٢٠
٩٠−	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	٣٠
١٠٠−	𝍸 𝍸 𝍸	١٥
١١٠−	𝍸 𝍸	١٠
١٢٠−١٣٠	𝍸	٥
المجموع		١٠٠

جدول (٣−٧)

٤) نحذف العمود الأوسط (عمود العلامات) من الجدول (٣ − ٧) فنحصل على الجدول (٣ − ٨) و هو الجدول التكراري ذو الفئات المطلوب .

فئات كمية الأمطار بالملم٣	عدد الأيام (التكرار)
٦٠−	٥
٧٠−	١٥
٨٠−	٢٠
٩٠−	٣٠
١٠٠−	١٥
١١٠−	١٠
١٢٠−١٣٠	٥
المجموع	١٠٠

جدول (٣−٨)

مثال (٣-٥)

بالاعتماد على جدول (٣ – ٨) في المثال السابق ، أوجد ما يلي:

أ) عدد الأيام التي تقع كميَّة الأمطار الساقطة فيها ضمن الفئة ٨٠ –

ب) فئة كميَّة الأمطار التي تكرارها ٢٠.

جـ) عدد الأيام التي كميَّة الأمطار الساقطة فيها أقل من ٩٠ ملم^{٣}.

د) عدد الأيام التي كميَّة الأمطار الساقطة فيها ١١٠ ملم^{٣} فأكثر.

الحل

أ) عدد الأيام التي تقع كميَّة الأمطار الساقطة فيها ضمن الفئة ٨٠ – يساوي ٢٠ يومًا

ب) فئة كميَّة الأمطار التي تكرارها ٣٠ هي ٩٠ –

جـ) عدد الأيام التي كميَّة الأمطار الساقطة فيها أقل من ٩٠ ملم^{٣} = ٥+١٥+٢٠ = ٤٠ يومًا

د) عدد الأيام التي كميَّة الأمطار الساقطة فيها ١١٠ ملم^{٣} فأكثر =١٠+ ٥= ١٥ يومًا

تدريب (٣-٤)

قيست أطوال ٤٨ طالبًا بالسنتيمتر في إحدى المدارس الثانوية فكانت على النحو التالي:

١٤٧	١٧١	١٧٣	١٦٥	١٦٧	١٦٨	١٦٧	١٧٨
١٦٣	١٦٧	١٦٩	١٧٧	١٧٢	١٦٩	١٦٩	١٦٤
١٥٧	١٤٩	١٦١	١٦٥	١٤٩	١٧٠	١٥٨	١٥٩
١٦٣	١٤٩	١٤٦	١٧٩	١٥٣	١٥٩	١٤٤	١٦٠
١٧٠	١٧٣	١٦٦	١٥٦	١٥٥	١٦١	١٨٠	١٦٢
١٦٠	١٨٢	١٧٥	١٥٨	١٧٣	١٦٢	١٦٨	١٥٤

كوِّن جدولاً تكراريًا ذا فئات يمثل هذه البيانات .

تمارين (٣-١)

١ تمثّل البيانات التالية الرياضة المفضّلة لدى ٢٥ طالبًا في إحدى المدارس:

كرة السلة	كرة القدم	كرة القدم	السباحة	تنس الطاولة
المشي	السباحة	كرة السلة	المشي	كرة القدم
كرة القدم	كرة القدم	ألعاب قوى	المشي	المشي
كرة القدم	السباحة	المشي	كرة القدم	ألعاب قوى
كرة السلة	تنس الطاولة	السباحة	السباحة	كرة السلة

أنشئ جدولاً تكراريًا بسيطًا لهذه البيانات.

٢ البيانات التالية توضّح المهن المختلفة لثلاثين عاملاً :

حدّاد	نجّار	بنّاء	كهربائي	بنّاء	نجّار
بنّاء	كهربائي	نجّار	بنّاء	كهربائي	نجّار
بنّاء	نجّار	كهربائي	حدّاد	بنّاء	حدّاد
نجّار	بنّاء	حدّاد	كهربائي	حدّاد	كهربائي
كهربائي	حدّاد	نجّار	بنّاء	نجّار	بنّاء

أنشئ جدولاً تكراريًا بسيطًا لهذه البيانات و منه حدّد المهنة التي يزاولها أكبر عدد من العمّال.

٣ تمثّل البيانات التالية عدد الأخطاء التي ارتكبها ٤٥ طالبًا في اختبار مادة التلاوة :

٢	٥	٦	٣	٨	٢	٧	١	١
٥	٧	٦	٣	٣	٨	١	٧	٢
٠	٩	٦	٨	١	٧	٢	٣	٥
٦	٤	٤	٥	٤	١	٩	٧	٠
٧	٥	٠	٤	٤	٤	٣	١	٨

كوّن جدولاً تكراريًا بسيطًا للبيانات السابقة.

٤ بالاعتمـاد على الجدول التكـراري المجاور والـذي يمثّل أوزان ٣٠ طالبًا بالكغم، أوجد ما يلي:

أ) عدد الطلاب الذين وزن كلٍّ منهم ٥٠ كغم .

ب) عدد الطلاب الذين تقلّ أوزانهم عن ٥٤ كغم .

جـ) عدد الطلاب الذين تزيد أوزانهم عن ٥١ كغم .

الوزن بالكغم	التكرار
٤٨	٢
٤٩	٢
٥٠	٦
٥١	٤
٥٢	٧
٥٣	٨
٥٤	١
المجموع	٣٠

٥ فيما يلي درجات ٣٦ طالبًا من طلاب الصف الأول ثانوي في اختبار مادة الرياضيات :

٢٥	٩	٢٦	٢٤	١٠	٢٩	٢٧	٢١	٧
٢٧	١٤	٢٠	١٥	٢٥	١٨	٣٠	٢٢	٢١
٢٨	٢٤	١٥	٢١	٢٦	١٨	١٤	١٤	٣
٢٩	١٥	١٨	٢٩	١٩	٢١	٢٧	٢٤	٢٢

والمطلوب :

أ) كوّن جدولاً تكراريًا ذا فئات يمثّل هذه البيانات مستخدمًا الفئات : ٣ - ٧ ، ٧ - ١١ ، ١١ - ١٥ ، ....

ب) كم عدد الطلاب الذين تقلّ درجة كلٍّ منهم عن ١١ .

٦ البيانات التالية تمثّل الدخل الشهري بالريال لعيّنة مكوّنة من ٣٠ أسرة من أحد المجتمعات :

٣١٠٠	٣٥٠٠	٢٩١٠	٢٤٠٠	٥٥١٠	٦٧٠٠
٢٩٥٠	٢٨١٤	٣٦٢٠	٥٦٠٠	٦٧٦٠	٥٢٢٠
٣٧٨٠	٣٣٣٣	٦٩٩٠	٢٣٩٠	٣٩٠٠	٥٧٠٠
٦٩٠٠	٢٠١٠	٦٢٠٠	٤٥٢٠	٦٧٣٠	٤٦٥٩
٤٢٠٠	٤٦٠٠	٤٦١٠	٢٨٠٠	٥٤٨٣	٢٤٥٠

كوّن جدولاً تكراريًا ذا فئات يمثّل هذه البيانات بحيث يكون طول الفئة = ١٠٠٠ .

٧ الالتزام بقواعد المرور مطلبٌ وطني ومسؤولية مشتركة حفاظًا على سلامة الجميع .وفيما يلي عدد مخالفات المرور اليومية التي ضُبطت في إحدى المدن خلال ٤٠ يومًا :

١٥٠	٧٠	١٠٠	١٣٠	١١٠	١٨٥	١٢٠	٩٠
١٠٠	١٤٠	١٢٥	٧٢	١٢٥	٧٥	١١٠	١٦٠
١٧٢	٩٠	١٣٠	٨٥	١١٠	١٢٠	١٥٥	١١٥
٨٠	١٠٠	٦٨	١٥٥	١٤٠	١٥٠	١١٠	١٨٠
٧١	١٢٠	١٤٠	١٠٥	١٠٠	٨٩	٩٥	١٦٥

كوِّن جدولاً تكراريًا ذا فئات يمثِّل هذه البيانات.

٨ بالاعتماد على الجدول التكراري التالي والذي يمثِّل أعمار ٣٠ عضوًا ينتمون لنادٍ رياضي ، أوجد مايلي :

أ) عدد الأعضاء الذين تقلُّ أعمارهم عن ٢٠ عامًا .

ب) عدد الأعضاء الذين تبلغ أعمارهم ٢٠ عامًا فأكثر .

الفئات	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-٤٠
التكرار	٥	٦	٩	٣	٥	٢

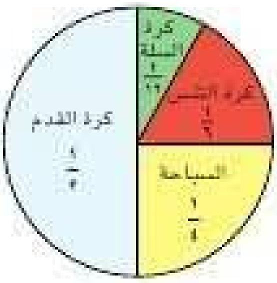
٣ – ٢

التمثيل البياني للتوزيعات التكراريّة
Graphing Data

بعد تنظيم وتلخيص البيانات الإحصائية بواسطة جداول تكرارية مختلفة فإنّه يتمُّ تمثيلها بيانيًا لتسهيل عرض البيانات واستخلاص النتائج ، وهناك عدة طرق للتمثيل البياني منها : المصوَّرات ، الأعمدة ، القطاعات الدائريّة ، المدرّج التكراري والمضلّع التكراري. وفي هذا البند ندرس كلًا من: **القطاعات الدائريّة، المدرّج التكراري، المضلّع التكراري** .

أولًا – القطاعات الدائريّة .

يعدُّ التمثيل بالقطاعات الدائريّة من أكثر المخطّطات البيانيّة شيوعًا ، ففي الوقت الحاضر تظهر هذه الدوائر البيانية في صفحات كثيرة من المجلات والصحف وقد سهّل ذلك الانتشار الواسع لأجهزة الحاسب الآلي المزوّدة ببرامج لهذا الغرض. ويمكننا بسهولة تفسير البيانات الممثّلة بقطاعات دائريّة (وقد سبق لك دراسة ذلك في المرحلة الابتدائية).



شكل (٢ – ١)

فمثلًا : باستخدام التمثيل البياني بالقطاعات الدائريّة في شكل (٢ – ١) والذي يوضّح الرياضة المفضّلة لدى طلاب إحدى المدارس و عددهم ٤٨٠ طالبًا نجد أنّ :

- الرياضة التي تلقى قبولًا أكثر عند طلاب هذه المدرسة هي كرة القدم.
- يفضّل طلاب هذه المدرسة السباحة على كرة التنس.
- عدد طلاب هذه المدرسة الذين يفضّلون كرة السلة $= \frac{١}{١٢} \times ٤٨٠ = ٤٠$ طالباً

أكمل الجدول التالي :

الرياضة المفضَّلة	كرة السلَّة	كرة التنس	السباحة	كرة القدم
عدد الطلاب	٤٠			

ولتمثيل البيانات بالقطاعات الدائريَّة نتَّبع الآتي :

ترسم دائرةٌ ثمَّ نقسمُها إلى قطاعاتٍ دائريَّةٍ بحيث تتناسب مساحة كلّ قطاعٍ مع تكرار الجزء الممثَّل بهذا القطاع مفترضين أنَّ مساحة الدائرة تمثِّل مجموع التكرارات ، وحيث أنَّه كلَّما ازداد قياس زاوية القطاع ازدادت مساحته فإنَّه يمكن رسم القطاعات الدائريَّة بتحديد الزاوية المناظرة لكلّ قطاعٍ وذلك باستخدام العلاقة التالية :

$$\text{زاوية القطاع} = \frac{\text{تكرار الجزء الممثَّل بالقطاع}}{\text{مجموع التكرارات}} \times ٣٦٠^\circ \qquad (٣-٥)$$

وبعد ذلك نستخدم المنقلة لرسم القطاعات الدائريَّة مع ملاحظة أنَّ مجموع زوايا القطاعات يجب أن يساوي ٣٦٠° ، ويتمُّ عادة تمييز كلّ قطاعٍ بلونٍ (أو تظليل) مختلفٍ عن غيره .

مثال (٣-٦)

الجدول التالي يوضِّح المادة المفضَّلة لدى ٣٦ طالبًا في الصف الثاني المتوسط .

المادة المفضَّلة	الرياضيات	العلوم	النصوص	اللغة الإنجليزية	الفقه	المجموع
عدد الطلاب	٦	٤	٩	٣	١٤	٣٦

والمطلوب تمثيل هذه البيانات بالقطاعات الدائريَّة .

الحل

أ) نرسم دائرةً ذات نصف قطر مناسب.

ب) نحسب زاوية القطاع لكل مادة باستخدام العلاقة (٣ – ٥) كما يلي :

زاوية قطاع مادة الرياضيات = $\frac{٦}{٣٦}$ × ٣٦٠° = ٦٠°

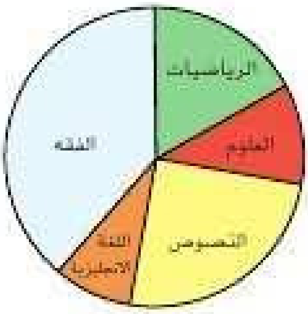
زاوية قطاع مادة العلوم = $\frac{٤}{٣٦}$ × ٣٦٠° = ٤٠°

زاوية قطاع مادة النصوص = $\frac{٩}{٣٦}$ × ٣٦٠° = ٩٠°

زاوية قطاع مادة اللغة الإنجليزية = $\frac{٣}{٣٦}$ × ٣٦٠° = ٣٠°

زاوية قطاع مادة الفقه = $\frac{١٤}{٣٦}$ × ٣٦٠° = ١٤٠°

جـ) نرسم القطاعات السابقة على الدائرة باستخدام المنقلة ونلوّن كلاً منها بلون يميّزها عن بقية القطاعات كما في الشكل (٢ – ٢).



شكل (٢-٢)

تدريب (٣-٥)

يبيّن الجدول التالي عدد زوّار متحف خلال أحد الأسابيع ، والمطلوب تمثيل هذه البيانات بالقطاعات الدائريّة .

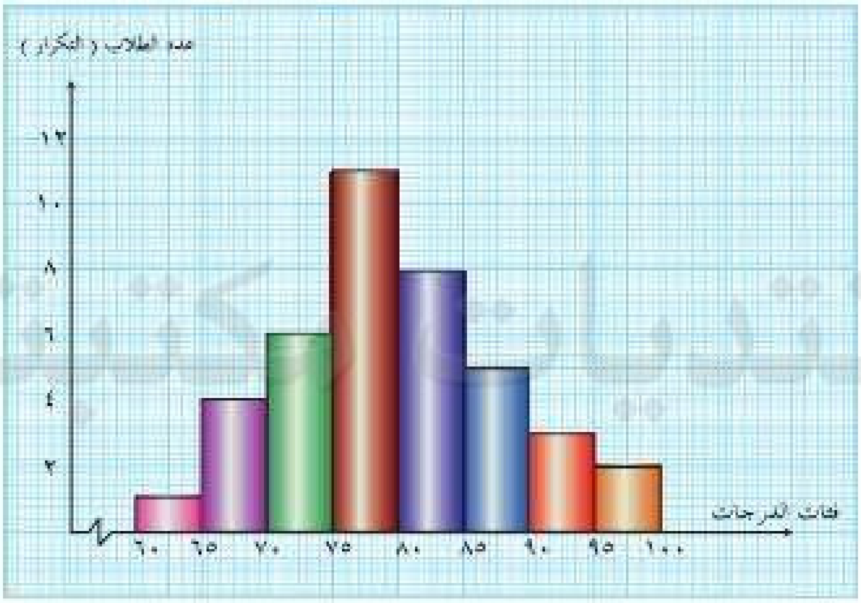
اليوم	السبت	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة	المجموع
عدد الزوّار	٣٠	٥٠	٤٠	٦٠	٧٠	٨٠	٧٠	٤٠٠

ثانياً - المدرَّج التكراري .

يستخدم المدرَّج التكراري لتمثيل البيانات المبوَّبة في جدول تكراري ذي فئات ، وهو عبارة عن مجموعة من المستطيلات المتلاصقة تمثِّل قاعدة كلِّ مستطيلٍ منها طول الفئة ، ويمثِّل ارتفاعه تكرار هذه الفئة .

مثال (٣-٧)

الشكل (٣ - ٢) هو لمدرَّج تكراري يمثِّل الدرجات النهائيَّة التي حصل عليها ٤٠ طالبًا في مادة الرياضيات .



شكل (٣-٢)

وإذا تأمَّلت هذا المدرَّج فإنَّه يمكنك تفسير البيانات الممثَّلة فيه ، فمثلاً يمكنك بسهولة استنتاج أنَّ :

- عدد الطلاب الذين تقع درجاتهم ضمن الفئة ٧٠ - ٧٥ يساوي ٦ .
- طالبًا واحدًا فقط حصل على درجةٍ تقع ضمن الفئة ٦٠ - ٦٥ .

و الآن أكمل الفراغات التالية بالإفادة من شكل (٣ - ٣) :

- فئة الدرجات التي حصل عليها أكبر عدد من الطلاب هي ....
- عدد الطلاب الذين حصلوا على ٩٠ درجة فأكثر يساوي ....

تدريب (٣-٦)

اكتب الجدول التكراري الممثَّل بالمدرَّج التكراري في الشكل (٣ - ٣)

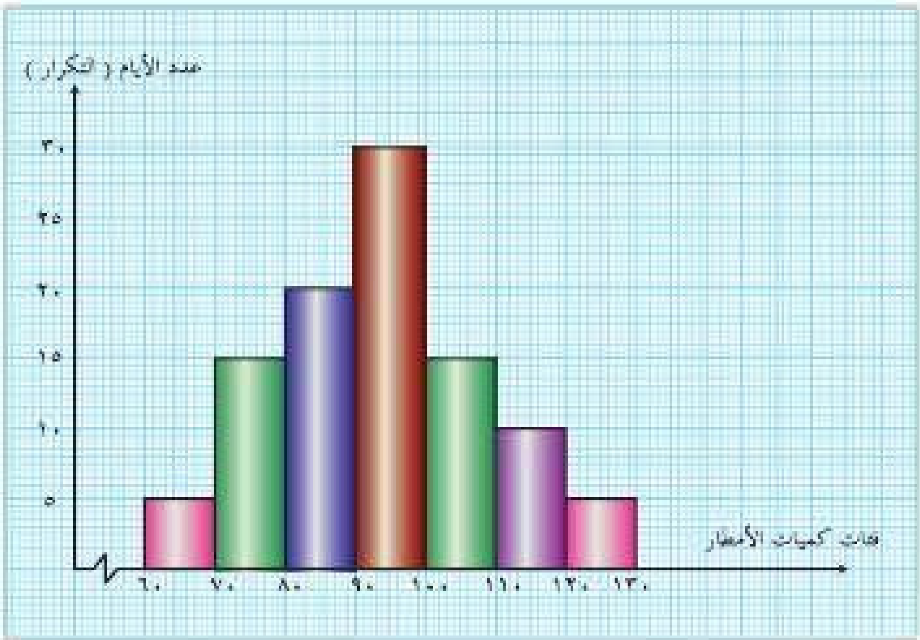
ولرسم المدرَّج التكراري نتَّبع الخطوات الآتية:

١) نرسم محورين متعامدين ، يخصَّص المحور الأفقي للفئات والمحور الرأسي للتكرارات.

٢) نُقسِّم المحـور الأفقي إلى أقسام متساوية يمثِّل كلُّ قسمٍ طول الفئة ، وندرِّج المحور الرأسي ابتداءً من الصفر بحيث يسمح بظهور أكبر تكرار في الجدول التكراري.

٣) نرسم مستطيلاً على كلِّ فئة ، طول قاعدته يساوي طول الفئة و طول ارتفاعه يساوي تكرار هذه الفئة وبذلك نحصل على المدرَّج التكراري.

فـإذا أردنا رسم المـدرج التكراري للبيانات الموضَّحة في جدول (٣ - ٨) ، نجد أن التوزيع يشتمل علـى سبع فئـات متساوية الطول ولذلك نقسِّـم المحور الأفقي إلى سبعة أقســام متساوية، وندرِّجه ابتداءً من ٦٠ وحتى ١٣٠ ، ثمَّ ندرِّج المحور الرأسي ابتداءً من الصفر وحتى ٣٠ وهو أكبر تكرار في الجدول ، وبتطبيق الخطوة (٣) نحصل على المدرَّج التكراري كما في الشكل (٣ - ٤) .



شكل (٣ - ٤)

ثالثاً- المضلّع التكراري .

كمـا هـو الحال في المدرّج التكـراري فإنّ المضلّع التكـراري يُستخدم لتمثيل البيانـات المبوّبة في جدولٍ تكراري ذي فئات و يمكن الإفادة منه في تفسير هذه البيانات.

ولرسم المضلّع التكراري نتّبع الخطوات الآتية:

١) نرسم محورين متعامدين و نقسّمهما كما في المدرّج التكراري .

٢) نُمثّل لكلّ فئةٍ نقطة إحداثيها السيني (الأفقي) مركز الفئة وإحداثيها الصادي (الرأسي) هو التكرار المناظر لهذه الفئة.

٣) نصل النقط بقطعٍ مستقيمة فنحصل على المضلّع التكراري .

فـإذا أردنـا رسـم المضلّع التكراري للبيانـات الموضّحة في جدول (٣ - ٨) سنحتـاج إلى إنشاء جدول يُوضّح الفئات و مركز كلّ فئةٍ و التكرار المناظر كما في جدول (٣ - ٩)

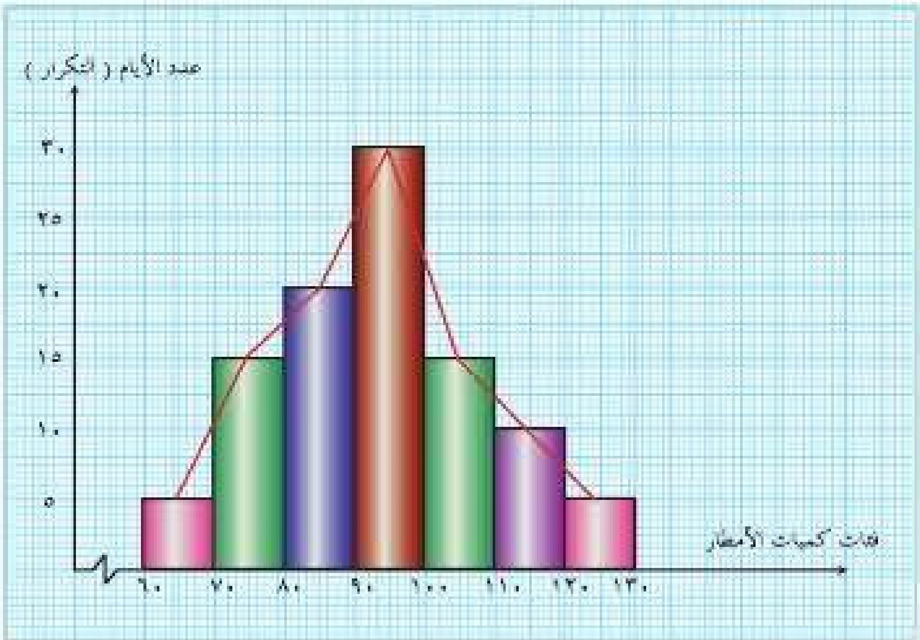
فئات كميات الأمطار	مراكز الفئات	التكرار
٦٠-	٦٥	٥
٧٠-	٧٥	١٥
٨٠-	٨٥	٢٠
٩٠-	٩٥	٣٠
١٠٠-	١٠٥	١٥
١١٠-	١١٥	١٠
١٢٠-١٣٠	١٢٥	٥

جدول (٣ - ٩)

وبتطبيق الطريقة السابق ذكرها نحصل على المضلّع التكراري كما في الشكل (٣ - ٥) .

