٨:٤٠ م ٦٩%
://elib.moe.gov.ae

الوحدة 8

الدوال والعلاقات الأسيّة واللوغاريتمية
مخطط الوحدة

	التقويم التشخيصي تدريب سريع	الاستكشاف 8–2	الدرس 8–2	الدرس 8–3
	الدرس 8–1			
	45 min؛ يوم واحد 90 min؛ 0.75 يوم	45 min؛ 0.5 يوم 90 min؛ 0.25 يوم	45 min؛ 1.5 يومًا 90 min؛ 1.25 يومًا	45 min؛ 1.5 يومًا 90 min؛ 1.5 يومًا
العنوان	التمثيل البياني للدوال الأسيّة	مختبر تقنية التمثيل البياني: حل المعادلات والمتباينات الأسيّة	حل المعادلات والمتباينات الأسيّة	اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية
الأهداف	■ تمثيل دوال النمو الأسي بيانيًا. ■ تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًا.	■ استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات الأسيّة من خلال التمثيل البياني أو استخدام خاصية الجدول.	■ حل المعادلات الأسيّة. ■ حل المتباينات الأسيّة.	■ إيجاد قيمة التعابير اللوغاريتمية. ■ تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا.
المفردات الأساسية	الدالة الأسيّة النمو الأسي خط التقارب عامل النمو الاضمحلال الأسي عامل الاضمحلال		المعادلة الأسيّة المراجحة المركبة المتباينة الأسيّة	لوغاريتم الدالة اللوغاريتمية

Chapter sourced from Exponential and Logarithmic Functions and Relations, from Algebra 2 Chapter 7 © 2014 McGraw-Hill Education
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

606 / 475

٨:٤١ م ٦٩٪
://elib.moe.gov.ae

	الدرس 8–7 45: min 0.75 ،90 min يوم واحد	الاستكشاف 8–8 45: min 0.5 ،90 min 0.25 يوم	الدرس 8–8 45: min يوم واحد ،90 min 0.75 يوم	التوسع 8–8 45: min 0.5 ،90 min 0.25 يوم
العنوان	الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية	مختبر ورقة البيانات: المرابحة المركبة	استخدام الدوال الأسية واللوغاريتمية	مختبر تقنية التمثيل البياني: التبريد
الأهداف	■ إيجاد قيمة التعابير التي تحتوي على الأساس الطبيعي واللوغاريتم الطبيعي. ■ حل المعادلات والمتباينات الأسية باستخدام اللوغاريتمات الطبيعية.	■ استخدام ورقة بيانات لعرض نمو استثمار بمرور الوقت.	■ استخدام اللوغاريتمات لحل المسائل التي تشتمل على النمو الأسي والاضمحلال الأسي. ■ استخدام اللوغاريتمات لحل المسائل التي تشتمل على النمو اللوجستي.	■ استخدام جهاز جمع البيانات للتحقق من الاختلاف بين أنواع الأكواب المعزولة وزمن التبريد.
المفردات الأساسية	الأساس الطبيعي: e الدالة الأسية للأساس الطبيعي اللوغاريتم الطبيعي		معدل النمو المستمر معدل الاضمحلال المستمر نموذج النمو اللوجيستي	

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

606 / 475

٨:٤١ م ٦٩% ://elib.moe.gov.ae

مهارات دراسية

قد تسهم خريطة المقارنة في مساعدة الطلاب في فهم أوجه الاختلاف بين مفهومين متماثلين أو أكثر. اعرض أمام الطلاب نموذج الخريطة التي تقارن بين النمو الأسي والاضمحلال الأسي في الدرس 1–8. أثناء دراسة الوحدة 8، اطلب من الطلاب العمل في مجموعات تعاونية صغيرة لتصميم خرائط مقارنة توضح الدوال الأسية واللوغاريتمية والدوال الأسية للأساس e والدوال اللوغاريتمية الطبيعية.

الدوال الأسية	
النمو الأسي	**الاضمحلال الأسي**
$A(t) = a(1 + r)^t$	$A(t) = a(1 - r)^t$
• متصل. واحد إلى واحد. تزايدي • D = (كل الأعداد الحقيقية). R = (الأعداد الحقيقية الموجبة) • خط تقارب أفقي	• متصل. واحد إلى واحد. تناقصي • D = (كل الأعداد الحقيقية). R = (الأعداد الحقيقية الموجبة) • خط تقارب أفقي

تكوين الاستقلال من خلال إستراتيجيات يضعها الطلاب

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

٨:٤١ م ٦٩% ://elib.moe.gov.ae

الوحدة 8 مخطط الوحدة

الدوال والعلاقات الأسيّة واللوغاريتمية

	التقويم التشخيصي تدريب سريع	الاستكشاف 8–2 45 min :0.5 يوم 90 min :0.25 يوم	الدرس 8–2 45 min :1.5 يومًا 90 min :1.25 يومًا	الدرس 8–3 45 min :1.5 يومًا 90 min :1.5 يومًا
العنوان	الدرس 8–1 45 min :يوم واحد 90 min :0.75 يوم التمثيل البياني للدوال الأسيّة	مختبر تقنية التمثيل البياني: حل المعادلات والمتباينات الأسيّة	حل المعادلات والمتباينات الأسيّة	اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية
الأهداف	■ تمثيل دوال النمو الأسي بيانيًا. ■ تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًا.	■ استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات الأسيّة من خلال التمثيل البياني أو استخدام خاصية الجدول.	■ حل المعادلات الأسيّة. ■ حل المتباينات الأسيّة.	■ إيجاد قيمة التعابير اللوغاريتمية. ■ تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا.
المفردات الأساسية	الدالة الأسيّة النمو الأسي خط التقارب عامل النمو الاضمحلال الأسي عامل الاضمحلال		المعادلة الأسيّة المراجحة المركبة المتباينة الأسيّة	لوغاريتم الدالة اللوغاريتمية

Chapter sourced from Exponential and Logarithmic Functions and Relations, from Algebra 2 Chapter 7 © 2014 McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

606 / 475

٨:٤٢ م ٦٩٪
://elib.moe.gov.ae

وتيرة التقدم المقترحة			
الفترات الزمنية	التدريس	المراجعة والتقويم	الإجمالي
45 دقيقة	12 يومًا	يومان	14 يومًا
90 دقيقة	9 أيام	يوم واحد	10 أيام

	التوسع 8–3 45 min، 0.5 يوم 90 min، 0.25 يوم	الدرس 8–4 45 min: يوم واحد 90 min، 0.75 يوم	الدرس 8–5 45 min: يوم واحد 90 min، 0.75 يوم	الدرس 8–6 45 min: 1.5 يومًا 90 min، 1.25 يومًا	التوسع 8–6 45 min: 0.5 يوم 90 min، 0.25 يوم
	مختبر تقنية التمثيل البياني: اختيار أفضل نموذج	**حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية**	**خصائص اللوغاريتمات**	**اللوغاريتمات العادية**	**مختبر تقنية التمثيل البياني: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية**
	■ استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد المعادلة التي تناسب الدوال الأسية واللوغاريتمية بشكل أفضل.	■ حل المعادلات اللوغاريتمية. ■ حل المتباينات اللوغاريتمية.	■ التحويل إلى أبسط صورة وإيجاد قيمة التعابير باستخدام خصائص اللوغاريتمات. ■ حل المعادلات اللوغاريتمية باستخدام خصائص اللوغاريتمات.	■ حل المعادلات والمتباينات الأسية باستخدام اللوغاريتمات العادية. ■ إيجاد قيمة التعابير اللوغاريتمية باستخدام صيغة تغيير الأساس.	■ استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات والمتباينات الأسية واللوغاريتمية.
		المعادلة اللوغاريتمية المتباينة اللوغاريتمية		اللوغاريتم العادي صيغة تغيير الأساس	

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

٨:٤٢ م ٦٩٪
://elib.moe.gov.ae

الوحدة 8 الدوال والعلاقات الأسيّة واللوغاريتمية
مخطط الوحدة

	الدرس 8–7 45 min: يوم واحد 0.75 .90 min يوم	الاستكشاف 8–8 45 min: 0.5 يوم 0.25 .90 min يوم	الدرس 8–8 45 min: يوم واحد 0.75 .90 min يوم	التوسع 8–8 45 min: 0.5 يوم 0.25 .90 min يوم
العنوان	الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية	مختبر ورقة البيانات: المرابحة المركبة	استخدام الدوال الأسيّة واللوغاريتمية	مختبر تقنية التمثيل البياني: التبريد
الأهداف	■ إيجاد قيمة التعابير التي تحتوي على الأساس الطبيعي واللوغاريتم الطبيعي. ■ حل المعادلات والمتباينات الأسيّة باستخدام اللوغاريتمات الطبيعية.	■ استخدام ورقة بيانات لعرض نمو استثمار بمرور الوقت.	■ استخدام اللوغاريتمات لحل المسائل التي تشتمل على النمو الأسي والاضمحلال الأسي. ■ استخدام اللوغاريتمات لحل المسائل التي تشتمل على النمو اللوجستي.	■ استخدام جهاز جمع البيانات للتحقق من الاختلاف بين أنواع الأكواب المعزولة وزمن التبريد.
المفردات الأساسية	الأساس الطبيعي: e الدالة الأسيّة للأساس الطبيعي اللوغاريتم الطبيعي		معدل النمو المستمر معدّل الاضمحلال المستمر نموذج النمو اللوجيستي	

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

606 / 475

٨:٤٢ م ٦٩% ://elib.moe.gov.ae

مهارات دراسية

قد تسهم خريطة المقارنة في مساعدة الطلاب في فهم أوجه الاختلاف بين مفهومين متماثلين أو أكثر. اعرض أمام الطلاب نموذج الخريطة التي تقارن بين النمو الأسي والاضمحلال الأسي في الدرس 1–8. أثناء دراسة الوحدة 8، اطلب من الطلاب العمل في مجموعات تعاونية صغيرة لتصميم خرائط مقارنة توضح الدوال الأسية واللوغاريتمية والدوال الأسية للأساس e والدوال اللوغاريتمية الطبيعية.

الدوال الأسية

النمو الأسي	الاضمحلال الأسي
$A(t) = a(1 + r)^t$	$A(t) = a(1 - r)^t$
• متصل. واحد إلى واحد. تزايدي • D = (كل الأعداد الحقيقية). R = (الأعداد الحقيقية الموجبة) • خط تقارب أفقي	• متصل. واحد إلى واحد. تناقصي • D = (كل الأعداد الحقيقية). R = (الأعداد الحقيقية الموجبة) • خط تقارب أفقي

تكوين الاستقلال من خلال إستراتيجيات يضعها الطلاب

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

٨:٤٣ م ٦٨% ://elib.moe.gov.ae

SE = كتاب الطالب، TE = كتاب المعلم

	التشخيص	الوصف
التقويم التشخيصي	**بداية الوحدة 8**	
	الاستعداد للوحدة 6 **كتاب الطالب**	الاستجابة للتدخل التقويمي **كتاب المعلم**
	بداية كل درس	
	السابق، الحالي، لماذا؟ **كتاب الطالب** اختبار الدقائق الخمس	**كتاب الطالب**
التقويم التكويني	**أثناء/بعد كل درس**	
	تمرين موجه **كتاب الطالب**، كل مثال التحقق من فهمك **كتاب الطالب** مهارات التفكير العليا المسائل **كتاب الطالب** مراجعة شاملة **كتاب الطالب** أمثلة إضافية **كتاب المعلم** انتبه! **كتاب المعلم** الخطوة 4، التقويم **كتاب المعلم**	
	منتصف الوحدة	
	اختبار منتصف الوحدة **كتاب الطالب** اختبار منتصف الوحدة **المواد الرئيسة لموارد الوحدة**، ص 65 McGraw-Hill Assessment	
التقويم الختامي	**اختبار ما قبل الوحدة**	
	دليل الدراسة والمراجعة للوحدة **كتاب الطالب** تدريب على الاختبار **كتاب الطالب** تدريب على الاختبار المعياري **كتاب الطالب**	

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

606 / 475

٨:٤٣ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

الفصل 8 الدوال والعلاقات الأسية واللوغاريتمية
التدريس المتمايز

الخيار 1 الوصول إلى مستوى المتعلمين كافة

بصريًّا نظرًا لوجود العديد من الخصائص التي تتناولها هذه الوحدة، اقترح أن يصمم الطلاب ملصقات تعرض الخصائص. شجع الطلاب أن يوجزوا في وصفها قدر الإمكان وأن يستخدموا الألوان لتساعدهم في إلقاء نظرة شاملة على استخدام الخاصية.

خصائص اللوغاريتمات

$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$

$\log_a(M/N) = \log_a M - \log_a N$

$\log_a(M^p) = p \log_a M$

منطقيًّا اطلب من المجموعات الثنائية من الطلاب أن يبدؤوا بمبلغ AED 10 ويختاروا نسبة مرابحة لتكون مركبة باستمرار وبحسبوا المبلغ المدخر بعد 5 و10 و15 و20 سنة. بعد كل عملية حسابية، اطلب من الطلاب نمذجة مقدار المال الذي في حوزتهم على تمثيل بياني بالأعمدة.

الخيار 2 قريب من المستوى

أنشئ مع الصف مخطط فين لمجموعة الأعداد الحقيقية. بمجرد إنشاء هذا الرسم التخطيطي، راجع مع الطلاب المقصود بالعدد النسبي أو العدد الصحيح أو العدد الكلي أو العدد الطبيعي أو العدد غير النسبي. اكتب مثالًا لكل نوع من الأعداد الحقيقية على الرسم التخطيطي. ثم ناقش e باعتباره عددًا غير نسبي.

الأعداد الحقيقية

الخيار 3 أعلى من المستوى

اطلب من الطلاب إجراء بحث عن جداول اللوغاريتمات العادية للأعداد سواء في ملاحق النصوص الجبرية القديمة أو على الإنترنت. علم الطلاب في الصف قراءة هذه الجداول واستخدامها. ثم اطلب منهم استخدام الجداول لإيجاد قيم العديد من اللوغاريتمات العادية، مثل $\log_{10}125$. ثم اطلب من الطلاب مقارنة النتائج بتلك التي حصلوا عليها عندما أوجدوا قيمة اللوغاريتمات نفسها باستخدام الحاسبة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

606 / 475

٨:٤٣ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

الوحدة 8

الدوال والعلاقات الأسيّة واللوغاريتمية
التركيز على محتوى الرياضيات

التخطيط الرأسي | **معاينة** درس بدرس

قبل الوحدة 8

موضوعات ذات صلة من الجبر 2

- استخدام الأدوات التي تتضمن خصائص الأسس لتحويل التعابير إلى أبسط صورة.

الوحدة 8

- تحليل الموقف الذي تمثله الدالة الأسيّة، وصياغة معادلة أو متباينة، ثم حل المسألة
- تطوير تعريف اللوغاريتمات من خلال استكشاف العلاقات بين الدوال الأسيّة ومعكوساتها وذكر وصفها.
- استخدام الدوال الرئيسة لاستكشاف آثار تغيرات المعلمة على تمثيلات الدوال الأسيّة واللوغاريتمية البيانية ووصفها وتوقعها. ووصف القيود على المجال والمدى، وفحص سلوك خط التقارب.
- تحديد حلول المعادلات الأسيّة واللوغاريتمية باستخدام التمثيلات البيانية والجداول والأساليب الجبرية.
- تفسير حلول المعادلات والمتباينات الأسيّة واللوغاريتمية وتحديد مدى صحتها

بعد الوحدة 8

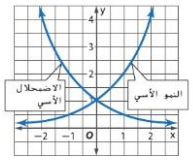
الإعداد لما قبل حساب التفاضل والتكامل

- وصف الدوال الرئيسة رمزيًا وبيانيًا، بما في ذلك $f(x) = \ln x$ و $f(x) = \log_a x$
- استكشاف مفاهيم الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وخط التقارب وربط هذه الخصائص بالدوال الممثلة بيانيًا ورقميًا
- استكشاف الخصائص اللوغاريتمية والأسيّة

8-1 التمثيل البياني للدوال الأسيّة

نُعرف المعادلة التي تكتب بالصيغة $y = b^x$، حيث $b > 0$، و $b \neq 1$ باسم الدالة الأسيّة. مجال الدالة الأسيّة هو مجموعة *كل الأعداد الحقيقية*. ثمة نوعان من الدوال الأسيّة:

- *النمو الأسي* حيث $b > 1$.
- *والاضمحلال الأسي* حيث $0 > b > 1$.



يشتمل التمثيل البياني للدالة الأسيّة على خط تقارب أفقي. تعني هذه الخاصية أنّ التمثيل البياني يقترب من خط أفقي، بالنسبة إلى الدالة الرئيسة $f(x) = b^x$. خط التقارب الأفقي هو المحور x.

8-2 حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

في *المعادلة الأسيّة*، تظهر المتغيرات في صورة أسس. يمكن استخدام *خاصية التساوي في الدوال الأسيّة* لحل المعادلات الأسيّة. عندما تكون الأساسات متماثلة، كما في $3^x = 3^7$، يجب أن تتعادل الأسس أيضًا حتى تكون المعادلة صحيحة، ومن ثم، إذا كان $3^x = 3^7$، فإنّ $x = 7$. إذا لم تتساو الأساسات، كما في $3^x = 9^4$، تجب إعادة كتابة التعابير بحيث تتساوى الأساسات. في هذه الحالة، يمكن إعادة كتابة 9 في صورة 3^2، بحيث يكون $9^4 = (3^2)^4 = 3^8$. ومن ثم $3^x = 3^8$. إذًا $x = 8$.

في *المتباينة الأسيّة*، تظهر المتغيرات أيضًا في صورة أسس. يمكن استخدام *خاصية التباين في الدوال الأسيّة* لحل المتباينات الأسيّة. توضح هذه الخاصية أنّ $b^x > b^y$ فقط إذا كان $x > y$، و $b^x < b^y$ فقط إذا كان $x < y$. بالنسبة إلى قيم b الأكبر من 1. تصح هذه الخاصية أيضا مع ≥ و ≤.

606 / 475

٨:٤٣ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

8-3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

بصفة عامة، معكوس $y = b^x$ هو $x = b^y$. في المعادلة $x = b^y$، يمثل b الأساس وy يُشار إليها بكلمة *لوغاريتم* x. عادة ما نكتب هذه العلاقة بالصيغة $y = \log_b x$، حيث $b > 0$ و $b \neq 1$. ونقرأ y *يساوي* $\log x$ *بالنسبة إلى الأساس* b. ويُطلق عليها اسم *دالة لوغاريتمية*.

يتسم التمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_b x$ بأنّه متصل، واحد إلى واحد. ويتضمن مجاله كل الأرقام الحقيقية الموجبة، بمثل المحور y خط تقارب رأسيًا على التمثيل البياني. يمكن تطبيق التحويلات نفسها التي تم تطبيقها على الدوال الرئيسة التي سبقت دراستها على التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية.

8-4 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

عند حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية، من الضروري أن تتذكر أنّ من الخصائص المميزة للدالة اللوغاريتمية هو أنّ مجالها هو مجموعة كل الأعداد *الموجبة*. وهذا يعني أنّ لوغاريتم 0 أو عدد سالب بالنسبة إلى أي أساس يكون غير معرّف. من المهم جدًا التحقق من الحلول المحتملة للمعادلات اللوغاريتمية في المعادلة الأصلية للتأكد من أنها لا ينتج عنها أخذ لوغاريتم 0 أو أي عدد سالب. بالنسبة إلى المتباينات اللوغاريتمية، لن تستثني هذه الحقيقة قيمة واحدة فحسب من مجموعة الحل، بل مدى من القيم.

8-5 خصائص اللوغاريتمات

ابتُكرت اللوغاريتمات لتسهيل إجراء العمليات الحسابية. في الحقيقة، تعد كلمة لوغاريتم اختصارًا لكلمة إنجليزية تعني "*الرياضيات المنطقية*". وفقًا *لخاصيتي ناتج الضرب وناتج القسمة في اللوغاريتمات*، عند استخدام اللوغاريتمات، تتحول عملية الضرب إلى جمع وتتحول عملية القسمة إلى طرح. على سبيل المثال، $\log_3 (7 \times 5)$ يكافئ $\log_3 7 + \log_3 5$. توضح *خاصية الأسس في اللوغاريتمات* أنّ لوغاريتم الأس يساوي ناتج ضرب اللوغاريتم في الأس. مثال،

$\log_5 3^7 = 7 \log_5 3$. يساعد استخدام خصائص اللوغاريتمات هذه في حل المعادلات التي تتضمن لوغاريتمات.

8-6 اللوغاريتمات العادية

يُطلق على لوغاريتمات الأساس 10 اسم *اللوغاريتمات العادية*. غالبًا لا نكتب العدد 10، مما يعني أنّ، $\log_{10} x$ نكتب بالصيغة $\log x$. تحتوي معظم الحاسبات على مفتاح LOG لإيجاد قيمة اللوغاريتمات العادية.

يمكن استخدام اللوغاريتمات لحل المعادلات والمتباينات الأسيّة التي يصعب كتابتها في صورة أسس مرفوع إليها الأساس نفسه. لإيجاد حل معادلة مثل $5^x = 41$، احسب لوغاريتم طرفي المعادلة ثم أوجد x.

نجعل صيغة تغيير *الأساس* من الممكن إيجاد قيمة التعبير اللوغاريتمي بالنسبة إلى أي أساس من خلال ترجمة التعبير إلى تعبير آخر يتضمن لوغاريتمات عادية.

8-7 الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية

تسمى الدالة الأسيّة ذات الأساس e *الدالة الأسيّة للأساس الطبيعي*. العدد e هو عدد غير نسبي قيمته ...2.71828.

يُسمى اللوغاريتم ذو الأساس e *باللوغاريتم الطبيعي*، ويرمز إليه بـ $\log_e x$ أو $\ln x$. هذه هي الدالة المعكوسة للدالة الأسيّة للأساس الطبيعي. تنطبق جميع خصائص اللوغاريتمات التي تم تناولها في الدروس السابقة على اللوغاريتمات الطبيعية أيضًا. تحتوي معظم الحاسبات على الدالة e^x لإيجاد قيمة التعابير ذات الأساس الطبيعي ومفتاح ln لإيجاد قيمة اللوغاريتم الطبيعي لعدد حقيقي.

8-8 استخدام الدوال الأسيّة واللوغاريتمية

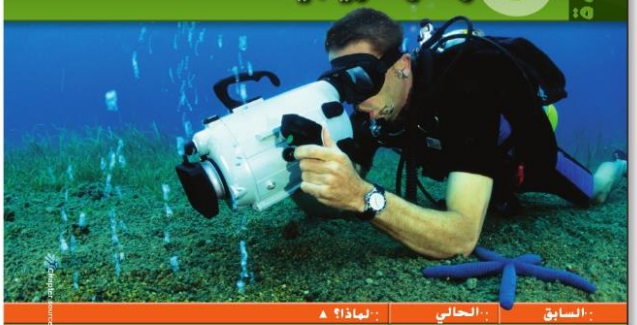
يمكن استخدام الدالتين $f(x) = ae^{kt}$ و $f(x) = ae^{-kt}$، حيث يمثل a القيمة الابتدائية، ويمثل t الزمن بالسنوات، و k ثابتًا، لنمذجة النمو الأسي والاضمحلال الأسي، على التوالي. يمثل الثابت k معدل النمو المستمر في نموذج النمو ومعدل الاضمحلال المستمر في نموذج الاضمحلال.

في حالة وجود عامل محدد للنمو، يمكن استخدام نموذج النمو اللوجستي، مثل دالة النمو اللوجستي $f(t) = \frac{c}{1 + ae^{-kt}}$ حيث يمثل t الزمن.

606 / 475

٨:٤٣ م ٦٨%
://elib.moe.gov.ae

الوحدة 8 الدوال والعلاقات الأسيّة واللوغاريتمية



Copyright © 2014 Holt McDougal, a division of Houghton Mifflin Harcourt. All rights reserved.

السابق	الحالي	لماذا؟ ▲
• مثلت الدوال وتحولات الدوال بيانيًا.	• بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:	**العلوم** تشير الرياضيات والعلوم جنبًا إلى جنب، سواء أكنت تدرس الكيمياء أو الأحياء أو علم الأحافير أو علم الحيوان أو علم الإنسان. ستحتاج إلى مهارات رياضيات قوية.
	• تمثيل الدوال الأسية واللوغاريتمية بيانيًا.	في هذه الوحدة، ستتعلم جوانب الرياضيات المتعلقة بالعلوم مثل فيروسات الكمبيوتر والجامعات الأحيائية للحشرات وعلم البكتيريا وانضمام الخلية وعلم الفلك والأعاصير القمعية والزلازل.
	• حل المعادلات والمتباينات الأسية واللوغاريتمية.	
	• حل المسائل التي تتضمن النمو الأسي والاضمحلال الأسي.	

مشروع الوحدة

لغز الجماعة الأحيائية

يستخدم الطلاب ما تعلموه عن الدوال الأسية واللوغاريتمية لإكمال أحد المشروعات.

يتناول مشروع هذه الوحدة المعرفة البيئية، بالإضافة إلى العديد من المهارات الخاصة الضرورية لنجاح الطالب في إطار عمل التعلم في القرن 21.

المفردات الأساسية قدّم المفردات الأساسية في الوحدة متبعًا النظام التالي.

عرّف: في الدالة $x = b^y$، يُسمى y لوغاريتم x للأساس b. وتُكتب عادة بالصورة $y = \log_b x$ وتُقرأ "y يساوي $\log x$ للأساس b".

مثال: $3 = \log_2 8$

اسأل: كيف تكتب ما يلي بالصيغة اللوغاريتمية؟

$3^5 = 243$ $\log_3 243 = 5$

إجابة إضافية (الاستعداد للوحدة 6)

6.14 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 6$، حيث تمثل $f^{-1}(x)$ عدد الإضافات التي يمكن أن يحصل عليها شخص ما إذا أنفق x دولارًا.

606 / 475

٨:٤٣ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

الاستعداد للوحدة

1 خيار الكتاب المدرسي أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية. ارجع إلى المراجعة السريعة للحصول على المساعدة.

تدريب سريع

حوّل إلى أبسط صورة. افترض أنه لا يوجد متغيّر يساوي صفرًا.

1. a^{12}
2. $8x^3y^6z^0$
3. $\frac{-3x^6}{2y^3z^5}$
4. $\frac{4r^4}{81n^4t^8}$
5. **الكثافة** كتلة الجسم تساوي كتلته مقسومة على حجمه. جسم كتلته 7.5×10^3 g وحجمه 1.5×10^3 cm مكعبة. ما كثافة هذا الجسم؟ $5\ g/cm^3$

مراجعة سريعة

مثال 1 (مستخدم في الدروس من 1-8 إلى 3-8)

حوّل إلى أبسط صورة. $\frac{(a^3b^2c^2)^2}{a^6a^2b^2b^2c^6c^2}$. افترض أنه لا يوجد متغيّر يساوي صفرًا.

$\frac{(a^3b^2c^2)^2}{a^6a^2b^2b^2c^6c^2}$

$= \frac{a^6b^4c^4}{a^8b^6c^8}$ — بسّط البسط باستخدام قاعدة أس الأس وبسّط المقام باستخدام قاعدة ضرب الأسس

$= \frac{1}{bc^4}$ أو $b^{-1}c^{-4}$ — بسّط باستخدام قانون ناتج قسمة الأسس

تدريب سريع

أوجد معكوس كل دالة مما يلي. ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا.

6–11. **انظر ملحق إجابات الوحدة 8.**

6. $f(x) = 2x + 5$
7. $f(x) = x - 3$
8. $f(x) = -4x$
9. $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$
10. $f(x) = \frac{x-1}{2}$
11. $y = \frac{1}{3}x + 4$

حدّد ما إذا كان كل زوجين من الدوال يمثلان دوال معكوسة.

12. $f(x) = x - 6$, $g(x) = x + 6$ — نعم
13. $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = 2x - 5$ — لا
14. **الطعام** يتقاضى مخيم بيتزا AED 12 مقابل بيتزا الجبن متوسطة الحجم و AED 2 مقابل أي إضافات. إذا كانت الدالة $f(x) = 2x + 12$ تمثل تكلفة البيتزا متوسطة الحجم مع x إضافات، فأوجد $f^{-1}(x)$ مع تفسير المعنى. **انظر الهامش.**

مراجعة سريعة

مثال 2 (مستخدم في الدرسين 2-8 و3-8)

أوجد معكوس الدالة $f(x) = 3x - 1$.

الخطوة 1 استبدل $f(x)$ بـ y في المعادلة الأصلية. $f(x) = 3x - 1 \rightarrow y = 3x - 1$

الخطوة 2 بدّل بين x و y: $x = 3y - 1$

الخطوة 3 حل المعادلة لإيجاد قيمة y.

$x = 3y - 1$ — المعكوس

$x + 1 = 3y$ — بإضافة 1 إلى كل طرف من طرفي المعادلة

$\frac{x+1}{3} = y$ — بقسمة كل طرف على 3

$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = y$ — بسّط

الخطوة 4 عوّض عن y بـ $f^{-1}(x)$: $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

يشير مصطلح المراجعة إلى مبلغ من المال يدفع أو يستلم عند اقتراض المال أو إقراضه. إذا اقترض عميل مالاً من البنك، يدفع العميل إلى البنك مراجعة مقابل استخدام مال البنك. إذا وضع العميل مالاً في حساب بنكي، يدفع البنك للعميل مراجعة مقابل استخدام البنك لأموال العميل.

ويسمى المبلغ المالي المقترض أو المودع في البداية رأس المال. ويقصد بنسبة المراجعة النسبة التي يكتسبها العميل أو يدفعها أثناء فترة زمنية محددة. ويقصد بالمراجعة البسيطة مبلغ المراجعة الذي يكسبه العميل أو يدفعه بعد تطبيق نسبة المراجعة على رأس المال.

المراجعة البسيطة (I) هي ناتج ضرب ثلاث قيم: رأس المال (P) ونسبة المراجعة المكتوبة في صورة عدد عشري (r) والفترة الزمنية (t): $I = P \times r \times t$.

© Glencoe/McGraw-Hill, a division of The McGraw-Hill Companies, Inc.

الأسئلة المهمة

- كيف تتخذ قرارات صائبة؟ **نموذج الإجابة:** حدد الخيارات المتاحة. قارن بين مزايا وعيوب كل خيار. ثم حلل النتائج واختر الخيار الأنسب.
- ما العوامل التي يمكن أن تؤثر في اتخاذ القرار الصائب؟ **نموذج الإجابة:** مقدار الوقت المتاح. العملية المستخدمة. البيئة. الأشخاص المشاركون. الخيارات المتوفرة.

541

٨:٤٣ م ٦٨% ://elib.moe.gov.ae

المطويات منظّم الدراسة

مطويات® Dinah Zike

محور التركيز بدون الطلاب ملاحظات عن الدوال الأسية واللوغاريتمية والعلاقات أثناء دراسة الدروس في هذه الوحدة.

التدريس اطلب من الطلاب عمل مطويات وتسميتها حسبما هو موضح. اطلب من الطلاب تسمية صفحة واحدة من مطوياتهم بعد كل درسين في الوحدة واستخدام الصفحات المناسبة أثناء دراسة المادة. اطلب من الطلاب إدراج المفاهيم الأساسية والمفردات وتعريفاتها في مطوياتهم. أشر إلى أنه يمكن استخدام المطويات أيضا لتسجيل التجارب الإيجابية والسلبية التي يتعرضون لها أثناء التعلم.

وقت الاستخدام شجّع الطلاب على إضافة المزيد من المعلومات إلى المطويات أثناء دراسة الوحدة وعلى استخدام تلك المطويات عند المراجعة للاستعداد لاختبار الوحدة.

التدريس المتمايز

يجب على الطلاب إكمال المخطط من خلال ذكر تعريف ومثال لكل مصطلح أثناء تقدمهم في دراسة الوحدة 8. يمكن استخدام هذه الأداة الدراسية أيضا للمراجعة للاستعداد لاختبار الوحدة.

البدء في هذه الوحدة

ستتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة أثناء دراسة الوحدة 8. لكي تستعد، حدّد المفردات المهيّئة ونظّم مواردك.

المطويات منظّم الدراسة

العلاقات والدوال اللوغاريتمية والأسيّة

أعد هذه المطوية لتساعدك في تنظيم ملاحظاتك حول الوحدة 8 عن الدوال الأسيّة واللوغاريتمية. ابدأ بورقتين من ورق المربعات.

1 **اطوهما** من المنتصف بالعرض.

2 **في** الورقة الأولى، قص 5 cm على طول المطوية من الطرفين.

3 **في** الورقة الثانية، قص الورقة من المنتصف على مسافة 5 cm من الطرفين.

4 **أدخل** الورقة الأولى عبر الورقة الثانية ورتّب صفحات المطوية. سمّ الصفحات بأرقام الدروس.

المفردات الجديدة

العربية	English
الدالة الأسيّة	exponential function
النمو الأسي	exponential growth
خط التقارب	asymptote
عامل النمو	growth factor
الاضمحلال الأسي	exponential decay
عامل الاضمحلال	decay factor
المعادلة الأسية	exponential equation
المرابحة المركبة	compound interest
المتباينة الأسيّة	exponential inequality
لوغاريتم	logarithm
الدالة اللوغاريتمية	logarithmic function
المعادلة اللوغاريتمية	logarithmic equation
المتباينة اللوغاريتمية	logarithmic inequality
اللوغاريتم العادي	common logarithm
صيغة تغيير الأساس	change of base formula
الأساس الطبيعي e	natural base, e
الأساس الطبيعي	natural base
الدالة الأسيّة	exponential function
اللوغاريتم الطبيعي	natural logarithm

مراجعة المفردات

المجال مجموعة تضم كل إحداثيات x الخاصة بالأزواج المرتبة في علاقة ما

$\{(-3,1),(0,2),(2,4)\}$

الدالة علاقة يقترن فيها كل عنصر من المجال بعنصر واحد بالتحديد في المدى

المدى مجموعة تضم كل إحداثيات y الخاصة بالأزواج المرتبة في علاقة ما

606 / 475

٨:٤٣ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

1 محور التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 1–8 تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا.

الدرس 1–8 تمثيل دوال النمو الأسي بيانيًا. تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًا.

بعد الدرس 1–8 حل المعادلات والمتباينات الأسيّة.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم "**لماذا؟**" الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- كم عدد الأشخاص الذين يستقبلون رسالة البريد الإلكتروني في المرة الثانية؟ 25
- كم عدد الأشخاص الذين يستقبلون رسالة البريد الإلكتروني في المرة الرابعة؟ 625
- فكر في سيناريو شبيه بالموجود في قسم "**لماذا؟**". تطلب منك رسالة البريد الإلكتروني هذه فقط أن تعيد توجيهها إلى 8 أصدقاء. a. اكتب معادلة لتمثيل هذا الموقف. $y = 8^x$

الدرس 1–8 التمثيل البياني للدوال الأسيّة

السابق
- لقد قمت بتمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا.

الحالي
1. تمثيل دوال النمو الأسي بيانيًا.
2. تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًا.

لماذا؟

هل سبق لك استلام رسالة عبر البريد الإلكتروني تطلب منك إعادة توجيهها إلى 5 أصدقاء؟ إذا أعاد كل من هؤلاء الأصدقاء الخمسة توجيه الرسالة إلى 5 من أصدقائك، حيث أعاد كل منهم أيضًا توجيهها إلى 5 من أصدقائك، فإن عدد الأشخاص الذين يستلمون رسالة البريد الإلكتروني ينمو أسيًا.

يمكن استخدام المعادلة $y = 5^x$ لتمثيل هذه الحالة، حيث يمثل x عدد مرات إعادة توجيه رسالة البريد الإلكتروني.

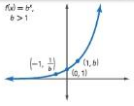
المفردات الجديدة
- الدالة الأسية exponential function
- النمو الأسي exponential growth
- خط التقارب asymptote
- عامل النمو growth factor
- الاضمحلال الأسي exponential decay
- عامل الاضمحلال decay factor

ممارسات في الرياضيات
3 بناء فرضيات صحيحة والتعليق عليها بطريقة استنتاج الآخرين

1 دالة النمو الأسي

يطلق على الدالة مثل $y = 5^x$ التي يكون الأساس فيها ثابتًا والأس متغيرًا مستقلاً: اسم **دالة أسيّة**. تعد دالة النمو الأسي إحدى أنواع الدالة الأسيّة. تكتب دالة **النمو الأسي** بالصيغة $f(x) = b^x$، حيث $b > 1$. يتضمن التمثيل البياني للدالة الأسيّة **خط تقارب**، وهو الخط الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.

المفهوم الأساسي الدالة الرئيسة لدوال النمو الأسي



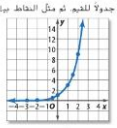
الدوال الرئيسة:	$f(x) = b^x$, $b > 1$
نوع التمثيل البياني:	متصل، وواحد إلى واحد، ومتزايد
المجال:	جميع الأعداد الحقيقية
المدى:	كل الأعداد الحقيقية الموجبة
خط التقارب:	المحور x
التقاطع:	(0, 1)

مثال 1 التمثيل البياني لدوال النمو الأسي

مثّل بيانيًا $y = 3^x$. حدّد المجال والمدى.

أنشئ جدولاً للقيم ثم مثّل النقاط بيانيًا وارسم التمثيل البياني.

x	-3	-2	$-\frac{1}{2}$	0
$y = 3^x$	$3^{-3} = \frac{1}{27}$	$3^{-2} = \frac{1}{9}$	$3^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$3^0 = 1$
x	1	$\frac{3}{2}$	2	
$y = 3^x$	$3^1 = 3$	$3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{27}$	$3^2 = 9$	



يضم المجال كل الأعداد الحقيقية ويضم المدى كل الأعداد الحقيقية الموجبة.

تمرين موجّه

1. مثل بيانيًا $y = 4^x$. حدّد المجال والمدى. **انظر ملحق إجابات الوحدة 8.**

543

606 / 475

٨:٤٣ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

1 النمو الأسي

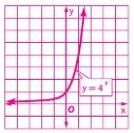
يوضح المثال 1 طريقة تمثيل دالة النمو الأسي بيانيًا. **يوضح المثال 2** طريقة تمثيل تحويلات دالة النمو الأسي بيانيًا. **يوضح المثال 3** طريقة تمثيل دالة أسيّة بيانيًا لنمذجة النمو في الحياة اليومية.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

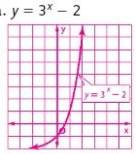
1 مثّل بيانيًا $y = 4^x$. حدّد المجال والمدى.



D = {كل الأعداد الحقيقية}،
$R = \{y \mid y > 0\}$

2 مثّل كل دالة بيانيًا. حدّد المجال والمدى.

a. $y = 3^x - 2$



D = {كل الأعداد الحقيقية}،
$R = \{y \mid y > -2\}$

b. $y = 2^{x-1}$

يوضح التمثيل البياني للدالة $f(x) = b^x$ تمثيلًا بيانيًا أصليًا للدوال الأسيّة. يمكن تطبيق الأساليب نفسها المستخدمة لتحويل التمثيلات البيانية الخاصة بالدوال الأخرى التي درستها على التمثيلات البيانية للدوال الأسيّة.

المفهوم الأساسي تحويلات الدوال الأسيّة

$f(x) = ab^{x-h} + k$

h – الإزاحة الأفقية	k – الإزاحة الرأسيّة
h من الوحدات إلى اليمين إذا كان h عددًا موجبًا | h | من الوحدات إلى اليسار إذا كان h عددًا سالبًا	k من الوحدات إلى أعلى إذا كان k عددًا موجبًا | k | من الوحدات إلى أسفل إذا كان k عددًا سالبًا

a – الاتجاه والشكل

إذا كان $a < 0$، ينعكس التمثيل البياني في المحور x. إذا كان $|a| > 1$، فسيتمدد التمثيل البياني رأسيًا. إذا كان $0 < |a| < 1$، فسينضغط التمثيل البياني رأسيًا.

مثال 2 التمثيل البياني للتحويلات

مثّل كل دالة بيانيًا. حدّد المجال والمدى.

a. $y = 2^x + 1$

تمثل المعادلة إزاحة للتمثيل البياني لـ $y = 2^x$ بمقدار وحدة واحدة إلى أعلى.

x	$y = 2^x + 1$
−3	$2^{-3} + 1 = 1.125$
−2	$2^{-2} + 1 = 1.25$
−1	$2^{-1} + 1 = 1.5$
0	$2^0 + 1 = 2$
1	$2^1 + 1 = 3$
2	$2^2 + 1 = 5$
3	$2^3 + 1 = 9$

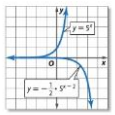
المجال = {كل الأعداد الحقيقية}، المدى = $\{y \mid y > 1\}$

b. $y = -\frac{1}{2} \times 5^{x-2}$

تمثل المعادلة تحويلًا للتمثيل البياني للدالة $y = 5^x$.

مثّل بيانيًا الدالة $y = 5^x$ وحوّل التمثيل البياني.

- $a = -\frac{1}{2}$؛ ينعكس التمثيل البياني في المحور x وينضغط رأسيًا.
- $h = 2$؛ ثبت إزاحة التمثيل البياني بمقدار وحدتين إلى اليمين.
- $k = 0$؛ لم تحدث إزاحة للتمثيل البياني رأسيًا.



المجال = {كل الأعداد الحقيقية}
المدى = $\{y \mid y < 0\}$

تمرين موجّه 2A, 2B. **انظر ملحق إجابات الوحدة 8.**

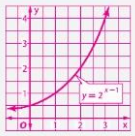
2A. $y = 2^{x+3} - 5$ **2B.** $y = 0.1(6)^x - 3$

نصيحة دراسية

الضبط تذكر أن سلوك طرفي التمثيل البياني هو سلوك التمثيل البياني عندما تقترب قيمة x من اللانهاية الموجبة أو اللانهاية السالبة. في المثال 2b، عندما تقترب قيمة x من اللانهاية، تقترب قيمة y من اللانهاية الموجبة. في المثال 2c، عندما تقترب قيمة x من اللانهاية، تقترب قيمة y من اللانهاية السالبة.

إجابة إضافية (مثال إضافي)

2b.



D = {كل الأعداد الحقيقية}،
$R = \{y \mid y > 0\}$

تدريس ممارسات في الرياضيات

الضبط يحاول الطلاب المتفوقون في مادة الرياضيات المشاركة بدقة، باستخدام تعريفات واضحة في المناقشة مع الآخرين وفي الاستنتاجات التي يتوصلون إليها.

606 / 475

٨:٤٣ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

يمكنك نمذجة النمو الأسي بزيادة نسبة مئوية ثابتة خلال فترات زمنية محددة باستخدام الدالة التالية.

$$A(t) = a(1 + r)^t$$

يمكن استخدام الدالة لإيجاد المقدار $A(t)$ بعد الفترات الزمنية t، حيث يمثل a المقدار الابتدائي ويمثل r النسبة المئوية للزيادة للفترة الزمنية. لاحظ أنّ الأساس في التعبير الأسي $r + 1$، يسمى **عامل النمو**.

تُستخدم دالة النمو الأسي غالبًا في نمذجة النمو السكاني.

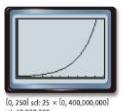
مثال 3 من الحياة اليومية التمثيل البياني لدوال النمو الأسي

الإحصاء السكاني أجرى أول إحصاء للسكان للبلد في عام 1790. بلغ التعداد السكاني في ذلك الوقت 3,929,214. منذ ذلك الحين، يزيد عدد السكان سنويًا بمعدل 2.03%. تقريبًا. ارسم تمثيلًا بيانيًا يوضح النمو السكاني منذ عام 1790.

أولًا، اكتب معادلة باستخدام $a = 3{,}929{,}214$، $r = 0.0203$.

$$y = 3{,}929{,}214(1.0203)^t$$

ثم مثّل المعادلة بيانيًا.



تمرين موجّه 3. انظر ملحق إجابات الوحدة 8.

3. **المعرفة المالية** من المتوقع أن يزداد الإنفاق في سن المراهقة بمعدل 3.5% سنويًا من AED 79.7 مليارًا في عام 2006. ارسم تمثيلًا بيانيًا يوضح زيادة الإنفاق.

الربط بالحياة اليومية

أرسل مكتب الإحصاء السكاني بالولايات المتحدة مسح المجتمع الأمريكي عبر البريد إلى ما يقرب إلى 1 من كل 480 أسرة.

المصدر: مكتب الإحصاء السكاني

نصيحة دراسية

المراجحة يوضح قانون المراجحة البسيطة، $I = Prt$، النمو الخطي عبر الزمن، في حين يوضح قانون المراجحة المركبة، $A(t) = a(1 + r)^t$، النمو الأسي عبر الزمن. وهذا سبب تحقيق الاستثمارات ذات المراجحة المركبة أموالًا أكثر.

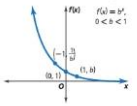
2 الاضمحلال الأسي

النوع الثاني من الدوال الأسية هو **الاضمحلال الأسي**

المفهوم الأساسي الدالة الرئيسة لدوال الاضمحلال الأسي

الدوال الرئيسة:	$f(x) = b^x,\ 0 < b < 1$
نوع التمثيل البياني:	متواصل. واحد إلى واحد. تناقصي
المجال:	جميع الأعداد الحقيقية
المدى:	الأعداد الحقيقية الموجبة
خط التقارب:	المحور x
التقاطع:	$(0, 1)$

النموذج



يمكن تحويل التمثيلات البيانية لدوال الاضمحلال الأسي بالطريقة نفسها المستخدمة مع دوال النمو الأسي.

حق النشر © McGraw-Hill Education شركة تعليم ماكجروهيل

التدريس المتمايز

المتعلمون أصحاب النمط اللفظي/اللغوي اسأل الطلاب أين سمعوا المصطلح "أسي" من قبل وماذا يعني هذا المصطلح حسب رأيهم. قد يكون سبق للطلاب سماع بعض المصطلحات مثل "النمو/الأسي" في أحد البرامج الإخبارية في التلفاز وقد يعتقدون أنّ كلمة "أسي" تعني "هائل". استخدم إجابات الطلاب لتوضيح مفهوم الدوال الأسية.

مثال إضافي

3 **الإنترنت** في عام 2006، كان يوجد 1,020,000,000 شخص في جميع أنحاء العالم يستخدمون الإنترنت. في ذاك الوقت، كان عدد المستخدمين يتزايد بنسبة 19.5% سنويًا.

ارسم تمثيلًا بيانيًا يوضح كيف سيزيد عدد المستخدمين من عام 2006 حتى عام 2016 إذا استمرت الزيادة بهذا المعدل.

انتبه!

مفاهيم خاطئة شائعة

تأكد من عدم خلط الطلاب بين الدوال كثيرة الحدود والدوال الأسية. بينما تشتمل كل من الدالتين $y = x^2$ و$y = 2^x$ على أس، فإنّ $y = x^2$ تمثل دالة كثيرة الحدود، و$y = 2^x$ تمثل دالة أسية.

التركيز على محتوى الرياضيات

الدوال الأسيّة الدالة $f(x) = b^x$، حيث b عدد حقيقي موجب و$b \neq 1$، دالة أسية. إذا كان $b > 1$، فإنّ الدالة لا تتضمن تقاطعات مع المحور x ولها تقاطع واحد مع المحور y. إنّها دالة متزايدة ذات خط تقارب أفقي (المحور x). إذا كان $0 < b < 1$، فإنّ الدالة لا تتضمن تقاطعات مع المحور x ولها تقاطع واحد مع المحور y واحد. إنّها دالة متناقصة ذات خط تقارب أفقي (المحور x).

606 / 475

م ٨:٤٤ %٦٨
://elib.moe.gov.ae

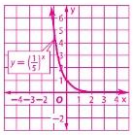
2 الاضمحلال الأسي

يوضح **المثالان 4 و5** طريقة تمثيل دالة الاضمحلال الأسي بيانيًا.

مثال إضافي

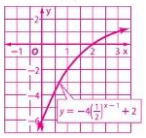
4 مثّل كل دالة بيانيًا. حدّد المجال والمدى.

a. $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$



D = {كل الأعداد الحقيقية}؛
$R = \{y \mid y > 0\}$

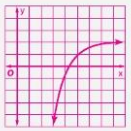
b. $y = -4\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$



D = {كل الأعداد الحقيقية}؛
$R = \{y \mid y < 2\}$

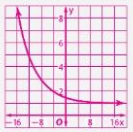
إجابات إضافية (تمرين موجه)

.4A



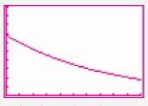
D = {كل الأعداد الحقيقية}؛
$R = \{y \mid y < 2\}$

.4B



D = {كل الأعداد الحقيقية}؛
$R = \{y \mid y > 1\}$

.5



نصيحة دراسية
الاضمحلال الأسي تأكد من عدم الخلط بين تغير الأعداء الذي يكون فيه $a > 1$ | b | والاضمحلال الأسي الذي يكون فيه $0 < b < 1$.

مثال 4 التمثيل البياني لدوال الاضمحلال الأسي

مثّل كل دالة بيانيًا. حدّد المجال والمدى.

a. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-3	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$
-2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$
$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$
1	$\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$
$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{27}}$
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

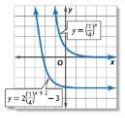
يضم المجال كل الأعداد الحقيقية ويضم المدى كل الأعداد الحقيقية الموجبة.

b. $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$

تمثل المعادلة تحويلًا للتمثيل البياني لـ $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

افحص كل معلمة.

- $a = 2$، يمتد التمثيل البياني رأسيًا.
- $h = -2$، تمت إزاحة التمثيل البياني بمقدار وحدتين إلى اليسار.
- $k = -3$، تم إزاحة التمثيل البياني بمقدار 3 وحدات إلى أسفل.



يضم المجال كل الأعداد الحقيقية ويضم المدى كل الأعداد الحقيقية الأكبر من -3.

تمرين موجه 4A, 4B. **انظر الهامش.**

4A. $y = -3\left(\frac{2}{5}\right)^{x-4} + 2$

4B. $y = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + 1$

كما في النمو الأسي، يمكنك نمذجة الاضمحلال الأسي بنسبة مئوية ثابتة للتناقص خلال فترات زمنية محددة باستخدام الدالة التالية.

$A(t) = a(1 - r)^t$

الأساس في التعبير الأسي، $r - 1$. يسمى **عامل الاضمحلال**

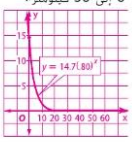
606 / 475

٨:٤٤ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

مثال إضافي

5 **ضغط الهواء** يصل ضغط الغلاف الجوي إلى 14.7 kg/cm² على سطح الأرض. يقل بمقدار 20% كلما ارتفعنا كيلومترًا واحدًا حتى حوالي 50 كيلومترًا تقريبًا.

a. ارسم تمثيلًا بيانيًا لتمثيل الضغط الجوي بالنسبة إلى الارتفاع من 0 إلى 50 كيلومترًا.



b. قدّر الضغط الجوي عند ارتفاع 10 كيلومترات. 1.6 kg/cm²

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1–12 للتأكد من الفهم.

