الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

عام التسامح

2018 - 2019

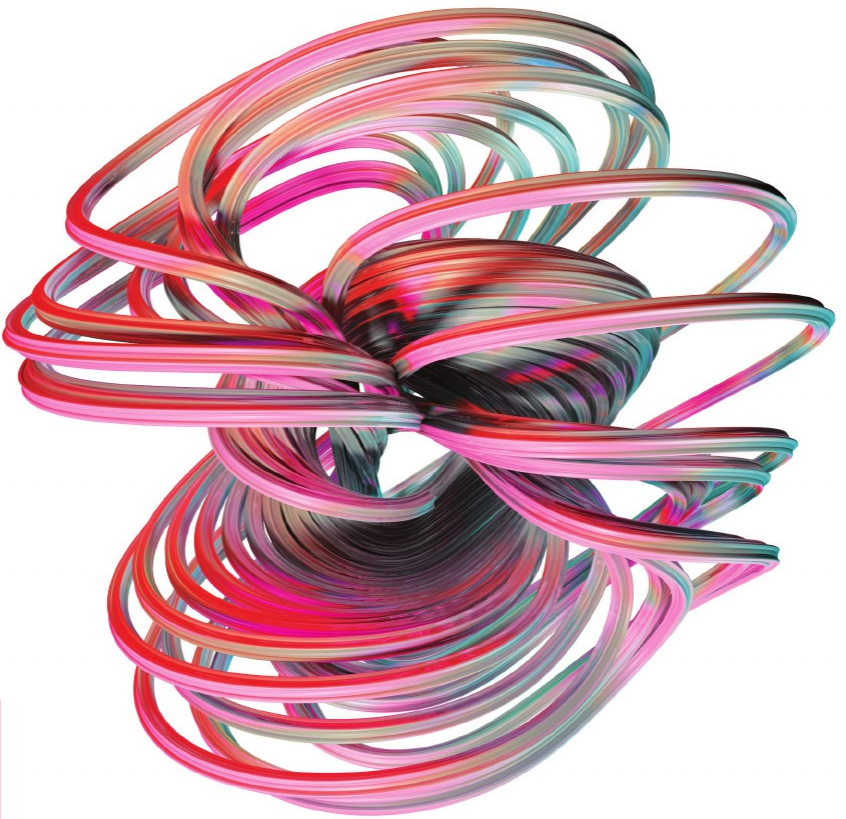
12

McGraw-Hill Education

الرياضيات

المسار العام

نسخة الإمارات العربية المتحدة



Mc Graw Hill Education

McGraw-Hill Education

الرياضيات

المسار العام

نسخة الإمارات العربية المتحدة

Mc Graw Hill Education

Project: McGraw-Hill Education United Arab Emirates Edition Grade 12 Integrated Vol.3
FM. Front Matter, from Integrated Math IV © 2012
10. Inferential Statistics, from Integrated Math IV Chapter 11 © 2012
11. Limits and Derivatives, from Precalculus Chapter 12 © 2014
EM. End Matter/Glossary, from Integrated Math IV © 2012
& from Bluman Elementary Statistics;9e Appendix © 2015

صورة الغلاف: Idea Studio/Shutterstock.com

mheducation.com/prek-12

جميع الحقوق محفوظة © للعام 2019 لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جميع الحقوق محفوظة. لا يجوز إعادة إنتاج أي جزء من هذا المنشور أو توزيعه في أي صورة أو بأي وسيلة كانت أو تخزينه في قاعدة بيانات أو نظام استرداد من دون موافقة خطية مسبقة من McGraw-Hill Education، بما في ذلك، على سبيل المثال لا الحصر، التخزين على الشبكة أو الإرسال عبرها أو البث لأغراض التعليم عن بُعد.

الحقوق الحصرية للتصنيع والتصدير عائدة لمؤسسة McGraw-Hill Education. لا يمكن إعادة تصدير هذا الكتاب من البلد الذي باعته له McGraw-Hill Education. هذه النسخة الإقليمية غير متاحة خارج أوروبا والشرق الأوسط وإفريقيا.

طُبع في دولة الإمارات العربية المتحدة.

رقم النشر الدولي: 978-1-52-688312-4 (نسخة الطالب)
MHID: 1-52-688312-0 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 978-1-52-688314-8 (نسخة المعلم)
MHID: 1-52-688314-7 (نسخة المعلم)

النسخة الإلكترونية

رقم النشر الدولي: 978-1-52-688316-2 (نسخة الطالب)
MHID: 1-52-688316-3 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 978-1-52-688318-6 (نسخة المعلم)
MHID: 1-52-688318-X (نسخة المعلم)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 XXX 22 21 20 19 18 17

صاحب السّمو الشّيخ خليفة بن زايد آل نهيان
رئيس دولة الإمارات العربيّة المتّحدة، حفظه الله

"يجب التزوُّد بالعلوم الحديثة والمعارف الواسعة، والإقبال عليها
بروح عالية ورغبة صادقة؛ حتى تتمكّن دولة الإمارات خلال
الألفيّة الثّالثة من تحقيق نقلة حضاريّة واسعة."

من أقوال صاحب السّمو الشّيخ خليفة بن زايد آل نهيان

ملخص المحتويات

الوحدة 1 الدوال من منظور حساب التفاضل والتكامل

2 دوال القوّة والدوال كثيرة الحدود والدوال النسبية

3 الدوال الأسيّة واللوغاريتمية

4 الدوال المثلثية

5 المتطابقات والمعادلات المثلثية

6 أنظمة المعادلات والمصفوفات

7 القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

8 المتجهات

9 الاحداثيات القطبية والأعداد المركبة

10 الإحصاء الاستقرائي

11 التفاضل والتكامل

كتيب الطالب

Chapter Sourced From Integrated Math IV FM © 2012 McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

المؤلفون

يضمن يضمن مؤلفونا الرئيسون أن تكون برامج McGraw-Hill للرياضيات مخططة بشكل رأسي بطريقة متوافقة من خلال البدء مع الاخذ في الاعتبار الغاية النهائية – ألا وهي تحقيق النجاح واجتياز المرحلة الثانوية ومايليها من مراحل. ونظرًا لعملية "التخطيط العكسي" لمحتوى برامج المدارس الثانوية، فإن جميع برامج الرياضيات لدينا واضحة المعالم من حيث نطاقها وتسلسلها.

المؤلفون الرئيسون

جلبرت جاي كويناس، حاصل على درجة الدكتوراه.

أستاذ تعليم الرياضيات
جامعة ولاية تكساس – سان ماركوس
سان ماركوس، تكساس

جوانب الخبرة: تطبيق المفاهيم والمهارات في سياقات رياضية ثرية، عمليات تمثيلية رياضية

ج. أ. كارتر حاصل على درجة الدكتوراه.

مدير مساعد التدريس والتعليم
مدرسة أدلاي إي ستيفنسون الثانوية
لينكولنشاير، إلينوي

جوانب الخبرة: استخدام التكنولوجيا والوسائل التعليمية لتصوير المفاهيم. تحقيق فهم الرياضيات لدى المتعلمين باللغة الإنجليزية

كارول مالوي حاصلة على درجة الدكتوراه.

أستاذ مساعد
جامعة نورث كارولينا في تشابيل هيل
تشابيل هيل، نورث كارولينا

جوانب الخبرة: عمليات التمثيل والتفكير النقدي ونجاح الطالب في الجبر 1

روجر داي، حاصل على درجة الدكتوراه في التعليم من المجلس آلوطني

رئيس قسم الرياضيات
مدرسة بونتياك تاون شيب الثانوية
بونتياك، إلينوي

جوانب الخبرة: فهم وتطبيق الاحتمال، والإحصائيات، وتعليم مدرس الرياضيات

مؤلفو البرنامج

الدكتورة بيرتشي هوليدي، أستاذ التعليم.

المستشار القومي للرياضيات
سيلفر سبرينج، ماريلاند

جوانب الخبرة: استخدام الرياضيات لصياغة وفهم بيانات العالم الفعلي، وتأثير الرسومات على الفهم الرياضي

لواجين براين

مدرس رياضيات
أفضل معلم بولاية تينيسي لعام 2009
مدرسة ووكر فالي الثانوية
كليفلاند، تينيسي

جوانب الخبرة: المشاريع الهادفة التي تسعى إلى جعل التفاضل والتكامل ومقدمته أقرب إلى الواقع بالنسبة إلى الطلاب

فايكن هوفيسيبان

أستاذ الرياضيات
كلية ريو هوندو
وايتيه، كاليفورنيا

مؤلف مشارك

جاي مكتاي

مؤلف ومستشار تعليمي
كولومبيا، ميريلاند

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 1 الدوال من منظور التفاضل والتكامل

الاستعداد للوحدة 1 3

1-1 **الدوال** 4

1-2 **تحليل الرسوم البيانية للدوال والعلاقات** 13

1-3 **الاتصال والسلوك الطرفي والنهايات** 24

1-4 **القيم القصوى ومتوسط معدلات التغير** 34

■ **اختبار منتصف الوحدة** 44

1-5 **الدوال الرئيسة والتحويلات** 45

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني المتباينات غير الخطية 56

1-6 **العمليات على الدوال وتركيب الدوال** 57

1-7 **العلاقات العكسية والدوال** 65

التوسّع: معمل تكنولوجيا الرسم البياني رسم الدوال العكسية باستخدام المعادلات الوسيطية 74

التقييم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 76

■ **تدريب على الاختبار** 81

■ **الربط بمنهج التفاضل والتكامل المتقدم: معدل التغير عند نقطة ما** 82

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 2 دوال القوة والدوال كثيرة الحدود والدوال النسبية

الاستعداد للوحدة 2 . . . . . **85**

2-1 **دوال القوة والدوال الجذرية** 86

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني سلوك التمثيلات البيانية 96

2-2 **الدوال كثيرة الحدود** 97

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني السلوك الخفي للتمثيلات البيانية 108

2-3 **نظريتا الباقي والعامل** 109

■ **اختبار منتصف الوحدة** 118

2-4 **أصفار الدوال كثيرة الحدود** 119

2-5 **الدوال النسبية** 130

2-6 **المتباينات غير الخطية** 141

التقييم

■ **الدليل الدراسي والمراجعة** 148

■ **تدريب على الاختبار** 150

■ **الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: المساحة الواقعة تحت المنحنى** 153

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 3 الدوال الأسيّة واللوغاريتمية

الاستعداد للوحدة 3 157

3-1 **الدوال الأسيّة** 158

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني المعرفة المالية: الدوال الأسيّة 170

3-2 **الدوال اللوغاريتمية** 172

3-3 **خصائص اللوغاريتمات** 181

■ **اختبار منتصف الوحدة** 189

3-4 **المعادلات الأسيّة واللوغاريتمية** 190

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المتباينات الأسية واللوغاريتمية 200

3-5 **النمذجة باستخدام الانحدار غير الخطي** 202

التقييم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 213

■ **تدريب على الاختبار** 217

■ **الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: الحساب التقريبي لمعدلات التغير** . . . 218

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 4 الدوال المثلثية

الاستعداد للوحدة 4 221

4-1 **حساب المثلّثات قائمة الزاوية** 222

4-2 **الدرجات والراديان** 233

4-3 **النسب المثلثية على دائرة الوحدة** 244

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني تمثيل دالة الـ sine بيانيًا باستخدام المعادلات الوسيطية . . . 256

4-4 **تمثيل دوال sine و cosine الزاوية بيانيًا** 258

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني مجموع منحنيات sine والفرق بينها 269

■ **اختبار منتصف الوحدة** 270

4-5 **التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى** 271

4-6 **الدوال المثلثية العكسية** 282

التقييم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 293

■ **تدريب على الاختبار** 298

■ **الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: المعدلات المرتبطة** 300

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 5 المتطابقات والمعادلات المثلثية

الاستعداد للوحدة 5 303

5-1 **المتطابقات المثلثية** 304

5-2 **إثبات صحة المتطابقات المثلثية** 312

5-3 **حل المعادلات المثلثية** 319

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المتباينات المثلثية 326

■ **اختبار منتصف الوحدة** 327

5-4 **متطابقات المجموع والفرق** 328

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني متطابقة الاختزال 336

5-5 **متطابقات ضعف الزاوية وتحويل ناتج الضرب إلى مجموع** 338

التقييم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 347

■ **تدريب على الاختبار** 351

■ **الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: معدلات التغير لـ sine و cosine الزاوية** 352

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 6 أنظمة المعادلات والمصفوفات

الاستعداد للوحدة 6 354

6-1 **الأنظمة الخطية متعددة المتغيرات وعمليات الصف الأولية (البسيطة)** 356

6-2 **ضرب المصفوفة والمعكوسات والمحددات** 367

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني المحددات ومساحات المضلعات 379

6-3 **حل الأنظمة الخطية باستخدام المعكوسات وقاعدة كرامر** 380

■ **اختبار منتصف الوحدة** 387

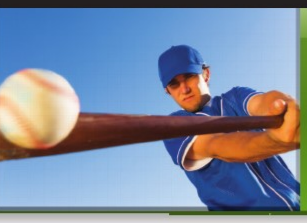
6-4 **نمذجة الحركة باستخدام المصفوفات** 388

التقييم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 396

■ **تدريب على الاختبار** 401

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



الوحدة 7 القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

الاستعداد للوحدة 7 404

7-1 **صيغتا نقطة المنتصف والمسافة** 407

7-2 **القطع المكافئ** 413

استكشف: مختبر تقنية التمثيل البياني معادلات الدوائر 420

7-3 **الدوائر** 421

7-4 **القطع الناقص** 429

■ **إختبار منتصف الوحدة** 437

7-5 **القطع الزائد** 438

7-6 **تحديد القطوع المخروطية** 446

7-7 **حل الأنظمة الخطية واللاخطية** 452

7-8 **المعادلات الوسيطية** 458

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني النمذجة باستخدام المعادلات الوسيطية 466

التقييم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 468

■ **تدريب على الاختبار** 473

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** 474

■ **تدريب على الاختبارات المعيارية، الوحدات 7-1** 476

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 8 المتجهات

الاستعداد للوحدة 8 478

8-1 **مقدمة في المتجهات** 480

8-2 **المتجهات في المستوى الإحداثي** 490

8-3 **الضرب النقطي ومساقط المتجهات** 498

■ **اختبار منتصف الوحدة** 507

8-4 **المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد** 508

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني تحويلات المتجهات باستخدام المصفوفات 515

8-5 **الضرب النقطي والضرب المتجهي في الفضاء** 516

8-6 **مصفوفات التحوّيلات في الفضاء ثلاثي الأبعاد** 523

التقييم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 531

■ **تدريب على الاختبار** 536

■ **الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: مجالات المتجهات** 537

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 9 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

الاستعداد للوحدة 9 540

9-1 **الإحداثيات القطبية** 542

9-2 **الصور القطبية والمتعامدة للمعادلات** 549

■ **اختبار منتصف الوحدة** 558

9-3 **الأعداد المركبة ونظرية دي موافر** 559

التقييم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 570

■ **تدريب على الاختبار** 574

■ **الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: طول القوس** 576

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 10 الإحصاء الاستقرائي

الاستعداد للوحدة 10 579

10-1 **الإحصاء الوصفي** 580

10-2 **التوزيعات الإحتمالية** 590

10-3 **التوزيع الطبيعي** 600

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني تحويل البيانات الملتوية 610

■ **اختبار منتصف الوحدة** 613

10-4 **الارتباط والانحدار الخطي** 615

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني مستقيمات تناسُب الوسيط 623

10-5 **الاحتمال والفرص** 625

10-6 **احتمال الأحداث المركّبة** 632

10-7 **الاحتمال المشروط** 641

10-8 **نظرية ذات الحدين والاحتمالات** 648

التقييم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 654

■ **تدريب على الاختبار** 660

■ **الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: نسبة المجتمع الإحصائي** 662

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 11 التفاضل والتكامل

الاستعداد للوحدة 11 665

11-1 **تقدير النهايات بيانيًا** 666

11-2 **إيجاد قيمة النهايات جبريًا** 676

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني ميل المنحنى 687

11-3 **المماسات والسرعة المتجهة** 688

■ **اختبار منتصف الوحدة** 695

11-4 **المشتقات** 696

11-5 **المساحة تحت المنحنى والتكامل** 705

11-6 **النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل** 714

التقييم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 722

■ **تدريب على الاختبار** 727

■ **الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: قاعدة السلسلة** 728

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

كتيب الطالب

الرموز والصيغ والمفاهيم الأساسية

الرموز EM-1

القياسات EM-2

العمليات والعلاقات الحسابية EM-3

الصيغ والمفاهيم الجبرية EM-3

الصيغ والمفاهيم الهندسية EM-5

الدوال والمتطابقات المثلثية EM-6

الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال EM-7

النهايات والتفاضل والتكامل EM-7

الصيغ والمفاهيم الاحصائية EM-8

جداول الإحصاء

الجدول A: التوزيع الطبيعي المعياري EM-9

الجدول B: توزيع ستيودنت (توزيع t) EM-11

الجدول C: توزيع كاي تربيع (توزيع χ^2) EM-12

قاموس المصطلحات متوفر في النسخة الإلكترونية

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 10

الإحصاء الاستقرائي

Chapter sourced from Integrated Math IV Chapter 11

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © 2012

السابق

- فيما سبق، أوجدتَ قياساتٍ للمركز والانتشار ونظّمتَ البيانات الإحصائية.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - استخدام أشكال التوزيع لتحديد الإحصاء الوصفي المناسب.
  - إنشاء توزيعات الاحتمال واستخدامها.
  - إيجاد الاحتمالات المشروطة وتطبيقها.
  - تطبيق نظرية ذات الحدين في الاحتمالات.

لماذا؟

- **الهندسة البيئية** للإحصاء أهمية قصوى في الهندسة. ففي الهندسة البيئية، يمكن استخدام اختبار الفرضية لتحديد ما إذا كان للتغير في مستوى انبعاث مادة كيميائية تأثيرٌ هامّ في التلوّث الكلي أم لا. كذلك، يمكن استخدام فترات الثقة للمساعدة في اقتراح قيودٍ على الفضلات الناجمة باعتبارها منتجات ثانوية في المياه الجوفية.

القراءة المسبقة اقرأ دليل الدراسة والمراجعة قراءةً سريعةً واستخدمه لوضع تنبؤين أو ثلاثةٍ عن الدروس المستفادة في الوحدة 10.

الاستعداد للوحدة

تحديد مدى الاستعداد

1 خيار الكتاب المدرسي

أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية.

تدريب سريع

أوجد قيمة كل مما يلي.

1. ${}_5P_2$
2. ${}_9P_4$
3. ${}_8C_3$

4. **شبكة الإنترنت** يعرض الجدول نتائج استقصاءٍ جرى على 18 طالبًا في مدرسةٍ ثانوية، حيث سئلوا عن عدد الساعات التي قضوها على شبكة الإنترنت خلال الأسبوع الماضي.

الساعات التي قضيت على الإنترنت					
2	3.5	1	8	2.5	7.5
10	4	5.5	3.5	7.5	1.5
4.5	11	3.5	5	8	6.5

a. ارسم مدرجاً إحصائيًا للبيانات.

b. هل كان الطلاب الذين قضوا 3 ساعات على الإنترنت أقل من الطلاب الذين قضوا 6 ساعاتٍ أم أكثر؟

في التدريبين 5 و 6، أكمل كل خطوة.

a. حوّل البيانات إلى الصورة الخطية تبعًا للنموذج المعطى.

b. مثّل البيانات المحولة إلى الصورة الخطية بيانيًا. وأوجد معادلة الانحدار الخطي.

c. استخدم النموذج الخطي لإيجاد نموذجٍ للبيانات الأصلية.

5. أسي

x	y
0	11.1
1	40.7
2	149.5
3	548.4
4	2012.1
5	7383.1

6. تربيعي

x	y
0	2.0
1	0.9
2	6.0
3	17.3
4	34.8
5	58.5

المفردات الجديدة

percentiles	نسب مئوية
random variable	متغير عشوائي
probability distribution	توزيع احتمالي
binomial distribution	توزيع ذو حدّين
normal distribution	توزيع طبيعي
z-value	قيمة *z*
standard error of the mean	الخطأ المعياري للوسط
inferential statistics	الإحصاء الاستقرائي
confidence level	مستوى الثقة
critical values	قيم حرجة
confidence interval	فترة الثقة
t-distribution	توزيع *t*
hypothesis test	اختبار الفرضية
level of significance	مستوى الدلالة
p-value	قيمة *p*
correlation coefficient	معامل الارتباط
regression line	خط الانحدار
residuall	الناتج المتبقي
probability	الاحتمال
sample space	الفضاء العيني
complement	متممة
binomial experiments	تجربة ذات حدّين

مراجعة المصطلحات

الإحصاء علم جمع البيانات وتحليلها وتفسيرها وعرضها

المدرج الإحصائي بيانات رقمية منظّمة ضمن فترات متساوية ومعروضة باستخدام أشرطة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 10-1 الإحصاء الوصفي

السابق

- أوجدت مقياس النزعة المركزية والانحراف المعياري.

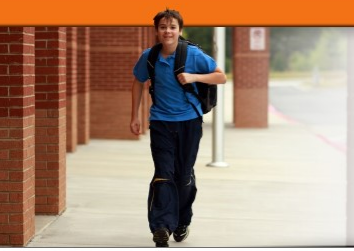
الحالي

1 تحديد أشكال التوزيعات من أجل اختيار إحصاءٍ أكثر ملاءمة.

2 استخدام مقاييس الموقع لمقارنة مجموعتين من البيانات.

لماذا؟

- أفادت مجلة المدرسة الثانوية إلى أنه بناءً على استقصاءٍ شارك به الطلاب، فإن وسط ووسيط عدد مرات تأخر الطلاب دون عذرٍ بلغا 7 و 5 على الترتيب. وفي حين يمكن استخدام هاتين القيمتين لوصف تمركز بيانات الاستقصاء، فإن تمثيلًا بيانيًا واحدًا فقط للبيانات يمكن أن يوضح المقياس الذي يمثل العدد النموذجي لحالات تأخر الطلاب على النحو الأفضل.



المفردات الجديدة

أحادي المتغير univariate

توزيع ملتوٍ نحو اليسار negatively skewed distribution

توزيع متماثل symmetrical distribution

توزيع ملتوٍ نحو اليمين positively skewed distribution

قيمة إحصائية مقاومة resistant statistic

تجمع cluster

توزيع ثنائي المنوال bimodal distribution

مراكز مئوية percentiles

تمثيل بياني للمركز المئوي percentile graph

1 وصف التوزيعات

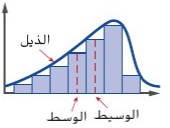
فيما سبق، لقد وصفتَ التوزيعات **أحادية المتغير** أو ذات المتغير الوحيد رقميًا. وأجريتَ ذلك باستخدام حساب عنصري التوزيع التاليين:

- مقاييس النزعة المركزية(التمركز) باستخدام الوسط والوسيط
- مقاييس التشتت(الانتشار) أو التباين باستخدام الانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة (الأرباع).

لتحديد ملخص الإحصاءات التي ينبغي استخدامها لوصف تمركز مجموعة بياناتٍ وانتشارها بالصورة الأمثل، فيجب عليك تحديد شكل التوزيع. ونعطي فيما يلي ثلاثة أشكالٍ شائعةٍ للتوزيع.

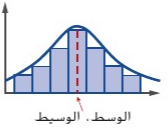
المفهوم الأساسي التوزيعات المتماثلة والملتوية

التوزيع الملتو نحو اليسار



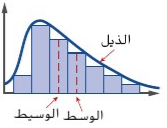
في **التوزيع الملتو نحو اليسار**، يكون الوسط أقل من الوسيط، وتقع معظم البيانات إلى الجهة اليمنى، بينما يمتد الذيل إلى الجهة اليسرى.

التوزيع المتماثل



في **التوزيع المتماثل**، تتوزع البيانات بصورةٍ متساويةٍ على كلا طرفي الوسط. ويكون الوسط والوسيط متساويين تقريبًا.

التوزيع الملتو نحو اليمين



في **التوزيع الملتو نحو اليمين**، يكون الوسط أكبر من الوسيط، وتقع معظم البيانات إلى الجهة اليسرى، بينما يمتد الذيل إلى الجهة اليمنى.

عندما يكون توزيعٌ متماثلاً على نحوٍ معقول، فيكون الوسط والوسيط قريبين بعضهما إلى بعض. ولكن في التوزيعات الملتوية، يكون الوسط أقرب إلى الذيل من الوسيط. وتؤدي القيم المتطرفة، وهي القيم شديدة الارتفاع أو الانخفاض في مجموعات البيانات، إلى انحراف الوسط باتجاه الذيل. ويتأثر الوسيط بصورةٍ أقل بوجود القيم المتطرفة. ولهذا السبب، يطلق على الوسيط اسم **القيمة الإحصائية المقاومة** ويطلق على الوسط اسم القيمة الإحصائية غير المقاومة.

بما أن الانحراف المعياري يقيس انتشار توزيعٍ في ضوء بعد قيم البيانات عن الوسط، فإن هذه القيمة الإحصائية ليست مقاومة أيضًا لتأثير القيم المتطرفة. ويقودنا هذا إلى الإرشادات التالية بشأن وصف ملخصات البيانات لوصف التوزيعات.

المفهوم الأساسي اختيار ملخصات الإحصاء

عند اختيار مقياسين للنزعة المركزية (للتمركز) والانتشار(التشتت) لوصف توزيعٍ ما، ادرس أولا شكل التوزيع.

- فإذا كان التوزيع متماثلًا على نحوٍ معقولٍ وخاليًا من القيم المتطرفة، فاستخدم الوسط والانحراف المعياري.
- وإذا كان التوزيع ملتويًا أو كانت له قيمٌ متطرفةٌ قوية، فإن ملخص الأعداد الخمسة (القيمة الصغرى، الرّبيع 1، الوسيط، الرّبيع 3، القيمة العظمى) يعطي تلخيصًا أفضل للنمط الكلي للبيانات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

عند تحديد شكلِ توزيعٍ ما، ركّز على النقاط العليا الرئيسية في التمثيل البياني بدلاً من الارتفاعات والانخفاضات الثانوية.

مثال 1 التوزيع الملتوي

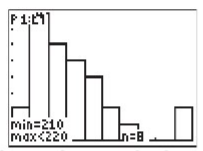
العقارات يعرض الجدول أسعار بيع عينةٍ من المنازل الجديدة في أحد الأحياء المحلية.

أسعار بيع المنازل الجديدة (آلاف الدراهم)				
248	219	234	250	225
299	205	212	215	245
257	228	221	233	212
220	213	231	212	266
238	249	292	223	235
218	227	209	242	217

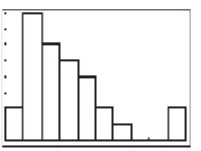
a. أنشئ مدرجاً إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

على حاسبة التمثيل البياني، انقر على الزر STAT وأدخل البيانات في L1. ثم شغّل Plot1 ضمن القائمة STAT PLOT واختر مثّل المدرج الإحصائي بيانيًا بالضغط على ZoomStat أو GRAPH وضبط النافذة يدويًا.

يبدي التمثيل البياني نقطة عليا وحيدة. ويمكنك باستخدام السمّة TRACE تحديد أن هذه النقطة العليا تمثل أسعار البيع التي تتراوح بين 210 aed و 220 aed ألفًا.



[200, 300] scl: 10 by [0, 8] scl: 1


[200, 300] scl: 10 by [0, 8] scl: 1

التمثيل البياني ملتوٍ إيجابيًا. حيث يبدو أن معظم أسعار البيع تقع بين 210 aed و 250 aed ألفًا. ولكن قليلاً منها أعلى من ذلك بكثير. ولذلك يتلاشى ذيل التوزيع نحو الجهة اليمنى.

b. صِف تمركز البيانات وانتشارها باستخدام إما الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك.

بما أن التوزيع ملتوٍ، فاستخدم ملخص الأعداد الخمسة بدلاً من الوسط والانحراف المعياري لوصف تمركز البيانات وانتشارها بإيجاز. ولعرض هذا الملخص، اضغط على STAT. واختر 1-Var Stats من القائمة الفرعية CALC ومرّر نحو الأسفل.

```
1-Var Stats
↑n=30
 minX=205
 Q1=217
 Med=227.5
 Q3=245
 maxX=299
```

يشير ملخص الأعداد الخمسة (minX و Q1 و Med و Q3 و maxX) إلى أنه في حين أن الأسعار تتراوح بين 205 aed و 299 aed ألفًا، كان سعر البيع الوسيط يساوي 227.5 aed ألفًا وكان نصف الأسعار بين 217 aed و 245 aed ألفًا.

تلميح تقني

عرض الخانة يدعى كل شريطٍ في حاسبة التمثيل البياني *بالخانة*. وتختار عروض الخانات من قبل الحاسبة عند استخدام السمة ZoomStat ويمكن تعديل عرض الخانة من خلال تغيير المعلمة Xscl ضمن Window. ويمكن تعديل عرض الخانة من خلال تغيير المعلمة.

انتبه!

اتجاه الالتواء يشير ذيل التوزيع إلى اتجاه التواء التوزيع وليس إلى ذروته.

تمرين موجّه

1. **درجات النشاط المخبري** يعرض الجدول درجات النشاط المخبري لجميع الطلاب في مادة العلوم.

درجات النشاط المخبري (نسبة مئوية)					
72	84	67	80	75	87
86	76	89	91	96	74
68	83	80	76	63	98
92	73	80	88	94	78

A. أنشئ مدرجاً إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

B. صِف تمركز البيانات وانتشارها باستخدام إما الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

لا تكون توزيعات البيانات متماثلةً أو ملتويةً على الدوام. بل إن البيانات تقع أحيانًا في مجموعاتٍ جزئية أو **تجمّعات**. فإذا كان توزيعٌ ما يضم فجوةً في المنتصف، فقد ينتج تجمّعان منفصلان للبيانات. ويعرف توزيع البيانات ذو المنوالين، وبالتالي ذو نقطتين عليتين، باسم **التوزيع ثنائي المنوال**.

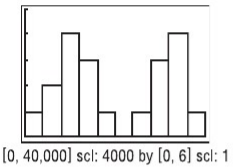
في البيانات التي تمثل تفضيل موضوعٍ ما، يمكن أن يشير التوزيع ثنائي المنوال إلى استقطابٍ للآراء. ولكن في معظم الأحيان، يشير التوزيع ثنائي المنوال إلى أن بيانات عينةٍ تأتي من توزيعين متداخلين أو أكثر.

مثال 2 من الحياة اليومية التوزيع ثنائي المنوال

الرسوم الدراسية يعرض الجدول الكلفة السنوية للرسوم الدراسية لعينةٍ من 20 جامعة في معرض التعاون الجامعي.

تكاليف الرسوم الدراسية الجامعية (aed)				
32,000	10,100	31,000	11,000	31,500
5500	35,000	10,800	3600	11,500
7400	15,100	18,200	25,600	33,100
36,200	32,000	30,400	14,300	12,400

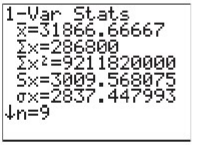
a. أنشئ مدرجاً إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

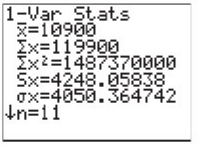


لا يضم المدرج الإحصائي للبياناتِ نقطة عليا رئيسيةً واحدةً بل اثنتين. ولذلك، فإن التوزيع ليس متماثلا ولا ملتويًا. بل إنه ثنائي المنوال. ويوضح التجمّعان المنفصلان وجود مزيج من نوعين من الجامعات في مجموعة البيانات. ومن المحتمل أن الجامعات الـ 11 ذات الرسوم الأقل هي جامعات حكومية وأن الجامعات الـ 9 ذات الرسوم الأعلى هي جامعات خاصة.

b. صِف تمركز البيانات وانتشارها باستخدام إما الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك.

بما أن التوزيع ثنائي المنوال، فإن استخدام تلخيص كلي للتمركز والانتشار سيعطي تمثيل بياناتٍ يفتقر للدقة. وبدلاً من ذلك، عليك تلخيص تمركز كل تجمّعٍ وانتشاره. وبما أن كل تجمّع يبدو متماثلاً بوضوح، أدخل كل تجمعٍ بصورةٍ منفصلةٍ ولخص البيانات باستخدام الوسط والانحراف المعياري لكل تجمّع.





يساوي وسط التكلفة للتجمّع 1 مبلغ 10,900 aed عند انحرافٍ معياري يساوي 4050 aed تقريبًا. في حين تساوي قيمة وسط التكلفة للتجمّع 2 مبلغ 31,866 aed عند انحرافٍ معياري يساوي 2837 aed تقريبًا.

تمرين موجّه

2. المضمار يعرض الجدول عدد الدقائق التي ركض خلالها 30 عضوًا في فريق المدرسة الثانوية خلال حصةٍ تدريبية.

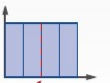
أزمنة حصة التدريب (min)									
26	36	31	58	51	29	56	23	61	46
30	50	45	22	64	49	34	42	53	55
41	37	28	54	32	50	59	48	62	39

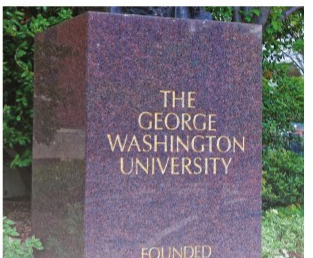
A. أنشئ مدرجاً إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

B. صِف تمركز البيانات وانتشارها باستخدام إما الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك.

نصيحة دراسية

التوزيع المنتظم ثمّة نوعٌ آخر من أنواع التوزيع، يعرف *بالتوزيع المنتظم*. وفيه يكون لكل قيمةٍ التكرار النسبي نفسه، كما هو موضح أدناه.





الربط بالحياة اليومية

خلال عام 2008، كانت رسوم جامعة جورج واشنطن هي الأعلى في الولايات المتحدة الأمريكية. وذلك بواقع 37,820 دولارًا أمريكيًا في العام. ويساوي ذلك تقريبًا 82% من وسيط دخل العائلة السنوي البالغ 46,326 دولارًا أمريكيًا.

المصدر: مجلة فوربس

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يمكنك أيضًا دراسة مخطط الصندوق ذي العارضين أو مخطط الصندوق لمجموعةٍ من البيانات من أجل تحديد شكل التوزيع. ولتحديد التماثل أو الالتواء من خلال مخطط الصندوق، عليك أن تأخذ في الحسبان موقع الخط الذي يمثل الوسيط وطول كل "عارضة".

المفهوم الأساسي مخططات الصندوق ذات العارضين المتماثلة والملتوية

الملتوي نحو اليسار

العارضة اليسرى أطول من العارضة اليمنى. والخط الذي يمثل الوسيط أقرب إلى Q_3 من Q_1.

المتماثل

العارضتان من الطول نفسه، والخط الذي يمثل الوسيط يقع تمامًا بين Q_1 و Q_3.

الملتوي نحو اليمين

العارضة اليمنى أطول من العارضة اليسرى. والخط الذي يمثل الوسيط أقرب إلى Q_1 من Q_3.

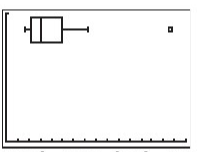
مثال 3 وصف التوزيع باستخدام المخطط الصندوقي

تعداد السكان يعرض الجدول عدد السكان بالآلاف خلال إحدى السنوات الأخيرة في خمس عشرة مدينة.

عدد السكان (بالآلاف)				
151	95	303	89	186
362	137	109	152	118
102	226	139	736	248

a. أنشئ مخططاً صندوقيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

أدخل البيانات في L1 على حاسبةٍ للتمثيل البياني. ثم شغّل Plot1 ضمن القائمة STAT PLOT واختر ⊡، مثّل المخطط الصندوقي بيانيًا بالضغط على ZoomStat أو على WINDOW وضبط النافذة يدويًا.



بما أن العارضة اليمنى أطول من العارضة اليسرى وبما أن الخط الأيمن الذي يمثل الوسيط أقرب إلى Q_1 منه إلى Q_3، فالتوزيع ملتوٍ نحو اليمين. لاحظ أن للتوزيع قيمةً متطرفةً عند 736.

b. صِف تمركز البيانات وانتشارها باستخدام إما الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك.

```
1-Var Stats
fn=15
 minX=89
 Q1=109
 Med=151
 Q3=248
 maxX=736
```

بما أن التوزيع ملتوٍ، استخدم ملخص الأعداد الخمسة. حيث يشير هذا الملخص أنه حين كانت عدد السكان يتراوح بين 89,000 و 736,000 نسمة، كان وسيط عدد السكان 151,000 نسمة. كان عدد السكان فيالنصف الأوسط من البيانات ضمن المجال y 109,000 – 248,000 أو 139,000. وهوالمدى الربعي.

مراجعة المصطلحات

المدى الربعي هو الفرق بين الربيع الأعلى والربيع الأدنى $Q_3 - Q_1$ في مجموعة بيانات

تمرين موجّه

3. الشاحنات يعرض الجدول تكاليف اثني عشر شاحنةً متماثلةً من حيث الشكل والطراز وعام التصنيع في موقع إلكتروني لبيع السيارات المستعملة

تكاليف الشاحنات المستعملة (aed)		
9000	8200	9200
7800	8900	8500
6500	7500	7800
8000	6400	5500

A. أنشئ مخططًا صندوقيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

B. صِف تمركز البيانات وانتشارها باستخدام إما الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 مقاييس الموقع

تحدّد الأرباع الإحصائية التي يعطيها ملخص الأعداد الخمسة مواقع قيم البيانات ضمن التوزيعات. ولهذا السبب تعدّ مخططات الصندوق الأكثر فائدةً في مقارنات طرف-إلى-طرف لتوزيعين أو أكثر.

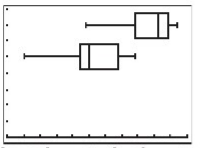
مثال 4 مقارنة المواقع باستخدام مخططات الصندوق

كرة السلة يعرض الجدول عدد المباريات التي فاز بها فريق الوحدة خلال فترتين زمنيتين مختلفتين مدّة كلٍ منهما 15 عامًا. أنشئ مخططين صندوقيين متجاورين لمجموعتي البيانات. ثم استخدم طريقة العرض هذه لمقارنة التوزيعات.

فترة الأعوام الـ 15 الأولى				
49	52	59	57	60
60	54	62	59	58
54	48	34	44	56

فترة الأعوام الـ 15 الثانية				
48	32	35	33	15
36	19	36	35	49
44	36	45	33	24

أدخل البيانات في L1 و L2. ثم شغّل Plot1 و Plot2 ضمن القائمة STAT PLOT واختر ، ومثّل المخطط الصندوقي بيانيًا بالضغط على ZoomStat أو على GRAPH وضبط النافذة يدويًا.



مقارنة مقاييس الموقع

إن العدد الوسيط من المباريات التي فاز بها الفريق في كل موسمٍ خلال فترة الأعوام الـ 15 الأولى أكبر من وسيط المباريات التي فاز بها الفريق في فترة الأعوام الـ 15 الثانية. ويساوي الربيع الأول لفترة الأعوام الـ 15 الأولى القيمة العظمى لفترة الأعوام الـ 15 الثانية. ويعني ذلك أن 75% من قيم البيانات لفترة الأعوام الـ 15 الأولى أكبر من أيٍ من القيم في الفترة الثانية. ولذلك يمكن أن نستنتج أن أداء فريق الوحدة كان أكثر نجاحًا بصورةٍ كبيرةٍ خلال فترة الأعوام الـ 15 الأولى مقارنةً بالفترة الثانية.

مقارنة الانتشار

إن انتشار النصف الأوسط من البيانات، والذي يمثله الصندوق، هو نفسه تقريبًا في كلّ توزيع. ولذلك فإن التباين في عدد المباريات التي حقق فيها الفريق الفوز في كل موسمٍ خلال تلكما الفترتين كان نفسه تقريبًا.

تمرين موجّه

4. البيسبول يعرض الجدولان عدد الركضات الكاملة المحققة في دوريي عام 1927 و 2007 من قبل أفضل 20 لاعبًا في تسجيل الركضات. شكّل مخططين صندوقيين متجاورين لمجموعتي البيانات. ثم استخدم طريقة العرض هذه لمقارنة التوزيعين.

1927				
19	10	13	30	16
14	18	14	12	60
30	14	47	14	15
12	20	18	26	17

2007				
40	32	47	31	34
34	33	35	30	46
32	54	31	33	32
36	31	34	50	35

نصيحة دراسية

الكسور الربيعات والنسب المئوية نوعان من *الكسور* — وهي أعداد تقسم مجموعةً مرتبةً من البيانات إلى مجموعاتٍ متساوية. و*الأعشار* تقسم مجموعة البيانات إلى مجموعاتٍ متساوية من عشرة.

إضافةً إلى الأرباع الإحصائية، يمكنك أيضًا استخدام النسب المئوية لتحديد الموقع النسبي لقيمةٍ مفردةٍ ضمن مجموعةٍ من البيانات. تقسّم **النسب المئوية** التوزيع إلى 100 مجموعة متساوية ويرمز لها بـ P_{99} ، ...، P_3، P_2، P_1. النسبة المئوية التي ترتيبها n أو P_n هي القيمة التي تكون عندها n% الخاصة بالبيانات أقل من P_n و $(100 - n)$% الخاصة بالبيانات أكبر أو تساوي P_n. والنسبة المئوية الأعلى التي يمكن أن تساويها قيمة البيانات هي النسبة المئوية البالغة 99 .

يستخدم **التمثيل البياني المئوي** القيم التي يستخدمها التمثيل البياني للتكرار النسبي التراكمي نفسها. باستثناء أنه يعبّر عن التناسبات بالنسب المئوية.

McGraw-Hill Education مؤسسة محفوظة لصالح © حقوق الطبع والتأليف

يمكنك استخدام تمثيلٍ بيانيٍ مئويٍ لتقدير المركز المئوي لقيمةٍ محددةٍ لمتغير.

مثال 5 إنشاء تمثيلٍ بيانيٍ للنسب المئوية واستخدامه

إجمالي مجموع الدرجات الدراسية يوضح الجدول توزيع التكرار الخاص بإجمالي مجموع الدرجات لـ 200 طالبة في مدرسة عبير الثانوية.

الفئات الخاصة بالفصل	f	الفئات الخاصة بالفصل	f
2.00–2.25	10	3.00–3.25	36
2.25–2.50	28	3.25–3.50	32
2.50–2.75	30	3.50–3.75	26
2.75–3.00	32	3.75–4.00	6

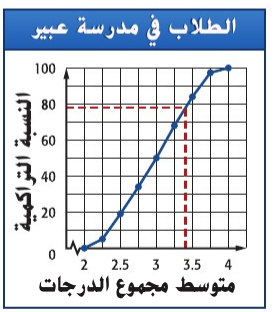
a. أنشئ تمثيلاً بيانيًّا للمراكز المئوية للبيانات.

أولاً، أوجد التكرارات التراكمية. ثم أوجد النسب المئوية التراكمية بالتعبير عن التكرارات التراكمية في صورة نسبٍ مئوية. موضح هنا الحسابات الخاصة بأول صفّين دراسيين.

الفئات الخاصة بالفصل	f	التكرار التراكمي	النسب المئوية التراكمية
2.00–2.25	10	10	5% أو $\frac{10}{200}$
2.25–2.50	28	38 أو 10 + 28	19% أو $\frac{38}{200}$
2.50–2.75	30	68	34%
2.75–3.00	32	100	50%
3.00–3.25	36	136	68%
3.25–3.50	32	168	84%
3.50–3.75	26	194	97%
3.75–4.00	6	200	100%

وأخيرًا، مثل البيانات بيانيًا مع الفئات الخاصة بكل صفٍ على طول المحور الأفقي x وممثّل النسبة المئوية التراكمية على طول المحور الرأسي y كما هو موضح.

b. قدّر المركز المئوي الذي يعطيه معدّل تكراري يساوي 3.4 في هذا التوزيع، وفسّر معناه.



أوجد 3.4 على المحور الأفقي x وارسم مستقيمًا رأسيًا على التمثيل البياني. تقابل هذه النقطة الموجودة على التمثيل البياني النسبة المئوية الثامنة والسبعين تقريبًا. ولذلك يكون للطالب ذي إجمالي مجموع الدرجات البالغ 3.4 متوسطٌ أفضل للدرجات النقطية من 78% تقريبًا من الطلاب في مدرسة عبير الثانوية.

انتبه!

المركز المئوي مقابل النسبة المئوية

النسب المئوية ليست نفسها *المراكز المئوية*. حيث إن الطالب إن حلّ 85 مسألة صحيحة من أصل 100، فإنه يحصل على النسبة 85 من مئة. وهذا لا يحدد إن كانت الدرجة التي حصل عليها عاليةً أو متدنيةً بالمقارنة مع بقية أفراد الفصل الدراسي.

تمرين موجّه

5. الطول يوضح الجدول التوزيع التكراري لأطوال الأولاد في فصول المعلم إبراهيم لشرح مقدمة التفاضل والتكامل.

الفئات الخاصة بالفصل	التكرار (f)
146.5–154	11
154–161.5	15
161.5–169	15
169.5–176.5	12
176.5–184	7

A. أنشئ تمثيلاً للمراكز المئوية للبيانات.

B. قدّر المركز المئوي لولد طوله 169 cm في هذا التوزيع. وفسر معناه.

انتبه!

استيعاب المراكز المئوية إن القول بأن طول ولد ما يقع في المركز المئوي الخامس والسبعين لا يعني أن طوله يساوي 75% من طول مثالي ما. بل إن طوله أكبر من أطوال 75% من أطوال جميع الأولاد في فصل مقدمة حساب التفاضل والتكامل.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

في التمارين 1-4، أكمل كل خطوة.

a. أنشئ مدرجاً إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

b. صِف تمركز البيانات وانتشارها باستخدام إما الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك. (المثالان 1 و 2)

1. **الطيران** يعرض الجدول سرعات الهبوط بالعقدة في الساعة لـ 20 رحلة طيران تجارية في أحد المطارات.

سرعة الهبوط (kn/h)			
150	157	153	145
155	158	158	162
149	142	138	154
156	161	146	148
158	144	151	152

2. **الحواسيب** يعرض الجدول أسعار التجزئة لحواسيب محمولةٍ ومكتبيةٍ في أحد متاجر الإلكترونيات.

أسعار الحواسيب (aed)		
950	1000	975
1150	450	1075
675	1250	540
1025	1180	925
580	950	890

3. **البولينغ** يتراوح عدد النقاط في البولينغ بين 0 و 300. يعرض الجدول عدد النقاط التي أحرزها لاعبون مختارون عشوائيًا في إحدى صالات البولينغ.

نقاط البولينغ				
116	81	234	173	75
61	205	92	219	156
134	259	273	53	241
105	190	94	127	235
228	248	271	46	112
99	223	142	217	68

4. **الرواتب** يتراوح الراتب الابتدائي لموظفٍ في إحدى الشركات الجديدة بين 20,000 aed و 90,000 aed. ويعتمد الراتب الابتدائي جزئيًا على عدد سنوات الخبرة السابقة للعامل ومستوى المنصب الذي عُيِّن فيه. يعرض الجدول الرواتب الابتدائية لجميع المعيّنين حديثًا في الشركة خلال العام السابق.

الرواتب (آلاف الدراهم)			
24	40	34	59
48	52	65	54
68	26	85	32
36	42	33	45
38	89		

في التمارين 5-6، أكمل كل خطوة.

a. أنشئ مخططاً صندوقيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

b. صِف تمركز البيانات وانتشارها باستخدام إما الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك. (المثال 3)

5. **الألعاب الإلكترونية** يعرض الجدول الزمن الذي تقضيه عينةٌ من الطلاب في مدرسة الإخاء الثانوية على الألعاب الإلكترونية كل أسبوع.

الزمن الذي يقضيه الطالب على الألعاب الإلكترونية (ساعة)					
1.5	2.5	0	4.5	12.5	1
2.5	4	2	8.5	1.5	9
1	0	2	1.5	5.5	2

6. **الاختبار التجريبي للقبول الجامعي** خضع الطلاب في فصل الآنسة إيمان مؤخرًا للاختبار التجريبي للقبول الجامعي. يعرض الجدول درجات كل طالب.

درجات الاختبار التجريبي للقبول الجامعي							
32	21	24	35	28	29	28	30
28	25	29	19	24	23	25	22
23	29	27	24	27	29	21	18

في التمارين 7-8، أكمل كل خطوة.

a. أنشئ مخططين صندوقين متجاورين لمجموعتي البيانات.

b. استخدم طريقة العرض هذه لمقارنة التوزيعين. (المثال 4)

7. **السيارات الهجينة** يعرض الجدول قيم كفاءة استهلاك الوقود مقدرةً بالكيلومتر في اللتر لـ 18 سيارةً هجينةً أنتجت خلال السنتين الأخيرتين.

العام 1								
23	48	31	27	28	35	27	28	24
15	16	28	33	22	16	28	40	24
العام 2								
29	34	25	33	26	35	27	40	27
22	48	29	34	21	24	29	21	34

8. **الزلازل** يعرض الجدول الشدة على مقياس رختر لـ 18 زلزالاً حدثت خلال السنوات الأخيرة في مدينتين.

المدينة 1								
6.6	6.6	6.4	7.2	6.5	6.7	4.8	6.8	6.8
7.8	6.9	7.1	6.6	7.9	6.7	5.3	7.9	7.7
المدينة 2								
5.4	5.4	5.6	4.4	4.2	4.3	5.2	4.5	4.7
6.6	4.9	7.2	5.2	4.1	6.0	3.0	6.6	3.5

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9. علم الأحياء البحرية يوضح الجدول توزيع التكرار لأوزان 40 من الشمبانزي البالغة. (المثال 5)

a. أنشئ تمثيلًا بيانيًا للمراكز المئوية للبيانات.

b. قدّر المركز المئوي الذي يمثله وزن 55 kg في هذا التوزيع. وفسّر معناه.

الفئات الخاصة بالفصل	f
40.5–45.5	4
45.5–50.5	5
50.5–55.5	7
55.5–60.5	12
60.5–65.5	9
65.5–70.5	3

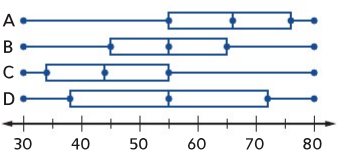
10. الهطول المطري يوضح الجدول التوزيع التكراري للهطول المطري السنوي المتوسط بالسنتميتر في 50 دولة مختلفة. (المثال 5)

الفئات الخاصة بالفصل	f
0–9.5	3
9.5–19.5	8
19.5–29.5	4
29.5–39.5	14
39.5–49.5	16
49.5–59.5	5

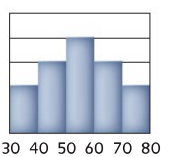
a. أنشئ تمثيلًا بيانيًا للمراكز المئوية للبيانات.

b. قدّر المركز المئوي الذي يمثله هطول مطري متوسط قيمته 50 cm في هذا التوزيع. وفسر معناه.

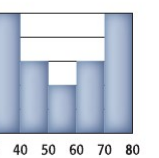
اكتب حرف المخطط الصندوقي المقابل لكل مدرجٍ إحصائي مما يلي.



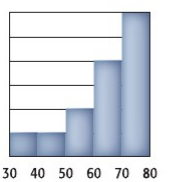
11.



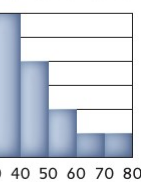
12.



13.



14.



15. الحضور يبيّن الجدول العدد المتوسط لحضور مباريات فريق كرة القدم مقدرًا بالآلاف. في الموسم. بين عامي 1979 و 2008.

عدد حضور مباريات المنتخب الوطني					
31.7	32.4	30.2	25.2	27.9	22.5
27.5	28.0	30.0	32.7	27.0	24.8
23.0	21.6	29.8	29.7	23.5	27.8
31.9	36.5	40.7	38.0	40.8	42.7
42.8	47.8	50.5	51.9	52.7	53.1

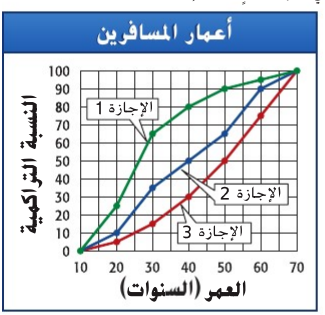
a. أنشئ مدرجاً تكراريًا ومخططًا صندوقيًا واستخدم التمثيلات البيانية لوصف شكل التوزيع.

b. أوجد العدد المتوسط لحضور مباريات الفريق الوطني داخل الإمارات خلال السنوات الـ 30 الأخيرة.

c. ما التمثيل البياني الأفضل للاستخدام عند تقدير المتوسط؟ اشرح استنتاجك.

d. هل يمكن استخدام أي من التمثيلات البيانية في الجزء a لوصف أي أنماط في عدد حضور مباريات الفريق الوطني خلال تلك الفترة؟ اشرح استنتاجك.

16. الإجازات يمثل التمثيل البياني للمركز المئوي أعمار الأشخاص الذين ذهبوا في 3 إجازاتٍ مختلفةٍ مدة كل منها أسبوعان.



a. صِف شكل كل من التوزيعات.

b. ما الإجازات التي تضم أصغر المسافرين سنًا؟ وأيها تضم أكبرهم سنًا؟ اشرح استنتاجك.

17. التصنيع يعرض الجدول العمر الافتراضي لنوعين من البطاريات القابلة لإعادة الشحن مقيسين بعدد دورات لشحن.

العلامة التجارية A				
998	950	1020	1003	990
942	1115	973	1018	981
1047	1002	997	1110	1003
العلامة التجارية B				
892	1044	1001	999	903
950	998	993	1002	995
990	1000	1005	997	1004

a. أنشئ مدرجاً إحصائيًا لكل مجموعة من البيانات.

b. لأيٍ من البيانات تباينٌ أكبر في العمر الافتراضي؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

18. كرة السلة يعرض الجدول أطوال لاعبي الفريق الوطني بالسنتيمتر لكرة السلة لفئتي الرجال والسيدات خلال البطولة الأولمبية عام 2008.

أطوال الرجال					
205	193	203	190	198	193
198	211	208	183	205	203
أطوال السيّدات					
175	185	175	178	185	196
183	188	183	198	180	193

a. أنشئ تمثيلًا بيانيًا للمراكز المئوية للبيانات.

b. قدّر المركزين المئويين للاعبي كرة سلة ذكر وأنثى طولهما 190 cm في كل توزيع. واشرح معنى ذلك.

c. افترض أن لاعبة كرة السلة التي طولها 198 cm استبدلت بلاعبةٍ طولها 188 cm. فماذا سيكون المركز المئوي للاعبة الجديدة في التوزيع المقابل؟

موضح مقياس آخر للتمركز، ويعرف بالربيع الأوسط، من خلال المعادلة $\frac{Q_1+Q_3}{2}$. ***أوجد*** Q_1 ***و*** Q_2 ***و*** Q_3 ***وربيع كل مجموعة من البيانات.***

19

0.12	0.25	0.19	0.38	0.28	0.16
0.41	0.29	0.32	0.11	0.04	0.25
0.29	0.07	0.26	0.09	0.31	0.23

20.

112	101	138	200	176	199
105	127	146	128	116	154
167	202	191	143	205	130

21. الطاقة يعرض الجدول استهلاك البترول بين عامي 1988 و 2007 في الولايات المتحدة الأمريكية وأمريكا الشمالية.

الولايات المتحدة (ألف برميل/اليوم)				
16,700	17,300	17,300	17,000	16,700
17,000	17,200	17,700	17,700	18,300
18,600	18,900	19,500	19,700	19,600
19,800	20000	20,700	20,800	20,700
أمريكا الشمالية (ألف برميل/اليوم)				
19,900	20,600	20,800	20000	20,200
20,600	20,800	21,400	21,300	22,000
22,400	22,800	23,500	23,800	23,700
23,800	24,200	25,000	25,200	25,000

a. أنشئ مخططين صندوقين متجاورين ومدرجين تكراريين.

b. قارن الاستهلاك المتوسط للبترول في الولايات المتحدة وأمريكا الشمالية.

c. ما التمثيل البياني الأسهل للاستخدام عند مقارنة مقياسي النزعة المركزية والانتشار؟

d. ما النسبة المئوية التي يمكن أن ننسبها لاستهلاك البترول في الولايات المتحدة إلى استهلاكه في أمريكا الشمالية؟ قرّب إلى أقرب نسبةٍ مئوية.

22. التمثيلات المتعددة ستدرس في هذه المسألة كيف يؤثر التحويل الخطي في شكل توزيع البيانات ومركزه وانتشاره. خذ الجدول الموضح.

52	37	59	31	45
23	48	42	65	39
40	53	14	49	56
68	32	77	44	28

a. بيانيًا أنشئ مدرجاً إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

b. عدديًا أوجد وسط مجموعة البيانات وانحرافها المعياري.

c. جدوليًا قم بكلٍ من التحويلات الخطية التالية ذات الصيغة $X' = a + bX$. حيث X هي القيمة الأولية للبيانات و X' هي قيمة البيانات المحولة. سجّل كل مجموعة من قيم البيانات المحولة (i–iii) في جدول منفصل.

i. $a = 3, b = 5$ ii. $a = 10, b = 1$ iii. $a = 0, b = 5$

d. بيانيًا كرّر الجزأين **a** و **b** لكل مجموعة من قيم البيانات المحولة التي توصلت إليها في الجزء **c**. واضبط عرض الخانة لكل منها بصورةٍ ملائمة.

e. لفظيًا صِف كيف يؤثر التحويل الخطي في شكل توزيع البيانات وتمركزه وانتشاره.

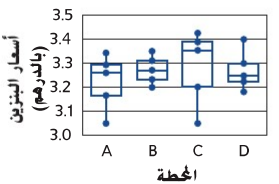
f. تحليليًا إذا ضربت كل قيمةٍ في مجموعة البيانات بثابتٍ **c**. فما الذي سيحدث لوسط التوزيع وانحرافه المعياري؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

23. الكتابة في الرياضيات اشرح السبب في أن استخدام المدى من شأنه أن يكون طريقةً فعالةً لقياس انتشار بياناتٍ موزعة.

24. التحدي افترض أن 20% من مجموعة البيانات تقع بين 35 و 55. فإذا أضيفت 10 إلى كل قيمةٍ في مجموعة البيانات ثم ضوعفت كل قيمة. فما القيمتان التي ستقع بينهما نسبة 20% من البيانات؟

التبرير **يعرض الجدول أسعار البنزين في أربع محطاتٍ للوقود خلال فترة شهرٍ واحد.**



25. أي من المحطات لها التباين الأكبر في أسعار البنزين؟ وأيها لها التباين الأصغر؟ برّر استنتاجك.

26. أيٌّ من التوزيعات التالية توزيع ملتوٍ موجب؟ وأيّها توزيع ملتوٍ سالب؟ وأيها توزيعٌ متماثل؟ برّر استنتاجك.

27. الكتابة في الرياضيات لِمَ يعدّ الوسيط أقل تأثرًا بالقيم المتطرفة من الوسط؟ برّر إجابتك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة شاملة

اكتب كل عدد مركب بالصورة الأسيّة.

28. $\sqrt{3} + \sqrt{3}i$ **29.** $\sqrt{5} - \sqrt{5}i$ **30.** $\sqrt{2} - \sqrt{6}i$

استخدم نظرية ذات الحدّين لايجاد مفكوك كل ذات حدّين مما يلي.

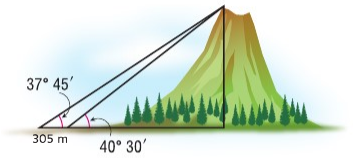
31. $(3a + 4b)^5$ **32.** $(5c - 2d)^4$ **33.** $(-2x + 4y)^6$

أوجد الزاوية θ بين المتّجهين u و v.

34. $u = 4i - 2j + 9k$, $v = 3i + 7j - 10k$ **35.** $u = \langle -7, 4, 2, v = \langle 9, -5, 1 \rangle$ **36.** $u = \langle 4, 4, -6 \rangle$, $v = \langle 8, -5, 2 \rangle$

مَثّل القطع الناقص المعطى من خلال كل معادلة.

37. $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$ **38.** $\frac{(x+6)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{9} = 1$ **39.** $\frac{(x-2)^2}{28} + \frac{y^2}{8} = 1$



40. عمليات المسح لتحديد الارتفاع الجديد لبركانٍ بعد انفجاره، قاس اختصاصي مساحة زاوية الارتفاع إلى قمة البركان بأنها 37° 45′. ثمّ اقترب الاختصاصي مسافة 305 m من البركان وقاس زاوية الارتفاع بأنها 40° 30′. حدّد الارتفاع الجديد للبركان.

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

41. مراجعة تعمل إحدى ألعاب مدينة الملاهي مثل ثُقل البندول. حيث تقطع هذه السفينة خلال أطول أشواطها قوسًا طوله 75 m. وتنقص المسافة التي تقطعها السفينة في الشوط الواحد بمقدار خمسين عن الشوط السابق. فما المسافة الكلية التي ستقطعها السفينة من أطول أشواطها إذا تركت تتحرك دون تدخّل أحد؟

A 75 m
B 125 m
C 150 m
D 187.5 m

42. مراجعة تهتلك قيمة سيارةٍ محددةٍ بمعدلٍ ثابت. فإذا كانت قيمتها البدائية 25,000 aed وأصبحت قيمتها 8192 aed بعد خمس سنوات، أوجد المعدّل السنوي للاهتلاك.

F 10% **H** 30%
G 20% **J** 40%

43. SAT/ACT تم جمع وتحليل قيم جميع المنازل في إحدى المدن. فما الإحصاء الوصفي الذي يصف هذه البيانات على النحو الأفضل؟

A الوسط **D** المدى
B الوسيط **E** الانحراف المعياري
C المنوال

44. يعرض الجدول التوزيع التكراري لنتائج اختبار القيادة في أحد المراكز في يومٍ ما. قدّر المركز المئوي لشخصٍ سجل 72 نقطة في ذلك اليوم.

F 27%
G 30%
H 34%
J 72%

الفئات الخاصة بالفصل	التكرار f
0–65.5	12
65.5–70.5	3
70.5–75.5	4
75.5–80.5	1
80.5–85.5	9
85.5–90.5	13
90.5–95.5	8
95.5–100	6

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-2 التوزيعات الإحتمالية

السابق

- لقد تعلمت احتمالات الأحداث التي تتضمن توافيق.

الحالي

1 إنشاء توزيع احتمالي وحساب ملخص الإحصاء.

2 إنشاء واستخدام توزيع ذي حدّين وحساب ملخص الإحصاء ذي الصلة.

لماذا؟

- تستخدم شركات تأمين السيارات الإحصاءات لقياس المخاطر المرافقة لأحداثٍ محددة، مثل حوادث الاصطدام. حيث تخصص احتمالاتٍ لجميع النتائج المحتملة المتصلة بالحدث وتحسب الإحصاءات بناءً على طريقة توزيع تلك الاحتمالات. ومن خلال هذه الإحصاءات، تستطيع الشركة التنبؤ باحتمال نتائج محددةٍ واتخاذ قراراتٍ تبعًا لذلك.

المفردات الجديدة

متغير عشوائي
random variable

متغير ثابت منفصل
discrete random variable

متغير عشوائي متصل
continuous random variable

توزيع احتمالي
probability distribution

قيمة التوقع
expected value

تجربة ذات حدّين
binomial experiment

توزيع ذو حدّين
binomial distribution

دالة توزيع احتمالي ذي حدّين
binomial probability distribution function

1 التوزيعات الاحتمالية

استخدمت في الدرس السابق الإحصاء الوصفي لتحليل متغير وهو من خواصّ المجتمعات الإحصائية. وفي ذلك الدرس، حُدّدت القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير من خلال جمع البيانات. وفي هذا الدرس، ستدرس متغيراتٍ ذات قيم محدّدة على وجه المصادفة.

المتغير العشوائي X يمثل قيمة عددية يتم تعيينها إلى نتيجة لتجربة احتمال. ثمة نوعان من المتغيرات العشوائية: المنفصل والمتصل.

المفهوم الأساسي المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة

متغير عشوائي منفصل

يمكن أن يأخذ متغير عشوائي منفصل عددًا محددًا أو معدودًا من القيم المحتملة.

مثال

عدد حوادث السيارات بالسنة، X

المتغير العشوائي المتصل

يمكن أن يأخذ المتغير العشوائي المتصل عددًا لا نهائيًا من القيم المحتملة ضمن فترةٍ محددة.

مثال

عدد الأميال المقطوعة، X

بما أن تقنياتٍ إحصائيةً مختلفةً تستخدم لتحليل هذين النوعين من المتغيرات العشوائية، فمن الضروري التمتّع بالقدرة على التمييز بينهما. ولتصنيف متغيرٍ عشوائي على نحوٍ صحيح، فكّر إن كان X يمثّل بياناتٍ معدودةً أو مقيسة.

مثال 1 تصنيف متغير عشوائي على أنه منفصل أو متصل

صنّف كل متغير عشوائي X على أنه *منفصل* أو *متصل*. اشرح استنتاجك.

a. يمثل X وزن الحبوب في عبوة حبوبٍ وزنها فارغةً 450 g مختارة عشوائيًا من العبوات في خط إنتاج.

يمكن أن يقع وزن الحبوب عند أي قيمة بين 0 g و 450 g. ولذلك، فإن X متغيرٌ عشوائيٌ متصل.

b. يمثّل X عدد السيارات في موقف سيارات مدرسة مختار في توقيتٍ عشوائي خلال يوم الدوام المدرسي.

عدد السيارات في الموقف قابل للعدّ. حيث يمكن أن تكون هناك 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو عدد كلي كامل من السيارات. ولذلك، فإن X متغير ثابت منفصل.

تمرين موجّه

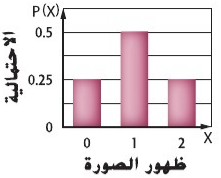
1A. يمثل X الزمن المستغرق لتقديم الطعام إلى زبونٍ مختارٍ عشوائيًا في مطعمٍ للوجبات السريعة.

1B. يمثل X عدد الحضور خلال اجتماعٍ اختير عشوائيًا من اجتماعات مجلس إدارة المدرسة الشهرية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

فضاء العينة الخاص بتجربة الاحتمال النظري التي تُلقى فيها قطعتان نقديتان هو {TT, TH, HT, HH}. فإذا كان X هو المتغير العشوائي لعدد الصور، إذًا يمكن أن يأخذ X القيمة 0 أو 1 أو 2. ويمكن من خلال فضاء العينة، أن تجد الاحتمال النظري لعدم الحصول على أي صورة أو الحصول على صورة واحدة أو صورتين.

$P(0) = \frac{1}{4}$ $P(1) = \frac{1}{2}$ $P(2) = \frac{1}{4}P$



يعرض الجدول أدناه والتمثيل البياني إلى الجهة اليسرى التوزيع الاحتمالي لـ X.

عدد مرات ظهور الصورة، X	0	1	2
الاحتمال، $P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

قراءة في الرياضيات

احتمالات المتغيرات العشوائية يقرأ الرمز $P(1)$ على أنه *احتمال أن يكون المتغير العشوائي* X *يساوي* 1.

المفهوم الأساسي توزيع احتمالي

إن **التوزيع الاحتمالي** لمتغير عشوائي X هو جدولٌ أو معادلة أو تمثيلٌ بياني يربط كل قيمة ممكنة لـ X باحتمال وقوع الحدث. وتحدّد هذه الاحتمالات نظريًا أو بالرصد.

يجب أن يحقق التوزيع الاحتمالي الشروط التالية.

- يجب أن يكون احتمال كل قيمة لـ X ما بين 0 و 1، بحيث تكون $0 \le P(X) \le 1$.
- يجب أن يساوي مجموع جميع احتمالات كل قيم X العدد 1، أي $\sum P(X) = 1$.

نصيحة دراسية

التوزيعات المستمرة يركز هذا الدرس على المتغيرات الثابتة المنفصلة. وستدرس التوزيعات الاحتمال المستمر في الدرس 3-10.

لإنشاء توزيع احتمالي منفصل باستخدام البيانات المرصودة بدلًا من النظرية، استخدم تكرار كلٍّ من القيم المرصودة لحساب الاحتمال.

مثال 2 إنشاء توزيع احتمالي

تقييم المعلّم طُلب من الطلاب أن يقيّموا شرح معلم إحدى المقررات الدراسية على استمارة تقييم باستخدام مقياس تتراوح درجاته بين 1 و 5، حيث يشير العدد 1 إلى أن الشرح مبسّط جدًا ويشير العدد 5 إلى أن الشرح على درجة عالية جدًا من التخصص. استخدم التوزيع التكراري الموضح لإنشاء توزيع احتمالي للمتغير العشوائي X وتمثيله بيانيًا.

الدرجة، X	التكرار
1	1
2	8
3	20
4	16
5	5

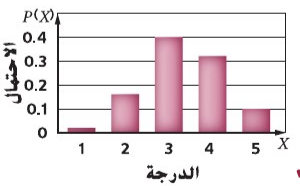
لإيجاد احتمال أن يأخذ X كلاً من القيم، قسّم تكرار كل قيمة بالعدد الكلي للطلاب المقيّمين للمعلم، وهو $5 + 16 + 20 + 8 + 1$ أو 50.

$P(1) = \frac{1}{50} = 0.02$ $P(2) = \frac{8}{50} = 0.16$ $P(3) = \frac{20}{50} = 0.40$

$P(4) = \frac{16}{50} = 0.32$ $P(5) = \frac{5}{50} = 0.10$

يعرض الجدول أدناه التوزيع الاحتمالي لـ X. ويعرض المخطط على الجهة اليسرى تمثيله البياني.

الدرجة، X	1	2	3	4	5
$P(X)$	0.02	0.16	0.40	0.32	0.10



التحقق لاحظ أن جميع الاحتمالات في الجدول بين 0 و 1. وبذلك $\sum P(X) = 0.02 + 0.16 + 0.4 + 0.32 + 0.1 = 1$. ✓

تمرين موجّه

2. مبيعات السيارات يرصد أحد مندوبي مبيعات السيارات عدد السيارات المبيعة كل يوم خلال مدة 30 يومًا. استخدم التوزيع التكراري للنتائج لإنشاء توزيع احتمالي للمتغير العشوائي X وتمثيله بيانيًا. مقربًا كل احتمال إلى أقرب جزء من مئة.

السيارات المبيعة، X	0	1	2	3
التكرار	20	7	2	1

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

لحساب وسط توزيعٍ احتمالي، يجب علينا استخدام صيغةٍ مختلفةٍ عن تلك المستخدمة لحساب وسط مجتمعٍ إحصائي. ولفهم السبب في ذلك، خذ حساب وسط عدد الصور X الناتج عن عددٍ لا نهائي من عمليات القاء قطعتين نقديتين. ولا نستطيع حساب الوسط باستخدام $\mu = \frac{\sum X}{N}$. وذلك نظرًا إلى أن N سيكون لا نهائيًا. ولكن التوزيع الاحتمالي لـ X يخبرنا عن مقدار (كسر) الرميات التي نتوقع أن تكون قيمتها 0 أو 1 أو 2.

عدد مرات ظهور الصورة بعد القاء قطعة النقد مرتين

$$\{\underbrace{TT,\ TT,\ \ldots,\ TT,\ TT}_{\frac{1}{4}},\ \underbrace{HT,\ HT,\ \ldots,\ HT,\ HT,\ TH,\ TH,\ \ldots,\ TH,\ TH,}_{\frac{1}{2}}\ \underbrace{HH,\ HH,\ \ldots,\ HH,\ HH}_{\frac{1}{4}}\}$$
$$\{\underbrace{0,\ \ 0\ \ \ldots,\ \ 0,\ \ 0,}_{\frac{1}{4}}\ \underbrace{1,\ \ 1,\ \ldots,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ldots,\ \ 1,\ \ 1,}_{\frac{1}{2}}\ \underbrace{2,\ \ 2,\ \ \ldots,\ \ 2,\ \ 2}_{\frac{1}{4}}\}$$

ولذلك، فإننا ستوقع أنه – في المتوسط – سيكون عدد الصور التي يتم الحصول عليها خلال عددٍ كبيرٍ أو لا نهائي من الرميات هو $\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2$ أو 1. ونلخّص أدناه طريقة إيجاد وسط توزيعٍ احتمالي.

المفهوم الأساسي وسط التوزيع الاحتمالي

الشرح لإيجاد وسط التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X، اضرب كل قيمة لـ X في احتمالها وأوجد مجموع نواتج الضرب.

الرموز وسط متغير عشوائي X موضح من خلال $\mu = \sum[X \cdot P(X)]$، حيث $X_1, X_2, \ldots, X_n$ هي قيم X و $P(X_1), P(X_2), \ldots, P(X_n)$ هي الاحتمالات المقابلة.

مثال 3 وسط التوزيع الاحتمالي

تقييم المعلم يعرض الجدول أدناه التوزيع الاحتمالي الخاص بسؤال تقييم المعلم الوارد في المثال 2. أوجد الوسط للدرجات مقربًا إلى أقرب جزءٍ من مئة، وفسّرمعناه في سياق حالة المسألة.

الدرجة، X	$P(X)$
1	0.02
2	0.16
3	0.40
4	0.32
5	0.10

اضرب كل درجةٍ باحتمالها، وأوجد مجموع نواتج الضرب هذه. نظّم حساباتك من خلال توسيع الجدول.

الدرجة، X	$P(X)$	$X \cdot P(X)$
1	0.02	$1 \cdot 0.02 = 0.02$
2	0.16	$2 \cdot 0.16 = 0.32$
3	0.40	$3 \cdot 0.40 = 1.20$
4	0.32	$4 \cdot 0.32 = 1.28$
5	0.10	$5 \cdot 0.10 = 0.50$
		$\sum[X \cdot P(X)] = 3.3$

وبذلك، فإن وسط μ لهذا التوزيع الاحتمالي هو حوالي 3.3.

بما أن الدرجة 3 تشير إلى أن شرح المعلم ليس مبسطًا أو معقدًا، يشير الوسط 3.3 إلى وسط الدرجات، حيث يشعر الطلاب بأن شرح المعلم مناسبًا ولكنه يميل إلى كونه معقدًا بعض الشيء.

تمرين موجّه

3. **مبيعات السيارات** أوجد وسط التوزيع الاحتمالي الذي أنشأته في التدريب الموجّه 2 وفسّر معناه في سياق حالة المسألة.

نصيحة دراسية

قاعدة التقريب يتعيّن تقريب الوسط، وكذلك التباين والانحراف المعياري، والتي سنناقشها في الصفحة التالية، إلى عددٍ يزيد منزلةً عشريةً واحدةً عن القيمة الحقيقية التي يمكن أن يأخذها X.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ولا يمكن استخدام صيغة التباين المستخدمة في التوزيعات الخاصة بالمجتمع الإحصائي أيضًا لحساب التباين أو الانحراف المعياري لتوزيعٍ احتمالي، وذلك لأن قيمة N ستكون لا نهائية. وبدلاً من ذلك، تُستخدم الصيغ التالية لإيجاد انتشار توزيعٍ احتمالي.

المفهوم الأساسي التباين والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي

الشرح لإيجاد تباين التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X، اطرح وسط التوزيع الاحتمالي من كل قيمةٍ لـ X وربّع الفرق. ثمّ اضرب كلّ فرقٍ باحتماليته المقابلة لإيجاد مجموع نواتج الضرب. والانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين.

الرموز تباين المتغير العشوائي X معطى من $\sigma^2 = \sum[(X - \mu)^2 \cdot P(X)]$. والانحراف المعياري معطى من $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

نصيحة دراسية

الصيغة البديلة

ثمّة صيغةٌ رياضيةٌ بديلةٌ لإيجاد تباين التوزيع الاحتمالي من شأنها تبسيط حساب هذا الإحصاء، وهي $\sigma^2 = \sum[(X^2 \cdot P(X)] - \mu^2$.

مثال 4 التباين والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي

تقييم المعلم **أوجد التباين والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي الخاص بسؤال تقييم المعلم في المثال 2 مقرّبين إلى أقرب جزءٍ في مئة.**

الدرجة، X	$P(X)$
1	0.02
2	0.16
3	0.40
4	0.32
5	0.10

اطرح كل قيمة لـ X من الوسط الذي وجدته في المثال 3، والمساوي 3.32، وربّع الفرق. ثم اضرب كل فرقٍ باحتماليته المقابلة وأوجد مجموع نواتج الضرب.

الدرجة، X	$P(X)$	$(X - \mu)^2$	$(X - \mu)^2 \cdot P(X)$
1	0.02	$(1 - 3.32)^2 \approx 5.38$	$5.38 \cdot 0.02 \approx 0.1076$
2	0.16	$(2 - 3.32)^2 \approx 1.74$	$1.74 \cdot 0.16 \approx 0.2788$
3	0.40	$(3 - 3.32)^2 \approx 0.10$	$0.10 \cdot 0.40 \approx 0.0410$
4	0.32	$(4 - 3.32)^2 \approx 0.46$	$0.46 \cdot 0.32 \approx 0.1480$
5	0.10	$(5 - 3.32)^2 \approx 2.82$	$2.82 \cdot 0.10 \approx 0.2822$
			$\sum[(X - \mu)^2 \cdot P(X)] = 0.8576$

التباين σ^2 يساوي حوالي 0.86. والانحراف المعياري يساوي $\sqrt{0.8576} \approx 0.93$.

تمرين موجّه

4. **مبيعات السيارات** أوجد التباين والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي الذي أنشأته في التدريب الموجّه 2 مقربين إلى أقرب جزء من مئة.

قيمة التوقع $E(X)$ للمتغير العشوائي الخاص بالتوزيع الاحتمالي تساوي قيمة وسط المتغير العشوائي. أي، $E(X) = \mu = \sum[X \cdot P(X)]$.

مثال 5 إيجاد قيمة التوقع

جمع التبرعات **خلال حفل لجمع التبرعات، بيعت 500 بطاقة بقيمة 1 AED للبطاقة الواحدة وذلك للفوز بثلاث جوائز قيمتها 100 AED و50 AED و 10 AED. فما قيمة التوقع للربح الصافي إن اشتريت بطاقةً واحدة؟**

أنشئ توزيعًا احتماليًا لكلٍّ من الأرباح الصافية الممكنة. ثم أوجد قيمة التوقع.الربح الصافي لكل جائزة هو قيمة الجائزة مطروحاً منها ثمن البطاقات المشتراة.

الربح X	1 − AED 0 أو 1− AED	1 − AED 10 أو AED 9	1 − AED 50 أو AED 49	1 − AED 100 أو AED 99
الاحتمال، $P(X)$	$\frac{497}{500}$ أو 0.994	$\frac{1}{500}$ أو 0.002	$\frac{1}{500}$ أو 0.002	$\frac{1}{500}$ أو 0.002

$E(X) = \sum[X \cdot P(X)]$

$= (99 \cdot 0.002) + (49 \cdot 0.002) + (9 \cdot 0.002) + (-1 \cdot 0.994)$ أو حوالي AED 0.68−

تعني قيمة التوقع هذه أن متوسط خسارة شخص اشترى تذكرة هي AED 0.68.

انتبه!

إساءة فهم قيمة التوقع

إن قيمة التوقع، التي حسبت في المثال 5، *ليست* مؤشرًا لمقدار ما سيربحه شخصٌ ما أو يخسره. ففي المثال 5، يمكن أن يخسر شخصٌ مبلغ AED 1 فقط مقابل كل بطاقة يشتريها ويمكن أن يفوز بمبلغ AED 100 أو AED 50 أو AED 10 فقط.

McGraw-Hill Education مؤسسة للنشر © محفوظة لحقوق الطبع والتأليف

تمرين موجّه

5. مدينة الألعاب المائية تربح مدينةٌ للألعاب المائية مبلغ AED 350,000 حين يكون الطقس طبيعيًا وتخسر مبلغ AED 80,000 في الموسم عندما يفوق عدد الأيام ذات الطقس السيئ الأيام ذات الطقس الطبيعي. فإذا كان احتمال وجود عددٍ أكبر من الأيام سيئة الطقس من الأيام ذات الطقس الطبيعي هذا الموسم تساوي 35%. فأوجد الربح المتوقع لمدينة الألعاب المائية.

2 التوزيع ذو الحدّين

يمكن اختزال الكثير من تجارب الاحتمال إلى تجربةٍ ذات مخرجين فقط، وهما: النجاح أو الفشل. على سبيل المثال، يمكن تصنيف سؤالٍ له خمسة خياراتٍ للإجابة على أنه صحيحٌ أو خاطئٌ ببساطة، أو يمكن تصنيف علاجٍ طبيٍ على أنه فعال أو غير فعال. حيث اختُزلت هاتان التجربتان إلى تجربتين ذواتي حدّين.

المفهوم الأساسي التجربة ذات الحدّين

التجربة ذات الحدّين عبارة عن تجربة عشوائية تحقق مع الشروط التالية.

- تكرّر التجربة لعددٍ ثابتٍ من المحاولات المستقلة n.
- لكل محاولةٍ مخرجان محتملان اثنان فقط، وهما النجاح S أو الفشل F.
- يتساوى احتمال النجاح $P(S)$ أو p في كل محاولة. ويساوي احتمال الفشل $P(F)$ أو q القيمة $1 - p$.
- المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات النجاح في n التجارب.

مثال 6 من الحياة اليومية تحديد تجربة ذات حدّين

حدّد إن كانت كل تجربة تجربةً ذات حدّين أو إن كان يمكن اختزالها إلى تجربةٍ ذات حدّين. فإن كان يمكن تقديمها على أنها تجربةٌ ذات حدّين، فاذكر قيم n وp وq. ثمّ أدرج جميع القيم المحتمَلة للمتغير العشوائي. وإن لم تكن كذلك، فاشرح السبب.

a. تشير نتائج استقصاءٍ جرى على مدرسةٍ إلى أن 68% من الطلاب يملكون مشغل MP3. اختير ستّة طلابٍ عشوائيًا وسئلوا إن كانوا يملكون مشغل MP3. يمثّل المتغير العشوائي عدد الطلاب الذين يقولون إنّ لديهم مشغّل MP3.

تحقّق التجربة شروط التجربة ذات الحدّين.

- يمثّل كل طالبٍ مختارٍ محاولةً واحدة، واختيار كلٍ من الطلاب الستة مستقلٌ عن الآخرين.
- ثمّة مخرجان اثنان فقط، وهما: إما أن يمتلك الطالب مشغّل MP3 S أو ألاّ يمتلك مشغّل MP3 F.
- احتمال النجاح متساوٍ لكل طالبٍ مختار: $P(S) = 0.68$.

في هذه المسألة، يكون $n = 6$ و $p = P(S)$ أو 0.68. يساوي احتمال الفشل $q = 1 - p$، إذًا $q = 1 - 0.68$ أو 0.32. وتمثّل X عدد الطلاب الذين يملكون مشغّل MP3 من أصل أولئك الطلاب المختارين، إذًا $X =$ 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6.

b. سُحبتْ خمس بطاقاتٍ عشوائيًا من رزمةٍ من البطاقات من أجل توزيعها خلال إحدى الألعاب. يمثل المتغير العشوائي عدد أوراقٍ البستوني.

في هذه التجربة، تمثل كل ورقة لعبٍ محاولةً واحدة. احتمال سحب ورقة بستوني بالنسبة للورقة الأولى تساوي $\frac{13}{52}$ أو $\frac{1}{4}$. ولكن بما أنّه يُحتفظ بهذه البطاقة في حوزة اللاعب، فالمحاولات ليست مستقلة، احتمال النجاح في كل سحبٍ لن يكون هو نفسه. وعليه فلا يمكن اختزال هذه التجربة إلى تجربة ذات حدّين.

تمرين موجّه

6A. تشير نتائج استقصاءٍ إلى أن 61% من الطلاب أعجبهم الزيّ المدرسي الجديد وإلى أن 24% لم يعجبهم هذا الزي. اختير عشرون طالبًا عشوائيًا وسُئلوا إن كان يعجبهم الزيّ الجديد. يمثّل المتغير العشوائي عدد الطلاب الذين أفادوا بأن الزّي الجديد يعجبهم.

6B. تؤدي اختبارًا عبر التخمين العشوائي للإجابات عن 20 سؤال اختيارٍ من متعددٍ لكلٍ منها 4 خياراتٍ للإجابة، وأحدها صحيحٌ فقط. يمثل المتغير العشوائي هنا عدد الإجابات الصحيحة.

الربط بالحياة اليومية

لدى واحدٍ من أصل كل خمسة مراهقين بعمر 12 سنة وأكثر مشغّل MP3 محمول. بينما يمتلك أكثر من مراهقٍ واحدٍ من أصل كل عشرين مراهقًا أكثر من مشغّل.

المصدر: Digital Trends

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نصيحة دراسية

راجع ما تعلّمت عد إلى الدرس 2-10 لمراجعة عبارة التوسيع لذات الحدّين ونظرية ذات الحدّين.

يسمى توزيع نتائج تجربةٍ ذات حدّين وتوزيع احتمالاتها المقابلة **بالتوزيع ذي الحدّين**. ويمكن حساب الاحتمالات في هذا التوزيع باستخدام الصيغة التالية، والتي تمثّل الحدّ $p^x q^{n-x}$ في مفكوك المقدار ذي الحدّين لـ $(p+q)^n$.

المفهوم الأساسي قانون الاحتمالات ذات الحدّين

احتمال تحقيق X من حالات النجاح من أصل n محاولة مستقلة خلال تجربة ذات حدّين تساوي

$$P(X) = {}_nC_x p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x q^{n-x},$$

حيث p هي احتمال نجاح محاولةٍ واحدة و q احتمال فشلها.

لاحظ أن هذه الصيغة تمثل دالةً منفصلةً للمتغير العشوائي X، والمعروفة **بدالة توزيع احتمالي ذي حدّين**.

مثال 7 التوزيعات ذات الحدّين

ممارسة التمارين الرياضية **قال 35% من مراهقين خلال استقصاءٍ جرى مؤخرًا إنهم يمارسون التمارين الرياضية بصورةٍ دورية. ثم سُئل خمسة مراهقين اختيروا عشوائيًا إن كانوا يمارسون التمارين الرياضية على نحوٍ دوري. أنشئ توزيعًا احتماليًا للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد المراهقين الذين أجابوا بنعم ومثّله بيانيًا. ثم أوجد احتمال أن ثلاثةً من أولئك المراهقين على الأقل أجابوا بنعم.**

هذه تجربة ذات حدّين حيث فيها $n = 5$ و $p = 0.35$ و $q = 1 - 0.35$ أو 0.65. استخدم الآلة الحاسبة لحساب احتمال كل قيمة ممكنة لـ X باستخدام صيغة الاحتمالات ذات الحدّين.

$$P(0) = {}_5C_0 \cdot 0.35^0 \cdot 0.65^5 \approx 0.116$$

$$P(1) = {}_5C_1 \cdot 0.35^1 \cdot 0.65^4 \approx 0.312$$

$$P(2) = {}_5C_2 \cdot 0.35^2 \cdot 0.65^3 \approx 0.336$$

$$P(3) = {}_5C_3 \cdot 0.35^3 \cdot 0.65^2 \approx 0.181$$

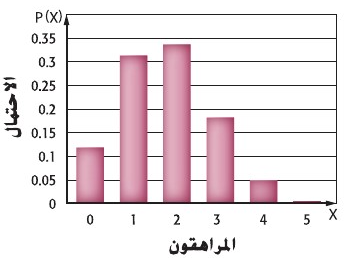
$$P(4) = {}_5C_4 \cdot 0.35^4 \cdot 0.65^1 \approx 0.049$$

$$P(5) = {}_5C_5 \cdot 0.35^5 \cdot 0.65^0 \approx 0.005$$

تلميح تقني

الاحتمالات ذات الحدّين لحساب كل احتمال لذات الحدّين على حاسبة التمثيل البياني، استخدم binompdf(*n, p, x*) ضمن القائمة DISTR.

تجد أدناه التوزيع الاحتمالي لـ X وتمثيله البياني.



X	$P(X)$
0	0.116
1	0.312
2	0.336
3	0.181
4	0.049
5	0.005

لإيجاد الاحتمال في أن تكون ثلاثة على الأقل من الطلاب يمارسون التمارين الرياضية بصورةٍ دورية، أوجد مجموع $P(3)$ و $P(4)$ و $P(5)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= P(3) + P(4) + P(5) \\ &= 0.181 + 0.049 + 0.005 \\ &= 0.235 \text{ or } 23.5\% \end{aligned}$$

احتمال ثلاثة على الأقل

$P(3) = 0.181$ و $P(4) = 0.049$ و $P(5) = 0.005$

بسّط.

تمرين موجّه

7. **الصفوف الدراسية** خلال السنة الدراسية الأخيرة في مدرسةٍ ثانويةٍ محددة، درس 48% من الطلاب لغةً أجنبية. وقد سُئل سبعة طلاب اختيروا عشوائيًا إذا ما درسوا لغةً أجنبيةً خلال السنة الأخيرة. أنشئ توزيعًا احتماليًا عشوائيًا للمتغير العشوائي X الذي يمثل الطلاب الذين أجابوا بنعم ومثّله بيانيًا. ثم أوجد احتمال أن يكون أقل من 4 من أولئك الطلاب قد أجابوا بنعم.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

استخدم الصيغ التالية لإيجاد الوسط والتباين والانحراف المعياري لتوزيعٍ ذي حدّين.

المفهوم الأساسي الوسط لتوزيعٍ ذي حدّين وانحرافه المعياري

ويعطى الوسط والتباين والانحراف المعياري لمتغيرٍ عشوائي X له توزيعٌ احتمالي ذو حدين بالصيغ التالية:

الوسط	$\mu = np$
التباين	$\sigma^2 = npq$
الانحراف المعياري	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ أو $\sqrt{npq}$

إن هذه الصيغ أبسط من الصيغ التي استخدمتها لإيجاد الوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيعات الاحتمالية ولكنها مكافئةٌ لها من الناحية الجبرية.