شكل (٣-٥)

ويمكن رسم المضلّع التكراري من المدرّج التكراري، وذلك بتحديد النقط التي تقع في منتصف القواعد العليا لمستطيلات المدرّج التكراري ثمّ نصل هذه النقط بقطعٍ مستقيمة ،كما في الشكل (٣ - ٦) .



شكل (٣-٦)

تدريب (٣-٧)

المضلّع التكراري في الشكل (٣ - ٧) يوضّح توزيع الأجر اليومي بالريال لعدد من العمال في إحدى المنشآت .

شكل (٣ -٧)

أ) بالإفادة من هذا المضلّع أكمل الفراغ في كلٍّ مما يلي:

١ الأجر اليومي لأكبر عدد من العمّال يقع ضمن الفئة ....

٢ فئتا الأجر اللتان لهما التكرار نفسه هما .... وَ ....

٣ عدد العمّال الذين أجرهم اليومي أقل من ٣٠ ريالاً يساوي ....

ب) ارسم المدرّج التكراري لهذا التوزيع على الشكل نفسه .

تمارين (٣-٢)

١ إذا كان دخل أسرة سعودية ٦٠٠٠ ريال شهريًا ، وكانت ميزانية الأسرة لتوزيع هذا الدخل على مجالات الإنفاق حسب الجدول التالي :

مجال الإنفاق	المسكن	المأكل	الملبس	فواتير	مواصلات	مصروفات أخرى	ادخار
قيمة الإنفاق	١٥٠٠	١٥٠٠	٥٠٠	٤٠٠	٦٠٠	٥٠٠	١٠٠٠

مثّل هذه البيانات باستخدام القطاعات الدائريّة.

٢ الجدول التالي يوضّح تقسيم أحد الموظفين لوقته خلال ٢٤ ساعة :

تقسيم الوقت	في النوم	في العمل	في ممارسة الرياضة	في القراءة	أنشطة أخرى
عدد الساعات	٧	٨	٢	٣	٤

مثّل هذه البيانات باستخدام القطاعات الدائريّة.

٣ الجدول التالي يبيّن مساحة محيطات العالم بملايين الكيلومترات المربّعة :

المحيط	الهادي	الأطلنطي	الهندي	القطبي الجنوبي	القطبي الشمالي
المساحة	١٣٨,٤	١٠٦,٧	٧٢,٨	١٩,٧	١٢,٤

مثّل هذه البيانات باستخدام القطاعات الدائريّة.

٤ الجدول التالي يبيّن أوزان ١٠٠ موظف بالكيلوغرام بإحدى الشركات.

فئات الأوزان	٥٠-	٥٦-	٦٢-	٦٨-	٧٤-	٨٠-	٨٦-٩٢
عدد الموظفين	٥	١٥	٢٠	٣٠	١٥	١٠	٥

مثّل هذه البيانات مستخدمًا كلاً من :

أ) المدرّج التكراري .

ب) المضلّع التكراري .

٥ إذا كان الجدول التكراري التالي يمثّل أعداد السيّارات حسب الحمولة بالراكب والتي عبرت أحد المنافذ الحدوديّة قاصدةً مكة المكرمة في موسم الحجّ في المدّة بين ٢٠ و ٣٠ من ذي القعدة في أحد الأعوام.

فئات أعداد الركّاب	٩-	١٨-	٢٧-	٣٦-	٤٥-
عدد السيّارات	١٢	٣٦	٤٠	٢٠	١٢

أ) ارسم المدرّج التكراري والمضلّع التكراري لهذه البيانات .

ب) أوجد عدد السيّارات التي تحمل ٢٧ راكبًا فأكثر .

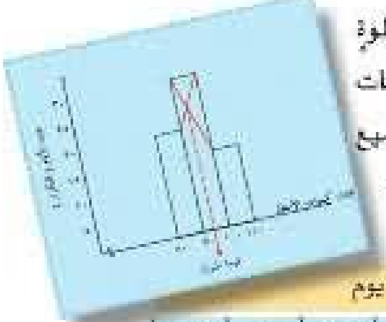
٦ يوضّح الجدول التالي توزيع درجات الحرارة في إحدى المدن في ١٢٠ يومًا .

فئات درجات الحرارة	٨-	١٢-	١٦-	٢٠-	٢٤-	٢٨-	٣٢-	٣٦-٤٠
عدد الأيام	٦	١٢	٢٠	٣٠	٢٤	١٦	٨	٤

مثّل البيانات السابقة بالمدرّج التكراري و المضلّع التكراري على الرسم نفسه .

٣ـ٣

مقاييــس النـزعة المركزيّة
Measures of Central Tendency



بعد جمع البيانــات وعرضها جدوليًا وبيانيًا، ننتقل إلى خطوة مهمّة من خطوات الدراسة الإحصائيّة وهي اختصار البيانات بإيجاد مقياس يمثّل الظاهرة محلّ الدراســة (يعبّر عن جميع قيمها) ويستخدم للمقارنة بينها و بين الظواهر الأخرى.

كمية الأمطار الهاطلة على مدينة خلال ١٠٠يوم

الكمية بالملم²	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٨٠-	٩٠-	١٠٠-	١١٠-	١٢٠-١٣٠
عدد الأيام	٥	١٥	٢٠	٣٠	١٥	١٠	٥	١٠٠

وبالنظـر إلـى مفردات أيّ ظاهرة (مثل ظاهــرة دخل الفرد في مجتمع ما، أو عــدد الطلاب في المدارس الثانويّـة، أو كميّـة الأمطار بالمليمتر المكعّـب -التي يمنّ اللّه بها على عباده -فـي إحدى مدن المملكة، أو أطـوال أو أوزان أشخاصـ فـي منطقةٍ ما ...إلخ) نلاحـظ أنّ غالبيّة هذه المفـردات- بتقديرٍ من اللّه عزّ وجـل- تميـل إلـى التجمّع أو التمركز حول قيمــة معيّنة، ويقلّ هــذا الميل كلّما ابتعدنا عـن هذه القيمة من الجانبيــن بمعنــى أنّ هناك نزعة تجعل هذه المفردات تتركّز حول هــذه القيمة.هذه النزعة تُسمّى **النزعة المركزيّة** والقيمة التي تتركّز المفردات حولها تُسمّى **القيمة المتوسّطة للظاهرة أو متوسّط الظاهرة**

فمثلاً : الأفـراد الذين نقابلهم في حياتنا اليومية مختلفون في أطوالهم ولكنّنا نجد أنّ معظمهم متوسّطي الطول وعددًا قليلاً منهم يختلف عن المتوسّط زيادةً أو نقصًا إلاّ أنّنا لا نكاد نقابل الأقزام أو العمالقة إلا نـادرًا وينطبـق الأمر نفسه على ظاهرة الوزن و الذكاء وحدّة البصــر ..., تلك سنّة اللّه في خلقه ولن نجد لسنّته تبديلاً. ولتحديد القيمة المتوسّطة توجد عدّة مقاييس ابتكرها الإحصائيون تُعرف باسم **مقاييس النزعة المركزيّة أو المتوسّطات**، أهمّها:

١) الوسط الحسـابيّ (أو المتوسّط الحسابيّ) ويعدّ من أكثر المتوسّطات شيوعًا.

٢) الوسيط.

٣) المنوال.

ولا يمكـن تفضيـل أحـد هذه المقاييس على الآخر، فلـكلٍّ منها مزاياه و عيوبه، ويلاحـظ أنّه إذا ذكر لفظ المتوسّط فقط دون تحديد فيقصد به الوسط الحسابي.

أولاً - الوسط الحسابيّ

تعريف (٣ - ١)

الوسط الحسابيّ لمجموعة من القيم هو القيمة التي لو حلّت محلّ قيمة كلّ مفردة من مفردات الظاهرة لكان مجموع القيم الجديدة مساويًا لمجموع القيم الأصليّة.

ومن ذلك نرى أنّ الوسط الحسابيّ يساوي مجموع القيم مقسومًا على عددها.

طرق حساب الوسط الحسابيّ

لحساب الوسط الحسابيّ نميّز بين حالتين هما:

حالة البيانات غير المبوّبة (أي التي لم يتمّ وضعها في جداول تكراريّة) ، وحالة البيانات المبوّبة (أي التي تمّ وضعها في جداول تكراريّة بسيطة أو ذات فئات).

وحيث إنّ :

$$\text{الوسط الحسابيّ} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$$

فإنّنا للتعبير عن هذا القانون بصيغة رمزيّة في الحالات جميعها ، نرمز للوسط الحسابي بالرمز $\overline{س}$ ويُقرأ: س شرطة، ولقيم الظاهرة بالرمز س ، وللمجموع بالرمز $\sum$.

أولاً - في حالة البيانات غير المبوّبة

إذا كان عدد مفردات الظاهرة = ن فإنّ قانون الوسط الحسابيّ يكتب بالصيغة الرمزيّة التالية:

$$\overline{س} = \frac{\sum س}{ن} \qquad (٣ - ٦)$$

حيث $\sum$ س تعبّر عن مجموع قيم الظاهرة.

مثال (٣-٨)

أوجد الوسط الحسابيَّ لدرجات عشرة طلاب في مادة الرياضيَّات من البيانات التالية:

٨٢، ٧٤، ٧٧، ٥٥، ٧٤، ٩٣، ٦١، ٩٠، ٨٦، ٥٨

الحل

الوسط الحسابيُّ لدرجات الطلاب هو:

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$$

$$= \frac{٨٢ + ٧٤ + ٧٧ + ٥٥ + ٧٤ + ٩٣ + ٦١ + ٩٠ + ٨٦ + ٥٨}{١٠}$$

$$= \frac{٧٥٠}{١٠} = ٧٥ \text{ درجة}$$

ثانيًا - في حالة البيانات المبوَّبة

أ) البيانات المبوَّبة في جدولٍ تكراريٍّ بسيط

مـن المعلوم أنَّ لكلِّ قـراءةٍ في الجدول التكـراريِّ البسيط تكرارًا مقابلًا لها، لذا فـإنَّ مجموع القيم يسـاوي مجموع حواصل ضرب القراءات في تكراراتها.

أي أنَّ الوسط الحسابيُّ = $\frac{\text{مجموع حواصل ضرب القيم في تكراراتها}}{\text{مجموع التكرارات}}$

فإذا رمزنا للتكرارات المقابلة لقيم الظاهرة بالرمز ك ، فإنَّ قانون الوسط الحسابيِّ يُكتب بالصيغة الرمزيَّة التالية:

$$\bar{س} = \frac{\sum س ك}{\sum ك} \qquad (٣-٧)$$

مثال (٣-٩)

تبرَّع ٤٠ طالبًا مِمَّا ادَّخروه من مصروفهم لعملٍ خيريٍّ كما في الجدول التالي:

المبلغ بالريال	٥٠	٦٠	٧٠	٨٠	٩٠	١٠٠	المجموع
عدد الطلاب	٣	٦	٩	٩	٨	٥	١٠٠

احسب الوسط الحسابيَّ لِما تبرَّع به الطلاب.

الحل

المبلغ بالريال (س)	عدد الطلاب التكرار (ك)	المبلغ × عدد الطلاب (س × ك)
٥٠	٣	١٥٠
٦٠	٦	٣٦٠
٧٠	٩	٦٣٠
٨٠	٩	٧٢٠
٩٠	٨	٧٢٠
١٠٠	٥	٥٠٠
المجموع	$\sum$ ك = ٤٠	$\sum$ س ك = ٣٠٨٠

جدول (٣-١٠)

الوسط الحسابيُّ لِما تبرع به الطلاب هو:

$$\bar{س} = \frac{\sum س ك}{\sum ك} = \frac{٣٠٨٠}{٤٠} = ٧٧ \text{ ريال}$$

تدريب (٣-٨)

احسب الوسط الحسابي للبيانات الموضَّحة بالجدول (٣ - ٤)

ب) **البيانات المبوّبة في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئات**

في هذه الحالة تكون مراكز الفئات و التكرارات بمثابة جدولٍ تكراري بسيط و بالتالي فإنّ قانون الوسط الحسابيّ يُكتب بالصيغة (٣-٧) نفسها، حيث س تمثّل قيم مراكز الفئات والتي تعبّر عن قيم الظاهرة.

مثال (٣-١٠)

احسب الوسط الحسابيّ لكميّة الأمطار التي سقطت على مدينةٍ ما خلال ١٠٠ يومٍ بالمليمتر المكعب والموضّحة بياناتها بالجدول (٣ – ٨)

فئات كميّة الأمطار بالملم^3	عدد الأيام (التكرار = ك)	مراكز الفئات (س)	س × ك
-٦٠	٥	٦٥	٣٢٥
-٧٠	١٥	٧٥	١١٢٥
-٨٠	٢٠	٨٥	١٧٠٠
-٩٠	٣٠	٩٥	٢٨٥٠
-١٠٠	١٥	١٠٥	١٥٧٥
-١١٠	١٠	١١٥	١١٥٠
١٢٠-١٣٠	٥	١٢٥	٦٢٥
المجموع	١٠٠	ــــــ	٩٣٥٠

جدول (٣-١١)

الوسط الحسابيّ لكميّة الأمطار هو:

$$\bar{س} = \frac{\sum س\,ك}{\sum ك} = \frac{٩٣٥٠}{١٠٠} = ٩٣{,}٥ \text{ ملم}^3$$

ثانيًا- الوسيط

تعريف (٣- ٢)

الوسيـط لمجموعةٍ من القيم هو القيمة التي تتوسَّط هـذه القيم بعد ترتيبها تصاعديًا أو تنازليًا.

من هذا التعريف، نلاحظ أنَّ عدد القيم الأصغر من الوسيط يساوي عدد القيم الأكبر منه.

طرق حساب الوسيط

أولًا- في حالة البيانات غير المبوَّبة

لإيجاد الوسيط لمجموعة من القيم عددها ن نتَّبع الآتي:

١) نرتب هذه القيم ترتيبًا تصاعديًا أو تنازليًا.

٢) نأخـذ القيمـة التـي تقع في الوسط تمامًا إذا كان عدد القيم ن فرديًا، أمَّا إذا كان ن زوجيًا فإنَّنا نأخذ الوسط الحسابيَّ للقيمتين المتوسِّطتين، فتكون هي قيمة الوسيط.أي أنَّ

قيمة الوسيط =
- القيمة التي ترتيبها $\frac{ن + ١}{٢}$ إذا كان ن فرديًا
- الوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢} + ١$ إذا كان ن زوجيًا

(٣-٨)

مثال (٣-١١)

أوجد الوسيط لأوزان تسع طلاب بالكيلوغرام إذا كانت أوزانهم هي :

٦٢، ٥٠، ٤٩، ٥٥، ٤٨، ٥٣، ٥١، ٥٧، ٥٨

الحل

نرتّب الأوزان تصاعديًا كالتالي:

٤٨، ٤٩، ٥٠، ٥١، ٥٣، ٥٥، ٥٧، ٥٨، ٦٢

وحيث إنّ عدد الأوزان $ن = ٩$ وهو عدد فرديّ، فإنّنا نأخذ القيمة التي ترتيبها

$\frac{٩ + ١}{٢} = ٥$ وهي ٥٣ وبذلك يكون الوسيط = ٥٣ كيلوغرام

لاحظ أنّ:

١) عدد القيم الأصغر من ٥٣ يساوي عدد القيم الأكبر منه

$\underbrace{٤٨،\ ٤٩،\ ٥٠،\ ٥١}$، ٥٣، $\underbrace{٥٥،\ ٥٧،\ ٥٨،\ ٦٢}$

الوسيط

٢) يمكن إيجاد الوسيط بترتيب الأوزان تنازليًا كالتالي:

٦٢، ٥٨، ٥٧، ٥٥، ٥٣، ٥١، ٥٠، ٤٩، ٤٨

ثم بإكمال الحلّ كما سبق.

مثال (٣-١٢)

أوجد الوسيط لدرجات الطلاب في مادّة الرياضيّات و المعطاة في المثال (٣ - ٨) وهي

٨٢، ٧٤، ٧٧، ٥٥، ٧٤، ٩٣، ٦١، ٩٠، ٨٦، ٥٨

الحل

نرتّب الدرجات تصاعديًا كما يلي:

٥٥، ٥٨، ٦١، ٧٤، ٧٤، ٧٧، ٨٢، ٨٦، ٩٠، ٩٣

وحيث إنّ عدد الطلاب $ن = ١٠$ وهو عدد زوجيّ

فإنّنا نأخذ من القيم المرتّبة، الدرجتين اللتين ترتيبهما $\frac{١٠}{٢} = ٥$ ، $\frac{١٠}{٢} + ١ = ٦$

وبذلك يكون الوسيط هو متوسّط الدرجتين ٧٤ ، ٧٧

أي أنّ الوسيط $= \frac{٧٤ + ٧٧}{٢} = \frac{١٥١}{٢} = ٧٥,٥$ درجة

ثانيًا- في حالة البيانات المبوّبة

ترتيب الوسيط في هذه الحالة عبارة عن نصف مجموع التكرارات (سواءٌ كان هذا المجموع فرديًا أو زوجيًا) أي أنَّ

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\sum ك}{٢} \qquad (٢-٩)$$

أ) البيانات المبوّبة في جدول تكراريٍّ بسيط

لحساب الوسيط لبيانات مبوّبة في جدولٍ تكراريٍّ بسيط نتّبع الآتي:

١ نوجد ترتيب الوسيط.

٢ نجمع التكرارات على التوالي بدءًا من تكرار أول قيمة في الجدول وحتى نصل إلى أقلِّ مجموع أكبر من أو يساوي ترتيب الوسيط.

٣ نعيِّن القيمة المقابلة للتكرار الأخير في التجميع فتكون هي قيمة الوسيط.

مثال (٣-١٣)

الجدول الآتي يوضّح الدخل الأسبوعيَّ لثمانين عاملاً.

الدخل الأسبوعي بالريال	٢٥٠	٣٠٠	٣٥٠	٤٠٠	٤٥٠	٥٠٠	المجموع
عدد العمّال (التكرار)	٣	٩	١٤	٢٢	١٢	١٠	٨٠

أوجد الوسيط للدخل الأسبوعيِّ لهؤلاء العمّال.

الحل

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\sum ك}{٢} = \frac{٨٠}{٢} = ٤٠$$

أقلُّ مجموعٍ أكبر من أو يساوي ترتيب الوسيط هو $٣ + ٩ + ١٤ + ٢٢ = ٥٨$

لاحظ أنَّ:

$٣ + ٩ = ١٢ < ٤٠$ ، $١٢ + ١٤ = ٢٦ < ٤٠$ ، $٢٦ + ٣٢ = ٥٨ \geqslant ٤٠$

القيمة التي تقابل التكرار ٢٢ (التكرار الأخير في الجمع) هي ٤٠٠

إذًا الوسيط = ٤٠٠ ريال

تدريب (٣-٩)

في المثال (٣ - ٩) أوجد الوسيط لما تبرّع به الطلاب.

ب) البيانات المبوبة في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئات

لحساب الوسيط في هذه الحالة نعتمد على ما يُسمّى **بجدول التكرار المتجمّع الصاعد**.
وفيما يلي ستقدّم طريقة إنشاء وتمثيل جداول التكرار المتجمّع الصاعد.

- **إنشاء جداول التكرار المتجمّع الصاعد**

يتمُّ إنشاء الجدول التكراريّ المتجمّع الصاعد من جدولٍ تكراريٍّ ذي فئات بإضافة عمودين على الجدول التكراريّ الأصليّ، الأوّل منهما يخصّص لكتابة الحدود العليا للفئات، حيث يكتب أمام كلّ فئة الحدُّ الأعلى مسبوقًا بكلمة (أقل من)، أمّا العمود الآخر فيخصّص لكتابة التكرارات المتجمّعة، حيث يكتب أمام كلّ فئةٍ ناتج جمع تكرار هذه الفئة على مجموع تكرارات الفئات السابقة لها، وهذا الناتج هو التكرار المتجمّع الصاعد لهذه الفئة و الذي يمثّل عدد المفردات التي تقلُّ قيمها عن الحدّ الأعلى لهذه الفئة، ومن ذلك يتّضح أنّ التكرارات المتجمّعة تكون في ازديادٍ مستمر وهذا هو سبب تسمية الجدول التكراري المتجمّع الصاعد، وأنّ التكرار المتجمّع الصاعد المقابل للفئة الأخيرة يكون مساويًا لمجموع التكرارات الأصليّة. وعلى سبيل المثال:

إذا كان الجدول الآتي جدولاً تكراريًا لعدد العمّال في مصنعٍ ما حسب فئات العمر.

فئات العمر	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-٤٥	المجموع
عدد العمّال (التكرار)	٤	١٥	٣٩	٢٩	٥	٩٢

فإنّ الجدول التكراريّ المتجمّع الصاعد لعدد العمّال في المصنع حسب فئات العمر هو الجدول (٢-١٢) التالي:

الفئات	التكرار (ك)	الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمّع الصاعد
٢٠-	٤	أقلّ من ٢٥	٤
٢٥-	١٥	أقلّ من ٣٠	١٩ = ١٥ + ٤
٣٠-	٣٩	أقلّ من ٣٥	٥٨ = ٣٩ + ١٩
٣٥-	٢٩	أقلّ من ٤٠	٨٧ = ٢٩ + ٥٨
٤٠-	٥	أقلّ من ٤٥	٩٢ = ٥ + ٨٧

جدول (٢-١٢)

تمثيل جداول التكرار المتجمّع الصاعد بيانياً

لتمثيل جدول التكرار المتجمّع الصاعد نتّبع الخطوات التالية:

١ نرسم محورين متعامدين ونخصّص المحور الأفقي للحدود العليا للفئات، والمحور الرأسي للتكرارات المتجمّعة الصاعدة، مع مراعاة أخذ مقياس رسم مناسب بحيث يتّسع المحور الرأسي لأكبر تكرار متجمّع.