استخدم المخطط في الجزء السفلي من هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

المتابعة

- كيف تساعدك المعرفة المالية في اتخاذ القرارات الصائبة؟

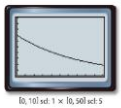
نموذج الإجابة: إذا كانت تتوفر لديك المعرفة المالية، فإنك ستتمكن من فهم مفردات المصطلحات المالية وستعرف طريقة تحليل البيانات والاتجاهات. حيث إنّ تطبيق هذه المهارات بنجاح عند التفكير في الخيارات المتوفرة قد يساعدك في اتخاذ القرارات الجيدة في العديد من مواقف الحياة اليومية مثل فتح حساب مصرفي والتقدم للحصول على قروض للجامعة وشراء منزل.

مثال من الحياة اليومية 5 التمثيل البياني لدوال الاضمحلال الأسي

الشاي يحتوي كوب الشاي الأخضر على 35 mg من الكافيين. يستطيع المراهقون في المتوسط التخلص من حوالي 12.5% من الكافيين من الجسم في الساعة.

a. ارسم تمثيلًا بيانيًا يمثل كمية الكافيين المتبقية بعد شرب كوب من الشاي الأخضر.

$y = a(1 - r)^t$
$= 35(1 - 0.125)^t$
$= 35(0.875)^t$



مثّل المعادلة بيانيًا.

[0, 10] scl: 1 × [0, 50] scl: 5

b. قدّر كمية الكافيين الموجودة في جسم مراهق بعد مرور 3 ساعات من تناول كوب من الشاي الأخضر.

$y = 35(0.875)^t$ المعادلة من الجزء a
$= 35(0.875)^3$ عوض عن t بـ 3
≈ 23.45 استخدم الحاسبة

سيكون الكافيين في جسم المراهق حوالي 23.45 mg بعد مرور 3 ساعات.

الربط بالحياة اليومية

بعد الماء، يعد الشاي المشروب الأكثر استهلاكًا في الولايات المتحدة ويمثل العثور عليه عند أكثر من 80% من الأسر الأمريكية. أكثر من نصف الأمريكيين يتناولون الشاي يوميًا. **المصدر:** جمعية الشاي بالولايات المتحدة الأمريكية

تمرين موجّه

5. يحتوي كوب الشاي الأسود على 68 mg من الكافيين. ارسم تمثيلًا بيانيًا يمثل كمية الكافيين المتبقية في جسم مراهق بعد شرب كوب من الشاي الأسود. احسب كمية الكافيين الموجودة في الجسم بعد مرور ساعتين من تناول كوب من الشاي الأسود.

انظر الهامش للاطلاع على التمثيل البياني؛ 52.06 mg

تحقق من فهمك

المثالان 1–2 مثّل كل دالة بيانيًا. حدّد المجال والمدى. **1–6. انظر ملحق إجابات الوحدة 8.**

1. $f(x) = 2^x$
2. $f(x) = 5^x$
3. $f(x) = 3^{x-2} + 4$
4. $f(x) = 2^{x+1} + 3$
5. $f(x) = 0.25(4)^x - 6$
6. $f(x) = 3(2)^x + 8$

مثال 3 **التفكير المنطقي** ينتشر فيروس عبر شبكة أجهزة كمبيوتر بحيث يصيب 25% من أجهزة الكمبيوتر كل دقيقة إذا بدأ الفيروس من جهاز واحد فقط. مثّل الدالة التي توضح انتشار الفيروس خلال الساعة الأولى. **انظر الهامش.**

مثال 4 مثّل كل دالة بيانيًا. حدّد المجال والمدى. **8–11. انظر ملحق إجابات الوحدة 8.**

8. $f(x) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} - 4$
9. $f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} + 5$
10. $f(x) = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-4} + 3$
11. $f(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{x+6} + 7$

مثال 5 **12. المعرفة المالية** تنخفض قيمة سيارة رياضية متعددة الأغراض بمعدل 15% كل عام. ارسم تمثيلًا بيانيًا لقيمة السيارة الرياضية متعددة الأغراض لأول 20 عامًا بعد الشراء الأول. **انظر الهامش.**

حق النشر والملكية © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابات إضافية

7.

12.

٨:٤٤ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

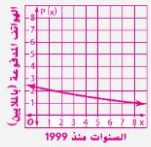
تدريس ممارسات في الرياضيات

الاستنتاج يستوعب الطلاب المنفوذون في الرياضيات الكميات وعلاقاتها في المواقف المذكورة في المسائل، يتبع التفكير الكمي عادات، مثل وضع الطالب تمثيلًا منطقيًا للمسألة التي يحلها، والتفكير في الوحدات المستخدمة في المسألة، والاهتمام بمعاني الكميات، وليس فقط بكيفية حسابها؛ ومعرفة الخصائص المختلفة للعمليات والأشياء واستخدامها ببرونة.

إجابات إضافية

26.

27a. اضمحلال؛ 0.9



27b. يمثل تقاطع $P(x)$ عدد الهواتف المدفوعة في عام 1999. ويمثل المحور x خط التقارب. قد يقترب عدد الهواتف المدفوعة من 0، إلا أنه لن يساوي أبدًا 0. يعد هذا منطقيًا حيث توجد الحاجة دائمًا إلى وجود بعض الهواتف المدفوعة.

28a. اضمحلال؛ 0.9

التمرين وحل المسائل

المثالان 1–2 مثّل كل دالة بيانيًا. حدّد المجال والمدى. **13-18. انظر ملحق إجابات الوحدة 8.**

13. $f(x) = 2(3)^x$
14. $f(x) = -2(4)^x$
15. $f(x) = 4^{x-1} - 5$
16. $f(x) = 3^{2x} + 1$
17. $f(x) = -0.4(3)^{x+2} + 4$
18. $f(x) = 1.5(2)^x + 6$

مثال 3 19. **العلوم** تزداد الجماعة الأحيائية للخناقس في مستعمرة الخناقس بمعدل 30% كل أسبوع لمدة 10 أسابيع. بلغ العدد الابتدائي للخناقس 65 خنفساء. مثّل الدالة التي توضح هذه الحالة بيانيًا. **انظر ملحق إجابات الوحدة 8.**

مثال 4 مثّل كل دالة بيانيًا. حدّد المجال والمدى. **20-25. انظر ملحق إجابات الوحدة 8.**

20. $f(x) = -4\left(\frac{3}{5}\right)^{x+4} + 3$
21. $f(x) = 3\left(\frac{2}{5}\right)^{x-3} - 6$
22. $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{x+5} + 8$
23. $f(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{x+4} - 2$
24. $f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^{x+2} + 9$
25. $f(x) = -\frac{5}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^{x+4} + 2$

مثال 5 26. **الحضور** تراجعت نسبة حضور مباريات فريق كرة السلة بمقدار 5% لكل مباراة طوال موسم الخسارة. ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة يوضح الحضور إذا أقيمت 15 مباراة محلية وحضر أول مباراة 23,500 مشجع. **انظر الهامش.**

27. **الهواتف** يمكن استخدام الدالة $P(x) = 2.28(0.9^x)$ لتمثل عدد الهواتف المدفوعة بالملايين على مدار x من الأعوام منذ عام 1999.

a. صنّف الدالة إلى نمو أُسّي أو اضمحلال أُسّي، وحدد عامل النمو أو الاضمحلال. ثم مثّل الدالة بيانيًا. **انظر الهامش.**

b. وضح ما يمثله تقاطع $P(x)$ وخط التقارب في هذه الحالة. **انظر الهامش.**

28. **الصحة** كل يوم، يتم التخلص من 10% من دواء معين من الجسم.

a. صنّف الدالة التي تمثل هذه الحالة إلى نمو أُسّي أو اضمحلال أُسّي، وحدد عامل النمو أو الاضمحلال. ثم مثّل الدالة بيانيًا. **انظر الهامش.**

b. كم ينبقى من الكمية الأصلية في الجسم بعد 9 أيام؟ **أقل بقليل من 40%**

c. إذا توجب عدم أخذ جرعة ثانية عند وجود أكثر من 50% من الكمية الأصلية في الجسم، فمتى ينبغي على ملصق الدواء أنه من الآمن أخذ جرعة ثانية؟ صمم الملصق واشرح استنتاجك.
نموذج الإجابة: اليوم السابع؛ راجع عمل الطلاب.

29. **الاستنتاج** يتبع تسلسل الأعداد نمطًا يكون فيه العدد التالي 125% من العدد السابق. العدد الأول في النمط هو 18.

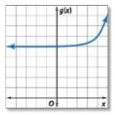
a. اكتب الدالة التي تمثل هذه الحالة. $f(x) = 18(1.25)^{x-1}$

b. صنّف الدالة إلى إما نمو أُسّي أو اضمحلال أُسّي، وحدد عامل النمو أو الاضمحلال. ثم مثّل الدالة بيانيًا لأول 10 أعداد. **انظر الهامش.**

c. ما قيمة العدد العاشر؟ قرّب إلى أقرب عدد كلي. 134

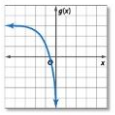
لكل تمثيل بياني، تكون الدالة $f(x)$ هي الدالة الرئيسة و$g(x)$ هو تحويل $f(x)$. استخدم التمثيل البياني لتحديد معادلة $g(x)$. 31. $g(x) = \frac{1}{2}(2^x)$ أو $g(x) = 4(2)^{x-3}$

30. $f(x) = 3^x$



31. $f(x) = 2^x$

32. $f(x) = 4^x$ $g(x) = -2(4)^{x+1} + 3$



$g(x) = 3^{x-4} + 5$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

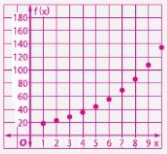
المستوى	الواجب	خيار اليومين	
ق م مبتدئ	13–25. 34–35. 37–60	13–25 فردي، 39–42	14–24 زوجي، 34–35. 37–38. 43–60
ض م أساسي	13–25 فردي. 26–29. 31. 33. 34–35. 37–60	13–25. 39–42	26–35. 37–38. 43–60
أ م متقدم	26–56. (اختياري: 57–60)		

606 / 475

٨:٤٤ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

إجابة إضافية

29b. نمو: 1.25



33 **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستخدم الجداول التالية للدوال الأسيّة $f(x)$ و$g(x)$ و$h(x)$.

8. a, b انظر ملحق إجابات الوحدة.

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	2.5	2	1	-1	-5	-13	-29

x	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	5	11	23	47	95	191	383

x	-1	0	1	2	3	4	5
$h(x)$	3	2.5	2.25	2.125	2.0625	2.0313	2.0156

a. **بيانيًا** مثل الدوال بيانيًا في $-1 \le x \le 5$ في تمثيلات بيانية منفردة.

b. **تخطيًا** سجل أي دالة ذات معامل سالب. اشرح استنتاجك.

c. **تحليليًا** سجل أي دالة تمت إزاحة تمثيلها البياني إلى اليسار. $f(x)$ و$g(x)$

d. **تحليليًا** حدد أي الدوال تمثل نماذج نمو وأيها تمثل نماذج اضمحلال. **انظر ملحق إجابات الوحدة 8.**

34a. دائمًا؛ الإجابة النموذجية: بضم مجال الدوال الأسيّة كل الأعداد الحقيقية. ومن ثم توجد $(x, 0)$ دائمًا.

34b. أحيانًا؛ الإجابة النموذجية: يتقاطع التمثيل البياني للدالة الأسيّة مع المحور x عندما تكون قيمة $k < 0$.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدم مهارات التفكير العليا

34. **التبرير** حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أحيانًا أو دائمًا أو لا تصح مطلقًا. اشرح استنتاجك.

a. دالة أسيّة بالصيغة $y = ab^{x-h} + k$ تتقاطع مع المحور y.

b. دالة أسيّة بالصيغة $y = ab^{x-h} + k$ تتقاطع مع المحور x.

c. لعد الدالة $f(x) = |b|^x$ دالة نمو أسي إذا كان b عددًا صحيحًا.

أحيانًا؛ الإجابة النموذجية: لا تكون الدالة دالة أسيّة إذا كانت قيمة $b = 1$ أو -1.

35. **النقد** طلب من صالح وأيمن تمثيل الدوال التالية بيانيًا. اعتقد صالح أنها متشابهة لكن أيمن لم يتفق معه. أيهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

x	y
0	2
1	1
2	0.5
3	0.25
4	0.125
5	0.0625
6	0.03125

دالة أسية
تعدل اضمحلال $\frac{1}{2}$
وقيمة أولية تساوي 2

صالح؛ ستكون التمثيلات البيانية للدالة متماثلة.

36. **تحفيز** تتحلل مادة بمعدل 35% يوميًا. بعد مرور 8 أيام، تبقى 8 mg من المادة. فما عدد الملليجرامات في البداية؟ **حوالي 251 mg**

37. **مسألة غير محددة الإجابة** أعط مثالاً لقيمة b حيث تمثل الدالة $f(x) = \left(\frac{5}{b}\right)^x$ اضمحلالاً أسيًا. **نموذج الإجابة: 10**

38. **الكتابة في الرياضيات** اكتب الإجراء اللازم لتحويل التمثيل البياني للدالة $g(x) = b^x$ إلى التمثيل البياني للدالة $f(x) = ab^{x-h} + k$. برر كل خطوة.

38. نموذج الإجابة؛ تمتد الدالة الرئيسة، $g(x) = b^x$، إذا كانت قيمة a أكبر من 1 أو تنضغط إذا كانت قيمة a أقل من 1. تتم إزاحة الدالة الرئيسة إلى أعلى بمقدار k من الوحدات إذا كانت قيمة k موجبة وإلى أسفل بمقدار $|k|$ من الوحدات إذا كانت قيمة k سالبة. تتم إزاحة الدالة الرئيسة بمقدار h من الوحدات إلى اليمين إذا كانت قيمة h موجبة وبمقدار $|h|$ من الوحدات إذا كانت قيمة h سالبة.

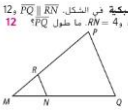
٨:٤٤ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب انسخ عدة نسخ تحتوي كل منها على خمس دوال أسيّة. أعطِ كل طالب دالة واحدة. أثناء مغادرة الطلاب الغرفة، اطلب منهم أن يخبروك ما إذا كانت الدوال التي معهم تمثل نموًا أم اضمحلالًا أسيًّا.

تدريب على الاختبار المعياري

39. **إجابة شبكية** في الشكل، $\overline{PQ} \parallel \overline{RN}$، $MN = 6$، $RN = 4$، $QN = 12$. ما طول $\overline{PQ}$؟ 12



40. يملك ريّان نقودًا كافية لشراء 12 قرصًا مدمجًا. إذا كانت تكلفة كل قرص مدمج أقل بمقدار AED 0.20، فسيتمكن ريّان من شراء قرصين مدمجين إضافيين. كم يبلغ المال الذي سينفقه ريّان على الأقراص المدمجة؟ A

A AED16.80 C AED15.80
B AED16.40 D AED15.40

41. سيحضر 100 طالب لعبة السقوط إذا بلغت تكلفة التذكرة AED 30. لكل زيادة في السعر بمقدار AED 5، يقل عدد الطلاب الحاضرين بمقدار 10 طلاب. ما السعر الذي سيحقق أعلى نسبة مبيعات؟ H

F AED 30
G AED 35
H AED 40
J AED 45

42. **اختبار الكفاءة الدراسية/اختيار القبول** جزّ جاسم العشب في ساعتين. جزّ طارق العشب نفسه في ساعة ونصف. كم دقيقة تقريبًا يستغرقها كل من جاسم وطارق إذا تعاونا معًا في جزّ العشب؟ C

A 28 دقيقة D 1.2 ساعة
B 42 دقيقة E 1.4 ساعة
C 51 دقيقة

مراجعة شاملة

حُلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي:

43. $\sqrt{y+5} = \sqrt{2y-3}$ 8
44. $\sqrt{y+1} + \sqrt{y-4} = 5$ 8
45. $10 - \sqrt{2x+7} \le 3$ $x \ge 21$
46. $6 + \sqrt{3y+4} < 6$ لا يوجد حل
47. $\sqrt{d+3} + \sqrt{d+7} > 4$ $d > \frac{3}{4}$
48. $\sqrt{2x+5} - \sqrt{9+x} > 0$ $x > 4$

حوّل إلى أبسط صورة.

49. $\frac{1}{y^{\frac{3}{5}}}$ $\frac{y^{\frac{1}{5}}}{y}$
50. $\frac{xy}{\sqrt[3]{x}}$ $\frac{xyz^{\frac{2}{3}}}{z}$
51. $\frac{3x+4x^2}{x^{-\frac{1}{3}}}$ $3x^{\frac{5}{3}} + 4x^{\frac{8}{3}}$
52. $\sqrt[4]{27x^3}$ $\sqrt{3x}$
53. $\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{3}}$ $\sqrt{3}$
54. $\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{6a^{\frac{1}{3}} \times a^{-\frac{1}{4}}}$ $\frac{a^{\frac{5}{12}}}{6a}$

55. **كرة القدم** توضح المعادلة $y = -0.005x^2 + x + 5$ أو مسار كرة قدم يتم تمريرها عبر ملعب، حيث يمثل المحور x المسافة التي تحركتها الكرة أفقيًا بالمتر، ويمثل المحور y ارتفاع الكرة فوق مستوى الأرض بالمتر. كم تبلغ تقريبًا المسافة التي تكون الكرة قد تحركتها أفقيًا عندما تعود إلى مستوى الأرض؟ **حوالي 204.88 m**

56. **خدمة المجتمع** يعرض برنامج عن التوعية بالمخدرات على مسرح يسع 300 شخص. وسيتم التبرع بالعائدات لمركز محلي للمعلومات عن المخدرات. إذا كان يتعين على كل شخصين بالغين إحضار طالب واحد على الأقل، فما أقصى مبلغ مالي يمكن جمعه؟ AED 500

مراجعة المهارات

حوّل إلى أبسط صورة. افترض عدم وجود متغير يساوي 0.

57. $f^{-7} \cdot f^4$ $\frac{1}{f^3}$
58. $(3x^2)^3$ $27x^6$
59. $(2y)(4xy^3)$ $8xy^4$
60. $\left(\frac{3}{5}c^2f\right)\left(\frac{4}{3}cd\right)^2$ $\frac{16}{15}c^4d^2f$

التدريس المتمايز

توسع اطلب من الطلاب تقليب 50 عملة معدنية وإحصاء عدد العملات التي تُظهر الصورة. ثم اطلب منهم إزالة العملات المعدنية المقلوبة على الصورة وتكرار النشاط. يجب أن يسجل الطلاب نتائجهم وتصميم مخطط لعدد المحاولات مقابل عدد العملات التي تُظهر الصور في تلك المحاولة. اطلب من الطلاب تمثيل بياناتهم بيانيًا ثم توضيح سبب وجوب أن تُمثل بياناتهم بالمعادلة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ نظريًا.

606 / 475

٨:٤٤ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

1 محور التركيز

الهدف استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات الأسية من خلال التمثيل البياني أو استخدام خاصية الجدول.

المواد

- حاسبة التمثيل البياني

نصيحة للتدريس

في الخطوة 1 من النشاط 1، ذكّر الطلاب أن يضعوا أقواسًا حول الأس.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قسّم الطلاب إلى مجموعات من طالبين أو ثلاثة ذوي قدرات متنوعة. ثم اطلب منهم إكمال النشاطين 1 و 2 والتمرينين 1 و9.

النشاط 1

- قبل مناقشة النشاط 1، استخدم إحدى المعادلات البسيطة مثل $2x = 6$ لتذكير الطلاب بطريقة حل المعادلة عن طريق التمثيل البياني. مثّل بيانيًا المعادلة $y = 2x$ و $y = 6$ ثم حدد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين.
- اسأل الطلاب عن سبب أهمية إدخال المعادلة باستخدام أقواس حول الأس في الخطوة 1.
- اطلب من الطلاب التعويض عن حل النشاط 1 في المعادلة الأصلية للتحقق من صحته.

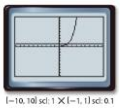
الاستكشاف

8-2 مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات والمتباينات الأسية

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات الأسية من خلال التمثيل البياني أو من خلال استخدام ميزة table. لعمل ذلك، ستكتب المعادلات في صورة نظام معادلات.

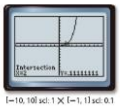
النشاط 1

حَـلّ المعادلة $3^{x-4} = \frac{1}{9}$.



الخطوة 1 مثّل كل طرف من طرفي المعادلة بيانيًا باعتباره دالة مستقلة. أدخل 3^{x-4} كقيمة **Y1**. تأكد من وجود أقواس حول الأس.

أدخل $\frac{1}{9}$ كقيمة **Y2**. ثم مثّل المعادلتين بيانيًا.



الخطوة 2 استخدم ميزة **intersect**

يمكنك استخدام خاصية **intersect** في قائمة **CALC** لتقريب الزوج المرتب للنقطة التي يتقاطع عندها التمثيلان البيانيان.

تبين شاشة الحاسبة أنّ إحداثي x للنقطة التي يتقاطع عندها المنحنيان هي 2. أي أنّ حل المعادلة يساوي 2.

الخطوة 3 استخدم ميزة **TABLE**

يمكنك أيضا استخدام ميزة **TABLE** لتحديد نقطة تقاطع المنحنيين.

يعرض الجدول قيم x وقيم y المناظرة لها لكل تمثيل بياني. افحص الجدول لإيجاد قيمة x بحيث تكون قيم y للتمثيل البياني متساوية.

عند $x = 2$، تبلغ قيمة y في كلتا الدالتين $0.\overline{1}$ أو $\frac{1}{9}$. إذا، حل المعادلة يساوي 2.

التحقق عوّض بـ 2 عن x في المعادلة الأصلية.

$3^{x-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$ المعادلة الأصلية

$3^{2-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$ عوّض بـ 2 عن x

$3^{-2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$ بسّط

$\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$ ✓ الحل صحيح

يمكن استخدام إجراء مماثل لحل المتباينات الأسية.

(يتبع في الصفحة التالية)

606 / 475

٨:٤٤ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae
606 / 475

النشاط 2

- في النشاط 2، تأكد من فهم الطلاب سبب ضرورة إعادة كتابة المتباينة في صورة نظام من المتباينات.

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمارين من 9–2.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرينين 4 و9 لتقييم استيعاب الطلاب لطريقة استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات والمتباينات الأسيّة.

من المجرد إلى المحسوس

اطلب من الطلاب شرح كيف تتغير مجموعة الحل المحددة للنشاط 2 لو كانت المتباينة هي $2^{x-2} \le 0.5^{x-3}$.

مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات والمتباينات الأسيّة تابع

النشاط 2

حُـلّ المتباينة $2^{x-2} \ge 0.5^{x-3}$.

الخطوة 1 أدخل المتباينات المرتبطة.

أعد كتابة المسألة كنظام متباينات.

أول متباينة هي $y \ge 2^{x-2}$ أو $y \le 2^{x-2}$. نظرًا لأن هذه المتباينة تتضمن رمز أقل من أو يساوي، ظلل المنطقة أسفل المنحنى.

أولًا أدخل الحد، ثم استخدم مفتاحي السهم و ENTER لاختيار رمز تظليل المنطقة أسفل المنحنى.

المتباينة الثانية هي $y \ge 0.5^{x-3}$. ظلل المنطقة أعلى المنحنى، حيث إن هذه المتباينة تتضمن رمز أكبر من أو يساوي.

خطوات العملية على الحاسبة: [(] [^] 2 [)] ENTER ENTER ENTER [▶] 2 [^] [(] X,T,θ,n [−] 2 [)] ENTER [◀] [◀] ENTER ENTER [▶] [▶] 5 [^] [(] X,T,θ,n [−] 3 [)]

الخطوة 2 تمثيل النظام بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: GRAPH

قيم x للنقاط في منطقة تداخل التظليل هي مجموعة حل المتباينة الأصلية. باستخدام ميزة intersect، نستطيع استنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x \mid x \ge 2.5\}$.

[−10, 10] scl: 1 × [−10, 10] scl: 1

الخطوة 3 استخدم ميزة TABLE.

تحقق باستخدام ميزة TABLE. قم بإعداد الجدول لإظهار قيم x بزيادات قدرها 0.5.

خطوات العملية على الحاسبة: [TABLE] 2nd ENTER 5 [TBLSET] 2nd 0

لاحظ أنه لكل قيم x الأكبر من $x = 2.5$، تكون Y1 > Y2. يؤكد هذا أن حل المتباينة هو $\{x \mid x \ge 2.5\}$.

10. نظرًا لأن النظام يتكون من تعبيرات جبرية في كلا الطرفين في المعادلة أو المتباينة الأصلية، مهما كانت قيم حلول النظام، فستحقق المعادلة أو المتباينة الأصلية.

التمارين

حُـلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي:

1. $9^{x-1} = \frac{1}{81}$ -1
2. $4^{x+3} = 2^{5x}$ 2
3. $5^{x-1} = 2^x$ 1.76
4. $3.5^{x+2} \approx 1.75^{x+3}$ -1.2
5. $-3^{x+4} = -0.5^{7x+3}$ -2.6
6. $6^{2-x} - 4 < -0.25^{x-2.5}$ $\{x \mid x > 1.8\}$
7. $16^{x-1} > 2^{2x+2}$ $\{x \mid x > 3\}$
8. $3^x - 4 \le 5^{\frac{x}{2}}$ $\{x \mid x < 2\}$
9. $5^{x+3} \le 2^{x+4}$ $\{x \mid x \le -2.2\}$
10. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا يصلح أسلوب التمثيل البياني لنظام المعادلات أو المتباينات لحل المعادلات والمتباينات الأسيّة.

٨:٤٤ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

1 محور التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2–8 تمثيل الدوال الأسيّة بيانيًا.

الدرس 2–8 حل المعادلات الأسيّة. حل المتباينات الأسيّة.

بعد الدرس 2–8. تطوير تعريف اللوغاريتمات من خلال استكشاف العلاقة بين الدوال الأسيّة ومعكوساتها وذكر وصفها.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم "لماذا؟" الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- أي قيم x تمثل عام 2010؟ 6
- كم عدد الأعضاء الذين تمثلهم الدالة $y = 5.2$؟ 5,200,000
- كم سيوجد من الأعضاء في عام 2012؟ حوالي 27,300,000 تقريبًا

الدرس 8-2
حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

السابق قيمت نتمثيل الدوال الأسيّة بيانيًا.

الحالي 1 حل المعادلات الأسيّة. 2 حل المتباينات الأسيّة

لماذا؟ تتجه العضوية في مواقع التواصل الاجتماعي عبر شبكة الإنترنت نحو الزيادة الأسيّة. يمكن نمذجة نمو العضوية في أحد المواقع الإلكترونية بالمعادلة $y = 2.2(1.137)^x$ حيث يمثل x عدد السنوات منذ عام 2004 ويمثل y عدد الأعضاء بالبليون.

يمكنك استخدام $y = 2.2(1.137)^x$ لتحديد كم سيشترك من الأعضاء في عام محدد، أو لتحديد العام الذي وصلت فيه العضوية إلى مستوى معين.

المفردات الجديدة
المعادلة الأسيّة exponential equation
المرابحة المركبة compound interest
المتباينة الأسيّة exponential inequality

ممارسات في الرياضيات
2 التفكير بطريقة تجريدية وكمّية.

1 حل المعادلات الأسيّة

في **المعادلة الأسيّة**، توجد المتغيرات في صورة أسس.

المفهوم الأساسي خاصية المساواة في الأسس

الشرح افترض أن $b > 0$، $b \neq 1$، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال إذا كان $3^x = 3^5$، فإن $x = 5$. إذا كان $x = 5$، فإن $3^x = 3^5$.

يمكن استخدام خاصية المساواة لحل المعادلات الأسيّة.

مثال 1 حل المعادلات الأسيّة

حُلّ كل من المعادلات التالية.

a. $2^x = 8^3$

$2^x = 8^3$	المعادلة الأصلية
$2^x = (2^3)^3$	أعد كتابة 8 في صورة 2^3
$2^x = 2^9$	أس الأس
$x = 9$	خاصية المساواة في الأسس

b. $9^{2x-1} = 3^{6x}$

$9^{2x-1} = 3^{6x}$	المعادلة الأصلية
$(3^2)^{2x-1} = 3^{6x}$	أعد كتابة 9 في صورة 3^2
$3^{4x-2} = 3^{6x}$	أس الأس
$4x - 2 = 6x$	خاصية المساواة في الأسس
$-2 = 2x$	اطرح $4x$ من كلا الطرفين
$-1 = x$	اقسم كلا الطرفين على 2

تمرين موجه

1A. $4^{2n-1} = 64$ 2

1B. $5^{2x} = 125^{x+2}$ 3

606 / 475

://elib.moe.gov.ae

1 حل المعادلات الأسيّة

يوضح **المثال 1** طريقة حل معادلة أسيّة. يوضح **المثال 2** طريقة كتابة الدالة الأسيّة لنمذجة موقف حقيقي. يوضح **المثال 3** طريقة تحديد المرابحة المركبة باستخدام الدالة الأسيّة.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 حـلّ كل من المعادلات التالية.

a. $3^x = 9^4$ 8

b. $2^{5x} = 4^{2x-1}$ -2

2 **التعداد السكاني** في عام 2000. بلغ عدد سكان فينيكس 1,321,045 نسمة. في عام 2007. قُدّر عدد السكان بـ 1,512,986 نسمة.

a. اكتب دالة أسيّة يمكن استخدامها في تمثيل تعداد سكان فينيكس. اكتب x من حيث عدد السنوات منذ عام 2000.

$y = 1{,}321{,}045(1.0196)^x$

b. توقع تعداد سكان فينيكس في عام 2013. 1,700,221

يمكنك استخدام المعلومات الخاصة بالنمو أو الاضمحلال الأسي لكتابة معادلة لدالة أسيّة.

مثال من الحياة اليومية 2 كتابة دالة أسيّة

العلوم بدأت خديجة إجراء إحدى التجارب باستخدام 7500 خلية بكتيرية. بعد مرور 4 ساعات، أصبح عدد الخلايا 23,000 خلية.

a. اكتب دالة أسيّة يمكن استخدامها لنمذجة عدد خلايا البكتيريا بعد مرور x من الساعات، إذا تغير عدد البكتيريا بالمعدل نفسه.

في بداية التجربة، يساوي الزمن 0 ويساوي عدد خلايا البكتيريا 7500 خلية. إذا يكون تقاطع y، وقيمة a، يساوي 7500.

عند $x = 4$، يصبح عدد خلايا البكتيريا 23,000 خلية. مؤشر عن تلك القيم في معادلة أسيّة لإيجاد قيمة b.

$y = ab^x$	دالة أسيّة
$23{,}000 = 7500 \cdot b^4$	مؤشر عن x بالعدد 4، وعن y بالعدد 23,000، وعن a بالعدد 7500
$3.067 \approx b^4$	اقسم كلاً من الطرفين على 7500
$\sqrt[4]{3.067} \approx b$	خذ الجذر الرابع للطرفين
$1.323 \approx b$	استخدم حاسبة

المعادلة التي تمثل نموذج عدد خلايا البكتيريا هي $y \approx 7500(1.323)^x$.

b. ما العدد المتوقع لخلايا البكتيريا في العينة بعد مرور 12 ساعة؟

$y \approx 7500(1.323)^x$	معادلة النمذجة
$\approx 7500(1.323)^{12}$	بالعدد 12 عوض عن x
$\approx 215{,}665$	استخدم الحاسبة

سيوجد حوالي 215,665 خلية بكتيرية بعد مرور 12 ساعة.

تمرين موجّه

2. إعادة التدوير وزّع تصنّع 3.2 ملايين علبة مصنوعة من الألومنيوم في عام 2005.

A. في عام 2010، وزّع التصنّع 420,000 علبة مصنوعة من العلب المعاد تدويرها التي وزعها سابقاً. باقتراض استمرار معدل إعادة التدوير، اكتب معادلة لنمذجة توزيع العلب المصنوعة من الألومنيوم المعاد تدويره كل عام. $y = 3.2(0.67)^x$

B. ما العدد المتوقع للعلب المصنوعة من الألومنيوم المعاد تدويره في عام 2050؟ **لا يوجد**

تستخدم الدوال الأسيّة في الحالات المتعلقة بالمرابحة المركبة.

المرابحة المركبة مرابحة تدفع على رأس مال استثمار بالإضافة إلى أي مرابحة مكتسبة سابقاً.

المفهوم الأساسي المرابحة المركبة

يمكنك أن تحسب المرابحة المركبة باستخدام الصيغة التالية.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

حيث يمثل A المبلغ في الحساب بعد مرور t من السنوات، ويمثل P رأس المال المستثمر، ويمثل r نسبة المرابحة السنوية، ويمثل n عدد فترات حساب المرابحة المركبة كل عام.

الربط بالحياة اليومية

في عام 2008، في الولايات المتحدة، منع معدل تدوير المعادن الذي بلغ 35 إطلاق حوالي 25 مليون طن متري من الكربون في الهواء – وهي تقريبًا الكمية المنبعثة سنويًا من 4.5 ملايين سيارة.

المصدر: وكالة حماية البيئة

© جميع الحقوق محفوظة

التركيز على محتوى الرياضيات

حل المعادلات الأسيّة يمكن حل المعادلات الأسيّة البسيطة من خلال كتابة أحد طرفي المعادلة أو كليهما بحيث تكون الأساسات متماثلة. وبمجرد القيام بهذا، سيمكن استخدام خاصية التساوي في الدوال الأسيّة لحلها وإيجاد المتغير.

554 | الدرس 2-8 | حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

٨:٤٥ م ٦٨% ://elib.moe.gov.ae

مثال 3 الميزانية المركبة

يتلقى حساب استثمار 4.2% مرابحة سنوية بصفة مركبة شهرياً. إذا استُثمر مبلغ AED 2500 في هذا الحساب، فكم سيبلغ الرصيد بعد 15 عاماً؟

الفهم أوجد المبلغ الكلي في الحساب بعد مرور 15 عاماً.

الخطة استخدم صيغة المرابحة المركبة.

$t = 15$ ، $n = 12$ ، $r = 0.042$ ، $P = 2500$

أوجد حل

صيغة المرابحة المركبة

$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

$= 2500\left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12 \times 15}$

≈ 4688.87

$P = 2500,\ r = 0.042,\ n = 12,\ t = 15$

استخدم الحاسبة

التحقق مثّل المعادلة المناظرة بيانياً $y = 2500(1.0035)^{12x}$.

استخدم **CALC: value** لإيجاد y عند $x = 15$.

قيمة y التي تساوي 4688.8662 قريبة جداً من 4688.87. إذا الإجابة منطقية.

[10, 20] scl: 1 × [0, 10,000] scl: 1000

تمرين موجه

3. أوجد رصيد الحساب بعد مرور 20 عاماً. إذا وضع مبلغ AED 100 في حساب يتلقى مرابحة مركبة 1.2% بصفة مركبة مرتين شهرياً. AED 127.12

انتبه!
النسب المئوية تذكر تحويل كل النسب المئوية إلى الصيغة العشرية. 4.2% تساوي 0.042.

2 حل المتباينات الأسيّة

يقصد **بالمتباينة الأسيّة** المتباينة التي تضم تعابير أسيّة.

المفهوم الأساسي خاصية التباين في الأسس

الشرح	إذا كان $b > 1$، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$، و $b^x < b^y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$.
مثال	إذا كان $2^x > 2^6$، فإن $x > 6$. أي إذا كان $x > 6$، فإن $2^x > 2^6$.

نصبح هذه الخاصية أيضاً مع $\geq$ و $\leq$.

مثال 4 حل المتباينات الأسيّة

حُلّ المتباينة $16^{2x-3} < 8$.

$16^{2x-3} < 8$	المتباينة الأصلية
$(2^4)^{2x-3} < 2^3$	أعد كتابة 16 في صورة 2^4 وكذلك 8 في صورة 2^3
$2^{8x-12} < 2^3$	أس الأس
$8x - 12 < 3$	خاصية التباين في الأسس
$8x < 15$	أضف 12 إلى كلا الطرفين
$x < \frac{15}{8}$	اقسم كلاً من الطرفين على 8

تمرين موجه

حُلّ كل متباينة مما يلي.

4A. $3^{2x-1} \geq \frac{1}{243}$ $\{x \mid x \geq -2\}$

4B. $2^{x+2} > \frac{1}{32}$ $\{x \mid x > -7\}$

حق النشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

555

مثال إضافي

3 يتلقى حساب استثمار مرابحة سنوية بنسبة 5.4% بصفة مركبة ربع سنوية. إذا تم إيداع مبلغ AED 4000 في هذا الحساب، فأوجد مقدار الرصيد بعد 8 سنوات. AED 6143.56

2 حل المتباينات الأسيّة

يوضح **المثال 4** طريقة حل المتباينة الأسيّة.

مثال إضافي

4 حُلّ المتباينة $5^{3-2x} > \frac{1}{625}$. $x < \frac{7}{2}$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

دفتر الملاحظات اطلب من الطلاب كتابة ملاحظة في دفتر الملاحظات توضح خصائص التساوي والتباين في الدوال الأسيّة.

555

التدريس المتمايز ق م ض م

إذا كنت تريد من الطلاب أن يتحققوا من صحة إجابتهم،

فمن ثم ذكّرهم باختيار أي قيمة في فترة الحل والتأكد من أنها تحقق المتباينة الأصلية.

٨:٤٥ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 8–1 للتأكد من الفهم.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس ممارسات في الرياضيات

النمذجة يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات تطبيق الحساب الذي يعرفونه لحل المسائل الناشئة في الحياة اليومية. وتحليل العلاقات رياضيًا لاستخلاص الاستنتاجات. وتفسير نتائجهم الرياضية في سياق الحالة.

تحقق من فهمك

مثال 1 **حُلّ كل من المعادلات التالية.**

1. $3^{3x} = 27^{2x-4}$ **12**
2. $16^{2y-3} = 4^{y+1}$ $\frac{7}{3}$
3. $2^{8x} = 32^{x-2}$ **−10**
4. $49^{x+5} = 7^{8x-6}$ $\frac{8}{3}$

مثال 2 5. **العلوم** الانقسام المتساوي هو عملية يتم فيها انقسام خلية إلى نصفين. تُعد الإشريكية القولونية *القولونية* أحد أنواع البكتيريا الأسرع نموًا، حيث يمكنها أن تتكاثر وتنتج نسخة منها خلال 15 دقيقة.

a. اكتب دالة أسية تمثل عدد الخلايا c بعد مرور t من الدقائق.

5a. $c = 2^{\frac{t}{15}}$

b. إذا بدأت بخلية إشريكية قولونية واحدة، فكم سيصبح عدد الخلايا بعد ساعة؟

5b. 16 خلية

مثال 3 6. تتقاضى شهادة إيداع 2.25% مرابحة سنوية بصفة مركبة مرتين أسبوعيًا. إذا أودعت 500 AED في شهادة الإيداع هذه، فكم سيصبح الرصيد بعد مرور 6 أعوام؟

AED 572.23

مثال 4 **حُلّ كل متباينة مما يلي.**

7. $4^{2x+6} \leq 64^{2x-4}$ $\{x \mid x \geq 4.5\}$
8. $25^{y-3} \leq \left(\frac{1}{125}\right)^{y+2}$ $\{y \mid y \leq 0\}$

التمرين وحل المسائل

يوجد تمرين إضافي في الصفحة R7.

مثال 1 **حُلّ كل من المعادلات التالية.**

9. $8^{4x+2} = 64$ **0**
10. $5^{x-6} = 125$ **9**
11. $81^{x+2} = 3^{3x+1}$ **−7**
12. $256^{b+2} = 4^{2-2b}$ **−1**
13. $9^{3c+1} = 27^{3c-1}$ $\frac{5}{3}$
14. $8^{2y+4} = 16^{y+1}$ **−4**

مثال 2 15. **تمثيل النماذج** في عام 2009، حصلت عائشة على مبلغ 10,000 AED من جدها. استثمر والداها المال بالكامل. وبحلول عام 2021، سيكون المبلغ قد زاد إلى 16,960 AED.

a. اكتب معادلة أسية يمكن استخدامها في نمذجة المال y. اكتب الدالة بدلالة x. عدد السنين منذ عام 2009.

$y = 10{,}000(1.045)^x$

b. افترض استمرار زيادة المبلغ الباقي بالمعدل نفسه. كم سيبلغ رصيد الحساب في عام 2031؟

حوالي AED 26,336.52

اكتب دالة أسية للتمثيل البياني الذي يمر بالنقاط المعطاة.

16. $y = 6.4(2.5)^x$ (100 ,3)، (6.4 ,0)
17. $y = 256(0.75)^x$ (81.4)، (256 ,0)
18. $y = 128(4.926)^x$ (371,293 ,5)، (128 ,0)
19. $y = 144(3.5)^x$ (21,609 ,4)، (144 ,0)

مثال 3 20. أوجد رصيد الحساب بعد مرور 7 سنوات إذا تم إيداع مبلغ 700 AED في حساب يتلقى مرابحة 4.3% مركبة شهريًا.

AED 945.34

21. حدد المبلغ المتوفر في حساب تقاعد بعد مرور 20 عامًا إذا تم استثمار مبلغ 5000 AED بمرابحة 6.05% بصفة مركبة أسبوعيًا.

AED 16,755.63

22. يقدم حساب توفير مرابحة 0.7% بصفة مركبة نصف شهرية. إذا أودع مبلغ 110 AED في هذا الحساب، فكم سيساوي الرصيد بعد 15 عامًا؟

AED 122.17

23. يتلقى حساب ادخار جامعي مرابحة سنوية 13.2% بصفة مركبة نصف سنوية. كم يبلغ رصيد الحساب بعد مرور 12 عامًا إذا بلغ الإيداع الابتدائي 21,000 AED؟

AED 97,362.61

مثال 4 **حُلّ كل متباينة مما يلي.**

24. $625 \geq 5^{a+8}$ $\{a \mid a \leq -4\}$
25. $10^{5b+2} > 1000$ $\left\{b \mid b > \frac{1}{5}\right\}$
26. $\left(\frac{1}{64}\right)^{c-2} < 32^{2c}$ $\left\{c \mid c > \frac{3}{4}\right\}$
27. $\left(\frac{1}{27}\right)^{2d-2} \leq 81^{d+4}$ $\{d \mid d \geq -1\}$
28. $\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \geq \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$ $\{t \mid t \leq -40\}$
29. $\left(\frac{1}{36}\right)^{w+2} < \left(\frac{1}{216}\right)^{4w}$ $\left\{w \mid w < \frac{2}{5}\right\}$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
ف م مبتدئ	9–29، 42–43، 45–73	9–29 فردي، 50–53	10–28 زوجي، 42–43، 45–49، 54–73
ض م أساسي	9–29 فردي، 30، 31–37 فردي، 38–43، 45–73	9–29، 50–53	30–43، 45–49، 54–73
ت م متقدم	30–67 (اختياري: 68–73)		

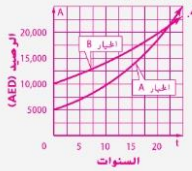
606 / 475

٨:٤٥ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

إجابات إضافية

38d. حوالي 9.3498 مليارات نفريبًا؛ حيث إنّ التوقع في عام 2000 كان أكبر من تعداد السكان الفعلي، ومن المحتمل أن يكون هذا التوقع أكبر من تعداد السكان الفعلي في ذلك الحين.

40b.



30. العلوم يحتوي كوب على مشروب الشوكولاتة الساخنة وتبلغ درجة حرارة المشروب 90°C عند الزمن $t = 0$، ودرجة حرارة الهواء المحيط ثابتة وتبلغ 20°C. إذا قُلّبت المشروب باستمرار، فستصبح درجة حرارته بالدرجات السلزية بعد مرور t من الدقائق هي $y(t) = 20 + 70(1.071)^{-t}$.

a. أوجد درجة حرارة مشروب الشوكولاتة الساخنة بعد مرور 15 دقيقة. **45.02°C**

b. أوجد درجة حرارة مشروب الشوكولاتة الساخنة بعد مرور 30 دقيقة. **28.94°C**

c. تقدّر أفضل درجة حرارة للمشروب بحوالي 60°C. هل ستكون درجة حرارة المشروب عند درجة الحرارة هذه أم أقل منها بعد مرور 10 دقائق؟ **أقل**

31. الحيوانات تُظهر الدراسات أنّ الحيوان يدافع عن منطقة تفوده. وهي مساحة مُقدّرة بالأمتار المربعة، التي تتناسب طرديًا مع وزن الحيوان بالكيلوجرام مرفوعًا إلى الأس 1.31.

a. إذا كان ثمة قندس وزنه 20 kg يدافع عن منطقة مساحتها 142 m^2، فاكتب معادلة توضح مساحة المنطقة a التي يدافع عنها قندس وزنه w kg. $a = 1.16w^{1.31}$

b. يعتقد العلماء أنّه منذ آلاف السنين، كان طول أسلاف الفنادس 3.35 m ويزن 195 kg. استخدم المعادلة لتحديد المنطقة التي دافعت عنها هذه الحيوانات. **حوالي 2731 m^2**

حُلّ كل من المعادلات التالية.

32. $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} = 8^{2x+1}$ $-\frac{2}{5}$

33. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-5} = 25^{3x+2}$ $\frac{1}{7}$

34. $216 = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+3}$ -6

35. $\left(\frac{1}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2x+4}$ $-\frac{4}{13}$

36. $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\frac{27}{8}\right)^{x-4}$ $\frac{11}{8}$

37. $\left(\frac{25}{81}\right)^{2x+1} = \left(\frac{729}{125}\right)^{-3x+1}$ 1

38. النمذجة في عام 1950، كان تعداد السكان في العالم حوالي 2.556 مليار. بحلول عام 1980، زاد تعداد السكان إلى 4.458 مليارات. **انظر الهامش.**

a. اكتب دالة أسية بالصيغة $y = ab^x$ بحيث يمكن استخدامها لنمذجة تعداد السكان في العالم y بالمليارات للفترة من 1950 إلى 1980. اكتب المعادلة بدلالة x، عدد السنين منذ عام 1950. قرّب قيمة b إلى أقرب جزء من عشرة آلاف. $y = 2.556(1.0187)^x$

b. افترض استمرار نمو السكان بذلك المعدل. قدّر السكان في عام 2000. **6.455 مليارات**

c. في عام 2000، كان تعداد السكان في العالم حوالي 6.08 مليارات. قارن تقديرك بتعداد السكان الفعلي. **كان التوقع أكبر من الواقع بحوالي 375 مليون مرة.**

d. استخدم المعادلة التي كتبتها في الجزء a لتقدير تعداد السكان في العالم في عام 2020. برأيك، ما مدى دقة التقدير؟ اشرح استنتاجك.

39. الأشجار يتناسب قطر قاعدة جذع شجرة بالسنتيمتر طرديًا مع ارتفاع الشجرة بالمتر مرفوعًا إلى الأس $\frac{3}{2}$.

a. يبلغ طول شجرة سيكويا الصغيرة 6 m، ويبلغ قطر قاعدتها 19.1 cm. استخدم هذه المعلومات في كتابة معادلة لإيجاد القطر d لقاعدة شجرة السيكويا إذا كان ارتفاعها يساوي h من الأمتار. $d = 1.30h^{\frac{3}{2}}$

b. يبلغ طول شجرة جنرال شيرمان النوجودة في حديقة سيكويا الوطنية بكاليفورنيا حوالي 84 m. أوجد قطر قاعدة شجرة جنرال شيرمان. **انظر الهامش.**

40. المعرفة المالية لدى السيدة شياء خطتان مختلفتان بخصوص الاستثمار من أجل النفاعة وعليها الاختيار بينهما.

a. اكتب معادلتين تعرضان الخيار A والخيار B بافتراض أدنى الإيداعات.

b. ارسم تمثيلًا بيانيًا يوضح رصيد كل خيار استثمار بعد t من السنوات. **انظر الهامش.**

c. اشرح أي خياري الاستثمار أفضل، الخيار A أم الخيار B.

40a. $A = 5000\left[\left(\frac{4.065}{4}\right)^{4t}\right]$،

$A = 5000\left[\left(\frac{12.042}{12}\right)^{12t} + \left(\frac{52.023}{52}\right)^{52t}\right]$

40c. نموذج الإجابة: أثناء أول 22 عامًا، يكون الخيار B هو الخيار الأفضل، حيث يكون إجمالي المبلغ أكبر من الخيار A. ومع ذلك، بعد حوالي 22 عامًا، يزيد رصيد الخيار A عن رصيد الخيار B. ومن ثَمّ فإنّ الخيار A هو الأفضل.

© حقوق النشر لـ McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز ض.م ل.م

التوسع امنح الطلاب الفرصة ليوسعوا مداركهم عن مفهوم الاستهلاكية وذلك من خلال منحهم مبلغ إيداع أوليًا ومطالبتهم بالتسوق بأفضل نسب مرابحة. على الطلاب تسجيل المعلومات ذات الصلة والتي من بينها اسم البنك ونوع الحساب ونسبة المرابحة وتكرار تراكب الفائدة والقيود المفروضة على الحساب. اطلب من الطلاب تمثيل نمو مبلغ الإيداع الأولي عبر الوقت بيانيًا.

606 / 475

٨:٤٥ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

تدريس ممارسات في الرياضيات

فرضيات يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات فهم الافتراضات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقًا واستخدامها في بناء الفرضيات. ويضمون التخمينات ويبنون تقدمًا منطقيًا للمسائل لاستكشاف حقيقة تخميناتهم. كما يُمكنهم تحليل المواقف بتقسيمها إلى حالات ويمكنهم التعرف على الأمثلة المضادة واستخدامها.

41. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستكتشف الزيادة السريعة للدالة الأسية. قُصّت ورقة كبيرة إلى نصفين، ووضعت إحدى القطعتين فوق الأخرى، ثم قُصّت كل ورقة من الورقتين إلى نصفين ووضعت الأوراق بعضها فوق بعض. افترض تكرار هذا الإجراء عدة مرات.

a. **نشاط عملي** أجر هذا النشاط مع عدد أوراق المجموعة بعد القص أول مرة. كم سيكون عدد القطع بعد القص للمرة الثانية؟ كم سيكون عدد القطع بعد القص للمرة الثالثة؟ كم سيكون عدد القطع بعد القص للمرة الرابعة؟
2, 4, 8, 16

b. **جدوليًا** سجل النتائج في جدول. **انظر ملحق إجابات الوحدة 8.**

c. **رمزيًا** استخدم النمط الموضح في الجدول لكتابة معادلة تعبر عن عدد القطع في مجموعة الأوراق بعد عدد x من مرات القص. $y = 2^x$

d. **تحليليًا** يبلغ سُمك الورقة العادية حوالي 0.003 cm. اكتب معادلة تعبر عن سُمك مجموعة الأوراق بعد عدد x من مرات القص. $y = 0.003(2)^x$

e. **تحليليًا** ما سُمك مجموعة الأوراق بعد القص 30 مرة؟ **حوالي 3,221,225.47 cm**

مهارات التفكير العليا المسائل استخدام مهارات التفكير العليا

42. **الكتابة في الرياضيات** في مسألة عن المراباة المركبة، صف ما يحدث عندما تضيع فترة التراكب أكثر تكرارًا في حين يظل رأس المال والوقت الكلي كما هما. **انظر ملحق إجابات الوحدة 8.**

43. **تحليل الخطأ** عمل بدرية وحصة على إيجاد حل $6^{x-3} > 36^{-x-1}$. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

بدرية

$6^{x-3} > 36^{-x-1}$

$6^{x-3} > (6^2)^{-x-1}$

$6^{x-3} > 6^{-2x-2}$

$x - 3 > -2x - 2$

$3x > 1$

$x > \frac{1}{3}$

حصة

$6^{x-3} > 36^{-x-1}$

$6^{x-3} > (6^2)^{-x-1}$

$6^{x-3} > 6^{-2x-2}$

$x - 3 > -2x - 2$

$3x > 1$

$x > \frac{1}{3}$

43. **نموذج الإجابة:** بدرية؛ حيث جمعت حصة الأسس بدلًا من ضربها عند أخذ أس الأس.

