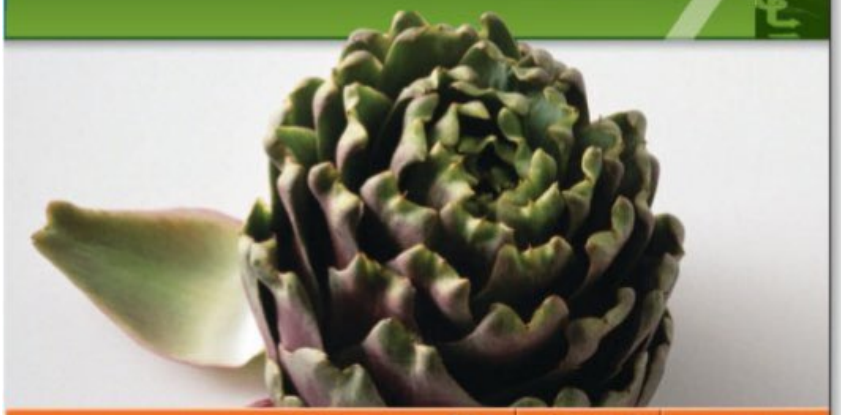
●●○○○ etisalat 4G 5:15 PM 43%
elib.moe.gov.ae

9 المتتاليات والمتسلسلات



مشروع الوحدة

المبالغ المالية الكبيرة

يستخدم الطلاب ما تعلموه عن المتتاليات والمتسلسلات لإكمال مشروع.

يتناول مشروع هذه الوحدة المعرفة المالية، والعديد من المهارات الخاصة الضرورية لنجاح الطالب في إطار عمل التعلم في القرن الواحد والعشرين.

المفردات الأساسية قدم المفردات الأساسية في الوحدة متبعًا النظام التالي.

عرّف: الحد هو أي رقم في متسلسلة.

مثال: الحد الرابع في المتتالية التالية هو 29, 2, 11, 20, 29, 39, . . .

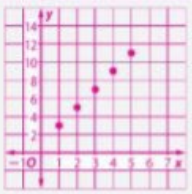
اطرح السؤال التالي: ما الحد الأول في المتتالية أعلاه؟ 2

السابق	الحالي	لماذا؟
قمت بتحويل التعابير الجبرية لأبسط صورها وأوجدت قيمتها.	ستقوم بما يلي: • استخدام المتتاليات والمتسلسلات الحسابية والهندسية. • استخدام المتتاليات الخاصة ودوال التكرار. • تفكيك الأسس باستخدام نظرية ذات الحدين. • برهنة العبارات باستخدام الاستقراء الرياضي.	**الاستدامة والبيئة** تظهر الرياضيات عبر المظاهر الطبيعية بطرق مدهشة. فتنجلي متتالية فيبوناتشي في البذور والأزهار ومعاريض الصنوبر والفاكهة والخضروات. كذلك، قد تساعدنا المتتاليات والمتسلسلات في الحفاظ على الموارد الطبيعية من خلال زيادة فعالية أنظمة تصفية المياه.

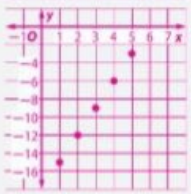
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابات إضافية (الاستعداد للوحدة 9)

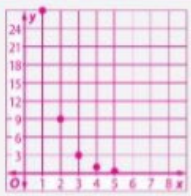
6.



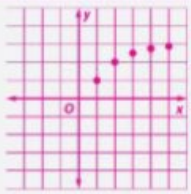
7.



8.



9.



472 / 35

Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:15 PM 43%
elib.moe.gov.ae

الأسئلة الأساسية

- أين توجد الأنماط في الحياة اليومية؟ الإجابة النموذجية: في الطبيعة والهندسة المعمارية والموسيقى والعلوم والفن
- كيف يمكنك تمييز الأنماط التي تساعدك على حل مسائل من الحياة اليومية؟ الإجابة النموذجية: يساعدك تمييز الأنماط في توقع السلوكيات المستقبلية.

الاستعداد للوحدة

تدريب سريع

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

1. $-6 = 7x + 78$ $x = -12$
2. $68 = 3x^4$ $x = \pm 4$
3. $23 - 5x = 8$ $x = 3$
4. $2x^3 + 4 = -50$ $x = -3$
5. **النباتات** لدى ليلى 48 نباتا في حديقتين خاصتين بها وتزرع 12 نباتا في الحديقة الصغيرة. أما في الحديقة الكبيرة، فتزيد زراعة 4 نباتات في كل صف. ما عدد الصفوف التي ستكون لديها؟ 9 صفوف

مثل كل دالة بيانيا. 9-6. انظر الهامش.

6. $\{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9), (5, 11)\}$
7. $\{(1, -15), (2, -12), (3, -9), (4, -6), (5, -3)\}$
8. $\left\{(1, 27), (2, 9), (3, 3), (4, 1), \left(5, \frac{1}{3}\right)\right\}$
9. $\left\{(1, 1), (2, 2), \left(3, \frac{5}{2}\right), \left(4, \frac{11}{4}\right), \left(5, \frac{23}{8}\right)\right\}$
10. **الرعاية الصباحية** يتكلف مركز رعاية أطفال AED 450 في اليوم. ويتقاضون AED 150 عن كل طفل في اليوم. وتنتج الدالة $P(c) = 150c - 450$ المبلغ المالي الذي يجنيه المركز عند وجود عدد c من الأطفال. ما إجمالي الربح الذي سيجنيه المركز إذا كان يوجد به 8 أطفال؟ AED 750

أوجد قيمة كل تعبير في ضوء قيمة (قيم) المتغير (المتغيرات).

11. $\frac{a}{3}(b + c)$ إذا كان $a = 9$ ، $b = -2$ ، $c = -8$ -30
12. $r + (n - 2)t$ إذا كان $r = 15$ ، $n = 5$ ، $t = -1$ 12
13. $x \cdot y^{z+1}$ إذا كان $x = -2$ ، $y = \frac{1}{3}$ ، $z = 5$ $\frac{2}{729}$
14. $\frac{a(1 - b)^2}{1 - b}$ إذا كان $a = -3$ ، $b = -4$ ، $c = 1$ -15

مراجعة سريعة

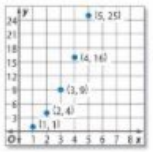
مثال 1 (مستخدم في الدروس من 1-9 إلى 3-9)

أوجد حل $25 = 3x^3 + 400$.

المعادلة الأصلية
$25 = 3x^3 + 400$
اطرح 400 من الطرفين.
$-375 = 3x^3$
اقسم الطرفين على 3.
$-125 = x^3$
أوجد الجذر التكعيبي للطرفين.
$\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{x^3}$
بسط.
$-5 = x$

مثال 2 (مستخدم في الدروس من 1-9 إلى 5-9)

مثل الدالة بيانيا $\{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$. حدد المدى والمجال.



مجال الدالة هو مجموعة جميع الاحتمالات لقيم x. إذا، مجال هذه الدالة هو {1, 2, 3, 4, 5}. مدى الدالة هو مجموعة جميع الاحتمالات لقيم y. إذا مدى هذه الدالة هو {1, 4, 9, 16, 25}.

مثال 3 (مستخدم في الدروس من 1-9 إلى 5-9 و 8-9)

أوجد قيمة $2 \cdot 3^{x+y}$ إذا كان $x = -2$ و $y = -3$.

عوض.
$2 \cdot 3^{x+y} = 2 \cdot 3^{-2+(-3)}$
بسط.
$= 2 \cdot 3^{-5}$
أعد الكتابة بأس موجب.
$= \frac{2}{3^5}$
أوجد قيمة الأس.
$= \frac{2}{243}$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

545

Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:15 PM 43%
elib.moe.gov.ae

المطويات منظم الدراسة

المطويات® دينا زايك

التركيز يسجل الطلاب الملاحظات والأمثلة على المتسلسلات والمتتاليات في بطاقات فهرسة ويضعونها في حافظة مناسبة من مطوياتهم.

التدريس اجعل الطلاب يصنعوا مطوياتهم ويسموها كما هو موضح. ينبغي أن يستخدم الطلاب مطوياتهم في كتابة الملاحظات وتعريف الحدود وتسجيل المفاهيم وتقديم الأمثلة على المتتاليات والمتسلسلات في بطاقات الفهرسة. وبعد ذلك، ينبغي وضع البطاقات في الحافظة المناسبة.

وقت الاستخدام شجّع الطلاب على إضافة المزيد من المعلومات إلى المطويات أثناء دراسة الوحدة وعلى استخدام تلك المطويات عند المراجعة للاستعداد لاختبار الوحدة.

البدء في هذه الوحدة

ستتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة أثناء دراستك للوحدة 9. ولكي تستعد، حدد المفردات المهمة ونظم مواردك.

المطويات منظم الدراسة

المتتاليات والمتسلسلات اتبع المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظات الوحدة 9 عن المتتاليات والمتسلسلات. وابدأ بورقة واحدة أبعادها $8\frac{1}{2}$" في 11".

1 **اطو** الورقة إلى نصفين. مع مطابقة الأضلاع القصيرة.

2 **اقرد** واطو الجلع الأطول لأعلى لعمل جيب.

3 **دبس** الحواف الخارجية أو ألصقها لإكمال الجيب.

4 **اكتب** اسم كل ضلع كما هو موضح. استخدم بطاقة الفهرسة لتسجيل الملاحظات والأمثلة.

المفردات الجديدة

العربية	
متتالية	sequence
متتالية منتهية	finite sequence
متتالية غير منتهية	infinite sequence
متتالية حسابية	arithmetic sequence
فرق مشترك	common difference
متتالية هندسية	geometric sequence
نسبة مشتركة	common ratio
أوساط حسابية	arithmetic means
متسلسلة	series
متسلسلة حسابية	arithmetic series
المجموع الجزئي	partial sum
أوساط هندسية	geometric means
متسلسلة هندسية	geometric series
متسلسلة تقاربية	convergent series
متسلسلة تباعدية	divergent series
متتالية تكرارية	recursive sequence
الإعادة	iteration
الاستقراء الرياضي	mathematical induction
فرضية الاستقراء	induction hypothesis

مراجعة المفردات

المعامل (coefficient) العامل العددي لذات الحد

الصيغة (formula) جملة رياضية تعبر عن العلاقة بين كميات معينة

الدالة (function) علاقة يقترن فيها كل عنصر من المجال بعنصر واحد بالتحديد في المدى

Mc Graw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

546 | الوحدة 9 | المتتاليات والمتسلسلات

472 / 37

Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:15 PM 43%
elib.moe.gov.ae

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 1-9 تحليل الدوال الخطية والأسية.

الدرس 1-9 ربط المتتاليات الحسابية بالدوال الخطية. وربط المتتاليات الهندسية بالدوال الأسية.

بعد الدرس 1-9 استخدم المتسلسلات والمتتاليات الحسابية والهندسية والأشكال الأخرى من المتسلسلات والمتتاليات لحل مسائل من الحياة اليومية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما النمط الذي يؤديه عازفو الفرقة الموسيقية؟ 1, 3, 5, 7, . . .
- كيف يمكنك إيجاد الأعداد الأربعة التالية في النمط؟ أضف 2 لكل صف متتابع لإيجاد عدد عازفي الفرقة الموسيقية في ذلك الصف.
- ما الأعداد الأربعة التالية؟ 9, 11, 13, 15
- هل تتوقع أن يستمر هذا النمط إلى ما لا نهاية؟ لا. فهناك حد لعدد صفوف العازفين.

9-1 المتتاليات كدوال

السابق
- قبل: تحليل الدوال الخطية والأسية.

الحالي
1. ربط المتتاليات الحسابية بالدوال الخطية.
2. ربط المتتاليات الهندسية بالدوال الأسية.

لماذا؟
- خلال الفرقة المدرسية، تتحرك مجموعة من الطلاب. ويتحرك مؤد واحد أمام الصف. ويوجد بالصف التالي ثلاثة طلاب. ويوجد خمسة طلاب بالصف التالي. ويستمر هذا النمط لبقية الصفوف.

1 متتاليات حسابية المتتالية هي مجموعة من الأعداد تأخذ ترتيب أو نمط محدد. ويطلق على كل عدد في المتتالية **حد**. وقد تكون المتتالية **متتالية منتهية** وتحتوي على أعداد محددة. مثل {6, 4, 2, 0, −2}. أو قد تكون **متتالية غير منتهية** وتستمر دون نهاية مثل {..., 0, 1, 2, 3, ...}. يرمز إلى الحد الأول من المتتالية بالرمز a_1. ويرمز إلى الحد الثاني بالرمز a_2. وهكذا.

المفهوم الأساسي المتتاليات في صورة دوال

الشرح المتتالية هي دالة يتكون مجالها من أعداد طبيعية. ويتكون مداها من أعداد حقيقية.

الرموز المجال: 1 2 3 ... n — رتبة الحد
المدى: a_1 a_2 a_3 ... a_n — حدود المتتالية

أمثلة

متتالية منتهية	متتالية غير منتهية
{3, 6, 9, 12, 15}	{3, 6, 9, 12, 15, ...}
المجال: {1, 2, 3, 4, 5}	المجال: {جميع الأعداد الطبيعية}
المدى: {3, 6, 9, 12, 15}	المدى: $\{y \mid y$ هو أحد مضاعفات العدد 3. $y \geq 3\}$

في **المتتالية الحسابية** يتحدد كل حد من خلال إضافة قيمة ثابتة إلى الحد السابق. ويطلق على هذه القيمة الثابتة **الفرق المشترك**.

تأمل المتتالية 15 ,12 ,9 ,6 ,3. هذه المتتالية حسابية. وذلك لأن الحدود لها نفس الفرق المشترك. وكل حد يزيد عن الحد الذي يسبقه بمقدار 3 أضعاف.

3 (+3) 6 (+3) 9 (+3) 12 (+3) 15

مثال 1 تحديد المتتاليات الحسابية

حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية.

a. 5, −6, −17, −28, ...

5 (−11) −6 (−11) −17 (−11) −28

الفرق المشترك هو −11.
المتتالية حسابية.

1A. 7, 12, 16, 20, ... لا

b. −4, 12, 28, 42, ...

−4 (+16) 12 (+16) 28 (+14) 42

لا يوجد فرق مشترك.
هذه ليست متتالية حسابية

تمرين موجه

1B. −6, 3, 12, 21, ... نعم

المفردات الجديدة

متتالية sequence	
حد term	
متتالية منتهية finite sequence	
متتالية غير منتهية infinite sequence	
متتالية حسابية arithmetic sequence	
فرق مشترك common difference	
متتالية هندسية geometric sequence	
نسبة مشتركة common ratio	

ممارسات في الرياضيات

التفكير بطريقة تجريدية وكمية
محاولة إيجاد البنية واستخدامها

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:15 PM 43%
elib.moe.gov.ae

1 المتتاليات الحسابية

المثال 1 يبين كيفية تحديد ما إذا كان هناك فرق مشترك لمتتالية، وإن وجد، فكيف تحدد المتتابعة على أنها حسابية. ويبين **المثال 2** كيفية استخدام الفرق المشترك لإيجاد حدود المتتالية الحسابية وكيف تمثل حدود المتتالية بيانيًا. ويبين **المثال 3** كيفية إيجاد حد في متتالية حسابية معطاة لحل مسألة من الحياة اليومية.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 حدد ما إذا كانت كل متتالية هي متتالية حسابية أم لا. اكتب نعم أو لا.

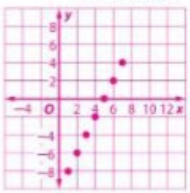
a. $-3, -8, -13, -23, \ldots$ لا

b. $-8, -2, 4, 10, \ldots$ نعم

2 تأمل المتتالية الحسابية $-8, -6, -4, \ldots$

a. أوجد الحدود الأربعة التالية للمتتالية. $-2, 0, 2, 4$

b. مثل بيانيًا الحدود السبعة الأولى للمتتالية.



3 **فرقة عزف** استخدم المعلومات الواردة في المثال 3 لتحديد عدد العازفين في الصف رقم 20 أثناء العرض. 39

يمكنك استخدام الفرق المشترك لإيجاد حدود المتتالية الحسابية.

مثال 2 التمثيل البياني للمتتالية الحسابية

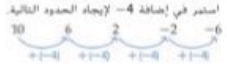
فكر في المتتالية الحسابية ... 18, 14, 10,

a. أوجد الحدود الأربعة التالية للمتتالية.

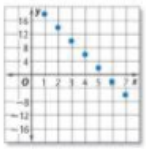
الخطوة 1 لتحديد الفرق المشترك، اطرح أي حد من الحد التالي له مباشرة. الفرق المشترك هو $14 - 10$ أو -4.

الخطوة 2 لإيجاد الحد التالي، أضف -4 إلى الحد الأخير.

استمر في إضافة -4 لإيجاد الحدود التالية.



الحدود الأربعة التالية هي 6 ، 2 ، -2 ، -6.



b. مثل الحدود السبعة الأولى من المتتالية بيانيًا.

يحتوي المجال على العناصر {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

ويحتوي المدى على العناصر {18, 14, 10, 6, 2, −2, −6}

وبذلك، مثل الأزواج المرتبة المقابلة بيانيًا.

تمرين موجّه

2. أوجد الحد الرابع في المتتالية الحسابية ... 18, 11, 4, ثم مثل الحدود السبعة الأولى بيانيًا.

انظر الهامش.

لاحظ أن التمثيل البياني لحدود المتتالية الحسابية يقع على مستقيم واحد. ولهذه المتتالية الحسابية دالة خطية يكون فيها رتبة الحد n هو المتغير المستقل، والحد a_n هو المتغير التابع، والفرق المشترك هو ميل المستقيم.

مثال 3 من الحياة اليومية إيجاد حد

الفرقة المدرسية **راجع بداية الدرس. بفرض أن مخرج العرض يريد تحديد عدد الطلاب المشاركين في الصف الرابع عشر خلال سير الفرقة.**

الاستيعاب نظرًا لأن الفرق بين أي صفين متتاليين هو 2، فإن الفرق المشترك للمتتالية هو 2.

التخطيط استخدم صيغة الميل والنقطة للمتتالية، افترض أن $m = 2$ و $(x_1, y_1) = (3, 5)$. ثم حل لإيجاد قيمة $x = 14$.

الحل

$(y - y_1) = m(x - x_1)$	صيغة الميل والنقطة
$(y - 5) = 2(x - 3)$	$(x_1, y_1) = (3, 5), m = 2$
$y - 5 = 2x - 6$	اضرب.
$y = 2x - 1$	أضف 5 إلى الطرفين.
$y = 2(14) - 1$	عوض عن x بالعدد 14.
$y = 28 - 1$ أو 27	بسط.

التحقق يمكنك إيجاد حدود المتتالية عن طريق جمع 2. بداية من الصف 1. وحتى تصل إلى الصف 14.

تمرين موجّه

3. المال يعرض صاحب العمل على أسامة أجر بقيمة AED 33 لكل ساعة بالإضافة إلى AED 0.50 علاوة كل ثلاثة أشهر. ما إجمالي المبلغ الذي سيتقاضاه أسامة لكل ساعة بعد 3 أعوام؟ **AED 39**

الربط بالحياة اليومية
كل عام، تتنافس فرقة 100 فرقة في البطولات الوطنية الكبرى التي تنظمها منظمة Bands of America (فرق أمريكا).

المصدر: منظمة فرق أمريكا

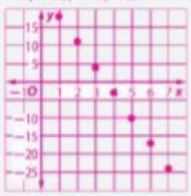
حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

انتبه!

تجنب المفاهيم الخاطئة تأكد من فهم جميع الطلاب أن العدد أسفل السطر في a_n يشير إلى الحد، ولا يُعد أسًا.

إجابة إضافية (تمرين موجّه)

2. $-3, -10, -17, -24$



472 / 39

Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:16 PM 43%
elib.moe.gov.ae

2 المتاليات الهندسية

المثال 4 كيفية تحديد ما إذا كان للمتالية نسبة مشتركة وإذا لم يكن لها، فيبين كيفية تحديد المتالية على أنها متالية هندسية. ويوضح **المثال 5** كيفية استخدام النسبة المشتركة لتحديد المزيد من الحدود في متالية هندسية وكيفية تمثيل تلك الحدود بيانيًا. ويبين **المثال 6** كيفية تحديد ما إذا كانت المتالية حسابية أو هندسية أو ليست أيًا منهما.

أمثلة إضافية

4 حدد ما إذا كانت المتالية هندسية أم لا. اكتب نعم أو لا.

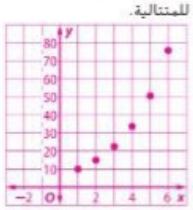
a. 8, 20, 50, 125, . . . نعم

b. 19, 30, 41, 52, . . . لا

5 تأمل المتالية الهندسية
10, 15, 22.5, . . .

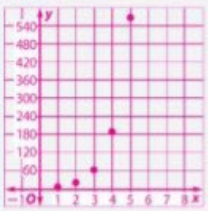
a. أوجد الحدود الثلاثة التالية للمتالية.
33.75, 50.625, 75.9375

b. مثل بيانيًا الحدود الستة الأولى للمتالية.



إجابة إضافية (تمرين موجه)

5. 189, 567



2 المتالية الهندسية

نعد المتالية الهندسية نوعاً آخر من المتاليات. في **المتالية الهندسية** يتم تحديد كل حد من خلال ضرب ثابت غير صفري في الحد السابق. ويطلق على هذا الثابت **النسبة المشتركة**.

تأمل المتالية $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, 4, 16$. هذه متالية هندسية لأن الحدود لها نفس النسبة المشتركة. وكل حد أكبر من الحد السابق له بمقدار 4 مرات.

$\frac{1}{16}$ $\frac{1}{4}$ 1 4 16
×4 ×4 ×4 ×4

مثال 4 تحديد المتاليات الهندسية

حدد ما إذا كانت كل متالية هندسية.

a. $-2, 6, -18, 54, \ldots$

أوجد نسب الحدود المتتابعة.

$\frac{6}{-2} = -3 \quad \frac{-18}{6} = -3 \quad \frac{54}{-18} = -3$

النسب متماثلة. إذا فالمتالية هندسية.

b. $8, 16, 24, 32, \ldots$

$\frac{16}{8} = 2 \quad \frac{24}{16} = 1.5 \quad \frac{32}{24} = 1.\overline{3}$

النسب ليست متماثلة. إذا فالمتالية ليست هندسية.

تمرين موجه

4A. -8, 2, -0.5, 0.125, ... نعم

4B. 1, 3, 7, 15, ... لا

انتبه!
النسب إذا أوجدت نسبة حد إلى الحد السابق له، فأنشئ النسب المتبقية بالطريقة نفسها.

عند تحليك مجموعة من المعلومات، يمكنك إنشاء مسألة ترتبط بقصة.

مثال 5 تمثيل متالية هندسية بيانيًا

فكر في المتالية الهندسية ... 32, 8, 2,

a. أوجد الحدود الثلاثة التالية للمتالية.

الخطوة 1 أوجد قيمة النسبة المشتركة: $\frac{2}{8}$ أو $\frac{1}{4}$.

الخطوة 2 لإيجاد الحد التالي، اضرب الحد السابق في $\frac{1}{4}$.

استمر في الضرب في $\frac{1}{4}$ لإيجاد الحدود التالية.

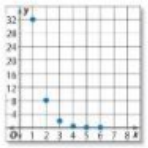
2 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{32}$
$\times\frac{1}{4}$ $\times\frac{1}{4}$ $\times\frac{1}{4}$

الحدود الثلاثة التالية هي $\frac{1}{2}$، و $\frac{1}{8}$، و $\frac{1}{32}$.

b. مثل بيانيًا الحدود الستة الأولى للمتالية.

المجال: {1, 2, 3, 4, 5, 6}

المدى: $\left\{32, 8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}\right\}$



تمرين موجه

5. أوجد الحدين التاليين في ... 7, 21, 63, ثم مثل الحدود السبعة الأولى بيانيًا. انظر الهامش.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

549

المتابعة

انتهى الطلاب من استكشاف المتاليات.

اطرح السؤال التالي:

- ما أنواع الأنماط التي يمكن تمثيلها بالنماذج رياضيًا؟ الإجابة النموذجية: الأنماط العددية التي تشتمل على عمليات بأعداد حقيقية مثل الجمع والضرب

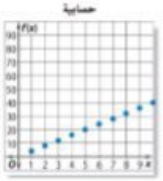
Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:16 PM 43%
elib.moe.gov.ae

مراجعة المفردات
الدالة الأسية دالة في صورة $f(x) = b^x$، حيث $b > 0$، $b \neq 1$.

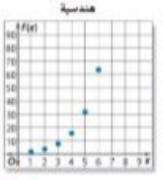
افحص التمثيل البياني في المثال 5. في حين أن التمثيل البياني للمتتالية الحسابية يكون خطيًا، فإن التمثيل البياني للمتتالية الهندسية يكون أسيًا ويمكن تمثيله بواسطة $f(x) = r^x$، حيث r هي النسبة المشتركة، $r > 0$، $r \neq 1$.

حسابية



x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

هندسية



x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	4	8	16	32	64

المتتاليات الحسابية والهندسية هي دوال يكون فيها المجال معرفًا بواسطة عدد الحدود n وتتضمن مجموعة أو مجموعة فرعية لأعداد صحيحة موجبة. ويمكن استخدام خواص المتتاليات الحسابية والهندسية لتصنيف المتتاليات.

مثال 5 تصنيف المتتاليات

حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية أم هندسية أم غير ذلك. اشرح استنتاجك.

a. 16, 24, 36, 54, ...

تحقق من وجود فرق مشترك.

$54 - 36 = 18$ $36 - 24 = 12$ ✗

تحقق من وجود نسبة مشتركة.

$\frac{54}{36} = \frac{3}{2}$ $\frac{36}{24} = \frac{3}{2}$ $\frac{24}{16} = \frac{3}{2}$ ✓

نظرًا لوجود نسبة مشتركة، فإن المتتالية هندسية.

b. 1, 4, 9, 16, ...

تحقق من وجود فرق مشترك.

$16 - 9 = 7$ $9 - 4 = 5$ ✗

تحقق من وجود نسبة مشتركة.

$\frac{16}{9} = 1.7\overline{7}$ $\frac{9}{4} = 2.25$ ✗

نظرًا لعدم وجود فرق مشترك أو نسبة مشتركة، فإن المتتالية ليست حسابية ولا هندسية.

c. 23, 17, 11, 5, ...

تحقق من وجود فرق مشترك.

$5 - 11 = -6$ $11 - 17 = -6$ $17 - 23 = -6$ ✓

نظرًا لوجود فرق مشترك، فإن المتتالية حسابية.

تمرين موجه

6A. $\frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \ldots$ **6B.** $2, -\frac{3}{2}, \frac{9}{8}, -\frac{27}{32}, \ldots$ **6C.** $-4, 4, 5, -5, \ldots$

6A. حسابية؛ الفرق المشترك هو $\frac{1}{3}$.

6B. هندسية؛ النسبة المشتركة هي $-\frac{3}{4}$.

6C. ليست أيًا منهما؛ فلا يوجد فرق مشترك ولا نسبة مشتركة.

مثال إضافي

6 حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية أم هندسية أم ليس أيًا منهما. اشرح استنتاجك.

a. 13, 25, 37, 49, ...

حسابية؛ الفرق المشترك هو 12.

b. 2, 5, 9, 14, ...

ليس أيًا منهما؛ فلا يوجد فرق مشترك ولا نسبة مشتركة.

c. 6, −12, 24, −48, ...

هندسية؛ النسبة المشتركة هي −2.

التركيز على محتوى الرياضيات

المتتاليات ليست كل قوائم الأعداد التي تتبع نمطًا معينًا تكون هندسية أو حسابية. علمًا بأن هذا سيعد الطلاب للدرس 9-5 في المتتاليات الخاصة التي تسمى المتتاليات التكرارية.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

الرسائل الفورية اطلب من الطلاب العمل في مجموعات. وأن يكتب كل طالب معادلة لإنشاء متسلسلة، ويرسل رسالة بالمتتالية فقط لطالب آخر. ويجب على كل طالب بعد ذلك إيجاد معادلة للمتتالية التي استلمها والإجابة عنها.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. ويحللون المعطيات، والقيود والعلاقات والأهداف. ويتأكد الطلاب المتفوقون رياضيًا من أجوبتهم عن المسائل باستخدام طريقة مختلفة. ويسألون أنفسهم باستمرار، "هل هذا جواب منطقي؟"

التوافق يلاحظ الطلاب المتفوقون في الرياضيات تكرار العمليات الحسابية إن وجدت ويبحثون عن الطرق العامة والمختصرة مًا. ويحافظ الطلاب المتفوقون في الرياضيات على مراقبة العملية أثناء العمل على حل المسألة مع الانتباه إلى التفاصيل.

التدريس المتمايز AL

المتعلمون بطريقة التواصل قسّم الطلاب في مجموعات صغيرة وناقشهم في أي التباسات قد تكون لديهم حول المفاهيم الأساسية للمتتاليات الحسابية والهندسية. اقترح عليهم مساعدة بعضهم البعض في تنظيم ملاحظاتهم بشأن هذه الموضوعات وإتمامها.

472 / 41
Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:16 PM 43%
elib.moe.gov.ae

التحقق من فهمك

مثال 1 حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية أم لا. اكتب نعم أو لا.

1. 8, −2, −12, −22, ... نعم
2. −19, −12, −5, 2, 9, ... نعم
3. 1, 2, 4, 8, 16, ... لا
4. 0.6, 0.9, 1.2, 1.8, ... لا

مثال 2 أوجد الحدود الأربعة التالية لكل متتالية حسابية. ثم مثل المتتالية بيانيا.

5. 6, 18, 30, ... انظر الهامش. 5–8
6. 15, 6, −3, ...
7. −19, −11, −3, ...
8. −26, −33, −40, ...

مثال 3 9. **المعرفة المالية** تدخر ياسمين من أموالها لشراء سيارة. ولديها AED 950. لكنها تخطط لادخار AED 320 كل أسبوع من عملها في مجالسة الأطفال.

a. كم ستدخر ياسمين بعد 8 أسابيع؟ AED 3,510

b. إذا كانت السيارة تكلف AED 7,350. فكم من الوقت ستستغرق لادخار مال كاف لهذا السعر؟ 20 أسبوع عمل

مثال 4 حدد ما إذا كانت المتتالية هندسية أم غير ذلك. اكتب نعم أو لا.

10. −8, −5, −1, 4, ... لا
11. 4, 12, 36, 108, ... نعم
12. 27, 9, 3, 1, ... نعم
13. 7, 14, 21, 28, ... لا

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية. ثم مثل المتتالية بيانيا.

14. 8, 12, 18, 27, ... انظر ملحق 14–17. إجابات الوحدة 9.
15. 8, 16, 32, 64, ...
16. 250, 50, 10, 2, ...
17. 9, −3, 1, $-\frac{1}{3}$, ...

مثال 6 حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك. اشرح استنتاجك. 18. ليس أيا منهما؛ فلا يوجد فرق مشترك ولا نسبة مشتركة.

18. 5, 1, 7, 3, 9, ...
19. 200, −100, 50, −25, ...
20. 12, 16, 20, 24, ...

19. هندسية؛ النسبة المشتركة هي $-\frac{1}{2}$. 20. حسابية؛ الفرق المشترك هو 4.

التدريب وحل المسائل

مثال 1 حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية أم لا. اكتب نعم أو لا.

21. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ لا
22. −9, −3, 0, 3, 9 لا
23. 14, −5, −19, ... لا
24. $\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{11}{9}, \ldots$ نعم

مثال 2 أوجد الحدود الأربعة التالية لكل متتالية حسابية. ثم مثل المتتالية بيانيا.

25. −4, −1, 2, 5, ... انظر ملحق 25–30. إجابات الوحدة 9.
26. 10, 2, −6, −14, ...
27. −5, −11, −17, −23, ...
28. −19, −2, 15, ...
29. $\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}, \ldots$
30. $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}$

مثال 3 31. **البسرح** هناك 28 مقعدا في الصف الأول بالمسرح. وكل صف تالي يتضمن مقعدين أكثر من الصف السابق. إذا كان هناك 24 صفا. فكم مقعدا في الصف الأخير بالمسرح؟ 74

32. **التبرير المنطقي** بدأ إبراهيم برنامجا تدريبيا لرفع مستوى اللياقة البدنية. ويخطط للتجديف لمدة 5 دقائق على آلة التجديف الخاصة به في اليوم الأول. ثم يزيد فترة التجديف بمقدار دقيقة وثلاثين ثانية كل يوم.

a. ما المدة التي سيقضيها في التجديف خلال اليوم الثامن عشر؟ 30 دقيقة و 30 ثانية

b. في أي يوم سيجدف لمدة ساعة أو أكثر لأول مرة؟ في اليوم الثامن والثلاثين

c. هل من المعقول أن يستمر هذا النمط إلى ما لا نهاية؟ اشرح. 32c. الإجابة النموذجية: هذا غير معقول لأنه لا يوجد سوى عدد ساعات محدود في اليوم يمكن تخصيصه للتجديف.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1–20 للتحقق من استيعاب الطلاب.

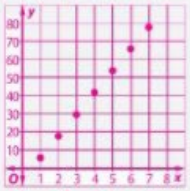
استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

ملاحظات لحل التمرين

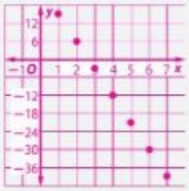
ورق الرسم البياني للتمارين 5–8 و 14–17 و 25–30 و 39–44 و 68–73. سيحتاج الطلاب إلى ورق رسم بياني.

إجابات إضافية

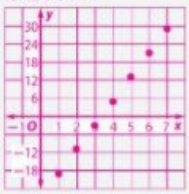
5. 42, 54, 66, 78



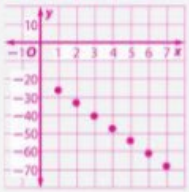
6. −12, −21, −30, −39



7. 5, 13, 21, 29



8. −47, −54, −61, −68



خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL متقدما	21–50, 54, 55, 57–80	21–49 فردي, 61–64	22–50 زوجي, 54, 55, 57–60, 65–80
OL أساسي	21–49 فردي, 51–53, 54, 55, 57–60, 61–80	21–50, 61–64	51–55, 57–60, 65–80
BL متقدم	(اختياري: 75–80), 51–74		

Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:16 PM 43%
elib.moe.gov.ae

مثال 4 حدد ما إذا كانت المتتالية هندسية أم غير ذلك. اكتب نعم أو لا.

33. 21, 14, 7, ... لا
34. 124, 186, 248, ... لا
35. $-27, 18, -12, \ldots$ نعم
36. 162, 108, 72, ... نعم
37. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1, -\frac{1}{2}, \ldots$ لا
38. $-4, -2, 0, 2, \ldots$ لا

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة التالية للمتتالية. ثم مثل المتتالية بيانيا. إجابات الوحدة 9. انظر ملحق 44–39

39. 0.125, −0.5, 2, ...
40. 18, 12, 8, ...
41. 64, 48, 36, ...
42. 81, 108, 144, ...
43. $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, \ldots$
44. 1, 0.1, 0.01, 0.001, ...

45. ليست أيا منهما؛ فلا يوجد فرق مشترك ولا نسبة مشتركة.

مثال 6 حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك. اشرح استنتاجك. 46. حسابية؛ الفرق المشترك هو 3−. 47. هندسية. النسبة المشتركة هي 3.

45. 3, 12, 27, 48, ...
46. 1, −2, −5, −8, ...
47. 12, 36, 108, 324, ...
48. $-\frac{2}{5}, -\frac{2}{25}, -\frac{2}{125}, -\frac{2}{625}, \ldots$
49. $\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \ldots$
50. 6, 9, 14, 21, ...

48. هندسية؛ النسبة المشتركة هي $\frac{1}{5}$.
49. حسابية؛ الفرق المشترك هو $\frac{1}{2}$.
50. ليست أيا منهما؛ فلا يوجد فرق مشترك ولا نسبة مشتركة.

