5-1 الأنظمة الخطية متعددة المتغيرات وعمليات الصف الأولية (البسيطة)

:: السابق	:: الحالي	:: لماذا ؟
• حلّلتَ أنظمة المعادلات جبريًا ومثّلتَ البيانات باستخدام المصفوفات.	1 أوجد حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات وحذف جاوس. 2 أوجد حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات وحذف جاوس–جوردان.	• غالبا ما يتم تصنيع السبائك المعدنية في صناعات السيارات لتحسين أداء السيارات. ويمكنك حل نظام من المعادلات لتحديد النسبة المئوية اللازمة من كل معدن لسبيكة محددة.

المفردات الجديدة

نظام خطي متعدد المتغيرات (multivariable linear system)
نموذج درجة الصف (row-echelon form)
حذف جاوس (Gaussian elimination)
مصفوفة موسعة (augmented matrix)
مصفوفة المعاملات (coefficient matrix)
نموذج درجة الصف المنخفض (reduced row-echelon form)
حذف جاوس–جوردان (Gauss-Jordan elimination)

1 حذف جاوس

نظام خطي متعدد المتغيرات أو نظام خطي بأكثر من متغير واحد، عبارة عن نظام معادلات خطية ذات متغيرين أو أكثر. وفي المقررات الدراسية السابقة، ربما تكون قد استخدمت طريقة الحذف لحل مثل هذه الأنظمة. وتبدأ إحدى طرق الحذف بإعادة كتابة نظام باستخدام شكل مثلث معكوس يكون فيه المعامل الرئيس يساوي 1.

يمكن استخدام طريقتي التعويض والحذف اللتين تعلمتهما سابقًا في تحويل نظام خطي متعدد المتغيرات إلى نظام مكافئ في صورة مثلث أو **نموذج درجة صف**.

النظام في صورة نموذج درجة الصف

$$\begin{aligned} x - y - 2z &= 5 \\ y + 4z &= -5 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

لاحظ أن الطرف الأيسر للنظام بشكل مثلثًا تكون فيه المعاملات الرئيسة تساوي 1. وتحتوي المعادلة الأخيرة على متغير واحد فقط، وتحتوي كل معادلة فوقها على المتغيرات المأخوذة من المعادلة الموجودة تحتها مباشرة.

وبمجرد أن يكون النظام في صورة هذا النموذج، يمكن إيجاد الحل بالتعويض. وتحدد المعادلة الأخيرة المتغير الأخير. في المثال أعلاه، تحدد المعادلة الأخيرة أن $z = -2$.

عوّض عن قيمة z في المعادلة الثانية لإيجاد قيمة y.

$y + 4z = -5$	المعادلة الثانية
$y + 4(-2) = -5$	$z = -2$
$y = 3$	حل لإيجاد قيمة y.

عوّض عن قيمة المتغير y والمتغير z في المعادلة الأولى لإيجاد x.

$x - y - 2z = 5$	المعادلة الأولى
$x - 3 - 2(-2) = 5$	$y = 3$ و $z = -2$
$x = 4$	حل لإيجاد قيمة x.

إذًا، يصبح حل النظام هو $x = 4$ و $y = 3$ و $z = -2$.

يطلق على الخوارزمية المستخدمة لتحويل نظام المعادلا ت الخطية إلى نظام مكافئ في صورة نموذج درجة الصف اسم **حذف جاوس** (أو اختزال جاوس)، والذي سُمّي نسبة لاسم عالم الرياضيات الألماني كارل فريدريش جاوس. وتتم الإشارة إلى العمليات المستخدمة لإنتاج أنظمة مكافئة فيما يلي.

المفهوم الأساسي العمليات التي تنتج أنظمة مكافئة

ينتج عن كل من العمليات التالية نظام مكافئ للمعادلات الخطية.

- بدّل بين أي معادلتين.
- اضرب إحدى المعادلتين في عدد حقيقي غير صفري.
- اجمع مضاعف إحدى المعادلتين إلى المعادلة الأخرى.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 5-1 حل أنظمة المعادلات جبريًا وتمثيل البيانات باستخدام المصفوفات.

الدرس 5-1 حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات واختزال جاوس.
حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات واختزال جاوس–جوردان.

بعد الدرس 5-1 حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المعكوسات وقاعدة كرامر.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- لِمَ يكون نظام المعادلات ضروريًا لتحديد النسبة المئوية لكل معدن في السبيكة؟ لأن هناك أكثر من متغير يجب إيجاد قيمته.

- ما الطرق التي تعلمتها بالفعل لحل أنظمة المعادلات؟ التمثيل البياني والاختزال والتعويض
- عند حل نظام معادلات خطية بالا ختزال، ما الذي يجب أن يتحقق لكي تختزل أحد المتغيرات؟ يجب أن تكون القيمة المطلقة لمعامل المتغير في معادلة مساوية للقيمة المطلقة لمعامل المتغير نفسه في معادلة أخرى.

1 اختزال جاوس

يبين **المثال 1** طريقة حل نظام من ثلاث معادلات بثلاثة متغيرات باستخدام اختزال جاوس. يوضح **المثال 2** طريقة كتابة نظام معادلات خطية على هيئة مصفوفة موسعة باستخدام المعاملات والقيود الخاصة بالمعادلات. يبين **المثالان 3 و4** ما تكون عليه المصفوفة في نموذج مستوى الصف وكيف يمكن استخدامها لحل نظام من المعادلات الخطية.

التقويم التكويني

استخدم الأسئلة الواردة في التمرين الموجه بعد كل مثال لتحديد مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 اكتب نظام المعادلات في صيغة مثلثية باستخدام اختزال جاوس. ثم حل النظام.

$x + 3y + 2z = 5$

$3x + y - 2z = 7$

$2x + 2y + 3z = 3$

$x - y - 2z = 1$

$y + z = 1$

$z = -1; (1, 2, -1)$

يتم توضيح الخوارزمية المحددة لحذف جاوس في المثال التالي.

نصيحة دراسية

التفسير الهندسي يمكن تمثيل مجموعة الحل لنظام معادلتين من متغيرين بتقاطع زوج من المستقيمات في مستوى، بينما يمكن تمثيل مجموعة حل نظام ثلاث معادلات من ثلاثة متغيرات بتقاطع ثلاثة مستويات في الفراغ.

مثال 1 حذف جاوس مع نظام

اكتب نظام المعادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم حلّ النظام.

المعادلة 1 $5x - 5y - 5z = 35$

المعادلة 2 $-x + 2y - 3z = -12$

المعادلة 3 $3x - 2y + 7z = 30$

الخطوة 1 بما أن المعامل الرئيس في المعادلة 1 لا يساوي 1، إذًا يمكنك ضرب هذه المعادلة في المعكوس الضربي لمعاملها الرئيس.

$x - y - z = 7 \quad \leftarrow \frac{1}{5}(5x - 5y - 5z = 35)$

$-x + 2y - 3z = -12$

$3x - 2y + 7z = 30$

الخطوة 2 احذف الحد x في المعادلة 2. وللقيام بذلك، استبدل المعادلة 1 بـ (المعادلة 1 + المعادلة 2).

$x - y - z = 7$

$y - 4z = -5 \quad \leftarrow \begin{cases} x - y - z = 7 \\ \underline{(+)\ -x + 2y - 3z = -12} \\ y - 4z = -5 \end{cases}$

$3x - 2y + 7z = 30$

الخطوة 3 احذف الحد x في المعادلة 3 بالتعويض عن المعادلة 3 بـ [3−(المعادلة 1) + المعادلة 3].

$x - y - z = 7$

$y - 4z = -5$

$y + 10z = 9 \quad \leftarrow \begin{cases} -3x + 3y + 3z = -21 \\ \underline{(+)\ 3x - 2y + 7z = 30} \\ y + 10z = 9 \end{cases}$

الخطوة 4 بما أن المعامل الرئيس في المعادلة 2 يساوي 2، إذًا يمكنك بعدها حذف الحد y من المعادلة 3 بالتعويض عن المعادلة 3 بـ [1−(المعادلة 2) + المعادلة 3].

$x - y - z = 7$

$y - 4z = -5$

$14z = 14 \quad \leftarrow \begin{cases} -y + 4z = 5 \\ \underline{(+)\ y + 10z = 9} \\ 14z = 14 \end{cases}$

الخطوة 5 بما أن المعامل الرئيس في المعادلة 3 لا يساوي 1، إذًا يمكنك ضرب هذه المعادلة في المعكوس الضربي لمعاملها الرئيس.

$x - y - z = 7$

$y - 4z = -5$

$z = 1 \quad \leftarrow \frac{1}{14}(14z = 14)$

يمكنك استخدام التعويض لإيجاد أن $y = -1$ و$x = 7$. إذًا، حل النظام هو $x = 7$ و $y = -1$ و $z = 1$ أو الثلاثي المرتب (7, -1, 1).

نصيحة دراسية

تحقق من الحل عند حل نظام معادلات، ينبغي أن تتحقق من حلك باستخدام التعويض في المعادلات الأصلية. ويتم فيما يلي توضيح طريقة التحقق من حل المثال 1.

المعادلة 1:
$5(7) - 5(-1) - 5(1) = 35$ ✔

المعادلة 2:
$-7 + 2(-1) - 3(1) = -12$ ✔

المعادلة 3:
$3(7) - 2(-1) + 7(1) = 30$ ✔

تمرين موجه

اكتب كل نظام معادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم حل النظام.

1A. $x + 2y - 3z = -28$
$3x - y + 2z = 3$
$-x + y - z = -5$
(-4, -3, 6)

1B. $3x + 5y + 8z = -20$
$-x + 2y - 4z = 18$
$-6x + 4z = 0$
(-2, 2, -3)

ولا يؤثر حل نظام المعادلات الخطية باستخدام حذف جاوس إلا على معاملات المتغيرات بالطرف الأيسر والثوابت الموجودة على طرف المعادلة الأيمن. لذا يكون من الأسهل دائمًا تتبع هذه الأعداد فقط باستخدام مصفوفة.

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون بطريقة التواصل بالنسبة لسؤالي التمرين الموجه 1A و1B، أطلب من الطلاب أن يعملوا في مجموعات من ثلاثة. بالنسبة للتمرين 1A ، اطلب من كل فرد في المجموعة اختيار متغير مختلف ليقوم باختزاله كخطوة أولى. ينبغي أن يقوم كل طالب بحل النظام بمفرده. وينبغي على كل فرد شرح حله ومشاركة نتائجه مع المجموعة. بالنسبة للتمرين 1B، أطلب من الطلا ب أن يقرروا كمجموعة أي المتغيرات التي يجب عليهم اختزالها أولاً ثم العمل معًا لحل النظام. ناقش النتائج مع الصف الدراسي.

قراءة في الرياضيات

المصفوفة الموسعة لاحظ أنه يوجد خط متقطع يفصل بين معاملات المصفوفة وعمود القيم الثابتة في المصفوفة الموسعة.

المصفوفة الموسعة هي نظام مكون من المعاملات والحدود الثابتة للمعادلات الخطية، والتي تكتب كل منها في صيغة قياسية مع كتابة الحدود الثابتة في الطرف الأيمن لعلامة يساوي. وإذا لم يتم إدراج الحدود الثابتة، تُختزل المصفوفة إلى **مصفوفة المعاملات** الخاصة بالنظام. وستستخدم هذا النوع من المصفوفات في الدرس 5-3.

نظام المعادلات	المصفوفة الموسعة	مصفوفة المعاملات
$5x - 5y - 5z = 35$ $-x + 2y - 3z = -12$ $3x - 2y + 7z = 30$	$\left[\begin{array}{rrr:r} 5 & -5 & -5 & 35 \\ -1 & 2 & -3 & -12 \\ 3 & -2 & 7 & 30 \end{array}\right]$	$\begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

مثال 2 كتابة مصفوفة موسعة

اكتب المصفوفة الموسعة لنظام المعادلات الخطية التالي.

$$w + 4x + z = 2$$
$$x + 2y - 3z = 0$$
$$w - 3y - 8z = -1$$
$$3w + 2x + 3y = 9$$

عندما تكون جميع المعادلات الخطية في صيغة قياسية،والمتغيرات الأربعة غير متوفرة للنظام في كل معادلة. لذا فإن الحدود المتشابهة لا تُكوّن محاذاة. أعد كتابة النظام، باستخدام المعامل 0 للحدود غير المعلومة. ثم اكتب المصفوفة الموسعة.

المصفوفة الموسعة	نظام المعادلات
$\left[\begin{array}{rrrr:r} 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 9 \end{array}\right]$	$w + 4x + 0y + z = 2$ $0w + x + 2y - 3z = 0$ $w + 0x - 3y - 8z = -1$ $3w + 2x + 3y + 0z = 9$

تمرين موجه

اكتب المصفوفة الموسعة لكل نظام من المعادلات الخطية التالية.

2A. $4w - 5x + 7z = -11$
$-w + 8x + 3y = 6$
$15x - 2y + 10z = 9$

2B. $-3w + 7x + y = 21$
$4w - 12y + 8z = 5$
$16w - 14y + z = -2$
$w + x + 2y = 7$

2A. $\left[\begin{array}{rrrr:r} 4 & -5 & 0 & 7 & -11 \\ -1 & 8 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 15 & -2 & 10 & 9 \end{array}\right]$

2B. $\left[\begin{array}{rrrr:r} -3 & 7 & 1 & 0 & 21 \\ 4 & 0 & -12 & 8 & 5 \\ 16 & 0 & -14 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 7 \end{array}\right]$

تحتوي العمليات الثلاث المستخدمة لاستنباط أنظمة مكافئة على ثلاث عمليات مصفوفة مقابلة يمكن استخدامها لاستنباط مصفوفة موسعة مقابلة. وحيث إنه يقابل كل صف من صفوف المصفوفة الموسعة معادلة من النظام الأصلي، إذًا يطلق على هذه العمليات اسم عمليات الصفوف الأولية.

المفهوم الأساسي عمليات الصفوف الأولية

تنتج كل عملية من عمليات الصفوف التالية مصفوفة موسعة مكافئة.

- بدّل بين أي صفين.
- اضرب أحد الصفين في عدد حقيقي غير صفري.
- اجمع مضاعف أحد الصفين إلى الصف الآخر.

ويطلق على عمليات الصفوف وصف الأولية نظرًا لأنها سهلة الحل. ومع ذلك، يسهل ارتكاب أي خطأ بها. لذا ينبغي تسجيل كل خطوة باستخدام الترميز الموضح أدناه.

① الصف 1، الصف 2، الصف 3

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrr:r} 5 & -5 & -5 & 35 \\ -1 & 2 & -3 & -12 \\ 3 & -2 & 7 & 30 \end{array}\right]$$

② بدّل بين الصفين 2 و3.

$$\begin{array}{c} \\ R_3 \\ R_2 \end{array} \left[\begin{array}{rrr:r} 5 & -5 & -5 & 35 \\ 3 & -2 & 7 & 30 \\ -1 & 2 & -3 & -12 \end{array}\right]$$

③ اضرب الصف 1 في $\frac{1}{5}$.

$$\frac{1}{5}R_1 \rightarrow \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 3 & -2 & 7 & 30 \\ -1 & 2 & -3 & -12 \end{array}\right]$$

④ اجمع 3– أضعاف الصف 1 إلى الصف 2.

$$-3R_1 + R_2 \rightarrow \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 10 & 9 \\ -1 & 2 & -3 & -12 \end{array}\right]$$

مثال إضافي

2 اكتب المصفوفة الموسعة لنظام المعادلات الخطية.

$$x + y - z = 5$$
$$2w + 3x - z = -2$$
$$2w - x + y = 6$$

$$\left[\begin{array}{rrrr:r} 0 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

التركيز على محتوى الرياضيات

حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات يمكن حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات. ويمكن استخدام اختزال جاوس لتحويل المصفوفة إلى نموذج مستوى صف لإيجاد قيمة أحد المتغيرات. ويمكن بعد ذلك استخدام هذا المتغير لإيجاد قيمة المتغيرات الأخرى. في اختزال جاوس– جوردان، يتم تحويل المصفوفة إلى صورة مستوى صف منخفض. وهذه الصورة تعطي قيمة كل متغير في النظام على حدة.

نصيحة دراسية

متكافئة الصف إذا أمكن الحصول على مصفوفة واحدة من خلال مجموعة متتالية من عمليات الصف على مصفوفة أخرى، فحينها يقال على المصفوفتين إنهما متكافئتا الصف.

قارن حذف جاوس من المثال 1 بصيغة مصفوفته باستخدام عمليات الصف.

المصفوفة الموسعة	نظام المعادلات
$\frac{1}{5}R_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & -3 & -12 \\ 3 & -2 & 7 & 30 \end{array}\right]$	$\frac{1}{5}(\text{Eqn. }1) \longrightarrow \begin{aligned} x - y - z &= 7 \\ -x + 2y - 3z &= -12 \\ 3x - 2y + 7z &= 30 \end{aligned}$
$R_1 + R_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 3 & -2 & 7 & 30 \end{array}\right]$	$\text{Eqn. }1 + \text{Eqn. }2 \longrightarrow \begin{aligned} x - y - z &= 7 \\ y - 4z &= -5 \\ 3x - 2y + 7z &= 30 \end{aligned}$
$-3R_1 + R_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 10 & 9 \end{array}\right]$	$-3(\text{Eqn. }1) + \text{Eqn. }3 \longrightarrow \begin{aligned} x - y - z &= 7 \\ y - 4z &= -5 \\ y + 10z &= 9 \end{aligned}$
$-R_2 + R_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 14 & 14 \end{array}\right]$	$-(\text{Eqn. }2) + \text{Eqn. }3 \longrightarrow \begin{aligned} x - y - z &= 7 \\ y - 4z &= -5 \\ 14z &= 14 \end{aligned}$
$\frac{1}{14}R_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$	$\frac{1}{14}(\text{Eqn. }3) \longrightarrow \begin{aligned} x - y - z &= 7 \\ y - 4z &= -5 \\ z &= 1 \end{aligned}$

يقال على المصفوفة الموسعة التي تقابل نموذج درجة الصف من النظام الأصلي للمعادلات إنها أيضًا في نموذج درجة الصف.

المفهوم الأساسي نموذج درجة الصف

تكون المصفوفة في صورة نموذج درجة الصف إذا تم استيفاء الشروط التالية.

- تظهر الصفوف التي تتكون من أصفار تمامًا (إن وُجدت) في نهاية المصفوفة.
- تكون قيمة المدخلة غير الصفري الأول في الصف هي 1، ويسمى *المعامل الرئيس* 1.
- بالنسبة للصفين المتتاليين اللذين يحتمان بمدخلات غير صفرية، يكون المعامل الرئيس 1 في الصف الأعلى أبعد إلى اليسار من المعامل الرئيس في الصف الأدنى.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

نصيحة دراسية

نموذج درجة الصف لا يعتبر نموذج درجة الصف للمصفوفة فريدًا، نظرًا لأنه يوجد العديد من توافيق عمليات الصفوف التي يمكن إجراؤها. ومع ذلك سيظل الحل النهائي لنظام المعادلات كما هو دائمًا.

مثال 3 تحديد المصفوفة الموسعة في صورة نموذج درجة الصف

حدد ما إذا كانت كل مصفوفة في صورة نموذج درجة الصف.

a. $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right]$

يوجد صفر أدنى المعامل الرئيس في الصف الأول. لذا، فإن المصفوفة في شكل نموذج درجة الصف.

b. $\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 6 & 2 & -11 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

يوجد صفر أدنى كل من المعاملات الرئيسة في كل صف. لذا، فإن المصفوفة في شكل نموذج درجة الصف.

c. $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 5 & -6 & 10 \\ 0 & 1 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \end{array}\right]$

لا يوجد صفر أدنى المعامل الرئيس في الصف 2.

لذا، فإن المصفوفة ليست في شكل نموذج درجة الصف.

تمرين موجه

3A. $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -6 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \end{array}\right]$ لا

3B. $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -20 \end{array}\right]$ نعم

3C. $\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 1 & 0 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & -3 & 10 & -7 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right]$ لا

مثال إضافي

3 حدد ما إذا كانت كل مصفوفة في صورة نموذج مستوى الصف.

a. $\left[\begin{array}{cc:c} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ نعم

b. $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$ لا

c. $\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ نعم

التدريس باستخدام التكنولوجيا

السبورة البيضاء التفاعلية اطلب من الطلاب حل أمثلة متعددة باستخدام عمليات الصف مع الفصل الدراسي على السبورة البيضاء التفاعلية. واحفظ الحل على هيئة صفحات ملاحظات متعددة. في نهاية الحصة، أرسل الملاحظات بالبريد الإلكتروني إلى الطلاب أو انشرها على صفحة الويب الخاصة بالصف الدراسي. فهذا قد يساعد الطلاب على التركيز أثناء الدرس بدلاً من محاولة نسخ خطوات الحل من السبورة البيضاء.

مثال إضافي

4 المطاعم طلبت ثلاث عائلات وجبات برجر بقري، وأصابع البطاطس المحمرة، ومشروبات. يظهر بالأسفل الأصناف التي طلبوها وإجمالي الفواتير. اكتب نظام معادلات وأوجد حلاً له لتحديد تكلفة كل صنف.

العائلة	برجر بقري	بطاطس محمرة	مشروبات	الإجمالي (AED)
A	6	5	5	55
B	2	1	1	15
C	1	3	2	18

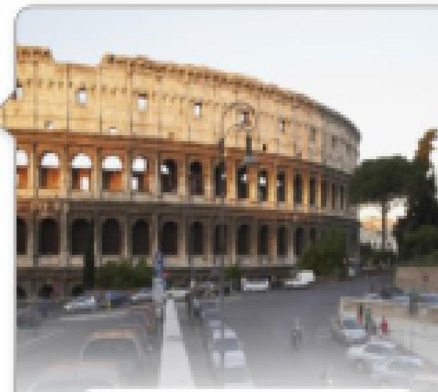
برجر بقري: AED 5، بطاطس محمرة: AED 3، مشروبات: AED 2.

لحل نظام معادلات باستخدام مصفوفة موسعة وحذف جاوس، استخدم عمليات الصف لتحويل المصفوفة بحيث تكون في شكل نموذج درجة الصف. ثم اكتب نظام المعادلات المقابل واستخدم التعويض لإنهاء حل النظام. تذكر أنه إذا واجهتك معادلة خاطئة، فسيعني ذلك أن النظام ليس له حل.

مثال 4 من الحياة اليومية حذف جاوس مع مصفوفة

السفر ذهب محمد إلى إيطاليا أثناء عطلة الربيع. ويتم فيما يلي توضيح متوسط التكاليف اليومية للفندق والطعام والمواصلات لكل مدينة زارها. اكتب نظامًا للمعادلات وأوجد حلاً له لتحديد عدد الأيام التي قضاها محمد في كل مدينة. فسّر حلك.

النفقات	البندقية	روما	نابولي	الإجمالي
الفنادق	AED 60	AED 120	AED 60	AED 720
الطعام	AED 40	AED 90	AED 30	AED 490
وسائل النقل	AED 15	AED 10	AED 20	AED 130



الربط بالحياة اليومية

في الأعوام الأخيرة، كانت إيطاليا رابع أكثر الدول التي تحظى بالزيارة عالميًا، حيث بلغ عدد السياح أكثر من 40 مليون سائح.

المصدر: منظمة السياحة العالمية

اكتب المعطيات في صورة نظام معادلات. افترض أن x و y و z تمثل عدد الأيام التي قضاها محمد في البندقية وروما ونابولي على التوالي.

$$60x + 120y + 60z = 720$$
$$490 = 40x + 90y + 30z$$
$$130 = 15x + 10y + 20z$$

بعد ذلك، اكتب المصفوفة الموسعة وطبق عمليات الصف الأولية للحصول على نموذج درجة الصف للمصفوفة.

مصفوفة موسعة

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 60 & 120 & 60 & 720 \\ 40 & 90 & 30 & 490 \\ 15 & 10 & 20 & 130 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{60}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 40 & 90 & 30 & 490 \\ 15 & 10 & 20 & 130 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-40R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \\ 15 & 10 & 20 & 130 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{10}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 15 & 10 & 20 & 130 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-15R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -20 & 5 & -50 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{20R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -15 & -30 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{15}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

يمكنك استخدام التعويض لإيجاد أن $y = 3$ و $x = 1.4$ إذًا، حل النظام هو $x = 4$، و $y = 3$، و $z = 2$.
أو المجموعة المرتبة ثلاثية العناصر (4, 3, 2).

قضى محمد 4 أيام في البندقية و 3 أيام في روما ويومين في نابولي.

الإجابة النموذجية: لا يوجد حل لهذا النظام. لا يوجد قيم للمتغيرات x و y و z لتحقيق $0x + 0y + 0z = 1$. ولا بد من تقديم معطيات أكثر لتحديد عدد الأيام التي قضاها محمد في كل مكان.

نصيحة دراسية

أنواع الحلول تذكر أنه يمكن أن يكون لنظام المعادلات حل واحد، وقد لا يكون له حلول، أو يكون له عدد لا نهائي من الحلول.

تمرين موجه

4. **السفر** في العام التالي، سافر محمد إلى فرنسا لقضاء عطلة الربيع. ويتم فيما يلي توضيح متوسط التكاليف اليومية للفندق والطعام والمواصلات لكل مدينة زارها في فرنسا. اكتب نظامًا للمعادلات وأوجد حلاً له لتحديد عدد الأيام التي قضاها محمد في كل مدينة. فسّر حلك.

النفقات	باريس	ليون	مارسيليا	الإجمالي
الفنادق	AED 80	AED 70	AED 80	AED 500
الطعام	AED 50	AED 40	AED 50	AED 330
وسائل النقل	AED 10	AED 10	AED 10	AED 70

286 | الدرس 1-5 | الأنظمة الخطية متعددة المتغيرات وعمليات الصف الأولية (البسيطة)

2 حذف جاوس-جوردان

حذف جاوس-جوردان إذا واصلت تطبيق عمليات الصف الأولية على نموذج درجة الصف من مصفوفة موسعة، فيمكنك الحصول على مصفوفة تكون قيمة أول عنصر غير صفري بكل صف فيها هي العدد 1، وتكون قيمة بقية العناصر في نفس العمود الخاص بهذا العنصر هي 0. وهذا ما يُطلق عليه **نموذج درجة الصف المنخفض** بالمصفوفة ويظهر باليسار.

نموذج درجة الصف المنخفض

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ودائمًا ما يكون نموذج درجة الصف المنخفض للمصفوفة فريدًا، بغض النظر عن ترتيب العمليات التي تم إجراؤها.

ويطلق على حل النظام من خلال تحويل مصفوفة موسعة بحيث تكون في شكل نموذج درجة الصف المنخفض اسم **حذف جاوس-جوردان**. وقد تم تسميته بذلك نسبة إلى العالمين كارل فريدريش جاوس وفيلهلم جوردان.

مثال 5 استخدام طريقة حذف جاوس-جوردان

أوجد حلاً لنظام المعادلات.

$$x - y + z = 0$$
$$-x + 2y - 3z = -5$$
$$2x - 3y + 5z = 8$$

اكتب المصفوفة الموسعة. طبق عمليات الصف الأولية للحصول على نموذج درجة صف منخفض.

مصفوفة موسعة $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & 5 & 8 \end{array}\right]$

$R_1 + R_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & -3 & 5 & 8 \end{array}\right]$

$-2R_1 + R_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \end{array}\right]$

$R_2 + R_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$ نموذج درجة الصف

$R_2 + R_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

$R_3 + R_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

$2R_3 + R_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$ نموذج درجة الصف المنخفض

إذًا، حل النظام هو $x = -2$ و $y = 1$ و $z = 3$ أو الثلاثي المرتب (3 ،1 ،2-). تحقق من صحة هذا الحل في النظام الأصلي للمعادلات.

تمرين موجه

أوجد حل كلٍّ من أنظمة المعادلات التالية.

5A. $x + 2y - 3z = 7$ (33, -2, -7)
$-3x - 7y + 9z = -12$
$2x + y - 5z = 8$

5B. $4x + 9y + 16z = 2$ (-74, -9, -33)
$-x - 2y - 4z = -1$
$2x + 4y + 9z = -5$

نصيحة دراسية

الأنماط على الرغم من أنه يمكن استخدام مختلف عمليات الصفوف الأولية لحل نفس نظام المعادلات، فإنه يمكن استخدام نمط عام كدليل للمساعدة في تجنب العمليات المضيعة للوقت. وفيما يتعلق بالنظام الموجود إلى اليسار، ابدأ بالوصول إلى 0 في الحد الأول من الصف الثاني واعمل على حل المصفوفة بالترتيب الموضح، ومن ثم الوصول إلى الأصفار والأعداد 1. وبمجرد أن تنتهي من ذلك، يمكن تحويل الحدود في الصف الأول إلى أصفار وأعداد 1 كذلك.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$$

تلميح تقني

يمكن التحقق من نموذج درجة الصف المنخفض للمصفوفة باستخدام خاصية rref الموجودة في حاسبة التمثيل البياني.

```
rref([A])
    [[1 0 0 -2]
     [0 1 0 1 ]
     [0 0 1 3 ]]
```


2 اختزال جاوس-جوردان

توضح **الأمثلة 7–5** طريقة حل نظام المعادلات الخطية باستخدام عمليات الصف الأولية لتحويل المصفوفة الموسعة بحيث تصبح في صورة مستوى الصف المنخفض. وعادة بمجرد أن تصبح المصفوفة في هذه الصورة، فلا يكون هناك حاجة لمزيد من الحل. فالنظام إما أن يكون له حل واحد أو ليس له حل أو عدد لا نهائي من الحلول.

مثال إضافي

5 أوجد حلاً لنظام المعادلات.
$x - y + z = 3$
$-x + 2y - z = 2$
$2x - 3y + 3z = 8$ (1, 5, 7)

نصيحة للمعلمين الجدد

عدد الحلول يمكن تحديد عدد الحلول لنظام من المعادلات الخطية بالنظر إلى صورة مستوى الصف المنخفض للمصفوفة. فإذا كانت قيمة كل عنصر في أي صف تساوي صفرًا، فهناك عدد لا نهائي من الحلول. وإذا كان كل عنصر في أي صف صفرًا ما عدا الحد الثابت، فليس هناك حل. لاحظ أن هناك أيضًا أنواعًا أخرى من مصفوفات صورة مستوى الصف المنخفض التي تشير إلى وجود عدد لا نهائي من الحلول.

عدد حل نظام معادلا ت. إذا تعذر كتابة المصفوفة في نموذج درجة الصف المنخفض، فسيكون النظام إما بدون حل أو بعدد لا نهائي من الحلول.

مثال 6 بدون حل وبعدد لا نهائي من الحلول

أوجد حل كلٍّ من أنظمة المعادلات التالية.

a. $-5x - 2y + z = 2$
$4x - y - 6z = 2$
$-3x - y + z = 1$

اكتب المصفوفة الموسعة. ثم طبق عمليات الصف الأولية للحصول على مصفوفة درجة صف منخفض.

مصفوفة موسعة $\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -6 & 2 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{-2R_3 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -6 & 2 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{-4R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{3R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{-2R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

وفقًا للصف الأخير، $0x + 0y + 0z = 1$. ونظرًا لاستحالة هذا، إذًا فليس للنظام أي حل.

b. $3x + 5y - 8z = -3$
$2x + 5y - 2z = -7$
$-x - y + 4z = -1$

اكتب المصفوفة الموسعة. ثم طبق عمليات الصف الأولية للحصول على مصفوفة درجة الصف المنخفض.

مصفوفة موسعة $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -8 & -3 \\ 2 & 5 & -2 & -7 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & -7 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{2R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -9 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -9 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{2R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

اكتب نظام المعادلات الخطية المقابل لنموذج درجة الصف المنخفض للمصفوفة الموسعة.

$x - 6z = 4$
$y + 2z = -3$

بما أن قيمة المتغير z غير محددة، يكون لهذا النظام عدد لا نهائي من الحلول. من خلال الحل لإيجاد قيمة x و y بدلالة z، فلديك $x = 6z + 4$ و$y = -2z - 3$.

إذًا، يمكن التعبير عن حل النظام في الصورة $(6z + 4, -2z - 3, z)$، حيث تكون z أي عدد حقيقي.

نصيحة دراسية

عدد لا نهائي من الحلول لا يعتبر حل النظام الموجود في المثال 6b إجابة فريدة نظرًا لأنه يمكن التعبير عن الحل بدلالة أي من المتغيرات في النظام.

تمرين موجه

أوجد حل كلٍّ من أنظمة المعادلات التالية.

6A. $(2.4 + 1.3z, -1.8 - 1.1z, z)$

6A. $3x - y - 5z = 9$
$4x + 2y - 3z = 6$
$-7x - 11y - 3z = 3$

6B. $x + 3y + 4z = 8$
$4x - 2y - z = 6$
$8x - 18y - 19z = -2$

لا يوجد حل

مثال إضافي

6 أوجد حلاً لكل نظام معادلات.

a. $x + 2y + z = 8$
$2x + 3y - z = 13$
$x + y - 2z = 5$
$(5z + 2, 3 - 3z)$

b. $2x + 3y - z = 1$
$x + y - 2z = 5$
$x + 2y + z = 8$
ليس لها حل

نصيحة للمعلمين الجدد

صورة مستوى الصف المنخفض لاحظ أنه عندما يحتوي النظام على عدد معادلات أقل من المتغيرات، فإن عمود المتغيرات الأخير لا يظهر في الصورة المنخفضة. ويتم تخفيض أول ثلاثة أعمدة. وتستخدم المعادلات الناتجة لإيجاد قيمة متغير واحد.

مثال إضافي

7 أوجد حلاً لنظام المعادلات.

$4w + x + 2y - 3z = 10$
$3w + 4x + 2y + 8z = 3$
$w + 3x + 4y + 11z = 11$
$(2z + 1, -3z - 2, -z + 4, z)$

المتابعة

تعرّف الطلاب على طريقة حل الأنظمة متعددة المتغيرات باستخدام عمليات الصف.

اسأل:

- ما مميزات استخدام المصفوفات لحل المسائل؟ الإجابة النموذجية: تقدم المصفوفات طريقة مناسبة لتنظيم البيانات، ويمكن استخدامها لاختصار الترميز، كما يمكن استخدام التكنولوجيا لإجراء عمليات المصفوفات بسرعة.
- لم تعد القدرة على شرح استنتاجك أمرًا مهمًا؟ الإجابة النموذجية: لأنك قد تكتشف أخطاءً كنت قد ارتكبتها أثناء حل المسألة، مما قد يحول دون الوقوع في الأخطاء مستقبلاً. قد تكتشف أيضًا طريقة أكثر فعالية لحل المسائل.

عندما يكون للنظام عدد أقل من المعادلات مقارنة بالمتغيرات، فسيكون النظام إما بدون حل أو بعدد لا نهائي من الحلول. وعند حل نظام معادلات من ثلاثة متغيرات أو أكثر، فمن المهم التحقق من إجابتك باستخدام جميع المعادلات الأصلية. ويعتبر ذلك ضروريًا لأنه من المحتمل أن ينجح الحل غير الصحيح مع بعض المعادلات بينما لا ينجح مع الأخرى.

الربط بتاريخ الرياضيات

فيلهلم جوردان
(1842-1899)
جيوديسي ألماني ينسب إليه فضل تبسيط طريقة جاوس لحل نظام المعادلات الخطية بحيث يمكن تطبيقها لتقليل الخطأ التربيعي في عمليات المسح.

مثال 7 عدد لانهائي من الحلول

أوجد حلاً لنظام المعادلات.

$3x - 8y + 19z - 12w = 6$
$2x - 4y + 10z = -8$
$x - 3y + 5z - 2w = -1$

اكتب المصفوفة الموسعة. ثم طبّق عمليات الصف الأولية للحصول على المعاملات الرئيسة التي تساوي 1 في كل صف والأصفار أدنى هذه المعاملات في كل عمود.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -8 & 19 & -12 & 6 \\ 2 & -4 & 10 & 0 & -8 \\ 1 & -3 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 10 & 0 & -8 \\ 3 & -8 & 19 & -12 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -6 \\ 3 & -8 & 19 & -12 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-3R_1 + R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 4 & -6 & 9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -6 & 9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_2 + R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3R_2 + R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 4 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 4 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-5R_3 + R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 14 & -25 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

اكتب النظام المقابل لنظام المعادلات الخطية لنموذج درجة الصف المنخفض للمصفوفة الموسعة.

$x + 14w = -25$
$y + 2w = -3$
$z - 2w = 3$

لهذا النظام من المعادلات عدد لا نهائي من الحلول، حيث إنه لكل قيمة من قيم w هناك ثلاث معادلات، والتي يمكن استخدامها لإيجاد القيم المقابلة للمتغيرات x وy وz. ومن خلال الحل لإيجاد قيمة x و y وz بدلالة w، يكون لديك $x = -14w - 25$ و$y = -2w - 3$ و$z = 2w + 3$.

إذًا، يمكن التعبير عن حل النظام في صورة $(-14w - 25, -2w - 3, 2w + 3, w)$، حيث تعبر w عن أي عدد حقيقي.

التحقق باستخدام القيم المختلفة للمتغير w، احسب بعض الحلول وتحقق من صحتها في النظام الأصلي للمعادلات. فعلى سبيل المثال، إذا كانت $w = 1$، فإن حل النظام يكون $(-39, -5, 5, 1)$. ويتحقق هذا الحل في كل معادلة من النظام الأصلي.

$3(-39) - 8(-5) + 19(5) - 12(1) = 6$ ✔
$2(-39) - 4(-5) + 10(5) = -8$ ✔
$(-39) - 3(-5) + 5(5) - 2(1) = -1$ ✔

تمرين موجه

أوجد حل كلٍ من أنظمة المعادلات التالية. 7A. $(2z - 5, -8z + 3, 9z - 10, z)$

7A. $-5w + 10x + 4y + 54z = 15$
$w - 2x - y - 9z = -1$
$-2w + 3x + y + 19z = 9$

7B. $3w + x - 2y - 3z = 14$ لا يوجد حل
$-w + x - 10y + z = -11$
$-2w - x + 4y + 2z = -9$

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 39 للتحقق من الاستيعاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع في مسائل التمارين 1-4 و22-25، ذكّر الطلاب بترتيب المعادلات بالشكل $ax + by = c$؛ حيث c هي الحد الثابت، قبل كتابة المصفوفة.

تحليل الخطأ بالنسبة للتمرين 52، ينبغي للطلاب إدراك أن مصفوفتي يوسف وعبد الله كليهما تعطي الحل الصحيح، $(-1, 2, 4)$. لاحظ أن مصفوفة يوسف، $2R_2 + R_1$ تنتج الصف 1 من مصفوفة عبد الله.

إجابات إضافية

9. $\left[\begin{array}{cc|c} 12 & -5 & -9 \\ -3 & 8 & 10 \end{array}\right]$

10. $\left[\begin{array}{cc|c} -4 & -6 & 25 \\ 7 & 2 & 16 \end{array}\right]$

11. $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 7 & 9 \\ -10 & 1 & 8 & 6 \\ 4 & 0 & -15 & -8 \end{array}\right]$

12. $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -1 & 27 \\ -8 & 7 & -6 & -35 \\ 12 & -3 & 5 & 20 \end{array}\right]$

13. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 5 & 0 & 11 \\ 7 & 2 & -3 & 9 & -5 \\ 6 & 0 & 12 & -15 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & -8 & -13 \end{array}\right]$

14. $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 14 & -2 & 3 & -22 \\ 5 & -4 & 0 & 11 & -8 \\ 2 & 0 & -6 & 3 & 15 \\ 3 & 7 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

15b. $\left[\begin{array}{ccc|c} 30 & 40 & 200 & 684.50 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right]$

تمارين

اكتب كل نظام معادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم حل النظام. (مثال 1)

1. $5x = -3y - 31$
$2y = -4x - 22$ $(-2, -7)$

2. $4y + 17 = -7x$ $(-1, 3)$
$8x + 5y = -19$

3. $12x = 21 - 3y$ $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$
$2y = 6x + 7$

4. $4y = 12x - 3$ $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$
$9x = 20y - 2$

5. $-3x + y + 6z = 15$
$2x + 2y - 5z = 9$
$4x - 5y + 2z = -3$ $(5, 9, 8)$

6. $8x - 24y + 16z = -7$
$40x - 9y + 2z = 10$
$32x + 8y - z = -2$ $\left(\frac{1}{8}, -1, -2\right)$

7. $3x + 9y - 6z = 17$
$-2x - y + 24z = 12$
$2x - 5y + 12z = -30$
$\left(-6, 4, \frac{1}{6}\right)$

8. $5x - 50y + z = 24$
$2x + 10y + 3z = 23$
$-5x - 20y + 10z = 13$
$\left(5, \frac{1}{10}, 4\right)$

اكتب المصفوفة الموسعة لكل نظام من المعادلات الخطية التالية. (مثال 2) 9-14. انظر الهامش.

9. $12x - 5y = -9$
$-3x + 8y = 10$

10. $-4x - 6y = 25$
$7x + 2y = 16$

11. $3x - 5y + 7z = 9$
$-10x + y + 8z = 6$
$4x - 15z = -8$

12. $4x - z = 27$
$-8x + 7y - 6z = -35$
$12x - 3y + 5z = 20$

13. $w - 8x + 5y = 11$
$7w + 2x - 3y + 9z = -5$
$6w + 12y - 15z = 4$
$3x + 4y - 8z = -13$

14. $14x - 2y + 3z = -22$
$5w - 4x + 11z = -8$
$2w - 6y + 3z = 15$
$3w + 7x - y = 1$

15a. $30c + 40p + 200g = 684.50$; $p - c = -2$; $c - 5g = 0$

15. **بيع المخبوزات** نظم أعضاء مجموعة شبابية معرضًا لبيع المخبوزات لجمع الأموال لرحلة صيفية. وقد باعوا 30 كعكة و 40 فطيرة و 200 كعكة كوكيز كبيرة وجمعوا مبلغًا قدره 684.50 AED. وتكون تكلفة الفطيرة أقل من تكلفة الكعكة بمقدار 2 AED وتكون تكلفة الكعكة 5 أضعاف تكلفة كعكة الكوكيز الكبيرة. (مثال 2) b. انظر الهامش.

a. افترض أن المتغير c = عدد الكعك وأن المتغير p = عدد الفطائر والمتغير g = عدد كعكات الكوكيز الكبيرة. اكتب نظامًا من ثلاث معادلات خطية لتمثيل هذه المسألة.

b. اكتب المصفوفة الموسعة لنظام المعادلات الخطية الذي كتبته في الجزء a.

c. أوجد حلًا لنظام المعادلات. فسّر حلك.
(6.95, 4.95, 1.39)؛ تكلفة الكعكة 6.95 AED وتكلفة الفطيرة 4.95 AED وتكلفة كعكة الكوكيز الكبيرة 1.39 AED.

حدد ما إذا كانت كل مصفوفة في صورة نموذج درجة الصف. (مثال 3)

16. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$ نعم

17. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ نعم

18. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -8 & 12 \\ 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$ لا

19. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ نعم

20. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ لا

21. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ نعم

22-29. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

أوجد حل كل نظام معادلات باستخدام حذف جاوس أو حذف جاوس-جوردان. (المثالان 4 و 5)

22. $2x = -10y + 11$
$-8y = -9x + 23$

23. $4y + 17 = -7x$
$8x + 5y = -19$

24. $x + 7y = 10$
$3x + 9y = -6$

25. $7y = 9 - 5x$
$8x = 2 - 5y$

26. $3x - 4y + 8z = 27$
$9x - y - z = 3$
$x + 8y - 2z = 9$

27. $x + 9y + 8z = 0$
$5x + 8y + z = 35$
$x - 4y - z = 17$

28. $4x + 8y - z = 10$
$3x - 8y + 9z = 14$
$7x + 6y + 5z = 0$

29. $2x - 10y + z = 28$
$-5x + 11y + 7z = 18$
$6x - y - 12z = 14$

30. **القهوة** يتخصص مقهى محلي في تقديم مشروبات الإسبريسو. ويوضح الجدول أدناه عدد الأكواب لكل مشروب تم بيعه طوال اليوم. اكتب نظام معادلات وأوجد حلاً له لتحديد سعر كل مشروب إسبريسو. فسّر حلك. (مثال 4)

الساعات	كابتشينو	لاتيه	قهوة ماكياتو	الأرباح (AED)
8-11	103	86	79	1040.25
11-2	48	32	26	406.50
2-5	45	25	18	334.00

كابتشينو: 3.50 AED؛ لاتيه: 4.00 AED؛ ميكاتو: 4.25 AED

31. **بائع زهور** يوضح إعلان لمحل زهور أسعار العديد من تنسيقات الزهور وقائمة من الزهور الموجودة في كل تنسيق على النحو الموضح أدناه. اكتب نظام معادلات وأوجد حلاً له لتحديد سعر كل نوع من الزهور. فسّر حلك. (مثال 6)

انظر ملحق إجابات الوحدة 5.


زهرة الزنبق AED 35.00
4 زهور، 12 زهرة زنبق، 5 زهور السوسن


الحديقة المشمسة AED 50.25
6 زهور، 9 زهور زنبق، 12 زهرة السوسن


نسمات الصيف العليل AED 83.75
10 زهور، 15 زهرة زنبق، 20 زهرة السوسن

أوجد حل كلٍّ من أنظمة المعادلات التالية. (المثالان 6 و 7)

32. $-2x + y - 3z = 0$
$3x - 4y + 10z = -7$
$5x + 2y + 8z = 23$
$(1, 5, 1)$

33. $4x - 5y - 9z = -25$
$-6x + y + 7z = -21$
$7x - 3y - 10z = 8$
$(z + 9, 5 - z, z)$

34. $-x + 3y + 10z = 8$
$4x - 9y - 34z = -17$
$3x + 5y - 2z = 46$
$(4z + 5, 7 - 2z, z)$

35. $5x - 4y - 7z = -31$
$2x + y - 8z = 11$
$-4x + 3y + 6z = 23$
$(3z + 2, 1z + 9, z)$

36. $-3x + 4y - z = -10$
$6x - y - 5z = -29$
$4x - 5y + z = 11$
$(z - 6, z - 7, z)$

37. $8x - 9y - 4z = -33$
$-2x + 3y - 2z = 9$
$-7x + 6y + 11z = 27$
$(5z - 4, 3z + 1, z)$

38. $2x - 5y + 4z + 4w = 2$
$-3x + 6y - 2z - 7w = 11$
$5x - 4y + 8z - 5w = 29$
$(w + 2, 1w + 4, w + 5, w)$

39. $x - 4y + 4z + 3w = 2$
$-2x - 3y + 7z - 3w = -9$
$3x - 5y + z + 10w = 15$
$(w - 3, 2w - 2, 5w - 4, w)$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-39, 50, 52, 53, 55-74	1-39 فردية، 71-74	2-38 زوجية، 50، 52، 53، 55-70
OL ضمن المستوى	1-43 فردية، 44، 45-49 فردية، 50، 52، 53، 55-74	1-39, 71-74	40-50, 52, 53, 55-70
BL أعلى من المستوى	40-74		

.40–43 انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

حاسبة التمثيل البياني أوجد نموذج درجة الصف ونموذج درجة الصف المنخفض لكل نظام من الأنظمة التالية.

B

40. $3x + 2.5y = 18$
$6.8x - 4y = 29.2$

41. $\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}y = 8$
$\frac{3}{4}x + \frac{5}{8}y = \frac{5}{2}$

42. $7x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{6}z = -\frac{13}{3}$
$-\frac{3}{5}x + y - \frac{1}{3}z = \frac{11}{10}$
$2x - \frac{2}{5}y - \frac{1}{2}z = -6$

43. $15.9x - y + 4.3z = 14.8$
$-8.2x + 14y = 14.6$
$-11x + 0.5y - 1.6z = -20.4$

44. **المعرفة المالية** حصلت شركة معدات رياضية على ثلاثة قروض مختلفة من أحد البنوك لشراء أجهزة الجري الكهربائية. ويتم عرض بيان البنك بعد العام الأول أدناه. وقد كان المبلغ المقترض بمعدل فائدة 6.5% أقل بمقدار AED 50,000 من المبلغين المقترضين بالمعدلين الآخرين مجتمعين. a–b. انظر الهامش.

شركة بنك الخليج

ملخص البيان

المبلغ المقترض		AED 350.000
القرض 1	معدل الفائدة	6.5%
القرض 2	معدل الفائدة	7%
القرض 3	معدل الفائدة	9%
الفائدة المدفوعة		AED 24.950

a. اكتب نظامًا من ثلاث معادلات خطية لتمثيل هذه الحالة.

b. استخدم حاسبة التمثيل البياني لحل نظام المعادلات. فسّر الحل.

C

حدد عملية الصف التي تم القيام بها للحصول على كل مصفوفة.

47. $3R_1 + R_4$ 48. $-R_1 + R_2$

45. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$ $R_2 + R_3$

46. $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -5 & 4 \\ 9 & -1 & 4 & -2 \\ 8 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -5 & 4 \\ 9 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 7 & -7 \end{array}\right]$

$-2R_1 + R_3$

47. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 15 & 2 & 4 & 14 \\ 0 & 8 & 5 & -5 & 15 \\ 2 & 1 & 0 & 16 & 20 \\ -3 & -11 & -1 & 6 & -4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 15 & 2 & 4 & 14 \\ 0 & 8 & 5 & -5 & 15 \\ 2 & 1 & 0 & 16 & 20 \\ 0 & 34 & 5 & 18 & 38 \end{array}\right]$

48. $\left[\begin{array}{ccccc|c} 8 & -2 & 0 & 2 & 12 & -2 \\ 8 & 5 & -7 & 1 & 6 & 9 \\ -1 & 0 & 9 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 8 & -2 & 0 & 2 & 12 & -2 \\ 0 & 7 & -7 & -1 & -6 & 11 \\ -1 & 0 & 9 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$

49. **الطب** هناك حاجة إلى محلول ملحي مخفف للإجراءات الطبية الروتينية في المستشفى. وتحتوي غرفة الإمدادات على كمية كبيرة من المحلول الملحي بتركيز 20% والمحلول الملحي بتركيز 40% ولكنها تحتاج إلى 10 لترات من المحلول الملحي بتركيز 25%.

a–b. انظر الهامش.

a. اكتب نظام معادلات لتمثيل هذه الحالة.

b. أوجد حلاً لنظام المعادلات. فسّر الحل.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

50. **مسألة غير محددة الإجابة** ضع نظامًا من 3 معادلات بمتغيرات له عدد لا نهائي من الحلول. اشرح استنتاجك.

انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

51. **تحدٍ** ادرس نظام المعادلات التالي. ما قيمة k التي تجعل النظام متوافقًا ومستقلًا؟

$2x + 2y = 5$
$5y - kz = -22$
$2x + 5z = 26$
$-2x + ky + z = -8$

3 أو $\frac{27}{34}$

52. **تحليل الخطأ** يكتب يوسف وعبد الله المصفوفة الموسعة للنظام أدناه في صورة نموذج درجة الصف.

$2x - y + z = 0$
$x + y - 2z = -7$
$x - 3y + 4z = 9$

انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

يوسف	عبد الله
$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$

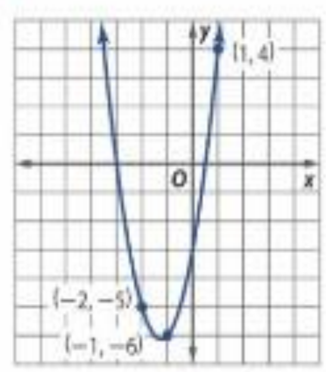
هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

53. **الاستنتاج** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. إذا كانت المصفوفة التربيعية الموسعة والمكتوبة في صورة نموذج درجة الصف وكان صفها الأخير صفًا من الأصفار، فحينها لا يكون لنظام المعادلات المقابل حل. اشرح استنتاجك.

انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

54. **تحدٍ** يمر قطع مكافئ عبر ثلاث نقاط موضحة في التمثيل البياني أدناه.

a. $4a - 2b + c = -5$
$a - b + c = -6$
$a + b + c = 4$



a. اكتب نظام معادلات يمكن استخدامه لإيجاد معادلة القطع المكافئ في النموذج $f(x) = ax^2 + bx + c$.

b. استخدم المصفوفات لحل نظام المعادلات الذي كتبته في الجزء a. (2, 5, -3)

c. استخدم الحل الذي أوجدته في الجزء b لكتابة معادلة للقطع المكافئ. ثم تحقق من النتائج باستخدام حاسبة التمثيل البياني. $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

55. **الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل بين حذف جاوس وحذف جاوس-جوردان.

إجابات إضافية

44a. $x + y + z = 350{,}000;\ 0.065x + 0.07y + 0.09z = 24{,}950;\ x - y - z = -50{,}000$

44. حصلت الشركة على قرض بقيمة AED 150,000 بمعدل فائدة 6.5%، وقرض بقيمة AED 140,000 بمعدل فائدة 7% وقرض بقيمة AED 60,000 بمعدل فائدة 9%.

49b. (7.5, 2.5)؛ ستحتاج الممرضات إلى خلط 7.5 L من المحلول الملحي بتركيز 20% و 2.5 L من المحلول بتركيز 40%.

مراجعة شاملة

اثبت صحة كل متطابقة. 58–56. انظر الهامش.

56. $2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x$

57. $\tan^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

58. $\frac{1}{\sin x \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \tan x$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مثلثي مما يلي.

59. $\cos 105°$ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

60. $\sin 165°$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

61. $\cos\frac{7\pi}{12}$ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

62. $\sin\frac{\pi}{12}$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

63. $\cot\frac{113\pi}{12}$ $2-\sqrt{3}$

64. $\sec 1275°$ $\sqrt{2}-\sqrt{6}$

65. **الكرة اللينة** في لعبة الكرة اللينة ذات الرميات البطيئة، تعد الماسة مربعا يبعد 65 قدما عن كل جانب. وتكون المسافة بين مكان الرامي وصفيحة الملعب 50 قدمًا. فما بعد المسافة التي يحتاج الرامي إليها لرمي الكرة من مكان الرامي إلى القاعدة الثالثة لإيقاف لاعب يحاول الاستيلاء على القاعدة الثالثة؟ نحو 46.1 ft

66. **الصقر** في أحد مراكب الجولات السياحية الاستطلاعية بالقرب من قاعدة شلالات حدوة الحصان بشلالات نياجرا، قدّر أحد الركاب زاوية الارتفاع إلى أعلى الشلالات بـ $30°$. فإذا كان ارتفاع شلالات حدوة الحصان 173 قدمًا، فما المسافة من المركب إلى قاعدة الشلالات؟ نحو 300 ft

67. **الأرانب** تتكاثر الأرانب بمعدلات ضخمة وتتزايد أعدادها أسيا في غياب أعدائها الطبيعيين. افترض أنه كان هناك في الأصل 65,000 أرنب في منطقة ما، وبعدها بعامين أصبح العدد 2,500,000 أرنب.

a. اكتب دالة أسية يمكن استخدامها لتمثيل عدد الأرانب y في هذه المنطقة. اكتب الدالة بدلالة x، عدد الأعوام منذ العام الأصلي. $y = 65{,}000(6.2)^x$

b. افترض أن عدد الأرانب استمر في النمو بهذا المعدل. قدّر عدد الأرانب في هذه المنطقة بعد 7 أعوام من العام الأصلي. نحو 22,890,495,000

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

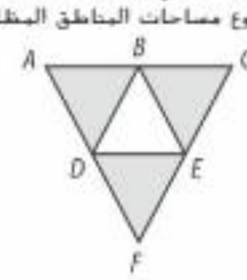
68. $\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} = \frac{17}{12}$ $4, \frac{9}{17}$

69. $\frac{4}{x+3} - \frac{2}{x+1} = \frac{2}{15}$ $9, 2$

70. $\frac{4}{3} - \frac{1}{x-2} = \frac{13}{2x}$ $6, \frac{13}{8}$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

71. **SAT/ACT** $\triangle ACF$ عبارة عن متساوي أضلاع له أضلاع طولها 4. فإذا كان B و D و E هي نقاط المنتصف لأضلاعه على التوالي، فما مجموع مساحات المناطق المظللة؟ B



A $3\sqrt{2}$ C $4\sqrt{2}$ E $6\sqrt{3}$

B $3\sqrt{3}$ D $4\sqrt{3}$

72. **مراجعة** اشترى متعهد تقديم الطعام عدة أرطال من سلطات الدجاج والتونة لوجبة غداء. وتكلف سلطة الدجاج AED 9 لكل رطل، بينما تكلف سلطة التونة AED 6 لكل رطل. وقد اشترى إجمالي 14 رطلاً من السلطة ودفع إجمالي AED 111. فما مقدار سلطة الدجاج التي اشتراها متعهد تقديم الطعام؟ J

F 6 أرطال H 8 أرطال

G 7 أرطال J 9 أرطال

73. يبيع محل للألبان قوالب لبن على شكل مخروط. ويبيع الصغير بتكلفة AED 0.89 والمتوسط بتكلفة AED 1.19 والكبير بتكلفة AED 1.39. وفي أحد الأيام، باع سالم 52 قالبًا. وباع عددًا من القوالب المتوسطة أكبر من القوالب الصغيرة بمقدار سبعة. فإذا باع قوالب بمبلغ AED 58.98، فكم عدد القوالب المتوسطة التي باعها؟ C

A 11 C 24

B 17 D 36

74. **مراجعة** للتدرُّب في المنزل، اشترى علي كرة سلة وكرة طائرة وكان إجمالي تكلفتهما AED 67، غير شاملة للضريبة. فإذا كانت تكلفة كرة السلة b أكبر من ضعف تكلفة كرة الطائرة v بمقدار AED 4، فأي أنظمة المعادلات الخطية يمكن استخدامها لتحديد تكلفة كل كرة؟ G

F $b + v = 67$, $b = 2v - 4$ H $b + v = 4$, $b = 2v - 67$

G $b + v = 67$, $b = 2v + 4$ J $b + v = 4$, $b = 2v + 67$

4 التقويم

تعيين مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب وصف مصفوفة صورة الصف المنخفض إلى زميل وطريقة استخدامها لحل نظام المعادلات الخطية.

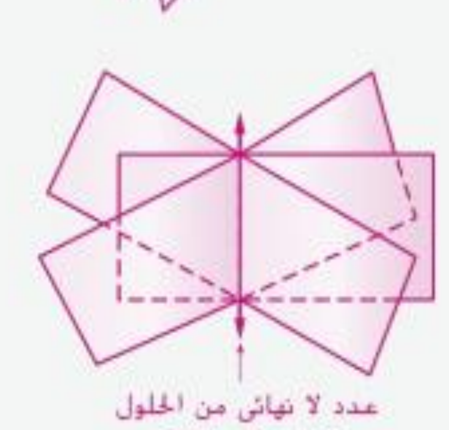
إجابات إضافية

$$56.\ 2\cos^2\frac{x}{2} = 2\left(\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right)^2 = 2\left(\frac{1+\cos x}{2}\right) = 1+\cos x$$

$$57.\ \tan^2\frac{x}{2} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\cos\left[2\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{1+\cos\left[2\left(\frac{x}{2}\right)\right]} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$58.\ \frac{1}{\sin x\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1-\cos^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

التدريس المتمايز



التدريس المتمايز BL

التوسع ناقش العلاقة بين المعادلة الخطية ذات ثلاثة متغيرات والمستوى الإحداثي ثلاثي الأبعاد. اطلب من الطلا ب رسم أمثلة مع توضيح كيف يمكن للأنظمة ذات معادلات ثلا ث أن يكون لها حل واحد أو ليس لها حل أو لها عدد لا نهائي من الحلول باستخدام المستويات الإحداثية الثلاثة. انظر العمود الجانبي لمعرفة الإجابات النموذجية.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 5-2 إجراء العمليات على المصفوفات.

الدرس 5-2 ضرب المصفوفات.
إيجاد المحددات ومعكوسات المصفوفات 2 × 2 و3 × 3.

بعد الدرس 5-2 استخدام مصفوفة عكسية لحل نظام معادلات.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- افترض أن أطباق اللحم الرئيسة الثلاثة الأكثر شيوعًا على القائمة تتطلب كميات اللحم التالية: 0.75 lb و 1 lb و 0.5 lb كيف يمكن تنظيم هذه المعلومات في مصفوفة؟ $[0.75 \quad 1 \quad 0.5]$

(يتبع في الصفحة التالية)

الدرس 5-2 ضرب المصفوفة والمعكوسات والمحددات

:: السابق	:: الحالي	:: لماذا؟
• قمت بإجراء عمليات حسابية على المصفوفات.	1 ضرب المصفوفات. 2 إيجاد محددات ومعكوسات المصفوفة 2 × 2 والمصفوفة 3 × 3.	• تستخدم المصفوفات في العديد من الصناعات بصفتها وسيلة يسيرة لتخزين البيانات. بمجال إدارة المطاعم، يستخدم ضرب المصفوفات لتحديد مقدار المواد الخام الضرورية لإنتاج المنتج الأخير المنشود أو الأطباق الموجودة في القائمة.

المفردات الجديدة

مصفوفة محايدة (identity matrix)
مصفوفة عكسية (inverse matrix)
معكوس (inverse)
قابل للعكس (invertible)
مصفوفة منفردة (singular matrix)
محدد (determinant)

1 ضرب المصفوفات تتمثل عمليات المصفوفات الأساسية الثلاث في جمع المصفوفات وضربها وضربها بكميات قياسية. وقد رأيت أن جمع المصفوفات يشبه جمع الأعداد الحقيقية وضرب المصفوفات في كمية قياسية يشبه ضرب الأعداد الحقيقية.

جمع المصفوفات

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$$

الضرب بالكميات القياسية

$$k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{bmatrix}$$

ولا يوجد لضرب المصفوفة أي عمليات مشابهة بنظام الأعداد الحقيقية. لضرب المصفوفة *A* في المصفوفة *B*، فإن عدد الأ عمدة في*A* يجب أن يكون مساويا لعدد الصفوف في *B*. ويمكن تحديد ذلك بدراسة أبعاد *A* و *B*. فإذا استوفيت الشروط، يكون ناتج الضرب المصفوفة *AB* ويكون بها نفس عدد صفوف المصفوفة *A* ونفس عدد أعمدة المصفوفة *B*.

مصفوفة *A*	×	مصفوفة *B*	=	*AB*
3 × 2		2 × 4		3 × 4

يساوي

أبعاد *AB*

المفهوم الأساسي ضرب المصفوفة

الشرح إذا كانت *A* مصفوفة $m \times r$ وكانت *B* مصفوفة $r \times n$، فإن ناتج ضربهما *AB* هو المصفوفة $m \times n$ التي يمكن الحصول عليها بجمع ناتج ضرب مدخلات الصف في المصفوفة *A* في المدخلات المناظرة لعمود في المصفوفة *B*.

الرموز إذا كانت *A* هي المصفوفة $m \times r$ و*B* هي المصفوفة $r \times n$، فإن ناتج الضرب *AB* هو المصفوفة $m \times n$ التي يكون فيها

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & \\ c_{m1} & c_{m2} & & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

- افترض أن المطعم يخطط لبيع 125 وحدة من كل طبق رئيسي. فكيف يمكن تسجيل الطلب باستخدام المصفوفات؟

$125[0.75 \;\; 1 \;\; 0.5] = [93.75 \;\; 125 \;\; 62.5]$

- يدفع المطعم AED 2.25 لكل رطل من اللحم البقري. كيف يمكن استخدام المصفوفات لتحديد تكلفة اللحم البقري؟

$2.25[93.75 \;\; 125 \;\; 62.5]$
$= [210.94 \;\; 281.25 \;\; 140.63]$
AED 210.94 + AED 281.25 + AED 140.63 = AED 632.82

1 ضرب المصفوفات

يوضح **المثالان 1 و2** كيفية إيجاد ناتج ضرب مصفوفتين. يوضح **المثال 3** كيفية كتابة نظام معادلات بالصيغة $AX = B$ وإيجاد حل X.

التقويم التكويني

استخدم الأسئلة الواردة في التمرين الموجه بعد كل مثال لتأكيد استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 استخدم المصفوفات
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 9 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$$
و $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ لإيجاد ناتج ضرب كل منها، إن أمكن.

a. $AB \begin{bmatrix} 38 & 30 & 44 \\ 25 & 54 & 73 \\ -48 & -18 & -30 \end{bmatrix}$

b. $BA \begin{bmatrix} 22 & 32 \\ -34 & 40 \end{bmatrix}$

يمكن اعتبار كل مدخل في ناتج ضرب مصفوفتين على أنه ناتج ضرب مصفوفة صف $r \times 1$ ومصفوفة عمود $1 \times r$. ادرس ناتج ضرب مصفوفة الصف 1×3 ومصفوفة العمود 3×1 الموضحة.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(4) + 1(-6) + 3(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

مثال 1 ضرب المصفوفات

استخدم المصفوفات $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ **و** $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ **لإيجاد كل ناتج ضرب، إن وجد.**

a. AB

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$ أبعاد A: 2×2، أبعاد B: 2×3

A هي مصفوفة 2×2 و B هي مصفوفة 2×3. حيث إن عدد الأعمدة للمصفوفة A يساوي عدد الصفوف في المصفوفة B، إذًا فإن ناتج الضرب AB موجود.

لإيجاد المدخل الأول في AB، اكتب مجموع نواتج ضرب المدخلات في الصف 1 للمصفوفة A وفي العمود 1 من المصفوفة B.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(-2) + (-1)(3) & & \\ & & \end{bmatrix}$$

اتبع نفس الإجراء لإيجاد مدخل الصف 1 والعمود 2 من AB.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(-2) + (-1)(3) & 3(0) + (-1)(5) & \\ & & \end{bmatrix}$$

استمر في ضرب كل صف في كل عمود لإيجاد مجموع كل مدخل.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(-2) + (-1)(3) & 3(0) + (-1)(5) & 3(6) + (-1)(1) \\ 4(-2) + 0(3) & 4(0) + 0(5) & 4(6) + 0(1) \end{bmatrix}$$

وأخيرًا، حوّل كل مجموع لأبسط صورة.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -5 & 17 \\ -8 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

b. BA

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$ أبعاد B: 2×3، أبعاد A: 2×2

بما أن عدد أعمدة المصفوفة B لا يساوي عدد صفوف المصفوفة A، فإن ناتج الضرب BA ليس موجودًا. BA غير محدد.

تلميح تقني

ضرب المصفوفات يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لضرب المصفوفات. حدد A و B في قائمة المصفوفات ثم اضرب المصفوفات باستخدام حروفها المرجعية. لاحظ أن الحاسبة تظهر صفوف ناتج الضرب في المثال 1a باستخدام مصفوفات 3×1.

```
[A]*[B]
     [[-9  -5  17]
      [-8  0   24]]
```

تمرين موجه

أوجد AB و BA، إن أمكن.

1A. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 7 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

1B. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$

1A. AB و BA غير موجودين.

1B. $AB = \begin{bmatrix} 23 & 9 \\ 26 & 3 \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & -21 & 30 \end{bmatrix}$

لاحظ في المثال 1 أن ناتجي الضرب AB و BA مختلفان. وفي معظم الحالات، حتى عند تحديد كل من ناتجي الضرب، تكون $AB \neq BA$. ويعني ذلك أن خاصية التبديل لا تنطبق على ضرب المصفوفات. ومع ذلك، تنطبق بعض من خصائص الأعداد الحقيقية على ضرب المصفوفات.

294 | الدرس 5-2 | ضرب المصفوفة والمعكوسات والمحددات

المفهوم الأساسي خصائص ضرب المصفوفة

بالنسبة لأي مصفوفة A و B و C والتي يكون ناتج ضرب المصفوفة لها معروف وأي كمية قياسية k، تنطبق الخصائص التالية.

خاصية التجميع في ضرب المصفوفة	$(AB)C = A(BC)$
خاصية التجميع في ضرب الكميات القياسية	$k(AB) = (kA)B = A(kB)$
خاصية التوزيع إلى اليسار	$C(A + B) = CA + CB$
خاصية التوزيع إلى اليمين	$(A + B)C = AC + BC$

ستبرهن على هذه العلاقات في التمارين 75-72.

يمكن استخدام ضرب المصفوفات لحل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 2 من الحياة اليومية ضرب المصفوفات

التصويت توضح نسبة المصوتين من فئات عمرية مختلفة والمسجلين بأحزاب الديموقراطيين أو الجمهوريين أو المستقلين بأحد الانتخابات الأخيرة في مدينة أمريكية. استخدم هذه المعلومات لتحديد إن كان عدد المصوتين من الذكور المسجلين لحزب الديموقراطيين أكبر من عدد الإناث المسجلين بحزب الجمهوريين.

التوزيع حسب الحزب والعمر (%)

الحزب	18-25	26-40	41-50	50+
الديموقراطيون	0.55	0.50	0.35	0.40
الجمهوريون	0.30	0.40	0.45	0.55
المستقلون	0.15	0.10	0.20	0.05

التوزيع حسب العمر والجنس

العمر	أنثى	ذكر
18-25	18,500	16,000
26-40	20,000	24,000
41-50	24,500	22,500
50+	16,500	14,000

افترض أن المصفوفة X تمثل التوزيع حسب الحزب والعمر وافترض أن المصفوفة Y تمثل التوزيع حسب العمر والجنس. ثم أوجد ناتج الضرب XY.

$$XY = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.50 & 0.35 & 0.40 \\ 0.30 & 0.40 & 0.45 & 0.55 \\ 0.15 & 0.10 & 0.20 & 0.05 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 18,500 & 16,000 \\ 20,000 & 24,000 \\ 24,500 & 22,500 \\ 16,500 & 14,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35,350 & 34,275 \\ 33,650 & 32,225 \\ 10,500 & 10,000 \end{bmatrix}$$

يمثل ناتج الضرب XY توزيع المصوتين من الذكور والإناث والمسجلين بكل حزب. يمكن استخدام ناتج ضرب المصفوفة لإيجاد عدد المصوتين الذكور المسجلين بحزب الديموقراطيين وعدد المصوتات الإناث المسجلين بحزب الجمهوريين.

$$\begin{array}{ccc} & \text{أنثى} & \text{ذكر} \\ \text{الديموقراطيون} & 35,350 & 34,275 \\ \text{الجمهوريون} & 33,650 & 32,225 \\ \text{المستقلون} & 10,500 & 10,000 \end{array}$$

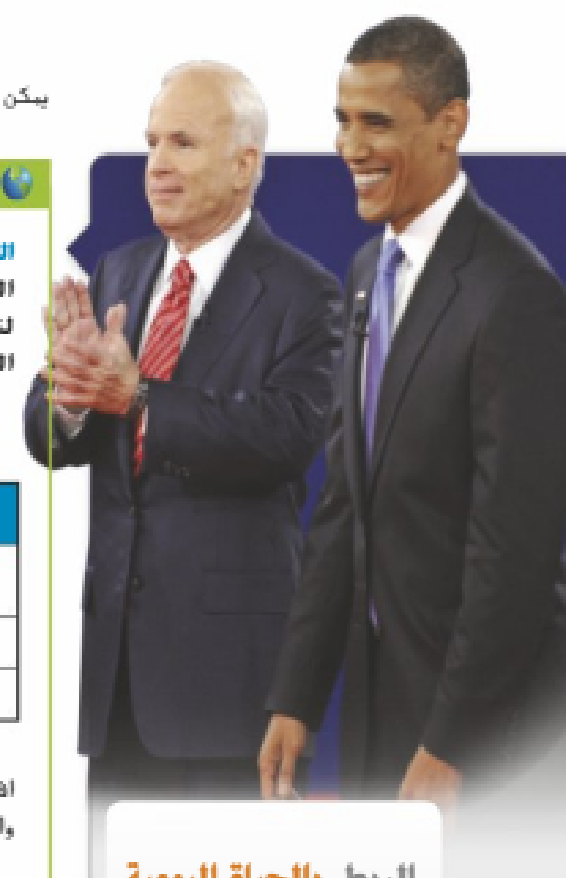
كان عدد المصوتين الذكور المسجلين بحزب الديموقراطيين أكبر من عدد المصوتات الإناث المسجلات بحزب الجمهوريين، حيث إن $33,650 < 34,275$.

تمرين موجه

2. **المبيعات** يوضح عدد أجهزة الكمبيوتر المحمولة التي باعتها إحدى الشركات في الأشهر الثلاثة الأولى من العام، وكذلك أسعار كل طراز أثناء هذه الأشهر. استخدم هذه المعطيات لتحديد أي النماذج تنتج أكبر قدر من الدخل للأشهر الثلاثة الأولى. **النموذج 3**

شهر	الطراز 1	الطراز 2	الطراز 3
يناير	150	250	550
فبراير	200	625	100
مارس	600	100	350

الطراز	يناير	فبراير	مارس
1	AED 650	AED 575	AED 485
2	AED 800	AED 700	AED 775
3	AED 900	AED 1050	AED 925



الربط بالحياة اليومية

في انتخابات عام 2008 في الولايات المتحدة الأمريكية، تلقى الرئيس باراك أوباما 66,882,230 صوتًا أو 53% من أصوات الجمهور.

المصدر: وكالة أنباء CNN

مثال إضافي

2 **كرة السلة** يوضح الجدول أدناه عدد التسديدات بالوثب وتسديدات النقاط الثلاث والرميات الحرة والتسديدات من الهرولة للفرق الثلاث المتصدرة في دوري المدارس الثانوية لمرحلة ما قبل الموسم. بينما يوضح الجدول الآخر عدد النقاط المُحرزة لكل نوع من الأهداف. استخدم المعلومات لتحديد الفريق الذي أحرز أكثر النقاط.

النتيجة	النقاط
تسديدة بالوثب	2
تسديدة النقاط الثلاث	3
رمية حرة	1
تسديدة من الهرولة	2

الفريق	تسديدة بالوثب	تسديدة النقاط الثلاث	رمية حرة	تسديدة من الهرولة
الجزيرة	27	7	21	2
الهلال	24	12	18	3
النصر	21	14	12	9

النصر

التركيز على محتوى الرياضيات

ضرب المصفوفات من أجل ضرب المصفوفات، يجب أن يكون عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى A مساويًا لعدد الصفوف الموجودة في المصفوفة الثانية B. إذا لم تكن الحالة كذلك، فلا يوجد ناتج ضرب. يجب التحقق من ناتج ضرب AB وBA على نحو منفصل. في حالة وجود أحدهما، فربما لا يوجد الآخر. حتى في حالة وجود كل منهما، فإن نواتج الضرب لن تكون متساوية.

أنت تعلم أن *المحايد الضربي* للأعداد الحقيقية هو العدد 1، حيث إنه لأي عدد حقيقي a، $a \times 1 = a$. ويطلق على المصفوفة المربعة للمحايد الضربي $n \times n$ اسم **المصفوفة المحايدة**.

المفهوم الأساسي المصفوفة المحايدة

الشرح إن المصفوفة المحايدة ذات الترتيب n، المعبر عنها بواسطة I_n، هي مصفوفة $n \times n$ تكون جميع قيمها 1 على قطرها الرئيس، من أعلى اليسار إلى أدنى اليمين، وجميع قيمها 0 بالنسبة لجميع العناصر الأخرى.

الرموز

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

قراءة في الرياضيات

المصفوفة المحايدة يستخدم الترميز I_n لتمثيل المحايد للمصفوفة $n \times n$. يستخدم الترميز I بدلاً من I_2، وI_3، وI_4، إلى آخره، عندما يكون ترتيب المحايد معروفًا.

إذًا، إن كانت A مصفوفة $n \times n$، فإن $AI_n = I_nA = A$. وقد تجد المصفوفة المحايدة بالطرف الأيسر لأي مصفوفة موسعة في صورة مستوى صف منخفض. وبشكل عام، إذا كانت A مصفوفة المعاملات لنظام المعادلات، فإن X هي مصفوفة العمود للمتغيرات و B هي مصفوفة العمود للثوابت، فيمكنك كتابة نظام المعادلات كمعادلة من المصفوفات.

نظام المعادلات

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

$\longrightarrow$

معادلة المصفوفة

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} \underset{\times}{\times} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} \underset{=}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{B}$$

مثال

اكتب نظام المعادلات في صورة معادلة مصفوفية . ثم استخدم اختزال جاوس-جوردان على المصفوفة الموسعة لحـ النظام.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= -1 \end{aligned}$$

اكتب النظام كمصفوفة بالشكل $AX = B$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad A \times X = B$$

اكتب المصفوفة الموسعة $[A \,\vdots\, B]$. استخدم اختزال جاوس-جوردان لحل النظام.

$$[A \,\vdots\, B] = \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -4 & 7 & -1 \end{array}\right] \qquad \text{مصفوفة موسعة}$$

$$[I \,\vdots\, X] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \qquad \text{استخدم عمليات الصف الأولية لتحول إلى .}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \text{يحدد حـ المعادلة بواسطة .}$$

إذًا، فإن حل نظام المعادلة هو $(-13, 1, 6)$.

تمرين

اكتب كـ نظام مـ أنظمة المعادلات في صورة معادلة مصفوفية $AX \;\; B$. ثم استخدم اختزال جاوس-جوردان على المصفوفة الموسعة [⁝] لحـ النظام.

3A. $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 9$
$-4x_1 + x_2 + 8x_3 = -16$
$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$

3B. $x_1 + x_2 + x_3 = 2$
$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$
$-x_1 + 4x_2 + x_3 = 3$

3A. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -16 \\ 6 \end{bmatrix}; (7, -4, 2)$

قراءة في الرياضيات

المصفوفة الموسعة يمثل الترميز $[A \,\vdots\, B]$، والتي تقرأ A الموسعة بواسطة B، المصفوفة الموسعة والتي تنتج عندما تكون المصفوفة B متصلة بالمصفوفة A.

3B. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}; \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2}\right)$

مثال إضافي

3 اكتب نظام المعادلات في صورة عادلة صفوفة، = . ثم استخدم اختزال جاوس-جوردان عـ ى المصفوفة الموسعة لحل .

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix};$$

$(1, 2, -1)$

نصيحةل مع مين الجدد

تجـ ب الأخطاء يا كان الطلاب التحقق ن إجابتهم باستخدام عادلة المصفوفة المعطاة = .عـ ىسـ يل المثال، في المثال ؛ يمكن التحقق ن صحة

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -13 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

بضرب المصفوفات.

الأدوات المساعدةل ذاكرة يا كان الطالب تحريك يده اليسرى ن اليسار إلى اليمين أذ اء تحريك اليد اليمـ ى لأعـ ى ولأسفل لتذكر ضرب صفوف المصفوفة اليسرى في أعمدة المصفوفة اليمـ ى.

الدرس ضرب المصفوفة والمعكوسات والمحددات

2 المعكوسات والمحددات

المعكوسات والمحددات أنت تعلم أنه إذا كان a عددًا حقيقيًا غير صفري، فإن $\frac{1}{a}$ أو a^{-1} هو المعكوس الضربي للمتغير a حيث إن $a\left(\frac{1}{a}\right) = a \times a^{-1} = 1$. ويطلق على المعكوس الضربي لمصفوفة مربعة اسم **المصفوفة العكسية**.

المفهوم الأساسي معكوس المصفوفة المربعة

افترض أن A هي المصفوفة $n \times n$. فإذا وجدت مصفوفة B بحيث تكون $AB = BA = I_n$، فيطلق على المصفوفة B حينها **معكوس** المصفوفة A وتكتب بالصورة A^{-1}. إذًا، $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

قراءة في الرياضيات
المصفوفة العكسية يقرأ الترميز A^{-1} على أنه المعكوس.

مثال 4 إثبات صحة المصفوفة العكسية

حدد إذا كان $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ **و** $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ **مصفوفتين عكسيتين.**

إذا كانت المصفوفة A والمصفوفة B مصفوفتين عكسيتين، فإن $AB = BA = I$.

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+4 & 6+(-6) \\ -2+2 & 4+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+4 & 2+(-2) \\ -6+6 & 4+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حيث إن $AB = BA = I$، يترتب على ذلك أن $B = A^{-1}$ و $A = B^{-1}$.

تمرين موجه

حدد إذا كانت المصفوفة A والمصفوفة B مصفوفتين عكسيتين.

4A. $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **نعم؛ حيث إن $AB = BA = I_2$**

4B. $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ **لا؛ حيث إن $AB \neq I_2$ و $BA \neq I_2$**

وإذا كان للمصفوفة A معكوس، يقال إن المصفوفة A **قابلة للعكس** أو غير منفردة. أما **المصفوفة المنفردة** فليس لها معكوس. وليست جميع المصفوفات المربعة قابلة للعكس. ولإيجاد معكوس مصفوفة مربعة A، ستحتاج إلى إيجاد مصفوفة A^{-1}. بافتراض وجود A^{-1} وأن ناتج ضرب A و A^{-1} هو المصفوفة المحايدة. بعبارة أخرى، ستحتاج إلى حل المعادلة المصفوفية $AA^{-1} = I_n$ لإيجاد قيمة B. وبمجرد تحديد B، ستحتاج إلى التأكد أن $A^{-1}A = I_n = AA^{-1}$.

نصيحة دراسية
المصفوفة المنفردة إذا كانت المصفوفة منفردة، فإن المعادلة المصفوفية $AB = I$ ليس لها حل.

من إحدى طرق إيجاد معكوس المصفوفة المربعة استخدام نظام معادلات. افترض أن $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$، وافترض وجود A^{-1}. اكتب المعادلة المصفوفية $AA^{-1} = I_2$، حيث إن $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad AA^{-1} = I_2$$

$$\begin{bmatrix} 8a-5c & 8b-5d \\ -3a+2c & -3b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ضرب المصفوفة}$$

$$\begin{aligned} 8a - 5c &= 1 & 8b - 5d &= 0 \\ -3a + 2c &= 0 & -3b + 2d &= 1 \end{aligned} \qquad \text{مساواة العناصر المتناظرة}$$

من مجموعة المعادلات الأربع، سترى أن هناك نظامين من المعادلات يحتوي كل منهما على قيمتين مجهولتين. اكتب المصفوفات الموسعة المقابلة.

$$\left[\begin{array}{cc:c} 8 & -5 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc:c} 8 & -5 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

لاحظ أن المصفوفة الموسعة لكل نظام لها نفس مصفوفة المعاملات، $\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

بما أن مصفوفة المعاملات للأنظمة متطابقة، يمكننا إجراء عملية خفض الصف على كل من المصفوفتين الموسعتين في نفس الوقت من خلال كتابة مصفوفة موسعة مزدوجة $[A \,\vdots\, I]$. لإيجاد A^{-1}، استخدم المصفوفة الموسعة المزدوجة $\left[\begin{array}{cc:cc} 8 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

2 المحددات والمعكوسات

يوضح **المثالان 4 و 5** كيفية تحديد ما إذا كانت مصفوفتان معروفتان مسبقًا عكسيتين أم لا، وكيفية إيجاد معكوس إحدى المصفوفتين المعروفتين مسبقًا. يوضح **المثالان 6 و 7** كيفية إيجاد محدد ومعكوس المصفوفتين 2×2 و 3×3.

مثال إضافي

4 حدد ما إذا كان $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ هما من المصفوفات المعكوسة أم لا.
نعم؛ $AB = BA = I_2$

مثال 5 معكوس المصفوفة

أوجد A^{-1}، إن وجدت. فإن لم توجد A^{-1}، فاكتب منفردة.

a. $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

الخطوة 1 أنشئ المصفوفة الموسعة المزدوجة $[A \,\vdots\, I]$.

مصفوفة موسعة مزدوجة

$$[A \,\vdots\, I] = \left[\begin{array}{cc:cc} 8 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

الخطوة 2 طبّق عمليات الصف الأولية لكتابة المصفوفة في صورة مستوى صف منخفض.

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 8 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \xrightarrow{R_1 + 5R_2} \left[\begin{array}{cc:cc} 8 & 0 & 16 & 40 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3R_1 + 8R_2} \left[\begin{array}{cc:cc} 8 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{array}\right] \qquad \xrightarrow{\frac{1}{8}R_1} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{array}\right] = [I \,\vdots\, A^{-1}]$$

العمودان الأولان هما المصفوفة المحايدة. إذًا، A قابلة للعكس و $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$.

التحقق تأكد أن $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \checkmark \qquad A^{-1}A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \checkmark$$

b. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$

الخطوة 1 مصفوفة موسعة مزدوجة

$$[A \,\vdots\, I] = \left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

الخطوة 2 طبّق عمليات الصف الأولية لكتابة المصفوفة في صورة مستوى صف منخفض.

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right]$$

لاحظ أنه من المستحيل الحصول على مصفوفة محايدة I على الطرف الأيسر لمصفوفة موسعة مزدوجة

إذًا، المصفوفة A منفردة.

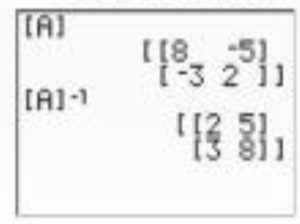
$$\begin{bmatrix} 13 & 6 & -4 \\ -12 & -5 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

تمرين موجه

5A. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ **منفردة** 5B. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ 5C. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$ **منفردة**

تلميح تقني

المعكوس يمكنك استخدام $\boxed{x^{-1}}$ على حاسبة التمثيل البياني لإيجاد معكوس المصفوفة المربعة.



وفيما يلي ملخص العملية المستخدمة لإيجاد معكوس المصفوفة المربعة.

ملخص المفهوم إيجاد معكوس المصفوفة المربعة

افترض أن A هي المصفوفة $n \times n$.

1. اكتب المصفوفة الموسعة $[A \,\vdots\, I_n]$.
2. أجرِ عمليات الصف الأولية على المصفوفة الموسعة لخفض المصفوفة A صورة مستوى الصف المنخفض.
3. قرر إن كانت A قابلة للعكس.

- إذا أمكن خفض A إلى المصفوفة المحايدة I_n، فإن A^{-1} هي المصفوفة الموجودة على يمين للمصفوفة الموسعة المحولة $[I_n \,\vdots\, A^{-1}]$.
- إذا لم يتمكن من خفض المصفوفة A إلى مصفوفة محايدة I_n، فإن A مصفوفة منفردة.

تلميح تقني

المصفوفات المنفردة إذا كانت المصفوفة منفردة، فستظهر حاسبة التمثيل البياني رسالة الخطأ التالية.

ERR: SINGULAR MAT

مثال إضافي

5 أوجد قيمة A^{-1} إن وُجدت. إذا كانت A^{-1} غير موجودة، فاكتب منفردة.

a. $A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -2.5 & -3 \\ -1.5 & -2 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} -12 & 9 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ منفردة

مثال إضافي

6 أوجد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم أوجد معكوس المصفوفة، إن وُجد.

a. $A = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$

0؛ غير موجود.

b. $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ $4; \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

نظام استجابة الطلاب اعرض على الطلاب الشرائح المختلفة لمصفوفاتٍ 2 × 2 و 3 × 3. لكل مصفوفة، اطلب من الطلاب تحديد ما إذا كان يوجد معكوس أم لا. اطلب من الطلاب الرد بـ A للإجابة بـ نعم وB للإجابة بـ لا. لكل مصفوفة، اختر أحد الطلاب لتوضيح كيف يعرف ما إذا كانت المصفوفة لها معكوس أم لا.

بالرغم من أن طريقة إيجاد المصفوفة العكسية المستخدمة في المثال 5 تصلح مع أي مصفوفة مربعة، قد تجد القانون التالي مفيدًا عند إيجاد معكوس المصفوفة 2 × 2.

المفهوم الأساسي معكوس ومحدد المصفوفة 2 × 2

افترض $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. يكون للمصفوفة A معكوس فقط إن كان $ad - cb \neq 0$. وهو $A^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

العدد $ad - cb$ تسمى **مُحدِّد** المصفوفة 2 × 2 ويُشار عنه بواسطة $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$.

ستُثبت هذه النظرية في التمرين 66.

إذًا، يقدم محدد المصفوفة 2 × 2 اختبارًا لتحديد إن كانت المصفوفة قابلة للعكس.

لاحظ أن محدد المصفوفة 2 × 2 هو الفارق بين ناتج ضرب قطري المصفوفة.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

مثال 6 محدد ومعكوس المصفوفة 2 × 2

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم أوجد معكوس المصفوفة، إن وُجد.

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}$ $\quad a = 2, b = -3, c = 4, d = 4$

$= 2(4) - 4(-3) = 20$ $\quad ad - cb$

حيث إن $\det(A) \neq 0$, A قابلة للعكس. طبّق الصيغة لمعكوس المصفوفة 2 × 2.

$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ $\quad$ معكوس مصفوفة 2 × 2

$= \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad a = 2, b = -3, c = 4, d = 4, ad - cb = 20$

$= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$ $\quad$ ضرب الكميات غير المتجهة

التحقق $AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✓

b. $B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$

$\det(B) = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 6(6) - 9(4) = 0$

حيث إن $\det(B) = 0$، فإن B غير قابلة للعكس. إذًا، B^{-1} غير موجودة.

تمرين موجه

6A. $\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}$ 0؛ غير موجود.

6B. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

6B. $-10; \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

نصيحة دراسية

معكوس المصفوفة 2 × 2 تكتب صيغة معكوس المصفوفة 2 × 2 في الصورة $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

299

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون بطريقة التواصل نظّم الطلاب في مجموعات صغيرة. ينبغي أن يعمل الطلاب معًا لإيجاد محدد مصفوفة ما، والتحقق من كل خطوة لتجنب الأخطاء.

يعيّن محدد المصفوفة 3 ×3 باستخدام المحددات 2 × 2 على النحو المبين.

المفهوم الأساسي محدد مصفوفة 3 × 3

الشرح $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ إذا $\det(A) = |A| = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$.

تلميح تقني

المحدد يمكنك استخدام خاصية det(على حاسبة التمثيل البياني لإيجاد محدد المصفوفة المربعة. إذا حاولت إيجاد محدد مصفوفة بأبعاد غير $n \times n$، فستظهر حاسبتك رسالة الخطأ التالية.
ERR:INVALID DIM

وكما هو الحال مع المصفوفات 2 × 2، يكون للمصفوفة A 3 × 3 معكوس فقط إذا كان $\det(A) \neq 0$. توجد صيغة لحساب معكوس المصفوفة 3 × 3 والمصفوفات الأعلى درجة. وعلى الرغم من ذلك، بسبب تعقيد هذه الصيغة، سنستخدم حاسبة التمثيل البياني لحساب معكوس المصفوفة 3 × 3 والمصفوفة المربعة الأعلى رتبة.

مثال 7 محدد ومعكوس مصفوفة 3 × 3

أوجد محدد $C = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. ثم أوجد C^{-1}، إن وجد.

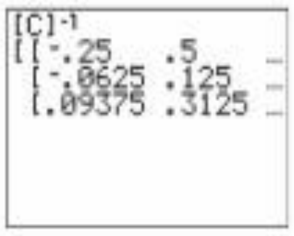
$$\det(C) = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

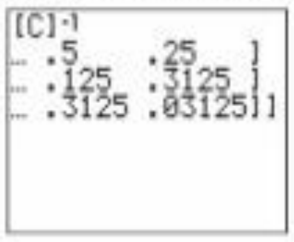
$$= -3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -3[(-1)(0) - 4(2)] - 2[1(0) - (-1)(2)] + 4[1(4) - (-1)(-1)]$$

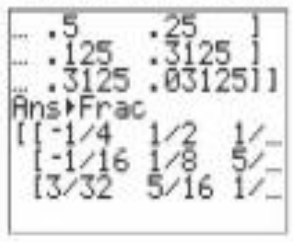
$$= -3(-8) - 2(2) + 4(3) = 32$$

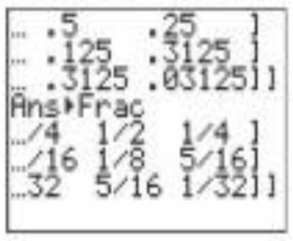
حيث إن $\det(A)$ لا يساوي الصفر، فإن C^{-1} موجودة. استخدم حاسبة التمثيل البياني لإيجاد قيمة C^{-1}.





يمكن استخدام خاصية ►Frac تحت قائمة MATH لكتابة المعكوس باستخدام الكسور، على النحو المبين.





إذًا، $C^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{5}{16} \\ \frac{3}{32} & \frac{5}{16} & \frac{1}{32} \end{bmatrix}$.

تمرين موجه

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية، ثم أوجد معكوسها، إن وجد.

7A. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ **0؛ غير موجود.**

7B. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

7B. 9; $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}$

مثال إضافي

7 أوجد محدد $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. ثم أوجد D^{-1} إن وُجد. -25؛ $\begin{bmatrix} \frac{13}{25} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{25} \\ -\frac{14}{25} & -\frac{3}{5} & \frac{12}{25} \\ \frac{3}{25} & \frac{1}{5} & \frac{1}{25} \end{bmatrix}$

نصيحة للمعلمين الجدد

محددات 3 × 3 لمساعدة الطلاب على تذكر مصفوفات 2 × 2 المتضمنة في إيجاد محدد 3 × 3، اطلب منهم كتابة العدد في الموضع a وحذف الصف والعمود المحتوي على a داخله بصورة ذهنية. الأعداد الأربعة الأخرى تكوّن أول مصفوفة 2 × 2. نفذ الشيء ذاته مع الأعداد الموجودة في الموضعين b وc، مع تغيير إشارة b فقط عند الضرب في المحدد.

إجابات إضافية

1. $AB = [19 \quad -54]$؛ BA غير محددة

2. $AB = \begin{bmatrix} 12 & 19 \\ -42 & 37 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 40 & 42 \\ -21 & 9 \end{bmatrix}$

3. $AB = [7 \quad 15 \quad -16]$؛ BA غير محددة

4. $AB = \begin{bmatrix} 24 & 4 & -40 & 36 \\ 30 & 5 & -50 & 45 \end{bmatrix}$; BA غير محددة

5. AB غير محددة $BA = \begin{bmatrix} 18 \\ -11 \end{bmatrix}$.

6. $AB = \begin{bmatrix} 0 & 12 & -10 \\ -6 & -3 & 17 \\ -4 & 20 & -7 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} -29 & -8 \\ 33 & 19 \end{bmatrix}$

7. $AB = \begin{bmatrix} -9 & 6 & 12 \\ -41 & -14 & 65 \end{bmatrix}$; BA غير محددة

8. AB غير محددة
$BA = \begin{bmatrix} 4 & -78 & -4 \\ -18 & -54 & -42 \\ 8 & 33 & 20 \\ 28 & -33 & 48 \end{bmatrix}$.

التدريس المتمايز AL OL

المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني ربما يجد الطلاب المتعلمون أصحاب النمط البصري أن طريقة الشباك — والتي يستخدم فيها المصفوفات القطرية لإيجاد المحدد — أسهل في إتقانها. يوضح الرسم التخطيطي أدناه كيفية استخدام هذه الطريقة لإيجاد المحدد باستخدام المصفوفة الموجودة في المثال 7. أضف نواتج ضرب المصفوفات القطرية "زائد" (حمراء) واطرح نواتج الضرب للمصفوفات القطرية "ناقص" (زرقاء) لإيجاد $32 = 0 - 24 + 4 - 16 + 4 - 0$.

تمارين

أوجد AB و BA؛ إن أمكن. (مثال 1) 1–8. انظر الهامش.

1. $A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -10 & 9 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 \\ -4 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -8 \\ -6 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 6 & -9 & 10 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 3 & -9 \\ -2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

9. **كرة السلة** يتم منح قيم نقاط مختلفة للتسديدات المختلفة في كرة السلة. استخدم المعطيات لتحديد إجمالي مقدار النقاط التي أحرزها كل لاعب. (مثال 2)

اللاعب	رمية حرة	هدف بنقطتين	هدف بثلاث نقاط
أيوب	44	32	25
مازن	37	24	31
سعيد	35	39	29

الضربات	النقاط
رمية حرة	1
هدف بنقطتين	2
هدف بثلاث نقاط	3

أيوب 183 نقطة؛ مازن 178 نقطة؛ سعيد 200 نقطة

10. **السيارات** يوضح عدد المركبات التي تصنعها إحدى الشركات يوميًا من مصنعين مختلفين، وكذلك سعر المركبة بمبيعات كل ربع سنوي. استخدم المعطيات لتحدد أي المصنعين حقق أعلى مبيعات في الربع السنوي الرابع. (مثال 2) **المصنع 1**

المصنع	الطراز			
	سيارة كوبيه	سيارة سيدان	سيارة رياضية متعددة الأغراض	سيارة فان صغيرة
1	500	600	150	250
2	250	350	250	400

الطراز	الربع السنوي			
	الأول (AED)	الثاني (AED)	الثالث (AED)	الرابع (AED)
سيارة كوبيه	18,700	17,100	16,200	15,600
سيارة سيدان	25,400	24,600	23,900	23,400
سيارة رياضية متعددة الأغراض	36,300	35,500	34,900	34,500
سيارة فان صغيرة	38,600	37,900	37,400	36,900

11–18. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

اكتب كل نظام من أنظمة المعادلات في صورة معادلة مصفوفة $AX = B$. ثم استخدم اختزال جاوس- جوردان على المصفوفة الموسعة لإيجاد حل النظام. (مثال 3)

11. $2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 9$
$4x_1 + x_2 - 6x_3 = 35$
$-3x_1 + 9x_2 - 7x_3 = -6$

12. $3x_1 - 10x_2 - x_3 = 6$
$-5x_1 + 12x_2 + 2x_3 = -5$
$-4x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 16$

13. $2x_1 - 10x_2 + 7x_3 = 7$
$6x_1 - x_2 + 5x_3 = -2$
$-4x_1 + 8x_2 - 3x_3 = -22$

14. $x_1 + 5x_2 + 5x_3 = -18$
$-7x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3$
$6x_1 + 7x_2 - x_3 = 42$

15. $2x_1 + 6x_2 - 5x_3 = -20$
$8x_1 - 12x_2 + 7x_3 = 28$
$-4x_1 + 10x_2 - x_3 = 7$

16. $3x_1 - 5x_2 + 12x_3 = 9$
$2x_1 + 4x_2 - 11x_3 = 1$
$-5x_1 + 7x_2 - 15x_3 = -28$

17. $-x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 25$
$-5x_1 + 11x_2 + 8x_3 = 33$
$2x_1 + x_2 - 13x_3 = -45$

18. $x_1 - 8x_2 - 3x_3 = -4$
$-3x_1 + 10x_2 + 5x_3 = -42$
$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 20$

حدد إذا كانت المصفوفة A والمصفوفة B مصفوفتين عكسيتين. (مثال 4)

19. $A = \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$ **نعم**

20. $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ **نعم**

21. $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ **لا**

22. $A = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ **لا**

23. $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}$ **نعم**

24. $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ **لا**

25. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ **نعم**

26. $A = \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ **لا**

أوجد A^{-1}، إن وجدت. فإن لم توجد A^{-1}، فاكتب منفردة. (مثال 5) 27–34. انظر الهامش.

27. $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

28. $A = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

29. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

30. $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

31. $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

32. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

33. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

34. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 6 & -5 \\ -2 & -8 & 1 \end{bmatrix}$

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-44 للتحقّق من الاستيعاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص واجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع فيما يتعلق بالتمرين 5، ذكّر الطلاب بأنه على الرغم من أن AB غير محدد، فإن BA محدد.

خطأ شائع فيما يتعلق بالتمارين 11-18، بإمكان الطلاب اكتشاف أخطاء حسابية بسيطة بواسطة إحلال القيم في النظام الأصلي للمعادلة للتحقق من إجاباتهم.

نصيحة للمعلمين الجدد

في النظرية 5.2، يمكن استخدام الصفوف الأخرى لإيجاد محدد المصفوفة 3 × 3. على سبيل المثال، المحدد (A) =

$$|A| = -d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}.$$

بالنسبة إلى a_{mn}، فإن إشارة المعامل تكون سالبة عندما تكون $m + n$ عددًا فرديًا.

إجابات إضافية

27. فردي

28. فردي

29. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

30. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

31. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -44 & -5 & -14 \\ 16 & 2 & 5 \\ 9 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

32. فردي

33. فردي

34. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -34 & 29 & 9 \\ 7 & -6 & -2 \\ -12 & 10 & 3 \end{bmatrix}$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-44, 70-96	1-43 فردية	2-44 زوجية، 70-96
OL ضمن المستوى	1-53 فردية، 54-57، 59-67 فردية، 68 ، 70-96	1-44	45-96
BL أعلى من المستوى	45-96		

إجابات إضافية

35. $3; \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

36. $-23; \begin{bmatrix} -\frac{8}{23} & \frac{7}{23} \\ \frac{1}{23} & \frac{2}{23} \end{bmatrix}$

37. $6; \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{7}{6} \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم أوجد معكوس المصفوفة، إن وُجد. (المثالان 6 و 7) **35–44. انظر الهامش.**

35. $\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

37. $\begin{bmatrix} -4 & -7 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

38. $\begin{bmatrix} 12 & -9 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

39. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 8 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

40. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & 9 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

41. $\begin{bmatrix} 9 & 3 & 7 \\ -6 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

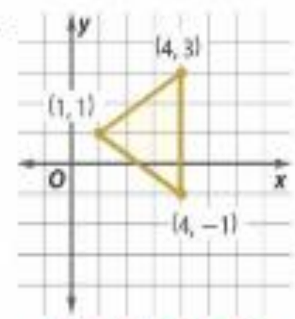
42. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -5 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

43. $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & -3 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

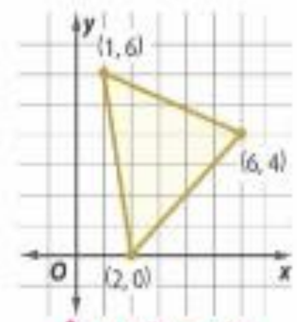
44. $\begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

B

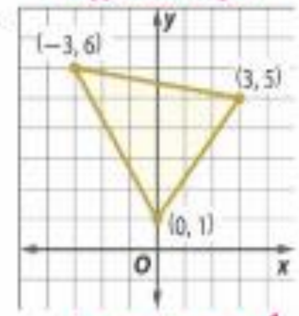
أوجد المساحة A لكل مثلث بالرؤوس (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، (x_3, y_3)، باستخدام $A = \frac{1}{2}|\det(X)|$، حيث إن X تساوي $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$.

45. 

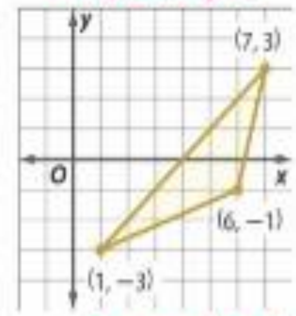
6 وحدات مربعة

46. 

14 وحدة مربعة

47. 

$13\frac{1}{2}$ وحدة مربعة

48. 

9 وحدات مربعة

باستخدام A و AB، أوجد B.

49. $A = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 36 & 48 \\ -24 & 48 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

50. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -16 & -6 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

أوجد x و y.

51. $A = \begin{bmatrix} 2x & -y \\ -3y & 5x \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} -2 \\ 31 \end{bmatrix}$ $x = \frac{1}{2}, y = -3$

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية.

52. $\begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$ rst

53. $\begin{bmatrix} c & c & c \\ 0 & c & c \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ c^3

54. **جمع التبرعات** تقوم مدرسة عبد الله بن الزبير الثانوية بجمع التبرعات عن طريق بيع القشار. وقد اشترت المدرسة أربع نكهات من القشار بحسب الكيس. وتوضح أسعار شراء الأنواع المختلفة من القشار وأسعار بيعها.

الصف الدراسي	أكياس القشار			
	زبد	توابل	جبن	كراميل
الصف العاشر	152	80	125	136
الصف الحادي عشر	112	92	112	150
الصف قبل الأخير	176	90	118	122
الصف النهائي	140	102	106	143

النكهة	السعر المدفوع للكيس (AED)	سعر البيع للكيس (AED)	الأرباح بكل كيس (AED)
زبد	18.90	42.00	23.10
توابل	21.00	45.00	24.10
جبن	23.10	48.00	24.90
كراميل	25.20	51.00	25.80

a. أكمل العمود الأخير في الجدول الثاني.

b. أي الصفوف الدراسية حصدت أعلى إجمالي مبيعات؟ **الصف قبل الأخير**

c. كم زادت أرباح الصف النهائي عن طلاب الصف الحادي عشر؟ **AED 556.80**

55a–d. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

55. افترض أن $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$، $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a. أوجد قيم A^2, A^3, A^4. ثم استخدم النمط لكتابة مصفوفة لـ A^n.

b. أوجد قيم B^2, B^3, B^4, B^5. ثم استخدم النمط لكتابة صيغة عامة لـ B^n.

c. أوجد قيم C^2, C^3, C^4, C^5، ... إلى أن تلاحظ نمطًا. ثم استخدم النمط لكتابة صيغة عامة لـ C^n.

d. استخدم الصيغة التي كتبتها في الجزء c لإيجاد قيمة C^7.

56. **الخيول** يشتري كل مالك من ملاك إسطبلات الخيول المدرجين أدناه حزم من القش وأكياس من العلف كل شهر. وفي مايو، كانت تكلفة كل حزمة من حزم القش AED 2.50 وتكلفة كل كيس علف AED 7.95. وفي يونيه، كانت تكلفة كل حزمة من حزم القش AED 3.00 وتكلفة كل كيس علف AED 6.75. **a–c. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

الإسطبلات	حزم القش	أكياس العلف
مزارع الخيل البارع	45	5
إسطبل أجياد	75	9
مزارع القهر	135	16
مزارع الأدهم	90	11

a. اكتب مصفوفة X لتمثيل حزم القش i وأكياس العلف j التي يشتريها كل إسطبل شهريًا.

b. اكتب مصفوفة Y لتمثيل تكاليف كل حزمة قش وكيس علف لشهري مايو ويونيه.

c. أوجد ناتج ضرب YX، وقم بتسمية صفوفه وأعمدته.

d. كم زاد إجمالي التكاليف في شهر يونيه لمزارع القهر عن إجمالي التكاليف لشهر مايو لمزارع الخيل البارع؟ **AED 360.75**

302 | الدرس 2-5 | ضرب المصفوفة والمعكوسات والمحددات

انتبه!

تحليل الخطأ فيما يتعلق بالتمرين 76، ينبغي أن يتذكّر الطلاب أنه يتم إيجاد محدد المصفوفة بواسطة طرح ناتج ضرب المصفوفات القطرية. كما ينبغي لهم إدراك أن عليّ لا يمكن أن يكون على صواب لأن تبديل الصفوف سيغيّر من قيمة المحدد. ويمكنهم التحقق من فرضية ناصر بواسطة إنشاء مصفوفة، أي مصفوفة ثانية بصفوف متبادلة، وإيجاد محدد كل منها.

إجابات إضافية

38. 0، فردي

39. $-11;\begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{5}{11} & \frac{8}{11} \\ 0 & 1 & 2 \\ -\frac{4}{11} & \frac{13}{11} & \frac{23}{11} \end{bmatrix}$

40. $-5;\begin{bmatrix} -3 & 2 & -3 \\ \frac{14}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{13}{5} \\ -\frac{17}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{14}{5} \end{bmatrix}$

41. 0، فردي

42. $12;\begin{bmatrix} -\frac{17}{12} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{12} \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{13}{6} & \frac{4}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

43. $-14;\begin{bmatrix} \frac{12}{7} & 1 & -\frac{1}{14} \\ \frac{15}{7} & 1 & -\frac{3}{14} \\ -\frac{13}{7} & -1 & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$

44. $57;\begin{bmatrix} \frac{14}{57} & -\frac{1}{19} & \frac{8}{57} \\ \frac{17}{57} & -\frac{8}{19} & \frac{26}{57} \\ -\frac{5}{57} & -\frac{1}{19} & -\frac{11}{57} \end{bmatrix}$

57. $\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -4 & 0 \\ 32 & 6 \end{bmatrix}$

58. $\begin{bmatrix} 3 & 72 & -39 \\ -3 & -43 & 16 \end{bmatrix}$

أوجد قيمة كل تعبير مما يلي. **57–60. انظر الهامش.**

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} -1 & 9 & -6 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad D = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

57. $BD + B$ **58.** $DC - A$

59. $B(A + C)$ **60.** $AB + CB$

أوجد حل كل معادلة لإيجاد قيمة X، إن وجدت. **61–64. انظر الهامش.**

$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 1 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ $\quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

61. $A + C = 2X$ **62.** $4X + A = C$

63. $B - 3X = D$ **64.** $DA = 7X$

65. **محددات 3 × 3** في هذه المسألة، ستكتشف طريقة بديلة لحساب محدد مصفوفة 3 × 3. **C**

a. احسب $\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ باستخدام الطريقة الموضحة في هذا الدرس. **4**

b. قم بضم أول عمودين إلى يمين $\det(A)$ على النحو الموضح. ثم أوجد الفارق بين مجموع نواتج الضرب على طول الأقطار المبينة بالتحرك لأسفل ومجموع نواتج الضرب على طول الأقطار المبينة بالتحرك لأعلى. **4**

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right.$$

c. قارن بين إجابتيك على الجزأين a و b.
هما الشيء نفسه.

d. وضّح أنه بوجه عام يمكن إيجاد محدد مصفوفة 3 × 3 باستخدام الإجراء الموضح أعلاه.
d–e. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

e. هل تفلح هذه الطريقة مع مصفوفة 4 × 4؟ وإذا كانت كذلك، فاشرح استنتاجك. وإذا لم تكن كذلك، فاضرب مثالاً مضادًا.

66. **البرهان** افترض أن $A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. استخدم معادلة المصفوفة $AA^{-1} = I_2$ لاشتقاق صيغة معكوس مصفوفة 2 × 2. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

67. **البرهان** اكتب فقرة برهان لتبين إذا كان لمصفوفة مربعة معكوس، يكون هذا المعكوس فريدًا. (تلميح. افترض أن للمصفوفة A معكوسين C و B، ثم بيّن أن $C = B$.) **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

68. **تمثيلات متعددة** في هذه المسألة، سوف تكتشف المصفوفات المربعة. يطلق على المصفوفة المربعة مثلثية عليا إذا كانت جميع العناصر تحت قطرها الرئيس تساوي 0، ويطلق عليها مثلثية دنيا إذا كانت جميع العناصر فوق قطرها الرئيسي تساوي 0. إذا لم تكن جميع العناصر على قطر المصفوفة تساوي 0، يطلق على المصفوفة قطرية. في هذه المسألة، سوف تستكشف محدد مصفوفة 3 × 3 من المصفوفات المثلثية العليا والمثلثية الدنيا والقطرية.

a. **التحليل** اكتب مصفوفة واحدة مثلثية عليا وأخرى مثلثية دنيا وأخرى قطرية بأبعاد 2 × 2 . ثم أوجد محدد كل مصفوفة.

b. **التحليل** اكتب مصفوفة واحدة مثلثية عليا وأخرى مثلثية دنيا وأخرى قطرية بأبعاد 3 × 3 . ثم أوجد محدد كل مصفوفة.

c. **لفظيًا** خمّن قيمة محدد أي مصفوفة مثلثية عليا أو مثلثية دنيا أو قطرية بالأبعاد 3 × 3.

d. **التحليل** أوجد معكوس كل من المصفوفات القطرية التي كتبتها في الجزأين a و b.

e. **لفظيًا** خمّن معكوس أي مصفوفة قطرية بالأبعاد 3 × 3.
a–e. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

69. **تحدٍ** باستخدام A و AB، أوجد B.

$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 14 & 6 & 33 \\ 4 & 4 & 13 \\ 1 & 18 & 12 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

70. **الاستنتاج** اشرح سبب أنه لا يمكن أن يكون للمصفوفة معكوس.
انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

71. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب مصفوفتين A و B بحيث يكون $AB = BA$. على ألا تكون A أو B المصفوفة المحايدة. **انظر الهامش.**

البرهان **بيّن صحة الخصائص التالية لجميع مصفوفات 2 × 2.**
72–75. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

72. خاصية التوزيع إلى اليمين

73. خاصية التوزيع إلى اليسار

74. خاصية التجميع في ضرب المصفوفة

75. خاصية التجميع في ضرب الكميات غير المتجهة

76. **تحليل الخطأ** يناقش علي وناصر المحددات. وقد توصل علي إلى النظرية أن المصفوفة 2 × 2 لا تتغير إذا تم الإبدال بين صفين من المصفوفة. وتوصل ناصر إلى النظرية أن محدد المصفوفة الجديدة سيكون له نفس القيمة المطلقة ولكن ستختلف علامته. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

77. **الاستنتاج** إذا كانت AB ذات أبعاد 8 × 5، وكانت أبعاد A تساوي 6 × 5، فما هي أبعاد B؟ **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

78. **الكتابة في الرياضيات** اشرح سبب أهمية الترتيب عند إيجاد ناتج ضرب مصفوفتين A و B. اضرب بعض الأمثلة العامة لدعم إجابتك.
انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

---

59. $\begin{bmatrix} 13 & 27 & -10 \\ 7 & 7 & 8 \\ -5 & 16 & -43 \end{bmatrix}$

60. $\begin{bmatrix} -21 & 31 \\ 38 & -2 \end{bmatrix}$

61. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

62. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

63. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

64. $\begin{bmatrix} \frac{4}{7} & 2 \\ \frac{2}{7} & 0 \\ -\frac{1}{7} & 3 \end{bmatrix}$

69. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

71. الإجابة النموذجية

$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

مراجعة شاملة

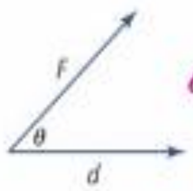
اكتب المصفوفة الموسعة لكل نظام من المعادلات الخطية التالية. 79–81. انظر الهامش.

79. $10x - 3y = -12$
$-6x + 4y = 20$

80. $15x + 7y - 2z = 41$
$9x - 8y + z = 32$
$5x + y - 11z = 36$

81. $w - 6x + 14y = 19$
$3w + 2x - 4y + 8z = -2$
$9w + 18y - 12z = 3$
$5x + 10y - 16z = -26$

82. **الفيزياء** يمثل الجهد المبذول لتحريك أحد الأجسام $W = Fd\cos\theta$، حيث إن θ هي الزاوية بين الإزاحة d والقوة المبذولة F. فإذا بذلت ليلى جهدًا بمقدار 2400 جول عند بذل قوة بمقدار 120 نيوتن في إزاحة قدرها 40 مترًا، ففي أي زاوية قامت ببذل القوة؟ $60°$



حول قياس الزاوية من الدرجات إلى الراديان كمضاعف لـ π ومن الراديان إلى الدرجات.

83. $-10°$ $-\frac{\pi}{18}$

84. $485°$ $\frac{97\pi}{36}$

85. $\frac{3\pi}{4}$ $135°$

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

86. $\log_{10}\sqrt[3]{10} = x$ $\frac{1}{3}$

87. $2\log_5(x-2) = \log_5 36$ 8

88. $\log_6(x+4) + \log_6 8 = \log_6 64$ 4

89. $\log_4(x-3) + \log_4(x+3) = 2$ 5

90. $\frac{1}{2}(\log_7 x + \log_7 8) = \log_7 16$ 32

91. $\log_{12} x = \frac{1}{2}\log_{12} 9 + \frac{1}{3}\log_{12} 27$ 9

92. **فن الملاحة الجوية** تمثل البيانات أدناه معدل رفع الجناح لأحد طُرز الطائرات في ممر هوائي بزاوية محددة لهبوب الهواء. وتعتبر زاوية الهبوب α للجناح هي الزاوية ما بين الجناح وهبوب الرياح.

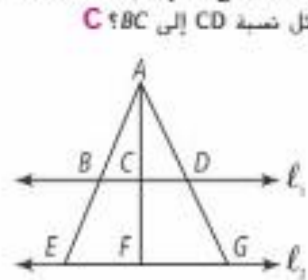
زاوية هبوب الهواء α	0.1	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	5.0	10.0
معدل الرفع (lbs)	11.7	236.0	476.2	711.6	950.3	1782.6	2384.4	4049.3

a. حدد دالة أسية لتمثيل البيانات. $y = 364.04\alpha^{1.254}$

b. استخدم الدالة لتوقع معدل رفع الجناح عند 4.0 درجات. ≈ 2071 lb

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

93. **SAT/ACT** في الشكل، $\ell_1 \parallel \ell_2$. إذا كانت $EF = x$، و $EG = y$، فأي مما يلي يمثل نسبة CD إلى BC؟ C



A $1 - \frac{y}{x}$

B $1 + \frac{y}{x}$

C $\frac{y}{x} - 1$

D $1 - \frac{x}{y}$

E $1 + \frac{x}{y}$

94. ما أبعاد المصفوفة التي تنتج عن عملية الضرب الموضحة؟ G

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

F 1×3

G 3×1

H 3×3

J 4×3

95. **مراجعة** أنفقت مايسة AED 42 على علبة من بطانة الدهان وعلبتين من الدهان على غرفتها. فإذا كان سعر علبة من الدهان p يساوي 150% من سعر علبة من بطانة الدهان r، فأي نظام معادلات يمكن استخدامه لإيجاد سعر الدهان وبطانة الدهان؟ A

A $p = r + \frac{1}{2}r, r + 2p = 42$

B $p = r + 2r, r + \frac{1}{2}p = 42$

C $r = p + \frac{1}{2}p, r + 2r = 42$

D $r = p + 2p, r + \frac{1}{2} = 42$

96. **مراجعة** للانضمام إلى فريق كرة قدم، يجب أن يكون المعدل التراكمي للطالب 2.0 على الأقل، وأن يكون قد حضر على الأقل خمسة تمارين بعد الدوام المدرسي. أي نظام متباينات يمثل بشكل أفضل هذا الموقف إذا كان x يمثل المعدل التراكمي للطالب، ويمثل y عدد التمارين التي حضرها الطالب بعد الدوام المدرسي؟ F

F $x \geq 2, y \geq 5$

G $x \leq 2, y \leq 5$

H $x < 2, y < 5$

J $x > 2, y > 5$

4 التقويم

الكرة البلورية اطلب من الطلاب الكتابة عما تعلموه اليوم وكيف سيرتبط مع الدرس التالي، حل الأنظمة الخطية باستخدام المعكوسات وقاعدة كرامر.

إجابات إضافية

79. $\left[\begin{array}{cc|c} 10 & -3 & -12 \\ -6 & 4 & 20 \end{array}\right]$

80. $\left[\begin{array}{ccc|c} 15 & 7 & -2 & 41 \\ 9 & -8 & 1 & 32 \\ 5 & 1 & -11 & 36 \end{array}\right]$

81. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & 14 & 0 & 19 \\ 3 & 2 & -4 & 8 & -2 \\ 9 & 0 & 18 & -12 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & -16 & -26 \end{array}\right]$

التدريس المتمايز BL

التوسع اطلب من الطلاب التعاون مع زملائهم للبحث عن كيفية إيجاد معكوس مصفوفة 3 × 3 يدويًا دون استخدام حاسبة التمثيل البياني. ينبغي لهم كتابة أربع مصفوفات 3 × 3 وإيجاد معكوس كل منها يدويًا. ويمكنهم استخدام حاسبات التمثيل البياني للتحقق من إجابتهم.

التوسع 5-2 مختبر تقنية التمثيل البياني
المحددات ومساحات المضلعات

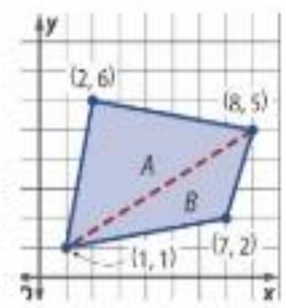
الهدف

- استخدام الحاسبة البيانية لإيجاد مساحات المضلعات باستخدام المحددات.

لقد تعلمت أن مساحة المثلث X ذي الرؤوس (x_1, y_1) و(x_2, y_2) و(x_3, y_3) يمكن إيجادها بحساب $\frac{1}{2}|det(X)|$.
ويمكن استخدام هذه العملية لإيجاد مساحة أي مضلع.

نشاط مساحة رباعي الأضلاع

a. أوجد مساحة رباعي الأضلاع ذي الرؤوس (1، 1)، (2، 6)، (8، 5)، (7، 2).

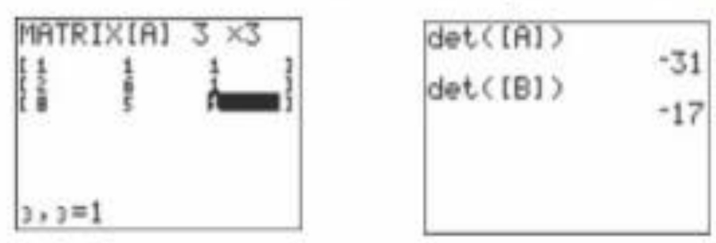


الخطوة 1 ارسم رباعي الأضلاع، ثم اقسمه إلى مثلثين.

الخطوة 2 أنشئ مصفوفة لكل مثلث.

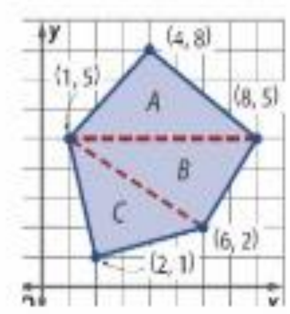
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة 3 أدخل كل مصفوفة في حاسبة بيانية، وأوجد det(A) و det(B).



الخطوة 4 اضرب القيمة المطلقة لكل محدد في $\frac{1}{2}$، وأوجد المجموع.
المساحة تساوي $\frac{1}{2}|-31| + \frac{1}{2}|-17|$ أو 24 وحدة مربعة.

b. أوجد مساحة مضلع بالرؤوس (1، 5)، (4، 8)، (8، 5)، (6، 2)، (2، 1).



الخطوة 1 ارسم خماسي الأضلاع، ثم اقسمه إلى ثلاثة مثلثات.

الخطوة 2 أنشئ مصفوفة لكل مثلث.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

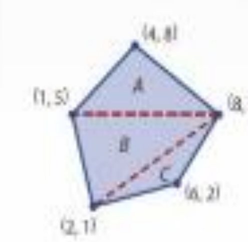
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة 3 أدخل كل مصفوفة في الحاسبة البيانية، وأوجد المحددات. المحددات هي -21 و-21 و-17.

الخطوة 4 اضرب القيمة المطلقة لكل محدد في $\frac{1}{2}$ وأوجد المجموع. المساحة تساوي $\frac{1}{2}|-21| + \frac{1}{2}|-21| + \frac{1}{2}|-17|$ أو 29.5 وحدة مربعة.

نصيحة دراسية

قسمة المضلعات قد تكون هناك طرق عديدة لقسمة مضلع محدد إلى مثلثات. فعلى سبيل المثال، يمكن أيضًا تقسيم رباعي الأضلاع الموجود في المثال 2 على النحو المبين أدناه.



تمارين

أوجد مساحة المضلع باستخدام معطيات الرؤوس التالية.

1. (3, 2), (1, 9), (10, 12), (8, 3) **56 وحدة^2**
2. (−2, −4), (−11, −1), (−9, −8), (−1, −12) **58.5 وحدة^2**
3. (1, 3), (2, 9), (10, 11), (13, 7), (6, 2) **69 وحدة^2**
4. (−7, −6), (−10, 2), (−9, 8), (−5, 10), (8, 6), (13, 2) **211 وحدة^2**

1 التركيز

الهدف استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد مساحات المضلعات باستخدام المحددات.

نصيحة للتدريس

قبل بدء هذا الدرس، قم بعمل مراجعة سريعة على إيجاد مساحة المثلث باستخدام المحددات في التمارين 48-45 بالدرس 2-5.

واسأل الطلاب كيف يمكن أن يساعد هذا على إيجاد مساحة المضلع الذي له أكثر من ثلاثة أضلاع.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

اطلب من الطلاب العمل في مجموعاتٍ من طالبين أو ثلاثة ذوي قدراتٍ متنوعة. اطلب من المجموعات العمل على جزأي النشاط a وb.

- ذكّر الطلاب بالتأكد من أن المصفوفة عبارة عن مصفوفة 3 × 3 وأنه قد تم إكمال كل عنصر على حاسبة التمثيل البياني قبل أن يقوموا بحساب المحدد.
- اطلب من الطلاب وصف ما يمثله $\frac{1}{2}$ من محدد إحدى المصفوفات. مساحة أحد المثلثات التي يشكلها المضلع

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمارين من 1 إلى 4.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرين 1 لتقويم قدرة الطلاب على استخدام المحددات في حساب مساحة المضلع عند إعطائهم إحداثيات رؤوس الزوايا.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب تلخيص ما تعلموه عن استخدام المصفوفات لإيجاد مساحة المضلع. واطلب منهم توضيح النمط القائم بين عدد المحددات اللازم لإيجاد مساحة المضلع وعدد أضلاع هذا المضلع.

الدرس 5-3 حل الأنظمة الخطية باستخدام المعكوسات وقاعدة كرامر

السابق

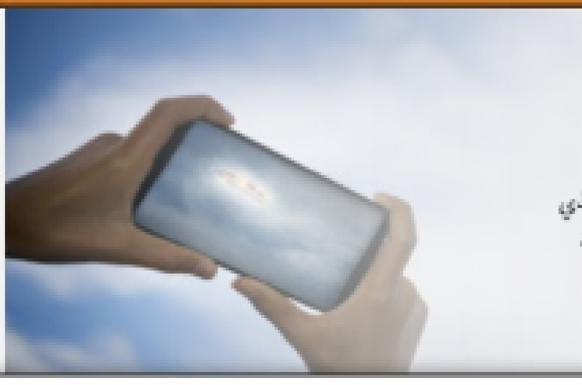
- تعلمتَ إيجاد محددات ومعكوسات المصفوفة 2×2 والمصفوفة 3×3.

الحالي

1. حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات العكسية (معكوس المصفوفات).
2. حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر.

لماذا؟

- تقوم مها بتنزيل البرامج المفضلة لها على مشغل الوسائط المحمول الخاص بها. ويتطلب برنامج الطبيعة ضعف مساحة الذاكرة اللازمة للمسرحية الهزلية، ويتطلب الفيلم ضعف مساحة الذاكرة اللازمة لبرنامج الطبيعة. وبمعرفة حجم الذاكرة الذي تم استخدامه، يمكنك استخدام المصفوفة العكسية (معكوس المصفوفة) لحل نظام المعادلات لإيجاد عدد كل نوع من البرامج التي قامت مها بتنزيلها.



المفردات الجديدة

نظام مربع (square system)
قاعدة كرامر (Cramer's Rule)

1 استخدام المصفوفات العكسية

إذا تساوى عدد المعادلات مع المتغيرات في نظام المعادلات الخطية، فإن مصفوفة المعاملا ت الخاصة به تكون مربعة ويقال حينئذ إن النظام **نظام مربع**. وإذا كانت مصفوفة المعاملات المربعة هذه قابلة للعكس، فحينها يكون للنظام حل وحيد.

المفهوم الأساسي الأنظمة الخطية المربعة القابلة للعكس

لنفرض أن A هو مصفوفة المعاملات لنظام n من المعادلات الخطية في n من المتغيرات تحددها المعادلة $AX = B$، حيث X هو مصفوفة المتغيرات وB هو مصفوفة الثوابت. إذا كانت A قابلة للعكس، يكون لنظام المعادلات حل وحيد تحدده المعادلة $X = A^{-1}B$.

مثال 1 إيجاد حل نظام 2X2 باستخدام مصفوفة عكسية

استخدم المصفوفة العكسية لحل نظام المعادلات، إن أمكن.

$2x - 3y = -1$
$-3x + 5y = 3$

اكتب النظام في مصفوفة بالشكل $AX = B$.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad AX = B$$

استخدم هذه الصيغة مع معكوس مصفوفة 2×2 لإيجاد المعكوس A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad \text{صيغة معكوس مصفوفة } 2 \times 2 \text{ هي } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2(5) - (-3)(-3)}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad a = 2, b = -3, c = -3, d = 5$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{حوّل لأبسط صورة.}$$

اضرب A^{-1} في B لحل النظام.

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad X = A^{-1}B$$

لذلك، يكون حل النظام هو (4, 3).

تمرين موجه

استخدم المصفوفة العكسية لحل نظام المعادلات، إن أمكن.

1A. $6x + y = -8$ **(−2, 4)**
$-4x - 5y = -12$

1B. $-3x + 9y = 36$ **(3, 5)**
$7x - 8y = -19$

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 5-3 إيجاد محددات ومعكوسات المصفوفتين 2×2 و 3×3.

الدرس 5-3 حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام معكوس المصفوفات. حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر.

بعد الدرس 5-3 استخدام معكوس المصفوفات لإيجاد تحليل الكسور الجزئية.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- ما المعادلا ت التي يمكن كتابتها من المعلومات المعطاة؟ $n = 2s, 2n = m$

الربط بالحياة اليومية

السند بصورة أساسية عبارة عن إقرار بالمديونية تصدره شركة أو حكومة لتمويل عملياتها اليومية أو مشروع معين. فإذا استثمرت في السندات، فإنك تقرض أموالك لجهة إصدار السند لفترة زمنية محددة. وفي المقابل، تستعيد أموالك مضافًا إليها الفوائد.

المصدر: CNN

مثال 2 من الحياة اليومية إيجاد حل نظام 3X3 باستخدام مصفوفة عكسية

المعرفة المالية تستثمر بدرية AED 20,000 بشراء ثلاثة سندات ذات عوائد سنوية متوقعة نسبتها 10% و8% و6%. وتكون الاستثمارات ذات العائد المتوقع الأعلى أكثر خطورة غالبًا من الاستثمارات الأخرى. وترغب بدرية في تحقيق متوسط عائد سنوي يبلغ AED 1340. فإذا كانت تريد استثمار مبلغ في السند ذي العائد 6% يساوي ثلاثة أضعاف المبلغ المستثمر في السندين الآخرين مجتمعين، فكم يكون المبلغ اللازم استثماره في كل سند؟

يمكن تمثيل استثمارها بالمعادلات

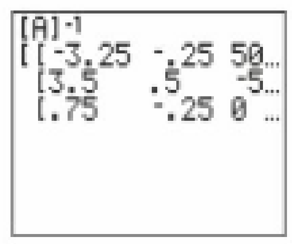
$$x + y + z = 20{,}000$$
$$3x + 3y - z = 0$$
$$0.10x + 0.08y + 0.06z = 1340.$$

حيث x وy وz تمثل المبالغ المستثمرة في السندات ذات العوائد السنوية 10% و8% و6% على التوالي.

اكتب النظام في مصفوفة بالشكل AX = B.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0.10 & 0.08 & 0.06 \end{bmatrix}} \underset{\times}{\times} \underset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 20{,}000 \\ 0 \\ 1340 \end{bmatrix}}$$

استخدم حاسبة التمثيل البياني لإيجاد قيمة A^{-1}.



$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3.25 & -0.25 & 50 \\ 3.5 & 0.5 & -50 \\ 0.75 & -0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

اضرب A^{-1} في B لحل النظام.

$$X = A^{-1}B$$
$$= \begin{bmatrix} -3.25 & -0.25 & 50 \\ 3.5 & 0.5 & -50 \\ 0.75 & -0.25 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 20{,}000 \\ 0 \\ 1340 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2000 \\ 3000 \\ 15{,}000 \end{bmatrix}$$

حل النظام هو (2000, 3000, 15,000). إذًا، استثمرت بدرية AED 2000 في السند ذي العائد السنوي 10%، وAED 3,000 في السند ذي العائد السنوي 8%، وAED 15,000 في السند ذي العائد السنوي 6%.

التحقق يمكنك التحقق من الحل بإحلاله في النظام الأصلي.

$$2000 + 3{,}000 + 15{,}000 = 20{,}000$$
$$20{,}000 = 20{,}000 \checkmark$$
$$3(2{,}000) + 3(3{,}000) - 15{,}000 = 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$
$$0.10(2{,}000) + 0.08(3{,}000) + 0.06(15{,}000) = 1{,}340$$
$$1340 = 1340 \checkmark$$

تمرين موجه

2. **الصناعة** خلال ثلاثة أعوام متتالية، أنتج مصنع لتجميع السيارات إجمالي 720,000 سيارة. فإذا كان عدد السيارات التي أنتجت في العام الثاني تزيد عن العام الأول بعدد 50,000 سيارة، وكان عدد السيارات التي أنتجت في العام الثالث تزيد عن الثاني بعدد 80,000 ، فكم عدد السيارات التي أنتجت في كل عام؟
180,000 سيارة؛ 230,000 سيارة؛ 310,000 سيارة

- هل توجد معلومات كافية معطاة لتحديد عدد كل نوع من البرامج التي قامت مها بتنزيلها؟ اشرح إجابتك. لا، فهناك معادلتان فقط يمكن كتابتهما بناء على المعلومات المعطاة. وبما أن هناك ثلاثة مجهولات، فيجب أن يكون هناك ثلاث معادلات لحلها.
- ما المعلومات اللازمة لتتمكن من تحديد عدد كل نوع من البرامج التي قامت مها بتنزيلها؟ يلزم معرفة حجم الذاكرة الذي استخدمته مها للبرامج التي قامت بتنزيلها بالإضافة إلى حجم الذاكرة المستخدم مع أي نوع من البرامج التي قامت بتسجيلها.

1 استخدام معكوس المصفوفات

يوضح **المثالان 1 و 2** طريقة استخدام معكوس المصفوفات لحل نظام المعادلات الخطية.

التقويم التكويني

استخدم الأسئلة الواردة في التمرين الموجه بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 استخدم المصفوفة العكسية لحل كل نظام معادلات، إن أمكن.

a. $2x - y = 1$
$2x + 3y = 13$ (2, 3)

b. $2x + y = 9$
$x - 3y + 2z = 12$
$5y - 3z = -11$ (5, −1, 2)

2 **العملات المعدنية** يمتلك مهاب 22 عملة كلها من فئة 5 فلسات و10 فلسات وربع فلس. كانت قيمة العملات AED 2.75. فإذا كان يمتلك عدد عملات من فئة 10 فلسات أقل من ضعف عدد العملات فئة ربع فلس بمقدار ثلاثة. فكم عدد كل فئة من العملات التي يمتلكها مهاب؟
7 عملات فئة 5 فلسات، و9 عملات فئة 10 فلسات، و6 عملات فئة ربع فلس

التركيز على محتوى الرياضيات

المصفوفة العكسية إذا كانت مصفوفة المعاملات قابلة للعكس، فيمكن حل نظام المعادلات بضرب معكوس مصفوفة المعاملات في المصفوفة الثابتة. وينبغي التحقق من صحة الحل بتعويض الحل داخل المعادلات الأصلية.

2 استخدام قاعدة كرامر

استخدام قاعدة كرامر طريقة أخرى لحل الأنظمة المربعة تُعرف باسم **قاعدة كرامر**، وفيها تُستخدم المحددات بدلاً من تقليل الصفوف أو المصفوفات العكسية (معكوس المصفوفات).

فكِّر في نظام 2 × 2 التالي.

$$ax + by = e$$
$$cx + dy = f$$

استخدم طريقة الحذف لإيجاد x.

$$\begin{array}{lrl} & adx + bdy & = ed \\ (+) & -bcx - bdy & = -fb \\ \hline (ad - bc)x & & = ed - fb \end{array}$$

اضرب في d

اضرب في $-b$

إذًا، $x = \dfrac{ed - fb}{ad - bc}$.

وبالمثل، يتضح أن $y = \dfrac{af - ce}{ad - bc}$. ينبغي عليك أن تدرك أن مقام كل كسر بمثابة محدد مصفوفة معامل النظام $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. ويمكن التعبير عن كل من بسط ومقام كل حل باستخدام المحددات.

$$x = \frac{ed - fb}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{|A_x|}{|A|} \qquad y = \frac{af - ce}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{|A_y|}{|A|}$$

لاحظ أن البسطين $|A_x|$ و $|A_y|$ هما محددا المصفوفات التي تتكون باستبدال معامل x أو y على التوالي في مصفوفة المعامل بعمود الحدود الثابتة $\begin{matrix} e \\ f \end{matrix}$ من النظام الأسلي $\left[\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array}\right]$.

يمكن تعميم قاعدة كرامر على أنظمة n من المعادلات في n من المتغيرات.

المفهوم الأساسي قاعدة كرامر

لنفرض أن A هو مصفوفة المعاملات في نظام n من المعادلات الخطية في n من المتغيرات، وتحددها المعادلة $AX = B$. فإذا كان $\det(A) \neq 0$، فإن الحل الوحيد للنظام تعبر عنه المعادلة

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \ldots,\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

حيث يتم الحصول على A_i باستبدال العمود ith الخاص بـ A بعمود الحدود الثابتة B. وإذا كان المحدد $(A) = 0$، فإن $AX = B$ إما ليس لها حل أو لها عدد لا نهائي من الحلول.

مثال 3 استخدام قاعدة كرامر لحل نظام 2 × 2

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن وُجد حل فريد.

$$3x_1 + 2x_2 = 6$$
$$-4x_1 - x_2 = -13$$

مصفوفة المعاملات هي $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$. احسب محدد A.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - (-4)(2) = 5$$

نظرًا لأن محدد A لا يساوي صفرًا، فبإمكانك استخدام قاعدة كرامر.

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -13 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{6(-1) - (-13)(2)}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -4 & -13 \end{vmatrix}}{5} = \frac{3(-13) - (-4)(6)}{5} = \frac{-15}{5} = -3$$

إذًا، الحل هو $(4, -3)$ أو $x_2 = -3$ و $x_1 = 4$. تحقق من الحل في النظام الأسلي.

انتبه!

القسمة على صفر تذكر أن قاعدة كرامر لا تنطبق عندما يكون محدد مصفوفة المعامل 0، وذلك لأن هذا قد يتسبب في القسمة على صفر، والتي تكون نتيجتها "غير محددة".

2 استخدام قاعدة كرامر

يوضح **المثالان 3 و 4** طريقة استخدام قاعدة كرامر لحل أنظمة المعادلات 2 × 2 و 3 × 3.

مثال إضافي

3 استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية إن وجد له حل فريد.

$$4x_1 - 5x_2 = -49$$
$$-3x_1 + 2x_2 = 28$$

$(-6, 5)$

نصيحة للمعلمين الجدد

تذكر قاعدة كرامر

لا يحتاج الطلاب إلى استذكار قاعدة كرامر إن كانوا يستطيعون تذكُّر النمط التالي.

- المقام دائمًا محدد مصفوفة المعاملات.
- بالنسبة للبسط، استبدل عمود معاملات المتغيرات الذي تقوم بحله بالحدود الثابتة.

تمرين موجه

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل فريد.

3A. $2x - y = 4$
$5x - 3y = -6$ **(18, 32)**

3B. $-9x + 3y = 8$
$2x - y = -3$ $\left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$

3C. $12x - 9y = -5$
$4x - 3y = 11$ **ليس لها حل فريد**

مثال 4 استخدام قاعدة كرامر لحل نظام 3×3

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن وُجد حل فريد.

$-x - 2y = -4z + 12$
$3x - 6y + z = 15$
$2x + 5y + 1 = 0$

مصفوفة المعاملات هي $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$. احسب محدد A.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$
الصيغة الخاصة بمحدد مصفوفة 3×3

$$= -1[-6(0) - 5(1)] - (-2)[3(0) - 1(2)] + 4[3(5) - 2(-6)]$$
حوّل لأبسط صورة.

$$= -1(-5) + 2(-2) + 4(27) = 109$$
حوّل لأبسط صورة.

نظرًا لأن محدد A لا يساوي صفرًا، فبإمكانك استخدام قاعدة كرامر.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -2 & 4 \\ 15 & -6 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{109} = \frac{12[(-6)(0) - 5(1)] - (-2)[15(0) - (-1)(1)] + 4[15(5) - (-1)(-6)]}{109} = \frac{218}{109} = 2$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 12 & 4 \\ 3 & 15 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{109} = \frac{(-1)[15(0) - 1(-1)] - 12[3(0) - 2(1)] + 4[3(-1) - 2(15)]}{109} = \frac{-109}{109} = -1$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 3 & -6 & 15 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{109} = \frac{(-1)[(-6)(-1) - 5(15)] - (-2)[3(-1) - 2(15)] + 12[3(5) - 2(-6)]}{109} = \frac{327}{109} = 3$$

إذًا، الحل هو $(2, -1, 3) = x = 2, y = -1, z = 3$.

التحقق تحقق من الحل بإحلاله في النظام الأصلي.

$$-(2) - 2(-1) = -4(3) + 12$$
$$0 = 0 \checkmark$$

$$3(2) - 6(-1) + 3 = 15$$
$$15 = 15 \checkmark$$

$$2(2) + 5(-1) + 1 = 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$

تمرين موجه

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل فريد.

4A. $8x + 12y - 24z = -40$
$3x - 8y + 12z = 23$
$2x + 3y - 6z = -10$ **ليس لها حل فريد**

4B. $-2x + 4y - z = -3$
$3x + y + 2z = 6$
$x - 3y = 1$ $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{3}{2}\right)$

قراءة في الرياضيات

استبدال الأعمدة الرمز $|A_x|$ يقرأ كالآتي، محدد مصفوفة المعامل A مع عمود المعاملات x المستبدل بعمود الثوابت.

مثال إضافي

4 استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن وُجد له حل فريد.

$y + 4z = -1$
$2x - 2y + z = -18$
$x - 4z = 7$
$(-1, 7, -2)$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

مدونة اطلب من الطلاب كتابة مداخلة تشرح طريقة استخدام قاعدة كرامر لحل أنظمة 2 × 2 و 3 × 3. واطلب منهم شرح سبب عدم إمكانية تطبيق قاعدة كرامر عندما يكون محدد مصفوفة المعاملات 0.

المتابعة

تعرّف الطلاب على طريقة حل الأنظمة متعددة المتغيرات باستخدام عمليات الصف والمعكوسات وقاعدة كرامر.

اسأل:

- لِم يكون من المفيد وجود طرق متعددة لحل نظام المعادلات؟ الإجابة النموذجية: لأن إحدى الطرق قد تكون أكثر كفاءة من غيرها، وذلك حسب النظام.

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون بالطريقة الذاتية اطلب من كل طالب كتابة ملخص عن كيفية حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام عمليات الصفوف الأولية ومعكوس المصفوفات وقاعدة كرامر. قدّم للصف نظام معادلات لحله باستخدام كل هذه الطرق. ينبغي على الطلاب تضمين حل لنظام المعادلات الخطية باستخدام الطريقة الموضحة في ملخصهم عن كل طريقة. وينبغي على الطلاب توضيح المزايا والعيوب في كل طريقة من وجهة نظرهم.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 21 للتحقق من الاستيعاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع للتمارين 18-17، ذكّر الطلاب بوضع 0 في قاعدة كرامر عن أي متغير مفقود.

تحليل الخطأ للتمرين 48، ينبغي على الطلاب تذكر أنه لا يوجد حل فريد عندما يكون محدد مصفوفة المعاملات 0. وهذا يعني أنه قد يوجد عدد لا نهائي من الحلول أو قد لا يوجد حل.

تمارين

استخدم المصفوفة العكسية لحل كل نظام معادلات، إن أمكن. (المثالان 1 و2)

1. $5x - 2y = 11$
$-4x + 7y = 2$ **(3, 2)**

2. $2x + 3y = 2$
$x - 4y = -21$ **(-5, 4)**

3. $-3x + 5y = 33$
$2x - 4y = -26$ **(-1, 6)**

4. $-4x + y = 19$
$3x - 2y = -18$ **(-4, 3)**

5. $2x + y - z = -13$
$3x + 2y - 4z = -36$
$x + 6y - 3z = 12$ **(-6, 7, 8)**

6. $3x - 2y + 8z = 38$
$6x + 3y - 9z = -12$
$4x + 4y + 20z = 0$ **(4, -9, 1)**

7. $x + 2y - z = 2$
$2x - y + 3z = 4$
$3x + y + 2z = 6$ **ليس لها حل فريد**

8. $4x + 6y + z = -1$
$-x - y + 8z = 8$
$6x - 4y + 11z = 21$ **(1, -1, 1)**

9. **التنزيل** قامت هداية بتنزيل بعض البرامج على مشغل الوسائط المحمول الخاص بها. وبشكل عام، تستهلك مسرحية هزلية مدتها 30 دقيقة مساحة 0.3 جيجابايت من الذاكرة، ويستهلك برنامج حواري مدته ساعة 0.6 جيجابايت، وفيلم مدته ساعتان يستهلك 1.2 جيجابايت. وقامت هداية بتنزيل 9 برامج بمجموع 5.4 جيجابايت. فإذا كانت قامت بتنزيل عدد مسرحيات هزلية يزيد عن عدد الأفلام بمقدار اثنين، فكم عدد كل نوع قامت بتنزيله؟ (مثال 2)
4 مسرحيات هزلية، و3 برامج حوارية، وفيلمان

10. **كرة السلة** يعلم طارق أنه قد سجل 37 مرة بإجمالي نقاط يبلغ 70 نقطة حتى الآن في موسم كرة السلة هذا. ويود أن يعرف عدد الرميات الحرة، والرميات ذات النقطتين والثلاث نقاط التي أحرزها. وكان مجموع الرميات ذات النقطتين والثلاث نقاط يساوي ضعف عدد الرميات الحرة ناقص اثنين. فكم عدد الرميات الحرة والرميات ذات النقطتين والثلاث نقاط التي أحرزها طارق؟ (مثال 2)
انظر الهامش.

B **استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل فريد.** (المثالان 3 و4)

11. $-3x + y = 4$
$2x + y = -6$ **(-2, -2)**

12. $2x + 3y = 4$
$5x + 6y = 5$ $\left(-3, 3\frac{1}{3}\right)$

13. $5x + 4y = 7$
$-x - 4y = -3$ $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

14. $4x + \frac{1}{3}y = 8$
$3x + y = 6$ **(2, 0)**

15. $2x - y + z = 1$
$x + 2y - 4z = 3$
$4x + 3y - 7z = -8$ **ليس لها حل فريد**

16. $x + y + z = 12$
$6x - 2y - z = 16$
$3x + 4y + 2z = 28$ **(4, 0, 8)**

17. $x + 2y = 12$
$3y - 4z = 25$
$x + 6y + z = 20$ **(6, 3, -4)**

18. $9x + 7y = -30$
$8y + 5z = 11$
$-3x + 10z = 73$ **(-1, -3, 7)**

19. **رحلة بالسيارة** توقفت مايسون مرتين خلال رحلة على الطريق للتزود بالوقود. موضح بالأسفل سعر البنزين لكل محطة. وقد اشترت مايسون إجمالي 33.5 جالونًا وأنفقت 134.28 AED. استخدم قاعدة كرامر لتحديد عدد جالونات البنزين التي اشترتها مايسون مقابل AED 3.96 للجالون. (مثال 3) **15.5 gal**

20. **تخطيط جماعي** تخطط لجنة إعادة لم شمل دفعة التخرج لاستقبال 400 ضيف في اجتماع لم الشمل العاشر لها. ويمكن للضيوف اختيار واحد من بين ثلاثة اختيارات من الحلوى الموضحة بالأسفل. ويجب أن يستغرق الطاهي القائم على إعداد الحلوى 5 دقائق لكل فطيرة، و8 دقائق لكل كعكة، و12 دقيقة لكل كعكة جُبن. وكانت التكلفة الإجمالية لأصناف الحلوى 1170 AED، كما أمضى الطاهي 45 ساعة بالضبط في إعدادها. استخدم قاعدة كرامر لتحديد عدد الأطباق التي تم إعدادها من كل نوع من الحلوى. (مثال 4)

220 فطيرة توت أزرق، و140 كعكة شيكولاتة، و40 كعكة جبن بالكرز

21. **هواتف** قامت كل من نهلة ونسرين ونورا بمراجعة أنظمة الهاتف الخاصة بهم. دفعت نهلة AED 52.90 مقابل 30 دقيقة إضافية من الألعاب، و12 دقيقة من المكالمات، و40 رسالة نصية. ودفعت نسرين AED 48.07 مقابل 18 دقيقة من الألعاب، و15 دقيقة من المكالمات، و55 رسالة نصية. ودفعت نورا AED 13.64 فقط مقابل 6 دقائق من الألعاب، و7 دقائق من المكالمات. فإذا كان جميعهن يستخدمن النظام نفسه، فأوجد تكلفة كل خدمة. (مثال 4)
AED 1.10/min للألعاب؛ AED 0.99/min للمكالمات؛ AED 0.25 للرسائل النصية.

B **أوجد حل كل معادلة مصفوفة.**

22. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 17 & -9 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

26. **لياقة بدنية** تتدرب شيخة على مسافة نصف ماراثون وتستهلك أسبوعيًا جيل وبسكويت ومشروبات طاقة. وقد استهلكت هذا الأسبوع 12 منتج طاقة بإجمالي 1450 سعرًا حراريًا و310 جرامات من الكربوهيدرات. موضح بالأسفل المحتوى الغذائي لكل عنصر.

منتج الطاقة	جل	بسكويت	مشروب
السعرات الحرارية	100	250	50
الكربوهيدرات (g)	25	43	14

فكم عدد جل وبسكويت ومشروبات الطاقة التي استهلكتها شيخة هذا الأسبوع؟ **5 عبوات جل، و3 قطع بسكويت، و4 مشروبات**

إجابات إضافية

10. 13 رمية حرة، و15 رمية ثنائية النقطة و9 رميات ثلاثية النقاط

38. $\begin{bmatrix} \frac{e^{-2x}}{1-e^x} & \frac{-1}{1-e^x} \\ -\frac{e^{2x}}{1-e^x} & \frac{e^{3x}}{1-e^x} \end{bmatrix}$

39. $\begin{bmatrix} \frac{2x}{2-3x} & -\frac{3}{2-3x} \\ \frac{-x^2}{2-3x} & \frac{1}{2-3x} \end{bmatrix}$

40. $\begin{bmatrix} \pi^{-x} & -\pi^x \\ 0 & \pi^{2x} \end{bmatrix}$

41. $\begin{bmatrix} -2i & -3 \\ -1 & i \end{bmatrix}$

42. $X = (A - B)^{-1}(-C)$

43. $X = (A + B)^{-1}(D)$

44. $X = (A + B + I)^{-1}(2C)$

45. $X = (-C - D)(I - A)^{-1}$

46. $X = (3I + B)^{-1}(C + D)$

47. $X = (B - A)^{-1}(AD)$

49. لا شيء من ذلك، إذا كان محدد مصفوفة المعاملات 0، فلن يوجد حل فريد إذًا. قد لا يكون للنظام حل، أو قد يكون له عدد لا نهائي من الحلول. ونظام المعادلات الموضح له عدد لا نهائي من الحلول.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة OL BL AL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-21, 48, 49, 51-63	1-21 فردية، 60-63	2-20 زوجية، 49.48 ، 51-59
OL ضمن المستوى	1-25 فردية، 26، 27-35 فردية، 36، 37-47 فردية، 48، 49، 51-63	1-21, 60-63	22-49, 51-59
BL أعلى من المستوى	22-63		

حاسبة التمثيل البياني أوجد حل كل نظام معادلات باستخدام المصفوفات العكسية.

27. $2a - b + 4c = 6$
$a + 5b - 2c = -6$
$3a - 2b + 6c = 8$ **(-6, 2, 5)**

28. $3x - 5y + 2z = 22$
$2x + 3y - z = -9$
$4x + 3y + 3z = 1$ **(1, -3, 2)**

29. $r + 5s - 2t = 16$
$-2r - s + 3t = 3$
$3r + 2s - 4t = -2$ **(-2, 4, 1)**

30. $-4m + n + 6p = 17$
$3m - n - p = 5$
$-5m - 2n + 3p = 2$ **(3, -1, 5)**

أوجد قيم n بحيث لا يمكن حل النظام الذي تعبر عنه المصفوفة الموسعة المعطاة باستخدام المصفوفة العكسية.

31. $\left[\begin{array}{cc|c} n & -8 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$ **-4**

32. $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & n & 4 \\ n & 2 & -5 \end{array}\right]$ **$\pm\sqrt{6}$**

33. $\left[\begin{array}{cc|c} -5 & -9 & 3 \\ n & n & 11 \end{array}\right]$ **0**

34. $\left[\begin{array}{cc|c} n & -n & 0 \\ 7 & n & -8 \end{array}\right]$ **0 أو -7**

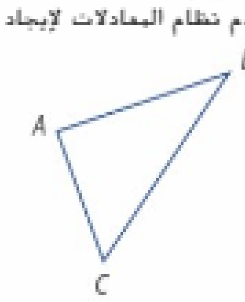
35. **مواد كيميائية** تحتوي ثلاث سبائك من النحاس والفضة على 35% من الفضة الخالصة، و55% من الفضة الخاصة، و60% من الفضة الخالصة على التوالي. فكم المقدار الواجب خلطه من كل معدن للحصول على سبيكة بوزن 2.5 كيلو جرامات وتحتوي على 4.54% فضة إذا كان هناك 0.5 كيلو جرام زيادة في السبيكة 60% عن السبيكة 55%؟

0.4 kg من سبيكة 35%، و0.8 kg من سبيكة 55%، و1.3 kg من سبيكة 60%

36. **متجر أغذية** يبيع متجر أغذية إماراتي وجبات الشاورما الموضحة بالأسفل. في إحدى وجبات الغداء، باع المتجر مجموع 74 وجبة شاورما وكسب AED 320.50. وكان مجموع كمية اللحم المستخدم في إعداد وجبات الشاورما الصغيرة والكبيرة والضخمة الحجم 274 أونصة. وكان عدد وجبات الشاورما كبيرة الحجم المبيعة يزيد عن ضعف عدد وجبات الشاورما الضخمة المبيعة بمقدار واحد. فكم عدد وجبات الشاورما التي باعها المتجر خلال الغداء من كل نوع؟

20 وجبة صغيرة، و31 وجبة كبيرة، و15 وجبة ضخمة، و8 بالدجاج

37. **الهندسة** يبلغ محيط المثلث ABC △ 89 ملليمترًا. وطول القطعة المستقيمة $\overline{AC}$ أقل من طول الضلعين الآخرين بمقدار 47 ملّيمترًا. ويزيد طول القطعة المستقيمة $\overline{BC}$ بمقدار 20 ملّيمترًا عن نصف طول القطعة المستقيمة $\overline{AB}$. استخدم نظام المعادلات لإيجاد طول كل ضلع.



$AB = 32$ mm, $BC = 36$ mm, $AC = 21$ mm

أوجد معكوس كل مصفوفة، إن أمكن. **38–41. انظر الهامش.**

38. $\begin{bmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ e^{x} & e^{-3x} \end{bmatrix}$

39. $\begin{bmatrix} \frac{1}{x} & \frac{3}{x} \\ x & 2 \end{bmatrix}$

40. $\begin{bmatrix} \pi^{x} & 1 \\ 0 & \pi^{-2x} \end{bmatrix}$

41. $\begin{bmatrix} i & -3 \\ i^2 & 2i \end{bmatrix}$

لنفرض أن A وB مصفوفتان $n \times n$ ونفرض أن C وD وX مصفوفات $n \times 1$. أوجد حل كل معادلة لإيجاد X. افترض وجود جميع المعكوسات. **42–47. انظر الهامش.**

42. $AX = BX - C$

43. $D = AX + BX$

44. $AX + BX = 2C - X$

45. $X + C = AX - D$

46. $3X - D = C - BX$

47. $BX = AD + AX$

48. **حساب التفاضل والتكامل** في حساب التفاضل والتكامل، يمكن الحصول على نظام المعادلات باستخدام المشتقات الجزئية. هذه المعادلات تضم λ، والتي تُسمى مضاعف لاجرانج. أوجد قيم x وy بحيث تحقق المعادلات $x + \lambda + 1 = 0;\ 2y + \lambda = 0;\ x + y + 7 = 0$.

$x = -5,\ y = -2$

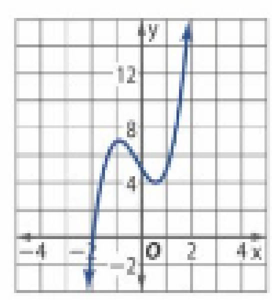
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

49. **تحليل الخطأ** تحاول عائشة ورنا حل النظام أدناه باستخدام قاعدة كرامر. فهل إجابة أي منهما صواب؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

$2x + 7y = 10$
$6x + 21y = 30$

عائشة	رنا
النظام ليس له حل لأن محدد مصفوفة المعامل يساوي صفرًا.	النظام له حل واحد ولكن لا يمكن إيجاده باستخدام قاعدة كرامر.

50. **تحدٍ** يمر المنحنى أدناه بالنقاط $(2, 19)$, $(1, 5)$, $(-1, 7)$, $(-2, -1)$. وتتخذ معادلة المنحنى الشكل $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



أوجد معادلة المنحنى من خلال حل نظام المعادلات باستخدام المصفوفة العكسية. **$f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 5$**

51. **استنتاج** إذا كان $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وكانت A غير منفردة، فهل $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$؟ اشرح استنتاجك.

انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

52. **مسألة غير محددة الإجابة** أعط مثالاً على نظام معادلات في متغيرين ليس له حل فريد، ووضّح كيف أن النظام المعبر عنه بمعادلة مصفوفة ليس له حل. **انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

53. **الكتابة في الرياضيات** صف أنواع الأنظمة الممكن حلها باستخدام كل طريقة. اشرح استنتاجك. **a–c. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

a. حذف جاوس–جوردان

b. المصفوفات العكسية

c. قاعدة كرامر

311

مراجعة شاملة

أوجد AB وBA، إن أمكن. **55-54. انظر الهامش.**

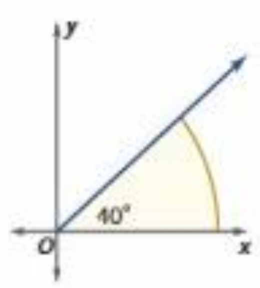
54. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

55. $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 7 & 8 & 3 \\ 11 & -5 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 17 & 2 & -4 \\ 10 & -9 & 6 \\ 1 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

حدد ما إذا كانت كل مصفوفة لها نموذج درجة الصف.

56. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -6 & 4 \\ 9 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right]$ **لا**

57. $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$ **نعم**



58. **ألعاب القوى** يجب أن تسقط الكرة الحديدية في لعبة رمي الجلة داخل القطاع 40°. تقع رأس الزاوية عند نقطة الأصل، ويمتد أحد الضلعين على طول المحور x. فإذا أسقط اللاعب الكرة عند نقطة إحداثياتها (17 ,18)، فهل ستسقط الكرة داخل المنطقة المطلوبة؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

59. **النجوم** تظهر بعض النجوم ساطعة أكثر من غيرها لقربها الشديد منا. والنسوع المطلق (أو القدر المطلق) M هو وحدة قياس مدى السطوع الذي يظهر عليه النجم إذا كان يبعد عن الأرض مسافة 10 فراسخ نجمية أو حوالي 32 سنة ضوئية. وكلما قل النسوع، دل ذلك على زيادة سطوع النجم. والنسوع المطلق تحدده المعادلة $M = m + 5 - 5 \log d$، حيث d هو بُعد النجم عن الأرض مقيسًا بالفراسخ وm هو النسوع الظاهري للنجم.