44. **تحفيز** أوجد قيمة x: $4^x = 4^{18} + 4^{18} + 4^{18} + 4^{18}$. **37.1610**

45. **مسألة غير محددة الإجابة** ما التغير الذي سيحقق ربحًا أكبر بالنسبة إلى فرض مدته 5 سنوات بمراباة نسبتها 8% بصفة مركبة شهريًا، تقليل المدة إلى 4 سنوات أم تقليل نسبة المراباة إلى 6.5%؟

45. سيكون تقليل المدة أكثر إفادة. ستبلغ قيمة الرقم المضروب فيه 1.3756 في حالة أنّ المدة 4 سنوات، في حين ستبلغ الرقم المضروب فيه 1.3828 عندما تكون نسبة المراباة 6.5%.

46. **فرضيات** حدّد ما إذا كانت العبارات التالية صحيحة أحيانًا دائمًا أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

a. $2^x > -8^{20x}$ لجميع قيم x.

b. التمثيل البياني لمعادلة هو أسي تزايدية.

b. التمثيل البياني لمعادلة اضمحلال أسي تناقصية.

46a. دائمًا؛ سيكون 2^x موجبًا دائمًا، وسيكون -8^{20x} سالبًا دائمًا.

46b. دائمًا؛ من خلال التعريف سيكون التمثيل البياني تزايديًا دائمًا حتى ولو كانت الزيادة ضئيلة.

46c. غير صحيحة على الإطلاق؛ من خلال التعريف سيكون التمثيل البياني تناقصيًا دائمًا حتى ولو كان تناقصًا ضئيلًا.

47. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب متباينة أسية بحيث يكون حلها $x \leq 2$. **نموذج الإجابة:** $4^x \geq 4^2$

48. **البرهان** أثبت أنّ $9^{4x+1} \times 3^{2x+2} = 81^{x+1} \times 27^{2x}$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 8.**

49. **الكتابة في الرياضيات** إذا مرقت الكيميين الابتدائية والنهائية لمادة مشعة ومقدار الوقت المنقضي، فكيف ستحدد المعدل الذي تزداد به الكمية أو تقل لكي تكتب معادلة؟

49. نموذج الإجابة: القسم الكمية النهائية على الكمية الابتدائية. إذا كان n هو عدد النواصل الزمنية المنقضية، فخذ الجذر رقم n للإجابة.

558 | الدرس 2-8 | حل المعادلات والمتباينات الأسية

606 / 475

٨:٤٥ م ٦٨% ://elib.moe.gov.ae

تدريب على الاختبار المعياري

50. $3 \times 10^{-4} =$ **B**

A 0.003 C 0.00003
B 0.0003 D 0.000003

51. أي مما يلي لا يمكن أن يكون حلًا للمتباينة $\sqrt[3]{5 - 3x} < -3$؟ **F**

F 2.5 H 3.5
G 3 J 4

52. **إجابة شبكية** الزوايا الثلاث لمثلث تساوي $3x°$، $2x°$، $10°$. أوجد قياس أصغر زاوية في المثلث. **30**

53. **اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول** أي مما يلي يكافئ $(x)(x)(x)(x)$ لكل قيم x؟ **E**

A $x + 4$ D $4x^2$
B $4x$ E x^4
C $2x^2$

مراجعة شاملة

مثّل كل دالة بيانيًا. (الدرس 1–8) **54–56. انظر الهامش.**

54. $y = 2(3)^x$
55. $y = 5(2)^x$
56. $y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$

حلّ كل من المعادلات التالية.

57. $\sqrt{x + 3} - 3 = 0$ **4**
58. $\sqrt{3t - 5} - 3 = 4$ **18**
59. $\sqrt[4]{2x - 1} = 2$ **8.5**
60. $\sqrt{x - 6} - \sqrt{x} = 3$ **لا يوجد حل**
61. $\sqrt[3]{5m + 2} = 3$ **5**
62. $(6t - 5)^{\frac{1}{3}} + 3 = -2$ **−20**
63. $(5x + 7)^{\frac{1}{2}} + 3 = 5$ **5**
64. $(3x - 2)^{\frac{1}{3}} + 6 = 5$ $\frac{1}{3}$
65. $(7x - 1)^{\frac{1}{3}} + 4 = 2$ **−1**

66. **المبيعات** يكسب مندوب المبيعات AED 10 في الساعة زائد 10% عمولة على المبيعات. اكتب دالة تعبر عن دخل مندوب المبيعات، إذا أراد مندوب المبيعات أن يكسب AED 1000 في الأسبوع الذي فيه 40 ساعة. فلماذا يجب أن تكون مبيعاته؟
$I(m) = 400 + 0.1m$؛ AED6000

67. **المعرض الوطني** ينتج أحد مصانع الجبن ثلاثة أنواع من الجبن – الجبن الشيدر وجبن موتزري جاك والجبن السويسري – ويبيع تلك البيتجثات في ثلاثة مناطق بيع في المعرض الوطني. في نهاية أحد الأيام، تلقى المنفذ الأول x kg من كل نوع من الجبن، وتلقى المنفذ الثاني y kg من كل نوع من الجبن، وتلقى المنفذ الثالث z kg من كل نوع من الجبن. في نهاية اليوم، كان مصنع الجبن قد باع 131 كيلوجرامًا من الجبن الشيدر، و 291 kg من جبن موتزري جاك، و 232 kg من الجبن السويسري.
يوضح الجدول التالي النسبة المئوية للجبن الذي تلقاه كل منفذ في الصباح وباعه. كم كيلوجرامًا من الجبن الشيدر الذي تلقاه كل منفذ في الصباح؟ **المنفذ 1، 190 kg؛ المنفذ 2، 150 kg؛ المنفذ 3، 100 kg**

النوع	منفذ 1	منفذ 2	منفذ 3
جبن الشيدر	40%	30%	10%
جبن موتزري جاك	40%	90%	80%
الجبن السويسري	30%	70%	70%

مراجعة المهارات

أوجد $[g \circ h](x)$ و $[h \circ g](x)$.

68. $h(x) = 2x - 1$، $g(x) = 3x + 4$ **$6x + 1$؛ $6x + 7$**
69. $h(x) = x^2 + 2$، $g(x) = x - 3$ **$x^2 - 1$؛ $x^2 - 6x + 11$**
70. $h(x) = x^2 + 1$، $g(x) = -2x + 1$ **$-2x^2 - 1$؛ $4x^2 - 4x + 2$**
71. $h(x) = -5x$، $g(x) = 3x - 5$ **$-15x - 5$؛ $-15x + 25$**
72. $h(x) = x^3$، $g(x) = x - 2$ **$x^3 - 2$؛ $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$**
73. $h(x) = x + 4$، $g(x) = |x|$ **$|x + 4|$؛ $|x| + 4$**

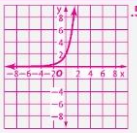
حقوق الطبع محفوظة © لصالح وزارة التربية والتعليم – McGraw-Hill Education

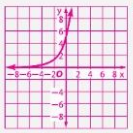
انتبه!
تحليل الخطأ في التمرين 43. قد يخفق الطلاب في استيعاب استخدام قواعد الأسس الأساسية في حال وجود متغيرات. ذكّرهم بأنّ $(a^m)^n = a^{mn}$.

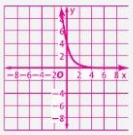
4 التقويم

تعيين مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب وصف مجموعة قيم b المحتملة في دالة أسية بالصيغة $y = b^x$.

إجابات إضافية

54.


55.


56.


التدريس المتمايز ض م ز م

التوسع اطلب من الطلاب التوسع في حل المثال 3 لإيجاد العدد المتزايد من فترات التراكب. جرب التراكب اليومي (n = 365) ثم استكشف ماذا يحدث إذا اختلفت n لتصل إلى عشرات آلاف من المرات سنويًا. يقترب المبلغ النهائي من الحد الأقصى والذي يعادل في هذه الحالة حوالي AED 4694.03.

606 / 475

٨:٤٥ م ٦٨% ://elib.moe.gov.ae

الدرس 3–8

1 محور التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3–8 إيجاد معكوس الدالة.

الدرس 3–8 إيجاد قيمة التعابير اللوغاريتمية. تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا.

بعد الدرس 3–8 تحديد حلول المعادلات اللوغاريتمية باستخدام الأساليب الجبرية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم "لماذا؟" الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- ما أنواع الأجسام التي عثر عليها بالقرب من الأرض؟ نموذج الإجابة: كويكبات، نيازك، مذنبات
- ما المقصود بمصطلح "احتمال الاصطدام"؟ نموذج الإجابة: احتمالية اصطدام جسم ما بالأرض

الدرس 3–8

8-3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

السابق ● لقد أوجدت معكوس الدالة.

الحالي 1 إيجاد قيمة التعابير اللوغاريتمية. 2 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا.

لماذا؟ ● يعتقد العديد من العلماء أن سبب انقراض الديناصورات يرجع إلى اصطدام أحد الكويكبات بالأرض. يستخدم علماء الفلك مقياس باليرمو لتصنيف الأجسام القريبة من الأرض بناء على احتمالية الاصطدام. تم تطوير المقياس باستخدام *اللوغاريتمات* لتسهيل المقارنة بين العديد من الأجسام. يمكن إيجاد قيمة مقياس باليرمو لأي جسم باستخدام المعادلة $PS = \log_{10} R$. حيث R هي المخاطرة النسبية التي يسببها الجسم.

المفردات الجديدة

لوغاريتم logarithm

الدالة اللوغاريتمية logarithmic function

ممارسات في الرياضيات 6 مراعاة الدقة.

1 الدوال والتعابير اللوغاريتمية

قدّر في الدالة الأسية $f(x) = 2^x$ ومعكوسها. تذكر أنّه يمكنك تمثيل الدالة العكسية بالمعادلة بين قيم x وy في الأزواج المرتبة في الدالة.

$y = 2^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

$x = 2^y$	
x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

مع انخفاض قيمة y تقترب قيمة x من 0

يمكن تعريف معكوس الدالة $y = 2^x$ بأنه $x = 2^y$ بوجه عام. معكوس الدالة $y = b^x$ يساوي $x = b^y$. في $x = b^y$، يطلق على المتغير y اسم **لوغاريتم** x. يتم كتابة هذا عادة بالصيغة $y = \log_b x$. حيث نقرأ y يساوي $\log x$ بالنسبة إلى الأساس b.

المفهوم الأساسي اللوغاريتم بالنسبة إلى الأساس b

الشرح افترض أنّ x، b أعداد موجبة، $b \neq 1$. يشار إلى لوغاريتم x للأساس b بالرمز $\log_b x$ ويعرف بالأس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.

الرموز افترض أنّ $b > 0$، $b \neq 1$، بالنسبة إلى $x > 0$. يوجد عدد y مثل هذا

$$b^y = x \text{ فقط إذا كان } \log_b x = y$$

مثال إذا كان $\log_3 27 = y$، فإن $3^y = 27$

يمكن أيضًا استخدام تعريف اللوغاريتمات للتعبير عن اللوغاريتمات بالصيغة الأسية.

مثال 1 التحويل من الصيغة اللوغاريتمية إلى الصيغة الأسية

اكتب كل معادلة بالصيغة الأسية.

a. $\log_2 8 = 3$

$\log_2 8 = 3 \rightarrow 8 = 2^3$

b. $\log_4 \frac{1}{256} = -4$

$\log_4 \frac{1}{256} = -4 \rightarrow \frac{1}{256} = 4^{-4}$

تمرين موجّه

1A. $\log_4 16 = 2 \; 16 = 4^2$

1B. $\log_3 729 = 6 \; 729 = 3^6$

606 / 475

٨:٤٥ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

يمكن أيضًا استخدام تعريف اللوغاريتمات في كتابة المعادلات الأسيّة بالصيغة اللوغاريتمية.

مثال 2 التحويل من الصيغة الأسيّة إلى اللوغاريتمية

اكتب كل معادلة بالصيغة اللوغاريتمية.

a. $15^3 = 3375$

$15^3 = 3375 \rightarrow \log_{15} 3375 = 3$

b. $4^{\frac{1}{2}} = 2$

$4^{\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow \log_4 2 = \frac{1}{2}$

تمرين موجّه

2A. $4^3 = 64$ $\log_4 64 = 3$

2B. $125^{\frac{1}{3}} = 5$ $\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$

يمكنك استخدام تعريف اللوغاريتم لإيجاد قيمة تعبير لوغاريتمي.

مثال 3 إيجاد قيمة التعابير اللوغاريتمية

أوجد قيمة $\log_{16} 4$.

$\log_{16} 4 = y$	افترض أنّ اللوغاريتم يساوي y
$4 = 16^y$	تعريف اللوغاريتم
$4^1 = (4^2)^y$	$16 = 4^2$
$4^1 = 4^{2y}$	أسّ الأسّ
$1 = 2y$	خاصية التساوي في الدوال الأسيّة
$\frac{1}{2} = y$	اقسم كل طرف على 2

إذًا، $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$.

تمرين موجّه

أوجد قيمة كل تعبير.

3A. $\log_3 81$ 4

3B. $\log_{\frac{1}{2}} 256$ -8

انتبه!

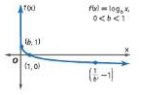
الأساس اللوغاريتمي في الدوال اللوغاريتمية. من السهل أن تعتقد، في تحديد أين عدد هو الأساس، وأي عدد هو الأس. فكّر في تغيير كل عدد أثناء الحل لمساعدتك على تنظيم حساباتك.

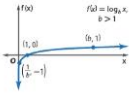
2 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

الدالة $y = \log_b x$، حيث $b \neq 1$، تسمى **دالة لوغاريتمية**. التمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_b x$ يمثل تمثيلًا بيانيًّا عامًا للدوال اللوغاريتمية.

المفهوم الأساسي الدالة الرئيسة للدوال اللوغاريتمية

الدالة الرئيسة:	$f(x) = \log_b x$	
المجال:	جميع الأعداد الحقيقية الموجبة	المدى: جميع الأعداد الحقيقية
خط التقارب:	المحور $f(x)$	التقاطع: $(1, 0)$
نوع التمثيل البياني:	متصل. واحد إلى واحد	





حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح شركة McGraw-Hill Education

561

التدريس باستخدام التكنولوجيا

اللوحة البيضاء التفاعلية أثناء تقديم اللوغاريتمات إلى الصف، استخدم ترميزًا لونيًّا مختلفًا لكل جزء من أجزاء الدوال الأسيّة واللوغاريتمية المتناظرة. على سبيل المثال، استخدم لونًا مختلفًا لكل من x و y، و b عند توضيح أنّ الدالة $\log_b x = y$ تتوافق مع $x = b^y$.

1 التعابير والدوال اللوغاريتمية

يوضح **المثال 1** طريقة كتابة المعادلات اللوغاريتمية بصيغة أسيّة. يوضح **المثال 2** طريقة كتابة المعادلات الأسيّة بصيغة لوغاريتمية. يوضح **المثال 3** طريقة استخدام تعريف اللوغاريتم لإيجاد قيمة التعبير اللوغاريتمي.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 اكتب كلًا من المعادلات التالية بالصيغة الأسيّة.

a. $\log_3 9 = 2$ $9 = 3^2$

b. $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$ $\frac{1}{100} = 10^{-2}$

2 اكتب كلًا من المعادلات التالية بالصيغة اللوغاريتمية.

a. $5^3 = 125$ $\log_5 125 = 3$

b. $27^{\frac{1}{3}} = 3$ $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$

3 أوجد قيمة $\log_3 243$. 5

2 التمثيل البياني للدوال اللوغاريتمية

يوضح **المثال 4** طريقة تمثيل الدالة اللوغاريتمية بيانيًا. يوضح **المثال 5** طريقة استخدام التحويلات لتمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا. يوضح **المثال 6** طريقة إيجاد معكوس الدالة الأسيّة لحل مثال من الحياة اليومية.

التدريس المتمايز ض م أ م

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي بعد مناقشة تعريف اللوغاريتم، اكتب $y = 2x$ على اللوحة واطلب من الطلاب إعادة كتابة المعادلة بحيث تكون x بدلالة y. $y = \frac{1}{2}y$ كرر العملية بالنسبة إلى $y = x^2$ $x = \pm\sqrt{y}$. اكتب الآن $y = 2^x$ على اللوحة ثم اطلب من الطلاب إعادة كتابة هذه المعادلة بحيث تكون x بدلالة y. قد تربك هذه العملية الطلاب. وضح أنّ المعادلة التي أعيدت كتابتها هي $x = \log_2 y$. ركز على أنّ اللوغاريتم يُعرّف بأنّه معكوس الدالة الأسيّة.

561

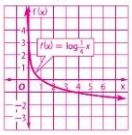
٨:٤٥ م ٦٨% ://elib.moe.gov.ae

مثال إضافي

4 مثّل كل دالة بيانيًا.

a. $f(x) = \log_3 x$

b. $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

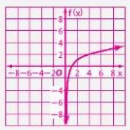


نصائح للمعلمين الجدد

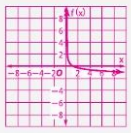
وتيرة التقدم لم يسبق للطلاب دراسة الدوال اللوغاريتمية من قبل ومن المحتمل أن يجدوها محيرة. توقع أن يحتاج الطلاب إلى وقت إضافي لاستيعاب المادة في هذا الدرس قبل مواصلة شرح بقية الوحدة.

إجابات إضافية (تمرين موجه)

4A.



4B.



مثال 4 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا

مثّل كل دالة بيانيًا.

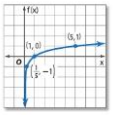
a. $f(x) = \log_5 x$

الخطوة 1 حدد الأساس.

$b = 5$

الخطوة 2 حدد النقاط على التمثيل البياني.

بما أن $5 > 1$، استخدم النقاط $(1, 0)$، $(b, 1)$، $\left(\frac{1}{b}, -1\right)$.



الخطوة 3 مثل النقاط بيانيًا وارسم التمثيل البياني.

$\left(\frac{1}{b}, -1\right) \rightarrow \left(\frac{1}{5}, -1\right)$

$(1, 0)$

$(b, 1) \rightarrow (5, 1)$

نصيحة دراسية

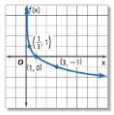
الأس صفر تذكر أنه لأي $b \neq 0$، $b^0 = 1$. إذا كانت قيمة $\log_2 0$ غير معرّفة لأن $2^x \neq 0$ أيًا كانت قيمة x.

b. $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

الخطوة 1 $b = \frac{1}{3}$

الخطوة 2 بما أن $\frac{1}{3} < 1$، استخدم النقاط $(-1, 3)$، $(0, 1)$، $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

الخطوة 3 ضمم التمثيل البياني.



تمرين موجه 4A، 4B. **انظر الهامش.**

4A. $f(x) = \log_2 x$

4B. $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

يمكن تطبيق الأساليب نفسها المستخدمة لتحويل التمثيلات البيانية الخاصة بالدوال الأخرى التي درستها على التمثيلات البيانية على الدوال اللوغاريتمية.

المفهوم الأساسي تحويلات الدوال اللوغاريتمية

$f(x) = a \log_b (x - h) + k$

h - الإزاحة الأفقية	k - الإزاحة الرأسية
h من الوحدات يمينًا إذا كان h موجبًا و $\lvert h \rvert$ من الوحدات يسارًا إذا كان h سالبًا.	k من الوحدات إلى أعلى إذا كان k موجبًا و $\lvert k \rvert$ من الوحدات إلى أسفل إذا كان k سالبًا
a - الاتجاه والشكل	
إذا كان $a < 0$، فسينعكس التمثيل البياني على المحور x.	إذا كان $\lvert a \rvert < 1$، فسيتمدد التمثيل البياني رأسيًا. إذا كان $\lvert a \rvert > 1$، فسينضغط التمثيل البياني رأسيًا.

التركيز على محتوى الرياضيات

اللوغاريتمات تُقرأ المعادلة $y = \log_b x$ كما يلي "y تساوي لوغاريتم x بالنسبة إلى الأساس b." دائمًا ما يكون الأساس b موجبًا و $b \neq 1$. وبما أنّ المعادلة $y = \log_b x$ تساوي المعادلة الأسية $x = b^y$، فإنّ اللوغاريتم يمثل أسًا. إنّه الأس الذي يحتاج إليه الأساس b ليساوي العدد x.

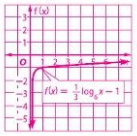
606 / 475

٨:٤٥ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae
606 / 475

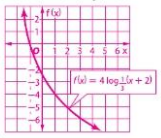
أمثلة إضافية

5 مثّل كل دالة بيانيًّا.

a. $f(x) = \frac{1}{3}\log_6 x - 1$



b. $f(x) = 4\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$



6 **ضغط الهواء** يُعرّف ضغط الهواء على سطح الأرض بأنه وحدة ضغط جوي واحدة. ينخفض الضغط بمقدار 20% لكل كيلومتر من الارتفاع. يمكن نمذجة الضغط الجوي بالمعادلة $P = 0.8^{x}$، حيث يمثل x قياس الارتفاع بالكيلومترات.

a. أوجد الضغط الجوي بوحدة ضغط جوي عند ارتفاع 8 كيلومترات.

0.168 ضغط جوي

b. اكتب معادلة لمعكوس الدالة.

$x = \log_{0.8} P$

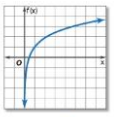
مثال 5 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا

نصيحة دراسية

سلوك طرفي التمثيل البياني في المثال 5a، عندما يقترب x من اللانهاية، تقترب الدالة $f(x)$ من اللانهاية.

مثّل كل دالة بيانيًّا.

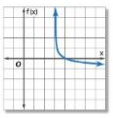
a. $f(x) = 3\log_{10} x + 1$



يمثل هذا تحويلًا للتمثيل البياني لـ $f(x) = \log_{10} x$.

- $a = 3$: يمتد التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = 0$: لا توجد إزاحة أفقية.
- $k = 1$: تم إزاحة التمثيل البياني بمقدار وحدة واحدة إلى أعلى.

b. $f(x) = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{3}}(x-3)$



يمد هذا تحويلًا للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

- $a = \frac{1}{4}$: انضغط التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = 3$: تنبث إزاحة التمثيل البياني بمقدار 3 وحدات إلى اليمين.
- $k = 0$: لا توجد إزاحة رأسية.

تمرين موجّه 5A، 5B. انظر الهامش.

مثّل كل دالة بيانيًّا.

5A. $f(x) = 2\log_3 (x-2)$

5B. $f(x) = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{3}}(x+1) - 5$

مثال 6 من الحياة اليومية إيجاد معكوسات الدوال الأسية

الزلازل يقيس مقياس ريختر شدة الزلزال. وتبلغ زيادة الشدة بين كل رقم والرقم الذي يليه 10 أمثال. على سبيل المثال، الزلزال الذي يبلغ قياسه 7 أشد بمعدل 10 مرات من الزلزال الذي يبلغ قياسه 6. يمكن نمذجة شدة الزلزال من خلال $y = 10^{x-1}$، حيث يرمز x إلى قياس مقياس ريختر.

a. استخدم المعلومات الموجودة على اليسار لإيجاد شدة أقوى زلزال سُجّل في الولايات المتحدة.

$y = 10^{x-1}$	المعادلة الأصلية
$= 10^{9.2-1}$	عوض بالرقم 9.2 عن x
$= 10^{8.2}$	بسّط
$= 158{,}489{,}319.2$	استخدم الحاسبة

b. اكتب معادلة بالصورة $y = \log_{10} x + c$ لإيجاد معكوس الدالة.

$y = 10^{x-1}$	المعادلة الأصلية
$x = 10^{y-1}$	عوّض عن x بـ y، وعوّض عن y بـ x، وأوجد قيمة y
$y - 1 = \log_{10} x$	تعريف اللوغاريتم
$y = \log_{10} x + 1$	أضف 1 إلى كل من الطرفين

تمرين موجّه

6. اكتب معادلة لمعكوس الدالة $y = 0.5^{x}$. $y = \log_{0.5} x$

الربط بالحياة اليومية

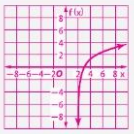
بلغت قوة أكبر زلزال تم تسجيله في الولايات المتحدة 9.2 ذلك الزلزال الذي ضرب لسان الأمير وبلدام البحري في الأسكا، وذلك يوم الجمعة الجريئة الموافق 28 مارس عام 1964.

المصدر: هيئة المساحة الجيولوجية الأمريكية

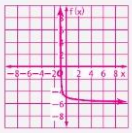
© حقوق النشر محفوظة

إجابات إضافية (تمرين موجه)

5A.



5B.



٨:٤٥ م ٦٨% ://elib.moe.gov.ae

تحقق من فهمك

مثال 1 اكتب كل معادلة بالصيغة الأسيّة.

1. $\log_8 512 = 3$ $8^3 = 512$
2. $\log_5 625 = 4$ $5^4 = 625$

مثال 2 اكتب كل معادلة بالصيغة اللوغاريتمية.

3. $11^3 = 1331$ $\log_{11} 1331 = 3$
4. $16^{\frac{3}{4}} = 8$ $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$

مثال 3 أوجد قيمة كل تعبير.

5. $\log_{13} 169$ 2
6. $\log_2 \frac{1}{128}$ −7
7. $\log_6 1$ 0

المثالان 4–5 مثّل كل دالة بيانيًّا. 8–11. انظر الهامش.

8. $f(x) = \log_3 x$
9. $f(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$
10. $f(x) = 4 \log_4 (x - 6)$
11. $f(x) = 2 \log_{\frac{1}{10}} x - 5$

مثال 6 12. **العلوم** استخدم المعلومات الواردة في بداية الدرس. يمكن إيجاد قيمة مقياس بالريختر لأي جسم باستخدام المعادلة $PS = \log_{10} R$، حيث R هي المحاطرة النسبية التي يسببها الجسم. اكتب معادلة بالصيغة الأسية لمعكوس الدالة. $PS = 10^R$

التمرين وحل المسائل

يوجد تمرين إضافي في الصفحة R7.

مثال 1 اكتب كل معادلة بالصيغة الأسيّة.

13. $\log_2 16 = 4$ $2^4 = 16$
14. $\log_7 343 = 3$ $7^3 = 343$
15. $\log_9 \frac{1}{81} = -2$ $9^{-2} = \frac{1}{81}$
16. $\log_3 \frac{1}{27} = -3$ $3^{-3} = \frac{1}{27}$
17. $\log_{12} 144 = 2$ $12^2 = 144$
18. $\log_9 1 = 0$ $9^0 = 1$

مثال 2 اكتب كل معادلة بالصيغة اللوغاريتمية.

19. $9^{-1} = \frac{1}{9}$ $\log_9 \frac{1}{9} = -1$
20. $6^{-3} = \frac{1}{216}$ $\log_6 \frac{1}{216} = -3$
21. $2^8 = 256$ $\log_2 256 = 8$
22. $4^6 = 4096$ $\log_4 4096 = 6$
23. $27^{\frac{2}{3}} = 9$ $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$
24. $25^{\frac{3}{2}} = 125$ $\log_{25} 125 = \frac{3}{2}$

مثال 3 أوجد قيمة كل تعبير.

25. $\log_3 \frac{1}{9}$ −2
26. $\log_4 \frac{1}{64}$ −3
27. $\log_8 512$ 3
28. $\log_6 216$ 3
29. $\log_{27} 3$ $\frac{1}{3}$
30. $\log_{32} 2$ $\frac{1}{5}$
31. $\log_9 3$ $\frac{1}{2}$
32. $\log_{121} 11$ $\frac{1}{2}$
33. $\log_{\frac{1}{5}} 3125$ −5
34. $\log_{\frac{1}{8}} 512$ −3
35. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$ 4
36. $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$ 3

المثالان 4–5 **الضبط** مثّل كل دالة بيانيًّا. 37–48. انظر ملحق إجابات الوحدة 8.

37. $f(x) = \log_6 x$
38. $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$
39. $f(x) = 4 \log_2 x + 6$
40. $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$
41. $f(x) = \log_{10} x$
42. $f(x) = -3 \log_{\frac{1}{12}} x + 2$
43. $f(x) = 6 \log_{\frac{1}{8}} (x + 2)$
44. $f(x) = -8 \log_5 (x - 4)$
45. $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} (x + 1) - 9$
46. $f(x) = \log_5 (x - 4) - 5$
47. $f(x) = -\frac{1}{6} \log_8 (x - 3) + 4$
48. $f(x) = -\frac{1}{3} \log_{\frac{1}{6}} (x + 2) - 5$

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1–12 للتأكد من الفهم.

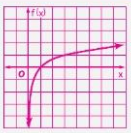
استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس ممارسات في الرياضيات

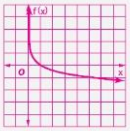
الضبط يحاول الطلاب المتفوقون في الرياضيات استخدام تعريفات واضحة في استنتاجاتهم والحساب بدقة وكفاءة والاستفادة بشكل واضح من التعريفات.

إجابات إضافية

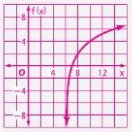
.8



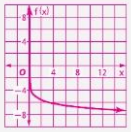
.9



.10



.11



خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

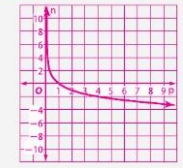
المستوى	الواجب	خيار اليومين	
ق م مبتدئ	13–56، 60، 62–85	55–13 فردي، 67–70	14–56 زوجي، 60، 62–66، 71–85
ض م أساسي	13–55 فردي، 57–60، 85–62	13–56، 70–67	57–60، 62–66، 85–71
م متقدم	57–81 (اختياري: 82–85)		

606 / 475

٨:٤٦ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae
606 / 475

إجابة إضافية

49b.



مثال 6

49. التصوير تعرض الصفة $n = \log_2 \frac{1}{p}$ التغير في إعداد f-stop الذي يبطئه n المستخدم في الإضاءة الخافتة. حيث يمثل p كسرًا من ضوء الشمس.

a. تم ضبط كاميرا إبراهيم على أخذ الصور في ضوء الشمس المباشر. ولكن اليوم غائم. إذا كان مقدار ضوء الشمس في اليوم الغائم يبلغ $\frac{1}{4}$ بالنسبة إلى ضوء الشمس المباشر. فما عدد إعدادات f-stop التي يجب تغييرها لكي تلائم الإضاءة الأقل؟

b. مثّل الدالة بيانيًا. **انظر الهامش.**

c. استخدم التمثيل البياني الموضح في الجزء b لتوقع الكسر الذي يضبطه إبراهيم من ضوء النهار إذا قلل إعدادات f-stop بمعدل 3. هل يسمح بدخول ضوء أكثر أم أقل إلى داخل الكاميرا؟ $\frac{1}{8}$؛ **ضوء أقل**

50. التعليم لقياس استيعاب الطالب للمعرفة، يُختبر الطالب بعد فترة زمنية معينة. يُمكن تقدير درجة طالب في إختبار الرياضيات الصف العاشر بعد مرور t من الأشهر بعد انتهاء العام الدراسي من خلال العلاقة التالية $y(t) = 85 - 6 \log_2 (t + 1)$، حيث يمثل $y(t)$ درجة الطالب كنسبة مئوية.

a. كم كانت درجة الطالب عند انتهاء العام الدراسي $(t = 0)$؟ 85

b. كم كانت درجة الطالب بعد مرور 3 أشهر؟ 73

c. كم بلغت درجة الطالب بعد مرور 15 شهرًا؟ 61

مثّل كل دالة بيانيًا. 51–56. انظر ملحق إجابات الوحدة 8.

S1 **51.** $f(x) = 4 \log_2 (2x - 4) + 6$

52. $f(x) = -3 \log_{12} (4x + 3) + 2$

53. $f(x) = 15 \log_{16} (x + 1) - 9$

54. $f(x) = 10 \log_8 (x - 4) - 5$

55. $f(x) = -\frac{1}{6} \log_8 (x - 3) + 4$

56. $f(x) = -\frac{1}{3} \log_6 (6x + 2) - 5$

57. النمذجة بوجه عام، كلما زاد إنفاق الشركة على الدعاية، زادت المبيعات. يمكن تمثيل أموال مبيعات شركة ما، بالآلاف، من خلال المعادلة $S(a) = 10 + 20 \log_4 (a + 1)$، حيث يرمز a إلى الأموال التي تنفقها الشركة على الدعاية، بالآلاف، عندما يكون $a \geq 0$.

a. قيمة $S(0) \approx 10$، مما يعني أن إنفاق AED 10 على الدعاية، يؤدي إلى مبيعات تصل إلى AED 10,000. أوجد قيم $S(3)$، و$S(15)$، و$S(63)$. **$S(3) = 30$, $S(15) = 50$, $S(63) = 70$**

b. فسر معنى كل قيمة للدالة في سياق المسألة.

c. مثّل الدالة بيانيًا. **انظر ملحق إجابات الوحدة 8.**

d. استخدم التمثيل البياني في الجزء c وإجابتك في الجزء a لتفسير سبب تناقص "فاعلية" الأموال المنفقة على الدعاية عند استخدامها ببالغ أضخم.

57b. إذا أُنفق مبلغ AED 3000 على الإعلانات، فيكون العائد على المبيعات مبلغ AED 30,000. وإذا أُنفق مبلغ AED 15,000 على الإعلانات، فيكون العائد على المبيعات مبلغ AED 50,000. وإذا أُنفق مبلغ AED 63,000 على الإعلانات، فيكون العائد على المبيعات AED 70,000

57d. بأن التمثيل البياني يستمر في نهاية الأمر، وفهما أنفقت من مال، فستجني العائد نفسه تقريبًا في المبيعات.

58. علم الحياة زمن الجيل في البكتيريا هو الزمن الذي تستغرقه الجماعة الأحيائية لكي تضاعف عددها. يمكن إيجاد زمن الجيل G لنوع معين من البكتيريا باستخدام البيانات التجريبية والصيغة $G = \frac{t}{3.3 \log_2 \frac{b}{f}}$، حيث يمثل t الفترة الزمنية. ويمثل b عدد البكتيريا في بداية التجربة. ويمثل f عدد البكتيريا في نهاية التجربة.

a. يبلغ زمن الجيل في بكتيريا التخطّرة السُلّية 16 ساعة. ما المدة التي ستستغرقها 4 خلايا بكتيرية منها لكي تتضاعف إلى 1024 خلية بكتيرية؟ **264 ساعة أو 11 يومًا**

b. تظهر تجربة تتضمن فئرانًا تعوّضت لبكتيريا السالمونيلا أنّ زمن الجيل في بكتيريا السالمونيلا يساوي 5 ساعات. ما المدة التي تستغرقها 20 من هذه البكتيريا لكي تتضاعف إلى 8000 بكتيريا؟ **49.5 ساعة أو يومين و 1.5 ساعة**

c. تُعدّ الإشريكية القولونية بكتيريا سريعة النمو. إذا كان 6 من بكتيريا الإشريكية القولونية يمكن أن تزداد إلى 1296 في 4.4 ساعات، فما زمن الجيل لبكتيريا الإشريكية القولونية؟ **20 min أو $\frac{1}{3}$ أ**

© حقوق النشر محفوظة لـ McGraw-Hill Education

٨:٤٦ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

المعرفة المالية 59. أعلنت ريهام AED 2000 من بطاقة ائتمان. تقرض شركة بطاقة الائتمان 24% مرابحة مركبة شهريًا. تستخدم شركة بطاقة الائتمان $\log_{\left(1+\frac{0.24}{12}\right)}\left(\frac{A}{2000}\right) = 12t$ لتحديد الفترة الزمنية المنقضية حتى يصل دَين ريهام إلى مبلغ محدد. إذا كان A يمثل مقدار الدَّين بعد فترة زمنية، وt يمثل الزمن بالأعوام.

a. مثل الدالة التي تمثل دَين ريهام بيانيًا. **انظر الهامش.**

b. تقريبًا، ما المدة التي سيصل فيها دَين ريهام إلى المثلين؟ ≈ 3 أعوام

b. تقريبًا، ما المدة التي سيصل فيها دَين ريهام إلى ثلاثة أمثال؟ ≈ 4.5 أعوام

60. الإجابة النموذجية: يمكن أن تنمو النماذج الأسية واللوغاريتمية دون حدّ، ولكنّ ذلك لا يمثل في العادة الحالة التي يجري تمثيلها. فعلى سبيل المثال، لا يمكن أن ينمو تعداد دون حد بسبب قيود المكان والغذاء. ولذلك عند استخدام نموذج لاتخاذ القرارات، فينبغي أن تدرس الحالة التي يجري تمثيلها بعناية.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدم مهارات التفكير العليا

60. **الكتابة في الرياضيات** فيم يجب أن تفكر عند استخدام النماذج الأسية واللوغاريتمية لاتخاذ قرارات؟

61. **فرضيات** افترض أن $y = \log_b x$ بحيث تكون $b \neq 0$ و$b \neq 1$ وأعدادًا حقيقية. يمكن أن يتضمن المجال الصفر أحيانًا أم دائمًا أم لا يمكن ذلك مطلقًا. علّل إجابتك.

62. **تحليل الخطأ** يقول شيخة إن التمثيلات البيانية لكل الدوال اللوغاريتمية تقطع المحور y عند النقطة $(0, 1)$ لأن أي عدد مرفوع لأس صفر يساوي 1. لم توافق حمدة على ذلك. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

63. **التبرير** من دون استخدام الحاسبة، قارن بين $\log_7 51$، $\log_8 61$، $\log_9 71$. أيهما أكبر؟ اشرح استنتاجك.

شيخة: الإجابة النموذجية: تمرّ التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية بالنقطة $(0, 1)$، وليس $(0, 1)$.

64. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب معادلة لوغاريتمية بالصيغة $y = \log_b x$ لكل حالة من الحالات الآتية.

a. قيمة y تساوي 25. **e-a. انظر الهامش.**

b. قيمة y سالبة.

c. قيمة y بين 0 و1.

d. قيمة x تساوي 1.

e. قيمة x تساوي 0.

51 .63. $\log_7$: الإجابة النموذجية: $\log_8 61$ أكبر قليلًا من 2. $\log_9 71$ أكبر قليلًا من 2. $\log_7 51$ أصغر قليلًا من 2. ولذلك، $\log_7 51$ هو الأكبر.

65. **تحليل الخطأ** يعمل كل من حارب وزايد على إيجاد قيمة $\log_{\frac{1}{7}} 49$. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

حارب	زايد
$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$	$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$
$\left(\frac{1}{7}\right)^y = 49$	$7^{-y} = 7^2$
$(7^{-1})^y = 7^2$	$-y = 2$
$(7)^{-y} = 7^2$	$y = -2$
$y = 2$	

66. **الكتابة في الرياضيات** تحويل x $\log_{10}$ هو $g(x) = a \log_{10}(x - h) + k$. هل هذه العبارة صحيحة أم خاطئة؟ اشرح عملية تمثيل هذا التحويل بيانيًا. **انظر الهامش.**

تدريس ممارسات في الرياضيات

فرضيات يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات فهم الافتراضات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقًا واستخدامها في بناء الفرضيات. ويضعون التخمينات ويبنون تقدمًا منطقيًا للمسائل لاستكشاف حقيقة تخميناتهم. كما يُمكنهم تحليل المواقف بتقسيمها إلى حالات ويمكنهم التعرف على الأمثلة المضادة واستخدامها.

انتبه!

تحليل الخطأ بالنسبة إلى التمرين 62. أشر إلى أنّ بثينة تفكر في الدوال اللوغاريتمية التي بالصيغة $f(x) = a \log_b x$.

تحليل الخطأ بالنسبة إلى التمرين 65. وضح أنّه في التعبير $a \log_b x$، يمثل b أساس الأس. ذكّر الطلاب بأن إيجاد لوغاريتم x بالنسبة إلى الأساس b يعني إيجاد أس b الذي يساوي x.

إجابات إضافية

59a.

64a–e. نموذج الإجابة فحطى.

64a. $\log_2 33{,}554{,}432 = 25$

64b. $\log_4 \frac{1}{64} = -3$

64c. $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

64d. $\log_7 1 = 0$

64e. لا يوجد حل محتمل؛ هذه هي المجموعة الفارغة.

65. لا؛ كانت إجابة حارب أقرب إلى الصواب. كان من المفترض أن يصل إلى $y = 2$ أو $y = -2$ بدلًا من $y = 2$. أخطأ زايد في استخدام تعريف اللوغاريتمات.

66. نموذج الإجابة: في $g(x) = a \log_{10}(x - h) + k$، تمثل قيمة k إزاحة رأسية وستتم إزاحة التمثيل البياني إلى أعلى k وحدات إذا كان k موجبًا وإلى أسفل بمقدار $|k|$ وحدات إذا كان k سالبًا. تمثل قيمة h إزاحة أفقية وستتم إزاحة التمثيل البياني بمقدار h وحدات إلى اليمين إذا كان h موجبًا وبمقدار $|h|$ وحدات إلى اليسار إذا كان h سالبًا. إذا كان $a < 0$، فسينعكس التمثيل البياني على المحور x. إذا كان $|a| > 1$، فسيتمدد التمثيل البياني رأسيًا. وإذا كان $0 < |a| < 1$، فسينضغط التمثيل البياني رأسيًا.

606 / 475

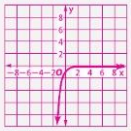
٨:٤٦ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae
606 / 475

4 التقويم

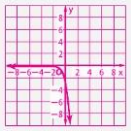
الكرة البلورية اطلب من الطلاب مناقشة إلى مدى ستساعدهم دراسة اللوغاريتمات اليوم في حل المعادلات اللوغاريتمية في درس الغد. حسب رأيهم.

إجابات إضافية

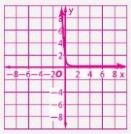
.75



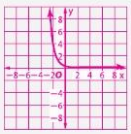
.76



.77



.78



تدريب على الاختبار المعياري

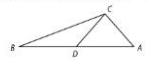
67. طول مستطيل يساوي مثلي عرضه. إذا كان عرض المستطيل يساوي 3 cm، فما مساحة المستطيل بالسنتيمتر المربع؟ **D**

A 9
B 12
C 15
D 18

68. اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول يملك بشير بعض البيترا. وكانت الشرائح التي يأهما أكثر من التي أكلها بنسبة 40%. إذا كان قد باع 70 شريحة بيترا، فما عدد شرائح البيترا التي أكلها؟ **G**

F 25
G 50
H 75
J 98
K 100

69. إجابة قصيرة في الشكل $AB = BC$، $CD = BD$. كم يبلغ قياس الزاوية $m\angle CAD = 70°$؟ ADC؟



70. إذا كان $6x - 3y = 30$، فأوجد $x + y$. **A**

A −4
B −2
C 2
D 4

مراجعة شاملة

حُلّ كل متباينة مما يلي. تحقق من الحل. (الدرس 2–8)

71. $3^{n-2} > 27$ $\{n \mid n > 5\}$ **72.** $2^{2n} \leq \frac{1}{16}$ $\{n \mid n \leq -2\}$ **73.** $16^n < 8^{n+1}$ $\{n \mid n < 3\}$ **74.** $32^{3p} + 2 \geq 16^{5p}$ $\{p \mid p \geq -2\}$

مثّل كل دالة بيانيًّا. (الدرس 1–8) **75–78. انظر الهامش.**

75. $y = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$ **76.** $y = -2.5(5)^x$ **77.** $y = 30^{-x}$ **78.** $y = 0.2(5)^{-x}$

79. الهندسة يمكن إيجاد مساحة مثلث أطوال أضلاعه تساوي a، b، و c من خلال $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ حيث $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. إذا كانت أطوال أضلاع المثلث تساوي بالمتر 6، 9، و 12، فما التعبير عن مساحة المثلث بالصيغة الجذرية؟ $\frac{27\sqrt{15}}{4}\ m^2$

80. الهندسة يمكن كتابة حجم صندوق مستطيل بالصورة $6x^3 + 31x^2 + 53x + 30$ عندما يكون الارتفاع $x + 2$.

a. ما طول الصندوق وعرضه؟ $2x+3$ و $3x+5$

b. هل تبقى نسبة أبعاد الصندوق متساوية بصرف النظر عن قيمة x؟ اشرح.

81. ميكانيكا السيارات تعمل سارة مديرة مخازن في ورشة إصلاح محلية. تطلب 6 بطاريات و5 حقائب من شمع الإشعال وعشرين زوجًا من شفرات ماسحات الزجاج وتدفع AED 830. تطلب 3 بطاريات و7 حقائب من شمع الإشعال وأربعين زوجًا من شفرات ماسحات الزجاج وتدفع AED 820. يقل سعر البطاريات بمقدار AED 22 عن ضعف سعر عشر شفرات من ماسحات الزجاج. استخدم المصفوفات الموسعة لتحديد تكلفة كل عنصر في طلبها.

البطاريات، AED 74؛ شمعات الاحتراق، AED 58؛ شفرات الماسحات، AED 48

مراجعة المهارات

حُلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي؛ تحقق من الحل.

82. $9^z = \frac{1}{81}$ -2 **83.** $2^{6x} = 4^{8x+2}$ -1 **84.** $49^{3p+1} = 7^{2p-5}$ $-\frac{7}{4}$ **85.** $9^{x^2} \leq 27^{x^2-2}$ $\{x \geq \sqrt{6} \text{ أو } x \leq -\sqrt{6}\}$

التدريس المتمايز ضم أم

توسع وضح أنّه يمكن كتابة مسألة القسمة $\frac{32}{4} = 8$ في صورة $\frac{2^5}{2^2} = 2^3$. اطلب من الطلاب تحديد لوغاريتم الأساس 2 في المقسوم والمقسوم عليه ونتائج القسمة. ثم اطلب منهم كتابة المعادلة التي تربط بين اللوغاريتمات. $\log_2 32 = 5$; $\log_2 4 = 2$; $\log_2 8 = 3$; $\log_2 32 - \log_2 4 = \log_2 8$

٨:٤٦ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

التوسع 3-8 مختبر تقنية التمثيل البياني
اختيار أفضل نموذج

يمكننا إيجاد الدوال الأسية واللوغاريتمية الأفضل ملاءمة باستخدام حاسبة التمثيل البياني من نوع Plus.

ممارسات في الرياضيات
4 استخدام نماذج الرياضيات.

النشاط

تغيرت الكثافة السكانية لكل كيلومتر مربع في الولايات المتحدة بشكل كبير على مدى سنوات. يوضح الجدول عدد الأشخاص لكل كيلومتر مربع لعدة سنوات.

a. استخدم حاسبة التمثيل البياني لإدخال البيانات. ثم ارسم مخطط انتشار يوضح علاقة عدد الأشخاص لكل كيلومتر مربع بالعام.

الكثافة السكانية في الولايات المتحدة

العام	عدد الأشخاص لكل كيلومتر مربع	العام	عدد الأشخاص لكل كيلومتر مربع
1790	4.5	1900	21.5
1800	6.1	1910	26.0
1810	4.3	1920	29.9
1820	5.5	1930	34.7
1830	7.4	1940	37.2
1840	9.8	1950	42.6
1850	7.9	1960	50.6
1860	10.6	1970	57.5
1870	10.9	1980	64.0
1880	14.2	1990	70.3
1890	17.8	2000	80.0

المصدر: مكتب التعداد الأمريكي

الخطوة 1 أدخل العام في L1 وعدد الأشخاص لكل كيلومتر مربع في L2.

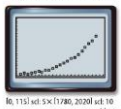
خطوات العملية على الحاسبة: انظر الصفحتين 94 و95 لمراجعة طريقة إدخال القوائم.

تأكد من مسح قائمة Y=. استخدم المفتاح ▶ لتحريك المؤشر من L1 إلى L2.

الخطوة 2 ارسم مخطط الانتشار.

خطوات العملية على الحاسبة: انظر الصفحتين 94 و95 لمراجعة طريقة تمثيل مخطط الانتشار بيانيًا.

تأكد من عرض **المخطط 1** واختيار مخطط الانتشار. تمثل **Xlist L1** وتمثل **Ylist L2**.



الخطوة 3 أوجد معادلة الانحدار.

لإيجاد المعادلة التي تلائم البيانات بشكل أفضل، استخدم خاصية الانحدار المتوفرة في الحاسبة. **افحص** العديد من الانحدارات لتحديد النموذج الأفضل.

تذكر أن الحاسبة تعيد معامل الارتباط r. المستخدم لتوضيح مدى ملاءمة النموذج للبيانات. كلما كانت قيمة r قريبة من 1 أو 1−، كانت الملاءمة أفضل.

الانحدار الخطي	الانحدار الرباعي
خطوات العملية على الحاسبة: ENTER 4 ▶ STAT	**خطوات العملية على الحاسبة:** STAT ▶ 5 ENTER

$r^2 = 0.9974003374$

$r = \sqrt{0.9974003374}$

$r \approx 0.9986993228$

1 محور التركيز

الهدف استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد معادلة أفضل ملاءمة للدوال الأسية واللوغاريتمية.

المواد

- حاسبة التمثيل البياني

نصيحة للتدريس

قبل الخطوة 1، يجب أن يستخدم الطلاب خطوات العملية على الحاسبة [STAT PLOT] 2nd ويتحققوا من إيقاف تشغيل plot 2 وplot 3.

ينبغي على الطلاب ضبط الحاسبة على DiagnosticOn. لضبط الحاسبة على التشخيصات، استخدم [CATALOG] 2nd. حرك المؤشر لأسفل إلى DiagnosticOn، واضغط على ENTER مرتين.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قسّم الطلاب إلى مجموعات من طالبين أو ثلاثة ذوي قدرات متنوعة. ثم كلّف مجموعات الطلاب باستكمال النشاط والتمارين 3–1.

- وضح أن جدول البيانات في المثال مرتب في عمودين "مزدوجين".
- اقترح على الطلاب مقارنة تمثيلاتهم البيانية بالتمثيل البياني الموضح.
- اطلب من الطلاب تقدير كثافة السكان في عامي 2020 و2050. متى ستصل كثافة السكان إلى ضعف ما كانت عليه عام 2000؟ حوالي 2085
- عندما يبدأ الطلاب التمارين، يجب عليهم مسح القائمتين L1 وL2. يجب عليهم أيضًا إدخال إعدادات مناسبة إلى نافذة التمثيل البياني.