مثال 8 من الحياة اليومية الوسط والانحراف المعياري لتوزيعٍ ذي حدّين

تمارين **يعرض الجدول التوزيع ذي الحدّين الوارد في المثال 7. أوجد الوسط والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع. وفسّر الوسط في سياق حالة المسألة.**

X	0	1	2	3	4	5
$P(X)$	0.116	0.312	0.336	0.181	0.049	0.005

الطريقة 1 استخدم الصيغ التالية لإيجاد الوسط والتباين والانحراف المعياري لتوزيع احتمالي.

$$\mu = \sum[X \cdot P(X)]$$
$$= 0(0.116) + 1(0.312) + 2(0.336) + 3(0.181) + 4(0.049) + 5(0.005)$$
$$= 1.748$$

$$\sigma^2 = \sum[(X - \mu)^2 \cdot P(X)]$$
$$= (0 - 1.748)^2 \cdot 0.116 + (1 - 1.748)^2 \cdot 0.312 + (2 - 1.748)^2 \cdot 0.336 +$$
$$(3 - 1.748)^2 \cdot 0.181 + (4 - 1.748)^2 \cdot 0.049 + (5 - 1.748)^2 \cdot 0.005$$
$$\approx 1.1354$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$
$$= \sqrt{1.1354} \text{ أو حوالي } 1.0656$$

الطريقة 2 استخدم صيغ إيجاد الوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي ذي الحدّين. في هذه التجربة ذات الحدّين، إن $n = 5$ و $p = 0.35$ و $q = 0.65$.

$$\mu = np$$
$$= 5(0.35) \text{ أو } 1.75$$

$$\sigma^2 = npq$$
$$= 5(0.35)(0.65) \text{ أو } 1.1375$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$
$$= \sqrt{1.1375} \text{ أو حوالي } 1.0665$$

تعطي كلتا الطريقتين النتائج نفسها تقريبًا. ولذلك، يساوي وسط التوزيع 1.8 أو 2 تقريبًا. ما يعني أن 2 من أصل 5 طلاب في المتوسط سيقولون إنهم يمارسون الرياضة على نحوٍ دوري. ويساوي كل من التباين والانحراف المعياري للتوزيع 1.1 تقريبًا.

تمرين موجّه

8. الصفوف الدراسية أوجد وسط التوزيع الذي كوّنته في التمرين الموجّه 7 وتباينه وانحرافه المعياري. وفسّر الوسط في سياق حالة المسألة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

صنّف كل متغير عشوائي X على أنه *منفصل* أو *متصل*. اشرح استنتاجك. (المثال 1)

1. يمثل X عدد الرسائل النصية التي أرسلها طالب اختير عشوائيًا في يوم معين.
2. يمثل X الزمن الذي يستغرقه مجموعة من الطلاب تم اختيارهم عشوائيًا لإنهاء اختبار بدني.
3. يمثل X وزن كعكة شوكولاتة رقيقة اختيرت عشوائيًا في كافتيريا المدرسة.
4. يمثل X عدد الأقراص المدمجة التي يمتلكها طالب اختير عشوائيًا في يوم معيّن.
5. يمثل X عدد الأصوات التي تلقّاها مرشّح اختير عشوائيًا لانتخاباتٍ محددة.
6. يمثل X وزن مصارع اختير عشوائيًا في يوم معين.

أنشئ توزيعًا احتماليًا ومثّله بيانيًا لكل متغير عشوائي X. وأوجد الوسط وفسّره في سياق الحالة المعطاة. (الأمثلة 2–4)

7. **الموسيقى** سُئل طلابٌ عن عدد مشغّلات *MP3* التي يملكونها.

التكرار	المشغّلات، X
9	0
17	1
9	2
5	3
2	4

8. **الترفيه** كان هناك 20 مشاركًا في مسابقةٍ لتناول الشطائر ضمن فعاليات معرض المقاطعة.

التكرار	الشطائر المتناولة، X
1	1
5	2
9	3
3	4
2	5

9. **الإفطار** سُئلت عينةٌ من طلاب المرحلة الثانوية عن عدد الأيام التي تناولوا فيها طعام الإفطار خلال الأسبوع المنصرم.

التكرار	الأيام، X
5	0
3	1
17	2
27	3
6	4
19	5
18	6
65	7

10. **الصحة** سئل المرضى في عيادة أحد أطباء الأسنان عن عدد مرات تنظيفهم أسنانهم باستخدام الخيط في الأسبوع الواحد.

التكرار	مرات التنظيف بالخيط، X
9	1
15	2
5	3
2	4
1	5
0	6
1	7

11. **تأمين السيارات** ستدفع الشركة في وثيقة تأمين السيارة التي تتكلف AED 300 حوالي AED 25,000 عند تحطم السيارة. إذا كان احتمال تحطم السيارة هي $p = 0.0002$. فما قيمة توقع الربح (أو الخسارة) بالنسبة إلى الشركة في هذه الوثيقة التأمينية؟ (المثال 5)

12. **جمع التبرعات** تستضيف مدرسةٌ حفلاً سنويًا لجمع التبرعات. حيث تباع فيه بطاقاتٌ للمخبوزات ذات القيم المشار إليها أدناه. افترض أنّ 100 بطاقة بيعت للسحب على واحدةٍ من كلٍّ من الكعكات الأربع.

ما قيمة التوقع للربح الذي سيحققه أحد المشاركين إذا اشترى بطاقةً واحدةً بقيمة 1 AED؟ (مثال 5)

حدّد إن كانت كل تجربة تجربةً ذات حدّين أو إن كان يمكن اختزالها إلى تجربةٍ ذات حدّين. فإن كان يمكن تقديمها على أنها تجربةٌ ذات حدّين، فاذكر قيم n و p و q. ثمّ أدرج جميع القيم المحتملة للمتغير العشوائي. وإن لم تكن كذلك، فاشرح السبب. (مثال 6)

13. تجري استقصاءً على 25 طالبًا لمعرفة كم من هؤلاء الطلاب أعسر. يمثل المتغير العشوائي عدد الأشخاص العُسر.
14. تجري استقصاءً على 200 شخص لتعرف إن كانوا يتابعون أمسية يوم الإثنين الكروية. يمثل المتغير العشوائي عدد الأشخاص الذين يتابعون أمسية الإثنين الكروية.
15. ترمي حجر نردٍ أثناء لعب إحدى ألعاب النرد 10 مرات لتعرف إن كان يظهر العدد 5. يمثل المتغير العشوائي عدد مرات ظهور العدد 5.
16. عند إلقاء قطعة نقدٍ 20 مرة كي ترى كم مرةً تظهر الكتابة. يمثل المتغير العشوائي عدد مرات ظهور الكتابة.
17. تسأل 15 شخصًا عن أعمارهم. يمثل المتغير العشوائي أعمارهم.
18. تجري استقصاءً على 40 طالبًا كي تعرف من منهم قد نجح في اختبار القيادة. يمثل المتغير العشوائي نتائجهم في الاختبار.
19. تختار 10 بطاقاتٍ من رزمةٍ دون إعادة. يمثل المتغير العشوائي عدد أوراق "القلوب".

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

أنشئ توزيعاً ذا حدّين ومثّله بيانيًا لكل متغير عشوائي. وأوجد الوسط وفسّره في سياق الحالة المعطاة. ثم أوجد التباين والانحراف المعياري.
(المثالان 7 و 8)

20. خلال استقصاءٍ جرى مؤخرًا تبيّن أن 89% من المشاركين يطلبون إضافات على وجبات البيتزا. يسأل خمسة مراهقين اختيروا عشوائيًا إذا كانوا يطلبون إضافات.

21. في كاليفورنيا، 21% من الأيام مشمسة. فكّر في عدد الأيام المشمسة في فبراير.

22. يشير أحد استطلاعات الرأي إلى أن 26% من موظفي إحدى الشركات قد تصفحوا الإنترنت أثناء العمل. اختير عشرة زملاء في العمل وسئلوا إن كانوا قد تصفّحوا الإنترنت أثناء العمل.

23. أشارت مجلة إحدى المدارس الثانوية إلى أن 65% من الطلاب يرتدون أحزمة الأمان أثناء القيادة. يسأل ثمانية طلابٍ اختيروا عشوائيًا إن كانوا يرتدون أحزمة الأمان.

24. بحسب استقصاءٍ جرى مؤخرًا، فإن 41% من طلاب المدرسة الثانوية يملكون سيارة. يطلب من سبعة طلابٍ اختيروا عشوائيًا تحديد ما إن كانوا يملكون سيارة.

25. **برامج الألعاب** يوجد 16 رقمًا في عجلة الجوائز بأحد برامج الألعاب.

B أثناء أحد الأدوار، يتم التخمين ثم تدوير العجلة.

موضح الربح لتخمين قيمة 5 aed. إذا خمّن اللاعب 5 aed، فأوجد قيمة توقع كل تخمين.

التخمين	الربح	التخمين	الربح
زوجي أو فردي	aed 5	1	aed 50
أحمر أو أخضر	aed 10	16	aed 50
1-4	aed 15	زوجي وأحمر	aed 25
5-8	aed 15	فردي وأخضر	aed 25
9-12	aed 15	1 أو 16	aed 30

a. أخضر
b. زوجي وأحمر
c. فردي
d. 1 أو 16
e. 1

26. **العمل التطوعي** خلال استقصاءٍ جرى مؤخرًا، أشارت نسبة 62% من المشاركين إلى أنهم خصصوا بعض الوقت للتطوع لصالح جمعيةٍ خيريةٍ خلال العام الأخير. فإذا اختيرت عينةٌ عشوائيةٌ من 10 إماراتيين، فأوجد كلاً من الاحتمالات التالية.

a. أن يكون 6 أشخاصٍ بالضبط قد خصصوا وقتًا للجمعية الخيرية.
b. أن يكون 5 أشخاصٍ على الأقل قد خصصوا وقتًا للجمعية الخيرية.
b. أن يكون 3 أشخاصٍ على الأكثر قد خصصوا وقتًا للجمعية الخيرية.
d. أن يكون أكثر من 8 أشخاصٍ قد خصصوا وقتًا للجمعية الخيرية.

27. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف شكل توزيعٍ ذي حدّين.

a. بيانيًا أنشئ التوزيع ذا الحدّين الذي يقابل كلاً من التجارب التالية ومثّله بيانيًا.

i. $n = 6, p = 0.5$ *ii* $n = 6, p = 0.3$
iii. $n = 6, p = 0.7$ *iv.* $n = 8, p = 0.5$
v. $n = 10, p = 0.5$

b. لفظيًا صف شكل كل من التوزيعات التي أوجدتها في الجزء **a**.

c. تحليليًا خمّن شكل توزيعٍ له كلٌ من احتمالات النجاح التالية: $p < 0.5$ و $p = 0.5$ و $p > 0.5$.

d. تحليليًا ما الذي يحدث لانتشار توزيعٍ ذي حدّين مع زيادة n ؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

28. **البرهان** استخدم التوزيع أدناه لتبرهن أن $\mu = np$ و $\sigma^2 = npq$ في توزيعٍ عشوائي. علمًا أن $\mu = \sum[X \cdot P(X)]$ و $\sigma^2 = \sum[(X - \mu)^2 \cdot P(X)]$ لتوزيع احتمالي.

X	$P(X)$
0	$1 - p$
1	p

29. **التبرير** افترض أن قطعةً نقديةً ترمى عشر مراتٍ وتستقرّ على الصورة في كل مرة. فهل سيزداد احتمال استقرار القطعة النقدية على الكتابة خلال الرمية التالية؟ اشرح استنتاجك.

30. **مسألة غير محددة الإجابة** يسمّى التوزيع الاحتمالي الذي تظهر فيه جميع قيم المتغير العشوائي باحتمالٍ متساوٍ بالتوزيع الاحتمالي المنتظم. صف مثالاً عن مسألةٍ تعطي توزيعًا منتظمًا. ثم أوجد الاحتمالات النظرية التي ستنشأ عن هذه التجربة. استخدم جدولاً وتمثيلاً بيانيًا للتوزيع.

التبرير **حدد ما إذا كانت كل من العبارات التالية صحيحةً أم خاطئة. واشرح استنتاجك**

31. يتم تحديد الاحتمالات المقترنة بتدوير حَجَري نرد في ألعاب اللوحة نظريًا.

32. وسط متغيرٍ عشوائي يساوي دائمًا مخرجاً محتملاً للتجربة.

33 **التحدي** فكّر في توزيع عشوائي فيه $n = 50$ و $\sigma = 1.54$. فما وسط التوزيع؟ (تلميح: p أقرب إلى 0 من 1.)

34. **الكتابة في الرياضيات** صف طريقةً أخرى يمكنك من خلالها إيجاد احتمال أن يكون ثلاثة مراهقين على الأقل يتدربون بصفة دورية أو $P(X \geq 3)$ من المثال 7. وأعطِ مثالاً عن حالةٍ يكون فيها من الأسرع استخدام هذه الطريقة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة شاملة

35. الأعمال الفنية يعرض الجدول أسعار لوحاتٍ تباع خلال مزادٍ فني. (الدرس 1-10)

أسعار الأعمال الفنية (aed)					
1800	600	750	600	600	1800
1350	450	300	1200	750	600
750	450	2700	600	750	300
750	2300	600	450	2100	1200

b. أنشئ مدرجاً إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

b. صِف تمركز البيانات وانتشارها باستخدام إما الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك.

استخدم المجموع الجزئي الخامس للمتسلسلة الأسيّة لتقريب كل قيمة إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

36. $e^{0.2}$

37. $e^{-0.4}$

38. $e^{-0.75}$

أوجد ناتج الضرب النقطي لكل من u و v. ثم حدد ما إذا كانت u و v متعامدين.

39. $\mathbf{u} = \langle 2, 9, -2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 7, 6\rangle$

40. $\mathbf{u} = 3i, 5j + 6k$
$\mathbf{v} = -7i + 8j + 9k$

41. $\mathbf{u} = \langle 8, -2, -2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -6, 6, -10\rangle$

مثّل بيانيًا القطع الزائد الممثل بكل معادلة.

42. $\frac{(y+6)^2}{36} - \frac{(x-1)^2}{24} = 1$

43. $\frac{(y+5)^2}{49} - \frac{(x-6)^2}{20} = 1$

44. $\frac{(y+3)^2}{9} - \frac{(x+5)^2}{4} = 1$

أوجد AB و BA، إن أمكن.

45. $A = [2, -1], B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

46. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

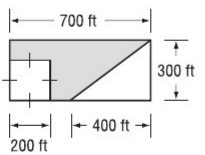
47. $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 1 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

48. مراجعة أوجد مجموع $\ldots + 4 + 8 + 16$

A 28
B 32
C 48
D 64

49. SAT/ACT أوجد مساحة كل منطقة مظللة.



A 90,000 m^2
B 110,000 m^2
C 130,000 m^2
D 150,000 m^2
E 210,000 m^2

50. في استطلاع حديث، أخبر 48% من المشاركين بأنهم تسوقوا عبر الإنترنت لاقتناء هدية عيد واحدة على الأقل. إذا تم اختيار عينة عشوائية من 10 مشاركين، فما احتمال كون 7 على الأقل قد تسوقوا عبر الإنترنت لاقتناء هدية؟

F 3.4%
G 4.8%
H 10.0%
J 14.1%

51. مراجعة أيّ من التوزيعات الآتية يوضح أفضل وصف للبيانات؟

{14, 15, 11, 13, 13, 14, 15, 14, 12, 13, 14, 15}

F التوزيع الملتو نحو اليسار
G التوزيع الملتو نحو اليمين
H التوزيع الطبيعي
J التوزيع ذو الحدّين

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-3 التوزيع الطبيعي

السابق
- لقد حللت التوزيعات الاحتمالية لمتغيرات ثابتة منفصلة.

الحالي
1. إيجاد المساحة أسفل منحنيات التوزيع الطبيعية.
2. إيجاد الاحتمالات للتوزيعات الطبيعية. وإيجاد قيم البيانات للاحتمالات المعطاة.

لماذا؟
- في العام الماضي، ما يقارب من 107 ملايين شخص تم أخذ عينة منهم من سن 20 عامًا وأكبر وكان مستوى الكوليسترول الكلي في الدم 200 mg/dl أو أعلى. يَستخدم الأطباء المتغيرات من هذا النوع للمقارنة بين مستويات الكوليسترول لدى المرضى بمعدلات الكوليسترول *الطبيعية*. في هذا الدرس، ستحدد احتمال مستوى الكوليسترول لدى أحد المرضى الذي تم اختياره عشوائيًا.

المفردات الجديدة
- **توزيع طبيعي** normal distribution
- **قاعدة تجريبية** empirical rule
- **قيمة z** z-value
- **توزيع طبيعي معياري** standard normal distribution

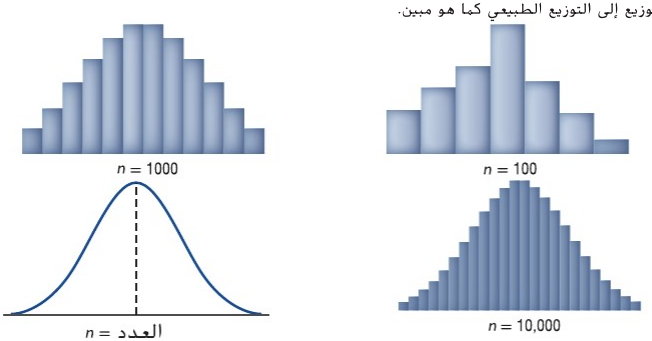
1 التوزيع الطبيعي

يسمى التوزيع الاحتمالي لمتغير متصل *بالتوزيع الاحتمالي المتصل*. يسمى التوزيع الاحتمالي المتصل الأكثر استخدامًا **بالتوزيع الطبيعي**. تكون خواص التوزيع الطبيعي كما يلي.

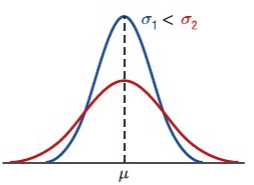
المفهوم الأساسي خواص التوزيع الطبيعي

- يتسم التمثيل البياني للمنحنى بأنه متصل ويشبه شكل الجرس ومتماثل بالنسبة للوسط.
- يتسم الوسط والوسيط والمنوال بالمساواة والمركزية.
- يُعد المنحنى متصلاً.
- يقترب المنحنى من المحور الأفقي x ولكنه لا يتلامس معه أبدًا.
- المساحة الإجمالية تحت المنحنى تساوي 1 أو 100%.

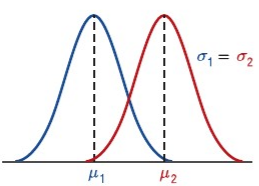
تأمَّل توزيعًا احتماليًا متصلاً لعدد المرات التي ركضت فيها عينة عشوائية من 100 رياضي لمسافة 400 m. من خلال زيادة حجم العينة يقل عرض الفئة، ويصبح التوزيع أكثر تماثلاً. إذا كان من الممكن جعل العينة المجتمع الإحصائي بأكمله، فسيصل التوزيع إلى التوزيع الطبيعي كما هو مبين.



بالنسبة إلى المتغير العشوائي الموزّع طبيعيًا، فإن شكل وموقع المنحنى الموزّع طبيعيًا يعتمد على الوسط والانحراف المعياري. على سبيل المثال، في الشكل 10.3.1، يمكنك رؤية أن نتائج الانحراف المعياري تزداد في المنحنيات الأفقية. والتغيير في الوسط كما هو مبين في الشكل 10.3.2، تنتج عنه إزاحة أفقية للمنحنى.



الشكل 10.3.1



الشكل 10.3.2

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

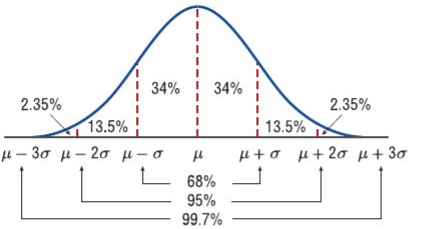
نصيحة دراسية

قاعدة تجريبية تُعرف القاعدة التجريبية أيضًا باسم *القاعدة 68-95-99.7*.

تمثل المنطقة الواقعة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي بين قيمتين للبيانات النسبة المئوية لم البيانات الواقعة داخل هذه الفترة. يمكن استخدام **القاعدة التجريبية** لوصف المساحة تحت المنحنى الطبيعي وضمن فترات تبعد انحرافًا معياريًا واحدًا أو اثنين أو ثلاثة عن الوسط.

المفهوم الأساسي القاعدة التجريبية

في التوزيع الطبيعي ذي الوسط μ والانحراف المعياري σ، ينطبق ما يلي:



- تقع تقريبًا 68% من قيم البيانات فيما بين $\mu - \sigma$ و $\mu + \sigma$.
- تقع 95% من البيانات بين $\mu - 2\sigma$ و $\mu + 2\sigma$.
- تقع 99.7% من قيم البيانات بين $\mu - 3\sigma$ و $\mu + 3\sigma$.

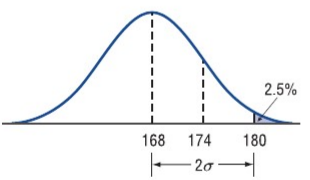
يمكنك حلّ مسائل تتضمن توزيعاتٍ طبيعيةً تقريبًا باستخدام القاعدة التجريبية.

مثال 1 استخدام القاعدة التجريبية

الارتفاع يتوزع طول 880 طالبًا بمدرسة الشرق الثانوية توزيعًا طبيعيًا بوسط 168 cm وانحراف معياري 6 cm.

a. كم عدد الطلاب الذين يزيد طولهم عن 180 cm تقريبًا؟

لتحديد عدد الطلاب الذين يزيد طولهم عن 183 cm.
أوجد المنطقة المقابلة تحت المنحنى.

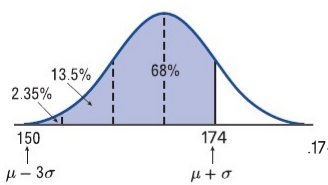


يمكن أن ترى في التمثيل البياني الموضح أن 180 تبعد مسافة 2σ عن الوسط. ونظرًا إلى أن 95% من قيم البيانات تقع على بعد انحرافين معياريين عن الوسط، فإن كل ذيلٍ يمثل 2.5% من البيانات. وتساوي المساحة على الجهة اليمنى من العدد 180 النسبة 2.5% من 880 أو 22.

وهكذا، فإن حوالي 22 من الطلاب أطول من 180 cm.

b. ما النسبة المئوية للطلاب الذين يتراوح طولهم بين 150 cm و 174 cm؟

تمثّل النسبة المئوية للطلاب الذين تتراوح أطوالهم بين 150 cm و 174 cm بالمساحة المظللة على الجهة اليمنى في الشكل، وهي تقع بين $\mu - 3\sigma$ و $\mu + \sigma$. تساوي المساحة الكلية تحت المنحنى البياني بين 150 و 174 مجموع مساحات كلٍّ من المناطق.



2%.35+ 13%.5+ 68%=83%.85

ولذلك، 84% من الطلاب تقريبًا تتراوح أطوالهم بين 150 cm و 174 cm.

نصيحة دراسية

كل ما يقع تحت المنحنى لاحظ أن في المثال 1a، استخدمنا 2.5%. بينما في المثال 1b، استخدمنا 2.35%. عندما يُطلب منك إيجاد قيمة *أكبر من* أو *أقل من*، فسوف تحتاج إلى كل ما هو أسفل هذا الجانب من التمثيل البياني.

تمرين موجّه

1. **التصنيع** توزّع آلةٌ لتعبئة قوارير الماء كمياتٍ مختلفةً قليلاً من الماء في كل قارورة. افترض أن حجم الماء في 120 قارورةً له توزيعٌ طبيعيّ وسطه 1.1 l وانحرافٌ معياريّ يساوي 0.02 l.
   - **A.** ما العدد التقريبي لقوارير الماء التي تَملأ بكميةٍ أقل من 1.06 l؟
   - **B.** ما النسبة المئوية من القوارير التي تضم ما بين 1.08 و 1.14 l؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

في حين يمكن استخدام القاعدة التجريبية في تحليل التوزيع الطبيعي، تكون فائدتها الوحيدة عند تقييم قيم محددة، مثل $\mu + \sigma$. يمكن تحويل المتغير الذي يتم توزيعه طبيعيًا إلى قيمة معيارية أو قيمة z، حيث يمكن استخدامه في تحليل أي مدى من القيم في التوزيع الطبيعي. يُعرف هذا التحويل *بالمعيارية*. تُعرف **قيمة z** أيضًا بالدرجة z وإحصاء اختبار z. وتمثل عدد الانحرافات المعيارية التي تشكلها قيمة بيانات معينة من الوسط.

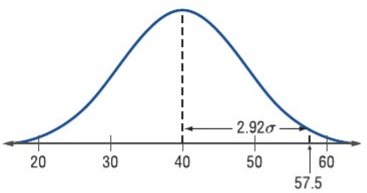
المفهوم الأساسي صيغة قيم z

قيمة z الخاصة بقيمة البيانات في مجموعة بيانات محددة من خلال $z = \frac{X - \mu}{\sigma}$، حيث X هي قيم البيانات، و μ هو الوسط، و σ هو الانحراف المعياري.

نصيحة دراسية

قيم z الموجبة والسالبة إذا كانت قيمة البيانات أقل من الوسط، فقيمة z المطابقة تكون سالبة. وبالعكس، إذا كانت قيمة البيانات أكبر من الوسط، تكون القيمة z موجبة.

يمكنك استخدام قيم z لتحديد موقع *أي* قيمة بيانات داخل مجموعة بيانات. على سبيل المثال، لاحظ التوزيع في $\mu = 40$ و $\sigma = 6$. تقع قيمة البيانات 57.5 بالقرب من الانحراف المعياري 2.92 بعيدًا عن الوسط، كما هو مبيّن. لذلك، فإن هذا التوزيع، يرتبط $X = 57.5$ بقيمة z تساوي 2.92.



مثال 2 إيجاد قيم z

نصيحة دراسية

الموقع النسبي يمكن استخدام قيم z مثل النسب المئوية لمقارنة المواقع النسبية لقيمتين في مجموعتي بيانات مختلفتين.

أوجد كلاً مما يلي.

a. z إذا كان $X = 24$ و $\mu = 29$ و $\sigma = 4.2$

$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$	صيغة قيم z
$= \frac{24 - 29}{4.2}$	$\sigma = 4.2$ و $\mu = 29$ و $X = 24$
≈ -1.19	بسّط.

قيمة z التي تتطابق مع $X = 24$ هي -1.19. وبالتالي، فإن 24 أقل بمقدار 1.19 انحراف معياري من وسط التوزيع.

b. X إذا كان $z = -1.73$ و $\mu = 48$ و $\sigma = 2.3$

$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$	صيغة قيم z
$-1.73 = \frac{X - 48}{2.3}$	$\mu = 48$ و $\sigma = 2.3$ و $z = -1.73$
$-3.979 = X - 48$	بضرب كل طرف في 2.3.
$44.021 = X$	بجمع 48 إلى كل طرف.

تتطابق قيمة z البالغة -1.73 مع قيمة بيانات تبلغ حوالي 44 في التوزيع.

تمرين موجّه

2A. z إذا كان $X = 32$ و $\mu = 28$ و $\sigma = 1.7$

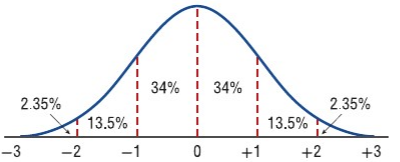
2B. X إذا كان $z = 2.15$ و $\mu = 39$ و $\sigma = 0.4$

يحتوي كل متغير عشوائي تم توزيعه طبيعيًا على وسط وانحراف معياري فريدين، وهو ما يؤثر على شكل وموقع المنحنى. ونتيجة ذلك، يوجد العديد من توزيعات الاحتمالات الطبيعية اللانهائية. ولحسن الحظ، يمكن ربطهم جميعًا بتوزيع واحد يسمى التوزيع الطبيعي *المعياري*. **التوزيع الطبيعي المعياري** هو توزيع طبيعي لقيم z بمتوسط 0 وانحراف معياري 1.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تتلخص خواص التوزيع الطبيعي المعياري فيما يلي.

المفهوم الأساسي خواص التوزيع الطبيعي المعياري



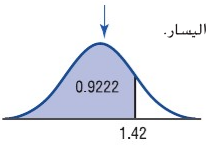
- المساحة الإجمالية تحت المنحنى تساوي 1 أو 100%.
- تقع المنطقة كلها بين $z = -3$ و $z = 3$.
- التوزيع متماثل.
- الوسط يساوي 0 والانحراف المعياري يساوي 1.
- يقترب المنحنى من المحور الأفقي x ولكنه لا يتلامس معه أبدًا.

يمكنك حل مسائل التوزيع الطبيعي بإيجاد قيمة z التي تتطابق مع القيمة المعطاة X. ثم إيجاد المنطقة القريبة أسفل منحنى المعيار الطبيعي.

يمكن إيجاد المنطقة المطابقة باستخدام جدول قيم z التي تظهر على يسار قيمة z المعطاة. على سبيل المثال، المنطقة تحت المنحنى على يسار قيمة z البالغة 1.42 هي 0.9222. كما هو مبين.

z	0.00	0.01	0.02
0.0	.5000	.5040	.5080
.	.	.	.
.	.	.	.
1.4	.9192	.9207	.9222

يمكنك إيجاد مساحة المنطقة تحت المنحنى التي تتطابق مع أي قيمة z باستخدام حاسبة التمثيل البياني أو جداول التوزيع الطبيعي المعياري كما في الشكل على اليسار.



ملاحظة: يمكنك استخدام جداول التوزيع الطبيعي المعياري الملحقة في نهاية الكتاب لإيجاد قيمة مساحة المنطقة المقابلة لقيمة معينة لـ z أو لإيجاد قيمة z المقابلة لمساحة معطاة.

استخدام جدول التوزيع لإيجاد المساحة المقابلة لقيمة z=1.42 الموجبة

- نُحدد جدول قيم z الموجبة.
- نُحدد في العمود الأول القيمة 1.4 ونُحدد في الصف الأول القيمة 0.02.
- المساحة المقابلة لقيمة $z = 1.42$ هي القيمة الواقعة في تقاطع الصف والعمود المُحددين أي 0.9222.

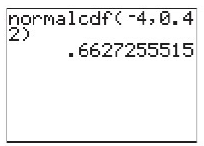
مثال 3 استخدام التوزيع المعياري

الاتصالات بلغ متوسط المكالمات التي يستقبلها مندوب خدمة العملاء كل يوم خلال شهر 30 يومًا 105 مكالمات بالانحراف المعياري 12. أوجد عدد الأيام التي تقل المكالمات فيها عن 110 مكالمات. افترض أن عدد المكالمات يتم توزيعه طبيعيًا.

صيغة قيم z $\quad z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

$X = 110$ و $\mu = 105$ و $\sigma = 12$ $\quad = \frac{110 - 105}{12}$ أو حوالي 0.42

على الرغم من أن التوزيع الطبيعي المعياري يتسع إلى ما لا نهاية بالموجب أو السالب، عندما تجد المنطقة أقل من أو أكبر من القيمة المعطاة، يمكنك استخدام قيمة أقل تبلغ -4 وقيمة أكبر تبلغ 4.



في هذه الحالة، أدخل قيمة z أقل تبلغ -4 وقيمة z أعلى تبلغ 0.42. المنطقة الناتجة هي 0.66. لأنه يوجد 30 يومًا في الشهر، يوجد عدد مكالمات أقل من 110 خلال 30 • 0.66 أو 19.8 يومًا.

وبالتالي، يوجد تقريبًا 20 يومًا تقل المكالمات فيها عن 110 مكالمات.

تلميح تقني

المنطقة تحت المنحنى الطبيعي

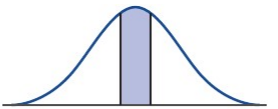
يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد المنطقة تحت المنحنى الطبيعي المعياري الذي يتطابق مع أي زوج من قيم z بتحديد 2nd [DISTR] و normalcdf (قيمة z الأدنى، قيمة z الأعلى).

تمرين موجّه

3. كرة السلة بلغ متوسط عدد النقاط التي أحرزها أحد فرق كرة السلة خلال موسم واحد 63 مع انحراف معياري 18. إذا كانت هناك 15 مباراة خلال الموسم، فأوجد النسبة المئوية للمباريات التي أحرز فيها الفريق أكثر من 70 نقطة. افترض أن توزيع عدد النقاط كان طبيعيًا. **35%**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

في المثال 3، يمكنك إيجاد المنطقة تحت المنحنى الطبيعي التي تتطابق مع قيمة z. يمكنك أيضًا إيجاد قيم z التي تتطابق مع مناطق معينة. على سبيل المثال، يمكنك إيجاد قيمة z التي تتطابق مع منطقة تجميعية بنسبة 1% أو 20% أو 99%. يمكنك أيضًا إيجاد فترات قيم z التي تحتوي أو تكون بين نسبة مئوية معينة من البيانات.

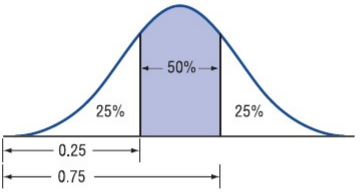


مثال 4 إيجاد قيم z المقابلة لمساحة منطقة معينة

أوجد فترة قيم z المرتبطة بكل منطقة.

a. النسبة الوسطى 50% من البيانات

تتطابق النسبة الوسطى 50% من البيانات مع البيانات الواقعة بين 25% و 75% من التوزيع، أو 0.25 و 0.75. كما هو مبيّن.



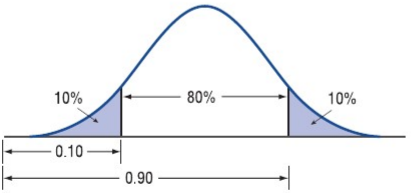
لإيجاد درجات z المطابقة لكل من 0.25 و 0.75، حدّد [DISTR] 2nd لعرض قائمة DISTR على حاسبة التمثيل البياني. حدد invNorm (وأدخل 0.25). كرر العملية لإيجاد القيمة المطابقة لـ 0.75. كما هو مبيّن على اليسار، قيمة z المطابقة لـ 0.25 هي 0.67 والقيمة z المطابقة لـ 0.75 هي 0.67.

```
invNorm(0.25)
    -.6744897495
invNorm(0.75)
     .6744897495
```

وبالتالي، الفترة التي تمثل النسبة الوسطى 50% من البيانات هي $-0.67 < z < 0.67$.

b. النسبة الخارجية 20% من البيانات

تمثل النسبة الخارجية 20% من البيانات القمة 10% والقاع 10% من التوزيع أو 0.1 و 0.9، كما هو مبيّن.



لإيجاد قيمة z المطابقة لـ 0.10، أدخل 0.10 في حاسبة التمثيل البياني أسفل invNorm (وكرر هذه العملية لإيجاد 0.90). كما هو مبيّن، قيمة z المطابقة لـ 0.10 هي -1.28 وقيمة z المطابقة لـ 0.90 هي 1.28.

```
invNorm(0.10)
    -1.281551567
invNorm(0.90)
     1.281551567
```

وبالتالي، الفترة التي تمثل النسبة الخارجية 20% من البيانات هي $z > 1.28$ أو $z < -1.28$.

تمرين موجّه

4A. نسبة 25% الوسطى من البيانات

4B. النسبة الخارجية 60% من البيانات

نصيحة دراسية

التماثل التوزيع الطبيعي متماثل، ولذلك عندما يطلب منك تحديد مجموعة النسبة الوسطى أو الخارجية للبيانات، فإن قيم z ستكون متقابلة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 الاحتمال والتوزيع الطبيعي

لقد رأيت كيف أن المنطقة تحت المنحنى الطبيعي تتطابق مع تناسب قيم البيانات في إحدى الفترات. تتطابق المنطقة أيضًا مع احتمال وقوع قِيم البيانات داخل فترة معينة. إذا تم اختيار قيمة z عشوائيًا، فاحتمال اختيار قيمة بين 0 و 1 ستكون مكافئة للمنطقة تحت المنحنى بين 0 و 1.00، وهي 0.3413. وبالتالي، فاحتمال اختيار قيمة بين 0 و 1 ستكون حوالي 34%.

مثال 5 إيجاد الاحتمالات

الأرصاد الجوية يتم توزيع درجات الحرارة لأحد الشهور في إحدى مدن دولة الإمارات حيث $\mu = 81°$ و$\sigma = 6°$. أوجد كل احتمال. واستخدم حاسبة التمثيل البياني لرسم المنطقة المطابقة تحت المنحنى.

a. $P(70° < X < 90°)$

السؤال هو طلب معرفة النسبة المئوية لدرجات الحرارة بين 70° و 90°. أولاً، أوجد قيم z المطابقة لكل من $X = 70$ و $X = 90$.

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$ صيغة قيم z

$$= \frac{70 - 81}{6}$$ $\sigma = 6$ و $\mu = 81$ و $X = 70$

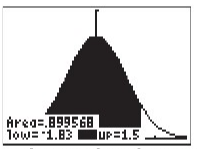
$$\approx -1.83$$ بسّط.

استخدم 90 لإيجاد قيمة z الأخرى.

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$ صيغة قيم z

$$= \frac{90 - 81}{6}$$ $\sigma = 6$ و $\mu = 81$ و $X = 90$

$$\approx 1.5$$ بسّط.



[−4, 4] scl: 1 by [0, 0.5] scl: 0.125

يمكنك استخدام حاسبة للتمثيل البياني لعرض المساحة المقابلة لأي قيم z من خلال اختيار [DISTR] 2nd. وبعد ذلك من القائمة DRAW، اختر ShadeNorm (*lower z value, upper z value*). تساوي المساحة الواقعة بين $z = -1.83$ و $z = 1.5$ القيمة 0.899568 كما هو موضح.

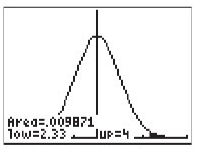
ولذلك، فإن 90% تقريبًا من درجات الحرارة كانت تقع بين 70 و 90.

b. $P(X \geq 95°)$

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$ صيغة قيم z

$$= \frac{95 - 81}{6}$$ $\sigma = 6$ و $\mu = 81$ و $X = 95$

$$\approx 2.33$$ بسّط.



[−4, 4] scl: 1 by [0, 0.5] scl: 0.125

باستخدام حاسبة التمثيل البياني، يمكنك إيجاد أن المنطقة الواقعة بين $z = 2.33$ و $z = 4$ تساوي تقريبًا 0.0099.

لذلك، فإن احتمال أن تساوي درجة حرارة مختارة عشوائيًا على الأقل 95° هي حوالي 0.1%.

تمرين موجّه

5. الاختبار توزع درجات اختبار معياري توزيعًا طبيعيًا فيه $\mu = 72$ و $\sigma = 11$. أوجد كل احتمال مما يلي واستخدم حاسبة للتمثيل البياني لتمثيل المساحة المقابلة تحت المنحنى.

A. $P(X < 89)$

B. $P(65 < X < 85)$

نصيحة دراسية

النسبة المئوية والتناسب والاحتمالات والمساحة حين تطلب منا مسألة إيجاد نسبةٍ مئويةٍ أو تناسبٍ أو احتمال، فإنها تطلب منا إيجاد القيمة نفسها، وهي المساحة المقابلة تحت المنحنى الطبيعي.

نصيحة دراسية

عوامل الاتصال في التوزيع المتصل، ليس هناك فرقٌ بين $P(x \geq c)$ و $P(x > c)$ لأن احتمال أن تساوي X القيمة c تساوي الصفر.

استخدام الجدول لإيجاد المساحة الواقعة بين $z=-1.83$ و $z=1.5$

- من جدول قيم z الموجبة نُحدد في العمود الأول القيمة 1.5 وفي الصف الأول القيمة 0.00. ثم نُحدد قيمة المساحة الواقعة في تقاطع الصف والعمود فتكون 0.9332.
- من جدول قيم z السالبة نُحدد في العمود الأول القيمة −1.8 وفي الصف الأول القيمة 0.03. ثم نُحدد قيمة المساحة الواقعة في تقاطع الصف والعمود فتكون 0.0336.
- المساحة المطلوبة تساوي المساحة على يسار قيمة z الكبرى ناقص المساحة على يسار قيمة z الصغرى أي:

0.9332 − 0.0336 = 0.8996

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

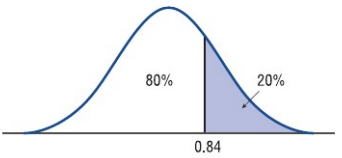
يمكنك إيجاد فترات محددةٍ للبيانات المقابلة لاحتمالات أو نسبٍ مئويةٍ معطاةٍ باستخدام التوزيع الطبيعي المعياري.

مثال 6 من الحياة اليومية إيجاد فترات البيانات

الدراسة الجامعية تتوزع درجات اختبار قبول الجامعة في قسم الرياضيات توزيعًا طبيعيًا حيث $\mu = 65$ و $\sigma = 8$.

a. إذا أرادت أسماء أن تكون ضمن الـ 20% الأوائل، فما الدرجة التي يجب عليها تحقيقها؟

لإيجاد الدرجات الـ 20% العليا في الامتحان، يجب عليك إيجاد درجة الامتحان X التي تفصل النسبة 20% العليا من المساحة الواقعة تحت المنحنى الطبيعي. كما هو موضح. وترتبط نسبة الـ 20% العليا بـ $1 - 0.2$ أو 0.8. باستخدام حاسبة التمثيل البياني، يمكنك إيجاد أن قيمة z المقابلة تساوي 0.84.



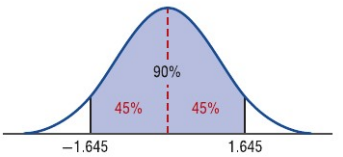
الآن، استخدم صيغة قيمة z لتعداد إحصائي لإيجاد درجة الامتحان المقابلة.

$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$	صيغة قيم z
$0.84 = \frac{X - 65}{8}$	$z = 0.84$ و $\sigma = 8$ و $\mu = 65$
$6.72 = X - 65$	بضرب كل طرف في 8.
$71.72 = X$	بجمع 65 إلى كل طرف.

تحتاج أسماء إلى تحقيق 72 درجة على الأقل لتكون من بين الطلاب الـ 20% الأوائل.

b. تتوقع أسماء أن تحصل على درجة ضمن النسبة الوسطى 90% في التوزيع. فما مدى الدرجات الذي يقع ضمن هذه الفئة؟

تُمثّل النسبة الوسطى 90% من درجات الامتحان 45% على كلٍ من طرفي الوسط. ولذلك فهي تقابل فترة المساحة الممتدة من 0.05 إلى 0.95. باستخدام حاسبة التمثيل البياني، فإن قيمتي z المقابلتين لكل من 0.05 و 0.95 هما 1.645− و 1.645 على التوالي.



استخدم قيم z لإيجاد كل قيمة لـ X.

$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$	صيغة قيم	$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$
$-1.645 = \frac{X - 65}{8}$	$\sigma = 8$ و $\mu = 65$	$1.645 = \frac{X - 65}{8}$
$-13.16 = X - 65$	أوجد حاصل الضرب.	$13.16 = X - 65$
$51.84 = X$	بسّط.	$78.16 = X$

وبالتالي، تتوقع أسماء أن تكون درجتها بين 52 و 78.

الربط بالحياة اليومية

خلال دراسةٍ جرت حديثًا، كان متوسط الدرجات في امتحان SAT الوطني 502 في القراءة النقدية و 515 في الرياضيات و 494 في الكتابة. وكان متوسط الدرجات في امتحان ACT في العام نفسه 21.1.

المصدر: صحيفة *USA Today*

تمرين موجّه

6. البحث يختار باحث خلال إحدى الدراسات الطبية مجموعةً للدراسة وسط وزنها 86 كيلوجرامًا وانحرافها المعياري 5.5 kg. افترض أن الأوزان موزعةٌ طبيعيًا.

A. إذا كانت الدراسة ستركز بصورةٍ رئيسةٍ على المشاركين الذين تقع أوزانهم في النسبة الوسطى 80% من مجموعة البيانات، فما مدى الأوزان الذي سيتضمنه ذلك؟

B. إذا تم الاتصال بالمشاركين الذين تقع أوزانهم ضمن النسبة الخارجية 5% من التوزيع بعد أسبوعين من الدراسة، فما مدى أوزان الأشخاص الذين سيجري الاتصال بهم؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1. **التلوث الضوضائي** خلال دراسةٍ على التلوث الضوضائي، قاس باحثون مستوى الصوت بالديسبل في شارعٍ مكتظٍ ضمن إحدى المدن لمدة 30 يومًا. وتبعًا لهذه الدراسة، كان مستوى الضجيج المتوسط 82 ديسبل عند انحرافٍ معياريٍ يساوي 6 ديسبل. افترض أن البيانات ذات توزيعٍ طبيعي. (مثال 1)

   a. إذا كانت المحادثة الطبيعية تتم عند مستوى حوالي 64 ديسبل، حدّد عدد الساعات خلال الدراسة والتي كانت مستوى الضجيج عندها بهذا المستوى من الانخفاض.

   b. حدّد النسبة المئوية التي كان خلالها الضجيج يتراوح بين 76 ديسبل و 88 ديسبل.

2. **عدّاد المسافة** يسافر إسماعيل مسافة 290 km كل أسبوعٍ للعمل. وتقطع سيارته مسافة 29.6 km مقابل كل 1L تستهلكه من الوقود بانحرافٍ معياريٍ يساوي 5.4 km/L. افترض أن البيانات موزعةٌ توزيعًا طبيعيًا. (مثال 1)

   a. قدّر عدد الكيلومترات التي يمكن لسيارة إسماعيل قطعها بسرعة 35 km مقابل كل 1L تستهلكه من الوقود بحد أدنى.

   b. ما النسبة المئوية من سفر إسماعيل التي من أجلها تقطع السيارة ما بين 24.2 km/L و 40.4 km/L؟

أوجد كلاً مما يلي (المثال 2)

3. z إذا كان $X = 19$ و $\mu = 22$ و $\sigma = 2.6$
4. X إذا كان $z = 2.3$ و $\mu = 64$ و $\sigma = 1.3$
5. z إذا كان $X = 52$ و $\mu = 43$ و $\sigma = 3.7$
6. X إذا كان $z = 2.5$ و $\mu = 27$ و $\sigma = 0.4$
7. z إذا كان $X = 32$ و $\mu = 38$ و $\sigma = 2.8$
8. X إذا كان $z = 1.7$ و $\mu = 49$ و $\sigma = 4.1$

9. **علم الأسماك** خلال مشروعٍ علمي، درس أسامة معدل نمو 797 سمكة سلّور ذهبية خضراء وتوصّل إلى المعلومات التالية. افترض أن البيانات موزّعة توزيعًا طبيعيًا. (مثال 3)

سمكة السلور الذهبية الخضراء تصل إلى الطول الأقصى خلال الأسابيع الثلاثة الأولى من عمرها.

- متوسّط الطول بعد الفقس 4.69 mm
- الانحراف المعياري 0.258 mm

   a. حدّد عدد الأسماك التي طولها أقل من 4.5 mm بعد الفقس.

   b. حدّد عدد الأسماك التي طولها أكبر من 5 mm بعد الفقس.

10. **قطار الملاهي** يساوي متوسط وقت انتظار ركوب القطار لعدد 16,000 راكبًا لقطار الملاهي في اليوم 72 دقيقة بانحرافٍ معياريٍ يساوي 15 دقيقة. افترض أن البيانات موزعةٌ توزيعًا طبيعيًا. (مثال 3)

   a. حدّد عدد الركاب الذين ينتظرون أقل من 60 دقيقةً لركوب قطار الملاهي.

   b. حدّد عدد الركاب الذين ينتظرون أكثر من 90 دقيقةً لركوب قطار الملاهي.

أوجد فترة قيم z المقترنة بكل مساحة (مثال 4).

11. النسبة الوسطى 30%
12. النسبة الخارجية 15%
13. النسبة الخارجية 40%
14. النسبة الوسطى 10%
15. النسبة الخارجية 25%
16. النسبة الوسطى 84%

17. **البطاريات** العمر الافتراضي لنوعٍ محددٍ من البطاريات موزّع توزيعًا طبيعيًا حيث $\mu = 8$ ساعات و $\sigma = 1.5$ ساعة. أوجد احتمال كل مما يلي. (مثال 5)

   a. سوف تستمر البطارية لأقل من 6 ساعات.

   b. ستعمل البطارية أكثر من 12 ساعة.

   c. ستعمل البطارية بين 8 و 9 ساعات.

18. **الصحة** يساوي متوسط مستوى كوليسترول الدم لدى الإماراتيين البالغين 203 mg/dL بانحرافٍ معياريٍ قيمته 38.8 mg/dL. أوجد احتمال كل مما يلي. وافترض أن البيانات موزعة توزيعًا طبيعيًا. (مثال 5)

   a. مستوى كوليسترول الدم ما دون 160 mg/dL، والذي يعدّ منخفضًا ويمكن أن يؤدي إلى خطر مرتفع للإصابة بجلطة

   b. مستوى كوليسترول الدم فوق 240 mg/dL، والذي يعدّ مرتفعًا ويمكن أن يؤدي إلى خطورة مرتفعة للإصابة بمرض القلب

   c. مستوى كوليسترول الدم بين 180 و 200 mg/dL، والذي يعدّ طبيعيًا

19. **تساقط الثلج** تم توزيع متوسط سقوط الثلج سنويًا بالسنتيمتر لأحد المناطق من 45°N إلى 55°N طبيعيًا حيث $\mu = 260$ و $\sigma = 27$. (المثال 6)

   a. حدّد الكمية الصغرى لهطول الثلج المتشكّلة ضمن نسبة 15% العليا من التوزيع.

   b. حدّد الكمية القصوى لهطول الثلج المتشكّلة في نسبة 30% الدنيا.

   c. ما هو مدى هطول الثلج الذي يتشكّل عند نسبة 60% الوسطى؟

20. **سرعة حركة المرور** يتم توزيع متوسط السرعة بالميل في الساعة في الشارع الشمالي طبيعيًا حيث $\mu = 60$ و $\sigma = 9$. (المثال 6)

   a. حدّد السرعة القصوى لأبطأ 10% من السيارات التي تعبر الشارع الشمالي.

   b. حدّد السرعة الصغرى لأسرع 5% من السيارات التي تعبر الشارع الشمالي.

   c. ما مدى سرعة السيارات ضمن النسبة الوسطى 25% التي تعبر الشارع الشمالي؟

21. **الاختبارات** أجرت أماني اختباري ACT و SAT وحصلت على الدرجات الموضحة. فما الدرجات التي لها موقع نسبي أعلى؟ اشرح استنتاجك.

B

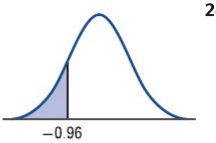
اختبار	درجة أماني	المتوسط الوطني	الانحراف المعياري
ACT	27	21	4.7
SAT	620	508	111

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

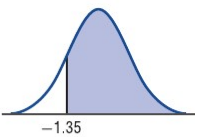
22. الامتحانات حققت أمل 76 درجة في اختبار الفيزياء الذي كان وسط الدرجات فيه يساوي 72 درجة وانحرافها المعياري 10. وحققت أيضًا 81 درجةً في اختبار علم الاجتماع الذي كان وسط الدرجات فيه يساوي 78 بانحراف معياري 9. قارن درجتي أمل النسبيتين في كل اختبار. وافترض أن البيانات موزعة توزيعًا طبيعيًا.

أوجد المساحة التي تتطابق مع كل منطقة مظللة.

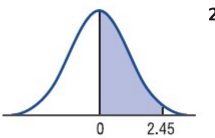
23.



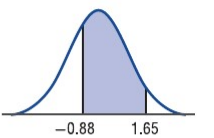
24.



25.



26.



27. الكسور تذكّر من الدرس 1-10 أن الرّبيعات والنسب المئوية والأعشار هي ثلاثة أنواع من الكسور التي تقسم مجموعةً مرتبةً من البيانات إلى مجموعات متساوية. أوجد قيم z المقابلة لكلٍّ من الكسور التالية.

a. D_{20} و D_{40} و D_{80}

b. Q_1 و Q_2 و Q_3

c. P_{10} و P_{40} و P_{90}

28. الأرصاد الجوية يعرض الجدول الرطوبة التي رُصدت في صباح اليوم نفسه في اليونان والجزائر ومصر. افترض أن البيانات موزعةٌ توزيعًا طبيعيًا.

الدولة	الرطوبة	متوسط الرطوبة	انحراف معياري
اليونان	85%	82%	12%
الجزائر	94%	91%	15%
مصر	46%	43%	10%

a. ما الدولة ذات الرطوبة النسبية الأعلى؟ وما الدولة ذات الرطوبة النسبية الأدنى؟ اشرح استنتاجك.

b. ما وجه المقارنة مع دولة رابعةٍ رطوبتها النسبية 81% ورطوبتها المتوسطة 78% عند انحرافٍ معياريٍ 8%؟

29. الأعمال تتوزع رواتب العاملين في دائرة المبيعات ضمن إحدى الوكالات الإعلانية توزيعًا طبيعيًا بانحرافٍ معياريٍ يساوي AED 8,000. وخلال موسم العطلة، يُمنح العاملون الذين يقبضون أقل من AED 35,000 سلّة هدايا.

a. على فرض أن 10% من العاملين يتلقّون سلّة هدايا. فما وسط الراتب في دائرة المبيعات؟

b. على فرض أن العاملين الذين يكسبون رواتب تزيد بـ مبلغ AED 10,000 عن قيمة وسط الراتب يُمنحون علاوةً تحفيزية. فإذا كان هناك 200 عاملٍ في دائرة المبيعات، فكم عدد العاملين الذين سيمنحون علاوة؟

30. التمثيلات المتعددة ستستكشف في هذه المسألة شكل التوزيع الطبيعي. افترض تعدادًا إحصائيًا يتكوّن من 4، 6، 8، 10.

C

a. **بيانيًا** ارسم تمثيلًا بيانيًا بالأعمدة، واستخدمه لوصف شكل التوزيع. ثم أوجد وسط مجموعة البيانات وانحرافها المعياري.

b. **بيانيًا** اختر ثماني عيّناتٍ عشوائيةٍ حجمها 2، مع الإحلال، من مجموعة البيانات، وارسم تمثيلًا بيانيًا بالأعمدة واستخدمه لوصف شكل التوزيع. وأوجد الوسط والانحراف المعياري لقيم وسط العينات.

c. **جدوليًا** يضم الجدول جميع العينات التي حجمها 2 والتي يمكن أخذها، مع الإحلال، من مجموعة البيانات. أوجد وسط كل عينة والوسط والانحراف المعياري لجميع قيم وسط العينات.

العينة	الوسط	العينة	الوسط
4, 4		8, 4	
4, 6		8, 6	
4, 8		8, 8	
4, 10		8, 10	
6, 4		10, 4	
6, 6		10, 6	
6, 8		10, 8	
6, 10		10, 10	

d. **بيانيًا** ارسم تمثيلًا بيانيًا بالأعمدة لقيم وسط العينات من الجزء c واستخدمه لوصف شكل التوزيع. ماذا يحدث لشكل توزيع بياناتٍ بزيادة حجم العينة؟

e. **تحليليًا** اقسم الانحراف المعياري للتعداد الإحصائي، والذي أوجدته في الجزء a، على الجذر التربيعي لحجم العينة. ما الذي يحدث برأيك للوسط والانحراف المعياري لتوزيع البيانات في حالة زيادة حجم العينة؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

31. تحليل الخطأ يوجد أيمن وبدر الفترة z المرتبطة بالنسبة 35% الخارجية من توزيع للبيانات. ويعتقد أيمن أنها تمثل الفترة $z < -0.39$ أو $z > 0.39$، بينما يرى بدر أنها تمثل الفترة $z < -0.93$ أو $z > 0.93$. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

32. التبرير في تطبيقات الحياة اليومية، تقع قيم z في العادة بين -3 و $+3$ في التوزيع المعياري الطبيعي. فلِمَ تعتقد أن هذه الحالة صحيحة؟ اشرح استنتاجك.

33. التحدي أوجد قيمتي z، إحداهما موجبة والأخرى سالبة، بحيث تكون مساحة الذيلين مجتمعين تساوي كلًا مما يلي:

a. 1% b. 5% c. 10%

34. التبرير للمتغيرات المتصلة توزيعات طبيعية *أحيانًا* أو *دائما* أو ليس لها توزيعات طبيعية *على الإطلاق*. اشرح استنتاجك.

35. الكتابة في الرياضيات قارن وقابل خواصّ التوزيع الطبيعي بخواصّ التوزيع المعياري الطبيعي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة شاملة

36. البيسبول يوضح التوزيع التكراري عدد الضربات المسجّلة بواسطة كل لاعب في فريق المجد في مباراة. (الدرس 2-10)

التكرار	الضربات المسجلة، X
3	0
1	1
8	2
2	3
3	4

a. أنشئ توزيعًا احتماليًا للمتغير العشوائي X ومثله بيانيًا.

b. أوجد الوسط وفسره في سياق المسألة.

c. أوجد التباين والانحراف المعياري.

37. كرة القدم يعرض الجدول عدد ضربات الجزاء التي احتُسبت لصالح فريق كرة قدم محترف في كل مباراة خلال موسمين حديثين منصرمين. أنشئ مخططين صندوقيين متجاورين لمجموعتي البيانات. ثم استخدم طريقة العرض هذه لمقارنة التوزيعين. (الدرس 1-10)

الموسم 1				الموسم 2			
8	11	6	13	9	1	3	5
9	18	16	11	8	3	6	4
15	14	14	9	10	6	3	1
8	5	10	5	5	5	3	2

أوجد الإحداثيات المتعامدة لكل نقطة لها الإحداثيات القطبية المعطاة.

38. $\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ **39.** $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ **40.** $(-2, \pi)$

لديك v و u × v. أوجد u. قد تكون هناك أكثر من إجابة.

41. $\mathbf{v} = \langle -4, 2, -7 \rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 17$ **42.** $\mathbf{v} = \langle 2, 8, 5 \rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -6$ **43.** $\mathbf{v} = \left\langle \frac{2}{3}, -3, \frac{1}{3} \right\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 10$

أوجد زاوية اتجاه كل متجه مما يلي.

44. $6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ **45.** $-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ **46.** $2\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

اكتب معادلة القطع الناقص المقابل لكل مجموعة من الخواصّ التالية.

47. الرؤوس (11 ,3−)، (9− ,3−)؛ البعد البؤري (7 ,3−)، (5− ,3−)

48. الرؤوس المرافقة (6− ,1−)، (6− ,3−)؛ طول المحور الأكبر 10

49. الرؤوس (2 ,4−)، (2 ,8)؛ طول المحور الأصغر 8

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

50. SAT/ACT إذا كان X مجموع أول 1000 عدد صحيح موجب زوجي و Y مجموع أول 500 عدد صحيح فردي، فهل النسبة المئوية لـ X أكبر من Y؟

A 100% C 300% E 500%

B 200% D 400%

52. مراجعة خلال إحدى السنوات الأخيرة، كان الوسط والانحراف المعياري لدرجات امتحان ACT يساويان 21.0 و4.7. افترض أن درجات الامتحان كانت موزعة توزيعًا طبيعيًا. فما الاحتمال التقريبي في أن يحصل أحد المشاركين على درجة أعلى من 30.4؟

F 1% H 2%

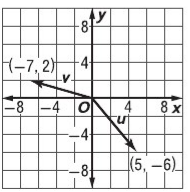
G 1.5% J 2.5%

51. تتوزع مدة كل أغنية في مجموعةٍ موسيقية توزيعًا طبيعيًا فيه $\mu = 4.12$ دقائق و $\sigma = 0.68$ دقيقة. أوجد احتمال كون مدة أغنية اختيرت عشوائيًا من المجموعة أطول من 5 دقائق.

A 10% C 39%

B 19% D 89%

53. مراجعة أوجد $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.



F −47 H −6

G −24 J 47

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مختبر تقنية التمثيل البياني
تحويل البيانات الملتوية

الهدف

- استخدام حاسبة التمثيل البياني لتحويل البيانات الملتوية إلى بيانات شبيهة بالتوزيع الطبيعي.

من الشائع أن يكون لبيانات علم الأحياء والبيانات الطبية وغيرها توزيعٌ ملتوٍ إيجابي. وقد يكون من المفيد أحيانًا تحويل البيانات الأصلية بحيث تشبه التوزيع الطبيعي على نحوٍ أفضل. حيث يتيح ذلك انتشار البيانات بدلاً من تجمّعها في جهة واحدةٍ من نموذج العرض.

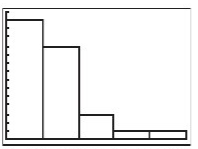
النشاط 1 تحويل البيانات باستخدام لوغاريتمات طبيعية

استخدم البيانات التالية لإنشاء مدرج إحصائي، وصف شكل التوزيع. ثم حوّل البيانات بحساب اللوغاريتم المشترك لكل مُدخل. ومثّل البيانات الجديدة بيانيًا، وصِف شكل التوزيع.

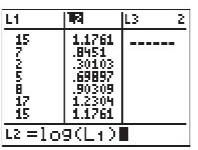
البيانات									
15	7	2	5	8	17	15	8	3	4
9	18	13	10	9	8	10	23	26	10
7	14	25	7	6	13	35	48	14	6

الخطوة 1 أدخل البيانات في L1. وأنشئ مدرجاً إحصائيًا للبيانات باستخدام الفترات والمقاييس الموضحة.

يبدو أن البيانات ذات توزيعٍ ملتوٍ إيجابي.

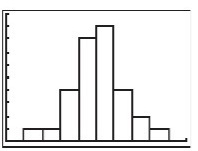


الخطوة 2 أوجد اللوغاريتم المشترك لكل قيمة في L2.
ضع المؤشر على L2. اضغط على LOG وأدخل L1.
اضغط على ENTER.



الخطوة 3 أنشئ مدرجاً إحصائيًا للبيانات الجديدة باستخدام الفترات والمقاييس الموضحة.

يبدو أن للبيانات توزيعًا طبيعيًا.



يمكن تحويل البيانات أيضًا عبر حساب الجذور المربعة أو القوى للمُدخلات. وعند تحويل البيانات، فينبغي تحديد نوع العملية التي تجري على الدوام. ولا يؤدي التحويل دائمًا إلى توزيع البيانات الجديدة توزيعًا طبيعيًا.

تدريب

استخدم البيانات التالية لإنشاء مدرج إحصائي، وصف شكل التوزيع. ثم حوّل البيانات بحساب الجذر التربيعي لكل مُدخل. ومثّل البيانات الجديدة بيانيًا، وصِف شكل التوزيع. اشرح كيف أثّر التحويل في ملخّص الإحصاءات.

البيانات									
23	30	36	39	36	24	31	33	42	36
26	32	46	45	27	34	52	41	28	33
43	20	24	34	30	40	29	35	61	35

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 1-10 إلى 3-10

1. **تجارب الأداء** يعرض الجدول أعمار 20 طالبًا شاركوا في تجارب أداء أدوار عرضٍ مسرحيٍ مدرسيٍ يجسد رواية ذهب مع *الريح* . (الدرس 1-10)

أعمار الطلاب				
14	15	17	16	14
16	17	16	18	16
15	16	18	15	17
14	18	15	17	16

a. أنشئ مدرجاً إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

b. صف مركز البيانات وانتشارها باستخدام إما المتوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. علل اختيارك.

2. **الإجازات** تخطط بدرية للذهاب في رحلةٍ خلال إجازة الربيع. وقد حصرت خياراتها بموقعين اثنين. يعرض الجدول أدناه درجات الحرارة خلال اثني عشر يومًا تتزامن مع توقيت إجازة الربيع لكل موقع. (الدرس 1-10)

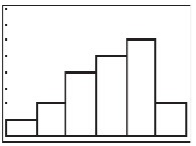
اليمن					
52	60	62	57	55	63
64	59	54	52	54	60
عُمان					
77	77	76	76	72	71
72	74	74	72	73	73

a. أنشئ مخططين صندوقيين متجاورين لمجموعتي البيانات. واستخدم طريقة العرض هذه لمقارنة مركزي التوزيعين وانتشاريهما.

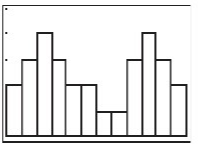
b. ما الموقع الذي فيه تباين أكبر لدرجة الحرارة؟

3. **الاختيار من متعدد** أي من المخططات التالية يعرض مجموعة بياناتٍ ذات توزيعٍ ملتوٍ نحو اليمين؟ (الدرس 1-10)

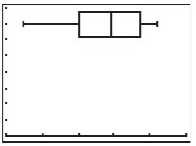
A



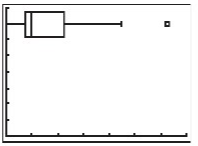
C



B



D



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

صنّف كل متغير عشوائي X على أنه *منفصل* أو *متصل*. اشرح استنتاجك. (الدرس 2-10)

4. يمثل X عدد مرات استقرار قطعة نقدية على الصورة إذا رُميت لعددٍ عشوائيٍ من المرات.

5. يمثل X الزمن الذي يستغرقه متسابق ماراثون اختير عشوائيًا لإكمال السباق.

6. السفر خلال استطلاعٍ للآراء، أفاد 20% من المراهقين المشاركين بأنهم زاروا برج العرب. أوجد احتمال أن يكون 3 على الأقل من أصل 6 مراهقين اختيروا عشوائيًا قد زاروا البرج. (الدرس 2-10)

7. الشامبو كمّيّة الماء ml في نوعٍ محددٍ من أنواع الشامبو موزعةٌ توزيعًا طبيعيًا فيه $\mu = 125$ و $\sigma = 7$. أوجد كلًا مما يلي. (الدرس 3-10)

a. $P(X < 105)$

b. $P(X > 140)$

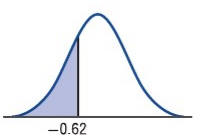
c. $P(115 < X < 130)$

8. الجولف سجّل كل لاعبٍ من عينة اختيرت عشوائيًا من 130 لاعب جولف في المتوسط 78 نقطة عند انحرافٍ معياريٍ يساوي 6.3. أوجد عدد لاعبي الجولف الذين يساوي متوسط عدد النقاط التي سجّلها كل منهم 70 أو أقل. (الدرس 3-10)

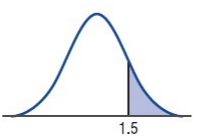
أو

جد المساحة المقابلة للمنطقة المظللة. (الدرس 3-10)

9.



10.



11. المشاريع تتوزّع درجات مشروعٍ علميٍ في أحد الصفوف الدراسية توزيعًا عشوائيًا فيه $\mu = 78$ و $\sigma = 8$. أوجد كل احتمال مما يلي: (الدرس 3-10)

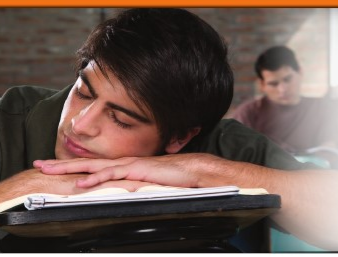
a. $P(X \geq 96)$

b. $P(60 < X < 85)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-4 الارتباط والانحدار الخطي

السابق	الحالي	لماذا؟
• حلّلتَ بياناتٍ أحادية المتغير.	1 قياس الارتباطات الخطية لمجموعات من البيانات ذات المتغيرين باستخدام معامل الارتباط، وتحديد ما إذا كانت الارتباطات ذات دلالة.	• كان أحد كُتّاب صحيفة مدرسية مهتمًا بتحديد ما إذا كان عدد ساعات النوم الذي يحصل عليه الطلاب كل ليلة له علاقة بمتوسط إجمالي الدرجات التي يحصلون عليها. ومن الناحية الإحصائية، يود الكاتب أن يعرف ما إذا كان هناك *ارتباط* بين النوم والدرجات.
	2 إنشاء خطوط انحدار المربعات الصغرى لمجموعات البيانات ذات المتغيرين، واستخدام الخطوط لتقديم تنبؤات.	



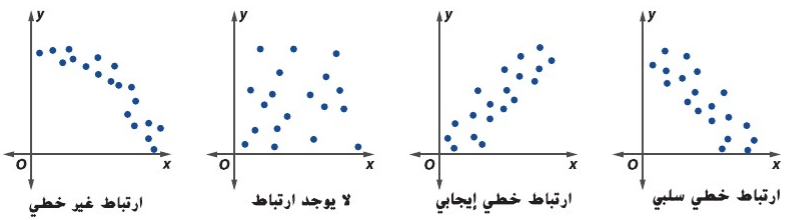
المفردات الجديدة

ارتباط correlation
ذو متغيرين bivariate
المتغير التفسيري explanatory variable
متغير الاستجابة response variable
معامل الارتباط correlation coefficient
خط الانحدار regression line
المستقيم الأفضل مواءمة line of best fit
الناتج المتبقي residual
خط انحدار ذو مربعات أقل least-squares
مخطط البواقي regression line
مؤثّر residual plot
استكمال داخلي interpolation
استكمال خارجي extrapolation

1 الارتباط

حتى الآن في هذه الوحدة، قمتَ بعمل تمثيل بياني لبعض الإحصائيات المختصرة ووصفتَ خصائصها واستخدمتها من أجل وصف التوزيعات الخاصة ببعض مجموعات البيانات أحادية المتغير. واستخدمت، بالإضافة إلى ذلك، عينة إحصائية لمثل هذه البيانات أحادية المتغير لعمل تداخلات في المجتمع الإحصائي عن طريق تطوير فترات الثقة وأداء اختبارات الفرضية. **والارتباط** هو مجال آخر من الإحصاء الاستدلالي الذي ينطوي على تحديد احتمال وجود علاقة بين متغيرين في مجموعة من **البيانات** ذات المتغيرين.

يمكن تمثيل البيانات ذات المتغيرين في صورة أزواج مرتبة (x, y). حيث يمثل x المتغير المستقل أو **التفسيري** ويمثل y المتغير التابع أو **متغير الاستجابة**. ولكي تحدد ما إذا كان هناك ارتباط خطي أو غير خطي أو عدم وجود ارتباط بين المتغيرات، يمكنك استخدام مخطط انتشار بياني.



نقول إن البيانات لها علاقة خطية قوية إذا وقعت النقاط قريبةً من خطٍّ مستقيم و نقول عنها ضعيفة إذا كانت النقاط بعيدةً عن المستقيم. ولكن تفسير الارتباط باستخدام مخطط الانتشار لا يبدو موضوعيًّا. والطريقة الأكثر دقة في تحديد قوة العلاقة الخطية بين متغيرَيْن ونوعها هي أن نحسب **معامل الارتباط**. فيما يلي معادلة موضحة لهذا المقياس.

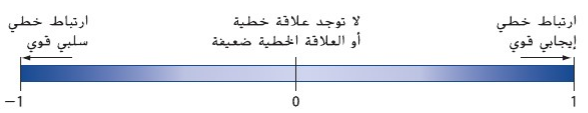
المفهوم الأساسي معامل الارتباط

لعدد n من أزواج عينات البيانات الخاصة بالمتغيرين x وy، فإن معامل الارتباط r بين x و y يتم استنتاجه بالمعادلة

$$r = \frac{1}{n-1} \sum \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y}\right).$$

حيث x_i و y_i يمثلان قيمتي زوجي البيانات ذوي الترتيب i. و $\bar{x}$ و $\bar{y}$ يمثلان وسطي المتغيرين و s_x و s_y يمثلان الانحرافين المعياريين للمتغيرين.

يمكن لمعامل الارتباط أن يتضمن قيمًا من -1 إلى 1. وتوضح هذه القيمة قوة الارتباط الخطي ونوعه بين x و y كما هو موضح في المخطط أدناه.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

لاحظ من الصيغة أن معامل الارتباط هو متوسط ناتج ضرب القيم المعيارية لـ x والقيم المعيارية لـ y. يمكن أن يكون الحساب اليدوي لمعامل الارتباط مملًا. ولذا فنحن نعتمد غالبًا على برامج الحاسوب أو حاسبة التمثيل البياني.

نصيحة دراسية

مقاومة معامل الارتباط مثل الوسط الحسابي والانحراف المعياري، فإن r يمثل إحصاء عديم المقاومة. ومن الممكن أن يتأثر بالقيم المتطرفة.

مثال 1 حساب معامل الارتباط وتفسيره

دراسة العلاقة بين النوم والدرجات الدراسية **يجري كاتب في صحيفة طلابية دراسة لتحديد ما إذا كانت هناك علاقة خطية بين متوسط عدد ساعات النوم لكل طالب في الليلة ومتوسط إجمالي درجاته. ويوضح الجدول البيانات التي جمعها الكاتب. ارسم مخطط انتشار للبيانات وحدد العلاقة. بعد ذلك احسب معامل الارتباط وفسّره.**

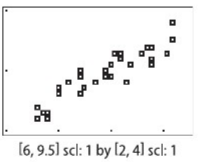
عدد ساعات النوم	إجمالي عدد الدرجات	عدد ساعات النوم	إجمالي عدد الدرجات
6.6	2.2	8.0	2.9
6.6	2.4	8.0	3.1
6.7	2.3	8.1	3.3
6.8	2.3	8.2	3.3
6.8	2.2	8.2	3.2
7.0	2.6	8.3	2.8
7.0	2.7	8.4	3.1
7.2	2.8	8.6	3.3
7.4	2.6	8.7	3.4
7.4	3.0	8.8	3.1
7.4	2.9	8.8	3.2
7.5	2.7	8.8	3.4
7.7	2.8	9.1	3.3
7.9	2.9	9.2	3.8
7.9	3.0	9.2	3.5

الخطوة 1 مثّلْ بيانيًّا مخططًا لانتشار البيانات.

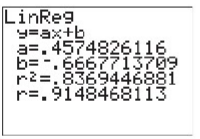
أدخل البيانات إلى L1 و L2 على حاسبتك الآلية. بعد ذلك افتح Plot1 ضمن قائمة STAT PLOT واختر ⋰ استخدام L1 الخاص بـ Xlist و L2 الخاص بـ Ylist. مَثِّلْ مخطط الانتشار بيانيًا بالضغط على ZoomStat أو بالضغط على GRAPH وضبط النافذة يدويًا (الشكل 10.4.1). يتضح من التمثيل البياني أن البيانات لها ارتباط خطي موجب.

الخطوة 2 حساب معامل الارتباط وتفسيره.

اضغط على STAT واختر LinReg(ax+b) ضمن قائمة CALC (الشكل 10.4.2). يبلغ معامل الارتباط r حوالي 0.9148. وبسبب قرب r من 1، فهذا يقترح احتمال وجود ارتباط خطي موجب قوي للبيانات. وهذا التقييم العددي للبيانات يتوافق مع التقييم البياني الذي أجريناه.



الشكل 10.4.1



الشكل 10.4.2

تمرين موجّه

1. الأرصاد الجوية يوضح برنامج الأرصاد الجوية بعض الأحوال الخاصة في إحدى المدن حيث تم إجراء دراسة لتحديد احتمال وجود علاقة خطية بين متوسط كمية الأمطار الشهرية ودرجة الحرارة. ويوضح الجدول الموجود بالشكل 10.4.3 البيانات المجمّعة. ارسم مخطط انتشار لهذه البيانات ثم احسب معامل ارتباط البيانات وفسّره.

درجة الحرارة (C°)	كمية الأمطار (cm)
41.3	5.35
44.3	4.03
46.6	3.77
50.4	2.51
56.1	1.84
61.4	1.59
65.3	0.85
65.7	1.22
60.8	1.94
53.5	3.25
46.3	5.65
41.6	6.00

الشكل 10.4.3

في المثال 1، تمثل البيانات المجمّعة مجرد عينة من المجتمع الكلي للمدرسة؛ ولذا، فإن r تمثل *معامل ارتباط العينة*. ولكي تكون r تقديرًا صحيحًا لمعامل ارتباط المجتمع الإحصائي ρ، يجب أن تكون الافتراضات التالية صحيحة.

- المتغيران x و y مرتبطان خطيًّا.
- المتغيران هما متغيران عشوائيان.
- المتغيران لهما توزيع طبيعي ذو متغيرين. وهذا لأن x و y ناتجان عن مجتمع إحصائي موزع توزيعًا طبيعيًّا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نفضّل استخدام قيمة r لعمل استنتاج عن العلاقة بين المتغيرين x وy للمجتمع الإحصائي كافة. ولتنفيذ ذلك، يجب أن نحدد ما إذا كانت قيمة $|r|$ كبيرة بما يكفي لاستنتاج وجود علاقة ذات دلالة بين x وy.

لتحديد ذلك، يمكنك إجراء اختبار الفرضية. ستجد أن فرضية العدم والفرضية البديلة لاختبار ثنائي الذيل الخاص بمعامل ارتباط المجتمع الإحصائي ρ يكونان كالتالي.

قراءة في الرياضيات

معامل ارتباط المجتمع الإحصائي الحرف اليوناني ρ المُستخدم ليمثل معامل ارتباط المجتمع الإحصائي ينُطق "رو" (rho).

H_0: $\rho = 0$ لا يوجد ارتباط بين المتغيرين x و y في المجتمع الإحصائي.

H_a: $\rho \neq 0$ يوجد ارتباط بين المتغيرين x و y في المجتمع الإحصائي.

يمكننا استخدام اختبار t كما هو موضح أدناه لاختبار دلالة معامل الارتباط.

المفهوم الأساسي المعادلة التي تخص اختبار t لمعامل الارتباط

بالنسبة لاختبار t الخاص بالارتباط بين المتغيرين، فإن إحصاء الاختبار بالنسبة لقيمة ρ هو معامل الارتباط للعينة r وإحصاء الاختبار المعياري t يتم استنتاجه عن طريق المعادلة

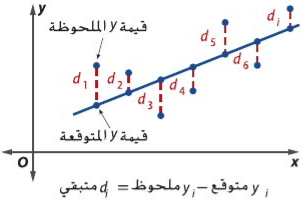
$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

. حيث $n - 2$ هي درجات الحرية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 الانحدار الخطي

بعد تحديد الارتباط بين متغيرين على أنه ذو دلالة، فالخطوة التالية هي تحديد معادلة **خط الانحدار**. ويسمَّى أيضًا **المستقيم الأفضل مواءمة**. يصف خط الانحدار كيفية تغير متغير الاستجابة y عندما يتغير المتغير التفسيري x.



d_i متبقي = y_i ملحوظ − y_i متوقع

في حين أنه يمكن رسم العديد من المستقيمات الأفضل تناسُب من خلال مجموعة من النقاط، فإن المستقيم الأكثر استخدامًا محددًا بمعايير معينة. فكّر في مخطط الانتشار وخط الانحدار الموضحيْن أمامك. الفرق d بين قيمة y الملحوظة وقيمة y المتوقَّعة على خط الانحدار يسمَّى **الناتج المتبقي**.

تصبح النواتج المتبقية موجبة عندما تكون القيمة الملحوظة فوق الخط، وتصبح سالبة عندما تكون القيمة الملحوظة تحت الخط، وتساوي صفرًا عندما تكون على الخط. **خط الانحدار ذو المربعات الأقل** هو الخط الناشئ عندما يكون مجموع مربعات النواتج المتبقية أقل ما يمكن.

المفهوم الأساسي معادلة خط الانحدار ذي مربعات أقل

معادلة خط الانحدار ذي المربعات الأقل للمتغير التفسيري x ومتغير الاستجابة y هي $\hat{y} = ax + b$.

يتم استنتاج الميل a والتقاطع مع المحور y عند b في هذه المعادلة باستخدام

$$a = r\frac{s_y}{s_x}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x},$$

حيث يمثل r معامل الارتباط بين المتغيرين، و $\bar{x}$ و $\bar{y}$ يمثلان متوسطيهما و s_x و s_y يمثلان انحرافيهما المعياريين.

قراءة في الرياضيات

رمز معادلة الانحدار الرمز $\hat{y}$ يُقرأ y hat ويُستخدم لتأكيد أن المعادلة تعطي الاستجابة المتوقَّعة وليست الفعلية y لأي x.

ليس من الضروري حساب معادلة الانحدار ذات المربعات الأقل بطريقة يدوية مثل حساب معامل الارتباط. فباستخدام برامج الحاسوب أو حاسبة التمثيل البياني، يمكنك إيجاد الميل a وتقاطُع y مع b على خط الانحدار ذي المربعات الأقل بالنسبة لقيم المتغيرات.

مثال 2 إيجاد خط الانحدار ذي المربعات الأقل

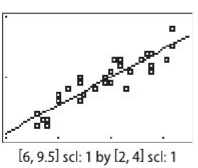
دراسة العلاقة بين النوم والدرجات الدراسية **أوجِد معادلة خط الانحدار للبيانات المستخدَمة في المثال 1. فسّرْ الميل والتقاطع في السياق ثم قيّمْ مدى ملاءمة معادلة تمثيل النماذج عن طريق تمثيلها بيانيًا، جنبًا إلى جنب مع مخطط انتشار البيانات، في النافذة نفسها.**

وباستخدام نفس النافذة التي استخدمتَها للحصول على معامل الارتباط (الشكل 10.4.4)، فإن معادلة الانحدار ذي المربعات الأقل هي تقريبًا $\hat{y} = 0.457x - 0.667$. والميل $a = 0.457$ يوضح أنه مع كل ساعة نوم إضافية، سيزداد معدل درجات الطالب بمقدار 0.457 نقطة. والتقاطع مع المحور y عند $b = -0.667$ يوضح أنه عندما يبلغ معدل الطالب 0 من النوم، فإن معدل درجاته يصبح أقل من 0، وهذا غير ممكن.

بما أن البيانات تبدو مبعثرة حول المستقيم بشكل عشوائي $\hat{y} = 0.457x - 0.667$ يبدو أن خط الانحدار هذا متلائم مع البيانات (الشكل 10.4.5).

```
LinReg
 y=ax+b
 a=.4574826116
 b=-.6667713709
 r²=.8369446881
 r=.9148468113
```

الشكل 10.4.4



الشكل 10.4.5

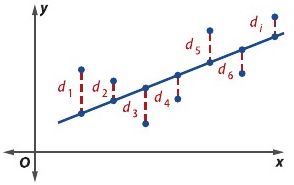
تمرين موجّه

2. الأرصاد الجوية أوجد معادلة خط الانحدار لبيانات الأمطار ودرجات الحرارة المستخدمة في التمرين الموجّه في المثال 1. فسّرْ الميل والتقاطع في السياق، ثم قيّمْ مدى ملاءمة معادلة تمثيل النماذج وذلك بتمثيلها بيانيًا و تمثيل مخطط انتشار البيانات، في النافذة نفسها.

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

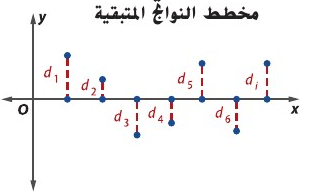
يصف خط الانحدار ذو المربعات الأقل النمط الشامل في مجموعة من البيانات ذات المتغيرين. كما في تحليل البيانات ذات المتغير الواحد، يجب دومًا أن تبحث عن الانحرافات اللافتة للنظر. أو القيم المتطرفة، من هذا النمط. تذكر أن النواتج المتبقية تقيس مقدار البيانات التي تحيد عن خط الانحدار.

مخطط الانتشار لخط الانحدار



إن فحص مخطط الانتشار للنواتج المتبقية، والذي يسمى **مخطط النواتج المتبقية**. يمكن أن يساعدك في تقييم مدى دقة وصف خط الانحراف للبيانات. ففي مخطط النواتج المتبقية، يتناظر المستقيم الأفقي عند 0 مع خط الانحدار. يمكنك إنشاء مخطط نواتج متبقية باستخدام حاسبة التمثيل البياني خاصتك. فإذا ظهر مخطط النواتج المتبقية منتشرًا بصورة عشوائية ومتمركزًا حول $y = 0$، إذًا سوف يكون استخدام نموذج خطي للبيانات اختيارًا مؤيدًا. أمّا إذا كان المخطط يعرض نمطًا على شكل منحنى، فلن يكون استخدام نموذج خطي اختيارًا مؤيدًا.

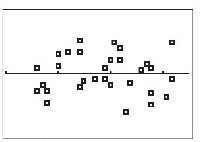
مخطط النواتج المتبقية



مثال 3 التمثيل البياني لمخطط النواتج المتبقية وتحليله

دراسة العلاقة بين النوم والدرجات الدراسية **مثّل مخطط النواتج المتبقية الخاص ببيانات متوسط ساعات النوم والدرجة الإجمالية للطالب في المثال 1 تمثيلًا بيانيًا وحلّله لتحديد إذا ما كان النموذج الخطي الموجود في المثال 3 ملائمًا أم لا.**

بعد حساب خط الانحدار ذي المربعات الأقل في المثال 3.
يمكنك الحصول على مخطط نواتج متبقية من البيانات عن طريق تشغيل Plot2ضمن القائمة STAT PLOT واختيار باستخدام L1من أجل Xlist و RESIDمن أجل Ylist.
ويمكنك الحصول على RESIDعبر ضغط 2nd STAT واختيار RESID من قائمة الأسماء. مثّل مخطط التشتت الخاص بالبواقي عبر ضغط ZoomStat.


[6, 9.5] scl: 1 by [−0.5, 0.5] scl: 1

تظهر النواتج المتبقية متناثرة عشوائيًا وتتمحور حول خط الانحدار عند $y = 0$. وهذا يدعم الادعاء بأن استخدام نموذج خطي أمر مناسب.

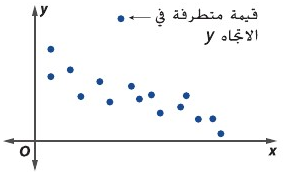
تمرين موجّه

3. الأرصاد الجوية مثّل مخطط البواقي الخاص ببيانات الأمطار ودرجة الحرارة تمثيلًا بيانيًا وحلّله لتحديد إذا ما كان النموذج الخطي الموجود في التمرين الموجّه للمثال 3 ملائمًا أم لا.

نصيحة دراسية

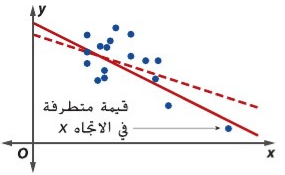
النواتج المتبقية بينما يمكن حساب البواقي من أي خط انحدار مزود بالبيانات، فالنتائج المتبقية من خط الانحدار ذي المربعات الأقل تحتوي على خاصية خاصة. فمتوسط البواقي ذات المربعات الأقل سوف يكون صفرًا دائمًا.

يساعد مخطط النواتج المتبقية على تضخيم انحرافات نقاط البيانات من خط الانحدار؛ مما يجعل من الأسهل معرفة القيم المتطرفة في البيانات التي تقع في الاتجاه y. ويمكن للقيم المتطرفة عند الاتجاه y أن تشير إلى أخطاء في تسجيل البيانات أو في بعض الحالات الفريدة، لا سيما عند وصف الاتجاهات المجتمعية أو الصفات السلوكية.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

القيم المتطرفة في الاتجاه x يمكن أن يكون لها تأثير قوي على موقع خط الانحدار. ففي الشكل، يتم عرض اثنين من خطوط الانحدار ذات المربعات الأقل. ويتم حساب الخط المتصل باستخدام جميع البيانات، بينما يُحسب الخط المتقطع بحذف القيمة المتطرفة في الاتجاه x. لاحظ أن حذف هذه النقطة يؤدي إلى تحريك خط الانحدار بدرجة يسهل ملاحظتها.



نصيحة دراسية

تأثير إن تأثير القيمة المتطرفة ليست مسألة نعم أو لا. بل هي مسألة درجة ولذلك فهي غير موضوعية.

يقال إن نقطة البيانات الفردية التي تغيير خط الانحدار إلى حد كبير تكون **مؤثرة**. فالقيم المتطرفة في الاتجاه x تؤثر غالبًا على خط الانحدار ذي المربعات الأقل. ولتحديد ما إذا كانت نقطة عبارة عن قيمة متطرفة مؤثرة. احسب خطوط الانحدار ومثلها بيانيًا مع أو بدون هذه النقطة. فهذه النقطة تكون مؤثرة إذا كان هناك اختلاف كبير في مواقع خطوط الانحدار عند إزالة هذه النقطة.

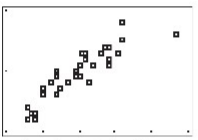
مثال 4 تحديد القيم المتطرفة المؤثّرة

دراسة العلاقة بين النوم والدرجات الدراسية **افترض أن الكاتب الصحفي المذكور في المثال 1 والذي أجرى دراسة عن العلاقة بين النوم وإجمالي مجموع الدرجات الدراسية قد تلقّى في وقت لاحق بعض المعلومات الإضافية المدرَجة في الجدول، وهي عبارة عن قيمة متطرفة.**

عدد ساعات النوم	إجمالي عدد الدرجات
10.7	3.6

a. صمّمْ مخططاً جديدًا لانتشار بيانات العلاقة بين النوم وإجمالي مجموع الدرجات يحتوي على نقطة البيانات الإضافية.

أضِفْ نقطة البيانات إلى نهاية L1 و L2 ثم مثّل البيانات بيانيًا. مع ضبط النافذة عند الضرورة. ويمكنك من خلال التمثيل البياني معرفة أن هذه النقطة عبارة عن قيمة متطرفة في الاتجاه x.


[6, 11] scl: 1 by [2, 4] scl: 1

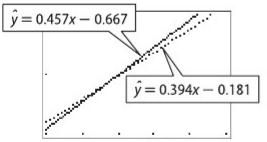
b. احسب معامل الارتباط وخط الانحدار ذا المربعات الأقل مع هذه القيمة المتطرفة. وصِفْ تأثير هذه القيمة المتطرفة على قوة الارتباط وعلى الميل وتقاطع خط الانحدار.

البيانات الأساسية: $\hat{y} = 0.457x - 0.667$ $r \approx 0.9148$

البيانات مع القيمة المتطرفة: $\hat{y} = 0.394x - 0.181$ $r \approx 0.8934$

أدت القيمة المتطرفة إلى تخفيض قوة الارتباط. وأدى التغيير في ميل معادلة الانحدار إلى هبوط المعدل – الذي يتم رفع درجات كل طالب وفقًا له بسبب النوم الإضافي – من 0.457 نقطة في الساعة إلى 0.394 كل ساعة. وفي الوقت ذاته، رفعت هذه القيمة المتطرفة من التقاطع مع محور y. مشيرةً إلى أن الطالب الذي لا ينام سيحصل على مجموع درجات يقترب من 0.

c. خَطِّطْ كلا خطي الانحدار في نفس النافذة. ثم اذكرْ ما إذا كانت القيمة المتطرفة مؤثرة أم لا. اشرح استنتاجك.