٢ نحدّد النقاط التي إحداثيها الأفقي هو الحدُّ الأعلى للفئة وإحداثيها الرأسي هو التكرار المتجمّع الصاعد.

٣ نصل بين هذه النقاط بمنحنٍ ممهّد يُسمّى المنحني المتجمّع الصاعد.

والشكل (٣ - ٨) يبيّن المنحني المتجمّع الصاعد للجدول (٣ - ١٢)

شكل (٣ - ٨)

ملحوظة (٣-١)

١) إنَّ المنحنى المتجمِّع الصاعد هو منحنٍ تحدِّده النقاط (س ، ص) حيث س هو الحدُّ الأعلى للفئة، ص هو التكرار المتجمِّع الصاعد المقابل له.

٢) يمكننا من المنحنى المتجمِّع الصاعد الحصول على بعض النتائج التي من أجلها يتمُّ تكوين الجدول التكراري المتجمِّع الصاعد- فمثلاً- في الشكل (٣ – ٨) لمعرفة عدد العمَّال الذين تقلُّ أعمارهم عن ٢٩ عامًا نقيم عمودًا على المحور الأفقي عند النقطة ٢٩ يقابل المنحنى المتجمِّع الصاعد عند النقطة أ، نمدُّ من عندها مستقيمًا يوازي المحور الأفقي، ويقابل المحور الرأسي في النقطة ب، فتكون هي عدد العمَّال المطلوب. وبالعكس، إذا أردنا معرفة الحدِّ الأعلى لأعمار العمَّال الذين عددهم ٧٦ فإنَّنا نرسم مستقيمًا من النقطة ٧٦ على المحور الرأسي موازيًا المحور الأفقي ليقابل المنحنى في النقطة جـ، فنسقط منها عمودًا على المحور الأفقي ليقابله في نقطة د، فتكون هي الحدُّ الأعلى المطلوب للأعمار.

لعلَّك أدركت ممَّا سبق أنَّ جدول التكرار المتجمِّع الصاعد لبيانات مبوَّبة هو بمثابة ترتيب تصاعديٍّ لهذه البيانات؛ لذا فإنَّه من الممكن تعريف الوسيط لبيانات مبوَّبة بأنَّه القيمة التي تكرارها المتجمِّع الصاعد يساوي ترتيب الوسيط. وهناك طريقتان لحساب الوسيط في هذه الحالة وهما:

١) الطريقة الحسابيَّة

٢) الطريقة البيانيَّة (بالرسم)

وسنوضِّح هاتين الطريقتين من خلال المثال التالي:

مثال (٣-١٤)

لإيجاد الوسيط لكميَّة الأمطار التي سقطت على مدينةٍ ما خلال ١٠٠ يومٍ و التي بياناتها في الجدول التكراريِّ (٣ – ٨)

بالطريقة الحسابيَّة

أ) نوجد ترتيب الوسيط

وهنا يكون ترتيب الوسيط $= \frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$

ب) تكوّن جدول التكرار المتجمّع الصاعد، كما يلي:

فئات كمية الأمطار	عدد الأيام التكرار (ك)	الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمّع الصاعد
-٦٠	٥	أقل من ٧٠	٥
-٧٠	١٥	أقل من ٨٠	٢٠
-٨٠	٢٠	أقل من ٩٠	٤٠
		الوسيط	٥٠ ترتيب الوسيط
-٩٠ الفئة الوسيطية	٣٠	أقل من ١٠٠	٧٠
-١٠٠	١٥	أقل من ١١٠	٨٥
-١١٠	١٠	أقل من ١٢٠	٩٥
١٢٠-١٣٠	٥	أقل من ١٣٠	١٠٠

جدول (٣-١٣)

جـ) نعيّــن من الجدول التكراريّ المتجمّع الصاعد، القيمة المقابلة للتكرار المتجمّع ٥٠ (ترتيب الوسيط)، لتكون هي قيمة الوسيط، فإن لـم تجد هذا التكرار في الجدول (كما في مثالنا هذا)، وجدناه بين تكرارين وهنا نجده بين ٤٠، ٧٠، وهذان التكراران يقابـلان العددين ٩٠، ١٠٠ الممثّلان لحـدّي الفئة التي تحوي الوسيط والمسمّاة بالفئة الوسيطيّة وهي (-٩٠)

لاحظ أنّ:

كميّة الأمطار كانت أقلّ من ٩٠ ملـم٣ في الأيام الـ ٤٠ الأولى

كميّة الأمطار تكون أقلّ من **قيمة الوسيط** في الأيام الـ ٥٠ الأولى

كميّة الأمطار كانت أقلّ من ١٠٠ ملـم٣ في الأيام الـ ٧٠ الأولى

د) توجد الوسيط من التناسب التالي :

$$\frac{\text{الوسيط} - ٩٠}{١٠٠ - ٩٠} = \frac{٥٠ - ٤٠}{٧٠ - ٤٠}$$

$$\Leftarrow \quad \frac{\text{الوسيط} - ٩٠}{١٠} = \frac{١٠}{٣٠}$$

(لاحظ أنَّ ١٠٠ − ٩٠ = ١٠ = طول الفئة الوسيطية، ٧٠ − ٤٠ = ٣٠ = تكرار الفئة الوسيطيّة)

⟸ الوسيط − ٩٠ = $\frac{١٠٠}{٣٠}$ ⟸ الوسط = ٣,٣ + ٩٠ = ٩٣,٣ ملم٣

وعامةَ الأمر فإنّ:

$$\frac{\text{الوسيط} - \text{الحدُّ الأدنى للفئة الوسيطيّة}}{\text{طول الفئة الوسيطيّة}} = \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار المتجمّع المقابل للحدّ الأدنى للفئة الوسيطيّة}}{\text{تكرار الفئة الوسيطيّة}}$$

ومن هذا التناسب يمكننا استنتاج القانون التالي لحساب الوسيط.

$$\text{الوسيط} = \text{الحدُّ الأدنى للفئة الوسيطيّة} + \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار المتجمّع المقابل للحدّ الأدنى للفئة الوسيطيّة}}{\text{تكرار الفئة الوسيطيّة}} \times \text{طول الفئة الوسيطية}$$

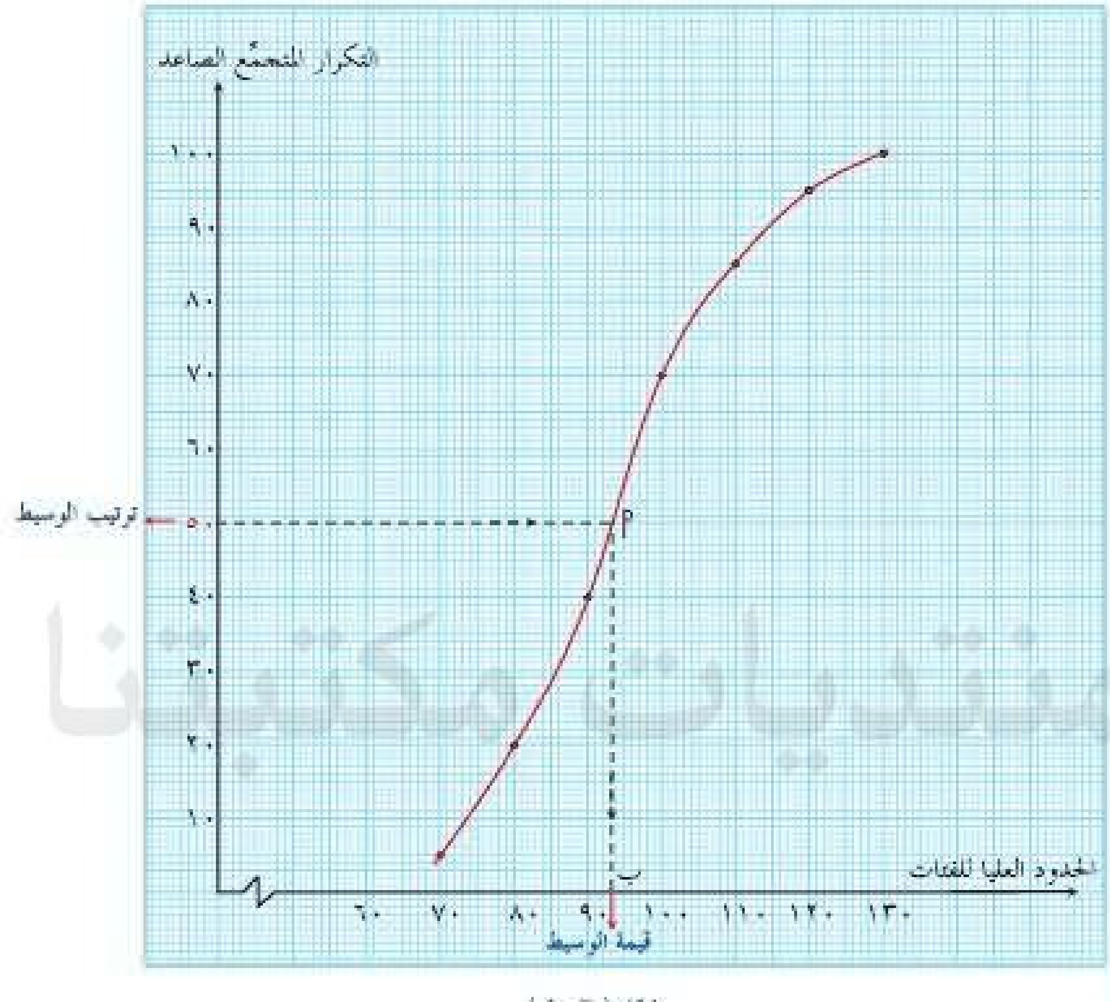
(٣ − ١٠)

الطريقة البيانيّة (بالرسم)

توجد الوسيط بالرسم من المنحنى المتجمّع الصاعد كما يلي:

أولاً- نعيّن ترتيب الوسيط ($\frac{\sum ك}{٢}$) على المحور الرأسيّ. (وهو هنا ٥٠).

ثانياً- نرسم من نقطة ترتيب الوسيط مستقيمًا أفقيًا يقطع المنحنى المتجمّع الصاعد في نقطة م، ونسقط منها عمودًا على المحور الأفقي يقابله في نقطة ب، فتكون هي قيمة الوسيط (وهي هنا ٩٢ ملم٣ تقريبًا) ، والشكل (٣ - ٩) يوضّح طريقة إيجاد الوسيط لهذا المثال.



شكل (٣-٩)

ملحوظة (٣-٢)

علـى ضوء مـا سبق يمكننا القـول بأنّ الوسيط هـو الإحداثي الأفقـي للنقطة على المنحنـي المتجمّع الصاعد والتي إحداثيها الرأسـي هو ترتيب الوسيط.

ثالثًا- المنوال

تعريف (٣- ٣)

المنوال لمجموعةٍ من القيم هو القيمة الأكثر تكرارًا أو شيوعًا.

وعلى ضوء هذا التعريف يمكننا تصنيف البيانات من حيث منوالها إلى:

١) بيانات وحيدة المنوال:

وهي البيانات التي تتكرَّر إحدى قراءاتها أكثر من أيِّ قراءةٍ أخرى.

٢) بيانات ثنائيَّة المنوال:

وهي البيانات التي لها قراءتان بالتكرار نفسه، وتكرارهما أكبر من أيِّ قراءةٍ أخرى.

٣) بيانات متعدِّدة المنوال:

وهي البيانات التي لها أكثر من قراءتين بالتكرار نفسه، وهذا التكرار أكبر من تكرار أيِّ قراءةٍ أخرى.

٤) بيانات عديمة المنوال (لا منوال لها):

وهي البيانات التي لا توجد فيها أيُّ قراءة تتكرَّر .

طرق حساب المنوال

أولًا- في حالة البيانات غير المبوَّبة

يتمُّ حساب المنوال في هذه الحالة من واقع التعريف مباشرة.

مثال (٣-١٥)

أوجد المنوال لأطوال عيِّنة مكوَّنة من ١١ طالبًا من الصف الأوَّل الثانوي في إحدى المدارس إذا كانت بياناتها بالسنتيمتر كما يلي:

١٦٣ ، ١٦٠ ، ١٦٤ ، ١٦٠ ، ١٥٨ ، ١٦٢ ، ١٥٤ ، ١٥٦ ، ١٦٠ ، ١٦٢ ، ١٥٨

الحل

نلاحظ أنَّ العدد ١٦٠ في العيِّنة قد تكرَّر ٣ مرات، وهو أكثر تكرارًا من أيِّ عددٍ آخر.

إذًا المنوال = ١٦٠سم

مثال (٣-١٦)

إذا كان الدخل الشهري بالريال لعيِّنة من الأسر كما يلي:

٧٣٤٠ ، ٩٥٠٠ ، ٦٣٣٠ ، ٢٤٧٠ ، ٧٥٨٠ ، ١٦٨٠٠ ، ٩٦٠٠ ، ٤٥٣٠ ، ٥٦١٢ ، ٢٦١٩ ، ١٨٥٠ ، ٦٤٥٥

فأوجد المنوال للدخل الشهري لهذه الأسر.

الحل

نلاحظ أنَّ كلَّ قراءة من القراءات السابقة تظهر مرَّة واحدة (أي غير مكرَّرة) وبالتالي فإنَّ البيانات لا منوال لها.

مثال (٣-١٧)

إذا كانت أعمار عيِّنة من طلاب الصفِّ الثاني الابتدائي في إحدى المدارس هي:

٨ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ٧ ، ٨ ، ٧ ، ٩ ، ٧ ، ٦ ، ٨ ، ٧ ، ٧ ، ٨ ، ٨ ، ٧ ، ٨ ، ٧ ، ٨

فناقش وجود المنوال من عدمه.

الحل

نلاحظ أنَّ القراءة ٨ تكرَّرت ٨ مرَّات، و أنَّ القراءة ٧ تكرَّرت ٨ مرَّات أيضًا،

أمَّا القراءات الأخرى ٦ ، ٩ فلم يصل تكرارها إلى ٨ وبالتالي فإنَّ البيانات ثنائيَّة المنوال و منوالاها هما ٧ ، ٨

ثانيًا- في حالة البيانات المبوّبة

سنكتفي في هذه الحالة بتحديد المنوال لبيانات وحيدة المنوال.

أ) البيانات المبوّبة في جدولٍ تكراريٍ بسيط

في هذه الحالة تكون قيمة المنوال هي القيمة التي تقابل أكبر تكرار في الجدول التكراري.

مثال (٣-١٨)

إذا كانت بيانات عدد الأفراد في ٥٠ أسرة كما يلي:

عدد الأفراد	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
عدد الأسر	٥	٧	٨	١٢	٩	٥	٤

فأوجد المنوال لعدد أفراد الأسرة.

الحل

من الجدول السابق يتّضح أنّ أكبر تكرار هو ١٢ ، وأنّ القيمة المقابلة له هي ٥

إذًا المنوال لعدد أفراد الأسرة = ٥ أفراد.

تدريب (٣-١٠)

أوجد المنوال للدخل الأسبوعيّ للعامل في مثال (٣ - ١٢)

ملحوظة (٣-٣)

في البيانات غير المبوّبة إذا كان عدد القيم كبيرًا بحيث يصعب تحديد تكرار كلّ قيمة فإنّنا نكوّن الجدول التكراري البسيط لهذه البيانات ثمّ نوجد المنوال من الجدول كما سبق توضيحه.

ب) **البيانات المبوبة في جدول تكراري ذي فئات**

في هذه الحالة لا نستطيع تحديد القيمة الأكثر تكرارًا من الجدول مباشرةً ولكن يمكننا تحديد الفئة ذات التكرار الأكبر وهي الفئة التي يقع فيها المنوال وتعرف باسم **الفئة المنواليّة**.

ومن ثم يمكننا إيجاد المنوال بطريقتين وهما: **الطريقة الحسابيّة و الطريقة البيانيّة**.

1 الطريقة الحسابية

لتحديد موقع المنوال داخل الفئة المنواليّة نفترض مبدئيًا أنّ مركز الفئة المنواليّة هو قيمة تقريبيّة للمنوال إلاّ أنّ المنوال في الغالب ينحرف عن مركز الفئة نحو بدايتها أو نهايتها قليلاً أو كثيرًا حسب شدّة الاختلاف بين قيمتيّ التكرارين في الفئتين السابقة واللاحقة للفئة المنواليّة. فإذا كان تكرار الفئة السابقة للفئة المنواليّة أكبر من تكرار الفئة اللاحقة لها فإنّ المنوال يميل نحو بداية الفئة المنواليّة والعكس صحيح. وعلى ذلك فإنّ المنوال يقسم الفئة المنواليّة بنسبة عكسيّة لتكراريّ الفئتين السابقة واللاحقة لها. ويمكننا تشبيه ذلك بقانون الرافعة:

(القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها).

فإذا رسمنا قطعة مستقيمة [أب]، بحيث يكون طولها مساويًا طول الفئة المنواليّة وتصوّرنا أنّ هذه القطعة بمثابة قضيب لرافعة فيها:

التكرار السابق لتكرار الفئة المنواليّة بمثابة قوة تؤثّر عند الطرف أ (بداية الفئة المنواليّة).

والتكرار اللاحق لتكرار الفئة المنواليّة بمثابة مقاومة تؤثّر عند الطرف ب (نهاية الفئة المنواليّة).

والمنوال بمثابة مركز الرافعة بحيث يكون بُعده عن أ هو س ومن ثمّ يكون بُعده عن ب هو:

طول الفئة المنواليّة - س، كما في الشكل (٣ - ١٠).

شكل (٣ - ١٠)

نستنتج أنّ:

المنوال = بداية الفئة المنواليّة + س

وبتطبيق قانون الرافعة نحصل على العلاقة التالية:

التكرار السابق لتكرار الفئة المنواليّة × س

= التكرار اللاحق لتكرار الفئة المنواليّة × (طول الفئة المنواليّة - س)

و يمكننا من هذه العلاقة استنتاج القانون التالي لحساب المنوال.

$$\text{المنوال} = \text{بداية الفئة المنواليّة} + \frac{\text{التكرار اللاحق لتكرار الفئة المنواليّة} \times \text{طول الفئة المنواليّة}}{\text{التكرار السابق لتكرار الفئة المنواليّة} + \text{التكرار اللاحق لتكرار الفئة المنواليّة}}$$

(٣-١١)

مثال (٣-١٩)

أوجد المنوال حسابيًا لكميّة الأمطار التي سقطت على مدينة ما خلال ١٠٠ يوم بالمليمتر المكعّب والموضّحة بياناتها في الجدول (٣-٨).

الحل

يتّضح من الجدول (٣ - ٨) أنّ أكبر تكرار هو ٣٠، وعليه فإنّ:

الفئة المنواليّة (الفئة المقابلة للتكرار ٣٠) هي (٩٠-)، طول الفئة المنواليّة = ١٠،

التكرار السابق لتكرار الفئة المنواليّة هو ٢٠،

التكرار اللاحق لتكرار الفئة المنواليّة هو ١٥.

ومن القانون (٣ - ١١) نجد أنّ :

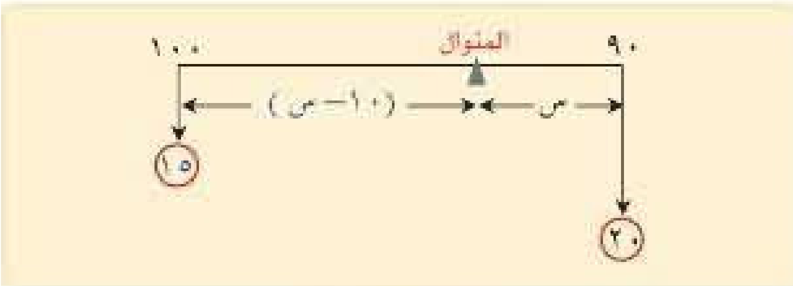
$$\text{المنوال} = \text{بداية الفئة المنواليّة} + \frac{\text{التكرار اللاحق لتكرار الفئة المنواليّة} \times \text{طول الفئة المنواليّة}}{\text{التكرار السابق لتكرار الفئة المنواليّة} + \text{التكرار اللاحق لتكرار الفئة المنواليّة}}$$

$$= ٩٠ + \frac{١٥ \times ١٠}{٢٠ + ١٥}$$

$$= ٩٠ + \frac{١٥٠}{٣٥} = ٩٠ + ٤{,}٣ = ٩٤{,}٣ \text{ ملم}^٣$$

ملحوظة (٣-٤)

حيث إنّ المنوال = بداية الفئة المنواليّة + س ، فإنّه يمكن إيجاد قيمة المنوال في المثال السابق بحساب قيمة س من العلاقة التالية التي توضّحها الرافعة الممثّلة في الشكل (٣ - ١١)



شكل (٣-١١)

٢٠ × س = ١٥ × (١٠ – س)

⇐ ٢٠ س = ١٥٠ – ١٥ س

⇐ ٣٥ س = ١٥٠

⇐ س = $\frac{١٥٠}{٣٥}$

⇐ س = ٤,٣

إذًا المنوال = ٩٠ + ٤,٣ = ٩٤,٣ ملم^{٣} .