606 / 475

٨:٤٦ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمارين 4–5.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرين 2 لتقويم مدى قدرة الطلاب على شرح سبب وصف معادلاتهم الأفضل ملاءمة بأنها اختيار جيد.

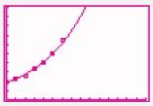
من المجرد إلى المحسوس

عندما تناقش التمرين 5. قد تريد سؤال الطلاب عن أي أفكار لديهم عن كيفية استخدام الحاسبة للحكم على المزايا النسبية للنماذج المختلفة (التربيعية والتكعيبية والربيعية والأسية).

إجابات إضافية

.1

.2



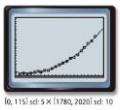
الانحدار الأسي
خطوات العملية على الحاسبة: STAT ▸ 0 ENTER خطوات العملية على الحاسبة: STAT ALPHA [A] ENTER

انحدار القوى

مقارنة بين قيم r²
خطي: 0.945411996
أسي: 0.991887235
رباعي: 0.9986993228
قوى: 0.9917543535

تعد قيمة r² في الانحدار الرباعي أقرب إلى 1. لذا يبدو أنها أفضل نموذج لتمثيل البيانات. يمكنك فحص المعادلة بصريًا عن طريق تمثيل معادلة الانحدار بيانيًا باستخدام مخطط الانتشار

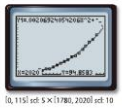
خطوات العملية على الحاسبة: STAT ▸ 5 ENTER Y= VARS 5 ▸ ▸ GRAPH



b. إذا استمر هذا الاتجاه، فكم ستبلغ الكثافة السكانية لكل كيلومتر مربع في عام 2020؟

لتحديد الكثافة السكانية لكل كيلومتر مربع في عام 2020، أوجد قيمة y عندما تكون $x = 2020$.

خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [CALC] ENTER 2020



إذا استمر هذا الاتجاه، فسيبلغ عدد الأشخاص 94.9 نسمة تقريبًا لكل كيلومتر مربع.

5. لا، الإجابة النموذجية: تساوي قيمة r² الخاصة بالانحدار الأسي 0.9936096203. وتساوي قيمة r² الخاصة بالتراجع التربيعي 0.9980751795. وهي أقرب إلى 1.

التمارين

بالنسبة إلى التمارين من 1 إلى 5. أودعت سارة AED 50 في حساب بنكي، ثم نسيت أمره تمامًا ولم تقم بأي عمليات إيداع أو سحب بعد ذلك. يوضح الجدول رصيد الحساب لعدة سنوات. 1، 2. انظر الهامش.

الرصيد	الزمن المنقضي (بالأعوام)
AED 50.00	0
AED 55.80	2
AED 64.80	4
AED 83.09	6
AED 101.40	8
AED 123.14	10
AED 162.67	12

1. استخدم حاسبة التمثيل البياني لرسم مخطط الانتشار للبيانات.
2. احسب منحنى الملاءمة ومثّله بيانيًا باستخدام الانحدار الأسي.
3. اكتب المعادلة الأفضل ملاءمة. ما المجال والمدى؟
الإجابة النموذجية: $y = 46.47(1.10^x)$; $D = \{x \mid x \geq 0\}$; $R = \{y \mid y \geq 46.47\}$
4. استنادًا إلى النموذج، كم سيبلغ رصيد الحساب بعد 25 عامًا؟ **AED 558.58**
5. هل النموذج الأسي هو الأفضل ملاءمة للبيانات؟ اشرح.
6. **جان دورك** اكتب سؤالًا يمكن الإجابة عنه عن طريق فحص بيانات نموذج لوغاريتمي. أولًا، اختر موضوعًا ثم اجمع البيانات ذات الصلة من خلال إجراء بحث على الإنترنت أو إجراء مسح. بعد ذلك، ارسم مخطط انتشار وأوجد معادلة انحدار البيانات. ثم أجب عن سؤالك. **راجع عمل الطلاب.**

حق النشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

٨:٤٦ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

الدرس 4–8

1 محور التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4–8 إيجاد قيم التعابير اللوغاريتمية

الدرس 4–8 حل المعادلات اللوغاريتمية حل المتباينات اللوغاريتمية.

بعد الدرس 4–8 تحديد حلول المعادلات اللوغاريتمية باستخدام الأساليب الجبرية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم "لماذا؟" الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- في أي فئة يقع إعصار قمعي تصحبه رياح بسرعة 100 كيلومتر في الساعة؟ F–1
- ما عدد فئات أعاصير F–6 القمعية المعروف وقوعها؟ 0

الدرس 4-8

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

السابق	الحالي	لماذا؟
• لقد أوجدت قيمة التعبيرات اللوغاريتمية.	1 حل المعادلات اللوغاريتمية. 2 حل المتباينات اللوغاريتمية.	• يوثق المركز الوطني لخدمة الطقس ما يقرب من 1000 موجة من الإعصارات الضمية التي تضرب الولايات المتحدة الأمريكية سنويًا. وتُقاس شدة الإعصار الضمي على مقياس فوجيتا. كما تتسم الإعصارات الضمية إلى عدة أصناف، وفقًا لسرعة الرياح المصاحبة لها وطول مسارها وعرض مسارها والدمار الناجم عنها.

مقياس F	سرعة الرياح km/h	نوع الدمار الناجم
F-0 عاصفة	40-72	المداخن، والأفرع
F-1 متوسط	73-112	انقلاب المنازل المتنقلة
F-2 قوي	113-157	اقتلاع أسطح المنازل
F-3 شديد	158-206	اقتلاع الأشجار من جذورها
F-4 مدمر	207-260	هدم المنازل وتطاير السيارات
F-5 هائل	261-318	تطاير المنازل
F-6 لا ينحصر	319-379	هذا المستوى لم يحدث من قبل على الإطلاق

المفردات الجديدة

المعادلة اللوغاريتمية logarithmic equation

المتباينة اللوغاريتمية logarithmic inequality

ممارسات في الرياضيات 4 استخدام نماذج الرياضيات.

1 حل المعادلات اللوغاريتمية

تحتوي **المعادلة اللوغاريتمية** على لوغاريتم واحد أو أكثر. يمكنك استخدام تعريف اللوغاريتم لمساعدتك في حل المعادلات اللوغاريتمية.

مثال 1 إيجاد حل المعادلة اللوغاريتمية

حُلّ المعادلة $\log_{36} x = \frac{3}{2}$.

$\log_{36} x = \frac{3}{2}$	المعادلة الأصلية
$x = 36^{\frac{3}{2}}$	تعريف اللوغاريتم
$x = (6^2)^{\frac{3}{2}}$	$36 = 6^2$
$x = 6^3$ أو 216	أس الأس

تمرين موجّه

حُلّ كل من المعادلات التالية.

1A. $\log_9 x = \frac{3}{2}$ 27

1B. $\log_{16} x = \frac{5}{4}$ 1024

استخدم الخاصية التالية لحل المعادلات اللوغاريتمية التي تتضمن لوغاريتمات ذات أساس موحد في كلا الطرفين.

المفهوم الأساسي خاصية المساواة في اللوغاريتمات

الرموز	إذا كان b عددًا موجبًا بخلاف العدد 1، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.
مثال	إذا كان $\log_2 x = \log_2 8$، فإن $x = 8$. وإذا كان $x = 8$، فإن $\log_2 x = \log_2 8$.

٨:٤٦ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae
606 / 475

1 حل المعادلات اللوغاريتمية

يوضح **المثال 1** كيفية حل المعادلات اللوغاريتمية بما في ذلك اللوغاريتم الفردي. يوضح **المثال 2** كيفية حل معادلة تتضمن لوغاريتمات في كل من طرفيها.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 خلّ المعادلة $\log_8 x = \frac{4}{3}$. 16

2 **مثال على الاختبار المعياري**
خلّ المعادلة $\log_4 x^2 = \log_4(-6x-8)$.
C
-2، -4 C 4 A
D ليس لها حل. 2 B

2 حل المتباينات اللوغاريتمية

يوضح **المثال 3** كيفية حل متباينة لوغاريتمية. يوضح **المثال 4** كيفية حل متباينة تتضمن لوغاريتمات على جانبي رمز المتباينة.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو اطلب من الطلاب العمل في مجموعات ثنائية لإعداد فيديو يوضح كيفية حل متباينة لوغاريتمية. تأكد من شرحهم لكل خطوة في العمل، خاصة كيفية إعادة كتابة المتباينة اللوغاريتمية في صورة متباينة أسية.

مثال إضافي

3 خلّ المتباينة $\log_6 x > 3$.
$\{x \mid x > 216\}$

571

مثال على الاختبار المعياري **2** إيجاد حل المعادلة اللوغاريتمية

خلّ المعادلة $\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$.

A -2 B -1 C 2 D 4

قراءة فقرة الاختبار

مطلوب منك إيجاد x في المعادلة اللوغاريتمية.

حل فقرة الاختبار

$\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$ — المعادلة الأصلية
$x^2 - 4 = 3x$ — خاصية المساواة لدالّ اللوغاريتمات
$x^2 - 3x - 4 = 0$ — اطرح $3x$ من كلا الطرفين
$(x - 4)(x + 1) = 0$ — حلل إلى العوامل
$x - 4 = 0$ أو $x + 1 = 0$ — خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = 4$ $x = -1$ — حل المعادلتين

التحقق عوض بكل من القيمتين في المعادلة الأصلية.

$x = 4$
$\log_2 (4^2 - 4) \stackrel{?}{=} \log_2 3(4)$
$\log_2 12 = \log_2 12$ ✓

$x = -1$
$\log_2 [(-1)^2 - 4] \stackrel{?}{=} \log_2 3(-1)$
$\log_2 (-3) \stackrel{?}{=} \log_2 (-3)$ ✗

لا يمكن أن يكون مجال الدالة اللوغاريتمية 0. إذا، $\log_2 (-3)$ غير معرفة و-1 يمثل حلًا دخيلًا. الإجابة هي D.

تمرين موجّه

2. خلّ المعادلة $\log_3 (x^2 - 15) = \log_3 2x$.
H
F -3 G -1 H 5 J 15

نصيحة عند حل الاختبار
التعويض لتوفير الوقت، يمكنك التعويض عن كل خيار من خيارات الإجابة في المعادلة الأصلية لإيجاد الخيار الذي ينتج عنه التعبير الصحيح.

2 حل المتباينات اللوغاريتمية

المتباينة **اللوغاريتمية** هي المتباينة التي تتضمن لوغاريتمات. يمكن استخدام الخاصية التالية لحل المتباينات اللوغاريتمية.

المفهوم الأساسي **خاصية التباين في اللوغاريتمات**

إذا كان $b > 1$ و$x > 0$ و$\log_b x > y$، فإن $x > b^y$.
إذا كان $b > 1$ و$x > 0$ و$\log_b x < y$، فإن $0 < x < b^y$.

تصح هذه الخاصية أيضًا مع $\geq$ و$\leq$.

مثال 3 **إيجاد حل المتباينة اللوغاريتمية**

خلّ المتباينة $\log_3 x > 4$.

$\log_3 x > 4$ — المتباينة الأصلية
$x > 3^4$ — خاصية التباين في اللوغاريتمات
$x > 81$ — بسّط

تمرين موجّه

خلّ كل متباينة مما يلي.

3A. $\log_4 x \geq 3$ $\{x \mid x \geq 64\}$ 3B. $\log_2 x < 4$ $\{x \mid 0 < x < 16\}$

الربط بالتاريخ والرياضيات
رانج ميتج (139-78 ميلادية)
أول مقياس زلازل معروف اخترعه رانج ميتج في الصين عام 132 ميلادية. كان عبارة عن وعاء نحاسي كبير به بندول ثقيل والعديد من الأذرع التي تميل عند الاهتزاز نتيجة حدوث زلزال، حيث ساعد هذا في تحديد اتجاه الزلزال.

571

التدريس المتمايز

إذا كان الطلاب بحاجة إلى المساعدة على تصور مواقع الأرقام في المعادلات اللوغاريتمية والأسية المتساوية،

فمن لم اطلب من الطلاب إعداد ملصقات ملونة مع توضيح عدة معادلات أسية ولوغاريتمية متساوية، مثل $2^3 = 8$ و$\log_2 8 = 3$. واقترح على الطلاب استخدام لون مختلف لكل من الأرقام 2 و3 و8.

٨:٤٧ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae
606 / 475

يمكن استخدام الخاصية التالية لحل المتباينات اللوغاريتمية التي تتضمن لوغاريتمات ذات أساس موحد في كلا الطرفين. استبعد من الحل مجموعة القيم التي تؤدي إلى لوغاريتم عدد أقل من أو يساوي صفرًا في المتباينة الأصلية.

المفهوم الأساسي خاصية التباين في اللوغاريتمات

الرموز: إذا كان $b > 1$، وكان $x > y$، فإن $\log_b x > \log_b y$.
وإذا كان $x < y$، فإن $\log_b x < \log_b y$.

مثال: إذا كان $\log_6 x > \log_6 35$، فإن $x > 35$.

تصح هذه الخاصية أيضًا مع ≥ و≤.

مثال 4 إيجاد حل المتباينات التي تتضمن لوغاريتمات في كل من طرفيها

حُلّ المتباينة $\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$.

$\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$	المتباينة الأصلية
$x + 3 > 2x + 1$	خاصية التباين في اللوغاريتمات
$2 > x$	اطرح $x + 1$ من كلا الطرفين

استبعد كل قيم x التي تكون فيها $x + 3 \le 0$ أو $2x + 1 \le 0$، بحيث يكون $x > -3$ و$x > -\frac{1}{2}$.
مجموعة الحل هي $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 2\right\}$ أو $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$.

تمرين موجّه

4. حُلّ المتباينة $\log_5 (1 + 2x) \ge \log_5 (4 + x)$. تحقق من الحل. $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x \le 3\right\}$

تحقق من فهمك

مثال 1: حُلّ كل من المعادلات التالية.

1. $\log_8 x = \frac{4}{3}$ 16
2. $\log_{16} x = \frac{3}{4}$ 8

مثال 2: 3. الاختيار من متعدد حُلّ المعادلة $\log_5 (x^2 - 10) = \log_5 3x$.

A 10 B 2 C 5 D 2, 5 — C

مثال 3: حُلّ كل متباينة مما يلي.

4. $\log_5 x > 3$ $\{x \mid x > 125\}$
5. $\log_8 x \le -2$ $\left\{x \mid 0 < x \le \frac{1}{64}\right\}$
6. $\log_4 (2x + 5) \le \log_4 (4x - 3)$ $\{x \mid x \ge 4\}$
7. $\log_8 (2x) > \log_8 (6x - 8)$ $\left\{x \mid 2 > x > \frac{4}{3}\right\}$

التمرين وحل المسائل

المثالان 1–2 التركيب حُلّ كل معادلة مما يلي.

8. $\log_{81} x = \frac{3}{4}$ 27
9. $\log_{25} x = \frac{5}{2}$ 3125
10. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = x$ $-\frac{1}{3}$
11. $\log_6 \frac{1}{36} = x$ -2
12. $\log_x 32 = \frac{5}{2}$ 4
13. $\log_x 27 = \frac{3}{2}$ 9
14. $\log_3 (3x + 8) = \log_3 (x^2 + x)$ -2 أو 4
15. $\log_{12} (x^2 - 7) = \log_{12} (x + 5)$ -3 و4
16. $\log_6 (x^2 - 6x) = \log_6 (-8)$ لا يوجد حل
17. $\log_9 (x^2 - 4x) = \log_9 (3x - 10)$ 5
18. $\log_4 (2x^2 + 1) = \log_4 (10x - 7)$ 1 و4
19. $\log_7 (x^2 - 4) = \log_7 (-x + 2)$ -3

572 | الدرس 4-8 | حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

مثال إضافي

4 حُلّ المتباينة $\log_7 (2x + 8) > \log_7 (x + 5)$.
$\{x \mid x > -3\}$

3 تمرين

التقويم التكويني

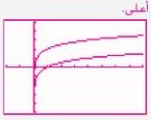
استخدم التمارين 1–7 للتأكد من الفهم.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إجابات إضافية

36b. تمثل التمثيلات البيانية انعكاسات بعضها لبعض على المحور x.

36c. 1. يُشبه التمثيل البياني الثاني التمثيل البياني الأول، فيما عدا أنه أزيح رأسيًا بمقدار وحدتين إلى أعلى.



2. يُشبه التمثيل البياني الثاني التمثيل البياني الأول، فيما عدا أنه أزيح أفقيًا بمقدار وحدتين إلى اليسار.

3. نلاحظ أن الإحداثي y لكل نقطة تقع على التمثيل البياني الثاني يساوي ثلاثة أمثال نظيره على التمثيل البياني الأول.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
ق م مبتدئ	8–33 فردي، 38، 40–68	9–33 فردي، 45–48	8–32 زوجي، 38، 40–44، 49–68
ض م أساسي	9–33 فردي، 34–38، 40–68	9–33، 45–48	34–38، 40–44، 49–68
م متقدم	34–62 (اختياري، 63–68)		

572 | الدرس 4-8 | حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

٨:٤٧ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae
606 / 475

تدريس ممارسات في الرياضيات

النمذجة يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات تطبيق الحساب الذي يعرفونه لحل المسائل الناشئة في الحياة اليومية. وتحليل العلاقات رياضيًا لاستخلاص الاستنتاجات. وتفسير نتائجهم الرياضية في سياق الحالة.

العلوم معادلة سرعة الرياح W، بالميل في الساعة، بالقرب من مركز الإعصار القمعي هي $W = 93 \log_{10} D + 65$، حيث D تمثل المسافة التي يقطعها الإعصار القمعي بالميل.

20. اكتب هذه المعادلة بالصيغة الأسية. $d = 10^{\frac{w-65}{93}}$

21. في مايو 1999، اجتاح إعصار قمعي إحدى المدن بأقصى سرعة رياح سُجلت على الإطلاق إذا كان الإعصار القمعي قد قطع 525 mi. فقدّر سرعة الرياح بالقرب من مركز الإعصار القمعي. 318 mph

المثالان 3-4

خلّ كل متباينة مما يلي.

22. $\log_6 x < -3$ $\left\{x \mid 0 < x < \frac{1}{216}\right\}$

23. $\log_4 x \geq 4$ $\{x \mid x \geq 256\}$

24. $\log_3 x \geq -4$ $\left\{x \mid x \geq \frac{1}{81}\right\}$

25. $\log_2 x \leq -2$ $\left\{x \mid 0 < x \leq \frac{1}{4}\right\}$

26. $\log_5 x > 2$ $\{x \mid x > 25\}$

27. $\log_7 x < -1$ $\left\{x \mid 0 < x < \frac{1}{7}\right\}$

28. $\log_2 (4x - 6) > \log_2 (2x + 8)$ $\{x \mid x > 7\}$

29. $\log_7 (x + 2) \geq \log_7 (6x - 3)$ $\left\{x \mid \frac{1}{2} < x \leq 1\right\}$

30. $\log_3 (7x - 6) < \log_3 (4x + 9)$

31. $\log_5 (12x + 5) \leq \log_5 (8x + 9)$ $\left\{x \mid -\frac{5}{12} < x \leq 8\right\}$

32. $\log_{11} (3x - 24) \geq \log_{11} (-5x - 8)$ $\{x \mid x \geq 2\}$

33. $\log_9 (9x + 4) \leq \log_9 (11x - 12)$ $\{x \mid x \geq 8\}$

4:1

34. **النمذجة** يتم قياس شدة الزلزال على مقياس لوغاريتمي يُعرف باسم مقياس ريختر. حيث يتم تحديد شدة الزلزال M بالصيغة $M = \log_{10} x$، حيث يمثل x سعة الموجة الزلزالية التي تنتج عنها حركة الأرض.

a. كم ضعفًا تزيد السعة الناجمة عن زلزال تصل شدته إلى 8 درجات على مقياس ريختر عن توابع الزلزال الذي تصل شدته إلى 5 درجات على مقياس ريختر؟

b. في عام 1906، ذُمرت ولاية سان فرانسيسكو بالكامل على إثر زلزال شدته 7.8 درجات. في عام 1911، حدث زلزال شدته 8.1 درجات على امتداد صدع نيو مدريد في وادي نهر المسيسيبي. كم ضعفًا يزيد زلزال نيو مدريد عن زلزال سان فرانسيسكو؟

34a. أكبر بـ $10^{\frac{3}{2}}$ أو بـ 1000 ضعف

34b. أكبر بـ $10^{0.3}$ ضعفًا أو بضعفين تقريبًا

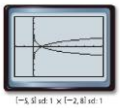
35. **الموسيقى** يتوافق أول مفتاح على لوحة مفاتيح البيانو مع طبقة صوت ترددها 27.5 دورة في الثانية. تضرب طبقة الصوت في ثابت ما مع كل مفتاح تالٍ. تصاعديًا مع المفاتيح السوداء والبيضاء، تُحدد صيغة تردد طبقة الصوت الصادرة

في حال عزف النغمة رقم n على لوحة المفاتيح بالعلاقة $f = 27.5 \cdot 2^{\frac{n-1}{12}}$.

a. يصل تردد النغمة الموسيقية إلى 220 دورة في الثانية. كم عدد النغمات الموسيقية المتاحة على لوحة مفاتيح البيانو؟ 37

b. يصل تردد إحدى طبقات الصوت الأخرى على لوحة المفاتيح إلى 880 دورة في الثانية. بعد عزف كم نغمة موسيقية تصاعديًا على لوحة المفاتيح يمكن إيجاد تلك النغمة؟ 61

36. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سنكتشف التمثيلين البيانيين الموضحين: $y = \log_4 x$ و $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.



a. **تحليليًا** ما وجه المقارنة بين شكلي التمثيلين البيانيين؟
ما وجه المقارنة بين خطي التقارب والتقاطع مع x في التمثيلين البيانيين؟

b. **لفظيًا** صف العلاقة بين التمثيلين البيانيين. **انظر الهامش.**

c. **بيانيًا** استخدم ما تعرفه عن تحويلات التمثيلات البيانية للمقارنة والمطابقة بين التمثيل البياني لكل دالة والتمثيل البياني للعلاقة $x\ y = \log_4 x$. **انظر الهامش.**

1. $y = \log_4 x + 2$ 2. $y = \log_4 (x + 2)$ 3. $y = 3 \log_4 x$

d. **تحليليًا** صف العلاقة بين $y = \log_4 x$، $y = -1(\log_4 x)$، $y = \log_4 x$ ما المجال والمدى المناسب لكل دالة؟

e. **تحليليًا** اكتب معادلة لدالة يكون تمثيلها البياني هو التمثيل البياني للعلاقة $y = \log_3 x$ بعد إزاحته بمقدار 4 وحدات إلى اليسار وبمقدار وحدة واحدة إلى أعلى. $y = \log_3 (x + 4) + 1$

36a. التمثيلان البيانيان متماثلان من حيث الشكل. وخط التقارب لكل تمثيل بياني هو المحور الرأسي و نقطة تقاطع كل من التمثيلين البيانيين مع المحور الأفقي x هي النقطة 1.

36d. كل من التمثيلين البيانيين هو انعكاس للتمثيل البياني الآخر بالنسبة للمحور الأفقي x.

D: $\{x \mid x > 0\}$ = R (جميع الأعداد الحقيقية)

573

573

٨:٤٧ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

تدريس ممارسات في الرياضيات

نقد يُمكن للطلاب المتفوقين في مادة الرياضيات أيضًا المقارنة بين كفاءة فرضيتين مقبولتين والتفريق بين المنطق السليم والمنطق الخاطئ؛ وفي حالة وجود خطأ في فرضية ما، يمكنهم توضيح ماهية هذا الخطأ.

انتبه!
تحليل الخطأ في التمرين رقم 38. ذكِّر الطلاب أنّ رفع رقم إلى أس سالب لا يشبه الضرب في 1−.

إجابات إضافية

37c. نموذج الإجابة: يتغيّر أس اللوغاريتم بمقدار 2 فقط.
الأس هو إجابة اللوغاريتم. لأنّ الرقم 2 مضروب في 10 أمام رمز اللوغاريتم. إذًا، من المتوقع أن يتغير الديسبيل بمقدار 20.

44. التقاطع مع المحور y للدالة الأسيّة $y = b^x$ يساوي $(0, 1)$. عند تبديل الإحداثي x والإحداثي y، يتحول التقاطع مع المحور y إلى تقاطع مع المحور x في النقطة $(1, 0)$. لا يوجد تقاطع مع المحور x في النقطة $(1, 0)$ للدالة الأسيّة بالصيغة $y = b^x$. إذًا عند تبديل الإحداثي x والإحداثي y لن توجد نقاط على معكوس $(0, 1)$. ولن يوجد تقاطع مع المحور y.

37 **الصوت** العلاقة بين شدة الصوت I وعدد وحدات ديسبيل β هي $\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$ حيث يمثل I شدة الصوت بوحدة الواط لكل متر مربع.

a. أوجد عدد وحدات ديسبيل لصوت مقدار شدته واط واحد لكل متر مربع. 120

b. أوجد عدد وحدات ديسبيل لصوت مقدار شدته 10^{-2} واط لكل متر مربع. 100

c. تبلغ شدة الصوت التي مقدارها واط واحد لكل متر مربع 100 ضعف شدة الصوت التي مقدارها 10^{-2} واط لكل متر مربع. لماذا لا يكون عدد وحدات ديسبيل للصوت 100 ضعف؟ **انظر الهامش.**

40. الإجابة النموذجية: عندما $1 < b < 0$، فإن $\log_b x > \log_b y$ فقط وفقط إذا كان $x < y$ يَقلب رمز المتباينة لأن الكسر الأقل من 1 يصبح أصغر عند رفعه إلى قوة أكبر.

مسائل مهارات التفكير العليا
استخدم مهارات التفكير العليا

38. **نقد** يبحث أسامة وخليفة عن حل للمتباينة $\log_3 x \geq -3$. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

أسامة	خليفة
$\log_3 x \geq -3$	$\log_3 x \geq -3$
$x \geq 3^{-3}$	$x \geq 3^{-3}$
$x \geq \frac{1}{27}$	$0 < x \leq \frac{1}{27}$

38. الإجابة النموذجية: أسامة؛ لم يكن هناك داعٍ لقلب رمز المتباينة عند الرفع إلى قوة سالبة.

39. **تحفيز** أوجد $\log_3 27 + \log_9 27 + \log_{27} 27 + \log_{81} 27 + \log_{243} 27$. $6\frac{17}{20}$

40. **التبرير** توضح خاصية التباين في اللوغاريتمات أنّه عندما تكون $b > 1$، يكون $\log_b y > \log_b x$ فقط إذا كان $y > x$. ما الوضع عندما يكون $0 < b < 1$؟ اشرح استنتاجك.

41. **الكتابة في الرياضيات** وضح مدى ارتباط المجال والمدى للدوال اللوغاريتمية بالمجال والمدى للدوال الأسيّة.

41. إن الدالة اللوغاريتمية التي صورتها $y = \log_b x$ هي معكوس الدالة الأسيّة ذات الصورة $y = b^x$. إن مجال إحدى الدالتين المتعاكستين هو مدى الدالة الأخرى. ومدى إحدى الدالتين المتعاكستين هو مجال الدالة الأخرى.

42. **مسألة غير محددة الإجابة** أعط مثالًا لمعادلة لوغاريتمية ليس لها حل.

الإجابة النموذجية: $\log_3 (2x + 12) = \log_3 (x + 4)$

43. **التبرير** اختر المصطلح المناسب. اشرح استنتاجك. جميع المعادلات اللوغاريتمية تُكتب بالصيغة $y = \log_b x$.

a. إذا كان أساس المعادلة اللوغاريتمية أكبر من 1 وقيمة x بين 0 و1، إذا قيمة y تكون (أقل من، أكبر من، تساوي) 0.

b. إذا كان أساس المعادلة اللوغاريتمية يقع بين 0 و1 وقيمة x أكبر من 1، فإن قيمة y تكون (أقل من، أكبر من، تساوي) 0.

c. يوجد (0 شيء، واحد، عدد غير محدود) من الحلول لـ b في المعادلة $y = \log_b 0$.

d. يوجد (0 شيء، واحد، عدد غير محدود) من الحلول لـ b في المعادلة $y = \log_b 1$.

44. **الكتابة في الرياضيات** وضح سبب تقاطع أي دالة لوغاريتمية بصيغة $y = \log_b x$ مع x في النقطة $(1, 0)$ وعدم تقاطعها مع y. **انظر الهامش.**

© حقوق النشر محفوظة

٨:٤٧ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

4 التقويم

تعيين مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب كتابة شرح مفصل لخطوات حل معادلة لوغاريتمية مثل $\log_8 n = \frac{7}{3}$.

تدريب على الاختبار المعياري

45. أوجد x إذا كان $\frac{6.4}{x} = \frac{4}{7}$. C

A 3.4
B 9.4
C 11.2
D 44.8

46. موضح فيما يلي مقدار الهطول الشهري في إحدى المدن خلال فترة من العام. H

الشهر	الهطول (cm)
أبريل	3.60
مايو	5.15
يونيو	5.35
يوليو	3.18
أغسطس	3.83

أوجد وسيط الهطول.

F 4.25 cm
G 4.22 cm
H 3.83 cm
J 3.60 cm

47. حصلت عايا على زيادة سنوية بمقدار 10% لمدة 3 سنوات على التوالي. فكم يبلغ راتبها الشهري بعد حصولها على الزيادات الثلاث إذا كان أول راتب حصلت عليه هو AED 12,000 في العام؟ B

A AED 14,520
B AED 15,972
C AED 16,248
D AED 16,410

48. **اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول** لدى أحد الباعين 14 بالونة هيليوم لتبيع. منها 9 بالونات صفراء و5 بالونات حمراء وبالونتان خضراوان. يتم اختيار البالونة وبيعها عشوائيًا. إذا كانت البالونة المبيعة صفراء، فما نسبة احتمال أن تكون البالونة التالية، التي يتم اختيارها عشوائيًا، صفراء أيضًا؟

F $\frac{1}{9}$
G $\frac{1}{8}$
H $\frac{36}{91}$
J $\frac{8}{13}$
K $\frac{9}{14}$

مراجعة شاملة

أوجد قيمة كل تعبير. (الدرس 3-8)

49. $\log_4 256$ 4
50. $\log_{2\frac{1}{8}} -3$
51. $\log_4 216$ 3
52. $\log_3 27$ 3
53. $\log_{5\frac{1}{125}} -3$
54. $\log_2 2401$ 4

حل كل معادلة أو متباينة فيما يلي. تحقق من الحل. (الدرس 2-8)

55. $5^{2x+1} \le 125$ $\{x \mid x \ge 0\}$
56. $3^{3x-2} > 81$ $\{x \mid x > 2\}$
57. $4^{4a+6} \le 16^a$ $\{a \mid a \ge -3\}$
58. $11^{2x+1} = 121^{3x}$ $x = 0.25$
59. $3^{4x-7} = 27^{2x+3}$ $x = -8$
60. $8^{x-4} \le 2^{4-x}$ $\{x \mid x \ge 4\}$

61. **الشحن** يزيد ارتفاع أسطوانة شحن كبيرة بمقدار 4 m عن نصف قطرها. إذا كان حجم الأسطوانة يساوي 5π متر مكعب. فكم يبلغ طولها؟ استخدم الصيغة $V = \pi \times r^2 \times h$. 5 m

62. **نظرية الأعداد** عددان مركبان مترافقان مجموعهما 12 وحاصل ضربهما 40. أوجد العددين. $6 + 2i$، $6 - 2i$

مراجعة المهارات

حوّل إلى أبسط صورة. افترض أنه لا يوجد متغيّر يساوي صفرًا.

63. $x^5 \times x^3$ x^8
64. $a^2 \times a^6 a$ a^8
65. $(2p^2n)^3$ $8p^6n^3$
66. $(3b^2c^2)^2$ $9b^6c^4$
67. $\frac{x^4y^6}{xy^2}$ x^3y^4
68. $\left(\frac{a^3}{a^2}\right)^0$ 1

Macmillan/McGraw-Hill Education حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح

التدريس المتمايز ص م أ م

التوسع اطلب من الطلاب إيجاد قيمة $\log_3 9$ و$\log_3 27$. 2، 3 ثم اطلب منهم توقع قيمة $\log_3 (9 \times 27)$. بعد أن يبدوا توقعاتهم، اطلب منهم أن يتحققوا مما إذا كان 3 أس القيم التي توقعوها يساوي 9×27 أو 243. اطلب منهم توقع قيمة $\log_3 (mn)$. $\log_3 m + \log_3 n$

575

٨:٤٧ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

التقويم التكويني

استخدم اختبار منتصف الوحدة القصير لتقويم مدى تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

بالنسبة إلى المسائل المجاب عنها بشكل خاطئ: كلّف الطلاب بمراجعة الدروس المشار إليها بين الأقواس.

المطويات منظّم الدراسة

مطويات® Dinah Zike

قبل أن ينتهي الطلاب من اختبار نصف الوحدة، شجّعهم على مراجعة معلومات الدروس من 1–6 إلى 4–6 المكتوبة في مطوياتهم.

الوحدة 8

اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 1-8 إلى 4-8

مثّل كل دالة بيانيًا، حدّد المجال والمدى. (الدرس 1-8)

1. $f(x) = 3(4)^x$

2. $f(x) = -(2)^x + 5$

3. $f(x) = -0.5(3)^{x+2} + 4$

4. $f(x) = -3\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} + 8$

5. **العلوم** أنت تدرس الآن دراسة الجماعة الأحيائية للبكتيريا. تبدأ الجماعة الأحيائية في الأصل بحوالي 6000 خلية بكتيرية. بعد مرور ساعتين، كان ثمة 28,000 خلية بكتيرية. (الدرس 1-8)

a. اكتب دالة أسية يمكن استخدامها لنمذجة عدد خلايا البكتيريا بعد مرور x من الساعات. إذا تغير عدد البكتيريا بالمعدل نفسه. $f(x) = 6000(2.16025)^x$

b. كم عدد خلايا البكتيريا التي يمكن توقعها بعد 4 ساعات؟ 130,667 تقريبًا

6. **الاختبار من متعدد** أي الدوال الأسية يمر التمثيل البياني الخاص بها عبر النقطتين $(0, 125)$ و $(3, 1000)$؟ (الدرس 1-8) D

A $f(x) = 125(3)^x$

B $f(x) = 1000(3)^x$

C $f(x) = 125(1000)^x$

D $f(x) = 125(2)^x$

7. **الكثافة السكانية** في عام 1995، كانت كثافة إحدى المدن السكانية تبلغ 45,000 نسمة. ثم زادت حتى وصلت إلى 68,000 بحلول عام 2007. (الدرس 2-8)

a. ما الدالة الأسية التي يمكن استخدامها لتمثيل الكثافة السكانية لهذه المدينة لمدة x عامًا بعد عام 1995؟ $f(x) = 45{,}000(1.0350)^x$

b. استخدم النموذج الذي أعددته لتقدير الكثافة السكانية في عام 2020. 106,346

8. **الاختبار من متعدد** أوجد قيمة x للمعادلة $\log_3(x^2 + 2x) = \log_3(x + 2)$. (الدرس 3-8) H

F $x = -2, 1$

G $x = -2$

H $x = 1$

J لا يوجد حل

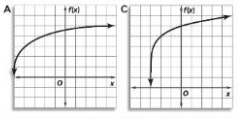
مثّل كل دالة بيانيًا. (الدرس 3-8) 9. انظر ملحق إجابات الوحدة 8. 10. انظر ملحق إجابات الوحدة 8.

9. $f(x) = 3\log_2(x - 1)$

10. $f(x) = -4\log_3(x - 2) + 5$

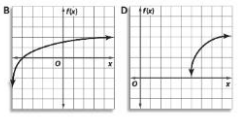
11. **الاختبار من متعدد** أي من التمثيلات البيانية التالية يعبر عن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_3(x + 5) + 3$؟ (الدرس 3-8) A

A



C

B



D

أوجد قيمة كل تعبير. (الدرس 3-8)

12. $\log_4 32$ $\frac{5}{2}$

13. $\log_5 5^{12}$ 12

14. $\log_{10} 4$ $\frac{1}{2}$ $9^3 = 729$

15. اكتب $\log_9 729 = 3$ بالصيغة الأسية. (الدرس 3-8)

حُلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي؛ تحقق من الحل. (الدروس 2-8، 4-8)

16. $3^x = 27^2$ 6

17. $4^{3x-1} = 16^x$ 1

18. $\frac{1}{9} = 243^{2x+1}$ $-\frac{7}{10}$

19. $9^{2x+3} < 64$ $\left\{x \mid x < -\frac{3}{4}\right\}$

20. $\left(\frac{1}{32}\right)^{x+3} \geq 16^{3x}$ $\left\{x \mid x \leq -\frac{15}{17}\right\}$

21. $\log_4 x = \frac{3}{2}$ 8

22. $\log_7(-x + 3) = \log_7(6x + 5)$ $-\frac{2}{7}$

23. $\log_2 x < -3$ $\left\{x \mid 0 < x < \frac{1}{8}\right\}$

24. $\log_8(3x + 7) = \log_8(2x - 5)$ لا يوجد حل

606 / 475

٨:٤٧ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

الدرس 5–8

1 محور التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 5–6 إيجاد قيمة التعابير اللوغاريتمية وإيجاد حل المعادلات اللوغاريتمية.

الدرس 5–6 تحويل التعابير إلى أبسط صورة وإيجاد قيمتها باستخدام خصائص اللوغاريتمات. حل المعادلات اللوغاريتمية باستخدام خصائص اللوغاريتمات.

بعد الدرس 5–6 إيجاد حل المعادلات الأسية باستخدام طرق جبرية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم "لماذا؟" الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- عصير الليمون حمضي أم قاعدي؟ حمضي
- أكسيد الماغنسيوم حمضي أم قاعدي؟ قاعدي
- بكم مرة تعد أكسيد الماغنسيوم أكثر قاعدية من الماء المتعادل؟ $10^{10} - 7 = 10^3 = 1000$

الدرس 5–8

خصائص اللوغاريتمات

السابق	الحالي	لماذا؟
• قيمت بإيجاد قيمة التعبيرات اللوغاريتمية وحل المعادلات اللوغاريتمية.	1 تبسيط وإيجاد قيمة التعابير باستخدام خصائص اللوغاريتمات. 2 إيجاد حل المعادلات اللوغاريتمية باستخدام خصائص اللوغاريتمات.	• تعد نسبة الحموضة في الطعام ذات أهمية كبيرة لبعض المستهلكين ذوي الحساسة. تكون معظم الأطعمة التي تستهلكها حمضية أكثر منها قاعدية. يقيس مقياس الرقم الهيدروجيني نسبة الحموضة؛ حيث يشير الرقم الهيدروجيني المنخفض إلى أن المحلول حمضي، في حين يشير الرقم الهيدروجيني المرتفع إلى أن المحلول قاعدي. (انظر مثال آخر لمقياس لوغاريتمي قائم على قوى العشرة. الرقم الهيدروجيني للقهوة السادة هو 5. في حين أن الرقم الهيدروجيني للماء الطبيعي هو 7. تعد القهوة السادة أكثر حمضية من الماء الطبيعي بمائة مرة. حيث إن $10^{-5} = 10^{-7} \div 100$ أو 100.

المنتج	مستوى الرقم الهيدروجيني
عصير ليمون	2.1
مخلل الملفوف	3.5
طماطم	4.2
قهوة سادة	5.0
الحليب	6.4
الماء النقي	7.0
البيض	7.8
حليب المغنيسيا	10.0

1 خصائص اللوغاريتمات

نظرًا لأن اللوغاريتمات عبارة عن أسس، يمكن استنباط خصائص اللوغاريتمات من خصائص الأسس. يمكن استنباط خاصية ناتج ضرب اللوغاريتمات من خاصية ناتج ضرب الأسس الخاصة بالأسس.

المفهوم الأساسي خاصية ناتج ضرب اللوغاريتمات

الشرح لوغاريتم ناتج الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.

الرموز بالنسبة إلى كل الأعداد الموجبة a، b، وx، حيث $x \neq 1$، $\log_x ab = \log_x a + \log_x b$.

مثال $\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$

لإثبات أن هذه الخاصية صحيحة، لنفترض أن $b^y = c_3 b^x = a$. عندئذٍ، باستخدام تعريف اللوغاريتم، $y = \log_b a$ و $x = \log_b c_3 \log_b a$.

$b^y b^x = ac$	التعويض
$b^{x+y} = ac$	ناتج ضرب الأسس
$\log_b b^{x+y} = \log_b ac$	خاصية المساواة لـ اللوغاريتمات
$x + y = \log_b ac$	خاصية المعكوس للأسس واللوغاريتمات
$\log_b a + \log_b c = \log_b ac$	عوض عن x بـ $\log_b a$ و عوض عن y بـ $\log_b c$

يمكنك استخدام خاصية ناتج ضرب اللوغاريتمات لتقريب التعبيرات اللوغاريتمية.

مثال 1 استخدم خاصية ناتج الضرب

استخدم $\log_4 3 \approx 0.7925$ لتقريب قيمة $\log_4 192$.

$\log_4 192 = \log_4 (4^3 \times 3)$	عوض عن 192 بـ 64×3 أو $4^3 \times 3$
$= \log_4 4^3 + \log_4 3$	خاصية ناتج الضرب
$= 3 + \log_4 3$	خاصية معكوس الأسس واللوغاريتمات
$\approx 3 + 0.7925$ أو 3.7925	عوض عن $\log_4 3$ بـ 0.7925

تمرين موجه

1. استخدم $\log_4 2 = 0.5$ لتقريب قيمة $\log_4 32$. 2.5

ممارسات في الرياضيات

8 انتبه من التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

حق النشر © محفوظ لصالح مؤسسة ماكجروهيل التعليمية

٨:٤٧ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

1 خصائص اللوغاريتمات

يوضح **المثال 1** كيفية استخدام خاصية ناتج الضرب لتقريب قيمة تعبير لوغاريتمي. يوضح **المثال 2** كيفية استخدام خاصية ناتج القسمة لحل مسألة من الحياة اليومية. يوضح **المثال 3** كيفية استخدام خاصية الأس في اللوغاريتمات لتقريب قيمة تعبير لوغاريتمي.

أمثلة إضافية

1 استخدم $\log_5 2 \approx 0.4307$ لتقريب قيمة $\log_5 250$. 3.4307

2 **العلوم** أوجد كمية الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي الذي يبلغ رقمه الهيدروجيني 5.5. $10^{-5.5}$، أو 0.0000032 مول

التركيز على محتوى الرياضيات

خصائص اللوغاريتمات بالإضافة إلى خاصية ناتج الضرب وخاصية ناتج القسمة وخاصية الأس في اللوغاريتمات، توجد خصائص أخرى مُساعدة كخصائص الأربعة الموضحة بالأسفل.

$$\log_b 1 = 0$$
$$\log_b b = 1$$
$$\log_b b^x = x$$
$$b^{\log_b x} = x$$

تصبح أول خاصيتين من هذه الخصائص واضحتين عند كتابة المعادلات بالصيغة الأسية. تنشأ الخاصيتان الثالثة والرابعة من حقيقة أنّ الدوال اللوغاريتمية والأسية دوال معكوسة.

تذكر أنّه يتم إيجاد ناتج قسمة الأسس من خلال طرحها. تشابه مع هذه الخاصية خاصية ناتج القسمة في اللوغاريتمات. لنفترض أنّ $b^x = a$ و $b^y = c$. إذا، $\log_b a = x$ و $\log_b c = y$.

$$\frac{b^x}{b^y} = \frac{a}{c}$$
$$b^{x-y} = \frac{a}{c}$$ خاصية ناتج القسمة
$$\log_b b^{x-y} = \log_b \frac{a}{c}$$ خاصية المساواة في اللوغاريتمات
$$x - y = \log_b \frac{a}{c}$$ خاصية المعكوس للأسس واللوغاريتمات
$$\log_b a - \log_b c = \log_b \frac{a}{c}$$ عوض عن $\log_b a$ بـ x وعوض عن $\log_b c$ بـ y

المفهوم الأساسي خاصية ناتج قسمة اللوغاريتمات

الشرح يقصد بلوغاريتم ناتج القسمة الفرق بين اللوغاريتمات في البسط والمقام.

الرموز بالنسبة إلى كل الأعداد الموجبة a و b و x، حيث $x \neq 1$:
$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$.

مثال $\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$

مثال من الحياة اليومية 2 خاصية ناتج القسمة

العلوم يُعرّف الرقم الهيدروجيني للمادة بأنّه تركيز أيونات الهيدروجين $[H^+]$ بوحدة المول. يتم تحديده بالصيغة $pH = \log_{10} \frac{1}{H^+}$. أوجد مقدار الهيدروجين في لتر واحد من المطر الحمضي الذي يبلغ رقمه الهيدروجيني 4.2.

الفهم صيغة إيجاد الرقم الهيدروجيني والرقم الهيدروجيني للمطر متوافرين في المعطيات. المطلوب منك هو إيجاد مقدار الهيدروجين في لتر واحد من هذا المطر.

الخطة اكتب المعادلة. ثم أوجد حل $[H^+]$.

أوجد حل المعادلة الأصلية $pH = \log_{10} \frac{1}{H^+}$

عوض عن الرقم الهيدروجيني بالقيمة 4.2 $4.2 = \log_{10} \frac{1}{H^+}$

خاصية ناتج القسمة $4.2 = \log_{10} 1 - \log_{10} H^+$

$\log_{10} 1 = 0$ $4.2 = 0 - \log_{10} H^+$

بسّط $4.2 = -\log_{10} H^+$

اضرب الطرفين في -1 $-4.2 = \log_{10} H^+$

تعريف اللوغاريتم $10^{-4.2} = H^+$

يوجد $10^{-4.2}$، أو ما يقرب من 0.000063 مول من الهيدروجين في اللتر الواحد من هذا المطر.

التحقق $4.2 = \log_{10} \frac{1}{H^+}$ $pH = 4.2$

$H^+ = 10^{-4.2}$ $4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} \frac{1}{10^{-4.2}}$

خاصية ناتج القسمة $4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} 1 - \log_{10} 10^{-4.2}$

بسّط $4.2 \stackrel{?}{=} 0 - (-4.2)$

$4.2 = 4.2$

تمرين موجّه

2. **الصوت** يتم تحديد جهارة الصوت، L، التي تُقاس بالديسيبل، بالعلاقة $L = 10 \log_{10} R$، حيث يمثل R شدة الصوت النسبية. افترض أنّ شخصاً ما يتحدث بشدة صوت نسبية مقدارها 10^2 أو 60 ديسيبل. ما مقدار جهارة صوت 100 شخص يتحدثون بمقدار الشدة نفسه؟ **20 ديسيبل أعلى**

الربط بالحياة اليومية يشير المطر الحمضي بأنه أكثر حمضية من المطر الطبيعي. يتصف الدخان والعوادم الناتجة عن احتراق الوقود الأحفوري إلى الغلاف الجوي ثم تتحد مع الرطوبة في الهواء لتتكون المطر الحمضي. قد يكون المطر الحمضي هو السبب الرئيسي وراء تآكل النصب التذكارية. كما هو موضح في الصورة أعلاه.

نصائح للمعلمين الجدد

حل المسائل عند مناقشة خاصية ناتج الضرب للوغاريتمات، وضح أنّ اللوغاريتمات المستخدمة في المثال توضح أنّ الخاصية تنطبق على كل اللوغاريتمات، لا على اللوغاريتمات التي يمكن تبسيطها فقط.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

اللوحة البيضاء التفاعلية على اللوحة، استخدم أمثلة متعددة توضح الخصائص المختلفة للوغاريتمات. احفظ كل مثال وضع له اسمًا تبعًا للخاصية المستخدمة. شارك ملاحظاتك بحيث يستطيع الطلاب استخدامها كمرجع إضافي خارج الصف.

606 / 475

٨:٤٧ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

تذكر أنّه يتم إيجاد أس الأس بواسطة ضرب الأسس. تتشابه مع هذه الخاصية خاصية الأسس بالنسبة إلى اللوغاريتم.

المفهوم الأساسي خاصية الأسس في اللوغاريتمات

الشرح لوغاريتم أس هو ناتج ضرب اللوغاريتم في الأس.

الرموز بالنسبة إلى أي عدد حقيقي p، والأعداد الموجبة m وb، حيث $b \neq 1$، يكون $\log_b m^p = p \log_b m$.

مثال $\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$

نصيحة دراسية

الأدوات يمكنك التحقق من هذه الإجابة من خلال إيجاد قيمة $2^{4.6438}$ على الآلة الحاسبة. من المفترض أن يكون الناتج على الآلة الحاسبة 25 تقريبًا. حيث إن $\log_2 25 \approx 4.6438$ تعني أن $2^{4.6438} \approx 25$.

مثال 3 خاصية الأس في اللوغاريتمات

المعطيات $\log_2 5 \approx 2.3219$ قرّب قيمة $\log_2 25$.

$\log_2 25 = \log_2 5^2$	عوض عن 25 بـ 5^2
$= 2 \log_2 5$	خاصية الأسس
$\approx 2(2.3219)$ أو 4.6438	عوض عن $\log_2 5$ بـ 2.3219

تمرين موجّه

3. بافتراض أن $\log_3 7 \approx 1.7712$. أوجد قيمة $\log_3 49$ تقريبًا. **≈3.5424**

2 حل المعادلات اللوغاريتمية

يمكنك استخدام خصائص اللوغاريتمات لحل المعادلات التي تتضمن لوغاريتمات.

مثال 4 حل المعادلات باستخدام خصائص اللوغاريتمات

حلّ المعادلة $\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$.

$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$	المعادلة الأصلية
$\log_6 x(x - 9) = 2$	خاصية ناتج الضرب
$x(x - 9) = 6^2$	تعريف اللوغاريتم
$x^2 - 9x - 36 = 0$	اطرح 36 من كل طرف
$(x - 12)(x + 3) = 0$	حلل إلى عوامل
$x - 12 = 0$ أو $x + 3 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = 12$ $\quad x = -3$	حل المعادلتين

التحقق $\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-3 - 9) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-12) \stackrel{?}{=} 2$

نظرًا لأنّ $\log_6 (-3)$ و$\log_{10} (-12)$ غير معرّفين، فإنّ -3 يعد حلًا دخيلًا.

الحل هو $x = 12$

$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$

$\log_6 12 + \log_6 (12 - 9) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 12 + \log_6 3 \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 (12 \times 3) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 36 \stackrel{?}{=} 2$

$2 = 2$ ✓

تمرين موجّه

4. $\log_6 x + \log_6 (x + 5) = 2$ **4**

4A. $2 \log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$ **9**

مثال إضافي

3 استخدم $\log_5 6 \approx 1.1133$. قرّب قيمة $\log_5 216$. **3.3399**

تدريس ممارسات في الرياضيات

الأدوات يفكر الطلاب المتفوقون في مادة الرياضيات في الأدوات المتاحة عند حل مسألة رياضية. شجع الطلاب على التحقق من حلولهم باستخدام الحاسبة.

2 حل المعادلات اللوغاريتمية

يوضح **المثال 4** كيفية حل المعادلات اللوغاريتمية باستخدام خصائص اللوغاريتمات.