51. **القراءة** قررت أسماء قراءة كتاب من 800 صفحة خلال العطلة. فإذا كانت قد وصلت بالفعل إلى الصفحة 112 وبقي من عطلتها 8 أيام، فما العدد الأدنى من الصفحات التي تحتاج إلى قراءتها كل يوم لتنهي من قراءة الكتاب بنهاية عطلتها؟ 86 صفحة في اليوم

52. **الاستهلاك** من المتوقع لسيارة أمنية أن تنخفض قيمتها بمعدل 15% كل عام. إذا كانت قيمة سيارتها في الوقت الراهن هي AED 88,200، فما ستكون قيمتها بعد 6 أعوام مع التقريب لأقرب درهم؟ AED 33,365

53. **الانتظام** عند طي ورقة على نفسها، يتضاعف سمكها. إذا كانت هناك ورقة سمكها 0.1 mm ويمكن طيها 37 مرة، فما السمك الذي ستصبح عليه حينها؟ حوالي 13,744 km

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

54. **التبرير** اشرح السبب في أن المتتالية 8, 10, 13, 17, 22 ليست حسابية.

54. الإجابة النموذجية: الحدود المتتالية ليس لديها نفس الفرق المشترك. فعلى سبيل المثال، $5 = 17 - 22$. بينما $4 = 13 - 17$.

55. **مسألة غير محددة الإجابة** صف موقفا من الحياة اليومية يمكن تمثيله باستخدام متتالية حسابية بها فرق مشترك قيمته 8.

55. الإجابة النموذجية: تتقاضى جليسة أطفال AED 60 لتنظيف المنزل بالإضافة إلى AED 25 لكل ساعة تمتني فيها بالأطفال.

56. **تحد** مجموع ثلاثة حدود متتالية لمتتالية حسابية يساوي 6. ونتاج ضرب الحدود يساوي 42−. أوجد هذه الحدود. $-3, 2, 7$

57. **تحليل الخطأ** يحدد بدر وسالم ما إذا كانت المتتالية ... 8, 8, 8, حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك. أم حسابية وهندسية. هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

بدر	سالم
الفرق المشترك للمتتالية يساوي 0، والمتتالية حسابية.	النسبة المشتركة في المتتالية تساوي 1، والمتتالية هندسية.

57. الإجابة النموذجية: ليست أيا منهما؛ المتتالية حسابية وهندسية على حد سواء.

58. **مسألة غير محددة الإجابة** أوجد متتالية هندسية ومتتالية حسابية ومتتالية ليست هندسية ولا حسابية تبدأ على النحو ... 3, 9, 3.

58. الإجابة النموذجية: هندسية: 3, 9, 27, 81, 243, ... حسابية: 3, 9, 15, 21, 27, ... ليست هندسية ولا حسابية: 3, 9, 21, 45, 93, ...

59. **التبرير** إذا كان لدى متتالية هندسية النسبة r حيث إن $|r| < 1$، فماذا سيحدث للحدود عند زيادة n؟ وماذا سيحدث للحدود إذا كان $|r| \geq 1$؟ انظر الهامش.

60. **الكتابة في الرياضيات** صف ما سيحدث لحدود المتتالية الهندسية عند مضاعفة النسبة المشتركة. وماذا سيحدث عند تضاعفها إلى النصف؟ اشرح استنتاجك. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

552 | الدرس 9-1 | المتتاليات كدوال

إجابة إضافية

59. الإجابة النموذجية: إذا كان لمتتالية هندسية نسبة r مثل $|r| < 1$، حيث إن n تزداد، وتتناقص القيمة المطلقة للحدود وتقترب من الصفر نظرًا لضربها في الكسر باستمرار. إذا كان $|r| \geq 1$، فإن القيمة المطلقة للحدود ستزداد وتقترب إلى قيمة اللانهاية نظرًا لضربها في قيمة أكبر من 1 باستمرار.

552 | الدرس 9-1 | المتتاليات كدوال

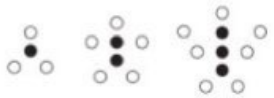
472 / 43
Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:16 PM 43%
elib.moe.gov.ae

تدريب على الاختبار المعياري

61. **الإجابة المختصرة** يبلغ قياس حجرة نوم توزيا التي على شكل مستطيل 4.5 أمتار في 3.5 أمتار. وتريد شراء سجادة لغرفة النوم بتكلفة AED 108 لكل متر مربع شامل الضريبة. ما المبلغ الذي ستنفقه على فرش غرفة نومها بالسجاد؟ **AED 1,701**

62. يمكن وصف نمط الدوائر المملوءة والدوائر البيضاء أدناه من خلال علاقة بين متغيرين.



أي علاقة تربط w، وهو عدد الدوائر البيضاء، بـ f، وهو عدد الدوائر الغامقة؟ **C**

A $w = 3f$
C $w = 2f + 1$
B $f = \frac{1}{2}w - 1$
D $f = \frac{1}{3}w$

63. **SAT/ACT** كانت تريد رانيا تحديد متوسط درجاتها في ستة اختبارات. وقد أدرجت الدرجات بشكل صحيح للحصول على 7. ولكنها قامت بالقسمة على 7 بدلا من 6. فكان المتوسط 12 درجة أقل من المتوسط الحقيقي. ما المعادلة التي يمكن استخدامها لتحديد قيمة T؟ **H**

F $6T + 12 = 7T$
J $\frac{T}{6} = \frac{T - 12}{7}$
G $\frac{T}{7} = \frac{T - 12}{6}$
K $\frac{T}{6} = 12 - \frac{T}{7}$
H $\frac{T}{7} + 12 = \frac{T}{6}$

64. أوجد الحد التالي في المتتالية الهندسية $8, 6, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \ldots$. **D**

A $\frac{11}{8}$
C $\frac{9}{4}$
B $\frac{27}{16}$
D $\frac{81}{32}$

مراجعة شاملة

أوجد حل كل من أنظمة المعادلات التالية.

65. $y = 5$ $(\pm 4, 5)$
$y^2 = x^2 + 9$

66. $y - x = 1$ $(-4, -3), (3, 4)$
$x^2 + y^2 = 25$

67. $3x = 8y^2$ **لا يوجد حل**
$8y^2 - 2x^2 = 16$

اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. وحدد ما إذا كان التمثيل البياني لها قطعا مكافئا، أم دائرة، أم قطعا ناقصا، أم قطعا زائدا. ثم مثل المعادلة بيانيا. 68–70. انظر الهامش.

68. $6x^2 + 6y^2 = 162$
69. $4y^2 - x^2 + 4 = 0$
70. $x^2 + y^2 + 6y + 13 = 40$

مثل كل دالة بيانيا. 71–73. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

71. $f(x) = \frac{6}{(x - 2)(x + 3)}$
72. $f(x) = \frac{-3}{(x - 2)^2}$
73. $f(x) = \frac{x^2 - 36}{x + 6}$

74. **الصحة** تثبت إزالة دواء معين من مجرى الدم بمعدل ثابت. وانخفض معدل الدواء وفق الدالة $y = ae^{-0.1625t}$ حيث f بالساعات. أوجد عبر النصف لهذه المادة. **حوالي 4.27 ساعات**

مراجعة المهارات

اكتب معادلة لكل مستقيم.

75. يمر بالنقطة $(6, 4)$، و $m = 0.5$ $y = 0.5x + 1$
76. يمر بـ $m = -\frac{3}{4}$، $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ $y = -\frac{3}{4}x + 2$
77. يمر بالنقطة $(0, -6)$، و $m = 3$ $y = 3x - 6$
78. يمر بالنقطة $(0, 4)$، و $m = \frac{1}{4}$ $y = \frac{1}{4}x + 4$
79. يمر بالنقطتين $(1, 3)$، و $\left(8, -\frac{1}{2}\right)$ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
80. يمر بالنقطتين $(-5, 1)$، و $(5, 16)$ $y = \frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التدريس المتمايز OL BL

التوسّع اسأل الطلاب هذا السؤال: "هل . . . 1, 2, 4, 8, 16, متتالية حسابية أم هندسية؟ وكيف عرفت ذلك؟" هندسية؛ لأن النسبة المشتركة هي 2. ثم اسأل: "إذا تم استبدال كل حد في المتتالية . . . 1, 2, 4, 8, 16, بمعكوسه الضربي. فهل ستظل المتتالية هندسية؟ وكيف عرفت ذلك؟" نعم؛ لأن النسبة المشتركة هي $\frac{1}{2}$. اطلب من الطلاب كتابة متتالية هندسية وتحديد ما إذا كان معكوسها الضربي المماثل أيضا متتالية هندسية.

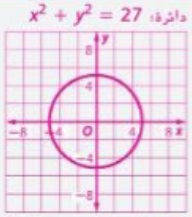
انتبه!
تحليل الخطأ في التمرين 57. اطلب من الطلاب إيجاد متتالية تكون هندسية وحسابية معًا. غير 8, 8, 8, . . . ناقش كيف تتطابق المتتالية مع 8, 8, 8, . . .

4 التقويم

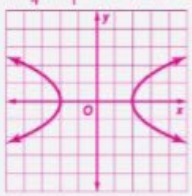
عيّن مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب أن يشرحوا كيفية إيجاد أي حد في أي متتالية حسابية أو هندسية بمعرفة الحدود القليلة الأولى.

إجابات إضافية

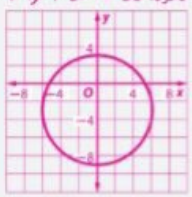
68. دائرة: $x^2 + y^2 = 27$



69. قطع زائد: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$



70. دائرة: $x^2 + (y + 3)^2 = 36$



Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:16 PM 43%
elib.moe.gov.ae

9-2 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

السابق: حددت ما إذا كانت المتتالية حسابية.

الحالي: 1 استخدام المتتاليات الحسابية. 2 إيجاد مجاميع المتسلسلات الحسابية

لماذا؟: في القرن الثامن عشر، طلب معلم من فصل يضم طلابًا من المرحلة الابتدائية إيجاد مجموع أعداد العد من 1 إلى 100. وتوصل الطالب كارل جاوس إلى الإجابة الصحيحة في ثوان معدودة مما أذهل المعلم وعندما كبر جاوس، أصبح رياضيًا عظيمًا.

فقد حل هذه المسألة باستخدام المتسلسلات الحسابية.

1 متتاليات حسابية في الدرس 1-9، استخدمت صيغة الميل والنقطة لإيجاد حد معين لمتتالية حسابية. ومن الممكن وضع معادلة لأي حد لمتتالية حسابية باستخدام نفس العملية.

فكر في المتتالية الحسابية $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ التي فيها الفرق المشترك هو d.

$(y - y_1) = m(x - x_1)$	صيغة الميل والنقطة
$(a_n - a_1) = d(n - 1)$	$(x, y) = (n, a_n)$، $(x_1, y_1) = (1, a_1)$، و $m = d$
$a_n = a_1 + d(n - 1)$	أضف a_1 إلى الطرفين.

يمكنك استخدام هذه المعادلة لإيجاد أي حد في متتالية حسابية عند معرفتك للحد الأول والفرق المشترك.

المفهوم الأساسي الحد النوني لمتتالية حسابية

يتم الحصول على الحد نوني a_n لمتتالية حسابية، والتي يكون الحد الأول فيها هو a_1 والفرق المشترك هو d، من خلال الصيغة التالية، حيث n هو أي عدد طبيعي.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

ستبرهن على هذه الصيغة في التدريب 80.

مثال 1 إيجاد الحد النوني

أوجد الحد الثاني عشر للمتتالية الحسابية ... 9, 16, 23, 30,.

الخطوة 1 أوجد الفرق المشترك.

$16 - 9 = 7$ $23 - 16 = 7$ $30 - 23 = 7$

إذا، $d = 7$.

الخطوة 2 أوجد الحد الثاني عشر.

$a_n = a_1 + (n - 1)d$	الحد النوني لمتتالية حسابية
$a_{12} = 9 + (12 - 1)(7)$	$a_1 = 9$، $d = 7$، و $n = 12$
$= 9 + 77$ أو 86	بسط.

تمرين موجه

أوجد الحد المشار إليه لكل متتالية حسابية.

1A. $a_1 = -4, d = 6, n = 9$ 44

1B. a_{20} بالنسبة لـ $a_1 = 15, d = -8$ −137

المفردات الجديدة

أوساط حسابية — arithmetic means
متسلسلة — series
متسلسلة حسابية — arithmetic series
مجموع جزئي — partial sum
الرمز سيجما — sigma notation

ممارسات في الرياضيات

البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 9-2 لقد حددت ما إذا كانت المتتالية حسابية أم لا.

الدرس 9-2 استخدام المتتاليات الحسابية. وإيجاد مجموع المتسلسلات الحسابية.

بعد الدرس 9-2 إثبات العبارات باستخدام الاستقراء الرياضي.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما نوع متتالية أعداد الإحصاء 100-1؟ حسابية
- ما قيمة الحد الأول؟ 1
- كيف يمكنك سريعًا تحديد مجموع أول 10 أعداد إحصاء؟

الإجابة النموذجية: $5 \times 11 = 55$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

11 11 11 11 11

472 / 45

Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:16 PM 43%
elib.moe.gov.ae

1 المتتاليات الحسابية

المثال 1 يبين كيفية إيجاد الحد *النوني* في متتالية حسابية بمعرفة الحد الأول والفرق المشترك. ويبين **المثال 2** كيفية كتابة معادلة للحد *النوني* في متتالية حسابية بمعرفة بعض الحدود في المتتالية. ويبين **المثال 3** كيفية إيجاد الوسائط الحسابية بين حدين غير متعاقبين في متتالية حسابية.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد الحد رقم عشرين في المتتالية الحسابية 3, 10, 17, 24, ... 136

2 اكتب معادلة للحد *النوني* في كل متتالية حسابية.

a. $-8, -6, -4, \ldots$
$a_n = 2n - 10$

b. $a_6 = 11, d = -11$
$a_n = -11n + 77$

3 أوجد الاوساط الحسابية في المتتالية 21, ___, ___, ___, 45, ... 27, 33, 39

التركيز على محتوى الرياضيات

صيغة لمتتالية حسابية

يمكن إيجاد أي حد لأي متتالية من قيمة الحد السابق إذا كان الفرق المشترك معروفًا. ولكن تتطلب صيغة الحد *النوني* معرفة الحد الأول في المتتالية.

إذا كان لديك بعض الحدود الخاصة بمتتالية حسابية ما، فيمكنك كتابة معادلة للحد النوني للمتتالية.

مثال 2 اكتب معادلات للحد النوني

اكتب معادلة للحد النوني لكل متتالية حسابية.

a. 5, −13, −31, ...

$d = -13 - 5$ أو -18، 5 هو الحد الأول.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ — الحد النوني لمتتالية حسابية
$a_n = 5 + (n-1)(-18)$ — $d = -18$ و $a_1 = 5$
$a_n = 5 + (-18n + 18)$ — خاصية التوزيع
$a_n = -18n + 23$ — بسط.

b. $a_5 = 19, d = 6$

أولاً، أوجد a_1.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ — الحد النوني لمتتالية حسابية
$19 = a_1 + (5-1)(6)$ — $d = 6$ و $n = 5$، و $a_5 = 19$.
$19 = a_1 + 24$ — اضرب.
$-5 = a_1$ — اطرح 24 من الطرفين.

ثم اكتب المعادلة.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ — الحد النوني لمتتالية حسابية
$a_n = -5 + (n-1)(6)$ — $d = 6$ و $a_1 = -5$
$a_n = -5 + (6n - 6)$ — خاصية التوزيع
$a_n = 6n - 11$ — بسط.

تمرين موجه

2A. 12, 3, −6, ... $a_n = -9n + 21$ 2B. $a_6 = 12, d = 8$ $a_n = 8n - 36$

تصحيحة دراسية
التحقق من الحلول تحقق من إجابتك مستخدمًا إياها لتحديد الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية.

يكون لديك في بعض الأحيان حدين لمتتالية، لكنهما غير متتاليين في المتتالية. يطلق على الحدود الواقعة بين أي حدين غير متتاليين **أوساط حسابية** ويمكن استخدامه لإيجاد الحدود المجهولة لمتتالية.

مثال 3 إيجاد الأوساط الحسابية

أوجد الأوساط الحسابية في المتتالية $-8, \frac{?}{1}, \frac{?}{2}, \frac{?}{3}, 22, \ldots$

الخطوة 1 بما أن هناك أربعة حدود بين الحدين الأول والأخير المعطيين، فإن إجمالي الحدود يساوي $2 + 4$ أو 6. إذا $n = 6$.

الخطوة 2 أوجد قيمة d.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ — الحد النوني لمتتالية حسابية
$22 = -8 + (6-1)d$ — $n = 6$، و $a_6 = 22$، و $a_1 = -8$
$30 = 5d$ — خاصية التوزيع
$6 = d$ — اقسم الطرفين على 5.

الخطوة 3 استخدم d لإيجاد الأوساط الحسابية الأربعة

$-8 \xrightarrow{+6} -2 \xrightarrow{+6} 4 \xrightarrow{+6} 10 \xrightarrow{+6} 16 \xrightarrow{+6} 22$

الأوساط الحسابية هي −2، و 4، و 10، و 16.

تمرين موجه

3. أوجد الأوساط الحسابية الخمسة بين −18 و 36. −9, 0, 9, 18, 27

قراءة في الرياضيات
الوسط الحسابي متوسط عددين أو أكثر.
الأوساط الحسابية الحدود الموجودة بين أي حدين غير متتاليين لمتتالية حسابية

Middle East Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة

Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:16 PM 43%
elib.moe.gov.ae

2 المتسلسلة الحسابية

يبين **المثال 4** كيفية استخدام الصيغة لإيجاد مجموع متسلسلة حسابية. ويبين **المثال 5** كيفية استخدام صيغة لإيجاد حدود في متسلسلة حسابية. ويبين **المثال 6** كيفية إيجاد مجموع متسلسلة مكتوبة بالرمز سيجما.

أمثلة إضافية

4 أوجد مجموع $8 + 12 + 16 + \ldots + 80$. **836**

5 أوجد الحدود الثلاثة الأولى في المتسلسلة الحسابية.
$S_n = 129$ و $a_1 = 14$ و $a_n = 29$
14, 17, 20

التدريس باستخدام التكنولوجيا

اللوحة البيضاء التفاعلية وضّح مثالاً على اللوحة للمساعدة في شرح الصيغة لإيجاد مجموع متسلسلة حسابية. اكتب متسلسلة للأعداد من 1 إلى 10 واسحب الأعداد لتشكل المجاميع $10 + 1$ و $9 + 2$ و $8 + 3$، وما إلى ذلك. وأوجد مجموع المتتالية. ثم وضّح كيفية تبسط الصيغة هذه العملية الحسابية.

2 المتسلسلة الحسابية

المتسلسلة تتكون **المتسلسلة** عند جمع حدود متتالية. و**المتسلسلة الحسابية** هي عبارة عن مجموع حدود المتتالية الحسابية. ويطلق على مجموع الحدود النونية **المجموع الجزئي** ويرمز إليه بالرمز S_n.

المفهوم الأساسي المجموع الجزئي لمتسلسلة حسابية

الصيغة	معطى	مجموع S_n للحدود النونية الأولى يساوي:
عامة	a_1 و a_n	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$
بديلة	d و a_1	$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

يلزم أحيانا تحديد a_1، أو a_n، أو n قبل إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية. وعند حدوث ذلك، استخدم صيغة الحد النوني.

مثال 4 استخدام صيغ المجموع

أوجد مجموع $180 + \ldots + 26 + 19 + 12$.

الخطوة 1 $a_1 = 12$، و $a_n = 180$، و $d = 19 - 12$ أو 7.

يتعين إيجاد n قبل أن تتمكن من استخدام إحدى الصيغ.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحد النوني لمتتالية حسابية
$180 = 12 + (n-1)(7)$	$a_n = 180$، و $a_1 = 12$، و $d = 7$
$168 = 7n - 7$	بسط.
$25 = n$	أوجد قيمة n.

الخطوة 2 استخدم أيا من الصيغتين لإيجاد S_n.

$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$	صيغة المجموع
$S_{25} = \frac{25}{2}[2(12) + (25-1)(7)]$	$d = 7$، و $a_1 = 12$، و $n = 25$
$S_{25} = 12.5(192)$ or 2400	بسط.

تمرين موجه

أوجد مجموع كل متسلسلة حسابية.

4A. $2 + 4 + 6 + \ldots + 100$ **2550**

4B. $n = 16$، $a_1 = 240$، $d = 8$. **2880**

يمكنك استخدام صيغة المجموع لإيجاد حدود المتسلسلات.

مثال 5 إيجاد الحدود الثلاثة الأولى

أوجد الحدود الثلاثة الأولى للمتسلسلة الحسابية التي فيها $a_1 = 7$، و $a_n = 79$، و $S_n = 430$.

الخطوة 1 أوجد n.

$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$	صيغة المجموع
$430 = n\left(\frac{7 + 79}{2}\right)$	$a_n = 79$، و $a_1 = 7$، و $S_n = 430$
$430 = n(43)$	بسط.
$10 = n$	اقسم الطرفين على 43.

انتبه!

الفرق المشترك احرص ألا يختلط عليك الأمر في علامة الفرق المشترك بالمتتالية الحسابية. تحقق أن القاعدة تنتج بالفعل حدود المتتالية.

التدريس المتمايز OL

المتعلمون بطريقة التواصل ناقش الفرق بين المتتالية والمتسلسلة واطلب من الطلاب اقتراح طرق لتذكرها.

556 | الدرس 2-9 | المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

472 / 47
Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:17 PM 43%
elib.moe.gov.ae

التركيز على محتوى الرياضيات

المتسلسلة المنتهية رغم أن معظم المتتاليات التي تمت دراستها خلال هذا الدرس هي متتاليات لا نهائية، فإن المتسلسلات في هذا الدرس خلاف ذلك. وتعد الصيغة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ لمجموع متسلسلة حسابية صالحة فقط لعدد نهائي محدد لحدود n.

مثال إضافي

6 تدريب على الاختبار المعياري

أوجد قيمة $\sum_{k=3}^{10}(2k+1)$. D

A 23
B 70
C 98
D 112

تدريس الممارسات في الرياضيات

المثابرة يراقب الطلاب المتفوقون في الرياضيات تقدمهم ويقيمونه ويغيرون مسارهم إذا لزم الأمر. شجّع الطلاب على فحص التعابير وسرد كافة القيم المهمة قبل بدء عملياتهم الحسابية.

الخطوة 1 أوجد قيمة d.

الحد الثاني لمتتالية حسابية $a_n = a_1 + (n-1)d$
$n = 10$ و $a_1 = 7$، و $a_n = 79$ $79 = 7 + (10-1)d$
اطرح 7 من الطرفين. $72 = 9d$
اقسم الطرفين على 9. $8 = d$

الخطوة 2 استخدم d لتحديد a_2 و a_3.

$a_2 = 7 + 8$ أو 15 $a_3 = 15 + 8$ أو 23

الحدود الثلاثة الأولى هي 7 و 15 و 23.

تمرين موجه

5B. أوجد الحدود الثلاثة الأولى لكل متسلسلة حسابية. $-8, -16, -24$

5A. $S_n = 120$, $n = 8$, $a_n = 36$ $-6, 0, 6$ 5B. $a_1 = -24$, $a_n = 288$, $S_n = 5280$

يمكن كتابة مجموع المتسلسلة باختصار عن طريق استخدام **الرمز سيجما**.

المفهوم الأساسي الرمز سيجما

الرموز $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ ← صيغة حدود المتسلسلة
آخر قيمة لـ k ← n
أول قيمة لـ k ← 1

مثال
$$\sum_{k=1}^{12}(4k+2) = (4(1)+2) + (4(2)+2) + (4(3)+2) + \cdots + (4(12)+2)$$
$$= 6 + 10 + 14 + \cdots + 50$$

قراءة في الرياضيات
الرمز **سيجما** يأتي الاسم من الحرف اليوناني سيجما، والذي يستخدم في الرمز.

مثال 6 على الاختبار المعياري استخدام الرمز سيجما

أوجد قيمة $\sum_{k=4}^{18}(6k-1)$.

A 846 B 910 C 975 D 1008

قراءة فقرة الاختبار

يتوجب عليك إيجاد مجموع المتسلسلات. أوجد قيمة a_1، و a_n، و n.

حل فقرة الاختبار

هناك $18 - 4 + 1$ أو 15 حدا، إذا $n = 15$.

$a_1 = 6(4) - 1$ أو 23 $a_n = 6(18) - 1$ أو 107

أوجد المجموع.

$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ صيغة المجموع

$S_{15} = 15\left(\frac{23 + 107}{2}\right)$ $n = 15$، و $a_1 = 23$، و $a_n = 107$

$S_{15} = 15(65) = 975$ الإجابة الصحيحة هي C.

تصيحة عند حل الاختبار المثابرة
أحيانا يلزم تقسيم مسألة ما إلى أجزاء. وحل كل جزء منفردا، ثم دمج حلول الأجزاء.

تمرين موجه

6. أوجد قيمة $\sum_{m=9}^{21}(5m+6)$. G

F 972 G 1053 H 1281 J 1701

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

472 / 48

Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:17 PM 43%
elib.moe.gov.ae

التحقق من فهمك

مثال 1 أوجد الحد المشار إليه لكل متتالية حسابية.

1. $a_1 = 14,\ d = 9,\ n = 11$ 104
2. a_{38} بالنسبة لـ 12, 25, 38, ... 233

مثال 2 اكتب معادلة للحد النوني لكل متتالية حسابية.

3. 13, 19, 25, ... $a_n = 6n + 7$
4. $a_5 = -12,\ d = -4$ $a_n = -4n + 8$

مثال 3 أوجد الأوساط الحسابية في كل متتالية.

5. 6, ?, ?, ?, 42 15, 24, 33
6. −4, ?, ?, ?, 8 −1, 2, 5

مثال 4 أوجد مجموع كل متسلسلة حسابية.

7. الأعداد الطبيعية الخمسين الأولى 1275
8. $4 + 8 + 12 + \cdots + 200$ 5100
9. $a_1 = 12,\ a_n = 188,\ d = 4$ 4500
10. $a_n = 145,\ d = 5,\ n = 21$ 1995

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة الأولى لكل متسلسلة حسابية.

11. $a_1 = 8,\ a_n = 100,\ S_n = 1296$ 8, 12, 16
12. $n = 18,\ a_n = 112,\ S_n = 1098$ 10, 16, 22

مثال 6 13. اختيار من متعدد أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{12}(3k + 9)$ C

A 45
B 78
C 342
D 410

التدريب وحل المسائل

مثال 1 أوجد الحد المشار إليه في كل متتالية حسابية.

14. $a_1 = -18,\ d = 12,\ n = 16$ 162
15. $a_1 = -12,\ n = 66,\ d = 4$ 248
16. $a_1 = 9,\ n = 24,\ d = -6$ −129
17. a_{15} بالنسبة لـ −5, −12, −19, ... −103
18. a_{10} بالنسبة لـ −1, 1, 3, ... 17
19. a_{24} بالنسبة لـ 8.25, 8.5, 8.75, ... 14

مثال 2 اكتب معادلة للحد النوني لكل متتالية حسابية.

20. 24, 35, 46, ...
21. 31, 17, 3, ...
22. $a_3 = 45,\ d = -3$
23. $a_7 = 21,\ d = 5$
24. $a_4 = 12,\ d = 0.25$
25. $a_5 = 1.5,\ d = 4.5$
26. 9, 2, −5, ...
27. $a_6 = 22,\ d = 9$
28. $a_8 = -8,\ d = -2$
29. $a_{13} = 7,\ d = \frac{2}{3}$
30. −12, −17, −22, ...
31. $a_3 = -\frac{4}{5},\ d = \frac{1}{2}$

20. $a_n = 11n + 13$
21. $a_n = -14n + 45$
22. $a_n = -3n + 72$
23. $a_n = 5n - 14$
24. $a_n = 0.25n + 11$
25. $a_n = 4.5n - 21$
26. $a_n = -7n + 16$
27. $a_n = 9n - 32$
28. $a_n = -2n + 8$
29. $a_n = \frac{2}{3}n - 3$
30. $a_n = -5n - 7$
31. $a_n = \frac{1}{2}n - \frac{23}{10}$

32. **البنية** يبلغ متوسط إجمالي ما يحرزه جمال لكل مباراة في بطولة البولينج بهذا الموسم 123 قارورة. ولكنه يتلقى دروسا في البولينج حتى يزيد متوسط ما يحرزه في كل موسم بمقدار 8 قارورات. **b. الموسم التاسع**

a. اكتب معادلة لتمثيل الحد النوني للمتتالية. $a_n = 115 + 8n$

b. إذا استمر النمط هكذا، فخلال أي موسم سيحرز جمال متوسط 187 قارورة في المباراة؟

c. هل من المعقول أن يستمر هذا النمط إلى ما لا نهاية؟ اشرح. **انظر الهامش.**

مثال 3 أوجد الأوساط الحسابية في كل متتالية.

33. 24, ?, ?, ?, ?, −1 19, 14, 9, 4
34. −6, ?, ?, ?, ?, 49 5, 16, 27, 38
35. −28, ?, ?, ?, ?, 7 −21, −14, −7, 0
36. 84, ?, ?, ?, ?, 39 75, 66, 57, 48
37. −12, ?, ?, ?, ?, ?, −66 −21, −30, −39, −48, −57
38. 182, ?, ?, ?, ?, ?, 104 169, 156, 143, 130, 117

انتبه!

تجنب الأخطاء ساعد الطلاب على التجاوب مع الرمز سيجما بجعلهم يقرؤون عدة تعابير مكتوبة في هذا الترميز بصوت عالٍ. اشرح أن ترميز سيجما هو الحرف الكبير S في الأبجدية اليونانية. اطلب منهم طرح أمثلة أخرى من ترميز رياضي يستخدم الحروف اليونانية.

الإجابة النموذجية: π

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-13 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

البنية يدقق الطلاب المتفوقون في الرياضيات للتفريق بين النمط أو البنية. ويمكنهم رؤية الأشياء المعقدة، مثل بعض التعابير الجبرية، كأشياء مفردة أو تتألف من عدة أشياء.

إجابة إضافية

32c. الإجابة النموذجية: لا، هناك قيمة عظمى قدره 300 نقطة في لعبة البولينج، لذلك سيكون من المستحيل للمتوسط مواصلة الصعود إلى ما لا نهاية.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	14–60, 74, 75, 78–82, 83–100	83–86 فردي 15–59	14–60 زوجي 74, 75, 78–82, 87–100
OL أساسي	61–71, 15–59 فردي 73–75, 78–100	14–60, 83–86	61-73, 74, 75, 78–82, 87–100
BL متقدم	61–96, (اختياري: 97–100)		

472 / 49

Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:17 PM 43%
elib.moe.gov.ae

مثال 4 أوجد مجموع كل متسلسلة حسابية.

39. أول 100 عدد طبيعي زوجي 39. 10,100
40. أول 200 عدد طبيعي فردي 40. 40,000
41. أول 100 عدد طبيعي فردي 41. 10,000
42. أول 300 عدد طبيعي زوجي 42. 90,300
43. $-18 + (-15) + (-12) + \ldots + 66$ 43. 696
44. $-24 + (-18) + (-12) + \ldots + 72$ 44. 408
45. $a_1 = -16,\ d = 6,\ n = 24$ 45. 1272
46. $n = 19,\ a_n = 154,\ d = 8$ 46. 1558

47. **المسابقات** تبدأ الجوائز التي يتم منحها في مسابقة أسبوعية على الراديو بمبلغ قيمته AED 150 ويزداد بمقدار AED 50 لكل أسبوع يبقى فيه المتنافس. إذا استمرت المسابقة لمدة 11 أسبوعا، فما إجمالي المبلغ الذي سيحصل عليه الرابح في النهاية؟ AED 4400

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة الأولى لكل متسلسلة حسابية.

52. −72, −57, −42
48. $n = 32,\ a_n = -86,\ S_n = 224$ 48. 100, 94, 88
49. $a_1 = 48,\ a_n = 180,\ S_n = 1368$ 49. 48, 60, 72
50. $a_1 = 3,\ a_n = 66,\ S_n = 759$ 50. 3, 6, 9
51. $n = 28,\ a_n = 228,\ S_n = 2982$ 51. −15, −6, 3
52. $a_1 = -72,\ a_n = 453,\ S_n = 6858$ 52. −72, −57, −42
53. $n = 30,\ a_n = 362,\ S_n = 4770$ 53. −16, −30, −44
54. $a_1 = 19,\ n = 44,\ S_n = 9350$ 54. 19, 28, 37
55. $a_1 = -33,\ n = 36,\ S_n = 6372$ 55. −9, −21, −33

56. **الجوائز** تمنح محطة راديو جائزة يصل الإجمالي فيها إلى AED 8500 تظير عشر ساعات. وتزيد الجائزة كل ساعة بمقدار AED 100. أوجد قيمتي الجائزة الأولى والجائزة الأخيرة. AED 400 و AED 1300

مثال 6 أوجد مجموع كل متسلسلة حسابية.

57. $\sum_{k=1}^{28} (4k - 2)$ 57. 512
58. $\sum_{k=4}^{13} (4k + 1)$ 58. 350
59. $\sum_{k=5}^{28} (2k + 6)$ 59. 324
60. $\sum_{k=0}^{12} (-3k + 2)$ 60. −208

B 61. **المعرفة المالية** افترضت نجلاء بعض المال من والديها ووافقت على سداد AED 50 بنهاية الشهر الأول وإضافة AED 25 في كل شهر آخر لمدة 12 شهرا. ما إجمالي المبلغ الذي ستكون قد سددته بعد مرور 12 شهرا؟ AED 2250

62. **الجاذبية** إذا وقع جسم في سقوط حر مع إهمال مقاومة الهواء، فإنه يسقط بمعدل 16 مترا في الثانية الأولى. ويزيد بمقدار 48 مترا في الثانية التالية. و 80 مترا في الثانية الثالثة. ما إجمالي الأمتار التي سيقطعها هذا الجسم في سقوطه بعد مرور 10 ثوان؟ 1600 m

استخدم المعلومات المعطاة لكتابة معادلة تمثل الحد النوني في كل متتالية حسابية

63. الحد رقم 100 في المتتالية هو 245. والفرق المشترك يساوي 13. $a_n = 13n - 1055$
64. الحد الحادي عشر في المتتالية هو 78. والفرق المشترك يساوي −9. $a_n = -9n + 177$
65. الحد السادس في المتتالية هو −34. الحد رقم 23 في المتتالية هو 119. $a_n = 9n - 88$
66. الحد رقم 25 في المتتالية هو 121. الحد رقم 80 في المتتالية هو 506. $a_n = 7n - 54$

67. **تمثيل النماذج** غالبا ما يتم وضع الطاولات المستطيلة في قاعة الاستقبال بلصق طرف كل طاولة بالأخرى. يوضح الرسمان التخطيطيان التاليان عدد الأشخاص الذين يمكنهم الجلوس في كل ترتيب للطاولات.

a. قم بإعداد رسومات لإيجاد الأعداد الثلاثة التالية عند إضافة الطاولات بمعدل واحدة في المرة إلى الطاولات المرتبة. انظر الهامش.

b. اكتب معادلة لتمثيل العدد النوني في هذا النمط. $p_n = 4n + 2$

c. هل من الممكن الحصول على مقاعد تكفي بالضبط 100 شخص في هذه الطاولات المرتبة؟ اشرح. لا؛ لا يوجد عدد نوني كلي يستوفي المعادلة $4n + 2 = 100$.

حقوق الطبع والتأليف © تعود لشركة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز OL BL

التوسّع اكتب متسلسلة حسابية، مثل 21 + 17 + 13 + 9 + 5 على اللوحة واطلب من الطلاب كتابة مجموع الحدود n باستخدام الرمز سيجما n بدءا من 1. $\sum_{n=1}^{5} (4n + 1)$

تدريس الممارسات في الرياضيات

التمثيل يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات تطبيق الحساب الذي يعرفونه لحل المسائل الناشئة في الحياة اليومية. وتحليل العلاقات رياضيًا لاستخلاص الاستنتاجات. وتفسير نتائجهم الرياضية في سياق الحالة.

ملاحظات لحل التمرين

ورق الرسم البياني في التمارين 71 و 90–92 و 94–96. سيحتاج الطلاب إلى ورق رسم بياني.