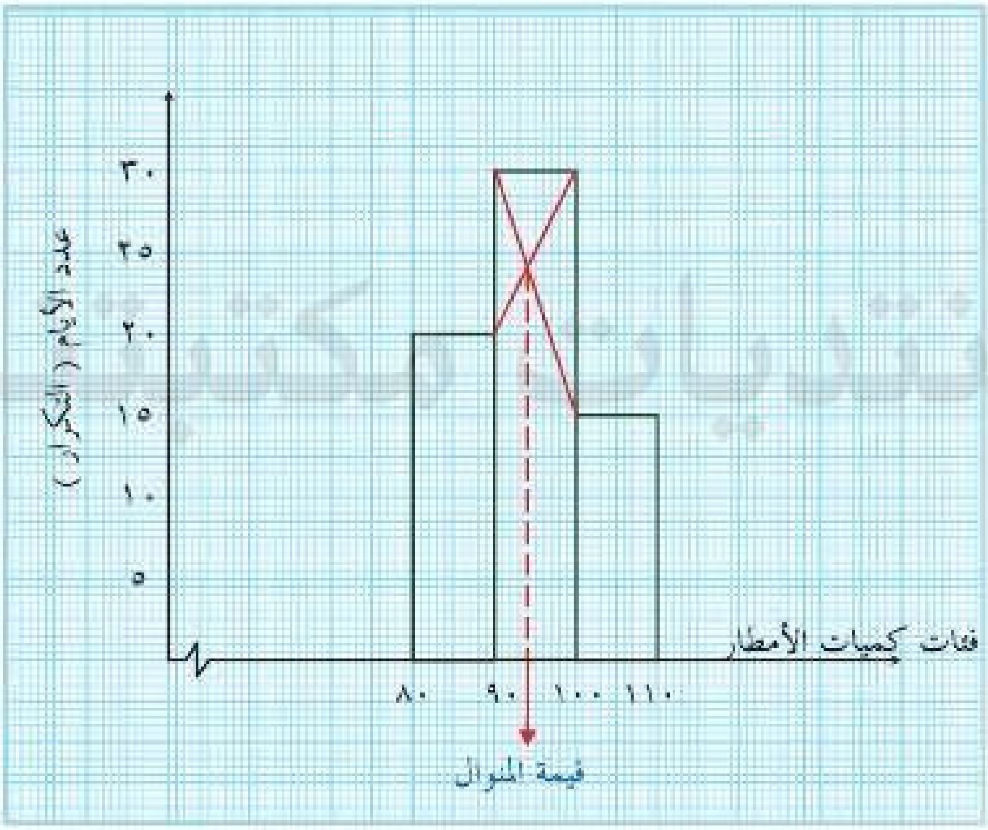
٢ الطريقة البيانيّة

يتمّ حساب قيمة المنوال بالرسم من المدرّج التكراري. وإن كان يكتفى برسم المستطيلات التي تمثّل الفئة المنواليّة والفئة السابقة واللاحقة لها . ثمّ نصل الرأس الأيمن العلوي لمستطيل الفئة المنواليّة بالرأس الأيمن العلوي للمستطيل الذي يمثّل الفئة السابقة للفئة المنواليّة وكذلك نصل الرأس الأيسر العلوي لمستطيل الفئة المنواليّة بالرأس الأيسر العلوي للمستطيل الذي يمثّل الفئة اللاحقة للفئة المنواليّة. فيتقاطعان في نقطة نسقط منها عمودًا على المحور الأفقي يقابله في نقطة تكون هي قيمة المنوال.

مثال (٣-٢٠)

أوجد المنوال بيانياً لكميّة الأمطار التي سقطت على مدينةٍ ما خلال ١٠٠ يومٍ بالمليمتر المكعّب والموضّحة بياناتها في الجدول (٣ -٨).

الحل



شكل (٣ -١٢)

من الرسم نجد أنَّ قيمة المنوال ≈ ٩٤ملم٣ .

ملاحظة (٣-٥)

إنَّ الطريقة البيانيَّة السابقة لإيجاد المنوال مرتبطة بإحدى الطرق الحسابيَّة لإيجاد المنوال وتعرف بطريقة الفروق ولكننا لن نتناول دراستها في هذا الكتاب.

مثال (٣-٢١)

الجدول التالي يبيِّن توزيع مجموعة من الطلاب وفق فئات الدرجات التي حصلوا عليها في اختبار إحدى المواد:

فئات الدرجات	٦-	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-٣٠	المجموع
عدد الطلاب	٣	٦	١٠	١٧	١٢	٥	٥٣

أوجد ما يلي:

أ) قيمة الوسط الحسابيِّ للدرجات التي حصل عليها الطلاب.

ب) قيمة الوسيط حسابياً وبيانياً.

جـ) قيمة المنوال حسابياً وبيانياً.

الحل

أ)

فئات الدرجات	عدد الطلاب التكرار (ك)	مركز الفئة (س)	س × ك
٦-	٣	٨	٢٤
١٠-	٦	١٢	٧٢
١٤-	١٠	١٦	١٦٠
١٨-	١٧	٢٠	٣٤٠
٢٢-	١٢	٢٤	٢٨٨
٢٦-٣٠	٥	٢٨	١٤٠
المجموع	٥٣	ـــــــ	١٠٢٤

جدول (٣-١٤)

الوسط الحسابيُّ للدرجات هو:

$$\bar{س} = \frac{\sum س ك}{\sum ك} = \frac{١٠٢٤}{٥٣} \approx ١٩,٣٢ \text{ درجة}$$

ب) ترتيب الوسيط $= \frac{\sum ك}{٢} = \frac{٥٣}{٢} = ٢٦,٥$

نكوّن الجدول التكراريَّ المتجمِّع الصاعد لدرجات الطلاب كما في الجدول (٢ - ١٥).

فئات الدرجات	عدد الأيام التكرار (ك)	الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمِّع الصاعد
٦-	٣	أقل من ١٠	٣
١٠-	٦	أقل من ١٤	٩
١٤-	١٠	أقل من ١٨	١٩
			٢٦,٥ ترتيب الوسيط
١٨- الفئة الوسيطة	١٧	أقل من ٢٢	٣٦
٢٢-	١٢	أقل من ٢٦	٤٨
٢٦-٣٠	٥	أقل من ٣٠	٥٣

جدول (٢-١٥)

وباستخدام القانون (٢ - ١٠) نجد أنّ:

$$\text{الوسيط} = \text{الحدُّ الأدنى للفئة الوسيطيّة} + \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار المتجمّع المقابل للحدّ الأدنى للفئة الوسيطيّة}}{\text{تكرار الفئة الوسيطيّة}} \times \text{طول الفئة الوسيطيّة}$$

$$= ١٨ + \frac{٢٦,٥ - ١٩}{١٧} \times ٤$$

$$= ١٨ + \frac{٧,٥ \times ٤}{١٧}$$

$$= ١٨ + ١,٧٦ = ١٩,٧٦ \text{ درجة}$$

ولإيجـاد الوسـيط بيانياً نرسم المنحنـي المتجمّع الصاعد كما فـي الشكل(٣ - ١٢)

فنجد من الرسم أنّ :

قيمة الوسيط ≈ ١٩,٨ درجة.

شكل (٣-١٢)

جـ) يتّضح من الجدول الوارد في هذا المثال أنّ أكبر تكرار هو ١٧ ،

إذًا الفئة المنواليّة (الفئة المقابلة للتكرار ١٧) هي ١٨- ، وطولها = ٤.

التكـرار السابـق لتكرار الفئة المنواليّـة هو ١٠ ، التكرار اللاحق لتكـرار الفئة المنواليّة هو ١٢.

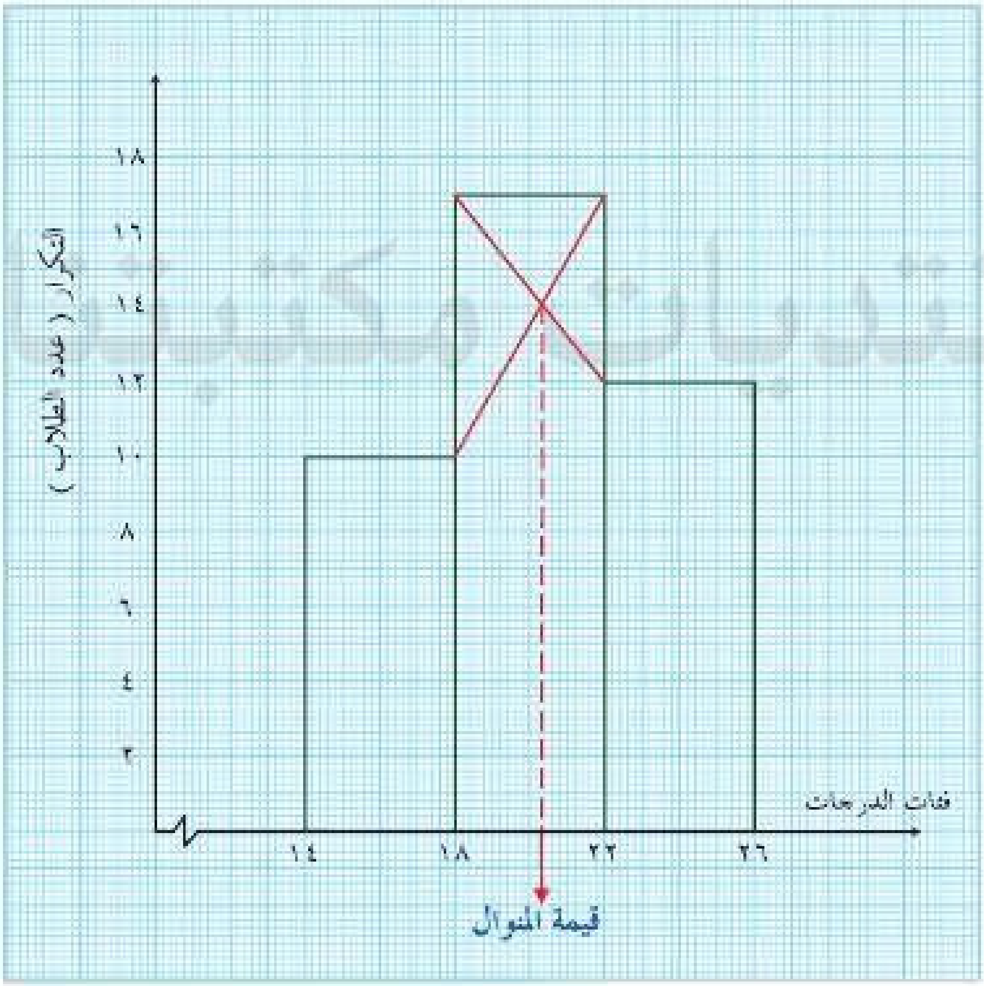
وبالتعويض في القانون (٣ - ١١) نجد أنَّ :

$$\text{المنوال} = ١٨ + \frac{١٢ \times ٤}{١٠ + ١٢}$$

$$= ١٨ + \frac{٤٨}{٢٢}$$

$$= ١٨ + ٢,١٨ = ٢٠,١٨ \text{ درجة}$$

وبيانياً نجد من الشكل (٣ - ١٤) أنَّ المنوال ≈ ٢٠,٣ درجة



شكل (٣ - ١٤)

مزايا وعيوب مقاييس النزعة المركزيّة

أولًا- مزايا مقاييس النزعة المركزيّة

أ) مزايا الوسط الحسابيّ

١ يأخذ في حسابه جميع القيم.

٢ شائع الاستعمال وكذا يمكن الاستدلال به في كثير من الدراسات الإحصائيّة.

٣ لا يحتاج في حسابه إلى ترتيب البيانات بصورة معيّنة.

ب) مزايا الوسيط

١ لا يتأثّر بالقيم الشاذّة (الكبيرة جداً أو الصغيرة جداً) لأنّه من المتوسّطات الموضعيّة.

٢ يمكن حسابه للبيانات النوعيّة التي لها صفة الترتيب، مثل بيانات التقديرات (راسب، مقبول، جيد، جيد جداً، ممتاز)

جـ) مزايا المنوال

١ لا يتأثّر بالقيم المتطرّفة (الشاذّة) نحو الكبر أو الصغر.

٢ يمكن حسابه للبيانات النوعيّة.

٣ يمكن حسابه للبيانات المفتوحة أي التي لم يعرف الحدُّ الأدنى للفئة الأولى أو الحدُّ الأعلى للفئة الأخيرة فيها.

ثانيًا- عيوب مقاييس النزعة المركزيّة

أ) عيوب الوسط الحسابيّ

١ يتأثّر بالقيم المتطرّفة (الشاذّة).

٢ لا يمكن حسابه في حالة البيانات النوعيّة.

٣ قد لا يساوي أيًّا من القيم الداخلة في حسابه، فقد يحتوي جزءًا كسريًّا لبيانات مكوّنة من أعداد صحيحة.

ب) عيوب الوسيط

١ لا يأخذ في حسابه جميع القيم.

٢ يصعب الاستدلال به منفردًا في الدراسات الإحصائيّة.

جـ) عيوب المنوال

١ لا يأخذ في حسابه جميع القيم.

٢ قد يكون للبيانات أكثر من منوال وبالتالي لا معنى لإيراده في بعض الدراسات الإحصائيّة.

تمارين (٣-٣)

١ من النعم التي منَّ اللهُ بها على بلادنا الحبيبة كثرة إنتاج التمور الذي يتوقَّف على وفرة أعداد النخيل في مدن بلادنا المختلفة. وفيما يلي بيانٌ بأعداد النخيل (بالمليون) في خمس مدن:

١,٧٥ ، ٢,٢٥ ، ٠,٥ ، ٢,٢٥ ، ٥,٧٥

أوجد الوسط الحسابيَّ والوسيط والمنوال للبيانات السابقة.

٢ إنَّ الإسراف في استهلاك الكهرباء يؤدِّي إلى انقطاع التيار بسبب الأحمال الزائدة على محطَّات التوليد وشبكات التوزيع. فإذا كان استهلاك عشرة منازل من الكهرباء بمئات الكيلو واط هو:

٩,٢ ، ٨,٤ ، ١٢,٤ ، ٨,٤ ، ٧,٤ ، ١٢,٢ ، ١٢ ، ٦,٤ ، ٥,٦ ، ١٧

أوجد الوسط الحسابيَّ والوسيط والمنوال للاستهلاك.

٣ الجدول التالي يوضِّح أعداد حجَّاج بيت اللهً الحرام القادمين من الخارج منذ عام ١٤١٣ هـ وحتى عام ١٤١٨ هـ :

العام	١٤١٣هـ	١٤١٤هـ	١٤١٥هـ	١٤١٦هـ	١٤١٧هـ	١٤١٨هـ
عدد الحجَّاج	٩٩٢٨١٣	٩٩٥٦١١	١٠٤٣٢٧٤	١٠٨٠٤٦٥	١١٦٨٥٩١	١١٣٢٣٤٤

احسب الوسط الحسابيَّ والوسيط والمنوال لعدد الحجَّاج.

٤ أُخذت عيِّنةٌ مكوَّنة من ٢٠٠ طالبٍ من مدارس تحفيظ القرآن الكريم وصُنِّفت نتيجة الأجزاء العشرة الأخيرة التي يحفظها الطلاب من القرآن الكريم كما في الجدول التالي:

عدد الأجزاء	١	٢	٣	٤	٦	٧	٨	٩	١٠
عدد الطلاب	١٢	١٩	٢٥	٥٠	٢٢	١٦	١٢	١٣	١١

أوجد ما يلي:

أ) الوسط الحسابيَّ لعدد الأجزاء التي يحفظها الطلاب.

ب) الوسيط لعدد الأجزاء.

جـ) المنوال لعدد الأجزاء.

٥ قيست معاملات ذكاء ١٠٠ تلميذ و دوِّنت في جدولٍ تكراريٍّ كالآتي:

معامل الذكاء	٨٥	٩٥	١٠٥	١١٥	١٢٥	١٣٥	المجموع
التكرار	٢	١٠	٢٥	٤٠	٢٠	٣	١٠٠

أوجد الوسط الحسابيَّ والوسيط والمنوال لمعاملات الذكاء.

٦ المـاء عصب الحياة، وبسبب التضخُّم السكاني وزيادة الطلب على المياه ظهرت مشكلة المياه وقد اتفق الرأي العالمي على أهميَّة المحافظة على الميـاه وضرورة ترشيد استخدامها، والجدول التالي يبيِّن توزيع الاستهلاك اليومي من المياه العذبة بإحدى دول مجلس التعاون (مقدَّرًا بالمليون جالون).

الاستهلاك اليومي	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-١٠٠	المجموع
عدد الأيام	٤	١٠	٨	٢	١	٢٥

أوجد ما يلي:

أ) الوسط الحسابيَّ للاستهلاك اليومي من المياه العذبة.

ب) الوسيط بالحساب وبالرسم.

جـ) المنوال بالحساب وبالرسم.

٧ أجـرت إحدى شركات صناعة الملابس دراسة لأطوال عيِّنةٍ مكوَّنة من ٩٠ شخصًا اُختيرت بطريقةٍ مناسبة فكانت النتائج كما يلي:

الطول بالسنتيمتر	١٣٠-	١٤٠-	١٥٠-	١٦٠-١٧٠
عدد الأشخاص	١٠	٢٤	٣٦	٢٠

أوجد ما يلي:

أ) الوسط الحسابيَّ لأطوال الأشخاص.

ب) الوسيط لأطوال الأشخاص بالطريقتين الحسابيَّة والبيانيَّة.

جـ) المنوال لأطوال الأشخاص بالطريقتين الحسابيَّة والبيانيَّة.

٨ الجدول الآتي يوضّح توزيع القوى العاملة في إحدى المدن حسب السّن:

فئات السّن	١٨−	٢٤−	٣٠−	٣٦−	٤٢−	٤٨−	٥٤−٦٠	المجموع
القوى العاملة بالمئات	٩٧	١٧٦	٢٣٥	١٨٧	١٥٧	١١٢	٣٦	١٠٠٠

المطلوب إيجاد قيمة:

أ) الوسط الحسابيّ.

ب) الوسيط بالحساب وبالرسم.

جـ) المنوال بالحساب وبالرسم.

٨ في إحدى الدراسات الإحصائيّة لظاهرةٍ ما كانت النتائج على النحو التالي:

المنوال = ٢٣ طول الفئة المنواليّة = ١٠

التكرار السابق للفئة المنواليّة = ٢١ التكرار اللاحق للفئة المنواليّة = ٩

أوجد الحدّ الأدنى للفئة المنواليّة.

٩ في إحدى الدراسات الإحصائيّة على الواردات اليوميّة لإحدى الدول بملايين الريالات كانت النتائج التالية:

الوسيط =٨٠ بداية الفئة الوسيطيّة = ٧٦

التكرار المتجمّع المقابل للحدّ الأدنى للفئة الوسيطيّة =١٢٥

التكرار المتجمّع المقابل للحدّ الأعلى للفئة الوسيطيّة = ١٩٥

مجموع التكرارات للأيام التي أُستورد فيها = ٣٦٠

أوجد طول الفئة الوسيطيّة .

٣ – ٤ الانحرافُ المعياريُّ
The Standard Deviation

التشتُّت

لاشك أنَّ مقاييس النّزعة المركزيَّة (الوسط الحسابيُّ والوسيط والمنوال) لها أهميَّتها : فهي تُعطي معلومات مفيدة وقيِّمة عن الظاهرة، إلاَّ أنَّها لا تعطي فكرة وافية عن مفردات هذه الظاهرة إذ لا تبيِّن طبيعة الظاهرة ولا كيفيَّة توزيع مفرداتها، وعلى ذلك لا يمكننا المقارنة بين ظاهرتين بناءً على متوسِّطاتهما فقط؛ إذ قد تكون قيمة واحد (أو أكثر) من متوسِّطات إحدى الظاهرتين مساوية لقيمة المتوسِّط المناظر له (أو المتوسِّطات المناظرة لها) من الظاهرة الأخرى، بينما تكون مفردات إحدى الظاهرتين متجانسة أي متقاربة بعضها من بعض في حين تكون مفردات الظاهرة الأخرى مشتّتة أي متباعدة عن بعضها - فمثلاً - لو فرضنا أنَّ لدينا الدرجات الآتية لمجموعة من الطلاب في مادتيْ الرياضيَّات واللغة الإنجليزيَّة:

درجات الرياضيَّات : ٤٠ ، ٥٨ ، ٧٢ ، ٨٠ ، ١٠٠

درجات اللغة الإنجليزيَّة : ٦٤ ، ٦٧ ، ٧٢ ، ٧١ ، ٧٦

فإنّنا سنجد أنّ:

الوسط الحسابيّ لكلٍّ من هاتين الظاهرتين هو ٧٠ درجة ، وأنّ الوسيط لكلٍّ منهما هو ٧٢ درجة فإذا ما اكتفينا بمقارنة الوسطين الحسابيّين (أو الوسيطين) للظاهرتين فإنّنا نستنتج أنّ مستوى الطلاب هو نفسه في المادّتين وهذا يخالف الواقع حيث إنّ درجات اللغة الإنجليزيّة متقاربةٌ من بعضها وتتركّز حول وسطها (مثلاً) بينما درجات الرياضيّات متباعدة ومبعثرة في مدى كبير ، وعلى ذلك لا يمكننا اقتصار المقارنة بين الظواهر على متوسّطاتها فقط ، بل يجب البحث عن مقياس آخر يبيّن مدى تقارب أو تباعد مفردات الظواهر بعضها عن بعض ، أي يجب أن نضيف إلى مقاييس النزعة المركزيّة مقاييس أخرى تُظهر درجة تشتُّت القيم أي تباعدها بعضها عن بعض.

وهذا التشتّت يكون صغيرًا إذا كان الاختلاف بين قيم المفردات قليلاً ويكون كبيرًا إذا كان الاختلاف بينها كبيرًا أي إذا كانت الفروق بين قيم المجموعة كبيرة ، وعلى ذلك يمكننا اتخاذ مقدار تشتُّت القيم مقياسًا لمعرفة تقارب القيم أو تباعدها من بعضها البعض.

وهناك مقاييس عدّة للتشتُّت تختلف من حيث طرق حسابها ومجال استخدامها ، كما أنّها تختلف من حيث دقّتها ، وسنقتصر دراستنا في هذا الكتاب على أحد أهمّ **مقاييس التشتُّت** وأكثرها استعمالاً في علم الإحصاء وهو **الانحرافُ المعياريُّ**.

الانحرافُ المعياريُّ

إنّ الانحراف المعياريّ هو أفضل وأدقّ مقاييس التشتُّت لأنّه يقيس مدى تقارب أو تباعد القراءات عن وسطها الحسابيّ وذلك يعني أنّ جميع القراءات تدخل في حسابه.

سنقدّم فيما يلي مفهوم الانحراف المعياريّ:

بفرض أنّ قراءات الظاهرة التي لدينا هي : $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، ... ، $س_{ن}$ وأنّ وسطها الحسابيّ هو $\overline{س}$ فإنّ انحرافات هذه القراءات عن وسطها الحسابيّ $\overline{س}$ هي ($س_{١} - \overline{س}$)، ($س_{٢} - \overline{س}$)، ...، ($س_{ن} - \overline{س}$) وهذه الانحرافات تكون صغيرةً إذا كانت القراءات قريبةً من وسطها الحسابيّ أي إذا كانت القراءات متقاربةً من بعضها ، وبالعكس فإنّ هذه الانحرافات تكون كبيرةً إذا كانت القراءات متباعدةً بعضها عن بعض: لذا فإنّه يمكننا استخدام متوسّط انحرافات القراءات عن وسطها الحسابيّ كمقياس للتشتُّت ولكن مجموع انحرافات القراءات عن وسطها الحسابيّ لأيّ بياناتٍ يساوي صفرًا،

إذ إنَّ بعض الانحرافات موجب وبعضها الآخر سالب، وعند جمع هذه الانحرافات يتلاشى الموجب منها مع السالب. ولتجاوز هذه المشكلة نأخذ الوسط الحسابيَّ لمربّعات هذه الانحرافات بدلًا من الانحرافات نفسها، فنحصل بذلك على ما يُسمَّى **بالتباين** و وحدته هي مربّع الوحدات الأصليَّة للقراءات.