مثال إضافي

4 حلّ المعادلة.

5 $4 \log_2 x - \log_2 5 = \log_2 125$

نصائح للمعلمين الجدد

التفكير المنطقي شجع الطلاب على التحقق من إجاباتهم من خلال التفكير على سبيل المثال، في المثال 3. $16 = 2^4$، و$32 = 2^5$. إذًا من المنطقي أن تكون قيمة $\log_2 25$ ما بين 4 و5.

التدريس المتمايز

المتعلم التفاعلي بعد مناقشة المثال 4 مباشرة، اطلب من مجموعات الطلاب الثنائية إعادة حل المثال معًا من دون النظر إلى الحل الموجود في الكتاب. اطلب من الزملاء ثنائيي الأدوار في شرح خطوات الحل لبعضهم. اطلب منهم أيضًا مناقشة مدى صحة الحلول.

© حقوق الطبع والنشر محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

٨:٤٨ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae
606 / 475

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1–11 للتأكد من الفهم.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس ممارسات في الرياضيات

المثابرة يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط لحلها. حيث يحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف ويضعون تخمينات لصيغة الحل ومعناها ويخططون لمسار الحل بدلًا من مجرد القفز إلى محاولة حل.

تحقق من فهمك

المثالان 2–1 استخدم $\log_4 3 \approx 0.7925$ و $\log_4 5 \approx 1.1610$ لإيجاد القيمة التقريبية لكل من التعبيرات التالية:

1. $\log_4 18$ **2.085**
2. $\log_4 15$ **1.9535**
3. $\log_4 \frac{3}{5}$ **0.3685**
4. $\log_4 \frac{3}{4}$ **-0.2075**

مثال 2

5. **تسلق الجبال** كلما ازداد الارتفاع، انخفض ضغط الهواء الجوي. يستند قانون الضغط إلى أن الارتفاع يساوي $a = 15{,}500(5 - \log_{10} P)$، حيث يمثل a الارتفاع بالأمتار ويمثل P الضغط بالباسكال (رطل واحد على البوصة المربعة ≈ 6900 باسكال). ما مقدار ضغط الهواء بالباسكال فوق قمة كل من الجبلين المدرجين في الجدول الموضح على اليمين؟

الجبل	البلد	الارتفاع (m)
إفرست	نيبال/التبت	8850
تريسولي	الهند	7074
بونيت	الأرجنتين/تشيلي	6872
ماكينلي	الولايات المتحدة	6194
لوجان	كندا	5959

5. قمة إفرست: 26,855.44 باسكال؛ جبل تريسولي: 34,963.34 باسكال؛ جبل بونيت: 36,028.42 باسكال؛ جبل ماكينلي: 39,846.22 باسكال؛ جبل لوجان: 41,261.82 باسكال

مثال 3

بافتراض أن $\log_4 5 \approx 1.465$ و $\log_4 7 \approx 1.2091$. أوجد القيمة التقريبية لكل من التعبيرات التالية:

6. $\log_4 25$ **2.93**
7. $\log_4 49$ **2.4182**

مثال 4

حُلّ كل من المعادلات التالية. التحقق من الحل

8. $\log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6$ **8**
9. $\log_3 2x + \log_3 7 = \log_3 28$ **2**
10. $3 \log_2 x = \log_2 8$ **2**
11. $\log_{10} a + \log_{10} (a - 6) = 2$ **13.4403**

التمرين وحل المسائل

المثالان 2–1 استخدم $\log_4 2 = 0.5$ و $\log_4 3 \approx 0.7925$ و $\log_4 5 \approx 1.1610$ لإيجاد القيمة التقريبية لكل من التعبيرات التالية:

12. $\log_4 30$ **2.4535**
13. $\log_4 20$ **2.1610**
14. $\log_4 \frac{2}{3}$ **-0.2925**
15. $\log_4 \frac{4}{3}$ **0.2075**
16. $\log_4 9$ **1.5850**
17. $\log_4 8$ **1.5**

مثال 2

18. **العلوم** تقاس شدة الزلزال M على مقياس ريختر باستخدام الصيغة $M = \log_{10} x$، حيث x تمثل شدة الموجة الاهتزازية التي تنتج عنها حركة الأرض. في عام 2007 سجل أحد الزلازل التي وقعت بالقرب من ولاية سان فرانسيسكو 5.6 درجات تقريبًا على مقياس ريختر. في حين سجلت شدة زلزال سان فرانسيسكو الشهير الذي وقع في عام 1906 بمقدار 8.3 درجات.

a. كم ضعفًا تساوي شدة زلزال 1906 مقارنة بزلزال 2007؟ $10^{2.7}$ **أو أشد بمقدار 500 ضعف تقريبًا**

b. صنّف ريختر نصف حجم زلزال 1906 بمقدار 8.3 درجات. تشير بعض الأبحاث التي أجريت حديثًا إلى أنه كان بشدة 7.9 درجات على الأرجح. كم ضعفًا كانت تزيد الشدة وفقًا لمقياس ريختر للزلزال؟ **اعتقد ريختر أنّ الزلزال كان $10^{0.4}$ أو $2\frac{1}{2}$ أكبر بحوالي ضعفًا من المقدار الحقيقي تقريبًا.**

مثال 3

بافتراض أن $\log_6 8 \approx 1.1606$ و $\log_7 9 \approx 1.1292$. أوجد القيمة التقريبية لكل من التعبيرات التالية:

19. $\log_6 48$ **2.1606**
20. $\log_7 81$ **2.2584**
21. $\log_7 512$ **3.4818**
22. $\log_7 729$ **3.3876**

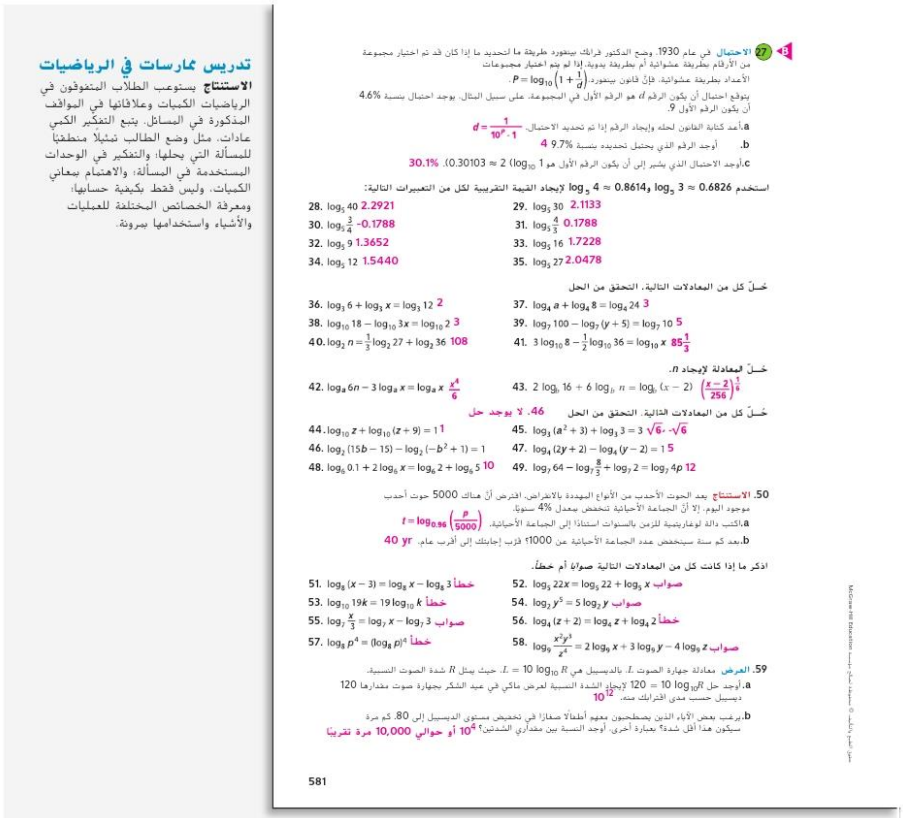
مثال 4 **المثابرة** حُلّ كل من المعادلات الآتية. التحقق من الحل

23. $\log_3 56 - \log_3 n = \log_3 7$ **8**
24. $\log_2 (4x) + \log_2 5 = \log_2 40$ **2**
25. $5 \log_2 x = \log_2 32$ **2**
26. $\log_{10} a + \log_{10} (a + 21) = 2$ **4**

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
قم مبتدئ	12–26، 61–63، 65–88	13–25 فردي، 69–72	12–26 زوجي، 61–63، 73–88
ض م أساسي	13–57 فردي، 59–63، 65–88	13–25، 69–72	27–63، 65–68، 73–88
أ م متقدم	27–82 (اختياري، 83–88)		

٨:٤٨ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae



تدريس ممارسات في الرياضيات

الاستنتاج يستوعب الطلاب المتفوقون في الرياضيات الكميات وعلاقاتها في المواقف المذكورة في المسائل. يتبع التفكير الكمي عادات، مثل وضع الطالب تمثيلاً منطقيًا للمسألة التي يحلها؛ والتفكير في الوحدات المستخدمة في المسألة؛ والاهتمام بمعاني الكميات، وليس فقط بكيفية حسابها؛ ومعرفة الخصائص المختلفة للعمليات والأشياء واستخدامها بمرونة.

27 **الاحتيال** في عام 1930، وضع الدكتور فرانك بينفورد طريقة ما لتحديد ما إذا كان قد تم اختيار مجموعة من الأرقام بطريقة عشوائية أم بطريقة يدوية. إذا تم اختيار مجموعات الأعداد بطريقة عشوائية، فإن قانون بينفورد، $P = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right)$.

يتوقع احتمال أن يكون الرقم d هو الرقم الأول في المجموعة. على سبيل المثال، يوجد احتمال بنسبة 4.6% أن يكون الرقم الأول 9.

a. أعد كتابة القانون لحله وإيجاد الرقم إذا تم تحديد الاحتمال. $d = \frac{1}{10^P - 1}$

b. أوجد الرقم الذي يحتمل تحديده بنسبة 9.7%. 4

c. أوجد الاحتمال الذي يشير إلى أن يكون الرقم الأول هو 1 ($\log_{10} 2 \approx 0.30103$). 30.1%

استخدم $\log_5 3 \approx 0.6826$ و $\log_5 4 \approx 0.8614$ لإيجاد القيمة التقريبية لكل من التعبيرات التالية:

28. $\log_5 40$ 2.2921
29. $\log_5 30$ 2.1133
30. $\log_5 \frac{3}{4}$ -0.1788
31. $\log_5 \frac{4}{3}$ 0.1788
32. $\log_5 9$ 1.3652
33. $\log_5 16$ 1.7228
34. $\log_5 12$ 1.5440
35. $\log_5 27$ 2.0478

حل كل من المعادلات التالية. تحقق من الحل

36. $\log_3 6 + \log_3 x = \log_3 12$ 2
37. $\log_4 a + \log_4 8 = \log_4 24$ 3
38. $\log_{10} 18 - \log_{10} 3x = \log_{10} 2$ 3
39. $\log_7 100 - \log_7 (y + 5) = \log_7 10$ 5
40. $\log_3 n = \frac{1}{3}\log_2 27 + \log_3 36$ 108
41. $3\log_{10} 8 - \frac{1}{2}\log_{10} 36 = \log_{10} x$ $85\frac{1}{3}$

حل المعادلة لإيجاد n.

42. $\log_4 6n - 3\log_4 x = \log_4 x$ $\frac{x^4}{6}$
43. $2\log_b 16 + 6\log_b n = \log_b (x - 2)$ $\left(\frac{x-2}{256}\right)^{\frac{1}{6}}$

حل كل من المعادلات التالية. تحقق من الحل

44. $\log_{10} z + \log_{10} (z + 9) = 1$ 1
45. $\log_3 (a^2 + 3) + \log_3 3 = 3$ $\sqrt{6}$، $-\sqrt{6}$
46. $\log_3 (15b - 15) - \log_2 (-b^2 + 1) = 1$ لا يوجد حل
47. $\log_4 (2y + 2) - \log_4 (y - 2) = 1$ 5
48. $\log_6 0.1 + 2\log_6 x = \log_6 2 + \log_6 5$ 10
49. $\log_7 64 - \log_7 \frac{8}{7} + \log_7 2 = \log_7 4p$ 12

50. **الاستنتاج** يعد الحوت الأحدب من الأنواع المهددة بالانقراض. افترض أن هناك 5000 حوت أحدب موجود اليوم. إلا أن الجماعة الأحيائية تنخفض بمعدل 4% سنويًا.

a. اكتب دالة لوغاريتمية للزمن بالسنوات استنادًا إلى الجماعة الأحيائية. $t = \log_{0.96}\left(\frac{p}{5000}\right)$

b. بعد كم سنة سينخفض عدد الجماعة الأحيائية عن 1000؟ قرب إجابتك إلى أقرب عام. 40 yr

اذكر ما إذا كانت كل من المعادلات التالية صوابًا أم خطأً.

51. $\log_8 (x - 3) = \log_8 x - \log_8 3$ خطأ
52. $\log_3 22x = \log_3 22 + \log_3 x$ صواب
53. $\log_{10} 19k = 19\log_{10} k$ خطأ
54. $\log_7 y^5 = 5\log_7 y$ صواب
55. $\log_7 \frac{x}{3} = \log_7 x - \log_7 3$ صواب
56. $\log_4 (z + 2) = \log_4 z + \log_4 2$ خطأ
57. $\log_8 p^4 = (\log_8 p)^4$ خطأ
58. $\log_9 \frac{x^2 y^3}{z^4} = 2\log_9 x + 3\log_9 y - 4\log_9 z$ صواب

59. **العرض** معادلة جهارة الصوت L بالديسيبل هي $L = 10\log_{10} R$، حيث يمثل R شدة الصوت النسبية.

a. أوجد حل $120 = 10\log_{10} R$ لإيجاد الشدة النسبية لعرض ماكي في عيد الشكر بجهارة صوت مقدارها 120 ديسيبل حسب مدى اقترابك منه. 10^{12}

b. يرغب بعض الآباء الذين يصطحبون معهم أطفالًا صغارًا في تخفيض مستوى الديسيبل إلى 80. كم مرة سيكون هذا أقل شدة؟ بعبارة أخرى، أوجد النسبة بين مقداري الشدتين؟ 10^4 أو حوالي 10,000 مرة تقريبًا

حق النشر © McGraw-Hill Education مؤسسة تعليم

581

٨:٤٨ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

تدريس ممارسات في الرياضيات

فرضيات يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات فهم الافتراضات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقًا واستخدامها في بناء الفرضيات. ويضعون التخمينات ويبنون تقدمًا منطقيًا للمسائل لاستكشاف حقيقة تخميناتهم. كما يُمكنهم تحليل المواقف بتقسيمها إلى حالات ويمكنهم التعرف على الأمثلة المضادة واستخدامها.

60. **المعرفة المالية** يتحمل أحد البالغين متوسط العمر بطاقة ائتمان مدينة بمبلغ AED 8600 تقريبًا بمعدل مراجعة سنوي مقداره 18.3%. يمكن استخدام القانون $m = \frac{b\left(\frac{r}{n}\right)}{1-\left(1+\frac{r}{n}\right)^{-nt}}$ لحساب المدفوعات الشهرية m اللازمة لسداد رصيد بطاقة الائتمان b لعدد محدد t من السنوات. حيث يمثل r معدل المراجعة السنوي وn عدد المدفوعات لكل سنة.

a. ما مقدار المدفوعات الشهرية التي يجب دفعها لتسديد قيمة الدين في ثلاث سنوات على وجه الدقة؟ ما إجمالي المبلغ المدفوع؟ **AED 312.21 ؛AED 11,239.56**

b. يمكن استخدام المعادلة $t = \frac{\log\left(1-\frac{br}{mn}\right)}{-n\log\left(1+\frac{r}{n}\right)}$ لحساب عدد السنوات اللازمة لجدول دفع محدد. انسخ الجدول وأكمله. **انظر الهامش.**

المدفوعات (m)	السنوات (t)
AED 50	غير حقيقي
AED 100	غير حقيقي
AED 150	11.42
AED 200	5.87
AED 250	4.09
AED 300	3.16

c. مثل المعلومات الواردة في الجدول في الجزء b بيانيًا.

d. إذا كان بإمكانك أن تتحمل دفع AED 100 فقط شهريًا، فهل ستتمكن من سداد الدين؟ إذا كنت ستتمكن من ذلك، فكم المدة التي ستستغرقها؟ إذا لم تتمكن من ذلك، فما السبب؟ **لا. المرابحة الشهرية تساوي AED 131.15. ومن ثم فإن المدفوعات لا تغطي حتى المرابحة.**

e. ما الحد الأدنى من المدفوعات الشهرية الذي يمكّنك من سداد الدين؟ **AED 131.16**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدم مهارات التفكير العليا

61. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب تعبيرًا لوغاريتميًا لكل حالة. ثم اكتب التعبير الممتد.

a. ناتج الضرب وناتج القسمة **نموذج الإجابة:** $\log_8 \frac{xz^2}{5} = \log_8 x + \log_8 z - \log_8 5$

b. ناتج الضرب والأس **نموذج الإجابة:** $\log_b m^2p^6 = 4\log_b m + 6\log_b p$

c. ناتج الضرب وناتج القسمة والأس **نموذج الإجابة:** $\log_b \frac{j^8k}{h^{-5}} = 8\log_b j + \log_b k - 5\log_b h$

62. **الفرضيات** استخدم خصائص الأسس لإثبات خاصية الأسس للوغاريتمات. **انظر الهامش.**

63. **الكتابة في الرياضيات** اشرح سبب صحة المعادلات التالية. $\log_b b = 1$ .63b $b^1 = b$ حيث إنّ .63a

a. $\log_b 0 = 1$ b. $\log_b b = 1$ c. $\log_b b^x = x$

.$\log_b 1 = 0$ حيث إنّ $b^0 = 1$.$\log_b b^x = x$ حيث إنّ $b^x = b^x$

64. **تحفيز** حوّل إلى أبسط صورة $\log_{\sqrt{9}}(a^2)$ لإيجاد القيمة العددية الدقيقة. **انظر الهامش.**

65. **أيها لا ينتمي إلى المجموعة؟** أوجد التعبير الذي لا ينتمي إلى المجموعة. اشرح.

$\log_b 24 = \log_b 2 + \log_b 12$ $\quad$ $\log_b 24 = \log_b 20 + \log_b 4$

$\log_b 24 = \log_b 8 + \log_b 3$ $\quad$ $\log_b 24 = \log_b 4 + \log_b 6$

$4\log_b 20 \log_b \neq 24\log_b$؛ جميع الخيارات الأخرى تساوي $24\log_b$.

66. **الاستنتاج** استخدم خصائص اللوغاريتمات لإثبات أنّ $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 8.**

67. **تحفيز** حوّل إلى أبسط صورة $x^{2\log_x 5 - \log_x 2}$ لإيجاد القيمة العددية الدقيقة.

68. **الكتابة في الرياضيات** وضح مدى ارتباط خصائص الأسس واللوغاريتمات. مع ذكر أمثلة توضح خاصيتي ناتج القسمة والأس للوغاريتمات على غرار المثال الوارد في بداية الدرس الذي يوضح خاصية ناتج الضرب. **انظر ملحق إجابات الوحدة 8.**

606 / 475

٨:٤٩ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

تدريب على الاختبار المعياري

69. أوجد نموذج البيانات.

D 19 ,21 ,15 ,17 ,6 ,7 ,23 ,12 ,11 ,22

A 11 C 16

B 15 D لا يوجد نموذج.

70. **اختبار الكفاءة الدراسية/اختيار القبول** ما تأثير ذلك في التمثيل البياني للمعادلة $y = 4x^2$ عند تغييرها إلى $y = 2x^2$؟ **H**

F يدور التمثيل البياني بمقدار 90 درجة حول نقطة الأصل.

G يقل عرض التمثيل البياني.

H يزيد عرض التمثيل البياني.

J يمثل التمثيل البياني للمعادلة $y = 2x^2$ انعكاسًا للتمثيل البياني $y = 4x^2$ عبر المحور x.

K لا يتغير التمثيل البياني.

71. **إجابة قصيرة** في العلاقة $y = 6.5(1.07)^x$، يمثل x عدد السنوات منذ عام 2000، ويمثل y العدد التقريبي بالمليون للمواطنين الأمريكيين الذين يبلغون من العمر 7 سنوات فأكثر والذين ذهبوا إلى التخييم مرتين أو أكثر في ذلك العام. صف كيف يتغير عدد ملايين الأمريكيين الذين يذهبون إلى التخييم بمرور الوقت. **تنمو بمعدل أسي**

72. ما التقاطعات مع المحور x للتمثيل البياني للمعادلة $y = 4x^2 - 3x - 1$؟ **D**

A $-\frac{1}{4}$ ، 1 C -1 ، 1

B $\frac{1}{4}$ ، -1 D -1 و $-\frac{1}{4}$

مراجعة شاملة

حلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من الحل. (الدرس 4-8)

73. $\log_3 (3x - 1) = \log_3 (2x^2)$ $\frac{1}{2}$

74. $\log_{10} (x^2 + 1) = 1$ ± 3

75. $\log_{10} (x^2 - 10x) = \log_{10} (-21)$ لا يوجد حل

أوجد قيمة كل تعبير. (الدرس 3-8)

76. $\log_{10} 0.001$ -3

77. $\log_4 16^x$ $2x$

78. $\log_3 27^x$ $3x$

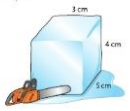
79. **الكهرباء** يمكن حساب شدة التيار بالأمبير I التي يستخدمها جهاز باستخدام الصيغة $I = \left(\frac{P}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$، حيث يمثل P القدرة بالواط ويمثل R المقاومة بالأوم. ما مقدار التيار الذي يستخدمه الجهاز إذا كان $P = 120$ واط و $R = 3$ أوم؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. 6.3

حدّد ما إذا كان كل زوجين من الدوال يمثلان دوال متعاكسة. اكتب نعم أو لا.

80. $f(x) = x + 73$
$g(x) = x - 73$ نعم

81. $g(x) = 7x - 11$
$h(x) = \frac{1}{7}x + 11$ لا

82. **النحت** يستعد أحمد لصناعة تحفة من الثلج. لديه قالب من الثلج يرغب في تقليل حجمه عن طريق نحت المقدار ذاته من الطول والعرض والارتفاع. كما يريد أن يقلل حجم قالب الثلج ليصبح 24 cm مكعبًا.



a. اكتب معادلة كثيرة الحدود لنمذجة الموقف. $(3 - x)(4 - x)(5 - x) = 24$

b. ما المقدار الذي يجب نحته من كل بعد من الأبعاد؟ 1 cm

مراجعة المهارات

حل كل معادلة أو متباينة فيما يلي. تحقق من الحل.

83. $3^{4x} = 3^{3-x}$ $\frac{3}{5}$

84. $3^{2n} \leq \frac{1}{9}$ $\{n \mid n \leq -1\}$

85. $3^{5x} \cdot 81^{1-x} = 9^{x-3}$ 10

86. $49^x = 7^{x^2-15}$ $-3, 5$

87. $\log_2 (x + 6) > 5$ $\{x \mid x > 26\}$

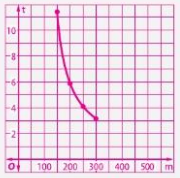
88. $\log_5 (4x - 1) = \log_5 (3x + 2)$ 3

4 التقويم

الكرة البلورية أخبر الطلاب أنهم سيتعلمون في الدرس التالي حل المعادلات باستخدام اللوغاريتمات العادية (الأساس 10). اطلب منهم كتابة ما يعتقدونه عن مدى ارتباط ما تعلموه اليوم بالدرس التالي الذي سيدرسونه.

إجابات إضافية

60c.



62. $m^p = m^p$
$(b^{\log_b m})^p = b^{\log_b (m^p)}$
$b^{\log_b mp} = b^{\log_b (m^p)}$
$\log_b mp = \log_b (m^p)$
$p \log_b m = \log_b (m^p)$

64. $\log_{\sqrt{a}} (a^2) = x$
$(\sqrt{a})^x = a^2$
$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^x = a^2$
$a^{\frac{x}{2}} = a^2$
$\frac{x}{2} = 2$
$x = 4$

التدريس المتمايز

التوسع وضح للطلاب ما يلي:

$\log_{10} 3 \approx 0.4771$
$\log_{10} 30 \approx 1.4771$
$\log_{10} 300 \approx 2.4771$
$\log_{10} 3000 \approx 3.4771$

اطلب من الطلاب توقع قيمة $\log_{10} 30{,}000$ 4.4771

اطلب من الطلاب استخدام خصائص اللوغاريتمات لشرح هذا النمط. شرح نموذجي: يمكن كتابة 3 و30 و300 و3000 بالصيغة 3×10^0 و 3×10^1 و 3×10^2 و 3×10^3 على التوالي. إذا يمكن إعادة كتابة اللوغاريتمات ذات الأساس 10 لكل منها في صورة مجموع لوغاريتمين. على سبيل المثال، يمكن كتابة $\log_{10} 3000$ في صورة $\log_{10} (3 \times 10^3)$. ثم يلي ذلك $\log_{10} (3 \times 10^3) = \log_{10} 3 + \log_{10} 10^3 = \log_{10} (3) + 3 = 3.4771$.

606 / 475

٨:٤٩ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

الدرس 6-8

1 محور التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 6–8 تحويل التعابير إلى أبسط صورة وحل المعادلات باستخدام خصائص اللوغاريتمات.

الدرس 6–8 حل المعادلات والمتباينات الأسية باستخدام اللوغاريتمات العادية. إيجاد قيمة التعابير اللوغاريتمية باستخدام صيغة تغيير الأساس.

بعد الدرس 6–8 تحليل موقف تمثله دالة أسية. وحل المسألة.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم "لماذا؟" الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- ما وجه المقارنة بين قياس زلزال "هائل" وقياس زلزال "بسيط" على مقياس ريختر؟ أكبر بمقدار الضعف.
- ما وجه المقارنة بين شدة زلزال "هائل" وشدة زلزال "بسيط"؟ أكبر بمقدار 10,000 مرة.
- أين سيظهر زلزال تبلغ شدته نصف الشدة 10^8 في الجدول؟ بين "شديد" و"هائل"

الدرس 6-8

6-8 اللوغاريتمات العادية

السابق	الحالي	لماذا؟
لقد قمت بتحويل التعبيرات إلى أبسط صورة وإيجاد حل المعادلات باستخدام خصائص اللوغاريتمات.	1 إيجاد حل المعادلات والمتباينات الأسية باستخدام اللوغاريتمات العادية. 2 إيجاد قيمة التعبيرات اللوغاريتمية باستخدام صيغة تغيير الأساس.	يستخدم علماء الزلازل مقياس ريختر لقياس شدة أو مقدار الزلزال. يتم تحديد شدة الزلزال باستخدام لوغاريتم سعة الموجات التي سجلتها أجهزة قياس الزلازل. يستند المقياس اللوغاريتمي المستخدم في مقياس ريختر إلى قوى العشرة. على سبيل المثال، يمكن تمثيل زلزال بشدة 6.4 درجات بالصورة $6.4 = \log_{10} x$.

رقم ريختر	الشدة
1	10^1 ضعيف جدا
2	10^2 ضعيف
3	10^3 ضعيف
4	10^4 خفيف
5	10^5 متوسط
6	10^6 قوي
7	10^7 شديد
8	10^8 هائل

1 اللوغاريتمات العادية لقد لاحظت وظيفة لوغاريتم الأساس 10، $y = \log_{10} x$، حيث يستخدم في العديد من التطبيقات. تعرف لوغاريتمات الأساس 10 باسم **اللوغاريتمات العادية**. عادة ما تكتب اللوغاريتمات العادية بدون كتابة العدد السفلي 10.

$$\log_{10} x = \log x, x > 0$$

تحتوي معظم الحاسبات العلمية على مفتاح LOG لتقييم اللوغاريتمات العادية.

مثال 1 أوجد اللوغاريتمات العادية

استخدم الحاسبة لإيجاد قيمة كل من التعبيرات التالية مقربة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

a. $\log 5$

خطوات العملية على الحاسبة: 5 LOG 5.6989700043

$\log 0.6990 \approx 5$

b. $\log 0.3$

خطوات العملية على الحاسبة: 0.3 LOG −.5228787453

$\log 0.5229 - \approx 0.3$

تمرين موجّه

1A. $\log 7$ 0.8451

1B. $\log 0.5$ −0.3010

ترتبط اللوغاريتمات العادية للأعداد التي تختلف حسب قوى العشرة المتكاملة ارتباطًا وثيقًا ببعضها. تذكر أن اللوغاريتم عبارة عن أس. على سبيل المثال، في المعادلة $y = \log x$، يمثل y الأس الذي ترفع إليه العدد 10 للحصول على قيمة x.

$\log x = y$	→ يعني أن →	$10^y = x$
$\log 1 = 0$	حيث	$10^0 = 1$
$\log 10 = 1$	حيث	$10^1 = 10$
$\log 10^m = m$	حيث	$10^m = 10^m$

المفردات الجديدة

اللوغاريتم العادي
common logarithm
صيغة تغيير الأساس
change of base formula

ممارسات في الرياضيات
4 استخدام نماذج الرياضيات.

606 / 475

٨:٤٩ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae
606 / 475

1 اللوغاريتمات العادية

يوضح **المثال 1** كيفية استخدام الحاسبة لحساب اللوغاريتم العادي. يوضح **المثال 2** كيفية استخدام معكوس اللوغاريتمات أو الأس لحل معادلة لوغاريتمية تمثل نموذجًا لتطبيق من الحياة اليومية. يوضح **المثال 3** كيفية حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات. يوضح **المثال 4** كيفية استخدام اللوغاريتمات لحل المتباينات الأسية.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 استخدم الحاسبة لإيجاد قيمة كل من التعابير التالية مقربة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

a. log 6 حوالي 0.7782

b. log 0.35 حوالي −0.4559

2 **المحركات النفاثة** ارجع إلى المثال 2. يمكن أن تصل جهارة صوت المحرك النفاث إلى 125 ديسيبل. بكم مرة تزيد شدة صوت المحرك النفاث عن الحد الأدنى لشدة الصوت المسموع؟ $10^{12.5}$. أو حوالي $10^{12} \times 3$. أي. يساوي 3 تريليونات

3 أوجد قيمة $5^x = .62$. حوالي 2.5643

تستخدم اللوغاريتمات العادية في قياس الصوت. تقدر شدة الموسيقى المسجلة الهادئة بحوالي 36 ديسيبل (dB).

مثال من الحياة اليومية 2 حل المعادلات اللوغاريتمية

حفل موسيقى الروك الجهارة L بالديسيبل، تساوي $L = 10 \log \frac{I}{m}$، حيث يمثل I شدة الصوت ويمثل m الحد الأدنى من شدة الصوت الذي تسمعه أذن الإنسان. يستطيع السكان الذين يقيمون على بعد عدة كيلومترات من موقع الحفل الموسيقي سماع الموسيقى بشدة مقدارها 66.6 ديسيبل. كم ضعفًا كان هذا الصوت بالنسبة إلى الحد الأدنى من شدة الصوت المسموع للإنسان. إذا كانت قيمة m محددة بأنها تساوي 1؟

$L = 10 \log \frac{I}{m}$	المعادلة الأصلية
$66.6 = 10 \log \frac{I}{1}$	عوض عن L بـ 6.66 وعن m بـ 1
$6.66 = \log I$	اقسم كل طرف على 10 وبسّط
$I = 10^{6.66}$	الصيغة الأسية
$I \approx 4{,}570{,}882$	استخدم الحاسبة

بلغ الصوت الذي سمعه السكان 4,570,000 تقريبًا ضعف الحد الأدنى من شدة الصوت المسموع بالنسبة إلى أذن الإنسان.

تمرين موجه

2. **الزلازل** يرتبط مقدار الطاقة E بوحدة erg التي يطلقها الزلزال بمقدار شدته على مقياس ريختر M من خلال المعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استخدم المعادلة لإيجاد مقدار الطاقة التي أطلقها زلزال سومطرة عام 2004، الذي بلغت قوته 9.0 درجات على مقياس ريختر مما أسفر عن حدوث تسونامي. 2×10^{25} ergs تقريبًا

الربط بالحياة اليومية
مهندسو الصوتيات يهتم مهندسو الصوتيات بتقليل الأصوات غير المرغوب فيها والتحكم في الضجيج وإنتاج الأصوات المعدة من الأنظمة على الأصوات البعيدة الموجات فوق الصوتية. والسونار وإعادة إنتاج الصوت. يتطلب العمل في هذا المجال الحصول على درجة بكالوريوس على الأقل.

إذا تعذر كتابة كلا طرفي المعادلة الأسية في صورة أسس للأساس ذاته بسهولة، يمكنك الحل عن طريق أخذ اللوغاريتم لكلا الطرفين.

مثال 3 حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات

أوجد حل $4^x = 19$. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$4^x = 19$	المعادلة الأصلية
$\log 4^x = \log 19$	خاصية المساواة في اللوغاريتمات
$x \log 4 = \log 19$	خاصية الأسس في اللوغاريتمات
$x = \frac{\log 19}{\log 4}$	اقسم كلا الطرفين على log 4
$x \approx 2.1240$	استخدم الحاسبة

[−10, 10] scl: 1 في [−5, 25] scl: 1

الحل هو 2.1240 تقريبًا.

التحقق يمكنك التحقق من هذه الإجابة بيانيًا باستخدام حاسبة التمثيل البياني. مثل بيانيًا المستقيم $y = 4^x$ والمستقيم $y = 19$. ثم استخدم قائمة CALC لإيجاد نقطة التقاطع بين التمثيلين البيانيين. نقطة التقاطع قريبة جدًا من الإجابة التي تم الحصول عليها جبريًا. ✓

تمرين موجه

3A. $3^x = 15$ ≈2.4650

3B. $6^x = 42$ ≈2.0860

حق النشر والنقل © محفوظ لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

٨:٤٩ م ٦٨٪
://elib.moe.gov.ae

يمكن استخدام الإستراتيجيات نفسها المستخدمة في حل المعادلات الأسيّة لحل المتباينات الأسيّة.

مثال 4 حل المتباينات الأسيّة باستخدام اللوغاريتمات

حُلّ المتباينة $3^{5y} < 7^{y-2}$. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$\log 3^{5y} < \log 7^{y-2}$	خاصية التباين في الدوال اللوغاريتمية
$5y \log 3 < (y-2) \log 7$	خاصية الأسس في اللوغاريتمات
$5y \log 3 < y \log 7 - 2 \log 7$	خاصية التوزيع
$5y \log 3 - y \log 7 < -2 \log 7$	اطرح $y \log 7$ من كلا الطرفين
$y(5 \log 3 - \log 7) < -2 \log 7$	خاصية التوزيع
$y < \frac{-2 \log 7}{5 \log 3 - \log 7}$	اقسم كلا الطرفين على $5 \log 3 - \log 7$
$\{y \mid y < -1.0972\}$	استخدم الحاسبة

التحقق اختبر $y = -2$.

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$3^{5(-2)} \stackrel{?}{<} 7^{(-2)-2}$	عوض عن y بـ -2
$3^{-10} \stackrel{?}{<} 7^{-4}$	بسّط
$\frac{1}{59,049} < \frac{1}{2401}$ ✓	خاصية الأس السالب

تمرين موجّه

حُلّ كل متباينة مما يلي. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

4A. $3^{7x} \geq 6^{x+1}$ $\{x \mid x \geq 4.4190\}$

4B. $4^{y} < 5^{2y+1}$ $\{y \mid y > -0.8782\}$

نصيحة دراسية

حل المتباينات تذكر أنه يجب تغيير اتجاه المتباينة إذا تم ضرب كلا الطرفين في عدد سالب أو قسمتهُ عليه، بما أنّ $\log 3 - \log 7 > 0$. إذاً، لن تتغير المتباينة.

2 صيغة تغيير الأساس

صيغة تغيير الأساس تتيح لك صيغة تغيير الأساس كتابة التعبيرات اللوغاريتمية المتكافئة التي لها أساسات مختلفة.

المفهوم الأساسي صيغة تغيير الأساس

الرموز: بالنسبة إلى كل الأعداد الموجبة a و b و n، حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$.

$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$ ← log العدد الأصلي بالنسبة إلى الأساس b / ← log الأساس القديم بالنسبة إلى الأساس b

مثال: $\log_3 11 = \frac{\log_{10} 11}{\log_{10} 3}$

لإثبات هذه الصيغة، نفترض أنّ $\log_a n = x$.

$a^x = n$	تعريف اللوغاريتم
$\log_b a^x = \log_b n$	خاصية المساواة في اللوغاريتمات
$x \log_b a = \log_b n$	خاصية الأسس في اللوغاريتمات
$x = \frac{\log_b n}{\log_b a}$	اقسم كلا الطرفين على $\log_b a$
$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$	عوض عن x بـ $\log_a n$

الربط بالتاريخ والرياضيات

جون نابير (1550–1617)

كان جون نابير عالم رياضيات وعالم لاهوت اسكتلندي. وهو أول من بدأ استخدام اللوغاريتمات للمساعدة في إجراء العمليات الحسابية. كما أنّه مشهور أيضاً بترويج استخدام النقطة العشرية.

التدريس المتمايز ض م ع م

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي اطلب من الطلاب تذكر أنّ معادلة مثل $4^x = 19$ من المثال 3 يمكن كتابتها بالصيغة اللوغاريتمية كالتالي $x = 19 \log_4$. بالرغم من استحالة تقدير قيمة هذا اللوغاريتم مباشرة، يمكن استخدام صيغة تغيير الأساس للحصول على القيمة الصحيحة $x \approx 2.1234$.

مثال إضافي

4 حُلّ المتباينة $3^{7x} > 2^{5x-3}$. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$\{x \mid x > -0.4922\}$

التركيز على محتوى الرياضيات

اللوغاريتمات العادية تُسمى اللوغاريتمات ذات الأساس 10 *باللوغاريتمات العادية*. عندما يكون أساس اللوغاريتم غير مكتوب، يُفترض أنّ الأساس يساوي 10. عندما يكون لديك تعبير لوغاريتمي له أي أساس، يمكنك إيجاد قيمته باستخدام صيغة تغيير الأساس لتحويله إلى تعبير يتضمن لوغاريتمات عادية.

2 صيغة تغيير الأساس

يوضح **المثال 5** كيفية التعبير عن تعبير لوغاريتمي له أي أساس بدلالة اللوغاريتمات العادية.

نصائح للمعلمين الجدد

الاستنتاج أثناء مناقشة صيغة تغيير الأساس، وضح أنّ الأساس b الذي يغيره الطلاب يمكن ألا يساوي 10. يمكن استخدام أي أساس، ولكن الأساس 10 هو الأكثر شيوعاً، لأنه يتيح تقدير قيمة اللوغاريتم باستخدام الحاسبة. عندما يكون أساس اللوغاريتم غير مكتوب، يُفترض أنّ الأساس يساوي 10.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

اللوحة البيضاء التفاعلية اعرض نموذجًا مثل $\log_{\square} \square = \frac{\log_{\square} \square}{\log_{\square} \square}$ اسحب القيم من اللوغاريتم الأصلي لشرح صيغة تغيير الأساس.

606 / 475

٨:٥٠ م %٦٧
://elib.moe.gov.ae
606 / 475

تجعل صيغة تغيير الأساس من الممكن إيجاد قيمة التعبير اللوغاريتمي بالنسبة إلى أي أساس من خلال ترجمة التعبير إلى تعبير آخر يتضمن لوغاريتمات عادية.

مثال 5 صيغة تغيير الأساس

عبّر عن $\log_3 20$ بدلالة اللوغاريتمات العادية. ثم قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$\log_3 20 = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 3}$ صيغة تغيير الأساس

≈ 2.7268 استخدم الحاسبة

تمرين موجّه

$\frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 6} \approx 1.1606$

5. عبّر عن $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتمات العادية. ثم قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

تحقق من فهمك

مثال 1 استخدم الحاسبة لإيجاد قيمة كل من التعبيرات التالية مقربة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

1. $\log 5$ 0.6990 2. $\log 21$ 1.3222 3. $\log 0.4$ −0.3979 4. $\log 0.7$ −0.1549

مثال 2 5. **العلوم** يرتبط مقدار الطاقة E بوحدة erg التي يطلقها الزلزال بمقدار شدته على مقياس ريختر M من خلال المعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استخدم المعادلة لإيجاد مقدار الطاقة التي أطلقها زلزال تشيلي 1960. الذي بلغت قوته 8.5 درجات على مقياس ريختر. 3.55×10^{24} ergs

مثال 3 أوجد حل كل من المعادلات التالية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

6. $6^x = 40$ 2.0588 7. $2.1^{a+2} = 8.25$ 0.8442 8. $7^{2t} = 20.42$ ±1.2451 9. $b^{-3} = 5^b$ 9.1237

مثال 4 حُلّ كل متباينة مما يلي. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

10. $5^{4n} > 33$ $\{n \mid n > 0.5431\}$ 11. $6^{p-1} \leq 4^p$ $\{p \mid p \leq 4.4190\}$

مثال 5 عبّر عن كل لوغاريتم بدلالة اللوغاريتمات العادية. ثم قرّب قيمته إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

12. $\log_9 7$ 13. $\log_4 23$ 14. $\log_9 13$ 15. $\log_2 5$ **انظر الهامش.** 12–15

التمرين وحل المسائل

مثال 1 استخدم الحاسبة لإيجاد قيمة كل من التعبيرات التالية مقربة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

16. $\log 3$ 0.4771 17. $\log 11$ 1.0414 18. $\log 3.2$ 0.5051
19. $\log 8.2$ 0.9138 20. $\log 0.9$ −0.0458 21. $\log 0.04$ −1.3979

مثال 2 22. **التفكير المنطقي** لدى فاطمة كاتم صوت جديد مثبت في سيارتها انخفض مستوى ضجيج المحرك من 85 ديسيبل إلى 73 ديسيبل.

a. كم ضعفاً يبلغ صوت السيارة المثبت بها كاتم الصوت القديم بالنسبة إلى الحد الأدنى من شدة الصوت المسموع للإنسان. إذا كانت قيمة m محددة بأنها ؟ حوالي 316,227,766 ضعفاً تقريبًا

b. كم ضعفاً يبلغ صوت السيارة المثبت بها كاتم صوت جديد بالنسبة إلى الحد الأدنى من شدة الصوت المسموع للإنسان؟ أوجد النسبة المئوية لانخفاض شدة الصوت مع كاتم الصوت الجديد.

حوالي 19,952,623 ضعفاً، حوالي 93.7%

© McGraw-Hill Education حق النشر محفوظ

مثال إضافي

5 عبّر عن $\log_5 140$ بدلالة اللوغاريتمات العادية. ثم قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$\log_5 140 = \frac{\log_{10} 140}{\log_{10} 5}$

$\log_5 140 \approx 3.0704$

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1–15 للتأكد من الفهم.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس ممارسات في الرياضيات

التفكير المنطقي يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط لحلها. حيث يحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف ويضعون تخمينات لصيغة الحل ومعناها ويخططون لمسار الحل بدلًا من مجرد القفز إلى محاولة حل.

إجابات إضافية

12. $\frac{\log 7}{\log 3} \approx 1.7712$
13. $\frac{\log 23}{\log 4} \approx 2.2618$
14. $\frac{\log 13}{\log 9} \approx 1.1674$
15. $\frac{\log 5}{\log 2} \approx 2.3219$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
ق م مبتدئ	16–38 زوجي، 68. 70–92	17–37 فردي، 73–76	16–38 زوجي، 68. 70–72 77–92
ه م أساسي	17–39 فردي، 40. 41–65 فردي، 66–68. 70–92	38. 16–76 73	39–68 .70–72 77–92
م متقدم	39–86 (اختياري، 87–92)		

٨:٥٠ م ٦٧% ://elib.moe.gov.ae

تدريس ممارسات في الرياضيات

الضبط يحاول الطلاب المتفوقون في الرياضيات استخدام تعريفات واضحة في استنتاجاتهم والحساب بدقة وكفاءة والاستفادة بشكل واضح من التعريفات.

مثال 3 حُلّ كل من المعادلات التالية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

23. $8^x = 40$ 1.7740
24. $5^x = 55$ 2.4899
25. $2.9^{a-4} = 8.1$ 5.9647
26. $9^{b-1} = 7^b$ 8.7429
27. $13^{x^2} = 33.3$ ±1.1691
28. $15^{x^2} = 110$ ±1.3175

مثال 4 حُلّ كل متباينة مما يلي. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

29. $6^{3n} > 36$ $\{n \mid n > 0.6667\}$
30. $2^{4x} \leq 20$ $\{x \mid x \leq 1.0805\}$
31. $3^{r-1} \leq 4^r$ $\{y \mid y \geq -3.8188\}$
32. $5^{p-2} \geq 2^p$ $\{3.5129 \leq p \mid p\}$

مثال 5 عبّر عن كل لوغاريتم بدلالة اللوغاريتمات العادية. ثم قرّب قيمته إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

33. $\log_7 18$ $\frac{\log 18}{\log 7} \approx 1.4854$
34. $\log_5 31$ $\frac{\log 31}{\log 5} \approx 2.1337$
35. $\log_2 16$ $\frac{\log 16}{\log 2}$
36. $\log_4 9$ $\frac{\log 9}{\log 4} \approx 1.5850$
37. $\log_3 11$ $\frac{\log 11}{\log 3} \approx 2.1827$
38. $\log_6 33$ $\frac{\log 33}{\log 6} \approx 1.9514$

39. **الحيوانات الآيلة** يمكن نمذجة عدد مالكي الحيوانات الآيلة n بالآلاف بعد عدد t من السنوات بواسطة المعادلة $n = 35t(\log_4 (t + 2))$. لنفرض أن $t = 0$ تمثل 2000. استخدم صيغة تغيير الأساس للإجابة عن الأسئلة التالية.

a. كم كان عدد مالكي الحيوانات الآيلة في عام 2010؟ 62,737 مالكًا

b. كم يستغرق الأمر حتى يصل عدد مالكي الحيوانات الآيلة إلى 80,000 مالك؟ متى سيحدث هذا؟ 2022

40. **الدقة** منذ خمس سنوات مضت، كان عدد الجماعة الأحيائية للدب الأشهب في إحدى الحدائق الوطنية 325 دبًا. وأصبح عددها اليوم 450 دبًا. تشير الدراسات إلى أن الحديقة بإمكانها دعم زيادة عدد الجماعة الأحيائية حتى 750 دبًا. 0.067 أو 6.7%

a. ما المعدل السنوي المتوسط لزيادة الجماعة الأحيائية إذا كان الدب الأشهب يتكاثر مرة واحدة في العام؟

b. كم عامًا سيستغرق الأمر حتى يصل إلى أقصى عدد إذا استمر معدل الزيادة في الجماعة الأحيائية بالمعدل المتوسط نفسه؟ 8 yr

حُلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي: قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

41. $3^x = 40$ 3.3578
42. $5^{3n} = 15$ 0.5609
43. $4^{n+2} = 14.5$ −0.0710
44. $8^{x-4} = 6.3$ 4.8851
45. $7.4^{n-3} = 32.5$ 4.7393
46. $3.1^{y-5} = 9.2$ 6.9615
47. $5^x \geq 42$ $\{x \mid x \geq 2.3223\}$
48. $9^{2a} < 120$ $\{a \mid a < 1.0894\}$
49. $3^{4x} \leq 72$ $\{x \mid x \leq 0.9732\}$
50. $7^{2n} > 52^{4n+3}$ $\{n \mid n < -0.9950\}$
51. $6^p \leq 13^{3-p}$ $\{p \mid p \leq 2.9437\}$
52. $2^{y+3} \geq 8^{3y}$ $\{y \mid y \leq 0.3750\}$

عبّر عن كل لوغاريتم بدلالة اللوغاريتمات العادية. ثم قرّب قيمته إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

53. $\log_4 12$ $\frac{\log 12}{\log 4} \approx 1.7925$
54. $\log_3 21$ $\frac{\log 21}{\log 3} \approx 2.7712$
55. $\log_8 2$ $\frac{\log 2}{\log 8} \approx 0.3333$
56. $\log_6 7$ $\frac{\log 7}{\log 6} \approx 1.0860$
57. $\log_5 (2.7)^2$ $\frac{\log 7.29}{\log 5} \approx 1.2343$
58. $\log_7 \sqrt{5}$ $\frac{\log \sqrt{5}}{\log 7} \approx 0.4135$

59. **الموسيقى** السنت الموسيقي هي وحدة في مقياس لوغاريتمي لطبقة الصوت أو الفترات الموسيقية النسبية. الجواب الواحد يعادل 1200 سنت. يمكن استخدام الصيغة $n = 1200\left(\log_2 \frac{a}{b}\right)$ لتحديد الفرق بالسنت بين نغمتين يترددين هما a وb.

a. أوجد الفترة بالسنت عندما يتغير التردد من 443 هرتز (Hz) إلى 415Hz. 113.03 سنتًا

b. إذا كانت الفترة تساوي 55 سنتًا وكان التردد الأولي يساوي 225 Hz. فأوجد التردد النهائي. حوالي 218 Hz

© حقوق النشر محفوظة لصالح شركة ماكجروهيل للتعليم

588 | الدرس 6–8 | اللوغاريتمات العادية

٨:٥٠ م %٦٧
://elib.moe.gov.ae
606 / 475

حُلّ كل من المعادلات التالية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

61. $\pm\sqrt{5} = \pm 2.2361$

60. $10^{x^2} = 60$ ± 1.3335 62. $4^{x^2-3} = 16$ $9^{6y \cdot 2} = 3^{3y+1}$ 0.5556

63. $8^{2x-4} = 4^{x+1}$ 3.5 64. $16^x = \sqrt{4^{x+3}}$ 1 65. $2^y = \sqrt{3^{y-1}}$ −3.8188

66. **علوم البيئة** يجري أحد مهندسي البيئة اختبارًا لآبار مياه الشرب في المجتمعات الساحلية للتحقق من عدم وجود تلوث. لا سيما مستويات الزرنيخ غير الآمنة. الحد القياسي الآمن من الزرنيخ يعادل 0.025 جزءًا في المليون (ppm). كما أنه يجب أن يظل الرقم الهيدروجيني لمستوى الزرنيخ عن 9.5. صيغة تركيز أيون الهيدروجين هي $pH = -\log [H^+]$. (تلميح: يشغل كيلوجرام واحد من الماء حيز لتر واحد تقريبًا. $1 \text{ ppm} = 1 \text{ mg/kg}$).

a. افترض أن تركيز أيون الهيدروجين في البئر يساوي 1.25×10^{-11}. هل على مهندس البيئة أن يقلق بشأن محتوى الزرنيخ العالي جدًا؟ نعم؛ $9.5 < 10.9$

b. وجد مهندس البيئة ملليجرامًا واحدًا من الزرنيخ في عينة مقدارها 3 لترات من الماء. هل يكون البئر آمنًا؟ لا

c. ما نسبة تركيز أيون الهيدروجين التي تتوافق مع مستوى الرقم الهيدروجيني 9.5 المبين للقلق؟ 3.16×10^{-10}

67. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سيوجد حل المعادلة الأسية $4^x = 13$. a. **ينحصر الحل بين 1.8 و1.9.**

a. **جدوليًا** أدخل الدالة $y = 4^x$ في حاسبة التمثيل البياني، وأنشئ جدولًا يقيم الدالة. وتنقل عبر الجدول لإيجاد x عندما يكون $y = 13$.

b. **بيانيًا** مثّل بيانيًا $y = 4^x$ و$y = 13$ على الشاشة نفسها. استخدم خاصية **intersect** لإيجاد نقطة التقاطع. **(1.85, 13)**

c. **عدديًا** أوجد حل المعادلة جبريًا. هل تؤدي جميع الطرق إلى النتيجة نفسها؟ **نعم؛ تؤدي كل الطرق إلى الحل 1.85. يجب أن تؤدي كلها إلى النتيجة نفسها لأنك بدأت بالمعادلة نفسها. إذا كان الأمر بخلاف ذلك، فهذا يعني وجود خطأ في الحل.**

مهارات التفكير العليا المسائل استخدام مهارات التفكير العليا

68. **التفكير الناقد** يحل سامي وسالم المعادلة $4^{3p} = 10$. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

سامي	سالم
$4^{3p} = 10$	$4^{3p} = 10$
$\log 4^{3p} = \log 10$	$\log 4^{3p} = \log 10$
$p \log 4 = \log 10$	$3p \log 4 = \log 10$
$p = \frac{\log 10}{\log 4}$	$p = \frac{\log 10}{3 \log 4}$

سالم؛ نسي سامي طرح 3 من الأس عندما أخذ اللوغاريتم لكل من الطرفين.