النجم	النسوع الظاهري	المسافة (بالفرسخ النجمي)
سيريوس	−1.44	2.64
فيجا	0.03	7.76

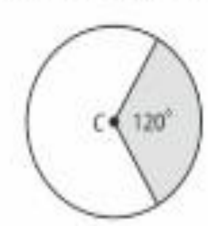
a. سيريوس وفيجا اثنان من النجوم الأكثر سطوعًا. فأيهما أكثر سطوعًا؟ **سيريوس**

b. أوجد النسوع المطلق لكل من سيريوس وفيجا. **سيريوس: 1.45، فيجا: 0.58**

c. أي النجمين أكثر سطوعًا في الحقيقة؟ بعبارة أخرى، أيهما له نسوع مطلق أقل؟ **فيجا**

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

60. SAT/ACT تقع النقطة C في مركز الدائرة بالشكل أدناه. تبلغ مساحة المنطقة المظللة 3π سنتيمترات مربعة. فما محيط المنطقة المظللة بالسنتيمترات؟ **A**



A $2\pi + 6$

B $2\pi + 9$

C $2\pi + 12$

D $3\pi + 6$

E $3\pi + 12$

61. اشترت نبيلة في شهر مارس نغمتين عاديتين وأخريين مميزتين من مقدم خدمات الهاتف المحمول الذي تتعامل معه مقابل AED 8.96. وفي مايو، دفعت AED 9.46 مقابل نغمة عادية و3 نغمات مميزة. فما سعر كل من النغمة العادية والمميزة؟ **F**

F AED 1.99, AED 2.49   H AED 1.99, AED 2.79

G AED 2.29, AED 2.79   J AED 2.49, AED 2.99

62. **مراجعة** كل عام، يدلي طلاب مدرسة الإمارات الثانوية تصويتًا على الموضوع الرئيس لمهرجان الترحيب بالطلاب القدامى. حصل الموضوع "ليلة تحت النجوم" على 225 صوتًا. أما الموضوع "لحظة حياتي" فقد حصل على 480 صوتًا. فإذا كان 40% من طلاب العام قبل الأخير صوّتوا على موضوع النجوم، و75% من طلاب العام الأخير على موضوع الحياة، وقد أدلى الطلاب كلهم بأصواتهم. فكم عدد طلاب العام قبل الأخير والعام الأخير في مدرسة الإمارات؟ **D**

A 854 طالبًا بالعام الأخير و176 طالبًا بالعام قبل الأخير

B 705 طلاب بالعام الأخير و325 طالبًا بالعام قبل الأخير

C 395 طالبًا بالعام الأخير و310 طلاب بالعام قبل الأخير

D 380 طالبًا بالعام الأخير و325 طالبًا بالعام قبل الأخير

63. **مراجعة** ما حل $\frac{1}{8}x - \frac{2}{3}y + \frac{5}{6}z = -8$، $\frac{3}{4}x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{3}z = -12$، $\frac{3}{16}x - \frac{5}{8}y - \frac{7}{12}z = -25$؟

F $(-4, 6, 3)$ H $(-16, 24, 12)$

G $(-8, 12, 6)$ J ليس لها حل

4 التقويم

حصاد الأمس اطلب من الطلاب كتابة كيف ساعدتهم المفاهيم التي تعلموها بالأمس في تحصيل المادة الجديدة اليوم.

إجابات إضافية

54. $AB = \begin{bmatrix} 8 & -11 \\ 22 & 12 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 17 & -7 \\ 41 & 3 \end{bmatrix}$

55. $AB = \begin{bmatrix} 54 & 26 & -76 \\ 202 & -58 & -4 \\ 136 & 67 & -66 \end{bmatrix},$

$BA = \begin{bmatrix} 38 & 2 & 112 \\ 43 & -122 & 27 \\ -84 & 38 & 14 \end{bmatrix}$

58. الإجابة النموذجية: لا، فمع وجود هذه النقطة على الضلع الطرفي لزاوية الرمي θ، يتم إيجاد قياس θ بحل $\tan \theta = \frac{17}{18}$ وبالتالي $\theta = \tan^{-1} \frac{17}{18}$ أو حوالي 43.4°، أي أكبر من شرط 40°.

التدريس المتمايز BL

التوسع اطلب من الطلاب استخدام ما تعلموه عن قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات التالي.

$w + x + y + z = 1$
$2w + y - z = 7$
$3x - 2y + 3z = -15$
$w - x + 3y + 2z = 7$ (1, −1, 3, −2)

1 التركيز

الهدف استخدام حاسبة التمثيل البياني والمصفوفات لتشفير الرسائل وفك شفرتها.

نصيحة للتدريس

ذكّر الصف بأهمية الترتيب عند ضرب المصفوفات. بالنسبة للنشاط 1، سوف نحتاج إلى ضرب الرسالة المشفرة في المفتاح. وإذا تم ذلك بترتيب خاطئ، فستحتوي الرسالة على خطأ.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قسّم الطلاب إلى مجموعاتٍ من طالبين أو ثلاثة ذوي قدراتٍ متنوعة. اطلب من المجموعات إتمام النشاطين 1 و 2 والتمارين 3-1.

نشاط 1

تأكد من معرفة الطلاب طريقة إدخال مصفوفتين في الآلة الحاسبة.

ذكّر الطلاب بوضع 0 في المصفوفة عن كل مسافة.

إذا واجه الطلاب مشكلة في رؤية النمط بالمصفوفة، فاكتب المصفوفة التالية قبل استبدال الأعداد فيها بالأحرف المقابلة لها.

$$\begin{bmatrix} S & A \\ T & U \\ R & D \\ A & Y \\ O & A \\ T & O \\ N & O \\ O & N \end{bmatrix}$$

التوسع 5-3

مختبر تقنية التمثيل البياني
المصفوفات وعلم التشفير

الهدف

- استخدام حاسبة التمثيل البياني والمصفوفات لتشفير الرسائل وفك شفرتها.

علم *التشفير* هو دراسة الرسائل المشفرة. ويمكن استخدام المصفوفات لتشفير الرسائل بحيث لا يمكن قراءتها إلا بعد فك الشفرة باستخدام *مفتاح فك الشفرة*.

الخطوة الأولى هي تحديد المفتاح الذي يمكن استخدامه لتشفير المصفوفة. ويجب أن يكون المفتاح مصفوفة قابلة للعكس في صيغة $n \times n$. الخطوة التالية هي تحويل الرسالة إلى أعداد وكتابتها في شكل مصفوفة. فكل حرف أبجدي يمثله عدد. ويستخدم العدد 0 لتمثيل مسافة فارغة.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

أخيرا، يتم تشفير الرسالة بضربها في المفتاح.

نشاط 1 تشفير الرسالة

استخدم $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ لتشفير الرسالة SATURDAY AT NOON.

الخطوة 1 حوّل الرسالة إلى أعداد واكتبها في سورة مصفوفة.

S	A	T	U	R	D	A	Y	_	A	T	_	N	O	O	N
19	1	20	21	18	4	1	25	0	1	20	0	14	15	15	14

المفتاح هو مصفوفة 2×2. لكي تجعل ضرب المصفوفة ممكنًا، اكتب الرسالة على هيئة مصفوفة 2×8.

$$\begin{bmatrix} 19 & 1 \\ 20 & 21 \\ 18 & 4 \\ 1 & 25 \\ 0 & 1 \\ 20 & 0 \\ 14 & 15 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

نصيحة دراسية

التحويل أضف أصفارًا إلى نهاية الرسالة إذا احتجت إلى مدخلات إضافية لملء المصفوفة.

الخطوة 2 اضرب الرسالة المحوّلة في المفتاح باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

```
[[18  -35]
 [-1  23 ]
 [14  -24]
 [-24 73 ]
 [-1  3  ]
 [20  -40]
 [-1  17 ]↓
```

الخطوة 3 تخلص من علامات ترقيم المصفوفة للكشف عن الرسالة المشفرة.

18 −35 −1 23 14 −24 −24 73 −1 3 20 −40 −1 17 1 12

تمارين

استخدم $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ لتشفير كل من الرسائل التالية.

1. CALL ME
2. SEE YOU LATER
3. ORDER PIZZA

4. **تحدٍ** استخدم $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ لتشفير الرسالة MEET ME AT FIVE.

1. 7, 12, 12, 24, -26, -39, 15, 25
2. 47, 80, 15, 25, 45, 80, 63, 105, 34, 57, 50, 85, 54, 90
3. 9, 21, 2, 5, 54, 90, 30, 53, 26, 52, 3, 5
4. 51, -37, 64, 118, -106, 112, 16, -22, 19, 76, -92, 84, 26, 64, 69

نشاط 2
لفك تشفير الرسائل، يجب أن تحتوي مصفوفة الرسالة المشفرة على عدد الأعمدة نفسه مثل الصفوف في مصفوفة المفتاح.

تمرين اطلب من الطلاب إتمام التمارين من 5 إلى 7.

3 التقويم

التقويم التكويني

اطلب من الطلاب استخدام المفتاح $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ لفك شفرة الرسالة التالية.

−23 12 −61 24 1 −4 14 −56 −24 6 −15 10 −11 4 −75 50.
HAVE A NICE DAY

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب توضيح لِمَ يعد استخدام مصفوفة لتشفير الرسالة أفضل من التعويض ببساطة. الإجابة النموذجية: لأنه أكثر أمانًا، حيث من غير السهل فك الشفرة من دون المفتاح والتعويض.

لفك تشفير رسالة ما، يجب إيجاد معكوس المفتاح. بعد ذلك تتم كتابة الرسالة المشفرة على هيئة مصفوفة ليكون الضرب ممكنًا. على سبيل المثال، إذا كان المفتاح مصفوفة $n \times n$، تُكتب الرسالة على هيئة مصفوفة $n \times k$، حيث k هو عدد الصفوف اللازمة لتضمين كل عدد في المصفوفة. وإذا لم توجد أحرف كافية لملء الصف، فأدخل "0" كمسافات. وأخيرًا، يتم ضرب المصفوفة المشفرة في معكوس المفتاح.

نشاط 2 فك تشفير الرسالة

استخدم معكوس $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ **لفك تشفير الرسالة** 202 99 77 39 83 38.

الخطوة 1 استخدم حاسبة التمثيل البياني لإيجاد معكوس المفتاح.

```
[A]-1
  [[-44 -5 -14]
   [16  2  5  ]
   [9   1  3  ]]
```

الخطوة 2 اكتب الرسالة المشفرة على هيئة مصفوفة. ستحتوي المصفوفة المشفرة على 3 أعمدة لأن المفتاح عبارة عن مصفوفة 3 × 3. وتكون المصفوفة 3 × 2 نظرًا لوجود أعداد تكفي لملء صفين. أدخل المصفوفة إلى حاسبة التمثيل البياني.

```
MATRIX[B] 2 ×3
[ 38    83    39  ]
[ 77    99    202 ]

2,3=202
```

الخطوة 3 استخدم حاسبة التمثيل البياني لضرب المصفوفة المشفرة في معكوس المفتاح.

```
[B][A]-1
    [[7  15 0 ]
     [14 15 23]]
```

الخطوة 4 تخلص من علامات ترقيم المصفوفة وحوّل الأعداد إلى أحرف.

7	15	0	14	15	23
G	O	_	N	O	W

تمارين

استخدم معكوس $\begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ **لفك شفرة الرسائل التالية.**

STUDY QUIETLY (ذاكر في هدوء)

5. 128 −73 232 −135 300 −175 99 −56 83 −48 180 −104 300 −175

DOING HOMEWORK (عمل الواجب المنزلي)

6. −27 17 38 −21 84 −49 21 −11 131 −76 201 −116 161 −93

MATRICES ARE FUN (المصفوفات ممتعة)

7. 151 −88 150 −86 93 −54 −35 22 −5 3 191 −111 −30 18 182 −105

PRECALCULUS ROCKS (أساسيات المقدمة في التفاضل والتكامل)

8. 102 −58 45 −26 −48 29 −69 42 39 −21 228 −133 141 −81 −19 12 228 −133

9. **تحدٍ** استخدم معكوس $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & -4 & -6 \\ 7 & 6 & -5 & 3 \\ 1 & 7 & 9 & 2 \end{bmatrix}$ لفك شفرة

CONGRATULATIONS ON DECODING THIS MESSAGE

126 265 −49 −34 198 347 193 96 174 239 49 72 177 286 −61 −27 48 200 70 −76 122 162 −21 35 81 190 −37 −63 130 331 214 17 67 267 94 −25 93 161 120 25.

التدريس المتمايز BL OL

المتعلمون بالطريقة الذاتية اطلب من الطلاب توضيح سبب الاختلاف الكبير بين الكلمات شديدة التشابه في الإملاء عند تشفيرها حتى عند استخدام المفتاح نفسه.

اختبار نصف الوحدة 5

الدروس من 1-5 إلى 3-5

اكتب كل نظام معادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم أوجد حل النظام. (الدرس 1-5)

1. $2x - y = 13$
$2x + y = 23$
(9, 5)

2. $x + y + z = 6$
$2x - y - z = -3$
$3x - 5y + 7z = 14$
(1, 2, 3)

6–3. انظر الهامش.

أوجد حل كلٍّ من أنظمة المعادلات التالية. (الدرس 1-5)

3. $3x + 3y = -8$
$6x - 5y = 28$

4. $-x + 8y - 2z = -37$
$2x + 5y - 11z = -7$
$4x - 7y + 6z = 4$

5. $-2x + 2y + z = 5$
$3x - 2y + 2z = 7$
$5x - y + 4z = 8$

6. $x - 5y + 8z = 7$
$-8x + 3y + 12z = -9$
$5x - 4y - 3z = 9$

7. **رعاية الحيوانات** اشترت علياء إجمالي 25 رطلاً من طعام الأرانب والقطط وحبوب للطيور بمبلغ 100 AED. ثم اشترت طعام أرانب إضافيًا بزيادة قدرها 10 أرطال عن حبوب الطيور. موضح بالأسفل تكلفة الرطل لكل نوع من الطعام. (الدرس 1-5)

AED4.00/lb AED7.00/lb AED3.00/lb

a. اكتب مجموعة من المعادلات الخطية للتعبير عن هذه الحالة. **انظر الهامش.**

b. حدد عدد الأرطال لكل نوع طعام اشترته علياء. **انظر الهامش.**

8. **اختيار من متعدد** أي مصفوفة غير منفردة؟ (الدرس 2-5) **B**

A $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -5 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & -7 & 8 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 10 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 5 \\ 7 & 7 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

أوجد AB و BA، إن أمكن. (الدرس 2-5) **10–9. انظر الهامش.**

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & -6 \end{bmatrix}$
$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$
$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -8 & 2 \end{bmatrix}$

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية. ثم أوجد معكوس المصفوفة، إن وُجد. (الدرس 2-5)

11. $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ **$2; \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$**

12. $\begin{bmatrix} -9 & -5 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}$ **$1; \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$**

13. $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$ **$-1; \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$**

14. $\begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ **$10; \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & 1 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$**

15. **التمريض** تعمل حفصة ممرضة بغرفة الطوارئ. وتكسب 24 AED في الساعة خلال نوبات العمل العادية، و 30 AED في الساعة عند العمل لوقت إضافي. ويوضح الجدول التالي ساعات العمل لحفصة خلال الأسابيع الثلاثة الماضية. (الدرس 2-5)

الأسبوع	الساعات العادية	الساعات الإضافية
1	35	7
2	38	0
3	40	9

a. الأسبوع 1 = 1050 AED، الأسبوع 2 = 912 AED، الأسبوع 3 = 1230 AED

a. استخدم المصفوفات لتحديد المبلغ الذي جنته حفصة خلال كل أسبوع.

b. خلال الأسبوع الرابع، عملت حفصة ساعات عمل عادية أكثر من ساعات العمل الإضافي بأربع مرات. حدد عدد الساعات التي عملتها إذا كانت قد جنت 1008 AED.
32 ساعة عمل عادية، و8 ساعات عمل إضافية

استخدم مصفوفة عكسية لحل كل نظام معادلات، إن أمكن. (الدرس 3-5)

16. $2x - y = 6$ **(7, 8)**
$3x + 2y = 37$

17. $2x + y + z = 19$ **(0, 11, 8)**
$3x - 2y + 3z = 2$
$4x - 6y + 5z = -26$

18. **اختيار من متعدد** أي من المصفوفات الموسعة يمثل الحلول لنظام المعادلات؟ (الدرس 3-5) **H**

$x + y = 13$
$2x - 3y = -9$

F $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$

H $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$

G $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$

J $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل فريد. (الدرس 3-5)

19. $2x - y = 6$
$4x - 2y = 12$
ليس لها حل فريد

20. $3x - y - z = 13$ **(5, 1, 1)**
$3x - 2y + 3z = 16$
$-x + 4y - 8z = -9$

الدروس من 1-5 إلى 3-5

التقويم التكويني

استخدام اختبار نصف الوحدة لتقويم التقدم الذي حققه الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

بالنسبة للمسائل المجاب عنها بشكل غير صحيح، فاطلب من الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها بين الأقواس.

إجابات إضافية

3. $\left(\frac{4}{3}, -4\right)$

4. $(-5, -6, -3)$

5. $(-3, -3, 5)$

6. $(12, 9, 5)$

7a. $x + y + z = 25$
$x - y = 10$
$4x + 7y + 3z = 100$

7b. 13 رطلاً من طعام الأرانب، و9 أرطال من طعام القطط، و3 أرطال من حبوب العصافير

9. $AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 & -2 \\ 4 & -1 & 4 & 3 \\ -10 & -6 & 2 & -4 \end{bmatrix}$, BA غير محدد

10. AB غير محدد $BA = \begin{bmatrix} 18 \\ 11 \\ -31 \end{bmatrix}$.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 5-4 تمثيل الدوال النسبية بيانيًا.

الدرس 5-4 كتابة تحليل الكسور الجزئية للتعابير النسبية ذات العوامل الخطية في المقام.
كتابة تحليلا ت الكسور الجزئية للتعابير النسبية ذات العوامل التربيعية الأولية في المقام.

بعد الدرس 5-4 كتابة تحليل الكسور الجزئية للتعبير النسبي لإيجاد المساحة الواقعة أسفل المنحنى.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

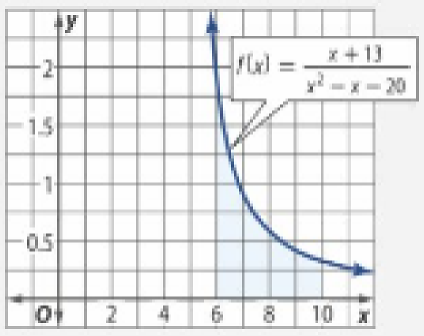
- ما الصيغة المحددة لعوامل مقام الدالة النسبية؟ $(x-5)(x+4)$

5-4 الكسور الجزئية

السابق:
- قمت بتمثيل الدوال النسبية بيانيًا.

الحالي:
1. كتابة تحليلات الكسور الجزئية (أو ما يُعرف بتجزئة الكسور) للتعابير النسبية ذات العوامل الخطية في المقام.
2. كتابة تحليلات الكسور الجزئية للتعابير النسبية ذات عوامل تربيعية أولية.

لماذا؟
- في حساب التفاضل والتكامل، سوف تتعلم إيجاد المساحة الواقعة تحت التمثيل البياني لدالة خلال فترة محددة. لإيجاد المساحة الواقعة تحت منحنى دالة نسبية مثل $f(x)=\frac{x+13}{x^2-x-20}$، ستحتاج أولاً إلى *تحليل* التعبير النسبي أو إعادة كتابته على هيئة مجموع تعبيرين أبسط.



المفردات الجديدة

كسر جزئي
(partial fraction)
تحليل الكسر الجزئي
(partial fraction decomposition)

1 العوامل الخطية

تعلمت أن العديد من الدوال كثيرة الحدود ذات معاملا ت حقيقية يمكن التعبير عنها في شكل ناتج ضرب العوامل الخطية والتربيعية. وبالمثل، يمكن التعبير عن العديد من الدوال النسبية في شكل مجموع لدالتين نسبيتين أبسط أو أكثر، بسطهما ثوابت حقيقية ومقامهما عبارة عن قوة لأ حد العوامل الخطية أو عامل تربيعي غير قابل للاختزال. على سبيل المثال، يمكن كتابة الدالة النسبية $f(x)$ أدناه في شكل مجموع كسرين مقامهما عوامل خطية للمقام الأصلي.

$$f(x)=\frac{x+13}{x^2-x-20}=\frac{2}{x-5}+\frac{-1}{x+4}$$

وكل كسر في المجموع هو **كسر جزئي**. ومجموع هذه الكسور الجزئية يكوّن **تحليل الكسر الجزئي** للدالة النسبية الأصلية.

مثال 1 المقام ذو العوامل الخطية غير المكررة

أوجد تحليل الكسر الجزئي لــ $\frac{x+13}{x^2-x-20}$.

أعد كتابة التعبير في شكل كسور جزئية ذات بَسط ثابتة A و B، ومقامات تعتبر عوامل خطية للمقام الأصلي.

$\frac{x+13}{x^2-x-20}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+4}$ صيغة تحليل الكسر الجزئي

$x+13=A(x+4)+B(x-5)$ اضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغي x^2-x-20.

$x+13=Ax+4A+Bx-5B$ خاصية التوزيع

$1x+13=(A+B)x+(4A-5B)$ جمع الحدود المتشابهة.

ساو بين معاملا ت الجانبين الأيمن والأ يسر من المعادلة للحصول على نظام من معادلتين. لحل النظام، يمكنك كتابته في شكل مصفوفة $CX=D$ وإيجاد قيمة X.

$$\begin{array}{l} A+B=1 \\ 4A-5B=13 \end{array} \longrightarrow \underset{C}{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -5\end{bmatrix}} \times \underset{X}{\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}} = \underset{D}{\begin{bmatrix}1\\ 13\end{bmatrix}}$$

يمكنك استخدام الحاسبة البيانية لإيجاد قيمة $X=C^{-1}D$. إذًا، $A=2$ و $B=-1$. استخدم التعويض لإيجاد تحليل الكسر الجزئي.

```
[C]⁻¹*[D]
        [[2 ]
         [-1]]
```

$\frac{x+13}{x^2-x-20}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+4}$ صيغة تحليل الكسر الجزئي

$\frac{x+13}{x^2-x-20}=\frac{2}{x-5}+\frac{-1}{x+4}$ $A=2$ و $B=-1$

تمرين موجه

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي.

1A. $\frac{2x+5}{x^2-x-2}$ $\frac{-1}{x+1}+\frac{3}{x-2}$

1B. $\frac{x+11}{2x^2-5x-3}$ $\frac{-3}{2x+1}+\frac{2}{x-3}$

- مع أي قيمتين لـــ x تكون $f(x)$ غير محددة؟ اشرح إجابتك. 5 و -4؛ هاتان هما القيمتان اللتان يساوي المقام فيهما صفرًا.
- ما خطوط التقارب للتمثيل البياني للدالة؟ $x = 5$ و $x = -4$

1 العوامل الخطية

توضح **الأمثلة 3–1** كيفية إيجاد تحليل الكسور الجزئية للدوال التي لها عوامل خطية مميزة، وتعابير نسبية مركبة، وعوامل خطية مكررة.

التقويم التكويني

استخدم الأسئلة الواردة في التمرين الموجه بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي.

1 $\dfrac{x-25}{x^2-x-12}$ $\quad \dfrac{4}{x+3} - \dfrac{3}{x-4}$

2 $\dfrac{-2x^2+9x-4}{x^2-x}$

$-2 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x-1}$

إذا كان التعبير النسبي $\dfrac{f(x)}{d(x)}$ مركبًا، وكانت درجة $f(x)$ أكبر من $d(x)$ أو تساويها، فيجب عليك استخدام خوارزمية القسمة $\dfrac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \dfrac{r(x)}{d(x)}$ أولاً لإعادة كتابة التعبير على هيئة مجموع تعبير نسبي عادي وكثير الحدود. ثم حلل التعبير النسبي الباقي.

مثال 2 التعبير النسبي المركَّب

أوجد تحليل الكسر الجزئي لـ $\dfrac{2x^2+5x-4}{x^2-x}$.

نظرًا لأن درجة البسط أكبر من درجة المقام أو تساويها، فإن التعبير النسبي مركَّب. لإعادة كتابة التعبير، اقسم البسط على المقام باستخدام القسمة كثيرة الحدود.

$$\begin{array}{r} 2 \\ x^2 - x \overline{)\,2x^2 + 5x - 4} \\ (-)\ \underline{2x^2 - 2x} \\ 7x - 4 \end{array}$$

اضرب المقسوم عليه في 2 لأن $\frac{2x^2}{x^2} = 2$.

اطرح وأسقط الحد التالي.

إذًا، يساوي التعبير الأصلي $2 + \dfrac{7x-4}{x^2-x}$

نظرًا لأن التعبير النسبي المتبقي عادي الآن، بإمكانك تحديد عوامل المقام في الصورة $x(x-1)$ وإعادة كتابة التعبير باستخدام الكسور الجزئية.

$\dfrac{7x-4}{x^2-x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1}$	صيغة التحليل
$7x - 4 = A(x-1) + B(x)$	اضرب في المقام المشترك الأصغر، $x^2 - x$.
$7x - 4 = Ax - A + Bx$	خاصية التوزيع
$7x - 4 = (A+B)x - A$	جمع الحدود المتشابهة.

اكتب نظام المعادلات التي تحصل عليه بمعادلة المعاملات وأوجد حله.

$$\begin{aligned} A + B &= 7 \\ -A &= -4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= 4 \\ B &= 3 \end{aligned}$$

لذلك، $\dfrac{2x^2+5x-4}{x^2-x} = 2 + \dfrac{7x-4}{x^2-x} = 2 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x-1}$.

التحقق يمكنك التحقق من إجابتك بتبسيط التعبير الموجود بالجانب الأيمن من المعادلة.

$\dfrac{2x^2+5x-4}{x^2-x} = 2 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x-1}$	تحليل الكسر الجزئي
$= \dfrac{2x(x-1)}{x(x-1)} + \dfrac{4(x-1)}{x(x-1)} + \dfrac{3x}{x(x-1)}$	إعادة الكتابة باستخدام المقام المشترك الأصغر، $x(x-1)$.
$= \dfrac{2(x^2-x) + 4(x-1) + 3x}{x(x-1)}$	اجمع.
$= \dfrac{2x^2 - 2x + 4x - 4 + 3x}{x^2-x}$	اضرب.
$= \dfrac{2x^2+5x-4}{x^2-x}$ ✓	حوّل لأبسط صورة.

نصيحة دراسية

طريقة بديلة بشكل مقصود، تكون المعادلة $7x - 4 = A(x-1) + B(x)$ التي تحصل عليها بعد التخلص من الكسور في المثال 2 حقيقية لجميع قيم x. ولذلك، يمكنك التعويض بأي قيمة مناسبة من قيم x لإيجاد قيم A وB. القيم المناسبة هي تلك القيم التي تجعل قيمة المقام الأصلي صفرًا. إذا كان $x = 0$، فإن $A = 4$. إذا كان $x = 1$، فإن $B = 3$.

تمرين موجه

$2B.\ x^2 + x + 5 + \dfrac{12}{x-4} - \dfrac{1}{x}$

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي.

2A. $\dfrac{3x^2+12x+4}{x^2+2x}$ $\quad 3 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x+2}$

2B. $\dfrac{x^4 - 3x^3 + x^2 - 9x + 4}{x^2 - 4x}$

إذا كان مقام التعبير النسبي يضم عاملاً خطيًا مكررًا لعدد n من المرات، فيجب أن يحتوي تحليل الكسر الجزئي على كسر جزئي له بسط ثابت مقابل كل قوة أسيّة من 1 إلى n من العامل الخطي. على سبيل المثال، لإيجاد تحليل الكسر الجزئي لــ $\frac{5x-1}{x^3(x-1)^2}$، فيتعين عليك كتابة

$$\frac{5x-1}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{(x-1)^2}.$$

مثال 3 المقام ذو العوامل الخطية المكررة

أوجد تحليل الكسر الجزئي لــ $\frac{-x^2-3x-8}{x^3+4x^2+4x}$.

هذا التعبير النسبي عادي؛ لذا، ابدأ بتحديد عوامل المقام بالشكل $x(x^2+4x+4)$ أو $x(x+2)^2$. نظرًا لأن العامل $(x+2)$ يحمل التعدد 2، قم بتضمين الكسور الجزئية مع مقامات x، و$(x+2)$، و$(x+2)^2$.

$$\frac{-x^2-3x-8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$ صيغة تحليل الكسر الجزئي

$$-x^2-3x-8 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$$ اضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر، $x(x+2)^2$.

$$-x^2-3x-8 = Ax^2 + 4Ax + 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx$$ خاصية التوزيع

$$-1x^2 - 3x - 8 = (A+B)x^2 + (4A+2B+C)x + 4A$$ جمّع الحدود المتشابهة

بمجرد إيجاد نظام المعادلات الذي تحصل عليه من معادلة المعاملات، هناك طريقتان يمكن استخدامهما لإيجاد قيم A، وB، وC.

الطريقة 1 يمكنك كتابة نظام المعادلات وحله باستخدام الطريقة ذاتها في المثال 2.

$$\begin{aligned} A + B &= -1 \\ 4A + 2B + C &= -3 \\ 4A &= -8 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= -2 \\ B &= 1 \\ C &= 3 \end{aligned}$$

الطريقة 2 طريقة أخرى لحل هذا النظام هي مساواة x بقيمة مناسبة لحذف أحد متغيرات المعادلة التي تنشأ بضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر.

$$-x^2-3x-8 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$$ المعادلة الأصلية

$$-(0)^2 - 3(0) - 8 = A(0+2)^2 + B(0)(0+2) + C(0)$$ افرض أن $x = 0$ لحذف B وC.

$$-8 = 4A$$

$$-2 = A$$

$$-x^2-3x-8 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$$ المعادلة الأصلية

$$-(-2)^2 - 3(-2) - 8 = A(-2+2)^2 + B(-2)(-2+2) + C(-2)$$ لنفرض أن $x = -2$ لحذف A وB.

$$-6 = -2C$$

$$3 = C$$

عوّض بهذه القيم عن A وC وبأي قيمة عن x في المعادلة لإيجاد قيمة B.

$$-x^2-3x-8 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$$ المعادلة الأصلية

$$-1^2 - 3(1) - 8 = -2(1+2)^2 + B(1)(1+2) + 3(1)$$ افرض أن $x = 1$، و$A = -2$، و$C = 3$.

$$-12 = -15 + 3B$$ حول لأبسط صورة.

$$B = 1$$ أوجد حل B.

إذًا، $\frac{-x^2-3x-8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{-2}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^2}$.

تمرين موجه

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي.

3A. $\frac{x+2}{x^3-2x^2+x}$ $\quad \frac{2}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$

3B. $\frac{x+18}{x^3-6x^2+9x}$ $\quad \frac{2}{x} + \frac{-2}{x-3} + \frac{7}{(x-3)^2}$

نصيحة دراسية

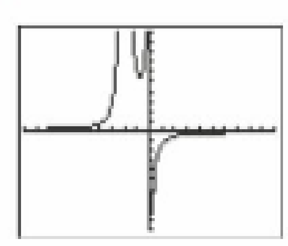
التحقق بالتمثيل البياني يمكنك التحقق من حل المثال 3 بتمثيله بيانيًا

$y_1 = \frac{-x^2-3x-8}{x^3+4x^2+4x}$، و

$y_2 = \frac{-2}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^2}$

في نافذة العرض نفسها.

يجب أن تتطابق التمثيلات البيانية. ✓



[−10, 10] scl: 1 by
[−10, 10] scl: 1

مثال إضافي

3 أوجد تحليل الكسر الجزئي لـ $\frac{3x^2-5x+4}{x^3-4x^2+4x}$

$\frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

كاميرا التوثيق اختر عدة طلاب لمشاركة حلهم مع الصف وتوضيح أجوبتهم. واطلب منهم التحقق من الحل بجمع الكسور في أجوبتهم.

نصيحة للمعلمين الجدد

الأُسس في المقام عندما يحتوي مقام التعبير النسبي على عوامل مرفوعة للقوة الأُسية 2 أو أكبر، فسيكون عدد الكسور الجزئية لهذا العامل مساويًا للأُس. على سبيل المثال، إذا كان أحد عوامل المقام يحتوي على الأُس 4، مثل x^4، فسيضم هذا العامل أربعة كسور جزئية بالمقامات x، وx^2، وx^3، وx^4.

318 | الدرس 5-4 | الكسور الجزئية

2 العوامل التربيعية الأولية

يوضح **المثال 4** طريقة إيجاد تحليل الكسور الجزئية لتعبير نسبي يحتوي مقامه على عامل تربيعي أولي.

مثال إضافي

4 أوجد تحليل الكسر الجزئي لـ $\dfrac{x^3 - x}{(x^2 - 3)^2}$

$\dfrac{x}{x^2 - 3} + \dfrac{2x}{(x^2 - 3)^2}$

التركيز على محتوى الرياضيات

تحليل الكسور الجزئية

يمكن غالبًا إعادة كتابة تعبير نسبي على هيئة مجموع تعبيرين نسبيين أبسط أو أكثر. وسيطلعك عدد العوامل الموجودة في المقام على عدد الكسور الموجودة في التحليل.

2 العوامل التربيعية الأولية إذا كان مقام التعبير النسبي يحتوي على عامل تربيعي أولي، فيجب أن يحتوي تحليل الكسر الجزئي على كسر جزئي له بسط خطي بالشكل $Bx + C$ لكل من قوى هذا العامل.

مثال 4 المقام ذو العوامل التربيعية الأولية

أوجد تحليل الكسر الجزئي للتعبير $\dfrac{x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 5x + 16}{x(x^2 + 4)^2}$.

هذا التعبير عادي. يضم المقام عاملاً خطيًا واحدًا وعاملاً تربيعيًا أوليًا واحدًا يحمل المضاعفة 2.

$$\frac{-x^2 - 3x - 8}{x^3 + 4x^2 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

$$x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 5x + 16 = A(x^2 + 4)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 4) + (Dx + E)x$$

$$x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 5x + 16 = Ax^4 + 8Ax^2 + 16A + Bx^4 + Cx^3 + 4Bx^2 + 4Cx + Dx^2 + Ex$$

$$1x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 5x + 16 = (A + B)x^4 + Cx^3 + (8A + 4B + D)x^2 + (4C + E)x + 16A$$

اكتب نظام المعادلات التي تحصل عليه بمعادلة المعاملات وأوجد حله.

$A + B = 1$		$A = 1$
$C = -2$		$B = 0$
$8A + 4B + D = 8$	→	$C = -2$
$4C + E = -5$		$D = 0$
$16A = 16$		$E = 3$

لذلك، $\dfrac{x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 5x + 16}{x(x^2 + 4)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2 + 4} + \dfrac{3}{(x^2 + 4)^2}$.

تمرين موجه

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي.

4A. $\dfrac{x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2}$ $\dfrac{x}{x^2 + 1} + \dfrac{x}{(x^2 + 1)^2}$

4B. $\dfrac{4x^3 - 7x}{(x^2 + x + 1)^2}$ $\dfrac{4x - 4}{x^2 + x + 1} + \dfrac{-7x + 4}{(x^2 + x + 1)^2}$

انتبه!

العوامل التربيعية الأولية الطريقة البديلة التي قُدّمت في المثالين 2 و3 ليست فعالة مثل تلك المقدمة في المثال 4 عندما يضم مقام التعبير النسبي عاملاً تربيعيًا أوليًا. وهذا بسبب عدم وجود قيم مناسبة كافية لـ x أو عدم وجود قيم على الإطلاق.

ملخص المفهوم تحليل الكسور الجزئية بالصيغة $f(x)/d(x)$

1. إذا كانت درجة $f(x) \geq$ درجة $d(x)$، استخدم القسمة المطولة كثيرة الحدود وخوارزمية القسمة لكتابة $\dfrac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \dfrac{r(x)}{d(x)}$ ثم طبّق تحليل الكسور الجزئية على $\dfrac{r(x)}{d(x)}$.

2. إذا كان $\dfrac{f(x)}{d(x)}$ كسرًا عاديًا، فقم بتحليل عوامل $d(x)$ في شكل ناتج للعوامل الخطية و/أو العوامل التربيعية الأولية.

3. لكل عامل يحمل الصيغة $(ax + b)^n$ في المقام، يجب أن يحتوي تحليل الكسر الجزئي على مجموع n من الكسور

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \frac{A_3}{(ax + b)^3} + \dots + \frac{A_n}{(ax + b)^n}$$

حيث $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ أعداد حقيقية.

4. لكل عامل تربيعي أولي يتكرر عدد n من المرات في المقام، فيجب أن يحتوي تحليل الكسر الجزئي على مجموع n من العوامل

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \frac{B_3x + C_3}{(ax^2 + bx + c)^3} + \dots + \frac{B_nx + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

حيث $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$، $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ أعداد حقيقية.

5. تحليل الكسر الجزئي للدالة الأصلية هو مجموع $q(x)$ من الجزء 1 والكسور في الجزأين 3 و4.

319

التدريس المتمايز AL OL

المتعلمون بطريقة التواصل قسّم الطلاب إلى مجموعات ذات قدرات مختلفة لإيجاد تحليلات الكسور الجزئية. إذا واجه الطلاب صعوبة في حساب تحليلات الكسور الجزئية، فاطلب من المجموعة مراجعة تحليل عوامل التعبيرات كثيرة الحدود وقسمة التعبيرات كثيرة الحدود.

تمارين

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي. (مثال 1)

1. $\frac{x+1}{x^2+5x+6}$ $\frac{2}{x+3}+\frac{-1}{x+2}$

2. $\frac{x-18}{x^2-13x+42}$ $\frac{12}{x-6}+\frac{-11}{x-7}$

3. $\frac{x+13}{x^2+7x+12}$ $\frac{10}{x+3}+\frac{-9}{x+4}$

4. $\frac{x+12}{x^2+14x+48}$ $\frac{3}{x+6}+\frac{-2}{x+8}$

5. $\frac{x+6}{-2x^2-19x-45}$ $\frac{3}{-2x-9}+\frac{1}{x+5}$

6. $\frac{x+7}{2x^2+15x+28}$ $\frac{7}{2x+7}+\frac{-3}{x+4}$

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مركب. (المثال 2) **7–12. انظر الهامش.**

7. $\frac{3x^2+x-4}{x^2-2x}$

8. $\frac{-5x^2-30x-21}{x^2+7x}$

9. $\frac{-2x^3+4x^2+22x-32}{x^3+2x^2-8x}$

10. $\frac{x^4-2x^3-2x^2+8x-6}{x^2-2x}$

11. $\frac{x^3+12x^2+33x+2}{x^2+8x+15}$

12. $\frac{x^4-9x^3+24x^2-4x-12}{x^3-6x^2+8x}$

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي به عوامل مكررة في المقام. (المثال 3) **13–18. انظر الهامش.**

13. $\frac{x^2-3}{x^3+2x^2+x}$

14. $\frac{5x^2-18x+24}{x^3-4x^2+4x}$

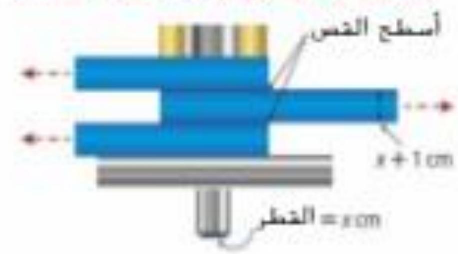
15. $\frac{-x^2-22x-50}{x^3+10x^2+25x}$

16. $\frac{-5x^2-6x+16}{x^3+8x^2+16x}$

17. $\frac{17x+256}{x^3-16x^2+64x}$

18. $\frac{-10x-108}{x^3+12x^2+36x}$

19. **الهندسة** يمكن تقريب مجموع متوسط إجهاد الشد والقص في القضيب الموضح بالأسفل بـ $s(x)=\frac{20x+10\pi x+20}{\pi x^3+\pi x^2}$، حيث x هي قطر الوتد. (مثال 3) **a–b. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**



a. أوجد تحليل الكسر الجزئي.

b. مثّل بيانيًا كل من $s(x)$ والإجابة عن الجزء a في نافذة العرض نفسها.

20–25. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي به عوامل تربيعية أولية في المقام. (مثال 4)

20. $\frac{x^3+5x-5}{(x^2+4)^2}$

21. $\frac{3x^4+4x^2+8x+18}{x(x^2+3)^2}$

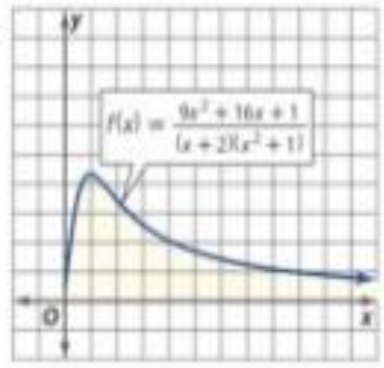
22. $\frac{4x^4+x^2-25x+32}{x^3-4x^2+4x}$

23. $\frac{8x^3-48x+7}{(x^2-6)^2}$

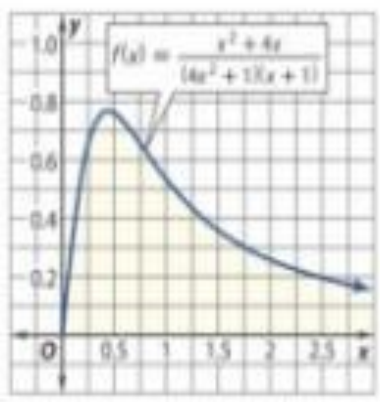
24. $\frac{-5x^3-10x^2-6x+4}{(x^2+2x+3)^2}$

25. $\frac{4x^3-12x^2-5x+20}{(x^2-3x+3)^2}$

حساب التفاضل والتكامل في حساب التفاضل والتكامل، يمكنك إيجاد مساحة المنطقة الموجودة بيْن التمثيل البياني لدالة نسبية والمحور x الواقعة على مجال مقيد. الخطوة الأولى في هذه العملية هي كتابة تحليل الكسر الجزئي للتعبير النسبي. أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي. B

26.


$\frac{8x}{x^2+1}+\frac{1}{x+2}$

27.


$\frac{3.4x+0.6}{4x^2+1}+\frac{-0.6}{x+1}$

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي. ثم استخدم الحاسبة البيانية للتحقق من إجابتك. **28–33. انظر الهامش.**

28. $\frac{x+4}{3x^2-x-2}$

29. $\frac{5x^2-2x+8}{x^3-4x}$

30. $\frac{4x^2-3x+3}{4x(x-1)^2}$

31. $\frac{x^2+x+5}{(x^2+3)^2}$

32. $\frac{2x^2}{(x-1)^2(x+1)^2}$

33. $\frac{2x^3+12x^2-3x+3}{x^2+6x+5}$

34. أوجد تعبيرين نسبيين مجموعهما $\frac{x+4}{3x^2-x-2}$.

35. أوجد ثلاثة تعابير نسبية مجموعها $\frac{6-x}{x^3+2x^2+x}$ $\frac{6}{x}, \frac{-6}{x+1}, \frac{-7}{(x+1)^2}$

أوجد A، وB، وC، وD بدلالة r وt.

36. $\frac{rx-t}{x^2-x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$ $A=\frac{2r-t}{3}, B=\frac{r+t}{3}$

37. $\frac{4x^2+rx+2t}{x^2+3x}=4+\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}$ $A=\frac{2}{3}t, B=r-\frac{2}{3}t-12$

38. $\frac{rx+t}{x^3+x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$ $A=r-t, B=t, C=-r+t$

39. $\frac{3x^3+5rx^2-16tx+32}{x^2(x^2+16)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+16}$ $A=-t, B=2, C=t+3, D=5r-2$

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 25 للتحقق من الاستيعاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع قد لا يحلل الطلاب عوامل المقام بشكل كامل. بعد تحليل عوامل x من المقام في التمرين 22، فيمكن تحليل العامل المتبقي مرة أخرى إلى $(x-2)^2$. وسينتج عن ذلك ثلاثة كسور جزئية بالنسبة للتحليل.

خطأ شائع بالنسبة للتمرينين 40 و 41، قد يحتاج الطلاب إلى استخدام قواعد تحليل عوامل نواتج الضرب الخاصة. وقد يحتاجون إلى إتمام عدة عمليات لتحليل عوامل المقامات.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-25, 46, 47, 52-67	1-25 فردية, 64-67	2-24 زوجية, 46, 47, 52-63
OL ضمن المستوى	1-43 فردية, 44-47, 52-67	1-25, 64-67	26-47, 52-63
BL أعلى من المستوى	26-67		

إجابات إضافية

7. $3+\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}$

8. $-5+\frac{-3}{x}+\frac{8}{x+7}$

9. $-2+\frac{4}{x}+\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+4}$

10. $x^2-2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x-2}$

11. $x+4+\frac{-8}{x+3}+\frac{-6}{x+5}$

12. $x-3+\frac{-1.5}{x}+\frac{-14}{x-2}+\frac{13.5}{x-4}$

13. $\frac{-3}{x}+\frac{4}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}$

14. $\frac{6}{x}+\frac{-1}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}$

15. $\frac{-2}{x}+\frac{1}{x+5}+\frac{-7}{(x+5)^2}$

16. $\frac{1}{x}+\frac{-6}{x+4}+\frac{10}{(x+4)^2}$

17. $\frac{4}{x}+\frac{-4}{x-8}+\frac{49}{(x-8)^2}$

18. $\frac{-3}{x}+\frac{3}{x+6}+\frac{8}{(x+6)^2}$

C أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي.
40–43. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

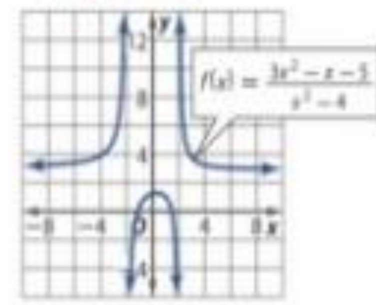
40. $\frac{x^3+2x-1}{(x^2-x-2)^2}$

41. $\frac{x^3+4}{(x^2-1)(x^2+3x+2)}$

42. $\frac{4x^3+x^2-3x+3}{x(x-1)^2}$

43. $\frac{7x^7+2x^6-13x^5+32x^4-19x^3+8x^2-7x+2}{x(x-1)^2(x+2)(x^2+1)}$

44. **تمثيلات متعددة** في هذه المسألة، سوف تكتشف العلاقة بين تحليل الكسر الجزئي لدالة نسبية وتمثيلها البياني. تأمل الدالة النسبية الموضحة بالأسفل. **a–e. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**



a. **لفظيًا** صف السلوك الطرفي والخط المقارب الأفقي والرأسي للدالة.

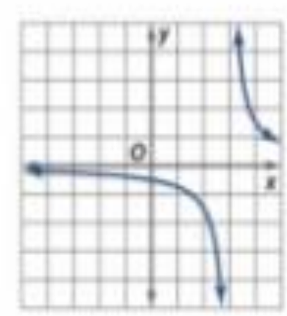
b. **تحليليًا** اكتب تحليل الكسر الجزئي لـ $f(x)$.

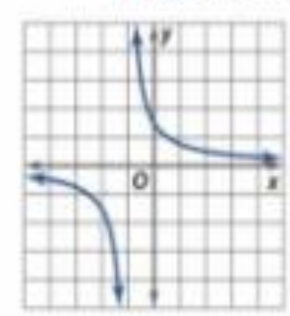
c. **بيانيًا** مثّل كل حد مضاف في تحليل الكسر الجزئي الذي كتبته في الجزء b بيانيًا في شكل دالة منفصلة.

d. **لفظيًا** قارن التمثيلات البيانية من الجزء c مع التمثيل البياني لـ $f(x)$ والتحليل الذي كتبته في الجزء b.

e. **تحليليًا** خمن كيف يمكن استخدام تحليل الكسر الجزئي لتمثيل دالة نسبية بيانيًا.

45. **تحليل التمثيل البياني** الدوال النسبية الموضحة تكوّن تحليل الكسر الجزئي لـ $f(x)$. **I**





حدد أي من الدوال الأربع المذكورة بالأسفل قد تكون الدالة الأصلية $f(x)$.

I. $f(x)=\frac{6}{x^2-2x-3}$

II. $f(x)=\frac{6}{x^2+2x-3}$

III. $f(x)=\frac{6}{x^2+4x+3}$

IV. $f(x)=\frac{6}{x^2-4x+3}$

مسائل مهارات التفكير العليا
استخدام مهارات التفكير العليا

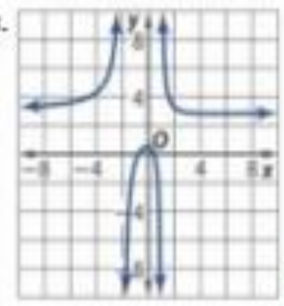
الاستنتاج استخدم تحليل الكسر الجزئي لـ $f(x)$ لشرح كل مما يلي.

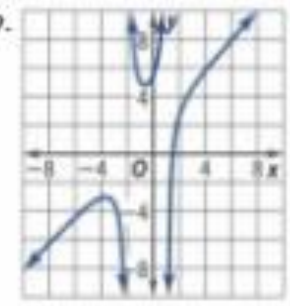
46. إذا كان $f(x)=\frac{-2x^3-7x^2+13x+43}{(x-2)(x+3)^2}$ فاشرح لما $\lim_{x\to\infty} f(x)=-2$.

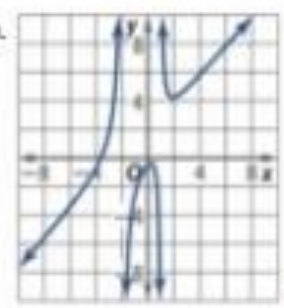
47. إذا كان $f(x)=\frac{x^2-x+1}{(x+1)^3}$، إذًا ماذا تكون $\lim_{x\to\infty} f(x)$؟

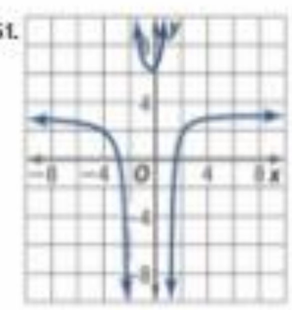
46–47. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

تحدٍّ صل التمثيل البياني لكل دالة نسبية بمعادلته.

48.

c

49.

b

50.

a

51.

d

a. $y=x+2+\frac{1}{x-1}+\frac{-3}{x+2}$

b. $y=x+2+\frac{-2}{x-1}+\frac{3}{x+2}$

c. $y=3+\frac{1}{x-1}+\frac{-3}{x+2}$

d. $y=3+\frac{-2}{x-1}+\frac{3}{x+2}$

الاستنتاج حدد ما إذا كانت العبارات التالية صواب أم خطأ. اشرح استنتاجك.

52. إذا كان $f(x)=\frac{x^3+8}{(x^2-1)(x-2)}$، فإن $\lim_{x\to\infty} f(x)=8$.

53. تحليل الكسر الجزئي للدالة $f(x)=\frac{-4x^4+5x^3+27x^2-11x-45}{x(x^2-3)^2}$ هو $\frac{x^2+1}{(x^2-3)^2}+\frac{4+x}{(x^2-3)}+\frac{-5}{x}$. **52–53. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

54. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب تعبيرًا نسبيًا بالشكل $\frac{P(x)}{Q(x)}$ يحتوي فيه تحليل الكسر الجزئي على كل من المقامات التالية.

a. عوامل خطية غير مكررة فقط.
b. عامل خطي مكرر واحد على الأقل.
a–b. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

55. **الكتابة في الرياضيات** صف الخطوات المستخدمة للحصول على تحليل الكسر الجزئي لتعبير نسبي.
انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

إجابات إضافية

28. $\frac{-2}{3x+2}+\frac{1}{x-1}$

29. $\frac{-2}{x}+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x+2}$

30. $\frac{3}{4x}+\frac{0.25}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$

31. $\frac{1}{x^2+3}+\frac{x+2}{(x^2+3)^2}$

32. $\frac{1}{x-1}+\frac{0.5}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}+\frac{-0.5}{(x+1)^2}$

33. $2x+\frac{-17}{x+5}+\frac{4}{x+1}$

321

مراجعة شاملة

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل فريد.

56. $x + y + z = 6$
$2x + y - 4z = -15$
$5x - 3y + z = -10$ $(-1, 3, 4)$

57. $a - 2b + c = 7$
$6a + 2b - 2c = 4$
$4a + 6b + 4c = 14$ $(2, -1, 3)$

58. $p - 2r - 5t = -1$
$p + 2r - 2t = 5$
$4p + r + t = -1$ $\left(-\frac{11}{19}, \frac{39}{19}, -\frac{14}{19}\right)$

59. **المالية** اشترت جميلة أسهمًا في ثلاث شركات لأحد مشاريع الصف الدراسي. فاشترت 150 سهمًا في شركة مرافق، و100 سهم في شركة كمبيوتر، و200 سهم في شركة أغذية. وفي نهاية المشروع، "باعت" كل أسهمها.

الشركة	سعر الشراء للسهم (AED)	سعر البيع للسهم (AED)
المرافق	54.00	55.20
الكمبيوتر	48.00	58.60
الأغذية	60.00	61.10

a. نظّم البيانات في مصفوفتين واستخدم ضرب المصفوفة لإيجاد المبلغ الكلي الذي أنفقته جميلة على الأسهم. AED 24,900

b. اكتب مصفوفتين واستخدم ضرب المصفوفة لإيجاد المبلغ الكلي الذي حصلت عليه مقابل بيع الأسهم. AED 26,360

c. كم المبلغ الذي "جنته" جميلة أو "خسرته" في هذا المشروع؟ **جنت جميلة AED 1460.**

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

60. $\csc\theta\cos\theta\tan\theta$ 1

61. $\sec^2\theta - 1$ $\tan^2\theta$

62. $\frac{\tan\theta}{\sin\theta}$ $\sec\theta$

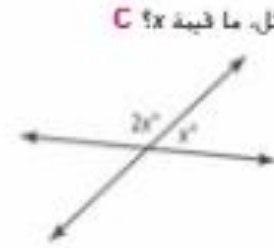
63. **الطب** قد يستخدم الأطباء شوكة رنانة يرتجع صداها بتردد معين كوسيلة مساعدة لتشخيص مشكلات السمع. يمكن عمل نموذج للموجات الصوتية التي تصدر عن الشوكة الرنانة باستخدام دالة الـ sine الزاوية.

a. إذا كانت سعة دالة الـ sine هي 0.25، فاكتب المعادلات الخاصة بالشوكة الرنانة التي يرتجع صداها بترددات 64، و256، و512 هرتز. $y = 0.25 \sin 128\pi t$, $y = 0.25 \sin 512\pi t$, $y = 0.25 \sin 1024\pi t$

b. كيف تختلف فترات الشوكات الرنانة؟ **الإجابة النموذجية: كلما ازداد التردد، نقصت الفترة.**

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

64. **SAT/ACT** في الشكل، ما قيمة x؟ C



A 40
B 45
C 60
D 75
E 90

65. حلل $\frac{3p-1}{p^2-1}$ إلى كسور جزئية. F

F $\frac{2}{p+1} + \frac{1}{p-1}$

G $\frac{2}{p-1} + \frac{1}{p+1}$

H $\frac{2}{p+1} - \frac{1}{p-1}$

J $\frac{2}{p-1} - \frac{1}{p+1}$

66. **مراجعة** تقوم آلة رش المياه بسقي قطاع دائري من العشب قطره 20 قدمًا تقريبًا. قرر مالك المنزل أن وضع آلة الرش في النقطة (7, 5) سوف تزيد مساحة العشب المسقي للحد الأقصى. أي معادلة تمثل حد المنطقة التي تسقيها آلة الرش؟ A

A $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 100$

B $(x+7)^2 - (y+5)^2 = 100$

C $(x-7)^2 - (y+5)^2 = 100$

B $(x+7)^2 - (y+5)^2 = 100$

67. **مراجعة** أي مما يلي هو ناتج جمع $\frac{x+2}{x+3}$، $\frac{4}{x^2+x-6}$ ؟ H

F $\frac{-3x-9}{x^2+x-6}$

G $\frac{x^2-3x-24}{x^2+x-6}$

H $\frac{x^2}{x^2+x-6}$

J $\frac{x^2+x-1}{x^2+x-6}$

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب

اطلب من كل طالب إخبار زميله بعدد الكسور التي سيحتوي عليها تحليل الكسور الجزئية لـ $\frac{8x^2+18x+3}{x^3+2x^2+x}$ وما ستكون عليه مقامات الكسور الناتجة عن التحليل.

3 كسور؛ $x, x+1, (x+1)^2$

التدريس المتمايز BL

التوسع اطلب من الطلاب إيجاد تحليل الكسور الجزئية لـ $\frac{-2x^2-7x-14}{x^3-8}$

$\frac{-3}{x-2} + \frac{x+1}{x^2+2x+4}$

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 5-5 حل أنظمة المتباينات الخطية.

الدرس 5-5 استخدام البرمجة الخطية لحل التطبيقات.
التعرف على الحالات التي ليس لها حلول أو بها أكثر من حل واحد لتطبيق البرمجة الخطية.

بعد الدرس 5-5 تمثيل أنظمة المتباينات غير الخطية والمعادلات الوسيطية بيانيًا.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- اذكر بعض العوامل الواجب وضعها في الاعتبار عند اختيار قيود الأعمال.
الإجابة النموذجية: السلامة، أو جني الربح أو الخسارة، أو الفائدة العملية.

(يتبع في الصفحة المقبلة)

الدرس 5-5 الأمثلية الخطية

:: السابق

- قمت بحل أنظمة لمتباينات خطية.

:: الحالي

- 1 ستستخدم البرمجة الخطية لحل التطبيقات.
- 2 ستتعرّف على الحالات التي لا يكون لها حلول أو لها أكثر من حل واحد لتطبيق البرمجة الخطية.

:: لماذا؟

- بوجه عام، تسعى الشركات جاهدة إلى تقليل التكاليف إلى أدنى حد ممكن من أجل تعظيم الأرباح. ويطلق على العوامل التي تتسبب في تكاليف الأعمال أو تؤدي إلى زيادتها والتي تحد أو تقلل من الأرباح اسم قيود الأعمال.

بالنسبة لشركة شحن، قد يتمثل أحد القيود في عدد الساعات في اليوم التي يستطيع سائق الشاحنة خلالها القيادة بشكل آمن. أما في حالة مركز رعاية نهارية، فقد تتمثل أحد القيود في لائحة حكومية تحد من عدد الأطفال لكل مقدم للرعاية بالنسبة لفئات عمرية معينة.

المفردات الجديدة

الحل الأمثل (optimization)
برمجة خطية (linear programming)
دالة الهدف (objective function)
قيود (constraints)
حلول ممكنة (feasible solutions)
حلول مثلى متعددة (multiple optimal solutions)
غير محدودة (unbounded)

1 البرمجة الخطية

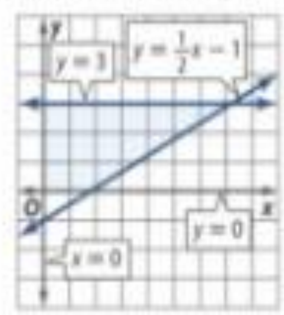
تنطوي العديد من التطبيقات في مجال الأعمال والاقتصاد على **الأمثلية (البحث عن الحل الأمثل)**، وهي عملية إيجاد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى لكمية معينة. وعندما تكون الكمية المطلوب تحقيق الأمثلية لها ممثلة بدالة خطية، فإن هذه العملية تُسمى **برمجة خطية**.

تتكون مسألة البرمجة الخطية ثنائية الأبعاد من دالة خطية مطلوب تحقيق الأمثلية لها تُسمى **دالة الهدف**، وهي تتألف من الصيغة $f(x, y) = ax + by + c$ ونظام من المتباينات الخطية يُسمى **قيود**. وتكون مجموعة حل نظام المتباينات عبارة عن مجموعة من **الحلول الممكنة أو المحتملة**، والتي تكون نقاطًا تأخذ الصيغة (x, y).

تذكر من الدرس 0-4 أن حل نظام المتباينات الخطية هو مجموعة من الأزواج المرتبة التي تحقق كل متباينة. وبيانيًا، يكون الحل هو تقاطع المناطق التي تمثل مجموعات حل المتباينات في النظام.

على سبيل المثال، يتمثل حل النظام أدناه في المنطقة المظللة كما هو موضح في التمثيل البياني.

$$y \geq \frac{1}{2}x - 1$$
$$y \leq 3$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

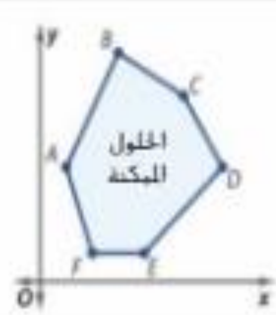


لنفترض أن المطلوب إيجاد القيمة العظمى للدالة $f(x, y) = 3x + 5y$ مع مراعاة القيود الواردة في النظام أعلاه. ونظرًا لأن المنطقة المظللة التي تمثل مجموعة الحلول الممكنة تحتوي على عدد لا نهائي من النقاط، فسيكون من المستحيل إيجاد قيمة $f(x, y)$ لجميعها. ولحسن الحظ، تقدم نظرية الرأس إستراتيجية لإيجاد الحل، إن وُجد.

المفهوم الأساسي نظرية الرأس المتعلقة بالحل الأمثل

الشرح إذا كان من الممكن إيجاد الحل الأمثل لمسألة برمجة خطية، فسوف تظهر القيمة المثلى عند إحدى رؤوس المنطقة التي تمثل مجموعة الحلول الممكنة.

مثال القيمة العظمى أو الصغرى للدالة $f(x, y) = ax + by + c$ عبر مجموعة الحلول الممكنة الممثلة بيانيًا تظهر عند النقطة A أو B أو C أو D أو E أو F.



المفهوم الأساسي البرمجة الخطية

لحل مسألة برمجة خطية، اتبع الخطوات التالية.

الخطوة 1 مثّل المنطقة المتوافقة مع الحل الخاص بنظام القيود بيانيًا.

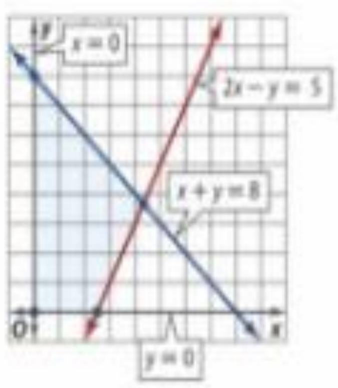
الخطوة 2 أوجد إحداثيات رؤوس المنطقة المتكونة.

الخطوة 3 أوجد قيمة دالة الهدف عند كل رأس لتحديد أي من قيمتي x وy، تحقق القيمة عظمى أو صغرى إن وُجدت .

مثال 1 زيادة دالة الهدف وإنقاصها إلى أقصى حد

أوجد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y) = x + 3y$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود التالية.

$x + y \leq 8$
$2x - y \leq 5$
$x \geq 0$
$y \geq 0$



ابدأ بتمثيل النظام المعطى للمتباينات الأربع بيانيًا.
ويتمثل حل النظام، الذي يشكل مجموعة الحلول الممكنة لدالة الهدف، في المنطقة المظللة، بما في ذلك القطع الحدودية الخاصة بها.

تتمتع منطقة الحلول الممكنة متعددة الأضلاع بأربع رؤوس. وتوجد إحداها عند النقطة (0, 0).

أوجد حل كل من الأنظمة الثلاثة التالية لإيجاد إحداثيات الرؤوس المتبقية.

نظام المعادلات الحدودية	$x + y = 8$ $2x - y = 5$	$2x - y = 5$ $y = 0$	$x + y = 8$ $x = 0$
الحل (نقطة الرأس)	$\left(\frac{13}{3}, \frac{11}{3}\right)$	$\left(\frac{5}{2}, 0\right)$	$(0, 8)$

أوجد قيمة دالة الهدف $f(x, y)$ x $3y$ عند كل رأس من الرؤوس الأربع.

$f(0, 0) = 0 + 3(0) = 0$ ← القيمة الصغرى لـ $f(x, y)$

$f\left(\frac{5}{2}, 0\right) = \frac{5}{2} + 3(0) = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{13}{3}, \frac{11}{3}\right) = \frac{13}{3} + 3\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{46}{3} = 15\frac{1}{3}$

$f(0, 8) = 0 + 3(8) = 24$ ← القيمة العظمى لـ $f(x, y)$

إذًا، القيمة العظمى لـ f هي 24 عندما يكون 0 x و 8 y. القيمة الصغرى لـ f هي 0 عندما يكون 0 x و 0 y.

تمرين موجه

أوجد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y)$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة.

1A. $f(x, y) = 2x + 5y$
$x + y \geq -3$
$6x + 3y \leq 24$
$x \geq 0$ العظمى عند 40 ،(0, 8)
$y \geq 0$ الصغرى عند 0 (0, 0)

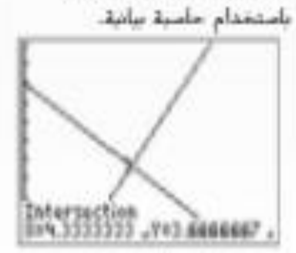
1B. $f(x, y) = 5x - 6y$
$y \leq 6$
$y \geq 2x - 2$ العظمى عند 26 ،(2, 6)
$y \geq -3x - 12$ الصغرى عند 66 (6, 6)

نصيحة دراسية

مجموعة المضلع المحدب
المجموعة المحدودة من النقاط التي تقع على أو بداخل مضلع محدب مُمثّل بيانيًا على مستوى إحداثي تُسمى *مجموعة المضلع المحدب*.

تلميح تقني

إيجاد الرؤوس تذكر من الوحدة 0 أنه توجد طريقة أخرى لإيجاد الرأس، وهي حساب تقاطع الخطوط الحدودية للقيدين باستخدام حاسبة بيانية.



[0, 10] scl: 1 by [0, 10] scl: 1

مثال إضافي

1

الربط بالحياة اليومية

يعد Biosphere 2 في أوراكل بولاية أريزونا مركزًا للأبحاث والتطوير حول تقنية الاكتفاء الذاتي بمستعمرات الفضاء، وتحتوي الدفيئة الزراعية على 7,200,000 قدم مكعب من الزجاج المانع للتسرب، و6500 نافذة، بنقطة ارتفاع تبلغ 91 قدمًا.

المصدر: جامعة أريزونا

مثال 2 من الحياة اليومية تعظيم الربح

الأعمال يزرع مركز أشجار بساتين فقط نباتات العرعر والأزالية في دفيئة زراعية تسع ما يصل إلى 3000 شجيرة. ونظرًا لتكاليف العمالة، يجب أن يكون عدد شجيرات الأزالية المزروعة أقل من أو يساوي 1200 زائد ثلاث مرات عدد شجيرات العرعر. ويشار إلى أن طلب السوق على الأزالية يعادل مرتين على الأقل من الطلب على العرعر. ويحقق المركز ربحًا قدره 2 AED لكل شجيرة عرعر و AED 1.50 لكل شجيرة أزالية.

a. اكتب دالة هدف، وقائمة بالقيود التي تمثل الحالة المبينة.

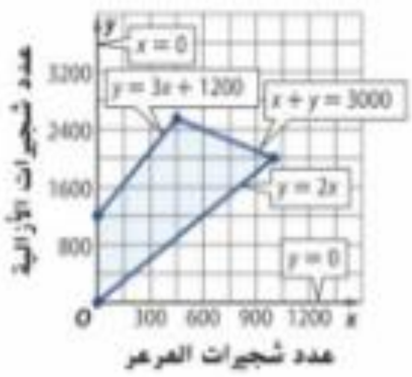
افترض أن x يمثل عدد شجيرات العرعر الناتجة وy يمثل عدد شجيرات الأزالية. إذًا، يتم التعبير عن دالة الهدف عن طريق المعادلة $f(x, y) = 2x + 1.5y$.

ويتم التعبير عن القيود عن طريق التالي.

قيد طلب السوق	$y \geq 2x$
قيد الإنتاج	$y \leq 3x + 1200$
قيد سعة الدفيئة الزراعية	$x + y \leq 3000$

نظرًا لأن x وy لا يمكن أن يكونا سالبين، فإن القيود الإضافية تتمثل في أن $x \geq 0$ و$y \geq 0$.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا للمنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء (a) لإيجاد عدد الشجيرات لكل نبتة يجب على الشركة زراعتها لتحقيق أقصى ربح ممكن.



تتسم المنطقة المضلعة المظللة بأن لها أربع نقاط رأسية عند $(0, 0)$، $(0, 1200)$، $(450, 2550)$، و$(1000, 2000)$.

أوجد قيمة $f(x, y) = 2x + 1.5y$ عند كل رأس من الرؤوس الأربع.

$f(0, 0) = 2(0) + 1.5(0) = 0$

$f(0, 1200) = 2(0) + 1.5(1200) = 1800$

$f(450, 2550) = 2(450) + 1.5(2550) = 4725$

$f(1000, 2000) = 2(1000) + 1.5(2000) = 5000$ ← القيمة العظمى لـ $f(x, y)$

نظرًا لأن f أكبر عند (1000, 2000)، فإنه يجب على مركز أشجار البساتين زراعة 1000 شجيرة عرعر و 2000 شجيرة أزالية لتحقيق ربح أقصى قدره AED 5000.

تمرين موجه

2. **التصنيع** مصنع خشب يستطيع إنتاج ما يصل إلى 600 وحدة من المنتج كل أسبوع. ولتلبية احتياجات عملائه المعتادين، يجب على المصنع أن ينتج على الأقل 150 وحدة من الخشب المنشور و225 وحدة من الخشب الرقائقي. ويحقق المصنع ربحًا قدره AED 30 لكل وحدة من الخشب المنشور و AED 45 لكل وحدة من الخشب الرقائقي.

A. اكتب دالة هدف وقائمة بالقيود التي تمثل الحالة المبينة.

B. ارسم تمثيلاً بيانيًا للمنطقة المحددة بواسطة القيود لإيجاد عدد الوحدات لكل من نوعي الخشب المنتجين التي يجب على المصنع إنتاجها لتحقيق الربح الأقصى. **انظر الهامش.**

2A. افترض أن x = الخشب المنشور، وy = الخشب الرقائقي.

$f(x, y) = 30x + 45y$

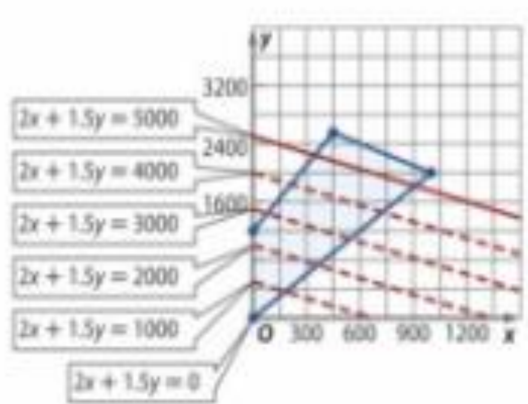
$x \geq 150$

$y \geq 225$

$x + y \leq 600$

من أجل التوصل إلى فهم أفضل للسبب في أن القيمة العظمى للدالة $f(x, y) = 2x + 1.5y$ يجب أن تقع عند إحدى الرؤوس في المثال 2، قم بتعيين قيم موجبة مختلفة لـ f من 0 إلى 5000 ثم مثّل المجموعة المتوافقة للخطوط المستقيمة المتوازية بيانيًا.

لاحظ أن مسافة الخط المستقيم في هذه المجموعة من نقطة الأصل تزداد مع ازدياد f، وتمتد عبر منطقة الحلول الممكنة.



من الناحية الهندسية، لزيادة الدالة f إلى أقصى حد عبر مجموعة من الحلول الممكنة، فإنك تحتاج إلى الخط المستقيم صاحب قيمة f الأكبر، والذي لا يزال يتقاطع مع المنطقة المظللة. من خلال التمثيل البياني، يمكنك رؤية أن مثل هذا الخط المستقيم سيتقاطع مع المنطقة المظللة عند نقطة واحدة، وهي الرأس عند النقطة (1000 ,2000).

325

مثال إضافي

2 السيارات يعرض الميكانيكيون في مرآب للصيانة نوعين من الإطارات هما المتحدة x، ورويال y. عادة ما يكون عدد إطارات رويال المبيعة أقل من أو يساوي ضعف عدد إطارات المتحدة المبيعة. بإمكان المتجر تخزين 500 إطار كحد أقصى في وقت واحد. وبالنظر لقدرة المصنع، فإن عدد إطارات رويال التي يتم إنتاجها يقل عن أو يساوي ما يعادل 50 مضافة إلى ناتج ضرب 0.25 في عدد إطارات المتحدة. إذا كان المرآب يجني ربحًا AED 25 عن كل إطار من إطارات المتحدة وAED 20 عن كل إطار من إطارات رويال.

a. اكتب دالة هدف، وقائمة بالقيود التي تمثل الحالة المبينة.

افترض أن x = المتحدة وy = رويال.

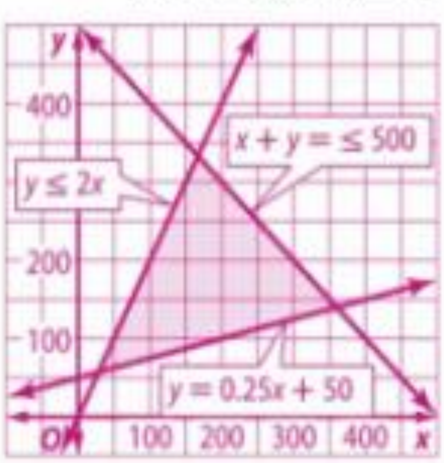
$f(x, y) = 25x + 20y$

$x + y \leq 500$

$y \leq 2x$

$y \leq 0.25x + 50$

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا للمنطقة التي تحددها القيود لإيجاد عدد الإطارات من كل نوع التي ينبغي على المرآب بيعها لتحقيق الربح الأمثل.



360 إطارًا من المتحدة و140 إطارًا من رويال.

نصيحة للمعلمين الجدد

القيود بالنسبة للمسائل من الحياة اليومية، يتم التوصل إلى القيود من الشروط الخاصة بالمسألة. وتكون مجموعة القيود المعطاة في المسألة كافية لحلها.

التركيز على محتوى الرياضيات

البحث عن الحل الأمثل يفيد البحث عن الحل الأمثل في العديد من تطبيقات الحياة اليومية. لتصور الحالة، ينبغي تمثيل القيود – المكتوبة عادة على هيئة نظام متباينات – بيانيًا. ولتحديد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف، يجب اختبار صحة جميع رؤوس الزوايا بإحلالها داخل الدالة.

2 حلول مثلى متعددة أو لا حلول على الإطلاق

يوضح **المثال 3** طريقة استخدام البرمجة الخطية في المسائل التي قد لا يكون لها حل أو يكون لها عدة حلول مثلى.
يوضح **المثال 4** طريقة استخدام البرمجة الخطية في المسائل التي لها منطقة غير محددة.

مثال إضافي

3 أوجد القيمة العظمى لدالة الهدف $f(x, y) = 2x + 2y$ وقيمتي x و y التي تظهر عندها تلك القيمة، مع مراعاة القيود التالية.

$y + x \leq 7$
$x \leq 5$
$y \leq 4$
$x \geq 0$
$y \geq 0$ $f(x, y) = 14$

عند جميع النقاط الواقعة على القطاع من $(3, 4)$ إلى $(5, 2)$.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

المدونة ينبغي على الطلاب كتابة مداخلة في مدونة الصف الدراسي تلخص طريقة استخدام البرمجة الخطية في تطبيقات الحياة اليومية. تأكد من تضمينهم طريقة إيجاد القيمتين العظمى والصغرى للدالة في ملخصاتهم.

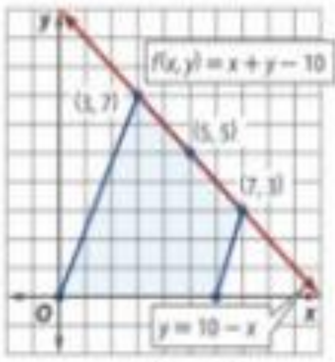
إجابات إضافية (تمرين موجه)

4B.

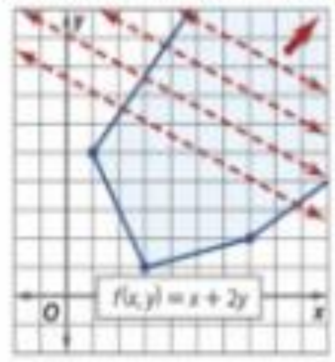
يجب أن يكون بالمتجر 6 مساعدين وموظفان ليكون الحد الأدنى للتكاليف المتفقة AED 608.

2 عدم وجود حلول مثلى أو تعددها كما هو الحال مع أنظمة المعادلات الخطية، يمكن أن يكون لمسائل البرمجة الخطية حل أمثل واحد أو حلول مثلى متعددة أو تفتقر إلى هذه الحلول تمامًا. إذا كان التمثيل البياني للمعادلة المتعلقة بدالة الهدف f المطلوب إيجاد حل أمثل لها يقع في المكان نفسه عند أحد جوانب منطقة الحلول الممكنة، فإن الدالة f يكون لها **حلول مثلى متعددة**. وفي الشكل (5.5.1)، فإن أي نقطة على القطعة التي تصل بين الرأسين اللذين تقعان عند $(3, 7)$ و $(7, 3)$، تعتبر حلاً أمثل للدالة f. وإذا كانت المنطقة لا تشكل مضلعًا ولكنها بدلاً من ذلك **غير محدودة**، فقد لا تكون للدالة f أي قيمة صغرى أو عظمى. وفي الشكل (5.5.2)، لا يكون للدالة f أي قيمة عظمى.

نصيحة دراسية
دوال الهدف لإيجاد المعادلة المتعلقة بدالة الهدف، أوجد حل معادلة الهدف من أجل y.



الشكل (5.5.1)



الشكل (5.5.2)

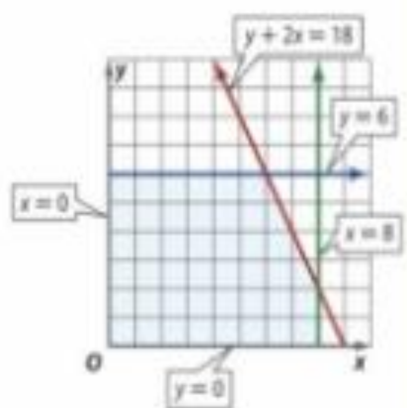
مثال 3 الأمثلية عند نقاط متعددة

أوجد القيمة العظمى لدالة الهدف $f(x, y) = 4x + 2y$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحقق عندهما هذه القيمة، مع مراعاة القيود التالية.

$y + 2x \leq 18$
$y \leq 6$
$x \leq 8$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

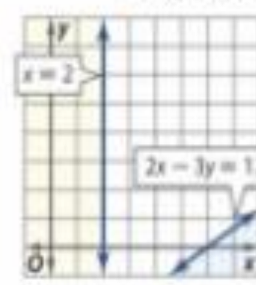
مثّل المنطقة المحدودة بالقيود المذكورة بيانيًا.
تتمتع منطقة الحلول الممكنة المضلعة بخمس رؤوس عند النقاط $(0, 0)$ و$(8, 2)$ و$(0, 6)$ و$(8, 0)$ و$(6, 6)$.
أوجد قيمة دالة الهدف $f(x, y) = 4x + 2y$ عند كل رأس.

$f(0, 0) = 4(0) + 2(0) = 0$
$f(8, 2) = 4(8) + 2(2) = 36$
$f(0, 6) = 4(0) + 2(6) = 12$
$f(8, 0) = 4(8) + 2(0) = 32$
$f(6, 6) = 4(6) + 2(6) = 36$



نظرًا لأن $f(x, y) = 36$ عند $(6, 6)$ و$(8, 2)$، فإنه توجد نقاط متعددة يتم فيها تحقيق الأمثلية للدالة f. وتكون معادلة الخط المستقيم عبر هاتين الرأسين هي $y = -2x + 18$. لذا، فإن f تكون لها قيمة عظمى تبلغ 36 عند كل نقطة على $y = -2x + 18$ لكي يكون $6 \leq x \leq 8$.

نصيحة دراسية
مسألة البرمجة الخطية غير ممكنة الحل يُقال على حل مسألة البرمجة الخطية إنه غير ممكن إذا كانت مجموعة القيود لا تحدد منطقة لها نقاط مشتركة. فعلى سبيل المثال، لا يحدد التمثيل البياني أدناه منطقة حلول ممكنة يمكن الاعتماد عليها لتحقيق أمثلية (الوصول إلى حل أمثل) لدالة الهدف.



تمرين موجه

أوجد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y)$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة.

3A. $f(x, y) = 3x + 3y$
$4x + 3y \geq 12$
$y \leq 3$
$y \geq 0$
$x \leq 4$
$x \geq 0$

العظمى 21 عند $(4, 3)$؛
الصغرى 9 عند $(3, 0)$

3B. $f(x, y) = 4x + 8y$
$x + 2y \leq 16$
$y \geq 2$
$x \geq 3$

العظمى 64 عند كل نقطة على $y = -0.5x + 8$ للوصول إلى أن $3 \leq x \leq 12$
الصغرى 28 عند $(3, 2)$

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي قد يستفيد الطلا ب المتعلمون بالنمط المنطقي من استخدام الجداول لتنظيم المعلومات المعطاة في المسائل التطبيقية. أطلب من الطلا ب أن يصنعوا جدولاً لرؤوس الزوايا الخاصة بمجموعة المضلع المحدب. واطلب منهم كتابة الأزواج المرتبة في عمود وقيمة الدالة في العمود الآخر.

مثال إضافي

4 المستودع يعمل موظفو أحد المستودعات في نوبات عمل لمدة 8 ساعات. هناك نوعان مختلفان من النوبات التي يستطيع الموظفون العمل خلالها. النوبة النهارية من 8 صباحًا إلى 4 عصرًا أو النوبة الثانية من 2 ظهرًا إلى 10 مساءً. يجني الموظفون AED 11.50 للساعة خلال النوبة النهارية و AED 13 خلال النوبة الثانية. يجب أن يعمل بالنوبة النهارية 35 موظفًا على الأقل. ويجب أن يعمل بالنوبة الثانية 25 موظفًا على الأقل. وبالنسبة للوقت المشترك، من 2 ظهرًا إلى 4 عصرًا، فيجب أن يكون هناك 65 موظفًا عاملاً على الأقل.

a. اكتب دالة هدف، واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.
افترض أن x = عدد موظفي النوبة النهارية، وأن y = عدد موظفي النوبة الثانية.
$f(x, y) = 92x + 104y;$
$x \geq 35, y \geq 25, x + y \geq 65$

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا للمنطقة المحددة بالقيود لإيجاد عدد الموظفين الذين ينبغي تكليفهم بالعمل في النوبة النهارية والنوبة الثانية لتحسين تكاليف العمالة على النحو الأمثل.

يجب أن يعمل في المستودع 40 موظفًا بالنوبة النهارية و 25 بالنوبة الثانية لتكون أقل تكلفة AED 6280.

مثال 4 من الحياة اليومية المنطقة الممكنة غير المحدودة

الطب البيطري يوصي أحد الأطباء البيطريين بأن تخضع هرة صغيرة جديدة لنظام غذائي يتألف على الأقل من 1.54 أوقية من البروتينات و0.56 أوقية من الدهون يوميًا. استخدم الجدول التالي لتحديد كمية كل طعام للقطط ينبغي استخدامه لتلبية المتطلبات الغذائية بالتكلفة الصغرى.

العلامة التجارية لطعام القطط	البروتينات (أوقية/كوب)	الدهون (أوقية/كوب)	تكلفة الكوب (AED)
Good Start	0.84	0.21	0.36
Sirius	0.56	0.49	0.22

a. اكتب دالة هدف واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

افترض أن x يمثل عدد أكواب *Good Start* التي تم تناولها وy يمثل عدد أكواب *Sirius* التي تم تناولها. إذًا، يتم التعبير عن دالة الهدف عن طريق $f(x, y) = 0.36x + 0.22y$.

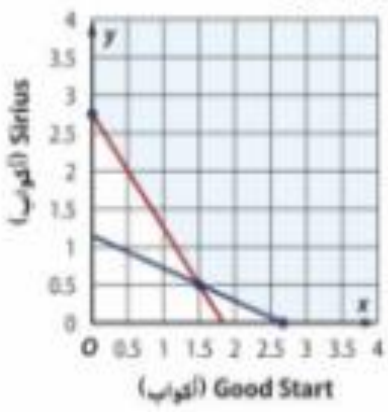
يتم التعبير عن القيود على الدهون والبروتينات اللازمة عن طريق

$0.84x + 0.56y \geq 1.54$ قيد البروتينات

$0.21x + 0.49y \geq 0.56$ قيد الدهون

نظرًا لأن x وy لا يمكن أن يكونا سالبين، فهناك أيضًا قيود لكل من $x \geq 0$ و $y \geq 0$.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يمثل المنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء (a) لإيجاد عدد الأكواب التي ينبغي استخدامها لكل نوع من نوعي طعام القطط لتلبية المتطلبات الغذائية بالتكلفة المثلى.



تتسم المنطقة المضلعة المظللة بأن لها ثلاث نقاط رأسية عند $(0, 2.75)$، $(1.5, 0.5)$، و$(2.67, 0)$.

ستكون التكلفة المثلى القيمة الصغرى لـ $f(x, y) = 0.36x + 0.22y$. أوجد قيمة دالة الهدف عند كل رأس.

$f(0, 2.75) = 0.36(0) + 0.22(2.75) = 0.605$ ← القيمة الصغرى لـ $f(x, y)$

$f(1.5, 0.5) = 0.36(1.5) + 0.22(0.5) = 0.65$

$f(2.67, 0) = 0.36(2.67) + 0.22(0) = 0.9612$

إذًا، من أجل تلبية متطلبات الطبيب البيطري بأدنى تكلفة تبلغ حوالي AED 0.61 للكوب الواحد، ينبغي أن تأكل الهرة 2.75 كوب فقط من المنتج ذي العلامة التجارية *Sirius*.

تمرين موجه

4. **الإدارة** وفقًا لمدير أحد متاجر البيتزا، ترتبط الإنتاجية في ساعات عمل الموظفين لديها بمناصبهم. وتعادل ساعة العمل الواحدة كمية العمل الذي ينجزه موظف متوسط في ساعة واحدة. وستحتاج من أجل نوبة العمل التالية البالغة ثماني ساعات إلى اثنين من مشرفي النوبات، وعلى الأقل اثنين من المساعدين، و10 من الموظفين على الأقل إجمالاً. وينبغي أن تخصص المديرة أيضًا ما لا يقل عن 120 ساعة عمل لتلبية طلب العملاء خلال تلك النوبة.

الموظفون العاملون	الإنتاجية (ساعات العمل)	الأجر (AED)
مساعد	1.5	7.50
موظف	1.0	6.50
مشرف نوبة	2.0	9.00

A. بافتراض أن كل موظف يعمل نوبة عمل الساعات الثماني كاملة، اكتب دالة هدف واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

B. ارسم تمثيلاً بيانيًا للمنطقة المحددة بالقيود لإيجاد عدد الموظفين الذين ينبغي تكليفهم بالعمل لتحسين تكاليف العمالة على النحو الأمثل. انظر الهامش.

4A. افترض أن x = عدد المساعدين وأن y = عدد الموظفين.
$f(x, y) = 60x + 52y + 144;$
$x \geq 2, x + y + 2 \geq 10,$
$8y + 12x + 32 \geq 100$

مهن في حياتنا

طبيب بيطري يجب أن يتخرج الأطباء البيطريون المستقبليون بدرجة دكتوراه في الطب البيطري من جامعة معتمدة. في أحد الأعوام الأخيرة، شغل الأطباء البيطريون 62,000 وظيفة في الولايات المتحدة الأمريكية، حيث وُظف 3 من أصل 4 أشخاص في عيادة فردية أو جماعية.

التدريس المتمايز BL

التوسع أطلب من الطلاب أن يستخدموا الإنترنت لإجراء بحث عن تطبيقات الحياة اليومية التي تتضمن البرمجة الخطية. ينبغي أن يكتب كل طالب ملخصًا عن الطريقة التي يمكن أن تكون البرمجة الخطية فيها مفيدة للتطبيقات وكيف قد تؤثر على القرارات حيال حالة معينة.

تمارين

أوجد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y)$ وحدد قيمتي كل من x وy اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة. (مثال 1)

1. $f(x, y) = 3x + y$
   $y \le 2x + 1$ **31 at (10, 1);**
   $x + 2y \le 12$ **1 at (0, 1)**
   $1 \le y \le 3$

2. $f(x, y) = -x + 4y$
   $y \le x + 4$ **28 at (4, 8);**
   $y \ge -x + 3$ **−8 at (4, −1)**
   $1 \le x \le 4$

3. $f(x, y) = x - y$
   $x + 2y \le 6$
   $2x - y \le 7$ **5 at (2, −3);**
   $x \ge -2$ **−6 at (−2, 4)**
   $y \ge -3$

4. $f(x, y) = 3x - 5y$
   $x \ge 0, y \ge 0$
   $x + 2y \le 6$ **15 at (5, 0);**
   $2y - x \le 2$ **−5 at (0, 1)**
   $x + y \le 5$

5. $f(x, y) = 3x - 2y$
   $y \le x + 3$ **11 at (5, 2);**
   $1 \le x \le 5$ **−5 at (1, 4)**
   $y \ge 2$

6. $f(x, y) = 3y + x$
   $4y \le x + 8$ **13 at (4, 3);**
   $2y \ge 3x - 6$ **2 at (2, 0)**
   $2x + 2y \ge 4$

7. $f(x, y) = x - 4y$
   $x \ge 2, y \ge 1$
   $x - 2y \ge -4$
   $2x - y \le 7$ **0 at (4, 1);**
   $x + y \le 8$ **−12 at (4, 4)**

8. $f(x, y) = x - y$
   $3x - 2y \ge -7$
   $x + 6y \ge -9$
   $5x + y \le 13, x - 3y \ge -7$
   5 at (3, −2);
   −3 at (−1, 2)

9. **عيادة طبية** يعمل عامر موظف استقبال في عيادة طبية. وتتمثل إحدى مهامه في تحديد مواعيد الزيارات. وهو يخصص 20 دقيقة للكشف و40 دقيقة للفحص البدني. ولا يستطيع الطبيب إجراء أكثر من 6 فحوصات بدنية في اليوم، وتتيح العيادة 7 ساعات لمواعيد الزيارات في العمل. وتبلغ تكلفة الكشف AED 55 وتبلغ تكلفة الفحص البدني AED 125. (مثال 2)

a–b. انظر الهامش.

a. اكتب دالة هدف، واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يمثل المنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء a لإيجاد مجموعة الحلول الممكنة لدالة الهدف.

c. كم عدد الزيارات الطبية من كل فئة التي ينبغي أن ينظمها عامر لتحقيق أقصى دخل؟ ما الدخل الأقصى؟

الدخل الأقصى هو AED 1245 عندما يجدول عامر 6 كشوفات و9 فحوصات بدنية.

10. **الدخل** يعمل أحمد بدوام جزئي لدفع بعض نفقات جامعته. ويقوم أحمد بتوصيل البيتزا مقابل AED 5 في الساعة بالإضافة إلى البقشيش، وبالتالي يبلغ إجمالي ما يحصل عليه AED 8 تقريبًا في الساعة، كما يلقي دروسًا خصوصية في معمل الرياضيات مقابل AED 15 في الساعة. ويتم فتح معمل الرياضيات لمدة ساعتين فقط يوميًا من الاثنين حتى الجمعة، عندما يكون أحمد متاحًا لإلقاء الدروس الخصوصية. ولا يمكن لأحمد أن يعمل أكثر من 20 ساعة في الأسبوع نظرًا لجدول مواعيد الصف لديه. (مثال 2)

a. اكتب دالة هدف، واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يمثل المنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء a لإيجاد مجموعة الحلول الممكنة لدالة الهدف.

c. كيف يمكن لأحمد تحقيق أكبر مبلغ من المال، وكم يساوي هذا المبلغ؟ **a–c. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.**

a–b. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

11. **أعمال صغيرة** شركة تصميم تنشئ مواقع ويب وألبومات إلكترونية. ويتطلب كل موقع ويب 10 ساعات من التخطيط و4.5 ساعات من تصميم الصفحات. ويتطلب كل ألبوم عائلي إلكتروني 15 ساعة من التخطيط و9 ساعات من تصميم الصفحات. وتُتاح 70 ساعة في الأسبوع لكي يقوم الموظفون بعملية التخطيط و36 ساعة لتصميم الصفحات. (مثال 2)

a. إذا كان الربح المتحقق يبلغ AED 600 لكل موقع ويب و AED 700 لكل ألبوم عائلي إلكتروني، فاكتب دالة هدف واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا يمثل المنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء a لإيجاد مجموعة الحلول الممكنة لدالة الهدف.

c. ما العدد الذي يجب أن تنتجه الشركة من كل منتج لتحقيق أقصى ربح؟ كم يبلغ الربح؟

يجب أن تنشئ الشركة 7 مواقع ويب وعدم إنشاء أي ألبومات لتحقيق ربح أقصى يبلغ AED 4200.

أوجد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y)$ وحدد قيمتي كل من x وy اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة. (المثالان 3 و 4)

12–17. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

12. $f(x, y) = 4x - 4y$
    $2x + y \ge -7$
    $y \le x + 2$
    $y \le 11 - 2x$

13. $f(x, y) = 3x + 6y$
    $y \le -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
    $y \le 2, y \ge 0$
    $x \le 3, x \ge 0$

14. $f(x, y) = -3x - 6y$
    $y \le -\frac{1}{2}x + 5$
    $y \le 4, y \ge 0$
    $x \le 6, x \ge 0$

15. $f(x, y) = 6x - 4y$
    $2x + 3y \ge 6$
    $3x - 2y \ge -4$
    $5x + y \ge 15$

16. $f(x, y) = 3x + 4y$
    $y \le x - 3$
    $y \le 6 - 2x$
    $2x + y \ge -3$

17. $f(x, y) = 8x + 10y$
    $y \le -\frac{4}{5}x + 4$
    $y \le 4, y \ge 0$
    $x \le 5, x \ge 0$

18. **التغذية** تريد مها استهلاك المزيد من المواد المغذية. وهي تسعى للحصول على ما لا يقل عن 40 ملّيجرامًا من الكالسيوم و600 ملّيجرام من البوتاسيوم و50 ملّيجرامًا من فيتامين "ج". وتُفضل مها من الفاكهة كلاً من التفاح والموز. وفيما يلي يتبين متوسط المحتوى الغذائي لكليهما. (مثال 4)

الفاكهة	الكالسيوم	البوتاسيوم	فيتامين "ج"
التفاح	9.5 mg	158 mg	9 mg
الموز	7.0 mg	467 mg	11 mg

a–b. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

a. إذا كانت تكلفة كل تفاحة AED 0.55 وتكلفة كل موزة AED 0.35، فاكتب دالة هدف، واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا للمنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء a لإيجاد مجموعة الحلول الممكنة لدالة الهدف.

c. حدد عدد كل نوع من الفاكهة التي يجب على مها تناولها لتحقق أدنى تكلفة بينما تظل تحصل في الوقت نفسه على الحصة الغذائية التي ترغب فيها. **6 من الموز و 0 من التفاح**

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 18 للتحقق من الاستيعاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع قد يفترض الطلاب أن رأس زاوية المنطقة الممكنة الأبعد عن نقطة الأصل تصل بدالة الهدف إلى قيمتها العظمى. ذكّر الطلاب بأنه يجب اختبار كل رأس زاوية لتحديد القيمتين العظمى والصغرى للدالة.

نصيحة للمعلمين الجدد

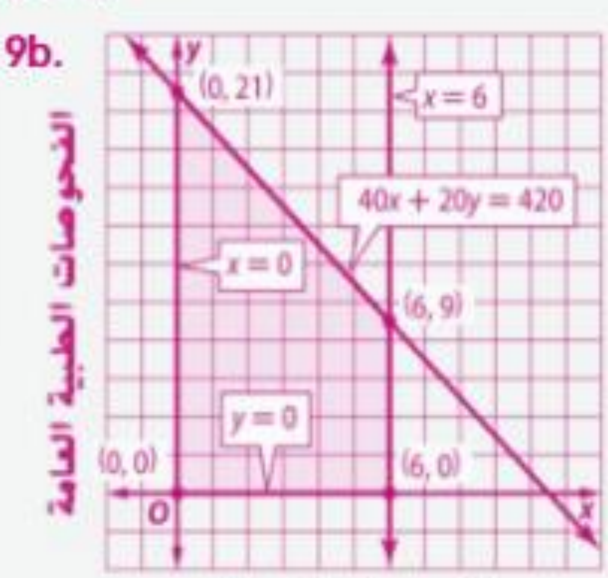
استخدام الهندسة بالنسبة للتمرين 32، ينبغي على الطلاب تمثيل القيود بيانيًا وتظليل المضلع المحدد. ستكون إحدى طرق الحل هي إيجاد مساحة شبه المنحرف الذي تمتد قواعده من (0, 1) إلى (0, 14) ومن (9, 12) إلى (10, 12)، ثم طرح المنطقة المثلثة غير المظللة.

إجابات إضافية

9a. افترض أن x = عدد الفحوصات البدنية وأن y = عدد الفحوصات الطبية العامة.

$f(x, y) = 125x + 55y,\ y \ge 0,$
$x \ge 0,\ 20y + 40x \le 420,$
$x \le 6$

9b.



29a. $f(x, y) = 16x + 12y,$
$3x + 2y \le 40,$
$x + y \le 15,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

29b. 10 دفعات من كوكتيل مانجو شروق الشمس و 5 دفعات من كوكتيل أحلام الواحة؛ AED 220

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1–18, 37, 39–54	1–17 فردية, 52–54	2–18 زوجية, 37, 39–51
OL ضمن المستوى	1–37 فردية, 39–54	1–18, 52–54	19–35, 37, 39–51
BL أعلى من المستوى	19–54		

أوجد قيمة a بحيث تكون لكل دالة هدف قيم عظمى عند الرأس المحددة، مع مراعاة القيود التالية. **19–24. تُقدم إجابات نموذجية.**

B

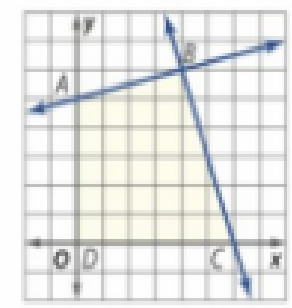
$x \ge 0$
$y \ge 2$
$x + y \le 9$
$-4x + 3y \le 6$

19. $f(x, y) = -4x + ay, (0, 2)$ **1**
20. $f(x, y) = -4x + ay, (3, 6)$ **5**
21. $f(x, y) = x - ay, (3, 6)$ **−3**
22. $f(x, y) = x - ay, (7, 2)$ **2**
23. $f(x, y) = ax + 4y, (7, 2)$ **5**
24. $f(x, y) = ax - 3y, (0, 2)$ **−4**

25–28. تُقدم إجابات نموذجية.

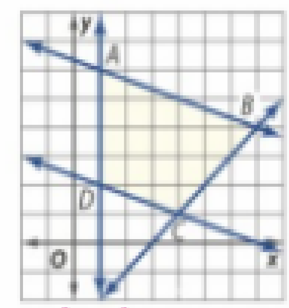
أوجد دالة هدف لها قيمة عظمى أو صغرى عند كل رأس محددة.

25. الصغرى عند A



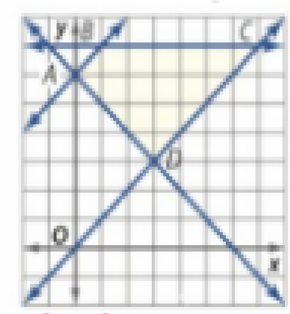
$f(x, y) = 4x - y$

26. العظمى عند C



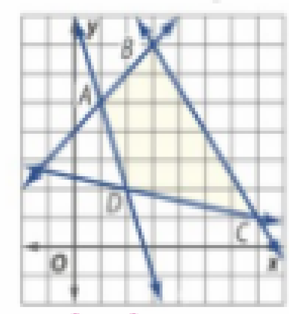
$f(x, y) = x - 2y$

27. العظمى عند B



$f(x, y) = -2x + 5y$

28. الصغرى عند D



$f(x, y) = x + y$

29. **الأعمال** يتطلب إعداد دفعة كوكتيل مانجو شروق الشمس 3 لترات من عصير المانجو ولترًا واحدًا من عصير الفراولة. ويتطلب إعداد دفعة كوكتيل "أحلام الواحة" لترين من عصير المانجو ولترًا واحدًا من عصير الفراولة. ويمتلك المتجر 40 لترًا من عصير المانجو و15 لترًا من عصير الفراولة ويرغب في استهلاكهما بالكامل قبل نهاية اليوم. ويحقق كوكتيل مانجو شروق الشمس ربحًا قدره AED 16 للدفعة الواحدة، بينما يحقق كوكتيل أحلام الواحة ربحًا قدره AED 12 للدفعة الواحدة.
    a. اكتب دالة هدف، واذكر القيود التي تمثل الحالة المبينة.
    b. من أجل الوصول إلى أقصى ربح، كم عدد الدفعات من كل مشروب التي يجب على متجر العصير إعدادها؟
    a–b. انظر الهامش.

أوجد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y)$ وحدد قيمتي كل من x وy اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة.

C **(3, 5) عند 4 ؛(5, 3) عند 28   (−3, −6) عند −24 ؛(1, 10) عند 48**

30. $f(x, y) = 4x - 8y$
$y \ge x^2 - 8x + 18$
$y \le -x^2 + 8x - 10$
$y \le 8 - x$

31. $f(x, y) = -2x + 5y$
$y \ge x^2 + 6x + 3$
$y \le -x^2 - 4x + 15$
$y \le x + 9$

أوجد المساحة المُحاطة بمجموعة المضلع المحدب والمُعرّفة بكل نظام من المتباينات.

32. $x \ge 0$
$x \le 12$
$2x + 6y \le 84$
$2x - 3y \le -3$
$8x + 3y \ge 33$ **69 وحدة²**

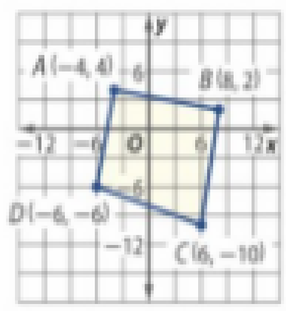
33. $y \le 9$
$x \ge 2$
$x - y \le 5$
$2x + y \le 25$
$3x + 2y \le 20$ **40 وحدة²**

34. $x \ge 0$
$y \ge \frac{1}{2}x$
$3x + 2y \ge 8$
$-3x + 4y \le 28$
$x + 2y \le 24$ **58 وحدة²**

35. $x \le 10$
$x + y \le 14$
$x + 3y \ge 13$
$-x + 5y \le 40$
$4x + y \ge 8$ **46.5 وحدة²**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

36. **تحدٍ** اكتب نظامًا من المتباينات بشكل مجموعة المضلع المحدب الموضحة أدناه. **انظر الهامش.**



37. **الاستنتاج** فكّر بدالة الربح $P(x, y) = ax + by$. هل سيظل P له قيمة عظمى موجبة إذا كانت منطقة الحلول الممكنة تقع بالكامل بداخل الربع الأول؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

38. **تحدٍ** أوجد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y) = -6x + 3y$ وحدد قيمتي كل من x و y اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة.
$y \ge 4$
$3x + 2y \ge 14$
$-2x + 5y \le 60$
$-x + y \ge -3$
$-7x + 5y \le 35$
$2x + y \le 36$
العظمى لـ 21 عند (0, 7)، الصغرى لـ −48 عند (13, 10)

39. **مسألة غير محددة الإجابة** البرمجة الخطية لها تطبيقات عديدة من الحياة اليومية.
    a. اكتب مسألة من الحياة اليومية يمكن حلها باستخدام البرمجة الخطية.
    b. باستخدام 4 قيود على الأقل، اكتب دالة هدف مطلوب قيمتها العظمى أو الصغرى.
    c. ارسم تمثيلاً بيانيًا للمنطقة المحددة بواسطة القيود المستمدة من الجزء a لإيجاد مجموعة الحلول الممكنة.
    d. أوجد حلاً لهذه المسألة.
    a–d. انظر ملحق إجابات الوحدة 5.

40. **الكتابة في الرياضيات** هل من الممكن ألا يكون لمسألة برمجة خطية أي حلول عظمى أو صغرى؟ اشرح استنتاجك.

40. نعم؛ يمكن أن تحدث هذه الحالة عندما لا تشكل قيود المسألة منطقة حلول ممكنة. وعندما يحدث ذلك، لن تكون هناك أي نقاط لاختبارها، ومن ثم لن يكون هناك أي حلول عظمى أو صغرى.

إجابات إضافية

36. $y \ge 6x - 46$
$6y \le -x + 20$
$3y \ge -x - 24$
$y \le 5x + 24$

37. لا؛ الإجابة النموذجية: إذا كان a وb سالبين، فإن القيمة العظمى لـ P – إن وجدت – ستكون سالبة.

مراجعة شاملة

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي.

41. $\frac{8y+7}{y^2+y-2}$ $\frac{5}{y-1}+\frac{3}{y+2}$ 42. $\frac{x-6}{x^2-2x}$ $\frac{3}{x}+\frac{-2}{x-2}$ 43. $\frac{5m-4}{m^2-4}$ $\frac{3.5}{m+2}+\frac{1.5}{m-2}$ 44. $\frac{-4y}{3y^2-4y+1}$ $\frac{2}{3y-1}+\frac{-2}{y-1}$

.45 **ألعاب أركيد** اشترى ماجد وبلال بطاقتي لعب لكي يلعبا ألعابًا افتراضية على الأركيد. واستخدم ماجد 47 نقطة من بطاقة اللعب الخاصة به لقيادة سيارة السباق المحاكية وركوب لوح التزلج على الجليد المحاكي بمعدل أربع مرات لكل لعبة. واستخدم بلال 48.25 نقطة من بطاقة اللعب الخاصة به لقيادة سيارة السباق المحاكية خمس مرات وركوب لوح التزلج على الجليد المحاكي ثلاث مرات. كم عدد النقاط التي تتطلبها كل لعبة في المرة الواحدة؟ **سيارة السباق، 6.5 نقاط؛ لوح التزلج على الجليد، 5.25 نقاط**

.46 **أمواج** بعد أن نشأت موجة بفعل قارب، يمكن تمثيل ارتفاع الموجة باستخدام $y=\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}h\sin\frac{2\pi t}{P}$. حيث h هو الارتفاع الأقصى للموجة بالأقدام، وP هو الفترة الزمنية بالثواني، وt هو مدة انتشار الموجة بالثواني.

.a إذا كان $h=3$ و $P=2$، فاكتب المعادلة الخاصة بالموجة. مثّل هذه المعادلة بيانيًا على مدى فترة زمنية فاصلة تبلغ 10 ثوانٍ. **انظر الهامش.**

.b كم عدد المرات التي يتوقع التمثيل البياني خلالها ارتفاع الموجة لقدم واحد خلال الثواني العشر الأولى؟ **10**

.47 اثبت أن $\tan\theta\sin\theta\cos\theta\csc^2\theta=1$ هي مصفوفة وحدة. **انظر الهامش.**

أوجد مساحة كل مثلث مقربة إلى أقرب عدد عشري.

.48 $\triangle ABC$، إذا كان $A=127°$، و$b=12$ m، و$c=9$ m **$43.1\ m^2$**

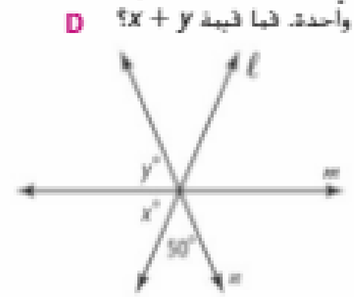
.49 $\triangle ABC$، إذا كان $a=7$ yd، و$b=8$ yd، و$C=44°$. **$19.5\ yd^2$**

.50 $\triangle ABC$، إذا كان $A=50°$، و$b=15$ in، و$c=10$ in. **$57.5\ in^2$**

.51 $\triangle ABC$، إذا كان $a=6$ cm، و$B=135°$، و$c=3$ cm. **$6.4\ cm^2$**

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

.52 SAT/ACT في الشكل أدناه، تتقاطع الخطوط المستقيمة ℓ وm وn في نقطة واحدة. فما قيمة $x+y$؟ **D**



A 40
B 70
C 90
D 130
E 260

.53 موقف سيارات تبلغ مساحته 600 متر مربع. وتحتاج السيارة إلى 6 أمتار مربعة من المساحة، في حين تحتاج الحافلة إلى 30 مترًا مربعًا من المساحة. ولا يستطيع العامل بالموقف التعامل مع أكثر من 60 مركبة. فإذا كانت تكلفة وقوف السيارة 3 AED ووقوف الحافلة 8 AED، فما عدد كل منهما الذي ينبغي أن يوافق العامل على خدمته لتحقيق أقصى دخل؟ **G**

F 20 حافلة و0 سيارة
G 10 حافلات و50 سيارة
H 5 حافلات و55 سيارة
J 0 حافلة و60 سيارة

.54 **إجابة حرة** استخدم نظامي المعادلات للإجابة عن كل مما يلي. **a–g. انظر الهامش.**

B	A
$x+2y+2z=3$	$-5x+2y+11z=31$
$3x+7y+9z=30$	$2y+6z=26$
$-x-4y-7z=-37$	$2x-y-5z=-15$

.a اكتب مصفوفة المعاملات لكل نظام. عَرِّف المصفوفتين A وB.

.b أوجد AB وBA إن أمكن.

.c اكتب مصفوفة موسعة للنظام A في نموذج درجة صف منخفض.

.d أوجد محدد كل مصفوفة معاملات. أي من المصفوفات تكون قابلة للعكس؟ اشرح استنتاجك.

.e أوجد معكوس المصفوفة B.

.f استخدم معكوس المصفوفة B لحل النظام.

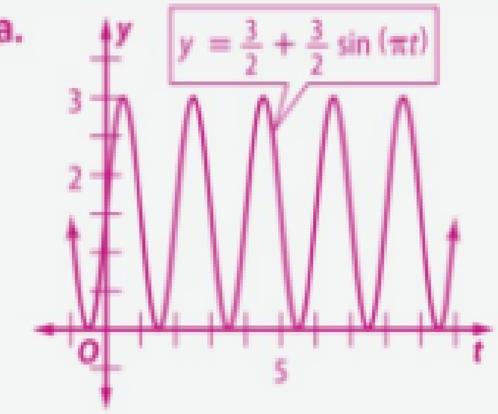
.g أي أنظمة يمكنك أن تستخدم معها قاعدة كرامر لحلها؟ اشرح استنتاجك.

4 التقويم

تعيين مصطلح الرياضيات اطلب من كل طالب توضيح طريقة إيجاد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف مع مراعاة القيود الخاصة بالحالة المعينة إلى زميل له. الإجابة النموذجية: اختبار قيم إحداثيات كل رأس زاوية بمنطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف الخاصة بالحالة المعينة وذلك لإيجاد القيمة العظمى والصغرى.

إجابات إضافية

46a.



47. $\tan\theta\sin\theta\cos\theta\csc^2\theta$
$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\sin\theta\times\cos\theta\times\frac{1}{\sin^2\theta}=1$$

54a. $A=\begin{bmatrix}-5&2&11\\0&2&6\\2&-1&-5\end{bmatrix}$,

$B=\begin{bmatrix}1&2&2\\3&7&9\\-1&-4&-7\end{bmatrix}$

54b. $AB=\begin{bmatrix}-10&-40&-69\\0&-10&-24\\4&17&30\end{bmatrix}$,

$BA=\begin{bmatrix}-1&4&13\\3&11&30\\-9&-3&0\end{bmatrix}$

54c. $\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&4\\0&1&0&-2\\0&0&1&5\end{array}\right]$

.54d $\det(A)=0,\ \det(B)=1$؛ الإجابة النموذجية: A غير قابلة للعكس لأن $\det(A)=0$. B قابلة للعكس لأن المحدد $\det(B)\neq 0$.

54e. $B^{-1}=\begin{bmatrix}-13&6&4\\12&-5&-3\\-5&2&1\end{bmatrix}$

54f. $\begin{bmatrix}-13&6&4\\12&-5&-3\\-5&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\30\\-37\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\\-3\\8\end{bmatrix}$

.54g الإجابة النموذجية: يمكن استخدام قاعدة كرامر لحل النظام B لأن المحدد $\det(B)\neq 0$. بما أن $\det(A)=0$، فلا يمكن استخدام قاعدة كرامر لحل النظام A.

التقويم التكويني

المفردات الأساسية تشير الصفحات المرجعية المذكورة بعد كل كلمة تشير إلى المكان الذي ورد فيه المصطلح للمرة الأولى. إذا واجه الطلاب صعوبة في الإجابة عن الأسئلة 10-1، فذكّرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لإنعاش ذاكراتهم بشأن المفردات.

5 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

الأنظمة الخطية متعددة المتغيرات وعمليات الصف (الدرس 5-1)

- كل عملية من عمليات الصف هذه تنتج مصفوفة موسعة مكافئة.
  - التبديل بين أي صفين.
  - ضرب أحد الصفين في عدد حقيقي غير صفري.
  - جمع مضاعف أحد الصفين مع الصف الآخر.

ضرب المصفوفات (الدرس 5-2)

- إذا كانت A هي المصفوفة $m \times r$ وB هي المصفوفة $n \times r$، فإن ناتج ضرب AB إذًا هو المصفوفة $m \times n$ التي يكون فيها $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ir}b_{rj}$
- I_n هي مصفوفة $n \times n$ تكون جميع قيمها 1 على قطرها الرئيس، وجميع قيمها 0 بالنسبة لجميع العناصر الأخرى.
- معكوس A هو A^{-1} حيث $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
- إذا كان $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و$ad - cb \neq 0$، إذًا $A^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. العدد $ad - cb$ يُسمى مُحدِّد المصفوفة 2×2 ويُعبَّر عنه بواسطة $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

حل الأنظمة (الدرس 5-3)

- افترض أن $AX = B$، حيث A هي مصفوفة معاملات النظام الخطي، وX هي مصفوفة المتغيرات، وB هي مصفوفة الحدود الثابتة. إذا كان A قابلاً للعكس، فإن $AX = B$ يكون له إذًا حل فريد يتم التعبير عنه من خلال $X = A^{-1}B$.
- إذا كان $\det(A) \neq 0$، فإن الحل الفريد للنظام إذًا يتم التعبير عنه من خلال $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$. إذا كان $\det(A) = 0$، فإن $AX = B$ يكون إذًا إما ليس له حل أو له عدد لا نهائي من الحلول.

الكسور الجزئية (الدرس 5-4)

- إذا كانت درجة $f(x)$ أكبر من أو تساوي درجة $d(x)$، فاستخدم قسمة مطولة كثيرة الحدود المطولة وخوارزمية القسمة لكتابة $\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$. ثم طبّق تحليل الكسور الجزئية (أو ما يُعرف بتجزئة الكسور) على $\frac{r(x)}{d(x)}$.

الأمثلية الخطية (الدرس 5-5)

- القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة الخطية في x وy تُحدَّدان بواسطة أساليب البرمجة الخطية.
  الخطوة 1. مثّل حل نظام القيود بيانيًا.
  الخطوة 2. أوجد إحداثيات رؤوس المنطقة.
  الخطوة 3. أوجد قيمة دالة الهدف عند كل رأس لإيجاد القيم التي تُقلل/تزيد الدالة إلى الحد الأدنى/الأقصى.

المفردات الأساسية

- مصفوفة موسعة (augmented matrix)
- مصفوفة المعاملات (augmented matrix)
- قيد (constraint)
- قاعدة كرامر (Cramer's Rule)
- مُحدِّد (determinant)
- حل ممكن (feasible solution)
- حذف جاوس (Gaussian elimination)
- المصفوفة المحايدة (identity matrix)
- معكوس (inverse)
- مصفوفة عكسية (inverse matrix)
- قابل للعكس (invertible)
- برمجة خطية (linear programming)
- حلول مثلى متعددة (multiple optimal solutions)
- نظام خطي متعدد المتغيرات (multivariable linear system)
- دالة الهدف (objective function)
- الحل الأمثل (optimization)
- كسر جزئي (partial fraction)
- تحليل الكسر الجزئي (partial fraction decomposition
- نموذج درجة الصف المنخفض (reduced row–echelon form)
- نموذج درجة الصف (row-echelon form)
- مصفوفة منفردة (singular matrix)
- نظام مربع (square system)
- غير محدودة (unbounded)

مراجعة المفردات

اختر أفضل كلمة أو عبارة لإكمال الجمل التالية.

1. (المصفوفة الموسعة، مصفوفة المعاملات) هي مصفوفة تتكون من جميع معاملات النظام الخطي وحدوده الثابتة.
مصفوفة موسعة
2. يختزل/تختزل (حذف جاوس/عمليات الصف الأولية) نظام المعادلات إلى نظام أبسط ومكافئ لتسهيل إيجاد حل له.
حذف جاوس
3. ناتج حذف جاوس- جوردان هو مصفوفة في صورة (نموذج درجة صف منخفض "أو ما يعرف أيضًا بصورة مستوى صف منخفض"، قابل للعكس). **نموذج درجة الصف المنخفض**
4. ناتج المصفوفة $n \times n$ المتمثل في A مع اعتبار (المصفوفة العكسية، مصفوفة الوحدة) هو A. **مصفوفة الوحدة**
5. المصفوفة المحايدة I تكون هي ذاتها (مصفوفتها الموسعة، مصفوفتها العكسية). **مصفوفة عكسية**
6. المصفوفة المربعة التي ليس لها معكوس تكون (غير منفردة، منفردة). **منفردة**
7. (المحدد، النظام المربع) الخاص بـ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $ad - bc$. **مُحَدِّد**
8. عند حل نظام خطي مربع، يكون البديل لحذف جاوس هو (قاعدة كرامر، تحليل الكسر الجزئي). **قاعدة كرامر**
9. تتكون مسألة البرمجة الخطية ثنائية الأبعاد من (قيود، حلول ممكنة)، والتي تكون عبارة عن متباينات خطية. **قيود**
10. إذا كان التمثيل البياني لدالة الهدف المطلوب إيجاد حلها الأمثل، f، يقع في المكان نفسه عند أحد أطراف منطقة الحلول الممكنة، فحينها قد تكون هناك حلول (مثلى متعددة، غير محدودة). **مثلى متعددة**

5 دليل الدراسة والمراجعة يتبع

المراجعة التابعة للدرس

5-1 الأنظمة الخطية متعددة المتغيرات وعمليات الصفوف

اكتب كل نظام معادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم أوجد حلاً للنظام.

11. $3x + 4y = 7$, $2y = -5x + 7$ **(1, 1)**

12. $5x - 3y = 16$, $x + 3y = -4$ **(-2, 2)**

13. $x + y + z = 4$, $2x - y - 3z = 4$, $-3x - 4y - 5z = -13$ **(2, 3, −1)**

14. $x + y - z = 5$, $2x - 3y + 5z = -1$, $3x - y + 2z = 10$

15. $2x - 5y = 2z + 11$, $3y + 4z = x - 28$, $3z - x = -18 - 3y$

16. $2x - 3z = y - 1$, $5z - 8 = 3x + 4y$, $x + y + z = 3$ **(2, −1, 2)**

أوجد حل كل من أنظمة المعادلات التالية.

17. $2x + 2y = 8$, $3x - 8y = -21$

18. $x - 2y = 13$, $-5x - 6y = 15$

19. $x + y = 4$, $x + y + z = 7$, $x - z = -1$

20. $x + y = 1$, $3x - 7y + z = -7$, $4x + 8y + 3z = -9$

21. $3x - y + z = 8$, $2x - 3y = 3z - 13$, $x + z = 6 - y$

22. $x + y = z - 1$, $2x + 2y + z = 13$, $3x - 5y + 4z = 8$

مثال 1

أوجد حل نظام المعادلات باستخدام حذف جاوس.

$x + 2y + 3z = 8$
$2x - 4y + z = 2$
$-3x - 6y + 7z = 8$

اكتب المصفوفة الموسعة. ثم طبق عمليات الصف الأولية للحصول على نموذج درجة الصف.

$$\text{مصفوفة موسعة}\quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & -4 & 1 & 2 \\ -3 & -6 & 7 & 8 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ -2R_1 + R_2 \rightarrow \\ 3R_1 + R_3 \rightarrow \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -8 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & 16 & 32 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{16}R_3 \rightarrow \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -8 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

يمكنك استخدام التعويض لإيجاد أن $y = 0.5$ و $x = 1$. إذًا، حل النظام هو $x = 1$، و$y = 0.5$، و$z = 2$، أو المجموعة المرتبة ثلاثية المناسبة $(1, 0.5, 2)$.

14. $\left(\frac{16}{3}, -\frac{20}{3}, -\frac{19}{3}\right)$　15. $(33, 15, -10)$

5-2 ضرب المصفوفة والمعكوسات والمحددات

أوجد AB وBA، إن أمكن. **23–26. انظر الهامش.**

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$

أوجد A^{-1}، في حالة وجودها. وإن لم تكن A^{-1} موجودة، فاكتب *منفردة*. **27–30. انظر الهامش.**

27. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$

28. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

29. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -8 & -12 \end{bmatrix}$

30. $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

مثال 2

افترض أن $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$. أوجد A^{-1}، في حالة وجودها. وإن لم تكن A^{-1} موجودة، فاكتب *منفردة*.

اكتب أولاً مصفوفة موسعة مزدوجة. ثم طبّق عمليات الصف الأولية لكتابة المصفوفة في نموذج درجة صف مختصر.

$$\text{مصفوفة موسعة} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ -2R_1 + R_2 \rightarrow \end{array}\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} -4R_2 + R_1 \rightarrow \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

نظرا لأن النظام له حل، و$a = 9$، و$b = -4$، و$c = -2$، و$d = 1$، فإن A قابل للمعكس و $A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

مراجعة درس بدرس

التدخل إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة الموضوعات التي تتناولها الأسئلة، فذكّر الطلاب بأن الصفحات المرجعية ترشدهم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

إجابات إضافية

17. $(1, 3)$

18. $(3, -5)$

19. $(2, 2, 3)$

20. $(0.5, 0.5, -5)$

21. $(1, 0, 5)$

22. $(1, 3, 5)$

23. AB غير محدد؛ $BA = \begin{bmatrix} -13 & 15 & -39 \\ 15 & -3 & 14 \end{bmatrix}$

24. $AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} -6 & 10 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

25. $AB = \begin{bmatrix} -11 & 23 \end{bmatrix}$; AB غير محدد

26. $AB = \begin{bmatrix} -7 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ -4 & -12 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} \frac{8}{19} & -\frac{1}{19} \\ \frac{3}{19} & \frac{2}{19} \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-9}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

29. منفردة

30. $\begin{bmatrix} \frac{-4}{23} & \frac{1}{23} \\ \frac{3}{46} & \frac{5}{46} \end{bmatrix}$

إجابات إضافية

43. $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}$

44. $\frac{3}{x-3}+\frac{4}{x+2}$

45. $\frac{1}{x-5}-\frac{3}{x-6}$

46. $\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x-3}$

47. $2x-\frac{1}{x}+\frac{3}{x-7}$

48. $\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}$

49. $2-\frac{2}{x}+\frac{6}{x-2}$

50. $2-\frac{5}{x}-\frac{15}{x+4}$

51. $\frac{1}{2}+\frac{2}{x}-\frac{1.5}{2x-3}$

52. $1.5-\frac{4}{x}-\frac{9.5}{2x+5}$

5-3 حل الأنظمة الخطية باستخدام المعكوسات وقاعدة كرامر

استخدم المصفوفة العكسية لحل كل نظام معادلات، إن أمكن.

31. $2x-3y=-23$
$3x+7y=23$ $(-5, 4)$

32. $3x-6y=9$
$-5x-8y=-6$ $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$

33. $2x+y=1$
$x-3y+z=-4$
$y+8z=-7$ $(1, 0, -2)$

34. $x+y+z=1$
$x+y-z=-7$
$y+z=-1$ $(1, -4, 5)$

35. $3y+5z=25$
$2x-7y-3z=15$
$x+y-z=-11$
$(2, -8, 5)$

36. $x-2y-3z=0$
$2x-3y+4z=11$
$x-8y+2z=-1$
$(1, 1, 5)$

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

37. $(9, -3)$

38. $(4, 1)$

39. $(3, -3, -4)$

40.

41. $(0, -2, 7)$

42. $(-2, -1, 9)$

40 $\left(-5, \frac{1}{2}, 2\right)$

مثال 3

استخدم المصفوفة العكسية لحل نظام المعادلات، إن أمكن.

$x-y+z=-5$
$2x+2y-3z=-27$
$-3x-y+z=17$

اكتب النظام في صورة معادلة مصفوفة.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} -5 \\ -27 \\ 17 \end{bmatrix}}$$

استخدم الحاسبة البيانية لإيجاد قيمة.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 \\ -1.75 & -1 & -1.25 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

اضرب في لحل النظام.

$$X=\begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 \\ -1.75 & -1 & -1.25 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -27 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5 \\ 14.5 \\ 15 \end{bmatrix}$$

إذًا الحل هو .

5-4 الكسور الجزئية

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي.

43. $\frac{2x}{x^2-4}$

44. $\frac{7x-6}{x^2-x-6}$

45. $\frac{-2x+9}{x^2-11x+30}$

46. $\frac{6x^2-4x-6}{x^3-2x^2-3x}$

47. $\frac{2x^3-14x^2+2x+7}{x^2-7x}$

48. $\frac{2x^4+3x^3+5x^2+3x+2}{x(x^2+1)^2}$

49. $\frac{2x^2+4}{x^2-2x}$

50. $\frac{2x^2-12x-20}{x^2+4x}$

51. $\frac{x^2+x-6}{2x^2-3x}$

52. $\frac{3x^2-10x-20}{2x^2+5x}$

مثال 4

43-52. انظر الهامش.

أوجد تحليل الكسر الجزئي لـ $\frac{x-8}{x^2-11x+18}$

أ د كتابة المعادلة في صورة كسور جزئية ذات بسوط ثابتة، و .

$$\frac{x+12}{x^2-11x+18}=\frac{A}{x-9}+\frac{B}{x-2}$$
$$x+12=A(x-2)+B(x-9)$$
$$x+12=Ax-2A+Bx-9B$$
$$x+12=(A+B)x+(-2A-9B)$$

ساو بين معاملات الطر ين الأ سر والأ من للمعادلة للحصو لى نظا من معادلتين.

الحل هو و . إذًا، $\frac{x+12}{x^2-11x+18}=\frac{3}{x-9}+\frac{-2}{x-2}$

333

5-5 الأمثلية الخطية

أوجد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y)$ وحدد قيمتي كل من x وy اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة. **53–58. انظر الهامش.**

53. f(x, y) 2x y
x 0
y x 7
y x 1

54. f(x, y) 3x y
2x y 1
1 y 9
x 1

55. f(x, y) x y
0 x 10
x 2y 8
0 y 8

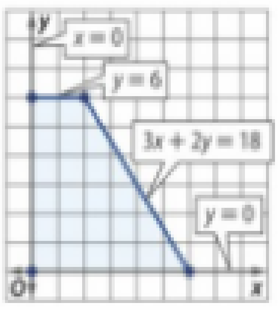
56. f(x, y) 2x 4y
x 3
y 3
4x 5y 47

57. f(x, y) 4x 3y
3x y 8
2x y 12
y x

58. f(x, y) 2y 5x
2x y 0
x 5y 0
3x 7y 22

مثال 5

أوجد القيمة العظمى لدالة الهدف $f(x, y) = 2x + 6y$ وحدد قيمتي كل من x وy اللتين تتحقق عندهما هذه القيمة، مع مراعاة القيود التالية.
$y \geq 0,\ x \geq 0,\ y \leq 6,\ 3x + 2y \leq 18$



مثّل المنطقة المحدودة بالقيود المذكورة بيانيًا. أوجد قيمة دالة الهدف $f(x, y)$ 2x 6y عند كل رأس.

0 أو f(0, 0) 0 0

36 أو f(0, 6) 0 36

12 أو f(6, 0) 12 0

40 أو f(2, 6) 4 36

إذًا القيمة العظمى لـ f هي 40 عندما يكون 2 x و6 y.

التطبيقات و ل المسائل

59. **شطائر البرجر البقر** يوضح الجدول التالي عدد شطائر البرجر البقري والبرجر بالجبن والبرجر النباتي المبيعة في مطعم خلال فترة غداء تمتد على مدار 3 ساعات. أوجد سعر كل نوع من أنواع البرجر. (الدرس 5-1) **59–60. انظر الهامش.**

السا ات	العاد	بالجبن	النبا ي	إجمالي المبيعات (AED)
11 – 12	2	8	2	53
12-1	7	12	8	119
1-2	1	5	7	64

60. **وضع الدرجات** قررت الأستاذة عبير وضع درجات تقييمية على اختبارات وواجبات منزلية ومشروعات فضلاً عن المشاركة في الصف. وخصصت أوزانًا مئوية مختلفة لكل فئة كما هو موضح. أوجد الدرجة النهائية لكل طالب مع التقريب إلى أقرب نسبة مئوية. (الدرس 5-2)

الفئة	الاختبارات	الواجبات المنزلية	المشروعات	المشاركة
الوز	40%	30%	20%	10%

الفئة	سامر	أنور	كرو	شوقي
الاختبارات	88	72	78	91
الواجبات المنزلية	95	90	68	71
المشروعات	80	73	75	85
المشاركة	100	95	100	80

61. **الآيس كريم** يبيع كشك آيس كريم 3 نكهات تتمثل في الفراولة والأناناس والكرز. وتُباع كل نكهة بسعر AED 1.25. في أحد الأيام، جنى الكشك مبلغ AED 60 كإجمالي مبيعات. وقد حقق الكشك زيادة تبلغ AED 13.75 في مبيعات الكرز مقارنة بمبيعات الأناناس وAED 16.25 زيادة مقارنة بمبيعات الفراولة. استخدم قاعدة كرامر لتحديد عدد مرات بيع كل نكهة. (الدرس 5-3)
11 بالفراولة، 13 بالأناناس، 24 بالكرز

62. **ركوب الدراجات** في رحلة على دراجة، قطع زوجان 240 ميلاً في اليوم 1 و270 ميلاً في اليوم 2. وكان متوسط المعدل المقطوع خلال اليوم 1 هو 5 أميال في الساعة، وهذا أسرع من متوسط المعدل المقطوع خلال اليوم 2. إجمالي عدد الساعات المقضية في قيادة الدراجة $T = \frac{510r - 1200}{r(r-5)}$. (الدرس 5-4) $T = \frac{510r - 1200}{r(r-5)}$

a. أوجد تحليل الكسر الجزئي لـ T.

b. كل كسر يمثل المدة الزمنية المقضية في قيادة الدراجة كل يوم. إذا قاد الزوجان الدراجة بمقدار 6 ساعات أطول في اليوم 2، فما إجمالي عدد الساعات التي أمضياها في قيادة الدراجة؟ **30**

63. **إعادة التدوير** قررت شركة إعادة تدوير جمع المخلفات من المواقع الخاصة إذا كان الموقع يخرج على الأقل 60 رطلاً من عناصر إعادة التدوير في الأسبوع. ويمكن أن تجمع الشركة 50 رطلاً من الورق و30 رطلاً من الزجاج كحد أقصى من كل موقع. وتربح الشركة AED 20 على كل رطل من الزجاج وAED 25 على كل رطل من الورق. (الدرس 5-5)

a. اكتب دالة هدف، واذكر القيود التي مثّل الحالة المبينة. **انظر الهامش.**

b. دد دد أرطال الزجا والورق المط و لتحقيق الربح الأقصى. **انظر الهامش.**

c. ما الربح الأقصى؟ **AED 1450**

5 تمرين على الاختبار

اكتب كل نظام معادلات في صيغة مثلثية باستخدام حذف جاوس. ثم أوجد حلاً للنظام.

1. $-3x + y = 4$
   $5x - 7y = 20$ **(-5 ,-3)**

2. $x + 4y - 3z = -8$
   $5x - 7y + 3z = -4$
   $3x - 2y + 4z = 24$
   (0, 4, 8)

أوجد حلاً لنظام المعادلات.

3. $5x - 6y = 28$
   $6x + 5y = -3$ **(2, -3)**

4. $2x - 4y + z = 8$
   $3x + 3y + 4z = 20$
   $5x + y - 3z = -13$
   $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 5\right)$

5. **المكتبة** استعارت ليلى كتبًا وأسطوانات مضغوطة وأسطوانات DVD من المكتبة. وبلغ إجمالي ما استعارته 16 عنصرًا. وكان إجمالي عدد الأسطوانات المضغوطة وأسطوانات DVD مساويًا لعدد الكتب. واستعارت ليلى أسطوانتين مضغوطتين زيادة عن أسطوانات DVD.
   a. افترض أن b = عدد الكتب، وc = عدد الأسطوانات المضغوطة، وd = عدد أسطوانات DVD. اكتب نظامًا من ثلاث معادلات خطية لتمثيل المسألة. **انظر الهامش.**
   b. أوجد حلًا لنظام المعادلات. فسّر حلك.
   (8, 5, 3)؛ استعارت ليلى 8 كتب، و5 أسطوانات مضغوطة، و3 أسطوانات DVD.

أوجد AB وBA، إن أمكن.

6-7. انظر الهامش.

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = [2 \quad -1 \quad -8]$

8. **الهندسة** يمكن كتابة إحداثيات النقطة (x, y) في صورة مصفوفة 1 × 2 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. افترض أن $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
   a. افترض أن P هي النقطة (4 ,3−). ناقش كيف يؤثر ضرب A في P على P. **a–b. انظر الهامش.**
   b. مثلث يحتوي على الرؤوس (0, 0) و(6 ,2) و(3 ,8). أنشئ مصفوفة 3 × 2, B لتمثيل المثلث. أوجد AB. ما التأثير الواقع على المثلث؟ هل يتفق مع إجابتك عن الجزء a؟

أوجد A^{-1}، في حالة وجودها. وإن لم تكن A^{-1} موجودة، فاكتب منفردة.

9-10. انظر الهامش.

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$

استخدم المصفوفة العكسية لحل كل نظام معادلات، إن أمكن.

11. $2x - 3y = -7$
    $5x + 2y = 11$ **(1, 3)**

12. $2x + 2y + 5z = -6$
    $2x - 3y + 7z = -7$
    $x - 5y + 9z = 4$ **(-9, 1, 2)**

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل كل نظام من المعادلات الخطية، إن وُجد حل فريد.

13. $3x - 2y = -2$
    $4x - 2y = 2$ **(4, 7)**

14. $3x - 2y - 3z = -24$
    $3x + 5y + 2z = 7$
    $-x + 5y + 3z = 25$
    (-4, 3, 2)

أوجد تحليل الكسر الجزئي لكل تعبير نسبي مما يلي.

15. $\frac{4x}{x^2 - 9}$ $\quad \frac{2}{x-3} + \frac{2}{x+3}$

16. $\frac{2x+10}{x^2 - 4x + 3}$ $\quad \frac{8}{x-3} - \frac{6}{x-1}$

أوجد القيمتين العظمى والصغرى لدالة الهدف $f(x, y)$ وحدد مكان قيمتي كل من x وy اللتين تتحققان عندهما، مع مراعاة القيود المحددة.

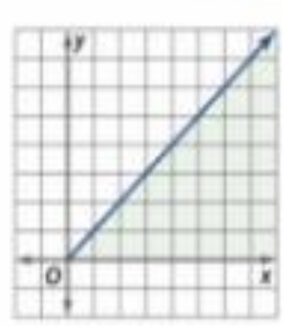
17. $f(x, y) = 2x - y$
    $x \geq 0$
    $y \geq 0$
    $y \geq -2x + 8$
    8 عند (4, 0)؛ −8 عند (0, 8)

18. $f(x, y) = -x + 2y$
    $x - 3y \leq 0$
    $x \geq 0$
    $y \leq 9$
    18 عند (0, 9)؛ −9 عند (27, 9)

19. **التسعير** تبيع إحدى شركات المكسرات والحلويات مزيج المكسرات حيث يمكن للعملاء اختيار أي تشكيلات يرغبون فيها. ويحتوي المزيج المفضل لدى كمال على الفول السوداني والتوت البري المجفف والمعجنات المغطاة بالخروب. ويتم عرض الأسعار المتعلقة بكل عنصر أدناه. فإذا اشترى كمال مزيجًا من 5 أرطال نظير AED 16.80 وكان يحتوي على معجنات مغطاة بالخروب بأرطال تعادل ضعف كمية التوت البري، فكم عدد الأرطال التي اشتراها من كل عنصر؟

الفول السوداني، رطلان التوت البري، رطل واحد؛ المعجنات المغطاة بالخروب، رطلان

20. **الاختيار من متعدد** يعرض التمثيل البياني قيود دالة الهدف. فأي مما يلي لا يمكن أن يكون أحد هذه القيود؟ **C**



A $y \geq 0$
B $x \geq 0$
C $x - y \leq 0$
D $x - y \geq 0$

335

إجابات إضافية

5a. $b + c + d = 16$
$-b + c + d = 0$
$c - d = 2$

6. $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 14 & 18 \\ 3 & 11 \\ -6 & 36 \end{bmatrix}$; BA غير مُحدّد

7. AB غير محدد؛ $BA = [-44 \quad 11 \quad -5]$

8a. يؤدي ضرب A في P إلى تدوير النقطة 90° عكس اتجاه عقارب الساعة.

8b. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$;
المصفوفة الجديدة هي $\begin{bmatrix} 0 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$
تم تدوير المثلث 90° عكس اتجاه عقارب الساعة. يتفق هذا مع الإجابة a.

9. $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} -\frac{4}{27} & -\frac{5}{54} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{18} \end{bmatrix}$

1 التركيز

الهدف تقريب حلول مسائل الاستمثال غير الخطية.

نصيحة للتدريس

ذكّر الطلاب بأن الاستمثال يتضمن البحث عن قسمة عظمى أو صغرى. بالنسبة للدوال غير الخطية، فمن المفيد تمثيل الدالة مصاحبة بيانيًا على حاسبة التمثيل البياني واستخدام الدالة العظمى أو الصغرى.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

اطلب من الطلا ب أن يعملوا في مجموعاتٍ من ثلاثة أو أربعة ذوي قدراتٍ متنوعة. اطلب من المجموعات أن تكمل الأنشطة 3-1 وتمارين تحليل النتائج من 5-1.

- بالنسبة للنشاط 1، يمكن أن تختلف أبعاد الارتفاع والطول والعرض.
- بالنسبة للنشاط 2، ذكّر الطلاب – إن كان ذلك ضروريًا – بأن الصيغة الخاصة بمساحة سطح الأسطوانة هي مجموع المساحة الجانبية ($2\pi rh$)، ومساحة الجانب العلوي (πr^2)، ومساحة الجانب السفلي (πr^2).
- بالنسبة للنشاط 3، أكد على الطلاب أن قيمة x قد تتنوع ما بين 0 و 10 أميال بحسب المكان الذي بدأ منه المتسابق اجتياز الرمال.

الوحدة 5

الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم

الأمثلية غير الخطية

الهدف

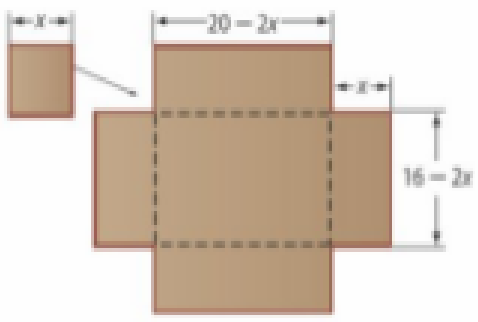
- تقريب حلول مسائل الأمثلية غير الخطية.

لقد تعلّمت كيفية حل مسائل الأمثلية باستخدام البرمجة الخطية. فقد كان يتم تمثيل دالة الهدف ونظام القيود باستخدام دوال خطية. غير أنه، لسوء الحظ، لا يمكن تعريف جميع المواقف التي تتطلب أمثلية بالدوال الخطية.

إن مسائل الأمثلية المتقدمة المشتملة على دوال تربيعية وتكعيبية ودوال غير خطية أخرى تتطلب حساب التفاضل والتكامل لإيجاد الحلول الدقيقة. ومع ذلك، يمكننا إيجاد تقريبات جيدة باستخدام الحاسبات البيانية.

نشاط 1 الحجم الأقصى

تم استخدام قطعة ورق مقوى مقاسها 16 بوصة × 20 بوصة لصنع صندوق ليس له قمة عن طريق قطع المربعات المتطابقة من كل ركن وثني الأضلاع لأعلى. ما أبعاد الصندوق مع اعتبار أكبر حجم ممكن؟ ما الحجم الأقصى؟



الخطوة 1 أعد رسم رسمًا تخطيطيًا لهذه الحالة.

الخطوة 2 افترض أن x يمثل طول ضلع أحد المربعات المطلوب إزالتها. اكتب تعابير لطول الصندوق وعرضه وارتفاعه بدلالة x.

الطول = $2x - 20$، العرض = $2x - 16$، الارتفاع = x

الخطوة 3 أوجد معادلة لحجم الصندوق V بدلالة x باستخدام الأبعاد التي حصلت عليها في الخطوة 2.

$$V = x(20 - 2x)(16 - 2x)$$

الخطوة 3 استخدم الحاسبة لتمثيل المعادلة التي حصلت عليها في الخطوة 3 بيانيًا.

الخطوة 4

تحليل النتائج

1. صف مجال x. اشرح استنتاجك.
2. استخدم الحاسبة لإيجاد إحداثيات النقطة العظمى على التمثيل البياني. فسّر دلالة هذه الإحداثيات.
3. ما أبعاد الصندوق مع اعتبار أكبر حجم ممكن؟ ما الحجم الأقصى؟

الارتفاع ≈ 2.94 in.، الطول ≈ 14.12 in.، العرض ≈ 10.12 in.، الحجم الأقصى ≈ 420.11 in^3

1. $0 < x < 8$؛ الإجابة النموذجية: يجب أن يكون x أكبر من 0 ليكون للصندوق أي ارتفاع، ولكن يجب أيضًا أن يكون أقل من 8 وإلا ستكون قيمة عرض الصندوق سالبة أو صفرًا.

2. حوالي (2.94, 420.11)؛ الإجابة النموذجية: سيتم تحقيق الحجم الأقصى البالغ تقريبًا 420.11 in^3 عندما يتم قطع مربعات أطوال أضلاعها $x \approx 2.94$ in. من قطعة الورق المقوى.

يختلف الناتج المطلوب والتعقيد حسب مسألة الأمثلية نفسها. ويمكنك استخدام الخطوات التالية لتحليل كل مسألة وإيجاد حل لها.

المفهوم الأساسي الأمثلية

لحل مسائل الأمثلية، راجع هذه الخطوات.

الخطوة 1 أعد رسمًا تخطيطيًا للحالة مع تسمية جميع الكميات المعروفة وغير المعروفة.

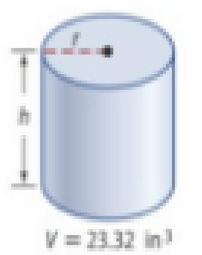
الخطوة 2 حدد الكمية المطلوب اعتبار أقصى أو أدنى حد لها. اختر القيم الضرورية لإيجاد الكمية المطلوبة. ومثّل كل قيمة بعدد أو متغير أو تعبير.

الخطوة 3 اكتب معادلة للكمية المطلوب إيجاد حلها الأمثل بدلالة متغير واحد.

الخطوة 4 مثّل المعادلة بيانيًا مع إيجاد إما القيمة العظمى أو الصغرى. حدد المجال المسموح به للمتغير.

نشاط 2 مساحة السطح الصغرى

عبوة مشروب صودا نموذجية تبلغ تقريبًا 2.5 بوصة عرضًا و4.75 بوصة طولاً وتسع حجمًا يساوي 23.32 بوصة مكعبة تقريبًا. ماذا ستكون أبعاد عبوة مشروب الصودا إذا ظل الحجم ثابتًا ولكن تم تقليل كمية المادة المستخدمة في صناعة العبوة إلى الحد الأدنى؟



الخطوة 1 أعد رسمًا تخطيطيًا لهذه الحالة.

الخطوة 2 الكمية المطلوب تقليلها إلى الحد الأدنى هي مساحة السطح. فبينما نصف قطر العبوة وارتفاعها مطلوبتان. أوجد تعبيرًا لارتفاع h الخاص بالعبوة بدلالة نصف القطر r باستخدام الحجم المعطى. $h = \frac{23.32}{\pi r^2}$

الخطوة 3 استخدم التعبير الذي حصلت عليه في الخطوة 2 في كتابة معادلة لمساحة السطح SA.

الخطوة 4 استخدم الحاسبة لتمثيل المعادلة التي حصلت عليها في الخطوة 3 بيانيًا. اذكر مجال r. **انظر الهامش.**

تحليل النتائج

4. (1.55, 45.19)؛ الإجابة النموذجية: سيتم الحصول على مساحة السطح الأدنى $45.19\ in^2$ عند استخدام نصف القطر البالغ 1.55 in.

4. أوجد إحداثيات النقطة الصغرى. فسّر دلالة هذه الإحداثيات.

5. ما أبعاد مساحة سطح العبوة مع اعتبار أقل مساحة سطح ممكنة؟

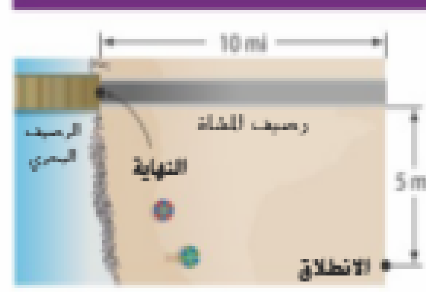
6. من المقرر إنشاء أسطوانة فائقة ليس لها قمة بمساحة سطح تبلغ 6π بوصات مربعة. ما الارتفاع ونصف القطر اللذان سيزيدان حجم الأسطوانة إلى الحد الأقصى؟ ما الحجم الأقصى؟

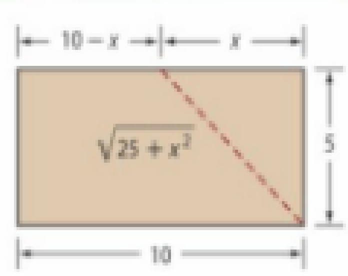
6. نصف القطر $\approx$ 1.41 in.، الارتفاع $\approx$ 1.42 in.، الحجم $\approx 17.78\ in^3$

تقليل المواد إلى الحد الأدنى ليس التطبيق الوحيد للأمثلية.

نشاط 3 المسار الأسرع

مشاركون في سباق على الأقدام يركضون على الشاطئ أو على رصيف المشاة وصولاً إلى الرصيف البحري كما هو موضح. ويمكن أن يسلك المتسابقون أي مسار يختارونه. فإذا كان المتسابق يستطيع أن يركض 6 أميال في الساعة على الرمال و 7.5 أميال في الساعة على رصيف المشاة، فما المسار الذي يتطلب أقصر مدة زمنية؟





الخطوة 1 أعد رسمًا تخطيطيًا لهذه الحالة.

الخطوة 2 لتقليل المدة الزمنية إلى الحد الأدنى، اكتب تعابير للمسافات المقطوعة على كل سطح بكل معدل. افترض أن x يمثل المسافة التي لم يركضها العداء على رصيف المشاة كما هو موضح. أوجد تعابير للمسافات المقطوعة على كل سطح بدلالة x. **انظر الهامش.**

الخطوة 3 استخدم التعابير التي حصلت عليها في الخطوة 2 في كتابة معادلة للمدة الزمنية. **انظر الهامش.**

الخطوة 4 استخدم الحاسبة لتمثيل المعادلة التي حصلت عليها في الخطوة 3 بيانيًا. اذكر مجال x. **انظر الهامش.**

تحليل النتائج

7. أوجد إحداثيات النقطة الصغرى. فسّر دلالة هذه الإحداثيات.

8. ما المسار الذي سوف يتطلب أقصر مدة زمنية؟ ما طول المدة التي سوف يستغرقها؟

9. أوجد متوسط معدل التغير m عند النقطة الصغرى للتمثيل البياني باستخدام ناتج قسمة الفرق. ما الذي تشير إليه هذه القيمة فيما يتعلق بخط مماس التمثيل البياني عند هذه النقطة؟

10. ضع فرضية بشأن معدلات التغير وخطوط المماس للتمثيلات البيانية عند النقاط الصغرى والعظمى. هل تنطبق فرضيتك على أول نشاطين؟ اشرح.

نصيحة دراسية

الأسطوانات تذكر أن معادلة حجم الأسطوانة هي $V = \pi r^2 h$، حيث r هو نصف قطر القاعدة وh هو ارتفاع الأسطوانة.

الخطوة 3. $A = 2\pi r\left(\frac{23.32}{\pi r^2}\right) + 2\pi r^2$ أو $2\left(\frac{23.32}{r}\right) + 2\pi r^2$

5. نصف القطر = 1.55 in.، الارتفاع = 3.09 in.، مساحة السطح الصغرى = $45.19\ in^2$

7. (6.67, 1.83)؛ الإجابة النموذجية: سيتم الحصول على المدة الزمنية العظمى 1.83 ساعة إذا سلك المتسابق مسارًا يجعله عند رصيف المشاة على بُعد 3.33 أميال من الرصيف البحري.

8. يجب أن يركض المتسابق 8.33 أميال على الرمال و3.33 أميال على رصيف المشاة. المدة الزمنية الصغرى هي ساعة و50 دقيقة.

9. $m = 0$؛ الإجابة النموذجية: ميل خط المماس هو 0. خط المماس هو خط أفقي.

10. الإجابة النموذجية: معدلات التغير عند النقاط العظمى والصغرى للتمثيل البياني هي 0، وهذا يعني أن ميول خطوط المماس عند هذه النقاط يساوي 0 كذلك. وتنطبق هذه الفرضية على أول نشاطين. وإذا تم رسم خطوط المماس عند النقاط العظمى والصغرى للتمثيلات البيانية التي حصلت عليها في أول نشاطين، فستكون خطوطًا أفقية.

إذا واجه الطلاب صعوبة في استخدام ناتج قسمة الفرق في التمرين رقم 9، فيُرجى إحالتهم إلى درس الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم في الوحدة 3 بالصفحتين 216 و217.

تمرين اطلب من الطلاب إكمال تمارين تحليل النتائج 9–6 وتمرين التمثيل بالنماذج والتطبيق رقم 10.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم تمرين التمثيل بالنماذج والتطبيق رقم 10 لتقييم فهم الطلاب لطريقة استخدام الاستمثال الخطي لإيجاد القيمة العظمى للموقف.

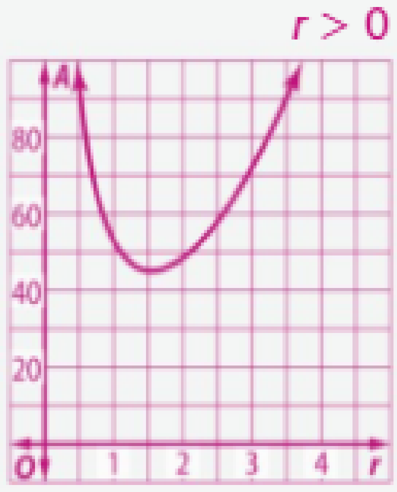
من الملموس إلى المُجرَّد

بالنسبة للنشاط 1، اطلب من الطلاب تقييم ما يحدث للقيمة القصوى للدالة والحجم الأقصى إذا كان حجم الجانب المقتطع يساوي $x + 1$. يجب على الطلاب تخمين كيف يرتبط جانب بحجم $x + n$ بالحجم الأقصى للصندوق. ويمكنهم اختبار صحة التخمين بالتعويض عن n بالقيم العديدة المختلفة.

إجابات إضافية

نشاط 2

الخطوة 4 $r > 0$



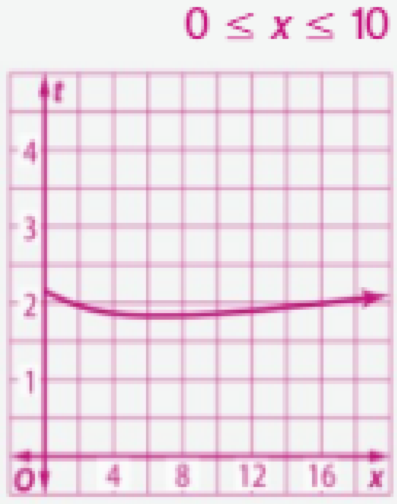
نشاط 3

الخطوة 2 المسافة المقطوعة على الرمال $= \sqrt{25 + x^2}$

المسافة المقطوعة على الرصيف $= 10 - x$

الخطوة 3 $t = \frac{\sqrt{25 + x^2}}{6} + \frac{10 - x}{7.5}$

الخطوة 4 $0 \le x \le 10$



الاستعداد للوحدة 5

8. $\begin{bmatrix} 3 & 28 & -8 \\ 20 & -3 & 19 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} -10 & -8 & 0 \\ 34 & 4 & -10 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 12 & 17 & -1 \\ -44 & -12 & 11 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 6 & 23 & -7 \\ 13 & 3 & 23 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & -25 & 5 \\ -6 & 17 & -2 \end{bmatrix}$ **13.** $\begin{bmatrix} -7 & 9 & -5 \\ 45 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

الدرس 5-1

22. $(3, 0.5)$ **23.** $(-3, 1)$

24. $(-11, 3)$ **25.** $(-1, 2)$

26. $(1, 2, 4)$ **27.** $(10, -2, 1)$

28. $(24, -13, -18)$ **29.** $(52, 10, 24)$

31. الإجابة النموذجية: يوجد عدد لانهائي من الحلول بالنسبة للنظام. حذف أحد الصفوف في المصفوفة، ولذلك فإن مجموعة الحل هي $(-2.75s + 8, 0.5s + 0.25, s)$. يلزم توفّر مزيد من المعلومات لتحديد أي من تلك الحلول صحيح.

40. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{10}{17} & \frac{73}{17} \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \end{array}\right]$; $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \end{array}\right]$

41. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{6} & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & -8 \end{array}\right]$; $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -8 \end{array}\right]$

42. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{21} & \frac{1}{42} & -\frac{13}{21} \\ 0 & 1 & -\frac{67}{222} & \frac{51}{74} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$; $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$

43. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{10}{159} & \frac{43}{159} & \frac{148}{159} \\ 0 & 1 & -0.16\ldots & \frac{3535}{2144} \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right]$; $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2.8 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right]$

50. الإجابة النموذجية:

$$x + y + z = 3$$
$$2x + 2y + 2z = 6$$
$$5x + 5y + 5z = 15$$

النظام المكتوب في صورة مصفوفة موسعة وفي نموذج مستوى الصف يؤدي إلى

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 15 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$، على التوالي.

أي مجموعة مرتبة ثلا ثية العناصر من الأعداد الحقيقية (x, y, z) بحيث $x + y + z = 3$ عبارة عن أحد الحلول. وذلك متوقع إذ إن المعادلتين الثانية والثالثة عبارة عن عمليتي ضرب (مضاعفات) للمعادلة الأولى.

52. كلتاهما؛ صورة مستوى صف منخفض لـ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$ و $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$ يساوي $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$ بما أن المصفوفتين تؤديان إلى الحل $(-1, 2, 4)$ ، فإن كليهما عبارة عن نموذجين من مستوى الصف من المصفوفة الموسعة.

53. خطأ؛ الإجابة النموذجية: لأ ن المعادلة في الصف الأخير تساوي $0 = 0$، فإنه لا يمكن تحديد قيمة أحد المتغيرات. ولذلك، فإن نظام المعادلا ت المقابل قد يكون عددًا لانهائيًا من الحلول.

55. الإجابة النموذجية: في اختزال جاوس، توجد المصفوفات في نموذج مستوى الصف. في اختزال جاوس–جوردان، توجد المصفوفات في صورة مستوى صف منخفض. المصفوفات التي في نموذج مستوى الصف وصورة مستوى صف منخفض قد توجد بها صفوف مكونة من أصفار بالكامل. وإذا كانت كذلك، فإن هذه الصفوف تظهر في نهاية المصفوفات. وفي كلتا الصورتين، فإن المدخل الأ ول في أي صف لا توجد به مدخلات غير صفرية يساوي 1، ويسمى المعامل الرئيسي 1. وفي كلتا الصورتين، إذا كان هناك صفان متتاليان لهما إدخالا ت غير صفرية، يكون المعامل الرئيسي 1 في الصف الأ على أبعد إلى اليسار من المعامل الرئيسي 1 في الصف الأدنى. وفيما يتعلق بالنظام الذي به حل وحيد، فعندما تكون المصفوفة في صورة مستوى صف منخفض، فإن كل عمود يوجد به المعامل الرئيسي 1 يوجد به أصفار أعلى من 1 أو أدنى منه أو كلاهما.

الدرس 5-2

11. $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 4 & 1 & -6 \\ -3 & 9 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 35 \\ -6 \end{bmatrix}$; $(1, -5, -6)$

12. $\begin{bmatrix} 3 & -10 & -1 \\ -5 & 12 & 2 \\ -4 & -8 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 16 \end{bmatrix}$; $(3, -0.5, 8)$

13. $\begin{bmatrix} 2 & -10 & 7 \\ 6 & -1 & 5 \\ -4 & 8 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -22 \end{bmatrix}$; $(2.5, -3, -4)$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ -7 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ -3 \\ 42 \end{bmatrix}$; $(-8, 11, -13)$

15. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 8 & -12 & 7 \\ -4 & 10 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 28 \\ 7 \end{bmatrix}$; $(0.5, 1.5, 6)$

16. $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 12 \\ 2 & 4 & -11 \\ -5 & 7 & -15 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -28 \end{bmatrix}$; $(-1, -24, -9)$

17. $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 9 \\ -5 & 11 & 8 \\ 2 & 1 & -13 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 33 \\ -45 \end{bmatrix}$; $(14, 5, 6)$

18. $\begin{bmatrix} 1 & -8 & -3 \\ -3 & 10 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -42 \\ 20 \end{bmatrix}$; (9, 11, −25)

55a. $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

55b. $B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B^3 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 2^2 \\ 2^2 & 2^2 \end{bmatrix}, B^4 = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 2^3 \\ 2^3 & 2^3 \end{bmatrix},$

$B^5 = \begin{bmatrix} 16 & 16 \\ 16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^4 & 2^4 \\ 2^4 & 2^4 \end{bmatrix}, B^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$

أو $B^n = 2^{n-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

55c. $C^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 2^3 & 2^2 \end{bmatrix}, C^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 24 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 3\times2^3 & 2^3 \end{bmatrix},$

$C^4 = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 64 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^4 & 0 \\ 4\times2^4 & 2^4 \end{bmatrix}, C^5 = \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 160 & 32 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2^5 & 0 \\ 5\times2^5 & 2^5 \end{bmatrix},$

$C^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ n\times2^n & 2^n \end{bmatrix}$

55d. $\begin{bmatrix} 128 & 0 \\ 896 & 128 \end{bmatrix}$

56a. $X = \begin{bmatrix} i & 45 & 75 & 135 & 90 \\ j & 5 & 9 & 16 & 11 \end{bmatrix}$ **56b.** $Y = \begin{bmatrix} 2.50 & 7.95 \\ 3.00 & 6.75 \end{bmatrix}$

56c.