ونظرًا لأفضليَّة أن يكون لمقياس التشتُّت وحدات المفردات نفسها فإنَّنا نأخذ الجذر التربيعيَّ للتباين كمقياس للتشتُّت ويُسمَّى **الانحراف المعياريَّ**.

تعريف (٣- ٤)

الانحراف المعياريُّ هو الجذر التربيعي للوسط الحسابيِّ لمربّعات انحرافات القراءات عن وسطها الحسابيِّ.

ونرمز للانحراف المعياريِّ بالرمز ع

طرق حساب الانحراف المعياريِّ

أولًا- في حالة البيانات غير المبوّبة

يُحسب الانحراف المعياريُّ في هذه الحالة من التعريف مباشرةً و الذي يمكن التعبير عنه بالقانون التالي:

$$ع = \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^2}{ن}} \qquad (٣-١٢)$$

مثال (٣-٢٢)

أوجد الانحراف المعياريَّ للقراءات التالية: ١٥ ، ١٢ ، ١٠ ، ٩ ، ١٤ التي تمثّل درجات الحرارة في خمسة أيام مختلفة في مدينة الطائف لأقرب درجة مئويَّة.

الحل

نحسب أولاً قيمة الوسط الحسابيّ

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{١٥ + ١٢ + ١٠ + ٩ + ١٤}{٥}$$

$$= \frac{٦٠}{٥} = ١٢$$

نكوّن جدولاً للحسابات يكون فيه العمود الأوّل للقراءات والعمود الثاني للفرق بين القراءات والوسط الحسابيّ والعمود الثالث لمربّع الفرق. أمّا الصف الأخير من الجدول فيحتوي على مجموع كلٍّ من القراءات ومربّعات فروقها عن الوسط الحسابيّ.

س	$س - \bar{س}$	$(س - \bar{س})^٢$
١٥	٣	٩
١٢	٠	٠
١٠	٢-	٤
٩	٣-	٩
١٤	٢	٤
$\sum س = ٦٠$	٠	$\sum (س - \bar{س})^٢ = ٢٦$

جدول (٣-١٦)

فيكون الانحراف المعياريّ هو

$$ع = \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^٢}{ن}}$$

$$= \sqrt{\frac{٢٦}{٥}}$$

$$= \sqrt{٥,٢} \approx ٢,٢٨$$

ملحوظة (٣-٦)

لتسهيل حساب الانحراف المعياريّ، سنكتب القانون (٣-١٢) بصيغة مختصرة على النحو التالي:

$$ع = \sqrt{\frac{\sum س^٢}{ن} - \bar{س}^٢} \qquad (٣-١٢)$$

وذلك يعني أنَّ الانحراف المعياريَّ في صيغته المختصرة هو الجذر التربيعيُّ للفرق بين الوسط الحسابيّ لمربَّعات القراءات ومربَّع الوسط الحسابيِّ للقراءات، وبهذه الصيغة المختصرة يمكننا حساب الانحراف المعياريّ دون حساب الانحرافات عن الوسط الحسابيّ.

مثال (٣-٢٣)

أوجد الانحراف المعياريَّ لبيانات المثال (٣-٢٢) مستخدمًا القانون بالصيغة المختصرة.

الحل

نكوّن جدولاً من عمودين الأوّل للقراءات والثاني لمربّعات القراءات، ويكون الصفُّ الأخير لمجموع القراءات ومجموع مربّعاتها كما يلي:

س	س^٢
١٥	٢٢٥
١٢	١٤٤
١٠	١٠٠
٩	٨١
١٤	١٩٦
$\sum س = ٦٠$	$\sum س^٢ = ٧٤٦$

جدول (٣-١٧)

ومن ذلك يكون الانحراف المعياريّ :

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجـ}\ س^2}{ن} - \bar{س}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{٧٤٦}{٥} - (١٢)^2} = \sqrt{١٤٩,٢ - ١٤٤}$$

$$= \sqrt{٥,٢} \approx ٢,٢٨$$

استخدام الآلة الحاسبة العلميّة لإيجاد الوسط الحسابيّ والانحراف المعياريّ للبيانات غير المبوّبة

للآلة الحاسبة العلميّة أهميةٌ بالغة في إجراء الحسابات الإحصائيّة حيث يمكننا استخدامها لإيجاد الوسط الحسابيّ والانحراف المعياريّ للبيانات غير المبوّبة ، وتعدُّ عمليّة إيجاد كلٍّ من الوسط الحسابيّ و الانحراف المعياريّ من العمليّات غير الأساسيّة في الآلة الحاسبة العلميّة و توجد مفاتيحُ خاصّةٌ بالإحصاء وهي مميّزةٌ باللّون الأزرق سنستخدم منها المفاتيح الآتية :

١) $\boxed{}$ Scl ويستخدم لمسح البيانات السابقة من ذاكرة الإحصاء .

٢) $\boxed{}$ DT ويستخدم لإدخال البيانات .

٣) $\boxed{}$ $\bar{X}$ ويستخدم لإيجاد الوسط الحسابي .

٤) $\boxed{}$ $X\sigma n$ ويستخدم لإيجاد الانحراف المعياري.

ومـن الجديـر ذكره أنَّه قبل البدء بحسـاب الوسط الحسابي و الانحراف المعياري لابـدَّ أولاً من وضع الآلة الحاسبة على نظام الإحصاء SD وذلك بالضغط على مفتاح اختيار النظام MODE ثمَّ على 2 .
و بعد ذلك نمسح ذاكرة الإحصاء بالضغط على SHIFT ثمَّ على Scl ثمَّ على =

مثال (٣-٢٤)

باستخدام الآلة الحاسبة أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لبيانات المثال (٣-٢٢)

الحل

لإيجاد الوسط الحسابي أو الانحراف المعياري ندخل البيانات على النحو التالي :

14 DT 9 DT 10 DT 12 DT 15 DT

وباستخدام المفاتيح المبيَّنة بالتتابع التالي :

SHIFT $\bar{X}$ = → 12

نجد أن الوسط الحسابي = ١٢

وللحصول على الانحراف المعياري نستخدم المفاتيح المبيَّنة بالتتابع التالي :

SHIFT Xσn = → 2.28035085

أي أنَّ الانحراف المعياري ≃ ٢,٢٨

تدريب (٣-١١)

باستخدام الآلة الحاسبة أوجد الوسط الحسابي و الانحراف المعياري لبيانات مثال (٢ - ٨)

ثانيًا- في حالة البيانات المبوّبة

أ) البيانات المبوّبة في جدولٍ تكراريٍّ بسيط

مـن التعريـف (٣-٤) ، يمكن استنتاج صيغة الانحراف المعياريّ للبيانات المبوّبة في جدولٍ تكراريٍّ بسيط وهي :

$$ع = \sqrt{\frac{\sum ك\,(س - \bar{س})^{٢}}{\sum ك}} \qquad (٣-١٤)$$

وتكون الصيغة المختصرة للانحراف المعياريّ في هذه الحالة هي :

$$ع = \sqrt{\frac{\sum س^{٢} ك}{\sum ك} - \bar{س}^{٢}} \qquad (٣-١٥)$$

مثال (٣-٢٥)

ممّـا لاشك فيـه أنّ الغياب عـن المدرسة يؤثّـر سلبًا علـى مستوى تحصيل الطـلاب بصفةٍ عامّـة وفيما يلي بيانات الطـلاب الغائبين في إحدى المدارس حسب أيام غيابهم خلال العام الدراسي.

عدد أيام الغياب	١	٢	٥	٦	٨	١٠
عدد الطلاب الغائبين	٣٥	١٦	١١	١٥	١	٢

أوجد الانحراف المعياريّ لهذه الظاهرة.

الحل

عدد الأيام (س)	التكرار (ك)	س ك	س × س ك = س^{٢} ك
١	٣٥	٣٥	٣٥
٢	١٦	٣٢	٦٤
٥	١١	٥٥	٢٧٥
٦	١٥	٩٠	٥٤٠
٨	١	٨	٦٤
١٠	٢	٢٠	٢٠٠
ـــــ	$\sum$ ك = ٨٠	$\sum$ س ك = ٢٤٠	$\sum$ س^{٢} ك = ١١٧٨

جدول (٣-١٨)

نحسب أولاً الوسط الحسابيَّ

$$\bar{س} = \frac{\sum س ك}{\sum ك} = \frac{٢٤٠}{٨٠} = ٣$$

$$ع = \sqrt{\frac{\sum س^{٢} ك}{\sum ك} - \bar{س}^{٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{١١٧٨}{٨٠} - (٣)^{٢}} = \sqrt{١٤,٧٢٥ - ٩}$$

$$= \sqrt{٥,٧٢٥}$$

$$\approx ٢,٣٩$$

ب) **البيانات المبوّبة في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئات**

لا تختلف هذه الحالة كثيرًا عن حالة الجدول التكراري البسيط، إلا أنَّنا نأخذ في هذه الحالة انحرافات مراكز الفئات بدلاً من انحرافات القيم، وبالتالي فإنَّ صيغة الانحراف المعياريِّ في هذه الحالة هي الصيغة (٣ - ١٥) نفسها حيث س تمثل قيم مراكز الفئات.

مثال (٣-٢٦)

أوجد الانحراف المعياريَّ لبيانات عيّنةٍ من ٤٠ منشأة صحيّة حسب عدد الأطباء فيها والموضّحة في الجدول التالي:

عدد الأطباء	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-٥٠
عدد المنشآت الصحيّة	٤	٤	٦	١٠	٦	٥	٤	١

الحل

لإيجاد الانحراف المعياري نكوّن الجدول التالي باستخدام الآلة الحاسبة والتقريب لأقرب رقمين عشريين :

عدد الأطباء (الفئات)	عدد المنشآت الصحيّة ك	مراكز الفئات س	س ك	س × س ك = س² ك
١٠-	٤	١٢,٥	٥٠	٦٢٥
١٥-	٤	١٧,٥	٧٠	١٢٢٥
٢٠-	٦	٢٢,٥	١٣٥	٣٠٣٧,٥
٢٥-	١٠	٢٧,٥	٢٧٥	٧٥٦٢,٥
٣٠-	٦	٣٢,٥	١٩٥	٦٣٣٧,٥
٣٥-	٥	٣٧,٥	١٨٧,٥	٧٠٣١,٢٥
٤٠-	٤	٤٢,٥	١٧٠	٧٢٢٥
٤٥-٥٠	١	٤٧,٥	٤٧,٥	٢٢٥٦,٢٥
المجموع	Σ ك = ٤٠	——	Σ س ك = ١١٣٠	Σ س² ك = ٣٥٣٠٠

جدول (٣-١٩)

$$\bar{س} = \frac{\sum س ك}{\sum ك} = \frac{١١٣٠}{٤٠} = ٢٨,٢٥$$

$$ع = \sqrt{\frac{\sum س^٢ ك}{\sum ك} - \bar{س}^٢}$$

$$= \sqrt{\frac{٣٥٣٠٠}{٤٠} - (٢٨,٢٥)^٢}$$

$$\approx \sqrt{٨٨٢,٥٠ - ٧٩٨,٠٦}$$

$$\approx \sqrt{٨٤,٤٤}$$

$$\approx ٩,١٩$$

تدريب (٣-١٢)

أوجد الانحراف المعياريّ لبيانات المثال (٢ - ٢١) .

تمارين (٣-٤)

١ إذا كانت درجات طالب في الاختبار النصفي لخمس مواد دراسيَّة هي كما يلي:
٢٠ ، ١٦ ، ٢١ ، ٢٣ ، ١٨ فأوجد الانحراف المعياريَّ للدرجات مستخدمًا القانون.

٢ إنَّ الإسراف في استهلاك الزيت النباتي في طهي الطعام يعدُّ من الظواهر غير الصحيَّة. فإذا كانت كميَّة الاستهلاك الشهري لسبع أسر من الزيت النباتي في الطهي (باللتر) هي:
٣ ، ٦,٥ ، ٧ ، ٤,٥ ، ٨ ، ١٠ ، ٤ فأوجد الانحراف المعياريَّ للاستهلاك مستخدمًا القانون.

٣ الجدول التالي يوضِّح السرعة المداريَّة لكواكب المجموعة الشمسيَّة:

الكواكب	عطارد	الزهرة	الأرض	المريخ	المشتري	زحل	أورانوس	نبتون	بلوتو
السرعة كم/ث	٤٧.٨	٣٥.١	٢٩.٨	٢٤.١	١٣	٩.٧	٦.٨	٥.٥	٤.٨

أوجد باستخدام الآلة الحاسبة كلًا من الوسط الحسابيّ والانحراف المعياريّ للسرعة المداريَّة لكواكب المجموعة الشمسيَّة.

٤ إذا كان مجموع مربَّعات درجات طالب في المقررات الدراسيَّة ٧٢٤١٠ والوسط الحسابيُّ لدرجاته (المعدَّل) ٨٥ فأوجد عدد المقررات الدراسيَّة له إذا علمت أنَّ الانحراف المعياريَّ لدرجاته في هذه المقررات يساوي ٤.

٥ في التمرين (٤) من مجموعة التمارين (٢ – ٣) كانت بيانات حفظ العشرة الأجزاء الأخيرة من القرآن الكريم لمئتيْ طالبٍ كما يلي:

عدد الأجزاء	١	٢	٣	٤	٦	٧	٨	٩	١٠
عدد الطلاب	١٢	١٩	٣٥	٥٠	٣٢	١٦	١٢	١٣	١١

أوجد الانحراف المعياريَّ لعدد الأجزاء التي يحفظها الطلاب.

٦ في المثال (٣ - ١٨) كانت بيانات عدد الأفراد في ٥٠ أسرة كما يلي:

عدد الأفراد	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
عدد الأسر	٥	٧	٨	١٢	٩	٥	٤

أوجد الانحراف المعياريّ لعدد أفراد الأسرة.

٧ أوجد الانحراف المعياريّ للاستهلاك اليومي من المياه العذبة للبيانات المعطاة في تمرين (٦) من مجموعة التمارين (٣ - ٣) وهي:

الاستهلاك اليومي	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-١٠٠	المجموع
عدد الأيام	٤	١٠	٨	٢	١	٢٥

٨ في دراسةٍ لكميّة البنزين التي تستهلكها مجموعةٌ من السيّارات كانت النتائج كالتالي:

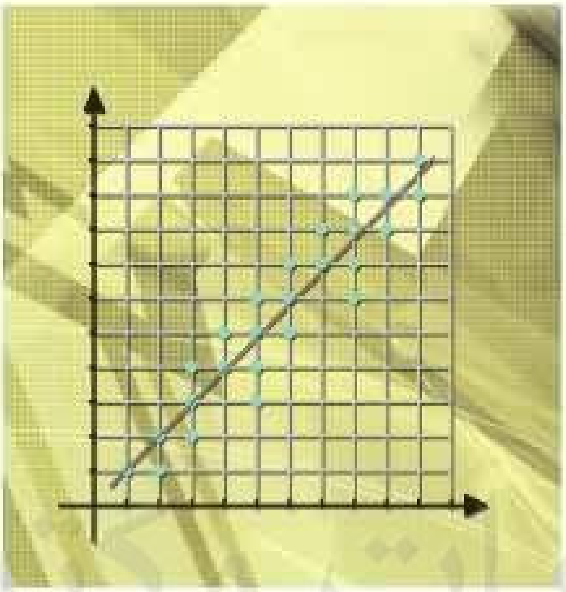
عدد الكيلومترات لكل جالون	٢٥-	٢٧-	٢٩-	٣١-	٣٣-
عدد السيّارات	٥	٧	٩	٥	٤

أوجد الانحراف المعياريّ لعدد الكيلو مترات لكلّ جالون.

٩ كوّن مجموعتين من القراءات لهما الوسط الحسابي نفسه وتختلفان في انحرافهما المعياريّ.

٣ـ٥

الارتباط
The Correlation



كان اهتمامنـا فيمـا سبق مركّزًا على دراسة ظاهرةٍ واحدة (متغيرٍ واحـد) ، وفي هذا البند سنتطرق إلى دراسة العلاقة بين متغيِّرين و التي تتطلَّبها الكثير من المسائل العلميّة ، **و من الأمثلة على ذلك :**

- العلاقة بين طول الطفل و وزنه .
- لعلاقة بين وزن المريض و ضغط دمه .
- العلاقة بين حوادث المرور و تجاوز الحد الأقصى للسرعة .
- العلاقة بين المستوى الاجتماعي للأسرة و مستوى الذكاء لأبناء الأسرة .
- العلاقة بين دخل الفرد و إنفاقه.
- العلاقة بين تكاليف الدعاية لمنتجٍ معيَّن و كميّات المبيعات منه .
- العلاقة بين تكلفة إنتاج سلعةٍ و سعرها .

نسمّي العلاقة بين أيّ متغيِّرين **ارتباطاً** بين هذين المتغيِّرين .

وسنوضح مفهوم الارتباط من خلال المناقشة التالية :

نعلم أنّه كلّما زاد طول الطفل زاد وزنه ، فالتغيُّر في الطول مقترنٌ بالتغيُّر في الوزن ، و لكن لكلِّ قاعدة شواذ فهناك أطفالٌ طوالٌ نحاف أخفُّ وزنًا من آخرين قصارٍ سمان.

نَصف الارتباط (العلاقة) بين طول الطفل و وزنه بأنّه ارتباطٌ إيجابيٌ .

و إذا درسنا العلاقة بين الحجم و الضغط في الغازات نجد أنّه كلما زاد الحجم قلَّ الضغط و هذا يعني أنَّ هناك ارتباطٌ بين حجم الغاز و ضغطه يُوصف بأنّه ارتباطٌ سلبيٌ .

- أعط مثالاً لارتباطٍ ايجابيٍ و آخر لارتباطٍ سلبيٍ بين متغيِّرين .

و في الواقع إذا كانت هناك علاقةٌ رياضيّةٌ تربط بين المتغيِّرين بحيث إذا علمنا قيمة أحدهما نستطيع معرفة قيمة الآخر -كما هو الحال في الارتباط بين حجم الغاز و ضغطه [1] - فإنَّ الارتباط بين المتغيِّرين يسمّى **ارتباطًا تامًا**

- هل الارتباط بين طول الطفل و وزنه ارتباطٌ تامٌ ؟
- هل هناك ارتباطٌ بين طول الطالب و درجته في الاختبار ؟

لعلك توصلت من المناقشة السابقة إلى أنّه :

١) **للارتباط نوعان هما :**

ارتباطٌ ايجابيٌ : و فيه تزداد قيم أحد المتغيِّرين (أو معظمها) بزيادة قيم المتغيِّر الآخر .

ارتباطٌ سلبيٌ : و فيه تنقص قيم أحد المتغيِّرين (أو معظمها) بزيادة قيم المتغيِّر الآخر .

٢) **يتفاوت الارتباط في شدّته فهناك :**

ارتباطٌ تامٌ : وفيه يمكن معرفة قيمة أحد المتغيِّرين إذا عُلمت قيمة المتغيِّر الآخر .

ارتباطٌ غير تامٌ : وفيه يمكن معرفة قيمة تقريبية لأحد المتغيِّرين إذا عُلمت قيمة المتغيِّر الآخر .

ارتباطٌ منعدمٌ : وفيه يستحيل معرفة قيمة أحد المتغيِّرين إذا عُلمت قيمة المتغيِّر الآخر .

ولدراسة الارتباط بين متغيِّرين هناك عدّة طرق ندرس منها : طريقة بيانيّة (**شكل الانتشار**) و أخرى حسابيّة (**معامل الارتباط**)

(١) حجم الغاز = $\frac{\text{ثابت}}{\text{ضغط الغاز}}$

شكل الانتشار

إذا كان لدينا المتغيّران س ، ص ،

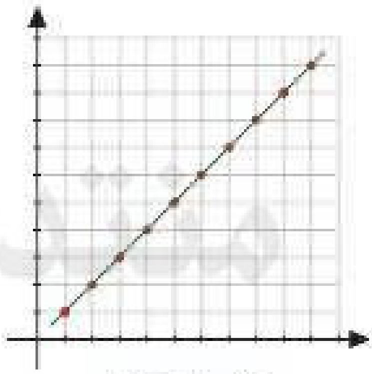
وأخذ المتغيّر س القيم : $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، . . . . . ، $س_ن$ ،

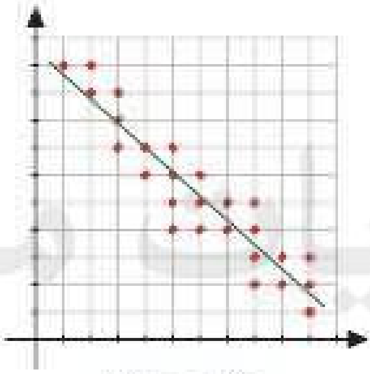
وأخذ المتغيّر ص القيم : $ص_1$ ، $ص_2$ ، $ص_3$ ، . . . . . ، $ص_ن$ ،

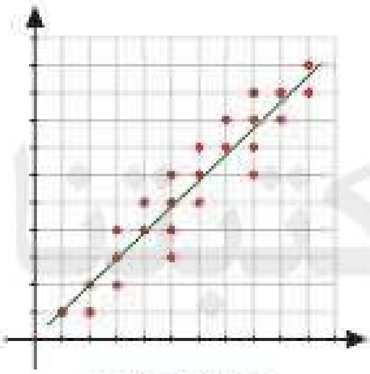
فإنه بتعيين النقــاط : ($س_1$ ، $ص_1$) ، ($س_2$ ، $ص_2$) ، ($س_3$ ، $ص_3$) ، . . . . ، ($س_ن$ ، $ص_ن$)

في المستوي الديكارتي نحصل على شكلٍ يبيّن انتشار هذه النقاط في المستوي يسمّى **شكل الانتشار** .

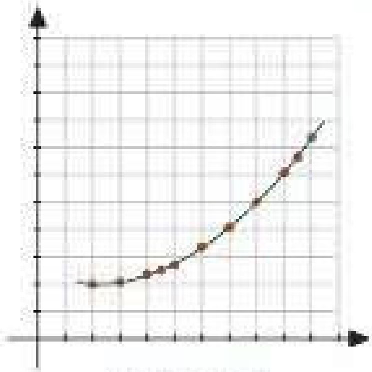
ولشكل الانتشار صورٌ مختلفة ، فإذا كانت النقاط جميعها تقع على خطٍّ مستقيم كما في الشكل (٣ - ١٥) أو تتجمّع حول خطٍّ مستقيم كما في الشكلين (٣ - ١٦) ، (٣ - ١٧) فإنّنا نقول إنّ الارتباط بين المتغيّرين **خطيّ** .