إجابة إضافية

67a. 14, 18, 22

472 / 50
Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:17 PM 43%
elib.moe.gov.ae

تدريس الممارسات في الرياضيات

التفكير النقدي يمكن للطلاب المتفوقين في الرياضيات أيضًا المقارنة بين كفاءة فرضيتين مقبولتين وتمييز المنطق أو الاستنتاج الصحيح من الخاطئ. وفي حالة وجود خطأ في فرضية ما، فهم يستطيعون توضيح ماهيته.

68. **الأداء** هناك شركة ما تدفع لموظفيها وفقًا لمعدلات أدائهم. تقاضت بدرية سعرًا موحدًا يبلغ AED 800 لكل أسبوع بالإضافة إلى AED 96 تظير كل وحدة تنجزها. إذا تقاضت AED 2,048 في أسبوع واحد، فما عدد الوحدات التي أنجزتها؟ 13

69. **الراتب** يتقاضى طارق في الوقت الراهن AED 112,000 في العام. إذا كان طارق يتوقع زيادة راتبه كل عام بقيمة AED 16,000، فبعد كم عام سيصبح راتبه AED 400,000 في العام؟ **العام التاسع عشر**

70. **الألعاب الرياضية** أثناء التدريب لحوض سباق الصاحية، تخطط سندية للجري 3 كيلومترات يوميًا في الأسبوع الأول. ثم زيادة المسافة بمقدار نصف كيلومتر في كل من الأسابيع التالية.

a. اكتب معادلة لتمثيل الحد النوني للمتتالية. $a_n = 2.5 + 0.5n$

b. إذا استمر النمط هكذا، فخلال أي أسبوع ستجري 10 كيلومترات في اليوم؟ **أسبوع العمل الخامس عشر**

c. هل من المعقول أن يستمر هذا النمط إلى ما لا نهاية؟ اشرح

70c. **الإجابة النموذجية: لا، ففي النهاية سيصبح عدد الكيلومترات المقطوعة في اليوم غير واقعي.**

71. **التمثيلات المتعددة** تأمل $\sum_{k=1}^{5}(2k+2)$ a–c. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

a. **جدوليًا** اصنع جدولًا للمجاميع الجزئية للمتسلسلة بالنسبة لـ $1 \le k \le 10$.

b. **بيانيًا** مثل بيانيًا k، المجموع الجزئي.

c. **بيانيًا** مثل بيانيًا $f(x) = x^2 + 3x$ على نفس الشبكة.

d. **لفظيًا** ماذا تلاحظ بشأن التمثيلين البيانيين؟

e. **تحليليًا** ما الاستنتاجات التي يمكنك التوصل إليها بشأن العلاقة بين الدوال التربيعية ومجموع المتسلسلة الحسابية؟

f. **جبريًا** أوجد المتسلسلة الحسابية التي ترتبط بـ $g(x) = x^2 + 8x$. $\sum_{k=1}^{x} 2k + 7$

71d. **الإجابة النموذجية: تغطي التمثيلات البيانية نفس المدى. ويكون مجال المتسلسلة هو الأعداد الطبيعية، بينما مجال الدالة التربيعية هو كل الأعداد الحقيقية. $0 \le x \le 10$.**

71e. **الإجابة النموذجية: لكل مجموع جزئي لمتسلسلة حسابية، تكون هناك دالة تربيعية مقابلة تتشارك نفس المدى.**

أوجد قيمة x.

72. $\sum_{k=3}^{5}(6k-5) = 928$ **18**

73. $\sum_{k=3}^{5}(8k+2) = 1032$ **16**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

74. **النقد** يحدد عيسى وجاسم صيغة الحد النوني للمتتالية ... 11، −2، 7، 16، ... هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

عيسى	جاسم
$A = 16 - 7$ or 9, $a_1 = -11$	$d = 16 - 7$ or 9, $a_1 = -11$
$a_n = -11 + (n-1)9$	$a_n = 9n - 11$
$= 9n - 20$	

74. **الإجابة النموذجية: عيسى؛ نسي عصام خطوة الضرب في d في $n - 1$.**

75. **التبرير** إذا كان a هو الحد الثالث في متتالية حسابية، و b هو الحد الخامس، و c هو الحد الحادي عشر، فعبر عن c بدلالة a و b. $4b - 3a$

76. **تحد** توجد ثلاثة أوساط حسابية بين a و b في متتالية حسابية. ومتوسط الأوساط الحسابية يساوي 16. ما متوسط a و b؟ 16

77. **تحد** أوجد S_n حيث إن $S_n = nx + y\left(\frac{n^2+n}{2}\right)$ ... $+ (x+3y) + (x+2y) + (x+y)$.

78. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب متسلسلة حسابية بها 8 حدود ومجموع يبلغ 324. **78. الإجابة النموذجية: $9 + 18 + 27 + \cdots + 72$**

79. **الكتابة في الرياضيات** قارن وقارن بين المتتاليات والمتسلسلات الحسابية. **انظر الهامش.**

80. **البرهان** برهن الصيغة المتعلقة بالحد النوني لمتتالية حسابية. **80–81. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

81. **البرهان** اشتق صيغة مجموع لا تشمل a_1.

82. **البرهان** اشتق صيغة المجموع البديلة باستخدام صيغة المجموع العامة. **انظر الهامش.**

560 | الدرس 2-9 | المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

472 / 51

Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:17 PM 42%
elib.moe.gov.ae

تنبيه!

تحليل الخطأ في التمرين 74. أخبر الطلاب أنه لتفادي الخطأ مثل الذي وقع فيه حسن، من المفيد كتابة الصيغة ثم توضيح، في السطر التالي، التعويض عن القيم المعروفة.

تجنب الأخطاء تأكد أنه يمكن لجميع الطلاب إثبات فهمهم لترميز سيجما وذلك بأن تطلب منهم كتابة حدود المتسلسلة الواردة في ترميز سيجما.

4 التقويم

حصاد الأمس اطلب من الطلاب وصف كيف ساعدهم عملهم في المتسلسلات في الدرس السابق في هذا الدرس.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للمفاهيم في الدروس 1-9 و 2-9.

إجابات إضافية

79. الإجابة النموذجية: المتسلسلة الحسابية هي فئة من الحدود بحيث يكون لأي زوج من الحدود المتعاقبة فرق مشترك. المتسلسلة الحسابية هي عبارة عن مجموع حدود المتتالية الحسابية.

تدريب على الاختبار المعياري

SAT/ACT 83. تكون قياسات الزوايا الحادة بأحد المثلثات متتالية حسابية. إذا كان قياس الزاوية الأصغر هو 36°، فما قياس الزاوية الأكبر؟ **C**

A 54°
B 75°
C 84°
D 90°
E 97°

84. تبلغ مساحة مثلث ما $\frac{1}{2}q^2 - 8$ ويبلغ الارتفاع $q + 4$. أي تعبير يصف قاعدة المثلث على نحو أدق؟ **J**

F $(q + 1)$
G $(q + 2)$
H $(q - 3)$
J $(q - 4)$

85. التعبير $1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ يساوي **A**

A $\sum_{k=1}^{3} k^{\frac{1}{2}}$
B $\sum_{k=1}^{3} k^{k}$
C $\sum_{k=1}^{3} k^{-k}$
D $\sum_{k=1}^{3} \sqrt{k}$

86. الإجابة المختصرة يستطيع أحمد كتابة مقال يتألف من 200 كلمة خلال 6 ساعات. ويمكن لحسام كتابة نفس المقال خلال $4\frac{1}{2}$ ساعات. إذا عملا معا، ما إجمالي عدد الساعات التي سيمضيانها في كتابة المقال؟ $2\frac{4}{7}$

مراجعة شاملة

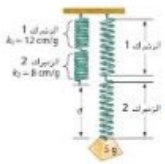
حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية أم لا. اكتب نعم أو لا. (الدرس 1-9)

87. $-6, 4, 14, 24, \ldots$ نعم
88. $2, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \ldots$ نعم
89. $10, 8, 5, 1, \ldots$ لا

أوجد حل كل نظام من أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني. 90–92. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

90. $x + 2y > 1$, $x^2 + y^2 \leq 25$
91. $x + y \leq 2$, $4x^2 - y^2 \geq 4$
92. $x^2 + y^2 \geq 4$, $4y^2 + 9x^2 \leq 36$

93. الفيزياء ترتبط المسافة التي يتمددها الزنبرك بالكتلة المعلقة به. ورمز إلى ذلك بالمعادلة $d = km$، حيث d هو المسافة، و m هو الكتلة، و k هو ثابت الزنبرك. عند ربط زنبركين الثابتين الخاصين بهما هما k_1 و k_2 بسلسلة، فإنه يمكن إيجاد ثابت الزنبرك k باستخدام المعادلة $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$.



a. إذا كان هناك زنبرك بثابت يبلغ 12 سنتيمترا لكل جرام معلق في سلسلة مع زنبرك آخر بثابت يبلغ 8 سنتيمترات لكل جرام. فأوجد ثابت الزنبرك الناتج. 4.8 cm/g

b. إذا كان هناك جسم يزن 5 جرامات معلق بسلسلة الزنبركين. فأي مدى يستمده الزنبركان؟ وهل هذه الإجابة معقولة في هذا السياق؟ **انظر الهامش.**

مثل كل دالة بيانيا. واذكر المجال والمدى. 94–96. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

94. $f(x) = \frac{2}{3}(2^x)$
95. $f(x) = 4^x + 3$
96. $f(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$

مراجعة المهارات

أوجد حل كل معادلة. قرب لأقرب جزء من عشرة آلاف.

97. $5^x = 52$ 2.4550
98. $4^{3p} = 10$ 0.5537
99. $3^{n+2} = 14.5$ 0.4341
100. $16^{d-4} = 3^{3-d}$ 3.7162

حقوق الطبع والتأليف © تعود لمؤلفين محددين أو لشركة McGraw-Hill Education

561

82. صيغة المجموع العامة $S_n = (a_1 + a_n) \cdot \left(\frac{n}{2}\right)$
صيغة الحد النوني $a_n = a_1 + (n - 1)d$
التعويض $S_n = [a_1 + a_1 + (n - 1)d] \cdot \left(\frac{n}{2}\right)$
بتبسط $S_n = [2a_1 + (n - 1)d] \cdot \left(\frac{n}{2}\right)$.

93b. 24 cm؛ الإجابة منطقية. يمدد الجسم الزنبرك الأول بمقدار 60 cm ويمدد الزنبرك الثاني بمقدار 40 cm. وسيمدد الجسم الزنبركين مقا بمقدار أقل من تمديده لكل زنبرك على حدة.

561

472 / 52
Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:17 PM 42%
elib.moe.gov.ae

9-3 المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

السابق	الحالي	لماذا؟
• حددت ما إذا كانت المتتالية هندسية أم لا.	1 استخدام المتتاليات الهندسية. 2 إيجاد مجاميع المتسلسلات الهندسية.	• رأى حسن كتابا جديدا في المكتبة. وأرسل رسالة إلكترونية برابط للموقع الإلكتروني لمؤلف الكتاب إلى خمسة من أصدقائه. ثم أمر أصدقاؤه توجيه الرابط بنفس النمط. كم عدد الأشخاص الذين سيتلقون الرابط في الجولة الثامنة من الرسائل الإلكترونية؟

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-9 لقد حددت إذا ما كانت المتتالية هندسية أم لا.

الدرس 3-9 استخدام المتتاليات الهندسية، وإيجاد مجموع المتسلسلات الهندسية.

بعد الدرس 3-9 إيجاد مجموع المتسلسلات اللا نهائية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما الحدود الثلاثة الأول للنمط؟ 5, 25, 125
- لماذا لا تعد هذه المتتالية متتالية حسابية؟ لأنه لا يوجد فرق مشترك بين الحدود.
- ما النسبة المشتركة في المتتالية؟ $r = 5$
- قارن بين الفرق المشترك والنسبة المشتركة. الأول يتضمن الجمع؛ والثاني يتضمن الضرب.

1 المتتاليات الهندسية كما هو الحال في المتتاليات الحسابية. هناك صيغة للحد النوني للمتتالية الهندسية. ويمكن استخدام هذه الصيغة لتحديد أي حد من المتتالية.

المفهوم الأساسي الحد النوني لمتتالية هندسية

يتم الحصول على الحد النوني a_n لمتتالية هندسية يكون الحد الأول فيها هو a_1 والنسبة المشتركة هي r. من خلال الصيغة التالية. حيث n هو أي عدد طبيعي.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

ستبرهن على هذه الصيغة في التدريب 68.

مثال 1 من الحياة اليومية إيجاد الحد النوني

الموسيقى إذا استمر النمط، فكم عدد رسائل البريد الإلكتروني التي سترسل في الجولة الثامنة؟

الاستيعاب نحتاج إلى تحديد عدد رسائل البريد الإلكتروني المعاد إرسالها في الجولة الثامنة. وتم إرسال خمسة رسائل بريد إلكتروني في الجولة الأولى. وكل مستلم من المستلمين الخمسة أرسل خمس رسائل في الجولة الثانية. وهكذا.

التخطيط هذه متتالية هندسية. والنسبة المشتركة هي 5. استخدم الصيغة للحد النوني للمتتالية الهندسية.

أوجد حل الحد النوني للمتتالية الهندسية

$a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_8 = 5(5)^{8-1}$ $n = 8$ و $r = 5$، و $a_1 = 5$

$a_8 = 5(78{,}125)$ 390,625 $78{,}125 = 5^7$

التحقق اكتب أول ثمانية حدود من خلال الضرب في النسبة المشتركة.

5, 25, 125, 625, 3125, 15,625, 78,125, 390,625

سيكون هناك 390,625 رسالة بريد إلكتروني يتم إرسالها في الجولة الثامنة.

تمرين موجه

1. **الرسائل الإلكترونية** استلمت سمية دعابة في رسالة بريد إلكتروني تطلب منها أن تعيد إرسالها إلى أربعة من أصدقائها؛ وبالعمل أعادت إرسالها. ثم أرسلتها كل صديقة من صديقاتها إلى أربعة آخرين من الأصدقاء. وهكذا. وإذا استمر هذا النمط. فكم عدد الأشخاص الذين سيستلمون هذه الرسالة الإلكترونية في الجولة التاسعة من إعادة الإرسال؟ 262,144

المفردات الجديدة

أوساط هندسية
geometric means
متسلسلة هندسية
geometric series

ممارسات في الرياضيات

البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

McGraw-Hill Education جميع الحقوق محفوظة © لصالح مؤسسة

472 / 53

Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:17 PM 42%
elib.moe.gov.ae

1 المتتاليات الهندسية

المثال 1 يبين كيفية إيجاد حد في متتالية هندسية بمعرفة الحد الأول والنسبة المشتركة. ويوضح **المثال 2** كيفية كتابة معادلة الحد *النوني* في متتالية هندسية. ويبين **المثال 3** كيفية إيجاد الأوساط الهندسية بين عددين معطيين.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد الحد السادس لمتتالية هندسية. فيها $a_1 = -3$ و $r = -2$.
$a_6 = 96$

2 اكتب معادلة الحد *النوني* لكل متتالية هندسية.

a. 5, 10, 20, 40, . . .
$a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

b. $a_5 = 4$ و $r = 3$
$a_n = \frac{4}{81}(3^{n-1})$

3 أوجد الأوساط الهندسية الثلاثة بين 3.12 و 49.92.
6.24 ،12.48 ،24.96 أو −6.24 ،−12.48 ،−24.96

انتبه!
تجنب الأخطاء شجّع الطلاب على البدء في مسألة المتتالية الهندسية بكتابة القيم المعروفة لكل متغير من المتغيرات n و a و r.

إذا أعطيت بعض الحدود الخاصة بمتتالية هندسية ما، فيمكنك تحديد معادلة لإيجاد الحد النوني للمتتالية.

مثال 2 اكتب معادلة للحد النوني

اكتب معادلة للحد النوني لكل متتالية هندسية.

a. 0.5, 2, 8, 32, ...

$r = 8 \div 2$ أو $4 \div 0.5$ هو الحد الأول.

الحد النوني لمتتالية هندسية: $a_n = a_1 r^{n-1}$
$a_n = 0.5(4)^{n-1}$ $r = 4$ و $a_1 = 0.5$

b. $a_4 = 5$ و $r = 6$

الخطوة 1 أوجد a_1.

الحد النوني لمتتالية هندسية: $a_n = a_1 r^{n-1}$
$5 = a_1(6^{4-1})$ $n = 4$ و $r = 6$ و $a_n = 5$
$5 = a_1(216)$ أوجد قيمة الأس.
$\frac{5}{216} = a_1$ اقسم الطرفين على 216.

الخطوة 2 اكتب المعادلة.

الحد النوني لمتتالية هندسية: $a_n = a_1 r^{n-1}$
$a_n = \frac{5}{216}(6)^{n-1}$ $r = 6$ و $a_1 = \frac{5}{216}$

تمرين موجه 2A. $a_n = -0.25(-8)^{n-1}$

اكتب معادلة للحد النوني لكل متتالية هندسية.

2A. −0.25, 2, −16, 128, ...

2B. $a_3 = 16$, $r = 4$ $a_n = 1(4)^{n-1}$

كما هو الحال في الأوساط الحسابية، فإن **الأوساط الهندسية** هي الحدود الموجودة بين حدين غير متعاقبين لمتتالية هندسية. ويمكن استخدام النسبة المشتركة r لإيجاد الأوساط الهندسية.

مثال 3 إيجاد الأوساط الهندسية

أوجد ثلاثة أوساط هندسية بين 2 و 1250.

الخطوة 1 بما أن هناك ثلاثة حدود بين الحد الأول والحد الأخير، فهناك 2 + 3 أو 5 حدود إجمالية. إذا $n = 5$.

الخطوة 2 أوجد قيمة r.

الحد النوني لمتتالية هندسية: $a_n = a_1 r^{n-1}$
$1250 = 2r^{5-1}$ $n = 5$ و $a_1 = 2$، $a_n = 1250$
$625 = r^4$ اقسم الطرفين على 2.
$\pm 5 = r$ أوجد الجذر الرابع للطرفين.

الخطوة 3 استخدم r لإيجاد الأوساط الحسابية الأربعة.

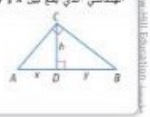
2 ،−10 ،50 ،−250 ،1250 أو 2 ،10 ،50 ،250 ،1250
×−5 ×−5 ×−5 ×−5 ×5 ×5 ×5 ×5

الأوساط الهندسية هي 10، 50، 250 أو 10−، 50، 250−.

تمرين موجه

3. أوجد الأوساط الهندسية الأربعة التي تقع بين 0.5 و 512. 2, 8, 32, 128

قراءة في الرياضيات
الأوساط الهندسية يمكن تمثيل الوسط الهندسي بطريقة هندسية أيضاً. في الشكل التالي، يمثل h الوسيط الهندسي الذي يقع بين x و y.



الربط بتاريخ الرياضيات
أرخيتاس (347–428 قبل الميلاد) تمت دراسة المتتاليات الهندسية أو المتعاقبات الهندسية لأول مرة بواسطة عالم الرياضيات اليوناني أرخيتاس. وجاءت دراساته لهذه المتتاليات بسبب شغفه بالموسيقى والأوتار الموسيقية.

التركيز على محتوى الرياضيات

زيادة أو نقص المتتاليات الهندسية العديد من المتتاليات في هذا الدرس إما تزداد أو تقل. والنسبة المشتركة لهذه المتتاليات موجبة. إلا أنه إذا كانت النسبة المشتركة في متتالية هندسية سالبة، فلن تزداد أو تقل.

563

Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:17 PM 42%
elib.moe.gov.ae

نصيحة للمعلمين الجدد

الاستنتاج المنطقي قد ترغب في أن تجعل الطلاب يقومون بحساب مجموع واحد أو أكثر بدون استخدام الصيغة للتحقق منها. وهذا من شأنه أيضا أن يوضح فعالية الصيغة.

انتبه!

تجنب الأخطاء أكد على أهمية كتابة كل خطوة من حسابات المعادلة، حتى تُحدد كل قيمة عددية يتم إيجادها أثناء العملية بوضوح.

2 المتسلسلات الهندسية

المثال 4 يوضح كيفية إيجاد مجموع الحدود n الأولى في المتسلسلة الهندسية. ويبين **المثال 5** كيفية تقييم مجموع مكتوب بترميز سيجما. ويبين **المثال 6** كيفية إيجاد الحد الأول في متسلسلة هندسية بمعرفة مجموع عدد محدد من حدودها والنسبة المشتركة لها.

أمثلة إضافية

4 الموسيقى استخدم المعلومات المتوفرة في المثال 4. كم عدد رسائل البريد الإلكتروني التي ستُرسل بعد الجولة السادسة؟ 19,530

5 أوجد قيمة $\sum_{n=1}^{12} 3 \cdot 2^{n-1}$. 12,285

2 المتسلسلة الهندسية

المتسلسلة الهندسية هي مجموع حدود المتتالية الهندسية. ورمز إلى مجموع الحدود النونية الأولى في المتسلسلة بالرمز S_n. يمكنك استخدام الصيغ التالية لإيجاد المجموع الجزئي S_n للحدود النونية الأولى للمتسلسلة الهندسية.

المفهوم الأساسي المجموع الجزئي لمتسلسلة هندسية

المعطيات	مجموع S_n للحدود النونية الأولى يساوي:
n ، a_1	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$، $r \neq 1$
a_n ، a_1	$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$، $r \neq 1$

مثال 4 من الحياة اليومية إيجاد مجموع متسلسلة هندسية

موسيقى راجع بداية الدرس. إذا استمر النمط، فما إجمالي عدد رسائل البريد الإلكتروني المرسلة في الجولات الثماني؟

يتم إرسال خمس رسائل بريد إلكتروني في الجولة الأولى وهناك ثماني جولات من عملية إرسال رسائل البريد الإلكتروني.

إذا: $a_1 = 5$ ، $r = 5$ ، $n = 8$.

$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ صيغة المجموع

$S_8 = \frac{5 - 5 \cdot 5^8}{1 - 5}$ $n = 8$ ، $r = 5$ ، $a_1 = 5$

$S_8 = \frac{-1{,}953{,}120}{-4}$ بسط البسط والمقام.

$S_8 = 488{,}280$ اقسم.

سيكون هناك 488,280 رسالة بريد إلكتروني يتم إرسالها بعد الجولات الثماني.

تمرين موجه

أوجد مجموع كل متسلسلة هندسية.

4A. $a_1 = 2$، $n = 10$، $r = 3$ 59,048 **4B.** $a_1 = 2000$، $a_n = 125$، $r = \frac{1}{2}$ 3875

كما هو الحال مع المتسلسلة الحسابية، يمكن استخدام الرمز سيجما أيضا لتمثيل المتسلسلة الهندسية.

مثال 5 المجموع في الرمز سيجما

أوجد قيمة $\sum_{k=3}^{10} 4(2)^{k-1}$.

أوجد قيم a_1، r، و n. في الحد الأول، $k = 3$ و $a_1 = 4 \cdot 2^{3-1} = 4 \cdot 2^2$ أو 16. قاعدة الدالة الأسية هي r. إذا $r = 2$. هناك $1 + 3 - 10$ أو 8 حدود. إذا $n = 8$.

$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ صيغة المجموع

$= \frac{16 - 16(2)^8}{1 - 2}$ $n = 8$ ، $r = 2$ ، $a_1 = 16$

$= 4080$ استخدم الحاسبة.

انتبه!

الرمز سيجما لاحظ أنه يطلب منك في المثال 5 إيجاد قيمة المجموع من الحد الثالث إلى الحد العاشر.

تمرين موجه

أوجد مجموع كل مما يلي.

5A. $\sum_{k=4}^{12} \frac{1}{4} \cdot 3^{k-1}$ 66,426.75 **5B.** $\sum_{k=3}^{9} \frac{2}{3} \cdot 4^{k-1}$ 58,253.333

التدريس المتمايز OL BL

إذا كنت تعتقد أن الطلاب قد يهتمون بتعلم كيفية تطبيق هذا الدرس على حالات في الحياة اليومية،

فعندئذ اطلب من الطلاب البحث عن كيفية استخدام علماء البيئة والبيولوجيا المتسلسلة الهندسية في عملهم لإحصاء ثعبرات التعداد والتنبؤ بها في مختلف الكائنات الحية.

472 / 55

Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:17 PM 42%
elib.moe.gov.ae

يمكن استخدام الصيغة المتعلقة بمجموع المتسلسلة الهندسية للمساعدة في إيجاد حد معين للمتسلسلة.

مثال 5 إيجاد الحد الأول للمتسلسلة

أوجد قيمة a_1 في متسلسلة هندسية فيها $S_n = 13{,}116$ ، و $n = 7$ ، و $r = 3$.

$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ صيغة المجموع

$13{,}116 = \frac{a_1 - a_1(3^7)}{1 - 3}$ $n = 7$ ، $r = 3$ ، $S_n = 13{,}116$

$13{,}116 = \frac{a_1(1 - 3^7)}{1 - 3}$ خاصية التوزيع

$13{,}116 = \frac{-2186a_1}{-2}$ اطرح.

$13{,}116 = 1093a_1$ بسط.

$12 = a_1$ اقسم الطرفين على 1093.

تمرين موجه

6. أوجد قيمة a_1 في متسلسلة هندسية فيها $S_n = -26{,}240$ ، $n = 8$ ، $r = -3$. 16

التحقق من فهمك

مثال 1

1. **الانتظام** يرسم إسماعيل شجرة عائلة لجده. وقد تمكن من تتبع العديد من الأجيال. وإذا استطاع إسماعيل تتبع 10 أجيال سابقة من عائلته. بدءاً من والديه. فكم عدد الأسلاف الذين سيتمكن من تتبعهم؟ 2046

مثال 2

اكتب معادلة للحد النوني لكل متتالية هندسية.

3. $a_n = 18\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

2. 2, 4, 8, ... $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$ 3. 18, 6, 2, ... 4. $-4, 16, -64, \ldots$ $a_n = -4(-4)^{n-1}$

5. $a_2 = 4, r = 3$ $a_n = \frac{4}{3}(3)^{n-1}$ 6. $a_1 = \frac{1}{8}, r = \frac{3}{4}$ $a_n = \frac{128}{243}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 7. $a_2 = -96, r = -8$ $a_n = 12(-8)^{n-1}$

مثال 3

أوجد الأوساط الهندسية لكل متتالية.

8. 0.25, ?, ?, ?, 64 1, 4, 16 أو $-1, 4, -16$ 9. 0.20, ?, ?, ?, 125 1, 5, 25 أو $-1, 5, -25$

مثال 4

10. **الألعاب** ترتب مني بعض صفوف قطع الدومينو بحيث عندما تضرب أول قطعة منها. تتساقط كل قطعة على قطعتين أخريين عندما تسقط. وإذا كانت هناك عشرة صفوف. فكم عدد قطع الدومينو التي ستستخدمها مني؟ 1023

مثال 5

أوجد مجموع كل متسلسلة هندسية.

11. $\sum_{k=1}^{6} 3(4)^{k-1}$ 4095

12. $\sum_{k=1}^{8} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ 7.96875

مثال 6

أوجد a_1 في كل متسلسلة هندسية موضحة.

13. $S_n = 85\frac{5}{16}, r = 4, n = 6$ $\frac{1}{16}$

14. $S_n = 91\frac{1}{12}, r = 3, n = 7$ $\frac{1}{12}$

15. $S_n = 1020, a_4 = 4, r = \frac{1}{2}$ 512

16. $S_n = 121\frac{1}{3}, a_n = \frac{1}{3}, r = \frac{1}{3}$ 81

حقوق الطبع والتأليف © تعود لشركة ماكجروهيل للتعليم

565

مثال إضافي

6 أوجد قيمة a_1 في متسلسلة هندسية حيث $S_8 = 765$ ، $n = 8$ ، $r = 2$. 3

التركيز على محتوى الرياضيات

صيفتان تستخدم صيغة المجموع للمتسلسلة الهندسية $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$ عندما يكون عدد الحدود غير معطى. وإذا كانت n معروفة. فيمكن استخدام الصيغة $S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$. لأنه في هذه الحالة ليس من الضروري حساب a_n.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

كاميرا المستندات خصص العديد من التمارين للصف الدراسي. وامنح الطلاب الوقت للعمل على حلها باستقلالية. بعد ذلك. اختر طلابًا لمشاركة وشرح حلهم أمام الصف.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1–16 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

التوافق يلاحظ الطلاب المتفوقون في الرياضيات تكرار العمليات الحسابية إن وجدت ويبحثون عن الطرق العامة والمختصرة معًا. ويحافظ الطلاب المتفوقون في الرياضيات على مراقبة العملية أثناء العمل على حل المسألة مع الانتباه إلى التفاصيل.

565

Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:18 PM 42%
elib.moe.gov.ae

تدريس الممارسات في الرياضيات

المثابرة يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. فيحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف. ويبتكرون فرضيات حول شكل الحل ومعناه ويخططون مسارًا للحل بدلاً من الانتقال ببساطة إلى محاولة الحل.

ملاحظات لحل التمرين

ورق الرسم البياني للتمارين 83-81. سيحتاج الطلاب إلى ورق رسم بياني.

إجابات إضافية

64. $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$
$= \frac{a_1 - a_1 r^{n-1} \cdot r}{1-r}$
$= \frac{a_1 - a_n r}{1-r}$

65. $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}$

(صيغة المجموع البديلة) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

(صيغة الحد النوني) $\frac{a_n}{r^{n-1}} = a_1$

(اقسم كل طرف على r^{n-1}.) $S_n = \frac{\frac{a_n}{r^{n-1}} - a_n r}{1-r}$

(التعويض.) $= \frac{\frac{a_n}{r^{n-1}} - \frac{a_n r \cdot r^{n-1}}{r^{n-1}}}{1-r}$

(اضرب في $\frac{\frac{r^n-1}{r^n-1}}{1}$.) $= \frac{a_n(1-r^n)}{r^{n-1}(1-r)}$

(بسّط.) $= \frac{a_n(1-r^n)}{r^{n-1}(1-r)}$

(اقسم على $(1-r)$.) $= \frac{a_n(1-r^n)}{r^{n-1}-r^n}$

(بسّط.)

التدريب وحل المسائل

يوجد تدريب إضافي في الصفحة R10.

مثال 1

17. **الطقس** تسببت الأمطار الغزيرة في مدينة بلال بارتفاع منسوب النهر. وقد ارتفع النهر ثلاث سنتيمترات في اليوم الأول. وكل يوم بعد ذلك كان يرتفع ضعف مقدار اليوم السابق. فكم ارتفع منسوب النهر خلال خمسة أيام؟ 93 cm

أوجد قيمة a_n لكل متتالية هندسية.

18. $a_1 = 2400, r = \frac{1}{4}, n = 7$ $\frac{75}{128}$ أو 0.5859375
19. $a_1 = 800, r = \frac{1}{2}, n = 6$ 25
20. $a_1 = \frac{2}{9}, r = 3, n = 7$ 162
21. $a_1 = -4, r = -2, n = 8$ 512

22. **الأحياء** تنمو بكتيريا محددة بمعدل 3 خلايا كل دقيقتين. وإذا كان هناك 260 خلية في بادئ الأمر، فكم سيكون عددها بعد 21 دقيقة؟ 864,567

مثال 2

اكتب معادلة الحد النوني لكل متتالية هندسية.

23. $-3, 6, -12, \ldots$
24. $288, -96, 32, \ldots$
25. $-1, 1, -1, \ldots$
26. $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \ldots$
27. $8, 2, \frac{1}{2}, \ldots$
28. $12, -16, \frac{64}{3}, \ldots$
29. $a_3 = 28, r = 2$
30. $a_4 = -8, r = 0.5$
31. $a_6 = 0.5, r = 6$
32. $a_3 = 8, r = \frac{1}{2}$
33. $a_4 = 24, r = \frac{1}{3}$
34. $a_4 = 80, r = 4$ $a_n = \frac{5}{4}(4)^{n-1}$

مثال 3

أوجد الأوساط الهندسية لكل متتالية.

35. 810, ☐, ☐, ☐, 10
36. 640, ☐, ☐, ☐, 2.5
37. $\frac{7}{2}$, ☐, ☐, ☐, $\frac{56}{81}$
38. $\frac{729}{64}$, ☐, ☐, ☐, $\frac{324}{9}$
39. أوجد وسطين هندسيين بين 3 و 375. 15, 75
40. أوجد وسطين هندسيين بين 16 و 2−. −8, 4

مثال 4

41. **المثابرة** يمكن لنظام ترشيح مياه أن يزيل 70% من الملوثات في كل مرة يتم تمرير عينة من المياه من خلاله. وإذا تم تمرير نفس كمية المياه عبر النظام أربع مرات، فكم النسبة المئوية للملوثات الأصلية التي ستزال من عينة المياه؟ 99.99%

مثال 5

أوجد مجموع كل متسلسلة هندسية.

42. $a_1 = 36, r = \frac{1}{3}, n = 8$ 53.9918
43. $a_1 = 16, r = \frac{1}{2}, n = 9$ 31.9375
44. $a_1 = 240, r = \frac{3}{4}, n = 7$ 831.855
45. $a_1 = 360, r = \frac{4}{3}, n = 8$ 9707.82

46. **المكانس الكهربائية** يدّعي إن المكنسة الكهربائية تلتقط 80% من الأتربة والأوساخ في كل مرة يتم تمريرها فوق السجاد. ومع افتراض صحة ذلك، فما النسبة المئوية للكمية الأصلية من الأوساخ التي سيتم التقاطها وإزالتها بعد تمرير المكنسة فوق السجاد سبع مرات؟ 99.99%

مثال 5

أوجد مجموع كل متسلسلة هندسية.

47. $\sum_{i=1}^{7} 8(-3)^{i-1}$ 2188
48. $\sum_{i=1}^{8} (-3)(-2)^{i-1}$ 255
49. $\sum_{i=1}^{9} (-1)(4)^{i-1}$ −87,381
50. $\sum_{i=1}^{10} 5(-1)^{i-1}$ 0

مثال 6

أوجد قيمة a_1 في كل متسلسلة هندسية موضحة.