69. **تحفيز** حل $\log_a 3 = \log_{\sqrt{a}} x$ لإيجاد x. مع شرح كل خطوة. **انظر الهامش.**

70. **الاستنتاج** اكتب $\frac{\log_9 9}{\log_3 3} = \log_9 9$ في صورة لوغاريتم مفرد. $\log_9 9$

71. **البرهان** أوجد قيم كل من $\log_{27} 27$، $\log_{27} 3$. حدّد العلاقة بين $\log_a b$ و$\log_b a$، وبرهن هذا التخمين. **انظر الهامش.**

72. **الكتابة في الرياضيات** وضح مدى ارتباط الأسس واللوغاريتمات. مع ذكر أمثلة مثل طريقة حل المعادلة اللوغاريتمية باستخدام الأسس وطريقة حل المعادلة الأسية باستخدام اللوغاريتمات.

72. اللوغاريتمات عبارة عن أسس. لحل المعادلات اللوغاريتمية. اكتب كلًا من طرفي المعادلة مستخدمًا الأسس ثم أوجد الحل باستخدام خاصية المعكوس للأسس واللوغاريتمات. لحل المعادلات الأسية، استخدم خاصية المساواة في اللوغاريتمات وخاصية الأسس في اللوغاريتمات.

التمثيلات المتعددة

في التمرين 67. يستخدم الطلاب حاسبة التمثيل البياني والجبر لحل المعادلة الأسية جبريًا وبيانيًا ومقارنة النتائج.

تدريس ممارسات في الرياضيات

نقد يُمكن للطلاب المتفوقين في مادة الرياضيات أيضًا المقارنة بين كفاءة فرضيتين مقبولتين والتفريق بين المنطق السليم والمنطق الخاطئ. وفي حالة وجود خطأ في فرضية ما، يمكنهم توضيح ماهية هذا الخطأ.

انتبه!

تحليل الخطأ بالنسبة إلى التمرين 68. وضح للطلاب أنّه في خاصية الأسس في اللوغاريتمات، $\log_b m^p = p \log_b m$. يمثل p الأس الكلي المرفوع إليه m.

إجابات إضافية

69. $\log_{\sqrt{a}} 3 = \log_a x$ المعادلة الأصلية

$\frac{\log_a 3}{\log_a \sqrt{a}} = \log_a x$ صيغة تغيير الأساس

$\frac{\log_a 3}{\frac{1}{2}} = \log_a x$ $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$2 \log_a 3 = \log_a x$ ضرب البسط والمقام في 2.

$\log_a 3^2 = \log_a x$ خاصية الأسس في اللوغاريتمات

$3^2 = x$ خاصية التساوي في الدوال اللوغاريتمية

$9 = x$ بسّط.

71. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$؛ التخمين: $\log_{27} 3 = \frac{1}{3} \log_3 27 = 3$

البرهان:

$\log_a b \stackrel{?}{=} \frac{1}{\log_b a}$ التعبير الأصلي

$\frac{\log_b b}{\log_b a} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\log_b a}$ صيغة تغيير الأساس

$\frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$ خاصية المعكوس للأسس واللوغاريتمات

٨:٥٠ م ٦٧٪
://elib.moe.gov.ae

4 التقويم

أخبار الأمس اطلب من الطلاب كتابة كيف ساعدتهم معرفة خصائص اللوغاريتمات على حل المعادلات والمتباينات الأسية في درس اليوم.

إجابات إضافية

74a. $3d + 2v + 2m = 16.29$, $d + 3v + 4m = 19.84$, $2d + v + m = 9.14$

74b. الأفلام الوثائقية: AED 1.99
ألعاب الفيديو: AED 2.79
الأفلام: AED 2.37

تدريب على الاختبار المعياري

73. أي من التعبيرات يمثل $f(g(x))$ إذا كان $f(x) = x^2 + 4x + 3$ و $g(x) = x - 5$؟
A $x^2 + 4x - 2$
B $x^2 - 6x + 8$
C $x^2 - 9x + 23$
D $x^2 - 14x + 6$

74. **إجابة موسعة** استأجرت فوزية 3 أفلام وثائقية واثنين من ألعاب الفيديو وفيليمين. بلغت التكلفة AED 16.29. في الأسبوع التالي، استأجرت فيلمًا واثنتين واحدًا و3 ألعاب فيديو و4 أفلام ليصل إجمالي التكلفة إلى AED 19.84. في الأسبوع الثالث، استأجرت فيلمين واثنتين ولعبة فيديو واحدة وفيلمًا واحدًا ليصل إجمالي التكلفة إلى AED 9.14.
a. اكتب نظام معادلات لتحديد تكلفة استئجار كل عنصر على حدة. a, b. انظر الهامش.
b. كم تبلغ تكلفة استئجار كل عنصر؟

75. **الهندسة** إذا ازدادت مساحة سطح المكعب بالعامل 9. فما التغير الذي سيطرأ على طول أضلاع المكعب؟ G
F الطول يساوي مثلي الطول الأصلي.
G الطول يساوي 3 أمثال الطول الأصلي.
H الطول يساوي 6 أمثال الطول الأصلي.
J الطول يساوي 9 أمثال الطول الأصلي.

76. **اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول** أي مما يلي يصف بدقة أكثر إزاحة التمثيل البياني $y = (x + 4)^2 - 3$ تجاه التمثيل البياني $y = (x - 1)^2 + 3$؟ E
A إلى أسفل 1 وإلى اليمين 3
B إلى أسفل 6 إلى اليسار 5
C إلى أعلى 1 وإلى اليسار 3
D إلى أعلى 1 وإلى اليمين 3
E إلى أعلى 6 وإلى اليمين 5

مراجعة شاملة

حُلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من الحل (الدرس 5-8)

77. $\log_5 7 + \frac{1}{2}\log_5 4 = \log_5 x$ 14
78. $2\log_2 x - \log_2 (x + 3) = 2$
79. $\log_6 48 - \log_6 \frac{16}{5} + \log_6 5 = \log_6 5x$ 15
80. $\log_{10} a + \log_{10} (a + 21) = 2$

حُلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي: (الدرس 4-8)

81. $\log_4 x = \frac{1}{2}$ 2
82. $\log_{81} 729 = x$ $\frac{3}{2}$
83. $\log_8 (x^2 + x) = \log_8 12$ $-4, 3$
84. $\log_8 (3y - 1) < \log_8 (y + 5)$ $\left\{y \mid \frac{1}{3} < y < 3\right\}$

85. **الإبحار** مساحة الشراع مثلث الشكل تساوي $16x^4 - 60x^3 - 28x^2 + 56x - 32$ متر مربع. قاعدة المثلث تساوي $x - 4$ أمتار. ما ارتفاع الشراع؟ $32x^3 + 8x^2 - 24x + 16$

86. **إصلاح المنزل** ركب السيد مازن أقفالًا جديدة. تقاضى صانع الأقفال AED 85 مقابل استدعاء الخدمة و AED 25 مقابل كل باب و AED 30 مقابل كل قفل.
a. اكتب معادلة تمثل تكلفة عدد x من الأبواب. $y = 85 + 55x$
b. يريد السيد مازن تغيير أقفال الباب الأمامي والجانبي والخلفي وباب المرآب. فكم ستبلغ تكلفة هذا؟ AED 305

مراجعة المهارات

اكتب معادلة أسية مكافئة.

87. $\log_2 5 = x$ $2^x = 5$
88. $\log_4 x = 3$ $4^3 = x$
89. $\log_5 25 = 2$ $5^2 = 25$
90. $\log_7 10 = x$ $7^x = 10$
91. $\log_4 x = 4$ $6^4 = x$
92. $\log_4 64 = 3$ $4^3 = 64$

التدريس المتمايز

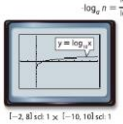
التوسع ذكّر الطلاب بأنّ الصيغة $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ يمكن أن تُستخدم لإيجاد المبلغ النهائي لاستثمار يقوم على المرابحة المركبة. اطلب منهم استخدام اللوغاريتمات لإيجاد عدد السنوات t الذي سيستغرقه الاستثمار ببلغ AED 5000 حتى يصل إلى AED 8000 بنسبة مرابحة مركبة تبلغ 5% بصفة مركبة شهريًا.
حوالي 9.4 أعوام

606 / 475

٨:٥٠ م ٦٧% ://elib.moe.gov.ae

التوسع 6–8 مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

لقد قمت بحل المعادلات اللوغاريتمية جبريًا يمكنك أيضًا حل المعادلات اللوغاريتمية من طريق التمثيل البياني أو استخدام الجدول. تتضمن حاسبة التمثيل البياني $y = \log_{10} x$ كدالة مدمجة. أدخل LOG X,T,θ,n GRAPH لإظهار هذا التمثيل البياني. لتمثيل الدوال اللوغاريتمية التي لها أساس آخر بخلاف 10 بيانيًا، يجب أن تستخدم صيغة تغيير الأساس $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$.



[−2, 8] scl: 1 × [−10, 10] scl: 1

النشاط 1

حَلّ المعادلة $\log_2 (6x - 8) = \log_3 (20x + 1)$.

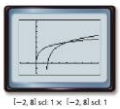
الخطوة 1 مثّل كلًا من طرفي المعادلة بيانيًا.

مثّل كل طرف من طرفي المعادلة بيانيًا باعتباره دالة مستقلة. أدخل $\log_2 (6x - 8)$ باعتباره **Y1**، و$\log_3 (20x + 1)$ باعتباره **Y2** السابق مثّل المعادلتين بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة:

Y= LOG 6 X,T,θ,n − 8) ÷ LOG 2)

ENTER LOG 20 X,T,θ,n + 1) ÷ LOG 3) GRAPH

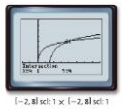


[−2, 8] scl: 1 × [−2, 8] scl: 1

الخطوة 2 استخدم ميزة intersect.

استخدم خاصية **intersect** في قائمة **CALC** لتقريب الزوج المرتب لنقطة تقاطع المنحنيين.

توضح شاشة الحاسبة أنّ الإحداثي x لنقطة تقاطع المنحنيين هو 4. أي أنّ حل المعادلة يساوي 4.



[−2, 8] scl: 1 × [−2, 8] scl: 1

الخطوة 3 استخدم ميزة TABLE.

افحص الجدول لإيجاد قيمة x التي تتساوى عندها قيم y في التمثيل البياني. عند $x = 4$، تتمثل كلتا الدالتين على قيمة لا تساوي 4. ومن ثم، حل المعادلة هو 4.

يمكنك استخدام إجراء مماثل لحل المتباينات اللوغاريتمية باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

(يتبع في الصفحة التالية)

1 محور التركيز

الهدف استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات والمتباينات الأسيّة واللوغاريتمية.

المواد الخاصة لكل مجموعة

- حاسبة التمثيل البياني TI-83/84 Plus أو حاسبة تمثيل بياني من نوع آخر

نصيحة للتدريس

وضح أنّه يمكن استخدام العملية log (مع الأعداد أو التعابير. ذكّر الطلاب بأنّه من الأفضل دائمًا استخدام أقواس القفل في نهاية التعبير.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قسّم الطلاب إلى مجموعات من طالبين أو ثلاثة ذوي قدرات متنوعة. ثم اطلب من مجموعات الطلاب إكمال النشاطين 1 و2 والتمارين 1–4.

النشاط 1

- قبل مناقشة النشاط، اطلب من الطلاب استخدام صيغة تغيير الأساس للتعبير عن كل طرف من طرفي المعادلة بدلالة اللوغاريتمات العشرية.
- تأكد من فهم الطلاب لكيفية قراءة خاصية الجدول لإيجاد قيمة x التي تكون عندها قيم y متساوية.
- اطلب من الطلاب التعويض بالحل في المعادلة الأصلية للتحقق من صحته.

606 / 475

٨:٥١ م ٦٧٪
://elib.moe.gov.ae

مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية تابع

النشاط 2

حُـلّ المتباينة $\log_4 (10x + 1) < \log_5 (16 + 6x)$.

الخطوة 1 أدخل المتباينات.

أعد كتابة المسألة كنظام متباينات.

المتباينة الأولى هي $y < \log_4 (10x + 1)$ أو $y > \log_4 (10x + 1)$. بما أنّ هذه المتباينة تحتوي على الرمز أكبر من، فظلّل المنطقة فوق المنحنى.

أدخل الحد أولاً، ثم استخدم مفتاحي السهم و ENTER لاختيار رمز التظليل أعلى المنحنى.

المتباينة الثانية هي $y < \log_5 (16 + 6x)$. ظلّل المنطقة أسفل المنحنى حيث تحتوي هذه المتباينة على رمز أقل من.

خطوات العملية على الحاسبة: Y= ◀ ◀ ENTER ENTER ▶ ▶ LOG 10 X,T,θ,n + 1) ÷ LOG 4) ENTER ◀ ◀ ENTER ENTER ENTER ▶ ▶ LOG 16) ÷ LOG 5) + 6 X,T,θ,n

الخطوة 2 تمثيل النظام بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: GRAPH

[−2, 4] sc: 1 x [−2, 4] sc: 1

يقع الحد الأيسر من مجموعة الحل حيث تكون المتباينة الأولى غير معرفة. إنّه غير معرف بالنسبة إلى $10x + 1 \le 0$.

$10x + 1 \le 0$

$10x \le -1$

$x \le -\frac{1}{10}$

استخدم خاصية **intersect** في الحاسبة لإيجاد الحد الأيمن. يمكنك استنتاج أنّ مجموعة الحل هي $\{x \mid -0.1 < x < 1.5\}$.

الخطوة 3 استخدم خاصية **TABLE** للتحقق من الحل.

ابدأ الجدول عند النقطة −0.1 وضع قيم x بزيادات 0.1. تخلّ عبر الجدول.

خطوات العملية على الحاسبة:

2nd [TBLSET] -0.1 ENTER 0.1 ENTER 2nd [TABLE]

يؤكد الجدول أنّ حل المتباينة هو $\{x \mid -0.1 < x < 1.5\}$.

التمارين

حُـلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي؛ تحقق من الحل.

1. $\log_2 (3x + 2) = \log_3 (12x + 3)$ **2 ,0**
2. $\log_8 (7x + 1) = \log_4 (4x - 4)$ **5**
3. $\log_2 3x = \log_3 (2x + 2)$ **حوالي 0.7**
4. $\log_{10} (1 - x) = \log_5 (2x + 5)$ **حوالي −1.5**
5. $\log_4 (9x + 1) > \log_4 (18x - 1)$ $\{x \mid 0.06 < x < 0.17\}$
6. $\log_3 (3x - 5) \ge \log_3 (x + 7)$ $\{x \mid x \ge 6\}$
7. $\log_2 (2x + 1) < \log_4 (3x - 2)$ $\{x \mid x > 2\}$
8. $\log_2 2x \le \log_4 (x + 3)$ $\{x \mid 0 < x \le 1\}$

© Carnegie Learning, Inc. All rights reserved.

النشاط 2

- قبل مناقشة النشاط 2، اطلب من الطلاب استخدام صيغة تغيير الأساس للتعبير عن كل طرف من طرفي المتباينة بدلالة اللوغاريتمات العادية.
- تأكد من فهم الطلاب لسبب الحاجة إلى إعادة كتابة المتباينة في صورة نظام متباينات.
- تأكد من فهم الطلاب لكيفية قراءة خاصية الجدول لإيجاد قيمة x التي تكون عندها قيم y غير معرّفة بالإضافة إلى قيمة x التي تكون عندها قيم y متساوية.

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمارين 5–8.

3 التقويم

التقويم التكويني

في التمرين 8، تحقق من تسجيل الطلاب للمتباينات في مجموعة الحل على نحو صحيح. وبصفة خاصة، يجب أن يذكر الطلاب حقيقة أنّ x يجب أن تكون أكبر من 0.

من المجرد إلى المحسوس

اطلب من الطلاب شرح مدى تغيُّر مجموعة حل النشاط 2 لو كانت المتباينة كالتالي
$\log_4 (10x + 1) > \log_5 (16 + 6x)$.

606 / 475

٨:٥١ م ٦٧٪
://elib.moe.gov.ae
606 / 475

1 محور التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 7–8 التعامل مع اللوغاريتمات العادية.

الدرس 7–8 إيجاد قيمة التعابير التي تحتوي على الأساس الطبيعي واللوغاريتم الطبيعي. حل المعادلات والمتباينات الأسية باستخدام اللوغاريتمات الطبيعية.

بعد الدرس 7–8 تحليل موقف تمثله دالة أسية. وحل المسألة.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم "**لماذا؟**" الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- ما الأجسام الأخرى التي رأيتها على شكل قوس؟ نموذج الإجابات: الأقواس في إعلان الوجبات السريعة، الجسور المقوسة
- ما الأرقام الخاصة الأخرى التي درستها؟ π

8-7 الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية

السابق | **الحالي** | **لماذا؟**

- لقد استخدمت اللوغاريتمات العادية.

1 إيجاد قيمة التعابير التي تحتوي على الأساس الطبيعي واللوغاريتم الطبيعي.

2 حل المعادلات والمتباينات الأسية باستخدام اللوغاريتمات الطبيعية.

- يوجد قوس جيت واي في سانت لويس في ميسوري على شكل منحنى سلسلي مقلوب. يوجد المنحنى السلسلي قوة وزنه على طوله. بحيث:
  - إذا تم تعليق حبل أو سلسلة. فإنه ينسحب مكونا هذا الشكل.
  - إذا كان المنحنى السلسلي منتصبا في وضع مستقيم. فإنه يكتفه نفسه.

تتضمن معادلة المنحنى السلسلي e. وهو عدد مميز يظهر في كل مجالات الرياضيات والعلوم.

المفردات الجديدة

الأساس الطبيعي natural base, e

الدالة الأسية للأساس الطبيعي natural base exponential function

اللوغاريتم الطبيعي natural logarithm

ممارسات في الرياضيات

7 محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 الأساس الطبيعي e واللوغاريتمات الطبيعية

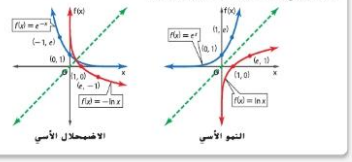
كما هو الحال مع π و $\sqrt{2}$، العدد e عدد غير نسبي. قيمة e تساوي 2.71828... ويشار إليه باسم **الأساس الطبيعي** e. تسمى الدالة الأسية ذات الأساس e **بالدالة الأسية للأساس الطبيعي**.

المفهوم الأساسي دوال الأساس الطبيعي

يُستخدم الدالة $f(x) = e^x$ لتمثيل النمو الأسي المستمر.

يُستخدم الدالة $f(x) = e^{-x}$ لتمثيل الاضمحلال الأسي المستمر.

يُسمى معكوس الدالة الأسية للأساس الطبيعي **باللوغاريتم الطبيعي**. يمكن كتابة هذا اللوغاريتم بالصورة $\log_e x$. لكن غالبا ما يختصر بالصورة $\ln x$.



يمكنك كتابة معادلة أسية للأساس e مكافئة لمعادلة لوغاريتمية طبيعية باستخدام الحقيقة $\ln x = \log_e x$.

$\ln 4 = x \rightarrow \log_e 4 = x \rightarrow e^x = 4$

مثال 1 كتابة التعابير المكافئة

اكتب كل معادلة أسية في صورة لوغاريتم.

a. $e^8 = 8$

$e^8 = 8 \rightarrow \log_e 8 = x$

$\ln 8 = x$

b. $e^5 = x$

$e^5 = x \rightarrow \log_e x = 5$

$\ln x = 5$

تمرين موجّه

1A. $e^x = 9$ $\ln 9 = x$

1B. $e^7 = x$ $\ln x = 7$

© حقوق النشر محفوظة لصالح McGraw-Hill Education

٨:٥١ م ٦٧% ://elib.moe.gov.ae

1 الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية

يوضح **المثال 1** كيفية كتابة معادلة لوغاريتمية طبيعية بكافئ معادلة أسيّة.
يوضح **المثال 2** كيفية كتابة معادلة أسيّة بكافئ معادلة لوغاريتمية طبيعية.
يوضح **المثال 3** كيفية تبسيط التعابير التي تحتوي على لوغاريتمات طبيعية.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 اكتب كل معادلة أسيّة في صورة لوغاريتمية.

a. $e^x = 23$ $\ln 23 = x$

b. $e^4 = x$ $\ln x = 4$

2 اكتب كل معادلة لوغاريتمية في صورة أسيّة.

a. $\ln x \approx 1.2528$ $x \approx e^{1.2528}$

b. $\ln 25 = x$ $25 = e^x$

3 اكتب كل تعبير في صورة لوغاريتم فردي.

a. $4 \ln 3 + \ln 6$ $\ln 486$

b. $2 \ln 3 + \ln 4 + \ln y$ $\ln 36y$

انتبه!

مفاهيم خاطئة أكد على أنّ e ثابت مثل π وليس متغيرًا مثل x أو y.

يمكنك أيضًا كتابة معادلة لوغاريتمية طبيعية مكافئة لمعادلة أسيّة لأساس طبيعي e.

$e^x = 12 \rightarrow \log_e 12 = x \rightarrow \ln 12 = x$

مثال 2 كتابة التعابير المتكافئة

اكتب كل معادلة لوغاريتمية في صورة أسيّة.

a. $\ln x \approx 0.7741$

$\ln x \approx 0.7741 \rightarrow \log_e x = 0.7741$

$x \approx e^{0.7741}$

b. $\ln 10 = x$

$\ln 10 = x \rightarrow \log_e 10 = x$

$10 = e^x$

تمرين موجّه

2A. $\ln x \approx 2.1438$ $x = e^{2.1438}$

2B. $\ln 18 = x$ $18 = e^x$

تنطبق خصائص اللوغاريتمات التي تعلمتها في الدرس 5-8 على اللوغاريتمات الطبيعية أيضًا. يمكن تبسيط التعابير اللوغاريتمية أداء في صورة حد لوغاريتمي فردي.

مثال 3 تبسيط التعابير التي تحتوي على e ولوغاريتم طبيعي

اكتب كل تعبير في صورة لوغاريتم فردي.

a. $3 \ln 10 - \ln 8$

$3 \ln 10 - \ln 8 = \ln 10^3 - \ln 8$ خاصيّة الأس للوغاريتمات

$= \ln \frac{10^3}{8}$ خاصيّة ناتج القسمة للوغاريتمات

$= \ln 125$ بسّط

$= \ln 5^3$ $5^3 = 125$

$= 3 \ln 5$ خاصيّة الأس للوغاريتمات

التحقّق استخدم حاسبة للتحقق من الحل.

خطوات العملية على الحاسبة:

3 LN 10) − LN 8) ENTER 4.828313737

خطوات العملية على الحاسبة: ✓ 3 LN 5) ENTER 4.828313737

نصيحة دراسية

التحويل إلى أبسط صورة عندما تحول التعبيرات اللوغاريتمية إلى أبسط صورة، تحقق من أن اللوغاريتم لا يحتوي على عمليات ولا أسس.

b. $\ln 40 + 2 \ln \frac{1}{2} + \ln x$

$\ln 40 + 2 \ln \frac{1}{2} + \ln x = \ln 40 + \ln \frac{1}{4} + \ln x$ خاصيّة الأس للوغاريتمات

$= \ln \left(40 \cdot \frac{1}{4} \cdot x\right)$ خاصيّة ناتج الضرب للوغاريتمات

$= \ln 10x$ بسّط

تمرين موجّه

3A. $6 \ln 8 - 2 \ln 4$ $14 \ln 2$

3B. $2 \ln 5 + 4 \ln 2 + \ln 5y$ $\ln 2000y$

نظرًا لأن الأساس الطبيعي واللوغاريتم الطبيعي دالتان معكوستان. يمكن استخدامهما لإلغاء بعضهما أو لتخلص بعضهما من بعض.

$e^{\ln x} = x$ $\ln e^x = x$

© Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Prentice Hall. All rights reserved.

التدريس

دفتر الملاحظات اطلب من الطلاب كتابة ملاحظة في دفتر الملاحظات تصف أوجه التشابه والاختلاف بين اللوغاريتمات العشرية واللوغاريتمات الطبيعية.

594 | الدرس 7-8 | الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية

٨:٥١ م ٦٧٪
://elib.moe.gov.ae

التركيز على محتوى الرياضيات

الأساس e يُسمى اللوغاريتم الذي أساسه e باسم لوغاريتم طبيعي ويُكتب في صورة $\log_e x$ أو $\ln x$. تُعدّ دالة اللوغاريتم الطبيعي $y = \ln x$ معكوسًا للدالة الأسية للأساس الطبيعي $y = e^x$.

2 معادلات ومتباينات تحتوي على e وln

يوضح **المثال 4** كيفية استخدام اللوغاريتمات الطبيعية لحل معادلة تتضمن الأساس e. يوضح **المثال 5** كيفية حل معادلات ومتباينات لوغاريتمية طبيعية. يوضح **المثال 6** كيفية استخدام الصيغة $A = Pe^{rt}$ لحل مسائل من الحياة اليومية بما في ذلك المرابحة المركبة باستمرار.

أمثلة إضافية

4 حلّ المعادلة $3e^{-2x} + 4 = 10$. قرّب إلى أقرب أربع منازل عشرية.
$x \approx -0.3466$

5 حلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي؛ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

a. $2 \ln 5x = 6$ 4.0171

b. $\ln (3x + 1)^2 > 8$
$\{x | x > 17.8661\}$

2 المعادلات والمتباينات التي تحتوي على e وln

تكون المعادلات والمتباينات التي تحتوي على الأساس e أسهل في حلها باستخدام اللوغاريتمات الطبيعية بدلًا من استخدام اللوغاريتمات العادية، لأن $\ln e = 1$.

مثال 4 حل معادلات الأساس e

حلّ المعادلة $4e^{-2x} - 5 = 3$ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$4e^{-2x} - 5 = 3$	المعادلة الأصلية
$4e^{-2x} = 8$	أضف 5 إلى كل طرف
$e^{-2x} = 2$	اقسم كلًا من الطرفين على 4
$\ln e^{-2x} = \ln 2$	خاصية التساوي في اللوغاريتمات
$-2x = \ln 2$	$\ln e^x = x$
$x = \frac{\ln 2}{-2}$	اقسم كلًا من الطرفين على -2
$x \approx -0.3466$	استخدم الحاسبة

خطوات العملية على الحاسبة: LN 2) ÷ (−) 2 ENTER -.34657359

نصيحة دراسية
الحاسبات تتضمن معظم الحاسبات مفتاح LN، e^x لإيجاد قيمة تعبيرات الأساس الطبيعي واللوغاريتم الطبيعي.

تمرين موجّه

حلّ كل من المعادلات التالية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

4A. $3e^{4x} - 12 = 15$ 0.5493 **4B.** $4e^{-x} + 8 = 17$ −0.8109

تمامًا مثلما يمكن استخدام اللوغاريتم الطبيعي للتخلص من e^x، يمكن استخدام الدالة الأسية للأساس الطبيعي للتخلص من $\ln x$.

مثال 5 حل متباينات ومعادلات اللوغاريتمات الطبيعية

حلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي؛ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

a. $3 \ln 4x = 24$

$3 \ln 4x = 24$	المعادلة الأصلية
$\ln 4x = 8$	اقسم كلًا من الطرفين على 3
$e^{\ln 4x} = e^8$	خاصية المساواة في الأسس
$4x = e^8$	$e^{\ln x} = x$
$x = \frac{e^8}{4}$	اقسم كلًا من الطرفين على 4
$x \approx 745.2395$	استخدم الحاسبة

b. $\ln (x - 8)^4 < 4$

$\ln (x - 8)^4 < 4$	المعادلة الأصلية
$e^{\ln (x-8)^4} < e^4$	اكتب كل طرف باستخدام الأسس والأساس e
$(x - 8)^4 < e^4$	$e^{\ln x} = x$
$x - 8 < e$	خاصية المساواة في الأسس
$x < e + 8$	أضف 8 إلى كل من الطرفين
$x < 10.7183$	استخدم الحاسبة

تمرين موجّه

حل كل معادلة أو متباينة فيما يلي؛ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

5A. $5 \ln 6x = 8$ 0.8255 **5B.** $\ln (2x - 3)^3 > 6$ $\{x | x > 5.1945\}$

© حقوق الطبع والنشر محفوظة لصالح McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز

إذا كان بعض الطلاب يعتقد على نحو خاطئ أنّ معادلة مثل $4e^{-2x} - 5 = 3$ تحتوي على متغيرين،

فإنه وضح أنّ الحرف e يمثل ثابتًا مثل π تمامًا، وأنّ كلًا من e وπ عدد غير نسبي لا يمكن التعبير عنه بدقة بالأرقام. لمساعدة الطلاب على تجنب هذا الالتباس اطلب منهم تمييز المتغيرات في المعادلة باستخدام قلم تمييز.

٨:٥١ م ٦٧%
://elib.moe.gov.ae

يمكن إيجاد المرابحة المركّبة بصفة مستمرة باستخدام e.

المفهوم الأساسي المرابحة المركّبة بصفة مستمرة

احسب المرابحة المركّبة بصفة مستمرة باستخدام الصيغة التالية:

$A = Pe^{rt}$.

حيث A يمثل المبلغ الموجود في الحساب بعد t من الأعوام وP يمثل مبلغ رأس المال المستثمر وr يمثل نسبة المرابحة السنوية.

مثال من الحياة اليومية 6 حل متباينات الأساس e

المعرفة المالية عندما وُلدت رنا، أودع جداها AED 3000 في حساب توفير جامعي يدفع مرابحة مُركّبة بصفة مستمرة بنسبة 4%.

a. على افتراض أنه لا توجد عمليات إيداع أو سحب على الحساب، كم سيكون الرصيد بعد 10 أعوام؟

$A = Pe^{rt}$ قانون المرابحة المستمرة

$= 3000e^{(0.04)(10)}$ $t = 10$ و $r = 0.04$ ،$P = 3000$

$= 3000e^{0.4}$ بسّط.

≈ 4475.47 استخدم الحاسبة.

سيكون الرصيد AED 4475.47

b. ما المدة التي سيستغرقها الرصيد ليصل إلى AED 10,000 على الأقل؟

$A = Pe^{rt}$ قانون المرابحة المستمرة

$10{,}000 < 3000e^{(0.04)t}$ $A = 10{,}000$ و $r = 0.04$ ،$P = 3000$

$\frac{10}{3} < e^{0.04t}$ اقسم كلاً من الطرفين على 3000

$\ln \frac{10}{3} < \ln e^{0.04t}$ خاصية المساواة في اللوغاريتمات

$\ln \frac{10}{3} < 0.04t$ $\ln e^x = x$

$\frac{\ln \frac{10}{3}}{0.04} < t$ اقسم كلاً من الطرفين على 0.04

$30.099 < t$ استخدم الحاسبة.

سيستغرق حوالي 30 عامًا للوصول إلى AED 10,000 على الأقل.

c. إذا كان الجدان يريدان أن يكون لدى رنا AED 10,000 بعد 18 سنة، فما مقدار المبلغ الذي سيحتاجان إلى استثماره؟

$10{,}000 = Pe^{(0.04)18}$ $t = 18$ و $r = 0.04$، $A = 10{,}000$

$\frac{10{,}000}{e^{0.72}} = P$ اقسم كلاً من الطرفين على $e^{0.72}$

$4867.52 \approx P$ استخدم الحاسبة.

يحتاجان إلى استثمار AED 4867.52

تمرين موجّه

6. استخدم المعلومات الواردة في المثال 6 للإجابة عن التالي.

A. إذا استثمرا AED 8000 بمرابحة مركبة بصفة مستمرة بنسبة 3.75%، فما مقدار المبلغ الذي سيكون في الحساب خلال 30 عامًا؟ **AED 24,641.73**

B. إذا استطاعا إيداع AED 10,000 فقط في الحساب المذكور أعلاه، فبأي نسبة سيحتاج الحساب إلى الزيادة لكي يكون لدى رنا AED 30,000 خلال 18 عامًا؟ **حوالي 6.1%**

C. إذا وجد جدا رنا حسابًا يتلقى نسبة مركبة بصفة مستمرة 5% ويريدان أن يكون لديها AED 30,000 بعد 18 عامًا، فما المبلغ الذي سيحتاجان إلى إيداعه؟ **AED 12,197.09**

الربط بالحياة اليومية

يبلغ متوسط تكلفة المحاضرات والإقامة والأعمالة في الكليات العامة التي تبلغ مدة الدراسة بها أربعة أعوام حوالي AED 12,804 في العام.

المصدر: المركز الوطني لإحصاءات التعليم

نصيحة دراسية

الاستنتاج لتجنب أي أخطاء بسبب التقريب، لا تقم بالتقريب حتى تصل إلى نهاية عمليّاتك الحسابية.

مثال إضافي

6 المدخرات افترض أنّك أودعت AED 700 في حساب يتلقى مرابحة مركبة باستمرار بنسبة 3% سنويًا.

a. كم يصبح الرصيد بعد مرور 8 أعوام؟ **AED 889.87**

b. ما المدة التي سيستغرقها الرصيد في حسابك ليصل إلى AED 1200 على الأقل؟ **حوالي 18 عامًا**

c. ما المبلغ اللازم إيداعه لكي يصل الرصيد إلى AED 1500 بعد 12 عامًا؟ **AED 1046.51**

تدريس ممارسات في الرياضيات

الاستنتاج يستوعب الطلاب المتفوقون في الرياضيات الكميات وعلاقاتها في المواقف المذكورة في المسائل. ذكّر الطلاب أنّ التقريب أثناء الحسابات يمكن أن ينتج نتائج غير دقيقة.

606 / 475

٨:٥١ م ٦٧% ://elib.moe.gov.ae

تحقق من فهمك

المثالان 1–2 اكتب دالة أسيّة أو لوغاريتمية مكافئة.

1. $e^x = 30$ $\ln 30 = x$
2. $\ln x = 42$ $e^{42} = x$
3. $e^3 = x$ $\ln x = 3$
4. $\ln 18 = x$ $e^x = 18$

مثال 3 اكتب كلًا منها في صورة لوغاريتم فردي.

5. $3 \ln 2 + 2 \ln 4$ $7 \ln 2$
6. $5 \ln 3 - 2 \ln 9$ $\ln 3$
7. $3 \ln 6 + 2 \ln 9$ $\ln 17496$
8. $3 \ln 5 + 4 \ln x$ $\ln 125x^4$

مثال 4 حُلّ كل من المعادلات التالية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

9. $5e^x - 24 = 16$ 2.0794
10. $-3e^x + 9 = 4$ 0.5108
11. $3e^{-3x} + 4 = 6$ 0.1352
12. $2e^{-x} - 3 = 8$ -1.7047

مثال 5 حُلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

13. $\ln 3x = 8$ 993.6527
14. $-4 \ln 2x = -26$ 332.5708
15. $\ln (x + 5)^2 < 6$ $\{x \mid x > 150.4132\}$
16. $\ln (x - 2)^3 > 15$ $\{x \mid x < -2.1972\}$
17. $e^x > 29$ $\{x \mid x > 3.3673\}$
18. $5 + e^{-x} > 14$ $\{x \mid -25.0855 < x < 15.0855, x \neq -5\}$

مثال 6 19. **العلوم** ينتشر فيروس عبر شبكة كمبيوتر وفقًا للصيغة $v(t) = 30e^{0.1t}$، حيث t يمثل عدد أجهزة الكمبيوتر المصابة وt يمثل الزمن بالدقائق. ما الوقت الذي سيستغرقه الفيروس ليصيب 10,000 جهاز كمبيوتر؟

التمرين وحل المسائل

المثالان 1–2 اكتب دالة أسيّة أو لوغاريتمية مكافئة.

20. $e^{-x} = 8$ $\ln 8 = -x$
21. $e^{-5x} = 0.1$ $\ln 0.1 = -5x$
22. $\ln 0.25 = x$ $e^x = 0.25$
23. $\ln 5.4 = x$ $e^x = 5.4$
24. $e^{x-3} = 2$ $\ln 2 = x - 3$
25. $\ln (x + 4) = 36$ $e^{36} = x + 4$
26. $e^{-2} = x^6$ $-2 = 6 \ln x$
27. $\ln e^x = 7$ $e^7 = e^x$

مثال 3 اكتب كلًا منها في صورة لوغاريتم فردي.

28. $\ln 125 - 2 \ln 5$ $\ln 5$
29. $3 \ln 10 + 2 \ln 100$ $7 \ln 10$
30. $4 \ln \frac{1}{3} - 6 \ln \frac{1}{9}$ $-8 \ln \frac{1}{3}$
31. $7 \ln \frac{1}{2} + 5 \ln 2$ $-2 \ln 2$
32. $8 \ln x - 4 \ln 5$ $\ln \frac{x^8}{625}$
33. $3 \ln x^2 + 4 \ln 3$ $\ln 81x^6$

مثال 4 حُلّ كل من المعادلات التالية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

34. $6e^x - 3 = 35$ 1.8458
35. $4e^x + 2 = 180$ 3.7955
36. $3e^{2x} - 5 = -4$ -0.5493
37. $-2e^{3x} + 19 = 3$ 0.6931
38. $6e^{4x} + 7 = 4$ لا يوجد حل
39. $-4e^{-x} + 9 = 2$ -0.5596

المثالان 5–6 40. **التفكير المنطقي** تنخفض قيمة سيارة معينة وفقًا للصيغة $v(t) = 18500e^{-0.18t}$، حيث يمثل t عدد الأعوام بعد شراء السيارة الجديدة.

a. ما قيمة السيارة خلال 18 شهرًا؟ AED 13,996

b. متى ستساوي السيارة نصف قيمتها الأصلية؟ 3.73 yr تقريبًا

c. متى ستكون قيمة السيارة أقل من AED 1000؟ 15.69 yr حوالي

أوجد حل كل متباينة مما يلي. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

41. $e^x \leq 8.7$ $\{x \mid x \leq 2.1633\}$
42. $e^x \geq 42.1$ $\{x \mid x \geq 3.7400\}$
43. $\ln (3x + 4)^3 > 10$ $\{x \mid x > 8.0105\}$
44. $4 \ln x^2 < 72$ $\{x \mid -8103.0839 < x < 8103.0839, x \neq 0\}$
45. $\ln (8x^4) > 24$
46. $-2 [\ln (x - 6)^{-1}] \leq 6$

حق النشر © محفوظة لصالح مؤسسة ماكجروهيل التعليمية

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1–19 للتأكد من الفهم.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس ممارسات في الرياضيات

التفكير المنطقي يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط لحلها، حيث يحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف ويضعون تخمينات لصيغة الحل ومعناها ويخططون لمسار الحل بدلًا من مجرد القفز إلى محاولة حل.

نصائح للمعلمين الجدد

التحقق من صحة الحل شجع الطلاب على تقييم كل حل من حلول المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية للتحقق من مدى صحته.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
ق م مبتدئ	46–59، 82. 20–	45–21 فردي، 66–63	46–20 زوجي، 62–59، 67–82
ص م أساسي	55-21 فردي، 57–56، 82–59	46–20، 66–63	57–47، 62–59، 67–82
أ م متقدم	76–47، (اختياري، 82–77)		

٨:٥٢ م ٦٧٪
://elib.moe.gov.ae

تدريس ممارسات في الرياضيات

النمذجة يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات تطبيق الحساب الذي يعرفونه لحل المسائل الناشئة في الحياة اليومية، وتحليل العلاقات رياضيًا لاستخلاص الاستنتاجات، وتفسير نتائجهم الرياضية في سياق الحالة.

47 **المعرفة المالية** استخدم الصيغة الخاصة بالمرابحة المركّبة بصفة مستمرة.

a. إذا استثمرت AED 800 في حساب يتلقى مرابحة مركّبة بصفة مستمرة بنسبة 4.5%، فما المبلغ الذي سيكون في الحساب خلال 5 أعوام؟ AED 1001.86

b. ما المدة التي ستستغرقها لمضاعفة المبلغ الخاص بك؟ حوالي 15.4 yr

c. إذا كنت تريد مضاعفة المبلغ الخاص بك خلال 9 أعوام، فما النسبة التي ستحتاج إليها؟ حوالي 7.7%

d. إذا كنت تريد فتح حساب يتلقى مرابحة مركّبة بصفة مستمرة بنسبة 4.75% وأن يكون لديك AED 10,000 في الحساب بعد 12 عامًا من إيداعك، فما المبلغ الذي تحتاج إلى إيداعه؟ حوالي AED 5655.25

اكتب التعبير في صورة مجموع أو فرق لوغاريتمات أو في صورة مضاعفات لوغاريتمات.

48. $\ln 12x^2$ $\ln 12 + 2 \ln x$

49. $\ln \frac{16}{125}$ $4 \ln 2 - 3 \ln 5$

50. $\ln \sqrt[5]{x^3}$ $\frac{3}{5} \ln x$

51. $\ln xy^4z^{-3}$ $\ln x + 4 \ln y - 3 \ln z$

استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل كل معادلة.

52. $8^x = 24$ 1.5283

53. $3^x = 0.4$ −0.8340

54. $2^{3x} = 18$ 1.3900

55. $5^{2x} = 38$ 1.1301

56. **النمذجة** يمثّل قانون نيوتن للتبريد، والذي يمكن استخدامه لتحديد سرعة التبريد التي سيصل إليها الجسم في محيط معين، من العلاقة $T(t) = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}$ حيث يمثل T_0 درجة الحرارة الابتدائية للجسم، وT_s درجة حرارة المحيط، وt الزمن بالدقائق، وk القيمة الثابتة التي تعتمد على نوع الجسم.

a. إذا وضع كوب من القهوة درجة حرارته الابتدائية 180° في حجرة درجة حرارتها 70° وانخفضت درجة حرارة القهوة إلى 140° بعد 10 دقائق، فأوجد قيمة k. 0.045

b. استخدم قيمة k هذه لتحديد درجة حرارة القهوة بعد 20 دقيقة. 114.7° تقريبًا

c. متى تصل درجة حرارة القهوة إلى 75°؟ حوالي 68 min

57. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة ستستخدم $g(x) = \ln x$ و$f(x) = e^x$.

a. **بيانيًا** مثّل كلًا من الدالتين ومحور التماثل لهما بيانيًا، $y = x$. بالنسبة إلى $-5 \le x \le 5$. ثم مثّل $d(x) = e^{-x}$ بيانيًا على التمثيل البياني نفسه.

b. تحليليًا على طول أي محور تعد التمثيلات البيانية لـ $f_{(x)}$ و$g_{(x)}$ انعكاسات؟ ما الدالة التي ستكون انعكاسًا لـ $f(x)$ على طول المحور الآخر؟

c. **بيانيًا** حدد الدوال التي تعد انعكاسًا لـ $g(x)$. مثّل هذه الدوال الجديدة بيانيًا.

d. **لفظيًا** نعرف أن $f(x)$ و$g(x)$ معكوسان. هل توجد دوال أخرى من الدوال الأخرى التي مثلناها بيانيًا تعد معكوسات أيضًا؟ اشرح استنتاجك.

الإجابة النموذجية: لا؛ هاتان الدالتان تكونان منعكستين على $y = -x$، مما يشير ذلك إلى أنهما ليستا عكسيتين.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدم مهارات التفكير العليا

58. **تحفيز** حل المعادلة $4^x - 2^{x+1} = 15$ لإيجاد x. 2.3219

59. **البرهان** أثبت أنّ $\ln ab = \ln a + \ln b$ في اللوغاريتمات الطبيعية. انظر الهامش.

60. **الاستنتاج** حدد ما إذا كانت $x > \ln x$ صحيحة أحيانًا أو دائمًا أو غير صحيحة مطلقًا. اشرح استنتاجك.
الإجابة النموذجية: دائمًا؛ التمثيل البياني لـ $x = y$ يكون دائمًا أكبر من التمثيل البياني لـ $y = \ln x$ والتمثيلان البيانيان لا يتقاطعان أبدًا.

61. **مسألة غير محددة الإجابة** عبّر عن القيمة 3 باستخدام e^x واللوغاريتم الطبيعي. نموذج الإجابة: $e^{\ln 3}$

62. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف يمكن استخدام اللوغاريتم الطبيعي لإيجاد حل دالة أسية لأساس طبيعي. انظر الهامش.

Copyright © McGraw-Hill Education. Permission is granted to reproduce for classroom use.

598 | الدرس 7-8 | الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية

٨:٥٢ م ٦٧٪
://elib.moe.gov.ae
606 / 475

تدريب على الاختبار المعياري

63. بالنظر إلى الدالة $y = 2.34x + 11.33$. أي العبارات تقدم الوصف الأفضل لتأثير تحريك التمثيل البياني بمقدار وحدتين إلى أسفل؟ **B**

A يظل التقاطع مع المحور x.
B يظل التقاطع مع المحور y.
C يظل التقاطع مع المحور x كما هو.
D يظل التقاطع مع المحور y كما هو.

64. إجابة شبكية يبيع أحمد إطارات صور خشبية عبر الإنترنت. وهو يشتري المواد مقابل AED 85 ويدفع AED 19.95 مقابل الموقع الالكتروني. فإذا كان أحمد يتقاضى AED 15 عن كل إطار، فكم عدد الإطارات التي سيكون بحاجة إلى بيعها ليحقق ربحا لا يقل عن AED 270؟ **25**

65. خُذ المعادلة $|2x - 5| = 17$ **G**

F $-6, -11$
G $-6, 11$
H $6, -11$
J $6, 11$

66. يبيع متجر حيوانات أليفة محلي طعام الأرانب. وتكون تكلفة الأكياس التي تزن 5 أرطال هي AED 7.99. يمكن إيجاد التكلفة الإجمالية C لشراء n من الأكياس عن طريق— **C**

A ضرب n في c.
B ضرب n في 5.
C ضرب n في تكلفة الكيس الواحد.
D قسمة n على c.

مراجعة شاملة

حُلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف. (الدرس 6-8)

67. $2^x = 53$ **5.7279**
68. $2.3^{x^2} = 66.6$ **$\pm$ 2.2452**
69. $3^{4x-7} < 4^{2x+3}$ **$x < 7.3059$**
70. $6^{3y} = 8^{y-1}$ **−0.6309**
71. $12^{x-5} \geq 9.32$ **$x \geq 5.8983$**
72. $2.1^{x-5} = 9.32$ **8.0086**

73. الصوت استخدم الصيغة $L = 10 \log_{10} R$، حيث يمثل L شدة الصوت وR شدة الصوت النسبية. افترض أن شدة صوت المنبّه تساوي 80 ديسيبل. أوجد مقدار ارتفاع شدة صوت 10 منبهات مقابل منبه واحد. (الدرس 5-8) **10 ديسيبل**

بالنسبة إلى متعددة حدود وعواملها، أوجد العوامل المتبقية. قد لا تكون بعض العوامل ذات حدين.

74. $x^3 + 5x^2 + 8x + 4; x + 1$ **$x + 2, x + 2$**
75. $x^3 + 4x^2 + 7x + 6; x + 2$ **$x^2 + 2x + 3$**

76. الحرف اليدوية تبيع السيدة عبير أشياء مصنوعة من الكروشيه. حيث تبيع بطانيات كروشيه كبيرة مقابل AED 60 وبطانيات أطفال مقابل AED 40 ومفارش طاولة مقابل AED 25 وحاملات أوعية مقابل AED 5. وتأخذ العدد التالي من العناصر إلى المعرض: 12 بطانية كروشيه و25 بطانية أطفال و45 مفرش طاولة و50 حامل أوعية.

a. اكتب مصفوفة مخزون لعدد كل عنصر ومصفوفة تكلفة لسعر كل عنصر. **[3095]**

b. افترض أن السيدة عبير تبيع كل العناصر. أوجد الدخل الإجمالي لها في صورة مصفوفة. **الخيار 1**

76a. $[12 \quad 25 \quad 45 \quad 50]$ $\begin{bmatrix} 60 \\ 40 \\ 25 \\ 5 \end{bmatrix}$

مراجعة المهارات

حُلّ كل من المعادلات التالية.

77. $2^{3x+5} = 128$ **$\frac{2}{3}$**
78. $5^{n-3} = \frac{1}{25}$ **1**
79. $\left(\frac{1}{9}\right)^m = 81^{m+4}$ **$-\frac{8}{3}$**
80. $\left(\frac{1}{7}\right)^{y-3} = 343$ **0**
81. $10^{x^2-1} = 100^{2x-3}$ **$\frac{5}{3}$**
82. $36^{2p} = 216^{p-1}$ **−3**

© Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company

التدريس المتمايز

التوسع اشرح للطلاب أنّ 2! تعني 1×2، و3! تعني $1 \times 2 \times 3$، و4! تعني $1 \times 2 \times 3 \times 4$. وهكذا. اطلب من الطلاب استخدام الحاسبة لإيجاد قيمة المتسلسلة التالية، لعدد حدود حسبما يريدون:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

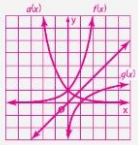
ناقش مع الطلاب كيفية اقتراب قيمة هذه المتسلسلة من قيمة e. وضح أنّ المتسلسلة التي يتم التعبير عنها بحوالي 20 حدًا ستعطي قيمة e بالدقة التي وضعها أولير. أولير هو عالم رياضيات سويدي درس العدد e في عشرينيات القرن الثامن عشر.