[6, 11] scl: 1 by [2, 4] scl: 1

يوضح التمثيل البياني لخطوط الانحدار أن خط الانحدار يتحرك أكثر من مقدار صغير عند إضافة القيمة المتطرفة. إذًا، القيمة المتطرفة (3.6, 11.7) مؤثرة.

تمرين موجّه

4. **الأرصاد الجوية** بفرض أن القيمة (50.4, 2.51) لكمية الأمطار المتساقطة ودرجة الحرارة من التمرين الموجّه 1 تم استبدالها بالقيمة (50.4, 0.5).

A. ارسم مخطط انتشار للبيانات الأساسية لدرجة الحرارة/الأمطار التي تتضمن هذه القيمة المتطرفة.

B. احسب معامل الارتباط وخط الانحدار ذا المربعات الأقل مع هذه القيمة المتطرفة. وصِفْ تأثير هذه القيمة المتطرفة على قوة الارتباط وعلى الميل وتقاطع خط الانحدار.

C. خَطِّطْ كلا خطي الانحدار في نفس النافذة. ثم اذكرْ ما إذا كانت القيمة المتطرفة مؤثرة أم لا. اشرح استنتاجك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

وبمجرد تحديد أن معامل الارتباط الخطي لمجموعة من البيانات له دلالة وإيجاد خط الانحدار ذي المربعات الأقل، يمكنك حينئذٍ استخدام المعادلة لعمل تنبؤات عبر نطاق البيانات. ويسمى عمل مثل هذه التنبؤات **الاستكمال الداخلي**. إن استخدام المعادلة في عمل تنبؤات تقع خارج نطاق قيم x التي استخدمتها للحصول على خط الانحدار يسمى **الاستكمال الخارجي**. وينبغي تجنب الاستكمال الخارجي، نظرًا لأن قليلًا من علاقات الحياة اليومية خطي بالنسبة لكل قيم المتغير التفسيري.

انتبه!

التنبؤ لا تستخدم خط الانحدار ذا المربعات الأقل في عمل تنبؤات إلا إذا كان النموذج الخطي مناسبًا وكان معامل الارتباط ذا دلالة. خلاف ذلك، ستكون هذه التنبؤات غير ذات معنى.

مثال 5 التنبؤات بالانحدار

دراسة العلاقة بين النوم والدرجات الدراسية **إن معادلة الانحدار لمتوسط ساعات النوم x وإجمالي مجموع الدرجات y من مثال 3 كانت $\hat{y} = 0.457x - 0.667$. استخدم هذه المعادلة لتتنبأ بإجمالي مجموع الدرجات المتوقعة (لأقرب جزء من عشرة) للطالب الذي يبلغ معدل ساعات نومه ما يلي، واذكرْ ما إذا كان هذا التنبؤ صحيحًا. اشرح.**

a. 8 ساعات

أوجد قيمة معادلة الانحدار لـ $x = 8$ لتحسب قيمة $\hat{y}$.

$\hat{y} = 0.457x - 0.667$	معادلة الانحدار
$= 0.457(8) - 0.667$	$x = 8$
$= 3.656 - 0.667$	أوجد حاصل الضرب.
$= 2.989$	اطرح.

باستخدام هذا النموذج، نتوقع أن الطالب الذي يصل متوسط ساعات نومه إلى 8 ساعات سيحصل على إجمالي مجموع درجات يبلغ حوالي 3.0. وهذا الإجمالي صحيح ومنطقي لأن 8 هي قيمة x في نطاق البيانات الأصلية.

b. 10.5 ساعات

$\hat{y} = 0.457x - 0.667$	معادلة الانحدار
$= 0.457(10.5) - 0.667$	$x = 10.5$
$= 4.7985 - 0.667$	أوجد حاصل الضرب.
$= 4.1315$	اطرح.

باستخدام هذا النموذج، نتوقع أن الطالب الذي يصل متوسط ساعات نومه إلى 10.5 ساعات سيحصل على إجمالي مجموع درجات يبلغ حوالي 4.1. وهذه القيمة غير صحيحة ولا منطقية، بما أننا نقدّر الاستكمال الخارجي لقيمة y بالنسبة لقيمة x التي تقع بعيدًا خارج مدى البيانات الأصلية. كما أنها غير ذات معنى، حيث لا يمكن للطالب أن يحصل على إجمالي مجموع درجات أعلى من 4.0 في هذا النموذج.

تمرين موجّه

5. **الأرصاد الجوية** استخدم معادلة الانحدار لبيانات الأمطار ودرجة الحرارة من التمرين الموجّه 3 لتتنبأ بدرجة الحرارة المتوقعة (مقربة لأقرب جزء من عشرة من الدرجة) لمدة شهور مع متوسط كمية الأمطار في كلٍّ منها. اذكر ما إذا كان هذا التنبؤ صحيحًا. اشرح.

A. 3 cm **B.** 8 cm

انتبه!

الارتباط مقابل السببية لمجرد أن اثنين من المتغيرات يرتبطان بشدة لا يعني بالضرورة وجود علاقة السبب والنتيجة. بل يشير الارتباط القوي إلى وجود علاقة هامة بين y وx بطريقة ما.

عند تحليل البيانات ذات المتغيرين، اتبع الخطوات المختصرة أدناه.

ملخص المفهوم تحليل البيانات ذات المتغيرين

الخطوة 1 ارسم مخطط انتشار وقرر ما إذا كانت المتغيرات تبدو مترابطة خطيًا.

الخطوة 2 إذا كانت هذه المتغيرات مترابطة بشكل خطي، فاحسب قوة العلاقة عن طريق حساب معامل الارتباط.

الخطوة 3 استخدم اختبار t لتحديد ما إذا كان الارتباط ذا دلالة.

الخطوة 4 إذا كان ذا دلالة، فأوجد معادلة الانحدار ذي المربعات الأقل التي تمثل البيانات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التمارين

للتمارين من 1 إلى 6، حلّلْ البيانات ذات المتغيرين. (الأمثلة 5-1)

a. ارسم مخطط انتشار للبيانات وحدد العلاقة. ثم احسب معامل الارتباط وفسّره.

b. حدّدْ إذا ما كانت هناك دلالة لمعامل الارتباط عند المستويات 1% و 5% و 10% . اشرح استنتاجك.

c. إذا كانت للارتباط دلالة عند مستوى 10%، فاذكر معادلة الانحدار ذات المربعات الأقل وفسّر الميل والتقاطع في السياق.

d. وضّح بالتمثيل البياني مخطط النواتج المتبقية وحلّله.

e. حددْ أي قيم متطرفة مؤثرة. وصِفْ تأثير القيمة المتطرفة على قوة الارتباط الأصلي وعلى ميل وتقاطع خط الانحدار الأصلي.

f. إذا تمت إزالة أي بيانات، فأعدْ تقييم أهمية الارتباط عند مستوى 10%، وإذا كان لا يزال مناسبًا، فأعدْ حساب معادلة الانحدار.

g. استخدم معادلة الانحدار لعمل التوقعات المحددة. وفسّرْ النتائج الخاصة بك، وما إذا كان التنبؤ معقولًا. اشرح استنتاجك.

1. **جرامات من الدهون والبروتينات** يتساءل رياضيّ عما إذا كان هناك ارتباط خطي كبير وذو دلالة بين عدد جرامات الدهون وجرامات البروتين في الأطعمة المختلفة. إذا كان ذلك مناسبًا. فاستخدم البيانات الواردة أدناه للتنبؤ بكمية البروتين (لكل حصة غذائية) في كل صنف متضمنًا ذلك 1 g أو 5 g أو 13 g من الدهون.

البروتين (g)	الدهون (g)	البروتين (g)	الدهون (g)
13	9	14	12
24	18	30	57
25	30	15	9
25	18	25	20
24	32	15	12
		28	39

2. **الألياف والسعرات الحرارية** تبيّن البيانات التالية حساب السعرات الحرارية وكمية الألياف في مجموعة متنوعة من حبوب الإفطار. استخدم البيانات للتنبؤ بالسعرات الحرارية في وجبة من الحبوب تحتوي على 4.5 g أو 5.5 g أو 7 g من الألياف.

السعرات الحرارية	الألياف (g)	السعرات الحرارية	الألياف (g)
149	1	133.5	1.5
114.5	1.5	115.5	0.5
85.5	0.5	143	1
116	1	109.5	2.5
110	1.5	119	0
53.5	0	113.5	0.5
196.5	8	102	0.5
99.5	0.5	117.5	0.5
114.5	6.5	186.5	6
140.5	3.5	154	1
122.5	0.5	389	11
110	2	114.5	4

3. **التعليم والرعاية الصحية** توضح البيانات التالية قوائم تصنيفات الأداء في التعليم والرعاية الصحية في 14 دولة. إذا كان ذلك مناسبًا. فاستخدم البيانات للتنبؤ بترتيب الرعاية الصحية إذا كان ترتيب التعليم 15 أو 28 أو 42.

الرعاية الصحية	التعليم	الرعاية الصحية	التعليم
35	8	45	1
18	9	48	2
13	10	50	3
20	11	37	4
28	12	39	5
15	13	26	6
29	14	21	7

4. **الوزن والميل لكل جالون** يريد أحد المتسوقين تحديد ما إذا كان هناك ارتباط خطي كبير وذو دلالة بين وزن السيارات وكفاءة استهلاك الوقود على الطريق السريع. إذا كان ذلك مناسبًا. فاستخدم البيانات الواردة أدناه للتنبؤ بالمسافة التي تقطعها السيارات التي تزن 2900 kg و 3300 kg و 4000 kg.

km/L	الوزن (kg)	km/L	الوزن (kg)
28	3460	32	3450
36	2897	32	3216
32	2805	34	2636
28	3067	40	2690
31	2716	51	2875
38	2595	36	2403
39	2326	35	2972
30	2911	34	2811

5. **التخرج والبطالة** أخذ خبير اقتصادي عينة من معدلات التخرج ومعدلات البطالة بين مختلف الدول في سنة معينة. إذا كان ذلك مناسبًا. فاستخدم البيانات الواردة أدناه للتنبؤ بمعدل البطالة إذا كانت معدلات التخرج 70% أو 80% أو 90%.

خريج جامعي	73	85	64	79	68	82
عاطل عن العمل	6.9	4.1	3.2	2.9	4.3	5.1
خريج جامعي	71	81	76	64	77	82
عاطل عن العمل	4.1	5.5	5	6.8	4.8	5.2

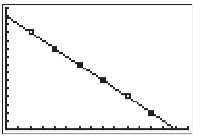
6. **تعداد السكان والجريمة** توضح البيانات التالية قوائم تصنيفات الأداء لتعداد السكان والجريمة في 14 دولة من الدول. إذا كان ذلك مناسبًا. فاستخدم البيانات للتنبؤ بتصنيف الجريمة إذا كان تصنيف السكان 15.

تعداد السكان	1	2	3	4	5	6	7
الجريمة	14	15	13	4	5	9	7
تعداد السكان	8	9	10	11	12	13	14
الجريمة	11	3	12	10	8	1	6

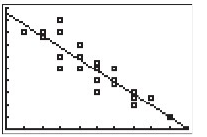
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

B **صِل بين كل من الرسوم البيانية التالية ومعامل الارتباط المقابل.**

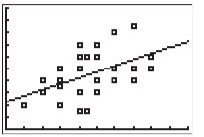
a.



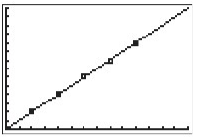
b.



c.



d.



7. $r = -0.90$

8. $r = 0.50$

9. $r = 1.00$

10. $r = -1.00$

11. **الدخل وتناول الطعام خارج المنزل** يجْري مطعم دراسة لتحديد العلاقة بين الدخل الشهري للفرد وعدد مرات تناول ذلك الشخص للطعام به كل شهر.

الدخل	500	1125	300	750	1250	950
الوجبات	4	10	3	6	12	8

a. ارسم مخطط انتشار للبيانات ثم ضعه في صورة خطية عن طريق إيجاد y ln$, x$).

b. ارسم مخطط انتشار للبيانات الخطية، واحسب r وفسرّها.

c. حدِّد ما إذا كانت r ذات دلالة عند المستوى 5%.

d. إذا كانت r لها دلالة كبيرة، فأوجد معادلة الانحدار ذات المربعات الأقل باستخدام نموذج البيانات الخطية لإيجاد نموذج للبيانات الأصلية.)تلميح: يمكنك مراجعة هذا في الدرس 5-3.(

e. إذا كان ذلك مناسبًا، فاستخدم معادلة الانحدار للتنبؤ بعدد المرات التي يتناول فيها شخص طعامًا خارج المنزل إذا كان الدخل الشهري لهذا الشخص يبلغ AED 2000 . هل تنبؤك صحيح؟ اشرح استنتاجك.

12. **إعلانات ومبيعات** ترغب شركة إعلان في تحديد قوة العلاقة بين عدد الإعلانات التي يبثها التليفزيون كل أسبوع وكمية مبيعات المنتجات)بآلاف الدراهم(.

الإعلانات	2	3	5	7	7
المبيعات (AED)	3	4	6	8	9
الإعلانات	8	9	10	10	12
المبيعات (AED)	10	12	12	13	15

a. ارسم مخطط انتشار للبيانات وحدد العلاقة. ثم أوجد معامل الارتباط.

b. حدّدْ إذا ما كانت هناك دلالة لمعامل الارتباط عند المستوى 10%. وإذا كان الأمر كذلك، فأوجد معادلة الانحدار ذات المربعات الأقل.

c. بفرض أن الشركة تبثُّ 15 إعلانًا خلال أسبوع واحد و18 إعلانًا في الأسبوع التالي، وكانت تكاليف كل إعلان AED 500. تنبأ عن الزيادة في الأرباح من الأسبوع الأول إلى الأسبوع الثاني.

13. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف *معامل التحديد*.

C a. **بيانيًا** ارسمْ مخطط انتشار للبيانات أدناه، ثم احسب معامل الارتباط r.

x	1	2	3	4	5	6
y	4	9	12	15	20	24

b. **عدديًا** أوجد الوسط الحسابي $\overline{y}$ لقيم y.

c. **عدديًا** حدد معادلة الانحدار ذي المربعات الأقل، وأوجد قيم $\hat{y}$ المتوقعة عن طريق التعويض عن كل قيمة من قيم x في المعادلة.

d. **عدديًا** استخدم الصيغ التالية لإيجاد التغير الكلي $\Sigma(y - \overline{y})^2$، والتغير المبرَّر $\Sigma(\hat{y} - \overline{y})^2$ والتغير غير المبرَّر $\Sigma(y - \hat{y})^2$.

e. **عدديًا** يتم استنتاج معامل التحديد عن طريق $r^2 = \frac{\text{التغير المبرر}}{\text{التغير الكلي}}$ استخدم الصيغة وإجاباتك من الجزء **d** لإيجاد r^2.

f. **تحليليًا** إذا كان التغير المبرر هو التغير الذي يمكن تفسيره بالعلاقة بين x و y، فما رأيك في معنى قيمة معامل التحديد الذي أوجدته؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

التبرير حدد ما إذا كانت كل عبارة من العبارات التالية صحيحة أم خطأ. اشرح إجابتك.

14. قيمة r التي تساوي 0.85– تشير إلى ارتباط خطي أقوى من قيمة r التي تساوي 0.75.

15. إذا كانت فرضية العدم مرفوضة، فهذا يعني أن قيمة ρ لا تختلف كثيرًا عن 0.

16. **تحدٍ** فكّرْ في مجموعتين من البيانات ذات المتغيرين C و D، واللتين تمثلان علاقات أُسيّة. مع الانحدار الأُسي، فإن قيمة الأساس b في المجموعة C هي المعكوس الضربي لقيمة b في المجموعة D. ومعاملات الارتباط لكلٍّ منهما تساوي 0.99. فما العلاقة بين خطوط الانحدار الخطية عند C و D؟

17. **الاختبار** فكّرْ في مجموعة البيانات أدناه حيث يمثل الصف A المتغير التفسيري ويمثل الصف B المتغير الاستجابي.

A	21	30	44	49	52	59
B	114	127	148	154	169	179

a. ارسم مخطط انتشار للبيانات. ثم حدد معادلة خط الانحدار ذي المربعات الأقل ومثلها بيانيًا في نفس نافذة مخطط الانتشار.

b. بدّلْ بين A و B وكرّرْ الجزء **a**.

c. ما تأثير التبديل بين المتغيرات التفسيرية ومتغيرات الاستجابة على خط الانحدار؟

18. **الكتابة في الرياضيات** صِفْ نقاط القوة والضعف لمعامل الارتباط كمقياس للارتباط الخطي لمجموعة بيانات ذات متغيرين.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة شاملة

19. كرة القدم يزعم زايد أنه قادر على رمي كرة قدم لمسافة 55 m على الأقل. وبعد 37 رمية، كان متوسط المسافة هو 57.7 m بانحراف معياري قدره 3.6 m. فهل توجد أدلة كافية لرفض افتراض زايد عند $\alpha = 0.05$؟ اشرح استنتاجك.

20. كرة البولينج أرادت سها وشيخة مقارنة نتائجهما في لعبة البولينج. فسجلتا نتائج 16 مباراة كما هو موضح.

a. احسب الوسط والانحراف المعياري لكل مجموعة من البيانات.

b. أنشئ فتراتي ثقة 99% لمتوسط نتائج كلٍّ من سها وشيخة.

c. صِغ عبارة تقارن بين تأثير الفترتين.

سها		شيخة	
112	109	88	169
98	116	129	190
143	131	146	99
109	98	170	108
121	122	95	181
84	128	111	183
106	121	108	122
100	107	181	99

إذا كان ذلك ممكنًا، فأوجد مجموع كل متسلسلة لا نهائية.

21. $a_1 = 4, r = \frac{5}{7}$

22. $a_1 = 14, r = \frac{7}{3}$

23. $16 + 12 + 9 + \ldots$

اكتب صيغة صريحة وصيغة ضمنية لإيجاد الحد رقم *n* لكل متتالية حسابية.

24. $10, 26.5, 43, \ldots$

25. $15, -9, -33, \ldots$

26. $3, \frac{11}{3}, \frac{13}{3}, \ldots$

عبّر عن كل عدد مركب بالصورة القطبية.

27. $6 - 8i$

28. $-4 + i$

29. $3 + 2i$

حدِّد ما إذا كان كل زوجين من المتجهات متوازيين.

30. $\mathbf{g} = \langle 3, 4, -6 \rangle, \mathbf{h} = \langle 9, 12, -18 \rangle$

31. $\mathbf{j} = \langle 9, -15, 11 \rangle, \mathbf{k} = \langle -14, 10, 7 \rangle$

32. $\mathbf{n} = \langle -16, -8, -13 \rangle, \mathbf{p} = \langle -15, 9, 5 \rangle$

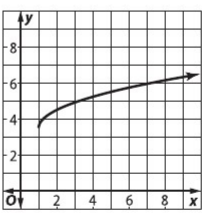
مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

33. SAT/ACT أي مما يلي يجب أن ينطبق على الرسم البياني؟

I. المجال بكامله من الأعداد الحقيقية.

II. الدالة هي $y = \sqrt{x} + 3.5$

III. المدى تقريبًا هو $\{y \mid y \geq 3.5\}$.



A I فقط

B II و III

C I و II و III

D II فقط

E III فقط

34. يبين الجدول إجمالي الحضور لدوري البيسبول الفرعي في بعض السنوات الأخيرة. أي مما يلي يمثل معادلة انحدار للبيانات؟

العام	الحضور (بالملايين)
1990	18.4
1995	25.2
2000	33.1
2005	37.6

F $y = 1.31x - 2588.15$

G $y = 1.46x - 2588.15$

H $y = 1.31x - 18.4$

J $y = 1.46x - 2588.15$

35. إجابة حرة بالنسبة للمسألة التالية، فكرْ في موقف من الحياة اليومية يعرض خصائص النمو الأسي أو اللوجيستي أو الاضمحلال.

a. حدّد الموقف ونوع النمو أو الاضمحلال الذي يمثّله الموقف.

b. اطرح سؤالًا أو قدّمْ افتراضًا عن الموقف.

c. ضع فرضيةً للإجابة عن السؤال.

d. طوّر وبرّرْ وطبّقْ أسلوب جمع وتنظيم وتحليل البيانات ذات الصلة.

e. وسّعْ طبيعة البيانات المجمعة، وافصلها عن الدالة المتصلة التي تصف مجموعة البيانات المعروفة.

f. عمّمْ النتائج واستخرج الاستنتاجات.

g. قارن بين الفروض والاستنتاجات.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مختبر تقنية التمثيل البياني
مستقيمات تناسُب الوسيط

الهدف

- استخدم تقنية أدوات التمثيل البياني لإيجاد مستقيم تناسب الوسيط من أجل تمثيل العلاقة المبيَّنة في مخطط الانتشار.

في الدروس السابقة، كنتَ قد استخدمت معادلات الانحدار لتمثيل مجموعة من البيانات. نوع آخر من الانحدار المستخدم في تمثيل البيانات هو مستقيم *تناسُب الوسيط*.

يتم إيجاد مستقيم تناسُب الوسيط بتقسيم مجموعة من البيانات إلى ثلاث مجموعات متساوية الحجم واستخدام المتوسطات لهذه المجموعات لتحديد معادلة انحدار البيانات.

النشاط 1 رسم مستقيم تناسُب الوسيط

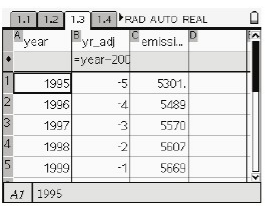
استخدم البيانات المدرجة في الجدول لرسم مستقيم تناسُب الوسيط.

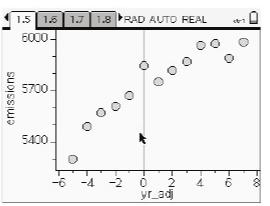
انبعاثات ثاني أكسيد الكربون المتصلة بالطاقة في الولايات المتحدة (مليون طن متري)

العام	انبعاثات	العام	انبعاثات
1995	5301	2002	5820
1996	5489	2003	5872
1997	5570	2004	5966
1998	5607	2005	5974
1999	5669	2006	5888
2000	5848	2007	5984
2001	5754		

المصدر: إدارة معلومات الطاقة

الخطوة 1 أدخل البيانات في ورقة بيانات ثم صمِّم مخطط انتشار للبيانات مع فرض أن المحور x يمثل عدد السنوات حيث 0 يمثل عام 2000 والمحور y يمثل الأطنان المترية من ثاني أكسيد الكربون.



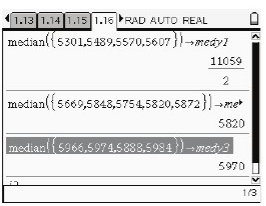


الخطوة 2 قسّم البيانات إلى ثلاث مجموعات متناظرة ومتساوية نسبيًّا. ستحتوي المجموعة الثانية على 5 قيم للبيانات، وستحتوي بقية المجموعات على 4. ثم أوجد الوسائط لقيم x و y لكل مجموعة.

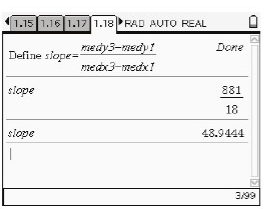
وسيط المجموعة 1: $(-3.5,\ 5529.5)$

وسيط المجموعة 2: $(1,\ 5820)$

وسيط المجموعة 3: $(5.5,\ 5970)$



الخطوة 3 يستخدم مستقيم تناسُب الوسيط نقاطَ الوسيط من المجموعة الأولى والثالثة لتحديد ميل ومتوسط نقاط الوسيط الثلاث على صورة نقطة على المستقيم. وباستخدام صيغة نقطة الميل، $y = m(x - a) + b$ حيث m = الميل و $(a,\ b)$ المتوسط، فيمكنك استنتاج مستقيم تناسُب الوسيط.



تلميح تقني

أيقونات استخدم أيقونات مختلفة لنقاط الوسيط لتميزها بسهولة عن نقاط البيانات العادية. أمسكْ بكل نقطة واختر Attributes لتغيير نوع الأيقونة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

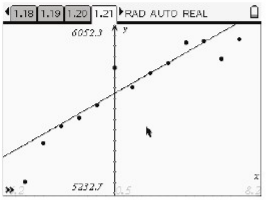
الخطوة 4 حدد متوسط y بالصيغة

$$avey = \frac{medy1 + medy2 + medy3}{3}.$$

حدد مستقيم تناسُب الوسيط على الصورة

$$med_med(x) = 48.944(x - 1) + 5773.17$$

ثم مثّل هذا المستقيم بيانيًا.



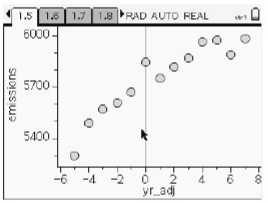
نصيحة دراسية

التفسير الهندسي هندسيًا، تحدّد نقاط الوسيط الثلاثة مثلثًا ومتوسط قيم x و y يمثل النقطة الوسطى في المثلث.

النشاط 2 حساب مستقيم تناسُب الوسيط.

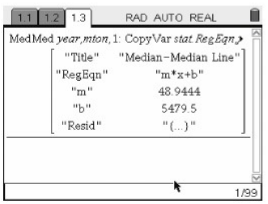
استخدم البيانات المدرجة في نشاط 1 لحساب مستقيم تناسُب الوسيط.

الخطوة 1 احذف الأزواج المرتبة الثلاثة التي تمثّل الوسائط ثم صمم مخطط انتشار البيانات.

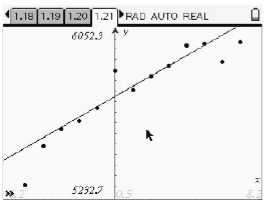


الخطوة 2 احسبْ معادلة مستقيم تناسب الوسيط ثم مثّل المستقيم بيانيًا.

افتح شاشة جديدة في الحاسبة. وتحت قائمة Statistics: Stat Calculations، اختر Median-Median Line. أدخلْ قوائم قيم x و y.



لاحظ أن معادلة مستقيم تناسب الوسيط الموجودة في نشاط 1 متطابقة مع معادلة الانحدار المبينة على الآلة الحاسبة.



تحليل النتائج

1. اشرح معنى ميل مستقيم تناسُب الوسيط في هذا الموقف.
2. هل من المعقول أن نتوقع من هذا الخط تمثيل البيانات بشكل غير محدد؟ اشرح لماذا أو لماذا لا.
3. كم طنًا مترًا من انبعاثات ثاني أكسيد الكربون يمكن أن نتوقعه بحلول عام 2015؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الاحتمال والفرص

الحالي

1 إيجاد احتمال وقوع حدث.

2 إيجاد فرص نجاح وفشل حدث.

لماذا؟

بحث تسويقي لتحديد معدلات مشاهدة التلفاز، تقدر شركة نيلسن ميديا للأبحاث عدد مشاهدي أي برنامج تلفزيوني مقدم. ويتم ذلك عن طريق اختيار عينة من المشاهدين، ومطالبتهم بتسجيل عادات مشاهدتهم في دفتر تسجيل، ثم حساب عدد مشاهدي كل برنامج. وهناك ما يقرب من 100 مليون أسرة في الولايات المتحدة الأمريكية، ويتم اختيار 5000 أسرة فقط لمجموعة العينة. فما احتمال اختيار أي أسرة واحدة من هذه الأسر للمشاركة؟ *ستُحلَّ هذه المسألة في المثال 1.*

عندما نشك في وقوع حدث، يمكننا قياس فرص وقوعه عن طريق **الاحتمال**. فعلى سبيل المثال، يكون هناك 52 نتيجة ممكنة عند اختيار بطاقة عشوائيًا من مجموعة قياسية من بطاقات اللعب. وتسمى مجموعة نتائج حدث باسم **الفضاء العيني**. وتسمى النتيجة المرغوبة، لسحب بطاقة لعب "ملك القلوب" على سبيل المثال، **نجاح**. وتسمى أي نتيجة أخرى **فشل**. ويكون احتمال وقوع حدث ما هي نسبة عدد طرق إمكانية وقوع هذا الحدث إلى إجمالي عدد النتائج في الفضاء العيني، وهي مجموع حالات النجاح والفشل. وهناك طريقة واحدة لسحب بطاق "ملك القلوب". وهناك إجمالي عدد نتائج يبلغ 52 نتيجة عند اختيار بطاقة من مجموعة قياسية من بطاقات اللعب؛ إذًا احتمال اختيار ملك القلوب هو $\frac{1}{52}$.

احتمال النجاح والفشل

1 إذا كانت إمكانية نجاح حدث بعدد s من الطرق وفشله بعدد f من الطرق، إذًا فاحتمال نجاح $P(s)$ واحتمال فشل $P(f)$ هما كما يلي.

$$P(s) = \frac{s}{s+f} \qquad P(f) = \frac{f}{s+f}$$

مثال 1

بحث تسويقي **ما احتمال اختيار أية أسرة واحدة للمشاركة في مجموعة العينة التي ستختارها شركة نيلسن ميديا للأبحاث؟**

استخدم قانون الاحتمال. بما أنه سيتم اختيار 5000 أسرة للمشاركة، فإن $s = 5000$. ويمثل المقام، $s + f$. إجمالي عدد الأسر. في حين يمثل المتغير s من يتم اختيارهم. ويمثل المتغير f الذين لم يتم اختيارهم. إذًا، $s + f = 100{,}000{,}000$.

$$P(5000) = \frac{5000}{100{,}000{,}000} = \frac{1}{20{,}000}$$

يكون احتمال اختيار أية أسرة واحدة هي $\frac{1}{20{,}000} = .005.0\%$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يكون احتمال الحدث الذي لا يمكن فشله هي 1. واحتمال الحدث الذي لا يمكن نجاحه هي 0. ولذلك، يقع احتمال النجاح $P(s)$ دائمًا بين 0 و 1، شاملة هذين العددين. أي أن $0 \leq p(s) \leq 1$.

مثال 2

يحتوي كيس على 5 كرات زجاجية صغيرة صفراء و 6 زرقاء و 4 بيضاء.

a. ما احتمال أن تكون الكرة الزجاجية الصغيرة التي يتم اختيارها عشوائيًا صفراء؟

b. ما احتمال أن تكون الكرة الزجاجية الصغيرة التي يتم اختيارها عشوائيًا بيضاء؟

a. تكُتب احتمال اختيار كرة زجاجية صغيرة صفراء(صفراء) P. وهناك خمس طرق لاختيار كرة زجاجية صغيرة صفراء من الحقيبة، و10= 4 + 6 طرق لعدم اختيار كرة زجاجية صغيرة صفراء. إذًا، $s = 5$ و $f = 10$.

$$P(\text{صفراء}) = \frac{5}{5+10} = \frac{1}{3} \qquad P(s) = \frac{s}{s+f}$$

احتمال اختيار كرة زجاجية صغيرة صفراء هي $\frac{1}{3}$

b. إذا كانت هناك 4 طرق لاختيار كرة زجاجية صغيرة بيضاء. إذًا هناك 11 طريقة لعدم اختيار كرة زجاجية صغيرة بيضاء.

$$P(\text{ليست بيضاء}) = \frac{11}{4+11} = \frac{11}{15}$$

احتمال عدم اختيار كرة زجاجية صغيرة بيضاء هي $\frac{11}{15}$

تسُتخدم غالبًا طرق الحساب التي استخدمتَها للتباديل والتوافيق في تحديد الاحتمال.

مثال 3

تحتوي لوحة دوائر إلكترونية كهربية بها 20 رقاقة حاسوب على 4 رقاقات معيبة. فإذا تم اختيار 3 رقاقات عشوائيًا، فما احتمال أن تكون الثلاثة كلها معيبة؟

هناك $C(4, 3)$ طرق لاختيار 3 رقاقات معيبة من أصل 4، و $C(20, 3)$ طرق لاختيار 3 شرائح من أصل 20.

$$P(\text{3 رقاقات معيبة}) = \frac{C(4,3)}{C(20,3)} \quad \begin{matrix} \leftarrow \textit{طرق لاختيار 3 رقاقات معيبة} \\ \leftarrow \textit{طرق لاختيار 3 رقاقات} \end{matrix}$$

$$= \frac{\frac{4!}{1!\,3!}}{\frac{20!}{17!\,3!}} = \frac{1}{285}$$

احتمال اختيار 3 رقاقات حاسوب معيبة هي $\frac{1}{285}$

إن احتمال النجاح واحتمال الفشل لأي حدث تساوي دائمًا 1.

$$P(s) + P(f) = \frac{s}{s+f} + \frac{f}{s+f}$$
$$= \frac{s+f}{s+f} = 1$$

تستخدم هذه الخاصية غالبًا في إيجاد احتمال وقوع الأحداث. فعلى سبيل المثال، تكون احتمال سحب بطاقة "ملك القلوب" هي $P(s) = \frac{1}{52}$. إذًا احتمال عدم سحب هذه البطاقة هي $P(f) = 1 - \frac{1}{52}$ وتساوي $\frac{51}{52}$. ونظرًا لأن مجموعيهما يساوي 1، فإنه يطلق على $P(s)$ و $P(f)$ اسم **متممين**.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مثال 4

توصلت الشركة CyberToy إلى أنه من أصل دورة إنتاج تبلغ 50 لعبة، هناك 17 لعبة معيبة. وإذا تم اختيار 5 ألعاب عشوائيًا، فما احتمال أن تكون واحدة معيبة على الأقل؟

إن متمة اختيار لعبة واحدة معيبة على الأقل هي عدم اختيار ألعاب معيبة. بمعنى أن (لعبة واحدة معيبة على الأقل) P = 1 − (عدم وجود ألعاب معيبة) P.

(لعبة واحدة معيبة على الأقل) P = 1 − (عدم وجود ألعاب معيبة) P.

$$= 1 - \frac{C(33, 5)}{C(50, 5)} \quad \leftarrow \textit{طرق اختيار 5 ألعاب معيبة} \quad \leftarrow \textit{طرق اختيار 5 ألعاب}$$

$$= 1 - \frac{237{,}336}{2{,}118{,}760}$$

$$\approx 0.8879835375 \quad \textit{باستخدام حاسبة.}$$

تبلغ احتمال اختيار لعبة واحدة معيبة على الأقل حوالي 89%.

هناك طريقة أخرى لقياس فرصة وقوع حدث ما تتمثل في استخدام **الفرص (الأرجحية)**. ويستخدم احتمال نجاح حدث ومتمّمه عند حساب فرص (أرجحية) وقوع حدث ما.

الفرص

2 إن فرص أو أرجحية تحقق نتيجة ناجحة لحدث ما هو نسبة احتمال نجاحه إلى احتمال فشله.

$$\text{الفرص} = \frac{P(s)}{P(f)}$$

مثال 5

يجب أن تختار عائشة عشوائيًا رقاقة من صندوق لتحديد السؤال الذي ستتلقاه في مسابقة في مادة الرياضيات. وهناك 6 رقائق زرقاء و 4 رقائق حمراء في هذا الصندوق. فإذا اختارت رقاقة زرقاء، فسيتعين عليها حل مسألة حساب مثلثات. وإذا كانت الرقاقة حمراء، فسيتعين عليها كتابة برهان هندسي.

a. ما احتمال سحب عائشة رقاقة حمراء؟

b. ما الفرص التي سيتعين على عائشة فيها كتابة برهان هندسي؟

a. احتمال اختيار عائشة رقاقة حمراء هي $\frac{4}{10}$ أو $\frac{2}{5}$.

b. لإيجاد الفرص التي سيتعين فيها على عائشة كتابة برهان هندسي، ستتعين عليك معرفة احتمال الحصول على نتيجة ناجحة ونتيجة فاشلة.

افترض أن s تمثل اختيار رقاقة حمراء، وأن f تمثل عدم اختيار رقاقة حمراء.

$$P(s) = \frac{2}{5} \qquad P(f) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

الآن أوجد الفرص.

$$\frac{P(s)}{P(f)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}$$

إن فرص اختيار عائشة رقاقة حمراء، ومن ثم يكون لزامًا عليها كتابة برهان هندسي هي $\frac{2}{3}$. *وتتم قراءة النسبة $\frac{2}{3}$ على النحو "2 إلى 3".*

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

أحيانًا عند حساب الفرص، ينبغي لك إيجاد الفضاء العيني أولاً. وقد يتضمن هذا إيجاد التوافيق والتباديل.

مثال 6

تم اختيار 12 طالبًا و 16 طالبة للتأهل على نحو متساوٍ لـ 6 منح دراسية جامعية. وفي حالة الاختيار العشوائي لمن سيحصلون على هذه المنح، فما فرص أن يكون منهم 3 طلاب و 3 طالبات؟

أولاً، حدد العدد الإجمالي للمجموعات المحتملة.

$C(12, 3)$ *عدد المجموعات التي تتألف من 3 طلاب*
$C(16, 3)$ *عدد المجموعات التي تتألف من 3 طالبات*

استخدام مبدأ العد الأساسي بإمكاننا إيجاد عدد المجموعات المحتملة التي تتألف من 3 طلاب و 3 طالبات.

$C(12, 3) \cdot C(16, 3) = \frac{12!}{9!\,3!} \cdot \frac{16!}{13!\,3!}$ أو 123,200 مجموعة محتملة

إجمالي عدد المجموعات التي تتألف من 6 حاصلين على المنح من أصل المتأهلين البالغ عددهم 28 هو $C(28, 6)$ أو 376,740. إذًا، عدد المجموعات التي لا تضم 3 طلاب و 3 طالبات هو 123,200 − 376,740 أو 253,540.

وأخيرًا، حدد الفرص.

$$P(s) = \frac{123{,}200}{376{,}740} \qquad P(f) = \frac{253{,}540}{376{,}740}$$

$$\text{الفرص} = \frac{\frac{123{,}200}{376{,}740}}{\frac{253{,}540}{376{,}740}} \text{ أو } \frac{880}{1811}$$

وبالتالي، فإن فرص اختيار مجموعة تضم 3 طلاب و 3 طالبات هي $\frac{880}{1811}$ أو قريبة من $\frac{1}{2}$.

التمارين

اقرأ وادرس هذا الدرس للإجابة عن كل سؤال.

1. **اشرح** كيف تفسّر $P(E) = \frac{1}{2}$.
2. أوجد مثالين على استخدام الاحتمال في الصحف أو المجلات. **صِف** كيفية تطبيق مفاهيم الاحتمال.
3. **اكتب** عن الفرق بين احتمال النتيجة الناجحة لحدث وفرص النتيجة الناجحة لحدث.
4. **القرار قرارك** أوضح خليفة أن فرصه لكسب انتخابات اتحاد الطلبة هي 3 إلى 2. وأخبره خميس بأنه استنادًا إلى تلك الفرص،
5. يبلغ احتمال فوزه 60%؛ لكن خليفة لم يوافقه على ذلك. فأيهما على صواب؟ اشرح إجابتك. يحتوي صندوق على 3 كرات تنس و 7 كرات سوفتبول و 11 كرة بيسبول. ويتم اختيار كرة واحدة عشوائيًا. أوجد كل احتمال.
6. (كرة سوفتبول) P
7. (ليست كرة بيسبول) P
8. (كرة جولف) P
9. في أحد المكاتب، هناك 7 موظفين قُدامى و 4 موظفين جدد. وإذا استُدعي أحدهم عشوائيًا عبر الهاتف، فأوجد احتمال أن يكون هذا الشخص المستدعى موظفًا قديمًا.

من أصل 7 هِرر صغيرات ولدتهن هرة كبيرة في بطن واحدة، كانت 4 منها مخططات. وتم اختيار 3 هِرر منها عشوائيًا. فأوجد فرص كل حدث.

10. الهِرر الثلاث مخططات.
11. واحدة فقط مخططة.
12. واحدة غير مخططة.
13. **الأرصاد الجوية** أفادت الأرصاد الجوية المحلية بأن نسبة احتمال سقوط الأمطار يوم السبت هي 80%. فما فرص احتمال عدم سقوط الأمطار يوم السبت؟ (*إرشاد*: أعد كتابة النسبة المئوية في صورة كسر.)

باستخدام مجموعة قياسية من بطاقات اللعب تضم 52 ورقة، أوجد كل احتمال. *تشتمل الصور في بطاقات اللعب على الملوك والملكات والأولاد.*

14. (بطاقة عليها صورة) P
15. (بطاقة رقمها 6 أو أقل) P
16. (بطاقة سوداء، ليس عليها صورة) P
17. (بطاقة ليس عليها صورة) P

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يتم التقاط زهرة واحدة عشوائيًا من زهرية تضم 5 أزهار حمراوات، وزهرتين بيضاوين، و 3 أزهار وردية. أوجد كل احتمال.

18. P(حمراء)

19. P(بيضاء)

20. P(ليست وردية)

21. P(حمراء أو وردية)

يمتلك رشيد في مجموعته الموسيقية 10 أقراص مدمجة لأغاني الراب و 18 لأغاني الروك و 8 للأغاني الشعبية و 4 لأغاني البوب. ويتم اختيار اثنين عشوائيًا. أوجد كل احتمال.

22. P(2 بوب)

23. P(2 شعبي)

24. P(1 راب و 1 روك)

25. P(ليست روك)

26. يتم إلقاء مكعب أعداد مرتين. فما احتمال الحصول على العدد 5 مرتين؟

يحتوي صندوق على كرة زجاجية صغيرة لونها أخضر و 2 باللون الأصفر و 3 باللون الأحمر. تم سحب كرتين منها عشوائيًا دون إعادتهما. فما فرص تحقق كل حدث؟

27. سحب كرتين زجاجيتين صغيرتين لونهما أحمر

28. عدم سحب كرات زجاجية صغيرة لونها أصفر

29. سحب كرة زجاجية صغيرة لونها أخضر وأخرى لونها أحمر

30. سحب لونين مختلفين

من أصل 27 طالبًا في الفصل، كان 11 منهم عيونهم زرقاء، و 13 عيونهم بنية، و 3 عيونهم خضراء. فإذا تم اختيار 3 طلاب عشوائيًا، فما فرص وقوع كل حدث؟

31. الثلاثة كلهم عيونهم زرقاء

32. 2 عيونهما بنيتان و 1 عينه زرقاء

33. لا أحد عيناه بنيتان

34. واحد فقط عيناه خضراوان

35. فرص الفوز بجائزة في أحد عروض اليانصيب الذي يتألف من تذكرة يناصيب واحدة هي $\frac{1}{249}$. فما احتمال الفوز بتذكرة واحدة؟

36. إذا كانت احتمال القبول للدراسة بجامعة حكومية هي $\frac{4}{5}$. فما فرص القبول بهذه الجامعة؟

36. من مجموعة بطاقات لعب تضم 52 بطاقة. يتم سحب 5 بطاقات. فما فرص سحب 3 أوراق من مجموعة متوافقة واحدة وسحب الورقتين الأخريين من مجموعة متوافقة أخرى؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

37. **الطقس** أثناء إعصار معين، حدد مراقبو الإعصار أن فرص ضربه للساحل هي 1 إلى 4. فما احتمال حدوث هذا؟

38. **البيسبول** عند نقطة واحدة في موسم 1999، بلغ متوسط ضربات المضرب للاعب كين جريفي الابن 0.325. فما فرص ضربه للكرة في المرة التالية التي أخذ فيها دوره لضرب الكرة بالمضرب؟

39. **الأمن** تستخدم عبير قفلاً توفيقيًا على خزانتها ذات الثلاث عجلات. وعلى كل عجلة 10 أرقام من 0 إلى 9. ويعُد التوفيق ترتيبًا تسلسليًا معينًا بدون تكرار للأرقام.

a. ما احتمال تخمين شخص ما للتوفيق الصحيح؟

b. في حالة إمكانية تكرار الأرقام، ما الفرص المعاكسة لتخمين شخص ما للتوفيق؟

40. **تفكير نقدي** أجرى رشيد استطلاعًا حول عدد الدببة في حديقة بيلوستون الوطنية. وقد رصد دببين؛ أحدهما له فراء فاتح اللون والآخر ذو فراء غامق اللون.

a. افترض تساوي أعداد ذكور وإناث الدببة في هذه الحديقة. فما احتمال أن يكون كلا الدببين ذكرًا؟

b. إذا كان الدب فاتح اللون ذكرًا، فما فرص أن يكون كلاهما ذكرًا؟

41. **الاختبار** تعطي المعلمة علياء في صف التفاضل والتكامل 20 مسألة للدراسة. وستختار 10 مسائل منها ليجيب عنها الطلاب في امتحان قادم. وتستطيع غاية حل 15 مسألة منها.

a. أوجد احتمال أن تستطيع غـاية حل الأسئلة العشرة كلها الموجودة في الاختبار.

b. أوجد فرص معرفة غاية بكيفية حل 8 مسائل.

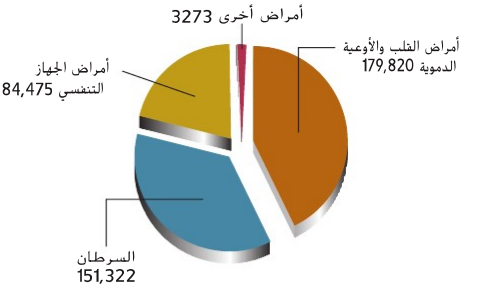
42. **معدل الوفيات** خلال عام 1990، ارتبط التدخين بما يعادل 418,890 حالة وفاة في الولايات المتحدة الأمريكية. ويوضح التمثيل البياني الأمراض التي سببت حالات الوفاة هذه المرتبطة بالتدخين.

a. أوجد احتمال أن تكون الوفاة المرتبطة بالتدخين نتيجة إما الإصابة بمرض قلبي وعائي أو الإصابة بالسرطان.

b. حدد الفرص المعاكسة لأن تكون الوفاة المرتبطة بالتدخين ناجمة عن الإصابة بالسرطان.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوفيات الناجمة عن التدخين

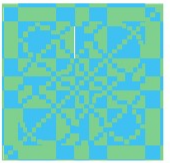


43. **تفكير نقدي** يقطع سباك أنبوبًا نصفين عند نقطة يتم اختيارها عشوائيًا. فما احتمال أن يبلغ طول القطعة الأطول من الأنبوب على الأقل 8 أمثال طول القطعة الأقصر منه؟

مراجعة شاملة

أوجد مجموع كل مما يلي.

44. **المنسوجات** غالبًا ما يمكن صناعة الأنماط المختلفة من الأقمشة عن طريق تعديل تمثيل بياني حسابي. ويمكن تمثيل النمط الموجود على اليسار عن طريق منحنى ذي عروتين.



a. افترض أن المصمم أراد البدء بمنحنى ذي عروتين كان عبارة عن 6 وحدات من البداية إلى النهاية بالطول. فما المعادلة القطبية التي كان يمكن استخدامها؟

b. ما المعادلة القطبية التي كان يمكن استخدامها لإنشاء منحنى ذي عروتين كان عبارة عن 8 وحدات من البداية إلى النهاية بالطول؟

مثّل كل معادلة قطبية على شبكة قطبية.

45. $\theta = -\frac{\pi}{4}$

46. $r = 1.5$

47. $\theta = -150°$

أوجد ناتج الضرب المتجهي لكل من u و v. ثم وضّح أن v × u عمودي على كل من u و v.

48. $\mathbf{u} = \langle 1, 9, -1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, 6, -4 \rangle$

49. $\mathbf{u} = \langle -3, 8, 2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, -5, -7 \rangle$

50. $\mathbf{u} = \langle 9, 0, -4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -6, 2, 5 \rangle$

أوجد الصورة المركبة ومقدار $\overline{AB}$ باستخدام نقطتي البداية والنهاية المذكورتين. ثم أوجد متجه وحدة في اتجاه $\overline{AB}$.

51. $A(6, 7, 9)$, $B(18, 21, 18)$

52. $A(24, -6, 16)$, $B(8, 12, -4)$

53. $A(3, -5, 9)$, $B(-1, 15, -7)$

54. يحتوي وعاء على أربع تفاحات وثلاث موزات وثلاث برتقالات وثمرتي كمثرى. فإذا تم اختيار ثمرتين من هذه الفواكه عشوائيًا، فما فرص اختيار برتقالة وموزة؟ (الدرس 8-10)

55. **توفير الوقود** يوضح الجدول محركات بسعات مختلفة توفرها إحدى شركات تصنيع السيارات ومقادير توفير الوقود الخاصة بكل منها. (الدرس 7-10)

سعة المحرك (لتر)	المسافة بالكيلومترات على الطريق السريع (km/L)
1.6	34
2.2	37
2.0	30
6.2	26
7.0	24
3.5	29
5.3	24
2.4	33
3.6	26
6.0	24
4.4	23
4.6	24

a. ارسم مخطط انتشار للبيانات، وحدد العلاقة.

b. احسب معامل الارتباط وفسره. وحدد ما إذا كان ذا دلالة عند المستوى 10%.

c. إذا كان الارتباط ذا دلالة عند المستوى 10%، فأوجد معادلة الانحدار التي بها مربعات أقل، وفسّر الميل والتقاطع في السياق.

d. استخدم معادلة الانحدار التي أوجدتها في الجزء c للتنبؤ بالكيلومترات المتوقعة لكل لتر ستقطعه السيارة بالمحرك الذي تبلغ سعته 8.0 L. حدد ما إذا كان هذا التنبؤ معقولاً. اشرح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

56. استخدم مثلث باسكال للتفكيك $\left(3a + \frac{2}{3}b\right)^4$.

اكتب معادلة قطبية ودليلاً للمخروط ذي الخواصّ المعطاة ومثّله بيانيًا.

57. $e = 1$; الرأس عند $(0, -2)$

58. $e = 3$; الرؤوس عند $(0, 3)$ و $(0, 6)$

أوجد قياس الزاوية الواقعة بين كل زوج من المتجهات مقربًا النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة.

59. $\mathbf{u} = \langle 2, 9, -2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 7, 6\rangle$

60. $\mathbf{m} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ و $\mathbf{n} = -7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$

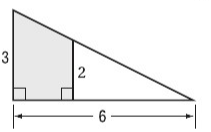
استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل المخروط الناتج عن كل معادلة بيانيًا.

61. $7x^2 - 50xy + 7y^2 = -288$

62. $x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 16\sqrt{3}x + 16y = 0$

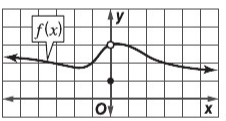
مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

63. SAT/ACT ما مساحة المنطقة المظللة؟



A 5 C 7 E 9
B 6 D 8

64. وفق التمثيل البياني لـ $y = f(x), \lim_{x \to 0} f(x) =$



A 0 C 3
B 1 D النهاية غير موجودة.

65. المراجعة أي مما يلي يصف على نحو أفضل السلوك الطرفي لـ $f(x) = x^{10} - x^9 + 5x^8$؟

F $f(x) \to \infty$ عند $x \to \infty$، $f(x) \to -\infty$ عند $x \to \infty$
G $f(x) \to \infty$ عند $x \to \infty$، $f(x) \to \infty$ عند $x \to -\infty$
H $f(x) \to -\infty$ عند $x \to \infty$، $f(x) \to \infty$ عند $x \to -\infty$
J $f(x) \to -\infty$ عند $x \to -\infty$، $f(x) \to \infty$ عند $x \to \infty$

66. المراجعة أي مما يلي يصف التمثيل البياني لـ $g(x) = \frac{1}{x^2}$؟

1. هذا التمثيل البياني به انفصال لا نهائي.
2. هذا التمثيل البياني به انفصال قفزي.
3. هذا التمثيل البياني به نقطة انفصال.

F 1 فقط G 2 فقط H 1 و 2 فقط
J 1 و 3 فقط K 1 و 2 و 3

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-6 احتمالات الأحداث المركبة

الحالي

1 إيجاد احتمال وقوع أحداث مستقلة وغير مستقلة.

2 تحديد الأحداث المنفصلة.

3 إيجاد احتمال وقوع الأحداث المنفصلة وغير المنفصلة.

لماذا؟

● **النقل** وفقًا لإحصائيات هيئة النقل، فإن أفضل عشر طائرات تصل في الوقت المحدد بنسبة 80%. وخلال عطلتها، من المقرر أن تقوم عائلة زايد برحلات طيران مباشرة إلى كل من دبي وباريس والقاهرة ولندن وكازابلانكا في أيام مختلفة. فما احتمال وصول كل رحلاتهم الجوية في الموعد؟

نظرًا لأن هذه الرحلات الجوية تقلع في أيام مختلفة، فإن الرحلات الأربع تمثل أحداثًا مستقلة. افترض أن A يمثل وصول الطائرة في الموعد المحدد.

$$P(\text{وصول كل الرحلات الجوية في الموعد المحدد}) = \underbrace{P(A)}_{\text{الرحلة الجوية 4}} \cdot \underbrace{P(A)}_{\text{الرحلة الجوية 3}} \cdot \underbrace{P(A)}_{\text{الرحلة الجوية 2}} \cdot \underbrace{P(A)}_{\text{الرحلة الجوية 1}}$$

$$= (0.80)^4 = 0.4096 \approx 41\%$$

حيث $P(A) = 0.80$

وبذلك، يصبح احتمال وصول الرحلات الجوية الأربع كلها في موعدها المحدد هي 41%.

توضح هذه المسألة أن احتمال وقوع أكثر من حدث مستقل هي ناتج ضرب احتمالات الأحداث.

احتمال وقوع حدثين مستقلين

1 إذا كان A و B حدثين مستقلين، فإن احتمال وقوع كلا الحدثين معًا هو ناتج ضرب احتمال وقوع كل منهما بمفرده.

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \cdot P(B)$$

مثال 1

باستخدام مجموعة بطاقات لعب قياسية، أوجد احتمال اختيار بطاقة عليها صورة، ثم وضعها في مجموعة البطاقات مرة أخرى، ثم اختيار بطاقة ملك.

افترض أن A يمثل بطاقة لعب عليها صورة لأول ورقة سُحبت من المجموعة، وافترض أن B تمثل الملك في الاختيار الثاني.

$$P(A) = \frac{12}{52} \text{ أو } \frac{3}{13} \quad \frac{\text{12 بطاقة عليها صورة}}{\text{52 بطاقة في مجموعة قياسية}}$$

$$P(B) = \frac{4}{52} \text{ أو } \frac{1}{13} \quad \frac{\text{4 بطاقات ملك}}{\text{52 ورقة في مجموعة قياسية}}$$

كانت عمليتا السحب مستقلتين لأنه عند إعادة البطاقة إلى مجموعة البطاقات، لم تتأثر نتيجة السحب في المرة الثانية بالسحب في المرة الأولى.

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$= \frac{3}{13} \cdot \frac{1}{13} = \frac{3}{169}$$

احتمال اختيار بطاقة عليها صورة أولاً، ثم وضعها في مجموعة البطاقات مرة أخرى، ثم اختيار بطاقة الملك هي $\frac{3}{169}$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مثال 2

الصحة المهنية **توضح الإحصاءات التي تم جمعها في إحدى مناطق تمدين فحم أن احتمال إصابة عامل منجم بمرض الرئة السوداء هي $\frac{5}{11}$. كما أن احتمال إصابته بالربو هي $\frac{1}{5}$. وإذا لم تؤثر إحدى المشكلات الصحية على الأخرى، فما احتمال عدم إصابة عامل منجم تم اختياره عشوائيًا بمرض الرئة السوداء مع احتمال إصابته من ناحية أخرى بالتهاب المفاصل؟**

الحدثان مستقلان لأن الإصابة بمرض الرئة السوداء لا يؤثر على الإصابة بالتهاب المفاصل.

(عدم الإصابة بمرض الرئة السوداء والتهاب المفاصل) p = [(مرض الرئة السوداء) p-1] • (التهاب المفاصل) p

$$= \left(1 - \frac{5}{11}\right) \cdot \frac{1}{5} \text{ أو } \frac{6}{55}$$

احتمال عدم إصابة عامل منجم مختار عشوائيًا بمرض الرئة السوداء، مع احتمال إصابته من ناحية أخرى بمرض التهاب المفاصل هي $\frac{6}{55}$.

في رأيك. ماذا كانت ستصبح احتمال اختيار بطاقتين عليهما صورة إذا لم تتم إعادة وضع البطاقة المسحوبة في المرة الأولى في المجموعة؟ على نقيض الحالة في المثال 1، فالحدثان في هذه الحالة غير مستقلين (تابعان) لأن نتيجة الحدث الأول تؤثر على الحدث الثاني. ويتم حساب هذا الاحتمال أيضًا باستخدام ناتج ضرب الاحتمالين.

البطاقة الأولى *البطاقة الثانية*

(بطاقة عليها صورة) $p = \frac{12}{52}$ (بطاقة عليها صورة) $p = \frac{11}{51}$

لاحظ أنه عند إزالة بطاقة لعب عليها صورة من مجموعة بطاقات اللعب، لا يكون ذلك إنقاصًا لبطاقة لعب عليها صورة فقط. وإنما يكون أيضًا إنقاصًا لبطاقة لعب واحدة بصفة عامة في مجموعة بطاقات اللعب.

$$p \text{ (بطاقتان عليهما صورة)} = \frac{12}{52} \cdot \frac{11}{51} = \frac{11}{221}$$

بذلك، يصبح الاحتمال لاختيار بطاقتين عليهما صورة من مجموعة بطاقات لعب دون إعادة وضعهما هي $\frac{11}{221}$ أو حوالي $\frac{1}{20}$.

احتمال وقوع حدثين غير مستقلين

إذا كان A و B حدثين غير مستقلين، فإن احتمال وقوع كلا الحدثين هي ناتج ضرب احتمال وقوع كل منهما بمفردها.

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \cdot P(B \text{ يتبع } A)$$

مثال 3

تمتلك فاطمة في سيارتها 3 أقراص مدمجة لأغاني الروك و 4 للأغاني الشعبية وقرصين مدمجين لموسيقى الجاز. وفي أحد الأيام، وقبل بدء القيادة،سحبت قرصين مدمجين من حاملة الأقراص المدمجة لديها دون النظر إليهما.

a. حدد ما إذا كان الحدثان مستقلين أم غير مستقلين.

b. ما احتمال أن يكون كلا القرصين المدمجين لأغاني روك؟

a. الحدثان غير مستقلين. هذا الحدث يكافئ اختيار قرص مدمج واحد، مع عدم إعادة وضعه، ثم اختيار قرص مدمج آخر.

b. حدد الاحتمال.

(روك، روك) p = (روك) p •(روك يتبع اختيار قرص الروك المدمج في المرة الأولى) p

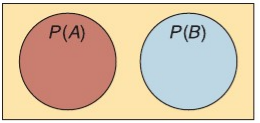
(روك، روك) $p = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8}$ أو $\frac{1}{12}$

احتمال اختيار فاطمة لقرصين مدمجين لأغاني الروك هي $\frac{1}{12}$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

في كثيرة من الأحيان، لا يمكن لحدثين الوقوع في نفس الوقت. فعلى سبيل المثال، عند إلقاء مكعب أعداد، ما احتمال الحصول على 2 أو 5؟ في هذا الموقف، يتعذر وقوع كلا الحدثين في نفس الوقت. وهذا يعني أن الحدثين **منفصلان**. وتكون احتمال الحصول على 2 أو 5 عند رمي مكعب أعداد هي $P(2) + P(5)$، أي $\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ أو $\frac{2}{6}$.

لاحظ أن الحدثين غير متداخلين، كما هو موقع في مخطط فن. إذًا، يمكن تمثيل احتمال وقوع حدثين منفصلين من خلال مجموع مساحتي الدائرتين.



الحدثان A و B منفصلان.

احتمال الأحداث المنفصلة

إذا كان الحدثان A و B منفصلين، فإن احتمال وقوع *A or B* هو مجموع الاحتمالين الخاصتين بوقوعهما.

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$$

مثال 4

يشارك سالم كمتسابق في لعبة تقوم على أنه إذا اختار كرة زرقاء أو حمراء، فإنه يحصل على رحلة بحرية مدفوعة التكاليف كاملة في منطقة البحر الكاريبي. ويتعين على سالم اختيار الكرة عشوائيًا من صندوق يحتوي على كرتين زرقاوين و 3 حمراء و 9 صفراء و 10 خضراء. فما احتمال فوزه بالرحلة البحرية؟

هذان حدثان منفصلان لأن سالم لا يستطيع اختيار كرة زرقاء وكرة حمراء في نفس الوقت. أوجد مجموع احتمالين كل حدث بمفرده.

$$p(\text{زرقاء or حمراء}) = p(\text{زرقاء}) + p(\text{حمراء})$$

$$p(\text{زرقاء}) = \frac{2}{24} \qquad p(\text{حمراء}) = \frac{3}{24} \qquad \frac{3}{24} + \frac{2}{24} = \frac{5}{24}$$

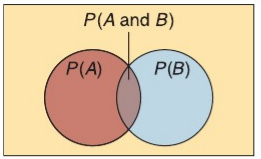
احتمال فوز سالم بالرحلة البحرية هي $\frac{5}{24}$.

عند إلقاء مكعبي أعداد، ما احتمال أن يظهر العدد 2 على المكعب الأول أو أن يكون مجموع العددين الظاهرين على المكعبين هو 6 أو 7؟ بما أنه من الممكن أن يظهر كل مكعب أعداد بمفرده على ستة أشكال أو طرق مختلفة، وحيث إنه تم إلقاء مكعب أعداد، فإنه يمكن تمثيل الفضاء العيني من خلال وضع مخطط. ويمكن تعريف **الفضاء العيني المخفّض (مجال العينة المخفض)** بكونه المجموعة الفرعية لفضاء العيّنة التي لا تضم سوى تلك النتائج التي تحقق شرطًا معيَّنًا.

	مكعب الأعداد الثاني					
مكعب الأعداد الأول	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 5)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

من الممكن أن يظهر العدد 2 على أول مكعبٍ أعداد وأن يكون مجموع العددين الظاهرين على مكعبي الأعداد 6 أو 7. ومن ثم، لا يكون هذان الحدثان منفصلان. ويطلق عليهما **حدثان متقاطعان**. وفي هذه الحالة، يتعين عليك تعديل صيغة الأحداث المنفصلة.



الحدثان A و B حدثان متقاطعان

لاحظ تداخل الدائرتين في مخطط فن. وتمثل هذه المنطقة احتمال وقوع كلا الحدثين في نفس الوقت. وعند جمع مساحاتي الدائرتين، يتم حساب هذه المساحة المتداخلة مرتين. ولذلك، يجب طرحها لإيجاد الاحتمال الصحيحة للحدثين.

افترض أن A يمثل حدث "ظهور العدد 2 على مكعب الأعداد الأول".

افترض أن B يمثل حدث "كون مجموع الرقمين الظاهرين على مكعبي الأعداد هو 6 أو 7".

$$P(A) = \frac{6}{36} \qquad P(B) = \frac{11}{36}$$

لاحظ أنه يتم حساب (2, 4) و (2, 5) مرتين. ففي كليهما يظهر العدد 2 على مكعب الأعداد الأول ويكون مجموع العددين الظاهرين على مكعبي الأعداد 6 أو 7. ولإيجاد الاحتمال الصحيحة، يتعين عليك طرح $P(7$ أو 6 مجموعهما عددان) من $P(2)$ و $P(7$ أو 6 مجموعهما عددان 2).

$$P(7 \text{ أو } 6 \text{ مجموعهما عددان } 2) = \underbrace{\frac{6}{36}}_{P(2)} + \underbrace{\frac{11}{36}}_{P(7 \text{ أو } 6 \text{ مجموعهما عددان } 2)} - \underbrace{\frac{2}{36}}_{p(7 \text{ أو } 6 \text{ مجموعهما عددان})}$$

$$= \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

احتمال أن يظهر العدد 2 على مكعب الأعداد الأول أو أن يكون مجموع العددين الظاهرين على مكعبي الأعداد 6 أو 7 هي $\frac{5}{12}$.

احتمال وقوع حدثين غير منصلين (متقاطعان)

2 إذا كان الحدثان A و B متقاطعان، فحينها يكون احتمال وقوع A أو B هو مجموع احتماليهما مطروحاً منه احتمال وقوعهما معاً.

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$$

مثال 5

قرأ سعيد أن احتمال نجاح متقدم للحصول على رخصة قيادة في اختبار على الطريق في المرة الأولى هي $\frac{5}{6}$. وقرأ أيضًا أن احتمال اجتياز الاختبار التحريري في أول محاولة هي $\frac{9}{10}$. واحتمال اجتياز كل من الاختبارين التحريريين والاختبار على الطريق في أول محاولة هي $\frac{4}{5}$.

a. حدد ما إذا كانت الأحداث منفصلة أم غير منفصلة (متقاطعة).

بما أنه من الممكن اجتياز كل من اختبار الطريق والاختبار التحريري، إذن فهذه الأحداث غير منفصلة (متقاطعة).

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

b. ما احتمال اجتياز سعيد أي من الاختبارين في محاولته الأولى؟

$P(\text{اجتياز اختبار الطريق}) = \frac{5}{6}$

$P(\text{اجتياز الاختبار التحريري}) = \frac{9}{10}$

$P(\text{اجتياز كلا الاختبارين}) = \frac{4}{5}$

$P(\text{اجتياز أحد الاختبارين})$

$\frac{5}{6} + \frac{9}{10} - \frac{4}{5} = \frac{56}{60} = \frac{14}{15}$

احتمال اجتياز سعيد أي من الاختبارين في محاولته الأولى هي $\frac{14}{15}$.

التمارين

اقرأ وادرس هذا الدرس للإجابة عن كل سؤال.

1. اشرح الفرق بين الأحداث المستقلة والأحداث غير المستقلة.

2. **a. ارسم** مخطط فن لتوضيح حدث اختيار بطاقة لعب ملك أو بطاقة لعب ديناري من مجموعة بطاقات اللعب.

   b. هل الحدثان منفصلان؟ اشرح لماذا أو لماذا لا.

   c. اكتب الصيغة التي يمكنك استخدامها لتحديد احتمال هذين الحدثين

3. **دفتر الرياضيات اكتب** مثالاً على حدثين منفصلين وغير منفصلين في حياتك. ثم **اشرح** لماذا كان الحدثان منفصلين وغير منفصلين (متقاطعين)؟

حدد ما إذا كان كل حدث *مستقلاً أم غير مستقل*. ثم حدد الاحتمال.

4. احتمال ظهور عددين مجموعهما 7 عند إلقاء مكعبي أعداد في الرمية الأولى، وعددين مجموعهما 4 في الرمية الثانية

5. احتمال اختيار جوربين كحليين من درج يحتوي على 6 جوارب سوداء و 4 جوارب كحلية.

6. هناك زجاجتان من عصير الفواكه و 4 زجاجات من مشروب رياضي في مبرد. وبدون النظر، اختارت فتحية زجاجة لنفسها ثم أخرى لصديقة لها. فما احتمال اختيار زجاجتين من المشروب الرياضي؟

حدد إذا كان كل حدث *منفصلاً أم غير منفصل (متقاطعاً)*. ثم حدد كل احتمال.

7. احتمال اختيار قطعة نقد فئة ربع درهم أو قعة فئة الدرهم من 4 قطع فئة ربع درهم و 3 عملاقطع فئة نصف درهم و 6 قطع فئة الدرهم

8. احتمال اختيار ولد أو شخص شعره أشقر من 12 بنتًا، 5 منهن شعرهن أشقر. و 15 ولدًا، 6 منهم شعرهم أشقر

9. احتمال سحب بطاقة لعب "ملك" أو بطاقة لعب "ملكة" من مجموعة قياسية من بطاقات اللعب

في لعبة البينجو، يتم وضع الكرات المرقمة من 1 إلى 75 في سلة. ويتم سحب كرات عشوائيًا دون إعادة وضعها. أوجد كل احتمال لأول 5 كرات يتم سحبها.

10. (اختيار 5 أعداد زوجية)P

11. (اختيار 5 أعداد مكونة من رقمين)P

12. (5 أعداد فردية أو 5 مضاعفات للعدد 4)P

13. (5 أعداد زوجية أو 5 أعداد أقل من 30)P

14. **الأعمال** طلب مستورد أثاث 100 ساعة من طراز ساعات "الجد" من جهة تصنيع بالخارج. وأثناء الشحن، تعرضت أربع ساعات للتلف، ولكن لم تظهر أية علامات على حصول تلف على العبوة. فإذا اشترى تاجر 6 من هذه الساعات دون فحصها أولاً، فما احتمال عدم تلف أي من هذه الساعات الست؟

15. **الرياضة** يتكون اللاعبون الرماة في إحدى فرق البيسبول من 5 رماة ممن يجيدون الرمي باليد اليسرى و 8 ممن يجيدون باليد اليمنى. فإذا تم اختيار راميين عشوائيًا بهدف الإحماء، فما احتمال أن يكون أحدهما ممن يُجيد الرمي باليد اليمنى؟ (إرشاد: ضع في اعتبارك الترتيب عند اختيار رامٍ يجيد الرمي باليد اليمنى وآخر يجيد باليد اليسرى.)

حدد ما إذا كان كل حدث *مستقلاً أم غير مستقل*. ثم حدد الاحتمال.

16. احتمال اختيار كرة زجاجية صغيرة زرقاء، دون إعادتها مرة أخرى، ثم كرة صفراء من صندوق يحتوي على 5 كرات زجاجية صغيرة زرقاء و 4 كرات صفراء

17. احتمال الاختيار العشوائي لبرتقالتين من وعاء يحتوي على 5برتقالات و 4 ثمرات يوسفي، في حالة إعادة وضع ثمرات الاختيار الأول

18. يتم إلقاء مكعب أعداد لونه أخضر وآخر لونه أحمر. فما احتمال ظهور العدد 4 على مكعب الأعداد ذي اللون الأخضر والعدد 5 على المكعب ذي اللون الأحمر؟

19. احتمال الالتقاط العشوائي لدفترين أزرقين من رف عليه 4 دفاتر زرقاء و 3 دفاتر سوداء

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

20. يحتوي صندوق على 4 قطع نقد معدنية فئة نصف درهم و 4 أخرى فئة الدرهم و 7 قطع فئة ربع درهم. تم إزالة ثلاث قطع واحدة تلو الأخرى، دون إعادة وضعها مرة أخرى. فما احتمال اختيار قطعة نقد معدنية فئة نصف درهم وقطعة من فئة ربع درهم ، وقطعة من فئة الدرهم بهذا الترتيب؟

21. احتمال سحب 13 بطاقة لعب من مجموعة قياسية من بطاقات اللعب بحيث يكون جميعها من البطاقات الحمراء

22. احتمال الاختيار العشوائي لسكينة وشوكة وملعقة بهذا الترتيب من درج مطبخ يحتوي على 8 ملاعق و 8 شوكات و 12 سكينة مائدة .

23. احتمال اختيار 3 أقلام طباشير مختلفة الألوان من صندوق يحتوي على 5 أقلام طباشير حمراء و 4 سوداء و 7 زرقاء، مع إعادة وضع كل قلم طباشير مرة أخرى

24. احتمال فوز فريق كرة قدم في مبارياته الأربع القادمة إذا كانت فرص فوز كل مباراة من 4 إلى 3

فيما يتعلق بالتمارين 33-25، حدد ما إذا كان كل حدث *منفصلاً* أم غير *منفصل* (*متقاطعًا*). ثم حدد كل احتمال.

25. احتمال إلقاء مكعبي أعداد وظهور العدد 4 على كليهما.

26. احتمال سحب بطاقة لعب "ملك" أو بطاقة حمراء من مجموعة قياسية من بطاقات اللعب

27. احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة من مجموعة قياسية من بطاقات اللعب بطاقة حمراء أو بطاقة عليها صورة

28. احتمال التقاط 5 هرر صغيرة بصورة عشوائية، 3 منها على الأقل ذكور، وذلك من مجموعة تحتوي على 5 هررة ذكور و 4 هرر إناث.

29. احتمال إلقاء مكعبي أعداد وظهور عددين مجموعهما 6 أو مجموعهما 9.

30. احتمال أن يكون هناك 3 نساء على الأقل بمجموعة من 6 أشخاص يتم اختيارها عشوائيًا من 7 رجال و 7 نساء.

31. احتمال ظهور الكتابة 4 مرات على الأقل عند القاء قطعة النقد المعدنية 6 مرات على الأرض.

32. احتمال أن تكون بطاقتا اللعب المسحوبتان من مجموعة قياسية من بطاقات اللعب بطاقتي "ملكًا" أو أن كليهما من البطاقات السوداء

33. من مجموعة أقراص مدمجة تحتوي على 6 أقراص لأغاني الروك و 5 أقراص لأغاني الراب. فإن المطلوب إيجاد احتمال أن يكون قرصان على الأقل لأغاني الروك من 3 أقراص مدمجة يتم اختيارها عشوائيًا

أوجد احتمال كل حدث باستخدام مجموعة قياسية من بطاقات اللعب

34. (جميع البطاقات حمراء)p عند سحب 5 بطاقات دون إعادتها

35. (بطاقتان "ملكة" أو بطاقتان "ملكًا")p عند سحب بطاقتين دون إعادتهما

36. (جميع البطاقات "دينارية")p في حالة اختيار 10 بطاقات دون إعادتها

37. (بطاقتان حمراوان أو كلاهما بطاقتا "ملكة")p عند سحب بطاقتين دون إعادتهما

هناك 5 قطع نقد معدنية فئة ربع درهم، و 7 فئة نصف درهم، و 9 فئة الدرهم في مجموعة أثرية من قطع النقد المعدنية. وفي حالة اختيار قطعتين عشوائيًا دون إعادتهما، فأوجد كل احتمال.

38. (القطعتان فئةربع دهم)p

39. (القطعتان فئة النصف أو القطعتان لونهما فضي)p

40. (قطعة واحدة على الأقل فئة النصف)p

41. (القطعتان فئة الدرهم أو إحداهما فئة الربع والأخرى فئة النصف)p

هناك 5 طلاب من طلاب الصف قبل الأخير و 5 طلاب من الصف الأخير (صف التخرج) ضمن المجلس التنفيذي لجمعية الشرف التابعة لمدرسة "دوجلاس" الثانوية. وسيتم اختيار لجنة من 4 أعضاء عشوائيًا لحضور مؤتمر. فأوجد احتمال اختيار كل مجموعة.

42. (كلهم من طلاب الصف الأخير)p

43. (كلهم من طلاب الصف الأخير أو كلهم من طلاب الصف قبل الأخير)p

44. (3 على الأقل من طلاب الصف الأخير)p

45. (2 على الأقل من طلاب الصف الأخير و 1 على الأقل من طلاب الصف قبل الأخير)p

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

46. **الحواسيب** يفيد استطلاع لأعضاء نادي الحاسوب بمدرسة خليفة الثانوية بأن $\frac{2}{5}$ من الطلاب الذين لديهم حواسيب بالمنزل يستخدمونها لمعالجة الكلمات، في حين أن $\frac{1}{3}$ يستخدمونها لممارسة الألعاب، و $\frac{1}{4}$ يستخدمونها في كل من معالجة الكلمات وممارسة الألعاب. فما احتمال استخدام طالب لديه حاسوب بالمنزل لهذا الحاسوب لمعالجة الكلمات أو ممارسة الألعاب؟

47. **الطقس** يعلن خبراء الأرصاد أن احتمال سقوط أمطار هي $\frac{3}{5}$، واحتمال حدوث برق هي $\frac{2}{5}$، واحتمال حدوث كليهما هي $\frac{1}{5}$. ما احتمال أن يكون إلغاء مباراة في البيسبول بسبب سقوط أمطار أو حدوث برق؟

48. **تفكير نقدي** تلعب فوزية ولمياء لعبةً يتم فيها اختيار بطاقات أعداد من مجموعة واحدة. فمن هذه المجموعة، يتم اختيار ثلاث بطاقات بصورة عشوائية. فما احتمال أن يكون مجموع قيم البطاقات عددًا زوجيًا؟

49. **التخطيط للمدن** تضم لجنة لتحسين خدمات المدن ست سيدات وسبعة رجال. ويتم اختيار خمسة أعضاء عشوائيًا للجنة فرعية لدراسة إمكانية تحديث مرفق معالجة المياه. فما احتمال أن يكون باللجنة ثلاث سيدات على الأقل؟

50. **الطب** أظهرت دراسة أجريت على طبيبين أن احتمال تشخيص

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

أحدهما لحالة طبية تشخيصًا صحيحًا هي $\frac{93}{100}$ واحتمال أن يشخص الثاني حالة طبية تشخيصًا صحيحًا هي $\frac{97}{100}$. فما احتمال أن يشخص طبيب واحد على الأقل من هذين الطبيبين تشخيصًا صحيحاً؟

51. **إغاثة منكوبي الكوارث** أثناء موسم الإعصار عام 1999. تسببت الأعاصير دينيس وفلويد وإيرين في فيضان شديد وضرر في ولاية كارولينا الشمالية. وبعد جهود الإغاثة، تم استطلاع رأي 2500 شخص في أحد المجتمعات الداعمة لتحديد ما إذا كانوا قد تبرعوا بالمؤن أو الأموال. ومن هذه العينة، قال 812 شخصًا إنهم تبرعوا بالمؤن. وقال 625 شخصًا إنهم تبرعوا بالمال. ومن هؤلاء الأشخاص، قال 375 شخصًا إنهم تبرعوا بالاثنين. فإذا تم اختيار عضو من هذا المجتمع عشوائيًا، فما احتمال تبرع هذا الشخص بالمؤن أو بالمال؟

52. **تفكير نقدي** إذا كان الحدثان A و B متقاطعين، فإن $P(B \text{ or } A) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$.

a. ارسم مخطط فن لتُمثل $p(C \text{ or } B \text{ or } A)$.

b. اكتب صيغة لإيجاد $p(C \text{ or } B \text{ or } A)$.

53. **توزيع المنتجات** تعمل السيدة لميس كمديرة للشحن في أحد متاجر المواد السمعية والمرئية عبر الإنترنت. وعلى مدار الأشهر الماضية، حددت الاحتمالات التالية لمواد قد يطلبها العملاء.

العنصر	الاحتمال
فيلم حركة	$\frac{4}{7}$
أسطوانة مدمجة لأغاني البوب/الروك	$\frac{1}{2}$
أسطوانة DVD رومانسية	$\frac{5}{11}$
فيلم حركة وأسطوانة مدمجة لأغاني البوب/الروك	$\frac{2}{9}$
أسطوانة مدمجة لأغاني البوب/الروك وأسطوانة DVD رومانسية	$\frac{1}{7}$
فيلم حركة وأسطوانة DVD رومانسية	$\frac{1}{4}$
فيلم حركة، أسطوانة مدمجة لأغاني البوب/الروك وأسطوانة DVD رومانسية	$\frac{1}{44}$

ما احتمال أن يطلب عميل فيلم حركة أو أسطوانة مدمجة لأغاني البوب/الروك أو أسطوانة DVD رومانسية. مع التقريب إلى أقرب جزء من مئة؟

54. **تفكير نقدي** على صف دراسي يضم 18 طالبًا، تم إجراء مسح على الطلبة للتعرف على تواريخ ميلادهم (الشهر واليوم فقط). افترض احتمال وجود 366 تاريخ ميلاد.

a. ما احتمال أن يكون لطالبين بهذا الصف الدراسي نفس تاريخ الميلاد؟

b. اكتب متباينة يمكن استخدامها لتحديد احتمال أن يكون لطالبين تاريخ الميلاد ذاته على أن تكون أكبر من $\frac{1}{2}$.

c. هل هناك عدد كافٍ من الطلاب في الصف الدراسي ليكون الاحتمال في الجزء a أكبر من $\frac{1}{2}$ ؟ إذا كانت الإجابة لا، فما هو على الأقل عدد الطلاب الآخرين الذين يقتضي الأمر وجودهم بالصف؟

55. **إصلاح السيارات** قرر قسم خدمات الطوارئ لدى أحد أندية السيارات بأنه عندما يتصل أعضاء النادي للإبلاغ عن عدم قدرتهم على بدء تشغيل سياراتهم، فإن احتمال فيض الوقود داخل المحرك تكون $\frac{1}{2}$. واحتمال نفاد شحن البطارية هي $\frac{2}{5}$. واحتمال فيض الوقود داخل المحرك ونفاد شحن البطارية في آنٍ واحد هي $\frac{1}{10}$.

a. هل الأحداث منفصلة أم غير منفصلة؟

b. صمِّم مخطط فن لتمثيل الأحداث.

c. ما احتمال أن يكون لدى العضو التالي المُبلِّغ عن عدم القدرة على بدء تشغيل السيارة محرك يفيض الوقود داخله أو بطارية فارغة من الشحن؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

56. تدريب طلب مدرس ألعاب رياضية من طلابه تتبع عدد الأيام التي تمرنوا فيها كل أسبوع. استخدم توزيع التكرار الموضح لإنشاء توزيع احتمالي وتمثيله بيانيًا للمتغير العشوائي X. مع تقريب كل احتمال إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 2-10)

الأيام، X	التكرار
0	3
1	6
2	7
3	8
4	4
5	2

57. الرياضات مبين فيما يلي عدد الساعات في الأسبوع التي قضاها أعضاء فريق مدرسة نورث الثانوية لكرة السلة في التدريب، سواء ضمن فريق أو بشكل فردي. (الدرس 1-10)

15, 18, 16, 20, 22, 18, 19, 20, 24, 18, 16, 18

a. أنشئ مدرجاً إحصائيًا واستخدمته لوصف شكل التوزيع.

b. لخص مركز البيانات وانتشارها باستخدام إما الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. برّر اختيارك.

استخدم المجموع الجزئي الخامس للمتسلسلة المثلثية لـ sine أو cosine لتقريب كل قيمة إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

58. $\cos \frac{2\pi}{11}$ **59.** $\sin \frac{3\pi}{14}$ **60.** $\sin \frac{\pi}{13}$

61. الصحة يوضح الجدول متوسط العمر المتوقع للأشخاص الذين وُلدوا في أعوام مختلفة وفي بلاد مختلفة. (الدرس 7-10)

سنوات منذ 1900	متوسط العمر المتوقع
10	50
20	54.1
30	59.7
40	62.9
50	68.2
60	69.7
70	70.8
80	73.7
90	75.4
100	76.9

a. ارسم مخطط انتشار للبيانات. وحدد العلاقة.

b. احسب معامل الارتباط وفسره. وحدد ما إذا كان ذا دلالة عند المستوى 5%.

c. إذا كان الارتباط ذا دلالة عند المستوى 5%، فأوجد معادلة الانحدار التي بها مربعات أقل، وفسّر الميل والتقاطع في السياق.

d. استخدم معادلة الانحدار التي أوجدتها في الجزء **c** للتنبؤ بمتوسط العمر المتوقع في 2080. وحدد ما إذا كان هذا التوقع معقولاً. اشرح.

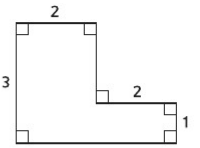
62. الصوتيات يمكن استخدام الإحداثيات القطبية لتمثيل شكل مدرجات قاعة للحفلات الموسيقية. افترض أن المتحدث يقف عند العمود ويواجه اتجاه المحور القطبي. وقد صممت المقاعد لشغل المنطقة بـ $-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ و $0.25 \le r \le 3$. حيث يتم قياس r بمئات الأمتار.

a. ارسم هذه المنطقة على المستوى القطبي.

b. كم عدد المجموعات الموجودة التي تتألف من أربعة مقاعد إذا كانت مساحة كل مجموعة 6 أمتار مربعة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

63. SAT/ACT يوضح الشكل أبعاد لوح حجري، بالمتر. فكم عدد الألواح المطلوبة لتأسيس فناء مستطيلي الشكل طوله 24 m وعرضه 12 m؟



A 18 **C** 24 **E** 40

B 20 **D** 36

64. مراجعة ما ميل المماس للتمثيل البياني لـ $y = 2x^2$ عند النقطة (1, 2)؟

F 1 **H** 4

G 2 **J** 8

65. SAT/ACT وفقًا للبيانات الواردة في الجدول، ما النسبة المئوية لزيادة عدد المتقدمين لكلية Green College من عام 1995 إلى 2000؟

عدد المتقدمين لكلية Green College	
العام	المتقدمون
1990	18,000
1995	20,000
2000	24,000
2005	25,000

A 15% **C** 25% **E** 29%

B 20% **D** 27%

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الاحتمال المشروط

الحالي

1 إيجاد احتمال وقوع حدث ما علمًا بوقوع حدث آخر.

لماذا؟

الطب تعمل ليلى في معمل للأبحاث الطبية؛ حيث يجري اختبار دواء يعزز نمو الشعر لدى الرجال الذين يعانون من الصلع. ويوضح الجدول التالي نتائج الاختبارات المبدئية.

تحتاج السيدة ليلى إلى إيجاد احتمال أن نمو شعر أحد الأشخاص الخاضعين للدراسة كان نتيجة استخدام هذا الدواء التجريبي. *وستُحَل هذه المسألة في المثال 1.*

	عدد الأشخاص الخاضعين للدراسة	
	استخدام الدواء	استخدام دواء وهمي
نمو الشعر	1600	1200
عدم نمو الشعر	800	400

يسمى احتمال وقوع حدث شريطة أن يسبقه وقوع حدث آخر باسم **الاحتمال المشروط**. ويمكن تمثيل الاحتمال المشروط لوقوع الحدث A بشرط وقوع الحدث B من خلال $P(A|B)$. وتتم قراءة $P(A|B)$ *"احتمال وقوع A علمًا بوقوع B"*.

الاحتمال المشروط

1 يتم تعريف الاحتمال المشروط لوقوع الحدث A علمًا بوقوع الحدث B من خلال

$$P(A|B) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(B)} \text{ حيث } P(B) \neq 0.$$

مثال 1

الدواء **ارجع إلى المثال التطبيقي أعلاه. ما احتمال نمو شعر الشخص الخاضع للاختبار، علمًا باستخدامه للدواء التجريبي؟**

افترض أن H يمثل نمو الشعر و D يمثل استخدام الدواء التجريبي. من هذه المعطيات، نحتاج لإيجاد $P(H|D)$.

$$P(H|D) = \frac{p(\text{استخدام الدواء التجريبي و نمو الشعر})}{p(\text{استخدام الدواء التجريبي})}$$

$$P(H|D) = \frac{\frac{1600}{4000} \leftarrow p(\text{استخدام الدواء التجريبي ونمو الشعر}) = \frac{1600}{4000}}{\frac{2400}{4000} \leftarrow p(\text{استخدام الدواء التجريبي}) = \frac{1600+800}{4000}}$$

$$P(H|D) = \frac{1600}{2400} = \frac{2}{3}$$

احتمال نمو شعر الشخص الخاضع للدراسة أو الاختبار، علمًا باستخدامه الدواء التجريبي هي $\frac{2}{3}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2

تلقي منال عملتين معدنيتين. فما احتمال حصولها على صورتين، علمًا بأنها قد حصلت من قبل على صورة واحدة على الأقل؟

افترض أن الحدث A هو ظهور صورتين عند إلقاء العملتين.

افترض أن الحدث B هو ظهور صورة واحدة على الأقل.

$P(B) = \frac{3}{4}$ *ثلاثة نتائج من أصل أربعة تتمثل في ظهور صورة واحدة على الأقل.*

$P(A \text{ and } B) = \frac{1}{4}$ *نتيجة من أصل أربعة هي ظهور صورتين.*

$$P(A|B) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

احتمال ظهور صورتين عند إلقاء العملتين، علمًا بظهور صورة مرة واحدة على الأقل هي $\frac{1}{3}$.

يمكن استخدام الفضاءات العينية (مجالات العينة) والفضاءات العينية المخفضة (مجالات العينة المخفضة) للمساعدة في تحديد النتائج التي تحقق شرطًا معينًا.

مثال 3

يجُري سلطان استقصاء عن الأسر التي لديها ثلاثة أطفال. فإذا تم اختيار أسرة اختيارًا عشوائيًا، فما احتمال أن يكون للأسرة ولدان بالتحديد إذا كان الطفل الثاني ولدًا؟

الفضاء العيني هو $S = \{BBB, BBG, BGB, BGG, GBB, GBG, GGB, GGG\}$، ويشمل كل النتائج الممكنة لأسرة لديها ثلاثة أطفال.

حدد الفضاءات العينية المخفضة التي تحقق الشروط المذكورة المتمثلة في وجود ولدين تحديدًا وكون الطفل الثاني ولدًا.

الشرط المتمثل في أن يكون هناك ولدان تحديدًا يقلل الفضاء العيني لاستبعاد النتائج في حالة كان هناك ولد واحد أو ثلاثة أو عدم وجود أولاد.

افترض أن X يمثل الحدث المتعلق بوجود ولدين.

$$X = \{BBG, BGB, GBB\}$$

$$P(X) = \frac{3}{8}$$

الشرط الذي يفرض أن يكون الطفل الثاني ولدًا يقلل الفضاء العيني لاستبعاد النتائج في حالة كان الطفل الثاني بنتًا.

افترض أن Y يمثل الحدث المتعلق بكون الطفل الثاني ولدًا.

$$Y = \{BBB, BBG, GBB, GBG\}$$

$$P(Y) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$(X \text{ and } Y)$ هي نقطة تقاطع X و Y. إذن $(X \text{ and } Y) = \{BBG, GBB\}$.

إذًا، $P(X \text{ and } Y) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

$$P(X|Y) = \frac{P(X \text{ or } Y)}{P(Y)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$$

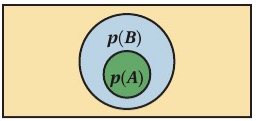
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$$

احتمال أن يكون لدى أسرة، تتكون من 3 أطفال ويتم اختيارها عشوائيًا، ولدان بالتحديد، علمًا بأن الطفل الثاني ولد، هي $\frac{1}{2}$.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

في بعض الحالات، يكون الحدث A عبارة عن مجموعة جزئية من الحدث B. وعند حدوث ذلك، فإن احتمال وقوع كلا الحدثين A و B، $P(A$ و $B)$، هي نفس احتمال وقوع الحدث A.

لذلك، فإنه في مثل هذه المواقف، فإن $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$.



الحدث A مجموعة جزئية من الحدث B.