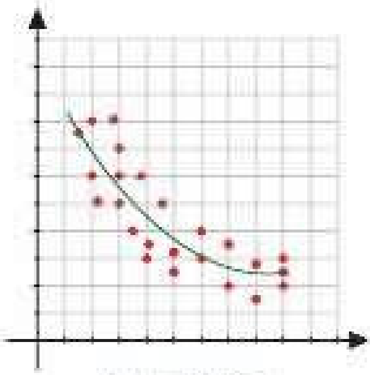

شكل (٣ - ١٥)


شكل (٣ - ١٦)


شكل (٣ - ١٧)

وهناك حالاتٌ أخرى تقع فيها النقاط جميعها على منحنٍ كما في الشكل (٣ - ١٨) أو تتجمّع حول منحنٍ كما في الشكل (٣ - ١٩) ، إلاّ أنّنا لن نتطرق لدراسة هذه الحالات في هذا الكتاب


شكل (٣ - ١٨)


شكل (٣ - ١٩)

وفي الواقع يمكننا من شكل الانتشار دراسة نوع الارتباط .ففي الشكل (٣-١٥) يكون الارتباط إيجابياً (لماذا؟) .
بينما في الشكل (٣ - ١٦) يكون الارتباط سلبياً (لماذا؟) .

ما نوع الارتباط في شكل (٣ - ١٧) ؟

كما يمكننا كذلك من شكل الانتشار تحديد شدّة الارتباط بين المتغيّرين، وذلك على النحو التالي :

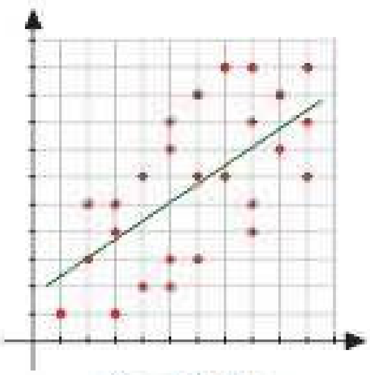
١) إذا كانت النقاط تقع جميعها على خطٍّ مستقيم - كما في الشكل (٣ - ١٥) - فإنَّ الارتباط بين المتغيّرين يكون **تامًا** (لماذا ؟) .

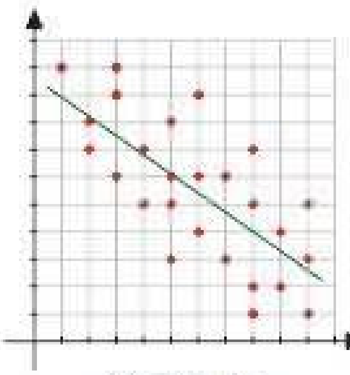
حدّد العلاقة الرياضيّة بين المتغيّرين س ، ص في الشكل (٣ - ١٥) .

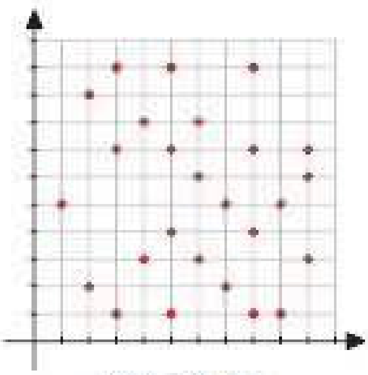
٢) إذا كانت النقاط لا تقع جميعها على خطٍّ مستقيم إلا أنّها تتجمّع حول خطٍّ مستقيم ، فإنّ الارتباط بين المتغيّرين يكون **غير تامٍّ** ،كما في الشكلين (٣ - ١٦) ، (٣ - ١٧) . وفي الارتباط غير التام كلّما كانت مجموعة النقاط في شكل الانتشار قريبةً من خطٍّ مستقيم يتوسّط هذه النقاط كلّما كان الارتباط بين المتغيّرين **قويًا**، فمثلاً : يمكن أن نعدّ الارتباط بين المتغيّرين في كلٍّ من الشكلين (٣ - ١٦) ، (٣ - ١٧) أقوى من الارتباط بين المتغيّرين في كلٍّ من الشكلين (٣ - ٢٠) ، (٣ - ٢١) .

اعلم أنّنا لا نستطيع من شكل الانتشار الحكم بدقّة على مدى قوة الارتباط غير التام .

٣) إذا كانت النقاط تنتشر عشوائيًا و بصورة تدلُّ على استحالة وجود أيِّ رابطٍ بين المتغيّرين فإنّ الارتباط بين المتغيّرين يكون **منعدمًا** ، كما في الشكل (٣ - ٢٢) .


شكل (٣ - ٢٠)


شكل (٣ - ٢١)


شكل (٣ - ٢٢)

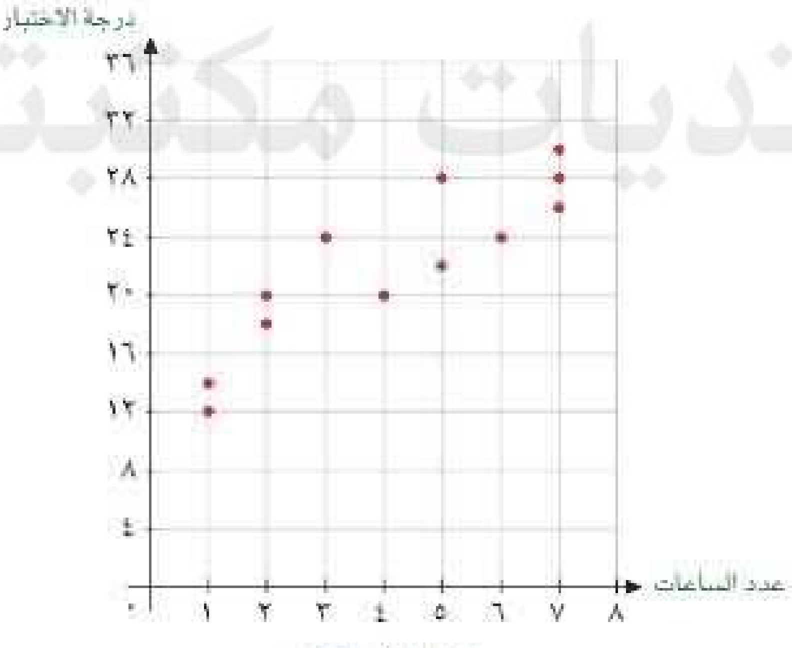
مثال (٣-٢٧)

الجدول التالي يبيّن الدرجات التي حصل عليها مجموعةٌ من الطلاب في الاختبار النهائي لمادة الرياضيّات و عدد الساعات التي استغرقها كلُّ طالبٍ في مذاكرة المادة :

عدد ساعات المذاكرة	٤	٥	٢	٦	٧	١	٣	٧	١	٧	٣	٥
درجة الاختبار	٢٠	٢٨	٢٠	٢٤	٢٨	١٤	١٨	٢٦	١٢	٣٠	٢٤	٢٢

ارسم شكل الانتشار للبيانات السابقة ثم حدّد نوع و شدّة الارتباط بين عدد ساعات المذاكرة و درجة الاختبار .

الحل

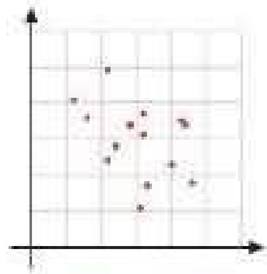


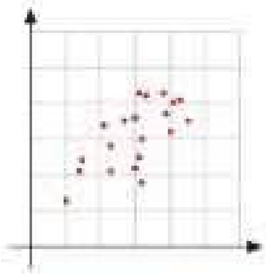
شكل (٣ - ٢٢)

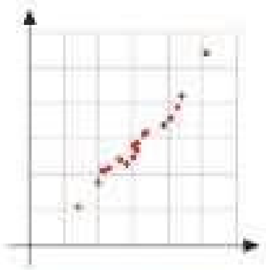
الشكل (٣ - ٢٢) يُمثّل شكل الانتشار للبيانات السابقة ، ومنه يتّضح أنّ الارتباط بين المتغيّرين **إيجابيٌ غير تامٍ .**

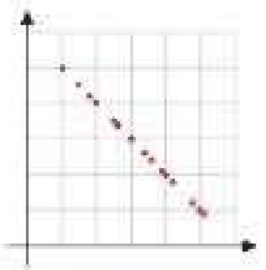
تدريب (٣-١٣)

حدِّد نوع وشدَّة الارتباط في كلٍّ من الأشكال التالية :


شكل (٣-٢٤)


شكل (٣-٢٥)


شكل (٣-٢٦)


شكل (٣-٢٧)

معامل الارتباط

يُمثِّل معامل الارتباط أهمَّ المقاييس في دراسة الارتباط حيث يحدِّد شدَّة الارتباط من حيث القوَّة والضعف كما يحدِّد نوع الارتباط من حيث كونه إيجابياً أو سلبياً. فإذا كان لدينا عيِّنةٌ مكوَّنة من ن من المفردات وحصلنا من هذه المفردات على بيانات عن قيم متغيِّرين ورمزنا للمتغيِّر الأوَّل بالرمز س و للمتغيِّر الثاني بالرمز ص ، فإنَّ معامل الارتباط بين المتغيِّرين س، ص والذي يرمز له بالرمز ر يُعطى بعدَّة صيغ نقدِّم منها الصيغة التالية والتي تُعرف **بقانون بيرسون للارتباط** :

$$ر = \frac{\overline{س ص} - \overline{س}\ \overline{ص}}{ع_{س} \cdot ع_{ص}} \qquad (٣-١٦)$$

حيث : $\overline{س ص}$ الوسط الحسابي لحاصل ضرب المتغيِّرين س ، ص ،

$\overline{س}$ الوسط الحسابي للمتغيِّر س ،

$\overline{ص}$ الوسط الحسابي للمتغيِّر ص ،

$ع_{س}$ الانحراف المعياري للمتغيِّر س ،

$ع_{ص}$ الانحراف المعياري للمتغيِّر ص .

إنَّ قيمة معامل الارتباط ر تحقق الشرط $-١ \leqslant ر \leqslant ١$ ، وتمكننا هذه القيمة من دراسة الارتباط بين المتغيِّرين ، حيث:

١) تدلُّ إشارة ر على نوع الارتباط، إذ يكون الارتباط **إيجابيًا** إذا كانت ر موجبة و **سلبيًا** إذا كانت ر سالبة .

٢) تحـدِّد قيمـة ر شدَّة الارتباط ، فيكون الارتباط **قويًـا** كلَّما كانت |ر| قريبةً من الواحد ، ويكون الارتباط **ضعيفًا** كلَّما قربت |ر| من الصفر . وفي حالة |ر| = ١ فإنَّ الارتباط يكون **تامًا** ، بينما في حالة ر = ٠ ، فإنَّ الارتباط يكون **منعدمًا** . و قد اتُّفِق على التصنيف التالي لشدَّة الارتباط بين متغيِّرين :

|ر|	الارتباط	
|ر| = ١	تـام	
٠,٧ ≤ |ر| < ١	غير تـام	قوي
٠,٣ ≤ |ر| < ٠,٧		متوسط
٠ < |ر| < ٠,٣		ضعيف
|ر| = ٠	منعدم	

مثال (٣-٢٨)

جُمعت البيانات التالية لعيِّنةٍ من خمسة أشخاص لمعرفة العلاقة بين وزن الشخص و طوله :

الوزن بالكغم	٧٠	٦٨	٦٥	٦٢	٦٤
الطول بالسم	١٨٠	١٦٠	١٦٥	١٢٠	١٣٠

أوجد معامل الارتباط بين وزن الشخص و طوله ثم حدِّد نوع هذا الارتباط و شدَّته.

الحل

نفرض أن وزن الشخص هو س وطوله ص، ونكوّن الجدول التالي :

س	ص	$\text{س}^{٢}$	$\text{ص}^{٢}$	س ص
٧٠	١٨٠	٤٩٠٠	٣٢٤٠٠	١٢٦٠٠
٦٨	١٦٠	٤٦٢٤	٢٥٦٠٠	١٠٨٨٠
٦٥	١٦٥	٤٢٢٥	٢٧٢٢٥	١٠٧٢٥
٦٢	١٢٠	٣٨٤٤	١٤٤٠٠	٧٤٤٠
٦٤	١٣٠	٤٠٩٦	١٦٩٠٠	٨٣٢٠
$\sum \text{س} =$ ٣٢٩	$\sum \text{ص} =$ ٧٥٥	$\sum \text{س}^{٢} =$ ٢١٦٨٩	$\sum \text{ص}^{٢} =$ ١١٦٥٢٥	$\sum \text{س ص} =$ ٤٩٩٦٥

نحسب الوسط الحسابي لكلٍّ من : س ، ص ، س ص

$$\bar{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}} = \frac{٣٢٩}{٥} = ٦٥,٨$$

$$\bar{\text{ص}} = \frac{\sum \text{ص}}{\text{ن}} = \frac{٧٥٥}{٥} = ١٥١$$

$$\overline{\text{س ص}} = \frac{\sum \text{س ص}}{\text{ن}} = \frac{٤٩٩٦٥}{٥} = ٩٩٩٣$$

ثم نحسب الانحراف المعياري لكلٍّ من : س ، ص

$$ع_{\text{س}} = \sqrt{\frac{\sum \text{س}^{٢}}{\text{ن}} - \bar{\text{س}}^{٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{٢١٦٨٩}{٥} - (٦٥,٨)^{٢}} = \sqrt{٤٣٣٧,٨ - ٤٣٢٩,٦٤} = \sqrt{٨,١٦}$$

$$ع_{ص} = \sqrt{\frac{\sum ص^{٢}}{ن} - \bar{ص}^{٢}}$$

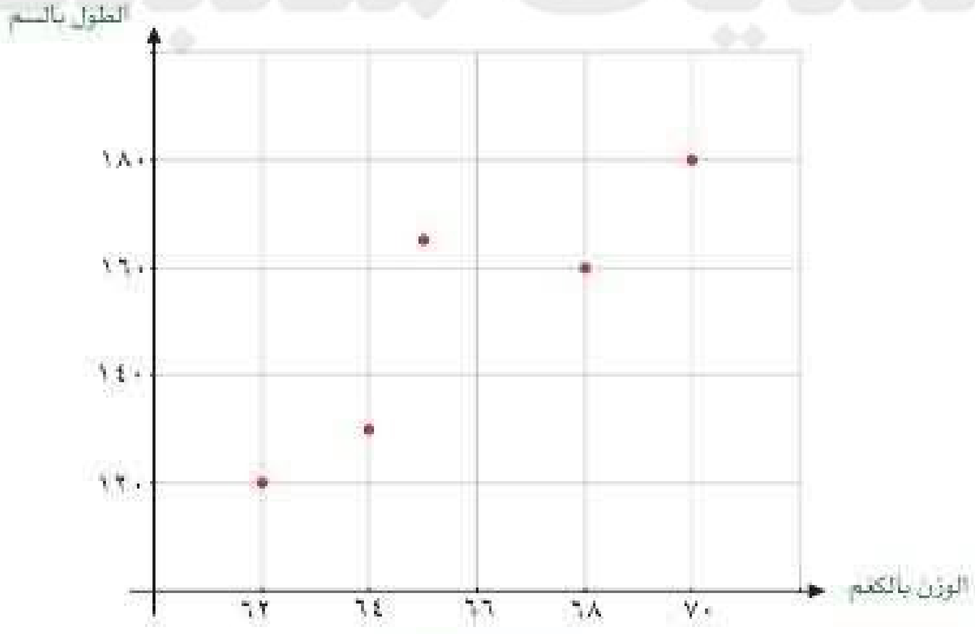
$$= \sqrt{\frac{١١٦٥٢٥}{٥} - (١٥١)^{٢}} = \sqrt{٢٣٣٠٥ - ٢٢٨٠١} = \sqrt{٥٠٤}$$

فيكون معامل الارتباط $ر = \dfrac{٩٩٩٣ - ٦٥,٨ \times ١٥١}{\sqrt{٨,١٦}\,\sqrt{٥٠٤}}$ من العلاقة (٣-١٦)

$$\approx \frac{٥٧,٢}{٦٤,١٣} \approx ٠,٨٩$$

و عليه فإنَّ الارتباط بين وزن الشخص و طوله ارتباطٌ إيجابيٌّ قويٌّ .

انظر شكل الانتشار (٢ - ٢٨) الذي يؤكّد ذلك .



شكل (٢ - ٢٨)

تدريب (٣-١٤)

فـي المثـال السابق تحقَّق من قيمة معامل الارتبـاط، مستخدمًا الآلة الحاسبة في إيجاد قيمة كلٍّ من :

$\bar{س}$ ، $\bar{ص}$ ، $ع_{س}$ ، $ع_{ص}$

تدريب (٣-١٥)

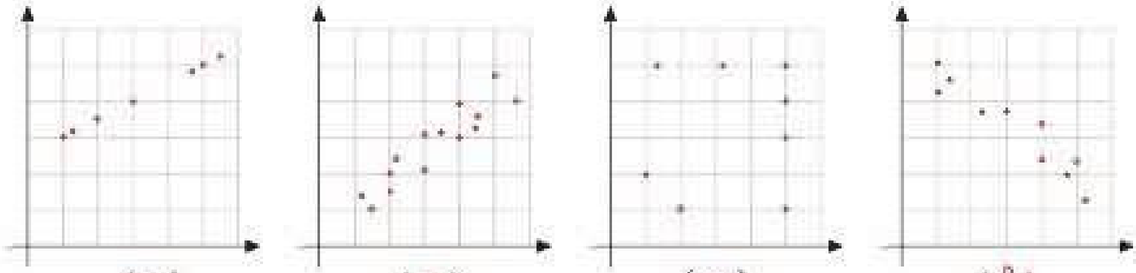
أوجد معامل الارتباط للبيانات الواردة في مثال (٣-٢٧)

تدريب (٣-١٦)

إذا علمت أنَّ كلاً من الأعداد : −١ ، −٠,٤ ، ٠ ، ٠,٦٧ ، ٠,٩٨ هو معامل ارتباط مقابلٌ لأحد الأشكال الواردة في تدريب (٣-١٣) ، اكتب تحت كلِّ شكلٍ معامل الارتباط المقابل له .

تمارين (٣-٥)

١ أكمل الفراغات في كلٍّ ممّا يلي مستخدمًا أحد الأشكال التالية :



(أ) (ب) (جـ) (د)

- الشكل الذي يمثّل ارتباطًا منعدمًا هو ....
- الشكل الذي يمثّل ارتباطًا سلبيًا غير تامٍّ هو ....
- لشكل الذي يمثّل ارتباطًا إيجابيًا تامًّا هو ....
- الشكل الذي يمثّل ارتباطًا إيجابيًا غير تامٍّ هو ....

٢ ارسم شكل الانتشار و منه حدّد نوع الارتباط و شدّته في كلٍّ ممّا يلي :

أ)

س	١	١	٥	٧	٣	٢
ص	٧	٦	٢	١	٤	١

ب)

س	٧٨	٥٥	٦٥	٦٢	٣٤	٤٣	٤٥	٤٨	٥٥	٤٠
ص	٥٥	٥٣	٦٠	٥٠	٣٠	٣٥	٣٥	٤٧	٤٥	٣٢

جـ)

س	٣	٣	٦	٨	٩
ص	٨	٧	٤	٢	١

٣ الجدول التالي يبين درجات عشرة طلاب في الاختبار النصفي لمادتي الرياضيَّات (١) والفيزياء (١):

درجة الرياضيَّات (١)	١٥	١٠	١٨	٢٠	٢٣	١٥	١٨	١٣	٢٥	٢٠
درجة الفيزياء (١)	١٨	١٥	٢٠	٢٣	٢٥	٢٠	١٨	٢٠	٢٥	١٨

ارسم شكل الانتشار للبيانات السابقة و منه حدِّد نوع الارتباط و شدَّته .

٤ صل كلَّ معامل ارتباط في القائمة (أ) بنوع وشدَّة الارتباط المناسبة له في القائمة (ب):

(أ)	(ب)
ر = ,١	إيجابي متوسط
ر = -١	إيجابي تام
ر = - ,٧٩	سلبي تام
ر = - ,٢١	سلبي ضعيف
ر = ,٥٧	سلبي قوي
ر = ٠	إيجابي ضعيف
ر = ١	منعدم
	إيجابي قوي

٥ يبيِّن الجدول التالي أعمار أحد الأنواع من الأشجار بالسنوات و أطوال هذه الأشجار بالأقدام :

العمر	٢	١	٣	٥	٤
الطول	٩	٥	٧	١٤	١٠

أ) احسب معامل الارتباط ثم حدِّد نوع و شدَّة الارتباط .

ب) ارسم شكل الانتشار .

٦ أوجد معامل الارتباط ثم حدّد نوع و شدّة الارتباط في كلٍّ مما يلي :

أ)

س	٣	١٠	١٢	٦	٩	٧	١	٥	١٣	١١
ص	٢٢	٢	٣	٩	٦	٤	٥	١٠	١١	١٣

ب)

س	٥	٣	٩	١٠	٢	٢	٩	٩
ص	٨	٨	١٨	١٧	١٢	١٧	٢	١٧

جـ)

س	٤٣	٣٧	٢٥	١٢	١٠
ص	٤٦	٤٠	٢٨	١٥	١٣

٧ البيانـات الآتية تبيّن درجات الحرارة الخارجية بالدرجات المئويـة , و الارتفاع بآلاف الأقدام لإحدى الطائرات في أوقات مختلفة :

الارتفاع	٠	٤	٤	١٠	٦
درجة الحرارة	٢٧	٢١	١٨	١٠	١٦

احسب معامل الارتباط بين الارتفاع ودرجة الحرارة ثم حدّد نوع و شدّة الارتباط .

٨ البيانات الآتية تمثّل الإنتاج من أحد المحاصيل عند استخدام نوع من السماد بكمياتٍ مختلفة

كمية السماد ٥٠غم / ياردة[١] مربّعة	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
كمية الإنتاج كغم / ٥٠٠ ياردة مربّعة	١٦٠	١٦٨	١٧٦	١٧٩	١٨٣	١٨٦	١٨٩	١٨٦	١٨٤

أوجد معامل الارتباط ثم حدّد نوعه و شدّته .

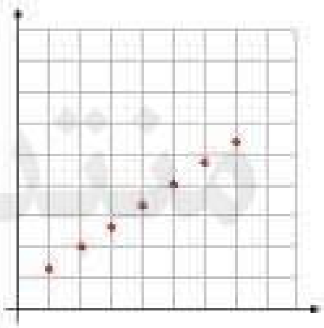
(١) الياردة وحدة لقياس الطول و هي تساوي ٩١,٤٤ سنتيمتر

٩ الجدول التالي يبيّن الدخل والاستهلاك اليومي بعشرات الريالات لسبع أسرٍ في أحد الأحياء بمدينةٍ ما

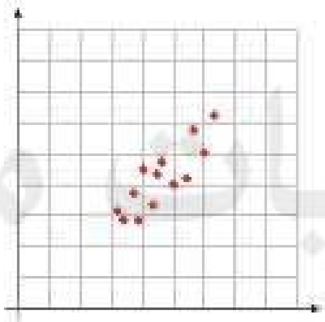
الدخل	٢٨	٣٢	٤٢	٤٨	٤٠	٤٤	٥٠
الاستهلاك	٢٤	٢١	٢٧	٣٠	٢٧	٣٣	٣٦

أوجد معامل الارتباط ثم حدّد نوعه و شدّته .