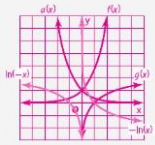
4 التقويم

تعيين مصطلح الرياضيات اطلب من كل طالب كتابة معادلة لوغاريتمية طبيعية ومتباينة لوغاريتمية طبيعية. ثم اطلب من الطلاب تدوين كل خطوات حل المسائل.

إجابات إضافية

57a.





59. افترض أنّ $q = \ln b$، و$p = \ln a$. يعني ذلك أنّ $e^q = b$، و$e^p = a$.

$ab = e^p \times e^q$
$ab = e^{p+q}$
$\ln(ab) = (p + q)$
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

62. نموذج الإجابة: اللوغاريتم الطبيعي والأساس الطبيعي دالتان معكوستان. لذلك فإن أخذ اللوغاريتم الطبيعي لأساس طبيعي *سيلغي* الأساس الطبيعي ويجعل المسألة أسهل في الحل.

٨:٥٢ م ٦٧٪
://elib.moe.gov.ae

8–8 مختبر ورقة البيانات: المرابحة المركبة

يمكنك استخدام ورقة بيانات لتنظيم البيانات وعرضها. تعد ورقة البيانات طريقة سهلة لمتابعة مبلغ المرابحة المكتسب على مدار فترة من الزمن.

لا تكتسب المرابحة المركبة على المبلغ الأصلي فقط. ولكن أيضًا على أي مرابحة تمت إضافتها إلى المبلغ الأساسي.

ممارسات في الرياضيات
5 استخدام الأدوات المناسبة بطريقة إستراتيجية.

النشاط

أوجد المبلغ الإجمالي للمال بعد 5 سنوات إذا قمت بإيداع AED 100 بنسبة 7% مركبة سنويًا.

الخطوة 1 قم بتنسيق الأعمدة كما هو موضح. المدة هي عام واحد. أدخل القيم الأولية والنسبة.

الخطوة 2 سيتم إنشاء كل صف باستخدام الصيغ. أدخل الصيغ كما هو موضح.

حساب ادخار

	A	B	C	D	E
1	نهاية الفترة	رأس المال	المرابحة	الرصيد	نسبة المرابحة للفترة
2	0			$100.00	7%
3	=A2+1	=D2	=B3*E2	=C3+D2	

Sheet 1 | Sheet 2 | Sheet 3

الخطوة 3 استخدم خاصية **FILL DOWN** لملء 4 صفوف إضافية.

حساب ادخار

	A	B	C	D	E
1	نهاية الفترة	رأس المال	المرابحة	الرصيد	نسبة المرابحة للفترة
2	0			$100.00	7%
3	1	$100.00	$7.00	$107.00	
4	2	$107.00	$7.49	$114.49	
5	3	$114.49	$8.01	$122.50	
6	4	$122.50	$8.58	$131.08	
7	5	$131.08	$9.18	$140.26	

Sheet 1 | Sheet 2 | Sheet 3

إذا قمت بإيداع AED 100 بنسبة 7% مرابحة سنوية لمدة 5 سنوات، فسيكون لديك AED 140.26 بنهاية 5 سنوات.

التمارين

أوجد الرصيد الإجمالي لكل حالة.

1. إيداع AED 500 لمدة 7 أعوام بنسبة 5% **AED 703.55**
2. إيداع AED 1000 لمدة 5 أعوام بنسبة 6% **AED 1338.23**
3. إيداع AED 200 لمدة عامان بنسبة 10% **AED 242.00**
4. إيداع AED 800 لمدة 3 أعوام بنسبة 8% **AED 1007.77**
5. اقتراض AED 10,000 لمدة 5 أعوام بنسبة 5.05% **AED 12,793.23**
6. اقتراض AED 25,000 لمدة 30 عامًا بنسبة 8% **AED 251,566.42**

1 محور التركيز

الأهداف استخدام ورقة بيانات لعرض نمو استثمار عبر الزمن.

المواد الخاصة لكل طالب

- ورقة بيانات إلكترونية

نصيحة للتدريس

في الخطوة 2 من النشاط، لاحظ أنّ علامات الدولار في الخلية C3 لازمة بحيث تُستخدم النسبة الموجودة في الخلية E2 مع كل الخلايا في العمود C. يُسمى هذا "مرجع الخلية المطلق". في حين تكون كل مراجع الخلايا الأخرى مراجع نسبية.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

اطلب من الطلاب العمل في مجموعات ثنائية تضم طلابًا ذوي قدرات مختلفة لاستكمال النشاط والتمرين 1.

اسأل:

- ما الصيغة التي تظهر في الخلية A4؟ = A3 + 1
- لماذا تبدأ كل صيغة بإشارة "="؟ الخلايا التي لا تحتوي على "=" لا يتم حسابها.

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمارين 2–6.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرين 4 لتقويم مدى فهم الطلاب لكيفية إيجاد قيم الأرصدة السنوية بعد مرابحة مركبة سنوية بقيم بدء ونسب مرابحة مختلفة.

من المجرد إلى المحسوس

استخدم التمرين 5 لترى مدى إدراك الطلاب أنّ المبالغ المقترضة ستزيد تمامًا كالودائع إذا تم تطبيق التراكب عليها.

توسيع المفهوم

اسأل:

- كيف يمكن أن تتغير ورقة بيانات لتعكس المرابحة المركبة شهريًا؟ اقسم المبلغ في الخلية E2 على 12.
- ما وجه المقارنة بين الأرصدة السنوية والأرصدة الموجودة في ورقة البيانات الأصلية؟ أكبر

606 / 475

٨:٥٢ م ٦٧٪
://elib.moe.gov.ae

الدرس 8-8

1 محور التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 8–8 استخدام صيغ النمو الأسي والاضمحلال الأسي.

الدرس 8–8 استخدام اللوغاريتمات لحل المسائل التي تتضمن النمو الأسي والاضمحلال الأسي.
استخدام اللوغاريتمات لحل المسائل التي تتضمن النمو اللوجستي.

بعد الدرس 8–8 تحويل التعابير النسبية إلى أبسط صورة

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم "لماذا؟" الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- في أي منطقة نمو نيكاراغوا؟ أمريكا الوسطى
- لماذا يمكن استخدام الكربون لأغراض التأريخ؟ لأنه يتحلل عبر الزمن بنمط يمكن قياسه.

الدرس 8-8

استخدام الدوال الأسيّة واللوغاريتمية

السابق | الحالي | لماذا؟

- لقد استخدمت صيغ النمو الأسي والاضمحلال الأسي
- 1 استخدام اللوغاريتمات لحل المسائل التي تشتمل على النمو الأسي والاضمحلال الأسي.
- 2 استخدام اللوغاريتمات لحل المسائل التي تشتمل على النمو اللوجستي.
- يعتقد أن آثار الأقدام القديمة لـ Acahualinca، والتي اكتشفت في ماناغوا، نيكاراغوا، هي أقدم آثار لأقدام إنسان في العالم. باستخدام التأريخ بالكربون، يقدّر العلماء عمر تلك الأقدام بـ 6000 عام.

المفردات الجديدة
معدل النمو المستمر
rate of continuous growth
معدل الاضمحلال المستمر
rate of continuous decay
نموذج النمو اللوجستي
rate of continuous decay

ممارسات في الرياضيات
1 فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 النمو الأسّي والاضمحلال الأسّي

يستخدم العلماء، والباحثون في كثير من الأحيان أشكالاً بديلة من صيغ النمو والاضمحلال التي تعلمتها في الدرس 1–8.

المفهوم الأساسي النمو الأسّي والاضمحلال الأسّي

النمو الأسّي	الاضمحلال الأسّي
يمكن تمثيل النمو الأسّي من خلال الدالة $f(x) = ae^{kx}$	يمكن تمثيل الاضمحلال الأسّي من خلال الدالة $f(x) = ae^{-kx}$
حيث يمثل a القيمة الابتدائية ويمثل t الزمن بالسنوات وk هو ثابت يمثل **معدل النمو المستمر**	حيث يمثل a القيمة الابتدائية ويمثل t الزمن بالسنوات وk هو ثابت يمثل **معدل الاضمحلال المستمر**

مثال من الحياة اليومية 1 الاضمحلال الأسّي

العلوم عبر النصف لمادة مشعة هو الوقت المستغرق لانحلال نصف ذرات المادة. يبلغ عبر النصف لعنصر الكربون 14 5730 عامًا. حدّد قيمة k ومعادلة انحلال عنصر الكربون 14.

إذا كان a يمثل الكمية الابتدائية للمادة، يمكن تمثيل الكمية y المتبقية بعد 5730 عامًا بأنها $\frac{1}{2}a$ أو $0.5a$.

$y = ae^{-kt}$	صيغة الاضمحلال الأسّي
$0.5a = ae^{-k(5730)}$	$t = 5730$ و $y = 0.5a$
$0.5 = e^{-5730k}$	اقسم كل طرف على a
$\ln 0.5 = \ln e^{-5730k}$	خاصية المساواة في اللوغاريتمات
$\ln 0.5 = -5730k$	$\ln e^x = x$
$\frac{\ln 0.5}{-5730} = k$	اقسم كل طرف على -5730
$0.00012 \approx k$	استخدم الحاسبة

ومن ثم، تكون معادلة الانحلال لعنصر الكربون 14 هي $y = ae^{-0.00012t}$

تمرين موجه $1.\ k \approx 2.888 \cdot 10^{-5}$

1. يبلغ عمر النصف لعنصر البلوتونيوم 239 فترة 24,000 عام. حدّد قيمة k.

حق النشر © محفوظ لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

601

601

٨:٥٢ م ٦٧٪
://elib.moe.gov.ae

1 النمو الأسي والاضمحلال الأسي

يوضح **المثالان 1 و2** كيفية استخدام النموذج الجبري $y = ae^{-kt}$ لحل المسائل التي تتضمن الاضمحلال الأسي. يوضح **المثال 3** كيفية استخدام النموذج الجبري $y = ae^{kt}$ لحل مسألة من الحياة اليومية تتضمن النمو الأسي.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 **الجيولوجيا** عبر النصف للصوديوم 22 يبلغ 2.6 عامًا. أوجد قيمة k ومعادلة اضمحلال الصوديوم 22. $k \approx 0.2666$، $y = ae^{-0.2666t}$، حيث t مقدرة بالسنوات

2 **الجيولوجيا** وجد عالم جيولوجيا بعد فحص أحد النيازك أنه يحتوي على حوالي 10% فقط من كمية صوديوم 22 التي من المفترض أن يحتوي عليها عند وصوله إلى سطح الأرض. منذ متى وصل النيزك إلى سطح الأرض؟ منذ حوالي 9 سنوات

التدريس باستخدام التكنولوجيا

البحث عبر الإنترنت اطلب من الطلاب البحث عبر الإنترنت لإيجاد عبر النصف للعناصر المشعة المختلفة. كلفهم باختيار ثلاثة عناصر واطلب منهم حساب الكمية المتبقية بعد 10 سنوات من عينة كتلتها 500 جرام.

والآن بما أن قيمة k لعنصر الكربون 14 معلومة، يمكن استخدامها لتأريخ الأحافير.

مثال من الحياة اليومية 2 تأريخ الكربون

العلوم قدّر عالم الأحافير الذي يفحص عظام حيوان ما قبل التاريخ أن العظام تحتوي على 2% من عنصر الكربون 14 الذي كان موجودًا بها في حياة الحيوان.

a. منذ كم عامًا عاش هذا الحيوان؟

الفهم صيغة اضمحلال عنصر الكربون 14 هي $y = ae^{-0.00012t}$. أنت تريد معرفة منذ كم عامًا عاش هذا الحيوان.

التخطيط افترض أن a هي الكمية الابتدائية لعنصر الكربون 14 في جسم الحيوان. كمية لا المتبقية بعد t من السنوات هي 2% من a أو $0.02a$.

أوجد حل

$y = ae^{-0.00012t}$	صيغة اضمحلال عنصر الكربون 14
$0.02a = ae^{-0.00012t}$	$y = 0.02a$
$0.02 = e^{-0.00012t}$	اقسم كل طرف على a
$\ln 0.02 = \ln e^{-0.00012t}$	خاصية المساواة في اللوغاريتمات
$\ln 0.02 = -0.00012t$	$\ln e^x = x$
$\frac{\ln 0.02}{-0.00012} = t$	اقسم كل طرف على -0.00012
$32{,}600 \approx t$	استخدم الحاسبة

عاش هذا الحيوان منذ 32,600 عام.

التحقق استخدم الصيغة لإيجاد كمية العينة المتبقية بعد 32,600 عام، استخدم كمية أصلية تساوي 1.

$y = ae^{-0.00012t}$	المعادلة الأصلية
$= 1e^{-0.00012(32{,}600)}$	$a = 1$ و $t = 32{,}600$
≈ 0.02 or 2% ✓	استخدم الحاسبة

b. إذا كان بحث سابق يشير إلى أن عمر الحيوان حوالي 20,000، فما كمية عنصر الكربون 14 التي يجب أن توجد في الحيوان؟

$y = ae^{-0.00012t}$	صيغة اضمحلال عنصر الكربون 14
$= 1e^{-0.00012(20{,}000)}$	$a = 1$ و $t = 20{,}000$
$= e^{-2.4}$	بسّط
$= 0.09$ or 9%	استخدم الحاسبة

تمرين موجه

2. استخدم المعلومات الواردة في مثال 2 للإجابة عن الأسئلة التالية.

A. عينة كانت تحتوي في الأصل على 42 mg من عنصر الكربون 14، تحتوي الآن على 8 mg. كم عمر الأحفورة؟ **حوالي 13,819 yr**

B. كان يُعتقد أن عمر عينة مأمون صوفي هو حوالي 12,000 عام. ما مقدار كمية عنصر الكربون 14 التي يجب أن توجد في الحيوان؟ **23.7% تقريبًا**

تعتبر معادلة النمو الأسي $y = ae^{kt}$ مطابقة لقانون المرابحة المركبة بصفة مستمرة الذي تعلمته في الدرس 7–8.

المرابحة المستمرة	نمو الجماعة الأحيائية
$A = Pe^{rt}$	$y = ae^{kt}$
P = المبلغ الابتدائي	a = الجماعة الأحيائية الابتدائية
A = المبلغ عند الزمن t	y = الجماعة الأحيائية عند الزمن t
r = نسبة المرابحة	k = معدل النمو المستمر

نصيحة دراسية

تأريخ الكربون عند وجود نسبة مئوية أو كسر للاضمحلال، استخدم الكمية الأصلية التي مقدارها 1 لقيمة a.

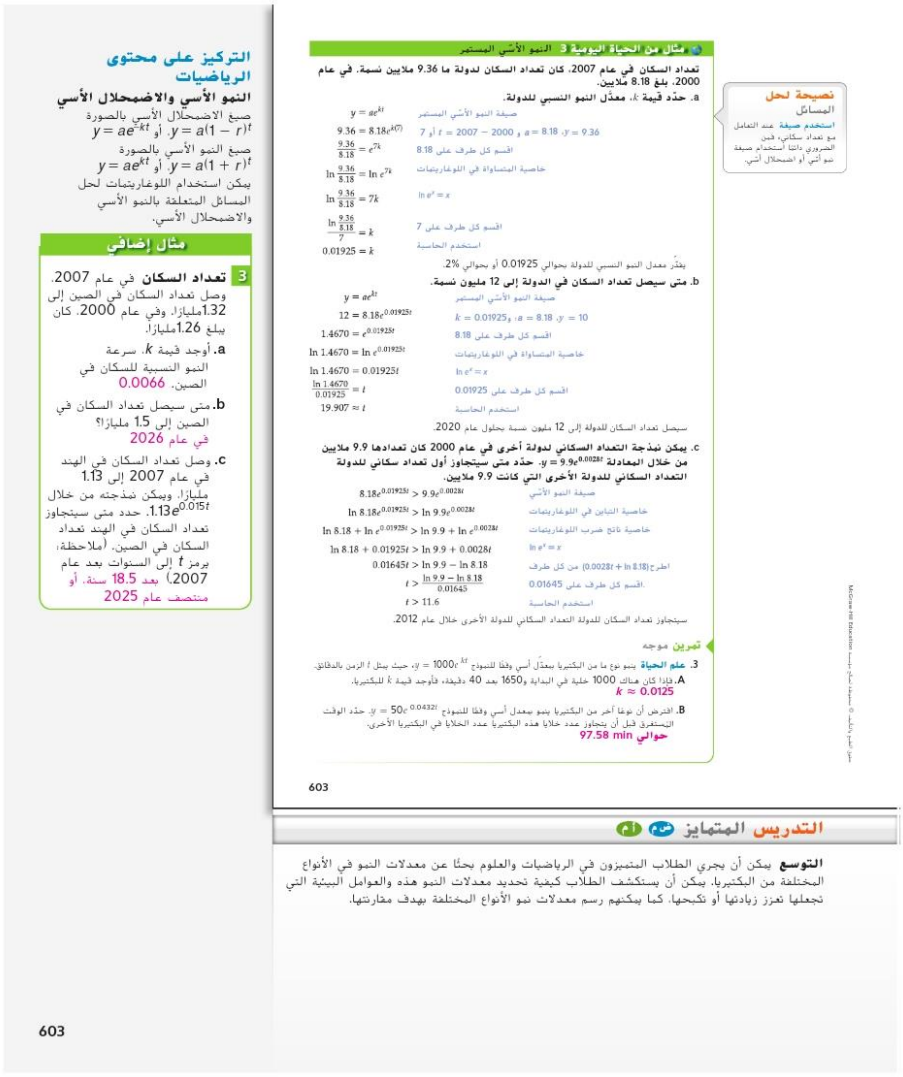
602 | الدرس 8-8 | استخدام الدوال الأسية واللوغاريتمية

التدريس المتمايز

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي اطلب من الطلاب العمل في مجموعات ثنائية أو مجموعات صغيرة. اطلب منهم فحص صيغ النمو والاضمحلال المستخدمة في الأمثلة 1–3 واطلب منهم مناقشة مدى ارتباط المعادلات. على وجه الخصوص، اطلب منهم مناقشة كيف يمكنهم تحديد أي المعادلات تُستخدم في حالات الاضمحلال الأسي (إشارة ناقص/سالب) وأي المعادلات تُستخدم في حالات النمو الأسي.

606 / 475

٨:٥٢ م ٦٧٪
://elib.moe.gov.ae



التركيز على محتوى الرياضيات

النمو الأسي والاضمحلال الأسي

صيغ الاضمحلال الأسي بالصورة $y = a(1 - r)^t$، أو $y = ae^{-kt}$.

صيغ النمو الأسي بالصورة $y = a(1 + r)^t$، أو $y = ae^{kt}$.

يمكن استخدام اللوغاريتمات لحل المسائل المتعلقة بالنمو الأسي والاضمحلال الأسي.

مثال إضافي

3 **تعداد السكان** في عام 2007. وصل تعداد السكان في الصين إلى 1.32 مليارًا. وفي عام 2000، كان يبلغ 1.26 مليارًا.

a. أوجد قيمة k، سرعة النمو النسبية للسكان في الصين. 0.0066

b. متى سيصل تعداد السكان في الصين إلى 1.5 مليارًا؟ في عام 2026

c. وصل تعداد السكان في الهند في عام 2007 إلى 1.13 مليارًا. ويمكن نمذجته من خلال $1.13e^{0.015t}$. حدد متى سيتجاوز تعداد السكان في الهند تعداد السكان في الصين. (ملاحظة: يرمز t إلى السنوات بعد عام 2007) بعد 18.5 سنة، أو منتصف عام 2025

مثال من الحياة اليومية 3 النمو الأسي المستمر

تعداد السكان في عام 2007. كان تعداد السكان لدولة ما 9.36 ملايين نسمة. في عام 2000، بلغ 8.18 ملايين.

a. حدد قيمة k، معدّل النمو النسبي للدولة.

$y = ae^{kt}$ صيغة النمو الأسي المستمر

$9.36 = 8.18e^{k(7)}$ $a = 8.18$ ،$y = 9.36$ و $t = 2007 - 2000$ أو 7

$\frac{9.36}{8.18} = e^{7k}$ اقسم كل طرف على 8.18

$\ln \frac{9.36}{8.18} = \ln e^{7k}$ خاصية المتساواة في اللوغاريتمات

$\ln \frac{9.36}{8.18} = 7k$ $\ln e^x = x$

$\frac{\ln \frac{9.36}{8.18}}{7} = k$ اقسم كل طرف على 7

$0.01925 = k$ استخدم الحاسبة

يقدّر معدل النمو النسبي للدولة بحوالي 0.01925 أو بحوالي 2%.

b. متى سيصل تعداد السكان في الدولة إلى 12 مليون نسمة.

$y = ae^{kt}$ صيغة النمو الأسي المستمر

$12 = 8.18e^{0.01925t}$ $k = 0.01925$ ،$a = 8.18$ ،$y = 10$

$1.4670 = e^{0.01925t}$ اقسم كل طرف على 8.18

$\ln 1.4670 = \ln e^{0.01925t}$ خاصية المتساواة في اللوغاريتمات

$\ln 1.4670 = 0.01925t$ $\ln e^x = x$

$\frac{\ln 1.4670}{0.01925} = t$ اقسم كل طرف على 0.01925

$19.907 \approx t$ استخدم الحاسبة

سيصل تعداد السكان للدولة إلى 12 مليون نسمة بحلول عام 2020.

c. يمكن نمذجة التعداد السكاني لدولة أخرى في عام 2000 كان تعدادها 9.9 ملايين من خلال المعادلة $y = 9.9e^{0.0028t}$. حدّد متى سيتجاوز أول تعداد سكاني للدولة التعداد السكاني للدولة الأخرى التي كانت 9.9 ملايين.

$8.18e^{0.01925t} > 9.9e^{0.0028t}$ صيغة النمو الأسي

$\ln 8.18e^{0.01925t} > \ln 9.9e^{0.0028t}$ خاصية التباين في اللوغاريتمات

$\ln 8.18 + \ln e^{0.01925t} > \ln 9.9 + \ln e^{0.0028t}$ خاصية ناتج ضرب اللوغاريتمات

$\ln 8.18 + 0.01925t > \ln 9.9 + 0.0028t$ $\ln e^x = x$

$0.01645t > \ln 9.9 - \ln 8.18$ اطرح $(0.0028t + \ln 8.18)$ من كل طرف

$t > \frac{\ln 9.9 - \ln 8.18}{0.01645}$ اقسم كل طرف على 0.01645.

$t > 11.6$ استخدم الحاسبة

سيتجاوز تعداد السكان للدولة التعداد السكاني للدولة الأخرى خلال عام 2012.

تمرين موجه

3. **علم الحياة** ينمو نوع ما من البكتيريا بمعدّل أسي وفقًا للنموذج $y = 1000e^{kt}$، حيث يمثل t الزمن بالدقائق.

A. فإذا كان هناك 1000 خلية في البداية و1650 بعد 40 دقيقة، فأوجد قيمة k للبكتيريا. $k \approx 0.0125$

B. افترض أن نوعًا آخر من البكتيريا ينمو بمعدل أسي وفقًا للنموذج $y = 50e^{0.0432t}$. حدّد الوقت التقريبي الذي يستغرق قبل أن يتجاوز عدد خلايا هذه البكتيريا عدد الخلايا في البكتيريا الأخرى. حوالي 97.58 min

حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح شركة McGraw-Hill Education

نصيحة لحل المسائل

استخدم صيغة عند التعامل مع تعداد سكاني، فمن الضروري دائمًا استخدام صيغة نمو أسي أو اضمحلال أسي.

التدريس المتمايز

التوسع يمكن أن يجري الطلاب المتميزون في الرياضيات والعلوم بحثًا عن معدلات النمو في الأنواع المختلفة من البكتيريا. يمكن أن يستكشف الطلاب كيفية تحديد معدلات النمو هذه والعوامل البيئية التي تجعلها تعزز زيادتها أو تكبحها. كما يمكنهم رسم معدلات نمو الأنواع المختلفة بهدف مقارنتها.

٨:٥٢ م ٦٧% ://elib.moe.gov.ae

2 النمو اللوجستي

يوضح **المثال 4** كيفية استخدام دالة النمو اللوجستي لنمذجة النمو بعامل محدد.

مثال إضافي

4 يتمثل نموذج تعداد السكان في مدينة بالملايين من خلال $f(t) = \frac{1.432}{1 + 1.05e^{-0.32t}}$ حيث يمثل t عدد السنوات منذ عام 2000.

a. مثّل الدالة بيانيًا.

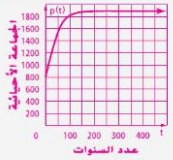
b. ما خط التقارب الأفقي؟
$f(t) = 1.432$

c. ما أقصى تعداد سكاني؟ 1,432,000

d. وفقًا للدالة، متى سيصل تعداد سكان المدينة إلى مليون واحد؟ 2003

إجابة إضافية (تمرين موجّه)

4A.

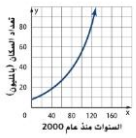


2 النمو اللوجستي

ارجع إلى المعادلة التي تمثّل حالة التعداد السكاني للدولة في مثال 3. وفقًا للتمثيل البياني في الجانب الأيسر، سيصل التعداد السكاني للدولة إلى حوالي مليار واحد بحلول عام 2130. هل يبدو هذا منطقيًا؟

لا يمكن أن ينمو السكان بنسبة كبيرة غير متناهية. فثمة قيود، مثل الإمدادات الغذائية والحرب والخبر البعيشي والأمراض والموارد المتاحة وغير ذلك.

النمو الأسّي غير مقيد، مما يعني أنه سيزداد دون حد. ومع ذلك، يمثّل **نموذج النمو اللوجستي** نموًا بعامل محدد. لهذا النماذج اللوجستية أكثر النماذج دقة لتمثيل نمو السكان.



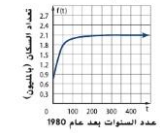
المفهوم الأساسي دالة النمو اللوجستي

بافتراض أن a، b، c ثوابت موجبة حيث $b > 1$. تمثّل دالة النمو اللوجستي من خلال $f(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}}$، حيث تمثّل t الزمن.

مثال من الحياة اليومية 4 النمو اللوجستي

يمكن تمثيل التعداد السكاني لفينيكس في أريزونا، بالملايين من خلال الدالة اللوجستية $f(t) = \frac{2.0666}{1 + 1.66e^{-0.04t}}$، حيث يمثل t عدد السنوات بعد 1980.

a. مثّل الدالة بيانيًا لـ $0 \le t \le 500$.



b. ما خط التقارب الأفقي؟
خط التقارب الأفقي عند $y = 2.0666$.

c. هل سيزيد تعداد السكان لفينيكس بشكل لانهائي؟ إن لم يكن، فلماذا سيكون الحد الأقصى للتعداد السكاني بها؟
لا. سيصل تعداد السكان إلى حد أقصى أقل بقليل من 2.0666 مليون نسمة.

d. وفقًا للدالة، متى سيصل تعداد السكان في فينيكس إلى 1.8 مليون نسمة؟
يشير التمثيل البياني إلى أن تعداد السكان سيصل إلى 1.8 مليون نسمة عند $50 \approx t$. بالتعويض عن $f(t)$ بـ 1.8 وإيجاد قيمة t في نواتج المعادلة $t = 50.35$ عامًا. لذلك، سيصل تعداد السكان لفينيكس إلى 1.8 مليون نسمة بحلول عام 2031.

نصيحة دراسية نقاط التقاطع لتحديد موقع قطع التمثيل البياني 1.8 على الحاسبة، مثّل $y = 1.8$ بيانيًا على نفس التمثيل البياني وحدد *Intersection* في القائمة CALC.

تمرين موجه

4. يمكن تمثيل الجماعة الأحيائية لأنواع معينة من الأسماك في بحيرة ما بعد عدد t من السنوات من خلال الدالة $p(t) = \frac{1880}{1 + 1.42e^{-0.037t}}$ حيث $t \ge 0$.

A. مثّل الدالة بيانيًا لـ $0 \le t \le 500$. **انظر الهامش.**

B. ما خط التقارب الأفقي؟ $y = 1880$

C. ما الحد الأقصى للجماعة الأحيائية للأسماك في البحيرة؟ 1880

D. متى سيصل عدد الجماعة الأحيائية إلى 1875؟ **حوالي 170 yr**

© حقوق النشر محفوظة لشركة ماكجرو هيل للتعليم

المتابعة

- كيف يمكن أن تساعدك النماذج الرياضية على اتخاذ قرارات جيدة؟ نموذج الإجابة: يمكن استخدام النماذج الرياضية لمقارنة الخيارات المختلفة المتاحة. فضلًا عن التنبؤ بتأثير أحد الخيارات عند اختياره.

606 / 475

٨:٥٢ م ٦٧٪
://elib.moe.gov.ae

تحقق من فهمك

المثالان 1–2 1. **علم الأحافير** يبلغ عمر النصف لعنصر البوتاسيوم 40 حوالي 1.25 مليار عام.

a. حدّد قيمة k ومعادلة الانحلال لعنصر البوتاسيوم 40. 5.545×10^{-10}

b. تحتوي عينة ما حاليًا على 36 ملليجرامًا من عنصر البوتاسيوم 40. ما الوقت الذي ستستغرقه العينة للانحلال إلى 15 ملليجرامًا فقط من عنصر البوتاسيوم 40؟ **1,578,843,530 yr**

c. كم عدد ملليجرامات عنصر البوتاسيوم 40 التي ستتبقى بعد 300 مليون عام؟ **حوالي 30.48 mg**

d. ما الوقت الذي سيستغرقه عنصر البوتاسيوم 40 للانحلال إلى ثُمن كميته الأصلية؟ **3,750,120,003 yr**

مثال 3 2. **العلوم** وقع طعام معين على الأرض ونمت فيه بكتيريا بمعدل أسّي وفقًا للصيغة $y = 2e^{kt}$، حيث يمثل t الزمن بالثواني. **b. حوالي 2.828 خلية**

a. إذا كانت ثمة خليتان في البداية و8 خلايا بعد 20 ثانية، فأوجد قيمة k للبكتيريا. $k \approx 0.0693$

b. تنص "قاعدة الثواني الخمس" على أنه إذا أكل الشخص الطعام الذي سقط على الأرض خلال 5 ثوانٍ، فلن يكون هناك أي ضرر. كم عدد البكتيريا الموجودة في الطعام بعد 5 ثوانٍ؟

c. هل ستأكل طعامًا ظل على الأرض لمدة 5 ثوانٍ، أم لا؟ هل تعتقد أن المعلومات التي حصلت عليها في هذا التمرين منطقية؟ اشرح.

مثال 4 3. **علم الحيوان** افترض أن الجماعة الأحيائية للثعلب الأحمر في موطن بيئي محدود تنمو وفقًا للدالة $P(t) = \frac{16{,}500}{1 + 18e^{-0.085t}}$، حيث تمثل t الزمن بالسنوات.

a. مثّل الدالة بيانيًا لـ $0 \le t \le 200$. **انظر الهامش.**

b. ما خط التقارب الأفقي؟ $P(t) = 16{,}500$

c. ما أقصى عدد للجماعة الأحيائية؟ **16,500**

d. متى يصل عدد الجماعة الأحيائية إلى 16,450؟ **حوالي 102 عام**

التمرين وحل المسائل

المثالان 1–2 4. **المثابرة** يبلغ عمر النصف لعنصر الروبيديوم 87 حوالي 48.8 مليون عام.

a. حدّد قيمة k ومعادلة انحلال عنصر الروبيديوم 87. $k \approx 1.42 \times 10^{-11}$

b. تحتوي عينة ما حاليًا على 50 mg من الروبيديوم 87. ما الوقت الذي ستستغرقه العينة للانحلال إلى 18 mg فقط من عنصر الروبيديوم 87؟ **71,947,270,950 yr**

c. كم عدد الملليجرامات من عنصر الروبيديوم 87 التي ستتبقى بعد 800 مليون عام؟ **حوالي 49.4 mg**

d. ما الوقت الذي سيستغرقه عنصر الروبيديوم 87 للانحلال إلى جزء من ستة عشر جزءًا من كميته الأصلية؟ **195.3 مليار عام**

مثال 3 5. **علم الحياة** ينمو نوع ما من البكتيريا بمعدّل أسي وفقًا للنموذج $y = 80e^{kt}$، حيث يمثل t الزمن بالدقائق.

a. فإذا كانت توجد 80 خلية في البداية و675 بعد 30 دقيقة، فأوجد قيمة k للبكتيريا. $k \approx 0.071$

b. **متى ستصل** البكتيريا إلى جماعة أحيائية عددها 6000 خلية؟ **حوالي 60.8 min**

c. إذا كان نوع آخر من البكتيريا ينمو بمعدل أسّي وفقًا للنموذج $y = 35e^{0.0978t}$، فحدّد كم سيمضي من الوقت قبل أن يتجاوز عدد خلايا هذه البكتيريا عدد الخلايا في البكتيريا الأخرى. **حوالي 49.4 min**

مثال 4 6. **علم البحراة** تنمو الجماعة الأحيائية للأشجار في غابة معينة وفقًا للدالة $f(t) = \frac{18000}{1 + 16e^{-0.084t}}$، حيث يمثل t الزمن بالسنوات.

a. مثّل الدالة بيانيًا لـ $0 \le t \le 100$. **انظر الهامش.**

b. متى سيصل عدد الجماعة الأحيائية إلى 17500 شجرة؟ **حوالي 75.33 yr**

حق النشر والنقل © محفوظ لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1–3 للتأكد من الفهم.

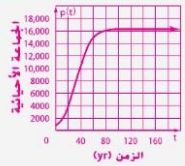
استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس ممارسات في الرياضيات

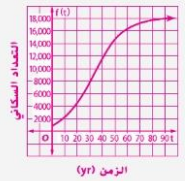
المثابرة يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط لحلها. حيث يحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف ويضعون تخمينات لصيغة الحل ومعناها ويخططون لمسار الحل بدلًا من مجرد القفز إلى محاولة حل.

إجابات إضافية

3a.



6a.



2c. **نموذج الإجابة: نعم؛ إنها لم تُنتج حتى خلية واحدة في 5 ثوانٍ. هناك عدة عوامل تؤثر في هذه المعادلة، مثل مدى نظافة الأرض ونوعية الطعام الذي ستقط عليها.**

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
ق م مبتدئ	4–6، 14، 16–18	4، 6، 14، 18–23	5، 19–22
ض م أساسي	5، 7–14، 16–34	4–7، 14–16، 18–23	6–9، 19–22
م متقدم	7–26، (اختياري: 27–34)		

٨:٥٢ م ٦٧٪
://elib.moe.gov.ae
606 / 475

تدريس ممارسات في الرياضيات

فرضيات يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات فهم الافتراضات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقًا واستخدامها في بناء الفرضيات. ويضعون التخمينات ويبنون تقدمًا منطقيًا للمسائل لاستكشاف حقيقة تخميناتهم. كما يُمكنهم تحليل المواقف بتقسيمها إلى حالات ويمكنهم التعرف على الأمثلة المضادة واستخدامها.

13b. **تتقاطع التمثيلات البيانية عند** $t = 20.79$؛ **نموذج الإجابة: يشير هذا التقاطع إلى النقطة التي تحدد عندها كل من الدالتين التعداد السكاني نفسه في الوقت نفسه.**

16. **نموذج الإجابة: بما أن** $t \to +\infty$، $e^{-t} \to 0$. **إذا، فإن المقام يقترب من** $0 + 1$ **أو** 1 **بما أن المقام يقترب من** 1، **إذا** $f(t) \to c$ **أو** $\frac{c}{1}$. **ومع ذلك، بما أن** e^{-t} **لا تصل أبدًا إلى** 0، **إذا** $f(t)$ **لا يمكن أن تصل إلى** c. $f(t) \to c$ **و** c.

7 **علم الأحافير** وجد عالمو أحافير عظمة بشرية وحدّد أن نسبة عنصر الكربون 14 الذي وُجد في العظمة يساوي 85% من الذي وُجد في نسيج عظمي حي. كم عمر العظمة؟ **حوالي 1354 yr**

8. **علم الإنسان** حدد عالم إنسان أن عمر عظمة بشرية تم اكتشافها حديثًا هو 8000 عام. ما مقدار الكمية الأصلية لعنصر الكربون 14 الموجودة في العظمة؟ **حوالي 38%**

9. **الانحلال الإشعاعي** تم تخزين 100 ملليجرام من عنصر اليورانيوم 238 في حاوية. إذا كان عمر النصف لليورانيوم 238 حوالي 4.47 ملايين عام، فبعد كم عامًا ستوجد 10 ملليجرامات فقط؟ **14.85 مليار عام**

10. **النمو السكاني** بلغ التعداد السكاني لولاية أوريجون من 3.4 ملايين في عام 2000 إلى 3.7 ملايين في عام 2006.
   a. اكتب معادلة النمو الأسّي بالصيغة $y = ae^{kt}$ لأوريجون، حيث يمثل t عدد السنوات بعد عام 2000. $y = 3.4e^{0.014t}$
   b. استخدم معادلتك في توقع تعداد السكان لأوريجون في عام 2020. **4.5 ملايين**
   c. وفقًا للمعادلة، متى سيصل تعداد سكان أوريجون إلى 6 ملايين نسمة؟ **2041 تقريبًا**

11. **عمر النصف** تتحلل مادة ما بمقدار 99.9% من كتلتها الكلية بعد 200 عام. حدّد عمر النصف للمادة. **حوالي 20.1 yr**

12. **النمو اللوجيستي** يمكن نمذجة التعداد السكاني لولاية أوهايو بعد عام 1900 بالدالة $P(t) = \frac{12.95}{1 + 2.4e^{-kt}}$، حيث يمثل t عدد الأعوام بعد عام 1900 وk ثابت.
   a. إذا كان تعداد السكان بأوهايو 10 ملايين في عام 1970، فأوجد قيمة k. $k \approx 0.0299464$
   d. وفقًا للمعادلة، متى سيصل تعداد سكان أوهايو إلى 12 مليونًا؟ **2014**

13. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف النمو السكاني. يتبع النمو السكاني في بلد ما الدالة الأسّية $f(t) = 8e^{0.075t}$ أو الدالة اللوجيستية $g(t) = \frac{400}{1 + 16e^{-0.025t}}$. يُقدّر تعداد السكان بالملايين ويمثل t الزمن بالسنوات.
   a. **بيانيًا** مثّل بيانيًا كلًا من الدالتين لـ $0 \le t \le 100$. **انظر الهامش.**
   b. **تحليليًا** حدّد تقاطع التمثيلات البيانية. ما أهمية هذا التقاطع؟
   c. **تحليليًا** أي الدالتين تعد تقديرًا أكثر دقة للتعداد السكاني للبلد بعد 100 عام من الآن؟ اشرح استنتاجك. **نموذج الإجابة: تُعد الدالة اللوجيستية $g(t)$ تقديرًا أكثر دقة للتعداد السكاني للبلد بما أن $f(t)$ ستستمر في الزيادة بمعدل أسي وبما أن $g(t)$ تأخذ في الحسبان القيود على النمو الأسّي مثل الإمداد الغذائي.**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدم مهارات التفكير العليا

14. **مسألة غير محددة الإجابة** أعط مثالًا على كمية تزداد أو تضمحل بمعدل ثابت. اكتب مسألة من الحياة اليومية تشتمل على المعدل وحلها باستخدام اللوغاريتمات. **نموذج الإجابة: المال في بنك ما؛ راجع عمل الطلاب.**

15. **تحفيز** حل $\frac{120{,}000}{1 + 48e^{-0.015t}} = 24c^{0.055t}$ لإيجاد t. $t \approx 113.45$

16. **الفرضيات** اشرح رياضيًا سبب أن $f(t) = \frac{c}{1 + 60e^{-0.5t}}$ تقترب من القيمة c حيث $t \to +\infty$ ولكنها لا تصل إليها.

17. **مسألة غير محددة الإجابة** أعط مثالًا لكمية تتزايد لوجيستيًا ولها حدود للتزايد. اشرح سبب تزايد الكمية بهذه الطريقة. **انظر الهامش.**

18. **الكتابة في الرياضيات** كيف تُستخدم الدوال الأسّية والأسّية المتصلة واللوجيستية لنمذجة الحالات المختلفة من الحياة اليومية؟ **انظر الهامش.**

© Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company

606 | الدرس 8-8 | استخدام الدوال الأسية واللوغاريتمية

٨:٥٣ م ٦٧٪
://elib.moe.gov.ae

تدريب على الاختبار المعياري

19. يصمم كريم نموذجاً بقطعات دائرية لتوضيح نكهات الآيس كريم المفضلة للزبائن في متجره. يلخّص الجدول البيانات. ما الزاوية المركزية التي ينبغي على كريم استخدامها للقسم الذي يمثل الشوكولاتة؟ C

النكهة	الزبائن
الشوكولاتة	35
الفانيليا	42
الفراولة	7
نكهة الحلوى	12
زبدة الفول	4

A 35°
B 63°
C 126°
D 150°

20. **احتمالات** تمتلك سالي 6 كتب على رف الكتب الخاص بها، منها اثنان من كتب الأدب وكتاب علوم واحد واثنان من كتب الرياضيات وقاموس واحد. ما احتمال أن تختار كتاب علوم وقاموسًا عشوائيًا؟ J

F $\frac{1}{3}$
G $\frac{1}{4}$
H $\frac{1}{12}$
J $\frac{1}{15}$

21. **اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول** صنع رشيد لعبة من أجل حفلة عيد ميلاد أخته: لوحة اللعب عبارة عن دائرة مقسمة بالتساوي إلى 8 قطاعات. إذا كان نصف قطر الدائرة 18 in، فما المساحة التقريبية لأحد القطاعات؟ D

A 4 in²
B 14 in²
C 32 in²
D 127 in²
E 254 in²

22. **الإحصاء** عند إجراء مسح شمل 90 من مدربي اللياقة البدنية قال 15 إنهم مارسوا الجري 5 مرات على الأقل كل أسبوع، وقال 5 من تلك المجموعة إنهم مارسوا السباحة خلال الأسبوع، ومارس ما لا يقل عن 25% من جميع المدربين الجري والسباحة كل أسبوع. أي استنتاج يستند إلى المعلومات المقدمة؟ H

F التقرير دقيق لأن 15 من أصل 90 يساوي 25%.
G التقرير دقيق لأن 5 من أصل 15 يساوي 33%، وهو ما لا يقل عن 25%.
H التقرير غير دقيق لأن 5 من أصل 90 يساوي 5.6% فقط.
J التقرير غير دقيق لأنه لا أحد يعلم إذا كانت السباحة تمرينًا أم لا.

26a. أرمينيا وبوغوسلافيا أو هايتي وبوغوسلافيا؛ المغرب وإندونيسيا

مراجعة شاملة

اكتب معادلة أسية أو لوغاريتمية مكافئة. (الدرس 7–8)

23. $e^7 = y$ $\ln y = 7$
24. $e^{2n-4} = 36$ $\ln 36 = 2n - 4$
25. $\ln 5 + 4 \ln x = 9$ $5x^4 = e^9$

26. **الزلازل** يوضح الجدول شدة بعض الزلازل القوية. (تلميح: الزلزال الذي يبلغ قياسه 7 تكون شدته بمقدار 10^7.) (الدرس 5–6، 8–6)

العام	الموقع	الشدة
1963	يوغوسلافيا	6.0
1970	بيرو	7.8
1988	أرمينيا	7.0
2004	المغرب	6.4
2007	إندونيسيا	8.4
2010	هايتي	7.0

a. أي زلزالين كانت شدة أحدهما 10 أمثال شدة الآخر؟ أي زلزالين كانت شدة أحدهما 100 ضعف شدة الآخر؟

b. كم ستكون شدة الزلزال الذي تساوي شدته 1000 ضعف شدة زلزال 1963 في يوغوسلافيا؟ 9.0

c. افترض أنك تعرف أنّ $\log_7 2 \approx 0.3562$ و$\log_7 3 \approx 0.5646$. صف طريقتين يمكنك استخدامهما لإيجاد قيمة $\log_7 2.5$ تقريبيًا. (قد تحتاج بالطبع إلى استخدام حاسبة). ثم صف كيف يمكنك التحقق من نتيجتك. **انظر الهامش.**

مراجعة المهارات

حُلّ كل من المعادلات التالية. اكتب في أبسط صورة.

27. $\frac{5}{3}x = \frac{4}{15}$ $\frac{1}{8}$
28. $\frac{27}{14}n = \frac{6}{7}$ $\frac{4}{9}$
29. $\frac{3}{10} = \frac{12}{25}a$ $\frac{5}{8}$
30. $\frac{6}{7} = 9p$ $\frac{2}{21}$
31. $\frac{9}{8}b = 18$ 16
32. $\frac{6}{7}y = \frac{3}{4}$ $\frac{7}{8}$
33. $\frac{1}{3}z = \frac{5}{6}$ $2\frac{1}{2}$
34. $\frac{2}{3}t = 7$ $10\frac{1}{2}$

التدريس المتمايز

التوسع *المنحنيات المسلسلة* هي منحنيات تشبه المنحنيات التي تتكون عند تعليق سلسلة بين خطافين. تشد كل حلقة من السلسلة الحلقة التي تليها. مما يمنح السلسلة المعلقة شكلها المنحني. يُعد قوس جيت واي في سانت لويس في ميسوري مثالاً على المنحنى المسلسلي المقلوب.

اطلب من الطلاب استخدام حاسبة التمثيل البياني لتمثيل $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ بيانيًا. لرؤية نموذج المنحنى المسلسلي.

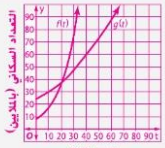
4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب

الطلاب اطلب من الطلاب كتابة أسئلة يمكن حلها باستخدام $y = ae^{kt}$ على أحد جانبي بطاقات الفهرسة. ثم اطلب منهم حلّ المسائل على الجانب الآخر من البطاقات.

إجابات إضافية

13a.



17. نموذج الإجابة: انتشار الإنفلونزا في مدينة صغيرة. يتقيد النمو هنا بتعداد سكان المدينة نفسها.

18. نموذج الإجابة: يمكن استخدام الدوال الأسية لنمذجة الحالات التي تشتمل على نسبة نمو أو اضمحلال ثابتة. يمكن استخدام الدوال الأسية المستمرة لنمذجة الحالات التي تشتمل على نسبة نمو أو اضمحلال مستمرة. يمكن استخدام الدوال الأسية لنمذجة الحالات التي تشتمل على نسبة نمو أو اضمحلال مستمر وتتضمن عاملاً محددًا.

26c. نموذج الإجابة: الطريقة 1: استخدم صيغة تغيير الأساس وأوجد أنّ القيمة تساوي حوالي 0.4709. الطريقة 2: استخدم الضمنين $\log_7 2 \approx 0.3562$ و$\log_7 3 \approx 0.5646$. أولاً، احسب متوسط الضمنين، وبعد ذلك خمّن وتحقق من خلال رفع الرقم 7 إلى عدة أسس مختلفة. استمر حتى تحصل على التقريب المطلوب إلى 2.5. للتحقق أوجد قيمة $7^{0.4709}$ التي تقترب كثيرًا من 2.5.

606 / 475

٨:٥٣ م ٦٧٪
://elib.moe.gov.ae

8-8 مختبر تقنية التمثيل البياني التبريد

في هذه التجربة، ستستكشف نوع المعادلة التي تُمثّل نموذجًا للتغير في درجة حرارة الماء عندما يبرد في ظروف متنوعة.

إعداد التجربة

- اجمع مجموعة مختلفة من الحاويات، مثل كوب من الفوم وكوب قهوة خزفي وكوب معزول.
- قم بملء الماء أو بإحضار ماء ساخن من الصنبور.
- اختر حاوية لاختبارها واملأها بماء ساخن. ضع مجسّ درجة الحرارة في الكوب.
- وصل مجسّ درجة الحرارة بجهاز جمع البيانات الخاص بك.

النشاط

الخطوة 1 قم ببرمجة الجهاز لجمع 20 عينة أو أكثر بفاصل زمني قدره دقيقة واحدة.

الخطوة 2 انتظر بضع ثوان حتى يسخن المجس إلى درجة حرارة الماء.

الخطوة 3 اضغط على الزر لبدء جمع البيانات.

حلل النتائج

1. عند اكتمال جمع البيانات، مثّل البيانات بيانيًا في مخطط انتشار. استخدم الوقت كمتغير مستقل ودرجة الحرارة كمتغير غير مستقل. اكتب عبارة تصف النقاط الموجودة على التمثيل البياني. **نموذج الإجابة: إنه نمط أسّي.**
2. استخدم قائمة STAT لإيجاد معادلة لتمثيل البيانات التي جمعتها جرّب نماذج خطية وتربيعية وأسية. أي نموذج يبدو أنه يناسب البيانات بالشكل الأفضل؟ اشرح. **2. نموذج الإجابة: يتناسب النموذج الأسّي بشكل أفضل. حيث يكون معامل الارتباط فيه أقرب إلى 1.**
3. هل تتوقع أن تنخفض درجة حرارة الماء إلى ما دون درجة حرارة الغرفة؟ اشرح استنتاجك. **3. نموذج الإجابة: لا؛ ستقترب درجة الحرارة من درجة حرارة الغرفة ولكن لن تهبط إلى ما دونها.**
4. استخدم جهاز جمع البيانات لإيجاد درجة حرارة الهواء في الغرفة. مثّل بيانك الدالة $t = y$، حيث t يمثّل درجة حرارة الغرفة. على مخطط الانتشار ومعادلة النموذج، صف العلاقة بين التمثيلين البيانيين. ما معنى العلاقة في سياق التجربة؟ **4. نموذج الإجابة: يعد التمثيل البياني الخطي لدرجة حرارة الغرفة هو خط التقارب للتمثيل البياني الأسّي. ستقترب درجة الحرارة من درجة حرارة الغرفة، ولكنها لن تهبط إلى ما دون درجة الحرارة هذه.**

التخمين

5. هل تعتقد أن نتائج التجربة ستتغير إذا استخدمت حاوية معزولة للماء؟ أي جزء في الدالة سيتغير، الثابت أم معدّل الاضمحلال؟ كرر التجربة للتحقق من تخمينك. **5. نموذج الإجابة: نعم؛ ستعمل الحاوية الحرارية على إبطاء معدّل التبريد. يؤثر هذا في معدّل الاضمحلال في الدالة.**
6. كيف يمكن أن تتغير نتائج التجربة إذا أضفت الثلج إلى الماء؟ أي جزء في الدالة سيتغير، الثابت أم معدّل الاضمحلال؟ كرر التجربة للتحقق من تخمينك.

نموذج الإجابة: سيزيد الثلج من سرعة معدل التبريد. يؤثر هذا في معدّل الاضمحلال في الدالة.

1 محور التركيز

الهدف استخدام جهاز جمع البيانات في استكشاف الاختلاف بين أنواع الأكواب المعزولة وزمن التبريد.