مثال 4

يظهر على أوجه مجسم ذي الاثني عشر وجهًا الأعداد من 1 إلى 12. وإذا تم إلقاء حجر النرد مرة واحدة وتسجيل العدد الذي يظهر على الوجه العلوي، فما احتمال أن يكون هذا العدد هو مضاعف العدد 4 إذا كان من المعلوم أنه عدد زوجي؟

افترض أن A يمثل الحدث المتعلق بكون العدد الظاهر هو مضاعف العدد 4، إذًا، $A = \{4, 8, 12\}$.

$$P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

افترض أن B يمثل الحدث المتعلق بكون العدد الظاهر زوجيًا. إذًا، $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.

$$P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{12}$$

في هذه الحالة، A مجموعة جزئية من B.

$$P(A \text{ and } B) = P(A) = \frac{1}{4} \qquad P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

احتمال ظهور مضاعف للعدد 4، علمًا بأن هذا العدد زوجي هي $\frac{1}{2}$.

التمارين

اقرأ وادرس هذا الدرس للإجابة عن كل سؤال.

1. **اشرح** العلاقة بين الاحتمال المشروط واحتمال وقوع حدثين مستقلين.
2. **صف** الفضاء العيني لـ(بطاقة عليها صورة) P إذا كانت البطاقة المسحوبة سوداء.
3. **دفتر الرياضيات** أوجد مثالين من الحياة اليومية يستخدمان الاحتمال المشروط. واشرح كيف عرفتَ أن الاحتمال المشروط مستخدمة فيهما.

أوجد كل احتمال.

4. أُلقي مكعبا أعداد. فأوجد احتمال تماثل العددين الظاهرين على المكعبين علمًا بأن مجموعهما أكبر من خمسة.
5. يتم سحب بطاقة لعب من مجموعة قياسية من بطاقات اللعب. فما احتمال أن تكون بطاقة "ملكة" إذا عُلم بأنها صورة؟

يتم إلقاء ثلاث قطع نقد معدنية. فأوجد احتمال أن تسقط جميعًا ووجهها (صورتها) لأعلى بالنسبة لكل شرط معلوم.

6. ظهور وجه القطعة الأولى
7. ظهور وجه قطعة واحدة على الأقل
8. ظهور وجهي العملتين على الأقل

أُلقي مكعبا أعداد. أوجد كل احتمال علمًا بأن مجموع العددين الظاهرين على كل منهما أكبر من أو يساوي 9.

9. (تماثل العددين) p
10. (مجموعهما عدد زوجي) p
11. (تماثل العددين أو مجموعهما عدد زوجي) p
12. **الدواء** لاختبار فاعلية لقاح جديد، أعطى الباحثون 100 متطوع العلاج التقليدي و 100 آخرين اللقاح الجديد. النتائج موضحة في الجدول التالي.

العلاج	الوقاية من الإصابة بالمرض	عدم الوقاية من الإصابة بالمرض
اللقاح الجديد	68	32
العلاج التقليدي	62	38

a. ما احتمال الوقاية من المرض لدى متطوع تم اختياره عشوائيًا؟

b. ما احتمال الوقاية من المرض لدى متطوع تم إعطاؤه اللقاح الجديد؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

c. ما احتمال الوقاية من المرض لدى متطوع لم يتم إعطاؤه اللقاح الجديد؟

13. **العملة** تم اختبار أداة تغيير القسائم إلى دراهم في جهاز خاص بقسائم الوجبات الخفيفة باستخدام 100 قسيمة قيمة كل منها 5 aed. وكانت خمسة وعشرون من هذه القسائم مزوّرة. ونتائج هذا الاختبار مبينة في الجدول الموجود على اليسار.

المرفوضة	المقبولة	القسيمة
6	69	سليمة
24	1	مُزَوّرة

a. ما احتمال أن تكون قسيمة قبلتها أداة التغيير سليمة؟

b. ما احتمال رفض قسيمة علمًا بأنها سليمة؟

c. ما احتمال عدم رفض قسيمة مزورة؟

أوجد كل احتمال.

14. يتم إلقاء عملتين معدنيتين. فما احتمال ظهور أوجه (صور) إحدى العملتين إذا عُلم ظهور أظهر (الوجه الذي عليه الكتابة) عملة واحدة على الأقل؟

15. يتألف مجلس مدينة من ستة أعضاء من المحاربين القدامى. اثنان منهم تحت سن الخمسين، وستة مجندين حاليين، أربعة منهم فوق سن الخمسين. ويتم اختيار أحد الأعضاء عشوائيًا. فإذا كان العضو المختار فوق سن الخمسين، فما احتمال أن يكون محاربًا قديمًا؟

16. تحتوي حقيبة على 4 رقاقات حمراء و 4 رقاقات زرقاء. وتحتوي حقيبة أخرى على رقاقتين حمراوين و 6 رقاقات زرقاء. وتم اختيار رقاقة واحدة عشوائيًا من إحدى الحقيبتين. فوجد أنها زرقاء فما احتمال أن تكون الرقاقة من الحقيبة الأولى؟

17. اصطف ولدان وفتاتان عشوائيًا. فما احتمال أن تكون الفتاتان منفصلتان إذا كانت هناك فتاة في أحد الطرفين؟

18. عدد مكون من خمسة أرقام يتألف من الأرقام 1 و 2 و 3 و 4 و 5. فما احتمال أن ينتهي العدد بالرقمين 52 علمًا بأنه رقم زوجي؟

19. يتم اختيار مكعبي ألعاب مرقمين من 1 إلى 9 عشوائيًا من صندوق دون إعادتهما مرة أخرى. فإذا كان مجموعهما عددًا زوجيًا. فما احتمال أن يكون كلا العددين الخاصين بهما فرديًا؟

يتم اختيار بطاقة لعب من مجموعة قياسية لبطاقات اللعب. فأوجد كل احتمال علمًا بأن البطاقة سوداء.

20. (بطاقة ملك)P

21. $P(4)$

22. (بطاقة عليها صورة)p

23. (بطاقة عليها ملكة القلوب)p

24. (بطاقة عليها 6 من الأسباتي)p

25. (بطاقة عليها ولد أو 10)p

تحتوي عبوة على 3 كرات زجاجية صغيرة خضراء و 5 كرات زجاجية صغيرة صفراء. ويتم سحب كرة واحدة عشوائيًا وطرحها. وبعد ذلك، يتم سحب كرة أخرى. أوجد كل احتمال.

26. الكرة الزجاجية الثانية خضراء. علمًا بأن الكرة الأولى كانت خضراء

27. الكرة الزجاجية الثانية صفراء. علمًا بأن الكرة الأولى كانت خضراء

28. الكرة الزجاجية الثانية صفراء. علمًا بأن الكرة الأولى كانت صفراء

تتم إزالة ثلاث سمكات عشوائيًا من حوض مائي يحتوي على سمكة تروتة وسمكة شبوط وسمكة فرخ وسمكة سلور وسمكة جاحظ وسمكة سلمون. أوجد كل احتمال.

29. (سلمون. علمًا بإزالة سمكة قاروس)p

30. (ليست سمكة جاحظ. علمًا بإزالة سمكتي تروتة وفرخ)p

31. (شبوط وفرخ. علمًا بعدم إزالة سمكة سلور)p

32. (فرخ وتروتة. علمًا بعدم إزالة شبوط أو جاحظ)p

في فصل المعلم صلاح، يمتلك 60% من الطلاب شعرًا بني اللون، و 30% عيونهم بنية، و 10% لهم شعر بني وعيون بنية أيضًا. وقد سُمِح لطالب بالانصراف مبكرًا لزيارة الطبيب.

33. إذا كان شعر هذا الطالب بنيًا. فما احتمال أن يكون لديه أيضًا عينان بنيتان؟

34. إذا كان للطالب عينان بنيتان. فما احتمال ألا يكون لديه شعر بني؟

35. إذا لم يكن شعر هذا الطالب بنيًا. فما احتمال ألا يكون لديه عينان بنيتان؟

في لعبة تتم ممارستها باستخدام مجموعة قياسية من بطاقات اللعب، كانت قيمة كل بطاقة عليها صورة 10 نقاط، وقيمة كل بطاقة "ملك" نقطة واحدة، ولكل بطاقة عددية قيمة مكافئة لعددها. ويتم سحب بطاقتين عشوائيًا.

36. بطاقة واحدة ملك على الأقل. ما احتمال أن يكون مجموع البطاقتين 7 أو أقل؟

37. بطاقة واحدة "ملكة الديناري". ما احتمال أن يكون مجموع البطاقتين أكبر من 18؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education Alvin E. Staffan

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

38. **الرعاية الصحية** في أحد المراكز الطبية، وفي مجموعة عينة، كان هناك 40 مريضًا تم تشخيص إصابتهم بإنفلونزا الطيور، و 30 مريضًا مسنًا. ومن هؤلاء، كان هناك 25 مريضًا مسنًا ومصابًا بإنفلونزا الطيور على حدّ سواء.

a. ارسم مخطط فن يمثل هذه الحالة.

b. إذا كان لدى هذا المركز الطبي حاليًا 200 مريض، وتم اختيار أحدهم عشوائيًا لإحدى الدراسات الطبية، فما احتمال أن يكون هذا المريض مصابًا بسرطان الرئة، علمًا بأن المريض يدخن؟

39. **الأعمال** يريد مدير متجر برامج حاسوبية معرفة ما إذا كان الأشخاص الذين يأتون إلى المتجر ويستفسرون يكونون على الأرجح أكثر قيامًا بعمليات شراء من الأشخاص العاديين. وفي هذا الخصوص، توصل استبيان أجريَ على 500 شخص داخل المتجر إلى أن 250 شخصًا منهم اشتروا منتجًا ما، و 120 استفسروا واشتروا منتجًا ما، و 30 استفسروا لكنهم لم يشتروا أي شيء. وبناءً على نتائج هذا الاستبيان، حدد ما إذا كان على الأرجح أن يشتري الشخص الذي يستفسر أيًا من المنتجات مقارنة بالشخص العادي.

40. **تفكير نقدي** في لعبة باستخدام مكعبي أعداد، لم يكن مجموع العددين الظاهرين على المكعبين في عدد من الرميات السابقة 10. ويعتقد أحد اللاعبين أنه "يلزم" ظهور عددين مجموعهما 10 عند إلقاء مكعبي الأعداد. حلّل تفكير هذا اللاعب.

41. **الاختبار** فرص منى لاجتياز اختبار في دورة إعدادية لحساب التفاضل والتكامل هي $\frac{4}{5}$ إذا ذاكرت، و $\frac{1}{5}$ إذا قررت أن تأخذ الأمر ببساطة. وهي تعلم أن $\frac{2}{3}$ زملائها في الفصل ذاكروا للاختبار واجتازوه. فما احتمال أن تذاكر له منى؟

42. **التصنيع** تصنع ثلاث شركات متخصصة في شرائح الكمبيوتر منتجًا يعزز الإمكانات الرسومية ثلاثية الأبعاد للشاشات الحاسوبية. ويبين الجدول التالي عدد الشرائح الصالحة والمعيبة التي أنتجتها كل شركة أثناء دورة تصنيع في أحد الأيام.

الشركة	عدد الشرائح الصالحة	عدد الشرائح المعيبة
سايبر تشيب كورب	475	25
ثري دي إيميجز	279	21
ميجا فيو ديزاينز	180	20

a. ما احتمال أن تكون الشريحة المختارة عشوائيًا معيبة؟

b. ما احتمال أن تكون الشريحة المعيبة من شركة 3-D Images, Inc.؟

c. ما احتمال أن تكون الشريحة المختارة عشوائيًا صالحة؟

d. إذا كنت مسؤولًا عن شركة لتصنيع أجهزة حاسوب، فأي الشركات كنت ستختار لإنتاج أكثر الشرائح الرسومية جدارة بالثقة؟ ولماذا؟

43. **تفكير نقدي** تكافئ احتمال وقوع الحدث A احتمال نفس الحدث، علمًا بأن الحدث B قد وقع بالفعل. أثبت أن A و B حدثان مستقلان.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

44. التخطيط للمدن تضم لجنة لتحسين المتنزهات الموجودة بإحدى المدن 6 سيدات و 7 رجال. ويتم اختيار خمسة أعضاء عشوائيًا للدخول في لجنة فرعية لدراسة إمكانية تجديد المناظر الطبيعية في أحد المتنزهات. فما احتمال أن ينضم لهذه اللجنة ثلاث سيدات على الأقل؟ (الدرس 9-10)

صنّف كل متغير عشوائي *X* على أنه *منفصل أو متصل*. اشرح استنتاجك. (الدرس 2-10)

45. X يمثل عدد مكالمات الهاتف المحمول التي أجراها طالب تم اختياره عشوائيًا في يوم معين.

56. X يمثل الزمن الذي يستغرقه طالب تم اختياره عشوائيًا لركض مسافة كيلومتر واحد.

47. البيسبول يتم توزيع متوسط عمر لاعب في بطولة بيسبول رئيسية طبيعيًا بوسط 28 وانحراف معياري يبلغ 4 أعوام. (الدرس 3-10)

a. ما النسبة المئوية تقريبًا للاعبين في بطولة البيسبول الرئيسية الذين تقل أعمارهم عن 24؟

b. إذا كان فريق مكونا من 35 لاعبًا. فكم تقريبًا عدد اللاعبين الذين تتراوح أعمارهم بين 24 و 32 ؟

48. أوجد زوجين من الإحداثيات القطبية للنقطة ذات الإحداثيين المتعامدين $(3, 8)$. إذا كان $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

49. SAT/ACT إذا كانت العبارة أدناه صحيحة، فإذًا أي مما يلي يجب أن يكون صحيحًا أيضًا؟
إذا كان يوجد دب واحد على الأقل نعسان،
فإذًا بعض المهور تكون سعيدة.

A إذا كانت كل الدببة نعسانة، فإذًا كل المهور تكون سعيدة.

B إذا كانت كل المهور سعيدة، فإذًا كل الدببة تكون نعسانة.

C إذا كان لا يوجد دب نعسان، فإذًا لا يوجد مُهر سعيد.

D إذا كان لا يوجد مُهر سعيد، فإذًا لا يوجد دب نعسان.

E إذا كانت بعض المهور سعيدة، فإذًا يوجد دب واحد على الأقل نعسان.

50. مراجعة ما قيمة $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 5x + 6}$؟

F $\frac{1}{15}$

G $\frac{2}{15}$

H $\frac{3}{15}$

J $\frac{4}{15}$

53. SAT/ACT في الشكل، النقطتان C و E نقطتا منتصف في حواف المكعب. وسيتم رسم مثلث يكون فيه النقطتان R و S رأسين. فأي من النقاط التالية يجب أن يكون الرأس الثالثة للمثلث إذا كان سيكون له أكبر محيط ممكن؟

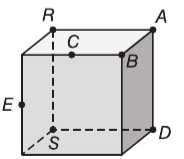
A A

B B

C C

D D

E E



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-8 نظرية ذات الحدّين والاحتمال

الحالي | **لماذا؟**

1 إيجاد احتمال وقوع حدث ما باستخدام نظرية ذات الحدّين.

تنسيق الحدائق مديرون في شركة لتنسيق الحدائق يعرفون أن شجرة الصنوبر التي يزرعونها تعيش بمعدل بقاء تبلغ نسبته حوالي 90% إذا تم الاعتناء بها جيدًا. فإذا زُرعت 10 شجرات في المرحلة الأخيرة من مشروع لتنسيق الحدائق، فما احتمال عيش 7 شجرات؟ *سيتم حل هذه المسألة في المثال 3.*

يمكننا فحص صيغة أبسط من هذه المسألة. افترض أن هناك 5 شجرات فقط مزروعة. ما احتمال بقاء 4 منها على قيد الحياة؟ عدد الطرق التي يمكن أن يحدث بها ذلك $C(5, 4)$ أو 5.

افترض أن S تمثل احتمال بقاء الشجرة على قيد الحياة.
افترض أن D تمثل احتمال موت الشجرة.

بما أن هذا الموقف له نتيجتان، فيمكننا تمثيله باستخدام تعبير التفكيك ذي الحدّين $(S + D)^5$. ويمكن استخدام حدود التفكيك في إيجاد احتمالات كل توفيق من توافيق بقاء الأشجار وموتها.

$$(S + D)^5 = 1S^5 + 5S^4D + 10S^3D^2 + 10S^2D^3 + 5SD^4 + 1D^5$$

المعامل	الحد	المعنى
$C(5, 5) = 1$	$1S^5$	طريقة واحدة لبقاء جميع الأشجار الخمس
$C(5, 4) = 5$	$5S^4D$	5 طرق لبقاء 4 أشجار وموت واحدة
$C(5, 3) = 10$	$10S^3D^2$	10 طرق لبقاء 3 أشجار وموت شجرتين
$C(5, 2) = 10$	$10S^2D^3$	10 طرق لبقاء شجرتين وموت 3
$C(5, 1) = 5$	$5SD^4$	5 طرق لبقاء شجرة واحدة وموت 4
$C(5, 0) = 1$	$1D^5$	طريقة واحدة لموت كل الأشجار البالغ عددها 5

احتمال بقاء شجرة على قيد الحياة هي 0.9. إذًا، فاحتمال عدم بقاء الشجرة هي $0.9 - 1$ أو 0.1. ويمكن تحديد احتمال بقاء 4 أشجار على قيد الحياة من بين 5 أشجار على النحو التالي.

استخدم $5S^4D$ بما أن هذا الحد يمثل 4 أشجار باقية على قيد الحياة وشجرة واحدة ميتة.

عوّض 0.9 بـ S و 0.1 بـ D

$5S^4D = 5(0.9)^4(0.1)$
$5S^4D = 5(0.6561)0.1$
$5S^4D = 0.3281$ أو حوالي $\frac{1}{3}$

إذًا، احتمال بقاء 4 أشجار على قيد الحياة هي تقريبًا $\frac{1}{3}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكن تحديد الاحتمالات الأخرى من تفكيك $(S + D)^5$. على سبيل المثال. ما احتمال موت شجرتين على الأقل من بين 5 أشجار مزروعة؟

مثال 1

تنسيق الحدائق راجع المثال التطبيقي في بداية الدرس. تتم زراعة خمس أشجار من الماهوجاني. **ما احتمال موت شجرتين على الأقل؟**

الحدود الثالث والرابع والخامس والسادس تمثل شروط موت شجرتين أو أكثر. إذًا. فاحتمال حدوث ذلك هي مجموع احتمالات تلك الحدود.

P(موت شجرتين على الأقل)

$= 10S^3D^2 + 10S^2D^3 + 5SD^4 + 1D^5$
$= 10(0.9)^3(0.1)^2 + 10(0.9)^2(0.1)^3 + 5(0.9)(0.1)^4 + (0.1)^5$
$= 10(0.729)(0.01) + 10(0.81)(0.001) + 5(0.9)(0.0001) + (0.00001)$
$= 0.0729 + 0.0081 + 0.00045 + 0.00001$
$= 0.0815$

احتمال موت شجرتين على الأقل هي 8% تقريبًا.

المسائل التي يمكن حلها باستخدام التفكيك ذي الحدّين تسمى **تجارب ذات حدّين**.

شروط التجربة ذات الحدّين

1 تحدث التجربة ذات الحدّين إذا تحققت الشروط التالية.

- كل تجربة لها نتيجتان بالتحديد أو عدة نتائج يمكن تقليلها إلى نتيجتين.
- يجب أن يكون هناك عدد محدد من التجارب.
- يجب أن تكون نتائج كل تجربة مستقلة.
- تماثل الاحتمالات في كل تجربة.

مثال 2

ثمانية من كل 10 مصابين بعدوى فيروسية محددة يمكن أن يتماثلوا للشفاء. فإذا أصيبت مجموعة مكونة من 7 أشخاص، فما احتمال شفاء 3 أشخاص تحديدًا من هذه العدوى؟

هناك 7 أشخاص مشاركين. وهناك نتيجتان محتملتان. الشفاء R أو عدم الشفاء N. وهذه الأحداث مستقلة. إذًا فهذه تجربة ذات حدّين.

عندما يتم تفكيك $(R + N)^7$. فإن الحد R^3N^4 يمثل 3 أشخاص يتماثلون للشفاء و 4 لا يتماثلون للشفاء من العدوى. ومعامل R^3N^4 هو $C(7, 3)$ أو 35.

P(شفاء 3 أشخاص تحديدًا) $= 35(0.8)^3(0.2)^4$ $R = 0.8, N = 1- 0.8$ أو 0.2
$= 35(0.512)(0.0016)$
$= 0.028672$

احتمال شفاء 3 أشخاص تحديدًا من بين 7 أشخاص من العدوى هي 2.9%.

يمكن استخدام نظرية ذات الحدّين لإيجاد الاحتمال عندما يجعل عدد التجارب العمل باستخدام التفكيك ذي الحدّين أمرًا غير واقعي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3

تنسيق الحدائق راجع المثال التطبيقي في بداية الدرس. ما احتمال بقاء 7 أشجار من أصل 10 أشجار تتم زراعتها على قيد الحياة؟

افترض أن S هي احتمال بقاء شجرة ما على قيد الحياة.
افترض أن D هي احتمال موت شجرة ما.

بما أن هناك 10 أشجار، يمكننا استخدام نظرية ذات الحدّين لإيجاد أي حد في التعبير $(S + D)^{10}$.

$$(S + D)^{10} = \sum_{r=0}^{10} \frac{10!}{r!(10-r)!} S^{10-r}D^r$$

بقاء 7 أشجار على قيد الحياة يعني موت 3. إذًا، يمكن إيجاد الاحتمال باستخدام الحد حيث $r = 3$. الحد الرابع.

$$\begin{aligned}\frac{10!}{3!(10-3)!} S^7D^3 &= 120S^7D^3 \\ &= 120(0.9)^7(0.1)^3 \\ &= 120(0.4782969)(0.001) \text{ أو } 0.057395628\end{aligned}$$

احتمال بقاء 7 أشجار تحديدًا على قيد الحياة هي حوالي 7.5%.

حتى الآن، الاحتمالات التي توصلنا إليها هي **احتمالات نظرية**. وهذه الاحتمالات تُحدَّد باستخدام طرق رياضية وتعطيك فكرة عما تتوقعه في موقف معين. إن **الاحتمال التجريبي** تُحدَّد عن طريق إجراء التجارب والملاحظة وتفسير النتائج. ومن بين طرق إيجاد الاحتمال التجريبي طريقة **المحاكاة**. في المحاكاة، تستخدم آلة مثل حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الحدث.

استكشاف حاسبة التمثيل البياني

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لمحاكاة تجربة ذات حدّين. تأمل الموقف التالي.

يفوز طارق بمباراتي شطرنج من بين كل 3 مباريات يلعبها مع عامر. ما احتمال فوزه بـ 5 مباريات تحديدًا من المباريات الست المقبلة؟

جرِّب هذا

لمحاكاة هذا الموقف، أدخل int(3*rand) ثم اضغط على ENTER. ملحوظة: int و rand يمكن العثور عليهما بداخل القوائم التي يمكن الوصول إليها عن طريق الضغط على MATH. وهذا من شأنه أن يولد الأعداد 0 أو 1 أو 2 بشكل عشوائي. ويفوز طارق إذا كانت النتيجة 0 أو 1. ويخسر إذا كانت النتيجة 2.

في المحاكاة، يتألف تكرار واحد لتجربة ذات حدّين كاملة من ست محاولات أو ست ضغطات على المفتاح ENTER. جرِّب 40 تكرارًا.

ماذا تعتقد؟

1. ما الفضاء العيني؟
2. ما(فوز طارق) P؟
3. في المحاكاة، أي الاحتمالات فاز معها طارق 5 مرات بالتحديد؟
4. باستخدام صيغة حساب الاحتمالات ذات الحدّين، ما احتمال فوز طارق بخمس مباريات تحديدًا؟
5. لماذا يوجد في رأيك اختلاف بين المحاكاة (الاحتمال التجريبي) والاحتمال المحسوب باستخدام الصيغة (الاحتمال النظري)؟
6. ماذا تفعل لكي تقرب الاحتمال التجريبي من الاحتمال النظري؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التمارين

اقرأ وادرس هذا الدرس للإجابة عن كل سؤال.

1. **اشرح** ما إذا كان كل موقف يمثل تجربة ذات حدّين أم لا.

   a. احتمال الفوز في مباراة عند رمي حجر نرد (مكعب أعداد). وإذا كانت النتيجة 1 أو 2 أو 3، فإنك تفوز.

   b. احتمال سحب كرتين زجاجيتين صغيرتين من جرة تحتوي على 10 كرات حمراء و 30 زرقاء و 5 صفراء.

   c. احتمال سحب بطاقة "الولد" من مجموعة قياسية من بطاقات اللعب، علمًا بأن البطاقة حمراء.

2. **اكتب** شرحاً للاحتمال التجريبية. أعط مثالاً من الحياة اليومية يستخدم الاحتمال التجريبي.

3. **صف** كيف تجد احتمال الحصول على إجابتين صحيحتين تحديدًا في تدريب بصيغة "صواب/خطأ" يحتوي على 5 أسئلة.

أوجد كل احتمال إذا رميتَ حجر نرد خمس مرات.

4. p(ظهور العدد 4 مرة واحدة فقط)

5. p(ظهور العدد 4 بما لا يزيد عن مرتين)

6. p(ظهور العدد 4 على الأقل ثلاث مرات)

7. p(ظهور العدد 4 خمس مرات بالتحديد)

مراسلة طقس لدى إحدى القنوات تتنبأ بفرصة سقوط الأمطار بنسبة 30% اليوم وعلى مدار الأيام الأربعة المقبلة. أوجد كل احتمال.

8. p(عدم سقوط أمطار في أي يوم)

9. p(سقوط الأمطار في يوم واحد تحديدًا)

10. p((سقوط الأمطار على مدار ما لا يزيد عن ثلاثة أيام)

11. **الطبخ** في صف الطبخ، ستفسد واحدة من 5 فطائر سوفليه تصنعها موزة. فهي تعد 6 فطائر لتقديمها في حفل العشاء مع أبويها. فما احتمال فساد 4 فطائر منها على وجه التحديد؟

12. **المالية** يبحث أحد وسطاء البورصة عن 13 سوقًا مستقلة من أسواق البورصة. والاستثمار في كل منها يتسبب إما في ربح المال أو في خسارته. واحتمال تكوين ربح في كل سوق هي $\frac{5}{8}$. فما احتمال تكوين ربح من 10 أسواق على وجه التحديد؟

تحمل مايسة طلاء شفاة في كيس داخل حقيبتها. واحتمال سحبها اللون الذي تريده هي $\frac{2}{3}$. افترض أنها تستخدم طلاء الشفاة 4 مرات في اليوم. أوجد كل احتمال.

13. p(عدم سحب اللون الصحيح)

14. p(اللون الصحيح 3 مرات على الأقل)

15. p(اللون الصحيح بما لا يزيد عن 3 مرات)

16. p(اللون الصحيح مرتان تحديدًا)

تخمن ميسون جميع الأسئلة البالغ عددها 10 في اختبار بصيغة صواب/خطأ. أوجد كل احتمال.

17. p(7 إجابات صحيحة)

18. p(6 إجابات صحيحة على الأقل)

19. p(جميع الإجابات صحيحة)

20. p(النصف صحيح على الأقل)

احتمال القاء قطعة نقد معدنية متوسة وظهور الصورة على الوجه العوي هو $\frac{1}{3}$. أوجد كل احتمال إذا ألقيت قطعة النقد 4 مرات.

21. p(4 أوجه)

22. p(3 أوجه)

23. p(وجهان على الأقل)

يخمن عبد الرحمن جميع الأسئلة البالغ عددها 10 في اختبار "الاختيار من متعدد". أوجد كل احتمال إذا كان كل سؤال به 4 اختيارات.

24. p(6 إجابات صحيحة)

25. p(نصف الإجابات صحيحة)

26. p(من 3 إجابات إلى 5 صحيحة)

إذا وقع مسمار التثبيت، فإن احتمال سقوطه متجهًا لأعلى هي $\frac{2}{5}$. وأسقطت السيدة نبيلة 10 مسامير أثناء تثبيت لوحة التكاليف الأسبوعية على لوحة الإعلانات. أوجد كل احتمال.

27. p(جميع المسامير متجهة لأعلى)

28. p(3 مسامير فقط متجهة لأعلى)

29. p(5 مسامير فقط متجهة لأعلى)

30. p(6 مسامير على الأقل متجهة لأعلى)

أوجد كل احتمال عند رمي ثلاث قطع نقد معدنية.

31. p(3 صورة أو 3 كتابة)

32. p(صورة على الأقل)

33. p(كتابتان فقط)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

استكشاف حاسبة التمثيل البياني

34. أدخل التعبير **nCr X 6** إلى القائمة .**Y=** ويتم العثور على أمر **nCr** في قسم الاحتمال الخاص بالقائمة **Math (الرياضيات)**. استخدم ميزة **TABLE (الجدول)** لمراقبة النتائج.

a. إلى أي مدى تتشابه تلك النتائج مع تفكيك $(a + b)^6$؟

b. كيف يمكنك تغيير التعبير لإيجاد تفكيك $(a + b)^8$؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

36. **العلوم العسكرية** أثناء إحدى الحروب التاريخية، ضربت الصواريخ 20% من أهدافها. وفي إحدى المرات، أطلقت ستة صواريخ على مخزن للوقود.

a. صف معنى النجاح في هذه الحالة، واذكر عدد المحاولات واحتمال النجاح في كل تجربة.

b. أوجد احتمال إصابة ما بين صاروخين و6 صواريخ للهدف.

37. **تفكير نقدي** يتم توزيع جوائز الأبواب في إحدى الحفلات من خلال السحب. وسيتم إعطاء 4 من بين 10 تذاكر للرجال الذين سيحضرون، و 6 من أصل 10 يتم توزيعها على السيدات. وسيحصل كل شخص على تذكرة واحدة فقط. وسوف تُسحب 10 تذاكر بشكل عشوائي مع الإحلال. فما احتمال أن يكون جميع الفائزين من جنس واحد؟

38. **العلاج** عشرة في المئة من المواطنين الأمريكيين من أصل إفريقي يحملون مرض فقر الدم المنجلي الوراثي. أوجد كل احتمال لعينة عشوائية من 20 مواطنًا أمريكيًا من أصل إفريقي.

a. (كلهم يحملون المرض)p

b. (نصفهم فقط يحملون المرض)p

39. **الخطوط الجوية** وجدت إحدى شركات الخطوط الجوية لنقل الركاب أن 4% من الأشخاص الذين يحجزون رحلة طيران لا يحضرون لإتمام السفر عبر هذه الرحلة. ونتيجة لهذا، تقرر شركة الخطوط الجوية بيع 75 مقعدًا على الطائرة التي تتسع لـ 73 مقعدًا (زيادة في الحجز). فما احتمال توفر مقعد لكل شخص يحضر ويتم الرحلة؟

40. **المبيعات** عبد الرحمن يعمل وكيل تأمين. وهو يبيع في المتوسط بوليصة تأمين واحدة لكل عميلين متوقعين يقابلهما. وفي يوم معين، يبيع لأربعة عملاء. وهو يعرف أنه لن يحصل على مكافأة إذا كانت مبيعاته أقل من أو تساوي ثلاث بوليصات. فما احتمال عدم حصوله على مكافأة؟

41. **تفكير نقدي** تنتظر نجاة صديقتها المتأخرة. ولكي تمرر الوقت، تتمشى قليلاً متّبعة القواعد التالية. فهي تلقي قطعة نقد معدنية؛ وإذا ظهر على الوجه العلوي صورة، فإنها تمشي 10 m جهة الشمال. وإذا ظهر على الوجه العلوي كتابة، فإنها تمشي 10 m جهة الجنوب. وتكرر هذه العملية كل 10 m ثم تنعذ ما يسمى بالتمشية العشوائية. فما احتمال وصولها عند واحدة من النقاط التالية بعد 100 m من المشي؟

a. (تعود إلى نقطة بدايتها)p

b. (في مدى 10 m من نقطة البداية)p

c. (20 m فقط من نقطة البداية)p

35. **الرياضة** فريق لكرة القدم من المقرر أن يلعب 16 مباراة في موسمه القادم. فإذا كانت هناك احتمال نسبتها 70% أن يفوز هذا الفريق في كل مباراة، فما احتمال فوز الفريق بـ 12 مباراة على الأقل من المباريات التي يخوضها؟ (*إرشاد:* استخدم المعلومات من تدريب 34.)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة شاملة

42. يتم رمي زوج من مكعبات الأعداد. أوجد احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين أقل من 9 إذا كان العدد الظاهر على المكعبين معًا هو العدد نفسه.

43. تم اختيار حرف من الحروف الأبجدية بشكل عشوائي. أوجد احتمال وجود هذا الحرف ضمن حروف كلمة *منزل* أو كلمة *هاتف*.

مثّل كل عدد مركب بيانيًا على شبكة قطبية. ثم عبّر عنه في صورة متعامدة.

44. $2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

45. $2.5(\cos 1+i\sin 1)$

46. $5(\cos 0+i\sin 0)$

حدد الاختلاف المركزي ونوع القطع المخروطي ومعادلة الدليل المعطاة من خلال كل معادلة قطبية.

47. $r=\frac{3}{2-0.5\cos\theta}$

48. $r=\frac{6}{1.2\sin\theta+0.3}$

49. $r=\frac{1}{0.2-0.2\sin\theta}$

حدد ما إذا كانت النقاط واقعة على مستقيم واحد. واكتب نعم أو لا.

50. $(-3,-1,4),(3,8,1),(5,12,0)$

51. $(4,8,6),(0,6,12),(8,10,0)$

52. $(0,-4,3),(8,-10,5),(12,-13,2)$

53. $(-7,2,-1),(-9,3,-4),(-5,1,2)$

أوجد طول القطعة المستقيمة ونقطة المنتصف لها باستخدام نقطتي طرفيها المبينتين.

54. $(2,-15,12),(1,-11,15)$

55. $(-4,2,8),(9,6,0)$

56. $(7,1,5),(-2,-5,-11)$

57. التوقيت يمكن تمثيل المسار الذي يتخذه طرف عقرب الساعات في ساعة حائط برسم دائرة باستخدام المعادلتين الوسيطيتين $x=6\sin t$ و $y=6\cos t$.

a. أوجد فترة لـ t مقيسة بالراديان يمكن استخدامها في وصف حركة طرف العقرب بينما يتحرك من الساعة 12 ظهرًا إلى الساعة 12 ظهر اليوم التالي.

b. قم بمحاكاة الحركة الموصوفة في الجزء **b** من خلال تمثيل المعادلة في الوضع الوسيطي بيانيًا على حاسبة التمثيل البياني.

c. اكتب معادلة في صورة متعامدة تمثل حركة عقرب الساعات. أوجد نصف قطر الدائرة التي يقطعها عقرب الساعات إذا كان x و y مقيسين بالسنتيمترات.

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

58. $\tan\frac{\pi}{12}$

59. $\sin 75^\circ$

60. $\cos 165^\circ$

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي.

61. $\frac{10x^2-11x+4}{2x^2-3x+1}$

62. $\frac{1}{2x^2+x}$

63. $\frac{x+1}{x^3+x}$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

64. SAT/ACT الحد الأول من متتالية هو 5−. وكل حد تالٍ يأتي يكون أكبر بمقدار 6 من الحد السابق له مباشرة. فما قيمة الحد رقم 104؟

A 607
B 613
C 618
D 619
E 615

65. مراجعة أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ إذا كان $\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ و $180^\circ<\theta<270^\circ$.

F $-\frac{\sqrt{6}}{6}$
G $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$
H $-\frac{\sqrt{30}}{6}$
J $-\frac{1}{9}$

66. الحدود الأربعة الأولى للمتتالية هي 144 و 72 و 36 و 18. فما الحد العاشر في المتتالية؟

A 0
B $\frac{9}{64}$
C $\frac{9}{32}$
D $\frac{9}{16}$

67. مراجعة ما عدد المكعبات بحجم 5 cm³ التي يمكن وضعها داخل صندوق طوله 10 cm. وعرضه 15 cm. وارتفاعه 5 cm؟

F 5
G 6
H 15
J 20

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ملخص الوحدة

المفاهيم الأساسية

الإحصاءات الوصفية (الدرس 1-10)

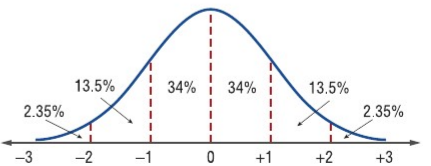
- الأشكال الثلاثة الأكثر شيوعًا لتوزيعات البيانات هي توزيع ملتوٍ (متخالف) سلبي وتوزيع متماثل وتوزيع ملتوٍ إيجابي.

التوزيع الاحتمالي (الدرس 2-10)

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X يربط كل قيمة محتملة لـ X باحتمال حدوثها.

التوزيع الطبيعي (الدرس 3-10)

- القيمة z تمثل عدد الانحرافات المعيارية لقيمة بيانات معطاة من الوسط، ومُمثلة بالتعبير $z = \frac{X - \mu}{\sigma}$.
- التوزيع الطبيعي المعياري هو توزيع قيم z بوسط 0 وانحراف معياري مقداره 1.



الارتباط والانحدار الخطي (الدرس 4-10)

- لتحليل بيانات ذات متغيرين:

الخطوة 1 صمّمْ مخطط انتشار بياني، وقررْ ما إذا كان المتغيران يبدوان مترابطين خطيًّا.

الخطوة 2 احسب معامل الارتباط.

الخطوة 3 استخدم اختبار t لتحديد ما إذا كان الارتباط ذا دلالة.

الخطوة 4 أوجد معادلة الانحدار ذات المربعات الأقل.

المفردات الأساسية

توزيع ذو حدّين
binomial distribution
فترة الثقة
confidence interval
متغير عشوائي متصل
continuous random variable
ارتباط Correlation
معامل الارتباط
correlation coefficient
قيم حرجة
critical values
متغير ثابت منفصل
discrete random variable
قاعدة تجريبية
empirical rule
المتغير التفسيري
explanatory variable
استكمال خارجي
extrapolation
الإحصاء الاستقرائي
inferential statistics
استكمال داخلي interpolation
خط انحدار ذو مربعات أقل
least squares regression line
توزيع ملتوٍ نحو اليسار
negatively skewed distribution
توزيع طبيعي
normal distribution
نسب مئوية percentiles
توزيع ملتوٍ نحو اليمين
positively skewed distribution
توزيع احتمالي
probability distribution
متغير عشوائي
random variable
خط الانحدار regression line
متغير الاستجابة
response variable
توزيع أخذ العينات
sampling distribution
خطأ أخذ العينات
sampling error
توزيع طبيعي معياري
standard normal distribution
توزيع متماثل
symmetrical distribution
التوزيع t-distribution
قيمة z-
z-value

مراجعة المفردات

حدد أفضل كلمة أو عبارة لإكمال كل جملة.

1. الوسط يكون أقل من الوسيط وأغلب البيانات موضحة على الجانب الأيمن في توزيع (ملتوٍ نحو اليمين، ملتوٍ نحو اليسار).
2. A متغير عشوائي (متصل، منفصل) قد يأخذ عددًا لا نهائي من القيم الممكنة خلال فترة محددة.
3. A يسمى توزيع قيم z بوسط 0 وانحراف معياري قدره 1 بالتوزيع (ثنائي الحدّين، الطبيعي المعياري).
4. يسمى الانحراف المعياري لوسط العينة بـ ـ (خطأ أخذ العينات، الخطأ المعياري للوسط).
5. يسمى استخدام معادلة ما لعمل توقعات خارج نطاق قيم x التي استخدمتها للحصول على خط الانحدار بـ ـ (الاستكمال الخارجي، الاستكمال الداخلي).

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-1 الإحصاء الوصفي

9. نتائج اختبار SAT يعرض الجدول نتائج اختبار SAT في الرياضيات الذي أجري على 24 طالبًا من طلاب المرحلة الإعدادية لحساب التفاضل والتكامل.

نتائج اختبار الرياضيات SAT					
373	437	477	491	503	516
392	454	479	491	508	519
405	463	485	498	508	522
417	470	485	499	513	533

a. أنشئ مدرجاً إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

b. لخّص المركز وانتشار البيانات باستخدام أي من الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة.

10. غاز الرادون يوضح الجدول كمية إشعاع بيكوكوري لكل لتر من غاز الرادون في عينة من المنازل.

كمية الرادون (pCi/L)				
0.5	1.1	1.9	2.4	4.0
0.7	1.4	2.2	2.5	4.2
1.0	1.5	2.2	2.9	5.4
1.0	1.7	2.2	2.9	6.3
1.1	1.8	2.3	3.1	7.0

a. أنشئ مخططًا صندوقيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

b. لخّص مركز البيانات وانتشارها باستخدام إما الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. برّر اختيارك.

11. سباقات المارثون يوضح الجدول التوزيع التكراري لمواعيد انتهاء ماراثون بوسطن لأول 322 امرأة تنتهي من السباق. أنشئ تمثيلاً بيانيًا مئويًا. وقدّر المركز المئوي لمن ينهون السباق في أقل من 3 ساعات، وفسر معناه.

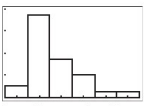
المتسابقون	الزمن (بالساعة)
3	2:45–2:49.59
4	2:50–2:54.59
28	2:55–2:59.59
35	3:00–3:04.59
54	3:05–3:09.59
80	3:10–3:14.59
118	3:15+

مثال 1

حقائب الظهر يوضح الجدول وزن حقائب الظهر المدرسية في عينة من طلاب المرحلة الثانوية.

متوسط وزن حقيبة الظهر (kg)					
11.5	15.0	16.0	17.0	19.0	24.5
12.5	15.5	16.0	17.5	21.0	25.0
14.5	15.5	16.5	18.0	21.0	25.0
14.5	15.5	17.0	18.0	21.5	27.0
15.0	16.0	17.0	18.5	23.5	30.0

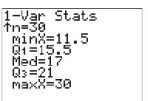
a. أنشئ مدرجًا إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.



[10, 34] scl: 4 by [0, 16] scl: 4

التمثيل البياني ملتوٍ إيجابيًا. فمن الواضح أن أوزان معظم حقائب الظهر تتراوح ما بين 14 kg و 22 kg وبعضها أثقل من ذلك. ولذلك يتلاشى ذيل التوزيع نحو الجهة اليمنى.

b. لخص تمركز وانتشار البيانات باستخدام أي من الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة.



توزيع البيانات يكون ملتويًا؛ ومن ثم يمكن استخدام ملخص الأعداد الخمسة لوصف التوزيع. فملخص الأعداد الخمسة يشير إلى أنه برغم تراوح أوزان الحقائب بين 11,5 kg و 30 kg، فإن وسيط الأوزان يساوي 17 kg، ونصف الأوزان تتراوح بين 15,5 kg و 21 kg.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-2 التوزيعات الاحتمالية

صنّف كل متغير عشوائي X على أنه *منفصل* أو *متصل*. اشرح استنتاجك.

12. X يمثل عدد الأشخاص الذين يحضرون عرضًا افتتاحيًا لفيلم جديد في يوم محدد.

13. X يمثل كمية الدم التي تبرع بها كل شخص في آخر حملات التبرع بالدم.

14. **المشاهير** في أحد الاستقصاءات، قال 63% من البالغين إنهم تعرفوا على لاعب رياضي شهير. وتم اختيار خمسة بالغين بشكل عشوائي وسئلوا عما إذا كانوا يعرفون هذا اللاعب.
   a. أنشئ توزيعًا ذا حدّين ومثله بيانيًا للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد البالغين الذين تعرفوا على اللاعب.
   b. أوجد احتمال تعرف أكثر من بالغين على اللاعب.

15. **القطط** أوجد التباين والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي لعدد القطط في كل منزل.

القطط	التكرار
0	17,519
1	2720
2	1614
3	774
4	333

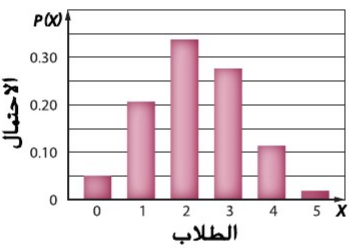
مثال 2

التمثيل البياني في استقصاء أجري على إحدى المدارس، قال 45% من الطلاب إنهم عرفوا كيف يمثلون مخروطًا تمثيلاً بيانيًّا. وسئل خمسة طلاب تم اختيارهم بشكل عشوائي عما إذا كان بإمكانهم تمثيل المخروط بيانيًّا.

a. أنشئ توزيعاً ذا حدّين ومثله بيانيًّا للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الطلاب الذين قالوا إن بإمكانهم تمثيل مخروط بيانيًّا.

هنا $n = 5$ و $p = 0.45$ و $q = 1 - 0.45$ أو 0.55.

$$P(0) = {}_5C_0 \cdot 0.45^0 \cdot 0.55^5 \approx 0.050$$
$$P(1) = {}_5C_1 \cdot 0.45^1 \cdot 0.55^4 \approx 0.206$$
$$P(2) = {}_5C_2 \cdot 0.45^2 \cdot 0.55^3 \approx 0.337$$
$$P(3) = {}_5C_3 \cdot 0.45^3 \cdot 0.55^2 \approx 0.276$$
$$P(4) = {}_5C_4 \cdot 0.45^4 \cdot 0.55^1 \approx 0.113$$
$$P(5) = {}_5C_5 \cdot 0.45^5 \cdot 0.55^0 \approx 0.018$$



b. أوجد احتمال تمكن عدد أقل من ثلاثة طلاب خضعوا للمقابلة الشخصية من تمثيل المخروط بيانيًّا.

$$P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2)$$
$$= 0.05 + 0.21 + 0.34 \text{ أو } 0.60 \text{ أو } 60\%$$

10-3 التوزيع الطبيعي

أوجد كلاً مما يلي.

16. z إذا كان $X = 1.5$ و $\mu = 1.1$ و $\sigma = 0.3$

17. X إذا كان $z = 2.34$ و $\mu = 105$ و $\sigma = 18$

18. z إذا كان $X = 125$ و $\mu = 100$ و $\sigma = 15$

19. X إذا كان $z = -1.12$ و $\mu = 35$ و $\sigma = 3.4$

أوجد فترة قيم z المرتبطة بكل منطقة.

20. الخارج 21 55%. الوسط 24%

22. الوسط 23 96%. الخارج 49%

مثال 3

أوجد قيمة z إذا كان $X = 36$، و $\mu = 31$، و $\sigma = 1.3$.

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{صيغة لقيم } z$$
$$= \frac{36 - 31}{1.3} \quad X = 36, \mu = 31, \text{ و } \sigma = 1.3$$
$$\approx 3.85 \quad \text{بسّط.}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-4 الارتباط والانحدار الخطي

46. الدرجات يوضح الجدول الدرجات النهائية ودرجات الاختبار الأولي لطلاب صف المرحلة الثانوية والإعداد للجامعة. (x = الاختبار الأولي، y = الدرجات النهائية)

نتائج صف الإعداد للجامعة								
x	y	x	y	x	y	x	y
86	3.5	77	2.5	85	3.0	62	1.9
70	3.0	97	3.9	85	3.8	92	3.6
100	4.0	79	3.0	68	2.2	84	3.0
87	3.8	69	2.4	73	2.4	84	3.6
99	4.0	67	2.1	91	3.7	74	2.8

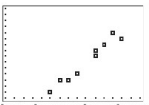
a. صمِّم مخطط انتشار للبيانات وحدد العلاقة. ثم احسب معامل الارتباط وفسِّره.

b. اختبر أهمية معامل الارتباط هذا عند مستوى 10%.

مثال 4

الأطوال يوضح الجدول أطوال الإخوة والأخوات. صمِّم مخطط انتشار للبيانات وحدد العلاقة. ثم احسب معامل الارتباط وفسره.

الأخ	71	68	66	67	70
الأخت	69	64	63	63	68
الأخ	71	70	73	72	65
الأخت	69	67	70	71	61



معامل الارتباط r يساوي حوالي 0.9773. وبما أن r يقترب من 1. فهذا يعني أن البيانات لها ارتباط خطي موجب قوي. وهذا التقويم العددي للبيانات يتوافق مع تقويماتنا التمثيلية البيانية.

10-5 الاحتمال والفرص

حقيبة تحتوي على 7 قطع نقد معدنية من فئة ربع درهم، و 4 قطع من فئة نصف درهم، و 5 قطع من فئة الدرهم. ويتم سحب ثلاث عملات بشكل عشوائي. فأوجد كل احتمال.

47. (3 قطع من فئة ربع درهم)P

48. (قطعتان من فئة ربع درهم وقطعة واحدة من فئة نصف درهم)P

49. (3 قطع من فئة نصف درهم)P

50. (قطعة واحدة من فئة نصف درهم وقطعتان من فئة الدرهم)P

راجع حقيبة القطع المستخدمة في التمارين 50-47. أوجد الفرص المنعلقة بوقوع كل حدث.

51. 3 قطع من فئة ربع درهم

52. قطعتان من فئة ربع درهم وقطعة واحدة من فئة نصف درهم

53. 3 قطع من فئة نصف درهم

54. قطعة واحدة من فئة نصف درهم وقطعتان من فئة الدرهم

مثال 5

أوجد احتمال وقوع حدث.

أوجد احتمال اختيار 3 أقلام رصاص حمراء اللون بشكل عشوائي من صندوق به 5 أقلام رصاص حمراء و 3 أقلام زرقاء و 4 أقلام خضراء.

هناك $C(5, 3)$ طرق لاختيار 3 من 5 أقلام رصاص حمراء، و $C(12, 3)$ طرق لاختيار 3 أقلام رصاص من أصل 12.

$$P(\text{3 أقلام رصاص حمراء}) = \frac{C(5,3)}{C(12,3)}$$

$$= \frac{\frac{5!}{2!\,3!}}{\frac{12!}{9!\,3!}}$$

$$= \frac{12}{220} \text{ أو } \frac{1}{22}$$

مثال 6

أوجد فرص نجاح وفشل حدث ما.

أوجد فرص اختيار 3 أقلام رصاص حمراء اللون بشكل عشوائي من صندوق به 5 أقلام رصاص حمراء و 3 زرقاء و 4 خضراء.

$$P(\text{3 أقلام رصاص حمراء}) = P(s) = \frac{1}{22}$$

$$P(\text{3 أقلام رصاص ليست حمراء}) = P(f) = 1 - \frac{1}{22} = \frac{21}{22}$$

$$\text{الفرص} = \frac{P(s)}{P(f)} = \frac{\frac{1}{22}}{\frac{21}{22}}$$

$$= \frac{1}{21} = 1:21$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-6 احتمال الأحداث المركبة

حدد ما إذا كان كل حدث مستقلاً أم غير مستقل. ثم حدد الاحتمال.

55. احتمال ظهور عددين مجموعهما 2 عند رمي مكعبي أعداد في الرمية الأولى. وعددين مجموعهما 6 في الرمية الثانية

56. احتمال اختيار قلمي تحديد أصفرين بشكل عشوائي من صندوق يحتوي على 4 أقلام تحديد صفراء و 6 أقلام تحديد وردية.

صندوق يحتوي على قصاصات ورقية مرقمة بالأرقام من 1 إلى 14. وتم سحب إحدى القصاصات بشكل عشوائي. فأوجد كل احتمال.

57. (اختيار عدد أولي أو مضاعف 4)P

58. (اختيار مضاعف للعدد 2 أو مضاعف للعدد 3)P

59. (اختيار 3 أو 4)P

60. (اختيار العدد 8 أو عدد أقل من 8)P

مثال 7

أوجد احتمال وقوع أحداث مستقلة وغير مستقلة.

ثلاث كرات زجاجية صغيرة صفراء و 5 سوداء موضوعة في حقيبة. فما احتمال سحب كرة سوداء ووضعها ثم سحب كرة صفراء؟

$P(\text{سوداء}) = \frac{5}{8}$ $P(\text{صفراء}) = \frac{3}{8}$

$P(\text{سوداء وصفراء}) = P(\text{سوداء}) \cdot P(\text{صفراء})$

$= \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$

مثال 8

أوجد احتمال الأحداث المنفصلة والمتقاطعة.

في مجلس إدارة إحدى المدارس، توجد اثنتان من 4 أعضاء من النساء أعمارهما تتجاوز 40 عامًا، و 5 من بين 6 أعضاء رجال أعمارهم تتجاوز 40 سنة. وإذا لم يحضر أحد الأعضاء الاجتماع، فما احتمال أن يكون هذا الشخص من الرجال أو عضوًا يتجاوز عمره 40 عاماً؟

$P(\text{رجل أو سنه أكبر من 40}) = P(\text{رجل}) + P(\text{أكبر من 40}) - P(\text{رجل وأكبر من 40 عامًا})$

$= \frac{6}{10} + \frac{7}{10} - \frac{5}{10} = \frac{4}{5}$

10-7 الاحتمال المشروط

يتم رمي مكعبي أعداد.

61. ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين على المكعبين أقل من 5 إذا كان أحد المكعبين تحديدًا يظهر العدد 1؟

62. ما احتمال أن يكون العددان الظاهران على المكعبين مختلفين إذا علمت أن مجموعهما يساوي 8؟

63. ما احتمال أن يكون العددان الظاهران على المكعبين متوافقين إذا علمت أن مجموعهما أكبر من أو يساوي 5؟

مثال 9

أوجد احتمال وقوع حدث ما علمًا بوقوع حدث آخر.

يتم إلقاء قطعة نقدي معدنية 3 مرات. فما احتمال ظهور الصورة على الوجه العلوي مرتين على الأكثر علمًا بظهور الصورة مرة واحدة على الأقل بعد إلقاءها؟

افترض أن الحدث A يقع عند ظهور الصورة على الوجه العلوي مرتين على الأكثر عند إلقاءها.

افترض أن الحدث B يقع عند ظهور الصورة على الوجه العلوي مرة واحدة على الأقل.

$P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(B)}$

$= \frac{\frac{6}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{6}{7}$

10-8 نظرية ذات الحدّين والاحتمال

إذا ألقيت قطعة نقد معدنية 4 مرات، أوجد الاحتمالات الآتية:

64. (صورة واحدة فقط)p

65. (عدم ظهور صورة)p

66. (صورتان وكتابتان)p

67. (3 صور على الأقل)p

مثال 10

أوجد احتمال وقوع حدث ما باستخدام نظرية ذات الحدّين.

إذا خمّنت الإجابات في جميع الأسئلة البالغ عددها 8 في اختبار بصيغة "صواب/خطأ"، فما احتمال صحة 5 بالتحديد من إجاباتك عنها؟

$(p+q)^8 = \sum_{r=0}^{8} \frac{8!}{r!\,(8-r!)} p^{8-r} q^r$

$= \frac{8!}{5!\,(8-5)!} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$= \frac{56}{256} = \frac{7}{32}$

McGraw-Hill Education مؤسسة محفوظة لصالح والتأليف © حقوق الطبع

التطبيقات وحل المسائل

68. الرياضة يعرض الجدول التالي مستويات الدهون في الجسم عند 20 لاعبًا محترفًا من لاعبي كرة السلة. (الدرس 1-10)

مستويات الدهون في الجسم (%)			
3.4	5.5	6.1	4.8
8.3	7.7	6.5	6.5
4.9	3.7	3.9	4.0
7.3	8.9	9.5	9.8
3.9	7.1	6.3	6.1

a. أنشئ مدرجًا إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

b. لخّص مركز البيانات وانتشارها باستخدام إما الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. برّر اختيارك.

69. تدريب يعرض الجدول التالي عدد ساعات التمارين التي تمارسها عينة من الطلاب كل أسبوع. (الدرس 1-10)

الزمن المستغرق في ممارسة التمارين (بالساعات)		
3	2.5	0
1.5	3	2
3.5	2	0
1.5	9.5	0
8	0.5	1.5
1	10	4

a. أنشئ مخططًا صندوقيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

b. لخّص مركز البيانات وانتشارها باستخدام إما الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. برّر اختيارك.

70. صفوف AP يوضح الجدول عدد صفوف تحديد المستوى المتقدم (AP) لكل طالب في مرحلة ما قبل الالتحاق بالجامعة. أوجد الوسط والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع. (الدرس 2-10)

X	0	1	2	3	4
التكرار	12	18	25	19	11

71. نسبة الذكاء يتم عادة توزيع اختبارات نسبة الذكاء (IQs) على مجموعة من الأشخاص بوسط قدره 105 وانحراف معياري قدره 22. أوجد احتمال اختيار شخص بشكل عشوائي نسبة ذكائه تتناسب مع كل مما يلي. (الدرس 3-10)

a. أكثر من 101

b. أقل من 94s

c. بين 110 و 120

72. البسكويت عدد رقائق الشوكولاتة في البسكويت تكون موزعة عادة على النحو $\mu = 25$ و $\sigma = 3$. أوجد كلاً مما يلي. (الدرس 3-10)

a. $P(X < 35)$

b. $P(21 < X < 29)$

c. $P(X > 15)$

73. النتائج يوضح الجدول التالي نتائج اختبار الموهبة والكتابة الذي أجري على أحد الصفوف في المادة نفسها. (الدرس 7-10)

الموهبة					الكتابة				
135	146	153	154	139	26	33	55	50	32
131	149	137	133	149	25	44	37	31	34
141	164	146	149	147	32	47	37	46	36
152	143	146	141	136	47	36	35	28	28
154	151	155	140	143	36	48	36	33	42
148	149	141	137	135	32	32	29	34	30

a. صمّم مخطط انتشار للبيانات وحدد العلاقة. ثم احسب معامل الارتباط وفسّره.

b. اختبر أهمية معامل الارتباط هذا عند مستوى 5%.

c. أوجد معادلة خط الانحدار.

d. استخدم هذه المعادلة للتنبؤ بنتيجة الكتابة لطالب أحرز الدرجة 142 في اختبار الموهبة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1. **السباق** يعرض الجدول التالي أعمار آخر 20 فائزًا في سباق السيارات.

العمر (بالأعوام)									
24	26	28	33	40	25	27	30	36	42
26	27	32	35	43	26	27	33	38	46

a. أنشئ مدرجاً إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

b. لخّص المركز وانتشار البيانات باستخدام أي من الوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة.

2. **أجهزة التلفاز** يعرض الجدول التالي عدد أجهزة التلفزيون في كل منزل خاص بعدد 100 طالب.

أجهزة التلفزيون	0	1	2	3	4	5
التكرار	1	3	21	53	16	6

a. استخدم توزيع التكرار لإنشاء توزيع احتمالي للمتغير العشوائي X وتمثيله بيانيًا.

b. أوجد وسط النتائج. وفسر معناها في سياق موقف المسألة.

c. أوجد التباين والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي.

3. **الرحلات بالسيارات** أجرى صف اللغة الإسبانية الذي تدرس له المعلمة نهلة استطلاعًا للتوصل إلى عدد الرحلات بالسيارات التي قام بها الطلاب خلال أسبوع.

X	0	1	2	3	4	5
التكرار	10	16	12	22	8	2

a. استخدم توزيع التكرار الخاص بالنتائج لإنشاء توزيع احتمالي للمتغير العشوائي X وتمثيله بيانيًا. مع تقريب كل احتمال إلى أقرب جزء من مئة.

b. أوجد وسط التوزيع الاحتمالي.

c. أوجد التباين والانحراف المعياري.

4. **العطلة** في فصل الصيف، يكون متوسط درجة الحرارة في أحد منتجعات منطقة البحر الكاريبي المخصصة لقضاء العطلات 32°C مع انحراف معياري مقداره 2.5°C. وفي يوم مختار عشوائيًا. أوجد احتمال أن تكون درجة الحرارة على النحو التالي.

a. أكثر من 22°C

b. أقل من 20°C

c. بين 29°C و 34°C

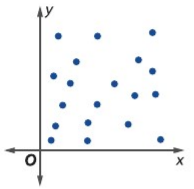
التعبئة صندوق من الحبوب وسط وزنه يبلغ 362 g وبانحراف معياري مقداره 5. فإذا أخذت عينة لعدد 5 صناديق مختارة عشوائيًا، فأوجد التالي.

5. احتمال أن يكون وسط الوزن أقل من 355

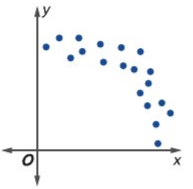
6. احتمال أن يكون وسط الوزن أكبر من 370

7. **الاختيار من متعدد** حدّد التمثيل البياني الذي قد يكون له معامل ارتباط 0.96− في انحدار خطي.

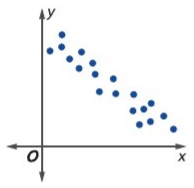
A



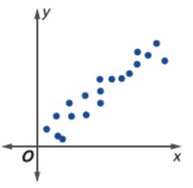
C



B



D



8. **القيادة** يدرج الجدول متوسط عدد الحوادث في الشهر لقطاعات من الطرق في مدينة تتبع حدود السرعة المعلنة.

السرعة (km/h)	الحوادث
25	2.6
30	3.5
35	6.9
40	10.3
45	15.2
50	18.3
55	22.3
60	24.8
65	26.0
70	29.2

a. ارسم مخطط انتشار للبيانات، وحدد العلاقة.

b. احسب معامل الارتباط وفسّره.

c. حدّدْ ما إذا كانت هناك دلالة لمعامل الارتباط عند المستوى 5%. اشرح استنتاجك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9. **ضبط الجودة** مجموعة من 15 شريحة ذاكرة تحتوي على 3 شرائح معيبة. فإذا تم اختيار شريحتي ذاكرة عشوائيًا، فما احتمال أن تكون إحداهما على الأقل جيدة؟

10. **تبادل الهدايا** تسحب عائلة عبيد أسماء من إحدى الحقائب لتبادل الهدايا. وفي العائلة 7 رجال و 8 نساء. فإذا سحب شخص اسمه، فيجب عليه أن يسحب من جديد قبل وضع اسمه مرة أخرى.

   a. تسحب نورا الاسم الأول. ما احتمال أن تسحب نورا اسم امرأة غيرها؟

   b. ما احتمال أن تسحب نورا اسمها، دون إرجاعه، ثم تسحب اسم رجل؟

11. **البستنة** تعيش فصيلة من زهرة الذهب في منطقة معينة من البلاد بمعدل بقاء يبلغ 80%. فإذا زرعت 8 زهرات، فما احتمال أن تعيش 6 زهرات منها بالتحديد؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم
نسبة المجتمع الإحصائي

الهدف

- إنشاء فترات ثقة لتناسبات المجتمع الإحصائي.

في الدرس 2-10، تعلمتَ أن احتمال النجاح في تجربة واحدة من التجارب ذات الحدّين هو p ويمكن التعبير عنها بكسر أو كسر عشري أو نسبة مئوية. فعلى سبيل المثال، فإن احتمال رمي قطعة نقد معدنية سليمة وظهور ظهرها (الكتابة) هو $\frac{1}{2}$ أو 0.5 أو 50%. وهذا الاحتمال هو *تناسب المجتمع الإحصائي* لأنه بالنسبة للعملة المعدنية السليمة، فإن المجتمع الإحصائي بالكامل، بصور العملة المعدنية وأظهرها على حد سواء، يؤخذ بعين الاعتبار.

ليس من الممكن دائمًا حساب تناسبات المجتمع الإحصائي. فحساب النسبة المئوية لطلاب في المرحلة الثانوية يملكون سياراتهم الخاصة، على سبيل المثال، سيتطلب إجراء استطلاع على كل طالب في المرحلة الثانوية. ومن ثم، يمكن تقدير تناسبات المجتمع الإحصائي باستخدام *تناسبات العينة* بالطريقة نفسها التي استخدمت بها أوساط العينة لتقدير أوساط المجتمع الإحصائي في هذه الوحدة.

تناسب العينة $\hat{p}$ هو تناسب النجاحات في عينة معينة ويمثلها التعبير $\hat{p} = \frac{x}{n}$، حيث يكون x هو عدد النجاحات في العينة و n هو حجم العينة. واحتمال الفشل عندئذ تمثّل بالتعبير $\hat{q} = 1 - \hat{p}$.

النشاط 1 تناسب العينة

عينة تتألف من 2582 طالبًا من طلاب المرحلة الثانوية وجدت أن 362 طالبًا يملكون سيارات خاصة بهم. قدِّر تناسب المجتمع الإحصائي لطلاب المرحلة الثانوية الذين يملكون سيارات خاصة عن طريق حساب تناسب العينة $\hat{p}$.

الخطوة 1 عوّض $x = 362$ و $n = 2582$ في الصيغة $\hat{p}$ وبسّط.

الخطوة 2 تفسير النتيجة.

نسبة جميع طلاب المرحلة الثانوية الذين يملكون سيارات خاص تساوي 14% تقريبًا.

تحليل النتائج

1. هل يعد تناسب العينة تقديرًا دقيقًا لتناسب المجتمع الإحصائي؟ اشرح استنتاجك.
2. إذا أجريَت العينة مع قيمة n أكبر؛ فماذا يمكن أن يقال بشأن العلاقة بين تناسب العينة وتناسب المجتمع الإحصائي؟
3. هل سيتساوى تناسب العينة دائمًا مع تناسب المجتمع الإحصائي؟ إذا كان الجواب بلا. فما الذي يمكن فعله لتناسب العينة بالإضافة إلى زيادة n للحصول على تقدير أفضل لتناسب المجتمع الإحصائي؟ اشرح استنتاجك.

تعلمنا من الدرس 5-10 أن $\hat{p}$ الموجودة في النشاط 1 هي تقدير نقطة. وإذا أردنا ابتكار تقدير أفضل، فإننا سنحتاج إلى إنشاء فترة. ويكون سلوك توزيع تناسبات العينة أشبه بتوزيع أوساط العينة. فكلما زاد حجم العينة، أصبح التوزيع أقرب للطبيعي وقارب متوسط تناسبات العينة تناسب المجتمع الإحصائي p.

كما يمكن حساب فترة الثقة لوسط المجتمع الإحصائي عن طريق جمع وطرح أقصى خطأ للتقدير E إلى/من وسط العينة $\bar{x}$. يمكن جمع وطرح أقصى خطأ للتقدير إلى/من تناسب العينة $\hat{p}$ لإنشاء فترة ثقة لتناسب المجتمع الإحصائي.

المفهوم الأساسي فترة الثقة لتناسب مجتمع إحصائي

تعطى فترة الثقة CI لتناسب مجتمعٍ إحصائي بالصيغة

$$CI = \hat{p} \pm E$$

حيث يكون $\hat{p}$ هو تناسب العينة و E هو أقصى خطأ للتقدير يمثله التعبير $z\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$.

نصيحة دراسية

التوزيع الطبيعي وقيم z

تذكر من الدرس 4-10 أن التوزيع الطبيعي يُستخدم في حالة التوزيع ذي الحدّين عندما يكون $np \geq 5$ و $nq \geq 5$. ومن ثم، يمكننا إيجاد قيم z واستخدامها لحساب E بالطريقة نفسها التي استخدمناها في الدرس 5-10.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

النشاط 2 فترة الثقة لتناسب

سجل استطلاع عشوائي للرأي أجري على 825 متقدمًا متوسط درجات طلاب المرحلة الثانوية a. أوجد فترة الثقة التي نسبتها 90% للتناسب الخاص بجميع المتقدمين للالتحاق بالكلية بمتوسط درجات 3.0 أو أعلى.

متوسط نقاط الدرجات a	المتقدمون
$4.0 \le a$	33
$3.0 \le a < 4.0$	600
$2.0 \le a < 3.0$	175
$a < 2.0$	17

الخطوة 1 أوجد $\hat{p}$ و $\hat{q}$.

صيغة تناسب العينة ص $\hat{p} = \frac{x}{n}$

$x = 633$ و $n = 825$ $= \frac{633}{825}$ أو حوالي 0.77

إذًا $\hat{q} = 1 - 0.77$ أو حوالي 0.23.

الخطوة 2 تحقق من أن $n\hat{p} \ge 5$ و $n\hat{q} \ge 5$.

$n\hat{p} \approx 825(0.77)$ أو 635.25 $n\hat{q} \approx (825)(0.23)$ أو 189.75

بما أن $n\hat{p} \ge 5$ و $n\hat{q} \ge 5$، فإن توزيع أخذ العينات لـ $\hat{p}$ يمكن تقريبه من خلال التوزيع الطبيعي.

الخطوة 3 أوجد قيمة z.

لمستوى الثقة الذي نسبته 90%، $z = 1.645$.

الخطوة 4 أوجد أقصى خطأ للتقدير.

صيغة أقصى خطأ للتقدير $E = z\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

$n = 825$ و $\hat{p} \approx 0.23$ و $\hat{p} \approx 0.77$ و $z = 1.645$ $\approx 1.645\sqrt{\frac{0.77(0.23)}{825}}$ أو حوالي 0.0241

الخطوة 5 أوجد نقطتي النهاية اليمنى واليسرى لفترة الثقة.

فترة الثقة للتناسب $CI = \hat{p} \pm E$

$\hat{p} = 0.77$ و $E = 0.0241$ $= 0.77 \pm 0.0241$

الحدّ الأيمن	الحدّ الأيسر
$0.77 + 0.0241 = 0.7941$	$0.77 - 0.0241 = 0.7459$

إذًا فترة الثقة التي نسبتها 90% هي $0.74 < p < 0.79$. لذا، فإننا على ثقة بنسبة 90% من أن تناسب المتقدمين بمتوسط نقاط درجات يبلغ 3.0 أو أعلى يكون بين 6.74% و 4.79%.

تحليل النتائج

4. صف طريقتين يمكن من خلالهما تضييق فترة الثقة التي أوجدتها في الخطوة 5.

5. إذا ظل مستوى الثقة ثابتًا، فكم ينبغي أن تساوي n للحد من أقصى خطأ للتقدير بمقدار $\frac{1}{2}$؟

النموذج والتطبيق

6. في استطلاع أجرته مؤسسة جالوب عام 2006 على 1000 بالغ، رأى 480 منهم أن الأموال التي أنفقتها الحكومة على المركبة الفضائية كان ينبغي إنفاقها على شيء آخر. أوجد فترة الثقة التي نسبتها 95% المتعلقة بالتناسب الخاص بجميع البالغين الذين كان لهم نفس هذا الرأي.

7. وجدت عينة عشوائية أجريت على 279 أسرة أن 58% منها كانت لديها سيارة رياضية. أوجد فترة الثقة التي نسبتها 99% للتناسب المتعلق بجميع الأسر التي تملك سيارة من هذا النوع.

نصيحة دراسية

إيجاد قيم z تذكر من الدرس 5-10 أن مستويات الثقة الأكثر شيوعًا وقيم z المقابلة لها هي كالتالي.

مستوى الثقة	قيمة z
90%	1.645
95%	1.960
99%	2.576

تذكر أن بإمكانك إيجاد قيمة z لأية فترة ثقة باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 11 التفاضل والتكامل

السابق

- تعرفت على النهايات ومعدلات التغير.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - إيجاد قيمة الدوال كثيرة الحدود والدوال النسبية.
  - إيجاد معدل التغير اللحظي.
  - إيجاد مشتقات الدوال كثيرة الحدود.
  - تقريب المساحة تحت المنحنى.
  - إيجاد عكس المشتقات واستخدام النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل.

لماذا؟ ▲

- **القفز بالمطاط** تُعد الأدوات الأساسية للتفاضل والتكامل والمشتقات والتكاملات مفيدة للغاية عند التعامل مع المعدلات غير الثابتة. تعتمد تجربة القفز بالمطاط على معدلات الهبوط والصعود المتغيرة، بالإضافة إلى التسارع المتغير وفق موضع الفرد أثناء القفز.

القراءة المسبقة استخدم اختبار منتصف الوحدة في كتابة معادلتين أو ثلاث معادلات حول الدروس الثلاثة الأولى التي سوف تساعدك على توقع ترتيب النصف الأول من الوحدة 11.

Limits and Derivatives, from Precalculus Chapter 12 © 2014 McGraw-Hill Education
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الاستعداد للوحدة

أجب عن أسئلة التدريب السريع أدناه

تدريب سريع

استخدم التمثيل البياني لكل دالة لوصف سلوكها الطرفي.

1. $q(x) = -\frac{2}{x}$
2. $f(x) = \frac{7}{x}$
3. $p(x) = \frac{x+5}{x-4}$
4. $m(x) = \frac{7-10x}{2x+7}$

5. **الإنشاء** يُمكن تمثيل متوسط تكلفة إنتاج عدد x من أسطوانات CD باستخدام $A(x) = \frac{1700}{x} + 1200$. أوجد قيمة النهاية حيث x يقترب من اللا نهاية الموجبة.

أوجد متوسط معدل التغيير في كل دالة مما يلي في الفترة المحددة.

6. $g(x) = 2x^2 + 4x - 1$; $[-2, 1]$
7. $f(x) = -2x^3 - 5x^2 + 6$; $[-4, -1]$
8. $f(x) = 4x^3 - x^2 + 9x - 1$; $[-2, 4]$

9. **الكتب** يُمكن تمثيل ربح إنتاج عدد x من الكتب في الأسبوع باستخدام $C(x) = -2x^2 + 140x + 25$. أوجد متوسط معدل التغيير للتكلفة إذا تم إنتاج 50 كتابًا بدلاً من 25 كتابًا.

أوجد مجال كل دالة ومعادلات خط التقارب الأفقي أو الرأسي، إن وجد.

10. $f(x) = \frac{4x^2}{2x^2+1}$
11. $h(x) = \frac{2x^2-8}{x-10}$
12. $f(x) = \frac{(x-1)(x+5)}{(x+2)(x-4)}$
13. $g(x) = \frac{x^2-16}{(x-2)(x+4)}$

أوجد الحدود الأربعة التالية لكل متتالية حسابية أو هندسية.

14. 3, 7, 11, 15, ...
15. 8, 3, −2, −7, ...
16. 5, −1, −7, −13, ...
17. −4, 12, −36, 108, ...
18. 5, −10, 20, −40, ...
19. −28, −21, −14, −7, ...

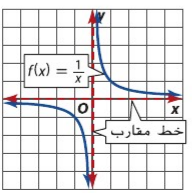
المفردات الجديدة

one-sided limit	نهاية أحادية الطرف
two-sided limit	نهاية ثنائية الطرف
direct substitution	تعويض مباشر
indeterminate form	صيغة غير مُعينة
tangent line	المماس
instantaneous rate of change	معدل التغير اللحظي
instantaneous velocity	سرعة لحظية
derivative	مشتقة
differentiation	تفاضل
differential equation	معادلة تفاضلية
differential operator	مشغل الفرق
regular partition	تجزئة منتظمة
definite integral	تكامل محدد
lower limit	حد سفلي
upper limit	حد علوي
right Riemann sum	مجموع ريمان يميني
integration	تكامل
antiderivative	عكس المشتقة
indefinite integral	تكامل غير محدود
Fundamental Theorem of Calculus	النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

مراجعة المصطلحات

النهاية هي قيمة وحيدة تقترب منها الدالة

خط التقارب هو خط يقترب منه المنحنى أو التمثيل البياني



الفجوات هي فواصل قابلة للحذف على التمثيل البياني لدالة. وتظهر هذه الفجوات عندما يكون لبسط الدالة ومقامها عوامل مشتركة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

11-1 تقدير النهايات بيانيًا

السابق
- لقد قدرت النهايات لتحديد الاتصال والسلوك الطرفي بالدوال.

الحالي
1. تقدير نهايات الدوال عند نقطة محددة.
2. تقدير نهايات الدوال عند اللا نهاية.

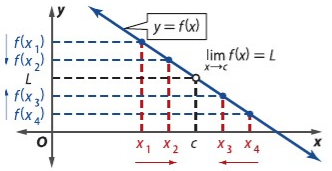
لماذا؟
- هل توجد حدود للأرقام القياسية العالمية التي حققها الرياضيون؟ في دورة الألعاب الأولمبية ببكين عام 2008، فازت لاعبة روسيا يلينا ايزينبايفا بالميدالية الذهبية في القفز بالزانة، وحققت رقمًا قياسيًا عالميًا جديدًا وهو 5.05 m. تمثل الدالة اللوجستية $f(x) = \frac{5.334}{1 + 62548.213e^{-0.129x}}$. حيث x هو عدد الأعوام منذ عام 1900. الأرقام القياسية العالمية للقفز بالزانة للسيدات من 1996 إلى 2008. ويُمكنك استخدام نهاية الدالة عندما يقترب x من اللا نهاية لتوقع حد الارتفاع لهذا الحدث الذي يدخل ضمن ألعاب القوى.

المفردات الجديدة
- **نهاية أحادية الطرف** one-sided limit
- **نهاية ثنائية الطرف** two-sided limit

1 تقدير النهاية عند نقطة

يتمحور حساب التفاضل والتكامل حول مسألتين مهمتين:
- إيجاد معادلة المماس بتمثيل بياني لدالة عند نقطة
- إيجاد المساحة الواقعة بين منحنى الدالة والمحور x.

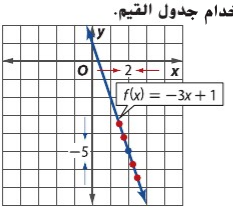
يلزم لحل هاتين المسألتين استيعاب مفهوم النهاية. تذكر أنه إذا كانت $f(x)$ تقترب من القيمة الفريدة L عندما يقترب x من c من طرف واحد، فإن النهاية $f(x)$ عندما يقترب x من c تكون عبارة عن L، وتُكتب على صورة $\lim_{x \to c} f(x) = L$.



يُمكنك تطبيق هذا الوصف لتقدير نهاية الدالة $f(x)$ عندما يقترب x من قيمة ثابتة لـ c أو $\lim_{x \to c} f(x)$ باستخدام تمثيل بياني أو إنشاء جدول بالقيم.

مثال 1 تقدير النهاية عندما النهاية = $f(c)$

قدّر $\lim_{x \to 2} (-3x + 1)$ باستخدام التمثيل البياني أو المنحنى. ادعم تخمينك باستخدام جدول القيم.



التحليل بيانيًا

يبيّن التمثيل البياني لمنحنى الدالة $f(x) = -3x + 1$ أنه كلما اقترب x من 2، تقترب قيمة الدالة المقابلة إلى -5. لذلك، يُمكننا تقدير أن $\lim_{x \to 2} (-3x + 1)$ تساوي -5.

الدعم بالأرقام

أنشئ جدولاً لقيم f. مع اختيار قيم x التي تقترب من 2 باستخدام بعض القيم الأقل بمقدار بسيط عن 2 وبعض القيم الأكبر قليلاً من 2.

	x تقترب من 2 ←				→ x تقترب من 2		
x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	−4.7	−4.97	−4.997		−5.003	−5.03	−5.3

يبيّن نمط المخرجات أنه عندما تقترب قيمة x من 2 من اليسار واليمين، تقترب $f(x)$ من -5. وهذا يدعم التحليل البياني.

تمرين موجّه

قدّر كل نهاية باستخدام التمثيل البياني أو المنحنى. وادعم تخمينك باستخدام جدول القيم.

1A. $\lim_{x \to -3} (1 - 5x)$

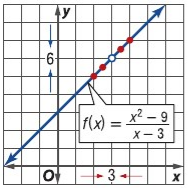
1B. $\lim_{x \to 1} (x^2 - 1)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

في المثال 1. $\lim_{x \to 2} (-3x + 1)$ هو نفس قيمة $f(2)$. إلا أن نهاية الدالة ليست دائمًا تساوي قيمة الدالة.

مثال 2 تقدير النهاية عندما النهاية (لا تساوي الصورة) $\neq f(c)$

قدّر $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ باستخدام التمثيل البياني أو المنحنى. ادعم تخمينك باستخدام جدول القيم.



التحليل بيانيًا

يشير التمثيل البياني $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ إلى أنه كلما يقترب x من العدد 3، تقترب قيمة الدالة من 6. إذًا يُمكننا تقدير أن $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ تساوي 6.

الدعم بالأرقام

أنشئ جدولاً للقيم، مع اختيار قيم x التي تقترب من 3 من طرف واحد.

x تقترب من 3 ← | → x تقترب من 3

x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	5.9	5.99	5.999		6.001	6.01	6.1

يبيّن نمط المخرجات أنه عندما تقترب قيمة x من 3، تقترب $f(x)$ من 6. وهذا يدعم التحليل البياني.

تلميح تقني

الجداول للمساعدة في إنشاء جدول باستخدام حاسبة التمثيل البياني، أدخل الدالة بإستخدام قائمة Y=. ثم استخدم دالة الجدول من خلال الضغط على 2nd [TABLE] للوصول إلى قيمة محددة، غيّر نقطة التغيير والفترة بالنسبة إلى x في الجدول عبر الضغط على 2nd [TBLSET] واضبط خيارات TBLSET.

تمرين موجّه

قدّر كل نهاية باستخدام التمثيل البياني أو المنحنى. وادعم تخمينك باستخدام جدول القيم.

2A. $\lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$

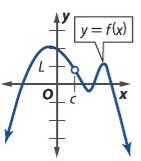
2B. $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5}$

في المثال 2. لاحظ أنه عندما يقترب x من 3 تساوي 6. إلا أن $f(3) \neq 6$. في الحقيقة، $f(3)$ غير موجودة لأن التعبير $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ غير معرف عند $x = 3$. ويوضح هذا نقطة مهمة حول النهايات.

المفهوم الأساسي استقلالية النهاية عن قيمة الدالة عند نقطة ما

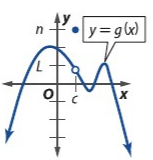
الشرح لا تعتمد نهاية الدالة $f(x)$ عندما يقترب x من c على قيمة الدالة عند النقطة c.

الرموز



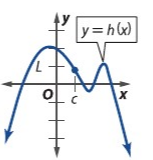
$\lim_{x \to c} f(x) = L$

$f(c)$ غير معرفة.



$\lim_{x \to c} g(x) = L$

$g(c) = n$



$\lim_{x \to c} h(x) = L$

$h(c) = L$

من المهم استيعاب أن النهاية لا تدور حول ما يحدث عند العدد الذي يقترب منه x. وبدلاً من ذلك، تدور النهاية حول ما يحدث *بجوار* أو *بالقرب* من هذا العدد.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

عند إيجاد الحدود باستخدام جدول أو تمثيل بياني، اطلعنا على قيمة $f(x)$ عندما يقترب x من c من الطرفين. ويُمكننا وصف سلوك التمثيل البياني من اليسار واليمين لـ x بشكل أكثر دقة بدلالة **النهايات أحادية الطرف**.

المفهوم الأساسي النهايات أحادية الطرف

النهاية من الجهة اليمنى

إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من العدد الفريد L_2 عندما يقترب x من c من اليمين، فإن

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L_2$$

وتُقرأ *النهاية $f(x)$ عندما يقترب x من c من اليمين تساوي L_2*.

النهاية من الجهة اليسرى

إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من العدد الفريد L_1 عندما يقترب x من c من اليسار، فإن

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L_1$$

وتُقرأ *النهاية $f(x)$ عندما يقترب x من c من اليسار تساوي L_1*.

قراءة في الرياضيات

النهايات أحادية الطرف يُمكن قراءة الرمز $\lim_{x \to c^-} f(x)$ في صورة *نهاية $f(x)$ عندما يقترب x من c من اليسار*. ويُمكن أيضًا قراءة الرمز $\lim_{x \to c^+} f(x)$ في صورة *نهاية $f(x)$ عندما يقترب x من c من اليمين*.

وباستخدام هذه التعريفات، يُمكننا التحديد بشكل أكثر دقة معنى وجود **دالة ثنائية الطرف**.

المفهوم الأساسي وجود نهاية عند نقطة

لا تكون نهاية الدالة $f(x)$ عندما يقترب x من c موجودة إلا إذا كان هناك نهايتان أحاديتا الطرف ومتساويتين. بمعنى أنه إذا كان

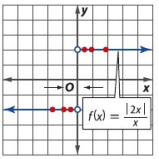
$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

فإن $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

مثال 3 تقدير النهايات أحادية الطرف وثنائية الطرف

قدّر النهاية أحادية الطرف أو ثنائية الطرف، إن وجدت.

a. $\lim_{x \to 0^-} \frac{|2x|}{x}$, $\lim_{x \to 0^+} \frac{|2x|}{x}$, $\lim_{x \to 0} \frac{|2x|}{x}$



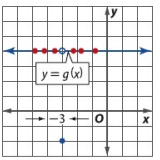
التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{|2x|}{x}$ يبيّن أن

$\lim_{x \to 0^-} \frac{|2x|}{x} = -2$ و $\lim_{x \to 0^+} \frac{|2x|}{x} = 2$.

بما أن النهايات من الجهتين اليسرى واليمنى للدالة $f(x)$ عندما يقترب x من 0 ليست متساوية، فإن $\lim_{x \to 0} \frac{|2x|}{x}$ غير موجودة.

b. $\lim_{x \to -3^+} g(x)$ و $\lim_{x \to -3^-} g(x)$ و $\lim_{x \to -3} g(x)$، **عندما**

$$g(x) = \begin{cases} 4 & , \ x \neq -3 \\ -2 & , \ x = -3 \end{cases}$$



التمثيل البياني للدالة $g(x)$ يبيّن أن

$\lim_{x \to -3^-} g(x) = 4$ و $\lim_{x \to -3^+} g(x) = 4$.

بما أن النهايات من الجهتين اليسرى واليمنى للدالة $g(x)$ عندما يقترب x من 3 متماثلة، فإن $\lim_{x \to -3} g(x)$ موجودة وتساوي 4.

تمرين موجّه

3A. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim_{x \to 1} f(x)$,

$$g(x) = \begin{cases} -0.5x + 2 & , \ x < -2 \\ -x^2 & , \ x \geq -2 \end{cases}$$

3B. $\lim_{x \to -2^-} g(x)$, $\lim_{x \to -2^+} g(x)$, $\lim_{x \to -2} g(x)$,

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & , \ x < 1 \\ 2x + 1 & , \ x \geq 1 \end{cases}$$

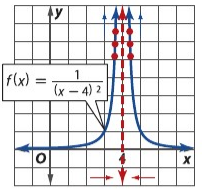
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

هناك طريقة أخرى تتسبب في عدم وجود النهاية، وذلك عندما لا تقترب قيمة $f(x)$، حيث تقترب x من c، من قيمة محددة نهائية. وبدلاً من ذلك تزداد قيمة $f(x)$ دون نهاية كما هو موضح في ∞، أو تنخفض دون نهاية كما هو موضح في $-\infty$.

مثال 4 النهايات والسلوك غير المحدود

قدّر كل نهاية، إن وجدت.

a. $\lim_{x \to 4} \frac{1}{(x-4)^2}$



التحليل بيانيًا التمثيل البياني لمنحنى الدالة $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$ يبيّن أن $\lim_{x \to 4^-} \frac{1}{(x-4)^2} = \infty$ و $\lim_{x \to 4^+} \frac{1}{(x-4)^2} = \infty$.

بما أن x قريبة من 4، فإن قيم دالة التمثيل البياني تزداد.

لا توجد أي نهاية أحادية الحد عند $x = 4$؛ لذلك يُمكننا استنتاج أن $\lim_{x \to 4} \frac{1}{(x-4)^2}$ غير موجودة. وبما أن الطرفين كذلك (كلاهما يؤولان إلى ∞). فإننا نصف سلوك $f(x)$ عند 4 من خلال كتابة $\lim_{x \to 4} \frac{1}{(x-4)^2} = \infty$.

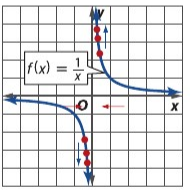
الدعم بالأرقام

x تقترب من 4 ← | → x تقترب من 4

x	3.9	3.99	3.999	4	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	100	10,000	1,000,000		1,000,000	10,000	100

يبيّن نمط المخرجات أنه عندما تقترب قيمة x من 4 من اليسار واليمين، تزداد $f(x)$ دون نهاية. وهذا يدعم تحليلنا البياني.

b. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$



التحليل بيانيًا التمثيل البياني لمنحنى الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ يبيّن أن $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ و $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = -\infty$.

وذلك لأنه عندما يقترب x من 0، فإن قيم الدالة من اليسار تتناقص وتزداد قيم الدالة من اليمين.

لا توجد أي نهاية أحادية الحد عند $x = 0$؛ لذلك $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ غير موجودة. في هذه الحالة، لا يُمكننا وصف سلوك $f(x)$ عند 0 باستخدام تعبير وحيد لأن هناك اختلافًا في السلوكيات غير المحدودة من اليسار واليمين.

الدعم بالأرقام

x تقترب من 0 ← | → x تقترب من 0

x	−0.1	−0.01	−0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	−10	−100	−1000		1000	100	10

يبيّن نمط المخرجات أنه عندما تقترب قيمة x من 0 من اليسار واليمين، تقل $f(x)$ وتزداد دون نهاية، على التوالي. وهذا يدعم تحليلنا البياني.

تمرين موجّه

4A. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4}{x - 3}$

4B. $\lim_{x \to 0} -\frac{2}{x^4}$

قراءة في الرياضيات

دون نهاية حتى تزداد أو تقل $f(x)$ دون *نهاية* حيث $x \to c$ يعني أنه من خلال اختيار قيمة x بشكل اعتباطي قريبة من c، فإنه يُمكنك الحصول على قيمة الدالة التي لها قيمة مطلقة جيدة كما تريد. كلما تم اختيار قيمة x من c، زادت قيمة $|f(x)|$.

انتبه!

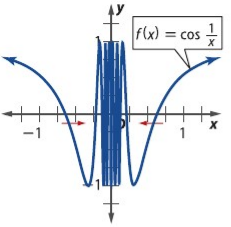
نهايات لانهائية من المهم استيعاب أن التعبيرين $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$ عبارة عن وصف لسبب عدم وجود هاتين النهايتين. ولا يمثل الرمزان ∞ و $-\infty$ أعدادًا حقيقية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يُمكن للنهاية كذلك ألا تكون موجودة إذا كانت. بدلاً من الاقتراب من قيمة محددة $f(x)$. تتذبذب أو ترتد ذهابًا وإيابًا بين قيمتين.

مثال 5 النهايات والسلوك المتذبذب

قدّر $\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$، إذا كانت موجودة.