	مزارع الخيل البارع	إسطبل أجياد	مزارع المُهر	مزارع الأدهم
مايو	152.25	259.05	464.70	312.45
يونيو	168.75	285.75	513.00	344.25

65d. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$

$= (aei + bfg + cdh) - (gec + hfa + idb)$

$= aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$

$= a(ei - hf) + b(fg - id) + c(dh - ge)$

$= a(ei - hf) - b(id - fg) + c(dh - ge)$

$= a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - ge)$

$= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

65e. لا، الإجابة النموذجية: إذا كانت $\det(A) = -60$، $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}$

$= 1(1)(1)(1) + 2(2)(1)(3) + 3(3)(2)(1) + 0(0)(3)(2) -$
$[3(3)(2)(0) + 1(1)(3)(1) + 2(1)(0)(2) + 1(2)(1)(3)]$

$= 1 + 12 + 18 + 0 - (0 + 3 + 0 + 6)$

$= 22$

بما أن $-60 \neq 22$، فهذه الطريقة لا تصلح للمصفوفة 4×4.

66. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 & ay_1 + by_2 \\ cx_1 + dx_2 & cy_1 + dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$ax_1 + bx_2 = 1 \qquad ay_1 + by_2 = 0$

$cx_1 + dx_2 = 0 \qquad cy_1 + dy_2 = 1$

إيجاد حل كل نظام، $x_1 = \frac{d}{ad - cb}$، $x_2 = \frac{-c}{ad - cb}$،
$y_1 = \frac{-b}{ad - cb}$ و $y_2 = \frac{a}{ad - cb}$،

إذًا، $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

67. افترض أن B و C عبارة عن مصفوفتين عكسيتين من المصفوفة المربعة A. ثم بناء على التعريف، فإن $AB = BA = I$ و $AC = CA = I$. وعندئذ $B(AC) = BI = B$. ولكن $(BA)C = IC = C$. و $B(AC) = (BA)C$ عن طريق خاصية التجميع في ضرب المصفوفة. ولذلك، $B = C$.

68a. الإجابة النموذجية: مصفوفة مثلثة عليا: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$؛ مصفوفة مثلثة دنيا: $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$؛ مصفوفة قطرية: $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$؛ $|A| = 1(3) - 0(2)$ أو 3؛ $|B| = 1(3) - 2(0)$ أو 3؛ $|C| = 1(2) - 0(0)$ أو 2

68b. الإجابة النموذجية: مصفوفة مثلثة عليا: $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ مصفوفة مثلثة دنيا: $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$؛ مصفوفة قطرية: $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$؛

$|D| = 1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 24 - 0 + 0$ أو 24؛

$|E| = 1\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 18 - 0 + 0$ أو 18؛

$|F| = 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 0 + 0$ أو 6

68c. افترض أنّ $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. إذا كانت A هي المصفوفة المثلثية الدنيا أو القطرية، فإن قيمة المحدد تساوي $a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$. إذا كانت A هي المصفوفة المثلثية العليا، فإن قيمة المحدد تساوي $i\begin{vmatrix} d & e \\ a & b \end{vmatrix}$.

68d. الإجابة النموذجية: $F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$; $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

68e. الإجابة النموذجية: لنفترض أن $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$. معكوس A سيكون أيضًا عبارة عن مصفوفة قطرية من النموذج $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$.

68e. الإجابة النموذجية: معكوس المصفوفة القطرية $n \times n$ عبارة عن مصفوفة قطرية $n \times n$.

70. الإجابة النموذجية: A عبارة عن مصفوفة غير مربعة لها أبعاد $m \times n$ حيث إن $m \neq n$. افترض أن A لها معكوس، فعندئذ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

لأن A لها الأبعاد $m \times n$، فإن $AA^{-1} = I_m$ و $A^{-1}A = I_n$. تؤدي كل من عمليتي الضرب إلى I، كما أن كلتيهما له أبعاد مختلفة. وبالتالي، بما أن $I_m \neq I_n$، $AA^{-1} \neq A^{-1}A$. هذا عبارة عن تناقض. ولذلك، فإن A لا يمكن أن يكون لها معكوس.

72.

$$(A+B)C = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

التعويض

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

تعريف جمع المصفوفات

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11})c_{11}+(a_{12}+b_{12})c_{21} & (a_{11}+b_{11})c_{12}+(a_{12}+b_{12})c_{22} \\ (a_{21}+b_{21})c_{11}+(a_{21}+b_{21})c_{21} & (a_{21}+b_{21})c_{12}+(a_{21}+b_{21})c_{22} \end{bmatrix}$$

تعريف ضرب المصفوفات

$$= \begin{bmatrix} a_{11}c_{11}+b_{11}c_{11}+a_{12}c_{21}+b_{12}c_{21} & a_{11}c_{12}+b_{11}c_{12}+a_{12}c_{22}+b_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11}+b_{21}c_{11}+a_{21}c_{21}+b_{21}c_{21} & a_{21}c_{12}+b_{21}c_{12}+a_{21}c_{22}+b_{21}c_{22} \end{bmatrix}$$

خاصية التوزيع

$$= \begin{bmatrix} a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21}+b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21} & a_{11}c_{12}+a_{12}c_{22}+b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11}+a_{21}c_{21}+b_{21}c_{11}+b_{21}c_{21} & a_{21}c_{12}+a_{21}c_{22}+b_{21}c_{12}+b_{21}c_{22} \end{bmatrix}$$

خاصية التبديل في الجمع

$$= \begin{bmatrix} a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12}+a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11}+a_{21}c_{21} & a_{21}c_{12}+a_{21}c_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11}+b_{21}c_{21} & b_{21}c_{12}+b_{21}c_{22} \end{bmatrix}$$

تعريف جمع المصفوفات

$$= AC + BC$$

تعريف ضرب المصفوفات

73.

$$C(A+B) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11}(a_{11}+b_{11})+c_{12}(a_{21}+b_{21}) & c_{11}(a_{12}+b_{12})+c_{12}(a_{22}+b_{22}) \\ c_{21}(a_{11}+b_{11})+c_{22}(a_{21}+b_{21}) & c_{21}(a_{12}+b_{12})+c_{22}(a_{22}+b_{22}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11}a_{11}+c_{11}b_{11}+c_{12}a_{21}+c_{12}b_{21} & c_{11}a_{12}+c_{11}b_{12}+c_{12}a_{22}+c_{12}b_{22} \\ c_{21}a_{11}+c_{21}b_{11}+c_{22}a_{21}+c_{22}b_{21} & c_{21}a_{12}+c_{21}b_{12}+c_{22}a_{22}+c_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11}a_{11}+c_{12}a_{21}+c_{11}b_{11}+c_{12}b_{21} & c_{11}a_{12}+c_{12}a_{22}+c_{11}b_{12}+c_{12}b_{22} \\ c_{21}a_{11}+c_{22}a_{21}+c_{21}b_{11}+c_{22}b_{21} & c_{21}a_{12}+c_{22}a_{22}+c_{21}b_{12}+c_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11}a_{11}+c_{12}a_{21} & c_{11}a_{12}+c_{12}a_{22} \\ c_{21}a_{11}+c_{22}a_{21} & c_{21}a_{12}+c_{22}a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11}b_{11}+c_{12}b_{21} & c_{11}b_{12}+c_{12}b_{22} \\ c_{21}b_{11}+c_{22}b_{21} & c_{21}b_{12}+c_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= CA + CB$$

74.

$$(AB)C = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

التعويض

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

تعريف ضرب المصفوفات

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{11} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{21} & (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{12} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{22} \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{11} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{21} & (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{12} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{22} \end{bmatrix}$$

تعريف ضرب المصفوفات

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}c_{11} + a_{12}b_{21}c_{11} + a_{11}b_{12}c_{21} + a_{12}b_{22}c_{21} & a_{11}b_{11}c_{12} + a_{12}b_{21}c_{12} + a_{11}b_{12}c_{22} + a_{12}b_{22}c_{22} \\ a_{21}b_{11}c_{11} + a_{22}b_{21}c_{11} + a_{21}b_{12}c_{21} + a_{22}b_{22}c_{21} & a_{21}b_{11}c_{12} + a_{22}b_{21}c_{12} + a_{21}b_{12}c_{22} + a_{22}b_{22}c_{22} \end{bmatrix}$$

خاصية التوزيع

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}c_{11} + a_{11}b_{12}c_{21} + a_{12}b_{21}c_{11} + a_{12}b_{22}c_{21} & a_{11}b_{11}c_{12} + a_{11}b_{12}c_{22} + a_{12}b_{21}c_{12} + a_{12}b_{22}c_{22} \\ a_{21}b_{11}c_{11} + a_{21}b_{12}c_{21} + a_{22}b_{21}c_{11} + a_{22}b_{22}c_{21} & a_{21}b_{11}c_{12} + a_{21}b_{12}c_{22} + a_{22}b_{21}c_{12} + a_{22}b_{22}c_{22} \end{bmatrix}$$

خاصية التبديل

$$= \begin{bmatrix} a_{11}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{12}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) & a_{11}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{12}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{22}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) & a_{21}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{22}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \end{bmatrix}$$

خاصية التوزيع

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{bmatrix}$$

تعريف ضرب المصفوفات

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\right)$$

تعريف ضرب المصفوفات

$$= A(BC)$$

التعويض

75.

$$c(AB) = c\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

التعويض

$$= c\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

تعريف ضرب المصفوفات

$$= \begin{bmatrix} c(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & c(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ c(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & c(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{bmatrix}$$

تعريف ضرب الكميات غير المتجهة

$$= \begin{bmatrix} ca_{11}b_{11} + ca_{12}b_{21} & ca_{11}b_{12} + ca_{12}b_{22} \\ ca_{21}b_{11} + ca_{22}b_{21} & ca_{21}b_{12} + ca_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

خاصية التوزيع

$$= \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

تعريف ضرب المصفوفات

$$= \left(c\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

تعريف ضرب الكميات غير المتجهة

$$= (cA)B$$

التعويض

$c(AB) = c\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right)$	التعويض
$= c\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$	تعريف ضرب المصفوفات
$= \begin{bmatrix} c(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & c(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ c(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & c(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{bmatrix}$	تعريف ضرب الكميات غير المتجهة
$= \begin{bmatrix} ca_{11}b_{11} + ca_{12}b_{21} & ca_{11}b_{12} + ca_{12}b_{22} \\ ca_{21}b_{11} + ca_{22}b_{21} & ca_{21}b_{12} + ca_{22}b_{22} \end{bmatrix}$	خاصية التوزيع
$= \begin{bmatrix} a_{11}cb_{11} + a_{12}cb_{21} & a_{11}cb_{12} + a_{12}cb_{22} \\ a_{21}cb_{11} + a_{22}cb_{21} & a_{21}cb_{12} + a_{22}cb_{22} \end{bmatrix}$	خاصية التبديل
$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cb_{11} & cb_{12} \\ cb_{21} & cb_{22} \end{bmatrix}$	تعريف ضرب المصفوفات
$= A(cB)$	التعويض

76. بهاء؛ يتضمن إيجاد محدد المصفوفة إيجاد فرق ناتج ضرب المصفوفات القطرية. إذا تم تبديل صفين، تتغير علامة الفرق.

77. 8×6 ؛ بما أن عدد أعمدة المصفوفة A يجب أن يتساوى مع عدد صفوف المصفوفة B، فإن المصفوفة B يجب أن تكون بها 6 صفوف. ناتج ضرب المصفوفة AB له عدد الأعمدة ذاته مثل المصفوفة B. إذًا، المصفوفة B يجب أن تكون بها 8 أعمدة.

78. الإجابة النموذجية: تكمن أهمية الترتيب في عدم تطبيق خاصية التبديل على ضرب المصفوفات. على سبيل المثال، إذا كانت A تساوي المصفوفة 3×2 وB تساوي المصفوفة 2×3، فإن AB تساوي المصفوفة 2×2 والمصفوفة BA تساوي 3×3. وكذلك، ستبقى AB أحيانًا، ولكن لن تبقى BA. على سبيل المثال، إذا كانت A تساوي المصفوفة 3×2 وB تساوي المصفوفة 3×3، فإن AB تساوي المصفوفة 3×2 ، ولكن لا توجد BA. حتى عندما يتم تحديد ناتجي الضرب، فعادة لا يتساوى كل من AB و BA.

الدرس 5-3

51. الإجابة النموذجية: نعم؛ $A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}$. ولذلك،

$$(A^2)^{-1} = \frac{1}{a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2} \times \begin{bmatrix} bc + d^2 & -ab - bd \\ -ac - cd & a^2 + bc \end{bmatrix}$$

و $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$، إذًا

$$(A^{-1})^2 = \frac{1}{a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2} \times \begin{bmatrix} bc + d^2 & -ab - bd \\ -ac - cd & a^2 + bc \end{bmatrix}$$

وبالتالي، $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

52. الإجابة النموذجية: $x + y = 4;\ x + y = 5$. تم التعبير عنها في صورة معادلة مصفوفة، فتصبح هذه $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$. لإيجاد الحل، اضرب في معكوس مصفوفة المعاملات.

ومع ذلك، فإن $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(1)(1) - (1)(1)} = \frac{1}{0}$ وهي غير محددة. ولذلك لا يوجد حل لهذا النظام.

53a. الإجابة النموذجية: يمكن استخدام اختزال جاوس-جوردان في حل أي نظام للمعادلات الخطية. ومن الممكن إجراء عمليات الصفوف على أي مصفوفة.

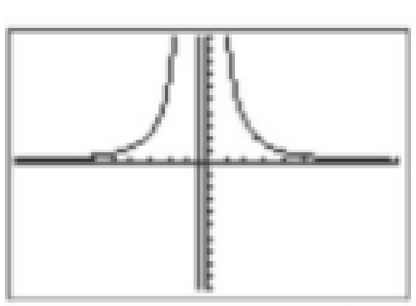
53b. الإجابة النموذجية: لا يمكن استخدام المصفوفات المعكوسة إلا لحل الأنظمة ذات مصفوفات المعاملات المربعة لأنه لا يمكن إجراء ضرب المصفوفات إلا إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساويًا لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

53c. الإجابة النموذجية: تستخدم قاعدة كرامر المحددات لحل الأنظمة، ولأنه لا يمكن استخدامها إلا لإيجاد محدد المصفوفة المربعة، فإن هذه الطريقة لا يمكن استخدامها إلا لحل الأنظمة المربعة.

الدرس 5-4

19a. $s(x) = \frac{20x + 10\pi x + 20}{\pi x^3 + \pi x^2} = \frac{10}{x} + \frac{\frac{20}{\pi}}{x^2} + \frac{-10}{x + 1}$

19b.



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

20. $\frac{x}{x^2 + 4} + \frac{x - 5}{(x^2 + 4)^2}$

21. $\frac{2}{x} + \frac{x}{x^2 + 3} + \frac{-11x + 8}{(x^2 + 3)^2}$

22. $\frac{8}{x} - \frac{4x}{x^2 - 2} + \frac{25x - 25}{(x^2 - 2)^2}$

23. $\frac{8x}{x^2-6}+\frac{7}{(x^2-6)^2}$

24. $\frac{-5x}{x^2+2x+3}+\frac{9x+4}{(x^2+2x+3)^2}$

25. $\frac{4x}{x^2-3x+3}+\frac{-17x+20}{(x^2-3x+3)^2}$

40. $\frac{\frac{7}{27}}{x+1}+\frac{\frac{-4}{9}}{(x+1)^2}+\frac{\frac{20}{27}}{x-2}+\frac{\frac{11}{9}}{(x-2)^2}$

41. $\frac{-\frac{3}{4}}{x+1}+\frac{-\frac{3}{2}}{(x+1)^2}+\frac{\frac{5}{12}}{x-1}+\frac{\frac{4}{3}}{x+2}$

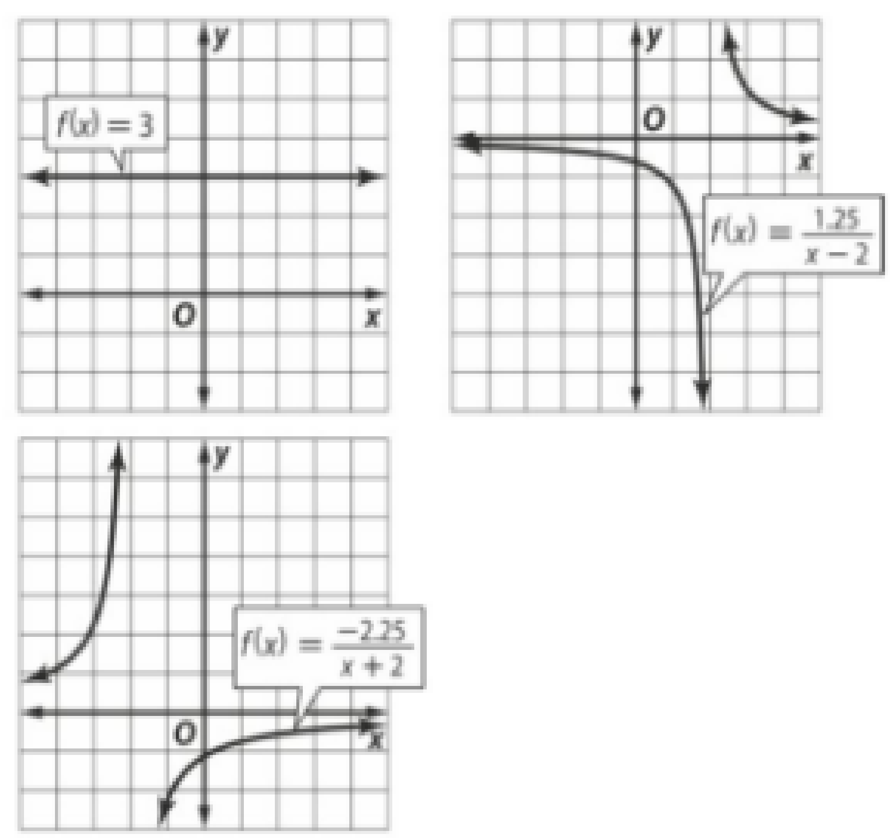
42. $4+\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^2}$

43. $7x+2+\frac{1}{x}+\frac{8}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{-4}{x+2}+\frac{-4x+4}{x^2+1}$

44a. بما أن $|x| \to \infty, f(x) \to 3$؛ خط مقارب رأسي: $x = 2,\ x = -2$؛ خط مقارب أفقي: $y = 3$.

44b. $3+\frac{1.25}{x-2}+\frac{-2.25}{x+2}$

44a.



44d. الإجابة النموذجية: التمثيل البياني لـ $f(x)$ له خط مقارب أفقي عند $y = 3$، وهو أحد الحدود في التحليل. التمثيل البياني لـ $y = \frac{1.25}{x-2}$ مشابه للتمثيل البياني في الدالة الأصلية القريبة من $x = 2$. التمثيل البياني للحد $y = \frac{-2.25}{x+2}$ مشابه للتمثيل البياني في الدالة الأصلية القريبة من $x = -2$.

44e. الإجابة النموذجية: يمكن استخدام تجزئة الكسور للدالة النسبية لتحديد أي خط مقارب رأسي أو أفقي في الدالة.

46. تجزئة الكسور للدالة $f(x)$ هي $-2+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x+3)^2}$. بينما تقترب x من اللا نهاية، فإن قيم كل من $\frac{1}{x-2}$ و $\frac{1}{(x+3)^2}$ تقترب من 0. ولذلك فإن حد التعبير يساوي -2.

47. 0؛ تجزئة الكسور للدالة $f(x)$ هي $\frac{1}{x+1}+\frac{-3}{(x+1)^2}+\frac{3}{(x+1)^3}$

حيث إن x تقترب من اللانهاية، فإن قيم الحدود الثلاثة تقترب من 0. ولذلك، فإن حد التعبير يساوي 0.

52. خطأ؛ تجزئة الكسور للدالة $f(x)$ هي $1+\frac{\frac{7}{6}}{x+1}+\frac{\frac{-9}{2}}{x-1}+\frac{\frac{16}{3}}{x-2}$

حيث إن x تقترب من اللانهاية، فإن قيم الحدود الثلاثة الأخيرة تقترب من 0. ولذلك، فإن حد التعبير يساوي 1.

53. صواب؛ $\frac{-5}{x}+\frac{4+x}{x^2-3}+\frac{x^2+1}{(x^2-3)^2}$

$$=\frac{-5(x^2-3)^2+(4+x)(x)(x^2-3)+x(x^2+1)}{x(x^2-3)^2}$$

$$=\frac{-5x^4+30x^2-45+4x^3-12x+x^4-3x^2+x^3+x}{x(x^2-3)^2}$$

$$=\frac{-4x^4+5x^3+27x^2-11x-45}{x(x^2-3)^2}$$

54a. الإجابة النموذجية: $\frac{2x+1}{x^2+x-6}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}$

54b. الإجابة النموذجية:

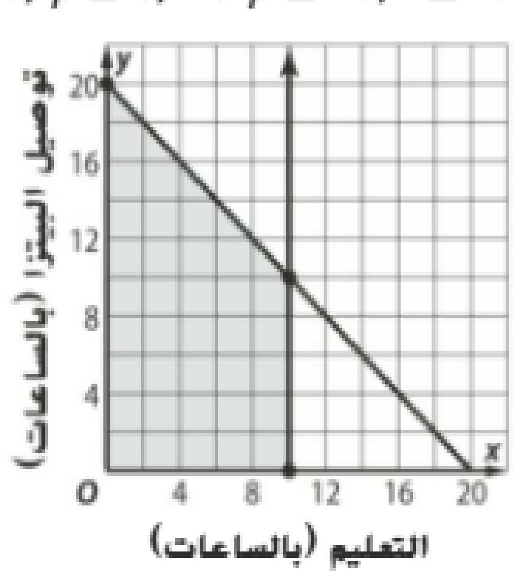
$$\frac{x^3+x^2-4x+12}{x^2(x-2)^2}=\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{-1}{(x-2)}+\frac{4}{(x-2)^2}$$

55. الإجابة النموذجية: أولا ، حلل المقام إلى عوامله إذا لزم الأمر واكتب المعادلة باستخدام بُسُط ثابتة، A، B، C، ...، والمقامات التي عبارة عن مقامات خطية أو عوامل تربيعية أولية للمقام الأصلي. اكتب التعبير الأصلي مساويًا للتعبير الجديد واضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر. استخدم خاصية التوزيع لوضع الحدود المتشابهة في مجموعات. ساوِ بين معاملات الطرفين للمعادلة للحصول على نظام من معادلتين. ثم حل النظام بكتابته في شكل مصفوفة $CX = D$ وإيجاد حل X. وفي النهاية، استخدم التعويض لإيجاد تجزئة الكسور.

الدرس 5-5

10a. لنفترض أن p = ساعة لتوصيل البيتزا ولنفترض أن l = ساعة للتعليم.
$f(l, p) = 15l + 13p,\ l \geq 0,\ p \geq 0,\ l + p \leq 20,\ l \leq 10$

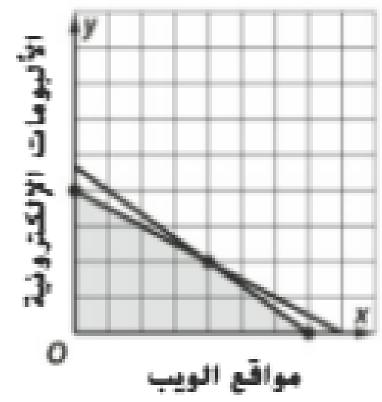
10b.



10c. ينبغي لأحمد العمل لمدة 10 ساعات في توصيل البيتزا وقضاء 10 ساعات في التعليم. وسيجني 280 AED.

11a. $f(w, a) = 600w + 700a, w \geq 0, a \geq 0, 10w + 15a \leq 70,$
$4.5w + 9a \leq 36$

11b.



12. لا توجد قيمة قصوى أو دنيا في -8 إسقاطات على كل نقطة بطول المستقيم $y = x + 2$ في $[-3, 3]$.

13. توجد في المسألة قيمة قصوى متعددة للعدد 15 من $(1, 2)$ إلى $(3, 1)$، أو بطول المستقيم $y = -0.5x + 2.5$ في $[-1, 3]$. توجد القيمة الدنيا 0 عند $(0, 0)$.

14. توجد في المسألة قيمة دنيا متعددة للعدد -30 من $(2, 4)$ إلى $(6, 2)$، أو بطول المستقيم $y = -0.5x + 5$ in $[2, 6]$. توجد القيمة القصوى للعدد 0 عند $(0, 0)$.

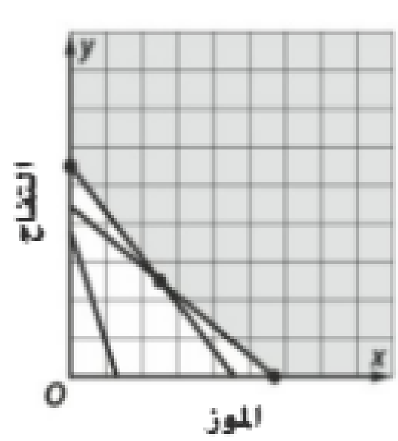
15. توجد في المسألة قيمة دنيا متعددة للعدد -8 من $(0, 2)$ إلى $(2, 5)$، أو بطول المستقيم $y = 1.5x + 2$ في $[0, 2]$. توجد القيمة القصوى للعدد 18 عند $(3, 0)$.

16. القيمة القصوى للعدد 9 عند $(3,0)$؛ لا يوجد قيمة دنيا

17. توجد في المسألة قيمة قصوى متعددة للعدد 40 من $(0, 4)$ إلى $(5, 0)$، أو بطول المستقيم $y = -0.8x + 4$ في $[0, 5]$. توجد القيمة الأدنى 0 عند $(0, 0)$.

18a. $f(b, a) = 0.35b + 0.55a, b \geq 0, a \geq 0, 467b +$
$158a \geq 600, 11b + 9a \geq 50, 7b + 9.5a \geq 40$

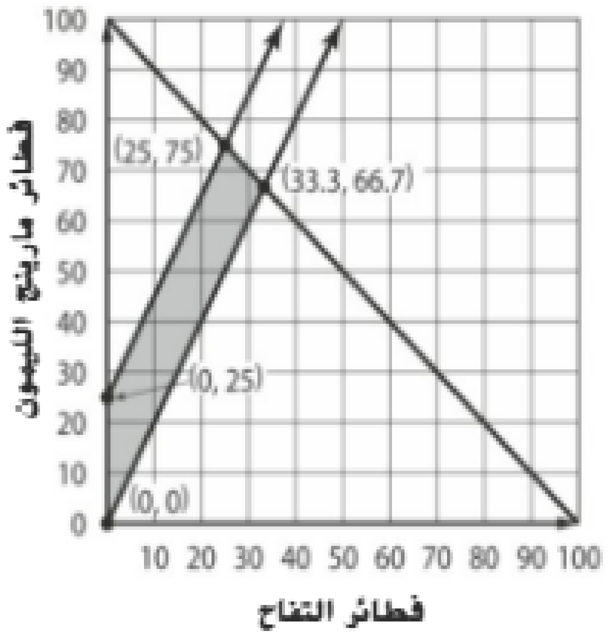
18b.



39a. الإجابة النموذجية: مخبز يصنع ما يصل إلى 100 فطيرة بالتفاح ومرنغ الليمون كل أسبوع. ونتيجة لتكاليف العمالة، يجب أن تكون الفطائر بمرنغ الليمون أقل من أو تساوي 25 زائد اثنين مضروبة في عدد الفطائر بالتفاح. وإقبال الزبائن على الفطائر بمرنغ الليمون يبلغ ضعف الإ قبال على فطائر التفاح بمرتين على الأقل. يربح المخبز AED 8 في فطيرة التفاح وAED 10 في فطيرة مرنغ الليمون. كم عدد الفطائر التي ينبغي صنعها من كل نوع لزيادة الأرباح؟

39b. القيود هي $y \leq 25 + 2x$، و $y \geq 2x$، و $x + y \leq 100$، و $x \geq 0$، و $y \geq 0$. يتم التعبير عن دالة الهدف عن طريق $f(x, y) = 8x + 10y$.

39c.



يكون التمثيل البياني لنظام المتباينات منطقة مضلعة لها رؤوس عند $(0, 0)$ و$(0, 25)$ و$(25, 75)$ و$(33.3, 66.7)$.

39d. بما أن أقصى قيمة لـ f توجد عند $(25, 75)$، ينبغي أن يصنع المخبز 25 فطيرة تفاح و75 فطيرة مرنغ الليمون ليحقق أقصى ربح وهو AED 950.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 1-6 تحديد الدوال التربيعية وتحليلها وتمثيلها بيانيًا.

الدرس 1-6 تحليل معادلات القطع المكافئ وتمثيلها بيانيًا.
كتابة معادلات القطع المكافئ.

بعد الدرس 1-6 استخدام دوران المحاور لكتابة معادلات دوران القطع المكافئ.

2 التعليم

أسئلة داعمة

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة **لماذا؟** الواردة في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما وجه الصلة بين أحواض تجميع الطاقة الشمسية وخواص القطع المكافئ؟ أحواض التجميع لها شكل القطع المكافئ وتستفيد من خواص القطع المكافئ لأداء وظيفتها.

الدرس 1-6 القطع المكافئ

السابق	الآن	لماذا؟
• حددت الدوال التربيعية وحللتها ومثلتها بيانيًا.	1 تحليل معادلات القطوع المكافئة وتمثيلها بيانيًا. 2 كتابة معادلات القطوع المكافئة.	• تستخدم أحواض تجميع الطاقة الشمسية خواص القطوع المكافئة لتركيز الأشعة على مستقبل وتولّد الطاقة الشمسية.

المفردات الجديدة
القطع المخروطي conic section
المخروط المُنحل degenerate conic
المحل الهندسي locus
القطع المكافئ parabola
البؤرة focus
الدليل directrix
محور التماثل axis of symmetry
الرأس vertex
القطعة المستقيمة العمودية على محور القطع عند بؤرته latus rectum

1 تحليل القطوع المكافئة وتمثيلها بيانيًا

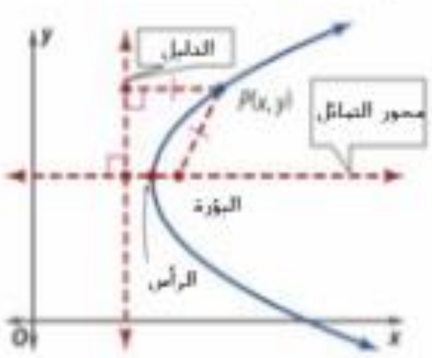
القطوع المخروطية أو المخروطيات هي الأشكال التي تنشأ عندما يقطع مستوى سطحًا مخروطيًا. والسطح المخروطي عبارة عن مخروطين متعاكسين يمتدّان إلى ما لا نهاية إلى الأعلى والأسفل. والمخاريط الشائعة الأربعة التي سنتناولها في هذه الوحدة هي القطع المكافئ والقطع الناقص والدائرة والقطع الزائد.

قطع زائد   قطع مكافئ   قطع ناقص   دائرة

حين يقطع المستوى رأس المخروط، فإن الأشكال الناشئة هي **المخاريط المُنحلة**. قد يكون المخروط المُنحل نقطةً أو مستقيمًا أو مستقيمين متقاطعين.

مستقيمان متقاطعان (قطع زائد مُنحل)   مستقيم (قطع مكافئ مُنحل)   نقطة (قطع ناقص مُنحل)

الصيغة العامة لمعادلات القطوع المخروطية هي $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. A و B و C لا يمكن أن تساوي الصفر. وسنورد صيغًا جبريةً أكثر تحديدًا لكل نوعٍ من أنواع القطوع المخروطية عندما نقدّمها.

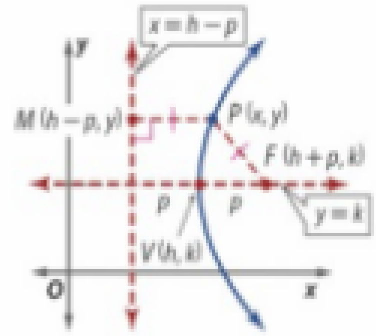


المحلّ الهندسي هو مجموعة جميع النقاط التي تحقق خاصيةً هندسية. يمثل **القطع المكافئ** المحل الهندسي للنقاط الواقعة في مستوى والتي تقع على المسافة نفسها من نقطة ثابتة تدعى **البؤرة** ومن مستقيم محدّدٍ يطلق عليه **الدليل**.

والقطع المكافئ متماثل بالنسبة للمستقيم العمودي على الدليل والمار بالبؤرة والذي يدعى **محور التماثل**. **الرأس** هو نقطة تقاطع القطع المكافئ ومحور التماثل.

في السابق تعلّمت أن الدالّة التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$، وفيها $a \neq 0$ تمثّل قطعًا مكافئًا مفتوحًا إلى الأعلى أو الأسفل. ويمكن استخدام تعريف القطع المكافئ على أنه محلّ هندسيّ مشتق من المعادلة العامة للقطع المكافئ المفتوح إلى الأعلى أو الأسفل أو الجهة اليسرى أو اليمنى.

لتكن $P(x, y)$ أي نقطة على القطع المكافئ رأسه $V(h, k)$ والذي فيه $p = FV$ المسافة بين الرأس والبؤرة. وتبعًا لتعريف القطع المكافئ، فإن المسافة من أي نقطة على القطع المكافئ إلى البؤرة يجب أن تساوي المسافة من تلك النقطة إلى الدليل.
إذًا، إذا كان $FV = p$، فإن $VT = p$. من تعريف القطع المكافئ، نعلم أنّ $PF = PM$. ونظرًا إلى أنّ M تقع على الدليل، فإن إحداثيي M هما $(h - p, y)$.



يمكنك استخدام قانون المسافة لتحديد معادلة القطع المكافئ.

$$PF = PM$$

قانون المسافة
$$\sqrt{[x-(h+p)]^2+(y-k)^2}=\sqrt{[x-(h-p)]^2+(y-y)^2}$$

بتربيع الطرفين.
$$[x-(h+p)]^2+(y-k)^2=[x-(h-p)]^2+0^2$$

بالضرب.
$$x^2-2x(h+p)+(h+p)^2+(y-k)^2=x^2-2x(h-p)+(h-p)^2$$

بالضرب.
$$x^2-2xh-2xp+h^2+2hp+p^2+(y-k)^2=x^2-2xh+2xp+h^2-2hp+p^2$$

بسّط.
$$(y-k)^2=4xp-4hp$$

بالتحليل إلى العوامل.
$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

قراءة في الرياضيات

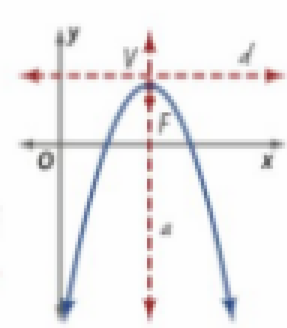
التقعّر ستشير في هذا الدرس إلى القطوع المكافئة على أنها منحنيات مفتوحة للأعلى أو الأسفل أو الجهة اليمنى أو اليسرى. وخلال حساب التفاضل والتكامل، سوف تتعلم استخدام مصطلح التقعّر. وفي هذه الحالة تتقعّر التمثيلات البيانية إلى الأعلى أو إلى الأسفل أو إلى الجهة اليمنى أو إلى الجهة اليسرى على الترتيب.

تأخذ معادلة القطع المكافئ المفتوح أفقيًا الصيغة $(y-k)^2=4p(x-h)$ وبصورة مشابهة، بالنسبة للقطوع المكافئة المفتوحة رأسيًا، يمكنك اشتقاق المعادلة $(x-h)^2=4p(y-k)$

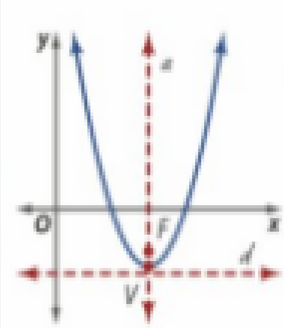
تمثل هاتان المعادلتان المعادلتين بالصيغة القياسيّة للقطوع المكافئة، حيث $p \neq 0$. تحدّد قيم الثوابت h و k و p خواص القطوع المكافئة كإحداثيي الرأس واتجاه القطع المكافئ.

المفهوم الأساسي الصيغة القياسيّة لمعادلات القطوع المكافئة

$$(x-h)^2=4p(y-k)$$



$p < 0$



$p > 0$

التوجيه: مفتوح رأسيًا

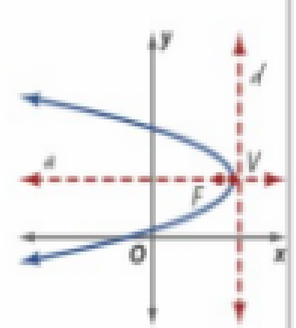
الرأس: (h, k)

البؤرة: $(h, k + p)$

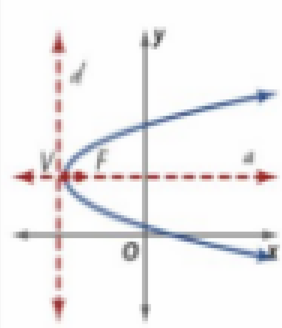
محور التماثل a، $x = h$

الدليل d، $y = k - p$

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$



$p < 0$



$p > 0$

التوجيه: مفتوح أفقيًا

الرأس: (h, k)

البؤرة: $(h + p, k)$

محور التماثل a، $y = k$

الدليل d، $x = h - p$

يمكنك استخدام الصيغة القياسيّة لمعادلة القطع المكافئ لتحديد خواصّه كالرأس والبؤرة والدليل.

- كيف تستخدم القطع المكافئ في تشغيل الطاقة الشمسية؟ تصطدم الطاقة الشمسية بالقطع المكافئ، ما يعكس الطاقة إلى جهاز الاستقبال.
- لماذا يُعدّ القطع المكافئ فعال في تجميع الطاقة الشمسية؟ يوفر القطع المكافئ مساحة كبيرة للطاقة التي يتعين تجميعها، ويوجه المنحنى كل الطاقة التي يتم تجميعها إلى نقطة واحدة.

1 تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانيًا

يبين **المثالان 1 و 2** كيفية تحديد الخواص المختلفة للقطع المكافئ واستخدام الخواص لتمثيل القطع المكافئ بيانيًا. يبين **المثال 3** كيفية كتابة معادلة القطع المكافئ بالصيغة القياسية.

التركيز على محتوى الرياضيات

القطع المكافئ تُعدّ خاصية الانعكاس في القطع المكافئ مهمة لما لها من التطبيقات العملية. تمثل P أي نقطة على القطع المكافئ. يمكن إنشاء قطعة مستقيمة تصل P بالبؤرة، ويمكن رسم شعاع يمر عبر P ويكون موازيًا لمحور التماثل. ستشكل القطعة المستقيمة مع الشعاع زوايا متطابقة مع المماس عند P. أي شعاع ينشأ في البؤرة سينعكس عن القطع المكافئ متجهًا مباشرة إلى الخارج، موازيًا للمحور. ويمكن رؤية هذه الخاصية في تصميم المصابيح اليدوية. سوف ينعكس أي شعاع يدخل القطع المكافئ موازيًا للمحور إلى البؤرة. كما يمكن رؤية هذه الخاصية في تصميم أطباق استقبال الأقمار الصناعية.

نصيحة للمعلمين الجدد

البعد إلى الدليل ذكر الطلاب أن البعد من نقطة إلى مستقيم، مثل الدليل، تقاس بالمسافة العمودية من تلك النقطة إلى المستقيم.

341

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي اطلب إلى الطلاب رسم التمثيل البياني لقطع مكافئ يقع رأسه عند نقطة الأصل ويحوي $(2, 1)$ و $(-2, 1)$ و $(4, 5)$ و $(-4, 5)$. ثم اطلب إليهم رسم البؤرة عند النقطة $(0, 1)$ والدليل $y = -1$ اطلب إلى الطلا ب اختيار عدة نقاط على القطع المكافئ واستخدام مسطرة لقياس المسافة بين النقطة والبؤرة والبعد بين النقطة والدليل. ناقش أي ملاحظات. على سبيل المثال، ناقش طريقة تأثير تغيير نقطة البؤرة على الدليل وطريقة تأثير كل من البؤرة والدليل على شكل القطع المكافئ.

المثال 1 تحديد الخواص والتمثيل البياني

للمعادلة $(y+5)^2 = -12(x-2)$، حدّد الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل. ثمّ مثّل القطع المكافئ بيانيًا.

إن المعادلة بالصيغة القياسية والحدّ المربّع هو y، ما يعني أن القطع المكافئ مفتوح أفقيًا. المعادلة في الصيغة $(y-k)^2 = 4p(x-h)$، وبالتالي $h = 2$, $k = -5$

ونظرًا إلى أن $4p = -12$، فإن $p = -3$ والتمثيل البياني يكون مفتوحًا إلى الجهة اليسرى. استخدم قيم h و k و p لتحديد خواص القطع المكافئ.

الرأس: $(2, -5)$ (h, k) الدليل: $x = 5$ $x = h - p$

البؤرة: $(-1, -5)$ $(h+p, k)$ محور التماثل: $y = -5$ $y = k$

مثّل الرأس والبؤرة والمحور والدليل للقطع المكافئ. ثم شكّل جدولًا بالقيم لتمثيل الشكل العام للمنحنى بيانيًا.

x	y
0	−0.1, −9.9
−2	1.9, −11.9
−4	3.5, −13.5
−6	4.8, −14.8

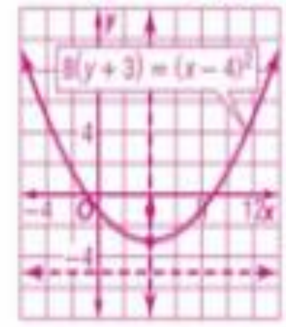
تمرين موجّه

لكل معادلة من المعادلات التالية، حدّد الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل. ثمّ مثّل القطع المكافئ بيانيًا.

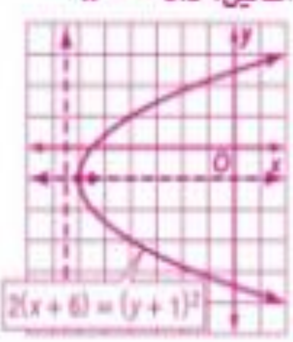
1A. $8(y+3) = (x-4)^2$

1B. $2(x+6) = (y+1)^2$

1A. الرأس: $(4, -3)$؛ البؤرة: $(4, -1)$؛ الدليل: $y = -5$

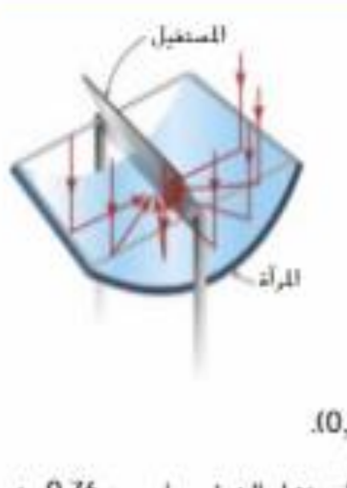


1B. الرأس: $(-6, -1)$؛ البؤرة: $(-5.5, -1)$؛ الدليل: $x = -6.5$



مثال 2 من الحياة اليومية خواص القطوع المكافئة

الطاقة الشمسية حوض تجميع الطاقة الشمسية هو مرآة ذات قطع مكافئ تركّز الأشعة القادمة من الشمس على مستقبل خطي يقع عند بؤرة القطع المكافئ. يمكن تمثيل المقطع العرضي للحوض الواحد باستخدام العلاقة $x^2 = 3.04y$ والتي فيها x و y تقاسان بالامتار. أين يقع المستقبل الخطي في هذا المقطع العرضي؟



يقع المستقبل الخطي عند بؤرة القطع المكافئ.
ونظرًا إلى أن الحدّ x مربّع والحدّ p موجب، فإن القطع المكافئ يكون مفتوحًا إلى الأعلى والبؤرة تقع عند النقطة $(h, k+p)$.

المعادلة معطاةٌ بالصيغة القياسية، و h و k كلاهما يساوي الصفر. نظرًا لكون $4p = 3.04$ فإن p تساوي 0.76. إذًا، موقع البؤرة هو $(0, 0 + 0.76)$ أو $(0, 0.76)$.

موقع بؤرة المقطع العرضي للقطع المكافئ المعطى هو $(0, 0.76)$. ولذلك، يقع المستقبل الخطي على بعد 0.76 متر من رأس القطع المكافئ.

تمرين موجّه

2. **علم الفلك** يتألف تلسكوب المرآة السائلة من طبقةٍ رقيقةٍ من المعدن السائل بشكل قطع مكافئ وكاميرا موجودة في النقطة البؤرية. افترض أنه يمكن تمثيل تلسكوب مرآةٍ سائلةٍ باستخدام المعادلة $x^2 = 44.8y - 268.8$ حين يكون $-5 \le x \le 5$. إذا كانت x و y تقاسان بالقدم، فما هي أقصر مسافةٍ بين سطح المرآة السائلة وبين الكاميرا؟

فوق الرأس بمسافة 11.2 ft

مسائل من الحياة اليومية
تُصنع المرآة الأولية 3.0 لمرصد الحطام المداري التابع لوكالة الفضاء الأمريكية ناسا من خلال غزل صحيحة مطلية بطبقة رقيقة من الزئبق لتصبّ على هيئة مرآة تلسكوب مثالية الشكل.
المصدر: Getty Images

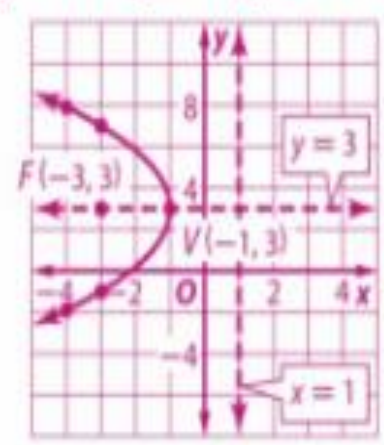
لتحديد خواص قطع مكافئ، فقد تحتاج أحيانًا إلى كتابة معادلةٍ بالصيغة القياسية. وفي بعض الأحيان، يمكنك ببساطةٍ إعادة ترتيب المعادلة، ولكن في أحيان أخرى قد يكون من الضروري استخدام المهارات الرياضية كإكمال المربّع.

التقويم التكويني

استخدم التدريب الموجه الموجود بعد كل مثال لتحديد مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 لأجل $(y-3)^2 = -8(x+1)$. حدد الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل. ثمّ مثّل القطع المكافئ بيانيًا. الرأس: $(-1, 3)$؛ البؤرة: $(-3, 3)$؛ الدليل: $x = 1$؛ محور التماثل: $y = 3$



2 **علم الفلك** المرآة التي لها شكل قطع مكافئ لتلسكوب هايل في معهد كاليفورنيا للتكنولوجيا على جبل بالومار مصممة بشكل متمذج وفق $y^2 = 2668x$، حيث تُقاس كلّ من x و y بالبوصة. ما البعد بين البؤرة والدليل للمرآة؟ 667 in.

التعليم باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو وزع طلاب الصف على مجموعات. أعط كل مجموعة معادلة قطع مكافئ مختلفة، واطلب إليهم إعداد شريط فيديو يظهر كيفية إيجاد كافة الخواص والمعلومات عن القطع المكافئ. أطلب إلى كل مجموعة مشاركة مقطع الفيديو الذي أنجزوه مع المجموعات الأخرى.

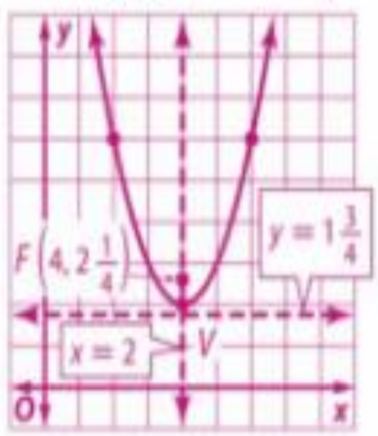
نصيحة للمعلمين الجدد

تمثيل القطع المكافئ بيانيًا بمجرد أن يعرف الطلاب الرأس ونقطة واحدة على كلٍ من طرفي محور التماثل، يمكنهم استخدام التماثل في رؤية الشكل العام للقطع المكافئ ورسم تمثيله البياني.

مثال إضافي

3 اكتب $x^2 - 8x - y = -18$ بالصيغة القياسية. حدّد الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل. ثمّ مثّل القطع المكافئ بيانيًا.

$(y-2) = (x-4)^2$؛ الرأس: $(4, 2)$؛ البؤرة: $\left(4, 2\frac{1}{4}\right)$؛ الدليل: $y = 1\frac{3}{4}$؛ خط التماثل: $x = 4$



2 معادلات القطع المكافئ

يبين **المثال 4** كيفية كتابة معادلة القطع المكافئ عند إعطاء مجموعة مختلفة من الخواص. يبين **المثال 5** كيفية إيجاد معادلة المماس لقطعٍ مكافئ عند نقطة معطاة.

المثال 3 الكتابة بالصيغة القياسية

اكتب $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$ بالصيغة القياسية. وحدّد الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل. ثمّ مثّل القطع المكافئ بيانيًا.

$y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$	المعادلة الأصلية
$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x) + 6$	بأخذ العامل المشترك $-\frac{1}{4}$ من حدود المتغير x.
$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36 - 36) + 6$	بإكمال المربع.
$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36) + 9 + 6$	$-\frac{1}{4}(-36) = 9$
$y = -\frac{1}{4}(x - 6)^2 + 15$	بالتحليل إلى العوامل
$-4(y - 15) = (x - 6)^2$	الصيغة القياسية للقطع المكافئ

نظرًا إلى أن حدّ المتغير x مربع وأن $p = -1$، فإن التمثيل البياني يفتح إلى الأسفل. استخدم الصيغة القياسية للمعادلة لتحديد خواص القطع المكافئ.

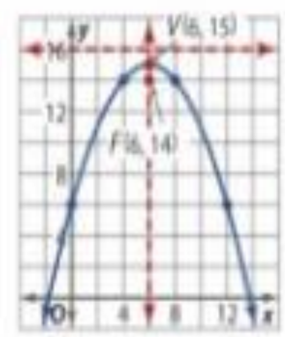
الرأس: $(6, 15)$ (h, k)

البؤرة: $(6, 14)$ $(h, k + p)$

الدليل: $y = 16$ $y = k - p$

محور التماثل: $x = 6$ $x = h$

مثّل الرأس والبؤرة والمحور والدليل للقطع المكافئ. ثمّ شكّل جدولًا بالقيم لتمثيل المنحنى بيانيًا. ينبغي أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.



x	y
0	6
4	14
8	14
12	6

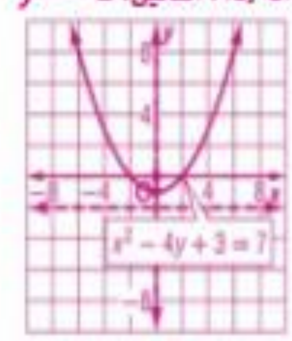
تمرين موجّه

اكتب كل معادلةٍ مما يلي بالصيغة القياسية. وحدّد الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل. ثمّ مثّل كل قطعٍ مكافئ بيانيًا.

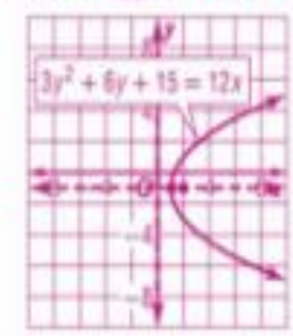
3A. $x^2 - 4y + 3 = 7$

3B. $3y^2 + 6y + 15 = 12x$

3A. $x^2 = 4(y + 1)$؛ الرأس: $(0, -1)$؛ البؤرة: $(0, 0)$؛ الدليل: $y = -2$



3B. $(y + 1)^2 = 4(x - 1)$؛ الرأس: $(1, -1)$؛ البؤرة: $(2, -1)$؛ الدليل: $x = 0$



2 معادلات القطوع المكافئة

يمكن استخدام خواص محددة لتحديد معادلة القطع المكافئ.

المثال 4 كتابة المعادلات بدلالة الخواص المعطاة

اكتب معادلةً لقطعٍ مكافئٍ بالخواص التالية ومثّله بيانيًا.

a. البؤرة $(3, -4)$ والرأس $(1, -4)$

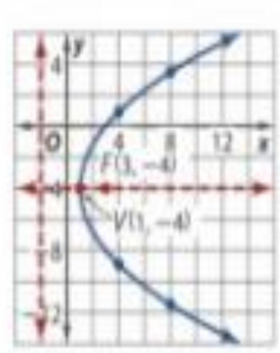
بما أن البؤرة والرأس لهما الإحداثي y نفسه، فالتمثيل البياني أفقي. البؤرة هي $(h + p, k)$، إذًا قيمة p هي $3 - 1$ أو 2. بما أن إشارة p موجبة، فإن التمثيل البياني يكون مفتوحًا إلى الجهة اليمنى.

اكتب معادلة القطع المكافئ بالصيغة القياسية باستخدام قيم h و p و k.

$(y - k)^2 = 4p(x - h)$	الصيغة القياسية
$[y - (-4)]^2 = 4(2)(x - 1)$	$h = 1$ و $p = 2$ و $k = -4$
$(y + 4)^2 = 8(x - 1)$	بسّط

الصيغة القياسية للمعادلة هي $(y + 4)^2 = 8(x - 1)$.

مثّل الرأس والبؤرة بيانيًا. ثمّ مثّل القطع المكافئ بيانيًا.



نصيحة دراسية

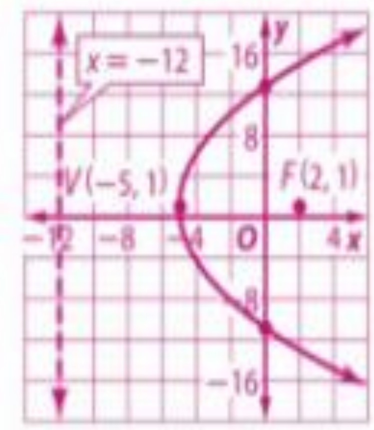
التوجيه إذا كان للرأس والبؤرة الإحداثي نفسه على المحور الأفقي x، إذًا فإن القطع المكافئ يكون مفتوحًا إلى الأعلى أو الأسفل. وإذا كان للرأس والبؤرة الإحداثي نفسه على المحور الرأسي y، إذًا فإن القطع المكافئ يكون مفتوحًا إلى الجهة اليمنى أو اليسرى.

مثال إضافي

4 اكتب معادلةً لقطع مكافئ له الخواص التالية ومثّله بيانيًا.

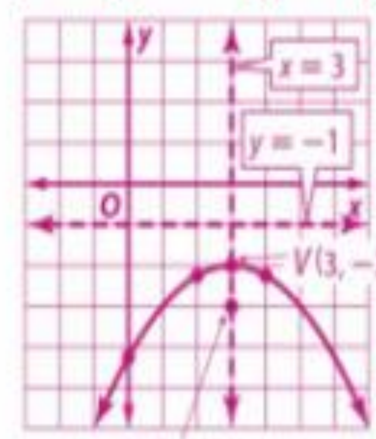
a. البؤرة $(2, 1)$ والرأس $(-5, 1)$

$(y-1)^2 = 28(x+5)$



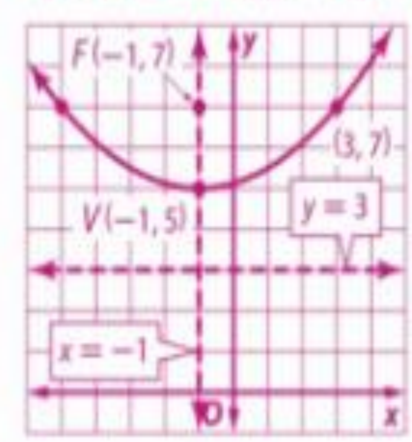
b. الرأس $(3, -2)$، الدليل $y=-1$

$(x-3)^2 = -4(y+2)$



c. البؤرة $(-1, 7)$، مفتوح إلى الأعلى، يحتوي $(3, 7)$

$(x+1)^2 = 8(y-5)$



b. الرأس $(-2, 4)$، الدليل $y = 1$

الدليل مستقيم أفقي، بالتالي يكون القطع المكافئ مفتوحًا رأسيًا. وبنظرًا إلى أن الدليل يقع تحت الرأس، فإن القطع المكافئ يكون مفتوحًا إلى الأعلى.

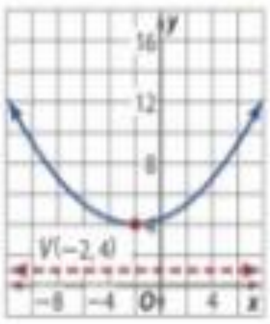
استخدم معادلة الدليل لإيجاد p.

$y = k - p$	معادلة الدليل
$1 = 4 - p$	$y = 1$ و $k = 4$
$-3 = -p$	بطرح 4 من كلا الطرفين.
$3 = p$	بقسمة كل طرف على -1.

استبدل قيم h و k و p في المعادلة ذات الصيغة القياسية للقطع المكافئ المفتوح رأسيًا.

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	الصيغة القياسية
$[x-(-2)]^2 = 4(3)(y-4)$	$h = -2$ و $k = 4$ و $p = 3$
$(x+2)^2 = 12(y-4)$	بسّط

مثّل القطع المكافئ بيانيًا.



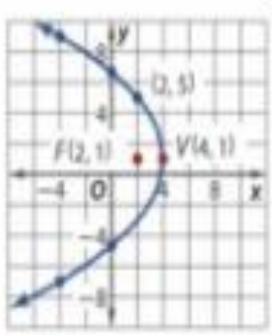
c. البؤرة $(2, 1)$، مفتوح إلى الجهة اليسرى، يمرّ بالنقطة $(2, 5)$

نظرًا إلى أن القطع المكافئ مفتوح إلى الجهة اليسرى، فإن الرأس هو $(2 - p, 1)$. استخدم الصيغة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الأفقي والنقطة $(2, 5)$ لإيجاد المعادلة.

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	الصيغة القياسية
$(5-1)^2 = 4p[2-(2-p)]$	$h = 2 - p$ و $k = 1$ و $x = 2$ و $y = 5$
$16 = 4p(p)$	بسّط
$4 = p^2$	بالضرب، قم بقسمة كل طرف على 4
$\pm 2 = p$	بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف

نظرًا إلى أن القطع المكافئ مفتوح إلى الجهة اليسرى، فلا بد أن تكون قيمة p سالبة. ولذلك، $p = -2$. الرأس هو $(4, 1)$، والصيغة القياسية للمعادلة هي $(y-1)^2 = -8(x-4)$.

مثّل القطع المكافئ بيانيًا.



تمرين موجّه

اكتب معادلةً لقطع مكافئ بالخواص التالية مثّله بيانيًا.

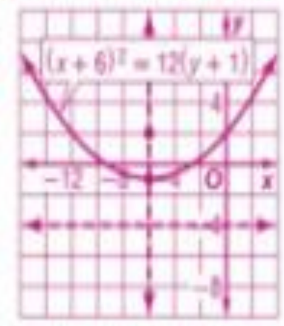
4A. البؤرة $(-6, 2)$، الرأس $(-6, -1)$

4B. البؤرة $(5, -2)$، الرأس $(9, -2)$

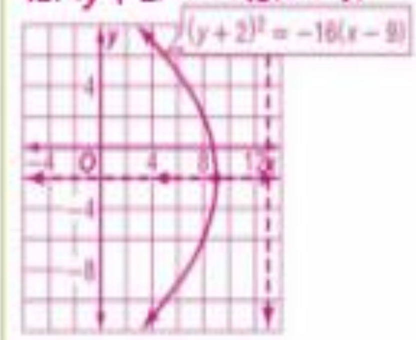
4C. البؤرة $(-3, -4)$، مفتوح إلى الأسفل، يمرّ بالنقطة $(5, -10)$

4D. البؤرة $(-1, 5)$، مفتوح إلى الجهة اليمنى، يمرّ بالنقطة $(8, -7)$

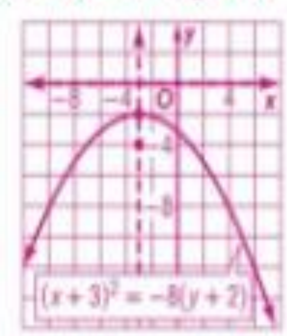
4A. $(x+6)^2 = 12(y+1)$



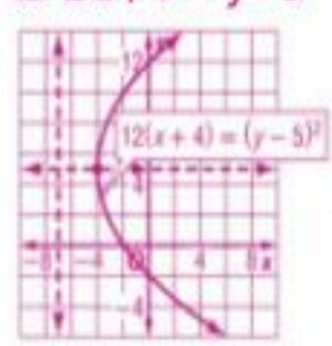
4B. $(y+2)^2 = -16(x-9)$



4C. $(x+3)^2 = -8(y+2)$



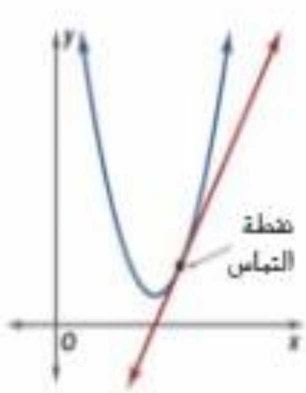
4D. $12(x+4) = (y-5)^2$



مراجعة المفردات

المماس المستقيم المماس لدائرة يقطع الدائرة في نقطة واحدة فقط، وتدعى نقطة التقاطع نقطة التماس.

خلال حساب التفاضل والتكامل، سيطلب منك في أغلب الأحيان تحديد معادلات الخطوط المماسة للمنحنيات. ويمكن إيجاد معادلات الخطوط المماسة للقطوع المكافئة بدون استخدام حساب التفاضل والتكامل.



التدريس المتمايز BL OL AL

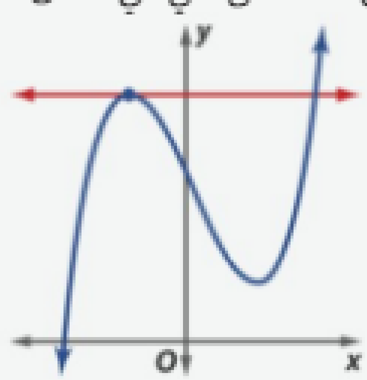
المتعلمون بالطريقة الحسّية الحركية اطلب إلى مجموعات من الطلاب رمي كرة لينة بالخارج لها شكل قوس مرتفع، بحيث يكونوا واقفين أمام جدار عليه علاماتٌ على ارتفاعات مختلفة. اطلب إليهم قياس أقصى ارتفاع بلغته الكرة اللينة والمسافة بين الطالبين اللذين قذفا الكرة. حدد معادلة لنمذجة مسار الكرة. قارن النتائج بين مجموعات مختلفة، وناقش كيف أسفرت الأشكال المختلفة للقطع المكافئ عن معادلات مختلفة.

مثال إضافي

5 اكتب معادلة المماس لـ $y = x^2 - 2$ عند $(2, 2)$.
$y = 4x - 6$

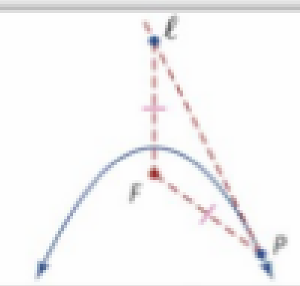
التركيز على محتوى الرياضيات

المماسات معظم المماسات على المنحنيات لا تقطع المنحنى عند نقطة تماس فقط، ولكنها – إذا تم تمديدها – قد تقطع المنحنى في أي مكان آخر.



ويتمثل الاستثناء الوحيد في المنحنى الذي يحتوي على نقطة انعطاف. المماس على المنحنى عند نقطة انعطاف سيقطع المنحنى عند نقطة التماس. سيتعلم الطلاب المزيد عن المماسات على المنحنيات في الوحدة 12.

المفهوم الأساسي المستقيم المماس لقطعٍ مكافئ



يشكّل المستقيم ℓ المماس للقطع المكافئ عند النقطة P مثلثًا متساوي الساقين كما يلي:

- تشكّل القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة إحدى ساقي المثلث.
- تشكّل القطعة المستقيمة الممتدة على طول محور التماثل من البؤرة إلى نقطة اخرى على المستقيم المماس الساق الأخرى.

المثال 5 إيجاد مستقيم مماس لنقطة

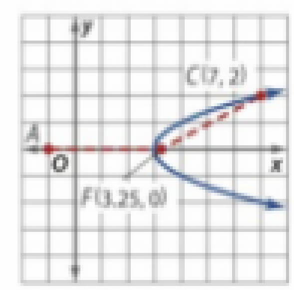
اكتب معادلةً للمستقيم المماس لــ $x = y^2 + 3$ عند $C(7, 2)$

التمثيل البياني مفتوح أفقيًا. حدّد الرأس والبؤرة.

$x = y^2 + 3$ المعادلة الأصلية

$1(x - 3) = (y - 0)^2$ بالكتابة وفق الصيغة القياسيّة

نظرًا لكون $4p = 1$، فإن $p = 0.25$ الرأس هو $(3, 0)$ والبؤرة هي $(3.25, 0)$. كما هو موضح في الشكلين، فإن علينا تحديد d التي ترمز إلى المسافة بين البؤرة ونقطة التماس C.



وهذه المسافة تمثّل إحدى ساقي المثلث متساوي الساقين.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ بتطبيق قانون المسافة

$= \sqrt{(7 - 3.25)^2 + (2 - 0)^2}$ $(x_1, y_1) = (3.25, 0)$ و $(x_2, y_2) = (7, 2)$

$= 4.25$ بسّط

استخدم d لإيجاد النقطة A، وهي النقطة الطرفية للساق الأخرى للمثلث متساوي الساقين.
$A(3.25 - 4.25, 0)$ أو $A(-1, 0)$

تقع كلا النقطتين A و C على المستقيم المماس للقطع المكافئ. أوجد معادلة هذا المستقيم.

$m = \frac{2 - 0}{7 - (-1)}$ أو $\frac{1}{4}$ بتطبيق صيغة الميل

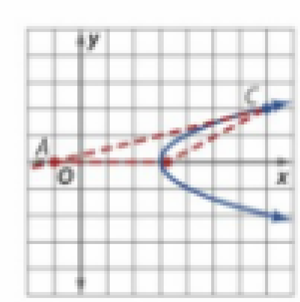
$y - y_1 = m(x - x_1)$ بالكتابة وفق صيغة الميل والنقطة

$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 7)$ $m = \frac{1}{4}$، $y_1 = 2$ و $x_1 = 7$

$y - 2 = \frac{x}{4} - \frac{7}{4}$ بتطبيق خاصية التوزيع

$y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$ بإضافة العدد 2 إلى كل طرف

كما هو موضح في الشكل 6.1.1، فإن معادلة المستقيم المماس لــ $x = y^2 + 3$ عند النقطة $(7, 2)$ هي $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$



الشكل 6.1.1

تمرين موجّه

اكتب معادلة مستقيمٍ مماسٍ لكل من القطوع المكافئة التالية عند كل نقطةٍ معطاة.

5A. $y = 4x^2 + 4; (-1, 8)$ $y = -8x$

5B. $x = 5 - \frac{y^2}{4}; (1, -4)$ $y = -\frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$

نصيحة دراسية

الأعمدة على القطوع المخروطية إن العمود على قطع مخروطي عند نقطة ما هو المستقيم العمودي على المستقيم المماس للقطع المخروطي عند تلك النقطة. في المثال 5، بما أن معادلة المستقيم المماس للتمثيل البياني الخاص بــ $x = y^2 + 3$ عند النقطة $(7, 2)$ هي $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 7)$، فإن معادلة المستقيم العمودي على القطع المكافئ عند النقطة نفسها هي $y - 2 = -4(x - 7)$

التمرين

لكل معادلة من المعادلات التالية، حدّد الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل. ثمّ مثّل القطع المكافئ بيانيًا.
(المثال 1) 1–10. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

1. $(x-3)^2 = 12(y-7)$
2. $(x+1)^2 = -12(y-6)$
3. $(y-4)^2 = 20(x+2)$
4. $-1(x+7) = (y+5)^2$
5. $(x+8)^2 = 8(y-3)$
6. $-40(x+4) = (y-9)^2$
7. $(y+5)^2 = 24(x-1)$
8. $2(y+12) = (x-6)^2$
9. $-4(y+2) = (x+8)^2$
10. $10(x+11) = (y+3)^2$

11. **التزلج على الألواح** قرّرت مجموعة من طلاب المدرسة الثانوية المشرفة على تصميم نصف أسطوانة التزلّج أنه يمكن الحصول على منحدر التزلّج عبر تقسيم قطع مكافئ إلى نصفين. يمكن تمثيل المقطع العرضي للقطع المكافئ الخاص بمنحدر التزلّج من خلال المعادلة $x^2 = 8(y-2)$، وفيها تقاس x و y بالأقدام. أين تقع بؤرة القطع المكافئ بالنسبة للأرض إذا كانت الأرض تمثل الدليل؟ (المثال 2)
نموذج الإجابة: تقع البؤرة على مسافة 4 أقدام فوق سطح الأرض.

12. **الاتصالات** يأخذ المقطع العرضي لصحن التقاط القنوات الفضائية شكل قطع مكافئ تركز الإشارات الفضائية على مستقبل يقع عند بؤرة القطع المكافئ. يمكن تمثيل المقطع العرضي للقطع المكافئ بالمعادلة $(x-6)^2 = 12(y-10)$، حيث تقاس قيمتا x و y بالبوصات. أين يقع المستقبل بالنسبة لهذا المقطع العرضي بالتحديد؟ (المثال 2)
(6, 13) أو على مسافة 3 in. فوق الرأس

13. **ركوب القوارب** عند انزلاق القارب السريع من خلال الماء، يخلّف وراءه أثرًا له شكل قطع مكافئ. يلتقي رأس القطع المكافئ مع مؤخرة القارب. يسحب القارب سبّاحًا يركب لوحًا معلقًا بمؤخرة القارب بواسطة حبل. حين يكون السبّاح خلف القارب مباشرةً، فإنه يقع عند بؤرة القطع المكافئ. يمكن تمثيل القطع المكافئ الذي تشكله مؤخرة القارب باستخدام العلاقة $y^2 - 180x + 10y + 565 = 0$، وفيها x و y تقاسان بالأقدام. (المثال 3)

a. اكتب المعادلة بالصيغة القياسية. $(y+5)^2 = 180(x-3)$
b. ما طول الحبل الذي يربط السبّاح بمؤخرة القارب؟ 45 ft

14. **البيسبول** خلال مسابقة البيسبول التي نظمتها المدينة، ألقى فريق النسور شطائر للحضور على المدرّجات. تقذف الآلة المستخدمة لرمي الشطائر في الهواء بسرعة ابتدائية تساوي 64 قدمًا في الثانية. يمكن توضيح مسافة ارتفاع الشطيرة y فوق سطح الأرض بعد مرور x ثانية من خلال العلاقة $y = -16x^2 + 64x + 6$. (المثال 3)
a. اكتب المعادلة بالصيغة القياسية.
b. ما هو الارتفاع الأقصى الذي يمكن أن تبلغه الكرة؟
a–b. انظر الهامش.

اكتب كل معادلة مما يلي بالصيغة القياسية. حدّد الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل. ثمّ مثّل القطع المكافئ بيانيًا.
(المثال 3) 15–24. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

15. $x^2 - 17 = 8y + 39$
16. $y^2 + 33 = -8x - 23$
17. $3x^2 + 72 = -72y$
18. $-12y + 10 = x^2 - 4x + 14$
19. $60x - 80 = 3y^2 + 100$
20. $-33 = x^2 - 12y - 6x$
21. $-72 = 2y^2 - 16y - 20x$
22. $y^2 + 21 = -20x - 6y - 68$
23. $x^2 - 18y + 12x = 126$
24. $-34 = 2x^2 + 20x + 8y$

25. **الإضاءة** يجب على أعمدة الإضاءة في أحد الملاعب أن تعكس الضوء بأقصى شدّة. حيث ينبغي أن توضع بصيلة المصباح في بؤرة المصباح على شكل قطع مكافئ للغطاء المحيط بها. إذا كان شكل الغطاء يعطى عبر العلاقة $x^2 = 36y$، حيث إن x و y تعطيان بالبوصات، ما المسافة اللازمة بين الغطاء والبصيلة للحصول على الإضاءة القصوى؟ (المثال 3) 9 in.

اكتب معادلة قطع مكافئ لكل بؤرة F ورأس V مما يلي ومثّله بيانيًا. (المثال 4) 26–35. انظر الهامش

26. $F(-9,-7), V(-9,-4)$
27. $F(2,-1), V(-4,-1)$
28. $F(-3,-2), V(1,-2)$
29. $F(-3,4), V(-3,2)$
30. $F(-2,-4), V(-2,-5)$
31. $F(-1,4), V(7,4)$
32. $F(14,-8), V(7,-8)$
33. $F(1,3), V(1,6)$
34. $F(-4,9), V(-2,9)$
35. $F(8,-3), V(8,-7)$

36–43. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

اكتب معادلةً لكل قطعٍ مكافئٍ بؤرته F وخواصّه معطاةٌ وفق ما يلي ومثّله بيانيًا. (المثال 4)

36. $F(3,3)$، مفتوح إلى الأعلى، ويمرّ بالنقطة $(23, 18)$
37. $F(1,2)$، مفتوح إلى الأسفل، ويمرّ بالنقطة $(7, 2)$
38. $F(11,4)$، مفتوح إلى الجهة اليمنى، ويمرّ بالنقطة $(20, 16)$
39. $F(-4,0)$، مفتوح إلى الأسفل، ويمرّ بالنقطة $(4, -15)$
40. $F(1,3)$، مفتوح إلى اليسار، ويمرّ بالنقطة $(-14, 11)$
41. $F(-5,-9)$، مفتوح إلى الجهة اليمنى، ويمرّ بالنقطة $(10, -1)$
42. $F(-7,6)$، مفتوح إلى اليسار، ويمرّ بالنقطة $(-4, 10)$
43. $F(-5,-2)$، مفتوح إلى الأعلى، ويمرّ بالنقطة $(-13, -2)$

44. **الهندسة المعمارية** يتألف المدخل الذي يؤدي إلى إحدى ساحات الهواء الطلق من قوس قطع مكافئ يقع فوق عمودين. يقع المصباح الموجود في نقطة المركز عند بؤرة القطع المكافئ. (المثال 4)

a. اكتب معادلةً تمثل القطع المكافئ.
b. مثّل المعادلة بيانيًا.
a–b. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

3 تدريب

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 50 للتحقق من استيعاب الطلاب للمفاهيم. ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات التي ستعطيها للطلاب.

انتبه!

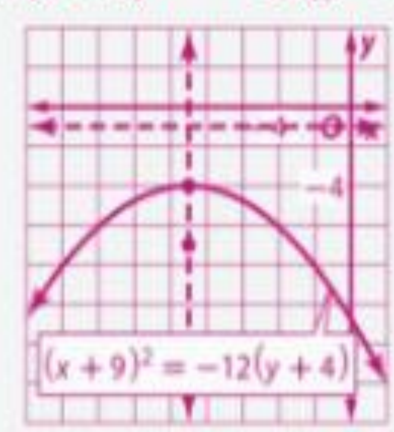
خطأ شائع عند إكمال المربع لتغيير المعادلة إلى الصيغة القياسية في التمارين من 15 إلى 24، يجب على الطلاب جمع العدد نفسه وطرحه من طرف واحد لكي لا تتغير قيمة المعادلة. في حالة كان يوجد ثابت يضرب حدود x، يجب ضرب هذا الثابت بالعدد الناتج عن إكمال المربع قبل إضافته أو طرحه من العدد خارج حدود x.

إجابات إضافية

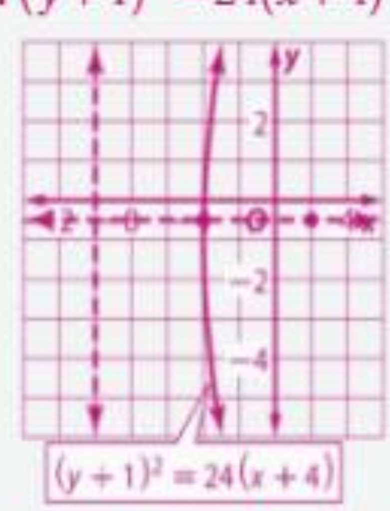
14a. $(x-2)^2 = -\frac{1}{16}(y-70)$

14b. الرأس $(2,70)$؛ 70 قدمًا

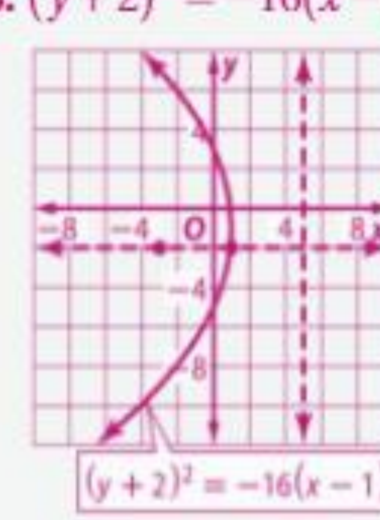
26. $(x+9)^2 = -12(y+4)$



27. $(y+1)^2 = 24(x+4)$



28. $(y+2)^2 = -16(x-1)$



خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجبات	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-50, 78, 80-103	1-49 فردي، 100-103	2-50 زوجي، 78, 80-99
OL ضمن المستوى	1-63 زوجي، 64، 65، 67، 69-73، 75، 77، 78، 80-103	1-50، 100-103	51-78, 80-99
BL أعلى من المستوى	51-103		

اكتب معادلة مستقيم مماس لكل من القطوع المكافئة التالية عند كل نقطةٍ معطاة. (المثال 5)

45. $(x+7)^2=-\frac{1}{2}(y-3)$, $(-5,-5)$ $y=-8x-45$

46. $y^2=\frac{1}{5}(x-4)$, $(24,2)$ $y=\frac{1}{20}x+\frac{4}{5}$

47. $(x+6)^2=3(y-2)$, $(0,14)$ $y=4x+14$

48. $(x-3)^2=y+4$, $(-1,12)$ $y=-8x+4$

49. $-0.25(x-6)^2=y-9$, $(10,5)$ $y=-2x+25$

50. $-4x=(y+5)^2$, $(0,-5)$ $x=0$

B حدّد اتجاه كل من القطوع المكافئة التالية.

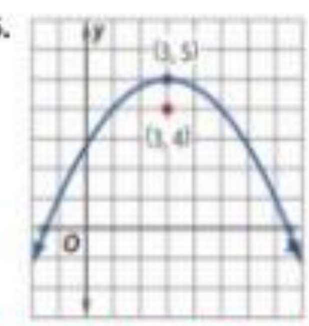
51. الدليل $y=4$، $p=-2$ مفتوح إلى الأسفل

52. $y^2=-8(x-6)$ مفتوح إلى الجهة اليسرى

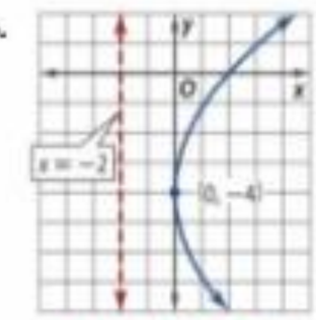
53. الرأس $(-5, 1)$، البؤرة $(-5, 3)$ مفتوح إلى الأعلى

54. البؤرة $(7, 10)$، الدليل $x=1$ مفتوح إلى الجهة اليمنى

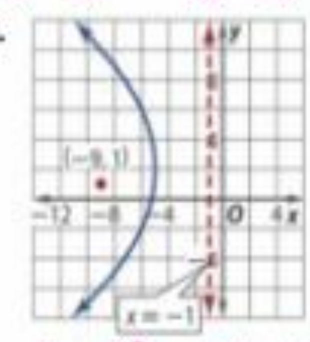
اكتب معادلةً لكل من القطوع المكافئة التالية.

55.


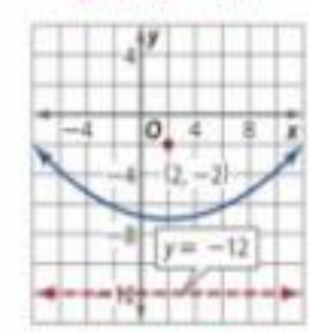
$(x-3)^2=-4(y-5)$

56.


$(y+4)^2=8x$

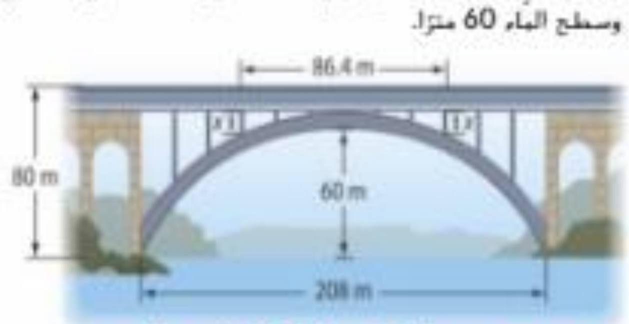
57.


$(y-1)^2=-16(x+5)$

58.


$(x-2)^2=20(y+7)$

59. **الجسور** لقوس جسر السكة الحديدية المبين أدناه شكل قطع مكافئ. ويبعد البرجان الرئيسان الحاملان عن بعضهما مسافة 208 أمتار، وارتفاع كلٍ منهما 80 مترًا. تبلغ المسافة بين قمة القطع المكافئ وسطح الماء 60 مترًا.



a. اكتب معادلةً تمثل شكل القوس. نموذج الإجابة: $x^2=-180.27(y+20)$
لنعتبر ان مسار السكّة الحديدية يُمثّل المحور الأفقي x.

b. يتساوى بعدا الدعامتين الرأسيتين المربوطتين بالقوس عن مركز القطع المكافئ كما هو موضّح في المخطط. أوجد طولي الدعامتين إذا كانتا تبعدان عن بعضهما مسافة 86.4 مترًا. حوالي 30.35 m

اكتب معادلة القطع المكافئ المقابل لكل مجموعةٍ من الخواص المبيّنة ومثّله بيانيًا. 60–63. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

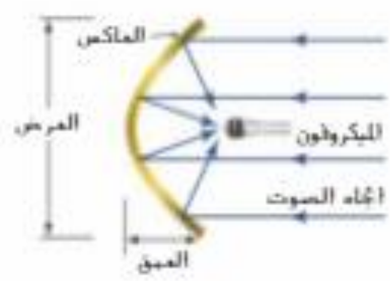
60. الرأس $(1, 8)$ يمرّ بالنقطة $(11, 13)$، مفتوح رأسيًا

61. الرأس $(-6, 4)$، يمرّ بالنقطة $(-10, 8)$، مفتوح أفقيًا

62. مفتوح رأسيًا، يمر بالنقاط $(-12, -14)$ و $(0, -2)$ و $(6, -5)$

63. مفتوح افقيًا، يمر بالنقاط $(-1, -1)$ و $(5, 3)$ و $(15, 7)$

64. **الصوت** تستخدم عاكسات صوتية على شكل قطع مكافئ مزودة بميكروفونات تقع في البؤرة لالتقاط الأصوات عن بُعد. تدخل الأمواج الصوتية العاكس وتركّز باتجاه الميكروفون.



a. عند أي مسافةٍ عن العاكس ينبغي وضع الميكروفون إذا كان عرض العاكس 3 أقدام وعمقه 1.25 قدم؟ 0.45 ft

b. اكتب معادلةً لتمثيل عاكس صوتٍ مختلفٍ عرضه 4 أقدامٍ وعمقه قدمان. إذا كان رأس العاكس يقع عند النقطة $(3, 5)$ وكان القطع المكافئ مفتوحًا إلى الجهة اليسرى. $(y-5)^2=-2(x-3)$

c. مثّل المعادلة بيانيًا. حدّد المجال والمدى. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

حدّد نقطة التماس لكلّ معادلةٍ مع مستقيمٍ مما يلي.

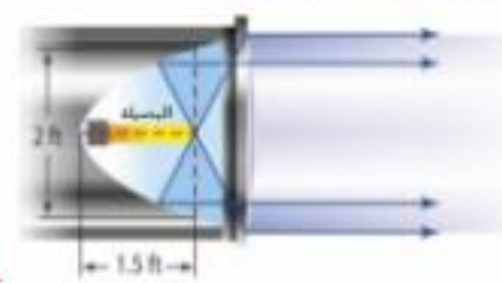
65. $(x+2)^2=2y$, $y=4x$ $(2,8)$

66. $(y-8)^2=12x$, $y=x+11$ $(3,14)$

67. $(y+3)^2=-x+4$, $y=-\frac{1}{4}x-1$ $(0,-1)$

68. $(x+5)^2=-4(y+1)$, $y=2x+13$ $(-9,-5)$

69. **الإنارة** في الضوء الكاشف، توضع البصيلة عند بؤرة مرآةٍ لقطع مكافئ على مسافة 1.5 قدم من الرأس. وهذا يجعل الإشعاعات الضوئية الصادرة عن البصيلة تنعكس عن المرآة على هيئة إشعاعاتٍ متوازية، ما يعطي حزمةً مركزةً من الضوء.



$y^2=\frac{2}{3}x$

a. اكتب معادلةً للقطع المكافئ إذا كان قطر البصيلة قدمين، وذلك وفق ما هو موضح في التمثيل البياني.

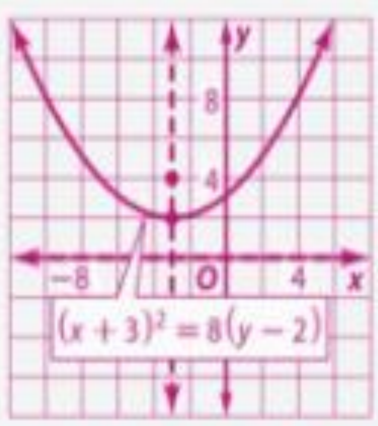
b. افترض أن القطر البؤري قد زاد إلى 3 أقدام. إذا كان عمق كلا الكشافين 3.5 أقدام، فبكم يزيد عرض فتحة المصباح الأكبر؟ قرّب إلى أقرب جزء من مئة. 1.53 ft

انتبه!

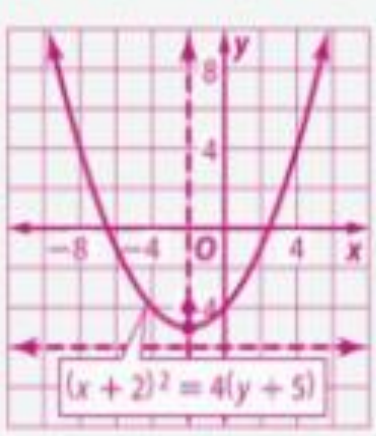
خطأ شائع في التمارين من 51 إلى 54، ذكّر الطلاب بأن الدليل عمودي على محور التماثل. لذلك، إذا كانت معادلة الدليل $= x$، فلابد أن يكون القطع المكافئ مفتوحًا إما باتجاه اليمين أو باتجاه اليسار. وإذا كانت معادلة الدليل $= y$، فلا بد أن يكون القطع المكافئ مفتوحًا إما باتجاه الأعلى أو باتجاه الأسفل.

إجابات إضافية

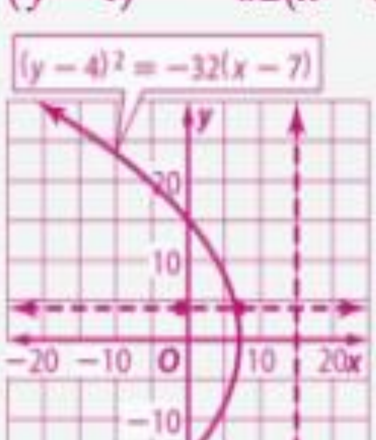
29. $(x+3)^2=8(y-2)$



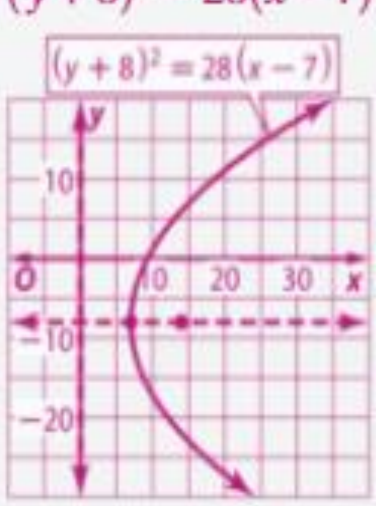
30. $(x+2)^2=4(y+5)$



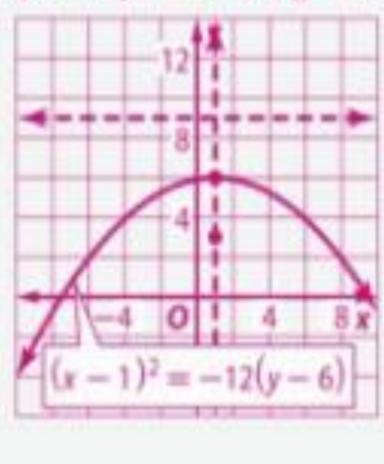
31. $(y-4)^2=-32(x-7)$



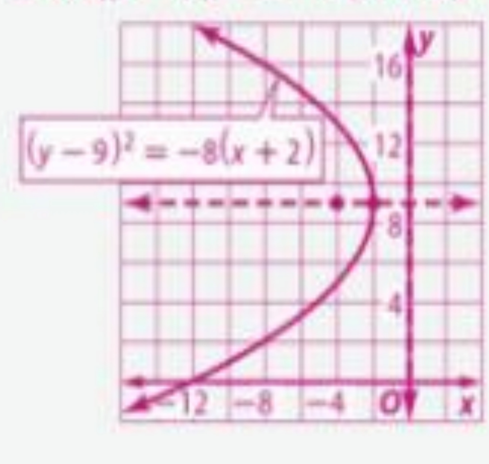
32. $(y+8)^2=28(x-7)$



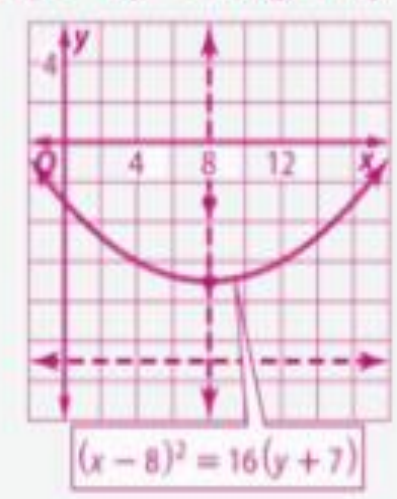
33. $(x-1)^2=-12(y-6)$



34. $(y-9)^2=-8(x+2)$

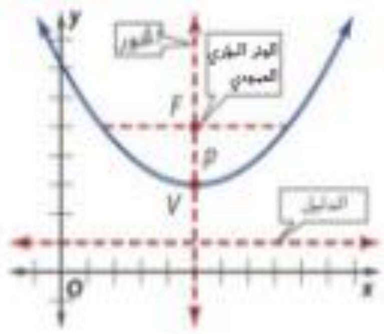


35. $(x-8)^2=16(y+7)$



70. **البرهان** استخدم الصيغة القياسية لمعادلة القطع المكافئ لبرهان الصيغة العامة للمعادلة. **انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.**

71. القطعة **المستقيمة العمودية** على محور القطع المكافئ عند بؤرته هي قطعة مستقيمة تمرّ من خلال البؤرة وتتعامد مع محور القطع المكافئ ولها نقطتان طرفيتان عليه. يساوي طول القطعة المستقيمة العمودية على محور القطع عند بؤرته $|4p|$ وحدة، حيث تمثّل p المسافة من الرأس إلى البؤرة. **a–b. انظر الهامش.**



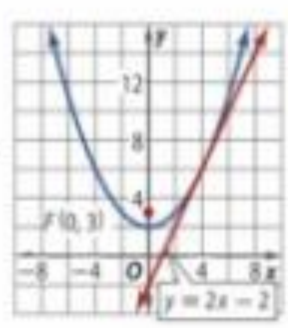
a. اكتب معادلة قطعٍ مكافئٍ يقع رأسه عند النقطة (2 ,3-)، ومحور تماثله هو $y = 2$، وطول القطعة المستقيمة العمودية على محور القطع المكافئ عند بؤرته 8 وحدات.

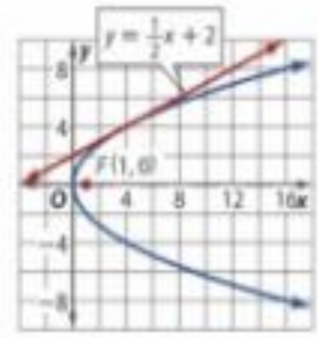
b. برهن أن النقطتين الطرفيتين للقطعة المستقيمة العمودية على محور القطع المكافئ عند بؤرته ونقطة تقاطع محور التماثل مع الدليل تمثلان رؤوس مثلثٍ قائمٍ متساوي الساقين.

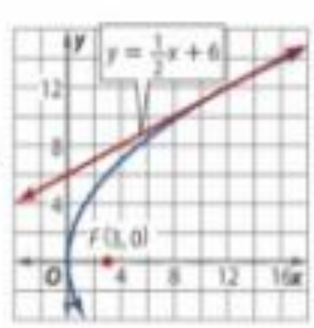
72. **الطاقة الشمسية** يستخدم فرنٌ شمسيٌ يقع في شرق بيرينيه في فرنسا مرآةً على شكل قطع مكافئ تضاء بنور الشمس المنعكس عن حقلٍ من الهليوستاتات، وهي أجهزةٌ تتبّع ضوء الشمس وتعيد توجيهه. تجرى تجارب في مجال الأبحاث الشمسية ضمن المنطقة البؤرية من أحد الأبراج. فإذا كان عمق المرآة 6.25 أمتار، فكم طول المنطقة البؤرية أمام القطع المكافئ؟ **16 m**

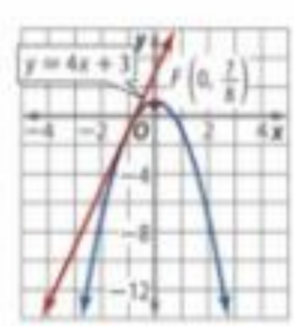
73–76. انظر الهامش.

اكتب معادلة ممكنة لقطعٍ مكافئٍ بؤرته F حيث إن المستقيم المعطى مماس لذلك القطع.

73.


74.


75.


76.


77. **التمثيلات المتعددة** ستستكشف في هذه المسألة طريقة تغيّر شكل القطع المكافئ بتغيّر موقع بؤرته.

a. **سؤال هندسيًا** أوجد المسافة بين رأس كل من القطوع المكافئة التالية وبؤرته.

i. $y^2 = 4(x-2)$ ii. $y^2 = 8(x-2)$ iii. $y^2 = 16(x-2)$

وحدة واحدة **وحدتان** **4 وحدات**

b. **بيانيًا** مثّل بيانيًا القطوع المكافئة الواردة في الجزء a مستخدمًا لونًا مختلفًا لكلٍ منها. وحدّد بؤرة كلّ قطعٍ مكافئ.

c. **لفظيًا** صف العلاقة القائمة بين شكل القطع المكافئ والمسافة بين رأسه وبؤرته.

d. **تحليليًا** اكتب معادلةً لقطعٍ مكافئٍ له رأس القطع المكافئ معادلته $(x + 1)^2 = 20(y + 7)$ ولكنّه أضيق.

نموذج الإجابة: $(x+1)^2 = 4(y+7)$

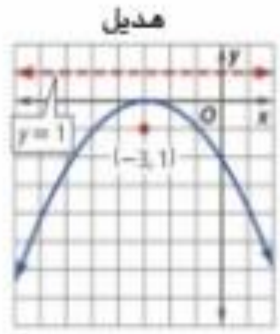
e. **تحليليًا** خمّن اشكال التمثيلات البيانية لـ $x^2 = -2(y + 1)$ و $x^2 = -12(y + 1)$ و $x^2 = -5(y + 1)$ تحقّق من تخمينك عبر التمثيل البياني لهذه القطوع.

b–c, e. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

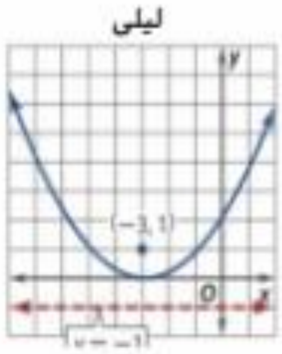
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

78. **تحليل الخطأ** تمثّل هديل وليلى بيانيًا $x^2 + 6x - 4y + 9 = 0$ فأي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. **انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.**

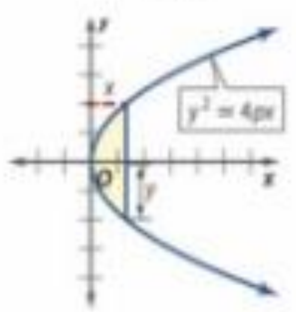
هديل



ليلى



79. **تحدٍّ** تعطى مساحة المقطع المظلل للقطع المكافئ الموجود المبيّن على الجهة اليسرى من خلال العلاقة $A = \frac{4}{3}xy$ أوجد معادلة القطع المكافئ إذا كانت مساحة المقطع 2.4 وحدةً مربعةً، وكان عرض المقطع 3 وحدات. $y^2 = \frac{15}{8}x$



80. **التبرير** ما النقطة الأقرب في القطع المكافئ إلى البؤرة؟ اشرح استنتاجك. **انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.**

81. **التبرير** دون إجراء التمثيل البياني، حدّد الأرباع التي لن يكون فيها للتمثيل البياني الخاص بـ $(y-5)^2 = -8(x+2)$ أيّ نقاط. اشرح استنتاجك. **انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.**

82. **الكتابة في الرياضيات** يصف تقعّر التمثيل البياني لدالةٍ ما إن كان ذلك التمثيل مفتوحًا إلى الأعلى (تقعّر إلى الأعلى) أو إلى الأسفل (تقعّر إلى الأسفل). واشرح كيف يمكنك تحديد تقعّر قطعٍ مكافئٍ أعطيت بؤرته ورأسه. **انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.**

83. **الكتابة الموجزة** اكتب رسالةً توجز فيها المحتوى الذي تعلمته في هذا الدرس وتشرحه. وشكّل مخططًا يتناول الفرض والجمهور المستهدف والفكرة الرئيسة والتسلسل المنطقي والإطار الزمني للإنجاز.

انظر عمل الطلاب.

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 78، يجب على الطلاب كتابة المعادلة بالصيغة القياسية، $y=\frac{1}{4}(x+3)^2$. لذلك، وبما أن $p=1$ ، فالقطع المكافئ يفتح للأعلى.

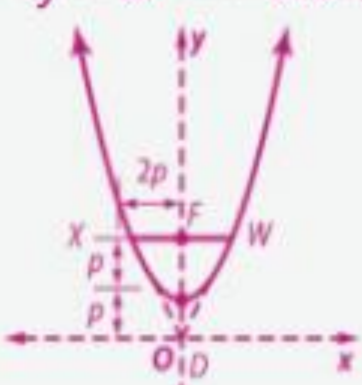
4 التقويم

عيّن مصطلح الرياضيات اطلب إلى الطلاب أن يصفوا لزميل كيفية ارتباط كل من البؤرة والرأس والدليل بالقطع المكافئ.

إجابات إضافية

.71a $(y-2)^2=8(x+3)$ أو $(y-2)^2=-8(x+3)$

.71b



نموذج الإجابة: لإثبات أن النقطتين الطرفيتين للوتر البؤري العمودي على محور التماثل X و W ونقطة تقاطع المحور والدليل D تمثل رؤوس مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية $\triangle XDW$، نحتاج لإثبات أن $\angle XDW$ زاوية قائمة وأن $\overline{XD}\cong\overline{WD}$ بما أن $\overline{XF}\cong\overline{FW}, \overline{FD}\cong\overline{FD}$ ، و $\angle XFD\cong\angle WFD, \triangle XFD\cong\triangle FWD$ حسب قاعدة SAS. إذًا، $\overline{XD}\cong\overline{WD}$.

لإثبات أن $\angle XDW$ زاوية قائمة، يمكننا أولاً إثبات أن قياس الزاويتين $\angle XDF$ و $\angle FDW$ يساوي $45°$. بما أنا $\overline{XF}\cong\overline{FD}$ و $\angle XFD$ زاوية قائمة، فإن $\triangle XFD$ مثلثٌ قائمٌ ومتساوي الساقين. لذلك، $m\angle XDF$ تساوي $45°$. يعني ذلك أيضًا أن $m\angle FDW$ تساوي $45°$. لذلك، تكون $\angle XDW$ زاوية قائمة. ويؤدي ذلك إلى أن $\triangle XDW$ مثلثٌ قائمٌ ومتساوي الساقين.

.73 نموذج الإجابة: $x^2=4(y-2)$

.74 نموذج الإجابة: $y^2=4x$

.75 نموذج الإجابة: $y^2=12x$

.76 نموذج الإجابة: $x^2=-\frac{1}{2}(y-1)$

مراجعة شاملة

أوجد القيمتين العظمى والصغرى للدالّة الموضوعية $f(x, y)$ وقيمتي x و y المقابلتين لهما وفق القيود المعطاة.

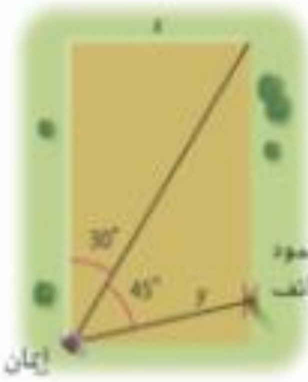
84. $x\le 5$, $y\ge -2$, $y\le x-1$, $f(x,y)=x-2y$ — 9 عند $(5,-2)$؛ -3 عند $(5,4)$

85. $y\ge -x+2$, $2\le x\le 7$, $y\le \frac{1}{2}x+5$, $f(x,y)=8x+3y$ — 81.5 عند $(7,8.5)$؛ 16 عند $(2,0)$

86. $x\ge -3$, $y\ge 1$, $3x+y\le 6$, $f(x,y)=5x-2y$ — 6.25 عند $(1.67,1)$؛ -45 عند $(-3,15)$

87. اكتب بصورة كسور جزئية $\frac{2y+5}{y^2+3y+2}$ $\quad\frac{-1}{y+2}+\frac{3}{y+1}$

88. **مسح الأراضي** تمسح إيمان قطعة أرض مستطيلة من المزمع أن يشيّد عليها بناء لمكتب جديد. حيث تقيس الزاوية المحصورة بين أحد ضلعي قطعة الأرض والمستقيم الممتد من مكان وقوفها إلى الزاوية المقابلة من قطعة الأرض لتجد أنها تساوي $30°$. وبعد ذلك تقيس الزاوية بين ذلك المستقيم والمستقيم الممتد إلى عمود هاتف على حافة قطعة الأرض لتجد أنها تساوي $45°$. فإذا كانت إيمان تقف على مسافة 100 ياردة من الزاوية المقابلة في قطعة الأرض، فكم تبعد عن عمود الهاتف؟ حوالي 51.76 yd



أوجد قيمة كل من التعابير التالية باستخدام المعلومات المعطاة.

89. $\csc\theta$ و $\cot\theta$؛ $\tan\theta=\frac{6}{7}, \sec\theta>0$ — $\cot\theta=\frac{7}{6}, \csc\theta=\frac{\sqrt{85}}{6}$

90. $\cos\theta$ و $\tan\theta$؛ $\csc\theta=-2, \cos\theta<0$ — $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ أو $\frac{\sqrt{3}}{3}$

حدّد خطوط التقارب الرأسية لكل دالّة مما يلي وشكّل تمثيلها البياني. 91–93. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

91. $y=\tan x+4$ **92.** $y=\sec x+2$ **93.** $y=\csc x-\frac{3}{4}$

أوجد قيمة كلًا من التعابير التالية.

94. $\log_{16}4$ $\frac{1}{2}$ **95.** $\log_4 16^x$ $2x$ **96.** $\log_3 27^x$ $3x$

مثّل كل دالّة مما يلي. 97–99. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

97. $f(x)=x^3-x^2-4x+4$ **98.** $g(x)=x^4-7x^2+x+5$ **99.** $h(x)=x^4-4x^2+2$

مراجعة المهارات للاختبارات القياسيّة

100. مراجعة ما مجموعة حلول $3(4x+1)^2=48$؟ B

A $\left\{\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right\}$

B $\left\{-\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right\}$

C $\left\{\frac{15}{4}, -\frac{17}{4}\right\}$

D $\left\{\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right\}$

E $\left\{\frac{7}{4}, -\frac{9}{4}\right\}$

101. SAT/ACT إذا كان x عددًا موجبًا، فإن $\frac{x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}=$ ؟ G

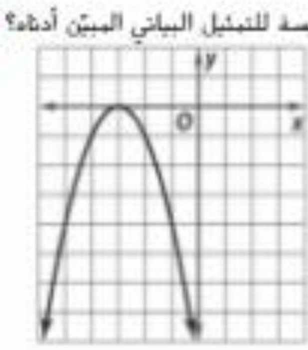
F $x^{-\frac{1}{4}}$

G $\sqrt{x^3}$

H $x^{\frac{3}{4}}$

J $\sqrt{x^5}$

102. ما الدالّة الرئيسة للتمثيل البياني المبيّن أدناه؟ D



A $y=x$ C $y=|x|$

B $y=\sqrt{x}$ D $y=x^2$

103. مراجعة ما نقاط تقاطع التمثيل البياني للدالّة $y=-2x^2-5x+12$ مع المحور الأفقي x؟ ■

F $-\frac{3}{2}, 4$ H $-2, \frac{1}{2}$

G $-4, \frac{3}{2}$ J $-\frac{1}{2}, 2$

التدريس المتمايز BL

توسع اطلب إلى كل طالب التعاون مع زميله. يجب على كل طالبٍ أن يمثّل بيانيًا مستقيماً ونقطة ليست على هذا المستقيم. اطلب إلى الطلاب تبادل التمثيلات البيانية مع زملائهم. ويجب على كل طالبٍ رسم القطع المكافئ الذي تحدده النقطة والمستقيم. وينبغي له تحديد الرأس والبؤرة والدليل ومحور التماثل لهذا القطع المكافئ.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-6 تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانيًا.

الدرس 2-6 تحليل معادلات القطع الناقص والدوائر وتمثيلها بيانيًا.
استخدام المعادلات لتعريف القطع الناقص والدوائر.

بعد الدرس 2-6 استخدام دوران المحاور لكتابة معادلات دوران القطع الناقص والدوائر.

2 التعليم

أسئلة داعمة

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة **لماذا؟** الواردة في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- لماذا قد تكون الحلقات التي على شكل قطع ناقص أكثر أمانًا من الحلقات التي على شكل دائرة في الأفعوانيات؟ نموذج الإجابة: يسمح القطع الناقص للسرعة بالبقاء مرتفعة خلا ل الدخول إلى الحلقة والخروج منها، مما يقلل من قوى الجاذبية.

6-2 القطع الناقص والدوائر

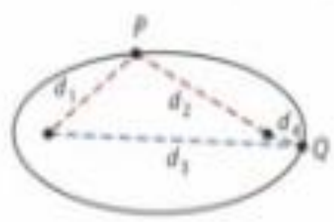
سابقًا	الآن	لماذا؟
• حللت القطوع المكافئة ومثلتها.	• 1 تحليل معادلات القطوع الناقصة والدوائر وتمثيلها بيانيًا. 2 استخدام المعادلات لتحديد القطوع الناقصة والدوائر.	• بسبب العجلة والقصور الذاتي، فإن الشكل الأكثر أمنا لحلقة الأفعوانية يمكن تقريبه باستخدام القطع الناقص بدلًا من الدائرة. حيث يساعد الشكل البيضاوي على تقليل القوة الممارسة على رؤوس وأعناق الركاب.

مفردات جديدة

قطع ناقص ellipse
البؤرتان foci
المحور الأكبر major axis
المركز center
المحور الأصغر minor axis
الرؤوس vertices
الرؤوس المرافقة co-vertices
الاختلاف المركزي eccentricity

1 تحليل القطوع الناقصة والدوائر وتمثيلها بيانيًا

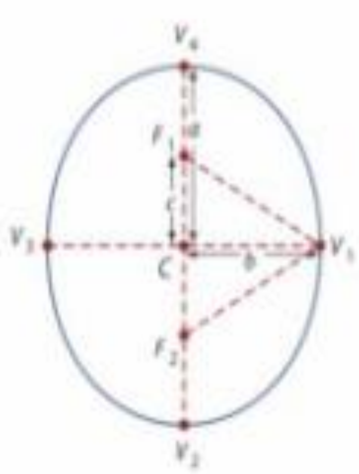
القطع الناقص هو المحل الهندسي للنقاط في مستوى بحيث يكون مجموع المسافات من النقاط الثابتة، المسماة **البؤرتين**، ثابتًا. للتمعن في هذا المفهوم، ضع في الحسبان طول الخيط المعلق عند بؤرتي القطع الناقص. يمكنك رسم القطع الناقص باستخدام قلم رصاص لتتبع المنحنى مع سحب الخيط جيدًا. بالنسبة لأي نقطتين على القطع الناقص، يكون ناتج جمع أطوال القطع المستقيمة الى كل بؤرة قيمة ثابتة. بعبارة أخرى، $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$، ويكون ناتج هذا الجمع ثابتًا.



تسمى القطعة المستقيمة التي تمر ببؤرتي القطع الناقص ولها نقاط طرفية على القطع الناقص **المحور الأكبر**، والنقطة منتصف المحور الأكبر هي **المركز**. القطعة المستقيمة التي تمر بنقطة المركز ولها نقاط طرفية على القطع الناقص و المتعامد على المحور الأكبر هي **المحور الأصغر**. تمثل النقطتان الطرفية للمحور الأكبر **الرؤوس**، وتمثل النقاط الطرفية للمحور الأصغر **الرؤوس المرافقة**.

مركز القطع الناقص هو نقطة منتصف المحورين الأكبر والأصغر. من ثم فإن القطع المستقيمة من نقطة المركز وحتى كل رأس متطابقة، والقطع المستقيمة من نقطة المركز الى كل رأس مرافق متطابقة. المسافة من كل رأس الى نقطة المركز هي a وحدة، والمسافة من نقطة المركز إلى كل رأس مرافق هي b وحدة. المسافة من نقطة المركز إلى كل بؤرة هي c وحدة.

اعتبر أن $\overline{V_1F_1}$ و $\overline{V_1F_2}$ لأن $\Delta F_1V_1C \cong \Delta F_2V_1C$ باستخدام نظرية تساوي الساقين، $V_1F_1 = V_1F_2$ يمكننا استخدام تعريف القطع الناقص لإيجاد الأطوال V_1F_1 و V_1F_2 بدلالة الأطوال المعطاة.



$V_1F_1 + V_1F_2 = V_2F_1 + V_2F_2$	تعريف القطع الناقص
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_2F_1 + V_4F_1$	$V_2F_2 = V_4F_1$
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_2V_4$	$V_2F_1 + V_4F_1 = V_2V_4$
$V_1F_1 + V_1F_2 = 2a$	$V_2V_4 = 2a$
$V_1F_1 + V_1F_1 = 2a$	$V_1F_1 = V_1F_2$
$2(V_1F_1) = 2a$	بسّط
$V_1F_1 = a$	اقسم

لأن $V_1F_1 = a$ و ΔF_1V_1C مثلث قائم الزاوية، $b^2 + c^2 = a^2$ باستخدام نظرية فيثاغورس.

- لماذا قد تكون الحلقة ذات الشكل الدائري غير آمنة للراكبين؟ نموذج الإجابة: ستؤدي الدائرة إلى تباطؤ سرعة المزلجة بشكل كبير، ما قد يتسبب في الضغط على أعناق الراكبين.

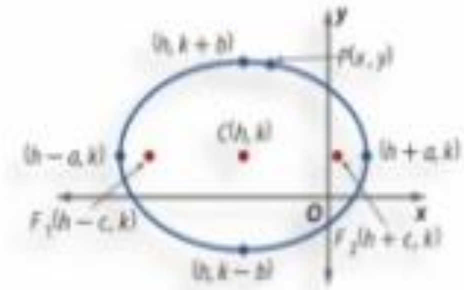
1 تحليل القطع الناقص والدوائر وتمثيلها بيانيًا

يبين **المثال 1** كيفية تمثيل قطع ناقص بيانيًا عند إعطاء المعادلة. يبين **المثال 2** كيفية كتابة معادلة قطع ناقص في حالة إعطاء مجموعة من خواص ذلك القطع الناقص. يبين **المثالان 3 و 4** كيفية تحديد الاختلاف المركزي للقطع الناقص واستخدامه.

التركيز على محتوى الرياضيات

البؤرتان في النسبة المستخدمة لإيجاد الاختلاف المركزي، تمثل c قياس الطول من نقطة المركز إلى بؤرتي القطع الناقص. بما أن a تمثل قياس الطول من نقطة المركز على المحور الأكبر إلى الرأس، فإن a تكون دائمًا أكبر من c.

لتكن $P(x, y)$ أي نقطة على القطع الناقص مركزه $C(h, k)$. إحداثيات البؤرتان والرؤوس والرؤوس المرافقة موضحة على اليسار. بتعريف القطع الناقص، يكون مجموع المسافات من أي نقطة على القطع الناقص إلى البؤرتين ثابتًا. بناءً عليه،
$PF_1 + PF_2 = 2a$

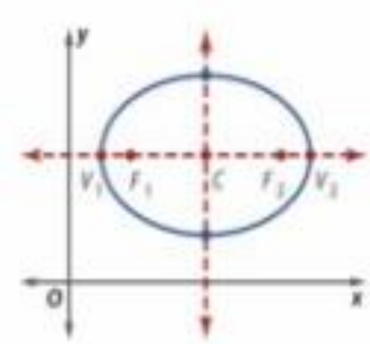


$PF_1 + PF_2 = 2a$	تعريف القطع الناقص
$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$	صيغة المسافة
$\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}$	خصائص التوزيع والطرح
$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}$	خاصية التجميع
$[(x-h)+c]^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}+[(x-h)-c]^2+(y-k)^2$	
$(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}+(x-h)^2-2c(x-h)+c^2+(y-k)^2$	
$4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=4a^2-4c(x-h)$	خصائص الطرح والجمع
$a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=a^2-c(x-h)$	اقسم كل طرف على 4.
$a^2[(x-h)^2-2c(x-h)+c^2+(y-k)^2]=a^4-2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$	قم بتربيع كل طرف.
$a^2(x-h)^2-2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2=a^4-2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$	خاصية التوزيع
$a^2(x-h)^2-c^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^4-a^2c^2$	خاصية الطرح
$(a^2-c^2)(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2(a^2-c^2)$	حلل إلى العوامل.
$b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2b^2$	$a^2-c^2=b^2$
$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	اقسم كل طرف على a^2b^2

الصيغة القياسية لمعادلة قطع ناقص مركزه (h, k)، حيث $a > b$، معطاة أدناه.

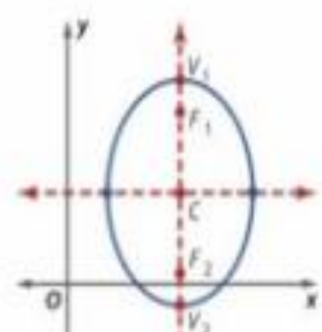
المفهوم الأساسي الصيغ القياسية لمعادلات القطوع الناقصة

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه: المحور الأكبر الأفقي
المركز: (h, k)
البؤرتان: $(h \pm c, k)$
الرؤوس: $(h \pm a, k)$
الرؤوس المرافقة: $(h, k \pm b)$
المحور الأكبر: $y = k$
المحور الأصغر: $x = h$
العلاقة a, b, c: $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$



الاتجاه: المحور الأكبر الرأسي
المركز: (h, k)
البؤرتان: $(h, k \pm c)$
الرؤوس: $(h, k \pm a)$
الرؤوس المرافقة: $(h \pm b, k)$
المحور الأكبر: $x = h$
المحور الأصغر: $y = k$
العلاقة a, b, c: $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

التدريس المتمايز AL OL

المتعلمون بالطريقة الحسّية الحركية اطلب إلى الطلاب استخدام مسمارين وقلم رصاص وخيط لرسم عدة قطوع ناقصة كما هو مبين في الصفحة 350. يمكنهم استخدام المساطر لقياس القطوع الناقصة التي رسموها وكتابة المعادلات التي تمثل تلك القطوع. ناقش كيفية تأثير التغييرات في البؤرتين على التغييرات في القطع الناقص.

المثال 1 تمثيل القطوع الناقصة بيانيًا

مثّل بيانيًا القطع الناقص المعطى بكل معادلة.

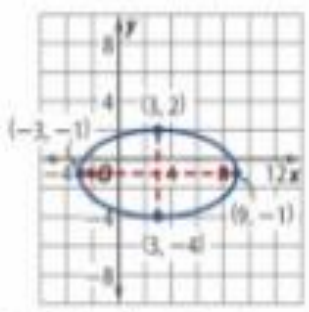
a. $\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

تكون المعادلة ذات صيغة قياسية إذا كانت $h=3$ و $k=-1$ و $a=\sqrt{36}$ أو 6، و $b=\sqrt{9}$ أو 3 و $c=\sqrt{36-9}$ أو $3\sqrt{3}$. استخدم هذه القيم لتحديد سمات القطع الناقص.

الاتجاه:	أفقي	عندما تكون المعادلة في شكلها القياسي، فإن حد x^2 يحتوي على a^2
المركز:	$(3, -1)$	(h, k)
البؤرتان:	$(3 \pm 3\sqrt{3}, -1)$	$(h \pm c, k)$
الرؤوس:	$(9, -1)$ و $(-3, -1)$	$(h \pm a, k)$
الرؤوس المرافقة:	$(3, 2)$ و $(3, -4)$	$(h, k \pm b)$
المحور الأكبر:	$y=-1$	$y=k$
المحور الأصغر:	$x=3$	$x=h$

ارسم المركز والرؤوس والبؤرتين والمحاور بيانيًا. ثم اصنع جدولاً بالقيم لرسم القطع الناقص.

x	y
0	1.60, −3.60
6	1.60, −3.60



b. $4x^2+y^2-24x+4y+24=0$

أولاً، اكتب المعادلة في صيغتها القياسية.

$$4x^2+y^2-24x+4y+24=0$$ المعادلة الأصلية

$$(4x^2-24x)+(y^2+4y)=-24$$ افصل وجمّع الأطراف المتشابهة

$$4(x^2-6x)+(y^2+4y)=-24$$ حلل إلى العوامل

$$4(x^2-6x+9)+(y^2+4y+4)=-24+4(9)+4$$ أكمل التربيعات

$$4(x-3)^2+(y+2)^2=16$$ بسّط

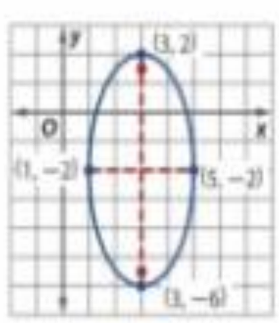
$$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$$ اقسم كل طرف على 16

تكون المعادلة ذات صيغة قياسية إذا كانت $h=3$ و $k=-2$ و $a=\sqrt{16}$ أو 4، و $b=\sqrt{4}$ أو 2 و $c=\sqrt{16-4}$ أو $2\sqrt{3}$ استخدم هذه القيم لتحديد سمات القطع الناقص.

الاتجاه:	رأسي	عندما تكون المعادلة في صيغتها القياسية، فإن حد y^2 يحتوي على a^2.
المركز:	$(3, -2)$	(h, k)
البؤرتان:	$(3, -2 \pm 2\sqrt{3})$	$(h, k \pm c)$
الرؤوس:	$(3, 2)$ و $(3, -6)$	$(h, k \pm a)$
الرؤوس المرافقة:	$(1, -2)$ و $(5, -2)$	$(h \pm b, k)$
المحور الأكبر:	$x=3$	$x=h$
المحور الأصغر:	$y=-2$	$y=k$

ارسم المركز والرؤوس والبؤرتين والمحاور بيانيًا. ثم أعد جدولاً بالقيم لرسم القطع الناقص.

x	y
2	1.46, −5.46
4	1.46, −5.46



تمرين موجّه

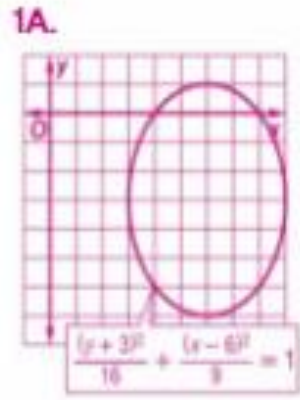
1A. $\frac{(x-6)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$

1B. $x^2+4y^2+4x-40y+103=0$

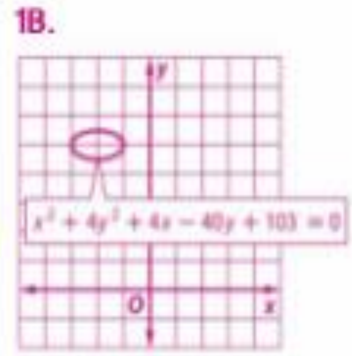
نصيحة دراسية

الاتجاه إذا كان إحداثي y هو نفسه لرأسي القطع الناقص، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًا. وإذا كان إحداثي x هو نفسه لرأسي القطع الناقص، فإن المحور الأكبر يكون رأسيًا.

1A.



1B.



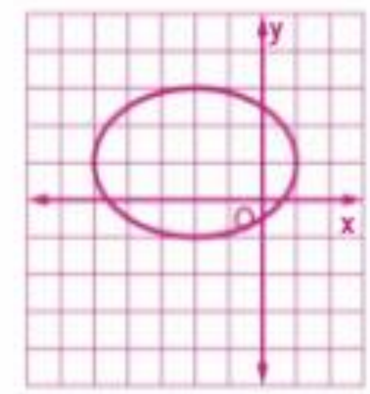
التقويم التكويني

استخدم التدريب الموجه الموجود بعد كل مثال لتحديد مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

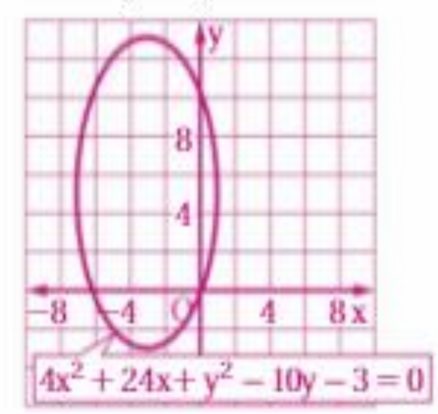
مثال إضافي

1 مثّل بيانيًا القطع الناقص المعطى بكل معادلة.

a. $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$



b. $4x^2+24x+y^2-10y-3=0$



التعليم باستخدام التكنولوجيا

الإنترنت اطلب إلى الطلاب إيجاد واحدٍ من مواقع الإنترنت المتعددة والتي تسمح لهم بتحريك بؤرتي القطع الناقص لتغيير أبعاده أو نقل النقاط على القطع الناقص لإظهار أن طولي القطعتين المستقيمتين اللتان تلتقيان في البؤرتين لهما ناتج عدد ثابت. اطلب إليهم عرض النتائج التي توصلوا إليها على زملائهم في غرفة الصف باستخدام السبورة البيضاء التفاعلية.

مثال إضافي

2 اكتب معادلة القطع الناقص باستخدام كل مجموعة من الخواص.

a. المحور الأكبر من $(-2,\ 5)$ إلى $(-2,\ -1)$؛ المحور الأصغر من $(2,\ 0)$ إلى $(2,\ -4)$

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$$

b. الرؤوس عند $(3,\ -4)$ و $(3,\ 6)$؛ البؤرتان عند $(3,\ 4)$ و $(3,\ -2)$

$$\frac{(y-1)^2}{25}+\frac{(x-3)^2}{16}=1$$

المثال 2 اكتب معادلات من خصائص معطاة

اكتب معادلة لقطع ناقص باستخدام كل مجموعة من الخصائص.

a. المحور الأكبر من $(-6,\ 2)$ إلى $(-6,\ -8)$؛ المحور الأصغر من $(-3,\ -3)$ إلى $(-9,\ -3)$

استخدم المحورين الأكبر والأصغر لتحديد a و b

اقسم طول المحور الأكبر إلى نصفين: $a=\frac{2-(-8)}{2}$ أو 5

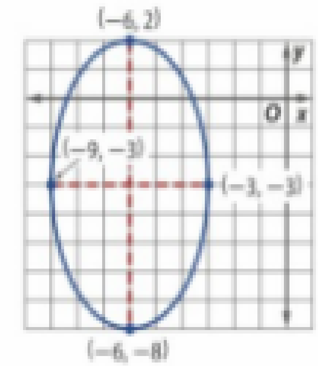
اقسم طول المحور الأصغر إلى قسمين: $b=\frac{-3-(-9)}{2}$ أو 3

مركز القطع الناقص هو منتصف المحور الأكبر.

$(h,k)=\left(\frac{-6+(-6)}{2},\frac{2+(-8)}{2}\right)$ صيغة نقطة المنتصف

$=(-6,\ -3)$ بسط.

إحداثيات x هي إحداثيات النقاط الطرفية للمحور الأكبر نفسها. من ثم يكون المحور الأكبر رأسيًا وقيمة a هي حد y^2. معادلة القطع الناقص $\frac{(x+6)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{25}=1$. التمثيل البياني للقطع الناقص موضح في الشكل 6.2.1.



الشكل 6.2.1

b. الرؤوس عند $(-4,\ 4)$ و $(6,\ 4)$؛ البؤرتان عند $(-2,\ 4)$ و $(4,\ 4)$

طول المحور الأكبر، $2a$، هو المسافة بين الرؤوس.

$2a=\sqrt{(-4-6)^2+(4-4)^2}$ صيغة المسافة بين نقطتين

$a=5$ حل للحصول على a.

$2c$ تمثل المسافة بين البؤرتين.

$2c=\sqrt{(-2-4)^2+(4-4)^2}$ صيغة المسافة بين نقطتين

$c=3$ حل للحصول على c.

أوجد قيمة b

$c^2=a^2-b^2$ معادلة ذات صلة بـ a و b و c

$3^2=5^2-b^2$ $a=5$ و $c=3$

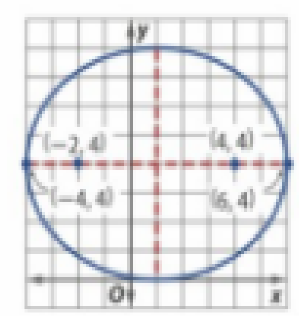
$b=4$ حل للحصول على b.

الرؤوس على مسافة متساوية من المركز.

$(h,k)=\left(\frac{-4+6}{2},\frac{4+4}{2}\right)$ صيغة نقطة المنتصف

$=(1,\ 4)$ بسط.

إحداثيات y هي إحداثيات النقاط الطرفية للمحور الأكبر نفسها. من ثم يكون المحور الأكبر أفقيًا وقيمة a تنتمي إلى حد x^2. معادلة القطع الناقص $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$
التمثيل البياني للقطع الناقص موضّح في الشكل 6.2.2.



الشكل 6.2.2

تمرين موجّه

2A. البؤرتان عند $(19,\ 3)$ و $(-7,\ 3)$، طول المحور الأكبر يساوي 30

$$\frac{(x-6)^2}{225}+\frac{(y-3)^2}{56}=1$$

2B. الرؤوس عند $(-2,\ -4)$ و $(-2,\ 8)$، طول المحور الأصغر يساوي 10

$$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{36}=1$$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص هي نسبة c إلى a. وستتراوح هذه القيمة دائمًا بين 0 و 1 وستحدد مدى "استدارة" أو "انبساط" القطع الناقص.

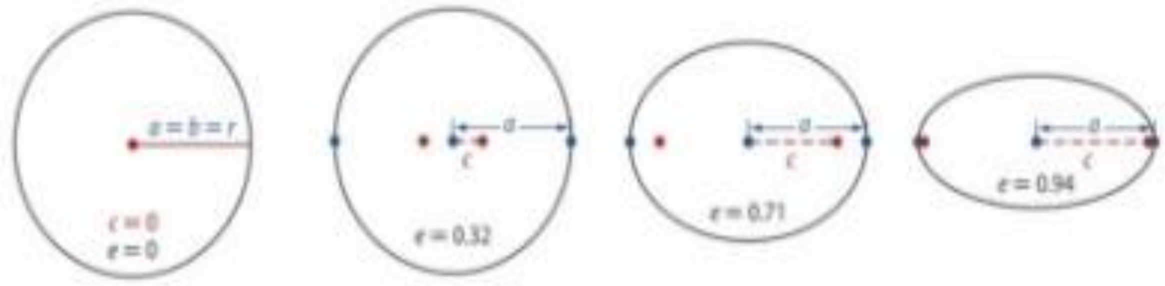
المفهوم الأساسي الاختلاف المركزي

لأي قطع ناقص، $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ أو $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ حيث $c^2=a^2-b^2$

الاختلاف المركزي هو، $e=\frac{c}{a}$.

353

قيمة c تمثل المسافة بين إحدى البؤرتين ومركز القطع الناقص. كلما اقتربت البؤرتان من بعضهما البعض فإن c و e كلاهما تقتربان من 0. عند وصول الاختلاف المركزي إلى 0 ، يصبح القطع الناقص دائرة وكل من a و b يساوي نصف قطر الدائرة.



المثال 3 تحديد الاختلاف المركزي للقطع الناقص

حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي معادلته $\frac{(x-6)^2}{100}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

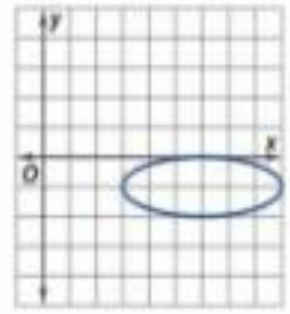
أولًا، حدد قيمة c.

معادلة ذات صلة بـ a و b و c	$c^2 = a^2 - b^2$
$a^2 = 100$ و $b^2 = 9$	$c^2 = 100 - 9$
حل للحصول على c.	$c = \sqrt{91}$

استخدم قيم c و a لإيجاد الاختلاف المركزي.

معادلة الاختلاف المركزي	$e = \frac{c}{a}$
$a = 10$ و $c = \sqrt{91}$	$e = \frac{\sqrt{91}}{10}$ أو 0.95 تقريبًا

الاختلاف المركزي للقطع الناقص هو 0.95 تقريبًا. من ثم فسيبدو القطع الناقص منبسطًا، كما هو موضّح في الشكل 6.2.3.



الشكل 6.2.3

تمرين موجّه

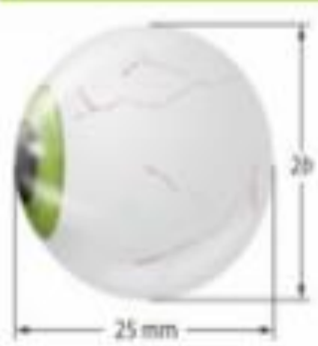
حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المُعطى بواسطة كل معادلة.

3A. $\frac{x^2}{18}+\frac{(y+8)^2}{48}=1$ **0.79**

3B. $\frac{(x-4)^2}{19}+\frac{(y+7)^2}{17}=1$ **0.32**

المثال 4 من واقع الحياة استخدم الاختلاف المركزي

بصريات يمكن تصميم العين على غرار قطع ناقص متطاول، أو ثلاثي الأبعاد. الاختلاف المركزي للمقطع العرضي المركزي للعين ذات الرؤية الطبيعية 0.28 تقريبًا. فإذا كان عمق العين الطبيعية 25 ملم تقريبًا، فما هو الارتفاع التقريبي للعين؟



استخدم الاختلاف المركزي لتحديد قيمة c.

تعريف الاختلاف المركزي	$e = \frac{c}{a}$
$e = 0.28$ و $a = 12.5$	$0.28 = \frac{c}{12.5}$
حل للحصول على c.	$c = 3.5$

استخدم قيم c و a لتحديد b.

معادلة ذات صلة بـ a و b و c	$c^2 = a^2 - b^2$
$c = 3.5$ و $a = 12.5$	$3.5^2 = 12.5^2 - b^2$
حل للحصول على b.	$b = 12$

لأن قيمة b هي 12 يكون ارتفاع العين $2b$ أو 24 ملم.

تمرين موجّه

4. الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر 0.39. فإذا كان عمق العين 25 ملم، فما هو ارتفاع العين؟ **23.02 mm**

مهنة من واقع الحياة

فني البصريات
يعمل فنيو البصريات مع أطباء العيون لرعاية المرضى الذين يعانون من مرض أو إصابة بالعين، حيث يقومون باختبار الحالة البصرية ويساعدون في الإعدادات المراجعة. يجب أن يقوموا باستكمال برنامج تدريبي لمدة عام بالإضافة إلى شهادة الدراسة الثانوية أو شهادة معادلة الثانوية العامة (GED).

أمثلة إضافية

3 حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطى بـ
$$\frac{(x-4)^2}{64}+\frac{(y-3)^2}{36}=1$$ **0.66**

4 **علم الفلك** يساوي الاختلاف المركزي لمدار كوكب أورانوس 0.47. يبلغ طول المحور الأكبر لمداره حوال الشمس 38.36 AU (وحدة فلكية). ما طول المحور الأصغر للمدار؟ **33.86 AU**

نصيحة للمعلمين الجدد

اختلاف مركزي عندما تقترب قيمة e من الصفر، يقترب شكل القطع الناقص من دائرة. وعندما تقترب قيمة e من 1، يقترب شكل القطع الناقص من المستقيم.

354 | الدرس 2-6 | القطع الناقص والدوائر

2 تحديد القطع المخروطي

يبين **المثال 5** كيفية تحديد ما إذا كانت المعادلة نموذجًا لدائرةٍ أو قطعٍ ناقصٍ أو قطعٍ مكافئ.

مثال إضافي

5 اكتب كل معادلةٍ مما يلي بالصيغة المعيارية. حدد الشكل المخروطي المرتبط بها.

a. $9x^2 + 4y^2 + 8y - 32 = 0$

$\frac{(y+1)^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1$؛ قطع ناقص

b. $x^2 + 4x - 4y + 16 = 0$

$(x+2)^2 = 4(y-3)$؛ قطع مكافئ

c. $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$

$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 16$؛ دائرة

355

2 تحديد المقاطع المخروطية

يمكن اشتقاق معادلة الدائرة باستخدام الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	معادلة لقطع ناقص له مركز عند $(0, 0)$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	$e = 0$ عندما تكون $a = b$
$x^2 + y^2 = a^2$	اضرب كل طرف في a^2.
$x^2 + y^2 = r^2$	a هو نصف قطر الدائرة.

المفهوم الأساسي الصيغة القياسيّة لمعادلات الدوائر

الصيغة القياسيّة لمعادلة دائرة لها مركز (h, k) ونصف قطر r هو

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

إذا كان لديك معادلة المقطع المخروطي، فيمكنك تحديد نوع المخروط الممثل باستخدام سمات المعادلة.

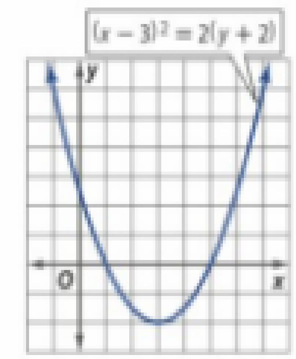
المثال 5 حدد نوع المقاطع المخروطية

اكتب المعادلة في صيغتها القياسيّة. حدد شكل القطع المخروطي ذي الصلة.

a. $x^2 - 6x - 2y + 5 = 0$

$x^2 - 6x - 2y + 5 = 0$	المعادلة الأصلية
$(x^2 - 6x) - 2y = -5$	افصل وجمّع الأطراف المتشابهة
$(x^2 - 6x + 9) - 2y = -5 + 9$	أكمل التربيع
$(x-3)^2 - 2y = 4$	حلل إلى العوامل وبسط
$(x-3)^2 = 2y + 4$	أضف $2y$ إلى كل طرف
$(x-3)^2 = 2(y+2)$	حلل إلى العوامل

لأن هناك طرف واحد فقط مربع، فإن التمثيل البياني يكون قطعًا مكافئًا برأس $(3, -2)$ كما هو موضح في الشكل 6.2.4.

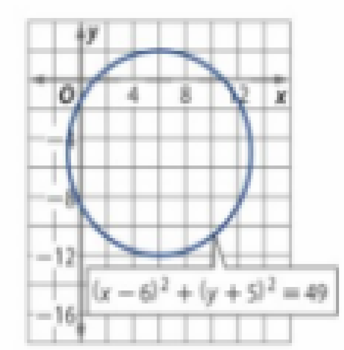


الشكل 6.2.4

b. $x^2 + y^2 - 12x + 10y + 12 = 0$

$x^2 + y^2 - 12x + 10y + 12 = 0$	المعادلة الأصلية
$(x^2 - 12x) + (y^2 + 10y) = -12$	افصل وجمّع الأطراف المتشابهة
$(x^2 - 12x + 36) + (y^2 + 10y + 25) = -12 + 36 + 25$	أكمل التربيعات
$(x-6)^2 + (y+5)^2 = 49$	بسّط

لأن شكل المعادلة $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$، فإن التمثيل البياني يكون دائرة بمركز $(6, -5)$ ونصف قطر 7، كما هو موضح في الشكل 6.2.5.

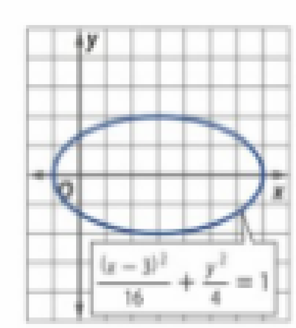


الشكل 6.2.5

c. $x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$

$x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$	المعادلة الأصلية
$(x^2 - 6x) + 4y^2 = 7$	افصل وجمّع الأطراف المتشابهة
$(x^2 - 6x + 9) + 4y^2 = 7 + 9$	أكمل التربيع
$(x-3)^2 + 4y^2 = 16$	بسّط
$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$	اقسم كل جانب على 16

لأن شكل المعادلة $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$، فإن التمثيل البياني يكون قطع ناقص بمركز $(3, 0)$، كما هو موضح في الشكل 6.2.6.



الشكل 6.2.6

تمرين موجّه

5A. $y^2 - 3x + 6y + 12 = 0$ — $(y+3)^2 = 3(x-1)$؛ قطع مكافئ

5B. $4x^2 + 4y^2 - 24x + 32y + 36 = 0$ — $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 16$؛ دائرة

5C. $4x^2 + 3y^2 + 36y + 60 = 0$ — $\frac{x^2}{12} + \frac{(y+6)^2}{16} = 1$؛ قطع ناقص

تمارين

مثِّل القطع الناقص الموضح بكل معادلة بيانيًا. (المثال 1)

1. $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$ **1–6. انظر الهامش.**

2. $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$

3. $x^2+9y^2-14x+36y+49=0$

4. $4x^2+y^2-64x-12y+276=0$

5. $9x^2+y^2+126x+2y+433=0$

6. $x^2+25y^2-12x-100y+111=0$

اكتب معادلة القطع الناقص باستخدام كل مجموعة من الخصائص. (المثال 2)

7. الرؤوس $(-7,-3), (13,-3)$، البؤرتان $(-5,-3), (11,-3)$ **$\frac{(x-3)^2}{100}+\frac{(y+3)^2}{36}=1$**

8. الرؤوس $(4,-9), (4,3)$، طول المحور الاصغر هو 8 **$\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{36}=1$**

9. الرؤوس $(-3,2), (7,2)$، البؤرتان $(-2,2), (6,2)$ **$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$**

10. المحور الأكبر $(-13,2)$ إلى $(1,2)$، المحور الاصغر $(-6,4)$ إلى $(-6,0)$ **$\frac{(x+6)^2}{49}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$**

11. البؤرتان $(-6,-3), (-6,9)$، طول المحور الأكبر هو 20 **$\frac{(x+6)^2}{64}+\frac{(y-3)^2}{100}=1$**

12. الرؤوس المرافقة $(-3,7), (-13,7)$، طول المحور الأكبر هو 16 **$\frac{(x+8)^2}{25}+\frac{(y-7)^2}{64}=1$**

13. البؤرتان $(14,8), (-10,8)$، طول المحور الأكبر هو 30 **$\frac{(x-2)^2}{225}+\frac{(y-8)^2}{81}=1$**

حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة بكل معادلة. (المثال 3)

14. $\frac{(x+5)^2}{72}+\frac{(y-3)^2}{54}=1$ **0.5**

15. $\frac{(x+6)^2}{40}+\frac{(y-2)^2}{12}=1$ **0.837**

16. $\frac{(x-8)^2}{14}+\frac{(y+3)^2}{57}=1$ **0.869**

17. $\frac{(x+8)^2}{27}+\frac{(y-7)^2}{33}=1$ **0.426**

18. $\frac{(x-1)^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$ **0.5**

19. $\frac{(x-11)^2}{17}+\frac{(y+15)^2}{23}=1$ **0.511**

20. $\frac{x^2}{38}+\frac{(y-12)^2}{13}=1$ **0.811**

21. $\frac{(x+9)^2}{10}+\frac{(y+11)^2}{8}=1$ **0.447**

22. **سباق** موضح أدناه تصميم مضمار السباق البيضاوي باختلاف مركزي 0.75. (المثال 4) **a–b. انظر الهامش.**

a. ما هو أقصى عرض w للمضمار؟

b. اكتب معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل x تقع في منتصف المضمار.

23. **تجارة** صمم تجار لافتة لزبون تتعلق برعاية الحيوانات الأليفة. يريد صاحب اللافتة ان يكون تصميمها ذات شكل بيضاوي اختلافها المركزي 0.60 وطولها 36 بوصة. (المثال الرابع)

a. ما أقصى ارتفاع للافتة؟ **28.8 in.**

b. اكتب معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل تقع في منتصف اللافتة. **$\frac{x^2}{324}+\frac{y^2}{207}=1$**

اكتب المعادلة في صيغتها القياسيّة. حدد شكل القطع المخروطي ذي الصلة. (المثال 5) **24–31. انظر الهامش.**

24. $x^2+y^2+6x-4y-3=0$

25. $4x^2+8y^2-8x+48y+44=0$

26. $x^2-8x-8y-40=0$

27. $y^2-12x+18y+153=0$

28. $x^2+y^2-8x-6y-39=0$

29. $3x^2+y^2-42x+4y+142=0$

30. $5x^2+2y^2+30x-16y+27=0$

31. $2x^2+7y^2+24x+84y+310=0$

32. **تاريخ** يحتوي الكونغرس الأمريكي على غرفة ذات سقف بيضاوي. يُسمى هذا النوع من الغرف معرض الهمس لأن الصوت الصادر من إحدى بؤر القطع الناقص ينعكس على السقف ويعود إلى البؤرة الأخرى. يبلغ طول الغرفة الموجودة بالكونجرس 96 قدمًا وعرضها 45 قدمًا ويبلغ ارتفاع سقفها 23 قدمًا.

a. اكتب المعادلة التي تمثل شكل الغرفة. بفرض أنها متمركزة في نقطة الأصل وأن المحور الأكبر أفقي. **$\frac{x^2}{2304}+\frac{y^2}{506.25}=1$**

b. أوجد موقع البؤرتين.

c. ما المسافة التي يجب أن يبعدها الشخص عن إحدى البؤرتين لسماع الصوت المنعكس من البؤرة الأخرى؟

b–c. انظر الهامش.

اكتب معادلة الدائرة التي تستوفي كل مجموعة من الشروط. ثم ارسم الدائرة بيانيًا. **33–36. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.**

33. المركز عند $(3,0)$، نصف القطر 2

34. المركز عند $(-1,7)$، القطر 6

35. المركز عند $(-4,-3)$، مماسة لـ $y=3$

36. المركز عند $(2,0)$، النقاط الطرفية للقطر عند $(-5,0)$ و $(9,0)$

37. **صيغة** قم باشتقاق الشكل العام لمعادلة القطع الناقص ذي المحور الأكبر الرأسي المتمركز عند نقطة الأصل.

انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

3 التدريب

التقويم التكويني

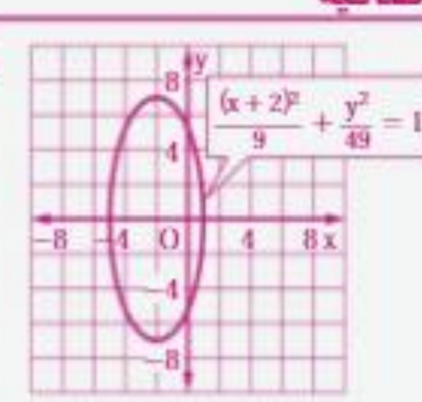
استخدم التمارين من 1 إلى 31 للتحقق من استيعاب الطلاب للمفاهيم.

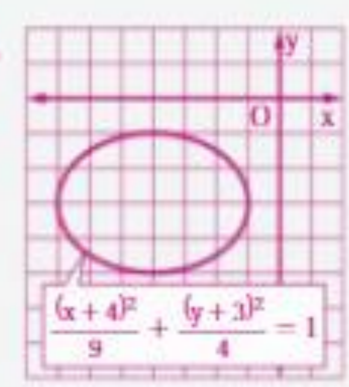
ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات التي ستعطيها للطلاب.

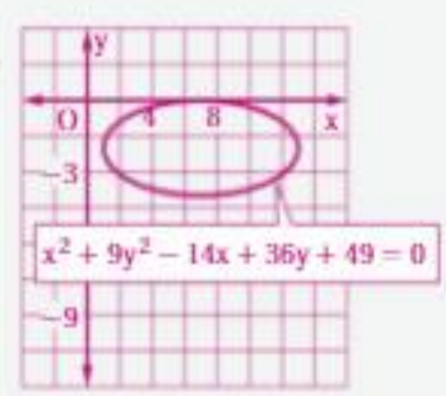
انتبه!

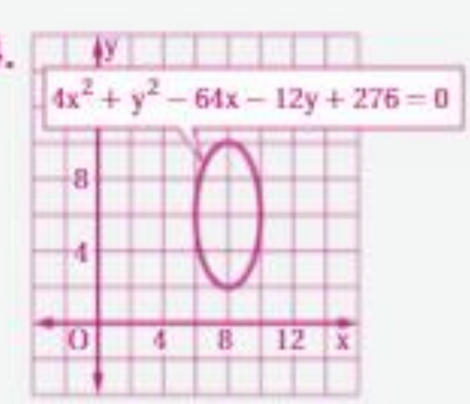
خطأ شائع في التمارين من 14 إلى21، قد يخلط الطلاب بين الصيغة المستخدمة لإيجاد طول البؤرتين، $c^2=a^2-b^2$، ونظرية فيثاغورس المستخدمة لإيجاد وتر المثلث قائم الزاوية، $c^2=a^2+b^2$

إجابات إضافية

1.


2.


3.


4.


خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

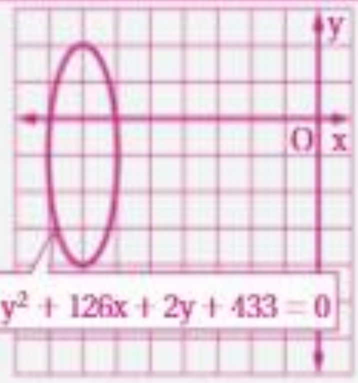
المستوى	الواجبات	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-31, 66, 67, 70-96	1-31 فردي، 93-96	2-30 زوجي، 66, 67, 70-92
OL ضمن المستوى	1-31 فردي، 32, 33, 35, 37-39, 41-47 فردي، 48. 49, 51-55, 57, 59-61, 63, 65-67, 70-96	1-31, 93-96	32-67, 70-92
BL أعلى من المستوى	32-96		

انتبه!

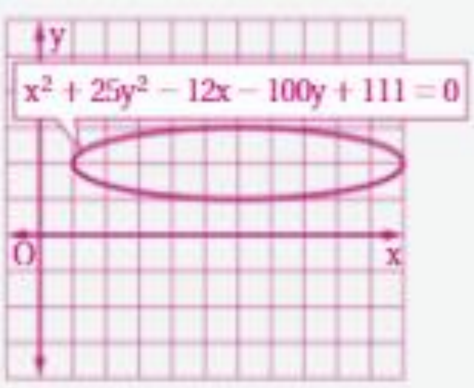
خطأ شائع في حال كان الطلاب يستخدمون حاسبة بيانية لتمثيل الدوائر والقطع الناقص، كما في التمرين 53، أكّد على أنه يجب عليهم حل المعادلة من أجل y وتمثيل الحلول الموجبة والسالبة بيانيًا بهدف رؤية كامل الدائرة أو القطع الناقص.

إجابات إضافية

.5



.6



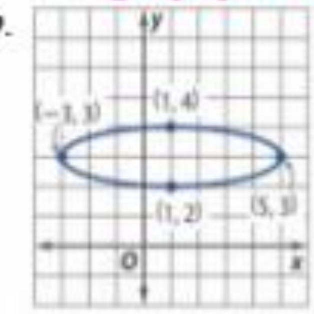
.38 **التكنولوجيا الطبية** تستخدم أنظمة تحديد المواقع الداخلية (IPS) الموجات فوق الصوتية لاكتشاف العلامات المرتبطة بالملفات الرقمية التي تحتوي على المعلومات ذات الصلة بشخص أو شيء مراقب. وغالبًا ما تستخدم المستشفيات نظام تحديد المواقع الداخلي لاكتشاف موقع المعدات المتحركة والمرضى المتحركين.

a. إذا كان يجب وضع جهاز استقبال نظام التتبع في مكان مركزي لتشغيله على نحو أمثل، فأين ينبغي وضع جهاز الاستقبال في مجمع المستشفى الذي تبلغ مساحته 800 متر في 942 مترًا؟ **انظر الهامش.**

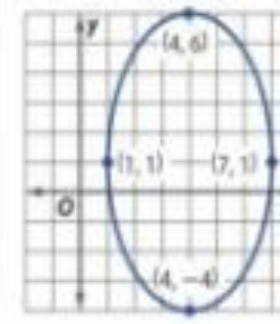
b. اكتب المعادلة التي تمثل نطاق سونار نظام تحديد المواقع الداخلي. $x^2 + y^2 = 381{,}841$

اكتبا معادلة كل قطع ناقص. **39–42. انظر الهامش.**

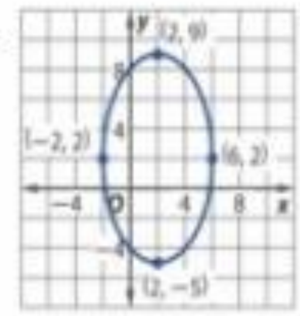
39.



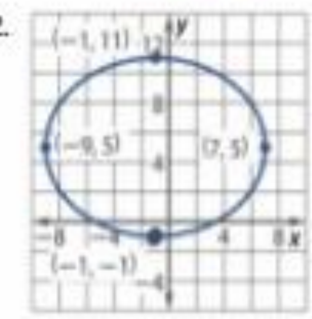
40.



41.



42.



.43 **حركة الكواكب** يتحرك كل كوكب بالمجموعة الشمسية حول الشمس في مسار بيضاوي، حيث تُعتبر الشمس البؤرة الوحيدة للقطع الناقص. يبعد المريخ 43.4 مليون ميل عن الشمس عند أبعد نقطة له و 28.6 مليون ميل عند أقرب نقطة له، كما هو موضح أدناه. يبلغ قطر الشمس 870,000 ميل.

a. أوجد طول المحور الأصغر. **71.35 مليون ميل تقريبًا**

b. أوجد الإختلاف المركزي المدار البيضاوي. **0.203**

أوجد مركز وبؤرتي ورؤوس كل قطع ناقص.

44. $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ **$(-5, 0); (-8, 0), (-2, 0); (-9, 0), (-1, 0)$**

45. $\frac{x^2}{100} + \frac{(y+6)^2}{25} = 1$ **$(0, -6); (\pm 5\sqrt{3}, -6); (\pm 10, -6)$**

46. $9y^2 - 18y + 25x^2 + 100x - 116 = 0$ **$(-2, 1); (-2, 5), (-2, -3); (-2, 6), (-2, -4)$**

47. $65x^2 + 16y^2 + 130x - 975 = 0$ **$(-1, 0); (-1, \pm 7); (-1, \pm\sqrt{65})$**

.48 **الشاحنات** كثيرًا ما تُستخدم ناقلات بيضاوية الشكل مثل الموضحة لنقل السوائل لأنها أكثر استقرارًا من الخزانات الدائرية وحركة السوائل بداخلها تكون عند حدها الأدنى. **a–b. انظر الهامش.**

a. ارسم المقطع العرضي البيضاوي للخزان على مستوى إحداثي وميزه بالعلامات.

b. اكتب المعادلة التي تمثل شكل الخزان البيضاوي.

c. أوجد الإختلاف المركزي القطع الناقص. **0.79**

اكتب الصيغة القياسيّة لمعادلة كل قطع ناقص.

.49 الرؤوس عند $(-10, 0)$ و $(10, 0)$، والإختلاف المركزي e هو $\frac{3}{5}$. **$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$**

.50 الرؤوس المركزية المشتركة عند $(0, 1)$ و $(6, 1)$، والإختلاف المركزي e هو $\frac{4}{5}$. **$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$**

.51 المركز عند $(2, -4)$، إحدى البؤر عند $(2, -4 + 2\sqrt{5})$، والإختلاف المركزي e هو $\frac{\sqrt{5}}{3}$ **$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{36} = 1$**

.52 **الأفعوانية** يمكن تصميم شكل حلقة الأفعوانية في الملاهي باستخدام $\frac{y^2}{3306.25} + \frac{x^2}{2025} = 1$.

a. ما هو عرض الحلقة على طول المحور الأفقي؟ **90 ft**

b. حدد ارتفاع الأفعوانية عن الأرض عندما تصل إلى أعلى الحلقة، إذا كان القضيب السفلي على ارتفاع 20 قدمًا من الأرض. **135 ft**

c. أوجد الإختلاف المركزي القطع الناقص. **0.62**

.53 **حرائق الغابات** يمتد نصف قطر حرائق الغابات بمعدل 4 أميال يوميًا. ويتضح الشكل الحالي للحريق أدناه، حيث تقع المدينة على بعد 20 ميلًا جنوب شرق الحريق. **a–c. انظر الهامش.**

a. اكتب معادلة الدائرة في الوقت الحالي ومعادلة الدائرة وقت وصول الحريق إلى المدينة.

b. ارسم كلتا الدائرتين بيانيًا.

c. إذا استمر انتشار الحريق بنفس المعدل، فكم عدد الأيام التي يستغرقها للوصول إلى المدينة؟

22a. العرض = 661.44 ft

22b. $\frac{x^2}{250{,}000} + \frac{y^2}{109{,}375} = 1$

24. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$؛ دائرة

25. $\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$؛ قطع ناقص

26. $(x-4)^2 = 8(y+7)$؛ قطع مكافئ

27. $(y+9)^2 = 12(x-6)$؛ قطع مكافئ

28. $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 64$؛ دائرة

29. $\frac{(x-7)^2}{3} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$؛ قطع ناقص

30. $\frac{(x+3)^2}{10} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$؛ قطع ناقص

31. $\frac{(y+6)^2}{2} + \frac{(x+6)^2}{7} = 1$؛ قطع ناقص

32b. ≈ 42 ft على كلا جانبي نقطة المركز على طول المحور الأكبر

32c. ≈ 84 ft

38a. عند النقطة المركزية للمستشفى، والتي تقع على بعد 471 مترًا داخل المبنى

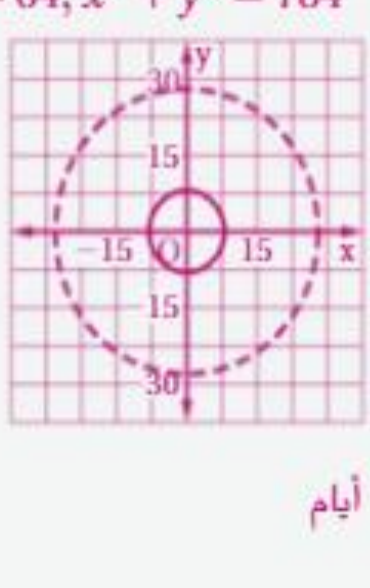
39. $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{1} = 1$

40. $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$

48b. $\frac{x^2}{11.56} + \frac{y^2}{4.41} = 1$

53a. $x^2 + y^2 = 64, x^2 + y^2 = 784$

53b.

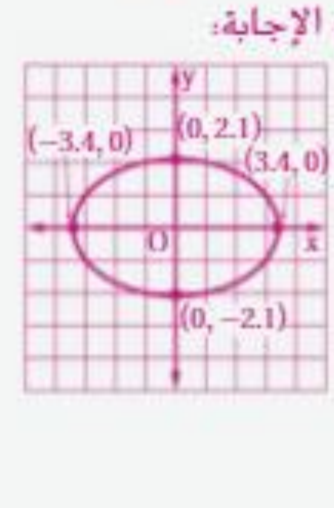


53c. 5 أيام

41. $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{49} = 1$

42. $\frac{(x+1)^2}{64} + \frac{(y-5)^2}{36} = 1$

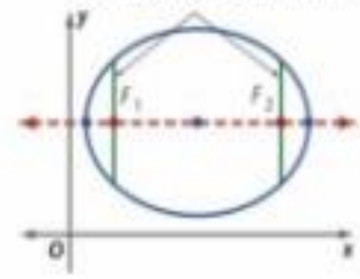
48a. نموذج الإجابة:



C

54. الوتر البؤري للقطع الناقص هو الخط المستقيم الذي يمر عبر البؤرة، وهو عمودي على المحور الأكبر للقطع الناقص، وله نقاط طرفية على القطع الناقص. طول كل وتر بؤري هو $\frac{2b^2}{a}$ وحدة حيث a نصف طول المحور الأكبر و b نصف طول المحور الأصغر.

القطعة المستقيمة العمودية على محور قطع



اكتب معادلة القطع الناقص الأفقي بمركز عند (3, 2) ومحور أكبر بطول 16 وحدة ووتر بؤري بطول 12 وحدة. $\frac{(x-3)^2}{64}+\frac{(y-2)^2}{48}=1$

أوجد إحداثيات النقاط حيث يتقاطع الخط المستقيم مع الدائرة.

55. $y=x-8, (x-7)^2+(y+5)^2=16$ $(7,-1), (3,-5)$

56. $y=x+9, (x-3)^2+(y+5)^2=169$ $(-2,7), (-9,0)$

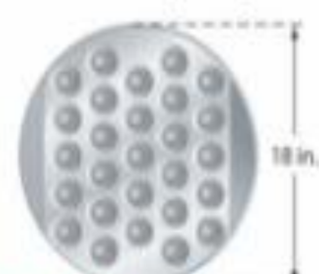
57. $y=-x+1, (x-5)^2+(y-2)^2=50$ $(-2,3), (6,-5)$

58. $y=-\frac{1}{3}x-3, (x+3)^2+(y-3)^2=25$ $(-3,-2), (-6,-1)$

59. **الانعكاس** التفضيض هي عملية طلاء الزجاج بمادة عاكسة. ويمكن تفضيض الجزء الداخلي من القطع الناقص لإنتاج مرآة بأشعة توجَّه نحو بؤرة القطع الناقص ثم عكسها على البؤرة الأخرى كما هو موضح.

إذا كان القسم F و V بطول 2 سم والاختلاف المركزي للمرآة هو 0.5، فأوجد معادلة القطع الناقص في شكلها القياسي. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

60. **كيمياء** تُستخدم أعمدة التقطير لفصل المواد الكيميائية بناءً على الفروق في معدلات تبخيرها. وقد تحتوي الأعمدة على ألواح بها أغطية فقاعية أو فتحات دائرية صغيرة.



a. اكتب معادلة اللوح الموضح، بفرض أن المركز عند (-4, -1). $(x+4)^2+(y+1)^2=81$

b. ما هي مساحة سطح اللوح غير المغطاة بالأغطية الفقاعية إذا كان قطر كل غطاء بوصتين؟ $\approx 169.6\ in^2$

61. **هندسة** الرسوم البيانية لـ -7 $2x+3y$ ،$x-5y=-3$ و $4x-7y=27$ تحتوي على أضلاع مثلث. اكتب معادلة الدائرة التي تحيط بالمثلث. $(x-6.5)^2+(y-4.5)^2=32.5$

اكتب الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة التي تمر عبر كل مجموعة نقاط. ثم حدد مركز ونصف قطر الدائرة. 62–65. انظر الهامش.