51. $S_6 = -2912, r = 3, n = 6$ −8
52. $S_7 = -10{,}922, r = 4, n = 7$ −2
53. $S_6 = 1330, a_6 = 486, r = \frac{3}{2}$ 64
54. $S_6 = 4118, a_6 = 128, r = \frac{2}{3}$ 1458
55. $a_6 = 1024, r = 8, n = 3$ 0.25
56. $a_6 = 1875, r = 5, n = 7$ $\frac{3}{25}$

Copyright © McGraw-Hill Education. Permission is granted to reproduce for classroom use.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	17-57, 64-68, 71-89	17-57 فردي, 73-76	18-56 زوجي, 64-68, 71, 72, 77-89
OL أساسي	17-57 فردي, 58-68, 71-89	17-57, 73-76	58-68, 71- 72, 77-89
BL متقدم	(اختياري) 58-85, (86-89		

472 / 57

Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:18 PM 42%
elib.moe.gov.ae

57. **العلوم** ارتفع بالون مملوء بالغاز لمسافة 100 متر بعد دقيقة من إطلاقه. وفي كل دقيقة بعد ذلك، يرتفع البالون 50% فقط من المسافة التي ارتفعها في الدقيقة السابقة. ما المسافة التي سيرتفع إليها بعد مرور 5 دقائق؟ **193.75 m**

58. **الكيمياء** يبلغ نصف عمر عنصر الرادون حوالي 4 أيام. وهذا يعني أنه كل 4 أيام تقريبا، تتحلل نصف كتلة عنصر الرادون إلى عنصر آخر. فكم جراما من الرادون سيتبقى من 60 جراما موجودين من البداية بعد 4 أسابيع؟ **حوالي 0.46875 g**

59. **التبرير** ينتشر الفيروس في حاسوب مصيبا الملفات. وإذا أصيب ملف في بادئ الأمر مع تضاعف عدد الملفات المصابة كل دقيقة، فكم عدد الملفات التي ستصاب بعد 20 دقيقة؟ **524,288**

60. **الهندسة** في الشكل، تبلغ أضلاع كل مثلث متساوي الأضلاع ضعف حجم أضلاع المثلث المحاط الخاص به. وإذا استمر النمط، فأوجد مجموع محيطات أول ثمانية مثلثات. **حوالي 119.5 cm**

61. **البندول** تبلغ المسافة المقطوعة لحركة الأرجحة الأولى للبندول 30 سنتيمترا. وإذا بلغت مسافة كل حركة أرجحة تالية 95% من حركة الأرجحة السابقة، فأوجد المسافة الكلية التي يقطعها البندول بعد الأرجحة الثلاثين. **حوالي 471 cm**

62. **سلاسل الاتصالات** أنشأت إحدى المدارس سلسلة اتصالات بحيث يمكن لكل موظف الاتصال باثنين آخرين من الموظفين لإخبارهم بمواعيد إغلاق المدرسة بسبب أحوال الطقس. وبدأت الجولة الأولى من الاتصالات عندما اتصل المشرف بكلا مديري المدرسة. فإذا كان عدد الموظفين إجمالا يبلغ 94 موظفا بالمدرسة، فكم جولة من الاتصالات ستتم في هذا الخصوص؟ **7**

63. **أجهزة التلفاز** تعلن إحدى شركات الإلكترونيات الكبرى عن طرحها خطة تقسيط أسبوعية يمكن بموجبها شراء جهاز من علامة تجارية شهيرة من أجهزة التلفاز عالية الدقة. ويدفع المشتري AED 15 في نهاية الأسبوع الأول، و AED 16.50 في نهاية الأسبوع الثاني، و AED 18.15 في نهاية الأسبوع الثالث. وهكذا لمدة عام. (افترض أن عاما واحدا = 52 أسبوعا.)

a. كم ستبلغ المدفوعات في نهاية الأسبوع العاشر والأربعين؟ **63a. AED 35.37, AED 91.74, AED 617.16**

b. أوجد التكلفة الإجمالية لجهاز التلفاز. **AED 21256.45**

c. لماذا تعتبر التكلفة الموجودة في الجزء b غير دقيقة كليا؟ **63c. تم تقريب كل عملية دفع إلى أقرب فلس، لذا سيصبح مجموع المدفوعات في الواقع أكثر من المجموع الوارد في الجزء b.**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

64. **البرهان** اشتق صيغة المجموع العامة باستخدام صيغة المجموع البديلة. **انظر الهامش.**

65. **البرهان** اشتق صيغة مجموع لا تشمل a. **انظر الهامش.**

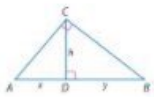
66. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب متسلسلة هندسية بحيث يكون $r = \frac{3}{4}$ و $n = 6$. **66. الإجابة النموذجية: $256 + 192 + 144 + 108 + 81 + \frac{243}{4}$**

67. **التبرير** اشرح كيف أن $\sum_{k=1}^{10} 3(2)^{k-1}$ تحتاج إلى التغيير للإشارة إلى نفس المتسلسلة إذا تغير k إلى 0 = k. اشرح استنتاجك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

68. **البرهان** برهن الصيغة المتعلقة بالحد النوني لمتتالية هندسية. **انظر ملحق إجابات الوحدة 9.**

69. **تحد** الحد الخامس لمتتالية هندسية هو الحد رقم $\frac{1}{27}$ للحد الثامن. إذا كان الحد التاسع يساوي 720، فما قيمة الحد الثامن؟ **234**

70. **تحد** استخدم حقيقة أن h يمثل الوسط الهندسي x و y في الشكل الموجود على اليسار لإيجاد h^4 بدلالة كل من x و y. **x^2y^2**



71. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب متسلسلة هندسية بها 6 حدود ومجموع يساوي 252. **الإجابة النموذجية: $4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$**

72. **الكتابة في الرياضيات** كيف يمكنك تصنيف متتالية؟ وضح استنتاجك. **انظر الهامش.**

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © تعديلات لصالح مؤسسة

إجابة إضافية

72. إجابة نموذجية: تكون المتسلسلة حسابية إذا كان كل زوج من الحدود المتتالية يشترك في فرق مشترك. وتكون المتسلسلة هندسية إذا كان كل زوج من الحدود المتتالية يشترك في نسبة مشتركة. إذا أظهرت المتسلسلة كلتا الخاصيتين، فإنها تكون حسابية وهندسية. وإذا لم تظهر المتسلسلة أيا منهما، فهي ليست حسابية ولا هندسية.

472 / 58
Scanned by CamScanner

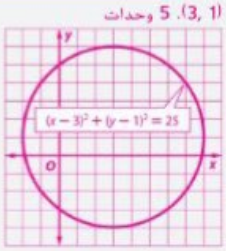
●●○○○ etisalat 4G 5:18 PM 42%
elib.moe.gov.ae

4 التقويم

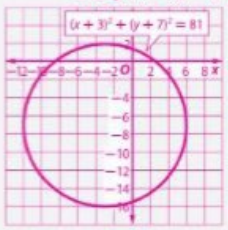
الكرة البلورية اطلب من الطلاب وصف ما يعتقدونه حول كيف لمعرفة مجاميع المتسلسلات الهندسية أن تساعدهم في تعلم مجاميع متسلسلات هندسية لانهائية في الدرس التالي.

إجابات إضافية

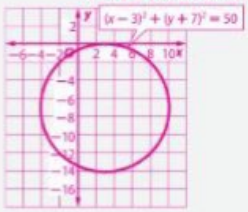
81. (3, 1)، 5 وحدات



82. (−3, −7)، 9 وحدات



83. (3, −7)، $5\sqrt{2}$ وحدات



تدريب على الاختبار المعياري

73. أي من التالي يعد الأقرب إلى $\sqrt[3]{7.32}$؟ B
A 1.8
B 1.9
C 2.0
D 2.1

74. الحد الأول لمتسلسلة هندسية هو 5، والنسبة المشتركة هي 2−. كم عدد الحدود في المتسلسلة إذا كان مجموعها يساوي 6825−؟ J
F 5
G 9
H 10
J 12

75. **الإجابة المختصرة** لدى عائشة حساب ادخار خاص بها. وهي تضيف نصف محتويات الحساب كل عام. وبعد 4 أعوام، تبقى لديها AED 2000. فكم كان لديها في حساب الادخار في الأصل؟
AED 32,000

76. SAT/ACT ما الدالة التي قد يكون المنحنى أدناه جزءا من التمثيل البياني لها؟ E

A $y = \sqrt{x}$
B $y = x^2 - 5x + 4$
C $y = -x + 20$
D $y = \log x$
E $xy = 4$

مراجعة شاملة

77. **المال** اشترت منال جهاز للعاب بتقنية LCD عالي الدقة من متجر الإلكترونيات. ودفعت AED 800 على الفور، و AED 300 شهريا لمدة عام ونصف. فكم دفعت منال إجمالا مقابل التلفاز؟ الدرس 2-9
AED 6200

حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك. اشرح استنتاجك. الدرس 1-9
78. ليس أيا منهما؛ فلا يوجد فرق مشترك ولا نسبة مشتركة.

78. $\frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{7}{20}, \frac{17}{20}, \ldots$
79. $-\frac{7}{25}, -\frac{13}{50}, -\frac{6}{25}, -\frac{11}{50}, \ldots$
80. $-\frac{22}{3}, -\frac{68}{9}, -\frac{208}{27}, -\frac{632}{81}, \ldots$

أوجد مركز كل دائرة ونصف قطرها. ثم ارسم الدائرة بيانيا. انظر الهامش. 83–81

81. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$
82. $(x+3)^2 + (y+7)^2 = 81$
83. $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 50$

84. افترض أن y تتغير بشكل مشترك مع x و z. أوجد y عندما يكون $x = 9$ و $z = -5$. إذا كان $y = -90$ عندما يكون $z = 15$ و $x = -6$. 45−

85. **التسوق** اكتشف متجر ما أن عدد العملاء الذين سيحضرون تخفيضات للبيع بأسعار يمكن تمثيلهم باستخدام $N = 125\sqrt[3]{100Pt}$، حيث N تمثل العدد المتوقع للعملاء، و P النسبة المئوية للخصم، و t عدد ساعات سريان الخصم. أوجد عدد العملاء الذين يتوقع المتجر حضورهم لهذه التخفيضات التي ستصل نسبتها إلى 50%، وستستمر لأربع ساعات. 731 عميلا

مراجعة المهارات

أوجد قيمة كل تعبير إذا كان $a = -2$، و $b = \frac{1}{3}$، و $c = -12$.

86. $\frac{3ab}{c}$ $\frac{1}{6}$
87. $\frac{a-c}{a+c}$ $-\frac{5}{7}$
88. $\frac{a^3-c}{b^3}$ 36
89. $\frac{c+3}{ab}$ $\frac{27}{2}$

التدريس المتمايز OL BL

التوسّع اكتب تعبيرا للحد *النوني* في المتتالية الهندسية: ar^{n-1} على اللوحة. واطلب من الطلاب كتابة تعبير للحد *التالي*، برقم الحد $(n+1)$، باستبدال n بـ $(n+1)$ في التعبير ar^{n-1}. ثم اطلب منهم إيضاح أن $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ يساوي النسبة المشتركة r. $\frac{ar^{(n+1)-1}}{ar^{n-1}} = \frac{r^n}{r^{n-1}} = r^{n-(n-1)} = r^1 = r$

472 / 59
Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:18 PM 42%
elib.moe.gov.ae

1 التركيز

الهدف تقريب المساحة أسفل المنحنى خلال فترة محددة، واستخدام مجموع المساحات المستطيلة أسفل المنحنى.

المواد الخاصة لكل مجموعة

- ورق رسم بياني

وسائل تعليمية يدوية سهلة التشكيل

تدريس الجبر باستخدام قوالب الوسائل التعليمية اليدوية الخاصة بـ:

- ورق رسم بياني، ص. 1

نصيحة للتدريس

ينبغي أن يتعرف الطلاب على كيفية إيجاد مساحة الأشكال غير المنتظمة. وفي هذا الصدد، فإن هذا الدرس يتناول أيضًا كيفية إيجاد مساحة شكل غير منتظم. وينبغي أن تكون المستطيلات التي يقوم الطلاب بتقسيم المساحة إليها بالعرض ذاته. ويمكنك أن تقترح على الطلاب ترقيم المستطيلات التي يرسمونها أسفل المنحنى من 1 إلى 8.

2 التدريس

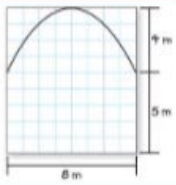
العمل في مجموعات متعاونة

قسّم الطلاب ذوي القدرات المختلفة إلى مجموعات ثنائية. واطلب منهم حل خطوات كل من الطريقة 1 والطريقة 2 في النشاط. ثم الإجابة عن التمارين 4–1.

اطرح السؤال التالي:

- ماذا يمثل عرض كل شبكة في تمثيلك البياني؟ متر واحد
- في الطريقة 1، هل ستخرج المستطيلات عن نطاق التمثيل البياني للمعادلة التربيعية؟ لا
- كيف يمكنك إيجاد ارتفاع كل مستطيل؟ استخدم قيم x و y الموجودة في الجدول من الخطوة 1.

المساحة تحت المنحنى



يتم إعادة تصميم إستاد لكرة القدم بحيث يكون هناك ممر على شكل قوس في المدخل الرئيسي. وتم وضع مخياس رسم لهذا الممر بحيث يمثل كل خط على ورقة الرسم البياني متر واحد على الممر الحقيقي. وقام المصمم بتمثيل قمة الشكل باستخدام المعادلة التربيعية $y = -0.25x^2 + 3x$.

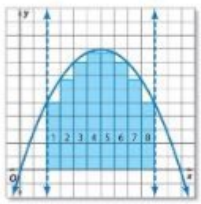
النشاط

أوجد مساحة الفتحة تحت الممر القوسي.

الطريقة 1

الخطوة 1 أنشئ جدولاً لقيم $y = -0.25x^2 + 3x$ ثم مثل المعادلة بيانيًا.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	0	2.75	5	6.75	8	8.75	9	8.75	8	6.75	5	2.75	0



الخطوة 2 قسم الشكل إلى عدة مناطق.

لتقدير مساحة المنطقة الواقعة داخل الممر القوسي، يمكنك قسمة القوس على المستطيلات كما هو موضح باللون الأزرق.

نظرًا لأن الطرفين الأيسر والأيمن للممر القوسي يقعان على ارتفاع 5 أمتار و $y = 5$ إذا كان $x = 2$ وإذا كان $x = 10$، فإن فتحة المدخل تمتد من $x = 2$ إلى $x = 10$.

الخطوة 3 أوجد مساحة هذه المناطق.

المستطيل	1	2	3	4	5	6	7	8
العرض (m)	1	1	1	1	1	1	1	1
الارتفاع (m)	5	6.75	8	8.75	8.75	8	6.75	5
المساحة (m^2)	5	6.75	8	8.75	8.75	8	6.75	5

المساحة التقريبية للممر القوسي تساوي مجموع مساحات المستطيلات.

$5 + 6.75 + 8 + 8.75 + 8.75 + 8 + 6.75 + 5 = 57\ m^2$

(يتبع في الصفحة التالية)

© حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

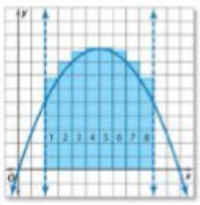
472 / 60

Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:18 PM 42%
elib.moe.gov.ae

الطريقة 2

الخطوة 1 ارسم التمثيل البياني الثاني للمعادلة واقسمه إلى مناطق. اقسم المدى الفوسي إلى مستطيلات كما هو موضح باللون الأزرق.



الخطوة 2 أوجد مساحة هذه المناطق.

المستطيل	1	2	3	4	5	6	7	8
العرض (m)	1	1	1	1	1	1	1	1
الارتفاع (m)	6.75	8	8.75	9	9	8.75	8	6.75
المساحة (m^2)	6.75	8	8.75	9	9	8.75	8	6.75

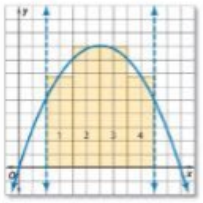
المساحة التقريبية للمدى الفوسي تساوي مجموع مساحات المستطيلات.

$6.75 + 8 + 8.75 + 9 + 9 + 8.75 + 8 + 6.75 = 65\ m^2$

توضح الطريقتان 1 و 2 كيفية تقريب المساحة الواقعة أسفل منحنى وعلى فترة محددة.

تحليل النتائج

1. هل مساحة المناطق التي تم حسابها باستخدام الطريقة 1 أكبر أم أصغر من المساحة الحقيقية للمدى الفوسي؟ اشرح استنتاجك.
2. هل مساحة المناطق التي تم حسابها باستخدام الطريقة 2 أكبر أم أصغر من المساحة الحقيقية للمدى الفوسي؟ اشرح استنتاجك.
3. قارن بين تقديرات المساحات بالنسبة للطريقتين. كيف يمكنك إيجاد أفضل تقدير للمساحة الواقعة داخل المدى الفوسي؟ اشرح استنتاجك.
4. يوضح الرسم التخطيطي طريقة ثالثة لإيجاد تقدير لمساحة المدى الفوسي. هل هذا التقدير للمساحة أكبر أم أصغر من المساحة الفعلية؟ ما وضع هذا التقدير عند مقارنته بالتقديرين الآخرين للمساحة؟ **انظر الهامش.**



1. أقل: الإجابة النموذجية: تقع المستطيلات داخل القوس وتترك بعض المساحات مجهولة.
2. أكبر: الإجابة النموذجية: تتضمن المستطيلات مساحة خارج القوس.
3. الإجابة النموذجية: أوجد وسط التقديرات: $61 \div 2 = (57 + 65)$.

التمارين

قدر المساحة التي توصلت إليها كل طريقة. وأنشئ جدولا بالقيم. وارسم تمثيلات بيانية بالمستطيلات. واستخدم الجدول لتسجيل قيم مساحات المستطيلات. قارن بين كل تقدير والمساحة الفعلية. 7–5. انظر ملحق إجابات الفصل 9.

5. مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى بالنسبة لـ $y = -x^2 + 4$، من $x = -2$ إلى $x = 2$، وفوق المحور x.
6. مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى بالنسبة لـ $y = x^3$، من $x = 0$ إلى $x = 4$، وفوق المحور x.
7. مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى بالنسبة لـ $y = x^2$، من $x = -3$ إلى $x = 3$، وفوق المحور x.

McGraw-Hill Education جميع الحقوق محفوظة © لصالح شركة

التمرين اطلب من الطلاب إكمال التمارين 7–5.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرين 5 لتقويم مدى قدرة الطلاب على تقريب المساحة أسفل المنحنى خلال فترة محددة.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب تكرار النشاط، بحيث تمثل كل شبكة 0.5 متر بدلاً من متر واحد، ومن ثم استخدام 16 مستطيلاً بدلاً من 8. اسأل الطلاب ما إذا كانوا يعتقدون أن النتائج أقرب إلى المساحة الفعلية أسفل المنحنى. ثم اسألهم كيف يمكنهم الاقتراب أكثر من العدد الفعلي للأمتار المربعة الموجودة أسفل المنحنى.

إجابات إضافية

4.

المستطيل	1	2	3	4
العرض	2	2	2	2
الارتفاع	6.75	9	9	6.75
المساحة	13.5	18	18	13.5

فدّر المساحة، $2(13.5 + 18) = 63\ m^2$. سيكون التقدير أكبر من المساحة الفعلية. حيث تقع 4 أجزاء من المستطيلات خارج المساحة أسفل المنحنى وجزءان من المساحة أسفل المنحنى لا يقعان في نطاق المستطيلات. وبعد هذا التقدير أكثر دقة من التقديرين الآخرين.

472 / 61
Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:18 PM 42%
elib.moe.gov.ae

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 9-4 إيجاد مجاميع المتسلسلات الهندسية اللا نهائية.

الدرس 9-4 إيجاد مجاميع المتسلسلات الهندسية اللا نهائية، وكتابة الكسور العشرية المتكررة في صورة كسور اعتيادية.

بعد الدرس 9-4 كتابة الصيغ التكرارية للمتسلسلات.

2 التدريس

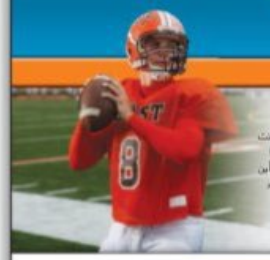
الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- لكتابة متسلسلة هندسية تمثل هذا الموقف. ماذا سيكون الحد الأول؟ 5
- ماذا سيكون الحد الثاني؟ 2.5
- اكتب الحدود الأربعة الأولى في المتسلسلة.
  $5 + 2.5 + 1.25 + 0.625 + \ldots$
- لماذا تسمى هذه المتسلسلة متسلسلة لا نهائية؟ الإجابة النموذجية: إنها تستمر إلى ما لا نهاية.

9-4 المتسلسلة الهندسية اللانهائية



السابق
- لقد أوجدت مجاميع المتسلسلات الهندسية المنتهية.

الحالي
1. إيجاد مجاميع المتسلسلات الهندسية اللانهائية.
2. كتابة الكسور العشرية المتكررة في صورة كسور اعتيادية.

لماذا؟
- في مباراة لكرة القدم الأمريكية، كان الخصم يقف على خط العشر ياردات، وليست مهاجمة الدفاع بنصف المسافة إلى إحراز الهدف، وكانت الكرة موضوعة على خط الخمس ياردات. إذا استمروا في تلقي المهاجمات بهذه الطريقة، فأين سينتهي وضع الكرة في النهاية؟ وما إجمالي عدد ياردات المهاجمة التي سوف يتكبدها الدفاع؟ يمكن الإجابة على هذين السؤالين من خلال الاطلاع على المتسلسلة الهندسية اللانهائية.

المفردات الجديدة
- المتسلسلة الهندسية اللانهائية infinite geometric series
- متسلسلة تقاربية convergent series
- متسلسلة تباعدية divergent series
- لانهاية infinity

ممارسات في الرياضيات
مراعاة الدقة.
البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

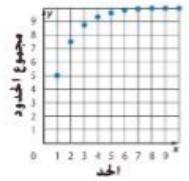
1 المتسلسلة الهندسية اللانهائية

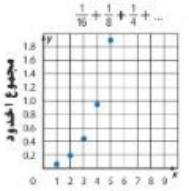
يوجد لدى **المتسلسلة الهندسية اللانهائية** عدد لا يحصى من الحدود. ويطلق على المتسلسلة التي لها مجموع **متسلسلة تقاربية**، وذلك لأن مجموعها يقترب من قيمة محددة. أما المتسلسلة التي ليس لها مجموع، فيطلق عليها **متسلسلة تباعدية**.

عندما نقوم بتقدير المجموع S_n لمتسلسلة هندسية لانهائية للحدود الـ n الأولى، فأنت توجد المجموع الجزئي للمتسلسلة. ومن الممكن كذلك إيجاد مجموع متسلسلة كاملة. في التطبيق الوارد أعلاه، يبدو أن الكرة ستصل في النهاية خط إحراز الهدف. وسيكبد الدفاع عقوبة بإجمالي 10 ياردات. وهذه القيمة هي المجموع الفعلي للمتسلسلة اللانهائية $5 + 2.5 + 1.25 + \ldots$. موضح على اليمين أداء النموذج البياني لـ S_n حيث $1 \le n \le 10$، وكلما ازداد n، يقترب S_n من العدد 10.

المفهوم الأساسي المتسلسلات التقاربية والتباعدية

	متسلسلة تقاربية	متسلسلة تباعدية
الشرح	يقترب المجموع من قيمة نهائية.	لا يقترب المجموع من قيمة نهائية.
النسبة	$\lvert r \rvert < 1$	$\lvert r \rvert \ge 1$
مثال	$5 + 2.5 + 1.25 + \ldots$	$\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \ldots$





مثال 1 المتسلسلات التقاربية والتباعدية

حدد ما إذا كانت كل متسلسلة هندسية لانهائية تقاربية أم تباعدية.

a. $54 + 36 + 24 + \ldots$

أوجد قيمة r.

$r = \frac{36}{54}$ أو $\frac{2}{3}$، حيث إن $-1 < \frac{2}{3} < 1$. المتسلسلة تقاربية.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:18 PM 42%
elib.moe.gov.ae

1 المتسلسلات الهندسية اللا نهائية

المثال 1 يبين كيفية تحديد ما إذا كانت المتسلسلة الهندسية اللا نهائية تقاربية أم تباعدية. ويبين **المثال 2** كيفية إيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية اللا نهائية، بينما يوضح **المثال 3** الأمر ذاته لمتسلسلة بمعرفة الرمز سيجما.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 حدد ما إذا كانت كل متسلسلة هندسية لا نهائية تقاربية أم تباعدية.

a. $729 + 243 + 81 + \ldots$

متقاربة

b. $2 + 5 + 12.5 + \ldots$

متباعدة

2 أوجد مجموع كل متسلسلة هندسية لا نهائية. إن وُجد.

a. $-\frac{4}{3} + 4 - 12 + 36 - 108 + \ldots$

لا يوجد مجموع

b. $3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \ldots$ 2

نصيحة للمعلمين الجدد

الاستنتاج تأكد من قدرة الطلاب على تفسير لماذا يمكن كتابة $|r| < 1$ في صورة $-1 < r < 1$ أيضًا. وقد يساعد التمثيل البياني لهذه المتباينة على خط الأعداد في فهم الطلاب المقصود من هذين الترميزين الرياضيين المختلفين.

b. $8 + 12 + 18 + \ldots$

$r = \frac{12}{8}$ أو 1.5، نظرًا لأن $1.5 > 1$، فإن المتسلسلة تباعدية.

تمرين موجه

1A. $2 + 3 + 4.5 + \ldots$ تباعدية

1B. $100 + 50 + 25 + \ldots$ تقاربية

نصيحة دراسية

القيمة المطلقة تذكر أن $|r| < 1$ يعني أن $-1 < r < 1$.

عندما يكون $|r| < 1$، فإن قيمة r^n سوف تقترب من الصفر مع زيادة n. إذا، ستقترب المجاميع الجزئية للمتسلسلات الهندسية اللانهائية من $\frac{a_1 - a_1(0)}{1 - r}$ أو $\frac{a_1}{1 - r}$.

المفهوم الأساسي مجموع المتسلسلات الهندسية اللانهائية

يمكن إيجاد مجموع S لمتسلسلة هندسية لانهائية عند $|r| < 1$ باستخدام

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

إذا كان $|r| \geq 1$، فإن المتسلسلة لا يوجد لها مجموع.

n	S_n
5	1364
10	1,398,100
15	1,431,655,764

عندما تكون متسلسلة هندسية لانهائية تباعدية، فإن $|r| \geq 1$ ولا يكون للمتسلسلة أية مجموع. نظرًا لأن القيمة المطلقة لـ r^n سوف تزداد بشكل لانهائي بزيادة n.

يوضح الجدول على اليسار المجاميع الجزئية للمتسلسلة التباعدية $4 + 16 + 64 + \ldots$. عندما تزداد قيمة n، فإن قيمة S_n تزداد بسرعة وإلى ما لا نهاية.

مثال 2 مجموع متسلسلة لانهائية

أوجد مجموع كل متسلسلة لانهائية. إن وجد.

حدد ما إذا كانت كل متسلسلة هندسية لا نهائية تقاربية أم تباعدية.

a. $\frac{2}{3} + \frac{6}{15} + \frac{18}{75} + \ldots$

الخطوة 1 أوجد قيمة r لتحديد ما إذا كان هناك مجموع.

اقسم الحدود المتتالية.

$r = \frac{6}{15} \div \frac{2}{3}$ أو $\frac{3}{5}$

نظرًا لأن $\left|\frac{3}{5}\right| < 1$، فإن هناك مجموع.

الخطوة 2 استخدم الصيغة لإيجاد المجموع.

صيغة المجموع

$S = \frac{a_1}{1 - r}$

$r = \frac{3}{5}$ و $a_1 = \frac{2}{3}$

$= \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{3}{5}}$

بسط

$= \frac{3}{3} \div \frac{2}{5}$ أو $\frac{5}{3}$

b. $6 + 9 + 13.5 + 20.25 + \ldots$

$r = \frac{9}{6}$ أو 1.5، نظرًا لأن $|1.5| \geq 1$، فإن المتسلسلة تتباعد ولا يوجد مجموع.

تمرين موجه

2A. $4 - 2 + 1 - 0.5 + \ldots$ $\frac{8}{3}$

2B. $16 + 20 + 25 + \ldots$ لا يوجد مجموع.

نصيحة دراسية

التقارب والتباعد تتقارب المتسلسلة عندما تكون القيمة المطلقة للحد أصغر من القيمة المطلقة للحد السابق. وبذلك ستكون المتسلسلة الحسابية اللانهائية دائمًا تباعدية.

McGraw-Hill Education حقوق النشر © محفوظة لصالح مؤسسة

572 | الدرس 9-4 | المتسلسلة الهندسية اللانهائية

التركيز على محتوى الرياضيات

مجموع المتسلسلات الهندسية اللا نهائية يعتمد وجود مجموع للمتسلسلات الهندسية اللا نهائية من عدمه على ناتج أي حد والنسبة المشتركة r. وستظل القيمة المطلقة لناتج أي عدد وكسر بين -1 و 1 دائمًا أقل من القيمة المطلقة للعدد الأصلي، ومن ثم سيكون للمتسلسلات مجموع إذا كان $|a_r| > |a_i|$.

472 / 63

Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:18 PM 41%
elib.moe.gov.ae

يمكن استخدام الرمز سيجما لتمثيل المتسلسلات اللانهائية. إذا كانت متتالية **لانهائية** فإنها تستمر دون نهاية. ويوضع رمز اللانهائية ∞ فوق رمز $\sum$ لتوضيح أن المتسلسلة لانهائية.

مثال 3 المتسلسلة اللانهائية في الرمز سيجما

أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{\infty} 18\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$.

$S = \frac{a_1}{1-r}$ صيغة المجموع

$= \frac{18}{1-\frac{4}{5}}$ $r = \frac{4}{5}$ ، $a_1 = 18$

$= \frac{18}{\frac{1}{5}}$ أو 90 بسط.

تمرين موجه

3. أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{\infty} 12\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$. 48

2 الكسور العشرية المتكررة

الكسور العشرية المتكررة الكسر العشري المتكرر هو مجموع المتسلسلات الهندسية اللانهائية. على سبيل المثال، $0.45 = 0.454545\ldots$ أو $0.45 + 0.0045 + 0.000045 + \ldots$. ويمكن استخدام صيغة مجموع المتسلسلات اللانهائية هذه لتحويل الكسر العشري إلى كسر اعتيادي.

مثال 4 اكتب كسرا عشريا متكررا في صورة كسر اعتيادي

اكتب $0.\overline{63}$ في صورة كسر اعتيادي.

الطريقة 1 استخدم مجموع المتسلسلات اللانهائية.

$0.\overline{63} = 0.63 + 0.0063 + \ldots$

$= \frac{63}{100} + \frac{63}{10{,}000} + \ldots$

$S = \frac{a_1}{1-r}$ صيغة المجموع

$= \frac{\frac{63}{100}}{1-\frac{1}{100}}$ $r = \frac{1}{100}$ ، $a_1 = \frac{63}{100}$

$= \frac{63}{99}$ أو $\frac{7}{11}$ بسط.

الطريقة 2 استخدم الخواص الجبرية.

$x = 0.\overline{63}$ يفرض أن $x = 0.\overline{63}$

$x = 0.636363\ldots$ اكتب في صورة كسر عشري متكرر.

$100x = 63.636363\ldots$ اضرب الطرفين في 100.

$99x = 63$ اطرح x من $100x$ واطرح $0.\overline{63}$ من $63.\overline{63}$.

$x = \frac{63}{99}$ أو $\frac{7}{11}$ اقسم الطرفين على 99.

تمرين موجه

4. اكتب $0.\overline{21}$ في صورة كسر اعتيادي. $\frac{7}{33}$

نصيحة في حل المسائل
الاستنتاج المنطقي في العديد من الحالات، يمكن حل مسألة بأكثر من طريقة. استخدم الطريقة التي تشعر معها براحة أكبر.

نصيحة دراسية
الكسور العشرية المتكررة كل كسر عشري متكرر هو عبارة عن عدد نسبي ويمكن كتابته في صورة كسر اعتيادي.

573

مثال إضافي

3 أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$. 10

انتبه!
تجنب الأخطاء اطلب من الطلاب كتابة بضع حدود للمتسلسلة في المثال 3 للتأكد من قدرتهم على كتابة الترميز.

المثال 4 يبين كيفية كتابة كسر عشري متكرر في صورة كسر اعتيادي.

مثال إضافي

4 اكتب $0.\overline{25}$ في صورة كسر اعتيادي. $\frac{25}{99}$

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. شجّع الطلاب على تحديد طريقة لحل المسألة تبدو منطقية لهم.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

الرسائل الفورية اجعل الطلاب يعملوا في مجموعات ثنائية. يقوم الطالب الأول بإرسال رسالة تحتوي على كسر عشري متكرر. ومن ثم، يقوم الطالب الثاني بكتابة الكسر العشري في صورة كسر اعتيادي. واجعل الطلاب يتبادلوا الأدوار ويكرروا العملية.

573

التدريس المتمايز OL BL

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي اطلب من الطلاب إجراء بحث والقراءة عن أحجية الرياضيات الشهيرة "مفارقة زينو". واجعلهم يناقشوا قصة سباق السلحفاة من منظور محتوى هذا الدرس.

472 / 64

Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:18 PM 41%
elib.moe.gov.ae

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 15 للتحقق من الاستيعاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. ويحللون المعطيات، والقيود والعلاقات والأهداف. ويتأكد الطلاب المتفوقون رياضيًا من أجوبتهم عن المسائل باستخدام طريقة مختلفة، ويسألون أنفسهم باستمرار، "هل هذا جواب منطقي؟"

الدقة يحاول الطلاب المتفوقون في الرياضيات استخدام تعريفات واضحة في استنتاجاتهم، والحساب بدقة وكفاءة، والاستفادة بشكل واضح من التعريفات.

التحقق من فهمك

مثال 1 حدد ما إذا كانت كل متسلسلة هندسية لا نهائية تقاربية أم تباعدية.

1. $16 - 8 + 4 - \ldots$ تقاربية
2. $32 - 48 + 72 - \ldots$ تباعدية
3. $0.5 + 0.7 + 0.98 + \ldots$ تباعدية
4. $1 + 1 + 1 + \ldots$ تباعدية

مثال 2 أوجد مجموع كل متسلسلة لانهائية، إن وجد.

5. $440 + 220 + 110 + \ldots$ 880
6. $520 + 130 + 32.5 + \ldots$ $693\frac{1}{3}$
7. $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{9}{16} + \ldots$ لا يوجد مجموع.
8. $\frac{32}{9} + \frac{16}{3} + 8 + \ldots$ لا يوجد مجموع.

9. **التبريد المنطقي** يبلغ عمر النصف لدواء معين 8 ساعات قبل تناول المريض له. ما النسبة المئوية للدواء الموجودة داخل جسم المريض بعد مرور 24 ساعة؟ 12.5%

مثال 3 أوجد مجموع كل متسلسلة لانهائية، إن وجد.

10. $\sum_{k=1}^{\infty} 5 \cdot 4^{k-1}$ لا يوجد مجموع.
11. $\sum_{k=1}^{\infty} (-2) \cdot (0.5)^{k-1}$ -4
12. $\sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$ 15
13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{k-1}$ 2

مثال 4 اكتب كل كسر عشري متكرر في صورة كسر اعتيادي.

14. $0.\overline{35}$ $\frac{35}{99}$
15. $0.\overline{642}$ $\frac{214}{333}$

التدريب وحل المسائل

مثال 1 حدد ما إذا كانت كل متسلسلة هندسية لا نهائية تقاربية أم تباعدية.

16. $21 + 63 + 189 + \ldots$ تباعدية
17. $480 + 360 + 270 + \ldots$ تقاربية
18. $\frac{3}{4} + \frac{9}{8} + \frac{27}{16} + \ldots$ تباعدية
19. $\frac{5}{6} + \frac{10}{9} + \frac{40}{27} + \ldots$ تباعدية
20. $0.1 + 0.01 + 0.001 + \ldots$ تقاربية
21. $0.008 + 0.08 + 0.8 + \ldots$ تباعدية

مثال 2 أوجد مجموع كل متسلسلة لانهائية، إن وجد.

22. $18 + 21.6 + 25.92 + \ldots$ لا يوجد مجموع.
23. $-3 - 4.2 - 5.88 - \ldots$ لا يوجد مجموع.
24. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \ldots$ $\frac{3}{4}$
25. $\frac{12}{5} + \frac{6}{5} + \frac{3}{5} + \ldots$ $\frac{24}{5}$
26. $21 + 14 + \frac{28}{3} + \ldots$ 63
27. $32 + 40 + 50 + \ldots$ لا يوجد مجموع.

28. **أرجوحات** إذا لم يدفع حسن الأرجوحة مرة أخرى بعد الأرجحة الأولى، فإن المسافة التي تقطعها في الأرجوحة الواحدة سوف تتناقص بمقدار 10% مع كل أرجحة. إذا كانت في الأرجحة الأولى قد قطعت مترين، فأوجد إجمالي المسافة التي قطعتها الأرجوحة عند استقرارها. 20 m

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب		خيار اليومين
AL مبتدئ	16–40, 60, 61, 63–76	17–39 فردي, 68–71	16–40 زوجي, 60, 61, 63–67, 72–76
OL أساسي	17–39 فردي, 41–43, 50–61, 45–49 فردي, 63–76	16–40, 68–71	41–61, 63–67, 72–76
BL متقدم	41–73, (اختياري, 74–76)		

472 / 65

Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:19 PM 41%
elib.moe.gov.ae

التمثيلات المتعددة

في التمرين 50. يستخدم الطلاب التمثيل بالنماذج والتحليل العددي والوصف اللفظي لتمثيل متسلسلة لا نهائية ومجموعها.

مثال 3 أوجد مجموع كل متسلسلة لانهائية، إن وجد. 32 ,30 ,29. ✗ يوجد مجموع.

29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{k-1}$

30. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot 3^{k-1}$

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}$ $\frac{35}{12}$

32. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}$

33. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ 16

34. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^{k-1}$ $\frac{3}{22}$

مثال 4 اكتب كل كسر عشري متكرر في صورة كسر اعتيادي.