يبيّن التمثيل البياني $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ أنه كلما اقترب x من 0، تتذبذب قيم الدالة بين −1 و 1. وهذا يعني أنه بالنسبة إلى قيم x_1 القريبة من 0 حيث إن $f(x_1) = 1$، يُمكنك دائمًا إيجاد قيمة x_2 القريبة من 0 حيث إن $f(x_2) = -1$. وبالمثل، بالنسبة لقيمة x_3 القريبة من 0 حيث إن $f(x_3) = -1$، يُمكنك دائمًا إيجاد قيمة x_4 القريبة من 0 حيث إن $f(x_4) = 1$.

إذًا، $\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$ غير موجودة.

تمرين موجّه

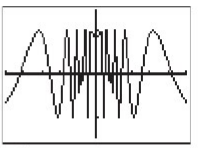
قدّر كل نهاية، إن وجدت.

5A. $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$

5B. $\lim_{x \to 0} (x^2 \sin x)$

تلميح تقني

التذبذبات اللانهائية قد تكون ميزة TRACE على حاسبة التمثيل البياني مفيدة في تقدير النهايات. إلا أنه لا يُمكنك دائمًا الثقة فيما تخبرك به حاسبة التمثيل البياني. في حالة الدالة بالمثال 5، تستخدم الحاسبة عددًا *نهائيًا* من النقاط لإنتاج التمثيل البياني، لكن عند الاقتراب من 0، يكون لدى هذه الدالة تذبذبات *لانهائية*.



[−0.25, 0.25] scl: 0.05 by
[−1.5, 1.5] scl: 1

فيما يلي ملخص للأسباب الثلاثة الأشهر في أن نهاية الدالة غير موجودة عند نقطة ما.

المفهوم الأساسي السبب في عدم وجود نهايات عند نقطة ما

تكون نهاية $f(x)$ عندما يقترب x من c غير موجودة إذا كان:

- نهاية $f(x)$ من اليسار ومن اليمين لـ C من قيم مختلفة
- قيم $f(x)$ تزداد أو تقل دون نهاية من اليسار و/أو اليمين بالنسبة إلى c
- قيم $f(x)$ تتذبذب بين قيمتين محددتين.

2 تقدير النهاية عند اللانهاية

لغاية الآن، تم استخدام النهايات لوصف سلوك الدالة $f(x)$ عندما يقترب x من قيمة ثابتة c. تعلمت أنه يُمكن كذلك استخدام النهايات في وصف السلوك الطرفي للدالة. بمعنى شرح سلوك الدالة عندما تزداد x أو تقل دون نهاية. وفيما يلي ملخص رموز مثل هذه النهايات.

المفهوم الأساسي النهايات عند اللانهاية

- إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من العدد الفريد L_1 حيث x تزداد، فإن $\lim_{x \to \infty} f(x) = L_1$. وتُقرأ نهاية $f(x)$ *عندما يقترب x من اللانهاية تساوي* L_1.
- إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من العدد الفريد L_2 حيث x تقل، فإن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L_2$. وتُقرأ نهاية $f(x)$ *عندما يقترب x من اللانهاية السالبة تساوي* L_2.

تعلمت أن السلوك غير المحدود الذي يُمكن وصفه عبر ∞ أو $-\infty$ يوضّح موقع خط التقارب الرأسي. وتعلمت كذلك وجود نهاية عند اللا نهاية توضح موقع خط التقارب الأفقي. بمعنى أنه.

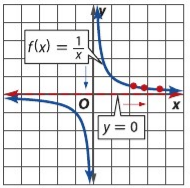
- $x = c$ هو خط تقارب رأسي للتمثيل البياني لـ $f(x)$ إذا كان $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$.
- $y = c$ هو خط تقارب أفقي للتمثيل البياني لـ $f(x)$ إذا كان $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$ أو $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 6 تقدير النهايات عند اللا نهاية

قدّر كل نهاية، إن وجدت.

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$



التحليل بيانيًا التمثيل البياني لمنحنى العلاقة $f(x) = \frac{1}{x}$ يبيّن أن $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. عندما يزداد x، فإن $f(x)$ يقترب من 0.

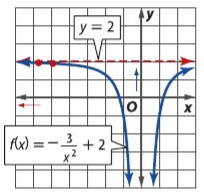
الدعم بالأرقام

x تقترب من ∞

x	10	100	1000	10,000	100,000
$f(x)$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001

يبيّن نمط المخرجات أنه عندما تزداد x بقدر كبير، فإن $f(x)$ يقترب من 0. ✓

b. $\lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{3}{x^2} + 2\right)$



التحليل البياني التمثيل البياني لمنحنى العلاقة $f(x) = -\frac{3}{x^2} + 2$ يبيّن أن $\lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{3}{x^2} + 2\right) = 2$. عندما يزداد x، فإن $f(x)$ تقترب من 2.

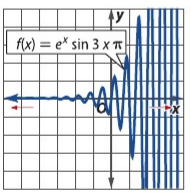
الدعم بالأرقام

x تقترب من $-\infty$

x	−100,000	−10,000	−1000	−100	−10
$f(x)$	1.99999	1.99999	1.99999	1.9997	1.97

يبيّن نمط المخرجات أنه عندما تقل x، فإن $f(x)$ تقترب من 2.

c. $\lim_{x\to\infty} e^x \sin 3\pi x$ و $\lim_{x\to-\infty} e^x \sin 3\pi x$



التحليل البياني التمثيل البياني لـ $f(x) = e^x \sin 3x\pi$ يبيّن أن $\lim_{x\to-\infty} e^x \sin 3\pi x = 0$. عندما تقل x، فإن $f(x)$ تتذبذب لكنها تميل تجاه 0.

يبيّن التمثيل البياني أن $\lim_{x\to\infty} e^x \sin 3\pi x$ غير موجود. عندما تزداد x، فإن $f(x)$ تتذبذب بين القيم المتزايدة دائمًا.

الدعم بالأرقام

x تقترب من ∞ — x تقترب من $-\infty$

x	−100	−50	−10	0	10	50	100
$f(x)$	3×10^{-44}	-2.0×10^{-22}	−0.00005	0	21966	4.8×10^{21}	-2.0×10^{43}

يبيّن نمط المخرجات إلى أنه عندما تقل x، فإن $f(x)$ تقترب من 0. وعندما تزداد x، فإن $f(x)$ تتذبذب.

تمرين موجّه

6A. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^4} - 3\right)$

6B. $\lim_{x\to-\infty} e^x$

6C. $\lim_{x\to\infty} \sin x$

نصيحة دراسية

خطوط التقارب تشير النهاية في المثال 6a إلى وجود خط تقارب عند $y = 0$. بينما تشير النهاية في المثال 6b إلى وجود خط تقارب عند $y = 2$.

انتبه!

السلوك المتذبذب لا تفرض أنه بمجرد أن الدالة $f(x)$ تظهر سلوكًا متذبذبًا، فلن يكون لها نهاية عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. إذا حدث التذبذب بين قيمتين ثابتتين أو كان محدودًا، فإن النهاية تكون غير موجودة. أما إذا كانت الذبذبة تقل وتقترب من قيمة ثابتة، فتكون النهاية موجودة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

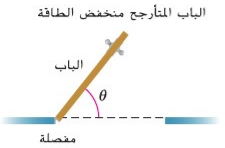
يُمكنك استخدام الطريقتين البيانية والعددية لتقدير النهايات عند اللانهاية في عدة مواقف من الحياة اليومية.

الربط بالحياة اليومية

محرك الباب المتأرجح هو عبارة عن أداة تفتح الباب وتغلقه بسرعة مخفضة لمساعدة من يستخدمون الكراسي المتحركة.

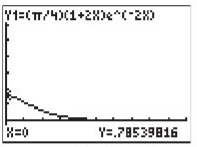
مثال 7 من الحياة اليومية تقدير النهاية عند اللانهاية

a. الهيدروليكا **يستخدم الباب المتأرجح منخفض الطاقة زنبركًا لغلق الباب وآلية هيدروليكية لتخفيف أو الإبطاء من حركة الباب. إذا تم فتح الباب بزاوية $\frac{\pi}{4}$ ثم تحرر من هذا الوضع، فإنه يُمكن إيجاد الزاوية θ لهذا الباب t بعد مرور ثوانٍ من تحريره باستخدام $\theta(t) = \frac{\pi}{4}(1 + 2t)e^{-2t}$ قدّر $\lim_{t\to\infty} \theta(t)$، إن كانت موجودة، وفسّر النتيجة.**



تقدير النهاية

مثّل بيانيًا $\theta(t) = \frac{\pi}{4}(1 + 2t)e^{-2t}$ باستخدام حاسبة التمثيل البياني. يشير التمثيل البياني إلى أنه عند $t = 0$. يكون $\theta(t) \approx 0.785$ أو حوالي $\frac{\pi}{4}$. لاحظ أنه كلما انخفض t، تميل قيم الدالة للتمثيل البياني تجاه 0. إذًا، يُمكننا تقدير أن $\lim_{t\to\infty} \theta(t)$ تساوي 0.



[0, 5] scl: 0.5 by [−0.5, 3.5] scl: 0.5

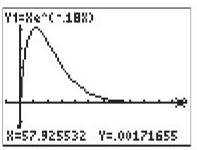
تفسير النتيجة

تشير دالة الصفر في هذا الموقف إلى أن الزاوية التي يصنعها الباب وهو في وضعية الغلق تميل إلى قياس 0 راديان. بمعنى أنه بعد مرور ثوانٍ على تحرير الباب، فإنه يقترب أكثر فأكثر من الإغلاق التام.

b. الدواء **يُمكن إيجاد تركيز دواء ما بالمليجرامات على المِلّيلتر في مجرى دم المريض بعد مرور عدد t من الساعات من تناول المريض له باستخدام $C(t) = \text{Ate}^{-0.18t}$، حيث A هو عبارة عن ثابت موجب. قدّر $\lim_{t\to\infty} C(t)$، إذا كانت موجودة، وفسّر النتيجة التي توصلت إليها.**

تقدير النهاية

مثّل الدالة بيانيًا $C_1(t) = te^{-0.18t}$ باستخدام حاسبة التمثيل البياني. يشير التمثيل البياني إلى أن كلما ازداد t، تميل قيم الدالة الخاصة بالتمثيل البياني تجاه 0. إذًا، يُمكننا تقدير أن $\lim_{t\to\infty} C_1(t)$ تساوي 0.



[−5, 60] scl: 5 by [−1, 2.5] scl: 0.5

نظرًا لأن A عبارة عن ثابت موجب، فإن التمثيل البياني للدالة $C(t) = Ate^{-0.18t}$ سيكون هو التمثيل البياني للدالة $C_1(t) = te^{-0.18t}$ بعد توسعه رأسيًا بالعامل A لكنه سيستمر في الميل تجاه 0 كلما ازداد t دون نهاية. إذًا، يُمكننا تقدير أن $\lim_{t\to\infty} C(t)$ تساوي أيضًا 0.

تفسير النتيجة

تشير نهاية الصفر في هذا الموقف إلى أن جميع عناصر الدواء سوف تختفي في النهاية من مجرى دم المريض.

تمرين موجّه

7A. الكهرباء يُمكن تمثيل الفولت النموذجي V الذي توفره المنافذ الكهربية في الولايات المتحدة باستخدام الدالة $V(t) = 165 \sin 120\pi t$، حيث t هو الزمن بالثانية. قدّر $\lim_{t\to\infty} V(t)$، إن كانت موجودة وفسّر النتيجة.

7B. الأحياء يقف ذباب الفاكهة على زجاجة ربع لتر من الحليب وقطعة فاكهة ونبات الخميرة. ويُمكن إيجاد تعداد ذباب الفاكهة بعد مرور t من الأيام باستخدام $P(t) = \frac{230}{1 + 56.5e^{-0.37t}}$. قدّر $\lim_{t\to\infty} P(t)$، إن كانت موجودة، وفسّر النتيجة التي توصلت إليها.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

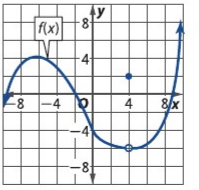
قدّر كل نهاية باستخدام التمثيل البياني أو المنحنى. وادعم تخمينك باستخدام جدول القيم. (المثالان 1 و 2)

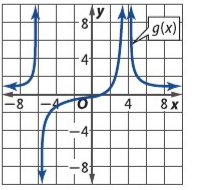
1. $\lim_{x\to 5}(4x-10)$
2. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2}x^5-2x^3+3x^2\right)$
3. $\lim_{x\to -2}(x^2+2x-15)$
4. $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-4}$
5. $\lim_{x\to 3}(2x^3-10x+1)$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{x^2+x}$
7. $\lim_{x\to 0}[5(\cos^2 x-\cos x)]$
8. $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$
9. $\lim_{x\to 6}(x+\sin x)$
10. $\lim_{x\to -5}\frac{x^2+x-20}{x+5}$

قدّر النهاية أحادية الطرف أو ثنائية الطرف، إن وجدت. (المثال 3)

11. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x}$
12. $\lim_{x\to 0^-}\frac{|4x|}{x}$
13. $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{|x|}$
14. $\lim_{x\to 9^+}\frac{3-\sqrt{x}}{x-9}$
15. $\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$
16. $\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-}\frac{|2x+1|}{x}$
17. $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{|x+2|}$
18. $\lim_{x\to -7}\frac{x^2-x-56}{x+7}$
19. $\lim_{x\to 0^-}(\sqrt{-x}-7)$
20. $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$
21. $\lim_{x\to 4^+}\frac{x^2-x-12}{|x-4|}$
22. $\lim_{x\to 0^+}(\sqrt{x}+2x+3)$
23. $\lim_{x\to 0}\frac{|3x|}{2x}$
24. $\lim_{x\to -1}\frac{|x+1|}{x^2-1}$
25. $\lim_{x\to 0} f(x)$ حيث $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x} & x<0\\ \sqrt{x} & x\ge 0\end{cases}$
26. $\lim_{x\to 3} f(x)$ حيث $f(x)=\begin{cases}3x & x<3\\ x^2 & x\ge 3\end{cases}$
27. $\lim_{x\to 0} f(x)$ حيث $f(x)=\begin{cases}x-5 & x<0\\ x^2+5 & x\ge 0\end{cases}$
28. $\lim_{x\to 0} f(x)$ حيث $f(x)=\begin{cases}-x^2+2 & x<0\\ \frac{2x}{x} & x\ge 0\end{cases}$

في كل دالة مما يلي، قدّر النهاية إن وجدت. (الأمثلة 1–4)





29. $\lim_{x\to -6} f(x)$
30. $\lim_{x\to 4^-} f(x)$
31. $\lim_{x\to 4} g(x)$
32. $\lim_{x\to -6} g(x)$

قدّر كل نهاية، إن وجدت. (الأمثلة 4–6)

33. $\lim_{x\to -4}\frac{-17}{x^2+8x+16}$
34. $\lim_{x\to 5}\frac{x^2}{x^2-10x+25}$
35. $\lim_{x\to 4}\frac{|x|}{x-4}$
36. $\lim_{x\to \infty} e^{2x-5}$
37. $\lim_{x\to 6}\frac{5}{(x-6)^2}$
38. $\lim_{x\to -\infty}(x^5-7x^4-4x+1)$
39. $\lim_{x\to \infty}\frac{x^2+x-22}{4x^3-13}$ 13
40. $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+9x+20}{x+3}$
41. $\lim_{x\to \infty}\frac{3x-4}{9x+3}$
42. $\lim_{x\to \infty} x\cos x$
43. $\lim_{x\to -\infty}\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$
44. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin|x|}{x}$
45. $\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}$
46. $\lim_{x\to -\infty}\frac{4x-13}{2x+8}$

47. **الدواء** تم حقن أشخاص بلقاح لمكافحة عدوى بسيطة. موضح أدناه عدد الحالات التي تم الإبلاغ عنها خلال عدد w من الأسابيع بعد حقن اللقاح. (مثال 7)

a. استخدم التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w\to 1} f(w)$ و $\lim_{w\to 3} f(w)$.

b. استخدم التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w\to \infty} f(w)$. إن وجدت. وفسّر النتيجة التي توصلت إليها.

48. **ألعاب القوى** تمثّل الدالة اللوجيستية $f(x)=\frac{5.334}{1+62548.213e^{-0.129x}}$. حيث x هو عدد الأعوام منذ 1900. ارتفاعات الأرقام القياسية العالمية بالمتر لمسابقة القفز بالزانة للسيدات من 1996 إلى 2008. (مثال 7)

a. مثّل الدالة بيانيًا عند $196 \le x \le 96$.

b. قدّر $\lim_{x\to \infty}\frac{5.334}{1+62548.213e^{-0.129x}}$ ، إن وجدت.

c. اشرح العلاقة بين نهاية الدالة وارتفاعات الأرقام القياسية العالمية.

49. **فيديو على الإنترنت** أنشئ مجموعة من الأصدقاء مقطع فيديو ساخر، وقاموا بنشره عبر الإنترنت. وذاع سيط هذا المقطع كثيرًا بمرور الوقت. ويُمكن تقدير عدد الأشخاص p الذين شاهدوا هذا المقطع باستخدام $p(d)=12(1.25012)^d-12$. حيث d هو عدد الأيام منذ نشر المقطع لأول مرة. (مثال 7)

a. مثّل الدالة بيانيًا عند $0 \le d \le 20$.

b. قدّر عدد الأشخاص الذين شاهدوا مقطع الفيديو بنهاية كلٍ من اليوم الخامس واليوم العاشر واليوم العشرين. كم عدد الأشخاص الذين سيشاهدون مقطع الفيديو بعد مرور شهرين؟ (استخدم $d=60$.)

c. قدّر $\lim_{d\to \infty} p(d)$ ، إن وجدت، وفسّر النتيجة التي توصلت إليها.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

50. التكنولوجيا ازداد أعمار أصحاب الهواتف المحمولة الذين تتراوح أعمارهم بين 18 و 25 عامًا منذ تسعينيات القرن الماضي. ويُمكن استخدام المتتالية $a_n = 64.39(0.82605)^n + 1$ لتقدير عدد الأشخاص الذين تتراوح أعمارهم بين 18 و 25 عامًا لكل هاتف محمول، حيث n يمثل الأعوام منذ عام 1993. (مثال 7)

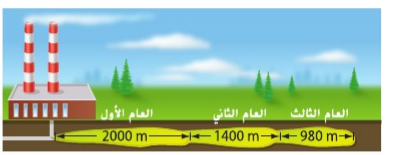
a. مثّل الدالة للأعوام من 1993 وحتى 2011.

b. استخدم التمثيل البياني لتقدير عدد الأشخاص لكل هاتف محمول للأعوام 1998، و2007، و2011.

c. استخدم التمثيل البياني لتقدير $\lim_{n\to\infty} a_n$.

d. اشرح العلاقة بين نهاية الدالة وعدد الأشخاص لكل هاتف محمول.

51. المواد الكيميائية يُسرّب خط أنابيب تحت الأرض مادة كيميائية سامة. وبعد بدء التسريب، انتشر على النحو الموضح أدناه. ويُمكن تحديد المسافة التي انتشرت فيها المادة الكيميائية كل عام باستخدام $d(t) = 2000(0.7)^{t-1}$. عند $t \geq 1$. حيث t هو عدد الأعوام منذ بدأ التسريب. (مثال 7)



a. مثّل الدالة بيانيًا عند $1 \leq t \leq 15$.

b. استخدم التمثيل البياني الذي رسمته في إيجاد قيم d عند t يساوي 5، و 10، و 15 عامًا.

c. استخدم التمثيل البياني لتقدير $\lim_{t\to\infty} d(t)$.

d. هل ستنتشر المادة الكيميائية أبدًا إلى المستشفى التي تبعد 7000 m عن التسريب؟ تذكر أنه يمكن إيجاد مجموع المتسلسلات اللا نهائية الهندسية باستخدام $\frac{a_1}{1-r}$.

52. الاستهلاك اشترى سعيد دراجة بخارية مقابل 11,000 AED. لكنها تُستهلك كل عام يمتلكها فيه. يُمكن تقدير القيمة v للدراجة البخارية بعد مرور t من الأعوام باستخدام النموذج $v(t) = 11{,}000(0.76)^t$. (مثال 7)

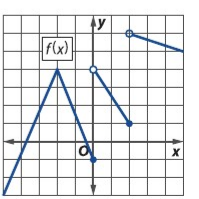
a. مثّل الدالة بيانيًا عند $0 \leq t \leq 10$.

b. استخدم التمثيل البياني في تقدير قيمة الدراجة البخارية عند t يساوي 3 و 7 و 10 أعوام.

c. استخدم التمثيل البياني لتقدير $\lim_{t\to\infty} v(t)$.

d. اشرح العلاقة بين نهاية الدالة وقيمة الدراجة البخارية الخاصة بسعيد.

في الدالة التالية، قدّر كل نهاية إن وجدت.



53. $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

54. $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

55. $\lim_{x\to 0} f(x)$

56. $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

57. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

58. $\lim_{x\to 1} f(x)$

حاسبة التمثيل البياني حدد ما إذا كانت كل نهاية مما يلي موجودة أم لا. إذا كانت غير موجودة، فصِف ما يحدث بيانيًا للنهاية.

59. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$

60. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$

61. $\lim_{x\to 0} 3\cos\frac{\pi}{x}$

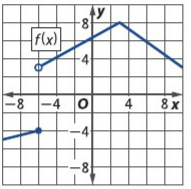
62. $\lim_{x\to -5} \frac{|x+5|}{x+5}$

63. $\lim_{x\to 0} \frac{7}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

64. $\lim_{x\to -4} \frac{\sqrt{2-x}-3}{x+4}$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

65. تحليل الخطأ يحاول مازن وأيوب إيجاد نهاية الدالة الموضحة أدناه عند x يقترب من -6. ويقول مازن إن النهاية تساوي -4. بينما يخالف أيوب في الرأي ويقول إن النهاية تساوي 3. هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.



66. مسألة غير محددة الإجابة اعطِ مثالاً للدالة f بحيث تكون $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجودة، لكن $f(0)$ غير موجودة. اعطِ مثالاً للدالة g حيث إن $g(0)$ موجودة، لكن $\lim_{x\to 0} g(x)$ غير موجودة.

67. تحدٍ افترض أن $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$، و $g(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$. قدّر $\lim_{x\to 1} f(x)$. و $\lim_{x\to 2} g(x)$. إذا كان $g(a) = 0$. و $f(a) \neq 0$. فماذا يُمكنك افتراضه حول $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$؟ اشرح استنتاجك.

68. التبرير حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة *دائمًا*، أم *أحيانًا* أم غير صحيحة *مطلقًا*. برر استنتاجك.

إذا كان $f(c) = L$. فإن $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

69. مسألة غير محددة الإجابة ارسم تمثيلاً بيانيًا لدالة بحيث تكون $\lim_{x\to 0} f(x) = -3$. و $f(0) = 2$. $f(2) = 5$. و $\lim_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة.

70. تحدٍ في الدالة التالية، قدّر كل نهاية إن وجدت.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & , \quad x < -1 \\ -1 & , \quad -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 & , \quad 0 < x \leq 2 \\ x-3 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

a. $\lim_{x\to -1} f(x)$ **b.** $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ **c.** $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

71. الكتابة في الرياضيات اشرح الطريقة التي تستخدمها في تقدير النهايات إذا كانت الدالة متصلة. واشرح مدى اختلاف ذلك عن الطرق المُستخدمة في تقدير الدوال غير المتصلة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة شاملة

72. توفير الوقود يوضّح الجدول سعات المحركات المتاحة في مصنع السيارات وتوفير الوقود الخاص به.

سعة المحرك (لتر)	الكيلومترات المقطوعة في الطريق السريع (km/L)
1.6	34
2.2	37
2.0	30
6.2	26
7.0	24
3.5	29
5.3	24
2.4	33
3.6	26
6.0	24
4.4	23
4.6	24

a. ارسم مخطط انتشار للبيانات. وحدد العلاقة.

b. احسب معامل الارتباط وفسره. وحدد ما إذا كان ذا دلالة عند المستوى 10%.

c. إذا كان الارتباط ذا دلالة عند المستوى 10%. فأوجد معادلة الانحدار التي بها مربعات أقل. وفسّر الميل والتقاطع في السياق.

d. استخدم معادلة الانحدار التي أوجدتها في الجزء c للتنبؤ بالكيلومترات المتوقعة لكل لتر ستقطعه السيارة بالمحرك الذي تبلغ سعته 8.0 L. حدد ما إذا كان هذا التوقع معقولاً. اشرح.

73. استخدم مثلث باسكال لإيجاد مفكوك $\left(3a + \frac{2}{3}b\right)^4$.

اكتب معادلة قطبية وخطًا دليليًا للقطع المخروطي ذي الخواصّ المعطاة ومثّله بيانيًا.

74. $e = 1$؛ الرأس عند $(0, -2)$

75. $e = 3$؛ الرأس عند $(0, 3)$ و$(0, 6)$

أوجد الزاوية الواقعة بين كل زوج من المتجهات مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة.

76. $u = \langle 2, 9, -2\rangle$, $v = \langle -4, 7, 6\rangle$

77. $m = 3i - 5j + 6k$, $n = -7i + 8j + 9k$

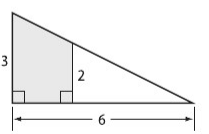
استخدم حاسبة تمثيل بياني لتمثل القطع المخروطي الناتج عن كل معادلة بيانيًا.

78. $7x^2 - 50xy + 7y^2 = -288$

79. $x^2 - 2\sqrt{3}\ \ xy + 3\sqrt{y} + 16\sqrt{3}\ \ x + 16y = 0$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

80. SAT/ACT ما مساحة المنطقة المظللة؟



A 5 C 7 E 9

B 6 D 8

81. المراجعة أي مما يلي يصف على نحو أفضل السلوك الطرفي لـ $f(x) = x^{10} - x^9 + 5x^8$؟

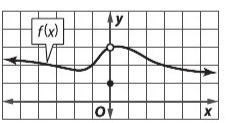
F $f(x) \to \infty$ عند $x \to \infty$, $f(x) \to -\infty$ عند $x \to \infty$

G $f(x) \to \infty$ عند $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$ عند $x \to -\infty$

H $f(x) \to -\infty$ عند $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$ عند $x \to -\infty$

J $f(x) \to -\infty$ عند $x \to -\infty$, $f(x) \to \infty$ عند $x \to \infty$

82. وفق التمثيل البياني لـ $y = f(x)$. $\lim_{x \to 0} f(x) =$



A 0 C 3

B 1 D النهاية غير موجودة.

83. المراجعة أي مما يلي يصف التمثيل البياني لـ $g(x) = \frac{1}{x^2}$؟

1. هذا المنحنى به انفصال لا نهائي.

2. هذا المنحنى به انفصال قفزي.

3. هذا المنحنى به نقطة انفصال.

F 1 فقط G 2 فقط H 1 و 2 فقط

J 1 و 3 فقط K 1 و 2 و 3

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 11-2 إيجاد قيمة النهايات جبريًا

السابق

- لقد قمت بتقدير النهايات باستخدام الطريقتين البيانية والعددية.

الحالي

1 إيجاد قيمة نهايات الدوال النسبية وكثيرة الحدود عند نقط محددة.

2 إيجاد قيمة نهايات الدوال النسبية وكثيرة الحدود عند اللانهاية.

لماذا؟

- افترض أنه يُمكن إيجاد عرض بؤبؤ عين حيوان بالمِلّيمترات باستخدام $d(x) = \frac{152x^{-0.45} + 85}{4x^{-0.45} + 10}$. حيث x هو استضاءة الضوء الساطع في بؤبؤ عين الحيوان مقيسًا باللكس. ويُمكنك إيجاد قيمة النهايات لإيجاد عرض بؤبؤ عين حيوان عندما يكون الضوء في الحد الأدنى ولديه أعلى قدر من الكثافة.

المفردات الجديدة

تعويض مباشر direct substitution

صيغة غير مُعينة indeterminate form

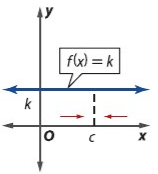
1 **حساب النهاية عند نقطة** في الدرس 11-1. لقد تعرفت على كيفية تقدير النهايات باستخدام منحنى أو تمثيل بياني أو إنشاء جدول قيم. في هذا الدرس، سوف نستكشف التقنيات الحاسوبية لإيجاد قيم النهايات.

المفهوم الأساسي نهاية الدوال

نهاية الدوال الثابتة

الشرح نهاية دالة ثابتة عند أي نقطة c تساوي قيمة الثابت الخاص بالدالة.

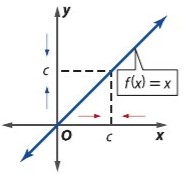
الرموز $\lim_{x \to c} k = k$



نهاية الدالة المحايدة

الشرح نهاية الدالة المحايدة عند أي نقطة c تساوي c.

الرموز $\lim_{x \to c} x = c$



عند دمج نهايات الدالة المحايدة والدوال الثابتة بالخواص الآتية تصبح مفيدة للغاية.

المفهوم الأساسي خواص النهايات

إذا كان k و c أعدادًا حقيقية، وn هو عدد صحيح موجب، و $\lim_{x \to c} f(x)$ و $\lim_{x \to c} g(x)$ موجودتان، فإن العبارة التالية صحيحة.

خاصية المجموع $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$

خاصية الفرق $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$

خاصية الضرب في كمية عددية $\lim_{x \to c} [kf(x)] = k \lim_{x \to c} f(x)$

خاصية ناتج الضرب $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$

خاصية ناتج القسمة $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$ إذا كان $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$.

خاصية القوة $\lim_{x \to c} [f(x)^n] = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n$

خاصية الجذر النوني $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$ إذا كان $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ حيث n هو عدد زوجي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 1 استخدام خواص النهايات

استخدم خواص النهايات لإيجاد قيمة كل من النهايات التالية.

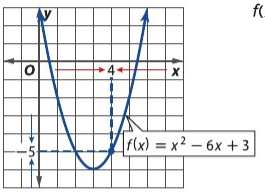
a. $\lim_{x \to 4} (x^2 - 6x + 3)$

$$\lim_{x \to 4} (x^2 - 6x + 3) = \lim_{x \to 4} x^2 - \lim_{x \to 4} 6x + \lim_{x \to 4} 3$$ خاصيتا المجموع والفرق

$$= \left(\lim_{x \to 4} x\right)^2 - 6 \cdot \lim_{x \to 4} x + \lim_{x \to 4} 3$$ خاصيتا القوة والضرب في كمية عددية

$$= 4^2 - 6 \cdot 4 + 3$$ نهاية الدالة المحايدة والدوال الثابتة

$$= -5$$ بسّط.



التحقق التمثيل البياني لمنحنى الدالة $f(x) = x^2 - 6x + 3$ يدعم هذه النتيجة. ✔

b. $\lim_{x \to -2} \frac{4x^3 + 1}{x - 5}$

$$\lim_{x \to -2} \frac{4x^3 + 1}{x - 5} = \frac{\lim_{x \to -2} (4x^3 + 1)}{\lim_{x \to -2} (x - 5)}$$ خاصية ناتج القسمة

$$= \frac{\lim_{x \to -2} 4x^3 + \lim_{x \to -2} 1}{\lim_{x \to -2} x - \lim_{x \to -2} 5}$$ خاصيتا المجموع والفرق

$$= \frac{4\left(\lim_{x \to -2} x\right)^3 + \lim_{x \to -2} 1}{\lim_{x \to -2} x - \lim_{x \to -2} 5}$$ خاصيتا القوة والضرب في كمية عددية

$$= \frac{4(-2)^3 + 1}{-2 - 5}$$ نهاية الدالة المحايدة والدوال الثابتة

$$= \frac{31}{7}$$ بسّط.

التحقق أنشئ جدولاً للقيم، مع اختيار قيم x التي تقترب من -2 من طرف واحد. ✔

x تقترب من -2 ← ... → x تقترب من -2

x	−2.1	−2.01	−2.001	−2	−1.999	−1.99	−1.9
$f(x)$	5.08	4.49	4.43		4.42	4.37	3.83

c. $\lim_{x \to 3} \sqrt{8 - x}$

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{8 - x} = \sqrt{\lim_{x \to 3} (8 - x)}$$ خاصية الجذر النوني

$$= \sqrt{\lim_{x \to 3} 8 - \lim_{x \to 3} x}$$ خاصية الفرق

$$= \sqrt{8 - 3}$$ نهاية الدالة المحايدة والدوال الثابتة

$$= \sqrt{5}$$ بسّط.

تمرين موجّه

1A. $\lim_{x \to 2} (-x^3 + 4)$

1B. $\lim_{x \to 2} \frac{x - 3}{2x^2 - x - 15}$

1C. $\lim_{x \to -1} \sqrt{x + 3}$

نصيحة دراسية

خواص النهايات تنطبق جميع خواص النهايات المذكورة في الصفحة السابقة كذلك على النهايات أحادية الطرف والنهايات عند اللانهاية، طالما أن كل نهاية منها موجودة.

لاحظ أنه بالنسبة لجميع الدوال في المثال 1، نهاية $f(x)$ عندما x يقترب من c تساوي نفس قيمة إجراء حسابات على $f(c)$. وهذا لا يُعد صحيحًا بالنسبة لجميع الدوال. فهو صحيح بالنسبة للدوال كثيرة الحدود والدوال النسبية فقط كما هو موضح أعلى الصفحة التالية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المفهوم الأساسي نهايات الدوال

نهايات الدوال كثيرة الحدود

إذا كانت $p(x)$ هي دالة كثيرة الحدود، و c هو عدد حقيقي، فإن $\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$.

نهايات الدوال النسبية

إذا كانت $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ هي دالة نسبية، و c هو عدد حقيقي، فإن $\lim_{x \to c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}$ إذا كان $q(c) \neq 0$.

نصيحة دراسية

الدوال حسنة الأداء تُعد الدوال المتصلة مثل الدوال كثيرة الحدود حسنة الأداء. وذلك لأنه يُمكن إيجاد نهايات هذه الدوال عند أي نقطة باستخدام التعويض المباشر. وكذلك يُمكن إيجاد نهايات الدوال التي لا تدخل ضمن الدوال حسنة الأداء باستخدام هذه الطريقة. طالما كانت الدالة متصلة عند قيمة المجال ذي الصلة.

بشكل أبسط، يُمكن إيجاد نهايات الدوال النسبية وكثيرة الحدود باستخدام **التعويض المباشر** طالما أن قيمة مقام الدالة النسبية عند c لا يساوي 0.

مثال 2 استخدام التعويض المباشر

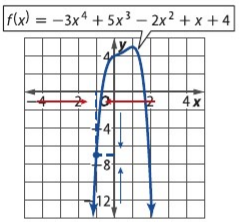
استخدم التعويض المباشر، إن أمكن، لإيجاد قيمة كل نهاية. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب.

a. $\lim_{x \to -1} (-3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4)$

نظرًا لأن هذا هو نهاية دالة كثيرة الحدود، فيُمكننا تطبيق طريقة التعويض المباشر لإيجاد قيمة النهاية.

$$\lim_{x \to -1} (-3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4) = -3(-1)^4 + 5(-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1) + 4$$
$$= -3 - 5 - 2 - 1 + 4 = -7$$

التحقق التمثيل البياني لـ $f(x) = -3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4$ يدعم هذه النتيجة. ✔



b. $\lim_{x \to 3} \frac{2x^3 - 6}{x - x^2}$

هذه هي نهاية دالة نسبية، ومقامها غير صفري عند $x = 3$. لذلك، يُمكننا تطبيق طريق التعويض المباشر لإيجاد النهاية.

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^3 - 6}{x - x^2} = \frac{2(3)^3 - 6}{3 - 3^2}$$
$$= \frac{48}{-6} \text{ or } -8$$

c. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

هذه هي نهاية دالة نسبية. نظرًا لأن مقام هذه الدالة يساوي 0 عند $x = 1$. فإنه لا يُمكن إيجاد النهاية عبر التعويض المباشر.

تمرين موجّه

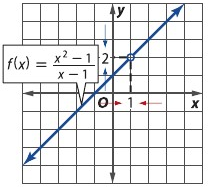
2A. $\lim_{x \to 4} (x^3 - 3x^2 - 5x + 7)$ **2B.** $\lim_{x \to -5} \frac{x + 1}{x^2 + 3}$ **2C.** $\lim_{x \to -8} \sqrt{x + 6}$

افترض أنك طبقت خاصية ناتج القسمة بشكل غير صحيح على نهايات التعويض المباشر، وذلك لإيجاد قيمة $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{\lim_{x \to 1} (x^2 - 1)}{\lim_{x \to 1} (x - 1)} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

هذا غير صحيح لأن نهاية المقام تساوي 0.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



عادةً ما نصف الكسر الناتج $\frac{0}{0}$ بأنه على شكل **صيغة غير مُعينة**. وذلك لأنه لا يُمكننا تحديد نهاية الدالة التي يكون المقام فيها عبارة عن 0. وقد تكون مثل هذه النهايات موجودة ولديها قيمة من الأعداد الحقيقية، أو قد لا تكون موجودة، فقد تكون تباعدية من ∞ أو $-\infty$. في هذه الحالة، ارسم التمثيل البياني لمنحنى الدالة $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.

وبذلك يتضح أن $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ موجودة بالفعل وقيمتها تساوي 2.

بينما تنتج نهاية النموذج المُبهم من التطبيق غير الصحيح لخواص أو نظريات النهايات، يُمكن لتحليل هذا النموذج أن يُقدم لنا دليلاً للتقنية التي ينبغي تطبيقها لإيجاد نهاية ما.

إذا أوجدت قيمة نهاية دالة نسبية وتوصلت إلى النموذج المُبهم $\frac{0}{0}$، فينبغي لك محاولة تبسيط التعبير جبريًا من خلال تحليل العامل المشترك إلى العوامل الأولية وقسمته.

مثال 3 استخدام التحليل إلى العوامل

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

a. $\lim_{x\to -4} \frac{x^2 - x - 20}{x + 4}$

من خلال التعويض المباشر، تحصل على $\frac{(-4)^2 - (-4) - 20}{-4 + 4}$ أو $\frac{0}{0}$. نظرًا لأن ما سبق عبارة عن صيغة غير مُعينة، فحاول تحليل أي عوامل مشتركة إلى العوامل الأولية وقسمتها.

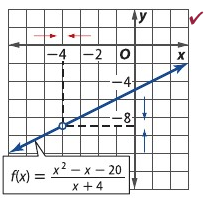
$$\lim_{x\to -4} \frac{x^2 - x - 20}{x + 4} = \lim_{x\to -4} \frac{(x-5)(x+4)}{x+4}$$ حلل البسط إلى العوامل.

$$= \lim_{x\to -4} \frac{(x-5)\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}$$ اختصر العامل المشترك.

$$= \lim_{x\to -4} (x - 5)$$ بسّط.

$$= (-4) - 5 = -9$$ طبّق التعويض المباشر وبسّط.

التحقق التمثيل البياني لمنحنى الدالة $f(x) = \frac{x^2 - x - 20}{x + 4}$ يدعم هذه النتيجة. ✔



b. $\lim_{x\to 3} \frac{x - 3}{x^3 - 3x^2 - 7x + 21}$

باستخدام التعويض المباشر، يُمكنك الحصول على $\frac{3 - 3}{3^3 - 3(3)^2 - 7(3) + 21}$ أو $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x - 3}{x^3 - 3x^2 - 7x + 21} = \lim_{x\to 3} \frac{x - 3}{(x^2 - 7)(x - 3)}$$ حلل المقام إلى العوامل الأولية.

$$= \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{x - 3}}{(x^2 - 7)\cancel{(x - 3)}}$$ اختصر العامل المشترك.

$$= \lim_{x\to 3} \frac{1}{x^2 - 7}$$ بسّط.

$$= \frac{1}{(3)^2 - 7} = \frac{1}{2}$$ طبّق التعويض المباشر وبسّط.

انتبه!

التحليل إلى العوامل إذا تمت قسمة التعبير كاملاً في البسط، فإن النتيجة تساوي 1 وليس 0.

تمرين موجّه

3A. $\lim_{x\to -2} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x + 2}$

3B. $\lim_{x\to 6} \frac{x^2 - 7x + 6}{3x^2 - 11x - 42}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

بينما يُمكننا استخدام طريقة قسمة العامل المشترك هذه، إلا أنها تتطلب بعض التبريرات. في المثال 3a، تنتج عملية قسمة عامل مشترك في $f(x)$ دالة جديدة، $g(x)$، حيث

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 20}{x + 4} \text{ و } g(x) = x - 5.$$

هاتان الدالتان لديهما نفس قيم الدالة بالنسبة لجميع قيم x باستثناء عند $x = -4$. إذا اختلفت الدالتان عند قيمة c فقط في مجالهما، فإن نهايتهما، عند x يقترب من c متماثلتان. ويرجع سبب ذلك إلى أن قيمة النهاية عند نقطة لا يعتمد على قيمة الدالة عند هذه النقطة. لذلك، $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - x - 20}{x + 4} = \lim_{x \to -4} (x - 5)$.

هناك طريقة أخرى لإيجاد النهايات التي لها صيغة غير مُعينة وهي إنطاق البسط أو المقام بالدالة، ثم قسمة أي عوامل مشتركة.

مثال 4 استخدام الإنطاق

أوجد قيمة $\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$.

باستخدام التعويض المباشر، يُمكنك الحصول على $\frac{\sqrt{9} - 3}{9 - 9}$ أو $\frac{0}{0}$. أنطق بسط الدالة، ثم اختصر العوامل المشتركة.

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} \cdot \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$$ اضرب البسط والمقام في $\sqrt{x} + 3$، المرافق لـ $\sqrt{x} - 3$.

$$= \lim_{x \to 9} \frac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)}$$ بسّط.

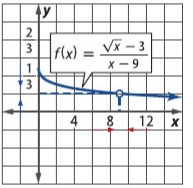
$$= \lim_{x \to 9} \frac{\cancel{x - 9}}{\cancel{(x - 9)}(\sqrt{x} + 3)}$$ اختصر العامل المشترك.

$$= \lim_{x \to 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3}$$ بسّط.

$$= \frac{1}{\sqrt{9} + 3}$$ طبّق التعويض المباشر.

$$= \frac{1}{6}$$ بسّط.

التحقق التمثيل البياني لمنحنى العلاقة $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$ في الشكل 11.2.1 يدعم هذه النتيجة. ✔



الشكل 11.2.1

تمرين موجّه

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

4A. $\lim_{x \to 25} \frac{x - 25}{\sqrt{x} - 5}$

4B. $\lim_{x \to 0} \frac{2 - \sqrt{x + 4}}{x}$

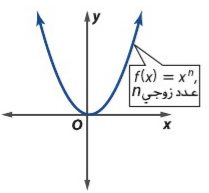
2 حساب النهايات عند اللانهاية

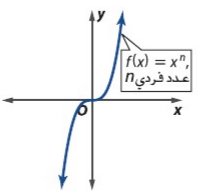
لقد تعلمت أن جميع دوال القوى زوجية الدرجة لديها نفس السلوك الطرفي، وأن جميع دوال القوى فردية الدرجة لديها نفس السلوك الطرفي. ويُمكن وصف ذلك بدلالة النهايات كما هو موضح أدناه.

المفهوم الأساسي نهايات دوال القوة عند اللانهاية

لأي عدد صحيح موجب n.

- $\lim_{x \to \infty} x^n = \infty$
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = \infty$ إذا كان n عددًا زوجيًا.
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ إذا كان n عددًا فرديًا.





تعلمت أيضًا أن السلوك الطرفي لدالة كثيرة الحدود يُحدد وفق السلوك الطرفي لدالة القوة ذات الصلة بالقوة الأكبر فيها. ويُمكن وصف هذا أيضًا باستخدام النهايات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المفهوم الأساسي نهايات الدوال كثيرة الحدود عند اللانهاية

لتكن p دالة كثيرة حدود. فإن $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ و $\lim_{x \to \infty} p(x) = \lim_{x \to \infty} a_n x^n$ and $\lim_{x \to -\infty} p(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$.

نصيحة دراسية

نواتج الضرب في اللانهاية بما أن نهاية ∞ تعني أن قيم الدالة تزداد بشكل كبير تجاه الأعداد الموجبة، فإن ضرب هذه الأعداد في ثابت موجب لا يغير هذا التوجه. إلا أن ضرب نهاية ∞ في ثابت سالب يغير إشارة جميع المخرجات بسبب هذا الرمز. إذا، $-1(\infty) = -\infty$.

يُمكنك استخدام هذه الخواص لإيجاد قيمة نهايات الدوال كثيرة الحدود عند اللانهاية. تذكر أن رمز نهاية الدالة على ∞ أو $-\infty$ هو غير موجود. ولا يشير إلى أن النهاية موجودة لكنها تصف بدلاً من ذلك سلوك الدالة سواء متزايدة ام متناقصة دون نهاية، على التوالي.

مثال 5 نهايات الدوال كثيرة الحدود عند اللانهاية

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

a. $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 + 5x - 1)$

$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 + 5x - 1) = \lim_{x \to -\infty} x^3$ — نهاية الدوال كثيرة الحدود عند اللانهاية

$= -\infty$ — نهاية دوال القوة عند اللانهاية

b. $\lim_{x \to \infty} (4 + 3x - x^2)$

$\lim_{x \to \infty} (4 + 3x - x^2) = \lim_{x \to \infty} -x^2$ — نهاية الدوال كثيرة الحدود عند اللانهاية

$= -\lim_{x \to \infty} x^2$ — خاصية الضرب في كمية عددية

$= -\infty$ — نهاية دوال القوة عند اللانهاية

c. $\lim_{x \to -\infty} (5x^4 - 3x)$

$\lim_{x \to -\infty} (5x^4 - 3x) = \lim_{x \to -\infty} 5x^4$ — نهاية الدوال كثيرة الحدود عند اللانهاية

$= 5 \lim_{x \to -\infty} x^4$ — خاصية الضرب في كمية عددية

$= 5 \cdot \infty = \infty$ — نهاية دوال القوة عند اللانهاية

تمرين موجّه **أوجد قيمة كل نهاية.**

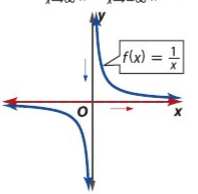
5A. $\lim_{x \to \infty} (-x^3 - 4x^2 + 9)$ **5B.** $\lim_{x \to -\infty} (4x^6 + 3x^5 - x)$ **5C.** $\lim_{x \to -\infty} (2x - 6x^2 + 4x^5)$

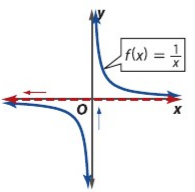
لإيجاد قيمة النهايات للدوال النسبية عند اللانهاية، سنحتاج إلى خاصية نهاية أخرى.

المفهوم الأساسي نهايات الدوال العكسية عند اللانهاية

الشرح نهاية الدالة العكسية عند اللانهاية الموجبة أو السالبة تساوي 0.

الرموز $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$





النتيجة بالنسبة لأي عدد صحيح موجب n، $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

إذا قسمنا البسط والمقام لدالة نسبية على أعلى قوة للمتغير x الموجودة في الدالة، فيُمكننا استخدام هذه الخاصية في إيجاد نهايات الدوال النسبية عند اللانهاية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 6 نهايات الدوال النسبية عند اللانهاية

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{4x+5}{8x-3}$

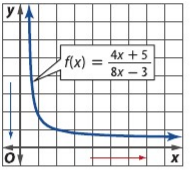
$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+5}{8x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{8x}{x}-\frac{3}{x}}$$ اقسم كل حد على الحد الأعلى قوة لـ x.

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{5}{x}}{8-\frac{3}{x}}$$ بسّط.

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 4 + 5\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x\to\infty} 8 - 3\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}$$ خواص ناتج القسمة والمجموع والفرق والضرب في كمية عددية

$$= \frac{4+5\cdot 0}{8-3\cdot 0} = \frac{1}{2}$$ نهاية الدوال الثابتة ونهاية الدوال العكسية

التحقق المنحنى للعلاقة $f(x) = \frac{4x+5}{8x-3}$ يدعم هذه النتيجة. ✔



b. $\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2-x}{3x^3+1}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2-x}{3x^3+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{6x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}$$ اقسم كل حد على المقدار ذو القوة الأكبر x^3.

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x^3}}$$ بسّط.

$$= \frac{6\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x\to-\infty} 3 + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}}$$ خواص ناتج القسمة والمجموع والفرق والضرب في كمية عددية

$$= \frac{6\cdot 0 - 0}{3+0} = 0$$ نهاية الدوال الثابتة ونهاية الدوال العكسية

c. $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4}{9x^3+2x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4}{9x^3+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{\frac{9}{x}+\frac{2}{x^3}}$$ اقسم كل حد على المقدار ذو القوة الأكبر x^4. ثم بسّط.

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 5}{9\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + 2\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3}}$$ خواص ناتج القسمة والمجموع والضرب في كمية عددية

$$= \frac{5}{9\cdot 0 + 2\cdot 0} = \frac{5}{0}$$ نهاية الدوال الثابتة ونهاية الدوال العكسية

نظرًا لأن نهاية المقام تساوي 0، فإننا نعرف أننا لم نطبق خاصية ناتج القسمة في النهايات بشكل صحيح. لكن يُمكننا القول بأنه كلما تمت قسمة العدد 5 على قيم أقل بشكل كبير وتقترب من 0، زادت قيمة الكسر الناتج بشكل كبير. لذلك، يُمكن وصف النهاية بأنها تقترب من ∞.

تمرين موجّه

6A. $\lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x-10}$

6B. $\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+7}{5x+1}$

6C. $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3-3x^2+1}{2x^3+4x}$

تلميح تقني

إيجاد قيمة النهايات إن استخدام الحاسبة لا يُعد طريقة مضمونة لإيجاد قيمة $\lim_{x\to c} f(x)$ أو $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. ويُمكنك فقط تحليل قيم $f(x)$ لعدد قليل من قيم x القريبة من c أو لعدد قليل من قيم x. إلا أن الدالة قد تتطرق إلى شيء غير متوقع مثل أن يقترب x بشكل أكبر من c أو أن تزداد قيمة x بشكل أكبر أو أن تقل بشكل أكبر كذلك. وينبغي لك استخدام الطرق الجبرية متى أمكن لحل النهايات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

لقد تعرفت على أنه بما أن المتتالية هي عبارة عن دالة للأعداد الطبيعية، فإن نهاية المتتالية هي نهاية الدالة عند $n \to \infty$. إذا كانت هذه النهاية موجودة، فإن قيمها تمثل العدد الذي تقترب منه الدالة. على سبيل المثال، يُمكن وصف المتتالية ... $a_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ على أنها $f(n) = \frac{1}{n}$. حيث n هو عدد صحيح موجب. وبما أن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$، فإن المتتالية تقترب من 0.

مثال 7 نهايات المتتاليات

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية. ثم أوجد نهاية المتتالية، إن وجدت.

a. $a_n = \frac{3n+1}{n+5}$

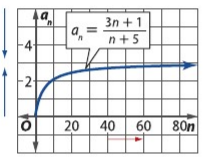
الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية هي $\frac{3(1)+1}{1+5}$، و$\frac{3(2)+1}{2+5}$، و$\frac{3(3)+1}{3+5}$، و$\frac{3(4)+1}{4+5}$، و$\frac{3(5)+1}{5+5}$ أو حوالي 0.667، و 1، و 1.25، و 1.444، و 1.6. لإيجاد قيمة نهاية المتتالية، أوجد قيمة $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+5}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}}$$ اقسم كل حد على المقدار ذو القوة الأكبر n، ثم بسّط.

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 1 + 5\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}$$ خواص ناتج القسمة والمجموع والضرب في كمية عددية

$$= \frac{3+0}{1+5\cdot 0} = 3$$ نهاية الدالة الثابتة ونهاية الدوال العكسية عند اللانهاية

إذًا، نهاية الدالة تساوي **3**. بمعنى أن المتتالية تقترب من **3**.



التحقق منحنى العلاقة $a_n = \frac{3n+1}{n+5}$ يدعم هذه النتيجة. ✔

b. $b_n = \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$

الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية هي حوالي 5، و 2.813، و 2.222، و 1.953، و 1.8. والآن، أوجد نهاية المتتالية.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}\right]$$ قم بتربيع ذات الحدّين.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^4+10n^3+5n^2}{4n^4}$$ اضرب.

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 5 + 10\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 5\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 4}$$ اقسم كل حد على المقدار ذو القوة الأكبر. ثم استخدم خواص ناتج القسمة والمجموع والضرب في كمية عددية.

$$= \frac{5}{4} = 1.25$$ نهاية الدوال الثابتة ونهاية الدوال العكسية

إذًا، نهاية الدالة b_n تساوي 1.25. بمعنى أن المتتالية تقترب من 1.25.

التحقق أنشئ جدول قيم مع اختيار قيم كبيرة لـ n بحيث تزداد بشكل أكبر. ✔

n يقترب من ∞ ⟵

n	10	100	1000	10,000	100,000
a_n	1.51	1.28	1.25	1.25	1.25

⟶

نصيحة دراسية

تحقق من مدى صحة الحل

للتحقق من مدى صحة النتائج في المثال 7. أوجد الحدود رقم 100 و1000 و10,000 في كل متتالية. في المثال 7a، هذه الحدود هي 2.867، و2.986، و2.999 على التوالي. وبما أن هذه القيم يبدو عليها الاقتراب من 3، فإن نهاية 3 غير معقولة.

تمرين موجّه

7A. $a_n = \frac{4}{n^2+1}$

7B. $b_n = \frac{2n^3}{3n+8}$

7C. $c_n = \frac{9}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التمارين

استخدم خواص النهايات لإيجاد قيمة كل من النهايات الآتية: (مثال 1)

1. $\lim_{x\to -3}(5x-10)$
2. $\lim_{x\to 5}\frac{x^2+4x+13}{x-3}$
3. $\lim_{x\to -1}(7x^2-6x-3)$
4. $\lim_{x\to -2}\frac{2x^5-4x^3-2x-12}{x^3+5x^2}$
5. $\lim_{x\to 9}\left(\frac{1}{x}+2x+\sqrt{x}\right)$
6. $\lim_{x\to -4}[x^2(x+1)+2]$
7. $\lim_{x\to 12}\frac{x^2-10x}{\sqrt{x+4}}$
8. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x-11}{x+3}$
9. $\lim_{x\to 2}(26-3x)$
10. $\lim_{x\to -6}\frac{x^4-x^3}{x^2}$

استخدم التعويض المباشر، إن أمكن، لإيجاد قيمة كل نهاية. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب. (مثال 2)

11. $\lim_{x\to 16}\frac{x^2+9}{\sqrt{x}-4}$
12. $\lim_{x\to 2}4x^3-3x^2+10$
13. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3+9x+6}{x^2+5x+6}$
14. $\lim_{x\to 3}\sqrt{2-x}$
15. $\lim_{x\to -4}\frac{5x^5-16x^4}{x+5}$
16. $\lim_{x\to 4}\frac{x+4}{x-4}$
17. $\lim_{x\to 5}\frac{x^3}{\sqrt{x+4}-5}$
18. $\lim_{x\to 9}(3x^2-10x+35)$
19. $\lim_{x\to 5}\frac{2x+11}{x^2-x-20}$
20. $\lim_{x\to 1}(-x^2+3x+\sqrt{x})$

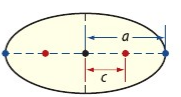
21. **الفيزياء** وفق نظرية النسبية الخاصة لألبرت أينشتاين، يُمكن إيجاد كتلة الجسم المتحرك في الفضاء بسرعة v باستخدام $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

حيث c هو سرعة الضوء، و m_0 هو الكتلة الأولية أو الكتلة عند السكون للجسم. (مثال 2)

a. أوجد $\lim_{v\to 0} m$ اشرح العلاقة بين هذه النهاية و m_0.

b. ماذا يحدث لكتلة جسم إذا كان يُمكن لسرعته أن تقترب من سرعة الضوء؟

22. **الهندسة** يُمكن تعريف مساحة القطع الناقص على أنها $A=\pi a\sqrt{a^2-c^2}$. حيث a هو المسافة من الرؤوس إلى المركز، و c هو المسافة من البؤرة إلى المركز. (مثال 2)



a. مساحة القطع الناقص عند $a=5$ و $c=3$؟

b. ماذا يحدث للاختلاف المركزي في القطع الناقص عندما تتحرك بؤرتيه تجاه مركز القطع الناقص؟

c. ما نهاية مساحة القطع الناقص عند c يقترب من 0 بدلالة a؟

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي. (المثالان 3 و 4)

23. $\lim_{x\to 4}\frac{2x^2-5x-12}{x-4}$
24. $\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sqrt{x+1}-1}$
25. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$
26. $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$
27. $\lim_{x\to -5}\frac{4x^2+21x+5}{3x^2+17x+10}$
28. $\lim_{x\to 7}\frac{5-\sqrt{18+x}}{x-7}$
29. $\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{6+x}-2}$
30. $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{8x^2+2x-3}{12x^2+8x-7}$
31. $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3-\sqrt{x+9}}$
32. $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-2x-15}{x+3}$
33. $\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$
34. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{16+x}-4}{x}$

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي. (المثالان 5 و 6)

35. $\lim_{x\to\infty}(5-2x^2+7x^3)$
36. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-10x+2}{4x^3+20x^2}$
37. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x-17}{3x^5+4x^2+2}$
38. $\lim_{x\to\infty}(10x+14+6x^2-x^4)$
39. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^6+12x}{3x^6+2x^2+11x}$
40. $\lim_{x\to\infty}\frac{14x^3-12x}{4x^2+13x-8}$
41. $\lim_{x\to\infty}(7x^3+4x^4+x)$
42. $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^5-12x^2+14x}{2x^5+13x^3}$
43. $\lim_{x\to\infty}(x^3-6x^7+2x^6)$
44. $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3+2x-11}{-x^5+17x^3+4x}$
45. $\lim_{x\to\infty}\frac{10x^4-2}{5x^4+3x^3-2x}$
46. $\lim_{x\to-\infty}(2x^5-4x^2+10x-8)$

47. **الإسفنج** تحتوي الكبسولة الهلامية على قطعة إسفنج. وعند غمر الكبسولة في الماء، يتحلل فورًا ويسمح للإسفنج بامتصاص الماء ويزيد حجمه بشكل سريع. يُمكن تعريف الطول ℓ بالملّيمتر لقطعة الإسفنج بعد غمرها بالماء لمدة t ثانية على أنها $\ell(t)=\frac{105t^2}{10+t^2}+25$. (مثال 6)

$t=0$ $t=t_1$ $t=t_n$

a. ما طول الكبسولة قبل غمرها في الماء؟

b. ما نهاية الدالة عند $t\to\infty$؟

c. اشرح مدى ارتباط نهاية هذه الدالة بطول قطعة الإسفنج.

48. **الهررة** افترض أنه يُمكننا تقدير الوزن w بالكيلوجرام للهرة d بعد أيام من ولادتها باستخدام $w(d)=\frac{25}{2+98(0.85)^d}$. (مثال 6)

a. ما وزن الهرة عند الولادة؟

b. كم سيبلغ وزن الهرة في النهاية (أو ما وزنها عند $d\to\infty$)؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

أوجد نهاية كل متتالية مما يلي، إن وجدت. (مثال 7)

49. $a_n = \frac{n^3 - 2}{n^2}$

50. $a_n = \frac{8n + 1}{n^2 - 3}$

51. $a_n = \frac{-4n^2 + 6n - 1}{n^2 + 3n}$

52. $a_n = \frac{4 - 3n}{2n^3 + 5}$

53. $a_n = \frac{12n^2 + 2}{6n^2 - 1}$

54. $a_n = \frac{8n^2 + 5n + 2}{3 + 2n}$

55. $a_n = \frac{5}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$

56. $a_n = \frac{3}{n^3}\left[\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}\right]$

57. $a_n = \frac{1}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$

58. $a_n = \frac{12}{n^2}\left[\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}\right]$

59. **تعداد السكان** بعد أن صنفت صحيفة إحدى الصحف أن مدينة ما كإحدى أفضل المدن للعيش، شهدت المدينة ارتفاعًا في تعداد السكان الذي يُمكن تمثيله باستخدام $p(t) = \frac{36t^3 - 12t + 13}{3t^3 + 90}$. حيث p هو إجمالي ارتفاع تعداد السكان بالآلاف، و t هو عدد الأعوام بعد عام 2006. (مثال 7)

عدد الأعوام منذ عام 2006	الزيادة في تعداد السكان
1	؟
2	؟
3	؟

a. أكمل الجدول للأعوام 2007-2009.

b. ما إجمالي زيادة تعداد السكان بحلول عام 2011؟

c. ما النهاية التي تمثل النمو السكاني؟

d. اشرح لماذا قد توجد نهاية للنمو السكاني.

B

أوجد كل نهاية، إن وجدت، باستخدام التعويض المباشر، وذلك لإيجاد قيمة النهايات أحادية الطرف المقابلة.

60. $\lim_{x \to -2} \begin{cases} x - 3 & , \quad x \le -2 \\ 2x - 1 & , \quad x > -2 \end{cases}$

61. $\lim_{x \to 0} \begin{cases} 4x + 2 & , \quad x \le 0 \\ 2 - x^2 & , \quad x > 0 \end{cases}$

62. $\lim_{x \to 0} \begin{cases} 5 - x^2 & , \quad x \le 0 \\ 5 - x & , \quad x > 0 \end{cases}$

63. $\lim_{x \to 2} \begin{cases} (x-2)^2 + 1 & , \quad x \le 2 \\ x - 6 & , \quad x > 2 \end{cases}$

أوجد كل نهاية، إن وجدت، باستخدام أي طريقة.

64. $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x}$

65. $\lim_{x \to 0} (1 + x + 2^x - \cos x)$

66. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{x}$

67. $\lim_{x \to 0} \frac{3x - \sin 3x}{x^2 \sin x}$

68. $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{\ln (2x - 1)}$

69. $\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{x - 1}$

70. **الأحياء** افترض أنه يُمكننا إيجاد عرض بؤبؤ عين حيوان بالملّيمتر باستخدام $d(x) = \frac{152x^{-0.45} + 85}{4x^{-0.45} + 10}$. حيث x هو استضاءة الضوء الساطع في بؤبؤ عين الحيوان مقيسًا باللكس. **C**

a. اكتب نهاية تصف عرض بؤبؤ عين الحيوان عندما يبلغ الضوء الحد الأدنى للاستضاءة. ثم أوجد النهاية، وفسّر النتائج التي توصلت إليها.

b. اكتب نهاية تصف عرض بؤبؤ عين الحيوان عندما يبلغ الضوء الحد الأقصى للاستضاءة. ثم أوجد النهاية، وفسّر النتائج التي توصلت إليها.

أوجد $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ لكل معادلة.

71. $f(x) = 2x - 1$

72. $f(x) = 7 - 9x$

73. $f(x) = \sqrt{x}$

74. $f(x) = \sqrt{x + 1}$

75. $f(x) = x^2$

76. $f(x) = x^2 + 8x + 4$

77. **الفيزياء** لدى الجسم المتحرك طاقة أثناء الحركة يُطلق عليها الطاقة الحركية لأنه يمكنه بذل شغل عندما يصطدم بجسم آخر. يُمكن إيجاد الطاقة الحركية لجسم تبلغ كتلته m باستخدام $K(t) = \frac{1}{2}m \cdot [v(t)]^2$. حيث $v(t)$ هو سرعة الجسم عند الزمن t وتُقاس الكتلة بالكيلوجرام. افترض أن $v(t) = \frac{50}{1 + t^2}$ بالنسبة لجميع قيم $t \ge 0$. إلى القيمة التي تقترب منها الطاقة الحركية لجسم كتلته واحد كيلوجرام عندما يقترب الزمن من 100؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

78. **البرهان** استخدم خواص النهايات لتوضيح أنه بالنسبة لجميع $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ والعدد الحقيقي c. تكون $\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$.

79. **البرهان** استخدم الاستقراء الرياضي لتوضيح أنه إذا كانت $\lim_{x \to c} f(x) = L$. فإن $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = [\lim_{x \to c} f(x)]^n$ أو L^n بالنسبة لأي عدد صحيح n.

80. **تحدٍ** أوجد

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_n x^m + b_{n-1}x^{m-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0}$$

حيث $a_n \ne 0$ و $b_m \ne 0$. (إرشاد: تأمل الحالات التي فيها $m < n$، و $n = m$، و $m > n$.)

81. **التبرير** إذا كانت $r(x)$ دالة نسبية. فهل من الصحيح أحيانًا، أم دائمًا، أم غير الصحيح مطلقًا أن $\lim_{x \to c} r(x) = r(c)$؟ اشرح استنتاجك.

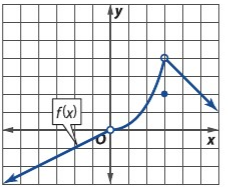
82. **الكتابة في الرياضيات** استخدم ورقة بيانات أو جدولاً لتلخيص خواص النهايات. مع ضرب مثال لكل خاصية.

83. **الكتابة في الرياضيات** تأمل $\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\infty}{\infty}$. تقول سهيلة إن هذه الإجابة تعني أن النهاية تساوي 1. لماذا سهيلة على صواب. ما التحليل الإضافي الذي يُمكن استخدامه لتحديد النهاية، إن كانت موجودة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة شاملة

استخدم التمثيل البياني لمنحنى $y = f(x)$ لإيجاد كل قيمة.



84. $\lim_{x \to -2} f(x)$ and $f(-2)$

85. $\lim_{x \to 0} f(x)$ and $f(0)$

86. $\lim_{x \to 3} f(x)$ and $f(3)$

متوسط العمر المتوقع	عدد الأعوام منذ عام 1900
50	10
54.1	20
59.7	30
62.9	40
68.2	50
69.7	60
70.8	70
73.7	80
75.4	90
76.9	100

87. الصحة يوضح الجدول متوسط العمر المتوقع للأشخاص الذين ولدوا في أعوام مختلفة بالولايات المتحدة.

a. ارسم مخطط انتشار للبيانات، وحدد العلاقة.

b. احسب معامل الارتباط وفسره. وحدد ما إذا كان ذا دلالة عند المستوى 5%.

c. إذا كان معامل الارتباط ذا دلالة عند المستوى 5%. فأوجد معادلة الانحدار التي بها مربعات أقل، وفسّر الميل والتقاطع في السياق.

d. استخدم معادلة الانحدار التي أوجدتها في الجزء c للتنبؤ بمتوسط العمر المتوقع في 2080. وحدد ما إذا كان هذا التوقع معقولاً. اشرح.

88. الصوتيات يُمكن استخدام الإحداثيات القطبية لتمثيل شكل مدرجات قاعة. افترض أن المتحدث يقف عند القطب ويواجه اتجاه المحور القطبي. وتم وضع الكراسي بحيث تشغل المنطقة وفق $-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ و $0.1 \le r \le 1$. حيث تُقاس r بمئات الأمتار.

a. ارسم هذه المنطقة على المستوى القطبي.

b. كم عدد المقاعد إذا كان نصيب كل فرد من المساحة $0.6\ m^2$؟

89. اكتب زوجًا من المعادلات الوسيطة، حيث $x = 2 \sin t$ و $y = 5 \cos t$ في شكل مستطيل. ثم ارسم التمثيل البياني للمنحنى.

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

90. SAT/ACT وفق البيانات الواردة في الجدول، ما النسبة المئوية لزيادة عدد المتقدمين إلى إحدى الكليات منذ 1995 إلى 2000؟

عدد المتقدمين إلى إحدى الكليات	
العام	المتقدمون
1990	18,000
1995	20,000
2000	24,000
2005	25,000

A 15% C 25% E 29%
B 20% D 27%

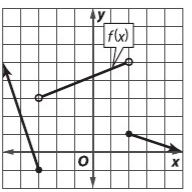
19. مراجعة ما قيمة $\lim_{h \to 0} \frac{2h^3 - h^2 + 5h}{h}$؟

F 3 H 5
G 4 J النهاية غير موجودة

29. ما القيمة التي تقترب منها $g(x) = \frac{x + \pi}{\cos(x + \pi)}$ عند x يقترب من 0؟

A $-\pi$ C $-\frac{1}{2}\pi$
B $-\frac{3}{4}$ D 0

93. مراجعة تأمل منحنى $y = f(x)$ الموضح. ما قيمة $\lim_{x \to 2^+} f(x)$؟



F 0 H 5
G 1 J النهاية غير موجودة

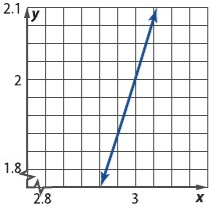
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

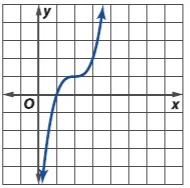
مختبر تقنية التمثيل البياني
ميل المنحنى

الهدف

- استخدم تقنية TI-Nspire لتقدير ميل المنحنى

يُعد ميل المستقيم كمعدل تغير ثابت مفهومًا مألوفًا. لا يوجد معدل تغير ثابت للمنحنيات العامة نظرًا لأن الميل يكون مختلفًا عند كل نقطة بالتمثيل البياني.



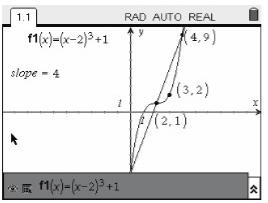


ومع ذلك، تكون التمثيلات البيانية لمعظم الدوال خطية *بشكل موضعي*. يكون ذلك، إذا درست التمثيل البياني لدالة عند كل فترة صغيرة جدًا، فستظهر في صورة خطية.

بالنظر إلى المستقيمات المتقاطعة المتتابعة، من المحتمل تطبيق الميل على المنحنى.

النشاط مستقيمات متقاطعة

قدّر ميل تمثيل $y = (x - 2)^3 + 1$ البياني عند (3, 2).

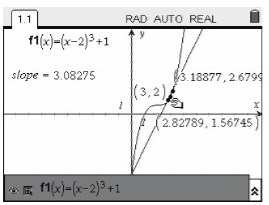


الخطوة 1 أدخل $y = (x - 2)^3 + 1$ في f1. ثم احسب ميل القاطع على المنحنى $y = (x - 2)^3 + 1$ من خلال $x = 2$ و $x = 4$.

ميل القاطع هو 4.

الخطوة 2 أوجد ميل القاطع لمنحنى $y = (x - 2)^3 + 1$ من خلال $x = 2.5$ و $x = 3.5$.

ميل القاطع هو 3.25.



الخطوة 3 أوجد ميل القاطع على لمنحنى $y = (x - 2)^3 + 1$ من خلال $x = 2.8$ و $x = 3.2$.

ميل القاطع هو 3.04.

الخطوة 4 أوجد ميل 3 مستقيمات قاطعة أو أكثر عند فترات متناقصة حول (3, 2).

بتناقص الفترة حول (3, 2)، يقترب ميل القاطع من 3. إذًا، ميل $y = (x - 2)^3 + 1$ عند (3, 2) هو 3 تقريبًا.

التمارين

قدّر ميل كل دالة عند النقطة المبينة.

1. $y = (x + 1)^2$; (−4, 9)
2. $y = x^3 - 5$; (2, 3)
3. $y = 4x^4 - x^2$; (0.5, 0)
4. $y = \sqrt{x}$; (1, 1)

تحليل النتائج

5. **التحليل** صف التغير الحادث في قاطع على تمثيل بياني لدالة حيث تقترب نقاط التقاطع من نقطة مبينة (a, b).

6. **التخمين** صِف الطريقة التي يمكنك بها تحديد الميل الدقيق لمنحنى عند نقطة مبينة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

11-3 المماسات والسرعة المتجهة

السابق
- لقد أوجدت متوسط معدلات التغيير باستخدام مستقيمات قاطعة.

الحالي
1. إيجاد معدلات التغير اللحظي عن طريق حساب قيم ميل المماس.
2. إيجاد السرعة المتجهة المتوسطة واللحظية.

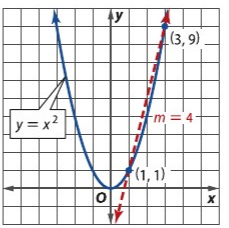
لماذا؟
- عندما يقفز لاعب قفز بالمظلات من إحدى الطائرات، تسبب الجاذبية زيادة سرعة هبوطه. ولهذا السبب، تختلف سرعة لاعب القفز بالمظلات في كل لحظة قبل الوصول إلى السرعة النهائية أو فتح المظلة.

المفردات الجديدة
- خط المماس tangent line
- معدل التغير اللحظي instantaneous rate of change
- ناتج قسمة الفرق difference quotient
- سرعة لحظية instantaneous velocity

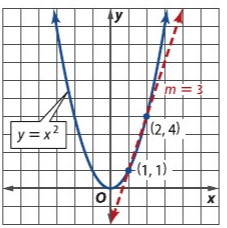
1 المماسات

قمت بحساب متوسط معدل التغيير بين نقطتين على التمثيل البياني لدالة غير خطية من خلال العثور على ميل مستقيم قاطع عبر هذه النقاط. في هذا الدرس، طورنا طريقة لإيجاد ميل مثل هذه الدوال في كل لحظة أو نقطة على المنحنى.

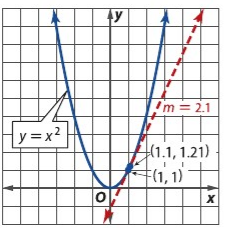
توضح التمثيلات البيانية الموجودة أدناه تقديرات أفضل بالتتابع $y = x^2$ في (1, 1) باستخدام مستقيمات قاطعة.



الشكل 11.3.1



الشكل 11.3.2

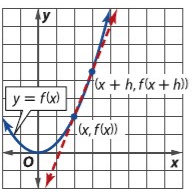


الشكل 11.3.3

لاحظ أنه كلما تحركت النقطة الموجودة في أقصى اليمين بدرجة أقرب وأقرب للنقطة (1, 1)، يوفر المستقيم القاطع تقديرًا خطيًا أفضل للمنحنى بالقرب من النقطة. ونطلق على أفضل هذه التقديرات الخطية اسم **المماس** للتمثيل البياني على (1, 1). يمثل ميل هذا المستقيم معدل التغيير في ميل المنحنى في هذه اللحظة. ولتحديد كلٍ من هذه الحدود بدقة أكبر، نستخدم نهايات.

لتحديد ميل المماس إلى $y = f(x)$ على النقطة $(x, f(x))$.
أوجد ميل القاطع عبر هذه النقطة ونقطة أخرى على المنحنى.
افترض أن الإحداثي x للنقطة الثانية هو $x + h$ لبعض القيمة الصغيرة لـ h.
ويكون الإحداثي y المقابل لهذه النقطة إذًا هو $f(x + h)$. كما هو موضح في الشكل 11.3.4. يتم إيجاد ميل القاطع عبر هاتين النقطتين باستخدام

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} \text{ أو } \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$



الشكل 11.3.4

ويطلق على هذا التعبير اسم **ناتج قسمة الفرق**.

عندما تقترب النقطة الثانية من الأولى أو حيث تكون $h \to 0$. يقترب القاطع من المماس عند $(x, f(x))$. نحدد ميل المماس عند x، الذي يمثل معدل التغير اللحظي للدالة عند هذه النقطة، عبر العثور على حدود ميل المستقيمات القاطعة عند $h \to 0$.

المفهوم الأساسي معدل التغير اللحظي

يكون معدل التغير اللحظي للتمثيل البياني لـ $f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$ هو الميل m للمماس عند $(x, f(x))$ الذي يُمكن إيجاده باستخدام $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. بشرط وجود النهاية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكنك استخدام هذا التعبير لإيجاد ميل المماس لتمثيل نقطة محددة بيانيًا.

مثال 1 ميل تمثيل بياني عند نقطة ما

أوجِد ميل المماس لمنحنى الدالة $y = x^2$ عند النقطة $(1, 1)$.

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ صيغة معدل التغير اللحظي

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$ $x = 1$

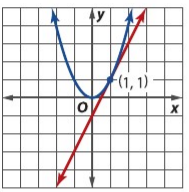
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$$ $f(1) = 1^2$ و $f(1+h) = (1+h)^2$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h}$$ اضرب.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2+h)}{h}$$ بسّط وحلل إلى العوامل.

$$= \lim_{h \to 0} (2+h)$$ اقسم على h.

$= 2 + 0$ أو 2 خاصية الجمع للنهايات ونهايات الدوال الثابتة والمحايدة



ميل التمثيل البياني عند $(1, 1)$ هو 2. كما هو موضح.

تمرين موجّه

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة لكل دالة عند النقطة المذكورة.

1A. $y = x^2$; $(3, 9)$

1B. $y = x^2 + 4$; $(-2, 8)$

نصيحة دراسية

معدل التغير اللحظي عند حساب حد قيم ميل المستقيمات القاطعة عند $h \to 0$. أي حد ينطوي على قيمة h لم يتم قسمته سيكون 0.

يمكن أيضًا استخدام تعبير معدل التغير اللحظي لإيجاد معادلة لميل المماس لأحد التمثيلات البيانية عند أي نقطة x.

مثال 2 ميل تمثيل بياني عند أي نقطة

أوجد معادلة لميل منحنى الدالة $y = \frac{4}{x}$ عند أي نقطة.

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ صيغة معدل التغير اللحظي

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{4}{x+h} - \frac{4}{x}}{h}$$ $f(x) = \frac{4}{x}$ و $f(x+h) = \frac{4}{x+h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-4h}{x(x+h)}}{h}$$ أضف كسورًا في البسط ثم بسّط.

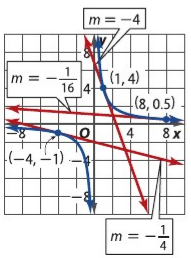
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-4h}{xh(x+h)}$$ بسّط.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-4}{x^2 + xh}$$ اقسم على h وبسّط.

$= \frac{-4}{x^2 + x(0)}$ خاصيتا ناتج القسمة والمجموع للنهايات ونهايات الدوال الثابتة والمحايدة

$= \frac{-4}{x^2}$ بسّط.

معادلة ميل التمثيل البياني عند أي نقطة هي $m = -\frac{4}{x^2}$. كما هو موضح.



تمرين موجّه

أوجد معادلة لميل منحنى الدالة m لكل دالة عند أي نقطة.

2A. $y = x^2 - 4x + 2$

2B. $y = x^3$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 السرعة اللحظية قيمت بحساب متوسط سرعة جسم ساقط عبر قسمة المسافة التي قطعها على الوقت الذي استغرقه الجسم ليقطع هذه المسافة. السرعة المتجهة هي السرعة مضاف إليها اتجاه البعد. يمكنك حساب متوسط السرعة المتجهة باستخدام نفس النهج الذي استخدمته عند حساب متوسط السرعة.

المفهوم الأساسي متوسط السرعة

إذا تم ذكر الوضع في صورة دالة للزمن $f(t)$. فإنه لأي نقطتين زمنيتين a و b. يتم إيجاد متوسط السرعة v باستخدام الصيغة

$$v_{avg} = \frac{\text{التغير في المسافة}}{\text{التغير في الزمن}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

مثال 3 من الحياة اليومية متوسط سرعة جسم ما

المارثون يمكن إيجاد المسافة بالكيلومترات التي قطعها عدَّاء مشترك في منافسة ماراثون بوسطن بعد زمن محدد t بالساعات من خلال $f(t) = -1.3t^2 + 12t$. ماذا كان متوسط سرعة العدَّاء بين الساعتين الثانية والثالثة من السباق؟

أولًا. أوجد المسافة الكلية التي قطعها العدَّاء عند $a = 2$ و $b = 3$.

$f(t) = -1.3t^2 + 12t$	المعادلة الأصلية	$f(t) = -1.3t^2 + 12t$
$f(2) = -1.3(2)^2 + 12(2)$	$b = 3$ و $a = 2$	$f(3) = -1.3(3)^2 + 12(3)$
$f(2) = 18.8$	بسّط.	$f(3) = 24.3$

والآن استخدم قانون متوسط السرعة.

$v_{avg} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$	قانون متوسط السرعة المتجهة
$= \frac{24.3 - 18.8}{3 - 2}$	$a = 2$، و $b = 3$، و $f(a) = 18.8$، $f(b) = 24.3$
$= 5.5$	بسّط.

كان متوسط سرعة العدَّاء خلال الساعة الثالثة 5.5 km/h للأمام.

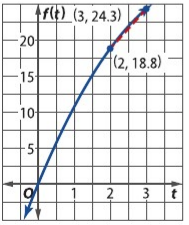
الربط بالحياة اليومية

أكمل العدَّاء الكيني روبرت ك. شيرويت ماراثون بوسطن لعام 2008 في أقل من ساعتين وثمان دقائق. وفي المتوسط. أكمل ميلًا كل أربع دقائق وخمسين ثانية.

المصدر: جمعية بوسطن الرياضية

تمرين موجّه

3. بالون ماء يتم قذف بالون ماء لأعلى بشكل مستقيم باستخدام جهاز إطلاق. يمكن تحديد ارتفاع البالون بالأمتار t بعد إطلاقه بثوانٍ عن طريق $d(t) = 2 + 20t - 5t^2$. ماذا كان متوسط سرعة البالون بين t يساوي 1 و 2؟



عند النظر بتمعن في المثال 3. يمكن ملاحظة أنه تم إيجاد السرعة عبر حساب ميل القاطع الذي يصل بين النقطتين (2, 18.8) و (3, 24.3). كما هو موضح في التمثيل البياني. السرعة التي تم حسابها هي متوسط السرعة التي قطعها العدَّاء على مدار فترة زمنية ولا تمثل **السرعة اللحظية**. وهي السرعة التي وصل إليها العدَّاء عند نقطة زمنية محددة.

لمعرفة السرعة الحقيقية للعدَّاء عند نقطة زمنية محددة t. نوجد معدل التغير اللحظي للتمثيل البياني لـ $f(t)$ عند t.

المفهوم الأساسي السرعة اللحظية

إذا تم ذكر المسافة التي يقطعها جسم ما في صورة دالة زمنية $f(t)$. إذاً يتم إيجاد السرعة اللحظية $v(t)$ عند الزمن t باستخدام

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h}$$

بشرط وجود النهاية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 السرعة اللحظية عند نقطة ما

تم إسقاط كرة بيسبول من أعلى مبنى يرتفع عن الأرض 600 m. يُمكن إيجاد ارتفاع كرة قدم بالأمتار بعد مرور t من الثواني باستخدام $f(t) = 600 - 5t^2$. أوجد السرعة اللحظية $v(t)$ لكرة قدم عند 5 ثوان.

لمعرفة السرعة اللحظية، افترض أن $t = 5$ وطبق قانون السرعة اللحظية.

$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$	قانون السرعة اللحظية
$v(5) = \lim_{h \to 0} \frac{600 - 5(5+h)^2 - [600 - 5(5)^2]}{h}$	$f(t+h) = 600 - 5(5+h)^2$ و $f(t) = 600 - 5(5)^2$
$= \lim_{h \to 0} -\frac{50h - 5h^2}{h}$	اضرب وبسّط.
$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-50 - 5h)}{h}$	عامل.
$= \lim_{h \to 0} (-50 - 5h)$	اقسم على h.
$= -50 - 5(0)$ أو -50	خاصية الفرق للنهايات ونهايات الدوال الثابتة والمحايدة

تبلغ السرعة اللحظية لكرة قدم عند 5 ثوان 50 m/s. تشير علامة السالب إلى أن ارتفاع الكرة يقل.

انتبه!

التعويض تذكر توزيع علامة السالب التي تسبق $f(t)$ لكل حد تم تعويضه.

تمرين موجّه

4. أسقط أحد عمال غسل النوافذ غداءه دون قصد من المنصة التي يعمل عليها على ارتفاع 420 ft فوق سطح الأرض. يُمكن كتابة العلاقة بين موضع الغداء وسطح الأرض في صورة $d(t) = 420 - 5t^2$، حيث تتم كتابة الزمن t بالثواني وموضع الغداء بالأمتار. أوجد السرعة اللحظية $v(t)$ للغداء عند 7 ثوان.

يمكن أيضًا تحديد المعادلات لإيجاد السرعة اللحظية لجسم ما في أي لحظة زمنية t.

مثال 5 السرعة اللحظية عند أي نقطة

يتم إيجاد المسافة التي يتحركها جسيم ما على امتداد مسار من خلال المعادلة $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$، حيث يتم ذكر t بالثواني ومسافة الجسيم من نقطة انطلاقه بالسنتيمترات. أوجد معادلة السرعة اللحظية $v(t)$ للجسيم عند أي نقطة زمنية.

طبق قانون السرعة اللحظية.

$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$	قانون السرعة اللحظية
$= \lim_{h \to 0} \frac{18(t+h) - 3(t+h)^3 - 1 - [18t - 3t^3 - 1]}{h}$	$s(t+h) = 18(t+h) - 3(t+h)^3 - 1$ و $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$
$= \lim_{h \to 0} \frac{18h - 9t^2h - 9th^2 - 3h^3}{h}$	اضرب وبسّط.
$= \lim_{h \to 0} \frac{h(18 - 9t^2 - 9th - 3h^2)}{h}$	عامل.
$= \lim_{h \to 0} (18 - 9t^2 - 9th - 3h^2)$	اقسم على h.
$= 18 - 9t^2 - 9t(0) - 3(0)^2$	خاصية الفرق للنهايات ونهايات الدوال الثابتة والمحايدة
$= 18 - 9t^2$	بسّط.

السرعة اللحظية للجسيم عند النقطة الزمنية t هي $v(t) = 18 - 9t^2$.

تمرين موجّه

5. يتم إيجاد المسافة بالأمتار لصاروخ مائي من الأرض بعد t ثانية من خلال $s(t) = 30t - 5t^2$. أوجد تعبير السرعة اللحظية $v(t)$ للصاروخ المائي عند أي نقطة زمنية t.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

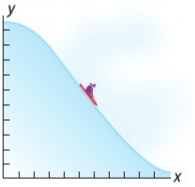
أوجد ميل المماس للتمثيل البياني لكل دالة عند القيم المبينة. (المثال 1)

1. $y = x^2 - 5x$; (5, 0) و(1, −4)
2. $y = 6 - 3x$; (−2, 12) و(6, −12)
3. $y = x^2 + 7$; (3, 16) و(6, 43)
4. $y = \frac{3}{x}$; (1, 3) و(3, 1)
5. $y = x^3 + 8$; (−2, 0) و(1, 9)
6. $y = \frac{1}{x+2}$; (2, 0.25) و (−1, 1)

أوجد معادلة لميل التمثيل البياني لكل دالة عند أي نقطة. (المثال 2)

7. $y = 4 - 2x$
8. $y = -x^2 + 4x$
9. $y = x^2 + 3$
10. $y = x^3$
11. $y = 8 - x^2$
12. $y = 2x^2$
13. $y = -2x^3$
14. $y = x^2 + 2x - 3$
15. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$
16. $y = \frac{1}{x^2}$

17. **التزلج** يتم إيجاد موضع الشخص الرأسي على تل للتزلج بعد قطع مسافة أفقية بقيمة x وحدات بعيدًا عن قمة التل من خلال $y = 0.06x^3 - 1.08x^2 + 51.84$. (المثال 2)



a. أوجد معادلة ميل التل m عند أي مسافة x.

b. أوجد ميل التل عند x يساوي 2 و 5 و7.

يتم إيجاد موضع جسم ما بالكيلومترات بعد t دقيقة من خلال $s(t)$. أوجد متوسط السرعة للجسم بوحدة كيلومتر في الساعة للفترة الزمنية المذكورة. تذكر التحويل من الدقائق للساعات. (المثال 3)

18. $s(t) = 0.4t^2 - \frac{1}{20}t^3$ عند $3 \le t \le 5$
19. $s(t) = 1.08t - 30$ عند $4 \le t \le 8$
20. $s(t) = 0.2t^2$ عند $2 \le t \le 4$
21. $s(t) = 0.01t^3 - 0.01t^2$ عند $4 \le t \le 7$
22. $s(t) = -0.5(t-5)^2 + 3$ عند $4 \le t \le 4.5$
23. $s(t) = 0.6t + 20$ عند $3.8 \le t \le 5.7$

42. **الكتابة** تم إيجاد عدد الكلمات w التي كتبها شخص ما بعد t دقيقة من خلال $w(t) = 10t^2 - \frac{1}{2}t^3$. (المثال 3)

a. كم بلغ متوسط عدد الكلمات التي كتبها الشخص في الدقيقة في الفترة ما بين الدقيقة الثانية والرابعة؟

b. كم بلغ متوسط عدد الكلمات التي كتبها الشخص في الدقيقة في الفترة ما بين الدقيقة الثالثة والسابعة؟

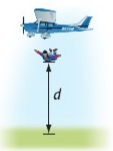
يُمكن إيجاد المسافة d التي يرتفع فيها جسم ما عن سطح الأرض بعد t ثانية من إسقاطه باستخدام $d(t)$. أوجد السرعة اللحظية للجسم عند القيمة المذكورة لـ t. (المثال 4)

25. $d(t) = 100 - 16t^2$; $t = 3$
26. $d(t) = 38t - 16t^2$; $t = 0.8$
27. $d(t) = -16t^2 - 47t + 300$; $t = 1.5$
28. $d(t) = 500 - 30t - 16t^2$; $t = 4$
29. $d(t) = -16t^2 - 400t + 1700$; $t = 3.5$
30. $d(t) = 150t - 16t^2$; $t = 2.7$
31. $d(t) = 1275 - 16t^2$; $t = 3.8$
32. $d(t) = 853 - 48t - 16t^2$; $t = 1.3$

أوجد معادلة للسرعة اللحظية $v(t)$ إذا كان مسار جسم مُعرفًا عند $s(t)$ لأي نقطة زمنية t. (المثال 5)

33. $s(t) = 14t^2 - 7$
34. $s(t) = t - 3t^2$
35. $s(t) = 5t + 8$
36. $s(t) = 18 - t^2 + 4t$
37. $s(t) = t^3 - t^2 + t$
38. $s(t) = 11t^2 - t$
39. $s(t) = \sqrt{t} - 3t^2$
40. $s(t) = 12t^2 - 2t^3$

41. **لاعب قفز بالمظلات** راجع بداية الدرس. يمكن تحديد الموضع d للاعب القفز بالمظلات بالأمتار بالارتباط بسطح الأرض من خلال $d(t) = 5{,}000 - 5t^2$. حيث t هو عدد الثواني التي انقضت بعد قفز لاعب القفز بالمظلات من الطائرة. (المثال 5)



a. ما متوسط السرعة اللحظية للاعب القفز بالمظلات في الفترة بين الثانية الثانية والخامسة من القفزة؟

b. كم بلغت السرعة اللحظية للاعب القفز بالمظلات عند الثانية 2 والثانية 5؟

c. أوجد معادلة للسرعة اللحظية $v(t)$ للاعب القفز بالمظلات.