62. (2, 3), (8, 3), (5, 6)

63. (1, −11), (−3, −7), (5, −7)

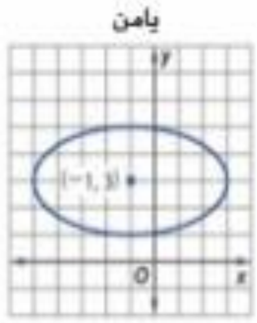
64. (0, 9), (0, 3), (−3, 6)

65. (7, 4), (−1, 12), (−9, 4)

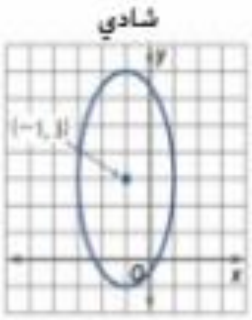
مهارات التفكير العليا مسائل استخدم مهارات التفكير العليا

66. **تحليل الأخطاء** يقوم يامن وشادي بإعداد رسم بياني لقطع ناقص له مركز عند (−1, 3)، ومحور أكبر بطول 8 ومحور ثانوي بطول 4. أي منهما صحيح؟ وضح تبريرك المنطقي. انظر الهامش.

يامن



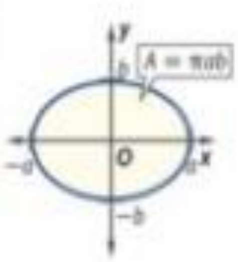
شادي



67. **التبرير** حدد إذا ما كان هناك قطع ناقص ممثل بـ $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{p+r}=1$ أم لا حيث $r>0$ سيكون له نفس بؤرتي القطع الناقص الممثل بـ $\frac{x^2}{p+r}+\frac{y^2}{p}=1$ اشرح إجابتك. انظر الهامش.

مسألة تحفيزية المساحة A هي مساحة قطع ناقص بالشكل $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ هي $A=\pi ab$. اكتب معادلة القطع الناقص لكل من السمات التالية.

68–69. انظر الهامش.



68. $b+a=12, A=35\pi$

69. $a-b=5, A=24\pi$

70. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيفية إيجاد البؤرتين والرؤوس لقطع ناقص إذا أُعطيت الصيغة القياسية للمعادلة. انظر الهامش.

71. **التبرير المنطقي** هل القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ متناظر حول نقطة الأصل؟ وضح تبريرك المنطقي. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

72. **مسألة غير محددة الإجابة** إذا كانت معادلة دائرة $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ حيث $h>0$ و $k<0$ فما هو نطاق الدائرة؟ تحقق من إجابتك باستخدام مثال، جبريًا وبيانيًا. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

73. **الكتابة في الرياضيات** وضح لماذا يصبح القطع الناقص دائريًا عندما تقترب قيمة b من a انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

إجابات إضافية

62. $(x-5)^2+(y-3)^2=9$؛ دائرة: (5, 3)، نصف القطر: 3

63. $(x-1)^2+(y+7)^2=16$؛ دائرة: (1, −7)، نصف القطر: 4

64. $x^2+(y-6)^2=9$؛ دائرة: (0, 6)، نصف القطر: 3

65. $(x+1)^2+(y-4)^2=64$؛ دائرة: (−1, 4)، نصف القطر: 8

مراجعة شاملة

لكل معادلة، حدد الرأس والبؤرة ومحور التناظر والدليل. ثم ارسم القطع المكافئ بيانيًا. **74–76. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.**

74. $y = 3x^2 - 24x + 50$

75. $y = -2x^2 + 5x - 10$

76. $x = 5y^2 - 10y + 9$

77. **تصنيع** تقوم شركة ألعاب بإنتاج دميتين جديدتين لعملائها، لعبة طفلي الأول، التي تتحدث وتضحك وتبكي ولعبة طفلي الحقيقي التي تستخدم الزجاجة وتزحف. يمكن للشركة أن تنتج 8 قطع من لعبة طفلي الأول أو 20 قطعة من طفلي الحقيقي في الساعة. بسبب الطلب، يجب أن تنتج الشركة عددًا من لعبة طفلي الأول يعادل ضعف عدد لعبة طفلي الحقيقي على الأقل. تقضي الشركة ما لا يزيد عن 48 ساعة في الأسبوع لتصنيع الدميتين. أوجد عدد ونوع الدمى الذي يجب إنتاجه لزيادة الأرباح. **160 قطعة من لعبة طفلي الحقيقي، 320 قطعة من لعبة طفلي الأول**

أرباح كل دمية (دولار)	
طفلي الأول	طفلي الحقيقي
3.00	7.50

اثبت كل متطابقة. **78–80. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.**

78. $\sin(\theta + 30°) + \cos(\theta + 60°) = \cos\theta$

79. $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\theta$

80. $\sin(3\pi - x) = \sin x$

أوجد كل الحلول لكل معادلة مذكورة في الفترة الفاصل $(0, 2\pi)$.

81. $\sin\theta = \cos\theta$ $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

82. $\sin\theta = 1 + \cos\theta$ $\pi, \frac{\pi}{2}$

83. $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

أوجد حلًا لكل متباينة.

84. $x^2 - 5x - 24 > 0$ $(-\infty, -3) \cup (8, \infty)$

85. $x^2 + 2x - 35 \le 0$ $[-7, 5]$

86. $-2y^2 + 7y + 4 < 0$ $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$

اذكر عدد الأصفار الحقيقية المحتملة ونقاط انعطاف كل دالة. ثم حدد كل الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى عوامل.

87. $f(x) = 3x^4 + 18x^3 + 24x^2$ **4 أصفار فعلية، 3 نقاط تحول؛ 0 ,2−, 4−**

88. $f(x) = 8x^6 + 48x^5 + 40x^4$ **6 أصفار فعلية، 5 نقاط تحول؛ 0 ,1−, 5−**

89. $f(x) = 5x^5 - 15x^4 - 50x^3$ **5 أصفار فعلية، 4 نقاط تحول؛ 5 ,0 ,2−**

ضع في أبسط صورة.

90. $(2 + 4i) + (-1 + 5i)$ $1 + 9i$

91. $(-2 - i)^2$ $3 + 4i$

92. $\frac{i}{1 + 2i}$ $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

مراجعة مهارات الاختبارات الموحدة

93. **اختبار الكفاءة الدراسية SAT/ACT** النقطة B تقع على بعد 10 وحدات من النقطة A، التي هي عبارة عن مركز دائرة نصف قطرها 6. إذا رُسم خط مماس من B إلى الدائرة، فما هي المسافة من B إلى نقطة التماس؟ **B**

A 6
B 8
C 10
D $2\sqrt{34}$
E $2\sqrt{41}$

94. **مراجعة** ما هي الصيغة القياسية لمعادلة المخروط الموضح أدناه؟ **G**

$$2x^2 + 4y^2 - 8x + 24y + 32 = 0$$

F $\frac{(x-4)^2}{3} + \frac{(y+3)^2}{11} = 1$

G $\frac{(x-2)^2}{6} + \frac{(y+3)^2}{3} = 1$

H $\frac{(x+2)^2}{5} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

J $\frac{(x-4)^2}{11} + \frac{(y+3)^2}{3} = 1$

95. يصنع أيمن هدفًا بيضاويًا لرمي السهام. ويرغب في أن يكون عرض الهدف 27 بوصة وارتفاعه 15 بوصة. ما المعادلة التي ينبغي لأيمن استخدامها لرسم الهدف؟ **C**

A $\frac{x^2}{7.5} + \frac{y^2}{13.5} = 1$

B $\frac{x^2}{56.25} + \frac{y^2}{182.25} = 1$

C $\frac{x^2}{182.25} + \frac{y^2}{56.25} = 1$

D $\frac{x^2}{13.5} + \frac{y^2}{7.5} = 1$

96. **مراجعة** إذا كانت $m = \frac{1}{x}$، $n = 7m$، $p = \frac{1}{n}$، $q = 14p$، و $r = \frac{1}{\frac{1}{2}q}$، أوجد x. **J**

F r
G q
H p
J $\frac{1}{r}$

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 66، يجب على الطلاب إدراك أن اتجاه القطع الناقص غير معطى. كلا الحلين صحيح بناءً على المعلومات المعطاة.

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب اطلب إلى كل طالبٍ كتابة معادلة القطع الناقص الذي محوره الأكبر من $(-3, 0)$ إلى $(3, 0)$ والمحور الأصغر من $(0, -2)$ إلى $(0, 2)$. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

إجابات إضافية

66. الاثنان؛ في تمثيل يوري البياني، المحور الأكبر أفقي. في تمثيل تشاندرا البياني، المحور الأكبر رأسي.

67. نموذج الإجابة: لا؛ في كلا القطعين الناقصين $a^2 = p + r$ و $b^2 = p$. إذًا $c = \sqrt{r}$. البؤرتان للقطع الناقص الأول هما $(0, \pm\sqrt{r})$ بينما بؤرتا القطع الناقص الثاني هما $(\pm\sqrt{r}, 0)$

68. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$

69. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1$

70. نموذج الإجابة: أولًا، استخدم المعادلة لإيجاد قيم a و b و h و k. استخدم $c^2 = a^2 - b^2$ لإيجاد قيم c. ثم حدد ما إذا كان المحور الأكبر أفقيًا أم رأسيًا. إذا كان المحور الأكبر أفقيًا، فإن البؤرتين تقعان عند $(h \pm c, k)$، الرؤوس عند $(h \pm a, k)$، والرأسان المرافقان عند $(h, k \pm b)$. إذا كان المحور الأكبر رأسيًا، فإن البؤرتين تقعان عند $(h, k \pm c)$، الرؤوس عند $(h, k \pm a)$، والرأسان المرافقان عند $(h \pm b, k)$.

التدريس المتمايز BL

توسع اطلب إلى الطلاب إجراء تخمين بشأن الطريقة التي سوف يجدون بها مساحة القطع الناقص، معتمدين على ما يعرفونه من معادلات الدوائر والقطع الناقص. بعد أن يكتبوا التخمينات على الورق، اطلب إليهم البحث عن القانون على شبكة الإنترنت لمعرفة ما إذا كانت تخميناتهم صحيحة. اطلب إليهم أخذ محيط القطع الناقص بعين الاعتبار كذلك. اسأل الطلا ب إن كانوا يعتقدون أنه يمكن تعميم محيط القطع الناقص باستخدام ما هو معروف عن محيط الدائرة.

6-3 القطع الزائد

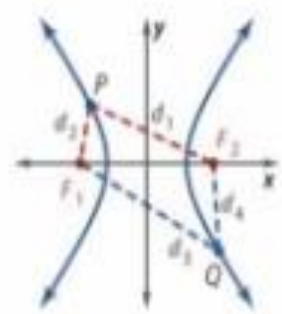
:: سابقًا	:: الآن	:: لماذا؟
• قمت بتحليل القطوع الناقصة والدوائر ورسمتها.	1 • تحليل معادلات القطوع الزائدة ورسمها بيانيًا. 2 استخدام المعادلات لتعريف أنواع القطوع المخروطية.	• تستخدم أجهزة اكتشاف الصواعق العديد من أجهزة الاستشعار لتحويل موجات الصواعق إلى أرقام وتسجيل تفاصيل الصعق باستخدام إشارات توقيت نظام تحديد المواقع (GPS) شديدة الدقة. يقوم جهازي استشعار باكتشاف الإشارة في وقت مختلف قليلًا وتنتج نقطة على قطع زائد حيث المسافة من كل جهاز استشعار تتناسب مع الفارق الزمني للوصول. تتمكن أجهزة الاستشعار من نقل الموقع الدقيق للصاعقة في الوقت الفعلي.

مفردات جديدة

قطع زائد **hyperbola**
محور قاطع **transverse axis**
محور مرافق **conjugate axis**

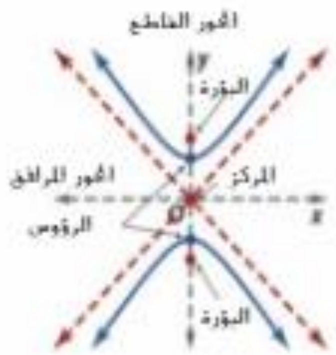
1 تحليل القطع الزائد وتمثيله

في حين إن القطع الناقص هو المحل الهندسي لكل النقاط في مستوى بحيث يكون مجموع المسافات من بؤرتين ثابتًا، فإنّ **القطع الزائد** هو المحل الهندسي لكل النقاط في مستوى بحيث تكون القيمة المطلقة للفرق في المسافات من البؤرتين ثابتة.



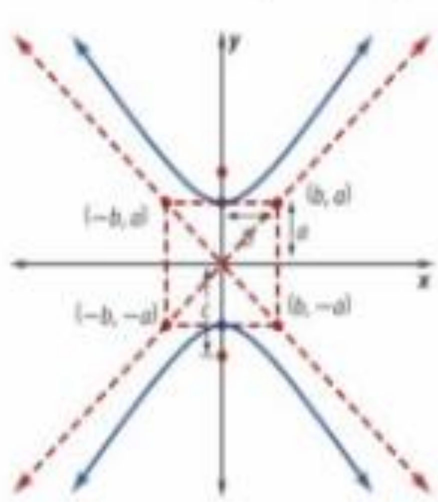
$$|d_1 - d_2| = |d_3 - d_4|$$

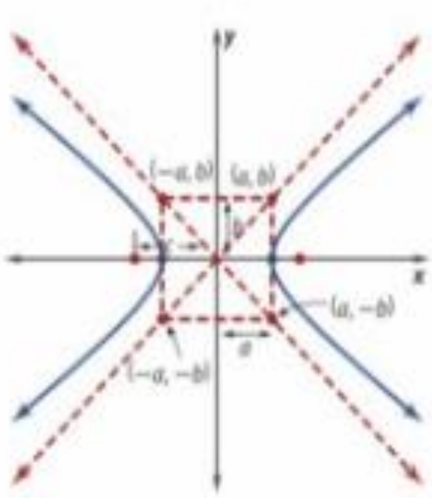
يتكون التمثيل البياني للقطع الزائد من فرعين منفصلين يقتربان من خطي التقارب. نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة ذي النقاط الطرفية عند البؤرتين هي المركز. الرؤوس هي تقاطع هذه القطعة المستقيمة وكل فرع من أفرع المنحنى.



مثل القطع الناقص، يكون للقطع الزائد محوري تناظر. **المحور القاطع** بطول $2a$ وحدة ويربط الرؤوس. **المحور المرافق** وهو عمودي على المحور القاطع، ويمر عبر المركز، ويبلغ طوله $2b$ وحدة.

تختلف العلاقة بين قيم a، b، و c بالنسبة للقطع الزائد عن العلاقة بين قيمها للقطع الناقص. فبالنسبة للقطع الزائد، تكون العلاقة $c^2 = a^2 + b^2$. بالإضافة إلى أنه بالنسبة لأي نقطة على القطع الزائد، تكون القيمة المطلقة بين المسافات من النقطة إلى البؤرتين هي $2a$.





1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3–6 تحليل القطع الناقص والدوائر وتمثيلهما بيانيًا.

الدرس 3–6 تحليل معادلات القطع الزائد وتمثيلها بيانيًا.
استخدام المعادلات لتحديد أنواع القطع المخروطي.

بعد الدرس 3–6 استخدام دوران المحاور لكتابة معادلات دوران القطع الزائد.

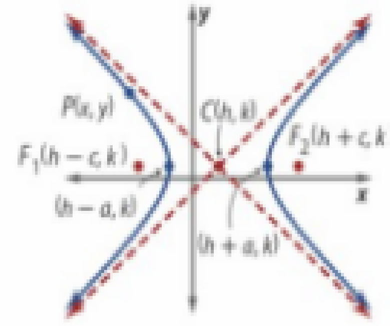
2 التعليم

أسئلة داعمة

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة **لماذا؟** الواردة في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- لماذا تعد أنظمة الكشف عن البرق مهمة؟ نموذج الإجابة: لأنها يمكن أن تساعد في التنبؤ بالطقس أو التحذير من عاصفة تقترب.



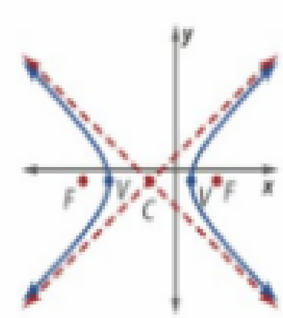
وكما هو الحال مع القطوع المخروطية الأخرى، يمكن استخدام تعريف القطع الزائد لاشتقاق معادلته. افترض أن $P(x, y)$ أي نقطة على القطع الزائد مركزه $C(h, k)$. إحداثيات البؤرتان والرؤوس موضحة على اليسار. بتعريف القطع الزائد، تكون القيمة المطلقة للفرق في المسافات من أي نقطة على القطع الزائد إلى البؤرتين ثابتة. بناءً عليه، $|PF_1 - PF_2| = 2a$. من ثم، فإما $PF_1 - PF_2 = 2a$ أو $PF_2 - PF_1 = 2a$. للإثبات أدناه، سنفترض أن $PF_1 - PF_2 = 2a$.

تعريف القطع الزائد	$PF_1 - PF_2 = 2a$
صيغة المسافة	$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2} - \sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2} = 2a$
خصائص التوزيع والطرح	$\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2} = 2a + \sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}$
خاصية التجميع	$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} = 2a + \sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}$
	$[(x-h)+c]^2+(y-k)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} + [(x-h)-c]^2+(y-k)^2$
	$(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2 = 4a^2+4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} + (x-h)^2-2c(x-h)+c^2+(y-k)^2$
خاصية الطرح	$-4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = 4a^2-4c(x-h)$
اقسم كل طرف على 4−	$a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = -a^2+c(x-h)$
قم بتربيع كل طرف	$a^2[(x-h)^2-2c(x-h)+c^2+(y-k)^2] = a^4-2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$
خاصية التوزيع	$a^2(x-h)^2-2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2 = a^4-2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$
خصائص الطرح والجمع	$a^2(x-h)^2-c^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2 = a^4-a^2c^2$
خاصية التوزيع	$(a^2-c^2)(x-h)^2+a^2(y-k)^2 = a^2(a^2-c^2)$
$a^2-c^2=-b^2$	$-b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2 = a^2(-b^2)$
اقسم كل طرف على $a^2(-b^2)$.	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

المعادلة العامة للقطع الزائد مركزه عند (h, k) موضحة أدناه.

المفهوم الأساسي الأشكال القياسية لمعادلات القطع الزائد

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه: المحور القاطع أفقي

المركز: (h, k)

الرؤوس: $(h \pm a, k)$

البؤرتان: $(h \pm c, k)$

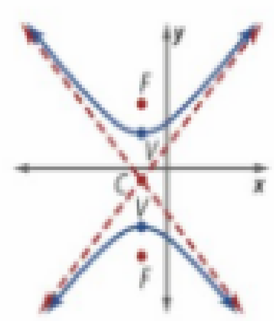
المحور القاطع: $y = k$

المحور المرافق: $x = h$

خطا التقارب: $y - k = \pm \frac{b}{a}(x-h)$

العلاقة: a, b, c $c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه: المحور القاطع عمودي

المركز: (h, k)

الرؤوس: $(h, k \pm a)$

البؤرتان: $(h, k \pm c)$

المحور القاطع: $x = h$

المحور المرافق: $y = k$

خطا التقارب: $y - k = \pm \frac{a}{b}(x-h)$

العلاقة: a, b, c $c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2+b^2}$

- لماذا يلزم اثنان من أجهزة الاستشعار لتحديد الموقع الدقيق لضربات البرق؟ يمكن مقارنة الزمن المستغرق لاستقبال الإشارة ومواقع أجهزة الاستشعار واستخدامها لتحديد موقع ضربات البرق على قطعٍ مخروطي.
- هل سيكون المزيد من أجهزة الاستشعار أكثر أم أقل دقة في الكشف عن موقع ضربة البرق؟ اشرح. كلما زادت أجهزة الاستشعار، ازدادت دقة الموقع لأن هناك المزيد من بيانات النقاط للمقارنة. يجب أن يكون ممكنًا تحديد موقع الضربة بأي اثنين من أجهزة الاستشعار.

1 تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانيًا

يبين **المثالان 1 و 2** كيفية تمثيل القطع الزائد بيانيًا عندما تعطى المعادلات بصيغ مختلفة. يوضح **المثال 3** كيفية كتابةً معادلة قطعٍ زائدٍ في حالة إعطاء مجموعة من خواص ذلك القطع الزائد. يبين **المثال 4** كيفية إيجاد الاختلاف المركزي للقطع الزائد.

التركيز على محتوى الرياضيات

القطع الزائد الصيغة القياسية لمعادلة القطع الزائد هي $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ إذا كان مفتوحًا باتجاه الأعلى والأسفل، أو $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ إذا كان مفتوحًا باتجاه اليمين واليسار.

يمكن استخدام الإحداثيات $(\pm a, \pm b)$ كالزوايا الأربع لصندوق مستطيل. يمكن رسم خطوط التقارب التي تحدد شكل القطع الزائد كأقطار للمستطيل تتجاوز حدوده ذلك المستطيل. محور القطع هو المحور الذي يصل الرؤوس ويتقاطع مع القطع الزائد. ولا يتقاطع المحور المرافق مع القطع الزائد.

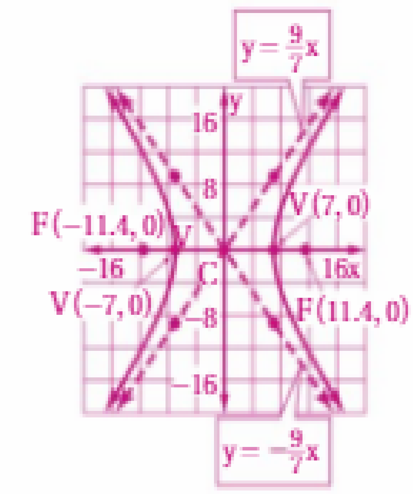
التقويم التكويني

استخدم التدريب الموجه الموجود بعد كل مثال لتحديد مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

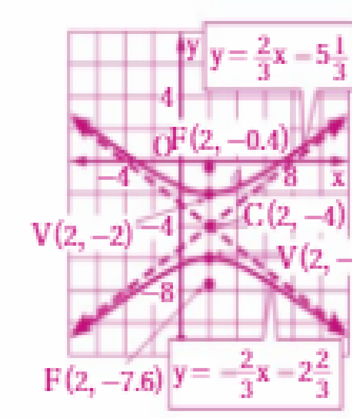
مثال إضافي

1 ارسم القطع الزائد المعطى بكل معادلة بيانيًا.

a. $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{81} = 1$



b. $\frac{(y+4)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$



المثال 1 تمثيل القطع الزائد في شكله القياسي

مثّل القطع الزائد الموضح بكل معادلة بيانيًا.

a. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$

المعادلة في شكلها القياسي يكون h و k مساويان لصفر. ولأن $a^2 = 9$ و $b^2 = 25$،
و $a = 3$ و $b = 5$. استخدم قيم a و b لإيجاد c.

$c^2 = a^2 + b^2$ معادلة ذات صلة بـ a و b و c بالنسبة للقطع الزائد

$c^2 = 3^2 + 5^2$ $a = 3$ و $b = 5$

$c = \sqrt{34}$ أو تقريبًا 5.83 حل للحصول على c.

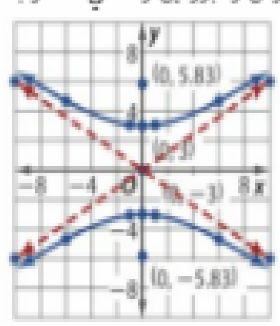
استخدم هذه القيم لـ h و k و a و b و c لتحديد خصائص القطع الزائد.

عندما تكون المعادلة في شكلها القياسي، فإن حد x^2 يُطرح.

الاتجاه:	رأسي	
المركز:	$(0, 0)$	(h, k)
الرؤوس:	$(0, 3)$ و $(0, -3)$	$(h, k \pm a)$
البؤرتان:	$(0, \sqrt{34})$ و $(0, -\sqrt{34})$	$(h, k \pm c)$
خطا التقارب:	$y = \frac{3}{5}x$ و $y = -\frac{3}{5}x$	$y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$

ارسم المركز والرؤوس والبؤرتين وخطي التقارب بيانيًا. ثم كوّن جدولًا بالقيم لرسم القطع الزائد.

x	y
−6	−4.69, 4.69
−1	−3.06, 3.06
1	−3.06, 3.06
6	−4.69, 4.69



b. $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

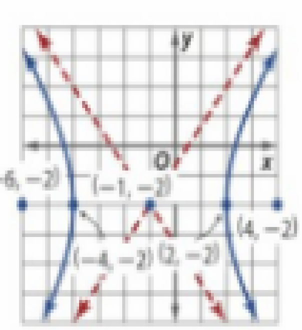
المعادلة في شكلها القياسي كون $h = -1$ أو $k = -2$ أو $a = \sqrt{9}$ أو 3، $b = \sqrt{16}$ أو 4.
و $c = \sqrt{9 + 16}$ أو 5. استخدم هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

عندما تكون المعادلة في شكلها القياسي، فإن حد y^2 يُطرح.

الاتجاه:	أفقي	
المركز:	$(-1, -2)$	(h, k)
الرؤوس:	$(2, -2)$ و $(-4, -2)$	$(h \pm a, k)$
البؤرتان:	$(4, -2)$ و $(-6, -2)$	$(h \pm c, k)$
خطا التقارب:	$y + 2 = \frac{4}{3}(x + 1)$ و $y + 2 = -\frac{4}{3}(x + 1)$ أو $y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$، $y = -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$	$y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$

ارسم المركز والرؤوس والبؤرتين وخطي التقارب بيانيًا. ثم اصنع جدولًا بالقيم لرسم القطع الزائد.

x	y
−6	−7.33, 3.33
−5	−5.53, 1.53
3	−5.53, 1.53
4	−7.33, 3.33

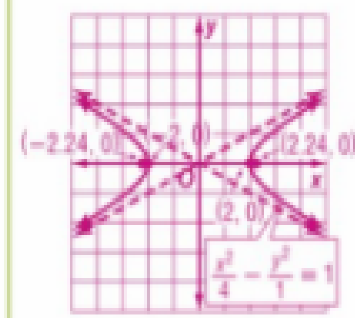


تمرين موجّه

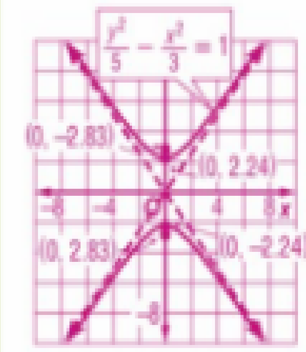
1A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

1B. $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{3} = 1$

1A.



1B.



الربط بتاريخ الرياضيات

هيباتيا (حوالي 370 ميلادي–415 ميلادي)

كانت هيباتيا رياضية وعالمة وفيلسوفة عملت كمدرسة في جامعة في الإسكندرية في مصر. كتبت هيباتيا كتابًا عن مخاريط أبولونيوس، الذي طور الأفكار المتعلقة بالقطع الزائد والقطع المكافئ والقطع الناقص.

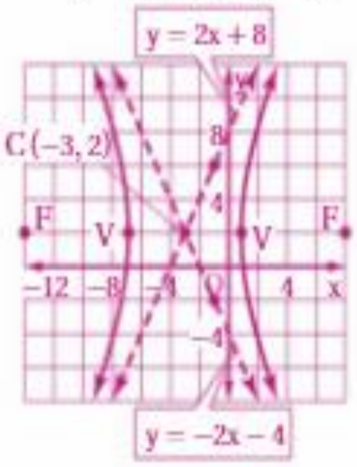
المصدر: كلية أغنيس سكوت

التدريس المتمايز AL OL

المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني اطلب إلى الطلا ب إنشاء ملصق يلخص خواص جميع القطوع المخروطية (القطع المكافئ والقطع الناقص والدوائر والقطع الزائد) في هذه الوحدة. يجب أن يكون هناك رسم توضيحي لكل قطع مخروطي. شجعهم على وضع رمز ملون للمتغيرات في المعادلات والرسوم التوضيحية بحيث يصبح من الواضح مدى تأثير المتغيرات المختلفة على القطع المخروطي.

مثال إضافي

2 مثل بيانيًا القطع الزائد المعطى بـ $4x^2 - y^2 + 24x + 4y = 28$



التعليم باستخدام التكنولوجيا

صفحة ويب اطلب إلى الطلاب البحث على الإنترنت لإيجاد تطبيقات تنطوي على قطع زائد. اطلب إلى الطلاب إنشاء روابط على مواقع الشبكات الاجتماعية للصفحات التي تضم أمثلة محددة يرون أنها مثيرة للاهتمام.

إذا كنت تعرف معادلة القطع الزائد في شكلها القياسي، فيمكنك استخدم الخصائص لتمثيل المنحنى بيانيًا. إذا أعطيت المعادلة في شكل آخر، فستحتاج إلى كتابة المعادلة في شكلها القياسي لتحديد الخصائص.

المثال 2 رسم القطع الزائد بيانيًا

مثّل القطع الزائد المعطى بالمعادلة $25x^2 - 16y^2 + 100x + 96y = 444$ بيانيًا.

أولًا، اكتب المعادلة في شكلها القياسي.

المعادلة الأصلية	$25x^2 - 16y^2 + 100x + 96y = 444$
اجمع الأطراف المتشابهة	$(25x^2 + 100x) - (16y^2 - 96y) = 444$
حلل إلى العوامل	$25(x^2 + 4x) - 16(y^2 - 6y) = 444$
أكمل التربيعات	$25(x^2 + 4x + 4) - 16(y^2 - 6y + 9) = 444 + 25(4) - 16(9)$
حلل إلى العوامل وبسِّط	$25(x + 2)^2 - 16(y - 3)^2 = 400$
اقسم كل طرف على 400	$\frac{(x+2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{25} = 1$

نصيحة دراسية

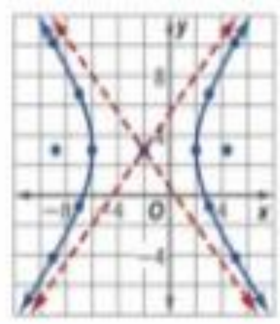
الصيغة القياسية عند التحويل من الشكل العام إلى الصيغة القياسية، تذكر دائمًا أن الفرق بين الحدين الجبريين يجب أن يساوي 1. عندما تقسم على العدد في الطرف الأيمن من المعادلة، ينبغي بقاء ثلاثي الحدود المربع الكامل في بسوط المقادير المطروحة.

المعادلة في شكلها القياسي الآن ومنها $h = -2$ و $k = 3$ و $a = \sqrt{16}$ أو 4، $b = \sqrt{25}$ أو 5، و $c = \sqrt{16 + 25}$ وهو $\sqrt{41}$ أو تقريبًا 6.4. استخدم هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه:	أفقي	عندما تكون المعادلة في شكلها القياسي، فإن حد y^2 يُطرح.
المركز:	$(-2, 3)$	(h, k)
الرؤوس:	$(-6, 3)$ و $(2, 3)$	$(h \pm a, k)$
البؤرتان:	$(-8.4, 3)$ و $(4.4, 3)$	$(h \pm c, k)$
خطا التقارب:	$y - 3 = \frac{5}{4}(x + 2)$ و $y - 3 = -\frac{5}{4}(x + 2)$ أو $y = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$ ، $y = \frac{5}{4}x + \frac{11}{2}$	$y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$

ارسم المركز والرؤوس والبؤرتين وخطي التقارب بيانيًا. ثم كوِّن جدولًا بالقيم لرسم القطع الزائد.

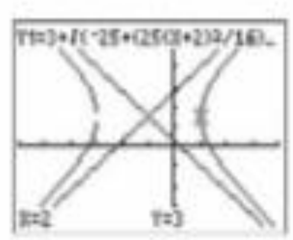
x	y
−9	−4.18, 10.18
−7	−0.75, 6.75
3	−0.75, 6.75
5	−4.18, 10.18



التحقق حل المعادلة من اجل y للحصول على دالتين بالمتغير x.

$$y = 3 + \sqrt{-25 + \frac{25(x+2)^2}{16}} \text{ ، } 3 - \sqrt{-25 + \frac{25(x+2)^2}{16}}.$$

ارسم المعادلات بيانيًا في نفس النافذة، مع معادلات خط التقارب وقارنها برسمك البياني، عن طريق اختبار بعض النقاط. ✔



[−12, 8] scl: 1 by [−8, 12] scl: 1

تمرين موجّه **2A–B. انظر الهامش.**

مثّل القطع الزائد المعطى بكل معادلة بيانيًا.

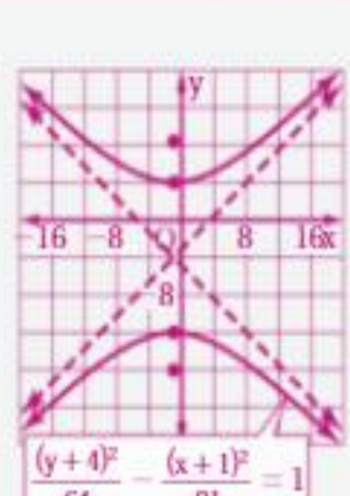
2A. $\frac{(y+4)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{81} = 1$

2B. $2x^2 - 3y^2 - 12x = 36$

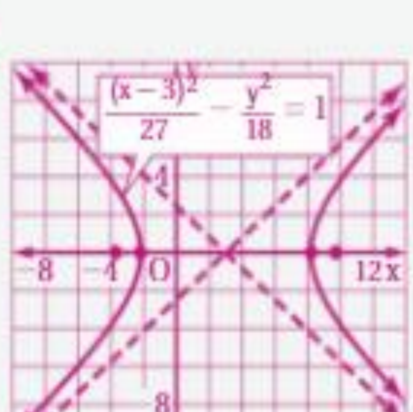
عند تمثيل القطع الزائد بيانيًا، فتذكر أن التمثيل البياني سيقترب من خطي التقارب عند تحركه بعيدًا عن الرؤوس. ارسم بالقرب من الرؤوس لتحسين دقة تمثيلك البياني.

إجابات إضافية (تدريب موجه)

2A.



2B.



يمكنك تحديد معادلة القطع الزائد إذا أعطيت الخصائص التي توفر المعلومات الكافية.

المثال 3 اكتب المعادلات بالخصائص المعطاة

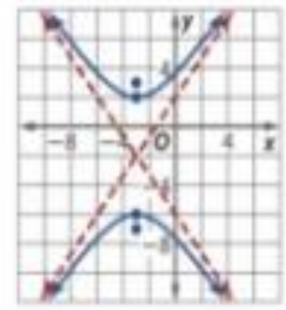
اكتب معادلة القطع الزائد بالخصائص المعطاة.

a. الرؤوس $(-3, -6)$، $(-3, 2)$؛ البؤرتان $(-3, -7)$، $(-3, 3)$

لأن إحداثيات x للرؤوس متشابهة، يكون المحور القاطع رأسيًا. أوجد مركز القطع الزائد وقيم a و b و c.

المركز، $(-3, -2)$	نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة بين البؤرتين
$a = 4$	المسافة من كل رأس إلى المركز
$c = 5$	المسافة من كل بؤرة إلى المركز
$b = 3$	$c^2 = a^2 + b^2$

لأن المحور القاطع رأسي، يندمج حد a^2 مع حد y^2. معادلة القطع الزائد هي $\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$. التمثيل البياني للقطع الزائد موضح في الشكل 6.3.1.



الشكل 6.3.1

b. الرؤوس $(-3, 0)$، $(-9, 0)$؛ خطا التقارب $y = 2x - 12$, $y = -2x + 12$

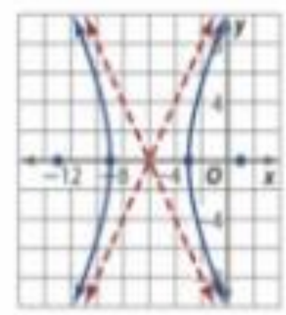
لأن إحداثيات y للرؤوس متشابهة، يكون المحور القاطع أفقيًا.

المركز، $(-6, 0)$	نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة بين الرؤوس
$a = 3$	المسافة من كل رأس إلى المركز

الميل لخطي التقارب $\pm\frac{b}{a}$. استخدم الميل الموجب لإيجاد b.

$\frac{b}{a} = 2$	الميل الموجب لخط التقارب
$\frac{b}{3} = 2$	$a = 3$
$b = 6$	حل للحصول على b

لأن المحور القاطع أفقي، يندمج حد a^2 مع حد x^2. معادلة الخط الزائد $\frac{(x+6)^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$. التمثيل البياني للقطع الزائد موضح في الشكل 6.3.2.



الشكل 6.3.2

تمرين موجّه

3A. الرؤوس $(3, 2)$، $(3, 6)$، طول المحور المرافق 10 وحدات $\frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{25} = 1$

3B. البؤرتان $(2, -2)$، $(12, -2)$؛ خطا التقارب $y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{4}$, $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$ $\frac{(x-7)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

توجد خاصية أخرى يمكن استخدامها لوصف القطع الزائد وهي الاختلاف المركزي. وصيغة الاختلاف المركزي تشبه صيغة كل القطوع المخروطية، $e = \frac{c}{a}$. تذكر أنه بالنسبة للقطع الناقص، يكون الاختلاف المركزي أكبر من 0 وأصغر من 1. أما بالنسبة للقطع الزائد، فإن الاختلاف المركزي دائما اكبر من 1.

المثال 4 إيجاد الاختلاف المركزي للقطع الزائد

حدد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطى بالمعادلة $\frac{(y-4)^2}{48} - \frac{(x+5)^2}{36} = 1$

أوجد c ثم حدد الاختلاف المركزي.

$c^2 = a^2 + b^2$	معادلة ذات صلة بـ a و b و c
$c^2 = 48 + 36$	$a^2 = 48$ و $b^2 = 36$
$c = \sqrt{84}$	حل للحصول على c

$e = \frac{c}{a}$	معادلة الاختلاف المركزي
$= \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{48}}$	$a = \sqrt{48}$ و $c = \sqrt{84}$
≈ 1.32	بسّط

الاختلاف المركزي للقطع الزائد 1.32 تقريبًا.

مثال إضافي

3 اكتب معادلةً لقطعٍ زائدٍ له الخواص التالية.

a. البؤرتان $(1, -5)$، $(1, 1)$؛ طول محور القطع 4 وحدات $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{5} = 1$

b. الرؤوس $(-3, 10)$، $(-3, -2)$؛ طول المحور المرافق 6 وحدات $\frac{(y-4)^2}{36} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$

نصيحة للمعلمين الجدد

كتابة المعادلة اطلب إلى الطلاب كتابة قائمة بالقيم التي أعطيت لهم من أجل a و b و c و h و k. هذا سوف يساعدهم على تنظيم ما أعطي لهم وتحديد ما يحتاجون لإيجاده.

مثال إضافي

4 حدد الإختلاف المركزي للقطع الزائد المعطى بـ $\frac{(y+2)^2}{32} - \frac{(x-1)^2}{25} = 1$ 1.33

2 تحديد القطع المخروطي

يبين **المثال 5** كيفية استخدام المميز لتحديد نوع القطع المخروطي الممثل في معادلة بالصيغة العامة. يبين **المثال 6** كيفية استخدام القطع الزائد في حالات من الحياة اليومية.

مثال إضافي

5 استخدم المميز لتحديد كل قطع مخروطي.

a. $2x^2+y^2-2x+5xy+12=0$

قطع زائد

b. $4x^2+4y^2-4x+8=0$

دائرة

c. $2x^2+2y^2-6y+4xy-10=0$ قطع مكافئ

نصيحة للمعلمين الجدد

اختلاف مركزي أكّد على أن المعادلة التي تربط a و b و c هي $a^2-b^2=c^2$ وليس $a^2+b^2=c^2$ لأنها كانت للقطع الناقص. بالإضافة إلى أن c ستكون دائمًا أكبر من a في القطع الزائد.

تمرين **موجّه**

حدد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطى بالمعادلة.

4A. $\frac{(x+8)^2}{64}-\frac{(y-4)^2}{80}=1$ 1.5

4B. $\frac{(y-2)^2}{15}-\frac{(x+9)^2}{75}=1$ 2.45

2 تعريف القطوع المخروطية

يمكنك تحديد نوع المخروط عندما تكون معادلة القطع المخروطي في شكلها العام، $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. المُميِّز أو B^2-4AC، يمكن استخدامه لتعريف القطع المخروطي.

المفهوم الأساسي تصنيف القطوع المخروطية باستخدام المُميِّز

التمثيل البياني لمعادلة من الدرجة الثانية تأخذ بالشكل $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ هو

- دائرة إذا كانت $B^2-4AC<0$، $B=0$، و $A=C$.
- قطع ناقص إذا كانت $B^2-4AC<0$، سواء $B\neq 0$ أو $A\neq C$
- قطع مكافئ إذا كانت $B^2-4AC=0$
- قطع زائد إذا كانت $B^2-4AC>0$.

عندما تكون $B=0$، سيكون القطع المخروطي إما رأسيًا أو أفقيًا. عندما تكون $B\neq 0$، لن يكون القطع المخروطي رأسيًا ولا أفقيًا.

المثال 5 تعريف القطوع المخروطية

استخدم المُميِّز لتعريف كل قطع مخروطي.

a. $4x^2+3y^2-2x+5y-60=0$

A هي 4 و B هي 0 و C هي 3.

أوجد المُميِّز.

$B^2-4AC=0^2-4(4)(3)$ أو -48

المُميِّز أصغر من 0، من ثم يجب أن يكون القطع المخروطي إما دائرة أو قطع ناقص. لأن $A\neq C$، فإن المقطع المخروطي هو قطع ناقص.

b. $2y^2+6x-3y+4xy+2x^2-88=0$

A هي 2 و B هي 4 و C هي 2.

أوجد المُميِّز.

$B^2-4AC=4^2-4(2)(2)$ أو 0

المُميِّز 0، من ثم فإن القطع المخروطي هو قطع مكافئ.

c. $18x-12y^2+4xy+10x^2-6y+24=0$

A هي 10 و B هي 4 و C هي -12.

أوجد المُميِّز.

$B^2-4AC=4^2-4(10)(-12)$ أو 496

المُميِّز أكبر من 0، من ثم فإن القطع المخروطي هو قطع زائد.

نصيحة دراسية

تعريف القطوع المخروطية عند إدارة قطع مخروطي كما في المثال 5b، فلا يمكن كتابة معادلته في شكلها القياسي في هذه الحالة. يمكن استخدام المُميِّز فقط لتحديد نوع القطع المخروطي دون رسمه بيانيًا. ستعرف المزيد عن المقاطع المخروطية المدارة في الدرس القادم.

تمرين **موجّه**

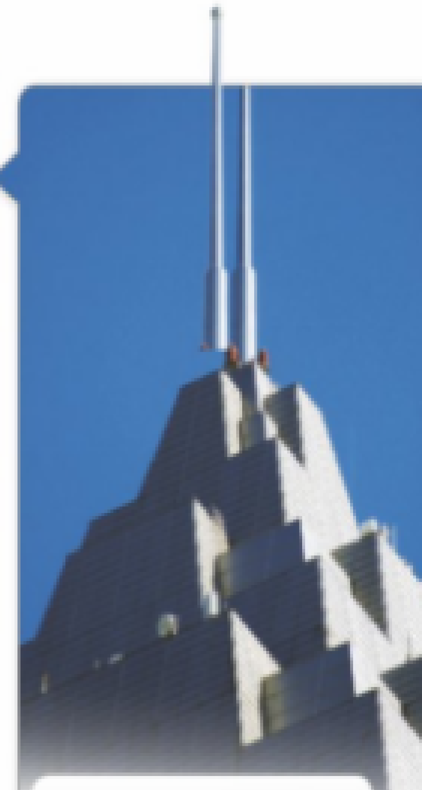
5A. $3x^2+4x-2y+3y^2+6xy+64=0$ قطع مكافئ

5B. $6x^2+2xy-15x=3y^2+5y+18$ قطع زائد

5C. $4xy+8x-3y=2x^2+8y^2$ قطع ناقص

365

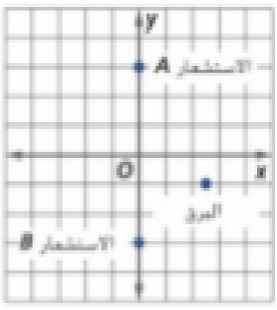
يمكن للباحثين تحديد موقع الصواعق على مسار قطع زائد بتشكل بأجهزة الاستشعار الواقعة عند البؤرتين.



المثال 6 الحياة اليومية تطبيق القطع الزائد

أرصاد جوية يقع جهازا استشعار لاكتشاف الصواعق على بعد 6 كم، حيث جهاز الاستشعار A شمال جهاز الاستشعار B. كمخطط للصواعق، يحدد الباحثون حدوث الصاعقة غرب كلا جهازي الاستشعار وعلى مسافة أبعد من جهاز الاستشعار A عنها من جهاز الاستشعار B بمقدار 1.5 كم.

a. أوجد معادلة القطع الزائد الذي تقع عليه الصاعقة.

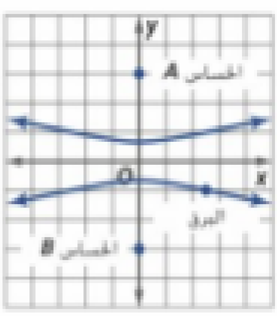


أولًا، ضع جهازي الاستشعار على شبكة إحداثيات بحيث تكون نقطة الأصل هي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة بين جهاز الاستشعار A وجهاز الاستشعار B. تقع الصاعقة غرب أجهزة الاستشعار وأقرب إلى جهاز الاستشعار B، بناء عليه ينبغي أن تكون في الربع الرابع.

يقع جهازا الاستشعار عند بؤرتي القطع الزائد، لذا c تكون 3. تذكر أن القيمة المطلقة للفرق في المسافات من أي نقطة على القطع الزائد إلى البؤرتين هي $2a$.

لأن الصاعقة تقع على مسافة أبعد من جهاز الاستشعار A عنها من جهاز الاستشعار B بمقدار 1.5 كم، $2a = 1.5$ و a هي 0.75. استخدم هذه القيم a و c لإيجاد b^2.

$c^2 = a^2 + b^2$	معادلة ذات صلة بـ a و b و c
$3^2 = 0.75^2 + b^2$	$c = 3$ و $a = 0.75$
$8.4375 = b^2$	حل للحصول على b^2



المحور القاطع يكون رأسيًا ومركز القطع الزائد يقع عند نقطة الأصل، من ثم ستكون المعادلة بالشكل $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ باستبدال قيم a^2 و b^2 تكون معادلة القطع الزائد $\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$

حدثت الصاعقة بطول القطع الزائد

$$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$$

b. أوجد إحداثيات الصاعقة إذا حدثت على بعد 2.5 كم شرق أجهزة الاستشعار.

لأن الصاعقة حدثت على بعد 2.5 كم شرق أجهزة الاستشعار، فإن $x = 2.5$. كانت الصاعقة أقرب إلى جهاز الاستشعار B منها إلى جهاز الاستشعار A، من ثم فإنها تقع في الفرع السفلي. استبدل قيمة x في المعادلة وحل للحصول على y.

$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$	المعادلة الأصلية
$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{2.5^2}{8.4375} = 1$	$x = 2.5$
$y \approx -0.99$	بسّط

تبلغ قيمة y حوالي -0.99، بناء عليه تقع الصاعقة عند $(2.5, -0.99)$.

تمرين موجّه $6A.\ \frac{x^2}{20.25} - \frac{y^2}{204.75} = 1$

6. أرصاد جوية يقع جهاز الاستشعار A على بعد 30 ميلًا غرب جهاز الاستشعار B. تحدث الصاعقة على مسافة أبعد من جهاز الاستشعار A عنها من جهاز الاستشعار B بمقدار 9 أميال.

A. أوجد معادلة القطع الزائد الذي تحدث عليه الصاعقة.

B. أوجد إحداثيات موقع الصاعقة إذا حدثت على بعد 8 أميال شمال أجهزة الاستشعار. $(5.16, 8)$

مثال إضافي

6 **لوران "LORAN" (الملاحة طويلة المدى)** هو نظام لملاحة للسفن يعتمد على نبضات الراديو والتي لا تحكمها ظروف الرؤية. على فرض أن محطتي نظام لوران E و F تبعدان 350 ميلا عن بعضهما على امتداد شاطئ مستقيم بحيث تكون E غرب F. عندما تقترب سفينة من الشاطئ، تستقبل نبضات الراديو من المحطتين وتستطيع تحديد أنها أبعد بمقدار 80 ميلًا عن المحطة F مما هي عليه عن المحطة E.

a. أوجد المعادلة للقطع الزائد الذي تقع السفينة عليه. $\frac{x^2}{1600} - \frac{y^2}{29{,}025} = 1$

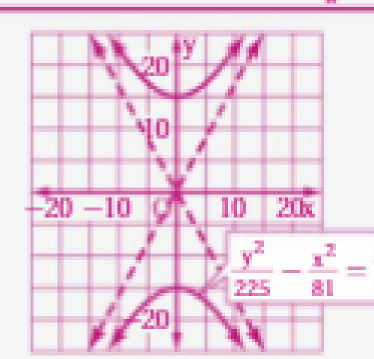
b. أوجد الإحداثيات الدقيقة للسفينة إن كانت تبعد 125 ميلًا عن الشاطئ. $(-49.6, 125)$

نصيحة للمعلمين الجدد

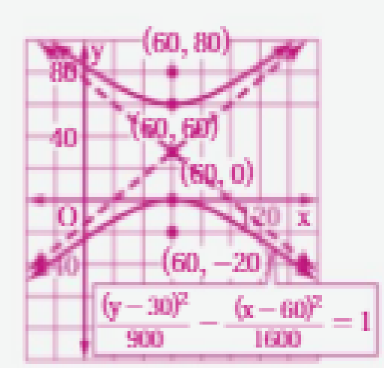
رسم تخطيطي في مسائل تطبيقات من الحياة اليومية، يجب على الطلاب رسم مخطط مع مسميات لما يتم وصفه. سوف يساعد ذلك الطلاب على تصوّر ما يحدث ويضمن الدقة.

إجابات إضافية

11.



22.



23. $\frac{(y-1)^2}{15} - \frac{(x+1)^2}{49} = 1$

24. $\frac{(x-1)^2}{36} - \frac{(y-5)^2}{64} = 1$

25. $\frac{(x-3)^2}{27} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

26. $\frac{(y-6)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{49} = 1$

27. $\frac{(y+8)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{33} = 1$

28. $\frac{(x+4)^2}{144} - \frac{(y-7)^2}{25} = 1$

29. $\frac{(x+7)^2}{25} - \frac{(y-2)^2}{49} = 1$

30. $\frac{(y+5)^2}{19} - \frac{x^2}{36} = 1$

31. $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{36} = 1$

32. $\frac{(y-4)^2}{36} - \frac{(x-2)^2}{64} = 1$

33a. $\frac{(y-4)^2}{9} - \frac{(x-5)^2}{25} = 1$

3 التدريب

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 56 للتحقق من استيعاب الطلاب للمفاهيم.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات التي ستعطيها للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع في التمارين من 12 إلى 21، قد يخطئ الطلاب في اتجاه تمثيلاتهم البيانية. إذا كان x حدًا موجبًا، فهناك محور قطع أفقي، وهذا يعني أن القطع الزائد سيكون مفتوحًا باتجاه اليمين واليسار. وإذا كان y حدًا موجبًا، فهناك محور قطع رأسي، ويعني ذلك أنّ القطع الزائد سيكون مفتوحًا باتجاه الأعلى والأسفل.

المتابعة

استكشف الطلاب القطع المخروطي.

اطرح السؤال التالي:

- ما أوجه الشبه والاختلاف بين القطع الزائد وغيره من القطوع المخروطية؟ نموذج الإجابة: أوجه الشبه: القطع المخروطي هو منحنى؛ تحتوي المعادلات على متغير أو متغيرين مرفوعين للقوة الثانية. أوجه الاختلاف: للقطع الزائد فرعان؛ القطع المخروطي الآخر متصل.

تمارين

1-10. انظر الفصل 6 ملحق الإجابات.

مثّل القطع الزائد الموضح بكل معادلة بيانيًا. (المثال 1)

1. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$
2. $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{17}=1$
3. $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{30}=1$
4. $\frac{y^2}{34}-\frac{x^2}{14}=1$
5. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{21}=1$
6. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1$
7. $\frac{y^2}{81}-\frac{x^2}{8}=1$
8. $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{14}=1$
9. $3x^2-2y^2=12$
10. $3y^2-5x^2=15$

11. **الإضاءة** يمكن تمثيل الضوء الساقط على جدار من مصباح المكتب بواسطة قطع زائد. يمكن تمثيل الضوء الصادر من مصباح مكتب محدد بالمعادلة $\frac{y^2}{225}-\frac{x^2}{81}=1$ مثل القطع الزائد بيانيًا. (المثال 1)

انظر الهامش.

مثّل القطع الزائد المعطى بكل معادلة بيانيًا. (المثال 2)

12–21. انظر الفصل 6 ملحق الإجابات.

12. $\frac{(x+5)^2}{9}-\frac{(y+4)^2}{48}=1$
13. $\frac{(y-7)^2}{4}-\frac{x^2}{33}=1$
14. $\frac{(x-2)^2}{25}-\frac{(y-6)^2}{60}=1$
15. $\frac{(x-5)^2}{49}-\frac{(y-1)^2}{17}=1$
16. $\frac{(y-3)^2}{16}-\frac{(x-4)^2}{42}=1$
17. $\frac{(x+6)^2}{64}-\frac{(y+5)^2}{58}=1$
18. $x^2-4y^2-6x-8y=27$
19. $-x^2+3y^2-4x+6y=28$
20. $13x^2-2y^2+208x+16y=-748$
21. $-5x^2+2y^2-70x-8y=287$

انظر الهامش.

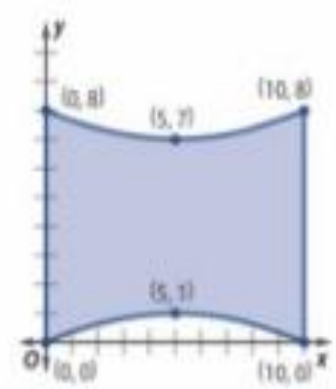
22. **زلازل** بعد اكتشاف جهاز رصد الزلازل لزلزال، اكتشف جهاز رصد الزلازل الواقع شمال الجهاز الأول زلزالًا آخر. تقع البؤرة للزلزال الآخر على أحد أفرع القطع الزائد الممثل بالمعادلة $\frac{(y-30)^2}{900}-\frac{(x-60)^2}{1600}=1$، حيث تقع أجهزة رصد الزلازل عند البؤرتين. ارسم القطع الزائد بيانيًا. (المثال 2)

23–32. انظر الهامش.

اكتب معادلة القطع الزائد باستخدام الخصائص المعطاة. (المثال 3)

23. البؤرتان $(-1, 9)$، $(-1, -7)$، يبلغ طول المحور المرافق 14 وحدة
24. الرؤوس $(7, 5)$، $(-5, 5)$، البؤرتان $(11, 5)$، $(-9, 5)$
25. البؤرتان $(9, -1)$، $(-3, -1)$، يبلغ طول المحور المرافق 6 وحدات
26. الرؤوس $(-1, 9)$، $(-1, 3)$، خطا التقارب $y=\pm\frac{3}{7}x+\frac{45}{7}$
27. الرؤوس $(-3, -12)$، $(-3, -4)$، البؤرتان $(-3, -15)$، $(-3, -1)$
28. البؤرتان $(9, 7)$، $(-17, 7)$، خطا التقارب $y=\pm\frac{5}{12}x+\frac{104}{12}$
29. المركز $(-7, 2)$، خطا التقارب $y=\pm\frac{7}{5}x+\frac{59}{5}$، يبلغ طول المحور القاطع 10 وحدات
30. المركز $(0, -5)$، خطا التقارب $y=\pm\frac{\sqrt{19}}{6}x-5$، يبلغ طول المحور المرافق 12 وحدة
31. الرؤوس $(0, -3)$، $(-4, -3)$، يبلغ طول المحور المرافق 12 وحدة
32. الرؤوس $(2, 10)$، $(2, -2)$، يبلغ طول المحور المرافق 16 وحدة

33. **هندسة معمارية** يوضح الرسم البياني أدناه مخطط طابق في مبنى إداري.



a. اكتب المعادلة التي سوف تمثل الجوانب المنحنية للمبنى. انظر الهامش.

b. تمثل كل وحدة على المستوى الإحداثي 15 قدمًا. ما هو أقل عرض للمبنى؟ (المثال 3) **90 ft**

حدد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطى بواسطة المعادلة. (المثال 4)

34. $\frac{(y-1)^2}{10}-\frac{(x-6)^2}{13}=1$ **1.52**
35. $\frac{(x+4)^2}{24}-\frac{(y+1)^2}{15}=1$ **1.27**
36. $\frac{(x-3)^2}{38}-\frac{(y-2)^2}{5}=1$ **1.06**
37. $\frac{(y+2)^2}{32}-\frac{(x+5)^2}{25}=1$ **1.33**
38. $\frac{(y-4)^2}{23}-\frac{(x+11)^2}{72}=1$ **2.03**
39. $\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+4)^2}{29}=1$ **1.68**

حدد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطى بالمعادلة. (المثال 4)

40. $11x^2-2y^2-110x+24y=-181$ **2.55**
41. $-4x^2+3y^2+72x-18y=321$ **1.32**
42. $3x^2-2y^2+12x-12y=42$ **1.58**
43. $-x^2+7y^2+24x+70y=-24$ **2.83**

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجبات	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-56, 77-80, 82-101	1-55 فردي، 98-101	2-56 زوجي، 77-80, 82-97
OL ضمن المستوى	1-65 فردي، 66, 67-75 فردي، 76-80, 82-101	1-56, 98-101	57-80, 82-97
BL أعلى من المستوى	57-101		

استخدم التمييز لتمييز كل قطع مخروطي. (المثال 5)

44. $14y + y^2 = 4x - 97$ قطع مكافئ

45. $18x - 3x^2 + 4 = -8y^2 + 32y$ قطع زائد

46. $14 + 4y + 2x^2 = -12x - y^2$ قطع ناقص

47. $12y - 76 - x^2 = 16x$ قطع مكافئ

48. $2x + 8y + x^2 + y^2 = 8$ دائرة

49. $5y^2 - 6x + 3x^2 - 50y = -3x^2 - 113$ قطع ناقص

50. $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$ دائرة

51. $-56y + 5x^2 = 211 + 4y^2 + 10x$ قطع زائد

52. $-8x + 16 = 8y + 24 - x^2$ قطع مكافئ

53. $x^2 - 4x = -y^2 + 12y - 31$ دائرة

54. **فيزياء** عادةً ما يحدث القطع الزائد عندما تمر لوحا زجاج متماثلين تقريبًا متلامسين عند أحد الحواف والمسافة بينهما بمقدار 5 ملم تقريبًا وعند الحافة الأخرى يوجد سائل سميك. حيث سيرتفع السائل بالخاصية الشعرية ليشكل قطعًا زائدًا نتيجة لتوتر السطح. أوجد نموذجًا للقطع الزائد إذا كان المحور المرافق 50 سم والمحور القاطع 30 سم.
$\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{625} = 1$ or $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{625} = 1$

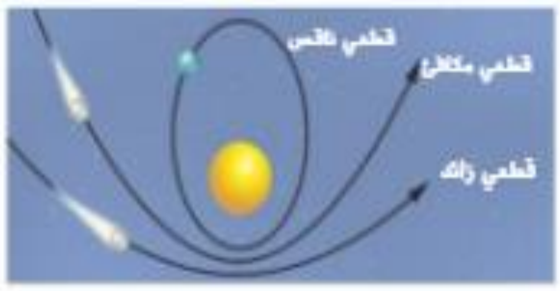
55. **طيران** تقوم إدارة الطيران الفيدرالية برحلات طيران تجريبية لاختبار التقنية الجديدة في الطائرات. وعند تجميع بيانات إحدى طائرات الاختبار، كانت على مسافة أبعد من المطار A عنها من المطار B بمقدار 18 كيلومتر. وكان كلا المطارين على بعد 72 كم من الطريق السريع نفسه، مع كون المطار B جنوب المطار A. (المثال 6)

a. اكتب معادلة القطع الزائد مركزه عند نقطة الأصل التي تواجدت عندها الطائرة عند تجميع البيانات. انظر الهامش.

b. مثّل المعادلة بيانيًا، مشيرًا إلى فرع القطع الزائد الذي تقع عليه الطائرة. انظر الهامش.

c. عند تجميع البيانات، كانت الطائرة على بعد 40 ميلًا من الطريق السريع. أوجد إحداثيات الطائرة. $(40, 13.7)$

56. **فلك** بالرغم من أن كل كوكب من الكواكب الموجودة في نظامنا الشمسي يتحرك حول الشمس في مدار بيضاوي، إلا أن المذنبات قد تكون لها مدارات بيضاوية أو قطع مكافئة أو قطع زائدة حيث يكون مركز الشمس هو البؤرة. (المثال 5)



فيما يلي تمثيل لمسارات ثلاثة مذنبات، حيث تُقاس قيم x و y بالجيجا متر. استخدم المميز لتعريف كل قطع مخروطي.

a. $3x^2 - 18x - 580850 = 4.84y^2 - 38.72y$ قطع زائد

b. $-360x - 8y = -y^2 - 1096$ قطع مكافئ

c. $-24.88y + x^2 = 6x - 3.11y^2 + 412341$ قطع ناقص

قم باشتقاق الشكل العام لمعادلة قطع زائد لكل من الخصائص التالية.

57. المحور القاطع الرأسي متمركز عند نقطة الأصل

58. المحور القاطع الأفقي متمركز عند نقطة الأصل

57–58. انظر الفصل 6 ملحق الإجابات.

أوجد حل كل نظام من المعادلات. قرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر.

59. $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{84} = 1$ ، $2y = x - 10$ $(-1.3, -5.7)$, $(7, -1.5)$

60. $\frac{x^2}{36} - \frac{(y-4)^2}{4} = 1$ ، $y = -\frac{1}{4}x + 3$ $(-6.2, 4.6)$, $(16.5, -1.1)$

61. $\frac{(y+2)^2}{64} - \frac{(x+5)^2}{49} = 1$ ، $y = 2x$ $(-5, -10)$, $(6.9, 13.8)$

62. $\frac{(x-5)^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ ، $3x - y = 9$ $(1.9, -3.4)$, $(4.3, 4.0)$

63. $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{25} = 1$ ، $\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{25} = 1$ $(0, 6)$, $(0, -6)$

64. $\frac{(x+1)^2}{49} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$ ، $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$
$(-2.0, -0.2)$, $(-6.7, -3.2)$, $(5.6, -2.6)$, $(2.0, -0.2)$

65. **ألعاب نارية** سمع علي و عيسى، اللذين كانا على بعد 3 أميال ويتحدثان في هواتفهما الخلوية، صوت نهائي للألعاب النارية. سمع عيسى النهائي قبل ثانية تقريبًا من سماع علي له. افترض أن الصوت ينتقل بسرعة 1100 قدم في الثانية.

a. اكتب معادلة القطع الزائد الذي تقع عليه الألعاب النارية. ضع مواقع علي وعيسى على المحور x، مع وضع علي جهة اليسار ونقطة المنتصف بينهما عند نقطة الأصل. انظر الهامش.

b. صف فرع القطع الزائد الذي وقع عليه عرض الألعاب النارية. على الفرع الأيمن

66. **هندسة معمارية** برج ميناء كوبه عبارة عن هيكل **قطع زائد** في كوبه، اليابان. هذا يعني أن الشكل ناتج عن دوران القطع الزائد حول محوره المرافق. افترض أن الاختلاف المركزي للقطع الزائد المستخدم لإنتاج نموذج القطع الزائد لشكل البرج هو 19.

b. القمة: 4.3 m تقريبًا؛ القاعدة: 5.7 m تقريبًا

a. إذا كان عرض البرج 8 م عند أقل نقطة، حدد معادلة القطع الزائد المستخدمة لإنتاج القطع الزائد. انظر الهامش.

b. إذا كان ارتفاع قمة البرج عن مركز القطع الزائد 32 م وكانت قاعدة البرج أسفل المركز بـ 76 م، فما هي أنصاف أقطار قمة وقاعدة البرج؟

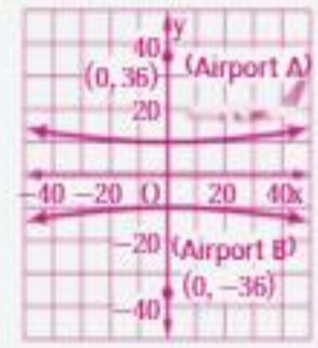
انتبه!

خطأ شائع في التمارين من 44 إلى 53، يجب أن يعيد الطلاب ترتيب المعادلة لتصبح بالصيغة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ تأكد من أن الطلاب يستخدمون معامل الحد xy من أجل B. وإن لم يكن هناك حد xy في المعادلة، عندها تكون $B = 0$

إجابات إضافية

55a. $\frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{1215} = 1$

55b.



65a. $\frac{x^2}{550^2} - \frac{y^2}{7901^2} = 1$

66a. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{5760} = 1$

67. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

68. $\frac{y^2}{10} - \frac{(x+3)^2}{16} = 1$

69. $(-142.5, 2856.0)$, $(3653.6, 4901.0)$, $(700.1, 513.0)$, $(1852.3, -107.7)$

70. $\frac{(y-1)^2}{64} - \frac{(x-5)^2}{36} = 1$

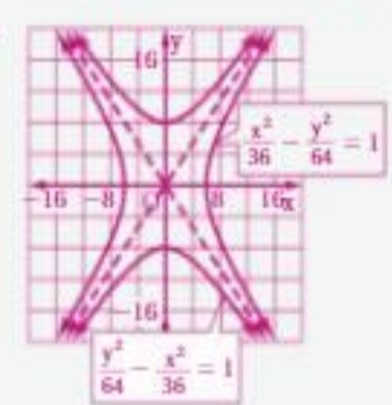
71. $\frac{(x+4)^2}{25} - \frac{(y-3)^2}{49} = 1$

72. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{15} = 1$

73. $\frac{(x-6)^2}{36} - \frac{(y+2)^2}{13} = 1$

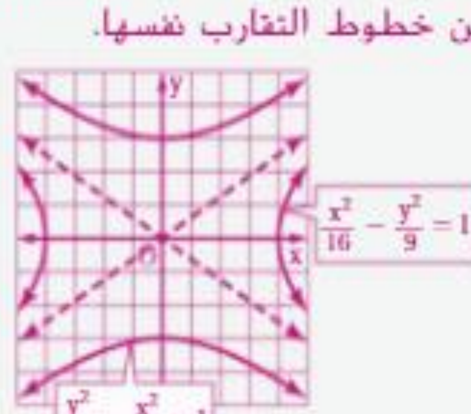
74. $\frac{(y-1)^2}{15} - \frac{(x+1)^2}{49} = 1$

76a.



76b. بؤرتا التمثيل البياني الأول هما $(-10, 0)$ و $(10, 0)$. بؤرتا التمثيل البياني الثاني هما $(0, -10)$ و $(0, 10)$. رأسا التمثيل البياني الأول هما $(-6, 0)$ و $(6, 0)$. رأسا التمثيل البياني الثاني هما $(0, -8)$ و $(0, 8)$. للتمثيلين البيانيين خطوط التقارب نفسها.

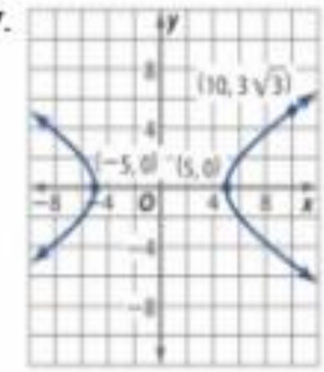
76d.

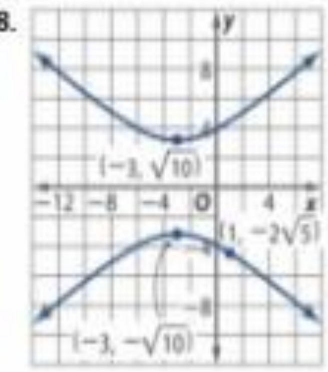


78a. قطع مكافئ؛ إذا كانت $rs = 0$، فعندها إما أن تكون $r = 0$ أو $s = 0$ إذًا، إما أن الحد x^2 يساوي 0 أو أن الحد y^2 يساوي 0. بما أن المعادلة تضم حدًا واحدًا فقط مرفوعًا للقوة التربيعية، فسوف تكون معادلة قطع مكافئ.

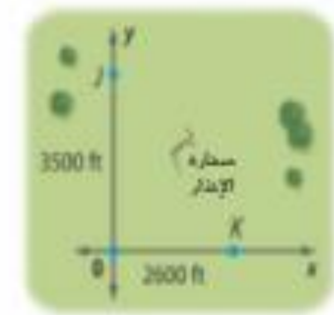
78b. قطع ناقص؛ إذا كانت $rs > 0$، فعندها إما أن يكون كلٌ من r و s أكبر من 0، أو أن كلًا من r و s أكبر من 0. وفي كلتا الحالتين، ستضم المعادلة حدودًا مرفوعة للقوة التربيعية سيجري جمعها. ولذلك ستكون معادلة قطع ناقص.

اكتب معادلة كل قطع زائد. **68–67. انظر الهامش.**

67. 

68. 

69. **صوت** عند انطلاق صفارة إنذار الإعصار، كان هناك ثلاثة أشخاص عند J و K و O كما هو موضح بالتمثيل البياني أدناه.



يسمع الشخص الموجود عند J صفارة الإنذار قبل الشخص الموجود عند O بثانيتين. يسمع الشخص الموجود عند K صفارة الإنذار قبل الشخص الموجود عند O بثانية. أوجد الموقع المحتمل لصفارة إنذار الإعصار. افترض أن الصوت ينتقل بسرعة 1100 قدم في الثانية. (إرشاد: كل موقع من مواقع صفارة الإنذار هو نقطة تقاطع بين القطع الزائد ذي البؤرتين عند O و J والقطع الزائد ذي البؤرتين عند O و K). **انظر الهامش.**

70–74. انظر الهامش.

اكتب معادلة القطع الزائد باستخدام الخصائص المعطاة.

70. المركز عند $(5, 1)$، الرأس عند $(5, 9)$، ومعادلة خط تقارب هي $3y = 4x - 17$

71. يقع مركز القطع الزائد عند $(-4, 3)$ والرأس عند $(1, 3)$. معادلة إحدى خطي التقارب هي $7x + 5y = -13$

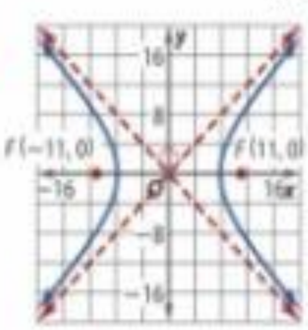
72. البؤرتان عند $(0, 2\sqrt{6})$ و $(0, -2\sqrt{6})$. الاختلاف المركزي هو $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

73. الاختلاف المركزي للقطع الزائد هو $\frac{7}{6}$ والبؤرتان عند $(-1, -2)$ و $(13, -2)$.

74. للقطع الزائد بؤرتين عند $(-1, 9)$ و $(-1, -7)$ وقيمتي الميلين لخطي التقارب هما $\pm\frac{\sqrt{15}}{7}$

75. الحالة الخاصة للقطع الزائد عندما تكون $a = b$. خطا التقارب للقطع الزائد في هذه الحالة هما متعامدان والزاوية التي يصنعها كل خط متقارب مع المحور القاطع يساوي قياسها 45 درجة. اكتب معادلة للقطع الزائد أدناه.

$$\frac{2x^2}{121} - \frac{2y^2}{121} = 1$$



76. **تمثيلات متعددة** في هذه المسألة، ستكتشف نوع خاص من القطع الزائد يُسمى القطع الزائد المرافق. ويحدث ذلك عندما يكون المحور المرافق لقطع زائد هو المحور القاطع لقطع زائد آخر.

a. **بيانيًا** قم بإعداد التمثيلات البيانية لـ $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ و $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$ على المستوى الإحداثي نفسه. **انظر الهامش.**

b. **تحليليًا** قارن البؤرتين والرؤوس وخطي التقارب بالتمثيلات البيانية. **انظر الهامش.**

c. **تحليليًا** اكتب معادلة القطع الزائد المرافق لـ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ $\quad \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

d. **بيانيًا** قم بإعداد التمثيلات البيانية للقطوع الزائدة المرافقة الجديدة. **انظر الهامش.**

e. **لفظيًا** خمّن أوجه التشابه بين القطوع الزائدة المرافقة.

نموذج الإجابة: القطوع الزائدة المقترنة لها نفس خطي التقارب، والمسافة من المركز إلى كل بؤرة تكون متماثلة.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدم مهارات التفكير العليا

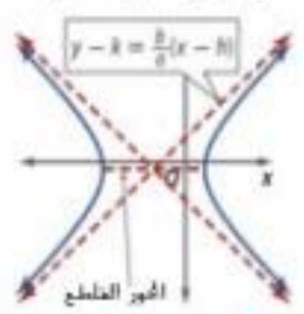
77. **مسألة مفتوحة** اكتب معادلة لقطع زائد حيث المسافة بين البؤرتين ضعف طول المحور القاطع. **نموذج الإجابة:** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$

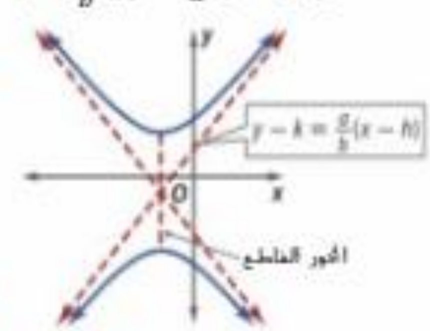
78. **التبرير** اعتبر أن $rx^2 = -sy^2 - t$. صف نوع القطع المخروطي المتشكل لكل مما يلي، وضح تبريرك المنطقي. **أ–د– انظر الهامش.**

a. $rs = 0$ b. $rs > 0$

c. $r = s$ d. $rs < 0$

79. **الكتابة في الرياضيات** وضح سبب تغير معادلة خطي التقارب للقطع الزائد من $\pm\frac{b}{a}$ إلى $\pm\frac{a}{b}$ بناءً على موقع المحور القاطع.





انظر الفصل 6 ملحق الإجابات.

80. **التبرير** افترض أن لديك خاصتين مما يلي: الرؤوس أو البؤرتان أو المحور القاطع أو المحور المرافق أو خطا التقارب. هل من الممكن في بعض الأحيان أو دائمًا أو لا يمكن كتابة معادلة للقطع الزائد؟

انظر الفصل 6 ملحق الإجابات.

81. **مسألة تحدي** قطع زائد له بؤرتين عند $F_1(0, 9)$ و $F_2(0, -9)$ ويحتوي على نقطة P. المسافة بين P و F_1 أكبر بمقدار 6 وحدات عن المسافة بين P و F_2. اكتب معادلة القطع الزائد في شكلها القياسي.

انظر الفصل 6 ملحق الإجابات.

82. **إثبات** يتشكل القطع الزائد في الحالة الخاصة عندما تكون $a = b$ في الصيغة القياسية لمعادلة القطع الزائد. أثبت أن الاختلاف المركزي لكل قطع زائد في الحالة الخاصة هي $\sqrt{2}$.

انظر الفصل 6 ملحق الإجابات.

83. **الكتابة في الرياضيات** صف خطوات إيجاد معادلة القطع الزائد إذا أعطيت البؤرتين وطول المحور القاطع.

انظر الفصل 6 ملحق الإجابات.

إجابات إضافية

78c. دائرة؛ إذا كانت $r = s$ فستضم المعادلة حدودًا مرفوعة للقوة التربيعية سيجري جمعها ويمكن كتابتها بحيث يكون معامل كلا الحدين 1. ولذلك ستكون معادلة دائرة.

78d. قطع مكافئ؛ إذا كانت $rs < 0$. فعندها إما أن تكون $r < 0$ أو $s < 0$ وفي كلتا الحالتين، ستضم المعادلة حدودًا مرفوعة للقوة التربيعية سيجري طرحها. ولذلك ستكون معادلة قطع زائد.

مراجعة شاملة

مثل القطع الناقص الموضح بكل معادلة بيانيًا. 84–86. انظر الهامش.

84. $(x-8)^2+\frac{(y-2)^2}{81}=1$

85. $\frac{x^2}{64}+\frac{(y+5)^2}{49}=1$

86. $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+5)^2}{36}=1$

87. **حركة القذيفة** يمكن تمثيل ارتفاع كرة بيسبول عند ضربها بسرعة ابتدائية قدرها 80 قدمًا في الثانية بالمعادلة $h = -16t^2 + 80t + 5$، حيث t الوقت بالثواني.

a. ما هو ارتفاع الرأس عن سطح الأرض؟ **105 ft**

b. إذا كان ارتفاع التقاط لاعب الدفاع هو نفس الارتفاع الابتدائي للكرة، فبعد كم من الوقت تقريبًا من ضرب الكرة سيلتقط اللاعب إياها؟ **5 ثوانٍ تقريبًا**

اكتب كل نظام من المعادلات كمعادلة مصفوفة، $AX = B$. ثم استخدم طريقة حذف غاوس–جوردان على المصفوفة المصافة لحل المنظومة. 88–90. انظر الهامش.

88. $3x_1+11x_2-9x_3=25$
$-8x_1+5x_2+x_3=-31$
$x_1-9x_2+4x_3=13$

89. $x_1-7x_2+8x_3=-3$
$6x_1+5x_2-2x_3=2$
$3x_1-4x_2+9x_3=26$

90. $2x_1-5x_2+x_3=28$
$3x_1+4x_2+5x_3=17$
$7x_1-2x_2+3x_3=33$

حل كل معادلة للحصول على جميع قيم θ.

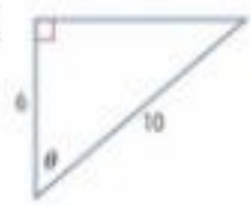
91. $\tan\theta=\sec\theta-1$ **$2n\pi, n\in\mathbb{Z}$**

92. $\sin\theta+\cos\theta=0$ **$\frac{3\pi}{4}+n\pi, n\in\mathbb{Z}$**

93. $\csc\theta-\cot\theta=0$ **لا يوجد حل**

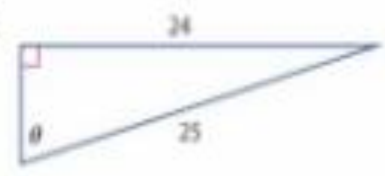
أوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست لـ θ.

94.



$\sin\theta=\frac{4}{5}, \cos\theta=\frac{3}{5}, \tan\theta=\frac{4}{3}, \csc\theta=\frac{5}{4}, \sec\theta=\frac{5}{3}, \cot\theta=\frac{3}{4}$

95.



$\sin\theta=\frac{24}{25}, \cos\theta=\frac{7}{25}, \tan\theta=\frac{24}{7}, \csc\theta=\frac{25}{24}, \sec\theta=\frac{25}{7}, \cot\theta=\frac{7}{24}$

استخدم الصفر المعطى لإيجاد كل الأصفار المركبة لكل دالّة. ثم اكتب التحليل إلى العوامل الخطية للدالّة.

96. $f(x)=2x^5-11x^4+69x^3+135x^2-675x; 3-6i$

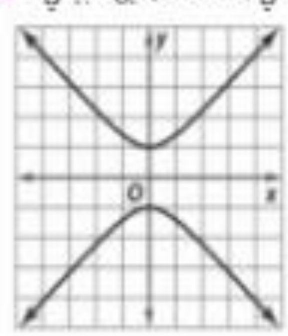
97. $f(x)=2x^5-9x^4+146x^3+618x^2+752x+291; 4+9i$

96. $\frac{5}{2}, 0, -3, 3+6i, 3-6i; x(2x-5)(x+3)(x-3-6i)(x-3+6i)$

97. $-\frac{3}{2}, -1$ (التضاعف: 2), $4+9i, 4-9i; (2x+3)(x+1)^2(x-4+9i)(x-4-9i)$

مراجعة مهارات الاختبارات المعيارية

98. مراجعة ما هي معادلة التمثيل البياني؟ **C**

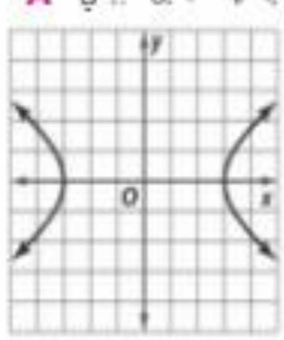


A $y=x^2+1$
B $y-x=1$
C $y^2-x^2=1$
D $x^2+y^2=1$
E $xy=1$

99. مراجعة التمثيل البياني للمعادلة $\left(\frac{x}{4}\right)^2-\left(\frac{y}{5}\right)^2=1$ هو قطع زائد. ما هي مجموعة المعادلات التي تمثل خطي تقارب التمثيل البياني للقطع الزائد؟ **H**

F $y=\frac{4}{5}x, y=-\frac{4}{5}x$
G $y=\frac{1}{4}x, y=-\frac{1}{4}x$
H $y=\frac{5}{4}x, y=-\frac{5}{4}x$
J $y=\frac{1}{5}x, y=-\frac{1}{5}x$

100. بؤرتا التمثيل البياني عند $(\sqrt{13}, 0)$ و $(-\sqrt{13}, 0)$. ما هي المعادلة التي يمثلها التمثيل البياني؟ **A**



A $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$
B $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$
C $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{\sqrt{13}}=1$
D $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{13}=1$

101. اختبار الكفاءة الدراسية (ACT/SAT) إذا كانت $z=\frac{3y}{x^3}$، فما هو تأثير قيمة z عند ضرب y في 4 ومضاعفة x؟ **G**

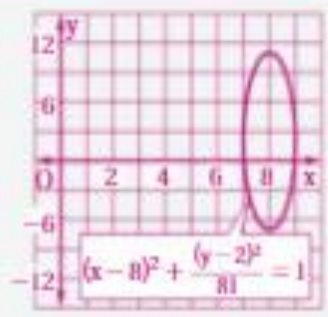
F z لن تتغير.
G z تقل إلى النصف.
H z تتضاعف.
J z تُضرب في 4.

4 التقويم

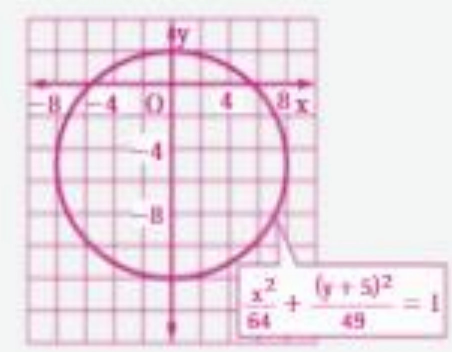
الكرة البلورية اطلب إلى كل طالب أن يكتب كيفية اعتقاده بأن درس اليوم عن القطع الزائد وتحديد القطع المخروطي سيساعد في الدرس القادم عن دوران المحاور للقطع المخروطي.

إجابات إضافية

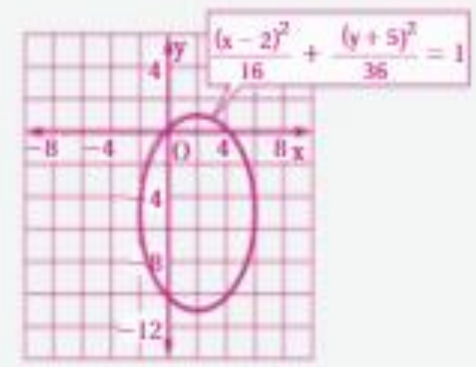
84.



85.



86.



88. $\begin{bmatrix}1 & -9 & 4\\ -8 & 5 & 1\\ 3 & 11 & -9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\-31\\25\end{bmatrix}$; $(-2, -7, -12)$

89. $\begin{bmatrix}1 & -7 & 8\\ 6 & 5 & -2\\ 3 & -4 & 9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\2\\26\end{bmatrix}$; $(-5, 10, 9)$

90. $\begin{bmatrix}2 & -5 & 1\\ 3 & 4 & 5\\ 7 & -2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}28\\17\\33\end{bmatrix}$; $(1, -4, 6)$

التدريس المتمايز BL

توسع القطع الزائد المستطيل نوع خاص من القطوع الزائدة له معادلة عامة بالصورة $xy = c$، حيث c عدد ثابتٌ غير الصفر. اطلب إلى الطلا ب تمثيل مجموعة من القطوع الزائدة المستطيلة بيانيًا وتسجيل ملاحظاتهم. ما الصحيح بشأن خطوط التقارب؟ ما الأنماط الأخرى التي يمكنهم تحديدها؟
خطا التقارب هما المحوران x و y. مع تزايد $|c|$، يزداد بعد فرعي القطع الزائد عن نقطة الأصل.

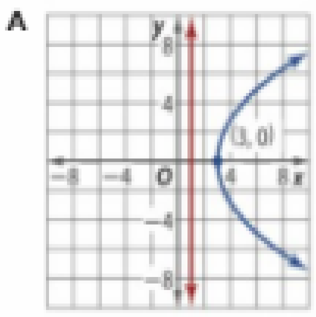
الوحدة 6 اختبار منتصف الوحدة

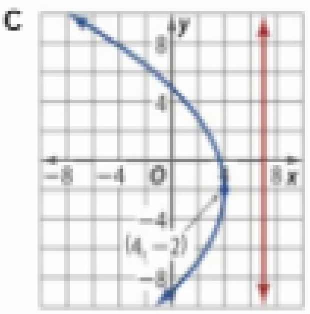
الدروس 1–6 إلى 3–6

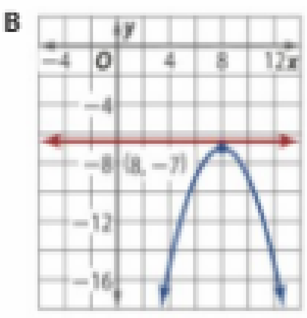
اكتب معادلة قطعٍ مكافئٍ بؤرته F و رأسه V ومثّلها بيانيًا. (الدرس 1–6) **1–2. انظر الهامش.**

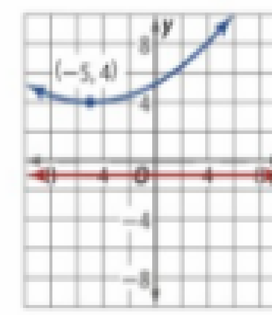
1. $F(1, 5), V(1, 3)$
2. $F(5, -7), V(1, -7)$

3. **الاختيار من متعدد** نعرض في كلٍ من التمثيلات البيانية التالية قطعًا مكافئًا مع دليله. في أيٍّ من القطوع المكافئة تبعد البؤرة المسافة الأكبر عن الرأس؟ (الدرس 1–6) **D**

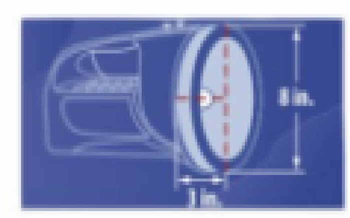
A


C


B


D


4. **التصميم** المقطع العرضي للمرآة في تصميم المصباح الكشاف المبيّن أدناه قطعٌ مكافئ. (الدرس 1–6)



a. اكتب معادلة تمثل القطع المكافئ. $y^2 = \frac{16}{3}x$

b. مثّل المعادلة بيانيًا. **انظر الهامش.**

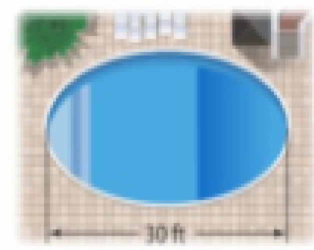
مثّل القطع الناقص المعطى وفق كل معادلة. (الدرس 2–6) **5–6. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.**

5. $\frac{(x+4)^2}{81} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$
6. $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-6)^2}{36} = 1$

اكتب معادلةً تمثل القطع الناقص المقابل لكل مجموعة من الخواص المبينة أدناه. (الدرس 2–6) **7–10. انظر الهامش.**

7. الرأسان $(-3, 9)$، $(-3, -3)$، البؤرتان $(-3, 7)$، $(-3, -1)$
8. البؤرتان $(3, 1)$، $(3, 7)$، يساوي طول المحور الاصغر 8
9. المحور الأكبر يمتدّ من $(1, -1)$ إلى $(1, -13)$،
المحور الاصغر يمتدّ من $(-2, -7)$ إلى $(4, -7)$
10. الرأسان $(8, 5)$، $(8, -9)$، طول المحور الاصغر يساوي 6

11. **السباحة** تصميم بركة السباحة المبينة أدناه عبارة عن قطع مكافئ؛ طوله 30 قدمًا واختلافه المركزي 0.68. (الدرس 2–6)

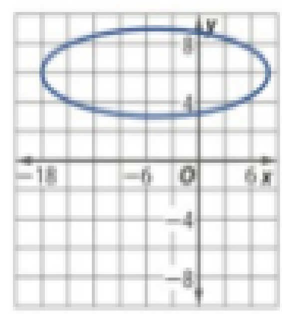


a. ما عرض البركة؟ **22 ft**

b. اكتب معادلة تمثل القطع المكافئ إذا كانت نقطة الأصل هي مركز المسبح.

$$\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{121} = 1$$

12. **الاختيار متعدد** أي مما يلي هو اختلاف مركزي ممكنٌ للتمثيل البياني؟ (الدرس 2–6) **B**



A 0   C 1

B $\frac{1}{4}$ D $\frac{9}{5}$

مثّل القطع الزائد المعطى وفق كل معادلة مما يلي. (الدرس 3–6) **13–14. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.**

13. $\frac{x^2}{81} - \frac{(y+7)^2}{81} = 1$
14. $\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$

اكتب معادلةً تمثل القطع الزائد بالخواص التالية. (الدرس 3–6) **15–18. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.**

15. الرأسان $(0, 5)$، $(0, -5)$، طول المحور المرافق 6
16. البؤرتان $(10, 0)$، $(-6, 0)$، طول المحور القاطع 4
17. الرأسان $(11, 0)$، $(-11, 0)$، البؤرتان $(-14, 0)$، $(14, 0)$
18. البؤرتان $(5, 7)$، $(5, -9)$، طول المحور القاطع 10

استخدم المميز لتحديد كل قطع مخروطي مما يلي. (الدرس 3–6)

19. $x^2 + 4y^2 - 2x - 24y + 34 = 0$ **القطع الناقص**
20. $4x^2 - 25y^2 - 24x - 64 = 0$ **القطع الزائد**
21. $2x^2 - y + 5 = 0$ **القطع المكافئ**
22. $25x^2 + 25y^2 - 100x - 100y + 196 = 0$ **الدائرة**

الدروس من 1–6 إلى 3–6

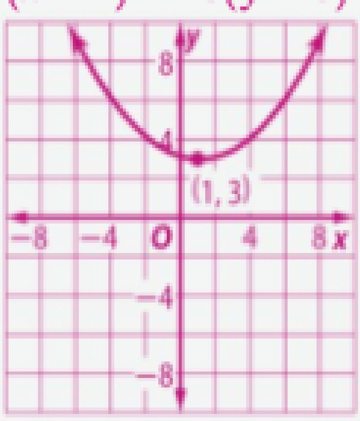
التقويم التكويني

استخدام اختبار منتصف الوحدة لتقويم تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

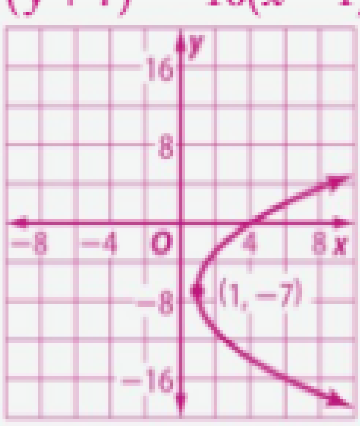
بالنسبة للمسائل التي أجيب عنها بشكل خاطئ، اطلب إلى الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها بين الأقواس.

إجابات إضافية

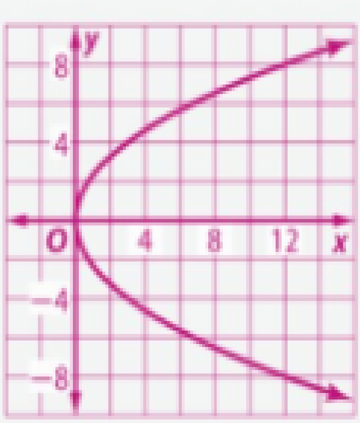
1. $(x-1)^2 = 8(y-3)$



2. $(y+7)^2 = 16(x-1)$



4b.



7. $\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y+3)^2}{20} = 1$

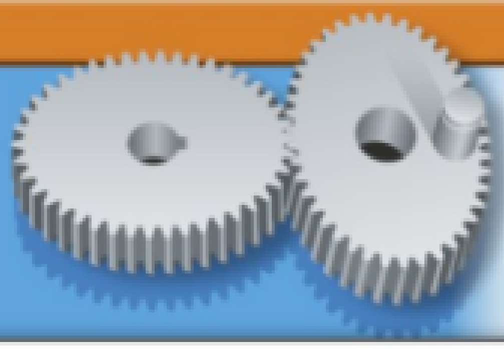
8. $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$

9. $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+7)^2}{36} = 1$

10. $\frac{(x-8)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{49} = 1$

الدرس 6-4 الدوران المحوري للقطوع المخروطية

:: السابق	:: الآن	:: لماذا؟
• حددت ومثلت القطوع المخروطية.	1 إيجاد دوران المحاور لكتابة معادلات دوران القطوع المخروطية. 2 تمثيل دوران القطوع المخروطية بيانيًا	• تقترن التروس بيضاوية الشكل بدورانها حول بؤرتيها. يدور ترس التدوير بسرعة ثابتة، ويغير الترس المدار سرعته باستمرار عند كل دورة.



1 دوران القطوع المخروطية

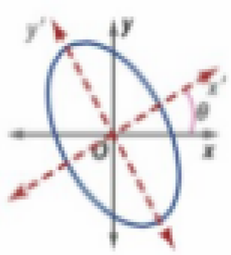
تعلمت في الدرس السابق أنه عندما يكون القطع المخروطي رأسي أو أفقي وتكون محاوره موازية لمحوري x و y، فإن $B = 0$ في معادلته العامة. لا تتضمن معادلة هذا القطع المخروطي الحد xy.

محاور القطع المخروطي موازية لمحاور الإحداثيات $\quad Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

ستدرس في هذا الدرس القطوع المخروطية ومحاورها المدارة غير الموازية لمحاور الإحداثيات. في المعادلة العامة لدوران هذه القطوع المخروطية $B \neq 0$، لذلك يوجد هنا الحد xy.

دوران محاور القطع المخروطي من محاور الإحداثيات $\quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

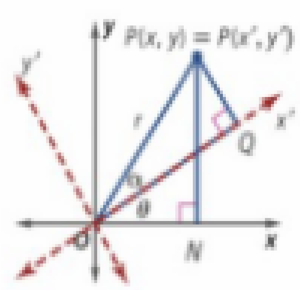
إذا حذف الحد xy فستكتب معادلة دوران القطع المخروطي بالصيغة القياسية من خلال إكمال المربع. ولحذف هذا الحد، نقوم بتدوير محاور الإحداثيات حتى توازي محاور القطع المخروطي.



عند دوران محاور الإحداثيات من خلال الزاوية θ كما هو موضح، تبقى نقطة الأصل ثابتة وتتشكل المحاور x' و y' الجديدة. في ما يلي الشكل العام لمعادلة القطع المخروطي في المستوى الجديد $x'y'$.

المعادلة في المستوى $x'y'$ هي $\quad A(x')^2 + C(y')^2 + Dx' + Ey' + F = 0$

يمكن استخدام حساب المثلثات لوضع المعادلات المتعلقة بالنقطة $P(x, y)$ في المستوى xy و $P(x', y')$ في المستوى $x'y'$.



انظر الشكل على اليسار. لاحظ المثلث القائم الزاوية PNO و $OP = r$ و $ON = x$ و $PN = y$ و $m\angle NOP = \alpha + \theta$ باستخدام $\triangle PNO$، يمكنك إنشاء العلاقات التالية.

نسبة الـ cosine $\quad = r \cos (\alpha + \theta)$

متطابقة الـ cosine للمجموع $\quad = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta$

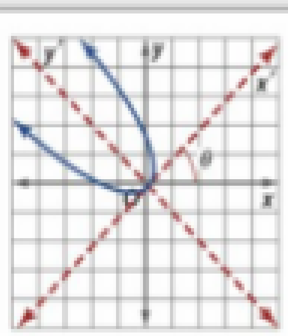
نسبة الـ sine $\quad = r \sin (\alpha + \theta)$

متطابقة الـ sine للمجموع $\quad = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta$

باستخدام المثلث القائم الزاوية POQ، حيث $OP = r$ و $OQ = x'$ و $PQ = y'$ و $m\angle QOP = \alpha$، يمكنك إنشاء علاقة $x' = r \cos \alpha$ و $y' = r \sin \alpha$. بالتعويض عن هذه القيم في المعادلات السابقة، يمكنك الحصول على ما يلي.

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \qquad y = y' \cos \theta + x' \sin \theta$$

المفهوم الأساسي دوران محاور القطوع المخروطية



المعادلة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ في المستوى الاحداثي xy يمكن إعادة صياغتها كما يلي $A(x')^2 + C(y')^2 + Dx' + Ey' + F = 0$ في دوران المستوى الاحداثي $x'y'$.

يمكن إيجاد المعادلة في المستوى $x'y'$ باستخدام المعادلات التالية، حيث θ هي زاوية الدوران.

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \quad y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 6-4 تحديد القطع المخروطي وتمثيله بيانيًا.

الدرس 6-4 إيجاد دوران المحاور لكتابة معادلات دوران القطع المخروطي.
التمثيل البياني للقطع المخروطي بالدوران.

بعد الدرس 6-4 كتابة المعادلات القطبية للقطع المخروطي وتمثيلها بيانيًا.

2 التعليم

أسئلة داعمة

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة **لماذا؟** الواردة في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- هل سيدور الترسان الموضحان واللذان لهما شكل القطع الناقص بالمعدل نفسه؟ اشرح. لا ، حيث إن ترس السائق سيدور بمعدل ثابت في حين أن الترس المدفوع ستتغير سرعته باستمرار مع كل دورة.

المثال 1 اكتب معادلة في المستوى $x'y'$–

استخدم $\theta = \frac{\pi}{4}$ لكتابة $6x^2 + 6xy + 9y^2 = 53$ في المستوى $x'y'$–. ثم حدد القطع المخروطي.

أوجد معادلات لـــ x و y.

$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$	معادلات الدوران x و y	$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$	$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$= \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'$

عوّض في المعادلة الأساسية.

$$6x^2 + 6xy + 9y^2 = 53$$

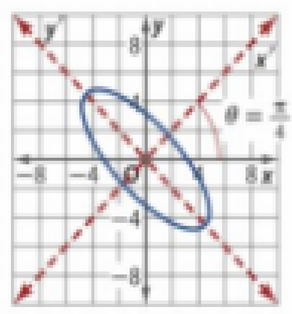
$$6\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2}\right) + 9\left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2}\right)^2 = 53$$

$$\frac{6[2(x')^2 - 4x'y' + 2(y')^2]}{4} + \frac{6[2(x')^2 - 2(y')^2]}{4} + \frac{9[2(x')^2 + 4x'y' + 2(y')^2]}{4} = 53$$

$$3(x')^2 - 6x'y' + 3(y')^2 + 3(x')^2 - 3(y')^2 + \frac{9}{2}(x')^2 + 9x'y' + \frac{9}{2}(y')^2 - 53 = 0$$

$$6(x')^2 - 12x'y' + 6(y')^2 + 6(x')^2 - 6(y')^2 + 9(x')^2 + 18x'y' + 9(y')^2 - 106 = 0$$

$$21(x')^2 + 6x'y' + 9(y')^2 - 106 = 0$$



المعادلة في المستوى $x'y'$– هي $21(x')^2 + 6x'y' + 9(y')^2 - 106 = 0$ في هذه المعادلة، $B^2 - 4AC = 6^2 - 4(21)(9)$ أو -720 حيث إن $-720 < 0$، فإن القطع المخروطي هو القطع الناقص كما هو موضح.

تمرين موجّه $9(x')^2 + (y')^2 - 60 = 0$؛ القطع الناقص

1. استخدم $\theta = \frac{\pi}{6}$ لكتابة $7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2 - 60 = 0$ في المستوى $x'y'$–. ثم حدد القطع المخروطي.

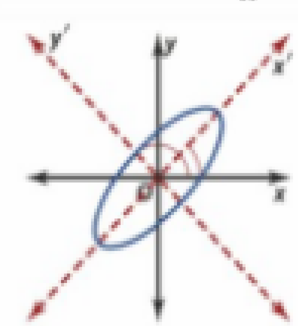
عند اختيار θ بشكل مناسب يمكن حذف الحد–$x'y'$ من الشكل العام للمعادلة، وستكون محاور القطع المخروطي موازية لمحاور $x'y'$–المستوى.

بعد التعويض عن $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$ و $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$ في الشكل العام للقطع المخروطي، $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ فإن معامل الحد $x'y'$ هو $B \cos 2\theta + (C - A) \sin 2\theta$ بتحديد هذا مساويًا 0 يمكن حذف الحد–$x'y'$.

$B \cos 2\theta + (C - A) \sin 2\theta = 0$	معامل الحد–$x'y'$
$B \cos 2\theta = -(C - A) \sin 2\theta$	اطرح $(C - A) \sin 2\theta$ من الطرفين.
$B \cos 2\theta = (A - C) \sin 2\theta$	خاصية التوزيع
$\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{A - C}{B}$	اقسم الطرفين على $B \sin 2\theta$
$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}$	$\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \cot 2\theta$

نصيحة دراسية

زاوية الدوران زاوية الدوران θ هي زاوية حادة نظرًا لحقيقة أن إما المحور x' أو المحور y' سيكون في الربع الأول. على سبيل المثال، في حين أنه قد يكون دوران المستوى في الشكل التالي $123°$، فإن الدوران $33°$ هو المطلوب لمحاذاة المحاور.



المفهوم الأساسي زاوية الدوران المستخدمة لحذف الحد xy

زاوية التدوير θ حيث إن $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $B \neq 0$, $\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}$ سيحذف الحد xy من معادلة المقطع المخروطي في دوران نظام الإحداثيات $x'y'$–.

- لماذا تنتج التروس التي لها شكل القطع الناقص سرعات خارجة متغيرة بدلًا من سرعات خارجة ثابتة؟ مع دوران الترس ذي شكل القطع الناقص مقتربًا من المحور الأكبر، تزداد سرعة الترس. ومع دورانه مقتربًا من محوره الأصغر، تتناقص سرعة الترس.
- ما الشكل الذي يجب أن تأخذه التروس لإنتاج سرعة خارجة ثابتة؟ دائري

1 دوران المحاور للقطع المخروطي

يبين **المثال 1** كيفية كتابة معادلة معطاة في المستوى xy لتصبح في المستوى $x'y'$ عند دوران المحاور بزاوية θ. يبين **المثال 2** طريقة كتابة معادلة بالصيغة القياسية في المستوى $x'y'$ عندما لا تعطى الزاوية θ لدوران المحاور. يبين **المثال 3** كيفية كتابة معادلة معطاة في المستوى $x'y'$ لتصبح في المستوى xy عند دوران المحاور بزاوية θ.

التقويم التكويني

استخدم التدريب الموجه الموجود بعد كل مثال لتحديد مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 استخدم $\theta = 90°$ لكتابة $x^2 + 3xy - y^2 = 3$ في المستوى $x'y'$. ثم حدد القطع المخروطي.
$\frac{(y')^2}{3} - x'y' - \frac{(x')^2}{3} = 1$؛ قطع زائد

373

المثال 2 اكتب معادلة بالصيغة القياسيّة

استخدم زاوية مناسبة لدوران القطع المخروطي الذي معادلته $8x^2 + 12xy + 3y^2 = 4$، اكتب معادلة بالصيغة القياسيّة.

القطع المخروطي هو القطع الزائد لأن $B^2 - 4AC > 0$ أوجد θ.

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} \qquad \text{دوران المحاور}$$

$$= \frac{5}{12} \qquad A = 8 \text{ و } B = 12 \text{ و } C = 3$$

يوضح الشكل مثلثًا فيه $\cot 2\theta = \frac{5}{12}$

إذًا، $\sin 2\theta = \frac{12}{13}$ و $\cos 2\theta = \frac{5}{13}$

استخدم متطابقات نصف الزاوية لتحديد $\sin\theta$ و $\cos\theta$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} \qquad \text{متطابقات نصف الزاوية} \qquad \sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{2}} \qquad \cos 2\theta = \frac{5}{13} \qquad = \sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{13}}{13} \qquad \text{بسّط} \qquad = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

ثم أوجد معادلات x و y.

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \qquad \text{معادلات الدوران } x \text{ و } y \qquad x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

$$= \frac{2\sqrt{13}}{13}x' + \frac{3\sqrt{13}}{13}y' \qquad \cos\theta = \frac{3\sqrt{13}}{13},\ \sin\theta = \frac{2\sqrt{13}}{13} \qquad = \frac{3\sqrt{13}}{13}x' - \frac{2\sqrt{13}}{13}y'$$

$$= \frac{2\sqrt{13}x' + 3\sqrt{13}y'}{13} \qquad \text{بسّط} \qquad = \frac{3\sqrt{13}x' - 2\sqrt{13}y'}{13}$$

عوّض في المعادلة الاساسية.

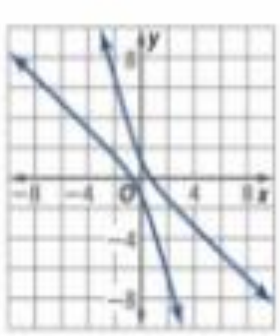
$$8x^2 + 12xy + 3y^2 = 4$$

$$8\left(\frac{3\sqrt{13}x' - 2\sqrt{13}y'}{13}\right)^2 + 12\,\frac{3\sqrt{13}x' - 2\sqrt{13}y'}{13}\cdot\frac{2\sqrt{13}x' + 3\sqrt{13}y'}{13} + 3\left(\frac{2\sqrt{13}x' + 3\sqrt{13}y'}{13}\right)^2 = 4$$

$$\frac{72(x')^2 - 96x'y' + 32(y')^2}{13} + \frac{72(x')^2 + 60x'y' - 72(y')^2}{13} + \frac{12(x')^2 + 36x'y' + 27(y')^2}{13} = 4$$

$$\frac{156(x')^2 - 13(y')^2}{13} = 4$$

$$3(x')^2 - \frac{(y')^2}{4} = 1$$



الصيغة القياسيّة للمعادلة في المستوى $x'y'$ هو $\frac{(x')^2}{\frac{1}{3}} - \frac{(y')^2}{4} = 1$

التمثيل البياني لهذا القطع الزائد.

$$2A.\ \left(y' - \frac{3\sqrt{10}}{100}\right)^2 = \frac{\sqrt{10}}{50}\left(x' + \frac{109\sqrt{10}}{200}\right)$$

تمرين موجّه

استخدم زاوية مناسبة لدوران القطع المخروطي مع كل معادلة معطاة واكتب معادلة بالصيغة القياسيّة.

2A. $2x^2 - 12xy + 18y^2 - 4y = 2$

2B. $20x^2 + 20xy + 5y^2 - 12x - 36y - 200 = 0$ $\left(x' - \frac{6\sqrt{5}}{25}\right)^2 = \frac{12\sqrt{5}}{25}\left(y' + \frac{259\sqrt{5}}{75}\right)$

نصيحة دراسية

الحد $x'y'$ عند استبدال قيم x' و y' بالحد x و y بشكل صحيح، يصبح معامل الحد $x'y'$ صفر. وإذا لم يكن معامل هذا الحد صفرًا، فهناك خطأ حدث.

مثال إضافي

2 مستخدمًا زاوية مناسبة لدوران المحاور للقطع المخروطي معادلته $x^2 - 4xy - 2y^2 - 6 = 0$. اكتب المعادلة بالصيغة القياسية.

$$\frac{(y')^2}{3} - \frac{(x')^2}{2} = 1$$

نصيحة للمعلمين الجدد

متطابقات مثلثية يمكن توظيف المتطابقات المثلثية المبينة في المثال 2 لإيجاد $\sin\theta$ و $\cos\theta$ عندما لا تعطى زاوية دوران المحاور في المسألة.

التعليم باستخدام التكنولوجيا

المجلة اطلب إلى الطلاب الكتابة على مجلة الصف تشرح كيفية دوران المحاور الإحداثية للقطع المخروطي بزاوية θ من المستوى xy إلى المستوى $x'y'$ ومن المستوى $x'y'$ إلى المستوى xy. تأكد من تضمين الطلاب لمعادلات x و y و x' و y' في شروحاتهم.

يمكن استخدام صيغ أخرى تربط x' و y' بـ x و y لإيجاد معادلة المستوى xy- لدوران القطع المخروطي.

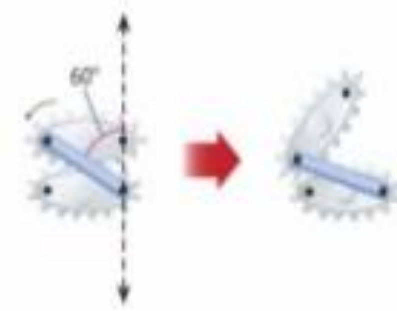
المفهوم الأساسي دوران محاور القطوع المخروطية

عند إعادة كتابة معادلة القطع المخروطي $x'y'$-للمستوى من خلال دوران محاور الإحداثيات من θ، فيمكن إيجاد المستوى- xy باستخدام

$$y' = y\cos\theta - x\sin\theta \text{ ، } x' = x\cos\theta + y\sin\theta.$$

المثال 3 اكتب معادلة المستوى xy-

يمكن استخدام التروس **بيضاوية الشكل لتوليد سرعات الإنتاج المتغيرة. بعد الدوران بدرجة °60، تكون معادلة دوران الترس في المستوى $x'y'$- $\frac{(x')^2}{36} + \frac{(y')^2}{18} = 1$ اكتب معادلة القطع الناقص التي يشكلها دوران الترس في المستوى xy-.**



استخدم صيغة دوران x' و y' لإيجاد معادلة دوران القطع المخروطي في المستوى xy .

$y' = y\cos\theta - x\sin\theta$	معادلات دوران x' و y'	$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$
$= y\cos 60° - x\sin 60°$	$\theta = 60°$	$= x\cos 60° + y\sin 60°$
$= \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}x$	$\sin 60° = \frac{1}{2}$ ، $\cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$= \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$

عوّض في المعادلة الاساسية.

$\frac{(x')^2}{36} + \frac{(y')^2}{18} = 1$	المعادلة الاساسية
$(x')^2 + 2(y')^2 = 36$	اضرب الطرفين في 36
$\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{y-\sqrt{3}x}{2}\right)^2 = 36$	عوّض
$\frac{x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2}{4} + \frac{2y^2-4\sqrt{3}xy+6x^2}{4} = 36$	بسّط
$\frac{7x^2-2\sqrt{3}xy+5y^2}{4} = 36$	جمّع الحدود المتشابهة
$7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 144$	اضرب الطرفين في 4
$7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 144 = 0$	اطرح 144 من الطرفين

معادلة دوران القطع الناقص في المستوى xy- هي $x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 144 = 07$

تمرين موجّه $\frac{7}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}xy + \frac{13}{4}y^2 - 40 = 0$

3. إذا كانت معادلة الترس بعد دورانه بدرجة °30 في المستوى $x'y'$- هي $(x')^2 + 4(y')^2 - 40 = 0$، فأوجد معادلة الترس في المستوى xy .

الربط بالحياة اليومية

في نظام التروس، حيث تدور كل التروس، مثل الدراجات، ترتبط سرعة التروس في الترابطات بينها بحجمها. إذا كان قطر أحد التروس $\frac{1}{2}$ قطر الترس الآخر، فإن سرعة دوران الترس ستكون ضعف سرعة الآخر.

المصدر: *How Stuff Works*

2 تمثيل دوران القطوع المخروطية بيانيًا

عند إعادة كتابة معادلة القطع المخروطي في المستوى $x'y'$، فيمكن تمثيلها بيانيًا من خلال إيجاد النقاط على التمثيل البياني للقطع المخروطي ثم تحويل هذه النقاط إلى المستوى xy .

مثال إضافي

3 الفيزياء إذا كانت معادلة ترس له شكل القطع الناقص بعد دوران °45 في المستوى $x'y'$ هي $\frac{(x')^2}{16} + \frac{(y')^2}{8} = 1$، فأوجد معادلة الترس في المستوى xy. $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 32 = 0$

التركيز على محتوى الرياضيات

الحد xy يشير وجود حد xy غير الصفر إلى دوران المحاور للتمثيل البياني للقطع المخروطي في المستوى. على سبيل المثال، في حالة القطع الناقص، لم يعد المحور الأكبر موازيًا للمحور x أو المحور y. يجري تدوير المحور الأكبر بمقدار يعتمد على A و B و C، والذي يساوي الصفر عندما تكون $B = 0$.

2 تمثيل القطع المخروطي بالدوران بيانيًا

يبين **المثال 4** كيفية تمثيل قطع مخروطي باستخدام دوران المحاور. يبين **المثال 5** كيفية التمثيل البياني لقطع مخروطي له حد xy باستخدام الصيغة التربيعية وحاسبة بيانية.

التدريس المتمايز BL OL AL

المتعلمون بطريقة التواصل وزع طلا ب الصف إلى مجموعات من ثلا ثة أو أربعة مختلفي القدرات. بعد العمل على الأمثلة من 1 إلى 3 في الصف، اطلب إلى المجموعات العمل معًا لاستكمال التدريب الموجه لكل مثال. اطلب إليهم مقارنة نتائجهم مع مجموعة أخرى ومناقشة أي اختلافات. اطلب إلى كل مجموعة مشاركة النتائج مع زملائهم في الصف لكل مسألة. ناقش مع طلاب الصف بأكمله ايّ أسئلة أو صعوبات أو اختلافات وجدوها.

المثال 4 مثّل القطع المخروطي باستخدام الدوران

مثّل بيانيًا $(x'-2)^2 = 4(y'-3)$ إذا استدار بدرجة $30°$ من موضعه في المستوى xy-.

تمثل المعادلة قطعًا مكافئًا حيث إنها في شكل قياسي. استخدم الرأس $(2, 3)$ ومحاور التماثل $x' = 2$ في المستوى $x'y'$- لتحديد رأس ومحور التماثل للقطع المكافئ في المستوى xy.

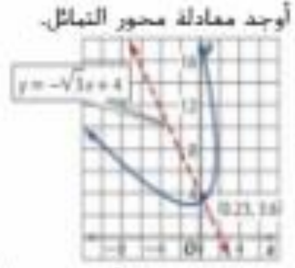
أوجد معادلات لـ x و y لـ $\theta = 30°$

$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$	معادلات الدوران x و y	$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$
$= \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$	$\sin 30° = \frac{1}{2}$ و $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$= \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'$

استخدم المعادلات لتحويل إحداثيات $x'y'$- للرأس إلى إحداثيات xy.

$y = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$	تحويل المعادلة	$x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'$
$= \frac{1}{2}(2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(3)$	$x' = 2$ و $y' = 3$	$= \frac{\sqrt{3}}{2}(2) - \frac{1}{2}(3)$
$= 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$ أو حوالي 3.60	اضرب	$= \sqrt{3} - \frac{3}{2}$ أو حوالي 0.23

أوجد معادلة محور التماثل.



$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$	تحويل المعادلة
$2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$	$\sin 30° = \frac{1}{2}$ و $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$y = -\sqrt{3}x + 4$	أكتب معادلة y

يمكن استخدام الرأس ومحور التماثل الجديد لرسم القطع المكافئ في المستوى xy.

تمرين موجّه مثّل كل معادلة بيانيًا عند كل زاوية محددة. **4A–B. انظر الهامش.**

4A. $\frac{(x')^2}{9} - \frac{(y')^2}{32} = 1; 60°$

4B. $\frac{(x')^2}{16} + \frac{(y')^2}{25} = 1; 30°$

نصيحة دراسية

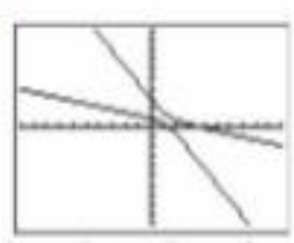
التمثيل البياني حوّل النقاط الأخرى على القطع المخروطي من الإحداثيات $x'y'$- إلى الإحداثيات xy. ثم أنشئ جدولاً لهذه القيم لإكمال رسم القطع المخروطي.

إحدى طرق تمثيل القطوع المخروطية بيانيًا باستخدام الحد xy لحل المعادلة y وتمثيلها بيانيًا باستخدام الآلة الحاسبة. اكتب المعادلة في شكل تربيعي ثم استخدم الصيغة التربيعية.

المثال 5 مثّل القطع المخروطي بالصيغة القياسيّة

استخدم حاسبة التمثيل البياني لرسم القطع المخروطي المحدد في $4y^2 + 8xy - 60y + 2x^2 - 40x + 155 = 0$

$4y^2 + 8xy - 60y + 2x^2 - 40x + 155 = 0$	المعادلة الأساسية
$4y^2 + (8x-60)y + (2x^2 - 40x + 155) = 0$	الشكل التربيعي
$y = \frac{-(8x-60) \pm \sqrt{(8x-60)^2 - 4(4)(2x^2-40x+155)}}{2(4)}$	$a = 4$ و $b = 8x - 60$ و $c = 2x^2 - 40x + 155$
$= \frac{-8x + 60 \pm \sqrt{32x^2 - 320x + 1120}}{8}$	اضرب وجمّع الحدود المتشابهة
$= \frac{-8x + 60 \pm 4\sqrt{2x^2 - 20x + 70}}{8}$	استبعد $\sqrt{16}$
$= \frac{-2x + 15 \pm \sqrt{2x^2 - 20x + 70}}{2}$	اقسم كل حد على 4



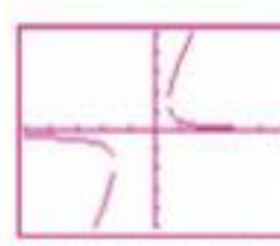
[−40, 40] scl: 4 by [−40, 40] scl: 4

التمثيل البياني لهاتين المعادلتين على الشاشة نفسها يعطي القطع الزائد الموضح.

تمرين موجّه

5. استخدم حاسبة التمثيل البياني لرسم القطع المخروطي الناتج من $4x^2 - 6xy + 2y^2 - 60x - 20y + 275 = 0$

.5



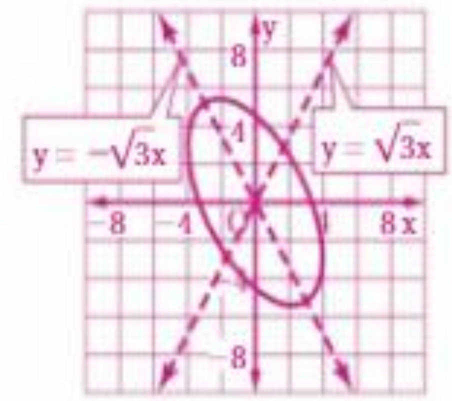
[−40, 40] scl: 8 by [−40, 40] scl: 8

نصيحة دراسية

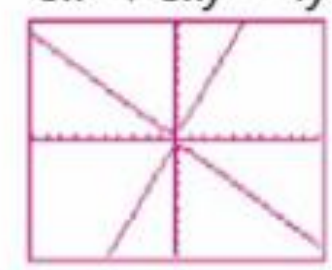
ترتيب الحدود رتّب الحدود بالقوى التنازلية لـ y لتحويل المعادلة إلى الشكل التربيعي.

أمثلة إضافية

4 مثّل بيانيًا $\frac{(x')^2}{36} + \frac{(y')^2}{9} = 1$ إذا تم الدوران $60°$ للمحاور إلى المستوى xy.



5 استخدم حاسبة بيانية لتمثيل القطع المخروطي المعطى بـ $8x^2 + 5xy - 4y^2 = -2$



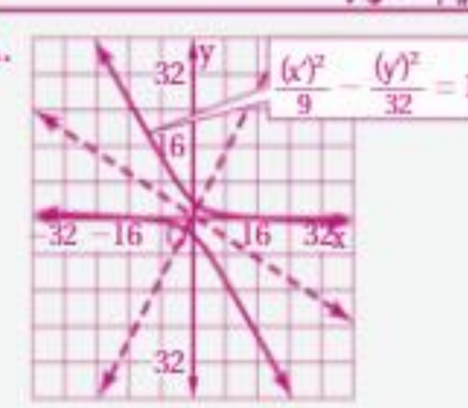
[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

نصيحة للمعلمين الجدد

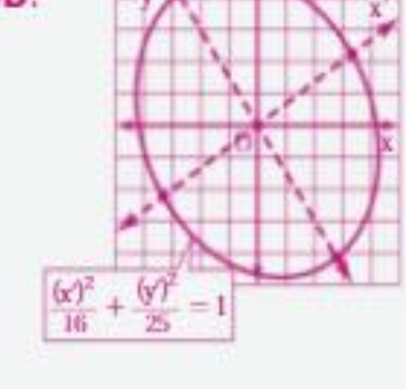
الحاسبة البيانية عند استخدام حاسبة بيانية لتمثيل قطع مخروطي بيانيًا، أوجد حل المعادلة من أجل y مستخدمًا الصيغة التربيعية. أدخل معادلة الجذر التربيعي الموجب بوصفها المعادلة الأولى وبعد ذلك معادلة الجذر التربيعي السالب بوصفها المعادلة الثانية. مثّل كلتا المعادلتين بيانيًا على الشاشة نفسها لرؤية التمثيل البياني كاملاً.

إجابات إضافية (تدريب موجه)

4A.



4B.



إجابات إضافية

.1 $(x')^2 + 2\sqrt{3}x'y' - (y')^2 + 18 = 0$؛ قطع زائد

.2 $(x')^2 - (y')^2 + 16 = 0$؛ قطع زائد

.3 $(y')^2 - 8x' = 0$؛ قطع مكافئ

.4 $(x')^2 + (y')^2 - 4 = 0$؛ دائرة

.5 $(x')^2 + 2\sqrt{3}x'y' + 3(y')^2 + 16\sqrt{3}x' - 16y' = 0$؛ قطع مكافئ

.6 $21(x')^2 + 10\sqrt{3}x'y' + 31(y')^2 - 144 = 0$؛ قطع ناقص

.7 $2(x')^2 + 2(y')^2 - 5\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y - 6 = 0$؛ قطع ناقص

.8 $33(x')^2 - 130x'y' + 33(y')^2 - 1568 = 0$؛ قطع زائد

.9 $25(x')^2 - 4(y')^2 + 64 = 0$؛ قطع زائد

.10 $23(x')^2 - 2\sqrt{3}x'y' + 21(y')^2 - 120 = 0$؛ قطع ناقص

تمارين

اكتب المعادلة في المستوى $x'y'$ لقيمة θ المعطاة. ثم حدد القطع المخروطي. (المثال 1)

1. $x^2-y^2=9, \theta=\frac{\pi}{3}$ **1–10. انظر الهامش.**
2. $xy=-8, \theta=45°$
3. $x^2-8y=0, \theta=\frac{\pi}{2}$
4. $2x^2+2y^2=8, \theta=\frac{\pi}{6}$
5. $y^2+8x=0, \theta=30°$
6. $4x^2+9y^2=36, \theta=30°$
7. $x^2-5x+y^2=3, \theta=45°$
8. $49x^2-16y^2=784, \theta=\frac{\pi}{4}$
9. $4x^2-25y^2=64, \theta=90°$
10. $6x^2+5y^2=30, \theta=30°$

استخدم زاوية مناسبة لدوران القطع المخروطي مع كل معادلة معطاة واكتب معادلة بالشكل القياسي. **15–18. انظر الهامش.** (المثال 1)

11. $xy=-4$ $\frac{(y')^2}{8}-\frac{(x')^2}{8}=1$
12. $x^2-xy+y^2=2$ 12. $\frac{(x')^2}{4}+\frac{(y')^2}{\frac{4}{3}}=1$
13. $145x^2+120xy+180y^2=900$ $\frac{(x')^2}{4}+\frac{(y')^2}{9}=1$
14. $16x^2-24xy+9y^2-5x-90y+25=0$ $(y'-1)^2=3x'$
15. $2x^2-72xy+23y^2+100x-50y=0$
16. $x^2-3y^2-8x+30y=60$
17. $8x^2+12xy+3y^2+4=6$
18. $73x^2+72xy+52y^2+25x+50y-75=0$

اكتب معادلة لكل قطع مخروطي في المستوى xy للمعادلة المحددة في الشكل $x'y'$ والقيمة المعطاة لزاوية الدوران θ. (المثال 3)

19. $(x')^2+3(y')^2=8, \theta=\frac{\pi}{4}$ $x^2-xy+y^2-4=0$
20. $\frac{(x')^2}{25}-\frac{(y')^2}{225}=1, \theta=\frac{\pi}{4}$ $4x^2+10xy+4y^2-225=0$
21. $\frac{(x')^2}{9}-\frac{(y')^2}{36}=1, \theta=\frac{\pi}{3}$ $x^2+10\sqrt{3}xy+11y^2-144=0$
22. $(x')^2=8y', \theta=45°$ $x^2+2xy+y^2+8\sqrt{2}x-8\sqrt{2}y=0$
23. $\frac{(x')^2}{7}+\frac{(y')^2}{28}=1, \theta=\frac{\pi}{6}$ $13x^2+6\sqrt{3}xy+7y^2-112=0$
24. $4x'=(y')^2, \theta=30°$ $x^2-2\sqrt{3}xy+3y^2-8\sqrt{3}x-8y=0$
25. $\frac{(x')^2}{64}-\frac{(y')^2}{16}=1, \theta=45°$ $3x^2-10xy+3y^2+128=0$
26. $(x')^2=5y', \theta=\frac{\pi}{3}$ $x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2+10\sqrt{3}x-10y=0$
27. $\frac{(x')^2}{4}-\frac{(y')^2}{9}=1, \theta=30°$ $23x^2+26\sqrt{3}xy-3y^2-144=0$
28. $\frac{(x')^2}{3}+\frac{(y')^2}{4}=1, \theta=60°$ $13x^2+2\sqrt{3}xy+15y^2-48=0$

a–b. انظر الهامش.

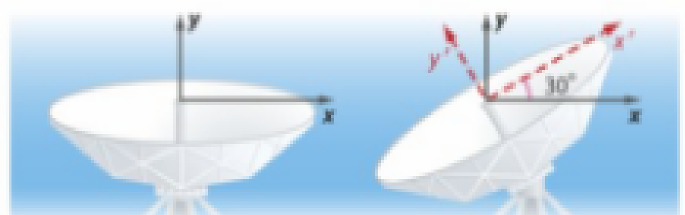
29. **علم الفلك** افترض أن $144(x')^2+64(y')^2=576$ يمثل الرسم في $x'y'$–المستوى لانعكاس المرآة في التلسكوب. (المثال 4)
   a. في حال دوران المرآة بدرجة $30°$ فحدد معادلة المرآة في المستوى xy–.
   b. مثّل المعادلة بيانيًا.

30–35. انظر الوحدة السادسة إجابة الملحق.

ممارسة موجهة مثّل كل معادلة بيانيًا عند كل زاوية محددة.

30. $\frac{(x')^2}{4}+\frac{(y')^2}{9}=1; 60°$
31. $\frac{(x')^2}{25}-\frac{(y')^2}{36}=1; 45°$
32. $(x')^2+6x'-y'=-9; 30°$
33. $8(x')^2+6(y')^2=24; 30°$
34. $\frac{(x')^2}{4}-\frac{(y')^2}{16}=1; 45°$
35. $y'=3(x')^2-2x'+5; 60°$

36. **التواصل** طبق قمر صناعي يتتبع قمرًا صناعيًا فوقه مباشرة. افترض أن $y=\frac{1}{6}x^2$ تمثل شكل الطبق عندما يوجه في هذا الموقع. وفي وقت لاحق من اليوم نفسه، لوحظ أن الطبق استدار بنحو $30°$. (المثال 4) **a–b. انظر الهامش.**
   a. اكتب معادلة تمثل الاتجاه الجديد للطبق.
   b. استخدم حاسبة التمثيل البياني لرسم هاتين المعادلتين على الشاشة نفسها. ارسم هذا التمثيل البياني على ورقتك.



37–46. انظر الوحدة السادسة إجابة الملحق.

حاسبة التمثيل البياني ارسم القطع المخروطي المعطى بكل معادلة. (المثال 5)

37. $x^2-2xy+y^2-5x-5y=0$
38. $2x^2+9xy+14y^2=5$
39. $8x^2+5xy-4y^2=-2$
40. $2x^2+4\sqrt{3}xy+6y^2+3x=y$
41. $2x^2+4xy+2y^2+2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y=-12$
42. $9x^2+4xy+6y^2=20$
43. $x^2+10\sqrt{3}xy+11y^2-64=0$
44. $x^2+y^2-4=0$
45. $x^2-2\sqrt{3}xy-y^2+18=0$
46. $2x^2+9xy+14y^2-5=0$

B

التمثيل البياني لكل معادلة هو حالة مُنخلة. صِف التمثيل البياني.

47. $y^2-16x^2=0$ الخطوط المتقاطعة $y=-4x$ و $y=4x$
48. $(x+4)^2-(x-1)^2=y+8$ الخط $y=10x+7$
49. $(x+3)^2+y^2+6y+9-6(x+y)=18$ النقطة عند $(0,0)$

3 التدريب

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 46 للتحقق من استيعاب الطلاب للمفاهيم.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات التي ستعطيها للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع في التمارين من 19 إلى 28، تأكد من أن الطلاب يستخدمون المعادلات المثلثية $x'=x\cos\theta+y\sin\theta$ و $y'=y\cos\theta-x\sin\theta$ للحصول على القيم التي سيعوضون عنها بـ x' و y'.

إجابات إضافية

15. $\frac{(y'-1)^2}{\frac{1}{2}}-\frac{(x'-1)^2}{1}=1$

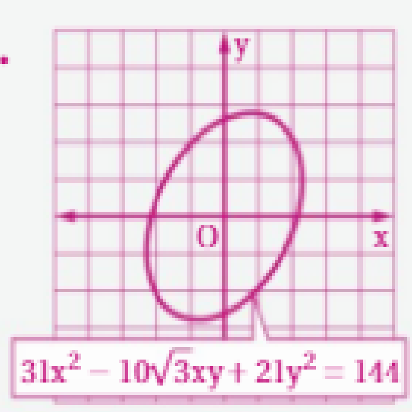
16. $\frac{(x-4)^2}{1}-\frac{(y-5)^2}{\frac{1}{3}}=1$

17. $\frac{(x')^2}{\frac{1}{6}}-\frac{(y')^2}{2}=1$

18. $\frac{\left(x'+\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{7}{8}}+\frac{\left(y'+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{7}{2}}=1$

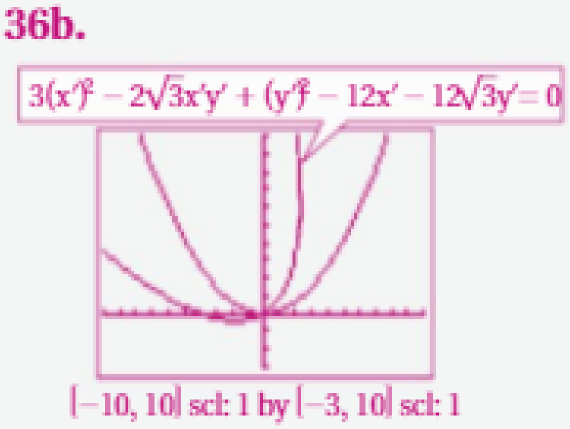
29a. $31x^2-10\sqrt{3}xy+21y^2=144$

29b.



36a. $3(x')^2-2\sqrt{3}x'y'+(y')^2-12x'-12\sqrt{3}y'=0$

36b.

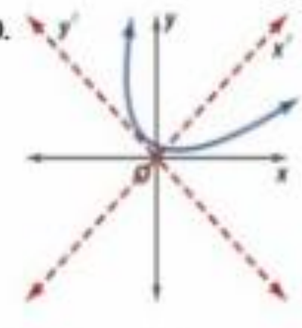


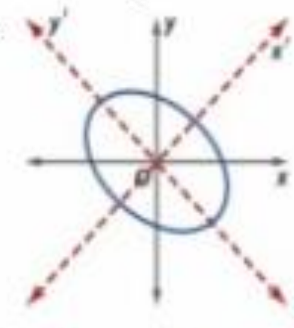
[−10, 10] scl: 1 by [−3, 10] scl: 1

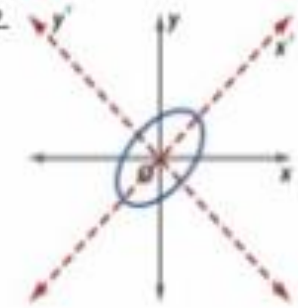
خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL OL BL

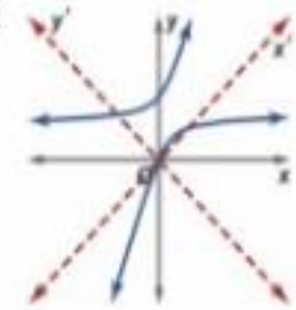
المستوى	الواجبات	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-46, 60, 62-82	79–82 فردي 1-45	60, زوجي 2-46, 62-78
OL ضمن المستوى	1-53 فردي 54, 55-59 فردي 60, 62-82	1-46, 79-82	47-60, 62-78
BL أعلى من المستوى	47-82		

مثل التمثيل البياني لكل قطع مخروطي بمعادلته.

50. d


51. b


52. a


53. c


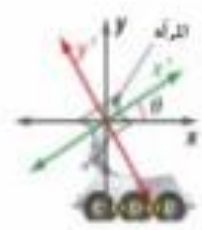
a. $x^2 - xy + y^2 = 2$

b. $145x^2 + 120xy + 180y^2 - 900 = 0$

c. $2x^2 - 72xy + 23y^2 + 100x - 50y = 0$

d. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 5x - 90y + 25 = 0$

54. **علم الفواعل الآليّة** استخدمت المرآة على شكل قطع زائد في أنظمة الفواعل الآليّة في الروبوت بحيث توجّهْ نحو اليمين. بعد استدارتها يمثّل موقعها الجديد بالمعادلة $51.75x^2 + 184.5\sqrt{3}xy - 132.75y^2 = 32,400$



a. حل المعادلة لأجل لإيجاد قيمة الحد y. **a–b. انظر الهامش.**

b. استخدم حاسبة التمثيل البياني لرسم المعادلة.

c. حدد الزاوية θ التي من خلالها تستدار المرآة. قرّبها إلى أقرب درجة. **30°**

55. **الثوابت** عندما يحوّل دوران معادلة من المستوى xy– إلى المستوى $x'y'$–، فإن المعادلة الجديدة تساوي المعادلة الأصلية. تظل بعض القيم ثابتة أثناء الدوران، وهذا يعني أن قيمها لا تتغير عند دوران المحاور. استخدم التعليل لشرح كيف يكون $A + C = A' + C'$ هو دوران ثابت.

انظر الوحدة السادسة إجابة الملحق.

حاسبة التمثيل البياني مثّل بيانيًا كل معادلتين وأوجد نقاط التقاطع. إذا لم يكن في التمثيل البياني نقاط تقاطع، فاكتب لا يوجد حل.

56–58. انظر الهامش.

56. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x - y = 0$
$8x^2 + 3xy - 5y^2 = 15$

57. $9x^2 + 4xy + 5y^2 - 40 = 0$
$x^2 - xy - 2y^2 - x - y + 2 = 0$

58. $x^2 + \sqrt{3}xy - 3 = 0$
$16x^2 - 20xy + 9y^2 = 40$

انظر الوحدة السادسة إجابة الملحق.

59. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستنتج زوايا الدوران التي تعطي التمثيلات البيانية الأساسية.

a. **جدوليًا** في كل معادلة في الجدول، حدد القطع المخروطي ثم أوجد القيمة الصغرى لزاوية الدوران اللازمة لتحويل المعادلة بحيث يتطابق التمثيل البياني المستدار مع التمثيل البياني الأساسي.

المعادلة	القطع المخروطي	الحد الأدنى لزاوية الدوران
$x^2 - 5x + 3 - y = 0$	القطع المكافئ	360°
$6x^2 + 10y^2 = 15$	القطع الناقص	180°
$2xy = 9$	القطع الزائد	180°

انظر الهامش.

b. **لفظيًا** صف العلاقة بين خطوط التماثل للقطوع المخروطية والقيمة الصغرى لزوايا الدوران اللازمة لاستنتاج التمثيلات البيانية الأساسية.

c. **تحليليًا** استدار القطع الناقص غير الدائري 50° عن نقطة الأصل. واستدار مرة أخرى بعد ذلك حيث استنتج التمثيل البياني الأساسي. فما هي الزاوية الثانية للدوران؟ **130°**

مهارات التفكير العليا مسائل استخدم مهارات التفكير العليا

60. **تحليل الخطأ** يصف محمود وأحمد الرسم البياني $x^2 + 4xy + 6y^2 + 3x - 4y = 75$ وقال محمود إنه القطع الناقص، ويعتقد أحمد أنه القطع المكافئ. أي منهما صحيح؟ وضح تبريرك المنطقي. **احمد؛ $B^2 - 4AC = 4^2 - 4(1)(6) < 0$ و $A \neq C$**

61. **تحدي** اثبت أن معادلة الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ تبقى ثابتة أثناء الدوران θ.

انظر الوحدة السادسة إجابة الملحق.

62. **الاستنتاج** صواب أو خطأ: يمكن وصف كل زاوية دوران θ أنها زاوية حادة. اشرح ذلك. **صواب؛ انظر الوحدة السادسة إجابة الملحق للتوضيح.**

63. **البرهان** برهن أن $x' = x\cos\theta + y\sin\theta$ و $y' = y\cos\theta - x\sin\theta$ (إرشاد: حل المنظومة $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$ و $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$ بضرب أحد المعادلتين في $\sin\theta$ والأخرى في $\cos\theta$). **انظر الوحدة السادسة إجابة الملحق.**

64. **التعليل** يمكن تحديد زاوية الدوران θ بأنها $\tan 2\theta = \frac{B}{A - C}$، عندما $A \neq C$، أو $\theta = \frac{\pi}{4}$، عندما $A = C$ لماذا لا يتطلب تحديد زاوية الدوران بدلالة ظل التمام شرطًا إضافيًا وقيمة إضافية لـ θ؟

65. **الكتابة في الرياضيات** يمكن استخدام المميز لتصنيف القطع المخروطي $A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ في المستوى $x'y'$–. اشرح لماذا تحدد القيم A' و C' نوع القطع المخروطي. صف العوامل اللازمة للقطع الناقص والدائرة والقطع المكافئ والقطع الزائد. **انظر الوحدة السادسة إجابة الملحق.**

66. **التعليل** صواب أو خطأ: كلما كان المميز للمعادلة في الشكل $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ مساويًا صفر، فيكون التمثيل البياني للمعادلة قطعًا مكافئًا. اشرح ذلك.

خطأ؛ انظر الوحدة السادسة إجابة الملحق للتوضيح.

إجابات إضافية

$$54a.\ y = \frac{184.5\sqrt{3}x \pm \sqrt{129{,}600x^2 - 17{,}204{,}400}}{265.5}$$

54b.

[−50, 500] scl: 10 by [−50, 50] scl: 10

مراجعة شاملة

ارسم القطع الزائد المعطى بكل معادلة. 67–69. انظر الوحدة السادسة إجابة الملحق.

67. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{64}=1$

68. $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{49}=1$

69. $\frac{(x-3)^2}{64}-\frac{(y-7)^2}{25}=1$

حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطى بكل معادلة.

70. $\frac{(x+17)^2}{39}+\frac{(y+7)^2}{30}=1$ **0.480**

71. $\frac{(x-6)^2}{12}+\frac{(y+4)^2}{15}=1$ **0.447**

72. $\frac{(x-10)^2}{29}+\frac{(y+2)^2}{24}=1$ **0.415**

73. **استثمار** لدى منصور مبلغ إجمالي قدره 5000 $ في حساب الادخار وشهادة الإيداع. يربح حساب الادخار مرابحة بنسبة 3.5% سنويًا. تربح شهادة الإيداع مرابحة بنسبة 5% إذا استثمرت الأموال لمدة سنة واحدة. حسب منصور أن أرباح المرابحة التي يحصل عليها في العام تبلغ 227.50 $.

a. اكتب نظام المعادلات لمبلغ كل استثمار.

b. استخدم قاعدة كرامر لتحديد مقدار المال في حساب الادخار وشهادة الإيداع لدى منصور.

a. $s + d = 5000$، $0.035s + 0.05d = 227.50$

حساب الادخار: 1500 $، شهادة الإيداع: 3500 $

74. **البصريات** يطلق على كمية الضوء التي يوفرها المصدر إلى السطح بالاستنارة. الاستنارة E بالقدم - شمعة على أحد الأسطح حيث إن R البُعد بالقدم عن مصدر الضوء من مصدر الضوء بشدة I شمعة هي: $E=\frac{I\cos\theta}{R^2}$ حيث إن θ هي قياس الزاوية بين اتجاه الضوء و الخط المتعامد على السطح المضاء. أثبت أن $E=\frac{I\cot\theta}{R^2\csc\theta}$ هي صيغة مكافئة.

$$\frac{I\cot\theta}{R^2\csc\theta}=\frac{I\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{R^2\frac{1}{\sin\theta}}=\frac{I\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{R^2\frac{1}{\sin\theta}}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\theta}=\frac{I\cos\theta}{R^2}\ ✓$$

حل المعادلات.

75. $\log_4 8n+\log_4(n-1)=2$ **2**

76. $\log_9 9p+\log_9(p+8)=2$ **1**

استخدم نظرية العوامل لتحديد إذا كانت المعادلات ذات الحدين هي عوامل $f(x)$. استخدم المعادلات ذات الحدين التي هي عوامل لكتابة التحليل الى عوامل للدالة $f(x)$.

77. $f(x)=x^4-x^3-16x^2+4x+48;\ (x-4),\ (x-2)$

نعم، نعم؛ $(x-4)(x-2)(x+2)(x+3)$

78. $f(x)=2x^4+9x^3-23x^2-81x+45;\ (x+5),\ (x+3)$

نعم، نعم؛ $(x+5)(x+3)(x-3)(2x-1)$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

79. **SAT/ACT** P هي مركز الدائرة و $PQ=QR$. إذا كانت مساحة $\triangle PQR$ تبلغ $9\sqrt{3}$ وحدة مربعة، فما هي المساحة المظللة بالوحدة المربعة؟ **D**

A $24\pi-9\sqrt{3}$

B $9\pi-9\sqrt{3}$

C $18\pi-9\sqrt{3}$

D $6\pi-9\sqrt{3}$

E $12\pi-9\sqrt{3}$

80. مراجعة أي مما يأتي ليست معادلة لقطع مكافئ؟ **H**

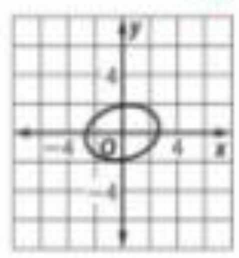
F $y=2x^2+4x-9$

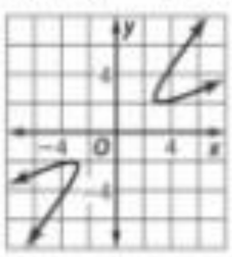
G $3x+2y^2+y+1=0$

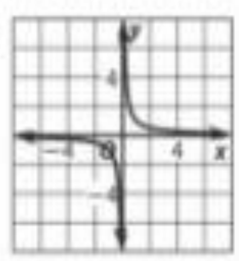
H $x^2+2y^2+8y=8$

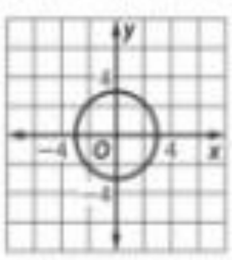
J $x=\frac{1}{2}(y-1)^2+5$

81. ما هو التمثيل البياني للقطع المخروطي الناتج من المعادلة $4x^2-2xy+8y^2-7=0$؟ **A**

A


C


B


D


82. مراجعة ما عدد طرق حل هذا النظام $(x-3)^2+y^2=9$، $\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$؟ **H**

F 0

G 1

H 2

J 4

انتبه!

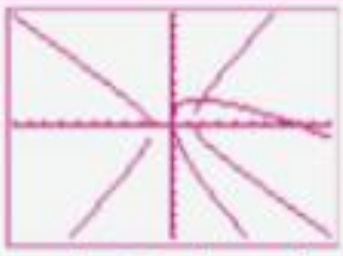
تحليل الخطأ في التمرين 60، يجب على الطلاب استخدام ما يعرفونه عن المميز لتحديد أن محمود كان محقًا.

4 التقويم

أخبار الأمس اطلب إلى كل طالب كتابة كيفية مساعدة درس يوم أمس عن القطع الزائد في مفاهيم اليوم حول دوران المحاور للقطع المخروطي.

إجابات إضافية

56.



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

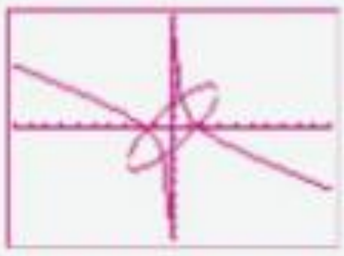
(1.9, 2.3)

57.

$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

(−1.9, 2.2), (−1.5, −1.5), (1.9, −2.2), (1.9, 0.8)

58.



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

(−1.6, −0.1), (0.6, 2.7), (−0.6, −2.7), (1.6, 0.1)

59b. نموذج الإجابة: للقطع المكافئ خط تماثل واحد وتكون أقل زاوية للدوران المحوري دائرة كاملة. للقطع الناقص والقطع الزائد خطا تماثل وتكون أقل زاوية للدوران المحوري نصف دائرة.

التدريس المتمايز

توسع اطلب إلى الطلا ب كتابة نظام معادلتين للقطع المخروطي له حلان بالضبط. وعليهم تسمية نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة. ثم يجب عليهم تمثيل النظام بيانيا وإيجاد حلول النظام.

1 التركيز

الهدف استخدم حاسبة بيانية لتقريب حلول أنظمة المعادلات والمتباينات غير الخطية.

نصيحة للتدريس

ذكِّر طلا ب الصف بأن حل نظام معادلات هو النقطة (النقاط) حيث تتقاطع الدوال.

ذكر الطلاب أنه يجب أولًا حل المعادلة من أجل y بغية تمثيل المعادلة بيانيًا على حاسبة بيانية. بمجرد حل المعادلتين من أجل y، يمكن إدخال المعادلتين في الحاسبة.

2 التعليم

العمل في مجموعات متعاونة

وزع الطلاب إلى مجموعاتٍ من طالبين أو ثلاثة ذوي قدراتٍ متنوعة. اجعل المجموعات تنهي النشاطين 1 و 2 والتمارين 1 و 2 و 8. اطلب إلى كل مجموعة مقارنة نتائجها مع مجموعة أخرى ومناقشة أي اختلافات.

- اطلب إلى الطلاب تحديد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة قبل تمثيلها بيانيًا. ناقش الإمكانات المختلفة لعدد التقاطعات التي يمكن وجودها بين القطوع المخروطية.
- إذا كان الطلاب لا يستطيعون عرض التمثيلات البيانية، فذكّرهم أنه يجب عليهم ضبط نافذة العرض إلى الحجم المناسب.
- في أنظمة المتباينات، يمكن للطلاب التحقق من مناطقهم عبر تعويض إحداثي من المنطقة في كلتا المتباينتين.

التوسع

6-4

مختبر تكنولوجيا التمثيل البياني

نظام المعادلات والمتباينات اللاخطية

الهدف

- استخدام حاسبة التمثيل البياني لتقريب حلول أنظمة معادلاتٍ ومتبايناتٍ لاخطية.

تمثل التمثيلات البيانية للقطوع المخروطية نظامًا لاخطيًا. ويمكن إيجاد حلول أنظمة المعادلات اللاخطية جبريًا. ولكن، يمكن إيجاد حلولٍ تقريبيةٍ باستخدام حاسبة التمثيل البياني خاصتك. يمكن لحاسبة التمثيل البياني تمثيل دوال فقط. وللتمثيل البياني لقطعٍ مخروطيٍ وهو ليس بدالّة، حلّ المعادلة لإيجاد قيمة y.

النشاط 1 النظام اللاخطي

أوجد حل نظام المتباينات بالتمثيل البياني.

$x^2 + y^2 = 13$

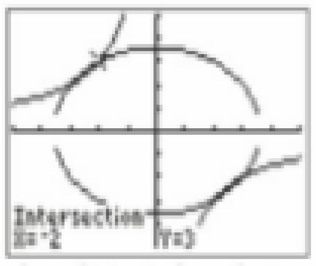
$xy + 6 = 0$

الخطوة 2 حلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد قيمة y.

$y = -\frac{6}{x}$ $\quad y = -\sqrt{13 - x^2}$, $y = \sqrt{13 - x^2}$

الخطوة 3 مثّل المعادلات بيانيًا في النافذة الملائمة.

الخطوة 4 استخدم سمة التقاطع (intersect) من القائمة CALC لإيجاد أربع نقاط تقاطع.



[−5, 5] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

الحلول هي (−3, 2) و (−2, 3) و (2, −3) و (3, −2).

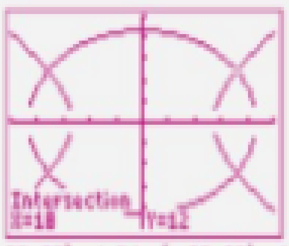
تمارين

أوجد حل نظام المتباينات بالتمثيل البياني. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة.

1. $xy = 2$, $x^2 - y^2 = 3$ **(2, 1), (−2, −1)**
2. $49 = y^2 + x^2$, $x = 1$ **(1, 6.9), (1, −6.9)**
3. $x = 2 + y$, $x^2 + y^2 = 100$ **(8, 6), (−6, −8)**
4. $25 - 4x^2 = y^2$, $2x + y + 1 = 0$ **(1.5, −4), (−2, 3)**
5. $y^2 = 9 - 3x^2$, $x^2 = 10 - 2y^2$ **(1.3, 2), (−1.3, 2), (1.3 −2), (−1.3, −2)**
6. $y = -1 - x$, $4 + x = (y - 1)^2$ **(0, −1), (−3, 2)**

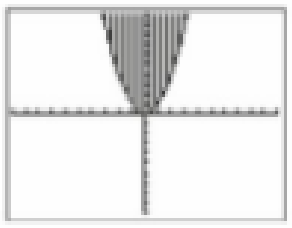
7. **تحدٍّ** يحتوي منزل غرفتين مربعتين اثنتين، وهما غرفة العائلة والمكتب. تبلغ المساحة الكلية للغرفتين 468 قدمًا مربعة، ومساحة المكتب أصغر بـ 180 قدمًا مربعًا من غرفة العائلة.
   a. اكتب نظام معادلات من الدرجة الثانية تمثّل هذه الحالة. **$x^2 + y^2 = 468, x^2 - y^2 = 180$**
   b. مثّل بيانيًا النظام الذي أوجدته في القسم a. واذكر طول كل غرفة.

7b. طول غرفة العائلة 18 قدمًا، وطول المكتب 12 قدمًا.



[−25, 25] scl: 5 by [−25, 25] scl: 5

يمكن حلّ أنظمة المتباينات اللاخطية أيضًا باستخدام حاسبة تمثيل بياني. تذكّر من من الوحدة 1 أنه يمكن تمثيل المتباينات بيانيًا باستخدام تعليمتي أكبر من وأصغر من القائمة **Y=** . يمكن العثور على رمز المتباينة عبر التمرير إلى يسار إشارة المساواة وضغط ENTER إلى أن تومض المثلثات المظللة. يمثّل المثلث في الأعلى التعليمة أكبر من ويمثّل المثلث في الأعلى التعليمة أصغر من. التمثيل البياني للدالّة $y \geq x^2$ موضّح أدناه.


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

تدريب اطلب إلى الطلاب إكمال التمارين من 3 إلى 7 و 9 و 10.

3 التقويم

التقويم التكويني

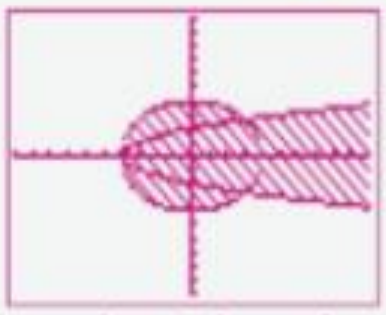
استخدم التمارين من 1 إلى 7 لتقويم قدرة الطلاب على استخدام دالة التقاطع لتحديد جميع نقاط التقاطع بين القطوع المخروطية. استخدم التمارين من 8 إلى 10 لتقويم قدرة الطلاب على استخدام دالة التظليل بشكلٍ مناسبٍ لحل أنظمة المتباينات.

من المحسوس إلى المجرد

في التمارين من 8 إلى 10، اطلب إلى الطلاب وصف ما تمثله الظلال المختلفة في المناطق المظللة من التمثيل البياني لكل نظام.

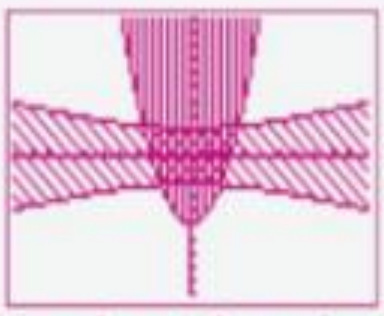
إجابات إضافية

8.



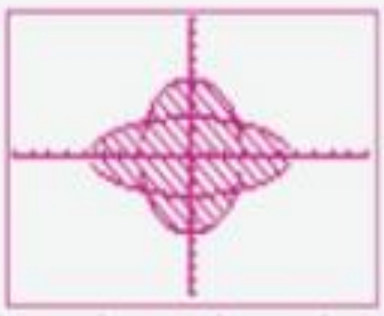
[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

9.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

10.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

يمكن تمثيل متباينات القطوع المخروطية التي ليست بدوال بيانيًا، كالقطوع الناقصة والدوائر وبعض القطوع الزائدة عبر استخدام تعليمة Shade من قائمة DRAW. المعلومات المقيدة المطلوبة هي Shade(*lowerfunc, upperfunc, Xleft, Xright, 3, 4*).

ترسم هذه التعليمة دالّة الحد الأدنى *lowerfunc* ودالّة الحد الأعلى *upperfunc* بدلالة *x*. ثم تظلل المنطقة الواقعة فوق *lowerfunc* وتحت *upperfunc* وبين الحدّين الأيسر والأيمن *Xleft* و *Xright*. يحدّد المدخلان الأخيران *3* و *4* نوع التظليل ويمكن أن يبقيا ثابتين.

النشاط 2 نظام البيانات اللاخطية

أوجد حل نظام المتباينات بالتمثيل البياني.

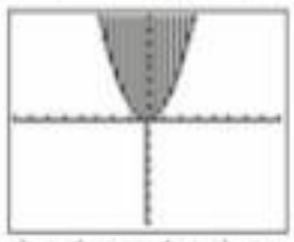
$x^2 + y^2 \le 36$

$y - x^2 > 0$

الخطوة 1 حلّ كل متباينة لإيجاد قيمة y.

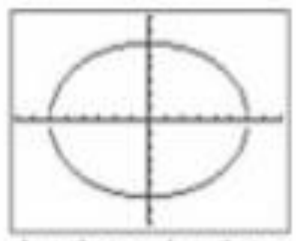
$y > x^2$ $\quad$ $y \le \sqrt{36 - x^2}$ ، $y \ge -\sqrt{36 - x^2}$

الخطوة 2 مثّل $y > x^2$ بيانيًا وظلل المنطقة الصحيحة. شكّل رمز كل متباينة عبر التمرير إلى يسار إشارة المساواة واختيار ENTER إلى أن تومض المثلثات المظللة.



[−8, 8] scl: 1 by [−8, 8] scl: 1

الخطوة 3 لتمثيل $x^2 + y^2 \le 36$ بيانيًا، فإن الحدّ الأدنى هو $y = -\sqrt{36 - x^2}$ والحدّ الأقصى هو $y = \sqrt{36 - x^2}$ يلتقي نصفا الدائرة عند $x = -6$ و $x = 6$ كما هو موضّح.

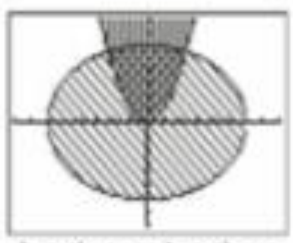


[−8, 8] scl: 1 by [−8, 8] scl: 1

الخطوة 4 من القائمة DRAW ، اختر 7. Shade. Enter.

Shade$(-\sqrt{36 - x^2}, \sqrt{36 - x}, -6, 6, 3, 4)$

حل النظام ممثل من خلال المنطقة مضاعفة التظليل.



[−8, 8] scl: 1 by [−8, 8] scl: 1

نصيحة تقنية

مسح الشاشة لمسح أي رسومات من شاشة الحاسبة، اختر ClrDraw من القائمة DRAW.

نصيحة دراسية

الحدّان الأيمن والأيسر
إذا لم يكن الحدّان الأيمن والأيسر واضحين، أدخل قيمتين للنافذة يفوقان كلا الحدّين. على سبيل المثال، إذا كان الحدّان هما $x = -5$ و $x = 5$ فإن إدخال -10 و 10 سيبقى يعطي التمثيل البياني الصحيح.

تمارين

أوجد حل كل من أنظمة المتباينات الآتية بالتمثيل البياني. **8–10. انظر الهامش.**

8. $2y^2 \le 32 - 2x^2$
$x + 4 \ge y^2$

9. $y + 5 \ge x^2$
$9y^2 \le 36 + x^2$

10. $x^2 + 4y^2 \le 32$
$4x^2 + y^2 \le 32$

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 5-6 نمذجة الحركة باستخدام الدوال التربيعية.

الدرس 5-6 تمثيل المعادلات الوسيطية بيانيًا.
حلّ المعادلات المرتبطة بحركة المقذوفات.

بعد الدرس 5-6 نمذجة الحالات باستخدام المعادلات الوسيطية.

2 التعليم

أسئلة داعمة

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة **لماذا؟** الواردة في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما الشكل الذي يمكن استخدامه لنمذجة مسار كرة سلة ألقيت باتجاه السلة؟ قطع مكافئ
- ما الذي يعنيه مصطلحا مسار ومدى في ما يتعلق بكرة السلة؟ المسار هو الخط الذي تتحرك وفقه كرة السلة. المدى هو المسافة الأفقية التي تنتقل عبرها الكرة.