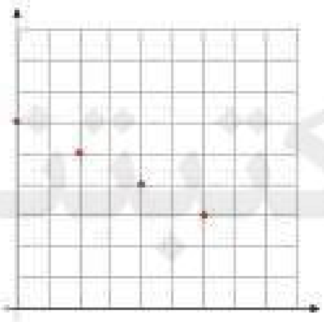
١٠ إذا علمت أنَّ كلاً من الأعداد التالية : -١ ، -٠,٩١ ، -٠,٨١ ، ٠,٦٢ ، ٠,٨٧ ، ١ ، هو معامل ارتباطٍ لأحد الأشكال التالية ، فاكتب تحت كلِّ شكلٍ معامل الارتباط المناسب له .



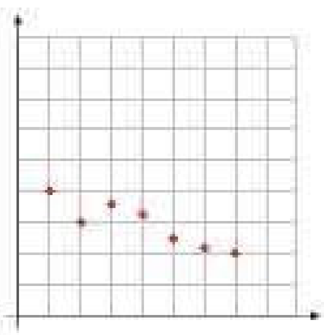
....



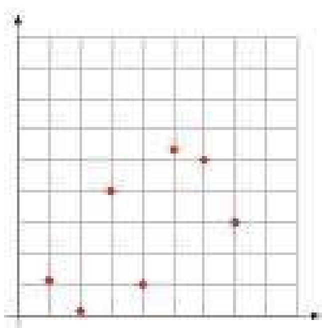
....



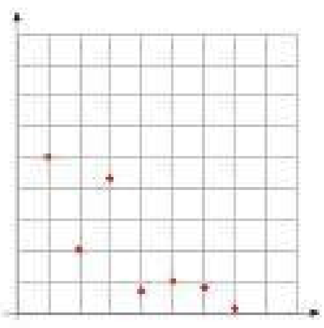
....



....



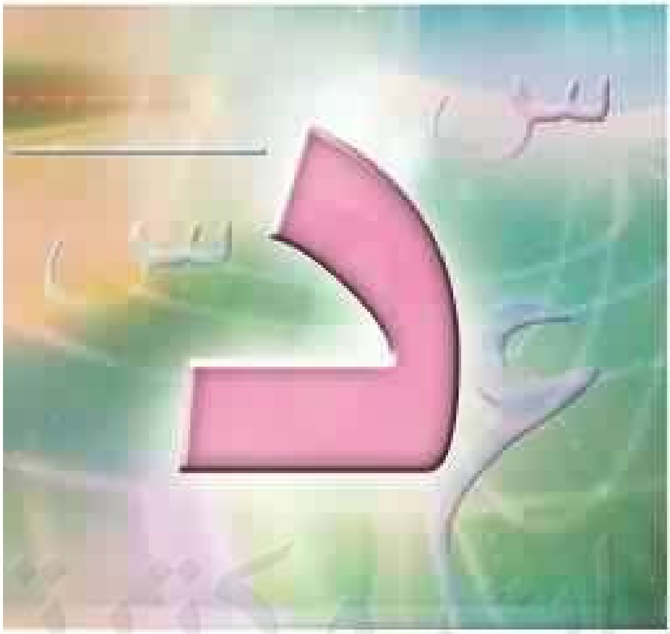
....



....

٣ـ٦

الدرجة المعياريّة
Standard Score



تواجهنـا في حياتنا اليوميّة في المدرسة أو خارجها حالاتٌ تستوجب مقارنة مفردتين وقد تصعب المقارنة إذا كانت المفردتان تنتميان إلى ظاهرتين مختلفتين من حيث الوسط الحسابي والانحراف المعياري ، فقد نحتـاج ــ مثلاً ــ لمقارنة درجة طالب في أحد المـواد بدرجته في مادّةٍ أخرى أو مقارنة درجة طالب في اختباريـن لكلٍّ منهما درجةٌ نهائية تختلف عن الأخرى . فإذا كانت درجة طالب في اللغة العربية ٨٠ ودرجته فـي الرياضيّـات ٧٥ فإنّه يتبادر إلى الذهن أنّ مستوى تحصيل الطالب فـي اختبار اللغة العربية أفضل من مستـوى تحصيله فـي اختبار الرياضيّات . غير أنّ هـذا ليس أمرًا مؤكّدًا فقد تكـون درجته في الرياضيّات بالنسبة لدرجات طلاب صفّه أفضل منها في اللغة العربية . و للمقارنة بين درجتين مختلفتين اُتفق على أن نقيـس بُعد كلّ درجةٍ منهما عن وسطها الحسابـي بانحرافها المعياري (أي باستخدام الانحراف المعياري كوحدة) فنحصل على درجةٍ جديدة قابلة للمقارنة تُعرف **بالدرجة المعياريّة** .

وهذا يعني أنّ : **الدرجة الأصليّة ــ الوسط الحسابي = الدرجة المعياريّة × الانحراف المعياري**

و بذلك نتوصَّل إلى القانون التالي :

$$\text{الدرجة المعياريَّة} = \frac{\text{الدرجة الأصليَّة} - \text{الوسط الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}} \quad (٣-١٧)$$

وإذا رمزنا للدرجة المعياريَّة بالرمز د نحصل على :

$$د = \frac{س - \bar{س}}{ع} \quad (٣-١٨)$$

حيث : س الدرجة الأصليَّة ، $\bar{س}$ الوسط الحسابي ، ع الانحراف المعياري

ملحوظة (٣-٧)

١) الدرجة المعياريَّة د قد تكون موجبة أو سالبة أو صفراً .

فتكون $\begin{cases} د > ٠ & \text{إذا كانت } س > \bar{س} \\ د = ٠ & \text{إذا كانت } س = \bar{س} \\ د < ٠ & \text{إذا كانت } س < \bar{س} \end{cases}$ (لماذا ؟)

وعليه فإن إشارة د تدلُّ على موقع الدرجة الأصليَّة س فوق الوسط الحسابي $\bar{س}$ أو تحته .

٢) القيمة المطلقة للدرجة المعياريَّة تمثِّل عدد الانحرافات المعياريَّة التي تنحرفها المفردة س عن الوسط الحسابي .

مثال (٣-٢٩)

إذا كان الوسط الحسابي لدرجات طلاب صفٍّ في الرياضيَّات ٨٨ و الانحراف المعياري ٨ ، و الوسط الحسابي لدرجاتهم في الفيزياء ٦٥ و الانحراف المعياري ٦ . و إذا كانت درجة أحد الطلاب في الرياضيَّات ٨٠ و في الفيزياء ٧٧ ، فأوجد الدرجة المعياريَّة لدرجة الطالب في كلٍّ من الرياضيَّات و الفيزياء .

الحل

بفرض أنَّ الدرجتين المعياريتين لدرجتيْ الطالب في مادتيْ الرياضيَّات و الفيزياء هما $د_1$ ، $د_2$ على الترتيب ، وبالتعويض عن قيم س ، $\bar{س}$ ، ع في العلاقة (٣-١٨) نجد أنَّ :

$$د_1 = \frac{٨٠ - ٨٨}{٨} = -١ \quad ، \quad د_2 = \frac{٧٧ - ٦٥}{٦} = ٢$$

في المثال السابق لاحظ أنَّ :

- درجة الطالب المعياريَّة في الرياضيَّات (-١) تعني أن درجته الأصليَّة (٨٠) تنحرف انحرافًا معياريًا واحدًا تحت الوسط الحسابي بينما درجته المعياريَّة في الفيزياء (٢) تعني أنَّ ....

(أكمل الفراغ)

- $د_2 > د_1$ وهذا يعني أنَّ درجة الطالب في الفيزياء - مقارنةً بطلاب صفِّه - أفضل من درجته في الرياضيَّات، على الرغم من أنَّ الدرجة الأصليَّة في الرياضيَّات أكبر منها في الفيزياء .

تدريب (٣-١٧)

معتمدًا على البيانات الواردة في الجدول المقابل أكمل الفراغات التالية :

- مستوى الطالب (١) أفضل في اختيار مادة ....
- مستوى الطالب (٢) أفضل في اختيار مادة ....
- مستوى الطالب (٣) أفضل في اختيار مادة ....

	اللغة العربية	اللغة الإنجليزية
الوسط الحسابي	٦٤	٥٦
الانحراف المعياري	١٠	١٢
درجة الطالب (١)	٨٢	٥٦
درجة الطالب (٢)	٧٠	٧٠
درجة الطالب (٣)	٥٠	٤٨

مثال (٣-٣٠)

إذا كان لدينا عينة من خمسة طلاب ، وكانت درجاتهم في الاختبار النصفي لمادة اللغة الإنجليزية هي: ١٠ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ٢٠ فأوجد الدرجات المعيارية المقابلة لهذه الدرجات .

الحل

لإيجاد الدرجات المعيارية نحسب أولاً $\bar{س}$ ، ع :

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{٧٥}{٥} = ١٥$$

$$ع = \sqrt{\frac{\sum س^٢}{ن} - \bar{س}^٢}$$

$$= \sqrt{\frac{١١٩٣}{٥} - (١٥)^٢}$$

$$= \sqrt{٢٣٨,٦ - ٢٢٥} \approx ٣,٦٩$$

س	$س^٢$
١٠	١٠٠
١٢	١٤٤
١٥	٢٢٥
١٨	٣٢٤
٢٠	٤٠٠
$\sum س = ٧٥$	$\sum س^٢ = ١١٩٣$

وبالتعويض عن قيم س ، $\overline{س}$ ، ع في العلاقة (٣-١٨) نحصل على الدرجات المعياريّة كما هو موضّح في الجدول التالي:

س	د
١٠	$\frac{١٠ - ١٥}{٣,٦٩} \approx -١,٣٦$
١٢	$\frac{١٢ - ١٥}{٣,٦٩} \approx -٠,٨١$
١٥	$\frac{١٥ - ١٥}{٣,٦٩} = ٠$
١٨	$\frac{١٨ - ١٥}{٣,٦٩} \approx ٠,٨١$
٢٠	$\frac{٢٠ - ١٥}{٣,٦٩} \approx ١,٣٦$

أوجد الوسط الحسابي و الانحراف المعياري للدرجات المعياريّة التي حصلت عليها في مثال (٣-٢٠).

لعلّك لاحظت أنّ الوسط الحسابي للدرجات المعياريّة = ٠ و الانحراف المعياري = ١ ، وهذا صحيحٌ دائمًا ، أي أنّه إذا قمنا بتحويل جميع الدرجات الأصليّة في توزيعٍ ما إلى درجات معياريّة فإنّنا نحصل على توزيعٍ جديد وسطه الحسابي يساوي صفرًا و انحرافه المعياري يساوي الواحد ، وهذا يوضّح كون المقارنة بين درجتين من توزيعين مختلفين تصبح ممكنةً بعد تحويلهما إلى درجتين معياريّتين ؛ ذلك أنّ الدرجتين المعياريّتين تُعدّان مفردتين في توزيعين لهما الوسط الحسابي نفسه و الانحراف المعياري نفسه .

تمارين (٣-٦)

١ إذا كانت درجة طالب في الاختبار النصفي لمادة الأحياء ٢٢ و الوسط الحسابي لدرجات طلاب صفّه ١٨ و الانحراف المعياري ٣ ، بينما درجته في الاختبار النهائي لهذه المادة ٤١ و الوسط الحسابي لدرجات طلاب صفّه ٢٨ و الانحراف المعياري ٤ ، فقارن بين مستوى تحصيل الطالب في الاختبارين .

٢ معتمدًا على البيانات الواردة في الجدول التالي قارن بين مستوى تحصيل كلِّ طالبٍ في مادتَي اللغة العربية و الاجتماعيات .

	اللغة العربية	الاجتماعيات
الوسط الحسابي	٢٦	٢٤
الانحراف المعياري	٥	٤
درجة الطالب (١)	٢٥	٢٨
درجة الطالب (٢)	٢٢	٢٢
درجة الطالب (٣)	٢٧	٢٤

٣ إذا كانت درجات عيّنة من الطلاب في مادّة التوحيد هي : ٥ ، ١١ ، ١٥ ، ٢٢ ، ٢٤ ، ٢٥ ، فأوجد الدرجات المعيارية المقابلة لهذه الدرجات .

٤ الجدول التالي يُوضّح درجات طالبٍ في أربع موادّ و الوسط الحسابي و الانحراف المعياري لدرجات طلاب صفّه في كلّ مادّة .

المادّة	الرياضيّات	الكيمياء	الفيزياء	الأحياء
درجة الطالب	٨٧	٩٠	٧٥	٩٢
الوسط الحسابي	٧٣	٨٤	٨٠	٩٥
الانحراف المعياري	٤	٣	٢	٣

اكتب هذه المواد مرتّبةً حسب مستوى تحصيل الطالب في كلٍّ منها بدءًا من المادة ذات المستوى الأفضل .

٥ إذا كان الوسط الحسابي لدرجات عيّنةٍ من الطلاب يساوي ٦٠ و الانحراف المعياري يساوي ٨ ،أوجد الدرجة $س_١$ التي تنحرف انحرافين معياريين فوق الوسط الحسابي و الدرجة $س_٢$ التي تنحرف انحرافين معياريين تحت الوسط الحسابي .

٦ إذا كان لدينا عيّنةٌ من ستة طلاب و كانت درجاتهم المعياريّة هي : ٣ ، -١ ، -١,٥ ، ٠ ، -٢ ، م ، فأوجد قيمة م .

٧ إذا كانت درجات ثلاثة طلاب في أحد الصفوف هي : ٢٤ ، ٣١ ، ٣٠ و الدرجات المعياريّة لهم على الترتيب هي : ٢ ، ل ، م فأوجد كلاً من ل ، م علماً بأنّ الوسط الحسابي لدرجات الطلاب هو ٣١ .

٨ إذا كانت درجات ثلاثة طلاب في أحد الصفوف هي : ٨٠ ، ٧٥ ، ٨٢ و الدرجات المعياريّة لهم على الترتيب هي : م ، ب ، ١ فأوجد كلاً من م ، ب علماً بأنّ الانحراف المعياري لدرجات الطلاب هو ٢٥ .

٩ إذا حصل الطالبان محمد و عبد الرحمن في اختبار للرياضيّات على الدرجتين ٧٠ ، ٨٥ على الترتيب و كانت درجتاهما المعياريتان هما -١ ، ٢ على الترتيب، احسب الوسط لحسابي و الانحراف المعياري لدرجات طلاب صفّهما.

١٠ إذا كانت درجات ثلاثة طلاب في أحد الصفوف هي : ٨٣ ، ٧٠ ، ٦٥ و كانت درجاتهم المعياريّة هي : ٢ ، ١ ، م على الترتيب فأوجد قيمة م .

(أنشطة إثرائية) استخدام الحاسب الآلي في دراسة الإحصاء

يُعدُّ برنامج الجداول الالكترونية (Excel) من برامج الحاسب الآلي الفعّالة في علم الإحصاء ، إذ يساعد على تنظيم البيانات و المعلومات و تحليلها و عرضها . فمثلاً : يمكننا إيجاد قيم كلٍّ من : الوسط الحسابي ، الوسيط ، المنوال ، الانحراف المعياري ، معامل الارتباط و الدرجة المعياريّة باستخدام هذا البرنامج .

ومن المفيد للطالب أن يبحث عن طريقة استخدام برنامج الجداول الالكترونية ليتمكّن من إجراء العمليّات الإحصائية التي درسها في هذا المقرر بيسرٍ و سهولة .

- استخدم برنامج الجداول الالكترونية لحلّ بعض المسائل التي سيقترحها عليك معلّمك .

تعلمت في هذه الوحدة

١ أوردنا مقدّمةً عن أهميّة الإحصاء في الحياة العمليّة وأشرنا إلى استفادة المسلمين من علم الإحصاء منذ نشأة المجتمع الإسلامي.

٢ تعرّفنا على مصادر و أسلوب جمع البيانات الإحصائية و صنّفنا البيانات إلى نوعين : نوعيّة و كميّة.

٣ عرضنا طريقة تبويب البيانات في جداول تكرارية وكذلك طريقة تمثيلها باستخدام :
القطاعات الدائريّة ، المدرّج التكراري ، المضلّع التكراري.

٤ قدّمنا مفهوم النزعة المركزيّة، وعرّفنا أهمّ مقاييسها وهي: الوسط الحسابيّ والوسيط والمنوال.

٥ أوضحنا طرق حساب مقاييس النزعة المركزيّة في جميع الحالات، ونلخّصها فيما يلي:

أولاً- الوسط الحسابيُّ للبيانات غير المبوّبة هو : $\overline{س} = \frac{\sum س}{ن}$

والوسط الحسابيُّ للبيانات المبوّبة هو $\overline{س} = \frac{\sum س ك}{\sum ك}$ ، حيث س ترمز لمراكز الفئات في حالة الجدول التكراري ذي الفئات .

ثانياً- الوسيط للبيانات غير المبوّبة (بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً) هو :

القيمة التي ترتيبها $\frac{ن + ١}{٢}$ إذا كان ن فرديًا

الوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢} + ١$ إذا كان ن زوجيًا

والوسيط للبيانات المبوّبة في جدول تكراريٍّ بسيط هو :

القيمة المقابلة للتكرار الأخير في تجميع التكرارات المتتالية التي تبدأ من تكرار أول قيمة في الجدول لتعطي أقلَّ مجموعٍ أكبر من أو يساوي ترتيب الوسيط .

ويُحسب الوسيط للبيانات المبوّبة في جدول تكراريٍّ ذي فئات من القانون التالي:

$$\text{الوسيط} = \text{الحدُّ الأدنى للفئة الوسيطيّة} + \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار المتجمّع المقابل للحدّ الأدنى للفئة الوسيطيّة}}{\text{تكرار الفئة الوسيطيّة}} \times \text{طول الفئة الوسيطيّة}$$

(حيث ترتيب الوسيط للبيانات المبوّبة يساوي $\frac{\sum ك}{٢}$)

ثالثًا المنوال للبيانات غير المبوّبة هو القيمة الأكثر تكرارًا.

والمنوال للبيانات المبوّبة في جدول تكراريّ بسيط هو القيمة التي تقابل أكبر تكرار ويُحسب المنوال للبيانات المبوّبة في جدول تكراريّ ذي فئات من القانون التالي:

$$\text{المنوال} = \text{بداية الفئة المنواليّة} + \frac{\text{التكرار اللاحق لتكرار الفئة المنواليّة} \times \text{طول الفئة المنواليّة}}{\text{التكرار السابق لتكرار الفئة المنواليّة} + \text{التكرار اللاحق لتكرار الفئة المنواليّة}}$$

٦ استخدمنا المنحنى المتجمّع الصاعد لإيجاد الوسيط بيانيًا و استخدمنا المدرّج التكراريّ لإيجاد المنوال بيانيًا.

٧ عرضنا أهمّ مزايا وعيوب مقاييس النزعة المركزيّة.

٨ قدّمنا مفهوم التشتّت وعرّفنا أهمّ مقاييس التشتّت وأدقّها وهو الانحراف المعياريّ.

٩ الانحراف المعياريّ للبيانات غير المبوّبة . $ع = \sqrt{\frac{\sum س^2}{ن} - \bar{س}^2}$

وللبيانات المبوّبة هو $ع = \sqrt{\frac{\sum س^2 ك}{\sum ك} - \bar{س}^2}$ حيث س ترمز لمراكز الفئات في حالة الجدول التكراريّ ذي الفئات.

١٠ استخدمنا الآلة الحاسبة في إيجاد الوسط الحسابي و الانحراف المعياري لبيانات غير مبوّبة .

١١ قدّمنا مفهوم الارتباط.

١٢ استخدمنا شكل الانتشار لتحديد نوع وشدّة الارتباط.

١٣ عرضنا معامل الارتباط كأهمّ المقاييس لدراسة الارتباط واستخدمنا لحسابه الصيغة :

$$ر = \frac{\overline{س ص} - \bar{س}\,\bar{ص}}{ع_س \cdot ع_ص} \qquad \text{حيث } -١ \leqslant ر \leqslant ١$$

١٤ قدّمنا مفهوم الدرجة المعيارية د واستنتجنا أنّ : $د = \frac{س - \bar{س}}{ع}$

ومنها عرفنا أنّ د قد تكون موجبة أو سالبة أو صفرًا

١٥ عرضنا تطبيقات حياتيّة على الارتباط والدرجة المعياريّة.

تمارين عامة

١ ضع علامة ☑ أو علامة ☒ عن يمين ما يلي:

☐ يتميّزُ المنوال بإمكانيّةِ حسابه للبيانات النوعيّةِ.

☐ إذا كان ترتيب الوسيط لبيانات غير مبوّبة يساوي ٢٣ فإنّ عدد مفردات الظاهرة يساوي ٤٦.

☐ الوسط الحسابيُّ للبيانات ١ ، ٢ ، ٤ ، ٢ يساوي وسيطها.

☐ توجد بعض الظواهر انحرافها المعياريُّ ع < ٠

☐ إذا كانت $\sum$ (س − $\overline{\text{س}}$)^2 = ٢٨ ، ن = ٧ فإنّ ع = ٤.

☐ إذا كان ع = ٢، $\overline{\text{س}}$ = ٨ ، ن = ٩ فإنّ $\sum$ س^2 = ٦١٢

☐ الارتباط بين عدد أيام غياب الطلاب و تحصيلهم الدراسي ارتباطٌ سلبيٌّ .

☐ في اختبارٍ ما يكون الارتباط بين عدد الإجابات الصحيحة و عدد الإجابات الخاطئة سلبياً .

☐ معامل الارتباط يمكن أن يساوي ٣.

☐ البيانات التي لها معامل ارتباط ٠٫٢ يكون ارتباطها أقوى من البيانات التي لها معامل ارتباط −٠٫٩٥ .

☐ الدرجة المعياريّةُ أكبر من الصفر دائماً.

☐ إذا كانت الدرجة المعياريّةُ لدرجة طالب في اختبارٍ ما تساوي ١ و الانحراف المعياري لدرجات طلاب صفّه يساوي ١ فإنّ درجة الطالب الأصليّةُ = الوسط الحسابي لدرجات الطلاب .

☐ إذا كانت ن = ١٠ ، $\sum$ س = ٥٠١ ، $\sum$ ص = ٣٢٢، $\sum$ س^2 = ٣٣٨٨١٠ ، $\sum$ ص^2 = ١٠٥٤٠ ، $\sum$ س ص = ١٨٨٦٠٠ . فإنّ معامل الارتباط بين س ، ص يساوي تقريبًا ٠٫٨٧ .