42. **الغوص** تم ذكر المسافة d التي قطعها غواص من المرتفعات بالأمتار فوق سطح البحر بعد t ثوانٍ.

t	0.5	0.75	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
d	43.7	42.1	40.6	33.8	25.3	14.2	0.85

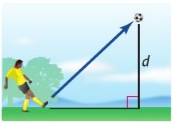
a. احسب متوسط سرعة الغواص للفترة $0.5 \le t \le 1.0$.

b. استخدم الانحدار التربيعي لإيجاد معادلة لتمثيل $d(t)$ نموذجيًا. قم بتمثيل $d(t)$ والبيانات الموجودة في نفس المستوى الإحداثي بيانيًا.

c. أوجد تعبيرًا للسرعة اللحظية $v(t)$ للسائق واستخدمه لتقدير سرعة السائق بعد 3 ثوان.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

43. كرة القدم يمكن لحارس مرمى ركل كرة بسرعة مرتفعة تبلغ 75 m/s افترض أنه يُمكن إيجاد ارتفاع d الكرة بالأمتار بعد t ثانية من ركلها باستخدام $d(t) = -5t^2 + 25t + 1$.



a. أوجد معادلة السرعة اللحظية $v(t)$ لكرة القدم.

b. ما السرعة التي تقطع بها الكرة المسافة بعد 0.5 ثانية من ركلها؟

c. إذا كانت السرعة اللحظية للكرة هي 0 عندما تصل الكرة إلى أقصى ارتفاع لها. ففي أي وقت ستصل الكرة إلى أقصى ارتفاع لها؟

d. ما أقصى ارتفاع للكرة؟

أوجد معادلة لخط مماس للتمثيل البياني للدالة وعمودي للخط المُعطى. ثم استخدم حاسبة تمثيل بياني لتمثل الدالة وكلا الخطين بيانيًا على نفس المستوى الإحداثي.

44. $f(x) = x^2 + 2x;\ y = -\frac{1}{2}x + 3$

45. $g(x) = -4x^2;\ y = \frac{1}{4}x + 5$

46. $f(x) = -\frac{1}{6}x^2;\ y - x = 2$

47. $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x;\ y = -\frac{1}{6}x + 9$

48. الفيزياء يتم إيجاد المسافة s لجسيم يتحرك في خط مستقيم من خلال $s(t) = 3t^3 + 8t + 4$. حيث يتم إيجاد t بالثواني ويتم قياس s بالأمتار.

a. أوجد معادلة للسرعة اللحظية $v(t)$ للجسيم عند أي نقطة زمنية.

b. أوجد سرعة الجسيم عند t يساوي 2 و 4 و 6 ثوان.

كل تمثيل بياني يمثل معادلة لميل دالة عند أي نقطة. طابق كل تمثيل بياني بدالته الأصلية.

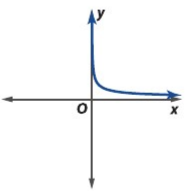
49. $f(x) = \frac{a}{x}$

50. $g(x) = ax^5$

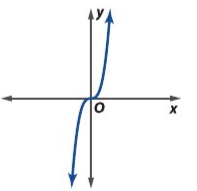
51. $h(x) = ax^4$

52. $j(x) = a\sqrt{x}$

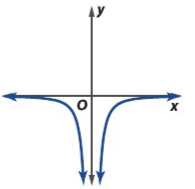
a.



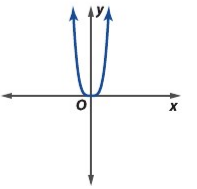
b.



c.



d.



53. المقذوف عندما يتم قذف جسم ما لأسفل بشكل مستقيم. يمكن تمثيل إجمالي المسافة y التي يقطعها الجسم سقوطًا من خلال $y = 16t^2 + v_0 t$. حيث يتم قياس الزمن t بالثواني والسرعة المبدئية v_0 بالأقدام في الثانية.

a. إذا استغرق جسم ما بعد قذفه بشكل مستقيم من ارتفاع 6 816 ft ثوان ليرتطم بالأرض. كم بلغت السرعة المبدئية للجسم؟

b. كم بلغ متوسط سرعة الجسم؟

c. كم بلغت سرعة الجسم عند ارتطامه بالأرض؟

54. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة. سوف تستكشف نظرية متوسط القيمة. تنص النظرية أنه إذا كانت الدالة f مستمرة وقابلة للاشتقاق على (a, b). إذًا توجد هناك نقطة c في (a, b) حيث يكون المماس موازيًا للخط الذي يمر بالنقطة $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$.

a. تحليليًا أوجد متوسط معدل التغيير لـ $f(x) = -x^2 + 8x$ في الفترة $[1, 6]$ وأوجد معادلة للمستقيم القاطع ذي الصلة بالنقطتين $(1, f(1))$ و $(6, f(6))$.

b. تحليليًا أوجد معادلة لميل $f(x)$ عند أي نقطة.

c. تحليليًا أوجد نقطة في الفترة $(1, 6)$ حيث يساوي ميل المماس لـ $f(x)$ ميل القاطع الموجود في الجزء a. أوجد معادلة المماس لـ $f(x)$ عند هذه النقطة.

d. لفظيًا كيف يرتبط القاطع في الجزء a والمماس في الجزء b؟ اشرح.

e. التمثيل البياني باستخدام حاسبة تمثيل بياني. قم بتمثيل $f(x)$ والقاطع والمماس بيانيًا على نفس الشاشة. هل يثبت التمثيل البياني إجابتك في الجزء d؟ اشرح.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

55. تحليل الخطأ طُلب من ياسمين ووفاء إيجاد معادلة للميل عند أي نقطة لـ $f(x) = |x|$. تعتقد ياسمين أن التمثيل البياني للميل سيكون متصلاً لأن الدالة الأصلية متصلة. وتخالفها وفاء في الرأي. هل رأي أي منهما صحيح؟ اشرح استنتاجك.

56. التحدي أوجد معادلة لميل $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x$ عند أي نقطة.

57. التبرير صحيح أم خطأ؛ يكون التمثيل النموذجي للسرعة اللحظية لجسم ما من خلال $s(t) = at + b$ دائمًا a.

58. التبرير أثبت أن $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ عند $f(x) = x^2 + 1$.

59. الكتابة في الرياضيات افترض أن $f(t)$ يمثل الرصيد بالدراهم في حساب مصرفي بعد t أعوام من الإيداع المبدئي. فسر كلاً مما يلي.

a. $\frac{f(4) - f(0)}{4} \approx 41.2$

b. $\lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \approx 42.9$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة شاملة

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

60. $\lim_{x \to 4} (x^2 + 2x - 2)$

61. $\lim_{x \to -1} (-x^4 + x^3 - 2x + 1)$

62. $\lim_{x \to 0} (x + \sin x)$

63. الهيدروليكا يتم إيجاد السرعة المتجهة، بالبوصات لكل ثانية، لجزيء من مادة سائلة يتدفق عبر أنبوب باستخدام $v(r) = k(R^2 - r^2)$، حيث R هو نصف قطر الأنبوب بالسنتيمترات، و r هو المسافة التي بين الجزيء ومركز الأنبوب بالسنتيمترات، و k هو عبارة عن ثابت. افترض أنه بالنسبة لسائل ما داخل أنبوب $k = 0.65$ و $R = 0.5$.

a. مثّل بيانيًا $v(r)$.

b. حدد السرعة الحدية للجزيئات الأكثر قربًا من جدار الأنبوب.

64. التعليم يخطط أستاذ جامعي لتقدير درجات اختبار على شكل منحنى. ويبلغ وسط درجات الاختبار 65، ويبلغ الانحراف المعياري 7. ويريد الأستاذ أن يوزع الدرجات كما هو موضّح في الجدول. افترض أن التقديرات قد تم توزيعها بشكل اعتيادي.

الصف	النسبة المئوية للفصل
امتياز	15
جيد جدًا	20
جيد	30
مقبول	20
راسب	15

a. ما أقل درجة ممكنة للحصول على تقدير امتياز؟

b. إذا كان تقدير مقبول هو أقل تقدير للنجاح، فأوجد أقل درجة للنجاح.

c. ما الفترة الخاصة بتقديرات جيد جدًا؟

أوجد الحد *النوني* المحدد لكل متتالية هندسية.

65. $a_4 = 50, r = 2, n = 8$

66. $a_4 = 1, r = 3, n = 10$

67. a_6 عند $a_n = \frac{1}{5}a_{n-1}, a_1 = -2$

68. a_5 عند $a_n = (-3)a_{n-1}, a_1 = 11$

أوجد الأوساط الحسابية المحددة لكل زوجٍ من الحدود غير المتعاقبة.

69. 7 أوساط؛ 62 و -2

70. 4 أوساط؛ 17.2 و 47.7

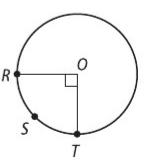
71. 3 أوساط؛ -5.6 و 8

72. 9 أوساط؛ -45 و 115

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

73. SAT/ACT إذا كان طول نصف قطر الدائرة ذات المركز O هو 4. ما طول القوس RST؟

A 2π
B 4π
C 8π
D 12π
E 16π



74. المراجعة أي مما يلي يقدم أفضل وصف للنقطة عند $(0, 0)$ على $f(x) = 2x^5 - 5x^4$؟

F حد عظمى مطلقة
G حد عظمى نسبية
H حد صغرى محلية
J حد صغرى محلية

75. عند إسقاط كرة البولينغ، يتم إعطاء المسافة $d(t)$ التي قطعتها في t ثانية من خلال $d(t) = 5t^2$. يتم إعطاء سرعتها بعد ثانيتين من خلال $\lim_{h \to 0} \frac{d(2+h) - d(2)}{h}$. ما سرعة كرة البولينغ بعد ثانيتين؟

A 14 m/s
B 18 m/s
C 20 m/s
D 23 m/s

76. المراجعة يعتمد الربح الشهري P لإحدى شركات التصنيع على عدد الوحدات x التي تم تصنيعها ويمكن وصفها من خلال $P(x) = \frac{1}{3}x^3 - 34x^2 + 1012x, 0 \le x \le 50$. كم عدد الوحدات التي ينبغي تصنيعها شهريًا من أجل زيادة الأرباح؟

F 15
G 22
H 37
J 46

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 11-1 إلى 11-3

قدّر النهاية أحادية الطرف أو ثنائية الطرف، إن وجدت. (الدرس 11-1)

1. $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x}$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$
3. $\lim_{x \to 3^-} \frac{2x^2 - 18}{x - 3}$
4. $\lim_{x \to 0^-} \frac{\cos x - 1}{x}$

قدّر كل نهاية، إن وجدت. (الدرس 11-1)

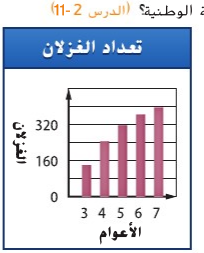
5. $\lim_{x \to 3} \frac{2x}{x^2 + 1}$
6. $\lim_{x \to 1} \sqrt{x^3 + 3}$
7. $\lim_{x \to -2} e^{2x + 3}$
8. $\lim_{x \to -4} \frac{\sqrt{x + 20}}{x}$

9. **المقتنيات** تزداد قيمة الطوابع التي لدى يوسف كل عام. ويُمكن تمثيل القيمة v للبطاقة بعد مرور عدد t من الأعوام باستخدام $v(t) = \frac{400t - 2}{2t + 15}$. (الدرس 11-1)
   - **a.** مثّل الدالة بيانيًا عند $0 \le t \le 10$.
   - **b.** استخدم منحنى الدالة في تقدير قيمة الطوابع عند t يساوي 2 و 5 و 10 أعوام.
   - **c.** استخدم منحنى الدالة لإيجاد قيمة $\lim_{t \to \infty} v(t)$.
   - **d.** اشرح العلاقة بين نهاية الدالة وقيمة الطوابع التي لدى يوسف.

استخدم التعويض المباشر، إن أمكن، لإيجاد قيمة كل نهاية. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب. (الدرس 11-2)

10. $\lim_{x \to 9} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x} - 3}$
11. $\lim_{x \to -2} (2x^3 + x^2 - 8)$

12. **الحياة البرية** يُمكن تقدير تعداد الغزلان P بالمئات في حديقة وطنية بعد مرور عدد t من الأعوام باستخدام $P(t) = \frac{10t^3 - 40t + 2}{2t^3 + 14t + 12}$، حيث $t \ge 3$. وموضح أدناه تعداد الأعوام الخمسة. ما أكبر عدد للغزلان يُمكن أن يعيش داخل الحديقة الوطنية؟ (الدرس 11-2)



أوجد قيمة كل نهاية. (الدرس 11-2)

13. $\lim_{x \to \infty} (15 - x^2 + 8x^3)$
14. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - x - 2}{4x^3 + 5x^2}$
15. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 5x - 1}{2x^4 - 14x^2 + 2}$
16. $\lim_{x \to \infty} (10x^3 - 4 + x^2 - 7x^4)$

17. **الاختيار من متعدد** أوجد قيمة $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 5}{10 - e^{\frac{16}{x}}}$. (الدرس 11-1)

A غير موجودة

B $\frac{1}{2}$

C $\frac{1}{5}$

D $\frac{1}{10}$

أوجد ميل المماس للتمثيل البياني لكل دالة عند النقاط المبينة. (الدرس 11-3)

18. $y = x^2 - 3x$; (2, −2) and (−1, 4)
19. $y = 2 - 5x$; (−2, 12) and (3, −13)
20. $y = x^3 - 4x^2$; (1, −3) and (3, −9)

21. **الألعاب النارية** تم إطلاق ألعاب نارية بسرعة متجهة لأعلى تبلغ 30 m/s. افترض أنه يتم إيجاد الارتفاع d للألعاب النارية الذي يُقاس بالمتر خلال t ثانية بعد إطلاقها باستخدام $d(t) = -5t^2 + 30t + 1.5$. (الدرس 11-3)
   - **a.** أوجد معادلة للسرعة اللحظية $v(t)$ للألعاب النارية.
   - **b.** ما سرعة الألعاب النارية بعد 0.5 s من إطلاقها؟
   - **c.** ما أقصى ارتفاع للألعاب النارية؟

22. **الاختيار من متعدد** أوجد معادلة ميل منحنى الدالة $y = 7x^2 - 2$ عند أي نقطة. (الدرس 11-3)

F $m = 7x$

G $m = 7x - 2$

H $m = 14x$

J $m = 14x - 2$

يتم إيجاد موضع جسم ما بالكيلومترات بعد t دقيقة من خلال $s(t)$. أوجد متوسط السرعة المتجهة للجسم بوحدة كيلومتر في الساعة باستخدام قيمتي الفترة الزمنية t المذكورتين. تذكر التحويل من الدقائق للساعات. (الدرس 11-3)

23. $s(t) = 12 + 0.7t$ عند t يساوي 2 و 5
24. $s(t) = 2.05t - 11$ عند t يساوي 1 و 7
25. $s(t) = 0.9t - 25$ عند $3 \le t \le 6$
26. $s(t) = 0.5t^2 - 4t$ عند $4 \le t \le 8$

أوجد معادلة للسرعة اللحظية $v(t)$ إذا كان موقع جسم مُعرفًا عند $s(t)$ لأي لحظة زمنية t. (الدرس 11-3)

27. $s(t) = 4t^2 - 9t$
28. $s(t) = 2t - 13t^2$
29. $s(t) = 2t - 5t^2$
30. $s(t) = 6t^2 - t^3$

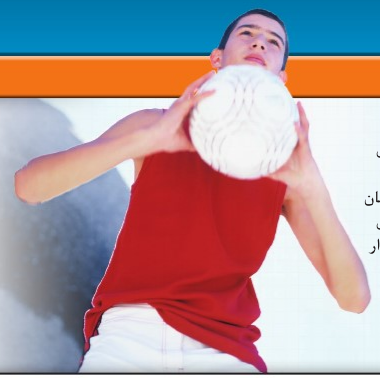
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

11-4 المشتقات

السابق
- حسبت ميل المماس لإيجاد معدل التغير اللحظي.

الحالي
1. إيجاد معدلات التغير اللحظي بواسطة حساب المشتقات.
2. استخدام قاعدتي ناتج الضرب وناتج القسمة لحساب المشتقات.

لماذا؟
- يقطن ناصر في الدور السادس بمبنى سكني. وسقطت منه كرة خارج النافذة دون قصد. وحصل منصور الذي يقف على الأرض خارج مبنى ناصر. على الكرة وحاول رميها مرة ثانية إلى ناصر. إذا كان منصور يستطيع رمي الكرة بسرعة 20 m/s. فهل يستطيع أن يوصلها إلى نافذة ناصر المرتفعة بمقدار 21 m فوق الأرض؟



المفردات الجديدة

مشتقة derivative
تفاضل differentiation
معادلة تفاضلية differential equation
عامل تفاضلي differential operator

1 قواعد أساسية

في الدرس 3-11. استخدمت النهايات لتحديد ميل خط المماس على التمثيل البياني لدالة عند أي نقطة. وتُسمى هذه النهاية مشتقة الدالة. **مشتقة** $f(x)$ هي $f'(x)$. والتي تُعطى بالمعادلة

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

بشرط وجود النهاية. وتُسمى عملية إيجاد المشتقات **تفاضل**، وتُسمى النتيجة **معادلة تفاضلية**.

مثال 1 مشتقة دالة عند أي نقطة

أوجد مشتقة $f(x) = 4x^2 - 5x + 8$. ثم أوجد قيمة المشتقة حيث $x = 1$ و 5.

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	تعريف المشتقة
$= \lim_{h \to 0} \frac{4(x+h)^2 - 5(x+h) + 8 - (4x^2 - 5x + 8)}{h}$	و $f(x+h) = 4(x+h)^2 - 5(x+h) + 8$ $f(x) = 4x^2 - 5x + 8$
$= \lim_{h \to 0} \frac{8xh + 4h^2 - 5h}{h}$	فكّك وبسّط.
$= \lim_{h \to 0} \frac{h(8x + 4h - 5)}{h}$	عامل.
$= \lim_{h \to 0} (8x + 4h - 5)$	اقسم على h
$= 8x + 4(0) - 5$ أو $8x - 5$	خاصيتا المجموع والفرق لنهايات الدوال الثابتة والمحايدة

مشتقة $f(x)$ هي $f'(x) = 8x - 5$. أوجد قيمة $f'(x)$ حيث $x = 1$ و 5.

$f'(x) = 8x - 5$	المعادلة الأصلية	$f'(x) = 8x - 5$
$f'(1) = 8(1) - 5$	$x = 1$ و 5	$f'(5) = 8(5) - 5$
$f'(1) = 3$	بسّط.	$f'(5) = 35$

تمرين موجّه

أوجد مشتقة $f(x)$. ثم أوجد قيمة المشتقة عند قيم x المعطاة.

1A. $f(x) = 6x^2 + 7; x = 2$ و 5

1B. $f(x) = -5x^2 + 2x - 12; x = 1$ و 4

مشتقة الدالة $y = f(x)$ قد يُرمز إليها أيضًا بـ y' أو $\frac{df}{dx}$ أو $\frac{dy}{dx}$. إذا كانت الدالة مسبوقة **بعامل تفاضلي** $\frac{d}{dx}$، فيجب عليك إيجاد مشتقة الدالة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حتى هذه النقطة، يتوجب عليك إيجاد قيم النهايات كلما اقتربت من 0 من أجل حساب المشتقات. وميول المماس. والسرعة اللحظية. وتوجد قاعدة مفيدة للغاية تبسط هذه العملية وتحد من أخطاء الحساب، وهي قاعدة القوة التي تسمح لك بإيجاد قيم المشتقات دون الحاجة إلى حساب النهايات.

المفهوم الأساسي قاعدة القوة للمشتقات

الشرح القوة لـ x في المشتقة تمثل بواحد عن القوة لـ x في الدالة الأصلية، ومعامل القوة لـ x في المشتقة هو نفسه القوة لـ x في الدالة الأصلية.

الرموز إذا كانت $f(x) = x^n$ وكان n عددًا حقيقيًا، فإن $f'(x) = nx^{n-1}$.

قراءة في الرياضيات

المشتقات رمز المشتقة $f'(x)$ يُقرأ *المشتقة الأولى f لـ x* أو *مشتقة f بدلالة x*.

مثال 2 قاعدة القوة للمشتقات

أوجد مشتقة كل دالة مما يلي.

a. $f(x) = x^9$

$f(x) = x^9$	المعادلة الأصلية
$f'(x) = 9x^{9-1}$	قاعدة القوة
$= 9x^8$	بسّط.

b. $g(x) = \sqrt[5]{x^7}$

$g(x) = \sqrt[5]{x^7}$	المعادلة الأصلية
$g(x) = x^{\frac{7}{5}}$	أعد الكتابة باستخدام الأس النسبي.
$g'(x) = \frac{7}{5}x^{\frac{7}{5}-1}$	قاعدة القوة
$= \frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}}$ أو $\frac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$	بسّط.

c. $h(x) = \frac{1}{x^8}$

$h(x) = \frac{1}{x^8}$	المعادلة الأصلية
$h(x) = x^{-8}$	أعد الكتابة باستخدام أس سالب.
$h'(x) = -8x^{-8-1}$	قاعدة القوة
$= -8x^{-9}$ أو $-\frac{8}{x^9}$	بسّط.

تمرين موجّه 1

2A. $j(x) = x^4$ **2B.** $k(x) = \sqrt{x^3}$ **2C.** $m(x) = \frac{1}{x^5}$

انتبه!

المشتقات السالبة مشتقة $f(x) = x^{-4}$ هي ليست $f'(x) = -4x^{-3}$. تذكر أنه يجب طرح 1 من الأس وأن $-4 - 1 = -4 + (-1)$ أو -5. لذلك $f'(x) = -4x^{-5}$.

وتوجد غير ذلك العديد من قواعد المشتقات التي تكون مفيدة في إيجاد مشتقات الدوال المشتملة على حدود عديدة.

المفهوم الأساسي قواعد اشتقاق أخرى

الثابت مشتقة الدالة الثابتة هي صفر. بمعنى، إذا كانت $f(x) = c$، فإن $f'(x) = 0$.

المضاعف الثابت للقوة إذا كانت $f(x) = cx^n$، حيث c ثابت و n عدد حقيقي، فإن $f'(x) = cnx^{n-1}$.

المجموع أو الفرق إذا كانت $f(x) = g(x) \pm h(x)$، فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 قواعد الاشتقاق

أوجد مشتقة كل دالة مما يلي.

a. $f(x) = 5x^3 + 4$

$f(x) = 5x^3 + 4$	المعادلة الأصلية
$f'(x) = 5 \cdot 3x^{3-1} + 0$	قواعد الثابت، والمضاعف الثابت للقوة، والمجموع
$= 15x^2$	بسّط.

b. $g(x) = x^5(2x^3 + 4)$

$g(x) = x^5(2x^3 + 4)$	المعادلة الأصلية
$g(x) = 2x^8 + 4x^5$	خاصية التوزيع
$g'(x) = 2 \cdot 8x^{8-1} + 4 \cdot 5x^{5-1}$	قاعدتا المضاعف الثابت للقوة، والمجموع
$= 16x^7 + 20x^4$	بسّط.

c. $h(x) = \dfrac{5x^3 - 12x + 6\sqrt{x^5}}{x}$

$h(x) = \dfrac{5x^3 - 12x + 6\sqrt{x^5}}{x}$	المعادلة الأصلية
$h(x) = \dfrac{5x^3}{x} - \dfrac{12x}{x} + \dfrac{6\sqrt{x^5}}{x}$	اقسم كل حد في البسط على x
$h(x) = 5x^2 - 12 + 6x^{\frac{3}{2}}$	$x^{\frac{5}{2}} \cdot x^{-1} = x^{\frac{3}{2}}$
$h'(x) = 5 \cdot 2x^{2-1} + 0 + 6 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$	قواعد الثابت، والمضاعف الثابت للقوة، والمجموع، والفرق
$= 10x + 9x^{\frac{1}{2}}$ or $10x + 9\sqrt{x}$	بسّط.

تمرين موجّه

3A. $f(x) = 2x^5 - x^3 - 102$ **3B.** $g(x) = 3x^4(x + 2)$ **3C.** $h(x) = \dfrac{4x^4 - 3x^2 + 5x}{x}$

نصيحة دراسية

المشتقات إذا كانت $f(x) = x$، فإذًا $f'(x) = 1$. وإذا كانت $f(x) = cx$، فإذًا $f'(x) = c$.

الآن بما أنك تعرفت على القواعد الأساسية للمشتقات، يمكنك حساب المسائل المتضمنة ميول خطوط المماس والسرعة اللحظية في بضع خطوات قليلة فحسب. اشتمل المثال 5 في الدرس 3-11 على إيجاد تعبير للسرعة اللحظية لجسيم. لاحظ مدى بساطة المسألة بفضل قواعد الاشتقاق.

مثال 4 السرعة اللحظية

المسافة التي يتحركها جسيم ما على امتداد مسار ما، تحددها المعادلة $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$، حيث t يُعطى بالثانية ومسافة الجسيم تُعطى بالسنتيمتر. أوجد تعبير السرعة اللحظية $v(t)$ للجسيم.

السرعة اللحظية $v(t)$ مكافئة لـ $s'(t)$.

$s(t) = 18t - 3t^3 - 1$	المعادلة الأصلية
$s'(t) = 18 \cdot 1t^{1-1} - 3 \cdot 3t^{3-1} - 0$	قواعد الثابت، والمضاعف الثابت للقوة، والفرق
$= 18 - 9t^2$	بسّط.

السرعة اللحظية هي $v(t) = 18 - 9t^2$. لاحظ أن هذه النتيجة ليست مثل تلك التي وُجدت في مثال 5 في الدرس 3-11.

تمرين موجّه

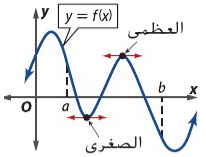
4. كرة قدم رُكلت للأعلى مباشرة. ارتفاع الكرة تحدده المعادلة $h(t) = 18t - 5t^2$. حيث الزمن t يُعطى بالثواني وارتفاع الكرة يُعطى بالمتر. أوجد تعبير السرعة اللحظية $v(t)$ للكرة عند أي نقطة في الزمن.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

أوجدت القيم القصوى المحلية والمطلقة للدوال بيانيًا وعدديًا. وعلى فترة مغلقة، يمكن إيجاد هذه القيم باستخدام المشتقة والنظرية الآتية.

المفهوم الأساسي نظرية القيم القصوى

إذا كانت الدالة f متصلة على فترة مغلقة $[a, b]$، فإن $f(x)$ تحقق القيمة العظمى والصغرى على $[a, b]$.



القيم القصوى المحلية تحدث فقط عند نقاط حرجة حيث يكون ميل المماس أما مشتقة الدالة تساوي 0 أو غير مُعرّف. لتحديد مكان القيمة العظمى والصغرى لدالة كثيرة الحدود $f(x)$ على $[a, b]$، أوجد قيمة الدالة عند a و b وعند أي قيم لـ x في الفترة $[a, b]$ التي يكون فيها $f'(x) = 0$.

مثال 5 من الحياة اليومية القيم العظمى والصغرى

قطار الملاهي يمكن تمثيل الارتفاع h ، بالمتر، الذي تقطعه العربة على طول مسار قطار الملاهي، بالمعادلة $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3}$ على الفترة $[1, 12]$، حيث يُعطى الزمن t بالثواني. أوجد الارتفاعين الأعلى والأدنى للعربة.

أوجد مشتقة $h(t)$.

$h(t) = -\frac{1}{9}t^3 + \frac{4}{3}t^2 + \frac{11}{9}$ — المعادلة الأصلية

$h'(t) = -\frac{1}{9} \cdot 3t^{3-1} + \frac{4}{3} \cdot 2t^{2-1} + 0$ — قواعد الثابت، والمضاعف الثابت للقوة، والمجموع والفرق

$= -\frac{1}{3}t^2 + \frac{8}{3}t$ — بسّط.

حل $h'(t) = 0$ لإيجاد مكان حدوث النقاط الحرجة لـ $h(x)$.

$h'(t) = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{8}{3}t$

$-t^2 + 8t = 0$

$-t(t - 8) = 0$ — عامل.

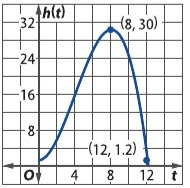
تحدث النقاط الحرجة لهذه الدالة عندما يكون $t = 0$ و 8 s. لاحظ أنه بالرغم من أن $t = 0$ عبارة عن نقطة حرجة للدالة $h(t)$، فهي لا تقع على الفترة $[1, 12]$. لإيجاد القيمة العظمى والصغرى للدالة على $[1, 12]$، أوجد قيمة $h(t)$ لـ 1 و 8 و 12.

$h(1) = -\frac{1}{9}(1)^3 + \frac{4}{3}(1)^2 + \frac{11}{9}$ أو 2.44

$h(8) = -\frac{1}{9}(8)^3 + \frac{4}{3}(8)^2 + \frac{11}{9}$ أو 30 — قيمة عظمى

$h(12) = -\frac{1}{9}(12)^3 + \frac{4}{3}(12)^2 + \frac{11}{9}$ أو 1.22 — قيمة صغرى

ستحقق العربة أعلى ارتفاع بمعدل 30 m في 8 s مع حركة القطار، وأقل ارتفاع بمعدل حولي 1.2 m في 12 s مع حركة القطار.



التحقق منحنى الدالة $h(t) = -\frac{1}{9}t^3 + \frac{4}{3}t^2 + \frac{11}{9}$ يبين أن $h(t)$ له قيمة عظمى تساوي 30 عند $x = 8$ وقيمة صغرى تساوي حوالي 1.2 عند $x = 12$ على الفترة $[1, 12]$. ✔

تمرين موجّه

5. **القفز بالحبال** يمكن تمثيل ارتفاع h القفّاز بالحبال بالنسبة للأرض، بالمتر، بواسطة المعادلة $h(t) = 6t^2 - 48t + 100$ على الفترة $[0, 6]$، حيث يُعطى الزمن t بالثواني. أوجد أعلى وأقل ارتفاع للقفّاز.

الربط بالحياة اليومية

حققت قطارات الملاهي مؤخرًا سرعات تتخطى 193 km/h وارتفاعات تزيد عن 137 m.

المصدر: موسوعة جينيس للأرقام القياسية

انتبه!

تفسير التمثيلات البيانية يوضح التمثيل البياني في المثال 5 ارتفاع العربة بمرور الزمن. ولكنه لا يوضح شكل قطار الملاهي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 قاعدتا ناتج الضرب وناتج القسمة

لقد تعلمت في وقت سابق أن مشتقة مجموع الدوال تساوي مجموع المشتقات الفردية. فهل مشتقة ناتج ضرب الدوال تساوي ناتج ضرب المشتقات؟ تأمل الدالتين $f(x) = x$ و $g(x) = 3x^3$.

مشتقة ناتج الضرب	ناتج ضرب المشتقات
$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \frac{d}{dx}[x \cdot 3x^3]$	$\frac{d}{dx} f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(3x^3)$
$= \frac{d}{dx}(3x^4)$	$= 1 \cdot 9x^2$
$= 12x^3$	$= 9x^2$

من الواضح أن مشتقة ناتج الضرب ليست بالضرورة أن تكون ناتج ضرب المشتقات.
يمكن تطبيق القاعدة الآتية عند حساب مشتقة نواتج الضرب.

المفهوم الأساسي قاعدة ناتج الضرب للمشتقات

إذا كانت f و g قابلتين للاشتقاق عند x. فإذا $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

ستثبت قاعدة ناتج الضرب للمشتقات في التمرين 64.

مثال 6 قاعدة ناتج الضرب

أوجد مشتقة كل ناتج ضرب مما يلي.

a. $h(x) = (x^3 - 2x + 7)(3x^2 - 5)$

ليكن $f(x) = x^3 - 2x + 7$ و $g(x) = 3x^2 - 5$. إذًا، $h(x) = f(x)g(x)$.

$f(x) = x^3 - 2x + 7$	المعادلة الأصلية
$f'(x) = 3x^2 - 2$	قواعد القوة، والمضاعف الثابت للقوة، والثابت، والمجموع، والفرق
$g(x) = 3x^2 - 5$	المعادلة الأصلية
$g'(x) = 6x$	قواعد المضاعف الثابت للقوة، والثابت، والفرق

استخدم $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ و $g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	قاعدة ناتج الضرب
$= (3x^2 - 2)(3x^2 - 5) + (x^3 - 2x + 7)(6x)$	عوّض
$= 15x^4 - 33x^2 + 42x + 10$	فكّك وبسّط.

b. $h(x) = (x^3 - 4x^2 + 48x - 64)(6x^2 - x - 2)$

ليكن $f(x) = x^3 - 4x^2 + 48x - 64$ و $g(x) = 6x^2 - x - 2$.

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 48x - 64$	المعادلة الأصلية
$f'(x) = 3x^2 - 8x + 48$	قواعد القوة، والمضاعف الثابت للقوة، والثابت، والمجموع، والفرق
$g(x) = 6x^2 - x - 2$	المعادلة الأصلية
$g'(x) = 12x - 1$	قواعد المضاعف الثابت للقوة، والقوة، والثابت، والفرق

استخدم $f(x)$ و $f'(x)$ و $g(x)$ و $g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	قاعدة ناتج الضرب
$= (3x^2 - 8x + 48)(6x^2 - x - 2) + (x^3 - 4x^2 + 48x - 64)(12x - 1)$	عوّض
$= 30x^4 - 100x^3 + 870x^2 - 848x - 32$	وزّع وبسّط.

تمرين موجّه

6A. $h(x) = (x^5 + 13x^2)(7x^3 - 5x^2 + 18)$

6B. $h(x) = (x^2 + x^3 + x)(8x^2 + 3)$

نصيحة دراسية

قاعدة ناتج الضرب توصل قاعدة ناتج الضرب إلى إجابة يظل من الممكن تبسيطها. ما لم يكن هناك تبسيط يسير أو سبب للقيام بذلك. فإنه يمكنك ترك الإجابة كما هي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نفس المنطق المُستخدَم مع مشتقات نواتج الضرب يمكن تطبيقه على نواتج القسمة. ويمكن تطبيق القاعدة الآتية عند حساب اشتقاق نواتج القسمة.

المفهوم الأساسي قاعدة ناتج القسمة للمشتقات

إذا كانت f و g قابلتين للاشتقاق عند x و $g(x) \neq 0$. فإذا $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

ستثبت قاعدة ناتج القسمة للمشتقات في التمرين 67.

مثال 7 قاعدة ناتج القسمة

أوجد مشتقة كل ناتج قسمة مما يلي.

a. $h(x) = \frac{5x^2 - 3}{x^2 - 6}$

ليكن $f(x) = 5x^2 - 3$ و $g(x) = x^2 - 6$. إذًا، $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

$f(x) = 5x^2 - 3$	المعادلة الأصلية
$f'(x) = 10x$	قواعد المضاعف الثابت للقوة، والثابت، والفرق
$g(x) = x^2 - 6$	المعادلة الأصلية
$g'(x) = 2x$	قواعد القوة، والثابت، والفرق

استخدم $f(x)$ و $f'(x)$ و $g(x)$ و $g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$	قاعدة ناتج القسمة
$= \frac{10x(x^2 - 6) - (5x^2 - 3)(2x)}{(x^2 - 6)^2}$	عوّض
$= \frac{10x^3 - 60x - 10x^3 + 6x}{(x^2 - 6)^2}$	خاصية التوزيع
$= \frac{-54x}{(x^2 - 6)^2}$	بسّط.

b. $h(x) = \frac{x^2 + 8}{x^3 - 2}$

ليكن $f(x) = x^2 + 8$ و $g(x) = x^3 - 2$.

$f(x) = x^2 + 8$	المعادلة الأصلية
$f'(x) = 2x$	قواعد القوة، والثابت، والمجموع
$g(x) = x^3 - 2$	المعادلة الأصلية
$g'(x) = 3x^2$	قواعد القوة، والثابت، والفرق

استخدم $f(x)$ و $f'(x)$ و $g(x)$ و $g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$	قاعدة ناتج القسمة
$= \frac{2x(x^3 - 2) - (x^2 + 8)3x^2}{(x^3 - 2)^2}$	عوّض
$= \frac{-x^4 - 24x^2 - 4x}{(x^3 - 2)^2}$	فكّك وبسّط.

نصيحة دراسية

قاعدة ناتج القسمة بالنسبة لقاعدة ناتج القسمة، يميل التبسيط إلى أن يكون ذا أهمية وفائدة أكبر. ومع ذلك، ليس من الضروري فك المقام إذا كان فعل ذلك لا ينتج عنه مزيد من التبسيط.

تمرين موجّه

7A. $j(x) = \frac{7x - 10}{12x + 5}$

7B. $k(x) = \frac{6x}{2x^2 + 4}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

أوجد قيم النهايات لإيجاد مشتقة كل دالة. ثم أوجد قيمة مشتقة كل دالة للقيم المعطاة لكل متغير. (المثال 1)

1. $f(x) = 4x^2 - 3; x = 2$ و -1
2. $g(t) = -t^2 + 2t + 11; t = 5$ و 3
3. $m(j) = 14j - 13; j = -7$ و -4
4. $v(n) = 5n^2 + 9n - 17; n = 7$ و 2
5. $h(c) = c^3 + 2c^2 - c + 5; c = -2$ و 1
6. $r(b) = 2b^3 - 10b; b = -4$ و -3

أوجد مشتقة كل دالة مما يلي. (المثالان 2 و 3)

7. $y(f) = -11f$
8. $z(n) = 2n^2 + 7n$
9. $p(v) = 7v + 4$
10. $g(h) = 2h^{\frac{1}{2}} + 6h^{\frac{1}{3}} - 2h^{\frac{3}{2}}$
11. $b(m) = 3m^{\frac{2}{3}} - 2m^{\frac{3}{2}}$
12. $n(t) = \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2} + \frac{2}{t^3} + 4$
13. $f(x) = 3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$
14. $q(c) = c^9 - 3c^5 + 5c^2 - 3c$
15. $p(k) = k^{5.2} - 8k^{4.8} + 3k$
16. $f(x) = -5x^3 - 9x^4 + 8x^5$

17. **الحرارة** يمكن تمثيل الحرارة، بدرجة الحرارة المئوية، خلال فترة 24 ساعة في مدينة معينة، بالمعادلة $f(h) = -0.0036h^3 - 0.01h^2 + 2.04h + 52$ حيث h هو عدد الساعات منذ منتصف الليل. (المثال 4)

a. أوجد معادلة معدل التغير اللحظي لدرجة الحرارة.

b. أوجد معادلة معدل التغير اللحظي حيث $h = 2$ و 14 و 20.

c. أوجد درجة الحرارة العظمى حيث $0 \geq h \leq 24$.

استخدم المشتقة لإيجاد أي نقاط حرجة للدالة. ثم أوجد النقطتين العظمى والصغرى لكل تمثيل بياني على الفترة المعلومة. (المثال 5)

18. $f(x) = 2x^2 + 8x; [-5, 0]$
19. $g(m) = m^3 - 4m + 10; [-3, 3]$
20. $r(t) = t^4 + 6t^2 - 2; [1, 4]$
21. $t(u) = u^3 + 15u^2 + 75u + 115; [-6, -3]$
22. $k(p) = p^4 - 8p^2 + 2; [0, 3]$
23. $f(x) = -5x^2 - 90x; [-11, -8]$
24. $z(k) = k^3 - 3k^2 + 3k; [0, 3]$
25. $a(d) = d^4 - 3d^3 + 2; [-1, 4]$
26. $c(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - 6n + 8; [-5, 5]$

27. **رمي الأجسام** راجع التطبيق في بداية الدرس. يمكن تمثيل ارتفاع الكرة، بالمتر، بعد t ثانية، بواسطة المعادلة $h(t) = 20t - 5t^2 + 2$ حيث $0 \leq t \leq 4$. (المثال 5)

a. أوجد $h'(t)$.

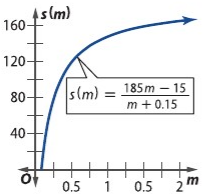
b. أوجد النقطتين العظمى والصغرى لـ $h(t)$ على الفترة.

c. هل يمكن أن يقذف منصور الكرة لأعلى إلى نافذة ناصر؟

حدد المشتقة لكل دالة مما يلي. (المثال 6)

28. $f(x) = (4x + 3)(x^2 + 9)$
29. $g(x) = (3x^4 + 2x)(5 - 3x)$
30. $h(x) = (-7x^2 + 4)(2 - x)$
31. $s(t) = \left(\frac{1}{t^2} + 2\right)(3t^{11} - 4t)$
32. $g(x) = \left(\frac{3}{x^2} + 2x\right)(0.5x^4 - 3x)$
33. $c(t) = (t^3 + 2t - t^7)(t^6 + 3t^4 - 22t)$
34. $p(r) = (r^{2.5} + 8r)(r - 7r^2 + 108)$
35. $q(a) = \left(a^{\frac{9}{8}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{5}{4}} - 13a\right)$
36. $f(x) = (1.4x^5 + 2.7x)(7.3x^9 - 0.8x^5)$
37. $h(x) = \left(\frac{1}{8}x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{5}x^{-\frac{1}{6}}\right)\left(x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{7}{8}}\right)$

38. **البيسبول** ضُربت كرة بمضرب كتلته m كيلوجرام. افترض أن السرعة الأولية للكرة بعد ضربها تُعطى بالمعادلة $s(m) = \frac{185m - 15}{m + 0.15}$. (المثال 7)



a. أوجد معادلة معدل التغير اللحظي للسرعة الأولية للكرة.

b. استخدم آلة حاسبة لتمثيل المعادلة التي وجدتها في الجزء a على $0 \leq m \leq 2$. ما الذي يحدث لمعدل التغير اللحظي للسرعة الأولية للكرة مع ازدياد كتلة المضرب؟

c. إذا كانت كتلة المضرب تتغير عكسيًا مع تحكم ضارب الكرة على تنفيذ الضربة. فهل يُنصح باستخدام مضرب يزن 1.05kg بدلًا من مضرب وزنه 0.80 kg؟ اشرح استنتاجك.

استخدم قاعدة ناتج القسمة لإيجاد مشتقة كل دالة مما يلي. (المثال 7)

39. $f(m) = \frac{3 - 2m}{3 + 2m}$
40. $g(n) = \frac{3n + 2}{2n + 3}$
41. $r(t) = \frac{t^2 + 2}{3 - t^2}$
42. $m(q) = \frac{q^4 + 2q^2 + 3}{q^3 - 2}$
43. $v(t) = \frac{t^2 - 5t + 3}{t^3 - 4t}$
44. $c(m) = \frac{m^4 + 1}{-m^3 + 2m}$
45. $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{-x^2 + 3}$
46. $q(r) = \frac{1.5r^3 + 5 - r^2}{r^3}$
47. $t(w) = \frac{w + w^4}{w^2}$
48. $m(x) = \frac{x^5 + 3x}{-x^4 - 2x^3 - 2x - 3}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

49. الاقتصاد يبيع محمد ومحمود كنزات لجمع المال من أجل الصف الدراسي قبل الأخير. ويُعطى الإيراد الأسبوعي لهما بالمعادلة $r(x) = 0.125x^3 - 11.25x^2 + 250x$. حيث x هو تكلفة كنزة واحدة.

B

a. أوجد $r'(x)$.

b. أوجد حلول $r'(x) = 0$.

c. ما الذي تمثله الحلول التي وجدتها في الجزء **b** بدلالة الحالة المبينة؟

أوجد معادلة المماس لـ $f(x)$ عند النقطة المبينة. تحقق من إجابتك بالتمثيل البياني.

50. $f(x) = 3x^2 + 2x - 7;\ (1, -2)$

51. $f(x) = -5x^2 - 10x + 25;\ (-2, 25)$

52. $f(x) = -0.2x^2 + 1.5x - 0.75;\ (5, 1.75)$

53. $f(x) = 4x^2 - 12x - 35;\ (-1.2, -14.84)$

54. $f(x) = 0.8x^2 + 0.64x - 12;\ (10, 74.4)$

55. المشتقات لتكن $f'(x)$ هي مشتقة دالة $f(x)$. إذا كانت موجودة، فإنه يمكننا حساب مشتقة $f'(x)$ والتي تُسمى المشتقة الثانية، ويُرمز إليها بـ $f''(x)$ أو $f^{(2)}(x)$. يمكننا المتابعة وإيجاد مشتقة $f''(x)$ والتي تُسمى المشتقة الثالثة ويُرمز إليها بـ $f'''(x)$ أو $f^{(3)}(x)$. وفيما يلي أمثلة على المشتقات العليا. أوجد المشتقة المحددة لكل دالة.

a. المشتقة الثانية $f(x) = 4x^5 - 2x^3 + 6$

b. المشتقة الثالثة $g(x) = -2x^7 + 4x^4 - 7x^3 + 10x$

c. المشتقة الرابعة $h(x) = 3x^{-3} + 2x^{-2} + 4x^2$

ارسم منحنى دالة لها الخواص التالية.

56. المشتقة هي 0 حيث $x = -1$ و $x = 1$.

57. المشتقة هي -2 حيث $x = -1$ و $x = 0$ و $x = 2$.

58. المشتقة هي 0 حيث $x = -1$ و $x = 2$ و $x = 4$.

59. المشتقة غير مُعرَّفة حيث $x = 4$.

60. المذاكرة تتبعت هدى كمية الزمن t بالدقائق التي ذاكرتها في ليلة الامتحان والنسبة المئوية p التي حصلت عليها في الامتحان.

t	30	60	90	120	180	210	240
p	39	68	86	96	90	76	56

a. أوجد دالة تربيعية $p(t)$ يمكن استخدامها لتمثيل البيانات. قرّب المعاملات إلى أقرب جزء من عشرة آلاف. مثّل البيانات و $p(t)$ بيانيًا على نفس الشاشة.

b. استخدم $p'(t)$ لإيجاد درجة الامتحان العظمى التي تستطيع أن تحصل هدى عليها وكمية الزمن التي ستحتاج إلى المذاكرة فيها لإحراز هذه الدرجة.

c. اشرح لماذا تزايد زمن المذاكرة ليس بالضرورة أن يؤدي إلى الحصول على درجة أعلى في الامتحان.

61. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستستكشف علاقة المشتقات ببعض الخواص الهندسية.

a. تحليليًا أوجد مشتقتي صيغة مساحة A الدائرة وصيغة حجم V الكرة بدلالة r.

b. لفظيًا اشرح العلاقة بين كل صيغة ومشتقتها.

c. هندسيًا ارسم مربعًا له عامد a. ارسم مكعبًا له عامد a لثلاثة وجوه مشتركة في رأس واحد.

d. تحليليًا اكتب صيغتين لمساحة A المربع وحجم V المكعب بدلالة العامد a. أوجد المشتقة لكل صيغة بدلالة a.

e. لفظيًا اشرح العلاقة بين كل صيغة ومشتقتها.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

62. تحليل الخطأ تعمل هيام وهناء على إيجاد $[f'(x)]^2$. حيث $f(x) = 6x^2 + 4x$. وتعتقد هناء أن الإجابة هي $144x^2 + 96x + 16$. ولكن تعتقد هيام أن الإجابة هي $144x^3 + 144x^2 + 32x$. هل أي منهما على صواب؟ اشرح.

63. التحدي أوجد $f'(y)$ إذا كانت

$$f(y) = 10x^2y^3 + 5xz^2 - 6xy^2 + 8x^5 - 11x^8yz^7.$$

64. البرهان أثبت قاعدة ناتج الضرب للمشتقات بواسطة بيان أن

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.$$

(إرشاد: حل الطرف الأيمن. اجمع واطرح باستخدام $f(x)g(x+h)$ في البسط.)

65. التبرير حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم *خاطئة*. اشرح استنتاجك إذا كان $f(x) = x^{5n+3}$ فإذا $f'(x) = (5n+3)x^{5n+2}$.

66. الكتابة المسبقة استخدم مخططًا هرميًا لتمثيل عملية إيجاد مشتقة $f(x) = 4x^2 - 2x + 5$ عند القيمة حيث $x = 1$.

67. البرهان أثبت قاعدة ناتج القسمة للمشتقات بواسطة بيان أن

$$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}.$$

(إرشاد: حل الطرف الأيمن. اجمع واطرح باستخدام $f(x)g(x)$ في البسط.)

68. الكتابة في الرياضيات هل يمكن أن يكون لدالتين مختلفتين نفس المشتقة؟ اشرح سبب إمكانية أو عدم إمكانية ذلك مع ذكر أمثلة تدعم إجابتك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة شاملة

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة لكل دالة عند النقاط المبينة.

69. $y = x^2 - 3x$; (0, 0) و (3, 0)

70. $y = 4 - 2x$; (−2, 8) و (6, −8)

71. $y = x^2 + 9$; (3, 18) و (6, 45)

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

72. $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4}$

73. $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 2}$

74. $\lim_{x \to 2} \frac{3x + 9}{x^2 - 5x - 24}$

75. التمرن طلب مدرس ألعاب رياضية من طلابه تتبع عدد الأيام التي تمرنوا فيها بكل أسبوع. استخدم التوزيع التكراري الموضح لإنشاء توزيع احتمالي وتمثيله بيانيًا للمتغير العشوائي X مع تقريب كل احتمال إلى أقرب جزء من مئة.

الأيام، X	التكرار
0	3
1	6
2	7
3	8
4	4
5	2

76. الرياضات مبين أدناه عدد الساعات في الأسبوع التي قضاها أعضاء فريق مدرسة الشمال الثانوية لكرة السلة في التمرن، سواء ضمن فريق أو بشكل فردي.

15, 18, 16, 20, 22, 18, 19, 20, 24, 18, 16, 18

a. أنشئ مدرجًا إحصائيًا واستخدمه لوصف شكل التوزيع.

b. صِف مركز البيانات وانتشارها باستخدام إما المتوسط والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة. برر اختيارك.

استخدم المجموع الجزئي الخامس للمتسلسلة المثلثية لـ cosine أو sine لتقريب كل قيمة إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

77. $\cos \frac{2\pi}{11}$

78. $\sin \frac{3\pi}{14}$

79. $\sin \frac{\pi}{13}$

اكتب صيغة صريحة وصيغة تكرارية (ضمنية) لإيجاد الحد رقم n لكل متتالية هندسية.

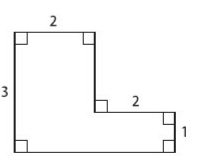
80. 1.25, −1.5, 1.8, ...

81. 1.4, −3.5, 8.75, ...

82. $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

83. SAT/ACT يوضح الشكل أبعاد لوح حجري، بالمتر. فكم عدد الألواح المطلوبة لتأسيس فناء مستطيلي طوله 24 m وعرضه 12 m؟



A 18
B 20
C 24
D 36
E 40

84. المراجعة ما ميل المماس للتمثيل البياني لـ $y = 2x^2$ عند النقطة (1, 2)؟

F 1
G 2
H 4
J 8

85. وجدت شركة "الكتاب الأفضل" أن التكلفة بالدرهم لطباعة x نسخة من كتاب تُعطى بواسطة المعادلة $C(x) = 1000 + 10x - 0.001x^2$. والمشتقة $C'(x)$ تُسمى *دالة التكلفة الحدية*. التكلفة الحدية هي التكلفة التقريبية لطباعة كتاب واحد آخر بعد طباعة x نسخة. ما التكلفة الحدية عند طباعة 1000 كتاب؟

A AED 7
B AED 8
C AED 9
D AED 10

86. المراجعة أوجد مشتقة $f(x) = 5\sqrt[3]{x^8}$.

F $f'(x) = \frac{40}{3}x^{\frac{5}{3}}$
G $f'(x) = \frac{40}{3}x^{\frac{8}{3}}$
H $f'(x) = 225x^{\frac{5}{3}}$
J $f'(x) = 225x^{\frac{8}{3}}$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

11-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل

السابق

- حسبت النهايات جبريًا باستخدام خواص النهايات.

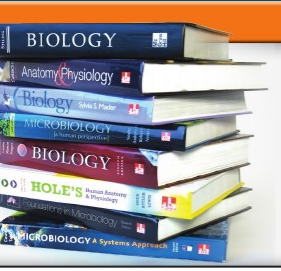
الحالي

1 تقريب المساحة تحت المنحنى باستخدام المستطيلات.

2 تقريب المساحة تحت المنحنى باستخدام التكاملات المحددة والتكامل.

لماذا؟

- *التكلفة الحدية* هي التكلفة التقريبية التي تتحملها الشركة لإنتاج وحدة إضافية من منتج. ومعادلة التكلفة الحدية هي مشتق معادلة *التكلفة الفعلية*. دالة التكلفة الحدية لدار نشر معينة هي $f(x) = 10 - 0.002x$، حيث x هو عدد الكتب المصنعة و $f(x)$ تكون بالدرهم.



المفردات الجديدة

تجزئة منتظمة regular partition

تكامل محدد definite integral

نهاية دنيا lower limit

نهاية عليا upper limit

مجموع ريمان يميني right Riemann sum

تكامل integration

1 المساحة تحت المنحنى

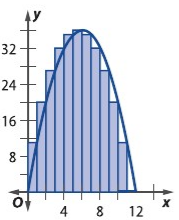
لقد سبق لك أن تعلمت في الهندسة كيفية حساب مساحة الأشكال الأساسية. مثل المثلث أو المستطيل أو المضلع المنتظم. وتعلمت أيضًا كيفية حساب مساحة شكل مركّب، أي منطقة متألفة من أشكال أساسية. ومع ذلك، لا تكون العديد من المناطق مجموعة من الأشكال الأساسية. وبالتالي، أنت تحتاج إلى منهج أعم لحساب المساحة المتألفة من أي شكل ثنائي الأبعاد.

يمكننا تقريب مساحة شكل غير منتظم بواسطة استخدام شكل أساسي له صيغة مساحة معلومة، المستطيل. على سبيل المثال، تأمل منحنى الدالة $f(x) = -x^2 + 12x$ على الفترة $[0, 12]$. يمكننا تقريب المساحة بين المنحنى والمحور x باستخدام مستطيلات متساوية في العرض.

مثال 1 المساحة تحت المنحنى باستخدام المستطيلات

قرّب المساحة بين المنحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0, 12]$ مستخدمًا 4 مستطيلات و 6 مستطيلات و 12 مستطيلاً. استخدم نقطة النهاية اليمنى لكل مستطيل لتحديد الارتفاع.

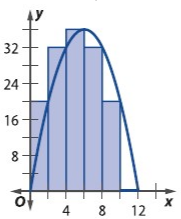
مستعينًا بالأشكال أدناه للمرجعية. لاحظ أن المستطيلات رُسمت ولها ارتفاع مساوٍ لـ $f(x)$ عند كل نقطة نهاية يمنى. على سبيل المثال، ارتفاعات المستطيلات في الشكل الأول هي $f(3)$ و $f(6)$ و $f(9)$ و $f(12)$. ويمكننا استخدام هذه الارتفاعات وطول القاعدة لكل مستطيل لتقريب المساحة الواقعة تحت المنحنى.



المساحة باستخدام 4 مستطيلات

$R_1 = 3 \cdot f(3)$ أو 81
$R_2 = 3 \cdot f(6)$ أو 108
$R_3 = 3 \cdot f(9)$ أو 81
$R_4 = 3 \cdot f(12)$ أو 0

المساحة الإجمالية = 270



المساحة باستخدام 6 مستطيلات

$R_1 = 2 \cdot f(2)$ أو 40
$R_2 = 2 \cdot f(4)$ أو 64
$R_3 = 2 \cdot f(6)$ أو 72
$R_4 = 2 \cdot f(8)$ أو 64
$R_5 = 2 \cdot f(10)$ أو 40
$R_6 = 2 \cdot f(12)$ أو 0

المساحة الإجمالية = 280

المساحة باستخدام 12 مستطيلات

$R_1 = 1 \cdot f(1)$ أو 11
$R_2 = 1 \cdot f(2)$ أو 20
$R_3 = 1 \cdot f(3)$ أو 27
$R_4 = 1 \cdot f(4)$ أو 32
$R_5 = 1 \cdot f(5)$ أو 35
$R_6 = 1 \cdot f(6)$ أو 36
$R_7 = 1 \cdot f(7)$ أو 35
$R_8 = 1 \cdot f(8)$ أو 32
$R_9 = 1 \cdot f(9)$ أو 27
$R_{10} = 1 \cdot f(10)$ أو 20
$R_{11} = 1 \cdot f(11)$ أو 11
$R_{12} = 1 \cdot f(12)$ أو 0

المساحة الإجمالية = 286

تقريب المساحة تحت المنحنى باستخدام 4 مستطيلات و 6 مستطيلات و 12 مستطيلاً هو 270 وحدة مربعة، و 280 وحدة مربعة، و 286 وحدة مربعة، على التوالي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تلميح تقني

الجداول للمساعدة على إنشاء ارتفاعات متعددة للمستطيلات باستخدام حاسبة التمثيل البياني الخاصة بك، أدخل الدالة باستخدام القائمة Y=. ثم استخدم دالة TABLE عن طريق الضغط على 2nd [TABLE]. سيولد هذا قائمة ارتفاعات ذات قيم مختلفة لـ x. يمكنك تغيير الفترة أيضًا لقيم x في جدولك عن الضغط على 2nd [TBLSET] وضبط خيارات TBLSET.

تمرين موجّه

1. قرّب المساحة بين المنحنى $f(x) = -x^2 + 24x$ والمحور x على الفترة $[0, 24]$ باستخدام 6 مستطيلات و 8 مستطيلات و 12 مستطيلاً. استخدم نقطة النهاية اليمنى لكل مستطيل لتحديد الارتفاع.

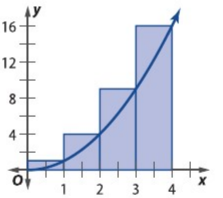
لاحظ أنه كلما كانت المستطيلات أنحف، كانت مناسبة أكثر لملاءمة المنطقة وكانت مساحتها الإجمالية تقريبًا أفضل لمساحة المنطقة. كذلك، رُسمت المستطيلات بحيث تكون لنقطة النهاية اليمنى بكل مستطيل قيمة عند $f(x)$ تمثل الارتفاع. ويمكن أيضًا استخدام نقاط النهاية اليسرى لتحديد ارتفاع كل مستطيل ويمكن التوصل إلى نتيجة مختلفة من حيث المساحة المقرّبة.

قد ينتج عن استخدام نقاط النهاية اليمنى أو اليسرى إضافة أو استبعاد مساحات تقع أو لا تقع بين المنحنى والمحور x. في بعض الحالات، يمكن الحصول على تقريبات أفضل بواسطة حساب المساحة باستخدام كل من نقاط النهاية اليسرى واليمنى ثم إيجاد متوسط النتيجتين.

مثال 2 المساحة تحت المنحنى باستخدام نقاط النهاية اليسرى واليمنى

قرّب المساحة بين المنحنى $f(x) = x^2$ والمحور x على الفترة $[0, 4]$ باستخدام نقاط النهاية اليمنى أولاً ثم نقاط النهاية اليسرى للمستطيلات. استخدم مستطيلات عرضها يساوي 1.

ينتج عن استخدام نقاط النهاية اليمنى لارتفاع كل مستطيل أربعة مستطيلات عرضها وحدة واحدة (الشكل 11.5.1). ينتج عن استخدام نقاط النهاية اليسرى لارتفاع كل مستطيل أربعة مستطيلات عرضها وحدة واحدة (الشكل 11.5.2).



الشكل 11.5.1

المساحة باستخدام نقاط النهاية اليمنى

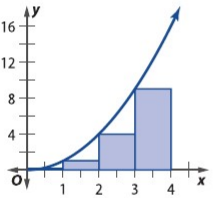
$R_1 = 1 \cdot f(1)$ أو 1

$R_2 = 1 \cdot f(2)$ أو 4

$R_3 = 1 \cdot f(3)$ أو 9

$R_4 = 1 \cdot f(4)$ أو 16

المساحة الإجمالية = 30



الشكل 11.5.2

المساحة باستخدام نقاط النهاية اليسرى

$R_1 = 1 \cdot f(0)$ أو 0

$R_2 = 1 \cdot f(1)$ أو 1

$R_3 = 1 \cdot f(2)$ أو 4

$R_4 = 1 \cdot f(3)$ أو 9

المساحة الإجمالية = 14

المساحة الناتجة عن استخدام نقاط النهاية اليمنى واليسرى هي 30 و 14 وحدة مربعة، على التوالي. لدينا الآن تقدير أدنى وتقدير أعلى لمساحة المنطقة، 14 < المساحة < 30. عند حساب متوسط المساحتين، سنحصل على أفضل تقريب، والذي يساوي 22 وحدة مربعة.

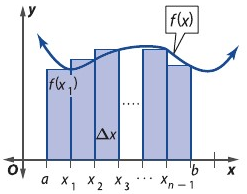
تمرين موجّه

2. قرّب المساحة بين المنحنى $f(x) = \frac{12}{x}$ والمحور x على الفترة $[1, 5]$ باستخدام نقاط النهاية اليمنى أولاً ثم نقاط النهاية اليسرى. استخدم مستطيلات عرضها يساوي وحدة واحدة، ثم أوجد متوسط التقريبين.

يمكن استخدام أي نقطة داخل عرض المستطيلات باعتبارها ارتفاعات عند تقريب المساحة بين التمثيل البياني لمنحنى والمحور x. وأكثر النقاط المستخدمة بشكل شائع هي نقاط النهاية اليسرى ونقاط النهاية اليمنى ونقاط المنتصف.

التكامل 2 كما رأينا في المثال 1، كلما كانت المستطيلات أضيق، اقتربت مساحتها الإجمالية من المساحة الدقيقة للمنطقة تحت المنحنى. ويمكننا استنتاج أن مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى هي نهاية المساحة الإجمالية للمستطيلات كلما اقتربت أعراض المستطيلات من 0.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



في الشكل. تم تقسيم الفترة من a إلى b إلى n فترة فرعية متساوية. وهذا يُسمى **تجزئة منتظمة**. طول الفترة الكاملة من a إلى b هو $b - a$. إذا عرض كل مستطيل يكون $\frac{b-a}{n}$ ويُرمز إليه بـ Δx. يتقابل ارتفاع كل مثلث عند نقطة النهاية اليمنى مع قيمة الدالة عند هذه النقطة. لذلك. ارتفاع المستطيل الأول هو $f(x_1)$. وارتفاع المستطيل الثاني هو $f(x_2)$. وهكذا حتى يكون ارتفاع المستطيل الأخير $f(x_n)$.

قراءة في الرياضيات

الرمز سيجما

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ يُقرأ مجموع ناتج ضرب الدالة f (x تحتها i) من 1 إلى n والتغير في x.

يمكن الآن حساب مساحة كل مستطيل بواسطة إيجاد ناتج ضرب Δx والارتفاع المقابل. مساحة المستطيل الأول هي $f(x_1)\Delta x$. مساحة المستطيل الثاني هي $f(x_2)\Delta x$. وهكذا. المساحة الإجمالية A لـ n مستطيل تُعطى بواسطة مجموع المساحات ويمكن كتابتها في صورة الرمز سيجما.

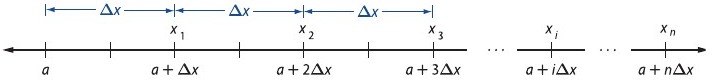
$$A = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \qquad \text{اجمع المساحات.}$$

$$A = \Delta x[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] \qquad \text{أخرج العامل } \Delta x.$$

$$A = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad \text{اكتب مجموع الارتفاعات في صورة الرمز سيجما.}$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \qquad \text{خاصية التبديل في الضرب}$$

للمساعدة على إجراء الحسابات مستقبلًا. يمكننا اشتقاق صيغة لإيجاد أي x_i. عرض Δx لكل مستطيل هو المسافة بين قيم x_i المتتالية. تأمل المحور x.



يمكننا رؤية أن $x_i = a + i\Delta x$. ستكون هذه الصيغة مفيدة في إيجاد المساحة تحت المنحنى لأي دالة.

لجعل عرض المستطيلات يقترب من 0. نسمح باقتراب عدد المستطيلات إلى ما لا نهاية. وتُسمى هذه النهاية **تكامل محدد** ويُعطى لها رمز خاص.

المفهوم الأساسي تكامل محدد

مساحة المنطقة تحت المنحنى لدالة هي

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x,$$

حيث a و b هما **الحد الأدنى** و**الحد الأعلى** على التوالي. $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ و $x_i = a + i\Delta x$. يُشار إلى هذه الطريقة بأنها **مجموع ريمان يميني**.

سُمي مجموع ريمان نسبة إلى عالم الرياضيات الألماني بيرنارد ريمان (1826–1866). وهو يُنسب إليه تشكيل صيغة التعبير لتقريب المساحة الواقعة تحت منحنى باستخدام النهايات. ويمكن تعديل التعبير لاستخدام نقاط النهاية اليسرى أو نقاط المنتصف.

تُسمى عملية إيجاد قيمة التكامل. **التكامل**. سوف تفيد صيغ المجاميع التالية في إيجاد قيم التكاملات المحددة.

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn, \text{ عبارة عن ثابت } c \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12}$$

انتبه!

المجاميع مجموع الثابت c هو cn. وليس 0 أو ∞. على سبيل المثال. $\sum_{i=1}^{n} 5 = 5n$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

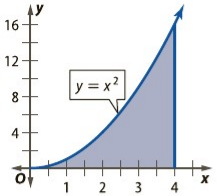
يلزم العمل بخاصيتين من خواص المجاميع لإيجاد قيم بعض التكاملات.

$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

$\sum_{i=1}^{n} ci = c\sum_{i=1}^{n} i$, c عبارة عن ثابت

مثال 3 المساحة تحت المنحنى باستخدام التكامل

استخدم النهايات لإيجاد مساحة المنطقة بين منحنى الدالة $y = x^2$ والمحور x على الفترة $[0, 4]$، أو $\int_0^4 x^2\,dx$.



أوجد أولاً Δx و x_i.

الصيغة لـ Δx $\quad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{n}$ أو $\frac{4}{n}$

$a = 0$ و $b = 4$

الصيغة لـ x_i $\quad x_i = a + i\Delta x = 0 + i\frac{4}{n}$ أو $\frac{4i}{n}$

$\Delta x = \frac{4}{n}$ و $a = 0$

احسب التكامل المحدد الذي يعطي المساحة.

تعريف التكامل المحدد $\quad \int_0^4 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

$f(x_i) = x_i^2$ $\quad = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\,\Delta x$

$\Delta x = \frac{4}{n}$ و $x_i = \frac{4i}{n}$ $\quad = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i}{n}\right)^2 \left(\frac{4}{n}\right)$

عامل. $\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i}{n}\right)^2$

فكّك. $\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{16i^2}{n^2}$

عامل. $\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \left(\frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i^2\right)$

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \left[\frac{16}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

اضرب وفكّك. $\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \left[\frac{16n(2n^2+3n+1)}{6n^2}\right]$

اضرب. $\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{64n(2n^2+3n+1)}{6n^3}$

اقسم على n. $\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{64(2n^2+3n+1)}{6n^2}$

عامل. $\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{64}{6} \left[\frac{(2n^2+3n+1)}{n^2}\right]$

اقسم كل حد على n^2. $\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{64}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$

نظريات النهاية $\quad = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{64}{6}\right)\left[\lim_{n\to\infty} 2 + \left(\lim_{n\to\infty} 3\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\right]$

المساحة هي $\frac{64}{3}$ أو $21\frac{1}{3}$ وحدة مربعة. $\quad = \frac{64}{6}[2 + 3(0) + 0]$ أو $\frac{64}{3}$

نصيحة دراسية

النهايات حلل كلاً من المجاميع إلى العوامل حتى لا يشتمل التعبير المتبقي إلا على ثابت أو i. ثم طبّق صيغة المجموع اللازمة.

تمرين موجّه

استخدم النهايات لإيجاد المساحة بين منحنى كل دالة والمحور x المُعطاة بواسطة التكامل المحدد.

3A. $\int_0^1 3x^2\,dx$

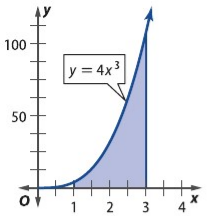
3B. $\int_0^3 x\,dx$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكن استخدام النهايات أيضًا لإيجاد مساحات المناطق التي لا يكون لها نهاية دنيا عند نقطة الأصل.

مثال 4 المساحة تحت المنحنى باستخدام التكامل

استخدم النهايات لإيجاد مساحة المنطقة بين منحنى الدالة $y = 4x^3$ والمحور x على الفترة $[1, 3]$، أو $\int_1^3 4x^3\,dx$.



أوجد أولاً Δx و x_i.

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$	الصيغة لـ Δx
$= \frac{3-1}{n}$ أو $\frac{2}{n}$	$a = 1$ و $b = 3$
$x_i = a + i\Delta x$	الصيغة لـ x_i
$= 1 + i\frac{2}{n}$ أو $1 + \frac{2i}{n}$	$a = 1$ و $\Delta x = \frac{2}{n}$

احسب التكامل المحدد الذي يعطي المساحة.

$\int_1^3 4x^3\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$	تعريف التكامل المحدد
$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 4(x_i)^3\Delta x$	$f(x_i) = 4(x_i)^3$
$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 4\left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3 \left(\frac{2}{n}\right)$	$\Delta x = \frac{2}{n}$ و $x_i = 1 + \frac{2i}{n}$
$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3$	عامل.
$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[1 + 3\left(\frac{2i}{n}\right) + 3\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + \left(\frac{2i}{n}\right)^3\right]$	فكّك.
$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{6i}{n} + \frac{12i^2}{n^2} + \frac{8i^3}{n^3}\right)$	بسّط.
$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{6i}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{12i^2}{n^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{8i^3}{n^3}\right)$	طبّق المجاميع.
$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{12}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^3\right)$	أخرج الثوابت.
$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n} \left[n + \frac{6}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{12}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$	صيغ المجاميع
$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{8n}{n} + \frac{48n(n+1)}{2n^2} + \frac{96n(2n^2+3n+1)}{6n^3} + \frac{64n^2(n^2+2n+1)}{4n^4}\right]$	وزّع $\frac{8}{n}$
$= \lim_{n\to\infty} \left[8 + \frac{24(n+1)}{n} + \frac{16(2n^2+3n+1)}{n^2} + \frac{16(n^2+2n+1)}{n^2}\right]$	بسّط.
$= \lim_{n\to\infty} \left[8 + 24\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 16\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + 16\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right]$	حلل إلى العوامل وأجرِ القسمة.
$= \lim_{n\to\infty} 8 + 24\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 16\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + 16\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$	نظريات النهاية
$= 8 + 24(1 + 0) + 16(2 + 0 + 0) + 16(1 + 0 + 0)$ أو 80	بسّط.

مساحة المنطقة هي 80 وحدة مربعة.

انتبه!
النهايات عند إيجاد المساحة تحت منحنى باستخدام النهايات، أوجد قيمة تعبيرات المجاميع للقيم المعطاة لـ i قبل توزيع العرض Δx أو أي ثوابت أخرى.

تمرين موجّه

استخدم النهايات لإيجاد المساحة بين منحنى كل دالة والمحور x المُعطاة بواسطة التكامل المحدد.

4A. $\int_1^3 x^2\,dx$

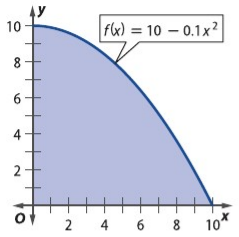
4B. $\int_2^4 x^3\,dx$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكن استخدام التكاملات المحددة لإيجاد مساحات أشكال غير منتظمة أخرى.

مثال 5 من الحياة اليومية المساحة تحت المنحنى

تنسيق الحدائق يطلب عامر AED 2.40 لكل متر مربع من النشارة مقابل التوصيل والتأسيس. وتم استئجاره لإنشاء حوضي زهور متطابقتين في الركنين الخلفيين لمنطقة سكنية. إذا كانت مساحة كل حوض زهور يمكن إيجادها بواسطة $\int_0^{10}(10-0.1x^2)dx$، فكم سيطلب عامر مقابل هذين الحوضين إذا كانت x معطاة بدلالة الأمتار؟



أوجد أولاً Δx و x_i.

الصيغة لـ Δx $\quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$

$a = 0$ و $b = 10$ $\quad = \frac{10-0}{n}$ أو $\frac{10}{n}$

الصيغة لـ x_i $\quad x_i = a + i\Delta x$

$a = 0$ و $\Delta x = \frac{10}{n}$ $\quad = 0 + i\frac{10}{n}$ أو $\frac{10i}{n}$

احسب التكامل المحدد الذي يعطي المساحة.

تعريف التكامل المحدد $\quad \int_0^{10}(10-0.1x^2)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

$f(x_i) = 10 - 0.1x_i^2$ $\quad = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(10-0.1x_i^2)\Delta x$

$\Delta x = \frac{10}{n}$ و $x_i = \frac{10i}{n}$ $\quad = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[10-0.1\left(\frac{10i}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{10}{n}$

فكّك وبسّط. $\quad = \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(10-\frac{10i^2}{n^2}\right)$

طبّق المجاميع. $\quad = \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}10-\sum_{i=1}^{n}\frac{10i^2}{n^2}\right)$

عامل. $\quad = \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}10-\frac{10}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right)$

صيغ المجاميع $\quad = \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(10n-\frac{10}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$

وزّع $\frac{10}{n}$ $\quad = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{100n}{n}-\frac{100n(2n^2+3n+1)}{3n^2}\right)$

اقسم على n. $\quad = \lim_{n\to\infty}\left(100-\frac{50(2n^2+3n+1)}{3n^2}\right)$

حلل إلى العوامل وأجرِ القسمة. $\quad = \lim_{n\to\infty}\left[100-\frac{50}{3}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right]$

نظريات النهاية $\quad = \lim_{n\to\infty}100-\frac{50}{3}\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$

بسّط. $\quad = 100-\frac{50}{3}(2+0+0)$ أو $66\frac{2}{3}$

مساحة حوض زهور واحد تساوي حوالي $66.67\ m^2$ لكي ينشئ عامر حوضي الزهور، سيطلب أجرة $\left(66\frac{2}{3}\cdot 2\right)$ أو AED 320.

مهنة من الحياة اليومية

مهندس المناظر الطبيعية كانت تشير التوقعات إلى أن فرص توظيف مهندسي المناظر الطبيعية ستزداد بمعدل 16% بحلول عام 2016. ويكون مهندسو المناظر الطبيعية مسؤولين عن تصميم ملاعب الجولف وساحات الكليات والحدائق العامة والمناطق السكنية. وتتطلب هندسة المناظر الطبيعية ترخيصًا مهنيًا وشهادة بكالوريوس بشكل عام.

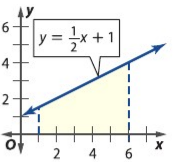
تمرين موجّه

5. **الطلاء** يطلي طلاب صف الأستاذة هداية للرسم لوحة جدارية كبيرة تجسد مشهدًا للتزلج في الشتاء. ويريد الطلاب البدء بطلاء تلين للتزلج يقع أحدهما عند بداية الصورة والآخر عند نهايتها. ولكن ليس لديهم إلا طلاء يكفي لتغطية $30\ m^2$. إذا كانت مساحة كل تل للتزلج يمكن إيجادها بواسطة $\int_0^5(5-0.2x^2)dx$، فهل لدى الطلاب طلاء كافٍ لكلا التلين؟ اشرح.

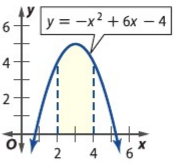
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

قرّب مساحة المنطقة المظللة لكل دالة باستخدام عدد المستطيلات المبين. استخدم نقاط النهاية الموضحة لتحديد ارتفاعات المستطيلات. (المثال 1)

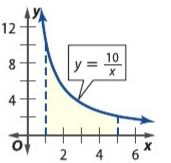
1. 5 مستطيلات
نقاط نهاية يمنى



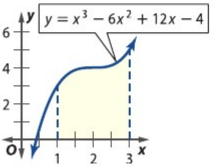
2. 4 مستطيلات
نقاط نهاية يسرى



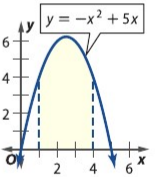
3. 8 مستطيلات
نقاط نهاية يمنى



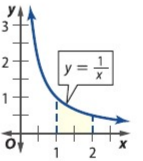
4. 8 مستطيلات
نقاط نهاية يسرى



5. 4 مستطيل
نقاط نهاية يمنى



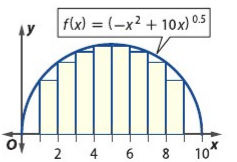
6. 5 مستطيلات
نقاط نهاية يسرى



7. تبليط الأرضيات يبلط ماجد أرضية خشبية ويجب عليه أن يغطي قطاعًا شبه دائري تحدده المعادلة $f(x) = (-x^2 + 10x)^{0.5}$. (المثال 1)

a. قرّب مساحة المنطقة شبه الدائرية باستخدام نقاط النهاية اليسرى ومستطيلات عرضها وحدة واحدة.

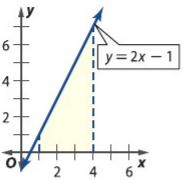
b. رأى ماجد أن استخدام كلٍّ من نقاط النهاية اليسرى واليمنى قد يعطي تقديرًا أفضل لأن هذا سيزيل أي مساحة خارج المنطقة الشبه دائرية. قرّب مساحة المنطقة شبه الدائرية كما هو موضح في الشكل.



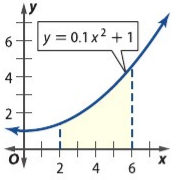
c. أوجد مساحة المنطقة باستخدام صيغة مساحة شبه الدائرة. أي تقريب يكون أقرب إلى المساحة الفعلية للمنطقة؟ اشرح لماذا يعطي هذه التقدير تقريبًا أفضل.

قرّب مساحة المنطقة المظللة لكل دالة عن طريق استخدام نقاط النهاية اليمنى أولاً ثم استخدام نقاط النهاية اليسرى. ثم أوجد متوسط هذين التقريبين. استخدم العرض المحدد للمستطيلات. (المثال 2)

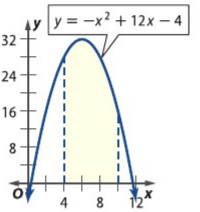
8. العرض = 0.5



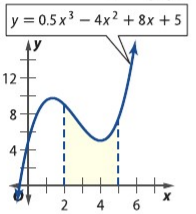
9. العرض = 1.0



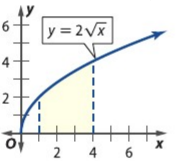
10. العرض = 0.75



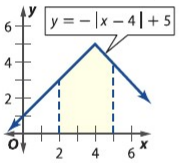
11. العرض = 0.5



12. العرض = 0.75



13. العرض = 0.5



استخدم النهايات لإيجاد المساحة بالوحدات المربعة بين منحنى كل دالة والمحور x المُعطاة بواسطة التكامل المحدد. (المثالان 3 و 4)

14. $\int_1^4 4x^2\,dx$

15. $\int_2^6 (2x + 5)\,dx$

16. $\int_0^2 6x\,dx$

17. $\int_1^3 (2x^2 + 3)\,dx$

18. $\int_2^5 (x^2 + 4x - 2)\,dx$

19. $\int_1^2 8x^3\,dx$

20. $\int_0^4 (4x - x^2)\,dx$

21. $\int_3^4 (-x^2 + 6x)\,dx$

22. $\int_0^3 (x^3 + x)\,dx$

23. $\int_2^4 (-3x + 15)\,dx$

24. $\int_1^5 (x^2 - x + 1)\,dx$

25. $\int_1^3 12x\,dx$

26. $\int_0^3 (8 - 0.6x^2)\,dx$

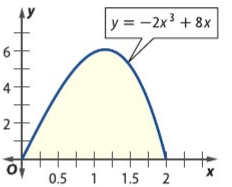
27. $\int_3^8 0.5x^2\,dx$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

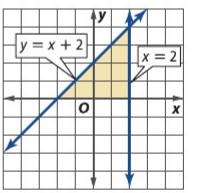
28. النشر راجع بداية الدرس. ترغب دار النشر في زيادة الإنتاج اليومي من 1000 كتاب إلى 1500 كتاب. أوجد تكلفة الزيادة إذا كانت مُعرَّفة في الصورة $\int_{1000}^{1500} (10 - 0.002x)\, dx$. (المثال 5)

29. المدخل المقوس قررت لجنة حفل التخرج أن يكون المدخل إلى حفل التخرج عبارة عن قوس من البالون. علاوة على ذلك، تراود اللجنة تعليق لافتات ممتدة من أعلى القوس إلى الأسفل على الأرض مغطية المدخل بالكامل. أوجد المساحة الواقعة تحت المدخل المقوس من البالون إذا كان يمكن تحديدها بالصيغة $\int_{1}^{13} (-0.2x^2 + 2.8x - 1.8)\, dx$، حيث x يُعطى بالمتر. (المثال 5)

30. الشعار جزء من شعار شركة ما يكون على شكل المنطقة الموضحة. إذا كان من المقرر خياطة هذا الجزء من الشعار على علم، فما كمية المواد المطلوبة إذا كان x يُعطى بالمتر؟ (المثال 5)



31. النهايات السالبة يمكن حساب التكاملات المحددة لكلٍ من النهايات الموجبة والسالبة.



a. أوجد ارتفاع المثلث وطول قاعدته. ثم احسب مساحة المثلث باستخدام طوله وقاعدته.

b. احسب مساحة المثلث عن طريق إيجاد قيمة $\int_{-2}^{2} (x + 2)\, dx$

استخدم النهايات لإيجاد المساحة بالوحدات المربعة بين منحنى كل دالة والمحور x المُعطاة بواسطة التكامل المحدد.

32. $\int_{-1}^{1} x^2\, dx$

33. $\int_{-1}^{0} (x^3 + 2)\, dx$

34. $\int_{-4}^{-2} (-x^2 - 6x)\, dx$

35. $\int_{-3}^{-2} -5x\, dx$

36. $\int_{-2}^{0} (2x + 6)\, dx$

37. $\int_{-1}^{0} (x^3 - 2x)\, dx$

استخدم النهايات لإيجاد المساحة بالوحدات المربعة بين منحنى كل دالة والمحور x المُعطاة بواسطة التكامل المحدد.

38. $\int_{-3}^{-1} (-2x^2 - 7x)\, dx$

39. $\int_{-2}^{0} (-x^3)\, dx$

40. $\int_{-4}^{3} 2\, dx$

41. $\int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{2}x + 3\right) dx$

42. التمثيلات المتعددة ستستكشف في هذه المسألة عملية إيجاد المساحة بين منحنيين.

a. بيانيًا مثّل $f(x) = -x^2 + 4$ و $g(x) = x^2$ بيانيًا على المستوى الإحداثي ذاته وظلل المساحات الممثلة بواسطة $\int_{0}^{1} (-x^2 + 4)\, dx$ و $\int_{0}^{1} x^2\, dx$.

b. تحليليًا أوجد قيمة $\int_{0}^{1} (-x^2 + 4)\, dx$ و $\int_{0}^{1} x^2\, dx$.

c. لفظيًا اشرح لماذا المساحة بين المنحنيين مساوية لـ $\int_{0}^{1} (-x^2 + 4)\, dx - \int_{0}^{1} x^2\, dx$. ثم احسب هذه القيمة باستخدام القيمة التي تم إيجادها في الجزء **b**.

d. تحليليًا أوجد $f(x) - g(x)$. ثم أوجد قيمة $\int_{0}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx$.

e. لفظيًا ضع تخمينًا بشأن عملية إيجاد المساحة بين منحنيين.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

43. تحليل الخطأ يقول فهد إنه عندما تستخدم نقاط النهاية اليمنى للمستطيلات لتقدير المساحة بين المنحنى والمحور x، تكون المساحة الإجمالية للمستطيلات دائمًا أكبر من المساحة الفعلية. ويقول فالح إن مساحة المستطيلات تكون دائمًا أكبر عندما تستخدم نقاط النهاية اليسرى. هل أي منهما على صواب؟ اشرح.

44. التحدي أوجد قيمة $\int_{0}^{1} (5x^4 + 3x^2 - 2x + 1)\, dx$.

45. التبرير افترض أن كل مقطع عرضي رأسي لنفق يمكن تمثيله بواسطة $f(x)$ على الفترة $[a, b]$. اشرح كيف يمكن حساب حجم النفق باستخدام $\ell \cdot \int_{a}^{b} f(x)\, dx$، حيث ℓ هو طول النفق.

46. الكتابة المسبقة اكتب توضيحًا يمكن استخدامه لوصف الخطوات المتخذة في تقدير المساحة بين المحور x ومنحنى الدالة على فترة معطاة.

47. التحدي أوجد قيمة $\int_{0}^{t} (x^2 + 2)\, dx$.

48. الكتابة في الرياضيات اشرح مدى فعالية استخدام المثلثات والدوائر لتقريب المساحة بين منحنى والمحور x. أي شكل تعتقد أنه يقدم أفضل تقريب؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة شاملة

أوجد مشتقة كل دالة مما يلي.

49. $j(x) = (2x^3 + 11x)(2x^8 - 12x^2)$

50. $f(k) = (k^{15} + k^2 + 2k)(k - 7k^2)$

51. $s(t) = (\sqrt{t} - 7)(3t^8 - 5t)$

أوجد ميل المماس للتمثيل البياني لكل دالة حيث $x = 1$.

52. $y = x^3$

53. $y = x^3 - 7x^2 + 4x + 9$

54. $y = (x + 1)(x - 2)$

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

55. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 3x}{x}$

56. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

57. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 27}$

58. التسوق في الأعوام الأخيرة، صرح 33% من الأمريكيين بأنهم يخططون الخروج للتسوق يوم الجمعة. ما احتمال أن يوجد أقل من 14 شخصًا يخططون للذهاب للتسوق يوم الجمعة من بين عينة عشوائية من 45 شخصًا؟

صنِّف كل متغير عشوائي X على أنه *منفصل* أو *متصل*. اشرح استنتاجك.

59. X يمثل عدد مكالمات الهاتف المحمول التي أجراها طالب تم اختياره عشوائيًا في يوم معين.

60. X يمثل الزمن الذي يستغرقه طالب تم اختياره عشوائيًا لركض مسافة كيلومتر واحد.

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

61. SAT/ACT إذا كانت العبارة أدناه صحيحة، فإذًا ما مما يلي يجب أن يكون صحيحًا أيضًا؟

إذا كان يوجد دب واحد على الأقل نعسان،
فإذًا بعض المهور تكون سعيدة.

A إذا كانت كل الدببة نعسانة، فإذًا كل المهور تكون سعيدة.

B إذا كانت كل المهور سعيدة، فإذًا كل الدببة تكون نعسانة.

C إذا كان لا يوجد دب نعسان، فإذًا لا يوجد مهر سعيد.

D إذا كان لا يوجد مهر سعيد، فإذًا لا يوجد دب نعسان.

E إذا كانت بعض المهور سعيدة، فإذًا يوجد دب واحد على الأقل نعسان.

62. المراجعة ما $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 5x + 6}$؟

F $\frac{1}{15}$

G $\frac{2}{15}$

H $\frac{3}{15}$

J $\frac{4}{15}$

63. أوجد مساحة المنطقة بين منحنى الدالة $y = -x^2 + 3x$ والمحور x على الفترة $[0, 3]$ أو $\int_0^3 (-x^2 + 3x)\, dx$.

A $3\frac{3}{4}$ وحدة مربعة

B $4\frac{1}{2}$ وحدة مربعة

C $21\frac{1}{4}$ وحدة مربعة

D $22\frac{1}{2}$ وحدة مربعة

64. المراجعة أوجد مشتقة $n(a) = \frac{4}{a} - \frac{5}{a^2} + \frac{3}{a^4} + 4a$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

11-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

السابق
- استخدمت النهايات لتقريب المساحة تحت المنحنى.

الحالي
1. إيجاد المشتقات العكسية.
2. استخدام النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل.

لماذا
- في بداية ارتفاع رحلة بمنطاد الهواء الساخن، أدركت نهلة أن هاتف أخيها المحمول موجود في جيبها. وقبل أن يرتفع المنطاد للغاية أسقطت نهلة الهاتف إلى أخيها الذي ينتظر على الأرض. ولمعرفتها أن السرعة المتجهة للهاتف يمكن وصفها كالآتي $v(t) = -10t$. حيث t معطى بالثواني والسرعة المتجهة بالأمتار لكل ثانية. استطاعت نهلة تحديد مدى ارتفاعها عن الأرض عندما أسقطت الهاتف.

المفردات الجديدة
- **عكس المشتقة** antiderivative
- **تكامل غير محدود** indefinite integral
- **النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل** Fundamental Theorem of Calculus

1 المشتقات العكسية والتكاملات غير المحدودة

في الدرسين 3-11 و 4-11، تعلمت أنه إذا كان موقع جسم ما محددًا بالشكل $f(x) = x^2 + 2x$، فإن التعبير الدال على السرعة المتجهة للجسم هو مشتقة $f'(x) = 2x + 2$ أو $f(x)$. على الرغم من ذلك، إذا أعطي إليك تعبير دال على السرعة المتجهة ولكنك تحتاج إلى معرفة الصيغة التي جاء منها ذلك التعبير، فإننا بحاجة إلى الحل بترتيب عكسي أو عكس خطوات الاشتقاق.

بمعنى آخر، إذا أُعطيت $f(x)$، فإننا بحاجة إلى إيجاد معادلة $F(x)$ مثل أن $F'(x) = f(x)$. فالدالة $F(x)$ عبارة عن **عكس المشتقة** للدالة $f(x)$.