5-6 المعادلات الوسيطية

:: السابق	:: الآن	:: لماذا؟
لقد قمت بتمثيل الحركة باستخدام دوال تربيعية.	1 تمثيل المعادلات الوسيطية بيانيًا 2 حلّ المعادلات المتصلة بحركة المقذوفات.	لقد استخدمت معادلاتٍ تربيعيةً لتمثيل مسارات المقذوفات ككرة التنس. ويمكن استخدام المعادلات الوسيطية أيضًا لتمثيل مسار المقذوفات ومداها وتقديرهما.

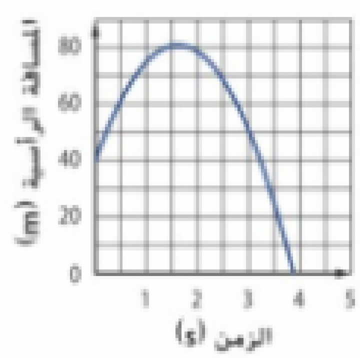
المفردات الجديدة

المعادلة الوسيطية parametric equation
وسيط parameter
اتجاه orientation
المنحنى الوسيطي parametric curve

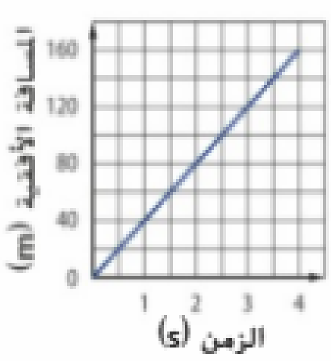
1 تمثيل المعادلات الوسيطية بيانيًا

لقد تناولنا في هذا الكتاب إلى حدّ الآن التمثيل البياني لمنحنى في المستوى الإحداثيxy باستخدام معادلة واحدة تضم متغيرين هما x و y. في هذا الدرس سنقدّم بعضًا من هذه التمثيلات البيانية نفسها باستخدام معادلتين وعبر إدخال متغير ثالث.

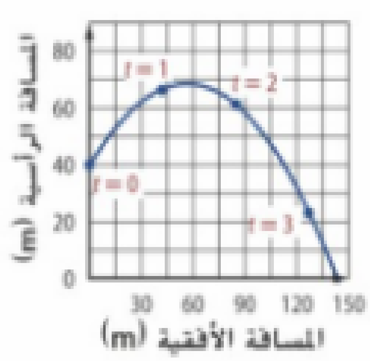
لنأخذ التمثيلين البيانيين المبينين أدناه، حيث يمثّل كلٌّ منهما نواحي مختلفةً حول ما يحدث عند رمي جسم ما في الهواء. يبيّن الشكل 6.5.1 المسافة الرأسية التي يقطعها الجسم كتابعٍ للزمن، في حين يوضح الشكل 6.5.2 المسافة الأفقية التي يقطعها الجسم كتابعٍ للزمن. ويبيّن الشكل 6.5.3 المسافة الرأسية للجسم كتابعٍ لمسافته الأفقية.



الشكل 6.5.1



الشكل 6.5.2



الشكل 6.5.3

حيث يخبرنا كلٌّ من هذه التمثيلات البيانية ومعادلته عن جزءٍ مما يحدث في هذه الحالة، ولكنّه لا يمثّل الحالة بمجملها. للتعبير عن موضع الجسم أفقيًا ورأسيًا بدلالة الزمن، يمكننا استخدام **المعادلات الوسيطية**. تمثل كلتا المعادلتين المبينتين أدناه التمثيل البياني المبيّن في الشكل 6.5.3.

المعادلتان الوسيطيتان

المركّبة الأفقية $x = 30\sqrt{2}t$

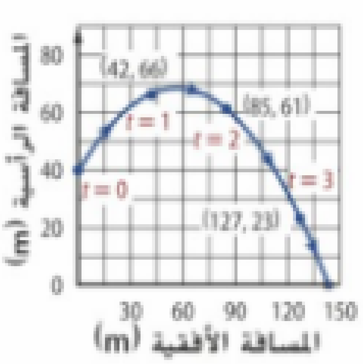
المركّبة الرأسية $y = -16t^2 + 30\sqrt{2}t + 40$

المعادلة بالصورة الديكارتية في المستوى الاحداثي المتعامد

$$y = -\frac{2}{225}x^2 + x + 40$$

من خلال المعادلتين الوسيطيتين، يمكننا تحديد الموضع الذي كان فيه الجسم عند زمنٍ ما عبر تقدير المركبتين الأفقية والرأسية لـ t. فعلى سبيل المثال، عند $t = 0$، كان الجسم عند النقطة $(0, 40)$. يطلق على المتغير t اسم **وسيط**.

يرسم التمثيل البياني الموضح ضمن الفترة الزمنية $0 \leq t \leq 4$
إن التمثيل البياني للنقاط وفق الترتيب المتزايد لقيم t يؤدي إلى رسم منحنًى يأخذ اتجاهًا محددًا يدعى **اتجاه** المنحنى.
ويشار إلى هذا الاتجاه بواسطة أسهم على المنحنى كما هو موضح.



المفهوم الأساسي المعادلات الوسيطية

إذا كانت f و g دالّتين متصلتين لـ t في الفترة I، فإن مجموعة الأزواج المرتّبة $(f(t), g(t))$ تمثل **منحنًى وسيطيًا**. والمعادلتان

$$y = g(t) ، x = f(t)$$

هما المعادلتان الوسيطيتان لهذا المنحنى، و t يرمز للوسيط، بينما I يرمز إلى فترة الوسيط.

1 تمثيل المعادلات الوسيطية بيانيًا

يبين **المثال 1** طريقة رسم تمثيل بياني لمعادلة وسيطية في فترة معطاة. توضّح **الأمثلة من 2 إلى 4** طريقة كتابة معادلة وسيطية من دون قيود ومع قيود ومع θ كوسيط بالصورة الديكارتية. في مستوى احداثي متعامد يبين **المثال 5** طريقة كتابة المعادلات الوسيطية عند إعطاء المعادلة بالصورة الديكارتية ووسيطٍ واحد.

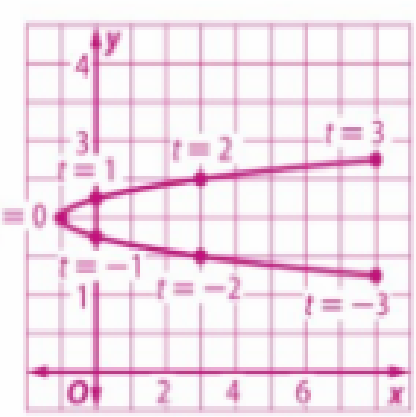
التقويم التكويني

استخدم التدريب الموجه الموجود بعد كل مثال لتحديد مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

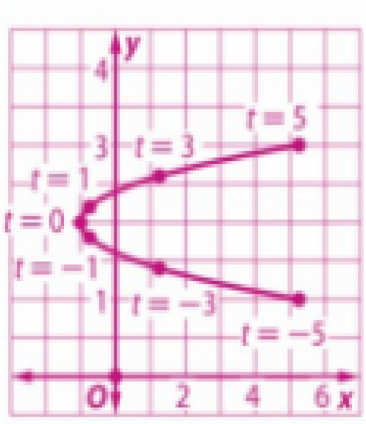
أمثلة إضافية

1 ارسم المنحنى المعطى بكل زوجٍ من المعادلات الوسيطية ضمن الفترة المعطاة.

a. $x = t^2 - 1$ و $y = \frac{t}{4} + 2$؛ $-3 \le t \le 3$



b. $x = \frac{t^2}{4} - 1$ و $y = \frac{t}{5} + 2$؛ $t \le 5 \ge -5$



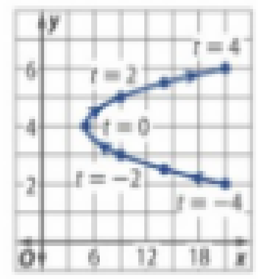
2 اكتب $x = t^2 + 2$ و $y = 2t$ بالصورة الديكارتية.
$y = 2\sqrt{x - 2}$

المثال 1 التمثيل البياني لمنحنيات المعادلات الوسيطية

مثّل بيانيًا المنحنى المقابل لكل زوجٍ من المعادلات الوسيطية في الفترة المعطاة.

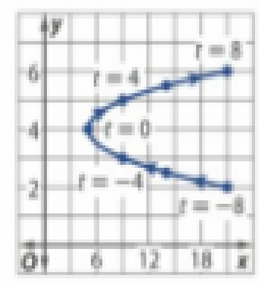
a. $x = t^2 + 5$ و $y = \frac{t}{2} + 4$; $-4 \le t \le 4$

اصنع جدولاً بقيم $-4 \ge t \le 4$ ثم مثّل الإحداثيات (x, y) المقابلة لكل قيمة من قيم t وصِل النقاط لتشكيل منحنى منتظم. تشير الأسهم المرافقة للتمثيل البياني إلى توجيه المنحنى مع انتقال t من -4 إلى 4.



t	x	y	t	x	y
−4	21	2	1	6	4.5
−3	14	2.5	2	9	5
−2	9	3	3	14	5.5
−1	6	3.5	4	21	6
0	5	4			

b. $x = \frac{t^2}{4} + 5$ و $y = \frac{t}{4} + 4$; $-8 \le t \le 8$



t	x	y	t	x	y
−8	21	2	2	6	4.5
−6	14	2.5	4	9	5
−4	9	3	6	14	5.5
−2	6	3.5	8	21	6
0	5	4			

تمرين موجّه **1A–B. انظر الهامش.**

1A. $x = 3t$ و $y = \sqrt{t} + 6; 0 \le t \le 8$

1B. $x = t^2$ و $y = 2t + 3; -10 \le t \le 10 \le 10$

نصيحة دراسية

المنحنيات المستوية يمكن استخدام المعادلات الوسيطية لتمثيل المنحنيات التي ليست بدوالّ، كما هو موضح في المثال 1.

لاحظ أن المجموعتين المختلفتين من المعادلات الوسيطية الموضحة في المثال 1 تنتجان المنحنى نفسه. يختلف التمثيلان البيانيان من حيث سرعتيهما أو بالأحرى من حيث سرعة رسم كل منهما. إذا كانت t تمثّل الزمن بالثواني، يُرسم المنحنى في الجزء **b** خلال 16 ثانية، في حين يُرسم المنحنى في الجزء **a** خلال 8 ثوانٍ.

وثمّة طريقةٌ أخرى لتحديد المنحنى الممثل بمجموعة من المعادلات الوسيطية، وهي كتابة مجموعة المعادلات بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ويمكن القيام بذلك بالتعويض لحذف الوسيط.

المثال 2 الكتابة بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد

اكتب $x = -3t$ و $y = t^2 + 2$ في المستوى الإحداثي المتعامد.

لحذف الوسيط t، حل $x = -3t$ لإيجاد قيمة t. وهذا يعطي $t = -\frac{1}{3}x$ ثم عوّض هذه القيمة بدلاً من t في المعادلة الخاصة بـ y.

$y = t^2 + 2$ معادلة y

$= \left(-\frac{1}{3}x\right)^2 + 2$ بتعويض $-\frac{1}{3}x$ بدلاً من t

$= \frac{1}{9}x^2 + 2$ بسِّط

تعطي هذه المجموعة من المعادلات الوسيطية معادلة القطع المكافئ $y = \frac{1}{9}x^2 + 2$

تمرين موجّه $y = 4\sqrt{x + 5}$

2. اكتب $x = t^2 - 5$ و $y = 4t$ بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد.

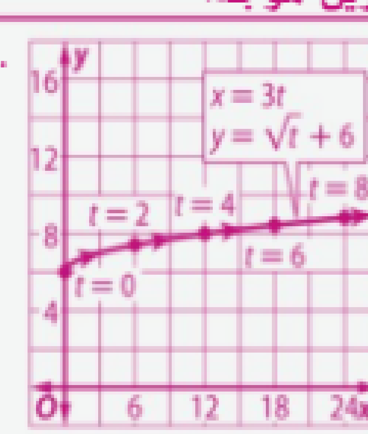
نصيحة دراسية

حذف الوسيط عندما تحذف وسيطٍ من أجل التحويل الى الصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد، فإنك تستطيع حلّ أي من المعادلتين الوسيطيتين أولاً.

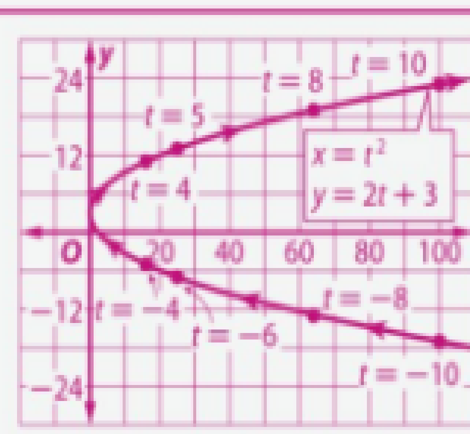
في المثال 2، لاحظ أنّه لم يجرِ تحديد فترة الوسيط الخاص بـ t. وفي حال عدم التحديد، تحدّد فترة الوسيط على أنها جميع قيم t التي تعطي قيمًا حقيقيةً لـ x و y.

إجابات إضافية (تمرين موجه)

1A.



1B.



وفي بعض الأحيان يجب أن يكون المجال مُقيّدًا بعد التحويل من الشكل الوسيطي إلى المستوى الإحداثي المتعامد.

المثال 3 المستوى الإحداثي المتعامد مع قيود المجال

اكتب $x=\frac{1}{\sqrt{t}}$ و $y=\frac{t+1}{t}$ بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ثمّ مثّل المعادلة بيانيًا. واذكر أيّ قيودٍ خاصةٍ بالمجال.

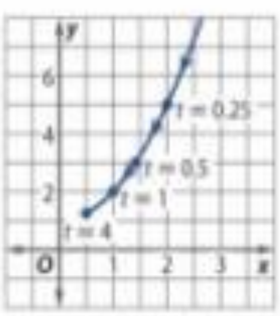
لحذف t، ربّع كل كل طرف للمعادلة $x=\frac{1}{\sqrt{t}}$ وهذا يعطي $x^2=\frac{1}{t}$. إذًا $t=\frac{1}{x^2}$ عوّض بهذه القيمة بدلًا من t في المعادلة الوسيطية الخاصة بـ y.

$y=\frac{t+1}{t}$ المعادلة الوسيطية الخاصة بـ y

$=\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}}$ بتعويض $\frac{1}{x^2}$ بدلًا من t

$=\frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$ بتحويل البسط إلى أبسط صيغة

$=x^2+1$ بسّط



في حين أنّ المعادلة بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد هي $y=x^2+1$، فإن المنحنى معرّف فقط عند قيم $t>0$ من المعادلة الوسيطية $x=\frac{1}{\sqrt{t}}$، القيم الممكنة فقط لـ x هي القيم الأكبر من الصفر. كما هو مبين في التمثيل البياني. فإن مجال المعادلة بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد مقيّد بالقيم $x>0$

تمرين موجّه

3. اكتب $x=\sqrt{t+4}$ و $y=\frac{1}{t}$ في المستوى الإحداثي المتعامد. ومثّل المعادلة بيانيًا. واذكر أيّ قيود على المجال.

انظر الهامش.

ويمكن أن يكون الوسيط في المعادلات الوسيطية زاوية θ أيضًا.

المثال 4 المعادلات بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد باستخدام الوسيط θ

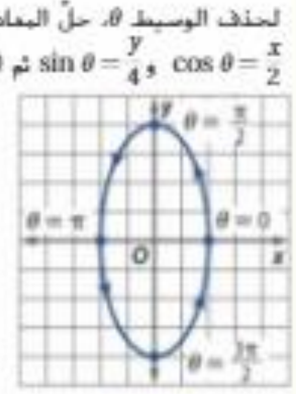
اكتب $x=2\cos\theta$ و $y=4\sin\theta$ في المستوى الإحداثي المتعامد. ثمّ مثّل المعادلة بيانيًا.

لحذف الوسيط θ، حلّ المعادلتين أولًا لإيجاد قيمة $\cos\theta$ و $\sin\theta$ كي تحصل على $\cos\theta=\frac{x}{2}$، $\sin\theta=\frac{y}{4}$ ثم استخدم متطابقة فيثاغورس لحذف الوسيط θ.

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ بتطبيق متطابقة فيثاغورس

$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2=1$ $\cos\theta=\frac{x}{2}$ ، $\sin\theta=\frac{y}{4}$

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ بسّط



عليك تنظيم هذه المعادلة وفق صيغة معادلة قطع ناقص يقع مركزه في نقطة الأصل ويقع رأساه عند النقطتين $(0,-4)$ و $(0,4)$ ويقع رأساه المرافقان عند النقطتين $(2,0)$ و $(-2,0)$ كما هو موضح. مع تغير قيمة θ من 0 إلى 2π، يُرسم القطع الناقص باتجاه معاكس لعقارب الساعة.

نصيحة تقنية

وسيطات عند التمثيل البياني للمعادلات الوسيطية على الحاسبة، يستخدم الرمزان θ و t بصورة متبادلة.

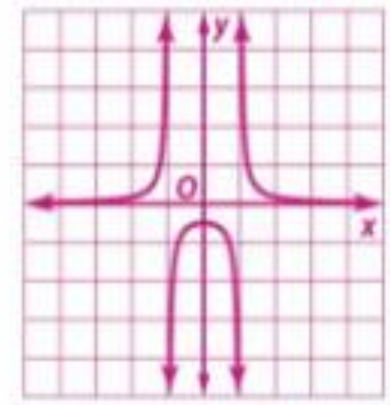
تمرين موجّه **انظر الهامش من أجل التمثيل البياني.**

4. اكتب $x=3\sin\theta$ و $y=8\cos\theta$ بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ثم ارسم التمثيل البياني. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{64}=1$

أمثلة إضافية

3 اكتب $x=\sqrt{t+1}$ و $y=\frac{1}{2t}$ بالصورة الديكارتية. ثمّ مثّل المعادلة بيانيًا. اذكر أي قيود على المجال.

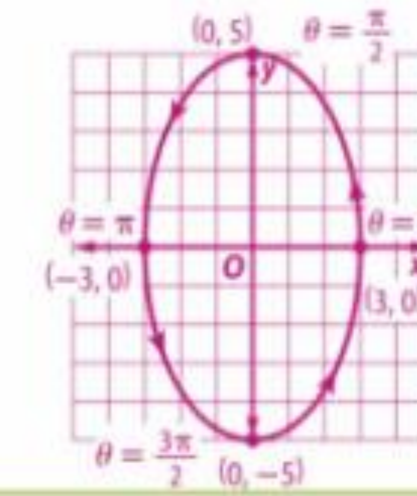
$y=\frac{1}{2x^2-2}$



$x\neq 1$ و $x\neq -1$

4 اكتب $x=3\cos\theta$ و $y=5\sin\theta$ بالصورة الديكارتية. ثمّ مثّل المعادلة بيانيًا.

$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$

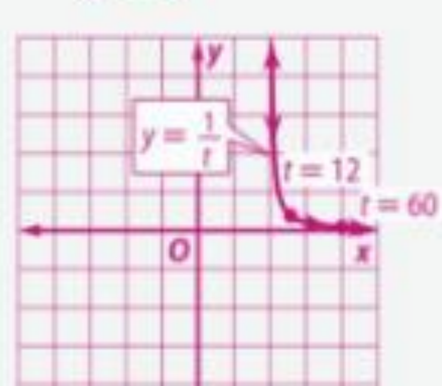


التركيز على محتوى الرياضيات

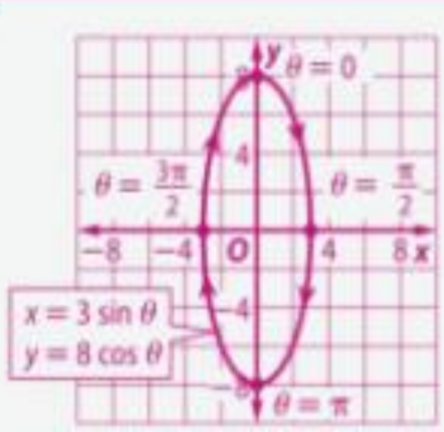
المعادلات الوسيطية المعادلات الوسيطية مجموعة من المعادلات يجري التعبير عن كل إحداثي فيها بوصفه وسيطًا، مثل قياس الزمن أو الزاوية. عند كتابة المعادلات الوسيطية بالصورة الديكارتية بدون وسيط، تحقق دائمًا من أنه لا توجد أجزاء دخيلة من القطع المخروطي.

إجابات إضافية (تدريب موجه)

3. $y=\frac{1}{x^2-4}, x\geq 0, x\neq 2$



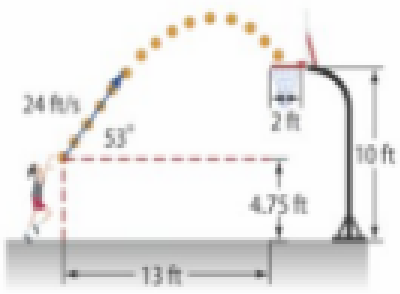
4.



مثال 6 من الحياة اليومية حركة المقذوفات

كرة السلة تتمرّن خديجة على الرميات الحرّة من أجل مباراة كرة السلة القادمة. حيث ترمي الكرة بسرعة متجهة ابتدائية تساوي 24 قدمًا في الثانية وبزاوية °53 بالنسبة خط الأفق. تساوي المسافة الأفقية من قوس الرميات الحرة إلى الحافة الأمامية من حلقة السلّة 13 قدمًا. والمسافة الرأسية من الأرضية إلى حلقة السلة 10 أقدام. تبعد الحافّة الأمامية للحلقة مسافة قدمين عن لوحة الهدف.
ترمي خديجة الكرة عن ارتفاع 4.75 أقدام عن الأرض. فهل سوف تسجّل؟

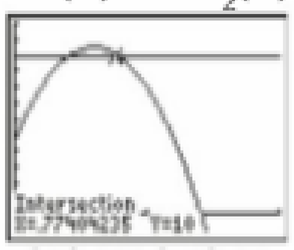
شكّل تمثيلًا بيانيًا للحالة.



لتحديد ما إن كانت خديجة سوف تسجّل الرمية، فإنك بحاجة إلى المسافة الأفقية التي قطعتها الكرة حين كانت عند ارتفاع 10 أقدام. أولًا، اكتب معادلةً وسيطيةً تمثل الموقع الرأسي للكرة.

$y = tv_0 \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$ المعادلة الوسيطية للموقع الرأسي

$= t(24) \sin 53 - \frac{1}{2}(32)t^2 + 4.75$ $h_0 = 4.75$ و $g = 32$ و $\theta = 53°$ و $v_0 = 24$



[0, 2] scl: 1 by [0, 12] scl: 1

مثّل بيانيًا معادلة الموقع الرأسي والمستقيم $y = 10$.
يقطع المنحنى المستقيم في نقطتين. وتمثل نقطة التقاطع الأولى الكرة حين تتحرك هبوطًا باتجاه السلة. استخدم البند 5. التقاطع (Intersect) في القائمة CALC لإيجاد نقطة التقاطع مع $y = 10$. تساوي القيمة تقريبًا 0.77 ثانية.

حدّد الموقع الأفقي للكرة عند الزمن 0.77 ثانية.

$x = tv_0 \cos \theta$ المعادلة الوسيطية للموقع الأفقي

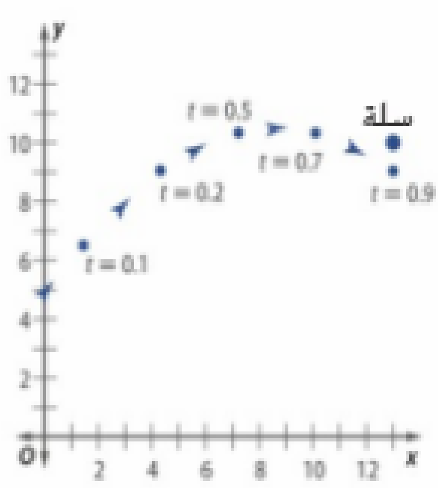
$= 0.77(24) \cos 53$ $t \approx 0.77$ و $\theta = 53°$ و $v_0 = 24$

≈ 11.1 باستخدام الحاسبة

نظرًا إلى أن الموقع الأفقي الأصغر من 13 قدمًا عند بلوغ الكرة ارتفاع 10 أقدام للمرة الثانية، فلن تبلغ الكرة السلة. ولن تسجّل خديجة الرمية.

التحقق يمكنك التأكد من حسابك عبر التمثيل البياني للمعادلات الوسيطية وتحديد مسار الكرة بالنسبة للسلة.

t	x	y	t	x	y
0	0	4.75	0.5	7.22	10.33
0.1	1.44	6.51	0.6	8.67	10.49
0.2	2.89	7.94	0.7	10.11	10.32
0.3	4.33	9.06	0.8	11.55	9.84
0.4	5.78	9.86	0.9	13.00	9.04

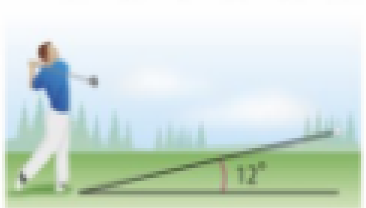


نصيحة دراسية

الجاذبية الأرضية عند سطح الأرض، يبلغ تسارع الجاذبية الأرضية 9.8 أمتار في الثانية للتربيع أو 32 قدمًا في الثانية للتربيع. وعند حل المسائل، تحقق من استخدام القيمة الصحيحة لتسارع الجاذبية بناءً على الوحدات المستخدمة للسرعة والموقع.

تمرين موجّه

6. **لعبة الجولف** يضرب سعيد كرة الجولف بسرعة ابتدائية تساوي 56 مترًا في الثانية وبزاوية مقدارها °12 فوق أرضية مستوية. عند أي مسافة ستحط الكرة على الأرض؟ **130 m**



الربط بالحياة اليومية

في شهر أبريل من عام 2007، أصبحت مورغان بريسل أصغر امرأة على الإطلاق تفوز ببطولة اتحاد الجولف للسيدات المحترفات أو ما يعرف بـ LPGA.

المصدر: بطولة اتحاد الجولف للسيدات المحترفات

2 حركة المَقذوفات

يبين **المثال 6** طريقة استخدام المعادلات الوسيطية لنمذجة حركة المَقذوفات.

مثال إضافي

6 **كرة القدم** يحمل عمر سجل فريقه لأطول هدف من مسافة 46.47 ياردة. على فرض أنه ركل الكرة من ارتفاع أولي يساوي قدمين وبسرعة ابتدائية تعادل 16 ياردة في الثانية وبزاوية °72.. كم تبلغ المسافة الأفقية التي ستقطعها الكرة؟
حوالي 46 yd

التعليم باستخدام التكنولوجيا

المجلة على مجلة الصف، يجب على الطلا ب كتابة مداخلة حول المعادلات الوسيطية. تأكد من أنهم يضعون معلومات عن كلٍ من الصورة الديكارتية والوسيطية.

المتابعة

استكشف الطلاب كتابة المعادلات الوسيطية.

اطرح السؤال التالي:

- كيف تساعدك المعادلات الوسيطية على رؤية "الصورة كاملة؟"
نموذج الإجابة: تتيح المعادلات الوسيطية طريقة للتعبير عن الموقع الأفقي والرأسي لجسمٍ بوصفه دالة زمنية. وهذا مفيد لأنه يسمح لك بتحديد مكان الجسم في أي زمن معطى.

التدريس المتمايز BL OL

المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني وزع طلا ب الصف إلى مجموعات من ثلاثة أو أربعة طلاب. تُعِد كل مجموعة تسجيل فيديو لطالبٍ يرمي كرة لينة أو كرة قاعدة. اطلب إلى الطلاب احتساب زمن وجود الكرة في الهواء. ثم شغل الفيديو بالحركة البطيئة وتتبع مسار الكرة. يجب على الطلاب تحديد الارتفاع الأقصى والمدى والزاوية الابتدائية للإطلاق والسرعة المتجهة الإبتدائية للرمي. اطلب إلى المجموعات استخدام هذه البيانات لكتابة مسائل لفظية وتبادلها مع مجموعات أخرى في الصف. واطلب إلى كل مجموعة عرض الفيديو الذي أعدته على زملائهم في الصف.

3 التدريب

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 33 للتحقق من استيعاب الطلاب للمفاهيم.

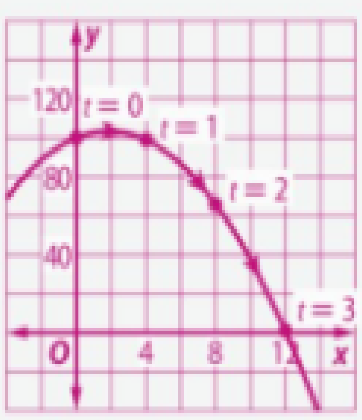
ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات التي ستعطيها للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع في التمارين من 1 إلى 8، تأكد من أن الطلاب يستخدمون الإحداثيين x و y لتحديد الشكل في رسمهم. وينبغي بعدها كتابة مواقع الوسيط t على المنحنى.

إجابات إضافية

17. $y = -x^2 + \frac{15}{4}x + 100$



40a.

[0, 20] scl: 5 by [0, 2] scl: 0.2
t [0, 20]; t step: 0.1

40c. نعم؛ تصل كرة التنس الشبكة في حوالي 0.575 ثانية. في هذا الوقت، تكون الكرة على ارتفاع نحو 1.6 m، لذلك ستجتاز الشبكة.

41. نموذج الإجابة: $x = t + 4$ و $y = 3t + 7$

42. نموذج الإجابة: $x = t + 3$ و $y = -0.5t - 2$

43. نموذج الإجابة: $x = t - 2$ و $y = 4t - 6,\ 0 \le t \le 4$

44. نموذج الإجابة: $x = t + 7$ و $y = -\frac{1}{3}t + 13,\ 0 \le t \le 6$

تمارين

مثّل بيانيًا المنحنى المعطى لكل زوج من المعادلات الوسيطية في الفترة المعطاة. (المثال 1) **1–8. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.**

1. $x = t^2 + 3$ ، $y = \frac{t}{4} - 5;\ -5 \le t \le 5$
2. $x = \frac{t^2}{2}$ ، $y = -4t;\ -4 \le t \le 4$
3. $x = -\frac{5t}{2} + 4$ ، $y = t^2 - 8;\ -6 \le t \le 6$
4. $x = 3t + 6$ ، $y = \sqrt{t} + 1;\ 0 \le t \le 9$
5. $x = 2t - 1$ ، $y = -\frac{t^2}{2} + 7;\ -4 \le t \le 4$
6. $x = -2t^2$ ، $y = \frac{t}{3} - 6;\ -6 \le t \le 6$
7. $x = \frac{t}{2}$ ، $y = -\sqrt{t} + 5;\ 0 \le t \le 8$
8. $x = t^2 - 4$ ، $y = 3t - 8;\ -5 \le t \le 5$

9–16. انظر الوحدة 6 ملحق التمثيلات البيانية.

اكتب كل زوج من المعادلات الوسيطية بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ثم مثل المعادلة بيانيًا واذكر أيّ قيودٍ على المجال. (المثالان 2 و 3)

9. $x = 2t - 5, y = t^2 + 4$ $\quad y = 0.25x^2 + 2.5x + 10.25$
10. $x = 3t + 9, y = t^2 - 7$ $\quad y = \frac{x^2}{9} - 2x + 2$
11. $x = t^2 - 2, y = 5t$ $\quad y = \pm 5\sqrt{x + 2}$
12. $x = t^2 + 1, y = -4t + 3$ $\quad y = \pm 4\sqrt{x - 1} + 3$
13. $x = -t - 4, y = 3t^2$ $\quad y = 3x^2 + 24x + 48$
14. $x = 5t - 1, y = 2t^2 + 8$ $\quad y = \frac{2x^2}{25} + \frac{4x}{25} + \frac{202}{25}$
15. $x = 4t^2, y = \frac{6t}{5} + 9$ $\quad y = \pm\frac{3\sqrt{x}}{5} + 9$
16. $x = \frac{t}{3} + 2, y = \frac{t^2}{6} - 7$ $\quad y = \frac{3x^2}{2} - 6x - 1$

17. **الممثلون البدلاء** خلال تصوير أحد الأفلام، يقفز أحد الممثلين البدلاء من حافة أحد المباني. وتؤدي البكرات المربوطة بالممثل البديل إلى سقوطه سقوطًا حرًا يمكن تمثيله بالمعادلة $y = -16t^2 + 15t + 100$ وبحركةٍ أفقيةٍ يمكن تمثيلها بالمعادلة $x = 4t$. وفيها x و y تقاسان بالقدم و t تقاس بالثواني. اكتب معادلةً بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد ومثّلها بيانيًا لتمثيل سقوط الممثل من أجل $0 \le t \le 3$ (المثال 3) **انظر الهامش.**

اكتب كل زوج من المعادلات الوسيطية بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ثم مثّل المعادلة بيانيًا. (المثال 4) **18–25. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.**

18. $x = 3\cos\theta$ ، $y = 5\sin\theta$
19. $x = 7\sin\theta$ ، $y = 2\cos\theta$
20. $x = 6\cos\theta$ ، $y = 4\sin\theta$
21. $x = 3\cos\theta$ ، $y = 3\sin\theta$
22. $x = 8\sin\theta$ ، $y = \cos\theta$
23. $x = 5\cos\theta$ ، $y = 6\sin\theta$
24. $x = 10\sin\theta$ ، $y = 9\cos\theta$
25. $x = \sin\theta$ ، $y = 7\cos\theta$

استخدم كل وسيط لكتابة المعادلات الوسيطية التي يمكن أن تمثل كل معادلة. ثم مثّل المعادلات بيانيًا، مع الإشارة إلى سرعة الرسم البياني وتوجيهه. (المثال 5) **26–31. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.**

26. $t = 3x - 2;\ y = x^2 + 9$
27. $t = 8x;\ y^2 = 9 - x^2$
28. $t = 2 - \frac{x}{3};\ y = \frac{x^2}{12}$
29. $t = \frac{x}{5} + 4;\ y = 10 - x^2$
30. $t = 4x + 7;\ y = \frac{x^2 - 1}{2}$
31. $t = \frac{1 - x}{2};\ y = \frac{3 - x^2}{4}$

32. **البيسبول** يضرب لاعبٌ كرة البيسبول بزاوية $28°$ وبسرعةٍ ابتدائية تساوي 103 أقدام في الثانية. يرتفع موقع ضرب الكرة مسافة 4 أقدام عن الأرض في لحظة استخدام المضرب بالكرة. على فرض أن أحدًا من اللاعبين لم يمسك الكرة، حدد المسافة التي تقطعها الكرة. (المثال 6) **282 ft**

33. **لعب الكرة** يحاول عبيد إصابة هدف يبعد 43 ياردة. فيركل الكرة بزاوية $41°$ وبسرعة ابتدائية تساوي 70 قدمًا في الثانية. ارتفاع الهدف 15 قدمًا. فهل ركلته طويلةً بما يكفي لإصابة الهدف؟ (المثال 6) **نعم**

34. $4x^2 - 32x + 67, x \ge 4$

B اكتب كل زوج من المعادلات الوسيطية بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ثم اذكر أي قيودٍ على المجال.

34. $x = \sqrt{t} + 4$, $y = 4t + 3$
35. $x = \log t$, $y = t + 3$ $\quad y = 10^x + 3$
36. $x = \sqrt{t - 7}$, $y = -3t - 8$ $\quad y = -3x^2 - 29, x \ge 0$
37. $x = \log(t - 4)$, $y = t$ $\quad y = 10^x + 4$
38. $x = \frac{1}{\sqrt{t + 3}}$, $y = t$ $\quad y = \frac{1}{x^2} - 3, x > 0$
39. $x = \frac{1}{\log(t + 2)}$, $y = 2t - 4$ $\quad y = 2 \cdot 10^{\frac{1}{x}} - 8, x \ne 0$

40. **التنس** يضرب مازن كرة مضربٍ عند ارتفاع 55 سنتيمترًا عن الأرض وبزاوية $15°$ مع خط الأفق. السرعة الابتدائية للكرة 18 مترًا في الثانية.
    a. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل مسار كرة المضرب باستخدام المعادلات الوسيطية. **انظر الهامش.**
    b. كم تبقى الكرة في الهواء قبل أن تضرب الأرض؟ **حوالي 1.06 s**
    c. إذا كان مازن يبعد 10 أمتارٍ عن الشبكة، وكان ارتفاع الشبكة 1.5 متر عن الأرض، فهل ستعبر الكرة فوق الشبكة؟ وإن كان ذلك، فكم مترٍ ستتخطى الكرة الشبكة؟ وإن لم يكن ذلك، فما مسافة اصطدام الكرة بالأرض قبل الشبكة؟ **انظر الهامش.**

اكتب مجموعة معادلات وسيطية لكل مستقيم أو قطعة مستقيمة مما يلي وفق الخواص التالية. **41–44. انظر الهامش.**

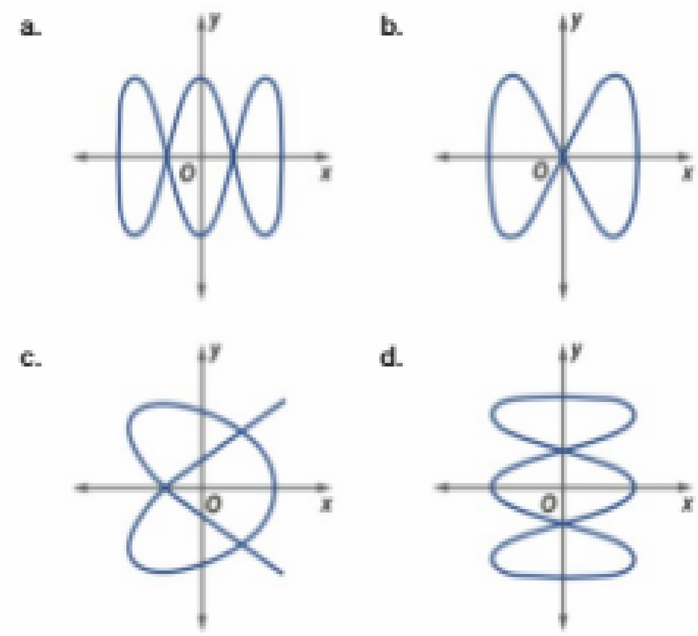
41. مستقيم ميله 3 يمر بالنقطة $(4, 7)$
42. مستقيم ميله -0.5 يمر بالنقطة $(3, -2)$
43. قطعة مستقيمة نقطتاها الطرفيتان هما $(-2, -6)$ و $(2, 10)$
44. قطعة مستقيمة نقطتاها الطرفيتان $(7, 13)$ و $(13, 11)$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL OL BL

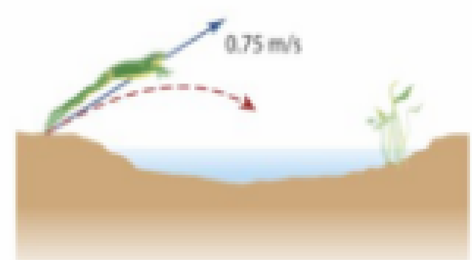
المستوى	الواجبات	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1–33, 54, 55, 57–79	1–33 فردي، 77–79	2–32 زوجي، 54, 55, 57–76
OL ضمن المستوى	1–39 فردي، 40, 41–47 فردي، 49–52, 54, 55, 57–79	1–33, 77–79	34–52, 54, 55, 57–76
BL أعلى من المستوى	34–79		

صل بين كل مجموعة من المعادلات الوسيطية وتمثيلها البياني المقابل.

45. $x = \cos 2t,\ y = \sin 4t$ **b**
46. $x = \cos 3t,\ y = \sin t$ **d**
47. $x = \cos t,\ y = \sin 3t$ **a**
48. $x = \cos 4t,\ y = \sin 3t$ **c**



49. **علم الأحياء** يقفز ضفدع من ضفة جدولٍ بسرعةٍ ابتدائية تساوي 0.75 متر في الثانية وبزاوية قياسها $45°$ بالنسبة للاتجاه الأفقي. يقع سطح الجدول على بعد 0.3 متر تحت حافة الضفة. إذا كانت g تساوي 9.8 أمتار لكل ثانية مربعة .



a. اكتب المعادلة الوسيطية التي تصف موقع الضفدع عند الزمن t. وافترض أن سطح الماء يقع على المستقيم $y = 0$. **انظر الهامش.**

b. إذا كان عرض الجدول 0.5 متر، فهل سيبلغ الضفدع الضفة الثانية التي تقع على مستوى الجدول نفسه؟ وإن لم يكن ذلك، فكم تبعد نقطة اصطدام الضفدع بالماء عن الضفة الأخرى؟ **لا؛ 0.34 m**

c. إذا استطاع الضفدع أن يقفز على ورقة زنبق تطفو فوق سطح الجدول وتبعد مسافة 0.4 متر عن موقع القفز، واستغرق كي يبلغها 0.38 ثانية، فكم كانت السرعة الابتدائية للضفدع؟

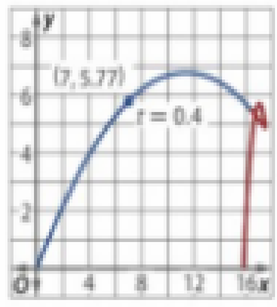
حوالي 1.49 m/s

50. **السباق** تتنافس هالة وهداية في سباق 100 متر. وبعد إطلاق رصاصة الانطلاق، تنطلق هالة بسرعة 0.8 متر في الثانية بعد تأخير لمدة 0.1 ثانية من النقطة $(0, 2)$ وتنطلق هداية بسرعة 8.1 أمتار في الثانية بعد تأخير لمدة 0.3 ثانية من النقطة $(0, 5)$.

a. باستخدام المحور الرأسي y بمثابة خط البداية وعلى فرض أن الفتاتين تركضان بموازاة المحور الأفقي x، اكتب معادلتين وسيطيتين تمثلان موقع كل منهما بعد t ثوانٍ. **انظر الهامش.**

b. من ستفوز بالسباق؟ إذا ركضت الفتاتان مسافة 200 متر بدلًا من 100 متر، فمن ستفوز؟ اشرح إجابتك. **انظر الهامش.**

51. **كرة القدم** يمثّل التمثيل البياني المبيّن أدناه مسار كرةٍ ركلها أحد اللاعبين ومن ثمّ ضربها لاعبٌ آخر برأسه. مسار الكرة بعد ركلها من قِبَل اللاعب الأول موضح باللون الأزرق، ومسارها بعد ضربها بالرأس من قِبَل اللاعب الثاني موضح باللون الأحمر.



b. حوالي ثانية واحدة

حوالي 27.2 ft/s

a. إذا ركل اللاعب الأول الكرة بزاوية $50°$، أوجد سرعتها البدائية.

b. ما هو زمن وصول الكرة إلى اللاعب الثاني إذا كان يقف على بعد 17.5 قدمًا؟

c. إذا ضرب اللاعب الثاني الكرة برأسه بزاوية قياسها $75°$ وبسرعةٍ بدائية تساوي 8 أقدام في الثانية عند ارتفاع 4.75 أقدام، فكم تبقى الكرة في الهواء على وجه التقريب بدءًا من لحظة ركلها أول مرة وحتى هبوطها إلى الأرض؟ **حوالي 1.84 ثانية**

52. **التمثيلات المتعددة** سوف تدرس في هذه المسألة الدويري، وهو المنحنى الذي يرسمه مسارٌ نقطةٍ على محيط دائرةٍ نصف قطرها وحدةٌ واحدةٌ أثناء دحرجتها على طول المحور الأفقي x. **a–c. انظر الهامش.**

a. **بيانيًا** استخدم حاسبةً بيانيةً لتمثيل المعادلتين الوسيطيتين $x = t - \sin t$ و $y = 1 - \cos t$، وفيهما t تقاس بالقياس الدائري (الراديان).

b. **تحليليًا** ما المسافة بين نقطتي التقاطع مع المحور الأفقي x؟ صِف ماذا تمثل نقطتا التقاطع مع المحور الأفقي x وماذا تمثل المسافة بينهما.

c. **تحليليًا** ما القيمة العظمى لـ y؟ صِف ما تمثله هذه القيمة وكيف تتغير بالنسبة لدوائر ذات أنصاف أقطارٍ مختلفة.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدم مهارات التفكير العليا

53. **تحدٍّ** خذ المستقيم ℓ ذا المعادلتين الوسيطيتين $x = 2 + 3t$ و $y = -t + 5$ اكتب مجموعة معادلات وسيطية للمستقيم m الموازي لـ ℓ والذي يضم النقطة $(4, 10)$.
نموذج الإجابة: $x = 4 + t,\ y = 10 + 3t$

54. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في وجود عددٍ لا نهائي من مجموعات المعادلات الوسيطية لوصف مستقيمٍ في المستوى xy.
انظر الهامش.

55. **التبرير** حدّد إن كانت المعادلات الوسيطية الخاصة بحركة المقذوفات يمكن أن تنطبق على أجسام ترمى بزاوية قياسها $90°$. اشرح استنتاجك.

56. **تحدٍّ** لدينا مستقيمٌ في الفضاء ثلاثي الأبعاد يضم النقطتين $P(2, 3, -8)$ و $Q(-1, 5, -4)$. أوجد مجموعتي المعادلات الوسيطية للمستقيم.
انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

57. **الكتابة في الرياضيات** اشرح أفضلية استخدام المعادلات الوسيطية على استخدام المعادلات بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي عند تحليل المركبتين الأفقية/الرأسية لتمثيلٍ بياني.

انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

إجابات إضافية

49a. $x = t \cdot 0.75 \cos 45°,\ y = t \cdot 0.75 \sin 45° - 4.9t^2 + 0.3$

50a. هالة: $x = 8(t - 0.1),\ y = 2$؛ هداية: $x = 8.1(t - 0.3),\ y = 5$

50b. تفوز هالة في سباق الـ 100 متر بعد أن تنهيه في 12.6 ثانية، بينما تنهيه هداية في 12.65 ثانية. ستفوز هداية في سباق الـ 200 متر بعد أن تنهيه في 25 ثانية، بينما تنهيه هالة في 25.1 ثانية.

مراجعة شاملة

مثّل كلّ معادلةٍ عند الزاوية المشار إليها. **58–59. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.**

58. $\frac{(x')^2}{9} - \frac{(y')^2}{4} = 1$ عند التدوير بزاوية °60 من المحور xy

59. $(x')^2 - (y')^2 = 1$ عند التدوير بزاوية °45 من المحور xy

60–61. انظر الهامش.

اكتب معادلةً تمثل القطع الزائد مع الخواص التالية.

60. الرأسان $(5, -8)$، $(5, 4)$، طول المحور المرافق 4

61. طول المحور القاطع 4، البؤرتان $(3, -1)$، $(3, 5)$

62. **البيت الأبيض** ثمة مساحةٌ مفتوحةٌ جنوب البيت الأبيض يطلق عليها القطع الناقص. اكتب معادلة لتمثيل القطع الناقص. افترض أن نقطة الأصل هي مركز القطع الناقص.

$$\frac{x^2}{193{,}600} + \frac{y^2}{279{,}312.25} = 1$$

حوّل كلًا من التعابير التالية إلى أبسط صورة.

63. $\frac{\sin x}{\csc x - 1} + \frac{\sin x}{\csc x + 1}$ **$2\tan^2 x$**

64. $\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x}$ **$2\csc^2 x$**

استخدم خواص اللوغاريتمات لإعادة كتابة كل لوغاريتم من اللوغاريتمات المبينة أدناه وفق الصيغة $a \ln 2 + b \ln 3$، حيث a و b ثابتان. ثمّ قدّر قيمة كل لوغاريتم إذا علمت أن $\ln 2 \approx 0.69$ و $\ln 3 \approx 1.10$

65. $\ln 54$ **$3\ln 3 + \ln 2; 3.99$**

66. $\ln 24$ **$3\ln 2 + \ln 3; 3.17$**

67. $\ln \frac{8}{3}$ **$3\ln 2 - \ln 3; 0.97$**

68. $\ln \frac{9}{16}$ **$2\ln 3 - 4\ln 2; -0.56$**

لكل دالّة، حدّد أي مستقيماتٍ تقاربية ونقاط تقاطع. ثمّ مثّل الدالّة واذكر مجالها. **69–72. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.**

69. $h(x) = \frac{x}{x+6}$

70. $h(x) = \frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 7x - 8}$

71. $f(x) = \frac{x^2 + 8x}{x + 5}$

72. $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + x^2 - 6x}$

حل كلٍ من المعادلات التالية.

73. $\sqrt{3z - 5} - 3 = 1$ **7**

74. $\sqrt{5n - 1} = 0$ **$\frac{1}{5}$**

75. $\sqrt{2c + 3} - 7 = 0$ **23**

76. $\sqrt{4a + 8} + 8 = 5$ **لا يوجد حل**

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

77. **SAT/ACT** باستثناء المربعات المظللة، يحوي كل مربع في التمثيل البياني عددًا يساوي مجموع العدد الموجود في المربع الواقع فوقه والعدد الموجود في المربع الواقع إلى يساره. فعلى سبيل المثال، العدد 4 في المربع غير المظلل هو مجموع العدد 2 الموجود في المربع الواقع فوقه والعدد 2 في المربع الواقع إلى يساره مباشرةً. ما قيمة x؟ **E**

0	1	2	3	4	5
1	2	4			
2					
3			x		
4					
5					

انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

A 7 B 8 C 15 D 23 E 30

78. يقوم صالح و سلطان بتجربةٍ في الفيزياء يطلقان خلالها نموذج صاروخ. من المفروض أن يحرّر الصاروخ مظلةً عند ارتفاع 300 قدم في الهواء، وبعد 7 ثوانٍ من الإقلاع. يطلق الطالبان الصاروخ عند زاوية قياسها °78 بالنسبة للاتجاه الأفقي. ولحماية الطلاب الآخرين من الصاروخ الساقط، يحتاج المعلّم إلى وضع شاراتٍ تحذيريةٍ على بعد 50 ياردة من موضع تحرير المظلة. فكم ينبغي أن تبعد الإشارات التحذيرية عن نقطة إطلاق الصاروخ؟ **G**

F 122 ياردة

G 127 ياردة

H 133 ياردة

J 138 ياردة

79. **إجابة حرّة** يتحرّك جسمٌ على طول منحنًى معادلتاه الوسيطيتان $x = \sqrt{t}$، $y = \frac{10\sqrt{3t} \pm \sqrt{496 - 2304t}}{62}$

a. حوّل المعادلتين الوسيطيتين إلى معادلتين بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. **$21x^2 + 31y^2 - 10\sqrt{3}xy = 4$**

b. حدّد القطع المخروطي الذي يمثّله المنحنى. **قطع ناقص**

c. اكتب معادلةً تمثل المنحنى في المستوى $x\ y$، على فرض أنه تمّ تدويره بزاوية °30. **$4(x')^2 + 9(y')^2 = 1$**

d. حدّد الاختلاف المركزي للقطع المخروطي. **≈ 0.745**

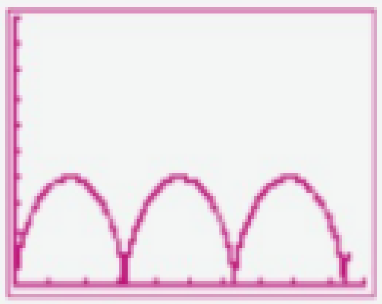
e. حدّد موضعي البؤرتين في المستوى $x'\ y'$ إن وجدتا. **$\left(\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right)$**

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب اطلب إلى كل طالب كتابة الخطوات المتبعة في كتابة الصورة الديكارتية للمعادلة عند إعطاء معادلتين وسيطيتين. أوجد حل إحدى المعادلتين من أجل t، ثم استبدل تلك القيمة في المعادلة الثانية وحوّل إلى أبسط صورة.

إجابات إضافية

52a.



[0, 20] scl: 2 by [0, 5] scl: 0.5

52b. 2π؛ نموذج الإجابة: يمثل التقاطع مع المحور x الحالات التي تلامس فيها النقطة على الدائرة المحور x أثناء دورانها. بما أنّ كامل محيط الدائرة سيلامس المحور x أثناء دورانها، فستكون المسافة بين تقاطع مع المحور x مساوية لمحيط الدائرة، والذي يساوي 2π.

52c. 2؛ نموذج الإجابة: تمثل هذه القيمة الارتفاع الأقصى الذي تبلغه النقطة بينما تدور الدائرة على طول المحور x. وهو يساوي قطر الدائرة. سينتج عن دائرة نصف قطرها r قيمة y عظمى تساوي $2r$.

54. نموذج الإجابة: تُكتب المعادلات الوسيطية باستخدام نقطة على المستقيم ومتجهٍ موازٍ. يمكن كتابة عدد لانهائي من المعادلات باستخدام عدد لا نهائي من النقاط على أي مستقيم.

60. $\frac{(y+2)^2}{36} - \frac{(x-5)^2}{4} = 1$

61. $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{5} = 1$

التدريس المتمايز EL

توسع يمكن استخدام حاسبة بيانية لتمثيل المعادلات الوسيطية بيانيًا بتغيير الوضع من Func (دالة) إلى Par (معادلة وسيطية). المنحنى الدائري هو دالة يمكن نمذجتها باستخدام المعادلتين الوسيطيتين $x = t - \sin t$ و $y = 1 - \cos t$. اطلب إلى الطلا ب إجراء بحث على الإنترنت لمعرفة خصائص المنحنى الدائري. اطلب إلى كل طالب رسم منحنى دائري. ثم، وباستخدام حاسبة بيانية في الوضع الوسيطي، يمكنه رسم منحنى دائري ومقارنته برسمه.

6-5 مختبر تكنولوجيا التمثيل البياني
التمثيل بواسطة المعادلات الوسيطية

كما هو مبيّن في الدرس 5-6، يمثل المتغير المستقل t في المعادلات الوسيطية الزمن. ويعكس هذا الوسيط سرعة رسم التمثيل البياني. إذا أتمّ تمثيلٌ بيانيّ خلال زمن $0 \le t \le 10$، في حين استغرق إتمام تمثيلٍ بيانيّ مطابقٍ له الزمن $0 \le t \le 10$. إذًا فإن التمثيل البياني الأول أسرع.

النشاط التمثيل البياني الوسيطي

لعب الكرة يقف عمر بجوار شقيقته نورا و يرميان كرةً في الزمن نفسه تمامًا. ترمي نورا الكرة عند سرعة ابتدائية تساوي 20 مترًا في الثانية وبزاوية قياسها °60. ويرمي عمر الكرة عند سرعة ابتدائية تساوي 15 مترًا في الثانية وبزاوية قياسها °45. على فرض أن الكرتين ترميان من الارتفاع الابتدائي نفسه، مثّل الرميتين على حاسبةٍ للتمثيل البياني.

الخطوة 1 المعادلات الوسيطية لكل رميةٍ هي كالتالي.

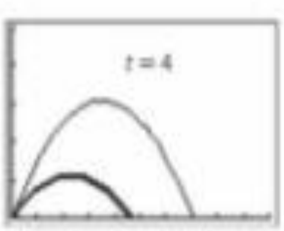
نورا: $x = 20t \cos 60 = 10t$ ، $y = 20t \sin 60 - 4.9t^2 = 10\sqrt{3}t - 4.9t^2$

عمر: $x = 15t \cos 45 = 7.5\sqrt{2}t$ ، $y = 15t \sin 45 - 4.9t^2 = 7.5\sqrt{2}t - 4.9t^2$

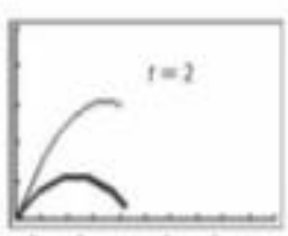
الخطوة 2 ضبط النمط. من القائمة MODE، اختر degree و par و simul. وهذا يتيح تمثيل المعادلات بيانيًا في الوقت نفسه. أدخل المعادلات الوسيطية. في الصيغة الوسيطية، تستخدم X,T,θ,n الرمز t بدلًا من x. اضبط إظهار المجموعة الثانية من المعادلات على الوضعية المظللة للتمييز بين الرميات.

الخطوة 3 اضبط قيم t لتتراوح بين 0 و 8 بمثابة تقديرٍ لمدد الرمي. اضبط tstep على 0.1 لتشاهد الرميات على التمثيل البياني.

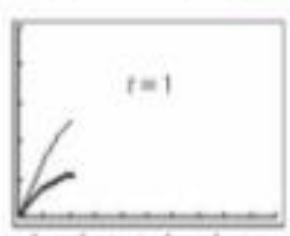
الخطوة 4 مثّل المعادلات بيانيًا.



[0, 50] scl: 5 by [0, 25] scl: 5



[0, 50] scl: 5 by [0, 25] scl: 5



[0, 50] scl: 5 by [0, 25] scl: 5

ترتفع رمية نورا أكثر تقطع مسافةً أكبر في حين تحطّ رمية عمرعلى الأرض أولًا.

تمارين

1. **لعب الكرة** بلغت سرعة رمية عمر التالية 21 مترًا في الثانية عند زاوية قياسها °50. وبعد مرور ثانية واحدة، رمت نورا كرتها بسرعة 24 مترًا في الثانية عند زاوية قياسها °35. مثّل الرميتين على حاسبةٍ للتمثيل البياني وفسّر النتائج.

2. **البيسبول** رمت نورا كرة بيسبول بسرعة 27 مترًا في الثانية وبزاوية قياسها °82. وبعد مرور ثانية واحدة، ضرب عمر كرةً بسرعة 45 مترًا في الثانية وبزاوية قياسها °20. فعلى فرض أن الكرتين لا تزالان متجاورتين وأن الارتفاع الابتدائي لضربة عمر أخفض بمترٍ واحد، مثّل الموقف على حاسبةٍ للتمثيل البياني وفسّر النتائج.

الهدف

- استخدام حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدوال بارامتريًا.

نصيحة دراسية

ضبط الوسيطات استخدم الحالة الواردة في المعادلة بمثابة دليلٍ إرشادي لضبط مجال قيم x و y و t.

1. 

[0, 60] scl: 5 by [0, 25] scl: 5; t[0, 8]; tscl: 0.1

نموذج الإجابة: عند $t = 2.5$ ثانية، تكون الكرتان عند الارتفاع نفسه تقريبًا. عند حوالي $t = 3.25$ ثانية، تكون رمية نوال قد قطعت المسافة الأفقية نفسها التي قطعتها رمية أمين. وعند $t = 3.5$، تكون رمية أمين قد حطّت للتو على الأرض بينما تكون رمية نوال لا تزال في الهواء.

2. 

[0, 125] scl: 5 by [0, 50] scl: 5; t[0, 8]; tscl: 0.1

نموذج الإجابة: ترتفع رمية نوال أكثر بكثير من ضربة أمين. وتبلغ الرمية والضربة أقصى ارتفاع لهما بالقرب من $t = 2.5$، وتحطّ الضربة قبل ثانية كاملة من الرمية.

390 | الدرس 5-6

1 التركيز

الهدف استخدم حاسبة بيانية لنمذجة الدوال وسيطيًا.

نصيحة للتدريس

يجب أن تأخذ معادلة المكون الرأسي في الاعتبار خسارة الارتفاع بسبب الجاذبية، الأمر الذي يتم عن طريق طرح $4.9t^2$.

لرؤية مجموعات مدى t المختلفة، حدد قيمة t للمدى المناسب. سيمنحك هذا لقطات مختلفة من التمثيل البياني.

2 التعليم

العمل في مجموعات متعاونة

اطلب إلى الطلاب العمل على النشاط في مجموعاتٍ من أربعة.

إسأل:

- لم من الضروري توفّر أربع معادلاتٍ وسيطية لتمثيل هذه الحالة؟ توجد معادلة وسيطية للمكوّن الرأسي والمكون الأفقي لكلٍ من نيفا وأوين.

تدريب اطلب إلى الطلاب إكمال التمرين 1.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرين 2 لتقويم ما إذا كان بإمكان الطلاب استخدام المعادلة الوسيطية على حاسباتهم لنمذجة وفحص الحالات الممثلة بالمعادلات الوسيطية.

من المحسوس إلى المجرد

إسأل:

- ما الأنماط الموجودة والتي تربط السرعة المتجهة الابتدائية وزاوية الرمي بالمسافة الأفقية التي تقطعها الكرة في هذه الحالة؟ نموذج الإجابة: كلما ازدادت السرعة المتجهة الابتدائية، قطعت الكرة مسافة أبعد.

التقويم التكويني

المفردات الأساسية تشير مراجع الصفحة بعد كل كلمة إلى المكان الذي ذُكر فيه المصطلح لأول مرة. إذا واجه الطلاب صعوبة في الإجابة عن الأسئلة من 1 إلى 10، فذكرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لإنعاش ذاكراتهم بشأن المفردات.

الوحدة 6 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الوحدة

المفاهيم الأساسية

القطع المكافئ (الدرس 6-1)

البؤرة	الرأس	الاتجاه	المعادلات
$(h+p, k)$	(h, k)	أفقي	$(y-k)^2=4p(x-h)$
$(h, k+p)$	(h, k)	رأسي	$(x-h)^2=4p(y-k)$

- p هي المسافة من الرأس إلى البؤرة.

القطع الناقص والدوائر (الدرس 6-2)

البؤرة	الرأس	المحور الأكبر	المعادلات
$(h \pm c, k)$	$(h \pm a, k)$	أفقي	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
$(h, k \pm c)$	$(h, k \pm a)$	رأسي	$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

- يعطى الاختلاف المركزي لقطعٍ ناقصٍ من خلال العلاقة $e=\frac{c}{a}$، وفيها $a^2-b^2=c^2$
- الصيغة القياسية لمعادلة دائرةٍ نقطة مركزها (h, k) وتسف قطرها r هي $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

القطع الزائد (الدرس 6-3)

البؤرة	الرأس	المحور القاطع	المعادلات
$(h \pm c, k)$	$(h \pm a, k)$	أفقي	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
$(h, k \pm c)$	$(h, k \pm a)$	رأسي	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

- يعطى الاختلاف المركزي للقطع الزائد بالعلاقة $e=\frac{c}{a}$، حيث أن $a^2+b^2=c^2$

علاقات القطوع المخروطية (الدرس 6-4)

- يمكن تحويل معادلة في المستوى xy إلى معادلة في المستوى $x'y'$ باستخدام العلاقة $x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$ و $y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$
- يمكن تحويل معادلة في المستوى $x'y'$ إلى معادلة في المستوى xy باستخدام العلاقتين $x'=x\cos\theta+y\sin\theta$ و $y'=y\cos\theta-x\sin\theta$

المعادلات الوسيطية (الدرس 6-5)

- تستخدم المعادلات الوسيطية لوصف المركبتين الأفقية والرأسية لمعادلةٍ على نحوٍ منفصل، وذلك بدلالة المتغير t بصورةٍ عامة.
- بالنسبة لجسم قُذف بزاوية θ مع خط الأفق وبسرعة متجهة ابتدائية v_0، حيث أن g ثابت الجاذبية الأرضية و t الزمن و h_0 الارتفاع الابتدائي، فإن مسافته الرأسية تعطى بالعلاقة $x=tv_0\cos\theta$، وتعطى مسافته الأفقية بالعلاقة $y=tv_0\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2+h_0$

المفاهيم الأساسية

محور التماثل	axis of symmetry	المحل الهندسي	locus		
نقطة المركز	center	المحور الأكبر	major axis		
القطع المخروطي	conic section	المحور الاصغر	minor axis		
المحور المرافق	conjugate axis	اتجاه	orientation		
الرؤوس المرافقة	co-vertices	القطع المكافئ	parabola		
المخروط المنحل	degenerate conic	وسيط	parameter		
الدليل	directrix	المنحنى الوسيطي	parametric curve		
الاختلاف المركزي	eccentricity				
القطع الناقص	ellipse	المعادلة الوسيطية	parametric equation		
البؤرتان	foci				
البؤرة	focus	المحور القاطع	transverse axis		
القطع الزائد	hyperbola	الرأس	vertex		
		الرؤوس	vertices		

مراجعة المفردات

اختر المصطلح الصحيح من بين القائمة الواردة أعلاه لإتمام كل من العبارات التالية.

1. ________ شكلٌ يتشكل عندما يقطع مستوًى سطحًا مخروطيًا. **القطع المخروطي**
2. الدائرة هي ________ لنقاط توجد في مستوًى واحدٍ وتبعد مسافةً واحدةً عن نقطةٍ محددة. **المحل الهندسي**
3. ________ القطع المكافئ يوازي محور تماثله. **الدليل**
4. تقع الرؤوس المرافقة لـ ________ على محوره الاصغر، في حين تقع الرؤوس على محوره الأكبر. **القطع الناقص**
5. مجموع المسافتين من أي نقطةٍ على القطع الناقص إلى ________ يبقى ثابتًا. **البؤرتان**
6. إن ________ للقطع الناقص هو النسبة التي تحدد مدى "تمدد" القطع الناقص أو "دائريته". ويتم إيجادها بالعلاقة $\frac{c}{a}$. **الاختلاف المركزي**
7. ________ الدائرة هو نقطةٌ وحيدة، وجميع النقاط الواقعة على الدائرة متساوية البعد عن تلك النقطة. **نقطة المركز**
8. على غرار القطع الناقص، يملك ________ القطع الزائد رأسين وبؤرتين، ولكن له أيضًا خطين متقاربين وليس له تمثيلٌ بيانيٌ متّصل. **القطع الزائد**
9. يمكن كتابة معادلة أي تمثيلٍ بيانيٍ بواسطة المتغيرين x و y أو باستخدام المعادلات ________ مع استخدام الرمز t أو الزاوية θ. **وسيطي**
10. التمثيل البياني للعلاقة $f(t)=(\sin t, \cos t)$ هو ________ على شكلٍ دائرةٍ ترسم باتجاه عقارب الساعة. **المنحنى الوسيطي**

دليل الدراسة والمراجعة تابع

مراجعة درس بدرس

6-1 القطع المكافئ

لكل معادلة من المعادلات التالية، حدّد الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل. ثم مثّل القطع المكافئ بيانيًا.

11. $(x+3)^2=12(y+2)$
12. $(y-2)^2=8(x-5)$
13. $(x-2)^2=-4(y+1)$
14. $(x-5)=\frac{1}{12}(y-3)^2$

11–14. انظر الهامش.

اكتب معادلة قطعٍ مكافئٍ بؤرته F و رأسه V ومثّله بيانيًا.

15. $F(1,1), V(1,5)$
16. $F(-3,6), V(7,6)$
17. $F(-2,-3), V(-2,1)$
18. $F(3,-4), V(3,-2)$

15–18. انظر الهامش.

اكتب معادلةً لكل قطعٍ مكافئٍ بؤرته F وخواصه معطاةٌ وفق ما يلي ومثّله بيانيًا. **19–21. انظر الهامش.**

19. $F(-4,-4)$؛ تفتح إلى اليسار؛ يضم النقطة $(-7, 0)$
20. $F(-1, 4)$؛ تفتح إلى الأسفل؛ يضم النقطة $(7, -2)$
21. $F(3, -6)$؛ تفتح إلى الأعلى؛ يضم النقطة $(9, 2)$

المثال 1

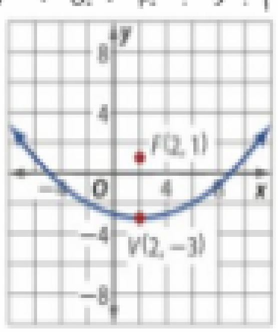
اكتب معادلة قطعٍ مكافئٍ بؤرته $(2, 1)$ ورأسه $(2, -3)$ ومثّله بيانيًا.

بما أن البؤرة والرأس لهما الإحداثي x نفسه، فالتمثيل يكون مفتوحًا رأسيًا. البؤرة هي $(h, k+p)$، وبالتالي فإن p تساوي $1-(-3)$ أو 4. نظرًا إلى أن إشارة p موجبة، فإن التمثيل البياني يكون مفتوحًا إلى الأعلى.

اكتب معادلة قطع مكافئ بالصيغة القياسية باستخدام قيم h و p و k.

$4p(y-k)=(x-h)^2$	الصيغة القياسية
$4(4)(y+3)=(x-2)^2$	$h=2$ و $k=-3$ و $p=4$
$16(y+3)=(x-2)^2$	بسّط

الصيغة القياسية للمعادلة هي $(x-2)^2=16(y+3)$ مثّل الرأس والبؤرة بيانيًا. واستخدم جدولاً بالقيم لتمثيل المنحنى بيانيًا.



6-2 القطع الناقص والدوائر

22–23. انظر الهامش.

مثّل القطع الناقص المعطى وفق كل معادلة مما يلي.

22. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

23. $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+6)^2}{25}=1$

اكتب معادلةً تمثل القطع الناقص المعطى لكل مجموعة من الخواص المبينة أدناه. **24–26. انظر الهامش.**

24. الرأسان $(7, -3)$، $(3, -3)$؛ البؤرتان $(6, -3)$، $(4, -3)$
25. البؤرتان $(1, 2)$، $(9, 2)$؛ يساوي طول المحور الأصغر 6
26. المحور الأكبر يمتدّ من النقطة $(-4, 4)$ إلى النقطة $(6, 4)$؛ المحور الاصغر يمتدّ من النقطة $(1, 1)$ إلى $(1, 7)$

28. $\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{(y-6)^2}{4}=1$؛ قطع ناقص

اكتب المعادلة بالصيغة القياسية. وحدّد القطع المخروطي المقابل.

27. $x^2-2x+y^2-4y-25=0$ **$(x-1)^2+(y-2)^2=30$؛ دائرة**
28. $4x^2+24x+25y^2-300y+836=0$
29. $x^2-4x+4y+24=0$

$(x-2)^2=-4(y+5)$؛ قطع مكافئ

المثال 2

اكتب معادلة قطعٍ ناقصٍ يمتدّ محوره الأكبر من النقطة $(-9, 4)$ إلى النقطة $(11, 4)$ ويمتدّ محوره الاصغر من النقطة $(1, 12)$ إلى النقطة $(1, -4)$.

استخدم المحورين الأكبر والاصغر لتحديد a و b.

نصف طول المحور الأكبر	نصف طول المحور الأصغر
$a=\frac{11-(-9)}{2}$ أو 10	$b=\frac{12-(-4)}{2}$ أو 8

نقطة مركز القطع الناقص هي نقطة منتصف المحور الأكبر.

$(h,k)=\left(\frac{11+(-9)}{2}, \frac{4+4}{2}\right)$	قانون نقطة المنتصف
$=(1, 4)$	بالتحويل لأبسط صورة

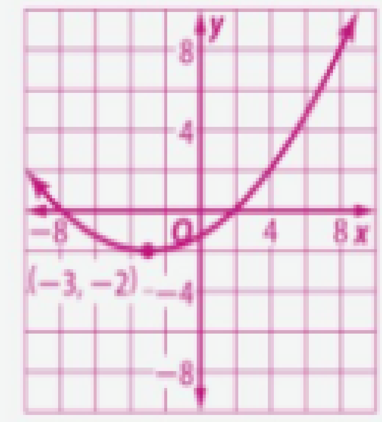
الإحداثيان الرأسيان y متماثلان لكلتا النقطتين الطرفيتين للمحور الأكبر، وبالتالي فإن هذا المحور أفقي وتتبع قيمة a للحدّ x^2 . ولهذا تأخذ معادلة القطع الناقص الصيغة $\frac{(x-1)^2}{100}+\frac{(y-4)^2}{64}=1$

مراجعة درس بدرس

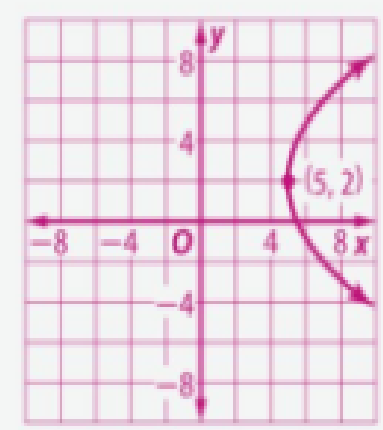
التدخل التقويمي إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة الموضوعات التي تتناولها الأسئلة، فذكّر الطلاب بأن الصفحات المرجعية ترشدهم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

إجابات إضافية

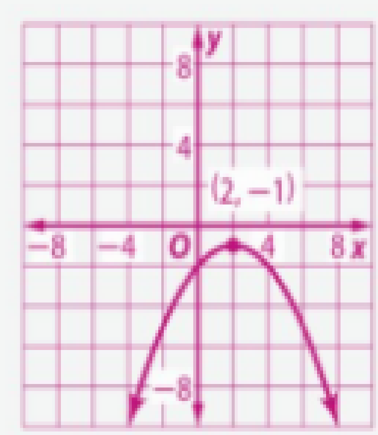
11. الرأس: $(-3, -2)$؛ البؤرة: $(-3, 1)$؛ محور التماثل: $x=-3$؛ الدليل: $y=-5$



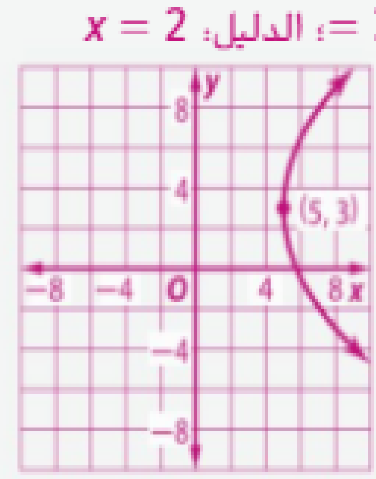
12. الرأس: $(5, 2)$؛ البؤرة: $(7, 2)$؛ محور التماثل: $y=2$؛ الدليل: $x=3$



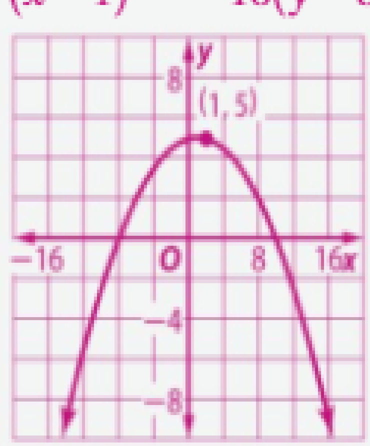
13. الرأس: $(2, -1)$؛ البؤرة: $(2, -2)$؛ محور التماثل: $x=2$؛ الدليل: $y=0$



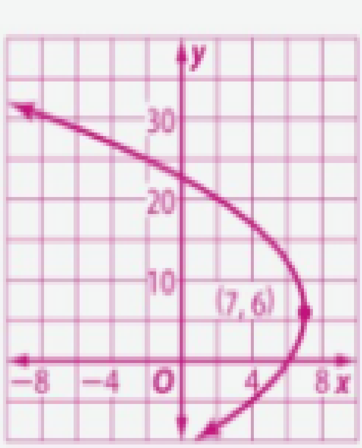
14. الرأس: $(5, 3)$؛ البؤرة: $\left(\frac{241}{48}, 3\right)$؛ محور التماثل: $y=3$؛ الدليل: $x=2$



15. $(x-1)^2=-16(y-5)$

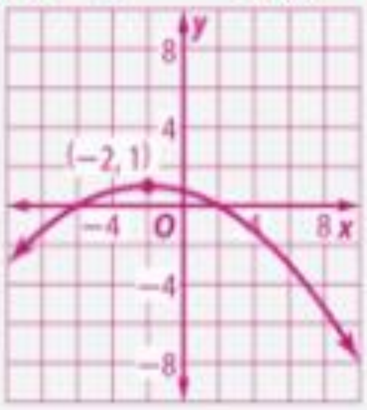


16. $(y-6)^2=-40(x-7)$

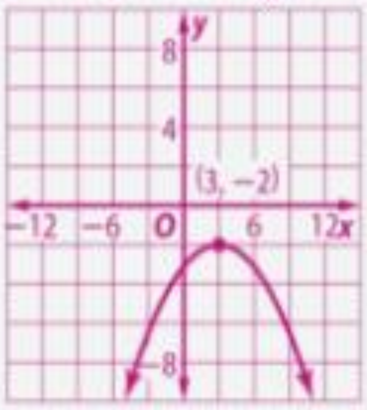


إجابات إضافية

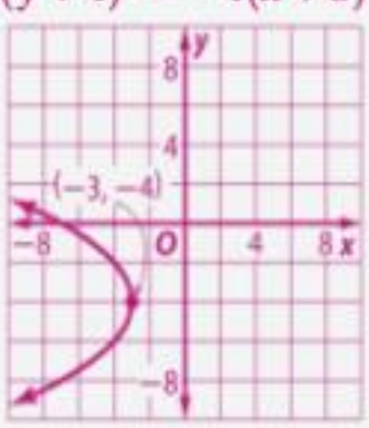
17. $(x+2)^2=-16(y-1)$



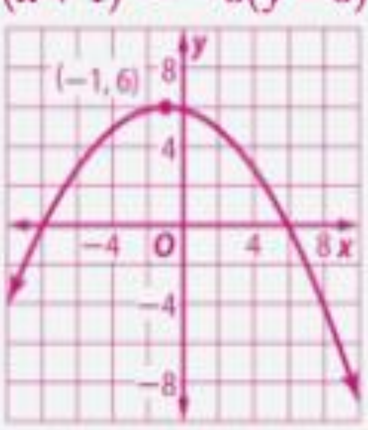
18. $(x-3)^2=-8(y+2)$



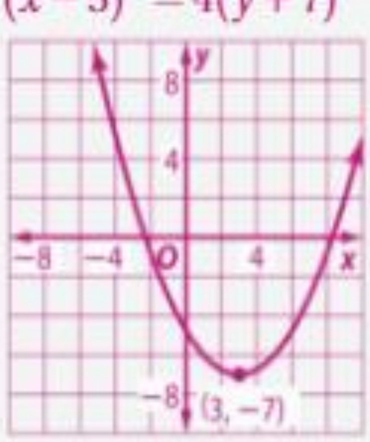
19. $(y+4)^2=-4(x+3)$



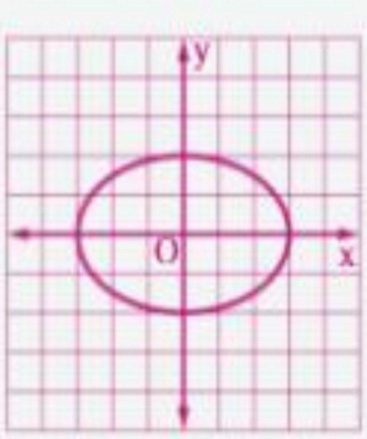
20. $(x+1)^2=-8(y-6)$



21. $(x-3)^2=4(y+7)$



22.



6-3 القطع الزائد

مثّل القطع الزائد المعطى وفق كل معادلة مما يلي.

30. $\frac{(y+3)^2}{30}-\frac{(x-6)^2}{8}=1$

31. $\frac{(x+7)^2}{18}-\frac{(y-6)^2}{36}=1$

32. $\frac{(y-1)^2}{4}-(x+1)^2=1$

33. $x^2-y^2-2x+4y-7=0$

30–33. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

اكتب معادلةً تمثل القطع الزائد مع الخواص التالية.

34–37. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

34. الرأسان $(7, 0)$، $(-7, 0)$، طول المحور المرافق 8

35. البؤرتان $(0, 5)$، $(0, -5)$، الرأسان $(0, 3)$، $(0, -3)$

36. البؤرتان $(1, 15)$، $(1, -5)$، طول المحور القاطع 16

37. الرأسان $(2, 0)$، $(-2, 0)$، الخطان المتقاربان $y=\pm\frac{3}{2}x$

استخدم المميز لتحديد كل قطع مخروطي مما يلي.

38. $x^2-4y^2-6x-16y-11=0$ **القطع الزائد**

39. $4y^2-x-40y+107=0$ **القطع المكافئ**

40. $9x^2+4y^2+162x+8y+732=0$ **القطع الناقص**

المثال 3

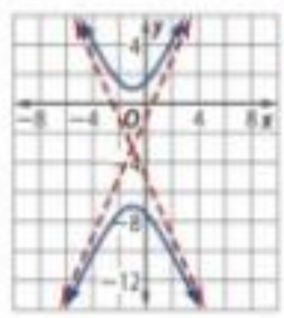
مثّل بيانيًا $\frac{(y+3)^2}{16}-\frac{(x+1)^2}{4}=1$

في هذه المعادلة $h=-1, k=-3, a=\sqrt{16}$ أو 4، $b=\sqrt{4}$ أو 2، و $c=\sqrt{16+4}$ أو $2\sqrt{5}$

حدّد خواص القطع المكافئ.

الاتجاه:	رأسي	
نقطة المركز:	$(-1, -3)$	(h, k)
الرأسان:	$(-1, 1), (-1, -7)$	$(h, k \pm a)$
البؤرتان:	$(-1, -3+2\sqrt{5})$ $(-1, -3-2\sqrt{5})$	$(h, k \pm c)$
الخطان المتقاربان:	$y+3=2(x+1)$ $y+3=-2(x+1)$	$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

x	y
−6	7.77, −13.77
−2	1.47, −7.47
2	4.21, −10.21
6	11.56, −17.56



6-4 تدوير القطوع المخروطية

استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل القطع المخروطي المعطى من خلا ل كل معادلة مما يلي بيانيًا.

41–45. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

41. $x^2-4xy+y^2-2y-2x=0$

42. $x^2-3xy+y^2-3y-6x+5=0$

43. $2x^2+2y^2-8xy+4=0$

44. $3x^2+9xy+y^2=0$

45. $4x^2-2xy+8y^2-7=0$

46–49. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

اكتب كل معادلة مما يلي في المستوى $x'y'$ لكل قيمة معطاة لـ θ. ثمّ حدّد القطع المخروطي.

46. $x^2+y^2=4; \theta=\frac{\pi}{4}$

47. $x^2-2x+y=5; \theta=\frac{\pi}{3}$

48. $x^2-4y^2=4; \theta=\frac{\pi}{2}$

49. $9x^2+4y^2=36; \theta=90°$

المثال 3

استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل المعادلة التالية بيانيًا $x^2+2xy+y^2+4x-2y=0$

المعادلة الأساسية $x^2+2xy+y^2+4x-2y=0$

الكتابة بالصيغة التربيعية $1y^2+(2x-2)y+(x^2+4x)=0$

استخدم الصيغة التربيعية.

$$y=\frac{-(2x-2)\pm\sqrt{(2x-2)^2-4(1)(x^2+4x)}}{2(1)}$$

$$=\frac{-2x+2\pm\sqrt{4x^2-8x+4-4x^2-16x}}{2}$$

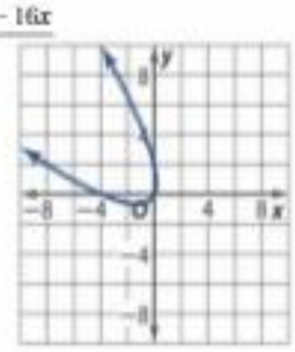
$$=\frac{-2x+2\pm2\sqrt{1-6x}}{2}$$

$$=-x+1\pm\sqrt{1-6x}$$

مثّل بيانيًا العلاقتين

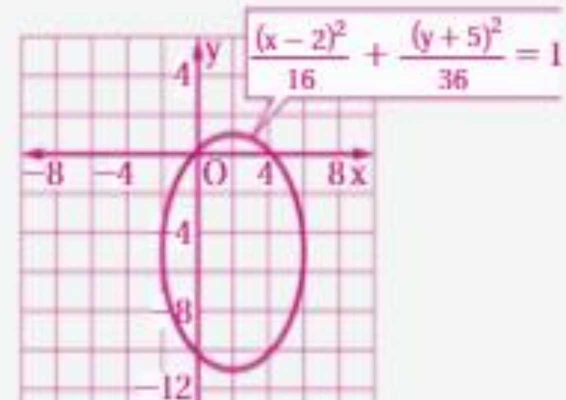
$y_1=-x+1+\sqrt{1-6x}$ ،

$y_2=-x+1-\sqrt{1-6x}$.



393

23.



24. $\frac{(x-5)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{3}=1$

25. $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

26. $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{9}=1$

6 دليل الدراسة والمراجعة تابع

6-5 المعادلات الوسيطية

مثّل المنحنى المعطى بدلالة كل زوج مما يلي من المعادلات الوسيطية في الفترة المعطاة. 50-51. انظر الهامش.

50. $x=\sqrt{t}, y=1-t; 0\le t\le 9$

51. $x=t+2, y=t^2-4; -4\le t\le 4$

اكتب كل زوج من المعادلات الوسيطية بالصورة الديكارتية في مستوى إحداثي متعامد. ثم مثّل المعادلة بيانيًا. 52-55. انظر الهامش.

52. $x=t+5$ ، $y=2t-6$

53. $x=2t$ ، $y=t^2-2$

54. $x=t^2+3$ ، $y=t^2-4$

55. $x=t^2-1$ ، $y=2t+1$

المثال 3

اكتب $x=5\cos t$ و $y=9\sin t$ بالصيغة الديكارتية في مستوى إحداثي متعامد. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

$y=9\sin t \qquad x=5\cos t$

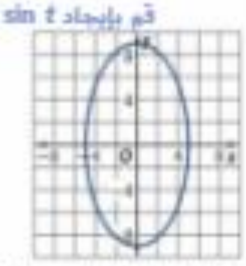
قم بإيجاد $\sin t$ و $\cos t$

$\sin t=\frac{y}{9} \qquad \cos t=\frac{x}{5}$

$\sin^2 t+\cos^2 t=1$

$\left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{9}\right)^2=1$

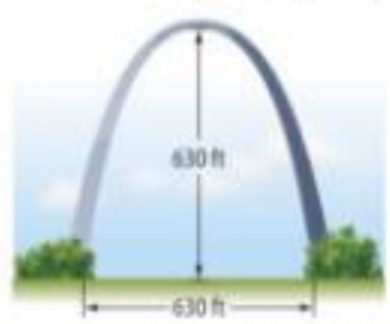
$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{81}=1$



تمثل المعادلتان الوسيطتان التمثيل البياني لقطع ناقص.

التطبيقات وحل المسائل

56. **الآثار** تأخذ بوابة القوس شكل منحنى سلسلي يشبه القطع المكافئ. (الدرس 6-1)



a. نموذج الإجابة: $y=-\frac{2}{315}x^2+630$

a. اكتب معادلة قطع مكافئ تمثّل على وجه التقريب شكل القوس.

b. أوجد موقع بؤرة هذا القطع المكافئ. فوق الأرض بمسافة 590.625 ft

57. **الديناميكا المائية** ينتج عن سقوط حجر في بركة تموجات مكوّنة من دوائر متّحدة المركز تأخذ بالتوسّع تدريجيًا. افترض أن أنصاف أقطار تلك الدوائر تتوسّع بمعدل 3 بوصات في الثانية. (الدرس 6-2)

$x^2+y^2=900$

a. اكتب معادلة الدائرة بعد 10 ثوانٍ من سقوط الحجر في البركة. افترض أن نقطة سقوط الحجر في الماء تمثل نقطة الأصل.

b. لإحدى الدوائر متحدة المركز المعادلة التالية: $x^2+y^2=225$. كم ثانية ستستغرق الدائرة المتوسّعة بعد سقوط الحجر حتى تصبح لها هذه المعادلة؟ 5 ثوانٍ

a–b. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

58. **الطاقة** تأخذ أبراج التبريد في إحدى محطات القدرة شكل قطع زائد. شكل المقطع العرضي للمسطح الرائد قطعٌ زائد. (الدرس 6-3)

a. اكتب معادلة المقطع العرضي لبرج ارتفاعه 50 قدمًا وعرضه 30 قدمًا.

b. إذا ازدادت نسبة ارتفاع البرج إلى عرضه، فكيف تتأثر المعادلة بذلك؟

a–b. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

59. **طبق تجميع الطاقة الشمسية** خلال بناء الطلاب لجهاز قطعي مكافئ لالتقاط الطاقة الشمسية من أجل طهو أوراق الخبّيزة الموضوعة في بؤرة القطع، كان عليهم تصميم الجهاز بحيث يمكن توجيهه بسهولة. يرفع تدوير الجهاز باتجاه إشعاعات الشمس مباشرةً قدرة التسخين إلى الحدّ الأقصى. (الدرس 6-4)

a. بعد تدوير القطع المكافئ بزاوية قياسها 30° باتجاه الشمس، تأخذ المعادلة المستخدمة لصنع الجهاز في المستوى $x'y'$ الصيغة $y'=0.25(x')^2$ أوجد معادلة القطع المكافئ في المستوى xy.

b. مثّل القطع المكافئ الذي تم تدويره.

a–b. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

60. **سؤال هندسي** لتأخذ الملاحقتان $x_1(t)=4\cos t$, $y_1(t)=4\sin t$، و $x_2(t)=4\cos 2t$ ، $y_2(t)=4\sin 2t$ (الدرس 6-5)

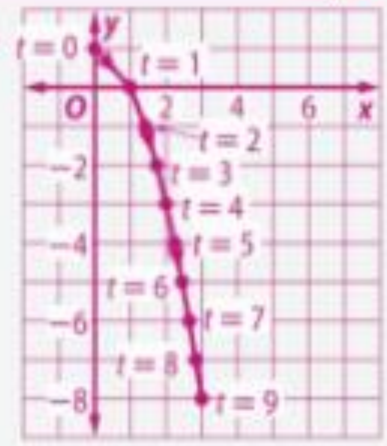
a. قارن بين التمثيلين البيانيين لمجموعتي المعادلات: x_1 و y_1 و x_2 و y_2

b. اكتب المعادلتين الوسيطتين لدائرة نصف قطرها 6 يمكن إتمام رسمها خلال نصف زمن رسم الدائرة الخاصة بـ $x_1(t)$ و $y_1(t)$

c. اكتب المعادلتين الناتجتين في القسم b بالصيغة الديكارتية في مستوى إحداثي متعامد. $x^2+y^2=36$

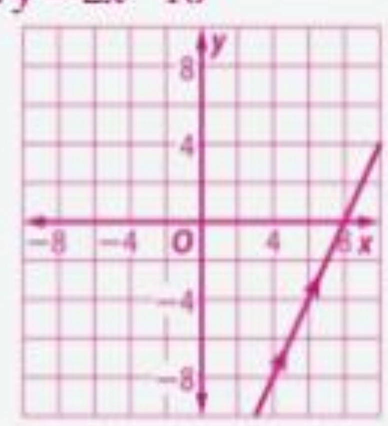
إجابات إضافية

50.

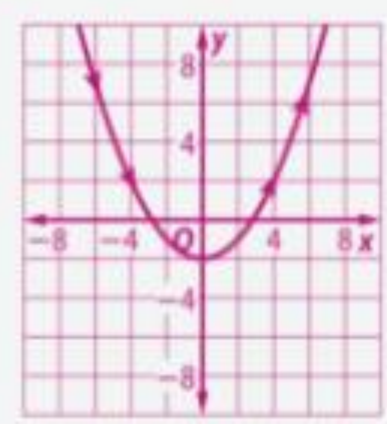


51.

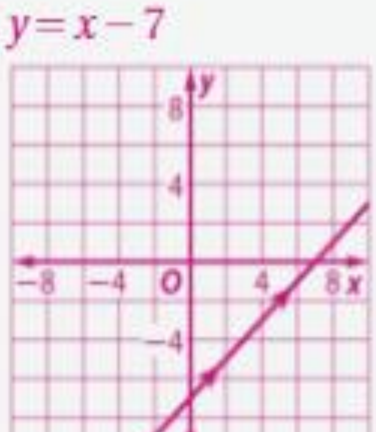
52. $y=2x-16$



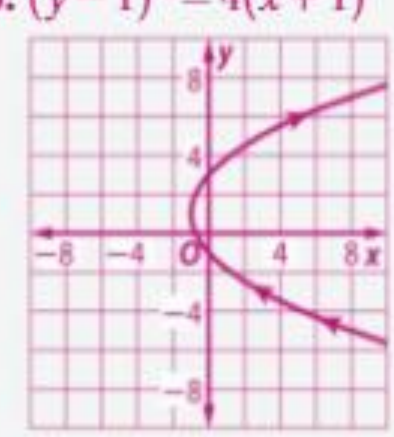
53. $y=\frac{x^2}{4}-2$



54. $y=x-7$



55. $(y-1)^2=4(x+1)$



6 تمرين على الاختبار

اكتب معادلةً تمثِّل القطع الناقص المقابل لكل مجموعة من الخواص المبينة أدناه. 1-2. انظر الهامش.

1. الرأسان $(-4, 7)$، $(-4, -3)$؛ البؤرتان $(-4, 6)$، $(-4, -2)$

2. البؤرتان $(-2, -9)$، $(-2, 1)$؛ طول المحور الأكبر 12

3. **الاختيار من متعدد** ما القيمة التي يجب أن تأخذها c بحيث يكون التمثيل البياني الخاص بـ $4x^2 + cy^2 + 2x - 2y - 18 = 0$ عبارة عن دائرة؟ C

A -8

B -4

C 4

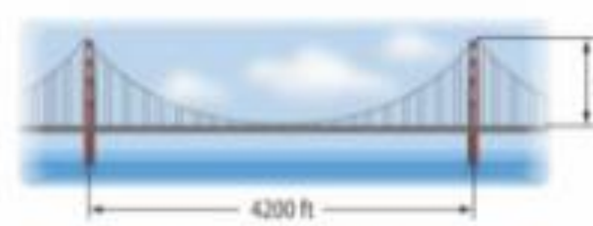
D 8

اكتب كل زوجٍ من المعادلات الوسيطية بالصورة الديكارتية في مستوى إحداثي متعامد. ثم مثِّل المعادلة بيانيًا.

4. $x = t - 5$ ، $y = 3t - 4$ 4-5. انظر الهامش.

5. $x = t^2 - 1$ ، $y = 2t + 1$

6. **الجسور** كان جسر البوابة الذهبية بسان فرانسيسكو، والبالغ طوله 1.7 ميل، أطول جسرٍ معلقٍ في العالم حين إنشائه.



$x^2 = 9092.8(y - 15)$

a. افترض أنه يمكن تمثيل تصميم الجسر على أنه قطع مكافئ، وأن أدنى نقطةٍ في كابل التعليق ترتفع عن الطريق بمسافة 15 قدمًا. اكتب معادلةً تمثِّل تصميم الجسر.

b. أين تقع البؤرة بالنسبة إلى الرأس؟

فوق الرأس بمسافة 2273.2 ft تقريبًا

اكتب معادلةً تمثِّل القطع الزائد بالخواص التالية.

7. الرأسان $(3, 0)$، $(-3, 0)$؛ الخطان المتقاربان $y = \pm\frac{2}{3}x$ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

8. البؤرتان $(8, 0)$، $(8, 8)$؛ الرأسان $(8, 2)$، $(8, 6)$

انظر الهامش.

اكتب معادلةً لكل قطعٍ مخروطي في المستوى xy تقابل المعادلة المعطاة وفق الصيغة $x'y'$ وعند القيمة المبيَّنة لـ θ.

9. $7(x' - 3) = (y')^2, \theta = 60°$ 9-10. انظر الهامش.

10. $\frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{10} = 1, \theta = \frac{\pi}{6}$

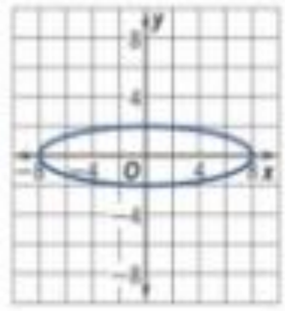
11-12. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

مثِّل القطع الزائد المعطى وفق كل معادلة مما يلي.

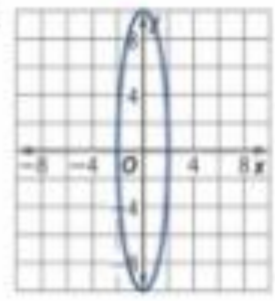
11. $\frac{x^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{25} = 1$ 12. $\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x+6)^2}{36} = 1$

13. **الاختيار من متعدد** أيّ القطوع الناقصة التالية له الاختلاف المركزي الأكبر؟ C

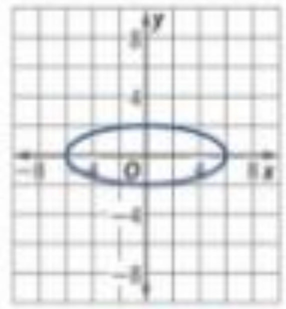
A



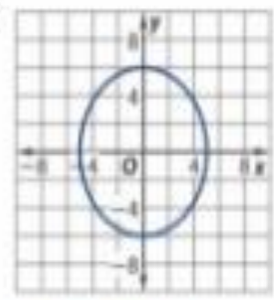
C



B



D



14-15. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

اكتب معادلة قطعٍ مكافئٍ لكل بؤرة F ورأس V مما يلي ومثِّله بيانيًا.

14. $F(2, 8), V(2, 10)$ 15. $F(2, 5), V(-1, 5)$

16-17. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

مثِّل القطع الناقص المعطى لكل معادلة مما يلي.

16. $\frac{(x-5)^2}{49} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ 17. $(x+3)^2 + \frac{(y+6)^2}{81} = 1$

18. **التخييم** يجب على المخيِّمين في المنتزهات الأمريكية حماية أطعمتهم ومؤنهم من الدببة والحيوانات الأخرى. وتعتمد إحدى طرق حماية الطعام على استخدام ما يسمّى "كيس الدب"، حيث يرمى كيس مربوط إلى حبل فوق غصن شجرةٍ مرتفعةٍ ويربط الحبل إلى الشجرة. افترض أن ارتفاع الغصن 30 قدمًا فوق سطح الأرض، وأن شخصًا يبعد عن الغصن مسافة 20 قدمًا يرمي الكيس من ارتفاع 5 أقدام فوق الأرض.

a. إذا رُمي الكيس بسرعة 40 قدمًا في الثانية وبزاويةٍ قياسها $60°$، فهل سيرتفع فوق الغصن؟ لا

b. إذا رُمي الكيس بسرعة 45 قدمًا في الثانية وبزاويةٍ قياسها $75°$، فهل سيرتفع فوق الغصن؟ نعم

استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل القطع المخروطي المعطى لكل معادلةٍ مما يلي. 19-20. انظر الوحدة 6 ملحق الإجابات.

19. $x^2 - 6xy + y^2 - 4y - 8x = 0$

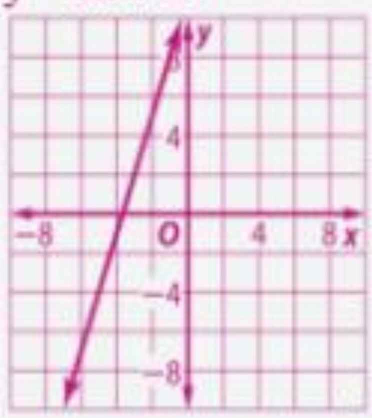
20. $x^2 + 4y^2 - 2xy + 3y - 6x + 5 = 0$

إجابة إضافية

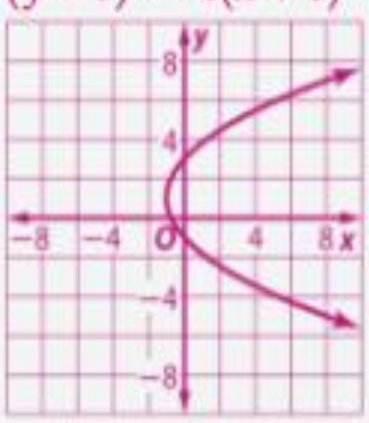
1. $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1$

2. $\frac{(x+2)^2}{11} + \frac{(y+4)^2}{36} = 1$

4. $y = 3x + 11$



5. $(y-1)^2 = 4(x+1)$



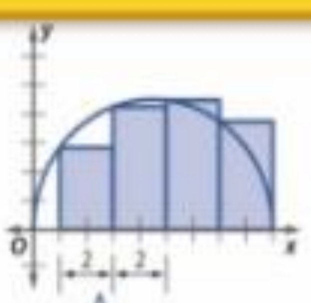
8. $\frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-8)^2}{12} = 1$

9. $3x^2 - 14x - 2\sqrt{3}xy + y^2 - 14\sqrt{3}y + 84 = 0$

10. $4x^2 + 2\sqrt{3}xy + 2y^2 - 10 = 0$

الوحدة 6

الربط بحساب التفاضل والتكامل المتقدم (AP)
المجسمات الدَّوَرانية



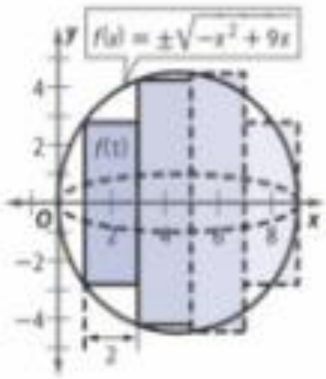
تعلمت أن حساب التفاضل والتكامل هو أحد فروع الرياضيات التي تركز على عمليات إيجاد الأطوال والمساحات والأحجام. واستخدمت المستطيلات لتقريب مساحات الأشكال غير المنتظمة، كالتي تنشأ بمنحنى والمحور x. يمكن استخدام تقنية مشابهة لتقريب أحجام الأشكال غير المنتظمة.

اعتبر أن هناك مخروطًا بارتفاع h وقاعدة نصف قطرها r. إذا لم تكن بالفعل على علم بصيغة حجم المخروط، فيمكننا تقريب الحجم عن طريق رسم عدة أسطوانات بارتفاع مماثل داخل المخروط. ثم يمكننا حساب حجم كل أسطوانة، وإيجاد المجموع.

النشاط 1 جسم كروي

قم بتقريب حجم جسم كروي نصف قطره 4.5 وحدات ودائرة كبيرة محددة $f(x) = \pm\sqrt{-x^2 + 9x}$

الخطوة 1 ارسم مخطط الجسم الكروي.



الخطوة 2 ارسم أسطوانة داخل الجسم الكروي بقاعدة عمودية على المحور x وارتفاع قدره وحدتين. اجعل الحافة اليسرى للأسطوانة تبدأ عند $x = 1$ وتمتد إلى الدائرة الكبيرة. نصف قطر الأسطوانة هو $f(1)$.

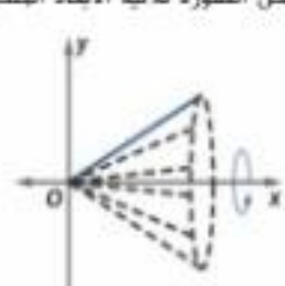
الخطوة 3 ارسم 3 أسطوانات أخرى كلها بارتفاع وحدتين. اجعل الحافة اليسرى لكل أسطوانة تمتد إلى الدائرة الكبيرة.

الخطوة 4 احسب حجم كل أسطوانة.

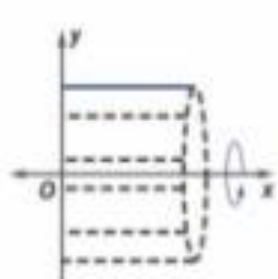
تحليل النتائج

1. ما هو تقريب حجم الجسم الكروي؟ **376.99 وحدة^3**
2. احسب الحجم الفعلي للجسم الكروي باستخدام نصف القطر. كيف تقارن التقريب بالحجم الفعلي؟ ما الذي يمكن القيام به لتحسين دقة التقريب؟

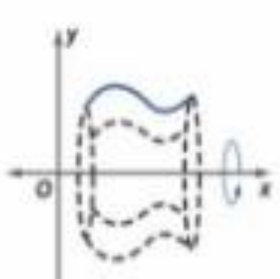
عندما تكون المنطقة بين الرسم البياني والمحور x مستديرة حول المحور x، يتشكل مجسم دوراني. شكل التمثيل البياني يفرض شكل الصورة ثلاثية الأبعاد المتكونة.



المخروط



الأسطوانة



مجسّم

الخطوة الرابعة 50.32 وحدة^3، 112.96 وحدة^3، 125.54 وحدة^3، 87.89 وحدة^3

نصيحة دراسية

الحجم صيغة حجم الجسم الكروي هي $V = \pi r^2 h$

2. 381.7 وحدة^3؛ نموذج الإجابة: التقريب أقل قليلًا من الحجم الفعلي. يمكن التقريب باستخدام عدد أكبر من الأسطوانات ذات ارتفاع أقل. يساعد ذلك في ملء حجم الجسم الكروي بشكل أفضل.

1 التركيز

الهدف تقدير أحجام الأجسام الصلبة الدورانية.

نصيحة للتدريس

تعمل الأساليب التي سيجري تعليمها على إيجاد تقديرات الأحجام. في الوحدة 2، يؤدي استخدام المزيد من المستطيلات ذات العرض الأصفر إلى تقدير تقريبي أدق للمنطقة تحت المنحنى. الآن، يؤدي استخدام المزيد من الأسطوانات ذات الارتفاعات الأصفر إلى تقدير تقريبي أدق لحجم الأجسام الصلبة الدورانية.

2 التعليم

العمل في مجموعات متعاونة

اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعاتٍ من ثلاثة أو أربعة ذوي قدراتٍ متنوعة. اطلب إلى كل مجموعة إنهاء النشاطين 1 و 2 وتمريني تحليل النتائج 1 و 2.

في النشاط 1، أكّد للطلاب أنّ نصف قطر الأسطوانة الثانية هو $f(3)$، ونصف قطر الأسطوانة الثالثة هو $f(5)$، ونصف قطر الأسطوانة الرابعة هو $f(7)$.

تدريب اطلب إلى الطلاب إنهاء تمارين تحليل النتائج من 3 إلى 6 وتمرين النموذج والتطبيق 7.

3 التقويم

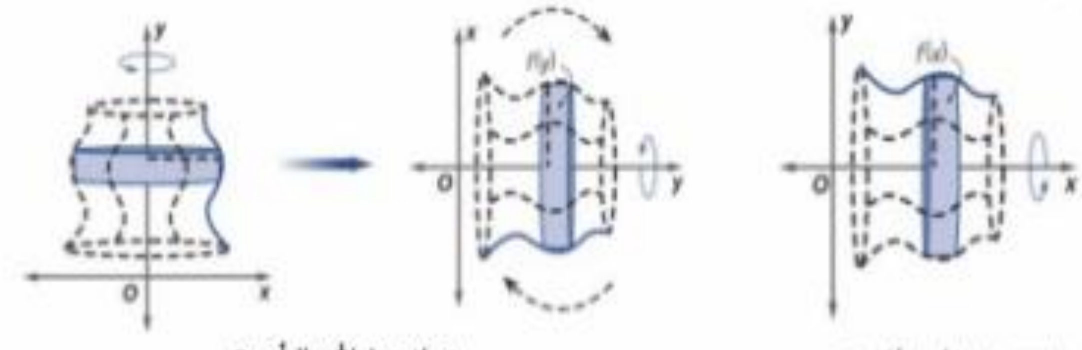
التقويم التكويني

استخدم تمرين النموذج والتطبيق 7 لتقويم ما إذا كان الطلاب قادرين على تقدير أحجام الأجسام الصلبة الدورانية.

من المحسوس إلى المجرد

يجب أن يكون الطلاب قادرين على تفسير لماذا تعطي الأسطوانات ذات الارتفاعات الأصغر تقديرًا أقرب لحجم الأجسام الصلبة الفعلي. في النشاط 1، دع الطلاب يختبروا تفسيراتهم عن طريق تقدير الحجم باستخدام عدة ارتفاعات أصغر.

قد يتشكل مجسم الدوران بدوران منطقة في المستوى حول أي خط ثابت، يُسمى محور الدوران. محور الدوران يفرض اتجاه ونصف قطر الأسطوانات المستخدمة لتقريب المساحة. إذا كان الدوران حول المحور x، ستكون الأسطوانات موازية للمحور y ويُعطى نصف القطر بواسطة $f(x)$. إذا كان الدوران حول المحور y، ستكون الأسطوانات موازية للمحور x ويُعطى نصف القطر بواسطة $f(y)$.

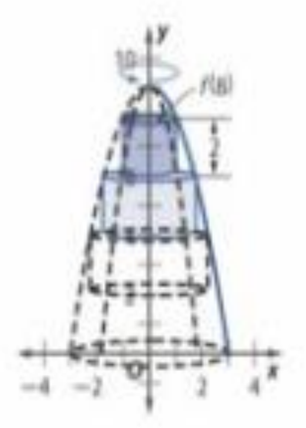


دوران حول المحور الرأسي y

التدوير حول المحور الأفقي x

النشاط 2 القطع المكافئ

قم بتقريب حجم القطع المكافئ الناتج عن دوران المنطقة بين $f(x) = -x^2 + 9$ والمحور x والمحور y حول المحور y.



الخطوة 1 ارسم مخطط القطع المكافئ.

الخطوة 2 ارسم أسطوانة داخل القطع المكافئ بقاعدة موازية للمحور x وارتفاع قدره وحدتين. اجعل الحافة العلوية للأسطوانة تبدأ عند $y = 8$ وتمتد إلى حافة القطع المكافئ.

الخطوة 3 عند الدوران حول المحور y، يُعطى نصف القطر على النحو $f(y)$. لإيجاد $f(y)$، اكتب $f(x)$ على النحو $y = -x^2 + 9$ وقم بالحل للحصول على y.

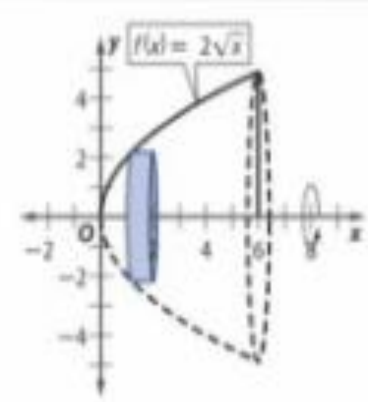
الخطوة 4 ارسم 3 أسطوانات أخرى كلها بارتفاع وحدتين. اجعل الحافة العلوية لكل أسطوانة تمتد إلى حافة القطع المكافئ.

الخطوة 5 احسب حجم كل أسطوانة.

تحليل النتائج

3. ما هو تقريب حجم القطع المكافئ؟ **100.53 وحدة^3**
4. أوجد تقريبات حجم القطع المكافئ باستخدام 8 أسطوانات بارتفاعات وحدة واحدة ثم باستخدام 17 أسطوانة بارتفاعات 0.5 وحدة. **113.1 وحدة^3؛ 120.17 وحدة^3**
5. بما أن ارتفاعات الأسطوانات تقل وتقترب من 0، فما الذي يحدث للتقريبات؟ وضح تبريرك المنطقي.
6. ما الشكل الذي تبدأ الأسطوانة في تمثيله باقتراب h من 0؟ وضح تبريرك المنطقي.

النمذجة والتطبيق



7. قم بتقريب حجم القطع المكافئ الناتج عن دوران المنطقة بين $f(x) = 2\sqrt{x}$، المحور x، والخط $x = 6$ حول المحور x. استخدم 5 أسطوانات بارتفاعات تبلغ وحدة واحدة. افترض أن الأسطوانة الأولى تبدأ عند $x = 1$ والحافة اليسرى لكل أسطوانة تمتد إلى حافة القطع المكافئ. **188.5 وحدة^3**

الخطوة الثالثة
$f(y) = \sqrt{y + 9}$

الخطوة الخامسة
6.28 وحدة^3، 18.85 وحدة^3، 31.42 وحدة^3، 43.98 وحدة^3

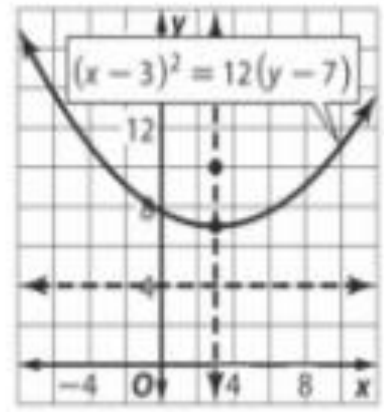
5. نموذج الإجابة: سيقترب التقريب من الحجم الفعلي للمجسم لأنه بما أن ارتفاع الأسطوانات يقل، فستملأ حجم المجسم بشكل أفضل.

6. نموذج الإجابة: بما أن h تقترب من 0، فستصبح الأسطوانات مستوية. ستشكل الأسطوانات دوائر.

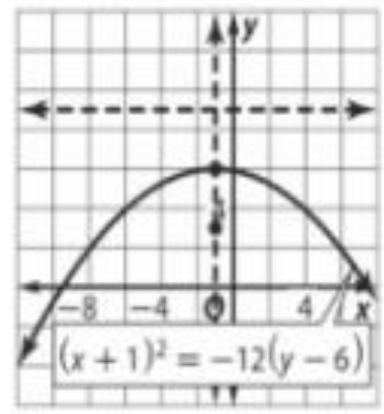
397

الدرس 6-1

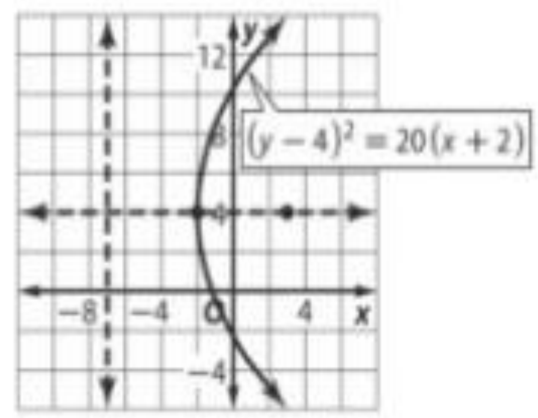
1. الرأس: $(3, 7)$، البؤرة: $(3, 10)$، الدليل: $y = 4$؛ محور التماثل: $x = 3$



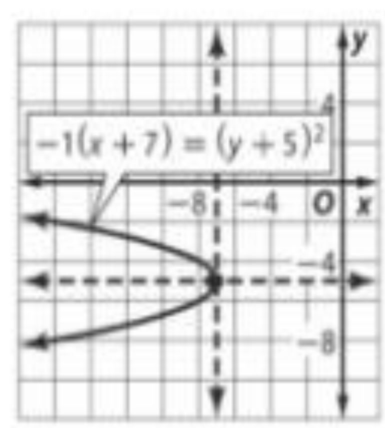
2. الرأس: $(-1, 6)$، البؤرة: $(-1, 3)$، الدليل: $y = 9$؛ محور التماثل: $x = -1$



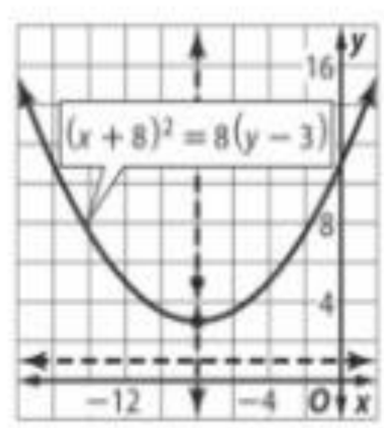
3. الرأس: $(-2, 4)$، البؤرة: $(3, 4)$، الدليل: $x = -7$، محور التماثل: $y = 4$



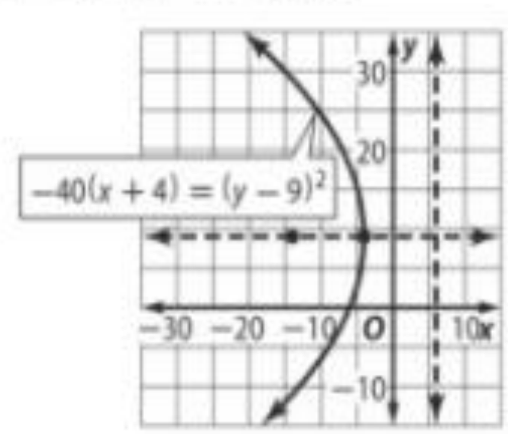
4. الرأس: $(-7, -5)$، البؤرة: $(-7.25, -5)$، الدليل: $x = -6.75$؛ محور التماثل: $y = -5$



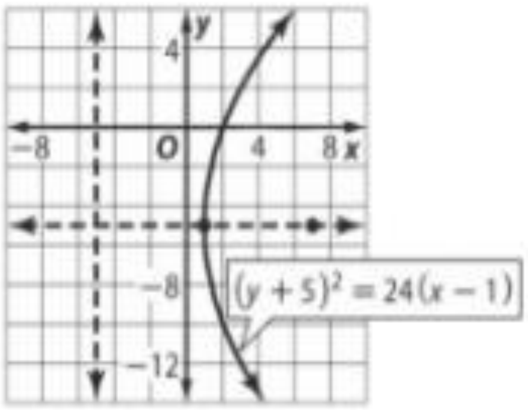
5. الرأس: $(-8, 3)$، البؤرة: $(-8, 5)$، الدليل: $y = 1$؛ محور التماثل: $x = -8$



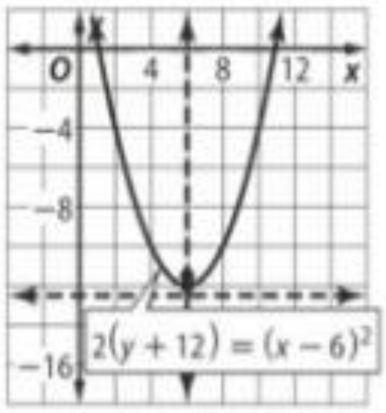
6. الرأس: $(-4, 9)$، البؤرة: $(-14, 9)$، الدليل: $x = 6$؛ محور التماثل: $y = 9$



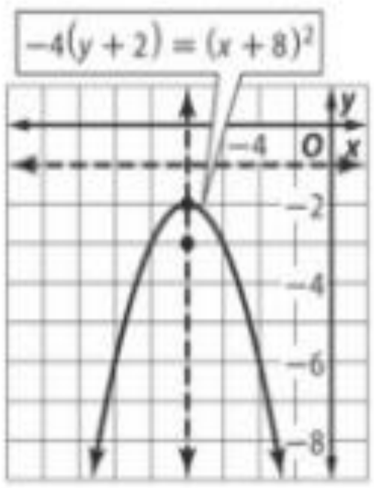
7. الرأس: $(1, -5)$، البؤرة: $(7, -5)$، الدليل: $x = -5$؛ محور التماثل: $y = -5$



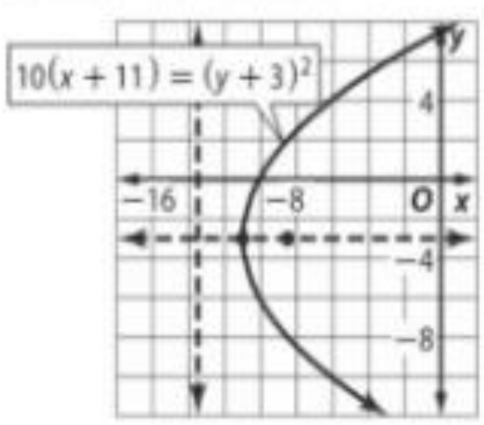
8. الرأس: $(6, -12)$، البؤرة: $(6, -11.5)$، الدليل: $y = -12.5$؛ محور التماثل: $x = 6$



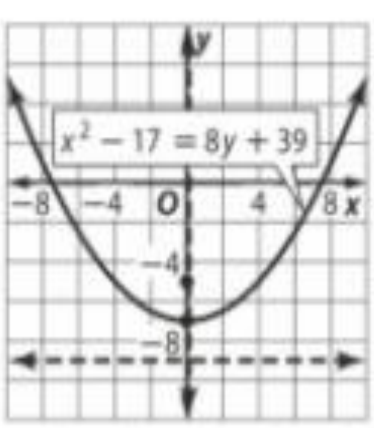
9. الرأس: $(-8, -2)$، البؤرة: $(-8, -3)$، الدليل: $y = -1$؛ محور التماثل: $x = -8$



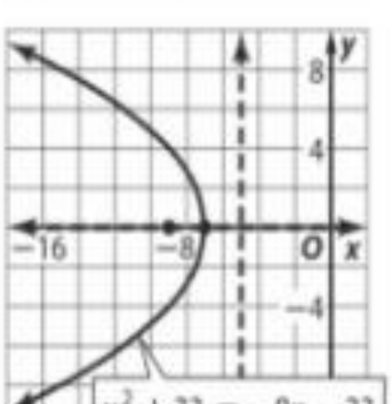
10. الرأس: $(-11, -3)$، البؤرة: $(-8.5, -3)$، الدليل: $x = -13.5$؛ محور التماثل: $y = -3$



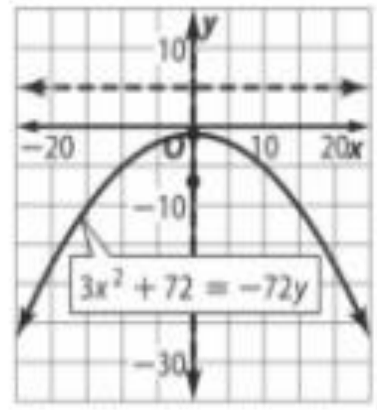
15. $x^2 = 8(y+7)$؛ الرأس: $(0, -7)$، البؤرة: $(0, -5)$، الدليل: $y = -9$؛ محور التماثل: $x = 0$



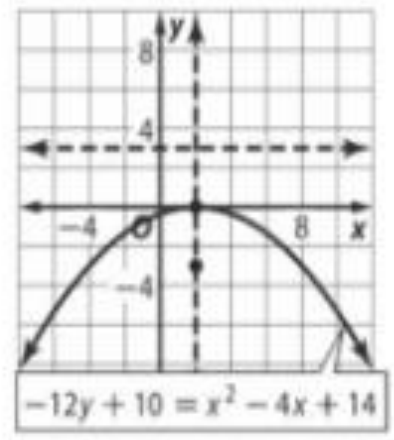
16. $y^2 = -8(x+7)$؛ الرأس: $(-7, 0)$، البؤرة: $(-9, 0)$، الدليل: $x = -5$؛ محور التماثل: $y = 0$



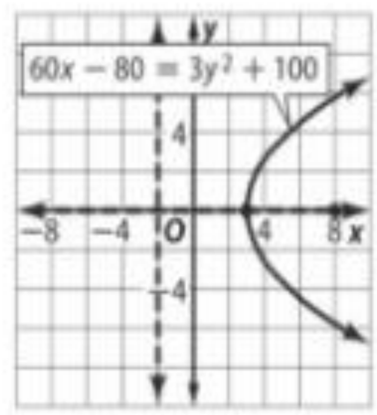
17. $x^2 = -24(y+1)$؛ الرأس: $(0, -1)$؛ البؤرة: $(0, -7)$؛ الدليل: $y = 5$؛ محور التماثل: $x = 0$



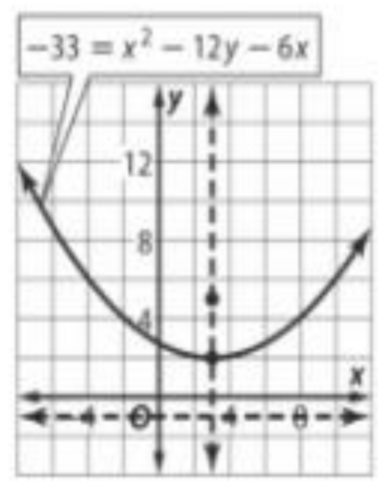
18. $(x-2)^2 = -12y$؛ الرأس: $(2, 0)$؛ البؤرة: $(2, -3)$؛ الدليل: $y = 3$؛ محور التماثل: $x = 2$



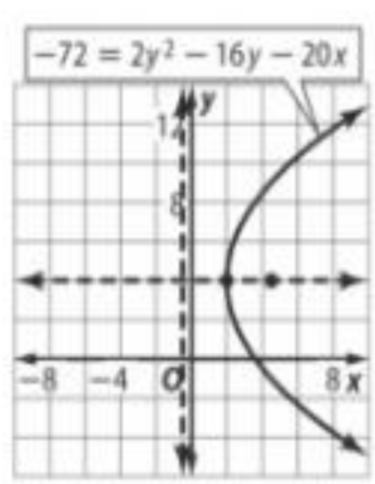
19. $y^2 = 20(x-3)$؛ الرأس: $(3, 0)$؛ البؤرة: $(8, 0)$؛ الدليل: $x = -2$؛ محور التماثل: $y = 0$



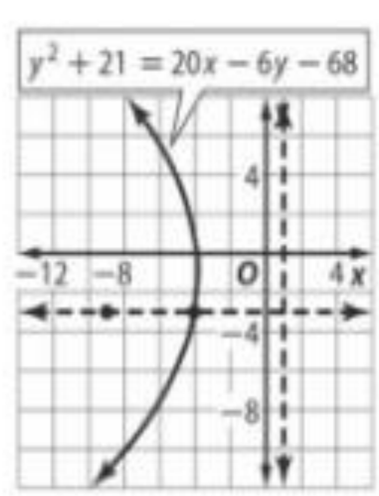
20. $(x-3)^2 = 12(y-2)$؛ الرأس: $(3, 2)$؛ البؤرة: $(3, 5)$؛ الدليل: $y = -1$؛ محور التماثل: $x = 3$



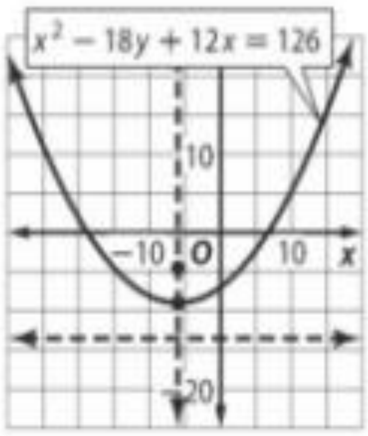
21. $(y-4)^2 = 10(x-2)$؛ الرأس: $(2, 4)$؛ البؤرة: $(4.5, 4)$؛ الدليل: $x = -0.5$؛ محور التماثل: $y = 4$



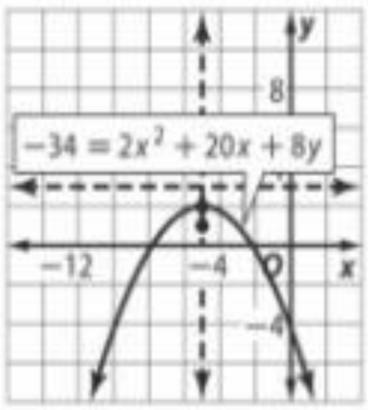
22. $(y+3)^2 = -20(x+4)$؛ الرأس: $(-4, -3)$؛ البؤرة: $(-9, -3)$؛ الدليل: $x = 1$؛ محور التماثل: $y = -3$



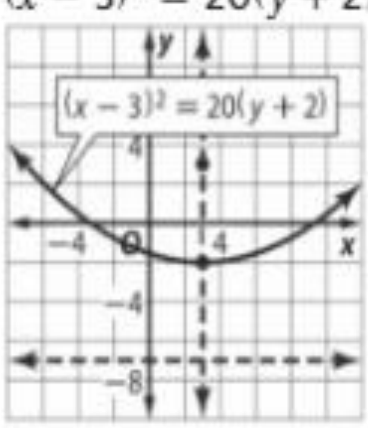
23. $(x+6)^2 = 18(y+9)$؛ الرأس: $(-6, -9)$؛ البؤرة: $(-6, -4.5)$؛ الدليل: $y = -13.5$؛ محور التماثل: $x = -6$



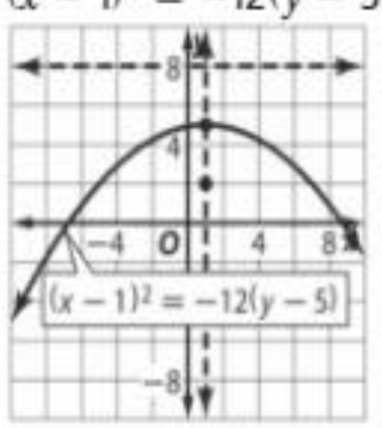
24. $(x+5)^2 = -4(y-2)$؛ الرأس: $(-5, 2)$؛ البؤرة: $(-5, 1)$؛ الدليل: $y = 3$؛ محور التماثل: $x = -5$



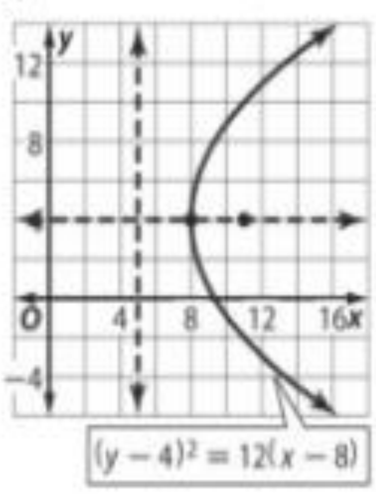
36. $(x-3)^2 = 20(y+2)$



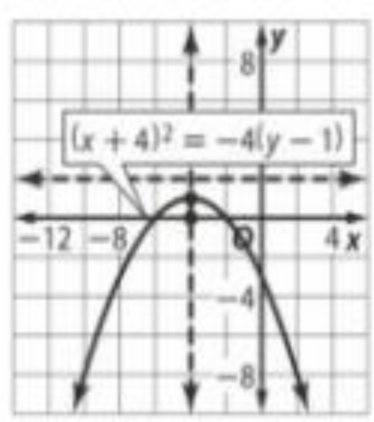
37. $(x-1)^2 = -12(y-5)$



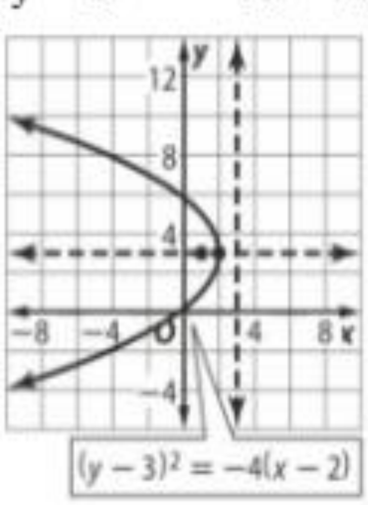
38. $(y-4)^2 = 12(x-8)$



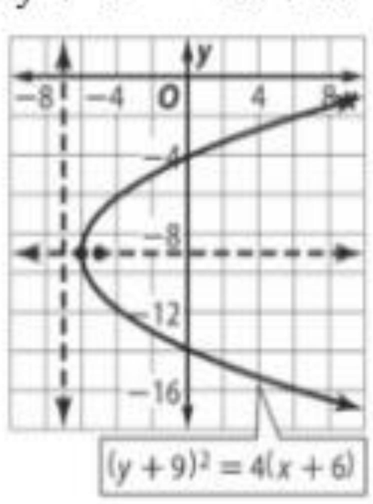
39. $(x+4)^2 = -4(y-1)$



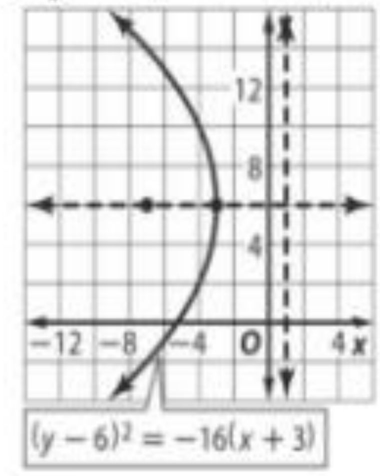
40. $(y-3)^2 = -4(x-2)$



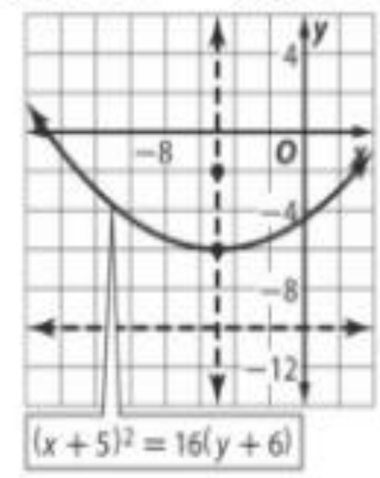
41. $(y+9)^2 = 4(x+6)$



42. $(y-6)^2 = -16(x+3)$

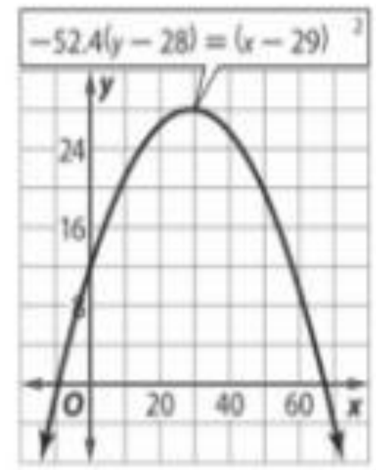


43. $(x+5)^2 = 16(y+6)$

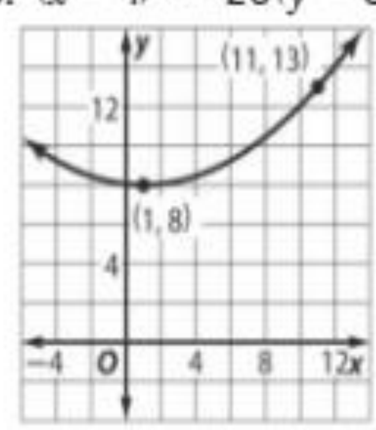


44a. إذا كانت الأرض تمثل المحور x وكان العمود الأيسر يمثل المحور y، فالمعادلة التي تمثل القطع المكافئ هي $-52.4(y-28) = (x-29)^2$.

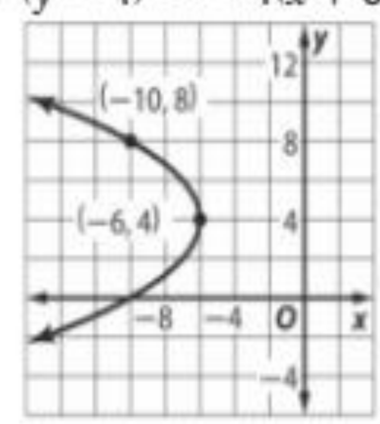
44b.



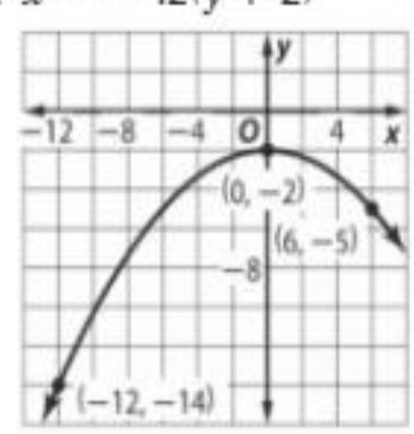
60. $(x-1)^2 = 20(y-8)$



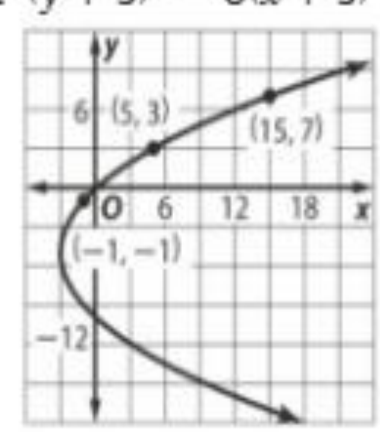
61. $(y-4)^2 = -4(x+6)$



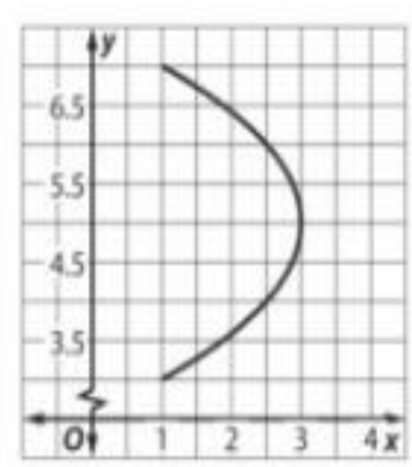
62. $x^2 = -12(y+2)$



63. $(y+5)^2 = 8(x+3)$



64c.



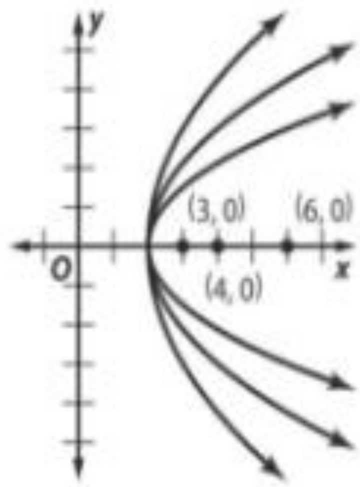
$D = \{x \mid 1 \le x \le 3\};$
$R = \{y \mid 3 \le y \le 7\}$

70.

$$\begin{aligned}
(y-k)^2 &= 4p(x-h)\\
y^2 - 2ky + k^2 &= 4px - 4ph\\
y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph &= 0\\
y^2 + (-4p)x + (-2k)y + (k^2 + 4ph) &= 0\\
y^2 + Dx + Ey + F &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x-h)^2 &= 4p(y-k)\\
x^2 - 2hx + h^2 &= 4py - 4pk\\
x^2 - 2hx - 4py + h^2 + 4pk &= 0\\
x^2 + (-2h)x + (-4p)y + (h^2 + 4pk) &= 0\\
x^2 + Dx + Ey + F &= 0
\end{aligned}$$

77b.



77c. مع تحرُّك البؤرة مبتعدة عن الرأس، يصبح القطع المكافئ أكثر عرضًا.

77e. نموذج الإجابة: لكل القطوع المكافئة رأس عند $(0, -1)$ ومفتوحة للأسفل. تنتج المعادلة الأولى القطع المكافئ الأضيق وتنتج المعادلة الثانية القطع المكافئ الأعرض.

78. هديل؛ بما أنّ $p = 1$ ، يجب أن يكون القطع المكافئ مفتوحًا لأعلى ثم لأسفل.

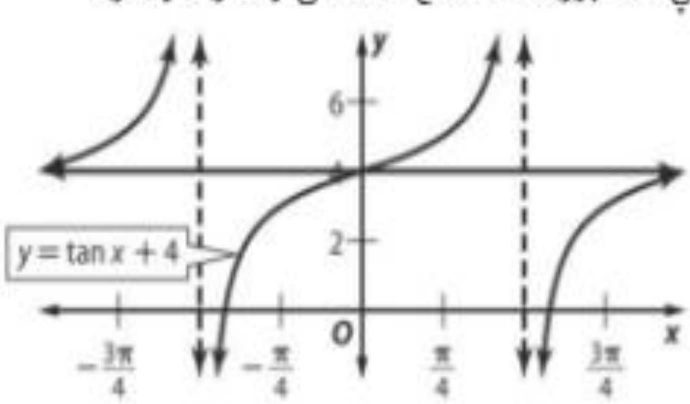
80. نموذج الإجابة: تكون النقطة على القطع المكافئ متساوية البعد عن البؤرة والدليل. بما أن الرأس يقع بين البؤرة والدليل مباشرة على طول محور التماثل، فهي النقطة على القطع المكافئ الأقرب للاثنين.

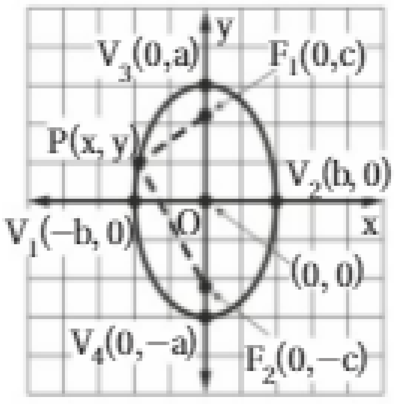
81. الربعان الأول والثالث؛ الرأس $(-2, 5)$ و $p = -2$. بما أنّ الرأس على يسار المحور y ، وفتحة القطع المكافئ باتجاه اليسار، فلن يكون هناك نقاط على يمين المحور y، في الربعين الأول والثالث.

82. إذا كان للبؤرة والمحور إحداثي x نفسه، فهي تقّعر إلى الأعلى وتقّعر إلى الأسفل. إذا كان الإحداثي y للرأس أصغر من الإحداثي y للبؤرة، فالقطع المكافئ يتقعر للأعلى. أما إذا كان أكبر من الإحداثي y للبؤرة، فالقطع المكافئ يتقعر للأسفل.

إذا كان للبؤرة والمحور إحداثي y نفسه، فهي تقّعر إلى اليمين وتقّعر إلى اليسار. إذا كان الإحداثي x للرأس أصغر من الإحداثي x للبؤرة، فالقطع المكافئ يتقعر لليمين. أما إذا كان أكبر من الإحداثي x للبؤرة، فالقطع المكافئ يتقعر لليسار.

91.



37. 

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} +$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-(-c))^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} +$$

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 2a - \sqrt{x^2 + (y+c)^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y+c)^2} + x^2 + y^2 + 2cy + c^2$$

$$4a\sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 4a^2 + 4cy$$

$$a\sqrt{x^2 + (y+c)^2} = a^2 + cy$$

$$a^2(x^2 + y^2 + 2cy + c^2) = a^4 + 2a^2cy + c^2y^2$$

$$a^2x^2 + a^2y^2 + 2a^2cy + a^2c^2 = a^4 + 2a^2cy + c^2y^2$$

$$a^2y^2 - c^2y^2 + a^2x^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$y^2(a^2 - c^2) + a^2x^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$y^2b^2 + a^2x^2 = a^2b^2$$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

71. نعم، نموذج الإجابة: إذا كانت (x, y) نقطة على القطع الناقص فعندها يجب أن تكون $(-x, -y)$ على القطع الناقص أيضًا.

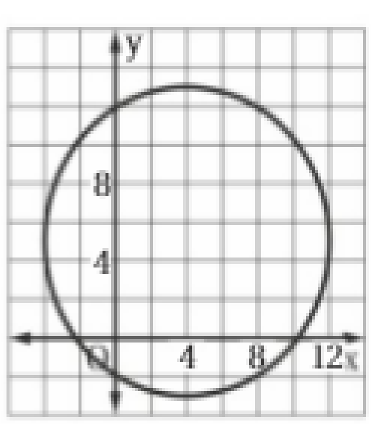
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} = 1$$

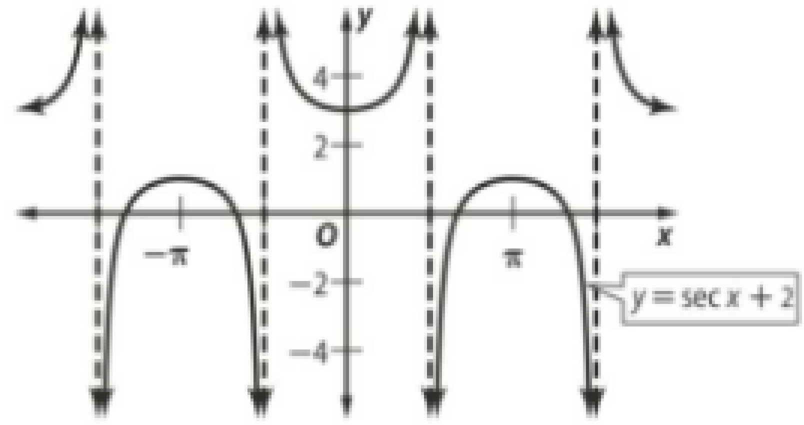
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

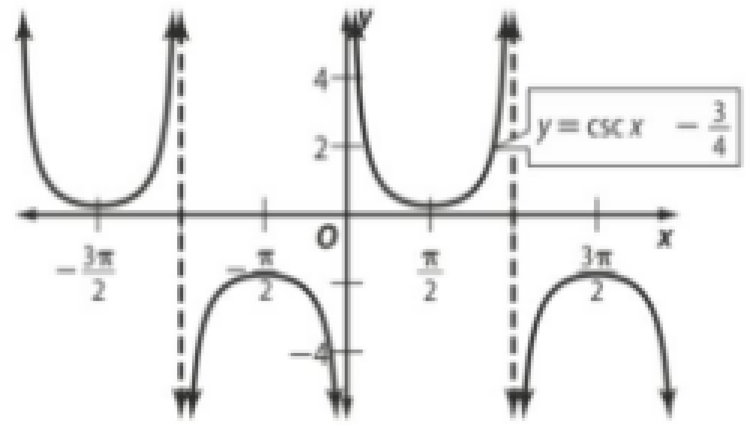
ولذلك، $(-x, -y)$ هي أيضًا نقطة على القطع الناقص والقطع الناقص متماثل بالنسبة لنقطة الأصل.

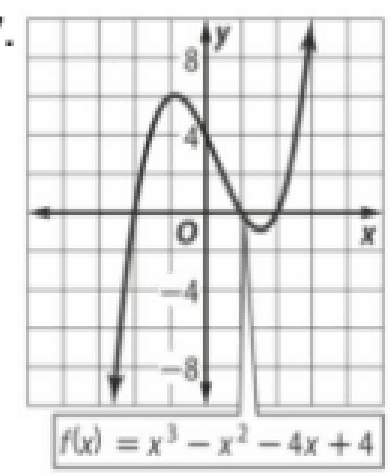
72. سيكون المجال $[h - r, h + r]$؛ نموذج الإجابة: $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 8^2$، والمجال $[4 - 8, 4 + 8]$ أو $[-4, 12]$.

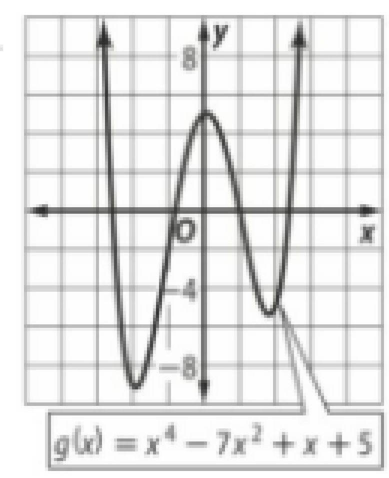


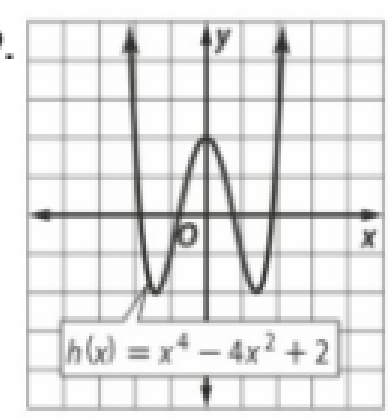
73. نموذج الإجابة: مع اقتراب b من a، تقترب القيم $a^2 - b^2$ و c من 0. بما أنّ $e = \frac{c}{a}$، فقيمة e قريبة من 0 والبؤرتان قريبتان من مركز القطع الناقص. إذًا فالقطع الناقص دائري تقريبًا.

92. 

93. 

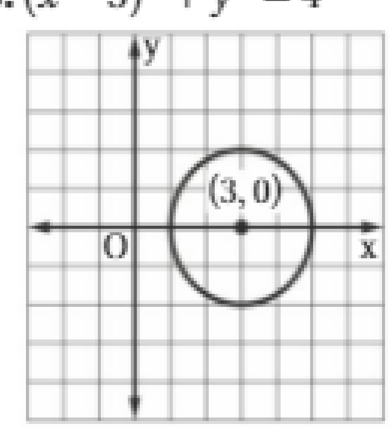
97. 

98. 

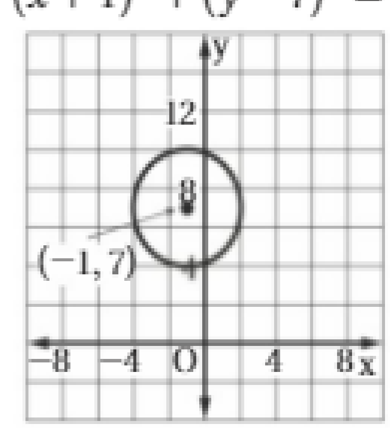
99. 

الدرس 6-2

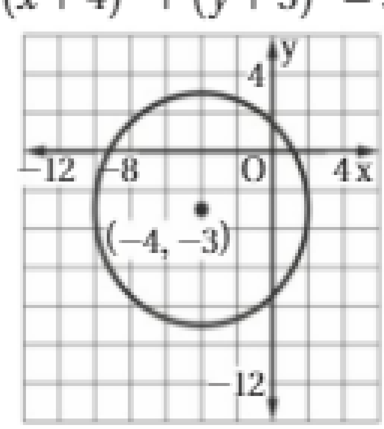
33. $(x - 3)^2 + y^2 = 4$



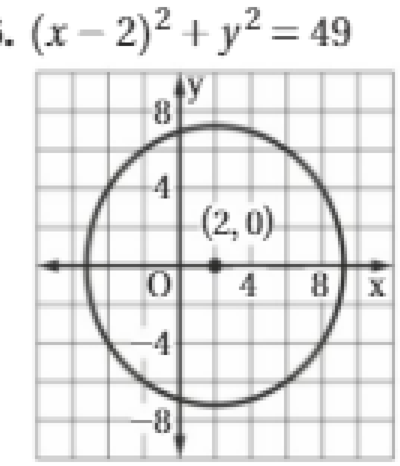
34. $(x + 1)^2 + (y - 7)^2 = 9$



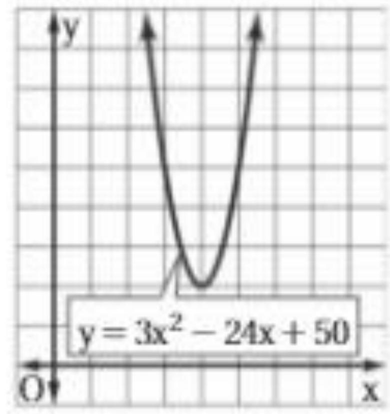
35. $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 36$



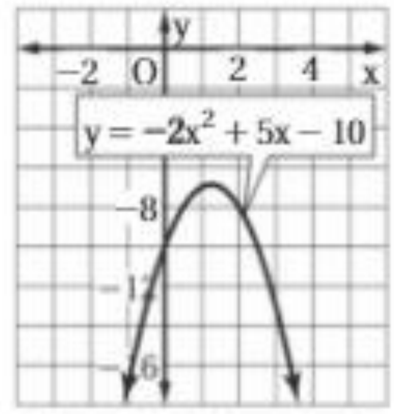
36. $(x - 2)^2 + y^2 = 49$



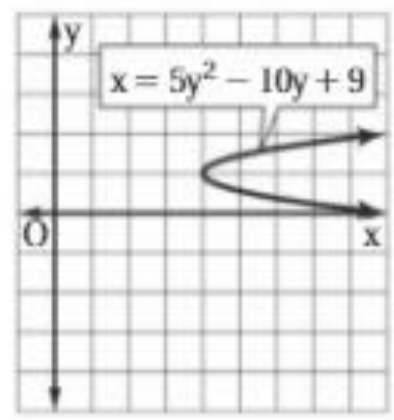
74. الرأس: $(4, 2)$، البؤرة: $\left(4, 2\frac{1}{12}\right)$، الدليل: $y = 1\frac{11}{12}$، محور التماثل: $x = 4$



75. الرأس: $\left(\frac{5}{4}, -\frac{55}{8}\right)$، البؤرة: $\left(\frac{5}{4}, -7\right)$، الدليل: $y = -\frac{27}{4}$، محور التماثل: $x = \frac{5}{4}$



76. الرأس: $(4, 1)$، البؤرة: $\left(4\frac{1}{20}, 1\right)$، الدليل: $x = 3\frac{19}{20}$، محور التماثل: $y = 1$



78. $\sin(\theta + 30°) + \cos(\theta + 60°)$

$= \sin\theta\cos 30° + \cos\theta\sin 30° + \cos\theta\cos 60° - \sin\theta\sin 60°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$

$= \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\cos\theta$

$= \cos\theta$

79. $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \sin\theta\cos\frac{\pi}{3} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{3} - \cos\theta\cos\frac{\pi}{6} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{6}$

$= \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta$

$= \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\sin\theta$

$= \sin\theta$

80. $\sin(3\pi - x) = \sin 3\pi\cos x - \cos 3\pi\sin x$

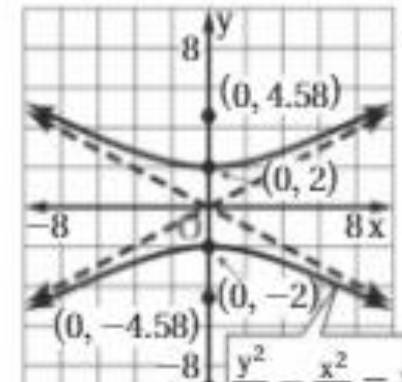
$= 0\cos x - (-1)\sin x$

$= 0 + \sin x$

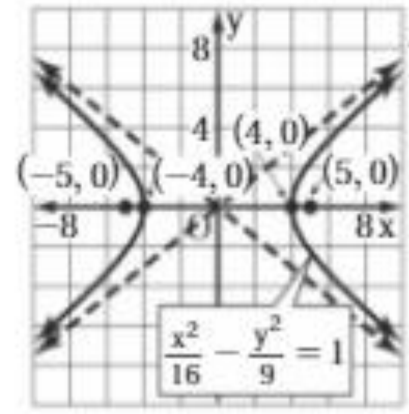
$= \sin x$

الدرس 6-3

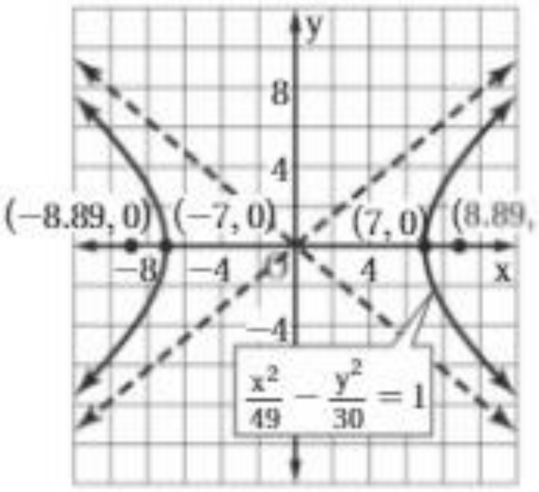
1.



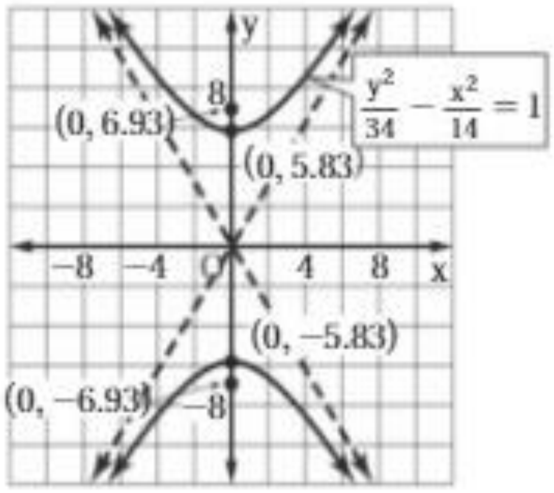
2.



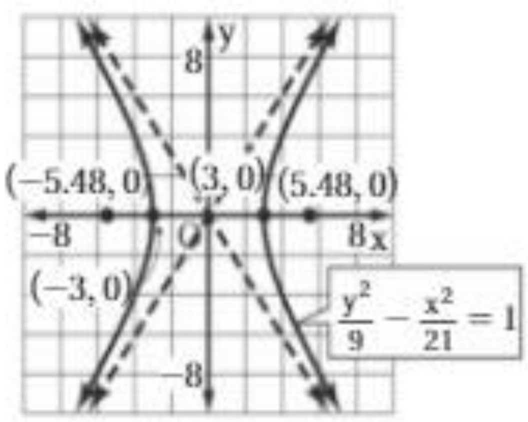
3.



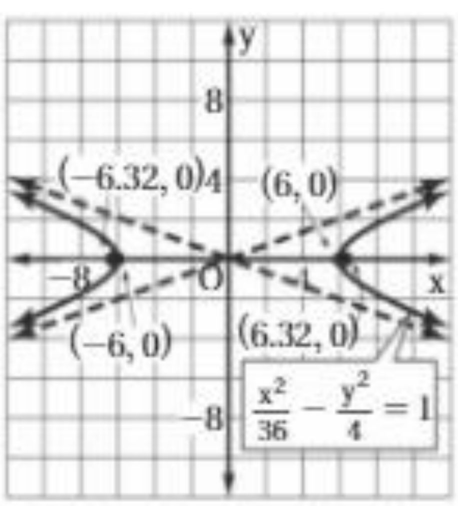
4.



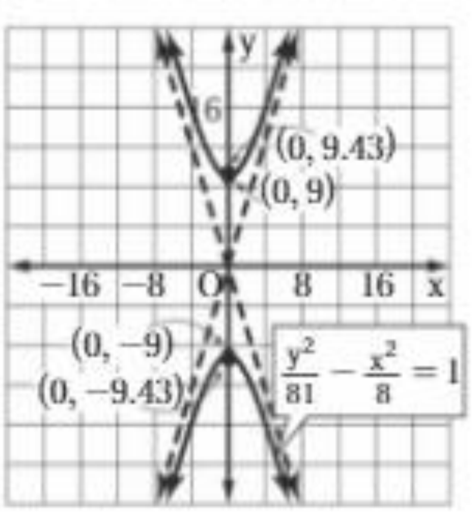
5.



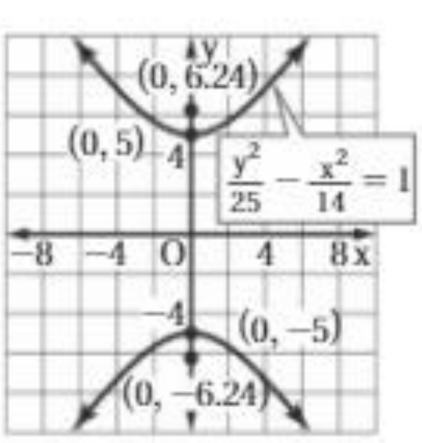
6.



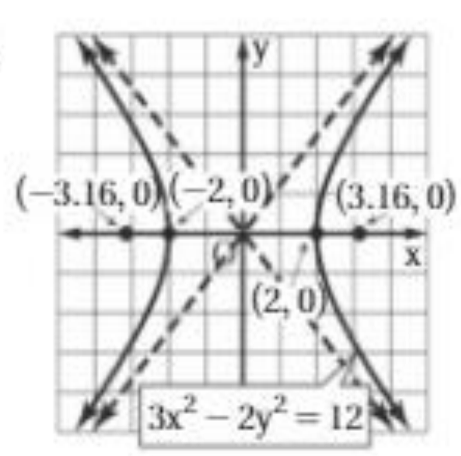
7.



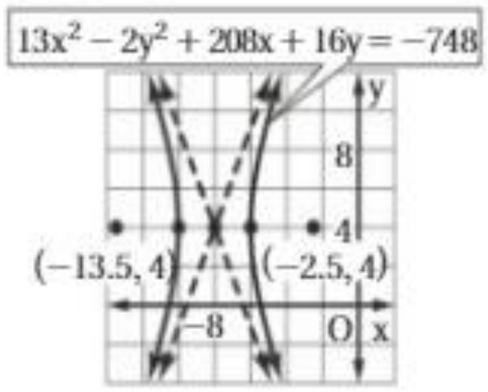
8.



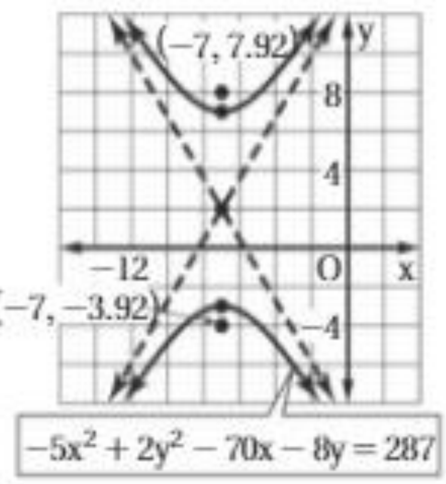
9.