35. $0.3\overline{21}$ $\frac{53}{165}$

36. $0.14\overline{3}$ $\frac{8}{55}$

37. $2.\overline{18}$ $\frac{24}{11}$

38. $4.\overline{96}$ $\frac{164}{33}$

39. $0.12\overline{14}$ $\frac{601}{4950}$

40. $0.43\overline{536}$ $\frac{477}{1100}$

41. **المراوح** تدور مروحة بسرعة 10 دورات في الثانية. وبعد إيقاف تشغيلها، تتناقص سرعتها بمعدل 75% في الثانية. حدد عدد الدورات التي تكملها المروحة بعد إيقاف تشغيلها. $\frac{40}{3}$

42. **الدقة** أودعت سالي مبلغا قدره AED 5000 في حساب مصرفي في بداية العام. ويسدد المصرف لها 8% كل عام كنسبة مرابحة*.

a. ما مقدار المال الذي سيكون في الحساب بعد 20 عاما؟ (إرشاد: افترض أن $5000(1 + 0.08)^1$ يمثل نهاية العام الأول.) AED 23,304.79

b. هل هذه المتسلسلة تقاربية أم تباعدية؟ اشرح. **هذه متسلسلة تباعدية. النسبة هي 1.08، وهي أكبر من 1.**

43. **بطاريات قابلة للشحن** تم الترويج لنوع من البطاريات القابلة للشحن على أنها يمكن شحنها بمقدار 99.9% من سعتها السابقة في كل شحنة. إذا كانت السعة الأصلية هي 8 ساعات من التشغيل، فما إجمالي الساعات التي يمكن للبطارية أن تعملها حتى تنتهي؟ 8000 hrs

أوجد مجموع كل متسلسلة لانهائية، إن وجد. 48, 47. ✗ يوجد مجموع.

44. $\frac{7}{5} + \frac{21}{20} + \frac{63}{80} + \ldots$ $\frac{28}{5}$

45. $\frac{15}{4} + \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + \ldots$ $\frac{45}{4}$

46. $-\frac{36}{9} + \frac{4}{3} - 1 + \ldots$ $\frac{64}{63}$

47. $\frac{15}{8} + \frac{5}{2} + \frac{30}{3} + \ldots$

48. $\frac{21}{16} + \frac{7}{4} + \frac{7}{3} + \ldots$

49. $-\frac{18}{7} + \frac{12}{7} - \frac{8}{7} + \ldots$ $\frac{54}{35}$

50. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستخدم مربعا من الورق يبلغ طول ضلعه 8 سنتيمترات على الأقل.

a. **عمليا** افترض أن المربع على وحدة واحدة. اقطع نصفا واحدا من المربع. وأطلق على هذه القطعة الحد 1. ثم اقطع نصفا واحدا من الجزء المتبقي من الورقة. وأطلق على هذه القطعة الحد 2. استمر في قطع الجزء المتبقي من الورقة إلى أنصاف وأطلق عليها عدد الحدود إلى أن تنتهي الورقة. ثم أدرج الكسور التي تمثلها هذه القطع في قائمة. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

50c. تبلغ مساحة المربع الأصلي 1 وحدة، ولا يمكن أن تتجاوز مساحة جميع القطع العدد 1.

b. **عدديا** إذا كنت تستطيع قطع المربعات بشكل لانهائي، فسيكون لديك متسلسلة لانهائية. أوجد مجموع هذه المتسلسلة. 1

c. **لفظيا** كيف يرتبط مجموع المتسلسلات بالورقة الأصلية المربعة؟

51. **الفيزياء** في تجربة فيزياء، تتم زيادة سرعة كرة معدنية على مسار مصطح. ثم تتدحرج بحرية. بعد الدقيقة الأولى، تدحرجت الكرة 120 مترا. وفي كل دقيقة تقطع الكرة 40% فقط من المسافة التي قطعتها خلال الدقيقة السابقة. ما المسافة التي تقطعها الكرة؟ 200 m

52. **البندول** يقطع بندول 12 سنتيمترا في الأرجحة الأولى و95% من المسافة التي قطعها في الأرجحة السابقة. أوجد إجمالي المسافة التي قطعها البندول عند استخراره. 240 cm

53. **الألعاب** إذا كانت هناك كرة مطاطية تستطيع القفز بمقدار 95% من الارتفاع الأصلي. فما إجمالي المسافة العمودية التي سوف تقطعها إذا سقطت على ارتفاع 30 مترا؟ 1170 m

54. **السيارات** خلال فحص صيانة لسيارة، تم نزع إطار وتدويره على آلة فحص. وعند إيقاف تشغيل الآلة، يكمل التدوير للإطار 20 دورة في الثانية الأولى، و98% من الدورات للثانية أخرى. كم عدد الدورات التي يكملها الإطار قبل أن يتوقف عن الدوران؟ 1000 دورة

*يشير المتحفظ نسبة المرابحة إلى مبلغ المال الذي يتم سداده أو تلقيه عند الإقراض أو الإيداع. إذا اقترض عميل مبلغا ماليا من المصرف، فإنه يسدد للمصرف نسبة مرابحة تطبر استخدام المال من المصرف. وإذا ادخر عميل مبلغا ماليا في حساب مصرفي، فإن المصرف يدفع له نسبة مرابحة تطبر استخدام مال العميل.

ويطلق على المبلغ المالي الأصلي الذي تم إقراضه أو ادخاره رأس المال. وتمثل نسبة المرابحة نسبة مئوية للمبلغ الذي يتلقاه العميل أو يسدده خلال فترة زمنية محددة. ونسبة المرابحة المبسطة هي مبلغ نسبة المرابحة الذي يتلقاه العميل أو يسدده بعد تطبيق نسبة المرابحة على رأس المال.

نسبة المرابحة المبسطة (I) هي ناتج ضرب ثلاث قيم: رأس المال (P) ونسبة المرابحة المكتوبة في صورة كسر عشري (r)، والفترة الزمنية (t): $I = P \cdot r \cdot t$

575

472 / 66

Scanned by CamScanner

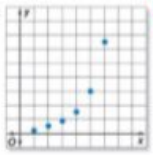
●●●○○ etisalat 4G 5:19 PM 41%
elib.moe.gov.ae

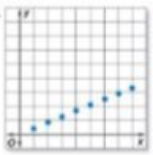
55. **الاقتصاد** قررت الحكومة تحفيز اقتصادها من خلال إعطاء كل شخص بالغ AED 500، واقترحت الحكومة أن كل فرد استلم هذا المبلغ سينفق 80% منه على سلع استهلاكية. وسينفق المنتجون في المقابل 80% على المبلغ الاستهلاكية. ما مقدار المبلغ الذي تتسبب الاقتصاد تظير كل AED 500 قدمتها الحكومة؟ **AED 2500**

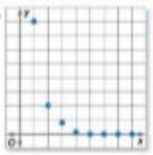
56. **متحف العلوم** يقدم معرض في متحف للعلوم فرصة للزوار باختبار حركة جسم ما على الزنبرك. سحب أحد الزوار الجسم لأسفل وأطلقه للحركة. قطع الجسم مسافة 1.2 متر لأعلى قبل الرجوع مرة أخرى للجهة المقابلة. وفي كل مرة يغير فيها الجسم اتجاهه، تقل المسافة التي يقطعها بمقدار 20% عند مقارنتها بالمسافة التي قطعها في الاتجاه السابق. أوجد إجمالي المسافة التي قطعها الجسم؟ **6 m**

63. **الإجابة النموذجية:** يكون للمتسلسلة الهندسية اللانهائية مجموعا عندما تكون للنسبة المشتركة قيمة مطلقة أقل من 1. وعندما يحدث ذلك، ستقترب الحدود من 0 كلما اقترب n من اللانهاية. وفي الحدود المستقبلية التي تساوي 0 تقريبا، سيقترب مجموع المتسلسلات من حد ما. وعندما تساوي النسبة المشتركة 1 أو أكبر، فإن الحدود سوف تستمر في الزيادة وتقترب من اللانهاية كلما اقترب n من اللانهاية ولن يكون هناك حد لمجموع المتسلسلات.

صل كل تمثيل بياني بالوصف المقابل له.

57. 

b 58. 

d 59. 

a

a. متسلسلة هندسية تقاربية
b. متسلسلة هندسية تباعدية
c. متسلسلة حسابية تقاربية
d. متسلسلة حسابية تباعدية

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

60. **تحليل الخطأ** حاول محمود وفالح إيجاد مجموع ... − 1 + 1 − 1.
هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

محمود	فالح
المجموع يساوي 0 نظرا لأن مجموع كل زوج من حدود المتتالية يساوي 0.	لا يوجد مجموع نظرا لأن $\|r\| \geq 1$. والمتسلسلة تتباعد.

61. **البرهان** اشتق صيغة لمجموع المتسلسلات الهندسية اللانهائية. **انظر الهامش.**

62. **تحد** ما قيمة b التي تجعل للمتسلسلة ... + $3 + 9b + 27b^2 + 81b^3$ مجموعا؟ $-\frac{1}{3} < b < \frac{1}{3}$

63. **التبرير** متى يكون للمتسلسلة الهندسية اللانهائية مجموعا؟ ومتى لا يكون لها مجموعا؟ اشرح استنتاجك.

64. **الفرضيات** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أحيانا أم دائما أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

إذا كانت القيمة المطلقة لحد في أي متسلسلة هندسية أكبر من القيمة المطلقة للحد السابق له، فإن المتسلسلة تكون تباعدية.

64. الإجابة النموذجية: أحيانا؛ العبارة صحيحة لجميع المتسلسلات الهندسية اللانهائية.

65. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب متسلسلة لانهائية بحيث يتقارب مجموعها من 9.

66. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب ... − 3 + 6 − 12 باستخدام الرمز سيجما بطريقتين مختلفتين.

67. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا تكون المتسلسلة الحسابية دائما تباعدية. **انظر الهامش.**

تدريس الممارسات في الرياضيات

الفرضيات يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات فهم واستخدام الفرضيات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقا في بناء الفرضيات. ويضعون فرضيات ويبنون نقدا منطقيا للمسائل لاستكشاف حقيقة تقديراتهم. كما يمكنهم تحليل المواقف بتقسيمها إلى حالات. ويمكنهم التعرف على الأمثلة المضادة واستخدامها.

انتبه!
تحليل الخطأ في التمرين 60، ذكّر الطلاب بأن قيمة r تحدد ما إذا كانت المتسلسلة الهندسية اللا نهائية تقاربية أم تباعدية.

ملاحظات لحل التمرين

الصيغة في التمرين 71، قد يحتاج الطلاب إلى تذكيرهم بأن صيغة حجم الكرة هي $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

إجابات إضافية

60. الإجابة النموذجية: فالح؛ النسبة المشتركة للمتسلسلة هي $r = -1$. إذا القيمة المطلقة هي $r = 1$ والمتسلسلة تباعدية.

61. الإجابة النموذجية: مجموع المتسلسلة الهندسية هو $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$. في المتسلسلة اللا نهائية حيث $|r| < 1$. $r^n \to 0$ في صورة $n \to \infty$. ومن ثم، $\frac{a_1}{1 - r}$ أو $S = \frac{a_1 - a_1(0)}{1 - r}$

67. المتسلسلة الحسابية تحتوي على فرق مشترك. وبالتالي سيصبح كل حد في النهاية إيجابيا أكثر أو سلبيا أكثر، ولكنه لن يقترب أبدا من الصفر. ومع عدم اقتراب الحدود من 0، فلن يبلغ المجموع نهاية أبدا ولا تكون المتسلسلة تقاربية.

472 / 67
Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:19 PM 41%
elib.moe.gov.ae

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب

جهّز عدة نسخ من كل واحدة من المتسلسلات الهندسية اللا نهائية الخمس المختلفة–بعضها لها مجموع وبعضها الآخر لا. امنح كل طالب نسخة من متسلسلة واحدة. وبينما يغادر الطلاب غرفة الصف الدراسي، اطلب منهم إخبارك ما إذا كانت المتسلسلات تقاربية أم تباعدية.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للمفاهيم في الدروس 3-9 و 4-9.

تدريب على الاختبار المعياري

68. SAT/ACT ما مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي يبلغ حدها الأول 27 ونسبة النسبة المشتركة الخاصة بها $\frac{2}{3}$؟ **E**

A 18
B 34
C 41
D 65
E 81

69. قام كل من حارب وحميد وحميد وحيدان بتبسيط نفس التعبير على اللوحة. وفيما يلي حل كل طالب منهم. وقال المعلم بأن اثنين منهما قد توصلا إلى الإجابة الصحيحة. بينما لا يوجد سوى طالب واحد توصل إلى الاستنتاج الصحيح باستخدام الخطوات الصحيحة. **H**

حل حارب
$x^3x^{-5} = \frac{x^3}{x^{-5}}$
$= x^2, x \neq 0$

حل حميد
$x^3x^{-5} = \frac{x^3}{x^{-5}}$
$= x^{-5}, x \neq 0$

حل حميد
$x^3x^{-5} = \frac{x^3}{x^5}$
$= \frac{1}{x^2}, x \neq 0$

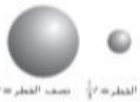
حل حيدان
$x^3x^{-5} = \frac{x^3}{x^5}$
$= x^3, x \neq 0$

أي حل يمثل التبسيط الدقيق بالكامل؟

F حل حارب
G حل حميد
H حل حميد
J حل حيدان

70. الإجابة الشبكية قدر $\log_9 60$ إلى أقرب جزء من المئة. **1.97**

71. الهندسة تم ضرب نصف قطر كرة كبيرة في العامل $\frac{1}{3}$ لإنتاج كرة أصغر. **C**



ما حجم الكرة الصغيرة مقارنة بحجم الكرة الكبيرة؟

A يبلغ حجم الكرة الصغيرة $\frac{1}{9}$ من حجم الكرة الكبيرة.
B يبلغ حجم الكرة الصغيرة $\frac{1}{81}$ من حجم الكرة الكبيرة.
C يبلغ حجم الكرة الصغيرة $\frac{1}{27}$ من حجم الكرة الكبيرة.
D يبلغ حجم الكرة الصغيرة $\frac{1}{3}$ من حجم الكرة الكبيرة.

مراجعة شاملة

72. المسابقات تعقد تجارب أداء المسابقة التلفزيونية. وفي نهاية كل جولة، يتم استبعاد نصف المرشحين المحتملين من المسابقة. وفي يوم محدد، يبدأ 542 متسابقا تجارب الأداء. الدرس 3-9

a. اكتب معادلة لإيجاد عدد المتسابقين المتبقين بعد عدد n من الجولات. $a_n = 524\left(\frac{1}{2}\right)^n$

b. باستخدام هذه الطريقة، هل عدد المتسابقين الذين سيتم استبعادهم سيكون دائما عبارة عن عدد كلي؟ اشرح.

لا؛ في نهاية الجولة الثالثة، سيكون هناك 131 منافسا ونصف هذا العدد يساوي 65.5.

73. النوادي يتكون ناد لخياطة اللحف من 9 أعضاء. كل أسبوع، يجب على كل عضو أن يحضر معه مربعا من لحاف قد انتهى من خياطته. الدرس 2-9

a. أوجد الحدود الثمانية الأولى للمتتالية التي تصف إجمالي عدد اللحف المربعة التي تمت خياطتها بعد كل اجتماع. 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72

b. هناك لحاف واحد تبلغ أبعاده 144 سنتيمترا في 168 سنتيمترا. ويتم تصميمه باستخدام مربعات طول ضلعها 8 سنتيمترات. بعد كم اجتماع سيتم الانتهاء من خياطة اللحاف؟ 42 اجتماعا

مراجعة المهارات

أوجد قيمة كل دالة.

74. $f(x) = 5x - 9$, $f(6)$ 21
75. $g(x) = x^2 - x$, $g(4)$ 12
76. $h(x) = x^2 - 2x - 1$, $h(3)$ 2

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز OL BL

التوسّع اطلب من الطلاب العمل في مجموعات ثنائية وتبادل الأدوار في كتابة الكسور العشرية المتكررة وتحدي الزملاء في التعبير عنها في صورة كسور اعتيادية.

472 / 68
Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:19 PM 41%
elib.moe.gov.ae

9-4 مختبر تقنية التمثيل البياني: الحدود

قد تكون لاحظت أنه في بعض المتتاليات الهندسية، كلما اقترب حد المتتالية من النهاية، اقترب أكثر من الصفر. هناك طريقة أخرى لوصف هذا الأمر وهي أنه كلما زاد n، اقترب a_n من الصفر. وتقترب قيمة حد المتتالية في هذه الحالة من الصفر. ويطلق عليه **حد** المتتالية. قد يكون هناك حدود لمتتاليات أخرى لانهائية. إذا كانت حدود متتالية لا تقترب من القيمة الفريدة، يمكننا القول بأن حد المتتالية غير موجود.

يمكنك استخدام حاسبة للتمثيل البياني من نوع TI-83/84 Plus لمساعدتك على إيجاد حدود المتتاليات اللانهائية.

النشاط

أوجد حد المتتالية الهندسية $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots$.

الخطوة 1 أدخل المتتالية.

صيغة المتتالية هي $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

- ضع المؤشر على L1 في شاشة STAT EDIT 1: Edit... وأدخل الصيغة seq(N,N,1,10,1) وستظهر أمامك القيم 1, 2, ..., 10 للمؤشر N.

خطوات العملية على الحاسبة: STAT ENTER ▲ 2nd [STAT] ▶ 5 X,T,θ,n , X,T,θ,n 1 , 10 , 1) ENTER

- ضع المؤشر على L2 وأدخل الصيغة seq((1/4)^(N-1),N,1,10,1) وستظهر أمامك الحدود العشرة الأولى من المتتالية.

خطوات العملية على الحاسبة: ▶ ▲ 2nd [STAT] ▶ 5 (1 ÷ 4) ^ (X,T,θ,n − 1 , X,T,θ,n , 1 , 10 , 1) ENTER

[0, 10] scl: 1 by [0, 1] scl: 0.1

لاحظ أنه كلما ازداد n، تصبح حدود المتتالية المعطاة أقرب وأقرب إلى الصفر. وإذا قمت بالتمرير لأسفل، فسوف ترى أنه عندما يكون $n \geq 6$، تصبح الحدود أقرب ما تكون إلى الصفر بحيث تعبر عنها الحاسبة بالرموز العلمية. ويبرز هذا حد المتتالية على أنه يساوي 0.

الخطوة 2 مثل المتتالية بيانيا.

استخدم خيار STAT PLOT لتمثيل المتتالية بيانيا. واستخدم L1 على أنه Xlist و L2 على أنه Ylist.

يوضح التمثيل البياني كذلك أنه كلما ازداد n، تقترب الحدود من الصفر. وفي الحقيقة بالنسبة لـ $n \geq 3$، يبدو أن العلامات تقع على المحور الأفقي. ويقترح هذا بشدة أن حد المتتالية يساوي 0.

التدريبات

أوجد حد كل متتالية.

1. $a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ 0
2. $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ 0
3. $a_n = 5^n$ غير موجود
4. $a_n = \frac{1}{n^2}$ 0
5. $a_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$ 1
6. $a_n = \frac{n^2}{n+2}$ غير موجود

1 التركيز

الهدف استخدام حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف حدود المتسلسلات.

المواد

- حاسبة التمثيل البياني TI-83/84 Plus أو حاسبة تمثيل بياني من نوع آخر

نصيحة للتدريس

يتم تمثيل المخطط الإحصائي للمتتاليات بيانيًا بنفس طريقة أي مخطط إحصائي. ومن الضروري أن تحتوي القوائم L1 و L2 على نفس عدد العناصر.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

اطلب من الطلاب العمل في مجموعات ثنائية بحيث يمكنهم مساعدة بعضهم البعض في تصحيح أخطاء خطوات العملية على الحاسبة. ثم اطلب منهم الخطوتين 2–1 في النشاط والتمرينين 2–1.

- إذا واجه الطلاب صعوبة في إعداد قائمة المتتالية، فتأكد من أنهم يضعون السهم على اسم القائمة، وليس على أول عنصر فيها.
- وقد يحتاج الطلاب إلى تذكيرهم بكيفية قراءة الترميز العلمي كما يظهر في الحاسبة (مثلاً، 4.572E−4 تمثل العدد 4.572×10^{-4}).
- احرص على إدراك الطلاب أنه حتى يكون للمتتالية حد، فيجب أن تستمر قيم الحدود المتعاقبة في الاقتراب أكثر من القيمة الحدية.

التمرين اطلب من الطلاب إكمال التمارين 6–3.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرين 6 لتقويم ما إذا استوعب الطلاب كيفية تمييز عدم وجود حد للمتتالية.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب فحص المتتالية $a_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$ في التمرين 5. واجعلهم يقسموا البسط والمقام على 3^n واطلب منهم استخدام النتيجة لتفسير لماذا يجب أن يساوي حد المتتالية 1.

472 / 69
Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:19 PM 40%
elib.moe.gov.ae

التقويم التكويني

استخدم اختبار نصف الوحدة لتقويم مدى تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

بالنسبة للمسائل المجاب عنها بشكل خاطئ، كلّف الطلاب بمراجعة الدروس المشار إليها بين الأقواس.

المطويات منظّم الدراسة

المطويات® دينا زايك

قبل أن ينتهي الطلاب من اختبار نصف الوحدة، شجعهم على مراجعة معلومات الدروس من 1-9 إلى 4-9 المكتوبة في مطوياتهم.

إجابات إضافية

3a. لا، سيتبقى لديها 11 منزلاً ليبيعهم خلال 4 أشهر. وإذا باعت منزلين في الشهر طوال الأشهر الأربعة المتبقية، فستبيع 8 منازل أخرى فقط.

4b. نعم. إذا كان $2n + 2 = 84$، $n = 41$. في الشكل 41، سيكون هناك 84 مربعًا أبيض.

اختبار نصف الوحدة

الدروس من 1-9 إلى 4-9

حدد ما إذا كانت كل متتالية حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك. اشرح استنتاجك. (الدرس 1-9)

1. $5, -3, -12, -22, -33, \ldots$
ليست أيًا منهما؛ لا توجد نسبة مشتركة أو فرق مشترك

2. $\frac{1}{5}, \frac{7}{10}, \frac{6}{5}, \frac{17}{10}, \frac{11}{5}, \ldots$
حسابية؛ الفرق المشترك يبلغ $\frac{1}{2}$

3. **الإسكان** تعمل سهى وكيلة عقارات. ويجب عليها بيع 15 منزلاً خلال 6 أشهر. (الدرس 1-9)

a. بنهاية أول شهرين، كانت قد باعت 4 منازل. إذا باعت منزلين كل شهر خلال ما تبقى من الستة أشهر، فهل ستبلغ الهدف المحدد لها؟ اشرح. انظر الهامش.

b. إذا باعت 5 منازل بنهاية الشهر الأول، فما متوسط عدد المنازل التي عليها بيعها كل شهر لبلوغ الهدف المحدد لها؟ منزلان

4. **الهندسة** توضح الأشكال التالية نمطًا من المربعات المظللة والمربعات البيضاء. (الدرس 1-9)

a. اكتب معادلة تمثل العدد النوني في هذا النمط، حيث n هو عدد المربعات البيضاء. $a_n = 2n + 2$

b. هل من الممكن الحصول على 84 مربعًا أبيض تمامًا في ترتيب ما؟ اشرح. انظر الهامش.

أوجد الحد الموضح لكل متتالية حسابية. (الدرس 2-9)

5. $a_1 = 10, d = -5, n = 9$ -30
6. $a_1 = -8, d = 4, n = 99$ 384

أوجد مجموع كل متسلسلة حسابية. (الدرس 2-9)

7. $-15 + (-11) + (-7) + \cdots + 53$ 342
8. $a_1 = -12, d = 8, n = 22$ 1584
9. $\sum_{n=9}^{10} (-3n + 1)$ -3620

10. **الاختيار من متعدد** ما مجموع أول 50 عددًا فرديًا؟ (الدرس 2-9) B

A 2550
B 2500
C 2499
D 2401

أوجد الحد الموضح لكل متتالية هندسية. (الدرس 3-9)

11. $a_2 = 8, r = 2, a_8 = ?$ 512
12. $a_3 = 0.5, r = 8, a_{10} = ?$ $1,048,576$

13. **الاختيار من متعدد** ما الأوساط الهندسية للمتتالية الواردة أدناه؟ (الدرس 3-9) J

0.5, _____, _____, _____, 2048

F 512.375, 1024.25, 1536.125
G 683, 1365.5, 2048
H 2, 8, 32
J 4, 32, 256

14. **الدخل** يعمل فهد في شركة لتشييد المنازل لمدة 4 أشهر كل عام. وقد بدأ براتب شهري AED 9000 في الشهر. وفي نهاية كل شهر، يزداد راتبه بمقدار 5%. ما مقدار المال الذي سيتقاضاه خلال الأربعة أشهر؟ (الدرس 3-9) AED 38,791.13

أوجد قيمة مجموع كل متسلسلة هندسية. (الدرس 3-9)

15. $\sum_{n=1}^{8} 3 \cdot 2^{n-1}$ 765
16. $\sum_{n=1}^{5} 4 \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1}$ 4
17. $\sum_{n=1}^{20} -2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ -5.998

أوجد مجموع كل دالة لانهائية، إن وجد. (الدرس 4-9)

18. $\sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 2^{n-1}$ لا يوجد مجموع.
19. $\sum_{n=1}^{\infty} (4) \cdot (0.5)^{n-1}$ 8
20. $\sum_{n=1}^{\infty} 12 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ 36

472 / 70
Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:20 PM 40%
elib.moe.gov.ae

9-5 التكرار والإعادة

السابق	الحالي	لماذا؟
• لقد قمت باستكشاف مكونات الدوال.	1 التعرف على المتتاليات الخاصة واستخدامها.	• تولد أنثى نحل العسل عندما تتزاوج الملكة مع ذكر نحل. ويكون للأنثى والدين وهما الأب والأم. إلا أن ذكر نحل العسل يولد من بيض الملكة غير المخصب. وبذلك يكون لديه والد واحد فقط وهو الأم. وتتبع شجرة عائلة نحل العسل متتالية خاصة.
	2 دوال التكرار.	

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 9-5 استكشاف تركيب الدوال.

الدرس 9-5 التعرف على المتتاليات الخاصة واستخدامها، وإعادة الدوال.

بعد الدرس 9-5 استخدام الاستقراء الرياضي لإثبات العبارات.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما العدد الذي يأتي بعد 8 في هذه المتتالية؟ 13
- هل هذه المتتالية متتالية حسابية؟ لا
- هل هي متتالية هندسية؟ لا
  اشرح. لأنه لا يوجد فرق مشترك ولا نسبة مشتركة.

1 المتتاليات الخاصة

المثال 1 يبين كيفية استخدام الصيغة التكرارية لإيجاد حدود المتتالية. ويبين **المثال 2** كيفية كتابة صيغة تكرارية (ضمنية). ويبين **المثال 3** كيفية استخدام صيغة تكرارية (ضمنية) لتمثل موقفًا من الحياة اليومية.

المفردات الجديدة

متتالية فيبوناتشي
Fibonacci sequence
متتالية تكرارية
recursive sequence
صيغة صريحة
explicit formula
صيغة تكرارية
recursive formula
التكرار iteration

ممارسات في الرياضيات
مراعاة الدقة.
البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 المتتاليات الخاصة

لاحظ أن كل حد موجود في قائمة الآباء يساوي مجموع الحدين السابقين. ويطلق على هذه المتتالية الخاصة **متتالية فيبوناتشي**، وتوجد في العديد من الأمثلة في الطبيعة. وتعد متتالية فيبوناتشي مثالا على **المتتالية التكرارية** في المتتالية التكرارية. يتم تحديد كل حد باستخدام حد واحد أو أكثر من الحدود السابقة.

تندرج الصيغ التي استخدمتها حتى الآن في المتتاليات تحت الصيغ الصريحة. تنتج **الصيغة الصريحة** a_n في صورة دالة لـ n. مثل $a_n = 3n + 1$. تعد الصيغة التي تصف متتالية فيبوناتشي: $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$. **صيغة تكرارية**.

وهذا يعني أن كل حد سيتم تحديده باستخدام حد واحد أو أكثر من الحدود السابقة. ويجب أن تحصل على الحد الأولي في الصيغة التكرارية.

المفهوم الأساسي الصيغ التكرارية للمتتاليات

المتتالية الحسابية	$a_n = a_{n-1} + d$، حيث d هو الفرق المشترك.
المتتالية الهندسية	$a_n = r \cdot a_{n-1}$، حيث r هو النسبة المشتركة.

مثال 1 استخدام صيغة تكرارية

أوجد الحدود الخمسة الأولى للمتتالية التي فيها $a_1 = -3$ و $a_{n+1} = 4a_n - 2$، إذا كان $n \geq 1$.

صيغة تكرارية $a_{n+1} = 4a_n - 2$

$n = 1$ $a_{1+1} = 4a_1 - 2$

$a_2 = -14$ أو $4(-3) - 2$ $a_2 = -3$

$a_3 = -58$ أو $4(-14) - 2$ $a_3 = -14$

$a_4 = -234$ أو $4(-58) - 2$ $a_4 = -58$

$a_5 = -938$ أو $4(-234) - 2$ $a_5 = -234$

الحدود الخمسة الأولى للمتتالية هي -3، و -14، و -58، و -234، و -938.

تمرين موجه

1. أوجد قيمة الحدود الخمسة للمتتالية التي يكون فيها $a_1 = 8$ و $a_{n+1} = -3a_n + 6$، إذا كان $n \geq 1$.
   8, −18, 60, −174, 528

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:20 PM 40%
elib.moe.gov.ae

لإيجاد صيغة تكرارية. حدد أولا الحد الأولي. ثم قيم النمط لإيجاد الحدود التالية. ولا تشتمل الصيغة التكرارية التي تنتج متتالية على قيمة الحد الأولي.

مثال 2 كتابة الصيغ التكرارية

اكتب صيغة تكرارية لكل متتالية مما يلي.

a. 2, 10, 18, 26, 34, ...

الخطوة 1 حدد ما إذا كانت المتتالية حسابية أم هندسية. المتتالية حسابية لأنه يمكن إيجاد كل حد بلي الحد الأول من خلال إضافة فرق مشترك.

الخطوة 2 أوجد الفرق المشترك.

$d = 10 - 2$ أو 8

الخطوة 3 اكتب الصيغة التكرارية.

$a_n = a_{n-1} + d$ صيغة تكرارية للمتتالية الحسابية

$a_n = a_{n-1} + 8$ $d = 8$

الصيغة التكرارية للمتتالية هي $a_n = a_{n-1} + 8$, $a_1 = 2$.

b. 16, 56, 196, 686, 2401, ...

الخطوة 1 حدد ما إذا كانت المتتالية حسابية أم هندسية. المتتالية هندسية لأنه يمكن إيجاد كل حد بلي الحد الأول بعد الضرب في النسبة المشتركة.

الخطوة 2 أوجد النسبة المشتركة.

$r = \frac{56}{16}$ أو 3.5

الخطوة 3 اكتب الصيغة التكرارية.

$a_n = r \cdot a_{n-1}$ صيغة تكرارية للمتتالية الهندسية

$a_n = 3.5\, a_{n-1}$ $r = 3.5$

الصيغة التكرارية للمتتالية هي $a_n = 3.5\, a_{n-1}$, $a_1 = 16$.

c. $r = 3$ و $a_4 = 108$

الخطوة 1 حدد ما إذا كانت المتتالية حسابية أم هندسية. نظرا لأن r معطى. فإن المتتالية هندسية.

الخطوة 2 اكتب الصيغة التكرارية.

$a_n = r \cdot a_{n-1}$ صيغة تكرارية للمتتالية الهندسية

$a_n = 3\, a_{n-1}$ $r = 3$

الصيغة التكرارية للمتتالية هي $a_n = 3\, a_{n-1}$, $a_1 = 4$.

تمرين موجه

اكتب صيغة تكرارية لكل متتالية مما يلي.

2A. 8, 20, 50, 125, 312.5, ... **2B.** 8, 17, 26, 35, 44, ... **2C.** $a_3 = 16$ و $r = 4$

نصيحة دراسية

المتتاليات والصيغ التكرارية كما هو الحال في المتتاليات الهندسية، فإن الصيغ التكرارية تحدد الدوال التي يكون فيها المجال عبارة عن مجموعة من الأعداد الصحيحة الموجبة. ويشار إليها بعدد الحدود n.

2A. $a_n = 2.5a_{n-1}$, $a_1 = 8$
2B. $a_n = a_{n-1} + 9$, $a_1 = 8$
2C. $a_n = 4a_{n-1}$, $a_1 = 1$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد الحدود الخمسة الأولى في المتتالية، حيث يكون $a_1 = 5$ و $a_{n+1} = 2a_n + 7$ و $n \geq 1$.
5, 17, 41, 89, 185

2 اكتب صيغة تكرارية (ضمنية) لكل متتالية.

a. 3, 10, 17, 24, 31, . . .
$a_1 = 3; a_n = a_{n-1} + 7$

b. 5, 20, 80, 320, 1280, . . .
$a_1 = 5; a_n = 4 \cdot a_{n-1}$

c. $a_3 = 6$ و $d = 5$
$a_1 = -4; a_n = a_{n-1} + 5$

انتبه!

تجنب المفاهيم الخاطئة تأكد من فهم الطلاب أنك تستخدم قيمة حد واحد لإيجاد قيمة الحد التالي عندما تكون المتتالية بالصيغة التكرارية. ووضّح أن $a_n = a_1 + (n-1)d$ و $a_n = a_1 r^{n-1}$ ليست صيغًا تكرارية. تحدد هذه الصيغ الصريحة كل حد بالعدد n للحد وليس بقيمة الحد السابق له.

Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:20 PM 40%
elib.moe.gov.ae

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام صيغة تكرارية

المعرفة المالية كان لدى ناصر AED 15,000 في مديونية البطاقة الائتمانية عندما تخرج من الكلية. وقد ازداد الرصيد بمقدار 2% كل شهر بفعل نسبة المرابحة. ولا يمكن لناصر أن يسدد سوى AED 400 كل شهر. اكتب صيغة تكرارية لرصيد حسابه لكل شهر. ثم حدد الرصيد بعد مرور خمسة أشهر.

الخطوة 1 اكتب الصيغة التكرارية.

يفرض أن a_n تمثل رصيد الحساب في عدد n من الشهور. وبلغ الرصيد الأولي a_1 AED 15,000. بعد شهر واحد **تمت إضافة نسبة المرابحة وتم السداد.**

الرصيد الأولي		الرصيد في 2%		مبلغ السداد الشهري
a_2 =	a_1	+ $(a_1 \times 0.02)$	−	400

$a_2 = 1.02\,a_1 - 400$

الصيغة هي $a_n = 1.02a_{n-1} - 400$.

الخطوة 2 أوجد الحدود الخمسة التالية.

صيغة تكرارية	
$a_n = 1.02\,a_{n-1} - 400$	$a_1 = 15{,}000$
$a_2 = (15{,}000 \times 1.02) - 400$ أو 14,900	$a_2 = 14{,}900$
$a_3 = (14{,}900 \times 1.02) - 400$ أو 14,798	$a_3 = 14{,}798$
$a_4 = (14{,}798 \times 1.02) - 400$ أو 14,693.96	$a_4 = 14{,}693.96$
$a_5 = (14{,}693.96 \times 1.02) - 400$ أو 14,587.84	$a_5 = 14{,}587.84$
$a_6 = (14{,}587.84 \times 1.02) - 400$ أو 14,479.60	

بعد الشهر الخامس، سيصبح الرصيد AED 14,479.60.

تمرين موجه

3. $a_n = 1.025\,a_{n-1} - 600;\ a_1 = 10{,}000;$ AED 10,000, AED 9650, AED 9291.25, AED 8923.53, AED 8546.62

3. اكتب صيغة تكرارية لدين بلغ AED 10,000، ونسبة المرابحة بفيمة 2.5% كل شهر، مع سداد مبلغ AED 600 كل شهر. ثم أوجد المبالغ الخمس الأولى التي كانت متوفرة في الرصيد.