المواد

- حاسبة التمثيل البياني
- جهاز جمع البيانات ومجس درجة الحرارة المتوافق
- مجموعة متنوعة من الحاويات
- ماء ساخن جدًا

نصيحة للتدريس

إذا كان الجهاز المستخدم هو الحاسبة المعملية 2، فلاحظ ما يلي؛ تتضمن الحاسبة المعملية ثلاثة مفاتيح:

- [TRANSFER] يبدأ نقل برامج تطبيقات برمجيات الحاسبة بين الحاسبة المعملية وحاسبة التمثيل البياني العلمية TI المتصلة
- [QUICK SET-UP] يحذف أي معلومات مسجلة على ذاكرة الآلات الحاسبة المعملية.
- [START/STOP] يبدأ أخذ العينات من أجل الإعداد السريع. يستمر أخذ العينات حتى يتم جمع عدد العينات أو تضغط على [START/STOP].

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قسم الطلاب إلى مجموعات تتكون من 3 أو 4 طلاب ذوي قدرات متنوعة. ثم كلّف مجموعات الطلاب باستكمال النشاط والتمارين 4–1.

- لضبط الحاسبة والحاسبة المعملية لجمع البيانات، اختر **Collect** من **Data** Main Menu. اختر **Time Graph** من قائمة **Data Collection**. أدخل **60** لتحديد الزمن بين العينات بالثواني. ثم أدخل **20** لتحديد عدد العينات (ستجمع الحاسبة المعملية البيانات بإجمالي 1200 ثانية). اضغط على [ENTER]، ثم اختر **Use Time Setup** للاستمرار.
- ناقش مع الطلاب **Ymin** و**Ymax** و**Yscl** اللازمة لهذه التجربة.

تمرين كلّف المجموعات بإكمال التمارين 6–5.

3 التقويم

التقويم التكويني

في التمرين 5، تحقق من استخدام الطلاب لحاويات مختلفة ولكن مع درجة حرارة الماء الأولية نفسها. اسأل الطلاب عن سبب ضرورة بدء التجربة الثانية بماء تساوي درجة حرارته درجة حرارة الماء في التجربة الأولى.

من المجرد إلى المحسوس

اطلب من الطلاب وصف الحاويات التي تمثل أفضل العوازل.

606 / 475

٨:٥٣ م ٦٧٪
://elib.moe.gov.ae

الوحدة 8 دليل الدراسة والمراجعة

8 دليل الدراسة والمراجعة

المفاهيم الأساسية

الدوال الأسّية (الدرسين 1–8 و2–8)

- تكون الدالة الأسّية بالصيغة $y = ab^x$ حيث $a \neq 0$، $b > 0$ و $b \neq 1$.
- خاصية المساواة في الدوال الأسّية: إذا كان b عددًا موجبًا غير 1، إذا $b^x = b^y$ فقط إذا كان $x = y$.
- خاصية التباين في الدوال الأسّية: إذا كان $b > 1$، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$، $b^x < b^y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$.

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية (الدروس من 3–8 إلى 6–8)

- افترض أن $b > 0$ و $b \neq 1$. بالنسبة إلى $x > 0$، يوجد العدد y بحيث $\log_b x = y$ إذا وفقط إذا كان $b^y = x$.
- لوغاريتم ناتج الضرب يساوي مجموع لوغاريتمات عوامله.
- لوغاريتم ناتج القسمة يساوي الفرق بين لوغاريتمات البسط والمقام.
- لوغاريتم الأس يساوي ناتج اللوغاريتم والأس.
- صيغة تغيير الأساس: $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية (الدرس 7–8)

- بما أن دالة الأساس الطبيعي ودالة اللوغاريتم الطبيعي معكوسان، تُستخدم هاتان الدالتان "إلغاء" بعضهما بعضًا.

استخدام الدوال الأسّية واللوغاريتمية (الدرس 8–8)

- يمكن تمثيل النمو الأسّي من خلال الدالة $f(x) = ae^{kt}$، حيث k ثابت يمثّل معدل النمو المستمر.
- يمكن تمثيل الاضمحلال الأسّي من خلال الدالة $f(x) = ae^{-kt}$، حيث k ثابت يمثّل معدل الاضمحلال المستمر.

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في مطويتك.

المفردات الأساسية

خط التقارب	لوغاريتم
صيغة تغيير الأساس	المعادلة اللوغاريتمية
اللوغاريتم العادي	الدالة اللوغاريتمية
المراجحة المركبة	المتباينة اللوغاريتمية
عامل الاضمحلال	نموذج النمو اللوجيستي
الاضمحلال الأسّي	الأساس الطبيعي، e
المعادلة الأسّية	الدالة الأسّية للأساس الطبيعي
الدالة الأسّية	اللوغاريتم الطبيعي
النمو الأسّي	معدّل الاضمحلال المستمر
المتباينة الأسّية	معدل النمو المستمر
عامل النمو	

مراجعة المفردات

اختر من القائمة أعلاه كلمة أو مصطلحًا يكمل كل عبارة أو جملة بأفضل شكل.

1. دالة بالصيغة $f(x) = b^x$ حيث $b > 1$ هي دالة ـــــــــــ. **النمو الأسّي**
2. $\ln x = b^y$ يُسمى المتغير y ـــــــــــ لـ x. **لوغاريتم**
3. تُسمى لوغاريتمات الأساس 10 ـــــــــــ.
4. ـــــــــــ هي معادلة تكون فيها المتغيرات في صورة أسس. **المعادلة الأسّية**
5. تنتج لك ـــــــــــ كتابة تعبيرات لوغاريتمية متكافئة لها أساسات مختلفة. **صيغة تغيير الأساس**
6. يُسمى أساس الدالة الأسّية $A(t) = a(1 - r)^t$، $1 - r$ باسم ـــــــــــ. **عامل الاضمحلال**
7. تُسمى الدالة $y = \log_b x$ حيث $b > 0$ و $b \neq 1$، باسم ـــــــــــ. **الدالة اللوغاريتمية**
8. تُسمى الدالة الأسّية ذات الأساس e باسم ـــــــــــ. **الدالة الأسّية للأساس الطبيعي**
9. يُسمى اللوغاريتم ذو الأساس e باسم ـــــــــــ. **اللوغاريتم الطبيعي**
10. يشار إلى العدد e باسم ـــــــــــ. **الأساس الطبيعي**

609

التقويم التكويني

المفردات الأساسية تشير الصفحات المرجعية المذكورة بعد كل مصطلح إلى الموضع الذي ورد فيه المصطلح لأول مرة. إذا واجه الطلاب صعوبة في الإجابة على الأسئلة 1–10، فذكرهم أنه يمكنهم استخدام هذه الصفحات المرجعية لتنشيط ذاكرتهم عن المفردات.

مراجعة المفردات

مراجعة المفردات تمنح الطلاب الفرصة للتحقق من فهمهم للمفاهيم المهمة والمصطلحات على هيئة لعبة على الإنترنت.

المطويات منظّم الدراسة

مطويات® Dinah Zike

اطلب من الطلاب تصفح الوحدة للتأكد من احتواء مطوياتهم على أمثلة تغطي كل درس في الوحدة. واقترح عليهم إبقاء مطوياتهم بجانبهم أثناء إكمال صفحات دليل الدراسة والمراجعة. وضح إمكانية استخدام مطوياتهم في المراجعة السريعة عند المذاكرة لاختبار الوحدة.

609

606 / 475

٨:٥٣ م ٦٧٪
://elib.moe.gov.ae

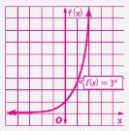
مراجعة درس بدرس

التدخل التقويمي إذا كانت الأمثلة المقدمة غير كافية لمراجعة الموضوعات التي تناولوها الأسئلة، فذكّر الطلاب بأن مراجع الدروس ترشدهم إلى مكان مراجعة الموضوع في الكتاب المدرسي.

خيار اطلب من الطلاب إكمال مراجعة درس بدرس.

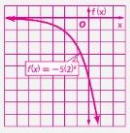
إجابات إضافية

11.



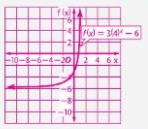
D = (كل الأعداد الحقيقية)
R = (f(x) | f(x) > 0)

12.



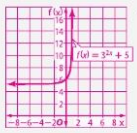
D = (كل الأعداد الحقيقية)
R = (f(x) | f(x) < 0)

13.



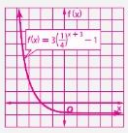
D = (كل الأعداد الحقيقية)
R = (f(x) | f(x) > -6)

14.



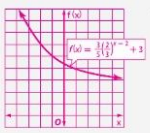
D = (كل الأعداد الحقيقية)
R = (f(x) | f(x) > 5)

15.



D = (كل الأعداد الحقيقية)
R = (f(x) | f(x) > -1)

16.

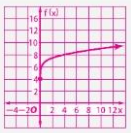


D = (كل الأعداد الحقيقية)
R = (f(x) | f(x) > 3)

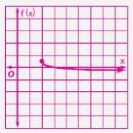
٨:٥٣ م ٦٧٪
://elib.moe.gov.ae

إجابات إضافية

29.



30.



8-4 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

مثال 4

حل المتباينة $\log_{27} x < \frac{2}{3}$.

$\log_{27} x < \frac{2}{3}$	المتباينة الأصلية
$x < 27^{\frac{2}{3}}$	متباينة لوغاريتمية إلى متباينة أسية
$x < 9$	بسّط

مثال 5

حل المعادلة $\log_5 (2 - p^2) = \log_5 p$.

$\log_5 (p^2 - 2) = \log_5 p$	المعادلة الأصلية
$p^2 - 2 = p$	خاصية المساواة
$p^2 - p - 2 = 0$	اطرح p من كلا الطرفين
$(p - 2)(p + 1) = 0$	حلل إلى العوامل
$p - 2 = 0$ أو $p + 1 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$p = 2$ $p = -1$	أوجد حل كل من المعادلتين

الحل هو $p = 2$، حيث إن $\log_5 p$ غير معرّفة عند $p = -1$.

خلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي:

31. $\log_4 x = \frac{3}{2}$ 8
32. $\log_2 \frac{1}{64} = x$ −6
33. $\log_4 x < 3$ $\{x \mid 0 < x < 64\}$
34. $\log_5 x < -3$ $\left\{x \mid 0 < x < \frac{1}{125}\right\}$
35. $\log_9 (3x - 1) = \log_9 (4x)$
36. $\log_2 (x^2 - 18) = \log_2 (-3x)$ −6
37. $\log_3 (3x + 4) \leq \log_3 (x - 2)$ لا يوجد حل
38. **الزلزال** تقاس شدة الزلزال على مقياس لوغاريتمي يسمى مقياس ريختر، حيث يتم تحديد شدة الزلزال M بالصيغة $M = \log_{10} x$، حيث يمثل x سعة الموجة الزلزالية التي تنتج عنها حركة الأرض. بكم ضعف تفوق السعة الناتجة عن زلزال بمقدار 10 درجات على مقياس ريختر تلك الناتجة عن هزة ارتدادية بمقدار 7 درجات على مقياس ريختر؟ 1000

8-5 خصائص اللوغاريتمات

مثال 6

استخدم $\log_5 2 \approx 0.4307$، $\log_5 16 \approx 1.7227$ لتقريب $\log_5 32$.

$\log_5 32 = \log_5 (16 \cdot 2)$	استبدال 32 بـ 16
$= \log_5 16 + \log_5 2$	خاصية ناتج الضرب
$\approx 1.7227 + 0.4307$	استخدم الحاسبة
≈ 2.1534	

مثال 7

خلّ المعادلة $\log_3 3x + \log_3 4 = \log_3 36$.

$\log_3 3x + \log_3 4 = \log_3 36$	المعادلة الأصلية
$\log_3 3x(4) = \log_3 36$	خاصية ناتج الضرب
$3x(4) = 36$	تعريف اللوغاريتم
$12x = 36$	اضرب
$x = 3$	اقسم كلًا من الطرفين على 12

استخدم $\log_5 16 \approx 1.7227$، $\log_5 2 \approx 0.4307$ لإيجاد القيمة التقريبية لكل تعبير.

39. $\log_5 8$ 1.2920
40. $\log_5 64$ 2.5841
41. $\log_5 4$ 0.8614
42. $\log_5 \frac{1}{4}$ −1.2921
43. $\log_5 \frac{1}{2}$ −0.4307

خلّ كل من المعادلات التالية، تحقق من الحل.

44. $\log_5 x - \log_5 2 = \log_5 15$ 30
45. $3 \log_4 a = \log_4 27$ 3
46. $2 \log_3 x + \log_3 3 = \log_3 36$ $2\sqrt{3}$
47. $\log_4 n + \log_4 (n - 4) = \log_4 5$ 5
48. **الصوت** استخدم الصيغة $L = 10 \log_{10} R$، حيث يمثل L جهارة الصوت ويمثل R شدة الصوت النسبية. لإيجاد مدى جهارة صوت 20 شخصًا يتحدثون مقابل شخص واحد يتحدث، افترض أن صوت شخص واحد يتحدث له شدة نسبية 80 ديسيبل. 361.6 مرة

حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

611

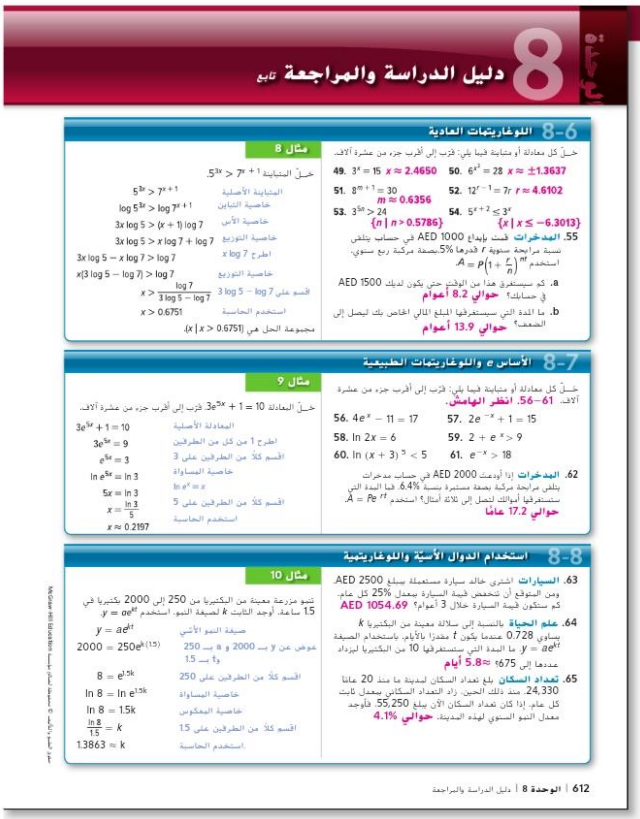
٨:٥٣ م ٦٧٪
://elib.moe.gov.ae

توجيه استباقي

اطلب من الطلاب إكمال التوجيه الاستباقي في الوحدة 8 ومناقشة كيف تغيرت إجاباتهم الآن بعد إكمال الوحدة 8.

إجابات إضافية

56. 1.9459
57. −1.9459
58. 201.7144
59. $\{x \mid x > 1.9459\}$
60. $\{x \mid -3 < x < -0.2817\}$
61. $\{x \mid x < -2.8904\}$



8 دليل الدراسة والمراجعة تابع

8-6 اللوغاريتمات العادية

مثال 8

حلّ المتباينة $5^{3x} > 7^{x+1}$.

$5^{3x} > 7^{x+1}$	المتباينة الأصلية
$\log 5^{3x} > \log 7^{x+1}$	خاصية التباين
$3x \log 5 > (x+1) \log 7$	خاصية الأس
$3x \log 5 > x \log 7 + \log 7$	خاصية التوزيع
$3x \log 5 - x \log 7 > \log 7$	اطرح $x \log 7$
$x(3 \log 5 - \log 7) > \log 7$	خاصية التوزيع
$x > \frac{\log 7}{3 \log 5 - \log 7}$	اقسم على $3 \log 5 - \log 7$
$x > 0.6751$	استخدم الحاسبة

مجموعة الحل هي $\{x \mid x > 0.6751\}$.

خلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي: قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

49. $3^x = 15$ $x \approx 2.4650$
50. $6^{x^2} = 28$ $x \approx \pm 1.3637$
51. $8^{m+1} = 30$ $m \approx 0.6356$
52. $12^{r-1} = 7r$ $r \approx 4.6102$
53. $3^{5n} > 24$ $\{n \mid n > 0.5786\}$
54. $5^{x+2} \leq 3^x$ $\{x \mid x \leq -6.3013\}$
55. **المدخرات** قمت بإيداع AED 1000 في حساب يتقاضى نسبة مرابحة سنوية r قدرها 5% بصفة مركبة ربع سنوي. استخدم $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$.
   a. كم سيستغرق هذا من الوقت حتى يكون لديك AED 1500 في حسابك؟ **حوالي 8.2 أعوام**
   b. ما المدة التي سيستغرقها المبلغ المالي الخاص بك ليصل إلى الضعف؟ **حوالي 13.9 أعوام**

8-7 الأساس e واللوغاريتمات الطبيعية

مثال 9

حلّ المعادلة $3e^{5x} + 1 = 10$. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$3e^{5x} + 1 = 10$	المعادلة الأصلية
$3e^{5x} = 9$	اطرح 1 من كل من الطرفين
$e^{5x} = 3$	اقسم كلاً من الطرفين على 3
$\ln e^{5x} = \ln 3$	خاصية المساواة
$5x = \ln 3$	$\ln e^x = x$
$x = \frac{\ln 3}{5}$	اقسم كلاً من الطرفين على 5
$x \approx 0.2197$	استخدم الحاسبة

خلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي: قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف. انظر 56–61. انظر الهامش.

56. $4e^x - 11 = 17$
57. $2e^{-x} + 1 = 15$
58. $\ln 2x = 6$
59. $2 + e^x > 9$
60. $\ln (x+3)^5 < 5$
61. $e^{-x} > 18$
62. **المدخرات** إذا أودعت AED 2000 في حساب مدخرات يتقاضى مرابحة مركبة بصفة مستمرة بنسبة 6.4%، فما المدة التي ستستغرقها أموالك لتصل إلى ثلاثة أمثال؟ استخدم $A = Pe^{rt}$. **حوالي 17.2 عامًا**

8-8 استخدام الدوال الأسّية واللوغاريتمية

مثال 10

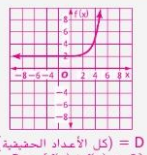
تنمو مزرعة معينة من البكتيريا من 250 إلى 2000 بكتيريا في 1.5 ساعة. أوجد الثابت k لصيغة النمو. استخدم $y = ae^{kt}$.

$y = ae^{kt}$	صيغة النمو الأسّي
$2000 = 250e^{k(1.5)}$	عوّض عن y بـ 2000 و a بـ 250 و t بـ 1.5
$8 = e^{1.5k}$	اقسم كلاً من الطرفين على 250
$\ln 8 = \ln e^{1.5k}$	خاصية المساواة
$\ln 8 = 1.5k$	خاصية المعكوس
$\frac{\ln 8}{1.5} = k$	اقسم كلاً من الطرفين على 1.5
$1.3863 \approx k$	استخدم الحاسبة

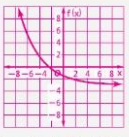
63. **السيارات** اشترى خالد سيارة مستعملة بسعر AED 2500. ومن المتوقع أن تنخفض قيمة السيارة بمعدل 25% كل عام. كم ستكون قيمة السيارة خلال 3 أعوام؟ **AED 1054.69**
64. **علم الحياة** بالنسبة إلى سلالة معينة من البكتيريا k يساوي 0.728 عندما يكون t مقدرًا بالأيام. باستخدام الصيغة $y = ae^{kt}$، ما المدة التي ستستغرقها 10 من البكتيريا لتزداد عددها إلى 675؟ **≈ 5.8 أيام**
65. **تعداد السكان** بلغ تعداد السكان لمدينة ما منذ 20 عامًا 24,330. منذ ذلك الحين، زاد التعداد السكاني بمعدل ثابت كل عام. إذا كان تعداد السكان الآن يبلغ 55,250، فأوجد معدل النمو السنوي لهذه المدينة. **حوالي 4.1%**

Multiplication Web Solutions, Inc. جميع الحقوق محفوظة © حقوق النشر

إجابات إضافية (تمرين على الاختبار)

1. 

(كل الأعداد الحقيقية) = D
$R = \{f(x) \mid f(x) > 2\}$

2. 

(كل الأعداد الحقيقية) = D
$R = \{f(x) \mid f(x) > -3\}$

606 / 475

٨:٥٣ م ٦٧٪
://elib.moe.gov.ae

8 تدريب على الاختبار

مثّل كل دالة بيانيًّا. حدّد المجال والمدى.

انظر الهامش 1, 2

1. $f(x) = 3^{x-3} + 2$
2. $f(x) = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} - 3$

حُلّ كل معادلة أو متباينة فيما يلي. قرب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف إذا لزم الأمر.

3. $8^{c+1} = 16^{2c+3}$ $c = -\frac{9}{5}$
4. $9^{x-2} > \left(\frac{1}{27}\right)^x$ $\left\{x \mid x > \frac{4}{5}\right\}$
5. $2^{a+3} = 2^{2a-1}$ a
6. $\log_9\left(\frac{11}{2} - 7\right) = \log_2 6x$ $x = 7$
7. $\log_5 x > 2$ $\{x \mid x > 25\}$
8. $\log_3 x + \log_3 (x-3) = \log_3 4$ $x = 4$
9. $6^{n-1} \leq 11^n$ $\{n \mid n \leq -2.9560\}$
10. $4e^{2x} - 1 = 5$ $x \approx 0.2027$
11. $\ln (x+2)^2 > 2$ $\{x \mid x < -4.7183 \text{ or } x > 0.7183, x \neq -2\}$
12. $\log_5 44^3$ 2.3513 ≈ 2.1130
13. $\log_2 x$ 1.0592

استخدم $\log_5 11 \approx 1.4899$ و $\log_5 2 \approx 0.4307$ لتقريب قيمة كل تعبير.

$9^{\frac{3}{2}} = 27$

14. **تعداد السكان** بلغ تعداد سكان مدينة ما منذ 10 أعوام 150,000. منذ ذلك الحين، زاد التعداد السكاني بمعدل ثابت كل عام. بلغ تعداد السكان حاليًا 185,000.
   a. اكتب دالة أسية يمكن استخدامها لنمذجة تعداد السكان بعد x عام إذا كان تعداد السكان يتغير بالمعدل نفسه. a. $y = 185{,}000\,(1.0212)^x$
   b. كم سيكون تعداد السكان خلال 25 عامًا؟ 312,566 تقريبًا

15. اكتب $\log_9 27 = \frac{3}{2}$ في صورة أسية.

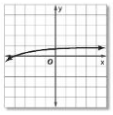
16. **الزراعة** المعادلة التي تُمثل التناقص في عدد المزارع هي $y = 3{,}962{,}520\,(0.98)^x$، حيث يمثل x عدد الأعوام منذ عام 1960 ويمثل y عدد المزارع. $\{b \mid b < 1\}$
   a. كيف يمكنك الإخبار بأن العدد يتناقص؟
   b. بأي معدل سنوي يتناقص العدد؟ 2%
   c. توقع متى سيكون عدد المزارع أقل من مليون واحد. في 2028 تقريبًا

17. **الاختبار من متعدد** ما قيمة $\log_4 \frac{1}{64}$؟ A
   A -3
   B $-\frac{1}{3}$
   C $\frac{1}{3}$
   D 3

18. **المدخرات** قمت بإيداع AED 7500 في حساب مدخرات يتلقى مرابحة مركبة بصفة مستمرة بنسبة 3%.
   a. باشتراض أنه لا توجد عمليات سحب أو إيداع على الحساب، كم سيكون الرصيد بعد 5 أعوام؟ AED 8713.76
   b. ما المدة التي ستستغرقها مدخراتك لتصل إلى الضعف؟ 23.1 عامًا
   c. في خلال كم عامًا سيكون لديك AED 10,000 في حسابك؟ حوالي 9.6 أعوام

19. **الاختبار من متعدد** ما حل $\log_2 16 - \log_4 x = \log_{64} 8$؟ G
   F $\frac{1}{2}$
   G 2
   H 4
   J 8

20. **الاختبار من متعدد** ما الدالة الممثلة بيانيًا مما يلي؟ C



   A $y = \log_{10}(x-5)$
   B $y = 5\log_{10} x$
   C $y = \log_{10}(x+5)$
   D $y = -5\log_{10} x$

21. اكتب $2\ln 6 + 3\ln 4 - 5\ln\left(\frac{1}{3}\right)$ في صورة لوغاريتم قردي. $\ln 559{,}872$ أو $\frac{(6^3)(4^3)}{\left(\frac{1}{3}\right)^5}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح

٨:٥٣ م ٦٧٪
://elib.moe.gov.ae

1 محور التركيز

الهدف استخدام إستراتيجية استعمال التكنولوجيا لحل مسائل الاختبار المعياري.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اسأل:

- ما نوع الأدوات التي استخدمتها عند حل مسائل الرياضيات؟
  نموذج الإجابة: حاسبة، منقلة، فرجار، مسطرة، قلم رصاص، ورقة
- كيف تحدد الأداة التي ستستخدمها؟
  نموذج الإجابة: استخدم الحاسبة عند تمثيل الدوال بيانيًا؛ استخدم المنقلة عند قياس الزوايا؛ استخدم الفرجار عند رسم الزوايا؛ استخدم المسطرة عند القياس؛ استخدم الورقة والقلم الرصاص عندما لا تتوافر لديك حاسبة أو عندما لا تستطيع إجراء عملية حسابية ذهنيًا.

الوحدة 8

التحضير للاختبارات المعيارية

استخدام التكنولوجيا

يمكن أن تكون الحاسبة الخاصة بك أداة مفيدة في الاختبارات المعيارية. قد تحتوي بعض المسائل التي تحلها على خطوات أو حسابات تتطلب استخدام الحاسبة. قد تساعدك الحاسبة أيضًا في حل المسألة بصورة أسرع.

استراتيجيات استخدام التكنولوجيا

الخطوة 1

الحاسبة أداة مفيدة، لكن ينبغي عادة استخدامها بصورة معتدلة.
ضمنت الاختبارات المعيارية لقياس قدرتك على الاستنتاج وحل المسائل. لا لقياس قدرتك على استخدام الحاسبة.

قبل استخدام الحاسبة، اسأل نفسك:

- كيف يمكنني عادةً حل هذا النوع من المسائل؟
- هل توجد أي خطوات لا يمكنني القيام بها ذهنيًا أو باستخدام ورقة وقلم رصاص؟
- هل تعد الحاسبة ضرورية للغاية لحل هذه المسألة؟
- هل ستساعدني الحاسبة في حل هذه المسألة بصورة أسرع أو أكثر كفاءة؟

الخطوة 2

متى قد تكون الحاسبة مفيدة؟

- حل المسائل التي تتضمن عمليات حسابية كبيرة ومعقدة.
- حل مسائل معينة تحتوي على تمثيل بياني للدوال وإيجاد قيم الدوال، وحل المعادلات وما إلى ذلك
- التحقق من حلول المسائل.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة، حدد ما تحتاج إلى معرفته، ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لإيجاد الحل.

تحتوي علبة معينة من الصودا على 60 mg من الكافيين. يتم التخلص من الكافيين من الجسم بمعدل 15% كل ساعة. ما عمر النصف للكافيين؟ بعبارة أخرى، كم عدد الساعات التي يستغرقها الجسم للتخلص من نصف كمية الكافيين؟

A 4 ساعات
B 4.25 ساعات
C 4.5 ساعات
D 4.75 ساعات

٨:٥٤ م ٦٧% ://elib.moe.gov.ae

مثال إضافي

تدريب على الاختبار المعياري بلغ تعداد السكان في إحدى المدن 4590 في عام 1800. منذ ذلك الحين، يزيد عدد السكان سنويًا بمعدل 1.05% تقريبًا. في أي عام بلغ تعداد سكان المدينة ‏37,075؟ D

A 1808
B 1820
C 1997
D 2000

3 التقويم

استخدم التمارين 1–3 لتقويم استيعاب الطلاب.

اقرأ المسألة بعناية. يمكن حل المسألة باستخدام دالة أسّية.
استخدم صيغة الاضمحلال الأسّي لنمذجة المسألة وإيجاد عمر النصف للكافيين.

$y = a(1 - r)^t$

$y = 60(1 - 0.15)^t$

نصف 60 ملليجرامًا يساوي 30. إذًا، بافتراض أنّ $y = 30$ ونوجد حل t.

$30 = 60(1 - 0.15)^t$

$0.5 = (0.85)^t$

خذْ لوغاريتم كل من الطرفين واستخدم خاصية الأس.

$\log 0.5 = \log (0.85)^t$

$\log 0.5 = t \log 0.85$

$\frac{\log 0.5}{\log 0.85} = t$

عند هذه النقطة، من الضروري استخدام الحاسبة لإيجاد قيمة اللوغاريتمات وحل المسألة. بفعل ذلك يظهر أنّ $t \approx 4.265$. إذًا، عمر النصف للكافيين يساوي حوالي 4.25 ساعات. الإجابة الصحيحة هي B.

التمارين

اقرأ كل مسألة، حدد ما تحتاج إلى معرفته، ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لإيجاد الحل.

1. اشترى جمال مؤخرًا شاحنة جديدة بمقابل AED 34,750. تقل قيمة الشاحنة بمعدل 12% كل عام. كم ستكون القيمة التقريبية للشاحنة بعد 7 أعوام من شراء جمال لها؟ D

A AED 13,775
B AED 13,890
C AED 14,125
D AED 14,200

2. زميت كرة بيسبول إلى أعلى بسرعة مبدئية 105 ft/s. وأطلقت من فوق الأرض بمسافة 5 ft. يتم الحصول على ارتفاع كرة البيسبول بعد t من الثواني من رميها بالصيغة $h(t) = -16t^2 + 105t + 5$. أوجد الوقت الذي تصل عنده كرة البيسبول إلى أقصى ارتفاع لها. G

F 1.0 s
G 3.3 s
H 6.6 s
J 177.3 s

3. أودعت أمل مبلغ AED 2500 في مرابحة مركبة يوميًا بالشروط الموضحة أدناه.

استخدم الصيغة الموضحة أدناه لإيجاد قيمة t، عدد السنوات اللازمة لكسب AED 250 في مرابحة مركبة يوميًا.

$2750 = 2500\left(1 + \frac{0.0425}{365}\right)^{365t}$ B

A حوالي 2.15 عامًا
B حوالي 2.24 عامًا
C حوالي 2.35 عامًا
D حوالي 2.46 عامًا

© حقوق النشر محفوظة لشركة ماكجروهيل للتعليم

٨:٥٤ م ٦٧٪
://elib.moe.gov.ae
606 / 475

تشخيص أخطاء الطلاب

اطّلع على إجابات الطلاب عن كل عنصر. قد تشير الاتجاهات السائدة في الصف الدراسي إلى أخطاء شائعة ومفاهيم خاطئة.

1. A إجابة صحيحة
   B تم تبسيط $\log 1 \div \log 4$ على نحو خاطئ
   C تخمين
   D افترض على نحو خاطئ أنّ $4^0 = 4$ بدلًا من $4^0 = 1$
2. F أدخل القيم إلى الحاسبة على نحو خاطئ
   G إجابة صحيحة
   H استخدم خصائص اللوغاريتمات على نحو خاطئ
   J استخدم خصائص اللوغاريتمات على نحو خاطئ
3. A لم يستخدم نسبة 100%
   B استخدم صيغة نمو غير صحيحة
   C افترض على نحو خاطئ أنّ $t = 5$ بدلًا من 6
   D إجابة صحيحة
4. F اختار تكلفة ثابتة
   G اختار تكلفة m من الكيلومتر من دون تكلفة ثابتة
   H تخمين
   J إجابة صحيحة
5. A تخمين
   B تخمين
   C إجابة صحيحة
   D لم يفهم أنّ الخطوط المتوازية لها ميل متساوٍ
6. F لم يفهم أنه لا توجد قيم لـ x يمكن أن تكون ≥ 0
   G لم يفهم أنه لا توجد قيم لـ x يمكن أن تكون ≥ 0
   H إجابة صحيحة
   J لم يفهم أنه لا توجد قيم لـ x يمكن أن تكون ≥ 0
7. A ضرب كميات خاطئة
   B افترض خطأً أنّ تكلفة كتاب واحد يساوي AED 5
   C إجابة صحيحة
   D تخمين

الوحدة 8

تدريب على الاختبار المعياري

تراكمي: الوحدات من 1 إلى 8

الاختبار من متعدد

اقرأ كل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. ما التقاطع مع المحور y للدالة الأسية الواردة أدناه؟ **A**

$$y = 4^x - 1$$

A 0 B 1 C 2 D 3

2. افترض أن بنة 3500 طائر فقط من أنواع معينة مهددة بالانقراض باقية في جزيرة ما وأن عدد الجماعة الأحيائية يقل بمعدل 5% كل عام.

كم توقع الدالة اللوغاريتمية $t = \log_{0.95} \frac{p}{3500}$ من السنوات t اللازمة ليتخفض عدد الجماعة الأحيائية إلى العدد p. ما المدة التي ستستغرقها الجماعة الأحيائية للوصول إلى 3000 طائر؟ **G**

F عامان H 5 أعوام
G 3 أعوام J 8 أعوام

3. افترض أن عوفا معينا من البكتيريا يتضاعف بالتكاثر ذاتيا كل 20 دقيقة. إذا بدأت بخلية واحدة من البكتيريا، فكم سيكون عددها بعد ساعتين؟ **D**

A 2 B 6 C 32 D 64

4. حدّد بلال أنه يمكن تمثيل التكلفة الإجمالية C لاستئجار سيارة من المعادلة $C = 0.35m + 125$، حيث تمثّل m عدد الكيلومترات التي يقودها. إذا كانت التكلفة الإجمالية لاستئجار السيارة هي AED 363، فكم عدد الكيلومترات التي قطعها؟ **J**

F 125 H 520
G 238 J 680

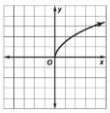
5. أي مما يلي يصف التمثيل البياني للعلاقة $3y = 4x - 3$ و $8y = -6x - 5$ بشكل أفضل؟ **C**

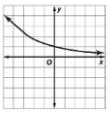
A للمستقيمين نقطة التقاطع نفسها مع المحور y.
B للمستقيمين نقطة التقاطع نفسها مع المحور x.
C المستقيمان متعامدان.
D المستقيمان متوازيان.

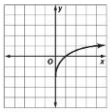
نصيحة عند حل الاختبار

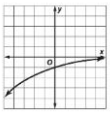
السؤال 2 استخدم التكنولوجيا وخواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة t عندما $p = 3000$.

6. مثّل بيانيًا $y = \log_5 x$. **H**

F


G


H


J


7. يبيع متجر أحمد للكتب اثنين من الكتب المستعملة مقابل AED 7.99. يمكن إيجاد التكلفة الإجمالية c لشراء عدد n من الكتب من خلال $-$ **C**

A ضرب n في c.
B ضرب n في 5.
C ضرب n في تكلفة الكتاب الواحد.
D قسمة n على c.

٨:٥٤ م ٦٧% ://elib.moe.gov.ae

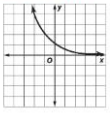
إجابة إضافية

14a. $N = 135{,}000(1.1)^t$. حيث يمثل N عدد الغزلان، ويمثل t عدد السنوات منذ عام 1995.

إجابة قصيرة/إجابة شبكية

دوّن إجابتك في ورقة الإجابات التي زوّدك بها المعلّم أو أي ورقة عادية.

8. الدالة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ممثّلة أدناه. ما مجال الدالة؟ **جميع الأعداد الحقيقية**



9. اشترت سوزان سيارة جديدة هذا العام بمبلغ AED 33,750. تتوقع أن تقل قيمة السيارة بمعدل 10.5% كل عام. كم ستكون *القيمة* التقريبية للسيارة بعد 5 أعوام من شراء سوزان لها؟ اكتب الحل هنا. **حوالي AED 17,347**

10. يحل حمدان نظام المعادلات $8x - 2y = 12$ و $-15x + 2y = -19$ باستخدام الاختزال. أجرى حمدان الحل كما يلي.

$$\begin{array}{rl} 8x - 2y = & 12 \\ -15x + 2y = & -19 \\ -7x = & 7 \\ x = & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 8x - 2y = & 12 \\ 8(-1) - 2y = & 12 \\ -8 - 2y = & 12 \\ -2y = & 20 \\ y = & -10 \end{array}$$

الحل هو $(-1, -10)$.

a. ما الخطأ الذي قام به حمدان؟

b. ما الحل الصحيح لنظام المعادلات؟ اكتب الحل هنا. **(1, −2)**

11. **إجابة شبكية** إذا كان $f(x) = 3x$ و $g(x) = x^2 - 1$، فما قيمة $f(g(-3))$؟ **24**

12. حوّل إلى أبسط صورة $(-2a^{-2}b^{-6})(-3a^{-1}b^3)$. $\frac{6b^2}{a^3}$

إجابة شبكية

13. ما قيمة x التي سيكون عندها للمستطيل أدناه مساحة 48 وحدة مربعة؟ **12**

إجابة موسعة

دوّن إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.

14. افترض أن عدد الغزال أبيض الذيل في منطقة معينة يزداد بمعدل سنوي يقدر بحوالي 10% منذ عام 1995. وكان ثمة 135,000 غزال في عام 1995.

a. اكتب دالة لتمثيل عدد الغزال أبيض الذيل بعد t من السنوات. **انظر الهامش.**

b. كم عدد الغزال أبيض الذيل الذي يوجد بالمنطقة تقريبًا في عام 2000؟ قرّب إجابتك إلى أقرب مائة غزال. **حوالي 217,400 غزال**

15. ورثت عائشة مبلغ AED 250,000 عن عمتها في عام 1998. وقامت باستثمار المال وزيادته كما هو موضح في الجدول أدناه.

العام	المبلغ
1998	250,000 AED
2006	329,202 AED
2011	390,989 AED

a. اكتب دالة أسية يمكن استخدامها لتوقّع المبلغ المالي A بعد استثماره لمدة t من السنوات. $A(t) = 250{,}000(1.035)^t$

b. إذا كان المال يستمر في الزيادة بالمعدل نفسه، ففي أي عام ستكون قيمته AED 500,000؟ **2018**

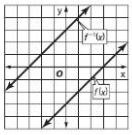
10a. **نموذج الإجابة:** لقد أخطأ في الإشارة عند دمج المعادلات: $-7 = (-19) + 12$، وليس 7.

من أجل دراستك © حقوق النشر لـ McGraw-Hill Education

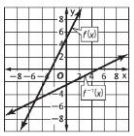
٨:٥٤ م ٦٧% ://elib.moe.gov.ae

الاستعداد للوحدة 8

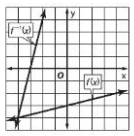
6. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$



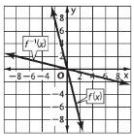
7. $f^{-1}(x) = x + 3$



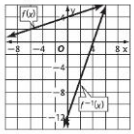
8. $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x$



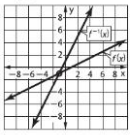
9. $f^{-1}(x) = 4x + 12$



10. $f^{-1}(x) = 2x + 1$

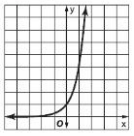


11. $f^{-1}(x) = 3x - 12$



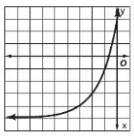
الدرس 1–8 (تمرين موجّه)

.1



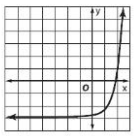
D = {كل الأعداد الحقيقية}، R = {y | y > 0}

.2A



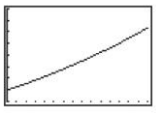
D = {كل الأعداد الحقيقية}، R = {y | y > −5}

.2B



D = {كل الأعداد الحقيقية}، R = {y | y > −3}

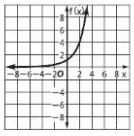
.3



[0, 15] scl: 1 × [70, 150] scl: 10

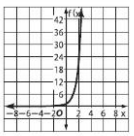
الدرس 1–8

.1



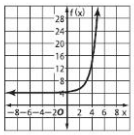
D = {كل الأعداد الحقيقية}، R = {f(x) | f(x) > 0}

.2



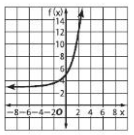
D = {كل الأعداد الحقيقية}، R = {f(x) | f(x) > 0}

.3



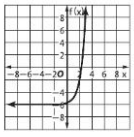
D = {كل الأعداد الحقيقية}، R = {f(x) | f(x) > 4}

.4



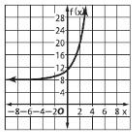
D = {كل الأعداد الحقيقية}، R = {f(x) | f(x) > 3}

.5



D = {كل الأعداد الحقيقية}، R = {f(x) | f(x) > −6}

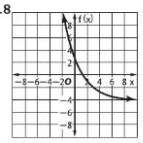
.6

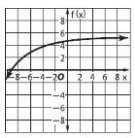


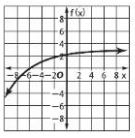
D = {كل الأعداد الحقيقية}، R = {f(x) | f(x) > 8}

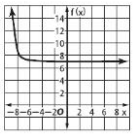
606 / 475

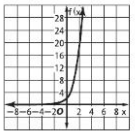
٨:٥٤ م ٦٧٪
://elib.moe.gov.ae

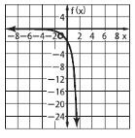
.8

D = {كل الأعداد الحقيقية}
$R = \{f(x) \mid f(x) > -4\}$

.9

D = {كل الأعداد الحقيقية}
$R = \{f(x) \mid f(x) < 5\}$

.10

D = {كل الأعداد الحقيقية}
$R = \{f(x) \mid f(x) < 3\}$

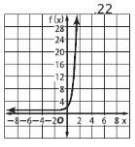
.11

D = {كل الأعداد الحقيقية}
$R = \{f(x) \mid f(x) > 7\}$

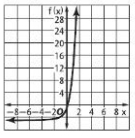
.12

D = {كل الأعداد الحقيقية}
$R = \{f(x) \mid f(x) > 0\}$

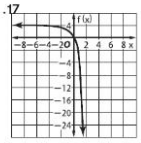
.13

D = {كل الأعداد الحقيقية}
$R = \{f(x) \mid f(x) < 0\}$

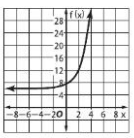
.14

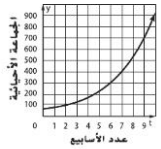
D = {كل الأعداد الحقيقية}
$R = \{f(x) \mid f(x) > 0\}$

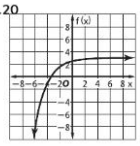
.15

D = {كل الأعداد الحقيقية}
$R = \{f(x) \mid f(x) > 1\}$

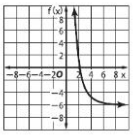
.16

D = {كل الأعداد الحقيقية}
$R = \{f(x) \mid f(x) > -5\}$

.17

D = {كل الأعداد الحقيقية}
$R = \{f(x) \mid f(x) < 4\}$

.18

D = {كل الأعداد الحقيقية}
$R = \{f(x) \mid f(x) > 6\}$

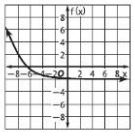
.19


.20

D = {كل الأعداد الحقيقية}
$R = \{f(x) \mid f(x) < 3\}$

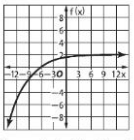
.21

D = {كل الأعداد الحقيقية}
$R = \{f(x) \mid f(x) > -6\}$

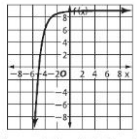
.22

D = {كل الأعداد الحقيقية}
$R = \{f(x) \mid f(x) > 1\}$

.23

D = {كل الأعداد الحقيقية}
$R = \{f(x) \mid f(x) > -2\}$

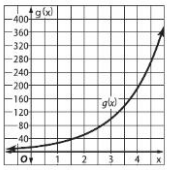
.24

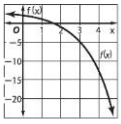
.25

D = {كل الأعداد الحقيقية}
$R = \{f(x) \mid f(x) < 2\}$

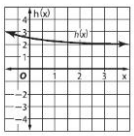

D = {كل الأعداد الحقيقية}
$R = \{f(x) \mid f(x) < 9\}$

٨:٥٤ م ٦٧% ://elib.moe.gov.ae

33a.







33b. نموذج الإجابة: $f(x)$؛ يكون التمثيل البياني للدالة $f(x)$ انعكاسًا على طول المحور x وتكون قيم المخرجات في الجدول سالبة.

33d. نموذج الإجابة: تمثل كل من الدالتين $f(x)$ و$g(x)$ دالتي نمو وتمثل الدالة $h(x)$ دالة اضمحلال؛ وتتزايد القيمة المطلقة للمخرج مع دوال النمو، وتتناقص مع دوال الاضمحلال.

الدرس 2–8

41b.

عدد التصات	عدد القطع
1	2
2	4
3	8
4	16

42. نموذج الإجابة: كلما زادت مرات تراكب المرابحة، ارتفع رصيد الحساب.

48. $27^{2x} \times 81^{x+1} = 3^{2x+2} \times 9^{4x+1}$

المعادلة الأصلية

$(3^3)^{2x} \times (3^4)^{x+1} = 3^{2x+2} \times (3^2)^{4x+1}$ $3^2 = 9$ و $3^3 = 27$

$3^4 = 81$،

$3^{6x} \times 3^{4x+4} = 3^{2x+2} \times 3^{8x+2}$ أس الأس

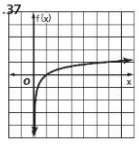
$3^{10x+4} = 3^{10x+4}$ ناتج ضرب الأسس

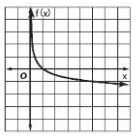
$10x + 4 = 10x + 4$ خاصية التساوي في الدوال الأسية

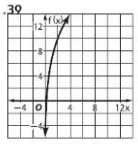
$10x = 10x$ اطرح 4 من كل طرف

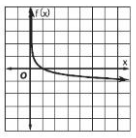
$x = x$ اقسم كلا من الطرفين على 10

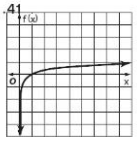
الدرس 3–8

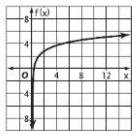
37. 

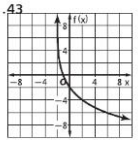
38. 

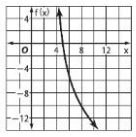
39. 

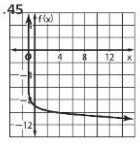
40. 

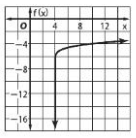
41. 

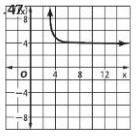
42. 

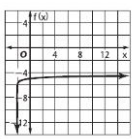
43. 

44. 

45. 

46. 

47. 

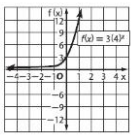
48. 

606 / 475

٨:٥٤ م ٦٧% ://elib.moe.gov.ae

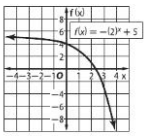
اختبار منتصف الوحدة

.1



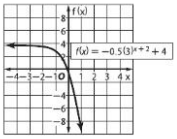
D = {كل الأعداد الحقيقية}، R = {f(x) | f(x) > 0}

.2



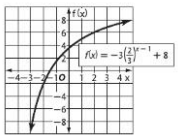
D = {كل الأعداد الحقيقية}، R = {f(x) | f(x) < 5}

.3



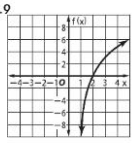
D = {كل الأعداد الحقيقية}، R = {f(x) | f(x) < 4}

.4

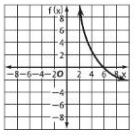


D = {كل الأعداد الحقيقية}، R = {f(x) | f(x) < 8}

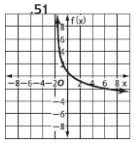
.9



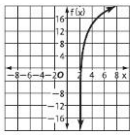
.10



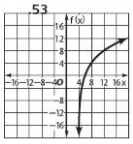
.51



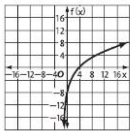
.52



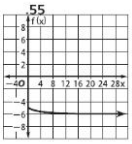
.53



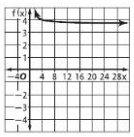
.54



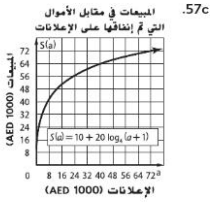
.55



.56



.57c



م ٨:٥٤ %٦٧
://elib.moe.gov.ae

الدرس 5–8

66. $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$ المعادلة الأصلية

$\log_a x^{-1} = -\log_a x$ تعريف الأسس السالبة

$\log_a x^{-1} = (-1)\log_a x$ خاصية الأسس في اللوغاريتمات

$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$ بسّط

67. $x^{3\log_x 2 - \log_x 5} = x^{\log_x 2^3 - \log_x 5}$

$= x^{\log_x 8 - \log_x 5}$

$= x^{\log_x \frac{8}{5}}$

$= \frac{8}{5}$

68. حيث إنّ اللوغاريتمات أسس، تشبه خصائص اللوغاريتمات خصائص الأسس. تنص خاصية ناتج الضرب على أنّه عند ضرب أسين لهما الأساس نفسه، تُجمع الأسس. وبالمثل، يساوي لوغاريتم ناتج الضرب مجموع لوغاريتمات عوامله. تنص خاصية ناتج القسمة على أنّه عند قسمة أسين لهما الأساس نفسه، تُطرح الأسس. وبالمثل، يساوي لوغاريتم ناتج القسمة الفرق بين لوغاريتمي البسط والمقام. تنص خاصية الأس للوغاريتمات على أنّه لإيجاد أس الأس، تُضرب الأسس. وبالمثل، يُعد لوغاريتم الأس هو حاصل ضرب اللوغاريتم في الأس. يجب أن تحتوي الإجابات على ما يلي.

- خاصية ناتج القسمة: $\log_2 \left(\frac{32}{8}\right) = \log_2 \left(\frac{2^5}{2^3}\right)$ عوض عن 32 بـ 2^5 وعوض عن 8 بـ 2^3.

$= \log_2 2^{(5-3)}$ ناتج قسمة الأسس

$= 5 - 3$ أو 2 خاصية المعكوس للأسس واللوغاريتمات

$\log_2 32 - \log_2 8 = \log_2 2^5 - \log_2 2^3$ عوض عن 32 بـ 2^5 وعوض عن 8 بـ 2^3.

$5 - 3$ أو $2 =$ خاصية المعكوس للأسس واللوغاريتمات

إذًا $\log_2 \left(\frac{32}{8}\right) = \log_2 32 - \log_2 8$.

$\log_3 9^4 = \log_3 (3^2)^4$ عوض عن 9 بـ 3^2

$= \log_3 3^{(2 \cdot 4)}$ أس الأس

2×4 أو $8 =$ خاصية المعكوس للأسس واللوغاريتمات

$4 \log_3 9 = (\log_3 9) \times 4$ (×) خاصية التبديل

$= (\log_3 3^2) \times 4$ استبدل 9 بـ 3^2

2×4 أو $8 =$ خاصية المعكوس للأسس واللوغاريتمات

إذًا $\log_3 9^4 = 4 \log_3 9$

- تنطوي كل من خاصية ناتج ضرب الأسس وخاصية ناتج ضرب اللوغاريتمات على جمع الأسس، حيث تُعد اللوغاريتمات أسسًا.

606 / 475

٨:٥٤ م ٦٧% ://elib.moe.gov.ae

ملاحظات

617F