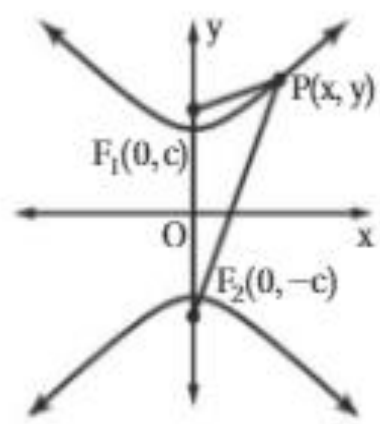
.20



.21



.57



$|PF_1 - PF_2| = 2a$ تعريف القطع الزائد

$$\left|\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2} - \sqrt{(x-0)^2+[y-(-c)]^2}\right| = 2a$$

$$\sqrt{x^2+(y-c)^2} - \sqrt{x^2+(y+c)^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2+(y-c)^2} = 2a + \sqrt{x^2+(y+c)^2}$$

$$x^2+(y-c)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{x^2+(y+c)^2} + x^2 + (y+c)^2$$

$$-4cy - 4a^2 = 4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}$$

$$-cy - a^2 = a\sqrt{x^2+(y+c)^2}$$

$$c^2y^2 + 2a^2cy + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cy + a^2c^2 + a^2y^2$$

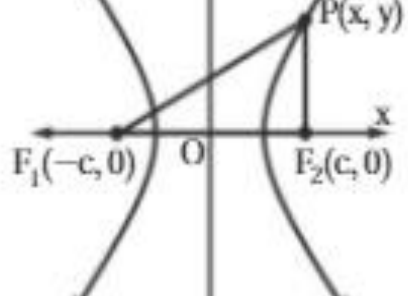
$$c^2y^2 - a^2y^2 - a^2x^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$(c^2-a^2)y^2 - a^2x^2 = a^2(c^2-a^2)$$

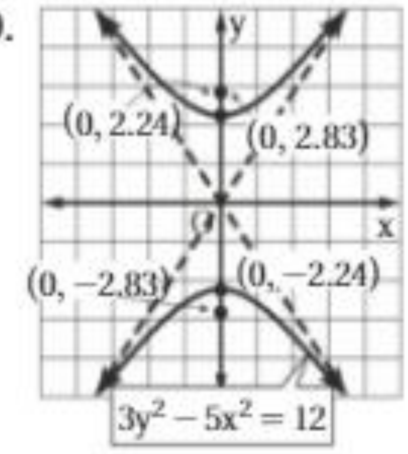
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{c^2-a^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

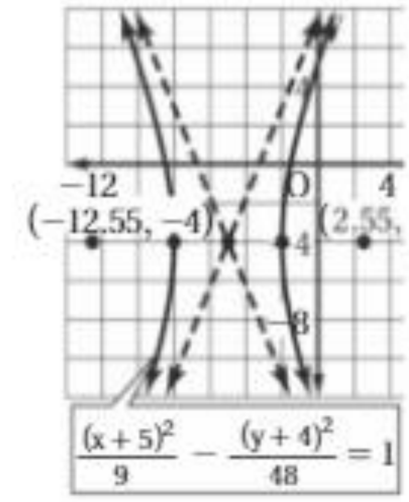
58.



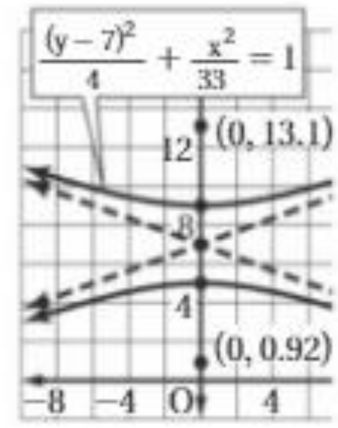
10.



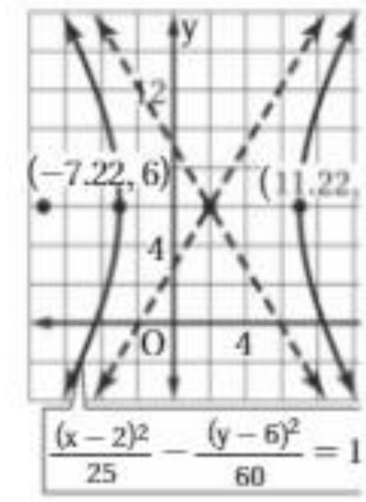
12.



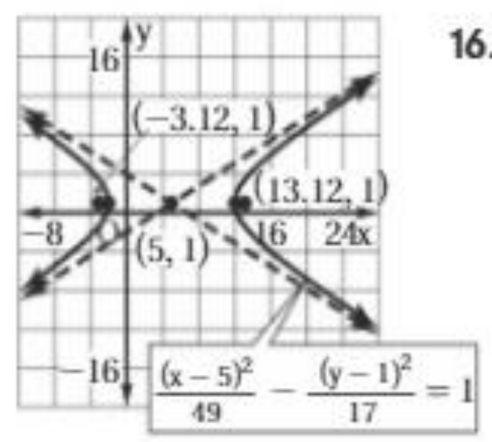
13.



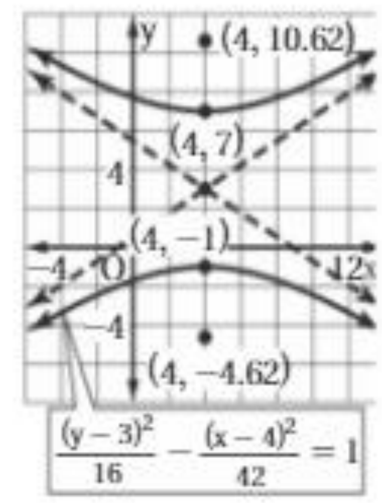
14.



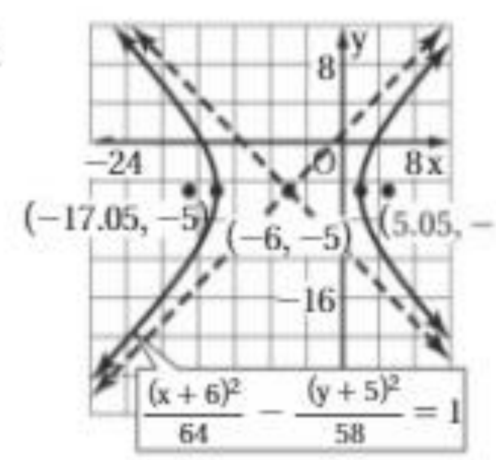
15.



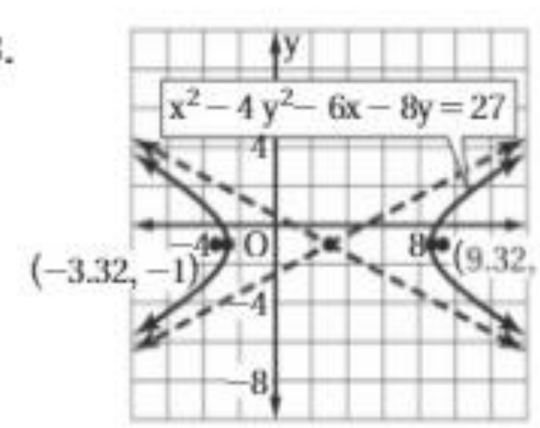
16.



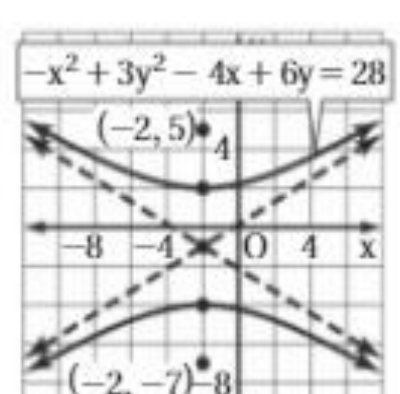
17.



18.



19.



$|PF_1 - PF_2| = 2a$

$\left|\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right|$
$= 2a$

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 +$
y^2

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$

$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$

$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

79. نموذج الإجابة: إذا كان محور القطع أفقيًا، تكون a مسافة أفقية وتكون b مسافة رأسية. لذا، فإن ميلا ن خطوط التقارب هي $\pm \frac{b}{a}$. إذا كان محور القطع رأسيًا، تكون a مسافة رأسية وتكون b مسافة أفقية. لذا، فإن ميلا ن خطوط التقارب هي $\pm \frac{b}{a}$.

80. أحيانًا؛ على سبيل المثال، عند إعطاء الرؤوس والبؤرتين، فمن الممكن كتابة معادلة القطع الزائد. وعند إعطاء الرؤوس ومحور القطع، فمن غير الممكن كتابة معادلة القطع الزائد.

81. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{72} = 1$

82. في القطع الزائد متساوي الأضلاع، $a = b$ و $c^2 = a^2 + b^2$.

$c^2 = a^2 + a^2$ $\quad\quad a = b$
$c^2 = 2a^2$
$c = a\sqrt{2}$

بما أنّ $e = \frac{c}{a}$، يكون لدينا

$e = \frac{c}{a}$

$e = \frac{a\sqrt{2}}{a}$

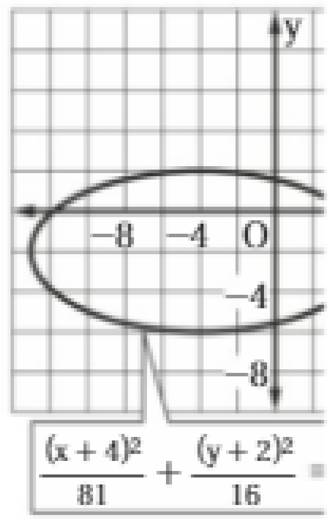
$e = \sqrt{2}$

لذلك، الاختلاف المركزي لأي قطع زائد متساوي الأضلاع هو $\sqrt{2}$.

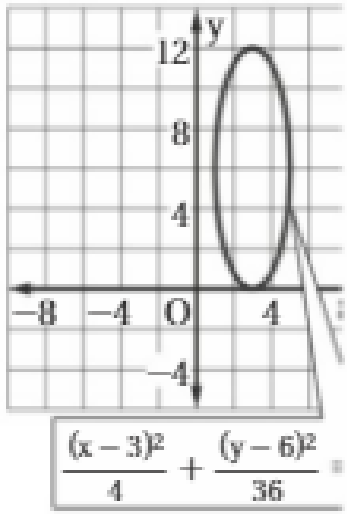
83. نموذج الإجابة: أولًا ، حدد ما إذا كان اتجاه القطع الزائد رأسيًا أو أفقيًا. ثم استخدم البؤرتين لتحديد موقع نقطة مركز القطع الزائد وتحديد قيم h و k. استخدم طول محور القطع لإيجاد a^2. أوجد c ، المسافة من نقطة المركز إلى البؤرة. استخدم المعادلة $b^2 = c^2 - a^2$ لإيجاد b^2. وأخيرًا، استخدم الصيغة المعيارية الصحيحة لكتابة المعادلة، وهذا يتوقف على ما إذا كان محور القطع موازيًا للمحور x أو للمحور y.

اختبار منتصف الوحدة

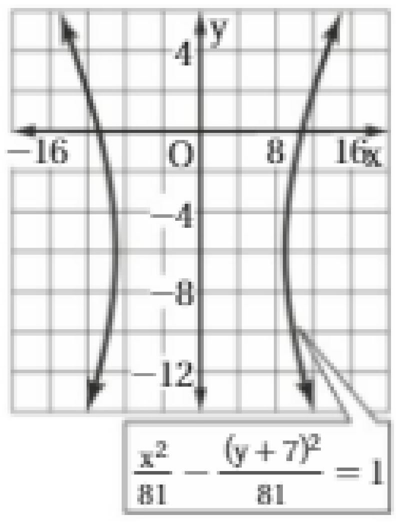
5.



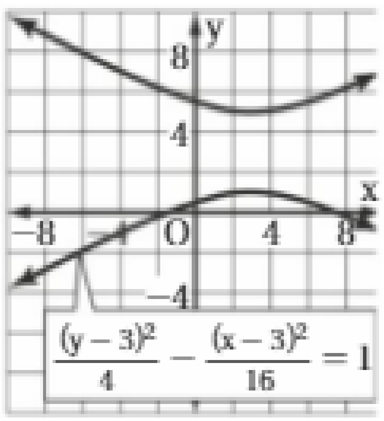
6.



13.



14.



15. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$

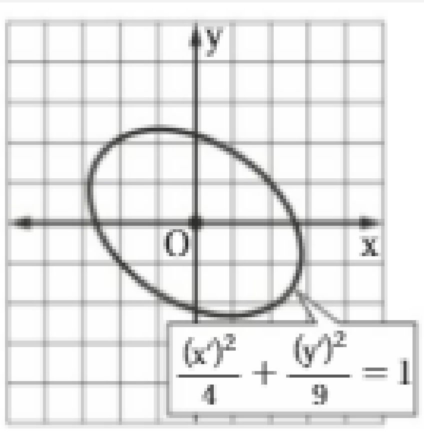
16. $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{60} = 1$

17. $\frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{75} = 1$

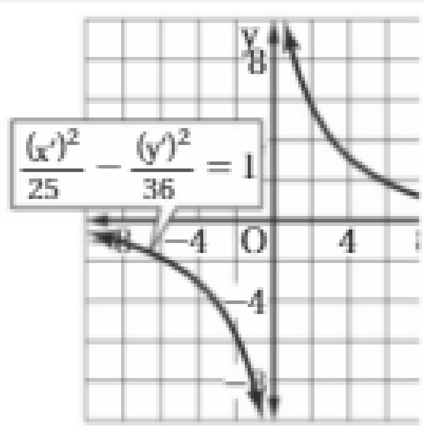
18. $\frac{(y+1)^2}{25} - \frac{(x-5)^2}{39} = 1$

الدرس 6-4

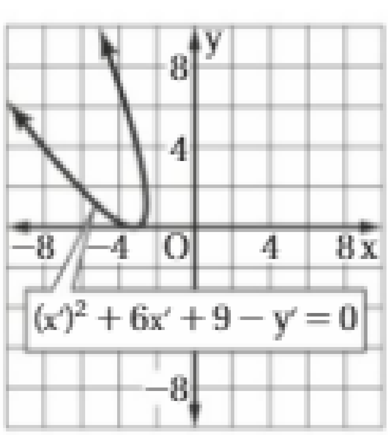
30.



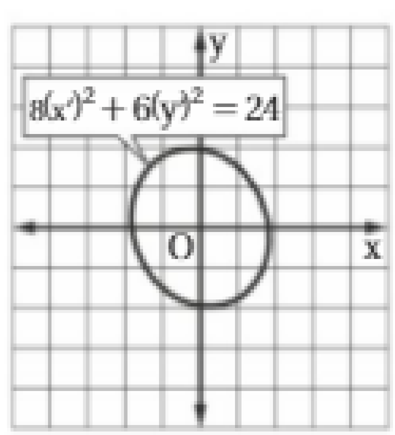
31.



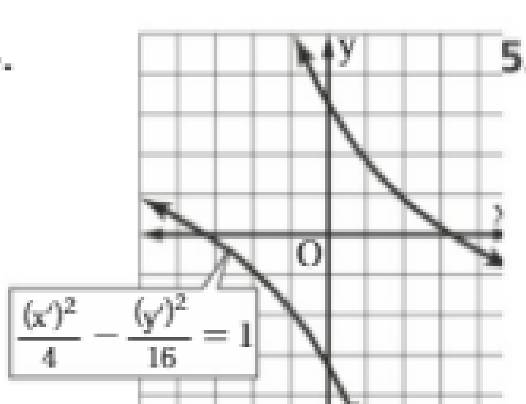
32.



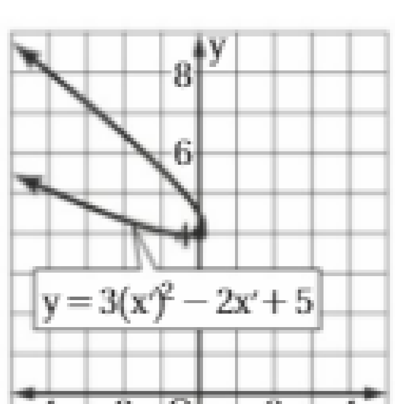
33.



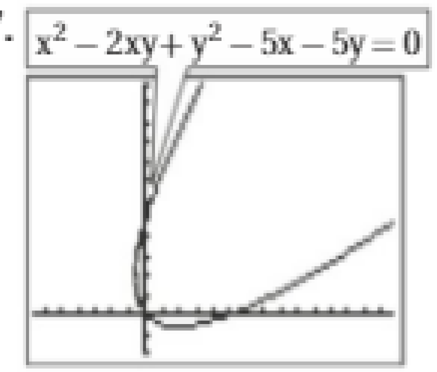
34.



5.

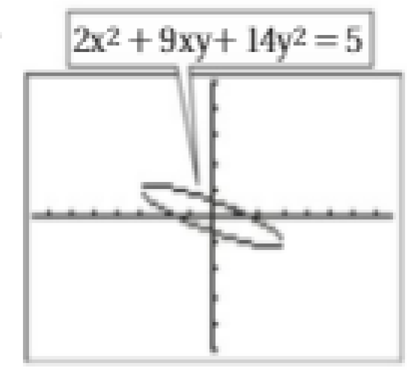


37.



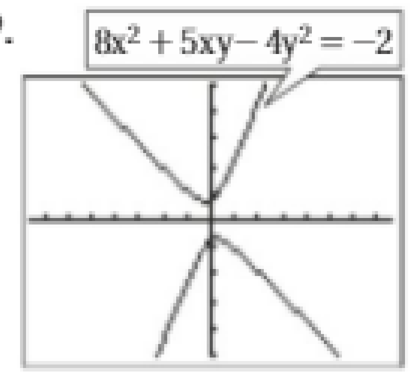
$[-6.61, 14.6]$ scl: 1 by $[-2, 12]$ scl: 1

38.



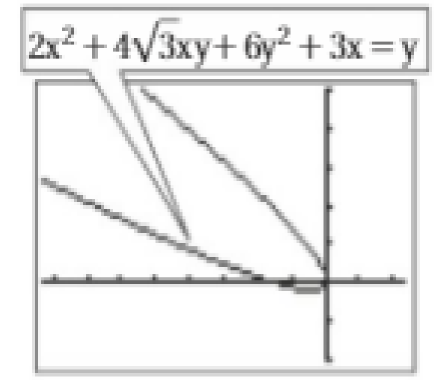
$[-7.58, 7.58]$ scl: 1 by $[-5, 5]$ scl: 1

39.



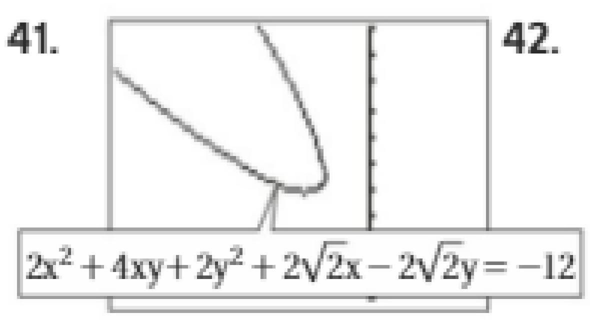
$[-7.58, 7.58]$ scl: 1 by $[-5, 5]$ scl: 1

40.



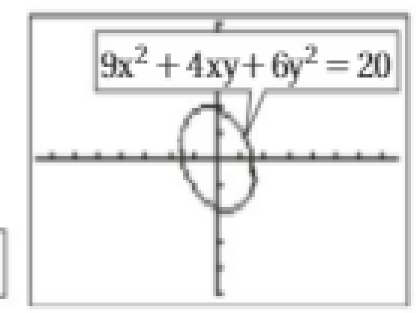
$[-8.31, 2.31]$ scl: 1 by $[-2, 5]$ scl: 1

41.



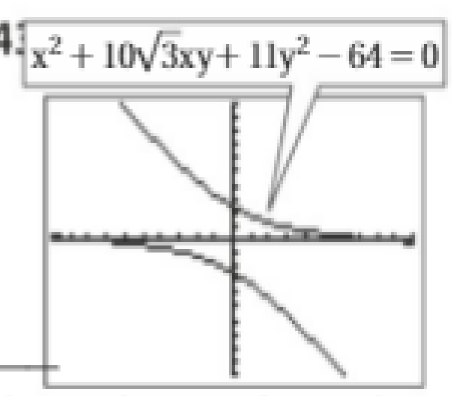
$[-10.58, 4.58]$ scl: 1 by $[-2, 8]$ scl: 1

42.



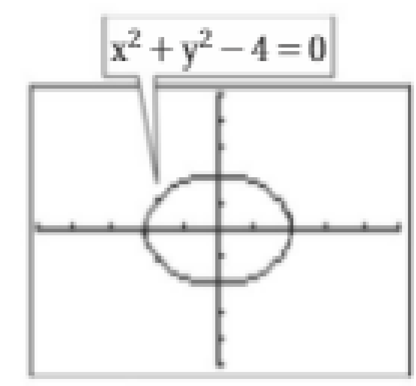
$[-7.85, 7.85]$ scl: 1 by $[-5, 5]$ scl: 1

43.



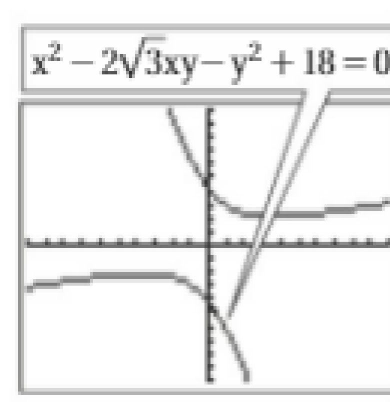
$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

44.



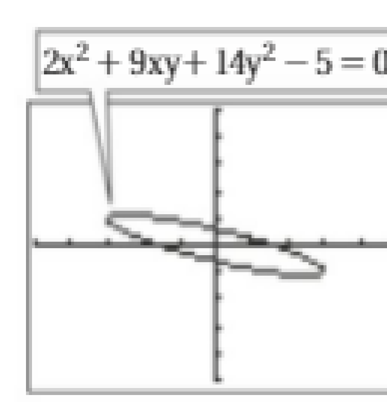
$[-5, 5]$ scl: 1 by $[-5, 5]$ scl: 1

45.



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

46.



$[-5, 5]$ scl: 1 by $[-5, 5]$ scl: 1

55. $Ax^2 = A(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2$

$= A(x')^2\cos^2\theta - 2Ax'y'\sin\theta\cos\theta + A(y')^2\sin^2\theta$

$Bxy = B(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta)$

$= B(x')^2\sin\theta\cos\theta - Bx'y'\sin^2\theta + Bx'y'\cos^2\theta -$

$B(y')^2\sin\theta\cos\theta$

$= B(x')^2\sin\theta\cos\theta + Bx'y'(\cos^2\theta - \sin^2\theta) -$

$B(y')^2\sin\theta\cos\theta$

$Cy^2 = C(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2$

$= C(x')^2\sin^2\theta + 2Cx'y'\sin\theta\cos\theta + C(y')^2\cos^2\theta$

جمّع الحدود المتشابهة للتحقق من أن $A + C = A' + C'$. A معامل الحد $(x')^2$ و C هي معامل الحد $(y')^2$.

$$A(x')^2\cos^2\theta + B(x')^2\sin\theta\cos\theta + C(x')^2\sin^2\theta = [A\cos^2\theta + B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta]\,(x')^2$$

$$A(y')^2\sin^2\theta - B(y')^2\sin\theta\cos\theta + C(y')^2\cos^2\theta = [A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta]\,(y')^2$$

$$\begin{aligned} A' + C' &= A\cos^2\theta + B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta + [A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta] \\ &= A(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + B(\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta) + C(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= A(1) + B(0) + C(1) \\ &= A + C \end{aligned}$$

61. فلتكن $x = x'\cos\theta + y'\sin\theta$ و $y = -x'\sin\theta + y'\cos\theta$

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ &= (x'\cos\theta + y'\sin\theta)^2 + (-x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 \\ &= (x')^2\cos^2\theta + 2x'y'\cos\theta\sin\theta + (y')^2\sin^2\theta + (x')\sin^2\theta - 2x'y'\cos\theta\sin\theta + (y')^2\cos^2\theta \\ &= [(x')^2 + (y')^2]\cos^2\theta + [(x')^2 + (y')^2]\sin^2\theta \\ &= [(x')^2 + (y')^2](\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= [(x')^2 + (y')^2](1) \\ &= (x')^2 + (y')^2 \end{aligned}$$

62. نموذج الإجابة: المحاور لها تماثل دوراني بمقدار 90°. أي دوران للمحاور يكون أكبر من 90° سيؤدي إلى دوران المحاور على نفسها كل 90°. زاوية الدوران الأخيرة θ ستكون قياس الزاوية المتبقي بعد طرح مضاعفات 90° من الزاوية الأصلية.

63. $\cos\theta\,(x = x'\cos\theta - y'\sin\theta)$

$\sin\theta\,(y = x'\sin\theta + y'\cos\theta)$

$x\cos\theta = x'\cos^2\theta - y'\sin\theta\cos\theta$

$+\,y\sin\theta = x'\sin^2\theta + y'$

$\sin\theta\cos\theta$

$x\cos\theta + y\sin\theta = x'\cos^2\theta + x'\sin^2\theta$

$x\cos\theta + y\sin\theta = x'(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$x\cos\theta + y\sin\theta = x'$

$\sin\theta\,(x = x'\cos\theta - y'\sin\theta)$

$\cos\theta\,(y = x'\sin\theta + y'\cos\theta)$

$x\sin\theta = x'\cos\theta\sin\theta - y'\sin^2\theta$

$-\,y\cos\theta = x'\cos\theta\sin\theta + y'\cos^2$

θ

$x\sin\theta - y\cos\theta = -y'\sin^2\theta - y'\cos^2\theta$

$x\sin\theta - y\cos\theta = -y'(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

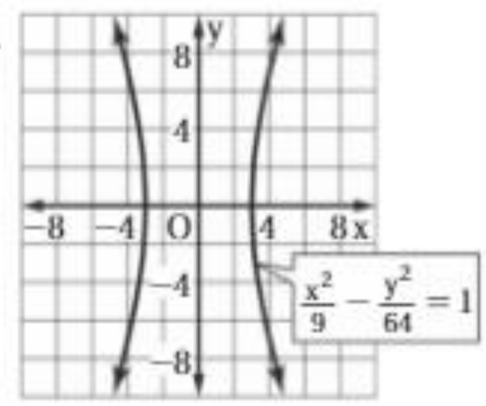
$y\cos\theta - x\sin\theta = y'$

64. نموذج الإجابة: عندما تكون $A = C$، فإنّ تعبير θ المكتوب على أساس الظل يحوي 0 في المقام وغير معرف. ولكن يظل هناك دوران $\frac{\pi}{4}$ لذلك هناك شرطٌ إضافي. زاوية الدوران θ المكتوبة على أساس ظل التمام هو $\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}$ إنّ الطريقة الوحيدة ليكون هذا التعبير غير معرفٍ هي إذا كان $B = 0$. إذا كانت $B = 0$، فلن يكون هناك سببٌ لإيجاد قيمة θ لأنه لا حاجة للدوران.

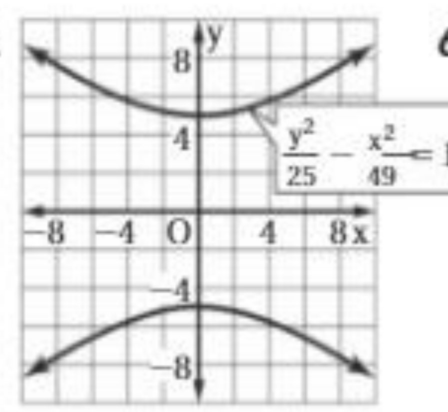
65. نموذج الإجابة: المميز معرّف على أنه $B^2 - 4AC$، أو في هذه الحالة، $(B')^2 - 4A'C'$. بما أنّ القطع المخروطي الذي تم تدويره ليس له حد B'، ينخفض المميز ليصبح $-4A'C'$. وهكذا، إنّ الحدود A' و C' فقط هي التي تحدد نوع القطع المخروطي. لذلك، $-4A'C' < 0$ سيكون قطعًا ناقصًا أو دائرة، و $-4A'C' = 0$ سيكون قطعًا مكافئًا، و $-4A'C' > 0$ سيكون قطعًا زائدًا. للدائرة أو القطع الناقص، يجب أن يكون لـ A' و C' الإشارة نفسها. للقطع المكافئ، يجب أن تكون إما A' أو C' مساويةً لـ 0. للقطع الزائد، يجب أن يكون لـ A' و C' إشارتان متعاكستان.

66. خطأ، نموذج الإجابة: قد ينتج عن المعادلة زوج من المستقيمات المتقاطعة أو مستقيم واحد أو مجموعة من الخطوط المتوازية أو نقطة واحدة.

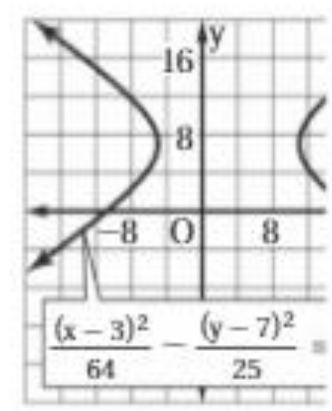
67.



68.

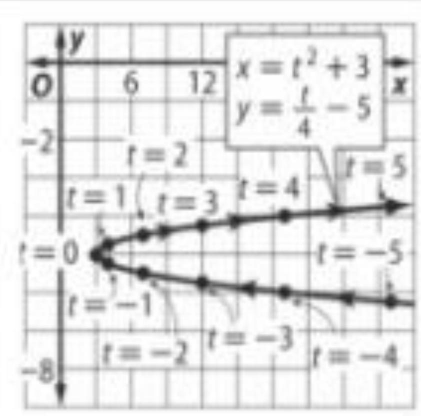


69.

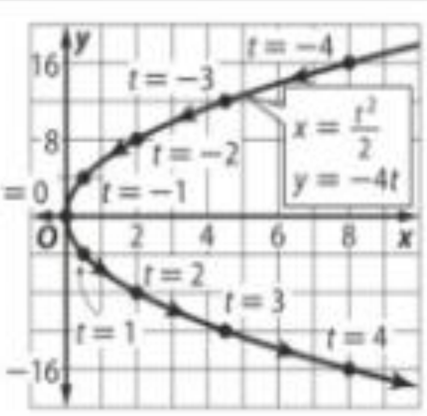


الدرس 6-5

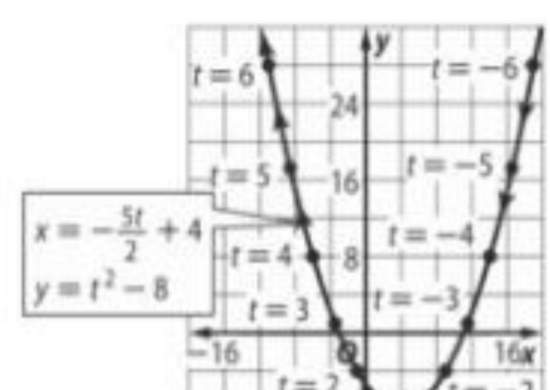
1.



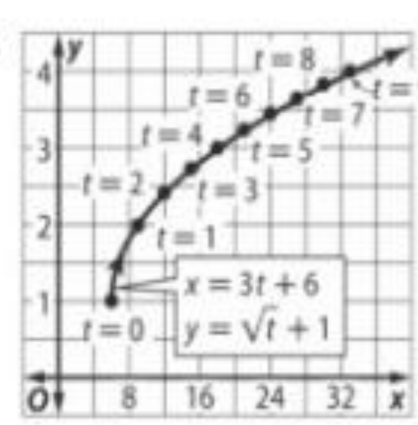
2.



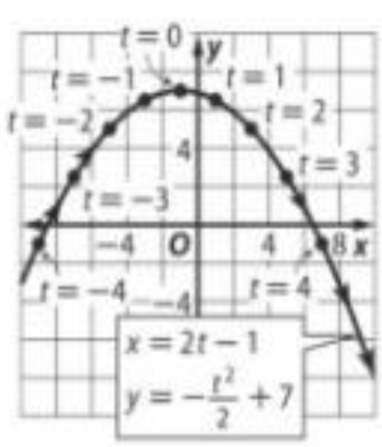
3.



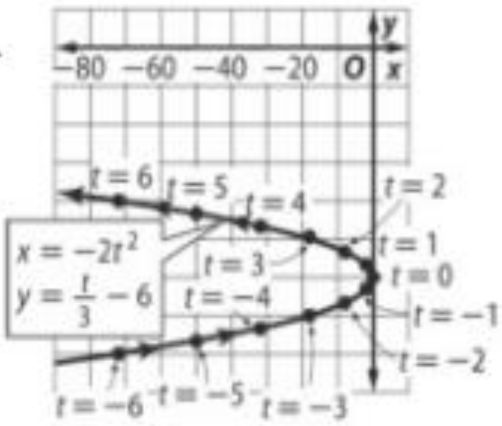
4.



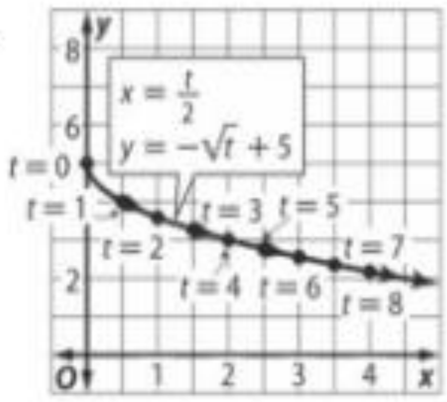
5.



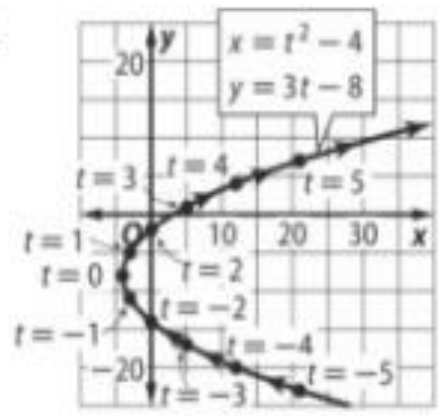
6.



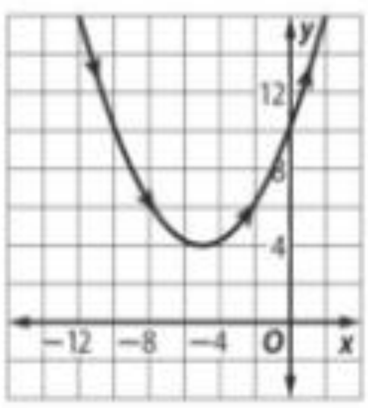
7.



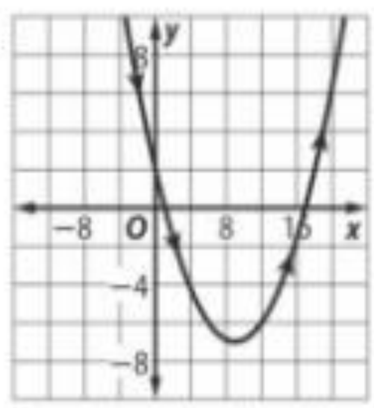
8.



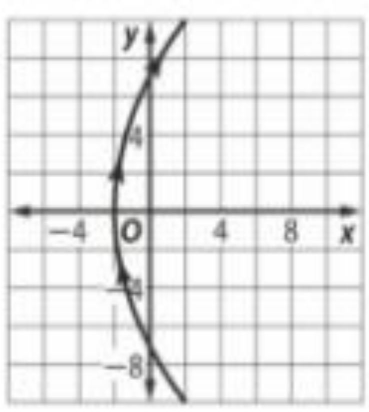
9.



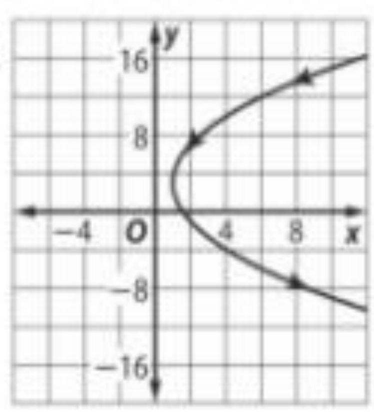
10.



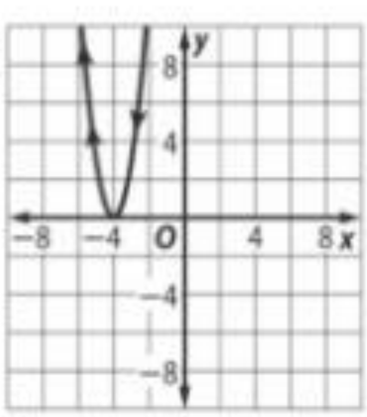
11.



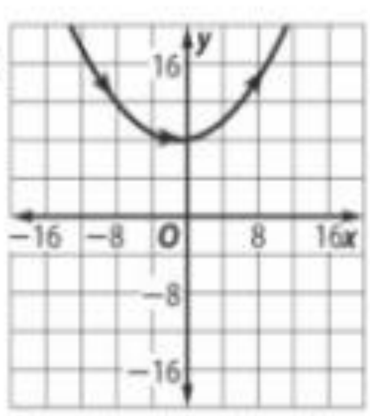
12.



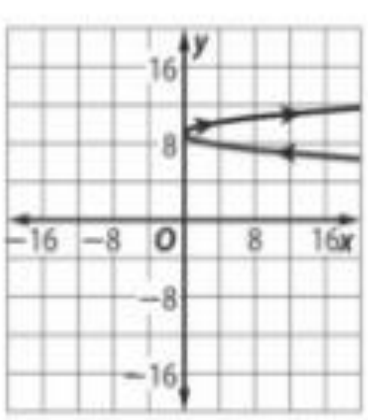
13.



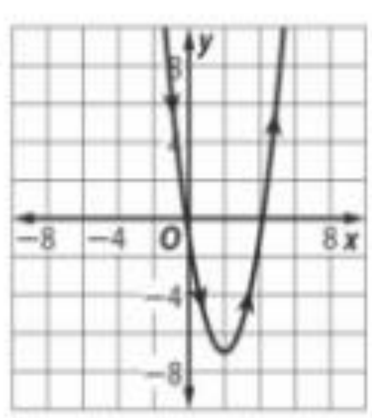
14.



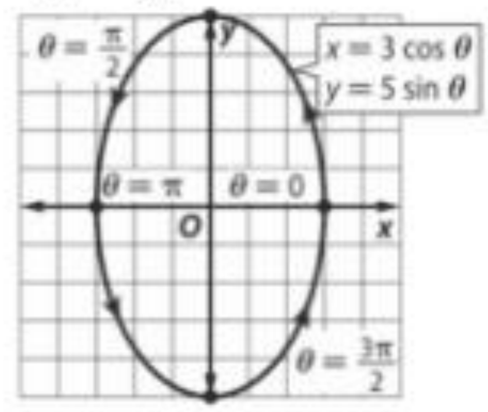
15.



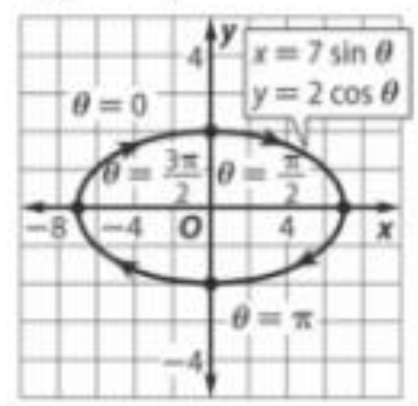
16.



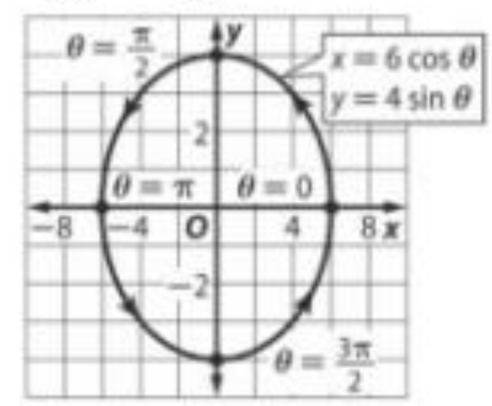
18. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$



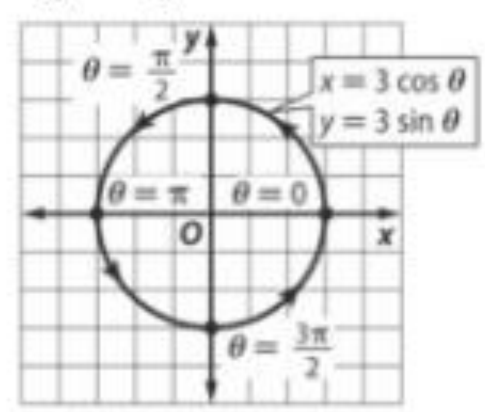
19. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{4}=1$



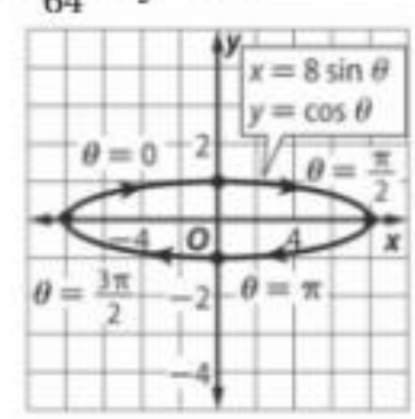
20. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$



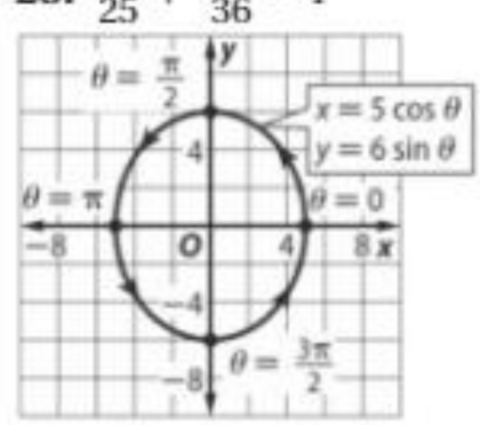
21. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}=1$



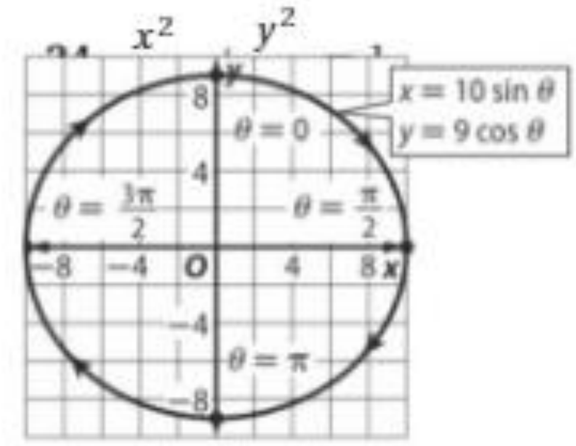
22. $\frac{x^2}{64}+y^2=1$



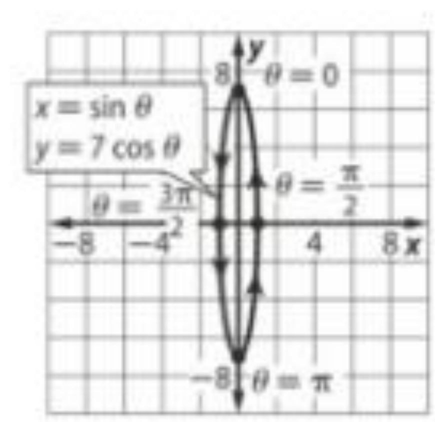
23. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$



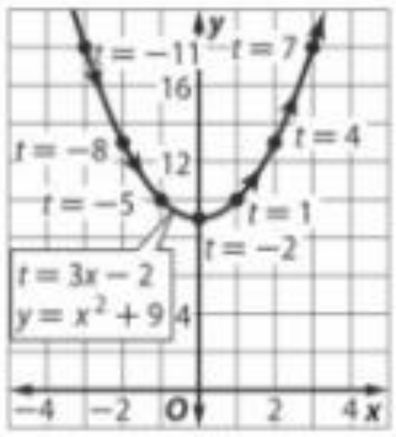
24. x^2 y^2



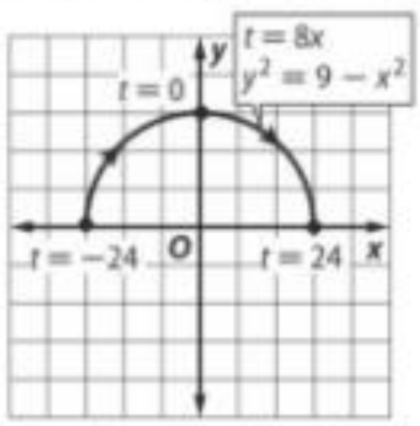
25. $x^2+\frac{y^2}{49}=1$



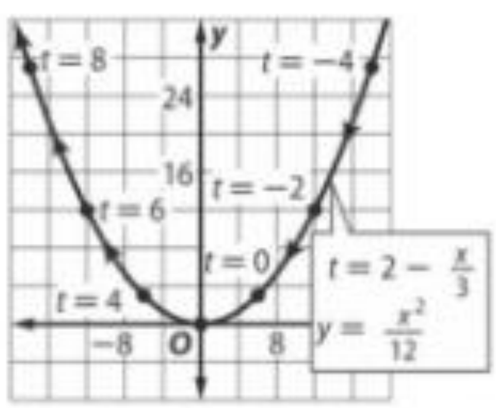
26. $x=\frac{t+2}{3}$ و $y=\frac{t^2}{9}+\frac{4t}{9}+\frac{85}{9}$



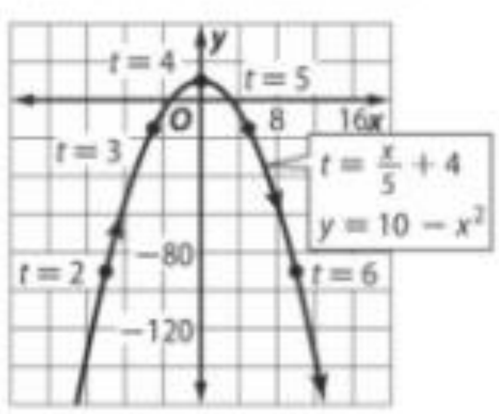
27. $x=\frac{t}{8}$ و $y=\sqrt{9-\frac{t^2}{64}}$



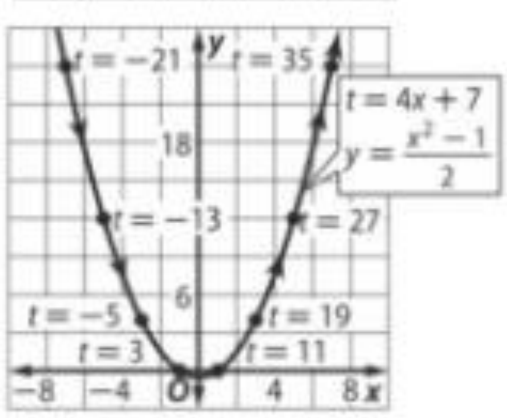
28. $x=6-3t$ و $y=\frac{3}{4}t^2-3t+3$



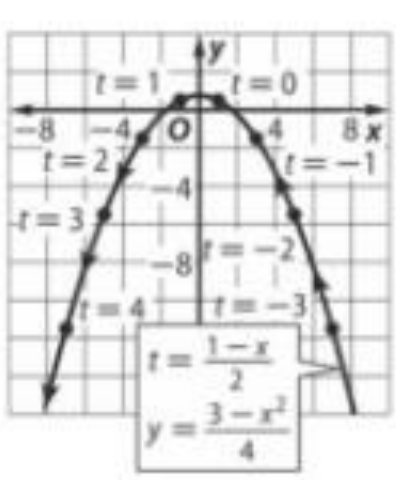
29. $x=5t-20$ و $y=-25t^2+200t-390$



30. $x=\frac{t-7}{4}$ و $y=\frac{t^2}{32}-\frac{7t}{16}+\frac{33}{32}$



31. $x=1-2t$ و $y=-t^2+t+\frac{1}{2}$

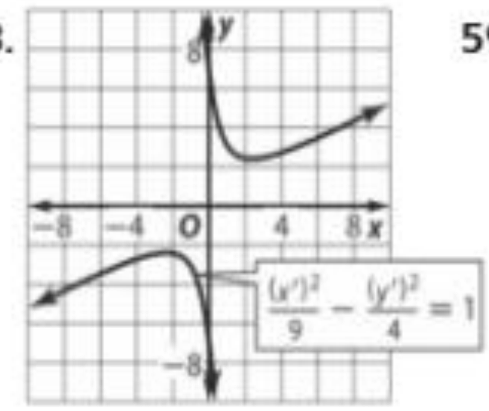


55. نموذج الإجابة: إنّ المسافة الأفقية منمذجة بدالة جيب التمام، والتي تساوي 0 عند °90. وسيعني ذلك أنّ المقذوف ليس له حركة أفقية. ستكون المعادلة الوسيطية الموافقة $x = 0$.

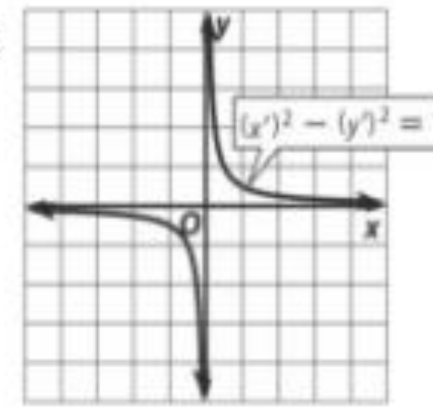
56. نموذج الإجابة: $x = 2 - 3t,\ y = 3 + 2t,\ z = -8 + 4t$؛ $x = -1 - 3t,\ y = 5 + 2t,\ z = -4 + 4t$

57. نموذج الإجابة: تظهر المعادلات الوسيطية كلا الموقعين الأفقي والرأسي للجسم مع مرور الزمن، في حين أنّ المعادلات الديكارتية لا يمكن أن تظهر إلا واحدًا أو الآخر.

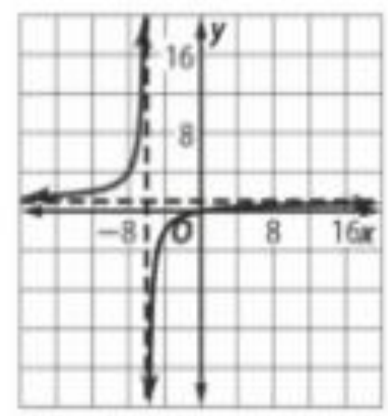
58.



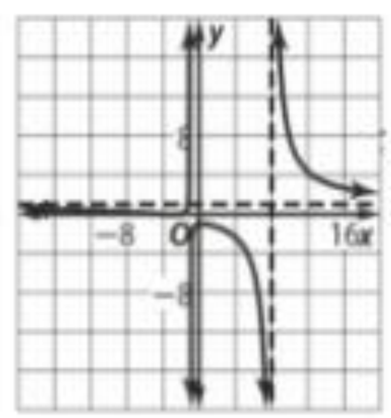
59.



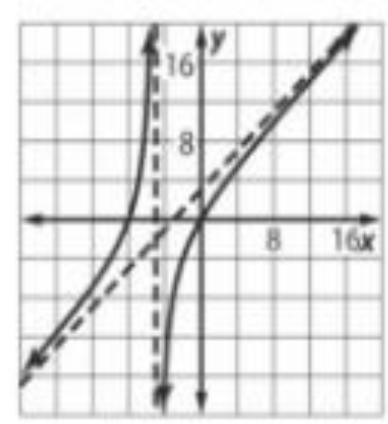
69. خط تقارب أفقي عند $y = 1$؛ خط تقارب رأسي عند $x = -6$؛ تقاطع مع المحور x: 0؛ تقاطع مع المحور y: 0؛ $D = \{x \mid x \neq -6,\ x \in \mathbb{R}\}$



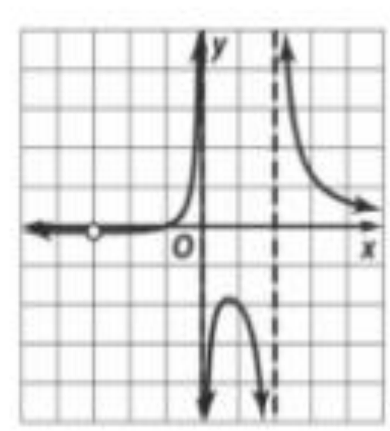
70. خط تقارب أفقي عند $y = 1$؛ خط تقارب رأسي عند $x = 8,\ x = -1$؛ تقاطع مع المحور x: $-4,\ -2$؛ تقاطع مع المحور y: -1؛ $D = \{x \mid x \neq 8$ أو $-1,\ x \in \mathbb{R}\}$



71. خطوط تقارب رأسية عند $x = -5$؛ خط تقارب مائل $y = x + 3$؛ تقاطع مع المحور x: -8 و 0؛ تقاطع مع المحور y: 0؛ $D = (-\infty, -5) \cup (-5, \infty)$

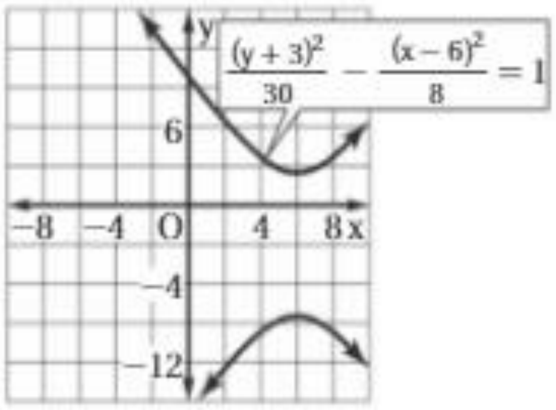


72. خطوط تقارب رأسية عند $x = 0$ و $x = 2$؛ خطوط تقارب أفقية عند $y = 0$؛ انفصال قابل للإزالة عند $x = -3$؛ تقاطع مع المحور x: -1؛ لا تقاطع مع المحور y; $D = (-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$

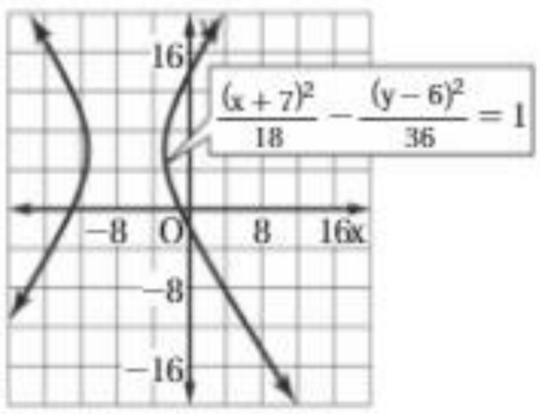


دليل الدراسة والمراجعة

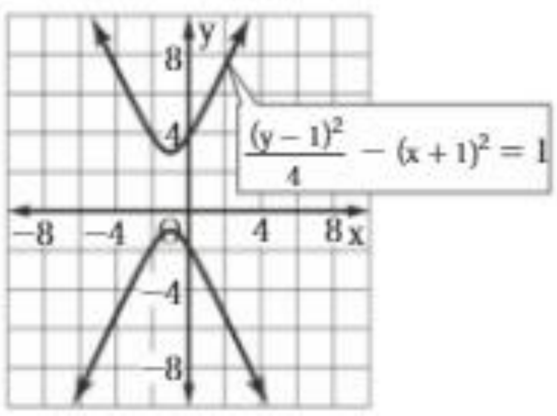
30.



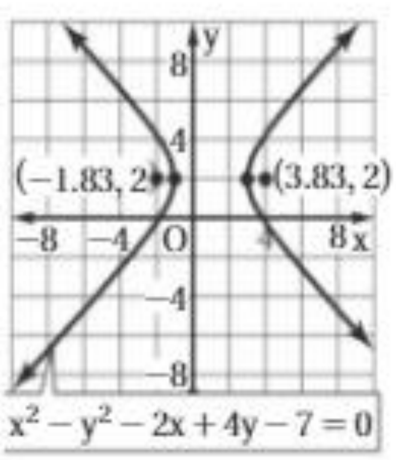
31.



32.



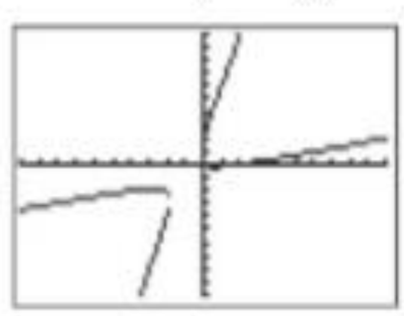
33.



34. $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$ **35.** $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

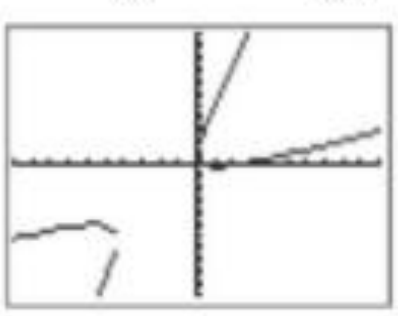
36. $\frac{(y-5)^2}{64} - \frac{(x-1)^2}{36} = 1$ **37.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

41.



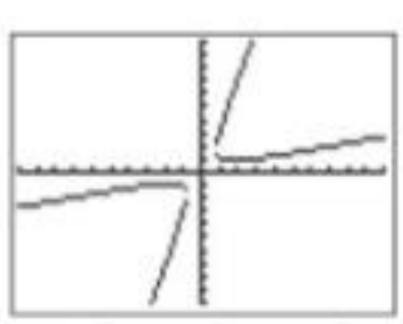
[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

42.



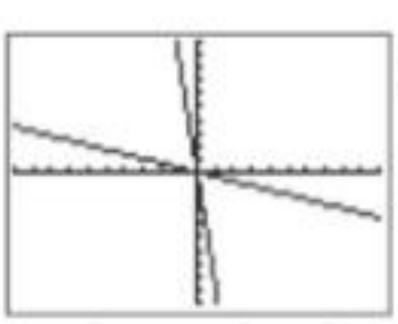
[−20, 20] scl: 2 by [−20, 20] scl: 2

43.

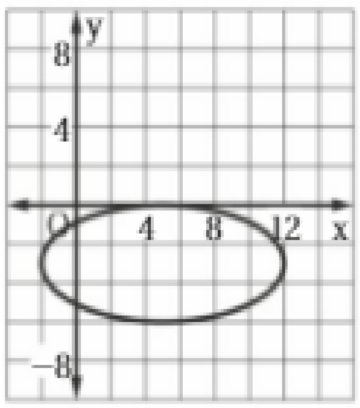


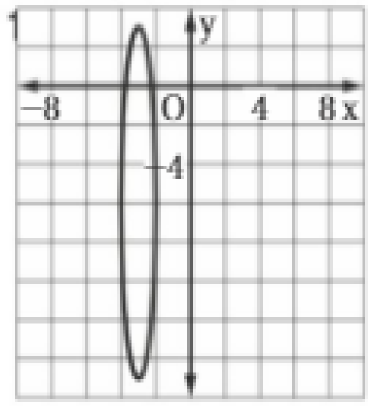
[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

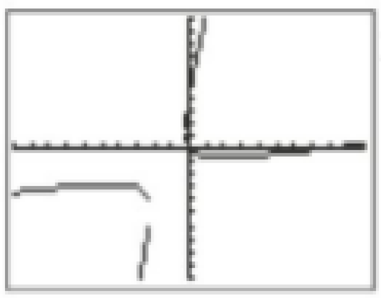
44.

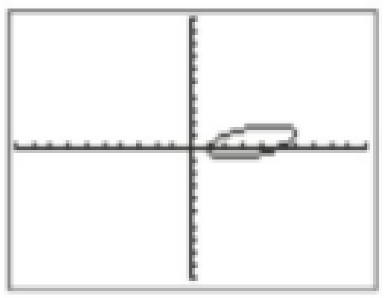


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

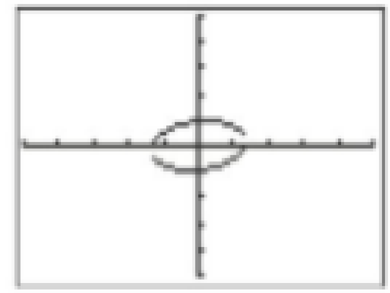
16. 



19. 

20. 

[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1 −10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

45. 

[−5, 5] scl: 1 by [−5, 5] scl: 1

46. $(x')^2 + (y')^2 = 4$؛ دائرة

47. $(x')^2 - 2\sqrt{3}\,x'y' + 3(y')^2 + (2\sqrt{3} - 4)x' + (4\sqrt{3} + 2)y' = 20$؛ قطع مكافئ

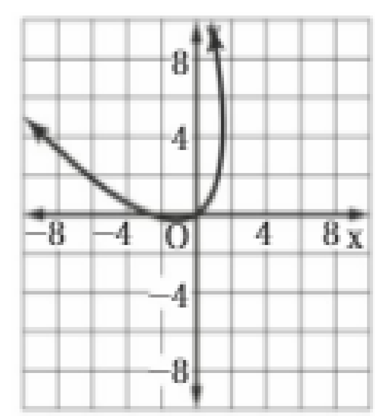
48. $(y')^2 - 4(x')^2 = 4$؛ قطع زائد

49. $9(y')^2 + 4(x')^2 = 36$؛ قطع ناقص

58a. $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{625} = 1$

58b. نموذج الإجابة: ستزيد نسبة المقام المرتبط بـ y إلى المقام المرتبط بـ x.

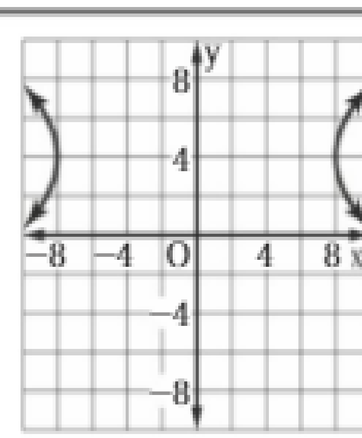
59a. $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 + 8x - 8\sqrt{3}y = 0$

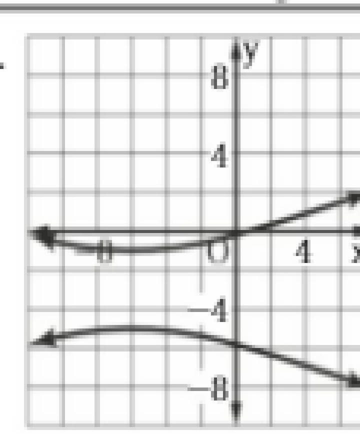
59b. 

60a. نموذج الإجابة: كلا هما تمثيل بياني لدائرة نصف قطرها 4 لها المعادلتان $x_2(t)$ و $y_2(t)$ تتحرّك حول الدائرة بضعف السرعة.

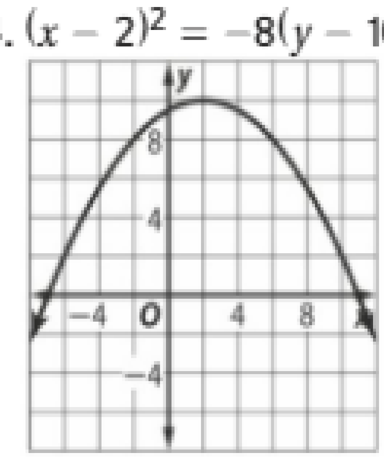
60b. $x(t) = 6\cos\left(\frac{1}{2}t\right), y(t) = 6\sin\left(\frac{1}{2}t\right)$

تمرين على الاختبار

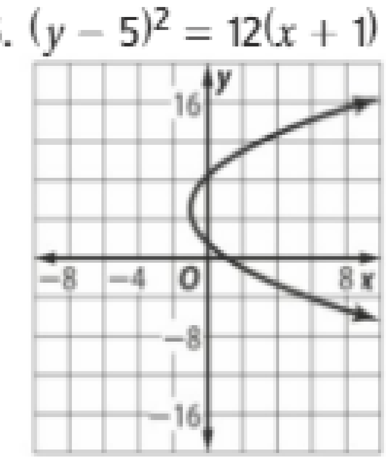
11. 

12. 

14. $(x - 2)^2 = -8(y - 10)$



15. $(y - 5)^2 = 12(x + 1)$



7-1 مقدمة عن المتجهات

السابق	الحالي	لماذا؟
● استخدام حساب المثلثات لحل المثلثات.	● 1 تمثيل المتجهات واستخدامها هندسيًا. 2 حل مسائل المتجهات، وتحليل المتجهات إلى مركباتها المتعامدة.	● يعتمد إحراز هدف في كرة القدم على عدة عوامل. بينما سرعة الكرة بعد ركلها هامة بالتأكيد، لكن اتجاه الكرة هام كذلك، يمكننا وصف هذين العاملين باستخدام كمية واحدة تُسمى *المتجه*.

المفردات الجديدة
متجه vector
نقطة البداية nitial point
نقطة النهاية terminal point
الوضع القياسي standard position
اتجاه direction
مقدار magnitude
اتجاه ربعي quadrant bearing
اتجاه حقيقي true bearing
متجهات موازية parallel vectors
متجهات متكافئة equivalent vectors
متجهات متعاكسة opposite vectors
ناتج resultant
طريقة المثلث triangle method
طريقة متوازي الأضلاع parallelogram method
متجه صفري zero vector
مركبات components
مركبات متعامدة rectangular components

1 المتجهات يمكن وصف العديد من الكميات الفيزيائية، مثل السرعة، بشكل كامل بواسطة عدد حقيقي واحد يُسمى كمية عددية. ويشير هذا العدد إلى مقدار أو حجم الكمية. **المتجهات** هي كمية لها مقدار واتجاه. سرعة الكرة متجه يصف سرعة الكرة واتجاهها.

مثال 1 تحديد كميات المتجهات

اذكر ما إذا كانت كل كمية موصوفة هي متجه أو كمية عددية.

a. يسير قارب بسرعة 15 ميلاً في الساعة.

لهذه الكمية مقدار، ولكن لم يتم ذكر الاتجاه. السرعة كمية عددية.

b. متجول يسير 25 خطوة باتجاه الغرب

لهذه الكمية مقدار هو 25 خطوة، واتجاهها نحو الغرب. هذه المسافة الموجهة هي متجه.

c. وزن شخص على ميزان الحمّام

الوزن متجه يتم حسابه باستخدام كتلة الشخص والسحب لأسفل بفعل الجاذبية. (التسارع بفعل الجاذبية متجه.)

تمرين موجّه

1A. تسير سيارة بسرعة 60 ميلًا في الساعة بزاوية 15° جنوب شرق **متجه**

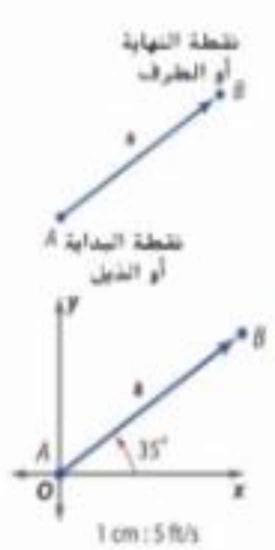
1B. يهبط قافز بالمظلات لأسفل مباشرة بسرعة 12.5 ميلًا في الساعة **متجه**

1C. يسحب طفل زلّاجة بقوة تبلغ 40 نيوتن **كمية عددية**

يمكن تمثيل متجه هندسيًا بواسطة قطعة مستقيمة موجهة أو رسم تخطيطي سهمي، يوضح المقدار والاتجاه. فكر في القطعة المستقيمة الموجهة الموضحة حيث **نقطة البداية** A (تُسمى أيضًا الذيل) و**نقطة النهاية** B (تُسمى أيضًا الرأس أو الطرف). يتم التعبير عن المتجه بواسطة $\vec{a}$ أو $\overrightarrow{AB}$، أو **a**.

إذا كانت نقطة بداية المتجه عند نقطة الأصل، فالمتجه في **الوضع القياسي**. **اتجاه** المتجه هو الزاوية الموجهة بين المتجه والمستقيم الأفقي الذي يمكن استخدامه لتمثيل محور x الموجب. اتجاه **a** هو 35°.

طول القطعة المستقيمة يمثل ويتناسب مع **مقدار** المتجه. إذا كان مقياس الرسم التخطيطي السهمي لـ **a** هو 1 cm = 5 ft/s، إذًا مقدار **a**، المعبر عنه بواسطة |**a**|، هو 5 × 2.6 أو 13 قدمًا في الثانية.



1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 7-1 استخدام حساب المثلثات لحل المثلثات.

الدرس 7-1 تمثيل المتجهات وإجراء العمليات عليها هندسيًا. وحل مسائل المتجهات وتحليل المتجهات إلى مركباتها المتعامدة.

بعد الدرس 7-1 تمثيل المتجهات وإجراء العمليات عليها جبريًا. وكتابة المتجهات على هيئة توفيق خطي لمتجهات الوحدة وزاوية اتجاهاتها.

2 التدريس

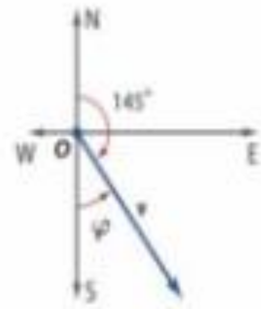
الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة قسم **لماذا** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- إذا تم ركل كرة في ملعب مفتوح، فما الشيئان اللذان تحتاج إلى معرفتهما لكي تحدد موقع الكرة بأسرع ما يمكن؟ سرعة الكرة بعد ركلها والاتجاه الذي رُكلت فيه

يمكن كذلك ذكر اتجاه المتجه في صورة اتجاه.
الاتجاه الربعي φ، أو phi، هو قياس اتجاه بين الزاويتين 0° و 90° شرق أو غرب المستقيم شمال–جنوب. الاتجاه الربعي للمتجه v الموضح هو 35° شرق اتجاه الجنوب أو جنوب شرق، ويكتب بالصورة S35°E.



الاتجاه الحقيقي هو قياس اتجاه يتم فيه قياس الزاوية حسب اتجاه عقارب الساعة من الشمال. ويتم ذكر الاتجاهات الحقيقية دائمًا في صورة ثلاثة أرقام. إذًا، اتجاه قياسه 25° باتجاه عقارب الساعة من الشمال تتم كتابته كاتجاه حقيقي بالصورة 025°.

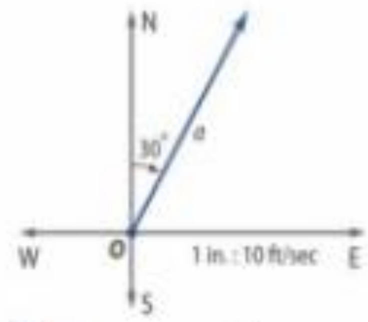
نصيحة دراسية
الاتجاه الحقيقي عند ذكر قياس درجة بدون أي مركبات اتجاه، يفترض أنه اتجاه حقيقي. اتجاه v الحقيقي هو 145°.

مثال 2 تمثيل المتجهات هندسيًا

استخدم مسطرة ومنقلة لعمل رسم تخطيطي سهمي لكل كمية موصوفة. أرفق مقياسًا مع كل رسم تخطيطي.

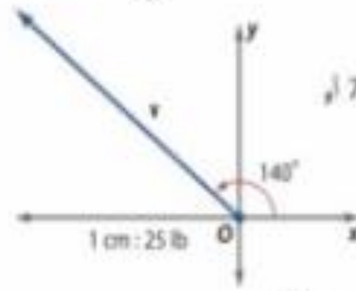
a. a = 20 قدمًا في الثانية باتجاه 030°

باستخدام مقياس 1 in: 10 ft/sec. ارسم ومَيِّز سهمًا بطول 10 ÷ 20 أو بوصتين بزاوية 30° في اتجاه عقارب الساعة من الشمال.



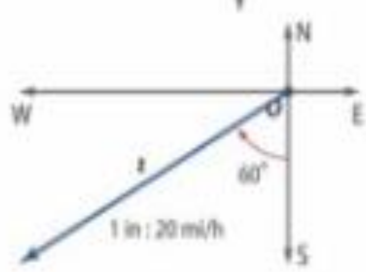
b. v = 75 رطلاً من القوة بزاوية 140° مع المركّبة الأفقية

باستخدام مقياس 1 cm: 25 lb. ارسم ومَيِّز سهمًا بطول 25 ÷ 75 أو 3 سنتيمترات في الوضع القياسي بزاوية 140° مع المحور x.



c. z = 30 ميلاً في الساعة باتجاه S60°W

باستخدام مقياس 1 in: 20 mi/h. ارسم ومَيِّز سهمًا بطول 20 ÷ 30 أو 1.5 بوصة بزاوية 60° جنوب غرب.



تمرين موجّه

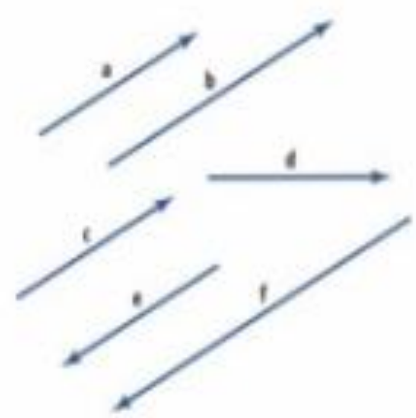
2A. t = 20 قدمًا في الثانية باتجاه 065° **2A–C. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.**

2B. u = 15 ميلاً في الساعة باتجاه S25°E

2C. m = 60 رطلاً من القوة بزاوية 80° مع المركّبة الأفقية

في العمليات باستخدام المتجهات، يجب أن تكون على دراية بأنواع المتجهات التالية.

- **المتجهات المتوازية** يكون لها الاتجاه ذاته أو اتجاه معاكس، ولكن ليس بالضرورة المقدار ذاته. في الشكل، a ‖ b ‖ c ‖ e ‖ f.
- **المتجهات المتكافئة** لها نفس المقدار والاتجاه. في الشكل، a = c لأن لهما نفس المقدار والاتجاه. لاحظ أن a ≠ b حيث |a| ≠ |b|، و a ≠ d، حيث a و d ليس لهما الاتجاه ذاته.
- **المتجهات المتعاكسة** لها المقدار ذاته ولكن في اتجاهين معاكسين. المتجه المقابل للمتجه a يُكتب بالصورة −a. في الشكل، e = −a.



انتبه!
المقدار مقدار المتجه يمكن أن يمثل المسافة أو السرعة أو القوة. عندما يمثل متجه السرعة، لا يشير طول المتجه إلى المسافة المقطوعة.

401

- ارسم مستطيلاً، تخيل أنك تقف في الزاوية اليسرى السفلية عندما ركلت كرة. ارسم سهمًا من الزاوية إلى نقطة التوقف.

- كيف يمكنك تمثيل ركل الكرة بقوة أكبر؟ الإجابة النموذجية: ارسم سهمًا أطول.

1 المتجهات

يبين المثال 1 طريقة تحديد الكميات المتجهة. **ويبين المثال 2** طريقة تمثيل المتجه هندسيًا. **أما المثال 3** فيبين طريقة إيجاد متجهات المحصلة. **ويبين المثال 4** طريقة إجراء العمليات على المتجهات.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 اذكر ما إذا كانت كل كمية موضحة كمية متجهة أم *قياسية*.

a. ضرب كرة هوكي في اتجاه شمال غرب بسرعة 60 ميلاً في الساعة متجهة

b. ضرب كرة تنس بسرعة 110 أميال في الساعة قياسية

c. عدّاء يركض 100 متر شمالاً متجهة

2 استخدم المسطرة والمنقلة لعمل رسم تخطيطي لكل كمية موضحة، بحيث يشتمل كل رسم على مقياس.

a–c. انظر الهامش السفلي.

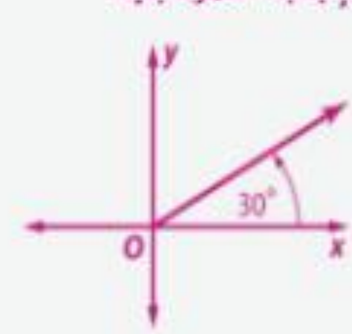
a. v = 10 نيوتن بزاوية 30° من المركب الأفقي

b. z = 25 مترا في الثانية في اتجاه S70°W

c. t = 10 أميال في الساعة في اتجاه 025°

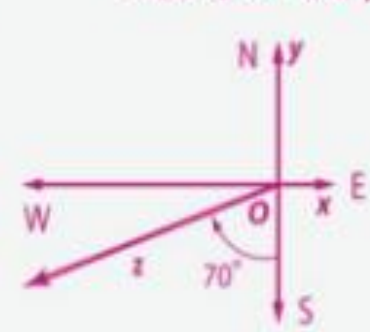
إجابات إضافية (مثال آخر)

2a. الإجابة النموذجية:



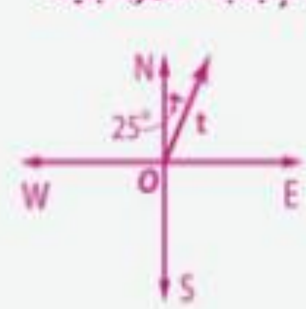
1 cm : 5 N

2b. الإجابة النموذجية:



1 cm = 10 m/s

2c. الإجابة النموذجية:



1 cm = 10 mi/h

عند إضافة متجهين أو أكثر، يكون مجموعها متجهًا واحدًا يُسمى **الناتج**.
المتجه الناتج له تأثير يماثل تطبيق كل متجه على حدة. هندسيًا، يمكن إيجاد الناتج باستخدام إما **طريقة المثلث** أو **طريقة متوازي الأضلاع**.

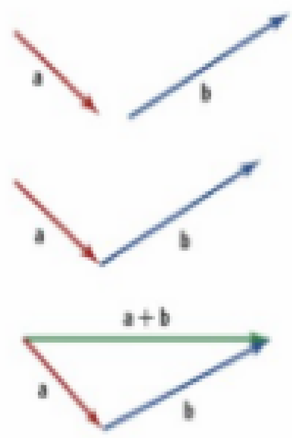
المفهوم الأساسي إيجاد النواتج

طريقة المثلث (الطرف إلى الذيل)

لإيجاد ناتج **a** و **b**، اتبع هذه الخطوات.

الخطوة 1 قم بإزاحة **b** بحيث يلامس ذيل **b** طرف **a**.

الخطوة 2 الناتج هو المتجه من ذيل **a** إلى طرف **b**.



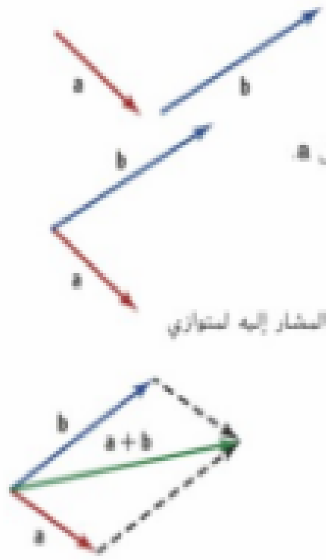
طريقة متوازي الأضلاع (الذيل إلى الذيل)

لإيجاد ناتج **a** و **b**، اتبع هذه الخطوات.

الخطوة 1 قم بإزاحة **b** بحيث يلامس ذيل **b** ذيل **a**.

الخطوة 2 أكمل متوازي الأضلاع الذي يحتوي على **a** و **b** كضلعين من أضلاعه.

الخطوة 3 الناتج هو المتجه الذي يشكل القطر المشار إليه لمتوازي الأضلاع.

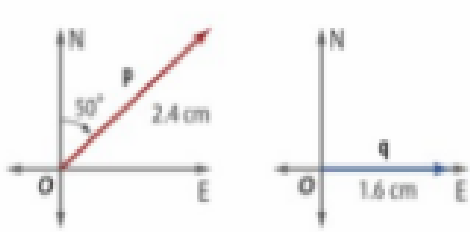


مثال 3 من الحياة اليومية إيجاد ناتج متجهين

تحديد الاتجاه في إحدى منافسات تحديد الاتجاه، سارت عائشة باتجاه N50°E لمسافة 120 قدمًا ثم سارت لمسافة 80 قدمًا باتجاه الشرق. كم تبعد عائشة عن وضع البدء وفي أي اتجاه ربعي هي؟

افترض أن **p** = السير لمسافة 120 قدمًا باتجاه N50°E و **q** = السير لمسافة 80 قدمًا باتجاه الشرق.
قم بعمل رسم تخطيطي لتمثيل **p** و **q** باستخدام مقياس 1 cm: 50 ft.

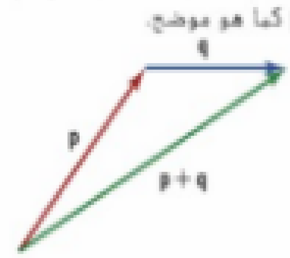
استخدم مسطرة لرسم سهم بطول $120 \div 50$ أو 2.4 سنتيمترات باتجاه 50° شمال شرق لتمثيل **p** وسهم بطول $80 \div 50$ أو 1.6 سنتيمترات باتجاه الشرق لتمثيل **q**.



1 cm : 50 ft

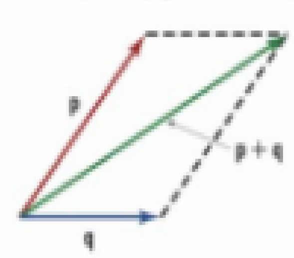
الطريقة 1 طريقة المثلث

قم بإزاحة **q** بحيث يلمس ذيله طرف **p**. ثم ارسم المتجه الناتج **p + q** كما هو موضح.

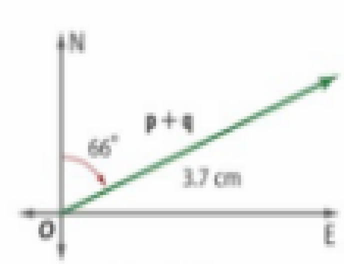


الطريقة 2 طريقة متوازي الأضلاع

قم بإزاحة **q** بحيث يلمس ذيله ذيل **p**. ثم أكمل متوازي الأضلاع وارسم القطر، الناتج **p + q**، كما هو موضح.



نحصل من الطريقتين على المتجه الناتج ذاته **p + q**. قم بقياس طول **p + q** ثم قياس زاوية هذا المتجه مع مستقيم شمال-جنوب كما هو موضح. طول المتجه 3.7 سنتيمترات تقريبًا يمثل 3.7×50 أو 185 قدمًا. إذًا، تبعد عائشة 185 قدمًا تقريبًا باتجاه 66° شمال شرق أو N66°E عن موضع البدء.



1 cm : 50 ft

نصيحة دراسية

النواتج يجب تكرار طريقة متوازي الأضلاع لإيجاد ناتج أكثر من متجهين. لكن طريقة المثلث أسهل استخدامًا عند إيجاد ناتج ثلاثة متجهات أو أكثر. واصل وضع نقطة بداية المتجه التالي عند نقطة نهاية المتجه السابق.

مثال إضافي

3 نزهة على الأقدام قطع علي أثناء تنزهه سيرًا في الغابات مسافة 2 كيلو متر في اتجاه N30°W المخيم، ثم سار 2 كيلو متر نحو الشرق مباشرة. فكم يبعد علي عن مخيمه وفي أي اتجاه ربعي يكون؟
2 km, N30°E

إرشاد للمعلمين الجدد

رسومات تخطيطية من المهم أن يبدأ الطلاب في الأمثلة برسم تخطيطي دقيق. شجّع الطلاب على استخدام ورق رسم بياني وعلى التحقق من صحة أجوبتهم باستخدام رسوماتهم التخطيطية.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

عمل مشترك كلّف الطلاب بالعمل في مجموعات ثنائية على إنشاء صفحة مشتركة عن الطرق التي يمكن استخدامها لإيجاد محصلة متجهين. واطلب منهم استعراض عمل كل منهما الآخر خلال إنشاء الصفحة ومراجعته.

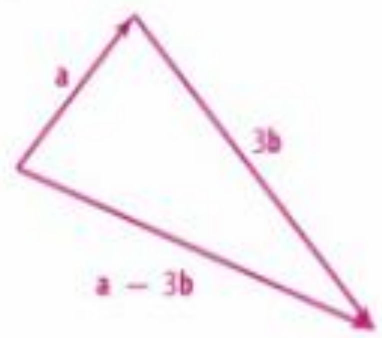
التركيز على محتوى الرياضيات

جمع المتجهات وطرحها لاحظ أن قاعدة متوازي الأضلاع يمكن أن تستخدم أيضًا لطرح المتجهات. فعند جمع المتجهات يكون المجموع هو القُطر الطويل لمتوازي الأضلاع ذي الصلة. وعند طرح المتجهات، يكون الفارق هو القطر القصير لمتوازي الأضلاع ذي الصلة.

402 | الدرس 7-1 | مقدمة عن المتجهات

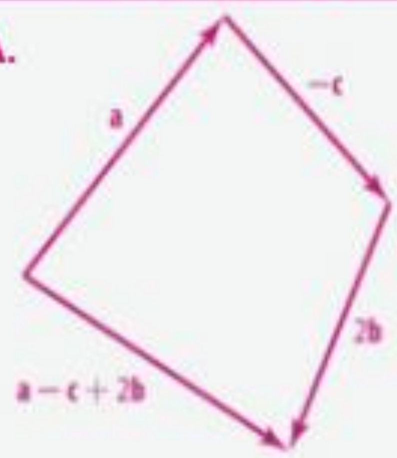
مثال إضافي

4 صمم رسمًا تخطيطيًا لمتجه للمسألة $\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.

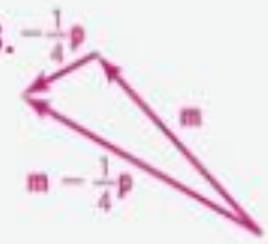


إجابات إضافية (تمرين موجّه)

4A.



4B.



نصيحة دراسية

المتجهات الموازية في الاتجاه ذاته لجمع متجهين موازيين في الاتجاه ذاته، اجمع مقداريهما. يكون للناتج نفس اتجاه المتجهات الأصلية.

تمرين موجّه

أوجد ناتج كل زوج من المتّجهات باستخدام إما طريقة المثلّث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج مع التقريب لأقرب سنتيمتر واتجاهه بالنسبة إلى المركّبة الأفقية.

3A.

2.9 cm; 61°

3B.

3.3 cm; 25°

3C. **لعبة الكرة والدبابيس** تم دفع الكرة بواسطة الناظر بزاوية °310 وسرعة 7 بوصات في الثانية. ثم ارتدت الكرة عن المصدّ وانطلقت بزاوية °055 وسرعة 4 بوصات في الثانية. أوجد الاتجاه الناتج للكرة وسرعتها.
7.1 in./s; 343°

عند إضافة متجهين متقابلين، يكون الناتج هو **متجه صفري** أو متجه صفر، ويُعبر عنه بواسطة $\vec{0}$ أو **0**. ويكون مقداره 0 وبدون اتجاه محدد. طرح المتجهات مشابه لطرح الأعداد الصحيحة. لإيجاد $\mathbf{p} - \mathbf{q}$، اجمع مقابل $\mathbf{q}$ مع $\mathbf{p}$ بمعنى، $\mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{p} + (-\mathbf{q})$.

$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

يمكن كذلك ضرب متجه في كمية عددية.

المفهوم الأساسي ضرب المتجهات في كمية عددية

إذا تم ضرب المتجه $\mathbf{v}$ في الكمية العددية الحقيقية k، فيكون للكمية العددية $k\mathbf{v}$ المقدار $|k|\,|\mathbf{v}|$، ويتم تحديد اتجاهها حسب علامة k.

- إذا كان $k > 0$، فإن $k\mathbf{v}$ لها نفس اتجاه $\mathbf{v}$.
- إذا كان $k < 0$، فإن $k\mathbf{v}$ في اتجاه معاكس لـ $\mathbf{v}$.

مثال 4 العمليات على المتجهات

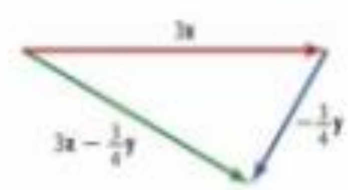
قم بتصميم رسم تخطيطي لـ $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y}$.

أعد كتابة التعبير في صورة جمع متجهين: $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y} = 3\mathbf{x} + \left(-\frac{3}{4}\mathbf{y}\right)$

لتمثيل $3\mathbf{x}$، ارسم متجهًا يبلغ طوله ثلاثة أضعاف طول $\mathbf{x}$ في نفس اتجاه $\mathbf{x}$ (الشكل 7.1.1). لتمثيل $-\frac{3}{4}\mathbf{y}$، ارسم متجهًا يبلغ طوله $\frac{3}{4}$ طول $\mathbf{y}$ في الاتجاه المعاكس لـ $\mathbf{y}$ (الشكل 7.1.2).
ثم استخدم طريقة المثلث لرسم المتجه الناتج (الشكل 7.1.3).

الشكل 7.1.1

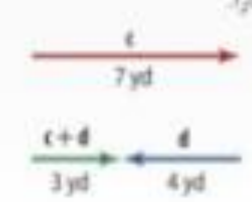
الشكل 7.1.2



الشكل 7.1.3

نصيحة دراسية

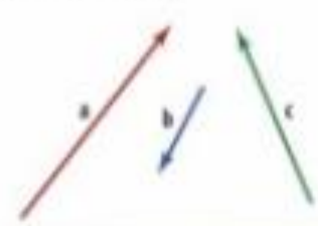
المتجهات الموازية في اتجاهين متقابلين لجمع متجهين موازيين في اتجاهين متقابلين، أوجد القيمة المطلقة للفرق بين المقدارين. يكون للناتج نفس اتجاه المتجه الأكبر مقدارًا.



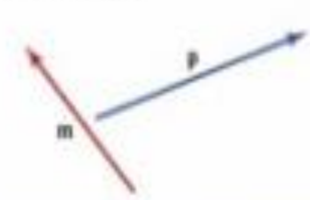
تمرين موجّه

قم بتصميم رسم تخطيطي لمتجه لكل تعبير. 4A–B. انظر الهامش.

4A. $\mathbf{a} - \mathbf{c} + 2\mathbf{b}$



4B. $\mathbf{m} - \frac{1}{4}\mathbf{p}$



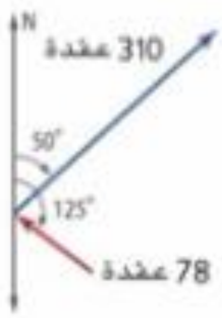
2 استخدامات المتجهات يمكن استخدام جمع وحساب مثلثات المتجهات لحل مسائل المتجهات التي تتضمن المثلثات التي كثيرًا ما تكون مائلة.

في الملاحة، الاتجاه هو اتجاه توجيه مركبة، مثل طائرة أو سفينة، للتغلب على القوى الأخرى، مثل الرياح أو التيار. السرعة النسبية للمركبة هي الناتج عند دمج سرعة الاتجاه والقوى الأخرى.

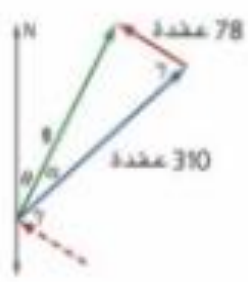
مثال 5 من الحياة اليومية استخدام المتجهات لحل مسائل الملاحة

الملاحة الجوية تطير طائرة بسرعة مقدارها 310 عقدة باتجاه 050°. إذا كانت الرياح تهب بسرعة 78 عقدة من الاتجاه الحقيقي 125°، فحدّد سرعة الطائرة واتجاهها بالنسبة إلى الأرض.

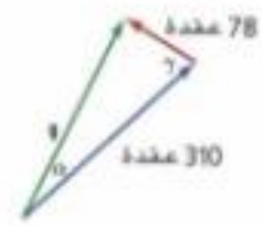
الخطوة 1 قم بتصميم رسم تخطيطي لتمثيل سرعتي الاتجاه والرياح (الشكل 7.1.4). قم بإزاحة متجه الرياح كما هو موضح في الشكل 7.1.5، واستخدام طريقة المثلث للحصول على المتجه الناتج الذي يمثل سرعة الطائرة بالنسبة للأرض g. في المثلث المتشكل بواسطة هذه المتجهات (الشكل 7.1.6)، $\gamma = 125° - 50°$ أو 75°.



الشكل 7.1.4



الشكل 7.1.5



الشكل 7.1.6

الخطوة 2 استخدم قانون الـ cosine لإيجاد |g|، سرعة الطائرة بالنسبة للأرض.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ قانون الـ cosine

$|g|^2 = 78^2 + 310^2 - 2(78)(310)\cos 75°$ $c = |g|, a = 78, b = 310, \gamma = 75°$

$|g| = \sqrt{78^2 + 310^2 - 2(78)(310)\cos 75°}$ أوجد الجذر التربيعي الموجب لكل طرف.

≈ 299.4 بسّط.

سرعة الطائرة بالنسبة للأرض هي 299.4 عقدة تقريبًا.

الخطوة 3 اتجاه الناتج g تمثله الزاوية #، كما هو موضح بالشكل 7.1.5. لإيجاد #، احسب أولاً α باستخدام قانون الـ sin.

$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$ قانون الـ sin

$\frac{\sin\alpha}{78} = \frac{\sin 75°}{299.4}$ $c = |g|$ أو $299.4, a = 78, \gamma = 75°$

$\sin\alpha = \frac{78\sin 75°}{299.4}$ أوجد sin α.

$\alpha = \sin^{-1}\frac{78\sin 75°}{299.4}$ طبق دالة معكوس الـ $\sin^{-1}$.

$\approx 14.6°$ بسّط.

قياس # هو $50° - \alpha$، أي $50° - 14.6°$ أو 35.4°.

إذًا، سرعة الطائرة بالنسبة إلى الأرض هي 299.4 عقدة تقريبًا بزاوية 035° تقريبًا.

تمرين موجّه

5. **السباحة** يسبح علي باتجاه الشرق بسرعة 3.5 أقدام في الثانية عبر نهر باتجاه الضفة المتعاكسة مباشرة. في الوقت ذاته، يحمله تيار النهر باتجاه الجنوب بمعدل قدمين في الثانية. أوجد سرعة علي واتجاهه بالنسبة إلى الشاطئ.

يسبح علي بسرعة ناتج مقدارها 4.03 ft/s باتجاه S60.25°E.

نصيحة دراسية

الزوايا الداخلية البديلة إزاحة ذيل متجه الرياح إلى طرف المتجه الممثل لاتجاه الطائرة ينتج عنها متجهين متوازيين يقطعهما قاطع. حيث إن الزوايا الداخلية البديلة لمستقيمين متوازيين يقطعهما قاطع تكون متطابقة، فالزوايا الناشئة عن هذه المتجهين في كلا المكانين في الشكل 7.1.5 لهما نفس القياس.

انتبه!

اتجاه الرياح في المثال 5، لاحظ أن الرياح تهب من اتجاه 125° وأن المتجه مرسوم بحيث يتجه طرفه نحو مستقيم الشمال-الجنوب. لو كانت الرياح تهب من اتجاه 125°، كان المتجه سيبتعد عن هذا الخط.

2 استخدامات المتجهات

يبين المثال 5 طريقة استخدام المتجهات لحل مسائل الإبحار. ويبين **المثال 6** طريقة تحليل قوة إلى مركباتها المتعامدة.

مثال إضافي

5 الطيران تحلق طائرة بسرعة جوية 475 ميلاً في الساعة باتجاه 070°. فإذا هبّت رياح بسرعة 80 ميلاً في الساعة من الاتجاه الحقيقي بزاوية 120°، فحدد السرعة المتجهة للطائرة واتجاهها بالنسبة إلى الأرض. السرعة المتجهة للطائرة بالنسبة إلى الأرض تساوي 428.0 ميلاً في الساعة تقريبًا والاتجاه تقريبًا 061.8°.

مثال إضافي

6 العناية بالحدائق أثناء قيام سعيد بالحفر في حديقته، دفع الجاروف داخل الأرض بقوة 630 نيوتن وزاوية $70°$ مع الأرض.

a. صمم رسمًا تخطيطيًا يوضح تحليل القوة التي بذلها سعيد إلى مركباتها المتعامدة.

b. أوجد طول المركبات الأفقية والرأسية للقوة. المركبة الأفقية ≈ 215.47 N المركبة الرأسية ≈ 592.01 N

عندما يوجد متجهين أو أكثر مجموعها المتجه **r**، يُطلق عليها **مركبات r**. بينما يمكن أن تكون المركبات بأي اتجاه، كثيرًا ما يكون من المفيد تحليل المتجه أو التعبير عنه بمركبتين متعامدتين. تكون **المركبات المتعامدة** لمتجه أفقية أو رأسية.

في الرسم التخطيطي، يمكن النظر إلى القوة **r** المبذولة لسحب عربة باعتبارها مجموع قوة المركبة الأفقية **x** التي تحرك العربة للأمام وقوة المركبة الرأسية **y** التي تسحب العربة لأعلى.

الربط بالحياة اليومية

يتطلب تشغيل مفتاح الإضاءة قوة مقدارها 3 نيوتن تقريبًا. القوة المبذولة على شخص بفعل الجاذبية هي 600 نيوتن تقريبًا. القوة التي يبذلها رافع الأثقال 2000 نيوتن تقريبًا.

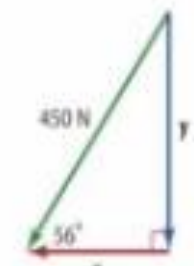
المصدر: [illegible]

مثال 6 من الحياة اليومية — تحليل قوة إلى مركبات متعامدة

العناية بالحديقة تدفع عائشة مقبض آلة جز العشب بقوة مقدارها 450 نيوتن بزاوية $56°$ مع الأرض.

a. قم بتصميم رسم تخطيطي يوضح تحليل القوة التي تبذلها عائشة إلى مركبات متعامدة.

يمكن تحليل قوة الدفع التي تبذلها عائشة إلى دفع أفقي **x** للأمام ودفع رأسي **y** لأسفل كما هو موضح.



b. أوجد مقداري المركبتين الأفقية والرأسية للقوة.

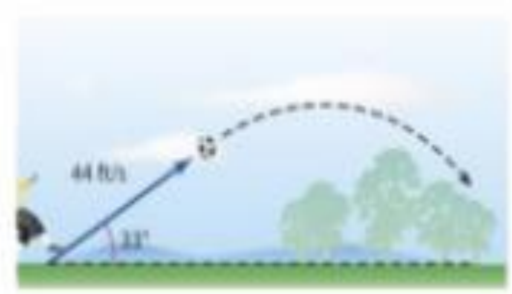
تشكل المركبتان الأفقية والرأسية للقوة مثلثًا قائم الزاوية. استخدم نسبة الـ sin و الـ cosine لإيجاد مقدار كل قوة.

$\cos 56° = \frac{\lvert x\rvert}{450}$	تعريفا المثلث قائم الزاوية الـ sin و الـ cosine	$\sin 56° = \frac{\lvert y\rvert}{450}$
$\lvert x\rvert = 450 \cos 56°$	أوجد x و y	$\lvert y\rvert = 450 \sin 56°$
$\lvert x\rvert \approx 252$	استخدم الحاسبة.	$\lvert y\rvert \approx 373$

مقدار المركبة الأفقية 252 نيوتن تقريبًا، ومقدار المركبة الرأسية 373 نيوتن تقريبًا.

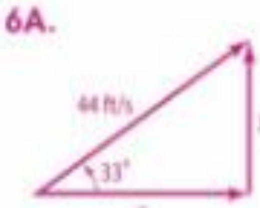
تمرين موجَّه

6. **كرة القدم** ركل اللاعب كرة القدم بحيث انطلقت من الأرض بسرعة 44 قدمًا في الثانية بزاوية $33°$ مع الأرض.



A. قم بتصميم رسم تخطيطي يوضح تحليل هذه القوة إلى مركبات متعامدة.

6A.



B. أوجد مقداري المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة.

المركبة الأفقية ≈ 36.90 ft/s، المركبة الرأسية ≈ 23.96 ft/s

التدريس المتمايز AL OL

المواد: مركب شراعي صغير لعبة شراعه قابل للحركة وبركة ماء ومروحة طاولة

المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية تستخدم المتجهات عادة لوصف القوى والطريقة التي يتم بها تحديد المحصلا ت في مواقف الحياة اليومية. كلّف الطلا ب بتنبؤ أثر الرياح على المركب الشراعي بتكليفهم بوضع اللعبة في بركة الماء واستخدام مروحة الطاولة لعمل الرياح مع الحفاظ على سرعة الرياح وبُعد المركب عن مصدر الرياح ثابتين. ضع المركب في مسار بحيث يكون عموديًا على الرياح. وكلّف الطلا ب بالتنبؤ بما سيحدث مستخدمين ترميز المتجهات. واطلب منهم عمل تخمينات مختلفة فيما يتعلق بموضع المركب وتأثير قوة الرياح عليه واختبار مدى صحتها.

التمارين

اذكر ما إذا كانت كل كمية موصوفة هي متجه أو كمية عددية. (مثال 1)

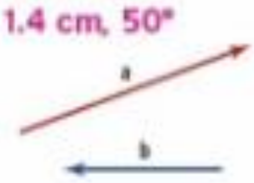
1. صندوق يتم دفعه بقوة مقدارها 125 نيوتن **كمية عددية**
2. الرياح تهب بسرعة 20 عقدة **كمية عددية**
3. غزال يركض بسرعة 15 مترًا في الثانية باتجاه الغرب **متجه**
4. كرة قاعدة تم قذفها بسرعة 85 ميلًا في الساعة **كمية عددية**
5. إطار يزن 15 رطلًا يتدلى من حبل **متجه**
6. حجر تم قذفه في مسار مستقيم لأعلى بسرعة 50 قدمًا في الثانية **متجه**

استخدم مسطرة ومنقلة لعمل رسم تخطيطي سهمي لكل كمية موصوفة. أرفق مقياسًا مع كل رسم تخطيطي. (مثال 2) **7-12. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.**

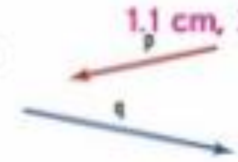
7. h = 13 بوصة في الثانية باتجاه 205°
8. g = 6 كيلومترات في الساعة باتجاه N70°W
9. j = 5 أقدام في الدقيقة بزاوية 300° مع المركبة الأفقية
10. k = 28 كيلومترات بزاوية 35° مع المركبة الأفقية
11. m = 40 مترًا باتجاه S55°E
12. n = 32 ياردة في الثانية باتجاه 030°

أوجد ناتج كل زوج من المتّجهات باستخدام إما طريقة المثلث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر واتجاهه بالنسبة إلى المركّبة الأفقية. (مثال 3)

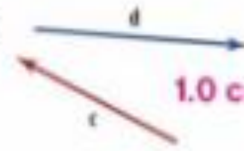
13. **1.4 cm, 50°**



14. **1.1 cm, 310°**



15. **1.0 cm, 46°**



16. **1.1 cm, 320°**

17. **2.3 cm, 188°**

18. **3.8 cm, 231°**

19. **الجولف** أثناء لعب لعبة فيديو عن الجولف، ضرب عمر الكرة بزاوية 35° فوق المركبة الأفقية بسرعة 40 ميلاً في الساعة مع هبوب الرياح بسرعة 5 أميال في الساعة، كما هو موضح. أوجد الاتجاه الناتج للكرة وسرعتها. (مثال 3)

20. **القوارب** غادر قارب مستأجر الميناء باتجاه N60°W لمسافة 12 ميلاً بحريًا. غيّر القبطان المسار إلى اتجاه N25°E لمسافة 15 ميلاً بحريًا إضافية. حدد مسافة واتجاه السفينة من الميناء إلى موقعها الحالي. (مثال 3) **19.5 ميلًا بحريًا، N11°W**

21. **السير على الأقدام** سار مازن وأيوب لمسافة 3.75 كيلومترات إلى بحيرة بزاوية 55° جنوب شرق موقع التخييم. ثم سارا مسافة 3.75 كيلومترات إلى بحيرة بزاوية 33° شمال غرب إلى مركز الحياة الطبيعية الذي يبعد مسافة 5.6 كيلومترات عن البحيرة. فأين مركز الحياة الطبيعية من موقع التخييم؟ (مثال 3) **2.6 km باتجاه الشمال**

حدد مقدار واتجاه ناتج مجموع كل متجه. (مثال 3)

22. 18 نيوتن للأمام مباشرة ثم 20 نيوتن للخلف مباشرة **2 N للخلف**
23. 100 متر باتجاه الشمال ثم 350 مترًا باتجاه الجنوب **250 m باتجاه الجنوب**
24. 10 أرطال من القوة باتجاه 025° ثم 15 رطلًا من القوة باتجاه 045° **قوة مقدارها 25 lb باتجاه 037°**
25. 17 ميلًا شرقًا ثم 16 ميلًا جنوبًا **23.6 mi باتجاه S47°E**
26. 15 مترًا في الثانية المربعة بزاوية 60° مع المركبة الأفقية ثم 9.8 أمتار في الثانية المربعة لأسفل **$8.25\ m/s^2$ بزاوية 23° مع المركبة الأفقية**

استخدم مجموعة المتجهات لتصميم رسم تخطيطي للمتجهات لكل تعبير. (مثال 4) **27-34. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.**

27. $m - 2n$
28. $n - \frac{3}{4}m$
29. $\frac{1}{2}p + 3n$
30. $4n + \frac{4}{5}p$
31. $p + 2n - m$
32. $-\frac{1}{3}m + p - 2n$
33. $3n - \frac{1}{2}p + m$
34. $m - 3n + \frac{1}{4}p$

35. **العدو** السرعةالناتجة لعداء هي 8 أميال في الساعة باتجاه الغرب مع هبوب الرياح بسرعة 3 أميال في الساعة باتجاه N28°W. فما سرعة العداء، مع التقريب لأقرب ميل في الساعة، بدون تأثير الرياح؟ (مثال 5) **7 mi/h**

36. **الطيران الشراعي** تطير طائرة شراعية بسرعة 15 ميلاً في الساعة باتجاه الغرب. إذا كانت الرياح تهب بسرعة 5 أميال في الساعة باتجاه N60°E، فما سرعة الطائرة بالنسبة إلى الأرض؟ (مثال 5) **11.0 mi/h تقريبًا**

37. **التيار** تسبح سالي باتجاه الغرب بمعدل 1.5 متر في الثانية. يتدفق تيار قوي باتجاه S20°E بمعدل متر في الثانية. أوجد السرعة والاتجاه الناتجين لسالي. (مثال 5) **تقريبًا 1.49 m/s باتجاه S51°W**

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 43-1 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

ملاحظات لحل التمرين

مسطرة ومنقلة سوف يحتاج الطلاب إلى مسطرة ومنقلة للعديد من التمارين الواردة في هذا الدرس.

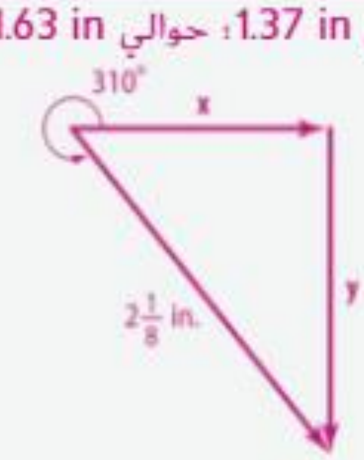
الدقة بالنسبة للتمارين 47-45 و 34-13 سيكون لمستوى الدقة التي يتمكن الطلا ب من الوصول إليه عند رسم المتجهات أثر على إجاباتهم. تم تقديم الإجابات النموذجية.

انتبه!

خطأ شائع قد لا يستخدم الطلاب الزاوية الصحيحة عند تقديم الاتجاه الحقيقي. راجع معهم أن الاتجاهات هي زوايا في اتجاه عقارب الساعة بدءًا من الشمال، وليست في عكس اتجاه عقارب بدءًا من المحور x (الموضع القياسي).

إجابات إضافية

38. حوالي 1.37 in؛ حوالي 1.63 in.



39. حوالي 1.13 cm؛ حوالي 0.98 cm

40. حوالي 3.13 cm/h؛ حوالي 0.67 cm/h

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL OL BL

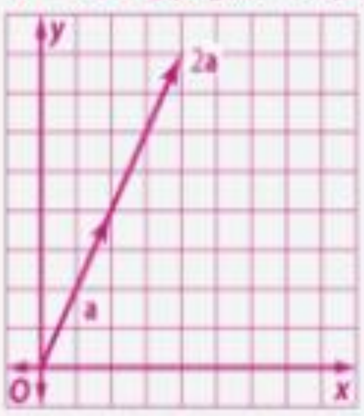
المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-43, 63-65, 67-83	1-43 فردي, 80-83	2-42 زوجي, 63-65, 67-79
OL ضمن المستوى	1-43 فردي, 44, 45, 47-51, 53-55, 57-61, 63-65, 67-83 فردي	1-43, 80-83	44-65, 67-79
BL أعلى من المستوى	44-83		

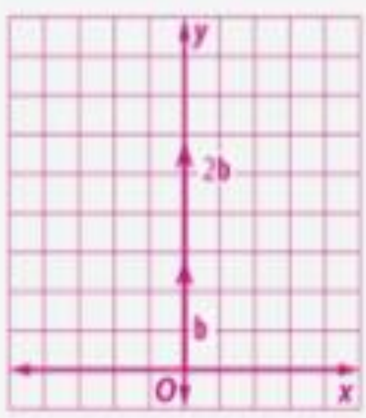
انتبه!

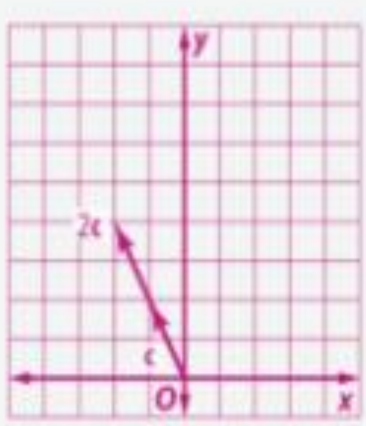
خطأ شائع في التمرينين، 43 و 42 قد لا يستخدم الطلاب نسب جيب الزاوية وتمام الزاوية بشكل صحيح. راجع معهم تعريف كل نسبة كما تنطبق على المثلث القائم.

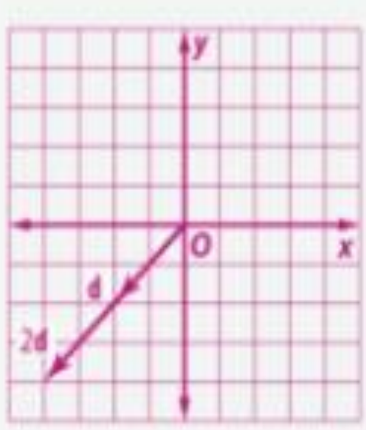
إجابات إضافية

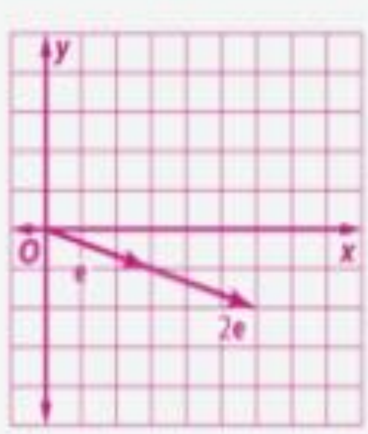
50a. الإجابات النموذجية: $k = 2$











قم بتصميم رسم تخطيطي يوضح تحليل كل متجه إلى مركبات متعامدة. ثم أوجد مقادير المركبات الأفقية والرأسية للمتجه. المثال 16

.41–38 انظر الهامش.

38. $2\frac{1}{8}$ بوصات بزاوية 310° مع المركبة الأفقية

39. 1.5 سنتيمتر باتجاه N49°E

40. 3.2 سنتيمترات في الساعة باتجاه S78°W

41. $\frac{3}{4}$ بوصات في الدقيقة باتجاه 255°

42. **كرة القدم** في محاولة تهديف، تم ركل الكرة بالسرعة الموضحة بالرسم التخطيطي أدناه.

a. قم بتصميم رسم تخطيطي يوضح تحليل هذه القوة إلى مركبات متعامدة. **انظر الهامش.**

b. أوجد مقادير المركبات الأفقية والرأسية. المثال 16

$45\sqrt{3}$ ft/s أو تقريبًا 77.9 ft/s; 45 ft/s

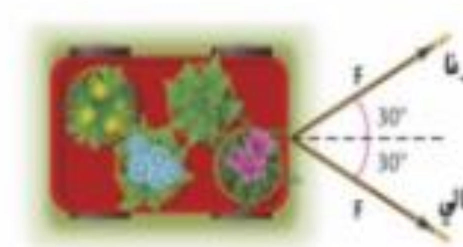
43. **التنظيف** تم دفع مكنسة بقوة مقدارها 190 نيوتن وزاوية مقدارها 33° مع الأرض. المثال 16

a. قم بتصميم رسم تخطيطي يوضح تحليل هذه القوة إلى مركبات متعامدة. **انظر الهامش.**

b. أوجد مقادير المركبات الأفقية والرأسية.

تقريبًا 159.3 N، تقريبًا 103.5 N

44. **العناية بالحدائق** تسحب رنا وسالي عربة مليئة بالنباتات. تسحب كل منهما العربة بقوة متساوية وزاوية 30° مع محور العربة. القوة الناتجة هي 120 نيوتن. B



a. ما مقدار القوة التي تبذلها كل منهما؟ **تقريبًا 69 N**

b. إذا بذلت كل منهما قوة مقدارها 75 نيوتن، فما مقدار القوة الناتجة؟ **تقريبًا 130 N**

c. ما تأثير اقتراب رنا وسالي من بعضهما على القوة الناتجة؟ **ستكون أكبر.**

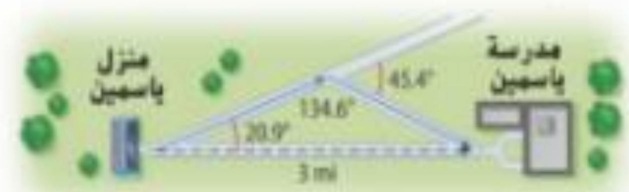
تم ذكر المقدار والاتجاهات الحقيقية للقوى الثلاث المؤثرة على جسم. أوجد مقدار القوة الناتجة عن هذه القوى واتجاهها.

45. 50 lb بزاوية 30°، و 80 lb بزاوية 125°، و 100 lb بزاوية 220° **84 lb بزاوية 162°**

46. 8 نيوتن بزاوية 300°، و 12 نيوتن بزاوية 45°، و 6 نيوتن بزاوية 120° **11.6 N بزاوية 35°**

47. 18 lb بزاوية 190°، و 3 lb بزاوية 20 °، و 7 lb بزاوية 320° **11.7 lb بزاوية 215°**

48. **القيادة** تبعد مدرسة ياسمين عن منزلها بمقدار ثلاثة أميال في مسار مستقيم. تقود السيارة في شارعين مختلفين في طريقها إلى المدرسة. تتحرك بزاوية 20.9° مع المسار في الشارع الأول ثم تنعطف بزاوية 45.4° في الشارع الثاني.



a. ما المسافة التي تقطعها ياسمين في الشارع الأول؟ **تقريبًا 1.75 mi**

b. ما المسافة التي تقطعها ياسمين في الشارع الثاني؟ **تقريبًا 1.5 mi**

c. إذا استغرق منها الوصول إلى المدرسة 10 دقائق وكان متوسط سرعتها في الشارع الأول 25 ميلاً في الساعة، فما متوسط سرعتها في الشارع الثاني؟ **تقريبًا 15.5 mi/h**

49. **التزلج** يسحب حياه أخته على زلاجة. اتجاه هذه القوة الناتجة هو 31° والمركبة الأفقية لهذه القوة هي 86 نيوتن.

a. ما المركبة الرأسية للقوة؟ **تقريبًا 52 N**

b. ما مقدار القوة الناتجة؟ **تقريبًا 100 N**

50. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف ضرب متجه في كمية عددية.

a. **التمثيل البياني** على مستوى إحداثي، ارسم المتجه **a** بحيث يقع الذيل عند نقطة الأصل. اختر قيمة للكمية العددية k. ثم ارسم المتجه الناتج في حالة ضرب المتجه الأصلي في k على المستوى الإحداثي ذاته. كرر العملية لأربع متجهات إضافية **b** و **c** و **d** و **e**. استخدم نفس قيمة k كل مرة. **انظر الهامش.**

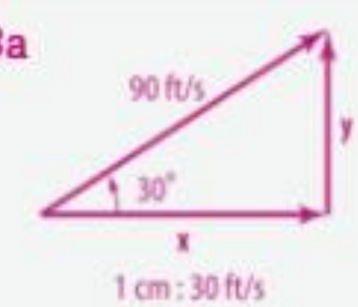
b. **التمثيل الجدولي** انسخ وأكمل الجدول أدناه لكل متجه ترسمه في الجزء **a**. **تُقدم نماذج لبعض الإجابات.**

متجه	نقطة نهاية متجه	نقطة نهاية المتجه × k
a	(2, 4)	(4, 8)
b	(0, 3)	(0, 6)
c	(-1, 2)	(-2, 4)
d	(-2 ,-2)	(-4 ,-4)
e	(3, -1)	(6, -2)

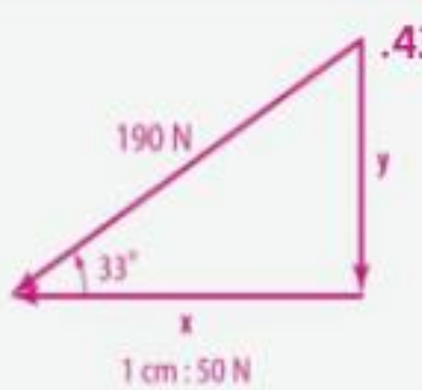
c. **التمثيل التحليلي** إذا كانت نقطة نهاية المتجه **a** تقع عند النقطة (a, b)، فما موقع نقطة نهاية المتجه **ka**؟ **(ka, kb)**

.41 حوالي 0.72 in./min؛ حوالي 0.19 in./min

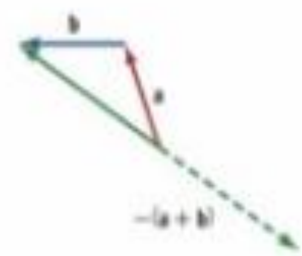
.42a



.43a



المتجه *الموازن* عكس المتجه الناتج.
فهو يوازن توفيق المتجهات بحيث يكون مجموع المتجهات والموازن هو المتجه الصفري. المتجه الموازن لـ a + b هو −(a + b).



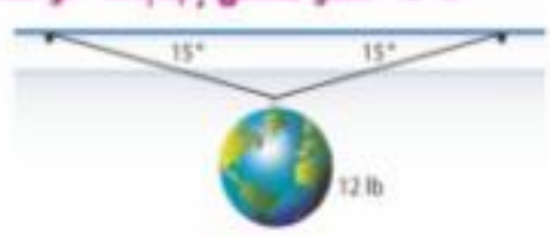
أوجد مقدار واتجاه المتجه الموازن لكل مجموعة من المتجهات.

51. a = 15 ميلاً في الساعة باتجاه 125°
b = 12 ميلًا في الساعة باتجاه 045°
تقريبًا 20.77 mi/h باتجاه 270°

52. a = 4 أمتار باتجاه N30W°
b = 6 أمتار باتجاه N20E°
تقريبًا 9.1 m باتجاه 180°

53. a = 23 قدمًا في الثانية باتجاه 205°
b = 16 قدمًا في الثانية باتجاه 345°
تقريبًا 14.87 ft/s باتجاه 69°

54. **المقدار** تم تعليق جسم مستدير من السقف بواسطة سلكين متساويين في الطول كما هو موضح.
a–b. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.



a. قم بتصميم رسم تخطيطي للمتجهات في الموقف للإشارة إلى أن متجهي التوتر T_1 و T_2 متساويان في المقدار ويحافظان على الجسم في حالة ثبات أو توازن.

b. قم بإعادة تصميم الرسم التخطيطي باستخدام طريقة المثلث لإيجاد $T_1 + T_2$. **$T_1 \approx 23.2$ lb; $T_2 \approx 23.2$ lb**

c. استخدم الرسم التخطيطي من الجزء b وحقيقة أن موازن الناتج $T_1 + T_2$ والمتجه الممثل لوزن الجسم هما متجهان متكافئان لحساب مقداري T_1 و T_2.

55. **دعم الكابلات** تم ربط كابلين بالتوترين T_1 و T_2 معًا لدعم حمولة تزن 2500 رطل في حالة توازن. **a–c. انظر الهامش.**

a. اكتب تعبيرين لتمثيل المركبتين الأفقية والرأسية T_1 و T_2.

b. إذا علمت أن موازن الناتج $T_1 + T_2$ والمتجه الممثل لوزن الحمولة متجهان متكافئان، فاحسب مقداري T_1 و T_2 لأقرب جزء من عشرة من الرطل.

c. استخدم إجاباتك من الجزأين a و b لإيجاد مقداري المركبتين الأفقية والرأسية T_1 و T_2 لأقرب جزء من عشرة من الرطل.

أوجد مقدار واتجاه كل متجه إذا علمت مركبتيه الرأسية والأفقية ومدى قيم زاوية الاتجاه θ مع المركبة الأفقية.

56. الأفقية: 0.32 in، الرأسية: 2.28 in، $90° < \theta < 180°$
تقريبًا 2.3 in، بزاوية 98°

57. الأفقية: 3.1 ft، الرأسية: 4.2 ft، $0° < \theta < 90°$
تقريبًا 5.2 ft بزاوية 54°

58. الأفقية: 2.6 cm، الرأسية: 7.9 mc، $270° < \theta < 360°$
تقريبًا 10 cm بزاوية 285°

59. الأفقية: 2.9 yd، الرأسية: 1.8 yd، $180° < \theta < 270°$
تقريبًا 3.4 yd بزاوية 212°

ارسم أي ثلاثة متجهات a و b و c. وضح هندسيًا تحقق كل من خواص المتجهات التالية باستخدام هذه المتجهات.

60. خاصية التبديل: a + b = b + a

61. خاصية التجميع: (a + b) + c = a + (b + c)

62. خاصية التوزيع: k(a + b) = ka + kb، حيث $k = 2, 0.5, -2$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

63. **مسألة غير محددة الإجابة** فكر في متجه من 5 وحدات موجّه على امتداد المحور x الموجب. حلل المتجه إلى مركبتين متعامدتين لا تتضمنان مركبة أفقية أو رأسية.
انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

64. **الاستنتاج** هل من الممكن أحيانًا أو دائمًا أو مطلقًا إيجاد مجموع متجهين موازيين باستخدام طريقة متوازي الأضلاع؟ وضّح استنتاجك.
انظر الهامش.

65. **الاستنتاج** ما أهمية وضع مرجع مشترك لقياس اتجاه متجه، على سبيل المثال، من المحور x الموجب؟ **انظر الهامش.**

66. **التحدي** ناتج a + b يساوي ناتج a − b. إذا كان مقدار a هو 4x، فما مقدار b؟ **0**

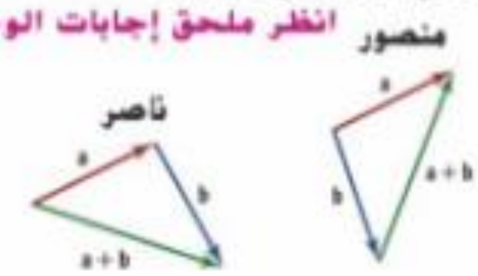
67. **الاستنتاج** فكر في العبارة |a| + |b| ≥ |a + b|.

a. عبّر عن هذه العبارة باستخدام الشرح.

b. هل هذه العبارة صحيحة أم خاطئة؟ علل إجابتك.

a–b. انظر الهامش.

68. **تحليل الخطأ** يعمل منصور وناصر على إيجاد ناتج المتجهين a و b. هل أي منهما على صواب؟ وضّح استنتاجك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 7.**



69. **الاستنتاج** هل من الممكن أن يساوي مجموع متجهين أحدهما؟ اشرح.
انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

70. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبيّن الفرق بين طريقتي متوازي الأضلاع والمثلث لإيجاد ناتج متجهين أو أكثر.

انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

إجابة إضافية

55a. الإجابات النموذجية:

$$T_{1x} = T_1 \cos 65°;$$
$$T_{1y} = T_1 \sin 65°; T_{2x} = T_2 \cos 35°;$$
$$T_{2y} = T_2 \sin 35°$$

55b. $T_1 \approx 2079.5$ lb; $T_2 \approx 1072.8$ lb

55c. $T_{1x} \approx 878.8$ lb; $T_{1y} \approx 1884.7$ lb;
$T_{2x} \approx 878.8$ lb; $T_{2y} \approx 615.3$ lb

408 | الدرس 7-1 | مقدمة عن المتجهات

مراجعة شاملة

71. **كرة الركل** افترض أن أحد لاعبي كرة الركل قام بركل الكرة بزاوية 32° مع المركبة الأفقية بسرعة ابتدائية مقدارها 20 مترًا في الثانية. فعلى أي مسافة ستهبط الكرة؟ **36.7 m**

72. مثّل بيانيًا $(x')^2 + y' - 5 = 1$ إذا تم تدويره بزاوية 45° من موقعه الأصلي في المستوى xy. **انظر ملحق إجابات الوحدة 7.**

اكتب معادلة للدائرة التي تحقق كل مجموعة من الشروط. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.

73-74. انظر ملحق إجابات الوحدة 7 للتمثيلات البيانية.

73. يقع المركز عند (4, 5)، نصف القطر 4 $(x-4)^2+(y-5)^2=16$

74. يقع المركز عند (1, −4)، القطر 7 $(x-1)^2+(y+4)^2=12.25$

حدد المعادلة ومثّل بيانيًا القطع المكافئ بالبعد البؤري F والرأس V.

75-76. انظر ملحق إجابات الوحدة 7 للتمثيلات البيانية.

75. $F(2, 4), V(2, 3)$ $(x-2)^2=4(y-3)$

76. $F(1, 5), V(-7, 5)$ $(y-5)^2=32(x+7)$

77. **الصناعات اليدوية** يبيع ماجد المنحوتات الخشبية. يبيع التماثيل الكبيرة مقابل 60 AED والساعات مقابل 40 AED والأثاث المصغّر مقابل 25 AED وقطع الشطرنج مقابل 5 AED. اصطحب معه الأغراض التالية إلى المعرض: 12 تمثالاً كبيرًا و 25 ساعة و 45 قطعة أثاث مصغّر و 50 قطعة شطرنج.

a. اكتب مصفوفة مخزون للعدد المتاح من كل منصر ومصفوفة تكلفة لسعر كل منصر. **الإجابة النموذجية:** $\begin{bmatrix} 60 \\ 40 \\ 25 \\ 5 \end{bmatrix}$, $[12 \quad 25 \quad 45 \quad 50]$

b. أوجد الدخل الإجمالي لماجد إذا باع جميع العناصر. **AED 3095**

حُل كل معادلة لجميع قيم x.

78. $4 \sin x \cos x - 2 \sin x = 0$
$n\pi, \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \frac{5\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

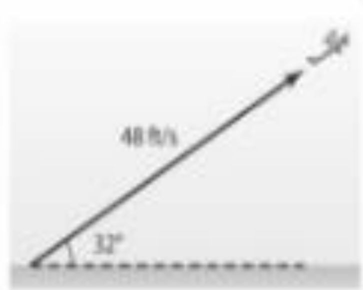
79. $\sin x - 2 \cos^2 x = -1$
$\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

80. **SAT/ACT** إذا كانت المدينة A تبعد مسافة 12 ميلاً عن المدينة B والمدينة C تبعد مسافة 18 ميلاً عن المدينة A، فأي مما يلي لا يمكن أن تكون المسافة من المدينة B إلى المدينة C؟ **A**

A 5 أميال
B 7 أميال
C 10 أميال
D 12 ميلاً
E 18 ميلاً

81. حلقت طائرة بالتحكم عن بُعد على طول مسار مبدئي بزاوية 32° مع المركبة الأفقية بسرعة 48 قدمًا في الثانية كما هو موضح. أي مما يلي يمثل مقداري المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة؟ **G**



F 25.4 ft/s, 40.7 ft/s
G 40.7 ft/s, 25.4 ft/s
H 56.6 ft/s, 90.6 ft/s
J 90.6 ft/s, 56.6 ft/s

82. **مراجعة** المثلث ABC له الرؤوس $A(-4, 2)$ و $B(-4, -3)$ و $C(3, -3)$. بعد التمدد، أصبح للمثلث $A'B'C'$ الرؤوس $A'(-12, 6)$ و $B'(-12, -9)$ و $C'(9, -9)$. كم ضعفًا تبلغ مساحة $\triangle A'B'C'$ بالنسبة لمساحة $\triangle ABC$؟ **D**

A $\frac{1}{9}$
B $\frac{1}{3}$
C 3
D 9

83. **مراجعة** ترسم حليمة خريطة للحي الذي تعيش به. تم تمثيل منزلها بواسطة شبه منحرف $ABCD$ رؤوسه $A(2, 2)$ و $B(6, 2)$ و $C(6, 6)$ و $D(2, 6)$. تريد استخدام النظام الإحداثي ذاته لرسم خريطة أخرى بنصف حجم الخريطة الأصلية. فما الرؤوس الجديدة المحتملة لمنزل حليمة؟ **H**

F $A'(0, 0), B'(2, 1), C'(3, 3), D'(0, 3)$
G $A'(0, 0), B'(3, 1), C'(2, 3), D'(0, 2)$
H $A'(1, 1), B'(3, 1), C'(3, 3), D'(1, 3)$
J $A'(1, 2), B'(3, 0), C'(2, 2), D'(2, 3)$

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 68، ذكّر الطلاب بإمعان النظر في الرسم التخطيطي. وبمجرد اختيار قاعدة لإيجاد محصلة متجهين (قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع)، فمن المهم وضع نقطتي البداية ونقطتي النهاية في المكان الصحيح.

4 التقويم

عيّن مصطلح الرياضيات كلّف الطلاب بشرح طريقة جمع وطرح متجهين مع تضمين رسم تخطيطي.

إجابات إضافية

64. أبدًا؛ الإجابة النموذجية: إذا كان المتجهان متوازيين فإن لهما الاتجاه نفسه. وإذا وضعت متجهين بحيث تتطابق نقطة بدايتهما فسوف يتراكبان ولن توجد بينهما زاوية. وبالتالي، سيكون من المستحيل إكمال متوازي الأضلاع.

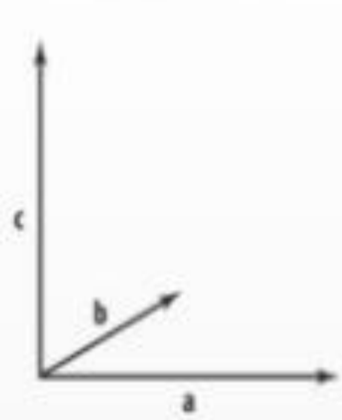
65. الإجابة النموذجية: لكي يصبح للا تجاه معنى ثابت، يجب قياسه باستخدام مرجعية مشتركة. وقد يؤدي غياب هذه المرجعية المشتركة إلى الغموض في ذكر اتجاه المتجه.

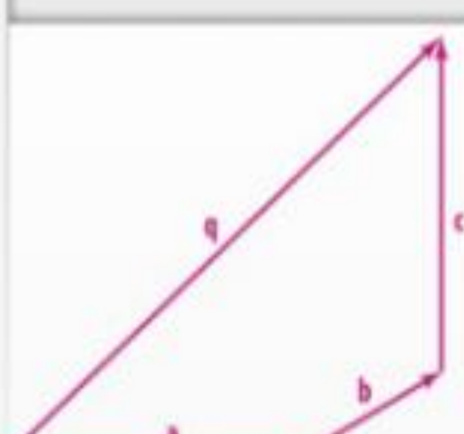
67a. طول **a** مجموعًا إلى طول **b** أكبر من أو يساوي طول الاتجاه الذي كوّنه **a + b**.

67b. صحيح؛ الإجابة النموذجية: يجب أن يبين المتجه الناتج عن **a + b** اتجاه كلا المتجهين. وقد ينشأ عن هذا طول قصير جدًا، **|a + b|**، إذا كان للمتجهين **a** و **b** اتجاه متعاكس. وسينتج عن حساب مجموع الطولين **|a| + |b|** أكبر قيمة ممكنة لأن الاتجاه لم يؤخذ في الحسبان. وهذه القيمة يمكن تحقيقها فقط عن طريق جمع **|a + b|** إذا كان المتجهان **a** و **b** متوازيين ولهما الاتجاه نفسه.

التدريس المتمايز BL

التوسع كلّف الطلاب بحل المسألة التالية. افترض أن لديك ثلاثة متجهات **a** و **b** و **c** تؤثر على نقطة. ضع إستراتيجية لإيجاد محصلتهم المتجه **q**.





1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-7 إجراء العمليات باستخدام الرسومات ذات المقاييس النسبية.

الدرس 2-7 تمثيل المتجهات وإجراء العمليات عليها في المستوى الإحداثي. كتابة المتجه على هيئة توفيق خطي لمتجهات الوحدة.

بعد الدرس 2-7 إيجاد حاصل الضرب النقطي لمتجهين، واستخدام حاصل الضرب النقطي لإيجاد الزاوية المحصورة بينهما.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة قسم **لماذا** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- كيف تؤثر الرياح المقابلة على السرعة الأرضية للطائرة؟ يمكن أن تقلل الرياح المقابلة من السرعة الأرضية للطائرة.
- كيف تؤثر الرياح الخلفية على السرعة الأرضية للطائرة؟ يمكن أن تزيد الرياح الخلفية من السرعة الأرضية للطائرة.

الدرس 7-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

السابق	الحالي	لماذا؟
قمت بإجراء العمليات على المتجهات باستخدام الرسومات ذات المقاييس.	1 تمثيل وإجراء العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي. 2 كتابة متجه كتوفيق خطي لمتجهات الوحدة.	يمكن أن تؤثر الرياح على اتجاه الطائرة وسرعتها بالنسبة إلى الأرض. يستطيع الطيارون استخدام الرسومات ذات المقاييس لتحديد الاتجاه المطلوب للطائرة لتعويض الانحراف الناتج عن الرياح، ويتم إجراء هذه الحسابات في الغالب باستخدام المتجهات في المستوى الإحداثي.

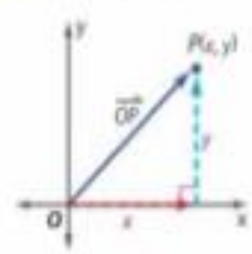
المفردات الجديدة

صورة مركبة component form
متجه وحدة unit vector
توفيق خطي linear combination

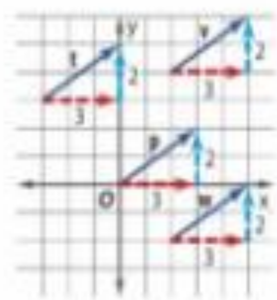
1 المتجهات في المستوى الإحداثي

في الدرس 1-7، قمت بإيجاد مقدار واتجاه ناتج قوتين أو أكثر هندسيًا باستخدام الرسومات ذات المقاييس. نظرًا لأن الرسومات يمكن أن تكون غير دقيقة، هناك حاجة إلى أسلوب جبري باستخدام نظام إحداثي متعامد للمواقف التي تتطلب المزيد من الدقة أو في أنظمة المتجهات المعقدة.

يمكن وصف متجه $\overrightarrow{OP}$ في الوضع القياسي في نظام إحداثي متعامد (كما في الشكل 7.2.1) بشكل فريد بواسطة إحداثيات نقطة انتهائه $P(x, y)$. نقوم بالإشارة إلى $\overrightarrow{OP}$ على مستوى إحداثي بواسطة $\langle x, y\rangle$. لاحظ أن x و y مركبتين متعامدتين لـ $\overrightarrow{OP}$. لهذا السبب، $\langle x, y\rangle$ تُسمى **صورة مركبة** للمتجه.



الشكل 7.2.1



الشكل 7.2.2

نظرًا لأن المتجهات التي لها نفس المقدار والاتجاه متكافئة، فيمكن تمثيل العديد من المتجهات بواسطة الإحداثيات ذاتها. على سبيل المثال، المتجهات **p** و **t** و **v** و **w** في الشكل 7.2.2 متكافئة لأنه يمكن الإشارة إلى كل منها بواسطة $\langle 3, 2\rangle$. لإيجاد صورة مركبة لمتجه ليس في الوضع القياسي، يمكنك استخدام إحداثيات نقطتي البداية والنهاية.

المفهوم الأساسي الصورة المركبة للمتجه

الصورة المركبة للمتجه $\overrightarrow{AB}$ نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ معطاة بواسطة

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$$

مثال 1 التعبير عن متجه بصورة مركبة

أوجد الصورة المركبة للمتجه $\overrightarrow{AB}$ نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$ صورة المركبة

$= \langle 3 - (-4), -5 - 2\rangle$ $(x_1, y_1) = (-4, 2)$ و $(x_2, y_2) = (3, -5)$

$= \langle 7, -7\rangle$ اطرح

تمرين موجّه

أوجد الصورة المركبة للمتجه $\overrightarrow{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين.

1A. $A(-2, -7), B(6, 1)$ $\langle 8, 8\rangle$

1B. $A(0, 8), B(-9, -3)$ $\langle -9, -11\rangle$

يتم إيجاد مقدار متجه في المستوى الإحداثي باستخدام صيغة المسافة.

المفهوم الأساسي مقدار متجه في المستوى الإحداثي

إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا نقطة بدايته (x_1, y_1) ونقطة نهايته (x_2, y_2)، فيتم تقديم مقدار $\mathbf{v}$ بواسطة

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

إذا كان $\mathbf{v}$ صورة مركبته $\langle a, b \rangle$، فإن $|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

قراءة في الرياضيات

المعيار مقدار المتجه يُسمى أحيانًا معيار المتجه.

مثال 2 إيجاد مقدار متجه

أوجد مقدار $\overrightarrow{AB}$ بنقطة البداية $A(-4, 2)$ ونقطة النهاية $B(3, -5)$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة

$= \sqrt{[3 - (-4)]^2 + (-5 - 2)^2}$ $(x_1, y_1) = (-4, 2)$ و $(x_2, y_2) = (3, -5)$

$= \sqrt{98} \approx 9.9$ تقريبًا بسّط.

التحقق من المثال 1، تعلم أن $\overrightarrow{AB} = \langle 7, -7 \rangle$. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + (-7)^2}$ أو $\sqrt{98}$ ✔

تمرين موجّه

أوجد مقدار $\overrightarrow{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين.

2A. $A(-2, -7), B(6, 1)$ $\sqrt{128} \approx 11.3$

2B. $A(0, 8), B(-9, -3)$ $\sqrt{202} \approx 14.2$

جمع المتجهات في المستوى الإحداثي وطرحها وضربها في كمية عددية مشابه لتلك العمليات مع المصفوفات.

المفهوم الأساسي العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهان و k كمية عددية، فإن ما يلي صحيح

جمع المتجهات $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

طرح المتجهات $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$

الضرب في كمية عددية $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$

مثال 3 العمليات على المتجهات

أوجد كل مما يلي لـ $\mathbf{w} = \langle -4, 1 \rangle$، $\mathbf{y} = \langle 2, 5 \rangle$، و $\mathbf{z} = \langle -3, 0 \rangle$.

a. $\mathbf{w} + \mathbf{y}$

$\mathbf{w} + \mathbf{y} = \langle -4, 1 \rangle + \langle 2, 5 \rangle$ عوّض.

$= \langle -4 + 2, 1 + 5 \rangle = \langle -2, 6 \rangle$ جمع المتجهات

b. $\mathbf{z} - 2\mathbf{y}$

$\mathbf{z} - 2\mathbf{y} = \mathbf{z} + (-2)\mathbf{y}$ أعد كتابة الطرح في صورة جمع.

$= \langle -3, 0 \rangle + (-2)\langle 2, 5 \rangle$ عوّض.

$= \langle -3, 0 \rangle + \langle -4, -10 \rangle = \langle -7, -10 \rangle$ الضرب في كمية عددية وجمع المتجهات

تمرين موجّه

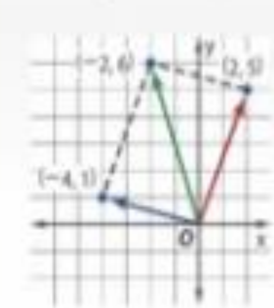
3A. $4\mathbf{w} + \mathbf{z}$ $\langle -19, 4 \rangle$

3B. $-3\mathbf{w}$ $\langle 12, -3 \rangle$

3C. $2\mathbf{w} + 4\mathbf{y} - \mathbf{z}$ $\langle 3, 22 \rangle$

نصيحة دراسية

التحقق البياني كما هو موضح أدناه، تم التحقق من المثال 3a باستخدام طريقة متوازي الأضلاع.



- ما نوع الرياح التي قد تؤثر على اتجاه طائرة؟ أي رياح ذات اتجاه غير الرياح المقابلة أو الرياح الخلفية
- هل من الممكن أن تسبب الرياح الجانبية التي تهب بمقدار °90 على الاتجاه الذي تحلق به الطائرة في خروج الطائرة عن مسارها بمقدار °90؟ اشرح. لا؛ فالطائرة تتحرك إلى الأمام في الوقت نفسه الذي يتم فيه دفع اتجاهها خارج المسار بفعل الرياح، ولذلك ستكون زاوية انحراف الطائرة عن مسارها أقل من °90.

1 المتجهات في المستوى الإحداثي

يوضح المثال 1 طريقة التعبير عن متجه في الصورة المركبة عند توفر الزوج المرتب لنقطة البداية ونقطة النهاية. **ويوضح المثال 2** طريقة إيجاد طول المتجه باستخدام قانون المسافة. أما **المثال 3** فيوضح طريقة إجراء العمليات على المتجهات، بما فيها إيجاد مجموع متجهين جبريين والفارق بينهما وحاصل الضرب القياسي لهما.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد الصورة المركبة للمتجه $\overrightarrow{AB}$ ونقطة بدايته $A(1, -3)$ ونقطة نهايته هي $B(1, 3)$. $\langle 0, 6 \rangle$

2 أوجد طول المتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(1, -3)$ ونقطة نهايته هي $B(1, 3)$. 6

3 أوجد كلاً مما يلي عندما تكون $\mathbf{w} = \langle 2, -5 \rangle$ و $\mathbf{y} = \langle 2, 0 \rangle$ و $\mathbf{z} = \langle -1, -4 \rangle$.

a. $2\mathbf{w} + \mathbf{y}$ $\langle 6, -10 \rangle$

b. $3\mathbf{y} - 2\mathbf{z}$ $\langle 8, 8 \rangle$

التدريس المتمايز AL OL

المتعلمون بطريقة التواصل كلّف الطلاب بالعمل في مجموعات صغيرة لحساب مجموع متجهين والفارق بينهما بالإضافة إلى الضرب المقياسي لأحد المتجهين. ثم كلّف الطلاب باستخدام ورقة رسم بياني للتأكد بصريًا من صحة إجاباتهم.

2 متجهات الوحدة

المتجه الذي يكون مقداره وحدة واحدة يُسمى **متجه وحدة**. من المفيد أحيانًا وصف متجه غير صفري **v** في صورة مضاعف كمية عددية لمتجه وحدة **u** له نفس اتجاه **v**. لإيجاد **u**، اقسم **v** على مقداره $|\mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

الربط **بتاريخ الرياضيات**

ويليام روان هاملتون
(1805-1865)

عالم رياضيات أيرلندي. طور هاملتون نظرية الرباعيات ونشر محاضرات عن الرباعيات. تتضمن هذه النظرية أسس العديد من المفاهيم الأساسية لتحليل المتجهات.

مثال 4 إيجاد متّجه وحدة له نفس اتجاه متجه معلوم

أوجد متّجه الوحدة u الذي له نفس اتّجاه $\mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$.

$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$ متجه وحدة له نفس اتجاه v

$= \frac{1}{|\langle -2, 3\rangle|}\langle -2, 3\rangle$ عوّض.

$= \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}}\langle -2, 3\rangle$ $|\langle a, b\rangle| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{13}}\langle -2, 3\rangle$ بسّط.

$= \left\langle -\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right\rangle$ الضرب في كمية عددية

$= \left\langle -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right\rangle$ إنطاق المقامات.

التحقق نظرًا لأن **u** مضاعف كمية عددية لـ **v**، فإن له نفس اتجاه **v**. تحقق من أن مقدار **u** هو 1.

$|\mathbf{u}| = \sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)^2}$ صيغة المسافة

$= \sqrt{\frac{52}{169} + \frac{117}{169}}$ بسّط.

$= \sqrt{1} = 1$ ✔ بسّط.

تمرين موجّه

أوجد متّجه وحدة له نفس اتجاه المتجه المعلوم.

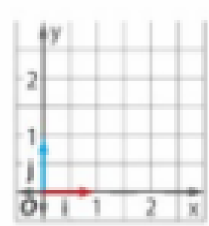
4A. $\mathbf{w} = \langle 6, -2\rangle$ $\left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10}\right\rangle$

4B. $\mathbf{x} = \langle -4, -8\rangle$ $\left\langle -\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right\rangle$

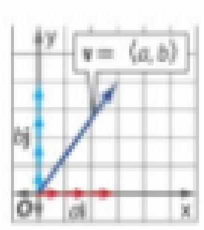
تم الإشارة إلى متجهات الوحدة في اتجاه محور x الموجب ومحور y الموجب بواسطة $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ و $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ على التوالي (الشكل 7.2.3). المتجهان **i** و **j** يُطلق عليهما متجهي الوحدة القياسيين.

انتبه!

متجه الوحدة i لا تخلط بين متجه الوحدة **i** والعدد التخيلي *i*. تتم الإشارة إلى المتجه بالحرف الغامق غير المائل **i**. تتم الإشارة إلى العدد التخيلي بالحرف الغامق المائل *i*.



الشكل 7.2.3



الشكل 7.2.4

يمكن استخدام هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ في صورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما هو موضح بالشكل 7.2.4.

$\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ صورة مركبة لـ v

$= \langle a, 0\rangle + \langle 0, b\rangle$ أعد الكتابة في صورة مجموع متجهين.

$= a\langle 1, 0\rangle + b\langle 0, 1\rangle$ الضرب في كمية عددية

$= a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ $\langle 1, 0\rangle = \mathbf{i}$ و $\langle 0, 1\rangle = \mathbf{j}$

إرشاد للمعلمين الجدد

الكمية القياسية ذكّر الطلاب بأن الكمية القياسية عبارة عن عدد حقيقي.

التركيز على محتوى الرياضيات

الضرب القياسي يمكن النظر إلى الضرب القياسي باعتباره أيضًا تغير في أبعاد المتجه الأصلي. فإذا كانت الكمية القياسية أقل من 0، مما يعكس اتجاه المتجه، فإن المتجه لم تتغير أبعاده فحسب بل انعكس أيضًا على المستقيم العمودي على المتجه عند نقطة المنتصف. لاحظ أن القيمة المطلقة إذا كانت أقل من 1، فإن تغير الأبعاد يكون انضغاطًا.

2 متجهات الوحدة

يوضح المثال 4 طريقة إيجاد متجه وحدة له الاتجاه نفسه مثل المتجه المعطى. ويوضح **المثال 5** طريقة كتابة المتجه على هيئة توفيق خطي لمتجهات الوحدة. ويوضح **المثال 6** طريقة إيجاد الصورة المركبة لمتجه بدلالة طوله وزاوية اتجاهه. أما **المثال 7** فيوضح طريقة إيجاد زاوية اتجاه متجه باستخدام دالة معكوس ظل الزاوية. ويوضح **المثال 8** طريقة إجراء العمليات على المتجهات.

مثال إضافي

4 أوجد متجه الوحدة **u** الذي له الاتجاه نفسه للمتجه $\mathbf{v} = \langle 4, -2\rangle$.

$\mathbf{u} = \left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right\rangle$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو قسّم كل صف دراسي إلى مجموعات. وخصص متجهًا لكل مجموعة. كلّف المجموعات بعمل تسجيل فيديو يوضح طريقة إيجاد متجه وحدة له الاتجاه نفسه مثل المتجه المعطى لهم.

إرشاد للمعلمين الجدد

ترميز المتجهات تستخدم الأزواج المرتبة في وصف المتجهات شأنها شأن النقاط على المستوى الإحداثي. لاحظ أن القوسين مختلفان. فالنقطة (x, y) تشير إلى موقع وحيد على المستوى الإحداثي؛ بينما المتجه $\langle x, y\rangle$ يشير إلى متجه (من حيث الطول والاتجاه) في الوضع القياسي تكون نهايته في النقطة ذات الصلة.

أمثلة إضافية

5 افترض أن $\overrightarrow{DE}$ متجه نقطة بدايته $D(-3, -3)$ ونقطة نهايته $E(2, 6)$. اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ على هيئة متجه توفيق خطي للمتجهين **i** و **j**. $5\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$

6 أوجد الصورة المركبة للمتجه **v** الذي طوله 7 وزاوية اتجاهه $60°$. $\mathbf{v} = \left\langle \frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2} \right\rangle$

مجموع المتجهين $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ يُسمى **التوفيق الخطي** للمتجهين **i** و **j**.

مثال 5 كتابة متجه كتوفيق خطي لمتجهات الوحدة

افترض أن $\overrightarrow{DE}$ متجه نقطة بدايته $D(-2, 3)$ ونقطة نهايته $E(4, 5)$. اكتب $\overrightarrow{DE}$ في صورة توفيق خطي للمتجهين i و j.

أولاً، أوجد الصورة المركبة للمتجه $\overrightarrow{DE}$

$\overrightarrow{DE} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$ صورة مركبة

$= \langle 4 - (-2), 5 - 3 \rangle$ $(x_1, y_1) = (-2, 3)$ و $(x_2, y_2) = (4, 5)$

$= \langle 6, 2 \rangle$ بسّط.

ثم أعد كتابة المتجه في صورة توفيق خطي لمتجهات وحدة قياسية.

$\overrightarrow{DE} = \langle 6, 2 \rangle$ صورة مركبة

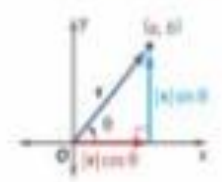
$= 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ $\langle a, b \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$

تمرين موجّه

افترض أن $\overrightarrow{DE}$ هو المتجه بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. اكتب $\overrightarrow{DE}$ في صورة توفيق خطي للمتجهين i و j.

5A. $D(-6, 0), E(2, 5)$ $8\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

5B. $D(-3, -8), E(-7, 1)$ $-4\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$



إحدى طرق تحديد اتجاه متجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ هي ذكر زاوية الاتجاه θ التي يصنعها **v** مع محور **x** الموجب. من الشكل 7.2.5، يترتب على ذلك أن **v** يمكن كتابته في صورة مركبة أو توفيق خطي لـ **i** و **j** باستخدام مقدار وزاوية اتجاه المتجه.

$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ صورة مركبة

$= \langle |\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \theta \rangle$ تعويض

$= |\mathbf{v}| (\cos \theta)\mathbf{i} + |\mathbf{v}| (\sin \theta)\mathbf{j}$ توفيق خطي لـ i و j

نصيحة دراسية

متجه الوحدة من العبارة $\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \theta \rangle$، يترتب أن متجه الوحدة في اتجاه **v** له الصورة
$\mathbf{v} = \langle 1 \cos \theta, 1 \sin \theta \rangle$
$= \langle \cos \theta, \sin \theta \rangle$.

مثال 6 إيجاد صورة مركبة

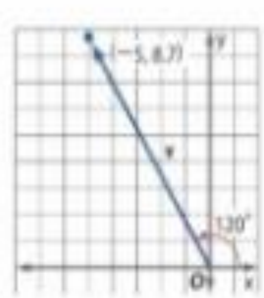
أوجد الصورة المركبة لمتجه v مقداره 10 وزاوية اتجاهه $120°$.

$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \theta \rangle$ الصورة المركبة لـ v بدلالة $|\mathbf{v}|$ و θ

$= \langle 10 \cos 120°, 10 \sin 120° \rangle$ $|\mathbf{v}| = 10$ و $\theta = 120°$

$= \left\langle 10\left(-\frac{1}{2}\right), 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle$ $\cos 120° = -\frac{1}{2}$ و $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle$ بسّط.



التحقق مثّل بيانيًا $\mathbf{v} = \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle \approx \langle -5, 8.7 \rangle$. قياس الزاوية التي يصنعها **v** مع محور x الموجب هي تقريبًا $120°$ كما هو موضح، و $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{3})^2}$ أو 10. ✓

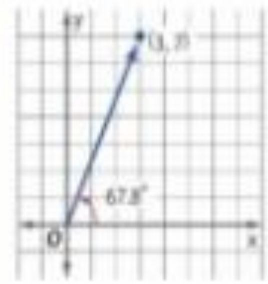
تمرين موجّه

أوجد الصورة المركبة للمتجه v بالمقدار وزاوية الاتجاه المذكورتين.

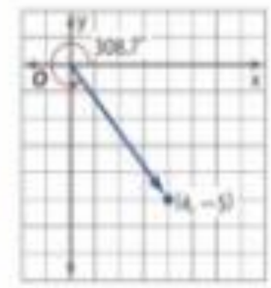
6A. $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 45°$ $\langle 5.7, 5.7 \rangle$

6B. $|\mathbf{v}| = 24, \theta = 210°$ $\langle -12\sqrt{3}, -12 \rangle$

يترتب كذلك على معطيات الشكل 7.2.5 في الصفحة السابقة أنه يمكن إيجاد زاوية الاتجاه θ للمتجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ من خلال حل المعادلة المثلثية $\tan\theta = \frac{|\mathbf{v}|\sin\theta}{|\mathbf{v}|\cos\theta}$ أو $\tan\theta = \frac{b}{a}$



الشكل 7.2.6



الشكل 7.2.7

مثال 7 زوايا اتجاه المتجهات

حدّد زاوية اتّجاه كل متجه مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة.

a. $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$ معادلة زاوية الاتجاه

$\tan\theta = \frac{7}{3}$ $a = 3$ و $b = 7$

$\theta = \tan^{-1}\frac{7}{3}$ أوجد θ.

$\theta \approx 66.8°$ استخدم حاسبة.

إذًا، زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{p}$ هي تقريبًا 67.8° كما موضح بالشكل 7.2.6.

b. $\mathbf{r} = \langle 4, -5\rangle$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$ معادلة زاوية الاتجاه

$\tan\theta = \frac{-5}{4}$ $a = 4$ و $b = -5$

$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)$ أوجد θ.

$\theta \approx -51.3°$ استخدم حاسبة.

نظرًا لأن $\mathbf{r}$ تقع في الربع الرابع كما هو موضح بالشكل 7.2.7، فإن $\theta = 360 + (-51.3)$ أو 308.7°

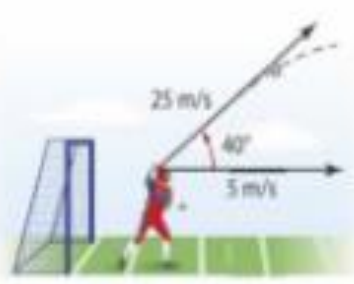
تمرين موجّه

7A. $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ 161.6°

7B. $\langle -3, -8\rangle$ 249.4°

مثال 8 من الحياة اليومية تطبيق العمليات على المتجهات

كرة القدم يركض حارس المرمى للأمام بسرعة 5 أمتار في الثانية ويرمي الكرة بسرعة 25 مترًا في الثانية وزاوية 40° مع المركبة الأفقية. ما مقدار السرعة الناتجة للكرة واتّجاهها؟

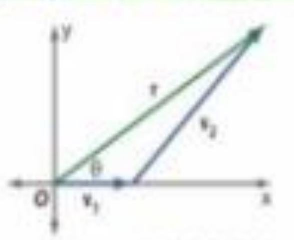


نظرًا لأن الحارس يتحرك للأمام مباشرة، فصورة مركبة سرعته $\mathbf{v}_1$ هي $\langle 5, 0\rangle$.
استخدم مقدار واتجاه سرعة الكرة $\mathbf{v}_2$ لكتابة هذا المتجه في صورة مركبة.

$\mathbf{v}_2 = \langle |\mathbf{v}_2|\cos\theta, |\mathbf{v}_2|\sin\theta\rangle$ الصورة المركبة لـ $\mathbf{v}_2$

$= \langle 25\cos 40°, 25\sin 40°\rangle$ $|\mathbf{v}_2| = 25$ و $\theta = 40°$

$\approx \langle 19.2, 16.1\rangle$ بسّط.



ملاحظة: الشكل غير مرسوم للقياس

اجمع المتجهين الجبريين الممثلين لـ $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ لإيجاد السرعة الناتجة، المتجه $\mathbf{r}$.

$\mathbf{r} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ متجه ناتج

$= \langle 5, 0\rangle + \langle 19.2, 16.1\rangle$ تعويض

$= \langle 24.2, 16.1\rangle$ جمع متجهات

مقدار هذا الناتج هو $|\mathbf{r}| = \sqrt{24.2^2 + 16.1^2}$ أو تقريبًا 29.1. بعد ذلك، أوجد زاوية اتجاه الناتج θ.

$\tan\theta = \frac{16.1}{24.2}$ $\langle a, b\rangle = \langle 24.2, 16.1\rangle$ حيث $\tan\theta = \frac{b}{a}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{16.1}{24.2}$ تقريبًا $= 33.6°$ أوجد θ.

إذًا، السرعة الناتج للكرة هي تقريبًا 29.1 مترًا في الثانية بزاوية 33.6° تقريبًا مع المركبة الأفقية.

تمرين موجّه

8. كرة القدم ماذا ستكون السرعة الناتجة للكرة إذا ألقى حارس المرمى الرمية ذاتها وهو يركض للخلف بسرعة 5 أمتار في الثانية؟ **21.5 m/s بزاوية 48.6° مع المركبة الأفقية**

أمثلة إضافية

7 أوجد قياس زاوية الاتجاه لكل متجه مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة.

a. $\mathbf{p} = \langle 2, 9\rangle$ 77.5°

b. $\mathbf{r} = -7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ 344.1°

8 **كرة القدم** لاعب كرة قدم يركض إلى الأمام بمعدل 7 أمتار في الثانية، يقوم بركل الكرة بسرعة متجهة معدلها 30 مترًا في الثانية بزاوية قياسها 10° مع المركّب الأفقي؟ 36.9 m/s; 8.1°

المتابعة

لقد استكشف الطلاب المتجهات.

اطرح السؤال التالي:

- كيف يمكن استخدام المتجهات في عمل نماذج لمواقف الحياة اليومية وتحليلها؟
الإجابة النموذجية: يمكن استخدام المتجهات لتمثيل الكميات التي لها مقدار واتجاه، مثل الوزن والقوة والسرعة المتجهة. ويمكن استخدام العمليات على المتجهات بعد ذلك لحل المسائل التي تتضمن هذه الكميات.

التدريس المتمايز BL OL

المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية كلّف الطلاب بتعليق جسم بحبلين بين مقعدين دراسيين. كلّف كل طالب بتصميم رسم تخطيطي لعمل نموذج لهذه الحالة مع كتابة كل قوة، ثم توضيح الطريقة التي وجد بها الطالب القوة المبذولة على الحبلين.