الربط بالحياة اليومية
في عام 2008، بلغ متوسط مديونية البطاقات الائتمانية لطلاب الكليات حوالي AED 3173.
المصدر: USA Today صندوق

2 الإعادة

مراجعة المفردات
تركيب الدوال
يتم تنفيذ دالة، ثم يتم تنفيذ دالة أخرى على ناتج الدالة الأولى.

الإعادة هي عملية تكوين دالة بشكل متكرر من نفسها. تأمل الدالة x_0. الإعادة الأولى هي $f(x_0)$، والإعادة الثانية هي $f(f(x_0))$، والإعادة الثالثة هي $f(f(f(x_0)))$، وهكذا.

يمكن استخدام الإعادة في إنتاج متتالية بشكل تكراري. ابدأ بالقيمة الأولية x_0. افترض أن $x_1 = f(x_0)$، $x_2 = f(f(x_0))$، وهكذا.

مثال 4 إعادة الدالة

أوجد الإعادات الثلاثة الأولى x_1، و x_2، و x_3 للدالة $f(x) = 5x + 4$ للقيمة الأولية التي تبلغ $x_0 = 2$.

$x_1 = f(x_0)$	أعد الدالة
$= 5(2) + 4 = 14$	$x_0 = 2$
$x_2 = f(x_1)$	أعد الدالة
$= 5(14) + 4 = 74$	$x_1 = 14$
$x_3 = f(x_2)$	أعد الدالة
$= 5(74) + 4 = 374$	$x_2 = 74$

الإعادات الثلاثة الأولى هي 14 و 74 و 374.

تمرين موجه

4. أوجد الإعادات الثلاثة الأولى x_1، و x_2، و x_3 للدالة $f(x) = -3x + 8$ للقيمة الأولية التي تبلغ $x_0 = 6$. −10, 38, −106

مثال إضافي

3 الأحياء زرعت الدكتورة حصة خلايا في أطباق مختبرية. وقد بدأت بزراعة 108 خلايا صباح يوم الاثنين. ثم أزالت 20 منها من أجل تجربتها. وفي يوم الثلاثاء، تضاعف عدد الخلايا المتبقية بمعدل 1.5 مرة. ومرة أخرى، أزالت 20. يتكرر هذا النمط كل يوم من أيام الأسبوع. اكتب صيغة تكرارية (ضمنية) لعدد الخلايا التي تجدها الدكتورة حصة كل يوم قبل أن تأخذ منها لتجربتها. وبعد ذلك، حدد عدد الخلايا التي ستجدها في صباح يوم الجمعة.

$c_{n+1} = 1.5(c_n - 20)$ أو $c_{n+1} = 1.5c_n - 30$
$c_1 = 108;\ 303$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

اللوحة البيضاء التفاعلية
اشرح للطلاب كيفية حساب الحدود المتعاقبة باستخدام الصيغة التكرارية. واستخدم ألوانًا مختلفة وأداة التظليل في حساباتك لتساعد في إظهار كيفية ارتباط كل حد بالحد السابق له.

2 الإعادة

المثال 4 يبين كيفية إيجاد الإعادات القليلة الأولى، أو القيم المعادة، للدالة.

مثال إضافي

4 أوجد التكرارات الثلاثة الأولى x_1 و x_2 و x_3 للدالة $f(x) = 3x - 1$ بالقيمة الأولية $x_0 = 5$.
14, 41, 122

التدريس المتمايز OL

المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية اطلب من الطلاب البحث، ثم لعب أحجية برج هانوي. يتمثل الهدف من أحجية برج هانوي في نقل كومة من 8 أقراص بأحجام متدرجة من أحد القضبان الثلاثة إلى قضيب فارغ في أقل عدد من الحركات من خلال القواعد التالية:

- يمكنك تحريك قرص واحد فقط في المرة الواحدة.
- يجب وضع القرص فوق القرص الآخر، وليس أسفله.
- يمكن وضع قرص أصغر فوق قرص أكبر، وليس العكس.

472 / 73
Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:20 PM 40%
elib.moe.gov.ae

التحقق من فهمك

مثال 1 أوجد الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية موضحة. 4. −4, −14, −34, −74, −154

1. $a_1 = 16, a_{n+1} = a_n + 4$ 16, 20, 24, 28, 32
2. $a_1 = -3, a_{n+1} = a_n + 8$ −3, 5, 13, 21, 29
3. $a_1 = 5, a_{n+1} = 3a_n + 2$ 5, 17, 53, 161, 485
4. $a_1 = -4, a_{n+1} = 2a_n - 6$

مثال 2 اكتب صيغة تكرارية لكل متتالية. 6. $a_{n+1} = 3a_n - 1; a_1 = 5$

5. 3, 8, 18, 38, 78, ... $a_{n+1} = 2a_n + 2; a_1 = 3$
6. 5, 14, 41, 122, 365, ...

مثال 3 7. التمويل اشترى فارس آلة تجديف بقيمة AED 1500 ليساعده على التدريب في فريق التجديف بالجامعة. ويستطيع سداد AED 100 فقط في الشهر. وتزداد الفاتورة بمقدار 1% بفعل نسبة المرابحة في نهاية كل شهر. $a_0 = 1.01a_{n-1} - 100, a_1 = 1500$

a. اكتب صيغة تكرارية للمبلغ الذي يدين به فارس في نهاية كل شهر.

b. أوجد المبلغ الذي يدين به فارس بعد مرور الأربعة شهور الأولى. AED 1415, AED 1329.15, AED 1242.44, AED 1154.87

c. ما مقدار نسبة المرابحة التي تراكمت بعد مرور الستة أشهر الأولى؟ AED 77.08

مثال 4 أوجد التكرارات الثلاثة الأولى لكل دالة بالنسبة للقيمة الأولية المعطاة.

8. $f(x) = 5x + 2, x_0 = 8$ 42, 212, 1062
9. $f(x) = -4x + 2, x_0 = 5$ −18, 74, −294
10. $f(x) = 6x + 3, x_0 = -4$ −21, −123, −735
11. $f(x) = 8x - 4, x_0 = -6$ −52, −420, −3364
12. 10, 41, 165, 661, 2645
13. −9, −10, −12, −16, −24

التدريب وحل المسائل

مثال 1 المتابرة أوجد الحدود الخمسة الأولى من كل متتالية موضحة.

12. $a_1 = 10, a_{n+1} = 4a_n + 1$
13. $a_1 = -9, a_{n+1} = 2a_n + 8$
14. $a_1 = 12, a_{n+1} = a_n + n$ 12, 13, 15, 18, 22
15. $a_1 = -4, a_{n+1} = 2a_n + n$ −4, −7, −12, −21, −38
16. $a_1 = 6, a_{n+1} = 3a_n - n$ 6, 17, 49, 144, 428
17. $a_1 = -2, a_{n+1} = 5a_n + 2n$ −2, −8, −36, −174, −862
18. $a_1 = 7, a_2 = 10, a_{n-2} = 2a_n + a_{n+1}$ 7, 10, 24, 44, 92
19. $a_1 = 4, a_2 = 5, a_{n+2} = 4a_n - 2a_{n+1}$ 4, 5, 6, 8, 8
20. $a_1 = 4, a_2 = 3x, a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2}$ 4, 3x, 3x + 16, 15x + 16, 27x + 80
21. $a_1 = 3, a_2 = 2x, a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$ 3, 2x, 8x − 9, 26x − 36, 80x − 117
22. $a_1 = 2, a_2 = x + 3, a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ 2, x + 3, x + 15, 7x + 33, 13x + 123
23. $a_1 = 1, a_2 = x, a_n = 3a_{n-1} + 8a_{n-2}$ 1, x, 3x + 6, 15x + 18, 63x + 90

مثال 2 اكتب صيغة تكرارية لكل متتالية. 24–31. انظر الهامش.

24. 16, 10, 7, 5.5, 4.75, ...
25. 32, 12, 7, 5.75, ...
26. 4, 15, 224, 50,175, ...
27. 1, 2, 9, 730, ...
28. 9, 33, 129, 513, ...
29. 480, 128, 40, 18, ...
30. 393, 132, 45, 16, ...
31. 68, 104, 176, 320, ... 32a. $a_0 = 1.08a_{n-1} + 20000$

مثال 3 32. المعرفة المالية يودع السيد عدنان وشركته AED 20,000 في حساب تقاعده بنهاية كل عام. ويكسب الحساب 8% كنسبة مرابحة قبل كل إيداع.

a. اكتب صيغة تكرارية لرصيد الحساب عند نهاية كل عام.

b. حدد المبلغ الموجود في الحساب عند نهاية كل عام على مدار الأعوام الثمانية الأولى. انظر الهامش.

مثال 4 أوجد التكرارات الثلاثة الأولى لكل دالة بالنسبة للقيمة الأولية المعطاة.

33. $f(x) = 12x + 8, x_0 = 4$ 56, 680, 8168
34. $f(x) = -9x + 1, x_0 = -6$ 55, −494, 4447
35. $f(x) = -6x + 3, x_0 = 8$ −45, 273, −1635
36. $f(x) = 8x + 3, x_0 = -4$ −29, −229, −1829
37. $f(x) = -3x^2 + 9, x_0 = 2$ −3, −18, −963
38. $f(x) = 4x^2 + 3, x_0 = -2$ 21, 1769, 12,517,449
39. $f(x) = 2x^2 - 5x + 1, x_0 = 6$ 43, 3484, 24,259,093
40. $f(x) = -0.25x^2 + x + 6, x_0 = 8$ −2, 3, 6.75
41. $f(x) = x^2 + 2x + 3, x_0 = \frac{1}{2}$ 41, 4.25, 29.5625, 936.0664
42. $f(x) = 2x^2 + x + 1, x_0 = -\frac{1}{2}$ 1, 4, 37

583

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 11 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

المثابرة يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. فيحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف. ويبتكرون فرضيات حول شكل الحل ومعناه ويخططون مسارًا للحل بدلاً من الانتقال ببساطة إلى محاولة الحل.

إجابات إضافية

24. $a_{n+1} = 0.5a_n + 2; a_1 = 16$
25. $a_{n+1} = 0.25a_n + 4; a_1 = 32$
26. $a_{n+1} = (a_n)^2 - 1; a_1 = 4$
27. $a_{n+1} = (a_n)^3 + 1; a_1 = 1$
28. $a_{n+1} = 4a_n - 3; a_1 = 9$
29. $a_{n+1} = 0.25a_n + 8; a_1 = 480$
30. $a_{n+1} = \frac{a_n}{3} + 1; a_1 = 393$
31. $a_{n+1} = 2a_n - 32; a_1 = 84$

32b. a_1 = AED 20,000,
a_2 = AED 41,600,
a_3 = AED 64,928,
a_4 = AED 90,122.24,
a_5 = AED 117,332.02,
a_6 = AED 146,718.58,
a_7 = AED 178,456.07,
a_8 = AED 212,732.56

583

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	12–42, 49, 51–69	13–41 فردي, 54–57	12–42 زوجي, 49, 51–53, 58–69
OL أساسي	13–41 فردي, 43–49, 51–69	12–42, 54–57	43–49, 51–53, 58–69
BL متقدم	(اختياري: 64–69), 43–63		

Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:21 PM 40%
elib.moe.gov.ae

43. **الأنماط الهندسية المتكررة** تأمل الأشكال الموجودة على اليسار. يزداد عدد المثلثات الزرقاء وفق نمط معين.

a. اكتب صيغة تكرارية لعدد المثلثات الزرقاء في متتالية الأشكال. $a_n = 3a_{n-1}, a_1 = 1$

b. كم عدد المثلثات الزرقاء التي ستكون في الشكل السادس؟ 243

44. **المعرفة المالية** يبلغ قسط قرض مأمور الشهري AED 234.85، ونصف الصيغة التكرارية $b_n = 1.005b_{n-1} - 234.85$ الرصيد المتبقي في القرض بعد سداد عدد n من الأقساط. أوجد رصيد قرض يبلغ AED 10,000 بعد سداد كل قسط من الأقساط الثمانية الأولى.

45. **المحافظة على البيئة** افترض أن بحيرة يوجد بها 10,000 سمكة. وبعد عام، كانت نصف السمك الذي نفق أولم اصطياده 80%. ولكن تم تجديد الحياة بالبحيرة بالدفع بمجموعة من 10,000 سمكة. إذا استمر هذا النمط، هل سينعدم السمك من البحيرة؟ إذا كانت الإجابة لا، فهل سيقترب عدد الأسماك في البحيرة إلى أي قيمة محددة؟ اشرح.

46. **الهندسة** تأمل الرسم البياني الموجود على اليسار.

a. اكتب متتالية لإجمالي عدد المثلثات الموجودة في الأشكال الستة الأولى. 1, 4, 10, 19, 31, 46

b. اكتب صيغة تكرارية لعدد المثلثات. $a_n = a_{n-1} + 3(n-1)$

c. كم عدد المثلثات التي ستكون في الشكل العاشر؟ 136

47. **أوراق البيانات** تأمل المتتالية التي فيها $x_0 = 20{,}000$ و $f(x) = 0.3x + 5000$.

a. أدخل x_0 في الخلية A1 بورقة البيانات الخاصة بك. وأدخل "=(0.3)*(A1) + 5000" في الخلية A2. ما النتيجة التي توصلت إليها؟ 11,000

b. انسخ الخلية A2. وظلل الخلايا من A3 إلى A70. والصق الخلية التي نسختها. ماذا تلاحظ بشأن المتتالية؟ إنها تقترب من 7142.857.

c. كيف يساعد ورق البيانات على تحليل المتتاليات التكرارية؟ انظر الهامش.

48. **ألعاب الفيديو** لدى الوحش الأخير في لعبة هداية 100 نقطة طاقة. وخلال المعركة الأخيرة، يكتسب الوحش 10% من نقاط الطاقة لنفسه بعد مرور كل 10 ثوان. إذا استطاعت هداية إلحاق الضرر بالوحش بخفض 10 نقاط من نقاط الطاقة لديه كل 10 ثوان دون إلحاق الضرر بنفسها، فهل يمكنها قتل الوحش بهذه الطريقة؟ إذا كانت الإجابة نعم، فمتى سيمكنها ذلك؟ نعم؛ بين 250 و 260 ثانية

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

49. **النقد** يوجد كل من سلطان وسعيد التكرارات الثلاثة الأولى للدالة $f(x) = 5x - 3$ للقيمة الأولية لـ $x_0 = 4$. هل أحدهما على صواب؟ اشرح.

سلطان	سعيد
$f(4) = 5(4) - 3$ أو 17	$f(4) = 5(4) - 3$ أو 17
$f(17) = 5(17) - 3$ أو 82	$f(17) = 5(17) - 3$ أو 82
التكرارات الثلاثة الأولى هي 4 و 17 و 82.	$f(82) = 5(82) - 3$ أو 407
	التكرارات الثلاثة الأولى هي 17 و 82 و 407.

50. **تحد** أوجد الصيغة التكرارية لـ ... 5, 23, 98, 401, ... $a_{n+1} = 4a_n + 3n, a_1 = 5$

51. **الاستنتاج** هل العبارة "إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى لمتتالية هي نفسها، فإن المتتالية ليست تكرارية" صحيحة أحيانا، أم دائما، أم غير صحيحة دائما؟ اشرح استنتاجك.

52. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب دالة تكون التكرارات الثلاثة الأولى فيها هي 9، و 19، و 39. انظر الهامش.

53. **الكتابة في الرياضيات** لماذا من المفيد تمثيل متتالية بصيغة صريحة أو تكرارية؟ انظر الهامش.

McGraw-Hill Education جميع الحقوق محفوظة لصالح مؤسسة التعليم والتأليف ©

إجابات إضافية

47c. الإجابة النموذجية: إنهم يسهّلون تحليل المتتاليات التكرارية لأنه يمكنهم تقديم أول 100 حد على الفور، وسيستغرق حساب الحدود يدويًا وقتًا أطول.

51. الإجابة النموذجية: أحيانًا، يمكن أن تتضمن الصيغة التكرارية الحدود الثلاثة الأولى. على سبيل المثال، 2, 2, 2, 8, 20, . . . متكررة مع $a_n + 3 = a_n + a_{n+1} + 2a_{n+2}$

44. AED 9815.15, AED 9629.38, AED 9442.67, AED 9255.04, AED 9066.46, AED 8876.94, AED 8686.48, AED 8495.06

45. لا؛ سيصل عدد السمك إلى 12,500 كل عام. تكون هناك 20% من 12,500 أو 2500 سمكة زائد 10,000 سمكة إضافية، فيصبح المجموع 12,500 سمكة.

49. سعيد؛ أدرج سلطان x_0 مع التكرارات، وتوصل إلى أول تكرارين فقط.

52. الإجابة النموذجية: $f(x) = 2x + 1$, $x_0 = 4$

472 / 75
Scanned by CamScanner

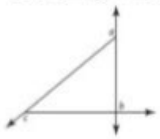
●●○○○ etisalat 4G 5:21 PM 40%
elib.moe.gov.ae

تدريب على الاختبار المعياري

54. **الهندسة** في الشكل اليوضح.

$a + b + c = ?$ C

A 180°
B 270°
C 360°
D 450°



55. **الإجابة الموسعة** أطلق عمر نموذجا لصاروخ على مستوى الأرض. ويمكن إيجاد ارتفاع الصاروخ h بالمتر باستخدام المعادلة $h = -4.9t^2 + 56t$، حيث t يمثل الوقت بالثانية بعد الإطلاق.

a. ما أقصى ارتفاع سيصل إليه الصاروخ؟ 160 m

b. ما الفترة التي سيقضيها الصاروخ بعد إطلاقه حتى يصل إلى أعلى ارتفاع له؟ قرب إلى أقرب جزء من العشرة للثانية. 5.7 s

c. ما الفترة التي سيقضيها الصاروخ بعد إطلاقه حتى يهبط؟ قرب إلى أقرب جزء من العشرة للثانية.

55c. 11.4 s

56. أي مما يلي صحيح بشأن التمثيلان البيانيان لـ $y = 3(x - 4)^2 + 5$ و $y = 3(x + 4)^2 + 5$؟

G

F الرؤوس في الحدود الخصوي.
G التمثيلان البيانيان لهما الشكل نفسه مع اختلاف الرؤوس.
H التمثيلان البيانيان لهما شكلان مختلفان ورؤوس مختلفة.
J رأس أحد التمثيلين البيانيين في الحد الأقصى، بينما الآخر رأسه في الحد الأدنى.

57. ما العامل الذي قد يمثل الطول في العرض؟

$A = 10x^4 - 25y^2$

C

A $(4x - 5y)(4x - 5y)$
B $(4x + 5y)(4x - 5y)$
C $(4x^2 - 5y)(4x^2 + 5y)$
D $(4x^2 + 5y)(4x^2 + 5y)$

مراجعة شاملة

اكتب كل كسر عشري متكرر في صورة كسر اعتيادي. (الدرس 4-9)

58. $0.\overline{7}$ $\frac{7}{9}$
59. $5.\overline{126}$ $5\frac{14}{111}$
60. $6.\overline{259}$ $6\frac{7}{27}$

61. **الرياضة** يتدرب عبيدة لماراثون يطول حوالي 26 كيلومترا. وبدأ بركض كيلومترين. ثم عندما يركض كل يوم آخر، فإنه يركض مسافة مقدارها واحد ونصف من المسافة التي ركضها اليوم السابق. (الدرس 3-9)

a. اكتب الحدود الخمسة الأولى لمتتالية توضح جدول التدريب الخاص به. 2, 3, 4.5, 6.75, 10.125
b. متى سيتخطى 26 كيلومترا في مسافة ركض واحدة؟ اليوم الثامن
c. متى سيكون قد ركض مسافة 100 كيلومتر في المجمل؟ خلال اليوم التاسع

حدد ما إذا كانت الأحداث مستقلة أم غير مستقلة.

62. إلقاء عملة نقدية ودحرجة مكعب أعداد مستقل
63. اختيار المركزين الأول والثاني في مسابقة أكاديمية غير مستقل

مراجعة المهارات

أوجد كل ناتج ضرب مما يلي.

64. $(y + 4)(y + 3)$ $y^2 + 7y + 12$
65. $(x - 2)(x + 6)$ $x^2 + 4x - 12$
66. $(a - 8)(a + 5)$ $a^2 - 3a - 40$
67. $(4h + 5)(h + 7)$ $4h^2 + 33h + 35$
68. $(9p - 1)(3p - 2)$ $27p^2 - 21p + 2$
69. $(2g + 7)(5g - 8)$ $10g^2 + 19g - 56$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز OL BL

التوسّع اكتب متتالية، مثل . . . 2, 5, 7, 12, 19, 31, على اللوحة وراقب ما إذا كان بإمكان الطلاب تمييز النمط. وتشبه هذه المتتالية، تسمى متتالية لوكاس، متتالية فيبوناتشي في أن كل حد، بدءًا من الحد الثالث، يساوي مجموع الحدين السابقين مباشرةً. اجعل الطلاب يكتبوا متتاليات لوكاس الخاصة بهم مستخدمين أي حدين مبدئيين.

انتبه!
تحليل الخطأ في التمرين 49، ذكّر الطلاب أن $x_1 = f(x_0)$، حيث x_0 هي القيمة الأولية و x_1 هو الإعادة الأولى. وتأكد من فهم الطلاب أن القيمة الأولية لا تُحسب على أنها إعادة. ويتم إيجاد الإعادة الأولى عن طريق تطبيق الدالة على القيمة الأولية.

نصيحة للمعلمين الجدد
استيعاب اللغة تأكد من فهم الطلاب للمصطلحات المستخدمة في هذا الدرس. ولا سيما *إعادة* (*iteration*) و *معادة* (*iterate*).

4 التقويم

عيّن مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب تفسير المقصود عند القول إن صيغة أو دالة تكرارية.

المتابعة
لقد استكشف الطلاب التكرار والإعادة.

اطرح السؤال التالي:

- لماذا من المفيد تمثيل نمط عددي بصيغة؟ الإجابة النموذجية، من خلال استخدام صيغة لتمثيل نمط عددي، يمكنك إيجاد أي حد. وإذا كان لديك حد معلوم، فيمكنك استخدام الصيغة لتحديد موقع الحد في النمط. ويمكنك أيضا تحديد الخصائص الأخرى للنمط، مثل ما إذا كانت المتتالية التي تمثل النمط خطية أو ما إذا كانت المتسلسلة التي تمثل المتتالية تقاربية أم تباعدية.

إجابة إضافية
53. الإجابة النموذجية، في المتتالية التكرارية، يُحدد كل حد بواحد أو أكثر من الحدود السابقة. وتُستخدم الصيغة التكرارية في إيجاد حدود المتتالية التكرارية.

472 / 76

Scanned by CamScanner

●●○○○ etisalat 4G 5:21 PM 40%
elib.moe.gov.ae

9-5 مختبر ورقة البيانات: تسديد القروض على أقساط

عند تسديد أقساط قرض، يستخدم جزء لتسديد نسبة المرابحة التي تراكمت منذ آخر سداد. ويستخدم الباقي لتقليل رأس المال، أو مبلغ القرض الأصلي. ويطبق على هذه العملية التسديد على أقساط. يمكنك استخدام ورقة بيانات لتحليل أقساط السداد، ونسبة المرابحة، والرصيد بالنسبة لقرض ما ويطبق على الجدول الذي يوضح مثل هذا النوع من المعلومات جدول الأقساط.

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية

مثال

القروض اشترت نجلاء هاتفا ذكيا جديدا مقابل 695 AED. ويتيح لها المصرف السداد على هيئة أقساط شهرية بقيمة 60.78 AED مع إضافة نسبة مرابحة بقيمة 9% لكل عام. ما المبلغ الذي ستكون مدينة به للمتجر بعد مرور ستة أشهر؟

كل شهر، ستكون نسبة المرابحة على الرصيد المتبقي $\frac{9\%}{12}$ أو 0.75%. ويمكنك إيجاد الرصيد بعد السداد من خلال ضرب الرصيد بعد القسط السابق في 0.0075 + 1 أو 1.0075 ثم اطرح 60.78.

في ورقة البيانات، يمثل عمود الأعداد عدد الأقساط. ويوضح العمود B الرصيد. أدخل نسبة المرابحة في القسط الشهري في الخلايا بالعمود A بحيث يمكن تحديثها بسهولة إذا تم تغيير المعلومات.

توضح ورقة البيانات على اليسار الصيغ الخاصة بالرصيد بعد سداد كل قسط لمدة الستة شهور الأولى. وبعد مرور ستة أشهر، ما زالت تدين نجلاء بمبلغ 355.28 AED.

قرض الهاتف الذكي

	A	B	C
1	نسبة المرابحة	=695*(1+A2)−A5	
2	0.0075	=B1*(1+A2)−A5	
3		=B2*(1+A2)−A5	
4	القسط الشهري	=B3*(1+A2)−A5	
5	60.78	=B4*(1+A2)−A5	
6		=B5*(1+A2)−A5	
7			

ورقة 1 | ورقة 2 | ورقة 3

النموذج والتحليل

1. افترض أن b_n هو الرصيد المتبقي من قرض نجلاء بعد مرور عدد n من الشهور. اكتب معادلة تربط بين b_n و b_{n+1}.
$b_{n+1} = 1.0075b_n - 60.78,\ b_1 = 695$
2. يتم تخصيص أجزاء كبيرة من أقساط السداد لنسبة المرابحة في بداية السداد. وذلك في مقابل تخصيص أجزاء أقل لآخر فترة في السداد. ما النسبة المئوية التي سيتبقى على نجلاء سدادها بعد مرور نصف عام؟ **حوالي 51%**
3. قم بالتوسع في ورقة البيانات لتغطية العام بأكمله. كم يبلغ الرصيد بعد مرور 12 قسطا من السداد؟ ولماذا لم يصل إلى 0؟
حوالي 0.01 AED−؛ لم يصل الرصيد إلى 0 بالضبط بسبب التقريب.
4. افترض أن نجلاء قررت سداد 70 AED كل شهر. ما المدة التي ستستغرقها لسداد القرض؟ **11 شهرا**
5. افترض أنه وفق المبلغ الذي يمكن لنجلاء تحمل سداده، سوف تسدد مبلغا مختلفا كل شهر بالإضافة إلى 60.78 AED. اشرح مدى المرونة التي تتمتع بها ورقة البيانات ويمكن استخدامها لتتوافق مع هذا الموقف. **يمكن طرح القيمة المتغيرة بعد الخلية A5.**
6. أحمد أمير قرضا لشراء دراجة بمبلغ 12,000 AED لمدة ثلاثة أعوام. وتبلغ نسبة المرابحة السنوية 6%. ويبلغ القسط السنوي 365.06 AED. وبعد الشهر الخامس، حصل على ميراث. ويريد استخدامه في سداد هذا الدين. ما إجمالي المبلغ الذي يدين به إلى المصرف في هذا الوقت؟ **7260.42 AED**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1 التركيز

الهدف استخدام ورقة بيانات لتحليل أقساط السداد ونسبة المرابحة والرصيد بالنسبة لقرض.

المواد الخاصة لكل طالب

- ورقة بيانات حاسوبية (اختياري)

نصيحة للتدريس

اقترح على الطلاب أن يكتبوا دائما تسميات وصفية للأنواع في الخلايا المجاورة للقيم المدخلة أو المحسوبة. بالإضافة الأجزاء العلوية في الأعمدة. وهذا سيسهّل عليهم فهم النتائج وتفسيرها.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قد ترغب في جعل الطلاب ذوي القدرات المختلفة يعملوا في مجموعات ثنائية حتى يمكنهم مساعدة بعضهم البعض في خطوات العملية على الحاسبة والأوامر. بعد ذلك، اجعل المجموعات تتبع المثال وتكمل التمرين 1-2.

- قبل أن يبدأ الطلاب في هذا الاستكشاف، وضّح أن ورقة البيانات يمكنها التعبير عن علاقة يتضمن فيها حساب قيمة الحد التالي استخدام قيمة الحد السابق.
- اسأل الطلاب لماذا يتم ضرب الرصيد في 1.0075 وليس 0.0075. أنت تحتاج إلى إيجاد الرصيد. بالإضافة إلى نسبة المرابحة.

التمرين اطلب من الطلاب إكمال التمرين 3-6.

من العملي إلى النظري

استخدم التمرين 5 لتتأكد من مدى قدرة الطلاب على إدخال مبلغ قسط متغير في نماذج ورق البيانات.

توسيع المفهوم

اطلب من الطلاب محاولة إنشاء أعمدة في أوراق البيانات الخاصة بهم تُظهر مبلغ المرابحة المدفوع كل شهر فقط.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرين 1 لتقويم ما إذا استوعب الطلاب كيفية الربط بين صيغة ورقة البيانات والصيغ الجبرية التي درسوها.

472 / 77
Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:22 PM 38%
elib.moe.gov.ae

9 دليل الدراسة والمراجعة

التقويم التكويني

المفردات **الأساسية** تشير الصفحات المرجعية المذكورة بعد كل كلمة إلى الموضع الذي ورد فيه ذلك المصطلح لأول مرة. فإذا واجه الطلاب صعوبة في الإجابة عن الأسئلة 1-10، فذكّرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لإنعاش ذاكرتهم بشأن المفردات.

مطويات® منظّم الدراسة

المطويات® دينا زايك

اطلب من الطلاب إلقاء نظرة على الوحدة للتأكد من أنهم قد أضافوا بعض الأمثلة إلى مطوياتهم. واقترح عليهم إبقاء مطوياتهم بجانبهم أثناء إكمال صفحات دليل الدراسة والمراجعة، مشيرًا إلى أن المطويات تعدّ بمثابة أداة مراجعة سريعة عند المذاكرة من أجل اختبار الوحدة.

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

المتتاليات والمتسلسلات الحسابية (الدرسان 1-9 و 2-9)

- الحد النوني فيهو a_n من المتتالية الحسابية ذات الحد الأول a_1 والفرق المشترك d يتم الحصول عليه بواسطة $a_n = a_1 + (n-1)d$ حيث يشير n إلى أي عدد صحيح موجب.
- مجموع S_n للحدود n الأولى في متسلسلة حسابية يتم الحصول عليه بواسطة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$.

المتتاليات والمتسلسلات الهندسية (الدرسان 3-9 و 4-9)

- الحد النوني a_n من المتتالية الهندسية ذات الحد الأول a_1 والنسبة المشتركة r يتم الحصول عليه بواسطة $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$، حيث يكون n هو أي عدد صحيح موجب.
- مجموع S_n للحدود n الأولى في متتالية هندسية يتم الحصول عليه بواسطة $S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$ أو $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$، حيث يكون $r \neq 1$.
- مجموع S لمتسلسلة هندسية لانهائية ذات $-1 < r < 1$ يتم الحصول عليه بواسطة $S_n = \frac{a_1}{1-r}$.

التكرار والإعادة (الدرس 5-9)

- في الصيغة التكرارية، تتم صياغة كل حد من حد واحد أو أكثر من الحدود السابقة.

نظرية ذات الحدين (الدرس 6-9)

- نظرية ذات الحدين:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$$

الاستقراء الرياضي (الدرس 7-9)

- الاستقراء الرياضي هو طريقة برهانية تستخدم للبرهنة على عبارات حول الأعداد الصحيحة الموجبة.

المطويات® منظم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

أوساط حسابية arithmetic means	فرضية الاستقراء induction hypothesis
متتالية حسابية arithmetic sequence	المتسلسلة الهندسية اللانهائية infinite geometric series
متسلسلة حسابية arithmetic series	متتالية لا نهائية infinite sequence
فرق مشترك common difference	لانهاية infinity
نسبة مشتركة common ratio	الإعادة iteration
متسلسلة متقاربة convergent series	الاستقراء الرياضي mathematical induction
متسلسلة متباعدة divergent series	مجموع جزئي partial sum
صيغة صريحة explicit formula	مثلث باسكال Pascal's triangle
متتالية فيبوناتشي Fibonacci sequence	صيغة تكرارية recursive formula
متتالية نهائية finite sequence	متتالية تكرارية recursive sequence
أوساط هندسية geometric means	متتالية sequence
متتالية هندسية geometric sequence	متسلسلة series
متسلسلة هندسية geometric series	الرمز سيجما sigma notation
4. خاطئة. متتالية	حد term

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة، فاستبدل المصطلح الموجود تحته خط لجعل الجملة صحيحة.

1. يطلق على المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي لها مجموع متسلسلة تقاربية. **صحيحة**
2. الاستقراء الرياضي هو عملية تكوين دالة بشكل متكرر من نفسها. **خاطئة. التكرار**
3. الأوساط الحسابية لمتتالية هي الحدود التي تقع بين أي حدين غير متتاليين في متتالية حسابية. **صحيحة**
4. الحد هو قائمة أعداد بترتيب معين.
5. يطلق على مجموع حدود n الأولى لمتسلسلة المجموع الجزئي. **صحيحة**
6. الصيغة $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ هي صيغة تكرارية. **صحيحة**
7. المتتالية الهندسية هي متتالية يتحدد كل حد فيها من خلال إضافة قيمة ثابتة إلى الحد السابق. **خاطئة. متتالية حسابية**
8. يطلق على المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي لا تتضمن مجموعا المجموع الجزئي. **خاطئة. متسلسلة تباعدية**
9. أحد عشر و 17 هما وسطان هندسيان بين 5 و 23 في المتتالية 5, 11, 17, 23. **خاطئة. الأوساط الحسابية**
10. باستخدام نظرية ذات الحدين، $(x-2)^4$ يمكن فكه إلى $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$. **صحيحة**

McGraw-Hill Education محفوظ لشركة ماكجروهيل © محمود الحفيظ وشركاه

598 | الوحدة 9 | دليل الدراسة والمراجعة

Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:22 PM 38%
elib.moe.gov.ae

مراجعة درس بدرس

التدخل إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لعرض الموضوعات التي تتناولها الأسئلة، فذكر الطلاب بأن مراجع الدروس ترشدهم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

مراجعة درس بدرس

9-1 المتتاليات كدوال

مثال 1

أوجد الحد الخامس والعشرين لمتتالية حسابية إذا كان $a_1 = -15$ و $d = 6$.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ صيغة للحد n

$a_{11} = -15 + (11-1)6$ $n = 11$, $a_1 = -15$, $d = 6$

$a_{11} = 45$ بسط.

أوجد الحد المشار إليه لكل متتالية حسابية.

11. $a_1 = 9$, $d = 3$, $n = 14$ **48**
12. $a_1 = -3$, $d = 6$, $n = 22$ **123**
13. $a_1 = 10$, $d = -4$, $n = 9$ **-22**
14. $a_1 = -1$, $d = -5$, $n = 18$ **-86**

9-2 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

مثال 2

أوجد الوسطين الحسابيين بين 3 و 39.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ صيغة للحد n

$a_4 = 3 + (4-1)d$ $n = 4$, $a_1 = 3$

$39 = 3 + 3d$ $a_4 = 39$

$12 = d$ بسط.

الوسطان الحسابيان هما $3 + 12$ أو $15 + 12$ و $15 + 12$ أو 27.

مثال 3

أوجد S_n للمتسلسلة الحسابية ذات $a_1 = 18$ و $a_n = 56$ و $n = 8$.

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ صيغة المجموع

$S_8 = \frac{8}{2}(18 + 56)$ $n = 8$, $a_1 = 18$, $a_n = 56$

$= 296$ بسط.

مثال 4

أوجد قيمة $\sum_{k=3}^{15} 5k + 1$.

استخدم الصيغة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$. يوجد 13 حدا.

$a_1 = 5(3) + 1$ أو 16 ، $a_{13} = 5(15) + 1$ أو 76.

$S_{13} = \frac{13}{2}(16 + 76)$

$= 598$

أوجد الأوساط الحسابية في كل متتالية.

15. $-12, _, _, _, 8$ **$-7, -2, 3$**
16. $15, _, _, 29$ **$\frac{59}{3}, \frac{73}{3}$**
17. $12, _, _, _, _, -8$ **8, 4, 0, −4**
18. $72, _, _, _, 24$ **60, 48, 36**
19. **الأعمال المصرفية** يدخر زايد AED 150 كل شهرين. إذا ادخر بهذا المعدل لمدة عامين، فكم سيكون لديه بنهاية عامين؟ **AED 1800**

أوجد S_n لكل متتالية حسابية.