٢ اختر الإجابة الصحيحة لكلٍّ مما يلي:

أ) البيانات: ٣ ، ١ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٣ ، $\frac{١}{٢}$

☐ ثنائيّة المنوال ☐ متعدّدة المنوال

☐ عديمة المنوال ☐ وحيدة المنوال

ب) إذا كان ترتيب الوسيط لبيانات مبوّبة يساوي ١٦ فإنّ عدد القراءات هو:

☐ ٣٢ ☐ ٣١

☐ ٨ ☐ ٩

جـ) للبيانات: ٢ ، ٢ ، ٠ ، ٤ ، ٤ تكون قيمة الوسيط هي:

☐ ٣ ☐ ٠

☐ ٢ ☐ ٤

د) الانحراف المعياريّ للبيانات: ٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣ هو:

☐ $\sqrt{\frac{٤٥ - ٣^{٢}}{٥}}$ ☐ ٠

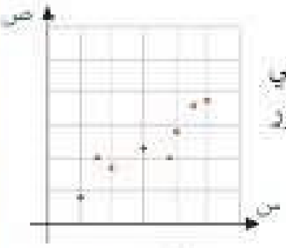
☐ ٣ ☐ $\sqrt{\frac{٣^{٢} - ٤٥}{٥}}$

هـ) إذا كان $ع^{٢} = ع + ٢٠$ فإنّ الانحراف المعياريّ ع يساوي:

☐ −٤ ☐ ٥

☐ ٤ ☐ −٥

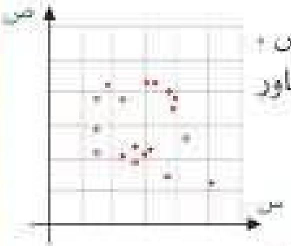
و) الارتباط بين س ، ص في شكل الانتشار المجاور هو ارتباط:



☐ إيجابيٌّ تام ☐ إيجابيٌّ غير تام

☐ سلبيٌّ تام ☐ سلبيٌّ غير تام

ز) معامل الارتباط بين س ، ص في الشكل المجاور يمكن أن يساوي:



☐ ٠٫٨ ☐ −٠٫٢

☐ ٠٫٢ ☐ −٠٫٨

ح) معامل الارتباط بين محيط الدائرة و طول نصف قطرها يساوي:

☐ ٠٫٥ ☐ −٠٫١

☐ ٠ ☐ ١

ط) إذا كانت الدرجة المعياريّة لدرجة طالب تساوي ١ و الانحراف المعياري لدرجات طلاب صفه يساوي ٢ ، فإنّ انحراف درجة الطالب الأصليّة عن الوسط الحسابي للدرجات يساوي:

☐ ٢ ☐ −٢

☐ ٠٫٥ ☐ −٠٫٥

ي) إذا كان انحراف درجة طالب عن الوسط الحسابي لدرجات طلاب صفه تساوي الانحراف المعياري لدرجات الطلاب، فإنّ الدرجة المعياريّة لدرجة الطالب تساوي :

☐ ١ ☐ ٠

☐ -١ ☐ ٢

ك) إذا كان الوسط الحسابي لدرجات عيّنة من الطلاب يساوي ٧٠ و الانحراف المعياري يساوي ٦، فإنّ درجة الطالب التي تنحرف انحرافين معياريين تحت الوسط هي :

☐ ٨٢ ☐ ٥٨

☐ ٧٨ ☐ ٦٢

٣ الجدول التالي يوضّح مساحات القارّات بالمليون كيلومتر مربّع :

القارّة	أفريقيا	آسيا	أوروبا	الأمريكيتان	استراليا	المجموع
المساحة	٣٠	٥٠	٥	٤٧	٨	١٤٠

مثّل هذه البيانات باستخدام القطاعات الدائريّة .

٤ يؤثّر التدخين في صحّة الإنسان، لأنّه يحتوي على سموم كثيرة منها النيكوتين، ففي تجربة بسيطة أُخذت ٦ سجائر من أنواعٍ كثيرة من التبغ وسُجّلت كميّة النيكوتين بالملغرام في كلّ منها فكانت على النحو التالي: ١٢,٣ ، ١٨,١ ، ١٥,٧ ، ١٠ ، ١٦ ، ٢١,٢ . أوجد ما يلي:

أ) مقاييس النّزعة المركزيّة جميعها (التي درستها) لكميّة النيكوتين في هذه السجائر.

ب) الانحراف المعياريّ لكميّة النيكوتين.

٥ إذا كانت أبعاد الطرق بالكيلومتر بين مكّة المكرمة وعددٍ من المدن الأخرى في المملكة العربيّة السعوديّة موضّحة بالجدول.

المدينة	الرياض	الطائف	المدينة المنورة	الدمام	بريدة	تبوك	جدة	طريف
المسافة	٩٨٩	٨٨	٤٤٢	١٤٥٦	٩١٥	١١٢٣	٧٢	٢٧٢٢
المدينة	نجران	أبها	الخبر	حائل	الخرج	العلا	عنيزة	عرعر
المسافة	٨٩٨	٦٠٦	١٤٥٢	٨٩٤	١٠٦٩	٨٢٢	٩٦٨	٢٤٨٤

أ) أوجد الوسط الحسابيّ و الوسيط لمسافة الطرق بين هذه المدن ومكة المكرمة.

ب) هل يوجد منوال لمسافات الطرق بين هذه المدن ومكة المكرمة؟

٦ إذا كانت أرباح بائع في أسبوعين متعاقبين كما يلي:

الأرباح بمئات الريالات	٠	٦٠	٧٥	٨٠	٩٠	١٠٠
عدد الأيام (التكرار)	٢	١	٣	١	٥	٢

فأوجد ما يلي:

أ) الوسيط لأرباح البائع في الأسبوعين المتعاقبين.

ب) المنوال للأرباح.

جـ) الانحراف المعياري للأرباح.

٧ الجدول التالي يُعبر عن أوزان عينة تتألف من مائة شخص:

مراكز الفئات	٦١	٦٤	٦٧	٧٠	٧٣
التكرار	٥	١٨	٤٢	٢٧	٨

أوجد ما يلي:

أ) الوسيط للأوزان حسابياً وبيانياً.

ب) المنوال للأوزان حسابياً وبيانياً.

جـ) الانحراف المعياري للأوزان.

٨ اكتب أطوال طلاب صفك لأقرب سنتيمتر و من ثمّ :

أ) كوّن جدولاً تكرارياً يمثّل الأطوال وفق فئات مناسبة .

ب) ارسم المدرّج التكراري و المضلّع التكراري للأطوال .

جـ) أوجد الوسيط حسابياً وبيانياً للأطوال.

د) أوجد المنوال حسابياً وبيانياً للأطوال.

هـ) أوجد الانحراف المعياري للأطوال.

٩ يبيِّن الجدول التالي الدرجات النهائية لسبعة طلاب في مادتي رياضيات (١) وَ رياضيات (٢)

	الطالب (١)	الطالب (٢)	الطالب (٣)	الطالب (٤)	الطالب (٥)	الطالب (٦)	الطالب (٧)
الدرجة في رياضيات (١)	٧٥	٨٢	٦٥	٩٠	٧٧	٨٧	٦٨
الدرجة في رياضيات (٢)	٧٠	٨٥	٥٥	٩٠	٧٠	٨٢	٦٠

أ) ارسم شكل الانتشار للبيانات السابقة .

ب) احسب معامل الارتباط و منه حدِّد نوع الارتباط و شدَّة الارتباط .

جـ) في أيِّ المادتين كان تحصيل الطالب (٤) أفضل .

١٠ أثبت أن الصيغة التالية لمعامل الارتباط هي صيغةٌ مكافئة للصيغة (٣ – ١٦)

$$ر = \frac{ن \sum س ص - \sum س \times \sum ص}{\sqrt{\frac{ن \sum س^2 - (\sum س)^2}{ن^2}} \times \sqrt{\frac{ن \sum ص^2 - (\sum ص)^2}{ن^2}}}$$

١١ أجرى معلِّمٌ اختبارين لطلابه ، الأول درجته النهائية ١٠٠ فكان الوسط الحسابي للدرجات ٧٠ و الانحراف المعياري ٦ ، و الثاني درجته النهائية ٤٠ فكان الوسط الحسابي للدرجات ٣٠ و الانحراف المعياري ٣ ، فإذا حصل أحد الطلبة على الدرجتين ٧٥ ، ٣٥ في الاختبارين على الترتيب ، ففي أيِّ الاختبارين كان تحصيله أفضل ؟

١٢ اختار معلِّم الرياضيات طالبين عشوائياً من الصف فكان الفرق بين درجتيهما في أحد الاختبارات ١٢ و الفرق بين درجتيهما المعياريتين ١,٥ فأوجد الانحراف المعياري لدرجات الطلاب علماً بأنَّ الوسط الحسابي لدرجات طلاب الصف ٦٠.

أجوبة بعض التمارين

الوحدة الأولى: الحساب التوافقي ونظرية ذات الحدين

تمارين (١-١)

١) ٤ طرق .

٢) ١٠٥ طريقة .

٣) أ) ١٢ كلمة ، ب) ١٦ كلمة .

٤) أ) ٢٤٠ عددًا ، ب) ٨٦٤ عددًا .

٥) أ) ٢١٩٥٢٠٠٠ لوحة ، ب) ١٤١٥٢٣٢٠ لوحة .

٦) ٧٢٠ طريقة .

تمارين (١-٢)

٣) أ) $\frac{(\text{ن}+٢)(\text{ن}+١)}{\text{ن}}$ ، ب) ن ، جـ) $\frac{\text{ن}(\text{ن}-١)}{٢}$

٤) أ) ن = ٦ ، ب) ن = ٥ ، جـ) ن = ١٤ ، د) ن = ٦

٥) م = ٧ ، ن = ٣ ، ٦) ٩ ، ٧) ٩٩٠

٨) ر = ٥ أو ر = ٧ ، ١١) ٢٤ طريقة ، ١٢) ٥٠٤٠ طريقة .

١٣) ٦٨٤٠ ، ١٤) ٨٤٠ طريقة ، ١٥) ٨٤ طريقة .

١٦) ٣٣٦ ، ١٧) ٧١٥ طريقة ، ١٨) ٢٤ طريقة .

١٩) ١٦٨٠ كلمة ، ٢٠) أ) ٦٤٨ عددًا ، ب) ٤٤٨ عددًا .

٢١) ٤٨ طريقة ، ٢٢) ٢٤ طريقة ، ٢٣) ١٢٦٠ طريقة .

٢٤) أ) ٢١٦١٢٥٠، ب) ١٢٩٦٧٥٠٠، ٢٥) ٢١٠٢١٠ ، ٢٦) ٣٤٥٦٠

تمارين (١ - ٣)

٥ أ) ٤٨ ، ب) $\frac{١٣٧}{٦٠}$ ، جـ) ٣٢ ، د) ١٥

تمارين (١ - ٤)

٢ أ) ٢٨ أ^{٢} س^{٦} ، ب) $\frac{١١٢٠}{٢٧}$ س^{٤} ، جـ) ١٤٠ س^{٤}

د) − ٤٠٣٢ س^{٣} ، هـ) ٢٠ ، و) − ١٥١٢ س^{٤}

ز) − ٢٥٢ س^{٥} ، ح) ٦٣٠ س^{٥} ، $\frac{-١٢٦}{٥}$ س^{٤}

٣ أ) ٤٥ ، ب) ٤٨٦٠

٤ أ) ١,١٠ ، ب) ٠,٧٤

٥ ن = ٥

تمارين عامة

٤ ٤٢ ، ٥ ١٠ ، ٦ ٢٥٢٠ ، ٧ ١١٨٨٠ ، ٨ ٢٥

الوحدة الثانية

الاحتمال

تمارين (٢-٢)

٣ أ) $\frac{٣}{١٤}$ ، ب) $\frac{٣}{٧}$ ، جـ) $\frac{٥}{١٤}$ ، د) $\frac{١١}{١٤}$

هـ) $\frac{٨}{١٤}$ ، و) $\frac{٩}{١٤}$ ، ز) $\frac{٩}{١٤}$ ، ح) ١

ط) $\frac{٥}{١٤}$ ، ي) صفر

٤ أ) $\frac{١}{٢}$ ، ب) $\frac{١}{٣}$ ، جـ) $\frac{١}{٢}$

د) صفر ، هـ) $\frac{٥}{٦}$ ، و) $\frac{١}{٣}$

٥ أ) $\frac{٣}{٤}$ ، ب) $\frac{١}{٢}$ ، جـ) $\frac{٧}{٨}$ ، د) $\frac{١}{٢}$

٦ أ) $\frac{١٣}{٢٠}$ ، ب) $\frac{٣}{٥}$ ، جـ) $\frac{١٣}{٢٠}$ ، د) $\frac{١٧}{٢٠}$ ، هـ) $\frac{١٧}{٢٠}$

٧ $\frac{١}{٦}$

٨ أ) ٠,٦ ، ب) ٠,٣ ، جـ) ٠,٦

٩ أ) ٠,٢ ، ب) ٠,٨

١٠ $\frac{١١}{١٢}$

١١ أ) $\frac{١}{١٥}$ ، ب) $\frac{٧}{١٥}$ ، جـ) $\frac{٨}{١٥}$

١٢ أ) $\frac{٨}{١٥}$ ، ب) $\frac{٨}{٧٥}$ ، جـ) $\frac{٤٩}{٧٥}$

١٣ أ) $\frac{٤٠}{٧٣}$ ، ب) $\frac{٢٥}{٧٣}$ ، جـ) $\frac{٣٥}{٧٣}$

د) $\frac{٥٨}{٧٣}$ ، هـ) $\frac{٦١}{٧٣}$ ، و) $\frac{٥١}{٧٣}$

ز) $\frac{٢٢}{٧٣}$ ، ح) $\frac{٩}{٧٣}$ ، ط) $\frac{١٢}{٧٣}$

ي) $\frac{١٥}{٧٣}$ ، ك) $\frac{١٨}{٧٣}$

تمارين عامة

٥ أ) $\frac{١}{٤}$ ، ب) $\frac{١}{٤}$ ، جـ) $\frac{٣}{٤}$ ، د) $\frac{١}{٢}$

٦ $\frac{٥}{٦}$

٨ أ) $\frac{٢}{٣}$ ، ب) $\frac{٩}{١٤}$ ، جـ) $\frac{٤}{٩}$ ، د) $\frac{٤٥٠}{٣٠٠٣}$ ، هـ) $\frac{٦٥}{٢٧٣}$

٩ أ) $\frac{٧٠}{٢٥٣}$ ، ب) $\frac{١٢٠}{٢٥٣}$ ، جـ) $\frac{٥٦}{٢٥٣}$ ، د) $\frac{١٨٣}{٢٥٣}$

الوحدة الثالثة

الإحصاء

تمارين (٣-١)

٤ ب) ٢٩ طالب ، جـ) ١٦ طالب

٥ ب) عدد الطلاب الذين تقل درجة كلٍّ منهم عن ١١ يساوي ٤

٨ أ) ١١ عضو ، ب) ٧ أعضاء

تمارين (٣-٣)

١ الوسط الحسابي = ٢,٥ مليون ، الوسيط = ٢,٢٥ مليون ، المنوال = ٢,٢٥ مليون

٢ الوسط الحسابي = ١٠ ، الوسيط = ٨,٨ ، المنوال = ٨,٤

٣ الوسط الحسابي = ١٠٦٨٨٥٠ ، الوسيط = ١٠٦١٨٧٠ ، عدد الحجاج لا منوال له

٤ أ) ٤,٩١٤ ، ب) ٤ ، جـ) ٤

٥ الوسط الحسابيُّ = ١١٢,٥ ، الوسيط = ١١٨,٢٥ ، المنوال = ١١٩,٢٩

٦ أ) ٦٩,٤ ، ب) ٦٨,٥ ، جـ) ٦٧,٥

٧ أ) ١٥٢,٢ ، ب) ١٥٣ ، جـ) ١٥٤,٣

٨ أ) ٣٦,٧ ، ب) ٣٥,٨ ، جـ) ٣٣,٣٠٨

٩ ٣٠   ١٠ ٥

تمارين (٣ - ٤)

① ٢,٤ ، ② ٣,٤٩ ، ③ أ) ١٩,٦ ، ب) ١٤,٤٦

④ ١٠ ، ⑤ ٢,٥ ، ⑥ ١,٧

⑦ ٩,٨ ، ⑧ ٢,٦

تمارين (٣ - ٥)

② أ) ارتباط سلبي غير تام ، ب) ارتباط إيجابي غير تام ، جـ) ارتباط سلبي تام

③ ارتباط إيجابي غير تام

⑤ أ) ر ≈ ٠,٩٨ ، ارتباط ايجابي قوي .

⑥ أ) ر ≈ − ٠,٢٦ ، ارتباط سلبي ضعيف .

ب) ر ≈ ٠,١٣ ، ارتباط ايجابي ضعيف .

جـ) ر = ١ ، ارتباط ايجابي تام .

⑦ ر ≈ −٠,٩٨ ، ارتباط سلبي قوي .

⑧ ر ≈ ٠,٨٧ ، ارتباط ايجابي قوي .

⑨ ر ≈ ٠,٩٢ ، ارتباط ايجابي قوي .

تمارين (٣-٦)

٤ الرياضيات ، الكيمياء ، الأحياء ، الفيزياء .

٥ $س_١$ = ٧٦ ، $س_٢$ = ٤٤

٦ أ = ١,٥

٧ ل = ٠ ، م = -١٠

٨ أ = ٠,٩٢ ، ب = ٠,٧٢

٩ ع = ٥ ، $\bar{س}$ = ٧٥

١٠ م = ٠,٥٨

تمارين عامة

٤ أ) الوسط الحسابي =١٥,٥٥ ، الوسيط = ١٥,٨٥ ، عديمة المنوال .

ب) ٣,٧

٥ أ) ١٠٦٣,١ ، ب) ٩٤١,٥

٦ أ) ٩٠ ، ب) ٩٠ ، جـ) ٣٢,١٤

٨ أ) ٦٧,٤ ، ب) ٦٧,٣ ، جـ) ٢,٩

٩ ب) ر ≈ ٠,٩٧ ، ارتباط إيجابي قوي .

١٢ ع = ٨

المملكة العربيَّة السعوديَّة
وزارة التربية والتعليم
الوكالة المساعدة للتطوير التربويّ
إدارة المناهج/ التعليم الثانوي

بسم الله الرحمن الرحيم

استبانة تقويم كتاب

مشرف تربويٌّ		معلم		وليُّ أمر الطالب	

المؤهل الدراسيُّ: .... التخصُّص: ....

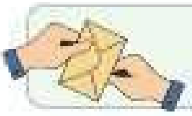
نأمل التكرُّم بالإجابة عن بنود الاستبانة وذلك بوضع علامة (✓) أمام كل بند في حقل التقدير المناسب كما في المثال التالي:

العبارة	ممتاز	جيِّد جدًّا	جيِّد	مقبول	ضعيف
تنوُّع موضوعات الكتاب وكفايتها			✓		

في المثال السابق وضعت علامة (✓) في حقل جيِّد وهذا يعني أنَّ موضوعات الكتاب متنوِّعة وكافية بتقدير جيِّد، وهكذا ...

ترسل الاستبانة بعد تعبئتها إلى

وزارة التربية والتعليم – الوكالة المساعدة للتطوير التربويّ – الإدارة العامَّة للمناهج/ التعليم الثانوي



أولًا - محتوى الكتاب ومادّته

م	العبارة	ممتاز	جيد جداً	جيد	مقبول	ضعيف
١	تحقيق المحتوى أهداف المادّة.					
٢	ملاءمة لغة الكتاب مستوى الطلاب.					
٣	ترسيخ المحتوى للقيم الدينيّة.					
٤	ترابط موضوعات الكتاب.					
٥	تنوّع موضوعات الكتاب وكفايتها.					
٦	تحقيق الموضوعات مبدأ تماسك الخبرة التعليميّة واستمرارها.					
٧	تركيز الكتاب على إكساب الطلاب خبرات جديدة.					
٨	شمول الكتاب معلومات المادّة وحقائقها الأساسيّة.					
٩	مساعدة عرض المحتوى الطلاب على التعلّم الذاتيّ.					
١٠	جذب أسلوب الكتاب اهتمام الطلاب.					
١١	مواءمة المادّة للخطّة الدراسيّة.					

ثانيًا - التقويم (أسئلة الكتاب)

م	العبارة	ممتاز	جيد جداً	جيد	مقبول	ضعيف
١٢	كفاية الأسئلة في مساعدة الطالب على استيعاب مادّة الكتاب.					
١٣	كفاية الأسئلة في استثارة تفكير الطالب.					
١٤	كفاية الأسئلة في تطبيق ما تعلّمه في مواقف الحياة المختلفة.					
١٥	مناسبة الأسئلة مستوى طلاب الصف.					
١٦	دقّة صياغة الأسئلة ووضوحها.					
١٧	مراعاة الأسئلة الفروق الفرديّة بين الطلاب.					
١٨	تنوّع الأسئلة بشكلٍ عامّ.					
١٩	شمول الأسئلة مستويات المعرفة.					

ثالثًا - شكل الكتاب وإخراجه

م	العبارة	ممتاز	جيد جداً	جيد	مقبول	ضعيف
٢٠	نوعيّة ورق الكتاب.					
٢١	لون ورق الكتاب.					
٢٢	متانة تجليد الكتاب.					
٢٣	ملاءمة تصميم الغلاف فنيًّا لموضوع الكتاب.					
٢٤	ترتيب وتنسيق العناوين إلى رئيسة وجانبيّة وفرعيّة.					
٢٥	احتواء الكتاب على رسوم ومصوّرات.					
٢٦	ملاءمة صحّة الرسوم والأشكال وتناسق ألوانها.					
٢٧	مناسبة حجم الخطّ الطباعيّ المستخدم.					
٢٨	توظيف الألوان في توضيح الأفكار والأمثلة وحلولها بما يناسب طالب هذه المرحلة.					

رابعًا - أسئلة عامّة

م	العبارة	نعم	لا
٢٩	هل هناك ضرورة لإضافة وسائل تعليميّة مساعدة للكتاب ؟		
٣٠	هل يوجد في الكتاب موضوعات ينبغي حذفها ؟ إذا كانت الإجابة بـ (نعم) ، فما هي ؟		
٣١	هل هناك موضوعات يُقترح إضافتها للكتاب ؟ إذا كانت الإجابة بـ (نعم) ، فما هي ؟		

تم بحمد الله

شركة المطابع الأهلية للأوفست المحدودة
National Offset Printing Press Ltd. Co.
الرياض - المملكة العربية السعودية