تمارين

أوجد الصورة المركبة والمقدار للمتجه $\overline{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. (المثالان 1 و 2)

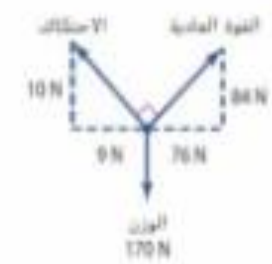
1-10. انظر الهامش.

1. $A(-3, 1), B(4, 5)$
2. $A(2, -7), B(-6, 9)$
3. $A(10, -2), B(3, -5)$
4. $A(-2, 7), B(-9, -1)$
5. $A(-5, -4), B(8, -2)$
6. $A(-2, 6), B(1, 10)$
7. $A(2.5, -3), B(-4, 1.5)$
8. $A(-4.3, 1.8), B(9.4, -6.2)$
9. $A\left(\frac{1}{2}, -9\right), B\left(6, \frac{5}{2}\right)$
10. $A\left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right), B(-1, 7)$

أوجد كل مما يلي حيث $\mathbf{f} = \langle 8, 0\rangle$ و $\mathbf{g} = \langle -3, -5\rangle$ و $\mathbf{h} = \langle -6, 2\rangle$. (مثال 3)

11. $4\mathbf{h} - \mathbf{g}$ $\langle -21, 13\rangle$
12. $\mathbf{f} + 2\mathbf{h}$ $\langle -4, 4\rangle$
13. $3\mathbf{g} - 5\mathbf{f} + \mathbf{h}$ $\langle -55, -13\rangle$
14. $2\mathbf{f} + \mathbf{g} - 3\mathbf{h}$ $\langle 31, -11\rangle$
15. $\mathbf{f} - 2\mathbf{g} - 2\mathbf{h}$ $\langle 26, 6\rangle$
16. $\mathbf{h} - 4\mathbf{f} + 5\mathbf{g}$ $\langle -53, -23\rangle$
17. $4\mathbf{g} - 3\mathbf{f} + \mathbf{h}$ $\langle -42, -18\rangle$
18. $6\mathbf{h} + 5\mathbf{f} - 10\mathbf{g}$ $\langle 34, 62\rangle$

19. **الفيزياء** في الفيزياء، يتم استخدام الرسوم التخطيطية للقوى لعرض تأثيرات القوى المختلفة المؤثرة على جسم. يمثل الرسم التخطيطي التالي للقوى تمثيل القوى المؤثرة على طفل ينزلق لأسفل على زحلوقة. (مثال 3)



$\mathbf{f} = \langle -9, 10\rangle, \mathbf{n} = \langle 76, 84\rangle, \mathbf{w} = \langle 0, -170\rangle$

a. باستخدام النقطة الزرقاء الممثلة للطفل كنقطة أصل، عبر عن كل قوة كمتجه في صورة مركبة. $\langle 67, -76\rangle$

b. أوجد صورة مركبة المتجه الناتج الممثل للقوة المتسببة في حركة الطفل لأسفل على الزحلوقة.

20-27. انظر الهامش.

أوجد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v}$. (مثال 4)

20. $\mathbf{v} = \langle -2, 7\rangle$
21. $\mathbf{v} = \langle 9, -3\rangle$
22. $\mathbf{v} = \langle -8, -5\rangle$
23. $\mathbf{v} = \langle 6, 3\rangle$
24. $\mathbf{v} = \langle -2, 9\rangle$
25. $\mathbf{v} = \langle -1, -5\rangle$
26. $\mathbf{v} = \langle 1, 7\rangle$
27. $\mathbf{v} = \langle 3, -4\rangle$

28-35. انظر الهامش.

افترض أن $\overrightarrow{DE}$ هو المتجه بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. اكتب $\overrightarrow{DE}$ في صورة توفيق خطي للمتجهين i و j. (مثال 5)

28. $D(4, -1), E(5, -7)$
29. $D(9, -6), E(-7, 2)$
30. $D(3, 11), E(-2, -8)$
31. $D(9.5, 1), E(0, -7.3)$
32. $D(-3, -5.7), E(6, -8.1)$
33. $D(-4, -6), E(9, 5)$
34. $D\left(\frac{1}{8}, 3\right), E\left(-4, \frac{2}{7}\right)$
35. $D(-3, 1.5), E(-3, 1.5)$

36. **طريق المدرسة** من أجل أن تذهب عائشة إلى المدرسة، تغادر منزلها وتقود السيارة شمالاً في شارع النصر لمسافة 2.4 ميل. ثم تنعطف يسارًا إلى شارع الحرية وتقطع مسافة 3.1 أميال ثم تنعطف يمينًا إلى شارع الأمل وتقطع مسافة 5.8 أميال. عبّر عن طريق عائشة في صورة توفيق خطي لمتجهي الوحدة i و j. (مثال 5)
$-3.1\mathbf{i} + 8.2\mathbf{j}$

37. **التجديف** تجدف نجاة عبر النهر بسرعة 5 أميال في الساعة بشكل متعامد على الشاطئ. يبلغ تيار النهر 3 أميال في الساعة باتجاه التيار. (مثال 5)

a. ما سرعة حركتها؟ تقريبًا 5.8 mph

b. بأي زاوية مع الشاطئ تتحرك؟ تقريبًا °59

أوجد صورة مركّبة المتّجه v بالمقدار وزاوية الاتجاه المذكورتين. (مثال 6)

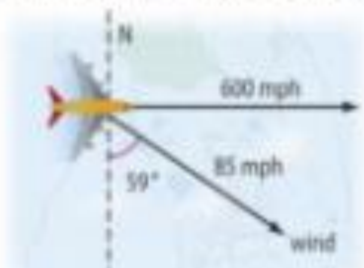
38. $|\mathbf{v}| = 12, \theta = 60°$ $\langle 6, 6\sqrt{3}\rangle$
39. $|\mathbf{v}| = 4, \theta = 135°$ $\langle -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\rangle$
40. $|\mathbf{v}| = 6, \theta = 240°$ $\langle -3, -3\sqrt{3}\rangle$
41. $|\mathbf{v}| = 16, \theta = 330°$ $\langle 8\sqrt{3}, -8\rangle$
42. $|\mathbf{v}| = 28, \theta = 273°$ $\langle 1.47, -27.96\rangle$
43. $|\mathbf{v}| = 15, \theta = 125°$ $\langle -8.6, 12.29\rangle$

حدّد زاوية اتّجاه كل متجه مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة. (مثال 7)

44. $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ 63.4°
45. $-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ 111.8°
46. $8\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ 346.0°
47. $-4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ 216.9°
48. $\langle -5, 9\rangle$ 119.1°
49. $\langle 7, 7\rangle$ 45°
50. $\langle -6, -4\rangle$ 213.7°
51. $\langle 3, -8\rangle$ 290.6°

52. **التزلج** تسحب هيام زلاجة بقوة 275 نيوتن من خلال إمساك حبلها بزاوية °58. سوف يساعدها أخاها من خلال دفع الزلاجة بقوة 320 نيوتن. حدد مقدار واتجاه القوة الإجمالية الناتجة المؤثرة على الزلاجة. (مثال 8) تقريبًا 520.8 N،
تقريبًا °153.4

53. **الملاحة** تطير طائرة باتجاه الشرق بسرعة 600 ميل في الساعة. وتهب الرياح بسرعة 85 ميلاً في الساعة بزاوية S59°E. (مثال 8)



a. حدّد سرعة طيران الطائرة. تقريبًا 674.3 mph

b. حدّد زاوية طيران الطائرة. تقريبًا S86°E

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-53 للتحقق من الاستيعاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

إجابات إضافية

1. $\langle 7, 4\rangle; \sqrt{65} \approx 8.1$
2. $\langle -8, 16\rangle; 8\sqrt{5} \approx 17.9$
3. $\langle -7, -3\rangle; \sqrt{58} \approx 7.6$
4. $\langle -7, -8\rangle; \sqrt{113} \approx 10.6$
5. $\langle 13, 2\rangle; \sqrt{173} \approx 13.2$
6. $\langle 3, 4\rangle; 5$
7. $\langle -6.5, 4.5\rangle; \sqrt{62.5} \approx 7.9$
8. $\langle 13.7, -8\rangle; \sqrt{251.69} \approx 15.9$
9. $\left\langle \frac{11}{2}, \frac{23}{2}\right\rangle; \sqrt{\frac{325}{2}} \approx 12.7$
10. $\left\langle -\frac{8}{5}, \frac{37}{5}\right\rangle; \sqrt{\frac{1433}{25}} \approx 7.6$
20. $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2\sqrt{53}}{53}, \frac{7\sqrt{53}}{53}\right\rangle$
21. $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10}\right\rangle$
22. $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{8\sqrt{89}}{89}, -\frac{5\sqrt{89}}{89}\right\rangle$
23. $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\rangle$
24. $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2\sqrt{85}}{85}, \frac{9\sqrt{85}}{85}\right\rangle$
25. $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{\sqrt{26}}{26}, -\frac{5\sqrt{26}}{26}\right\rangle$
26. $\mathbf{u} = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{7\sqrt{2}}{10}\right\rangle$
27. $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right\rangle$
28. $\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$
29. $-16\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$
30. $-5\mathbf{i} - 19\mathbf{j}$
31. $-9.5\mathbf{i} - 8.3\mathbf{j}$
32. $9\mathbf{i} - 2.4\mathbf{j}$
33. $13\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$
34. $-\frac{33}{8}\mathbf{i} - \frac{19}{7}\mathbf{j}$
35. 0

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-53, 65- 67, 68, 70-93	1-53 فردي, 90-93	2-52 زوجي, 65, 67, 68,70-89
OL ضمن المستوى	1-53 فردي, 54, 55, 57-61, 63-65, 67, 68, 70-93	1-53, 90-93	54-65, 67, 68, 70-89
BL أعلى من المستوى	54-93		

54. **الاتجاه** يحتاج طيار إلى تعيين مسار يؤدي إلى سرعة 500 ميل في الساعة باتجاه الغرب. إذا كانت الرياح تهب بسرعة 100 ميل في الساعة من زاوية 192°، فأوجد الاتجاه والسرعة التي يجب على الطيار اتخاذهما لتحقيق هذا الناتج.
تقريبًا 598.2 mph بزاوية موجهة 182°

حدد ما إذا كان $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ بنقاط البداية والنهاية المذكورة متكافئين. وإذا كانا كذلك، فأثبت أن $\overline{AB} = \overline{CD}$. وإن لم يكونا كذلك، فاشرح السبب.

55. $A(3, 5)$, $B(6, 9)$, $C(-4, -4)$, $D(-2, 0)$ **لا**

56. $A(-4, -5)$, $B(-8, 1)$, $C(3, -3)$, $D(1, 0)$ **لا**

57. $A(1, -3)$, $B(0, -10)$, $C(11, 8)$, $D(10, 1)$ **نعم**

55–57. انظر الهامش للاطلاع على الشرح.

58. **القوارب** تتحرك عائلة هناء في قارب عبر نهر. افترض أنهم في منطقة من النهر عرضها 150 مترًا تتدفق باتجاه الجنوب بمعدل متر في الثانية. في المياه الراكدة، يتحرك القارب بسرعة 0.5 متر في الثانية.

a. ما سرعة القارب؟ **تقريبًا 5.1 m/s**

b. بعد أي مسافة سيجنح القارب إلى الشاطئ؟ **30 m**

c. كم يستغرق عبور النهر في مسار مباشر من ضفة لأخرى؟ **30 s**

59b. تقريبًا 46.1 mph، تقريبًا N46°E

59. **الملاحة** تطير طائرة نفاثة بسرعة 480 ميلاً في الساعة باتجاه N82°E. بسبب الرياح، تبلغ سرعة الطائرة بالنسبة إلى الأرض 518 ميلاً في الساعة باتجاه N79°E. **a. انظر الهامش.**

a. قم بتصميم رسم تخطيطي يمثل هذه الحالة.

b. ما سرعة الرياح واتّجاهها؟

c. إذا زاد الطيار سرعة الطائرة في الهواء إلى 500 ميل في الساعة، فكم ستكون السرعة الناتجة للطائرة بالنسبة إلى الأرض؟

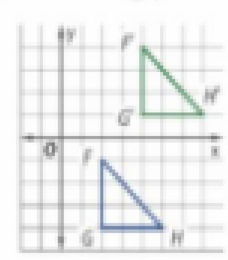
59c. تقريبًا 538 mph، تقريبًا N79°E

60. **الإزاحات** يمكنك إزاحة شكل على طول متجه إزاحة $\langle a, b\rangle$ من خلال جمع a مع كل إحداثي x وجمع b مع كل إحداثي y. فكر في المثلثات الموضحة أدناه.

a. صف الإزاحة من $\triangle FGH$ إلى $\triangle F'G'H'$ باستخدام متجه إزاحة.
$\langle 2, 5\rangle$

b. مثّل بيانيًا $\triangle F'G'H'$ وصورته المزاحة $\triangle F''G''H''$ على طول $\langle -3, -6\rangle$.
انظر الهامش.

c. صف الإزاحة من $\triangle FGH$ إلى $\triangle F''G''H''$ باستخدام متجه إزاحة.
$\langle -1, -1\rangle$



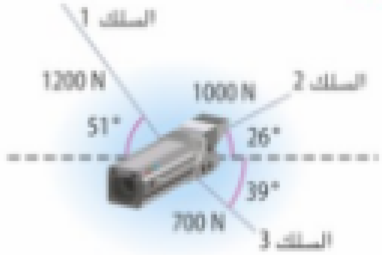
61. الإجابة النموذجية: $(0, -2)$ 62. الإجابة النموذجية: $(5, -1)$

إذا علمت مقدار ونقطة بداية كل متجه، فحدد نقطة نهايته المحتملة.

61. $(-1, 4)$; $\sqrt{37}$

62. $(-3, -7)$; 10

63. **الكاميرا** يتم دعم كاميرا فيديو ترصد الأحداث المثيرة في فعالية رياضية بواسطة ثلاثة أسلاك. يمكن تمثيل التوتر في كل سلك بواسطة متجه.



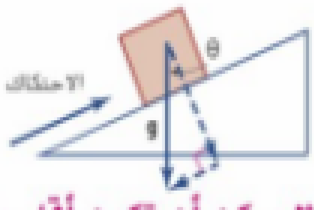
السلك 1: $\langle -755.2, 932.6\rangle$؛ السلك 2: $\langle 898.8, 438.4\rangle$؛ السلك 3: $\langle 544.0, -440.5\rangle$

a. أوجد الصورة المركبة لكل متجه. **$\langle 687.6, 930.5\rangle$**

b. أوجد الصورة المركبة للمتجه الناتج المؤثر على الكاميرا.

c. أوجد مقدار القوة الناتجة واتّجاهها. **تقريبًا 1157 N، تقريبًا 53.5°**

64. **القوة** يوجد صندوق ثابت على منحدر. تؤثر الجاذبية **g** والاحتكاك على الصندوق. مركبات الجاذبية موضحة في الرسم التخطيطي. ما الذي يجب أن يكون صحيحًا بشأن قوة الاحتكاك حتى يكون هذا السيناريو ممكنًا؟



قوة الاحتكاك لا يمكن أن تكون أقل من مركبة الجاذبية الموازية للمنحدر.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

65. **الاستنتاج** إذا كان المتجهان **a** و **b** متوازيين، فاكتب معادلة متجهات تربط **a** و **b**.
الإجابة النموذجية: a=*k*b، حيث *k* أي كمية عددية حقيقية

66. **التحدي** لسحب الأمتعة، يبذل أحمد قوة تبلغ 150 نيوتن بزاوية 58° مع المركّبة الأفقية. إذا كانت القوة الناتجة المؤثرة على الأمتعة هي 72 نيوتن بزاوية 56.7° مع المركبة الأفقية، فما مقدار ناتج $F_{\text{الاحتكاك}}$ و $F_{\text{الوزن}}$؟
تقريبًا 78 N

67. **الاستنتاج** إذا علمت نقطة بداية متجه ومقداره، فصف المحل الهندسي للنقاط التي تمثل المواقع المحتملة لنقطة النهاية.
انظر الهامش.

68. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيفية إيجاد زاوية اتجاه متجه في الربع الرابع. **انظر ملحق إجابات الوحدة 7.**

$$x = \frac{y}{\tan 4y}$$

69. **التحدي** زاوية اتجاه $\langle x, y\rangle$ هي $(4y)°$. أوجد x بدلالة y.

الإثبات أثبت كل خاصية متجهات. افترض أن $a = \langle x_1, y_1\rangle$، $b = \langle x_2, y_2\rangle$، و $c = \langle x_3, y_3\rangle$.

70–73. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

70. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

71. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

72. $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$، حيث k كمية عددية

73. $|k\mathbf{a}| = |k|\,|\mathbf{a}|$، حيث k كمية عددية

إجابات إضافية

55. الإجابة النموذجية: المتجهان ليس لهما الطول والا تجاه نفسه، ولذلك فهما غير متكافئين.

56. الإجابة النموذجية: المتجهان لهما الاتجاه نفسه، ولكنهما مختلفان في الطول، ولذلك فإنهما غير متكافئين.

416 | الدرس 2-7 | المتجهات في المستوى الإحداثي

انتبه!

خطأ شائع في التمرين 59، راقب الطلاب الذين لا يقدمون رسمًا دقيقًا للحالة. واقترح أن يبدأ الطلاب بتسمية الشمال والجنوب والشرق والغرب في رسمهم التخطيطي.

4 التقويم

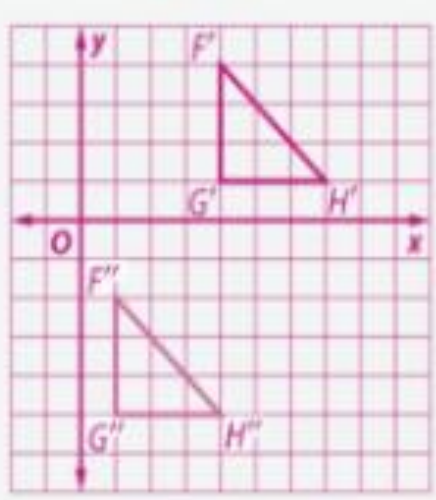
حصاد الأمس كلّف الطلاب بشرح الطريقة التي ساعدهم بها درس الأمس عن المتجهات الهندسية في درس اليوم عن المتجهات الجبرية.

إجابات إضافية

57. الإجابة النموذجية: كلا المتجهين لهما الطول والاتجاه نفسه، ولذلك فهما متكافئان.

59a. الإجابة النموذجية:

60b.



67. الإجابة النموذجية: إذا كانت نقطة البداية لمتجه (a, b) وكان طول المتجه m، فإن المحل الهندسي لنقطة النهاية (x, y) هو النقاط التي تحقق المعادلة $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=m$

مراجعة شاملة

74. **الألعاب** يسحب فهد لعبة من خلال بذل قوة مقدارها 1.5 نيوتن على خيط مربوط باللعبة.

a. يصنع الخيط زاوية 52° مع الأرض. أوجد المركبتين الأفقية والرأسية للقوة. ≈ 0.92 N, ≈ 1.18 N

b. إذا رفع فهد الخيط بحيث يصنع زاوية 78° مع الأرض، فما مقداري المركبتين الأفقية والرأسية للقوة؟ ≈ 0.31 N, ≈ 1.47 N

اكتب كل زوج من المعادلات الوسيطية في صورة متعامدة.

75. $y = t^2 + 2, x = 3t - 6$ $y = \frac{x^2}{9} + \frac{4x}{3} + 6$

76. $y = t^2 - 5, x = 2t + 8$ $y = \frac{x^2}{4} - 4x + 11$

77. $y = 7t, x = t^2 - 1$ $y = \pm 7\sqrt{x+1}$

78. **المظلات** مظلة شاطئ لها قوس على شكل قطع مكافئ. اكتب معادلة لتمثيل القوس، مع افتراض أن نقطة الأصل والرأس عند نقطة التقاء عمود وقماش المظلة. عبّر عن y بدلالة x. $y = -\frac{2}{27}x^2$

حلل كل تعبير إلى كسور جزئية.

79. $\frac{5z-11}{2z^2+z-6}$ $\frac{3}{z+2} - \frac{1}{2z-3}$

80. $\frac{7x^2+18x-1}{(x^2-1)(x+2)}$ $\frac{6}{x+1} - \frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-1}$

81. $\frac{9-9x}{x^2-9}$ $\frac{-6}{x+3} + \frac{-3}{x-3}$

أثبت صحة كل متطابقة.

82. $\sin(\theta + 180°) = -\sin\theta$

83. $\sin(60° + \theta) + \sin(60° - \theta) = \sqrt{3}\cos\theta$

82–83. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

عبّر عن كل لوغاريتم بدلالة ln 3 وln 7 .

84. $\ln 189$ $3\ln 3 + \ln 7$

85. $\ln 5.\overline{4}$ $2\ln 7 - 2\ln 3$

86. $\ln 441$ $2\ln 3 + 2\ln 7$

87. $\ln \frac{9}{343}$ $2\ln 3 - 3\ln 7$

أوجد كل $f(c)$ باستخدام التعويض التركيبي.

88. $f(x) = 6x^6 - 9x^4 + 12x^3 - 16x^2 + 8x + 24; c = 6$ 270,360

89. $f(x) = 8x^5 - 12x^4 + 18x^3 - 24x^2 + 36x - 48, c = 4$ 5984

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

90. SAT/ACT إذا كان $PR = RS$، فما مساحة المثلث PRS؟ B

A $9\sqrt{2}$
B $9\sqrt{3}$
C $18\sqrt{2}$
D $18\sqrt{3}$
E $36\sqrt{3}$

91. **مراجعة** صنع فالح لعبة احتفالاً بتخرج أخته الصغيرة. لوحة اللعب عبارة عن دائرة مقسمة بالتساوي إلى 8 قطاعات. إذا كان نصف قطر الدائرة 18 بوصة، فما المساحة التقديرية للقطاع؟ H

F 4 in^2
G 32 in^2
H 127 in^2
J 254 in^2

92. المسعفون ينقل إبراهيم وإسماعيل أحد الأشخاص على نقالة. يدفع إبراهيم النقالة من الخلف بقوة 135 نيوتن بزاوية 58° مع المركبة الأفقية، بينما يسحب إسماعيل النقالة من الأمام بقوة 214 نيوتن بزاوية 43° مع المركبة الأفقية. ما مقدار القوة الأفقية المبذولة على النقالة؟ A

A 228 نيوتن
B 260 نيوتن
C 299 نيوتن
D 346 نيوتن

93. **مراجعة** أوجد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها $(x-4)^2 + y^2 - 16 = 0$ H

F $C(-4, 0)$، $r =$ 4 وحدات
G $C(-4, 0)$، $r =$ 16 وحدة
H $C(4, 0)$، $r =$ 4 وحدات
J $C(4, 0)$، $r =$ 16 وحدة

التدريس المتمايز BL

الإثراء كلّف الطلاب بحل المسألة التالية.

يقوم مزارع وجاره بإزالة صخرة كبيرة من الحقل فيقومان بجر الصخرة باستخدام حبلين مربوطين بها بحيث يصنع الحبلا ن زاوية محصورة بينهما قياسها 35°. فإذا كان المزارع يقوم بالجر مستخدمًا قوة مقدارها 105 نيوتن ويقوم جاره بالجر بقوة 95 نيوتن، فما مقدار القوة المبذولة على الصخرة واتجاهها؟ 190.8 نيوتن بزاوية قياسها 6.16° بالقوة التي مقدارها 105 نيوتن

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 7-3 إيجاد أطوال المتجهات الجبرية وإجراء العمليات عليها.

بعد الدرس 7-3 إيجاد حاصل الضرب النقطي لمتجهين، واستخدام حاصل الضرب النقطي لإيجاد قياس الزاوية المحصورة بينهما. وإيجاد مسقط أحد المتجهين على الآخر.

بعد الدرس 7-3 استخدام المتجهات في الفضاء الإحداثي ثلاثي الأبعاد.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة قسم **لماذا** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- انظر إلى الصورة الواردة في قسم *لماذا*. كيف يعلم الأشخاص الذين يدفعون السيارة أنهم بذلوا شغلاً؟ إذا تحركت السيارة، فقد بذلوا شغلاً.

7-3 نواتج الضرب النقطي ومساقط المتجهات

:: السابق

- قمت بإيجاد مقادير المتجهات الجبرية وإجراء العمليات عليها.

:: الحالي

1. إيجاد ناتج الضرب النقطي لمتجهين، واستخدام ناتج الضرب النقطي لإيجاد الزاوية بينهما.
2. إيجاد مسقط متجه على آخر.

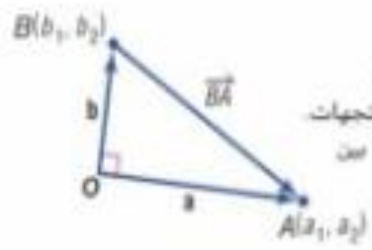
:: لماذا؟

- كلمة الشغل يمكن أن يكون لها معانٍ مختلفة في الحياة اليومية. ولكن في الفيزياء، تعريفها محدد للغاية. الشغل هو مقدار القوة المبذولة على جسم مضروبة في المسافة التي يتحرك الجسم خلالها بالتوازي مع هذه القوة. يمكن كذلك حساب الشغل، مثل ذلك المبذول لدفع سيارة لمسافة محددة، باستخدام عملية على متجه تُسمى ناتج الضرب النقطي.

المفردات الجديدة

ناتج الضرب النقطي dot product
متعامد orthogonal
مسقط المتجه vector projection
الشغل work

1 ناتج الضرب النقطي في الدرس 7-2، درست عمليتي جمع المتجهات وضربها في كمية عددية. في هذا الدرس، سوف تستخدم عملية ثالثة على المتجهات. فكر في متجهين متعامدين في الوضع القياسي **a** و **b**. افترض أن $\overline{BA}$ هو المتجه بين نقطتي نهايتهما كما هو موضح بالشكل. من خلال نظرية فيثاغورس، تعلم أن



$$|\overline{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$$

باستخدام تعريف مقدار متجه، يمكننا إيجاد $|\overline{BA}|^2$.

$$|\overline{BA}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$ تعريف مقدار متجه

$$|\overline{BA}|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$$ قم بتربيع كل طرف.

$$|\overline{BA}|^2 = a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2$$ اكتب الصيغة الموسعة لكل مربع ذي حدين.

$$|\overline{BA}|^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$$ جمّع الحدود التربيعية.

$$|\overline{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$$ $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ إذًا $|\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$ و $|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$، إذًا $|\mathbf{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2$.

لاحظ أن التعبيرين $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$ و $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ متكافئان فقط في حالة $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. التعبير $a_1b_1 + a_2b_2$ يُسمى **ناتج الضرب النقطي** لـ **a** و **b**. يُشار إليهما بالصورة **a . b** ويكتبان بالصورة a نقطة b.

المفهوم الأساسي ناتج الضرب النقطي للمتجهات في مستوى

ناتج الضرب النقطي لـ $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ يعرف على أنه $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

لاحظ أنه بخلاف جمع المتجهات وضربها في كمية عددية، ناتج الضرب النقطي لمتجهين ينتج كمية عددية، وليس متجهًا. كما هو موضح أعلاه، يكون المتجهان غير الصفريين متعامدين فقط إذا كان ناتج الضرب النقطي لهما يساوي 0. إذا كان ناتج الضرب النقطي لمتجهين يساوي 0، فيقال أنهما **متعامدان**.

المفهوم الأساسي المتجهات المتعامدة

يكون المتجهان **a** و **b** متعامدين فقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

المصطلحان متعامد وعمودي لهما المعنى ذاته بشكل أساسي إلا إذا كان **a** أو **b** هو المتجه الصفري. المتجه الصفري متعامد على أي متجه **a**، حيث $\langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle 0, 0 \rangle = 0a_1 + 0a_2$ أو 0. على الرغم من ذلك، حيث إن المتجه الصفري ليس له مقدار أو اتجاه، فلا يمكن أن يكون متعامدًا على **a**.

مثال 1 إيجاد ناتج الضرب النقطي لتحديد المتجهات المتعامدة

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثم حدّد ما إذا كان u و v متعامدين.

a. $\mathbf{u} = \langle 3, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2\rangle$

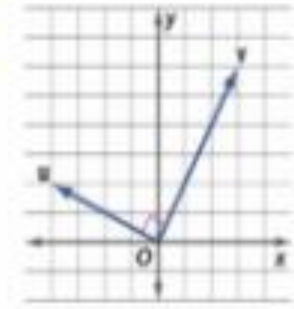
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(-4) + 6(2)$
$= 0$

حيث إن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$، فإن **u** و **v** متعامدان كما هو موضح بالشكل 7.3.1.

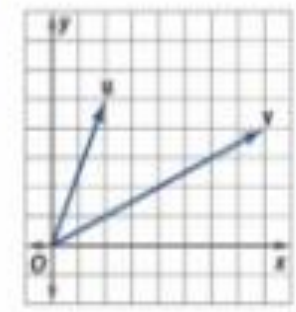
b. $\mathbf{u} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 4\rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2(8) + 5(4)$
$= 36$

حيث إن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$، فإن **u** و **v** غير متعامدين كما هو موضح بالشكل 7.3.2.



الشكل 7.3.1



الشكل 7.3.2

تمرين موجّه

1A. $\mathbf{u} = \langle 3, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1\rangle$ **−17؛ غير متعامدين**

1B. $\mathbf{u} = \langle -2, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, -6\rangle$ **0؛ متعامدان**

نواتج الضرب النقطي لها الخواص التالية.

المفهوم الأساسي خواص ناتج الضرب النقطي

إذا كان u و v و w متجهات و k كمية عددية، فإن الخواص التالية متحققة.

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$	خاصية التبديل
$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$	خاصية التوزيع
$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$	خاصية الضرب في كمية عددية
$\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$	خاصية ناتج الضرب النقطي للمتجهات الصفرية
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$	العلاقة بين ناتج الضرب النقطي ومقدار المتجه

البرهان

البرهان $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

افترض أن $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$.

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2$ ناتج الضرب النقطي

$= \left(\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)}\right)^2$ اكتب في صورة مربع الجذر التربيعي لـ $u_1^2 + u_2^2$

$= \lvert\mathbf{u}\rvert^2$ $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \lvert\mathbf{u}\rvert$

ستثبت أولاً الخواص الثلاث في التمارين 70-72.

قراءة في الرياضيات
نواتج الضرب الداخلية ونواتج ضرب كمية عددية ناتج الضرب النقطي يُسمى أيضًا ناتج الضرب الداخلي أو ناتج ضرب كمية عددية.

مثال 2 استخدام ناتج الضرب النقطي لإيجاد المقدار

استخدم ناتج الضرب النقطي لإيجاد مقدار $\mathbf{a} = \langle -5, 12\rangle$.

حيث إن $\lvert\mathbf{a}\rvert^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$، إذًا $\lvert\mathbf{a}\rvert = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.

$\lvert\langle -5, 12\rangle\rvert = \sqrt{\langle -5, 12\rangle \cdot \langle -5, 12\rangle}$ $\mathbf{a} = \langle -5, 12\rangle$

$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$ بسّط.

تمرين موجّه

استخدم ناتج الضرب النقطي لإيجاد مقدار المتجه المذكور.

2A. $\mathbf{b} = \langle 12, 16\rangle$ **20**

2B. $\mathbf{c} = \langle -1, -7\rangle$ **$5\sqrt{2} = 7.07$**

الزاوية θ بين المتجهين غير الصفريين **a** و **b** هي الزاوية المناظرة بين هذين المتجهين عند وضعهما في الوضع القياسي، كما هو موضح. يتم قياس هذه الزاوية دائمًا بحيث $0° \leq \theta \leq 180°$ أو $0 \leq \theta \leq \pi$. يمكن استخدام ناتج الضرب النقطي لإيجاد الزاوية بين متجهين غير صفريين.

- لماذا يُعد الشغل بمثابة عملية نقل طاقة؟ لأنه أثناء بذل الشغل على جسم ما، تنتقل الطاقة إلى الجسم وتتسبب في حركته.
- إذا دفع أولئك الأشخاص أنفسهم السيارة بقوة أكبر وتحركت السيارة لمسافة أبعد، فهل يكونون بذلوا بذلك مزيدًا من الشغل أم شغلًا أقل؟ مزيد من الشغل
- هل ينطوي حمل كتاب بثبات على مدى الذراع أي شغل؟ اشرح. لا؛ بما أنه لا يتم تحريك الكتاب فلا يوجد شغل مبذول.

1 حاصل الضرب التقاطعي

يوضح المثال 1 طريقة إيجاد حاصل الضرب التقاطعي لمتجهين وتحديد ما إذا كان المتجهان متعامدين أم لا. ويوضح **المثال 2** طريقة إيجاد طول المتجه. و**المثال 3** يوضح طريقة إيجاد الزاوية المحصورة بين متجهين.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد حاصل الضرب النقطي لكل من **u** و **v**. ثم حدد ما إذا كان **u** و **v** متعامدين أم لا.

a. $\mathbf{u} = \langle -3, 4\rangle$، $\mathbf{v} = \langle 3, 6\rangle$
15؛ غير متعامدين

b. $\mathbf{u} = \langle 2, 7\rangle$، $\mathbf{v} = \langle -14, 4\rangle$
0؛ متعامدان

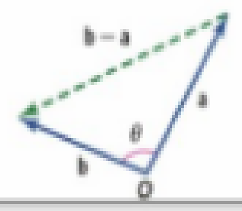
2 استخدم حاصل الضرب النقطي لإيجاد طول $\mathbf{a} = \langle -6, 5\rangle$.
$\sqrt{61}$ أو حوالي 7.81

إرشاد للمعلمين الجدد

حاصل الضرب النقطي اضرب مثالاً على جمع المتجهات والضرب القياسي وحاصل الضرب النقطي لمتجهين. واسأل الطلاب كيف تختلف الإجابة على حاصل الضرب النقطي عن الإجابتين الأخريين. ينبغي على الطلاب ملاحظة أن حاصل الضرب النقطي لمتجهين يكون كمية عددية وليس متجهًا.

المفهوم الأساسي الزاوية بين متجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهين غير الصفريين **a** و **b**، فإن $\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$.



نصيحة دراسية

المتجهات الموازية والمتعامدة يكون المتجهان متعامدين إذا كانت الزاوية بينهما 90°. يكون المتجهان متوازيين إذا كانت الزاوية بينهما 0° أو 180°.

البرهان

فكر في المثلث المحدد بواسطة **a** و **b** و **b − a** في الشكل أعلاه.

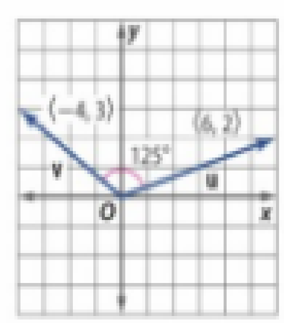
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = \lvert\mathbf{b}-\mathbf{a}\rvert^2$	قانون جيب الـ cosine
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$	$\lvert\mathbf{u}\rvert^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$	خاصية التوزيع لنواتج الضرب النقطي
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \lvert\mathbf{a}\rvert^2$	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$
$-2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = -2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	اطرح $\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2$ من كل طرف.
$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert}$	اقسم كل طرف على $-2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert$.

مثال 3 إيجاد الزاوية بين متجهين

أوجد الزاوية θ بين المتجهين u و v مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من الدرجة.

a. $\mathbf{u} = \langle 6, 2\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -4, 3\rangle$

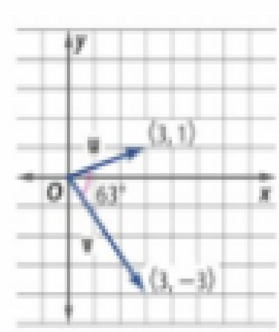
$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{u}\rvert\lvert\mathbf{v}\rvert}$	الزاوية بين متجهين
$\cos\theta = \frac{\langle 6, 2\rangle\cdot\langle -4, 3\rangle}{\lvert\langle 6, 2\rangle\rvert\,\lvert\langle -4, 3\rangle\rvert}$	$\mathbf{u} = \langle 6, 2\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -4, 3\rangle$
$\cos\theta = \frac{-24 + 6}{\sqrt{40}\sqrt{25}}$	أوجد القيمة.
$\cos\theta = \frac{-9}{5\sqrt{10}}$	بسّط.
$\theta = \cos^{-1}\frac{-9}{5\sqrt{10}} = 124.7°$ تقريبًا	أوجد θ.



يساوي قياس الزاوية بين **u** و **v** حوالي 124.7°.

b. $\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$

$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{u}\rvert\lvert\mathbf{v}\rvert}$	الزاوية بين متجهين
$\cos\theta = \frac{\langle 3, 1\rangle\cdot\langle 3, -3\rangle}{\lvert\langle 3, 1\rangle\rvert\,\lvert\langle 3, -3\rangle\rvert}$	$\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$
$\cos\theta = \frac{9 + (-3)}{\sqrt{10}\sqrt{18}}$	أوجد القيمة.
$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$	بسّط.
$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = 63°.4$ تقريبًا	أوجد θ.



يساوي قياس الزاوية بين **u** و **v** حوالي 63.4°.

تمرين موجّه

3A. $\mathbf{u} = \langle -5, -2\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle 4, 4\rangle$ **156.8°**

3B. $\mathbf{u} = \langle 9, 5\rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -6, 7\rangle$ **101.5°**

مثال إضافي

3 أوجد قياس الزاوية θ المحصورة بين المتجهين **u** و **v** مقربًا لأقرب جزء من عشرة من الدرجة.

a. $\mathbf{u} = \langle -3, -5\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 2, -3\rangle$ **64.7°**

b. $\mathbf{u} = \langle 1, -4\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 2, 6\rangle$ **147.5°**

التدريس باستخدام التكنولوجيا

كاميرا المستندات اختر عدة طلاب لحل الأمثلة وشرح طريقة استخدام معكوس جيب التمام لإيجاد الزاوية المحصورة بين متجهين.

التركيز على محتوى الرياضيات

المتجه الصفري المتجه الصفري يماثل الصفر في عمليتي الضرب النقطي وجمع المتجهات. وحاصل ضرب المتجه الصفري $\langle 0, 0\rangle$ في أي متجه آخر هي 0 ، ويكون مجموع أي متجه مع المتجه الصفري هو المتجه المعطى. بعبارة أخرى، يكون المتجه الصفري هو العنصر المحايد في جمع المتجهات.

إرشاد للمعلمين الجدد

صورة بديلة لحاصل الضرب النقطي يؤدي قانون الزاوية المحصورة بين متجهين إلى الطريقة البديلة التالية لحساب حاصل الضرب النقطي.

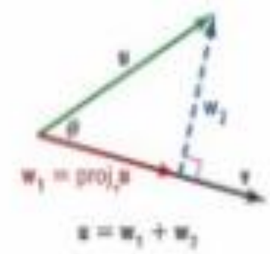
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

يمكن استخدام هذه الصورة لحساب حاصل الضرب النقطي بين **b** و **a** عندما يكون طول المتجهين وقياس الزاوية المحصورة بينهما معلومين.

2 مسقط المتجه

مسقط المتجه في الدرس 7-1، تعلمت أنه يمكن تحليل متجه إلى مركبتين متعامدتين. بينما تكون هذه المركبات أفقية ورأسية في كثير من الأحيان، لكن من المفيد أحيانًا أن تكون إحداهما موازية للأخرى.

المفهوم الأساسي مسقط u على v



افترض أن **u** و **v** متجهان غير صفريين، وافترض أن $\mathbf{w}_1$ و $\mathbf{w}_2$ مركبتي المتجه **u** بحيث $\mathbf{w}_1$ توازي **v** كما هو موضح. إذًا، المتجه $\mathbf{w}_1$ يُسمى **مسقط المتجه** u على v، المشار إليه بالعبارة $proj_v u$، و

$$proj_v \mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$

نصيحة دراسية
المركبة المتعامدة المتجه $\mathbf{w}_2$ يُسمى مركبة u المتعامدة على v.

البرهان

حيث إن $proj_v u$ يوازي v، فيمكن كتابته في صورة مضاعف كمية عددية لـ v. كمضاعف كمية عددية لمتجه الوحدة $\mathbf{v}_u$ بنفس اتجاه v، $proj_v u = |\mathbf{w}_1|\, \mathbf{v}_u$. استخدم المثلث القائم الزاوية المكون بواسطة $\mathbf{w}_1$ و $\mathbf{w}_2$ و u ونسبة جيب التمام لإيجاد تعبير لـ $|\mathbf{w}_1|$.

$\cos\theta = \frac{|\mathbf{w}_1|}{|\mathbf{u}|}$	نسبة الـ cosine
$|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta = \cancel{|\mathbf{u}|}|\mathbf{v}|\frac{|\mathbf{w}_1|}{\cancel{|\mathbf{u}|}}$	اضرب كل طرف في الكمية العددية $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|$
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}||\mathbf{w}_1|$	$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$ إذًا $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$
$|\mathbf{w}_1| = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$	أوجد $|\mathbf{w}_1|$

الآن استخدم $proj_v u = |\mathbf{w}_1|\, \mathbf{v}_u$ لإيجاد $proj_v u$ في صورة مضاعف كمية عددية لـ v.

$proj_v \mathbf{u} = |\mathbf{w}_1|\, \mathbf{v}_u$	
$= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$	$|\mathbf{w}_1| = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ و $\mathbf{v}_u = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$
$= \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$	اضرب البطادي

مثال 4 إيجاد مسقط u على v

أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle 3, 2\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 5, -5\rangle$. ثم اكتب u باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه u على v.

الخطوة 1 أوجد مسقط u على v.

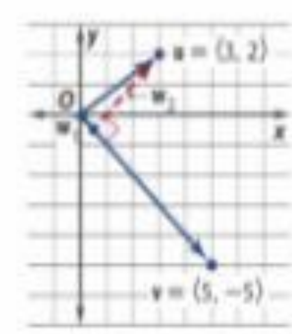
$$proj_v \mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$
$$= \frac{\langle 3, 2\rangle \cdot \langle 5, -5\rangle}{|\langle 5, -5\rangle|^2}\langle 5, -5\rangle$$
$$= \frac{5}{50}\langle 5, -5\rangle$$
$$= \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

الخطوة 2 أوجد $\mathbf{w}_2$.

حيث $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$، فإن $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$.

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$$
$$= \mathbf{u} - proj_v \mathbf{u}$$
$$= \langle 3, 2\rangle - \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$
$$= \left\langle \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle$$

إذًا، $proj_v u$ هو $\mathbf{w}_1 = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ كما هو موضح بالشكل 7.3.5، و $\mathbf{u} = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle + \left\langle \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle$.



الشكل 7.3.5

تمرين موجّه

$$proj_v \mathbf{u} = \left\langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89}\right\rangle;\ \mathbf{u} = \left\langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89}\right\rangle + \left\langle -\frac{55}{89}, \frac{88}{89}\right\rangle$$

4. أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle 1, 2\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 8, 5\rangle$. ثم اكتب u باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه u على v.

2 مسقط المتجهات

يوضح المثالان 5 و 4 طريقة إيجاد مسقط متجه على الآخر. ويوضح **المثال 6** طريقة استخدام مسقط المتجه لإيجاد القوة. أما **المثال 7** فيوضح طريقة استخدام مسقط المتجه لحساب الشغل.

مثال إضافي

4 أوجد مسقط المتجه $\mathbf{u} = \langle -1, 5\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 4, 6\rangle$. ثم اكتب **u** على هيئة مجموع متجهين متعامدين، أحدهما مسقط المتجه **u** على **v**.

$proj_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle$; $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle + \langle -3, 2\rangle$

أمثلة إضافية

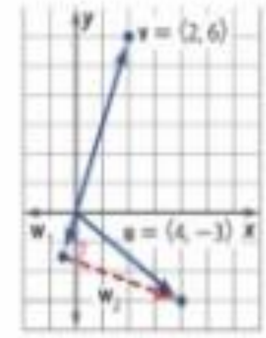
5 أوجد مسقط المتجه $\mathbf{u} = \langle 4, 2\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle -3, 5\rangle$. ثم اكتب $\mathbf{u}$ على هيئة مجموع متجهين متعامدين، أحدهما مسقط المتجه $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.

$\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{17}, -\frac{5}{17} \right\rangle;$

$\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{17}, -\frac{5}{17} \right\rangle + \left\langle \frac{65}{17}, \frac{39}{17} \right\rangle$

6 الصخور تستقر صخرة وزنها 10,000 رطل على جبل بميل °60. إذا تجاهلنا قوة الاحتكاك، فما مقدار القوة اللازمة للحول دون تدحرج الصخرة من الجبل؟ حوالي 8660.3 lb

بينما مسقط **u** على **v** متجه يوازي **v**. لا يكون لهذا المتجه بالضرورة نفس اتجاه **v**. كما هو موضح في المثال التالي.



الشكل 7.3.6

مثال 5 المسقط في عكس اتجاه v

أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle 4, -3\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 2, 6\rangle$. ثم اكتب u باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه u على v.

لاحظ أن الزاوية بين **u** و **v** منفرجة. إذًا مسقط **u** على **v** يقع على المتجه المعاكس لـ **v** أو **v**−. كما هو موضح بالشكل 7.3.6

الخطوة 1 أوجد مسقط **u** على **v**.

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$

$$= \frac{\langle 4, -3\rangle \cdot \langle 2, 6\rangle}{|\langle 2, 6\rangle|^2}\langle 2, 6\rangle$$

$$= \frac{-10}{40}\langle 2, 6\rangle = \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$$

الخطوة 2 أوجد $\mathbf{w}_2$.

حيث $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$، $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$ أو $\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.

$$\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \langle 4, -3\rangle - \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$$

إذًا $\mathbf{w}_1 = \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$,$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$، $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle + \left\langle \frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$.

تمرين موجّه $\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \left\langle -\frac{84}{37}, -\frac{14}{37}\right\rangle; \mathbf{u} = \left\langle -\frac{84}{37}, -\frac{14}{37}\right\rangle + \left\langle -\frac{27}{37}, \frac{162}{37}\right\rangle$

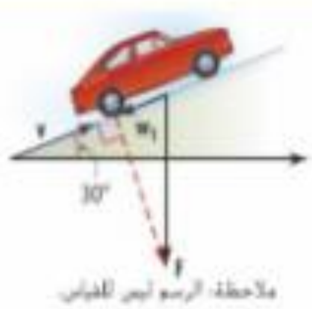
5. أوجد مسقط $\mathbf{u} = \langle -3, 4\rangle$ على $\mathbf{v} = \langle 6, 1\rangle$. ثم اكتب **u** باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه **u** على **v**.

إذا كان المتجه **u** يمثل قوة، فإن $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ يمثل تأثير تلك القوة في اتجاه **v**. على سبيل المثال، إذا قمت بدفع صندوق لأعلى التل (في اتجاه **v**) بالقوة **u** (الشكل 7.3.7). القوة المؤثرة هي دفع المركبة في اتجاه **v**، $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.

الشكل 7.3.7

مثال 6 من الحياة اليومية استخدام مسقط متجه لإيجاد قوة

السيارات تقف سيارة تزن 3000 رطل على تل مائل بزاوية °30 كما هو موضح. إذا تم تجاهل قوة الاحتكاك، فما القوة اللازمة لمنع تدحرج السيارة لأسفل التل؟



ملاحظة: الرسم ليس للقياس.

وزن السيارة هو القوة المبذولة بفعل الجاذبية. $\mathbf{F} = \langle 0, -3000\rangle$. لإيجاد القوة $-\mathbf{w}_1$ اللازمة لمنع تدحرج السيارة لأسفل التل، أسقط **F** على متجه الوحدة **v** في اتجاه جانب التل.

الخطوة 1 أوجد متجه الوحدة **v** في اتجاه التل.

$$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}|\cos\theta, |\mathbf{v}|\sin\theta\rangle \qquad \text{الصورة المركبة لـ v بدلالة } |\mathbf{v}| \text{ و } \theta$$

$$= \langle 1\cos 30°, 1\sin 30°\rangle = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \qquad \theta = 30 \text{ و } |\mathbf{v}| = 1$$

الخطوة 2 أوجد $\mathbf{w}_1$، مسقط **F** على متجه الوحدة **v**، $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{F}$.

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{F} = \left(\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v} \qquad \text{مسقط F على v}$$

$$= (\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v} \qquad \text{حيث v هو متجه وحدة، } |\mathbf{v}| = 1 \text{ فقط}$$

$$= \left(\langle 0, -3000\rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle\right)\mathbf{v} \qquad \mathbf{F} = \langle 0, -3000\rangle \text{ و } \mathbf{v} = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$$

$$= -1500\mathbf{v} \qquad \text{أوجد ناتج الضرب النقطي}$$

القوة اللازمة هي $-\mathbf{w}_1 = -(-1500\,\mathbf{v})$ أو $1500\mathbf{v}$. حيث **v** هو متجه وحدة، يعني هذا أن هذه القوة مقدارها 1500 رطل وفي اتجاه جانب التل.

تمرين موجّه تقريبًا 108.3 lb

6. **التزلج** تجلس نسرين على زلاجة على جانب تل مائل بزاوية °60. ما القوة اللازمة لمنع انزلاق الزلاجة لأسفل التل إذا علمت أن وزن نسرين والزلاجة 125 رطلًا؟

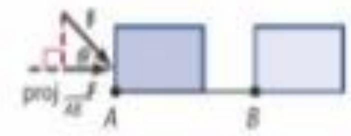
التدريس المتمايز AL

المتعلمون بالطريقة السمعية قسّم الطلاب في مجموعات صغيرة واطلب منهم شرح طريقة حل تمارين من الحياة اليومية، كما المثال 6، باستخدام إستراتيجية التفكير بصوت عالٍ. بعبارة أخرى، كلّف الطلاب بشرح عمليات التفكير التي يستخدموها أثناء الحل، بما في ذلك طريقة استخدام كل معلومة واردة بالمسألة لرسم الحل.

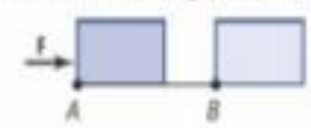
مثال إضافي

7 **جز الحشائش** يدفع شخص ما جزازة أسطوانية بقوة ثابتة مقدارها 40 نيوتن بزاوية ثابتة قياسها °45. أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك الجزازة 12 مترًا. حوالي 339.4 جول

من التطبيقات الأخرى لمسقط المتجه حساب الشغل المبذول بواسطة قوة. فكر في قوة ثابتة **F** تؤثر على جسم لتحريكه من النقطة A إلى النقطة B كما هو موضح بالشكل 7.3.8. إذا كان **F** يوازي $\overline{AB}$، فإن **الشغل** W المبذول بواسطة **F** هو مقدار القوة في المسافة من A إلى B أو $W = |\mathbf{F}||\overline{AB}|$.



الشكل 7.3.9



الشكل 7.3.8

لحساب الشغل المبذول بواسطة قوة ثابتة **F** في أي اتجاه لتحريك جسم من النقطة A إلى B، كما هو موضح بالشكل 7.3.9 يمكنك استخدام مسقط المتجه **F** على $\overline{AB}$.

$W = |\text{proj}_{\overline{AB}}\mathbf{F}|\,|\overline{AB}|$ صيغة المسقط للشغل

$= |\mathbf{F}|(\cos\theta)\,|\overline{AB}|$ $\cos\theta = \frac{|\text{proj}_{\overline{AB}}\mathbf{F}|}{|\mathbf{F}|}$ إذًا $|\text{proj}_{\overline{AB}}\mathbf{F}| = |\mathbf{F}|\cos\theta$

$= \mathbf{F}\cdot\overline{AB}$ $\cos\theta = \frac{\mathbf{F}\cdot\overline{AB}}{|\mathbf{F}||\overline{AB}|}$ إذًا $|\mathbf{F}||\overline{AB}|\cos\theta = \mathbf{F}\cdot\overline{AB}$

إذًا، يمكن حساب هذا الشغل من خلال إيجاد ناتج الضرب النقطي للقوة الثابتة **F** والمسافة الموجهة $\overline{AB}$.

مثال 7 من الحياة اليومية حساب الشغل

المساعدة على جانب الطريق يدفع شخص سيارة بقوة ثابتة 120 نيوتن بزاوية ثابتة °45 كما هو موضح. أوجد مقدار الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة مسافة 10 أمتار.

الخطوة 1 استخدم صيغة المسقط للشغل.

مقدار مسقط **F** على $\overline{AB}$ هو $|\mathbf{F}|\cos\theta = 120$ $\cos 45°$. مقدار المسافة الموجهة $\overline{AB}$ هو 10.

$W = |\text{proj}_{\overline{AB}}\mathbf{F}||\overline{AB}|$ صيغة المسقط للشغل

$= (120\cos 45°)(10) = 848.5$ تقريبًا التعويض

الخطوة 2 استخدم صيغة ناتج الضرب النقطي للشغل.

الصورة المركبة لمتجه القوة **F** بدلالة المقدار وزاوية الاتجاه المعلومتين هي $\langle 120\cos(-45°), 120\sin(-45°)\rangle$. الصورة المركبة للمسافة الموجهة لحركة السيارة هي $\langle 10, 0\rangle$.

$W = \mathbf{F}\cdot\overline{AB}$ صيغة ناتج الضرب النقطي للشغل

$= \langle 120\cos(-45°), 120\sin(-45°)\rangle \cdot \langle 10, 0\rangle$ التعويض

$= [120\cos(-45°)](10) = 848.5$ تقريبًا ناتج الضرب النقطي

إذًا، يبذل الشخص شغلاً مقداره 848.5 جول تقريبًا لدفع السيارة.

تمرين موجّه

7. **التنظيف** يدفع فارس مكنسة كهربائية بقوة 85 رطلاً. مقبض المكنسة يصنع زاوية °60 مع الأرضية. ما مقدار الشغل، بالقدم-رطل، الذي يبذله عند دفع المكنسة لمسافة 6 أقدام؟ **255 قدم-رطل**

نصيحة دراسية

وحدات الشغل يتم قياس الشغل بالقدم-رطل في النظام العرفي للقياس وبالنيوتن-متر (N·m) أو الجول (J) في النظام المتري.

423

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-36 للتحقق من الاستيعاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع بالنسبة للتمارين 16-23 قد يرتكب الطلاب أخطاءً بسيطة عند حساب قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين. اقترح على كل طالب أن يقارن إجابته برسم المتجهات على مستوى إحداثي لتحديد ما إذا كانت الزاوية التي تكونت حادة أم منفرجة.

تحليل الخطأ بالنسبة للتمرين 66، اقترح على الطلا ب الرجوع إلى خصائص حاصل الضرب النقطي في مربع المفهوم الأساسي بصفحة 501. وشجع الطلاب على التحقق من القيم الحقيقية للمتجهات **w** و **v** و **u**. وإذا توصل الطلا ب إلى مجموعة واحدة من قيم المتجهات التي تثبت عدم جدوى خاصية التجميع، فإن خاصية التجميع لا تصلح إذًا لحاصل الضرب النقطي.

تمارين

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثمّ حدّد ما إذا كان u و v متعامدين. (مثال 1)

1. $\mathbf{u} = \langle 3, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 2\rangle$ **8؛ غير متعامدين**
2. $\mathbf{u} = \langle -10, -16\rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 5\rangle$ **0؛ متعامدان**
3. $\mathbf{u} = \langle 9, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3\rangle$ **0؛ متعامدان**
4. $\mathbf{u} = \langle 4, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 5\rangle$ **8؛ غير متعامدين**
5. $\mathbf{u} = \langle 1, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 8\rangle$ **‎-30، غير متعامدين**
6. $\mathbf{u} = 11\mathbf{i} + 7\mathbf{j}; \mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$ **0؛ متعامدان**
7. $\mathbf{u} = \langle -4, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -2\rangle$ **8؛ غير متعامدين**
8. $\mathbf{u} = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}; \mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ **4؛ غير متعامدين**

9. **المستلزمات الرياضية** يوضح المتجه $\mathbf{u} = \langle 406, 297\rangle$ أعداد كرات السلة للرجال والنساء على التوالي في مخزون متجر مستلزمات رياضية. يوضح المتجه $\mathbf{v} = \langle 27.5, 15\rangle$ أسعار نوعي الكرات بالدرهم على التوالي. (مثال 1)
   a. أوجد ناتج الضرب النقطي $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. **15,620**
   b. فسر الناتج في سياق المسألة. **الإيرادات الإجمالية التي يمكن تحصيلها من بيع جميع كرات السلة هي AED 15,620.**

استخدم ناتج الضرب النقطي لإيجاد مقدار المتجه المذكور. (مثال 2)

10. $\mathbf{m} = \langle -3, 11\rangle$ $\sqrt{130} \approx 1.4$
11. $\mathbf{r} = \langle -9, -4\rangle$ $\sqrt{97} \approx 9.8$
12. $\mathbf{n} = \langle 6, 12\rangle$ $6\sqrt{5} \approx 13.4$
13. $\mathbf{v} = \langle 1, -18\rangle$ $5\sqrt{13} \approx 18.0$
14. $\mathbf{p} = \langle -7, -2\rangle$ $\sqrt{53} \approx 7.3$
15. $\mathbf{t} = \langle 23, -16\rangle$ $\sqrt{785} \approx 28.0$

أوجد الزاوية θ بين u و v لأقرب جزء من عشرة من الدرجة. (مثال 3)

16. $\mathbf{u} = \langle 0, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, -4\rangle$ **14.0°**
17. $\mathbf{u} = \langle 7, 10\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -4\rangle$ **100.0°**
18. $\mathbf{u} = \langle -2, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -10\rangle$ **164.7°**
19. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ **82.9°**
20. $\mathbf{u} = \langle -9, 0\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -1\rangle$ **45.0°**
21. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -7\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ **48.4°**
22. $\mathbf{u} = \langle 6, 0\rangle, \mathbf{v} = \langle -10, 8\rangle$ **141.3°**
23. $\mathbf{u} = -10\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{v} = 10\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ **159.1°**

24. **التخييم** انطلق عمر وعلي من موقع التخييم للبحث عن حطب. يمكن تمثيل المسار الذي اتخذه عمر بواسطة $\mathbf{u} = \langle 3, -5\rangle$. يمكن تمثيل المسار الذي اتخذه علي بواسطة $\mathbf{v} = \langle -7, 6\rangle$. أوجد الزاوية بين زوج المتجهات. (مثال 3) **161°.6 تقريبًا**

25-32. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

أوجد مسقط u على v. ثمّ اكتب u باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه u على v. (المثالان 4 ، 5)

25. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
26. $\mathbf{u} = \langle 5, 7\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 4\rangle$
27. $\mathbf{u} = \langle 8, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 1\rangle$
28. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$
29. $\mathbf{u} = \langle 2, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 8\rangle$
30. $\mathbf{u} = \langle -5, 9\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 4\rangle$
31. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - 8\mathbf{j}, \mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
32. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}, \mathbf{v} = 9\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

33. **العربة** يسحب عيسى أخته في عربة لأعلى منحدر صغير بميل 15°. إذا كان مجموع وزني أخت عيسى والعربة 78 رطلاً، فما القوة اللازمة لمنع تدحرجها لأسفل المنحدر؟ (مثال 6) **20.2 lb تقريبًا**

34. **الزحلوقة** تنزلق نجلاء لأسفل على زحلوقة ولكن توقفت عندما لاحظت طالبًا آخر يرقد مصابًا في أسفل الزحلوقة. ما القوة اللازمة لمنعها من الانزلاق لأسفل الزحلوقة إذا كانت زاوية الميل 53° ووزنها 62 رطلاً؟ (مثال 6) **49.5 lb تقريبًا**

35. **الفيزياء** يدفع علي برميل إنشاءات لأعلى منحدر طوله 1.5 متر لإدخاله في صندوق شاحنة. يستخدم قوة 534 نيوتن وزاوية المنحدر 25° مع المركبة الأفقية. ما مقدار الشغل بالجول الذي يبذله علي؟ (مثال 7) **801 جول**

36. **التسوق** تدفع سها عربة تسوق بقوة 125 نيوتن وزاوية انخفاض 52°. ما مقدار الشغل بالجول الذي ستبذله سها لو دفعت عربة التسوق لمسافة 200 متر؟ (مثال 7) **15,391.5 جول تقريبًا**

B

أوجد متجهًا متعامدًا لكل متجه. **37-40. تم توفير إجابات نموذجية.**

37. $\langle -2, -8\rangle$ **$\langle -12, 3\rangle$**
38. $\langle 3, 5\rangle$ **$\langle 10, -6\rangle$**
39. $\langle 7, -4\rangle$ **$\langle 8, 14\rangle$**
40. $\langle -1, 6\rangle$ **$\langle 6, 1\rangle$**

41. **الأراجيح** لأرجوحة متنزه ترفيهي دائرية، متجه الوضع **r** متعامد على متجه السرعة المماس **v** عند أي نقطة على الدائرة، كما هو موضح أدناه.

المشهد الأمامي — المشهد من الأعلى

a. إذا كان نصف قطر الأرجوحة 20 قدمًا وسرعتها ثابتة عند 40 قدمًا في الثانية، فاكتب صور مركبات متجه الوضع **r** ومتجه السرعة المماس **v** عندما تكون **r** بزاوية موجهة 35°. **$\langle 16.38, 11.47\rangle, \langle 22.94, -32.77\rangle$**

b. ما الطريقة التي يمكن استخدامها لإثبات أن متجه الوضع ومتجه السرعة من الجزء **a** متعامدان؟ وضّح أن المتجهين متعامدان. **ناتج الضرب النقطي؛ $(20 \cos 35°)(40 \cos 55°) + (20 \sin 35°)(-40 \sin 55°) = 0$**

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL OL BL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-36, 65-67, 69-91	1-35 فردي، 88-91	2-36، زوجي، 65-67، 69-87
OL ضمن المستوى	1-45 فردي, 46, 47-63 فردي، 64-67, 69-91	1-36, 88-91	37-67, 69-87
BL أعلى من المستوى	37-91		

إجابات إضافية

47. الإجابة النموذجية: بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$، فإن المتجهين متعامدان.

48. الإجابة النموذجية: باستخدام قانون الزاوية المحصورة بين متجهين، تكون $\theta = 167.5°$.

49. الإجابة النموذجية: باستخدام قانون الزاوية المحصورة بين متجهين، فإن $\cos \theta = -1$. قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين 180°، لأن كلا المتجهين في اتجاه معاكس.

50. الإجابة النموذجية: بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$، فإن المتجهين متعامدان.

65. الإجابة النموذجية: قد تنشأ جميع المتجهات الثلاثة من النقطة نفسها ولا تشكل مثلثًا على الإطلاق. في هذه الحالة، قد تكون الزاوية المحصورة بين **f** و **d** حادة أو قائمة أو منفرجة.

إذا علمت v و v • u، فأوجد u. 42–45. تم توفير إجابات نموذجية

42. $\mathbf{v} = \langle 3, -6\rangle$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 33$ $\mathbf{u} = \langle 5, -3\rangle$

43. $\mathbf{v} = \langle 4, 6\rangle$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 38$ $\mathbf{u} = \langle -1, 7\rangle$

44. $\mathbf{v} = \langle -5, -1\rangle$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -8$ $\mathbf{u} = \langle 1, 3\rangle$

45. $\mathbf{v} = \langle -2, 7\rangle$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -43$ $\mathbf{u} = \langle 4, -5\rangle$

46. **المدرسة** تسحب طالبة حقيبتها من صف الكيمياء إلى صف اللغة الإنجليزية بقوة 175 نيوتن.

a. إذا بذلت 3060 جول لسحب حقيبتها لمسافة 31 مترًا، فما زاوية القوة؟ **تقريبًا 55°.7**

b. إذا بذلت 1315 جول بزاوية 60°، فما مسافة سحب الحقيبة؟ **تقريبًا 15 m**

47–50. انظر الهامش للاطلاع على الشرح.

حدد ما إذا كان كل زوج من المتجهات متوازيًا أو متعامدًا أو ليس أيًا منهما. وضح استنتاجك.

47. $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 9, 8\rangle$ **متعامدان**

48. $\mathbf{u} = \langle -1, -4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, 6\rangle$ **ليس أيًا منهما**

49. $\mathbf{u} = \langle 5, 7\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -15, -21\rangle$ **متوازيان**

50. $\mathbf{u} = \langle \sec\theta, \csc\theta\rangle$, $\mathbf{v} = \langle \csc\theta, -\sec\theta\rangle$ **متعامدان**

أوجد الزاوية بين المتجهين بالراديان.

51. $\mathbf{u} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{j}$ $\frac{5\pi}{12}$

52. $\mathbf{u} = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\mathbf{j}$ $\frac{\pi}{12}$

53. $\mathbf{u} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\mathbf{j}$ $\frac{\pi}{2}$

54. $\mathbf{u} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\mathbf{j}$ $\frac{7\pi}{12}$

55. **الشغل** يرفع عدنان ابن أخيه الذي يزن 16 كيلوجرامًا لمسافة 0.9 متر. يمكن حساب قوة الوزن بالنيوتن باستخدام $F = mg$ حيث يمثل m الكتلة بالكيلوجرام هي g و 9.8 أمتار في الثانية المربعة. ما مقدار الشغل الذي بذله عدنان لرفع ابن أخيه؟ **تقريبًا 141.1 جول**

تم تحديد رؤوس مثلث على المستوى الإحداثي. أوجد مقاييس زوايا كل مثلث باستخدام المتجهات. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة.

56. $(2, 3), (4, 7), (8, 1)$ **37.9°, 60.3°, 81.9°**

57. $(-3, -2), (-3, -7), (3, -7)$ **39.8°, 50.2°, 90°**

58. $(-4, -3), (-8, -2), (2, 1)$ **17.0°, 30.7°, 132.3°**

59. $(1, 5), (4, -3), (-4, 0)$ **48.9°, 65.6°, 65.6°**

إذا علمت u و |v| و θ، الزاوية بين u و v، فأوجد القيم المحتملة لـ v. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

60. $\mathbf{u} = \langle 4, -2\rangle$, $|\mathbf{v}| = 10$, $45°$ $\langle 9.49, 3.17\rangle = \langle 3.16, -9.49\rangle$

61. $\mathbf{u} = \langle 3, 4\rangle$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{29}$, $121°$ $\langle -5.36, 0.55\rangle = \langle 2.03, -4.99\rangle$

62. $\mathbf{u} = \langle -1, -6\rangle$, $|\mathbf{v}| = 7$, $96°$ $\langle -6.75, 1.87\rangle = \langle 6.99, -0.42\rangle$

63. $\mathbf{u} = \langle -2, 5\rangle$, $|\mathbf{v}| = 12$, $27°$ $\langle -9.03, 7.90\rangle = \langle 1.09, 11.95\rangle$

64. **السيارات** تقف سيارة على سطح مائل بزاوية 9°. بافتراض أن القوتين الوحيدتين المؤثرتين على السيارة هما الجاذبية وقوة الضغط على المكابح ومقدارها 275 نيوتن، فكم تزن السيارة تقريبًا؟ **حوالي 1757.9 kg**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

65. **التبرير** حدّد إذا ما كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. اشرح. إذا كانت |d|، |e|، |f| تشكل ثلاثية فيثاغورس، والزاويتان بين d و e وبين e و f حادتان، إذًا يجب أن تكون الزاوية بين d و f قائمة. اشرح استنتاجك. **خطأ؛ انظر الهامش للاطلاع على الشرح.**

66. **تحليل الخطأ** يدرس محمود ومحمد خواص ناتج الضرب النقطي. يستنتج محمود أن ناتج الضرب النقطي يتسم بخاصية التجميع لأنه تبديلي، بمعنى أن $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$. يختلف محمد معه. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ وضّح استنتاجك. **محمد؛ الإجابة النموذجية: u X v كمية عددية، إذًا (u X v) X w غير محددة.**

67. **التبرير** حدّد إذا ما كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. إذا كان a و b متعامدين على v في المستوى، إذًا a و b متوازيان. اشرح استنتاجك. **خطأ؛ انظر الهامش للاطلاع على الشرح.**

68. **التحدي** إذا كان u و v متعامدين، فما مسقط u على v؟ **0**

69. **البرهان** برهن على أنه إذا كانت الزاوية بين u و v هي 90°، فإن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ باستخدام صيغة الزاوية بين المتجهات غير الصفرية. **انظر ملحق إجابات الوحدة 7.**

البرهان أثبت كل خاصية لناتج الضرب النقطي. افترض أن $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$، $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$، $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2\rangle$.

70. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

71. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

72. $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$

70–72. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

73. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيفية إيجاد ناتج الضرب النقطي لمتجهين غير صفريين. **انظر الهامش.**

إجابات إضافية

67. الإجابة النموذجية: إذا كان أي من a أو b متجهًا صفريًا، فسوف يكون ذلك المتجه عموديًا على v ، ولكن من غير الممكن أن يكون موازيًا للمتجه الآخر.

73. الإجابة النموذجية: بالنسبة إلى المتجهين غير الصفريين، $\langle a, b\rangle$ و $\langle c, d\rangle$ فإن حاصل الضرب النقطي $\langle a, b\rangle \cdot \langle c, d\rangle$ هو مجموع حواصل ضرب الإحداثيات x-c والإحداثيات y أو $ac + bd$.

مراجعة شاملة

أوجد كل مما يلي لـ $\mathbf{a} = \langle 10, 1\rangle, \mathbf{b} = \langle -5, 2.8\rangle, \mathbf{c} = \left\langle \frac{3}{4}, -9\right\rangle$.

74. $\mathbf{b} - \mathbf{a} + 4\mathbf{c}$ $\langle -12, -34.2\rangle$

75. $\mathbf{c} - 3\mathbf{a} + \mathbf{b}$ $\left\langle -\frac{137}{4}, -9.2\right\rangle$

76. $2\mathbf{a} - 4\mathbf{b} + \mathbf{c}$ $\left\langle \frac{163}{4}, -18.2\right\rangle$

77. **الجولف** يدفع يوسف كرة جولف بسرعة 205 أقدام في الثانية بزاوية 32° مع الأرض. في نفس الحفرة، يدفع سعيد كرة جولف بسرعة 190 قدمًا في الثانية بزاوية 41° مع الأرض. أوجد مقداري المركبتين الأفقية والرأسية لكل قوة. **يوسف: تقريبًا 173.8 ft/s وتقريبًا 108.6 ft/s؛ سعيد: تقريبًا 143.4 ft/s وتقريبًا 124.7 ft/s**

مثّل بيانيًا القطع الزائد الممثل بكل معادلة. **78–80. انظر الهامش.**

78. $\frac{(x-5)^2}{48} - \frac{y^2}{5} = 1$

79. $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{49} = 1$

80. $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{4} = 1$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير، إن وُجدت.

81. $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$ $\frac{\pi}{6}$

82. $\arctan\left(\tan\frac{1}{2}\right)$ $\frac{1}{2}$

83. $\sin\left(\cos^{-1}\frac{3}{4}\right)$ $\frac{\sqrt{7}}{4}$

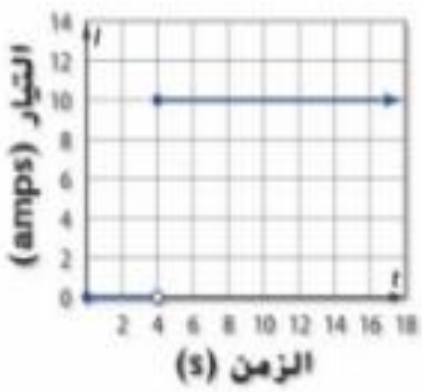
أوجد حل كل من المعادلات التالية.

84. $\log_{12}(x^3 + 2) = \log_{12} 127$ **5**

85. $\log_2 x = \log_2 6 + \log_2 (x-5)$ **6**

86. $e^{5x-4} = 70$ $\frac{\ln 70 + 4}{5} \approx 1.65$

87. **الكهرباء** تحتوي الدائرة الكهربائية البسيطة على مصدر طاقة ومقاومة فقط. عند إيقاف تشغيل مصدر الطاقة، لا يوجد تيار في الدائرة. عند تشغيل مصدر الطاقة، يصبح التيار قيمة ثابتة على الفور تقريبًا. يمكن تمثيل هذه الحالة بتمثيل بياني كالموضح. I يمثل التيار بالأمبير، و t يمثل الزمن بالثانية.



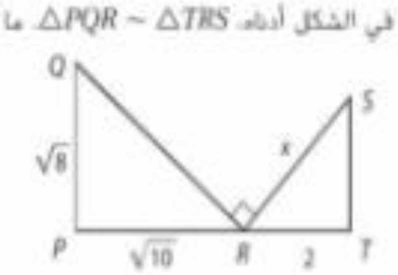
a. عند أي من قيم t تكون الدالة غير متصلة؟ **t = 4**

b. متى تم تشغيل مصدر الطاقة؟ **عند t = 4**

c. إذا غادر من قام بتشغيل مصدر الطاقة وعاد بعد ساعات. فكم سيكون قياس التيار في الدائرة؟ **10 amps**

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

88. **SAT/ACT** في الشكل أدناه، $\triangle PQR \sim \triangle TRS$. ما قيمة x؟ **C**



A $\sqrt{2}$
B $\sqrt{5}$
C 3
D $3\sqrt{2}$
E 6

89. **مراجعة** فكر في $C(-9, 2)$ و $D(-4, -3)$. أي مما يلي صورة مركبة ومقدار $\overrightarrow{CD}$؟ **F**

F $\langle 5, -5\rangle, 5\sqrt{2}$
G $\langle 5, -5\rangle, 6\sqrt{2}$
H $\langle 6, -5\rangle, 5\sqrt{2}$
J $\langle 6, -6\rangle, 6\sqrt{2}$

90. يتم سحب زلاجة للوح من خلال بذل قوة 25 رطلاً على حبل يصنع زاوية 20° مع المركبة الأفقية، كما هو موضح بالشكل. ما المقدار التقريبي للشغل المبذول لسحب الزلاجة لمسافة 50 قدمًا؟ **C**

A 428 قدم-رطل
B 1093 قدم-رطل
C 1175 قدم-رطل
D 1250 قدم-رطل

91. **مراجعة** إذا كانت $\mathbf{t} = \langle -6, 2\rangle$ و $\mathbf{s} = \langle 4, -3\rangle$، فأي مما يلي يمثل $\mathbf{t} - 2\mathbf{s}$؟ **H**

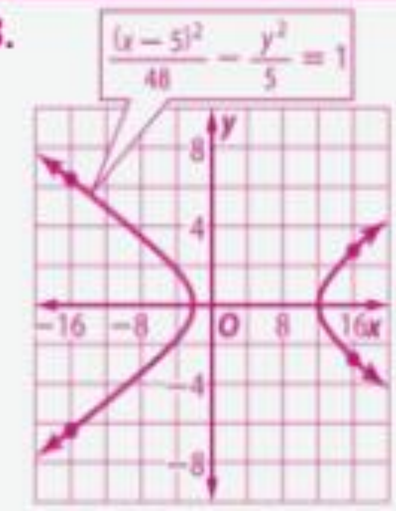
F $\langle 14, 8\rangle$
G $\langle 14, 6\rangle$
H $\langle -14, 8\rangle$
J $\langle -14, -8\rangle$

4 التقويم

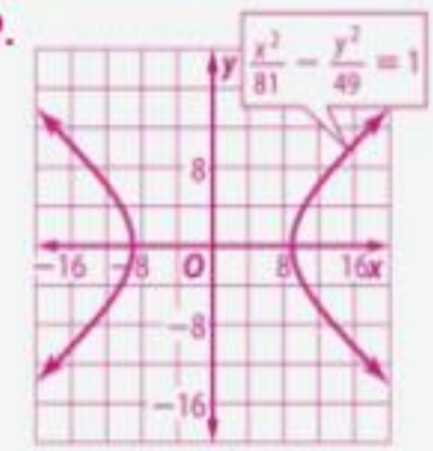
بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب كلّف الطلاب بكتابة متجه وتوضيح طريقة حساب طوله باستخدام حاصل الضرب النقطي.

إجابات إضافية

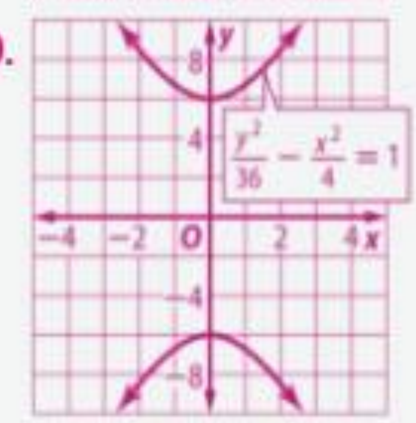
78.



79.

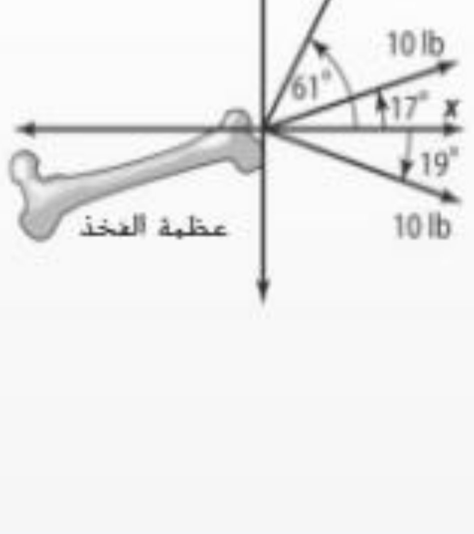


80.



التدريس المتمايز BL

التوسع عندما تتكسر عظمة الفخذ، تُستخدم في بعض الأحيان آلية الجر لتثبيت العظام. في نظام الجر، يتم تطبيق ثلاث قوى على العظام. أوجد مقدار القوة الناتجة R المبذولة على العظام واتجاهها. (*إرشاد:* حلل كل قوة إلى مركبات y و x.)
حوالي 25.3 lb بزاوية 19.4° على المركب الأفقي



7 اختبار نصف الوحدة

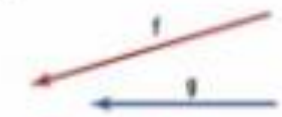
الدروس من 7-1 إلى 7-3

أوجد ناتج كل زوج من المتّجهات باستخدام إما طريقة المثلّث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج بالسنتيمتر واتجاهه بالنسبة إلى المركّبة الأفقية. (الدرس 7-1)

1.

1.2 cm, 323°

2.



5.2 cm, 188°

3.

1.2 cm, 330°

4.

1.8 cm, 102°

5. **التزلّج** يسحب علي زلّاجة عبر الثلوج بقوة تبلغ 50 نيوتن بزاوية 35° مع المركّبة الأفقية. أوجد مقداري المركّبتين الأفقية والرأسية للقوة. (الدرس 7-1) **تقريبًا 41.0 N، تقريبًا 128.7N**

6. قم بتصميم رسم تخطيطي للمتجهات لما يلي $\frac{1}{2}c - 3d$ (الدرس 7-1)

انظر الهامش.

افترض أن $\overrightarrow{BC}$ هو المتجه بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. اكتب $\overrightarrow{BC}$ في صورة توفيق خطي للمتّجهين i و j. (الدرس 7-2)

7. $B(3, -1), C(4, -7)$ **$i - 6j$**

8. $B(10, -6), C(-8, 2)$ **$-18i + 8j$**

9. $B(1, 12), C(-2, -9)$ **$-3i - 21j$**

10. $B(4, -10), C(4, -10)$ **0**

11. **الاختيار من متعدد** أي مما يلي صورة مركّبة للمتجه $\overrightarrow{AB}$ بنقطة البداية $A(-5, 3)$ ونقطة النهاية $B(2, -1)$؟ (الدرس 7-2) **B**

A $\langle 4, -1\rangle$

B $\langle 7, -4\rangle$

C $\langle 7, 4\rangle$

D $\langle -6, 4\rangle$

12. **كرة السلة** بينما يقترب الوقت من الانتهاء في إحدى المباريات، يركض فارس نحو السلة بسرعة 2.5 أمتار في الثانية ويرمي الكرة من منتصف الملعب بسرعة 8 أمتار في الثانية بزاوية 36° مع المركّبة الأفقية. (الدرس 7-2)

a. فارس: $\langle 2.5, 0\rangle$، الكرة: $\langle 6.5, 4.7\rangle$

b. تقريبًا 10.2 m/s بزاوية 27.6° مع المركبة الأفقية

a. اكتب صورة مركّبة للمتجهات التي تمثل سرعة فارس ومسار الكرة.

b. ما مقدار السرعة الناتجة للكرة واتجاهها؟

أوجد الصورة المركبة ومقدار المتجه لكل نقطة بداية ونهاية. (الدرس 7-2)

13. $A(-4, 2), B(3, 6)$ **$\langle 7, 4\rangle; \sqrt{65} \approx 8.1$**

14. $Q(1, -5), R(-7, 8)$ **$\langle -8, 13\rangle; \sqrt{233} \approx 15.3$**

15. $X(-3, -5), Y(2, 5)$ **$\langle 5, 10\rangle; 5\sqrt{5} \approx 11.2$**

16. $P(9, -2), S(2, -5)$ **$\langle -7, -3\rangle; \sqrt{58} \approx 7.6$**

أوجد الزاوية θ بين u و v لأقرب جزء من عشرة من الدرجة. (الدرس 7-3)

17. $u = \langle 9, -4\rangle, v = \langle -1, -2\rangle$ **92.6°**

18. $u = \langle 5, 2\rangle, v = \langle -4, 10\rangle$ **90.0°**

19. $u = \langle 8, 4\rangle, v = \langle -2, 4\rangle$ **90.0°**

20. $u = \langle 2, -2\rangle, v = \langle 3, 8\rangle$ **114.4°**

21. **الاختيار من متعدد** إذا كان $u = \langle 2, 3\rangle$ و $v = \langle -1, 4\rangle$ و $w = \langle 8, -5\rangle$، فأوجد $(w \times v) + (u \times v)$. (الدرس 7-3) **F**

F −18

G −2

H 15

J 38

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثم حدّد ما إذا كانت النقطتان u و v متعامدتين. (الدرس 7-3)

22. $\langle 2, -5\rangle \cdot \langle 4, 2\rangle$ **−2، غير متعامدين**

23. $\langle 4, -3\rangle \cdot \langle 7, 4\rangle$ **16، غير متعامدين**

24. $\langle 1, -6\rangle \cdot \langle 5, 8\rangle$ **−43، غير متعامدين**

25. $\langle 3, -6\rangle \cdot \langle 10, 5\rangle$ **0، متعامدان**

26. **العربة** يستخدم سمير عربة لحمل الصحف لتوزيعها. ويسحب العربة بقوة تبلغ 25 نيوتن بزاوية 30° مع المركّبة الأفقية. (الدرس 7-3)

a. ما مقدار الشغل الذي يبذله سمير بالجول عند سحب العربة لمسافة 150 مترًا؟ **تقريبًا 3247.6 J**

b. إذا كان مقبض العربة يميل بزاوية 40° مع الأرض ويسحب سمير العربة لنفس المسافة وبنفس القوة، فهل يبذل شغلًا أكثر أم أقل؟ اشرح إجابتك. **أقل، سيبذل شغلاً مقداره 2872.7 جول تقريبًا.**

أوجد مسقط u على v. ثم اكتب u باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه u على v. (الدرس 7-3) **27-30. انظر الهامش.**

27. $u = \langle 2, -3\rangle, v = \langle 2, 5\rangle$

28. $u = \langle 2, 4\rangle, v = \langle 1, 3\rangle$

29. $u = \langle 3, 4\rangle, v = \langle -9, 2\rangle$

30. $u = \langle -1, 4\rangle, v = \langle -6, 1\rangle$

الدروس من 7-1 إلى 7-3

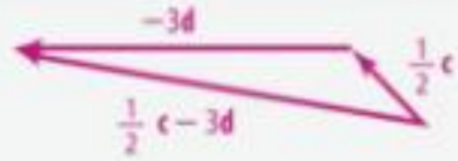
التقويم التكويني

استخدم الاختبار القصير بنصف الوحدة لتقويم تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

بالنسبة للمسائل المجاب عنها بشكل خاطئ، كلّف الطلاب بمراجعة الدروس المشار إليها بين الأقواس.

إجابات إضافية

6.



27. $\text{proj}_v u = \left\langle -\frac{2}{29}, -\frac{5}{29} \right\rangle$; $u = \left\langle -\frac{2}{29}, -\frac{5}{29} \right\rangle + \left\langle \frac{205}{29}, -\frac{82}{29} \right\rangle$

28. $\text{proj}_v u = \left\langle \frac{7}{5}, \frac{21}{5} \right\rangle$; $u = \left\langle \frac{7}{5}, \frac{21}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, -\frac{1}{5} \right\rangle$

29. $\text{proj}_v u = \left\langle \frac{99}{85}, -\frac{22}{85} \right\rangle$; $u = \left\langle \frac{99}{85}, -\frac{22}{85} \right\rangle + \left\langle \frac{156}{85}, \frac{702}{85} \right\rangle$

30. $\text{proj}_v u = \left\langle -\frac{60}{37}, \frac{10}{37} \right\rangle$; $u = \left\langle -\frac{60}{37}, \frac{10}{37} \right\rangle + \left\langle \frac{23}{37}, \frac{138}{37} \right\rangle$

الدرس 4-7 المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

السابق	الحالي	لماذا؟
• مثلت المتجهات هندسيًا وجبريًا في الأبعاد الثنائية.	1 • تحديد النقاط والمتجهات في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد. 2 التعبير الجبري للمتجهات في الفضاء وعملياتها.	• يعرف اتجاه الصاروخ بعد انطلاقه بدلالة اتجاه ثنائي الأبعاد وزاوية ثلاثية الأبعاد بالنسبة للمحور الأفقي، حيث إن المسافة والسرعات والقوى الموجهة لا تتقيد بالمستوى، فلا بد أن يتوسع مفهوم المتجهات من الفضاء ثنائي الأبعاد إلى ثلاثي الأبعاد.

المفردات الجديدة

نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد three-dimensional coordinate system

محور z z-axis

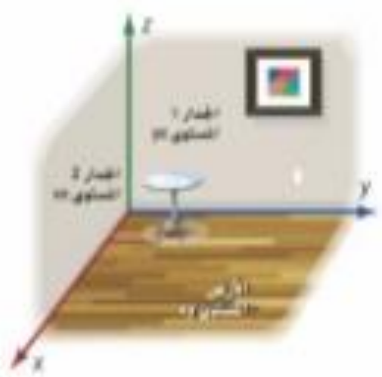
ثمن octant

مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر ordered triple

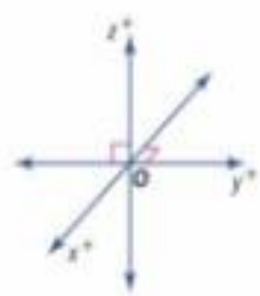
1 الإحداثيات في الأبعاد الثلاثية

يعد المستوى الديكارتي نظام إحداثي ثنائي الأبعاد يتكون من المحورين x و y مما يسمح لك بتحديد وتعيين النقاط في مستوى. ونحتاج إلى **نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد** لتمثيل نقطة في الفضاء.

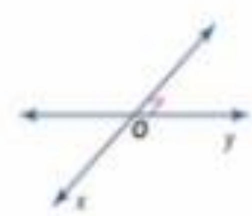
ابدأ بالمستوى xy وضعه بحيث يقدم مظهر عمق (الشكل 7.4.1). ثم أضف محورًا ثالثًا باسم المحور z يمر عبر نقطة الأصل ويكون متعامدًا على كل من المحورين x و y (الشكل 7.4.2). ويقسم المحور الإضافي الفضاء إلى ثمانية أقسام تدعى **الأثمان**. وللمساعدة في تخيل الثمن الأول، انظر إلى ركن غرفة (الشكل 7.4.3). تمثل الأرض المستوى xy وتمثل الجدران المستويين xz و yz.



الشكل 7.4.3



الشكل 7.4.2



الشكل 7.4.1

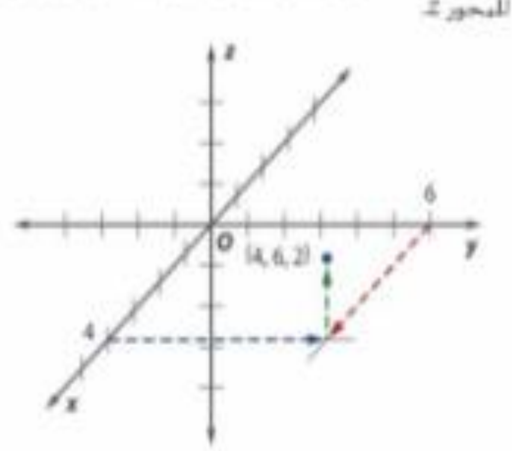
وتمثل النقطة في الفضاء **ثلاثي مرتب** من الأعداد الحقيقية (x, y, z). ولتعيين هذه النقطة، عليك أولاً تحديد موقع النقطة (x, y) في المستوى xy والتحرك لأعلى أو أسفل موازيًا المحور z وفقًا للمسافة المتجهة التي توضحها z.

مثال 1 تحديد موقع نقطة في الفضاء

عيّن كل نقطة في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد.

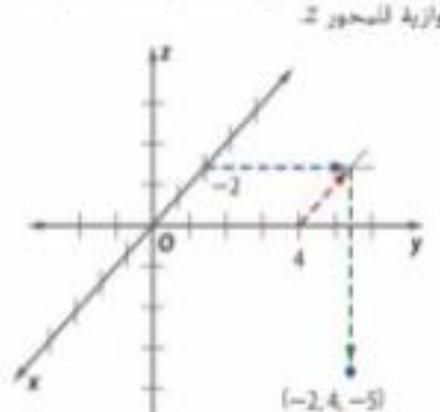
a. (4, 6, 2)

حدد موقع (4, 6) في المستوى xy وضع عليها علامة X. ثم عيّن نقطة على بعد وحدتين أعلى هذا الموقع وموازية للمحور z.



b. (-2, 4, -5)

حدد موقع (−2, 4) في المستوى xy وضع عليها علامة X. ثم عيّن نقطة على بعد 5 وحدات أسفل هذا الموقع وموازية للمحور z.



تمرين موجّه 1A–C. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

1A. (−3, −4, 2)　1B. (3, 2, −3)　1C. (5, −4, −1)

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4-7 تمثيل المتجهات هندسيًا وجبريًا بأبعاد ثنائية.

الدرس 4-7 تحديد موقع النقاط والمتجهات في النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد. التعبير عن المتجهات جبريًا وإجراء العمليات عليها في الفضاء.

بعد الدرس 4-7 إيجاد حواصل الضرب النقطي لمتجهين في الفضاء وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- كم عدد القطوع التي توجد في المستوى الديكارتي؟ ماذا يسمى كل قطاع؟ أربعة؛ رُبع
- ما العلامات الخاصة بالأزواج المرتبة المحتملة في نظام إحداثي ثنائي الأبعاد؟ (+, +) و (−, +) و (−, −) و (+, −)

بعد إيجاد المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء مماثلاً لإيجاد المسافة ونقطة المنتصف في المستوى الإحداثي.

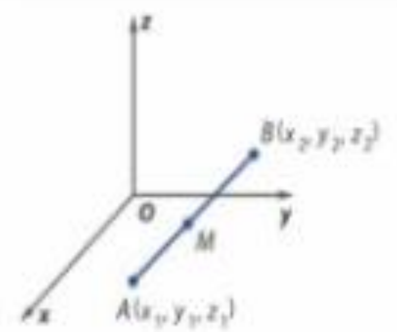
المفهوم الأساسي قوانين المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

يتم الحصول على المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$ و$B(x_2, y_2, z_2)$ من خلال

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ويتم الحصول على نقطة المنتصف M للقطعتين $\overline{AB}$ من خلال

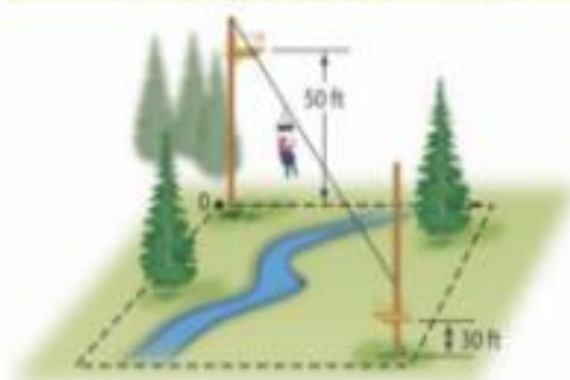
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$



ستثبت هذه القوانين في التمرين 66.

مثال 2 من الحياة اليومية المسافة ونقطة المنتصف للنقاط في الفضاء

حبل انزلاق تسمح جولة بجبال سيررا مادري للنزلاء بالاستمتاع بالطبيعة من خلال النزول بحبل انزلاق من منصة إلى أخرى أعلى مشاهد الطبيعة الخلابة المحيطة. ويربط حبل انزلاق بين منصتين تمثلان بالإحداثيات (10, 12, 50) و(70, 92, 30) حيث تكون الإحداثيات بالقدم.



a. أوجد طول حبل الانزلاق اللازم لربط المنصتين.

استخدم قانون المسافة للنقاط في الفضاء.

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$	قانون المسافة
$= \sqrt{(70 - 10)^2 + (92 - 12)^2 + (30 - 50)^2}$	$(x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$ و$(x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30)$
≈ 101.98	بسّط

لا بد أن يكون طول حبل الانزلاق نحو 102 قدم لربط بين المنصتين.

b. تم بناء منصة إضافية بحيث تكون في منتصف المسافة بين المنصتين الموجودتين. أوجد إحداثيات المنصة الجديدة.

استخدم قانون نقطة المنتصف للنقاط في الفضاء.

$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$	قانون نقطة المنتصف
$= \left(\frac{10 + 70}{2}, \frac{12 + 92}{2}, \frac{50 + 30}{2}\right) = (40, 52, 40)$	$(x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$ و$(x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30)$

ستكون إحداثيات المنصة الجديدة (40, 52, 40).

تمرين موجّه **2A. نعم، حيث يبلغ البعد بين الطائرتين نحو 2045 ft، أي أقل من نصف ميل.**

2. **الطائرات** تشترط لوائح السلامة على الطائرات أن يكون بينها مسافة نصف ميل على الأقل عندما تكون محلقة في الهواء. تحلق طائرتان أعلى سماء دبي بالإحداثيات (300, 150, 30000) و(450, −250, 28000)، حيث توضح الإحداثيات بالقدم.

A. هل الطائرتان تنتهكان لوائح السلامة؟ اشرح.

B. إذا تم إطلاق ألعاب نارية وانفجرت بين الطائرتين مباشرة، فما إحداثيات نقطة انفجار الألعاب النارية؟ **(375, −50, 29000)**

الربط بالحياة اليومية

تسمح جولة في مونتي فيردي في كوستا ريكا للزوار برؤية الطبيعة باستخدام نظام دروب وجسور معلقة وحبال انزلاق. وتسمح حبال الانزلاق للضيوف برؤية المناظر الطبيعية المحيطة من ارتفاع يصل إلى 456 قدمًا فوق مستوى الأرض.

المصدر: *Monteverde Info*

- كم عدد القطاعات التي توجد في النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد؟ ماذا يسمى كل قطاع؟ ثمانية؛ ثُمن
- ما العلامات الخاصة بالثلاثيات المرتبة المحتملة في النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد؟ $(+,+,+)$ و $(-,-,-)$ و $(-,-,+)$ و $(+,-,-)$ و $(-,+,-)$ و $(+,-,+)$ و $(-,+,-)$ و $(+,+,-)$ و $(-,+,+)$

1 الإحداثيات بأبعاد ثلاثية

يوضح المثال 1 طريقة تحديد موضع نقطة في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد. ويوضح **المثال 2** طريقة إيجاد المسافة بين نقطتين ونقطة المنتصف لقطعة مستقيمة في الفضاء.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 حدد موقع كل نقطة في النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد a-b. انظر الهامش.

a. (1, 5, 3)
b. (−1, −5, 2)

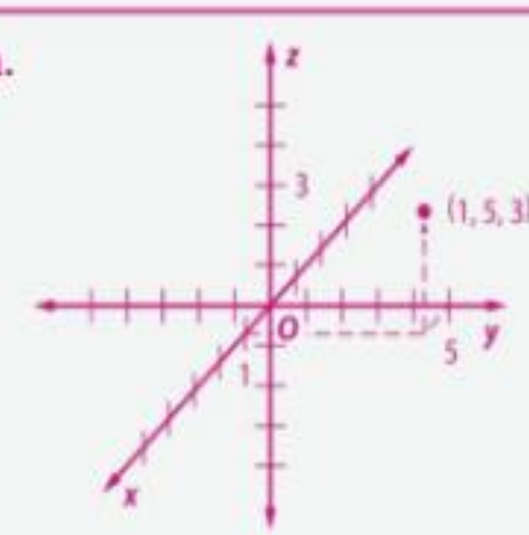
2 **الهندسة المعمارية** صمم مهندس معماري غرفة علوية ذات دعامات خشبية تمتد من أسفل يسار الجانب الأمامي وحتى أعلى يمين الجانب الخلفي. يتم تمثيل إحداثيات طرفي الدعامة كالآتي (10, 40, 30) و (20, 80, 70)، مقيسة بالقدم.

a. أوجد طول الدعامة 57.45 ft

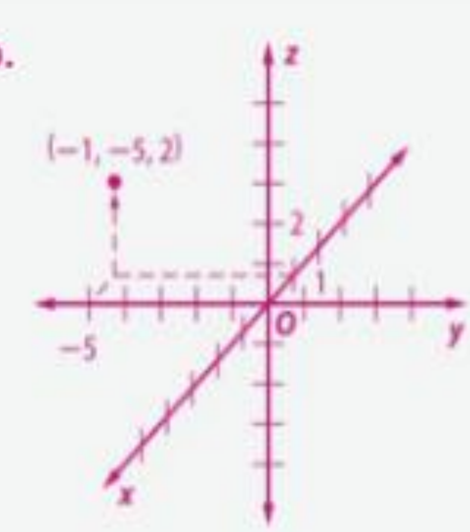
b. سيتم توصيل ضوء بنقطة المنتصف للدعامة، أوجد إحداثيات الضوء. (50, 60, 15)

إجابات إضافية (مثال آخر)

1a.



1b.

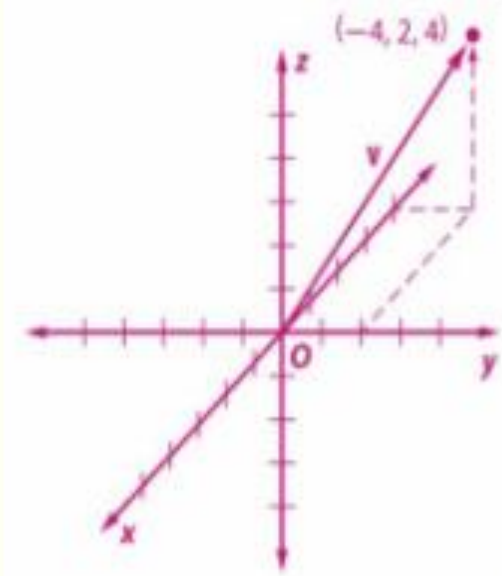


2 المتجهات في الفضاء

يوضح المثال 3 طريقة تحديد موقع متجه في الفضاء. ويوضح **المثال 4** طريقة التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًا. و**المثالان 5 و 6** يوضحان طريقة إجراء العمليات على المتجهات في الفضاء.

أمثلة إضافية

3 حدد موقع المتجه $\mathbf{v} = \langle -4, 2, 4 \rangle$ ومثله بيانيًا.

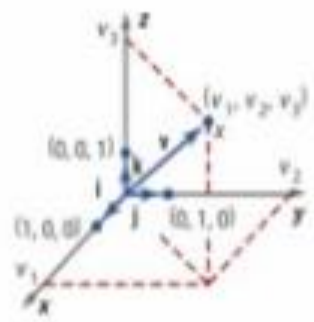


4 أوجد الصورة المركبة وطول $\overrightarrow{AB}$ والذي تقع نقطة بدايته عند $A(3, -2, -1)$ ونقطة نهايته عند $B(1, 5, -3)$. ثم أوجد متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$.

$\langle -2, 7, -2 \rangle$, $\sqrt{57}$; $\left\langle -\frac{2\sqrt{57}}{57}, \frac{7\sqrt{57}}{57}, -\frac{2\sqrt{57}}{57} \right\rangle$

إرشاد للمعلمين الجدد

ترتيب الإحداثيات في المثال 4، ذكّر الطلاب بأن عكس ترتيب الإحداثيات يغير المتجه من $\overrightarrow{AB}$ إلى $\overrightarrow{BA}$، وهو له الطول نفسه ولكن اتجاه معاكس.



الشكل 7.4.4

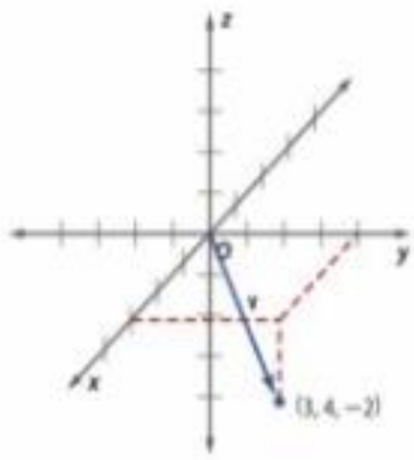
2 المتجهات في الفضاء في الفضاء، يعبر عن متجه **v** في الوضع القياسي بنقطة نهاية تقع عند (v_1, v_2, v_3) من خلال $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. ويكون المتجه الصفري $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$. وتكون متجهات الوحدة القياسية هي $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$، $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$، $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ كما هو موضح في الشكل 7.4.4. ويمكن التعبير عن الصورة المركبة لـ **v** كتوفيق خطي لمتجهات الوحدة $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

مثال 3 تحديد موقع متجه في الفضاء

حدد موقع $\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2 \rangle$ ومثله بيانيًا.

عيّن النقطة $(3, 4, -2)$.

ارسم المتجه **v** بنقطة نهاية عند $(3, 4, -2)$.



3A-B. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

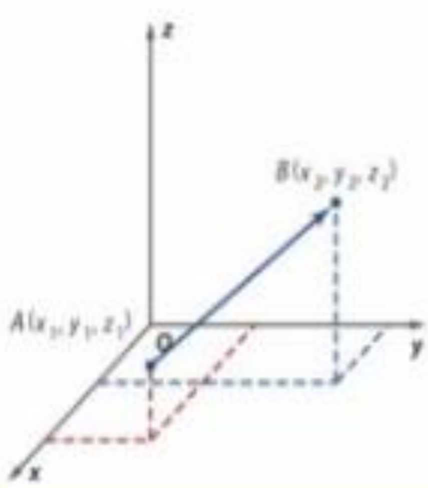
تمرين موجّه

حدد موقع كل متجه في الفضاء ثم مثله بيانيًا.

3A. $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$

3B. $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

وكما هو الحال مع المتجهات ثنائية الأبعاد، لإيجاد الصورة المركبة للقطعة المستقيمة الموجهة من $A(x_1, y_1, z_1)$ إلى $B(x_2, y_2, z_2)$، فسيتعين عليك طرح إحداثيات نقطة بدايتها من نقطة نهايتها.



$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

إذًا $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

أو إذا كان $\overrightarrow{AB} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ إذًا $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

بذلك فإن متجه الوحدة **u** في الاتجاه $\overrightarrow{AB}$ لا يزال يساوي $\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$.

مثال 4 التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًا

أوجد الصورة المركّبة والمقدار للمتّجه $\overrightarrow{AB}$ الذي تكون نقطة بدايته $A(-4, -2, 1)$ ونقطة نهايته $B(3, 6, -6)$. ثم أوجد متجه الوحدة في الاتجاه $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$ — الصورة المركبة للمتجه

$= \langle 3 - (-4), 6 - (-2), -6 - 1 \rangle = \langle 7, 8, -7 \rangle$ — $(x_1, y_1, z_1) = (-4, -2, 1)$ و $(x_2, y_2, z_2) = (3, 6, -6)$

باستخدام الصورة المركبة، فإن مقدار المتجه $\overrightarrow{AB}$ يساوي

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + 8^2 + (-7)^2} = 9\sqrt{2}$. — $\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7 \rangle$

باستخدام هذا المقدار والصورة المركبة، أوجد متجه الوحدة **u** في اتجاه $\overrightarrow{AB}$.

$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ — متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{BA}$

$= \frac{\langle 7, 8, -7 \rangle}{9\sqrt{2}}$ 7 $= \left\langle \frac{\sqrt{2}}{18}, \frac{4\sqrt{2}}{9}, -\frac{7\sqrt{2}}{18} \right\rangle$ — $\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7 \rangle$ و $|\overrightarrow{AB}| = 9\sqrt{2}$

4A. $\langle 1, 9, 3 \rangle$; $\sqrt{91}$; $\left\langle \frac{\sqrt{91}}{91}, \frac{9\sqrt{91}}{91}, \frac{3\sqrt{91}}{91} \right\rangle$

4B. $\langle 4, -1, 2 \rangle$; $\sqrt{21}$; $\left\langle \frac{4\sqrt{21}}{21}, \frac{-\sqrt{21}}{21}, \frac{2\sqrt{21}}{21} \right\rangle$

تمرين موجّه

أوجد الصورة المركبة ومقدار المتّجه $\overrightarrow{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. ثم أوجد متجه الوحدة في الاتجاه $\overrightarrow{AB}$.

4A. $A(-2, -5, -5)$, $B(-1, 4, -2)$ 4B. $A(-1, 4, 6)$, $B(3, 3, 8)$

التدريس المتمايز BL

التوسع ما الشكل ثلاثي الأبعاد الذي تقع رؤوسه عند النقاط $A(0, 4, 5)$ و $B(0, 5, -1)$ و $C(4, 5, -1)$ و $D(0, 3, 3)$ و $E(0, 4, -3)$ و $F(4, 4, -3)$؟ a منشور مثلث

كما هو حال المتجهات في المستوى، عندما تكون المتجهات في الفضاء في صورة مركبة أو معبر عنها في صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة، يمكنك حينها جمعها أو طرحها أو ضربها في كمية غير متجهة.

المفهوم الأساسي عمليات المتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, \mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$، وأي كمية غير متجه k، فإن

جمع المتجه	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$
طرح المتجه	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$
ضرب كمية عددية	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$

نصيحة دراسية
عمليات المتجهات تكون خصائص عمليات المتجهات في الفضاء نفس الخصائص للعمليات في المستوى.

مثال 5 عمليات المتجهات في الفضاء

أوجد قيمة كل مما يلي لكل من $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle$ و $\mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle$ و $\mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$.

a. $4\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$

$4\mathbf{y} + 2\mathbf{z} = 4\langle 3, -6, 2 \rangle + 2\langle -2, 0, 5 \rangle$ عوّض

$= \langle 12, -24, 8 \rangle + \langle -4, 0, 10 \rangle = \langle 8, -24, 18 \rangle$ ضرب كمية عددية وجمع المتجهات

b. $2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y}$

$2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y} = 2\langle -1, 4, -4 \rangle - \langle -2, 0, 5 \rangle + 3\langle 3, -6, 2 \rangle$ عوّض

$= \langle -2, 8, -8 \rangle + \langle 2, 0, -5 \rangle + \langle 9, -18, 6 \rangle$ ضرب كمية عددية

$= \langle 9, -10, -7 \rangle$ جمع المتجهات

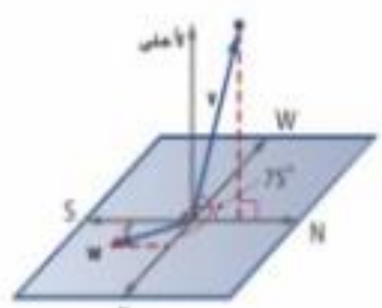
تمرين موجّه

5A. $4\mathbf{w} - 8\mathbf{z}$ $\langle 12, 16, -56 \rangle$

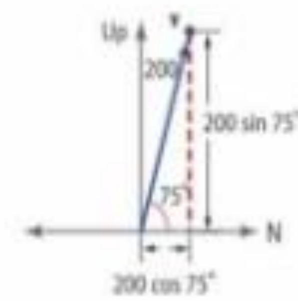
5B. $3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w}$ $\langle 9, -42, 45 \rangle$

مثال 6 من الحياة اليومية استخدام المتجهات في الفضاء

الصواريخ بعد الانطلاق، يتجه صاروخ نموذجي نحو الشمال ويرتفع بزاوية 75° بالنسبة للمحور الأفقي بسرعة 200 ميل في الساعة. فإذا هبّت الرياح من الشمال الغربي بسرعة 5 أميال في الساعة، فأوجد متجه السرعة الناتجة للصاروخ بالنسبة لنقطة الانطلاق.



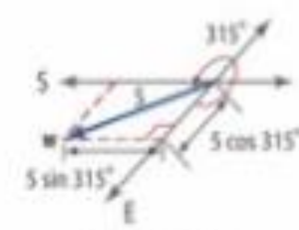
افترض أن النقطة **i** في الغرب، والنقطة **j** في الشمال والنقطة **k** لأعلى. ويوضح المتجه **v** الذي يمثل سرعة الصاروخ والمتجه **w** الذي يمثل سرعة الرياح. لاحظ اتجاه **w** نحو الجنوب الشرقي، حيث إن الرياح تهب من الشمال الغربي.



الشكل 7.4.5

حيث إن المتجه **v** له مقدار 200 وزاوية اتجاه 75°، يمكننا إيجاد الصورة المركبة من المتجه **v**، كما هو موضح في الشكل 7.4.5.

$\mathbf{v} = \langle 0, 200 \cos 75°, 200 \sin 75° \rangle$ أو حوالي $\langle 0, 51.8, 193.2 \rangle$



الشكل 7.4.6

نظرًا لأن الشرق هو محور x الموجب، تكون زاوية اتجاه **w** تساوي 315°. حيث إن $|\mathbf{w}| = 5$، فإن الصورة المركبة لهذا المتجه هي $\mathbf{w} = \langle 5 \cos 315°, 5 \sin 315°, 0 \rangle$ أو حوالي $\langle 3.5, -3.5, 0 \rangle$، على النحو الموضح في الشكل 7.4.6.

السرعة الناتجة للصاروخ عبارة عن $\mathbf{v} + \mathbf{w}$.

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle 0, 51.8, 193.2 \rangle + \langle 3.5, -3.5, 0 \rangle$$
$$= \langle 3.5, 48.3, 193.2 \rangle = 3.5\mathbf{i} + 48.3\mathbf{j} + 193.2\mathbf{k}$$

تمرين موجّه

6. **الملاحة الجوية** بعد إقلاع طائرة، اتجهت شرقًا واستمرت في الارتفاع بزاوية 18° بالنسبة للمحور الأفقي، وكانت سرعتها في الهواء 250 ميلاً في الساعة. فإذا هبت الرياح من الشمال الشرقي بسرعة 10 أميال في الساعة، فأوجد المتجه الذي يمثل السرعة الناتجة للطائرة بالنسبة لنقطة الإقلاع. افترض أن النقطة **i** في الغرب، والنقطة **j** في الشمال والنقطة **k** لأعلى. $230.7\mathbf{i} - 7.1\mathbf{j} + 77.3\mathbf{k}$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

السبورة التفاعلية اعرض شبكة من الإحداثيات x و y و z على السبورة. حدد موضع نقطة على الشبكة وكلّف الطلاب بإيجاد الثلاثي المرتب للنقطة على الرسم البياني. اسحب الرسم البياني للنقطة إلى الأعلى أو إلى الأسفل على طول المحور z، وإلى الأمام والخلف على طول المحور x ويمينًا أو يسارًا على طول المحور y. وبعد كل مرة تحرك فيها النقطة، كلّف الطلاب بإيجاد الثلاثي المرتب لها. ناقش أوجه الشبه والاختلاف بين الثلاثيات المرتبة والأزواج المرتبة.

أمثلة إضافية

5 أوجد كلاً مما يلي عندما تكون $\mathbf{v} = \langle 1, 5, 2 \rangle$ و $\mathbf{w} = \langle -6, 3, -2 \rangle$، و $\mathbf{z} = \langle 0, 5, -1 \rangle$.

a. $3\mathbf{v} - \mathbf{w} - \mathbf{z}$ $\langle 9, 7, 9 \rangle$

b. $-\mathbf{v} + 2\mathbf{w} + 3\mathbf{z}$ $\langle -13, 16, -9 \rangle$

6 **الصواريخ** بعد انطلاق صاروخ نموذجي، اندفع في اتجاه الجنوب بزاوية صعود قياسها 80° بالنسبة إلى المركب الأفقي بسرعة 100 متر في الثانية. فإذا هبت الرياح من S52°W بسرعة 5 أمتار في الثانية، أوجد متجهًا يعبر عن سرعة الصاروخ الموجهة الناتجة بالنسبة إلى نقطة الانطلاق. $\langle 3.94, -14.28, 98.48 \rangle$ أو $3.94\mathbf{i} - 14.28\mathbf{j} + 98.48\mathbf{k}$

التدريس المتمايز AL OL

المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني كلّف الطلاب باستخدام أوتاد لصناعة مجموعة محاور ثلاثية الأبعاد. ثم اطلب منهم معايرة كل محور وتلوين الجزء السالب. بينما يمسك أحد الطلاب بالنموذج، كلّف الطالب الآخر بتحديد مواقع النقاط المذكور الثلاثي المرتب الخاص بها.

التركيز على محتوى الرياضيات

خصائص المتجهات في الفضاء تشبه خصائص العمليات على المتجهات في الفضاء تلك الخاصة بالعمليات في المستوى، حيث يمكن تحديد التساوي والجمع (الطرح) وحاصل الضرب القياسي وطول المتجه بدلالة المركبات **i** و **j** و **k** للمتجه. فإذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ وأي عدد حقيقي n، فإن

- $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ فقط إذا كان $a_1 = b_1$ و $a_2 = b_2$ و $a_3 = b_3$.
- $\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \langle a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3 \rangle$
- $n\mathbf{a} = \langle na_1, na_2, na_3 \rangle$
- $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 50-1 للتحقق من فهم الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع قد لا يعلم بعض الطلاب طريقة بدء حل التمارين 59-56. ذكّرهم بأن المثلث القائم له زاوية قياسها 90° وضلعان متعامدان على بعضهما البعض، وأن المثلث متساوي الساقين به ضلعان لهما الطول نفسه، وأن متساوي الأضلاع جميع أضلاعه الثلاثة لها الطول نفسه.

تمارين

عيّن كل نقطة في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد. (مثال 1)

1-8. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

1. $(1, -2, -4)$
2. $(3, 2, 1)$
3. $(-5, -4, -2)$
4. $(-2, -5, 3)$
5. $(-5, 3, 1)$
6. $(2, -2, 3)$
7. $(4, -10, -2)$
8. $(-16, 12, -13)$

أوجد طول القطعة المستقيمة ونقطة المنتصف لها باستخدام نقطتي طرفيها المبينتين. (مثال 2)

9-14. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

9. $(-4, 10, 4), (1, 0, 9)$
10. $(-6, 6, 3), (-9, -2, -2)$
11. $(6, 1, 10), (-9, -10, -4)$
12. $(8, 3, 4), (-4, -7, 5)$
13. $(-3, 2, 8), (9, 6, 0)$
14. $(-7, 2, -5), (-2, -5, -8)$

15. **العطلات** تستخدم أسرة من أبوظبي جهاز نظام تحديد المواقع العالمي (GPS) للتخطيط لعطلة في إمارة العين. ووفقًا للجهاز، فإن إحداثيات منزل الأسرة هي $(37.7°, 97.2°, 433\text{ m})$ وإحداثيات إمارة العين هي $(39.4°, 104.8°, 1981\text{ m})$. حدد خطي الطول والعرض والارتفاع لنقطة المنتصف بين أبوظبي والعين. (مثال 2)
خط الطول: 38.55°، خط العرض: 101°، الارتفاع: 1207 m

16. **الطيارون الحربيون** أثناء جلسة تدريب، يُمثل موقع الطائرتين الحربيتين F-18 من خلال الإحداثيات $(675, -121, 19{,}300)$ و $(-289, 715, 16{,}100)$، حيث تكون الإحداثيات بوحدة القدم. (مثال 2)
    a. حدد المسافة بين الطائرتين. حوالي 3445 ft
    b. لأي موقع يحتاج أحد الطائرين الطيران بالطائرة F-18 ليقلل المسافة بين الطائرتين إلى النصف؟ الإجابة النموذجية: $(193, 297, 17{,}700)$

حدد موقع كل متجه في الفضاء ثم مثله بيانيًا. (مثال 3)

17-24. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

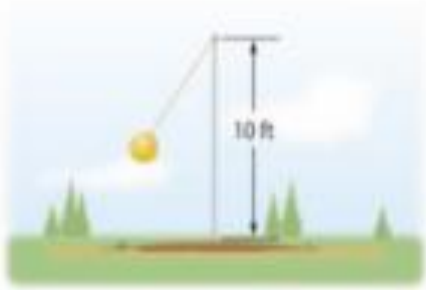
17. $\mathbf{a} = \langle 0, -4, 4 \rangle$
18. $\mathbf{b} = \langle -3, -3, -2 \rangle$
19. $\mathbf{c} = \langle -1, 3, -4 \rangle$
20. $\mathbf{d} = \langle 4, -2, -3 \rangle$
21. $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
22. $\mathbf{w} = -10\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$
23. $\mathbf{m} = 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
24. $\mathbf{n} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

أوجد الصورة المركبة ومقدار المتّجه $\overline{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين. ثم أوجد متجه الوحدة في الاتجاه $\overline{AB}$. (مثال 4)

25-34. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

25. $A(-5, -5, -9), B(11, -3, -1)$
26. $A(-4, 0, -3), B(-4, -8, 9)$
27. $A(3, 5, 1), B(0, 0, -9)$
28. $A(-3, -7, -12), B(-7, 1, 8)$
29. $A(2, -5, 4), B(1, 3, -6)$
30. $A(8, 12, 7), B(2, -3, 11)$
31. $A(3, 14, -5), B(7, -1, 0)$
32. $A(1, -18, -13), B(21, 14, 29)$
33. $A(-5, 12, 17), B(6, -11, 4)$
34. $A(9, 3, 7), B(-5, -7, 2)$

35. **كرة السرعة** في مباراة كرة سرعة، تثبت الكرة في عمود طوله 10 أقدام بطول حبل، ويضرب لاعبان الكرة في اتجاهين متعاكسين في محاولة للف الطول الكامل للحبل حول العمود. والعب يمسك أحد اللاعبين الكرة بحيث تكون إحداثياتها $(5, 3.6, 4.7)$ وتكون إحداثيات طرف الحبل المربوط بالعمود $(0, 0, 9.8)$، حيث تكون الإحداثيات بوحدة القدم. حدد مقدار المتجه الذي يمثل طول الحبل. (مثال 4)
حوالي 8 ft



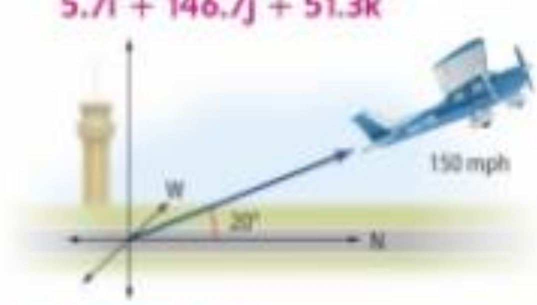
أوجد كل مما يلي لكل من $\mathbf{a} = \langle -5, -4, 3 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle 6, -2, -7 \rangle$ و $\mathbf{c} = \langle -2, 2, 4 \rangle$. (مثال 5)

36. $6\mathbf{a} - 7\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$ $\langle -88, 6, 99 \rangle$
37. $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ $\langle -65, -18, 56 \rangle$
38. $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$ $\langle 38, -36, -65 \rangle$
39. $6\mathbf{b} + 4\mathbf{c} - 4\mathbf{a}$ $\langle 48, 12, -38 \rangle$
40. $8\mathbf{a} - 5\mathbf{b} - \mathbf{c}$ $\langle -68, -24, 55 \rangle$
41. $-6\mathbf{a} + \mathbf{b} + 7\mathbf{c}$ $\langle 22, 36, 3 \rangle$

أوجد كل مما يلي لكل من $\mathbf{x} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{y} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ و $\mathbf{z} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. (مثال 5)

42. $7\mathbf{x} + 6\mathbf{y}$ $-27\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 21\mathbf{k}$
43. $3\mathbf{x} - 5\mathbf{y} + 3\mathbf{z}$ $-63\mathbf{i} + 28\mathbf{j} + 56\mathbf{k}$
44. $4\mathbf{x} + 3\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$ $-22\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - \mathbf{k}$
45. $-8\mathbf{x} - 2\mathbf{y} + 5\mathbf{z}$ $50\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$
46. $-6\mathbf{y} - 9\mathbf{z}$ $-18\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
47. $-\mathbf{x} - 4\mathbf{y} - \mathbf{z}$ $-13\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 21\mathbf{k}$

48. **الطائرات** تقلع طائرة متجهة ناحية الشمال بسرعة في الهواء 150 ميلاً في الساعة بزاوية 20° بالنسبة إلى المحور الأفقي. وتهب الرياح بسرعة 8 أميال في الساعة من اتجاه الجنوب الغربي. أوجد المتجه الذي يمثل السرعة الناتجة للطائرة بالنسبة إلى نقطة الإقلاع. افترض أن النقطة **i** في الغرب، والنقطة **j** في الشمال والنقطة **k** لأعلى. (مثال 6)
$5.7\mathbf{i} + 146.7\mathbf{j} + 51.3\mathbf{k}$



49. **ألعاب القوى** ترمي مايسة رمحًا في اتجاه الجنوب بسرعة 18 ميلاً في الساعة وبزاوية 48° بالنسبة إلى المحور الأفقي. إذا كانت الرياح تهب بسرعة 12 ميلاً في الساعة بزاوية S15°E، فأوجد المتجه الذي يمثل السرعة الناتجة للرمح. افترض أن النقطة **i** في الغرب، والنقطة **j** في الشمال والنقطة **k** لأعلى. (مثال 6)
$3.1\mathbf{i} - 23.6\mathbf{j} + 13.4\mathbf{k}$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-50, 66, 69-87	1-49 فردي، 84-87	2-50 زوجي، 66, 69-83
OL ضمن المستوى	1-59 فردي، 60, 61, 63, 65, 66, 69-87	1-50, 84-87	51-66, 69-83
BL أعلى من المستوى	51-87		

50. **الغواصات** تغوص غواصة منطلقة في اتجاه الغرب بسرعة 25 عقدة بحرية وبزاوية ميلان 55°، ويتحرك التيار بسرعة 4 عقدات بحرية بزاوية S20°W. أوجد المتجه الذي يمثل السرعة الناتجة للغواصة بالنسبة لنقطة بداية الغوص. افترض أن النقطة **i** في الغرب، والنقطة **j** في الشمال والنقطة **k** لأعلى. (مثال 6)
$-15.7\mathbf{i} - 3.8\mathbf{j} - 20.5\mathbf{k}$

B

إذا كانت N هي نقطة منتصف $\overline{MP}$، فأوجد P.

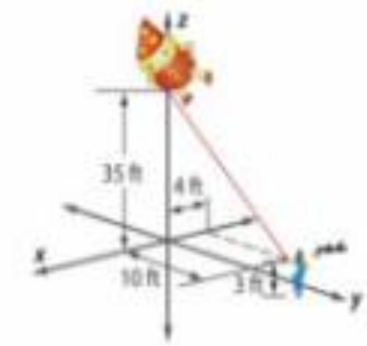
51. $M(3, 4, 5)$; $N\left(\frac{7}{2}, 1, 2\right)$ **$(4, -2, -1)$**

52. $M(-1, -4, -9)$; $N(-2, 1, -5)$ **$(-3, 6, -1)$**

53. $M(7, 1, 5)$; $N\left(5, -\frac{1}{2}, 6\right)$ **$(3, -2, 7)$**

54. $M\left(\frac{3}{2}, -5, 9\right)$; $N\left(-2, -\frac{13}{2}, \frac{11}{2}\right)$ **$\left(-\frac{11}{2}, -8, 2\right)$**

55. **التطوع** يتطوع عمر للمساعدة في توجيه بالون في استعراض. فإذا كان البالون على ارتفاع 35 قدمًا ويمسك عمر بشريط ربطه على ارتفاع ثلاثة أقدام أعلى مستوى الأرض كما هو موضح، فكم طول شريط الربط لأقرب قدم؟ **34 ft**



حدد إن كان المثلث بالرؤوس المذكورة متساوي الساقين أم مختلف الأضلاع.

56. $A(3, 1, 2)$, $B(5, -1, 1)$, $C(1, 3, 1)$ **متساوي الساقين**

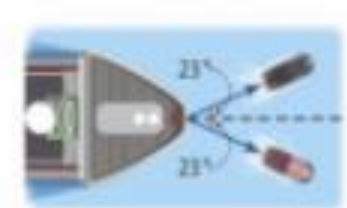
57. $A(4, 3, 4)$, $B(4, 6, 4)$, $C(4, 3, 6)$ **مختلف الأضلاع**

58. $A(-1, 4, 3)$, $B(2, 5, 1)$, $C(0, -6, 6)$ **مختلف الأضلاع**

59. $A(-2.2, 4.3, 5.6)$, $B(0.7, 9.3, 15.6)$, $C(3.6, 14.3, 5.6)$
متساوي الساقين

60. **مراكب قطر السفن** يسحب مركبي قطر سفن ناقلة عملاقة معطلة. ويشكل أحد حبلي القطر زاوية 23° غرب الشمال بينما يشكل الآخر زاوية 23° شرق الشمال. وتبذل كل عملية جر قوة ثابتة مقدارها 2.5×10^6 نيوتن بزاوية انخفاض 15° أسفل النقطة التي ترتبط فيها الحبال بالناقلة العملاقة. وقد جروا الناقلة ميلين باتجاه الشمال.

C



a. اكتب متجه ثلاثي الأبعاد يصف القوة المبذولة من كل مركب قطر سفن. **انظر ملحق إجابات الوحدة 7.**

b. أوجد المتجه الذي يصف إجمالي القوة المبذولة على الناقلة العملاقة. **$\langle 0, 4.4 \times 10^6, -1.3 \times 10^6 \rangle$**

c. إذا بلغ طول كل حبل قطر 300 قدم، فكم يبعد كل من المركبين عن الآخر تقريبًا؟ **حوالي 226.5 ft**

61. **الأشكال الكروية** استخدم قانون المسافة لنقطتين لإثبات أن الصيغة القياسية لمعادلة شكل كروي مركزه (h, k, ℓ) ونصف قطره r يساوي $r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - \ell)^2$.
انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

استخدم القانون من التمرين 61 لكتابة معادلة للشكل الكروي باستخدام المركز ونصف القطر المذكورين.
62-65. انظر الهامش.

62. المركز = $(-4, -2, 3)$، نصف القطر = 4

63. المركز = $(6, 0, -1)$، نصف القطر = $\frac{1}{2}$

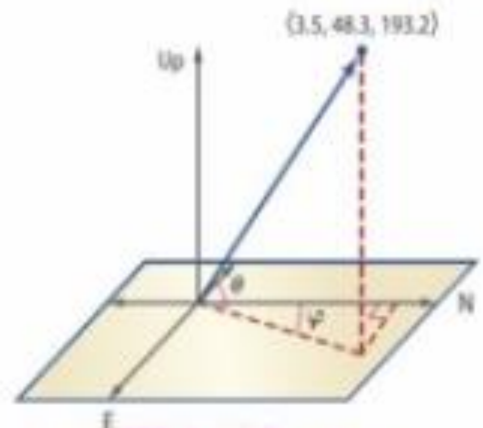
64. المركز = $(5, -3, 4)$، نصف القطر = $\sqrt{3}$

65. المركز = $(0, 7, -1)$، نصف القطر = 12

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

66. **الاستنتاج** أثبت قانون المسافة في الفضاء. (إرشاد: استخدم نظرية فيثاغورس مرتين.)
انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

67. **التحدي** راجع المثال 6

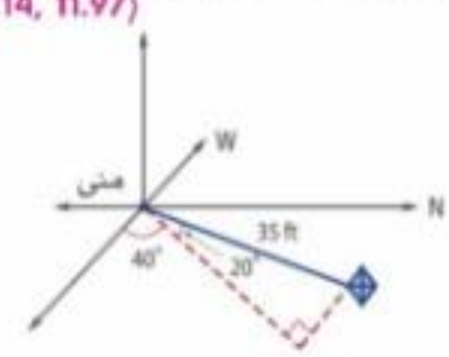


a. احسب السرعة الناتجة للصاروخ. **حوالي 199.2 mi/h**

b. أوجد الاتجاه الربعي لها للصاروخ. **N4.1°E**

c. احسب زاوية الميل θ الناتجة للصاروخ بالنسبة للمحور الأفقي.
حوالي 75.9°

68. **التحدي** تقف منى في حقل مفتوح متجهة بوجهها نحو N50°E وتمسك بطائرة ورقية من خلال حبله طوله 35 قدمًا يطير مكونًا زاوية 20° مع الحقل. أوجد مركبات المتجه من منى إلى الطائرة الورقية. (إرشاد: استخدم النسب المثلثية ومثلثين قائمي الزاوية لإيجاد **x**، **y**، **z**.)
$\langle 25.20, 21.14, 11.97 \rangle$



انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

69. **الكتابة في الرياضيات** اذكر موقفًا يكون فيه من المنطقي استخدام نظام إحداثي ثنائي الأبعاد وموقفًا آخر يكون فيه من المنطقي استخدام نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد.

إجابات إضافية

62. $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$

63. $(x - 6)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = \frac{1}{4}$

64. $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = 3$

65. $x^2 + (y - 7)^2 + (z + 1)^2 = 144$

مراجعة شاملة

أوجد مسقط u على v، ثمّ اكتب u باعتباره مجموع متّجهين متعامدين، أحدهما هو مسقط المتّجه u على v.

70. $\mathbf{u} = \langle 6, 8\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -1\rangle$
$\langle 1.6, -0.8\rangle; \mathbf{u} = \langle 1.6, -0.8\rangle + \langle 4.4, 8.8\rangle$

71. $\mathbf{u} = \langle -1, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1\rangle$
71. $\langle -0.19, -0.04\rangle; \mathbf{u} = \langle -0.19, -0.04\rangle + \langle -0.81, 4.04\rangle$

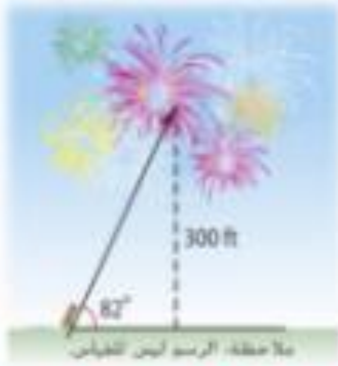
72. $\mathbf{u} = \langle 5, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -2\rangle$
$\langle 2.4, -1.2\rangle; \mathbf{u} = \langle 2.4, -1.2\rangle + \langle 2.6, 5.2\rangle$

أوجد الصورة المركبة ومقدار المتّجه $\overline{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين.

73. $A(6, -4), B(-7, -7)$
$\langle -13, -3\rangle, \sqrt{178} \approx 13.3$

74. $A(-4, -8), B(1, 6)$
$\langle 5, 14\rangle, \sqrt{221} \approx 14.9$

75. $A(-5, -12), B(1, 6)$
$\langle 6, 18\rangle, \sqrt{360} \approx 19.0$



76. **الترفيه** أطلقت الألعاب النارية لليوم الوطني لدولة الإمارات من برج خليفة بزاوية 82° بالنسبة للمحور الأفقي وقد توقع الفني الذي أطلق قذيفة الألعاب النارية أن تنفجر على بعد حوالي 300 قدم في الهواء بعد 4.8 ثوان من إطلاقها. **140.7 ft/s**

a. أوجد السرعة الابتدائية لقذيفة تم إطلاقها من مستوى الأرض.

b. سيتم وضع حواجز سلامة حول منطقة إطلاق الألعاب النارية لحماية المشاهدين. إذا تم وضع الحواجز على بعد 100 ياردة من نقطة التي تقع أسفل انفجار القذائف مباشرة، فكم ستبعد الحواجز من النقطة التي تم إطلاق الألعاب النارية منها؟ **انظر الهامش.**

77. **الإنشاء** مدفأة حجرية صممت كقوس على شكل نصف قطع ناقص سيكون لها فتحة بارتفاع 3 أقدام في المنتصف وعرض 8 أقدام عند القاعدة. ولرسم مخطط للمدفأة، يستخدم المقاول حبلاً مربوطًا بدبوسين.

a. ما الموقعين الذي يجب وضع الدبوسين بهما؟ **انظر الهامش.**

b. ما الطول اللازم للحبل الذي سيستخدم؟ وضّح استنتاجك.

حوالي 2.6 قدم إلى يسار وإلى يمين مركز القوس

أوجد حل كل معادلة لجميع قيم θ.

78. $\csc \theta + 2 \cot \theta = 0$
$\frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \frac{4\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

79. $\sec^2 \theta - 9 = 0$
$\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + n\pi, \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

80. $2 \csc \theta - 3 = 5 \sin \theta$
80. $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi, \sin^{-1}\frac{2}{5} + 2n\pi, 2\pi - \sin^{-1}\frac{2}{5} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

مثّل كل دالة بيانيًا. **81-83. انظر ملحق إجابات الوحدة 7.**

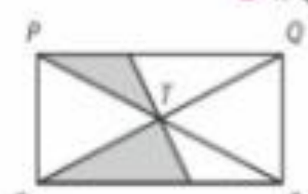
81. $y = \cos^{-1}(x - 2)$

82. $y = 3 + x$ قوس جيب الزاوية

83. $y = \sin^{-1} 3x$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

84. **SAT/ACT** ما النسبة المئوية للجزء المظلل من مساحة المستطيل $PQRS$؟ **B**



A 22%
B 25%
C 30%
D $33\frac{1}{3}$%
E 35%

85. **مراجعة** تغادر سفينة الميناء مبحرة مسافة 75 ميلاً في اتجاه 35° الشمال الشرقي. عند هذه النقطة، كم تبعد السفينة في اتجاه الشمال عن نقطة بدايتها؟ **F**

F 43 ميلاً
G 55 ميلاً
H 61 ميلاً
J 72 ميلاً

86. أثناء هبوب عاصفة، يمكن التعبير عن القوة التي تبذلها الرياح العاتية على ناطحة سحاب بالمتجه ⟨132, 3454, −76⟩، حيث تقاس قوة الرياح بالنيوتن. ما المقدار التقريبي لهذه القوة؟ **A**

A 3457 N
B 3568 N
C 3692 N
D 3717 N

87. **مراجعة** تحلق طائرة في اتجاه الغرب بسرعة 100 متر في الثانية. وتهب الرياح من اتجاه الجنوب بسرعة 30 مترًا في الثانية. ما المقدار التقريبي لسرعة الطائرة الناتجة؟ **J**

F 4 m/s
G 95.4 m/s
H 100 m/s
J 104.4 m/s

4 التقويم

تنبؤ كلّف الطلاب بكتابة فقرة تذكر كيف يعتقدون بأن ما تعلموه في هذا الدرس سوف يفيدهم في موضوع الغد المتعلق بإيجاد الزاوية المحصورة بين متجهين في الفضاء.

إجابات إضافية

76b. يتبغي أن تبعد الحواجز حوالي 394 قدمًا من موقع الانطلاق وفي اتجاه الانطلاق، وحوالي 206 أقدام من موقع الانطلاق وفي اتجاه بعيد عن الانطلاق.

77b. 8 ft؛ الإجابة النموذجية: مع تثبيت الخيط بدبوسين في بؤرة القوس وشدّه بقلم رصاص، سوف يظل مجموع المسافات من كل دبوس وحتى القلم الرصاص ثابتًا. وعندما يكون القلم الرصاص في أحد الجوانب السفلية من القوس، وبالتحديد على بعد 4 أقدام من المنتصف، تكون المسافة من الدبوس الأبعد إلى الجانب السفلي 2.6 + 4 أو حوالي 6.6 أقدام والمسافة من الدبوس الآخر إلى الجانب السفلي سوف تكون 2.6 − 4 أو حوالي 1.4 قدم. إذًا، الطول الإجمالي المطلوب للخيط هو 1.4 + 6.6 أو 8 أقدام.

التدريس المتمايز BL

التوسع يكون الجسم في حالة توازن إذا كان مقدار القوة الناتجة المبذولة عليه تساوي صفرًا. افترض أنه تم تمثيل ثلاث قوى مبذولة على الجسم كالآتي ⟨3, −1, 4⟩ و ⟨5, 2, 3⟩ و ⟨−6, 2, −1⟩. كلف الطلاب بإيجاد متجه رابع يضع الجسم في حالة توازن. **⟨−8, −3, 0⟩**

1 التركيز

الهدف استخدم حاسبة التمثيل البياني لتحويل المتجهات باستخدام المصفوفات.

نصيحة للتدريس

لتحديد المصفوفة A، بإمكان الطلاب الضغط على 2nd [MATRIX] وتحديد EDIT، ثم اختيار [A]. بعد ذلك يمكنهم تغيير أبعاد المصفوفة بإدخال عناصر المصفوفة. كرر الأمر مع المصفوفة B.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قسم الطلاب ذوي القدرات المختلفة إلى مجموعات ثنائية. واطلب منهم حل خطوات النشاط 3-1 والتمرين 1.

اطرح السؤال التالي:

- هل الترتيب مهم في ضرب المصفوفات؟ اشرح. نعم؛ الإجابة النموذجية: لا يتسم ضرب المصفوفات بخاصية التبديل.
- ما بعض أنواع التحويلات؟ تغيير الأبعاد، والانعكاس، والتدوير، والإزاحة

تمرين كلّف الطلا ب إتمام التمارين من 4-2.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرين 2 لتقويم ما إذا كان الطلا ب يفهمون طريقة تحويل المتجهات باستخدام ضرب المصفوفات في المتجهات أم لا.

7-4 مختبر تقنية التمثيل البياني
تحويلات المتجه باستخدام المصفوفات

الهدف

- استخدم حاسبة التمثيل البياني لتحويل المتجهات باستخدام المصفوفات.

في الدرس 4-7، تعلمت أنه يمكن تحويل المتجه في الفضاء بكتابته في الصورة المركبة أو عند التعبير عنه في صورة توفيق خطي. ويمكن تحويل المتجه في الفضاء كذلك عند كتابته في صورة مصفوفة 1 × 3 أو مصفوفة 3 × 1.

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [x \ y \ z]$$

وما أن يكتب في صيغة مصفوفة، يمكن تحويل المتجه باستخدام ضرب المصفوفات–المتجهات.

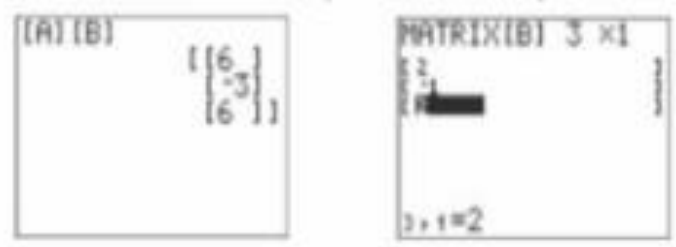
نشاط ضرب المصفوفات–المتجهات

اضرب المتجه $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ في مصفوفة التحويل $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ثم مثل كلا المتجهين بيانيًا.

الخطوة 1 اكتب B في صورة مصفوفة.

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

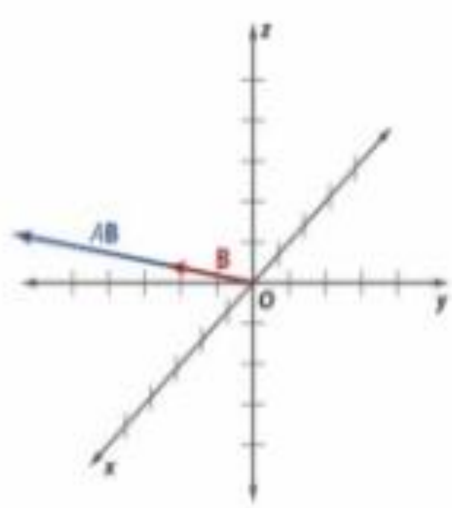
الخطوة 2 أدخل A و B في حاسبة التمثيل البياني وأوجد AB. حوّل إلى صيغة المتجه.



$$AB = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

الخطوة 3 مثّل B و AB بيانيًا على المستوى الإحداثي.

AB هي تمدد لـ B بمعامل 3.



تمارين 4-1. انظر ملحق إجابات الوحدة 7 للتمثيلات البيانية.

اضرب كل متجه في مصفوفة التحويل. مثّل كلا المتجهين بيانيًا.

1. $\mathbf{h} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

$$B = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{i} + 0.25\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

2. $\mathbf{e} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$

$$V = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$10\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 18\mathbf{k}$

3. $\mathbf{f} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$3\mathbf{i} - 21\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$

4. **الاستنتاج** اضرب $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ في مصفوفة التحويل $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ثم مثّل كلا المتجهين بيانيًا. وضّح نوع التحويل الذي تم.

4. $4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$؛ $B\mathbf{v}$ هو تدوير v حول المحور y.

435

من العملي إلى النظري

كلّف الطلاب بوصف التحويل الذي يحدث عند ضرب المتجه **B** في مصفوفة التحويل

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}.$$

تغير في الأبعاد عن طريق أحد العوامل k

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 5-7 إيجاد حاصل الضرب النقطي لمتجهين في الفضاء.

الدرس 5-7 إيجاد حواصل الضرب النقطي لمتجهين في الفضاء وإيجاد قياس الزاوية المحصورة بينهما.
إيجاد حواصل الضرب التقاطعي لمتجهين في الفضاء، واستخدام حواصل نواتج الضرب التقاطعي لإيجاد المساحات والحجوم.

بعد الدرس 5-7 تحليل مجالات المتجه.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

استخدم بابًا للتوضيح حسب الضرورة، مع طرح الأسئلة التالية.

اطرح السؤال التالي:

- ما القوى التي قد تجعل من فتح الباب أمرًا صعبًا؟ **الإجابات النموذجية: وزن الباب، الاحتكاك عند المفصلات**

الدرس 5-7 نواتج الضرب النقطي والتقاطعي للمتجهات في الفضاء

:: السابق	:: الحالي	:: لماذا؟
• وجدت قيمة ناتج الضرب النقطي لمتجهين في المستوى	**1** • إيجاد قيمة ناتج الضرب النقطي والزوايا بين المتجهات في الفضاء. **2** إيجاد قيمة ناتج الضرب التقاطعي للمتجهات في الفضاء واستخدام ناتج الضرب التقاطعي في إيجاد المساحة والحجم	• يتأثر ميل باب مزود بمفصلة للدوران بالمسافة بين موقع الدفع والمفصلة، ومقدار الدفع، واتجاه الدفع. وتقيس الكمية التي يطلق عليها العزم مدى فاعلية القوة المبذولة على رافعة في التسبب في دوران الشيء حول محوره.

المفردات الجديدة

ناتج الضرب التقاطعي cross product
العزم torque
متوازي السطوح parallelepiped
ناتج ضرب قياسي ثلاثة متجهات triple scalar product

1 نواتج الضرب النقطي في الفضاء

حساب نواتج الضرب النقطي لمتجهين في الفضاء يشبه حساب نواتج الضرب النقطي لمتجهين في مستوى. وكما هو الحال مع المتجهات في المستوى، تكون المتجهات غير الصفرية في الفضاء متعامدة فقط إن كان ناتج ضربهم النقطي يساوي صفرًا.

المفهوم الأساسي ناتج الضرب النقطي والمتجهات المتعامدة في الفضاء

ناتج الضرب النقطي لـ $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ تعرف على أنها $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. يكون المتجهان **a** و **b** متعامدين فقط إذا كان $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$

مثال 1 إيجاد ناتج الضرب النقطي لتحديد المتجهات المتعامدة في الفضاء

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثم حدّد ما إذا كانت النقطتان u و v متعامدتين.

a. $\mathbf{u} = \langle -7, 3, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 17, 5\rangle$

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -7(5) + 3(17) + (-3)(5)$

$= -35 + 51 + (-15) = 1$

حيث إن $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \neq 0$، فإن **u** و **v** ليسا متعامدين.

b. $\mathbf{u} = \langle 3, -3, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 7, 3\rangle$

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 3(4) + (-3)(7) + 3(3)$

$= 12 + (-21) + 9 = 0$

حيث إن $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$، فإن **u** و **v** متعامدان.

تمرين موجّه

1A. $\mathbf{u} = \langle 3, -5, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7, 5\rangle$ **0؛ متعامدان**

1B. $\mathbf{u} = \langle 4, -2, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3, -2\rangle$ **4؛ غير متعامدين**

كما هو الحال مع المتجهات في المستوى، إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهات غير الصفرية **a** و **b**، فإن $\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$

مثال 2 الزاوية بين متجهين في الفضاء

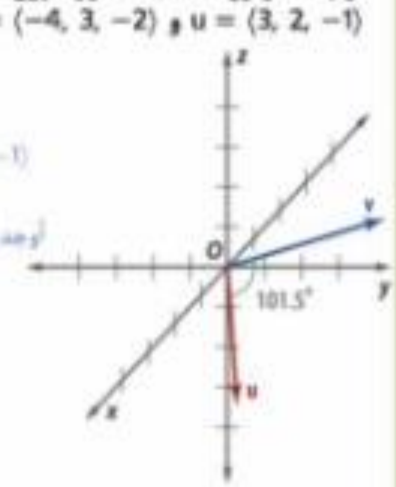
أوجد الزاوية θ المحصورة بين u و v مقربة إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة إذا كان $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -4, 3, -2\rangle$.

$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$ الزاوية بين متجهين

$\cos\theta = \frac{\langle 3, 2, -1\rangle\cdot\langle -4, 3, -2\rangle}{|\langle 3, 2, -1\rangle|\,|\langle -4, 3, -2\rangle|}$ $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -4, 3, -2\rangle$

$\cos\theta = \frac{-4}{\sqrt{14}\sqrt{29}}$ أوجد قيمة ناتج الضرب النقطي والمقدار.

$\theta = \cos^{-1}\frac{-4}{\sqrt{406}}$ حوالي $= 101.5°$ بسّط وأوجد حل θ.

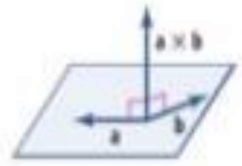


يساوي قياس الزاوية بين **u** و **v** حوالي 101.5°.

تمرين موجّه

2. أوجد قياس الزاوية المحصورة بين $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة. **124.6°**

2 نواتج الضرب التقاطعي



من نواتج الضرب الأخرى الهامة المرتبطة بالمتجهات في الفضاء، هو ناتج الضرب التقاطعي. وبخلاف ناتج الضرب النقطي، فإن **ناتج الضرب التقاطعي** لمتجهين **a** و **b** في الفضاء، والمشار إليه في الصورة **a × b** ويقرأ *a* تقاطع *b*، هو متجه وليس كمية عددية. ويكون المتجه **a × b** متعامدًا على المستوى الذي يحتوي على المتجهين **a** و **b**.

المفهوم الأساسي ناتج الضرب التقاطعي للمتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ فإن ناتج الضرب التقاطعي لـ **a** و **b** هو المتجه
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

مراجعة المفردات
محدد 2 × 2 محدد المصفوفة 2 × 2
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

إذا طبقنا قانون حساب محدد مصفوفة 3 × 3 على صيغة المحدد التالية والتي تتضمن **i**, **j**, **k** ومركبات **a** و **b**، فسنتوصل إلى نفس قانون **a × b**.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$
ضع متجهات الوحدة i و j و k في الصف 1.
ضع مركبات a في الصف 2.
ضع مركبات b في الصف 3.

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$
طبق القانون لمحدد 3 × 3.

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$
احسب كل محدد 2 × 2.

مثال 3 إيجاد ناتج الضرب التقاطعي لمتجهين

أوجد ناتج الضرب التقاطعي لكلٍ من $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -3, 3, 1\rangle$. ثم برهن أن u × v متعامد على كل من u و v.

انتبه!
ناتج الضرب التقاطعي ينطبق تعريف ناتج الضرب التقاطعي فقط على المتجهات في فضاء ثلاثي الأبعاد. ولا يعرّف ناتج الضرب التقاطعي المتجهات في النظام الإحداثي ثنائي الأبعاد.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

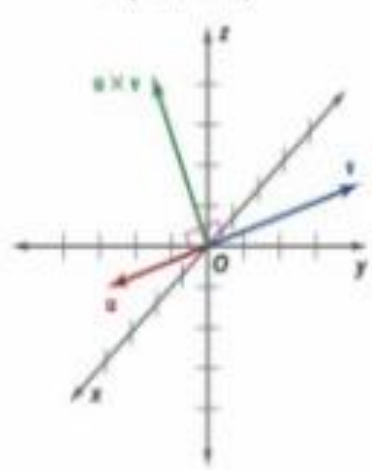
$$= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$
محدد مصفوفة 3 × 3

محددا المصفوفتين 2 × 2

$$= (-2 - 3)\mathbf{i} - [3 - (-3)]\mathbf{j} + (9 - 6)\mathbf{k}$$
بسّط.

$$= -5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$
الصورة المركبة

$$= \langle -5, -6, 3\rangle$$



في التمثيل البياني **u** و **v** و **u × v**. **u × v** متعامد على **u** و **u × v** متعامد على **v**.

لإثبات أن **u × v** متعامد على كل من **u** و **v**، أوجد ناتج الضرب النقطي لـ **u × v** مع **u** و **u × v** مع **v**.

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$	$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle -5, -6, 3\rangle \cdot \langle 3, -2, 1\rangle$	$= \langle -5, -6, 3\rangle \cdot \langle -3, 3, 1\rangle$
$= -5(3) + (-6)(-2) + 3(1)$	$= -5(-3) + (-6)(3) + 3(1)$
$= -15 + 12 + 3 = 0$ ✓	$= 15 + (-18) + 3 = 0$ ✓

حيث إن كل من ناتجي الضرب النقطي مساويين للصفر، إذًا المتجهات متعامدة.

تمرين موجه 3A-B. انظر ملحق إجابات الوحدة 7 للبراهين.

أوجد ناتج الضرب التقاطعي لـ u و v. ثم برهن أن u × v متعامد على كل من u و v.

3A. $\mathbf{u} = \langle 4, 2, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4\rangle$ 3B. $\mathbf{u} = \langle -2, -1, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4\rangle$

3A. $\langle 9, -21, -6\rangle$
3B. $\langle -1, -7, 3\rangle$

- ما أفضل علاقة تنشأ بين اتجاه القوة والباب؟ تعامدية
- عندما تحرك يدك لمسافة أقرب إلى المفصلات، ماذا يحدث إلى القوة اللازمة لتحريك الباب؟ الإجابة النموذجية: تزداد القوة اللازمة عندما تقوم بالدفع بالقرب من المفصلات.

1 حواصل الضرب النقطي في الفضاء

يوضح المثال 1 طريقة إيجاد حاصل الضرب النقطي لمتجهين في الفضاء لتحديد ما إذا كان المتجهان متعامدين أم لا. **ويوضح المثال 2** طريقة إيجاد الزاوية المحصورة بين متجهين في الفضاء.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد ناتج الضرب النقطي لكل من **u** و **v**. ثم حدد ما إذا كان **u** و**v** متعامدين أم لا.

a. $\mathbf{u} = \langle -1, 6, -3\rangle,$
$\mathbf{v} = \langle 3, -1, -3\rangle$
0؛ متعامدان

b. $\mathbf{u} = \langle 2, 4, -6\rangle,$
$\mathbf{v} = \langle -3, 2, 4\rangle$
-22؛ غير متعامدين

2 أوجد قياس الزاوية θ المحصورة بين **u** و **v** إذا كان $\mathbf{u} = \langle -4, -1, -3\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 7, 3, 4\rangle$ مقربًا الدرجة لأقرب جزء من عشرة. $6.168°$

2 حواصل الضرب التقاطعي

يوضح المثال 3 طريقة إيجاد حاصل الضرب التقاطعي لمتجهين في الفضاء. **ويوضح المثال 4** طريقة استخدام حاصل الضرب التقاطعي لحساب العزم. **أما المثال 5** فيبين طريقة إيجاد مساحة متوازي الأضلاع في الفضاء. ويبين **المثال 6** طريقة إيجاد حجم متوازي السطوح.

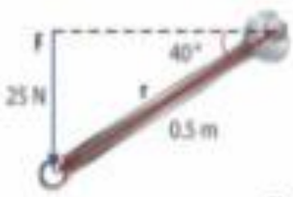
مثال إضافي

3 أوجد ناتج الضرب التقاطعي لـ $\mathbf{u} = \langle 6, -1, -2\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -1, -4, 2\rangle$. ثم اثبت أن **u × v** متعامد على كل من **u** و **v**. $\langle -10, -10, -25\rangle$؛

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \langle -10, -10, -25\rangle \cdot \langle 6, -1, -2\rangle$
$= -60 + 10 + 50 = 0$
$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \langle -10, -10, -25\rangle \cdot \langle -1, -4, 2\rangle$
$= 10 + 40 - 50 = 0$

يمكنك استخدام ناتج الضرب التقاطعي لإيجاد كمية المتجه المسمى **العزم**. ويقيس العزم مدى فاعلية القوة المبذولة على رافعة في التسبب في دوران الشيء حول محوره. يكون متجه العزم **T** عموديًا على المستوى الذي يحتوي على المسافة الموجهة **r** من محور الدوران إلى نقطة القوة المبذولة والقوة المبذولة **F** كما هو موضح. وبالتالي يساوي متجه العزم **T = r × F** ويقاس بالنيوتن متر (N · m).

مثال 4 من الحياة اليومية العزم باستخدام ناتج الضرب التقاطعي

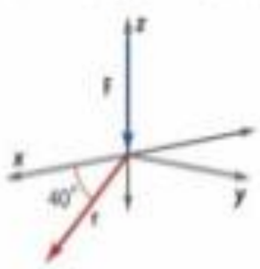


إصلاح السيارات يستخدم عبد الكريم مفتاح ربط الصواميل لإحكام صامولة العروة. ويبلغ طول مفتاح الربط الذي يستخدمه 50 سنتيمترًا أو 0.5 متر. أوجد مقدار واتجاه العزم على صامولة العروة إذا بذل قوة قدرها 25 نيوتن لأسفل لنهاية ذراع التوجيه عندما تكون 40° أسفل محور x الموجب كما هو موضح.

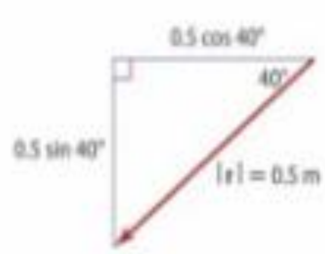
الخطوة 1 مثّل كل متجه في الموقع القياسي بيانيًا (الشكل 7.5.1).

الخطوة 2 حدد الصورة المركبة لكل متجه.

يمكن إيجاد الصورة المركبة للمتجه التي تمثل المسافة المتجهة من محور الدوران إلى نهاية ذراع التوجيه مباشرة باستخدام المثلث في الشكل 7.5.2 وحساب المثلثات. يكون المتجه **r** بالتالي (0.5 cos 40°, 0, −0.5 sin 40°) أو حوالي (0.38, 0, −0.32). ويساوي المتجه الذي يمثل القوة المبذولة على نهاية ذراع التوجيه 25 نيوتن مباشرة لأسفل. إذا (0, 0, −25) = **F**.



الشكل 7.5.1



الشكل 7.5.2

الخطوة 3 استخدم ناتج الضرب التقاطعي لهذه المتجهات لإيجاد المتجه الذي يمثل العزم على صامولة العروة.

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$ قانون ناتج الضرب التقاطعي للعزم

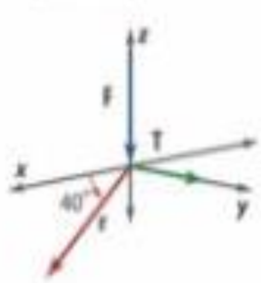
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.38 & 0 & -0.32 \\ 0 & 0 & -25 \end{vmatrix}$$ ناتج الضرب التقاطعي لـ r و F

$$= \begin{vmatrix} 0 & -0.32 \\ 0 & -25 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 0.38 & -0.32 \\ 0 & -25 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0.38 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$ محدد مصفوفة 3 × 3

$$= 0\mathbf{i} - (-9.5)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$ محددا مصفوفتين 2 × 2

$$= (0, 9.5, 0)$$ الصورة المركبة

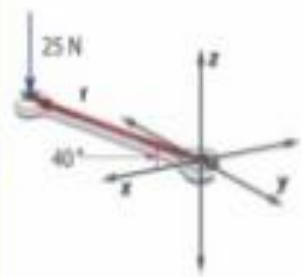
الخطوة 4 أوجد مقدار متجه العزم واتجاهه. الصورة المركبة لمتجه العزم (0, 9.5, 0) تخبرنا بأن مقدار المتجه يساوي حوالي 9.5 نيوتن-متر ويوازي محور **y** الموجب كما هو موضح.



تمرين موجّه

4. إصلاح السيارات أوجد مقدار العزم إذا بذل عبد الكريم نفس مقدار القوة على نهاية ذراع التوجيه لأسفل مباشرة عندما يكون ذراع التوجيه زاوية 40° أعلى محور x الموجب كما هو موضح في الشكل 7.5.3.

9.5 N · m ويوازي محور y الموجب



الشكل 7.5.3

مهنة من الحياة اليومية

ميكانيكي السيارات يقوم ميكانيكي السيارات بأعمال الإصلاح التي تتنوع بين المشاكل الميكانيكية البسيطة وحتى عمليات الإصلاح عالية المستوى المتعلقة بالتكنولوجيا. ولا بد أن يتمتع بمهارات جيدة لحل المشكلات والموهبة الميكانيكية والمعرفة بالإلكترونيات والرياضيات. ويكمل الكثير من الميكانيكيين برنامج تدريب مهني في تكنولوجيا خدمات السيارات.

إرشاد للمعلمين الجدد

صيغة المحدد يشار إلى المحدد في المثال 3 بأنه في صيغة *المحدد* لأنه ليس محددًا فعليًا. وحسب التعريف، يجب أن تتكون عناصر مصفوفة المحدد المتوافقة من كميات قياسية فقط. لاحظ أن **i** و **j** و **k** متجهات، ولذلك ينبغي اعتبار صيغة المحدد هذه بأنها تغير في استخدام ترميز المحدد بهدف حساب حاصل الضرب النقطي لمتجهين في الفضاء.

مثال إضافي

4 آلات يستخدم ميكانيكي مفتاح ربط طوله 0.4 متر لإحكام ربط صمولة. أوجد مقدار العزم واتجاهه حول الصمولة إذا كانت القوة 30 نيوتن مبذولة لأسفل على طرف المقبض عندما يكون فوق محور x الموجب بدرجة 35°.

9.9 N · m موازٍ لمحور y الموجب

إرشاد للمعلمين الجدد

نواتج الضرب النقطي والتقاطعي لاحظ أنه في حين يتسم ناتج الضرب النقطي بخاصية التبديل، فإن ناتج الضرب التقاطعي لا يتسم بها.