20. $a_1 = 16$, $a_n = 48$, $n = 6$ **192**
21. $a_1 = 8$, $a_n = 96$, $n = 20$ **1040**
22. $9 + 14 + 19 + \ldots + 74$ **581**
23. $16 + 7 + -2 + \ldots + -65$ **−245**
24. **الدراما** لدى ليلى أداء مسرحي بعد 12 يوما. وتخطط للتدريب على الأجزاء الخاصة بها كل ليلة. وهي أول ليلة، تدربت على الأجزاء الخاصة بها مرتين. وفي الليلة التالية، تدربت 4 مرات. وفي الليلة الثالثة، تدربت 6 مرات. في الليلة الحادية عشر، كم مرة تدربت على الأجزاء الخاصة بها؟ **132**

أوجد مجموع كل متسلسلة حسابية.

25. $\sum_{k=3}^{21}(3k-2)$ **629**
26. $\sum_{k=10}^{30}(6k-1)$ **319**
27. $\sum_{k=4}^{12}(-2k+5)$ **−99**

Copyright © The McGraw-Hill Companies, Inc. جميع الحقوق محفوظة.

599

Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:22 PM 38%
elib.moe.gov.ae

9 دليل الدراسة والمراجعة تابع

9-3 المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

مثال 5

أوجد الحد السادس لمتتالية هندسية، والتي فيها $a_1 = 9$ و $r = 4$.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ صيغة للحد n

$a_6 = 9 \cdot 4^{6-1}$ $n = 6, a_1 = 9, r = 4$

$a_6 = 9216$

الحد السادس هو 9216.

مثال 6

أوجد وسطين هندسيين بين 1 و 27.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ صيغة الحد النوني

$a_4 = 1 \cdot r^{4-1}$ $n = 4, a_1 = 1$

$27 = r^3$ $a_4 = 27$

$3 = r$ بسط

الوسطان الهندسيان هما 1(3) أو 3، و 3(3) أو 9.

مثال 7

أوجد مجموع المتسلسلات الهندسية التي يكون فيها $a_1 = 3$ و $r = 5$ و $n = 11$.

$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ صيغة المجموع

$S_{11} = \frac{3 - 3 \cdot 5^{11}}{1 - 5}$ $n = 11, a_1 = 3, r = 5$

$S_{11} = 36,621,093$ استخدم الآلة الحاسبة.

مثال 8

أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{6} 2 \cdot (4)^{k-1}$.

$S_6 = \frac{2 - 2 \cdot 4^6}{1 - 4}$ $n = 6, a_1 = 2, r = 4$

$= \frac{-8190}{-3}$ بسط

$= 2730$ بسط

أوجد الحد المشار إليه لكل متتالية هندسية.

28. $a_1 = 5, r = 2, n = 7$ 320

29. $a_1 = 11, r = 3, n = 3$ 99

30. $a_1 = 128, r = -\frac{1}{2}, n = 5$ 8

31. a_8 بالنسبة إلى $\frac{2187}{8}, \ldots, \frac{9}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$ $\frac{2187}{8}$

أوجد الأوساط الهندسية في كل متتالية.

32. 6, ___, ___, 162 18, 54

33. 8, ___, ___, ___, 648 $\pm 24, 72, \pm 216$

34. −4, ___, ___, 108 12, −36

35. **المدخرات** لدى نجاة حساب ادخار يبلغ الرصيد به حاليا AED 1500. كم سيبلغ رصيد نجاة بعد 4 أعوام إذا حصل على نسبة مرابحة بقيمة 5% سنويا؟ AED 1823.26

أوجد S_n لكل متتالية هندسية.

36. $a_1 = 15, r = 2, n = 4$ 225

37. $a_1 = 9, r = 4, n = 6$ 12,285

38. $5 - 10 + 20 - \ldots$ إلى 7 حدود 215

39. $243 + 81 + 27 + \ldots$ إلى 5 حدود 363

أوجد قيمة مجموع كل متسلسلة هندسية.

40. $\sum_{k=1}^{7} 3 \cdot (-2)^{k-1}$ 129

41. $\sum_{k=1}^{8} -1\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ $\frac{6305}{2187}$

42. **الإعلان** تسلم شبلة منشورات دعائية للترويج لاجتماع مجلس الطلاب التالي. وتسلم المنشورات لأربعة أشخاص. ثم يسلم هؤلاء الأشخاص الأربعة المنشورات إلى 4 أشخاص آخرين. ومن ثم يسلم هؤلاء الأشخاص الأربعة المنشورات الأربعة إلى 4 أشخاص جدد. إذا اعتبرنا أن شبلة هي الجولة الأولى، كم عدد الأشخاص الذين حصلوا على منشورات حتى الجولة الرابعة؟ 85

McGraw-Hill Education محفوظ لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

600 | الوحدة 9 | دليل الدراسة والمراجعة

472 / 91

Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:22 PM 37%
elib.moe.gov.ae

9-4 المتسلسلة الهندسية اللانهائية

مثال 9

أوجد مجموع المتسلسلات الهندسية اللانهائية التي فيها $a_1 = 15$ و $r = \frac{1}{3}$.

$S = \frac{a_1}{1 - r}$ صيغة المجموع

$= \frac{15}{1 - \frac{1}{3}}$ $a_1 = 15,\ r = \frac{1}{3}$

$= \frac{15}{\frac{2}{3}}$ أو 22.5 بسط

أوجد مجموع كل متسلسلة لا نهائية، إن وجد.

43. $a_1 = 8, r = \frac{3}{4}$ 32

44. $\frac{5}{6} - \frac{20}{18} + \frac{80}{54} - \frac{320}{162} + \ldots$ لا يوجد

45. $\sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ 6

46. **العلوم الفيزيائية** أسقطت ميسون كرة من أعلى مبنى يصل ارتفاعه 20 مترًا. وفي كل مرة تقفز فيها الكرة، ترتد مرة أخرى إلى $\frac{2}{3}$ من الارتفاع السابق. إذا استمرت الكرة في اتباع هذا النمط، ما إجمالي المسافة التي قطعتها الكرة؟ 100 m

9-5 التكرار والإعادة

مثال 10

أوجد أول خمسة حدود في المتتالية، حيث $a_1 = 1$، و $a_{n+1} = 3a_n + 2$.

$a_{n+1} = 3a_n + 2$ صيغة تكرارية

$a_{1+1} = 3a_1 + 2$ $n = 1$

$a_2 = 3(1) + 2$ أو 5 $a_1 = 1$

$a_{2+1} = 3a_2 + 2$ $n = 2$

$a_3 = 3(5) + 2$ أو 17 $a_2 = 5$

$a_{3+1} = 3a_3 + 2$ $n = 3$

$a_4 = 3(17) + 2$ أو 53 $a_3 = 17$

$a_{4+1} = 3a_4 + 2$ $n = 4$

$a_5 = 3(53) + 2$ أو 161 $a_4 = 53$

الحدود الخمسة الأولى للمتتالية هي 1، 5، 17، 53، 161.

مثال 11

أوجد التكرارات الثلاثة الأولى للدالة $f(x) = 3x - 2$ بالنسبة للقيمة الأولية لـ $x_0 = 2$.

$x_1 = f(x_0)$ $= f(2)$ $= 3(2) - 2$ $= 4$

$x_2 = f(x_1)$ $= f(4)$ $= 3(4) - 2$ $= 10$

$x_3 = f(x_2)$ $= f(10)$ $= 3(10) - 2$ $= 28$

التكرارات الثلاثة الأولى هي 4، 10، 28.

أوجد الحدود الخمسة الأولى من كل متتالية.

47. $a_1 = -3,\ a_{n+1} = a_n + 4$ −3, 1, 5, 9, 13

48. $a_1 = 5,\ a_{n+1} = 2a_n - 5$ 5, 5, 5, 5, 5

49. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 5$ 1, 6, 11, 16, 21

50. **الهدخرات** لدى شيخة حساب ادخار يحتوي على رصيد بقيمة AED 12,000، وتتم إضافة نسبة مرابحة بقيمة 5% كل شهر. وتضيف شيخة كل شهر AED 500 إلى الرصيد. وتصف الصيغة التكرارية $b_n = 1.05b_{n-1} + 500$ الرصيد في حساب شيخة الادخاري بعد مرور عدد n من الشهور. أوجد الرصيد الموجود في حساب شيخة بعد مرور 3 أشهر. قرب إجابتك إلى أقرب فلس. AED 15,467.75

أوجد التكرارات الثلاثة الأولى لكل دالة بالنسبة للقيمة الأولية المعطاة.

51. $f(x) = 2x + 1,\ x_0 = 3$ 7, 15, 31

52. $f(x) = 5x - 4,\ x_0 = 1$ 1, 1, 1

53. $f(x) = 6x - 1,\ x_0 = 2$ 11, 65, 389

54. $f(x) = 3x + 1,\ x_0 = 4$ 13, 40, 121

Copyright © McGraw-Hill Education

601

601

Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:22 PM 37%
elib.moe.gov.ae

إجابات إضافية

56. $y^7 - 21y^6 + 189y^5 - 945y^4 + 2835y^3 - 5103y^2 + 5103y - 2187$

57. $-32z^5 + 240z^4 - 720z^3 + 1080z^2 - 810z + 243$

58. $256a^4 - 768a^3b + 864a^2b^2 - 432ab^3 + 81b^4$

59. $x^5 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{5}{8}x^3 - \frac{5}{32}x^2 + \frac{5}{256}x - \frac{1}{1024}$

63. الخطوة 1: إذا كان $n = 1$، فإن الطرف الأيسر من المعادلة يساوي 2. وكذلك الطرف الأيمن للمعادلة يساوي 2. إذًا، فالمعادلة صحيحة عند $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $2 + 6 + 12 + \ldots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$ بالنسبة لبعض الأعداد الصحيحة الموجبة k.

الخطوة 3: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + k(k+1) + (k+1)(k+2)$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + \frac{3(k+1)(k+2)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)[k(k+2) + 3(k+2)]}{3}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{3}$$

التعبير الأخير هو الطرف الأيمن من المعادلة الذي يجب إثباته، حيث $n = k + 1$. وبالتالي، تكون المعادلة صحيحة عندما $n = k + 1$. إذًا،

$2 + 6 + 12 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n.

9 دليل الدراسة والمراجعة تابع

9-6 نظرية ذات الحدين

فكك كل ذات حدين. 55-59. انظر الهامش.

55. $(a+b)^3$ $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

56. $(y-3)^7$

57. $(3-2z)^5$

58. $(4a-3b)^4$

59. $\left(x - \frac{1}{4}\right)^5$

أوجد الحد المشار إليه لكل تعبير.

60. الحد الثالث لـ $(a+2b)^8$ $112a^6b^2$

61. الحد السادس لـ $(3x+4y)^7$ $193{,}536x^2y^5$

62. الحد الثاني لـ $(4x-5)^{10}$ $-13{,}107{,}200x^9$

مثال 12

فكك $(x-3y)^4$.

$$(x-3y)^4$$
$$= x^4 + {}_4C_1x^3(-3y) + {}_4C_2x^2(-3y)^2 + {}_4C_3x(-3y)^3 + {}_4C_4(-3y)^4$$
$$= x^4 + \frac{4!}{3!}x^3(-3y) + \frac{4!}{2!2!}x^2(9y^2) + \frac{4!}{3!}x(-27y^3) + 81y^4$$
$$= x^4 - 12x^3y + 54x^2y^2 - 108xy^3 + 81y^4$$

مثال 13

أوجد الحد الرابع لـ $(x+y)^8$.

استخدم نظرية ذات الحدين لكتابة المفكوك في الرمز سيجما.

$$(x+y)^8 = \sum_{k=0}^{8} \frac{8!}{k!(8-k)!}x^{8-k}y^k$$

بالنسبة للحد الرابع، $k = 3$.

$$\frac{8!}{k!(8-k)!}x^{8-k}y^k = \frac{8!}{3!(8-3)!}x^{8-3}y^3$$
$$= 56x^5y^3$$

9-7 البرهان بالاستقراء الرياضي

برهن صحة كل من العبارات التالية بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة.

انظر الهامش. 63. $2 + 6 + 12 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

64. $7^n - 1$ يقبل القسمة على 6.

65. $5^n - 1$ يقبل القسمة على 4.

64، 65. انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

أوجد مثالا مضادا لكل عبارة.

66. $8^n + 3$ يقبل القسمة على 11. $n = 2$

67. $6^{n+1} - 2$ يقبل القسمة على 17. $n = 2$

68. $n^2 + 2n + 4$ هو عدد أولي. $n = 2$

69. $n + 19$ هو عدد أولي. $n = 1$

مثال 14

برهن أن $9^n + 3$ يقبل القسمة على 4.

الخطوة 1 عندما يكون $n = 1$، فإن $9^1 + 3 = 12$ أي $9^n + 3$ حيث إن العدد 12 عند قسمته على 4 يصبح 3. فإن العبارة صحيحة بالنسبة لـ $n = 1$.

الخطوة 2 افترض أن $9^k + 3$ يقبل القسمة على 4 بالنسبة إلى العدد الصحيح الموجب k. هذا يعني أن $9^k + 3 = 4r$ بالنسبة إلى العدد الصحيح r.

الخطوة 3

$$9^k + 3 = 4r$$
$$9^k = 4r - 3$$
$$9^{k+1} = 36r - 27$$
$$9^{k+1} + 3 = 36r - 27 + 3$$
$$9^{k+1} + 3 = 36r - 24$$
$$9^{k+1} + 3 = 4(9r - 6)$$

بما أن r عدد كلي، فإن $9r - 6$ عدد كلي. لذلك، $9^{k+1} + 3$ يقبل القسمة على 4. إذا العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$.

ولهذا، فإن $9^n + 3$ يقبل القسمة على 4 بالنسبة لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة تعليم النشر والتأليف

Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:22 PM 37%
elib.moe.gov.ae

9 تدريب على الاختبار المعياري

1. أوجد الحدود الأربعة التالية للمتتالية الحسابية ... 81, 72, 63, 54, 45, 36, 27

2. أوجد الحد الخامس والعشرين لمتتالية حسابية فيها $a_1 = 9$ و $d = 5$. 129

3. **الاختبار من متعدد** ما الحد الثامن في المتتالية الحسابية التي تبدأ بـ ... 118, 20.2, 22.4, 24.6, ... D

A 26.8
B 29
C 31.2
D 33.4

4. أوجد الأوساط الحسابية الأربعة بين 9− و 11. −5, −1, 3, 7

5. أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية التي فيها $a_1 = 11$ و $n = 14$ و $a_n = 22$. 231

6. **الاختبار من متعدد** ما هو الحد التالي في المتتالية الهندسية التالية؟ H

10, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{32}$, ...

F $\frac{5}{8}$
G $\frac{5}{32}$
H $\frac{5}{128}$
J $\frac{5}{256}$

7. أوجد الأوساط الهندسية الثلاثة التي تقع بين 6 و 1536. 24, 96, 384

8. أوجد مجموع المتسلسلات الهندسية التي فيها $a_1 = 15$ و $r = \frac{2}{3}$ و $n = 5$. $\frac{1055}{27}$

أوجد مجموع كل متسلسلة، إن وجد.

9. $\sum_{k=1}^{12}(3k - 1)$ 220

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(3^n)$ لا يوجد

11. 45 + 37 + 29 + ... + −11 136

12. $\frac{1}{8} + \frac{2}{24} + \frac{4}{72} + \ldots - \frac{3}{8}$

13. اكتب $0.\overline{65}$ في صورة كسر اعتيادي. $\frac{65}{99}$

أوجد الحدود الخمسة الأولى من كل متتالية.

14. $a_1 = -1$, $a_{n+1} = 3a_n + 5$ −1, 2, 11, 38, 119

15. $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + n$ 4, 5, 7, 10, 14

16. **الاختبار من متعدد** ما التكرارات الثلاثة الأولى للدالة $f(x) = -5x + 4$ بالنسبة للقيمة الأولية $x_0 = 3$؟ B

A 3, −11, 59
B −11, 59, −291
C −1, −6, −11
D 59, −291, 1459

17. فكك $(2a - 3b)^4$. $16a^4 - 96a^3b + 216a^2b^2 - 216ab^3 + 81b^4$

18. ما معامل الحد الخامس لـ $(m + 3n)^6$؟ 1215

19. أوجد الحد الرابع لمفكوك $(c + d)^9$. $84c^6d^3$

برهن على أن كل عبارة صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة. 20, 21 انظر ملحق إجابات الوحدة 9.

20. $1 + 6 + 36 + \ldots + 6^{n-1} = \frac{1}{5}(6^n - 1)$.

21. $11^n - 1$ يقبل القسمة على 10.

22. أوجد مثالا مضادا للعبارة التالية.

$2^n + 4^n$ يقبل القسمة على 4. $n = 1$

23. **الهندسة** يوجد في صف الأستاذ خالد لتدريس العلوم عددا متساويا من الطلاب الذين تبلغ أعمارهم 15 عاما والطلاب الذين تبلغ أعمارهم 16 عاما. ويريد اختيار 8 طلاب لتشكيل الفصل في معرض العلوم. ما مدى احتمال اختياره 5 طلاب من الذين يبلغون 15 عاما؟ **ما احتمال اختياره حوالي 21.9%**

24. **البندول** تأرجح ليلى البندول. وتتناقص المسافة التي يخطوها البندول بمقدار 15% مع كل أرجحة. إذا قطع البندول في البداية 10 سنتيمترات. فأوجد إجمالي المسافة التي سيكون البندول قد قطعها عندما يستقر. **حوالي 66.7 سنتيمترا**

McGraw-Hill Education جميع حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح

603

Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:22 PM 37%
elib.moe.gov.ae

9 التحضير للاختبارات المعيارية

1 التركيز

الهدف استخدام إستراتيجية البحث عن النمط لحل مسائل الاختبار المعياري.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطرح السؤال التالي:

- ما نوع الأسئلة التي تعتقد أن إستراتيجية البحث عن النمط تناسبها بشكل أفضل؟ الإجابة المحتملة: أسئلة مثل، "ما الحد التالي في المتتالية؟" أو "ما التعبير الذي يمثل هذا النمط؟"
- كيف يمكنك إيجاد نمط؟ الإجابة المحتملة: أطالع كيفية ارتباط حدود النمط وأعثر على العمليات المشتركة التي تعبّر عن النمط.

البحث عن نمط

تمثل إحدى أكثر إستراتيجيات حل المسائل شيوعا في البحث عن نمط. فالقدرة على التعرف على الأنماط، وتمثيلها جبريا، وتوسعتها تعد أداة قيمة لحل المسائل.

إستراتيجيات البحث عن نمط

الخطوة 1

حدد النمط.

- قارن بين الأعداد أو الأشكال أو التمثيلات البيانية في النمط.
- **اسأل نفسك:** ما مدى الصلة بين حدود النمط؟
- **اسأل نفسك:** هل هناك أي عمليات مشتركة تؤدي إلى الانتقال من أحد الحدود إلى الحد التالي؟

الخطوة 2

عمم النمط.

- اكتب قاعدة باستخدام الكلمات لوصف كيفية إنتاج حدود النمط.
- عين المتغيرات واكتب تعبيرا جبريا لتمثيل النمط إن أمكن.

الخطوة 3

أوجد الحدود المفقودة. ووسع النمط. وأوجد حل المسألة.

- استخدم النمط الخاص بك أو قاعدتك لإيجاد الحدود المفقودة و/أو وسع النمط لحل المسألة.
- تحقق من إجابتك للتأكد من صحتها.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة وحدد ما تحتاج لمعرفته، ثم استخدم المعلومات المعطاة بالمسألة لحلها.

استخدم متتالية المربعات الموضحة. كم عدد المربعات اللازمة لعمل الشكل التاسع في المتتالية؟

A 55 C 74
B 65 D 82

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

604 | الوحدة 9 | التحضير للاختبارات المعيارية

472 / 95

Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:22 PM 37%
elib.moe.gov.ae

مثال إضافي

تدريب على الاختبار المعياري

لدى عبد الله AED 2100 في حساب ادخاري. وفي نهاية كل شهر، يزداد الرصيد بمعدل 0.3%. ما المبلغ الذي سيكون لدى عبد الله في حسابه الادخاري بحلول نهاية عام واحد؟ B

A AED 2170.35
B AED 2176.86
C AED 2106.89
D AED 2994.09

3 التقويم

استخدم التمرينين 1 و 2 لتقويم استيعاب الطلاب.

اقرأ المسألة بعناية. يتم إمطارك ثلاثة أشكال من متتالية ويطلب منك إيجاد عدد المربعات اللازمة لعمل الشكل التاسع.

ابحث عن نمط في أشكال المربعات. وعد المربعات في كل شكل.

اكتب تعبيرا لتمثيل هذا النمط.

الشرح: عدد المربعات يساوي مربع رقم الشكل زائد واحد.

المتغير: لنفترض أن n تمثل رقم الشكل.

المعادلة: $a_n = n^2 + 1$

استخدم التعبير الذي كتبته لتوسعة النمط وإيجاد عدد المربعات في الشكل التاسع.

$a_9 = 9^2 + 1 = 82$

إذا، سيتضمن الشكل التاسع 82 مربعا. الإجابة الصحيحة هي D

التدريبات

اقرأ المسألة. واستخدم النمط في حلها.

1. الأعداد أدناه تشكل متتالية رياضية شهيرة من الأعداد تعرف باسم متتالية فيبوناتشي. ما عدد فيبوناتشي التالي في المتتالية؟ B

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

A 36
B 34
C 31
D 29

2. ما العدد المجهول في الجدول؟ H

n	a_n
1	0
2	2
3	6
4	12
5	??
6	30

F 17
G 18
H 20
J 21

McGraw-Hill Education حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة

472 / 96

Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:22 PM 37%
elib.moe.gov.ae

تشخيص أخطاء الطلاب

اطّلع على إجابات الطلاب وركز على كل عنصر. قد تشير الاتجاهات السائدة في الصف الدراسي إلى أخطاء شائعة ومفاهيم خاطئة.

1. A لم يجمع الفرق المشترك و 31 بشكل صحيح
   B صحيح
   C توصل بشكل خاطئ إلى أن 7 هي الفرق المشترك
   D توصل بشكل خاطئ إلى النمط بأن كل حد ثالث ينتهي بـ 9
2. F خمّن
   G وضع بُعدًا واحدًا فقط في الاعتبار
   H ضرب خطأً 4 في 2 بدلاً من تربيع 4
   J صحيح
3. A قيّم $9k - 1$ فقط من أجل $k = 15$
   B وجد مجموع $k = 1$ إلى 14
   C أجاب إجابة صحيحة
   D وجد مجموع $k = 1$ إلى 16
4. F خمّن
   G خمّن
   H أعتقد خطأً أن معاملاً أصغر لـ x^2 يتسبب في جعل التمثيل البياني أضيق
   J صحيح
5. A خمّن
   B صحيح
   C غيّر موضع الثابت والأساس
   D نسي a_1
6. F التبس عليه الأمر في معاني المتغيرات
   G صحيح
   H لم يلاحظ المتتالية الهندسية
   J لم يلاحظ المتتالية الهندسية
7. A عثر على ملوثات تظل موجودة حتى بعد المرور مرتين عبر المرشح
   B عثر على ملوثات تظل موجودة حتى بعد المرور ثلاث مرات عبر المرشح
   C عثر على ملوثات تظل موجودة حتى بعد المرور أربع مرات عبر المرشح
   D صحيح
8. F غيّر موضع الإجمالي
   G طرح تكاليف المشروبات الغازية بدلاً من جمعها
   H صحيح
   J خمّن
9. A ستكون القيمة المطلقة للنسبة المشتركة أقل من واحد
   B صحيح
   C ستكون القيمة المطلقة للنسبة المشتركة أقل من واحد
   D ستكون القيمة المطلقة للنسبة المشتركة أقل من واحد

الوحدة 9

تدريب على الاختبار المعياري

تراكمي: الوحدات من 1 إلى 9

الاختبار من متعدد

اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. أوجد الحد التالي للمتتالية الحسابية. B

7, 13, 19, 25, 31, ...

A 36 C 38
B 37 D 39

2. تحصل مها على تكبير لصورة بمقدار 10 سنتيمترات في 15 سنتيمترا. بحيث تكون الصورة الجديدة ذات أبعاد أكبر 4 مرات من أصلها. فما مساحة التكبير مقارنة بمساحة الصورة الأصلية؟ J
   F المساحة أكبر بمرتين.
   G المساحة أكبر بأربع مرات.
   H المساحة أكبر بثماني مرات.
   J المساحة أكبر بست عشرة مرة.
3. أوجد قيمة $\sum_{i=1}^{15}(8i-1)$ C
   A 119 C 945
   B 826 D 1072
4. ما إذا يحدث للتمثيل البياني للمعادلة $y = 3x^2$ عند تغييرها إلى $y = 2x^2$؟ J
   F التمثيل البياني للمعادلة $y = 2x^2$ هو انعكاس للتمثيل البياني للمعادلة $y = 3x^2$ بالنسبة للمحور الأفقي y.
   G يدور التمثيل البياني بمقدار 90 درجة حول نقطة الأصل.
   H يقل عرض التمثيل البياني.
   J يزيد عرض التمثيل البياني.
5. اكتب الصيغة الخاصة بالحد النوني للمتتالية الهندسية الموضحة بالجدول. B

n	a_n
1	5
2	10
3	20
4	40
5	80

   A $a_n = (5)^n$
   B $a_n = 5(2)^{n-1}$
   C $a_n = 2(5)^{n-1}$
   D $a_n = 5(2)^n$
6. يبين الجدول أبعاد خيمة مربعة الشكل وعدد الأشخاص الذين يمكن أن تتسع لهم الخيمة.

طول الخيمة (بالمتر)	عدد الأشخاص
2	7
5	28
6	39
8	67
12	147

   يفرض أن ℓ يمثل طول الخيمة، ويمثل n عدد الأشخاص الذين يمكن أن تتسع لهم الخيمة. حدد المعادلة التي تصف على أفضل نحو العلاقة بين طول الخيمة وعدد الأشخاص الذين تتسع لهم. G
   F $\ell = n^2 + 3$ H $\ell = 3n + 1$
   G $n = \ell^2 + 3$ J $n = 3\ell + 1$
7. يقال أن مرشح هواء معين يزيل 90% من الملوثات الموجودة في الهواء في كل مرة يمر فيها بالمرشح. فإذا تم تدوير نفس كمية الهواء عبر المرشح ثلاث مرات، فما النسبة المئوية للملوثات الأصلية التي ستزال من الهواء؟ D
   A 0.01% B 0.1% C 99.0% D 99.9%
8. في دار السينما، تبلغ تكلفة عليتين من الفشار ومشروب غازي AED 34.50. وتبلغ تكلفة 3 علب من الفشار و 4 مشروبات غازية AED 81.75. فأي زوج من المعادلات يمكن استخدامه لتحديد p وهو تكلفة علبة الفشار، و s، وهو تكلفة المشروب الغازي؟ H
   F $2p + s = 81.75$, $3p + 4s = 34.50$
   H $2p + s = 34.50$, $3p + 4s = 81.75$
   G $2p - s = 34.50$, $3p - 4s = 81.75$
   J $p + s = 34.50$, $p + 4 = 81.75$
9. أي من المتسلسلات الهندسية التالية لا يقارب من المجموع؟ B
   A $\sum_{i=1}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{i-1}$
   B $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{i-1}$
   C $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{7}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{i-1}$
   D $\sum_{i=1}^{\infty} (-2) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}$

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 9 استوعب الحدود المستخدمة في الجبر. وكيفية تطبيقها. تكون المتسلسلة الهندسية تقاربية إذا كان أي النسبة المشتركة r قيمة مطلقة أقل من 1.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق النشر

Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:22 PM 37%
elib.moe.gov.ae

الإجابة القصيرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

10. ما أبعاد المصفوفة التي تنتج من عملية الضرب الموضحة؟ 4 × 1

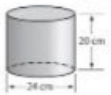
$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

11. **الإجابة الشبكية** تأمل النمط أدناه. إلى كم قطعة سيتم تقسيم الشكل السادس في النمط؟ 1024

الشكل 1 قطعة واحدة — الشكل 2 4 قطع — الشكل 3 16 قطعة

12. استخدم نظرية ذات الحدين لتفكيك التعبير $(c + d)^6$.
$c^6 + 6c^5d + 15c^4d^2 + 20c^3d^3 + 15c^2d^4 + 6cd^5 + d^6$

13. **الإجابة الشبكية** تمتلك سهيلة وعاء أسطوانيا تحتاج إلى ملئه بالتربة حتى تتمكن من زرع بعض الزهور.



ما حجم الأسطوانة بالسنتيمترات المكعبة مقربا إلى أقرب سنتيمتر مكعب؟ 9048

14. في مزرعة بكتيريا، تنمو البكتيريا بمعدل أسي مع مرور الوقت. كما هو موضح بالجدول.

الساعات	عدد البكتيريا
0	1000
1	2000
2	4000

اكتب معادلة للتعبير عن عدد البكتيريا، y، بالنسبة للزمن، t.
$y = (1000) \cdot (2)^t$

15. **الإجابة الشبكية** ما قيمة $f[g(6)]$ إذا كان $f(x) = 2x + 4$ و $g(x) = x^2 + 5$؟ 86

الإجابة الموسعة

دون إجاباتك على ورقة. واكتب الحل هنا.

16. برهن على أن مجموع أي عددين صحيحين فرديين هو عدد زوجي.
انظر الهامش.

17. النقطتان الطرفيتان لقطر دائرة يكونان عند النقطتين $(-1, 0)$ و $(5, -8)$.
a. $(2, -4)$ **المركز هو نقطة منتصف قطر الدائرة.**

a. ما إحداثيات مركز الدائرة؟ اشرح طريقتك في إيجاد الإجابة.

b. أوجد نصف قطر الدائرة. اشرح طريقتك في إيجاد الإجابة.
انظر الهامش.

c. اكتب معادلة للدائرة. $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$

18. تقطع دراجة المسافة من دبي إلى الشارقة خلال ساعتين ونصف. إذا زادت من سرعتها، فيمكنها قطع نفس المسافة خلال ساعتين.

a. هل يمثل هذا الموقف تغيرا طرديا أم تغيرا عكسيا؟ اشرح استنتاجك.

b. إذا كانت الرحلة من دبي إلى الشارقة تستغرق ساعتين ونصف عند السير بسرعة 12 كيلومترا في الساعة، ما السرعة التي ينبغي التغيير إليها لقطع نفس المسافة خلال ساعتين؟ 15 km/h
18a. تغير عكسي؛ عند التحول إلى سرعة أقل، تزداد الفترة الزمنية لقطع نفس المسافة.

حقوق الطبع والتأليف © تعديلات لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابات إضافية

16. الإجابة النموذجية: افترض أن $2n + 1$ و $2k + 1$ يمثلان أي عددين فرديين صحيحين حيث n و k عددان صحيحان. إذًا، مجموعهما يساوي $(2n + 1) + (2k + 1)$، أو $2n + 2k + 2$. يمكن كتابة ذلك في صورة $2(n + k + 1)$ وهي ناتج ضرب 2 في عدد صحيح، $n + k + 1$. إذًا، المجموع $2n + 2k + 2$ يساوي عددًا زوجيًا.

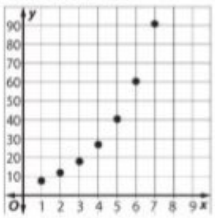
17b. 5؛ نصف القطر هو المسافة بين مركز الدائرة وأي نقطة عليها.

$$r = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (0 - (-4))^2}$$
$$= \sqrt{(-3)^2 + 4^2}$$
$$= 5$$

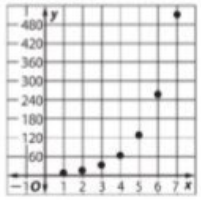
472 / 98
Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:22 PM 37%
elib.moe.gov.ae

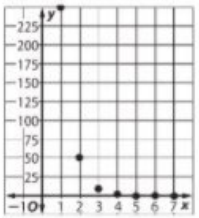
14. 40.5, 60.75, 91.125



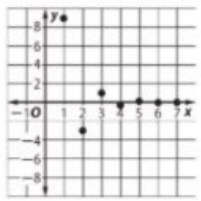
15. 128, 256, 512



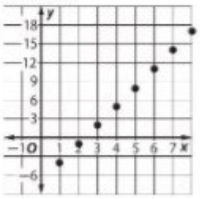
16. $\frac{2}{5}, \frac{2}{25}, \frac{2}{125}$



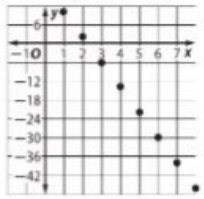
17. $\frac{1}{9}, \frac{-1}{27}, \frac{1}{81}$



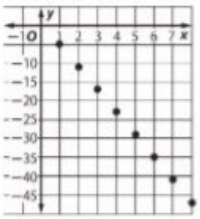
25. 8, 11, 14, 17



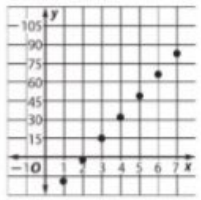
26. −22, −30, −38, −46



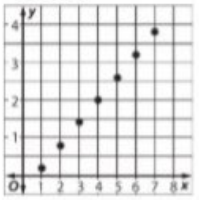
27. −29, −35, −41, −47



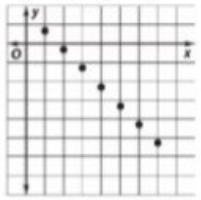
28. 32, 49, 66, 83



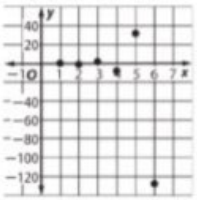
29. $2, \frac{13}{5}, \frac{16}{5}, \frac{19}{5}$



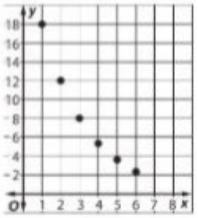
30. $-\frac{7}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{13}{3}, -\frac{16}{3}$



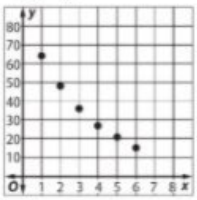
39. −8, 32, −128



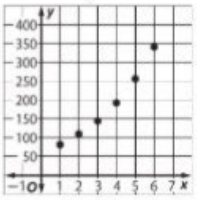
40. $\frac{16}{3}, \frac{32}{9}, \frac{64}{27}$



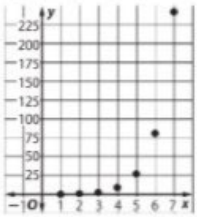
41. $27, \frac{81}{4}, \frac{243}{16}$



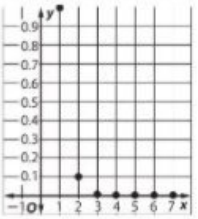
42. 192, 256, $\frac{1024}{3}$



43. 27, 81, 243

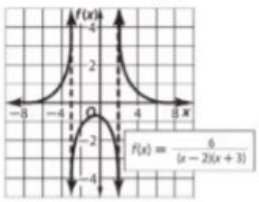


44. 0.0001, 0.00001, 0.000001

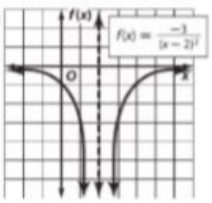


60. الإجابة النموذجية: عندما تكون قيمة r مضاعفة، فإن قيمة a_2 تكون مضاعفة، وتبلغ قيمة a_3 أربعة أضعاف، ويكون a_4 مضروبًا في 8، و a_5 مضروبًا في 2^4 أو 16. وهكذا. إذًا، الحدود الجديدة هي $a_n = a_n \cdot 2^{n-1}$. وعندما تكون قيمة r مقسومة على اثنين، تكون الحدود الجديدة $a_n = a_n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

71.



72.