مثال 1 إيجاد المشتقات العكسية

أوجد المشتق العكسي لكل دالة.

a. $f(x) = 3x^2$

علينا إيجاد دالة لها المشتقة $3x^2$. تذكر أن المشتقة لها أُس أقل من أُس الدالة الأصلية بمقدار واحد. ولذا، ستُرفع $F(x)$ إلى الأس ثلاثة. وأيضًا، يتحدد معامل المشتقة بشكل جزئي عن طريق أُس الدالة الأصلية. وتتوافق الدالة $F(x) = x^3$ مع هذا الوصف. مشتقة $x^3 = 3x^{3-1}$ أو $3x^2$.

ومع ذلك، x^3 ليست الوحيدة التي تصلح. فالدالة $G(x) = x^3 + 10$ دالة أخرى تصلح لأن مشتقتها هي $G'(x) = 3x^{3-1} + 0$ أو $3x^2$. وإجابة أخرى قد تكون $H(x) = x^3 - 37$.

b. $f(x) = -\frac{8}{x^9}$

أعد كتابة $f(x)$ بأُس سالب، $-8x^{-9}$. ومرة أخرى، فإن أُس المشتقة أقل من أُس الدالة الأصلية بمقدار واحد. لذا ستُرفع $F(x)$ إلى الأس سالب العدد ثمانية. ويمكننا تجربة $F(x) = x^{-8}$. مشتقة x^{-8} هي $-8x^{-8-1}$ أو $-8x^{-9}$.

$G(x) = x^{-8} + 3$ و $H(x) = x^{-8} - 12$ مشتقان عكسيان آخران.

تمرين موجّه

أوجد مشتقتين عكسيتين مختلفتين لكل دالة.

1A. $2x$

1B. $-3x^{-4}$

في المثال 1، لاحظ أن جمع الثوابت إلى المشتق العكسي الأصلي أو طرحها منه نتج عنه مشتقات عكسية أخرى. وفي الحقيقة، نظرًا لأن مشتقة أي ثابت هي 0، فإن جمع أو طرح الحد الثابت C إلى المشتق العكسي لن يؤثر على مشتقته. ولذلك، يوجد عدد لا نهائي من المشتقات العكسية للدالة المحددة. ويطلق على المشتقات العكسية التي تتضمن حدًا ثابتًا C أنها في *الصورة العامة*.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثلما هو الحال مع المشتقات، هناك قواعد لإيجاد المشتقات العكسية.

المفهوم الأساسي قواعد المشتقات العكسية

قاعدة القوة إذا كانت $f(x) = x^n$ حيث n عدد نسبي غير -1، فإن $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

المضاعف الثابت للقوة إذا كان $f(x) = kx^n$. حيث n عدد نسبي غير -1 و k حد ثابت، فإن $F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$

المجموع والفرق إذا كانت المشتقات العكسية للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ هي $F(x)$ و $G(x)$ بالتوالي، فإن المشتقة العكسية للدالة $f(x) \pm g(x)$ هي $F(x) \pm G(x)$.

مثال 2 قواعد المشتقات العكسية

أوجد جميع المشتقات العكسية لكل دالة.

a. $f(x) = 4x^7$

$f(x) = 4x^7$	المعادلة الأصلية
$F(x) = \frac{4x^{7+1}}{7+1} + C$	المضاعف الثابت للقوة
$= \frac{1}{2}x^8 + C$	بسّط.

b. $f(x) = \frac{2}{x^4}$

$f(x) = \frac{2}{x^4}$	المعادلة الأصلية
$= 2x^{-4}$	إعادة كتابة التعبير بأُس سالب.
$F(x) = \frac{2x^{-4+1}}{-4+1} + C$	المضاعف الثابت للقوة
$= -\frac{2}{3}x^{-3} + C$ أو $-\frac{2}{3x^3} + C$	بسّط.

c. $f(x) = x^2 - 8x + 5$

$f(x) = x^2 - 8x + 5$	المعادلة الأصلية
$= x^2 - 8x^1 + 5x^0$	إعادة كتابة الدالة بحيث يحمل كل حد القوة لـ x.
$F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{8x^{1+1}}{1+1} + \frac{5x^{0+1}}{0+1} + C$	قاعدة المشتق العكسي
$= \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 5x + C$	بسّط.

تمرين موجّه

2A. $f(x) = 6x^4$ **2B.** $f(x) = \frac{10}{x^3}$ **2C.** $f(x) = 8x^7 + 6x + 2$

نصيحة دراسية

المشتقات العكسية المشتقة العكسية للحد الثابت k هي kx. على سبيل المثال، إذا كانت الدالة $f(x) = 3$، فإن $F(x) = 3x$.

الصورة العامة لمشتقة عكسية لها اسم ورمز خاص.

المفهوم الأساسي التكامل غير المحدود

يتحدد **التكامل غير المحدود** للدالة $f(x)$ عن طريق $\int f(x)dx = F(x) + C$. حيث $F(x)$ هي المشتقة العكسية للدالة $f(x)$ و C هي أي حد ثابت.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 من الحياة اليومية التكامل غير المحدود

إسقاط البيض يشارك طلاب صف التكنولوجيا للأستاذة نسرين في مسابقة لإسقاط البيض. فيها، يتعين على كل فريق بناء أداة حماية تحفظ البيض من الكسر بعد إسقاطه من ارتفاع 9 أمتار. يمكن تحديد السرعة اللحظية للبيضة كالآتي $v(t) = -10t$، حيث t معطاة بالثواني والسرعة المتجهة مقيسة بالأمتار لكل ثانية.

a. أوجد دالة الموقع $s(t)$ للبيضة التي تسقط.

لإيجاد دالة لموقع البيضة، أوجد المشتقة العكسية لـ $v(t)$.

$s(t) = \int v(t)\,dt$	العلاقة بين الموقع والسرعة المتجهة
$= \int -10t\,dt$	$v(t) = -32t$
$= -\frac{10t^{1+1}}{1+1} + C$	المضاعف الثابت للقوة
$= -5t^2 + C$	بسّط.

أوجد C بالتعويض عن الارتفاع المبدئي بـ 9 m والتعويض عن الزمن الإبتدائي بـ 0.

$s(t) = -5t^2 + C$	المشتقة العكسية لـ $v(t)$
$9 = -5(0)^2 + C$	$s(t) = 9$ و $t = 0$
$9 = C$	بسّط.

دالة الموقع للبيضة هي $s(t) = -5t^2 + 9$.

b. أوجد المدة التي ستستغرقها البيضة للاصطدام بالأرض.

أوجد قيمة t عندما تكون $s(t) = 0$.

$s(t) = -5t^2 + 9$	دالة موقع البيضة
$0 = -5t^2 + 9$	$s(t) = 0$
$-9 = -5t^2$	بطرح 30 من كل طرف.
$1.8 = t^2$	بقسمة كل طرف على -16.
$1.341 = t$	بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكل طرف.

ستصطدم البيضة بالأرض في غضون 1.34 s تقريبًا.

تمرين موجّه

3. سقوط جسم يقف عامل صيانة بشكل آمن على منصة في صالة للألعاب الرياضية لإصلاح نظام إضاءة يوجد على ارتفاع 36 m من الأرض. وذلك عندما سقطت محفظته من جيبه. يمكن تحديد السرعة اللحظية للمحفظة كالآتي $v(t) = -10t$، حيث t معطاة بالثواني والسرعة المتجهة مقيسة بالأمتار لكل ثانية.

a. أوجد دالة الموقع $s(t)$ للمحفظة التي سقطت.

b. أوجد المدة التي ستستغرقها المحفظة للاصطدام بالأرض.

الربط بالحياة اليومية

في مسابقات إسقاط البيض، يحاول المشاركون حماية البيض من السقوط من ارتفاع طابقين. قد يستند تسجيل النقاط على وزن أداة الحماية وعدد الأجزاء المتضمنة في الأداة. وما إذا كانت الأداة تحقق الهدف وبالطبع ما إذا كان البيض ينكسر أم لا.

المصدر: Salem-Winston Journal

2 النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

لاحظ أن الرمز المستخدم للتكاملات غير المحدودة تبدو متشابهة للغاية مع الترميز المستخدم في الدرس 5-11 مع التكاملات المحدودة. الفرق الوحيد بينهما هو غياب الحدود العليا والدنيا في التكاملات غير المحدودة. في الحقيقة، يعد إيجاد المشتقة العكسية للدالة وسيلة مختصرة لحساب التكامل المحدود وذلك عن طريق إيجاد قيمة مجموع ريمان. وهذه العلاقة بين التكاملات المحدودة والمشتقات العكسية مهمة للغاية بحيث يطلق عليها **النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل**.

المفهوم الأساسي النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

إذا كانت الدالة f متصلة في الفترة $[a, b]$ و$F(x)$ هي أي مشتقة عكسية للدالة $f(x)$. فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

يشار عادة إلى الفارق $F(b) - F(a)$ بالرمز $F(x)\Big|_a^b$.

McGraw-Hill Education رؤسة لصالح والتأليف © محفوظة حقوق الطبع

إحدى النتائج الثانوية للنظرية الأساسية للتفاضل والتكامل هي أنها تكوّن روابط بين التكاملات والمشتقات. فالتكامل هو عملية حساب المشتقات العكسية، بينما الاشتقاق هو عملية حساب المشتقات. وبالتالي، فإن الاشتقاق والتكامل عمليتان عكسيتان. ويمكننا استخدام النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل لإيجاد قيمة التكاملات المحدودة دون استخدام النهايات.

الربط بتاريخ الرياضيات

ماريا غايتانا أنيزي (1718–1799)
هي لغوية وعالمة رياضيات وفيلسوفة إيطالية. ألفت كتاب Analytical Institutions، وهو أول كتاب بنافش حساب التفاضل والتكامل. واشتهرت أيضًا بوضعها معادلة لمنحنى سُمّي "منحنى أنيزي".

مثال 4 المساحة تحت المنحنى

استخدم النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى كل دالة والمحور x في الفترة المعطاة.

a. $y = 4x^3$ في الفترة $[1, 3]$، أو $\int_1^3 4x^3\,dx$.

أولاً، أوجد المشتقة العكسية.

$$\int 4x^3\,dx = \frac{4x^{3+1}}{3+1} + C \qquad \text{المضاعف الثابت للقوة}$$

$$= x^4 + C \qquad \text{بسّط.}$$

الآن، أوجد قيمة المشتقة العكسية عند الحد الأعلى والحد الأدنى، وأوجد الفارق بينهما.

$$\int_1^3 4x^3\,dx = x^4 + C\Big|_1^3 \qquad \text{النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل}$$

$$= (3^4 + C) - (1^4 + C) \qquad b = 3 \text{ و } a = 1$$

$$= 81 - 1 \text{ أو } 80 \qquad \text{بسّط.}$$

تبلغ المساحة تحت المنحنى في الفترة $[1, 3]$ 80 وحدة مربعة.

b. $y = -x^2 + 4x + 6$ في الفترة $[0, 4]$، أو $\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6)\,dx$.

أولاً، أوجد المشتقة العكسية.

$$\int (-x^2 + 4x + 6)\,dx$$

$$= -\frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{4x^{1+1}}{1+1} + \frac{6x^{0+1}}{0+1} + C \qquad \text{قاعدة المشتق العكسي}$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C \qquad \text{بسّط.}$$

الآن ، أوجد قيمة المشتقة العكسية عند الحد الأعلى والحد الأدنى، وأوجد الفارق بينهما.

$$\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6)\,dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C\Big|_0^4 \qquad \text{النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل}$$

$$= \left(-\frac{(4)^3}{3} + 2(4)^2 + 6(4) + C\right) - \left(-\frac{(0)^3}{3} + 2(0)^2 + 6(0) + C\right) \qquad \begin{matrix} b = 4 \text{ و} \\ a = 0 \end{matrix}$$

$$= 34.67 - 0 \text{ أو } 34.67 \qquad \text{بسّط.}$$

تبلغ المساحة تحت المنحنى في الفترة $[0, 4]$ 34.67 وحدة مربعة.

تمرين موجّه

أوجد قيمة كل تكامل محدود مما يلي.

4A. $\int_2^5 3x^2\,dx$

4B. $\int_1^2 (16x^3 - 6x^2)\,dx$

لاحظ أنه عند إيجاد قيمة المشتقات العكسية عند الحدود العليا والدنيا وإيجاد الفارق بينهما، فإنه لا تتوفر لدينا قيمة دقيقة لـ C. ومع ذلك، يكون الفارق بين الثوابت 0 بغض النظر عن قيمة الحد الثابت وذلك نظرًا لوجوده في كل مشتقة عكسية. وبالتالي، عند إيجاد قيمة التكاملات المحدودة باستخدام النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل، يمكنك تجاهل الحد الثابت عند إعادة كتابة المشتقة العكسية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

قبل إيجاد قيمة التكامل، حدد ما إذا كان غير محدود أم محدودًا.

مثال 5 التكاملات المحدودة والتكاملات غير المحدودة

أوجد قيمة كل تكامل مما يلي.

a. $\int (9x - x^3)\,dx$

هذا التكامل غير محدود. لذا، استخدم قواعد المشتقة العكسية لإيجاد قيمته.

$$\int (9x - x^3)\,dx = \frac{9x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{3+1}}{3+1} + C \qquad \text{المضاعف الثابت للقوة}$$

$$= \frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4} + C \qquad \text{بسّط.}$$

b. $\int_2^3 (9x - x^3)\,dx$

هذا التكامل محدود. لذا، أوجد قيمة التكامل باستخدام الحد الأعلى والحد الأدنى المتوفرين.

$$\int_2^3 (9x - x^3)\,dx = \left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_2^3 \qquad \text{النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل}$$

$$= \left(\frac{9}{2}(3)^2 - \frac{3^4}{4}\right) - \left[\frac{9}{2}(2)^2 - \frac{2^4}{4}\right] \qquad b = 3 \text{ و } a = 2$$

$$= 20.25 - 14 \text{ أو } 6.25 \qquad \text{بسّط.}$$

تبلغ المساحة تحت المنحنى في الفترة [2, 3] 6.25 وحدة مربعة.

انتبه!

التكاملات بالرغم من إمكانية استبعاد الحد الثابت C عند إيجاد قيمة التكاملات المحدودة، إلا أنه يتعين تضمينه عند إيجاد قيمة التكاملات غير المحدودة لأنه جزء من المشتقة العكسية.

تمرين موجّه

5A. $\int (6x^2 + 8x - 3)\,dx$

5B. $\int_1^3 (-x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 30x - 4)\,dx$

لاحظ أن التكاملات غير المحدودة ينتج عنها المشتق العكسي للمعادلة؛ في حين أن التكاملات المحدودة لا ينتج عنها المشتق العكسي فحسب، بل تتطلب إيجاد قيمة المشتق العكسي أيضًا عند الحدّين الأعلى والأدنى المعطيين. وبالتالي، ينتج عن التكامل غير المحدود دالة المشتق العكسي وذلك لإيجاد المساحة تحت المنحنى عند أي مجموعة من الحدود. ويصبح التكامل محدودًا عندما تتوفر مجموعة من الحدود ويصبح إيجاد قيمة المشتق العكسي ممكنًا.

مثال 6 التكاملات المحدودة

يتحدد الشغل المطلوب بالجول لتمديد نابض معين لمسافة 0.5 m إضافي عن طوله الطبيعي بالآتي $\int_0^{0.5} 360x\,dx$. فما مقدار الشغل المطلوب؟

أوجد قيمة التكامل المحدود عند الحدّين الأعلى والأدنى المعطيين.

$$\int_0^{0.5} 360x\,dx = 180x^2\Big|_0^{0.5} \qquad \text{المضاعف الثابت للقوة والنظرية الأساسية للتفاضل والتكامل}$$

$$= 180(0.5)^2 - 180(0)^2 \qquad \text{افترض أن } b = 0.5 \text{ و } a = 0 \text{ ثم اطرح.}$$

$$= 45 - 0 \text{ أو } 45 \qquad \text{بسّط.}$$

الشغل المطلوب يساوي 45 جول.

تمرين موجّه

أوجد الشغل المطلوب لتمديد نابض إذا كان محددًا بالتكاملات الآتية.

6A. $\int_0^{0.7} 476x\,dx$

6B. $\int_0^{1.4} 512x\,dx$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

أوجد جميع المشتقات العكسية لكل دالة. (المثالان 1 و 2)

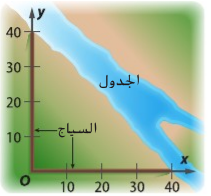
1. $f(x) = x^5$
2. $h(b) = -5b - 3$
3. $f(z) = z^3$
4. $n(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{3}{4}$
5. $q(r) = \frac{3}{4}r^{\frac{2}{5}} + \frac{5}{8}r^{\frac{1}{3}} + r^{\frac{1}{2}}$
6. $w(u) = \frac{2}{3}u^5 + \frac{1}{8}u^3 - \frac{2}{5}u$
7. $g(a) = 8a^3 + 5a^2 - 9a + 3$
8. $u(d) = \frac{12}{d^5} + \frac{5}{d^3} - 6d^2 + 3.5$
9. $m(t) = 16t^3 - 12t^2 + 20t - 11$
10. $p(h) = 72h^8 + 24h^5 - 12h^2 + 14$

11. **الهاتف المحمول** ارجع إلى بداية الدرس. افترض أن هاتفًا استغرق ثانيتين بالضبط في السقوط من المنطاد إلى الأرض. (المثال 3)
   a. أوجد قيمة $s(t) = \int -32t\,dt$.
   b. أوجد قيمة C في دالة الموقع $s(t)$ بالتعويض عن t بثانيتين وعن $s(t)$ بصفر.
   c. كم يبعد الهاتف عن الأرض بعد 1.5 ثانية من سقوطه؟

أوجد قيمة كل تكامل. (المثالان 4 و 5)

12. $\int (6m + 12m^3)\,dm$
13. $\int (20n^3 - 9n^2 - 18n + 4)\,dn$
14. $\int_1^4 2x^3\,dx$
15. $\int_2^5 (a^2 - a + 6)\,da$
16. $\int_1^2 (4g + 6g^2)\,dg$
17. $\int_2^{10} \frac{2}{5}p^{\frac{1}{5}} + \frac{5}{4}p^{\frac{2}{7}} + \frac{1}{4}\,dp$
18. $\int_1^3 \frac{1}{2}h^2 + \frac{2}{3}h^3 - \frac{1}{5}h^4\,dh$
19. $\int_0^2 (-v^4 + 2v^3 + 2v^2 + 6)\,dv$
20. $\int (3.4t^4 - 1.2t^3 + 2.3t - 5.7)\,dt$
21. $\int (14.2w^{6.1} - 20.1w^{5.7} + 13.2w^{2.3} + 3)\,dw$

22. **مسّاح أراضٍ** قطعة أرض لها سياجان متعامدان وجدول كحدود لها كما هو موضح.



افترض أنه يمكن تمثيل حافة الجدول التي تحد قطعة الأرض بالدالة $f(x) = -0.00005x^3 + 0.004x^2 - 1.04x + 40$، حيث السياجان هما المحوران x و y، و x معطاة بالكيلومترات. أوجد قيمة $\int_0^{40} f(x)\,dx$ لإيجاد مساحة الأرض. (المثال 6)

23. **حشرات** يمكن تحديد السرعة المتجهة لقفزة برغوث كالآتي $v(t) = -10t + 11$، حيث t الزمن معطى بالثواني والسرعة المتجهة معطاة بالأمتار لكل ثانية. (المثال 6)
   a. أوجد دالة الموقع $s(t)$ لقفز البرغوث. وافترض أنه عندما تكون $t = 0$، يكون $s(t) = 0$.
   b. بعد أن يقفز البرغوث، كم سيستغرق من الوقت قبل أن ينزل على الأرض؟

24. **معلم وطني** يرغب فنّان خداع بصري في إخفاء قوس جيت واي من سانت لويس. ولمحاولة تنفيذ الخدعة، عليه أن يغطي القوس بغطاء كبير. ولكن قبل صنع هذا الغطاء، يرغب الفنان في معرفة المساحة التقريبية تحت القوس . إحدى المعادلات التي يمكن استخدامها لتمثيل شكل القوس هي $y = -\frac{x^2}{47.25} + 1.3x$، حيث x معطاة بالأمتار.
أوجد المساحة تحت القوس. (المثال 6)

25. **مضمار الركض** يحتاج عدّاء إلى اتخاذ قرار إما بدء سباق 100 m بدفعة أولية من السرعة يتم تمثيلها بالآتي $v_1(t) = 3.25t - 0.2t^2$، أو الاحتفاظ بطاقته ليزيد من سرعته فيما بعد قرب نهاية السباق. ويتم تمثيل ذلك بالآتي $v_2(t) = 1.2t + 0.03t^2$، حيث تقاس السرعة المتجهة بالأمتار لكل ثانية بعد زمن t ثوانٍ.
   a. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل دالتي السرعة المتجهة على الشاشة نفسها عندما يكون $0 \le t \le 12$.
   b. أوجد دالة الموقع $s(t)$ لكل من $v_1(t)$ و $v_2(t)$.
   c. كم الوقت الذي يستغرقه العدّاء لإنهاء سباق 100 m باستخدام كل إستراتيجية؟

أوجد قيمة كل تكامل مما يلي.

26. $\int_{-3}^{1} 3\,dx$
27. $\int_{-1}^{2} (-x^2 + 10)\,dx$
28. $\int_{-6}^{-3} (-x^2 - 9x - 10)\,dx$
29. $\int_{-3}^{-1} (x^3 + 8x^2 + 21x + 20)\,dx$
30. $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{x^5}{2} + \frac{5x^4}{4}\right)dx$
31. $\int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^3 - 4x + 8)\,dx$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

32. منجنيق يتم قذف ثمار اليقطين بمجانق في بطولة العالم لقذف اليقطين في ديلاوير. تكون السرعة المتجهة لثمرة يقطين تم قذفها بمنجنيق هي $v(t) = -10t + 36$ m في الثانية بعد t ثوانٍ. وبعد 3 s يبلغ ارتفاع ثمرة اليقطين 68 m.

a. أوجد أقصى ارتفاع لثمرة اليقطين.

c. أوجد السرعة المتجهة لليقطين عندما يصطدم بالأرض.

أوجد قيمة كل تكامل مما يلي.

33. $\int_x^2 (3t^2 + 8t)\,dt$

34. $\int_5^x (10t^4 - 12t^2 + 5)\,dt$

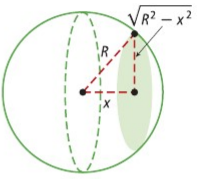
35. $\int_3^{2x} (4t^3 + 10t + 2)\,dt$

36. $\int_{-x}^6 (-9t^2 + 4t)\,dt$

37. $\int_x^{x^2} (16t^3 - 15t^2 + 7)\,dt$

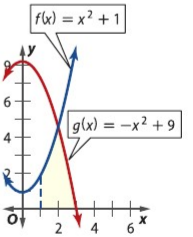
38. $\int_{2x}^{x+3} (3t^2 + 6t + 1)\,dt$

39. كرة يمكن إيجاد حجم كرة نصف قطرها R عن طريق تقسيم الكرة رأسيًا إلى مقاطع عرضية دائرية ثم دمج المساحات.



يبلغ نصف قطر كل مقطع عرضي $\sqrt{R^2 - x^2}$. إذًا، مساحة المقطع العرضي تساوي $\pi\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2$. أوجد قيمة $\int_{-R}^{R} (\pi R^2 - \pi x^2)dx$ لإيجاد حجم الكرة.

40. المساحة احسب المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)$ والدالة $g(x)$ والمحور x في الفترة $1 \le x \le 3$.



يقدم التكامل $\int_0^{n+0.5} x^k\,dx$ تقديرًا معقولاً لمجموع المتسلسلة $\sum_{i=1}^{n} i^k$. استخدم التكامل لتقدير كل مجموع ثم أوجد المجموع الفعلي.

41. $\sum_{i=1}^{20} i^3$

42. $\sum_{i=1}^{100} i^2$

43. $\sum_{i=1}^{25} i^4$

44. $\sum_{i=1}^{30} i^5$

45. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تستكشف العلاقة بين *المساحة الكلية* و*المساحة الحاملة لعلامة* لمنطقة محصورة بين منحنى والمحور x.

a. هندسيًا مثّل بيانيًا الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$. وظلل المنطقة المحصورة بين الدالة $f(x)$ والمحور x عندما يكون $0 \le x \le 4$.

b. تحليليًا أوجد قيمة $\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$ و $\int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$.

c. لفظيًا ضع تخمينًا على المساحة الموجودة فوق المحور x وتحته.

d. تحليليًا احسب *المساحة الحاملة للعلامة* بإيجاد قيمة $\int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$. ثم احسب *المساحة الكلية* بإيجاد قيمة $\left|\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx\right| + \left|\int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx\right|$.

e. لفظيًا ضع تخمينًا بشأن الفرق بين *المساحة الحاملة لعلامة* و*المساحة الكلية*.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

46. تحدٍ أوجد قيمة $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$، حيث r هو الحد الثابت. (*تلميح*: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ والمحور x.)

التبرير حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة دائمًا، أم أحيانًا، أم لا تصح أبدًا. اشرح إجابتك.

47. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$

48. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$

49. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{|a|}^{|b|} f(x)\,dx$

50. برهان أثبت أنه للثابتين n و m

$$\int_a^b (n + m)\,dx = \int_a^b n\,dx + \int_a^b m\,dx.$$

51. التبرير صف قيم $f(x)$. و $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$. و $\int_a^b f(x)\,dx$، حيث يقع منحنى الدالة $f(x)$ تحت المحور x عندما تكون $a \le x \le b$.

52. الكتابة في الرياضيات اشرح سبب إمكانية تجاهل الحد الثابت C في المشتق العكسي عند إيجاد قيمة تكامل محدود.

53. الكتابة في الرياضيات اكتب ملخصًا يمكن استخدامه لوصف الخطوات المتضمنة في عملية إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = 6x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 2]$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة شاملة

استخدم النهايات لتقريب المساحة المحصورة بين منحنى كل دالة والمحور x والمُعطاة بواسطة التكامل المحدود.

54. $\int_{-2}^{2} 14x^2\,dx$

55. $\int_{0}^{6} (x+2)\,dx$

استخدم قاعدة ناتج القسمة لإيجاد مشتقة كل دالة مما يلي.

56. $j(k) = \dfrac{k^8 - 7k}{2k^4 + 11k^3}$

57. $g(n) = \dfrac{2n^3 + 4n}{n^2 + 1}$

طراز حقيبة اليد	متوسط السعر (AED)
A	135
B	145
C	152

58 **الموضة** موضح بالجدول متوسط أسعار حقائب اليد لثلاثة مصممين على موقع للبيع بالمزاد العلني على الإنترنت.

a. إذا اختبرت عينة عشوائية تضم 35 حقيبة يد من الموديل A، فأوجد احتمال أن يكون متوسط السعر أكثر من 138 AED. إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي 9 AED.

a. إذا اختبرت عينة عشوائية تضم 40 حقيبة يد من الموديل C. فأوجد احتمال أن يكون متوسط السعر بين 150 AED و 155 AED. إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي 12 AED.

59. البيسبول يتم توزيع متوسط عمر لاعب في بطولة بيسبول رئيسية عادة بمتوسط 28 وانحراف معياري يبلغ 4 أعوام.

a. ما النسبة المئوية تقريبًا للاعبين في بطولة البيسبول الرئيسية الذين تقل أعمارهم عن 24؟

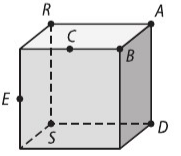
b. إذا كان هناك فريق مكون من 35 لاعبًا. فكم تقريبًا عدد اللاعبين الذين تتراوح أعمارهم بين 24 و 32 ؟

60. أوجد زوجين من الإحداثيات القطبية للنقطة ذات الإحداثيين المتعامدين (3, 8)، إذا كان $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

61. SAT/ACT في الشكل، النقطتان C و E هما نقطتا المنتصف لحافتي المكعب. سيتم رسم مثلث يكون فيه النقطتان R و S رأسيّ زاويتين فيه. فأي من النقاط التالية يجب أن تكون الرأس الثالث للمثلث إذا كان سيكون له أكبر محيط ممكن؟

A A
B B
C C
D D
E E



62. يتحدد مقدار الشغل المطلوب بوحدة الجول لضخ كل المياه الموجودة خارج حمام سباحة أبعاده 10 m في 5 m في 2 m بالتعبير $\int_{0}^{2} 490{,}000x\,dx$. إذا وجدت قيمة هذا التكامل،فما مقدار الشغل المطلوب؟

F 980,000 J
G 985,000 J
H 990,000 J
J 995,000 J

63. إجابة حرة جسيم يتحرك على طول خط مستقيم بحيث يتحدد موقعه في أي زمن $t \ge 0$ بالدالة $s(t) = t^2 - 3t + 10$ حيث s مقيسة بالأمتار وt مقيس بالثواني.

a. أوجد إزاحة الجسيم خلال أول 4 s. أي، ما المسافة التي يبعدها الجسيم عن موقع بدئه الأصلي بعد 4 s؟

b. أوجد متوسط السرعة المتجهة للجسيم خلال أول 4 s.

c. اكتب معادلة للسرعة اللحظية للجسيم عند أي زمن t.

d. أوجد السرعة اللحظية للجسيم عندما يكون $t = 1$ s و $t = 4$ s.

e. عند أي قيم t تصل $s(t)$ إلى أدنى قيمة؟

f. ما الذي تمثله قيمة t التي وجدتها في الجزء d بخصوص حركة الجسيم؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ملخص الوحدة

المفاهيم الأساسية

تقدير النهايات بيانيًا (الدرس 1-11)

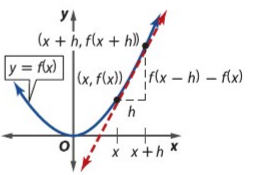
- توجد نهاية للدالة $f(x)$ عندما يقترب x من c فقط إذا كان هناك نهايتان أحاديتي الطرف ومتساويتين.
- لا توجد نهاية للدالة $f(x)$ عندما يقترب x من c إذا كانت الدالة $f(x)$ تقترب إلى قيمة مختلفة من يسار c عن يمين c، أو كانت تتزايد أو تتناقص دون حد من يسار و/أو يمين c، أو تتذبذب للخلف والأمام بين قيمتين.

تقدير النهايات جبريًا (الدرس 2-11)

- يمكن إيجاد نهايات الدوال النسبية وكثيرات الحدود غالبًا باستخدام التعويض المباشر.
- إذا وجدت قيمة نهاية وتوصلت إلى النموذج المبهم $\frac{0}{0}$، فبسّط التعبير جبريًا بتحليل عوامله وقسمة العامل المشترك أو إنطاق البسط أو المقام ثم قسمة أي عوامل مشتركة.

المماسات والسرعة المتجهة (الدرس 3-11)

- معدل التغير اللحظي للتمثيل البياني للدالة $f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل m المماس الذي يمثله التعبير $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.



المشتقات (الدرس 4-11)

- مشتقة الدالة $f(x) = x^n$ هي $f'(x)$ ويمثلها التعبير $f'(x) = nx^{n-1}$، حيث n عدد حقيقي.

المساحة تحت المنحنى والتكامل (الدرس 5-11)

- مساحة منطقة واقعة تحت المنحنى لدالة ما هي $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$، حيث a و b هما الحدان الأدنى والأعلى، على التوالي، و $\Delta x = \frac{b-a}{n}$، و $x_i = a + i\Delta x$.

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل (الدرس 6-11)

- يتحدد المشتق العكسي للدالة $f(x) = x^n$ هو $F(x)$ بالتعبير $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$، حيث C حد ثابت.
- إذا كانت $F(x)$ هي المشتق العكسي للدالة المتصلة $f(x)$، فإن $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

المفردات الأساسية

عكس المشتقة (المشتقة العكسية) antiderivative
تكامل محدود definite integral
مشتق derivative
difference quotient
معادلة تفاضلية differential equation
مشغل الفرق differential operator
اشتقاق differentiation
تعويض مباشر direct substitution
تكامل غير محدود indefinite integral
صيغة غير مُعينة indeterminate form
معدل التغير اللحظي instantaneous rate of change
سرعة لحظية instantaneous velocity
تكامل integration
حد سفلي lower limit
نهاية أحادية الطرف one-sided limit
تجزئة منتظمة regular partition
مجموع ريمان يميني right Riemann sum
المماس tangent line
نهاية ثنائية الطرف two-sided limit
حد علوي upper limit

مراجعة المفردات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة مما يلي.

1. ميل المنحنى غير الخطي عند نقطة محددة هو _____ ويمكن تمثيله بميل المماس على المنحنى عند هذه النقطة.
2. يُطلق على عملية إيجاد قيمة التكامل اسم _____.
3. يمكن إيجاد نهايات الدوال النسبية والدوال كثيرة الحدود باستخدام _____، طالما كان مقام الدالة النسبية الذي وُجدت قيمته عند نقطة c ليس 0.
4. الدالة $F(x)$ هي _____ للدالة $f(x)$.
5. بما أنه من غير الممكن تحديد نهاية الدالة مع وجود 0 في المقام، فمن المعتاد وصف الكسر $\frac{0}{0}$ الناتج بأن له _____.
6. لإيجاد نهايات الدوال النسبية عند اللانهاية، اقسم البسط والمقام على _____ قوة أُسية لـ x توجد في الدالة.
7. يُطلق على عملية إيجاد المشتقة اسم _____.
8. إذا سبق الدالة _____ $\frac{d}{dx}$، فعليك إذًا إيجاد مشتقة الدالة.
9. تسمى السرعة أو السرعة المتجهة التي يتم الوصول إليها عند نقطة محددة من الزمن بإسم _____.
10. يتم تحديد التكامل غير المحدود للدالة $f(x)$ عن طريق $\int f(x)\,dx =$ _____.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

11-1 تقدير النهايات بيانيًا

قدّر كل نهاية باستخدام تمثيل بياني. وادعم تخمينك باستخدام جدول القيم.

11. $\lim_{x \to 3} (2x - 7)$

12. $\lim_{x \to 1} (0.5x^4 + 3x^2 - 5)$

قدّر كل نهاية أحادية الطرف أو ثنائية الطرف، إن وجدت.

13. $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

14. $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 + x + 20}{x - 4}$

قدّر كل نهاية، إن وجدت.

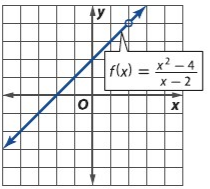
15. $\lim_{x \to 4} \frac{9}{x^2 - 8x + 16}$

16. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 7x - 10}{x - 2}$

مثال 1

قدّر $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ باستخدام تمثيل بياني. وادعم تخمينك باستخدام جدول قيم.

التحليل بيانيًا يشير التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ إلى أنه مع اقتراب x من العدد 2، تقترب قيمة الدالة المتوافقة من العدد 4. ولذلك، يمكننا تقدير أن $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.



الدعم عدديًا اصنع جدولاً بالقيم واختر قيم x التي تقترب من العدد 2 من أي جانب. ✔

x تقترب من 2 ←					→ x تقترب من 2		
x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.9	3.99	3.999		4.001	4.01	4.1

11-2 إيجاد قيمة النهايات جبريًا

استخدم خواص النهايات لإيجاد قيمة كل من النهايات التالية.

17. $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 + 2x + 10}{x}$

18. $\lim_{x \to -1} (5x^2 - 2x + 12)$

استخدم التعويض المباشر، إن أمكن، لإيجاد قيمة كل نهاية. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب.

19. $\lim_{x \to 25} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x} - 5}$

20. $\lim_{x \to 2} (-3x^3 - 2x^2 + 15)$

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

21. $\lim_{x \to 2} \frac{x + 2}{x^2 - 2x - 8}$

22. $\lim_{x \to \infty} (2 - 4x^3 + x^2)$

مثال 2

استخدم التعويض المباشر، إن أمكن، لإيجاد قيمة كل نهاية. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب.

a. $\lim_{x \to 2} (2x^3 - x^2 + 4x + 1)$

هذه نهاية دالة كثيرة الحدود. ولذلك، يمكن استخدام التعويض المباشر لإيجاد النهاية.

$$\lim_{x \to 2} (2x^3 - x^2 + 4x + 1) = 2(2)^3 - 2^2 + 4(2) + 1$$
$$= 16 - 4 + 8 + 1 \text{ أو } 21$$

b. $\lim_{x \to -4} \frac{2x - 7}{2 - x^2}$

هذه نهاية دالة نسبية، مقامها غير صفري عندما يكون $x = -4$. ولذلك، يمكن استخدام التعويض المباشر لإيجاد النهاية.

$$\lim_{x \to -4} \frac{2x - 7}{2 - x^2} = \frac{2(-4) - 7}{2 - (-4)^2} = \frac{-8 - 7}{2 - 16} \text{ أو } \frac{15}{14}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

11-3 المماسات والسرعة المتجهة

أوجد ميل المماس لمنحنى كل دالة عند النقاط المبينة.

23. $y = 6 - x$. و $(-1, 7)$ و $(3, 3)$

24. $y = x^2 + 2$; $(0, 2)$ و $(-1, 3)$

تتحدد المسافة d التي يرتفع بها جسم ما عن سطح الأرض بعد t ثانية من إسقاطه من خلال $d(t)$. أوجد السرعة اللحظية للجسم عند القيمة المذكورة لـ t.

25. $y = -x^2 + 3x$

26. $y = x^3 + 4x$

أوجد السرعة اللحظية إذا كان موقع جسم ما بالأمتار يحدده $h(t)$ لقيم محددة من الزمن t معطاة بالثواني.

27. $h(t) = 5t + 6t^2$; $t = 0.5$

28. $h(t) = -5t^2 - 12t + 130$; $t = 3.5$

أوجد معادلة للسرعة اللحظية $v(t)$ إذا كان مسار جسم يحدده $h(t)$ في أي نقطة زمنية t.

29. $h(t) = 12t^2 - 5$

30. $h(t) = 8 - 2t^2 + 3t$

مثال 3

أوجد ميل المماس للتمثيل البياني $y = x^2$ عند النقطة $(2, 4)$.

$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ قانون معدل التغير اللحظي

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ $x = 2$

$= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$ $f(2+h) = (2+h)^2$ و $f(2) = 2^2$

$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h}$ بالضرب.

$= \lim_{h \to 0} \frac{h(4+h)}{h}$ بسّط وحلّل إلى العوامل.

$= \lim_{h \to 0} (4 + h)$ بالقسمة على h.

$= 4 + 0$ أو 4 خاصية الجمع للنهايات ونهاية الدوال الثابتة والمحايدة

لذا، ميل المماس للتمثيل البياني لـ $y = x^2$ عند النقطة $(2, 4)$ هو 4.

11-4 المشتقات

أوجد قيمة النهايات لإيجاد مشتقة كل دالة. ثم أوجد قيمة مشتقة كل دالة مع القيم المعطاة لكل متغير.

31. $g(t) = -t^2 + 5t + 11$; $t = -4$ و 1

32. $m(j) = 10j - 3$; $j = 5$ و -3

أوجد مشتق كل دالة مما يلي.

33. $p(v) = -9v + 14$

34. $z(n) = 4n^2 + 9n$

35. $t(x) = -3\sqrt[5]{x^6} + 5$

36. $g(h) = 4h^{\frac{3}{4}} - 8h^{\frac{1}{2}}$

استخدم قاعدة ناتج القسمة لإيجاد مشتقة كل دالة مما يلي.

37. $f(m) = \frac{5 - 3m}{5 + 2m}$

38. $\frac{m(q) = 2q^4 - q^2 + 9}{q^2 - 12}$

مثال 4

أوجد مشتقة الدالة $h(x) = \frac{x^2 - 5}{x^3 + 2}$.

افترض أن $f(x) = x^2 - 5$. و $g(x) = x^3 + 2$. إذًا، $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. أوجد مشتقة الدالة $f(x)$ والدالة $g(x)$

$f(x) = x^2 - 5$ المعادلة الأصلية

$f'(x) = 2x$ قواعد القوة والثابت

$g(x) = x^3 + 2$ المعادلة الأصلية

$g'(x) = 3x^2$ قواعد القوة والثابت

استخدم $f(x)$ و $f'(x)$ و $g(x)$ و $g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ قاعدة ناتج القسمة

$= \frac{2x(x^3 + 2) - (x^2 - 5)3x^2}{(x^3 + 2)^2}$ عوّض

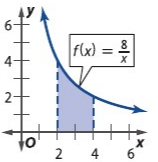
$= \frac{-x^4 + 15x^2 + 4x}{(x^3 + 2)^2}$ بسّط.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

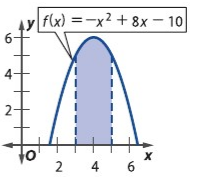
11-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل

قرّب مساحة المنطقة المظللة لكل دالة باستخدام النقاط الطرفية الصحيحة و 5 مستطيلات.

39.



40.



استخدم النهايات لإيجاد المساحة بالوحدات المربعة بين منحنى كل دالة والمحور x المُعطاة بالتكامل المحدود.

41. $\int_1^2 2x^2\,dx$

42. $\int_0^3 (2x^3 - 1)\,dx$

43. $\int_0^2 (x^2 + x)\,dx$

44. $\int_1^4 (3x^2 - x)\,dx$

مثال 5

استخدم النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = 2x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 2]$، أو $\int_0^2 2x^2\,dx$.

أولاً، أوجد Δx و x_i.

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ صيغة Δx

$\Delta x = \frac{2-0}{n}$ أو $\frac{2}{n}$ $b = 2$ و $a = 0$

$x_i = 0 + i\frac{2}{n}$ أو $\frac{2i}{n}$ $a = 0$ و $\Delta x = \frac{2}{n}$

$$\int_0^2 2x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right) \qquad x_i = \frac{2i}{n} \text{ و } \Delta x = \frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{n^2}\right) \qquad \text{بسّط.}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left(\frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8(2n^2+3n+1)}{3n^2}\right) \qquad \text{بالضرب والقسمة على } n.$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{8}{3} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right] \qquad \text{التحليل إلى العوامل وقسمة كل حد على } n^2.$$

$$= \frac{16}{3} \text{ أو } 5\frac{1}{3} \qquad \text{نظرية النهايات والتبسيط.}$$

11-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

أوجد جميع المشتقات العكسية لكل دالة.

45. $g(n) = 5n - 2$

46. $r(q) = -3q^2 + 9q - 2$

47. $m(t) = 6t^3 - 12t^2 + 2t - 11$

48. $p(h) = 7h^6 + 4h^5 - 12h^3 - 4$

أوجد قيمة كل تكامل مما يلي.

49. $\int 8x^2\,dx$

50. $\int (2x^2 - 4)\,dx$

51. $\int_3^5 (2x^2 - 4 + 5x^3 + 3x^4)\,dx$

52. $\int_1^4 (-x^2 + 4x - 2x^3 + 5x^5)\,dx$

مثال 6

أوجد جميع المشتقات العكسية لكل دالة.

a. $f(x) = \frac{4}{x^5}$

$f(x) = 4x^{-5}$ إعادة كتابة التعبير بأُس سلبي.

$F(x) = \frac{4x^{-5+1}}{-5+1} + C$ المضاعف الثابت للقوة

$= -1x^{-4} + C$ أو $-\frac{1}{x^4} + C$ بسّط.

b. $f(x) = x^2 - 7$

$f(x) = x^2 - 7$ المعادلة الأصلية

$= x^2 - 7x^0$ إعادة كتابة الدالة بحيث يحمل كل حد قوة لـ x.

$F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{7x^{0+1}}{0+1} + C$ قاعدة المشتقة العكسية

$= \frac{1}{3}x^3 - 7x + C$ بسّط.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التطبيقات وحل المسائل

53. طوابع افترض أن قيمة v لأحد الطوابع بالدرهم بعد t أعوام يمكن تمثيلها بالتعبير $v(t) = \frac{450}{5 + 25(0.4)^t}$. (الدرس 1-11)

a. أكمل الجدول التالي.

الأعوام	0	1	2	3
القيمة				

b. مثّل الدالة بيانيًا عندما تكون $0 \le t \le 10$.

c. استخدم التمثيل البياني لتقدير $\lim_{t \to \infty} v(t)$. إن وجدت.

d. اشرح العلاقة بين نهاية الدالة وقيمة الطابع.

54. حيوانات يمكن تقدير تعداد الحيوانات P بالمئات في منطقة لحفظ الحياة بعد t عام بالتعبير $P(t) = \frac{120}{1 + 24e^{-0.25t}}$. (الدرس 1-11)

a. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدالة بيانيًا عندما يكون $0 \le t \le 50$.

b. قدّر $\lim_{t \to \infty} \frac{120}{1 + 24e^{-0.25t}}$، إن وجدت.

c. فسر نتائجك بالجزء **b**.

55. هواة الجمع تزداد قيمة مجموعة العملات المعدنية الخاصة بفارس كل عام على مدار خمسة أعوام ماضية. وبمتابعة هذا النهج، يمكن تمثيل قيمة v العملات المعدنية بعد t أعوام بالتعبير $v(t) = \frac{800t - 21}{4t + 19}$. (الدرس 2-12)

a. أوجد $\lim_{t \to \infty} v(t)$.

b. ما الذي تشير إليه ضمنيًا نهاية الدالة عن قيمة مجموعة العملات المعدنية الخاصة بفارس؟ هل تتفق؟

c. بعد 10 أعوام، عرض تاجر عملة على فارس مبلغ AED 300 مقابل مجموعته. فهل ينبغي على فارس بيعها؟ اشرح إجابتك.

56. الصواريخ تم إطلاق صاروخ بسرعة متجهة لأعلى معدلها 50 m في الثانية. افترض أن ارتفاع الصاروخ d بالأمتار بعد t ثواني من إطلاقه يمثله التعبير $d(t) = -5t^2 + 50t + 2.7$. (الدرس 3-11)

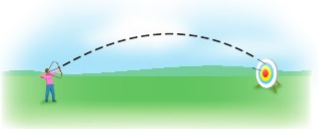
a. أوجد معادلة السرعة اللحظية $v(t)$ للصاروخ.

b. ما سرعة تحرك الصاروخ بعد 1.5 s من إطلاقه؟

c. ما قيمة t التي يصل عندها الصاروخ إلى أقصى ارتفاع له؟

d. ما أقصى ارتفاع سيصل إليه الصاروخ؟

57. رمي السهام يطلق أحد رماة السهام سهمًا بسرعة متجهة معدلها 11 m في الثانية نحو الهدف. افترض أن ارتفاع s السهم بالأمتار بعد t ثانية من إطلاقه يتحدد عن طريق $s(t) = -5t^2 + 11t + 0.5$. (الدرس 3-11)



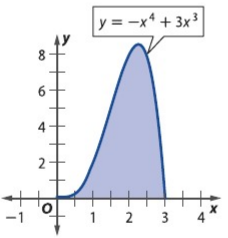
a. أوجد معادلة السرعة اللحظية $v(t)$ للسهم.

b. ما سرعة انطلاق السهم بعد 0.5 s من رميه؟

c. ما قيمة t التي يصل عندها السهم إلى أقصى ارتفاع له؟

d. ما أقصى ارتفاع للسهم؟

58. التصميم يصمم مالك منتجع تزلج شعارًا جديدًا لوضعه على الزي الرسمي لموظفيه. اتخذ التصميم شكل المنطقة الموضحة في الشكل. إذا كان ستتم خياطة هذا الجزء من التصميم على الزي الرسمي، فما مقدار المواد اللازمة إذا كان x بالسنتيمترات؟ (الدرس 6-11)



59. الضفادع يستطيع الضفدع القفز بسرعة متجهة ممثلة بالتعبير $v(t) = -10t + 8$، حيث t مقدمة بالثواني والسرعة المتجهة مقدمة بالأمتار لكل ثانية. (الدرس 6-11)

a. أوجد دالة الموقع $s(t)$ لقفز الضفدع. وافترض أنه بالنسبة إلى $t = 0$، يكون $s(t) = 0$.

b. ما المدة التي سيبقاها الضفدع في الهواء عندما يقفز؟

60. الطيور يقف طائر كاردينال على شجرة ترتفع عن الأرض 6 m ويسقط بعض الطعام. يمكن تحديد السرعة اللحظية لطعامه بالتعبير $v(t) = -10t$، حيث t الزمن بالثواني والسرعة المتجهة مقيسة بالأمتار لكل ثانية. (الدرس 6-11)

a. أوجد دالة الموقع $s(t)$ للطعام الذي سقط.

b. أوجد المدة التي يستغرقها الطعام للاصطدام بالأرض.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار

قدّر كل نهاية أحادية الطرف أو ثنائية الطرف، إن وجدت.

1. $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x+4} - 8$
2. $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$

قدّر كل نهاية، إن وجدت.

3. $\lim_{x \to 7} \frac{6}{x - 7}$
4. $\lim_{x \to \infty} x^3 + 5x^2 - 2x + 21$

5. **أجهزة إلكترونية** يمكن تمثيل متوسط التكلفة C بالدراهم لعدد x من المساعدات الرقمية الشخصية بالتعبير $C(x) = \frac{100x + 7105}{x}$.
   a. حدد نهاية الدالة بينما تقترب x من اللانهاية.
   b. فسّر نتائج الجزء a.

استخدم التعويض المباشر، إن أمكن، لإيجاد قيمة كل نهاية. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب.

6. $\lim_{x \to 5} \frac{x^2}{\sqrt{x-4} - 2}$
7. $\lim_{x \to 9} (2x^3 - 12x + 3)$

8. **المدرسة** يمكن تمثيل عدد الطلاب S المتغيبين بسبب الإنفلونزا بعد t أيام في إحدى المدارس بالتعبير $S(t) = \frac{2000t^2 + 4}{1 + 50t^2}$.
   a. كم عدد الطلاب الذين أصيبوا بالمرض في البداية؟
   b. كم عدد الطلاب الذين سيصابون بالبرد في النهاية؟

أوجد قيمة كل نهاية مما يلي.

9. $\lim_{x \to \infty} (x^2 - 7x + 2)$
10. $\lim_{x \to \infty} (2x^3 - 8x^2 - 5)$
11. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - x - 1}{-x^4 + 7x^3 + 4}$
12. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{25 + x} - 4}{x}$

13. **اختيار من متعدد** أوجد قيمة $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3}}{x}$.

A $-\frac{1}{9}$
C $\frac{1}{9}$
B 0
D لا يوجد نهاية

أوجد ميل المماس منحنى كل دالة عند النقاط المبينة.

14. $y = x^2 + 2x - 8$; $(-5, 7)$ و $(-2, -8)$
15. $y = \frac{4}{x^3} + 2$; $(-1, -2)$ و $\left(2, \frac{5}{2}\right)$
16. $y = (2x + 1)^2$; $(-3, 25)$ و $(0, 1)$

أوجد معادلة السرعة اللحظية $v(t)$ إذا كان مسار جسم ما محددًا بالتعبير $h(t)$ عند أي لحظة زمنية t.

17. $h(t) = 9t + 3t^2$
18. $h(t) = 10t^2 - 7t^3$
19. $h(t) = 3t^3 - 2 + 4t$

أوجد مشتقة كل دالة مما يلي.

20. $f(x) = -3x - 7$
21. $b(c) = 4c^{\frac{1}{2}} - 8c^{\frac{2}{3}} + 5c^{\frac{4}{5}}$
22. $w(y) = 3y^{\frac{4}{3}} + 6y^{\frac{1}{2}}$
23. $g(x) = (x^2 - 4)(2x - 5)$
24. $h(t) = \frac{t^3 + 4t^2 + t}{t^2}$

25. **كرة القدم** يتم تمثيل التكلفة الحدّية c لإنتاج عدد x كرات قدم بالتعبير $c(x) = 15 - 0.005x$.
   a. حدد الدالة التي تمثل دالة التكلفة الفعلية.
   b. حدد تكلفة الإنتاج اليومي المتزايد من 1500 كرة قدم إلى 2000 كرة.

استخدم النهايات لإيجاد المساحة بين منحنى كل دالة والمحور x المُعطاة بالتكامل المحدود.

26. $\int_1^4 (x^2 - 3x + 4)\, dx$
27. $\int_3^8 10x^4\, dx$
28. $\int_2^5 (7 - 2x + 4x^2)\, dx$

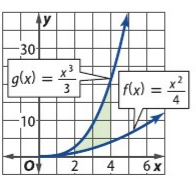
أوجد جميع المشتقات العكسية لكل دالة.

29. $d(a) = 4a^3 + 9a^2 - 2a + 8$
30. $w(z) = \frac{3}{4}z^4 + \frac{1}{6}z^2 - \frac{2}{5}$

أوجد قيمة كل تكامل مما يلي.

31. $\int (5x^3 - 6x^2 + 4x - 3)\, dx$
32. $\int_1^4 (x^2 + 4x - 2)\, dx$

33. **المساحة** احسب المساحة المحصورة بالدالة $f(x)$ و $g(x)$ في الفترة $2 \le x \le 4$.



F $17\frac{5}{12}$
H $15\frac{1}{3}$
G $17\frac{1}{3}$
J 16

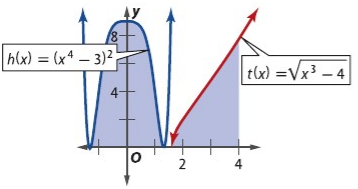
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم
قاعدة السلسلة

الهدف

- اشتقاق الدوال المركبة باستخدام قاعدة السلسلة.

أدى تعلم اشتقاق التعابير كثيرة الحدود باستخدام قاعدة القوة إلى إيجاد قيم التكاملات المحددة. وقد سمح هذا بحساب المساحة الموجودة بين منحنى ما والمحور x. على الرغم من ذلك، كان عملنا المتعلق بالتكامل محدودًا على الدوال الأساسية كثيرة الحدود. ولذا، كيف يمكننا حساب المساحة الموجودة بين المحور x والمنحنيات المحددة بالدوال المركبة مثل $h(x) = (x^4 - 3)^2$ أو $t(x) = \sqrt{x^3 - 4}$؟



مثلما هو في الدرس 4-11، يجب عليك تعلم اشتقاق هذه الدوال قبل أن تتمكن من دمجها. ابدأ بـ $h(x)$. يمكنك استخدام قاعدة حاصل الضرب للتوصل إلى المشتق.

$h(x) = (x^4 - 3)^2$	المعادلة الأصلية
$= (x^4 - 3)(x^4 - 3)$	إعادة كتابة القوة.
$h'(x) = 4x^3(x^4 - 3) + (x^4 - 3)4x^3$	قاعدة حاصل الضرب
$= 2(x^4 - 3)4x^3$	بسّط.

على الرغم من إمكانية تبسيط اشتقاق $h(x)$ بدرجة أكبر، اتركه كما هو موضح لاشتقاق قاعدة للدوال المركبة.

النشاط 1 مشتقة الدالة المركبة

أوجد مشتقة الدالة $k(x) = (x^4 - 3)^3$.

الخطوة 1 أعد كتابة $k(x)$ لتضمين العامل $(x^4 - 3)^2$.

$$k(x) = (x^4 - 3)(x^4 - 3)^2$$

الخطوة 2 افترض أن $m(x) = (x^4 - 3)$ و$n(x) = (x^4 - 3)^2$. واحسب مشتق كل دالة.

$m'(x) = 4x^3$ قاعدة القوة $\quad n'(x) = 2(x^4 - 3)4x^3$ المشتقة أعلاه

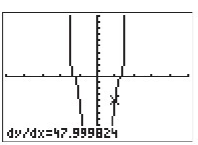
الخطوة 3 استخدم قاعدة حاصل الضرب لإيجاد قيمة $k'(x)$.

$k'(x) = m'(x)n(x) + m(x)n'(x)$	
$= 4x^3(x^4 - 3)^2 + (x^4 - 3)2(x^4 - 3)4x^3$	عوّض
$= (x^4 - 3)^2 4x^3 + 2(x^4 - 3)^2 4x^3$	بسّط.
$= 3(x^4 - 3)^2 4x^3$	بالجمع.

إذًا، $k'(x) = 3(x^4 - 3)^2 4x^3$.

التحقق يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد قيمة مشتقة الدالة عند نقطة ما. مثّل بيانيًا $k(x)$. ومن قائمة CALC حدد 6:dy/dx. بعد أن تعود الشاشة إلى نافذة التمثيل البياني. اضغط 1 ثم ENTER. قيمة $k'(1) = 48$. الآن تحقق من صحة الإجابة الموجودة في الخطوة 3 بالتعويض عن $x = 1$ في الدالة $k'(x)$.

$k'(1) = 3(1^4 - 3)^2 4(1)^3$ أو 48 ✓



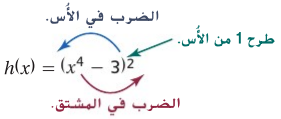
[−5, 5] scl: 1 by [−20, 20] scl: 2

تحليل النتائج

1. خمّن سبب احتواء الدالتين $h'(x)$ و$k'(x)$ على العامل $4x^3$.
2. خمّن سبب احتواء الدالة $h'(x)$ على العدد 2 كعامل، واحتواء الدالة $k'(x)$ على العدد 3 كعامل.
3. من دون إعادة كتابة الدالة $p(x)$ على هيئة حاصل ضرب، أوجد مشتقة الدالة $p(x) = (x^4 - 3)^4$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

لاحظ أنه بالنسبة لمشتقات $h(x)$ و $k(x)$، تم ضرب كل تعبير في أسّه، وطُرح 1 من الأس. وبعد ذلك ضُرِب كل تعبير في مشتق التعبير الموجود داخل القوسين.



$$h'(x) = 2(x^4 - 3)^{2-1}4x^3$$
$$= 2(x^4 - 3)4x^3$$

$$k'(x) = 3(x^4 - 3)^{3-1}4x^3$$
$$= 3(x^4 - 3)^2 4x^3$$

تذكر أنه بإمكاننا تحليل دالة. على سبيل المثال، الدالة $h(x) = (x^4 - 3)^2$ يمكن كتابتها على هيئة $h(x) = f[g(x)]$. حيث $f(x) = x^2$ و $g(x) = (x^4 - 3)$. ويمكن استخدام ذلك لإنشاء قاعدة السلسلة.

المفهوم الأساسي الدالة

الشرح مشتقة الدالة المركّبة $f[g(x)]$ هي مشتقة الدالة الخارجية f المُقيَّمة في الدالة الداخلية g مضروبة في مشتقة الدالة الداخلية g.

الرموز إذا كانت دالة g قابلة للاشتقاق عند x ودالة f قابلة للاشتقاق عند $g(x)$، فإن

$$\frac{d}{dx} f[g(x)] = f'[g(x)]g'(x).$$

النشاط 2 مشتقة الدالة المركبة

أوجد مشتقة الدالة $t(x) = \sqrt{x^3 - 4}$.

الخطوة 1 حلل $t(x)$ إلى الدالتين f و g.

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad g(x) = x^3 - 4$$

الخطوة 2 أوجد قيمة $f'(x)$ و $g'(x)$.

المعادلة الأصلية: $f(x) = \sqrt{x}$ أو $x^{\frac{1}{2}}$ — $g(x) = x^3 - 4$

قاعدة القوة: $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ — $g'(x) = 3x^2$

الخطوة 3 عوّض في قاعدة السلسلة.

قاعدة السلسلة: $t'(x) = f'[g(x)]\, g'(x)$

$= \frac{1}{2}(x^3 - 4)^{-\frac{1}{2}} 3x^2$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ و $g(x) = x^3 - 4$ و $g'(x) = 3x^2$

$= \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 4}}$ بسّط.

$= \frac{3x^2\sqrt{x^3 - 4}}{2(x^3 - 4)}$ بسّط

انتبه!
التعويض لتسهيل قاعدة السلسلة، يمكن تمثيل الدالة $g(x)$ بالرمز u. على سبيل المثال، إذا كانت $y = f[g(x)]$. فإن $y = f(u)$. فتصبح مشتقة $y' = f'(u) \cdot u'$ y.

تحليل النتائج

4. هل يمكن إيجاد قيمة $t'(x)$ باستخدام الطريقة نفسها التي استخدمت من قبل لإيجاد قيمة $h'(x)$؟ اشرح.

التمثيل بالنماذج والتطبيق

أوجد مشتق كل دالة.

5. $s(t) = (t^2 - 1)^4$

6. $b(x) = (1 - 5x)^6$

7. $c(r) = (3r - 2r^2)^3$

8. $h(x) = (x^3 + x - 1)^3$

9. $f(x) = \sqrt{100 + 8x}$

10. $g(m) = \sqrt{m^2 + 4}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

كتيب الطالب

الرموز والصيغ والمفاهيم الأساسية

الرموز EM-1

القياسات EM-2

العمليات والعلاقات الحسابية EM-3

الصيغ والمفاهيم الجبرية EM-3

الصيغ والمفاهيم الهندسية EM-5

الدوال والمتطابقات المثلثية EM-6

الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال EM-7

النهايات والتفاضل والتكامل EM-7

الصيغ والمفاهيم الاحصائية EM-8

جداول الإحصاء

الجدول A: التوزيع الطبيعي المعياري EM-9

الجدول B: توزيع ستيودنت (توزيع t) EM-11

الجدول C: توزيع كاي تربيع (توزيع χ^2) EM-12

EM. End Matter/Glossary, from Precalculus © 2014 & from Bluman Elementary Statistics;9e Appendix © 2015 McGraw-Hill Education

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الرموز

الجبر

$\neq$	لا يساوي
$\approx$	تقريبًا يساوي
$\sim$	يشابه
$>, \geq$	أكبر من، أكبر من أو يساوي
$<, \leq$	أصغر من، أصغر من أو يساوي
$-a$	معكوس a أو المعكوس الجمعي لـ a
$\lvert a \rvert$	القيمة المطلقة لـ a
$\sqrt{a}$	الجذر التربيعي الأساسي لـ a
$a : b$	نسبة a إلى b
(x, y)	زوج مرتّب
(x, y, z)	مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر (ثلاثي مُرتّب)
i	الوحدة التخيلية
$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$	الجذر النوني لـ b
$\mathbb{Q}$	الأعداد النسبية
$\mathbb{I}$	الأعداد غير النسبية
$\mathbb{Z}$	الأعداد الصحيحة
$\mathbb{W}$	الأعداد الكاملة
$\mathbb{N}$	الأعداد الطبيعية
∞	ما لا نهاية
$-\infty$	سالب ما لا نهاية
$[\,]$	تتضمن الأطراف
$(\,)$	لا تتضمن الأطراف
$\log_b x$	لوغاريتم x للأساس b
$\log x$	اللوغاريتم العادي لـ x
$\ln x$	اللوغاريتم الطبيعي لـ x
ω	أوميجا، السرعة الزاويّة
α	ألفا، قياس الزاوية
β	بيتا، قياس الزاوية
γ	جاما، قياس الزاوية
θ	ثيتا، قياس الزاوية
λ	لامدا، طول الموجة
ϕ	فاي، قياس الزاوية
$\mathbf{a}$	متجه a
$\lvert \mathbf{a} \rvert$	طول المتجه a

المجموعات والمنطق

$\in$	ينتمي إلى
$\subset$	مجموعة جزئية من
$\cap$	تقاطع
$\cup$	اتحاد
$\varnothing$	المجموعة الخالية
$\sim p$	نفي p، ليس p
$p \wedge q$	ربط p و q
$p \vee q$	فصل p أو q
$p \longrightarrow q$	العبارة الشرطية، إذا كان p فإن q
$p \longleftrightarrow q$	العبارة ثنائية الشرط، p إذا وفقط إذا q

الهندسة

$\angle$	زاوية
$\triangle$	مثلث
$^\circ$	درجة
π	باي pi
$\measuredangle$	درجات
$m\angle A$	قياس $\angle A$
$\overleftrightarrow{AB}$	مستقيم يحتوي على النقطتين A و B
$\overline{AB}$	مستقيم نقطتاه الطرفيتان A و B
$\overrightarrow{AB}$	الشعاع من النقطة A الى النقطة B
AB	قياس $\overline{AB}$، المسافة بين A و B
$\parallel$	يوازي
$\nparallel$	لا يوازي
$\perp$	متعامد على
$\triangle$	مثلث
$\parallelogram$	متوازي أضلاع
n-gon	مضلع عدد أضلاعه n
$\vec{a}$	متجه a
$\overrightarrow{AB}$	المتجه من A إلى B
$\lvert \overrightarrow{AB} \rvert$	مقدار متجه من A إلى B
A'	صورة الصورة الأصلية A
$\rightarrow$	موضوع على
$\odot A$	دائرة مركزها A
$\overset{\frown}{AB}$	قوس أصغر نقطتاه الطرفيتان A و B
$\overset{\frown}{ABC}$	قوس أكبر نقطتاه الطرفيتان A و C
$m\overset{\frown}{AB}$	قياس درجة القوس AB

حساب المثلثات

$\sin x$	جيب الزاوية x
$\cos x$	جيب تمام الزاوية x
$\tan x$	ظل الزاوية x
$\sin^{-1} x$	Arcsin x
$\cos^{-1} x$	Arccos x
$\tan^{-1} x$	Arctan x

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الرموز

الدوال	
$f(x)$	f لـ x، قيمة f لـ x
$f(x) = \begin{cases} \end{cases}$	دالة متعددة التعريف
$f(x) = \lvert x \rvert$	دالة القيمة المطلقة
$f(x) = [\![x]\!]$	دالة أكبر عدد صحيح ليس أكبر من x
$f(x, y)$	f لـ x و y، دالة متغيراها x وy
$[f \circ g](x)$	f لـ g لـ x، تركيب الدالتين f وg
$f^{-1}(x)$	معكوس $f(x)$

النهايات والتفاضل والتكامل	
$\lim_{x \to c}$	النهاية عندما تقترب x من c
$m_{\sec}$	ميل القاطع
$f'(x)$	مشتقة الدالة $f(x)$
Δ	دلتا، أو مقدار التغيير
$\int$	تكامل غير محدود
$\int_a^b$	تكامل محدود
$F(x)$	مشتقة عكسية للدالة $f(x)$

الاحصاء والاحتمالات	
$P(a)$	احتمال a
$P(n, r)$ أو ${}_nP_r$	تباديل n من العناصر مأخوذ منها r عنصر في كل مرة
$C(n, r)$ أو ${}_nC_r$	توافيق n من العناصر مأخوذ منها r عنصر في كل مرة
$P(A)$	احتمال A
$P(A\|B)$	احتمال A إذا علمت أن B حدث بالفعل
$n!$	مضروب العدد n (حيث n عدد طبيعي)
$\sum$	سيجما، رمز المجموع
μ	متوسط مجتمع إحصائي
σ	الانحراف المعياري لمجتمع إحصائي
σ^2	تباين المجتمع الإحصائي
s	الانحراف المعياري لعينة
s^2	تباين العينة
$\sum_{n=1}^{k}$	مجموع من n = 1 إلى k
$\bar{x}$	متوسط x ، متوسط العينة
H_0	فرضية العدم
H_a	الفرضية البديلة

القياسات

متري	عُرفي
الطول	
1 كيلومتر (km) = 1000 متر (m)	1 ميل (mi) = 1760 ياردة (yd)
1 متر = 100 سنتيمتر (cm)	1 ميل = 5280 قدمًا (ft)
1 سنتيمتر = 10 ملليمتر (mm)	1 ياردة = 3 أقدام
	1 قدم = 12 بوصة (in)
	1 ياردة = 36 بوصة
الحجم والسعة	
1 لتر (L) = 1000 ملليلتر (mL)	1 جالون (gal) = 4 أرباع (qt)
1 كيلولتر (kL) = 1000 لتر	1 جالون = 128 أونصة سائلة (fl oz)
	1 كوارت = 2 بينت (pt)
	1 بينت = 2 كوب (c)
	1 كوب = 8 أونصات سائلة
الوزن والكتلة	
1 كيلوجرام (kg) = 1000 جرام (g)	1 طن (T) = 2000 رطل (lb)
1 جرام = 1000 ملليجرام (mg)	1 رطل = 16 أونصة (oz)
1 طن متري (t) = 1000 كيلوجرام	

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

العمليات والعلاقات الحسابية

المحايد	لأي عدد a، يكون $a + 0 = 0 + a = a$ و $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
التعويض (=)	إذا كان $a = b$، يمكن التعويض عن a باستخدام b.
الانعكاس (=)	$a = a$
التماثل (=)	إذا كان $a = b$، فإن $b = a$.
التعدي (=)	إذا كان $a = b$ و $b = c$، فإن $a = c$.
التبديل	لأي عددين a و b، $a + b = b + a$ و $a \cdot b = b \cdot a$.
التجميع	لأي أعداد a و b و c، $(a + b) + c = a + (b + c)$ و $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
التوزيع	لأي أعداد a و b و c، $a(b + c) = ab + ac$ و $a)b - c) = ab - ac$.
المعكوس الجمعي	لأي عدد a، يوجد عدد واحد فقط $-a$ بحيث $a + (-a) = 0$.
المعكوس الضربي	لأي عدد $\frac{a}{b}$، حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$، يوجد عدد واحد فقط $\frac{b}{a}$ بحيث $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.
الضرب (0)	لأي عدد a، يكون $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
الجمع (=)	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a = b$، فإن $a + c = b + c$.
الطرح (=)	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a = b$، فإن $a - c = b - c$.
الضرب والقسمة (=)	لأي أعداد a و b و c، حيث $c \neq 0$، إذا كان $a = b$، فإن $ac = bc$ و $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
الجمع (>)*	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a > b$، فإن $a + c > b + c$.
الطرح (>)*	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a > b$، فإن $a - c > b - c$.
الضرب والقسمة (>)*	لأي أعداد a و b و c، 1. إذا كان $a > b$ و $c > 0$، فإن $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. 2. إذا كان $a > b$ و $c < 0$، فإن $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
ناتج الضرب الصفري	لأي عددين حقيقيين a و b، إذا كان $ab = 0$، فإن $a = 0$ أو $b = 0$ أو a و b كلاهما 0.

* *تنطبق هذه الخواص كذلك على* $<$ و $\leq$ و $\geq$.

الصيغ والمفاهيم الجبرية

المصفوفات

الجمع	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$	**الضرب في كمية عددية**	$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$
الطرح	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$	**الضرب**	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$

كثيرات الحدود

القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$	**مربع فرق**	$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$ $= a^2 - 2ab + b^2$
مربع مجموع	$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ $= a^2 + 2ab + b^2$	**ناتج ضرب مجموع وفرق**	$(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b)$ $= a^2 - b^2$

اللوغاريتمات

خاصية الضرب	$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$	**خاصية الأس الثابت**	$\log_b m^p = p \log_b m$
خاصية القسمة	$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b, b \neq 0$	**تغيير الأساس**	$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الصيغ والمفاهيم الجبرية

الدوال الأسيّة واللوغاريتمية

المرابحة المركبة	$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$	النمو أو الاضمحلال الأسيّ	$N = N_0(1 + r)^t$
النمو المركب المستمر	$A = Pe^{rt}$	النمو أو الاضمحلال الأسيّ المستمر	$N = N_0e^{kt}$
خاصية الضرب	$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$	خاصية القوة	$\log_b x^p = p \log_b x$
خاصية القسمة	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$	خاصية تغيير الاساس	$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

المتتاليات والمتسلسلات

الحد النوني لمتتالية حسابية	$a_n = a_1 + (n - 1)d$	الحد النوني لمتتالية هندسية	$a_n = a_1r^{n-1}$
مجموع متسلسلة حسابية	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)$ أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$	مجموع متسلسلة هندسية	$S_n = \frac{a_1 - a_1r^n}{1 - r}$ أو $S_n = \frac{a_1 - a_nr}{1 - r}, r \neq 1$
مجموع متسلسلة هندسية لانهائية	$S = \frac{a_1}{1 - r}, \lvert r \rvert < 1$	صيغة أويلر	$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$
متسلسلة القوة	$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$	المتسلسلة الأسيّة	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

نظرية ذات الحدين

$$(a + b)^n = {}_nC_0\, a^nb^0 + {}_nC_1\, a^{n-1}b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_r\, a^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_n\, a^0b^n$$

متسلسلة القوة للجيب وجيب التمام

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

المتجهات

الجمع في المستوى	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$	الجمع في الفضاء	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$
الطرح في المستوى	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$	الطرح في الفضاء	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$
الضرب القياسي في المستوى	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$	الضرب القياسي في الفضاء	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$
الضرب النقطي في المستوى	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$	الضرب النقطي في الفضاء	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
الزاوية بين متجهين	$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert}$	مستط u على v	$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\lvert\mathbf{v}\rvert^2}\right)\mathbf{v}$
طول المتجه	$\lvert\mathbf{v}\rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	الضرب القياسي لثلاثة متجهات	$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

معادلة المستقيم في المستوى الإحداثي

صيغة الميل والمقطع	$y = mx + b$
صيغة النقطة والميل	$y - y_1 = m(x - x_1)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الصيغ والمفاهيم الجبرية

القطوع المخروطية

قطع مكافئ	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ أو $(y-k)^2 = 4p(x-h)$	دائرة	$x^2+y^2=r^2$ أو $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
قطع ناقص	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ أو $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$	قطع زائد	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ أو $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$
الدوران المحوري للقطوع المخروطيّة	$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$ و $y' = y\cos\theta - x\sin\theta$		

المعادلات الوسيطيّة

الموقع العمودي	$y = tv_0\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$	المسافة الأفقية	$x = tv_0\cos\theta$

الاعداد المُركبة

صيغة الضرب	$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$	صيغة القسمة	$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$
صيغة الجذور المختلفة	$r^{\frac{1}{p}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{p}+i\sin\frac{\theta+2n\pi}{p}\right)$	نظرية ديموافر	$z^n = [r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n$ أو $r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

الصيغ والمفاهيم الهندسية

الهندسة الإحداثية

الميل	$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, x_2\neq x_1$	المسافة على خط الأعداد	$d = \lvert a-b\rvert$
المسافة بين نقطتين في المستوى	$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	طول القوس	$\ell=\frac{x}{360}\cdot 2\pi r$
نقطة المنتصف في المستوى الاحداثي	$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$	نقطة المنتصف على خط الأعداد	$M=\frac{a+b}{2}$
نقطة المنتصف في الفضاء	$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$	نظرية فيثاغورس	$a^2+b^2=c^2$

المحيط

مربع	$P = 4s$	مستطيل	$P = 2\ell + 2w$	دائرة	$C = 2\pi r$ أو $C = \pi d$

مساحة السطح الجانبية

منشور	$L = Ph$	هرم	$L=\frac{1}{2}P\ell$
إسطوانة	$L = 2\pi rh$	مخروط	$L = \pi r\ell$

مساحة السطح الكلية

منشور	$S = Ph + 2B$	مخروط	$S = \pi r\ell + \pi r^2$	إسطوانة	$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$
هرم	$S=\frac{1}{2}P\ell + B$	كرة	$S = 4\pi r^2$	مكعب	$S = 6s^2$

الحجم

منشور	$V = Bh$	مخروط	$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$	إسطوانة	$V = \pi r^2h$
هرم	$V=\frac{1}{3}Bh$	كرة	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$	مكعب	$V = s^3$
متوازي مستطيلات	$V = \ell wh$				

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدوال المثلثية

النسب المثلثية	$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$ $\sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{1}{\cos\theta}$	$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$ $\csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{1}{\sin\theta}$	$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
قانون جيوب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
قانون الجيوب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	صيغة هيرون	$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
السرعة الخطية	$v = \frac{s}{t}$	السرعة الزاويّة	$\omega = \frac{\theta}{t}$

المتطابقات المثلثية

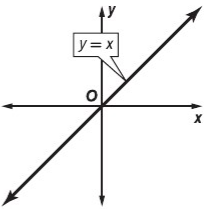
متطابقات المقلوب	$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$
متطابقات فيثاغورس	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$
متطابقات المتممات	$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\tan\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\cot\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\csc\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
متطابقات الفردي والزوجي	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\csc(-\theta) = -\csc\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\sec(-\theta) = \sec\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ $\cot(-\theta) = -\cot\theta$
متطابقات المجموع والفرق	$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$		$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$
متطابقات ضعف الزاوية	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$	$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$	$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$
متطابقات تخفيض الأس	$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$	$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$	$\tan^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$
متطابقات نصف الزاوية	$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$ $\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$	$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}$ $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$	$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$
متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق	$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$ $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$		$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$ $\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$
متطابقات تحويل المجموع أو الفرق إلى ضرب	$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$		$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

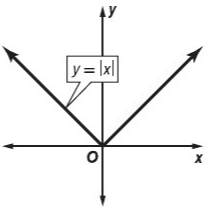
الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال

الدوال الأصلية

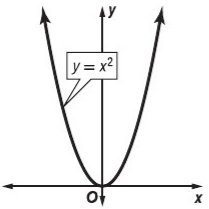
الدوال الخطية



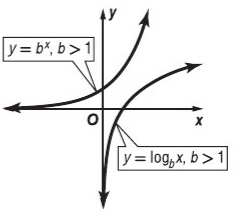
دوال القيمة المطلقة



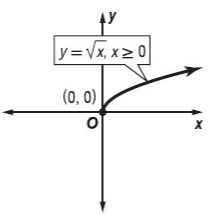
الدوال التربيعية



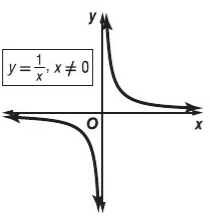
الدوال الأسيّة واللوغاريتمية



دوال الجذر التربيعي



الدوال العكسية والنسبية



العمليات الحسابية على الدوال

الجمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	**الضرب**	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
الطرح	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	**القسمة**	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$

النهايات والتفاضل والتكامل

النهايات

نهاية مجموع دالتين	$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$	**نهاية طرح دالتين**	$\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$
نهاية قسمة دالتين	$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$ إذا كان $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$.	**نهاية دالة مرفوعة لأس**	$\lim_{x\to c}[f(x)^n] = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$
السرعة	اللحظيّة $v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t}{h}$	المتوسطة $v_{\text{avg}} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$	**نهاية الجذر النوني لدالة** $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) > 0$. و n عدد زوجي

التفاضل

قاعدة القوة	إذا كان $f(x) = x^n$ فإن $f'(x) = nx^{n-1}$	**المجموع أو الفرق**	إذا كان $f(x) = g(x) \pm h(x)$ فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
قاعدة الضرب	$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	**قاعدة القسمة**	$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

التكامل

التكامل غير المحدود	$\int f(x)\,dx = F(x) + C$	**النظرية الاساسيّة في التفاضل والتكامل**	$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الصيغ والمفاهيم الاحصائية

قيمة z لمتوسط العينة	$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$	قيمة z	$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$
الحد الأقصى لقيمة التوقع	$E = z \cdot \sigma_{\bar{x}}$ or $z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	خاصية ذات الحدين	$P(X) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}\, p^x q^{n-x}$
فترة الثقة في توزيع t	$CI = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$	فترة الثقة، في توزيع طبيعي	$CI = \bar{x} \pm E$ or $\bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
معامل الارتباط لاختبار t	$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$. درجات الحرية: $n - 2$	معامل الارتباط	$r = \frac{1}{n-1}\sum\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y}\right)$

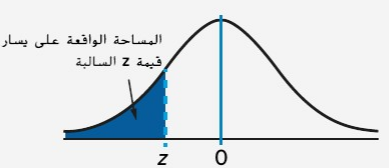
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الجدول A التوزيع الطبيعي المعياري

التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
−0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
−0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

لقيم z التي تقل عن 3.49− استخدم 0.0001



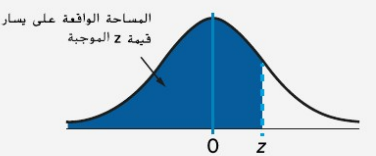
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الجدول A (تابع)

التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

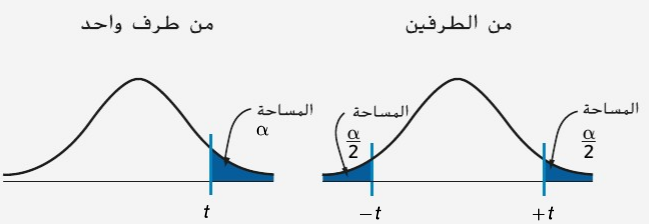
لقيم z التي تزيد عن 3.49 استخدم 0.9999



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الجدول B توزيع ستيودنت (توزيع t)

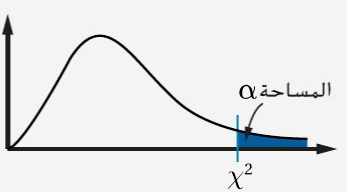
درجات الحرية	فترات الثقة	80%	90%	95%	98%	99%
	α ، من طرف واحد	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
	α ، من الطرفين	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1		3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2		1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3		1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4		1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5		1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6		1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7		1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8		1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9		1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10		1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11		1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12		1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13		1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14		1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15		1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16		1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17		1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18		1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19		1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20		1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21		1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22		1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23		1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24		1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25		1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26		1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27		1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28		1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29		1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30		1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
32		1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
34		1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
36		1.306	1.688	2.028	2.434	2.719
38		1.304	1.686	2.024	2.429	2.712
40		1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
45		1.301	1.679	2.014	2.412	2.690
50		1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
55		1.297	1.673	2.004	2.396	2.668
60		1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
65		1.295	1.669	1.997	2.385	2.654
70		1.294	1.667	1.994	2.381	2.648
75		1.293	1.665	1.992	2.377	2.643
80		1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
90		1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
100		1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
500		1.283	1.648	1.965	2.334	2.586
1000		1.282	1.646	1.962	2.330	2.581
$(z)\ \infty$		1.282	1.645	1.960	2.326	2.576



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الجدول C توزيع كاي تربيع (توزيع χ^2)

درجات الحرية	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	—	—	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.071	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.299
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.262	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.257	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

A

absolute value function A function that contains an absolute value of the independent variable, with parent function $f(x) = |x|$.

دالة القيمة المطلقة دالة تحتوي على قيمة مطلقة لمتغير مستقل. باستخدام الدالة الأصلية $f(x) = |x|$

absolute value of a complex number A complex number's distance from zero in the complex plane.

قيمة مطلقة لعدد مركب تمثل مسافة العدد المركب من الصفر في المستوى المركب.

algebraic function A function with values that are obtained by adding, subtracting, multiplying, or dividing constants and the independent variable or raising the independent variable to a rational power.

دالة جبرية دالة تحتوي على قيم ناتجة عن عملية جمع الثوابت أو المتغير المستقل أو طرحهما أو ضربهما أو قسمتهما أو رفع المتغير المستقل إلى أس نسبي.

alternative hypothesis One of two hypotheses that need to be stated to test a claim; states that there is a difference between the sample value and the population parameter. The alternative hypothesis contains a statement of inequality such as $>$, $\neq$, or $<$.

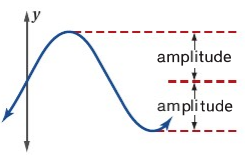
فرضية بديلة فرضية من اثنتين تفيد بضرورة إثبات صحة افتراض ما؛ وتنص على وجود فرق بين قيمة العينة ومعلمة المجتمع الإحصائي. تحتوي الفرضية البديلة على عبارة المساواة مثل أكبر من أو لا يساوي أو أقل من.

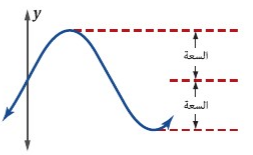
ambiguous case Given the measures of two sides and a nonincluded angle, either no triangle exists, exactly one triangle exists, or two triangles exist.

الحالة المبهمة بالنظر إلى قياسات اثنين من الأضلاع والزاوية غير المتضمنة. قد لا يوجد أي مثلث أو قد يوجد مثلث واحد أو قد يوجد مثلثان.

amplitude Half the distance between the maximum and minimum values of a sinusoidal function. For $y = a \sin (bx + c) + d$ and $y = a \cos (bx + c) + d$, amplitude $= |a|$.

السعة تمثل نصف المسافة الواصلة بين القيم القصوى والدنيا في دالة التموج الجيبي. بما أن $y = a \sin (bx + c) + d$ و $y = a \cos (bx + c) + d$. إذن فالسعة $= |a|$.





anchor step In mathematical induction, showing that something works for the first case, or that P_1 is true.

خطوة المرتكز في الاستقراء الرياضي. يظهر أن شيئًا ما يعمل على حل المسألة الأولى، أو أن P_1 صحيح.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

angle of depression The angle formed by a horizontal line and an observer's line of sight to an object below.

زاوية الانخفاض الزاوية المكونة بواسطة خط أفقي وخط الرؤية الخاص بالملاحظ للوصول إلى موقع أدناه.

angle of elevation The angle formed by a horizontal line and an observer's line of sight to an object above.

زاوية الارتفاع الزاوية المكونة بواسطة خط أفقي وخط الرؤية الخاص بالملاحظ للوصول إلى موقع أعلاه.

angular speed The rate at which the object rotates about a fixed point.

سرعة زاوية تمثل المعدل الذي يدور به العنصر حول نقطة ثابتة.

arccosine function The inverse cosine function, written as $y = \cos^{-1} x$ or $y = \arccos x$, that has a domain of [-1, 1] and a range of [0, π].

دالة قوس جيب تمام الزاوية تمثل دالة معكوس جيب التمام، تكتب في الصورة $y = \cos^{-1} x$ أو $y = \arccos x$. ولها مجال يساوي [-1، 1] ومدى يساوي [0، π].

arcsine function The inverse sine function, written as $y = \sin^{-1} x$ or $y = \arcsin x$, that has a domain of [-1, 1] and a range of $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

دالة قوس جيب الزاوية تمثل دالة معكوس الجيب، تكتب في الصورة $y = \sin^{-1} x$ أو $y = \arcsin x$. ولها مجال يساوي [-1، 1] ومدى يساوي $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

arctangent function The inverse tangent function, written as $y = \tan^{-1} x$ or $y = \arctan x$, that has a domain of (-∞, ∞) and a range of $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

دالة قوس ظل الزاوية تمثل دالة قوس ظل الزاوية، تكتب في الصورة $y = \tan^{-1} x$ أو $y = \arctan x$. ولها مجال يساوي (-∞، ∞) ومدى يساوي $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Argand Plane The complex plane.

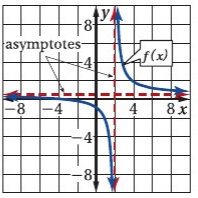
مستوى أرجاند يقصد به المستوى المركب.

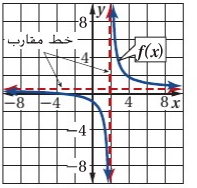
argument The angle θ of a complex number written in the form $r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

بُعد زاويّ يقصد به الزاوية θ المحددة لعدد مركب في الصورة $r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

asymptote A line or curve that a graph approaches.

خط تقارب خط أو منحنى يقترب منه الرسم البياني.





augmented matrix A matrix that contains the coefficients and constant terms of a system of linear equations, each written in standard form with the constant terms to the right of the equals sign.

مصفوفة موسعة مصفوفة تحتوي على معاملات الحدود في معادلات النظام الخطي، وتكتب كل منها في الصورة القياسية باستخدام معاملات الحدود الموجودة على الجانب الأيمن لاشارة المساواة .

average rate of change The slope of the line through any two points on the graph of a nonlinear function f.

متوسط معدل التغيير ميل الخط الذي يمر بالنقطتين على الرسم البياني لدالة غير خطية f.

B

bimodal distribution A graph of a distribution of data that has two modes.

توزيع ثنائي المنوال رسم بياني يمثل توزيع البيانات ذات المنوالين.

binomial coefficients The coefficients of the terms of an expanded binomial $(a + b)^n$.

معاملات ذات حدين تمثل معاملات فترات المعادلات الممتدة ذات الحدين $(a + b)^n$.

binomial distribution The distribution of the outcomes of a binomial experiment and their corresponding probabilities.

توزيع ذو حدين توزيع نواتج تجربة ذات حدين واحتمالاتها المطابقة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

binomial experiment A probability experiment in which there are a fixed number of independent trials, there are exactly two possible outcomes for each trial, and the probability of success is the same for each trial.

تجربة ذات حدين تجربة احتمال يوجد بها عدد ثابت من التجارب المستقلة، ويوجد اثنان من النواتج المحتملة لكل تجربة. واحتمال النجاح هو نفسه لكل تجربة.

binomial probability distribution function A discrete function of the random variable X, represented in the binomial probability formula.

دالة توزيع احتمالي ذي الحدين دالة منفصلة للمتغير العشوائي X، ممثلة بصيغة احتمال ذات حدين.

Binomial Theorem For any positive integer n, $(a + b)^n = {}_nC\,0\ a\ nb\,0 + {}_nC\,1\ a\ n - 1b\,1 + {}_nC\,2\ a\ n - 2\ b\ 2 + \ldots +$ ${}_nC\ r\ a\ n - rb\ r + \ldots + C\ n\ a\ 0b\ n$, where r = 0, 1, 2, ..., n.

نظرية ذات حدين بما أن أي عدد صحيح موجب يساوي n، إذن $(a + b)^n = {}_nC0\ a\ nb\,0 + {}_nC1\ a\ n - 1b1 + {}_nC2\ a\ n - 2\ b\ 2 + \ldots +$ ${}_nCr\ a\ n - rb\ r + \ldots + Cn\ a\ 0b\ n$، مكان $r = 0, 1, 2, \ldots,$ n.

bivariate data Data with two variables.

بيانات ذات متغيرين بيانات تحتوي على متغيرين.

C

cardioid The graph of a polar equation of the form r = a ± a cos θ or r = a ± a sin θ, where a is positive.

منحنى قلبي الشكل رسم بياني لمعادلة قطبية في الصورة r = a ± a cos θ أو r = a ± a sin θ، حيث يكون a عددًا موجبًا.

center of an ellipse The midpoint of the major and minor axes of an ellipse.

مركز القطع الناقص نقطة المنتصف في المحاور الكبرى والصغرى للقطع الناقص.

circular function A trigonometric function defined as a function of the real number system using the unit circle.

دالة دائرية دالة مثلثية تعرف بأنها دالة في نظام الأعداد الحقيقي باستخدام دائرة الوحدة.

class A data value or group of data values.

صف قيمة بيانات أو مجموعة من قيم البيانات.

class width The range of values for each class of data.

عرض الصف مجموعة من القيم المحددة لكل صف من البيانات.

clusters Subgroups of data.

تجمعات مجموعات جزئية من البيانات.

coefficient matrix A matrix that contains only the coefficients of a system of linear equations.