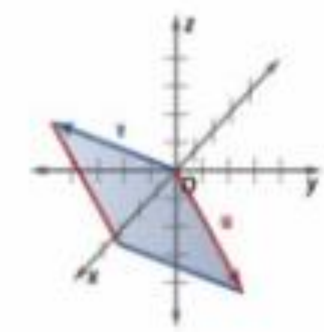
التدريس باستخدام التكنولوجيا

نظام إجابة الطلاب قدّم للطلاب عددًا من الأمثلة على مصفوفات 2 × 2 مثل

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} \text{ أو } \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \text{ أو } \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

اسأل الطلاب إذا ما كانت قيمة محدد كل مصفوفة موجبة أم سالبة. كلّف الطلاب بالإجابة مستخدمين A للقيمة *السالبة* و B للقيمة *الموجبة*.

يستخدم ناتج الضرب التقاطعي لمتجهين في تطبيقات هندسية كثيرة. وأحد هذه التطبيقات أن مقدار $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يمثل مساحة متوازي الأضلاع الذي يحتوي على الضلعان المتجاوران $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ (الشكل 7.5.4).


الشكل 7.5.4

مثال 5 مساحة متوازي أضلاع في الفضاء

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي يحتوي على الضلعين المتجاورين $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

الخطوة 1 أوجد $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$ $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$ محدد مصفوفة 3×3

$$= -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$$ محددا المصفوفتين 2×2

الخطوة 2 أوجد مقدار $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + (-14)^2}$$ مقدار متجه في الفضاء

$$= \sqrt{286} \approx 16.9$$ تقريبًا. بسّط.

تساوي مساحة متوازي الأضلاع في الشكل 7.5.4 حوالي 16.9 وحدة مربعة.

تمرين موجّه $\sqrt{545} \approx 23.3$ وحدة^2

5. أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي يحتوي على الضلعين المتجاورين $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ، $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

تحدد ثلاثة متجهات تقع في مستويات مختلفة ولكن تتشارك في نفس نقطة البداية الأضلاع المتجاورة **لمتوازي سطوح** متعدد الوجوه يوجوه جميعها متوازيات سطوح (الشكل 7.5.5).
وتمثل القيمة المطلقة **لناتج الضرب القياسي لثلاثة متجهات** لهذه المتجهات حجم متوازي سطوح.

المفهوم الأساسي ناتج الضرب القياسي لثلاثة متجهات

إذا كان $\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}$، $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$، $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$، فيتم الحصول على ناتج الضرب القياسي لثلاثة متجهات من خلال

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

نصيحة دراسية

ناتج الضرب القياسي لثلاثة متجهات لاحظ أنه لإيجاد ناتج الضرب القياسي لثلاثة متجهات $\mathbf{t}$ و $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ ستحتاج إلى كتابة المحدد الذي يمثل $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ واستبدال الصف الأعلى بالقيم للمتجه $\mathbf{t}$.

مثال 6 حجم متوازي السطوح

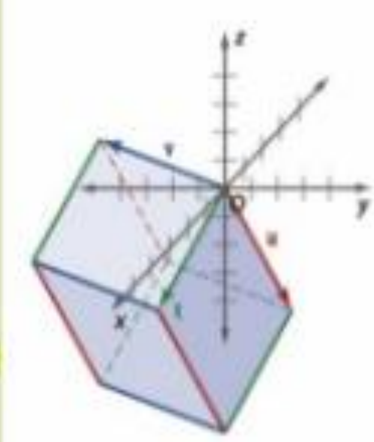
أوجد حجم متوازي السطوح الذي يحتوي على الأضلاع المتجاورة $\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$ $\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$، $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$، $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}(4) - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}(-2) + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}(-2)$$ محدد مصفوفة 3×3

$$= -12 + 18 + 28 = 34$$ بسّط.

يساوي حجم متوازي السطوح الموضح في الشكل 7.5.5 $|\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|$ أو 34 وحدة مكعبة.


الشكل 7.5.5

تمرين موجّه

6. أوجد حجم متوازي السطوح الذي يحتوي على الأضلاع المتجاورة $\mathbf{t} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ ، $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ، $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$. 86 وحدة^3

أمثلة إضافية

5 أوجد مساحة متوازي أضلاع له الضلعان المتجاوران $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$. $\sqrt{1217} \approx 34.9$ وحدة^2

6 أوجد حجم متوازي السطوح بالحواف المتجاورة $\mathbf{t} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$. 49 وحدة^3

التركيز على محتوى الرياضيات

متوازي السطوح متوازي السطوح هو مجسم متعدد الجوانب يوجد في فضاء ثلاثي الأبعاد وله ستة أوجه جميعها متوازيات أضلاع. ولا تقع المتجهات الثلاثة التي تشكل ثلاثًا من الحواف الاثني عشر للمجسم متعدد الجوانب في المستوى نفسه. يساوي حجم متوازي السطوح (حاصل ضرب مساحة القاعدة في الارتفاع) حاصل الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات الثلاثة. هناك حالات خاصة من متوازيات السطوح وهي متوازي المستطيلات (جميع الأوجه مستطيلة الشكل)، والمكعب (جميع الأوجه مربعة الشكل)، والمنشور معيّن الأوجه (جميع الأوجه على معيّنة الشكل).

المتابعة

لقد استكشف الطلاب المتجهات ثنائية وثلاثية الأبعاد.

اطرح السؤال التالي:

- كيف تفيد الكلمات الدالة على الموضع – مثل الشمال والجنوب وأعلى وأسفل – عند تمثيل المتجهات بالنماذج؟

الإجابة النموذجية: توضح الكلمات الدالة على الموضع اتجاه المتجه، وهو أمر ضروري عند استخدام المتجهات في وصف الكميات. بالنسبة للمتجهات ثلاثية الأبعاد، تقدم الكلمات الدالة على الموضع أيضًا إطارًا مرجعيًا يمكنك من معرفة أي الكميات ينبغي استخدامها عند إجراء العملية الحسابية.

التدريس المتمايز AL OL

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي كلّف الطلاب بإيجاد حاصل الضرب التقاطعي لـ $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ بإكمال المربّعات في المعادلة أدناه. كرر ذلك مع متجهات أخرى. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} =$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \boxed{\mathbf{j}} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & \boxed{4} \\ \boxed{3} & -2 & \boxed{-5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ \boxed{-2} & -5 \end{vmatrix}\mathbf{i} \boxed{-} \begin{vmatrix} \boxed{2} & 4 \\ \boxed{3} & -5 \end{vmatrix}\boxed{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & \boxed{-2} \end{vmatrix}\mathbf{k} = \boxed{23}\mathbf{i} - \boxed{-22}\mathbf{j} + \boxed{5}\mathbf{k}$$

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v، ثم حدّد ما إذا كان u و v متعامدين. (مثال 1)

1. $\mathbf{u} = \langle 3, -9, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 2, 7\rangle$ 0؛ متعامدان
2. $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -1, 4\rangle$ 14؛ غير متعامدين
3. $\mathbf{u} = \langle 2, -8, -7\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 9, -7\rangle$ 13−، غير متعامدين
4. $\mathbf{u} = \langle -7, -3, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 5, -13\rangle$ 0؛ متعامدان
5. $\mathbf{u} = \langle 11, 4, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 3, 8\rangle$ 15−، غير متعامدين
6. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ 8−، غير متعامدين
7. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ 0؛ متعامدان
8. $\mathbf{u} = 9\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ 0؛ متعامدان

9. **الكيمياء** يحتوي أحد جزيئات المياه، التي تكون فيها ذرة الأكسجين عند نقطة الأصل، على ذرة هيدروجين عند (55.5, 55.5, −55.5) بينما تقع ذرة الهيدروجين الثانية عند (−55.5, −55.5, −55.5). حدد زاوية الربط بين المتجهات المتكونة من روابط الأكسجين والهيدروجين. (مثال 2) حوالي 109.5°

أوجد الزاوية θ بين المتجهين u و v مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من الدرجة. (مثال 2) حوالي 109.5°

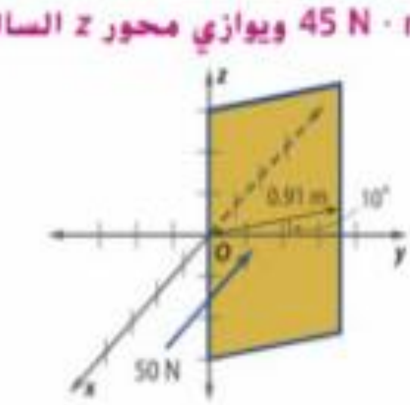
10. $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 4, -7\rangle$ 124.6°
11. $\mathbf{u} = \langle 6, -5, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -8, -9, 5\rangle$ 88.9°
12. $\mathbf{u} = \langle -8, 1, 12\rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 4, 2\rangle$ 37.5°
13. $\mathbf{u} = \langle 10, 0, -8\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -1, -12\rangle$ 152.3°
14. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$ 16.6°
15. $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

16-21. انظر ملحق إجابات الوحدة 7 للبراهين.

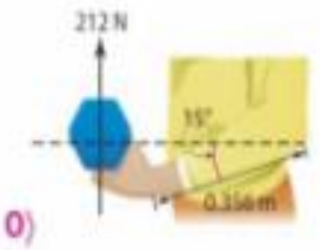
أوجد ناتج الضرب التقاطعي لـ u و v، ثم برهن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ متعامد على كل من u و v. (مثال 3)

16. $\mathbf{u} = \langle -1, 3, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -6, -3\rangle$ ⟨21, 70, 08⟩
17. $\mathbf{u} = \langle 4, 7, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 9, 1\rangle$ ⟨38, 26, 21⟩
18. $\mathbf{u} = \langle 3, -6, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 5, -8\rangle$ ⟨−56, −35, −42⟩
19. $\mathbf{u} = \langle 5, -8, 0\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, -2, 7\rangle$ ⟨−56, −35, −42⟩
20. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ ⟨7, 23, 12⟩
21. $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ⟨29, 12, 13⟩

22. **المطاعم** يبذل أحد عمال المطعم قوة قدرها 50 نيوتن لفتح باب. أوجد مقدار العزم المبذول على مفصلة الباب واتجاهه. (مثال 4)
حوالي $45\ N \cdot m$ ويوازي محور z السالب



23. **رفع الأثقال** تبذل إحدى لاعبات رفع الأثقال تقوم بتمارين لعضلة الذراع الأمامية ذات الرأسين قوة قدرها 212 نيوتن لرفع ثقل رياضي. ويبلغ طول ساعد لاعبة رفع الأثقال 0.356 متر وقد بدأ تمرين الذراع وكوعها منحنٍ بزاوية 15° أسفل المحور الأفقي في اتجاه محور x الموجب. (مثال 4)



⟨0, −72.08, 0⟩

a. أوجد المتجه الذي يمثل العزم المبذول على كوع لاعبة رفع الأثقال في الصورة المركبة.
b. أوجد مقدار العزم واتجاهه.

حوالي $72.08\ N \cdot m$ ويوازي محور y السالب

أوجد مساحة متوازي السطوح الذي يحتوي على الضلعين المتجاورين u و v. (مثال 5) 27-29. انظر الهامش.

24. $\mathbf{u} = \langle 2, -5, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 6, -1\rangle$ $\sqrt{1389} \approx 37.3$ وحدة²
25. $\mathbf{u} = \langle -9, 1, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -5, 3\rangle$ $13\sqrt{19} \approx 56.7$ وحدة²
26. $\mathbf{u} = \langle 4, 3, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 2, -2\rangle$ $\sqrt{186} \approx 13.6$ وحدة²
27. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$
28. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$
29. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

أوجد حجم متوازي السطوح الذي يحتوي على الأضلاع المتجاورة t و u و v. (مثال 6)

30. $\mathbf{t} = \langle -1, -9, 2\rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -7, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -2, 6\rangle$ 429 وحدة³
31. $\mathbf{t} = \langle -6, 4, -8\rangle, \mathbf{u} = \langle -3, -1, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 5, -7\rangle$ 206 وحدة³
32. $\mathbf{t} = \langle 2, -3, -1\rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -6, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 5, -4\rangle$ 85 وحدة³
33. $\mathbf{t} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{u} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ 102 وحدة³
34. $\mathbf{t} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ 40 وحدة³
35. $\mathbf{t} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ 69 وحدة³

B 36-39. تم توفير إجابات نموذجية.

أوجد متجهًا متعامدًا على كل متجه.

36. $\langle 3, -8, 4\rangle$ ⟨4, 3, 3⟩
37. $\langle -1, -2, 5\rangle$ ⟨5, 5, 3⟩
38. $\left\langle 6, -\frac{1}{3}, -3\right\rangle$ ⟨1, 9, 1⟩
39. $\langle 7, 0, 8\rangle$ ⟨−8, 0, 7⟩

إذا علمت v و u · v، فأوجد u.

40. $\mathbf{v} = \langle 2, -4, -6\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -22$ الإجابة النموذجية: ⟨−6, −2, 3⟩
41. $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}, 0, 4\right\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{31}{2}$ الإجابة النموذجية: ⟨−1, 0, 4⟩
42. $\mathbf{v} = \langle -2, -6, -5\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 35$ الإجابة النموذجية: ⟨3, 1, −7⟩

حدد ما إذا كانت النقاط تقع على مستقيم واحد.

43. $(-1, 7, 7), (-3, 9, 11), (-5, 11, 13)$ لا تقع على مستقيم واحد
44. $(11, 8, -1), (17, 5, -7), (8, 11, 5)$ لا تقع على مستقيم واحد

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم تمارين 1-35 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع في التمارين 30-35، قد يدوّن الطلاب حجم متوازي السطوح بقيمة سالبة. ذكّر الطلاب أن الحجم قياس لا بد وأن يكون ذا قيمة موجبة، إذًا الحجم قيمة مطلقة لحاصل ضرب ثلاثة متجهات.

الإجابات النموذجية قد يوجد أكثر من إجابة واحدة ممكنة للتمارين 36-42.

إجابات إضافية

27. $\sqrt{6821} \approx 82.6$ وحدة²
28. $3\sqrt{74} \approx 25.8$ وحدة²
29. $\sqrt{2158} \approx 46.5$ وحدة²

52. الإجابة النموذجية: باستخدام المتجهات في الصورة المركبة لتمثيل مسار كل طائرة، يمكن تحديد أن الزاوية المحصورة بين المتجهين قياسها 7.52°. ولذلك فإن مساري الطائرتين غير متوازيين.

61. دائمًا؛ الإجابة النموذجية: ينتج عن حاصل الضرب التقاطعي لمتجهين ثلاثيي الأبعاد متجه عمودي على كلا المتجهين الأصليين.

62. الإجابة النموذجية: هناك عدد لا نهائي من المتجهات المتعامدة على زوج من المتجهات المتوازية. فإذا توازى متجهان، فإنهما متحدان في المستوى. وبحسب نظرية القاطع المتعامد، إذا تعامد متجه على واحد من متجهين متوازيين، فإنه متعامد على الآخر أيضًا. وحيث إن المتجه يمكن أن يكون له عدد لا نهائي من المتجهات المتعامدة، فإن هناك عددًا لا نهائيًا من المتجهات المتعامدة على المتجهين المتوازيين.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-35, 60-62, 64-85	83-85 ,فردي 1-35	60-62, 64-82 ,زوجي 2-34
OL ضمن المستوى	,فردي 1-51 ,52 ,فردي 53-57 58-62, 64-85	1-35, 83-85	36-62, 64-82
BL أعلى من المستوى	36-85		

حدد ما إذا كان كل زوجين من المتجهات متوازيين.

45. $\mathbf{m} = \langle 2, -10, 6 \rangle, \mathbf{n} = \langle 3, -15, 9 \rangle$ **متوازيان**

46. $\mathbf{a} = \langle 6, 3, -7 \rangle, \mathbf{b} = \langle -4, -2, 3 \rangle$ **غير متوازيين**

47. $\mathbf{w} = \left\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{9}{8} \right\rangle, \mathbf{z} = \langle -4, 2, -3 \rangle$ **متوازيان**

اكتب الصورة المركبة لكل متجه.

48. يقع **u** في المستوى yz ومقداره 8، ويكوّن زاوية $60°$ أعلى محور y الموجب. $\langle 0, 4, 4\sqrt{3} \rangle$

49. يقع **v** في المستوى xy ومقداره 11، ويكوّن زاوية أعلى $30°$ إلى يسار محور x السالب. $\left\langle -\frac{11\sqrt{3}}{2}, -\frac{11}{2}, 0 \right\rangle$

إذا علمت المتجهات الأربعة، فحدّد ما إذا كان رباعي الأضلاع $ABCD$ متوازي سطوح أم لا. وإذا كانت الإجابة نعم، فحدد ما إذا كان مستطيل الشكل أم لا.

50. $A(3, 0, -2), B(0, 4, -1), C(0, 2, 5), D(3, 2, 4)$ **ليس متوازي سطوح**

51. $A(7, 5, 5), B(4, 4, 4), C(4, 6, 2), D(7, 7, 3)$

متوازي سطوح؛ حوالي 9.4 وحدة^2؛ مستطيل

52. **استعراضات الطائرات** بأحد استعراضات الطائرات، انطلقت طائرتان في نفس الوقت. وقد بدأت الطائرة الأولى من الموقع $(0, -2, 0)$ ووصلت للموقع $(6, -10, 15)$ بعد ثلاث ثوان. وبدأت الطائرة الثانية من الموقع $(0, 2, 0)$ ووصلت للموقع $(6, 10, 15)$ بعد ثلاث ثوان. فهل مسار كلتا الطائرتين متوازيان؟ اشرح.

لا؛ انظر الهامش للاطلاع على الشرح.

لكل من $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -2 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -4, 4, 5 \rangle$، أوجد كلاً مما يلي إن أمكن.

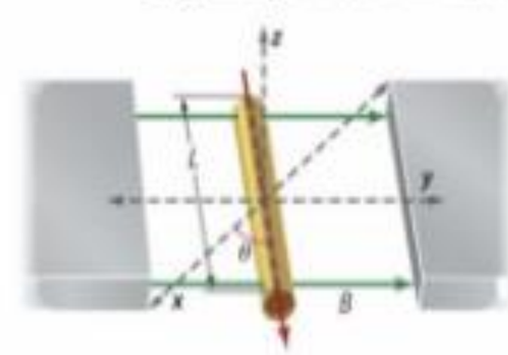
53. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ **0**

54. $\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ **لا يمكن**

55. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ $\langle 0, 0, 0 \rangle$

56. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ **لا يمكن**

57. **الكهرباء** عند وضع سلك ينقل تيارًا كهربيًا في مجال مغناطيسي، فإن القوة المبذولة على السلك بوحدات النيوتن موضحة بـ $\vec{F} = I\,\vec{L} \times \vec{B}$ حيث I تمثل التيار الذي يسري عبر السلك بوحدات الأمبير، و $\vec{L}$ تمثل طول المتجه على السلك الذي يشير إلى اتجاه التيار بالأمتار، و $\vec{B}$ هو القوة المبذولة على المجال المغناطيسي بوحدات التسلا. وفي الشكل أدناه، تم تدوير السلك بزاوية θ في المستوى xy.

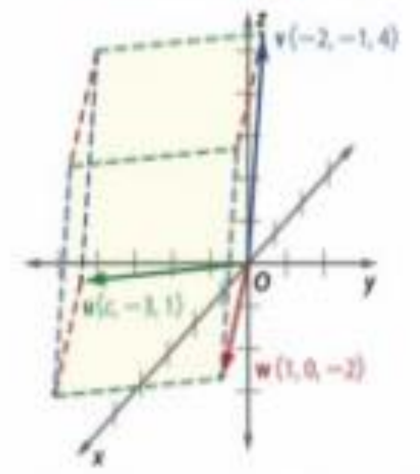


a. إذا كانت قوة المجال المغناطيسي 1.1 تسلا، فأوجد مقدار القوة المبذولة على سلك في المستوى xy يبلغ طوله بالمتر 1.5 ويحمل تيارًا بشدة 25 أمبير ويكون زاوية $60°$. **حوالي 2.1 N**

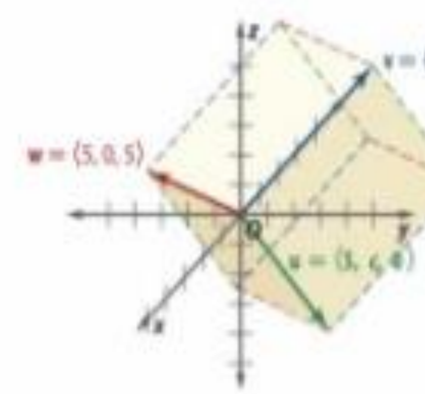
b. إذا كانت القوة المبذولة على السلك $\vec{F} = \langle 0, 0, -0.63 \rangle$، فما زاوية السلك؟ **حوالي $98.8°$**

إذا علمت **v** و **w** وحجم متوازي السطوح الذي يحتوي على الأضلاع المتجاورة **u** و **v** و **w**، فأوجد c.

58. $\mathbf{v} = \langle -2, -1, 4 \rangle$، $\mathbf{w} = \langle 1, 0, -2 \rangle$، $\mathbf{u} = \langle c, -3, 1 \rangle$
$V = 7$ وحدات مربعة **3**

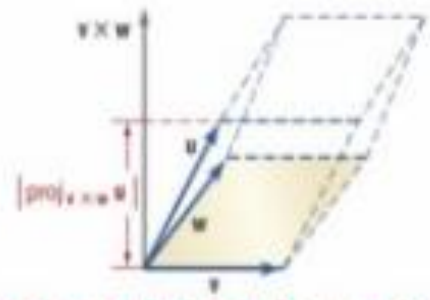


59. $\mathbf{v} = \langle 0, 5, 5 \rangle$، $\mathbf{w} = \langle 5, 0, 5 \rangle$، $\mathbf{u} = \langle 5, c, 0 \rangle$
و $V = 250$ وحدة مربعة **5**



مسائل مهارات التفكير العليا — استخدام مهارات التفكير العليا

60. **البرهان** تحقق من صحة قانون حجم متوازي السطوح. (إرشاد: استخدم مسقط **u** على **v × w**.)



انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

61. **التبرير** حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أحيانًا أم دائمًا ليست صحيحة على أم الإطلاق. اشرح.
لأي متجهين غير صفريين غير متوازيين في الفضاء، يوجد متجه عموديًا على كلاهما. **انظر الهامش.**

62. **التبرير** إذا كان **u** و **v** متوازيين في الفضاء، فكم عدد المتجهات المتعامدة على كليهما؟ اشرح. **انظر الهامش.**

63. **التحدي** بافتراض أن $\mathbf{u} = \langle 4, 6, c \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -3, -2, 5 \rangle$، أوجد قيمة c التي تجعل $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 34\mathbf{i} - 26\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$. **2**

64. **التبرير** اشرح السبب الذي يجعل ناتج الضرب التقاطعي لا يعرّف المتجهات في النظام الإحداثي ثنائي الأبعاد. **انظر الهامش.**

65. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبيّن الفرق بين طرق تحديد ما إذا كانت المتجهات في الفضاء متوازية أم متعامدة.
انظر ملحق إجابات الوحدة 7.

64. الإجابة النموذجية: تعريف حاصل الضرب التقاطعي لمتجهين **a** و **b** هو المتجه العمودي على المستوى الذي يضم كلاً من **a** و **b**. وللحصول على متجه عمودي على مستوى ثنائي الأبعاد، لا بد من وجود اتجاه ثالث.

مراجعة شاملة

أوجد طول القطعة المستقيمة ونقطة المنتصف لها باستخدام نقطتي طرفيها المبينتين.

66. $(1, 10, 13), (-2, 22, -6)$ $\sqrt{514} \approx 22.7; \left(-\frac{1}{2}, 16, \frac{7}{2}\right)$

67. $(12, -1, -14), (21, 19, -23)$ $\sqrt{562} \approx 23.7; \left(\frac{33}{2}, 9, -\frac{37}{2}\right)$

68. $(-22, 24, -9), (10, 10, 2)$ $3\sqrt{149} \approx 36.6; \left(-6, 17, -\frac{7}{2}\right)$

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v، ثمّ حدّد ما إذا كانت النقطتان u و v متعامدتين.

69. $\langle -8, -7\rangle \cdot \langle 1, 2\rangle$ **−22، غير متعامدين**

70. $\langle -4, -6\rangle \cdot \langle 7, 5\rangle$ **−58، غير متعامدين**

71. $\langle 6, -3\rangle \cdot \langle -3, 5\rangle$ **−33، غير متعامدين**

72. **مخبز** يحتوي مخبز عبد العزيز على أرفف يمكنها استيعاب حتى 900 رغيف من الخبز الفرنسي والمافن. ونظرًا للتكاليف، يجب أن يكون عدد أرغفة الخبز الفرنسي المنتجة أقل من أو يساوي 300 زائد ضعفي عدد المافن المنتج. ويشار إلى أن الطلب على أرغفة الخبز الفرنسي يعادل على الأقل ضعفي الطلب على المافن. ويجني عبد العزيز ربحًا قيمته AED 3 لكل قطعة مافن مبيعة و AED 1.25 لكل رغيف خبز فرنسي. كم عدد المنتجات التي ينبغي عليه إنتاجها من كل نوع لتحقيق أقصى أرباح؟ **225 قطعة مافن و 675 رغيف خبز فرنسي**

73. فكك $\frac{2m+16}{m^2-16}$ إلى كسور جزئية. $\frac{3}{m-4} + \frac{-1}{m+4}$

أثبت صحة كل متطابقة. 74-76. انظر الهامش.

74. $\tan^2\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta = \sec^2\theta$

75. $\sec^2\theta\cot^2\theta - \cot^2\theta = 1$

76. $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$

حل كل مثلث. حوّل طول الضلع لأقرب جزء من عشرة، وحوّل قياس الزاوية إلى أقرب درجة.

77. $a = 20, c = 24, B = 47°$ $A \approx 55°, C \approx 78°, b \approx 17.9$

78. $A = 25°, B = 78°, a = 13.7$ $C = 77°, b \approx 31.7, c \approx 31.6$

79. $a = 21.5, b = 16.7, c = 10.3$ $A \approx 103°, B \approx 49°, C \approx 28°$

اكتب كل مقياس درجة عشرية في صيغة DMS (درجة، دقيقة وثانية) وكل مقياس DMS في صيغة درجة عشرية لأقرب جزء من مئة.

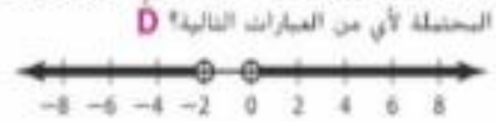
80. $-72.775°$ $-72° 46' 30''$

81. $29° 6' 6''$ $29.102°$

82. $132° 18' 31''$ $132.309°$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

83. **SAT/ACT** يعبّر هذا التمثيل البياني عن مجموعة كافة الحلول المحتملة لأي من العبارات التالية؟ **D**



A $|x-1| > 1$
B $|x-1| < 1$
C $|x+1| < 1$
D $|x+1| > 1$

84. ما ناتج الضرب التقاطعي لكلٍ من $u = \langle 3, 8, 0\rangle$ و $v = \langle -4, 2, 6\rangle$؟ **F**

F $48i - 18j + 38k$
G $48i - 22j + 38k$
H $46i - 22j + 38k$
J $46i - 18j + 38k$

85. **إجابة حرة** يضرب لاعب الكرة بزاوية 30° بالنسبة لمستوى الأرض وبسرعة مبدئية قدرها 90 قدمًا في الثانية.

a. أوجد مقداري المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة.

85a. الأفقي: $45\sqrt{3}$ ft/s؛ الرأسي: 45 ft/s

b. هل القيم الناتجة في الجزء **a** متجهات أو كميات عددية؟ **كميات عددية**

c. افترض أنه لم يتم إمساك الكرة وأن اللاعب قذفها مبتعدة بياردة عن الأرض. فما المسافة التي ستقطعها بالإجمال في الهواء؟ **حوالي 226.0 ft**

d. افترض أن القاعدة الرئيسة تقع في نقطة الأصل وتقع القاعدة الثانية في اتجاه الشمال. وإذا ضربت الكرة في الاتجاه N20°W ثم سقطت عند النقطة D فأوجد الصورة المركبة لـ $\overrightarrow{CD}$.

e. حدد متجه الوحدة لـ $\overrightarrow{CD}$. $\langle -0.342, 0.940\rangle$

f. يقف لاعب الوسط عند (0, 150) عند ضربه الكرة. فلأي اتجاه ربعي يجب أن يجري لاعب الوسط ليلاقي الكرة في النقطة التي ستسقط فيها على الأرض؟ **حوالي N51.1°W**

d. $\langle -77.3, 212.4\rangle$

4 التقويم

عيّن مصطلح الرياضيات كلّف الطلاب بذكر المصطلحات (قانون المسافة، كمية قياسية، متجه، محدد) التي ترتبط بحاصل الضرب التقاطعي. محدد، متجه

إجابات إضافية

74. $\tan^2\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta$
$= \tan^2\theta + (\cos^2\theta + \sin^2\theta)$
$= \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

75. $\sec^2\theta\cot^2\theta - \cot^2\theta$
$= \cot^2\theta(\sec^2\theta - 1)$
$= \cot^2\theta\tan^2\theta = 1$

76. $\tan^2\theta - \sin^2\theta$
$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta$
$= \sin^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)$
$= \sin^2\theta(\sec^2\theta - 1)$
$= \sin^2\theta\tan^2\theta$

التدريس المتمايز BL

التوسع كلّف الطلاب باستخدام ما تعلموه عن إيجاد مساحة متوازي الأضلاع لإثبات أن مساحة مثلث له الضلعان $u = 2i + 7j - k$ و $v = 3i - 2k$ تساوي $\frac{\sqrt{638}}{2}$ أو حوالي 12.63 وحدة مربعة.

الإجابة النموذجية: مساحة متوازي أضلاع الذي له الضلعان المتجاوران $u = 2i + 7j - k$ و $v = 3i - 2k$ سوف تبلغ $\sqrt{638}$ وحدة2. والمثلث الذي له ضلعان لهما القياسات نفسها لمتوازي الأضلاع سوف تبلغ مساحته نصف مساحة المتوازي أو $\frac{\sqrt{638}}{2}$ أو حوالي 12.63 وحدة مربعة.

التقويم التكويني

المفردات الأساسية تشير الصفحات المرجعية المذكورة بعد كل كلمة إلى الموضع الذي ورد فيه ذلك المصطلح لأول مرة. فإذا واجه الطلاب صعوبة في الإجابة عن الأسئلة 10-1، فذكّرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لإنعاش ذاكراتهم بشأن المفردات.

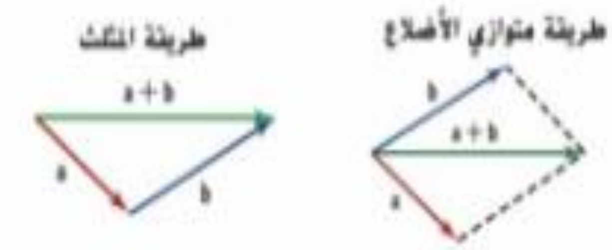
الوحدة 7 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الوحدة

المفاهيم الأساسية

مقدمة عن المتجهات (الدرس 1-7)

- يعتبر اتجاه المتجه هو الزاوية الموجهة المحصورة بين المتجه ومستقيم أفقي. ويعتبر مقدار المتجه طوله.
- عند الجمع بين متجهين أو أكثر يكون المجموع متجه واحد يسمى الناتج. ويمكن إيجاده باستخدام طريقة المثلث أو طريقة متوازي الأضلاع.



المتجهات في المستوى الإحداثي (الدرس 2-7)

- تعتبر الصورة المركبة لمتجه يحتوي على المركبات المتعامدة x و y هي $\langle x, y\rangle$.
- يتم الحصول على الصورة المركبة لمتجه ليس في الوضع القياسي. ويحتوي على نقطة البداية $A(x_1, y_1)$ ونقطة النهاية $B(x_2, y_2)$ من خلال $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$.
- يتم الحصول على مقدار متجه $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ من خلال $|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ هما متجهان و k هي كمية عددية. إذًا $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$، $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2\rangle$، $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2\rangle$
- يمكن استخدام متجهات الوحدة القياسية $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ في الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$

نواتج الضرب النقطي (الدرس 3-7)

- يحدد ناتج الضرب النقطي لـ $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ على أنه $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$
- إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهات غير الصفرية $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، فإن $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$

المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد (الدرس 4-7)

- يتم الحصول على المسافة بين $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ من خلال $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- يتم الحصول على نقطة منتصف $\overline{AB}$ من خلال $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$

ناتجا الضرب النقطي والتقاطعي للمتجهات في الفضاء (الدرس 5-7)

- يحدد ناتج الضرب النقطي لـ $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ على أنه $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- إذا كان $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ فإن ناتج الضرب التقاطعي لـ $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هو المتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

المفردات الأساسية

- صورة مركبة component form
- مركبات components
- ناتج الضرب التقاطعي cross product
- direction الاتجاه
- ناتج الضرب النقطي dot product
- متجهات متكافئة equivalent vectors
- initial point نقطة البداية
- توفيق خطي linear combination
- magnitude مقدار
- octants أثمان
- متجهات متعاكسة opposite vectors
- ordered triple ثلاثي مُرتب
- orthogonal متعامد
- متوازي السطوح parallelepiped
- طريقة متوازي الأضلاع parallelogram method
- متجهات موازية parallel vectors
- quadrant bearing اتجاه ربعي
- مركبات متعامدة rectangular components
- resultant ناتج
- الوضع القياسي standard position
- terminal point نقطة النهاية
- نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد three-dimensional coordinate system
- torque العزم
- طريقة المثلث triangle method
- ناتج ضرب قياسي لثلاثة متجهات triple scalar product
- true bearing اتجاه حقيقي
- unit vector متجه وحدة
- vector متجه
- مسقط المتجه vector projection
- work الشغل
- محور z z-axis
- zero vector متجه صفري

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة. فإذا كانت خاطئة، فاستبدل الكلمة أو العبارة التي تحتها خط بحيث تكون الجملة صحيحة.

1. نقطة النهاية للمتجه هي النقطة التي يبدأ منها المتجه. **خطأ؛ ينتهي**
2. إذا كان $\mathbf{a} = \langle -4, 1\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle 3, 2\rangle$ فيتم حساب ناتج الضرب النقطي من خلال $-4(1) + 3(2)$ **خطأ؛ $-4(3) + 1(2)$**
3. يتم الحصول على نقطة منتصف $\overline{AB}$ التي تحتوي على $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ من خلال $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$ **صواب**
4. مقدار $\mathbf{r}$ إذا كانت نقطة البداية هي $A(-1, 2)$ ونقطة النهاية هي $B(2, -4)$ يساوي $\langle 3, -6\rangle$. **خطأ؛ الصورة المركبة**
5. يكون المتجهان متساويين فقط إن كانا يتساويان في الاتجاه والمقدار. **صواب**
6. عندما يكون المتجهان متعامدين يكون قياس الزاوية المحصورة بينهما $180°$ **خطأ؛ $90°$**
7. يعتبر مركب $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$ هو المتجه الذي يكون اتجاهه موازيًا لـ $\mathbf{v}$ وطوله مركب $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$. **خطأ؛ مسقط**
8. لإيجاد متجه واحد على الأقل عمودي على أي متجهين آخرين في الفضاء، احسب ناتج الضرب التقاطعي للمتجهين الأصليين. **صواب**
9. عند طرح متجه، فالأمر يكافئ جمع متجه معاكس. **صواب**
10. إذا كان $\mathbf{v}$ متجه وحدة في نفس اتجاه $\mathbf{u}$، فإن $\mathbf{v} = \dfrac{|\mathbf{u}|}{\mathbf{u}}$ **خطأ؛ $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$**

مراجعة درس بدرس

التدخل إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لعرض الموضوعات التي تتناولها الأسئلة، فذكِّر الطلاب بأن الصفحات المرجعية ترشدهم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

إجابات إضافية

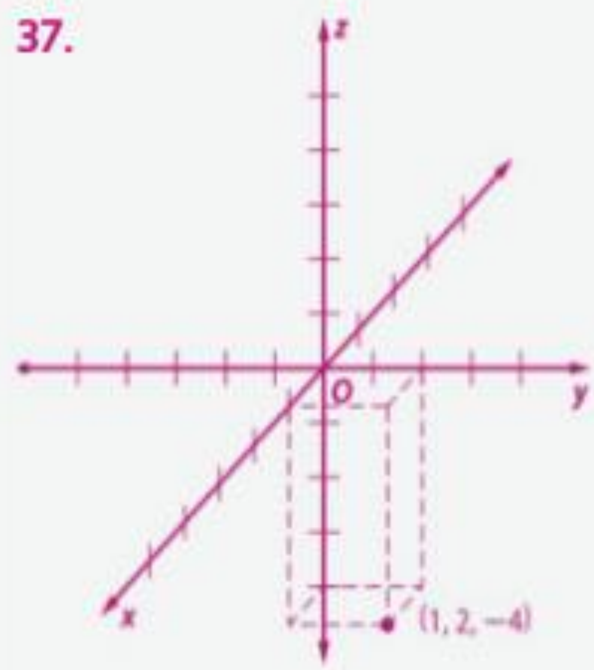
27. $\left\langle -\frac{7\sqrt{53}}{53}, \frac{2\sqrt{53}}{53} \right\rangle$

28. $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

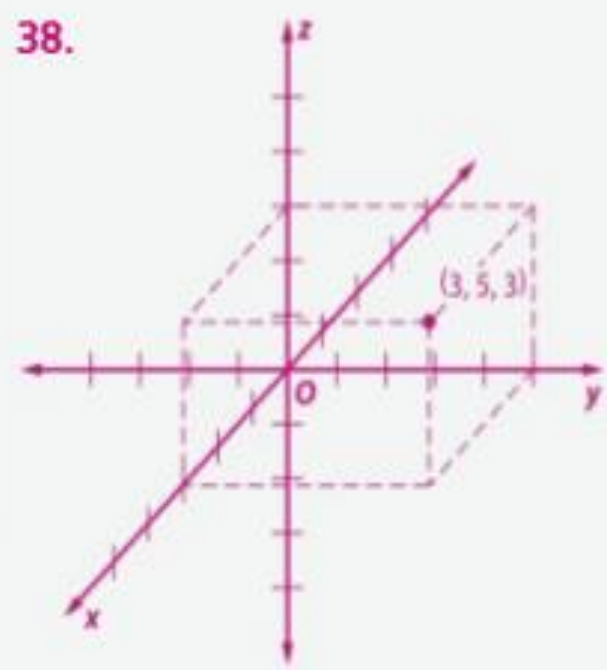
29. $\left\langle -\frac{5\sqrt{89}}{89}, -\frac{8\sqrt{89}}{89} \right\rangle$

30. $\left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10} \right\rangle$

37.



38.



7 دليل الدراسة والمراجعة تابع

مراجعة درس بدرس

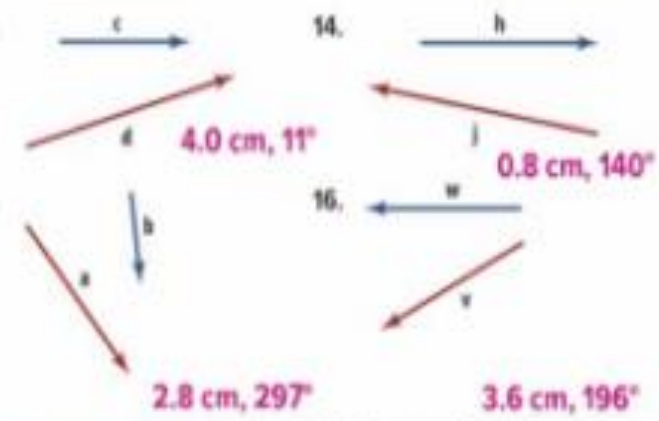
7-1 مقدمة عن المتجهات

اذكر ما إذا كانت كل كمية موصوفة هي كمية متجهة أم كمية عددية.

11. تسير سيارة بسرعة 50 ميلًا في الساعة في اتجاه الشرق **متجه**

12. تهب نسمة هواء بسرعة 5 أمتار في الثانية **كمية عددية**

أوجد ناتج كل زوج من المتّجهات باستخدام إما طريقة المثلّث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر والاتجاه بالنسبة إلى المحور الأفقي.



13. **4.0 cm, 11°**
14. **0.8 cm, 140°**
15. **2.8 cm, 297°**
16. **3.6 cm, 196°**

حدد مقدار واتجاه ناتج مجموع كل متجه.

17. 70 مترًا باتجاه الغرب ثم 150 مترًا باتجاه الشرق **80 m باتجاه الشرق**

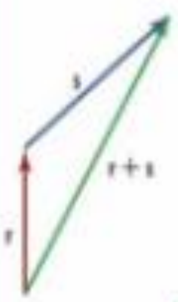
18. 8 نيوتن للأمام مباشرة ثم 12 نيوتن للخلف مباشرة **20 N للخلف**

مثال 1

أوجد ناتج المتجهين r و s باستخدام إما طريقة المثلّث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج بالسنتيمتر والاتجاه بالنسبة إلى المركّبة الأفقية.

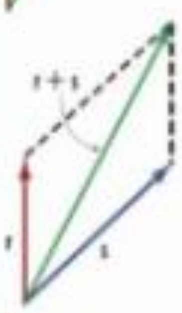
طريقة المثلث

قم بإزاحة r بحيث يلامس طرف r ذيل s. الناتج هو المتجه من ذيل r إلى طرف s.



طريقة متوازي الأضلاع

قم بإزاحة s بحيث يلامس ذيل s طرف r. أكمل متوازي الأضلاع الذي يحتوي على r و s كضلعين من أضلاعه. الناتج هو المتجه الذي يشكل القطر المشار إليه لمتوازي الأضلاع.



يكون مقدار الناتج 3.4 cm واتجاهه 59°.

19. $\langle 6, 1\rangle; \sqrt{37} \approx 6.1$ **20.** $\langle -16, 8\rangle; 8\sqrt{5} \approx 17.9$

7-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

أوجد الصورة المركبة ومقدار المتّجه $\overline{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين.

19. $A(-1, 3), B(5, 4)$
20. $A(7, -2), B(-9, 6)$
21. $A(-8, -4), B(6, 1)$ **$\langle 14, 5\rangle; \sqrt{221} \approx 14.9$**
22. $A(2, -10), B(3, -5)$ **$\langle 1, 5\rangle; \sqrt{26} \approx 5.1$**

أوجد كل مما يلي لكل من $p = \langle 4, 0\rangle$ و $q = \langle -2, -3\rangle$ و $t = \langle -4, 2\rangle$.

23. $2q - p$ **$\langle -8, -6\rangle$**
24. $p + 2t$ **$\langle -4, 4\rangle$**
25. $t - 3p + q$ **$\langle -18, -1\rangle$**
26. $2p + t - 3q$ **$\langle 10, 11\rangle$**

أوجد متّجه الوحدة u الذي له نفس اتّجاه v. **27–30. انظر الهامش.**

27. $v = \langle -7, 2\rangle$
28. $v = \langle 3, -3\rangle$
29. $v = \langle -5, -8\rangle$
30. $v = \langle 9, 3\rangle$

مثال 2

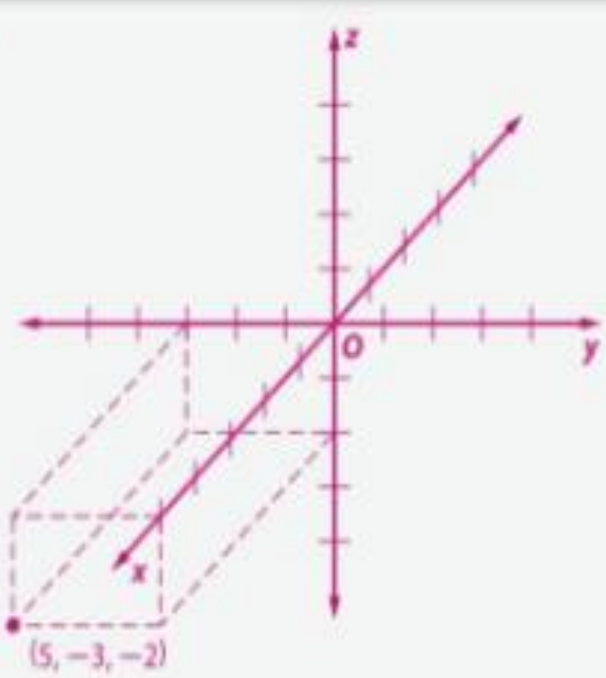
أوجد الصورة المركّبة والمقدار للمتّجه $\overline{AB}$ الذي تكون نقطة بدايته $A(3, -2)$ ونقطة نهايته $B(4, -1)$.

$\overline{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$	الصورة المركبة
$= \langle 4 - 3, -1 - (-2)\rangle$	عوّض.
$= \langle 1, 1\rangle$	اطرح.

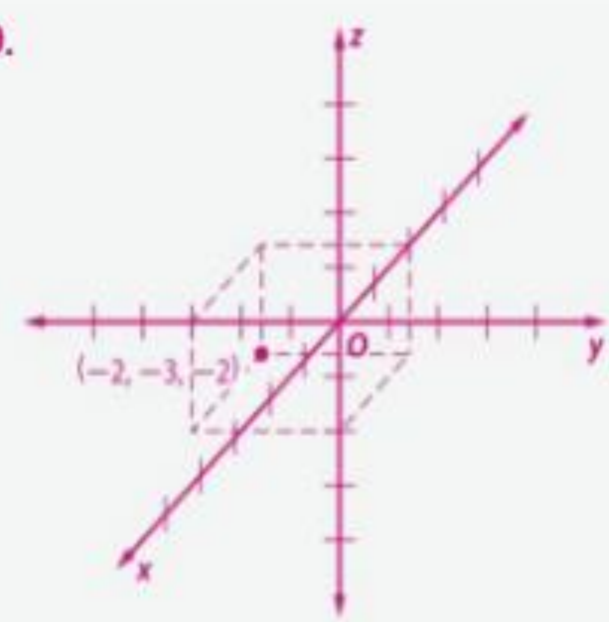
أوجد المقدار باستخدام قانون المسافة.

$\lvert\overline{AB}\rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	قانون المسافة
$= \sqrt{(4 - 3)^2 + (-1 - (-2))^2}$	عوّض.
$= \sqrt{2}$ تقريبًا $= 1.4$	بسّط.

39.

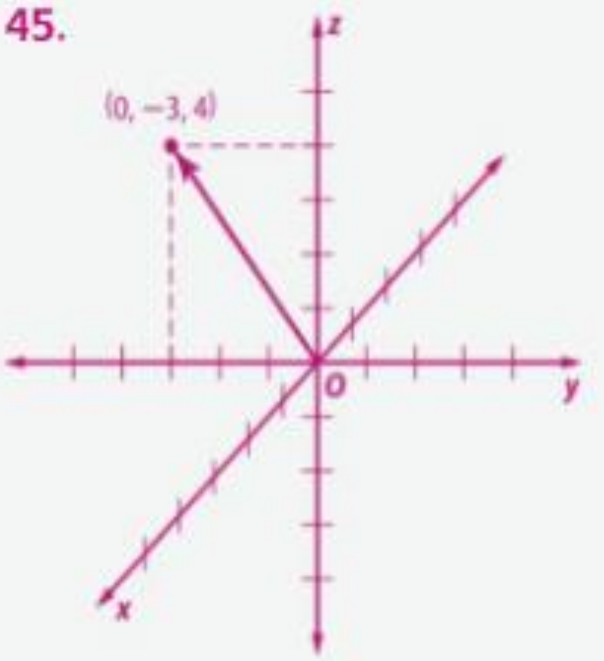


40.

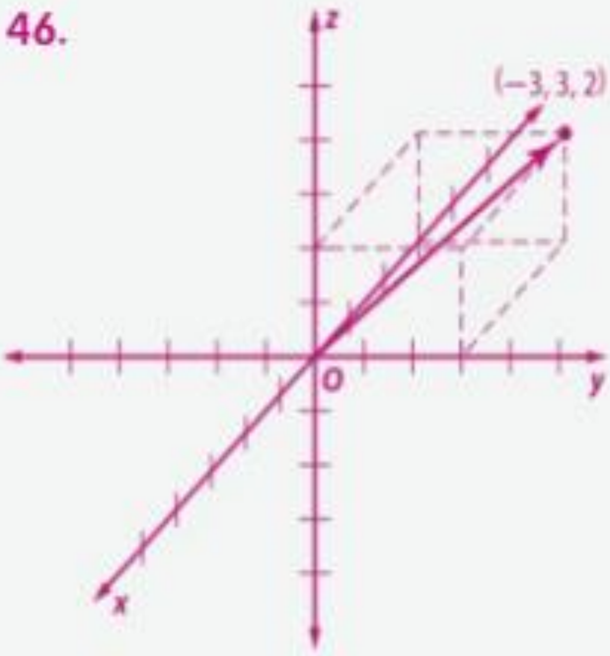


إجابات إضافية

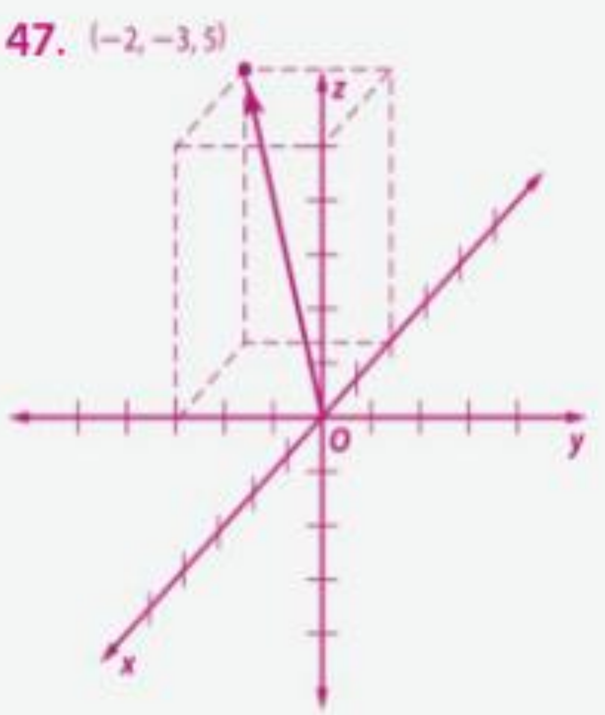
45.



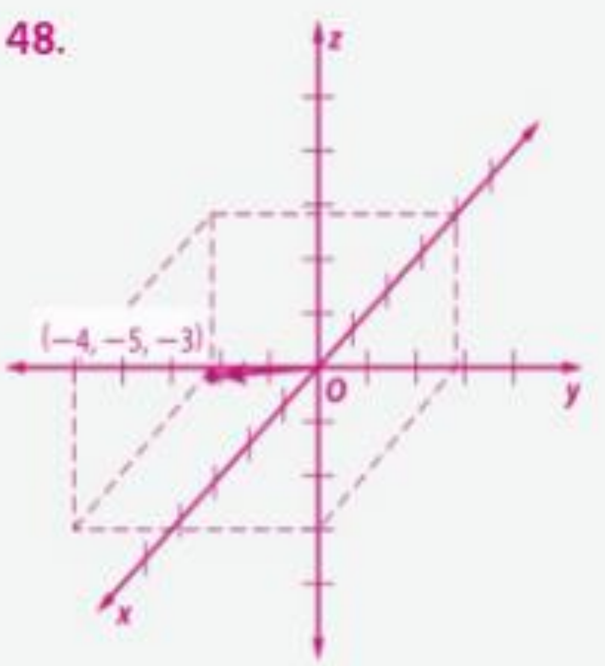
46.



47.



48.



7-3 نواتج الضرب النقطي ومساقط المتجهات

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثمَّ حدِّد ما إذا كان u و v متعامدين أم لا.

48؛ غير متعامدين **−1، غير متعامدين**

31. $u = \langle -3, 5 \rangle, v = \langle 2, 1 \rangle$
32. $u = \langle 4, 4 \rangle, v = \langle 5, 7 \rangle$
33. $u = \langle -1, 4 \rangle, v = \langle 8, 2 \rangle$
34. $u = \langle -2, 3 \rangle, v = \langle 1, 3 \rangle$

7؛ غير متعامدين **0؛ متعامدان**

أوجد الزاوية θ بين u و v لأقرب جزء من عشرة من الدرجة.

35. $u = \langle 5, -1 \rangle, v = \langle -2, 3 \rangle$ **135.0°**
36. $u = \langle -1, 8 \rangle, v = \langle 4, 2 \rangle$ **70.6°**

مثال 3

أوجد ناتج الضرب النقطي لكل من $x = \langle 2, -5 \rangle$ و $y = \langle -4, 7 \rangle$. ثمَّ حدِّد ما إذا كان x و y متعامدين أم لا.

$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2$ ناتج الضرب النقطي

$= 2(-4) + -5(7)$ عوِّض

$= -8 + (-35) = -43$ بسِّط

حيث إن $x \cdot y \neq 0$، فإن x و y غير متعامدين.

7-4 المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

عيِّن كل نقطة في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد. **37-40. انظر الهامش.**

37. $(1, 2, -4)$
38. $(3, 5, 3)$
39. $(5, -3, -2)$
40. $(-2, -3, -2)$

41. $2\sqrt{38} \approx 12.3; (-1, 5, 6)$

أوجد طول القطعة المستقيمة ونقطة المنتصف لها باستخدام نقطتي طرفيها المبينتين.

$2\sqrt{29} \approx 10.8; (-7, 2, 1)$

41. $(-4, 10, 4), (2, 0, 8)$
42. $(-5, 6, 4), (-9, -2, -2)$
43. $(3, 2, 0), (-9, -10, 4)$
44. $(8, 3, 2), (-4, -6, 6)$

$4\sqrt{19} \approx 17.4; (-3, -4, 2)$ **$\sqrt{241} \approx 15.5; (2, -1.5, 4)$**

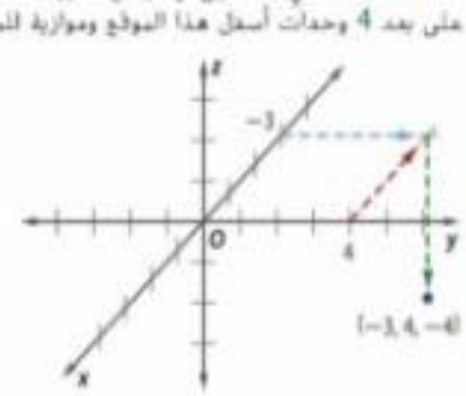
حدد موقع كل متجه في الفضاء ثم مثله بيانيًا. **45-48. انظر الهامش.**

45. $a = \langle 0, -3, 4 \rangle$
46. $b = -3i + 3j + 2k$
47. $c = -2i - 3j + 5k$
48. $d = \langle -4, -5, -3 \rangle$

مثال 4

عيِّن $(-3, 4, -4)$ في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد.

حدد موقع النقطة $(-3, 4)$ في المستوى xy وضع عليها علامة X. ثم عيِّن نقطة على بعد 4 وحدات أسفل هذا الموقع وموازية للمحور z.



7-5 المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثمَّ حدِّد ما إذا كان u و v متعامدين أم لا.

49. $u = \langle 2, 5, 2 \rangle, v = \langle 8, 2, -13 \rangle$ **0؛ متعامدان**
50. $u = \langle 5, 0, -6 \rangle, v = \langle -6, 1, 3 \rangle$ **−48، غير متعامدين**

أوجد ناتج الضرب التقاطعي لـ u و v. ثم برهن أن $v \times u$ متعامد على كل من u و v. **51-52. انظر الهامش.**

51. $u = \langle 1, -3, -2 \rangle, v = \langle 2, 4, -3 \rangle$
52. $u = \langle 4, 1, -2 \rangle, v = \langle 5, -4, -1 \rangle$

مثال 5

أوجد ناتج الضرب التقاطعي لـ $u = \langle -4, 2, -3 \rangle$ و $v = \langle 7, 11, 2 \rangle$. ثم برهن أن $v \times u$ متعامد على كل من u و v.

$$u \times v = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} k$$

$$= \langle 37, -13, -58 \rangle$$

$$(u \times v) \cdot u = \langle 37, -13, -58 \rangle \cdot \langle -4, 2, -3 \rangle = -148 - 26 + 174 = 0 \checkmark$$

$$(u \times v) \cdot v = \langle 37, -13, -58 \rangle \cdot \langle 7, 11, 2 \rangle = 259 - 143 - 116 = 0 \checkmark$$

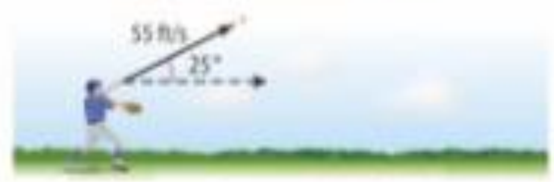
51. $\langle 17, -1, 10 \rangle$; $\langle 17, -1, 10 \rangle \cdot \langle 1, -3, -2 \rangle = 0$ و $\langle 17, -1, 10 \rangle \cdot \langle 2, 4, -3 \rangle = 0$

52. $\langle -9, -6, -21 \rangle$; $\langle -9, -6, -21 \rangle \cdot \langle 4, 1, -2 \rangle = 0$ و $\langle -9, -6, -21 \rangle \cdot \langle 5, -4, -1 \rangle = 0$

دليل الدراسة والمراجعة تابع

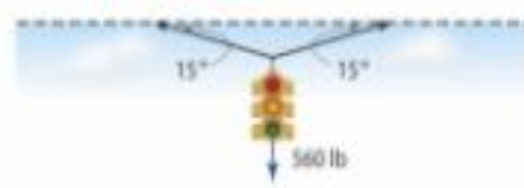
التطبيقات وحل المسائل

53. **البيسبول** يرمي لاعب بيسبول الكرة بسرعة مبدئية قدرها 55 قدمًا في الثانية وبزاوية 25° أعلى المحور الأفقي، كما هو موضح في الشكل أدناه. أوجد مقدار المركبات الأفقية والرأسية. (الدرس 1-7) **حوالي 49.8 ft/s؛ حوالي 23.2 ft/s**

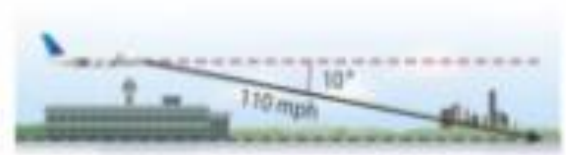


54. **عربة أطفال** تدفع ليلى عربة أطفال بقوة تبلغ 200 نيوتن بزاوية 20° أسفل المحور الأفقي. أوجد مقدار المركبتين الأفقية والرأسية للقوة. (الدرس 1-7) **حوالي 187.9 N، حوالي 68.4 N**

55. **الأضواء** تُعلّق إشارة مرور عند تقاطع من سلكين لهما نفس الطول بزاوية 15° أسفل المحور الأفقي كما هو موضح. فإذا كانت إشارة المرور تزن 560 رطلاً، فما مقدار الشد الذي يبذله السلكان لتظل إشارة المرور متزنة؟ (الدرس 1-7) **حوالي 1081.8 lb**



56. **الطائرات** تهبط طائرة بسرعة 110 أميال في الساعة وبزاوية 10° أسفل المحور الأفقي. أوجد الصورة المركبة للمتجه الذي يمثل سرعة الطائرة. (الدرس 2-7) **⟨108.3, −19.1⟩**



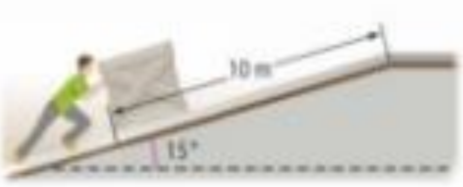
57. **المنقذ** يسبح منقذ في أحد حمامات السباحة بسرعة 4 أميال في الساعة وبزاوية 60° إلى جانب الحمام كما هو موضح. (الدرس 2-7)

a. ما السرعة التي يتحرك بها المنقذ إذا كان التيار في حمام السباحة يساوي ميلين في الساعة وبموازاة جانب الحمام كما هو موضح؟ **حوالي 5.3 mph**

b. ما الزاوية التي يتحرك بها المنقذ بالنسبة لجانب بداية حمام السباحة؟ **حوالي 40.9°**

58. **المرور** توقفت سيارة تزن 1500 رطل وسط المرور على تل زاويه انحداره 10°. حدد القوة اللازمة لمنع تدحرج السيارة لأسفل التل. (الدرس 3-7) **حوالي 260.5 lb**

59. **الشغل** في أحد المخازن، يدفع جاسم صندوقًا موضوعًا على مزلقة بقوة ثابتة قدرها 80 نيوتن لأعلى منحدر بزاوية انحدار 15° بالنسبة للمحور الأفقي. حدد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله جاسم إذا دفع المنصة المتحركة 10 أمتار. (الدرس 3-7) **800 J**



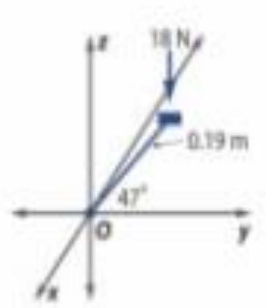
60. **الأقمار الصناعية** يمكن تمثيل موقع قمرين صناعيين يدوران في مدار بالإحداثيات (28,625, 32,461, −38,426) و (−31,613, −29,218, 43,015)، حيث تمثل (0, 0, 0) مركز الأرض وتذكر الإحداثيات بالأميال. ويبلغ نصف قطر الأرض حوالي 3963 ميلاً. (الدرس 4-7)

a. حدد المسافة بين القمرين. **حوالي 118,598 mi**

b. إذا وضع قمر ثالث بين القمرين مباشرة، فكم ستكون إحداثياته؟ **(−1494, 1621.5, 2294.5)**

c. هل يمكن وضع قمر ثالث بالإحداثيات التي تم التوصل إليها في الجزء **b**؟ وضّح استنتاجك. **انظر الهامش.**

61. **الدراجات** يبذل قائد دراجة قوة قدرها 18 نيوتن لأسفل على الدواسة لتتحرك الدراجة. وقد كان موضع الدواسة المبدئي 47° أعلى محور y ومسافة طول 0.19 مترًا بالنسبة لمحور دوران الدواسة. (الدرس 5-7)



a. أوجد المتجه الذي يمثل العزم المبذول على محور دوران دواسة الدراجة في الصورة المركبة. **⟨−2.3, 0, 0⟩**

b. أوجد مقدار العزم واتجاهه.

حوالي 2.3 N • m ويوازي محور x السالب

إجابة إضافية

60c. لا؛ الإجابة النموذجية: لا يمكن أن يوجد القمر الصناعي الثالث لأن إحداثياته تقع داخل كوكب الأرض.

إجابات إضافية

18. $\langle 65, 16, -59\rangle$;
$\langle 65, 16, -59\rangle \cdot \langle 1, 7, 3\rangle$
$= 65(1) + 16(7) + (-59)(3)$
$= 0$
$\langle 65, 16, -59\rangle \cdot \langle 9, 4, 11\rangle$
$= 65(9) + 16(4) + (-59)11$
$= 0$

19. $-7\mathbf{i} \cdot 17\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$;
$\langle -7, -17, 8\rangle \cdot \langle -6, 2, -1\rangle$
$= (-7)(-6) + (-17)(2) +$
$8(-1) = 0$
$\langle -7, -17, 8\rangle \cdot \langle 5, -3, -2\rangle$
$= (-7)(5) + (-17)(-3) +$
$8(-2) = 0$

تمرين على الاختبار

أوجد ناتج كل زوج من المتّجهات باستخدام إما طريقة المثلث أو متوازي الأضلاع. اذكر مقدار الناتج مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر واتجاهه بالنسبة إلى المحور الأفقي.

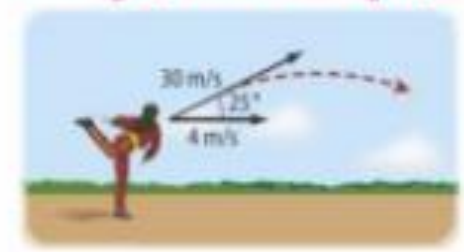
1. **0.4 cm, 0°**
2. **3.9 cm, 10°**

3. $\langle -6, 4\rangle, 2\sqrt{13} \approx 7.2$ **4.** $\left\langle -\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right\rangle, \frac{\sqrt{130}}{2} \approx 5.7$

أوجد الصورة المركبة ومقدار المتّجه $\overline{AB}$ بنقطتي البداية والنهاية المذكورتين.

3. $A(1, -3), B(-5, 1)$
4. $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), B(-1, 7)$

5. **السوفتبول** تضرب لاعبة السوفتبول في الفريق الخصم كرة على الأرض فتتدحرج إلى ليلى بيسار الملعب. تجري ليلى إلى الكرة بسرعة 4 أمتار في الثانية وتلتقطها ثم تتقدم لترميها إلى ملتقطة الكرة بسرعة 30 مترًا في الثانية وبزاوية 25° بالنسبة للمحور الأفقي في محاولة لتسجيل نقاط. ما مقدار السرعة الناتجة للكرة واتّجاه الرمية؟ **حوالي 33.7 m/s؛ حوالي 22.1°**



أوجد متّجه الوحدة الذي له نفس اتّجاه u.

6. $\mathbf{u} = \langle -1, 4\rangle$ $\left\langle -\frac{\sqrt{17}}{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17}\right\rangle$
7. $\mathbf{u} = \langle 6, -3\rangle$ $\left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right\rangle$

أوجد ناتج الضرب النقطي لـ u و v. ثم حدّد ما إذا كان u و v متعامدين أم لا.

8. $\mathbf{u} = \langle 2, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 2\rangle$ **−16، غير متعامدين**
9. $\mathbf{u} = \langle 4, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 8\rangle$ **0؛ متعامدان**
10. $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ **−14، غير متعامدين**

11. **الاختيار من متعدد** اكتب **u** في صورة مجموع المتجهين المتعامدين، بحيث يكون أحدهما مسقط **u** على **v** إذا كان $\mathbf{u} = \langle 1, 3\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -4, 2\rangle$. **D**

A $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, -\frac{3}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{18}{5}\right\rangle$

B $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{12}{5}\right\rangle$

C $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right\rangle$

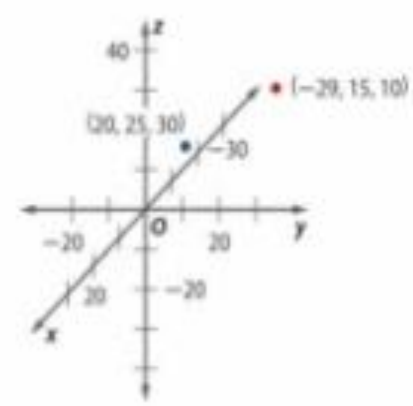
D $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right\rangle$

12. **الحركة** تدفع لبيس صندوقًا على مستوى الأرض بقوة قدرها 120 رطلاً وبزاوية انخفاض 20°. حدد مقدار الشغل المبذول إذا تم تحريك الصندوق 25 قدمًا. **حوالي 2819.1 ft-lb**

أوجد كل مما يلي لكل من $\mathbf{a} = \langle 2, 4, -3\rangle$ و $\mathbf{b} = \langle -5, -7, 1\rangle$ و $\mathbf{c} = \langle 8, 5, -9\rangle$.

13. $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$ **$\langle -45, -42, 26\rangle$**
14. $\mathbf{b} - 6\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$ **$\langle -1, -21, 1\rangle$**

15. **منطاد الهواء الساخن** أثناء أحد المهرجانات، انطلق اثني عشر منطادًا. وبعدها بدقائق، كانت إحداثيات أول منطادين هي $(20, 25, 30)$ و $(-29, 15, 10)$ كما هو موضح، حيث تذكر الإحداثيات بالقدم.



a. حدد المسافة بين أول منطادين انطلقا. **حوالي 53.9 ft**
b. يقع منطاد ثالث في منتصف المسافة بين أول منطادين. أوجد إحداثيات المنطاد الثالث. **$(-4.5, 20, 20)$**
c. أوجد متجه الوحدة للمنطاد الأول إذا انطلق من النقطة $(0, 0, 0)$. **$\left\langle \frac{4\sqrt{77}}{77}, \frac{5\sqrt{77}}{77}, \frac{6\sqrt{77}}{77}\right\rangle$**

أوجد الزاوية θ بين المتجهين u و v مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من الدرجة.

16. $\mathbf{u} = \langle -2, 4, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 7, 12\rangle$ **27.9°**
17. $\mathbf{u} = -9\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ **110.8°**

أوجد ناتج الضرب التقاطعي لـ u و v. ثم برهن أن $u \times v$ متعامد على كل من u و v. **18–19. انظر الهامش.**

18. $\mathbf{u} = \langle 1, 7, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, 4, 11\rangle$
19. $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

20. **القوارب** يعتبر ذراع الدفة رافعة تتحكم في موقع دفة توجيه القارب. وعندما تبذل قوة على ذراع الدفة سيدور المركب. افترض أن طول ذراع الدفة لقارب ما 0.75 مترًا ويستقر في المستوى xy بزاوية 15° من محور x الموجب. أوجد مقدار العزم المبذول على محور دوران ذراع الدفة إذا تم بذل قوة قدرها 50 نيوتن في اتجاه مواز لمحور y الموجب. **حوالي 36.2 N • m**

447

الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم
مجالات المتجهات

1 التركيز

الهدف تمثيل المتجهات بيانيًا وتحديد التمثيل البياني لمجالات المتجهات.

نصيحة للتدريس

قد ترغب في إظهار مجال المتجه بعرض الطريقة التي يمكن بها الكشف عن خطوط المجال المغناطيسي وذلك بوضع برادة حديد بالقرب من مغناطيس.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

ضع كل طالبين بقدرات مختلفة معًا في مجموعة واحدة. وكلّف الطلاب بحل الخطوات 3-1 من النشاط 1 وكذلك الإجابة عن تمارين تحليل النتائج 3-1. ثم اطلب منهم حل الخطوات 3-1 من النشاط 2 والإجابة عن تمريني تحليل النتائج 4 و 5.

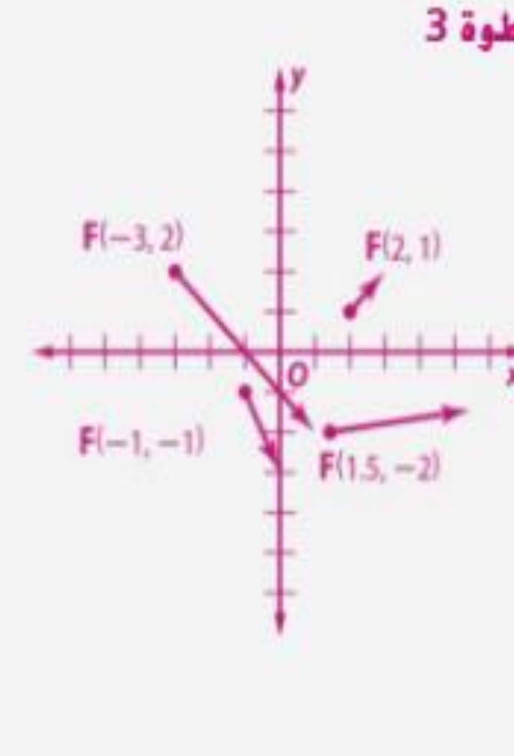
اطرح السؤال التالي:

- ما تعريف الدالة؟ الدالة هي علاقة يقترن فيها كل عنصر من المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

إجابة إضافية

النشاط 1

الخطوة 3



الهدف

- تمثيل المتجهات بيانيًا وتحديد التمثيل البياني لمجالات المتجهات.

في الوحدة 7، درست آثار تيارات الرياح والمياه على الأجسام المتحركة. وقد تم تمثيل القوة التي تبذلها الرياح أو التيارات بمتجه واحد.
ولكننا نعلم جميعًا أن التيار الموجود في مسطح مائي أو القوة التي يبذلها لا تكون بالضرورة ثابتة؛ بل تتغير من منطقة لأخرى. وإذا أردنا تمثيل التيار بأكمله أو تدفق الهواء في منطقة، فسنحتاج إلى تعيين متجه لكل نقطة في الفضاء، وبذلك نشكل مجال متجه.

ويشيع استخدام مجالات المتجهات في الهندسة والفيزياء لتمثيل مقاومة الهواء والقوى المغناطيسية والجاذبية وحركة السوائل. وبالرغم من أن هذه التطبيقات لمجالات المتجهات تتطلب عدة أبعاد، إلا أننا سنحلل مجالات المتجهات في بعدين فقط.

ومجال المتجه $\mathbf{F}(x, y)$ هو دالة تحول الإحداثيات ثنائية الأبعاد إلى مجموعات من المتجهات ثنائية الأبعاد.

$\mathbf{F}(x, y) = \langle f_1(x, y), f_2(x, y) \rangle$، حيث إن $f_2(x, y)$ و $f_1(x, y)$ دالتين عدديتين.

ولتمثيل مجال المتجه، أوجد قيمة $\mathbf{F}(x, y)$ عند (x, y) ومثّل المتجه بيانيًا باستخدام (x, y) كنقطة البداية. ويتم ذلك مع عدة نقاط.

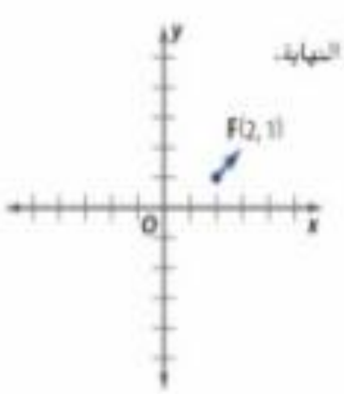
النشاط 1 مجالات المتجهات

أوجد قيمة $\mathbf{F}(2, 1)$ و$\mathbf{F}(-1, -1)$ و$\mathbf{F}(1.5, -2)$ و $\mathbf{F}(-3, 2)$ لمجال المتجه $\mathbf{F}(x, y) = \langle y^2, x - 1 \rangle$. ومثّل كل متجه بيانيًا مستخدمًا (x, y) كنقطة بداية.

الخطوة 1 لإيجاد قيمة $\mathbf{F}(2, 1)$، افترض أن $x = 2$ و $y = 1$.

$$\begin{aligned}\langle y^2, x - 1 \rangle &= \langle 1^2, 2 - 1 \rangle \\ &= \langle 1, 1 \rangle\end{aligned}$$

الخطوة 2 للتمثيل البياني، افترض أن $(2, 1)$ تمثل نقطة البداية للمتجه، ويجعل ذلك النقطة $(2 + 1, 1 + 1)$ أو $(3, 2)$ نقطة النهاية.



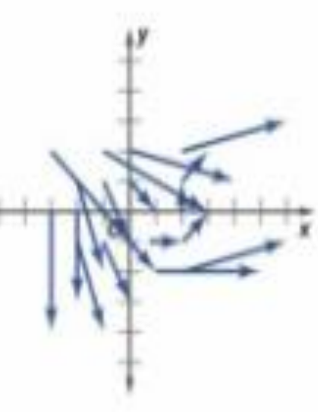
الخطوة 3 كرر الخطوتين 2-1 للدوال $\mathbf{F}(-1, -1)$ و$\mathbf{F}(1.5, -2)$ و $\mathbf{F}(-3, 2)$. **انظر الهامش.**

تحليل النتائج

1. هل مقدار المتجهات وطولها متماثل أم مختلف؟ **مختلف**
2. خمّن السبب في أنه يمكن تعريف مجال المتجه كدالة.
3. هل يمكن تمثيل كل متجه في مجال المتجه بيانيًا؟ اشرح استنتاجك.

2. الإجابة النموذجية: يوجد متجه واحد بالضبط لكل نقطة (x, y) في مجال متجه.
3. لا؛ الإجابة النموذجية: لكل نقطة (x, y) في مستوى متجه مرتبط بها، ويوجد في المستوى عدد لا نهائي من النقاط.

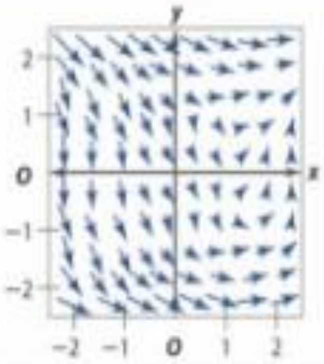
ينبغي أن يتضمن التمثيل البياني لمجال متجه $\mathbf{F}(x, y)$ عددًا من المتجهات التي تكون نقطة بدايتها (x, y). وتستخدم أجهزة التمثيل البياني لتمثيل مجالات المتجهات حيث إن رسمها باليد يعد أمرًا صعبًا.



نصيحة دراسية

التمثيل البياني لمجالات المتجهات لكلّ نقطة في المستوى متجه مقابل. وتوضح التمثيلات البيانية لمجالات المتجهات مجموعة مختارة من النقاط.

لمنع تداخل المتجهات مع بعضها البعض وتجنب أن يبدو التمثيل البياني مختلطًا، تقلل أجهزة التمثيل البياني من أطوال المتجهات بشكل تناسبي ولا تضع المتجهات إلا بفترات محددة. فعلى سبيل المثال، إذا واصلنا تمثيل العديد من المتجهات بيانيًا لمجال المتجه الموجود في النشاط 1، ستكون النتيجة هي التمثيل البياني الموجود إلى اليسار.

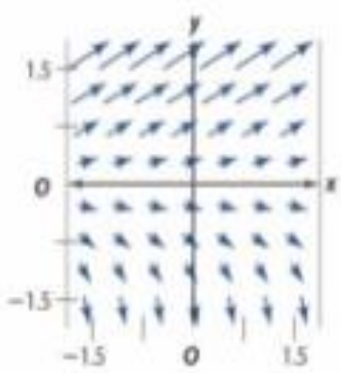


حلل دوال المركبات لمجال متجه لتحديد نوع التمثيل البياني الناتج عنها.

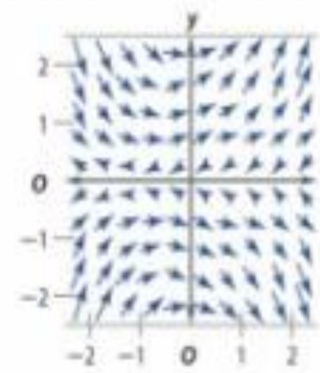
النشاط 2 مجالات المتجهات

صل بين كل مجال متجه وتمثيله البياني.

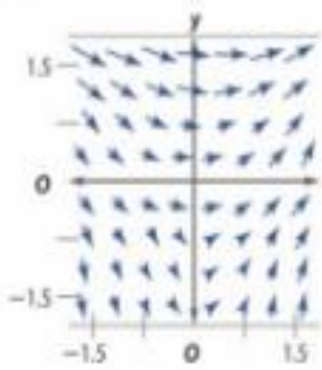
$F(x, y) = \langle 2, 1 + 2xy \rangle$ $\quad G(x, y) = \langle e^y, x \rangle$ $\quad H(x, y) = \langle e^x, y \rangle$



الشكل 1



الشكل 2



الشكل 3

الخطوة 1 ابدأ بتحليل المركبات التي تكوّن $F(x, y)$. سينتج عن المركب الثاني $(1 + 2xy)$ نتيجة موجبة عندما يكون لكل من x و y نفس العلامة. يكون المركب الرأسي للمتجهات في الربع الأول والثالث موجبًا، مما يجعل المتجهات في هذين الربعين متجهين لأعلى.

الخطوة 2 التمثيل البياني الذي يحتوي على متجهات متجهة لأعلى في الربعين الأول والثالث هو الشكل 2.

الخطوة 3 كرر الخطوتين 1-2 مع بقية مجالات المتجهات. **انظر الهامش.**

تحليل النتائج

4. افترض أن المتجهات في مجال المتجه تمثل قوة. ما العلاقة بين القوة ومقدار المتجه وطوله؟

5. بتمثيل الرياح بمتجه واحد وافتراض أن القوة الناشئة ظلت ثابتة بمنطقة بأكملها. إذا كانت القوة الناشئة عن الرياح ممثلة بعدة متجهات في مجال متجه، فما الافتراض الذي ينبغي التوصل إليه بشأن البعد الثالث؟

استخدام النماذج والتطبيق

6. أكمل الجدول لمجال المتجه $F(x, y) = \langle -y, x \rangle$. ثم مثّل كل متجه بيانيًا. **انظر إلى الهامش للاطلاع على التمثيل البياني.**

(x, y)	$\langle -y, x \rangle$	(x, y)	$\langle -y, x \rangle$
(2, 0)	⟨0, 2⟩	(−2, 1)	⟨−1, −2⟩
(1, 2)	⟨−2, 1⟩	(−2, 0)	⟨0, −2⟩
(2, 1)	⟨−1, 2⟩	(−1, −2)	⟨2, −1⟩
(0, 2)	⟨−2, 0⟩	(0, −2)	⟨2, 0⟩
(−1, 2)	⟨−2, −1⟩	(1, −2)	⟨2, 1⟩
(−2, −1)	⟨1, −2⟩	(2, −1)	⟨1, 2⟩

4. الإجابة النموذجية: كلما زاد طول المتجه، زاد مقداره. كلما زاد مقدار المتجه، زادت القوة المرتبطة به.

5. الإجابة النموذجية: إن تمثيل مجال المتجه في بعدين فقط يتجاهل البعد الثالث ويفترض أن القوة الناشئة عن الرياح ستظل ثابتة على طول المستوى z.

تمرين كلّف الطلاب بإتمام التمرين 6.

3 التقويم

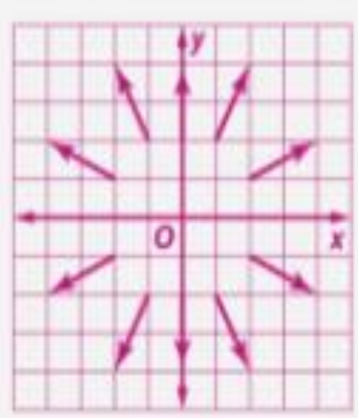
التقويم التكويني

استخدم التمرين 6 لتقويم استيعاب الطلاب لطريقة تحويل الإحداثيات ثنائية الأبعاد إلى مجموعات من المتجهات ثنائية الأبعاد وطريقة تمثيل هذه المتجهات بيانيًا في مجال المتجه.

من العملي إلى النظري

كلّف الطلاب بوصف تمثيلاتهم البيانية في التمرين 6 مع تقديم مثال على القوة التي يمكن تمثيلها بمجال المتجه هذا. الإجابة النموذجية: تشير المتجهات إلى عكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل، ولها أطوال تساوي المسافة التي تفصل بينها ونقطة الأصل. ويمكن تمثيل رياح الأعاصير بمجال المتجه هذا.

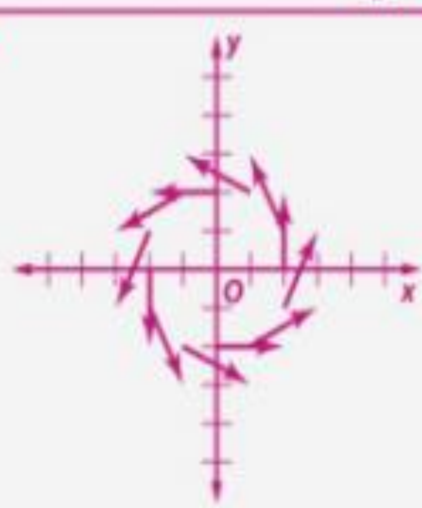
كلّف الطلاب بعد ذلك بإكمال جدول مشابه للجدول الوارد في التمرين 6 لمجال المتجه $F(x, y) = \langle x, y \rangle$. اطلب منهم تمثيل مجال المتجه بيانيًا ووصفه.



الإجابة النموذجية: تتجه جميع المتجهات إلى الخارج من نقطة الأصل بأطوال تساوي المسافات التي تفصلها عن نقطة الأصل. ويمكن تمثيل قوة انفجار ما بمجال المتجه هذا.

إجابة إضافية

6.



إجابة إضافية

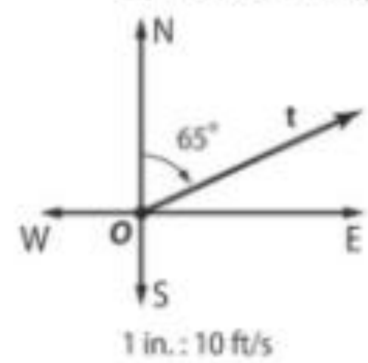
النشاط 2

الخطوة 3

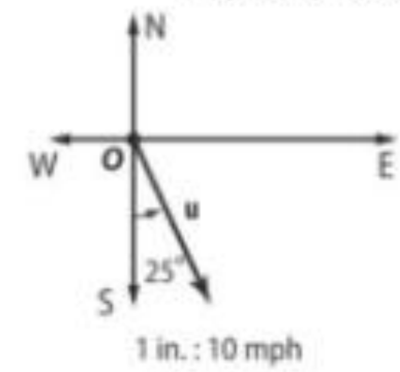
بالنسبة إلى $G(x, y)$، فإن المركبة الثانية هو x. وهذا سينتج عنه قيم موجبة للمركبة الرأسية للمتجهات عندما تكون x موجبة في الربعين I و IV. وبالتالي، ستشير المتجهات في مجال المتجه هذا إلى الأعلى في الربعين I و IV. وهذا يتفق مع الشكل 3. وهذا يترك $H(x, y)$ متوافقًا مع الشكل 1. فالمركبة الثانية لـ $H(x, y)$ هو y. وهذا سينتج عنه قيم موجبة للمركبة الرأسية للمتجهات عندما تكون y موجبة في الربعين I و II. وبالتالي، سوف تشير المتجهات في مجال المتجه هذا إلى الأعلى في الربعين I و II. وهذا يتوافق مع الشكل 1.

الدرس 7-1 (تمرين موجّه)

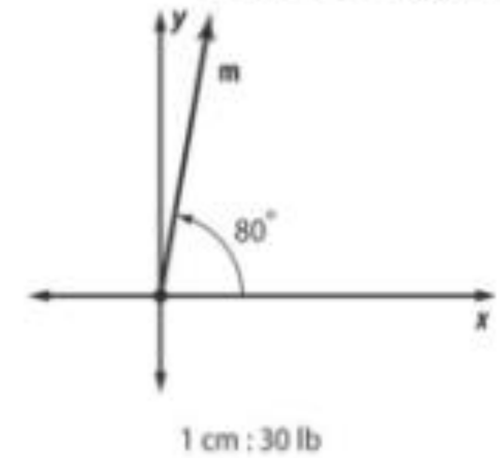
2A. الإجابة النموذجية:



2B. الإجابة النموذجية:

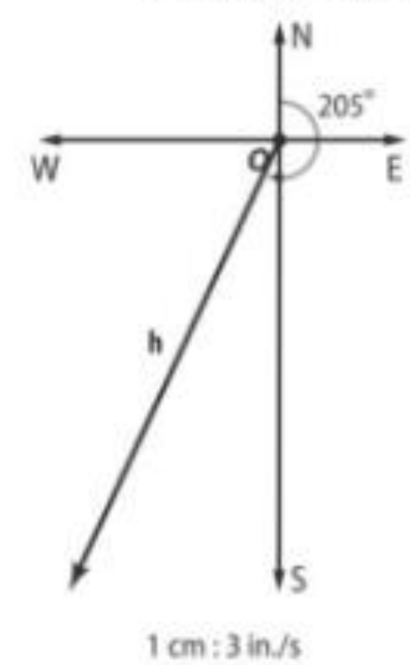


2C. الإجابة النموذجية:

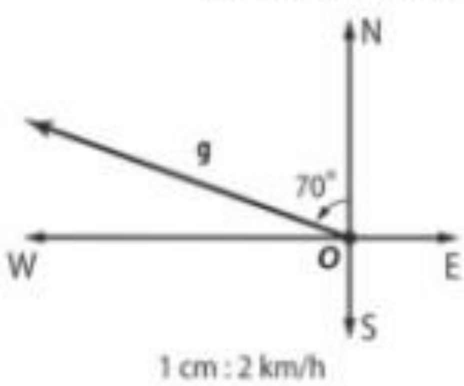


الدرس 7-1

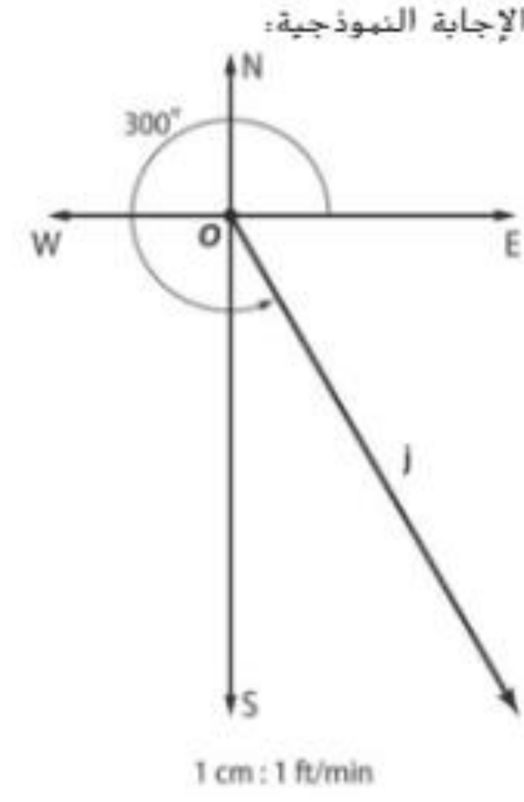
7. الإجابة النموذجية:



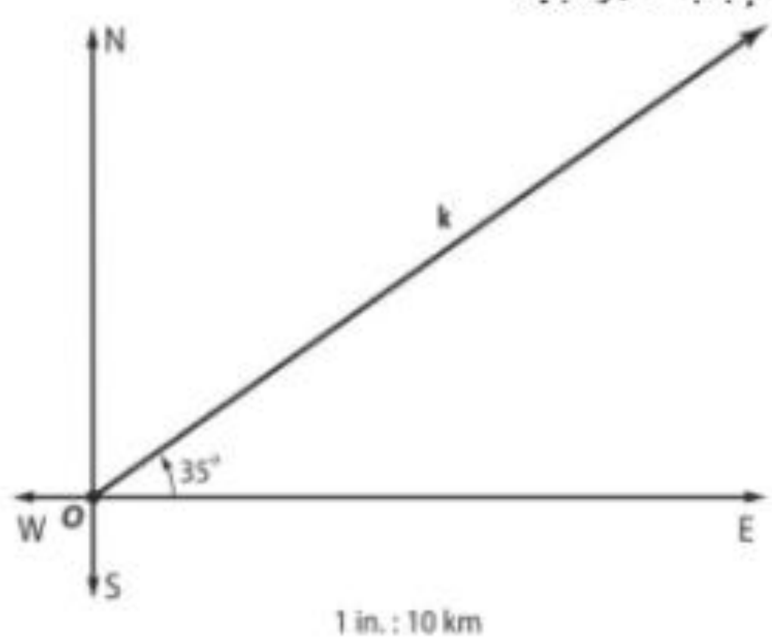
8. الإجابة النموذجية:



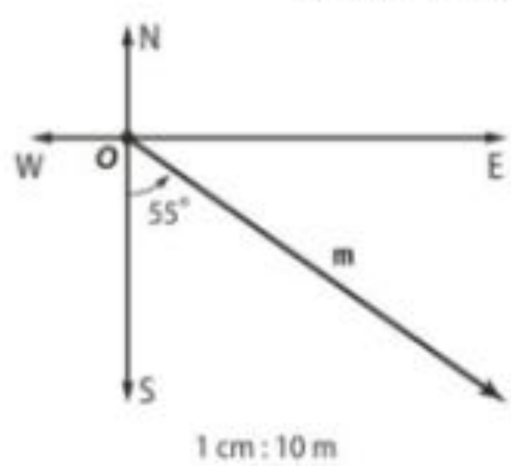
9. الإجابة النموذجية:



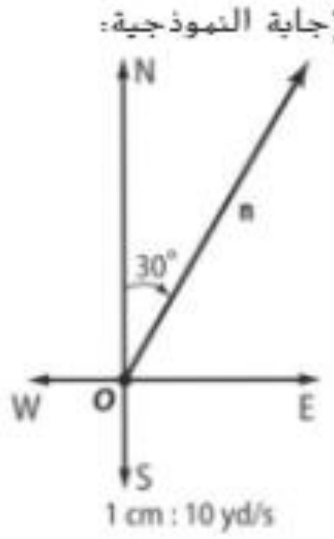
10. الإجابة النموذجية:



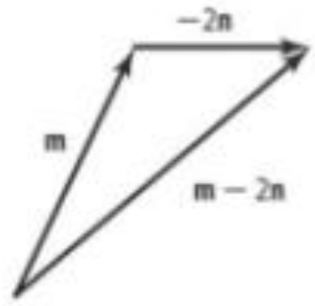
11. الإجابة النموذجية:



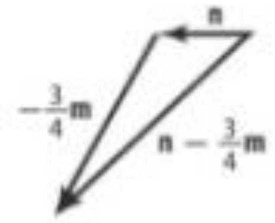
12. الإجابة النموذجية:



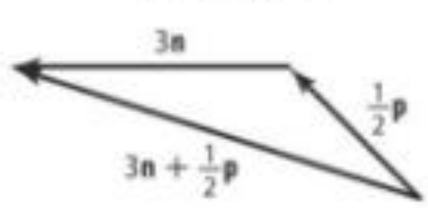
27.



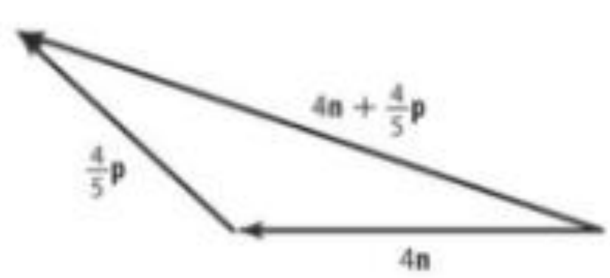
28.



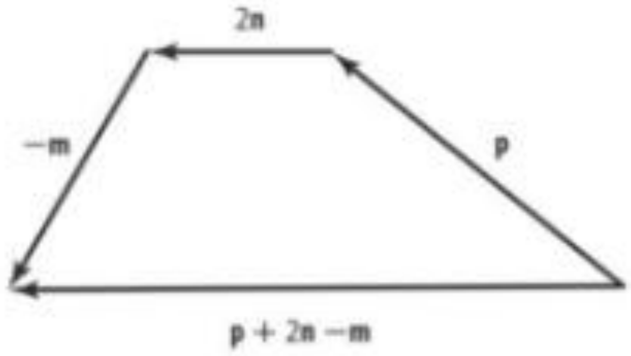
29.



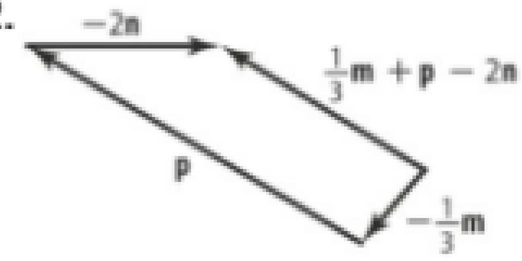
30.



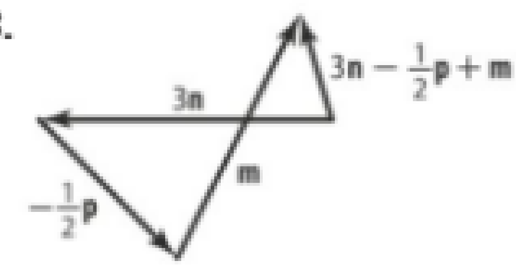
31.



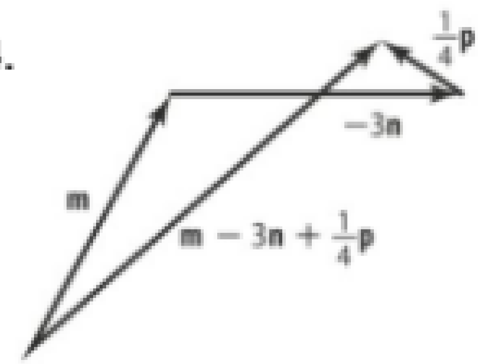
32.



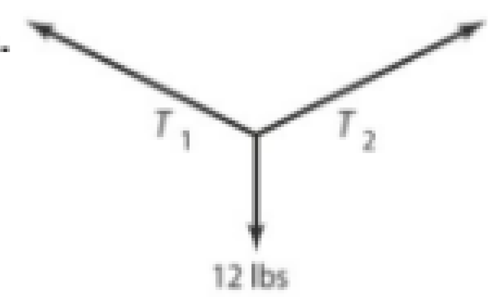
33.



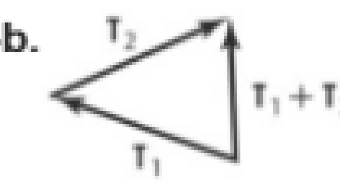
34.



54a.

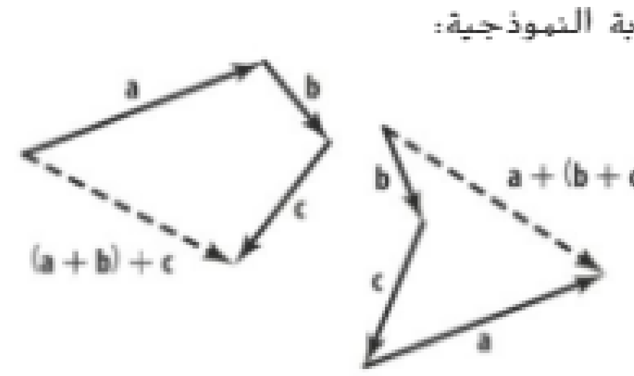


54b.



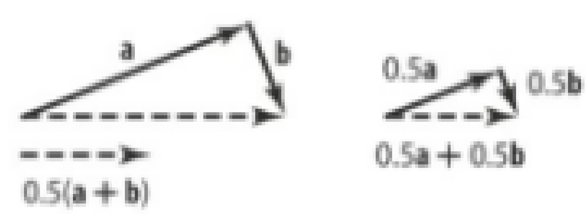
60. الإجابة النموذجية:

61. الإجابة النموذجية:

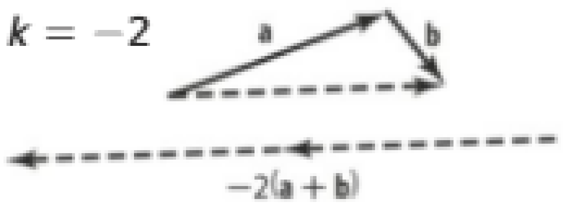


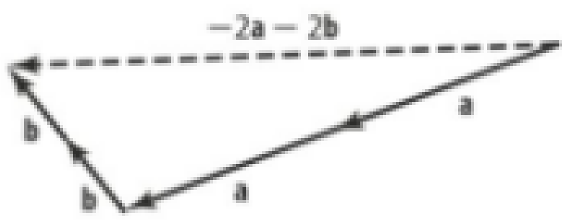
62. الإجابة النموذجية: $k = 2$

$k = 0.5$

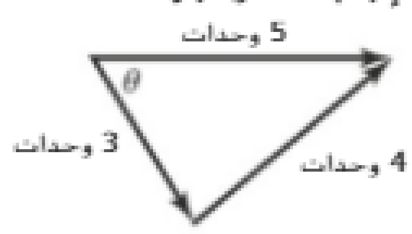


$k = -2$





63. الإجابة النموذجية:

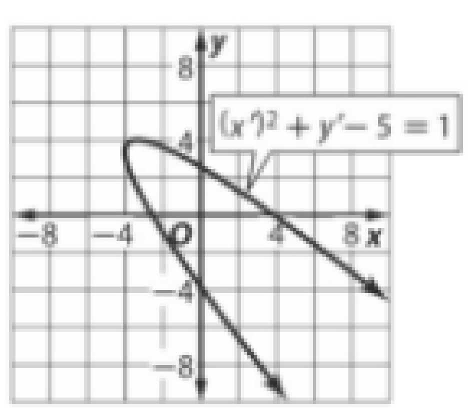


68. ناصر؛ الإجابة النموذجية: وضع ناصر نقطة بداية المتجه الثاني على نقطة نهاية المتجه الأول، ثم رسم المحصلة من نقطة البداية للمتجه الأول إلى نقطة النهاية للمتجه الثاني، وهي الطريقة الصحيحة لاستخدام قاعدة المثلث. أما منصور فوضع نقطتي البداية للمتجهين معًا، وهذه هي الخطوة الأولى من استخدام قاعدة متوازي الأضلا ع ولكنه لم يكمل المتوازي.

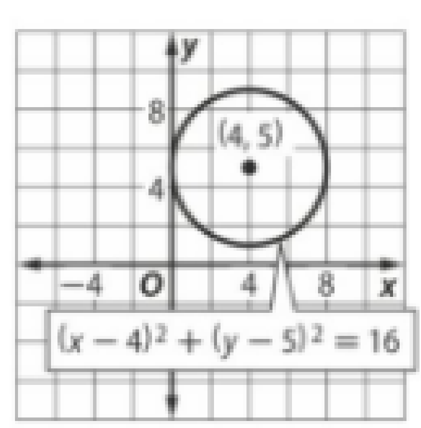
69. نعم؛ الإجابة النموذجية: من الممكن أن يساوي مجموع المتجهين أحد المركبات، فقط عندما يكون أحد المتجهين متجهًا صفريًا.

70. الإجابة النموذجية: عند استخدام قاعدة المثلث، يتم وضع نقطة البداية للمتجهات التالية على نقطة النهاية للمتجهات السابقة، ثم يتم رسم المحصلة من نقطة بداية المتجه الأول إلى نقطة نهاية المتجه الأخير. وعند استخدام قاعدة متوازي الأضلاع، يتم وضع نقاط البداية للمتجهين عند النقطة نفسها، ثم يتم إكمال متوازي الأضلا ع ورسم المحصلة من نقطتي بداية المتجهين إلى رأس الزاوية المقابلة من متوازي الأضلاع. ويمكن استخدام كل من قاعدة المثلث وقاعدة متوازي الأضلاع لإيجاد محصلة متجهين أو أكثر.

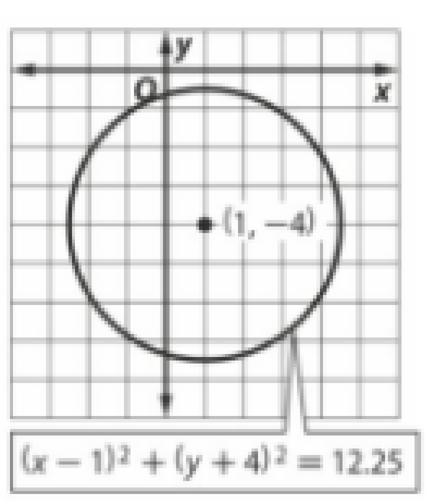
72.



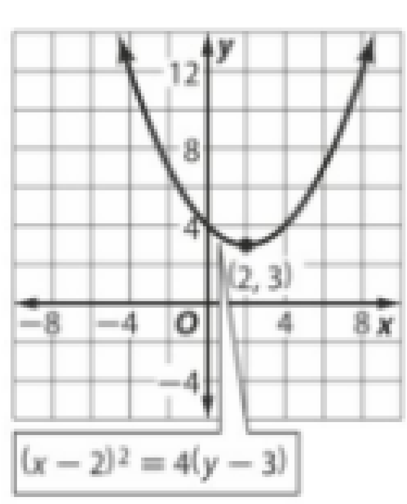
73.



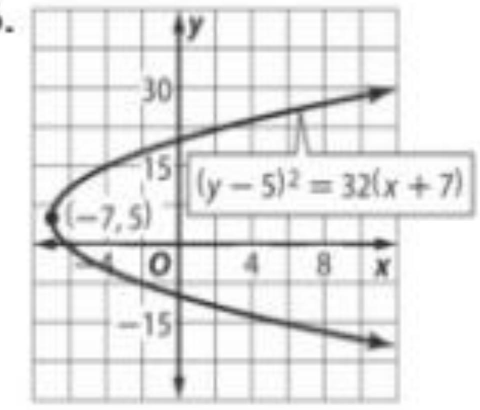
74.



75.



76.



الدرس 7-2

68. الإجابة النموذجية: لإيجاد زاوية اتجاه متجه في الربع الرابع، استخدم مركبات المتجه الرأسية والأفقية والمعادلة المثلثية $\tan\theta = \frac{b}{a}$ لتحديد الزاوية التي يصنعها المتجه مع المحور x الموجب. ثم اجمع القيمة الناتجة إلى $360°$ لإيجاد زاوية اتجاه المتجه في الربع الرابع.

70.
$$\begin{aligned}\mathbf{a}+\mathbf{b} &= \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle\\ &= \langle x_1+x_2, y_1+y_2\rangle\\ &= \langle x_2+x_1, y_2+y_1\rangle\\ &= \langle x_2, y_2\rangle + \langle x_1, y_1\rangle\\ &= \mathbf{b}+\mathbf{a}\end{aligned}$$

71.
$$\begin{aligned}(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} &= (\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle) + \langle x_3, y_3\rangle\\ &= \langle x_1+x_2, y_1+y_2\rangle + \langle x_3, y_3\rangle\\ &= \langle x_1+x_2+x_3, y_1+y_2+y_3\rangle\\ &= \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2+x_3, y_2+y_3\rangle\\ &= \langle x_1, y_1\rangle + (\langle x_2, y_2\rangle + \langle x_3, y_3\rangle)\\ &= \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})\end{aligned}$$

72.
$$\begin{aligned}k(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= k(\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle)\\ &= k\langle x_1+x_2, y_1+y_2\rangle\\ &= \langle k(x_1+x_2), k(y_1+y_2)\rangle\\ &= \langle kx_1+kx_2, ky_1+ky_2\rangle\\ &= \langle kx_1, ky_1\rangle + \langle kx_2, ky_2\rangle\\ &= k\langle x_1, y_1\rangle + k\langle x_2, y_2\rangle\\ &= k\mathbf{a}+k\mathbf{b}\end{aligned}$$

73.
$$\begin{aligned}|k\mathbf{a}| &= |k\langle x_1, y_1\rangle|\\ &= |\langle kx_1, ky_1\rangle|\\ &= \sqrt{(kx_1)^2+(ky_1)^2}\\ &= \sqrt{k^2x_1^2+k^2y_1^2}\\ &= \sqrt{k^2(x_1^2+y_1^2)}\\ &= \sqrt{k^2}\sqrt{x_1^2+y_1^2}\\ &= |k|\,|\langle x_1, y_1\rangle|\\ &= |k|\,|\mathbf{a}|\end{aligned}$$

82.
$$\begin{aligned}\sin(\theta+180°) &= \sin\theta\cos 180° + \cos\theta\sin 180°\\ &= \sin\theta\,(-1) + \cos\theta\,(0)\\ &= -\sin\theta\end{aligned}$$

83.
$$\begin{aligned}&\sin(60°+\theta)+\sin(60°-\theta)\\ &= \sin 60°\cos\theta + \cos 60°\sin\theta + \sin 60°\cos\theta - \cos 60°\sin\theta\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\\ &= \frac{2\sqrt{3}}{2}\cos\theta\\ &= \sqrt{3}\cos\theta\end{aligned}$$

الدرس 7-3

25. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left\langle \frac{15}{29}, -\frac{6}{29}\right\rangle; \mathbf{u} = \left\langle \frac{15}{29}, -\frac{6}{29}\right\rangle + \left\langle \frac{72}{29}, \frac{180}{29}\right\rangle$

26. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \langle -1, 1\rangle; \mathbf{u} = \langle -1, 1\rangle + \langle 6, 6\rangle$

27. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left\langle \frac{120}{17}, -\frac{30}{17}\right\rangle; \mathbf{u} = \left\langle \frac{120}{17}, -\frac{30}{17}\right\rangle + \left\langle \frac{16}{17}, \frac{64}{17}\right\rangle$

28. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{10}, -\frac{9}{10}\right\rangle; \mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{10}, -\frac{9}{10}\right\rangle + \left\langle \frac{57}{10}, \frac{19}{10}\right\rangle$

29. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left\langle -\frac{78}{73}, \frac{208}{73}\right\rangle; \mathbf{u} = \left\langle -\frac{78}{73}, \frac{208}{73}\right\rangle + \left\langle \frac{224}{73}, \frac{84}{73}\right\rangle$

30. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left\langle \frac{9}{13}, \frac{6}{13}\right\rangle; \mathbf{u} = \left\langle \frac{9}{13}, \frac{6}{13}\right\rangle + \left\langle -\frac{74}{13}, \frac{111}{13}\right\rangle$

31. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left\langle \frac{93}{13}, -\frac{62}{13}\right\rangle; \mathbf{u} = \left\langle \frac{93}{13}, -\frac{62}{13}\right\rangle + \left\langle -\frac{28}{13}, -\frac{42}{13}\right\rangle$

32. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left\langle -\frac{477}{130}, -\frac{371}{130}\right\rangle; \mathbf{u} = \left\langle -\frac{477}{130}, -\frac{371}{130}\right\rangle + \left\langle \frac{217}{130}, -\frac{279}{130}\right\rangle$

69. $\cos 90° = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$ الزاوية بين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ حيث. $\theta = 90°$

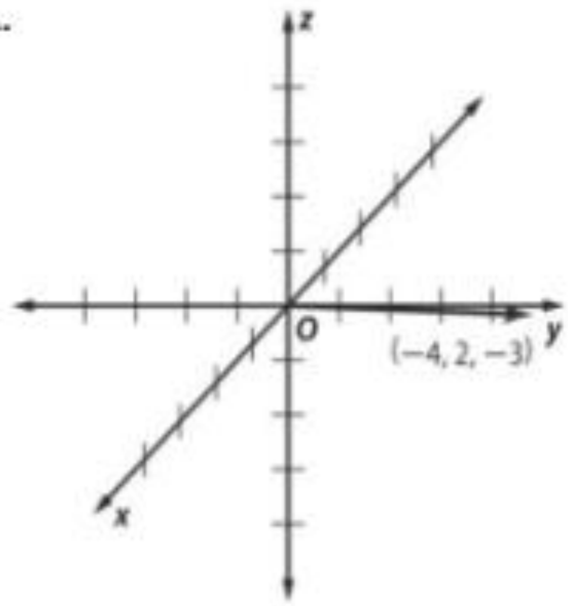
$0 = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$ $\cos 90° = 0$

$0 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ بضرب كل جانب في $|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{u}|$.

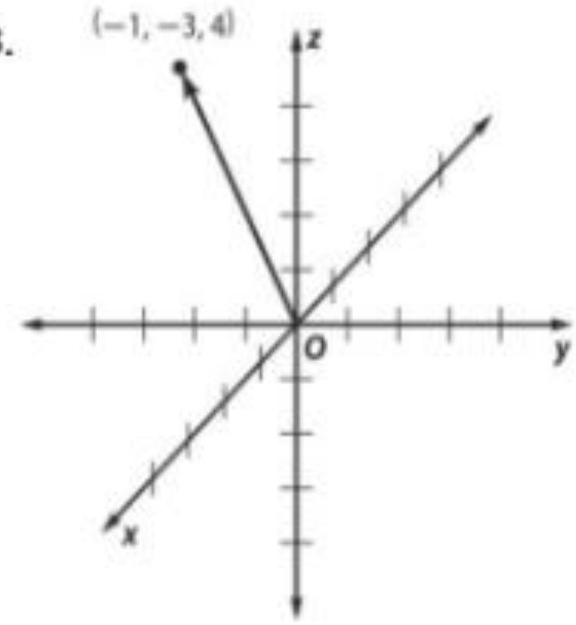
70.
$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\\ \langle u_1,u_2\rangle\cdot\langle v_1,v_2\rangle &\stackrel{?}{=} \langle v_1,v_2\rangle\cdot\langle u_1,u_2\rangle\\ u_1v_1+u_2v_2 &= u_1v_1+u_2v_2\end{aligned}$$

71.
$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\\ \langle u_1,u_2\rangle\cdot(\langle v_1,v_2\rangle+\langle w_1,w_2\rangle) &\stackrel{?}{=} \langle u_1,u_2\rangle\cdot\langle v_1,v_2\rangle + \langle u_1,u_2\rangle\cdot\langle w_1,w_2\rangle\\ \langle u_1,u_2\rangle\cdot\langle v_1+w_1, v_2+w_2\rangle &\stackrel{?}{=} (u_1v_1+u_2v_2) + (u_1w_1+u_2w_2)\\ u_1(v_1+w_1)+u_2(v_2+w_2) &\stackrel{?}{=} u_1v_1+u_1w_1+u_2v_2+u_2w_2\\ u_1v_1+u_1w_1+u_2v_2+u_2w_2 &= u_1v_1+u_1w_1+u_2v_2+u_2w_2\end{aligned}$$

3A.

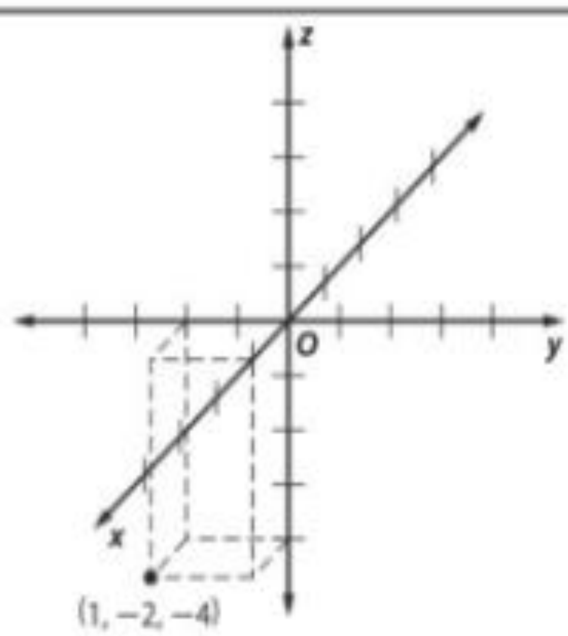


3B.

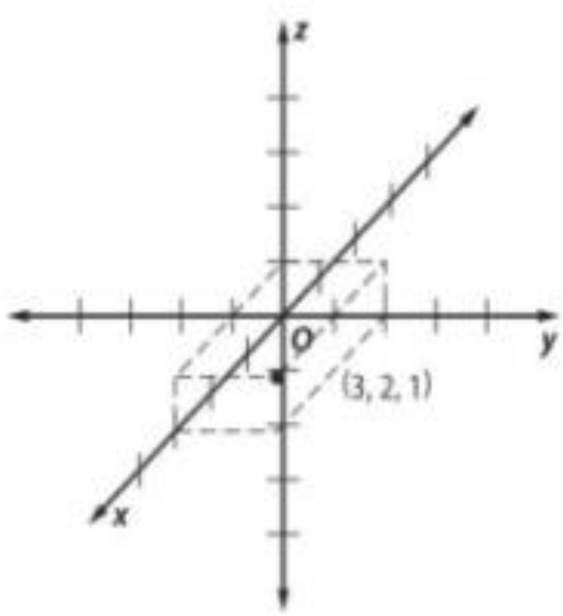


الدرس 7-4

1.



2.

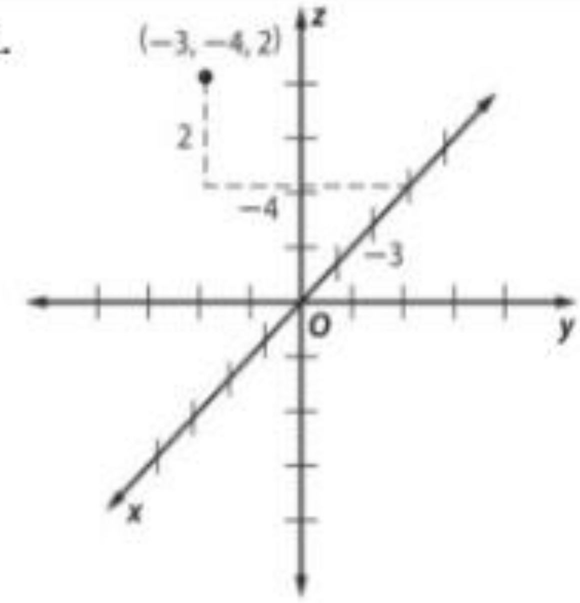


72.

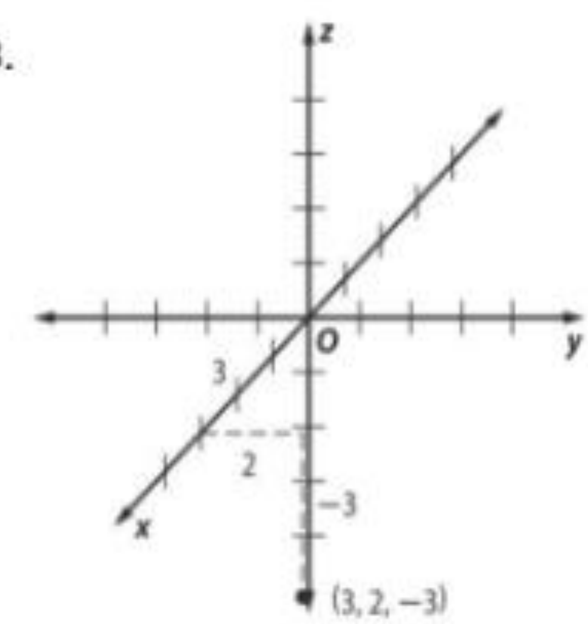
$$\begin{aligned}
k(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) &= k\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} && = \mathbf{u}\cdot k\mathbf{v}\\
k(\langle u_1,u_2\rangle\cdot\langle v_1,v_2\rangle) &\stackrel{?}{=} k\langle u_1,u_2\rangle\cdot\langle v_1,v_2\rangle && \stackrel{?}{=} \langle u_1,u_2\rangle\cdot k\langle v_1,v_2\rangle\\
k(u_1v_1+u_2v_2) &\stackrel{?}{=} \langle ku_1,ku_2\rangle\cdot\langle v_1,v_2\rangle && \stackrel{?}{=} \langle u_1,u_2\rangle\cdot\langle kv_1,kv_2\rangle\\
ku_1v_1+ku_2v_2 &= ku_1v_1+ku_2v_2 && = ku_1v_1+ku_2v_2
\end{aligned}$$

الدرس 7-4 (تمرين موجّه)

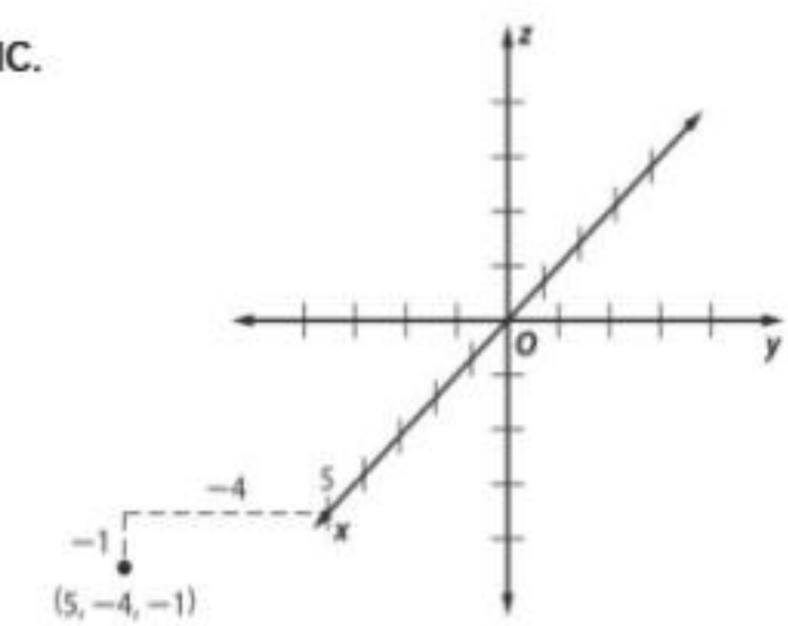
1A.



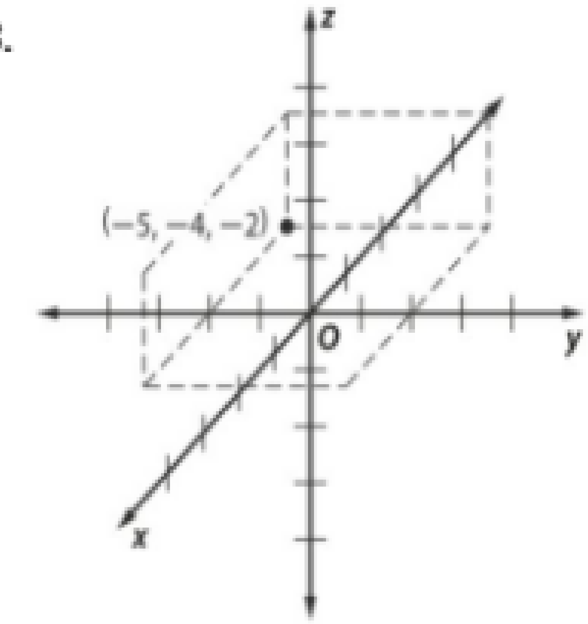
1B.



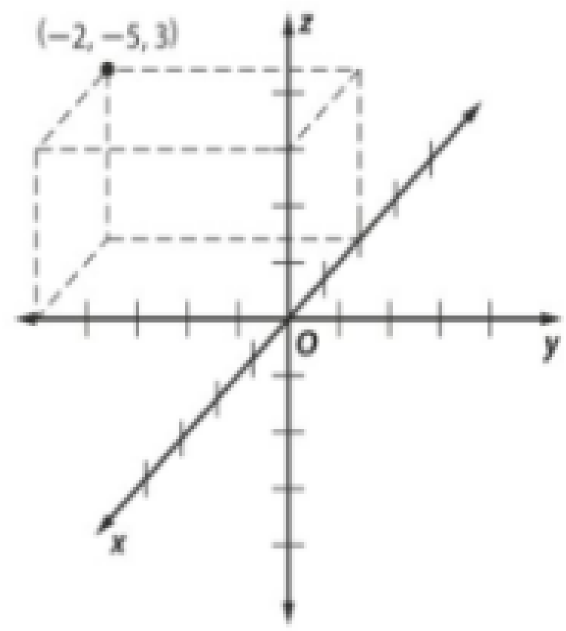
1C.



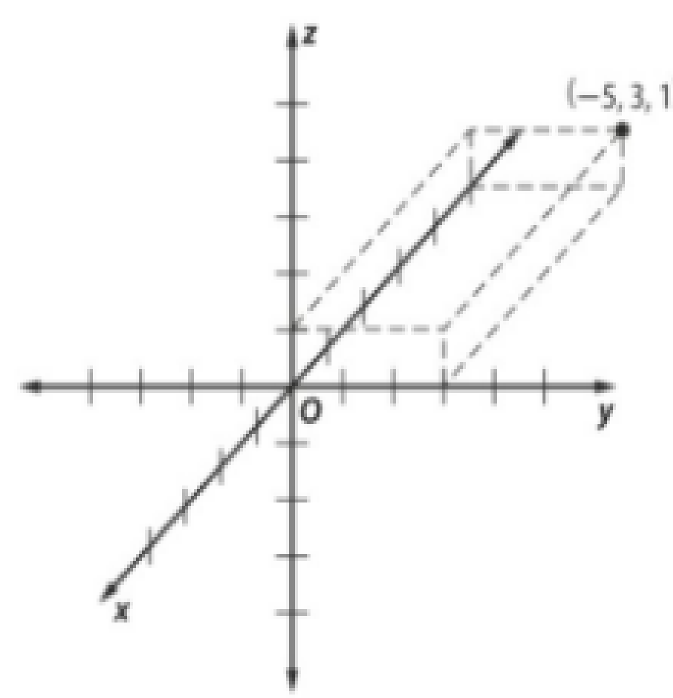
3.



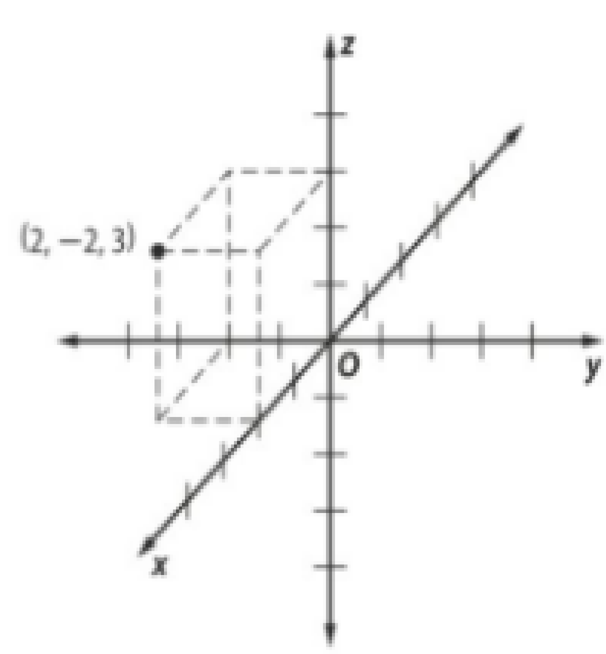
4.



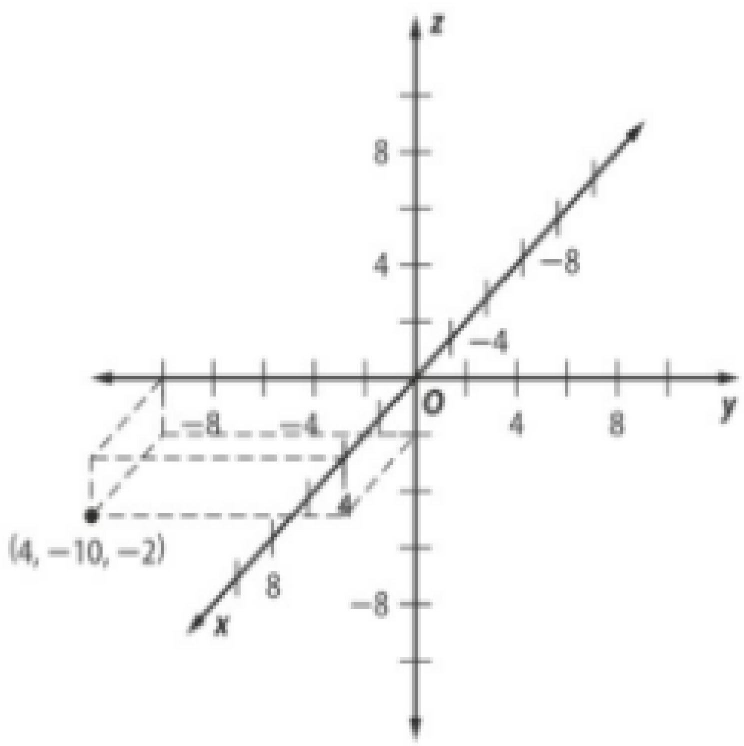
5.



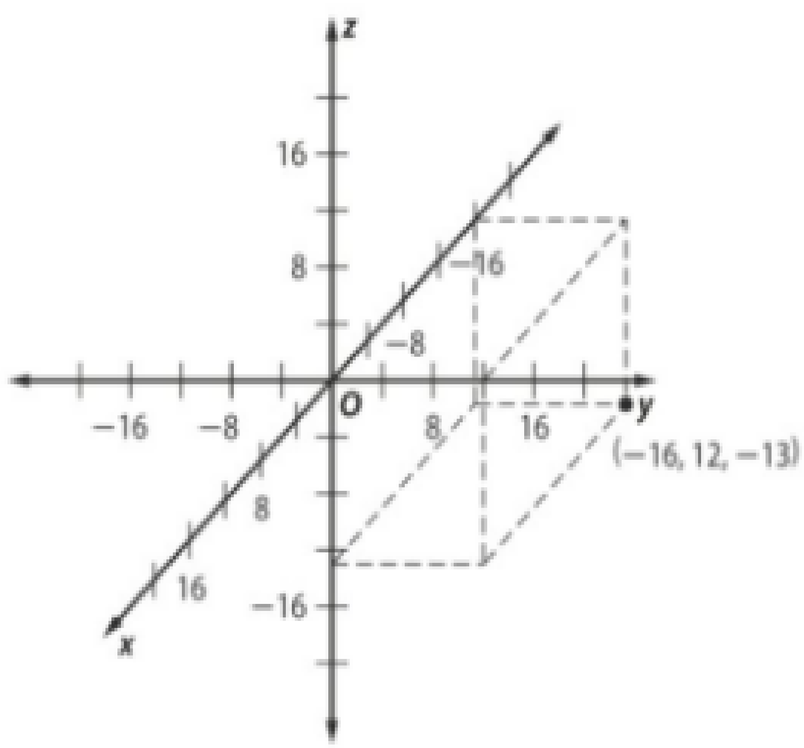
6.



7.



8.



9. $5\sqrt{6} \approx 12.2; \left(-\frac{3}{2}, 5, \frac{13}{2}\right)$

10. $7\sqrt{2} \approx 9.9; \left(-\frac{15}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$

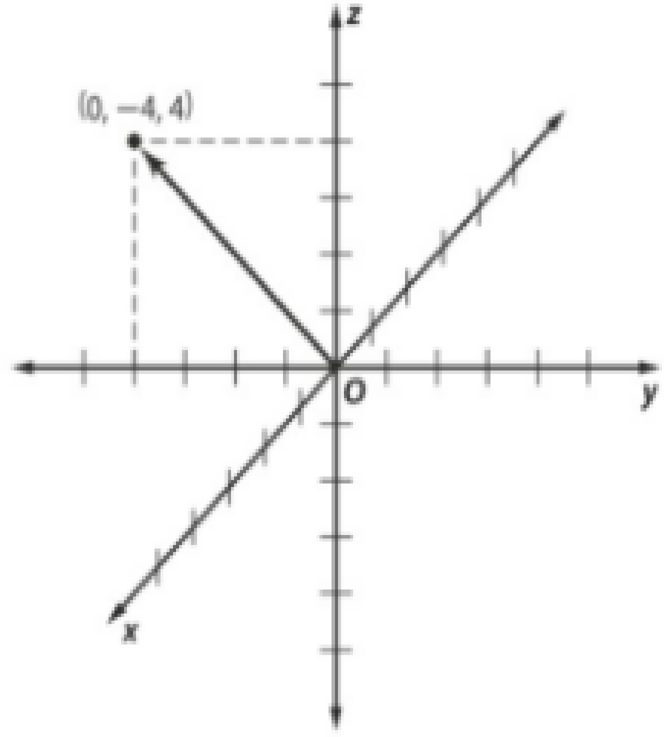
11. $\sqrt{542} \approx 23.3; \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}, 3\right)$

12. $7\sqrt{5} \approx 15.7; \left(2, -2, \frac{9}{2}\right)$

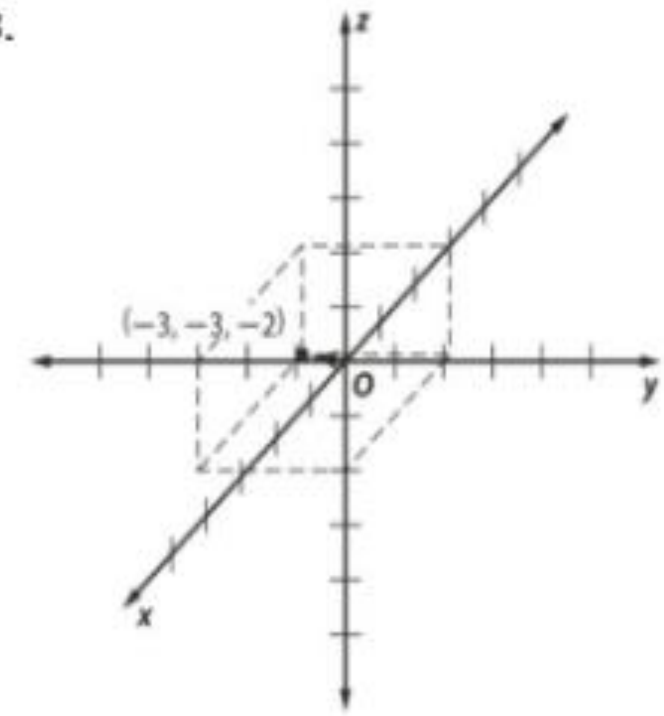
13. $4\sqrt{14} \approx 15.0; (3, 4, 4)$

14. $\sqrt{83} \approx 9.1; \left(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{13}{2}\right)$

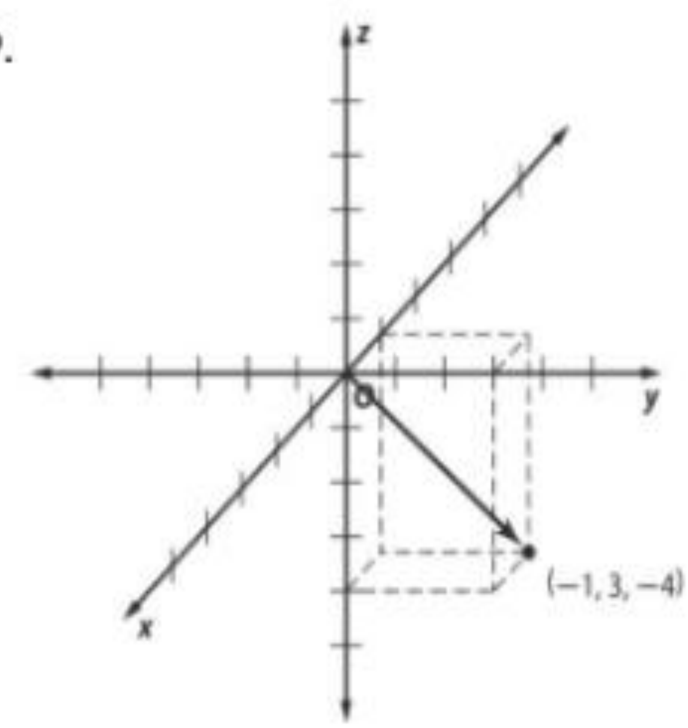
17.



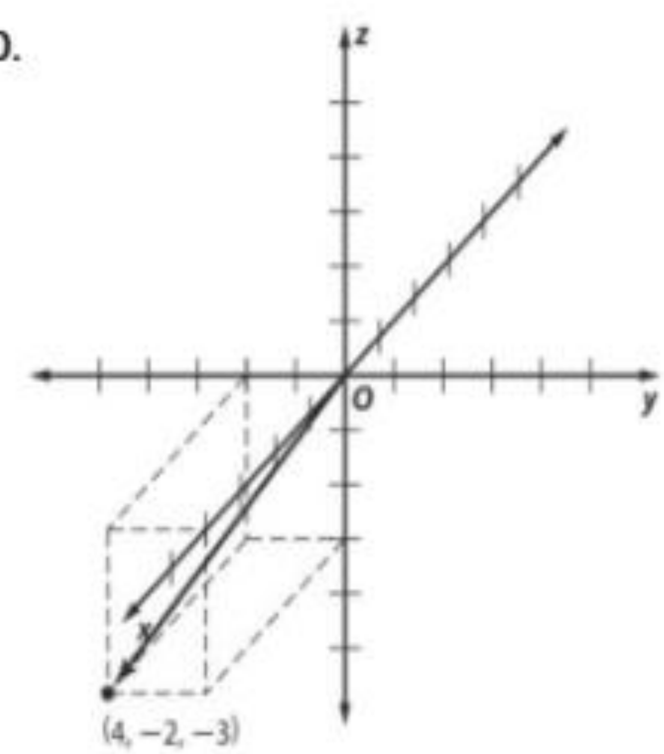
18.



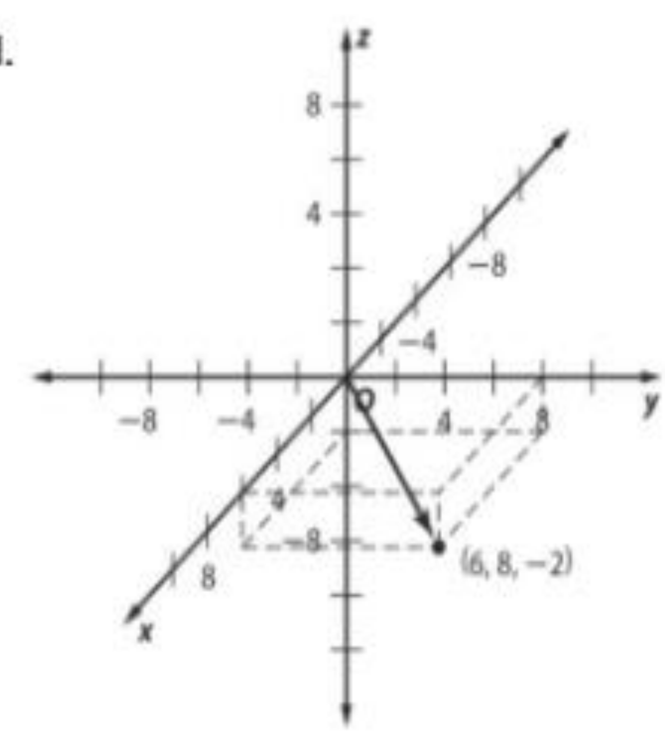
19.



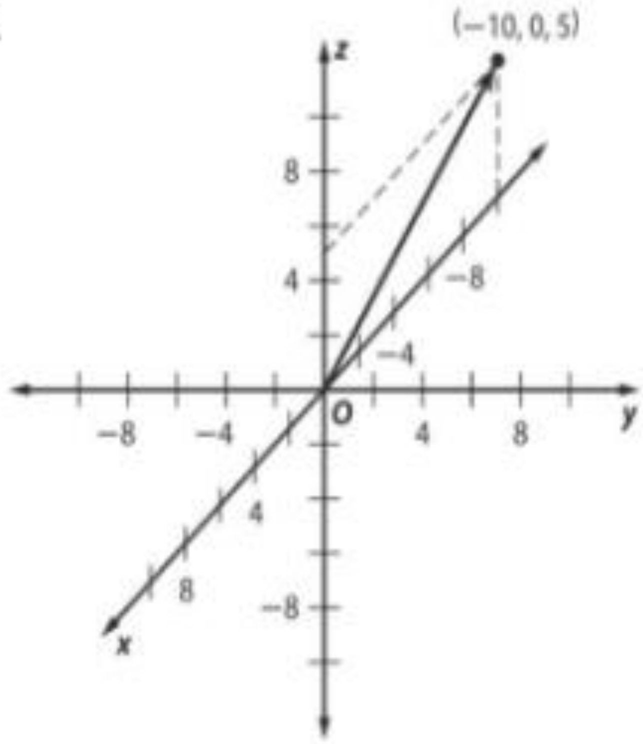
20.



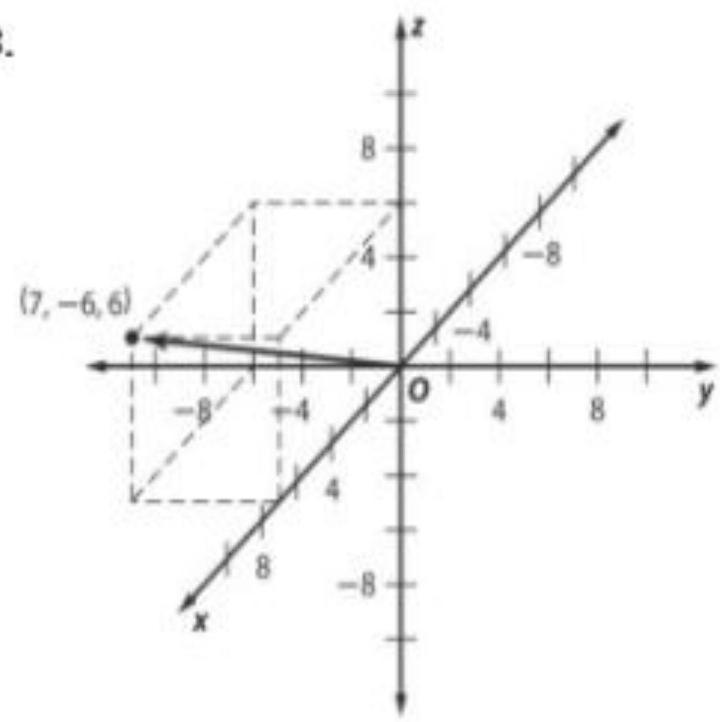
21.



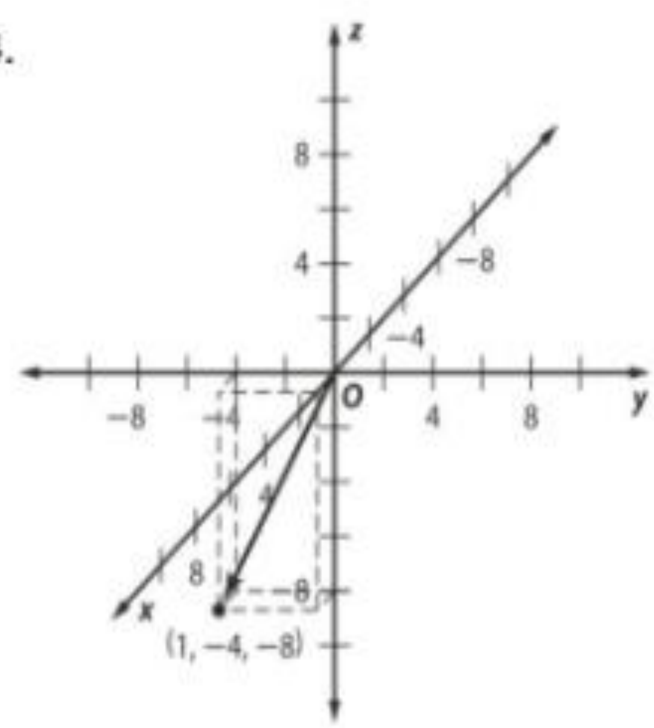
22.



23.



24.



25. $\langle 16, 2, 8\rangle$; 18; $\left\langle \frac{8}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9} \right\rangle$

26. $\langle 0, -8, 12\rangle$; $4\sqrt{13}$; $\left\langle 0, -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$

27. $\langle -3, -5, -10\rangle$; $\sqrt{134}$; $\left\langle -\frac{3\sqrt{134}}{134}, -\frac{5\sqrt{134}}{134}, -\frac{5\sqrt{134}}{67} \right\rangle$

28. $\langle -4, 8, 20\rangle$; $4\sqrt{30}$; $\left\langle -\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{15}, \frac{\sqrt{30}}{6} \right\rangle$

29. $\langle -1, 8, -10\rangle; \sqrt{165}; \left\langle -\frac{\sqrt{165}}{165}, \frac{8\sqrt{165}}{165}, -\frac{2\sqrt{165}}{33}\right\rangle$

30. $\langle -6, -15, 4\rangle; \sqrt{277}; \left\langle -\frac{6\sqrt{277}}{277}, -\frac{15\sqrt{277}}{277}, \frac{4\sqrt{277}}{277}\right\rangle$

31. $\langle 4, -15, 5\rangle; \sqrt{266}; \left\langle \frac{2\sqrt{266}}{133}, -\frac{15\sqrt{266}}{266}, \frac{5\sqrt{266}}{266}\right\rangle$

32. $\langle 20, 32, 42\rangle; 2\sqrt{797}; \left\langle \frac{10\sqrt{797}}{797}, \frac{16\sqrt{797}}{797}, \frac{21\sqrt{797}}{797}\right\rangle$

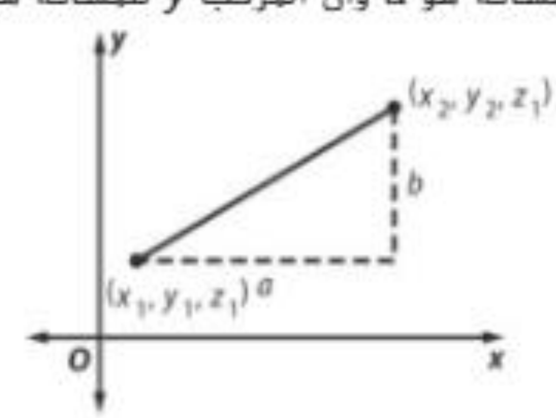
33. $\langle 11, -23, -13\rangle; 3\sqrt{91}; \left\langle \frac{11\sqrt{91}}{273}, -\frac{23\sqrt{91}}{273}, -\frac{\sqrt{91}}{21}\right\rangle$

34. $\langle -14, -10, -5\rangle; \sqrt{321}; \left\langle -\frac{14\sqrt{321}}{321}, -\frac{10\sqrt{321}}{321}, -\frac{5\sqrt{321}}{321}\right\rangle$

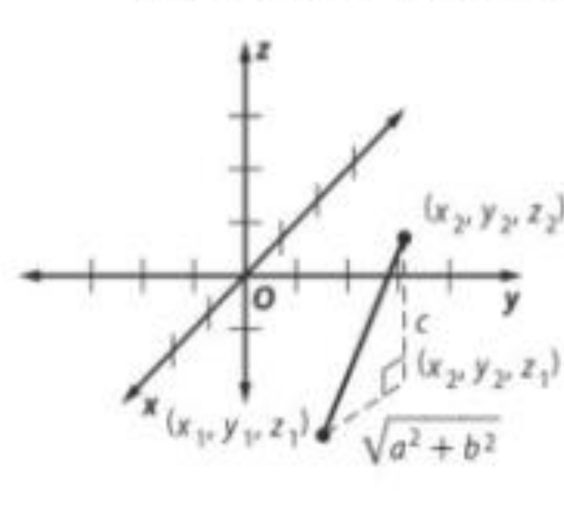
60a. $\langle 9.4 \times 10^5, 2.2 \times 10^6, -6.5 \times 10^5\rangle$, $\langle -9.4 \times 10^5, 2.2 \times 10^6, -6.5 \times 10^5\rangle$

61.
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - \ell)^2}$$
$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - \ell)^2$$

66. الإجابة النموذجية: افترض أن النقطتين هما (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2). النقطة الموجودة في المستوى **xy** والتي تقع مباشرة أسفل النقطة الثانية هي (x_2, y_2, z_1). استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد المسافة بين النقطتين (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_1). افترض أن المركّب **x** للمسافة هو **a** وأن المركّب **y** للمسافة هو **b**.



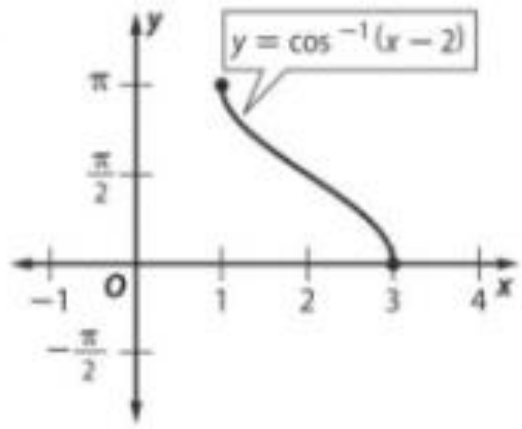
لذلك، المسافة من (x_1, y_1, z_1) إلى (x_2, y_2, z_1) هي $\sqrt{a^2 + b^2}$. الآن، استخدم نظرية فيثاغورس مرة أخرى لإيجاد المسافة بين النقطتين (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2). المركّب **xy** للمسافة هو $\sqrt{a^2 + b^2}$. افترض أن المركّب **z** للمسافة هو **c**.



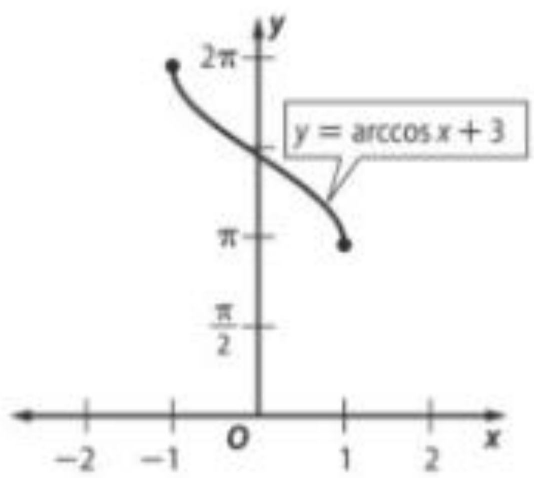
إذًا، فإن المسافة من (x_1, y_1, z_1) إلى (x_2, y_2, z_2) هي $\sqrt{\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 + c^2}$ أو $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. وحيث إن $a = x_2 - x_1, b = y_2 - y_1$، أو $c = z_2 - z_1$. فإن المسافة بين النقطتين (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) هي $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

69. الإجابة النموذجية: الأصح استخدام بُعدين عند وصف موضع على الخريطة، حيث إن الخريطة نفسها ثنائية الأبعاد. أما عندما يتطلب وصف موضع جسم ما استخدام البعد الإضافي للارتفاع، مثل موضع طائرة، فيكون من الأصح استخدام ثلاثة أبعاد.

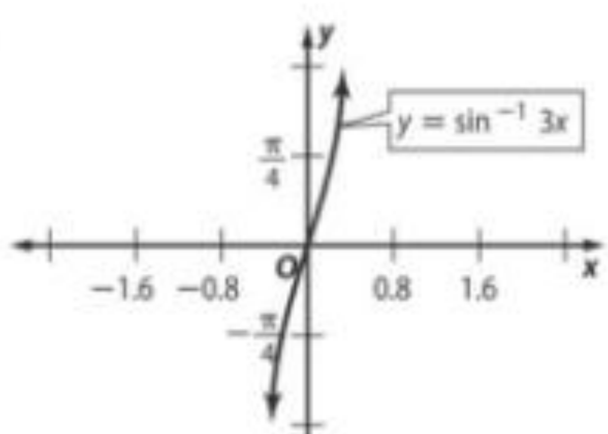
81.



82.

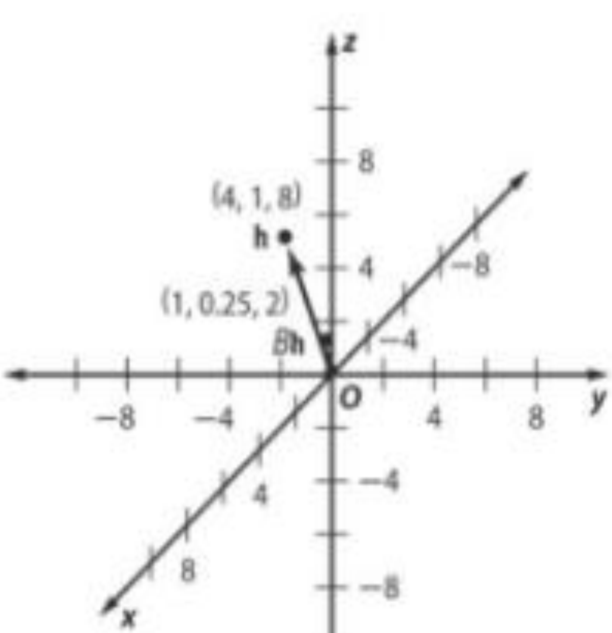


83.



التوسع 7-4

1.



الدرس 5-7

16. $\langle 21, 7, 0\rangle$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$	$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle 21, 7, 0\rangle \cdot \langle -1, 3, 5\rangle$	$= \langle 21, 7, 0\rangle \cdot \langle 2, -6, -3\rangle$
$= 21(-1) + 7(3) + 0(5)$	$= 21(2) + 7(-6) + 0(-3)$
$= 0$	$= 0$

17. $\langle 25, 6, 71\rangle$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$	$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle 25, 6, 71\rangle \cdot \langle 4, 7, -2\rangle$	$= \langle 25, 6, 71\rangle \cdot \langle -5, 9, 1\rangle$
$= 25(4) + 6(7) + 71(-2)$	$= 25(-5) + 6(9) + 71(1)$
$= 0$	$= 0$

18. $\langle 38, 26, 21\rangle$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$	$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle 38, 26, 21\rangle \cdot \langle 3, -6, 2\rangle$	$= \langle 38, 26, 21\rangle \cdot \langle 1, 5, -8\rangle$
$= 38(3) + 26(-6) + 21(2)$	$= 38(1) + 26(5) + 21(-8)$
$= 0$	$= 0$

19. $\langle -56, -35, -42\rangle$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$	$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle -56, -35, -42\rangle \cdot \langle 5, -8, 0\rangle$	$= \langle -56, -35, -42\rangle \cdot \langle -4, -2, 7\rangle$
$= (-56)(5) + (-35)(-8) + (-42)(0)$	$= (-56)(-4) + (-35)(-2) + (-42)(7)$
$= 0$	$= 0$

20. $\langle 7, 23, 12\rangle$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$	$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle 7, 23, 12\rangle \cdot \langle -2, -2, 5\rangle$	$= \langle 7, 23, 12\rangle \cdot \langle 7, 1, -6\rangle$
$= 7(-2) + 23(-2) + 12(5)$	$= 7(7) + 23(1) + 12(-6)$
$= 0$	$= 0$

21. $\langle 29, 12, 13\rangle$

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$	$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle 29, 12, 13\rangle \cdot \langle -4, 1, 8\rangle$	$= \langle 29, 12, 13\rangle \cdot \langle 3, -4, -3\rangle$
$= 29(-4) + 12(1) + 13(8)$	$= 29(3) + 12(-4) + 13(-3)$
$= 0$	$= 0$

60. الإجابة النموذجية: قاعدة متوازي السطوح عبارة عن متوازي أضلاع مساحته تساوي $|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|$. والارتفاع يساوي $|\text{proj}_{\mathbf{w}\times\mathbf{v}}\mathbf{u}|$. إذًا، حجم متوازي السطوح هو $V = |\mathbf{v} \times \mathbf{w}|\,|\text{proj}_{\mathbf{w}\times\mathbf{v}}\mathbf{u}|$

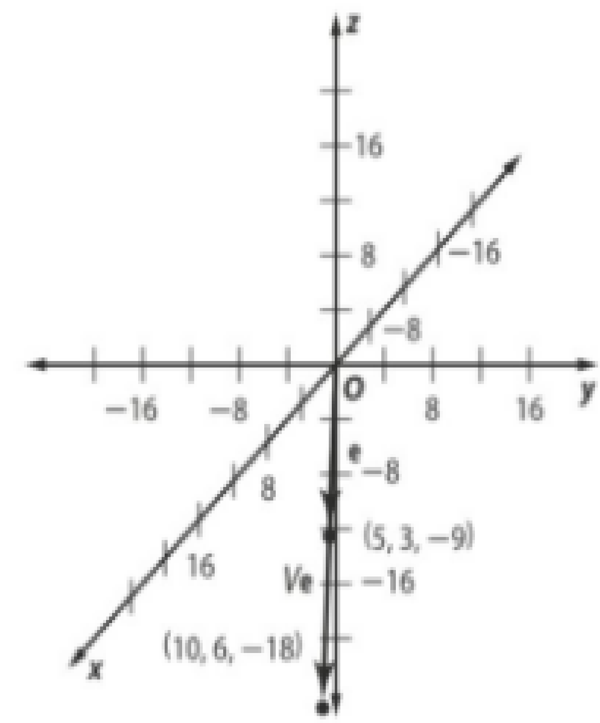
$$V = |\mathbf{v} \times \mathbf{w}|\,|\text{proj}_{\mathbf{w}\times\mathbf{v}}\mathbf{u}|$$

$$= |\mathbf{v} \times \mathbf{w}| \cdot \left|\frac{u \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|^2}(\mathbf{v} \times \mathbf{w})\right|$$

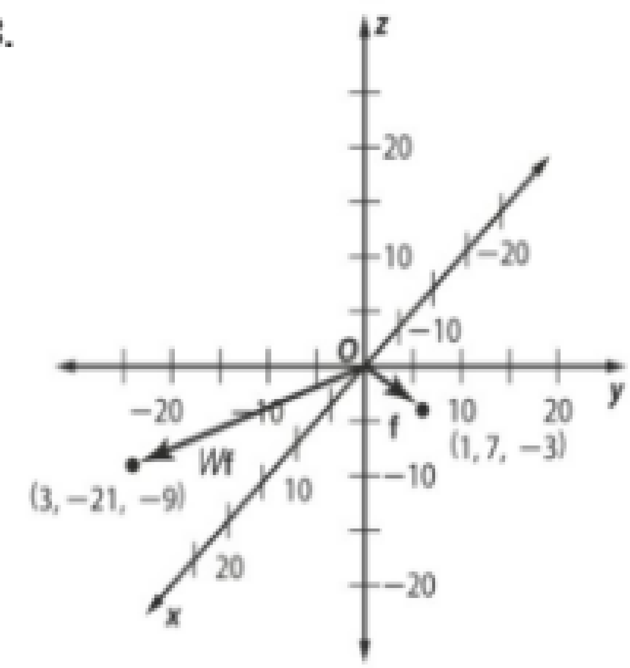
$$= |\mathbf{v} \times \mathbf{w}| \cdot \frac{|u \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|^2}|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| \text{ أو } |u \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$$

65. الإجابة النموذجية: لتحديد ما إذا كان متجهان متوازيين أم متعامدين، يمكنك استخدام القانون الخاص بالزاوية المحصورة بين متجهين. إذا كان قياس الزاوية 0 أو 180، فإنهما متوازيان. أما إذا كان قياس الزاوية 90، فإنهما متعامدان. يمكنك أيضًا إيجاد الصورة المركبة لمتجهين واستخدام نسب الإحداثيات لتحديد ما إذا كان متجهان متعامدين أم لا. إذا كانت نسب الإحداثيات الثلاثة للمتجهات المركبة واحدة، فإن المتجهين متوازيان. ولتحديد ما إذا كان المتجهان متعامدين أم لا ، فيمكنك إيجاد ناتج الضرب النقطي للمتجهين. فإذا كان ناتج الضرب النقطي يساوي 0، فإن المتجهين متعامدان.

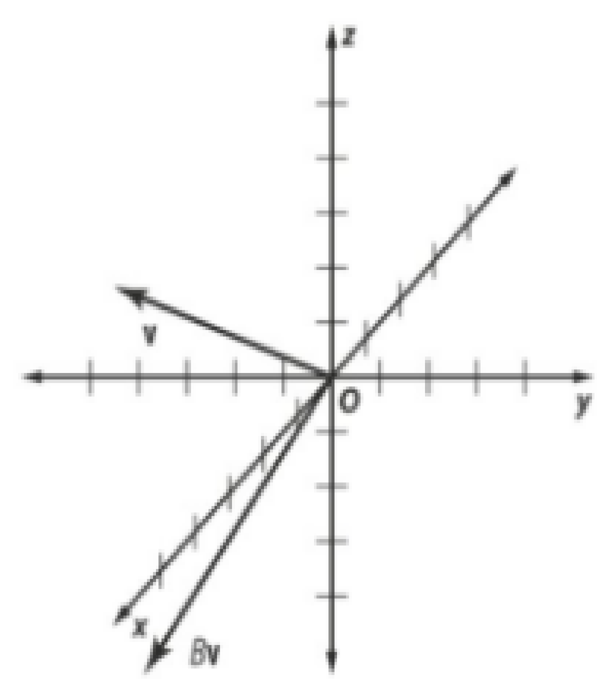
2.



3.



4.



الدرس 5-7 (تمرين موجّه)

3A.

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$	$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle 9, -21, -6\rangle \cdot \langle 4, 2, -1\rangle$	$= \langle 9, -21, -6\rangle \cdot \langle 5, 1, 4\rangle$
$= 9(4) + (-21)(2) + (-6)(-1)$	$= 9(5) + (-21)(1) + (-6)(4)$
$= 36 + (-42) + 6$	$= 45 + (-21) + (-24)$
$= 0$	$= 0$

3B.

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$	$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle -1, -7, 3\rangle \cdot \langle -2, -1, -3\rangle$	$= \langle -1, -7, 3\rangle \cdot \langle 5, 1, 4\rangle$
$= (-1)(-2) + (-7)(-1) + 3(-3)$	$= (-1)(5) + (-7)(1) + 3(4)$
$= 2 + 7 + (-9)$	$= -5 + (-7) + 12$
$= 0$	$= 0$