McGraw-Hill Education محدودة تصنيع وتأليف © حقوق الطبع

Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:23 PM 37%
elib.moe.gov.ae

80. الإجابة النموذجية: افترض أن a_n = الحد النوني للمتتالية و d = الفرق المشترك

$a_2 = a_1 + d$	تعريف الحد الثاني لمتتالية حسابية
$a_3 = a_2 + d$	تعريف الحد الثالث لمتتالية حسابية
$a_3 = (a_1 + d) + d$	التعويض
$a_3 = a_1 + 2d$	خاصية التجميع في الجمع
$a_3 = a_1 + (3 - 1)d$	$3 - 1 = 2$
$a_n = a_1 + (n - 1)d$	$n = 3$

81. $S_n = (a_1 + a_n) \cdot \left(\frac{n}{2}\right)$ صيغة المجموع العامة

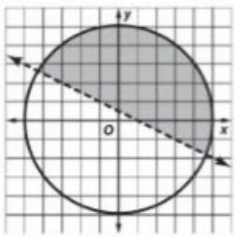
$a_n = a_1 + (n-1)d$ صيغة الحد النوني

$a_n - (n - 1)d = a_1$ اطرح $d(1 - n)$ من كلا الطرفين.

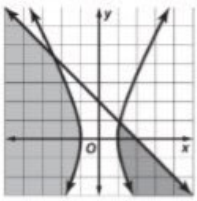
$S_n = [a_n - (n - 1)d + a_n] \cdot \left(\frac{n}{2}\right)$ التعويض

$S_n = [2a_n - (n - 1)d] \cdot \left(\frac{n}{2}\right)$ بسّط.

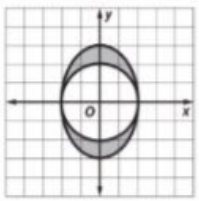
90.



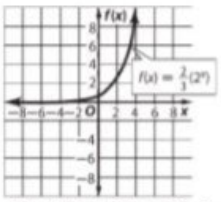
91.



92.

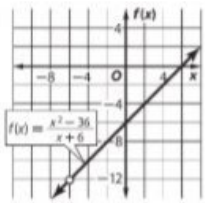


94.



$R = \{f(x) \mid f(x) > 0\}$ {جميع الأعداد الحقيقية} = D

73.

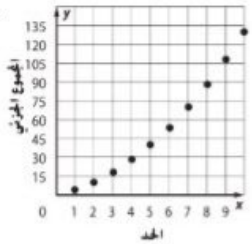


الدرس 9-2

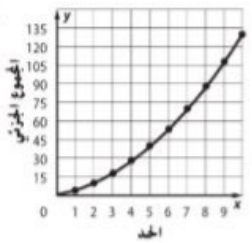
71a.

S_n	n
4	1
10	2
18	3
28	4
40	5
54	6
70	7
88	8
108	9
130	10

71b.



71c.

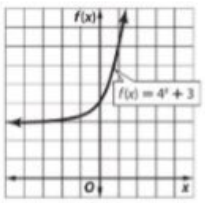


McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

472 / 100
Scanned by CamScanner

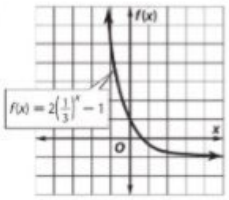
●●●○○ etisalat 4G 5:23 PM 37%
elib.moe.gov.ae

95.



D = {جميع الأعداد الحقيقية}. $R = \{f(x) \mid f(x) > 3\}$

96.



D = {جميع الأعداد الحقيقية}. $R = \{f(x) \mid f(x) > -1\}$

الدرس 3-9

67. الإجابة النموذجية: يجب تغيير $n - 1$ إلى n. ويجب تغيير 10 إلى 9. عند حدوث ذلك، ستكون حدود المتسلسلتين متطابقة. (فسيكون a_1 في المتسلسلة الأولى مساويًا لـ a_0 في المتسلسلة الثانية. وهكذا) وستكون المتسلسلتان متساويتين.

68. الإجابة النموذجية:

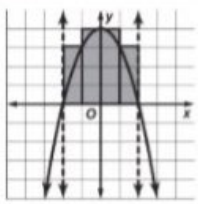
افترض أن a_n = الحد النوني للمتتالية و r = النسبة المشتركة.

$a_2 = a_1 \cdot r$	تعريف الحد الثاني لمتتالية هندسية
$a_3 = a_2 \cdot r$	تعريف الحد الثالث لمتتالية هندسية
$a_3 = a_1 \cdot r \cdot r$	التعويض
$a_3 = a_1 \cdot r^2$	خاصية التجميع في الضرب
$a_3 = a_1 \cdot r^{3-1}$	$3 - 1 = 2$
$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$	$n = 3$

الاستكشاف 4-9

5. الإجابة النموذجية:

x	−2	−1	0	1	2
y	0	3	4	3	0

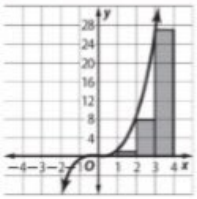


المستطيل	4	3	2	1
العرض	1	1	1	1
الارتفاع	3	4	4	3
المساحة	3	4	4	3

14 وحدة^2، سيكون التقدير أكبر من المساحة الفعلية، لأن المستطيلات تمتد خارج المساحة أسفل المنحنى.

6. الإجابة النموذجية:

x	0	1	2	3	4
y	0	1	8	27	64

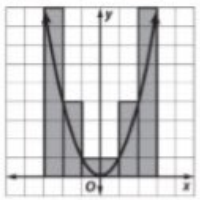


المستطيل	3	2	1
العرض	1	1	1
الارتفاع	27	8	1
المساحة	27	8	1

36 وحدة^2، سيكون التقدير أقل من المساحة الفعلية، لأن المستطيلات موجودة داخل المنحنى تاركةً بعض المساحة مفقودة.

7. الإجابة النموذجية:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9



المستطيل	6	5	4	3	2	1
العرض	1	1	1	1	1	1
الارتفاع	9	4	1	1	4	9
المساحة	9	4	1	1	4	9

28 وحدة^2، سيكون التقدير أكبر من المساحة الفعلية، لأن المستطيلات تمتد خارج المساحة أسفل المنحنى.

McGraw-Hill Education محتوى تصميم مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:23 PM 36%
elib.moe.gov.ae

الدرس 7-9 (تمرين موجّه)

1. الخطوة 1، إذا كان $n = 1$. فإن الطرف الأيسر من المعادلة المعطاة يساوي 1^2 أو 1. ويكون الطرف الأيمن $\frac{1(1+1)(1+2)}{6}$ أو 1. إذًا، المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.

الخطوة 2، افترض أن $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ بالنسبة إلى العدد الطبيعي k.

الخطوة 3. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$
$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6}$$
$$= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$
$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

التعبير الأخير هو الطرف الأيمن من المعادلة التي يجب إثباتها. إذا كان $n = k + 1$. وبالتالي، تكون المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$. إذًا، $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ بالنسبة إلى كل الأعداد الطبيعية n.

2. الخطوة 1: $7^1 - 1 = 6$. القابلة للقسمة على 6. العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.

الخطوة 2، افترض أن $7^k - 1$ قابلة للقسمة على 6 بالنسبة لبعض الأعداد الطبيعية k. هذا يعني أن $7^k - 1 = 6r$ لبعض الأعداد الطبيعية r.

الخطوة 3.

$$7^k - 1 = 6r$$
$$7^k = 6r + 1$$
$$7^{k+1} = 7(6r+1)$$
$$7^{k+1} - 1 = 42r + 6$$
$$7^{k+1} - 1 = 6(7r+1)$$

بما أن r عدد طبيعي، و $7r + 1$ عدد طبيعي. إذًا، $7^{k+1} - 1$ قابلة للقسمة على 6. وبالتالي العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$. ولذلك، $7^n - 1$ قابلة للقسمة على 6 لجميع الأعداد الطبيعية n.

الدرس 7-9

2. الخطوة 1، إذا كان $n = 1$. فإن الطرف الأيسر من المعادلة المعطاة يساوي 1. ويكون الطرف الأيمن $\frac{1(1+1)}{2}$ أو 1. وبالتالي المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.

الخطوة 2، افترض أن $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ بالنسبة لبعض الأعداد الطبيعية k.

الخطوة 3. $1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1)$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$
$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

التعبير الأخير هو الطرف الأيمن من المعادلة التي ينبغي إثباتها. حيث $n = k + 1$. وبالتالي، فإن المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$.

وبذلك، $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ لجميع الأعداد الطبيعية n.

3c. الخطوة 1، إذا كان $n = 1$. فإن الطرف الأيسر من المعادلة المعطاة يساوي $\frac{1(1+1)}{2}$ أو 1. والطرف الأيمن يساوي $\frac{1(1+1)(1+2)}{6}$ أو 1. إذًا، المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.

الخطوة 2، افترض أن $1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$ بالنسبة لبعض الأعداد الطبيعية k.

الخطوة 3. $1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$$
$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{3(k+1)(k+2)}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$
$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{6}$$

التعبير الأخير يساوي الطرف الأيمن من المعادلة التي يجب إثباتها. حيث $n = k + 1$. وبالتالي، فإن المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$. إذًا، $1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ بالنسبة لجميع الأعداد الطبيعية n.

4. الخطوة 1، $10^1 - 1 = 9$. القابلة للقسمة على 9. العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.

الخطوة 2، افترض أن $10^k - 1$ قابلة للقسمة على 9 بالنسبة لبعض الأعداد الطبيعية k. هذا يعني أن $10^k - 1 = 9r$ لبعض الأعداد الطبيعية r.

الخطوة 3.

$$10^k - 1 = 9r$$
$$10^k = 9r + 1$$
$$10^{k+1} = 90r + 10$$
$$10^{k+1} - 1 = 90r + 9$$
$$10^{k+1} - 1 = 9(10r+1)$$

بما أن r عدد كلي. فإن $10r + 1$ عدد كلي. إذًا، $10^{k+1} - 1$ قابلة للقسمة على 9. وبالتالي العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$. ولذلك، $10^n - 1$ قابلة للقسمة على 9 لجميع الأعداد الطبيعية n.

5. الخطوة 1، $4^1 - 1 = 3$. القابلة للقسمة على 3. العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.

الخطوة 2، افترض أن $4^k - 1$ قابلة للقسمة على 3 بالنسبة إلى بعض الأعداد الطبيعية k. وهذا يعني أن $4^k - 1 = 3r$ لبعض الأعداد الكلية r.

الخطوة 3.

$$4^k - 1 = 3r$$
$$4^k = 3r + 1$$
$$4^{k+1} = 12r + 4$$
$$4^{k+1} - 1 = 12r + 3$$
$$4^{k+1} - 1 = 3(4r+1)$$

بما أن r عدد كلي. فإن $4r + 1$ عدد كلي. إذًا، $4^{k+1} - 1$ قابلة للقسمة على 3. وبالتالي العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$. ولذلك، $4^n - 1$ قابلة للقسمة على 3 بالنسبة لجميع الأعداد الطبيعية n.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:23 PM 36%
elib.moe.gov.ae

8. الخطوة 1: إذا كان $n = 1$، فإن الطرف الأيسر من المعادلة المعطاة يساوي $\frac{1}{2}$. ويساوي الطرف الأيمن $1 - \frac{1}{2}$ أو $\frac{1}{2}$. إذًا المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$ بالنسبة لبعض الأعداد الطبيعية k.

الخطوة 3:
$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} &= 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= 1 - \frac{2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{k+1}}\end{aligned}$$

التعبير الأخير هو الطرف الأيمن من المعادلة التي يجب إثباتها، حيث $n = k + 1$. وبالتالي، المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$. إذًا، $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ لجميع الأعداد الطبيعية n.

9. الخطوة 1: إذا كان $n = 1$، فإن الطرف الأيسر من المعادلة المعطاة يساوي 2. ويساوي الطرف الأيمن من المعادلة $\frac{1[3(1)+1]}{2}$ أو 2. إذًا المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $2 + 5 + 8 + \ldots + (3k - 1) = \frac{k(3k+1)}{2}$ بالنسبة لبعض الأعداد الطبيعية k.

الخطوة 3:
$$\begin{aligned}2 + 5 + 8 + \ldots + (3k - 1) + [3(k + 1) - 1] &= \frac{k(3k+1)}{2} + [3(k + 1) - 1] \\ &= \frac{k(3k + 1) + 2[3(k + 1) - 1]}{2} \\ &= \frac{3k^2 + k + 6k + 6 - 2}{2} \\ &= \frac{3k^2 + 7k + 4}{2} \\ &= \frac{(k + 1)(3k + 4)}{2} \\ &= \frac{(k + 1)[3(k + 1) + 1]}{2}\end{aligned}$$

التعبير الأخير هو الطرف الأيمن من المعادلة التي يجب إثباتها، حيث $n = k + 1$. وبالتالي، المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$. إذًا، $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n - 1) = \frac{n(3n+1)}{2}$ بالنسبة لجميع الأعداد الطبيعية n.

10. الخطوة 1: إذا كان $n = 1$، فإن الطرف الأيسر من المعادلة المعطاة يساوي 1. والطرف الأيمن يساوي $2^1 - 1$ أو 1. إذًا المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1$ بالنسبة لبعض الأعداد الطبيعية k.

الخطوة 3:
$$\begin{aligned}1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{k-1} + 2^{k-1+1} &= 2^k - 1 + 2^{k-1+1} \\ &= 2^k + 2^k - 1 \\ &= 2(2^k) - 1 \\ &= 2^{k+1} - 1\end{aligned}$$

التعبير الأخير هو الطرف الأيمن من المعادلة التي يجب إثباتها، حيث $n = k + 1$. وبالتالي، المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$. إذًا، $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ لجميع الأعداد الطبيعية n.

11. الخطوة 1: إذا كان $n = 1$، فإن الطرف الأيسر من المعادلة المعطاة يساوي 1. والطرف الأيمن يساوي $1[2(1) - 1]$ أو 1. إذًا المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $1 + 5 + 9 + \ldots + (4k - 3) = k(2k - 1)$ لبعض الأعداد الطبيعية k.

الخطوة 3:
$$\begin{aligned}1 + 5 + 9 + \ldots + (4k - 3) + [4(k + 1) - 3] &= k(2k - 1) + [4(k + 1) - 3] \\ &= 2k^2 - k + 4k + 4 - 3 \\ &= 2k^2 + 3k + 1 \\ &= (k + 1)(2k + 1) \\ &= (k + 1)[2(k + 1) - 1]\end{aligned}$$

التعبير الأخير هو الطرف الأيمن من المعادلة التي يجب إثباتها، حيث $n = k + 1$. وبالتالي، المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$. إذًا، $1 + 5 + 9 + \ldots + (4n - 3) = n(2n - 1)$ لجميع الأعداد الطبيعية n.

12. الخطوة 1: إذا كان $n = 1$، فإن الطرف الأيسر من المعادلة المعطاة يساوي 1. ويساوي الطرف الأيمن من المعادلة $\frac{1[3(1)-1]}{2}$ أو 1. إذًا المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $1 + 4 + 7 + \ldots + (3k - 2) = \frac{k(3k-1)}{2}$ بالنسبة لبعض الأعداد الطبيعية k.

الخطوة 3:
$$\begin{aligned}1 + 4 + 7 + \ldots + (3k - 2) + [3(k + 1) - 2] &= \frac{k(3k-1)}{2} + [3(k + 1) - 2] \\ &= \frac{k(3k-1)}{2} + 3k + 1 \\ &= \frac{k(3k-1)}{2} + \frac{6k + 2}{2} \\ &= \frac{3k^2 - 5k - 2}{2} \\ &= \frac{(k + 1)(3k - 2)}{2} \\ &= \frac{(k + 1)[3(k + 1) + 1] - 1}{2}\end{aligned}$$

التعبير الأخير هو الطرف الأيمن من المعادلة التي يجب إثباتها. حيث $n = k + 1$. وبالتالي، المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$. إذًا، $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$ لجميع الأعداد الطبيعية n.

13. الخطوة 1: إذا كان $n = 1$، فإن الطرف الأيسر من المعادلة المعطاة يساوي $2(1)^2 - 1$ أو 3. ويساوي الطرف الأيمن من المعادلة $1 + 2$ أو 3. إذًا المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $3 + 7 + 11 + \ldots + (4k - 1) = 2k^2 + k$ بالنسبة لبعض الأعداد الطبيعية k.

الخطوة 3:
$$\begin{aligned}3 + 7 + 11 + \ldots + (4k - 1) + [4(k + 1) - 1] &= 2k^2 + k + [4(k + 1) - 1] \\ &= 2k^2 + k + 4k + 3 \\ &= 2k^2 + 5k + 3 \\ &= 2k^2 + 4k + 2 + k + 1 \\ &= [2(k + 1)^2] + (k + 1)\end{aligned}$$

التعبير الأخير هو الطرف الأيمن من المعادلة التي يجب إثباتها. حيث $n = k + 1$. وبالتالي، المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$. إذًا، $3 + 7 + 11 + \ldots + (4n - 1) = 2n^2 + n$ لجميع الأعداد الطبيعية n.

14. الخطوة 1: إذا كان $n = 1$، فإن الطرف الأيسر للمعادلة المعطاة يساوي $\frac{1}{1(1+1)}$ أو $\frac{1}{2}$. والطرف الأيمن يساوي $\frac{1}{1+1}$ أو $\frac{1}{2}$. إذًا، المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$ لبعض الأعداد الطبيعية k.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:23 PM 36%
elib.moe.gov.ae

الخطوة 3: $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+1+1)}$

$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+1+1)}$

$=\frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{(k+1)(k+1)}{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{k+1}{(k+1)+1}$

التعبير الأخير هو الطرف الأيمن من المعادلة التي يجب إثباتها. حيث $n=k+1$. وبالتالي، تكون المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n=k+1$. إذًا، $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ بالنسبة لجميع الأعداد الطبيعية n.

15. الخطوة 1، إذا كان $n=1$، فإن الطرف الأيسر للمعادلة المعطاة يساوي 1^2 أو 1. والطرف الأيمن يساوي $\frac{1[2(1)-1][2(1)+1]}{3}$ أو 1. إذًا، المعادلة الصحيحة بالنسبة إلى $n=1$.

الخطوة 2، افترض أن $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2k-1)^2=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$ بالنسبة لبعض الأعداد الطبيعية k.

الخطوة 3: $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2k-1)^2+[2(k+1)-1]^2$

$=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}+[2(k+1)-1]^2$

$=\frac{k(2k-1)(2k-1)+3(2k+1)^2}{3}$

$=\frac{(2k+1)[k(2k-1)+3(2k+1)]}{3}$

$=\frac{(2k+1)(2k^2-k+6k+3)}{3}$

$=\frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3}$

$=\frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3}$

$=\frac{(k+1)[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}{3}$

التعبير الأخير هو الطرف الأيمن من المعادلة التي يجب إثباتها. حيث $n=k+1$. إذًا، المعادلة الصحيحة بالنسبة إلى $n=k+1$. ومن ثم، $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ بالنسبة لجميع الأعداد الطبيعية n.

16. الخطوة 1، إذا كان $n=3$، $180(3-2)=180$. وعندما يكون للمضلع 3 جوانب أو 3 رؤوس، فمجموع زواياه يساوي 180 درجة. وتكون العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n=3$.

الخطوة 2، افترض أن العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n\geq 3$.

الخطوة 3، تأمل مضلعًا محدبًا رؤوسه هي $n+1$. وبما أن $n+1\geq 4$. فإذا أخذنا أحد الرؤوس x يكون هناك رأس آخر y حيث يوجد رأس واحد بين x و y في أحد الاتجاهات، و $n-2$ في الاتجاه الآخر. صل x و y بحافة جديدة، لتقسم المضلع الأصلي إلى مضلعين. تشكل الزوايا الداخلية للمضلعين الجديدين معًا مجموع الزوايا الداخلية للمضلع الأصلي. أحد المضلعات عبارة عن مثلث والآخر عبارة عن مضلع رؤوسه n (الكل باستثناء الرأس المعزول بين x و y). مجموع زوايا المثلث الداخلية $180°$. وباستخدام فرضية الاستقراء يكون مجموع الزوايا الداخلية للمضلع الآخر $180°\cdot(n-2)$ درجة. بجمع كل ذلك، نحصل على $180°\cdot(n+1-2)$، وهكذا تم إثبات النظرية.

17. الخطوة 1، $5^1+3=8$. القابلة للقسمة على 4. العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n=1$.

الخطوة 2، افترض أن 5^k+3 قابلة للقسمة على 4 لبعض الأعداد الطبيعية k. وهذا يعني أن $5^k+3=4r$ لبعض الأعداد الطبيعية r.

الخطوة 3:

$5^k+3=4r$

$5^k=4r-3$

$5^{k+1}=20r-15$

$5^{k+1}+3=20r-12$

$5^{k+1}+3=4(5r-3)$

بما أن r عدد طبيعي، فإن $5r-3$ عدد طبيعي. إذًا، $5^{k+1}+3$ قابلة للقسمة على 4. وبالتالي العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n=k+1$. ولذلك، 5^n+3 قابلة للقسمة على 4 لجميع الأعداد الطبيعية n.

18. الخطوة 1، $9^1-1=8$. القابلة للقسمة على 8. تكون العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n=1$.

الخطوة 2، افترض أن 9^k-1 قابلة للقسمة على 8 بالنسبة لبعض الأعداد الطبيعية k. هذا يعني أن $9^k-1=8r$ لبعض الأعداد الكلية r.

الخطوة 3:

$9^k-1=8r$

$9^k=8r+1$

$9^{k+1}=72r+9$

$9^{k+1}-1=72r+8$

$9^{k+1}-1=8(9r+1)$

بما أن r عدد كلي، فإن $9r+1$ عدد كلي. إذًا، $9^{k+1}-1$ قابلة للقسمة على 8. وبالتالي العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n=k+1$. ولذلك، 9^n-1 قابلة للقسمة على 8 لجميع الأعداد الطبيعية n.

19. الخطوة 1، $12^1+10=22$. القابلة للقسمة على 11. والعبارة صحيحة بالنسبة إلى $n=1$.

الخطوة 2، افترض أن 12^k+10 قابلة للقسمة على 11 لبعض الأعداد الطبيعية k. وهذا يعني أن $12^k+10=11r$ لبعض الأعداد الطبيعية r.

الخطوة 3:

$12^k+10=11r$

$12^k=11r-10$

$12^{k+1}=132r-120$

$12^{k+1}+10=132r-110$

$12^{k+1}+10=11(12r-10)$

بما أن r عدد طبيعي، فإن $12r-10$ عدد طبيعي. وبالتالي، $12^{k+1}+10$ قابلة للقسمة على 11. إذًا، العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n=k+1$. وبذلك، 12^n+10 قابلة للقسمة على 11 بالنسبة لكل الأعداد الطبيعية n.

20. الخطوة 1، $13^1+11=24$. القابلة للقسمة على 12. والعبارة صحيحة بالنسبة إلى $n=1$.

الخطوة 2، افترض أن 13^k+11 قابلة للقسمة على 12 لبعض الأعداد الطبيعية k. وهذا يعني أن $13^k+11=12r$ لبعض الأعداد الطبيعية r.

الخطوة 3، $13^k+11=12r$

$13^k=12r-11$

$13^{k+1}=156r-143$

$13^{k+1}+11=156r-132$

$13^{k+1}+11=12(13r-11)$

بما أن r عددًا طبيعيًا، فإن $13r-11$ عدد طبيعي. وبالتالي، $13^{k+1}+11$ قابلة للقسمة على 12. إذًا العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n=k+1$. وبذلك، 13^n+11 قابلة للقسمة على 12 بالنسبة لكل الأعداد الطبيعية n.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:23 PM 36%
elib.moe.gov.ae

26. الخطوة 1: $7^1 + 5 = 12$. القابلة للقسمة على 6. العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.
الخطوة 2: افترض أن $7^k + 5$ قابلة للقسمة على 6 لبعض الأعداد الطبيعية k. وهذا يعني أن $7^k + 5 = 6r$ لبعض الأعداد الكلية r.
الخطوة 3:

$$7^k + 5 = 6r$$
$$7^k = 6r - 5$$
$$7^{k+1} = 7(6r - 5)$$
$$7^{k+1} = 42r - 35$$
$$7^{k+1} + 5 = 42r - 30$$
$$7^{k+1} + 5 = 6(7r - 5)$$

بما أن r عدد طبيعي، فإن $7r - 5$ عدد طبيعي. إذًا، $7^{k+1} + 5$ قابلة للقسمة على 6. وبالتالي العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$. وبذلك، $7^n + 5$ قابلة للقسمة على 6 لكل الأعداد الطبيعية n.

27. الخطوة 1: $18^1 - 1 = 17$. القابلة للقسمة على 17. والعبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.
الخطوة 2: افترض أن $18^k - 1$ قابلة للقسمة على 17 بالنسبة لبعض الأعداد الطبيعية k. وهذا يعني أن $18^k - 1 = 17r$ بالنسبة لبعض الأعداد الطبيعية r.
الخطوة 3: $18^k - 1 = 17r$

$$18^k = 17r + 1$$
$$18^{k+1} = 18(17r + 1)$$
$$18^{k+1} = 306r + 18$$
$$18^{k+1} - 1 = 306r + 17$$
$$18^{k+1} - 1 = 17(18r + 1)$$

بما أن r عدد طبيعي، فإن $18r + 1$ عدد طبيعي. إذًا، $18^{k+1} - 1$ قابلة للقسمة على 17. وبالتالي العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$. وبذلك، $18^n - 1$ قابلة للقسمة على 17 لكل الأعداد الطبيعية n.

30. الخطوة 1: إذا كان $n = 1$. فإن الطرف الأيسر من المعادلة المعطاة يساوي $4 \cdot 5^{4-1}$ أو 500. والطرف الأيمن يساوي $625\left(1 - \frac{1}{5^1}\right)$ أو 500. إذًا المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.
الخطوة 2: افترض أن $500 + 100 + 20 + \ldots + 4 \cdot 5^{4-k} = 625\left(1 - \frac{1}{5^k}\right)$ بالنسبة لبعض الأعداد الطبيعية k.
الخطوة 3: $500 + 100 + 20 + \ldots + 4 \cdot 5^{4-k} + 4 \cdot 5^{4-(k+1)}$

$$= 625\left(1 - \frac{1}{5^k}\right) + 4 \cdot 5^{4-(k+1)}$$
$$= 625\left(\frac{5^k - 1}{5^k}\right) + 4 \cdot 5^{3-k}$$
$$= 625\left(\frac{5^{k+1} - 5}{5^{k+1}}\right) + \frac{4 \cdot 5^4}{5^{k+1}}$$
$$= \frac{5^4(5^{k+1} - 5) + 4 \cdot 5^4}{5^{k+1}}$$
$$= \frac{5^4(5^{k+1} - 5 + 4)}{5^{k+1}}$$
$$= 625\left(\frac{5^{k+1} - 1}{5^{k+1}}\right)$$
$$= 625\left(1 - \frac{1}{5^{k+1}}\right)$$

التعبير الأخير هو الطرف الأيمن من المعادلة التي يجب إثباتها. حيث $n = k + 1$. وبالتالي، تكون المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$. إذًا، $500 + 100 + 20 + \ldots + 4 \cdot 5^{4-n} = 625\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$ بالنسبة لكل الأعداد الطبيعية n.

31. الخطوة 1: إذا كان $n = 1$. فإن الطرف الأيسر من المعادلة المعطاة يساوي $\frac{1}{1(1+1)(1+2)}$ أو $\frac{1}{6}$. والطرف الأيمن يساوي $\frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)}$ أو $\frac{1}{6}$. إذًا المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.
الخطوة 2: افترض أن $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}$ بالنسبة لبعض الأعداد الطبيعية k.
الخطوة 3:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)(k-2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$= \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k-1)(k+2)(k+3)}$$
$$= \frac{k(k+3)(k+3)}{4(k+1)(k+2)(k+3)} + \frac{4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$= \frac{k^3 + 6k^2 + 9k + 4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$= \frac{(k+1)(k^2 + 5k + 4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$= \frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}$$
$$= \frac{(k+1)[(k+1)+3]}{4[(k+1)+1][(k+1)+2]}$$

التعبير الأخير هو الطرف الأيمن من المعادلة التي يجب إثباتها. حيث $n = k + 1$. وبالتالي، تكون المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$. إذًا، $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ بالنسبة لكل الأعداد الطبيعية n.

33. $n(n+1)$
الخطوة 1: إذا كان $n = 1$. فإن الطرف الأيسر من المعادلة المعطاة يساوي $1(2)$ أو 2. والطرف الأيمن من المعادلة يساوي $1(1+1)$ أو 2. إذًا المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.
الخطوة 2: افترض أن $2 + 4 + 6 + \ldots + 2k = k(k+1)$ بالنسبة لبعض الأعداد الطبيعية k.
الخطوة 3:

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2k + 2(k+1)$$
$$= k(k+1) + 2(k+1)$$
$$= (k+1)(k+2)$$
$$= (k+1)[(k+1)+1]$$

التعبير الأخير هو الطرف الأيمن من المعادلة التي يجب إثباتها. حيث $n = k + 1$. وبالتالي، تكون المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$. إذًا، $2 + 4 + 6 + \ldots + n^2 = n(n+1)$ لكل الأعداد الطبيعية n.

36. الخطوة 1: إذا كان $n = 1$. فإن الطرف الأيسر من المعادلة المعطاة يساوي 1^3 أو 1. والطرف الأيمن يساوي $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$ أو 1. إذًا المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.
الخطوة 2: افترض أن $1 + 8 + 27 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$ بالنسبة لبعض الأعداد الطبيعية k.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة
472 / 105
Scanned by CamScanner

●●●○○ etisalat 4G 5:24 PM 36%
elib.moe.gov.ae

الخطوة 3:
$$1 + 8 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3$$
$$= \frac{k^2(k-1)^2}{4} + (k+1)^3$$
$$= \frac{k^2(k-1)^2}{4} + \frac{4(k-1)^3}{4}$$
$$= \frac{(k+1)^2[k^2+4(k+1)]}{4}$$
$$= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$$
$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{2^2}$$
$$= \left(\frac{(k+1)[(k-1)+1]}{2}\right)^2$$

التعبير الأخير هو الطرف الأيمن من المعادلة التي يجب إثباتها. حيث $n = k + 1$. وبالتالي، تكون المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$. إذًا، $1 + 8 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ بالنسبة لجميع الأعداد الطبيعية n.

38. الإجابة النموذجية: $6 + 10 + 14 + \ldots$. تنتج المتتالية عن $a_n = 4n + 2$. ومجموع المتتالية متمثل في $n(n+2)$.

الخطوة 1: إذا كان $n = 1$. فإن الطرف الأيسر من المعادلة المعطاة يساوي $4(1) + 2$ أو 6. والطرف الأيمن يساوي $2(1)(1+2)$ أو 6. إذًا المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $6 + 10 + 14 + \ldots 4k + 2 = 2k(k+2)$ بالنسبة لبعض الأعداد الطبيعية k.

الخطوة 3:
$$6 + 10 + 14 + \ldots 4k + 2 + 4(k+1) + 2$$
$$= 2k(k+2) + 4(k+1) + 2$$
$$= 2k^2 + 4k + 4k + 4 + 2$$
$$= 2k^2 + 8k + 6$$
$$= 2(k+1)(k+3)$$
$$= 2(k+1)[(k+1)+2]$$

التعبير الأخير هو الطرف الأيمن من المعادلة التي يجب إثباتها. حيث $n = k + 1$. وبالتالي، تكون المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$. إذًا، $6 + 10 + 14 + \ldots (4n+2) = 2n(n+2)$ بالنسبة لكل الأعداد الطبيعية n.

44. $n(n-1) = n^2 - n$: السطر 1، $1(1-1) = 1(0)$ أو 0 و $1 - 1 = 0$: السطر 2، $2(1) = 2(1-1)$ أو 2 و 2 و $4 - 2 = 2$، السطر 3، $3(2) = 3(3-1)$ أو 6 و $9 - 3 = 6$، السطر 4، $4(3) = 4(4-1)$ أو 12 و $16 - 4 = 12$: السطر 5، $5(4) = 5(5-1)$ أو 20 و $25 - 5 = 20$

دليل الدراسة والمراجعة

64. الخطوة 1: إذا كان $n = 1$. فإن $7^1 - 1 = 7 - 1 = 6$ أو 6. بما أن ناتج قسمة 6 على 6 يساوي 1. فإن العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $7^k - 1$ قابلة للقسمة على 6 لبعض الأعداد الصحيحة الموجبة k. وهذا يعني أن $7^k - 1 = 6r$ لبعض الأعداد الكلية r.

الخطوة 3:
$$7^k - 1 = 6r$$
$$7^k = 6r + 1$$
$$7^{k+1} = 42r + 7$$
$$7^{k+1} - 1 = 42r + 7 - 1$$
$$7^{k+1} - 1 = 42r + 6$$
$$7^{k+1} - 1 = 6(7r + 1)$$

بما أن r عدد كلي. فإن $7r + 1$ عدد كلي. إذًا، $7^{k+1} - 1$ قابلة للقسمة على 6. وبالتالي العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$. ولذلك، $7^n - 1$ قابلة للقسمة على 6 لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

65. الخطوة 1: إذا كان $n = 1$. فإن $5^1 - 1 = 5 - 1 = 4$ أو 4. بما أن ناتج قسمة 4 على 4 يساوي 1. فإن العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $5^k - 1$ قابلة للقسمة على 4 بالنسبة لبعض الأعداد الصحيحة الموجبة k. وهذا يعني أن $5^k - 1 = 4r$ بالنسبة لبعض الأعداد الكلية r.

الخطوة 3:
$$5^k - 1 = 4r$$
$$5^k = 4r + 1$$
$$5^{k+1} = 20r + 5$$
$$5^{k+1} - 1 = 20r + 5 - 1$$
$$5^{k+1} - 1 = 20r + 4$$
$$5^{k+1} - 1 = 4(5r + 1)$$

بما أن r عدد كلي. فإن $5r + 1$ عدد كلي. وبالتالي، $5^{k+1} - 1$ قابلة للقسمة على 4. إذًا العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$. وبذلك، $5^n - 1$ قابلة للقسمة على 4 لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

تمرين على الاختبار

20. الخطوة 1: إذا كان $n = 1$. فإن الطرف الأيسر من المعادلة المعطاة يساوي 1. ويساوي الطرف الأيمن 1 أيضًا. إذًا المعادلة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $1 + 6 + 36 + \ldots + 6^{k-1} = \frac{1}{5}(6^k - 1)$ بالنسبة لبعض الأعداد الصحيحة الموجبة k.

الخطوة 3: وضّح أن المعادلة المعطاة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$.
$$1 + 6 + 36 + \ldots + 6^{k-1} + 6^{k+1-1} = \frac{1}{5}(6^k - 1) + 6^{k+1-1}$$
$$= \frac{1}{5}(6^k - 1) + 6^k$$
$$= \frac{1}{5} \cdot 6^k - \frac{1}{5} + 6^k$$
$$= \frac{6}{5} \cdot 6^k - \frac{1}{5}$$
$$= \frac{1}{5} \cdot 6^{k+1} - \frac{1}{5}$$
$$= \frac{1}{5} \cdot (6^{k+1} - 1)$$

التعبير الأخير هو الطرف الأيمن من المعادلة التي يجب إثباتها. حيث $n = k + 1$. إذًا، $1 + 6 + 36 + \ldots + 6^{n-1} = \frac{1}{5}(6^n - 1)$ بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

21. الخطوة 1: $11^1 - 1 = 10$. القابلة للقسمة على 10. والعبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $11^k - 1$ قابلة للقسمة على 10 بالنسبة لبعض الأعداد الصحيحة الموجبة k. وهذا يعني أن $11^k - 1 = 10r$ بالنسبة لبعض الأعداد الكلية r.

الخطوة 3: $11^k - 1 = 10r$
$$11^k = 10r + 1$$
$$11(11^k) = (10r + 1)\,11$$
$$11^{k+1} = 110r + 11$$
$$11^{k+1} - 1 = 110r + 11 - 1$$
$$11^{k+1} - 1 = 110r + 10$$
$$11^{k+1} - 1 = 10(11r + 1)$$

بما أن r عدد كلي. فإن $11r + 1$ عدد كلي. وبالتالي، $11^{k+1} - 1$ قابلة للقسمة على 10. إذًا العبارة صحيحة بالنسبة إلى $n = k + 1$. وبذلك، $11^n - 1$ قابلة للقسمة على 10 بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة ... حقوق الطبع والتأليف ©

Scanned by CamScanner