مصفوفة المعاملات مصفوفة تحتوي على معاملات نظام المعادلات الخطية فقط.

column matrix A matrix that has only one column.

مصفوفة العمود مصفوفة تحتوي على عمود واحد فقط.

combination An arrangement of objects in which order is not important.

تركيب ترتيب الأجسام بطريقة لا يكون الترتيب مهمًا فيها.

common logarithm A logarithm with base 10, usually written log x.

لوغاريتم عادي لوغاريتم يستخدم الأساس 10، ويكون اللوغاريتم المكتوب عادة في الصورة log x

complement The complement of an event A consists of all the outcomes in the sample space that are not included as outcomes of event A.

متمم يتكون متمم الحدث A من جميع النواتج في فضاء العينة غير الموجودة في نواتج الحدث A.

completing the square A process used to make a quadratic expression into a perfect square trinomial.

إكمال المربع عملية تُستخدم لجعل التعبير التربيعي مربع كامل ثلاثي الحدود.

complex conjugates Two complex numbers of the form a + bi and a - bi, where b ≠ 0.

مترافقتان مركبان عددان مركبان يأخذان الصورة a + bi و a - bi، حيث b ≠ 0.

complex plane A plane used to graph complex numbers. The real component of a complex number is graphed on the horizontal and the imaginary component is graphed on the vertical axis.

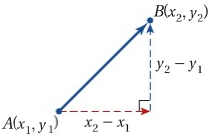
مستوى مركب مستوى يستخدم في رسم الأعداد المركبة بيانيًا. يرسم المركب الحقيقي لعدد مركب بيانيًا على المستوى الأفقي ويرسم المركب التخيلي على المحور الرأسي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

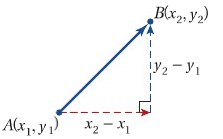
complex number Any number that can be written in the form a + bi, where a and b are real numbers and i is the imaginary unit.

عدد مركب أي عدد يمكن كتابته في الصورة $a + bi$. حيث a و b عددان حقيقيان ويمثل i الوحدة التخيلية.

component form A vector represented by its rectangular components. If the initial point of a vector is A(x 1, y 1) and the terminal point is at B(x 2, y 2), the component form is given by $\langle x\ 2 - x\ 1, y\ 2 - y\ 1 \rangle$.



صورة المركب متجه يُمثله مركباته قائمة الزاوية. بما أن نقطة بداية المتجه هي $A(x_1, y_1)$ والنقطة الطرفية عند $B(x_2, y_2)$. إذن يتم الوصول إلى صورة المركب باستخدام $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$.



components Two or more vectors with a sum that is a given vector.

مركبات متجهان أو أكثر مجموعهما عبارة عن المتجه المعين.

composition The combining of functions by using the result of one function to evaluate a second function. The composition of function f with function g is defined by $[f \circ g](x) = f[g(x)]$.

مجموعة مركبة مجموعة من الدوال تنتج باستخدام ناتج دالة واحدة لتقدير الدالة الثانية. تُحدد مجموعة الدوال المركبة f مع الدالة g باستخدام $[(f \circ g](x) = f[g(x)]$.

confidence interval A specific interval estimate of a parameter in an experiment that can be found when the maximum error of estimate is added to and subtracted from the sample mean.

فترة الثقة تقدير محدد للفترة في معلمة ما في تجربة يمكن إيجادها عند جمع أقصى خطأ للتقدير على المتوسط الحسابي للعينة وطرحه منه.

confidence level The probability that the interval estimate will include the actual population parameter.

مستوى الثقة احتمال يفيد بأن تقدير الفترة سيتضمن معلمة المجتمع الإحصائي الفعلية.

conjugate axis The segment that is perpendicular to the transverse axis of a hyperbola, passes through the center, and has a length of 2b units.

محور مرافق القطعة المستقيمة المتعامدة على المحور القاطع في القطع المكافئ، وتمر عبر المنتصف، ويصل طول ضلعها إلى 2b من الوحدات.

Conjugate Root Theorem When a polynomial equation in one variable has a zero of the form a + bi, where $b \neq 0$, then its complex conjugate, a - bi, is also a root.

نظرية الجذر المرافق عندما تتضمن معادلة كثيرة الحدود في متغير واحد صفرًا في الصورة $a + bi$. حيث $b \neq 0$. إذن يكون المرافق المركب لها. $a - bi$. جذرًا كذلك.

consistent A system of equations that has at least one solution.

متوافق نظام معادلات له حل واحد على الأقل.

constant Describes a function f or an interval of a function in which for any two points, a positive change in x results in a zero change in $f(x)$.

ثابت يصف الدالة f أو فترة في دالة يؤدي فيها التغيير الموجب في x لأي نقطتين إلى تغيير موجب في $f(x)$.

constant function A function of the form $f(x) = c$, where c is any real number.

دالة ثابتة دالة تأخذ الصورة $f(x) = c$. حيث يمثل c أي عدد حقيقي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

continuity correction factor A correction for continuity that must be used when approximating a binomial distribution.

معامل تصحيح الاستمرارية تصحيح للاستمرارية واجب الاستخدام عند تقريب التوزيع ذي الحدين.

continuous compound interest Interest that is reinvested continuously so that there is no waiting period between interest payments.

فائدة مركبة متصلة فائدة يعاد توظيفها باستمرار لكيلا يكون هناك أي فترة انتظار بين مدفوعات الفائدة.

continuous function A function that can be graphed with no breaks, holes, or gaps.

دالة متصلة دالة يمكن رسمها بيانيًا بدون فواصل أو فجوات أو فراغات.

continuous random variable A random variable that can take on an infinite number of possible values within a specified interval in a probability experiment.

متغير ثابت متصل متغير عشوائي يمكن أن يأخذ عددًا لانهائيًا من القيم المحتملة ضمن فترة محددة في تجربة الاحتمال.

correlation An area of inferential statistics that involves determining whether a relationship exists between two variables.

ارتباط جزء من الإحصاء الاستقرائي يتضمن تحديد العلاقة الموجودة بين متغيرين.

correlation coefficient A measure that determines the type and strength of the linear relationship between the variables in bivariate data.

معامل الارتباط قياس يحدد نوع العلاقة الخطية وقوتها بين المتغيرات في البيانات ذات المتغيرين.

cosecant In a right triangle with acute angle θ, the ratio comparing the length of the hypotenuse to the side opposite of θ. It is the reciprocal of the sine ratio, or $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$.

قاطع التمام في مثلث قائم الزاوية يحتوي على زاوية حادة θ، يمثل نسبة المقارنة بين طول الوتر إلى الضلع المقابل للزاوية θ. ويكون معكوسًا لنسبة جيب الزاوية، أو $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$.

cosine In a right triangle with acute angle θ, the ratio comparing the length of the side adjacent to θ and the hypotenuse.

جيب التمام في مثلث قائم الزاوية يحتوي على زاوية حادة θ، يمثل نسبة المقارنة طول الضلع المجاور للزاوية θ إلى الوتر.

cotangent In a right triangle with acute angle θ, the ratio comparing the length of the side adjacent to θ and the side opposite θ. It is the reciprocal of the tangent ratio, or $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$.

ظل التمام في مثلث قائم الزاوية يحتوي على زاوية حادة θ، يمثل نسبة المقارنة طول الضلع المجاور للزاوية θ إلى الضلع المقابل للزاوية θ. ويكون معكوسًا لنسبة ظل تمام الزاوية، أو $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$.

coterminal angles Angles in standard position that have terminal sides, but different measures.

زوايا متشاركة في ضلع الانتهاء زوايا في الوضع القياسي لها نفس ضلع الانتهاء، لكنها ذات قياسات مختلفة.

Cramer's Rule A method that uses determinants to solve square systems of linear equations.

قاعدة كرامر طريقة تستخدم المحددات لحل الأنظمة التربيعية للمعادلات الخطية.

critical values The z-values that correspond to a particular confidence level.

قيم حرجة تمثل القيم z التي تتطابق مع مستوى الثقة المعين.

cross product If $a = a_1i + a_2j + a_3k$ and $b = b_1i + b_2j + b_3k$, the cross product of a and b is the vector $a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)i - (a_1b_3 - a_3b_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$.

ضرب متجهي بما أن $a = a_1i + a_2j + a_3k$ و $b = b_1i + b_2j + b_3k$. إذن يمثل الضرب المتجهي لـ a و b المتجه $a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)i - (a_1b_3 - a_3b_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$.

cubic function A function of the form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, where $a \neq 0$, with parent function $f(x) = x^3$.

دالة تكعيبية دالة تأخذ الصورة $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ حيث $a \neq 0$، باستخدام الدالة الأصلية $f(x) = x^3$.

cumulative frequency The sum of a frequency and all frequencies of previous classes.

تكرار تراكمي مجموع التكرار وكل تكرارات الصفوف السابقة.

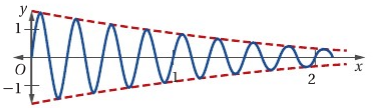
cumulative relative frequency The ratio of the cumulative frequency of the class to all the data

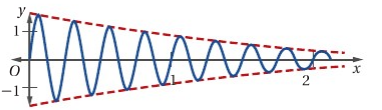
تكرار نسبي تراكمي نسبة التكرار التراكمي للصف إلى جميع البيانات

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

damped harmonic motion The motion of an object whose amplitude decreases with time due to friction.

حركة توافقية متضائلة حركة جسم ما تنخفض سعته بمرور الوقت بسبب الاحتكاك.





damped oscillation The reduction in amplitude of a sinusoidal wave of a damped trigonometric function.

تذبذب متضائل انخفاض في سعة الموجة الجيبية للدالة المثلثية المتضائلة.

damped trigonometric function The function formed when a sinusoidal function $y = \sin bx$ or $y = \cos bx$ is multiplied by another function $y = f(x)$. A function of the form $y = f(x) \sin bx$ or $y = f(x) \cos bx$.

دالة مثلثية متضائلة الدالة المكونة عند ضرب دالة التموج الجيبي $y = \sin bx$ or $y = \cos bx$ في دالة أخرى $y = f(x)$. دالة تأخذ الصورة $y = f(x) \sin bx$ or $y = f(x) \cos bx$.

damped wave A wave whose amplitude decreases, such as the graph of a damped trigonometric function.

موجة متضائلة موجة تنخفض سعتها، مثل الرسم البياني للدالة المثلثية المتضائلة.

damping factor In a damped trigonometric function of the form $y = f(x) \sin bx$ or $y = f(x) \cos bx$, $f(x)$ is the damping factor.

عامل التضاؤل في الدالة المثلثية المتضائلة التي تأخذ الصورة $y = f(x) \sin bx$ أو $y = f(x) \cos bx$. يمثل $f(x)$ عامل التضاؤل.

decreasing Describes a function f or an interval of a function in which for any two points, a positive change in x results in a negative change in $f(x)$.

تناقص يوضح الدالة f أو فترة في دالة ما يؤدي فيها تغيير موجب في x لأي نقطتين إلى تغيير سالب في $f(x)$.

degrees of freedom Represent the number of values that are free to vary after a sample statistic is determined, and are equal to $n - 1$ in a sample of n values.

درجات الحرية تُمثل عددًا من القيم المراد تغييرها بعد تحديد إحصاء العينة، وتكون مساوية لـ $n - 1$ في عينة القيم n.

dependent When a system of linear equations has an infinite number of solutions.

غير مستقل عندما يحتوي نظام المعادلات الخطية على عدد لانهائي من الحلول.

dependent events Two or more events in which the outcome of one event affects the outcome of the other events.

أحداث غير مستقلة حادثتان أو أكثر تؤثر نتيجة إحداهما في نتيجة الحوادث الأخرى.

dependent variable In a function, the variable, usually y, that represents any value in the range.

متغير غير مستقل في الدالة، يكون المتغير، عادة y، الذي يمثل أي قيمة في المجال.

Descartes' Rule of Signs A rule that gives information about the number of positive and negative real zeros of a polynomial function by looking at a polynomial's variations in sign.

قاعدة "ديكارت" للإشارات قاعدة توفر معلومات عن عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة في دالة كثيرة الحدود عن طريق فحص إشارة التنوعات كثيرة الحدود.

determinant If $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, the determinant of A, written det(A) or |A|, is the difference of the product of the two diagonals of the matrix, or $ad - cb$. If $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, then $|B| = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$.

محدد بما أن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، إذن يمثل محدد A، يكتب $\det(A)$ أو $|A|$، فرق حاصل ضرب قطري المصفوفة، أو $ad - cb$. بما أن $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$، إذن $|B| = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

dilation A transformation in which the graph of a function is compressed or expanded vertically or horizontally.

تغيير الأبعاد بمقياس عملية تحويل ينضغط فيها الرسم البياني لدالة ما أو يتمدد رأسيًا أو أفقيًا.

direction The directed angle between the vector and the horizontal line that could be used to represent the positive x-axis.

اتجاه الزاوية الموجهة بين المتجه والخط الأفقي والتي يمكن استخدامها لتمثيل محور السينات الموجب.

directrix A specific line from which all points on a parabola are equidistant.

دليل خط محدد تكون جميع النقاط على القطع المكافئ على بُعد متساو منه.

discontinuous function A function that is not continuous.

دالة غير متصلة دالة غير متصلة.

discrete random variable A random variable that can take on a finite number of possible values in a probability experiment.

متغير ثابت منفصل متغير عشوائي يمكن أن يأخذ عددًا نهائيًا من القيم المحتملة في تجربة الاحتمال.

dot product The dot product of vectors $a = \langle a\ 1,\ a\ 2\rangle$ and $b = \langle b\ 1,\ b\ 2\rangle$ is defined as $a \cdot b = a\ 1b\ 1 + a\ 2b\ 2$.

حاصل الضرب النقطي حاصل الضرب العددي للمتجهات $a = \langle a\ 1,\ a\ 2\rangle$ و $b = \langle b\ 1,\ b\ 2\rangle$ ويحدد على أنه $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2$.

E

eccentricity A measure that determines how "circular" or "stretched" an ellipse will be. For any ellipse, $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ or $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$, where $c^2 = a^2 - b^2$, the eccentricity $e = \frac{c}{a}$.

الاختلاف المركزي مقياس يحدد كيف يكون القطع الناقص "الدائري" أو "الممتد". بالنسبة إلى أي قطع ناقص، $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ or $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$، حيث $c^2 = a^2 - b^2$. الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a}$.

element 1. Each object or number in a set. 2. Each entry in a matrix.

العنصر 1. يمثل كل كائن أو عدد في مجموعة. 2. كل إدخال في مصفوفة.

elementary row operations The operations shown below are used to transform an augmented matrix into an equivalent matrix.

- Interchange any two rows.
- Multiply one row by a nonzero real number.
- Add a multiple of one row to another row.

عمليات الصفوف الأولية تُستخدم العمليات التي تظهر أدناه في تحويل مصفوفة ممتدة إلى مصفوفة مكافئة.

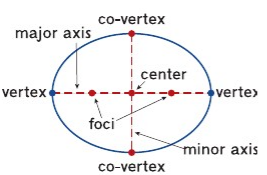
- مبادلة أي صفين.
- ضرب صف واحد في عدد حقيقي غير صفري.
- جمع مضاعف صف واحد على صف آخر.

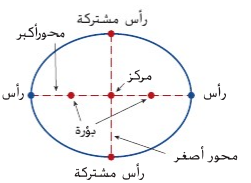
elimination method Eliminate one of the variables in a system of equations by adding or subtracting the equations.

طريقة الحذف هي طريقة يتم فيها حذف واحد من المتغيرات في نظام المعادلات عن طريق جمع المعادلات أو طرحها.

ellipse The locus of points in a plane such that the sum of the distances from two fixed points, called foci, is constant.

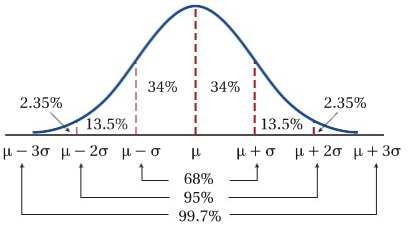
القطع الناقص عبارة عن محل هندسي للنقاط في سطح مستوٍ بحيث يكون مجموع المسافات الواصلة بين نقطتين ثابتتين، وهو ما يُطلق عليهما البؤرتان، ثابتًا.





McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

empirical rule Describes areas under the normal curve over intervals that are one, two, and three standard deviations from either side of the mean. About 68% of the values are within one standard deviation of the mean, 95% are within two standard deviations from the mean, and 99.7% are within three standard deviations of the mean.



empty set A set with no elements, symbolized by { } or ∅.

end behavior Describes what happens to the value of $f(x)$ as x increases or decreases without bound.

equal matrices Two matrices that have the same dimensions and each element of one matrix is equal to the corresponding element of the other matrix.

equivalent vectors Vectors that have the same magnitude and direction.

Euler's Formula For any real number θ, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

even function A function that is symmetric with respect to the y-axis.

expected value The mean of the random variable in a probability distribution.

experiment A situation involving chance or probability that leads to specific outcomes.

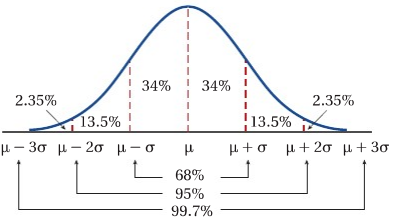
explanatory variable The independent variable x in bivariate data.

exponential function A function of the form $f(x) = ab^x$, where x is any real number and a and b are real number constants such that $a \neq 0$, b is positive, and $b \neq 1$.

exponential series The power series that approximates e^x where $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

extended principle of mathematical induction Instead of verifying that P_n is true for $n = 1$, as in the principle of mathematical induction, instead verify that P_n is true for the first possible case.

قاعدة تجريبية توضح المناطق أسفل المنحنى الطبيعي على فترات تمثل انحرافًا قياسيًا واحدًا أو انحرافين أو ثلاثة انحرافات من أي من جانبي المتوسط الحسابي. تكون نسبة 68% من القيم ضمن حدود انحراف قياسي واحد للمتوسط الحسابي، بينما تكون نسبة 95% ضمن حدود انحرافين قياسيين من المتوسط الحسابي، ونسبة 99.7% ضمن حدود ثلاثة انحرافات قياسية للمتوسط الحسابي.



مجموعة خالية مجموعة لا تحتوي على عناصر. ويرمز لها بالرمز { } أو ∅.

السلوك الطرفي يوضح ما الذي يحدث للقيمة $f(x)$ عندما يزيد x أو ينخفض بدون حد.

مصفوفات متساوية عبارة عن مصفوفتين لهما الأبعاد نفسها وكل عنصر في إحدى المصفوفتين يساوي العنصر المناظر في المصفوفة الأخرى.

متجهات متكافئة متجهات لها المقدار والاتجاه أنفسهما.

قاعدة أويلر بالنسبة إلى أي عدد حقيقي θ، $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

دالة زوجية دالة متماثلة حول المحور y.

قيمة متوقعة عبارة عن المتوسط الحسابي لمتغير عشوائي في توزيع الاحتمال.

تجربة عبارة عن موقف ما يتضمن فرصة أو احتمال تؤدي إلى نتائج محددة.

متغير تفسيري المتغير المستقل x في البيانات ذات المتغيرين.

دالة أسية دالة تأخذ الصورة $f(x) = ab^x$، حيث يعد x أي رقم حقيقي و a و b ثابتين للعدد الحقيقي بحيث يكون $a \neq 0$، b موجبًا، و $b \neq 1$.

متسلسلة أسية عبارة عن متسلسلة الأس التي تقترب من e^x حيث $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

مبدأ ممتد للاستقراء الرياضي بدلاً من التحقق من أن P_n عدد حقيقي لـ $n = 1$، كما هو الحال في مبدأ الاستقراء الرياضي، يتم التحقق من أن P_n عدد حقيقي للحالة الأولى المحتملة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

extrapolation To use the equation of the least-squares regression line to make predictions far outside the range of the x-values that were used to obtain the regression line.

استكمال خارجي لاستخدام معادلة خط الانحدار ذات المربعات الأقل لإنشاء تنبؤات بعيدة عن مدى قيم x المستخدمة في الحصول على خط الانحدار.

extrema The maximum and minimum values of a function.

قيم قصوى عبارة عن القيم العظمى والصغرى لدالة معينة.

F

factorial If n is a positive integer, then $n! = n(n - 1)(n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

مضروب إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن $n! = n(n - 1)(n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

five-number summary A statistic that includes the minimum value, lower quartile, median, upper quartile, and the maximum value of a data set.

ملخص من خمسة أعداد إحصاء يتضمن القيمة الدنيا والربع الأدنى والوسيط والربع الأعلى والقيمة القصوى لمجموعة بيانات.

foci Two fixed points used to define an ellipse or hyperbola. See ellipse and hyperbola.

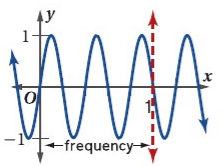
البؤر نقاط ثابتة تستخدم في تحديد قطع ناقص أو قطع زائد. راجع القطع الناقص والقطع الزائد.

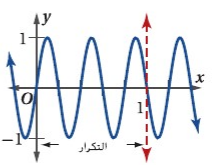
focus See parabola, ellipse, hyperbola.

بؤرة راجع القطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد.

frequency For a sinusoidal function, the number of cycles the function completes in a one unit interval. The frequency is the reciprocal of the period. For $y = a \sin (bx + c) + d$ and $y = a \cos (bx + c) + d$, frequency $= \frac{1}{\text{period}}$ or $\frac{|b|}{2\pi}$.

تكرار بالنسبة إلى الدالة الجيبية، يمثل عدد الدورات التي تكملها الدالة في فترة الوحدة الواحدة. التكرار هو معكوس الفترة. بالنسبة إلى $y = a \sin (bx + c) + d$ و $y = a \cos (bx + c) + d$، التكرار $= \frac{1}{\text{period}}$ or $\frac{|b|}{2\pi}$.





frequency distribution A table used to organize data by groups, classes or intervals.

توزيع تكراري هو جدول يُستخدم في تنظيم البيانات حسب المجموعات أو الدرجات أو الفترات.

function A relation that assigns to each element in the domain exactly one element in the range.

دالة علاقة قائمة على تعيين عنصر واحد في المدى لكل عنصر في المجال.

function notation An equation of y in terms of x can be rewritten so that $y = f(x)$. For example, $y = 4x$ can be written as $f(x) = 4x$.

رمز الدالة معادلة y في صورة x يمكن إعادة كتابتها بحيث $y = f(x)$. على سبيل المثال، يمكن كتابة $y = 4x$ على أنها $f(x) = 4x$.

Fundamental Theorem of Algebra A polynomial function of degree n, where $n > 0$, has at least one zero (real or imaginary) in the complex number system.

نظرية الجبر الأساسية دالة كثيرة الحدود من الدرجة n، حيث n أكبر من 0، وتحتوي على صفر واحد على الأقل (حقيقي أو تخيلي) في نظام الأعداد المركبة.

G

Gaussian elimination Using the operations below to transform a system of linear equations into an equivalent system.

- Interchange any two equations.
- Multiply one of the equations by a nonzero real number.
- Add a multiple of one equation to another equation.

حذف غاوس يتم باستخدام العمليات المذكورة أدناه لتحويل نظام المعادلات الخطية إلى نظام مكافئ.

- مبادلة أي معادلتين.
- ضرب إحدى المعادلات في عدد حقيقي غير صفري.
- جمع مضاعف معادلة واحدة على معادلة أخرى.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

Gauss-Jordan Elimination Solving a system of linear equations by transforming an augmented matrix so that it is in reduced row-echelon form.

اختزال غاوس طريقة لحل نظام المعادلات الخطية بتحويلها إلى مصفوفة ممتدة بحيث تكون في نموذج مستوى صف الانخفاض.

greatest integer function Has the parent function $f(x) = [\![x]\!]$, which is defined as the greatest integer less than or equal to x.

دالة أكبر عدد صحيح تحتوي على الدالة الأصلية $f(x) = [\![x]\!]$. والتي تحدد على أنها أكبر عدد صحيح أقل من x أو يساويه.

H

Heron's Formula If $\triangle ABC$ has side lengths a, b, and c, then the area of the triangle is $\text{Rs}(s-a)(s-b)(s-c)$, where $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

قاعدة هيرون إذا كان $\triangle ABC$ يحتوي على أطوال أضلاع a و b و c، فإن مساحة المثلث تساوي $\text{Rs}(s-a)(s-b)(s-c)$. حيث $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

holes Removable discontinuities on the graph of a function that occur when the numerator and denominator of the function have common factors. The holes occur at the zeros of the common factors.

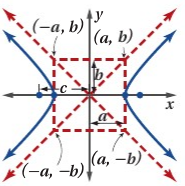
فجوات انفصالات قابلة للإزالة على الرسم البياني لدالة وتحدث عندما يحتوي بسط الدالة ومقامها على عوامل مشتركة. تحدث الفجوات في أصفار العوامل المشتركة.

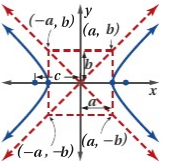
horizontal asymptote The line $y = c$ is a horizontal asymptote of the graph of f if $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$ or $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$.

خط تقارب أفقي يعد الخط $y = c$ خط تقارب أفقي في الرسم البياني لـ f إذا كان $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$ or $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$.

hyperbola The set of all points in a plane such that the absolute value of the differences of the distances from two foci is constant.

قطع زائد مجموعة تضم كل النقاط في المستوى بحيث تكون القيمة المطلقة لفوارق المسافات من طولين بؤريين ثابتة.





hypothesis test Assesses evidence provided by data about a claim concerning a population parameter.

اختبار الفرضية يعمل على تقييم الأدلة المقدمة من البيانات حول افتراض متعلق بمعلمة المجتمع الإحصائي.

I

identity An equation in which the left side is equal to the right side for all values of the variable for which both sides are defined.

تطابق معادلة يكون فيها الطرف الأيسر مساويًا للطرف الأيمن في ما يخص جميع قيم المتغير الذي يتم تحديد كل من الطرفين إليه.

identity function The function $f(x) = x$, which passes through all points with coordinates (a, a).

دالة محايدة الدالة $f(x) = x$. التي تمر بالنقاط ذات الإحداثيات (a, a).

identity matrix The identity matrix of order n, I_n, is an $n \times n$ matrix consisting of all 1s on its main diagonal, from upper left to lower right, and 0s for all other elements. If A is an $n \times n$ matrix, then $AI_n = I_n A = A$.

مصفوفة محايدة مصفوفة محايدة تحمل الرتبة n. I_n. وهي مصفوفة $n \times n$ تتألف من جميع وحدات 1s على قطرها الرئيسي، بداية من الجانب العلوي الأيسر وصولاً إلى الجانب السفلي الأيمن، وقيم 0 لجميع العناصر الأخرى. إذا كان A عبارة عن مصفوفة $n \times n$، فإن $AI_n = I_n A = A$.

imaginary axis The vertical axis of a complex plane on which the imaginary component of a complex number is graphed.

محور تخيلي المحور الرأسي لمستوى مركب يُرسم عليه المركب التخيلي لعدد مركب بيانيًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

imaginary number Another name for a complex number of the form a + bi, when b ≠ 0.

عدد تخيلي اسم آخر للعدد المركب يظهر في الصورة $a + bi$. عندما تكون $b \neq 0$.

imaginary part In an imaginary number a + bi, b is the imaginary part.

جزء تخيلي في العدد التخيلي $a + bi$، يمثل a الجزء التخيلي.

imaginary unit i, or the principal square root of -1.

وحدة تخيلية i. أو الجذر التربيعي الأساسي لـ -1.

implied domain In a function with an unspecified domain, the set of all real numbers for which the expression used to define the function is real.

مجال مضمن في إحدى الدوال ذات المجال غير المحدد، تكون مجموعة كل الأعداد الحقيقية التي يستخدم التعبير لها من أجل تحديد الدالة حقيقية.

inconsistent A system of equations that has no solutions.

معادلة غير متوافقة نظام معادلات ليس له حلول.

increasing Describes a function f or an interval of a function in which for any two points, a positive change in x results in a positive change in $f(x)$.

تزايد يوضح الدالة f أو فترة في دالة ما يؤدي فيها التغيير الموجب في x لأي نقطتين إلى تغيير موجب في $f(x)$.

independent When a system of linear equations has exactly one solution.

معادلة مستقلة عندما يحتوي نظام المعادلات الخطية على حل واحد فقط.

independent events Events that do not affect each other.

أحداث مستقلة أحداث ليس لها تأثير على بعضها البعض.

independent variable In a function, the variable, usually x, that represents any value in the domain.

متغير مستقل في الدالة، هو المتغير x الذي يمثل أي قيمة في المجال.

inductive hypothesis In mathematical induction, assuming that something works for any particular case, or that assuming that P k is true.

فرضية الاستقراء في الاستقراء الرياضي، يتم الافتراض بأن شيئًا ما يعمل على حل أي مسألة معينة، أو الافتراض أن P_k صحيح.

inductive step In mathematical induction, showing that something works for the case after P k, or showing that P k + 1 is true.

خطوة استقرائية في الاستقراء الرياضي، يظهر أن شيئًا ما يعمل على حل المسألة بعد P_k، أو يظهر أن P_{k+1} صحيح.

inferential statistics A sample of data is analyzed and conclusions are made about the entire population.

إحصاء استقرائي عينة من البيانات يتم تحليلها واستخلاص الاستنتاجات حول المجتمع الإحصائي بأكمله.

infinite discontinuity A characteristic of a function in which the absolute value of the function increases or decreases indefinitely as x-values approach c from the left and right.

انفصال لانهائي ميزة تتسم بها دالة ما تزداد فيها القيمة المطلقة للدالة أو تنخفض إلى ما لانهاية حتى تقترب قيم x من c من اليسار واليمين.

influential An individual data point that substantially changes a regression line.

فعّال نقطة بيانات فردية تغير من خط الانحدار تغييرًا جوهريًا.

initial point The starting point of a vector that is represented by a directed line segment. Also known as the tail of the vector.

نقطة البداية نقطة البداية لمتجه يتم تمثيلها بواسطة قطعة مستقيمة موجهة. تسمى أيضًا باسم ذيل المتجه.

initial side The starting position of a ray when forming an angle.

ضلع الابتداء موقع بدء الشعاع عند تكوين زاوية ما.

interpolation To use the equation of the least-squares regression line to make predictions over the range of the data.

استكمال داخلي يقصد به استخدام معادلة خط الانحدار ذات المربعات الأقل لوضع التوقعات على مدى البيانات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

interquartile range The range of the middle half of a set of data. It is the difference between the upper quartile and the lower quartile.

مدى رُبيعي يمثل مدى النصف الأوسط من مجموعة بيانات. ويقصد به الفرق بين الربع الأعلى والربع الأدنى.

intersection The intersection of sets A and B is all elements found in both A and B, written as A ∩ B.

تقاطع تقاطع المجموعتين A و B ويشمل كل العناصر الموجودة في كل من A و B. وتكتب في الصورة $A \cap B$.

interval A data value or group of data values.

فترة قيمة البيانات أو مجموعة من قيمة البيانات.

interval estimate A range of values used to estimate an unknown population parameter.

تقدير الفترة مجموعة من القيم المستخدمة في تقدير معلمة المجتمع الإحصائي المجهولة.

interval notation An expression that uses inequalities to describe subsets of real numbers.

رمز الفترة تعبير يستخدم المتباينات لتوضيح المجموعات الجزئية للأعداد الحقيقية.

inverse Let A be an $n \times n$ matrix. If there exists a matrix B such that $AB = BA = I_n$, then B is called the inverse of A and is written as A -1.

معكوس لنفترض أن A يمثل المصفوفة $n \times n$. إذا كانت هناك مصفوفة B بحيث $AB = BA = I_n$. فعندئذٍ يُسمى B معكوسًا لـ A ويُكتب في الصورة A^{-1}.

inverse cosine If θ is an acute angle and $\cos \theta = x$, then the inverse cosine of x, or $\cos^{-1} x$, is the measure of angle θ.

معكوس إذا كانت θ زاوية حادة و $\cos \theta = x$. فإن معكوس جيب التمام x. أو $\cos^{-1} x$. هو قياس الزاوية θ.

inverse function Two functions f and f^{-1} are inverse functions if and only if $f[f^{-1}(x)] = x$ for every x in the domain of $f^{-1}(x)$, and $f^{-1}[f(x)] = x$ for every x in the domain of $f(x)$.

دالة عكسية عبارة عن دالتين f و f^{-1} يمثلان دالتين عكسيتين إذا وفقط إذا كان $f[f^{-1}(x)] = x$ لكل x في مجال $f^{-1}(x)$. و $f^{-1}[f(x)] = x$ لكل x في مجال $f(x)$.

inverse matrix The multiplicative inverse of a square matrix. The product of a matrix A and its inverse A^{-1} must equal the identity matrix I_n.

مصفوفة عكسية المعكوس الضربي لمصفوفة تربيعية. يجب أن يكون حاصل ضرب المصفوفة A ومعكوسها A^{-1} مساويًا للمصفوفة المتطابقة I_n.

inverse relation Two relations are inverse relations if and only if one relation contains the element (b, a) whenever the other relation contains the element (a, b).

علاقة عكسية تكون العلاقتان عكسيتين إذا وفقط إذا كانت إحداهما تحتوي على العنصر (b, a) والأخرى تحتوي على العنصر (a, b).

inverse sine If θ is an acute angle and $\sin \theta = x$, then the inverse sine of x, or $\sin^{-1} x$, is the measure of angle θ.

معكوس الجيب إذا كانت θ زاوية حادة و $\sin \theta = x$. فإن معكوس الجيب لـ x. أو $\sin^{-1} x$. هو قياس الزاوية θ.

inverse tangent If θ is an acute angle and $\tan \theta = x$, then the inverse tangent of x, or $\tan^{-1} x$, is the measure of angle θ.

معكوس ظل الزاوية إذا كانت θ زاوية حادة و $\tan \theta = x$. فإن معكوس ظل الزاوية لـ x. أو $\tan^{-1} x$. هو قياس الزاوية θ.

inverse trigonometric function The inverse sine of x or $\sin^{-1} x$, the inverse cosine of x or $\cos^{-1} x$, and the inverse tangent of x or $\tan^{-1} x$.

دالة مثلثية عكسية معكوس الجيب لـ x أو $\sin^{-1} x$. بينما معكوس جيب التمام لـ x أو $\cos^{-1} x$. ومعكوس ظل الزاوية لـ x أو $\tan^{-1} x$.

invertible matrix A matrix that has an inverse.

مصفوفة قابلة للعكس مصفوفة لها معكوس.

irreducible over the reals A quadratic expression that has real coefficients but no real zeros associated with it.

جذور حقيقية غير قابلة للتبسيط تعبير تربيعي يحتوي على معاملات حقيقية لكن بدون أصفار حقيقية مقترنة به.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

J

jump discontinuity A characteristic of a function in which the function has two distinct limit values as x-values approach c from the left and right.

انفصال قفزي ميزة تتسم بها دالة تحتوي فيها الدالة على نهايتين مختلفتين عندما تقترب قيم x من c من اليسار واليمين.

L

Law of Cosines If △ABC has side lengths a, b, and c representing the lengths of the sides opposite the angles with measures A, B, and C, respectively. Then the following are true.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

قانون جيب التمام إذا كان $\triangle ABC$ يحتوي على أطوال أضلاع a و b و c مع تمثيل أطوال الأضلاع مواجهة للزاوية ذات القياس A و B و C، على التوالي. إذن فإن ما يلي صحيح.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Law of Sines If △ABC has side lengths a, b, and c representing the lengths of the sides opposite the angles with measures A, B, and C, respectively, then $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

قانون الجيب إذا كان $\triangle ABC$ يحتوي على أطوال أضلاع a و b و c مع تمثيل أطوال الأضلاع مواجهة للزاوية ذات القياس A و B و C، على التوالي. فإن $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

least-squares regression line The line for which the sum of the squares of the residuals is at a minimum.

خط الانحدار ذو المربعات الأقل الخط الذي يكون مجموع مربعات القيم المتبقية له عند الحد الأدنى.

left-tailed test The hypothesis test if H a: μ < k.

اختبار الذيل المتجه إلى اليسار يقصد به اختبار الفرضية إذا كان $H_a: \mu < k$.

level of significance The maximum allowable probability of committing a Type I error, denoted α.

مستوى الدلالة الحد الأقصى المسموح به لاحتمال ارتكاب خطأ من النوع الأول، ويرمز له بـ α.

lemniscates The graph of a polar equation of the form $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ or $r^2 = a^2 \sin 2\theta$.

منحنى ذو عروتين الرسم البياني للمعادلة القطبية في الصورة $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ أو $r^2 = a^2 \sin 2\theta$.

limaçon The graph of a polar equation of the form $r = a \pm b\cos\theta$ or $r = a \pm b\sin\theta$, where a and b are both positive.

منحنى قلبي الشكل الرسم البياني للمعادلة القطبية في الصورة $r = a \pm b\cos\theta$ أو $r = a \pm b\sin\theta$، حيث يكون a و b عددين موجبين.

limit The unique value that a function approaches as x-values of the function approach c from the left and right sides.

النهاية القيمة الوحيدة التي تقترب منها دالة عندما تقترب قيم x من c من الجانب الأيسر والجانب الأيمن.

linear combination The sum of two vectors, each multiplied by a scalar, that is used to represent a vector with a given initial point and terminal point.

تركيب خطي مجموع متجهين يتم ضرب كل منها في كمية عددية تستخدم لتمثيل متجه ما بنقطتي بداية ونهاية محددتين.

Linear Factorization Theorem If $f(x)$ is a polynomial function of degree $n > 0$, then f has exactly n linear factors and $f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)$, where a n is some nonzero real number and $c_1, c_2, \ldots, c_n$ are the complex zeros (including repeated zeros) of f.

نظرية التحليل إلى العوامل الخطية إذا كانت $f(x)$ هي دالة درجة كثيرة الحدود $n > 0$، إذن f لديها العوامل الخطية n بالضبط و $f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)$. حيث a_n هي عدد حقيقي غير صفري و $c_1, c_2, \ldots, c_n$ هي الأصفار المركبة (بما في ذلك الأصفار المتكررة) لـ f.

linearize Transform data so that they appear to cluster about a line by applying a function to one or both of the variables in the data set.

ظهور الشيء في صورة خطية تحويل البيانات بحيث تظهر إلى تجمع يتعلق بخط معين عن طريق تطبيق دالة على أحد المتغيرين في مجموعة البيانات أو كليهما.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

linear speed The rate at which an object moves along a circular path.

سرعة خطية المعدل الذي يتحرك عنده جسم ما على امتداد مسار دائري.

line of best fit A line drawn through a set of data points that describes how the response variable y changes as the explanatory variable x changes. Also called a regression line.

المستقيم الأفضل تمثيلاً مستقيم مرسوم من خلال مجموعة من نقاط البيانات التي توضح كيف يتغير متغير الاستجابة y كلما يتغير المتغير التفسيري x. ويُطلق عليه أيضًا خط الانحدار.

line symmetry Describes graphs that can be folded along a line so that the two halves match exactly.

تناظر محوري يوضح التمثيلات البيانية التي يمكن رسمها بشكل منحنٍ على مستقيم معين بحيث يتطابق نصفا التمثيل تمامًا.

logarithm In the function $x = b^y$, y is called the logarithm, base b, of x. Usually written as $y = \log_b x$ and is read log base b of x.

لوغاريتم في الدالة $x = b^y$، تسمى y اللوغاريتم، و b هي الأساس لـ x. وعادة ما يُكتب $y = \log_b x$ ويُقرأ لوغاريتم x للأساس b.

logarithmic function with base b A function of the form $y = \log_b x$, where $b > 0$, $b \neq 1$, and $x > 0$, which is the inverse of the exponential function of the form $b^y = x$.

دالة لوغاريتمية ذات الأساس b دالة للصيغة $y = \log_b x$. حيث $b > 0$ و $b \neq 1$ و $x > 0$. الذي يكون معكوس الدالة الأسية للصيغة $b^y = x$.

logistic growth function A function that models exponential growth with limiting factors. Logistic growth functions are bounded by horizontal asymptotes $y = 0$ and $y = c$, where c is the limit to growth.

دالة النمو اللوجستية دالة تقوم بنموذج النمو الأسي بعوامل محددة. وتتقيد دوال النمو اللوجستية بخطوط مقاربة أفقية $y = 0$ و $y = c$. حيث c هي حد النمو.

lower bound A real number a that is less than or equal to the least real zero of a polynomial function.

حد أدنى عدد حقيقي a أقل من أو يساوي أقل صفر حقيقي لدالة كثيرة الحدود.

M

magnitude The length of the directed line segment that represents the vector.

مقدار طول القطعة المستقيمة الموجهة التي تمثل المتجه.

major axis The segment that contains the foci of an ellipse and has endpoints on the ellipse.

محور أكبر القطعة التي تتضمن بؤرتي القطع الناقص ولديها نقاط نهاية عليه.

matrix Any rectangular array of variables or constants in horizontal rows and vertical columns.

مصفوفة أي مصفوفة مستطيلة للمتغيرات أو الثوابت في صفوف أفقية وأعمدة رأسية.

maximum For a function f, the greatest value of $f(x)$. A critical point on the graph of a function where the curve changes from increasing to decreasing.

القيمة العظمى بالنسبة إلى الدالة f، القيمة العظمى لـ $f(x)$. والنقطة الحرجة الممثلة على الرسم البياني لدالة ما يتغير فيها المنحنى ويتجه من التزايد إلى التناقص.

maximum error of estimate The maximum difference between the point estimate and the actual value of the parameter in an experiment.

أقصى خطأ للتقدير أقصى قيمة للفرق بين تقدير النقطة والقيمة الفعلية للمعلمة في تجربة ما.

mean The sum of numbers in a set of data divided by the number of items in the data set.

متوسط حسابي مجموع الأعداد في مجموعة البيانات المقسومة على عدد عناصر المجموعة.

measure of central tendency A number that represents the center or middle of a set of data.

مقاييس النزعة المركزية العدد الذي يمثل مركز مجموعة البيانات أو منتصفها.

measures of spread (or variation) A representation of how spread out or scattered a set of data is.

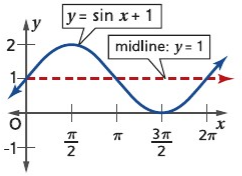
مقاييس الانتشار تمثيل لمدى انتشار مجموعة البيانات أو تبعثرها.

median The middle number in a set of data when the data are arranged in numerical order. If the data set has an even number, the median is the mean of the two middle numbers.

وسيط العدد الأوسط في مجموعة البيانات عند ترتيب البيانات ترتيبًا عدديًا. وإذا كانت البيانات ذات عدد فردي، فالوسيط هو متوسط العددين الأوسطين.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

midline A horizontal axis that is the reference line about which the graph of a sinusoidal function oscillates.



minimum For a function f, the least value of $f(x)$. A critical point on the graph of a function where the curve changes from decreasing to increasing.

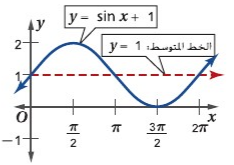
minor axis The segment through the center of an ellipse that is perpendicular to the major axis and has endpoints on the ellipse.

mode The number(s) that appear most often in a set of data.

modulus The absolute value of a complex number, the number r when a complex number is written in the form $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

multivariable linear system A system of linear equations in two or more variables, also called a multivariate linear system.

خط متوسط محور أفقي يمثل خطًا مرجعيًا يتذبذب حوله الرسم البياني للدالة الجيبية.



القيمة الصغرى بالنسبة إلى دالة f، تبلغ القيمة الصغرى لـ $f(x)$ نقطة حرجة ممثلة على الرسم البياني لدالة ما يتغير فيها المنحنى من التناقص إلى التزايد.

محور أصغر القطعة المستقيمة الواصلة من منتصف القطع الناقص والتي تتقاطع مع المحور الأكبر ولديها نقطة نهاية على القطع الناقص.

منوال العدد (الأعداد) الأكثر تكرارًا في مجموعة من البيانات.

معامل القيمة المطلقة لعدد مركب، يساوي العدد r عند كتابة عدد مركب بالشكل $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

نظام خطي متعدد المتغيرات نظام يمثل المعادلات الخطية في متغيرين أو أكثر. ويطلق عليه أيضًا النظام الخطي متعدد البدائل.

N

natural base The irrational number e, which is approximately equal to 2.718281828....

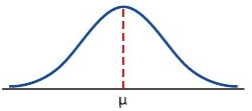
natural logarithm A logarithm with base e, written $\ln x$.

negatively skewed distribution In a data distribution, the mean is less than the median, the majority of the data are on the right, and the tail extends to the left.

nonremovable discontinuity (p. 25) Describes infinite and jump discontinuities because they cannot be eliminated by redefining the function at that point.

nonsingular matrix A matrix that has an inverse.

normal distribution A continuous probability distribution in which the graph of the curve is bell-shaped and symmetric with respect to the mean; the mean, median, and mode are equal and located at the center. The curve is continuous and approaches, but never touches, the x-axis; the total area under the curve is equal to 1 or 100%.



أساس طبيعي عدد غير نسبي يرمز له بالرمز e، وتساوي قيمته حوالي 2.718281828....

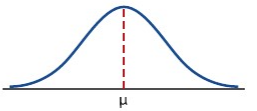
لوغاريتم طبيعي لوغاريتم يحتوي على الأساس e، وتتم كتابته بالشكل $\ln x$.

توزيع ملتوٍ نحو اليسار في توزيع البيانات، يكون المتوسط الحسابي أقل من الوسيط. وتكون غالبية البيانات على الجانب الأيمن، ويمتد الذيل إلى الجانب الأيسر.

انفصال غير قابل للإزالة يوضح الانقطاعات اللانهائية وانقطاعات القفز نظرًا لتعذر تجاهلها عن طريق إعادة تحديد الدالة عند تلك النقطة.

مصفوفة غير منفردة مصفوفة لديها معكوس.

توزيع طبيعي توزيع احتمال متصل يأخذ فيه الرسم البياني للمنحنى شكل جرس ويكون متماثلاً الوسط؛ ويكون فيه المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال متساوون ويقعون في المنتصف. المنحنى متصل ويقترب من محور السينات ولكنه لا يمسه؛ بينما تساوي المساحة الكلية أسفل المنحنى 1 أو 100%.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

nth root For any real numbers a and b, and any positive integer n, if $a^n = b$, then a is an nth root of b.

جذر العدد n بالنسبة إلى العددين الحقيقيين a و b، وأي عدد صحيح موجب n. إذا كان العدد $a^n = b$. فعندئذٍ a يساوي جذر العدد n للعدد b.

null hypothesis One of two hypotheses that need to be stated to test a claim; states that there is not a significant difference between the sample value and the population parameter. The null hypothesis contains a statement of equality such as ≥, =, or ≤.

فرضية العدم فرضية من اثنتين تفيد بضرورة إثبات صحة افتراض ما؛ وتنص على عدم وجود فرق ملحوظ بين قيمة العينة ومعلمة المجتمع الإحصائي. تتضمن فرضية العدم عبارة مساواة مثل أكبر من أو يساوي أو يساوي أو أقل من أو يساوي.

O

oblique asymptote An asymptote that is neither horizontal nor vertical that occurs when the degree of the numerator of a rational function is exactly one more than the degree of the denominator. Also called a slant asymptote.

خط تقارب مائل خط تقارب ليس أفقيًا أو رأسيًا ينتج عندما تكون درجة البسط في دالة نسبية أكبر من درجة المقام بمقدار الضعف تمامًا. يُطلق عليه أيضًا خط التقارب الجانبي.

oblique triangle A triangle that is not a right triangle.

مثلث مائل مثلث ليس قائم الزاوية.

octants Eight regions into which the three axes of a three-dimensional coordinate system divide space.

ثُمن مكون من ثمانية قطاعات بداخلها ثلاثة محاور في مساحة مقسمة في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد.

odd function A function that is symmetric with respect to the origin.

دالة فردية دالة متماثلة من حيث الأصل.

one-to-one 1. A function in which no x-value is matched with more than one y-value and no y-value is matched with more than one x-value. 2. A function whose inverse is a function.

واحد إلى واحد عبارة عن دالة لا تتطابق فيها قيمة محور السينات مع أكثر من قيمة على محور الصادات ولا تتطابق فيها قيمة محور الصادات مع أكثر من قيمة على محور السينات. 2. دالة يكون معكوسها بمثابة دالة.

opposite vectors Vectors that have the same magnitude but opposite direction.

متجهات متعاكسة متجهات لها المقدار نفسه لكنها متضادة الاتجاه.

ordered triple Coordinates of the location of a point in space given by real numbers (x, y, z).

ثلاثي مُرتب عبارة عن إحداثيات لموقع نقطة ما في المساحة المحددة بواسطة الأعداد الحقيقية (x, y, z).

orthogonal Two vectors with a dot product of 0.

متعامد عبارة عن متجهين يكون حاصل الضرب العددي لهما 0.

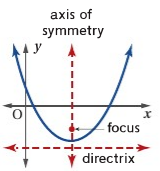
outliers Data that are more than 1.5 times the interquartile range beyond the upper and lower quartiles.

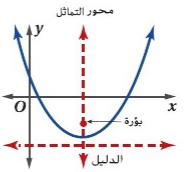
قيم متطرفة بيانات تكون أكبر بمقدار مرة ونصف من المدى بين الربعين فوق الأرباع العليا والدنيا.

P

parabola The locus of points in a plane that are equidistant from a fixed point, called the focus, and a specific line, called the directrix.

قطع مكافئ محل هندسي للنقاط في مستوٍ متساوي البعد من نقطة ثابتة، يطلق عليها البؤرة، ومستقيم معين، يطلق عليه الدليل.





McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

parallelepiped A polyhedron with faces that are all parallelograms.

متوازي المستطيلات مجسم متعدد الوجوه تأخذ كل وجوهه شكل متوازي الأضلاع.

parallelogram method A method of finding the resultant vector by translating one vector so that its tail touches the tail of another. A parallelogram is drawn and the diagonal is the resultant vector.

طريقة متوازي الأضلاع طريقة لاكتشاف المتجه الناتج عن طريق نقل متجه واحد بحيث يلامس ذيله ذيل المتجه الآخر. يتم رسم متوازي الأضلاع ويعد القطر فيه متجهًا ثابتًا.

parallel vectors Vectors that have the same or opposite direction, but not necessarily the same magnitude.

متجهات موازية متجهات لها الاتجاه نفسه أو اتجاه معاكس، لكن ليس بالضرورة نفس المقدار.

parameter Arbitrary values, usually time or angle measurement, used in parametric equations. 2. A measure that describes a characteristic of a population.

مَـــعْـلَـمَة القيم المطلقة عبارة عن قياس زمني أو قياس بالزاوية عادة وتستخدم في المعادلات الوسيطية. 2. نظام قياس يصف سمة المجتمع الإحصائي.

parametric equation An equation that can express the position of an object as a function of time.

معادلة وسيطية معادلة تستطيع أن تعبر عن موقع جسم ما على أنه دالة زمنية.

parent function The simplest function in a family of functions. A function that is transformed to create other members in a family of functions.

دالة أصلية الدالة الأبسط في مجموعة الدوال. دالة تتحول لإنشاء أعضاء آخرين في مجموعة الدوال.

Pascal's triangle A triangular array of numbers such that the first and last numbers in each row are 1 and every other number is formed by adding the two numbers immediately above that number in the previous row. The (n + 1)th row contains the coefficients of the terms of the expansion $(a + b)^n$ for n = 0, 1, 2, ...

مثلث باسكال مصفوفة ثلاثية الزوايا تتألف من أعداد بحيث تكون الأعداد الأولى والأخيرة في كل صف تساوي 1 ويتم تكوين كل عدد آخر عن طريق جمع عددين فوق ذلك العدد مباشرة في الصف السابق. يحتوي صف العدد (n + 1) على معاملات فترات التمديد $(a + b)$ لـ ..... n = 0, 1, 2,

percentile graph Uses the same values as a cumulative relative frequency graph, except that the proportions are instead expressed as percents.

رسم بياني مئوي تُستخدم فيه القيم نفسها على أنها رسم بياني ذو تكرار نسبي شامل، إلا أن النسب يتم التعبير عنها بدلاً من ذلك بالنسب المئوية.

percentiles Divide a distribution into 100 equal groups and are symbolized by P_1, P_2, P_3, ..., P_{99}. The nth percentile or P_n, is the value such that n% of the data are lower than P_n.

نسب مئوية ينقسم التوزيع داخل 100 مجموعة متساوية ويرمز له بالرمز P_{99} .... P_3، P_2، P_1. النسبة المئوية للعدد n أو P_n، هي القيمة بحيث يكون n % من البيانات أقل من P_n.

period For a function $y = f(t)$, the smallest positive number c for which $f(t + c) = f(t)$.

دورة بالنسبة إلى الدالة $y = f(t)$. أصغر عدد صحيح موجب هو c تكون فيه $f(t + c) = f(t)$.

periodic function A function with values that repeat at regular intervals. There exists a positive real number c such that $f(t + c) = f(t)$ for all values of t in the domain of f.

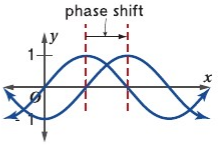
دالة دورية دالة ذات قيم تتكرر على فترات منتظمة. يوجد بها عدد حقيقي موجب c بحيث تكون $f(t + c) = f(t)$ لجميع قيم t الموجودة في مجال f.

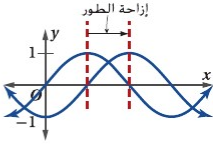
permutation An arrangement of objects in which order is important.

التباديل عدد طرق ترتيب الأشياء التي يكون الترتيب فيها مهمًا.

phase shift For a sinusoidal function, the difference between the horizontal position of a function and that of an otherwise similar sinusoidal function. For $y = a \sin (bx + c) + d$ and $y = a \cos (bx + c) + d$, phase shift = $-\frac{c}{|b|}$.

إزاحة الطور بالنسبة إلى الدالة الجيبية، تُمثل الفرق بين الموقع الأفقي لدالة ما وموقع الدالة الجيبية المماثلة بصورة مختلفة. بالنسبة إلى $y = a \sin (bx + c) + d$ and $y = a \cos (bx + c) + d$. إزاحة الطور $= -\frac{c}{|b|}$.





حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

piecewise-defined function A function that is defined using two or more expressions for different intervals of the domain.

دالة محددة القطع دالة تحدد باستخدام تعبيرين أو أكثر لفترات مختلفة في المجال.

point estimate A single value estimate of an unknown population parameter.

تقدير النقطة عبارة عن تقدير قيمة فردية لمعلمة المجتمع الإحصائي المجهولة.

point symmetry Describes graphs that can be rotated 180° with respect to a point and appear unchanged.

تناظر نقطي يوضح الرسومات البيانية التي يمكن أن تدور 180 درجة حول محورها بالنسبة إلى نقطة ما وتبدو غير متغيرة.

polar axis An initial ray from the pole in the polar coordinate system, usually horizontal and directed toward the right.

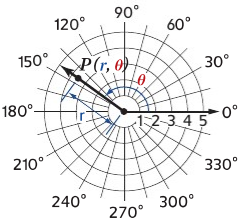
محور قطبي عبارة عن شعاع أولي منطلق من القطب في النظام الإحداثي القطبي. ويكون عادة أفقيًا ومتجهًا نحو اليمين.

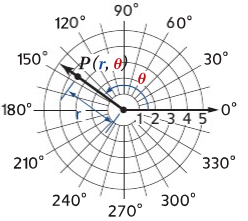
polar coordinates Describes the location of a point $P(r, \theta)$ in the polar coordinate system, where r is the directed distance from the pole O to the point and θ is the directed angle from the polar axis to $\overrightarrow{OP}$.

إحداثيات القطب يوضح موقع النقطة $P(r, \theta)$ في النظام الإحداثي القطبي، حيث يمثل r فيه المسافة الموجهة من القطب O إلى النقطة وتمثل θ الزاوية الموجهة من المحور القطبي إلى $\overrightarrow{OP}$.

polar coordinate system A coordinate system in which the location of a point is identified by polar coordinates of the form (r, θ), where r is the distance from the center, or the pole, to the given point and θ is the measure of the angle formed by the polar axis and a line from the pole through the point.

نظام إحداثي قطبي نظام إحداثي يتم فيه تح ديد موقع نقطة ما بواسطة إحداثيات القطب للصورة (r, θ). حيث يمثل r المسافة الواصلة من المنتصف، أو القطب، إلى نقطة محددة وتمثل θ قياس الزاوية المكونة بواسطة المحور القطبي والمستقيم الواصل من القطب عبر النقطة.





polar equation An equation expressed in terms of polar coordinates.

معادلة قطبية معادلة يعبر عنها بفترات على إحداثيات القطب.

polar form The complex number $z = a + bi$ written as $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, where $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$, and $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$ for $a > 0$, $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ for $a < 0$.

صورة قطبية عدد مركب $z = a + bi$ مكتوب في صورة $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. حيث $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$, and $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$ for $a > 0$, $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ for $a < 0$.

polar graph The set of all points with coordinates (r, θ) that satisfy a given polar equation.

رسم بياني قطبي مجموعة مكونة من كل النقاط ذات الإحداثيات (r, θ) التي تستوفي معادلة قطبية معينة.

pole The origin of the polar coordinate system, O.

قطب أصل النظام الإحداثي القطبي، O.

polynomial inequality (p. 108) An inequality of the form $f(x) \le 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \ne 0$, $f(x) > 0$, or $f(x) \ge 0$, where $f(x)$ is a polynomial function.

متباينة كثيرة الحدود متباينة تأخذ الصورة $f(x) < 0$، $f(x) \le 0$، $f(x) > 0$ أو $f(x) \ge 0$ أو $f(x) \ne 0$، حيث يمثل $f(x)$ دالة كثيرة الحدود.

population An entire group of living things or objects.

مجتمع إحصائي عبارة عن مجموعة كاملة من الأشياء أو الأجسام.

positively skewed distribution In a data distribution, the mean is greater than the median, the majority of the data are on the left, and the tail extends to the right.

توزيع ملتوٍ نحو اليمين في توزيع البيانات، يكون المتوسط الحسابي أكبر من الوسيط. وتكون غالبية البيانات على الجانب الأيسر، ويمتد الذيل إلى الجانب الأيمن.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

power series An infinite series of the form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$, where x and a_n can take on any values for $n = 0, 1, 2, \ldots$.

متسلسلة قوة متسلسلة لانهائية تأخذ الصورة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$ حيث يمكن أن يأخذ x و a_n أي قيم لـ $n = 0, 1, 2, \ldots$.

principal nth root The nonnegative nth root.

جذر العدد n الرئيسي جذر العدد n غير السالب.

principle of mathematical induction Let P_n be a statement about a positive integer n. Then P_n is true for all positive integers n if and only if
- P_1 is true, and
- for every positive integer k, if P_k is true, then P_{k+1} is true.

مبدأ الاستقراء الرياضي لنفترض أن P_n عدد صحيح موجب n. بعد ذلك يكون P_n حقيقيًا لجميع الأعداد الموجبة n فقط إذا كان
- P_1 حقيقيًا. و
- لكل عدد صحيح موجب k. إذا كان P_k حقيقيًا. فعندئذٍ يكون P_{k+1} حقيقيًا.

probability distribution A table, equation, or graph that links each possible value for a random variable with its probability of occurring.

توزيع الاحتمال عبارة عن جدول أو معادلة أو رسم بياني يربط كل قيمة موجبة لمتغير عشوائي باحتمالية حدوث.

p th roots of unity Finding the pth roots of 1.

جذور العدد p للوحدة إيجاد جذور العدد p للعدد 1.

p-value The lowest level of significance at which H_0 can be rejected for a given set of data.

قيمة العدد p تمثل مستوى الدلالة الأدنى الذي يمكن عنده رفض H_0 لمجموعة معينة من البيانات.

pure imaginary number An imaginary number $(a + bi)$, where $a = 0$.

عدد وهمي صرف عدد وهمي $(a + bi)$. حيث $a = 0$.

Q

quadrant bearing A directional measurement of a vector between 0° and 90° east or west of the north-south line.

اتجاه ربعي قياس اتجاهي لمتجه ما بين 0 درجة و90 درجة شرق المستقيم المنطلق من الشمال إلى الجنوب أو غربه.

quadrantal angle An angle in standard position that has a terminal side that lies on one of the coordinate axes.

زاوية ربعية زاوية في موقع قياسي لديها جانب طرفي يقع على أحد محاور الإحداثيات.

quadratic equation A polynomial equation of degree two, in the form $ax^2 + bx + c$, where $a \neq 0$.

معادلة تربيعية هي معادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية، في الصورة $ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$.

Quadratic Formula The solutions of a quadratic equation of the form $ax^2 + bx + c$, where $a \neq 0$, are given by the Quadratic Formula, which is $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

القانون العام تعطى الحلول المحددة لمعادلة تربيعية في الصورة $ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$. بواسطة القانون العام، $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

quadratic function A function of the form $f(x) = ax^2 + bx + c$, where $a \neq 0$, with parent function $f(x) = x^2$.

دالة تربيعية دالة تأخذ الصورة $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$. باستخدام الدالة الأصلية $f(x) = x^2$.

quartiles (p. P35) The values that divide a set of data into four equal parts.

رُبيعيات قيم تقسم مجموعة من البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية.

R

radians A unit of angular measurement equal to $\frac{180^\circ}{\pi}$ or about 57.296°.

قياسات دائرية وحدة قياس زاوية تساوي $\frac{180^\circ}{\pi}$ أو حوالي 57.296 درجة.

random variable Represents a numerical value assigned to an outcome of a probability experiment.

متغير عشوائي يمثل قيمة عددية معيّنة إلى مجموع تجربة الاحتمال.

range The difference between the greatest and least values in a set of data.

مدى الفرق بين القيم الأكبر والأصغر في مجموعة بيانات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

rational function A function of the form $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$, where $a(x)$ and $b(x)$ are polynomial functions, and $b(x) \neq 0$.

دالة نسبية دالة تأخذ الصورة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$. حيث $a(x)$ و $b(x)$ دوال كثيرة الحدود، و $b(x) \neq 0$.

rational inequality An inequality that contains one or more rational expressions.

متباينة نسبية متباينة تحتوي على واحد أو أكثر من التعابير النسبية.

Rational Zero Theorem Describes how the leading coefficient and constant term of a polynomial function with integer coefficients can be used to determine a list of all possible rational zeros.

نظرية الصفر النسبي توضح كيف يمكن استخدام المعامل الرئيسي والفترة الثابتة لدالة كثيرة الحدود ذات معاملات أعداد صحيحة في تحديد قائمة بجميع الأصفار النسبية الممكنة.

real axis The horizontal axis of a complex plane on which the real component of a complex number is graphed.

محور حقيقي المحور الأفقي لمستوى مركب يتم عليه رسم المركب الحقيقي لعدد مركب بيانيًا.

real part In an imaginary number a + bi, a is the real part.

جزء حقيقي في العدد التخيلي $a + bi$. يمثل a الجزء الحقيقي.

reciprocal function (p. 45, 168) 1. A function of the form $f(x) = \frac{1}{a(x)}$, where $a(x)$ is a linear function and $a(x) \neq 0$, with parent function $f(x) = \frac{1}{x}$. 2. Trigonometric functions that are reciprocals of each other.

دالة عكسية دالة تأخذ الصورة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$، حيث يمثل $a(x)$ دالة خطية و $a(x) \neq 0$.

باستخدام الدالة الأصلية 2 $f(x) = \frac{1}{x}$. الدوال المثلثية التي تتبادل مع بعضها البعض.

rectangular components Horizontal and vertical components of a vector.

المركبات المتعامدة مركبات أفقية ورأسية لمتجه.

reduced row-echelon form An augmented matrix in which the first nonzero element of each row of the coefficient portion of the matrix is 1 and the rest of the elements in the same column as this element are 0.

نموذج مستوى صف الانخفاض عبارة عن مصفوفة زائدة يساوي فيها العنصر الأول غير الصفري لكل صف من جزء معامل المصفوفة العدد 1 وتساوي باقي العناصر في العمود نفسه الموجود فيه هذا العنصر العدد 0.

reduction identity An identity that results when a sum or difference identity is used to rewrite a trigonometric expression in which one of the angles is a multiple of 90° or $\frac{\pi}{2}$ radians.

متطابقة منخفضة متطابقة تنتج عند استخدام متطابقة المجموع أو الفرق لإعادة كتابة التعبير المثلثي الذي تساوي فيه إحدى الزوايا حاصل الضرب في 90 درجة أو $\frac{\pi}{2}$ من القياسات الدائرية (راديان).

reference angle The acute angle formed by the terminal side of an angle in standard position and the x-axis.

زاوية الاسناد/المرجع الزاوية الحادة المكونة بواسطة ضلع الابتداء لزاوية ما في وضع قياسي وعلى محور السينات.

reflection A transformation in which a mirror image of the graph of a function is produced with respect to a specific line.

الانعكاس عملية تحول يتم فيها إنشاء صورة طبق الأصل من الرسم البياني لدالة ما بالنسبة إلى مستقيم معين.

reflection matrix A matrix used to reflect an object over a line or plane.

مصفوفة الانعكاس مصفوفة تستخدم لتعكس جسمًا ما على مستقيم أو سطح مستوٍ.

regression line A line drawn through a set of data points that describes how the response variable y changes as the explanatory variable x changes. Also called a line of best fit.

خط الانحدار خط مرسوم من خلال مجموعة من نقاط البيانات التي توضح كيف يتغير متغير الاستجابة y كلما تغير المتغير التفسيري x. يطلق عليه أيضًا المستقيم الأفضل تمثيلاً.

relative frequency In a frequency table, the frequency of occurrence for each data value.

تكرار نسبي في جدول التكرار، يمثل عدد مرات الحدوث لكل قيمة من قيم البيانات.

relevant domain In a function, the part of the domain that is relevant to a model.

مجال نسبي في دالة ما، يمثل الجزء من المجال ذي الصلة بالنموذج.

removable discontinuity A characteristic of a function in which the function is continuous everywhere except for a hole at $x = c$.

انفصال قابل للإزالة ميزة في دالة ما تكون فيها الدالة متواصلة أيًا كانت باستثناء فجوة في $x = c$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

residual The difference between an observed y-value of a data point and its predicted y-value on a regression line.

قيمة متبقية الفرق بين قيمة y الملاحظة في نقطة البيانات وقيمة y المتوقعة على خط الانحدار.

residual plot A scatter plot of the residuals in which the horizontal line at zero corresponds to the regression line.

رسم بياني للقيمة المتبقية رسم بياني متفرق للقيم المتبقية يتطابق فيها الخط الأفقي عند الصفر مع خط الانحدار.

resistant statistic) A statistic that is not highly affected by the presence of outlying data values.

قيمة إحصائية مقاومة قيمة إحصائية لا تتأثر كثيرًا بوجود قيم البيانات البعيدة عن المركز.

response variable The dependent variable y in bivariate data.

متغير الاستجابة المتغير التابع y في البيانات ذات المتغيرين.

resultant A single vector that results when two or more vectors are added.

محصِّلة المتجه الفردي الناتج عن إضافة متجهين أو أكثر.

right-tailed test The hypothesis test if H_a: $\mu > k$.

اختبار الذيل الأيمن اختبار الفرضية إذا كان H_a: $\mu > k$.

root For a function $f(x)$, a solution of the equation $f(x) = 0$.

جذر بالنسبة إلى الدالة $f(x)$. يمثل حل المعادلة $f(x) = 0$.

rose The graph of a polar equation of the form $r = a \cos n\theta$ or $r = a \sin n\theta$, where $n \geq 2$ is an integer.

منحنى وردي التمثيل البياني للمعادلة القطبية التي تأخذ الصيغة $r = a \cos n\theta$ أو $r = a \sin n\theta$، حيث $n \geq 2$ عدد صحيح.

rotation matrix A matrix used to rotate an object.

مصفوفة الدوران مصفوفة تستخدم لدوران جسم ما.

row-echelon form A matrix is in row-echelon form if the following conditions are met.

- Rows of all zeros (if any) appear at the bottom of the matrix.
- The first nonzero entry in any row is 1.
- For two successive rows with nonzero entries, the leading 1 in the higher row is farther to the left than the leading 1 in the lower row.

نموذج صيغة الصف مصفوفة في نموذج صيغة الصف في حال استيفاء الشروط التالية.

- ظهور الصفوف التي تحتوي على جميع الأصفار (إن وجدت) أسفل المصفوفة.
- أن يكون أول مدخل غير صفري في أي صف من الصفوف هو العدد 1.
- بالنسبة إلى الصفين المتتاليين ذوي الإدخالات غير الصفرية، يكون العدد 1 الأساسي في الصف الأعلى أبعد من العدد 1 الأساسي في الصف الأدنى ناحية اليسار.

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

row matrix A matrix that has only one row.

مصفوفة الصف المصفوفة التي تحتوي على صف واحد فقط.

S

sample A part of a population.

عينة جزء من مجتمع إحصائي.

sample correlation coefficient A measure that determines the type and strength of the linear relationship between the variables in bivariate data that represent a sample of the population.

معامل ارتباط العينة مقياس يحدد نوع العلاقة الخطية وقوتها بين المتغيرات في البيانات ذات المتغيرين التي تمثل عينة المجتمع الإحصائي.

sampling distribution A distribution of the means of random samples of a certain size that are taken from a population.

توزيع العينات توزيع متوسطات حسابية للعينات العشوائية المحددة الحجم المأخوذة من المجتمع الإحصائي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

sampling error Occurs when a sample is not a complete representation of the population and causes differences between sample means and the population mean.

خطأ العينة يحدث هذا الخطأ إذا لم تمثل العينة المجتمع الإحصائي تمثيلاً كاملاً مما يؤدي إلى تباينات بين المتوسطات الحسابية للعينة والمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي.

sample space The set of all possible outcomes of an experiment.

الفضاء العيني مجموعة النتائج المحتملة للتجربة.

scalar A constant.

كمية عددية كمية ثابتة.

scalar multiplication Multiplying any matrix by a constant called a scalar; the product of a scalar k and an $m \times n$ matrix.

ضرب قياسي ضرب أي مصفوفة في كمية ثابتة يسمى كمية عددية وحاصل ضرب كمية عددية k ومصفوفة $m \times n$.

secant In a right triangle with acute angle θ, the ratio comparing the length of the hypotenuse to the side adjacent to θ. It is the reciprocal of the cosine ratio, or $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$.

قاطع في المثلث قائم الزاوية التي تكون إحدى زواياه زاوية حادة θ. يكون القاطع هو النسبة التي تقارن بين طول الوتر إلى الضلع المجاور للزاوية θ. المعكوس الضربي لنسبة جيب التمام. أو $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$.

secant line The line through two points on a curve.

خط قاطع الخط المار بين نقطتين في المنحنى.

sector In a circle, the region bounded by a central angle and its intercepted arc.

قطاع في الدائرة، هو المنطقة المحصورة بين الزاوية المركزية وقوسها المحصور.

set A collection of objects or numbers, often shown using braces { } and usually named by a capital letter.

مجموعة مجموعة من الأشياء أو الأعداد التي تظهر غالبًا بين قوسين { } وعادة ما يُكتب اسمها بحروف كبيرة.

set-builder notation An expression that describes a set of numbers by using the properties of numbers in the set to define the set, for example $\{x \mid x \geq 8, x \in \mathbb{W}\}$.

رمز بناء مجموعة تعبير يصف مجموعة الأعداد من خلال استخدام خصائص الأعداد في المجموعة لتحديدها. على سبيل المثال، $\{x \mid x \geq 8, x \in \mathbb{W}\}$

sigma notation For any sequence $a_1, a_2, a_3, \ldots$, the sum of the first k terms is denoted $\sum_{n=1}^{k} a_n$, which is read the summation from $n = 1$ to k of a_n. Thus $\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k$ where k is an integer value.

رمز سيجما بالنسبة إلى أي متتالية $a_1, a_2, a_3, \ldots$، يرمز إلى مجموع حدود k الأولى بـ $\sum_{n=1}^{k} a_n$ وتُقرأ صيغة الجمع من $n = 1$ إلى k من a_n. وبالتالي $\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k$

حيث k قيمة عدد صحيح.

sign chart Used to determine on which intervals a polynomial function is positive or negative.

مخطط الاشارات يُستخدم ليحدد في أي الفترات تكون الدالة كثيرة الحدود موجبة أو سالبة.

sine In a right triangle with acute angle θ, the ratio comparing the length of the side opposite θ and the hypotenuse.

جيب الزاوية في المثلث قائم الزاوية الذي يحتوي على الزاوية الحادة θ. يمثل نسبة المقارنة بين طول الضلع المقابل للزاوية θ والوتر.

singular matrix A matrix that does not have an inverse.

مصفوفة مُنفردة المصفوفة التي ليس لها معكوس.

sinusoid Any transformation of a sine function. The general forms of sinusoidal functions are $y = a \sin(bx + c) + d$ and $y = a \cos(bx + c) + d$, where a, b, c, and d are constants and neither a nor b is 0.

منحنى الجيب أي تحويل في دالة جيب الزاوية. إن الصيغ العامة لدوال منحنى الجيب هي $y = a \sin(bx + c) + d$ و $y = a \cos(bx + c) + d$، حيث a و b و c و d أعداد ثابتة ولا يساوي a أو 0 b.

solve a right triangle To find the measures of all of the sides and angles of a right triangle.

حل مثلث قائم الزاوية لإيجاد مقاييس كل أضلاع المثلث قائم الزاوية وزواياه.

spiral of Archimedes The graph of a polar equation of the form $r = a\theta + b$.

حلزون أرشميدس التمثيل البياني لمعادلة قطبية للصيغة $r = a\theta + b$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

square matrix A matrix with the same number of rows and columns.

مصفوفة مربعة مصفوفة عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها.

square root function A function that contains a square root of the independent variable, with parent function $f(x) = \sqrt{x}$.

دالة الجذر التربيعي الدالة التي تحتوي على الجذر التربيعي للمتغير المستقل. باستخدام الدالة الأصلية $f(x) = \sqrt{x}$.

square system A system of linear equations that has the same number of equations as variables.

نظام تربيعي نظام معادلات خطية يحتوي على معادلات بنفس عدد المتغيرات.

standard deviation The average amount by which individual items deviate from the mean of all the data found by taking the square root of the variance and represented by σ.

انحراف معياري متوسط المقدار الذي من خلاله تنحرف العناصر الفردية من المتوسط الحسابي لجميع البيانات التي يتم إيجادها عن طريق أخذ الجذر التربيعي للتباين ويُعبر عنه بالرمز σ.

standard error of the mean The standard deviation of the sample means, given by $\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

خطأ معياري للمتوسط الحسابي الانحراف المعياري لمتوسطات العينة، ويتم الحصول عليه عن طريق $\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

standard form A complex number written in the form of a + bi.

صيغة قياسية عدد مركب يُكتب بالصيغة a + b*i*.

standard normal distribution A normal distribution of z-values with a mean of 0 and a standard deviation of 1.

توزيع طبيعي معياري توزيع طبيعي لقيم z باستخدام متوسط حسابي 0 وانحراف معياري لـــ 1.

standard position In the coordinate plane, an angle positioned so that its vertex is at the origin and its initial side is along the positive *x*-axis. 2. A vector that has its initial point at the origin.

موقع قياسي في المستوى الإحداثي، يتم تحديد موقع الزاوية بحيث يكون رأسها عند نقطة الأصل وضلعها الابتدائي على امتداد المحور السيني الموجب. 2. المتجه الذي تكون نقطته الابتدائية عند نقطة الأصل.

statistics The science of collecting, analyzing, interpreting and presenting data.

إحصاء العلم الذي يهتم بجمع البيانات وتحليلها وتفسيرها وتمثيلها.

step function A piecewise-defined function in which the graph is a series of line segments that resemble a set of stairs.

دالة خطوية دالة متعددة التعريف يكون فيها التمثيل البياني عبارة عن تسلسل من القطع المستقيمة التي تشبه مجموعة من الدرجات.

subset If every element of set B a set is contained in set A, then B is a subset of A.

مجموعة جزئية بما أن كل عنصر في المجموعة B يوجد داخل المجموعة A، فإن B تعد مجموعة جزئية من المجموعة A.

substitution method A method of solving a system of equations in which one equation is solved for one variable in terms of the other.

طريقة التعويض طريقة لحل نظام المعادلات الذي يتم فيه حل معادلة واحدة لمتغير واحد بدلالة الآخر.

symmetrical distribution In a data distribution, the data are evenly distributed on both sides of the mean.

توزيع متماثل في توزيع البيانات، تكون البيانات موزعة بالتساوي على كلا جانبي المتوسط الحسابي.

system of equations A set of equations with the same variables.

نظام المعادلات مجموعة المعادلات التي تحتوي على نفس المتغيرات.

system of inequalities A set of inequalities with the same variables.

نظام المتباينات مجموعة المتباينات التي تحتوي على نفس المتغيرات.

T

tangent A line that intersects a circle at exactly one point. 2. In a right triangle with acute angle θ, the ratio comparing the length of the side opposite θ and the side adjacent to θ.

المماس خط يتقاطع مع دائرة عند نقطة واحدة بالضبط. 2. الظل: في المثلث قائم الزاوية الذي يحتوي على الزاوية الحادة θ، فإنه يمثل النسبة التي تقارن بين طول الضلع المقابل للزاوية θ إلى الضلع المجاور للزاوية θ.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

t-distribution A family of curves that are dependent on a parameter known as the degrees of freedom.

توزيع عائلة من المنحنيات التي تعتمد على معلمة تُعرف باسم درجات الحرية.

terminal point The ending point of a vector that is represented by a directed line segment. Also known as the head or tip of the vector.

نقطة طرفية هي نقطة النهاية لمتجه تم تمثيله بواسطة قطعة مستقيمة موجهة. وتُعرف أيضًا باسم رأس أو قمة المتجه.

terminal side The final position of a ray after rotation when forming an angle.

ضلع الانتهاء موقع نهاية الشعاع بعد الدوران عند تكوين زاوية ما.

three-dimensional coordinate system A coordinate system formed by three perpendicular number lines, the *x*–, *y*–, *and* z–axes, that intersect at the origin O. Each point is represented by an ordered triple of real numbers *(x, y,* z*)*.

نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد نظام إحداثي يتكون من ثلاثة خطوط أعداد متعامدة، هي المحاور *x* وy وz، التي تتقاطع عند نقطة الأصل O. ويمثل كل نقطة ثلاثة متجهات مرتبة لأعداد حقيقية (*x*, *y*, z).

torque A vector quantity that measures how effectively a force applied to a lever causes rotation along the axis of rotation.

عزم الدوران كمية متجهة تقيس مدى تأثير القوة المبذولة في العتلة في أن تسبب دورانًا حول محور الدوران.

transcendental function A function that cannot be expressed in terms of algebraic operations, such as an exponential or logarithmic function.

دالة متسامية دالة لا يمكن التعبير عنها في صورة عمليات جبرية، مثل الدالة الأسية أو اللوغاريتمية.

transformation A change in the position or shape of the graph of a parent function.

تحويل تغير في موقع أو شكل التمثيل البياني للدالة الأصلية.

translation A rigid transformation that has the effect of shifting the graph of a function

انسحاب تحويل غير مرن يؤثر في إزاحة

translation matrix The matrix used to represent the translation of a set of points with respect to (h, k) which is equal to $\begin{bmatrix} h & h & h & h \\ k & k & k & k \end{bmatrix}$

التمثيل البياني للدالة مصفوفة تستخدم في تمثيل انسحاب مجموعة من النقاط تتعلق بـ (h, k) التي تساوي $\begin{bmatrix} h & h & h & h \\ k & k & k & k \end{bmatrix}$

transverse axis The segment that has a length of 2a units and connects the vertices of a hyperbola.

محور قاطع قطعة طولها 2a تصل رؤوس القطع الزائد.

triangle method A method of finding the resultant vector by translating one vector so that its tail touches the tip of another. The resultant vector is drawn to form a triangle.

طريقة المثلث طريقة لإيجاد متجه محصل عن طريق سحب متجه واحد بحيث يلامس ذيله قمة المتجه الآخر. ويُرسم المتجه المحصل بحيث يكوّن شكل مثلث.

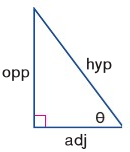
trigonometric form *See* polar form.

صيغة مثلثية انظر الصيغة القطبية.

trigonometric function Let θ be an acute angle in a right triangle and opp, adj, and hyp are the lengths of the side opposite θ, the side adjacent to θ, and the hypotenuse, respectively. Then the trigonometric functions of θ are defined below.

$$\sin\theta = \frac{opp}{hyp} \quad \cos\theta = \frac{adj}{hyp} \quad \tan\theta = \frac{opp}{adj}$$

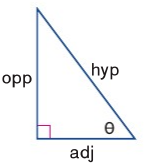
$$\csc\theta = \frac{hyp}{opp} \quad \sec\theta = \frac{hyp}{adj} \quad \cot\theta = \frac{adj}{opp}$$



دالة مثلثية لنفرض أن θ زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية وأن opp وadj وhyp هي أطوال الضلع المقابل للزاوية θ والضلع المجاور للزاوية θ والوتر على التوالي. فعندئذٍ تُعرّف النسب المثلثية للزاوية θ كما يلي.

$$\tan\theta = \frac{opp}{adj} \quad \cos\theta = \frac{adj}{hyp} \quad \sin\theta = \frac{opp}{hyp}$$

$$\cot\theta = \frac{adj}{opp} \quad \sec\theta = \frac{hyp}{adj} \quad \csc\theta = \frac{hyp}{opp}$$



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

trigonometric identity An equation that involves trigonometric functions that is true for all values of the variable.

متطابقة مثلثية معادلة تحتوي على دوال مثلثية حقيقية لجميع قيم المتغير.

trigonometric ratios Ratios that are formed using the side measures of a right triangle and a reference angle θ.

نسب مثلثية النسب التي تتكوّن باستخدام قياسات أضلاع مثلث قائم الزاوية والزاوية المرجعية θ.

triple scalar product If $t = t_1i + t_2j + t_3k$, $u = u_1i + u_2j + u_3k$, and $v = v_1i + v_2j + v_3k$, the triple scalar product is given by $t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$.

A triple scalar product of vectors represents the volume of a parallelepiped.

حاصل ضرب قياسي لثلاثة متجهات بما أن $t = t_1i + t_2j + t_3k, u = u_1i + u_2j + u_3k, and\ v = v_1i + v_2j + v_3k$ إذن يتم الحصول على حاصل الضرب القياسي لثلاثة متجهات عن طريق $t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$. يمثل حاصل الضرب القياسي لثلاثة متجهات حجم متوازي السطوح.

true bearing A directional measurement of a vector where the angle is measured clockwise from north.

اتجاه حقيقي قياس اتجاهي لمتجه بحيث يتم قياس الزاوية باتجاه عقارب الساعة من الشمال.

two-tailed test The hypothesis test if $H_a: \mu \neq k$.

اختبار ثنائي الذيل اختبار الفرضية إذا كان $H_a: \mu \neq k$.

U

union The union of sets A and B is all elements in both A and B, written as $A \cup B$.

اتحاد اتحاد المجموعتين A و B بحيث يشمل كل العناصر الموجودة في كل من A و B. ويُكتب بالصيغة $A \cup B$.

unit circle A circle of radius 1 centered at the origin of a coordinate system.

دائرة الوحدة دائرة نصف قطرها يساوي 1 ويكون مركزها عند نقطة أصل النظام الإحداثي.

unit vector A vector that has a magnitude of 1 unit.

متجه الوحدة متجه طوله وحدة طولية واحدة .

univariate data Data with one variable.

بيانات أحادية المتغير بيانات تتكون من متغير واحد.

universal set The set of all possible elements for a situation.

مجموعة شاملة المجموعة التي تشمل كل العناصر المحتملة لحالة ما.

upper bound A real number b that is greater than or equal to the greatest real zero of a polynomial function.

حد أعلى عدد حقيقي b أكبر من أو يساوي أكبر صفر حقيقي لدالة كثيرة الحدود.

V

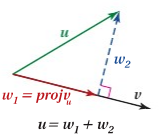
variance The mean of the squares of the deviations from the arithmetic mean.

تباين متوسط مربعات الانحرافات من المتوسط الحسابي.

vector A quantity that has both magnitude and direction.

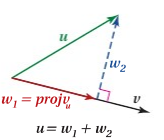
متجه كمية لها مقدار واتجاه.

vector projection Let u and v be nonzero vectors, and let w_1 and w_2 be vector components of u such that w_1 is parallel to v. Then vector w_1 is called the vector projection of u onto v, denoted $proj_v u$, and $proj_v u = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right)v$.



$u = w_1 + w_2$

مسقط المتجه لنفرض أن u وv متجهان غير صفريين. وأنw_1 وw_2 مكونا المتجه u بحيث يكون w_1 موازيًا لـ v. عندئذٍ يُسمى المتجه w_1 مسقط المتجه u على v. ويُشار إلى ذلك بـ $proj_v u, proj_v u = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right)v$.



$u = w_1 + w_2$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

verify an identity To prove that both sides of the equation are equal for all values of the variable for which both sides are defined.

إثبات التطابق إثبات أن كلا طرفَي المعادلة متساوٍ في جميع قيم المتغير الذي تم تحديد كلا الطرفين له.

vertex The common endpoint of two or more noncollinear rays. 2. A point at which a parabola intersects its axis of symmetry. 3. The two endpoints of the major axis of an ellipse.

رأس نقطة النهاية المشتركة لشعاعَين أو أكثر ليسا على الخط نفسه. 2. نقطة يتقاطع عندها القطع المكافئ مع محور تماثله. 3. نقطتا نهاية المحور الأكبر لقطع ناقص.

vertex matrix A matrix used to represent the coordinates of the vertices of an object.

مصفوفة الرأس مصفوفة تستخدم لتمثيل إحداثيات رؤوس جسم ما.

vertical asymptote (p. 98) The line $x = c$ is a vertical asymptote of the graph of f if $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$ or $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$.

خط تقارب رأسي يكون المستقيم $x = c$ خطًا مقاربًا رأسيًا للتمثيل البياني لـ f إذا كان $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$ or $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$.

vertical shift For a sinusoidal function, a vertical translation that is the average of the maximum and minimum values of the function.

إزاحة رأسية بالنسبة إلى الدالة الجيبية، تكون الإزاحة هي الانسحاب الرأسي الذي يمثل متوسط القيم القصوى والدنيا للدالة.

vertices The endpoints of the major axis of an ellipse.

رؤوس نقاط نهاية المحور الأكبر لقطع ناقص.

W

work If a constant force F acts on an object to move it from point A to point B, then the work done equals the dot product of the constant force F and the directed distance $\overrightarrow{AB}$, or $\boldsymbol{F} \cdot \overrightarrow{AB}$.

شغل إذا كانت القوة الثابتة $\boldsymbol{F}$ مبذولة على جسم ما لتحريكه من النقطة A إلى النقطة B. فإن الشغل المبذول يساوي حاصل الضرب النقطي للقوة الثابتة $\boldsymbol{F}$ والمسافة الموجهة $\overrightarrow{AB}$ أو $\boldsymbol{F} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Z

zeros The x-intercepts of the graph of a function.

أصفار التقاطع مع المحور الأفقي x على التمثيل البياني للدالة.

zero function The function sometimes known as the zero function is the constant function with constant $c = 0$. In other words, $f(x) = 0$.

دالة صفرية تعد الدالة التي تُعرف أحيانًا بالدالة الصفرية دالة ثابتة بثابت $c = 0$. بمعنى أن $f(x) = 0$.

zero matrix A matrix in which every element is zero.

مصفوفة صفرية المصفوفة التي يساوي كل عنصر فيها صفرًا.

zero vector The resultant when two opposite vectors are added, has a magnitude of 0 and no specific direction. Also called the null vector, denoted by $\vec{0}$ or 0.

متجه صفري هو المتجه المحصل الذي ينتج عن جمع متجهين متقابلين. وتكون وحدته الطولية 0 ولا يكون له اتجاه معين. ويُعرف أيضًا بالمتجه المنعدم .ويرمز إليه بالرمز $\vec{0}$ أو **0**.

z-axis a third axis in a three-dimensional coordinate system that passes through the origin and is perpendicular to both the x- and y-axes.

محور z المحور الثالث في النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد ويمر عبر نقطة الأصل ويكون متعامدًا على كل من المحور السيني والمحور الصادي.

z-value Represents the number of standard deviations that a given data value is from the mean. Also known as the z-score and z test statistic.

قيمة z تمثل عدد الانحرافات المعيارية التي تحصل عليها قيمة بيانات محددة من المتوسط الحسابي. وتُعرف أيضًا باسم درجة z وإحصاء اختبار z.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

شكر و تقدير

نسخة الطلاب

vii Ermolaev Alexander/Shutterstock.com; viii ©Cultura Creative (RF)/Alamy Stock Photo; ix underworld/Shutterstock.com; x Bikeriderlondon/Shutterstock.com; xi Stokkete/Shutterstock.com; xii Peter Beck/Corbis/Getty Images; xiii Moodboard/AGE Fotostock; xiv Ingram Publishing/SuperStock; xv Bikeriderlondon/Shutterstock.com; xvi Noel Hendrickson/Getty images; xvii Vitalii Nesterchuk/Shutterstock.com, 578 Noel Hendrickson/Getty Images; 580 Netbritish/Shutterstock.com; 582 Roman Babakin/Shutterstock.com; 590 Tom Merton/age fotostock; 594 Spaces Images/Blend Images LLC; 600 Purestock/SuperStock; 606 Jupiterimages/age fotostock; 615 Lorena Fernandez/Shutterstock.com; 625 William Casey/Alamy; 632 Steve Allen/Stockbyte/Getty Images; 648 ©Image Source, all rights reserved.; 664 Vitalii Nesterchuk/Shutterstock.com; 666 Graphic Compressor/Shutterstock.com; 672 Realistic Reflections; 676 (tl)Purestock/Getty Images, (cl)Purestock/Getty Images; 688 Joggie Botma/Alamy; 696 Exactostock/SuperStock; 705 Mark Dierker/McGraw-Hill Education; 710 Spaces Images/Blend Images; 714 David H. Carriere/Getty Images; 716 McGraw-Hill Education; 717 Photo Researchers, Inc/Alamy.